ਅਧਿਆਇ 16

ਸੰਭਾਵਨਾ
(Probability)

❖*Where a mathematical reasoning can be had, it is as great a folly to make use of any other, as to grope for a thing in the dark, when you have a candle in your hand. – JOHN ARBUTHNOT* ❖

16.1 ਭੂਮਿਕਾ

Kolmogorov
(1903-1987)

ਪਹਿਲਾਂ ਦੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਸੰਕਲਪਨਾ ਨੂੰ ਭਿੰਨ ਸਥਿਤੀਆਂ ਦੀ ਅਨਿਸ਼ਚਿਤਤਾ ਦਾ ਮਾਪ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣ ਤੇ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{3}{6}$ ਭਾਵ $\frac{1}{2}$ ਪਤਾ ਕੀਤੀ ਸੀ। ਇੱਥੇ ਕੁੱਲ ਸੰਭਾਵਿਤ ਨਤੀਜੇ 1,2,3,4,5 ਅਤੇ 6 ਹਨ। ਘਟਨਾ 'ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣ' ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਨਤੀਜੇ 2,4,6 (ਭਾਵ ਤਿੰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ) ਹਨ। ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਤੋਂ ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਘਟਨਾ ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਕੁੱਲ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਨਾਲ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਇਸ ਸਿਧਾਂਤ ਨੂੰ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਪੁਰਾਣਾ ਸਿਧਾਂਤ (classical theory of probability) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਜਮਾਤ ਨੌਵੀਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ ਪ੍ਰੇਖਣ ਅਤੇ ਇੱਕਤਰਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੇ ਅਧਾਰ ਤੇ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਸਿੱਖਿਆ ਹੈ। ਇਸਨੂੰ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨਿਕ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ (statistical approach) ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ।

ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੋਵੇਂ ਸਿਧਾਂਤਾਂ ਵਿਚ ਕੁਝ ਗੰਭੀਰ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਇਹਨਾਂ ਸਿਧਾਂਤਾਂ ਨੂੰ ਉਹਨਾਂ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਤੇ ਨਹੀਂ ਲਗਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਸੰਭਾਵਿਤ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਨੰਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਪੁਰਾਣੇ ਸਿਧਾਂਤ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸੰਭਾਵਿਤ ਨਤੀਜਿਆਂ ਨੂੰ ਸਮ ਸੰਭਵ ਮੰਨਦੇ ਹਾਂ। ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਨਤੀਜਿਆਂ ਨੂੰ ਸਮ ਸੰਭਵ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਵਿਸ਼ਵਾਸ ਕਰਨ ਦਾ ਕੋਈ ਕਾਰਨ ਨਾ ਹੋਵੇ ਕਿ ਇੱਕ ਨਤੀਜੇ ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੂਜੇ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਾਰੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਦੀ, ਸੰਭਾਵਨਾ ਸਮਾਨ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਨ ਲਈ ਸਮ ਸੰਭਵ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਇਹ ਤਰਕ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਤੋਂ ਠੀਕ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਰੂਸ ਦੇ ਗਣਿਤਗ A.N. Kolmogorov ਨੇ ਇੱਕ ਹੋਰ ਸੰਭਾਵਨਾ ਸਿਧਾਂਤ ਦਾ ਵਿਕਾਸ ਕੀਤਾ। ਉਹਨਾਂ ਨੇ 1933 ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਆਪਣੀ ਪੁਸਤਕ 'ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਅਧਾਰ' (Foundation of Probability) ਵਿੱਚ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਲਈ ਕੁਝ ਅਟਲ ਤੱਥ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕੀਤੇ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਇਸੇ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ, ਜਿਸਨੂੰ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਸਵੈਸਿੱਧ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ, ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਲਈ ਕੁਝ ਮੂਲ ਸ਼ਬਦਾਂ ਨੂੰ ਜਾਨਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ (Random Experiment), ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ (Sample Space) ਘਟਨਾਵਾਂ (Events) ਆਦਿ। ਆਉ ਇਹਨਾ ਦੇ ਬਾਰੇ ਅੱਗੇ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਅਧਿਐਨ ਕਰੀਏ।

16.2 ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ (Random Experiments)

ਆਮ ਜ਼ਿੰਦਗੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਕਈ ਕੰਮ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਨਤੀਜੇ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਇੱਕ ਹੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਚਾਹੇ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕਿੰਨੀ ਵਾਰੀ ਵੀ ਦੁਹਰਾਇਆ ਜਾਵੇ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਕਿਸੇ ਦਿੱਤੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਨਾ ਜਾਣਦੇ ਹੋਏ ਵੀ ਅਸੀਂ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਰੂਪ ਤੋਂ ਕਹਿ

ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 180° ਹੋਵੇਗਾ। ਅਸੀਂ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਵੀ ਕਈ ਪ੍ਰਯੋਗੀ ਕੰਮ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਸਮਾਨ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਦੁਹਰਾਉਣ ਤੇ ਵੀ ਨਤੀਜਾ ਹਮੇਸ਼ਾ ਇੱਕੋ ਜਿਹਾ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਜਦੋਂ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਚਿੱਤ (head) ਆ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਪਟ (tail) ਆ ਸਕਦਾ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਵਾਸਤਵਿਕ ਨਤੀਜਾ ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੋਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ? ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ ਨੂੰ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨੂੰ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਇਹ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਦੋ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ :

(*i*) ਇਸਦੇ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸੰਭਵ ਨਤੀਜੇ ਹੋਣ।

(*ii*) ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ ਦੇ ਪੂਰਨ ਹੋਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਨਤੀਜਾ ਦੱਸਣਾ ਸੰਭਵ ਨਾ ਹੋਵੇ।

ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਬੇਤਰਤੀਬ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ ?

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਿਹਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਕਿ ਹੋਰ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਿਅਕਤ ਨਾ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਹੋਵੇ।

16.2.1 *ਨਤੀਜਾ ਅਤੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ (Outcomes and sample space)* ਕਿਸੇ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਕਿਸੇ ਸੰਭਵ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਨਤੀਜਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਪਾਸੇ ਦੇ ਉਪਰੀ ਫਲਕ ਤੇ ਅੰਕਿਤ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਰੁਚੀ ਰੱਖਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਨਤੀਜੇ 1, 2, 3, 4, 5 ਜਾਂ 6 ਹਨ। ਸਾਰੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਕਿਸੇ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਉਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਸੰਕੇਤ S ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਗਟ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦਾ ਹਰੇਕ ਹਿੱਸਾ ਇੱਕ ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਹਰੇਕ ਨਤੀਜਾ ਵੀ ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਆਉ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਦੋ ਸਿੱਕਿਆਂ (ਇੱਕ ₹ 1 ਦਾ ਅਤੇ ਦੂਜਾ ₹ 2 ਦਾ) ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰ ਉਛਾਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ ਸਿੱਕੇ ਇਸ ਅਰਥ ਵਿੱਚ ਵੱਖ ਹਨ ਕਿ ਅਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਪਹਿਲਾ ਸਿੱਕਾ ਅਤੇ ਦੂਜਾ ਸਿੱਕਾ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿਉਂਕਿ ਦੋਨਾਂ ਸਿੱਕਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਤੇ ਚਿਤ (H) ਜਾਂ ਪਟ (T) ਪ੍ਰਗਟ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਸੰਭਵ ਨਤੀਜਾ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ :

ਦੋਵੇਂ ਸਿੱਕਿਆਂ ਤੇ ਚਿਤ = (H,H) = HH

ਪਹਿਲੇ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਚਿਤ ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਤੇ ਪਟ = (H,T) = HT

ਪਹਿਲੇ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਪਟ ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਤੇ ਚਿਤ = (T, H) = TH

ਦੋਵੇਂ ਸਿੱਕਿਆਂ ਤੇ ਪਟ = (T,T) = TT

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S = {HH, HT, TH, TT} ਹੈ।

> ☛ **ਟਿੱਪਣੀ** ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਨਤੀਜੇ H ਅਤੇ T ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਯੁਗਮ ਹਨ। ਸਰਲਤਾ ਲਈ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਯੁਗਮ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਅਰਧ-ਵਿਰਾਮ (comma) ਨੂੰ ਛੱਡ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਪਾਸੇ (dice) ਦੇ ਜੋੜੇ (ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਲਾਲ ਰੰਗ ਦਾ ਅਤੇ ਦੂਜਾ ਨੀਲੇ ਰੰਗ ਦਾ ਹੈ) ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰ ਸੁੱਟਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੇ ਹਿੱਸੇ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮਨ ਲਉ ਕਿ ਨੀਲੇ ਰੰਗ ਦੇ ਪਾਸੇ ਤੇ 1 ਅਤੇ ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੇ ਪਾਸੇ (dice) ਤੇ 2 ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਯੁਗਮ (1, 2) ਰਾਹੀਂ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਜੇਕਰ ਨੀਲੇ ਪਾਸੇ ਤੇ 3 ਅਤੇ ਲਾਲ ਪਾਸੇ ਤੇ 5 ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ (3,5) ਰਾਹੀਂ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਤੋਂ ਹਰੇਕ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਯੁਗਮ (x, y) ਰਾਹੀਂ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ x ਨੀਲੇ ਰੰਗ ਦੇ ਪਾਸੇ ਤੇ ਅਤੇ y ਲਾਲ ਪਾਸੇ ਤੇ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣ ਵਾਲੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ, ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ :

S = {(x, y) : x ਨੀਲੇ ਪਾਸੇ ਤੇ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ y ਲਾਲ ਪਾਸੇ ਤੇ ਪ੍ਰਗਟ ਸੰਖਿਆ ਹੈ}

ਇਸ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੇ ਹਿੱਸਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ $6 \times 6 = 36$ ਹੈ ਅਤੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਾ ਹੈ :

{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)

(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)

(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

ਉਦਾਹਰਣ 3: ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਲਈ ਸਹੀ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦਾ ਉਲੇਖ ਕਰੋ :

(i) ਇੱਕ ਬੱਚੇ ਦੀ ਜੇਬ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ₹ 1, ਇੱਕ ₹ 2 ਅਤੇ ਇੱਕ ₹ 5 ਦੇ ਸਿੱਕੇ ਹਨ। ਉਹ ਆਪਣੀ ਜੇਬ 'ਚੋਂ ਇੱਕ ਦੇ ਬਾਅਦ ਇੱਕ ਦੋ ਸਿੱਕੇ ਕੱਢਦਾ ਹੈ।

(ii) ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਕਿਸੇ ਵਿਅਸਤ ਰਾਜ ਮਾਰਗ ਤੇ ਇੱਕ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਹੋਣ ਵਾਲੀਆਂ ਦੁਰਘਟਨਾਵਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਲਿਖਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : (i) ਮੰਨ ਲਓ ₹ 1 ਦਾ ਸਿੱਕਾ Q ਤੋਂ, ₹ 2 ਦਾ ਸਿੱਕਾ H ਤੋਂ ਅਤੇ ₹ 5 ਦਾ ਸਿੱਕਾ R ਤੋਂ ਨਿਰੂਪਿਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਉਸਦੇ ਰਾਹੀਂ ਜੇਬ 'ਚੋਂ ਕੱਢਿਆ ਹੋਇਆ ਪਹਿਲਾ ਸਿੱਕਾ ਤਿੰਨ ਸਿੱਕਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ Q, H ਜਾਂ R ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਪਹਿਲੇ ਸਿੱਕੇ Q ਦੇ ਸੰਗਤ ਦੂਜੀ ਵਾਰ ਕੱਢਿਆ ਹੋਇਆ ਸਿੱਕਾ H ਜਾਂ R ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦੋ ਸਿੱਕਿਆਂ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮ QH ਜਾਂ QR ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, H ਦੇ ਸੰਗਤ ਦੂਜੀ ਬਾਰ ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ ਸਿੱਕਾ Q ਜਾਂ R ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਨਤੀਜਾ HQ ਅਤੇ HR ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ R ਦੇ ਸੰਗਤ ਦੂਜੀ ਬਾਰ ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ ਸਿੱਕਾ H ਜਾਂ Q ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪਰਿਣਾਮ RH ਜਾਂ RQ ਹੋਵੇਗਾ।

ਇਸ ਲਈ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S = {QH, QR, HQ, HR, RH, RQ} ਹੈ।

(ii) ਕਿਸੇ ਵਿਅਸਤ ਰਾਜਮਾਰਗ ਤੇ ਦੁਰਘਟਨਾਵਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 0 (ਕਿਸੇ ਦੁਰਘਟਨਾ ਨਾ ਹੋਣ ਤੇ) ਜਾਂ 1 ਜਾਂ 2 ਜਾਂ ਕੋਈ ਵੀ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S = {0,1,2,...} ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 4: ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਉਸ ਤੇ ਚਿੱਤ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਥੈਲੀ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ 3 ਨੀਲੀ ਅਤੇ 4 ਸਫ਼ੇਦ ਗੇਂਦਾਂ ਹਨ, ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਕੱਢਦੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਪਟ ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦਾ ਵਰਣਨ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਅਸੀਂ ਨੀਲੀ ਗੇਂਦਾਂ ਨੂੰ B_1, B_2, B_3 ਅਤੇ ਸਫ਼ੇਦ ਗੇਂਦਾਂ ਨੂੰ W_1, W_2, W_3, W_4 ਨਾਲ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S = {HB_1, HB_2, HB_3, HW_1, HW_2, HW_3, HW_4, T1, T2, T3, T4, T5, T6} ਹੈ। ਇੱਥੇ HB_i ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਚਿਤ ਹੈ ਅਤੇ ਗੇਂਦ B_i ਕੱਢੀ ਗਈ ਹੈ। HW_i ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਪਟ ਹੈ ਅਤੇ ਗੇਂਦ W_i ਕੱਢੀ ਗਈ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ T_i ਦਾ ਅਰਧ ਹੈ ਕਿ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਪਟ ਅਤੇ ਸੰਖਿਆ (ਪਾਸੇ ਤੇ) i ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਈ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5: ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਬਾਰ-ਬਾਰ ਤਦ ਤੱਕ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਚਿੱਤ ਪ੍ਰਗਟ ਨਾ ਹੋਵੇ। ਇਸਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦਾ ਵਰਣਨ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੀ ਉਛਾਲ ਜਾਂ ਦੂਜੀ ਉਛਾਲ ਜਾਂ ਤੀਜੀ ਉਛਾਲ ਆਦਿ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਵਿੱਚ ਵੀ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S= {H, TH, TTH, TTTH, TTTTH,...} ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 16.1

ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1 ਤੋਂ 7 ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਵਿੱਚ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਪਤਾ ਕਰੋ।

1. ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।
2. ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਦੋ ਵਾਰੀ ਸੁੱਟਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।
3. ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਚਾਰ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।
4. ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਉਛਾਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।
5. ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਉਛਾਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਉਸ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਚਿਤ ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
6. X ਕਮਰੇ ਵਿੱਚ 2 ਮੁੰਡੇ ਅਤੇ 2 ਕੁੜੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ Y ਕਮਰੇ ਵਿੱਚ 1 ਮੁੰਡਾ ਅਤੇ 3 ਕੁੜੀਆਂ ਹਨ। ਉਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੇ ਇੱਕ ਕਮਰਾ ਚੁਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਫੇਰ ਇੱਕ ਬੱਚਾ ਚੁਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
7. ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਲਾਲ ਰੰਗ ਦਾ, ਇੱਕ ਸਫ਼ੇਦ ਰੰਗ ਦਾ ਅਤੇ ਇੱਕ ਹੋਰ ਪਾਸਾ ਨੀਲੇ ਰੰਗ ਦਾ, ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ ਰੱਖੇ ਹੋਏ ਹਨ। ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਗਿਆ ਅਤੇ ਉਸਨੂੰ ਸੁੱਟਿਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਪਾਸੇ ਦਾ ਰੰਗ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਉਪਰਲੇ ਫਲਕ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ ਨੂੰ ਲਿਖਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦਾ ਵਰਣਨ ਕਰੋ।
8. ਇੱਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ 2 ਬੱਚਿਆਂ ਵਾਲੇ ਪਰਿਵਾਰਾਂ ਵਿਚੋਂ ਹਰੇਕ ਵਿੱਚ ਲੜਕੇ-ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

   (i) ਜੇਕਰ ਸਾਡੀ ਰੁਚੀ ਇਸ ਗੱਲ ਨੂੰ ਜਾਨਣ ਵਿੱਚ ਹੈ ਕਿ ਜਨਮ ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿਚ ਬੱਚਾ ਲੜਕਾ ਜਾਂ ਲੜਕੀ ਹੈ ਤਾਂ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ?

   (ii) ਜੇਕਰ ਸਾਡੀ ਰੁਚੀ ਕਿਸੇ ਪਰਿਵਾਰ ਵਿੱਚ ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਜਾਨਣ ਵਿਚ ਹੈ ਤਾਂ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ?
9. ਇੱਕ ਡੱਬੇ ਵਿੱਚ 1 ਲਾਲ ਅਤੇ ਇੱਕੋ ਜਿਹੀਆਂ 3 ਸਫ਼ੇਦ ਗੇਂਦਾਂ ਰੱਖੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ। ਦੋ ਗੇਂਦਾਂ ਇੱਕ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਇੱਕ ਬਿਨਾਂ ਪ੍ਰਤਿ ਸਥਾਪਤ ਕੀਤੇ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਕੱਢੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਪਤਾ ਕਰੋ।
10. ਇੱਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਉਸ ਤੇ ਚਿਤ ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਨੂੰ ਫੇਰ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਪਹਿਲੀ ਵਾਰੀ ਵਿੱਚ ਪਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਪਤਾ ਕਰੋ।
11. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਬਲਬਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਢੇਰ ਵਿੱਚੋਂ 3 ਬਲਬ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਕੱਢੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਹਰੇਕ ਬਲਬ ਨੂੰ ਜਾਂਚਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸਨੂੰ ਖਰਾਬ (D) ਜਾਂ ਠੀਕ (N) ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਪਤਾ ਕਰੋ।
12. ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਨਤੀਜਾ ਚਿਤ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਪਾਸੇ ਤੇ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਫੇਰ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੀ ਵੰਨਗੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।
13. ਕਾਗਜ ਦੀਆਂ ਚਾਰ ਪਰਚੀਆਂ ਤੇ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 1, 2, 3 ਅਤੇ 4 ਵੱਖ-ਵੱਖ ਲਿਖੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਪਰਚੀਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਡੱਬੇ ਵਿੱਚ ਰੱਖ ਕੇ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮਿਲਾਇਆ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਡੱਬੇ ਵਿੱਚੋਂ ਦੋ ਪਰਚੀਆਂ ਇੱਕ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਦੂਜੀ ਬਿਨਾ ਬਦਲੇ ਕੱਢਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਪਤਾ ਕਰੋ।
14. ਇੱਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਪਾਸੇ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆ ਜਿਸਤ ਹੈ ਤਾਂ ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਇੱਕ ਵਾਰ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਪਾਸੇ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆ ਟਾਂਕ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਦੋ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਪਤਾ ਕਰੋ।
15. ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਉਛਾਲਿਆ ਗਿਆ। ਜੇਕਰ ਉਸ ਤੇ ਪਟ ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇੱਕ ਡੱਬੇ ਵਿੱਚੋਂ ਜਿਸ ਵਿੱਚ 2 ਲਾਲ ਅਤੇ 3 ਕਾਲੀਆਂ ਗੇਂਦਾਂ ਹਨ, ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ। ਜੇਕਰ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਚਿਤ ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋ।
16. ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਵਾਰ-ਵਾਰ ਤਦ ਤੱਕ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਤੱਕ 6 ਪ੍ਰਗਟ ਨਾ ਹੋ ਜਾਵੇ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਕੀ ਹੈ ?

16.3 ਘਟਨਾ (Event)

ਅਸੀਂ ਬੇਤਰਤੀਬੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੇ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਉਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਸਾਰੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਲਈ ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ (Universal set) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਦੋ ਵਾਰ ਉਛਾਲਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਸੰਬੰਧਿਤ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S = {HH, HT, TH, TT} ਹੈ।

ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਸਾਡੀ ਰੁਚੀ ਉਹਨਾਂ ਨਤੀਜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਹੈ ਜਿਹੜੇ ਤੱਥ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਚਿੱਤ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣ ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਅਸੀ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਸ ਘਟਨਾ ਦੇ ਹੋਣ ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ S ਦੇ ਤੱਤ ਕੇਵਲ HT ਅਤੇ TH ਹਨ। ਇਹ ਦੋ ਤੱਤ ਇੱਕ ਸਮੂਹ E = { HT, TH} ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਅਸੀ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮੂਹ E ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦਾ ਉਪ-ਸਮੂਹ ਹੈ। ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਘਟਨਾਵਾਂ ਅਤੇ S ਦੇ ਉਪ-ਸਮੂਹਾਂ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸੰਗਤਤਾ ਹੈ :

ਘਟਨਾ ਦਾ ਵਰਣਨ	'S' ਦਾ ਸੰਗਤ ਉਪ-ਸਮੂਹ
ਪਟਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਠੀਕ ਦੋ ਹੈ	A = {TT}
ਪਟਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ 1 ਹੈ	B = {HT, TH, TT}
ਚਿੱਤਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ 1 ਹੈ	C = {HT, TH, TT}
ਦੂਜੀ ਉਛਾਲ ਵਿੱਚ ਚਿੱਤ ਨਹੀਂ ਹੈ	D = { HT, TT}
ਚਿੱਤਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਦੋ ਹੈ	S = {HH, HT, TH, TT}
ਚਿੱਤਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੋ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ	ϕ

ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀ ਚਰਚਾ ਤੋਂ ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੇ ਕਿਸੇ ਉਪ-ਸਮੂਹ ਦੇ ਸੰਗਤ ਇੱਕ ਘਟਨਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ ਦੇ ਸੰਗਤ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦਾ ਇੱਕ ਉਪ-ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਘਟਨਾ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੋਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦਾ ਕੋਈ ਉਪ-ਸਮੂਹ ਇੱਕ ਘਟਨਾ ਕਹੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

16.3.1 ਇੱਕ ਘਟਨਾ ਦਾ ਘਟਿਤ ਹੋਣਾ (Occurrence of an event) ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਘਟਨਾ 'ਪਾਸੇ ਤੇ 4 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ' ਨੂੰ E ਨਾਲ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਪਾਸੇ ਤੇ ਅਸਲ ਵਿੱਚ 1 ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਘਟਨਾ E ਘਟਿਤ ਹੋਈ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਨਤੀਜਾ 2 ਜਾਂ 3 ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਘਟਨਾ E ਘਟਿਤ ਹੋਈ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦੀ ਘਟਨਾ E ਘਟਿਤ ਹੋਈ ਕਹੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਜੇਕਰ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਨਤੀਜਾ w ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ ਕਿ $w \in E$। ਜੇਕਰ ਨਤੀਜਾ w ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਹੈ ਕਿ $w \notin E$ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਘਟਨਾ E ਘਟਿਤ ਨਹੀਂ ਹੋਈ ਹੈ।

16.3.2 *ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਕਾਰ (Types of events)* ਘਟਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਹਿੱਸਿਆਂ ਦੇ ਅਧਾਰ ਤੇ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਪ੍ਰਕਾਰਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

1. ਅਸੰਭਵ ਅਤੇ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਘਟਨਾਵਾਂ (Impossible and Sure Events) ਖਾਲੀ ਸਮੂਹ ϕ ਅਤੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਵੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਵਿਅਕਤ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ϕ ਨੂੰ ਅਸੰਭਵ ਘਟਨਾ ਅਤੇ S ਭਾਵ ਪੂਰਨ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਘਟਨਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਲਈ ਆਉ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ E ਘਟਨਾ 'ਪਾਸੇ ਤੇ ਪ੍ਰਗਟ ਸੰਖਿਆ 7 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ' ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਘਟਨਾ E ਦੇ ਸੰਗਤ ਉਪ-ਸਮੂਹ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ?

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਨਤੀਜਾ ਘਟਨਾ E ਦੀਆ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਨਹੀਂ ਕਰਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਤੱਤ ਘਟਨਾ E ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਨੂੰ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਨਹੀਂ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕੇਵਲ ਖਾਲੀ ਸਮੂਹ ਹੀ ਘਟਨਾ E ਦੇ ਸੰਗਤ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪਾਸੇ ਦੇ ਉਪਰੀ ਫਲਕ ਤੇ 7 ਦਾ ਗੁਣਜ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ ਅਸੰਭਵ ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਘਟਨਾ $E = \phi$ ਇੱਕ ਅਸੰਭਵ ਘਟਨਾ ਹੈ।

ਆਉ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਹੋਰ ਘਟਨਾ F 'ਪਾਸੇ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆ ਜਾਂ ਤਾਂ ਜਿਸਤ ਹੈ ਜਾਂ ਟਾਂਕ' ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ। ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = S$, ਭਾਵ ਸਾਰੇ ਨਤੀਜੇ ਘਟਨਾ F ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਨੂੰ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ $F = S$ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਘਟਨਾ ਹੈ।

2. ਸਰਲ ਘਟਨਾ (Simple Event) ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ E ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਹੀ ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਘਟਨਾ E ਨੂੰ ਸਰਲ ਜਾਂ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਘਟਨਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਜਿਸਦੇ ਦਿੱਤੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ n ਵੱਖ ਹਿੱਸੇ ਹੋਣ ਵਿੱਚ n ਸਰਲ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ, ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਦੇ ਦੋ ਉਛਾਲਾਂ ਵਾਲੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ

$S=\{HH, HT, TH, TT\}$ ਹੈ।

ਇੱਥੇ ਇਸ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੀਆਂ ਚਾਰ ਸਰਲ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ, ਜਿਹੜੀਆਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਹਨ :

$E_1= \{HH\}, E_2=\{HT\}, E_3= \{ TH\}$ ਅਤੇ $E_4=\{TT\}$

3. ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਘਟਨਾ (Compound Events) ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਸਨੂੰ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਘਟਨਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਦੀਆਂ ਤਿੰਨ ਉਛਾਲਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ :

E : ਠੀਕ ਇੱਕ ਚਿਤ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ

F : ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਚਿਤ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ

G : ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਇੱਕ ਚਿਤ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ, ਆਦਿ।

ਇਹਨਾਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ S ਦੇ ਉਪ-ਸਮੂਹ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ :

$E = \{HTT,THT,TTH\}$

$F = \{HTT,THT, TTH, HHT, HTH, THH, HHH\}$

$G = \{TTT, THT, HTT, TTH\}$

ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਹਰੇਕ ਉਪ-ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂ ਹਨ ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਸਾਰੀਆਂ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ।

16.3.3 *ਘਟਨਾਵਾਂ ਦਾ ਬੀਜਗਣਿਤ (Algebra of events)* ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੋ ਜਾਂ ਵੱਧ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੇ ਭਿੰਨ ਤਰੀਕਿਆਂ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਿਆ ਸੀ ਭਾਵ ਸੰਘ, ਕਾਟ, ਅੰਤਰ ਸਮੂਹ ਦੇ ਪੂਰਕ ਆਦਿ ਬਾਰੇ ਸਮਝਿਆ ਸੀ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਅਸੀਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦਾ ਸੰਯੋਜਨ ਸਮੂਹ ਸੰਕੇਤਨਾਂ ਦੇ ਬਾਬਤ ਇਸਤੇਮਾਲ ਰਾਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਮੰਨ ਲਉ A, B, C ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੋਂ ਸੰਬੰਧਿਤ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਜਿਸਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਹੈ।

1. ਪੂਰਕ ਘਟਨਾ (Complementary Event) ਹਰੇਕ ਘਟਨਾ A ਦੇ ਬਾਬਤ ਇੱਕ ਹੋਰ ਘਟਨਾ A' ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ ਘਟਨਾ A ਦੀ ਪੂਰਕ ਘਟਨਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। A' ਨੂੰ ਘਟਨਾ 'A-ਨਹੀਂ' ਵੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ, 'ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਦੀ ਤਿੰਨ ਉਛਾਲਾਂ' ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨੂੰ ਲਉ। ਇਸਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ

$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ $A=\{HTH, HHT, THH\}$ ਘਟਨਾ 'ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਪਟ ਦਾ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ' ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ।

ਨਤੀਜਾ HTT ਦੇ ਹੋਣ ਤੇ ਘਟਨਾ A ਘਟਿਤ ਨਹੀਂ ਹੋਈ ਹੈ। ਕਿੰਤੂ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਘਟਨਾ 'A-ਨਹੀਂ' ਘਟਿਤ ਹੋਈ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਘਟਨਾ A ਲਈ ਪੂਰਕ ਘਟਨਾ 'A-ਨਹੀਂ' ਭਾਵ,

$A' = \{HHH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

ਜਾਂ $A' = \{\omega : \omega \in S$ ਅਤੇ $\omega \notin A\} = S - A$ ਹੈ।

2. ਘਟਨਾ 'A ਜਾਂ B' (Event 'A or B') ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ A ਅਤੇ B ਦਾ ਸੰਘ $A \cup B$ ਰਾਹੀਂ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਉਹ ਸਾਰੇ ਹਿੱਸੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜਿਹੜੇ ਜਾਂ ਤਾਂ A ਵਿੱਚ ਹਨ ਜਾਂ B ਵਿੱਚ ਹਨ ਜਾਂ ਦੋਵਾਂ ਵਿੱਚ ਹਨ।

ਜਦੋਂ ਸਮੂਹ A ਅਤੇ B ਕਿਸੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਤੋਂ ਸੰਬੰਧਿਤ ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹੋਣ ਤਾਂ '$A \cup B$' ਘਟਨਾ A ਜਾਂ B ਜਾਂ ਦੋਨਾਂ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਘਟਨਾ '$A \cup B$' ਨੂੰ 'A ਜਾਂ B' ਵੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਘਟਨਾ 'A ਜਾਂ B' $= A \cup B$

$= \{\omega : \omega \in A$ ਜਾਂ $\omega \in B\}$

3. ਘਟਨਾ 'A ਅਤੇ B' (Event 'A and B') ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ ਦੀ ਕਾਟ $A \cap B$ ਉਹ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਉਹ ਹਿੱਸੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜਿਹੜੇ A ਅਤੇ B ਦੋਨਾਂ ਵਿੱਚ ਪਾਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਭਾਵ 'A ਅਤੇ B' ਦੋਨਾਂ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਜੇਕਰ 'A ਅਤੇ B' ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹੋਣ ਤਾਂ ਸਮੂਹ $A \cap B$ ਘਟਨਾ 'A ਅਤੇ B' ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, $A \cap B = \{\omega : \omega \in A$ ਅਤੇ $\omega \in B\}$

ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਦੋ ਵਾਰੀ ਸੁੱਟਣ ਤੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਮੰਨ ਲਉ ਘਟਨਾ A 'ਪਹਿਲੀ ਸੁੱਟੀ ਸੰਖਿਆ 6 ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦੀ ਹੈ 'ਅਤੇ ਘਟਨਾ B 'ਦੋ ਸੁੱਟਾਂ ਤੇ ਪ੍ਰਗਟ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਜੋੜ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ 11 ਹੁੰਦਾ ਹੈ' ਨੂੰ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਤਾਂ

$A = \{(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$ ਅਤੇ $B = \{(5,6), (6,5), (6,6)\}$

ਇਸ ਲਈ $A \cap B = \{(6,5), (6,6)\}$

ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਸਮੂਹ $A \cap B = \{(6,5), (6,6)\}$ ਘਟਨਾ 'ਪਹਿਲੀ ਸੁੱਟ ਤੇ 6 ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਦੋਵਾਂ ਸੁੱਟਾਂ ਤੇ ਪ੍ਰਗਟ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ 11 ਹੁੰਦਾ ਹੈ' ਨੂੰ ਦੱਸਦਾ ਹੈ।

4. ਘਟਨਾ 'A ਪਰੰਤੂ B ਨਹੀਂ' (The Event 'A but not B') ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ A–B ਉਨ੍ਹਾਂ ਸਾਰੇ ਹਿੱਸਿਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੋ A ਵਿੱਚ ਤਾਂ ਹਨ ਪਰੰਤੂ B ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਸਮੂਹ 'A–B' ਘਟਨਾ 'A' ਪਰੰਤੂ B ਨਹੀਂ' ਨੂੰ ਦੱਸਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$A - B = A \cap B'$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਘਟਨਾ 'ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ' ਨੂੰ A ਤੋਂ ਅਤੇ ਘਟਨਾ 'ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ' ਨੂੰ B ਤੋਂ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ (i) A ਜਾਂ B (ii) A ਅਤੇ B (iii) A ਕਿੰਤੂ B ਨਹੀਂ (iv) 'A ਨਹੀਂ' ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਸਮੂਹ ਲਿਖੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, A = \{2, 3, 5\}$ ਅਤੇ $B = \{1, 3, 5\}$

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ

(i) 'A ਜਾਂ B' $= A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$

(ii) 'A ਅਤੇ B' $= A \cap B = \{3,5\}$

(iii) 'A ਪਰੰਤੂ B ਨਹੀਂ' $= A - B = \{2\}$

(iv) 'A ਨਹੀਂ' $= A' = \{1,4,6\}$

16.3.4 ***ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ (Mutually exclusive events)*** ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਘਟਨਾ A 'ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ' ਅਤੇ ਘਟਨਾ B 'ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ' ਨੂੰ ਵਿਅਕਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ A ਘਟਨਾ B ਨੂੰ ਨਿਵੇਕਲਾ ਕਰ ਰਹੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਉਲਟ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਕੋਈ ਪਰਿਣਾਮ ਨਹੀਂ ਹੈ ਜੋ ਘਟਨਾ A ਅਤੇ B ਦੇ ਇੱਕ ਨਾਲ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਨੂੰ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ

$A = \{1, 3, 5\}$ ਅਤੇ $B = \{2, 4, 6\}$

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ $A \cap B = \phi$, ਭਾਵ A ਅਤੇ B ਨਾ-ਜੁੜੇ ਸਮੂਹ ਹਨ।

ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ A ਅਤੇ B ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਕਹੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਜੇਕਰ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਦਾ ਘਟਿਤ ਹੋਣਾ ਦੂਜੀ ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਨੂੰ ਨਿਵੇਕਲਾ ਕਰਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਉਹ ਇੱਕਠੀ ਘਟਿਤ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਸਮੂਹ A ਅਤੇ B ਨਾ-ਜੁੜੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਦੋਬਾਰਾ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਘਟਨਾ A 'ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ' ਅਤੇ ਘਟਨਾ B '4 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ' ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ $A = \{1, 3, 5\}$ ਅਤੇ $B = \{1, 2, 3\}$

ਹੁਣ $3 \in A$ ਅਤੇ ਨਾਲ ਹੀ $3 \in B$

ਇਸ ਲਈ A ਅਤੇ B ਨਾ-ਜੁੜੇ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ A ਅਤੇ B ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਟਿੱਪਣੀ ਇੱਕ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੀਆਂ ਸਰਲ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

16.3.5 ***ਸਰਵਾਂਗੀ ਘਟਨਾਵਾਂ (Exhaustive events)*** ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ਹੈ। ਆਉ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੀਏ :

A: '4 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ'

B: '2 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਪਰੰਤੂ 5 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ'

ਅਤੇ C: '4 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ'

ਤਾਂ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3,4\}$ ਅਤੇ $C = \{5, 6\}$ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3\} \cup \{3, 4\} \cup \{5, 6\} = S$$

ਇਹੋ ਜਿਹੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ A, B ਅਤੇ C ਨੂੰ ਸਰਵਾਂਗੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਤੋਂ ਜੇਕਰ $E_1, E_2, ..., E_n$ ਕਿਸੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦੀਆਂ n ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ ਜੇਕਰ :

$$E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup ... \cup E_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i = S$$

ਤਾਂ $E_1, E_2, ..., E_n$ ਨੂੰ ਸਰਵਾਂਗੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਘਟਨਾਵਾਂ $E_1, E_2, ..., E_n$ ਸਰਵਾਂਗੀ ਕਹਿਲਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਜੇਕਰ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਕਰਨ ਤੇ ਇਹਨਾ ਵਿੱਚੋਂ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਘਟਨਾ ਜ਼ਰੂਰ ਹੀ ਘਟਿਤ ਹੋਵੇ।

ਇਸਦੇ ਇਲਾਵਾ ਜੇਕਰ ਸਾਰੇ $i \neq j$ ਲਈ $E_i \cap E_j = \phi$ ਇਸ ਕਰਕੇ E_i ਅਤੇ E_j ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੇ ਹਨ ਅਤੇ $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = S$, ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਘਟਨਾਵਾਂ $E_1, E_2, ..., E_n$ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਸਰਵਾਂਗੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਕਹਿਲਾਂਦੀਆ ਹਨ।

ਆਉ ਹੋਰ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਦੋ ਪਾਸ਼ਿਆਂ ਨੂੰ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਪਾਸਿਆਂ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਆਉ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੇਠਲੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ :

A: 'ਪ੍ਰਾਪਤ ਜੋੜ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ'

B: 'ਪ੍ਰਾਪਤ ਜੋੜ 3 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ'

C: 'ਪ੍ਰਾਪਤ ਜੋੜ 4 ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ'

D: 'ਪ੍ਰਾਪਤ ਜੋੜ 11 ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ'

ਇਨ੍ਹਾਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀਆਂ ਜੋੜੀਆਂ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀਆਂ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ $S = \{(x, y): x, y = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ਵਿੱਚ 36 ਹਿੱਸੇ ਹਨ।

ਤਾਂ $A = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4),$
$(4, 6), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$

B = {(1, 2), (2, 1), (1, 5), (5, 1), (3, 3), (2, 4), (4, 2), (3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4), (6, 6)}

C = {(1, 1), (2, 1), (1, 2)} ਅਤੇ D = {(6, 6)}

ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$A \cap B = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (6, 6)\} \neq \phi$$

ਇਸ ਲਈ A ਅਤੇ B ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $A \cap C \neq \phi$, $A \cap D \neq \phi$, $B \cap C \neq \phi$ ਅਤੇ $B \cap D \neq \phi$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਜੋੜੇ (A, C), (A, D), (B, C), (B, D) ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਨਾਲ ਹੀ $C \cap D = \phi$ ਇਸ ਲਈ C ਅਤੇ D ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

A: 'ਕੋਈ ਚਿਤ ਪ੍ਰਗਟ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ', B: 'ਠੀਕ ਇੱਕ ਚਿਤ ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ' ਅਤੇ C: 'ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਦੋ ਚਿਤ ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦੇ ਹਨ'। ਕੀ ਇਹ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਅਤੇ ਸਰਵਾਂਗੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ?

ਹੱਲ : ਨਤੀਜੇ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ

S = {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT} ਹੈ।

ਅਤੇ A = {TTT}, B = {HTT, THT, TTH}, ਅਤੇ C = {HHT, HTH, THH, HHH}

ਹੁਣ $A \cup B \cup C$ = {TTT, HTT, THT, TTH, HHT, HTH, THH, HHH} = S

ਇਸ ਲਈ, A, B ਅਤੇ C ਸਰਵਾਂਗੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ।

ਨਾਲ ਹੀ, $A \cap B = \phi$, $A \cap C = \phi$ ਅਤੇ $B \cap C = \phi$

ਇਸ ਲਈ, ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਹਨ ਭਾਵ ਉਹ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ A, B ਅਤੇ C ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਅਤੇ ਸਰਵਾਂਗੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਅਭਿਆਸ 16.2

1. ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਘਟਨਾ E 'ਪਾਸੇ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 4 ਦਰਸਾਉਂਦਾ' ਹੈ ਅਤੇ F 'ਪਾਸੇ ਤੇ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਕੀ E ਅਤੇ F ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ?

2. ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦਾ ਵਰਣਨ ਕਰੋ :

(i) A: ਸੰਖਿਆ 7 ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ।
(ii) B : ਸੰਖਿਆ 7 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਹੈ।
(iii) C: ਸੰਖਿਆ 3 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ।
(iv) D : ਸੰਖਿਆ 4 ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ।
(v) E: 4 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।
(vi) F : ਸੰਖਿਆ 3 ਤੋਂ ਘੱਟ ਨਹੀਂ ਹੈ।

$A \cup B$, $A \cap B$, $B \cup C$, $E \cap F$, $D \cap E$, $A - C$, $D - E$, $E \cap F'$, F' ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ

3. ਇੱਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਤੇ ਪ੍ਰਗਟ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦਾ ਵਰਣਨ ਕਰੋ :

A: ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 8 ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ। B : ਦੋਵੇਂ ਪਾਸਿਆਂ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 2 ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
C: ਪ੍ਰਗਟ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ 7 ਹੈ ਅਤੇ 3 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ।
ਇਹਨਾਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੇ ਕਿਹੜੇ ਜੋੜੇ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੇ ਹਨ?

4. ਤਿੰਨ ਸਿੱਕਿਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਘਟਨਾ 'ਤਿੰਨ ਚਿੱਤ ਵੇਖਣੀਆਂ' ਨੂੰ A ਨਾਲ, ਘਟਨਾ 'ਦੋ ਚਿੱਤ ਅਤੇ ਇੱਕ ਪਟ ਵੇਖਣਾ' ਨੂੰ B ਨਾਲ, ਘਟਨਾ 'ਤਿੰਨ ਪਟ ਵੇਖਣੇ' ਨੂੰ C ਨਾਲ ਅਤੇ ਘਟਨਾ 'ਪਹਿਲੇ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਚਿਤ ਵੇਖਣਾ' ਨੂੰ D ਨਾਲ, ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਦੱਸੋ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ

(i) ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀਆਂ ਹਨ ? (ii) ਸਰਲ ਹਨ ? (iii) ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਹਨ ?

5. ਤਿੰਨ ਸਿੱਕੇ ਇੱਕ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਵਰਣਨ ਕਰੋ।

(i) ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਜੋ ਕਿ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀਆਂ ਹਨ।

(ii) ਤਿੰਨ ਘਟਨਾਵਾਂ ਜੋ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਅਤੇ ਸਰਵਾਂਗੀ ਹਨ।

(iii) ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਜੋ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਨਹੀਂ ਹਨ।

(iv) ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਜੋ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਹਨ ਪਰੰਤੂ ਸਰਵਾਂਗੀ ਨਹੀਂ ਹਨ।

(v) ਤਿੰਨ ਘਟਨਾਵਾਂ ਜੋ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਹਨ ਪਰੰਤੂ ਸਰਵਾਂਗੀ ਨਹੀਂ ਹਨ।

6. ਦੋ ਪਾਸੇ ਸੁੱਟੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਘਟਨਾਵਾਂ A, B ਅਤੇ C ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ :

A: ਪਹਿਲੇ ਪਾਸੇ ਤੇ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ

B: ਪਹਿਲੇ ਪਾਸੇ ਤੇ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ

C: ਪਾਸਿਆਂ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ≤ 5 ਹੋਣਾ।

ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦਾ ਵਰਣਨ ਕਰੋ :

(i) A' (ii) B ਨਹੀਂ (iii) A ਜਾਂ B (iv) A ਅਤੇ B

(v) A ਪਰੰਤੂ B ਨਹੀਂ (vi) B ਜਾਂ C (vii) B ਅਤੇ C (viii) $A \cap B' \cap C'$

7. ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ 6 ਨੂੰ ਵੇਖੋ ਅਤੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਵਿੱਚੋਂ ਸੱਚ ਜਾਂ ਝੂਠ ਦੱਸੋ (ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦਾ ਕਾਰਨ ਦੱਸੋ) :

(i) A ਅਤੇ B ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੇ ਹਨ।

(ii) A ਅਤੇ B ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੇ ਅਤੇ ਸਰਵਾਂਗੀ ਹਨ।

(iii) $A = B'$

(iv) A ਅਤੇ C ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀਆਂ ਹਨ।

(v) A ਅਤੇ B' ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀਆਂ ਹਨ।

(vi) A', B', C ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਅਤੇ ਸਰਵਾਂਗੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ।

16.4 ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਸਵੈਸਿੱਧ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ (Axiomatic Approach of Probability)

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ, ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਘਟਨਾਵਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਆਪਣੇ ਰੋਜ਼ ਦੇ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਲਈ ਕਈ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਸੰਭਾਵਨਾ ਸਿਧਾਂਤ ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਜਾਂ ਨਾ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ ਇੱਕ ਮਾਪ ਦੇਣ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਹੈ।

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਬਣਦੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਹੋਣ ਤੇ, ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਵਿਧੀਆਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ।

ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਇੱਕ ਹੋਰ ਵਿਧੀ ਸਵੈਸਿਧ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ ਹੈ। ਇਸ ਤਰੀਕੇ ਵਿੱਚ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰਨ ਲਈ ਸਵੈਸਿਧੀਆਂ ਜਾਂ ਨਿਯਮਾਂ ਨੂੰ ਵਰਣਿਤ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਕਿਸੇ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਹੈ। ਸੰਭਾਵਨਾ P ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ ਦਾ ਫਲਨ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ S ਦਾ ਘਾਤ ਸਮੂਹ ਹੈ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਅੰਤਰਾਲ [0,1] ਹੈ ਜੋ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸਵੈਸਿਧੀਆਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ :

(i) ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ E ਲਈ $P(E) \geq 0$

(ii) $P(S) = 1$

(iii) ਜੇਕਰ E ਅਤੇ F ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$

ਸਵੈਸਿਧੀਆਂ (iii) ਤੋਂ ਇਹ ਅਨੁਸਰਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ $P(\phi) = 0$ ਹੈ। ਇਸਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ $F = \phi$ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ E ਅਤੇ ϕ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਸਵੈਸਿਧੀ (iii) ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$P(E \cup \phi) = P(E) + P(\phi)$ ਜਾਂ $P(E) = P(E) + P(\phi)$ ਭਾਵ $P(\phi) = 0$

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$, ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦੇ ਨਤੀਜੇ ਹਨ ਭਾਵ

$$S = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$$ ਹੈ।

ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਸਵੈਸਿਧ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

(i) ਹਰੇਕ $0 \le P(\omega_i) \le 1$ ਲਈ $\omega_i \in S$

(ii) $P(\omega_1) + P(\omega_2) + ... + P(\omega_n) = 1$

(iii) ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ ω_i ਲਈ $P(A) = \sum P(\omega_i), \omega_i \in A$

ਟਿੱਪਣੀ ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਇੱਕ-ਤੱਤ ਸਮੂਹ $\{\omega_i\}$ ਨੂੰ ਸਰਲ ਘਟਨਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਸੰਕੇਤਨ ਦੀ ਸੁਵਿਧਾ ਲਈ ਅਸੀਂ $P(\{\omega_i\})$ ਨੂੰ $P(\omega_i)$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਉਛਾਲਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਹਰੇਕ ਨਤੀਜੇ H ਅਤੇ T ਦੇ ਨਾਲ ਸੰਖਿਆ $\frac{1}{2}$ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ,

ਭਾਵ $$P(H) = \frac{1}{2}$$

ਅਤੇ $$P(T) = \frac{1}{2} \qquad ...(1)$$

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ ਇਹ ਨਿਰਧਾਰਣ ਦੋਵੇਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਹਰੇਕ ਸੰਖਿਆ ਨਾ ਤਾਂ ਸਿਫ਼ਰ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਹੈ,

ਅਤੇ $$P(H) + P(T) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ H ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $= \frac{1}{2}$ ਅਤੇ T ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $= \frac{1}{2}$ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ $P(H) = \frac{1}{4}$ ਅਤੇ $P(T) = \frac{3}{4}$ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ...(2)

ਕੀ ਇਹ ਨਿਰਧਾਰਣ ਸਵੈਸਿਧ ਤਰੀਕੇ ਦੀ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ?

ਹਾਂ, ਇਸ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ H ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $= \frac{1}{4}$ ਅਤੇ T ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $= \frac{3}{4}$ ਹੈ।

ਅਸੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋਵੇਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨਿਰਧਾਰਣ (1) ਅਤੇ (2), H ਅਤੇ T ਦੀਆਂ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਲਈ ਵੈਧ ਹਨ।

ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਦੋਵੇਂ ਨਤੀਜਿਆਂ H ਅਤੇ T ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਲਈ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ p ਅਤੇ $(1 - p)$ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਦੋਂ ਕਿ $0 \le p \le 1$ ਅਤੇ $P(H) + P(T) = p + (1 - p) = 1$

ਇਹ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨਿਰਧਾਰਣ ਵੀ ਸਵੈਸਿਧ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ ਦੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੇ ਨਾਲ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਕਈ (ਜਾਂ ਇਹ ਕਹਿਣਾ ਉਚਿਤ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਅਨੰਤ) ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੋਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਆਉ ਹੁਣ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ :

ਉਦਾਹਰਣ 9: ਮੰਨ ਲਉ ਇੱਕ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ $S = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_6\}$ ਹੈ। ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਨਤੀਜੇ ਲਈ ਕਿਹੜੀਆਂ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਵੈਧ ਹਨ ?

ਨਤੀਜੇ	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
(a)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
(b)	1	0	0	0	0	0
(c)	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$
(d)	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{2}$
(e)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6

ਹੱਲ : (a) ਸ਼ਰਤ (i): ਹਰੇਕ ਸੰਖਿਆ $p(\omega_i)$ ਧਨਾਤਮਕ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਹੈ।

ਸ਼ਰਤ (ii) ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ

$$= \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=1$$

ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨਿਰਧਾਰਣ ਵੈਧ ਹੈ।

(b) ਸ਼ਰਤ (i) ਹਰੇਕ ਸੰਖਿਆ $p(\omega_i)$ ਜਾਂ ਤਾਂ 0 ਹੈ ਜਾਂ 1 ਹੈ।

ਸ਼ਰਤ (ii) ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $= 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 1$

ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਨਿਰਧਾਰਣ ਵੈਧ ਹੈ।

(c) ਸ਼ਰਤ (i) ਦੋ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ $p(\omega_5)$ ਅਤੇ $p(\omega_6)$ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਨਿਰਧਾਰਣ ਵੈਧ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(d) ਕਿਉਂਕਿ $p(\omega_6) = \frac{3}{2} > 1$ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨਿਰਧਾਰਣ ਵੈਧ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(e) ਕਿਉਂਕਿ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $= 0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.4 + 0.5 + 0.6 = 2.1$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨਿਰਧਾਰਣ ਵੈਧ ਨਹੀਂ ਹੈ।

16.4.1 *ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ (Probability of an event)* ਇੱਕ ਮਸ਼ੀਨ ਰਾਹੀਂ ਨਿਰਮਿਤ ਕਲਮਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਤਿੰਨ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਉਹਨਾ ਨੂੰ ਚੰਗਾ (ਗਲਤੀ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ) ਅਤੇ ਖਰਾਬ (ਗਲਤੀ ਤੋਂ ਯੁਕਤ) ਵਿੱਚ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਕਰਨ ਲਈ ਕੀਤਾ ਗਿਆ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਫਲਸਰੂਪ ਸਾਨੂੰ 0, 1, 2 ਅਤੇ 3 ਖਰਾਬ ਕਲਮਾਂ ਮਿਲ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਸੰਗਤ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ

$$S = \{BBB, BBG, BGB, GBB, BGG, GBG, GGB, GGG\} \text{ ਹੈ।}$$

ਜਿੱਥੇ B ਇੱਕ ਗਲਤੀ ਨਾਲ ਜਾਂ ਖਰਾਬ ਕਲਮ ਨੂੰ ਅਤੇ G ਚੰਗੀ ਜਾਂ ਗਲਤੀ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ ਕਲਮ ਨੂੰ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਨਤੀਜਿਆਂ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕੀਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ :

ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂ :	BBB	BBG	BGB	GBB	BGG	GBG	GGB	GGG
ਸੰਭਾਵਨਾ :	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

ਮੰਨ ਲਉ ਘਟਨਾ 'ਠੀਕ ਇੱਕ ਗਲਤੀ ਨਾਲ ਕਲਮ ਦਾ ਕੱਢਣਾ' ਨੂੰ A ਤੋਂ ਅਤੇ ਘਟਨਾ 'ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਦੋ ਗਲਤੀ ਨਾਲ ਕਲਮਾਂ ਦਾ ਕੱਢਣਾ' ਨੂੰ B ਤੋਂ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ $A = \{BGG, GBG, GGB\}$ ਅਤੇ $B = \{BBG, BGB, GBB, BBB\}$

ਹੁਣ $P(A) = \sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in A$

$= P(BGG) + P(GBG) + P(GGB)$

$= \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$

ਅਤੇ $P(B) = \sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in B$

$= P(BBG) + P(BGB) + P(GBB) + P(BBB)$

$= \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

ਆਓ ਇੱਕ ਹੋਰ ਪ੍ਰਯੋਗ 'ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਦੋ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਨਾ' ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ $S = \{HH, HT, TH, TT\}$ ਹੈ।

ਮਨ ਲਓ ਕਿ ਭਿੰਨ ਨਤੀਜਿਆਂ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹਨ :

$$P(HH) = \frac{1}{4}, P(HT) = \frac{1}{7}, P(TH) = \frac{2}{7}, P(TT) = \frac{9}{28}$$

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ ਇਹ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨਿਰਧਾਰਣ ਸਵੈਸਿਧ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ ਦੀ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਆਉ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਘਟਨਾ E 'ਦੋਵੇਂ ਉਛਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਹੀ ਨਤੀਜਾ ਹੈ' ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੀਏ।

ਇੱਥੇ $E = \{HH, TT\}$

ਹੁਣ ਸਾਰੇ $P(E) = \Sigma P(\omega_i)$, ਲਈ $\omega_i \in E$

$= P(HH) + P(TT) = \frac{1}{4}+\frac{9}{28}=\frac{4}{7}$

ਘਟਨਾ F: 'ਠੀਕ ਦੋ ਚਿਤ' ਲਈ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, $F = \{HH\}$

ਅਤੇ $P(F) = P(HH) = \frac{1}{4}$

16.4.2 ਸਮ ਸੰਭਵ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ (Probability of equally likely outcomes)

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ

$$S = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\} \text{ ਹੈ।}$$

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਸਾਰੇ ਨਤੀਜੇ ਸਮ ਸੰਭਵ ਹਨ, ਭਾਵ ਹਰੇਕ ਸਰਲ ਘਟਨਾ ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

ਭਾਵ ਸਾਰੇ $\omega_i \in S$ ਲਈ $P(\omega_i) = p$, ਜਿੱਥੇ $0 \leq p \leq 1$

ਕਿਉਂਕਿ $\sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = 1$ ਇਸ ਲਈ $p + p + ... + p$ (n ਵਾਰੀ) $= 1$

ਜਾਂ $np = 1$ ਜਾਂ $p = \frac{1}{n}$

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦੀ ਕੋਈ ਇੱਕ ਘਟਨਾ E, ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ ਕਿ $n(S) = n$ ਅਤੇ $n(E) = m$ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਨਤੀਜਾ ਸਮ ਸੰਭਵ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਪਤਾ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ :

$$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{\text{E ਦੇ ਅਨਕੂਲ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ}}{\text{ਕੁੱਲ ਸੰਭਵ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ}}$$

16.4.3 *ਘਟਨਾ 'A ਜਾਂ B' ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ) (Probability of the event 'A or B')* ਆਉ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਘਟਨਾ 'A ਜਾਂ B' ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਭਾਵ $P(A \cup B)$ ਪਤਾ ਕਰੀਏ।

ਮੰਨ ਲਉ, A = {HHT, HTH, THH} ਅਤੇ B = {HTH, THH, HHH} 'ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਦੀਆਂ ਤਿੰਨ ਉਛਾਲਾਂ' ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੀਆਂ ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ।

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ $A \cup B$ = {HHT, HTH, THH, HHH}

ਹੁਣ $P(A \cup B) = P(HHT) + P(HTH) + P(THH) + P(HHH)$

ਜੇਕਰ ਸਾਰੇ ਨਤੀਜੇ ਸਮ ਸੰਭਵ ਹੋਣ ਤਾਂ

$$P(A \cup B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

ਨਾਲ ਹੀ $P(A) = P(HHT) + P(HTH) + P(THH) = \frac{3}{8}$

ਅਤੇ $P(B) = P(HTH) + P(THH) + P(HHH) = \frac{3}{8}$

ਇਸ ਲਈ $P(A) + P(B) = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{6}{8}$

ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ $P(A \cup B) \neq P(A) + P(B)$

ਬਿੰਦੂਆਂ HTH ਅਤੇ THH, A ਅਤੇ B ਦੋਨਾਂ ਵਿੱਚ ਤੱਤ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਹਨ। P(A) + P(B) ਦੇ ਪਰਿਕਲਨ ਵਿੱਚ HTH ਅਤੇ THH (ਭਾਵ $A \cap B$ ਦੇ ਹਿੱਸੇ) ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ ਦੋ ਵਾਰੀ ਗਿਣਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $P(A \cup B)$ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ $A \cap B$ ਦੇ ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ P(A) + P(B) ਵਿੱਚੋਂ ਘਟਾਉਣਾ ਹੋਵੇਗਾ।

ਭਾਵ
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in A \cap B$$
$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ਇਸ ਲਈ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੀ ਕੋਈ ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$P(A \cup B) = \quad p(\omega_i), \quad \omega_i \quad A \quad B$$

ਕਿਉਂਕਿ $A \cup B = (A-B) \cup (A \cap B) \cup (B-A)$

ਇਸ ਲਈ

$$P(A \cup B) = \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in (A-B)\right] + \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in A \cap B\right] + \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in B - A\right]$$

(ਕਿਉਂਕਿ A–B, $A \cap B$ ਅਤੇ B – A ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੇ ਹਨ।) ... (1)

ਨਾਲ ਹੀ $P(A) + P(B) = \left[\sum p(\omega_i) \ \forall \omega_i \in A\right] + \left[\sum p(\omega_i) \ \forall \omega_i \in B\right]$

$$= \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in (A-B) \cup (A \cap B)\right] + \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in (B - A) \cup (A \cap B)\right]$$

$$= \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in (A - B)\right] + \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in (A \cap B)\right] + \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in (B-A)\right]$$

$$\left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in (A \cap B)\right]$$

$= P(A \cup B) + \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in A \cap B\right]$ [(1) ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੋਂ]

$= P(A \cup B) + P(A \cap B)$.

ਇਸ ਲਈ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

ਇਸ ਸੂਤਰ ਦਾ ਵਿਕਲਪਿਕ ਪ੍ਰਮਾਣ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੋਂ ਵੀ ਦਿੱਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$A \cup B = A \cup (B - A)$, ਜਿੱਥੇ A ਅਤੇ B – A ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੇ ਹਨ।

ਅਤੇ $B = (A \cap B) \cup (B - A)$, ਜਿੱਥੇ $A \cap B$ ਅਤੇ B – A ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੇ ਹਨ।

ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਸਵੈਸਿੱਧ (iii) ਰਾਹੀਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - A) \quad \ldots (2)$$

ਅਤੇ

$$P(B) = P(A \cap B) + P(B - A) \quad \ldots (3)$$

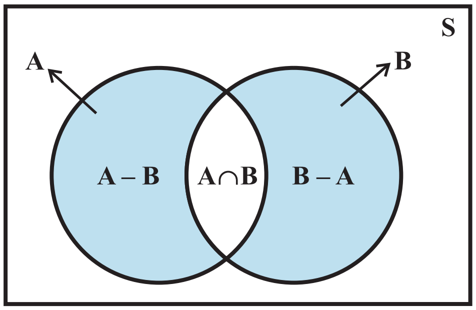
(2) ਵਿੱਚੋਂ (3) ਘਟਾਉਣ ਤੇ

$$P(A \cup B) - P(B) = P(A) - P(A \cap B)$$

ਜਾਂ

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ਉੱਧਰ ਦਿੱਤੇ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਵੇਨ-ਆਲੇਖ (ਚਿੱਤਰ 16.1) ਦਾ ਅਵਲੋਕਨ ਕਰਕੇ ਵੀ ਦੋਬਾਰਾ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 16.1

ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਅਸੰਯੁਕਤ ਸਮੂਹ ਹੋਣ ਭਾਵ ਇਹ ਦੋਵੇਂ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹੋਣ ਤਾਂ $A \cap B = \phi$

ਇਸ ਲਈ $P(A \cap B) = P(\phi) = 0$

ਇਸ ਲਈ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ A ਅਤੇ B ਲਈ, ਅਸੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B),$$

ਜੋ ਕਿ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਸਵੈਸਿੱਧ (iii) ਹੀ ਹੈ।

16.4.4 ਘਟਨਾ 'A ਨਹੀਂ 'ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ (Probability of event 'not A') 1 ਤੋਂ 10 ਤੱਕ ਅੰਕਿਤ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਾਲੇ ਦਸ ਪੱਤਿਆਂ ਦੇ ਡੇਕ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਪੱਤਾ ਕੱਢਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੀ ਘਟਨਾ $A = \{2, 4, 6, 8\}$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ $S = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਸਾਰੇ ਨਤੀਜਿਆਂ 1, 2, 3,...,10 ਨੂੰ ਸਮ ਸੰਭਵ ਮੰਨ ਲਈਏ ਤਾਂ ਹਰੇਕ ਨਤੀਜੇ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{1}{10}$ ਹੋਵੇਗੀ।

ਹੁਣ

$$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) + P(8)$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

ਨਾਲ ਹੀ ਘਟਨਾ 'A ਨਹੀਂ' = $A' = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$

ਹੁਣ $P(A') = P(1) + P(3) + P(5) + P(7) + P(9) + P(10)$

$$= \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, $P(A') = \frac{3}{5} = 1 - \frac{2}{5} = 1 - P(A)$

ਨਾਲ ਹੀ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਵੀ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ A′ ਅਤੇ A ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ (exclusive) ਅਤੇ ਸਰਵਾਂਗੀ (exhaustive) ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ $A \cap A' = \phi$ ਅਤੇ $A \cup A' = S$

ਜਾਂ $P(A \cup A') = P(S)$

ਹੁਣ $P(A) + P(A') = 1$, (ਸਵੈਸਿੱਧ (ii) ਅਤੇ (iii) ਰਾਹੀਂ)

ਜਾਂ $P(A') = P(A$ ਨਹੀਂ$) = 1 - P(A)$

ਆਉ ਸਮ ਸੰਭਵ ਨਤੀਜਿਆਂ ਵਾਲੇ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਲਈ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਅਤੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ, ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਹੋਰ ਕੁਝ ਨਾ ਕਿਹਾ ਗਿਆ ਹੋਵੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 10 : ਤਾਸ਼ ਦੇ 52 ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਇੱਕ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਫੈਂਟੀ ਹੋਈ ਗੱਠੀ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਪੱਤਾ ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਕੱਢੇ ਗਏ ਪੱਤੇ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ :

(i) ਪੱਤਾ ਇੱਟ ਦਾ ਹੈ। (ii) ਪੱਤਾ ਇੱਕਾ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(iii) ਪੱਤਾ ਕਾਲੇ ਰੰਗ ਦਾ ਹੈ (ਭਾਵ ਚਿੜੀ ਜਾਂ ਹੁਕਮ ਦਾ)। (iv) ਪੱਤਾ ਇੱਟ ਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(v) ਪੱਤਾ ਕਾਲੇ ਰੰਗ ਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਜਦੋਂ 52 ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਫੈਂਟੀ ਹੋਈ ਗੱਠੀ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਪੱਤਾ ਕੱਢਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਸੰਭਵ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 52 ਹੈ।

(i) ਮੰਨ ਲਉ ਘਟਨਾ 'ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ ਪੱਤਾ ਇੱਟ ਦਾ ਹੈ' ਨੂੰ A ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ A ਵਿੱਚ ਹਿੱਸਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 13 ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, $P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

ਭਾਵ, ਇੱਕ ਇੱਟ ਦਾ ਪੱਤਾ ਕੱਢਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ = $\frac{1}{4}$ ਹੈ।

(ii) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਘਟਨਾ 'ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ ਪੱਤਾ ਇੱਕਾ ਹੈ' ਨੂੰ B ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
ਇਸ ਲਈ 'ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ ਪੱਤਾ ਇੱਕਾ ਨਹੀਂ ਹੈ' ਨੂੰ B′ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਵੇਗਾ।

ਹੁਣ $P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{4}{52} = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$

(iii) ਮੰਨ ਲਉ ਘਟਨਾ 'ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ ਪੱਤਾ ਕਾਲੇ ਰੰਗ ਦਾ ਹੈ' ਨੂੰ C ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
ਇਸ ਲਈ ਸਮੂਹ C ਵਿੱਚ ਹਿੱਸਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 26 ਹੈ।

ਭਾਵ $P(C) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਕਾਲੇ ਰੰਗ ਦਾ ਪੱਤਾ ਕੱਢਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ = $\frac{1}{2}$

(iv) ਅਸੀਂ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀ (i) ਵਿੱਚ ਮੰਨਿਆ ਹੈ ਕਿ ਘਟਨਾ 'ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ ਪੱਤਾ ਇੱਟ ਦਾ ਹੈ' ਨੂੰ A ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ ਘਟਨਾ 'ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ ਪੱਤਾ ਇੱਟ ਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ' ਨੂੰ A′ ਜਾਂ 'A ਨਹੀਂ' ਨਾਲ ਦਰਸਾਵਾਂਗੇ।

ਹੁਣ P(A ਨਹੀਂ) = 1 – P(A) = $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

(v) ਘਟਨਾ 'ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ ਪੱਤਾ ਕਾਲੇ ਰੰਗ ਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ' ਨੂੰ C′ ਜਾਂ 'C ਨਹੀਂ' ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ, ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ P(C ਨਹੀਂ) = 1 – P (C) = $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

ਇਸ ਲਈ ਪੱਤਾ ਕਾਲੇ ਰੰਗ ਦਾ ਨਾ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ = $\frac{1}{2}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 11 : ਇੱਕ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ 9 ਡਿਸਕਾਂ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ 4 ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੀ, 3 ਨੀਲੇ ਰੰਗ ਦੀ ਅਤੇ 2 ਪੀਲੇ ਰੰਗ ਦੀਆਂ ਹਨ। ਡਿਸਕਾਂ ਅਕਾਰ ਅਤੇ ਮਾਪ ਵਿੱਚ ਸਮਰੂਪ ਹਨ। ਥੈਲੇ ਵਿਚੋਂ ਇੱਕ ਡਿਸਕ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਕੱਢੀ ਗਈ ਹੈ। ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਕੱਢੀ ਗਈ ਡਿਸਕ (i) ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੀ ਹੈ (ii) ਪੀਲੇ ਰੰਗ ਦੀ ਹੈ (iii) ਨੀਲੇ ਰੰਗ ਦੀ ਹੈ (iv) ਨੀਲੇ ਰੰਗ ਦੀ ਨਹੀਂ ਹੈ (v) ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੀ ਹੈ ਜਾਂ ਨੀਲੇ ਰੰਗ ਦੀ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਡਿਸਕਾਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ 9 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸੰਭਵ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ 9 ਹੋਈ।

ਮੰਨ ਲਉ ਘਟਨਾਵਾਂ A, B ਅਤੇ C ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੋਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ

A : 'ਕੱਢੀ ਗਈ ਡਿਸਕ ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੀ ਹੈ।'

B : 'ਕੱਢੀ ਗਈ ਡਿਸਕ ਪੀਲੇ ਰੰਗ ਦੀ ਹੈ।'

C : 'ਕੱਢੀ ਗਈ ਡਿਸਕ ਨੀਲੇ ਰੰਗ ਦੀ ਹੈ।'

(i) ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੀਆਂ ਡਿਸਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 4, ਭਾਵ, n (A) = 4

ਇਸ ਕਰਕੇ P(A) = $\frac{4}{9}$

(ii) ਪੀਲੇ ਰੰਗ ਦੀਆਂ ਡਿਸਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 2, ਭਾਵ, n (B) = 2

ਇਸ ਕਰਕੇ P(B) = $\frac{2}{9}$

(iii) ਨੀਲੇ ਰੰਗ ਦੀਆਂ ਡਿਸਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 3, ਭਾਵ, n(C) = 3

ਇਸ ਕਰਕੇ P(C) = $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

(iv) ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਘਟਨਾ 'ਡਿਸਕ ਨੀਲੇ ਰੰਗ ਦੀ ਨਹੀਂ ਹੈ, 'C ਨਹੀਂ' ਹੀ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ P(C ਨਹੀਂ) = 1 – P(C) ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ P(C – ਨਹੀਂ) = $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

(v) ਘਟਨਾ 'ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੀ ਡਿਸਕ ਜਾਂ ਨੀਲੇ ਰੰਗ ਦੀ ਡਿਸਕ' ਦਾ ਸਮੂਹ (A ∪ C) ਤੋਂ ਦੱਸਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ, A ਅਤੇ C ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ

P(A ਜਾਂ C) = P (A ∪ C) = P(A) + P(C) = $\frac{4}{9}+\frac{1}{3}=\frac{7}{9}$

ਉਦਾਹਰਣ 12: ਦੋ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਅਨਿਲ ਅਤੇ ਆਸ਼ਿਮਾ ਇੱਕ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ ਦਾਖਲ ਹੋਏ। ਅਨਿਲ ਦੇ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ ਪਾਸ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0.05 ਹੈ ਅਤੇ ਆਸ਼ਿਮਾ ਦੇ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ ਪਾਸ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0.10 ਹੈ। ਦੋਵਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿਚ ਪਾਸ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0.02 ਹੈ। ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ

(a) ਅਨਿਲ ਅਤੇ ਆਸ਼ਿਮਾ ਦੋਵੇਂ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ ਪਾਸ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਣਗੇ।

(b) ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ ਪਾਸ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ।

(c) ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ ਪਾਸ ਹੋਵੇਗਾ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ E ਅਤੇ F ਘਟਨਾਵਾਂ (ਅਨਿਲ ਅਤੇ ਆਸ਼ਿਮਾ ਦੇ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਪਾਸ ਕਰਨ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ $P(E) = 0.05$, $P(F) = 0.10$ ਅਤੇ $P(E \cap F) = 0.02$

ਤਾਂ

(a) ਘਟਨਾ 'ਦੋਵੇਂ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਪਾਸ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਣਗੇ' ਨੂੰ $E' \cap F'$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ E' ਘਟਨਾ 'E ਨਹੀਂ', ਭਾਵ ਅਨਿਲ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਪਾਸ ਨਹੀਂ ਕਰੇਗਾ ਅਤੇ F' ਘਟਨਾ 'F ਨਹੀਂ', ਭਾਵ 'ਆਸ਼ਿਮਾ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਪਾਸ ਨਹੀਂ ਕਰੇਗੀ' ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਨਾਲ ਹੀ $E' \cap F' = (E \cup F)'$ (ਡੀ-ਮਾਰਗਨ ਨਿਯਮ ਅਨੁਸਾਰ)

ਹੁਣ $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

ਜਾਂ $P(E \cup F) = 0.05 + 0.10 - 0.02 = 0.13$

ਇਸ ਲਈ $P(E' \cap F') = P(E \cup F)' = 1 - P(E \cup F) = 1 - 0.13 = 0.87$

(b) P (ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਪਾਸ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ)

= 1 − P (ਦੋਵੇਂ ਪਾਸ ਹੋਣਗੇ)

$= 1 - 0.02 = 0.98$

(c) ਘਟਨਾ 'ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਪਾਸ ਹੋਵੇਗਾ' ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਘਟਨਾ ਦੇ ਸਮਰੂਪ ਹੈ :

'ਅਨਿਲ ਪਾਸ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ ਆਸ਼ਿਮਾ ਪਾਸ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗੀ'

ਜਾਂ 'ਅਨਿਲ ਪਾਸ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ ਆਸ਼ਿਮਾ ਪਾਸ ਹੋਵੇਗੀ'

ਭਾਵ, $E \cap F'$ ਜਾਂ $E' \cap F$, ਜਿੱਥੇ $E \cap F'$ ਅਤੇ $E' \cap F$ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੇ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ P(ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਪਾਸ ਹੋਵੇਗਾ)

$= P(E \cap F' \text{ or } E' \cap F)$

$= P(E \cap F') + P(E' \cap F) = P(E) - P(E \cap F) + P(F) - P(E \cap F)$

$= 0.05 - 0.02 + 0.10 - 0.02 = 0.11$

ਉਦਾਹਰਣ 13 : ਦੋ ਪੁਰਖ ਅਤੇ ਦੋ ਔਰਤਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚੋਂ ਦੋ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਇੱਕ ਸਮਿਤੀ ਬਣਾਉਣੀ ਹੈ। ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ਕਿ ਸਮਿਤੀ ਵਿੱਚ (a) ਕੋਈ ਪੁਰਖ ਨਾ ਹੋਵੇ ? (b) ਇੱਕ ਪੁਰਖ ਹੋਵੇ ? (c) ਦੋਵੇਂ ਪੁਰਖ ਹੋਣ ?

ਹੱਲ : ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ = 2 + 2 = 4 ਹੈ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਚਾਰਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਦੋ ਨੂੰ ${}^4C_2$ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

(a) ਸਮਿਤੀ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਪੁਰਖ ਨਾ ਹੋਣ ਤੋਂ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਸਮਿਤੀ ਵਿੱਚ ਦੋ ਔਰਤਾਂ ਹਨ। ਦੋ ਔਰਤਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਦੋਵਾਂ ਦਾ ਚੁਣਨਾ ${}^2C_2 = 1$ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, P (ਕੋਈ ਪੁਰਖ ਨਹੀਂ) $= \frac{{}^2C_2}{{}^4C_2} = \frac{1 \times 2 \times 1}{4 \times 3} = \frac{1}{6}$

(b) ਸਮਿਤੀ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਪੁਰਖ ਹੋਣ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਔਰਤ ਹੈ। ਦੋ ਪੁਰਖਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਪੁਰਖ ਚੁਨਣ ਦੇ $^2C_1$ ਤਰੀਕੇ ਹਨ ਅਤੇ ਦੋ ਔਰਤਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਚੁਨਣ ਦੇ ਵੀ $^2C_1$ ਤਰੀਕੇ ਹਨ। ਦੋਵੇਂ ਚੁਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਨਾਲ ਕਰਨ ਦੇ $^2C_1 \times {}^2C_1$ ਤਰੀਕੇ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ, $$\text{P (ਇੱਕ ਪੁਰਖ)} = \frac{^2C_1 \times {}^2C_1}{^4C_2} = \frac{2 \times 2}{2 \times 3} = \frac{2}{3}$$

(c) ਦੋ ਪੁਰਖਾਂ ਨੂੰ $^2C_2$ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਕਰਕੇ $$\text{P (ਦੋ ਪੁਰਖ)} = \frac{^2C_2}{^4C_2} = \frac{1}{^4C_2} = \frac{1}{6}$$

ਅਭਿਆਸ 16.3

1. ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S $= \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7\}$ ਦੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੇ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨਿਰਧਾਰਣ ਵੈਧ ਨਹੀਂ ਹਨ :

ਨਤੀਜਾ	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7
(a)	0.1	0.01	0.05	0.03	0.01	0.2	0.6
(b)	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$
(c)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
(d)	– 0.1	0.2	0.3	0.4	– 0.2	0.1	0.3
(e)	$\frac{1}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{15}{14}$

2. ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਦੋ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਪਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ?

3. ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ
(ii) 3 ਜਾਂ 3 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ
(iii) 1 ਜਾਂ 1 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ
(iv) 6 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ
(v) 6 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ

4. ਤਾਸ਼ ਦੀ ਗੱਠੀ ਦੇ 52 ਪੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਪੱਤਾ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ।

(a) ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਬਿੰਦੂ ਹਨ ?
(b) ਪੱਤੇ ਦਾ ਹੁਕਮ ਦਾ ਇੱਕਾ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ?
(c) ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਪੱਤਾ (i) ਇੱਕਾ ਹੈ (ii) ਕਾਲੇ ਰੰਗ ਦਾ ਹੈ।

5. ਇੱਕ ਨਿਰਪੱਖ ਸਿੱਕਾ ਜਿਸਦੇ ਇੱਕ ਤਲ ਤੇ 1 ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਤਲ ਤੇ 6 ਅੰਕਿਤ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਨਿਰਪੱਖ ਪਾਸੇ ਦੋਹਾਂ ਨੂੰ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਪ੍ਰਗਟ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ (i) 3 ਹੈ। (ii) 12 ਹੈ।

6. ਨਗਰ ਪਰਿਸ਼ਦ ਵਿੱਚ ਚਾਰ ਪੁਰਖ ਅਤੇ ਛੇ ਔਰਤਾਂ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸਮਿਤੀ ਲਈ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਇੱਕ ਪਰਿਸ਼ਦ ਮੈਂਬਰ ਚੁਣਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਇੱਕ ਔਰਤ ਦੇ ਚੁਣੇ ਜਾਣ ਦੀ ਕਿੰਨੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ?

7. ਇੱਕ ਨਿਰਪੱਖ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਚਾਰ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਹਰੇਕ ਚਿਤ ਤੇ ਇੱਕ ਰੁਪਿਆ ਜਿੱਤਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਪਟ ਤੇ 1.50 ਰੁਪਿਆ ਹਾਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੀ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਤੋਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਚਾਰ ਉਛਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀਆਂ ਭਿੰਨ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਨਾਲ ਹੀ ਇਹਨਾਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ ?

8. ਤਿੰਨ ਸਿੱਕੇ ਇੱਕੋ ਵਾਰ ਉਛਾਲੇ ਗਏ ਹਨ। ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) ਤਿੰਨ ਚਿਤ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ (ii) 2 ਚਿਤ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ (iii) ਘੱਟੋ-ਘੱਟ 2 ਚਿਤ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ

(iv) ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ 2 ਚਿਤ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ (v) ਇੱਕ ਵੀ ਚਿਤ ਪ੍ਰਗਟ ਨਾ ਹੋਣਾ (vi) 3 ਪਟ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ

(vii) ਠੀਕ 2 ਪਟ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ (viii) ਕੋਈ ਵੀ ਪਟ ਨਾ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ (ix) ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ 2 ਪਟ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ

9. ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ A ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{2}{11}$ ਹੈ ਤਾਂ ਘਟਨਾ 'A ਨਹੀਂ' ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

10. ਸ਼ਬਦ 'ASSASSINATION' ਤੋਂ ਇੱਕ ਅੱਖਰ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਚੁਣਿਆ ਗਿਆ ਅੱਖਰ (i) ਇੱਕ ਸਵਰ (vowel) ਹੈ। (ii) ਇੱਕ ਵਿਅੰਜਨ (consonant) ਹੈ।

11. ਇੱਕ ਲਾਟਰੀ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ 1 ਤੋਂ 20 ਤੱਕ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਛੇ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਇਹ ਚੁਣੀਆਂ ਗਈਆਂ ਛੇ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਉਹਨਾਂ ਛੇ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਾਲ ਮੇਲ ਖਾਂਦੀਆਂ ਹਨ, ਜਿਹੜੀਆਂ ਲਾਟਰੀ ਸਮਿਤੀ ਨੇ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰ ਰੱਖੀਆਂ ਹਨ ਤਾਂ ਉਹ ਵਿਅਕਤੀ ਇਨਾਮ ਜਿੱਤ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਲਾਟਰੀ ਦੇ ਖੇਡ ਵਿੱਚ ਇਨਾਮ ਜਿੱਤਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ? [**ਸੰਕੇਤ :** ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।]

12. ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠਲੀਆਂ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ P(A) ਅਤੇ P(B) ਯੁਕਤੀ ਸੰਗਤ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ :

(i) $P(A) = 0.5,\ P(B) = 0.7,\ P(A \cap B) = 0.6$

(ii) $P(A) = 0.5, P(B) = 0.4, P(A \cup B) = 0.8$

13. ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਖਾਲੀ ਸਥਾਨ ਭਰੋ :

	P(A)	**P(B)**	**$P(A \cap B)$**	**$P(A \cup B)$**
(i)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	. . .
(ii)	0.35	. . .	0.25	0.6
(iii)	0.5	0.35	. . .	0.7

14. $P(A) = \frac{3}{5}$ ਅਤੇ $P(B) = \frac{1}{5}$ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B, ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ P(A ਜਾਂ B) ਪਤਾ ਕਰੋ।

15. ਜੇਕਰ E ਅਤੇ F ਘਟਨਾਵਾਂ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ ਕਿ $P(E) = \frac{1}{4}$, $P(F) = \frac{1}{2}$ ਅਤੇ P(E ਅਤੇ F) = $\frac{1}{8}$, ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।
(i) P(E ਜਾਂ F), (ii) P(E ਨਹੀਂ ਅਤੇ F ਨਹੀਂ)

16. ਘਟਨਾਵਾਂ E ਅਤੇ F ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ ਕਿ P(E ਨਹੀਂ ਅਤੇ F ਨਹੀਂ) = 0.25, ਦੱਸੋ ਕਿ E ਅਤੇ F ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੇ ਹਨ ਜਾਂ ਨਹੀਂ ?

17. ਘਟਨਾਵਾਂ A ਅਤੇ B ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ ਕਿ P(A) = 0.42, P(B) = 0.48 ਅਤੇ P(A ਅਤੇ B) = 0.16 ਪਤਾ ਕਰੋ : (i) P(A ਨਹੀਂ), (ii) P(B ਨਹੀਂ) (iii) P(A ਜਾਂ B)

18. ਇੱਕ ਪਾਠਸ਼ਾਲਾ ਦੀ ਜਮਾਤ XI ਦੇ 40% ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਗਣਿਤ ਪੜ੍ਹਦੇ ਹਨ ਅਤੇ 30% ਜੀਵ ਵਿਗਿਆਨ ਪੜ੍ਹਦੇ ਹਨ। ਜਮਾਤ ਦੇ 10% ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਗਣਿਤ ਅਤੇ ਜੀਵ ਵਿਗਿਆਨ ਦੋਵੇਂ ਪੜ੍ਹਦੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਜਮਾਤ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਉਹ ਗਣਿਤ ਜਾਂ ਜੀਵ ਵਿਗਿਆਨ ਪੜ੍ਹਦਾ ਹੋਵੇਗਾ।

19. ਇੱਕ ਦਾਖਲਾ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਨੂੰ ਦੋ ਟੈਸਟਾਂ ਦੇ ਅਧਾਰ ’ਤੇ ਸ਼੍ਰੇਣੀਕਰਨ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਹੋਇਆ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੀ ਪਹਿਲੇ ਟੈਸਟ ਵਿੱਚ ਪਾਸ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0.8 ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਟੈਸਟ ਵਿੱਚ ਪਾਸ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0.7 ਹੈ। ਦੋਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਟੈਸਟ ਪਾਸ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0.95 ਹੈ। ਦੋਨਾਂ ਟੈਸਟਾਂ ਨੂੰ ਪਾਸ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ?

20. ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੇ ਅੰਤਿਮ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਦੇ ਅੰਗਰੇਜੀ ਅਤੇ ਹਿੰਦੀ ਦੋਨਾਂ ਵਿਸ਼ਿਆਂ ਨੂੰ ਪਾਸ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0.5 ਹੈ ਅਤੇ ਦੋਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ ਵਿਸ਼ਾ ਪਾਸ ਨਾ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0.1 ਹੈ। ਜੇਕਰ ਅੰਗਰੇਜੀ ਦੀ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਪਾਸ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0.75 ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਹਿੰਦੀ ਦੀ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਪਾਸ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ?

21. ਇੱਕ ਜਮਾਤ ਦੇ 60 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ 30 ਨੇ ਐਨ.ਸੀ.ਸੀ., 32 ਨੇ ਐਨ. ਐਸ. ਐਸ. ਅਤੇ 24 ਨੇ ਦੋਹਾਂ ਨੂੰ ਚੁਣਿਆ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ :

(i) ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨੇ ਐਨ. ਸੀ. ਸੀ. ਜਾਂ ਐਨ. ਐਸ. ਐਸ ਨੂੰ ਚੁਣਿਆ ਹੈ।

(ii) ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨੇ ਨਾ ਤਾਂ ਐਨ. ਸੀ. ਸੀ. ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਐਨ. ਐਸ. ਐਸ. ਨੂੰ ਚੁਣਿਆ ਹੈ।

(iii) ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨੇ ਐਨ. ਸੀ. ਸੀ. ਨੂੰ ਚੁਣਿਆ ਹੈ ਪਰ ਐਨ. ਐਸ. ਐਸ. ਨੂੰ ਨਹੀਂ ਚੁਣਿਆ ਹੈ।

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 14 : ਛੁੱਟੀਆਂ ਵਿੱਚ ਵੀਨਾ ਨੇ ਬੇਤਰਤੀਬੇ ਢੰਗ ਨਾਲ A, B, C ਅਤੇ D ਸ਼ਹਿਰਾਂ ਦਾ ਸਫ਼ਰ ਕੀਤਾ। ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਉਸਨੇ :

(i) A ਦਾ ਸਫ਼ਰ B ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਕੀਤਾ ?

(ii) A ਦਾ ਸਫ਼ਰ B ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਤੇ B ਦਾ C ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਕੀਤਾ ?

(iii) A ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਤੇ B ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਸਫ਼ਰ ਕੀਤਾ ?

(iv) A ਦਾ ਜਾਂ ਤਾਂ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਜਾਂ ਦੂਜੇ ਸਥਾਨ ਤੇ ਸਫ਼ਰ ਕੀਤਾ ?

(v) A ਦਾ ਸਫ਼ਰ B ਤੋਂ ਠੀਕ ਪਹਿਲਾਂ ਕੀਤਾ ?

ਹੱਲ : ਵੀਨਾ ਦੁਆਰਾ ਚਾਰ ਸ਼ਹਿਰਾਂ A, B, C ਅਤੇ D ਦੇ ਸਫ਼ਰ ਦੇ ਭਿੰਨ ਢੰਗਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 4! ਭਾਵ 24 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $n(\text{S}) = 24$

ਕਿਉਂਕਿ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੇ ਹਿੱਸਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 24 ਹੈ। ਇਹ ਸਾਰੇ ਨਤੀਜੇ ਸਮ ਸੰਭਵ ਮੰਨੇ ਗਏ ਹਨ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ

S = {ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, ADCB
BACD, BADC, BDAC, BDCA, BCAD, BCDA
CABD, CADB, CBDA, CBAD, CDAB, CDBA
DABC, DACB, DBCA, DBAC, DCAB, DCBA} ਹੈ।

(i) ਮੰਨ ਲਉ ਘਟਨਾ ‘ਵੀਨਾ A ਦਾ ਸਫ਼ਰ B ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਕਰਦੀ ਹੈ’ ਨੂੰ E ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਲਈ, E = {ABCD, CABD, DABC, ABDC, CADB, DACB
ACBD, ACDB, ADBC, CDAB, DCAB, ADCB}

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $$\text{P(E)} = \frac{n(\text{E})}{n(\text{S})} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

(ii) ਮੰਨ ਲਉ ਘਟਨਾ 'ਵੀਨਾ ਨੇ A ਦਾ ਸਫ਼ਰ B ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਤੇ B ਦਾ ਸਫ਼ਰ C ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਕੀਤਾ' ਨੂੰ F ਤੋਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।
ਇੱਥੇ $F = \{ABCD, DABC, ABDC, ADBC\}$

ਇਸ ਲਈ $$P(F) = \frac{n(F)}{n(S)} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਸਲਾਹ ਦਿੱਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਕਿ (iii), (iv) ਅਤੇ (v) ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਆਪ ਪਤਾ ਕਰਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 15 : ਜਦੋਂ ਤਾਸ਼ ਤੇ 52 ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਗੱਠੀ ਤੋਂ 7 ਪੱਤਿਆਂ ਦਾ ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਬਣਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਇਸ ਵਿੱਚ (i) ਸਾਰੇ ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ (ii) ਠੀਕ 3 ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਹਨ (iii) ਘੱਟੋ-ਘੱਟ 3 ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਸਮੂਹਾਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਭਵ ਸੰਖਿਆ = ${}^{52}C_7$

(i) 4 ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਨਾਲ ਸਮੂਹਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = ${}^{4}C_4 \times {}^{48}C_3$ (ਹੋਰ 3 ਪੱਤੇ ਬਾਕੀ 48 ਪੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਚੁਣੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ)

ਇਸ ਲਈ P (ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਚਾਰ ਬਾਦਸ਼ਾਹ) = $\frac{{}^{4}C_4 \times {}^{48}C_3}{{}^{52}C_7} = \frac{1}{7735}$

(ii) 3 ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਅਤੇ 4 ਹੋਰ ਪੱਤਿਆਂ ਵਾਲੇ ਸਮੂਹਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = ${}^{4}C_3 \times {}^{48}C_4$

ਇਸ ਲਈ P (ਸਿਰਫ਼ ਅਤੇ ਸਿਰਫ਼ 3 ਬਾਦਸ਼ਾਹ) = $\frac{{}^{4}C_3 \times {}^{48}C_4}{{}^{52}C_7} = \frac{9}{1547}$

(iii) P(ਘੱਟੋ-ਘੱਟ 3 ਬਾਦਸ਼ਾਹ)

= P(ਸਿਰਫ਼ ਅਤੇ ਸਿਰਫ਼ 3 ਬਾਦਸ਼ਾਹ) + P (4 ਬਾਦਸ਼ਾਹ)

$$= \frac{9}{1547} + \frac{1}{7735} = \frac{46}{7735}$$

ਉਦਾਹਰਣ 16 : ਜੇਕਰ A, B, C ਕਿਸੇ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਕੀਤੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਤਿੰਨ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹੋਣ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

ਹੱਲ : ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ : $E = B \cup C$ ਤਾਂ

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup E)$$
$$= P(A) + P(E) - P(A \cap E) \quad \ldots (1)$$

ਹੁਣ

$$P(E) = P(B \cup C)$$
$$= P(B) + P(C) - P(B \cap C) \quad \ldots (2)$$

ਨਾਲ ਹੀ $A \cap E = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ [ਸਮੂਹਾਂ ਦੀ ਕਾਟ ਦੇ ਵੰਡ ਦੀ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ ਰਾਹੀਂ]

ਇਸ ਲਈ $P(A \cap E) = P(A \cap B) + P(A \cap C) - P\left[(A \cap B) \cap (A \cap C)\right]$

$$= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P[A \cap B \cap C] \quad \ldots (3)$$

(2) ਅਤੇ (3) ਨੂੰ (1) ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ

$$P[A \cup B \cup C] = P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

ਉਦਾਹਰਣ 17 : ਇੱਕ ਰਿਲੇ ਦੌੜ ਵਿਚ ਪੰਜ ਟੀਮਾਂ A, B, C, D ਅਤੇ E ਨੇ ਭਾਗ ਲਿਆ ਹੈ।

(a) A, B ਅਤੇ C ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਪਹਿਲਾ, ਦੂਜਾ ਅਤੇ ਤੀਜਾ ਸਥਾਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ?

(b) A, B ਅਤੇ C ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਤਿੰਨ ਸਥਾਨਾਂ (ਕਿਸੇ ਵੀ ਕ੍ਰਮ) ਤੇ ਰਹਿਣ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ?

(ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਸਾਰੇ ਅੰਤਿਮ ਕ੍ਰਮ ਸਮ-ਸੰਭਵ ਹਨ।)

ਹੱਲ : ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲੇ ਤਿੰਨ ਸਥਾਨਾਂ ਲਈ ਅੰਤਿਮ ਕ੍ਰਮਾਂ ਦੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ ਤਾਂ ਪਾਵਾਂਗੇ ਕਿ ਇਸ ਵਿੱਚ $^5P_3$, ਭਾਵ $\frac{5!}{(5-3)!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$ ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{1}{60}$ ਹੈ।

(a) A, B ਅਤੇ C ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਪਹਿਲੇ, ਦੂਜੇ ਅਤੇ ਤੀਜੇ ਸਥਾਨ ਤੇ ਰਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਸਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਹੀ ਅੰਤਿਮ ਕ੍ਰਮ ਹੈ ਭਾਵ ABC।

ਇਸ ਲਈ P(A, B ਅਤੇ C ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਪਹਿਲੇ, ਦੂਜੇ ਅਤੇ ਤੀਜੇ ਸਥਾਨ ਤੇ ਰਹਿੰਦੇ ਹਨ) $= \frac{1}{60}$

(b) A, B ਅਤੇ C ਪਹਿਲੇ ਤਿੰਨ ਸਥਾਨਾਂ ਤੇ ਹਨ। ਇਸਦੇ ਲਈ A, B ਅਤੇ C ਲਈ 3! ਤਰੀਕੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਘਟਨਾ ਦੇ ਸੰਗਤ 3! ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂ ਹੋਣਗੇ।

ਇਸ ਲਈ P (A, B ਅਤੇ C ਪਹਿਲੇ ਤਿੰਨ ਸਥਾਨਾਂ ਤੇ ਰਹਿੰਦੇ ਹਨ) $= \frac{3!}{60} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$

ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. ਇੱਕ ਡੱਬੇ ਵਿੱਚ 10 ਲਾਲ, 20 ਨੀਲੀਆਂ ਅਤੇ 30 ਹਰੀਆਂ ਗੋਲੀਆਂ ਰੱਖੀਆਂ ਹਨ। ਡੱਬੇ ਵਿੱਚ 5 ਗੋਲੀਆਂ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਕੱਢੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ਕਿ :

(i) ਸਾਰੀਆਂ ਗੋਲੀਆਂ ਨੀਲੀਆਂ ਹਨ? (ii) ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਗੋਲੀ ਹਰੀ ਹੈ?

2. ਤਾਸ਼ ਦੇ 52 ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਇੱਕ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਫੈਂਟੀ ਹੋਈ ਗੱਠੀ ਵਿੱਚੋਂ 4 ਪੱਤੇ ਕੱਢੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਕੱਢੇ ਹੋਏ ਪੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚ 3 ਇੱਟ ਅਤੇ ਇੱਕ ਹੁਕਮ ਦਾ ਪੱਤਾ ਹੈ?

3. ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਦੇ ਦੋ ਫਲਕਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 1 ਅੰਕਿਤ ਹੈ, ਤਿੰਨ ਫਲਕਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 2 ਅੰਕਿਤ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਫਲਕ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 3 ਅੰਕਿਤ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਪਾਸਾ ਇੱਕ ਵਾਰੀ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) P(2) (ii) P(1 ਜਾਂ 3) (iii) P(3 ਨਹੀਂ)

4. ਇੱਕ ਲਾਟਰੀ ਵਿੱਚ 10,000 ਟਿਕਟ ਵੇਚੇ ਗਏ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਦਸ ਸਮਾਨ ਇਨਾਮ ਦਿੱਤੇ ਜਾਣੇ ਹਨ। ਕੋਈ ਇਨਾਮ ਨਾ ਮਿਲਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ (a) ਇੱਕ ਟਿਕਟ ਖਰੀਦਦੇ ਹੋ (b) ਦੋ ਟਿਕਟਾਂ ਖਰੀਦਦੇ ਹੋ (c) 10 ਟਿਕਟਾਂ ਖਰੀਦਦੇ ਹੋ?

5. 100 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ 40 ਅਤੇ 60 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਦੋ ਵਰਗ ਬਣਾਏ ਹੋਏ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਅਤੇ ਤੁਹਾਡਾ ਇੱਕ ਮਿੱਤਰ 100 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਵਿੱਚ ਹੈ ਤਾਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ਕਿ :

(a) ਤੁਸੀਂ ਦੋਵੇਂ ਇੱਕ ਹੀ ਵਰਗ ਵਿੱਚ ਹੋਣ?

(b) ਤੁਸੀਂ ਦੋਵੇਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਵਰਗਾਂ ਵਿੱਚ ਹੋਣ?

6. ਤਿੰਨ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਲਈ ਤਿੰਨ ਪੱਤਰ ਲਿਖਵਾਏ ਗਏ ਹਨ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਲਈ ਪਤਾ ਲਿਖਿਆ ਇੱਕ ਲਿਫ਼ਾਫ਼ਾ ਹੈ। ਪੱਤਰਾਂ ਨੂੰ ਲਿਫ਼ਾਫ਼ਿਆਂ ਵਿੱਚ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਹਰੇਕ ਲਿਫ਼ਾਫ਼ੇ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਹੀ ਪੱਤਰ ਹੈ। ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਪੱਤਰ ਆਪਣੇ ਠੀਕ ਲਿਫ਼ਾਫ਼ੇ ਵਿੱਚ ਪਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

7. A ਅਤੇ B ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ ਕਿ $P(A) = 0.54$, $P(B) = 0.69$ ਅਤੇ $P(A \cap B) = 0.35$ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $P(A \cup B)$ (ii) $P(A' \cap B')$ (iii) $P(A \cap B')$ (iv) $P(B \cap A')$

8. ਇੱਕ ਸੰਸਥਾ ਦੇ ਕਰਮਚਾਰੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ 5 ਕਰਮਚਾਰੀਆਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਬੰਧ ਸਮਿਤੀ ਲਈ ਚੁਣਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਪੰਜ ਕਰਮਚਾਰੀਆਂ ਦਾ ਬਿਉਰਾ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ :

ਕ੍ਰਮ	ਨਾਂ	ਲਿੰਗ	ਉਮਰ (ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ)
1.	ਹਰੀਸ਼	M	30
2.	ਰੋਹਨ	M	33
3.	ਸ਼ੀਤਲ	F	46
4.	ਏਲਿਸ	F	28
5.	ਸਲੀਮ	M	41

ਇਸ ਸਮੂਹ ਤੋਂ ਬੁਲਾਰੇ ਦੇ ਪਦ ਲਈ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਚੁਣਿਆ ਗਿਆ। ਬੁਲਾਰਾ ਇੱਕ ਪੁਰਖ ਜਾਂ 35 ਸਾਲ ਤੋਂ ਵੱਧ ਉਮਰ ਦਾ ਹੋਣ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ?

9. ਜੇਕਰ 0, 1, 3, 5 ਅਤੇ 7 ਅੰਕਾਂ ਰਾਹੀਂ 5000 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਚਾਰ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਨਿਰਮਾਣ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਪੰਜ ਤੋਂ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਜਦੋਂ :

(i) ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਪੁਨਰ ਆਵਰਤੀ ਨਹੀਂ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ? (ii) ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਪੁਨਰ ਆਵਰਤੀ ਕੀਤੀ ਜਾਵੇ?

10. ਕਿਸੇ ਅਟੈਚੀ ਦੇ ਤਾਲੇ ਵਿੱਚ ਚਾਰ ਚੱਕਰ ਲੱਗੇ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਤੇ 0 ਤੋਂ 9 ਤੱਕ 10 ਅੰਕ ਅੰਕਿਤ ਹਨ। ਤਾਲਾ ਚਾਰ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਖਾਸ ਕ੍ਰਮ (ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਪੁਨਰ ਆਵਰਤੀ ਨਹੀਂ) ਰਾਹੀਂ ਹੀ ਖੁੱਲਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਕੋਈ ਵਿਅਕਤੀ ਅਟੈਚੀ ਖੋਲਣ ਲਈ ਸਹੀ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰ ਲਵੇ ?

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਸਵੈਸਿੱਧ ਤਰੀਕੇ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿਚ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਦੀਆਂ ਮੁੱਖ ਖਾਸੀਅਤਾਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਹਨ :

- **ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ** : ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ
- **ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂ** : ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੇ ਹਿੱਸੇ
- **ਘਟਨਾ** : ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦਾ ਇੱਕ ਉਪ-ਸਮੂਹ
- **ਅਸੰਭਵ ਘਟਨਾ** : ਸਿਫ਼ਰ ਜਾਂ ਖਾਲੀ ਸਮੂਹ
- **ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਘਟਨਾ** : ਪੂਰਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ
- **ਪੂਰਕ ਘਟਨਾ ਜਾਂ ਘਟਨਾ ਨਹੀਂ** : ਸਮੂਹ A' ਜਾਂ $S–A$
- **ਘਟਨਾ A ਜਾਂ B**: ਸਮੂਹ $A \cup B$
- **ਘਟਨਾ A ਅਤੇ B** : ਸਮੂਹ $A \cap B$
- **ਘਟਨਾ A ਪਰੰਤੂ B ਨਹੀਂ** : ਸਮੂਹ $A – B$
- **ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ** : A ਅਤੇ B ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਜੇਕਰ $A \cap B = \phi$ ਹੋਵੇ।
- **ਸਰਵਾਂਗੀ ਅਤੇ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ** : ਘਟਨਾਵਾਂ $E_1, E_2,..., E_n$ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਅਤੇ ਸਰਵਾਂਗੀ ਹਨ ਜੇਕਰ $E_1 \cup E_2 \cup ...\cup E_n = S$ ਅਤੇ $E_i \cap E_j = \phi \ \forall i \neq j$
- **ਸੰਭਾਵਨਾ :** ਹਰੇਕ ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂ ω_i ਦੇ ਸੰਗਤ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ $P(\omega_i)$ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਹੈ ਕਿ

  (i) $0 \le P(\omega_i) \le 1$ (ii) $\sum P(\omega_i) \ \forall \ \omega_i \in S = 1$

  (iii) $P(A) = \sum P(\omega_i) \ \forall \ \omega_i \in A$. ਸੰਖਿਆ $P(\omega_i)$ ਨਤੀਜੇ ω_i ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

- **ਸਮ ਸੰਭਵ ਨਤੀਜੇ** : ਸਮਾਨ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵਾਲੇ ਸਾਰੇ ਨਤੀਜੇ।
- **ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ** : ਇੱਕ ਸਮ ਸੰਭਵ ਨਤੀਜਿਆਂ ਵਾਲੇ ਸੀਮਿਤ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਲਈ ਘਟਨਾ A ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ

$\text{P(A)}=\dfrac{n(\text{A})}{n(\text{S})}$ ਹੈ ਜਿੱਥੇ n(A) = ਸਮੂਹ A ਵਿੱਚ ਤੱਤਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ n(S) = ਸਮੂਹ S ਵਿੱਚ ਤੱਤਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ।

- ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਕੋਈ ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ

  P(A ਜਾਂ B) = P(A) + P(B) – P(A ਅਤੇ B)

  ਭਾਵ $\text{P}(\text{A} \cup \text{B}) = \text{P(A)} + \text{P(B)} - \text{P}(\text{A} \cap \text{B})$
- ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੇ ਹਨ ਤਾਂ P(A ਜਾਂ B) = P(A) + P(B)
- ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ A ਲਈ

  P(A ਨਹੀਂ) = 1 – P(A)

ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਨੋਟ

ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਦਾ ਵਿਕਾਸ ਗਣਿਤ ਦੀਆਂ ਹੋਰ ਸ਼ਾਖਾਵਾਂ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਿਵਹਾਰਿਕ ਕਾਰਣਾਂ ਤੋਂ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਇਸਦੀ ਉਤਪਤੀ 16ਵੀਂ ਸ਼ਤਾਬਦੀ ਵਿੱਚ ਹੋਈ ਸੀ ਜਦੋਂ ਇਟਲੀ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਭੌਤਿਕ ਵਿਗਿਆਨੀ ਅਤੇ ਗਣਿਤਕਾਰ Jerome Cardan (1501–1576) ਨੇ ਇਸ ਵਿਸ਼ੇ ਤੇ ਪਹਿਲੀ ਪੁਸਤਕ 'ਸੰਯੋਗ ਦੇ ਖੇਲਾਂ ਤੇ' (Biber de Ludo Aleae) ਲਿਖੀ। ਇਹ ਪੁਸਤਕ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਮਰਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਸੰਨ 1633 ਵਿਚ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਹੋਈ।

ਸੰਨ 1654 ਵਿੱਚ Chevalier de Metre ਨਾਂ ਦੇ ਜੁਆਰੀ ਨੇ ਪਾਸੇ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕੁਝ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਪ੍ਰਸਿੱਧ ਫਰਾਂਸੀਸੀ ਦਾਰਸ਼ਨਿਕ ਅਤੇ ਗਣਿਤਕਾਰ Blaise Pascal (1623–1662) ਨਾਲ ਸੰਪਰਕ ਕੀਤਾ। Pascal ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਰੁਚੀ ਲੈਣ ਲੱਗੇ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਇਸਦੀ ਚਰਚਾ ਵਿਖਿਆਤ ਫਰਾਂਸੀਸੀ ਗਣਿਤਕਾਰ Pierre de Fermat (1601–1665) ਨਾਲ ਕੀਤੀ। Pascal ਅਤੇ Fermat ਦੋਹਾਂ ਨੇ ਸੁਤੰਤਰ ਰੂਪ ਤੋਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕੀਤਾ। Pascal ਅਤੇ Fermat ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਇੱਕ ਡਚ ਨਿਵਾਸੀ Christian Huygenes (1629–1665) ਇੱਕ ਸੁਵਿਸ ਨਿਵਾਸੀ J. Bernoulli (1651–1705), ਇੱਕ ਫਰਾਂਸੀਸੀ A. De Moivre (1667–1754) ਇੱਕ ਹੋਰ ਫਰਾਂਸ ਨਿਵਾਸੀ Pierre Laplace (1749–1827) ਅਤੇ ਰੂਸੀ P.L Chebyshev (1821–1894), A. A Markov (1856–1922) ਅਤੇ A. N Kolmogorove ਨੇ ਵੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਸਿਧਾਂਤ ਵਿੱਚ ਖਾਸ ਯੋਗਦਾਨ ਦਿੱਤਾ। ਸੰਭਾਵਨਾ ਸਿਧਾਂਤ ਦੇ ਸਵੈਸਿੱਧ ਹੋਣ ਦੀ ਪ੍ਰਸੰਸਾ Kolmogorov ਨੂੰ ਮਿਲੀ ਹੈ। 1933 ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਉਹਨਾ ਦੀ ਪੁਸਤਕ 'ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਅਧਾਰ' (foundation of Probability) ਵਿੱਚ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ ਸਮੂਹ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਪੁਸਤਕ ਇੱਕ ਕਲਾਸਿਕ (Classic) ਮੰਨੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਪਰਿਸ਼ਿਸ਼ਟ 1

ਅਨੰਤ ਲੜੀਆਂ
(Infinite Series)

A.1.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਅਤੇ ਲੜੀ ਦੇ ਅਧਿਆਇ 9 ਵਿੱਚ ਚਰਚਾ ਹੋ ਚੁੱਕੀ ਹੈ, ਇੱਕ ਅਨੰਤ ਪਦਾਂ ਵਾਲੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮ $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ ਨੂੰ ਅਨੰਤ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਦੱਸਿਆ ਹੋਇਆ ਜੋੜ ਭਾਵ $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$, ਜਿਹੜਾ ਅਨੰਤ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੇ ਨਾਲ ਹੋਵੇ, ਇੱਕ ਅਨੰਤ ਲੜੀ ਕਹਿਲਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਸਿਗਮਾ ਸੰਕੇਤਨ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਰਾਹੀਂ ਇਸ ਲੜੀ ਨੂੰ ਛੋਟੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੀ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ

$$a_1 + a_2 + a_3 + . \;. \;. + a_n + . \;. \;. = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਖਾਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਲੜੀ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਹਨਾਂ ਦੀ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦੀ ਹਾਲਤਾਂ ਵਿੱਚ ਜ਼ਰੂਰਤ ਪੈਂਦੀ ਹੈ।

A.1.2 ਕਿਸੇ ਵੀ ਘਾਤ ਅੰਕ ਲਈ ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ (Binomial Theorem for any Index)

ਅਧਿਆਇ 8 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਘਾਤ ਅੰਕ ਇੱਕ ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਸੀ। ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਵੱਧ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੱਸਾਂਗੇ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਘਾਤ ਅੰਕ ਜ਼ਰੂਰੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਹ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਖਾਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਅਨੰਤ ਲੜੀ ਦਿੰਦਾ ਹੈ, ਜਿਸਨੂੰ ਦੋ ਪਦੀ ਲੜੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਅਸੀ ਕੁਝ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ, ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

ਅਸੀਂ ਇਹ ਸੂਤਰ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ

$$(1 + x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1\, x + . \;. \;. + {}^nC_n\, x^n$$

ਇੱਥੇ n ਅਰਿਣਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਜੇਕਰ, ਅਸੀਂ ਰਿਣਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਜਾਂ ਇੱਕ ਭਿੰਨ ਨੂੰ ਘਾਤ ਅੰਕ n ਦੇ ਬਦਲੇ ਵਿੱਚ ਰੱਖਦੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਸੰਯੋਜਨ ${}^nC_r$ ਦਾ ਕੋਈ ਅਰਥ ਨਹੀਂ ਰਹਿ ਜਾਂਦਾ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ, ਬਿਨਾਂ ਸਿੱਧ ਕੀਤੇ ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਉਤਪਤੀ ਨਾਲ ਇੱਕ ਅਨੰਤ ਲੜੀ ਰਾਹੀਂ ਦੱਸਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਘਾਤ ਅੰਕ, ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਨਾ ਹੋਕੇ, ਇੱਕ ਰਿਣਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆ ਜਾਂ ਇੱਕ ਭਿੰਨ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਸੂਤਰ

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + ...$$

ਵੈਧ ਹੈ ਜਦੋਂ ਵੀ $|x| < 1$

ਟਿੱਪਣੀ ਸਾਵਧਾਨੀ ਨਾਲ ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $|x| < 1$ ਜਾਂ $-1 < x < 1$ ਦੀ ਸ਼ਰਤ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ ਜੇਕਰ m ਇੱਕ ਰਿਣਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਜਾਂ ਭਿੰਨ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਜੇਕਰ ਅਸੀ $x = -2$ ਅਤੇ $m = -2$ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

$$(1-2)^{-2} = 1 + (-2)(-2) + \frac{(-2)(-3)}{1.2}(-2)^2 + \ldots$$

ਭਾਵ $\quad 1 = 1 + 4 + 12 + \ldots$

ਇਹ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੈ।

2. ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $(1+x)^m$, ਜਿੱਥੇ m ਇੱਕ ਰਿਣਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਜਾਂ ਇੱਕ ਭਿੰਨ ਹੈ, ਦੇ ਵਿਸਤਾਰ ਵਿੱਚ ਪਦਾਂ ਦੀ ਅਨੰਤ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ : $$(a+b)^m = \left[a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right]^m = a^m\left(1+\frac{b}{a}\right)^m$$

$$= a^m\left[1 + m\frac{b}{a} + \frac{m(m-1)}{1.2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \ldots\right]$$

$$= a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2 + \ldots$$

ਇਹ ਵਿਸਤਾਰ ਵੈਧ ਹੈ ਜਦੋਂ $\left|\frac{b}{a}\right| < 1$ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਤੁੱਲ, ਜਦੋਂ $|b| < |a|$

$(a + b)^m$ ਦੇ ਵਿਸਤਾਰ ਵਿਚ ਵਿਆਪਕ ਪਦ ਹੈ–

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-r+1)a^{m-r}b^r}{1.2.3\ldots r}$$

ਦੋ ਪਦ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਖਾਸ ਹਾਲਤਾਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ ਅਸੀਂ ਕਲਪਨਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $|x| < 1$, ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਅਭਿਆਸ ਲਈ ਛੱਡ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ :

1. $(1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$
2. $(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$
3. $(1 + x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots$
4. $(1 - x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$

ਉਦਾਹਰਣ 1 : $\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$, ਦਾ ਵਿਸਤਾਰ ਕਰੋ ਜਦੋਂ ਕਿ $|x| < 2$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{1}\left(\frac{-x}{2}\right) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{1.2}\left(-\frac{x}{2}\right)^2 + \ldots$$

$$= 1 + \frac{x}{4} + \frac{3x^2}{32} + \ldots$$

A.1.3 ਅਨੰਤ ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ (Infinite Geometric Series)

ਅਧਿਆਇ 9 ਦੇ ਭਾਗ 9.3 ਤੋਂ, ਇੱਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ $\frac{a_{k+1}}{a_k} = r$ (ਅਚੱਲ) ਜਦੋਂ $k = 1, 2, 3, ..., n–1$ ਹੈ। ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਤੌਰ ਤੇ, ਜੇਕਰ ਅਸੀ $a_1 = a$ ਮੰਨੀਏ ਤਾਂ ਨਤੀਜੇ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮ $a, ar, ar^2, ..., ar^{n-1}$ ਨੂੰ ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ ਦਾ ਮਾਨਕ ਰੂਪ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਪਹਿਲਾਂ, ਅਸੀਂ ਲੜੀ $a + ar + ar^2 + ... + ar^{n–1}$ ਦਾ ਜੋੜ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਸੂਤਰ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਸੀ ਜੋ ਕਿ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੂਤਰ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \; . \; r \neq 1$$

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿਚ, ਅਸੀਂ ਅਨੰਤ ਗੁਣੋਤਰ ਲੜੀ $a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} + ...$ ਦਾ ਜੋੜ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦਾ ਸੂਤਰ ਦੱਸਾਂਗੇ ਅਤੇ ਇਸ ਦੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਸਮਝਾਂਗੇ।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, ...$ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ ਹੈ।

ਇੱਥੇ $a = 1, r = \frac{2}{3}$ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ :

$$S_n = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} = 3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] \quad ... (1)$$

ਆਉ, ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ n ਦਾ ਮੁੱਲ ਵਧਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ਦੇ ਵਿਵਹਾਰ ਦਾ, ਅਧਿਐਨ ਕਰੀਏ।

n	1	5	10	20
$\left(\frac{2}{3}\right)^n$	0.6667	0.1316872428	0.01734152992	0.00030072866

ਅਸੀਂ ਧਿਆਨ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ n ਦਾ ਮੁੱਲ ਵੱਧਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਉਵੇਂ-ਉਵੇਂ $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ਸਿਫ਼ਰ ਦੇ ਕੋਲ ਹੁੰਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਗਣਿਤੀ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਿਵੇਂ n ਦਾ ਮੁੱਲ ਬਹੁਤ ਵੱਡਾ ਹੁੰਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਬਹੁਤ ਛੋਟਾ ਹੁੰਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਜਿਵੇਂ $n \to \infty, \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$ ਨਤੀਜੇ ਵੱਜੋਂ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅਨੰਤ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $S = 3$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਅਨੰਤ ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ $a, ar, ar^2, ...,$ ਲਈ ਜੇਕਰ ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ r ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਮੁੱਲ 1 ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ, ਤਾਂ

$$S_n = \frac{a\left(1-r^n\right)}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$$

ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿਚ, $r^n \to 0$ ਜਿਵੇਂ $n \to \infty$ ਕਿਉਂਕਿ $|r|<1$ ਅਤੇ ਤਾਂ $\frac{ar^n}{1-r} \to 0$

ਇਸ ਲਈ $S_n \to \frac{a}{1-r}$ ਜਦੋਂ/ਜਦਕਿ $n \to \infty$.

ਪ੍ਰਤੀਕ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਅਨੰਤ ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ ਵਿੱਚ ਅਨੰਤ ਤੱਕ ਜੋੜ, S ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ $S = \frac{a}{1-r}$

ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ

(i) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

(ii) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + ... = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ ਦੇ ਅਨੰਤ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ, ਪਤਾ ਕਰੋ :

$$\frac{-5}{4}, \frac{5}{16}, \frac{-5}{64}, ...$$

ਹੱਲ : ਜਿੱਥੇ $a = \frac{-5}{4}$ ਅਤੇ $r = -\frac{1}{4}$. ਇਸਦੇ ਨਾਲ $|r|<1$

ਇਸ ਲਈ, ਅਨੰਤ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $S = \frac{\frac{-5}{4}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{\frac{-5}{4}}{\frac{5}{4}} = -1$

A.1.4 ਚਲ ਘਾਤ ਅੰਕੀ ਲੜੀ (Exponential Series)

ਮਹਾਨ ਸੁਇਸ ਗਣਿਤਕਾਰ Leonhard Euler (1707 – 1783) ਨੇ 1748 ਵਿੱਚ ਆਪਣੀ ਕਲਨ (calculus) ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਵਿੱਚ ਸੰਖਿਆ e ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਜਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ π ਚੱਕਰ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗੀ ਹੈ ਉਸ ਪ੍ਰਕਾਰ e ਕਲਨ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗੀ ਹੈ।

ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਅਨੰਤ ਲੜੀ ਨੂੰ ਲਵੋ :

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ... \quad ... (1)$$

(1) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਲੜੀ ਦਾ ਜੋੜ, ਸੰਖਿਆ e ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਆਉ ਅਸੀ ਸੰਖਿਆ e ਦੇ ਮੁੱਲ ਦਾ ਅੰਦਾਜਾ ਲਗਾਇਏ।

ਕਿਉਂਕਿ ਲੜੀ (1) ਦਾ ਹਰੇਕ ਪਦ ਧਨਾਤਮਕ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸਦਾ ਜੋੜ ਵੀ ਧਨਾਤਮਕ ਹੈ। ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਦੋ ਜੋੜ ਲਵੋ :

$$\frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + ... + \frac{1}{n!} + ... \quad ... (2)$$

ਅਤੇ $$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots \qquad \ldots (3)$$

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ,

$\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}$ ਅਤੇ $\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$, ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, $\frac{1}{3!}<\frac{1}{2^2}$

$\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}$ ਅਤੇ $\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$, ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, $\frac{1}{4!}<\frac{1}{2^3}$

$\frac{1}{5!}=\frac{1}{120}$ ਅਤੇ $\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$, ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, $\frac{1}{5!}<\frac{1}{2^4}$

ਇਸ ਲਈ, ਅੰਸ਼ਕ ਸਮਾਨਤਾ ਰਾਹੀਂ ਅਸੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ,

$\frac{1}{n!}<\frac{1}{2^{n-1}}$, ਜਦੋਂ $n>2$

ਅਸੀ ਧਿਆਨ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ (2) ਦਾ ਹਰੇਕ ਪਦ (3) ਦੇ ਹਰੇਕ ਪਦ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ,

ਇਸ ਲਈ $$\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)<\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots\right) \qquad \ldots (4)$$

(4) ਦੇ ਦੋਹਾਂ ਪਾਸੇ $\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)$ ਜੋੜਨ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots\right)$$

$$<\left\{\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots\right)\right\} \qquad \ldots (5)$$

$$=\left\{1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots\right)\right\}$$

$$=1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1+2=3$$

(5) ਦਾ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ, ਲੜੀ (1) ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਇਸ ਲਈ $e<3$ ਅਤੇ ਨਾਲ ਹੀ $e>2$ ਇਸ ਕਰਕੇ $2<e<3$

ਟਿੱਪਣੀ x ਚਲ ਦੇ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੋਣ ਤੇ ਚਲ ਘਾਤ ਅੰਕੀ ਲੜੀ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

ਉਦਾਹਰਣ 3 : x ਦੀ ਘਾਤ ਵਾਲੀ ਲੜੀ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ e^{2x+3} ਦਾ ਵਿਸਤਾਰ ਕਰਨ 'ਤੇ x^2 ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਚਲ ਘਾਤ ਅੰਕੀ ਲੜੀ ਵਿੱਚ

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$$

x ਦੇ ਸਥਾਨ ’ਤੇ $(2x + 3)$ ਰੱਖਣ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$e^{2x+3} = 1+\frac{(2x+3)}{1!}+\frac{(2x+3)^2}{2!}+...$$

ਇੱਥੇ $\frac{(2x+3)^n}{n!} = \frac{(3+2x)^n}{n!}$ ਵਿਆਪਕ ਪਦ ਹੈ।

ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਰਾਹੀਂ ਇਸ ਦਾ ਵਿਸਤਾਰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\frac{1}{n!}\left[3^n + {}^nC_1 3^{n-1}(2x) + {}^nC_2 3^{n-2}(2x)^2 + ... + (2x)^n\right]$$

ਇੱਥੇ x^2 ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ $\frac{{}^nC_2 3^{n-2} 2^2}{n!}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸੰਪੂਰਨ ਲੜੀ ਵਿਚ x^2 ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ ਹੈ :

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{{}^nC_2 3^{n-2} 2^2}{n!} = 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)3^{n-2}}{n!}$$

$$= 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^{n-2}}{(n-2)!} \quad [n! = n\,(n-1)\,(n-2)! \text{ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਦੇ ਹੋਏ}]$$

$$= 2\left[1+\frac{3}{1!}+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}+...\right]$$

$$= 2e^3$$

ਇਸ ਲਈ e^{2x+3} ਦੇ ਵਿਸਤਾਰ ਵਿੱਚ x^2 ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ $2e^3$ ਹੈ।

ਹੋਰ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੋਂ, $e^{2x+3} = e^3 \,.\, e^{2x}$

$$= e^3\left[1+\frac{2x}{1!}+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^3}{3!}+...\right]$$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ e^{2x+3} ਦੇ ਵਿਸਤਾਰ ਵਿਚ x^2 ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ $e^3.\frac{2^2}{2!}=2e^3$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : e^2 ਦਾ ਮੁੱਲ ਇੱਕ ਦਸ਼ਮਲਵ ਸਥਾਨ ਤੱਕ ਪੂਰਨ ਅੰਕਿਤ ਕਰਕੇ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : x ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਚਲ ਘਾਤ ਅੰਕੀ ਲੜੀ ਦਾ ਸੂਤਰ ਲਗਾਉਣ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ $e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+...$

$x = 2$ ਰੱਖਣ ’ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$e^2 = 1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{4!}+\frac{2^5}{5!}+\frac{2^6}{6!}+...$$

$$= 1+2+2+\frac{4}{3}+\frac{2}{3}+\frac{4}{15}+\frac{4}{45}+...$$

$\geq$ ਪਹਿਲੇ ਸੱਤ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ≥ 7.355

ਹੋਰ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ, ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

$$e^2 < \left(1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{4!}\right)+\frac{2^5}{5!}\left(1+\frac{2}{6}+\frac{2^2}{6^2}+\frac{2^3}{6^3}+\ldots\right)$$

$$= 7+\frac{4}{15}\left(1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\ldots\right) = 7+\frac{4}{15}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right) = 7+\frac{2}{5}=7.4$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, e^2 ਦਾ ਮੁੱਲ 7.355 ਅਤੇ 7.4 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ e^2 ਦਾ ਮੁੱਲ ਇੱਕ ਦਸ਼ਮਲਵ ਸਥਾਨ ਤੱਕ ਪੂਰਨ ਅੰਕਿਤ ਕਰਕੇ 7.4 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

A.1.5 ਲਘੂਗਣਕੀ ਲੜੀ (Logarithmic Series)

ਇੱਕ ਹੋਰ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਲੜੀ ਲਘੂਗਣਕੀ ਲੜੀ ਹੈ ਜਿਹੜੀ ਅਨੰਤ ਲੜੀ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨਤੀਜੇ ਬਿਨਾਂ ਸਬੂਤ ਤੋਂ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਅਨੁਪ੍ਰਯੋਗ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਰਾਹੀਂ ਸਮਝਾਵਾਂਗੇ :

ਪ੍ਰਮੇਯ : ਜੇਕਰ $|x| < 1$, ਤਾਂ

$$\log_e(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots$$

ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਲੜੀ, ਲਘੂਗਣਕੀ ਲੜੀ ਕਹਿਲਾਉਂਦੀ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ $\log_e(1+x)$ ਦਾ ਵਿਸਤਾਰ $x = 1$ ਲਈ ਵੀ ਉਚਿਤ ਹੈ। $\log_e(1+x)$ ਦੇ ਵਿਸਤਾਰ ਵਿੱਚ $x = 1$ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\log_e 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$$

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਜੇਕਰ α, β ਸਮੀਕਰਣ $x^2-px+q=0$ ਦੇ ਮੂਲ ਹਨ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ :

$$\log_e\left(1+px+qx^2\right) = (\alpha+\beta)x-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}x^2+\frac{\alpha^3+\beta^3}{3}x^3-\ldots$$

ਹੱਲ : ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ $= \left[\alpha x-\frac{\alpha^2x^2}{2}+\frac{\alpha^3x^3}{3}-\ldots\right]+\left[\beta x-\frac{\beta^2x^2}{2}+\frac{\beta^3x^3}{3}-\ldots\right]$

$$= \log_e(1+\alpha x)+\log(1+\beta x)$$

$$= \log_e\left(1+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta x^2\right)$$

$$= \log_e\left(1+px+qx^2\right)$$ = ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ $\alpha+\beta=p$ ਅਤੇ $\alpha\beta=q$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਅਸੀਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਮੂਲਾਂ ਰਾਹੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨ ਲਿਆ ਹੈ ਕਿ $|\alpha x| < 1$ ਅਤੇ $|\beta x| < 1$

— ❖ —

ਪਰਿਸ਼ਿਸ਼ਟ 2

ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ (MATHEMATICAL MODELLING)

A.2.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਪਿਛਲੀਆਂ ਕੁਝ ਸ਼ਤਾਬਦੀਆਂ ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਹੋਈ ਸਾਡੀ ਤਰੱਕੀ ਨੇ, ਸਾਨੂੰ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਖੇਤਰਾਂ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਚਾਹੇ ਵਿਗਿਆਨ ਹੋਵੇ, ਜਾਂ ਵਿੱਤ ਜਾਂ ਪ੍ਰਬੰਧਨ ਆਦਿ ਵਿੱਚ ਪੈਦਾ ਹੋਣ ਵਾਲੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਜੀਵਨ ਤੋਂ ਜੁੜੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ, ਗਣਿਤਕ ਵਿਧੀਆਂ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਨਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਸਾਰੀ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਗਣਿਤ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਖਾਸ ਤੌਰ 'ਤੇ ਕੰਪਿਊਟਰ ਦੀ ਅਭਿਕਲਨ ਤਾਕਤ ਅਤੇ ਅਭਿਕਲਨੀ ਵਿਧੀਆਂ ਬਹੁਤ ਨਾਮਵਰ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਲੰਬੀ ਅਤੇ ਜਟਿਲ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਨੂੰ ਅਸਾਨ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਵਾਸਤਵਿਕ ਜੀਵਨ ਦੀ ਕਿਸੇ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਗਣਿਤਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੁਵਾਦਿਤ ਕਰਨ ਦੀ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਬਿਹਤਰ ਨਿਰੂਪਣ ਅਤੇ ਖਾਸ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦਾ ਹੱਲ ਦਿੰਦੀ ਹੈ। ਰੂਪਾਂਤਰਣ ਦੀ ਇਹ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਨਿਦਰਸ਼ਨ (ਪ੍ਰਤਿਰੂਪਣ) ਕਹਿਲਾਉਂਦੀ ਹੈ।

ਇੱਥੇ ਅਸੀ ਇਸ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਤੋਂ ਜੁੜੇ ਚਰਣਾਂ ਦੀ ਜਾਣ ਪਛਾਣ ਚਰਚਾ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਰਾਹੀਂ ਕਰਾਂਗੇ। ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਕੀ ਹੈ। ਉਸਦੇ ਬਾਅਦ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦੀ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਤੋਂ ਜੁੜੇ ਚਰਣਾਂ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

A.2.2 ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਪ੍ਰਬੰਧ (Preliminaries)

ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ, ਵਿਸ਼ਵ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਲਈ ਇੱਕ ਜ਼ਰੂਰੀ ਔਜ਼ਾਰ ਹੈ। ਪੁਰਾਣੇ ਸਮੇ ਵਿੱਚ ਚੀਨ, ਮਿਸਰ, ਭਾਰਤ, ਬੇਬੀਲੋਨ ਅਤੇ ਗ੍ਰੀਸ ਦੇ ਲੋਕਾਂ ਨੇ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਘਟਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਅਤੇ ਭਵਿੱਖਬਾਣੀ ਕਰਨ ਲਈ ਆਪਣੇ ਗਣਿਤ ਦੇ ਗਿਆਨ ਰਾਹੀਂ ਸਲਾਹ ਦਿੱਤੀ। ਵਸਤੂ ਕਲਾ ਸ਼ਾਸਤਰੀਆਂ, ਸ਼ਿਲਪਕਾਰਾਂ ਅਤੇ ਕਾਰੀਗਰਾਂ ਨੇ ਆਪਣੀ ਬਹੁਤ ਸਾਰੀ ਕਲਾਕ੍ਰਿਤੀਆਂ ਨੂੰ ਜਿਮਾਇਤੀ ਸਿਧਾਂਤਾਂ ਤੇ ਆਧਾਰਿਤ ਕੀਤਾ।

ਮੰਨ ਲਉ ਇੱਕ ਸਰਵੇਖਣ ਕਰਤਾ, ਇੱਕ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉਚਾਈ ਮਾਪਣਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਮਾਪ ਵਾਲੀ ਫ਼ੀਤੇ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ, ਇਸ ਦੀ ਉਚਾਈ ਨੂੰ ਮਾਪਣਾ ਬਹੁਤ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦੂਜਾ ਵਿਕਲਪ ਹੋਵੇਗਾ ਜੋ ਇਹੋ-ਜਿਹੇ ਘਟਕਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ਜੋ ਉਚਾਈ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਲਾਭਦਾਇਕ ਹਨ। ਆਪਣੇ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤੀ ਦੇ ਗਿਆਨ ਤੋਂ, ਉਹ ਜਾਣਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਉਸਨੂੰ ਉਚਾਣ ਕੋਣ ਅਤੇ ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਪੈਰ ਤੋਂ, ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੱਕ ਦੀ ਦੂਰੀ ਜਿਥੇ ਉਹ ਖੜਿਆ ਹੈ, ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉਚਾਈ ਦਾ ਪਰਿਕਲਨ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਉਸਦਾ ਕੰਮ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਚੋਟੀ ਦੇ ਉਚਾਣ ਕੋਣ ਨੂੰ ਅਤੇ ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਪੈਰ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੱਕ ਦੀ, ਦੂਰੀ ਨੂੰ, ਜਿੱਥੇ ਉਹ ਖੜ੍ਹਿਆ ਹੈ, ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ, ਹੁਣ ਸਰਲ ਹੋ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੋਹਾਂ ਨੂੰ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਮਾਪਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਜੇਕਰ ਉਹ ਉਚਾਣ ਕੋਣ ਨੂੰ $40°$ ਅਤੇ ਦੂਰੀ ਨੂੰ 450 ਮੀ. ਮਾਪਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਉਦਾਹਰਣ 1 ਵਿੱਚ ਵਰਣਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਇੱਕ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਚੋਟੀ ਦਾ ਉਚਾਣ ਕੋਣ, ਭੂਮੀ ਤੇ ਬਿੰਦੂ O ਤੋਂ ਜਿਹੜਾ ਕੀ ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਪੈਰ ਤੋਂ 450 ਮੀ. ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੇ ਹੈ $40°$ ਹੈ। ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

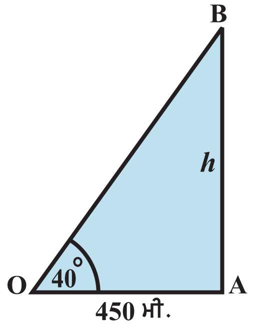
ਹੱਲ : ਅਸੀ, ਇਸ ਨੂੰ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਚਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਹੱਲ ਕਰਾਂਗੇ।

ਚਰਣ 1 : ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਮੀਨਾਰ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਹੈ, ਅਤੇ ਇਸਦੀ ਉਚਾਈ ਮਾਪੀ ਜਾਣੀ ਹੈ। ਮੰਨਿਆ h ਉਚਾਈ ਨੂੰ ਦੱਸਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ ਭੂਮੀ ਤੇ ਬਿੰਦੂ O ਤੋਂ ਮੀਨਾਰ

ਦੇ ਪੈਰ ਦੀ ਦੂਰੀ 450 ਮੀ. ਹੈ। ਮੰਨਿਆ d ਇਸ ਦੂਰੀ ਨੂੰ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਤਾਂ $d = 450$ ਮੀ. ਹੈ। ਅਸੀ ਇਹ ਵੀ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ θ ਰਾਹੀਂ ਦੱਸਿਆ ਉਚਾਣ ਕੋਣ 40° ਹੈ। ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਦੂਰੀ d ਅਤੇ ਉਚਾਣ ਕੋਣ θ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉਚਾਈ h ਕੱਢਣਾ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸਮੱਸਿਆ ਹੈ।

ਚਰਣ 2 : ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ ਦੱਸੀਆਂ ਤਿੰਨ ਰਾਸ਼ੀਆਂ, ਉਚਾਈ, ਦੂਰੀ ਅਤੇ ਉਚਾਣ ਕੋਣ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ, ਇਹਨਾਂ ਤਿੰਨੋਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਨੂੰ ਜੋੜਦੇ ਹੋਏ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਜਿਮਾਇਤੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਸਦੇ ਹੋਏ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 1)।

AB ਮੀਨਾਰ ਨੂੰ ਦੱਸਦਾ ਹੈ। OA ਬਿੰਦੂ O ਤੋਂ ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਪੈਰ ਤੱਕ ਦੀ ਦੂਰੀ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। $\angle AOB$ ਉਚਾਣ ਕੋਣ ਹੈ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :



ਚਿੱਤਰ 1

$$\tan\theta = \frac{h}{d} \text{ ਜਾਂ } h = d\tan\theta \qquad \ldots (1)$$

ਇਹ θ, h ਅਤੇ d ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧ ਸਥਾਪਿਣ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਚਰਣ 3 : ਅਸੀਂ h ਦਾ ਮਾਨ ਕੱਢਣ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। $\theta = 40^\circ$ ਅਤੇ $d = 450$ਮੀ. ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ $h = \tan 40^\circ \times 450 = 450 \times 0.839 = 377.6$ ਮੀ. ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਚਰਣ 4 : ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ ਕਿ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉਚਾਈ ਲਗਭਗ 378 ਮੀ. ਹੈ।

ਆਉ ਹੁਣ ਅਸੀ ਇਸ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਿੱਤੇ ਗਏ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਚਰਣਾਂ ਤੇ ਧਿਆਨ ਦਈਏ, ਪਹਿਲੇ ਚਰਣ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਅਤੇ ਪਾਇਆ ਕਿ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਮਾਪਦੰਡ-ਉਚਾਈ, ਦੂਰੀ ਅਤੇ ਉਚਾਣ ਕੋਣ ਹਨ। ਇਸਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਪਦ ਵਿੱਚ ਵਾਸਤਵਿਕ ਜੀਵਨ ਤੋਂ ਜੁੜੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਮਾਪਦੰਡ-ਉਚਾਈ, ਦੂਰੀ ਅਤੇ ਉਚਾਣ ਕੋਣ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਨਣਾ ਹੈ।

ਚਰਣ 2 ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ, ਕੁਝ ਜਿਮਾਇਤੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਅਤੇ ਪਾਇਆ ਕਿ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਜਿਮਾਇਤੀ ਢੰਗ ਤੋਂ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 1 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਤਾਂ ਅਸੀਂ "ਟੇਂਜੇਂਟ" ਫਲਨ ਲਈ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਅਤੇ ਸੰਬੰਧ $h = d\tan\theta$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ।

ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਚਰਣ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਗਣਿਤਕ ਰੂਪ ਤੋਂ ਸੂਤਰਿਤ ਕੀਤਾ। ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਨਿਰੂਪਣ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ।

ਚਰਣ 3 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਗਣਿਤਕ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਅਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਕਿ $h = 377.6$ ਮੀ. ਹੈ। ਭਾਵ ਸਾਨੂੰ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਹੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ।

ਅੰਤਿਮ ਚਰਣ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਹੱਲ ਦਾ ਨਿਰਵਚਨ ਅਤੇ ਦੱਸਿਆ ਹੈ ਕਿ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉਚਾਈ ਲਗਭਗ 378 ਮੀ. ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ :

ਵਾਸਤਵਿਕ ਸਥਿਤੀ ਦੀ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ ਗਣਿਤਕ ਹੱਲ ਦਾ ਨਿਰਵਚਨ ਕਰਨਾ।

ਵਾਸਤਵ ਵਿੱਚ ਇਹ ਉਹ ਪਦ ਹੈ, ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਗਣਿਤਕਾਰਾਂ ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਲੋਕਾਂ ਨੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਜੀਵਨ ਤੋਂ ਜੁੜੀਆਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ ਲਈ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ। ਅਸੀ ਇਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ "ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਗਣਿਤ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਿਉਂ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ।"

ਇੱਥੇ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਹਨ, ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਹਲਾਤਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ ਲਈ ਗਣਿਤ ਦਾ ਸਹੀ ਰੂਪ ਤੋਂ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

1. ਮਨੁੱਖਾਂ ਅਤੇ ਨਾਲ-ਨਾਲ ਪਸ਼ੂਆਂ ਦੇ ਸਰੀਰ ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਆਕਸੀਜਨ ਅਤੇ ਬਲ ਵਰਧਕਾਂ ਨੂੰ ਪਹੁੰਚਾਉਣ ਲਈ ਸਹੀ ਖੂਨ ਦੇ ਬਹਾਵ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ, ਖੂਨ ਦੇ ਸੰਕੁਚਨ ਜਾਂ ਖੂਨ ਦੀ ਨਲੀਆਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਬਦਲਾਵ, ਖੂਨ ਦੇ ਬਹਾਵ ਨੂੰ ਬਦਲ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਕੁਝ ਦਰਦ ਤੋਂ ਅਚਾਨਕ ਮੌਤ ਤੱਕ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਹਾਨੀ ਪਹੁੰਚਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਸਮੱਸਿਆ ਖੂਨ ਦੇ ਬਹਾਵ ਅਤੇ ਸ਼ਰੀਰ ਵਿਗਿਆਨ ਤੋਂ ਸੰਬੰਧਿਤ ਖੂਨ ਦੀ ਨਲੀਆਂ ਦੀ ਖ਼ਾਸੀਅਤਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚਕਾਰ, ਸੰਬੰਧ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਹੈ।

2. ਕ੍ਰਿਕੇਟ ਵਿੱਚ ਤੀਜਾ ਅੰਪਾਇਰ ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਦੇ ਪਰਖੇਪ ਪੱਥ ਦੇ ਨਿਰੂਪਣ ਨੂੰ ਵੇਖਕੇ ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਬੱਲੇਬਾਜ਼ ਉਥੇ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਪਗਬਾਧਾ ਦਾ ਨਿਰਣਾ ਲੈਂਦਾ ਹੈ। ਗੇਂਦ ਦੇ ਬੱਲੇਬਾਜ਼ ਦੇ ਪੈਰ ਤੇ ਲੱਗਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ, ਗੇਂਦ ਦੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਪੱਥਾਂ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੋਣ ਤੇ, ਗਣਿਤੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਪਗ-ਬਾਧਾ ਦਾ ਨਿਰਣਾ ਲੈਣ ਲਈ ਇਸ ਅਨੁਕਰਣ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਨਿਦਰਸ਼ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

3. ਬ੍ਰਹਿਮੰਡ ਵਿਧੀਆਂ ਵਿਭਾਗ ਗਣਿਤੀ ਨਿਰਦਸ਼ਾਂ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਮੌਸਮ ਦੀ ਭਵਿੱਖਬਾਣੀ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਕੁਝ ਮਾਪਦੰਡ ਜੋ ਮੌਸਮ ਦੀ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਬਦਲਾਵ ਨੂੰ ਪ੍ਰਭਾਵਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ, ਉਹ ਤਾਪ, ਹਵਾ ਦਾ ਦਬਾਅ, ਨਮੀ, ਹਵਾ ਦੀ ਗਤੀ ਆਦਿ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਮਾਪਦੰਡਾਂ ਨੂੰ ਮਾਪਣ ਲਈ ਜਿਹਨਾਂ ਯੰਤਰਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਤਾਪਮਾਨ ਨੂੰ ਮਾਪਣ ਲਈ ਥਰਮਾਮੀਟਰ, ਹਵਾ ਦੇ ਦਬਾਅ ਨੂੰ ਮਾਪਣ ਲਈ ਬੈਰੋਮੀਟਰ, ਨਮੀ ਨੂੰ ਮਾਪਣ ਲਈ ਹਾਈਡ੍ਰੋਮੀਟਰ ਅਤੇ ਹਵਾ ਦੀ ਗਤੀ ਨੂੰ ਮਾਪਣ ਲਈ ਏਨੀਮੋਮੀਟਰ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ। ਇੱਕ ਵਾਰੀ ਜਿਵੇਂ ਹੀ ਦੇਸ਼ ਦੇ ਚਾਰਾ ਪਾਸਿਓ ਬਹੁਤ ਸਟੇਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ, ਲਏ ਅੰਕੜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਕੰਪਿਊਟਰਾਂ ਵਿੱਚ ਅੱਗੇ ਦੇ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣਾਂ ਅਤੇ ਅਰਥ ਨਿਰਵਚਨ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ।

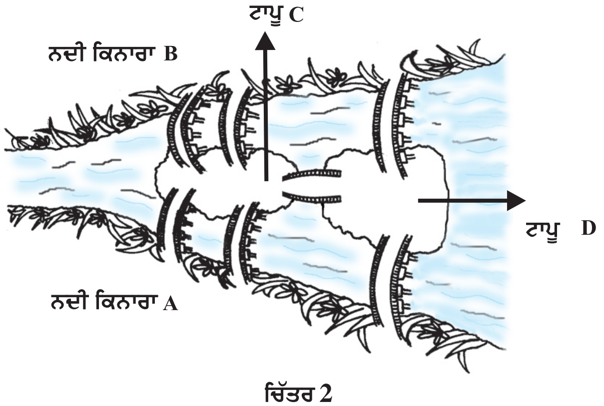
4. ਖੇਤੀਬਾੜੀ ਵਿਭਾਗ ਖੜ੍ਹੀ ਫ਼ਸਲਾਂ ਤੋਂ, ਭਾਰਤ ਵਿੱਚ ਚਾਵਲ ਦੀ ਪੈਦਾਵਾਰ ਦਾ ਆਂਕਲਨ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਵਿਗਿਆਨੀ ਚਾਵਲ ਦੀ ਪੈਦਾਵਾਰ ਦੇ ਖੇਤਰਾਂ ਨੂੰ ਪਛਾਣਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਕੁਝ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪ ਖੇਤਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਫਸਲਾਂ ਨੂੰ ਕੱਟ ਕੇ ਅਤੇ ਤੋਲਕੇ ਪ੍ਰਤਿ ਏਕੜ ਔਸਤ ਉਤਪਾਦ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਕੁਝ ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ ਯੰਤਰ ਕਲਾਵਾਂ ਦੇ ਅਧਾਰ ਤੇ ਚਾਵਲ ਦੀ ਔਸਤ ਪੈਦਾਵਾਰ ਦੇ ਨਤੀਜੇ ਤੇ ਪਹੁੰਚਾ ਦਿੰਦਾ ਹੈ।

ਇਹੋ ਜਿਹੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਗਣਿਤਕਾਰ ਕਿਵੇਂ ਮਦਦ ਕਰਦੇ ਹਨ ? ਉਹ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਮਾਹਿਰਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਬੈਠਦੇ ਹਨ, ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ, ਪਹਿਲੀ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ ਸਰੀਰ ਵਿਗਿਆਨ-ਸ਼ਾਸਤਰੀ ਦੀ ਮਦਦ ਤੋਂ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਗਣਿਤੀ ਅਨੁਰੂਪ ਕੱਢਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਅਨੁਰੂਪ ਇੱਕ ਜਾਂ ਵੱਧ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਜਾ ਅਸਮੀਕਰਣਾਂ ਆਦਿ ਤੋਂ ਜਿਹੜੇ ਕਿ ਗਣਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ ਕਹਿਲਾਉਂਦੇ ਹਨ, ਮਿਲਦੇ ਹਨ। ਤਾਂ ਨਿਦਰਸ਼ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਮੌਲਿਕ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਹੱਲ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਇੱਕ ਗਣਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ ਕੀ ਹੈ ?

ਇੱਕ ਗਣਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ ਇੱਕ ਨਿਰੂਪਣ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਕਿ ਇੱਕ ਪਰਿਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਸਮਝਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਉਦਾਹਰਣ ਰਾਹੀਂ ਇੱਕ ਮਜ਼ੇਦਾਰ ਜਿਆਮਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ ਨੂੰ ਉਲੇਖਿਤ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ।

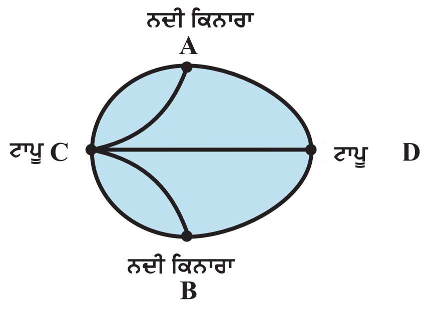
ਉਦਾਹਰਣ 2 : (ਪੁੱਲ ਸਮੱਸਿਆ) ਕੋਨਿਗਸਵਰਗ (Konigsberg) ਪ੍ਰੇਗੇਲ ਨਦੀ ਤੇ ਵਸਿਆ ਇੱਕ ਨਗਰ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਕਿ 18ਵੀਂ ਸ਼ਤਾਬਦੀ ਵਿੱਚ ਜਰਮਨੀ ਦਾ ਇੱਕ ਨਗਰ ਸੀ, ਪਰੰਤੂ ਹੁਣ ਇਹ ਰੂਸ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਨਗਰ ਦੇ ਅੰਦਰ ਦੋ ਟਾਪੂ ਹਨ ਜਿਹਨਾ ਨੂੰ ਸੱਤ ਪੁਲਾਂ ਰਾਹੀਂ ਨਦੀ ਦੇ ਕਿਨਾਰਿਆਂ ਤੋਂ ਜੋੜਿਆ ਗਿਆ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 2)।



ਚਿੱਤਰ 2

ਹੱਲ : ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਸੀ ਕਿ ਨਗਰ ਦੇ ਚਾਰੋਂ ਪਾਸੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਚੱਲਣਾ ਕਿ ਵਿਅਕਤੀ, ਹਰੇਕ ਪੁੱਲ ਤੋਂ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਵਾਰੀ ਗੁਜ਼ਰੇ। ਪਰੰਤੂ ਇਹ ਇੱਕ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਸਮੱਸਿਆ ਸਿੱਧ ਹੋਈ। Leonhard Euler ਇੱਕ ਸੁਵਿਸ ਗਣਿਤਗ ਨੇ ਜੋ ਰੂਸੀ ਸਾਮਰਾਜ 'ਕੇਥਰੀਨ ਦੀ ਗ੍ਰੇਟ' ਦੀ ਸੇਵਾ ਵਿੱਚ ਲੱਗੇ ਸੀ, ਇਸ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਬਾਰੇ ਸੁਣਿਆ। 1736 ਵਿੱਚ ਆਇਲਰ ਨੇ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਕਿ ਇੰਝ ਚੱਲਣਾ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਉਹਨਾਂ

ਨੇ ਇੱਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਚਿੱਤਰ ਦਾ, ਨੇਟਵਰਕ (Network) ਕ੍ਰਮ ਕਹਿਲਾਉਂਦੇ ਹਨ, ਖੋਜ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਇਸਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ? ਇਸ ਜਾਲ ਕ੍ਰਮ ਸਿਖ਼ਰ (ਸੂਖਮ ਚਿੰਨ, ਜਿੱਥੇ ਰੇਖਾਵਾਂ ਮਿਲਦੀਆਂ ਹਨ) ਅਤੇ ਚਾਪਾਂ (ਰੇਖਾਵਾਂ) ਦਾ ਬਣਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 3)। ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਨਦੀ ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਕਿਨਾਰਿਆਂ ਲਈ ਅਤੇ ਦੋਨਾਂ ਟਾਪੂਆਂ ਲਈ ਚਾਰ ਸੂਖਮ ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ (ਸ਼ਿਖਰਾਂ) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ। ਇਹਨਾ ਨੂੰ A, B, C ਅਤੇ D ਰਾਹੀਂ ਚਿਹਨਿਤ ਕੀਤਾ ਹੈ ਅਤੇ ਸੱਤ ਚਾਪਾਂ ਰਾਹੀਂ ਸੱਤ ਪੁਲਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਇਆ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਵੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ 3 ਪੁਲ (ਚਾਪਾ) ਨਦੀ ਦੇ ਕਿਨਾਰੇ A ਨੂੰ ਜੋੜਦੇ ਹਨ ਅਤੇ 3 ਨਦੀ ਦੇ ਕਿਨਾਰੇ B ਨੂੰ ਜੋੜਦੇ ਹਨ, 5 ਪੁਲ (ਚਾਪਾ), ਟਾਪੂ C ਨੂੰ ਜੋੜਦੇ ਹਨ ਅਤੇ 3 ਟਾਪੂ D ਨੂੰ ਜੋੜਦੇ ਹਨ। ਇਸਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਸਾਰੇ ਸਿਖਰਾਂ ਵਿੱਚ ਚਾਪਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਟਾਂਕ ਹੈ ਇਸਲਈ ਇਹ ਟਾਂਕ ਸਿਖਰ ਕਹਿਲਾਉਂਦੇ ਹਨ (ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸਿਖਰ ਵਿੱਚ ਇਸਨੂੰ ਜੋੜਦੇ ਹੋਏ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਵਾਲੇ ਚਾਪ ਹੁੰਦੇ ਹਨ) (ਚਿੱਤਰ 3)।



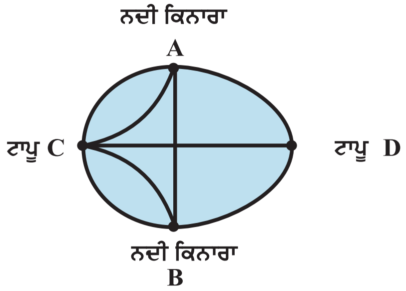
ਚਿੱਤਰ 3

ਯਾਦ ਰੱਖੋ ਕਿ ਇਹ ਸਮੱਸਿਆ ਨਗਰ ਦੇ ਇਰਦ-ਗਿਰਦ ਯਾਤਰਾ ਕਰਨ ਦੀ ਸੀ ਜਦੋਂ ਕਿ ਇੱਕ ਪੁਲ ਤੋਂ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਬਾਰ ਹੀ ਗੁਜ਼ਰਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। Euler ਦੇ ਜਾਲ ਕ੍ਰਮ ਤੋਂ ਇਸਦਾ ਅਭਿਪ੍ਰਾਇ ਇਹ ਹੋਇਆ ਕਿ ਸਾਰੇ ਸਿਖਰਾਂ ਤੇ ਚੱਲਦੇ ਹੋਏ ਹਰੇਕ ਚਾਪ ਤੇ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਬਾਰ ਹੀ ਪੈਰਾਂ ਦੇ ਚਿਨ੍ਹ ਹੋਣਗੇ। Euler ਨੇ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਕਿ ਇਹ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਕਿਉਂਕਿ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਪਤਾ ਲਗਾਇਆ ਕਿ ਟਾਂਕ ਸਿਖਰ ਹੋਣ ਤੇ ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਤਰਾ ਉਸ ਸਿਖਰ ਤੇ ਸ਼ੁਰੂ ਅਤੇ ਖਤਮ ਕਰਨੀ ਹੋਵੇਗੀ (ਇਸਦੇ ਬਾਰੇ ਸੋਚੋ)। ਇਹੋ-ਜਿਹੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਜਿੱਥੇ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਅਤੇ ਅੰਤਿਮ ਸਥਿਤੀ ਇੱਕ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਪੈਰਾਂ ਦੇ ਚਿੰਨ੍ਹ ਹਰ ਚਾਪ ਤੇ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਬਾਰੀ ਪੈਣ, ਤਾਂ ਉੱਥੇ ਕੇਵਲ ਦੋ ਟਾਂਕ ਸਿਖਰ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਕਿਉਂਕਿ ਇਸ ਪੁਲ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ 4 ਟਾਂਕ ਸਿਖਰ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਇਹੋ-ਜਿਹਾ ਕਰਨਾ ਸੰਭੰਵ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ।

ਆਇਲਰ ਰਾਹੀਂ ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦੇ ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਸਮਾਂ ਬੀਤ ਗਿਆ। 1875 ਵਿੱਚ ਭੂਮੀ ਖੇਤਰ A ਅਤੇ D ਨੂੰ ਜੋੜਦੇ ਹੋਏ, ਇੱਕ ਹੋਰ ਪੁਲ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕੀਤਾ ਗਿਆ (ਚਿੱਤਰ 4)। ਕੀ ਹੁਣ ਕੋਨਿਗਸਬਰਗ ਦੇ ਲੋਕਾਂ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਪੁਲ ਦਾ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਬਾਰੀ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਨਗਰ ਦੇ ਚਾਰੋਂ ਪਾਸੇ ਵੱਲ ਜਾਣਾ ਸੰਭਵ ਹੈ ?

ਇੱਥੇ ਸਥਿਤੀ ਉਂਞ ਹੋਵੇਗੀ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 4 ਵਿੱਚ ਵਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇੱਕ ਨਵੇਂ ਪੁਲ ਦੇ ਜੁੜ ਜਾਣ ਦੇ ਬਾਅਦ A ਅਤੇ D ਦੋਨੋਂ ਸ਼ਿਖਰ, ਸਮਘਾਤ ਦੇ ਸ਼ਿਖਰ ਬਣ ਗਏ ਹਨ। ਪਰੰਤੂ B ਅਤੇ C ਹੁਣ ਵੀ ਟਾਂਕ ਵਿਖਮ ਘਾਤ ਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਕੋਨਿਗਸਬਰਗ ਵਾਸੀਆਂ ਲਈ ਇੱਕ ਪੁਲ ਦਾ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਬਾਰ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਨਗਰ ਦੇ ਚਾਰੋਂ ਪਾਸੇ ਵੱਲ ਜਾਣਾ ਸੰਭਵ ਹੈ।

ਪਰਿਪਥ ਦੀ ਖੋਜ ਤੋਂ ਇੱਕ ਨਵੇਂ ਸਿਧਾਂਤ ਦੀ ਸ਼ੁਰੂਆਤ ਹੋਈ, ਜੋ ਆਲੇਖ ਸਿਧਾਂਤ ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਹੁਣ ਰੇਲਵੇ ਪਰਿਪਥ ਦੀ ਯੋਜਨਾ ਸਹਿਤ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਰੂਪਾਂ ਵਿੱਚ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 4)।



ਚਿੱਤਰ : 4

A.2.3 ਗਣਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਕੀ ਹੈ ? (What is Mathematical Modelling?)

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਗਣਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਕੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਸ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਰਾਹੀਂ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰਾਂਗੇ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ : ਗਣਿਤੀ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਵਾਸਤਵਿਕ ਜੀਵਨ ਦੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਕੁਝ ਭਾਗ (ਜਾਂ ਰੂਪ) ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਦੇ ਲਈ ਗਣਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਇੱਕ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਹੈ।

ਭੌਤਿਕ ਸਥਿਤੀ ਦਾ ਕੁਝ ਠੀਕ ਪਰਿਸਥਿਤੀਆਂ ਦੇ ਨਾਲ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਬਦਲਾਵ ਕਰਨਾ ਗਣਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਗਣਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਇੱਕ ਤਕਨੀਕ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਸੂਖਮ ਕਲਾਵਾਂ ਤੋਂ ਲਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ ਨਾ ਕਿ ਮੂਲ ਵਿਗਿਆਨ ਤੋਂ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਗਣਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਤੋਂ ਜੁੜੀਆਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਸਮਝਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਵਿੱਚ ਚਾਰ ਪਦ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ। ਇੱਕ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟਾਂਤ ਯੁਕਤ ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਸਰਲ ਇੱਕ ਸਰਲ ਡੋਲਣ ਦੀ ਗਤੀ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ ਲਈ ਕੀਤੇ ਹੋਏ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਸਮਝਣਾ :

ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ, ਇਸ ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ, ਸਰਲ ਡੋਲਣ ਦੀ ਗਤੀ ਤੋਂ ਜੁੜੀ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਨੂੰ ਸਮਝਣਾ। ਅਸੀ ਸਾਰੇ, ਡੋਲਣ ਬਾਰੇ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ। ਇੱਕ ਡੋਲਣ ਸਧਾਰਣ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦ੍ਰਵਮਾਨ (mass) (ਜਿਹੜਾ ਬਾਬ (*bob*) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜਾਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ) ਜੋ ਇੱਕ ਧਾਗੇ ਦੇ ਇੱਕ ਸਿਰੇ ਤੋਂ ਜੁੜਿਆ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਦੂਜਾ ਸਿਰਾ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਸਥਿਰ ਹੈ। ਅਸੀ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ ਕਿ ਸਰਲ ਡੋਲਣ ਦੀ ਗਤੀ ਸਾਮਯਿਕ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਨਾਲ ਧਾਗੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ ਗੁਰੁਤਵੀ ਪ੍ਰਵੇਗ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਇਸ ਸਮੇਂ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਦੋਲਨ ਕਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਥਨ ਅਸੀ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ:

ਕਥਨ : ਅਸੀਂ ਸਰਲ ਡੋਲਣ ਦਾ ਡੋਲਣ ਕਾਲ ਕਿਵੇਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ?

ਅਗਲਾ ਚਰਣ ਸੂਤਰਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਸੂਤਰਣ : ਦੋ ਮੁੱਖ ਚਰਣਾਂ ਤੋ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

1. ਪ੍ਰਸੰਗਿਕ ਘਟਕਾਂ ਨੂੰ ਪਛਾਣਨਾ : ਇਸ ਵਿੱਚ ਅਸੀ ਉਨਾਂ ਪ੍ਰਾਚਲਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਡੋਲਣ ਦੇ ਮਾਮਲੇ ਵਿੱਚ ਇਹ ਘਟਕ ਹਨ, ਡੋਲਨ ਕਾਲ (T) ਬਾਬ ਦਾ ਦ੍ਰਵਮਾਨ (m) ਡੋਲਣ ਦੀ ਪ੍ਰਭਾਵਸ਼ਾਲੀ ਲੰਬਾਈ ਜਿਹੜੀ ਕਿ ਸਥਿਰ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਬਾਬ ਦੇ ਦ੍ਰਵਮਾਨ ਤੋਂ ਕੇਂਦਰ ਦੇ ਵਿੱਚਕਾਰ ਦੀ ਦੂਰੀ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਅਸੀ ਧਾਗੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਨੂੰ ਡੋਲਣ ਦੀ ਪ੍ਰਭਾਵਸ਼ਾਲੀ ਲੰਬਾਈ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਗੁਰੁਤਵੀ ਪ੍ਰਵੇਗ (g) ਨੂੰ ਉਸ ਸਥਾਨ ਤੇ ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਮਾਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ ਲਈ ਚਾਰ ਪ੍ਰਾਚਲਾਂ ਦੀ ਪਛਾਣ ਕੀਤੀ ਹੈ। ਹੁਣ ਸਾਡਾ ਉਦੇਸ਼ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਲਈ ਅਸੀ ਇਹ ਸਮਝਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਕਿਹੜੇ-ਕਿਹੜੇ ਪ੍ਰਾਚਲ ਹਨ, ਜਿਹੜੇ ਡੋਲਨ-ਕਾਲ ਨੂੰ ਪ੍ਰਭਾਵਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ, ਜਿਸਨੂੰ ਇੱਕ ਸਧਾਰਨ ਪ੍ਰਯੋਗ ਰਾਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਦੋ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਦ੍ਰਵਮਾਨਾਂ ਦੀਆਂ ਦੋ ਧਾਤੂ ਦੀ ਗੇਂਦਾ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਉਸ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਨੂੰ ਸਮਾਨ ਲੰਬਾਈ ਵਾਲੇ ਦੋ ਧਾਗਿਆਂ ਤੋਂ ਜੋੜਦੇ ਹੋਏ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ ਡੋਲਨ ਕਾਲ ਮਾਪਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀ ਨਿਰੀਖਣ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕੀ ਦ੍ਰਵਮਾਨ ਦੇ ਕਾਰਨ ਡੋਲਨ ਕਾਲ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਅਵਗਮ ਬਦਲਾਵ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ, ਅਸੀ, ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨੂੰ ਸਮਾਨ ਦ੍ਰਵਮਾਨ ਦੀਆਂ ਗੇਂਦਾਂ, ਪਰੰਤੂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਲੰਬਾਈ ਦੇ ਧਾਗੇ ਲੈ ਕੇ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਨਿਰੀਖਣ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਡੋਲਨ ਕਾਲ ਡੋਲਣ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ’ਤੇ ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ’ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਇਹ ਸੂਚਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਡੋਲਨ ਕਾਲ ਦੇ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਦ੍ਰਵਮਾਨ m ਇੱਕ ਜ਼ਰੂਰੀ ਪ੍ਰਾਚਲ ਨਹੀਂ ਹਨ ਜਦੋਂ ਕਿ ਲੰਬਾਈ l ਇੱਕ ਜ਼ਰੂਰੀ ਪ੍ਰਾਚਲ ਹੈ। ਅਗਲੇ ਚਰਣ ਤੇ ਜਾਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਜ਼ਰੂਰੀ ਪ੍ਰਾਚਲਾਂ ਨੂੰ ਲੱਭਣ ਦੀ ਇਹ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ।

2. ਗਣਿਤਕ ਵਰਣਨ : ਇਸ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਪਛਾਣੇ ਹੋਏ ਪ੍ਰਾਚਲਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਣ ਅਸਮਿਕਾ ਜਾਂ ਜਿਆਮਿਤੀ ਚਿੱਤਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ।

ਸਰਲ ਡੋਲਣ ਦੇ ਮਾਮਲੇ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤੇ ਗਏ ਸੀ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਡੋਲਨ ਕਾਲ T ਦੇ ਮਾਨ l ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਮਾਨਾਂ ਲਈ ਮਾਪੇ ਗਏ ਸੀ। ਇਹਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ (Parabola) ਨੂੰ ਇੱਕ ਆਲੇਖ ਤੇ ਦਰਸ਼ਾਇਆ ਗਿਆ ਜਿਹੜੇ ਕਿ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਣਾਮਿਤ

ਹੋਇਆ ਜੋ ਕਿ ਇੱਕ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਤੋਂ ਮਿਲਦਾ ਜੁਲਦਾ ਸੀ। ਇਹ ਸੰਕੇਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ T ਅਤੇ l ਦੇ ਵਿੱਚਕਾਰ ਦਾ ਸੰਬੰਧ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$$T^2 = kl \qquad \ldots (1)$$

ਇਹ ਪਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ $k = \frac{2\pi^2}{g}$ ਇਸ ਤੋਂ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \ldots (2)$$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਗਣਿਤਕ ਸੂਤਰਣ ਦਿੰਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ : ਗਣਿਤਕ ਸੂਤਰਣ ਸ਼ਾਇਦ ਹੀ, ਸਿੱਧਾ ਉੱਤਰ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਆਮ ਰੂਪ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਕ੍ਰਿਆ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨਾ, ਗਣਨਾ ਜਾਂ ਇੱਕ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨਾ ਆਦਿ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ। ਸਰਲ ਡੋਲਣਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਸਮੀਕਰਣ (2) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸੂਤਰ ਦੇ ਅਨੁਪ੍ਰਯੋਗ ਤੋਂ ਹੱਲ ਮਿਲਦਾ ਹੈ। ਵੱਖ-ਵੱਖ ਲੰਬਾਈ ਵਾਲੇ, ਦੋ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਡੋਲਣਾਂ ਦੇ ਡੋਲਨ ਕਾਲ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ 1

L	225 ਸੈ.ਮੀ.	275 ਸੈ.ਮੀ.
T	3.04 ਸੈ.	3.36 ਸੈ.

ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਵਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ $L = 225$ ਸੈ.ਮੀ., T = 3.04 ਸੈ. ਅਤੇ $l = 275$ ਸੈ.ਮੀ., T = 3.36 ਸੈ.

ਭਾਵ ਅਰਥ/ਯੋਗਤਾ

ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਜੀਵਨ ਦੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਜ਼ਰੂਰੀ ਗੁਣਾਂ ਨੂੰ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ ਦੀ ਇੱਕ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਹੈ। ਕਈ ਵਾਰੀ ਨਿਦਰਸ਼ ਸਮੀਕਰਣ ਇੱਕ ਆਦਰਸ਼ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤੀ ਦੀ ਕਲਪਨਾ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਨਿਦਰਸ਼ ਕੇਵਲ ਤਾਂ ਫਾਇਦੇਮੰਦ ਹੋਣਗੇ ਜੇਕਰ ਇਹ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੇ ਤੱਥਾ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜਿਹਨਾਂ ਦੀ ਕਿ ਅਸੀਂ ਵਾਸਤਵ ਵਿੱਚ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਸੀ। ਵਰਨਾ, ਅਸੀ ਇਸਨੂੰ ਸਵੀਕਾਰ ਨਹੀਂ ਕਰਾਂਗੇ ਜਾਂ ਫ਼ੇਰ ਤੋਂ ਇਸ ਵਿੱਚ ਸੁਧਾਰ ਕਰਾਂਗੇ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਫ਼ੇਰ ਤੋਂ ਪਰਿਕਸ਼ਣ ਕਰਾਂਗੇ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀ ਨਿਦਰਸ਼ ਦੀ ਪ੍ਰਭਾਵਸ਼ੀਲਤਾ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਉਪਲਬਧ ਤੱਥਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਗਣਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਕੇ ਮਾਪਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਨਿਦਰਸ਼ ਦੀ ਯੋਗਤਾ ਕਹਿਲਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਸਰਲ ਡੋਲਣ ਦੇ ਮਾਮਲੇ ਵਿੱਚ ਅਸੀ ਡੋਲਣ ਤੇ ਕੁਝ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਦੋਲਨ ਕਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮ ਸਾਰਣੀ 2 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹਨ।

ਸਾਰਣੀ 2

ਚਾਰ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਡੋਲਣਾਂ ਲਈ ਪ੍ਰਯੋਗਿਕ ਰੂਪ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਿੱਤੇ ਗਏ ਦੋਲਨ ਕਾਲ

ਦ੍ਰਵਮਾਨ (ਕਿ.ਗ੍ਰਾ.)	ਲੰਬਾਈ ਸੈ.ਮੀ.	ਸਮਾਂ(ਸੈ.)
385	275	3.371
	225	3.056
230	275	3.352
	225	3.042

ਹੁਣ ਅਸੀ ਸਾਰਣੀ 2 ਵਿੱਚ ਮਾਪੇ ਗਏ ਮੁੱਲਾਂ ਦੀ ਸਾਰਣੀ 1 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਗਣਨਾ ਦੀ ਕੀਤੇ ਗਏ ਮੁੱਲਾਂ ਤੋਂ ਤੁਲਨਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਨਿਰੀਖਣ ਮੁੱਲਾਂ ਅਤੇ ਗਣਨਾ ਕੀਤੇ ਗਏ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰ ਤੋਂ ਗਲਤੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ $l = 275$ ਸੈ.ਮੀ. ਅਤੇ ਦ੍ਰਵਮਾਨ = 385 ਗ੍ਰਾ. ਲਈ

ਗਲਤੀ = 3.371 – 3.36 = 0.011 ਹੈ।

ਜਿਹੜਾ ਕਿ ਬਹੁਤ ਛੋਟਾ ਹੈ ਅਤੇ ਨਿਦਰਸ਼ ਸਵੀਕਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਵਾਰੀ ਜਦੋਂ ਅਸੀ ਨਿਦਰਸ਼ ਨੂੰ ਸਵੀਕਾਰ ਕਰ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਨਿਦਰਸ਼ ਦਾ ਅਰਥ ਨਿਰਵਚਨ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਵਾਸਤਵਿਕ ਸਥਿਤੀ ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਹੱਲ ਵਰਣਨ ਕਰਨ ਦੀ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਨਿਦਰਸ਼ ਦੀ ਯੋਗਤਾ ਕਹਿਲਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਮਾਮਲੇ ਵਿੱਚ ਅਸੀ ਹਲ ਦੀ ਯੋਗਤਾ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਰੀਕੇ ਤੋਂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

(a) ਦੋਲਨ-ਕਾਲ, ਡੋਲਣ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਦੇ ਵਰਗਮੂਲ ਦੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(b) ਇਹ, ਗੁਰੁਤਵੀ ਪ੍ਰਵੇਗ ਦੇ ਵਰਗਮੂਲ ਦੇ ਉਲਟ ਅਨੁਪਾਤੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਨਿਦਰਸ਼ ਤੇ ਸਾਡੀ ਵੈਧਤਾ ਅਤੇ ਅਰਥ ਨਿਰਵਚਨ ਵਿਖਦਾ ਹੈ ਕਿ ਨਿਦਰਸ਼ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਬਹੁਤ ਹੀ ਚੰਗਾ ਉੱਤਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਅਸੀ ਪਾਇਆ ਕਿ ਗਣਨਾ ਕੀਤੇ ਹੋਏ ਨਤੀਜੇ ਅਤੇ ਮਾਪੇ ਹੋਏ ਨਤੀਜੇ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਗਲਤੀ ਹੈ। ਇਹ ਇਸ ਲਈ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀ ਧਾਗੇ ਦਾ ਦ੍ਰਵਮਾਨ ਅਤੇ ਮਾਧਿਅਮ ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਰੋਧ ਦੀ ਅਵਹੇਲਣਾ ਕੀਤੀ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਪਰਿਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਬੇਹਤਰ ਨਿਦਰਸ਼ ਨੂੰ ਲੱਭਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਹ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਜਾਰੀ ਰਹਿੰਦੀ ਹੈ।

ਇਹ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਿਰੀਖਣ ਦੀ ਵੱਲ ਰਸਤਾ ਦਸਦਾ ਹੈ। ਵਾਸਤਵਿਕ ਜੀਵਨ ਨੂੰ ਸਮਝਣਾ ਅਤੇ ਉਸਦਾ ਪੂਰਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਰਣਨ ਕਰਨਾ ਬਹੁਤ ਜਟਿਲ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਇੱਕ ਜਾਂ ਦੋ ਪੂਰਨ ਰੂਪ ਤੋਂ ਠੀਕ ਘਟਕਾਂ ਨੂੰ ਚੁਣਦੇ ਹਾਂ ਜਿਹੜੇ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਪ੍ਰਭਾਵਿਤ ਕਰਦੇ ਹੋਣ। ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਸਰਲ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਨਿਦਰਸ਼ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਹੜਾ ਕਿ ਸਥਿਤੀ ਬਾਰੇ ਕੁਝ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਅਸੀ ਇਸ ਨਿਦਰਸ਼ ਰਾਹੀਂ ਇਹ ਆਸ਼ਾ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਸਰਲ ਸਥਿਤੀ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਸਥਿਤੀ ਦਾ ਇੱਕ ਵਧੀਆ ਨਿਦਰਸ਼ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕੀਏ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ, ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਤੋਂ ਜੁੜੀ-ਮੁੱਖ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਸੰਖੇਪ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

(a) ਸੂਤਰਣ (b) ਹਲ (c) ਯੋਗਤਾ/ਅਰਥ ਨਿਰਵਚਨ

ਅਗਲਾ ਉਦਾਹਰਣ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅਸਮਿਕਾ ਦਾ ਆਲੇਖੀ ਹੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਤਕਨੀਕ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ, ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਕਿਵੇਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਇੱਕ ਫ਼ਾਰਮ ਹਾਊਸ ਵਿੱਚ ਹਰ ਰੋਜ਼ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ 800 ਕਿ. ਗ੍ਰਾ. ਖਾਸ ਅਹਾਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਖਾਸ ਅਹਾਰ ਮੱਕਾ ਅਤੇ ਸੋਇਆਬੀਨ ਦੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਬਣਿਆ ਹੋਇਆ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਨ ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ 3

ਪਦਾਰਥ	ਹਾਜ਼ਰ ਬਲਵਰਧਕ ਪ੍ਰਤਿ ਕਿ.ਗ੍ਰਾ. ਪ੍ਰੋਟੀਨ	ਹਾਜ਼ਰ ਬਲਵਰਧਕ ਪ੍ਰਤਿ ਕਿ.ਗ੍ਰਾ. ਰੇਸ਼ਾ	ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਤਿ ਕਿ.ਗ੍ਰਾ.
ਮੱਕਾ	.09	.02	10 ਰੁ.
ਸੋਇਆਬੀਨ	.60	.06	20 ਰੁ.

ਖ਼ਾਸ ਅਹਾਰ ਦੀ ਅਹਾਰ ਸੰਬੰਧੀ ਜ਼ਰੂਰਤਾਂ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ 30% ਪ੍ਰੋਟੀਨ ਅਤੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ 5% ਰੇਸ਼ੇ ਦੀ ਮੰਗ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਹਰ ਰੋਜ਼ ਅਹਾਰ ਮਿਸ਼ਰਣ ਦਾ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਮੁੱਲ ਕੱਢੋ।

ਹੱਲ : ਚਰਣ 1 : ਇੱਥੇ ਸਾਡਾ ਉਦੇਸ਼ ਮੱਕਾ ਅਤੇ ਸੋਇਆਬੀਨ ਤੋਂ ਬਣੇ ਭੋਜਨ ਦੇ ਹਰ ਰੋਜ਼ ਦੇ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਉਹ ਚਾਲ (ਘਟਕ) ਜਿਹਨਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾਣਾ ਹੈ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ :

x = ਮੱਕਾ ਦੀ ਰਾਸ਼ੀ

y = ਸੋਇਆਬੀਨ ਦੀ ਰਾਸ਼ੀ

z = ਪੂਰਾ ਮੁੱਲ

ਚਰਣ 2 : ਸਾਰਣੀ 3 ਦੇ ਅੰਤਿਮ ਕਾਲਮ ਅੰਕਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ ਕਿ z, x, y ਸਮੀਕਰਣ ਤੋਂ ਸੰਬੰਧ ਰੱਖਦੇ ਹਨ ਸਮੱਸਿਆ ਹੈ

ਕਿ z ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੇ ਨਾਲੋਂ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਬਣਾਉਣਾ :

$$z = 10x + 20y \quad \ldots (1)$$

(a) ਫ਼ਾਰਮ ਵਿਚ, ਮੱਕਾ ਅਤੇ ਸੋਇਆਬੀਨ ਦਾ ਮਿਲਿਆ ਹੋਇਆ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ 800 ਕਿ.ਗ੍ਰਾ. ਅਹਾਰ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਗਿਆ।

ਭਾਵ, $x + y \geq 800$ ... (2)

(b) ਅਹਾਰ ਵਿੱਚ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ 30% ਪ੍ਰੋਟੀਨ ਅਹਾਰ ਸੰਬੰਧੀ ਜ਼ਰੂਰਤਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਸਾਰਣੀ 3 ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਕਾਲਮ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$0.09x + 0.6y \geq 0.3\,(x + y) \quad \text{... (3)}$$

(c) ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਰੇਸ਼ਾ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ 5% ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਸਾਰਣੀ 3 ਦੇ ਦੂਜੇ ਕਾਲਮ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$0.02x + 0.06\,y \leq 0.05\,(x + y) \quad \text{... (4)}$$

ਅਸੀਂ x, y ਦੇ ਸਾਰੇ ਗੁਣਾਕਾਂ ਨੂੰ ਇਕੱਠਾ ਕਰਦੇ ਹੋਏ (2), (3) ਅਤੇ (4) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਸਮੱਸਿਆ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਗਣਿਤਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦੁਬਾਰਾ ਪ੍ਰਗਟ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਕਥਨ z ਨੂੰ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਬਣਾਉ, ਸ਼ਰਤਾਂ ਹਨ :

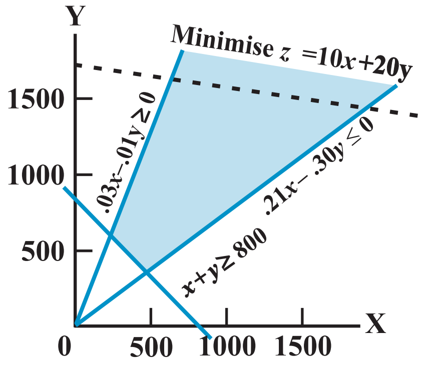
$$x + y \geq 800$$

$$0.21x - .30y \leq 0$$

$$0.03x - .01y \geq 0$$

ਇਹ ਨਿਦਰਸ਼ ਦਾ ਸੂਤਰਣ ਪ੍ਰਦਾਨ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਚਰਣ 3 : ਇਹ ਆਲੇਖੀ ਢੰਗ ਤੋਂ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 5 ਵਿੱਚ ਛਾਇਆਕ੍ਰਿਤ ਖੇਤਰ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਸੰਭਵ ਹੱਲ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਆਲੇਖ ਤੋਂ ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਮਾਨ ਮਾਨ ਬਿੰਦੂ (470.6,329.4) ਤੇ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਭਾਵ $x = 470.6$ ਅਤੇ $y = 329.4$.



ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ x = 470.6 ਕਿ.ਗ੍ਰਾ.
y = 329.4 ਕਿ.ਗ੍ਰਾ.
z = 11294 ਰੁ.

ਚਿੱਤਰ 5

ਇਹ z ਦਾ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਮੁੱਲ ਦਿੰਦਾ ਹੈ

$$z = 10 \times 470.6 + 20 \times 329.4 = 11294$$

ਇਹ ਗਣਿਤਕ ਹੱਲ ਹੈ।

ਚਰਣ 4 : ਹੱਲ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਇਹ ਕਹਿੰਦੇ ਹੋਏ ਅਰਥ ਨਿਰਵਚਨ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ, "ਮੱਕਾ ਅਤੇ ਸੋਇਆਬੀਨ ਵਾਲੇ ਖਾਸ ਅਹਾਰ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਬਲ ਵਰਧਕ ਅੰਸ਼ ਪ੍ਰੋਟੀਨ ਅਤੇ ਰੇਸ਼ੇ ਦੇ ਲੋੜੀਂਦੇ ਜ਼ਰੂਰੀ ਭਾਗ ਹਨ, ਦਾ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਮੁੱਲ 11294 ਰੁ. ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ 470.6 ਕਿ.ਗ੍ਰਾ. ਮੱਕਾ ਅਤੇ 329.4 ਕਿ.ਗ੍ਰਾ. ਸੋਇਆਬੀਨ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।"

ਅਗਲੇ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ, ਕਿਸੇ ਦੇਸ਼ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਖਾਸ ਸਮੇਂ ਤੇ, ਅਬਾਦੀ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ ਲਈ, ਕਿਵੇਂ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਲਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਅਬਾਦੀ ਨਿਯੰਤਰਕ ਇਕਾਈ ਇਹ ਜਾਨਣਾ ਚਾਹੁੰਦੀ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਦੇਸ਼ ਵਿੱਚ ਦਸ ਸਾਲਾਂ ਬਾਅਦ ਅਬਾਦੀ ਕੀ ਹੋਵੇਗੀ ?

ਚਰਣ 1 - ਸੂਤਰਣ : ਅਸੀ ਨਿਰੀਖਣ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅਬਾਦੀ ਸਮੇਂ ਦੇ ਨਾਲ ਬਦਲਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਜਨਮ ਦੇ ਨਾਲ ਵੱਧਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਮੌਤ ਦੇ ਨਾਲ ਘੱਟਦੀ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਖਾਸ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਅਬਾਦੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ। ਮੰਨ ਲਉ t ਸਮੇਂ ਨੂੰ ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਤਾਂ t ਦੇ ਮਾਨ $0, 1, 2, ..., t$ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। $t = 0$ ਵਰਤਮਾਨ ਸਮੇਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ, $t = 1$ ਅਗਲੇ ਸਾਲ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਆਦਿ। ਕਿਸੇ ਸਮੇਂ t ਲਈ ਮੰਨ ਲਉ $P(t)$ ਉਸ ਖਾਸ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਅਬਾਦੀ ਨੂੰ ਦੱਸਦਾ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਖਾਸ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਅਬਾਦੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ, ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ $t_0 = 2006$ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਿਵੇਂ ਕਰਾਂਗੇ ? ਅਸੀਂ 1 ਜਨਵਰੀ 2005 ਨੂੰ ਅਬਾਦੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਉਸ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਹੋਈ ਜਨਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਉਸ ਸਾਲ ਦੀ ਅਬਾਦੀ ਵਿੱਚ ਜੋੜ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਉਸ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਹੋਈ ਮੌਤਾ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਉਸ ਸਾਲ ਦੀ ਅਬਾਦੀ ਵਿਚੋਂ ਘਟਾ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $B(t)$, t ਅਤੇ $t + 1$ ਦੇ ਵਿੱਚਕਾਰ ਇੱਕ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਜਨਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $D(t)$, t ਅਤੇ $t + 1$ਦੇ ਵਿੱਚਕਾਰ ਮੌਤ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਦੱਸਦਾ ਹੈ। ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਸੰਬੰਧ

$$P(t + 1) = P(t) + B(t) - D(t) \text{ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।}$$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾਵਾਂ ਅਤੇ ਅਭਿਧਾਰਣਾਵਾਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

1. $\dfrac{B(t)}{P(t)}$ ਸਮਾਂ ਅੰਤਰਾਲ t ਤੋਂ $t + 1$ ਲਈ ਜਨਮ ਦਰ ਕਹਿਲਾਉਂਦੀ ਹੈ।

2. $\dfrac{D(t)}{P(t)}$ ਸਮਾਂ ਅੰਤਰਾਲ t ਤੋਂ $t + 1$ ਲਈ ਮੌਤ ਦਰ ਕਹਿਲਾਉਂਦੀ ਹੈ।

ਅਭਿਧਾਰਣਾਵਾਂ :

1. ਜਨਮ ਦਰ ਸਾਰੇ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਲਈ ਸਮਾਨ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਮੌਤ ਦਰ, ਸਾਰੇ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਲਈ ਸਮਾਨ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਅਚੱਲ b ਹੈ, ਜਿਹੜਾ ਕਿ ਜਨਮ ਦਰ ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਅਚਲ d ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਕਿ ਮੌਤ ਦਰ ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਤੋਂ ਕਿ ਸਾਰੇ $t \geq 0$ ਲਈ

$$b = \frac{B(t)}{P(t)} \quad \text{ਅਤੇ} \quad d = \frac{D(t)}{P(t)} \text{ ਹਨ।} \qquad \ldots (1)$$

2. ਅਬਾਦੀ ਵਿੱਚ ਜਾਂ ਅਬਾਦੀ ਤੋਂ ਕੋਈ ਆਵਾਸ ਜਾਂ ਪ੍ਰਵਾਸ ਨਹੀਂ ਹੋਇਆ ਹੈ ਭਾਵ ਅਬਾਦੀ ਬਦਲਾਵ ਕੇਵਲ ਜਨਮ ਅਤੇ ਮੌਤ ਤੋਂ ਹੋਇਆ ਹੈ।

ਅਭਿਧਾਰਣਾਵਾਂ 1 ਅਤੇ 2 ਦੇ ਨਤੀਜੇ ਵੱਜੋਂ ਅਸੀਂ ਤਰਕ ਰਾਹੀਂ ਨਤੀਜਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $t \geq 0$ ਲਈ

$$\begin{aligned} P(t + 1) &= P(t) + B(t) - D(t) \\ &= P(t) + bP(t) - dP(t) \\ &= (1 + b - d)\, P(t) \qquad \ldots (2) \end{aligned}$$

(2) ਵਿੱਚ $t = 0$ ਰੱਖਦੇ ਹੋਏ, ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$P(1) = (1 + b - d)P(0) \qquad \ldots (3)$$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਵਿੱਚ $t = 1$ ਰੱਖਦੇ ਹੋਏ, ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$P(2) = (1 + b - d)\, P(1)$$

$$= (1 + b - d)(1 + b - d)\, P(0) \qquad \text{(ਸਮੀਕਰਣ (3) ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ)}$$

$$= (1 + b - d)^2\, P(0)$$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$P(t) = (1 + b - d)^t\, P(0) \qquad \ldots (4)$$

$t = 0, 1, 2, \ldots$ ਲਈ ਅਚੱਲ $1 + b - d$ ਨੂੰ ਅਕਸਰ ਸੰਖੇਪ ਰੂਪ ਵਿੱਚ r ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਵਿਕਾਸ ਦਰ ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਆਮ ਰੂਪ ਵਿੱਚ Robert Malthus ਦੀ ਇੱਜ਼ਤ ਅਫ਼ਜਾਈ ਵਿੱਚ ਜਿਸਨੇ ਇਸ ਨਿਦਰਸ਼ ਨੂੰ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਪ੍ਰਸਤੁਤ ਕੀਤਾ, ਇਹ Malthusian ਸਥਿਰ ਰਾਸ਼ੀ ਕਹਿਲਾਉਂਦੀ ਹੈ। r ਦੇ ਸੰਬੰਧ, ਸਮੀਕਰਣ (4) ਤੋਂ

$$P(t) = P(0)r^t \quad , \qquad t = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।} \quad \ldots (5)$$

ਇੱਥੇ $P(t)$ ਇੱਕ ਚਾਰ ਘਾਤ ਅੰਕੀ ਫਲਨ ਦਾ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਹੈ। cr^t ਰੂਪ ਦਾ ਕੋਈ ਫਲਨ ਜਿੱਥੇ c ਅਤੇ r ਅਚੱਲ ਹਨ। ਇੱਕ ਚਾਰ ਘਾਤ ਅੰਕੀ ਫਲਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਸਮੀਕਰਣ (5), ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ, ਗਣਿਤੀ ਸੂਤਰ ਹੈ।

ਚਰਣ 2 – ਹੱਲ :

ਮਨ ਲਉ ਕਿ ਹੁਣ ਦੀ ਅਬਾਦੀ 250,000,000 ਹੈ ਅਤੇ ਜਨਮ ਦਰ ਅਤੇ ਮੌਤਦਰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $b = 0.02$ ਅਤੇ $d = 0.01$ ਹੈ। ਦਸ ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਅਬਾਦੀ ਕਿੰਨੀ ਹੋਵੇਗੀ ? ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ, ਅਸੀਂ P(10) ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$P(10) = (1.01)^{10}\,(250{,}000{,}000)$$

$$= (1.104622125)\,(250{,}000{,}000)$$

$$= 276{,}155{,}531.25$$

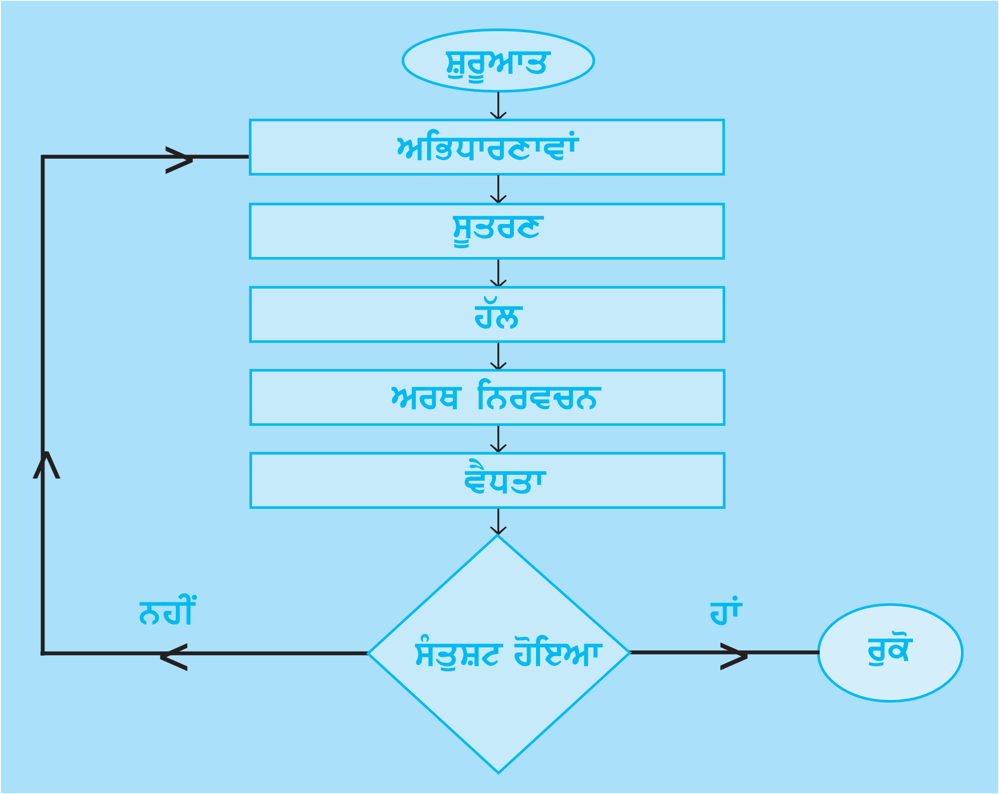
ਚਰਣ 3 ਯੋਗਤਾ ਅਤੇ ਅਰਥ ਨਿਰਵਚਨ :

ਸੁਭਾਵਿਕ ਰੂਪ ਤੋਂ ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਨਿਰਾਰਥਕ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਦਾ 0.25 ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਲਗਭਗ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਨਤੀਜੇ ਤੇ ਪਹੁੰਚਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅਬਾਦੀ 276,155,531 ਹੈ (ਲਗਭਗ)। ਇੱਥੇ ਗਣਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ ਵਿੱਚ ਸਾਡੀ ਮੰਨੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਅਭਿਧਾਰਣਾਵਾਂ ਦੇ ਕਾਰਨ, ਸਾਨੂੰ ਅਸਲ ਉੱਤਰ ਨਹੀਂ ਮਿਲਦਾ।

ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਉਦਾਹਰਣ ਦਸਦੇ ਹਨ ਕਿ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਗਣਿਤਕ ਤਕਨੀਕਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਕਈ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਕਿਵੇਂ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ ਇੱਕ ਨਿਦਰਸ਼ ਕਿਸੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸਮਸਿਆ ਦਾ ਸਰਲ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਨਿਰੂਪਣ ਹੈ, ਇਸ ਦੇ ਖਾਸ ਗੁਣ ਦੇ ਕਾਰਨ ਇਸ ਵਿੱਚ ਬਣਾਈ ਹੋਈ ਅਭਿਧਾਰਣਾ ਅਤੇ ਲਗਭਗ ਹਨ। ਸਪੱਸ਼ਟ ਰੂਪ ਤੋਂ ਸਭ ਤੋਂ ਜ਼ਰੂਰੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ, ਇਹ ਨਿਰਣਾ ਲੈਣ ਦਾ ਹੈ ਕਿ ਸਾਡਾ ਨਿਦਰਸ਼ ਢੰਗ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ, ਇਸਦਾ ਭਾਵ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਜਦੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਹੋਏ ਨਤੀਜਿਆਂ ਨੂੰ ਭੌਤਿਕ ਰੂਪ ਤੋਂ ਅਰਥ ਨਿਰਵਾਚਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਕਿ ਨਿਦਰਸ਼, ਤਰਕ ਕਰਨ ਯੋਗ ਉੱਤਰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ। ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਨਿਦਰਸ਼ ਕਾਫ਼ੀ ਅਸਲੀਅਤ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਅਸੀਂ ਕਮੀਆਂ ਦੇ ਸ੍ਰੋਤਾਂ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਨਣ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਸੰਯੋਗ ਵੱਜੋਂ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਨਵੇਂ ਸੂਤਰ ਨਵੀਂ ਗਣਿਤੀ ਖਾਸੀਅਤ ਨੂੰ ਲੈਣਾ ਪਵੇ। ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ ਨਵੇਂ ਮੁਲਾਂਕਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ, ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਦਾ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿਵੇਂ ਕੀ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਪ੍ਰਵਾਹ-ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਵਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ :


ਸ਼ੁਰੂਆਤ
ਅਭਿਧਾਰਣਾਵਾਂ
ਸੂਤਰਣ
ਹੱਲ
ਅਰਥ ਨਿਰਵਚਨ
ਵੈਧਤਾ
ਨਹੀਂ
ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਹੋਇਆ
ਹਾਂ
ਰੁਕੋ

ਉੱਤਰਮਾਲਾ

ਅਭਿਆਸ 1.1

1. (i), (iv), (v), (vi), (vii) ਅਤੇ (viii) ਸਮੂਹ ਹਨ।
2. (i) $\in$ (ii) $\notin$ (iii) $\notin$ (iv) $\in$ (v) $\in$ (vi) $\notin$
3. (i) A = {–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 } (ii) B = {1, 2, 3, 4, 5}
   (iii) C = {17, 26, 35, 44, 53, 62, 71, 80} (iv) D = {2, 3, 5}
   (v) E = {T, R, I, G, O, N, M, E, Y} (vi) F = {B, E, T, R}
4. (i) $\{ x : x = 3n, n \in N$ ਅਤੇ $1 \le n \le 4 \}$ (ii) $\{ x : x = 2^n, n \in N$ ਅਤੇ $1 \le n \le 5 \}$
   (iii) $\{ x : x = 5^n, n \in N$ ਅਤੇ $1 \le n \le 4 \}$ (iv) { x : x ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।}
   (v) $\{ x : x = n^2, n \in N$ ਅਤੇ $1 \le n \le 10 \}$
5. (i) A = {1, 3, 5, . . . } (ii) B = {0, 1, 2, 3, 4 }
   (iii) C = { –2, –1, 0, 1, 2 } (iv) D = { L, O, Y, A }
   (v) E = { ਫ਼ਰਵਰੀ, ਅਪ੍ਰੈਲ, ਜੂਨ, ਸਤੰਬਰ, ਨਵੰਬਰ }
   (vi) F = {b, c, d, f, g, h, j }
6. (i) $\leftrightarrow$ (c) (ii) $\leftrightarrow$ (a) (iii) $\leftrightarrow$ (d) (iv) $\leftrightarrow$ (b)

ਅਭਿਆਸ 1.2

1. (i), (ii), (iii)
2. (i) ਸੀਮਿਤ (ii) ਅਸੀਮਿਤ (iii) ਸੀਮਿਤ (iv) ਅਸੀਮਿਤ (v) ਸੀਮਿਤ
3. (i) ਅਸੀਮਿਤ (ii) ਸੀਮਿਤ (iii) ਅਸੀਮਿਤ (iv) ਸੀਮਿਤ (v) ਅਸੀਮਿਤ
4. (i) ਹਾਂ (ii) ਨਹੀਂ (iii) ਹਾਂ (iv) ਨਹੀਂ
5. (i) ਨਹੀਂ (ii) ਹਾਂ **6.** B = D, E = G

ਅਭਿਆਸ 1.3

1. (i) $\subset$ (ii) $\not\subset$ (iii) $\subset$ (iv) $\not\subset$ (v) $\not\subset$ (vi) $\subset$
   (vii) $\subset$
2. (i) ਝੂਠ (ii) ਸੱਚ (iii) ਝੂਠ (iv) ਸੱਚ (v) ਝੂਠ (vi) ਸੱਚ
3. (i), (v), (vii), (viii), (ix), (xi)
4. (i) ϕ, { a } (ii) ϕ, { a }, { b }, { a, b }
   (iii) ϕ, { 1 }, { 2 }, { 3 }, { 1, 2 }, { 1, 3 }, { 2, 3 }, { 1, 2, 3 } (iv) ϕ

5. 1

6. (i) $(-4,\ 6]$ (ii) $(-12, -10)$ (iii) $[0, 7)$
(iv) $[3, 4]$

7. (i) $\{x : x \in R, -3 < x < 0\}$ (ii) $\{x : x \in R, 6 \le x \le 12\}$
(iii) $\{x : x \in R, 6 < x \le 12\}$ (iv) $\{x \in R, -23 \le x < 5\}$ **9.** (iii)

ਅਭਿਆਸ 1.4

1. (i) $X \cup Y = \{1, 2, 3, 5\}$ (ii) $A \cup B = \{a, b, c, e, i, o, u\}$
(iii) $A \cup B = \{x : x = 1, 2, 4, 5$ ਜਾਂ ਸੰਖਿਆ 3 ਦਾ ਗੁਣਜ $\}$
(iv) $A \cup B = \{x : 1 < x < 10, x \in N\}$ (v) $A \cup B = \{1, 2, 3\}$

2. ਹਾਂ, $A \cup B = \{a, b, c\}$

3. B

4. (i) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (ii) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ (iii) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
(iv) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (v) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
(vi) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (vii) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

5. (i) $X \cap Y = \{1, 3\}$ (ii) $A \cap B = \{a\}$ (iii) $\{3\}$ (iv) ϕ (v) ϕ

6. (i) $\{7, 9, 11\}$ (ii) $\{11, 13\}$ (iii) ϕ (iv) $\{11\}$
(v) ϕ (vi) $\{7, 9, 11\}$ (vii) ϕ
(viii) $\{7, 9, 11\}$ (ix) $\{7, 9, 11\}$ (x) $\{7, 9, 11, 15\}$

7. (i) B (ii) C (iii) D (iv) ϕ
(v) $\{2\}$ (vi) $\{x : x$ ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ $\}$ **8.** (iii)

9. (i) $\{3, 6, 9, 15, 18, 21\}$ (ii) $\{3, 9, 15, 18, 21\}$ (iii) $\{3, 6, 9, 12, 18, 21\}$
(iv) $\{4, 8, 16, 20)$ (v) $\{2, 4, 8, 10, 14, 16\}$ (vi) $\{5, 10, 20\}$
(vii) $\{20\}$ (viii) $\{4, 8, 12, 16\}$ (ix) $\{2, 6, 10, 14\}$
(x) $\{5, 10, 15\}$ (xi) $\{2, 4, 6, 8, 12, 14, 16\}$ (xii) $\{5, 15, 20\}$

10. (i) $\{a, c\}$ (ii) $\{f, g\}$ (iii) $\{b, d\}$

11. ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ

12. (i) ਗਲਤ (ii) ਗਲਤ (iii) ਸਹੀ (iv) ਸਹੀ

ਅਭਿਆਸ 1.5

1. (i) $\{5, 6, 7, 8, 9\}$ (ii) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ (iii) $\{7, 8, 9\}$
(iv) $\{5, 7, 9\}$ (v) $\{1, 2, 3, 4\}$ (vi) $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$

2. (i) $\{d, e, f, g, h\}$ (ii) $\{a, b, c, h\}$ (iii) $\{b, d, f, h\}$
(iv) $\{b, c, d, e\}$

3. (i) $\{ x : x$ ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ $\}$

(ii) $\{ x : x$ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ $\}$

(iii) $\{ x : x \in \mathbf{N}$ ਅਤੇ x ਸੰਖਿਆ 3 ਦਾ ਗੁਣਜ ਨਹੀਂ ਹੈ $\}$

(iv) $\{ x : x$ ਇੱਕ ਧਨ ਭਾਗਯੋਗ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ $x = 1$ ਹੈ$\}$

(v) $\{ x : x \in \mathbf{N}$ ਅਤੇ x ਇੱਕ ਧਨ ਪੂਰਨ ਅੰਕ ਹੈ ਜਿਹੜਾ 3 ਤੋਂ ਭਾਗਯੋਗ ਨਹੀਂ ਹੈ ਜਾਂ ਜਿਹੜਾ 5 ਤੋਂ ਭਾਗਯੋਗ ਨਹੀਂ ਹੈ।$\}$

(vi) $\{ x : x \in \mathbf{N}$ ਅਤੇ x ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ $\}$

(vii) $\{ x : x \in \mathbf{N}$ ਅਤੇ x ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ $\}$

(viii) $\{ x : x \in \mathbf{N}$ ਅਤੇ $x = 3 \}$ (ix) $\{ x : x \in \mathbf{N}$ ਅਤੇ $x = 2 \}$

(x) $\{ x : x \in \mathbf{N}$ ਅਤੇ $x < 7 \}$ (xi) $\{ x : x \in \mathbf{N}$ ਅਤੇ $x \leq \frac{9}{2} \}$

6. A' ਸਾਰੇ ਸਮਬਾਹੂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ।

7. (i) U (ii) A (iii) ϕ (iv) ϕ

ਅਭਿਆਸ 1.6

1. 2 **2.** 5 **3.** 50 **4.** 42

5. 30 **6.** 19 **7.** 25, 35 **8.** 60

ਅਧਿਆਇ 1 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. $A \subset B$, $A \subset C$, $B \subset C$, $D \subset A$, $D \subset B$, $D \subset C$

2. (i) ਝੂਠ (ii) ਝੂਠ (iii) ਸੱਚ (iv) ਝੂਠ (v) ਝੂਠ

(vi) ਸੱਚ

7. ਝੂਠ **12.** ਅਸੀਂ ਮੰਨ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ, $A = \{ 1, 2 \}$, $B = \{ 1, 3 \}$, $C = \{ 2, 3 \}$ ਵੀ ਮੰਨ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

13. 325 **14.** 125 **15.** (i) 52 (ii) 30 **16.** 11

ਅਭਿਆਸ 2.1

1. $x = 2$ ਅਤੇ $y = 1$ **2.** $A \times B$ ਵਿੱਚ ਅੰਸ਼ਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 9 ਹੈ।

3. $G \times H = \{(7, 5), (7, 4), (7, 2), (8, 5), (8, 4), (8, 2)\}$

$H \times G = \{(5, 7), (5, 8), (4, 7), (4, 8), (2, 7), (2, 8)\}$

4. (i) ਝੂਠ $P \times Q = \{(m, n), (m, m), (n, n), (n, m)\}$

(ii) ਸੱਚ

(iii) ਸੱਚ

5. $A \times A = \{(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1)\}$

$A \times A \times A = \{(-1, -1, -1), (-1, -1, 1), (-1, 1, -1), (-1, 1, 1), (1, -1, -1), (1, -1, 1), (1, 1, -1), (1, 1, 1)\}$

6. A = $\{a, b\}$, B = $\{x, y\}$

8. $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$

$A \times B$ ਦੇ $2^4 = 16$ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹਨ।

9. A = $\{x, y, z\}$ ਅਤੇ B = $\{1,2\}$

10. A = $\{-1, 0, 1\}$, $A \times A$ ਦੇ ਬਾਕੀ ਅੰਸ਼

$(-1, -1), (-1, 1), (0, -1), (0, 0), (1, -1), (1, 0), (1, 1)$ ਹਨ।

ਅਭਿਆਸ 2.2

1. $R = \{(1, 3), (2, 6), (3, 9), (4, 12)\}$

R ਦਾ ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ = $\{1, 2, 3, 4\}$

R ਦੀ ਸੀਮਾ = $\{3, 6, 9, 12\}$

R ਦਾ ਸਹਿ-ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ = $\{1, 2, 3, ..., 14\}$

2. $R = \{(1, 6), (2, 7), (3, 8)\}$

R ਦਾ ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ = $\{1, 2, 3\}$

R ਦੀ ਸੀਮਾ = $\{6, 7, 8\}$

3. $R = \{(1, 4), (1, 6), (2, 9), (3, 4), (3, 6), (5, 4), (5, 6)\}$

4. (i) $R = \{(x, y) : y = x - 2, x = 5, 6, 7$ ਲਈ$\}$

(ii) $R = \{(5,3), (6,4), (7,5)\}$, R ਦਾ ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ = $\{5, 6, 7\}$, R ਦੀ ਸੀਮਾ = $\{3, 4, 5\}$

5. (i) $R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,6), (2,4), (2,6), (2,2), (4,4), (6,6), (3, 3), (3, 6)\}$

(ii) R ਦਾ ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ = $\{1, 2, 3, 4, 6\}$

(iii) R ਦੀ ਸੀਮਾ = $\{1, 2, 3, 4, 6\}$

6. R ਦਾ ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ = $\{0, 1, 2, 3, 4, 5,\}$

R ਦੀ ਸੀਮਾ = $\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

7. $R = \{(2, 8), (3, 27), (5, 125), (7, 343)\}$

8. A ਤੋਂ B ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 2^6 ਹੈ।

9. R ਦਾ ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ = **Z**

R ਦੀ ਸੀਮਾ = **Z**

ਅਭਿਆਸ 2.3

1. (i) ਹਾਂ,ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ = $\{2, 5, 8, 11, 14, 17\}$, ਸੀਮਾ = $\{1\}$

(ii) ਹਾਂ, ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ = $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$, ਸੀਮਾ = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

(iii) ਨਹੀਂ

2. (i) ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ = **R**, ਸੀਮਾ = $(-\infty, 0]$

(ii) ਫਲਨ ਦਾ ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ = $\{x : -3 \le x \le 3\}$

ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ = $\{x : 0 \le x \le 3\}$

3. (i) $f(0) = -5$ (ii) $f(7) = 9$ (iii) $f(-3) = -11$

4. (i) $t(0) = 32$ (ii) $t(28) = \frac{412}{5}$ (iii) $t(-10) = 14$ (iv) 100

5. (i) ਸੀਮਾ $= (-\infty, 2)$ (ii) ਸੀਮਾ $= [2, \infty)$ (iii) ਸੀਮਾ $= \mathbf{R}$

ਅਧਿਆਇ 2 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

2. 2.1

3. ਫਲਨ ਦਾ ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ, ਸੰਖਿਆਵਾਂ 6 ਅਤੇ 2 ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਬਾਕੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ।

4. ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ $= [1, \infty)$, ਸੀਮਾ $= [0, \infty)$

5. ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ $= \mathbf{R}$, ਸੀਮਾ = ਰਿਣਾਤਮਕ ਤੋ ਇਲਾਵਾ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ

6. ਸੀਮਾ = ਕੋਈ ਵੀ ਧਨਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਕਿ $0 \le x < 1$

7. $(f+g)\,x = 3x - 2$
$(f-g)\,x = -x + 4$
$\left(\frac{f}{g}\right)x = \frac{x+1}{2x-3},\ x \ne \frac{3}{2}$

8. $a = 2, b = -1$

9. (i) ਨਹੀਂ (ii) ਨਹੀਂ (iii) ਨਹੀਂ

10. (i) ਹਾਂ (ii) ਨਹੀਂ

11. ਨਹੀਂ

12. f ਦੀ ਸੀਮਾ $= \{3, 5, 11, 13\}$

ਅਭਿਆਸ 3.1

1. (i) $\frac{5\pi}{36}$ (ii) $-\frac{19\pi}{72}$ (iii) $\frac{4\pi}{3}$ (iv) $\frac{26\pi}{9}$

2. (i) $39° 22' 30''$ (ii) $-229° 5' 29''$ (iii) $300°$ (iv) $210°$

3. 12π

4. $12° 36'$

5. $\frac{20\pi}{3}$

6. 5 : 4

7. (i) $\frac{2}{15}$ (ii) $\frac{1}{5}$ (iii) $\frac{7}{25}$

ਅਭਿਆਸ 3.2

1. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{cosec} x = -\frac{2}{\sqrt{3}}, \sec x = -2, \tan x = \sqrt{3}, \cot x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

2. $\operatorname{cosec} x = \frac{5}{3}, \cos x = -\frac{4}{5}, \sec x = -\frac{5}{4}, \tan x = -\frac{3}{4}, \cot x = -\frac{4}{3}$

3. $\sin x = -\frac{4}{5}, \operatorname{cosec} x = -\frac{5}{4}, \cos x = -\frac{3}{5}, \sec x = -\frac{5}{3}, \tan x = \frac{4}{3}$

4. $\sin x = -\frac{12}{13}, \operatorname{cosec} x = -\frac{13}{12}, \cos x = \frac{5}{13}, \tan x = -\frac{12}{5}, \cot x = -\frac{5}{12}$

5. $\sin x = \frac{5}{13}, \operatorname{cosec} x = \frac{13}{5}, \cos x = -\frac{12}{13}, \sec x = -\frac{13}{12}, \cot x = -\frac{12}{5}$

6. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **7.** 2 **8.** $\sqrt{3}$ **9.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **10.** 1

ਅਭਿਆਸ 3.3

5. (i) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ (ii) $2-\sqrt{3}$

ਅਭਿਆਸ 3.4

1. $\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, n\pi + \frac{\pi}{3}, n \in \mathbf{Z}$

2. $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbf{Z}$

3. $\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, n\pi + \frac{5\pi}{6}, n \in \mathbf{Z}$

4. $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}, n \in \mathbf{Z}$

5. $x = \frac{n\pi}{3}$ ਜਾਂ $x = n\pi, n \in \mathbf{Z}$

6. $x = (2n+1)\frac{\pi}{4}$, ਜਾਂ $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbf{Z}$

7. $x = n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}$ ਜਾਂ $(2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}$

8. $x = \frac{n\pi}{2}$, ਜਾਂ $\frac{n\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}, n \in \mathbf{Z}$

9. $x = \frac{n\pi}{3}$, ਜਾਂ $n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbf{Z}$

ਅਧਿਆਇ 3 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

8. $\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}, 2$

9. $\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{2}$

10. $\frac{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}{4}, \frac{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{4}, 4+\sqrt{15}$

ਅਭਿਆਸ 5.1

1. 3 **2.** 0 **3.** i **4.** $14 + 28i$

5. $2 - 7i$ **6.** $-\frac{19}{5} - \frac{21i}{10}$ **7.** $\frac{17}{3} + i\frac{5}{3}$ **8.** -4

9. $-\frac{242}{27} - 26i$ **10.** $\frac{-22}{3} - i\frac{107}{27}$ **11.** $\frac{4}{25} + i\frac{3}{25}$ **12.** $\frac{\sqrt{5}}{14} - i\frac{3}{14}$

13. i **14.** $\frac{-7\sqrt{2}}{2}i$

ਅਭਿਆਸ 5.2

1. $2, \frac{-2\pi}{3}$ **2.** $2, \frac{5\pi}{6}$ **3.** $\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)$

4. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ **5.** $\sqrt{2}\left(\cos\frac{-3\pi}{4} + i\sin\frac{-3\pi}{4}\right)$

6. $3(\cos\pi + i\sin\pi)$ **7.** $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ **8.** $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$

ਅਭਿਆਸ 5.3

1. $\pm\sqrt{3}\,i$ **2.** $\frac{-1 \pm \sqrt{7}\,i}{4}$ **3.** $\frac{-3 \pm 3\sqrt{3}\,i}{2}$ **4.** $\frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{-2}$

5. $\frac{-3 \pm \sqrt{11}\,i}{2}$ **6.** $\frac{1 \pm \sqrt{7}\,i}{2}$ **7.** $\frac{-1 \pm \sqrt{7}\,i}{2\sqrt{2}}$ **8.** $\frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{34}\,i}{2\sqrt{3}}$

9. $\frac{-1 \pm \sqrt{\left(2\sqrt{2} - 1\right)}i}{2}$ **10.** $\frac{-1 \pm \sqrt{7}\,i}{2\sqrt{2}}$

ਅਧਿਆਇ 5 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. $2 - 2i$ **3.** $\frac{307 + 599i}{442}$

5. (i) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ (ii) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

6. $\frac{2}{3} \pm \frac{4}{3}i$ **7.** $1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$ **8.** $\frac{5}{27} \pm \frac{\sqrt{2}}{27}i$ **9.** $\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{14}}{21}i$

10. $\sqrt{2}$ **12.** (i) $\frac{-2}{5}$ (ii) 0 **13.** $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3\pi}{4}$ **14.** $x = 3, y = -3$ **15.** 2

17. 1 **18.** 0 **20.** 4

ਅਭਿਆਸ 6.1

1. (i) $\{1, 2, 3, 4\}$ (ii) $\{... -3, -2, -1, 0, 1,2,3,4,\}$

2. (i) ਕੋਈ ਹੱਲ ਨਹੀਂ (ii) $\{... -4, -3\}$

3. (i) $\{... -2, -1, 0, 1\}$ (ii) $(-\infty, 2)$

4. (i) $\{-1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ (ii) $(-2, \infty)$

5. $(-4, \infty)$ **6.** $(-\infty, -3)$ **7.** $(-\infty, -3]$ **8.** $(-\infty, 4]$

9. $(-\infty, 6)$ **10.** $(-\infty, -6)$ **11.** $(-\infty, 2]$ **12.** $(-\infty, 120]$

13. $(4, \infty)$ **14.** $(-\infty, 2]$ **15.** $(4, \infty)$ **16.** $(-\infty, 2]$

17. $x < 3$,

18. $x \geq -1$,

19. $x > -1$,

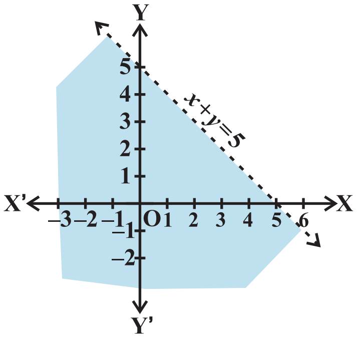
20. $x \geq -\frac{2}{7}$,

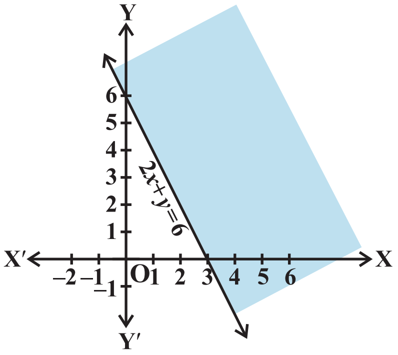
21. 35 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। **22.** 82 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

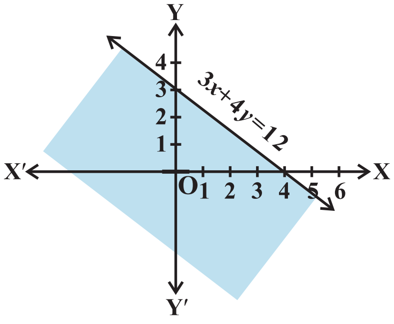
23. (5,7), (7,9) **24.** (6,8), (8,10), (10,12)

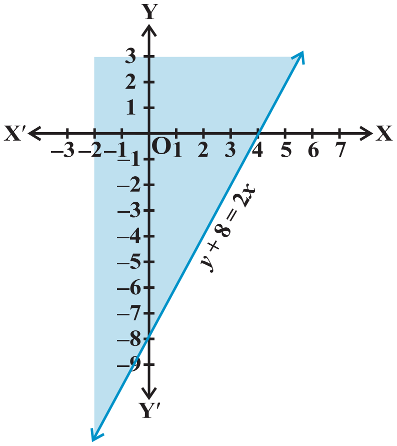
25. 9 ਸੈਂ.ਮੀ. **26.** 8 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਬਰਾਬਰ ਪਰੰਤੂ 22 ਤੋਂ ਘੱਟ ਜਾਂ ਬਰਾਬਰ

ਅਭਿਆਸ 6.2

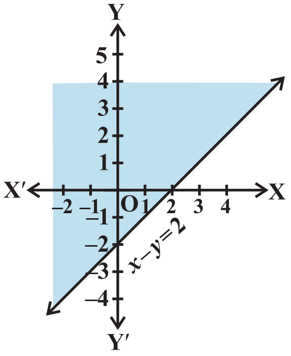
1.


2.


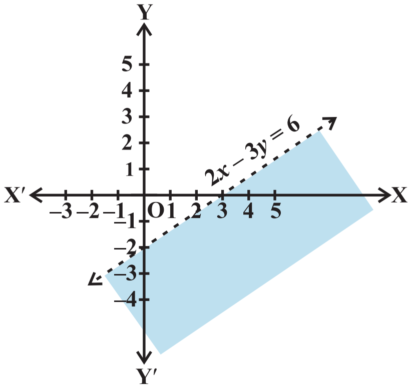
3.


4.


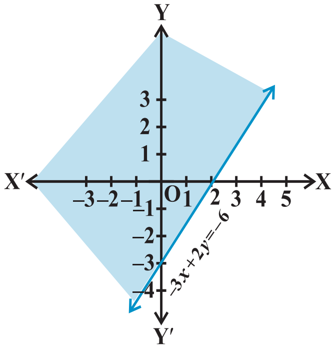
5.



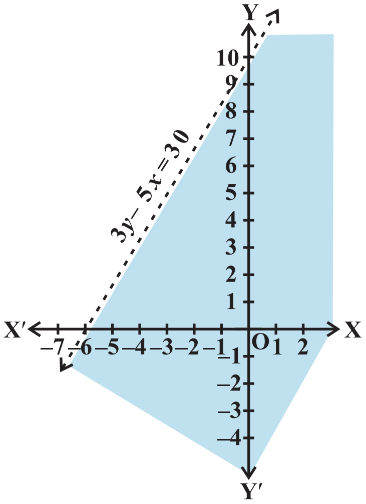
6.



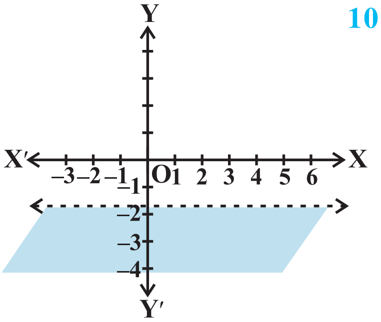
7.



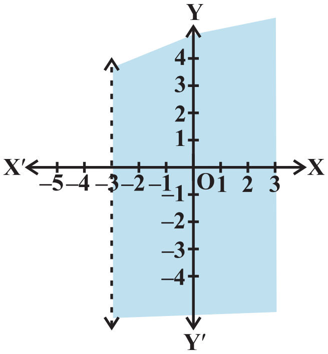
8.



9.

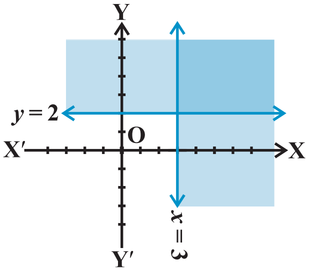


10.

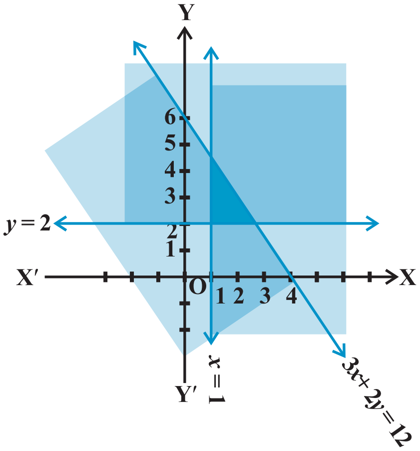


ਅਭਿਆਸ 6.3

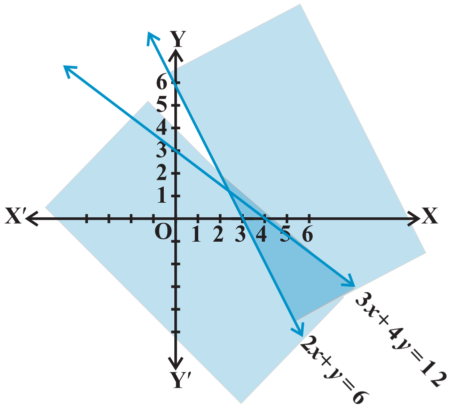
1.



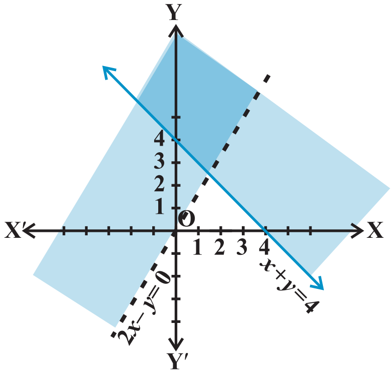
2.



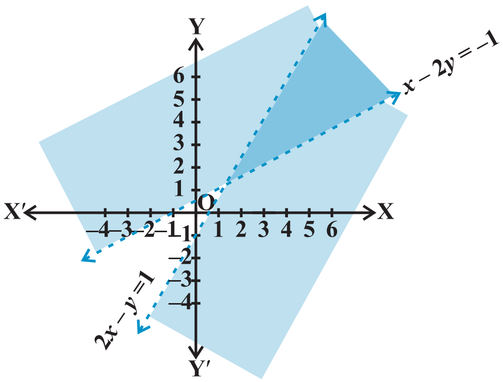
3.



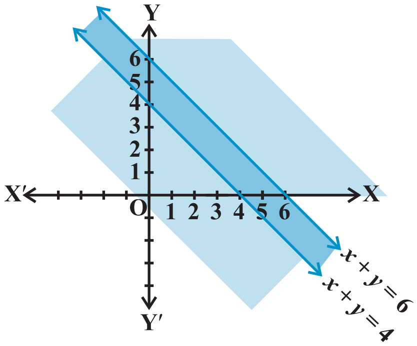
4.



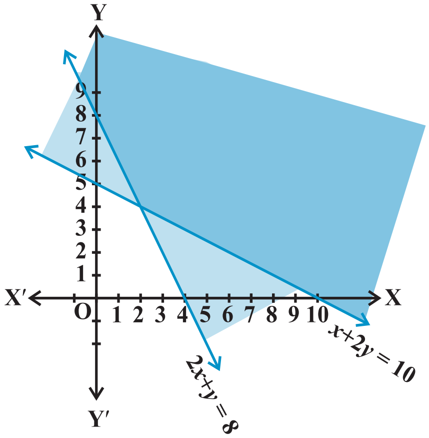
5.



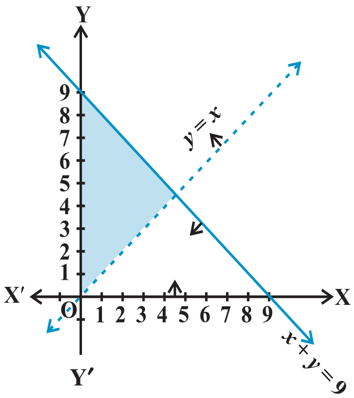
6.



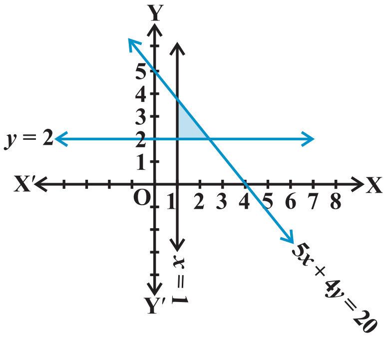
7.



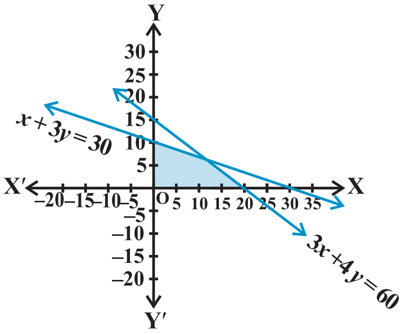
8.



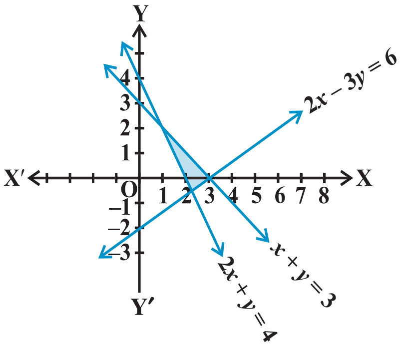
9.



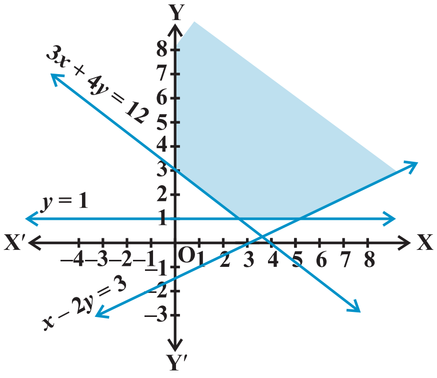
10.



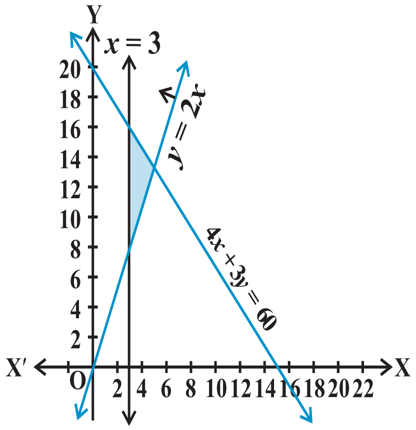
11.



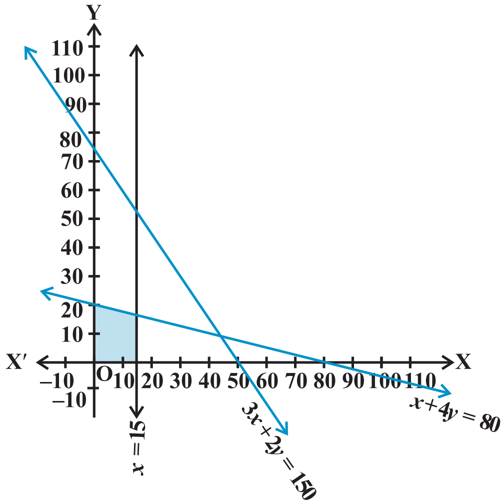
12.



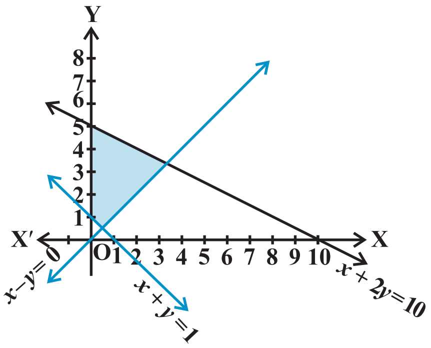
13.



14.



15.

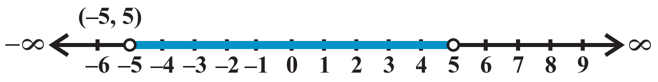


ਅਧਿਆਇ 6 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

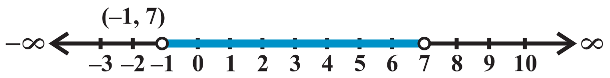
1. [2, 3] **2.** (0, 1] **3.** [– 4, 2]

4. (– 23, 2] **5.** $\left(\frac{-80}{3}, \frac{-10}{3}\right]$ **6.** $\left[1, \frac{11}{3}\right]$

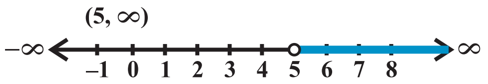
7. (–5, 5)



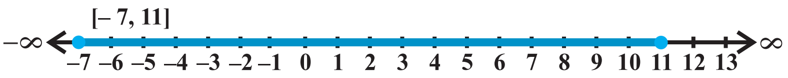
8. (–1, 7)



9. (5, ∞)



10. [– 7, 11]



11. 20°C ਅਤੇ 25°C ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ

12. 320 ਲੀ.ਤੋਂ ਵੱਧ ਪਰੰਤੂ 1280 ਲੀ. ਤੋਂ ਘੱਟ

13. 562.5 ਲੀ. ਤੋਂ ਵੱਧ ਪਰੰਤੂ 900 ਲੀ.ਤੋਂ ਘੱਟ

14. $9.6 \le MA \le 16.8$

ਅਭਿਆਸ 7.1

1. (i) 125, (ii) 60 **2.** 108 **3.** 5040 **4.** 336 **5.** 8 **6.** 20

ਅਭਿਆਸ 7.2

1. (i) 40320 (ii) 18 **2.** 30, No **3.** 28 **4.** 64 **5.** (i) 30 (ii) 15120

ਅਭਿਆਸ 7.3

1. 504 **2.** 4536 **3.** 60 **4.** 120, 48 **5.** 56 **6.** 9

7. (i) 3 (ii) 4 **8.** 40320 **9.** (i) 360 (ii) 720 (iii) 240 **10.** 33810

11. (i) 1814400 (ii) 2419200 (iii) 25401600

ਅਭਿਆਸ 7.4

1. 45 **2.** (i) 5, (ii) 6 **3.** 210 **4.** 40 **5.** 2000

6. 778320 **7.** 3960 **8.** 200 **9.** 35

ਅਧਿਆਇ 7 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. 3600
2. 1440
3. (i) 504 (ii) 588 (iii) 1632
4. 907200
5. 120
6. 50400
7. 420
8. ${}^{4}C_{1} \times {}^{48}C_{4}$
9. 2880
10. ${}^{22}C_{7} + {}^{22}C_{10}$
11. 151200

ਅਭਿਆਸ 8.1

1. $1 - 10x + 40x^2 - 80x^3 + 80x^4 - 32x^5$
2. $\frac{32}{x^5} - \frac{40}{x^3} + \frac{20}{x} - 5x + \frac{5}{8}x^3 - \frac{x^5}{32}$
3. $64x^6 - 576x^5 + 2160x^4 - 4320x^3 + 4860x^2 - 2916x + 729$
4. $\frac{x^5}{243} + \frac{5x^3}{81} + \frac{10}{27}x + \frac{10}{9x} + \frac{5}{3x^3} + \frac{1}{x^5}$
5. $x^6 + 6x^4 + 15x^2 + 20 + \frac{15}{x^2} + \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^6}$
6. 884736
7. 11040808032
8. 104060401
9. 9509900499
10. $(1.1)^{10000} > 1000$
11. $8(a^3b + ab^3)$; $40\sqrt{6}$
12. $2(x^6 + 15x^4 + 15x^2 + 1)$, 198

ਅਭਿਆਸ 8.2

1. 1512
2. – 101376
3. $(-1)^r \, {}^{6}C_r . x^{12-2r} . y^r$
4. $(-1)^r \, {}^{12}C_r . x^{24-r} . y^r$
5. $-1760\, x^9y^3$
6. 18564
7. $\frac{-105}{8}x^9; \frac{35}{48}x^{12}$
8. $61236\, x^5y^5$
10. $n = 7$; $r = 3$
12. $m = 4$

ਅਧਿਆਇ 8 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. $a = 3$; $b = 5$; $n = 6$
2. $a = \frac{9}{7}$
3. 171
5. $396\sqrt{6}$
6. $2a^8 + 12a^6 - 10a^4 - 4a^2 + 2$
7. 0.9510
8. $n = 10$

9. $\frac{16}{x}+\frac{8}{x^2}-\frac{32}{x^3}+\frac{16}{x^4}-4x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{16}-5$

10. $27x^6 - 54ax^5 + 117a^2x^4 - 116a^3x^3 + 117a^4x^2 - 54a^5x + 27a^6$

ਅਭਿਆਸ 9.1

1. 3, 8, 15, 24, 35 **2.** $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$ **3.** 2, 4, 8, 16 ਅਤੇ 32

4. $-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}$ ਅਤੇ $\frac{7}{6}$ **5.** 25, –125, 625, –3125, 15625

6. $\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \frac{21}{2}, 21$ ਅਤੇ $\frac{75}{2}$ **7.** 65, 93 **8.** $\frac{49}{128}$

9. 729 **10.** $\frac{360}{23}$

11. 3, 11, 35, 107, 323; 3 + 11 + 35 + 107 + 323 + ...

12. $-1, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{6}, \frac{-1}{24}, \frac{-1}{120}; -1+\left(\frac{-1}{2}\right)+\left(\frac{-1}{6}\right)+\left(\frac{-1}{24}\right)+\left(\frac{-1}{120}\right)+\ldots$

13. 2, 2, 1, 0, –1; 2 + 2 + 1 + 0 + (–1) + ... **14.** 1, 2, $\frac{3}{2}, \frac{5}{3}$ ਅਤੇ $\frac{8}{5}$

ਅਭਿਆਸ 9.2

1. 1002001 **2.** 98450 **4.** 5 ਜਾਂ 20 **6.** 4

7. $\frac{n}{2}(5n+7)$ **8.** $2q$ **9.** $\frac{179}{321}$ **10.** 0

13. 27 **14.** 11, 14, 17, 20 ਅਤੇ 23 **15.** 1

16. 14 **17.** ₹ 245 **18.** 9

ਅਭਿਆਸ 9.3

1. $\frac{5}{2^{20}}, \frac{5}{2^n}$ **2.** 3072 **4.** -2187

5. (a) 13ਵਾਂ, (b) 12ਵਾਂ, (c) 9ਵਾਂ **6.** ± 1 **7.** $\frac{1}{6}\left[1-(0.1)^{20}\right]$

8. $\frac{\sqrt{7}}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)\left(3^{\frac{n}{2}}-1\right)$ **9.** $\frac{\left[1-(-a)^n\right]}{1+a}$ **10.** $\frac{x^3\left(1-x^{2n}\right)}{1-x^2}$

11. $22+\frac{3}{2}\left(3^{11}-1\right)$

12. $r=\frac{5}{2}$ ਜਾਂ $\frac{2}{5}$; ਪਦ $\frac{2}{5}, 1, \frac{5}{2}$ ਜਾਂ $\frac{5}{2}, 1, \frac{2}{5}$ ਹਨ।

13. 4

14. $\frac{16}{7}; 2; \frac{16}{7}\left(2^{n}-1\right)$

15. 2059

16. $\frac{-4}{3}, \frac{-8}{3}, \frac{-16}{3}, \ldots$ ਜਾਂ $4, -8, 16, -32, 64, \ldots$

18. $\frac{80}{81}\left(10^{n}-1\right)-\frac{8}{9}n$

19. 496

20. rR

21. 3, –6, 12, –24

26. 9 ਅਤੇ 27

27. $n=\frac{-1}{2}$

30. 120, 480, 30 (2^{n})

31. ₹ 500 $(1.1)^{10}$

32. $x^2-16x+25=0$

ਅਭਿਆਸ 9.4

1. $\frac{n}{3}(n+1)(n+2)$

2. $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

3. $\frac{n}{6}(n+1)\left(3n^{2}+5n+1\right)$

4. $\frac{n}{n+1}$

5. 2840

6. $3n(n+1)(n+3)$

7. $\frac{n(n+1)^{2}(n+2)}{12}$

8. $\frac{n(n+1)}{12}\left(3n^{2}+23n+34\right)$

9. $\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)+2\left(2^{n}-1\right)$

10. $\frac{n}{3}(2n+1)(2n-1)$

ਅਧਿਆਇ 9 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

2. 5, 8, 11

4. 8729

5. 3050

6. 1210

7. 4

8. 160; 6

9. ± 3

10. 8, 16, 32

11. 4

12. 11

21. (i) $\frac{50}{81}\left(10^{n}-1\right)-\frac{5n}{9}$ (ii) $\frac{2n}{3}-\frac{2}{27}\left(1-10^{-n}\right)$

22. 1680

23. $\frac{n}{3}\left(n^{2}+3n+5\right)$

25. $\frac{n}{24}\left(2n^{2}+9n+13\right)$

27. ₹ 16680

28. ₹ 39100

29. ₹ 43690

30. ₹17000, ; 20,000

31. ₹ 5120

32. 25 ਦਿਨ

ਅਭਿਆਸ 10.1

1. $\frac{121}{2}$ ਵਰਗ ਇਕਾਈ

2. (0, a), (0, – a) ਅਤੇ $\left(-\sqrt{3}a, 0\right)$ ਜਾਂ (0, a), (0, – a), ਅਤੇ $\left(\sqrt{3}a, 0\right)$

3. (i) $|y_2 - y_1|$ (ii) $|x_2 - x_1|$ **4.** $\left(\frac{15}{2}, 0\right)$ **5.** $-\frac{1}{2}$

7. $-\sqrt{3}$ **8.** $x = 1$ **10.** 135°

11. 1 ਅਤੇ 2, ਜਾਂ $\frac{1}{2}$ ਅਤੇ 1, ਜਾਂ – 1 ਅਤੇ –2, ਜਾਂ $-\frac{1}{2}$ ਅਤੇ – 1 **14.** $\frac{1}{2}$, 104.5 ਕਰੋੜ

ਅਭਿਆਸ 10.2

1. $y = 0$ ਅਤੇ $x = 0$ **2.** $x - 2y + 10 = 0$ **3.** $y = mx$

4. $\left(\sqrt{3}+1\right)x - \left(\sqrt{3}-1\right)y = 4\left(\sqrt{3}-1\right)$ **5.** $2x + y + 6 = 0$

6. $x - \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} = 0$ **7.** $5x + 3y + 2 = 0$

8. $\sqrt{3}x + y = 10$ **9.** $3x - 4y + 8 = 0$ **10.** $5x - y + 20 = 0$

11. $(1 + n)x + 3(1 + n)y = n + 11$ **12.** $x + y = 5$

13. $x + 2y - 6 = 0$, $2x + y - 6 = 0$

14. $\sqrt{3}x + y - 2 = 0$ ਅਤੇ $\sqrt{3}x + y + 2 = 0$ **15.** $2x - 9y + 85 = 0$

16. $L = \frac{.192}{90}(C - 20) + 124.942$ **17.** 1340 ਲੀ. **19.** $2kx + hy = 3kh$

ਅਭਿਆਸ 10.3

1. (i) $y = -\frac{1}{7}x + 0, -\frac{1}{7}, 0$; (ii) $y = -2x + \frac{5}{3}, -2, \frac{5}{3}$; (iii) $y = 0x + 0, 0, 0$

2. (i) $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1, 4, 6;$ (ii) $\frac{x}{\frac{3}{2}} + \frac{y}{-2} = 1, \frac{3}{2}, -2;$

(iii) $y = -\frac{2}{3}$, y-ਧੁਰੇ ਤੇ ਅੰਤਰ ਖੰਡ = $-\frac{2}{3}$ ਅਤੇ x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਕੋਈ ਅੰਤਰ ਖੰਡ ਨਹੀਂ ਹੈ।

3. (i) $x \cos 120° + y \sin 120° = 4, 4, 120°$ (ii) $x \cos 90° + y \sin 90° = 2, 2, 90°$;

(iii) $x \cos 315° + y \sin 315° = 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 315°$ **4.** 5 ਇਕਾਈ

5. (– 2, 0) ਅਤੇ (8, 0) **6.** (i) $\frac{65}{17}$ ਇਕਾਈ (ii) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{p+r}{l}\right|$ ਇਕਾਈ

7. $3x - 4y + 18 = 0$ **8.** $y + 7x = 21$ **9.** $30°$ ਅਤੇ $150°$ **10.** $\frac{22}{9}$

12. $(\sqrt{3}+2)x+(2\sqrt{3}-1)y=8\sqrt{3}+1$ ਜਾਂ $(\sqrt{3}-2)x+(1+2\sqrt{3})y=-1+8\sqrt{3}$

13. $2x + y = 5$ **14.** $\left(\frac{68}{25},-\frac{49}{25}\right)$ **15.** $m=\frac{1}{2}, c=\frac{5}{2}$ **17.** $y - x = 1, \sqrt{2}$

ਅਧਿਆਇ 10 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. (a) 3 (b) ± 2 (c) 6 ਜਾਂ 1 **2.** $\frac{7\pi}{6}, 1$

3. $2x-3y=6, -3x+2y=6$ **4.** $\left(0,-\frac{8}{3}\right),\left(0,\frac{32}{3}\right)$

5. $\frac{|\sin(\phi-\theta)|}{2\left|\sin\frac{\phi-\theta}{2}\right|}$ **6.** $x=-\frac{5}{22}$ **7.** $2x - 3y + 18 = 0$

8. R^2 ਵਰਗ ਇਕਾਈਆਂ **9.** 5 **11.** $3x - y = 7, \quad x + 3y = 9$

12. $13x + 13y = 6$ **14.** $1:2$ **15.** $\frac{23\sqrt{5}}{18}$ ਇਕਾਈਆਂ

16. ਰੇਖਾ x - ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਜਾਂ y-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ।

17. $x = 1, \quad y = 1$ **18.** $(-1, -4)$ **19.** $\frac{1 \pm 5\sqrt{2}}{7}$

21. $18x + 12y + 11 = 0$ **22.** $\left(\frac{13}{5}, 0\right)$ **24.** $119x + 102y = 125$

ਅਭਿਆਸ 11.1

1. $x^2 + y^2 - 4y = 0$ **2.** $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$

3. $36x^2 + 36y^2 - 36x - 18y + 11 = 0$ **4.** $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$

5. $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + 2b^2 = 0$ **6.** $c(-5, 3), r = 6$

7. $c(2, 4), r = \sqrt{65}$ **8.** $c(4, -5), r = \sqrt{53}$ **9.** $c\left(\frac{1}{4}, 0\right); r = \frac{1}{4}$

10. $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 15 = 0$ **11.** $x^2 + y^2 - 7x + 5y - 14 = 0$

12. $x^2 + y^2 + 4x - 21 = 0$ ਅਤੇ $x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$

13. $x^2 + y^2 - ax - by = 0$ **14.** $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 5$

15. ਚੱਕਰ ਦੇ ਅੰਦਰ; ਕਿਉਂਕਿ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਕੇਂਦਰ ਦੀ ਦੂਰੀ ਅਰਧ-ਵਿਆਸ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 11.2

1. F (3, 0), ਧੁਰਾ - x - ਧੁਰਾ, ਨਿਯਾਮਕ ਰੇਖਾ (Directrix) $x = -3$, ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ ਦੀ ਲੰਬਾਈ = 12
2. F $(0, \frac{3}{2})$, ਧੁਰਾ - y - ਧੁਰਾ, ਨਿਯਾਮਕ ਰੇਖਾ (Directrix) $y = -\frac{3}{2}$, ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ ਦੀ ਲੰਬਾਈ = 6
3. F (–2, 0), ਧੁਰਾ - x - ਧੁਰਾ, ਨਿਯਾਮਕ ਰੇਖਾ (Directrix) $x = 2$, ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ ਦੀ ਲੰਬਾਈ = 8
4. F (0, –4), ਧੁਰਾ - y - ਧੁਰਾ, ਨਿਯਾਮਕ ਰੇਖਾ (Directrix) $y = 4$, ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ ਦੀ ਲੰਬਾਈ = 16
5. F $(\frac{5}{2}, 0)$ ਧੁਰਾ - x - ਧੁਰਾ, ਨਿਯਾਮਕ ਰੇਖਾ (Directrix) $x = -\frac{5}{2}$, ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ ਦੀ ਲੰਬਾਈ = 10
6. F $(0, \frac{-9}{4})$, ਧੁਰਾ - y - ਧੁਰਾ, ਨਿਯਾਮਕ ਰੇਖਾ(Directrix) $y = \frac{9}{4}$, ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ ਦੀ ਲੰਬਾਈ = 9

7. $y^2 = 24x$ 8. $x^2 = -12y$ 9. $y^2 = 12x$

10. $y^2 = -8x$ 11. $2y^2 = 9x$ 12. $2x^2 = 25y$

ਅਭਿਆਸ 11.3

1. F $(\pm\sqrt{20}, 0)$, V (± 6, 0); ਦੀਰਘ ਧੁਰਾ = 12, ਲਘੂ ਧੁਰਾ = 8, $e = \frac{\sqrt{20}}{6}$; ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ = $\frac{16}{3}$
2. F $(0, \pm\sqrt{21})$, V (0, ± 5), ਦੀਰਘ ਧੁਰਾ = 10, ਲਘੂ ਧੁਰਾ = 4, $e = \frac{\sqrt{21}}{5}$; ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ = $\frac{8}{5}$
3. F $(\pm\sqrt{7}, 0)$, V (± 4, 0), ਦੀਰਘ ਧੁਰਾ = 8, ਲਘੂ ਧੁਰਾ = 6, $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$, ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ = $\frac{9}{2}$
4. F $(0, \pm\sqrt{75})$, V (0,± 10), ਦੀਰਘ ਧੁਰਾ = 20, ਲਘੂ ਧੁਰਾ = 10, $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ = 5
5. F $(\pm\sqrt{13}, 0)$, V (± 7, 0), ਦੀਰਘ ਧੁਰਾ =14 , ਲਘੂ ਧੁਰਾ = 12, $e = \frac{\sqrt{13}}{7}$, ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ = $\frac{72}{7}$
6. F $(0, \pm 10\sqrt{3})$, V (0,± 20), ਦੀਰਘ ਧੁਰਾ =40 , ਲਘੂ ਧੁਰਾ = 20, $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ = 10
7. F $(0, \pm 4\sqrt{2})$, V (0,± 6), ਦੀਰਘ ਧੁਰਾ =12 , ਲਘੂ ਧੁਰਾ = 4, $e = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ = $\frac{4}{3}$
8. F $\left(0, \pm\sqrt{15}\right)$, V (0,± 4), ਦੀਰਘ ਧੁਰਾ = 8 , ਲਘੂ ਧੁਰਾ = 2, $e = \frac{\sqrt{15}}{4}$, ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ = $\frac{1}{2}$

9. F $(\pm\sqrt{5},0)$, V $(\pm 3, 0)$, ਦੀਰਘ ਧੁਰਾ = 6 , ਲਘੂ ਧੁਰਾ = 4, $e=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$, ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ $=\dfrac{8}{3}$

10. $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ **11.** $\dfrac{x^2}{144}+\dfrac{y^2}{169}=1$ **12.** $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1$

13. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ **14.** $\dfrac{x^2}{1}+\dfrac{y^2}{5}=1$ **15.** $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{144}=1$

16. $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{100}=1$ **17.** $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1$ **18.** $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$

19. $\dfrac{x^2}{10}+\dfrac{y^2}{40}=1$ **20.** $x^2 + 4y^2 = 52$ ਜਾਂ $\dfrac{x^2}{52}+\dfrac{y^2}{13}=1$

ਅਭਿਆਸ 11.4

1. ਫੋਕਸ $(\pm 5, 0)$, ਸਿਖਰਾਂ $(\pm 4, 0)$, $e=\dfrac{5}{4}$, ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ $=\dfrac{9}{2}$

2. ਫੋਕਸ (0 ± 6), ਸਿਖਰਾਂ $(0, \pm 3)$, $e = 2$, ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ = 18

3. ਫੋਕਸ $(0, \pm\sqrt{13})$, ਸਿਖਰਾਂ $(0, \pm 2)$, $e=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$, ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ $=9$

4. ਫੋਕਸ $(\pm 10, 0)$, ਸਿਖਰਾਂ $(\pm 6, 0)$, $e=\dfrac{5}{3}$, ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ $=\dfrac{64}{3}$

5. ਫੋਕਸ $\left(0,\pm\dfrac{2\sqrt{14}}{\sqrt{5}}\right)$, ਸਿਖਰਾਂ $\left(0,\pm\dfrac{6}{\sqrt{5}}\right)$, $e=\dfrac{\sqrt{14}}{3}$, ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ $=\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$

6. ਫੋਕਸ $(0, \pm\sqrt{65})$, ਸਿਖਰਾਂ $(0, \pm 4)$, $e=\dfrac{\sqrt{65}}{4}$, ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ $=\dfrac{49}{2}$

7. $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$ **8.** $\dfrac{y^2}{25}-\dfrac{x^2}{39}=1$ **9.** $\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{16}=1$

10. $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ **11.** $\dfrac{y^2}{25}-\dfrac{x^2}{144}=1$ **12.** $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{20}=1$

13. $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$ **14.** $\dfrac{x^2}{49}-\dfrac{9y^2}{343}=1$ **15.** $\dfrac{y^2}{5}-\dfrac{x^2}{5}=1$

ਅਧਿਆਇ 11 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. ਫੋਕਸ ਦਿੱਤੇ ਵਿਆਸ ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਹੈ।

2. 2.23 ਮੀ. (ਲਗਭਗ) **3.** 9.11 ਮੀ. (ਲਗਭਗ) **4.** 1.56 ਮੀ. (ਲਗਭਗ) **5.** $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{9}=1$

6. 18 ਵਰਗ ਇਕਾਈਆਂ **7.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ **8.** $8\sqrt{3}a$

ਅਭਿਆਸ 12.1

1. y ਅਤੇ z ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਸਿਫ਼ਰ ਹਨ। **2.** y - ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ।

3. I, IV, VIII, V, VI, II, III, VII

4. (i) XY - ਤਲ (ii) $(x, y, 0)$ (iii) ਅੱਠ

ਅਭਿਆਸ 12.2

1. (i) $2\sqrt{5}$ (ii) $\sqrt{43}$ (iii) $2\sqrt{26}$ (iv) $2\sqrt{5}$

4. $x - 2z = 0$ **5.** $9x^2 + 25y^2 + 25z^2 - 225 = 0$

ਅਭਿਆਸ 12.3

1. (i) $\left(\frac{-4}{5},\frac{1}{5},\frac{27}{5}\right)$ (ii) $(-8,17,3)$ **2.** 1 : 2

3. 2 : 3 **5.** (6, – 4, – 2), (8, – 10, 2)

ਅਧਿਆਇ 12 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. (1, – 2, 8) **2.** $7, \sqrt{34}, 7$ **3.** $a = -2,\ b = -\frac{16}{3},\ c = 2$

4. (0, 2, 0) ਅਤੇ (0, – 6, 0) **5.** (4, – 2, 6)

6. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 7y + 2z = \frac{k^2 - 109}{2}$

ਅਭਿਆਸ 13.1

1. 6 **2.** $\left(\pi - \frac{22}{7}\right)$ **3.** π **4.** $\frac{19}{2}$

5. $-\frac{1}{2}$ **6.** 5 **7.** $\frac{11}{4}$ **8.** $\frac{108}{7}$

9. b **10.** 2 **11.** 1 **12.** $-\frac{1}{4}$

13. $\frac{a}{b}$ **14.** $\frac{a}{b}$ **15.** $\frac{1}{\pi}$ **16.** $\frac{1}{\pi}$

17. 4 **18.** $\frac{a+1}{b}$ **19.** 0 **20.** 1

21. 0 **22.** 2 **23.** 3, 6

24. $x = 1$ ਤੇ ਸੀਮਾ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ।

25. $x = 0$ ਤੇ ਸੀਮਾ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ। **26.** $x = 0$ ਤੇ ਸੀਮਾ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ।

27. 0 **28.** $a=0, b=4$

29. $\lim_{x\to a_1} f(x) = 0$ ਅਤੇ $\lim_{x\to a} f(x) = (a-a_1)(a-a_2)\ldots(a-a_n)$

30. ਸਾਰੇ $a \neq 0$ ਲਈ $\lim_{x\to a} f(x)$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ। **31.** 2

32. $\lim_{x\to 0} f(x)$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਲਈ $m = n$ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। m ਅਤੇ n ਦੀ ਕਿਸੇ ਵੀ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਮੁੱਲ ਲਈ $\lim_{x\to 1} f(x)$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 13.2

1. 20 **2.** 99 **3.** 1

4. (i) $3x^2$ (ii) $2x - 3$ (iii) $\frac{-2}{x^3}$ (iv) $\frac{-2}{(x-1)^2}$

6. $nx^{n-1} + a(n-1)x^{n-2} + a^2(n-2)x^{n-3} + \ldots + a^{n-1}$

7. (i) $2x-a-b$ (ii) $4ax\left(ax^2+b\right)$ (iii) $\frac{a-b}{(x-b)^2}$

8. $\frac{nx^n - anx^{n-1} - x^n + a^n}{(x-a)^2}$

9. (i) 2 (ii) $20x^3 - 15x^2 + 6x - 4$ (iii) $\frac{-3}{x^4}(5+2x)$ (iv) $15x^4 + \frac{24}{x^5}$

(v) $\frac{-12}{x^5} + \frac{36}{x^{10}}$ (vi) $\frac{-2}{(x+1)^2} - \frac{x(3x-2)}{(3x-1)^2}$

10. $-\sin x$

11. (i) $\cos 2x$ (ii) $\sec x \tan x$

(iii) $5\sec x \tan x - 4\sin x$ (iv) $-\operatorname{cosec} x \cot x$

(v) $-3\operatorname{cosec}^2 x - 5\operatorname{cosec} x \cot x$ (vi) $5\cos x + 6\sin x$

(vii) $2\sec^2 x - 7\sec x \tan x$

ਅਧਿਆਇ 13 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. (i) – 1 (ii) $\frac{1}{x^2}$ (iii) cos (x + 1) (iv) $-\sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$ **2.** 1

3. $\frac{-qr}{x^2}+ps$ **4.** $2c\,(ax+b)\,(cx+d)+a\,(cx+d)^2$

5. $\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ **6.** $\frac{-2}{(x-1)^2},\ x\neq 0,1$ **7.** $\frac{-(2ax+b)}{(ax^2+bx+c)^2}$

8. $\frac{-apx^2-2bpx+ar-bq}{(px^2+qx+r)^2}$ **9.** $\frac{apx^2+2bpx+bq-ar}{(ax+b)^2}$ **10.** $\frac{-4a}{x^5}+\frac{2b}{x^3}-\sin x$

11. $\frac{2}{\sqrt{x}}$ **12.** $na(ax+b)^{n-1}$

13. $(ax+b)^{n-1}(cx+d)^{m-1}\left[mc(ax+b)+na(cx+d)\right]$ **14.** $\cos(x+a)$

15. $-\operatorname{cosec}^3 x-\operatorname{cosec} x\cot^2 x$ **16.** $\frac{-1}{1+\sin x}$

17. $\frac{-2}{(\sin x-\cos x)^2}$ **18.** $\frac{2\sec x\tan x}{(\sec x+1)^2}$ **19.** $n\sin^{n-1}x\cos x$

20. $\frac{bc\cos x+ad\sin x+bd}{(c+d\cos x)^2}$ **21.** $\frac{\cos a}{\cos^2 x}$

22. $x^3(5x\cos x+3x\sin x+20\sin x-12\cos x)$ **23.** $-x^2\sin x-\sin x+2x\cos x$

24. $-q\sin x(ax^2+\sin x)+(p+q\cos x)(2ax+\cos x)$

25. $-\tan^2 x(x+\cos x)+(x-\tan x)(1-\sin x)$

26. $\frac{35+15x\cos x+28\cos x+28x\sin x-15\sin x}{(3x+7\cos x)^2}$

27. $\frac{x\cos\frac{\pi}{4}(2\sin x-x\cos x)}{\sin^2 x}$ **28.** $\frac{1+\tan x-x\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$

29. $(x+\sec x)(1-\sec^2 x)+(x-\tan x).(1+\sec x\tan x)$ **30.** $\frac{\sin x-n\,x\cos x}{\sin^{n+1}x}$

ਅਭਿਆਸ 14.1

1. (i) ਇਹ ਵਾਕ ਹਮੇਸ਼ਾ ਝੂਠ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਕਿਸੇ ਮਹੀਨੇ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ 31 ਦਿਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਕਥਨ ਹੈ।

(ii) ਇਹ ਇੱਕ ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਕੁਝ ਲੋਕਾਂ ਲਈ ਗਣਿਤ ਸਰਲ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਕੁਝ ਹੋਰ ਲੋਕਾਂ ਲਈ ਔਖਾ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।

(iii) ਇਹ ਵਾਕ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਸੱਚ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਜੋੜਫਲ 12 ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ 10 ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਕਥਨ ਹੈ।

(iv) ਇਹ ਵਾਕ ਕਦੇ ਸੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਕਦੇ ਝੂਠ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ 2 ਦਾ ਵਰਗ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ 3 ਦਾ ਵਰਗ ਇਕ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(v) ਇਹ ਵਾਕ ਕਦੇ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਕਦੇ ਝੂਠ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਵਰਗ ਅਤੇ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਭੁਜਾਵਾਂ ਸਮਾਨ ਲੰਬਾਈ ਦੀਆਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਜਦੋਂ ਕਿ ਆਇਤ ਅਤੇ ਸਮਲੰਬ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਸਮਾਨ ਲੰਬਾਈ ਦੀਆਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(vi) ਇਹ ਇੱਕ ਆਦੇਸ਼ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(vii) ਇਹ ਵਾਕ ਝੂਠ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਗੁਣਨਫਲ (–8) ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਕਥਨ ਹੈ।

(viii) ਇਹ ਵਾਕ ਹਮੇਸ਼ਾ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਕਥਨ ਹੈ।

(ix) ਦਿੱਤੇ ਸੰਬੰਧ ਤੋਂ ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਦਿਨ ਦਾ ਉਲੇਖ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(x) ਇਹ ਇੱਕ ਸੱਚ ਕਥਨ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ $a + i \times 0$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

2. ਤਿੰਨ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ :

(i) ਇਸ ਕਮਰੇ ਵਿੱਚ ਹਾਜ਼ਰ ਵਿਅਕਤੀ ਦਲੇਰ ਹੈ। ਇਹ ਇੱਕ ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਸੰਬੰਧ ਤੋਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਇੱਥੇ ਕਿਸ ਕਮਰੇ ਬਾਰੇ ਕਿਹਾ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ ਅਤੇ ਦਲੇਰ ਸ਼ਬਦ ਵੀ ਸਪੱਸ਼ਟ ਰੂਪ ਤੋਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(ii) ਉਹ ਇੱਕ ਇੰਜੀਨੀਅਰਿੰਗ ਦੀ ਵਿਦਿਆਰਥਣ ਹੈ। ਇਹ ਵੀ ਇੱਕ ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਕਿਹੜੀ ਹੈ।

(iii) "$\cos^2\theta$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹਮੇਸ਼ਾਂ 1/2 ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ"। ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਪਤਾ ਨਾ ਹੋਵੇ ਕਿ θ ਕੀ ਹੈ ਅਸੀਂ ਇਹ ਨਹੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਕਿ ਵਾਕ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾ ਨਹੀਂ।

ਅਭਿਆਸ 14.2

1. (i) ਚੇਨੱਈ ਤਮਿਲਨਾਡੂ ਦੀ ਰਾਜਧਾਨੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(ii) $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਸਮਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

(iii) ਸਾਰੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਮਬਾਹੂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹਨ।

(iv) ਸੰਖਿਆ 2 ਸੰਖਿਆ 7 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(v) ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ।

2. (i) ਕਥਨ "ਸੰਖਿਆ x ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।" ਪਹਿਲਾ ਕਥਨ ਦਾ ਨਿਖੇਪਨ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਦੂਜੇ ਕਥਨ ਦੇ ਸਮਤੁੱਲ ਹੈ। ਇਹ ਇਸ ਕਾਰਨ ਤੋਂ ਕਿ ਜਦੋਂ ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ ਅਪਰਿਮੇਯ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਪਰਿਮੇਯ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਇੱਕ-ਦੂਜੇ ਦੇ ਨਿਖੇਪਨ ਹਨ।

(ii) ਕਥਨ "x ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।" ਪਹਿਲੇ ਕਥਨ ਦਾ ਨਿਖੇਪਨ ਹੈ, ਜਿਹੜਾ ਦੂਜੇ ਕਥਨ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦੋਵੇਂ ਕਥਨ ਇੱਕ-ਦੂਜੇ ਦੇ ਨਿਖੇਪਨ ਹਨ।

3. (i) ਸੰਖਿਆ 3 ਅਭਾਜ ਹੈ; ਸੰਖਿਆ 3 ਟਾਂਕ ਹੈ (ਸੱਚ)।

(ii) ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅੰਕ ਧਨ ਹਨ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਰਿਣ ਹਨ (ਝੂਠ)।

(iii) ਸੰਖਿਆ 100 ਸੰਖਿਆ 3 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੈ, ਸੰਖਿਆ 100 ਸੰਖਿਆ 11 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੈ ਅਤੇ ਸੰਖਿਆ 100 ਸੰਖਿਆ 5 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੈ (ਝੂਠ)।

ਅਭਿਆਸ 14.3

1. (i) "ਅਤੇ"। ਘਟਕ ਕਥਨ :

ਸਾਰੀਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਸਮਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

(ii) "ਜਾਂ"। ਘਟਕ ਕਥਨ :

ਕਿਸੇ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗ ਧਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਕਿਸੇ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗ ਰਿਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(iii) "ਅਤੇ"। ਘਟਕ ਕਥਨ :

ਰੇਤ ਧੁੱਪ ਵਿੱਚ ਜਲਦੀ ਗਰਮ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਰੇਤ ਰਾਤ ਵਿੱਚ ਜਲਦੀ ਠੰਡੀ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(iv) "ਅਤੇ"। ਘਟਕ ਕਥਨ :

$x = 2$ ਸਮੀਕਰਣ $3x^2 - x - 10 = 0$ ਦਾ ਮੂਲ ਹੈ।

$x = 3$ ਸਮੀਕਰਣ $3x^2 - x - 10 = 0$ ਦਾ ਮੂਲ ਹੈ।

2. (i) "ਇੱਕ ਇਹੋ-ਜਿਹੇ ਦਾ ਹੋਂਦ ਹੈ"। ਨਿਖੇਪਨ

ਇੱਕ ਇਹੋ-ਜਿਹੀ ਸੰਖਿਆ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ ਜਿਹੜੀ ਆਪਣੇ ਵਰਗ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

(ii) "ਹਰੇਕ ਲਈ"। ਨਿਖੇਪਨ

ਇੱਕ ਇਹੋ-ਜਿਹੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ x ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਤਾਂ ਕੀ x, $x + 1$ ਤੋਂ ਘੱਟ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(iii) "ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਹੀ ਹੋਂਦ ਹੈ।" ਨਿਖੇਪਨ

ਭਾਰਤ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਰਾਜ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਜਿਸਦੀ ਰਾਜਧਾਨੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।

3. ਨਿਖੇਪਨ ਨਹੀਂ ਹੈ। (i) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਕਥਨ ਦਾ ਨਿਖੇਪਨ : "x ਅਤੇ y ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਹੋਂਦ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ, ਕਿ $x + y \neq y + x$"। ਜਿਹੜਾ (ii) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਤੋਂ ਵੱਖ ਹੈ।

4. (i) ਨਿਵੇਕਲਾ (ii) ਸੰਮਿਲਿਤ (iii) ਨਿਵੇਕਲਾ

ਅਭਿਆਸ 14.4

1. (i) ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਟਾਂਕ ਹੈ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਉਸਦਾ ਵਰਗ ਵੀ ਟਾਂਕ ਹੈ।

(ii) ਕੋਈ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਟਾਂਕ ਹੈ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ ਉਸਦਾ ਵਰਗ ਟਾਂਕ ਹੈ।

(iii) ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਟਾਂਕ ਹੋਣ ਲਈ ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ ਕਿ ਉਸਦਾ ਵਰਗ ਟਾਂਕ ਹੋਵੇ।

(iv) ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਵਰਗ ਦੇ ਟਾਂਕ ਹੋਣ ਲਈ ਇਹ ਕਾਫ਼ੀ ਹੈ ਕਿ ਸੰਖਿਆ ਟਾਂਕ ਹੈ।

(v) ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗ ਟਾਂਕ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਟਾਂਕ ਨਹੀਂ ਹੈ।

2. (i) ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ : ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ x ਟਾਂਕ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਤਾਂ x ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਲਟ : ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਟਾਂਕ ਹੈ, ਤਾਂ x ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

(ii) ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ : ਜੇਕਰ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਇੱਕ-ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਤੱਲ ਵਿੱਚ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਉਲਟ : ਜੇਕਰ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਇੱਕ-ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਤੱਲ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ।

(iii) ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ : ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਵਸਤੂ ਘੱਟ ਤਾਪਮਾਨ ਤੇ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਹ ਵਸਤੂ ਠੰਡੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਲਟ : ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਵਸਤੂ ਘੱਟ ਤਾਪਮਾਨ ਤੇ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਹ ਵਸਤੂ ਠੰਡੀ ਹੈ।

(iv) ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ : ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਨਿਗਮਨਾਤਮਕ ਵਿਵੇਚਨ ਕਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਜਿਆਮਿਤੀ ਵਿਸ਼ੇ ਨੂੰ ਸਮਝ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਉਲਟ : ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਨੂੰ ਪਤਾ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਨਿਗਮਨਾਤਮਕ ਵਿਵੇਚਨ ਕਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਜਿਆਮਿਤੀ ਵਿਸ਼ੇ ਨੂੰ ਸਮਝ ਨਹੀਂ ਸਕਦੇ ਹੋ।

(v) ਇਸ ਕਥਨ ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ : "ਜੇਕਰ x ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਤਾਂ x ਸੰਖਿਆ 4 ਤੋਂ ਭਾਜ ਹੈ।".

ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ : "ਜੇਕਰ x ਸੰਖਿਆ 4 ਤੋਂ ਭਾਜ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਤਾਂ x ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ।"

ਉਲਟ : "ਜੇਕਰ x ਸੰਖਿਆ 4 ਤੋਂ ਭਾਜ ਹੈ, ਤਾਂ x ਸੰਖਿਆ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।"

3. (i) ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਨੂੰ ਨੌਕਰੀ ਮਿਲ ਗਈ ਹੈ, ਤਾਂ ਤੁਹਾਡੀ ਯੋਗਤਾ ਚੰਗੀ ਹੈ।

(ii) ਜੇਕਰ ਕੇਲੇ ਦਾ ਰੁੱਖ ਇੱਕ ਮਹੀਨੇ ਤੱਕ ਗਰਮ ਬਣਿਆ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਕੇਲੇ ਦੇ ਰੁੱਖ ਵਿੱਚ ਫੁੱਲ ਲੱਗਣਗੇ।

(iii) ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਇੱਕ-ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਸਮਦੋਭਾਜ ਕਰਦੇ ਹਨ, ਤਾਂ ਉਹ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ।

(iv) ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਜਮਾਤ ਵਿਚ A^+ ਗਰੇਡ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹੋ, ਤਾਂ ਤੁਸੀ ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਸਾਰੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਹੱਲ ਕਰ ਲੈਂਦੇ ਹੋ।

4. **a** (i) ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ (ii) ਉਲਟ

b (i) ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ (ii) ਉਲਟ

ਅਭਿਆਸ 14.5

5. (i) ਝੂਠ। ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ ਜੀਵਾ ਚੱਕਰ ਨੂੰ ਦੋ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ।

(ii) ਝੂਠ। ਇਸਨੂੰ ਇੱਕ ਪ੍ਰਤਿਉਦਾਹਰਣ ਰਾਹੀਂ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਇਹੋ-ਜਿਹੀ ਜੀਵਾ ਜਿਹੜੀ ਵਿਆਸ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇੱਕ ਪ੍ਰਤਿਉਦਾਹਰਣ ਹੈ।

(iii) ਸੱਚ। ਜੇਕਰ ਇਲਿਪਸ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ $a = b$ ਰੱਖਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਉਹ ਚੱਕਰ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

(iv) ਸੱਚ। ਅਸਮਿਕਾ ਦੇ ਨਿਯਮ ਰਾਹੀਂ।

(v) ਝੂਠ। ਕਿਉਂਕਿ 11 ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $\sqrt{11}$ ਅਪਰਿਮੇਯ ਹੈ।

ਅਧਿਆਇ 14 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. (i) ਇੱਕ ਇਹੋ-ਜਿਹੀ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆ x ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਕਿ $x–1$ ਧਨਾਤਮਕ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(ii) ਇੱਕ ਇਹੋ-ਜਿਹੀ ਬਿੱਲੀ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਜਿਹੜੀ ਖਰੋਂਚਦੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(iii) ਇੱਕ ਇਹੋ-ਜਿਹੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ x ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਕਿ ਨਾ ਤਾਂ $x > 1$ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ $x < 1$ ਹੈ।

(iv) ਕਿਸੇ ਇਹੋ-ਜਿਹੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ x ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ $0 < x < 1$ ਹੈ।

2. (i) ਕਥਨ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਵੀ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, "ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਧਨ ਪੂਰਨ ਅੰਕ ਅਭਾਜ ਹੈ, ਤਾਂ 1 ਅਤੇ ਆਪਣੇ ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਇਸਦਾ ਕੋਈ ਹੋਰ ਭਾਜ ਨਹੀਂ ਹੈ।"

ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ : ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਧਨ ਪੂਰਨ ਅੰਕ 1 ਅਤੇ ਆਪਣੇ ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਹੋਰ ਭਾਜਕ ਵੀ ਹਨ, ਤਾਂ ਪੂਰਨ ਅੰਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(ii) ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਵੀ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, "ਜੇਕਰ ਦਿਨ ਵਿਚ ਧੁੱਪ ਹੈ ਤਾਂ ਮੈਂ ਸਮੁੰਦਰ ਤਟ ਤੇ ਜਾਂਦਾ ਹਾਂ।"

ਉਲਟ : ਜੇਕਰ ਮੈਂ ਸਮੁੰਦਰ ਤਟ ਤੇ ਨਹੀਂ ਜਾਂਦਾ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਦਿਨ ਵਿੱਚ ਧੁੱਪ ਹੈ।

ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ : ਜੇਕਰ ਮੈਂ ਸਮੁੰਦਰ ਤਟ ਤੇ ਜਾਂਦਾ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਦਿਨ ਵਿੱਚ ਧੁੱਪ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(iii) ਉਲਟ : ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਨੂੰ ਪਿਆਸ ਲੱਗੀ ਹੈ, ਤਾਂ ਬਾਹਰ ਗਰਮੀ ਹੈ।

ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ : ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਨੂੰ ਪਿਆਸ ਨਹੀਂ ਲੱਗੀ ਹੈ, ਤਾਂ ਬਾਹਰ ਗਰਮੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।

3. (i) ਜੇਕਰ ਸਰਵਰ ਤੇ ਲਾਗ ਆਨ ਹੈ, ਤਾਂ ਪਾਸਵਰਡ ਪਤਾ ਹੈ।

(ii) ਜੇਕਰ ਮੀਂਹ ਪੈਂਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਟ੍ਰੈਫ਼ਿਕ ਦੀ ਆਵਾਜਾਈ ਵਿਚ ਰੁਕਾਵਟ ਆਉਂਦੀ ਹੈ।

(iii) ਜੇਕਰ ਤੁਸੀ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਸ਼ੁਲਕ ਦਾ ਭੁਗਤਾਨ ਕਰਦੇ ਹੋ, ਤਾਂ ਤੁਸੀ ਵੈਬਸਾਈਟ ਵਿਚ ਦਾਖਲਾ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹੋ।

4. (i) ਤੁਸੀਂ ਟੈਲੀਵੀਜ਼ਨ ਵੇਖਦੇ ਹੋ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਡਾ ਮਨ ਮੁਕਤ ਹੈ।

(ii) ਤੁਸੀ A+ ਗਰੇਡ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹੋ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਸਾਰਾ ਘਰੇਲੂ ਕੰਮ ਠੀਕ ਢੰਗ ਨਾਲ ਕਰਦੇ ਹੋ।

(iii) ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਸਮਾਨ ਕੋਣੀ ਹੈ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ ਉਹ ਇੱਕ ਆਇਤ ਹੈ।

5. "ਅਤੇ" ਤੋਂ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ : 25 ਸੰਖਿਆ 5 ਅਤੇ 8 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ।

ਇਹ ਝੂਠ ਹੈ।

"ਜਾਂ" ਤੋਂ ਦਿੱਤਾ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ : 25 ਸੰਖਿਆ 5 ਜਾਂ 8 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ।

ਇਹ ਸੱਚ ਹੈ।

7. ਅਭਿਆਸ 14.4 ਦਾ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਸੰਖਿਆ 1 ਵੇਖੋ।

ਅਭਿਆਸ 15.1

1. 3 **2.** 8.4 **3.** 2.33 **4.** 7 **5.** 6.32

6. 16 **7.** 3.23 **8.** 5.1 **9.** 157.92 **10.** 11.28

11. 10.34 **12.** 7.35

ਅਭਿਆਸ 15.2

1. 9, 9.25 **2.** $\frac{n+1}{2}, \frac{n^2-1}{12}$ **3.** 16.5, 74.25 **4.** 19, 43.4

5. 100, 29.09 **6.** 64, 1.69 **7.** 107, 2276 **8.** 27, 132

9. 93, 105.52, 10.27

10. 5.55, 43.5

ਅਭਿਆਸ 15.3

1. B **2.** Y **3.** (i) B (ii) B

4. A **5.** ਭਾਰ

ਅਧਿਆਇ 15 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. 4, 8 **2.** 6, 8 **3.** 24, 12

5. (i) 10.1, 1.99 (ii) 10.2, 1.98

6. ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਰਸਾਇਣ ਸ਼ਾਸਤਰ ਅਤੇ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਗਣਿਤ **7.** 20, 3.036

ਅਭਿਆਸ 16.1

1. {HHH, HHT, HTH, THH, TTH, HTT, THT, TTT}

2. {$(x, y) : x, y$ = 1,2,3,4,5,6}
ਜਾਂ {(1,1), (1,2), (1,3), ..., (1,6), (2,1), (2,2), ..., (2,6), ..., (6, 1), (6, 2), ..., (6,6)}

3. {HHHH, HHHT, HHTH, HTHH, THHH, HHTT, HTHT, HTTH, THHT, THTH, TTHH, HTTT, THTT, TTHT, TTTH, TTTT}

4. {H1, H2, H3, H4, H5, H6, T1, T2, T3, T4, T5, T6}

5. {H1, H2, H3, H4, H5, H6, T}

6. {XB_1, XB_2, XG_1, XG_2, YB_3, YG_3, YG_4, YG_5}

7. {R1, R2, R3, R4, R5, R6, W1, W2, W3, W4, W5, W6, B1, B2, B3, B4, B5, B6}

8. (i) {BB, BG, GB, GG} (ii) {0, 1, 2}

9. {RW, WR, WW}

10. {HH, HT, T1, T2, T3, T4, T5, T6}

11. {DDD, DDN, DND, NDD, DNN, NDN, NND, NNN}

12. {T, H1, H3, H5, H21, H22, H23, H24, H25, H26, H41, H42, H43, H44, H45, H46, H61, H62, H63, H64, H65, H66}

13. {(1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3)}

14. {1HH, 1HT, 1TH, 1TT, 2H, 2T, 3HH, 3HT, 3TH, 3TT, 4H, 4T, 5HH, 5HT, 5TH, 5TT, 6H, 6T}

15. {TR_1, TR_2, TB_1, TB_2, TB_3, H1, H2, H3, H4, H5, H6}

16. {6, (1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6), (1,1,6), (1,2,6), ..., (1,5,6), (2,1,6), (2,2,6), ..., (2,5,6), ..., (5,1,6), (5,2,6), ... }

ਅਭਿਆਸ 16.2

1. ਨਹੀਂ

2. (i) {1, 2, 3, 4, 5, 6} (ii) ϕ (iii) {3, 6} (iv) {1, 2, 3} (v) {6}
(vi) {3, 4, 5, 6}, $A \cup B$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, $A \cap B = \phi$, $B \cup C$ = {3, 6}, $E \cap F$ = {6}, $D \cap E = \phi$,
A – C = {1,2,4,5}, D – E = {1,2,3}, $E \cap F' = \phi$, F' = {1, 2}

3. A = {(3,6), (4,5), (5, 4), (6,3), (4,6), (5,5), (6,4), (5,6), (6,5), (6,6)}
B = {(1,2), (2,2), (3, 2), (4,2), (5,2), (6,2), (2,1), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)}
C ={(3,6), (6,3), (5, 4), (4,5), (6,6)}
A ਅਤੇ B, B ਅਤੇ C ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੇ ਹਨ।

4. (i) A ਅਤੇ B; A ਅਤੇ C; B ਅਤੇ C; C ਅਤੇ D (ii) A ਅਤੇ C (iii) B ਅਤੇ D

5. (i) "ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਦੋ ਪਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ", ਅਤੇ "ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਦੋ ਚਿੱਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ"

(ii) "ਕੋਈ ਪਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਾ ਹੋਣਾ", "ਠੀਕ ਇੱਕ ਪਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ" ਅਤੇ "ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਦੋ ਪਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ"

(iii) "ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਦੋ ਚਿੱਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ" ਅਤੇ "ਠੀਕ ਦੋ ਚਿੱਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ"

(iv) "ਠੀਕ ਇੱਕ ਪਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ" ਅਤੇ "ਠੀਕ ਦੋ ਪਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ"

(v) "ਠੀਕ ਇੱਕ ਚਿੱਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ" ਅਤੇ "ਠੀਕ ਦੋ ਚਿੱਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ" ਅਤੇ "ਠੀਕ ਤਿੰਨ ਚਿੱਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ"

ਟਿੱਪਣੀ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦੇ ਉੱਤਰ ਵਿੱਚ ਘਟਨਾਵਾਂ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ।

6. A = {(2, 1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

B = {(1, 1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)}

C = {(1, 1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (4,1)}

(i) A′ = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)} = B

(ii) B′ = {(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)} = A

(iii) $A \cup B$ = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,5), (2,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)} = S

(iv) $A \cap B = \phi$

(v) A – C = {(2,4), (2,5), (2,6), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

(vi) $B \cup C$ = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)}

(vii) $B \cap C$ = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (3,1), (3,2)}

(viii) $A \cap B' \cap C'$ = {(2,4), (2,5), (2,6), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

7. (i) ਸੱਚ (ii) ਸੱਚ (iii) ਸੱਚ (iv) ਝੂਠ (v) ਝੂਠ (vi) ਝੂਠ

ਅਭਿਆਸ 16.3

1. (a) ਹਾਂ (b) ਹਾਂ (c) ਨਹੀਂ (d) ਨਹੀਂ (e) ਨਹੀਂ **2.** $\frac{3}{4}$

3. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{2}{3}$ (iii) $\frac{1}{6}$ (iv) 0 (v) $\frac{5}{6}$ **4.** (a) 52 (b) $\frac{1}{52}$ (c) (i) $\frac{1}{13}$ (ii) $\frac{1}{2}$

5. (i) $\frac{1}{12}$ (ii) $\frac{1}{12}$ **6.** $\frac{3}{5}$

7. ₹ 4.00 ਲਾਭ, ₹ 1.50 ਲਾਭ, ₹ 1.00 ਹਾਨੀ, ₹ 3.50 ਹਾਨੀ, ₹ 6.00 ਹਾਨੀ

P (₹ 4.00 ਜਿੱਤਣਾ) $=\frac{1}{16}$, P(₹ 1.50 ਜਿੱਤਣਾ) $=\frac{1}{4}$, P (₹ 1.00 ਜਿੱਤਣਾ) $=\frac{3}{8}$

P (₹ 3.50 ਹਾਨੀ) $=\frac{1}{4}$, P (₹ 6.00 ਹਾਨੀ) $=\frac{1}{16}$

8. (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{3}{8}$ (iii) $\frac{1}{2}$ (iv) $\frac{7}{8}$ (v) $\frac{1}{8}$ (vi) $\frac{1}{8}$ (vii) $\frac{3}{8}$ (viii) $\frac{1}{8}$ (ix) $\frac{7}{8}$

9. $\frac{9}{11}$ **10.** (i) $\frac{6}{13}$ (ii) $\frac{7}{13}$ **11.** $\frac{1}{38760}$

12. (i) ਨਹੀਂ, ਕਿਉਂਕਿ $P(A\cap B)$, P(A) ਅਤੇ P(B) ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਜਾਂ ਉਸਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। (ii) ਹਾਂ

13. (i) $\frac{7}{15}$ (ii) 0.5 (iii) 0.15 **14.** $\frac{4}{5}$

15. (i) $\frac{5}{8}$ (ii) $\frac{3}{8}$ **16.** ਨਹੀਂ **17.** (i) 0.58 (ii) 0.52 (iii) 0.74

18. 0.6 **19.** 0.55 **20.** 0.65

21. (i) $\frac{19}{30}$ (ii) $\frac{11}{30}$ (iii) $\frac{2}{15}$

ਅਧਿਆਇ 16 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. (i) $\frac{^{20}C_5}{^{60}C_5}$ (ii) $1-\frac{^{30}C_5}{^{60}C_5}$ **2.** $\frac{^{13}C_3 \cdot {}^{13}C_1}{^{52}C_4}$

3. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{5}{6}$ **4.** (a) $\frac{999}{1000}$ (b) $\frac{^{9990}C_2}{^{10000}C_2}$ (c) $\frac{^{9990}C_{10}}{^{10000}C_{10}}$

5. (a) $\frac{17}{33}$ (b) $\frac{16}{33}$ **6.** $\frac{2}{3}$

7. (i) 0.88 (ii) 0.12 (iii) 0.19 (iv) 0.34 **8.** $\frac{4}{5}$

9. (i) $\frac{33}{83}$ (ii) $\frac{3}{8}$ **10.** $\frac{1}{5040}$

ਪੂਰਕ ਪਾਠ ਸਮੱਗਰੀ

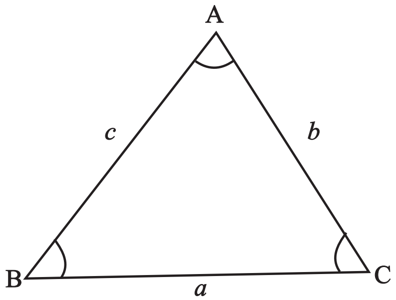
ਅਧਿਆਇ 3

3.6 ਸਾਈਨ (sine) ਅਤੇ ਕੋਸਾਈਨ (cosine) ਸੂਤਰਾਂ ਦੇ ਸਬੂਤ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਸਰਲ ਵਰਤੋਂ

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ABC ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ। ਕੋਣ A ਤੋਂ ਸਾਡਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਭੁਜਾਵਾਂ AB ਅਤੇ AC ਤੋਂ ਬਣਿਆ ਕੋਣ, ਜੋ 0° ਅਤੇ 180° ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਸਥਿਤ ਹੈ। ਕੋਣਾਂ B ਅਤੇ C ਨੂੰ ਵੀ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸਿਖਰ C, A ਅਤੇ B ਦੀਆਂ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ c, a ਅਤੇ b ਤੋਂ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇਗਾ। (ਵੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 3.15)

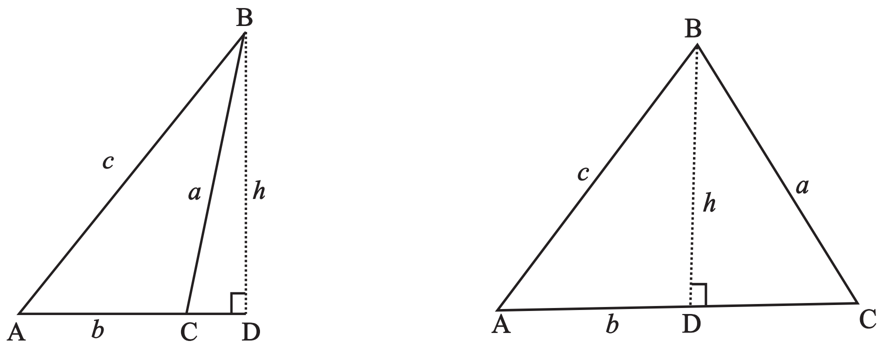
ਪ੍ਰਮੇਯ 1 : (Sine ਸੂਤਰ) ਕਿਸੇ ਵੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਵਿੱਚ, ਭੁਜਾਵਾਂ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਸਾਈਨਾਂ ਦੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤੀ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਭਾਵ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਵਿੱਚ

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$



ਚਿੱਤਰ 3.15

ਸਬੂਤ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 3.16(i) ਅਤੇ (ii) ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਦੋਹਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ΔABC ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 3.16

ਸਿਖਰ B ਤੋਂ ਸਿਖਰ ਲੰਬ h ਖਿੱਚਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ, ਜਿਹੜਾ ਭੁਜਾ AC ਦੇ ਬਿੰਦੂ D ਤੇ ਮਿਲਦਾ ਹੈ। [(i) ਵਿੱਚ AC ਨੂੰ ਸਿਖਰ ਲੰਬ ਤੋਂ ਮਿਲਣ ਲਈ ਵਧਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।] ਚਿੱਤਰ 3.16(i) ਵਿੱਚ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABD ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$\sin A = \frac{h}{c}, \text{ ਭਾਵ } h = c \sin A \qquad (1)$$

ਅਤੇ $$\sin (180° - C) = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \sin C \qquad (2)$$

(1) ਅਤੇ (2) ਤੋਂ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :-

$$c \sin A = a \sin C, \text{ ਭਾਵ } \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \qquad (3)$$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \qquad (4)$$

(3) ਅਤੇ (4) ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :—

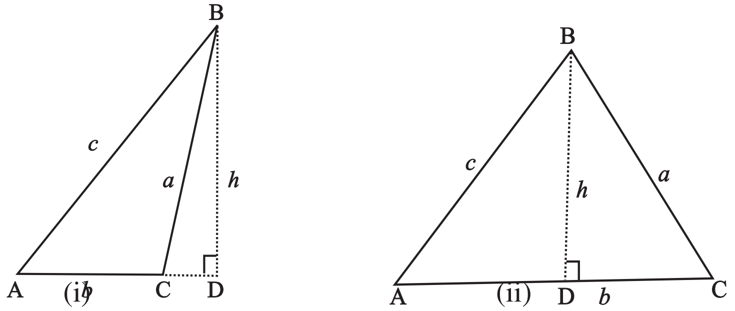
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

ਚਿੱਤਰ 3.16(ii) ਦੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ (3) ਅਤੇ (4) ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 2 : (ਕੋਸਾਈਨ ਸੂਤਰ) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ A, B ਅਤੇ C ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੇ ਕੋਣ ਹਨ ਅਤੇ a, b ਅਤੇ c ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਕੋਣਾਂ A, B ਅਤੇ C ਦੀਆਂ ਸਾਹਮਣੇ ਵਾਲੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ ਹਨ ਤਾਂ

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

ਸਬੂਤ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ABC ਚਿੱਤਰ 3.17(i) ਅਤੇ (ii) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਅਨੁਸਾਰ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 3.17

ਚਿੱਤਰ 3.17 (ii) ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :—

$$BC^2 = BD^2 + DC^2 = BD^2 + (AC - AD)^2$$
$$= BD^2 + AD^2 + AC^2 - 2AC.AD$$
$$= AB^2 + AC^2 - 2AC\ AB\cos A$$

ਜਾਂ $\quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

ਅਤੇ $\quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ, ਅਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 3.17(i) ਲਈ ਵੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ C ਅਧਿਕ ਕੋਣ ਹੈ।

ਜਦੋਂ ਕੋਣਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਕੋਸਾਈਨ ਸੂਤਰਾਂ ਦੇ ਸਰਲ ਸੂਤਰ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਜਾ ਰਹੇ ਹਨ :

$$\cos \mathrm{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos \mathrm{B} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos \mathrm{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

ਉਦਾਹਰਣ 25 : ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਵਿੱਚ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ :

$$\tan \frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2} = \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{\mathrm{A}}{2}$$

$$\tan \frac{\mathrm{C}-\mathrm{A}}{2} = \frac{c-a}{c+a} \cot \frac{\mathrm{B}}{2}$$

$$\tan \frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2} = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{\mathrm{C}}{2}$$

ਹੱਲ : ਸਾਈਨ ਸੂਤਰ ਤੋਂ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :—

$$\frac{a}{\sin \mathrm{A}} = \frac{b}{\sin \mathrm{B}} = \frac{c}{\sin \mathrm{C}} = k \text{ (ਮੰਨ ਲਓ)}$$

ਇਸ ਲਈ,
$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{k(\sin \mathrm{B} - \sin \mathrm{C})}{k(\sin \mathrm{B} + \sin \mathrm{C})}$$

$$= \frac{2\cos \frac{\mathrm{B}+\mathrm{C}}{2} \sin \frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2}}{2\sin \frac{\mathrm{B}+\mathrm{C}}{2} \cos \frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2}}$$

$$= \cot \frac{(\mathrm{B}+\mathrm{C})}{2} \tan \frac{(\mathrm{B}-\mathrm{C})}{2}$$

$$= \cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\mathrm{A}}{2}\right) \tan\left(\frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2}\right)$$

$$= \frac{\tan \frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2}}{\cot \frac{\mathrm{A}}{2}}$$

ਇਸ ਲਈ,
$$\tan \frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2} = \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{\mathrm{A}}{2}$$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਅਸੀਂ ਹੋਰ ਨਤੀਜਿਆਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਨਤੀਜਿਆਂ ਨੂੰ ਨੇਪੀਅਰ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ (Napier's Analogies) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜਾਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 26 : ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਵਿੱਚ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ,

$$a \sin (B - C) + b \sin (C - A) + c \sin (A - B) = 0 \text{ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।}$$

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$a \sin (B - C) = a [\sin B \cos C - \cos B \sin C] \qquad (1)$$

ਹੁਣ $\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c} = k$ (ਮੰਨ ਲਓ)

ਇਸ ਲਈ $\sin A = ak$, $\sin B = bk$, $\sin C = ck$

(1) ਵਿੱਚ, sin B ਅਤੇ sin C ਦੇ ਮੁੱਲ ਰੱਖ ਕੇ ਕੋਸਾਈਨ ਸੂਤਰ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਰਾਹੀਂ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :—

$$a \sin (B - C) = a\left[bk\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) - ck\left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}\right)\right]$$

$$= \frac{k}{2}\left(a^2 + b^2 - c^2 - c^2 - a^2 + b^2\right)$$

$$= k(b^2 - c^2)$$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $b \sin (C - A) = k (c^2 - a^2)$

ਅਤੇ $c \sin (A - B) = k (a^2 - b^2)$

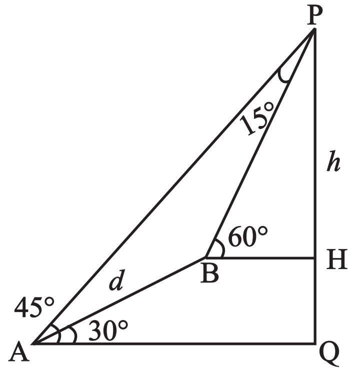
ਇਸ ਲਈ L.H.S. $= k (b^2 - c^2 + c^2 - a^2 + a^2 - b^2)$

$= 0 =$ R.H.S.

ਉਦਾਹਰਣ 27 : ਉਚਾਈ h ਵਾਲੀ ਕਿਸੇ ਖੜਵੀਂ ਮੀਨਾਰ PQ ਦੇ ਸਿਖਰ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ A ਤੋਂ ਉਚਾਣ ਕੋਣ 45° ਹੈ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ B, ਤੋਂ ਉਚਾਣ ਕੋਣ 60° ਹੈ, ਜਿੱਥੇ B ਬਿੰਦੂ A ਤੋਂ ਦੂਰੀ d 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਰੇਖਾ AB ਦੇ ਵੱਲ ਮਾਪਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ, ਜਿਹੜਾ AQ ਦੇ ਨਾਲ 30° ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ $d = h(\sqrt{3} - 1)$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਚਿੱਤਰ 3.18 ਤੋਂ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ :—

$\angle PAQ = 45°$, $\angle BAQ = 30°$, $\angle PBH = 60°$



ਚਿੱਤਰ 3.18

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ $\angle APQ = 45°, \angle BPH = 30°$, ਜਿਸ ਤੋਂ $\angle APB = 15°$

ਦੁਬਾਰਾ $\angle PAB = 15° \Rightarrow \angle ABP = 150°$

ਤ੍ਰਿਭੁਜ APQ, ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :—

$AP^2 = h^2 + h^2 = 2h^2$ (ਕਿਉਂ)

ਜਾਂ $AP = \sqrt{2}h$

Δ ABP, ਵਿੱਚ ਸਾਈਨ ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :—

$$\frac{AB}{\sin 15^\circ} = \frac{AP}{\sin 150^\circ} \Rightarrow \frac{d}{\sin 15^\circ} = \frac{\sqrt{2}h}{\sin 150^\circ}$$

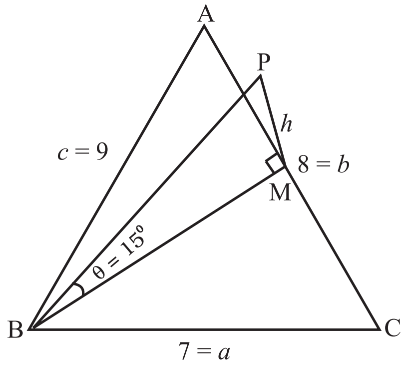
ਭਾਵ, $d = \dfrac{\sqrt{2}h \sin 15^\circ}{\sin 30^\circ}$

$= h(\sqrt{3} - 1)$ (ਕਿਉਂ)

ਉਦਾਹਰਣ 28 : ਇੱਕ ਬਿਜਲੀ ਦਾ ਖੰਬਾ ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਅਕਾਰ ਦੀ ਭੂਮੀ ABC ਦੀ ਭੁਜਾ AC ਦੇ ਮੱਧ-ਬਿੰਦੂ M ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ BC=7m, CA=8m ਅਤੇ AB =9m ਹੈ। ਇਹ ਬਿਜਲੀ ਦਾ ਖੰਬਾ ਬਿੰਦੂ B ਤੇ 15° ਦਾ ਕੋਣ ਅੰਤਰਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਬਿਜਲੀ ਦੇ ਖੰਬੇ ਦੀ ਉਚਾਈ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਚਿੱਤਰ 3.19 ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ : $AB = 9 = c$, $BC = 7$ m $= a$ ਅਤੇ

$AC = 8$ m $= b$.



ਚਿੱਤਰ 3.19

M ਭੁਜਾ AC ਦਾ ਮੱਧ-ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਜਿਸ 'ਤੇ ਉਚਾਈ h (ਮੰਨ ਲਉ) ਦਾ ਬਿਜਲੀ ਦਾ ਖੰਬਾ ਸਥਿਤ ਹੈ। ਦੁਬਾਰਾ, ਇਹ ਵੀ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਬਿਜਲੀ ਦਾ ਖੰਬਾ ਬਿੰਦੂ B ਤੇ ਕੋਣ θ (ਮੰਨ ਲਉ) ਅੰਤਰਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜਿਹੜਾ 15° ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

ΔABC ਵਿੱਚ ਕੋਸਾਈਨ ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{49 + 64 - 81}{2 \times 7 \times 8} = \frac{2}{7} \qquad (1)$$

ਇਸੇ ਪ੍ਰਕਾਰ, Δ BMC ਵਿੱਚ ਕੋਸਾਈਨ ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :—

$BM^2 = BC^2 + CM^2 - 2\, BC \times CM \cos C$

ਇੱਥੇ $CM = \frac{1}{2} CA = 4$, ਕਿਉਂਕਿ M ਭੁਜਾ AC ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ (1) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :-

$BM^2 = 49 + 16 - 2 \times 7 \times 4 \times \frac{2}{7}$

$= 49$

ਜਾਂ BM = 7

ਇਸ ਲਈ, ΔBMP ਜਿਸ ਦਾ ਬਿੰਦੂ M 'ਤੇ ਕੋਣ ਸਮਕੋਣ ਹੈ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :-

$$\tan\theta = \frac{PM}{BM} = \frac{h}{7}$$

ਜਾਂ $\frac{h}{7} = \tan(15°) = 2 - \sqrt{3}$ (ਕਿਉਂ)

ਜਾਂ $h = 7(2-\sqrt{3})\,m$

ਅਭਿਆਸ 3.5

ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਵਿੱਚ, ਜੇਕਰ $a = 18$, $b = 24$ ਅਤੇ $c = 30$ ਹੈ। ਤਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋ :—

1. cos A, cos B, cos C (ਉੱਤਰ $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0$)

2. sin A, sin B, sin C (ਉੱਤਰ $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1$)

ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਲਈ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ :-

3. $\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\sin\frac{C}{2}}$

4. $\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\cos\frac{C}{2}}$

5. $\sin\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{a}\cos\frac{A}{2}$

6. $a\,(b\cos C - c\cos B) = b^2 - c^2$

7. $a\,(\cos C - \cos B) = 2\,(b-c)\cos^2\frac{A}{2}$

8. $\frac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)} = \frac{b^2-c^2}{a^2}$

9. $(b+c)\cos\frac{B+C}{2} = a\cos\frac{B-C}{2}$

10. $a\cos A + b\cos B + c\cos C = 2a\sin B\sin C$

11. $\dfrac{\cos A}{a}+\dfrac{\cos B}{b}+\dfrac{\cos C}{c}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$

12. $(b^2-c^2)\cot A+(c^2-a^2)\cot B+(a^2-b^2)\cot C=0$

13. $\dfrac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A+\dfrac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B+\dfrac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C=0$

14. ਇੱਕ ਪਹਾੜੀ ਲੇਟਵੀਂ ਰੇਖਾ ਤੋਂ 15° ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਪਹਾੜੀ ਤੇ ਇੱਕ ਦਰੱਖਤ ਖੜਵੀਂ ਰੇਖਾ ਤੇ ਸਿੱਧਾ ਖੜਾ ਹੈ। ਪਹਾੜੀ ਦੀ ਢਾਲ ਵੱਲ 35ਮੀ ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੇ ਭੂਮੀ ਤੇ ਸਥਿਤ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ, ਦਰੱਖਤ ਦੇ ਸਿਖਰ ਦਾ ਉਚਾਣ ਕੋਣ 60° ਹੈ। ਦਰੱਖਤ ਦੀ ਉਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ। (ਉੱਤਰ $35\sqrt{2}m$)

15. ਦੋ ਜਹਾਜ਼ ਇੱਕ ਹੀ ਸਮੇਂ ਤੇ ਕਿਸੇ ਬੰਦਰਗਾਹ ਤੋਂ ਚੱਲਦੇ ਹਨ। ਇੱਕ 24 km/*h* ਦੀ ਚਾਲ ਤੋਂ N45°E ਵਿੱਚ ਚੱਲਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਜਾ 32 km/h ਦੀ ਚਾਲ ਤੋਂ S75°E ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵੱਲ ਚੱਲਦਾ ਹੈ। 3 ਘੰਟੇ ਦੇ ਬਾਅਦ ਦੋਨੋਂ ਜਹਾਜ਼ਾਂ ਦੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ। (ਉੱਤਰ 86.4 ਕਿ.ਮੀ. (ਲੱਗਭਗ))

16. ਦੋ ਦਰੱਖਤ A ਅਤੇ B ਇੱਕ ਨਦੀ ਦੇ ਇੱਕ ਹੀ ਪਾਸ ਖੜ੍ਹੇ ਹਨ। ਨਦੀ ਦੇ ਅੰਦਰ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ C ਤੋਂ ਦਰੱਖਤ A ਅਤੇ B ਦੀਆਂ ਦੂਰੀਆਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 250ਮੀ. ਅਤੇ 300 ਮੀ. ਹਨ। ਜੇਕਰ ਕੋਣ C, 45° ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਤਾਂ ਦਰੱਖਤਾਂ ਦੇ ਵਿਚਲੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ। ($\sqrt{2}=1.44$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ) (ਉੱਤਰ 215.5 ਮੀ.)

ਅਧਿਆਇ 5

5.7 ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ

ਅਸੀਂ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਪੰਨੇ 108-109 ਤੇ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਮੂਲਾਂ ਤੋਂ ਸੰਬੰਧਿਤ ਦੋ-ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਮਿਆਰੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਿਅਕਤ ਕਿਸੇ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਖਾਸ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰਾਂਗੇ। ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਰਾਹੀਂ ਇਸਨੂੰ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 12 : $-7-24i$ ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ, $x+iy=\sqrt{-7-24i}$ ਹੈ।

ਤਾਂ $(x+iy)^2=-7-24i$

ਜਾਂ $x^2-y^2+2xyi=-7-24i$

ਵਾਸਤਵਿਕ ਅਤੇ ਕਾਲਪਨਿਕ ਭਾਗਾਂ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰ ਰੱਖਣ ’ਤੇ, ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :-

$$x^2-y^2=-7 \quad (1)$$
$$2xy=-24$$

ਫ਼ਾਰਮੂਲੇ

$(x^2+y^2)=(x^2-y^2)+(2xy)^2$ ਤੋਂ,

$=49+576$

$=625$

ਇਸ ਲਈ $x^2+y^2=25$ (2)

(1) ਅਤੇ (2) ਤੋਂ $x^2=9$ ਅਤੇ $y^2=16$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਜਾਂ $x = \pm 3$ ਅਤੇ $y = \pm 4$

ਕਿਉਂਕਿ ਗੁਣਨਫਲ xy ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ,

$x = 3, y = -4$ ਜਾਂ r, $x = -3, y = 4$

ਇਸ ਲਈ $-7 - 24i$ ਦੇ ਵਰਗਮੂਲ $3 - 4i$ ਅਤੇ $-3 + 4i$ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 5.4

ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

1. $-15 - 8i$ (ਉੱਤਰ $1 - 4i, -1 + 4i$)
2. $-8 - 6i$ (ਉੱਤਰ $1 - 3i, -1 + 3i$)
3. $1 - i$ (ਉੱਤਰ $\left(\pm \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\, i\right)$)
4. $-i$ (ਉੱਤਰ $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\, i\right)$)
5. i (ਉੱਤਰ $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\, i\right)$)
6. $1 + i$ (ਉੱਤਰ $\left(\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\, i\right)$)

ਅਧਿਆਇ 9

9.7 ਅਸੀਮਿਤ G.P. ਅਤੇ ਉਸਦਾ ਜੋੜ

$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$ ਦੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ G.P. ਇੱਕ ਅਸੀਮਿਤ (infinite) G.P. ਕਹਿਲਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਹੁਣ, ਇੱਕ ਅਸੀਮਿਤ G.P. ਦੇ ਜੋੜ ਦਾ ਸੂਤਰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਆਉ ਹੇਠਾਂ G.P., 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

ਹੇਠਾਂ G.P. ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

$$1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \ldots$$

ਇੱਥੇ $a = 1$, $r = \frac{2}{3}$ ਹੈ। ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ,

$$S_n = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = 3\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ n ਵੱਡਾ ਹੁੰਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਆਉ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ਦਾ ਕੀ ਵਿਵਹਾਰ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ।

n	1	5	10	20
$\left(\frac{2}{3}\right)^n$	0.6667	0.1316872428	0.01734152992	0.00030072866

ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ n ਵੱਡਾ ਹੁੰਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ਸਿਫ਼ਰ ਦੇ ਹੋਰ ਕੋਲ ਹੁੰਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਗਣਿਤੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਦੋਂ n ਕਾਫ਼ੀ ਵੱਡਾ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ਕਾਫ਼ੀ ਛੋਟਾ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਜਦੋਂ $n \to \infty, \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਨਤੀਜੇ ਵੱਜੋਂ ਅਸੀਂ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅਨੰਤ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $S_\infty = 3$ ਹੈ।

ਹੁਣ, ਇੱਕ G.P. $a, ar, ar^2, ...,$ ਲਈ ਜੇਕਰ ਸਰਵ ਅਨੁਪਾਤ r ਦਾ ਮੁੱਲ (ਸੰਖਿਆਤਮਕ) 1 ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਹੈ, ਤਾਂ

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$$

ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਜਦੋਂ $n \to \infty$, $r^n \to 0$ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $|r| < 1$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $S_n \to \frac{a}{1-r}$

ਸੰਕੇਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਮਿਤ ਪਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਨੂੰ S_∞ ਜਾਂ S ਤੋਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਸਾਨੂੰ $S = \frac{a}{1-r}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ,

(i) $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

(ii) $$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + ... = \frac{1}{1-\left(\frac{-1}{2}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

ਅਭਿਆਸ 9.4

ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ G.P. ਲੜੀਆਂ ਦੇ ਅਸੀਮਿਤ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ :

1. $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$ (ਉੱਤਰ 1.5)
2. 6, 1.2, .24, ... (ਉੱਤਰ 7.5)
3. $5, \frac{20}{7}, \frac{80}{49}, \ldots$ (ਉੱਤਰ $\frac{35}{3}$)
4. $\frac{-3}{4}, \frac{3}{16}, \frac{-3}{64}, \ldots$ (ਉੱਤਰ $\frac{-3}{5}$)
5. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{8}} \ldots = 3$ ਹੈ।
6. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $x = 1 + a + a^2 + \ldots$ ਅਤੇ $y = 1 + b + b^2 + \ldots$, ਜਿੱਥੇ $|a| < 1$ ਅਤੇ $|b| < 1$ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$1 + ab + a^2b^2 + \ldots = \frac{xy}{x+y-1}$$

ਅਧਿਆਇ 10

10.6 ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਦੋ ਕੱਟਦੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ l_1 ਅਤੇ l_2 ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀ ਹੈ :—

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \qquad (1)$$

ਅਤੇ $$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \qquad (2)$$

ਸਮੀਕਰਣਾਂ (1) ਅਤੇ (2) ਤੋਂ, ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :-

$$A_1x + B_1y + C_1 + k\left(A_2x + B_2y + C_2\right) = 0 \qquad (3)$$

ਜਿੱਥੇ k ਇੱਕ ਅਚੱਲ ਹੈ, ਜਿਸਨੂੰ ਘਟਕ (parameter) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। k ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਮੁੱਲ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ (3) ਚਲਾਂ x ਅਤੇ y ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਘਾਤ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਇਹ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ। k ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਇਸ ਪਰਿਵਾਰ ਦੇ ਇੱਕ ਖਾਸ ਮੈਂਬਰ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। k ਦੇ ਇਸ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਹੋਰ ਸ਼ਰਤਾਂ ਰਾਹੀਂ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 20 : ਉਸ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਹੜਾ y-ਧੁਰਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ ਅਤੇ $x - 7y + 5 = 0$ ਅਤੇ $3x + y - 7 = 0$ ਦੀ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੇਠ ਰੂਪ ਦੀ ਹੋਵੇਗੀ :-

$$x - 7y + 5 + k\ (3x + y - 7) = 0$$

ਭਾਵ, $$(1 + 3k)\ x + (k - 7)\ y + 5 - 7k = 0 \qquad (1)$$

ਜੇਕਰ ਇਹ ਰੇਖਾ y – ਧੁਰਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ, ਤਾਂ y ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਵੇਗਾ।

ਭਾਵ, $k - 7 = 0$ ਹੈ, ਜਿਸ ਤੋਂ $k = 7$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

k ਦੇ ਇਸ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ ਲਿਖਣ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :-

$22x - 44 = 0$, ਭਾਵ $x - 2 = 0$, ਜਿਹੜੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

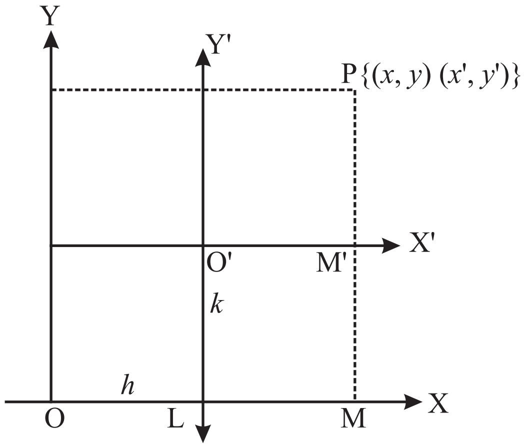
ਅਭਿਆਸ 10.4

1. ਉਸ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਹੜੀ ਰੇਖਾਵਾਂ $3x + 4y = 7$ ਅਤੇ $x - y + 2 = 0$ ਦੇ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸਦੀ ਢਾਲ 5 ਹੈ। (ਉੱਤਰ $35x - 7y + 18 = 0$)
2. ਰੇਖਾਵਾਂ $x + 2y - 3 = 0$ ਅਤੇ $4x - y + 7 = 0$ ਦੇ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਉਸ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਹੜੀ ਰੇਖਾ $5x + 4y - 20 = 0$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ। (ਉੱਤਰ $15x + 12y - 7 = 0$)
3. ਰੇਖਾਵਾਂ $2x + 3y - 4 = 0$ ਅਤੇ $x - 5y = 7$ ਦੇ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਉਸ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ x ਅੰਤਰ ਖੰਡ – 4 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। (ਉੱਤਰ $10x + 93y + 40 = 0$)
4. ਰੇਖਾਵਾਂ $5x - 3y = 1$ ਅਤੇ $2x + 3y - 23 = 0$ ਦੇ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹੜੀ ਰੇਖਾ $5x - 3y - 1 = 0$ 'ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ।

   (ਉੱਤਰ $63x + 105y - 781 = 0$)

10.7 ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਬਦਲੀ

ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ, ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਦੇ ਸੰਗਤ ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ, ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਇੱਕ ਠੀਕ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪੱਧਤੀ ਵਿੱਚ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਲੈ ਕੇ ਕਿ ਸਾਰੇ ਜਿਆਮਿਤੀ ਗੁਣ ਬਿਨਾਂ ਬਦਲੇ ਲਾਗੂ ਹੋਣ, ਸਰਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਇਹੋ-ਜਿਹਾ ਰੂਪਾਂਤਰਨ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਨਵੇਂ ਧੁਰਾਂ ਨੂੰ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਧੁਰਾਂ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਬਦਲ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਨਵੇਂ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਬਦਲੀ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਰੂਪਾਂਤਰਣ ਨੂੰ ਧੁਰਾਂ ਦੀ ਬਦਲੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 10.21

ਤੱਲ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰਾਂ ਦੇ ਇਸ ਬਦਲੀ ਦੇ ਤਹਿਤ ਬਦਲ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਪੁਰਾਣੇ ਅਤੇ ਨਵੇਂ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਸੰਬੰਧ ਪਤਾ ਹੋਣ 'ਤੇ, ਅਸੀਂ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰਾਂ ਦੀ ਨਵੀਂ ਪੱਧਤੀ ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਾਤਮਕ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਇਹ ਵੇਖਣ ਲਈ ਕਿ ਧੁਰਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਬਦਲੀ ਦੇ ਤਹਿਤ ਤੱਲ ਦੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਦਲਦੇ ਹਨ, ਆਉ ਧੁਰੇ OX ਅਤੇ OY ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ P (x, y) ਲਓ। ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ O′X′ ਅਤੇ O′Y′ ਕ੍ਰਮਵਾਰ OX ਅਤੇ OY ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਨਵੇਂ ਧੁਰੇ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ O′ ਨਵਾਂ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਪੁਰਾਣੇ ਧੁਰਾਂ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ O′ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (h, k) ਹਨ, ਭਾਵ $OL = h$ ਅਤੇ $LO' = k$ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ $OM = x$ ਅਤੇ $MP = y$ ਹੈ। (ਵੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 10.21)।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $O'M' = x'$ ਅਤੇ $M'P = y'$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ, ਨਵੇਂ ਧੁਰਾਂ O′X′ ਅਤੇ O′Y′ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਭੁਜ ਅਤੇ ਕੋਟਿ ਹਨ। ਚਿੱਤਰ 10.21 ਤੋਂ, ਇਹ ਸਰਲਤਾ ਨਾਲ ਵੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ,

$OM = OL + LM$, ਭਾਵ, $x = h + x'$

ਅਤੇ $MP = MM' + M'P$, ਭਾਵ, $y = k + y'$

ਇਸ ਲਈ $x = x' + h, y = y' + k$

ਇਹ ਹੀ ਸੂਤਰ ਪੁਰਾਣੇ ਅਤੇ ਨਵੇਂ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕਾਂ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 21 ਬਿੰਦੂ $(3, -4)$ ਦੇ ਨਵੇਂ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ $(1, 2)$ ਤੇ ਬਦਲੀ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਨਵੇਂ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $h = 1$ ਅਤੇ $k = 2$ ਹਨ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $x = 3$ ਅਤੇ $y = -4$ ਹਨ।

ਪੁਰਾਣੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕਾਂ (x, y) ਅਤੇ ਨਵੇਂ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕਾਂ (x', y') ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਰੂਪਾਂਤਰਣ ਸੰਬੰਧ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ :

$x = x' + h$ ਭਾਵ $x' = x - h$

ਅਤੇ $y = y' + k$ ਭਾਵ $y' = y - k$

ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਬਦਲਣ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$x' = 3 - 1 = 2$ ਅਤੇ $y' = -4 - 2 = -6$

ਇਸ ਲਈ ਨਵੀਂ ਪਧੱਤੀ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂ $(3, -4)$ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(2, -6)$ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 22 ਸਰਲ ਰੇਖਾ $2x - 3y + 5 = 0$, ਦੀ ਰੂਪਾਂਤਰਿਤ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ ਧੁਰਾਂ ਦੇ ਬਦਲਣ ਰਾਹੀਂ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ $(3, -1)$ ਤੇ ਬਦਲੀ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (x, y) ਨਵੇਂ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰਾਂ ਵਿੱਚ (x', y') ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਜਾਂਦੇ ਹਨ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ $h = 3, k = -1$ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਰੂਪਾਂਤਰਨ ਸੂਤਰਾਂ ਨੂੰ $x = x' + 3$ ਅਤੇ $y = y' - 1$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਸਰਲ ਰੇਖਾਂ ਦੀ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਇਹਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :-

$$2(x' + 3) - 3(y' - 1) + 5 = 0$$

ਜਾਂ $2x' - 3y' + 14 = 0$

ਇਸ ਲਈ, ਨਵੀਂ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਵਿੱਚ, ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ $2x - 3y + 14 = 0$ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 10.5

1. ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਨਵੇਂ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ ਧੁਰਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਬਦਲੀ ਰਾਹੀਂ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ (–3, –2) ਤੇ ਬਦਲੀ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ—

   (i) (1, 1) (ਉੱਤਰ (4, 3)) (ii) (0, 1) (ਉੱਤਰ (3, 3))

   (iii) (5, 0) (ਉੱਤਰ (8, 2)) (iv) (–1, –2) (ਉੱਤਰ (2, 0))

   (v) (3, –5) (ਉੱਤਰ (6, –3))

2. ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ (1, 1) 'ਤੇ ਬਦਲਣ 'ਤੇ ਹੇਠਲੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਕੀ ਹੋ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ।

   (i) $x^2 + xy - 3y^2 - y + 2 = 0$ (ਉੱਤਰ $x^2 - 3y^2 + xy + 3x - 6y + 1 = 0$)

   (ii) $xy - y^2 - x + y = 0$ (ਉੱਤਰ $xy - y^2 = 0$)

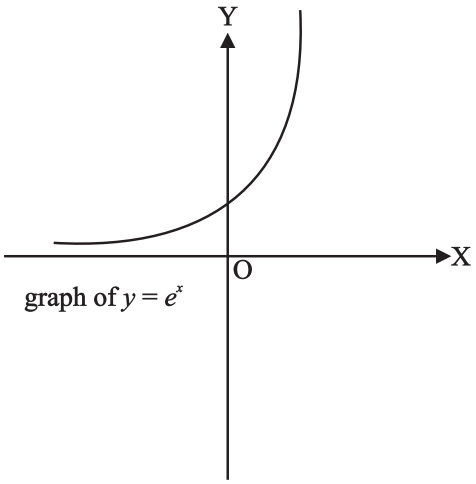
   (iii) $xy - x - y + 1 = 0$ (ਉੱਤਰ $xy = 0$)

ਅਧਿਆਇ 13

13.5 ਚਲ ਘਾਤ ਅੰਕੀ ਅਤੇ ਲਘੁਗਣਕੀ ਫਲਨਾਂ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ

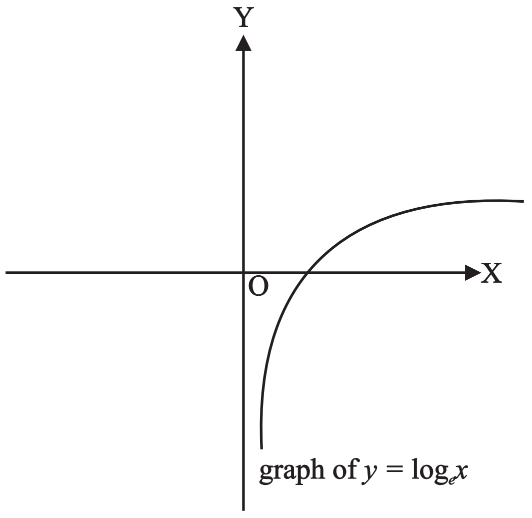
ਚਲ ਘਾਤ ਅੰਕੀ (exponential) ਅਤੇ ਲਘੁਗਣਕੀ (logarithmic) ਫਲਨਾਂ ਤੋਂ ਸੰਬੰਧ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਕੱਢਣ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਨ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ, ਅਸੀਂ ਦੋਵੇਂ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਦੱਸਦੇ ਹੋਏ, ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਜਾਣ-ਪਛਾਣ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਕੰਮ ਚਲਾਉ ਗਰਾਫ਼ ਬਣਾਦੇ ਹਾਂ।

ਇੱਕ ਮਹਾਨ ਸੁਵਿਸ ਗਣਿਤਕਾਰ ਲਿਉਨਾਡਜ ਆਇਲਰ (Leonhard Euler) (1707-1783) ਨੇ ਸੰਖਿਆ e ਦੀ ਜਾਣ ਪਛਾਣ ਦਿੱਤੀ ਜਿਸਦਾ ਮੁੱਲ 2 ਅਤੇ 3 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਸਥਿਤ ਹੈ। ਇਹ ਸੰਖਿਆ ਐਕਸਪੋਨੇਸ਼ਲ ਫਲਨ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਨ ਲਈ ਉਪਯੋਗੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ $f(x) = e^x, x \in \mathbf{R}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ **R** ਹੈ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਧਨਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਚਲ ਘਾਤ ਅੰਕੀ ਫਲਨ, ਭਾਵ $y = e^x$ ਦਾ ਗਰਾਫ਼ ਚਿੱਤਰ 13.11 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 13.11

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਲਘੂਗਣਕੀ ਫਲਨ ਜਿਸਨੂੰ $\log_e \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਨੂੰ $\log_e x = y$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ $e^y = x$ ਹੋਵੇ। ਇਸ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ $\mathbf{R}^+$ ਹੈ, ਜਿਹੜਾ ਸਾਰੇ ਧਨਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ **R** ਹੈ। ਲਘੂਗਣਕੀ ਫਲਨ $y = \log_e x$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 13.12 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਹੋਇਆ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 13.12

ਨਤੀਜਾ $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$, ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਵਿਅੰਜਕ $\frac{e^x-1}{x}$ ਤੋਂ ਸੰਬੰਧਿਤ ਇੱਕ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਹੜਾ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ,

$\frac{1}{1+|x|} \le \frac{e^x-1}{x} \le 1 + (e-2)\,|x|$ ਵਿੱਚ ਹਰ ਇੱਕ x ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ $[-1, 1] \sim \{0\}$

ਪ੍ਰਮੇਯ 6 : ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ ਹੈ।

ਸਬੂਤ : ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :—

$\frac{1}{1+|x|} \le \frac{e^x-1}{x} \le 1 + |x|\,(e-2),\ \forall x \in [-1, 1] \sim \{0\}$, $[-1, 1] - \{0\}$ ਦੇ ਹਰ ਇੱਕ x ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ।

ਨਾਲ ਹੀ $\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+|x|} = \frac{1}{1+\lim_{x\to 0}|x|} = \frac{1}{1+0} = 1$

ਅਤੇ $\lim_{x\to 0}\left[1+(e-2)|x|\right] = 1+(e-2)\lim_{x\to 0}|x| = 1+(e-2)0 = 1$

ਇਸ ਲਈ ਸੈਂਡਵਿਚ ਪ੍ਰਮੇਯ ਰਾਹੀਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :—

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

ਪ੍ਰਮੇਯ 7 : ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\lim_{x\to 0}\frac{\log_e(1+x)}{x}=1$

ਸਬੂਤ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ, $\frac{\log_e(1+x)}{x} = y$ ਹੈ ਤਾਂ,

$$\log_e(1+x) = xy$$

$$\Rightarrow 1 + x = e^{xy}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{xy}-1}{x} = 1$$

ਜਾਂ

$$\frac{e^{xy}-1}{xy}.y = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{xy\to 0}\frac{e^{xy}-1}{xy}\lim_{x\to 0} y = 1$$ (ਕਿਉਂਕਿ $x \to 0$ ਤੋਂ $xy \to 0$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ)

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} y = 1\left(\text{ਕਿਉਂਕਿ } \lim_{xy\to 0}\frac{e^{xy}-1}{xy} = 1\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\log_e(1+x)}{x} = 1$$

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਮੁਲਾਂਕਣ ਕਰੋ $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x}$

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x} = \lim_{3x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\cdot 3$$

$$= 3\left(\lim_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{y}\right), \text{ ਜਿੱਥੇ } y = 3x$$

$$= 3.1 = 3$$

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਮੁਲਾਂਕਣ ਕਰੋ, $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-\sin x-1}{x}$

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ, $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-\sin x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{e^{x}-1}{x} - \frac{\sin x}{x}\right]$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 - 1 = 0$$

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਮੁਲਾਂਕਣ ਕਰੋ $\lim_{x\to 1}\frac{\log_e x}{x-1}$

ਹੱਲ : $x = 1 + h$, ਰੱਖੋ। ਤਾਂ $x \to 1 \Rightarrow h \to 0$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log_e x}{x-1} = \lim_{h\to 0}\frac{\log_e(1+h)}{h} = 1\left(\text{ਕਿਉਂਕਿ } \lim_{x\to 0}\frac{\log_e(1+x)}{x} = 1 \text{ ਹੈ।}\right)$$

ਅਭਿਆਸ 13.2

ਹੇਠ ਲਿਖਤ ਸੀਮਾਵਾਂ ਦੇ ਮੁੱਲ ਕੱਢੋ, ਜੇਕਰ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ :

1. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{4x} - 1}{x}$ (ਉੱਤਰ 4)

2. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2+x} - e^2}{x}$ (ਉੱਤਰ e^2)

3. $\lim_{x \to 5} \frac{e^x - e^5}{x - 5}$ (ਉੱਤਰ e^5)

4. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x}$ (ਉੱਤਰ 1)

5. $\lim_{x \to 3} \frac{e^x - e^3}{x - 3}$ (ਉੱਤਰ e^3)

6. $\lim_{x \to 0} \frac{x(e^x - 1)}{1 - \cos x}$ (ਉੱਤਰ 2)

7. $\lim_{x \to 0} \frac{\log_e (1 + 2x)}{x}$ (ਉੱਤਰ 2)

8. $\lim_{x \to 0} \frac{\log (1 + x^3)}{\sin^3 x}$ (ਉੱਤਰ 1)

ਨੋਟ

Be a Student of Students

A teacher who establishes rapport with the taught, becomes one with them, learns more from them than he teaches them. He who learns nothing from his disciples is, in my opinion, worthless. Whenever I talk with someone I learn from him. I take from him more than I give him. In this way, a true teacher regards himself as a student of his students. If you will teach your pupils with this attitude, you will benefit much from them.

Talk to Khadi Vidyalaya Students, Sevagram
Harijan Seva, 15 February 1942 (CW 75, p. 269)

Use All Resources to Be Constructive and Creative

What we need is educationists with originality, fired with true zeal, who will think out from day to day what they are going to teach their pupils. The teacher cannot get this knowledge through musty volumes. He has to use his own faculties of observation and thinking and impart his knowledge to the children through his lips, with the help of a craft. This means a revolution in the method of teaching, a revolution in the teachers' outlook. Up till now you have been guided by inspector's reports. You wanted to do what the inspector might like, so that you might get more money yet for your institutions or higher salaries for yourselves. But the new teacher will not care for all that. He will say, '1 have done my duty to my pupil if I have made him a better man and in doing so I have used all my resources. That is enough for me'.

Harijan, 18 February 1939 (CW 68, pp. 374-75)