ਅਧਿਆਇ 13

ਸੀਮਾਵਾਂ ਅਤੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ
(Limits and Derivatives)

❖ *With the Calculus as a key, Mathematics can be successfully applied to the explanation of the course of Nature – WHITEHEAD* ❖

13.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਇਹ ਅਧਿਆਇ ਕਲਨ ਦੀ ਇੱਕ ਭੂਮਿਕਾ ਹੈ। ਕਲਨ ਗਣਿਤ ਦੀ ਉਹ ਸ਼ਾਖਾ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਮੁੱਖ ਤੌਰ 'ਤੇ ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਫਲਨ (Function) ਦੇ ਮੁੱਲ ਵਿੱਚ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਬਦਲਾਵਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦਾ (ਅਸਲ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ) ਸਹਿਜ ਸਮਝਣ ਯੋਗ ਬੋਧ (intuitive idea) ਕਰਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਉਸ ਦੇ ਬਾਅਦ ਅਸੀਂ ਸੀਮਾਂ ਦੀ ਸਹਿਜ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇਵਾਂਗੇ ਅਤੇ ਸੀਮਾ ਦੇ ਬੀਜ ਗਣਿਤ ਦਾ ਕੁੱਝ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸ ਦੇ ਬਾਅਦ ਅਸੀਂ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਕਰਨ ਲਈ ਪਲਟ ਆਵਾਂਗੇ ਅਤੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੇ ਬੀਜ ਗਣਿਤ ਦਾ ਕੁੱਝ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਮੁੱਲਕ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਵੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਾਂਗੇ।

Sir Issac Newton
(1642-1727)

13.2 ਡੈਰੀਵੇਟਿਵਾਂ ਦਾ ਸਹਿਜ ਸਮਝਣ ਯੋਗ ਬੋਧ (Intuitive Idea of Derivatives)

ਭੌਤਿਕ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਨੇ ਪੁਸ਼ਟੀ ਕੀਤੀ ਹੈ ਕਿ ਪਿੰਡ ਇੱਕ ਖੜ੍ਹੀ/ਉੱਚੀ ਚਟਾਨ ਤੋਂ ਡਿੱਗ ਕੇ t ਸੈਂਕਿੰਡਾਂ ਵਿੱਚ $4.9t^2$ ਮੀਟਰ ਦੂਰੀ ਪਾਰ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਭਾਵ ਪਿੰਡ ਰਾਹੀਂ ਮੀਟਰ ਵਿੱਚ ਪਾਰ ਕੀਤੀ ਦੂਰੀ (s) ਸੈਕਿੰਡਾਂ ਵਿੱਚ ਮਾਪੇ ਗਏ ਸਮਾਂ (t) ਦੇ ਇੱਕ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $s = 4.9t^2$ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ।

ਨਾਲ ਦੀ ਸਾਰਣੀ 13.1 ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਖੜੀ/ਉੱਚੀ ਚਟਾਨ ਤੋਂ ਡਿੱਗਦੇ ਇੱਕ ਪਿੰਡ ਦੇ ਸੈਕਿੰਡਾਂ ਵਿੱਚ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਸਮਾਂ (t) 'ਤੇ ਮੀਟਰ ਵਿੱਚ ਪਾਰ ਕੀਤੀ ਦੂਰੀ (s) ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਹੈ।

ਇਹਨਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਸਮਾਂ $t = 2$ ਸੈਕਿੰਡ 'ਤੇ ਪਿੰਡ ਦਾ ਵੇਗ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੀ ਸਾਡਾ ਉਦੇਸ਼ ਹੈ। ਇਸ ਸਮੱਸਿਆ ਤੱਕ ਪੁੱਜਣ ਲਈ $t = 2$ ਸੈਕਿੰਡ ਤੇ ਸਮਾਪਤ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਅਨੇਕ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਤੇ ਮੱਧ ਵੇਗ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਇੱਕ ਢੰਗ ਹੈ ਅਤੇ ਆਸ਼ਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਸ ਤੋਂ $t = 2$ ਸੈਕਿੰਡ ਤੇ ਵੇਗ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ ਪਵੇਗਾ।

ਸਾਰਣੀ 13.1

t	s
0	0
1	4.9
1.5	11.025
1.8	15.876
1.9	17.689
1.95	18.63225
2	19.6
2.05	20.59225
2.1	21.609
2.2	23.716
2.5	30.625
3	44.1
4	78.4

$t = t_1$ ਅਤੇ $t = t_2$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਮੱਧ ਵੇਗ $t = t_1$ ਅਤੇ $t = t_2$ ਸੈਕਿੰਡਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਪਾਰ ਕੀਤੀ ਦੂਰੀ ਨੂੰ $(t_2 - t_1)$ ਤੋਂ ਭਾਗ ਦੇਣ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪਹਿਲਾਂ 2 ਸੈਕਿੰਡ ਵਿੱਚ ਮੱਧ ਵੇਗ

$$= \frac{t_1 = 0 \text{ ਤੇ } t_2 = 2 \text{ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਪਾਰ ਕੀਤੀ ਦੂਰੀ}}{\text{ਅੰਤਰਾਲ } (t_2 - t_1)}$$

$$= \frac{(19.6 - 0)\text{ਮੀ.}}{(2 - 0)\text{ਸੈ.}} = 9.8\text{ਮੀ./ਸੈ.}$$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, $t = 1$ ਅਤੇ $t = 2$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਮੱਧ ਵੇਗ

$$\frac{(19.6 - 4.9)\text{ਮੀ.}}{(2 - 1)\text{ਸੈ.}} = 14.7 \text{ ਮੀ./ਸੈ.}$$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ $t = t_1$ ਅਤੇ $t = 2$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਅਸੀਂ ਮੱਧ ਵੇਗ ਦਾ ਲੇਖਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ13.2, $t = t_1$ ਅਤੇ $t = 2$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਮੀਟਰ ਪ੍ਰਤਿ ਸੈਕਿੰਡ ਵਿੱਚ ਮੱਧ ਵੇਗ (v) ਦਿੰਦੀ ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ 13.2

t_1	0	1	1.5	1.8	1.9	1.95	1.99
v	9.8	14.7	17.15	18.62	19.11	19.355	19.551

ਇਸ ਸਾਰਣੀ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਮੱਧ ਵੇਗ ਹੌਲ਼ੀ-ਹੌਲ਼ੀ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ $t = 2$ ਤੇ ਸਮਾਪਤ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਨੂੰ ਹੋਰ ਛੋਟਾ ਕਰਦੇ ਜਾਂਦੇ ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $t = 2$ ਤੇ ਅਸੀਂ ਵੇਗ ਦਾ ਇੱਕ ਬਹੁਤ ਵਧੀਆ ਬੋਧ ਕਰ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਆਸ਼ਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ 1.99 ਸੈਕਿੰਡ ਅਤੇ 2 ਸੈਕਿੰਡ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੁਝ ਹੈਰਾਨੀਜਨਕ ਘਟਨਾ ਨਾ ਵਾਪਰੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਨਿਸ਼ਕਰਸ਼ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $t = 2$ ਸੈਕਿੰਡ ਤੇ ਮੱਧ ਵੇਗ19.55 ਮੀ./ਸੈ. ਤੋਂ ਕੁਝ ਵੱਧ ਕੇ ਹੈ।

ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਭਿਕਲਨਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਤੋਂ ਕੁਝ ਬਲ ਮਿਲਦਾ ਹੈ। $t = 2$ ਸੈਕਿੰਡ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਤੇ ਮੱਧ ਵੇਗ ਦਾ ਲੇਖਾ ਕਰੋ। ਪਹਿਲਾਂ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ $t = 2$ ਸੈਕਿੰਡ ਅਤੇ $t = t_2$ ਸੈਕਿੰਡ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਮੱਧ ਵੇਗ (v)

$$= \frac{2 \text{ ਸੈਕਿੰਡ ਅਤੇ } t_2 \text{ ਸੈਕਿੰਡ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਪਾਰ ਕੀਤੀ ਦੂਰੀ}}{t_2 - 2}$$

$$= \frac{t_2 \text{ ਸੈਕਿੰਡ ਵਿੱਚ ਪਾਰ ਕੀਤੀ ਦੂਰੀ } - 2 \text{ ਸੈਕਿੰਡ ਵਿੱਚ ਪਾਰ ਕੀਤੀ ਦੂਰੀ}}{t_2 - 2}$$

$$= \frac{t_2 \text{ ਸੈਕਿੰਡ ਵਿੱਚ ਪਾਰ ਕੀਤੀ ਦੂਰੀ } - 19.6}{t_2 - 2}$$

ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ 13.3, $t = 2$ ਸੈਕਿੰਡ ਅਤੇ t_2 ਸੈਕਿੰਡਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਮੀਟਰ ਪ੍ਰਤਿ ਸੈਕਿੰਡ ਵਿੱਚ ਮੱਧ ਵੇਗ (v) ਦਿੰਦੀ ਹੈ:

ਸਾਰਣੀ 13.3

t_2	4	3	2.5	2.2	2.1	2.05	2.01
v	29.4	24.5	22.05	20.58	20.09	19.845	19.649

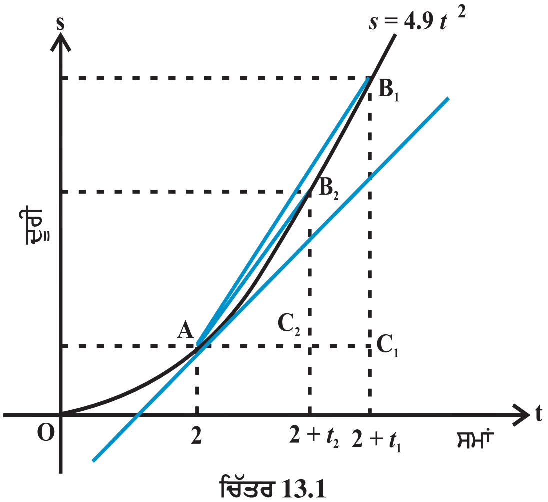
ਇੱਥੇ ਫੇਰ ਅਸੀਂ ਧਿਆਨ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ $t = 2$, ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਹੋਰ ਛੋਟੇ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਨੂੰ ਲੈਂਦੇ ਜਾਂਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ $t = 2$ ਤੇ ਵੇਗ ਦਾ ਹੋਰ ਚੰਗਾ ਬੋਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਅਭਿਕਲਨਾਂ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ $t = 2$ ਤੇ ਸਮਾਪਤ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਵੱਧਦੇ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਮੱਧ ਵੇਗ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਆਸ਼ਾ ਕੀਤੀ ਹੈ ਕਿ $t = 2$ ਤੋਂ ਕੁੱਝ ਪਹਿਲਾਂ ਕੋਈ ਹੈਰਾਨੀਜਨਕ ਘਟਨਾ ਨਾ ਵਾਪਰੇ। ਅਭਿਕਲਨਾਂ ਦੇ ਦੂਜੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ $t = 2$ ਤੇ ਅੰਤ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਘੱਟਦੇ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਮੱਧ ਵੇਗ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਹੈ ਅਤੇ ਆਸ਼ਾ ਕੀਤੀ ਹੈ ਕਿ $t = 2$ ਦੇ ਕੁੱਝ ਬਾਅਦ ਹੈਰਾਨੀਜਨਕ ਘਟਨਾ ਨਾ ਵਾਪਰੇ। ਸ਼ੁੱਧ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਭੌਤਿਕੀ ਅਧਾਰ ਤੇ ਮੱਧ ਵੇਗ ਦੇ ਇਹ ਦੋਵੇਂ ਕ੍ਰਮ ਇੱਕ ਸਮੁੱਲ ਸੀਮਾ ਤੇ ਪੁਜਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਰੂਪ ਤੋਂ ਨਤੀਜਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $t = 2$ ਤੇ ਪਿੰਡ ਦਾ ਵੇਗ 19.551ਮੀ./ਸੈਂ. ਅਤੇ 19.649 ਮੀ./ਸੈਂ. ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਹੈ। ਤਕਨੀਕੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $t = 2$ ਤੇ ਤਤਕਾਲਿਕ ਵੇਗ 19.551 ਮੀ./ਸੈ. ਅਤੇ 19.649 ਮੀ./ਸੈਂ. ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਹੈ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਵੇਗ ਦੂਰੀ ਦੇ ਬਦਲਣ ਦੀ ਦਰ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਜਿਹੜਾ ਨਤੀਜਾ ਕੱਢਿਆ ਹੈ ਉਹ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਹੈ। "ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸਕਿੰਟਾਂ ਤੇ ਦੂਰੀ ਵਿੱਚ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਦਾ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾਇਆ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੂਰੀ ਫਲਨ $s = 4.9t^2$ ਦਾ $t = 2$ ਤੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ 19.551 ਅਤੇ 19.649 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਹੈ।"

ਇਸ ਸੀਮਾ ਦੀ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਦੀ ਇੱਕ ਵਿਕਲਪ ਵਿਧੀ ਚਿੱਤਰ 13.1 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਈ ਗਈ ਹੈ। ਇਹ ਲੰਘੇ ਸਮਾਂ (t) ਅਤੇ ਚਟਾਨ ਦੇ ਸ਼ਿਖਰ ਤੋਂ ਪਿੰਡ ਦੀ ਦੂਰੀ (s) ਦਾ ਆਲੇਖ ਹੈ। ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਦੇ ਕ੍ਰਮ h_1, h_2, ..., ਦੀ ਸੀਮਾ ਸਿਫ਼ਰ ਦੇ ਵੱਲ ਵੱਧਦੀ ਹੈ ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮੱਧ ਵੇਗਾਂ ਦੇ ਵਧਣ ਦੀ ਉਹੀ ਸੀਮਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜੋ ਕਿ

$$\frac{C_1B_1}{AC_1}, \frac{C_2B_2}{AC_2}, \frac{C_3B_3}{AC_3}, \ldots$$

ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਦੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $C_1B_1 = s_1 - s_0$ ਉਹ ਦੂਰੀ ਹੈ ਜਿਹੜੀ ਪਿੰਡ ਅੰਤਰਾਲਾਂ $h_1 = AC_1$, ਵਿੱਚ ਪਾਰ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਆਦਿ। ਚਿੱਤਰ 13.1 ਤੋਂ ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਕੱਢਣਾ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਬਾਅਦ ਦੀ ਕ੍ਰਮ ਵਕਰ ਦੇ ਬਿੰਦੂ A ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਾਲ ਦੀ ਵੱਲ ਵੱਧਦੀ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, $t = 2$ ਸਮਾਂ ਤੇ ਪਿੰਡ ਦਾ ਵੇਗ ਵਕਰ $s = 4.9t^2$ ਦੇ $t = 2$ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਾਲ ਦੇ ਸਮੁੱਲ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 13.1

13.3 ਸੀਮਾਵਾਂ (Limits)

ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀ ਚਰਚਾ ਇਸ ਤੱਥ ਦੇ ਵੱਲ ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ ਬਿੰਦੂ ਰੱਖਦੀ ਹੈ ਕਿ ਸਾਨੂੰ ਸੀਮਾ ਦੀ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਨੂੰ ਹੋਰ ਸਪੱਸ਼ਟ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਮਝਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਸੀਮਾ ਦੇ ਸੰਕਲਪ ਤੋਂ ਜਾਣੂ ਹੋਣ ਲਈ ਕੁਝ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟਾਂਤਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਫਲਨ $f(x) = x^2$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਅਵਲੋਕਨ ਕਰੋ ਕਿ ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ x ਨੂੰ ਸਿਫ਼ਰ ਦੇ ਵੱਧ ਨਿਕਟ ਮੁੱਲ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ, $f(x)$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਵੀ ਸਿਫ਼ਰ ਦੇ ਵੱਲ ਵੱਧਦਾ ਹੈ। (ਵੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 2.10 ਅਧਿਆਇ 2) ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

(ਇਸਨੂੰ $f(x)$ ਦੀ ਸੀਮਾ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ, ਜਦੋਂ x ਸਿਫ਼ਰ ਦੇ ਵੱਲ ਵੱਧਦਾ ਹੈ, ਪੜ੍ਹਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।) $f(x)$ ਦੀ ਸੀਮਾ ਜਦੋਂ x ਸਿਫ਼ਰ ਦੇ ਵੱਲ ਵੱਧਦਾ ਹੈ ਨੂੰ ਇਵੇਂ ਸਮਝਿਆ ਜਾਵੇ ਜਿਵੇਂ $x = 0$ ਤੇ $f(x)$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ $x \to a, f(x) \to l$, ਤਾਂ l ਨੂੰ ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। $\lim_{x \to a} f(x) = l$

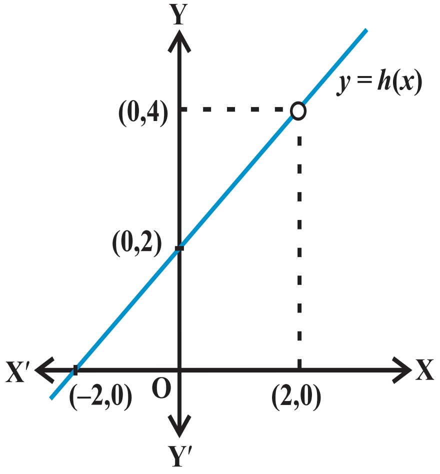
ਫਲਨ $g(x) = |x|, x \neq 0$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $g(0)$ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ। x ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ ਦੇ ਬਹੁਤ ਨਿਕਟ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ $g(x)$ ਦੇ ਮੁੱਲ ਦਾ ਪਰਿਕਲਨ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $g(x)$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਸਿਫ਼ਰ ਦੇ ਵੱਲ ਵੱਧਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\lim_{x \to 0} g(x) = 0, x \neq 0$ ਦੇ ਲਈ $y = |x|$ ਦੇ ਆਲੇਖ ਤੋਂ ਇਹ ਸਹਿਜਤਾ ਨਾਲ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। (ਵੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 2.13 ਅਧਿਆਇ 2)

ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਫਲਨ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

$$h(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}, x \neq 2$$

x ਦੇ 2 ਦੇ ਵੱਧ ਨੇੜੇ ਮੁੱਲਾਂ (ਪਰੰਤੂ 2 ਨਹੀਂ) ਦੇ ਲਈ $h(x)$ ਦੇ ਮੁੱਲ ਦਾ ਪਰਿਕਲਨ ਕਰੋ। ਆਪਣੇ ਆਪ ਨੂੰ ਮਨਾਓ ਕਿ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲ 4 ਦੇ ਨਿਕਟ ਹਨ। ਇੱਥੇ (ਚਿੱਤਰ 13.2) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨ $y = h(x)$ ਦੇ ਆਲੇਖ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਨ ਤੋਂ ਇਸਨੂੰ ਥੋੜ੍ਹਾ ਬਲ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

ਇਹਨਾਂ ਸਾਰਿਆਂ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟਾਂਤਾਂ ਤੋਂ ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਮੁੱਲ $x = a$ 'ਤੇ ਫਲਨ ਦੇ ਜਿਹੜੇ ਮੁੱਲ ਮਿਲਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ ਉਹ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਨਹੀਂ ਹਨ ਕਿ x ਕਿਵੇਂ a ਵੱਲ ਵਧਿਆ, ਸੱਜੇ ਪਾਸੋਂ ਜਾਂ ਖੱਬੇ ਪਾਸੋਂ ਭਾਵ a ਦੇ ਨਿਕਟ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲ ਜਾਂ ਤਾਂ a ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ ਜਾਂ a ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਤੋਂ ਕੁਦਰਤੀ ਤੌਰ 'ਤੇ ਦੋ ਸੀਮਾਵਾਂ-ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਪ੍ਰੇਰਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਫਲਨ f ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ $f(x)$ ਦਾ ਉਹ ਮੁੱਲ ਹੈ ਜਿਹੜਾ $f(x)$ ਦੇ ਮੁੱਲ ਤੋਂ ਅਦੇਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ x,

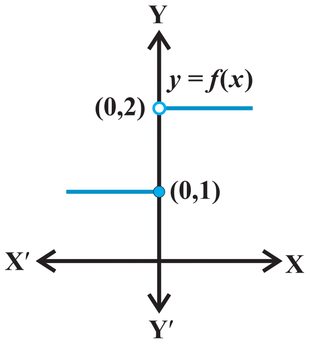


ਚਿੱਤਰ 13.2

a ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਵੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਪੱਖ ਦੀ ਸੀਮਾ ਇਸਦੇ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟਾਂਤ ਦੇ ਲਈ, ਫਲਨ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\leq 0\\ 2, & x>0\end{cases}$$

ਚਿੱਤਰ 13.3 ਵਿੱਚ ਇਸ ਫ਼ਲਨ ਦਾ ਆਲੇਖ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਸਿਫ਼ਰ ਤੇ f ਦਾ ਮੁੱਲ $x \leq 0$ ਦੇ ਲਈ $f(x)$ ਦੇ ਮੁੱਲ ’ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਕਿ 1 ਦੇ ਸਮੁੱਲ ਹੈ ਭਾਵ ਸਿਫ਼ਰ ਤੇ $f(x)$ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ $\lim_{x\to 0^-} f(x)=1$ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ 0 ਤੇ f ਦਾ ਮੁੱਲ, $x > 0$ ਦੇ ਲਈ $f(x)$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ, 2 ਹੈ ਭਾਵ 0 ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ $\lim_{x\to 0^+} f(x)=2$ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਖੱਬੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਦੋਂ ਸਿਫ਼ਰ ਦੇ ਵੱਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ $f(x)$ ਦੀ ਸੀਮਾ ਅਸਤਿਤਵ ਨਹੀਂ ਰੱਖਦੀ (ਭਾਵੇਂ 0 ਤੇ ਫਲਨ f ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ।)



ਚਿੱਤਰ 13.3

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\lim_{x\to a^-} f(x)$, $x = a$ ਤੇ $f(x)$ ਦਾ ਅਪੇਕਸ਼ਿਤ (expected) ਮੁੱਲ ਹੈ, ਜਿਸਨੇ x ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਨਿਕਟ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ $f(x)$ ਨੂੰ ਮੁੱਲ ਦਿੱਤੇ ਹਨ। ਇਸ ਮੁੱਲ ਨੂੰ a ਤੇ $f(x)$ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\lim_{x\to a^+} f(x)$, $x = a$ ਤੇ $f(x)$ ਦਾ ਅਪੇਕਸ਼ਿਤ ਮੁੱਲ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ x ਦੇ a ਦੇ ਸੱਜੇ ਵੱਲ ਦੇ ਨਿਕਟ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ $f(x)$ ਦੇ ਮੁੱਲ ਦਿੱਤੇ ਹਨ। ਇਸ ਮੁੱਲ ਨੂੰ a ਤੇ $f(x)$ ਦੀ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਜੇਕਰ ਸੱਜੇ ਅਤੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਸ ਸਾਂਝੇ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਅਸੀਂ $x = a$ ਤੇ $f(x)$ ਦੀ ਸੀਮਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ $\lim_{x\to a} f(x)$ ਤੋਂ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਦ੍ਰਿਸ਼ਟਾਂਤ 1 : ਫਲਨ $f(x) = x + 10$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਅਸੀਂ $x = 5$ ਤੇ ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹਾਂਗੇ। ਆਉ, ਅਸੀਂ 5 ਦੇ ਬਹੁਤ ਨਿਕਟ x ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ f ਦੇ ਮੁੱਲ ਦਾ ਪਰਿਕਲਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। 5 ਦੇ ਬਹੁਤ ਨਿਕਟ ਖੱਬੇ ਵੱਲ ਕੁਝ ਬਿੰਦੂ 4.9, 4.95, 4.99, 4.995. . ., ਆਦਿ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ $f(x)$ ਦੇ ਮੁੱਲ ਹੇਠਾਂ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਲਿਖੇ ਹਨ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, 5 ਦੇ ਬਹੁਤ ਨਿਕਟ ਹੋਰ ਸੱਜੇ ਵੱਲ ਅਸਲ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 5.001, 5.01, 5.1 ਵੀ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਵੀ ਫਲਨ ਦੇ ਮੁੱਲ ਸਾਰਣੀ 13.4 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹਨ।

ਸਾਰਣੀ 13.4

x	4.9	4.95	4.99	4.995	5.001	5.01	5.1
$f(x)$	14.9	14.95	14.99	14.995	15.001	15.01	15.1

ਸਾਰਣੀ 13.4 ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਨਿਗਮਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $f(x)$ ਦਾ ਮੁੱਲ 14.995 ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਅਤੇ 15.001 ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ, ਇਹ ਕਲਪਨਾ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਕਿ x = 4.995 ਅਤੇ 5.001 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਈ ਹੈਰਾਨੀਜਨਕ ਘਟਨਾ ਨਾ ਵਾਪਰੇ। ਇਹ ਕਲਪਨਾ ਕਰਨਾ ਤਰਕਸੰਗੀ ਹੈ ਕਿ 5 ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ $x = 5$ ਤੇ $f(x)$ ਦਾ ਮੁੱਲ 15 ਹੈ ਭਾਵ

$$\lim_{x\to 5^-} f(x)=15$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਜਦੋਂ x, 5 ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਵੱਧਦਾ ਹੈ, f ਦਾ ਮੁੱਲ 15 ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਭਾਵ

$$\lim_{x\to 5^+} f(x)=15$$

ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ f ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ, ਦੋਵੇਂ 15 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹਨ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5} f(x) = 15$$

ਸੀਮਾ 15 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਫਲਨ ਦੇ ਆਲੇਖ ਜਿਹੜਾ ਚਿੱਤਰ 2.9(ii) ਅਧਿਆਇ 2 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੈ, ਨੂੰ ਵੇਖ ਕੇ ਕੁਝ ਬਲ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਧਿਆਨ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ x, 5 ਦੇ ਵੱਲ ਜਾਂ ਤਾਂ ਸੱਜੇ ਪਾਸੋਂ ਜਾਂ ਖੱਬੇ ਪਾਸੋਂ ਅੱਗੇ ਵਧੇ, ਫਲਨ $f(x) = x + 10$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਬਿੰਦੂ (5, 15) ਦੇ ਵੱਲ ਵੱਧਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $x = 5$ ਤੇ ਵੀ ਫਲਨ ਦਾ ਮੁੱਲ 15 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਦ੍ਰਿਸ਼ਟਾਂਤ 2 : ਫਲਨ $f(x) = x^3$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਆਉ ਅਸੀਂ $x = 1$ ਤੇ ਇਸ ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਪਹਿਲਾਂ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੱਧਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ x ਦੇ 1 ਦੇ ਨਿਕਟਮੁੱਲਾਂ ਲਈ $f(x)$ ਦੇ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। ਇਸਨੂੰ ਸਾਰਣੀ 13.5 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ :

ਸਾਰਣੀ 13.5

x	0.9	0.99	0.999	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	0.729	0.970299	0.997002999	1.003003001	1.030301	1.331

ਇਸ ਸਾਰਣੀ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਨਿਗਮਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $x = 1$ ਤੇ f ਦਾ ਮੁੱਲ 0.997002999 ਤੋਂ ਵੱਧ ਅਤੇ 1.003003001 ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ, ਇਹ ਕਲਪਨਾ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਕਿ $x = 0.999$ ਅਤੇ 1.001 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੁਝ ਹੈਰਾਨੀਜਨਕ ਘਟਨਾ ਨਾ ਵਾਪਰੇ। ਇਹ ਮੰਨਣਾ ਤਰਕਸੰਗਤ ਹੈ ਕਿ $x = 1$ ਦਾ ਮੁੱਲ 1 ਦੇ ਖੱਬੇ ਵੱਲ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ ਭਾਵ

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਦੋਂ x, 1 ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੋਂ ਵੱਧਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ f ਦਾ ਮੁੱਲ 1 ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਭਾਵ

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$$

ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਪੱਕਾ ਹੈ ਕਿ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੋਵੇਂ 1 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = 1$$

ਸੀਮਾ 1 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਦਾ ਨਤੀਜਾ ਫਲਨ ਦੇ ਆਲੇਖ ਜਿਹੜਾ ਚਿੱਤਰ 2.11 ਅਧਿਆਇ 2 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਨੂੰ ਵੇਖ ਕੇ ਥੋੜ੍ਹਾ ਬਲ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਧਿਆਨ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ x, 1 ਦੇ ਜਾਂ ਤਾਂ ਸੱਜੇ ਪਾਸੋ ਜਾਂ ਖੱਬੇ ਪਾਸੋਂ ਵੱਧਦਾ ਹੈ, ਫਲਨ $f(x) = x^3$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਬਿੰਦੂ (1, 1) ਦੇ ਵੱਲ ਵੱਧਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਦੁਬਾਰਾ ਅਵਲੋਕਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $x = 1$ ਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮੁੱਲ ਵੀ 1 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

ਦ੍ਰਿਸ਼ਟਾਂਤ 3 : ਫਲਨ $f(x) = 3x$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਆਉ $x = 2$ ਤੇ ਇਸ ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਹੇਠ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ 13.6 ਆਪ ਹੀ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰਦੀ ਹੈ :

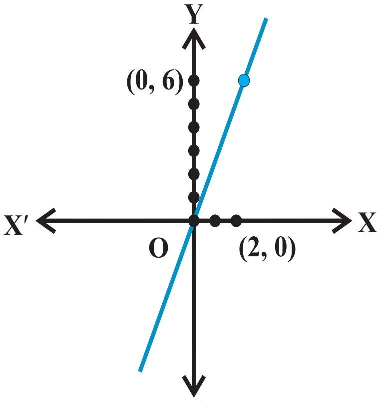
ਸਾਰਣੀ 13.6

x	1.9	1.95	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	5.7	5.85	5.97	5.997	6.003	6.03	6.3

ਪਹਿਲਾਂ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਅਵਲੋਕਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ x ਜਾਂ ਤਾਂ ਖੱਬੇ ਪਾਸੋਂ ਜਾਂ ਸੱਜੇ ਪਾਸੋਂ 2 ਦੇ ਵੱਲ ਵੱਧਦਾ ਹੈ, $f(x)$ ਦਾ ਮੁੱਲ 6 ਦੇ ਵੱਲ ਵੱਧਦਾ ਪ੍ਰਤੀਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ :

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} f(x) = 6$$

ਚਿੱਤਰ 13.4 ਵਿੱਚ ਵਿਖਾਇਆ ਇਸ ਦਾ ਆਲੇਖ ਇਸ ਤੱਥ ਨੂੰ ਬਲ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਦੁਬਾਰਾ ਅਸੀਂ ਧਿਆਨ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $x = 2$ ਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮੁੱਲ $x = 2$ ਤੇ ਸੀਮਾ ਦੇ ਸੰਪਾਤੀ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 13.4

ਦ੍ਰਿਸ਼ਟਾਂਤ 4 : ਅਚੱਲ ਫਲਨ $f(x) = 3$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਆਉ ਅਸੀਂ $x = 2$ ਤੇ ਇਸਦੀ ਸੀਮਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਫਲਨ ਅਚਲ ਫਲਨ ਹੋਣ ਕਾਰਣ ਹਰੇਕ ਜਗ੍ਹਾ ਇੱਕ ਮੁੱਲ (ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ 3) ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਭਾਵ 2 ਦੇ ਕਾਫ਼ੀ ਨਿਕਟ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਲਈ ਇਸਦਾ ਮੁੱਲ 3 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} f(x) = 3$$

$f(x) = 3$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਹਰੇਕ ਹਾਲਤ ਵਿੱਚ (0, 3) ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾ ਹੈ ਅਤੇ ਚਿੱਤਰ 2.9 ਅਧਿਆਇ 2 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਹ ਵੀ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸੀਮਾ 3 ਹੈ। ਤੱਥ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਵੀ, ਇਹ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਦਿਸਦਾ ਹੈ ਕਿ $\lim_{x\to a} f(x) = 3$ ਹੈ ਭਾਵੇਂ a ਕੋਈ ਵੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇ।

ਦ੍ਰਿਸ਼ਟਾਂਤ 5 : ਫਲਨ $f(x) = x^2 + x$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਅਸੀਂ $\lim_{x\to 1} f(x)$ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ $x = 1$ ਦੇ ਨਿਕਟ $f(x)$ ਨੂੰ ਮੁੱਲ ਸਾਰਣੀ 13.7 ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

ਸਾਰਣੀ 13.7

x	0.9	0.99	0.999	1.01	1.1	1.2
$f(x)$	1.71	1.9701	1.997001	2.0301	2.31	2.64

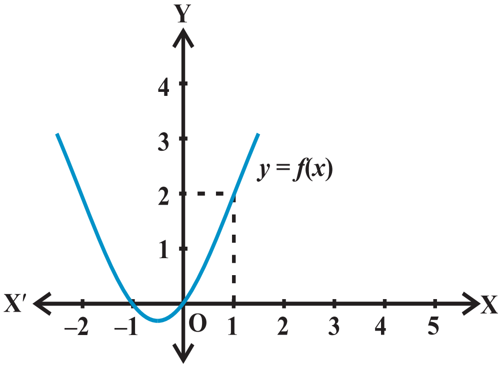
ਇਸ ਤੋਂ ਇਹ ਤਰਕਸੰਗਤ ਨਿਗਮਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

ਚਿੱਤਰ 13.5 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ $f(x) = x^2 + x$ ਦੇ ਆਲੇਖ ਤੋਂ ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ x, 1 ਦੇ ਵੱਲ ਵੱਧਦਾ ਹੈ ਆਲੇਖ (1, 2) ਦੇ ਵੱਲ ਵੱਧਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਦੁਬਾਰਾ ਪ੍ਰਖੇਣ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$

ਹੁਣ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਿੰਨ ਤੱਥਾਂ ਨੂੰ ਤੁਸੀਂ ਆਪ ਸਵੀਕਾਰ ਕਰਵਾਓ



ਚਿੱਤਰ 13.5

$$\lim_{x\to 1} x^2 = 1,\ \lim_{x\to 1} x = 1 \text{ and } \lim_{x\to 1} x+1 = 2$$

ਤਾਂ $$\lim_{x\to 1} x^2 + \lim_{x\to 1} x = 1+1 = 2 = \lim_{x\to 1}\left[x^2 + x\right]$$

ਅਤੇ $$\lim_{x\to 1} x.\ \lim_{x\to 1}(x+1) = 1.2 = 2 = \lim_{x\to 1}\left[x(x+1)\right] = \lim_{x\to 1}\left[x^2 + x\right]$$

ਦ੍ਰਿਸ਼ਟਾਂਤ 6 : ਫਲਨ $f(x) = \sin x$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਸਾਡੀ $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x$ ਵਿੱਚ ਰੁਚੀ ਹੈ ਜਿੱਥੇ ਕੋਣ ਰੇਡੀਅਨ ਵਿੱਚ ਮਾਪਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇੱਥੇ, ਅਸੀਂ $\frac{\pi}{2}$ ਦੇ ਨਿਕਟ $f(x)$ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਨਿਗਮਨ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

ਸਾਰਣੀ 13.8

x	$\frac{\pi}{2}-0.1$	$\frac{\pi}{2}-0.01$	$\frac{\pi}{2}+0.01$	$\frac{\pi}{2}+0.1$
$f(x)$	0.9950	0.9999	0.9999	0.9950

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = 1$$

ਹੋਰ ਅੱਗੇ, ਇਹ $f(x) = \sin x$ ਦੇ ਅਲੇਖ ਤੋਂ ਪੁਸ਼ਟੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਿਹੜੀ ਚਿੱਤਰ 3.8 (ਅਧਿਆਇ 3) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਵੀ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$ ਹੈ।

ਦ੍ਰਿਸ਼ਟਾਂਤ 7 : ਫਲਨ $f(x) = x + \cos x$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਅਸੀਂ $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ 0 ਦੇ ਨਿਕਟ $f(x)$ ਦੇ ਮੁੱਲ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਲਿਖੇ ਹਨ (ਸਾਰਣੀ 13.9)।

ਸਾਰਣੀ 13.9

x	– 0.1	– 0.01	– 0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	0.9850	0.98995	0.9989995	1.0009995	1.00995	1.0950

ਸਾਰਣੀ 13.9 ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਨਿਗਮਨ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਵੀ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 1$

ਹੁਣ, ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਆਪਣੇ ਆਪ ਨੂੰ ਸਵੀਕਾਰ ਕਰਾ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ

$\lim\limits_{x \to 0}[x + \cos x] = \lim\limits_{x \to 0} x + \lim\limits_{x \to 0} \cos x$ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਸੱਚ ਹੈ ?

ਦ੍ਰਿਸ਼ਟਾਂਤ 8 : $x > 0$ ਦੇ ਲਈ, ਫਲਨ $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਅਸੀਂ $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ। ਇੱਥੇ, ਅਸੀਂ ਅਵਲੋਕਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਫਲਨ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ ਸਾਰੇ ਧਨਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ $f(x)$ ਦੇ ਮੁੱਲ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ, x ਸਿਫ਼ਰ ਦੇ ਖੱਬੇ ਵੱਲ ਵੱਧਦਾ ਹੈ, ਦਾ ਕੋਈ ਅਰਥ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਹੇਠਾਂ ਅਸੀਂ 0 ਦੇ ਨਿਕਟ x ਦੇ ਧਨਾਤਮਕ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ ਫਲਨ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ (ਇਸ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ n ਕਿਸੇ ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।)

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ 13.10 ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਦੋਂ x, 0 ਦੇ ਵੱਲ ਵੱਧਦਾ ਹੈ, $f(x)$ ਵੱਡਾ ਹੋਰ ਵੱਡਾ ਹੁੰਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ $f(x)$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਕਿਸੇ ਦਿੱਤੀ ਸੰਖਿਆ ਤੋਂ ਵੀ ਵੱਡਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ 13.10

x	1	0.1	0.01	10^{-n}
$f(x)$	1	100	10000	10^{2n}

ਗਣਿਤਿਕ ਰੂਪ ਤੋਂ, ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$$

ਅਸੀਂ ਟਿੱਪਣੀ ਵੀ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਸ ਪਾਠਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਦੀ ਚਰਚਾ ਨਹੀਂ ਕਰਾਂਗੇ।

ਦ੍ਰਿਸ਼ਟਾਂਤ 9 : ਅਸੀਂ $\lim_{x \to 0} f(x)$ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਜਿੱਥੇ

$$f(x) = \begin{cases} x-2, & x<0 \\ 0 \quad , & x=0 \\ x+2, & x>0 \end{cases}$$

ਪਹਿਲਾਂ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ 0 ਦੇ ਨਿਕਟ x ਦੇ ਲਈ $f(x)$ ਦੀ ਸਾਰਣੀ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਨਿਰੀਖਣ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ x ਦੇ ਰਿਣਾਤਮਕ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ $x - 2$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਕੱਢਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ ਅਤੇ x ਦੇ ਧਨਾਤਮਕ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ $x + 2$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਕੱਢਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ 13.11

x	– 0.1	– 0.01	– 0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	– 2.1	– 2.01	– 2.001	2.001	2.01	2.1

ਸਾਰਣੀ 13.11 ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਤਿੰਨ ਅੰਦਰਾਜਾਂ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਨਿਗਮਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਫਲਨ ਦਾ ਮੁੱਲ –2 ਤੱਕ ਘੱਟ ਰਿਹਾ ਹੈ ਅਤੇ

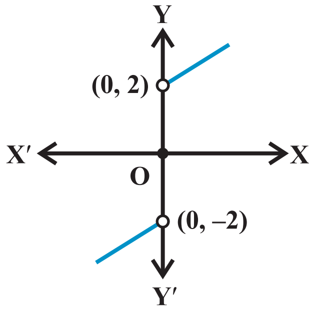
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -2$$

ਸਾਰਣੀ ਦੀ ਅੰਤਿਮ ਤਿੰਨ ਅੰਦਰਾਜਾਂ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਨਿਗਮਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਫਲਨ ਦਾ ਮੁੱਲ 2 ਤੱਕ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2$$

ਕਿਉਂਕਿ 0 ਤੇ ਖੱਬੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸਿਆਂ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ 0 ਤੇ ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਸ ਫਲਨ ਦਾ ਆਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 13.6 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਟਿੱਪਣੀ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $x = 0$ ਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਅਤੇ ਅਸਲ ਵਿੱਚ 0 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਪਰੰਤੂ $x = 0$ ਤੇ ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 13.6

ਦ੍ਰਿਸ਼ਟਾਂਤ 10 : ਇੱਕ ਅੰਤਿਮ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟਾਂਤ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ $\lim_{x \to 1} f(x)$ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਦੋਂ ਕਿ

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & x \neq 1 \\ 0 & x=1 \end{cases}$$

ਸਾਰਣੀ 13.12

x	0.9	0.99	0.999	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	2.9	2.99	2.999	3.001	3.01	3.1

ਪਹਿਲਾਂ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ 1 ਦੇ ਨਿਕਟ x ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ $f(x)$ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। 1 ਤੋਂ ਘੱਟ x ਦੇ ਲਈ $f(x)$ ਵਿੱਚ ਮੁੱਲਾਂ ਤੋਂ ਇਹ ਪ੍ਰਤੀਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ $x = 1$ ਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮੁੱਲ 3 ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਭਾਵ

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3$$

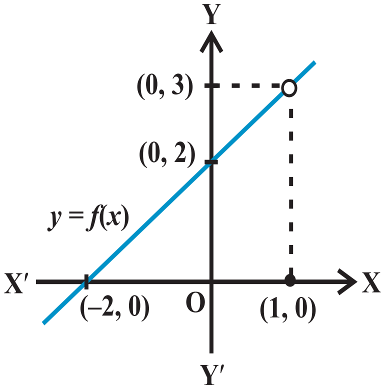
ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, 1 ਤੋਂ ਵੱਡੇ x ਦੇ ਲਈ $f(x)$ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਤੋਂ ਅਦੇਸ਼ਿਤ $f(x)$ ਦਾ ਮੁੱਲ 3 ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਭਾਵ

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3$$

ਪਰੰਤੂ ਉਸ ਵੇਲੇ ਖੱਬੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਸੰਪਾਤੀ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} f(x) = 3$$

ਚਿੱਤਰ 13.7 ਵਿੱਚ ਫਲਨ ਦਾ ਆਲੇਖ ਸੀਮਾ ਦੇ ਬਾਰੇ ਸਾਡੇ ਨਿਗਮਨ ਨੂੰ ਬਲ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ, ਅਸੀਂ ਧਿਆਨ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਵਿਆਪਕ ਤੌਰ 'ਤੇ ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮੁੱਲ ਅਤੇ ਇਸਦੀ ਸੀਮਾ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ। (ਭਾਵੇਂ ਦੋਵੇਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੋਣ)।



ਚਿੱਤਰ 13.7

13.3.1 ਸੀਮਾਵਾਂ ਦਾ ਬੀਜਗਣਿਤ (Algebra of limits) ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟਾਂਤਾਂ ਤੋਂ, ਅਸੀਂ ਅਵਲੋਕਨ ਕੀਤਾ ਹੈ ਕਿ ਸੀਮਾ ਦੀ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਜੋੜ, ਘਟਾਵ, ਗੁਣਾ ਅਤੇ ਭਾਗ ਦੀ ਪਾਲਣਾ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਜਦ ਤੱਕ ਕਿ ਸੋਚਿਆ ਹੋਇਆ ਫਲਨ ਅਤੇ ਸੀਮਾਵਾਂ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੋਣ। ਇਹ ਸੰਯੋਗ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਬਿਨਾਂ ਸਬੂਤ ਦੇ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਉਪਚਾਰਿਕ ਰੂਪ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ :

ਪ੍ਰਮੇਯ 1 : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ f ਅਤੇ g ਦੋ ਫਲਨ ਇਹੋ-ਜਿਹੇ ਹਨ ਕਿ $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ਅਤੇ $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ ਦੋਵੇਂ ਹੋਂਦ ਵਿੱਚ ਹਨ, ਤਾਂ

(i) ਦੋਵੇਂ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੀ ਸੀਮਾ ਫਲਨਾਂ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ :

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

(ii) ਦੋਵੇਂ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰ ਦੀ ਸੀਮਾ ਫਲਨਾਂ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ :

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$$

(iii) ਦੋਵੇਂ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾ ਦੀ ਸੀਮਾ ਫਲਨਾਂ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ :

$$\lim_{x \to a} [f(x) \,.\, g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) . \lim_{x \to a} g(x)$$

(iv) ਦੋਵੇਂ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਭਾਗਫਲ ਦੀ ਸੀਮਾ ਫਲਨਾਂ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਦਾ ਭਾਗਫਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$$

> **ਟਿੱਪਣੀ :** ਖਾਸ ਤੌਰ 'ਤੇ ਸਥਿਤੀ (*iii*) ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਖ਼ਾਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ $g(x)$ ਇੱਕ-ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਅਚੱਲ ਫਲਨ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ λ ਦੇ ਲਈ $g(x) = \lambda$ ਹੈ, ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

$$\lim_{x \to a} \left[(\lambda . f)(x)\right] = \lambda . \lim_{x \to a} f(x)$$

ਅਗਲੇ ਦੋ ਸੈਕਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟਾਂਤ ਦੇਵਾਂਗੇ ਕਿ ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨੂੰ ਖ਼ਾਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਸੀਮਾਵਾਂ ਦੇ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਕਿਵੇਂ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

13.3.2 ਬਹੁਪਦਾਂ ਅਤੇ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨਾਂ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ (Limits of polynomials and rational functions) ਇੱਕ ਫਲਨ $f(x)$ ਨੂੰ ਬਹੁਪਦ ਫਲਨ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ $f(x)$ ਸਿਫ਼ਰ ਫਲਨ ਹੈ ਜਾਂ ਜੇਕਰ $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + . . . + a_nx^n$, ਜਿੱਥੇ $a_i s$ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਕਿ ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਾਕਿਤਕ ਸੰਖਿਆ n ਦੇ ਲਈ $a_n \neq 0$ ਹਨ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣੂ ਹਾਂ ਕਿ $\lim_{x \to a} x = a$, ਇਸ ਲਈ

$$\lim_{x \to a} x^2 = \lim_{x \to a} (x.x) = \lim_{x \to a} x . \lim_{x \to a} x = a.\, a = a^2$$

n ਤੇ ਆਗਮਨ ਦਾ ਸਰਲ ਅਭਿਆਸ ਸਾਨੂੰ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\lim_{x \to a} x^n = a^n$$

ਹੁਣ, ਮੰਨ ਲਉ $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ ਫਲਨ $a_0, a_1 x, a_2 x^2, \ldots, a_n x^n$ ਹਰੇਕ ਨੂੰ ਇੱਕ ਫਲਨ ਜਿਹਾ ਵਿਚਾਰਦੇ ਹੋਏ, ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \left[a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \right]$$

$$= \lim_{x \to a} a_0 + \lim_{x \to a} a_1 x + \lim_{x \to a} a_2 x^2 + \ldots + \lim_{x \to a} a_n x^n$$

$$= a_0 + a_1 \lim_{x \to a} x + a_2 \lim_{x \to a} x^2 + \ldots + a_n \lim_{x \to a} x^n$$

$$= a_0 + a_1 a + a_2 a^2 + \ldots + a_n a^n$$

$$= f(a)$$

(ਸੁਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਰੋ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਹਰੇਕ ਪਗ ਦਾ ਮਤਲਬ ਸਮਝ ਲਿਆ ਹੈ।)

ਇੱਕ ਫਲਨ f ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$, ਹੋਵੇ, ਜਿੱਥੇ $g(x)$ ਅਤੇ $h(x)$ ਬਹੁਪਦ ਹੋਣ ਅਤੇ $h(x) \neq 0$ ਹੈ। ਤਾਂ

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\lim_{x \to a} g(x)}{\lim_{x \to a} h(x)} = \frac{g(a)}{h(a)}$$

ਜਦੋਂ ਕਿ, ਜੇਕਰ $h(a) = 0$, ਦੋ ਸਥਿਤਿਆਂ ਹਨ : (i) ਜਦੋਂ $g(a) \neq 0$ ਅਤੇ (ii) ਅਤੇ $g(a) = 0$ ਪਹਿਲਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸੀਮਾ ਦਾ ਅਸਤਿਤਵ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਬਾਅਦ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ : $g(x) = (x - a)^k g_1(x)$, ਜਿੱਥੇ k, $g(x)$ ਵਿੱਚ $(x - a)$ ਦੀ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਘਾਤ ਹੈ। ਇਸੀ ਪ੍ਰਕਾਰ $h(x) = (x - a)^l h_1(x)$ ਕਿਉਂਕਿ $h(a) = 0$ ਹੁਣ ਜੇਕਰ $k > l$ ਹੈ, ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{\lim_{x \to a} g(x)}{\lim_{x \to a} h(x)} = \frac{\lim_{x \to a} (x-a)^k g_1(x)}{\lim_{x \to a} (x-a)^l h_1(x)}$$

$$= \frac{\lim_{x \to a} (x-a)^{(k-l)} g_1(x)}{\lim_{x \to a} h_1(x)} = \frac{0.g_1(a)}{h_1(a)} = 0$$

ਜੇਕਰ $k < l$ ਤਾਂ ਸੀਮਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਸੀਮਾਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ : (i) $\lim_{x \to 1} \left[x^3 - x^2 + 1 \right]$ (ii) $\lim_{x \to 3} \left[x(x+1) \right]$

(iii) $\lim_{x \to -1} \left[1 + x + x^2 + \ldots + x^{10} \right]$

ਹੱਲ : ਲੋੜੀਂਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਕੁਝ ਬਹੁਪਦ ਫਲਨਾਂ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਸੀਮਾਵਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਮੁੱਲ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ :

(i) $\lim\limits_{x\to 1} [x^3 - x^2 + 1] = 1^3 - 1^2 + 1 = 1$

(ii) $\lim\limits_{x\to 3}\left[x(x+1)\right] = 3(3+1) = 3(4) = 12$

(iii) $\lim\limits_{x\to -1}\left[1+x+x^2+\ldots+x^{10}\right] = 1+(-1)+(-1)^2+\ldots+(-1)^{10}$

$$= 1-1+1\ldots+1 = 1$$

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਸੀਮਾਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x^2+1}{x+100}\right]$ (ii) $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{x^3-4x^2+4x}{x^2-4}\right]$

(iii) $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{x^2-4}{x^3-4x^2+4x}\right]$ (iv) $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{x^3-2x^2}{x^2-5x+6}\right]$

(v) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x-2}{x^2-x}-\dfrac{1}{x^3-3x^2+2x}\right]$

ਹੱਲ : ਸਾਰੇ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਦਿੱਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਇਹਨਾਂ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਜੇਕਰ ਇਹ $\dfrac{0}{0}$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ, ਅਸੀਂ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ, ਜਿਹੜਾ ਸੀਮਾ ਦੇ $\dfrac{0}{0}$ ਦਾ ਰੂਪ ਹੋਣ ਦੀ ਵਜ੍ਹਾ ਹੈ, ਨੂੰ ਖ਼ਤਮ ਕਰਕੇ ਫਲਨਾਂ ਨੂੰ ਫ਼ੇਰ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

(i) ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+1}{x+100} = \dfrac{1^2+1}{1+100} = \dfrac{2}{101}$

(ii) 2 ਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਇਸਨੂੰ $\dfrac{0}{0}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਲਈ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-4x^2+4x}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x(x-2)^2}{(x+2)(x-2)}$

$= \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x(x-2)}{(x+2)}$ ਕਿਉਂਕਿ $x \neq 2$

$$= \frac{2(2-2)}{2+2} = \frac{0}{4} = 0$$

(iii) 2 ਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਅਸੀਂ ਇਸਨੂੰ $\dfrac{0}{0}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

$$\text{ਇਸ ਲਈ} \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^3-4x^2+4x} = \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)^2}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)}{x(x-2)} = \frac{2+2}{2(2-2)} = \frac{4}{0}$$

ਜਿਹੜਾ ਕਿ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(iv) 2 ਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਤੇ, ਅਸੀਂ ਇਸਨੂੰ $\frac{0}{0}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

$$\text{ਇਸ ਲਈ} \quad \lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x^2}{(x-3)} = \frac{(2)^2}{2-3} = \frac{4}{-1} = -4$$

(v) ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਫਲਨ ਨੂੰ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੁਬਾਰਾ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

$$\left[\frac{x-2}{x^2-x}-\frac{1}{x^3-3x^2+2x}\right] = \left[\frac{x-2}{x(x-1)}-\frac{1}{x\left(x^2-3x+2\right)}\right]$$

$$= \left[\frac{x-2}{x(x-1)}-\frac{1}{x(x-1)(x-2)}\right]$$

$$= \left[\frac{x^2-4x+4-1}{x(x-1)(x-2)}\right]$$

$$= \frac{x^2-4x+3}{x(x-1)(x-2)}$$

1 ਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ’ਤੇ ਅਸੀਂ ਇਸਨੂੰ $\frac{0}{0}$ ਦੇ ਰੂਪ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

$$\text{ਇਸ ਲਈ} \quad \lim_{x\to 1}\left[\frac{x^2-2}{x^2-x}-\frac{1}{x^3-3x^2+2x}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x(x-1)(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-3)(x-1)}{x(x-1)(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x-3}{x(x-2)} = \frac{1-3}{1(1-2)} = 2$$

ਅਸੀਂ ਟਿੱਪਣੀ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਪਦ $(x - 1)$ ਨੂੰ ਖ਼ਤਮ ਕੀਤਾ ਕਿਉਂਕਿ $x \neq 1$.

ਇੱਕ ਜ਼ਰੂਰੀ ਸੀਮਾ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ, ਜੋ ਕੀ ਅੱਗੇ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਵਿੱਚ ਇਸਤੇਮਾਲ ਹੋਵੇਗੀ, ਹੇਠਾਂ ਇੱਕ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 2 : ਕਿਸੇ ਧਨ ਪੂਰਣ ਅੰਕ n ਦੇ ਲਈ

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}.$$

ਟਿੱਪਣੀ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਵਿੱਚ ਸੀਮਾ ਦੇ ਲਈ ਦਿੱਤਾ ਪ੍ਰਗਟਾਵ ਸੱਚ ਹੈ ਭਾਵੇਂ n ਕੋਈ ਵੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ a ਧਨਾਤਮਕ ਹੈ।

ਸਬੂਤ : $(x^n - a^n)$ ਨੂੰ $(x - a)$ ਤੋਂ ਭਾਗ ਦੇਣ ਤੇ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$x^n - a^n = (x - a)\,(x^{n-1} + x^{n-2} a + x^{n-3} a^2 + \ldots + x\, a^{n-2} + a^{n-1})$$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \to a} (x^{n-1} + x^{n-2} a + x^{n-3} a^2 + \ldots + x\, a^{n-2} + a^{n-1})$$

$$= a^{n-1} + a\, a^{n-2} + \ldots + a^{n-2}\,(a) + a^{n-1}$$

$$= a^{n-1} + a^{n-1} + \ldots + a^{n-1} + a^{n-1} \ (n \text{ terms})$$

$$= na^{n-1}$$

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $\lim_{x \to 1} \frac{x^{15} - 1}{x^{10} - 1}$ (ii) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$

ਹੱਲ : (i) ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਹੈ :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^{15} - 1}{x^{10} - 1} = \lim_{x \to 1} \left[\frac{x^{15} - 1}{x - 1} \div \frac{x^{10} - 1}{x - 1}\right]$$

$$= \lim_{x \to 1} \left[\frac{x^{15} - 1}{x - 1}\right] \div \lim_{x \to 1} \left[\frac{x^{10} - 1}{x - 1}\right]$$

$$= 15\,(1)^{14} \div 10(1)^9 \quad \text{(ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਪ੍ਰਮੇਯ ਰਾਹੀਂ)}$$

$$= 15 \div 10 = \frac{3}{2}$$

(ii) $y = 1 + x$, ਜਿਸ ਤੋਂ $y \to 1$ ਜਦੋਂ $x \to 0$ ਤਾਂ

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{y \to 1} \frac{\sqrt{y} - 1}{y - 1}$$

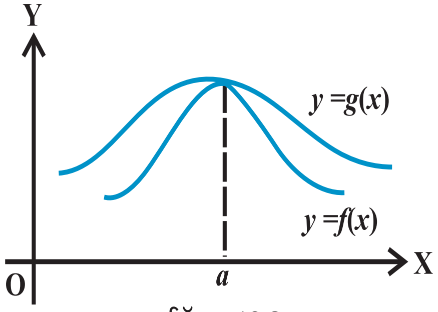
$$= \lim_{y \to 1} \frac{y^{\frac{1}{2}} - 1^{\frac{1}{2}}}{y - 1}$$

$$= \frac{1}{2}(1)^{\frac{1}{2} - 1} \quad \text{(ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀ ਟਿੱਪਣੀ ਤੋਂ)} \quad = \frac{1}{2}$$

13.4 ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ (Limits of Trigonometric Functions)

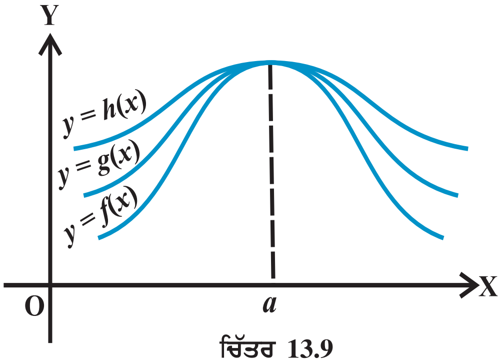
ਵਿਆਪਕ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤੱਥ (ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੇ ਗਏ) ਕੁਝ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਦਾ ਪਰਿਕਲਨ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਅਸਾਨ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਨ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 3 : ਮੰਨ ਲਓ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਾਲੇ ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ ਦੇ ਫਲਨ f ਅਤੇ g ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਹਨ ਕਿ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਿੱਚ ਸਾਰੇ x ਦੇ ਲਈ $f(x) \le g(x)$ ਹਨ, ਕਿਸੇ a ਦੇ ਲਈ ਜੇਕਰ $\lim_{x\to a} f(x)$ ਅਤੇ $\lim_{x\to a} g(x)$ ਦੋਹਾਂ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਤਾਂ $\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$ ਇਸਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 13.8 ਵਿੱਚ ਚਿੱਤਰ ਤੋਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 13.8

ਪ੍ਰਮੇਯ 4 (ਸੈਂਡਵਿਚ ਪ੍ਰਮੇਯ): ਮੰਨ ਲਓ f, g ਅਤੇ h ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ ਵਾਲੇ ਫਲਨ ਇਹੋ-ਜਿਹੇ ਹਨ ਕਿ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਸਾਂਝੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਦੇ ਸਾਰੇ x ਦੇ ਲਈ $f(x) \le g(x) \le h(x)$ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ a ਦੇ ਲਈ ਜੇਕਰ $\lim_{x\to a} f(x) = l = \lim_{x\to a} h(x)$ ਹੈ ਤਾਂ $\lim_{x\to a} g(x) = l$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 13.9 ਵਿੱਚ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

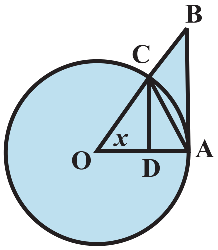


ਚਿੱਤਰ 13.9

ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਤੋਂ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਜ਼ਰੂਰੀ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਇੱਕ ਸੁੰਦਰ ਜਿਮਾਇਤੀ ਸਬੂਤ ਹੇਠ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :

$$0 < |x| < \frac{\pi}{2} \text{ ਦੇ ਲਈ} \qquad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

ਸਬੂਤ (*) : ਅਸੀਂ ਜਾਣੂੰ ਹਾਂ ਕਿ $\sin(-x) = -\sin x$ ਅਤੇ $\cos(-x) = \cos x$ ਇਸ ਲਈ $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ਦੇ ਲਈ ਅਸਮਾਨਤਾ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਇਹ ਕਾਫ਼ੀ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 13.10

ਚਿੱਤਰ 13.10 ਵਿੱਚ ਇਕਾਈ ਚੱਕਰ ਦਾ ਕੇਂਦਰ O ਹੈ। ਕੋਣ AOC, x ਰੇਡੀਅਨ ਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ਹੈ। ਰੇਖਾ ਖੰਡ BA ਅਤੇ CD, OA ਦੇ ਲੰਬ ਹਨ। ਇਸਦੇ ਬਾਅਦ ਵੀ AC ਨੂੰ ਮਿਲਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ਤਾਂ

ΔOAC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ < ਚੱਕਰ ਖੰਡ OAC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ < ΔOAB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

ਭਾਵ, $\frac{1}{2}\text{OA.CD} < \frac{x}{2\pi}.\pi.(\text{OA})^2 < \frac{1}{2}\text{OA.AB}$

ਭਾਵ, $\text{CD} < x\,.\,\text{OA} < \text{AB}$

Δ OCD ਵਿੱਚ,

$\sin x = \frac{\text{CD}}{\text{OA}}$ (ਕਿਉਂਕਿ OC = OA) ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ CD = OA $\sin x$ ਇਸਦੇ ਇਲਾਵਾ $\tan x = \frac{\text{AB}}{\text{OA}}$ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ AB = OA $\tan x$ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ

$$\text{OA}\sin x < \text{OA}.\,x < \text{OA}.\tan x$$

ਕਿਉਂਕਿ ਲੰਬਾਈ OA ਧਨਾਤਮਕ ਹੈ, ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ

$$\sin x < x < \tan x$$

ਕਿਉਂਕਿ $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $\sin x$ ਧਨਾਤਮਕ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $\sin x$ ਤੋਂ ਸਾਰੇ ਨੂੰ ਭਾਗ ਦੇਣ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ

$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ ਸਾਰੇ ਦਾ ਉਲਟ ਕਰਨ ਤੇ, ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ

$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ ਸਬੂਤ ਪੂਰਨ ਹੋਇਆ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 5 : ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਦੋ ਜ਼ਰੂਰੀ ਸੀਮਾਵਾਂ ਹਨ :

(i) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ (ii) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$

ਸਬੂਤ : (i) (*) ਵਿੱਚ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਫਲਨ $\frac{\sin x}{x}$, ਫਲਨ $\cos x$ ਅਤੇ ਅੱਚਲ ਫਲਨ ਜਿਸਦਾ ਮੁੱਲ 1 ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਸਥਿਤ ਹੈ।

ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਕਿਉਂਕਿ $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$ ਹੈ, ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪ੍ਰਮੇਯ (i) ਦਾ ਸਬੂਤ ਸੈਂਡਵਿਚ ਪ੍ਰਮੇਯ ਤੋਂ ਪੂਰਣ ਹਨ।

(ii) ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਸਰਬਸਮਤਾ $1 - \cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ,

ਤਾਂ
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}.\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}.\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 1.0 = 0$$

ਅਵਲੋਕਨ ਕਰੋ ਕਿ ਅਸੀਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਤੌਰ 'ਤੇ ਇਸ ਤੱਥ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕੀਤਾ ਹੈ ਕਿ $x \to 0, \frac{x}{2} \to 0$ ਦੇ ਤੁਲ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ $y = \frac{x}{2}$ ਰੱਖ ਕੇ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ : (i) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\sin 2x}$ (ii) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$

ਹੱਲ : (i)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 4x}{4x}.\frac{2x}{\sin 2x}.2\right]$$

$$= 2.\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 4x}{4x}\right] \div \left[\frac{\sin 2x}{2x}\right]$$

$$= 2.\lim_{4x\to 0}\left[\frac{\sin 4x}{4x}\right] \div \lim_{2x\to 0}\left[\frac{\sin 2x}{2x}\right]$$

$= 2.1.1 = 2$ (ਜਦੋਂ $x \to 0, 4x \to 0$ ਅਤੇ $2x \to 0$)

(ii) ਸਾਡੇ ਕੋਲ $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1.1 = 1$

ਇੱਕ ਸਮੁੱਲ ਨਿਯਮ, ਜਿਸਨੂੰ ਸੀਮਾਵਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਕੱਢਦੇ ਸਮੇਂ ਧਿਆਨ ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ਦੀ ਲੋੜ ਹੈ, ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆ ਹੈ :

ਮੰਨਿਆ ਕੀ ਸੀਮਾ $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਇਸਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ। ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ $f(a)$ ਅਤੇ $g(a)$ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਜਾਂਚਾਗੇ। ਜੇਕਰ ਦੋਵੇਂ ਸਿਫ਼ਰ ਹਨ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਉਸ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਸਮਾਪਤ ਹੋਣ ਦਾ ਕਾਰਣ ਹੈ, ਭਾਵ ਵੇਖੋ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ $f(x) = f_1(x) f_2(x)$ ਲਿਖ ਸਕੀਏ ਜਿਸ ਤੋਂ $f_1(a) = 0$ ਅਤੇ $f_2(a) \neq 0$. ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $g(x) = g_1(x)\, g_2(x)$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ ਜਿੱਥੇ $g_1(a) = 0$ ਅਤੇ $g_2(a) \neq 0$। $f(x)$ ਅਤੇ $g(x)$ ਵਿੱਚ ਤੋਂ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ (ਜੇਕਰ ਸੰਭਵ ਹੈ) ਤਾਂ ਖਤਮ ਕਰ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{p(x)}{q(x)}$, ਜਿੱਥੇ $q(x) \neq 0$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ :

ਤਾਂ $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}$$

ਅਭਿਆਸ 13.1

ਅਭਿਆਸ 1 ਤੋਂ 22 ਤੱਕ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋ :

1. $\lim_{x\to 3} x+3$ **2.** $\lim_{x\to \pi}\left(x-\frac{22}{7}\right)$ **3.** $\lim_{r\to 1}\pi r^2$

4. $\lim_{x\to 4}\frac{4x+3}{x-2}$ **5.** $\lim_{x\to -1}\frac{x^{10}+x^5+1}{x-1}$ **6.** $\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^5-1}{x}$

7. $\lim_{x\to 2} \frac{3x^2 - x - 10}{x^2 - 4}$

8. $\lim_{x\to 3} \frac{x^4 - 81}{2x^2 - 5x - 3}$

9. $\lim_{x\to 0} \frac{ax + b}{cx + 1}$

10. $\lim_{z\to 1} \frac{z^{\frac{1}{3}} - 1}{z^{\frac{1}{6}} - 1}$

11. $\lim_{x\to 1} \frac{ax^2 + bx + c}{cx^2 + bx + a}, a + b + c \neq 0$

12. $\lim_{x\to -2} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{2}}{x + 2}$

13. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{bx}$

14. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}, a, b \neq 0$

15. $\lim_{x\to \pi} \frac{\sin(\pi - x)}{\pi(\pi - x)}$

16. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\pi - x}$

17. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x - 1}{\cos x - 1}$

18. $\lim_{x\to 0} \frac{ax + x\cos x}{b\sin x}$

19. $\lim_{x\to 0} x\sec x$

20. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax + bx}{ax + \sin bx} a, b, a + b \neq 0$

21. $\lim_{x\to 0} (\text{cosec } x - \cot x)$

22. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 2x}{x - \frac{\pi}{2}}$

23. $\lim_{x\to 0} f(x)$ ਅਤੇ $\lim_{x\to 1} f(x)$, ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿੱਥੇ $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \leq 0 \\ 3(x + 1), & x > 0 \end{cases}$ ਹੈ।

24. $\lim_{x\to 1} f(x)$ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿੱਥੇ $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 1 \\ -x^2 - 1, & x > 1 \end{cases}$ ਹੈ।

25. $\lim_{x\to 0} f(x)$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿੱਥੇ $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ਹੈ।

26. $\lim_{x\to 0} f(x)$ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿੱਥੇ $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ਹੈ।

27. $\lim_{x\to 5} f(x)$ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿੱਥੇ $f(x) = |x| - 5$ ਹੈ।

28. ਮੰਨ ਲਉ $f(x) = \begin{cases} a + bx, & x < 1 \\ 4, & x = 1 \\ b - ax, & x > 1 \end{cases}$

ਅਤੇ ਜੇਕਰ $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ ਤਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਸੰਭਵ ਮੁੱਲ ਕੀ ਹਨ।

29. ਮੰਨ ਲਉ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ਅਚੱਲ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ ਇੱਕ ਫਲਨ
$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)$ ਤੋਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ।

$\lim_{x \to a_1} f(x)$ ਕੀ ਹੈ ? ਕਿਸੇ $a \neq a_1, a_2, \ldots, a_n$, ਦੇ ਲਈ $\lim_{x \to a} f(x)$ ਦਾ ਪਰਿਕਲਨ ਕਰੋ।

30. ਜੇਕਰ $f(x) = \begin{cases} |x| + 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ |x| - 1, & x > 0 \end{cases}$ ਹੈ।

ਤਾਂ a ਦੇ ਕਿਹੜੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ $\lim_{x \to a} f(x)$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ?

31. ਜੇਕਰ ਫਲਨ $f(x)$, $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - 2}{x^2 - 1} = \pi$, ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ $\lim_{x \to 1} f(x)$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋ।

32. ਕਿਹਨਾਂ ਪੂਰਨ ਅੰਕਾਂ m ਅਤੇ n ਦੇ ਲਈ $\lim_{x \to 0} f(x)$ ਅਤੇ $\lim_{x \to 1} f(x)$ ਦੋਹਾਂ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ

$$\text{ਜੇਕਰ } f(x) = \begin{cases} mx^2 + n, & x < 0 \\ nx + m, & 0 \le x \le 1 \\ nx^3 + m, & x > 1 \end{cases}$$

13.5 ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ (Derivatives)

ਅਸੀਂ ਅਨੁਛੇਦ 13.2 ਵਿੱਚ ਵੇਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਤੇ ਪਿੰਡ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਜਾਣ ਕੇ ਉਸ ਦਰ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਸੰਭਵ ਹੈ ਜਿਸ ਤੋਂ ਪਿੰਡ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਬਦਲ ਰਹੀ ਹੈ। ਸਮੇਂ ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਪਲਾਂ ਤੇ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਪ੍ਰਾਚਲ (parameter) ਦਾ ਜਾਣਨਾ ਅਤੇ ਉਸ ਦਰ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰਨਾ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਬਦਲਾਵ ਹੋ ਰਹੇ ਹਨ, ਬਹੁਤ ਦਿਲਚਸਪੀ ਦਾ ਵਿਸ਼ਾ ਹੈ। ਅਸਲ ਜ਼ਿੰਦਗੀ ਦੀ ਅਨੇਕ ਸਥਿਤੀਆਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਇਹੋ-ਜਿਹੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਕਰਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਇੱਕ ਟੈਂਕੀ ਦੇ ਰੱਖ-ਰਖਾਵ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਇਨਸਾਨ ਦੇ ਲਈ ਸਮੇਂ ਦੇ ਕਈ ਪਲਾਂ ਤੇ ਪਾਣੀ ਦੀ ਡੂੰਘਾਈ ਜਾਣ ਕੇ ਇਹ ਜਾਨਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਟੈਂਕੀ ਕਦੋਂ ਛਲਕੇਗੀ, ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸਮਾਂ ਤੇ ਰਾਕੇਟ ਦੀ ਉਚਾਈ ਜਾਣ ਕੇ ਰਾਕੇਟ ਵਿਗਿਆਨੀ ਨੂੰ ਅਸਲ ਵੇਗ ਦੇ ਪਰਿਕਲਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਜਿਸ ਤੋਂ ਉਪਗ੍ਰਹਿ ਦਾ ਰਾਕੇਟ ਤੋਂ ਪਰਖੇਪਣ ਜ਼ਰੂਰ ਹੋਵੇ। ਵਿੱਤੀ ਸੰਸਥਾਨਾਂ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਖਾਸ ਸਟਾਕ ਦੇ ਵਰਤਮੁੱਲ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਜਾਣ ਕੇ ਇਸਦੇ ਮੁਲਾਂ ਵਿੱਚ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਭਵਿੱਖਬਾਣੀ ਕਰਨੀ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਅਤੇ ਇਹੋ-ਜਿਹੀ ਕਈ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਇਹ ਜਾਣਨਾ ਲੋੜੀਂਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਚਲ ਵਿੱਚ ਦੂਜੇ ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਾਚਲ ਦੇ ਬਾਬਤ ਬਦਲਾਵ ਕਿਵੇਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ? ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਦੇ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਇਸ ਵਿਸ਼ੇ ਦਾ ਮੁੱਖ ਉਦੇਸ਼ ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 1 ਮੰਨ ਲਉ f ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ a ਹੈ। a ਤੇ f ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

ਤੋਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਬਸ਼ਰਤੇ ਕਿ ਇਸ ਸੀਮਾ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੋਵੇ। a ਤੇ $f(x)$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $f'(a)$ ਤੋਂ ਨਿਰੂਪਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦੇਵੋ ਕਿ $f'(a)$, a ਅਤੇ x ਦੇ ਬਾਬਤ ਬਦਲਾਵ ਦਾ ਪਰਿਮਾਣ ਦੱਸਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : $x = 2$ ਤੇ ਫਲਨ $f(x) = 3x$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(2+h) - 3(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6+3h-6}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3h}{h} = \lim_{h \to 0} 3 = 3$$

ਇਸ ਲਈ $x = 2$ ਤੇ ਫਲਨ $3x$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ 3 ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 : $x = -1$ ਤੇ ਫਲਨ $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਇਹ ਵੀ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f'(0) + 3f'(-1) = 0$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ $x = 0$ ਅਤੇ $x = -1$ ਤੇ $f(x)$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[2(-1+h)^2 + 3(-1+h) - 5\right] - \left[2(-1)^2 + 3(-1) - 5\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h^2 - h}{h} = \lim_{h \to 0} (2h-1) = 2(0) - 1 = -1$$

ਅਤੇ
$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[2(0+h)^2 + 3(0+h) - 5\right] - \left[2(0)^2 + 3(0) - 5\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h^2 + 3h}{h} = \lim_{h \to 0} (2h+3) = 2(0) + 3 = 3$$

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ $f'(0) + 3f'(-1) = 0$ ਹੈ।

> **ਟਿੱਪਣੀ** ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਸੀਮਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਨਿਯਮਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਭਾਵਕਾਰੀ ਇਸਤੇਮਾਲ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ। ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਇਸਨੂੰ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ :

ਉਦਾਹਰਣ 7 : $x = 0$ ਤੇ $\sin x$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $f(x) = \sin x$ ਹੈ, ਤਾਂ

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(0+h) - \sin(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

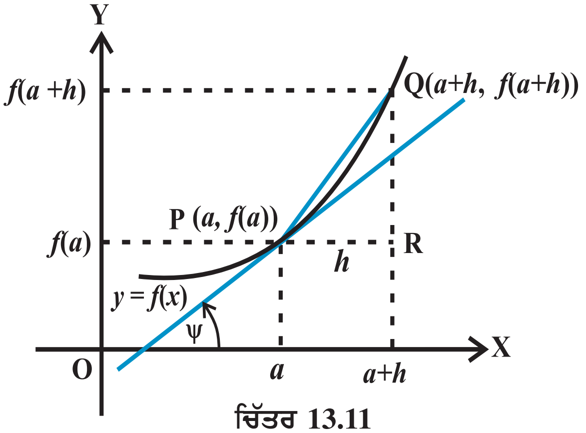
ਉਦਾਹਰਣ 8 : $x = 0$ ਅਤੇ $x = 3$ 'ਤੇ ਫਲਨ $f(x) = 3$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਫਲਨ ਵਿੱਚ ਬਦਲਾਵ ਨੂੰ ਮਾਪਦਾ ਹੈ, ਸਹਿਜ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਅੱਚਲ ਫਲਨ ਦਾ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਇਸਨੂੰ ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪਰਿਕਲਨ ਤੋਂ ਬਲ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3-3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3-3}{h} = 0$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਫਲਨ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੀ ਜਿਮਾਇਤੀ ਵਿਆਖਿਆ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਮੰਨ ਲਉ $y = f(x)$ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ ਇਸ ਫਲਨ ਦੇ ਆਲੇਖ ਤੇ $P = (a, f(a))$ ਅਤੇ $Q = (a + h, f(a + h))$ ਦੋ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨੇੜੇ ਦੇ ਬਿੰਦੂ ਹਨ। ਚਿੱਤਰ 13.11 ਹੁਣ ਆਪ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 13.11

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

ਤ੍ਰਿਭੁਜ PQR ਤੋਂ ਸਪਸ਼ੱਟ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਅਨੁਪਾਤ ਜਿਸਦੀ ਸੀਮਾ ਅਸੀਂ ਲੈ ਰਹੇ ਹਾਂ, ਅਸਲ ਵਿੱਚ tan(QPR) ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਜੀਵਾ PQ ਦੀ ਫਲਨ ਹੈ। ਸੀਮਾ ਲੈਣ ਦੀ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਵਿੱਚ, ਜਦੋਂ h, 0 ਦੇ ਵੱਲ ਵੱਧਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਬਿੰਦੂ Q, P ਦੇ ਵੱਲ ਵੱਧਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{Q \to P} \frac{QR}{PR}$$

ਇਹ ਇਸ ਤੱਥ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਕਿ ਜੀਵਾ PQ ਵਕਰ $y = f(x)$ ਦੇ ਬਿੰਦੂ P ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੇ ਵੱਲ ਵੱਧਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$f'(a) = \tan \psi$$

ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨ f ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਇੱਕ ਨਵੇਂ ਫਲਨ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ ਫਲਨ f ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਰਸਮੀ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਫਲਨ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 2 ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ f ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ ਵਾਲਾ ਫਲਨ ਹੈ ਤਾਂ :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ਤੋਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ, ਜਿੱਥੇ ਕਿਤੇ ਸੀਮਾ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ, ਨੂੰ x ਤੇ f ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $f'(x)$ ਤੋਂ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੀ ਇਸ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਨੂੰ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਸਿਧਾਂਤ ਵੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ, $f'(x)$ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ ਉਹੀ ਹੈ ਜਿੱਥੇ ਕਿਤੇ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀ ਸੀਮਾ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ। ਇੱਕ ਫਲਨ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸੰਕੇਤ ਲਿਪੀ ਹਨ। ਕਦੇ-ਕਦੇ $f'(x)$ ਨੂੰ $\frac{d}{dx}(f(x))$ ਤੋਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ $y = f(x)$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਹ $\frac{dy}{dx}$ ਤੋਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸਨੂੰ y ਜਾਂ $f(x)$ ਦੇ ਬਾਬਤ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸਨੂੰ $D(f(x))$ ਤੋਂ ਵੀ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ $x = a$ ਤੇ f ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਨੂੰ $\frac{d}{dx} f(x) \Big|_a$ ਜਾਂ $\frac{df}{dx} \Big|_a$ ਜਾਂ $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=a}$ ਤੋਂ ਵੀ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : $f(x) = 10x$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{10(x+h)-10(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{10h}{h} = \lim_{h\to 0}(10)=10$$

ਉਦਾਹਰਣ 10 : $f(x) = x^2$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-(x)^2}{h} = \lim_{h\to 0}(h+2x)=2x$$

ਉਦਾਹਰਣ 11 : ਇੱਕ ਅਚੱਲ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ a ਦੇ ਲਈ, ਅਚੱਲ ਫਲਨ $f(x) = a$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{a-a}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0 \text{ ਕਿਉਂਕਿ } h\neq 0$$

ਉਦਾਹਰਣ 12 : $f(x) = \frac{1}{x}$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(x+h)}-\frac{1}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{-h}{x(x+h)}\right] = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

13.5.1 ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦਾ ਬੀਜਗਣਿਤ (Algebra of derivatives of functions) ਕਿਉਂਕਿ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੀ ਅਸਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਸੀਮਾ ਜ਼ਰੂਰ ਹੀ ਸਿੱਧੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ, ਅਸੀਂ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੇ ਨਿਯਮਾਂ ਦੇ ਨੇੜੇ ਤੋਂ ਸੀਮਾ ਦੇ ਨਿਯਮਾਂ ਦੇ ਅਨੁਗਮਨ ਦੀ ਆਸ਼ਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਮੇਯਾਂ ਵਿੱਚ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ :

ਪ੍ਰਮੇਯ 5 : ਮੰਨ ਲਉ f ਅਤੇ g ਦੋ ਇਹੋ-ਜਿਹੇ ਫਲਨ ਹਨ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹਨ, ਤਾਂ

(i) ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਉਹਨਾਂ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਹੈ।

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)+g(x)\right]=\frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)$$

(ii) ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਉਹਨਾਂ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ ਹੈ।

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)-g(x)\right]=\frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}g(x).$$

(iii) ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਗੁਣਾ ਨਿਯਮ (Product rule) ਤੋਂ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\ .\ g(x)\right]=\frac{d}{dx}f(x).g(x)+f(x).\frac{d}{dx}g(x)$$

(iv) ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਭਾਗਫਲ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਭਾਗਫਲ ਨਿਯਮ (quotient rule) ਤੋਂ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। (ਜਿੱਥੇ ਹਰ ਸਿਫ਼ਰ ਨਹੀਂ ਹੈ)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\frac{d}{dx}f(x).g(x)-f(x)\ \frac{d}{dx}g(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਸਬੂਤ ਸੀਮਾਵਾਂ ਦੀ ਤੁਲ ਰੂਪ ਪ੍ਰਮੇਯਾਂ ਤੋਂ ਜ਼ਰੂਰੀ ਰੂਪ ਤੋਂ ਮਿਲ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਇੱਥੇ ਸਿੱਧ ਨਹੀਂ ਕਰਾਂਗੇ। ਸੀਮਾਵਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ਖਾਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦਾ ਕਿਵੇਂ ਪਰਿਕਲਨ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਅੰਤਿਮ ਦੋ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਢੰਗ ਤੋਂ ਦੁਬਾਰਾ ਕਿਹਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਤੋਂ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਅਸਾਨੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਓ $u=f(x)$ and $v=g(x)$ ਹੈ ਤਾਂ,

$$(uv)'=u'v+uv'$$

ਇਹ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੇ ਲਈ Leibnitz ਨਿਯਮ ਜਾਂ ਗੁਣਾ ਨਿਯਮ ਦਾ ਉਲੇਖ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਭਾਗਫਲ ਨਿਯਮ ਹੈ।

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

ਹੁਣ, ਆਉ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਮਾਨਕ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵਾਂ ਨੂੰ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਵੇਖਣਾ ਸਰਲ ਹੈ ਕਿ ਫਲਨ $f(x)=x$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਅਚੱਲ ਫਲਨ 1 ਹੈ। ਇਹ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}1=1$$

ਅਸੀਂ ਇਸਦਾ ਅਤੇ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ $f(x)=10x=x+x+\ldots+x$ (10 ਪਦ) (ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ (*i*) ਤੋਂ) ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੇ ਪਰਿਕਲਨ ਵਿੱਚ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{d}{dx}(x+x+\ldots+x)\ \text{(10 ਪਦ)}$$

$$=\frac{d}{dx}x+\ldots+\frac{d}{dx}x\ \text{(10 ਪਦ)}$$

$$=1+1+\ldots+1\ \text{(10 ਪਦ)}=10$$

ਅਸੀਂ ਧਿਆਨ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਸ ਸੀਮਾ ਦਾ ਮੁੱਲ ਗੁਣਾ ਸੂਤਰ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੋਂ ਵੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ, $f(x)=10x=uv$, ਜਿੱਥੇ u ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ ਜਿੱਥੇ u ਹਰੇਕ ਜਗ੍ਹਾ ਮੁੱਲ 10 ਲੈ ਕੇ ਅਚੱਲ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ $v(x)=x$ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ u ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ 0 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਨਾਲ ਹੀ $v(x)=x$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ 1 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਗੁਣਾ ਨਿਯਮ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

$$f'(x)=(10x)'=(uv)'=u'v+uv'=0.x+10.1=10$$

ਇਸੇ ਅਧਾਰ ਤੇ $f(x) = x^2$ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ $f(x) = x^2 = x\,.x$ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(x.x) = \frac{d}{dx}(x).x + x.\frac{d}{dx}(x)$$

$$= 1.x + x.1 = 2x$$

ਇਸ ਤੋਂ ਵੱਧ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਮੇਯ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ :

ਪ੍ਰਮੇਯ 6 : ਕਿਸੇ ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਅੰਕ n ਦੇ ਲਈ $f(x) = x^n$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ nx^{n-1} ਹੈ।

ਸਬੂਤ : ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਫਲਨ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਕਹਿੰਦਾ ਹੈ

$(x + h)^n = \left({}^nC_0\right)x^n + \left({}^nC_1\right)x^{n-1}h + \ldots + \left({}^nC_n\right)h^n$ ਅਤੇ $(x + h)^n - x^n = h(nx^{n-1} + \ldots + h^{n-1})$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h\left(nx^{n-1} + \ldots. + h^{n-1}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1} + \ldots + h^{n-1}\right) = nx^{n-1}$$

ਵੱਖ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਇਸਨੂੰ n ਤੇ ਆਗਮਨ ਅਤੇ ਗੁਣਾ ਸੂਤਰ ਤੋਂ ਵੀ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ : $n = 1$ ਦੇ ਲਈ ਇਹ ਸੱਚ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਪਹਿਲਾਂ ਵਿਖਾਇਆ ਜਾ ਚੁੱਕਿਆ ਹੈ :

$$\frac{d}{dx}\left(x^n\right) = \frac{d}{dx}\left(x.x^{n-1}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}(x).\left(x^{n-1}\right) + x.\frac{d}{dx}\left(x^{n-1}\right) \text{ (ਗੁਣਾ ਸੂਤਰ ਤੋਂ)}$$

$$= 1.x^{n-1} + x.\left((n-1)x^{n-2}\right) \text{ (ਆਗਮਨ ਪਰਿਕਲਪਨਾ ਤੋਂ)}$$

$$= x^{n-1} + (n-1)x^{n-1} = nx^{n-1}$$

> **ਟਿੱਪਣੀ** ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀ ਪ੍ਰਮੇਯ x, ਦੀ ਸਾਰੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ ਭਾਵ n ਕੋਈ ਵੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ। (ਪਰੰਤੂ ਅਸੀਂ ਇਸਨੂੰ ਇੱਥੇ ਸਿੱਧ ਨਹੀਂ ਕਰਾਂਗੇ।)

13.5.2 ਬਹੁਪਦਾਂ ਅਤੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ (Derivatives of polynomials and trigonometric functions)

ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਮੇਯ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਾਂਗੇ ਜੋ ਸਾਨੂੰ ਬਹੁਪਦੀ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੱਸਦਾ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 7 : ਮੰਨ ਲਉ $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots. + a_1x + a_0$ ਇੱਕ ਬਹੁਪਦੀ ਫਲਨ ਹੈ ਜਿੱਥੇ a_i s ਸਾਰੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $a_n \neq 0$ ਤਾਂ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਫਲਨ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :

$$\frac{df(x)}{dx} = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{x-2} + \ldots + 2a_2x + a_1$$

ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਸਬੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ 5 ਅਤੇ 6 ਦੇ ਭਾਗ (i) ਨੂੰ ਸਾਤਰ ਨਾਲ ਰੱਖਣ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 13 : $6x^{100} - x^{55} + x$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਸਿੱਧਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀ ਫਲਨ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $600x^{99} - 55x^{54} + 1$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 14 : $x = 1$ ਤੇ $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^{50}$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀ ਪ੍ਰਮੇਯ 6 ਦਾ ਸਿੱਧਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤਾ ਫਲਨ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $1 + 2x + 3x^2 + . . . + 50x^{49}$ ਹੈ। $x = 1$ ਤੇ ਇਸ ਫਲਨ ਦਾ ਮੁੱਲ $1 + 2(1) + 3(1)^2 + . . . + 50(1)^{49} = 1 + 2 + 3 + . . . + 50 = \frac{(50)(51)}{2} = 1275$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 15 : $f(x) = \frac{x+1}{x}$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇਹ ਫਲਨ $x = 0$ ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਹਰੇਕ ਦੇ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ $u = x + 1$ ਅਤੇ $v = x$ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਭਾਗਫਲ ਨਿਯਮ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। $u' = 1$ ਅਤੇ $v' = 1$ ਇਸ ਲਈ

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{1(x)-(x+1)1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

ਉਦਾਹਰਣ 16 : $\sin x$ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦਾ ਪਰਿਕਲਨ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਲ ਲਉ $f(x) = \sin x$ ਹੈ, ਤਾਂ

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} \quad \text{(sin A – sin B ਦੇ ਸੂਤਰ ਰਾਹੀਂ)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x.1 = \cos x$$

ਉਦਾਹਰਣ 17 : $\tan x$ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦਾ ਪਰਿਕਲਨ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $f(x) = \tan x$ ਹੈ, ਤਾਂ

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)-\tan(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)} - \frac{\sin x}{\cos x}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\sin(x+h)\cos x - \cos(x+h)\sin x}{h\cos(x+h)\cos x}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h-x)}{h\cos(x+h)\cos x}$$ (sin (A + B) ਦੇ ਸੂਤਰ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ)

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} . \lim_{h \to 0} \frac{1}{\cos(x+h)\cos x}$$

$$= 1 . \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

ਉਦਾਹਰਣ 18 : $f(x) = \sin^2 x$ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦਾ ਪਰਿਕਲਨ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਇਸਦਾ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ Leibnitz ਗੁਣਾ ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x \sin x)$$

$$= (\sin x)' \sin x + \sin x (\sin x)'$$

$$= (\cos x)\sin x + \sin x(\cos x)$$

$$= 2\sin x \cos x = \sin 2x$$

ਅਭਿਆਸ 13.2

1. $x = 10$ ਤੇ $x^2 - 2$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. $x = 100$ ਤੇ $99x$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ
3. $x = 1$ ਤੇ x ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।
4. ਪਹਿਲੇ ਸਿਧਾਂਤ ਰਾਹੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (i) $x^3 - 27$ (ii) $(x-1)(x-2)$

   (iii) $\frac{1}{x^2}$ (iv) $\frac{x+1}{x-1}$

5. ਫਲਨ

$$f(x) = \frac{x^{100}}{100} + \frac{x^{99}}{99} + \ldots + \frac{x^2}{2} + x + 1$$

   ਦੇ ਲਈ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f'(1) = 100 f'(0)$

6. ਕਿਸੇ ਅਚੱਲ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ a ਦੇ ਲਈ $x^n + ax^{n-1} + a^2x^{n-2} + \ldots + a^{n-1}x + a^n$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।
7. ਕਿਸੇ ਅਚੱਲਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਲਈ

   (i) $(x-a)(x-b)$ (ii) $(ax^2+b)^2$ (iii) $\frac{x-a}{x-b}$

   ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।

8. ਕਿਸੇ ਅਚੱਲ a ਦੇ ਲਈ $\frac{x^n - a^n}{x-a}$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।

9. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $2x - \frac{3}{4}$ (ii) $(5x^3 + 3x - 1)(x - 1)$

(iii) $x^{-3}(5 + 3x)$ (iv) $x^5(3 - 6x^{-9})$

(v) $x^{-4}(3 - 4x^{-5})$ (vi) $\frac{2}{x+1} - \frac{x^2}{3x-1}$

10. ਪਹਿਲੇ ਸਿਧਾਂਤ ਰਾਹੀਂ $\cos x$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।

11. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $\sin x \cos x$ (ii) $\sec x$ (iii) $5\sec x + 4\cos x$

(iv) $\operatorname{cosec} x$ (v) $3\cot x + 5\operatorname{cosec} x$

(vi) $5\sin x - 6\cos x + 7$ (vii) $2\tan x - 7\sec x$

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 19 : ਪਹਿਲੇ ਸਿਧਾਂਤ ਤੋਂ f ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿੱਥੇ f ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ :

(i) $f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$ (ii) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

ਹੱਲ : (i) ਧਿਆਨ ਦੇਵੋ ਕਿ ਫਲਨ $x = 2$ 'ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਲੇਕਿਨ, ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ—

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{2(x+h)+3}{x+h-2} - \frac{2x+3}{x-2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(2x+2h+3)(x-2)-(2x+3)(x+h-2)}{h(x-2)(x+h-2)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(2x+3)(x-2)+2h(x-2)-(2x+3)(x-2)-h(2x+3)}{h(x-2)(x+h-2)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-7}{(x-2)(x+h-2)} = -\frac{7}{(x-2)^2}$$

ਦੁਬਾਰਾ ਧਿਆਨ ਦਵੋ ਕਿ $x = 2$ ਤੇ ਫਲਨ f' ਵੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(ii) $x = 0$ ਤੇ ਫਲਨ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਲੇਕਿਨ, ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left(x+h+\frac{1}{x+h}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[h + \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[h+\frac{x-x-h}{x(x+h)}\right]=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[h\left(1-\frac{1}{x(x+h)}\right)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[1-\frac{1}{x(x+h)}\right] = 1-\frac{1}{x^2}$$

ਦੁਬਾਰਾ ਧਿਆਨ ਦਵੋ ਕਿ $x = 0$ ਤੇ ਫਲਨ f' ਵੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 20 : ਪਹਿਲੇ ਸਿਧਾਂਤ ਤੋਂ ਫਲਨ $f(x)$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿੱਥੇ $f(x)$

(i) $\sin x+\cos x$ (ii) $x\sin x$

ਹੱਲ : (i) ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ $f'(x) = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)+\cos(x+h)-\sin x-\cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h+\cos x\cos h-\sin x\sin h-\sin x-\cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin h(\cos x-\sin x)+\sin x(\cos h-1)+\cos x(\cos h-1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}(\cos x-\sin x)+\lim_{h\to 0}\sin x\frac{(\cos h-1)}{h} + \lim_{h\to 0}\cos x\frac{(\cos h-1)}{h}$$

$$= \cos x-\sin x$$

(ii) $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)\sin(x+h)-x\sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)(\sin x\cos h+\sin h\cos x)-x\sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x\sin x(\cos h-1)+x\cos x\sin h+h(\sin x\cos h+\sin h\cos x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x\sin x(\cos h-1)}{h}+\lim_{h\to 0}\ x\cos x\frac{\sin h}{h}+\lim_{h\to 0}(\sin x\cos h+\sin h\cos x)$$

$$= x\cos x+\sin x$$

ਉਦਾਹਰਣ 21 : (i) $f(x) = \sin 2x$ (ii) $g(x) = \cot x$ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦਾ ਪਰਿਕਲਨ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : (i) ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਸੂਤਰ $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ ਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰੋ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(2\sin x\cos x)=2\frac{d}{dx}(\sin x\cos x)$$

$$= 2\left[(\sin x)'\cos x + \sin x(\cos x)'\right]$$

$$= 2\left[(\cos x)\cos x + \sin x(-\sin x)\right]$$

$$= 2(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

(ii) ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ, $g(x) = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ ਅਸੀਂ ਭਾਗਫਲ ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਇਸ ਫਲਨ ਤੇ ਕਰਾਂਗੇ, ਜਿੱਥੇ ਕਿਤੇ ਇਹ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ।

$$\frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx}(\cot x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

$$= \frac{(\cos x)'(\sin x) - (\cos x)(\sin x)'}{(\sin x)^2}$$

$$= \frac{(-\sin x)(\sin x) - (\cos x)(\cos x)}{(\sin x)^2}$$

$$= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

ਹੋਰ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਇਸਨੂੰ ਧਿਆਨ ਦੇ ਕੇ $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$ ਹੈ, ਪਰਿਕਲਨ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤੱਥ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\tan x$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $sec^2 x$ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਅਸੀਂ ਉਦਾਹਰਣ 17 ਵਿੱਚ ਵੇਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾਲ ਹੀ ਅਚੱਲ ਫਲਨ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ 0 ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$\frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx}(\cot x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\tan x}\right)$$

$$= \frac{(1)'(\tan x) - (1)(\tan x)'}{(\tan x)^2}$$

$$= \frac{(0)(\tan x) - (\sec x)^2}{(\tan x)^2}$$

$$= \frac{-\sec^2 x}{\tan^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

ਉਦਾਹਰਣ 22 : (i) $\dfrac{x^5 - \cos x}{\sin x}$ (ii) $\dfrac{x + \cos x}{\tan x}$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : (i) ਮੰਨ ਲਓ $h(x) = \dfrac{x^5 - \cos x}{\sin x}$ ਜਿੱਥੇ ਕਿਤੇ ਵੀ ਇਹ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ, ਅਸੀਂ ਇਸ ਫਲਨ 'ਤੇ ਭਾਗਫਲ ਨਿਯਮ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਾਂਗੇ।

$$h'(x) = \frac{(x^5 - \cos x)'\sin x - (x^5 - \cos x)(\sin x)'}{(\sin x)^2}$$

$$= \frac{(5x^4 + \sin x)\sin x - (x^5 - \cos x)\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-x^5\cos x + 5x^4\sin x + 1}{(\sin x)^2}$$

(ii) ਅਸੀਂ ਫਲਨ $\dfrac{x+\cos x}{\tan x}$ 'ਤੇ ਭਾਗਫਲ ਨਿਯਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿੱਥੇ ਕਿਤੇ ਵੀ ਇਹ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ।

$$h'(x) = \frac{(x+\cos x)'\tan x-(x+\cos x)(\tan x)'}{(\tan x)^2}$$

$$= \frac{(1-\sin x)\tan x-(x+\cos x)\sec^2 x}{(\tan x)^2}$$

ਅਧਿਆਇ 13 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. ਪਹਿਲੇ ਸਿਧਾਂਤ ਤੋਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $-x$ (ii) $(-x)^{-1}$ (iii) $\sin(x+1)$ (iv) $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)$

ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ (ਇਹ ਸਮਝਿਆ ਜਾਵੇ ਕਿ *a, b, c, d, p, q, r* ਅਤੇ *s* ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਗੈਰ-ਸਿਫ਼ਰ ਅਚੱਲ ਹਨ ਅਤੇ *m* ਅਤੇ *n* ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

2. $(x+a)$

3. $(px+q)\left(\dfrac{r}{x}+s\right)$

4. $(ax+b)(cx+d)^2$

5. $\dfrac{ax+b}{cx+d}$

6. $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$

7. $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$

8. $\dfrac{ax+b}{px^2+qx+r}$

9. $\dfrac{px^2+qx+r}{ax+b}$

10. $\dfrac{a}{x^4}-\dfrac{b}{x^2}+\cos x$

11. $4\sqrt{x}-2$

12. $(ax+b)^n$

13. $(ax+b)^n(cx+d)^m$

14. $\sin(x+a)$

15. $\operatorname{cosec} x \cot x$

16. $\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

17. $\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$

18. $\dfrac{\sec x-1}{\sec x+1}$

19. $\sin^n x$

20. $\dfrac{a+b\sin x}{c+d\cos x}$

21. $\dfrac{\sin(x+a)}{\cos x}$

22. $x^4(5\sin x-3\cos x)$

23. $(x^2+1)\cos x$

24. $(ax^2+\sin x)(p+q\cos x)$

25. $(x+\cos x)(x-\tan x)$

26. $\dfrac{4x+5\sin x}{3x+7\cos x}$

27. $\dfrac{x^2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x}$

28. $\dfrac{x}{1+\tan x}$

29. $(x+\sec x)(x-\tan x)$

30. $\dfrac{x}{\sin^n x}$

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

- ਫਲਨ ਦਾ ਆਕਾਂਖਿਅਤ ਮੁੱਲ ਜਿਹੜਾ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਖੱਬੇ ਵੱਲ ਦੇ ਬਿੰਦੂਆਂ 'ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਫਲਨ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ (Left handed limit) ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ (Right handed limit)
- ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾਵਾਂ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਲੋੜੀਂਦੇ ਮੁੱਲ ਹਨ ਜੇਕਰ ਉਹ ਸੰਪਾਤੀ ਹੋਣ।
- ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾਵਾਂ ਸੰਪਾਤੀ ਨਾ ਹੋਣ ਤਾਂ ਇਹ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ।
- ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ a ਅਤੇ ਫਲਨ ਦੇ ਲਈ $\lim_{x\to a} f(x)$ ਅਤੇ $f(a)$ ਸਮੁੱਲ ਨਹੀਂ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦੇ (ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਦੂਜਾ ਨਹੀਂ)।
- ਫਲਨਾਂ f ਅਤੇ g ਦੇ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ :

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}[f(x).g(x)] = \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

- ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਕੁਝ ਮੁੱਲਕ ਸੀਮਾਵਾਂ ਹਨ :

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n - a^n}{x-a} = na^{n-1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$$

- a ਤੇ ਫਲਨ f ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ਤੋਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
- ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ, ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਫਲਨ $f'(x)=\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ਤੋਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
- ਫਲਨਾਂ u ਅਤੇ v ਦੇ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ :

$$(u \pm v)'=u' \pm v'$$

$$(uv)'=u'v+uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$ ਬਸ਼ਰਤੇ ਸਾਰੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹਨ।

- ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕੁਝ ਮੁੱਲਕ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਹਨ :

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਨੋਟ

ਗਣਿਤ ਦੇ ਇਤਿਹਾਸ ਵਿੱਚ ਕਲਨ ਦੇ ਅਨਵੇਸ਼ਣ ਦੀ ਵਡਿਆਈ ਦੀ ਭਾਗੀਦਾਰੀ ਲਈ ਦੋ ਨਾਮ ਮੁੱਖ ਹਨ Issac Newton (1642 – 1727) ਅਤੇ G.W. Leibnitz (1646 – 1717)। ਸਤਾਰ੍ਹਵੀਂ ਸ਼ਤਾਬਦੀ ਵਿੱਚ ਦੋਨਾਂ ਨੇ ਅਜ਼ਾਦੀ ਨਾਲ ਕਲਨ ਦਾ ਅਨਵੇਸ਼ਣ ਕੀਤਾ। ਕਲਨ ਦੇ ਆਉਣ ਦੇ ਬਾਅਦ ਇਸਦੇ ਅੱਗੇ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਵਿਕਾਸ ਲਈ ਕਈ ਗਣਿਤਗਾਂ ਨੇ ਯੋਗਦਾਨ ਪਾਇਆ। ਕਰੜੇ ਸੰਕਲਪ ਦਾ ਮੁੱਖ ਉਪਰਾਲਾ ਮਹਾਨ ਗਣਿਤਗ A.L. Cauchy, J.L.Lagrange ਅਤੇ Karl Weierstrass ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ। Cauchy ਨੇ ਕਲਨ ਨੂੰ ਅਧਾਰ ਦਿੱਤਾ ਜਿਸਨੂੰ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਵਿਆਪਕ ਤੌਰ ’ਤੇ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕਾਂ ਵਿੱਚ ਸਵੀਕਾਰ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। Cauchy ਨੇ D’ Alembert ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੇ ਸੰਕਲਪ ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਦੇ ਰਾਹੀਂ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦਿੱਤੀ।

ਸੀਮਾ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ $\alpha = 0$ ਦੇ ਲਈ $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$ ਦੀ ਸੀਮਾ ਜਿਹੇ ਉਦਾਹਰਣ ਦਿੱਤੇ। ਉਹਨਾਂ ਨੇ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+i)-f(x)}{i}$, ਲਿਖਿਆ ਅਤੇ $i \to 0$, ਦੇ ਲਈ ਸੀਮਾ ਨੂੰ $f'(x)$ ਦੇ ਲਈ y' function derive's ਨਾਂ ਦਿੱਤਾ।

1900 ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਇਹ ਸੋਚਿਆ ਜਾਂਦਾ ਸੀ ਕਿ ਫਲਨ ਨੂੰ ਪੜ੍ਹਾਉਣਾ ਬਹੁਤ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਕਲਨ ਯੁਵਾਵਾਂ ਦੀ ਪਹੁੰਚ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਸੀ। ਪਰ ਠੀਕ 1900 ਵਿੱਚ ਇੰਗਲੈਂਡ ਵਿੱਚ John Perry ਅਤੇ ਹੋਰਾਂ ਨੇ ਇਸ ਵਿਚਾਰ ਦਾ ਪ੍ਰਸਾਰ ਕਰਨਾ ਸ਼ੁਰੂ ਕੀਤਾ ਕਿ ਕਲਨ ਦੀ ਮੁੱਖ ਵਿਧੀਆਂ ਅਤੇ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਸਰਲ ਹਨ ਅਤੇ ਸਕੂਲ ਦੇ ਸਤਰ ’ਤੇ ਵੀ ਪੜ੍ਹਾਈਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। F.L. Griffin ਨੇ ਕਲਨ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਨੂੰ ਪਹਿਲੇ ਸਾਲ ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਕੇ ਅਗਵਾਈ ਕੀਤੀ। ਉਹਨਾਂ ਦਿਨਾਂ ਵਿੱਚ ਇਹ ਬਹੁਤ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਸੀ।

ਅੱਜ ਨਾ ਸਿਰਫ਼ ਗਣਿਤ ਬਲਕਿ ਹੋਰ ਕਈ ਵਿਸ਼ਿਆਂ ਜਿਵੇਂ ਭੌਤਿਕੀ, ਰਸਾਇਣ ਵਿਗਿਆਨ, ਅਰਥ ਸ਼ਾਸ਼ਤਰ, ਜੀਵ ਵਿਗਿਆਨ ਵਿੱਚ ਕਲਨ ਦੀ ਉਪਯੋਗਿਤਾ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੈ।