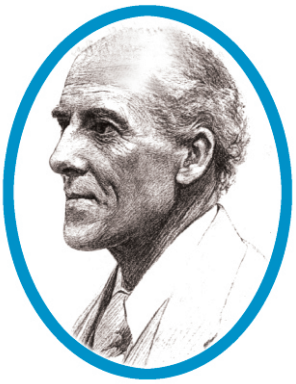
ਅਧਿਆਇ 15

ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ

(Statistics)

❖ *"Statistics may be rightly called the science of averages and their estimates." – A.L.BOWLEY & A.L. BODDINGTON* ❖

15.1 ਭੂਮਿਕਾ



Karl Pearson (1857-1936)

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ ਦਾ (ਮੰਤਵ) ਕਿਸੇ ਖਾਸ ਉਦੇਸ਼ ਲਈ ਇਕੱਠੇ ਕੀਤੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਨ ਅਤੇ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰਕੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਤੱਕ ਪਹੁਚ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਗ੍ਰਾਫ਼ ਰਾਹੀਂ ਅਤੇ ਸਾਰਣੀ ਰਾਹੀਂ ਵਿਅਕਤ ਕਰਨ ਦੀਆਂ ਵਿਧੀਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪੇਸ਼ ਕਰਨਾ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੇ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਗੁਣਾਂ ਅਤੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਇੱਕ ਪ੍ਰਤਿਨਿਧਿਕ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀਆਂ ਵਿਧੀਆਂ ਬਾਰੇ ਵੀ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਇਸ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦੇ ਮਾਪ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਮੱਧਮਾਨ, ਮਧਿਕਾ ਅਤੇ ਬਹੁਲਕ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦੇ ਤਿੰਨ ਮਾਪ ਹਨ। ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦੇ ਮਾਪ ਸਾਨੂੰ ਇਸ ਗੱਲ ਦਾ ਵਿਚਾਰ ਦਿਲਾਉਂਦੇ ਹਨ ਕਿ ਅੰਕੜੇ ਕਿਸ ਸਥਾਨ ਤੇ ਕੇਂਦਰਿਤ ਹਨ ਪਰੰਤੂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਹੋਰ ਚੰਗੀ ਵਿਆਖਿਆ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਵੀ ਪਤਾ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅੰਕੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨਾ ਖਿੰਡਾਵ ਹੈ (ਬਿਖਰਾਵ ਹੈ ਜਾਂ) ਉਹ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦੇ ਮਾਪ ਦੇ ਚਾਰਾਂ ਪਾਸੇ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਕੱਠਾ ਹਨ।

ਦੋ ਬੱਲੇਬਾਜ਼ਾਂ ਰਾਹੀਂ ਪਿਛਲੇ ਦਸ ਮੈਚਾਂ ਵਿੱਚ ਬਣਾਈਆਂ ਗਈਆਂ ਦੌੜਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

ਬੱਲੇਬਾਜ਼ A : 30, 91, 0, 64, 42, 80, 30, 5, 117, 71

ਬੱਲੇਬਾਜ਼ B : 53, 46, 48, 50, 53, 53, 58, 60, 57, 52

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮੱਧਿਕਾ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ :

	ਬੱਲੇਬਾਜ਼ A	ਬੱਲੇਬਾਜ਼ B
ਮੱਧਮਾਨ	53	53
ਮੱਧਿਕਾ	53	53

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਅਸੀਂ ਮੱਧਮਾਨ ($\bar{x}$ ਰਾਹੀਂ ਨਿਰੂਪਿਤ) ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੇ ਜੋੜ ਨੂੰ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਤੋਂ ਭਾਗ ਕਰਕੇ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

ਭਾਵ $$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

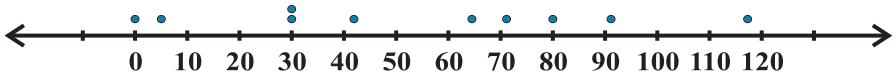
ਅਤੇ, ਮੱਧਿਕਾ ਦੇ ਮਾਪ ਲਈ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਪਹਿਲਾਂ ਵੱਧਦੇ ਜਾਂ ਘੱਟਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਕੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨਿਯਮ ਨੂੰ ਲਗਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :.

ਜੇਕਰ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਟਾਂਕ ਹੈ ਤਾਂ ਮੱਧਿਕਾ $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ ਵੀਂ ਪ੍ਰੇਖਣ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਜਿਸਤ ਹੈ ਤਾਂ ਮੱਧਿਕਾ $\left(\frac{n}{2}\right)$ ਵੀਂ ਅਤੇ $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ ਵੀਂ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋਵੇਂ ਬੱਲੇਬਾਜ਼ A ਅਤੇ B ਦੁਆਰਾ ਬਣਾਈਆਂ ਦੌੜਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮੱਧਿਕਾ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਭਾਵ 53 ਹੈ। ਕੀ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋਵੇਂ ਬੱਲੇਬਾਜ਼ਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਨ ਸਮਾਨ ਇਕੋ ਜਿਹਾ ਪਰਿਵਰਤਨਸ਼ੀਲਤਾ ਹੈ ? ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ ਨਹੀਂ। ਕਿਉਂਕਿ A ਦੀਆਂ ਦੌੜਾਂ ਵਿੱਚ 0 (ਘੱਟੋ-ਘੱਟ) ਤੋਂ 117 (ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ) ਤੱਕ ਹੈ। ਜਦੋਂਕਿ B ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ 46 (ਘੱਟੋ-ਘੱਟ) ਤੋਂ 60 (ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ) ਤੱਕ ਹੈ।

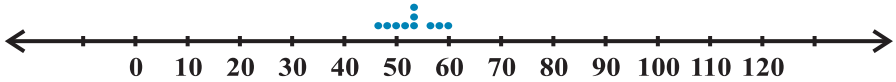
ਆਉ ਅਸੀਂ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਸਕੋਰਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਤੇ ਅੰਕਿਤ ਕਰੀਏ। ਸਾਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਰਸਾਈਆਂ ਗਈਆਂ ਆਕ੍ਰਿਤੀਆਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। (ਚਿੱਤਰ 15.1 ਅਤੇ 15.2)

ਬੱਲੇਬਾਜ਼ A ਲਈ



ਚਿੱਤਰ 15.1

ਬੱਲੇਬਾਜ਼ B ਲਈ



ਚਿੱਤਰ 15.2

ਅਸੀਂ ਵੇਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਬੱਲੇਬਾਜ਼ B ਦੇ ਸੰਗਤ ਬਿੰਦੂ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਨੇੜੇ-ਨੇੜੇ ਹਨ ਅਤੇ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦੇ ਮਾਪ (ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮੱਧਿਕਾ) ਦੇ ਇਰਦ-ਗਿਰਦ ਗੁੱਛਿਆਂ ਵਿੱਚ ਹਨ ਜਦੋਂ ਕਿ A ਦੇ ਸੰਗਤ ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਬਿਖਰਾਵ ਹੈ ਜਾਂ ਉਹ ਵੱਧ ਫੈਲੇ ਹੋਏ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਬਾਰੇ ਸਮਪੂਰਨ ਸੂਚਨਾ ਦੇਣ ਲਈ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦਾ ਮਾਪ ਕਾਫ਼ੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਬਿਖਰਾਵ ਇਕ ਹੋਰ ਖੰਡ ਹੈ, ਜਿਸ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਕੀਤਾ ਜਾਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਕੇਂਦਰੀ ਪਵਿਰਤੀ ਦੇ ਮਾਪ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਨੂੰ ਬਦਲਾਵ ਜਾਂ ਬਿਖਰਾਵ ਦੇ ਵਰਣਨ ਲਈ ਇੱਕ ਖਾਸ ਸੰਖਿਆ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਵਿਖੇਪਣ ਦਾ ਮਾਪ (Measure of dispersion) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵਿਖੇਪਣ ਦੇ ਕੁਝ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਮਾਪਾਂ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਾਂਗੇ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅਤੇ ਬਿਨਾਂ-ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮਾਪਣ ਦੀਆਂ ਵਿਧੀਆਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਾਂਗੇ।

15.2 ਵਿਖੇਪਣ ਨੂੰ ਮਾਪਣਾ (Measure of Dispersion)

ਅੰਕੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਵਿਖੇਪਣ ਜਾਂ ਖਿੰਡਾਵ ਦਾ ਮਾਪ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਅਤੇ ਉੱਥੇ ਦਿੱਤੀ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦੇ ਮਾਪ ਦੇ ਅਧਾਰ ਤੇ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਵਿਖੇਪਣ ਦੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਮਾਪ ਹਨ :

(i) ਸੀਮਾ (Range) (ii) ਚੌਥਾਈ ਵਿਚਲਨ (Quartile deviation) (iii) ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ (Mean deviation) (iv) ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ (Standard deviation).

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਚੌਥਾਈ ਵਿਚਲਨ ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਹੋਰ ਸਾਰੇ ਮਾਪਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

15.3 ਸੀਮਾ (Range)

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਦੋ ਬੱਲੇਬਾਜ਼ਾਂ A ਅਤੇ B ਰਾਹੀਂ ਬਣਾਈਆਂ ਦੌੜਾਂ ਦੇ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸਕੋਰਾਂ ਵਿੱਚ ਖਿੰਡਾਅ, ਹਰੇਕ ਦੇ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਅਤੇ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਦੌੜਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਇਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਖਾਸ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹਰੇਕ ਲੜੀ ਦੇ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਅਤੇ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਮੁੱਲਾਂ ਵਿੱਚ ਅੰਤਰ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਅੰਤਰ ਨੂੰ ਸੀਮਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਬੱਲੇਬਾਜ਼ A ਲਈ ਸੀਮਾ = 117 – 0 = 117

ਬੱਲੇਬਾਜ਼ B ਲਈ ਸੀਮਾ = 60 – 46 = 14

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ ਸੀਮਾ A > ਸੀਮਾ B ਹੈ ਇਸ ਲਈ A ਦੀਆਂ ਦੌੜਾਂ ਦਾ ਖਿੰਡਾਅ ਵੱਧ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ B ਦੀਆਂ ਦੌੜਾਂ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਵੱਧ ਨੇੜੇ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ ਲੜੀ ਦੀ ਸੀਮਾ = ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਮਾਨ – ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਮਾਨ

ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਸੀਮਾ ਸਾਨੂੰ ਪਰਿਵਰਤਨਸ਼ੀਲਤਾ ਜਾਂ ਖਿੰਡਾਅ ਦਾ ਮੋਟਾ-ਮੋਟਾ ਗਿਆਨ ਦਿੰਦੀ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦਾ ਮਾਪ ਵਿਖੇਪਨ ਦੇ ਬਾਰੇ ਕੁੱਝ ਨਹੀਂ ਦੱਸਦਾ। ਇਸ ਉਦੇਸ਼ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਪਰਿਵਰਤਨਸ਼ੀਲਤਾ ਦੇ ਹੋਰ ਮਾਪਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਮਾਪ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੀ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦੇ ਮਾਪਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰ (ਜਾਂ ਵਿਚਲਨ) ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੋਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ।

ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਤੋਂ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰ ਦੇ ਅਧਾਰ ਤੇ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਵਿਖੇਪਣ ਦੀ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਮਾਪ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਹਨ। ਆਉ ਇਹਨਾਂ ਤੇ ਵਿਸਤਾਰਪੂਰਵਕ ਚਰਚਾ ਕਰੀਏ।

15.4 ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ (Mean Deviation)

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਪ੍ਰੇਖਣ x ਦਾ ਸਥਿਰ ਮਾਨ 'a' ਤੋਂ ਅੰਤਰ $(x - a)$ ਪ੍ਰੇਖਣ x ਦਾ a ਵਿਚਲਨ ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਪ੍ਰੇਖਣ x ਦਾ ਕੇਂਦਰੀ ਮੁੱਲ 'a' ਤੋਂ ਵਿਖੇਪਣ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ a ਤੋਂ ਵਿਚਲਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ

ਵਿਖੇਪਣ ਦਾ ਮਾਪ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਮੱਧਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦਾ ਮਾਪ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਦੇ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਅਤੇ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਕੁਝ ਵਿਚਲਨ ਰਿਣਾਤਮਕ ਅਤੇ ਕੁਝ ਧਨਾਤਮਕ ਹੋਣਗੇ। ਇਸ ਲਈ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਮੱਧਮਾਨ ($\bar{x}$) ਤੋਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਸਿਫ਼ਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$\text{ਨਾਲ ਹੀ, ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ} = \frac{\text{ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ}}{\text{ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ}} = \frac{0}{n} = 0$$

ਇਸ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ-ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦਾ ਕੋਈ ਅਰਥ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਜਿੱਥੋਂ ਤੱਕ ਕਿ ਵਿਖੇਪਨ ਦੇ ਮਾਪਣ ਦਾ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਯਾਦ ਰੱਖੋ ਕਿ ਵਿਖੇਪਣ ਦਾ ਉਚਿਤ ਮਾਪ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਹਰੇਕ ਮਾਨ ਦੀ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦਾ ਮਾਪ ਜਾਂ ਕਿਸੇ ਸਥਿਰ ਸੰਖਿਆ 'a' ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਕਿਸੇ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰ ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਮੁੱਲ ਉਹਨਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਰਾਹੀਂ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਤੇ ਦਰਸਾਏ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੀ ਦੂਰੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਕਿਸੇ ਸਥਿਰ ਸੰਖਿਆ 'a' ਤੋਂ ਵਿਖੇਪਨ ਨੂੰ ਮਾਪਣ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕੇਂਦਰੀ ਮੁੱਲ ਤੋਂ ਵਿਚਲਨ ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਮੱਧਮਾਨ ਨੂੰ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ 'a' ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ 'a' ਤੋਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। 'a' ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਨੂੰ M.D.(a) ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਗਟ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$\text{M.D.}(a) = \frac{\text{'}a\text{' ਤੋਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਮਾਨ ਦਾ ਜੋੜ}}{\text{ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ}}$$

ਟਿੱਪਣੀ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਮਾਪ ਤੋਂ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ ਅਧਿਐਨ ਵਿੱਚ ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮੱਧਿਕਾ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਆਉ ਹੁਣ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ ਤੋਂ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਅਤੇ ਮੱਧਿਕਾ ਤੋਂ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਸਿੱਖੀਏ।

15.4.1 ਅਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ (Mean deviation for ungrouped data) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ n ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੇ ਅੰਕੜੇ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ। ਮੱਧਮਾਨ ਜਾਂ ਮੱਧਿਕਾ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਦੇ ਪਰਿਕਲਨ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਚਰਣ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਚਰਣ 1 : ਉਸ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦਾ ਮਾਪ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਇਹ 'a' ਹੈ।

ਚਰਣ 2 : ਹਰੇਕ ਪ੍ਰੇਖਣ x_i ਦਾ a, ਤੋਂ ਵਿਚਲਨ ਭਾਵ $x_1 - a, x_2 - a, x_3 - a, \ldots, x_n - a$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਚਰਣ 3 : ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ ਭਾਵ ਜੇਕਰ ਵਿਚਲਨਾਂ ਵਿੱਚ ਰਿਣ ਚਿੰਨ੍ਹ ਲੱਗਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਨੂੰ ਹਟਾ ਦਿਉ।

ਭਾਵ $|x_1 - a|, |x_2 - a|, |x_3 - a|, \ldots, |x_n - a|$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਚਰਨ 4 : ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਮਾਨਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਇਹ ਮੱਧਮਾਨ 'a' ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਹੈ।

ਭਾਵ $$\text{M.D.}(a) = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - a|}{n}$$

ਇਸ ਲਈ $$\text{M.D.}(\bar{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|, \text{ ਜਿੱਥੇ } \bar{x} = \text{ਮੱਧਮਾਨ}$$

ਅਤੇ $$\text{M.D.}(\text{M}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \text{M}|, \text{ ਜਿੱਥੇ M} = \text{ਮੱਧਿਕਾ}$$

ਟਿੱਪਣੀ ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਮੱਧਿਕਾ ਨੂੰ ਚਿੰਨ੍ਹ M ਰਾਹੀਂ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਕਿ ਹੋਰ ਕਿਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਨਾ ਕਿਹਾ ਗਿਆ ਹੋਵੇ। ਆਓ ਹੁਣ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਚਰਣਾਂ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਉਦਾਹਰਣ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ :

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ :

6, 7, 10, 12, 13, 4, 8, 12

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਪਗਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਅੱਗੇ ਵੱਧਦੇ ਹੋਏ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

ਚਰਣ 1 : ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ

$$\bar{x} = \frac{6+7+10+12+13+4+8+12}{8} = \frac{72}{8} = 9$$

ਚਰਣ 2 : ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੇ ਮੱਧਮਾਨ $\bar{x}$, ਤੋਂ ਤਰਤੀਬਵਾਰ ਵਿਚਲਨ $x_i - \bar{x}$

ਭਾਵ $6-9, 7-9, 10-9, 12-9, 13-9, 4-9, 8-9, 12-9$, ਹਨ।

ਜਾਂ $-3, -2, 1, 3, 4, -5, -1, 3$ ਹਨ।

ਚਰਣ 3 : ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਮਾਨ $|x_i - \bar{x}|$

3, 2, 1, 3, 4, 5, 1, 3 ਹਨ।

ਚਰਣ 4 : ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਹੈ :

$$\text{M.D. } (\bar{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{8} |x_i - \bar{x}|}{8}$$

$$= \frac{3+2+1+3+4+5+1+3}{8} = \frac{22}{8} = 2.75$$

ਟਿੱਪਣੀ ਹਰੇਕ ਵਾਰ ਚਰਣਾਂ ਨੂੰ ਲਿਖਣ ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਚਰਣਾਂ ਦਾ ਵਰਣਨ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ ਹੀ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ ਪਰਿਕਲਨ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ :

12, 3, 18, 17, 4, 9, 17, 19, 20, 15, 8, 17, 2, 3, 16, 11, 3, 1, 0, 5

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ($\bar{x}$) ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੋਵੇਗਾ।

$$\bar{x} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i = \frac{200}{20} = 10$$

ਮੱਧਮਾਨ ਤੋਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਮਾਨ ਭਾਵ $|x_i - \bar{x}|$ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ :

2, 7, 8, 7, 6, 1, 7, 9, 10, 5, 2, 7, 8, 7, 6, 1, 7, 9, 10, 5

ਇਸ ਲਈ $\sum_{i=1}^{20} |x_i - \bar{x}| = 124$

ਅਤੇ $\text{M.D. } (\bar{x}) = \frac{124}{20} = 6.2$

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਮੱਧਿਕਾ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ :

3, 9, 5, 3, 12, 10, 18, 4, 7, 19, 21

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 11 ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਟਾਂਕ ਹੈ। ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਵੱਧਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣ ਤੇ ਅਸੀਂ 3, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 18, 19, 21 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਹੁਣ ਮੱਧਿਕਾ $= \left(\frac{11 + 1}{2}\right)$ ਵੀਂ ਜਾਂ 6 ਵਾਂ ਪ੍ਰੇਖਣ = 9 ਹੈ।

ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਮਾਨ $|x_i - \mathrm{M}|$ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ।

$$6, 6, 5, 4, 2, 0, 1, 3, 9, 10, 12$$

ਇਸ ਲਈ $$\sum_{i=1}^{11} |x_i - \mathrm{M}| = 58$$

ਅਤੇ $$\mathrm{M.D.}(\mathrm{M}) = \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11} |x_i - \mathrm{M}| = \frac{1}{11} \times 58 = 5.27$$

15.4.2 ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ (Mean deviation for grouped data) ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਦੋ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

(a) ਵੱਖਰੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ (Discrete frequency distribution)

(b) ਲਗਾਤਾਰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ (Continuous frequency distribution)

ਆਉ ਇਹਨਾਂ ਦੋਵਾਂ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀਆਂ ਵਿਧੀਆਂ ਤੇ ਚਰਚਾ ਕਰੀਏ।

(a) ਵੱਖਰੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ (Discrete frequency distribution) : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਵਿੱਚ n ਭਿੰਨ ਪ੍ਰੇਖਣ $x_1, x_2, ..., x_n$ ਹਨ। ਜਿਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾਵਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $f_1, f_2, ..., f_n$ ਹਨ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਸਾਰਣੀ ਬੱਧ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੋਂ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ ਵੱਖਰੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ :

x :	x_1	x_2	x_3 ...	x_n
f :	f_1	f_2	f_3 ...	f_n

(i) ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ (Mean deviation about mean)

ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੂਤਰ ਰਾਹੀਂ ਮੱਧਮਾਨ $\bar{x}$ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$$

ਜਿੱਥੇ $\sum_{i=1}^{n} x_i f_i$ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ x_i ਦਾ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ f_i ਤੋਂ ਗੁਣਨਫਲਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $\mathrm{N} = \sum_{i=1}^{n} f_i$ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਹੈ।

ਤਦ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ x_i ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ $\bar{x}$ ਤੋਂ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਮੁਲ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਭਾਵ ਸਾਰੇ $i = 1, 2, ..., n$ ਲਈ $|x_i - \bar{x}|$ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸਦੇ ਬਾਅਦ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਮਾਨ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਦੋਂ ਕਿ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਲੋੜੀਂਦਾ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $$\mathrm{M.D.}(\bar{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - \bar{x}|}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - \bar{x}|$$

(ii) ਮੱਧਿਕਾ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ (Mean deviation about median) : ਮੱਧਿਕਾ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਵਖਰੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਦੀ ਮਧਿਕਾ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸਦੇ ਲਈ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਨੂੰ ਵੱਧਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਲਗਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਸਦੇ ਬਾਅਦ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਪਤਾ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਤਦ ਉਸ ਪ੍ਰੇਖਣ ਦਾ ਨਿਰਧਾਰਣ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸਦੀ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ $\frac{N}{2}$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਜਾਂ ਇਸ ਤੋਂ ਥੋੜ੍ਹੀ ਵੱਧ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ N ਤੋਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਇਹ ਮਾਨ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੇ ਮੱਧ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਮੰਨੀ ਹੋਈ ਮੱਧਿਕਾ ਹੈ। ਮਧਿਕਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਬਾਅਦ ਅਸੀਂ ਮਧਿਕਾਂ ਤੋਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਮਾਨਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ

$$\text{M.D.(M)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i\left|x_i - \text{M}\right|$$

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ :

x_i	2	5	6	8	10	12
f_i	2	8	10	7	8	5

ਹੱਲ : ਆਉ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਸਾਰਣੀ 15.1 ਬਣਾਈਏ ਅਤੇ ਹੋਰ ਕਾਲਮ ਪਰਿਕਲਨ ਦੇ ਬਾਅਦ ਲਗਾਈਏ।

ਸਾਰਣੀ 15.1

x_i	f_i	$f_i x_i$	$\left\|x_i - \bar{x}\right\|$	$f_i\left\|x_i - \bar{x}\right\|$
2	2	4	5.5	11
5	8	40	2.5	20
6	10	60	1.5	15
8	7	56	0.5	3.5
10	8	80	2.5	20
12	5	60	4.5	22.5
	40	300		92

$$\text{N} = \sum_{i=1}^{6} f_i = 40, \quad \sum_{i=1}^{6} f_i x_i = 300, \quad \sum_{i=1}^{6} f_i\left|x_i - \bar{x}\right| = 92$$

ਇਸ ਲਈ $$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{6} f_i x_i = \frac{1}{40} \times 300 = 7.5$$

ਅਤੇ $$\text{M.D.}\ (\bar{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{6} f_i\ \left|x_i - \bar{x}\right| = \frac{1}{40} \times 92 = 2.3$$

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧਿਕਾ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ :

x_i	3	6	9	12	13	15	21	22
f_i	3	4	5	2	4	5	4	3

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅੰਕੜੇ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਵੱਧਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਸੰਗਤ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਦੀ ਇੱਕ ਕਤਾਰ ਹੋਰ ਲਗਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। (ਸਾਰਣੀ 15.2)।

ਸਾਰਣੀ 15.2

x_i	3	6	9	12	13	15	21	22
f_i	3	4	5	2	4	5	4	3
$c.f.$	3	7	12	14	18	23	27	30

ਹੁਣ N = 30 ਹੈ ਜੋ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਮੱਧਿਕਾ 15ਵੀਂ ਅਤੇ 16ਵੀਂ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਹੈ। ਇਹ ਦੋਵੇਂ ਪ੍ਰੇਖਣ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ 18 ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹਨ ਜਿਸਦਾ ਸੰਗਤ ਪ੍ਰੇਖਣ 13 ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਮੱਧਿਕਾ $\text{M} = \dfrac{\text{15 ਵਾਂ ਪ੍ਰੇਖਣ} + \text{16 ਵਾਂ ਪ੍ਰੇਖਣ}}{2} = \dfrac{13+13}{2} = 13$

ਹੁਣ ਮੱਧਿਕਾ ਤੋਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਮੁੱਲ ਭਾਵ $|x_i - \text{M}|$ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ 15.3 ਵਿਚ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਹਨ।

ਸਾਰਣੀ 15.3

$\lvert x_i - \text{M}\rvert$	10	7	4	1	0	2	8	9
f_i	3	4	5	2	4	5	4	3
$f_i\lvert x_i - \text{M}\rvert$	30	28	20	2	0	10	32	27

$$\sum_{i=1}^{8} f_i = 30 \quad \text{ਅਤੇ} \quad \sum_{i=1}^{8} f_i\,|x_i - \text{M}| = 149$$

ਇਸ ਲਈ $$\text{M.D.(M)} = \frac{1}{\text{N}} \sum_{i=1}^{8} f_i\,|x_i - \text{M}|$$

$$= \frac{1}{30} \times 149 = 4.97$$

(b) ਲਗਾਤਾਰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ (Continuous frequency distribution) : ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਉਹ ਲੜੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਬਿਨਾਂ ਅੰਤਰ ਵਾਲੇ ਵਰਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਲਿਖੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ 100 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਲਗਾਤਾਰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੋਂ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ :

ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ	12	18	27	20	17	6

(i) ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ (Mean deviation about mean) : ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਦੇ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਪਰਿਕਲਨ ਦੇ ਸਮੇਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਹਰੇਕ ਵਰਗ (class) ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਉਸਦੇ ਮੱਧ-ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਕੇਂਦਰਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਵੀ ਅਸੀਂ ਹਰੇਕ ਵਰਗ ਦਾ ਮੱਧ-ਬਿੰਦੂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਖੰਡਿਤ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਆਉ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਉਦਾਹਰਣ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ :

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ :

ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ	2	3	8	14	8	3	2

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਹੇਠ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ 15.4 ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

ਸਾਰਣੀ 15.4

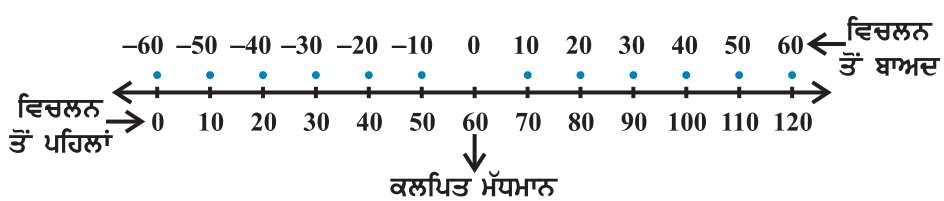
ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ	ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ f_i	ਮੱਧ-ਬਿੰਦੂ x_i	$f_i x_i$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert$
10-20	2	15	30	30	60
20-30	3	25	75	20	60
30-40	8	35	280	10	80
40-50	14	45	630	0	0
50-60	8	55	440	10	80
60-70	3	65	195	20	60
70-80	2	75	150	30	60
	40		1800		400

ਇੱਥੇ $$N = \sum_{i=1}^{7} f_i = 40, \sum_{i=1}^{7} f_i x_i = 1800, \sum_{i=1}^{7} f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert = 400$$

ਇਸ ਲਈ $$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} f_i x_i = \frac{1800}{40} = 45$$

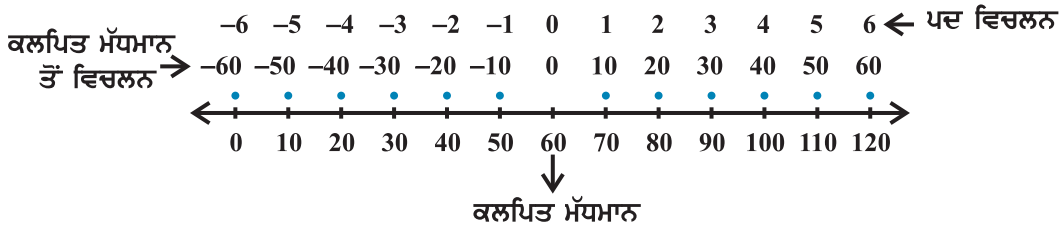
ਅਤੇ $$\text{M.D.}(\bar{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert = \frac{1}{40} \times 400 = 10$$

ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਛੋਟੀ (ਲਘੂ) ਵਿਧੀ (Shortcut method for calculating mean deviation about mean) : ਅਸੀਂ ਪਗ ਵਿਚਲਨ ਵਿਧੀ (step deviation method) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ $\bar{x}$ ਦੇ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਪਰਿਕਲਨ ਤੋਂ ਬਚ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਇਸ ਵਿਧੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੇ ਮੱਧ ਜਾਂ ਉਸਦੇ ਨੇੜੇ ਕਿਸੇ ਪ੍ਰੇਖਣ ਨੂੰ ਕਲਪਿਤ ਮੱਧਮਾਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਤਾਂ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ (ਜਾਂ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂਆਂ) ਦਾ ਇਸ ਕਲਪਿਤ ਮੱਧਮਾਨ ਤੋਂ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਵਿਚਲਨ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਤੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ (origin) ਨੂੰ ਸਿਫ਼ਰ ਤੋਂ ਬਦਲਕੇ ਕਲਪਿਤ ਮੱਧਮਾਨ ਤੇ ਲੈ ਜਾਣਾ ਹੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 15.3 ਵਿੱਚ ਦਰਸ਼ਾਇਆ ਹੋਇਆ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 15.3

ਜੇਕਰ ਸਾਰੇ ਵਿਚਲਨਾਂ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ ਤਾਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰਨ ਲਈ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਤੋਂ ਭਾਗ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਨਵੇਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਨੂੰ ਪਗ ਵਿਚਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਪਗ ਵਿਚਲਨ ਲੈਣ ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਤੇ ਪੈਮਾਨੇ ਦਾ ਬਦਲਾਵ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 15.4 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 15.4

ਵਿਚਲਨ ਅਤੇ ਪਗ ਵਿਚਲਨ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੇ ਅਕਾਰ ਨੂੰ ਛੋਟਾ ਕਰ ਦਿੰਦੇ ਹਨ ਜਿਸ ਤੋਂ ਗੁਣਨ ਜਿਹੀਆਂ ਗਣਨਾਵਾਂ ਸਰਲ ਹੋ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਮੰਨ ਲਉ ਨਵਾਂ ਚਲ $d_i = \frac{x_i - a}{h}$, ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ 'a' ਕਲਪਿਤ ਮੱਧਮਾਨ ਹੈ ਅਤੇ h ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ। ਤਾਂ ਪਗ ਵਿਚਲਨ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ $\bar{x}$ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੂਤਰ ਤੋਂ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :

$$\bar{x} = a + \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i d_i}{N} \times h$$

ਆਉ ਉਦਾਹਰਣ 6 ਦੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਪਗ ਵਿਚਲਨ ਵਿਧੀ ਲਗਾਈਏ।

ਅਸੀਂ ਕਲਪਿਤ ਮੱਧਮਾਨ $a = 45$ ਅਤੇ $h = 10$ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ 15.5 ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

ਸਾਰਣੀ 15.5

ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ	ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ	ਮੱਧ-ਬਿੰਦੂ	$d_i = \frac{x_i - 45}{10}$	$f_i d_i$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert$
	f_i	x_i				
10-20	2	15	– 3	– 6	30	60
20-30	3	25	– 2	– 6	20	60
30-40	8	35	– 1	– 8	10	80
40-50	14	45	0	0	0	0
50-60	8	55	1	8	10	80
60-70	3	65	2	6	20	60
70-80	2	75	3	6	30	60
	40			0		400

ਇਸ ਲਈ

$$\bar{x} = a + \frac{\sum_{i=1}^{7} f_i d_i}{N} \times h$$

$$= 45 + \frac{0}{40} \times 10 = 45$$

ਅਤੇ $$\text{M.D. } (\bar{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} f_i\left|x_i - \bar{x}\right| = \frac{400}{40} = 10$$

ਟਿੱਪਣੀ ਪਗ ਵਿਚਲਨ ਵਿਧੀ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ $\bar{x}$ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਬਾਕੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਉਂਝ ਹੀ ਹੈ।

(ii) ਮੱਧਿਕਾ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ (Mean deviation about median) : ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧਿਕਾ ਤੋਂ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਕ੍ਰਿਆ ਉਂਝ ਹੀ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਕੀਤੀ ਸੀ। ਇਸ ਵਿੱਚ ਖਾਸ ਅੰਤਰ ਕੇਵਲ ਵਿਚਲਨ ਲੈਣ ਦੇ ਸਮੇਂ ਮੱਧਮਾਨ ਦੀ ਜਗ੍ਹਾ ਮੱਧਿਕਾ ਲੈਣ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਆਉ ਲਗਾਤਾਰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਲਈ ਮੱਧਿਕਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਕ੍ਰਿਆ ਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰੀਏ। ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਪਹਿਲਾਂ ਵੱਧਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਲਗਾਈਏ ਤਾਂ ਲਗਾਤਾਰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਦੀ ਮੱਧਿਕਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਪਹਿਲਾਂ ਉਸ ਵਰਗ ਨੂੰ ਪੱਕਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਮੱਧਿਕਾ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਇਸ ਵਰਗ ਨੂੰ ਮੱਧਿਕਾ ਵਰਗ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੂਤਰ ਨੂੰ ਲਗਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

$$\text{ਮੱਧਿਕਾ } = l + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times h$$

ਜਿੱਥੇ ਮਧਿਕਾ ਵਰਗ ਉਹ ਵਰਗ ਹੈ ਜਿਸਦੀ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ $\frac{N}{2}$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਜਾਂ ਉਸ ਤੋਂ ਕੁਝ ਵੱਧ ਹੋਵੇ, ਬਾਰੰਬਾਰਤਾਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ N ਮੱਧਿਕਾ ਵਰਗ ਦੀ ਹੇਠਲੀ ਸੀਮਾ l, ਮੱਧਿਕਾ ਵਰਗ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ f, ਮੱਧਿਕਾ ਵਰਗ ਤੋਂ ਠੀਕ ਪਹਿਲਾਂ ਵਾਲੇ ਵਰਗ ਦੀ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ c ਅਤੇ ਮੱਧਿਕਾ ਵਰਗ ਦਾ ਵਿਸਤਾਰ h ਹੈ। ਮੱਧਿਕਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਬਾਅਦ ਹਰੇਕ ਵਰਗ ਦੀ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂਆਂ x_i ਦਾ ਮੱਧਿਕਾ ਤੋਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਮਾਨ ਭਾਵ $|x_i - M|$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਤਾਂ $$\text{M.D. (M)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i\left|x_i - M\right|$$

ਇਸ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਉਦਾਹਰਣ ਤੋਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧਿਕਾ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਵਰਗ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ	6	7	15	16	4	2

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਹੇਠਲੀ ਸਾਰਣੀ 15.6 ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ :

ਸਾਰਣੀ 15.6

ਵਰਗ	ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ	ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ	ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ	$\lvert x_i - \text{Med.}\rvert$	$f_i\lvert x_i - \text{Med.}\rvert$
	f_i	$(c.f.)$	x_i		
0-10	6	6	5	23	138
10-20	7	13	15	13	91
20-30	15	28	25	3	45
30-40	16	44	35	7	112
40-50	4	48	45	17	68
50-60	2	50	55	27	54
	50				508

ਇੱਥੇ N=50, ਇਸ ਲਈ $\frac{N}{2}$ ਜਾਂ 25ਵਾਂ ਪ੍ਰੇਖਣ 20-30 ਵਰਗ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ 20-30 ਮੱਧਿਕਾ ਵਰਗ ਹੈ।
ਅਸੀ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ

$$\text{ਮੱਧਿਕਾ} = l + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times h$$

ਇੱਥੇ $l = 20$, $C = 13$, $f = 15$, $h = 10$ ਅਤੇ $N = 50$

ਇਸ ਲਈ $$\text{ਮੱਧਿਕਾ} = 20 + \frac{25-13}{15} \times 10 = 20 + 8 = 28$$

ਇਸ ਲਈ ਮੱਧਿਕਾ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ

$$\text{M.D. (M)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{6} f_i |x_i - M| = \frac{1}{50} \times 508 = 10.16 \text{ ਹੈ।}$$

ਅਭਿਆਸ 15.1

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1 ਅਤੇ 2 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

1. 4, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 17

2. 38, 70, 48, 40, 42, 55, 63, 46, 54, 44

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 3 ਅਤੇ 4 ਦੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧਿਕਾ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

3. 13, 17, 16, 14, 11, 13, 10, 16, 11, 18, 12, 17

4. 36, 72, 46, 42, 60, 45, 53, 46, 51, 49

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 5 ਅਤੇ 6 ਦੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

5.

x_i	5	10	15	20	25
f_i	7	4	6	3	5

6.

x_i	10	30	50	70	90
f_i	4	24	28	16	8

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 7 ਅਤੇ 8 ਦੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧਿਕਾ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

7.

x_i	5	7	9	10	12	15
f_i	8	6	2	2	2	6

8.

x_i	15	21	27	30	35
f_i	3	5	6	7	8

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 9 ਅਤੇ 10 ਦੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

9.

ਆਮਦਨ ਪ੍ਰਤਿਦਿਨ	0-100	100-200	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800
ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	4	8	9	10	7	5	4	3

10.

ਉੱਚਾਈ (ਸੈਂ.ਮੀ.ਵਿੱਚ)	95-105	105-115	115-125	125-135	135-145	145-155
ਲੜਕਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	9	13	26	30	12	10

11. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧਿਕਾ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ :

ਅੰਕ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	6	8	14	16	4	2

12. ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ 100 ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਉਮਰ ਦੇ ਵੰਡ ਦੀ ਮੱਧਿਕਾ ਉਮਰ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ :

ਉਮਰ	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50	51-55
ਸੰਖਿਆ	5	6	12	14	26	12	16	9

[**ਸੰਕੇਤ** : ਹਰੇਕ ਵਰਗ ਦੀ ਹੇਠਲੀ ਸੀਮਾ ਵਿੱਚੋਂ 0.5 ਘਟਾਉ ਕਰਕੇ ਅਤੇ ਉਸਦੀ ਉੱਪਰਲੀ ਸੀਮਾ ਵਿੱਚ 0.5 ਜੋੜ ਕੇ ਦਿੱਤੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਲਗਾਤਾਰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਵਿੱਚ ਬਦਲੋ।]

15.4.3 ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਦੀਆਂ ਕਮੀਆਂ ਜਾਂ ਸੀਮਾਵਾਂ (Limitations of mean deviation) : ਬਹੁਤ ਜ਼ਿਆਦਾ ਵਿਚਰਨ ਜਾਂ ਖਿੰਡਾਅ ਵਾਲੀਆਂ ਲੜੀਆਂ ਵਿੱਚ ਮੱਧਿਕਾ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਲਈ ਸਹੀ ਮਾਪ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਮੱਧਿਕਾ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਤੇ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਿਸ਼ਵਾਸ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਮੱਧਮਾਨ ਤੋਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ (ਰਿਣ ਚਿੰਨ੍ਹ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ) ਮਧਿਕਾ ਤੋਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਵੱਧ ਵਿਗਿਆਨਿਕ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਬਹੁਤ ਵਾਰ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਅਸੰਤੋਸ਼ਜਨਕ ਨਤੀਜਾ ਦੇ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਨੂੰ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਮਾਨ ਤੇ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਹੋਰ ਬੀਜਗਣਿਤੀ ਗਣਨਾਵਾਂ ਦੇ ਯੋਗ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਭਾਵ ਕਿ ਸਾਨੂੰ ਵਿਖੇਪਨ ਦੇ ਕੋਈ ਹੋਰ ਮਾਪ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਵਿਖੇਪਨ ਦਾ ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਮਾਪ ਹੈ।

15.5 ਪ੍ਰਸਰਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ (Variance and Standard Deviation)

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਮੱਧਮਾਨ ਜਾਂ ਮਧਿਕਾ ਤੋਂ ਮਧ ਵਿਚਲਨ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ, ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਮੁਲ ਲਿਆ ਸੀ। ਇਹ ਨਿਰਪੇਖ ਮੁਲ, ਮਧ ਵਿਚਲਨ ਨੂੰ ਅਰਥ ਪੂਰਨ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਕੀਤੇ ਗਏ ਸਨ ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਕਾਰਨ ਉਤਪੰਨ ਇਸ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਨੂੰ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਵਰਗ ਲੈ ਕੇ ਵੀ ਦੂਰ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਬੇਸ਼ੱਕ ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਇਹ ਵਰਗ ਅ-ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਮੰਨ ਲਉ $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, n ਪ੍ਰੇਖਣ ਹਨ ਅਤੇ $\bar{x}$ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਹੈ। ਤਾਂ

$$(x_1-\bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + ...+ (x_n-\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

ਜੇਕਰ ਇਹ ਜੋੜ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਹਰੇਕ $(x_i-\bar{x})$ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ। ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਵਿਚਲਨ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਸਾਰੇ ਪ੍ਰੇਖਣ $\bar{x}$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਨ।

ਜੇਕਰ $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ ਛੋਟਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ਪ੍ਰੇਖਣ $x_1, x_2, x_3,...,x_n$ ਮੱਧਮਾਨ $\bar{x}$ ਦੇ ਨਜਦੀਕ ਹਨ ਅਤੇ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ $\bar{x}$ ਦੇ ਬਾਬਤ ਵਿਚਲਨ ਘਟ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਜੇਕਰ ਇਹ ਜੋੜ ਵੱਡਾ ਹੈ ਤਾਂ ਮੱਧਮਾਨ $\bar{x}$ ਦੇ ਬਾਬਤ ਵਿਚਲਨ ਵੱਧ ਹੈ। ਤਾਂ, ਕੀ ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੋੜ $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ ਸਾਰੇ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ $\bar{x}$ ਦੇ ਬਾਬਤ ਵਿਖੇਪਨ ਜਾਂ ਵਿਚਲਨ ਦੇ ਮਾਪ ਦਾ ਸੰਤੋਸ਼ਜਨਕ ਪ੍ਰਤੀਕ ਹੈ?

ਆਉ ਇਸਦੇ ਲਈ 6 ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ 5, 15, 25, 35, 45, 55 ਦਾ ਇੱਕ ਸਮੂਹ A ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ 30 ਹੈ। ਇਸ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ $\bar{x}$ ਤੋਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਵਰਗ ਦਾ ਜੋੜ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਹੈ :

$$\sum_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})^2 = (5-30)^2 + (15-30)^2 + (25-30)^2 + (35-30)^2 + (45-30)^2 + (55-30)^2$$
$$= 625 + 225 + 25 + 25 + 225 + 625 = 1750$$

ਇੱਕ ਹੋਰ ਸਮੂਹ B ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸਦੇ 31 ਪ੍ਰੇਖਣ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ : 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45.

ਇਹਨਾਂ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ $\bar{y} = 30$ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਦੋਵੇਂ ਸਮੂਹਾਂ A ਅਤੇ B ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ 30 ਹੈ।

ਸਮੂਹ B ਦੇ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੇ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ :

$$\sum_{i=1}^{31}(y_i-\bar{y})^2 = (15-30)^2 + (16-30)^2 + (17-30)^2 + \ldots + (44-30)^2 + (45-30)^2$$

$$= (-15)^2 + (-14)^2 + \ldots + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 14^2 + 15^2$$

$$= 2\,[15^2 + 14^2 + \ldots + 1^2]$$

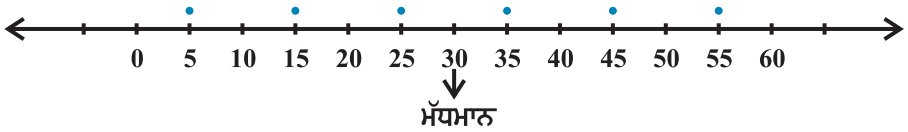
$$= 2 \times \frac{15 \times (15+1)\,(30+1)}{6} = 5 \times 16 \times 31 = 2480$$

ਕਿਉਂਕਿ ਪਹਿਲੀਆਂ n ਪ੍ਰਾਕਿਰਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ = $\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇੱਥੇ $n = 15$ ਹੈ।

ਜੇਕਰ $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ ਹੀ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਵਿਖੇਪਨ ਜਾਂ ਖਿੰਡਾਵ ਦਾ ਮਾਪ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਕਹਿਣਾ ਪਵੇਗਾ ਕਿ 31 ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ B ਦਾ 6 ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਵਾਲੇ ਸਮੂਹ A ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਵੱਧ ਵਿਖੇਪਨ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਸਮੂਹ A ਵਿੱਚ 6 ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ $\bar{x}$ ਦੇ ਬਾਬਤ ਖਿੰਡਾਅ (ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਪਸਾਰ -25 ਤੋਂ 25 ਹੈ) ਸਮੂਹ B ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ (ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਪਸਾਰ –15 ਤੋਂ 15 ਹੈ) ਵੱਧ ਹੈ।

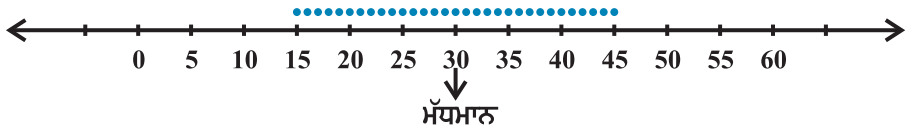
ਇਹ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਚਿੱਤਰਾਂ ਤੋਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ :

ਸਮੂਹ A ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 15.5 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।



ਚਿੱਤਰ 15.5

ਸਮੂਹ B ਲਈ ਅਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 15.6 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :



ਚਿੱਤਰ 15.6

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਮੱਧਮਾਨ ਤੋਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਵਿਖੇਪਨ ਦਾ ਸਹੀ ਮਾਪ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਨੂੰ ਦੂਰ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਭਾਵ ਅਸੀਂ $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਸਮੂਹ A ਲਈ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਮੱਧਮਾਨ $= \frac{1}{6} \times 1750 = 291.6$ ਹੈ ਅਤੇ ਸਮੂਹ B ਦੇ ਲਈ ਇਹ $\frac{1}{31} \times 2480 = 80$ ਹੈ।

ਇਹ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ਸਮੂਹ A ਵਿੱਚ ਖਿੰਡਾਅ ਜਾਂ ਵਿਚਲਨ ਸਮੂਹ B ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵੱਧ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਦੋਵੇਂ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਸਹੀ ਨਤੀਜੇ ਅਤੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਨਿਰੂਪਣ ਤੋਂ ਮੇਲ ਖਾਂਦੇ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ $\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^2$ ਨੂੰ ਵਿਖੇਪਨ ਦੇ ਸਹੀ ਮਾਪ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਸੰਖਿਆ ਭਾਵ ਮੱਧਮਾਨ ਤੋਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਮਧ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ (variance) ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ σ^2 (ਸਿਗਮਾ ਦਾ ਵਰਗ ਪੜ੍ਹਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ) ਤੋਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ n ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ $x_1, x_2,..., x_n$ ਦੀ ਚਲ ਰਾਸ਼ੀ

$$\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \text{ ਹੈ।}$$

15.5.1 ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ (Standard Deviation) ਪ੍ਰਸਰਨ ਦੀ ਗਣਨਾ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ x_i ਅਤੇ $\bar{x}$ ਦੀ ਇਕਾਈ ਪ੍ਰਸਰਨ ਦੀ ਇਕਾਈ ਤੋਂ ਭਿੰਨ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਪ੍ਰਸਰਨ ਵਿੱਚ $(x_i-\bar{x})$ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਨੂੰ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਸਰਨ ਦੇ ਧਨਾਤਮਕ ਵਰਗਮੂਲ ਨੂੰ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਵਿਖੇਪਨ ਦਾ ਸਹੀ ਮਾਪ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸਨੂੰ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਨੂੰ ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ σ ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \qquad \text{... (1)}$$

ਆਉ ਅਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਪ੍ਰਸਰਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਪ੍ਰਸਰਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ :

6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਰਣੀ 15.7 ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਮੱਧਮਾਨ ਨੂੰ ਪਦ ਵਿਚਲਨ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ 14 ਨੂੰ ਕਲਪਿਤ ਮੱਧਮਾਨ ਲੈ ਕੇ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 10 ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ 15.7

x_i	$d_i=\frac{x_i-14}{2}$	ਮੱਧਮਾਨ ਤੋਂ ਵਿਚਲਨ $(x_i-\bar{x})$	$(x_i-\bar{x})^2$
6	–4	–9	81
8	–3	–7	49
10	–2	–5	25
12	–1	–3	9
14	0	–1	1
16	1	1	1
18	2	3	9
20	3	5	25
22	4	7	49
24	5	9	81
	5		330

ਇਸ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ $\bar{x}$ = ਕਲਪਿਤ ਮੱਧਮਾਨ + $\frac{\sum_{i=1}^{n}d_i}{n}\times h = 14+\frac{5}{10}\times 2=15$

ਅਤੇ ਪ੍ਰਸਰਨ, $(\sigma^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{10} \times 330 = 33$

ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ $(\sigma) = \sqrt{33} = 5.74$

15.5.2 ਇੱਕ ਵੱਖਰੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਦਾ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ (Standard deviation of a discrete frequency distribution)

ਮੰਨ ਲਉ ਦਿਤੀ ਹੋਈ ਵੱਖਰੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ :

$$x: \quad x_1, \; x_2, \; x_3, \ldots, x_n$$
$$f: \quad f_1, \; f_2, \; f_3, \ldots, f_n$$

ਇਸ ਵੰਡ ਲਈ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ $(\sigma) = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}$ ... (2)

ਜਿੱਥੇ $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$

ਆਉ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਉਦਾਹਰਣ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਪ੍ਰਸਰਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ :

x_i	4	8	11	17	20	24	32
f_i	3	5	9	5	4	3	1

ਹੱਲ : ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਸਾਰਣੀ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣ ਤੇ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ 15.8 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

ਸਾਰਣੀ 15.8

x_i	f_i	$f_i x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
4	3	12	–10	100	300
8	5	40	–6	36	180
11	9	99	–3	9	81
17	5	85	3	9	45
20	4	80	6	36	144
24	3	72	10	100	300
32	1	32	18	324	324
	30	420			1374

$$N = 30, \; \sum_{i=1}^{7} f_i x_i = 420, \; \sum_{i=1}^{7} f_i (x_i - \bar{x})^2 = 1374$$

ਇਸ ਲਈ $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{7} f_i x_i}{N} = \frac{1}{30} \times 420 = 14$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਸਰਨ $(\sigma^2) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} f_i (x_i - \bar{x})^2$

$$= \frac{1}{30} \times 1374 = 45.8$$

ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ $(\sigma) = \sqrt{45.8} = 6.77$

15.5.3 ***ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਦਾ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ (Standard deviation of a continuous frequency distribution)*** ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਲਗਾਤਾਰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਦੇ ਸਾਰੇ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਮੱਧਮਾਨ ਲੈ ਕੇ ਉਸਨੂੰ ਵੱਖਰੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਵਿੱਚ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਹੁਣ ਵੱਖਰੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਲਈ ਅਪਣਾਈ ਹੋਈ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਇੱਕ n ਵਰਗਾਂ ਵਾਲੇ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਅੰਤਰਾਲ ਉਸਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ x_i ਅਤੇ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ f_i ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ, ਤਾਂ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੂਤਰ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇਗਾ :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2},$$

ਜਿੱਥੇ $\bar{x}$ ਵੰਡ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਹੈ ਅਤੇ $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$.

ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਲਈ ਹੋਰ ਸੂਤਰ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ :

$$\text{ਪ੍ਰਸਰਨ}(\sigma^2) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i^2 + \bar{x}^2 - 2\bar{x}\, x_i)$$

$$= \frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \bar{x}^2 f_i - \sum_{i=1}^{n} 2\bar{x}\, f_i x_i\right]$$

$$= \frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 + \bar{x}^2 \sum_{i=1}^{n} f_i - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i f_i\right]$$

$$= \frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{n} f_i x_i + \bar{x}^2\, N - 2\bar{x}\,.\,N\,\bar{x}\right] \quad \left[\text{ਇਥੇ } \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i f_i = \bar{x} \text{ ਜਾਂ } \sum_{i=1}^{n} x_i f_i = N\bar{x}\right]$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 + \bar{x}^2 - 2\bar{x}^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \bar{x}^2$$

ਜਾਂ $$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{N}\right)^2 = \frac{1}{N^2}\left[N\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} f_i x_i\right)^2\right]$$

ਇਸ ਲਈ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ $$(\sigma) = \frac{1}{N}\sqrt{N\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} f_i x_i\right)^2} \qquad \ldots (3)$$

ਉਦਾਹਰਣ 10 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਵੰਡ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ, ਪ੍ਰਸਰਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਵਰਗ	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ	3	7	12	15	8	3	2

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ 15.9 ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

ਸਾਰਣੀ 15.9

ਵਰਗ	ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ (f_i)	ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ (x_i)	$f_i x_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
30-40	3	35	105	729	2187
40-50	7	45	315	289	2023
50-60	12	55	660	49	588
60-70	15	65	975	9	135
70-80	8	75	600	169	1352
80-90	3	85	255	529	1587
90-100	2	95	190	1089	2178
	50		3100		10050

ਇਸ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} f_i x_i = \frac{3100}{50} = 62$

ਪ੍ਰਸਰਨ $(\sigma^2) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} f_i (x_i - \bar{x})^2$

$= \frac{1}{50} \times 10050 = 201$

ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ $(\sigma) = \sqrt{201} = 14.18$

ਉਦਾਹਰਣ 11 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ :

x_i	3	8	13	18	23
f_i	7	10	15	10	6

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ 15.10 ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ :

ਸਾਰਣੀ 15.10

x_i	f_i	$f_i x_i$	x_i^2	$f_i x_i^2$
3	7	21	9	63
8	10	80	64	640
13	15	195	169	2535
18	10	180	324	3240
23	6	138	529	3174
	48	614		9652

ਹੁਣ ਸੂਤਰ (3) ਰਾਹੀਂ

$$\sigma = \frac{1}{N}\sqrt{N\sum f_i x_i^2 - \left(\sum f_i x_i\right)^2}$$

$$= \frac{1}{48}\sqrt{48 \times 9652 - (614)^2}$$

$$= \frac{1}{48}\sqrt{463296 - 376996}$$

$$= \frac{1}{48} \times 293.77 = 6.12$$

ਇਸ ਲਈ, ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ (σ) = 6.12

15.5.4 ***ਪ੍ਰਸਰਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਛੋਟੇ ਤਰੀਕੇ (Shortcut method to find variance and standard deviation)*** ਕਦੇ-ਕਦੇ ਇੱਕ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਦੇ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ x_i ਜਾਂ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ x_i ਦੇ ਮੁੱਲ ਬਹੁਤ ਵੱਡੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਪ੍ਰਸਰਨ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਵੱਧ ਸਮਾਂ ਲੱਗਦਾ ਹੈ। ਪਦ ਵਿਚਲਨ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਸਰਲ ਬਣਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਕਲਪਿਤ ਮੱਧਮਾਨ 'A' ਹੈ ਅਤੇ ਪੈਮਾਨੇ ਨੂੰ $\frac{1}{h}$ ਗੁਣਾ ਛੋਟਾ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ। (ਇੱਥੇ h ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਹੈ) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਪਦ ਵਿਚਲਨ ਜਾਂ ਨਵਾਂ ਚਲ y_i ਹੈ।

ਭਾਵ $y_i = \frac{x_i - A}{h}$ ਜਾਂ $x_i = A + hy_i$ ... (1)

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{N}$ ... (2)

(1) ਤੋਂ x_i ਨੂੰ (2) ਵਿਚ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(A + hy_i)}{N}$$

$$= \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i A + \sum_{i=1}^{n} h\, f_i y_i\right) = \frac{1}{N}\left(A\sum_{i=1}^{n} f_i + h\sum_{i=1}^{n} f_i y_i\right)$$

$$= A.\frac{N}{N} + h\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i y_i}{N} \qquad \left(\text{ਕਿਉਂਕਿ } \sum_{i=1}^{n} f_i = N\right)$$

ਇਸ ਲਈ $\bar{x} = A + h\,\bar{y}$ ... (3)

ਹੁਣ ਚਲ x ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ, $\sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i\,(A + hy_i - A - h\,\bar{y})^2 \qquad \text{((1) ਅਤੇ (3) ਰਾਹੀਂ)}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i\, h^2\,(y_i - \bar{y})^2$$

$$= \frac{h^2}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i\,(y_i - \bar{y})^2 = h^2 \times \text{ਚਲ } y_i \text{ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ}$$

ਭਾਵ $\sigma_x^{\,2} = h^2\sigma_y^{\,2}$

ਜਾਂ $\sigma_x = h\sigma_y$ ... (4)

(3) ਅਤੇ (4) ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\sigma_x = \frac{h}{N}\sqrt{N\sum_{i=1}^{n} f_i y_i^{\,2} - \left(\sum_{i=1}^{n} f_i y_i\right)^2} \quad \text{... (5)}$$

ਆਉ ਉਦਾਹਰਣ 11 ਦੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਸੂਤਰ (5) ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਰਾਹੀਂ ਲਘੂ (ਛੋਟੀ) ਵਿਧੀ ਤੋਂ ਮੱਧਮਾਨ, ਪ੍ਰਸਰਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਉਦਾਹਰਣ 12 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਵੰਡ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ, ਪ੍ਰਸਰਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ :

ਵਰਗ	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ	3	7	12	15	8	3	2

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਲਪਿਤ ਮੱਧਮਾਨ A = 65 ਹੈ। ਇੱਥੇ $h = 10$

ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ 15.11 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ 15.11

ਵਰਗ	ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ	ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ	$y_i = \frac{x_i - 65}{10}$	$y_i^{\,2}$	$f_i\,y_i$	$f_i\,y_i^{\,2}$
	f_i	x_i				
30-40	3	35	– 3	9	– 9	27
40-50	7	45	– 2	4	– 14	28
50-60	12	55	– 1	1	– 12	12
60-70	15	65	0	0	0	0
70-80	8	75	1	1	8	8
80-90	3	85	2	4	6	12
90-100	2	95	3	9	6	18
	N = 50				– 15	105

ਇਸ ਲਈ $\bar{x} = A + \frac{\sum f_i y_i}{50} \times h = 65 - \frac{15}{50} \times 10 = 62$

ਪ੍ਰਸਰਨ $\sigma^2 = \frac{h^2}{N^2}\left[N\sum f_i y_i^{\,2} - \left(\sum f_i y_i\right)^2\right]$

$$= \frac{(10)^2}{(50)^2}\left[50 \times 105 - (-15)^2\right]$$

$$= \frac{1}{25}[5250 - 225] = 201$$

ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ $(\sigma) = \sqrt{201} = 14.18$

ਅਭਿਆਸ 15.2

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1 ਤੋਂ 5 ਤੱਕ ਦੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਪ੍ਰਸਰਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

1. 6, 7, 10, 12, 13, 4, 8, 12

2. ਪਹਿਲੀਆਂ n ਪ੍ਰਾਕਿਰਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ

3. ਤਿੰਨ ਦੇ ਪਹਿਲੇ 10 ਗੁਣਜ ਦਾ

4.

x_i	6	10	14	18	24	28	30
f_i	2	4	7	12	8	4	3

5.

x_i	92	93	97	98	102	104	109
f_i	3	2	3	2	6	3	3

6. ਲਘੂ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

x_i	60	61	62	63	64	65	66	67	68
f_i	2	1	12	29	25	12	10	4	5

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 7 ਅਤੇ 8 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਪ੍ਰਸਰਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

7.

ਵਰਗ	0-30	30-60	60-90	90-120	120-150	150-180	180-210
ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ	2	3	5	10	3	5	2

8.

ਵਰਗ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ	5	8	15	16	6

9. ਲਘੂ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਮੱਧਮਾਨ, ਪ੍ਰਸਰਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਉਚਾਈ (ਸੇ.ਮੀ. ਵਿੱਚ)	70-75	75-80	80-85	85-90	90-95	95-100	100-105	105-110	110-115
ਬੱਚਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	3	4	7	7	15	9	6	6	3

10. ਇੱਕ ਨਮੂਨੇ (ਡਿਜ਼ਾਇਨ) ਵਿੱਚ ਬਣਾਏ ਹੋਏ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਵਿਆਸ (ਮਿ. ਮੀ. ਵਿੱਚ) ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹਨ।

ਵਿਆਸ	33-36	37-40	41-44	45-48	49-52
ਚੱਕਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	15	17	21	22	25

ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਵਿਆਸਾਂ ਦਾ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਅਤੇ ਮੱਧਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

[ਸੰਕੇਤ : ਪਹਿਲਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਲਗਾਤਾਰ ਬਣਾ ਲਵੋ। ਵਰਗਾਂ ਨੂੰ 32.5-36.5, 36.5-40.5, 40.5-44.5, 44.5 - 48.5, 48.5 - 52.5 ਲਵੋ ਅਤੇ ਫਿਰ ਅੱਗੇ ਵਧੋ।]

15.6 ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਦਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਨ (Analysis of Frequency Distributions)

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਦੇ ਪਹਿਲਾਂ ਦੇ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵਿਖੇਪਨ ਦੇ ਕੁਝ ਮਾਪਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ। ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਦੀ ਉਹੀ ਇਕਾਈ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਅੰਕੜੇ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਦੋ ਭਿੰਨ ਇਕਾਈਆਂ ਵਾਲੀਆਂ ਵੰਡਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾਂ ਕਰਨੀ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਕੇਵਲ ਵਿਖੇਪਨ ਦੀਆਂ ਮਾਪਾਂ ਦੀ ਗਣਨਾ ਹੀ ਕਾਫ਼ੀ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਬਲਕਿ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਮਾਪ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਇਕਾਈ ਵਿੱਚ ਅਜ਼ਾਦ ਹੋਵੇ। ਇਕਾਈ ਤੋਂ ਅਜ਼ਾਦ ਵਿਚਲਨ ਦੇ ਮਾਪ ਨੂੰ ਵਿਚਲਨ ਗੁਣਾਂਕ (Coefficient of variation) ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ C.V. ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

ਵਿਚਲਨ ਗੁਣਾਂਕ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੋਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 \quad , \bar{x} \neq 0,$$

ਇੱਥੇ σ ਅਤੇ $\bar{x}$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਅਤੇ ਮੱਧਮਾਨ ਹਨ।

ਲੜੀਆਂ ਵਿੱਚ ਵਿਚਲਨ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹਰੇਕ ਲੜੀ ਦਾ ਵਿਚਲਨ ਗੁਣਾਂਕ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਦੋਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਵੱਡੇ ਵਿਚਲਨ ਗੁਣਾਂਕ ਵਾਲੀ ਲੜੀ ਨੂੰ ਵੱਧ ਵਿਚਲਨ ਜਾਂ ਖਿੰਡਾਅ ਵਾਲੀ ਲੜੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਘੱਟ ਵਿਚਲਨ ਗੁਣਾਂਕ ਵਾਲੀ ਲੜੀ ਨੂੰ ਦੂਜੀ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸੰਗਤ (Consistent) ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ।

15.6.1 ਦੋ ਸਮਾਨ ਮੱਧਮਾਨ ਵਾਲੇ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ (Comparison of two frequency distributions with same mean) ਮੰਨ ਲਉ $\bar{x}_1$ ਅਤੇ σ_1 ਪਹਿਲੀ ਵੰਡ ਦੇ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਹਨ ਅਤੇ $\bar{x}_2$ ਅਤੇ σ_2 ਦੂਜੀ ਵੰਡ ਦੇ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਹਨ।

ਤਾਂ C.V. (ਪਹਿਲੀ ਵੰਡ) = $\frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} \times 100$

ਅਤੇ C.V. (ਦੂਜੀ ਵੰਡ) = $\frac{\sigma_2}{\bar{x}_2} \times 100$

ਦਿੱਤਾ ਹੈ $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}$ (ਮੰਨ ਲਉ)

ਇਸ ਲਈ C.V. (ਪਹਿਲੀ ਵੰਡ) = $\frac{\sigma_1}{\bar{x}} \times 100$ ... (1)

ਅਤੇ C.V. (ਦੂਜੀ ਵੰਡ) = $\frac{\sigma_2}{\bar{x}} \times 100$ ... (2)

(1) ਅਤੇ (2) ਤੋਂ ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਦੋਵੇਂ C.V. ਦੀ ਤੁਲਨਾ σ_1 ਅਤੇ σ_2 ਦੇ ਅਧਾਰ 'ਤੇ ਹੀ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮਾਨ ਮੱਧਮਾਨ ਵਾਲੀਆਂ ਲੜੀਆਂ ਵਿਚੋਂ ਵੱਧ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ (ਜਾਂ ਪ੍ਰਸਰਨ) ਵਾਲੀ ਲੜੀ ਨੂੰ ਵੱਧ ਵਿਖੇਪਿਤ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ ਛੋਟੀ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ (ਜਾਂ ਪ੍ਰਸਰਨ) ਵਾਲੀ ਲੜੀ ਨੂੰ ਦੂਜੀ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵੱਧ ਸੰਗਤ (Consistent) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਆਉ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ :

ਉਦਾਹਰਣ 13 : ਦੋ ਕਾਰਖਾਨਿਆਂ A ਅਤੇ B ਵਿੱਚ ਕਰਮਚਾਰੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਤਨਖਾਹਾਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹਨ।

	A	B
ਕਰਮਚਾਰੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ	5000	6000
ਔਸਤ ਮਾਸਿਕ ਤਨਖਾਹ	₹ 2500	₹ 2500
ਤਨਖਾਹਾਂ ਦੀ ਵੰਡ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ	81	100

ਵਿਅਕਤੀਗਤ ਤਨਖਾਹ ਵਿੱਚ ਕਿਸ ਕਾਰਖਾਨੇ A ਅਤੇ B ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਵਿਚਲਨ ਹੈ?

ਹੱਲ : ਕਾਰਖਾਨੇ A ਵਿੱਚ ਤਨਖਾਹ ਦੀ ਵੰਡ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ A (σ_1^2) = 81

ਇਸ ਲਈ, ਕਾਰਖਾਨੇ A ਵਿੱਚ ਤਨਖਾਹ ਦੀ ਵੰਡ ਦਾ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ A (σ_1) = 9

ਨਾਲ ਹੀ ਕਾਰਖਾਨੇ B ਵਿੱਚ ਤਨਖਾਹ ਦੀ ਵੰਡ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ B (σ_2^2) = 100

ਇਸ ਲਈ ਕਾਰਖਾਨੇ B ਵਿੱਚ ਤਨਖਾਹਾਂ ਦੀ ਵੰਡ ਦਾ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ (σ_2) = 10

ਕਿਉਂਕਿ ਦੋਵੇਂ ਕਾਰਖਾਨਿਆਂ ਵਿੱਚ ਔਸਤ ਤਨਖਾਹ ਸਮਾਨ ਹੈ ਭਾਵ ₹ 2500 ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਵੱਡੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਵਾਲੇ ਕਾਰਖਾਨੇ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਖਿੰਡਾਅ ਜਾਂ ਵਿਚਲਨ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ ਕਾਰਖਾਨੇ B ਵਿੱਚ ਵਿਅਕਤੀਗਤ ਤਨਖਾਹਾਂ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਵਿਚਲਨ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 14 : ਦੋ ਤਨਖਾਹਾਂ ਦਾ ਵਿਚਲਨ ਗੁਣਾਂਕ 60 ਅਤੇ 70 ਹੈ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 21 ਅਤੇ 16 ਹੈ। ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਮੱਧਮਾਨ ਕੀ ਹਨ?

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ, C.V. (ਪਹਿਲੀ ਵੰਡ) = 60, $\sigma_1 = 21$

C.V. (ਦੂਜੀ ਵੰਡ) = 70, $\sigma_2 = 16$

ਮੰਨ ਲਉ $\bar{x}_1$ ਅਤੇ $\bar{x}_2$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਪਹਿਲੀ ਅਤੇ ਦੂਜੀ ਵੰਡ ਦੇ ਮੱਧਮਾਨ ਹਨ, ਤਾਂ

$$\text{C.V. (ਪਹਿਲੀ ਵੰਡ)} = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} \times 100$$

ਇਸ ਲਈ $60 = \frac{21}{\bar{x}_1} \times 100$ ਜਾਂ $\bar{x}_1 = \frac{21}{60} \times 100 = 35$

ਅਤੇ $\text{C.V. (ਦੂਜੀ ਵੰਡ)} = \frac{\sigma_2}{\bar{x}_2} \times 100$

ਭਾਵ $70 = \frac{16}{\bar{x}_2} \times 100$ ਜਾਂ $\bar{x}_2 = \frac{16}{70} \times 100 = 22.85$

ਇਸ ਲਈ $\bar{x}_1 = 35$ ਅਤੇ $\bar{x}_2 = 22.85$

ਉਦਾਹਰਣ 15 : ਜਮਾਤ 11 ਦੇ ਇੱਕ ਸੈਕਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਕੱਦ ਅਤੇ ਭਾਰ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪਰਿਕਲਨ ਕੀਤੇ ਹੋਏ ਹਨ :

	ਕੱਦ	ਭਾਰ
ਮੱਧਮਾਨ	162.6 ਸੈ. ਮੀ.	52.36 ਕਿ. ਗ੍ਰਾ
ਪ੍ਰਸਰਨ	127.69 ਸੈਂ. ਮੀ.	23.1361 ਕਿ. ਗ੍ਰਾ

ਕੀ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਭਾਰਾਂ ਵਿੱਚ ਕੱਦ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਵਿਚਲਨ ਹੈ?

ਹੱਲ : ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਲਈ ਅਸੀਂ ਵਿਚਲਨ ਗੁਣਾਕਾਂ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਨੀ ਹੈ।

ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕੱਦਾਂ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਸਰਨ = 127.69 ਸੈਂ. ਮੀ.

ਇਸ ਲਈ ਕੱਦਾਂ ਦਾ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ = $\sqrt{127.69}$ ਸੈਂ. ਮੀ. = 11.3 ਸੈਂ. ਮੀ.

ਦੁਬਾਰਾ ਭਾਰਾਂ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਸਰਨ = 23.1361 ਕਿ. ਗ੍ਰਾ.

ਇਸ ਲਈ ਭਾਰਾਂ ਦਾ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ = $\sqrt{23.1361}$ ਸੈਂ. ਮੀ. = 4.81 ਕਿ. ਗ੍ਰਾ.

$$\text{ਹੁਣ ਕੱਦਾਂ ਦਾ ਵਿਚਲਨ ਗੁਣਾਂਕ} = \frac{\text{ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ}}{\text{ਮੱਧਮਾਨ}} \times 100$$

$$= \frac{11.3}{162.6} \times 100 = 6.95$$

$$\text{ਅਤੇ ਭਾਰਾਂ ਦਾ ਵਿਚਲਨ ਗੁਣਾਂਕ} = \frac{4.81}{52.36} \times 100 = 9.18$$

ਸਪੱਸ਼ਟ ਤੌਰ 'ਤੇ ਭਾਰ ਦਾ ਵਿਚਲਨ ਗੁਣਾਂਕ ਕੱਦਾਂ ਦੇ ਵਿਚਲਨ ਗੁਣਾਂਕ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਭਾਰਾਂ ਵਿੱਚ ਕੱਦਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵੱਧ ਵਿਚਲਨ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 15.3

1. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਦੱਸੋ ਕਿ A ਜਾਂ B ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੇ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਖਿੰਡਾਅ ਹੈ :

ਅੰਕ	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
ਸਮੂਹ A	9	17	32	33	40	10	9
ਸਮੂਹ B	10	20	30	25	43	15	7

2. ਸ਼ੇਅਰਾਂ X ਅਤੇ Y ਦੇ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਮੁੱਲਾਂ ਤੋਂ ਦੱਸੋ ਕਿ ਕਿਸ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਸਥਿਰਤਾ ਹੈ।

X	35	54	52	53	56	58	52	50	51	49
Y	108	107	105	105	106	107	104	103	104	101

3. ਇੱਕ ਕਾਰਖਾਨੇ ਦੀਆਂ ਦੋ ਫ਼ਰਮਾਂ A ਅਤੇ B ਦੇ ਕਰਮਚਾਰੀਆਂ ਨੂੰ ਦਿੱਤੇ ਮਹੀਨਾਵਾਰ ਤਨਖਾਹ ਦੇ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਦਾ ਨਤੀਜੇ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ :

	ਫ਼ਰਮ A	ਫ਼ਰਮ B
ਤਨਖਾਹ ਲੈਣ ਵਾਲੇ ਕਰਮਚਾਰੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ	586	648
ਮਹੀਨਾਵਾਰ ਤਨਖਾਹ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ	₹ 5253	₹ 5253
ਤਨਖਾਹਾਂ ਦੀ ਵੰਡ ਦੀ ਪ੍ਰਸਰਨ	100	121

(i) A ਅਤੇ B ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀ ਫ਼ਰਮ ਆਪਣੇ ਕਰਮਚਾਰੀਆਂ ਨੂੰ ਤਨਖਾਹ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਰਾਸ਼ੀ ਦਿੰਦੀ ਹੈ ?

(ii) ਵਿਅਕਤੀਗਤ ਤਨਖਾਹਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿਹੜੀ ਫ਼ਰਮ A ਜਾਂ B ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਵਿਚਲਨ ਹੈ ?

4. ਟੀਮ A ਰਾਹੀਂ ਇੱਕ ਵਾਰੀ ਵਿੱਚ ਖੇਲੇ ਗਏ ਫੁੱਟਬਾਲ ਮੈਚਾਂ ਦੇ ਅੰਕੜੇ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਹਨ :

ਕੀਤੇ ਹੋਏ ਗੋਲਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	0	1	2	3	4
ਮੈਚਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ	1	9	7	5	3

ਟੀਮ B ਰਾਹੀਂ ਖੇਡੇ ਗਏ ਮੈਚਾਂ ਵਿੱਚ ਬਣਾਏ ਹੋਏ ਗੋਲਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ 2 ਪ੍ਰਤੀ ਮੈਚ ਅਤੇ ਗੋਲਾਂ ਦਾ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ 1.25 ਸੀ। ਕਿਸ ਟੀਮ ਨੂੰ ਵੱਧ ਸੰਗਤ (consistent) ਸਮਝ ਜਾਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ?

5. 50 ਵਨਸਪਤੀ ਉਤਪਾਦਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ x (ਸੈਂ. ਮੀ. ਵਿੱਚ) ਅਤੇ ਭਾਰ y (ਗ੍ਰਾਮ ਵਿੱਚ) ਦੇ ਜੋੜ ਅਤੇ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹਨ :

$$\sum_{i=1}^{50} x_i = 212, \quad \sum_{i=1}^{50} x_i^2 = 902.8, \quad \sum_{i=1}^{50} y_i = 261, \quad \sum_{i=1}^{50} y_i^2 = 1457.6$$

ਲੰਬਾਈ ਜਾਂ ਭਾਰ ਵਿੱਚ ਕਿਸ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਵਿਚਲਨ ਹੈ ?

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 16 : 20 ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ 5 ਹੈ। ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰੇਖਣ ਨੂੰ 2 ਤੋਂ ਗੁਣਾਂ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ $x_1, x_2, ..., x_{20}$ ਅਤੇ $\bar{x}$ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਹੈ। ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਚਲ ਰਾਸ਼ੀ 5 ਹੈ ਅਤੇ $n = 20$ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ :

$$\text{ਪ੍ਰਸਰਨ } \left(\sigma^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})^2 \quad \text{ਭਾਵ } 5 = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})^2$$

ਜਾਂ $$\sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})^2 = 100 \qquad \ldots (1)$$

ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰੇਖਣ ਨੂੰ 2 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਪਰਿਣਾਮੀ ਪ੍ਰੇਖਣ y_i ਹਨ।

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ $$y_i = 2x_i \text{ i.e., } x_i = \frac{1}{2}y_i$$

ਇਸ ਲਈ $$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{20} y_i = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} 2x_i = 2 \cdot \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i$$

ਭਾਵ $$\bar{y} = 2\bar{x} \quad \text{ਜਾਂ} \quad \bar{x} = \frac{1}{2}\bar{y}$$

x_i ਅਤੇ $\bar{x}$ ਦੇ ਮੁੱਲ (1) ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$\sum_{i=1}^{20}\left(\frac{1}{2}y_i - \frac{1}{2}\bar{y}\right)^2 = 100 \quad \text{ਭਾਵ} \quad \sum_{i=1}^{20}(y_i - \bar{y})^2 = 400$$

ਇਸ ਲਈ ਨਵੇਂ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ = $\frac{1}{20} \times 400 = 20 = 2^2 \times 5$

ਟਿੱਪਣੀ ਪਾਠਕ ਧਿਆਨ ਦੇਣ ਕਿ ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰੇਖਣ ਨੂੰ k, ਤੋਂ ਗੁਣਾ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਨਵੇਂ ਬਣੇ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ ਪਹਿਲੇ ਪ੍ਰਸਰਨ ਦਾ k^2 ਗੁਣਾ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 17 : ਪੰਜ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ 4.4 ਹੈ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ 8.24 ਹੈ। ਜੇਕਰ ਤਿੰਨ ਪ੍ਰੇਖਣ 1, 2 ਅਤੇ 6 ਹਨ ਤਾਂ ਹੋਰ ਦੋ ਪ੍ਰੇਖਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਬਾਕੀ ਦੋ ਪ੍ਰੇਖਣ x ਅਤੇ y ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ, ਲੜੀ 1, 2, 6, x, y ਹੈ।

ਹੁਣ ਮੱਧਮਾਨ $\bar{x} = 4.4 = \dfrac{1+2+6+x+y}{5}$

ਜਾਂ $22 = 9 + x + y$

ਇਸ ਲਈ $x + y = 13 \qquad \ldots (1)$

ਨਾਲ ਹੀ ਪ੍ਰਸਰਨ $= 8.24 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2$

ਭਾਵ $8.24 = \dfrac{1}{5}\left[(3.4)^2 + (2.4)^2 + (1.6)^2 + x^2 + y^2 - 2 \times 4.4\,(x+y) + 2 \times (4.4)^2\right]$

ਜਾਂ $41.20 = 11.56 + 5.76 + 2.56 + x^2 + y^2 - 8.8 \times 13 + 38.72$

ਇਸ ਲਈ $x^2 + y^2 = 97$ ... (2)

ਪਰੰਤੂ (1) ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$x^2 + y^2 + 2xy = 169 \quad \text{... (3)}$$

(2) ਅਤੇ (3) ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$2xy = 72 \quad \text{... (4)}$$

(2) ਵਿਚੋਂ (4) ਘਟਾਉਣ 'ਤੇ

$$x^2 + y^2 - 2xy = 97 - 72 \text{ ਭਾਵ } (x - y)^2 = 25$$

ਜਾਂ $x - y = \pm 5$ ... (5)

ਹੁਣ (1) ਅਤੇ (5) ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$x = 9, \quad y = 4$ ਜਦੋਂ $x - y = 5$

ਜਾਂ $x = 4, \quad y = 9$ ਜਦੋਂ $x - y = -5$

ਇਸ ਲਈ ਬਾਕੀ ਦੋ ਪ੍ਰੇਖਣ 4 ਅਤੇ 9 ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 18 : ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰੇਖਣ $x_1, x_2, ..., x_n$ ਨੂੰ 'a', ਤੋਂ ਵਧਾਇਆ ਜਾਵੇ ਜਿੱਥੇ a ਇੱਕ ਰਿਣਾਤਕਮ ਜਾਂ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਪ੍ਰਸਰਨ ਨਹੀਂ ਬਦਲਦਾ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਪ੍ਰੇਖਣ $x_1, x_2, ..., x_n$ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ $\bar{x}$ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \text{ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।}$$

ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰੇਖਣ ਵਿੱਚ 'a ਜੋੜਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਨਵੇਂ ਪ੍ਰੇਖਣ ਹੋਣਗੇ।

$$y_i = x_i + a \quad \text{... (1)}$$

ਮੰਨ ਲਉ ਨਵੇਂ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ $\bar{y}$ ਹੈ ਤਾਂ

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i + a)$$

$$= \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} a\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{na}{n} = \bar{x} + a$$

ਭਾਵ $\bar{y} = \bar{x} + a$ ... (2)

ਇਸ ਲਈ ਨਵੇਂ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਸਰਨ

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i + a - \bar{x} - a)^2 \quad \text{[(1) ਅਤੇ (2) ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਤੋਂ]}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sigma_1^2$$

ਇਸ ਲਈ ਨਵੇਂ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ ਉਹੀ ਹੈ ਜੋ ਮੂਲ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਸੀ।

ਟਿੱਪਣੀ ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੇ ਕਿਸੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰੇਖਣ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਜੋੜਨ ਜਾਂ ਘਟਾਉਣ 'ਤੇ ਪ੍ਰਸਰਨ ਨਹੀਂ ਬਦਲਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 19 : ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨੇ 100 ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ 40 ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ 5.1 ਪਤਾ ਕੀਤਾ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਉਸਨੇ ਗਲਤੀ ਨਾਲ ਪ੍ਰੇਖਣ 40 ਦੀ ਜਗ੍ਹਾ 50 ਲੈ ਲਿਆ ਸੀ। ਠੀਕ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਕੀ ਹਨ ?

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ, ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ $(n) = 100$

ਗਲਤ ਮੱਧਮਾਨ $(\bar{x}) = 40$,

ਗਲਤ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ $(\sigma) = 5.1$

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

ਭਾਵ $40 = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} x_i$ ਜਾਂ $\sum_{i=1}^{100} x_i = 4000$

ਭਾਵ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਗਲਤ ਜੋੜ = 4000

ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਸਹੀ ਜੋੜ = ਗਲਤ ਜੋੜ – 50 + 40

$= 4000 - 50 + 40 = 3990$

ਇਸ ਲਈ ਸਹੀ ਮੱਧਮਾਨ $= \frac{\text{ਸਹੀ ਜੋੜ}}{100} = \frac{3990}{100} = 39.9$

ਨਾਲ ਹੀ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2}$$

ਭਾਵ $5.1 = \sqrt{\frac{1}{100} \times \text{ਗਲਤ} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (40)^2}$

ਜਾਂ $26.01 = \frac{1}{100} \times \text{ਗਲਤ} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1600$

ਇਸ ਲਈ ਗਲਤ $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 100\,(26.01 + 1600) = 162601$

ਹੁਣ ਸਹੀ $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \text{ਗਲਤ} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (50)^2 + (40)^2$

$= 162601 - 2500 + 1600 = 161701$

ਇਸ ਲਈ ਸਹੀ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ

$$= \sqrt{\frac{\text{ਸਹੀ } \sum x_i^2}{n} - (\text{ਸਹੀ ਮੱਧਮਾਨ})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{161701}{100} - (39.9)^2}$$

$$= \sqrt{1617.01 - 1592.01}$$

$$= \sqrt{25} = 5$$

ਅਧਿਆਇ 15 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. ਅੱਠ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਪ੍ਰਸਰਨ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 9 ਅਤੇ 9.25 ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਛੇ ਪ੍ਰੇਖਣ 6, 7, 10, 12, 12 ਅਤੇ 13 ਹਨ, ਤਾਂ ਬਾਕੀ ਦੋ ਪ੍ਰੇਖਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

2. ਸੱਤ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਪ੍ਰਸਰਨ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 8 ਅਤੇ 16 ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਪੰਜ ਪ੍ਰੇਖਣ 2, 4, 10, 12, 14 ਹਨ ਤਾਂ ਬਾਕੀ ਦੋ ਪ੍ਰੇਖਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

3. ਛੇ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 8 ਅਤੇ 4 ਹਨ। ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰੇਖਣ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਪਰਿਣਾਮੀ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4. ਜੇਕਰ n ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ $x_1, x_2, ..., x_n$ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ $\bar{x}$ ਅਤੇ ਪ੍ਰਸਰਨ σ^2 ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ $ax_1, ax_2, ax_3, ..., ax_n$ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਪ੍ਰਸਰਨ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $a\bar{x}$ ਅਤੇ $a^2\sigma^2$ $(a \neq 0)$ ਹਨ।

5. ਵੀਹ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 10 ਅਤੇ 2 ਹਨ। ਜਾਂਚ ਕਰਨ ਤੇ ਇਹ ਪਾਇਆ ਕਿ ਇਕ ਪ੍ਰੇਖਣ 8 ਗਲਤ ਹੈ। ਹੇਠ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦਾ ਸਹੀ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ :

(i) ਗਲਤ ਪ੍ਰੇਖਣ ਹਟਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ। (ii) ਉਸਨੂੰ 12 ਨਾਲ ਬਦਲ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ।

6. ਇੱਕ ਜਮਾਤ ਦੇ ਪੰਜਾਹ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਰਾਹੀਂ ਤਿੰਨ ਵਿਸ਼ਿਆਂ ਗਣਿਤ, ਭੌਤਿਕ ਵਿਗਿਆਨ ਅਤੇ ਰਸਾਇਣ ਵਿਗਿਆਨ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹਨ :

ਵਿਸ਼ਾ	ਗਣਿਤ	ਭੌਤਿਕ ਵਿਗਿਆਨ	ਰਸਾਇਣ ਵਿਗਿਆਨ
ਮੱਧਮਾਨ	42	32	40.9
ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ	12	15	20

ਕਿਸ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਵਿਚਲਨ ਹੈ ਅਤੇ ਕਿਸ ਵਿੱਚ ਸਭ ਤੋਂ ਘੱਟ ਵਿਚਲਨ ਹੈ ?

7. 100 ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 20 ਅਤੇ 3 ਹਨ। ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਇਹ ਪਾਇਆ ਕਿ ਤਿੰਨ ਪ੍ਰੇਖਣ 21, 21 ਅਤੇ 18 ਗਲਤ ਸੀ। ਜੇਕਰ ਗਲਤ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਨੂੰ ਹਟਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

- ਵਿਖੇਪਨ ਦਾ ਮਾਪ (ਅੰਕੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਖਿੰਡਾਅ ਜਾਂ ਵਿਚਲਨ ਦਾ ਮਾਪ) : ਸੀਮਾ, ਚੌਥਾਈ ਵਿਚਲਨ, ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਵਿਖੇਪਨ ਦੇ ਮਾਪ ਹਨ।

  ਸੀਮਾ = ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਮੁੱਲ – ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਮੁੱਲ

◆ ਅਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ

$$\text{M.D.}(\bar{x}) = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}, \qquad \text{M.D. (M)} = \frac{\sum |x_i - \text{M}|}{n}$$

ਜਿੱਥੇ $\bar{x}$ = ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ M = ਮੱਧਿਕਾ

◆ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ

$$\text{M.D.}(\bar{x}) = \frac{\sum f_i |x_i - \bar{x}|}{\text{N}}, \qquad \text{M.D.(M)} = \frac{\sum f_i |x_i - \text{M}|}{\text{N}},$$ ਜਿੱਥੇ $\text{N} = \sum f_i$

◆ ਅਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2, \qquad \sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2}$$

◆ ਵੱਖਰੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ

$$\sigma^2 = \frac{1}{\text{N}} \sum f_i (x_i - \bar{x})^2, \qquad \sigma = \sqrt{\frac{1}{\text{N}} \sum f_i (x_i - \bar{x})^2}$$

◆ ਲਗਾਤਾਰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ

$$\sigma^2 = \frac{1}{\text{N}} \sum f_i (x_i - \bar{x})^2, \qquad \sigma = \frac{1}{\text{N}} \sqrt{\text{N} \sum f_i x_i^2 - \left(\sum f_i x_i\right)^2}$$

◆ ਚਲ ਰਾਸ਼ੀ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਲਘੂ ਵਿਧੀ

$$\sigma^2 = \frac{h^2}{\text{N}^2} \left[\text{N} \sum f_i y_i^2 - \left(\sum f_i y_i\right)^2\right], \sigma = \frac{h}{\text{N}} \sqrt{\text{N} \sum f_i y_i^2 - \left(\sum f_i y_i\right)^2},$$

ਜਿੱਥੇ $y_i = \dfrac{x_i - \text{A}}{h}$

◆ ਵਿਚਲਨ ਗੁਣਾਂਕ (C.V.) $= \dfrac{\sigma}{\bar{x}} \times 100, \bar{x} \neq 0$

ਇੱਕੋ ਜਿਹੇ (ਬਰਾਬਰ) ਮੱਧਮਾਨ ਵਾਲੀ ਲੜੀਆਂ ਵਿੱਚ ਛੋਟੀ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਵਾਲੀ ਲੜੀ ਵੱਧ ਸੰਗਤ ਜਾਂ ਘੱਟ ਖਿੰਡਾਅ ਵਾਲੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਨੋਟ

ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ ਦੀ ਸ਼ੁਰੂਆਤ ਲੈਟਿਨ ਸ਼ਬਦ 'status' ਤੋਂ ਹੋਇਆ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਅਰਥ ਇੱਕ ਰਾਜਨੀਤਿਕ ਰਾਜ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਪਤਾ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ ਇਨਸਾਨੀ ਸੱਭਿਅਤਾ ਜਿੰਨੀ ਪੁਰਾਣੀ ਹੈ। ਸ਼ਾਇਦ ਸਾਲ 3050 ਈ. ਪੂ. ਵਿੱਚ ਯੂਨਾਨ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੀ ਜਨਗਣਨਾ ਕੀਤੀ ਗਈ ਸੀ। ਭਾਰਤ ਵਿੱਚ ਵੀ ਲਗਭਗ 2000 ਸਾਲ ਪਹਿਲਾਂ ਪ੍ਰਸ਼ਾਸਨਿਕ ਅੰਕੜੇ ਇਕੱਠੇ ਕਰਨ ਦੀ ਵਧੀਆਂ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਸੀ। ਖਾਸ ਤੌਰ 'ਤੇ ਚੰਦਰਗੁਪਤ ਮੌਰਿਆ (324-300 ਈ. ਪੂ.) ਦੇ ਰਾਜ ਦੇ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ

ਕੌਟਿਲਿਆ (ਲਗਭਗ 300 ਈ. ਪੂ.) ਦੇ ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਜਨਮ ਅਤੇ ਮੌਤ ਦੇ ਅੰਕੜੇ ਇੱਕਠੇ ਕਰਨ ਦੀ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਉਲੇਖ ਮਿਲਿਆ ਹੈ। ਅਕਬਰ ਦੇ ਸ਼ਾਸਨਕਾਲ ਵਿੱਚ ਕੀਤੇ ਹੋਏ ਪ੍ਰਸ਼ਾਸਨਿਕ ਸਰਵੇਖਣਾਂ ਦਾ ਵਰਣਨ ਅਬੁਲ ਫਜ਼ਲ ਰਾਹੀਂ ਲਿਖੀ ਪੁਸਤਕ ਆਈਨੇ ਅਕਬਰੀ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ।

ਲੰਦਨ ਦੇ ਕਪਤਾਨ John Graunt (1620-1675) ਨੂੰ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਰਾਹੀਂ ਜਨਮ ਅਤੇ ਮੌਤ ਦਾ ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਦੇ ਕਾਰਨ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਜਨਮ ਅਤੇ ਮੌਤ ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ ਦਾ ਪਿਤਾ ਮੰਨਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। Jacob Bernoulli (1654-1705) ਨੇ 1713 ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਆਪਣੀ ਪੁਸਤਕ "Ars Conjectandi' ਵਿਚ ਵੱਡੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਨਿਯਮ ਨੂੰ ਲਿਖਿਆ ਹੈ।

ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ ਦਾ ਸਿਧਾਂਤਿਕ ਵਿਕਾਸ ਸਤਾਰ੍ਹਵੀਂ ਸ਼ਤਾਬਦੀ ਦੇ ਦੌਰਾਨ ਖੇਡਾਂ ਅਤੇ ਸੰਯੋਗ ਘਟਨਾ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਦੇ ਜਾਣ-ਪਛਾਣ ਦੇ ਨਾਲ ਹੋਇਆ ਅਤੇ ਇਸ ਤੋਂ ਅੱਗੇ ਵੀ ਵਿਕਾਸ ਜਾਰੀ ਰਿਹਾ। ਇੱਕ ਅੰਗਰੇਜ਼ Francis Galton (1822-1921) ਨੇ ਜੀਵ ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ (Biometry) ਦੇ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ ਵਿਧੀਆਂ ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਦਾ ਰਸਤਾ ਪੱਕਾ ਕੀਤਾ। Karl Pearson (1857-1936) ਨੇ ਕਈ ਵਰਗ ਪਰੀਕਸ਼ਣ (Chi square test) ਅਤੇ ਇੰਗਲੈਂਡ ਵਿੱਚ ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ ਪ੍ਰਯੋਗਸ਼ਾਲਾ ਦੇ ਅਸਥਾਪਨ ਦੇ ਨਾਲ ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨੀ ਅਧਿਐਨ ਦੇ ਵਿਕਾਸ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਯੋਗਦਾਨ ਦਿੱਤਾ ਹੈ।

Sir Ronald A. Fisher (1890-1962) ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਆਧੁਨਿਕ ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ ਦਾ ਪਿਤਾ ਮੰਨਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਨੇ ਇਸਨੂੰ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਖੇਤਰਾਂ ਜਿਵੇਂ ਅਨੁਵਾਂਸ਼ਿਕੀ, ਜੀਵ-ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ, ਸਿੱਖਿਆ, ਖੇਤੀਬਾੜੀ ਆਦਿ ਵਿੱਚ ਲਗਾਇਆ।