ਅਧਿਆਇ 3

ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨ
(Trigonometric Functions)

❖*A mathematician knows how to solve a problem, he can not solve it. – MILNE* ❖

3.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਸ਼ਬਦ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਦੋ ਗ੍ਰੀਕ ਸ਼ਬਦਾਂ 'trigon' ਅਤੇ 'metron' ਦੇ ਸੁਮੇਲ ਤੋਂ ਬਣਿਆ ਹੈ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਅਰਥ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਮਾਪਣਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਮੂਲ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸ ਵਿਸ਼ੇ ਦਾ ਵਿਕਾਸ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਤ ਜਿਆਮਿਤੀ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਕੀਤਾ ਗਿਆ। ਇਸਦਾ ਅਧਿਐਨ ਸਮੁੰਦਰੀ ਯਾਤਰਾਂਵਾਂ ਦੇ ਕਪਤਾਨਾਂ, ਸਰਵੇਅਰ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੇ ਨਵੇਂ ਭੂਮੀ ਭਾਗਾਂ ਦਾ ਚਿੱਤਰ ਤਿਆਰ ਕਰਨਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇੰਜੀਨੀਅਰਾਂ ਆਦਿ ਦੁਆਰਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ। ਵਰਤਮਾਨ ਵਿੱਚ ਇਸਦਾ ਉਪਯੋਗ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਖੇਤਰਾਂ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਿਸਮੋਲੋਜੀ (Seismology) ਦਾ ਵਿਗਿਆਨ, ਬਿਜਲੀ ਸਰਕਟ ਦੇ ਡਿਜ਼ਾਇਨ ਤਿਆਰ ਕਰਨਾ, ਅਣੂ (atom) ਦੀ ਅਵਸਥਾ ਦਾ ਵਰਣਨ ਕਰਨਾ, ਸਮੁੰਦਰ ਵਿੱਚ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਜਵਾਰਭਾਟੇ ਦੀ ਉਚਾਈ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਪੂਰਣ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾਉਣਾ, ਸੰਗੀਤਿਕ ਲੈਅ ਦਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਕਰਨਾ ਅਤੇ ਹੋਰ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਦੂਸਰੇ ਖੇਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

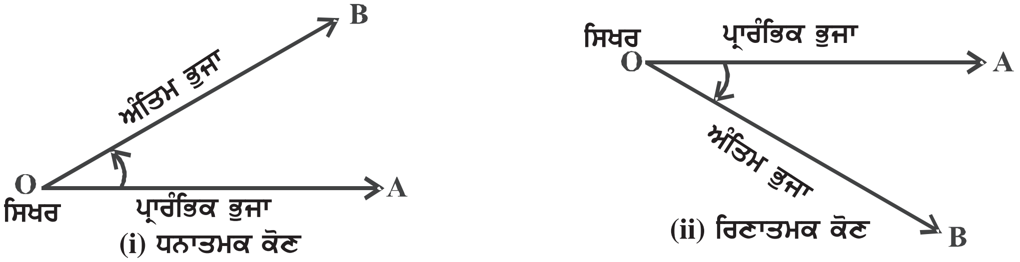
ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਨਿਊਨ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਅਨੁਪਾਤਾਂ, ਜਿਨਾਂ ਨੂੰ ਸਮਕੋਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਸਰਬਸਮਤਾਵਾਂ ਜਾਂ ਤਤਸਮਕਾਂ ਅਤੇ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤੀ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਉਚਾਈ ਅਤੇ ਦੂਰੀ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਸੀ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੀ ਧਾਰਨਾ ਦਾ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਿਸਥਾਰ ਕਰਾਂਗੇ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਧਰਮਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

Arya Bhatt
(476-550)

3.2 ਕੋਣ (Angles)

ਕੋਣ ਕਿਸੇ ਦਿੱਤੀ ਕਿਰਣ ਦੇ ਉਸਦੇ ਆਰੰਭਿਕ ਜਾਂ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਜਾਂ ਪ੍ਰਾਰੰਭਿਕ (ਪਹਿਲੇ) ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਹੋਏ ਘੁਮਾਅ ਨੂੰ ਮਾਪਣਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕਿਰਣ ਦੇ ਘੁੰਮਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ "ਪ੍ਰਾਰੰਭਿਕ ਭੁਜਾ" (initial side) ਅਤੇ ਘੁੰਮਣ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਅੰਤਿਮ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਪਹੁੰਚੀ ਕਿਰਣ ਨੂੰ ਕੋਣ ਦੀ "ਅੰਤਿਮ ਭੁਜਾ" ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਕਿਰਣ ਜਿਸ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਘੁੰਮ ਰਹੀ ਹੈ, ਉਸ ਨੂੰ 'ਸਿਖਰ' ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਘੁੰਮਣ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਘੜੀ ਦੇ ਉਲਟ (anticlockwise) ਹੈ ਤਾਂ ਕੋਣ ਧਨਾਤਮਕ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਘੁੰਮਣ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਘੜੀ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ (clockwise) ਹੈ ਤਾਂ ਕੋਣ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋਵੇਗਾ। (ਚਿੱਤਰ 3.1)

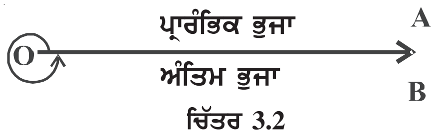
ਕਿਸੇ ਕੋਣ ਦਾ ਮਾਪ, ਘੁੰਮਣ ਦੀ ਉਹ ਮਾਤਰਾ ਹੈ ਜੋ ਪ੍ਰਾਰੰਭਿਕ ਸਥਿਤੀ ਤੋਂ ਅੰਤਿਮ ਸਥਿਤੀ ਤੱਕ ਘੁੰਮਣ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 3.1

ਕੋਣ ਨੂੰ ਮਾਪਣ ਦੀਆਂ ਬਹੁਤ ਸਾਰੀਆਂ ਇਕਾਈਆਂ ਹਨ। ਕੋਣ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਇਸਦੀ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਦਾ ਸੁਝਾਅ ਦਿੰਦੀ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਚਿੱਤਰ 3.2 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਪ੍ਰਾਰੰਭਿਕ ਭੁਜਾ ਦੇ ਸਥਿਤੀ ਤੋਂ ਇਕ ਪੂਰੇ ਘੁਮਾਅ ਨੂੰ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਮੰਨਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਇਹ ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਵੱਡੇ ਕੋਣਾਂ ਲਈ ਸੁਵਿਧਾਜਨਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ ਬਹੁਤ ਤੇਜ਼ੀ ਨਾਲ ਘੁੰਮਣ ਵਾਲਾ ਪਹੀਆ (ਚੱਕਰ) ਇੱਕ ਸੈਕਿੰਡ ਵਿੱਚ 15 ਚੱਕਰ ਕੱਢਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਕੋਣ ਨੂੰ ਮਾਪਣ ਨੂੰ ਹੋਰ ਦੋ ਪ੍ਰਚੱਲਿਤ ਇਕਾਈਆਂ ਜਿੰਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ 'ਡਿਗਰੀ ਮਾਪ ਅਤੇ ਰੇਡੀਅਨ' ਮਾਪ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਾਂਗੇ।



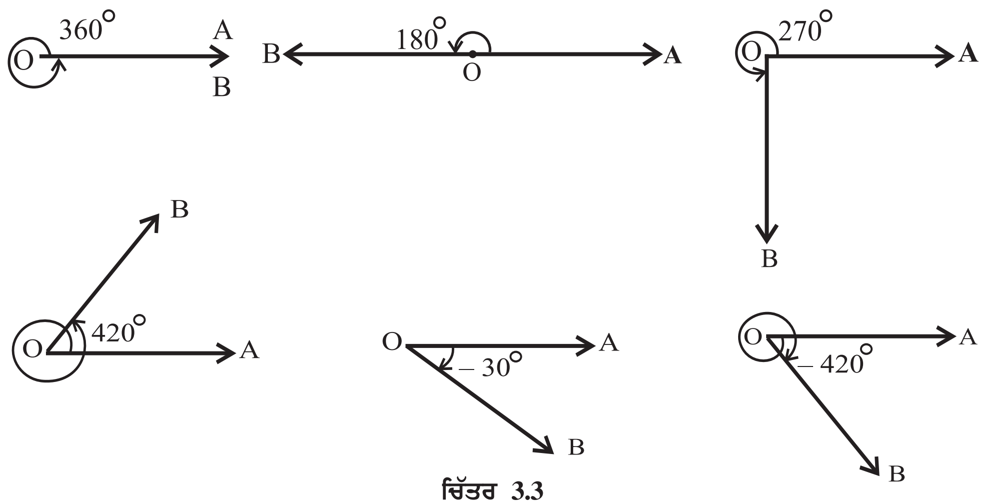
ਚਿੱਤਰ 3.2

3.2.1 ਡਿਗਰੀ ਮਾਪ (Degree measure)

ਜੇਕਰ ਪ੍ਰਾਰੰਭਿਕ ਭੁਜਾ ਤੋਂ ਅੰਤਿਮ ਭੁਜਾ ਦਾ ਘੁਮਾਵ ਇੱਕ ਪੂਰੇ ਚੱਕਰ ਦਾ $\left(\frac{1}{360}\right)$ਵਾਂ ਭਾਗ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਕੋਣ ਦੇ ਮਾਪ ਨੂੰ 1 ਡਿਗਰੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ, ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ $1°$ ਲਿਖਦੇ ਹਨ। ਇੱਕ ਡਿਗਰੀ 60 ਮਿੰਟਾਂ ਵਿੱਚ ਅਤੇ 1 ਮਿੰਟ 60 ਸੈਕਿੰਡਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਕ ਡਿਗਰੀ ਦੇ 60ਵੇਂ ਭਾਗ ਨੂੰ 1 ਮਿੰਟ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ, ਜਿਸ ਨੂੰ $1'$ ਲਿਖਦੇ ਹਨ ਅਤੇ 1 ਮਿੰਟ ਦੇ 60 ਵੇਂ ਭਾਗ ਨੂੰ 1 ਸੈਕਿੰਡ ਜਿਸ ਨੂੰ $1''$ ਲਿਖਦੇ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ $\quad 1° = 60', \quad 1' = 60''$

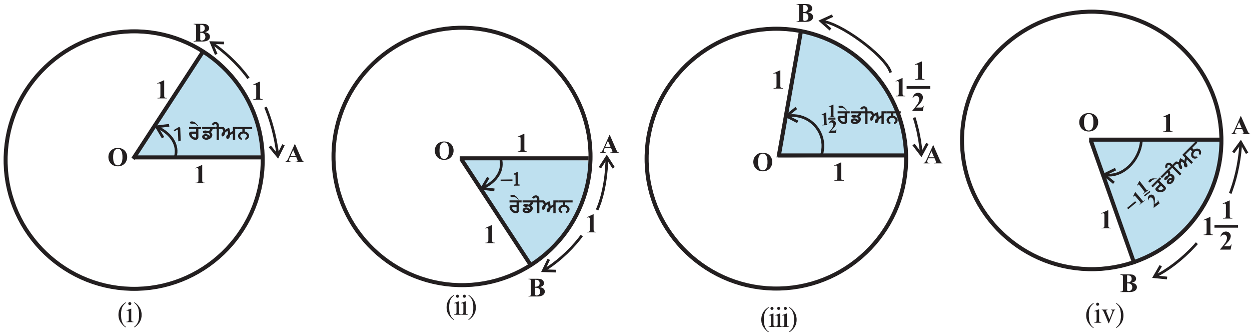
ਕੁਝ ਕੋਣ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਮਾਪ 360°,180°, 270°, 420°, – 30°, – 420° ਹੈ, ਚਿੱਤਰ 3.3 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 3.3

3.2.2 ਰੇਡੀਅਨ ਮਾਪ (Radian measure)

ਕੋਣ ਮਾਪਣ ਦੀ ਇਕ ਹੋਰ ਇਕਾਈ ਜਿਸਨੂੰ 'ਰੇਡੀਅਨ ਮਾਪ' ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਵੀ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਵਾਲੀ ਚਾਪ ਦੁਆਰਾ ਚੱਕਰ ਦੇ ਕੇਂਦਰ (ਜਿਸਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 1 ਇਕਾਈ ਹੈ) ਦੇ ਮਾਪ ਨੂੰ ਇਕ ਰੇਡੀਅਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਚਿੱਤਰ 3.4 (i) ਤੋਂ (iv) ਵਿੱਚ OA ਅਰੰਭਿਕ ਜਾਂ ਪ੍ਰਾਰੰਭਿਕ ਅਤੇ OB ਅੰਤਿਮ ਭੁਜਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 3.4 (i) to (iv)

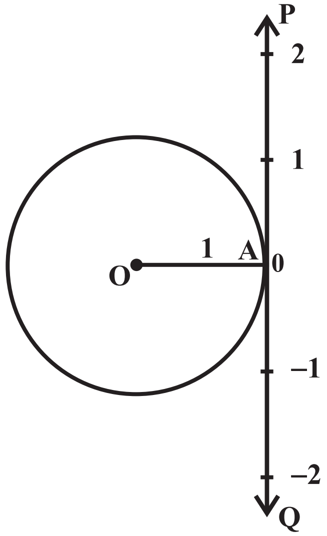
ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ 1ਰੇਡੀਅਨ, –1 ਰੇਡੀਅਨ, $1\frac{1}{2}$ ਰੇਡੀਅਨ ਅਤੇ $-1\frac{1}{2}$ ਰੇਡੀਅਨ ਮਾਪ ਵਾਲੇ ਕੋਣ ਦਿਖਾਏ ਗਏ ਹਨ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ 1 ਇਕਾਈ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਦਾ ਘੇਰਾ 2π ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਆਰੰਭਿਕ ਭੁਜਾ ਦਾ ਪੂਰਾ ਚੱਕਰ ਕੇਂਦਰ ਤੇ 2π ਰੇਡੀਅਨ ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਵਿਆਪਕ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਅਰਧ ਵਿਆਸ r ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ r ਲੰਬਾਈ ਵਾਲੀ ਚਾਪ, ਕੇਂਦਰ ਤੇ 1 ਰੇਡੀਅਨ ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਚੱਕਰ ਦੀਆਂ ਬਰਾਬਰ ਲੰਬਾਈਆਂ ਵਾਲੀਆਂ ਚਾਪਾਂ, ਕੇਂਦਰ ਤੇ ਬਰਾਬਰ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਕਿਉਂਕਿ ਅਰਧ ਵਿਆਸ r ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਵਿੱਚ, r ਲੰਬਾਈ ਵਾਲੀ ਚਾਪ, ਕੇਂਦਰ ਤੇ ਇੱਕ ਰੇਡੀਅਨ ਮਾਪ ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ l ਲੰਬਾਈ ਵਾਲੀ ਚਾਪ ਕੇਂਦਰ ਤੇ $\frac{l}{r}$ ਰੇਡੀਅਨ ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਏਗੀ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੇਕਰ r ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਤੇ l ਲੰਬਾਈ ਵਾਲੀ ਚਾਪ ਕੇਂਦਰ ਤੇ θ ਰੇਡੀਅਨ ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ $\theta = \frac{l}{r}$ ਜਾਂ $l = r\,\theta$.

3.2.3 ਰੇਡੀਅਨ ਅਤੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧ (Relation between radian and real numbers)

ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਦਾ ਚੱਕਰ ਜਿਸਦਾ ਕੇਂਦਰ O ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਚੱਕਰ ਤੇ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ A ਹੈ। OA ਨੂੰ ਕੋਣ ਦੀ ਆਰੰਭਿਕ ਭੁਜਾ ਮੰਨੋ ਤਾਂ ਚੱਕਰ ਦੇ ਚਾਪ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਚਾਪ ਦੁਆਰਾ ਚੱਕਰ ਦੇ ਕੇਂਦਰ ਤੇ ਬਣਾਏ ਕੋਣ ਦੇ ਰੇਡੀਅਨ ਮਾਪ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇਗੀ। ਮੰਨ ਲਉ ਚੱਕਰ ਦੇ ਬਿੰਦੂ A ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ PAQ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਬਿੰਦੂ A ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ 0 (ਸਿਫ਼ਰ) ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ, AP ਧਨਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਤੇ AQ ਰਿਣਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ (ਚਿੱਤਰ 3.5)। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਰੇਖਾ AP ਨੂੰ ਘੜੀ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਉਲਟ, ਚੱਕਰ ਦੇ ਨਾਲ-ਨਾਲ ਘੁਮਾਈਏ ਅਤੇ AQ ਨੂੰ ਘੜੀ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਸਾਰ ਘੁਮਾਈਏ, ਤਾਂ ਹਰ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ, ਇੱਕ ਰੇਡੀਅਨ ਮਾਪ ਦੇ ਸੰਗਤ ਹੋਵੇਗੀ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਉਲਟ ਵੀ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਰੇਡੀਅਨ ਮਾਪ ਅਤੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਮੰਨਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 3.5

3.2.4 ਡਿਗਰੀ ਅਤੇ ਰੇਡੀਅਨ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧ (Relation between degree and radian)

ਕਿਉਂਕਿ ਚੱਕਰ ਕੇਂਦਰ ਤੇ ਇੱਕ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸਦਾ ਰੇਡੀਅਨ ਮਾਪ 2π ਅਤੇ ਡਿਗਰੀ ਮਾਪ 360° ਹੈ, ਇਸ ਲਈ

$$2\pi \text{ ਰੇਡੀਅਨ} = 360° \qquad \text{ਜਾਂ} \qquad \pi \text{ ਰੇਡੀਅਨ} = 180°$$

ਉਪਰੋਕਤ ਸੰਬੰਧ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਰੇਡੀਅਨ ਮਾਪ ਨੂੰ ਡਿਗਰੀ ਮਾਪ ਅਤੇ ਡਿਗਰੀ ਮਾਪ ਨੂੰ ਰੇਡੀਅਨ ਮਾਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। π ਦੇ ਲਗਭਗ ਮੁੱਲ $\frac{22}{7}$ ਨੂੰ ਵਰਤਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$1 \text{ ਰੇਡੀਅਨ} = \frac{180°}{\pi} = 57°\ 16' \text{ ਲਗਭਗ}$$

ਅਤੇ
$$1° = \frac{\pi}{180} \text{ ਰੇਡੀਅਨ} = 0.01746 \text{ ਰੇਡੀਅਨ ਲਗਭਗ}$$

ਕੁਝ ਆਮ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਡਿਗਰੀ ਮਾਪ ਅਤੇ ਰੇਡੀਅਨ ਮਾਪ ਵਿਚਲਾ ਸੰਬੰਧ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ :

ਡਿਗਰੀ	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
ਰੇਡੀਅਨ	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

ਚਿੰਨਾਤਮਕ ਮਨੌਤ (Notational Convention)

ਕਿਉਂਕਿ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਮਾਪ ਜਾਂ ਤਾਂ ਡਿਗਰੀ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਰੇਡੀਅਨ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸੰਕੇਤਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਦੋਂ ਕੋਣ $\theta°$ ਲਿਖਿਆ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਸਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਕੋਣ ਜਿਸਦਾ ਡਿਗਰੀ ਮਾਪ θ ਹੈ ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਕੋਣ β ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਇਸਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕੋਣ ਜਿਸਦਾ ਰੇਡੀਅਨ ਮਾਪ β ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਜਦੋਂ ਕੋਣ ਰੇਡੀਅਨ ਮਾਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਸ਼ਬਦ ਰੇਡੀਅਨ ਲਿਖਣਾ ਛੱਡ ਦਿੰਦੇ ਹਨ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\pi = 180°$ ਅਤੇ $\frac{\pi}{4} = 45°$, ਇਸ ਵਿਚਾਰ ਨਾਲ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ π ਅਤੇ $\frac{\pi}{4}$ ਰੇਡੀਅਨ ਮਾਪ ਵਿੱਚ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\text{ਰੇਡੀਅਨ ਮਾਪ} = \frac{\pi}{180} \times \text{ਡਿਗਰੀ ਮਾਪ}$$

$$\text{ਡਿਗਰੀ ਮਾਪ} = \frac{180}{\pi} \times \text{ਰੇਡੀਅਨ ਮਾਪ}$$

ਉਦਾਹਰਣ 1 : $40°\ 20'$ ਨੂੰ ਰੇਡੀਅਨ ਮਾਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $180° = \pi$ ਰੇਡੀਅਨ

ਇਸ ਲਈ $\quad 40°\ 20' = 40\frac{1}{3}$ ਡਿਗਰੀ $= \frac{\pi}{180} \times \frac{121}{3}$ ਰੇਡੀਅਨ $= \frac{121\pi}{540}$ ਰੇਡੀਅਨ

ਇਸ ਲਈ $\quad 40°\ 20' = \frac{121\pi}{540}$ ਰੇਡੀਅਨ

ਉਦਾਹਰਣ 2 : 6 ਰੇਡੀਅਨ ਨੂੰ ਡਿਗਰੀ ਮਾਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ π ਰੇਡੀਅਨ $= 180°$

ਇਸ ਲਈ $\quad 6$ ਰੇਡੀਅਨ $= \frac{180}{\pi} \times 6$ ਡਿਗਰੀ $= \frac{1080 \times 7}{22}$ ਡਿਗਰੀ

$= 343\frac{7}{11}$ ਡਿਗਰੀ $= 343° + \frac{7 \times 60}{11}$ ਮਿੰਟ $\quad$ [ਕਿਉਂਕਿ $1° = 60'$]

$= 343° + 38' + \frac{2}{11}$ ਮਿੰਟ $\quad$ [ਕਿਉਂਕਿ $1' = 60''$]

$= 343° + 38' + 10.9'' = 343°38'\ 11''$ ਲਗਭਗ

ਇਸ ਲਈ $\quad 6$ ਰੇਡੀਅਨ $= 343°\ 38'\ 11''$ ਲਗਭਗ

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਉਸ ਚੱਕਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ 37.4 ਸੈਂ. ਮੀ. ਲੰਬਾਈ ਵਾਲੀ ਚਾਪ, ਚੱਕਰ ਦੇ ਕੇਂਦਰ ਤੇ $60°$ ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ। ($\pi = \frac{22}{7}$ ਵਰਤੋ)

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $l = 37.4$ ਸੈਂ. ਮੀ. ਅਤੇ $\theta = 60° = \frac{60\pi}{180}$ ਰੇਡੀਅਨ $= \frac{\pi}{3}$ ਰੇਡੀਅਨ

ਹੁਣ, $\quad r = \frac{l}{\theta}$ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ

$$r = \frac{37.4 \times 3}{\pi} = \frac{37.4 \times 3 \times 7}{22} = 35.7 \text{ ਸੈਂ. ਮੀ.}$$

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਇੱਕ ਘੜੀ ਵਿੱਚ ਮਿੰਟਾਂ ਦੀ ਸੂਈ 1.5 ਸੈਂ. ਮੀ. ਲੰਬੀ ਹੈ। ਇਸਦੀ ਨੋਕ 40 ਮਿੰਟਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕਰੇਗੀ। ($\pi = 3.14$ ਵਰਤੋ)

ਹੱਲ : 60 ਮਿੰਟਾਂ ਵਿੱਚ, ਘੜੀ ਦੀ ਮਿੰਟਾਂ ਵਾਲੀ ਸੂਈ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਪੂਰਾ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ 40 ਮਿੰਟਾਂ ਵਿੱਚ, ਮਿੰਟਾਂ ਵਾਲੀ ਸੂਈ ਪੂਰੇ ਚੱਕਰ ਦਾ $\frac{2}{3}$ ਹਿੱਸਾ ਤੈਅ ਕਰੇਗੀ। ਇਸ ਲਈ $\theta = \frac{2}{3} \times 360°$ ਜਾਂ $\frac{4\pi}{3}$ ਰੇਡੀਅਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੋੜੀਂਦੀ ਦੂਰੀ ਜੋ ਮਿੰਟਾਂ ਵਾਲੀ ਸੂਈ ਦੁਆਰਾ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ :

$$l = r\,\theta = 1.5 \times \frac{4\pi}{3} \text{ ਸੈਂ. ਮੀ.} = 2\pi \text{ ਸੈਂ. ਮੀ.} = 2 \times 3.14 \text{ ਸੈਂ. ਮੀ.} = 6.28 \text{ ਸੈਂ. ਮੀ.}$$

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਜੇਕਰ ਦੋ ਇੱਕੋ ਜਿਹੀ ਲੰਬਾਈ ਦੀਆਂ ਚਾਪਾਂ ਦੋ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਕੇਂਦਰ ਤੇ 65° ਅਤੇ 110° ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ ਦੋ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ r_1 ਅਤੇ r_2 ਹਨ, ਦਿੱਤਾ ਹੈ

$$\theta_1 = 65° = \frac{\pi}{180} \times 65 = \frac{13\pi}{36} \text{ ਰੇਡੀਅਨ}$$

ਅਤੇ
$$\theta_2 = 110° = \frac{\pi}{180} \times 110 = \frac{22\pi}{36} \text{ ਰੇਡੀਅਨ}$$

ਮੰਨ ਲਓ ਹਰ ਇੱਕ ਚਾਪ ਦੀ ਲੰਬਾਈ l ਹੈ, ਤਾਂ $l = r_1\theta_1 = r_2\theta_2$ ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ,

$$\frac{13\pi}{36} \times r_1 = \frac{22\pi}{36} \times r_2 \text{, ਭਾਵ, } \frac{r_1}{r_2} = \frac{22}{13}$$

ਇਸ ਲਈ
$$r_1 : r_2 = 22 : 13$$

ਅਭਿਆਸ 3.1

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਡਿਗਰੀ ਮਾਪ ਵਾਲੇ ਕੋਣਾਂ ਨੂੰ ਰੇਡੀਅਨ ਮਾਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲੋ।

(i) 25° (ii) $-47°30'$ (iii) 240° (iv) 520°

2. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਰੇਡੀਅਨ ਮਾਪ ਦੇ ਸੰਗਤ ਡਿਗਰੀ ਮਾਪ ਪਤਾ ਕਰੋ ($\pi = \frac{22}{7}$ ਵਰਤੋ)

(i) $\frac{11}{16}$ (ii) -4 (iii) $\frac{5\pi}{3}$ (iv) $\frac{7\pi}{6}$

3. ਇੱਕ ਪਹੀਆ ਇੱਕ ਮਿੰਟ ਵਿੱਚ 360 ਚੱਕਰ ਕੱਢਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਇੱਕ ਸੈਕਿੰਡ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਰੇਡੀਅਨ ਮਾਪ ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਏਗਾ?

4. ਇੱਕ 22 ਸੈਂ. ਮੀ. ਲੰਬਾਈ ਵਾਲੀ ਚਾਪ, ਇੱਕ 100 ਸੈਂ. ਮੀ. ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਦੇ ਕੇਂਦਰ ਤੇ ਕਿੰਨੇ ਡਿਗਰੀ ਮਾਪ ਵਾਲਾ ਕੋਣ ਬਣਾਏਗੀ। ($\pi = \frac{22}{7}$ ਵਰਤੋ)

5. ਇਕ ਚੱਕਰ ਜਿਸਦਾ ਵਿਆਸ 40 ਸੈਂ. ਮੀ. ਹੈ, ਦੀ ਇੱਕ ਜੀਵਾ (ਵਤਰ) 20 ਸੈਂ. ਮੀ. ਲੰਬੀ ਹੈ। ਇਸ ਵਤਰ (ਜੀਵਾ) ਦੇ ਸੰਗਤ ਛੋਟੇ ਚਾਪ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

6. ਜੇਕਰ ਦੋ ਚੱਕਰਾਂ ਵਿੱਚ, ਬਰਾਬਰ ਲੰਬਾਈ ਵਾਲੀਆਂ ਚਾਪਾਂ ਕੇਂਦਰ ਤੇ 60° ਅਤੇ 75° ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਣ, ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

7. 75 ਸੈਂ. ਮੀ. ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਡੋਲਣ (Pendulum) ਦੇ ਇੱਕ ਸਿਰੇ ਤੋਂ ਦੂਸਰੇ ਸਿਰੇ ਤੱਕ ਝੂਲਣ (Swing) ਨਾਲ ਜੋ ਕੋਣ ਬਣਦਾ ਹੈ, ਉਸਨੂੰ ਰੇਡੀਅਨ ਵਿੱਚ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ ਚਾਪ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਹੇਠਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਹੋਵੇ :

(i) 10 ਸੈਂ. ਮੀ. (ii) 15 ਸੈਂ. ਮੀ. (iii) 21 ਸੈਂ. ਮੀ.

3.3 ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨ (Trigonometric Functions)

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਨਿਊਨ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਨੂੰ ਸਮਕੋਣੀ ਤਿਕੋਣ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਵਜੋਂ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਕੋਣ ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਅਨੁਪਾਤ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਨੂੰ ਰੇਡੀਅਨ ਮਾਪ ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹਾਂਗੇ।

ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕੀ ਧੁਰਿਆਂ ਦੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਕੇਂਦਰ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ, ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਵਾਲਾ ਚੱਕਰ ਬਣਾਉ।

ਮੰਨ ਲਉ P (a, b) ਇਸ ਚੱਕਰ ਤੇ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ ਕੋਣ AOP = x ਰੇਡੀਅਨ ਹੈ। ਭਾਵ, ਚਾਪ AP ਦੀ ਲੰਬਾਈ = x (ਚਿੱਤਰ 3.6).

ਅਸੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ $\cos x = a$ ਅਤੇ $\sin x = b$

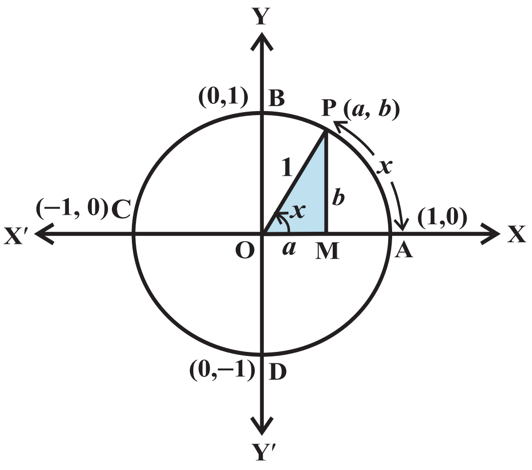
ਕਿਉਂਕਿ ΔOMP ਇੱਕ ਸਮਕੋਣੀ ਤਿਕੋਣ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ

$OM^2 + MP^2 = OP^2$ ਜਾਂ $a^2 + b^2 = 1$

ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਤੇ ਸਥਿਤ ਕਿਸੇ ਵੀ ਬਿੰਦੂ ਲਈ

$a^2 + b^2 = 1$ ਜਾਂ $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

ਕਿਉਂਕਿ ਇੱਕ ਪੂਰਾ ਚੱਕਰ, ਚੱਕਰ ਦੇ ਕੇਂਦਰ ਤੇ 2π ਰੇਡੀਅਨ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ, $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$, $\angle AOC = \pi$ ਅਤੇ $\angle AOD = \frac{3\pi}{2}$.



ਚਿੱਤਰ 3.6

$\frac{\pi}{2}$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਸੰਪੂਰਨ ਗੁਣਜਾਂ ਨੂੰ ਚੌਥਾਈਆਂ ਦੇ ਕੋਣ (Quadrantal angles) ਆਖਦੇ ਹਨ। A, B, C ਅਤੇ D ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ (1, 0), (0, 1), (–1, 0) ਅਤੇ (0, –1) ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਚੌਥਾਈਆਂ ਦੇ ਕੋਣ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\cos 0° = 1 \qquad \sin 0° = 0$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0 \qquad \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\cos\pi = -1 \qquad \sin\pi = 0$$

$$\cos \frac{3\pi}{2} = 0 \qquad \sin \frac{3\pi}{2} = -1$$

$$\cos 2\pi = 1 \qquad \sin 2\pi = 0$$

ਹੁਣ, ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ ਇੱਕ ਪੂਰਾ ਚੱਕਰ ਕੱਢੀਏ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਫਿਰ ਵਾਪਿਸ ਬਿੰਦੂ P ਤੇ ਆ ਜਾਵਾਂਗੇ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇਕਰ x, 2π ਦੇ ਸੰਪੂਰਨ ਗੁਣਜ ਨਾਲ ਵੱਧਦੀ (ਜਾਂ ਘੱਟਦੀ) ਹੈ ਤਾਂ sine ਅਤੇ cosine ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਬਦਲਦਾ ਨਹੀਂ। ਇਸ ਲਈ $\sin (2n\pi + x) = \sin x$, $n \in \mathbf{Z}$, $\cos (2n\pi + x) = \cos x$, $n \in \mathbf{Z}$. ਫਿਰ ਤੋਂ

$\sin x = 0$, ਜੇਕਰ $x = 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, ...$, ਭਾਵ, ਜਦੋਂ x, π ਦਾ ਸੰਪੂਰਨ ਗੁਣਜ ਹੈ।

ਅਤੇ $\cos x = 0$, ਜੇਕਰ $x = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, ...$ ਭਾਵ, $\cos x$ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ x, $\frac{\pi}{2}$ ਦਾ ਟਾਂਕ ਗੁਣਾਂਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$\sin x = 0$ ਤੋਂ ਮਿਲਦਾ ਹੈ $x = n\pi$, ਜਿੱਥੇ n ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

$\cos x = 0$ ਤੋਂ ਮਿਲਦਾ ਹੈ $x = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$, ਜਿੱਥੇ n ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਦੂਸਰੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨਾਂ ਨੂੰ sine ਅਤੇ cosine ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਾਂਗੇ :

$\text{cosec } x = \frac{1}{\sin x}$, $x \neq n\pi$, ਜਿੱਥੇ n ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$, $x \neq (2n + 1) \frac{\pi}{2}$, ਜਿੱਥੇ n ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x},\ x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$$, ਜਿੱਥੇ n ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x},\ x \neq n\pi$$, ਜਿੱਥੇ n ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ x ਲਈ ਦੇਖਿਆ ਹੈ, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ

$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ (ਕਿਉਂ?)

$1 + \cot^2 x = \text{cosec}^2 x$ (ਕਿਉਂ?)

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ 0°, 30°, 45°, 60° ਅਤੇ 90° ਅਤੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਉਹ ਹੀ ਹੈ ਜੋ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

	0°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	– 1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	– 1	0	1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ	0	ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ	0

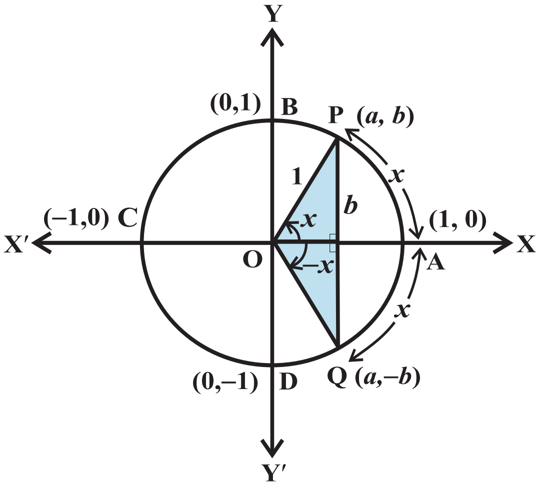
cosec x, sec x ਅਤੇ cot x ਦੇ ਮੁੱਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ sin x, cos x ਅਤੇ tan x ਦੇ ਉਲਟ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

3.3.1 ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਚਿੰਨ੍ਹ (Sign of trigonometric functions) ਮੰਨ ਲਉ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਤੇ ਜਿਸਦਾ ਕੇਂਦਰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਉਪਰ ਹੈ, P (a, b) ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ $\angle AOP = x$ ਜੇਕਰ $\angle AOQ = -x$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਬਿੰਦੂ Q ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(a, -b)$ ਹੋਣਗੇ (ਚਿੱਤਰ 3.7)। ਇਸ ਲਈ

$$\cos(-x) = \cos x$$

ਅਤੇ

$$\sin(-x) = -\sin x$$



ਚਿੱਤਰ 3.7

ਕਿਉਂਕਿ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹਰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ P (a, b) ਲਈ $-1 \le a \le 1$ ਅਤੇ $-1 \le b \le 1$, ਇਸ ਲਈ x ਦੇ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲਾਂ ਲਈ $-1 \le \cos x \le 1$ ਅਤੇ $-1 \le \sin x \le 1$

ਅਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪਹਿਲੀ ਚੌਥਾਈ $(0 < x < \frac{\pi}{2})$ ਵਿੱਚ a ਅਤੇ b ਦੋਵੇਂ ਧਨਾਤਮਕ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਦੂਸਰੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ $(\frac{\pi}{2} < x < \pi)$ a ਰਿਣਾਤਮਕ ਅਤੇ b ਧਨਾਤਮਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਤੀਸਰੀ ਚੌਥਾਈ $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ ਵਿੱਚ a ਅਤੇ b ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਚੌਥੀ ਚੌਥਾਈ $(\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi)$ ਵਿੱਚ a ਧਨਾਤਮਕ ਅਤੇ b

ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $0 < x < \pi$, ਲਈ Sin x ਧਨਾਤਮਕ ਅਤੇ $\pi < x < 2\pi$ ਵਿੱਚ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ cos x, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ਲਈ ਧਨਾਤਮਕ, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ ਲਈ ਰਿਣਾਤਮਕ ਅਤੇ $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ ਲਈ ਧਨਾਤਮਕ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਅਸੀਂ ਸਾਰੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਚੌਥਾਈਆਂ ਵਿੱਚ ਨਿਸ਼ਾਨ ਜਾਣ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸਦੇ ਲਈ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਹੇਠਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਸਾਰਣੀ ਹੈ :

	I	II	III	IV
sin x	+	+	–	–
cos x	+	–	–	+
tan x	+	–	+	–
cosec x	+	+	–	–
sec x	+	–	–	+
cot x	+	–	+	–

3.3.2 ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ (Domain and range of trigonometric functions)

sine ਅਤੇ cosine ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹਨ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ x ਲਈ

$$-1 \le \sin x \le 1 \text{ ਅਤੇ } -1 \le \cos x \le 1$$

ਇਸ ਲਈ $y = \sin x$ ਅਤੇ $y = \cos x$ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ $[-1, 1]$, ਦਾ ਅੰਤਰਾਲ ਹੈ, ਭਾਵ $-1 \le y \le 1$.

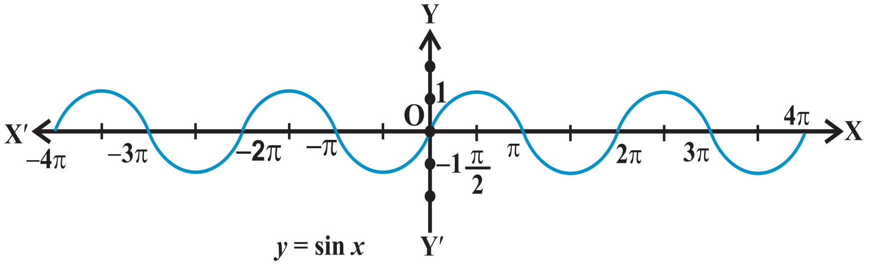
ਕਿਉਂਕਿ $\text{cosec}\, x = \frac{1}{\sin x}$, ਇਸ ਲਈ $y = \text{cosec}\, x$ ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਸਮੂਹ $\{ x : x \in \mathbf{R}$ ਅਤੇ $x \ne n\pi, n \in \mathbf{Z}\}$ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੀ ਵਿਸਥਾਰ $\{y : y \in \mathbf{R}, y \ge 1$ ਜਾਂ $y \le -1\}$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $y = \sec x$ ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਸਮੂਹ $\{x : x \in \mathbf{R}$ ਅਤੇ $x \ne (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}\}$ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੀ ਵਿਸਥਾਰ ਸਮੂਹ $\{y : y \in \mathbf{R}, y \le -1$ ਜਾਂ $y \ge 1\}$ ਹੈ। $y = \tan x$ ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਸਮੂਹ $\{x : x \in \mathbf{R}$ ਅਤੇ $x \ne (2n + 1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\}$ ਹੈ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ। $y = \cot x$ ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਸਮੂਹ $\{x : x \in \mathbf{R}$ ਅਤੇ $x \ne n\pi, n \in \mathbf{Z}\}$ ਹੈ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪਹਿਲੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ x, 0 ਤੋਂ $\frac{\pi}{2}$ ਤੱਕ ਵੱਧਦਾ ਹੈ, sin x, 0 ਤੋਂ 1 ਤੱਕ ਵੱਧਦਾ ਹੈ। ਜਦੋਂ x, $\frac{\pi}{2}$ ਤੋਂ π ਤੱਕ ਵੱਧਦੀ ਹੈ, sin x, 1 ਤੋਂ 0 ਤੱਕ ਘੱਟਦਾ ਹੈ। ਤੀਸਰੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ x, π ਤੋਂ $\frac{3\pi}{2}$ ਤੱਕ ਵੱਧਦੀ ਹੈ, sin x, 0 ਤੋਂ –1 ਤੱਕ ਘੱਟਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਆਖ਼ਿਰ ਵਿੱਚ ਚੌਥੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ, sin x, –1 ਤੋਂ 0 ਤੱਕ ਵੱਧਦਾ ਹੈ, ਜਦੋਂ x, $\frac{3\pi}{2}$ ਤੋਂ 2π ਤੱਕ ਵੱਧਦੀ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਅਸੀਂ ਬਾਕੀ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨਾਂ ਤੇ ਵੀ ਵਿਚਾਰ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸਾਰਣੀ ਹੈ।

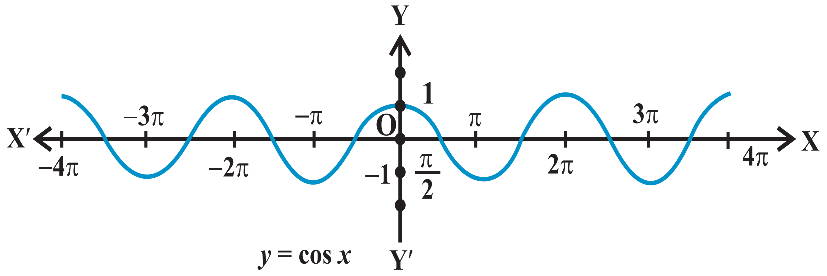
	I ਚੌਥਾਈ	II ਚੌਥਾਈ	III ਚੌਥਾਈ	IV ਚੌਥਾਈ
sin	0 ਤੋਂ 1 ਤੱਕ ਵੱਧਦਾ ਹੈ	1 ਤੋਂ 0 ਤੱਕ ਘੱਟਦਾ ਹੈ	0 ਤੋਂ –1 ਤੱਕ ਘੱਟਦਾ ਹੈ	–1 ਤੋਂ 0 ਤੱਕ ਵੱਧਦਾ ਹੈ
cos	1 ਤੋਂ 0 ਤੱਕ ਘੱਟਦਾ ਹੈ	0 ਤੋਂ – 1 ਤੱਕ ਘੱਟਦਾ ਹੈ	–1 ਤੋਂ 0 ਤੱਕ ਵੱਧਦਾ ਹੈ	0 ਤੋਂ 1 ਤੱਕ ਵੱਧਦਾ ਹੈ
tan	0 ਤੋਂ ∞ ਤੱਕ ਵੱਧਦਾ ਹੈ	–∞ ਤੋਂ 0 ਤੱਕ ਵੱਧਦਾ ਹੈ	0 ਤੋਂ ∞ ਤੱਕ ਵੱਧਦਾ ਹੈ	–∞ ਤੋਂ 0 ਤੱਕ ਵੱਧਦਾ ਹੈ
cot	∞ ਤੋਂ 0 ਤੱਕ ਘੱਟਦਾ ਹੈ	0 ਤੋਂ–∞ ਤੱਕ ਘੱਟਦਾ ਹੈ	∞ ਤੋਂ 0 ਤੱਕ ਘੱਟਦਾ ਹੈ	0 ਤੋਂ –∞ ਤੱਕ ਘੱਟਦਾ ਹੈ
sec	1 ਤੋਂ ∞ ਤੱਕ ਵੱਧਦਾ ਹੈ	–∞ ਤੋਂ–1 ਤੱਕ ਵੱਧਦਾ ਹੈ	–1 ਤੋਂ–∞ ਤੱਕ ਘੱਟਦਾ ਹੈ	∞ ਤੋਂ 1 ਤੱਕ ਘੱਟਦਾ ਹੈ
cosec	∞ ਤੋਂ 1ਤੱਕ ਘੱਟਦਾ ਹੈ	1 ਤੋਂ∞ ਤੱਕ ਵੱਧਦਾ ਹੈ	–∞ ਤੋਂ–1 ਤੱਕ ਵੱਧਦਾ ਹੈ	–1ਤੋਂ–∞ ਤੱਕ ਘੱਟਦਾ ਹੈ

ਟਿੱਪਣੀ ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰਣੀ ਤੋਂ ਕਥਨ tan x , 0 ਤੋਂ ∞ (ਅਨੰਤ) ਤੱਕ ਜਦੋਂ $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ਤੋਂ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਜਦੋਂ x, 0 ਤੋਂ $\frac{\pi}{2}$ ਤੱਕ ਵੱਧਦਾ ਹੈ, tan x ਵੱਧਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜਦੋਂ x, $\frac{\pi}{2}$ ਦੇ ਕੋਲ ਪਹੁੰਚਦਾ ਹੈ ਤਾਂ tan x ਦਾ ਮੁੱਲ ਬਹੁਤ ਵੱਧ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ cosec x, –1 ਤੋਂ – ∞ (ਰਿਣਾਤਮਕ ਅਨੰਤ) ਤੱਕ ਚੌਥੀ ਚੌਥਾਈ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ cosec x, $x \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ ਵਿੱਚ ਘੱਟਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜਦੋਂ x, 2π ਕੋਲ ਪਹੁੰਚਦਾ ਹੈ ਤਾਂ cosec x ਬਹੁਤ ਜ਼ਿਆਦਾ ਰਿਣਾਤਮਕ ਮੁੱਲ ਲੈ ਲੈਂਦਾ ਹੈ। ਚਿੰਨ ∞ ਅਤੇ – ∞ ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਫਲਨਾਂ ਅਤੇ ਚਲਾਂ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਵਿਹਾਰ ਨੂੰ ਦੱਸਦੇ ਹਨ।

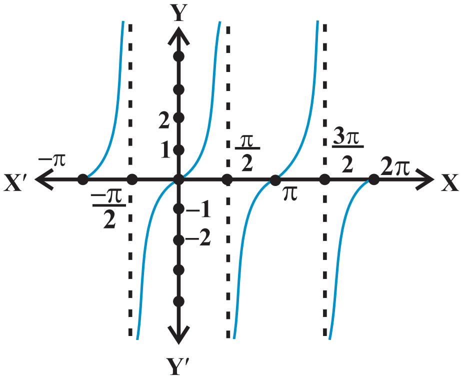
ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਦੇਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ sin x ਅਤੇ cos x ਦੇ ਮੁੱਲ ਅੰਤਰਾਲ 2π ਬਾਅਦ ਦੁਹਰਾਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ cosec x ਅਤੇ sec x ਦੇ ਮੁੱਲ ਵੀ ਅੰਤਰਾਲ 2π ਬਾਅਦ ਦੁਹਰਾਏ ਜਾਣਗੇ। ਅਗਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਾਂਗੇ ਕਿ tan $(\pi + x)$ = tan x, ਇਸ ਲਈ tan x ਦਾ ਮੁੱਲ ਅੰਤਰਾਲ π ਬਾਅਦ ਦੁਹਰਾਏ ਜਾਣਗੇ। ਕਿਉਂਕਿ cot x, tan x ਦਾ ਉਲਟ ਹੈ, ਇਸਦੇ ਮੁਲ ਵੀ ਅੰਤਰਾਲ π ਬਾਅਦ ਦੁਹਰਾਏ ਜਾਣਗੇ। ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਗਿਆਨ ਅਤੇ ਵਿਹਾਰ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਆਲੇਖ ਖਿੱਚ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਆਲੇਖ ਹੇਠਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ :



ਚਿੱਤਰ 3.8

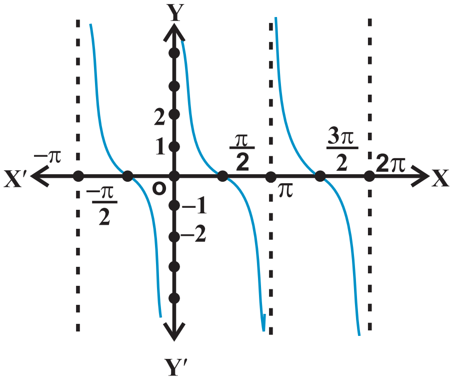


ਚਿੱਤਰ 3.9



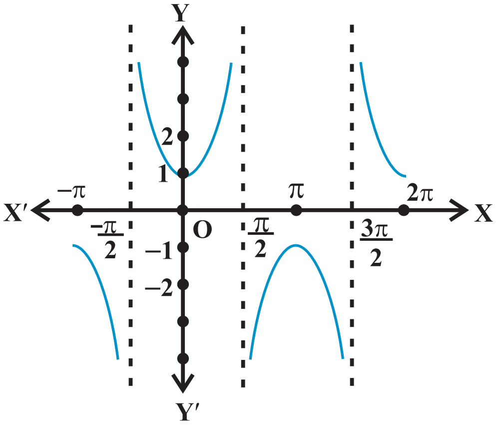
$y = \tan x$

ਚਿੱਤਰ 3.10



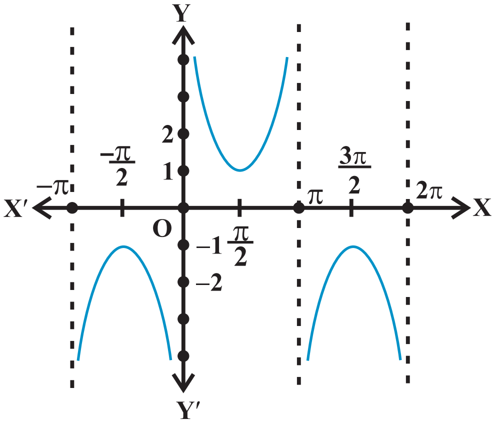
$y = \cot x$

ਚਿੱਤਰ 3.11



$y = \sec x$

ਚਿੱਤਰ 3.12



$y = \text{cosec}\, x$

ਚਿੱਤਰ 3.13

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਜੇਕਰ $\cos x = -\frac{3}{5}$ ਅਤੇ x ਤੀਸਰੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਹੈ ਤਾਂ ਬਾਕੀ ਪੰਜ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $\cos x = -\frac{3}{5}$ ਇਸ ਲਈ $\sec x = -\frac{5}{3}$

ਹੁਣ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, ਭਾਵ $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

ਜਾਂ $\sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

ਤਾਂ $\sin x = \pm \frac{4}{5}$

ਕਿਉਂਕਿ x ਤੀਸਰੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $\sin x$ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ

$$\sin x = -\frac{4}{5}$$

ਇਸ ਤੋਂ

$$\text{cosec}\, x = -\frac{5}{4}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{4}{3} \quad \text{ਅਤੇ} \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{3}{4}$$

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਜੇਕਰ $\cot x = -\frac{5}{12}$, x ਦੂਸਰੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਹੈ ਤਾਂ ਬਾਕੀ ਦੇ ਪੰਜ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $\cot x = -\frac{5}{12}$, ਇਸ ਲਈ $\tan x = -\frac{12}{5}$

ਹੁਣ $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x = 1 + \frac{144}{25} = \frac{169}{25}$

ਇਸ ਲਈ $\sec x = \pm \frac{13}{5}$

ਕਿਉਂਕਿ x ਦੂਸਰੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $\sec x$ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ

$$\sec x = -\frac{13}{5},$$

ਇਸ ਤੋਂ

$$\cos x = -\frac{5}{13}$$

ਫਿਰ ਤੋਂ

$$\sin x = \tan x \cos x = \left(-\frac{12}{5}\right) \times \left(-\frac{5}{13}\right) = \frac{12}{13}$$

ਅਤੇ $\text{cosec } x = \frac{1}{\sin x} = \frac{13}{12}$

ਉਦਾਹਰਣ 8 : $\sin \frac{31\pi}{3}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\sin x$ ਦਾ ਮੁੱਲ 2π ਦੇ ਅੰਤਰਾਲ ਬਾਅਦ ਦੁਹਰਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$\sin \frac{31\pi}{3} = \sin\left(10\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ਉਦਾਹਰਣ 9 : $\cos(-1710^\circ)$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ $\cos x$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹਰ 2π ਜਾਂ 360° ਅੰਤਰਾਲ ਬਾਅਦ ਦੁਹਰਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ

$$\begin{aligned}\cos(-1710^\circ) &= \cos(-1710^\circ + 5 \times 360^\circ) \\ &= \cos(-1710^\circ + 1800^\circ) = \cos 90^\circ = 0\end{aligned}$$

ਅਭਿਆਸ 3.2

1 ਤੋਂ 5 ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ, ਬਾਕੀ ਪੰਜ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

1. $\cos x = -\frac{1}{2}$, x ਤੀਸਰੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਹੈ।

2. $\sin x = \frac{3}{5}$, x ਦੂਸਰੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਹੈ।

3. $\cot x = \frac{3}{4}$, x ਤੀਸਰੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਹੈ।

4. $\sec x = \frac{13}{5}$, x ਚੌਥੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਹੈ।

5. $\tan x = -\frac{5}{12}$, x ਦੂਸਰੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 6 ਤੋਂ 10 ਵਿੱਚ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

6. $\sin 765°$

7. $\text{cosec } (-1410°)$

8. $\tan \frac{19\pi}{3}$

9. $\sin (-\frac{11\pi}{3})$

10. $\cot (-\frac{15\pi}{4})$

3.4 ਦੋ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਅਤੇ ਅੰਤਰ ਦਾ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨ (Trigonometric Functions of Sum and Difference of Two Angles)

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (ਕੋਣਾਂ) ਦੇ ਜੋੜ ਅਤੇ ਅੰਤਰ ਦੇ ਲਈ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਮੂਲ ਨਤੀਜਿਆਂ ਨੂੰ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਸਰਬਸਮਤਾਵਾਂ ਜਾਂ ਤਤਸਮਕਾਂ ਕਹਾਂਗੇ। ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ

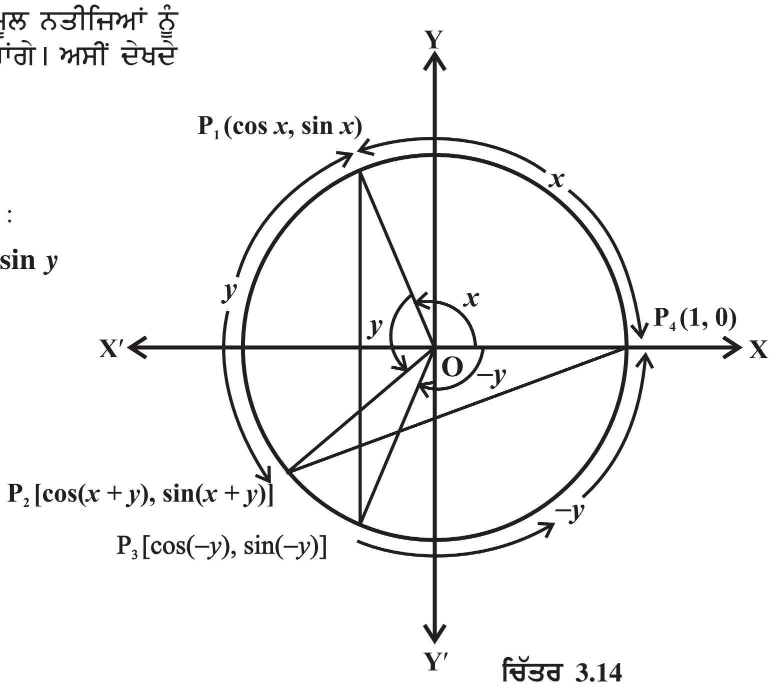
1. $\sin (-x) = -\sin x$

2. $\cos (-x) = \cos x$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਹੋਰ ਪਰਿਣਾਮ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ :

3. $\cos (x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਵਾਲਾ ਚੱਕਰ ਜਿਸਦਾ ਕੇਂਦਰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਹੈ, ਲਓ। ਮੰਨ ਲਓ x, P_4OP_1 ਕੋਣ ਹੈ ਅਤੇ y, P_1OP_2 ਕੋਣ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $(x + y)$, P_4OP_2 ਕੋਣ ਹੋਵੇਗਾ। ਮੰਨ ਲਓ $(-y)$, P_4OP_3 ਕੋਣ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ P_1, P_2, P_3 ਅਤੇ P_4 ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $P_1(\cos x, \sin x)$, $P_2[\cos (x + y), \sin (x + y)]$, $P_3[\cos (-y), \sin (-y)]$ ਅਤੇ $P_4 (1, 0)$ ਹੋਣਗੇ। (ਚਿੱਤਰ 3.14).



ਚਿੱਤਰ 3.14

ਤਿਭੁਜਾਂ P_1OP_3 ਅਤੇ P_2OP_4 ਲਓ। ਇਹ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹਨ (ਕਿਉਂ ?) ਇਸ ਲਈ P_1P_3 ਅਤੇ P_2P_4 ਬਰਾਬਰ ਹਨ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$P_1P_3^2 = [\cos x - \cos(-y)]^2 + [\sin x - \sin(-y)]^2$$

$$= (\cos x - \cos y)^2 + (\sin x + \sin y)^2$$

$$= \cos^2 x + \cos^2 y - 2\cos x \cos y + \sin^2 x + \sin^2 y + 2\sin x \sin y$$

$$= 2 - 2(\cos x \cos y - \sin x \sin y) \qquad \text{(ਕਿਉਂ ?)}$$

ਅਤੇ $P_2P_4^2 = [1 - \cos(x+y)]^2 + [0 - \sin(x+y)]^2$

$$= 1 - 2\cos(x+y) + \cos^2(x+y) + \sin^2(x+y)$$

$$= 2 - 2\cos(x+y)$$

ਕਿਉਂਕਿ $P_1P_3 = P_2P_4$, ਇਸ ਲਈ, $P_1P_3^2 = P_2P_4^2$.

ਇਸ ਲਈ $2 - 2(\cos x \cos y - \sin x \sin y) = 2 - 2\cos(x+y)$.

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

4. $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

ਤਤਸਮਕ (3) ਵਿੱਚ $-y$ ਨੂੰ y ਨਾਲ ਬਦਲਣ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ,

$$\cos(x + (-y)) = \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y)$$

ਜਾਂ $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

5. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਤਤਸਮਕ (4) ਵਿੱਚ x ਨੂੰ $\frac{\pi}{2}$ ਅਤੇ y ਨੂੰ x ਨਾਲ ਬਦਲ ਦੇਈਏ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos x + \sin\frac{\pi}{2}\sin x = \sin x$$

6. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

ਤਤਸਮਕ (5) ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \cos x$$

7. $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\sin(x+y) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (x+y)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - y\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos y + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin y$$

$$= \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

8. $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਤਤਸਮਕ (7) ਵਿੱਚ y ਨੂੰ $-y$ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਦੇਈਏ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਮਿਲ ਜਾਵੇਗਾ,

9. ਤਤਸਮਕਾਂ 3, 4, 7 ਅਤੇ 8 ਵਿੱਚ x ਅਤੇ y ਦੇ ਉਚਿਤ ਮੁੱਲ ਲੈਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਨਤੀਜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਗੇ :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\cos(2\pi - x) = \cos x \qquad \sin(2\pi - x) = -\sin x$$

$\sin x$ ਅਤੇ $\cos x$ ਦੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਤੋਂ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮ $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ ਅਤੇ $\operatorname{cosec} x$ ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ।

10. ਜੇਕਰ ਕੋਣ x, y ਅਤੇ $(x + y)$ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵੀ $\frac{\pi}{2}$ ਦਾ ਟਾਂਕ ਗੁਣਜ ਨਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

ਕਿਉਂਕਿ ਕੋਣ x, y ਅਤੇ $(x + y)$ ਵਿਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ $\frac{\pi}{2}$ ਦਾ ਟਾਂਕ ਗੁਣਜ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\cos x$, $\cos y$ ਅਤੇ $\cos(x + y)$ ਸਿਫ਼ਰ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਹੁਣ

$$\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}$$

ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਨੂੰ $\cos x \cos y$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ,

$$\tan(x+y) = \frac{\dfrac{\sin x \cos y}{\cos x \cos y} + \dfrac{\cos x \sin y}{\cos x \cos y}}{\dfrac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} - \dfrac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

11. $$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਤਤਸਮਕ (10) ਵਿੱਚ y ਨੂੰ $-y$ ਨਾਲ ਬਦਲ ਦੇਈਏ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ,

$$\tan(x - y) = \tan[x + (-y)]$$

$$= \frac{\tan x + \tan(-y)}{1 - \tan x \tan(-y)} = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

12. ਜੇਕਰ ਕੋਣ x, y ਅਤੇ $(x + y)$ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ π ਦਾ ਗੁਣਜ ਨਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ

$$\cot(x+y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot y + \cot x}$$

ਕਿਉਂਕਿ ਕੋਣ x, y ਅਤੇ $(x + y)$ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ π ਦਾ ਗੁਣਜ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ $\sin x \sin y$ ਅਤੇ $\sin(x + y)$ ਸਿਫ਼ਰ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਹੁਣ,

$$\cot(x+y) = \frac{\cos(x+y)}{\sin(x+y)} = \frac{\cos x \cos y - \sin x \sin y}{\sin x \cos y + \cos x \sin y}$$

ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਨੂੰ $\sin x \sin y$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ

$$\cot(x+y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot y + \cot x}$$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

13. $\cot(x-y) = \dfrac{\cot x \cot y + 1}{\cot y - \cot x}$, ਜੇਕਰ ਕੋਣ x, y ਅਤੇ $(x–y)$ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ π ਦਾ ਗੁਣਜ ਨਾ ਹੋਵੇ।

ਜੇਕਰ ਤਤਸਮਕ (12) ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ y ਨੂੰ $-y$ ਨਾਲ ਬਦਲ ਦੇਈਏ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਮਿਲ ਜਾਵੇਗਾ।

14. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

y ਨੂੰ x ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ ਤੇ

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$= \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$$

ਫਿਰ ਤੋਂ, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$= 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x.$$

ਹੁਣ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x}$

ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਨੂੰ $\cos^2 x$, ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ,

$$\cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}, \quad x \neq n\pi + \frac{\pi}{2},$$ ਜਿੱਥੇ n ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

15. $\sin 2x = 2\sin x \cos x = \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$ $x \neq n\pi + \dfrac{\pi}{2}$, ਜਿੱਥੇ n ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

y ਨੂੰ x ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ; $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

ਫਿਰ ਤੋਂ $$\sin 2x = \frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x}$$

ਹਰੇਕ ਪਦ ਨੂੰ $\cos^2 x$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$$

16. $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$, ਜੇਕਰ $2x \neq n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ ਜਿੱਥੇ n ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

y ਨੂੰ x ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

17. $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\begin{aligned}\sin 3x &= \sin(2x + x)\\ &= \sin 2x\cos x + \cos 2x\sin x\\ &= 2\sin x\cos x\cos x + (1 - 2\sin^2 x)\sin x\\ &= 2\sin x(1-\sin^2 x) + \sin x - 2\sin^3 x\\ &= 2\sin x - 2\sin^3 x + \sin x - 2\sin^3 x\\ &= 3\sin x - 4\sin^3 x\end{aligned}$$

18. $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos(2x + x)\\ &= \cos 2x\cos x - \sin 2x\sin x\\ &= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin x\cos x\sin x\\ &= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\cos x(1-\cos^2 x)\\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x\\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x\end{aligned}$$

19. $\tan 3x = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$, ਜੇਕਰ $3x \neq n\pi + \dfrac{\pi}{2}$, ਜਿੱਥੇ n ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\tan 3x = \tan(2x + x)$$

$$= \frac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x\tan x} = \frac{\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x} + \tan x}{1 - \dfrac{2\tan x\tan x}{1-\tan^2 x}}$$

$$= \frac{2\tan x + \tan x - \tan^3 x}{1 - \tan^2 x - 2\tan^2 x} = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$$

20. (i) $\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

(ii) $\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$

(iii) $\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

(iv) $\sin x - \sin y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\cos(x + y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y \qquad \ldots (1)$$

ਅਤੇ $$\cos(x - y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y \qquad \ldots (2)$$

(1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਅਤੇ ਘਟਾਉਣ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2\cos x\cos y \qquad \ldots (3)$$

ਅਤੇ $$\cos(x + y) - \cos(x - y) = -2\sin x\sin y \qquad \ldots (4)$$

ਫਿਰ ਤੋਂ $$\sin(x + y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y \qquad \ldots (5)$$

ਅਤੇ $$\sin(x - y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y \qquad \ldots (6)$$

(5) ਅਤੇ (6) ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਅਤੇ ਘਟਾਉਣ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y \quad \ldots (7)$$

$$\sin(x+y)-\sin(x-y)=2\cos x\sin y \quad \ldots (8)$$

ਮੰਨ ਲਉ $x + y = \theta$ and $x - y = \phi$, ਇਸ ਲਈ

$$x=\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right) \text{ ਅਤੇ } y=\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

x ਅਤੇ y ਦੇ ਇਹਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ (3), (4), (7) ਅਤੇ (8) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$\cos\theta+\cos\phi=2\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\cos\theta-\cos\phi=-2\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\sin\theta+\sin\phi=2\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\sin\theta-\sin\phi=2\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

ਕਿਉਂਕਿ θ ਅਤੇ ϕ ਕੋਈ ਵੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਅਸੀਂ θ ਨੂੰ x ਵਿੱਚ ਅਤੇ ϕ ਨੂੰ y ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\ ;\ \cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},$$

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\ ;\ \sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

ਟਿੱਪਣੀ (20) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਤਤਸਮਕ ਤੋਂ, ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਨਤੀਜੇ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

21. **(i)** $2\cos x\cos y=\cos(x+y)+\cos(x-y)$

(ii) $-2\sin x\sin y=\cos(x+y)-\cos(x-y)$

(iii) $2\sin x\cos y=\sin(x+y)+\sin(x-y)$

(iv) $2\cos x\sin y=\sin(x+y)-\sin(x-y)$.

ਉਦਾਹਰਣ 10 : ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$3\sin\frac{\pi}{6}\sec\frac{\pi}{3}-4\sin\frac{5\pi}{6}\cot\frac{\pi}{4}=1$$

ਹੱਲ : ਖੱਬਾ ਹੱਥ $= 3\sin\frac{\pi}{6}\sec\frac{\pi}{3}-4\sin\frac{5\pi}{6}\cot\frac{\pi}{4}$

$$=3\times\frac{1}{2}\times2-4\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\times1=3-4\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=3-4\times\frac{1}{2}=1=\text{ ਸੱਜਾ ਹੱਥ}$$

ਉਦਾਹਰਣ 11 : sin 15° ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :

$$\sin 15° = \sin(45° - 30°)$$
$$= \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30°$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

ਉਦਾਹਰਣ 12 : $\tan \frac{13\pi}{12}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :

$$\tan \frac{13\pi}{12} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right) = \tan \frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{6}}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2 - \sqrt{3}$$

ਉਦਾਹਰਣ 13 : ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{\tan x + \tan y}{\tan x - \tan y}$$

ਹੱਲ :

$$\text{ਖੱਬਾ ਹੱਥ} = \frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\sin x \cos y - \cos x \sin y}$$

ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਨੂੰ $\cos x \cos y$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{\tan x + \tan y}{\tan x - \tan y}$$

ਉਦਾਹਰਣ 14 : ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$\tan 3x \tan 2x \tan x = \tan 3x - \tan 2x - \tan x$$

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $3x = 2x + x$

ਇਸ ਲਈ $\tan 3x = \tan(2x + x)$

ਜਾਂ $\tan 3x = \dfrac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x \tan x}$

ਜਾਂ $\tan 3x - \tan 3x \tan 2x \tan x = \tan 2x + \tan x$

ਜਾਂ $\tan 3x - \tan 2x - \tan x = \tan 3x \tan 2x \tan x$

ਜਾਂ $\tan 3x \tan 2x \tan x = \tan 3x - \tan 2x - \tan x$

ਉਦਾਹਰਣ 15 : ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2} \cos x$$

ਹੱਲ : ਤਤਸਮਕ 20(i) ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ,

$$\text{ਖੱਬਾ ਹੱਥ} = \cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+x+\frac{\pi}{4}-x}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+x-(\frac{\pi}{4}-x)}{2}\right)$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{4}\cos x = 2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \sqrt{2}\cos x = \text{ਸੱਜਾ ਹੱਥ}$$

ਉਦਾਹਰਣ 16 : ਸਿੱਧ ਕਰੋ $\dfrac{\cos 7x+\cos 5x}{\sin 7x-\sin 5x} = \cot x$

ਹੱਲ : ਤਤਸਮਕਾਂ 20 (i) ਅਤੇ 20 (iv) ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ

$$\text{ਖੱਬਾ ਹੱਥ} = \frac{2\cos\frac{7x+5x}{2}\cos\frac{7x-5x}{2}}{2\cos\frac{7x+5x}{2}\sin\frac{7x-5x}{2}} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x = \text{ਸੱਜਾ ਹੱਥ}$$

ਉਦਾਹਰਣ 17 : ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $=\dfrac{\sin 5x-2\sin 3x+\sin x}{\cos 5x-\cos x} = \tan x$

ਹੱਲ :

$$\text{ਖੱਬਾ ਹੱਥ} = \frac{\sin 5x-2\sin 3x+\sin x}{\cos 5x-\cos x} = \frac{\sin 5x+\sin x-2\sin 3x}{\cos 5x-\cos x}$$

$$= \frac{2\sin 3x\cos 2x-2\sin 3x}{-2\sin 3x\sin 2x} = -\frac{\sin 3x(\cos 2x-1)}{\sin 3x\sin 2x}$$

$$= \frac{1-\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2\sin^2 x}{2\sin x\cos x} = \tan x = \text{ਸੱਜਾ ਹੱਥ}$$

ਅਭਿਆਸ 3.3

ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ :

1. $\sin^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{3}-\tan^2\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}$

2. $2\sin^2\frac{\pi}{6}+\text{cosec}^2\frac{7\pi}{6}\cos^2\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$

3. $\cot^2\frac{\pi}{6}+\text{cosec}\frac{5\pi}{6}+3\tan^2\frac{\pi}{6} = 6$

4. $2\sin^2\frac{3\pi}{4}+2\cos^2\frac{\pi}{4}+2\sec^2\frac{\pi}{3} = 10$

5. ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $\sin 75°$ (ii) $\tan 15°$

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰੋ :

6. $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-y\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-y\right)=\sin(x+y)$

7. $\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\left(\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)^2$

8. $\dfrac{\cos(\pi+x)\cos(-x)}{\sin(\pi-x)\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=\cot^2 x$

9. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\cos(2\pi+x)\left[\cot\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\cot(2\pi+x)\right]=1$

10. $\sin(n+1)x\sin(n+2)x+\cos(n+1)x\cos(n+2)x=\cos x$

11. $\cos\left(\frac{3\pi}{4}+x\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)=-\sqrt{2}\sin x$

12. $\sin^2 6x-\sin^2 4x=\sin 2x\sin 10x$

13. $\cos^2 2x-\cos^2 6x=\sin 4x\sin 8x$

14. $\sin 2x+2\sin 4x+\sin 6x=4\cos^2 x\sin 4x$

15. $\cot 4x(\sin 5x+\sin 3x)=\cot x(\sin 5x-\sin 3x)$

16. $\dfrac{\cos 9x-\cos 5x}{\sin 17x-\sin 3x}=-\dfrac{\sin 2x}{\cos 10x}$

17. $\dfrac{\sin 5x+\sin 3x}{\cos 5x+\cos 3x}=\tan 4x$

18. $\dfrac{\sin x-\sin y}{\cos x+\cos y}=\tan\dfrac{x-y}{2}$

19. $\dfrac{\sin x+\sin 3x}{\cos x+\cos 3x}=\tan 2x$

20. $\dfrac{\sin x-\sin 3x}{\sin^2 x-\cos^2 x}=2\sin x$

21. $\dfrac{\cos 4x+\cos 3x+\cos 2x}{\sin 4x+\sin 3x+\sin 2x}=\cot 3x$

22. $\cot x\cot 2x-\cot 2x\cot 3x-\cot 3x\cot x=1$

23. $\tan 4x=\dfrac{4\tan x(1-\tan^2 x)}{1-6\tan^2 x+\tan^4 x}$

24. $\cos 4x=1-8\sin^2 x\cos^2 x$

25. $\cos 6x=32\cos^6 x-48\cos^4 x+18\cos^2 x-1$

3.5 ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਸਮੀਕਰਣਾਂ (Trigonometric Equations)

ਇੱਕ ਚਲ ਰਾਸ਼ੀ ਵਿੱਚ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨਾਂ ਵਾਲੇ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ। ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ $\sin x$ ਅਤੇ $\cos x$ ਦੇ ਮੁੱਲ 2π ਦੇ ਅੰਤਰਾਲ ਬਾਅਦ ਦੁਹਰਾਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਅਤੇ $\tan x$ ਦੇ ਮੁੱਲ π ਅੰਤਰਾਲ ਬਾਅਦ ਦੁਹਰਾਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਦੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਹਲ ਜਿੱਥੇ $0 \le x < 2\pi$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਮੁੱਖ ਹਲ ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ 'n' ਵਾਲੀ ਵਿਅੰਜਕ ਜੋ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਸਾਰੇ ਹੱਲ ਦਿੰਦੀ ਹੈ, ਨੂੰ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਅਸੀਂ '**Z**' ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 18 : ਸਮੀਕਰਣ $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ਦੇ ਮੁੱਖ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ਅਤੇ $\sin\dfrac{2\pi}{3}=\sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ਇਸ ਲਈ, ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਮੁੱਖ ਹੱਲ ਹਨ $x=\dfrac{\pi}{3}$ ਅਤੇ $\dfrac{2\pi}{3}$ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 19 : ਸਮੀਕਰਣ $\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ਦੇ ਮੁੱਖ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ਇਸ ਤੋਂ, $\tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

ਅਤੇ $\tan\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

ਇਸ ਲਈ $\tan\frac{5\pi}{6} = \tan\frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

ਇਸ ਲਈ, ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਮੁੱਖ ਹੱਲ $\frac{5\pi}{6}$ ਅਤੇ $\frac{11\pi}{6}$ ਹਨ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ। ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਦੇਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ $\sin x = 0$ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ $x = n\pi$, ਜਿੱਥੇ $n \in \mathbf{Z}$ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

$\cos x = 0$ ਤੋਂ $x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, ਜਿੱਥੇ $n \in \mathbf{Z}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਨਤੀਜੇ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ :

ਪ੍ਰਮੇਯ 1 : ਕਿਸੇ ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ x ਅਤੇ y ਲਈ

$\sin x = \sin y$ ਤੋਂ $x = n\pi + (-1)^n y$, ਜਿੱਥੇ $n \in \mathbf{Z}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਸਬੂਤ : ਜੇਕਰ $\sin x = \sin y$ ਹੈ ਤਾਂ

$\sin x - \sin y = 0$ ਜਾਂ $2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} = 0$

ਇਸ ਤੋਂ $\cos\frac{x+y}{2} = 0$ ਜਾਂ $\sin\frac{x-y}{2} = 0$

ਇਸ ਲਈ $\frac{x+y}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ ਜਾਂ $\frac{x-y}{2} = n\pi$, ਜਿੱਥੇ $n \in \mathbf{Z}$

(ਭਾਵ) $x = (2n + 1)\pi - y$ ਜਾਂ $x = 2n\pi + y$, ਜਿੱਥੇ $n \in \mathbf{Z}$

ਇਸ ਲਈ $x = (2n + 1)\pi + (-1)^{2n+1} y$ ਜਾਂ $x = 2n\pi + (-1)^{2n} y$, ਜਿੱਥੇ $n \in \mathbf{Z}$.

ਦੋਹਾਂ ਨਤੀਜਿਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕਠਾ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ

$x = n\pi + (-1)^n y$, ਜਿੱਥੇ $n \in \mathbf{Z}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 2 : ਕਿਸੇ ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ x ਅਤੇ y ਲਈ $\cos x = \cos y$ ਤੋਂ $x = 2n\pi \pm y$, ਜਿੱਥੇ $n \in \mathbf{Z}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਸਬੂਤ : ਜੇਕਰ $\cos x = \cos y$, ਤਾਂ

$\cos x - \cos y = 0$ ਭਾਵ $-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} = 0$

ਇਸ ਲਈ $\sin\frac{x+y}{2} = 0$ ਜਾਂ $\sin\frac{x-y}{2} = 0$

ਇਸ ਲਈ $\frac{x+y}{2} = n\pi$ ਜਾਂ $\frac{x-y}{2} = n\pi$, ਜਿੱਥੇ $n \in \mathbf{Z}$

ਭਾਵ $x = 2n\pi - y$ ਜਾਂ $x = 2n\pi + y$, ਜਿੱਥੇ $n \in \mathbf{Z}$

ਇਸ ਲਈ $x = 2n\pi \pm y$, ਜਿੱਥੇ $n \in \mathbf{Z}$

ਪਰਿਮੇਯ 3 : ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਜੇਕਰ x ਅਤੇ y, $\frac{\pi}{2}$ ਦੇ ਟਾਂਕ ਗੁਣਜ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਤਾਂ

$\tan x = \tan y$ implies $x = n\pi + y$, ਜਿੱਥੇ $n \in \mathbf{Z}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਜੇਕਰ $\tan x = \tan y$, ਤਾਂ $\tan x - \tan y = 0$

ਜਾਂ $$\frac{\sin x \cos y - \cos x \sin y}{\cos x \cos y} = 0$$

ਇਸ ਤੋਂ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ $\sin (x - y) = 0$ (ਕਿਉਂ ?)

ਇਸ ਲਈ $x - y = n\pi$, ਭਾਵ, $x = n\pi + y$, ਜਿੱਥੇ $n \in \mathbf{Z}$

ਉਦਾਹਰਣ 20 : $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ਦਾ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ, $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sin\frac{\pi}{3} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{4\pi}{3}$

ਇਸ ਲਈ $\sin x = \sin\frac{4\pi}{3}$, ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$x = n\pi + (-1)^n \frac{4\pi}{3}, \text{ ਜਿੱਥੇ } n \in \mathbf{Z}$$

ਟਿੱਪਣੀ : $\frac{4\pi}{3}$, x ਦਾ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੈ, ਜਿਸਦੇ ਲਈ $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ਹੈ। x ਦਾ ਕੋਈ ਹੋਰ ਮੁੱਲ ਲੈ ਕੇ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿਸਦੇ ਲਈ $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ਹੋਵੇ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੱਲ ਇੱਕ ਹੀ ਹੋਣਗੇ ਭਾਵੇਂ ਇਹ ਦੇਖਣ ਵਿੱਚ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਹੋਣਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 21 : $\cos x = \frac{1}{2}$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $\cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

ਇਸ ਲਈ $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, ਜਿੱਥੇ $n \in \mathbf{Z}$

ਉਦਾਹਰਣ 22 : $\tan 2x = -\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ $\tan 2x = -\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + x + \frac{\pi}{3}\right)$

ਜਾਂ $$\tan 2x = \tan\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)$$

ਇਸ ਲਈ $$2x = n\pi + x + \frac{5\pi}{6}, \text{ ਜਿੱਥੇ } n \in \mathbf{Z}$$

ਜਾਂ $$x = n\pi + \frac{5\pi}{6}, \text{ ਜਿੱਥੇ } n \in \mathbf{Z}$$

ਉਦਾਹਰਣ 23 : ਹੱਲ ਕਰੋ : $\sin 2x - \sin 4x + \sin 6x = 0$.

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਅਸੀਂ

$\sin 6x + \sin 2x - \sin 4x = 0$ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ

ਜਾਂ $2\sin 4x \cos 2x - \sin 4x = 0$

ਭਾਵ $\sin 4x(2\cos 2x - 1) = 0$

ਇਸ ਲਈ $\sin 4x = 0$ ਜਾਂ $\cos 2x = \frac{1}{2}$

ਭਾਵ $\sin 4x = 0$ ਜਾਂ $\cos 2x = \cos\frac{\pi}{3}$

ਇਸ ਲਈ $4x = n\pi$ ਜਾਂ $2x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, ਜਿੱਥੇ $n \in \mathbf{Z}$

ਭਾਵ $x = \frac{n\pi}{4}$ ਜਾਂ $x = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$, ਜਿੱਥੇ $n \in \mathbf{Z}$

ਉਦਾਹਰਣ 24 : ਸਮੀਕਰਣ $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੀ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ

$$2(1 - \sin^2 x) + 3\sin x = 0$$

ਜਾਂ $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$

ਜਾਂ $(2\sin x + 1)(\sin x - 2) = 0$

ਇਸ ਤੋਂ $\sin x = -\frac{1}{2}$ ਜਾਂ $\sin x = 2$

ਪਰ $\sin x = 2$ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ (ਕਿਉਂ ?)

ਇਸ ਲਈ $\sin x = -\frac{1}{2} = \sin\frac{7\pi}{6}$

ਇਸ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ

$$x = n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}, \text{ ਜਿੱਥੇ } n \in \mathbf{Z}$$

ਅਭਿਆਸ 3.4

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਮੁੱਖ ਅਤੇ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

1. $\tan x = \sqrt{3}$

2. $\sec x = 2$

3. $\cot x = -\sqrt{3}$

4. $\operatorname{cosec} x = -2$

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ:

5. $\cos 4x = \cos 2x$

6. $\cos 3x + \cos x - \cos 2x = 0$

7. $\sin 2x + \cos x = 0$

8. $\sec^2 2x = 1 - \tan 2x$

9. $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 25 : ਜੇਕਰ $\sin x = \frac{3}{5}$, $\cos y = -\frac{12}{13}$, $\sin(x+y)$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ x ਅਤੇ y ਦੋਵੇਂ ਦੂਸਰੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਹੋਣ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \ldots (1)$$

ਹੁਣ $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

ਇਸ ਲਈ $\cos x = \pm\frac{4}{5}$

ਕਿਉਂਕਿ x ਦੂਸਰੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $\cos x$ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋਵੇਗਾ।

ਇਸ ਲਈ $\cos x = -\frac{4}{5}$

ਹੁਣ $\sin^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$

i.e., (ਭਾਵ) $\sin y = \pm\frac{5}{13}$

ਕਿਉਂਕਿ y ਦੂਸਰੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $\sin y$ ਧਨਾਤਮਕ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ $\sin y = \frac{5}{13}$ । $\sin x$, $\sin y$, $\cos x$ ਅਤੇ $\cos y$ ਦੇ ਮੁੱਲ (1) ਵਿੱਚ ਭਰਨ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$\sin(x+y) = \frac{3}{5}\times\left(-\frac{12}{13}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)\times\frac{5}{13} = -\frac{36}{65}-\frac{20}{65} = -\frac{56}{65}$$

ਉਦਾਹਰਣ 26 : ਸਿੱਧ ਕਰੋ :

$$\cos 2x \cos\frac{x}{2} - \cos 3x \cos\frac{9x}{2} = \sin 5x \sin\frac{5x}{2}$$

ਹੱਲ :

ਖੱਬਾ ਹੱਥ $= \frac{1}{2}\left[2\cos 2x \cos\frac{x}{2} - 2\cos\frac{9x}{2}\cos 3x\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(2x+\frac{x}{2}\right)+\cos\left(2x-\frac{x}{2}\right)-\cos\left(\frac{9x}{2}+3x\right)-\cos\left(\frac{9x}{2}-3x\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{5x}{2}+\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{15x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{5x}{2}-\cos\frac{15x}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-2\sin\left\{\frac{\frac{5x}{2}+\frac{15x}{2}}{2}\right\}\sin\left\{\frac{\frac{5x}{2}-\frac{15x}{2}}{2}\right\}\right]$$

$= -\sin 5x \sin\left(-\frac{5x}{2}\right) = \sin 5x \sin\frac{5x}{2} =$ ਸੱਜਾ ਹੱਥ

ਉਦਾਹਰਣ 27 : $\tan\frac{\pi}{8}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $x = \frac{\pi}{8}$ ਤਾਂ $2x = \frac{\pi}{4}$

ਹੁਣ $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

ਜਾਂ $$\tan\frac{\pi}{4} = \frac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}$$

ਮੰਨ ਲਉ $y = \tan\frac{\pi}{8}$ ਤਾਂ $1 = \frac{2y}{1-y^2}$

ਜਾਂ $y^2 + 2y - 1 = 0$

ਇਸ ਲਈ $$y = \frac{-2\pm 2\sqrt{2}}{2} = -1\pm\sqrt{2}$$

ਕਿਉਂਕਿ $\frac{\pi}{8}$ ਪਹਿਲੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $y = \tan\frac{\pi}{8}$ ਧਨਾਤਮਕ ਹੋਵੇਗਾ, ਇਸ ਲਈ

$$\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$$

ਉਦਾਹਰਣ 28 : ਜੇਕਰ $\tan x = \frac{3}{4}, \pi < x < \frac{3\pi}{2}$, ਤਾਂ $\sin\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$, $\tan\frac{x}{2}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, ਇਸ ਲਈ $\cos x$ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋਵੇਗਾ।

ਅਤੇ $$\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{4}$$

ਇਸ ਲਈ $\sin\frac{x}{2}$ ਧਨਾਤਮਕ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ $\cos\frac{x}{2}$ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋਵੇਗਾ।

ਹੁਣ $$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x = 1+\frac{9}{16} = \frac{25}{16}$$

ਇਸ ਲਈ $$\cos^2 x = \frac{16}{25} \text{ ਜਾਂ } \cos x = -\frac{4}{5} \quad \text{(ਕਿਉਂ ?)}$$

ਹੁਣ $$2\sin^2\frac{x}{2} = 1 - \cos x = 1+\frac{4}{5} = \frac{9}{5}$$

ਇਸ ਲਈ $$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{9}{10}$$

ਜਾਂ $\sin\frac{x}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}}$ (ਕਿਉਂ ?)

ਫਿਰ ਤੋਂ $2\cos^2\frac{x}{2} = 1 + \cos x = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

ਇਸ ਲਈ $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{10}$

ਜਾਂ $\cos\frac{x}{2} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ (ਕਿਉਂ)

ਹੁਣ $\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \times \left(\frac{-\sqrt{10}}{1}\right) = -3$

ਉਦਾਹਰਣ 29 : ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\cos^2 x + \cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$.

ਹੱਲ :

ਖੱਬਾ ਹੱਥ $= \frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)}{2} + \frac{1+\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)}{2}$

$= \frac{1}{2}\left[3 + \cos 2x + \cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[3 + \cos 2x + 2\cos 2x \cos\frac{2\pi}{3}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[3 + \cos 2x + 2\cos 2x \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[3 + \cos 2x - 2\cos 2x \cos\frac{\pi}{3}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[3 + \cos 2x - \cos 2x\right] = \frac{3}{2}$ = ਸੱਜਾ ਹੱਥ

ਅਧਿਆਇ 3 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ :

1. $2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13} + \cos\frac{3\pi}{13} + \cos\frac{5\pi}{13} = 0$

2. $(\sin 3x + \sin x)\sin x + (\cos 3x - \cos x)\cos x = 0$

3. $(\cos x + \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = 4\cos^2\frac{x+y}{2}$

4. $(\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = 4\sin^2 \frac{x-y}{2}$

5. $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 4\cos x \cos 2x \sin 4x$

6. $\frac{(\sin 7x + \sin 5x) + (\sin 9x + \sin 3x)}{(\cos 7x + \cos 5x) + (\cos 9x + \cos 3x)} = \tan 6x$

7. $\sin 3x + \sin 2x - \sin x = 4\sin x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2}$

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹਰ ਇੱਕ ਵਿੱਚ $\sin\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$ ਅਤੇ $\tan\frac{x}{2}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

8. $\tan x = -\frac{4}{3}$, x ਦੂਸਰੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਹੈ।

9. $\cos x = -\frac{1}{3}$, x ਤੀਸਰੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਹੈ।

10. $\sin x = \frac{1}{4}$, x ਦੂਸਰੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਹੈ।

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

- ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ r, ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਤੇ, l ਲੰਬਾਈ ਵਾਲੀ ਚਾਪ ਚੱਕਰ ਦੇ ਕੇਂਦਰ ਤੇ θ ਰੇਡੀਅਨ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ $l = r\,\theta$
- ਰੇਡੀਅਨ ਮਾਪ $= \frac{\pi}{180} \times$ ਡਿਗਰੀ ਮਾਪ
- ਡਿਗਰੀ ਮਾਪ $= \frac{180}{\pi} \times$ ਰੇਡੀਅਨ ਮਾਪ
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$
- $1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$
- $\cos(2n\pi + x) = \cos x$
- $\sin(2n\pi + x) = \sin x$
- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(-x) = \cos x$
- $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
- $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
- $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

- $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x$ $\quad$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$

  $\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\quad$ $\sin(\pi - x) = \sin x$

  $\cos(\pi + x) = -\cos x$ $\quad$ $\sin(\pi + x) = -\sin x$

  $\cos(2\pi - x) = \cos x$ $\quad$ $\sin(2\pi - x) = -\sin x$

- ਜੇਕਰ ਕੋਣਾਂ x, y ਅਤੇ $(x \pm y)$ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ $\frac{\pi}{2}$ ਦਾ ਟਾਂਕ ਗੁਣਜ ਨਾ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ

  $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

- $\tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$

- ਜੇਕਰ x, y ਅਤੇ $(x \pm y)$ ਕੋਣਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ π ਦਾ ਗੁਣਜ ਨਾ ਹੋਵੇ ? ਤਾਂ

  $\cot(x+y) = \dfrac{\cot x \cot y - 1}{\cot y + \cot x}$

- $\cot(x-y) = \dfrac{\cot x \cot y + 1}{\cot y - \cot x}$

- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \dfrac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$

- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = \dfrac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$

- $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

- $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

- $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

- $\tan 3x = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$

- (*i*) $\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

  (*ii*) $\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$

  (*iii*) $\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

  (*iv*) $\sin x - \sin y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$

- (*i*) $2 \cos x \cos y = \cos (x + y) + \cos (x - y)$
  (*ii*) $-2 \sin x \sin y = \cos (x + y) - \cos (x - y)$
  (*iii*) $2 \sin x \cos y = \sin (x + y) + \sin (x - y)$
  (*iv*) $2 \cos x \sin y = \sin (x + y) - \sin (x - y)$.
- $\sin x = 0$ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ $x = n\pi$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $n \in \mathbf{Z}$
- $\cos x = 0$ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ $x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $n \in \mathbf{Z}$
- $\sin x = \sin y$ ਤੋਂ $x = n\pi + (-1)^n y$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $n \in \mathbf{Z}$
- $\cos x = \cos y$, ਤੋਂ $x = 2n\pi \pm y$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $n \in \mathbf{Z}$
- $\tan x = \tan y$ ਤੋਂ $x = n\pi + y$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $n \in \mathbf{Z}$

ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਨੋਟ

ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਭਾਰਤ ਵਿੱਚ ਅਰੰਭ ਹੋਇਆ। ਆਰਿਆ ਭੱਟ (476 ਈ.), ਬ੍ਰਹਮਗੁਪਤ (598 ਈ.) ਭਾਸਕਰ ਪਹਿਲਾ (600 ਈ.) ਅਤੇ ਭਾਸਕਰ ਦੂਸਰਾ (1114 ਈ.) ਭਾਰਤੀ ਗਣਿਤ ਸ਼ਾਸ਼ਤਰੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਇਸ ਦੇ ਪ੍ਰਮੁੱਖ ਨਤੀਜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਸਨ। ਇਹ ਸੰਪੂਰਨ ਗਿਆਨ ਭਾਰਤ ਤੋਂ ਮੱਧ ਪੂਰਵ ਅਤੇ ਫਿਰ ਉੱਥੋਂ ਯੂਰਪ ਗਿਆ। ਯੂਨਾਨੀਆਂ (ਗ੍ਰੀਕ) ਨੇ ਵੀ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਸ਼ੁਰੂ ਕੀਤਾ, ਪਰੰਤੂ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਕਾਰਜਵਿਧੀ ਉਗੜ-ਦੁਗੜ ਸੀ, ਜਦੋਂ ਭਾਰਤ ਦੀ ਵਿਧੀ ਦੇ ਬਾਰੇ ਪਤਾ ਲੱਗਿਆ, ਤਾਂ ਸਾਰੇ ਵਿਸ਼ਵ ਨੇ ਉਸ ਨੂੰ ਅਪਣਾ ਲਿਆ।

ਭਾਰਤ ਵਿੱਚ ਆਧੁਨਿਕ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੋਣ ਦੀ ਜਿਯਾ (Sine) ਅਤੇ ਫਲਨ ਦੇ ਪਹਿਚਾਣ ਦਾ ਪੂਰਵ ਵਿਵਰਣ ਸਿਧਾਂਤ (ਸੰਸਕ੍ਰਿਤ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਗਿਆ ਜਯੋਤਸ਼ੀ ਕੰਮ) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਯੋਗਦਾਨ ਗਣਿਤ ਦੇ ਇਤਿਹਾਸ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਮੁੱਖ ਹੈ।

ਭਾਸਕਰ ਪਹਿਲੇ (600 ਈ.) ਨੇ 90° ਤੋਂ ਵੱਧ ਕੋਣਾਂ ਦੇ sine ਦੇ ਮੁੱਲ ਲਈ ਸੂਤਰ ਦਿੱਤਾ ਸੀ। ਸੋਲ੍ਹਵੀਂ ਸਦੀ ਵਿੱਚ ਮਲਿਆਲਮ ਕੰਮ *Yuktibhasa* (ਸਮਾਂ) ਵਿੱਚ sin (A + B) ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਦਾ ਸਬੂਤ ਆਉਂਦਾ ਹੈ। ਭਾਸਕਰ II ਦੁਆਰਾ 18°, 36°, 54°, 72° ਆਦਿ ਦੇ sine ਅਤੇ cosine ਦੇ ਸਹੀ ਮੁੱਲ ਦਿੱਤੇ ਗਏ।

ਚਿੰਨ੍ਹ $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$ ਆਦਿ ਨੂੰ ਚਾਪ $\sin x$, ਚਾਪ $\cos x$ ਆਦਿ ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ ਪ੍ਰਯੋਗ (ਵਰਤਣ) ਦਾ ਸੁਝਾਅ ਖਗੋਲ ਵਿਗਿਆਨੀ Sir John F.W. Hershel (1813) ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ। ਉਚਾਈ ਅਤੇ ਦੂਰੀ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ Thales (600 B.C.) ਦਾ ਨਾਮ ਜੁੜਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਉਸਨੂੰ ਮਿਸਰ ਦੇ ਮਹਾਨ ਪਿਰਾਮਿਡ ਦੀ ਉਚਾਈ ਦੇ ਮਾਪਣ ਦਾ ਮਾਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਲਈ ਉਸਨੇ ਇੱਕ ਵਸਤੂ ਜਿਸ ਦੀ ਉਚਾਈ ਪਤਾ ਸੀ ਅਤੇ ਪਿਰਾਮਿਡ ਦੇ ਪਰਛਾਵੇਂ ਨੂੰ ਮਾਪ ਕੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਇਹ ਅਨੁਪਾਤ

$$\frac{H}{S} = \frac{h}{s} = \tan \text{ ਸੂਰਜ ਦੀ ਉਚਾਣ ਜਾਂ ਉਚਾਈ (altitude)}$$

Thales ਨੂੰ ਸਮੁੰਦਰੀ ਜਹਾਜ਼ਾਂ ਦੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦਾ ਮਾਨ ਵੀ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਇਸਦੇ ਲਈ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਸਮਰੂਪ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਉਚਾਈ ਅਤੇ ਦੂਰੀ ਸੰਬੰਧੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦਾ ਹੱਲ, ਸਮਰੂਪ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਚੀਨ ਭਾਰਤੀ ਕੰਮਾਂ ਵਿੱਚ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।