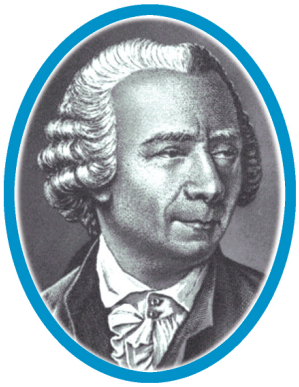
ਅਧਿਆਇ 12

ਤ੍ਰੈ-ਵਿਮਾਈ ਜਿਆਮਿਤੀ ਦਾ ਅਸਥਾਪਨ

(Introduction to three Dimensional Geometry)

❖*Mathematics is both the queen and the hand-maiden of all sciences – E.T. BELL*❖

12.1 ਭੂਮਿਕਾ



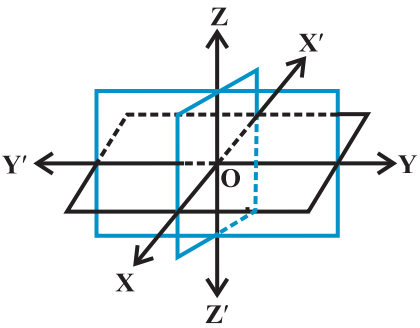
Leonhard Euler (1707-1783)

ਅਸੀ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਤਲ ਤੇ ਸਥਿਤ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਨਿਰਧਾਰਣ ਦੇ ਲਈ ਉਸ ਤਲ ਵਿੱਚ ਦੋ ਪਰਸਪਰ ਲੰਬ ਅਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਤੋਂ ਲੰਬਿਕ ਦੂਰੀਆਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨੂੰ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੋਵੇ ਲੰਬਿਕ ਦੂਰੀਆਂ ਨੂੰ ਧੁਰਾਂ ਦੇ ਬਾਬਤ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਵਾਸਤਵਿਕ ਜੀਵਨ ਵਿਚ ਸਾਡਾ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਤਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਹੀ ਸੰਬੰਧ ਨਹੀਂ ਰਹਿ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਅਕਾਸ਼ ਵਿੱਚ ਸੁੱਟੀ ਗਈ ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਦੀ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਸਮਾਂ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤੀ ਜਾਂ ਇੱਕ ਸਥਾਨ ਤੋਂ ਦੂਜੇ ਸਥਾਨ ਤੱਕ ਜਾਣ ਦੇ ਦੌਰਾਨ ਵਿਮਾਨ ਦੀ ਇੱਕ ਖਾਸ ਸਮੇਂ ਤੇ ਸਥਿਤੀ ਆਦਿ ਨੂੰ ਵੀ ਜਾਨਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ।

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇੱਕ ਕਮਰੇ ਦੀ ਛੱਤ ਤੋਂ ਲਟਕਦੇ ਹੋਏ ਇੱਕ ਬਿਜਲੀ ਦੇ ਬਲਬ ਦੀ ਹੇਠਲੀ ਨੋਕ ਜਾਂ ਛੱਤ ਦੇ ਪੱਖੇ ਦੀ ਨੋਕ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਦਾ ਨਿਰਧਾਰਣ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀ ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਦੋ ਪਰਸਪਰ ਲੰਬ ਦੀਵਾਰਾਂ ਤੋਂ ਲੰਬ ਦੂਰੀਆਂ ਮਾਤਰ ਹੀ ਕਾਫ਼ੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਬਲਕਿ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦੀ, ਕਮਰੇ ਦੇ ਫ਼ਰਸ਼ ਤੋਂ ਉੱਚਾਈ ਦੀ ਵੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਪੈਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕੇਵਲ ਦੋ ਨਹੀਂ ਬਲਕਿ ਤਿੰਨ ਪਰਸਪਰ ਲੰਬਿਕ ਤਲਾਂ ਤੋਂ ਲੰਬਿਕ ਦੂਰੀਆਂ ਨੂੰ ਵਿਖਾਉਣ ਲਈ ਤਿੰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਲੋੜ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਿਹੜਾ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਦੋ ਪਰਸਪਰ ਲੰਬ ਦੀਵਾਰਾਂ ਤੋਂ ਦੂਰੀਆਂ ਅਤੇ ਉਸ ਕਮਰੇ ਦੇ ਫਰਸ਼ ਤੋਂ ਉੱਚਾਈ ਨੂੰ ਵਿਅਕਤ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ। ਕਮਰੇ ਦੀ ਪਰਸਪਰ ਲੰਬ ਦੀਵਾਰਾਂ ਅਤੇ ਉਸ ਦਾ ਫਰਸ਼ ਤਿੰਨ ਪਰਸਪਰ ਕਾਟ ਕਰਣ ਵਾਲੇ ਤਲ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਪਰਸਪਰ ਕਾਟ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਤਲਾਂ ਤੋਂ ਲੰਬ ਦੂਰੀਆਂ ਨੂੰ ਵਿਅਕਤ ਕਰਨ ਵਾਲੀ ਤਿੰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਤਿੰਨ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਤਲਾਂ ਦੇ ਬਾਬਤ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕਹਿਲਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਅਕਾਸ਼ (space) ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਤਿੰਨ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਤ੍ਰੈ-ਵਿਮਾਈ ਅਕਾਸ਼ ਵਿੱਚ ਜਿਮਾਇਤੀ ਦੇ ਮੂਲਭੂਤ ਸੰਕਲਪਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

12.2 ਤ੍ਰੈ-ਵਿਮਾਈ ਅਕਾਸ਼ ਵਿੱਚ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਤਲ (Coordinate Axes and Coordinate Planes in Three Dimensional Space)

ਬਿੰਦੂ O ਤੇ ਕਾਟ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਤਿੰਨ ਪਰਸਪਰ ਲੰਬ ਤਲਾਂ ਦੀ ਕਲਪਨਾ ਕਰੋ (ਚਿੱਤਰ 12.1)। ਇਹ ਤਿੰਨਾਂ ਤਲ ਰੇਖਾਵਾਂ X′OX, Y′OY ਅਤੇ Z′OZ ਤੇ ਕਾਟ ਕਰਦੇ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ x-ਧੁਰਾ, y-ਧੁਰਾ ਅਤੇ z-ਧੁਰਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ ਤਿੰਨੋਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਪਰਸਪਰ ਲੰਬ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਸਮਕੋਣੀ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। XOY, YOZ ਅਤੇ ZOX ਤਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ XY-ਤਲ, YZ-ਤਲ ਅਤੇ ZX-ਤਲ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਤਿੰਨੋਂ ਤਲ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਤਲ ਕਹਿਲਾਉਂਦੇ ਹਨ।

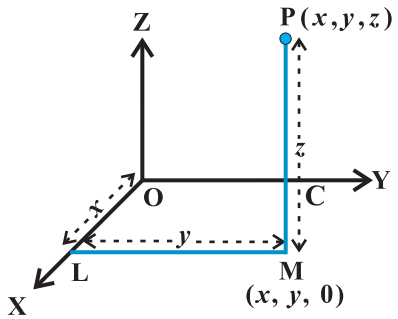


ਚਿੱਤਰ 12.1

ਅਸੀਂ ਕਾਗਜ਼ ਦੇ ਤਲ ਨੂੰ XOY ਤਲ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ Z′OZ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਤਲ XOY ਤੇ ਲੰਬ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਜੇਕਰ ਕਾਗਜ਼ ਦੇ ਤਲ ਨੂੰ ਲੇਟਵਾ ਰੱਖੀਏ ਤਾਂ Z′OZ ਰੇਖਾ ਖੜ੍ਹਵੀਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। XY-ਤਲ ਤੋਂ OZ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿਚ ਉੱਪਰ ਵੱਲ ਮਾਪੀਆਂ ਗਈਆਂ ਦੂਰੀਆਂ ਧਨਾਤਮਕ ਅਤੇ OZ′ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹੇਠਾਂ ਵੱਲ ਮਾਪੀਆਂ ਗਈਆਂ ਦੂਰੀਆਂ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਠੀਕ ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ZX-ਤਲ ਦੇ ਸੱਜੇ OY ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਮਾਪੀਆਂ ਗਈਆਂ ਦੂਰੀਆਂ ਧਨਾਤਮਕ ਅਤੇ ZX-ਤਲ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ OY′ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਮਾਪੀਆਂ ਗਈਆਂ ਦੂਰੀਆਂ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। YZ-ਤਲ ਦੇ ਅੱਗੇ OX ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਮਾਪੀਆਂ ਗਈਆਂ ਦੂਰੀਆਂ ਧਨਾਤਮਕ ਅਤੇ ਪਿੱਛੇ OX′ ਵੱਲ ਮਾਪੀਆਂ ਗਈਆਂ ਦੂਰੀਆਂ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਬਿੰਦੂ O ਨੂੰ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਤਿੰਨ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਤਲ ਅਕਾਸ਼ ਨੂੰ ਅੱਠ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦੇ ਹਨ, ਇਹਨਾਂ ਅੱਠਾਂ ਅੰਸ਼ਾਂ ਦਾ ਨਾਂ XOYZ, X′OYZ, X′OY′Z, XOY′Z, XOYZ′, X′OYZ′, X′OY′Z′ ਅਤੇ XOY′Z′ ਹਨ, ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ I, II, III, ..., VIII ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

12.3 ਅਕਾਸ਼ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (Coordinates of a Point in Space)

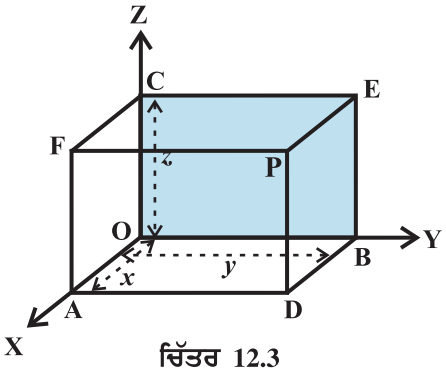
ਅਕਾਸ਼ ਵਿੱਚ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰਾਂ, ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਤਲਾਂ ਅਤੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਾਲ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰਾਂ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੇ ਚੁਨਾਵ ਦੇ ਬਾਅਦ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਤਿੰਨ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (x,y,z) ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਅਤੇ ਉਲਟ ਤੌਰ 'ਤੇ ਤਿੰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਤਿਗੜੀ (triplet) ਦਿੱਤੇ ਜਾਣ ਤੇ ਅਕਾਸ਼ ਵਿੱਚ ਲੋੜੀਂਦਾ ਬਿੰਦੂ (x,y,z) ਨੂੰ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਦੀ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਵਿਸਥਾਰ ਨਾਲ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।



ਚਿੱਤਰ 12.2

ਅਕਾਸ਼ ਵਿਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ XY-ਤਲ ਤੇ PM ਲੰਬ ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸਦਾ ਪੈਰ M ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 12.2)। ਤਦ M ਤੋਂ x-ਧੁਰੇ ਤੇ ML ਲੰਬ ਖਿੱਚੋ ਜੋ ਉਸ ਤੋਂ L ਤੇ ਮਿਲਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਓ OL = x, LM = y ਅਤੇ PM= z ਤਾਂ (x,y,z) ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕਹੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਤੋਂ (x, y, z) ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ, y ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਅਤੇ z-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਚਿੱਤਰ 12.2 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਬਿੰਦੂ P (x, y, z) ਅਠਵੇਂ ਅੰਸ਼ XOYZ ਵਿਚ ਸਥਿਤ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ x, y ਅਤੇ z ਸਾਰੇ ਧਨਾਤਮਕ ਹਨ। ਜੇਕਰ P ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਅਠਵੇਂ ਅੰਸ਼ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇ ਤਾਂ x,y ਅਤੇ z ਦੇ ਚਿੰਨ੍ਹ ਉਸੇ ਅਨੁਸਾਰ ਬਦਲ ਜਾਂਦੇ ਹਨ, ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਅਕਾਸ਼ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਵਾਸਤੇ ਇੱਕ ਅਸਲ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਕ੍ਰਮਿਕ ਤਿਗੜੀ (x, y, z) ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਉਲਟ ਤੌਰ ਤੇ ਕਿਸੀ ਤਿਗੜੀ (x, y, z) ਦੇ ਦਿੱਤੇ ਜਾਣ ਤੇ ਅਸੀ x ਦੇ ਸੰਗਤ x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਬਿੰਦੂ L ਨਿਰਧਾਰਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਦੋਬਾਰਾ XY-ਤਲ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂ M ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (x, y) ਹਨ। ਧਿਆਨ ਦੇਵੋ ਕਿ LM ਜਾਂ ਤਾਂ x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ ਜਾਂ y-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ। ਬਿੰਦੂ M ਤੇ ਪੁੱਜਣ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਅਸੀਂ XY-ਤਲ ਤੇ MP ਲੰਬ ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ, ਇਸ ਤੇ ਬਿੰਦੂ P ਨੂੰ Z ਦੇ ਬਾਬਤ ਨਿਰਧਾਰਣ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਿਰਧਾਰਤ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (x, y, z) ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਅਕਾਸ਼ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂ ਅਤੇ ਅਸਲ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਕ੍ਰਮਿਕ ਤਿਗੜੀ (x, y, z) ਵਿੱਚ ਸਦਾ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਨੁਸਰਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਫ਼ੇਰਵੇਂ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਅਕਾਸ਼ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਤਲਾਂ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਤਿੰਨ ਤਲ ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ, ਜੋ ਕਿ x-ਧੁਰਾ, y-ਧੁਰਾ ਅਤੇ z-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ A, B ਅਤੇ C ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਕੱਟਦੇ ਹਨ (ਚਿੱਤਰ 12.3)। ਜੇਕਰ OA = x, OB = y ਅਤੇ



ਚਿੱਤਰ 12.3

OC = z ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ x, y ਅਤੇ z ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ ਅਸੀਂ P (x, y, z) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। ਉਲਟ ਤੌਰ ਤੇ x,y ਅਤੇ z ਦੇ ਦਿੱਤੇ ਜਾਣ ਤੇ ਅਸੀਂ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰਾਂ ਤੇ ਬਿੰਦੂ A, B ਅਤੇ C ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਬਿੰਦੂ A, B ਅਤੇ C ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ YZ- ਤਲ, ZX-ਤਲ ਅਤੇ XY-ਤਲ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਤਿੰਨ ਤਲ ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਤਿੰਨਾਂ ਤਲਾਂ ਨੂੰ ADPF, BDPE ਅਤੇ CEPF ਦੀ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ, ਸਪੱਸ਼ਟ ਤੌਰ ਤੇ P ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਕ੍ਰਮਿਕ ਤਿਗੜੀ (x, y, z) ਦੇ ਸੰਗਤ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇਕਰ ਅਕਾਸ਼ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ P (x, y, z) ਹੈ, ਤਾਂ YZ, ZX ਅਤੇ XY ਤਲਾਂ ਤੋਂ ਲੰਬ ਦੂਰੀਆਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ x, y ਅਤੇ z ਹਨ।

ਟਿੱਪਣੀ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ O ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (0,0,0) ਹਨ। x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਸਥਿਤ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(x,0,0)$ ਅਤੇ YZ-ਤਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(0, y, z)$ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਕਥਨ : ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਚਿੰਨ੍ਹ ਉਸ ਅੱਠਵੇਂ ਅੰਸ਼ ਨੂੰ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ ਅੱਠਾਂ ਅੰਸ਼ਾਂ ਵਿੱਚ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਚਿੰਨ੍ਹ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ 12.1

ਅੱਠਵਾਂ ਹਿੱਸਾ / ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	–	–	+	+	–	–	+
y	+	+	–	–	+	+	–	–
z	+	+	+	+	–	–	–	–

ਉਦਾਹਰਣ 1: ਚਿੱਤਰ 12.3 ਵਿੱਚ P ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (2,4,5) ਹਨ ਤਾਂ F ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਬਿੰਦੂ F ਦੇ ਲਈ OY ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਮਾਪੀ ਗਈ ਦੂਰੀ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ F ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (2, 0, 5) ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 2: ਉਹ ਅੱਠਵਾਂ ਅੰਸ਼ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂ (–3, 1, 2) ਅਤੇ (–3, 1, –2) ਸਥਿਤ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਸਾਰਣੀ 12.1 ਤੋਂ, ਬਿੰਦੂ (–3, 1, 2) ਦੂਜੇ ਅੱਠਵੇਂ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ (–31 – 2) ਛੇਵੇਂ ਅੱਠਵੇਂ ਅੰਸ਼ ਵਿੱਚ ਹਨ।

ਅਭਿਆਸ 12.1

1. ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ। ਇਸਦੇ y-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਅਤੇ z-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕੀ ਹਨ ?
2. ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ XZ-ਤਲ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਇਸਦੇ y-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਦੇ ਬਾਰੇ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ ?
3. ਉਹਨਾਂ ਅੱਠਵੇਂ ਹਿੱਸਿਆਂ ਦਾ ਨਾਂ ਦੱਸੋ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਬਿੰਦੂ ਹਨ :

   (1, 2, 3), (4, –2, 3), (4, –2, –5), (4, 2, –5), (– 4, 2, –5), (– 4, 2, 5), (–3, –1, 6), (2, – 4, –7).
4. ਖ਼ਾਲੀ ਸਥਾਨ ਭਰੋ :

   (*i*) x-ਧੁਰਾ ਅਤੇ y-ਧੁਰਾ ਦੋਵੇਂ ਮਿਲ ਕੇ ਇੱਕ ਤਲ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਨ, ਉਸ ਤੱਲ ਨੂੰ _____ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

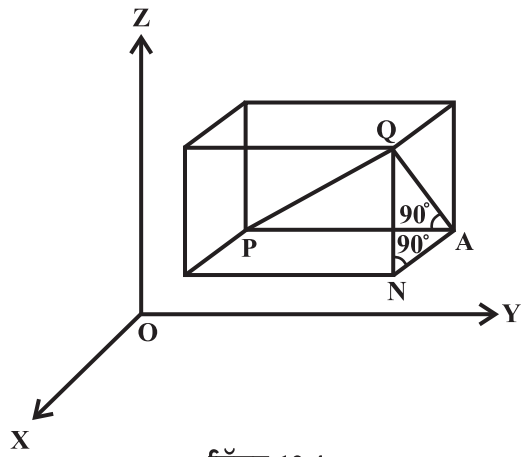
   (*ii*) XY-ਤੱਲ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ _____ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

   (*iii*) ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਤੱਲ ਅਕਾਸ਼ ਨੂੰ _____ ਅੱਠਵੇਂ ਹਿੱਸਿਆਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦੇ ਹਨ।

12.4 ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ (Distance between Two Points)

ਦੋ-ਵਿਮਾਈ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਆਪਣੇ ਅਧਿਐਨ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਤ੍ਰੈ-ਵਿਮਾਈ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੇ ਲਈ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਮੰਨ ਲਓ, ਸਮਕੋਣੀ ਧੁਰੇ OX, OY ਅਤੇ OZ ਦੀ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੇ ਬਾਬਤ ਦੋ ਬਿੰਦੂ P (x_1, y_1, z_1) ਅਤੇ Q (x_2, y_2, z_2) ਹਨ। P ਅਤੇ Q ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਤਲਾਂ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਤਲ ਖਿੱਚੋ, ਜਿਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਸਮਕੋਣੀ ਸਮਾਂਤਰ ਛੇ-ਫ਼ਲਕ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਇੱਕ ਵਿਕਰਨ PQ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 12.4)



ਚਿੱਤਰ 12.4

ਕਿਉਂਕਿ $\angle PAQ$ ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ΔPQA ਵਿੱਚ,

$$PQ^2 = PA^2 + AQ^2 \qquad \ldots (1)$$

ਦੋਬਾਰਾ, ਕਿਉਂਕਿ $\angle ANQ$ = ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ,

ਇਸ ਲਈ Δ ANQ ਵਿੱਚ

$$AQ^2 = AN^2 + NQ^2 \qquad \ldots (2)$$

ਸਮੀਕਰਣਾਂ (1) ਅਤੇ (2), ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$PQ^2 = PA^2 + AN^2 + NQ^2$$

ਹੁਣ, $PA = y_2 - y_1$, $AN = x_2 - x_1$ ਅਤੇ $NQ = z_2 - z_1$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$

ਇਸ ਲਈ $PQ = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

ਇਹ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ P (x_1, y_1, z_1) ਅਤੇ Q (x_2, y_2, z_2) ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ PQ ਦੇ ਲਈ ਸੂਤਰ ਹੈ।

ਖਾਸ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਜੇਕਰ $x_1 = y_1 = z_1 = 0$, ਭਾਵ, ਬਿੰਦੂ P, ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ O ਹੋਵੇ ਤਾਂ $OQ = \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}$

ਜਿਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਅਤੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ Q (x_2, y_2, z_2) ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 3: ਬਿੰਦੂਆਂ P(1, –3, 4) ਅਤੇ Q (– 4, 1, 2) ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : PQ ਬਿੰਦੂਆਂ P (1,–3, 4) ਅਤੇ Q (– 4, 1, 2) ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ ਹੈ :

$$PQ = \sqrt{(-4-1)^2+(1+3)^2+(2-4)^2}$$

$$= \sqrt{25+16+4} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \text{ ਇਕਾਈਆਂ}$$

ਉਦਾਹਰਣ 4: ਦਰਸਾਉ ਕਿ P (–2, 3, 5), Q (1, 2, 3) ਅਤੇ R (7, 0, –1) ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮਰੇਖੀ ਬਿੰਦੂ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਇੱਥੇ, $PQ = \sqrt{(1+2)^2+(2-3)^2+(3-5)^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$

$QR = \sqrt{(7-1)^2+(0-2)^2+(-1-3)^2} = \sqrt{36+4+16} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$

ਅਤੇ $PR = \sqrt{(7+2)^2+(0-3)^2+(-1-5)^2} = \sqrt{81+9+36} = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $PQ + QR = PR$

ਇਸ ਲਈ ਬਿੰਦੂ P, Q ਅਤੇ R ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 5: ਕੀ ਬਿੰਦੂ A (3, 6, 9), B (10, 20, 30) ਅਤੇ C (25, – 41, 5) ਇੱਕ ਸਮਕੋਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖਰ ਹਨ ?

ਹੱਲ : ਦੂਰੀ ਸੂਤਰ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$AB^2 = (10-3)^2 + (20-6)^2 + (30-9)^2$

$= 49 + 196 + 441 = 686$

$BC^2 = (25-10)^2 + (-41-20)^2 + (5-30)^2$

$= 225 + 3721 + 625 = 4571$

$CA^2 = (3-25)^2 + (6+41)^2 + (9-5)^2$

$= 484 + 2209 + 16 = 2709$

ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $CA^2 + AB^2 \neq BC^2$

ਇਸ ਲਈ ΔABC ਇੱਕ ਸਮਕੋਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 6: ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ A ਅਤੇ B ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ (3, 4, 5) ਅਤੇ (–1, 3, –7) ਹਨ। ਗਤੀਸ਼ੀਲ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਪੱਥ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਦੋਂ ਕਿ $PA^2 + PB^2 = 2k^2$

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਚਲ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (x, y, z) ਹਨ।

ਹੁਣ $PA^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2$

$PB^2 = (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+7)^2$

ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸ਼ਰਤ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ, $PA^2 + PB^2 = 2k^2$, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 + (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+7)^2 = 2k^2$$

ਜਾਂ $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x - 14y + 4z = 2k^2 - 109$

ਅਭਿਆਸ 12.2

1. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ :

   (i) (2, 3, 5) ਅਤੇ (4, 3, 1) (ii) (–3, 7, 2) ਅਤੇ (2, 4, –1)

   (iii) (–1, 3, – 4) ਅਤੇ (1, –3, 4) (iv) (2, –1, 3) ਅਤੇ (–2, 1, 3)

2. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ (–2, 3, 5), (1, 2, 3) ਅਤੇ (7, 0, –1) ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ।

3. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਲਈ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ :

   (i) (0, 7, –10), (1, 6, – 6) ਅਤੇ (4, 9, – 6) ਇੱਕ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖਰ ਹਨ।

   (ii) (0, 7, 10), (–1, 6, 6) ਅਤੇ (– 4, 9, 6) ਇੱਕ ਸਮਕੋਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖਰ ਹਨ।

   (iii) (–1, 2, 1), (1, –2, 5), (4, –7, 8) ਅਤੇ (2, –3, 4) ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖਰ ਹਨ।

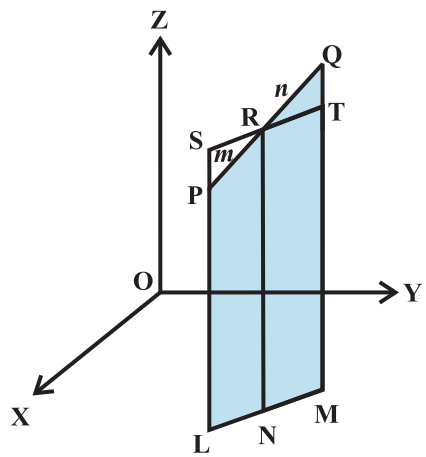
4. ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹੜੇ ਬਿੰਦੂਆਂ (1, 2, 3) ਅਤੇ (3, 2, –1) ਤੋਂ ਸਮਦੂਰੀ ਤੇ ਹਨ।

5. ਬਿੰਦੂਆਂ P ਤੋਂ ਬਣੇ ਸਮੂਹ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ A (4, 0, 0) ਅਤੇ B (– 4, 0, 0) ਤੋਂ ਦੂਰੀਆਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ 10 ਹੈ।

12.5 ਕਾਟ ਸੂਤਰ (Section Formula)

ਸਮਰਣ ਕਰੋ ਦੋ-ਵਿਮਾਈ ਜਿਮਾਇਤੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸਿੱਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਕਿਵੇਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਹੜਾ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਨੂੰ ਦਿੱਤੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਅੰਦਰੂਨੀ ਤੌਰ 'ਤੇ ਕੱਟਦਾ ਜਾਂ ਵੰਡਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀ ਇਸ ਸੰਕਲਪ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਤ੍ਰੈ-ਵਿਮਾਈ ਜਿਮਾਇਤੀ ਦੇ ਲਈ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਮੰਨ ਲਉ ਅਕਾਸ਼ ਵਿੱਚ ਦੋ ਬਿੰਦੂ $P(x_1, y_1, z_1)$ ਅਤੇ $Q(x_2, y_2, z_2)$. ਹਨ। ਮੰਨੋ $R(x, y, z)$ ਰੇਖਾ ਖੰਡ PQ ਨੂੰ $m : n$ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਅੰਦਰੂਨੀ ਤੌਰ 'ਤੇ ਵੰਡਦਾ ਹੈ। XY-ਤਲ ਤੇ PL, QM ਅਤੇ RN ਲੰਬ ਖਿੱਚੋ। ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ PL || QM ||RN ਹਨ ਅਤੇ ਤਿੰਨਾਂ ਲੰਬਾਂ ਦੇ ਪੈਰ XY-ਤਲ ਤੇ ਬਣਦੀ ਹੈ। ਬਿੰਦੂ L, M ਅਤੇ N XY-ਤੱਲ ਅਤੇ PL, RN ਅਤੇ QM ਤੋਂ ਬਣਦੇ ਤੱਲ ਦੀ ਕਾਟ ਤੇ ਬਣਨਗੇ। ਬਿੰਦੂ R ਤੋਂ ਰੇਖਾ LM ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾ ST ਖਿੱਚੋ। ST ਰੇਖਾ ਖਿਚੇ ਗਏ ਲੰਬ ਦੇ ਤਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੈ ਅਤੇ ਰੇਖਾ LP (ਬਾਹਰੋਂ) ਨੂੰ S ਅਤੇ MQ ਨੂੰ T ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ। ਜਿਵੇਂ ਚਿੱਤਰ 12.5 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 12.5

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਚਤੁਰਭੁਜ LNRS ਅਤੇ NMTR ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹਨ। ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ PSR ਅਤੇ QTR ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ ਸਮਰੂਪ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ

$$\frac{m}{n} = \frac{PR}{QR} = \frac{SP}{QT} = \frac{SL - PL}{QM - TM} = \frac{NR - PL}{QM - NR} = \frac{z - z_1}{z_2 - z}$$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $$z = \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}$$

ਠੀਕ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ XZ-ਤਲ ਅਤੇ YZ-ਤਲ ਤੇ ਲੰਬ ਖਿੱਚਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n} \text{ ਅਤੇ } x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$$

ਇਸ ਲਈ ਬਿੰਦੂ R ਜਿਹੜਾ ਬਿੰਦੂ $P(x_1, y_1, z_1)$ ਅਤੇ $Q(x_2, y_2, z_2)$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਨੂੰ $m : n$ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਅੰਦਰੂਨੀ ਤੌਰ 'ਤੇ ਵੰਡਦਾ ਹੈ, ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ :

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \frac{my_2 + ny_1}{m + n}, \frac{mz_2 + nz_1}{m + n}\right)$$

ਜੇਕਰ ਬਿੰਦੂ R, ਰੇਖਾ ਖੰਡ PQ ਨੂੰ $m : n$ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਬਾਹਰੋਂ ਵੰਡਦਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਸਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਸੂਤਰ ਵਿੱਚ n ਨੂੰ $-n$ ਤੋਂ ਬਦਲਣ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ R ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹੋਣਗੇ।

$$\left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n}, \frac{mz_2 - nz_1}{m-n}\right)$$

ਸਥਿਤੀ 1 : ਮੱਧ-ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ : ਜੇਕਰ R ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਹੋਵੇ ਤਾਂ

$m : n = 1 : 1$ ਰੱਖਣ ਤੇ $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ ਅਤੇ $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$

ਇਹ P (x_1, y_1, z_1) ਅਤੇ Q (x_2, y_2, z_2) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ।

ਸਥਿਤੀ 2 : ਰੇਖਾ ਖੰਡ PQ ਨੂੰ $k : 1$ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਅੰਦਰੂਨੀ ਤੌਰ 'ਤੇ ਵੰਡਣ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂ R ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $k = \frac{m}{n}$ ਰੱਖਣ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\left(\frac{kx_2 + x_1}{1+k}, \frac{ky_2 + y_1}{1+k}, \frac{kz_2 + z_1}{1+k}\right)$$

ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਅਕਸਰ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਤੇ ਵਿਆਪਕ ਬਿੰਦੂ ਸੰਬੰਧੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਇਸਤੇਮਾਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 7: ਬਿੰਦੂਆਂ (1, –2, 3) ਅਤੇ (3, 4, –5) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਤੋਂ ਬਣੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਨੂੰ ਅਨੁਪਾਤ 2 : 3 ਵਿੱਚ (i) ਅੰਦਰੂਨੀ ਤੌਰ 'ਤੇ (ii) ਬਾਹਰੀ ਤੌਰ 'ਤੇ ਵੰਡਣ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : (i) ਮੰਨ ਲਉ P (x, y, z), A(1, – 2, 3) ਅਤੇ B (3, 4, –5) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਨੂੰ ਅੰਦਰੂਨੀ ਤੌਰ 'ਤੇ 2 : 3 ਵੰਡਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $x = \frac{2(3) + 3(1)}{2+3} = \frac{9}{5}$, $y = \frac{2(4) + 3(-2)}{2+3} = \frac{2}{5}$, $z = \frac{2(-5) + 3(3)}{2+3} = \frac{-1}{5}$

ਇਸ ਕਰਕੇ ਲੋੜੀਂਦਾ ਬਿੰਦੂ $\left(\frac{9}{5}, \frac{2}{5}, \frac{-1}{5}\right)$ ਹੈ।

(ii) ਮੰਨ ਲਉ P (x, y, z), A (1, –2, 3) ਅਤੇ B (3, 4, –5) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਨੂੰ ਬਾਹਰੀ ਤੌਰ 'ਤੇ ਅਨੁਪਾਤ 2 : 3 ਵੰਡਦਾ ਹੈ।

$$x = \frac{2(3) + (-3)(1)}{2 + (-3)} = -3, \quad y = \frac{2(4) + (-3)(-2)}{2 + (-3)} = -14, \quad z = \frac{2(-5) + (-3)(3)}{2 + (-3)} = 19$$

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦਾ ਬਿੰਦੂ (–3, –14, 19) ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 8: ਕਾਟ ਸੂਤਰ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਤਿੰਨ ਬਿੰਦੂ (– 4, 6, 10), (2, 4, 6) ਅਤੇ (14, 0, –2) ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਿੰਦੂ A (– 4, 6, 10), B (2, 4, 6) ਅਤੇ C (14, 0, – 2) ਹਨ। ਮੰਨ ਲਉ ਬਿੰਦੂ P, AB ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਨੂੰ ਅਨੁਪਾਤ $k : 1$ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ ਤਾਂ P ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ।

$$\left(\frac{2k-4}{k+1}, \frac{4k+6}{k+1}, \frac{6k+10}{k+1}\right)$$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਪੜਤਾਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਬਿੰਦੂ P, k ਦੀ ਕਿਸੇ ਮੁੱਲ ਲਈ, C ਤੇ ਸੰਪਾਤੀ ਹੈ।

$\frac{2k-4}{k+1} = 14$, ਰੱਖਣ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ $k = -\frac{3}{2}$

ਜਦੋਂ $k = -\frac{3}{2}$, ਹੋਵੇ ਤਾਂ $\frac{4k+6}{k+1} = \frac{4(-\frac{3}{2})+6}{-\frac{3}{2}+1} = 0$

ਅਤੇ $\frac{6k+10}{k+1} = \frac{6(-\frac{3}{2})+10}{-\frac{3}{2}+1} = -2$

ਇਸ ਲਈ C (14, 0, –2) ਉਹੀ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਜਿਹੜਾ AB ਨੂੰ 3 : 2 ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਬਾਹਰੋਂ ਵੰਡਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਹੀ P ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ A, B ਅਤੇ C ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 9: ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਜਿਸਦੇ ਸਿਖਰ (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) ਅਤੇ (x_3, y_3, z_3) ਹਨ। ਇਸਦੇ ਕੇਂਦਰਕ (Centroid) ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ABC ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸਦੇ ਸਿਖਰ A, B ਅਤੇ C ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) ਅਤੇ (x_3, y_3, z_3) ਹਨ। ਮੰਨ ਲਉ BC ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ D ਹੈ। ਇਸ ਲਈ D ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ :

$$\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}, \frac{z_2+z_3}{2}\right)$$

ਮੰਨ ਲਉ G ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਕੇਂਦਰਕ ਹੈ ਤਾਂ G, AD ਨੂੰ 2 : 1 ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ।
ਇਸ ਲਈ G ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ :

$$\left(\frac{2\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)+x_1}{2+1}, \frac{2\left(\frac{y_2+y_3}{2}\right)+y_1}{2+1}, \frac{2\left(\frac{z_2+z_3}{2}\right)+z_1}{2+1}\right)$$

ਜਾਂ $$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

ਉਦਾਹਰਣ 10 : ਬਿੰਦੂਆਂ (4, 8, 10) ਅਤੇ (6, 10, – 8) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ, YZ-ਤਲ ਰਾਹੀਂ ਜਿਹੜੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡੇ ਹੋਏ ਹਨ, ਉਸਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ YZ-ਤਲ ਬਿੰਦੂ P (x, y, z) ਤੇ A (4, 8, 10) ਅਤੇ B (6, 10, – 8) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਨੂੰ k : 1 ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ :

$$\left(\frac{4+6k}{k+1}, \frac{8+10k}{k+1}, \frac{10-8k}{k+1}\right)$$

ਕਿਉਂਕੀ P, YZ-ਤਲ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਇਸਦਾ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\frac{4+6k}{k+1} = 0$

ਜਾਂ $k = -\frac{2}{3}$

ਇਸ ਲਈ, YZ-ਤਲ AB ਨੂੰ 2 : 3 ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਬਾਹਰੀ ਤੌਰ 'ਤੇ ਵੰਡਦਾ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 12.3

1. ਬਿੰਦੂਆਂ (– 2, 3, 5) ਅਤੇ (1, – 4, 6) ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਅਨੁਪਾਤ 2 : 3 ਵਿੱਚ (i) ਅੰਦਰੋਂ (ii) ਬਾਹਰੋਂ ਵੰਡ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਬਿੰਦੂ P (3, 2, – 4), Q (5, 4, – 6) ਅਤੇ R (9, 8, –10) ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ। ਉਹ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ Q, PR ਨੂੰ ਵੰਡਦਾ ਹੈ।
3. ਬਿੰਦੂਆਂ (–2, 4, 7) ਅਤੇ (3, –5, 8) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਖੰਡ YZ-ਤਲ ਰਾਹੀਂ ਜਿਸ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ, ਉਹ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।
4. ਕਾਟ ਸੂਤਰ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਕੇ ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ A (2, –3, 4), B (–1, 2, 1) ਅਤੇ $C\left(0, \frac{1}{3}, 2\right)$ ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ।
5. P (4, 2, – 6) ਅਤੇ Q (10, –16, 6) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ PQ ਨੂੰ ਸਮ –ਤ੍ਰੈ ਭਾਜੀ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 11: ਦਰਸਾਓ ਕਿ ਬਿੰਦੂ A (1, 2, 3), B (–1, –2, –1), C (2, 3, 2) ਅਤੇ D (4, 7, 6) ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖਰ ਹਨ ਪਰੰਤੂ ਇਹ ਇੱਕ ਆਇਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇਹ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਕਿ ABCD ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ, ਸਾਨੂੰ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਵਿਖਾਉਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ।

$$AB = \sqrt{(-1-1)^2+(-2-2)^2+(-1-3)^2} = \sqrt{4+16+16} = 6$$

$$BC = \sqrt{(2+1)^2+(3+2)^2+(2+1)^2} = \sqrt{9+25+9} = \sqrt{43}$$

$$CD = \sqrt{(4-2)^2+(7-3)^2+(6-2)^2} = \sqrt{4+16+16} = 6$$

$$DA = \sqrt{(1-4)^2+(2-7)^2+(3-6)^2} = \sqrt{9+25+9} = \sqrt{43}$$

ਕਿਉਂਕੀ AB = CD ਅਤੇ BC = AD ਹੈ,

ਇਸ ਲਈ ABCD ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ। ਹੁਣ, ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿ ABCD ਆਇਤ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਵਿਖਾਉਣਾ ਹੈ ਕਿ ਇਸਦੇ ਵਿਕਰਣ AC ਅਤੇ BD ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ :

$$AC = \sqrt{(2-1)^2+(3-2)^2+(2-3)^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$BD = \sqrt{(4+1)^2+(7+2)^2+(6+1)^2} = \sqrt{25+81+49} = \sqrt{155}$$

ਕਿਉਂਕੀ $AC \neq BD$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ABCD ਇੱਕ ਆਇਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ ਵਿਕਰਣ AC ਅਤੇ BD ਪਰਸਪਰ ਸਮ–ਦੋ–ਭਾਜ ਕਰਦੇ ਹਨ, ਦੇ ਗੁਣ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਵੀ ABCD ਨੂੰ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 12 : ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ ਬਣੇ ਸਮੂਹ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹੜਾ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਚਲਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉਸਦੀ ਬਿੰਦੂਆਂ A (3, 4, –5) ਅਤੇ B (– 2, 1, 4) ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਸਮਾਨ ਰਹਿੰਦੀ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ P (x, y, z) ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ ਕਿ PA = PB

ਇਸ ਲਈ $\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2+(z+5)^2} = \sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2+(z-4)^2}$

ਜਾਂ $(x-3)^2+(y-4)^2+(z+5)^2 = (x+2)^2+(y-1)^2+(z-4)^2$

ਜਾਂ $10x+6y-18z-29=0$

ਉਦਾਹਰਣ 13 : ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਕੇਂਦਰਕ (1, 1, 1) ਹੈ। ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ (3, –5, 7) ਅਤੇ (–1, 7, – 6) ਹਨ। ਬਿੰਦੂ C ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : C ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (x, y, z) ਹਨ ਅਤੇ ਕੇਂਦਰਕ G ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (1, 1, 1) ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ $\frac{x+3-1}{3}=1$, ਜਾਂ, $x = 1$; $\frac{y-5+7}{3}=1$, ਜਾਂ, $y = 1$; $\frac{z+7-6}{3}=1$, ਜਾਂ, $z = 2$

ਇਸ ਲਈ C ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (1, 1, 2) ਹਨ।

ਅਧਿਆਇ 12 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਤਿੰਨ ਸਿਖਰ A(3, – 1, 2), B (1, 2, – 4) ਅਤੇ C (– 1, 1, 2) ਹਨ। ਚੌਥੇ ਸਿਖਰ D ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੇ ਸਿਖਰਾਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ A (0, 0, 6), B (0, 4, 0) ਅਤੇ (6, 0, 0) ਹਨ। ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਮੱਧਿਕਾਵਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।
3. ਜੇਕਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ PQR ਦਾ ਕੇਂਦਰਕ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ ਸਿਖਰ P $(2a, 2, 6)$, Q $(-4, 3b, -10)$ ਅਤੇ R$(8, 14, 2c)$ ਹਨ ਤਾਂ a, b ਅਤੇ c ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।
4. y-ਧੁਰੇ ਤੇ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦਾ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੀ ਬਿੰਦੂ P (3, –2, 5) ਤੋਂ ਦੂਰੀ $5\sqrt{2}$ ਹੈ।
5. P (2, –3, 4) ਅਤੇ Q (8, 0, 10) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਤੇ ਸਥਿਤ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ R ਦਾ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ 4 ਹੈ। ਬਿੰਦੂ R ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

   [**ਸੰਕੇਤ :** ਮੰਨ ਲਉ R, PQ ਨੂੰ $k : 1$ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ। ਬਿੰਦੂ R ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $\left(\frac{8k+2}{k+1}, \frac{-3}{k+1}, \frac{10k+4}{k+1}\right)$ ਹਨ।]
6. ਜੇਕਰ ਬਿੰਦੂ A ਅਤੇ B ਕ੍ਰਮਵਾਰ (3, 4, 5) ਅਤੇ (–1, 3, –7) ਹਨ। ਚਲ ਬਿੰਦੂ P ਰਾਹੀਂ ਨਿਰਮਿਤ ਸਮੂਹ ਤੋਂ ਸੰਬੰਧਿਤ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿੱਥੇ $PA^2 + PB^2 = k^2$, ਜਿੱਥੇ k ਅਚੱਲ ਹੈ।

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

- ਤ੍ਰੈ-ਵਿਮਾਈ ਜਿਆਮਿਤੀ ਦੇ ਸਮਕੋਣੀ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਵਿੱਚ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਤਿੰਨ ਪਰਸਪਰ ਲੰਬ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।
- ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰਾ ਦੇ ਯੁਗਮ, ਤਿੰਨ ਤਲ ਨਿਰਧਾਰਤ ਕਰਦੇ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਤਲ XY-ਤਲ, YZ-ਤਲ ਅਤੇ ZX-ਤਲ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
- ਤਿੰਨ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਤਲ ਅਕਾਸ਼ ਨੂੰ ਅੱਠ ਭਾਗਾਂ ਵਿਚ ਵੰਡਦੇ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਅੱਠ ਭਾਗ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
- ਤ੍ਰੈ-ਵਿਮਾਈ ਜਿਆਮਿਤੀ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਸਦਾ ਇੱਕ ਤਿਗੜੀ (x, y, z) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ x, YZ-ਤਲ ਤੋਂ ,y, z, x ਤਲ ਤੋਂ ਅਤੇ Z, XY-ਤਲ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਹੈ।
- (i) x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(x, 0, 0)$ ਹਨ।

  (ii) y-ਧੁਰੇ ਤੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(0, y, 0)$ ਹਨ।

  (iii) z-ਧੁਰੇ ਤੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(0, 0, z)$ ਹਨ।
- ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ $P(x_1, y_1, z_1)$ ਅਤੇ $Q(x_2, y_2, z_2)$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦਾ ਦੂਰੀ ਸੂਤਰ ਹੈ।

  $$PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

- ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ P (x_1, y_1, z_1) ਅਤੇ Q (x_2, y_2, z_2) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਨੂੰ $m : n$ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਅੰਦਰੂਨੀ ਤੌਰ 'ਤੇ ਅਤੇ ਬਾਹਰੀ ਤੌਰ 'ਤੇ ਵੰਡਣ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂ R ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}, \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right) \text{ ਅਤੇ } \left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}, \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right) \text{ ਹਨ।}$$

- ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ P(x_1, y_1, z_1) ਅਤੇ Q (x_2, y_2, z_2) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ PQ ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ :

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

- ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਜਿਸਦੇ ਸਿਖਰਾਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (x_1, y_1, z_1) ਅਤੇ (x_2, y_2, z_2) ਅਤੇ (x_3, y_3, z_3), ਹਨ, ਦੇ ਕੇਂਦਰਕ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+x_3}{3}\right)$

ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਨੋਟ

1637 ਈ. ਵਿੱਚ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ੀ ਜਿਆਮਿਤੀ ਦੇ ਜਨਕ Rene Descartes (1596–1650 ਈ.) ਸਮਤਲੀ ਜਿਆਮਿਤੀ ਦੇ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਖਾਸ ਕੰਮ ਕੀਤਾ, ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਸਹਿ-ਅਸਿਕਾਰਕ Pierre Fermat (1601-1665 ਈ.) ਅਤੇ La Hire (1640-1718 ਈ.) ਨੇ ਵੀ ਇਸੇ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਕੰਮ ਕੀਤਾ। ਹਾਲਾਂਕਿ ਇਹਨਾਂ ਲੋਕਾਂ ਦੇ ਕਾਰਜ ਵਿਚ ਤ੍ਰੈ-ਵਿਮਾਈ ਜਿਆਮਿਤੀ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਸੁਝਾਵ ਹਨ, ਪਰੰਤੂ ਵਿਸ਼ਦ ਵਿਵੇਚਨਾ ਨਹੀਂ ਹਨ। Descartes ਨੂੰ ਤ੍ਰੈ-ਵਿਮਾਈ ਅਕਾਸ਼ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿਚ ਜਾਣਕਾਰੀ ਸੀਗੀ ਪਰੰਤੂ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਇਸਨੂੰ ਵਿਕਸਿਤ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ।

1715 ਈ. ਵਿੱਚ J.Bernoulli (1667-1748 ਈ.) ਨੇ Leibnitz ਨੂੰ ਲਿਖੇ ਪੱਤਰ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਤਲਾਂ ਦਾ ਪਰਿਚਯ ਦੱਸਿਆ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ ਅੱਜਕਲ੍ਹ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰ ਰਹੇ ਹਾਂ।

ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ 1700 ਈ. ਵਿੱਚ ਫ਼ਰੇਚ ਅਕਾਦਮੀ ਨੂੰ ਪ੍ਰਸਤੁਤ ਕੀਤੇ ਗਏ Antoinne Parent (1666-1716 ਈ.) ਦੇ ਲੇਖ ਵਿੱਚ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ੀ ਠੋਸ ਜਿਆਮਿਤੀ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਕਾਫ਼ੀ ਚਰਚਾ ਹੈ।

L.Euler (1707-1783 ਈ.) ਨੇ 1748 ਈ. ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਆਪਣੀ ਪੁਸਤਕ "ਜਿਆਮਿਤੀ ਦਾ ਅਸਥਾਪਨ" ਦੇ ਦੂਜੇ ਖੰਡ ਦੇ ਜ਼ਮੀਮੇ ਦੇ ਪੰਜਵੇਂ ਅਧਿਆਇ ਵਿਚ ਤ੍ਰੈ-ਵਿਮਾਈ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਜਿਆਮਿਤੀ ਦਾ ਕ੍ਰਮਬੰਧ ਵਰਣਨ ਪ੍ਰਸਤੁਤ ਕੀਤਾ।

ਉੱਨੀਵੀਂ ਸ਼ਤਾਬਦੀ ਦੇ ਮੱਧ ਦੇ ਬਾਅਦ ਹੀ ਜਿਆਮਿਤੀ ਦਾ ਤਿੰਨ ਤੋਂ ਵੱਧ ਆਯਾਮਾਂ ਵਿੱਚ ਵਿਸਤਾਰ ਕੀਤਾ ਗਿਆ, ਜਿਸਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਵਧੀਆ ਪ੍ਰਯੋਗ Einstein ਦੇ ਸਾਪੇਖਤਾ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਵਿੱਚ ਅਸਥਾਨ-ਸਮਾਂ ਅਨੁਕ੍ਰਮਣ ਵਿਚ ਦ੍ਰਸ਼ਟਵ ਹੈ।