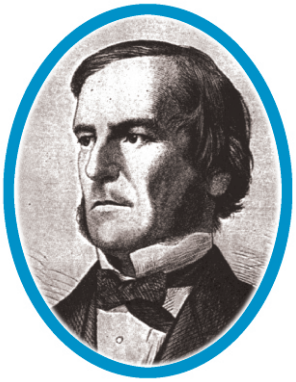
ਅਧਿਆਇ 14

ਗਣਿਤਕ ਵਿਵੇਚਨ
(Mathematical Reasoning)

❖*There are few things which we know which are not capable of mathematical reasoning and when these can not, it is a sign that our knowledge of them is very small and confused and where a mathematical reasoning can be had, it is as great a folly to make use of another, as to grope for a thing in the dark when you have a candle stick standing by you. – ARTHENBOT* ❖

14.1 ਭੂਮਿਕਾ



George Boole
(1815 - 1864)

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਗਣਿਤਕ ਵਿਵੇਚਨ ਤੋਂ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕੁਝ ਮੌਲਿਕ ਧਾਰਣਾਵਾਂ 'ਤੇ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ। ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਮਨੁੱਖ ਕਈ ਹਜ਼ਾਰਾਂ ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ, ਹੇਠਲੀਆਂ ਪ੍ਰਜਾਤੀਆਂ ਤੋਂ ਵਿਕਸਿਤ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਮਨੁੱਖ ਵਿੱਚ ਵਿਵੇਚਨ ਕਰਨ ਦੇ ਗੁਣ ਨੇ ਉਸਨੂੰ ਹੋਰ ਪ੍ਰਜਾਤੀਆਂ ਤੋਂ ਸ੍ਰੇਸ਼ਠ ਬਣਾਇਆ ਹੈ। ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਇਸ ਗੁਣ ਨੂੰ ਕਿੰਨੀ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਉਸਦੇ ਵਿਵੇਚਨ ਸ਼ਕਤੀ 'ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਸ਼ਕਤੀ ਨੂੰ ਕਿਵੇਂ ਵਿਕਸਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ? ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਵਿਵੇਚਨ ਦੀ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਦੀ ਚਰਚਾ ਖ਼ਾਸ ਤੌਰ 'ਤੇ ਗਣਿਤ ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਕਰਾਂਗੇ। ਗਣਿਤੀ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਵਿਵੇਚਨ ਦੋ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ—ਆਗਮੀ ਵਿਵੇਚਨ ਅਤੇ ਨਿਗਮੀ ਵਿਵੇਚਨ। ਗਣਿਤਕ ਆਗਮਨ (Mathematical Induction) ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਆਗਮੀ ਵਿਵੇਚਨ ਦੀ ਚਰਚਾ ਪਹਿਲਾਂ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਮੂਲ ਭੂਤ ਨਿਗਮੀ ਵਿਵੇਚਨ 'ਤੇ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

14.2 ਕਥਨ (Statements)

ਗਣਿਤਕ ਵਿਵੇਚਨ ਦੀ ਮੌਲਿਕ ਇਕਾਈ ਗਣਿਤੀ ਕਥਨ ਦੀ ਸੰਕਲਪਨਾ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਦੋ ਵਾਕਾਂ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਾਂਗੇ।

"ਸੰਨ 2003 ਵਿੱਚ ਭਾਰਤ ਦੀ ਰਾਸ਼ਟਰਪਤੀ ਇੱਕ ਮਹਿਲਾ ਸੀ।"

"ਕਿਸੇ ਹਾਥੀ ਦਾ ਭਾਰ ਇੱਕ ਮਨੁੱਖ ਦੇ ਭਾਰ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।"

ਇਹਨਾਂ ਵਾਕਾਂ ਨੂੰ ਪੜ੍ਹਦੇ ਹੀ ਅਸੀਂ ਤੁਰੰਤ ਫ਼ੈਸਲਾ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪਹਿਲਾ ਵਾਕ ਗ਼ਲਤ (ਝੂਠ) ਅਤੇ ਦੂਜਾ ਵਾਕ ਸਹੀ (ਸੱਚ) ਹੈ। ਇਸ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਸ਼ੱਕ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਇਹੋ-ਜਿਹੇ ਵਾਕਾਂ ਨੂੰ ਕਥਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਵਾਕ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

"ਔਰਤਾਂ, ਮਰਦਾਂ ਤੋਂ ਵੱਧ ਅਕਲਮੰਦ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।"

ਕੁਝ ਲੋਕਾਂ ਦੇ ਵਿਚਾਰ ਤੋਂ ਇਹ ਵਾਕ ਸੱਚ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਪਰ ਕੁਝ ਹੋਰ ਇਸ ਤੋਂ ਅਸਹਿਮਤ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਵਾਕ ਦੇ ਬਾਰੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਨਹੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਕਿ ਇਹ ਸੱਚ ਜਾਂ ਝੂਠ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਵਾਕ ਦੋ ਅਰਥਕ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਵਾਕ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਕਥਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਵੀਕਾਰ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

"ਇੱਕ ਵਾਕ ਗਣਿਤ ਅਨੁਸਾਰ ਕਥਨ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਉਹ ਜਾਂ ਤਾਂ ਸੱਚ ਹੋਵੇ ਜਾਂ ਝੂਠ ਹੋਵੇ ਪਰ ਦੋਵੇਂ (ਸੱਚ ਅਤੇ ਝੂਠ) ਨਾ ਹੋਵੇ।" ਹੁਣ ਜਦੋਂ ਵੀ ਅਸੀਂ ਕਥਨ ਦਾ ਉਲੇਖ ਕਰਾਂਗੇ ਸਾਡਾ ਭਾਵ ਗਣਿਤ ਅਨੁਸਾਰ ਸਵੀਕਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਕਥਨ ਹੀ ਹੋਵੇਗਾ। ਗਣਿਤ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਦੇ ਦੌਰਾਨ ਸਾਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਕਈ ਵਾਕ ਮਿਲਦੇ ਹਨ। ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ :

ਦੋ ਜੋੜ ਦੋ ਬਰਾਬਰ ਚਾਰ।

ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਧਨਾਤਮਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਇਹਨਾਂ ਵਿਚੋਂ ਪਹਿਲੇ ਦੋ ਵਾਕ ਸੱਚ ਹਨ ਅਤੇ ਤੀਜਾ ਵਾਕ ਝੂਠ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਵਾਕਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਕੋਈ ਵੀ ਸ਼ੱਕ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਵਾਕ ਕਥਨ ਹਨ।

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਕਿਸੇ ਇਹੋ-ਜਿਹੇ ਵਾਕ ਦੀ ਉਦਾਹਰਣ ਸੋਚ ਸਕਦੇ ਹੋ ਜਿਹੜਾ ਅਸੱਪਸ਼ਟ ਹੋਵੇ ? ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਵਾਕ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

x ਅਤੇ y ਦਾ ਜੋੜਫਲ 0 ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ।

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਕਿ ਵਾਕ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਝੂਠ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਨਾ ਪਤਾ ਹੋਵੇ ਕਿ x ਅਤੇ y ਕੀ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ $x = 1$ ਅਤੇ $y = -3$ ਦੇ ਲਈ ਇਹ ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ $x = 1$ ਅਤੇ $y = 0$ ਦੇ ਲਈ ਇਹ ਸੱਚ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਵਾਕ ਇੱਕ ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਵਾਕ ਇੱਕ ਕਥਨ ਹੈ :

ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਕਿਰਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ x ਅਤੇ y ਦਾ ਜੋੜਫਲ 0 ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ।

ਹੁਣ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਵਾਕਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

ਵਾਹ! ਕਿੰਨਾ ਸੁੰਦਰ!

ਦਰਵਾਜਾ ਖੋਲੋ।

ਤੁਸੀਂ ਕਿੱਥੇ ਜਾ ਰਹੇ ਹੋ?

ਕੀ ਇਹ ਕਥਨ ਹਨ ? ਨਹੀਂ, ਕਿਉਂਕਿ ਪਹਿਲਾ ਵਿਸਮਿਕ ਵਾਕ ਹੈ, ਦੂਜਾ ਇੱਕ ਆਦੇਸ਼ ਹੈ ਅਤੇ ਤੀਜਾ ਇੱਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਹੈ। ਗਣਿਤਕ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਨੂੰ ਵੀ ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਮੰਨਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਵਾਕ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਚਲ ਸਮਾਂ ਹੋਵੇ ਜਿਵੇਂ "ਅੱਜ", "ਕੱਲ੍ਹ", "ਬੀਤ ਚੁੱਕਾ ਕੱਲ੍ਹ", ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਇਸ ਲਈ ਕਿ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਪਤਾ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਕਿ ਕਿਸ ਸਮੇਂ ਦੀ ਚਰਚਾ ਹੋ ਰਹੀ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਵਾਕ

"ਕੱਲ੍ਹ ਸ਼ੁੱਕਰਵਾਰ ਹੈ।" ਇੱਕ ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਹ ਵਾਕ ਕਿਸੇ ਵੀਰਵਾਰ ਦੇ ਲਈ ਤਾਂ ਸੱਚ ਹੋਵੇਗਾ ਪਰੰਤੂ ਹੋਰ ਦਿਨਾਂ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਹ ਗੱਲ ਉਹਨਾਂ ਵਾਕਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਪੜਨਾਂਵ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਬਿਨਾਂ ਸੰਬੰਧਿਤ ਨਾਂਵ ਨੂੰ ਦੱਸੇ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਇਹੋ-ਜਿਹੇ ਵਾਕਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਚਲ ਸਥਾਨਾਂ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੋਵੇ, ਜਿਵੇਂ "ਇੱਥੇ", "ਉੱਥੇ" ਆਦਿ। ਭਾਵ ਇਹ ਹੋਇਆ ਕਿ ਵਾਕ

"ਉਹ ਗਣਿਤ ਦੀ ਇੱਕ ਸਨਾਤਕ ਹੈ"

"ਕਸ਼ਮੀਰ ਇੱਥੋਂ ਬੜੀ ਦੂਰ ਹੈ" ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਇੱਥੇ ਇੱਕ ਹੋਰ ਵਾਕ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ : *"ਇੱਕ ਮਹੀਨੇ ਵਿੱਚ 40 ਦਿਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।"*

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਸਨੂੰ ਇੱਕ ਕਥਨ ਕਹੋਗੇ ? ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਥੇ ਲਿਖਿਆ ਸਮਾਂ "ਚਲ" ਹੈ ਭਾਵ 12 ਮਹੀਨਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਇੱਕ। ਪਰੰਤੂ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਵਾਕ ਹਮੇਸ਼ਾ (ਮਹੀਨੇ ਦਾ ਧਿਆਨ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ) ਝੂਠ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇੱਕ ਮਹੀਨੇ ਵਿੱਚ ਦਿਨਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 31 ਤੋਂ ਵੱਧ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਵਾਕ ਇੱਕ ਕਥਨ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਤੱਥ ਕਿ ਇੱਕ ਵਾਕ ਜਾਂ ਤਾਂ ਸੱਚ ਹੋਵੇ ਜਾਂ ਝੂਠ ਹੋਵੇ ਪਰੰਤੂ ਦੋਵੇਂ ਨਾ ਹੋ ਸਕੇ ਇੱਕ ਕਥਨ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਅਸੀਂ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਛੋਟੇ ਅੱਖਰਾਂ $p, q, r, ...$ ਤੋਂ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਕਥਨ "ਅੱਗ ਸਦਾ ਗਰਮ ਹੁੰਦੀ ਹੈ" ਨੂੰ ਅਸੀਂ p ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਗੱਲ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੀ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ :

p : ਅੱਗ ਸਦਾ ਗਰਮ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਕੀ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਵਾਕ ਕਥਨ ਹਨ ? ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਨੂੰ ਕਾਰਨ ਨਾਲ ਲਿਖੋ।

(i) 8, 6 ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ।

(ii) ਹਰੇਕ ਸਮੂਹ ਇੱਕ ਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(iii) ਸੂਰਜ ਇੱਕ ਤਾਰਾ ਹੈ।

(iv) ਗਣਿਤ, ਰੌਚਿਕ ਵਿਸ਼ਾ ਹੈ।

(v) ਬਗ਼ੈਰ ਬੱਦਲਾਂ ਦੇ ਮੀਂਹ ਨਹੀਂ ਪੈਂਦਾ ਹੈ।

(vi) ਇੱਥੋਂ ਚੇਨੱਈ ਕਿੰਨੀ ਦੂਰ ਹੈ ?

ਹੱਲ : (i) ਇਹ ਵਾਕ ਝੂਠ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ 8, 6 ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਕਥਨ ਹੈ।

(ii) ਇਹ ਵਾਕ ਵੀ ਹਮੇਸ਼ਾ ਝੂਠ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇਹੋ-ਜਿਹੇ ਵੀ ਸਮੂਹ ਹਨ ਜਿਹੜੇ ਕਿ ਸੀਮਿਤ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਕਥਨ ਹੈ।

(iii) ਇਹ ਵਿਗਿਆਨਿਕ ਰੂਪ ਤੋਂ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਹੈ ਕਿ ਸੂਰਜ ਇੱਕ ਤਾਰਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਵਾਕ ਸੱਚ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਕਥਨ ਹੈ।

(iv) ਇਹ ਵਾਕ ਵਿਅਕਤੀਨਿਸ਼ਠ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਰੁਚੀ ਹੈ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਲਈ ਇਹ ਕੌਤੁਕ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਹੋਰਾਂ ਦੇ ਲਈ ਇਹੋ-ਜਿਹਾ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਹੋਇਆ ਕਿ ਇਹ ਵਾਕ ਸੱਚ ਜਾਂ ਝੂਠ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(v) ਇਹ ਵਿਗਿਆਨਿਕ ਰੂਪ ਤੋਂ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕੁਦਰਤੀ ਤੱਥ ਹੈ ਕਿ ਮੀਂਹ ਹੋਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਬੱਦਲ ਬਣਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਸਦਾ ਸੱਚ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਕਥਨ ਹੈ।

(vi) ਇਹ ਇੱਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਸ਼ਬਦ 'ਇੱਥੇ' ਵੀ ਆਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਪਰ ਦਿੱਤੇ ਉਦਾਹਰਣ ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ ਕਿ ਜਦੋਂ ਕਦੇ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਵਾਕ ਨੂੰ ਕਥਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਵੀ ਦੱਸਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅਜਿਹਾ ਕਿਉਂ ਹੈ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦੇ ਉੱਤਰ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਜੋਂ 'ਕਿਉਂ' ਵੱਧ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 14.1

1. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਵਾਕਾਂ ਵਿਚੋਂ ਕਿਹੜਾ ਕਥਨ ਹੈ ? ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦੇ ਲਈ ਕਾਰਨ ਵੀ ਦੱਸੋ।

(i) ਇੱਕ ਮਹੀਨੇ ਵਿੱਚ 35 ਦਿਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

(ii) ਗਣਿਤ ਇੱਕ ਔਖਾ (ਮੁਸ਼ਕਿਲ) ਵਿਸ਼ਾ ਹੈ।

(iii) 15 ਅਤੇ 7 ਦਾ ਜੋੜਫਲ 10 ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ।

(iv) ਕਿਸੇ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(v) ਕਿਸੇ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਲੰਬਾਈ ਦੀਆਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

(vi) ਇਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦਾ ਉੱਤਰ ਦਿਓ।

(vii) (–1) ਅਤੇ 8 ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ 8 ਹੈ।

(viii) ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਾਰੇ ਅੰਦਰਲੇ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ 180° ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(ix) ਅੱਜ ਤੇਜ਼ ਹਵਾਵਾਂ ਵਾਲਾ ਦਿਨ ਹੈ।

(x) ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ, ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

2. ਵਾਕਾਂ ਦੇ ਤਿੰਨ-ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਉਦਾਹਰਣ ਦਿਓ ਜਿਹੜਾ ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਉੱਤਰ ਦੇ ਲਈ ਕਾਰਣ ਦੱਸੋ ?

14.3 ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਪਤਾ ਕਥਨਾਂ ਤੋਂ ਨਵੇਂ ਕਥਨ ਬਣਾਉਣਾ (New Statements from Old)

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਪਤਾ ਕਥਨਾਂ ਤੋਂ ਨਵੇਂ ਕਥਨ ਬਣਾਉਣ ਦੀ ਵਿਧੀ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ। 1854 ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਅੰਗਰੇਜ਼ ਗਣਿਤਕਾਰ George Boole ਨੇ ਆਪਣੀ ਕਿਤਾਬ "The Law of Thought" ਵਿੱਚ ਵਿਧੀਆਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ, ਅਸੀਂ ਦੋ ਤਕਨੀਕਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ।

ਕਥਨ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲਾ ਚਰਣ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਤਕਨੀਕ ਤੇ ਨਜ਼ਰ ਪਾਵਾਂਗੇ ਜਿਸਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਗਣਿਤੀ ਵਾਕਾਂ ਦੀ ਆਪਣੀ ਸਮਝ ਨੂੰ ਵਧਾ ਸਕਾਂਗੇ। ਇਸ ਤਕਨੀਕ ਵਿੱਚ ਆਪਣੇ ਆਪ ਤੋਂ ਨਾ ਸਿਰਫ਼ ਇਹ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਪੁੱਛਾਂਗੇ ਕਿ ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵਾਕ ਦੇ ਸੱਚ ਹੋਣ ਦਾ ਕੀ ਭਾਵ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਬਲਕਿ ਇਹ ਵੀ ਕਿ ਉਸ ਵਾਕ ਦੇ ਸੱਚ ਨਾ ਹੋਣ ਦਾ ਭਾਵ ਕੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

14.3.1 *ਕਿਸੇ ਕਥਨ ਦਾ ਨਿਖੇਪਨ (Negation of a statement)* ਕਿਸੇ ਕਥਨ ਦਾ ਨਕਾਰਨਾ ਉਸ ਕਥਨ ਦਾ ਨਿਖੇਪਨ ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਵਾਕ: "ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ ਇੱਕ ਨਗਰ ਹੈ।"

ਇਸਦਾ ਨਿਖੇਪਨ ਹੇਠ ਪ੍ਰਕਾਰ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਇਹ ਵਸਤੂ ਸਥਿਤੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ ਇੱਕ ਨਗਰ ਹੈ। ਇਸਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਵੀ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

"ਇਹ ਝੂਠ ਹੈ ਕਿ ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ ਇੱਕ ਨਗਰ ਹੈ।"

ਸਰਲਤਾ ਨਾਲ ਇਹ ਵੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

"ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ ਇੱਕ ਨਗਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।"

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 1 ਜੇਕਰ p ਇੱਕ ਕਥਨ ਹੈ ਤਾਂ p ਦਾ ਨਿਖੇਪਨ ਉਹ ਕਥਨ ਹੈ ਜਿਹੜਾ p ਨੂੰ ਨਕਾਰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ ਪ੍ਰਤੀਕ $\sim p$ ਤੋਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸਨੂੰ "p ਨਹੀਂ" ਪੜ੍ਹਦੇ ਹਨ।

ਟਿੱਪਣੀ ਕਿਸੇ ਕਥਨ ਦੇ ਨਿਖੇਪਨ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ "ਇਹ ਵਸਤੂ ਸਥਿਤੀ ਨਹੀਂ ਹੈ" ਜਾਂ ਇਹ ਝੂਠ ਹੈ ਕਿ ਇੱਥੇ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਤੋਂ ਸਪਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਇੱਕ ਕਥਨ ਦੇ ਨਿਖੇਪਨ ਦਾ ਅਵਲੋਕਨ ਕਰਕੇ, ਅਸੀਂ ਉਸਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਆਪਣੀ ਸਮਝ ਸੁਧਾਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਵਾਕ *"ਜਰਮਨੀ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਵਿਅਕਤੀ ਜਰਮਨ ਬੋਲਦਾ ਹੈ।"*

ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਇਸ ਵਾਕ ਨੂੰ ਨਕਾਰਨ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਵਾਕ

"ਜਰਮਨ ਵਿੱਚ ਹਰ ਕੋਈ ਜਰਮਨ ਭਾਸ਼ਾ ਨਹੀਂ ਬੋਲਦਾ ਹੈ।"

ਇਸਦਾ ਇਹ ਅਰਥ ਨਹੀਂ ਹੋਇਆ ਕਿ "ਜਰਮਨੀ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵੀ ਵਿਅਕਤੀ ਜਰਮਨ ਭਾਸ਼ਾ ਨਹੀਂ ਬੋਲਦਾ ਹੈ।" ਇਹ ਕੇਵਲ ਇਹ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ "ਜਰਮਨੀ ਵਿੱਚ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਇਹੋ-ਜਿਹਾ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਜਰਮਨ ਭਾਸ਼ਾ ਨਹੀਂ ਬੋਲਦਾ ਹੈ।" ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਦਾ ਨਿਖੇਪਨ ਲਿਖੋ।

(i) ਕਿਸੇ ਆਇਤ ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਵਿਕਰਣਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(ii) $\sqrt{7}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ : (i) ਇਹ ਕਥਨ ਇਹ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ਸਾਰੇ ਆਇਤਾਂ ਵਿੱਚ ਦੋਨਾਂ ਵਿਕਰਣਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੋਇਆ ਕਿ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਕੋਈ ਆਇਤ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਇਸਦੇ ਦੋਨਾਂ ਵਿਕਰਣਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇਗੀ। ਇਸ ਕਥਨ ਦਾ ਨਿਖੇਪਨ,

"ਇਹ ਝੂਠ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਆਇਤ ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਵਿਕਰਣਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।" ਭਾਵ "ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਆਇਤ ਇਹੋ-ਜਿਹਾ ਹੈ, ਜਿਸਦੇ ਦੋਨਾਂ ਵਿਕਰਣਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।"

(ii) ਇਸ ਕਥਨ ਦਾ ਨਿਖੇਪਣ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

"ਇਹ ਵਸਤੂ ਸਥਿਤੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ $\sqrt{7}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।"

ਇਸਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੋਂ ਵੀ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

"$\sqrt{7}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ।"

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਨਿਖੇਪਨ ਲਿਖੋ ਅਤੇ ਜਾਂਚੋ ਕਿ ਕੀ ਪਰਿਮਾਣੀ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ?

(i) ਆਸਟ੍ਰੇਲੀਆ ਇੱਕ ਮਹਾਂਦੀਪ ਹੈ।

(ii) ਇਹੋ-ਜਿਹੇ ਕਿਸੇ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਚਾਰੇ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ।

(iii) ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ 0 ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(iv) 3 ਅਤੇ 4 ਦਾ ਜੋੜਫਲ 9 ਹੈ।

ਹੱਲ : (i) "ਇਹ ਝੂਠ ਹੈ ਕਿ ਆਸਟ੍ਰੇਲੀਆ ਇੱਕ ਮਹਾਂਦੀਪ ਹੈ।" ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਕਥਨ ਦਾ ਨਿਖੇਪਨ ਹੈ, ਇਸਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੀ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ । *"ਆਸਟ੍ਰੇਲੀਆ ਇੱਕ ਮਹਾਂਦੀਪ ਨਹੀਂ ਹੈ"* ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹੈ।

(ii) ਇਸ ਕਥਨ ਦਾ ਨਿਖੇਪਨ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ,

"ਇਹ ਸਥਿਤੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਇਹੋ, ਜਿਹੇ ਕਿਸੇ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ ਜਿਸਦੀਆਂ ਚਾਰੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ।"

ਇਸਦਾ ਤਾਤਪਰਜ ਹੋਇਆ ਕਿ *"ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਹੋਦ ਹੈ, ਜਿਸਦੀ ਚਾਰੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।"*

ਇਹ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਵਰਗ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿਸਦੀਆਂ ਚਾਰੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

(iii) ਇਸ ਕਥਨ ਦਾ ਨਿਖੇਪਨ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ,

"ਇਹ ਝੂਠ ਹੈ ਕਿ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ 0 ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।"

ਇਸਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਵੀ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ *"ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਪ੍ਰਾਕਿਰਤਕ ਸੰਖਿਆ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਜਿਹੜੀ 0 ਤੋਂ ਵੱਧ ਨਹੀਂ ਹੈ।"*

ਇਹ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹੈ।

(iv) ਲੋੜੀਂਦਾ ਨਿਖੇਪਨ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ, *"ਇਹ ਝੂਠ ਹੈ ਕਿ 3 ਅਤੇ 4 ਦਾ ਜੋੜਫਲ 9 ਹੈ।"* ਇਸਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਵੀ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ,

"3 ਅਤੇ 4 ਦਾ ਜੋੜਫਲ 9 ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।"

ਇਹ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ।

14.3.2 *ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ (Compound statements)* "ਅਤੇ", "ਜਾਂ" ਆਦਿ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਸੰਯੋਜਕ ਸ਼ਬਦਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇੱਕ ਜਾਂ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜ ਕੇ ਕਈ ਕਥਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ : "ਬਲਬ ਜਾਂ ਬਿਜਲੀ ਦੇ ਤਾਰ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਖ਼ਰਾਬੀ ਹੈ" ਇਹ ਕਥਨ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ਬਲਬ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਖ਼ਰਾਬੀ ਹੈ ਜਾਂ ਬਿਜਲੀ ਦੇ ਤਾਰ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਖ਼ਰਾਬੀ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਭਾਵ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਦੋ ਸੰਖੇਪ ਕਥਨਾਂ ਤੋਂ ਮਿਲ ਕੇ ਬਣਿਆ ਹੈ, ਜਿਹੜੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ :

q: 'ਬਲਬ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਖ਼ਰਾਬੀ ਹੈ'

r: 'ਬਿਜਲੀ ਦੇ ਤਾਰ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਖ਼ਰਾਬੀ ਹੈ' ਅਤੇ

ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਸ਼ਬਦ ਜਾਂ ਰਾਹੀਂ ਜੋੜਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਦੋ ਕਥਨ ਦਿੱਤੇ ਹਨ :

p: '7 ਇੱਕ ਵਿਖਮ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।'

q: '7 ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।'

ਇਹਨਾਂ ਦੋਵਾਂ ਨੂੰ ਸ਼ਬਦ 'ਅਤੇ' ਰਾਹੀਂ ਜੋੜਨ ਤੋਂ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਕਥਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ :

r: '7 ਇੱਕ ਵਿਖਮ ਅਤੇ ਅਭਾਜ ਦੋਵੇਂ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।'

ਇਹ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਹੈ।
ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀ ਚਰਚਾ ਤੋਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ :

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 2 ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਉਹ ਹੈ, ਜਿਹੜਾ ਦੋ ਜਾਂ ਦੋ ਤੋਂ ਵੱਧ ਕਥਨਾਂ ਤੋਂ ਮਿਲਕੇ ਬਣਿਆ ਹੋਵੇ, ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਕਥਨ ਨੂੰ ਘਟਕ ਕਥਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
ਆਓ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਦੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) ਅਕਾਸ਼ ਨੀਲਾ ਹੈ ਅਤੇ ਘਾਹ ਹਰਾ ਹੈ।

(ii) ਮੀਂਹ ਪੈ ਰਿਹਾ ਹੈ ਅਤੇ ਠੰਢ ਹੈ।

(iii) ਸਾਰੀਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ, ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ, ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਮਿਸ਼ਰਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

(iv) 0 ਇੱਕ ਧਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜਾਂ ਇੱਕ ਰਿਣ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇਹਨਾਂ ਵਿਚੋਂ ਹਰੇਕ ਤੇ ਅਸੀਂ ਵਾਰੀ-ਵਾਰੀ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ।

(i) ਘਟਕ ਕਥਨ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨੇ :

p: ਅਕਾਸ਼ ਨੀਲਾ ਹੈ।
q: ਘਾਹ ਹਰਾ ਹੈ।

ਸੰਯੋਜਕ ਸ਼ਬਦ 'ਅਤੇ' ਹੈ।

(ii) ਘਟਕ ਕਥਨ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ :

p: ਮੀਂਹ ਪੈ ਰਿਹਾ ਹੈ।
q: ਠੰਢ ਹੈ।

ਸੰਯੋਜਕ ਸ਼ਬਦ 'ਅਤੇ' ਹੈ।

(iii) ਘਟਕ ਕਥਨ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ :

p: ਸਾਰੀਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।
q: ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਮਿਸ਼ਰਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਸੰਯੋਜਕ ਸ਼ਬਦ 'ਅਤੇ' ਹੈ।

(iv) ਘਟਕ ਕਥਨ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ :

p: 0 ਇੱਕ ਧਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।
q: 0 ਇੱਕ ਰਿਣ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਸੰਯੋਜਕ ਸ਼ਬਦ 'ਜਾਂ' ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਉਹ ਸੱਚ ਹਨ ਜਾਂ ਨਹੀਂ।

(i) ਇੱਕ ਵਰਗ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੀਆਂ ਚਾਰੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

(ii) ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜਿਸਤ ਜਾਂ ਟਾਂਕ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

(iii) ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ, ਜਿਸਨੇ ਗਣਿਤ ਜਾਂ ਕੰਪਿਊਟਰ ਵਿਗਿਆਨ ਚੁਣਿਆ ਹੈ, MCA ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ।

(iv) ਚੰਡੀਗੜ੍ਹ, ਹਰਿਆਣਾ ਅਤੇ ਉੱਤਰ ਪ੍ਰਦੇਸ਼ ਦੀ ਰਾਜਧਾਨੀ ਹੈ।

(v) $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਜਾਂ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

(vi) 2, 4 ਅਤੇ 8 ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਜ 24 ਹੈ।

ਹੱਲ : (i) ਇੱਥੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ :

p: ਇੱਕ ਵਰਗ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

q: ਇੱਕ ਵਰਗ ਦੀਆਂ ਚਾਰੋਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਦੋਨੋਂ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹਨ। ਇੱਥੇ ਸੰਯੋਜਕ ਸ਼ਬਦ 'ਅਤੇ' ਹੈ।

(ii) ਇੱਥੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ :

p: ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜਿਸਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

q: ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਟਾਂਕ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਇਹ ਦੋਨੋਂ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹਨ। ਇੱਥੇ ਸੰਯੋਜਕ ਸ਼ਬਦ 'ਜਾਂ' ਹੈ।

(iii) ਇੱਥੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਹਨ :

p: ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ, ਜਿਸਨੇ ਗਣਿਤ ਦਾ ਚੁਨਾਵ ਕੀਤਾ ਹੈ, MCA ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ।

q: ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ, ਜਿਸਨੇ ਕੰਪਿਊਟਰ ਵਿਗਿਆਨ ਦਾ ਚੁਨਾਵ ਕੀਤਾ ਹੈ, MCA ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਇਹ ਦੋਵੇਂ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹਨ। ਇੱਥੇ ਸੰਯੋਜਕ ਸ਼ਬਦ ਜਾਂ ਹੈ।

(iv) ਇੱਥੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ :

p: ਚੰਡੀਗੜ੍ਹ, ਹਰਿਆਣਾ ਦੀ ਰਾਜਧਾਨੀ ਹੈ।

q: ਚੰਡੀਗੜ੍ਹ, ਉੱਤਰ ਪ੍ਰਦੇਸ਼ ਦੀ ਰਾਜਧਾਨੀ ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲਾ ਘਟਕ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਜਾ ਝੂਠ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਸੰਯੋਜਕ ਸ਼ਬਦ 'ਅਤੇ' ਹੈ।

(v) ਲੋੜੀਂਦੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਹਨ :

p: $\sqrt{2}$ *ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।*

q: $\sqrt{2}$ *ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।*

ਇੱਥੇ ਪਹਿਲਾ ਘਟਕ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਜਾ ਸੱਚ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਸੰਯੋਜਕ ਸ਼ਬਦ 'ਜਾਂ' ਹੈ।

(vi) ਇਸ ਵਿੱਚ ਘਟਕ ਕਥਨ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਹਨ :

p: 2 *ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਜ* 24 *ਹੈ।*

q: 4 *ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਜ* 24 *ਹੈ।*

r: 8 *ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਜ* 24 *ਹੈ।*

ਇਹ ਤਿੰਨੋਂ ਹੀ ਘਟਕ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹਨ। ਇੱਥੇ ਸੰਯੋਜਕ ਸ਼ਬਦ 'ਅਤੇ' ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਦੋ ਜਾਂ ਦੋ ਤੋਂ ਵੱਧ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ 'ਅਤੇ' 'ਜਾਂ' ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਰਾਹੀਂ ਜੋੜਨ ਤੋਂ ਬਣਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਸ਼ਬਦ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਖ਼ਾਸ ਮਹੱਤਵ ਰੱਖਦੇ ਹਨ। ਅਗਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

ਅਭਿਆਸ 14.2

1. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਨਿਖੇਪਣ ਲਿਖੋ :

(i) ਚੇਨੱਈ, ਤਮਿਲਨਾਡੂ ਦੀ ਰਾਜਧਾਨੀ ਹੈ।

(ii) $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਤ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(iii) ਸਾਰੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਮਬਾਹੂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ।

(iv) ਸੰਖਿਆ 2 ਸੰਖਿਆ 7 ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ।

(v) ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਾਕਿਰਤਕ ਸੰਖਿਆ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਅੰਕ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

2. ਕੀ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਯੁਗਮ ਇੱਕ-ਦੂਜੇ ਦੇ ਨਿਖੇਪਨ ਹਨ ?

(i) ਸੰਖਿਆ x ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ।
ਸੰਖਿਆ x ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(ii) ਸੰਖਿਆ x ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।
ਸੰਖਿਆ x ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

3. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਜਾਂਚੋ ਕਿ ਉਹ ਸੱਚ ਹਨ ਜਾਂ ਝੂਠ ਹਨ ?

(i) ਸੰਖਿਆ 3 ਅਭਾਜ ਹੈ ਜਾਂ ਟਾਂਕ ਹੈ।

(ii) ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਧਨ ਹਨ ਜਾਂ ਰਿਣ ਹਨ।

(iii) ਸੰਖਿਆ 100, ਸੰਖਿਆਵਾਂ 3, 11 ਅਤੇ 5 ਨਾਲ ਭਾਗਯੋਗ ਹੈ।

14.4 ਖ਼ਾਸ ਸ਼ਬਦ/ਵਾਕਾਂ ਦੇ ਅੰਸ਼ (Special Words/Phrases)

ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ 'ਅਤੇ', 'ਜਾਂ' ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਕੁਝ ਸੰਯੋਜਕ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਗਣਿਤੀ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਸੰਯੋਜਕ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਕਦੇ ਅਸੀਂ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੀ ਭੂਮਿਕਾ ਸਮਝ ਸਕੀਏ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤੇ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

14.4.1 ***ਸੰਯੋਜਕ 'ਅਤੇ' (The word 'And') :*** ਸੰਯੋਜਕ 'ਅਤੇ' ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਰਾਹੀਂ ਬਣਿਆ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

p: ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦਾ ਇੱਕ ਸਥਾਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸਦੀ ਸਥਿਤੀ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਇਸ ਕਥਨ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਦੋ ਘਟਕ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚ ਵਿਘਟਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

q: ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦਾ ਇੱਕ ਸਥਾਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

r: ਉਸਦੀ ਸਥਿਤੀ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਦੋਨੋਂ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹਨ।

ਇੱਕ ਹੋਰ ਕਥਨ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

p: ਸੰਖਿਆ 42 ਸੰਖਿਆਵਾਂ 5, 6 ਅਤੇ 7 ਨਾਲ ਭਾਗਯੋਗ ਹੈ।

ਇਸ ਕਥਨ ਦਾ ਵਿਘਟਨ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ,

q: ਸੰਖਿਆ 42 *ਸੰਖਿਆ* 5 *ਨਾਲ ਭਾਗਯੋਗ ਹੈ।*

r: ਸੰਖਿਆ 42 *ਸੰਖਿਆ* 6 *ਨਾਲ ਭਾਗਯੋਗ ਹੈ।*

s: ਸੰਖਿਆ 42 *ਸੰਖਿਆ* 7 *ਨਾਲ ਭਾਗਯੋਗ ਹੈ।*

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਪਹਿਲਾ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹੈ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਦੋ ਸੱਚ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨਿਯਮ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

1. ਸੰਯੋਜਕ 'ਅਤੇ' ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਰਾਹੀਂ ਬਣਿਆ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੋਵੇਗਾ ਜੇਕਰ ਉਸਦੇ ਸਾਰੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੋਣ।
2. ਸੰਯੋਜਕ 'ਅਤੇ' ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਰਾਹੀਂ ਬਣਿਆ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹੋਵੇਗਾ ਜੇਕਰ ਇਸਦਾ ਇੱਕ ਵੀ ਘਟਕ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹੋਵੇ (ਇਸ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤੀ ਵੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇਸਦੇ ਕੁਝ ਘਟਕ ਕਥਨ ਜਾਂ ਸਾਰੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹੋਣ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਦੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਲਿਖੋ ਅਤੇ ਜਾਂਚੋ ਕਿ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਝੂਠ ਹੈ।

(i) ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਸਿੱਧੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਦੋਵਾਂ ਦਿਸ਼ਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਅਨੰਤ ਤੱਕ ਫੈਲੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(ii) 0 ਹਰੇਕ ਧਨ ਪੂਰਨ ਅੰਕ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਰਿਣ ਪੂਰਨ ਅੰਕ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(iii) ਹਰੇਕ ਜ਼ਿੰਦਾ ਜੀਵ ਦੇ ਦੋ ਪੈਰ ਅਤੇ ਦੋ ਅੱਖਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਹੱਲ : (i) ਘਟਕ ਕਥਨ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ :

p: ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਸਿੱਧੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

q: ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੋਵਾਂ ਦਿਸ਼ਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਅਨੰਤ ਤੱਕ ਫੈਲੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਦੋਵੇਂ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ।

(ii) ਇੱਥੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ :

p: 0 ਹਰੇਕ ਧਨ ਪੂਰਨ ਅੰਕ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

q: 0 ਹਰੇਕ ਰਿਣ ਪੂਰਨ ਅੰਕ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਹਨਾਂ ਵਿਚੋਂ ਦੂਜਾ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਵੀ ਝੂਠ ਹੈ।

(iii) ਲੋੜੀਂਦੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਹਨ :

p: 'ਹਰੇਕ ਜ਼ਿੰਦਾ ਜੀਵ ਦੇ ਦੋ ਪੈਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।'

q: 'ਹਰੇਕ ਜ਼ਿੰਦਾ ਜੀਵ ਦੀਆਂ ਦੋ ਅੱਖਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।'

ਇਹ ਦੋਨੋਂ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਵੀ ਝੂਠ ਹੈ।

ਹੁਣ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

p: ਐਲਕੋਹਲ ਅਤੇ ਪਾਣੀ ਦੇ ਮਿਸ਼ਰਨ ਨੂੰ ਰਸਾਇਣਿਕ ਵਿਧੀਆਂ ਰਾਹੀਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਕਥਨ ਨੂੰ ਸ਼ਬਦ 'ਅਤੇ' ਨਾਲ ਬਣਿਆ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਮੰਨਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਸ਼ਬਦ 'ਅਤੇ' ਦੋ ਵਸਤੂਆਂ ਐਲਕੋਹਲ ਅਤੇ ਪਾਣੀ ਦਾ ਉਲੇਖ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਅੱਗੇ ਟਿੱਪਣੀ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੈ :

ਟਿੱਪਣੀ : ਇਹ ਨਹੀਂ ਸਮਝਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਕਿ ਸ਼ਬਦ 'ਅਤੇ' ਤੋਂ ਦਿੱਤੇ ਵਾਕ ਹਮੇਸ਼ਾ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਸ਼ਬਦ 'ਅਤੇ', ਦੋ ਵਾਕਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੇ ਲਈ ਨਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ।

14.4.2 *ਸ਼ਬਦ 'ਜਾਂ' ਤੋਂ ਦਿੱਤੇ ਵਾਕ (The word "Or")*

ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

p: ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਤੇ ਸਥਿਤ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਜਾਂ ਤਾਂ ਇੱਕ-ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ ਜਾਂ ਉਹ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਸੱਚਾ ਕਥਨ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਕੀ ਅਰਥ ਹੈ ? ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਤੇ ਸਥਿਤ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਜੇਕਰ ਇੱਕ-ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਉਹ ਸਮਾਂਤਰ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਜੇਕਰ ਇਹੋ ਜਿਹੀਆਂ ਦੋਨੋਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਉਹ ਇੱਕ-ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ।' ਭਾਵ ਇਹ ਕਥਨ ਦੋਨਾਂ ਹੀ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਸੱਚ ਹੈ।

ਸ਼ਬਦ 'ਜਾਂ' ਤੋਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਸਮਝਣ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ 'ਜਾਂ' ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਦੋ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ :

p: 'ਕਿਸੇ ਢਾਬੇ ਵਿੱਚ ਇੱਕ 'ਥਾਲੀ' ਦੇ ਨਾਲ ਆਈਸਕ੍ਰੀਮ ਜਾਂ ਪੇਪਸੀ ਵੀ ਮਿਲ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।'

ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੋਇਆ ਕਿ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਜਿਹੜਾ ਆਈਸਕ੍ਰੀਮ ਨਹੀਂ ਚਾਹੁੰਦਾ ਉਹ ਥਾਲੀ ਦੇ ਨਾਲ ਪੇਪਸੀ ਲੈ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਉਹ ਥਾਲੀ ਦੇ ਨਾਲ ਆਈਸਕ੍ਰੀਮ ਲੈ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਭਾਵ ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਵਿਅਕਤੀ ਪੇਪਸੀ ਨਹੀਂ ਚਾਹੁੰਦਾ ਉਹ ਆਈਸਕ੍ਰੀਮ ਲੈ

ਸਕਦਾ ਹੈ। ਲੇਕਿਨ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਦੋਵੇਂ ਵਸਤੂਆਂ ਭਾਵ ਆਈਸਕ੍ਰੀਮ ਅਤੇ ਪੇਪਸੀ ਨਹੀਂ ਲੈ ਸਕਦਾ ਇਹ ਨਿਵੇਕਲਾ 'ਜਾਂ' ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਇੱਕ ਕਥਨ (ਹੋਰ) ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

'ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ, ਜਿਸਨੇ ਜੀਵ ਵਿਗਿਆਨ ਜਾਂ ਰਸਾਇਣ ਵਿਗਿਆਨ ਵਿਸ਼ਿਆਂ ਨੂੰ ਚੁਣਿਆ ਹੈ ਉਹ ਸੂਕਸ਼ਮ ਜੀਵ ਵਿਗਿਆਨ ਪਾਠਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਐਮ.ਐਸ.ਸੀ. ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ।'

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉਹ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਜਿਹਨਾਂ ਨੇ ਜੀਵ ਵਿਗਿਆਨ ਅਤੇ ਰਸਾਇਣ ਵਿਗਿਆਣ ਦੋਨਾਂ ਹੀ ਵਿਸ਼ਿਆਂ ਦਾ ਚੁਨਾਵ ਕੀਤਾ ਹੈ, ਉਹ ਸੂਕਸ਼ਮ ਜੀਵ ਵਿਗਿਆਨ ਪਾਠਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਦਾਖਿਲਾ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਨਾਲ ਹੀ ਉਹ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਜਿਹਨਾਂ ਨੇ ਇਹਨਾਂ ਵਿਸ਼ਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ਾ ਚੁਣਿਆ ਹੈ ਉਹ ਵੀ ਇਸ ਪਾਠਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਦਾਖਿਲਾ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਸ਼ਾਮਿਲ 'ਜਾਂ' ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਦੋਨਾਂ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ ਜਾਨਣਾ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ ਇਸਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਉਸ ਸਮੇਂ ਜਾਂਚਾਂਗੇ ਕਿ ਕੋਈ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਝੂਠ।

ਆਓ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਰੇਕ ਕਥਨ ਵਿੱਚ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਨਿਵੇਕਲਾ 'ਜਾਂ' ਜਾਂ ਸ਼ਾਮਿਲ ਜਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਆਪਣਾ ਉੱਤਰ ਕਾਰਨ ਸਹਿਤ ਦੱਸੋ।

(i) ਕਿਸੇ ਦੇਸ਼ ਵਿੱਚ ਜਾਣ ਲਈ ਪਾਸਪੋਰਟ ਜਾਂ ਮਤਦਾਤਾ ਪਹਿਚਾਣ ਪੱਤਰ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(ii) ਛੁੱਟੀ ਜਾਂ ਐਤਵਾਰ ਦੇ ਦਿਨ ਸਕੂਲ ਬੰਦ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ।

(iii) ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਇੱਕ-ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ ਜਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

(iv) ਤੀਜੀ ਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਫਰੈਂਚ ਭਾਸ਼ਾ ਜਾਂ ਸੰਸਕ੍ਰਿਤ ਭਾਸ਼ਾ ਦਾ ਚੁਨਾਵ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : (i) ਇੱਥੇ 'ਜਾਂ' ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਕਿਸੇ ਦੇਸ਼ ਵਿੱਚ ਜਾਣ ਲਈ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਕੋਲ ਪਾਸਪੋਰਟ ਅਤੇ ਮਤਦਾਤਾ ਪਹਿਚਾਣ ਪੱਤਰ ਦੋਨੋਂ ਹੀ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ।

(ii) ਇੱਥੇ ਵੀ 'ਜਾਂ' ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਸਕੂਲ ਛੁੱਟੀ ਦੇ ਦਿਨ ਅਤੇ ਨਾਲ ਹੀ ਐਤਵਾਰ ਨੂੰ ਬੰਦ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ।

(iii) ਇੱਥੇ 'ਜਾਂ' ਨਿਵੇਕਲਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਦੋਨੋਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਇਹ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਇੱਕ-ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਕੱਟਣ ਅਤੇ ਨਾਲ ਹੀ ਸਮਾਂਤਰ ਵੀ ਹੋਣ।

(iv) ਇੱਥੇ ਵੀ 'ਜਾਂ' ਨਿਵੇਕਲਾ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਕੋਈ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਤੀਜੀ ਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਫਰੈਂਚ ਅਤੇ ਸੰਸਕ੍ਰਿਤ ਦੋਨੋਂ ਨਹੀਂ ਲੈ ਸਕਦਾ।

ਸੰਯੋਜਕ 'ਜਾਂ' ਤੋਂ ਦਿੱਤੇ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਦੇ ਲਈ ਨਿਯਮ

1. ਸ਼ਾਮਿਲ 'ਜਾਂ' ਤੋਂ ਦਿੱਤੇ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਉਸਦਾ ਕੋਈ ਇੱਕ ਘਟਕ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੋਵੇ ਜਾਂ ਉਸਦੇ ਦੋਨੋਂ ਹੀ ਘੱਟਕ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੋਣ।
2. ਸ਼ਾਮਿਲ 'ਜਾਂ' ਤੋਂ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ (ਮਿਸ਼ਰਿਤ) ਝੂਠ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਉਸਦੇ ਦੋਨਾਂ ਹੀ ਘੱਟਕ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

p: *'ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਇੱਕ-ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ ਜਾਂ ਉਹ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ'*

ਇਸਦੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ :

q: *ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਇੱਕ-ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ।*

r: *ਉਹ (ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ) ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ।*

ਇੱਥੇ ਜੇਕਰ q ਸੱਚ ਹੈ ਤਾਂ r ਝੂਠ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇਕਰ r ਸੱਚ ਹੈ ਤਾਂ q ਝੂਠ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ p ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ।

ਇੱਕ ਹੋਰ ਕਥਨ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

p: *'ਸੰਖਿਆ 125, ਸੰਖਿਆ 7 ਜਾਂ ਸੰਖਿਆ 8 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ।'*

ਇਸਦੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ :

q: *ਸੰਖਿਆ 125, ਸੰਖਿਆ 7 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ।*

r: *ਸੰਖਿਆ 125, ਸੰਖਿਆ 8 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ।*

ਇੱਥੇ q ਅਤੇ r ਦੋਨੋਂ ਹੀ ਝੂਠ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ p ਵੀ ਝੂਠ ਹੈ।

ਦੁਬਾਰਾ, ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ

p: 'ਸਕੂਲ ਬੰਦ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਅੱਜ ਛੁੱਟੀ ਹੈ ਜਾਂ ਐਤਵਾਰ ਹੈ।'

ਇਸਦੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ :

q: *ਸਕੂਲ ਬੰਦ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਅੱਜ ਛੁੱਟੀ ਹੈ।*

r: *ਸਕੂਲ ਬੰਦ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਅੱਜ ਐਤਵਾਰ ਹੈ।*

q ਅਤੇ r ਦੋਨੋਂ ਕਥਨ ਹੀ ਸੱਚ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ।

ਇੱਕ ਹੋਰ ਕਥਨ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

p: *'ਮੁੰਬਈ, ਕੋਲਕਾਤਾ ਜਾਂ ਕਰਨਾਟਕ ਦੀ ਰਾਜਧਾਨੀ ਹੈ।'*

ਇਸਦੇ ਘਟਕ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹਨ :

q : *ਮੁੰਬਈ, ਕੋਲਕਾਤਾ ਦੀ ਰਾਜਧਾਨੀ ਹੈ।*

r : *ਮੁੰਬਈ, ਕਰਨਾਟਕ ਦੀ ਰਾਜਧਾਨੀ ਹੈ।*

ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀਆਂ ਕਥਨਾਂ ਝੂਠ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਵੀ ਝੂਠ ਹੈ।

ਆਓ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ :

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ 'ਜਾਂ' ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਪਹਿਚਾਣ ਕਰਕੇ ਜਾਂਚੋ ਕਿ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਝੂਠ ਹੈ।

(i) $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜਾਂ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

(ii) ਕਿਸੇ ਪਬਲਿਕ ਪੁਸਤਕਾਲਾ ਵਿੱਚ ਦਾਖਲੇ ਲਈ ਬੱਚਿਆਂ ਨੂੰ ਸਕੂਲ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਪਹਿਚਾਣ ਪੱਤਰ ਜਾਂ ਸਕੂਲ ਅਧਿਕਾਰੀਆਂ ਰਾਹੀਂ ਲਿਖੇ ਪੱਤਰ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(iii) ਆਇਤ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਜਾਂ ਇੱਕ ਪੰਜ-ਭੁਜੀ ਬਹੁਭੁਜ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : (i) ਘਟਕ ਕਥਨ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹਨ :

p: $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

q: $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇੱਥੇ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਪਹਿਲਾ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਜਾ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ 'ਜਾਂ' ਨਿਵੇਕਲਾ ਹੈ।

(ii) ਘਟਕ ਕਥਨ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ :

p: *ਕਿਸੇ ਪਬਲਿਕ ਪੁਸਤਕਾਲਾ ਵਿੱਚ ਦਾਖਲੇ ਲਈ ਬੱਚਿਆਂ ਨੂੰ ਸਕੂਲ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਪਹਿਚਾਣ ਪੱਤਰ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।*

q: *ਕਿਸੇ ਪਬਲਿਕ ਪੁਸਤਕਾਲਾ ਵਿੱਚ ਦਾਖਲੇ ਲਈ ਬੱਚਿਆਂ ਨੂੰ ਸਕੂਲ ਅਧਿਕਾਰੀਆਂ ਰਾਹੀਂ ਲਿਖਿਆ ਪੱਤਰ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।*

ਇੱਥੇ ਪੁਸਤਕਾਲਾ ਵਿੱਚ ਦਾਖਲੇ ਦੇ ਲਈ ਬੱਚਿਆਂ ਦੇ ਕੋਲ ਜਾਂ ਤਾਂ ਪਹਿਚਾਣ ਪੱਤਰ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਸਕੂਲ ਦੇ ਅਧਿਕਾਰੀਆਂ ਰਾਹੀਂ ਲਿਖਿਆ ਪੱਤਰ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਦੋਨੋਂ ਕਾਗਜ਼ਾਤ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇੱਥੇ 'ਜਾਂ' ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ।

(iii) ਇੱਥੇ 'ਜਾਂ' ਨਿਵੇਕਲਾ ਹੈ। ਘਟਕ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਅਧਾਰ 'ਤੇ ਇਹ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ।

ਪਰਿਮਾਣਵਾਚਕ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ (Quantifiers Phrases) "ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ "ਜਾਂ" 'ਸਾਰਿਆਂ ਦੇ ਲਈ/ ਹਰੇਕ ਲਈ" ਇਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਖਾਸ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ਾਂ ਨੂੰ ਪਰਿਮਾਣ ਵਾਚਕ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਗਣਿਤੀ ਕਥਨ ਵਿੱਚ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ "ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ" ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਕਥਨ 'ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਆਇਤ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਲੰਬਾਈ ਦੀਆਂ ਹਨ' ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਇਸ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਆਇਤ ਹੈ ਜਿਸਦੀ ਸਾਰੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

ਵਾਕ ਅੰਸ਼ "ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਦੀ ਹੋਂਦ" ਤੋਂ ਨੇੜੇ ਦਾ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ "ਹਰੇਕ ਲਈ" ਹੈ। ਆਉ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਭਾਵ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ,

'ਹਰੇਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ p ਦੇ ਲਈ, $\sqrt{p}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।'

ਇਸਦਾ ਭਾਵ ਹੋਇਆ ਕਿ ਜੇਕਰ S ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ, ਤਾਂ ਸਮੂਹ S ਦੇ ਹਰੇਕ ਮੈਂਬਰ p ਦੇ ਲਈ, $\sqrt{p}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਤੋਂ ਕਿਸੇ ਗਣਿਤੀ ਕਥਨ ਵਿੱਚ 'ਹਰੇਕ ਲਈ' ਵਾਕ ਅੰਸ਼ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੋਂ ਇਹ ਅਰਥ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਖਾਸ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸ ਸਮੂਹ ਦੇ ਹਰੇਕ ਮੈਂਬਰ ਵਿੱਚ ਉਹ ਖ਼ਾਸ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ।

ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਵੀ ਧਿਆਨ ਦੇਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਗੱਲ ਦਾ ਜਾਨਣਾ ਵੀ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਵਾਕ ਵਿੱਚ ਸੰਯੋਜਕ ਨੂੰ ਠੀਕ-ਠੀਕ ਕਿਸੇ ਸਥਾਨ 'ਤੇ ਲਿਖਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਦੋ ਵਾਕਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰੋ :

1. ਹਰੇਕ ਧਨ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ x ਦੇ ਲਈ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਧਨ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ y ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਕਿ $y < x$
2. ਇੱਕ ਧਨ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ y ਦਾ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਕਿ ਹਰੇਕ ਧਨ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ x ਦੇ ਲਈ $y < x$

ਜਦੋਂ ਕਿ ਇੰਜ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ ਦੋਨਾਂ ਵਾਕਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਹੀ ਅਰਥ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਇੰਜ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਕਥਨ (1) ਸੱਚ ਹੈ ਜਦੋਂਕਿ (2) ਝੂਠ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਗਣਿਤੀ ਵਾਕ ਦੇ ਅਰਥ ਪੂਰਨ ਹੋਣ ਲਈ ਸੰਯੋਜਕਾਂ ਜਾਂ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ਾਂ ਦਾ ਠੀਕ ਸਥਾਨ 'ਤੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ, ਨਾ ਹੀ ਪਹਿਲਾਂ ਤੇ ਨਾਂ ਹੀ ਬਾਦ ਵਿੱਚ,

ਸ਼ਬਦ 'ਅਤੇ' ਅਤੇ 'ਜਾਂ' ਸੰਯੋਜਕ ਕਹਿਲਾਉਂਦੇ ਹਨ ਅਤੇ "ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ" ਅਤੇ "ਹਰੇਕ ਲਈ" ਨੂੰ ਪਰਿਮਾਣ ਵਾਚਕ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਈ ਗਣਿਤੀ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਖਾਸ ਸ਼ਬਦਾਂ/ਵਾਕ ਅੰਸ਼ਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਹਨਾਂ ਨਾਲ ਜੁੜਿਆ ਅਰਥ ਸਮਝਣਾ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੈ, ਖ਼ਾਸ ਤੌਰ ਤੇ ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਕਥਨਾਂ ਦੀ ਵੈਧਤਾ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰਨੀ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 14.3

1. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲਾਂ ਸੰਯੋਜਕ ਸ਼ਬਦਾਂ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਣੋ ਅਤੇ ਫੇਰ ਉਹਨਾ ਨੂੰ ਘਟਕ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡੋ :

(i) ਸਾਰੀਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਮਿਸ਼ਰਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

(ii) ਕਿਸੇ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗ ਧਨ ਜਾਂ ਰਿਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(iii) ਰੇਤ ਧੁੱਪ ਵਿੱਚ ਜਲਦੀ ਗਰਮ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਰਾਤ ਨੂੰ ਜਲਦੀ ਠੰਢੀ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(iv) $x = 2$ ਅਤੇ $x = 3$; ਸਮੀਕਰਣ $3x^2 - x - 10 = 0$ ਦੇ ਮੂਲ ਹਨ।

2. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਪਰਿਮਾਣਵਾਚਕ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ ਪਹਿਚਾਣੋ ਅਤੇ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਨਿਖੇਪਨ ਲਿਖੋ :

(i) ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਸੰਖਿਆ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ, ਜੋ ਆਪਣੇ ਵਰਗ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

(ii) ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ x ਦੇ ਲਈ x, $(x+1)$ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(iii) ਭਾਰਤ ਦੇ ਹਰੇਕ ਰਾਜ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਰਾਜਧਾਨੀ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ।

3. ਜਾਂਚੋ ਕਿ ਕੀ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਨਿਖੇਪਣ ਹਨ। ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਲਈ ਕਾਰਨ ਦੱਸੋ :

(i) ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ x ਅਤੇ y ਦੇ ਲਈ $x + y = y + x$ ਸੱਚ ਹੈ।

(ii) ਇਹੋ ਜਿਹੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ x ਅਤੇ y ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਲਈ $x + y = y + x$ ਸੱਚ ਹੈ।

4. ਦੱਸੋ ਕਿ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ 'ਜਾਂ' 'ਨਿਵੇਕਲਾ' ਹੈ ਜਾਂ 'ਸ਼ਾਮਿਲ' ਹੈ। ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਲਈ ਕਾਰਨ ਦੱਸੋ :

(i) ਸੂਰਜ ਚੜ੍ਹਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਚੰਨ ਢਲਦਾ ਹੈ।

(ii) ਡਰਾਇਵਿੰਗ ਲਾਈਸੇਂਸ ਦੇ ਆਵੇਦਨ ਲਈ ਤੁਹਾਡੇ ਕੋਲ ਰਾਸ਼ਨ ਕਾਰਡ ਜਾਂ ਪਾਸਪੋਰਟ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

(iii) ਸਾਰੀਆਂ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਧਨ ਜਾਂ ਰਿਣ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

14.5 ਅੰਤਰਭਾਵ/ਸ਼ਰਤਬੱਧ ਕਥਨ (Implications/Conditional Statements)

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ 'ਜੇਕਰ-ਤਾਂ', 'ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ' ਅਤੇ 'ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ' ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਵਟਾਂਦਰਾ ਕਰਾਂਗੇ।

'ਜੇਕਰ-ਤਾਂ' ਦੇ ਨਾਲ ਕਥਨਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਬੜਾ ਆਮ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

r: ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਡਾ ਜਨਮ ਕਿਸੇ ਦੇਸ਼ ਵਿੱਚ ਹੋਇਆ ਹੈ, ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਉਸ ਦੇਸ਼ ਦੇ ਨਾਗਰਿਕ ਹੋ।

ਇਸ ਕਥਨ ਨੂੰ ਵੇਖਣ ਤੋਂ ਪਤਾ ਲਗਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅਪਘਟਨਾਂ p ਅਤੇ q ਤੋਂ ਮਿਲਕੇ ਬਣਿਆ ਹੈ।

p : ਤੁਹਾਡਾ ਜਨਮ ਕਿਸੇ ਦੇਸ਼ ਵਿੱਚ ਹੋਇਆ ਹੈ।

q : ਤੁਸੀ ਉਸ ਦੇਸ਼ ਦੇ ਨਾਗਰਿਕ ਹੋ।

ਤਾਂ ਕਥਨ 'ਜੇਕਰ p ਤਾਂ q" ਇਹ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉਸ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ p ਸੱਚ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ q ਜ਼ਰੂਰ ਸੱਚ ਹੋਵੇਗਾ।

ਕਥਨ 'ਜੇਕਰ p ਤਾਂ q' ਤੋਂ ਸੰਬੰਧਿਤ ਇੱਕ ਸਭ ਤੋਂ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਤੱਥ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ p ਝੂਠ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ q ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਕਹਿੰਦਾ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਡਾ ਜਨਮ ਕਿਸੇ ਦੇਸ਼ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹੋਇਆ ਹੈ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ q ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ।

ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ p ਦੇ ਘਟਿਤ ਨਹੀਂ ਹੋਣ ਦਾ q ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਤੇ ਕੋਈ ਅਸਰ ਨਹੀਂ ਪੈਂਦਾ ਹੈ।

ਕਥਨ "ਜੇਕਰ p, ਤਾਂ q" ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਹੋਰ ਤੱਥ ਵੀ ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਇਸ ਕਥਨ ਵਿੱਚ ਇਹ ਅੰਤਰਨਿਹਤ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ *p ਘਟਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।*

ਕਥਨ "ਜੇਕਰ p ਤਾਂ q" ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਦੇ ਕਈ ਤਰੀਕੇ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਮਾਧਿਅਮ ਤੋਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰਾਂਗੇ। *"ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ 9 ਦੀ ਗੁਣਜ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ 3 ਦੀ ਵੀ ਗੁਣਜ ਹੈ।"*

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ p ਅਤੇ q ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਨ।

p : ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ 9 ਦੀ ਗੁਣਜ ਹੈ।

q: ਉਹ ਸੰਖਿਆ 3 ਦੀ ਵੀ ਗੁਣਜ ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਕਥਨ 'ਜੇਕਰ p ਤਾਂ q' ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹਨ :

1. 'p ਅੰਤਰਭਾਵ q' ਨੂੰ $p \Rightarrow q$ ਤੋਂ ਪ੍ਰਗਟ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਪ੍ਰਤੀਕ '$\Rightarrow$' ਅੰਤਰਭਾਵ ਦੇ ਲਈ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਕਥਨ 'ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ 9 ਦੀ ਗੁਣਜ ਹੈ' ਵਿੱਚ ਇਹ ਕਥਨ ਅੰਤਰਨਿਹਤ ਹੈ ਕਿ 'ਉਹ ਸੰਖਿਆ 3 ਦੀ ਵੀ ਗੁਣਜ ਹੈ'।

2. p, q ਦੇ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸ਼ਰਤ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਹੋਇਆ ਕਿ ਇਹ ਪਤਾ ਹੋਣਾ ਕਿ ਸੰਖਿਆ 9 ਦੀ ਗੁਣਜ ਹੈ, ਕਾਫ਼ੀ ਹੈ ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਕੱਢਣ ਦੇ ਲਈ ਕਿ ਉਹ ਸੰਖਿਆ 3 ਦੀ ਵੀ ਗੁਣਜ ਹੈ।
3. 'p ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ q' ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਹੋਇਆ ਕਿ ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ 9 ਦੀ ਗੁਣਜ ਹੈ, ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ ਉਹ ਸੰਖਿਆ 3 ਦੀ ਵੀ ਗੁਣਜ ਹੈ।
4. 'q ਜ਼ਰੂਰੀ ਸ਼ਰਤ ਹੈ p ਦੇ ਲਈ।' ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਹੋਇਆ ਕਿ ਜਦੋਂ ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ 9 ਦੀ ਗੁਣਜ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਹ ਸੰਖਿਆ ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੌਰ 'ਤੇ 3 ਦੀ ਵੀ ਗੁਣਜ ਹੈ।
5. '$\sim q$ ਅੰਤਰਭਾਵ $\sim p$'। ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਹੋਇਆ ਕਿ ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ 3 ਦੀ ਗੁਣਜ ਨਹੀਂ ਹੈ,ਤਾਂ ਉਹ ਸੰਖਿਆ 9 ਦੀ ਵੀ ਗੁਣਜ ਨਹੀਂ ਹੈ।

14.5.1 *ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਅਤੇ ਵਿਲੋਮ (Contrapositive and converse)* ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਅਤੇ ਵਿਲੋਮ ਕੁਝ ਹੋਰ ਕਥਨ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ "ਜੇਕਰ-ਤਾਂ" ਤੋਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਰਾਹੀਂ ਬਣਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ 'ਜੇਕਰ-ਤਾਂ' ਵਾਲੇ ਕਥਨ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ,

ਜੇਕਰ ਭੌਤਿਕ ਵਾਤਾਵਰਣ ਵਿੱਚ ਬਦਲਾਵ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਜੈਵਿਕ ਵਾਤਾਵਰਣ ਬਦਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਕਥਨ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਕਥਨ

"ਜੇਕਰ ਜੈਵਿਕ ਵਾਤਾਵਰਣ ਵਿੱਚ ਬਦਲਾਵ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਭੌਤਿਕ ਵਾਤਾਵਰਣ ਵਿਚ ਤਬਦੀਲੀ ਨਹੀਂ"

ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਇਹ ਦੋਨੋਂ ਕਥਨ ਸਮਾਨ ਅਰਥ ਵਿਅਕਤ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਗੱਲ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਦੇ ਲਈ ਆਉ ਕੁਝ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਕਥਨ ਲਿਖੋ :

(i) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ 9 ਤੋਂ ਭਾਜ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ 3 ਨਾਲ ਵੀ ਭਾਜ ਹੈ।

(ii) ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਭਾਰਤ ਵਿੱਚ ਜੰਮੇ ਹੋ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਭਾਰਤ ਦੇ ਇੱਕ ਨਾਗਰਿਕ ਹੋ।

(iii) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਮਬਾਹੂ ਹੈ ਤਾਂ ਸਮਦੋਬਾਹੂ ਵੀ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਤਿੰਨ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਕਥਨ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ,

(i) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ 3 ਨਾਲ ਭਾਜ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ 9 ਨਾਲ ਵੀ ਭਾਜ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(ii) ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਭਾਰਤ ਦੇ ਨਾਗਰਿਕ ਨਹੀਂ ਹੋ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਭਾਰਤ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਜੰਮੇ ਹੋ।

(iii) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਮਦੋਬਾਹੂ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਸਮਬਾਹੂ ਵੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਉਦਾਹਰਣ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ ਕਿ ਕਥਨ 'ਜੇਕਰ p ਤਾਂ q' ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਕਥਨ 'ਜੇਕਰ q ਨਹੀਂ ਤਾਂ p ਨਹੀਂ' ਭਾਵ 'ਜੇਕਰ $\sim q$, ਤਾਂ $\sim p$' ਹੈ।

ਇਸਦੇ ਬਾਅਦ ਅਸੀਂ ਵਿਲੋਮ ਕਹਾਉਣ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਹੋਰ ਪਦ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ।

ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਕਥਨ 'ਜੇਕਰ p ਤਾਂ q' ਦਾ ਵਿਲੋਮ ਕਥਨ 'ਜੇਕਰ q ਤਾਂ p' ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਕਥਨ

p : *'ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ 10 ਨਾਲ ਭਾਜ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ 5 ਨਾਲ ਵੀ ਭਾਜ ਹੈ।' ਦਾ ਵਿਲੋਮ ਕਥਨ*

q : *'ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ 5 ਨਾਲ ਭਾਜ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ 10 ਨਾਲ ਵੀ ਭਾਜ ਹੈ।'*

ਉਦਾਹਰਣ 10 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਵਿਲੋਮ ਲਿਖੋ :

(i) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ n ਜਿਸਤ ਹੈ ਤਾਂ n^2 ਵੀ ਜਿਸਤ ਹੈ।

(ii) ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਸਾਰੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਪੁਸਤਕ ਵਿੱਚ ਹੱਲ ਕਰੋ, ਤਾਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ A-ਗਰੇਡ ਮਿਲੇਗਾ।

(iii) ਜੇਕਰ ਦੋ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ ਕਿ $a > b$ ਤਾਂ $a - b$ ਹਮੇਸ਼ਾ ਇੱਕ ਧਨ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇਹਨਾਂ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਵਿਲੋਮ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਹਨ :

(i) ਜੇਕਰ ਸੰਖਿਆ n^2 ਜਿਸਤ ਹੈ ਤਾਂ n ਵੀ ਜਿਸਤ ਹੈ।

(ii) ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਨੂੰ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ A–ਗਰੇਡ ਮਿਲਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਸਾਰੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਹੱਲ ਕੀਤੇ ਹਨ।

(iii) ਜੇਕਰ ਦੋ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ ਕਿ $a > b$ ਤਾਂ $(a - b)$ ਹਮੇਸ਼ਾ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਆਉ ਕੁਝ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਉਦਾਹਰਣ 11 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਲਈ ਪਹਿਲਾਂ ਸੰਗਤ ਘਟਕ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਣੋ ਅਤੇ ਫੇਰ ਜਾਂਚੋ ਕਿ ਕੀ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ।

(i) ਜੇਕਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਸਮਬਾਹੂ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਸਮਦੋਬਾਹੂ ਵੀ ਹੈ।

(ii) ਜੇਕਰ a ਅਤੇ b ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ ab ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ : (i) ਘਟਕ ਕਥਨ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ :

p : ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਸਮਬਾਹੂ ਹੈ।

q : ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਮਬਾਹੂ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ ਇੱਕ ਸਮਬਾਹੂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਮਦੋਬਾਹੂ ਵੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ।

(ii) ਘਟਕ ਕਥਨ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ :

p : a ਅਤੇ b ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

q : ab ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ ਦੋ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਵੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ।

ਵਾਕ ਅੰਸ਼ 'ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ' ਪ੍ਰਤੀਕ '$\Leftrightarrow$' ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਗਟ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਕਥਨ p ਅਤੇ q ਦੇ ਲਈ ਇਸਦੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸਮਤਲ ਰੂਪ ਹਨ।

(i) 'p ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ q'

(ii) 'q ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ p'

(iii) 'p ਜ਼ਰੂਰੀ ਅਤੇ ਕਾਫ਼ੀ ਸ਼ਰਤ ਹੈ q ਦੇ ਲਈ' ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਉਲਟ

(iv) $p \Leftrightarrow q$

ਇੱਥੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਉਦਾਹਰਣ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 12 : ਹੇਠਾਂ ਦੋ ਕਥਨ ਯੁਗਮ ਦਿੱਤੇ ਹਨ। ਹਰੇਕ ਕਥਨ ਯੁਗਮ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ 'ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ' ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਰਾਹੀਂ ਮਿਲਾਓ।

(i) *p:* ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਆਇਤ ਇੱਕ ਵਰਗ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਸ ਦੀਆਂ ਚਾਰੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਲੰਬਾਈ ਦੀਆਂ ਹਨ।

q: ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਆਇਤ ਦੀ ਚਾਰਾਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਲੰਬਾਈ ਦੀਆਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਆਇਤ ਇੱਕ ਵਰਗ ਹੈ।

(ii) *p:* ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ 3 ਤੋਂ ਭਾਜ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਸੰਖਿਆ ਵੀ 3 ਤੋਂ ਭਾਜ ਹੈ।

q: ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ 3 ਤੋਂ ਭਾਜ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਵੀ 3 ਤੋਂ ਭਾਜ ਹੈ।

ਹੱਲ : (i) ਕੋਈ ਆਇਤ ਇੱਕ ਵਰਗ ਹੈ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ ਉਸ ਦੀਆਂ ਚਾਰਾਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

(ii) ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ 3 ਨਾਲ ਭਾਜ ਹੈ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ ਉਸ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ 3 ਨਾਲ ਭਾਜ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 14.4

1. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ 'ਜੇਕਰ-ਤਾਂ' ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਪੰਜ ਭਿੰਨ ਰੂਪਾਂ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖੋ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਅਰਥ ਸਮਾਨ ਹੋਣ।

ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕਿਰਤਕ ਸੰਖਿਆ ਟਾਂਕ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਦਾ ਵਰਗ ਵੀ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

2. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਅਤੇ ਵਿਲੋਮ ਕਥਨ ਲਿਖੋ :

(i) ਜੇਕਰ x ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ x ਟਾਂਕ ਹੈ।

(ii) ਜੇਕਰ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ ਤਾਂ ਉਹ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ।

(iii) ਕਿਸੇ ਵਸਤੂ ਦੇ ਠੰਢਾ ਹੋਣ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਉਸਦਾ ਤਾਪਮਾਨ ਘੱਟ ਹੈ।

(iv) ਤੁਸੀਂ ਜਿਆਮਿਤੀ ਵਿਸ਼ੇ ਨੂੰ ਸਮਝ ਨਹੀਂ ਸਕਦੇ ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਹ ਗਿਆਨ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਨਿਗਨਾਤਮਕ ਵਿਵੇਚਨ ਕਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

(v) x ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤੋਂ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ x ਸੰਖਿਆ 4 ਨਾਲ ਭਾਜ ਹੈ।

3. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਨੂੰ 'ਜੇਕਰ-ਤਾਂ' ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ :

(i) ਤੁਹਾਨੂੰ ਨੌਕਰੀ ਮਿਲਣ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਤੁਹਾਡੀ ਯੋਗਤਾ ਚੰਗੀ ਹੈ।

(ii) ਕੇਲੇ ਦਾ ਰੁੱਖ ਫੁੱਟੇਗਾ ਜੇਕਰ ਉਹ ਇੱਕ ਮਹੀਨੇ ਤੱਕ ਗਰਮ ਵਾਤਾਵਰਨ ਵਿਚ ਰਹੇ।

(iii) ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ ਜੇਕਰ ਉਸਦੇ ਵਿਕਰਣ ਇੱਕ-ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਸਮਦੋਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

(iv) ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ A^+ ਗਰੇਡ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ, ਲਈ ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਸਾਰੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰ ਲੈਂਦੇ ਹੋ।

4. ਹੇਠਾਂ (a) ਅਤੇ (b) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨਾਂ ਵਿਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੇ (i) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਅਤੇ ਵਿਲੋਮ ਕਥਨ ਪਛਾਣੋ।

(a) ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਦਿੱਲੀ ਵਿੱਚ ਰਹਿੰਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਤੁਹਾਡੇ ਕੋਲ ਸਰਦੀਆਂ ਦੇ ਕੱਪੜੇ ਹਨ।

(i) ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਡੇ ਕੋਲ ਠੰਢ ਦੇ ਕੱਪੜੇ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਦਿੱਲੀ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਰਹਿੰਦੇ ਹੋ।

(ii) ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਡੇ ਕੋਲ ਸਰਦੀਆਂ ਦੇ ਕੱਪੜੇ ਹਨ, ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਦਿੱਲੀ ਵਿੱਚ ਰਹਿੰਦੇ ਹੋ।

(b) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਦੇ ਵਿਕਰਣ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਸਮਦੋਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

(i) ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਸਮਦੋਭਾਜਿਤ ਨਹੀਂ ਕਰਦੇ ਹਨ, ਤਾਂ ਚਤੁਰਭੁਜ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(ii) ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਸਮਦੋਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਉਹ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ।

14.6 ਕਥਨਾਂ ਦੀ ਵੈਧਤਾ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਨਾ (Validating Statements)

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਸ ਗੱਲ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਇੱਕ ਕਥਨ ਕਿਹੜੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦਾ ਉੱਤਰ ਜਾਨਣ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦਾ ਉੱਤਰ ਜਾਨਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ।

ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਦਾ ਕੀ ਅਰਥ ਹੈ? ਇਹ ਕਹਿਣ ਦਾ ਕੀ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਕਦੋਂ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਕਦੋਂ ਝੂਠ ਹੈ?

ਉੱਤੇ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਉੱਤਰ ਇਸ ਗੱਲ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦੇ ਹਨ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਵਿੱਚ "ਅਤੇ" ਅਤੇ "ਜਾਂ" ਵਿੱਚੋਂ ਸੰਯੋਜਕ ਸ਼ਬਦ ਜਾਂ "ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ" ਅਤੇ "ਜੇਕਰ-ਤਾਂ" ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸ ਸ਼ਰਤ ਦਾ ਜਾਂ "ਹਰੇਕ ਲਈ" ਅਤੇ "ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ" ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸ ਪਰਿਮਾਣਵਾਚਕ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਹੈ।

ਇੱਥੇ ਇਹਨਾਂ ਕਥਨਾਂ ਦੀ ਵੈਧਤਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਕੁਝ ਤਕਨੀਕ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਹ ਜਾਂਚਣ ਲਈ ਕਿ ਕੋਈ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ ਕੁਝ ਆਮ ਨਿਯਮਾਂ ਦੀ ਸੂਚੀ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

ਨਿਯਮ 1 : ਜੇਕਰ p ਅਤੇ q ਗਣਿਤੀ ਕਥਨ ਹਨ, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿ ਕਥਨ "p ਅਤੇ q" ਸੱਚ ਹੈ, ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਚਰਨਾਂ ਦਾ ਅਨੁਸਰਣ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਚਰਨ 1 : ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਕਥਨ p ਸੱਚ ਹੈ।

ਚਰਨ 2 : ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਕਥਨ q ਸੱਚ ਹੈ।

ਨਿਯਮ 2 ਸੰਯੋਜਕ 'ਜਾਂ' ਤੋਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ

ਜੇਕਰ p ਅਤੇ q ਗਣਿਤੀ ਕਥਨ ਹਨ ਤਾਂ ਕਥਨ "p ਜਾਂ q" ਨੂੰ ਸੱਚ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਨੂੰ ਸੱਚ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਸਥਿਤੀ 1 : ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ p ਝੂਠ ਹੈ, q ਨੂੰ ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੌਰ ਤੇ ਸੱਚ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰੋ।

ਸਥਿਤੀ 2 : ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ q ਝੂਠ ਹੈ, p ਨੂੰ ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੌਰ ਤੇ ਸੱਚ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰੋ।

ਨਿਯਮ 3 : ਵਾਕ ਅੰਸ਼ "ਜੇਕਰ–ਤਾਂ" ਤੋਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ

ਕਥਨ "ਜੇਕਰ p, ਤਾਂ q" ਨੂੰ ਸੱਚ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਨੂੰ ਸੱਚ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਸਥਿਤੀ 1 : ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ p ਸੱਚ ਹੈ, q ਨੂੰ ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੌਰ ਤੇ ਸੱਚ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰੋ (ਪ੍ਰਤੱਖ ਵਿਧੀ)।

ਸਥਿਤੀ 2 : ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ q ਝੂਠ ਹੈ, p ਨੂੰ ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੌਰ ਤੇ ਝੂਠ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰੋ (ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਵਿਧੀ)।

ਨਿਯਮ 4 : ਵਾਕ ਅੰਸ਼ "ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ" ਤੋਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ

ਕਥਨ "p ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ q" ਨੂੰ ਸੱਚ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਹ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

(i) *ਜੇਕਰ p ਸੱਚ ਹੈ ਤਾਂ q ਸੱਚ ਹੈ।* (ii) *ਜੇਕਰ q ਸੱਚ ਹੈ ਤਾਂ p ਸੱਚ ਹੈ।*

ਆਓ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ :

ਉਦਾਹਰਣ 13 : ਜਾਂਚੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹਨ ਜਾਂ ਨਹੀਂ।

ਜੇਕਰ $x, y \in \mathbf{Z}$ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ ਕਿ x ਅਤੇ y ਟਾਂਕ ਹਨ ਤਾਂ xy ਵੀ ਟਾਂਕ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $p : x, y \in \mathbf{Z}$ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ ਕਿ x ਅਤੇ y ਟਾਂਕ ਹਨ।

q : xy ਟਾਂਕ ਹੈ।

ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਦੀ ਵੈਧਤਾ ਨੂੰ ਜਾਂਚਣ ਲਈ ਅਸੀਂ ਨਿਯਮ 3 ਦੀ ਸਥਿਤੀ 1 ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਭਾਵ ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ p ਸੱਚ ਹੈ ਅਸੀਂ q ਨੂੰ ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੌਰ 'ਤੇ ਸੱਚ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

p ਸੱਚ ਹੈ ਭਾਵ x ਅਤੇ y ਟਾਂਕ ਪੂਰਨ ਅੰਕ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ

$x = 2m + 1$ ਕਿਸੇ ਪੂਰਨ ਅੰਕ m ਲਈ।

$y = 2n + 1$ ਕਿਸੇ ਪੂਰਨ ਅੰਕ n ਲਈ।

ਇਸ ਲਈ $xy = (2m + 1)(2n + 1)$

$= 2(2mn + m + n) + 1$

ਇਸ ਤੋਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ xy ਵੀ ਟਾਂਕ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਅਸੀਂ ਨਿਯਮ 3 ਦੀ ਸਥਿਤੀ 2 ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਰਾਹੀਂ ਜਾਂਚਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ।

ਅਸੀਂ ਮੰਨਦੇ ਹਾਂ ਕਿ q ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਸਾਨੂੰ ਕਥਨ q ਦੇ ਨਿਖੇਧਣ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਕਥਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ,

$\sim q$: ਗੁਣਨਫਲ xy ਜਿਸਤ ਹੈ।

ਇਹ ਕੇਵਲ ਉਦੋਂ ਹੀ ਸੰਭਵ ਹੈ ਜਦੋਂ x ਜਾਂ y ਜਿਸਤ ਹੋਣ ਜਿਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ p ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਦਰਸਾਇਆ ਕਿ :

$$\sim q \Rightarrow \sim p$$

ਟਿੱਪਣੀ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀ ਉਦਾਹਰਣ ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰਦੀ ਹੈ ਕਿ ਕਥਨ $p \Rightarrow q$ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਕਥਨ $\sim q \Rightarrow \sim p$ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਕਾਫ਼ੀ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਕਥਨ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 14 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਕਥਨ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰਕੇ ਇਹ ਪਤਾ ਲਗਾਉ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ, 'ਜੇਕਰ $x, y \in \mathbf{Z}$ 'ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ ਕਿ xy ਟਾਂਕ ਹਨ ਤਾਂ ਦੋਵੇਂ x ਅਤੇ y ਵੀ ਟਾਂਕ ਹੈ।'

ਹੱਲ : ਆਉ ਅਸੀਂ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਨਾ ਤੋਂ ਬੁਲਾਈਏ :

p : xy *ਟਾਂਕ ਹੈ।*

q : x *ਅਤੇ* y *ਦੋਵੇਂ ਹੀ ਟਾਂਕ ਹਨ।*

ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਕਥਨ $\sim q \Rightarrow \sim p$ ਨੂੰ ਜਾਂਚ ਕੇ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ $p \Rightarrow q$ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ।

ਹੁਣ, $\sim q$: ਇਹ ਝੂਠ ਹੈ ਕਿ x ਅਤੇ y ਦੋਵੇਂ ਟਾਂਕ ਹਨ।

ਇਸਦਾ ਭਾਵ ਹੋਇਆ ਕਿ x (ਜਾਂ y) ਜਿਸਤ ਹੈ।

ਤਾਂ, $x = 2n$ ਜਿੱਥੇ n ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਅੰਕ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $xy = 2ny$ ਹੈ। ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ xy ਜਿਸਤ ਹੈ। ਭਾਵ $\sim p$ ਸੱਚ ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਅਸੀਂ $\sim q \Rightarrow \sim p$ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਦੋਂ ਇੱਕ ਬਾਸ਼ਰਤ ਕਥਨ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਵਿਲੋਮ ਕਥਨ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਕੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

p : *ਇੱਕ ਗਿਲਾਸ ਅੱਧਾ ਖ਼ਾਲੀ ਹੈ।*

q : *ਇੱਕ ਗਿਲਾਸ ਅੱਧਾ ਭਰਿਆ ਹੈ।*

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਪਹਿਲਾ ਕਥਨ ਘਟਿਤ ਹੋਵੇਗਾ ਤਾਂ ਦੂਜਾ ਵੀ ਘਟਿਤ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਤੱਥ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੋਂ ਵਿਅਕਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਗਿਲਾਸ ਅੱਧਾ ਖ਼ਾਲੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਅੱਧਾ ਭਰਿਆ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਗਿਲਾਸ ਅੱਧਾ ਭਰਿਆ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਹ ਅੱਧਾ ਖ਼ਾਲੀ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਇੱਕ ਗਿਲਾਸ ਅੱਧਾ ਖ਼ਾਲੀ ਹੈ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ ਉਹ ਅੱਧਾ ਭਰਿਆ ਹੈ।

ਇਸਦੇ ਬਾਅਦ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਹੋਰ ਵਿਧੀ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ।

14.6.1 *ਵਿਰੋਧ ਰਾਹੀਂ (By Contradiction)* ਇਸ ਵਿਧੀ ਵਿੱਚ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿ ਕੋਈ ਕਥਨ p ਸੱਚ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ p ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਭਾਵ $\sim p$ ਸੱਚ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਨਤੀਜੇ ਤੇ ਪਹੁੰਚਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਸਾਡੀ ਧਾਰਨਾ ਦਾ ਖੰਡਨ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਪਰਿਣਾਮ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ p ਨੂੰ ਸੱਚ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਰਲ ਉਦਾਹਰਣ ਨੂੰ ਵੇਖੋ :

ਉਦਾਹਰਣ 15 : ਵਿਰੋਧ ਰਾਹੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਨੂੰ ਸੱਚ ਸਾਬਿਤ ਕਰੋ :

p: $\sqrt{7}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇਸ ਵਿਧੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹੈ।

$\sqrt{7}$ ਇਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦੋ ਇਹੋ ਜਿਹੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਕਿ $\sqrt{7} = \frac{a}{b}$ ਹੈ ਜਿੱਥੇ a ਅਤੇ b ਦਾ ਕੋਈ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਵਰਗ ਕਰਨ ਤੇ : $7 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 7b^2 \Rightarrow 7$ ਸੰਖਿਆ a ਨੂੰ ਵਿਭਾਜਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ c ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਕਿ $a = 7c$ ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $a^2 = 49c^2$ ਅਤੇ $a^2 = 7b^2$

$\Rightarrow 7b^2 = 49c^2 \Rightarrow b^2 = 7c^2 \Rightarrow 7$ ਸੰਖਿਆ b ਨੂੰ ਵਿਭਾਜਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ 7 ਸੰਖਿਆ a ਨੂੰ ਵਿਭਾਜਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਜਿਹੜਾ ਸਾਡੀ ਮਾਨਤਾ 'a ਅਤੇ b ਦਾ ਕੋਈ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨਹੀਂ ਹੈ' ਮਨੌਤ ਦਾ ਖੰਡਨ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਮਾਨਤਾ ਕਿ $\sqrt{7}$ ਪਰਿਮੇਯ ਹੈ' ਝੂਠ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ ਕਿ '$\sqrt{7}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ' ਸੱਚ ਹੈ।

ਇਸਦੇ ਬਾਅਦ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਹੋਰ ਵਿਧੀ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਸਦੇ ਰਾਹੀਂ ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇੱਕ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹੈ। ਇਸ ਵਿਧੀ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਥਿਤੀ ਦਾ ਉਦਾਹਰਣ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ ਵੈਧ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਉਦਾਹਰਣ ਨੂੰ 'ਪ੍ਰਤਿਉਦਾਹਰਣ' ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਆਪ ਹੀ ਇਸ਼ਾਰਾ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਉਦਾਹਰਣ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਦਾ ਖੰਡਨ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 16 : ਇੱਕ ਪ੍ਰਤਿਉਦਾਹਰਣ ਰਾਹੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹੈ :

'ਜੇਕਰ n ਟਾਂਕ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ n ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।'

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ 'ਜੇਕਰ p ਤਾਂ q' ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਸਨੂੰ ਝੂਠ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਸਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਦਰਸਾਉਣਾ ਹੈ ਕਿ 'ਜੇਕਰ p ਤਾਂ $\sim q$' ਹੈ। ਇਸਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਟਾਂਕ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਖੋਜਣਾ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਅਭਾਜ ਨਾ ਹੋਵੇ। ਸੰਖਿਆ 9 ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸੰਖਿਆ 9 ਇੱਕ ਪ੍ਰਤਿਉਦਾਹਰਣ ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਨਤੀਜਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਵਿਧੀਆਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕੀਤਾ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਰਾਹੀਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇੱਕ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ।

ਟਿੱਪਣੀ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤਿਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਿਸੇ ਕਥਨ ਦਾ ਖੰਡਨ ਕਰਨ ਲਈ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਕਥਨ ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਪੇਸ਼ ਕਰਨ ਤੇ ਕਥਨ ਦੀ ਵੈਧਤਾ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 14.5

1. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਕਥਨ

   p: 'ਜੇਕਰ x ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਕਿ $x^3 + 4x = 0$, ਤਾਂ $x = 0$, ਸੱਚ ਹੈ'।

   (i) ਪ੍ਰਤੱਖ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ (ii) ਵਿਰੋਧ ਰਾਹੀਂ (iii) ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਕਥਨ ਰਾਹੀਂ

2. ਪ੍ਰਤਿਉਦਾਹਰਣ ਰਾਹੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਕਥਨ "ਕਿਸੇ ਵੀ ਇਹੋ ਜਿਹੀਆ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਲਈ ਜਿੱਥੇ $a^2 = b^2$ ਹੈ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ $a = b$" ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ।

3. ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ :

   p: ਜੇਕਰ x ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ x^2 ਜਿਸਤ ਹੈ ਤਾਂ x ਵੀ ਜਿਸਤ ਹੈ।

4. ਪ੍ਰਤਿਉਦਾਹਰਣ ਰਾਹੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹਨ :

   (i) p: ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਾਰੇ ਕੋਣ ਸਮਾਨ ਹਨ ਤਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਅਧਿਕ ਕੋਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ।

   (ii) q: ਸਮੀਕਰਣ $x^2 - 1 = 0$ ਦਾ ਕੋਈ ਮੂਲ 0 ਅਤੇ 2 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਸਥਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

5. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜਾ ਸੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਕਿਹੜਾ ਝੂਠ ਹੈ? ਹਰੇਕ ਲਈ ਵੈਧ ਕਾਰਨ ਦੱਸੋ।

(i) p: ਕਿਸੇ ਚੱਕਰ ਦਾ ਹਰੇਕ ਅਰਧਵਿਆਸ ਉਸਦੀ ਜੀਵਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(ii) q: ਚੱਕਰ ਦੀ ਜੀਵਾ ਨੂੰ ਕੇਂਦਰ ਸਮਦੋਭਾਜਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

(iii) r: ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਕਿਸੇ ਇਲਿਪਸ ਦੀ ਇੱਕ ਖਾਸ ਸਥਿਤੀ ਹੈ।

(iv) s: ਜੇਕਰ x ਅਤੇ y ਇਹੋ ਜਿਹੀਆਂ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਕਿ $x > y$ ਤਾਂ $-x < -y$ ਹੈ।

(v) t : $\sqrt{11}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 17 : ਜਾਂਚੋ ਕਿ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ 'ਜਾਂ' ਨਿਵੇਕਲਾ ਹੈ ਜਾਂ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ। ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਨੂੰ ਤਰਕ ਸੰਗਤ ਸਿੱਧ ਕਰੋ। ਮਿਸ਼ਰਤ ਕਥਨ ਦੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਪਤਾ ਕਰਕੇ ਜਾਂਚ ਲਈ ਵਰਤੋ ਕਰੋ ਤੇ ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਮਿਸ਼ਰਤ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ।

t: ਤੁਸੀਂ ਭਿਜ ਜਾਂਦੇ ਹੋ ਜੇਕਰ ਵਰਖਾ ਹੋਵੇ ਜਾਂ ਤੁਸੀਂ ਨਦੀ ਵਿੱਚ ਹੋਵੋ।

ਉਸਦੇ ਬਾਅਦ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਦੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਲਿਖੋ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਇਹ ਜਾਂਚਣ ਲਈ ਕਰੋ ਕਿ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹਨ ਜਾਂ ਨਹੀਂ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ 'ਜਾਂ' ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਸੰਭਵ ਹੈ ਕਿ ਮੀਂਹ ਪੈ ਰਿਹਾ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਤੁਸੀਂ ਨਦੀ ਵਿਚ ਹੋਵੋ। ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਦੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹਨ :

p : ਜਦੋਂ ਮੀਂਹ ਪੈਂਦਾ ਹੈ ਤੁਸੀਂ ਭਿੱਜ ਜਾਂਦੇ ਹੋ।

q : ਜਦੋਂ ਤੁਸੀਂ ਨਦੀ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੇ ਹੋ ਤੁਸੀ ਭਿੱਜ ਜਾਂਦੇ ਹੋ।

ਇਥੇ ਦੋਨੋਂ ਘਟਕ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 18 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਨਿਖੇਪਣ ਲਿਖੋ :

(i) p: ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ x ਲਈ $x^2 > x$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(ii) q: ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ x ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਤਾਂ ਜੋ $x^2 = 2$ ਹੈ।

(iii) r: ਹਰੇਕ ਪੰਛੀ ਦੇ ਪੰਖ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

(iv) s: ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਸਤਰ ਤੇ ਹਰੇਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਗਣਿਤ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : (i) p ਦਾ ਨਿਖੇਪਣ "ਇਹ ਝੂਠ ਹੈ ਕਿ p ਸੱਚ ਹੈ" ਹੋਵੇਗਾ, ਭਾਵ ਸ਼ਰਤ $x^2 > x$ ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਲਈ ਲਾਗੂ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਗੱਲ ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਵਿਅਕਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

$\sim p$: ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ x ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਤਾਂ ਜੋ $x^2 < x$ ਹੈ।

(ii) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ q ਇੱਕ ਇਹੋ ਜੇਹੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ x ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਕਿ $x^2 = 2$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\sim q$: ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ x ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ $x^2 = 2$ ਹੈ।

ਜਿਸਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$\sim q$: ਹਰੇਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਲਈ $x^2 \neq 2$ ਹੈ।

(iii) ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਦਾ ਨਿਖੇਪਣ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਹੈ:

$\sim r$: ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਪੰਛੀ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਜਿਸਦੇ ਪੰਖ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

(iv) ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਦਾ ਨਿਖੇਪਣ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ :

$\sim s$: ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਸਤਰ ਤੇ ਗਣਿਤ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਨਹੀਂ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 19 : ਵਾਕ ਅੰਸ਼ "ਜ਼ਰੂਰੀ ਅਤੇ ਕਾਫ਼ੀ" ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ ਲਿਖੋ। ਇਸਦੀ ਵੈਧਤਾ ਦੀ ਜਾਂਚ ਵੀ ਕਰੋ। "ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ n ਟਾਂਕ ਹੈ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ n^2 ਟਾਂਕ ਹੈ।"

ਹੱਲ : ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ n ਦੇ ਟਾਂਕ ਹੋਣ ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ਅਤੇ ਕਾਫ਼ੀ ਸ਼ਰਤ ਹੈ ਕਿ n^2 ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੌਰ 'ਤੇ ਟਾਂਕ ਹੋਵੇ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ p ਅਤੇ q ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਦੱਸਦੇ ਹਨ :

p : ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ n ਟਾਂਕ ਹੈ।

q : n^2 ਟਾਂਕ ਹੈ।

ਤਾਂ "p ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ q" ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਨੂੰ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਸਦੀ ਵੈਧਤਾ ਜਾਂਚਣ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਜਾਂਚਣਾ ਪਵੇਗਾ ਕਿ ਕੀ ਕਥਨ "ਜੇਕਰ p ਤਾਂ q" ਅਤੇ "ਜੇਕਰ q ਤਾਂ p" ਸੱਚ ਹੈ।

ਸਥਿਤੀ 1 : "ਜੇਕਰ p, ਤਾਂ q"

ਜੇਕਰ p ਤਾਂ q ਕਥਨ "ਜੇਕਰ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ n ਟਾਂਕ ਹੈ ਤਾਂ n^2 ਟਾਂਕ ਹੈ" ਨੂੰ ਦੱਸਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਪਤਾ ਲਗਾਉਣਾ ਹੈ ਕੀ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ? ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ n ਟਾਂਕ ਹੈ, ਤਾਂ $n = 2k + 1$ ਜਿੱਥੇ k ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ

$$n^2 = (2k + 1)^2$$
$$= 4k^2 + 4k + 1$$

n^2, ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਤੋਂ 1 ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ n^2 ਟਾਂਕ ਹੈ।

ਸਥਿਤੀ 2 : ਜੇਕਰ q, ਤਾਂ p

ਕਥਨ 'ਜੇਕਰ n ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ n^2 ਟਾਂਕ ਹੈ ਤਾਂ n ਟਾਂਕ ਹੈ।'

ਜੇਕਰ q, ਤਾਂ p ਰਾਹੀਂ ਦੱਸਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ ਕਿ ਕੀ ਇਹ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ। ਇਸਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ।

(ਭਾਵ $\sim p \Rightarrow \sim q$) ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਕਥਨ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਹੈ,

'ਜੇਕਰ n ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ n^2 ਵੀ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।'

n ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਇਸ ਲਈ $n = 2k$, ਜਿੱਥੇ k ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ ਨਤੀਜੇ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ n^2 ਜਿਸਤ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 20 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ਅਤੇ ਕਾਫ਼ੀ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

t: ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ 80 km ਪ੍ਰਤਿ ਘੰਟਾ ਦੀ ਵੱਧ ਗਤੀ ਨਾਲ ਗੱਡੀ ਚਲਾਉਂਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਜੁਰਮਾਨਾ ਲੱਗੇਗਾ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ p ਅਤੇ q ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਨ।

p : ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ 80 km ਪ੍ਰਤੀ ਘੰਟਾ ਤੋਂ ਵੱਧ ਗਤੀ ਨਾਲ ਗੱਡੀ ਚਲਾਉਂਦੇ ਹੋ।

q : ਤੁਹਾਨੂੰ ਜੁਰਮਾਨਾ ਲੱਗੇਗਾ।

ਸ਼ਰਤ ਜੇਕਰ p ਤਾਂ q ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ p, q ਦੇ ਲਈ ਕਾਫ਼ੀ ਸ਼ਰਤ ਹੈ।

ਭਾਵ ਜੁਰਮਾਨਾ ਹੋਣ ਲਈ 80 km ਪ੍ਰਤਿ ਘੰਟਾ ਤੋਂ ਵੱਧ ਗਤੀ ਨਾਲ ਗੱਡੀ ਚਲਾਉਣਾ ਕਾਫ਼ੀ ਕਥਨ ਹੈ।

ਇੱਥੇ "80 km ਪ੍ਰਤਿ ਘੰਟਾ ਦੀ ਵੱਧ ਗਤੀ ਨਾਲ ਗੱਡੀ ਚਲਾਉਣਾ" ਕਾਫ਼ੀ ਸ਼ਰਤ ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਜੇਕਰ p ਤਾਂ q ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ q, p ਦੇ ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ਸ਼ਰਤ ਹੈ।

ਭਾਵ ਜਦੋਂ ਤੁਸੀਂ 80 km ਪ੍ਰਤਿ ਘੰਟਾ ਦੀ ਵੱਧ ਗਤੀ ਨਾਲ ਗੱਡੀ ਚਲਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਜ਼ਰੂਰੀ ਰੂਪ ਤੋਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਜੁਰਮਾਨਾ ਲੱਗੇਗਾ। ਇੱਥੇ "ਜੁਰਮਾਨਾ ਲੱਗੇਗਾ" ਜ਼ਰੂਰੀ ਸ਼ਰਤ ਹੈ।

ਅਧਿਆਇ 14 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਨਿਖੇਪਣ ਲਿਖੋ :

(i) p: ਹਰੇਕ ਧਨ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ x, ਲਈ ਸੰਖਿਆ $x - 1$ ਵੀ ਧਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

(ii) q: ਸਾਰੀਆਂ ਬਿੱਲੀਆਂ ਖਰੋਂਚਦੀਆਂ ਹਨ।

(iii) r: ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ x, ਲਈ ਜਾਂ ਤਾਂ $x > 1$ ਜਾਂ $x < 1$.

(iv) s: ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਸੰਖਿਆ x ਦੀ ਹੋਦ ਹੈ ਕਿ $0 < x < 1$.

2. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਬਾਸ਼ਰਤ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦਾ ਵਿਲੋਮ ਅਤੇ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਕਥਨ ਲਿਖੋ :

(i) p: ਇੱਕ ਧਨ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜੇਕਰ 1 ਅਤੇ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਉਸਦਾ ਕੋਈ ਹੋਰ ਭਾਜਕ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(ii) q: ਮੈਂ ਸਮੁੰਦਰ ਤਟ ਤੇ ਜਾਂਦਾ ਹਾਂ ਜਦੋਂ ਕਦੇ ਧੁੱਪ ਵਾਲਾ ਦਿਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(iii) r: ਜੇਕਰ ਬਾਹਰ ਗਰਮੀ ਹੈ ਤਾਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਪਿਆਸ ਲੱਗਦੀ ਹੈ।

3. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਨੂੰ "ਜੇਕਰ p, ਤਾਂ q" ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

(i) p: ਸਰਵਰ ਤੇ ਲਾਗ ਆਨ ਕਰਨ ਲਈ ਪਾਸਵਰਡ ਦਾ ਹੋਣਾ ਜ਼ਰਰੀ ਹੈ।

(ii) q: ਜਦੋਂ ਕਦੇ ਮੀਂਹ ਪੈਂਦਾ ਹੈ ਟਰੈਫ਼ਿਕ ਵਿੱਚ ਰੁਕਾਵਟ ਪੈਦਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(iii) r: ਤੁਸੀਂ ਵੇਬਸਾਈਟ ਵਿੱਚ ਦਾਖਲਾ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਫ਼ੀਸ ਦਾ ਭੁਗਤਾਨ ਕੀਤਾ ਹੋਵੇ।

4. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਵਿਚੋਂ ਹਰੇਕ ਨੂੰ "p ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ q" ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦੋਬਾਰਾ ਲਿਖੋ :

(i) p: ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਦੂਰਦਰਸ਼ਨ ਵੇਖਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਤੁਹਾਡਾ ਮਨ ਮੁਕਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਡਾ ਮਨ ਮੁਕਤ ਹੈ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਦੂਰਦਰਸ਼ਨ ਵੇਖਦੇ ਹੋ।

(ii) q: ਤੁਹਾਡੇ ਰਾਹੀਂ A-ਗਰੇਡ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਅਤੇ ਕਾਫ਼ੀ ਹੈ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਘਰ ਦਾ ਕੰਮ ਲਗਾਤਾਰ ਕਰਦੇ ਹੋ।

(iii) r: ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਸਮਾਨ ਕੋਣੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਇੱਕ ਆਇਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਆਇਤ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਸਮਾਨ ਕੋਣੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

5. ਹੇਠਾਂ ਦੋ ਕਥਨ ਦਿੱਤੇ ਹਨ :

p : 25 ਸੰਖਿਆ 5 ਦੀ ਇੱਕ ਗੁਣਜ ਹੈ।

q : 25 ਸੰਖਿਆ 8 ਦੀ ਇੱਕ ਗੁਣਜ ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ ਕਥਨਾਂ ਦਾ ਸੰਯੋਜਕ 'ਅਤੇ' ਅਤੇ 'ਜਾਂ' ਰਾਹੀਂ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਲਿਖੋ। ਦੋਵੇਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨਾਂ ਦੀ ਵੈਧਤਾ ਜਾਂਚੋ।

6. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਦੀ ਵੈਧਤਾ ਦੀ ਜਾਂਚ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਸਾਹਮਣੇ ਲਿਖੀ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਕਰੋ।

(i) p: ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਜਾ ਜੋੜਫਲ ਅਪਰਿਮੇਯ ਹੁੰਦਾ ਹੈ (ਵਿਲੋਮ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ)

(ii) q: ਜੇਕਰ n ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਕਿ $n > 3$, ਤਾਂ $n^2 > 9$ (ਵਿਲੋਮ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ)।

7. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਨੂੰ ਪੰਜ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਵਿਅਕਤ ਕਰੋ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਅਰਥ ਸਮਾਨ ਹੋਣ:

q: 'ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਮਾਨ ਕੋਣੀ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਹ ਅਧਿਕ ਕੋਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ।'

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕੀਤੀ ਹੈ :

- ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਮਾਨਤਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਥਨ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਵਾਕ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਜਾਂ ਤਾਂ ਸੱਚ ਹੋਵੇ ਜਾਂ ਝੂਠ ਹੋਵੇ।
- ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪਦਾਂ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕੀਤੀ ਹੈ :
  - ਕਿਸੇ ਕਥਨ ਦਾ ਨਿਖੇਪਣ : ਜੇਕਰ p ਇੱਕ ਕਥਨ ਹੈ ਤਾਂ '$\sim p$ ਝੂਠ ਹੈ' ਕਥਨ p ਦਾ ਨਿਖੇਪਣ ਹੈ ਇਸਨੂੰ $\sim p$ ਤੋਂ ਪ੍ਰਗਟਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

- ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਅਤੇ ਸੰਗਤ ਘਟਕ ਕਥਨ :
  ਦੋ ਜਾਂ ਵੱਧ ਸਰਲ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨ ਤੋਂ ਬਣੇ ਕਥਨ ਨੂੰ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਸਰਲ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਦੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ।
- ਸੰਯੋਜਕ 'ਅਤੇ' ਅਤੇ 'ਜਾਂ' ਦੀ ਅਤੇ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ 'ਇੱਕੋ ਜਿਹੇ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ' ਅਤੇ 'ਹਰੇਕ ਲਈ' ਦੀ ਭੂਮਿਕਾ।
- ਅੰਤਰਭਾਵ (ਸ਼ਰਤਾਂ) 'ਜੇਕਰ', 'ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ' ਅਤੇ 'ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ'
  ਕਥਨ 'ਜੇਕਰ' p ਤਾਂ q ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਤੋਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।
- p ਅੰਤਰਭਾਵ q (ਪ੍ਰਤੀਕ $p \Rightarrow q$ ਤੋਂ ਦੱਸਿਆ)
- p ਕਾਫ਼ੀ ਸ਼ਰਤ ਹੈ q ਦੇ ਲਈ।
- q ਕਾਫ਼ੀ ਸ਼ਰਤ ਹੈ p ਦੇ ਲਈ।
- p ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ q
- $\sim q$ ਅੰਤਰਭਾਵ $\sim p$
- ਕਥਨ $p \Rightarrow q$ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਕਥਨ $\sim q \Rightarrow \sim p$
- ਕਥਨ $p \Rightarrow q$ ਦਾ ਉਲਟ ਕਥਨ $q \Rightarrow p$ ਹੈ।
- ਕਥਨ $p \Rightarrow q$ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਨੂੰ ਜੋੜ ਕੇ ਕਥਨ p ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ q ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ।

◆ ਕਿਸੇ ਕਥਨ ਦੀ ਵੈਧਤਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਵਿਧੀਆਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

(i) ਪ੍ਰਤੱਖ ਵਿਧੀ
(ii) ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਕਮ ਵਿਧੀ
(iii) ਵਿਰੋਧ ਵਿਧੀ
(iv) ਪ੍ਰਤਿਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੀ ਵਿਧੀ

ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਨੋਟ

ਤਰਕ ਸ਼ਾਸਤਰ ਤੇ ਪਹਿਲਾ ਸ਼ੋਧ-ਪ੍ਰਬੰਧ *Aristotle* (384 ਈ. ਪੂ.-322 ਈ. ਪੂ.) ਰਾਹੀਂ ਲਿਖਿਆ ਗਿਆ ਸੀ। ਇਹ ਸ਼ੋਧ-ਪ੍ਰਬੰਧ ਨਿਗਮਨਾਤਮ ਵਿਵੇਚਨ ਦੇ ਲਈ ਨਿਯਮਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਸੰਗ੍ਰਹਿ ਸੀ, ਜਿਸਦਾ ਭਾਵ ਗਿਆਨ ਦੀ ਹਰੇਕ ਸ਼ਾਖਾ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਲਈ ਇੱਕ ਅਧਾਰ ਦਿੰਦਾ ਸੀ। ਇਸਦੇ ਬਾਅਦ ਸਤਾਰਵੀਂ ਸਦੀ ਵਿੱਚ ਜਰਮਨ ਗਣਿਤਗ G. W. Leibnitz (1646 – 1716) ਨੇ ਨਿਗਮਨਾਤਮਕ ਵਿਵੇਚਨ ਦੀ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਨੂੰ ਯਾਂਤਰਿਕ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਤਰਕ ਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤੀਕਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੀ ਕਲਪਨਾ ਕੀਤੀ ਸੀ। ਉਨੀਵੀਂ ਸਦੀ ਵਿੱਚ ਅੰਗਰੇਜ਼ ਗਣਿਤਗ *George Boole* (1815–1864) ਅਤੇ *Augustus De Morgan* (1806–1871) ਨੇ ਉਹਨਾਂ ਕਲਪਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਸਾਕਾਰ ਕੀਤਾ ਅਤੇ ਪ੍ਰਤੀਕਾਤਮਕ ਤਰਕਸ਼ਾਸ਼ਤਰ ਵਿਸ਼ੇ ਦੀ ਸਥਾਪਨਾ ਕੀਤੀ।