ਅਧਿਆਇ 4

ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ ਦਾ ਸਿਧਾਂਤ
(Principle of Mathematical Induction)

❖*Analysis and natural philosophy owe their most important discoveries to this fruitful means, which is called induction. Newton was indebted to it for his theorem of the binomial and the principle of universal gravity. – LAPLACE* ❖

4.1 ਭੂਮਿਕਾ

G. Peano
(1858-1932)

ਗਣਿਤਿਕ (Mathematical) ਚਿੰਤਨ ਦਾ ਇੱਕ ਮੂਲਭੂਤ ਸਿਧਾਂਤ ਨਿਗਮਨਿਕ ਤਰਕ (Deductive reasoning) ਹੈ। ਤਰਕਸ਼ਾਸ਼ਤਰ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਇੱਕ ਅਣਉਪਚਾਰਿਕ (Informal) ਅਤੇ ਨਿਗਮਨਿਕ ਤਰਕ ਦਾ ਉਦਾਹਰਣ ਤਿੰਨ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ :

(a) ਸੁਕਰਾਤ ਇੱਕ ਮਨੁੱਖ ਹੈ।
(b) ਸਾਰਿਆਂ ਮਨੁੱਖਾਂ ਦੀ ਮੌਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ,
(c) ਸੁਕਰਾਤ ਵੀ ਮਰਨਸ਼ੀਲ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਕਥਨ (*a*) ਅਤੇ (*b*) ਠੀਕ ਹਨ, ਤਾਂ (*c*) ਦੀ ਸੱਚਾਈ ਸਥਾਪਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਸਰਲ ਉਦਹਾਰਣ ਨੂੰ ਗਣਿਤਿਕ ਬਣਾਉਣ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

(i) ਅੱਠ, ਦੋ ਨਾਲ ਭਾਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
(ii) ਦੋ ਨਾਲ ਭਾਗ ਹੋਣ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ ਜਿਸਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ
(iii) 8 ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

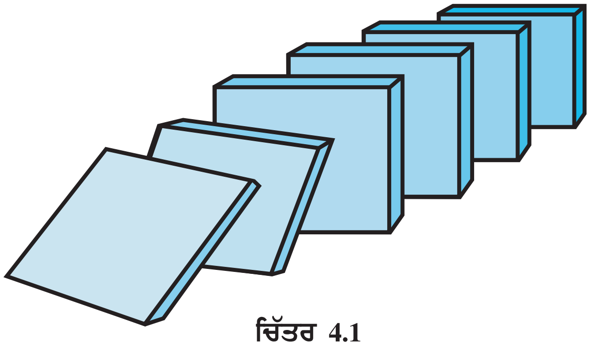
ਇਸ ਲਈ, ਸੰਖੇਪ ਵਿੱਚ ਨਿਗਮਨ (deduction) ਇੱਕ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਕਥਨ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਹੋਣ ਲਈ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਆਮ ਤੌਰ ’ਤੇ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਇਸ ਨੂੰ ਅਨੁਮਾਨਿਤ ਕਥਨ (conjecture) ਜਾਂ ਪ੍ਰਮੇਯ (ਥਿਊਰਮ) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ, ਤਰਕ ਸੰਗਤ ਨਿਗਮਨ (deduction) ਦੇ ਪਗ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ (ਕੱਢੇ) ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਸਬੂਤ ਸਥਾਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ ਨਿਗਮਨ ਵਿਆਪਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚੋਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸਥਿਤੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਹੈ।

ਨਿਗਮਨ ਦੇ ਉਲਟ, ਆਗਮਨ (Induction) ਤਰਕ ਹਰ ਇੱਕ ਸਥਿਤੀ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ’ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਵਿੱਚ ਹਰ ਇੱਕ ਅਤੇ ਹਰ ਸੰਭਵ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਧਿਆਨ ਵਿੱਚ ਰੱਖਦੇ ਹੋਏ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੇ ਨਿਰੀਖਣ ਰਾਹੀ ਇੱਕ ਅਨੁਮਾਨਿਤ ਕਥਨ ਵਿਕਸਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਆਮ ਤੌਰ ’ਤੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਵਿਗਿਆਨਕ ਚਿੰਤਨ ਜਿੱਥੇ, ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਇਕੱਠ ਅਤੇ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਮਾਨਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਦਾ ਮੁੱਖ ਅਧਾਰ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਰਲ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਆਗਮਨ ਸ਼ਬਦ ਦਾ ਅਰਥ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸਥਿਤੀਆਂ ਜਾਂ ਤੱਥਾਂ ਤੋਂ ਵਿਆਪੀਕਰਨ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਹੈ।

ਬੀਜਗਣਿਤ (ਅਲਜਬਰੇ) ਜਾਂ ਗਣਿਤ ਦੀਆਂ ਹੋਰ ਸ਼ਾਖਾਵਾਂ ਵਿੱਚ, ਕੁਝ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ n ਲਈ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਤਕਨੀਕ ’ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਇੱਕ ਬਹੁਤ ਢੁੱਕਵੇਂ ਸਿਧਾਂਤ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਇਸ ਨੂੰ ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ ਦਾ ਸਿਧਾਂਤ (Principle of Mathematical Induction) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

4.2 ਪ੍ਰੇਰਣਾ (Motivation)

ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸੰਪੂਰਨ ਆਗਮਨ ਦੇ ਇੱਕ ਰੂਪ ਜਿਸ ਨੂੰ ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ, ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਲਈ, ਮੰਨ ਲਉ ਪਤਲੀਆਂ ਆਇਤਾਕਾਰ ਟਾਇਲਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਚਿੱਤਰ 4.1 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਰੱਖਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 4.1

ਜਦੋਂ ਪਹਿਲੀ ਟਾਇਲ ਨੂੰ ਦਿਖਾਈ ਦਿਸ਼ਾ ਵੱਲ ਧੱਕਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਟਾਇਲਾਂ ਡਿੱਗ ਜਾਣਗੀਆਂ, ਇਨ੍ਹਾਂ ਜਾਨਣਾ ਬਹੁਤ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ

(a) ਪਹਿਲੀ ਟਾਇਲ ਡਿੱਗਦੀ ਹੈ, ਅਤੇ

(b) ਇਸ ਘਟਨਾ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ ਪਹਿਲੀ ਟਾਇਲ ਡਿਗਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸਦੀ ਅਗਲੀ (successor) ਲਾਜ਼ਮੀ ਤੌਰ 'ਤੇ ਡਿੱਗਦੀ ਹੈ।

ਇਹ ਹੀ ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ ਦਾ ਸਿਧਾਂਤ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਸਮੂਹ **N**, ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ **R** ਦਾ ਇੱਕ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਉਪ-ਸਮੂਹ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ, **N**, **R** ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਸਮੂਹ ਜਾਂ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਹਨ—

ਇੱਕ ਸਮੂਹ S ਨੂੰ ਆਗਮਨਿਕ ਸਮੂਹ ਕਹਾਂਗੇ ਜੇਕਰ $1 \in S$ ਅਤੇ $x + 1 \in S$ ਜਦੋਂ $x \in S$ ਹੋਵੇ। ਕਿਉਂਕਿ **N**,**R** ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੈ, ਜੋ ਇੱਕ ਆਗਮਨਿਕ ਸਮੂਹ ਹੈ, ਇਸ ਤੋਂ ਸਿੱਟਾ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਕਿ **R** ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਉਪ ਸਮੂਹ ਜੋ ਕਿ ਆਗਮਨਿਕ ਸਮੂਹ ਹੈ, ਉਸਦੇ ਵਿੱਚ **N** ਲਾਜ਼ਮੀ ਤੌਰ 'ਤੇ ਹੋਵੇਗਾ।

ਦ੍ਰਿਸ਼ਟਾਂਤ (Illustration)

ਮੰਨ ਲਉ ਅਸੀਂ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $1, 2, 3,...,n$, ਦੇ ਜੋੜ ਦਾ ਸੂਤਰ ਲੱਭਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ, ਭਾਵ ਸੂਤਰ ਜਿਸ ਨਾਲ $1 + 2 + 3$ ਜਦੋਂ $n = 3$ ਦਾ ਮੁੱਲ, $1 + 2 + 3 + 4$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਜਦੋਂ $n = 4$ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਇਹ ਵਿਸ਼ਵਾਸ ਕਰਨ ਲਈ ਪ੍ਰੇਰਿਤ ਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸੂਤਰ $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ਠੀਕ ਹੈ।

ਇਸ ਸੂਤਰ ਨੂੰ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ? ਆਪਣੀ ਇੱਛਾ ਅਨੁਸਾਰ ਅਸੀਂ n ਨੂੰ ਕਈ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲੈ ਕੇ, ਇਸ ਕਥਨ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਪਰ ਇਹ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ n ਦੇ ਸਾਰਿਆਂ ਮੁੱਲਾਂ ਲਈ ਸੂਤਰ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਨਹੀਂ ਕਰੇਗੀ। ਇਸ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਕਿਰਿਆ ਲੜੀ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ, ਜਿਸ ਦਾ ਪ੍ਰਭਾਵ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੋਵੇ ਕਿ ਇਕ ਵਾਰ ਕਿਸੇ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਲਈ ਸੂਤਰ ਸਿੱਧ ਹੋ ਜਾਣ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਆਉਣ ਵਾਲੀਆਂ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਸੂਤਰ ਨਿਰੰਤਰ ਆਪਣੇ ਆਪ ਸਿੱਧ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਕਾਰਜ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਦੁਆਰਾ ਉਤਪੰਨ ਕੀਤਾ ਮੰਨਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

4.3 ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ, ਦਾ ਸਿਧਾਂਤ (The Principle of Mathematical Induction)

ਮੰਨ ਲਉ $P(n)$ ਇੱਕ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ n ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਕਿ

(*i*) ਕਥਨ $n = 1$, ਲਈ ਠੀਕ ਹੈ, ਭਾਵ $P(1)$ ਠੀਕ ਹੈ ਅਤੇ

(*ii*) ਜੇਕਰ ਕਥਨ $n = k$ (ਜਿੱਥੇ k ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ), ਲਈ ਠੀਕ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਕਥਨ $n = k + 1$, ਲਈ ਵੀ ਠੀਕ ਹੋਵੇਗਾ ਭਾਵ $P(k)$ ਦੀ ਸਚਾਈ ਤੋਂ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ $P(k + 1)$ ਵੀ ਸੱਚ ਹੋਵੇਗਾ। ਤਾਂ P(n) ਸਾਰੀਆਂ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ n ਲਈ ਸੱਚ ਹੋਵੇਗਾ।

ਗੁਣ (i) ਸਿਰਫ਼ ਤੱਥ ਦਾ ਕਥਨ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ ਜਦੋਂ ਕਥਨ $n \geq 4$ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੋਵੇ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲਾ ਚਰਣ $n = 4$ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਵੇਗਾ ਤੇ ਅਸੀਂ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ $n = 4$ ਲਈ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ ਭਾਵ P(4)

ਗੁਣਧਰਮ (Property) (ii) ਇੱਕ ਸ਼ਰਤ ਵਾਲਾ (conditional) ਗੁਣਧਰਮ ਹੈ। ਇਹ ਯਕੀਨ ਨਾਲ ਨਹੀਂ ਕਿਹਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਕਿ ਕਥਨ $n = k$, ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਕੇਵਲ ਇੰਨਾ ਕਹਿੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਇਹ $n = k$, ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ, ਤਾਂ $n = k + 1$ ਲਈ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਗੁਣਧਰਮ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਕੇਵਲ ਬਾਸ਼ਰਤ ਤਜਵੀਜ (conditional proposition) ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਜੇਕਰ ਕਥਨ $n = k$, ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ $n = k + 1$ ਲਈ ਵੀ ਸੱਚ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਨੂੰ ਕਦੇ-ਕਦੇ ਆਗਮਨ ਦਾ ਪਗ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਆਗਮਨ ਦੇ ਪਗ ਵਿੱਚ ਇਹ ਮੰਨਿਆ ਜਾਣਾ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ

$n = k$ ਲਈ ਸਹੀ ਹੈ, ਇਸ ਪਗ ਨੂੰ ਆਗਮਨ ਪਰਿਕਲਪਨਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਇੱਕ ਸੂਤਰ ਖੋਜਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜੋ ਕਿਸੇ ਨਮੂਨੇ ਦੇ ਅਨੁਰੂਪ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$1 = 1^2 = 1$$

$$4 = 2^2 = 1 + 3$$

$$9 = 3^2 = 1 + 3 + 5$$

$$16 = 4^2 = 1 + 3 + 5 + 7, \text{ ਆਦਿ}$$

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਪਹਿਲੀਆਂ ਦੋ ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਦੂਸਰੀ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਵਰਗ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ, ਪਹਿਲੀਆਂ ਤਿੰਨ ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਤੀਸਰੀ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਵਰਗ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੱਗੇ ਵੀ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਸ ਨਮੂਨੇ ਤੋਂ ਪ੍ਰਤੀਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ

$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2$, (ਭਾਵ)

ਪਹਿਲੀਆਂ n ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ n ਦੇ ਵਰਗ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ,

$P(n): 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$

ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ P(n), n ਦੇ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲਾਂ ਲਈ ਠੀਕ ਹੈ।

ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪੱਗ ਜਿਸ ਨੂੰ ਇਸ ਦੇ ਸਹੀ ਹੋਣ ਲਈ ਵਰਤਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ P(1) ਸਹੀ ਹੈ, ਨੂੰ ਮੂਲ ਪੱਗ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਪ੍ਰਤੱਖ ਰੂਪ ਵਿੱਚ

$1 = 1^2$, ਭਾਵ P(1) ਠੀਕ ਹੈ।

ਅਗਲੇ ਚਰਣ ਨੂੰ ਆਗਮਨ ਪਗ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਮੰਨਦੇ ਹਾਂ ਕਿ P(k) ਕਿਸੇ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ k ਲਈ ਠੀਕ ਹੈ ਅਤੇ ਹੁਣ ਅਸੀਂ P (k + 1) ਨੂੰ ਸਹੀ ਸਿੱਧ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਕਿਉਂਕਿ P (k) ਠੀਕ ਹੈ (ਸਹੀ ਹੈ), ਇਸ ਲਈ

$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k - 1) = k^2$ ... (1)

ਮੰਨ ਲਉ

$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k - 1) + \{2(k + 1) - 1\}$ ... (2)

$= k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$ [(1) ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ]

ਇਸ ਲਈ P (k + 1) ਠੀਕ (ਸਹੀ) ਹੈ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੁਣ ਆਗਮਨਿਕ ਸਬੂਤ ਪੂਰਾ ਹੋ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ P(n), ਸਾਰੀਆਂ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ n ਲਈ ਠੀਕ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਸਾਰੇ $n \geq 1$ ਲਈ, ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ P(n)ਹੈ, ਭਾਵ

$$P(n): \; 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$n = 1$, ਲਈ $\quad P(1): 1 = \dfrac{1(1+1)(2\times1+1)}{6} = \dfrac{1\times2\times3}{6} = 1$ ਜੋ ਕਿ ਠੀਕ (ਸਹੀ) ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿਸੇ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ k ਲਈ P(k) ਠੀਕ (ਸਹੀ) ਹੈ, ਭਾਵ

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \qquad \ldots (1)$$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ P(k + 1) ਵੀ ਠੀਕ (ਸਹੀ) ਹੈ, ਹੁਣ

$$(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + k^2) + (k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \qquad \text{[(1) ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ]}$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+1+1)\{2(k+1)+1\}}{6}$$

ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ P(k) ਠੀਕ (ਸਹੀ) ਹੈ ਤਾਂ P(k + 1) ਵੀ ਠੀਕ (ਸਹੀ) ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਤੋਂ ਕਥਨ P(n) ਸਾਰੀਆਂ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ n ਲਈ ਠੀਕ (ਸਹੀ) ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਸਾਰੀਆਂ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ n ਲਈ $2^n > n$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ P(n): $2^n > n$

ਜਦੋਂ $n = 1$ ਹੋਵੇ, $2^1 > 1$ ਇਸ ਲਈ P(1) ਠੀਕ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿਸੇ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ k ਲਈ P(k) ਠੀਕ (ਸਹੀ) ਹੈ,

$$2^k > k \qquad \ldots (1)$$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਜਦੋਂ P(k) ਠੀਕ ਹੈ ਤਾਂ P(k +1) ਵੀ ਠੀਕ ਹੋਵੇਗਾ। (1) ਨੂੰ ਦੋਹਾਂ ਪਾਸੇ 2 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$2.\, 2^k > 2k$$

ਭਾਵ, $\quad 2^{k+1} > 2k = k + k > k + 1$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਦੋਂ P(k) ਠੀਕ ਹੈ ਤਾਂ P(k + 1) ਵੀ ਠੀਕ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਤੋਂ P(n) ਹਰ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ n ਲਈ ਠੀਕ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਸਾਰੇ $n \geq 1$, ਲਈ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ

$$P(n):\quad \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $P(1) : \frac{1}{1.2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}$ ਜੋ ਕਿ ਠੀਕ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $n = 1$ ਲਈ $P(n)$ ਠੀਕ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ k ਲਈ $P(k)$ ਠੀਕ ਹੈ, ਭਾਵ

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1} \qquad \ldots (1)$$

ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਜਦੋਂ $P(k)$ ਸਹੀ ਹੈ ਤਾਂ $P(k + 1)$ ਵੀ ਸਹੀ ਹੋਵੇਗਾ, ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\left[\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}\right]+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)} \qquad \text{[(1) ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ]}$$

$$=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k^2+2k+1)}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}=\frac{k+1}{(k+1)+1}$$

ਇਸ ਲਈ $P(k + 1)$ ਠੀਕ ਹੈ, ਜਦੋਂ $P(k)$ ਠੀਕ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਤੋਂ (P.M.I.), $P(n)$ ਸਾਰੀਆਂ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਠੀਕ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਹਰ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ n ਲਈ, ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $7^n - 3^n$, 4 ਨਾਲ ਭਾਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ,

$P(n) : 7^n - 3^n$, 4 ਨਾਲ ਭਾਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ,

$P(1): 7^1 - 3^1 = 4$, 4 ਨਾਲ ਭਾਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $n = 1$ ਲਈ $P(n)$ ਠੀਕ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ k ਲਈ $P(k)$ ਠੀਕ ਹੈ।

ਭਾਵ $P(k) : 7^k - 3^k$, 4 ਨਾਲ ਭਾਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ $7^k - 3^k = 4d$, ਜਿੱਥੇ $d \in \mathbf{N}$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ P(k + 1) ਠੀਕ ਹੈ, ਜਦੋਂ P(k) ਠੀਕ ਹੈ।

ਹੁਣ $7^{(k+1)} - 3^{(k+1)} = 7^{(k+1)} - 7.3^k + 7.3^k - 3^{(k+1)}$

$= 7(7^k - 3^k) + (7-3)3^k = 7(4d) + (7-3)3^k$

$= 7(4d) + 4.3^k = 4(7d + 3^k)$

ਅਖ਼ੀਰ ਵਾਲੀ ਪੰਕਤੀ ਤੋਂ, ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $7^{(k+1)} - 3^{(k+1)}$, 4 ਨਾਲ ਭਾਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ P(k + 1) ਠੀਕ ਹੈ, ਜਦੋਂ P(k) ਠੀਕ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ (P.M.I.) ਤੋਂ ਇਹ ਸਾਰੀਆਂ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ n ਲਈ ਠੀਕ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਸਾਰੀਆਂ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ n ਲਈ, ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $(1 + x)^n \geq (1 + nx)$

ਜਿੱਥੇ $x > -1$.

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ P(n) ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਕਥਨ ਹੈ,

ਭਾਵ P(n): $(1 + x)^n \geq (1 + nx)$, ਜਿੱਥੇ $x > -1$

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $n = 1$, ਲਈ P(n) ਠੀਕ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ$(1 + x) \geq (1 + x)$, $x > -1$ ਲਈ

ਮੰਨ ਲਉ

P(k): $(1 + x)^k \geq (1 + kx)$, $x > -1$ ਲਈ ਠੀਕ ਹੈ ... (1)

ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਦੋਂ P(k) ਠੀਕ ਹੈ ਤਾਂ P(k + 1) ਵੀ $x > -1$ ਲਈ ਠੀਕ ਹੋਵੇਗਾ। ... (2)

ਆਉ ਇੱਕ ਤਤਸਮਕ ਲਈਏ

$(1 + x)^{k+1} = (1 + x)^k (1 + x)$

ਦਿੱਤਾ ਹੈ, $x > -1$ ਇਸ ਲਈ $(1 + x) > 0$

ਇਸ ਲਈ $(1 + x)^k \geq (1 + kx)$ ਨੂੰ ਵਰਤਦੇ ਹੋਏ, ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ

$(1 + x)^{k+1} \geq (1 + kx)(1 + x)$

ਭਾਵ $(1 + x)^{k+1} \geq (1 + x + kx + kx^2)$ ... (3)

ਇੱਥੇ k ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ $x^2 \geq 0$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $kx^2 \geq 0$, ਇਸ ਲਈ

$(1 + x + kx + kx^2) \geq (1 + x + kx)$,

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਨੂੰ

$(1 + x)^{k+1} \geq (1 + x + kx)$

ਭਾਵ $(1 + x)^{k+1} \geq [1 + (1 + k)x]$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਥਨ (2) ਸਿੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ (P.M.I.) ਤੋਂ P(n) ਹਰ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਲਈ ਠੀਕ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਸਾਰੇ $n \in \mathbf{N}$ ਲਈ,

$2.7^n + 3.5^n - 5$, 24 ਨਾਲ ਭਾਗਯੋਗ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਥਨ P(n) ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਕਿ

P(n) : $2.7^n + 3.5^n - 5$, 24 ਨਾਲ ਭਾਗਯੋਗ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $n = 1$ ਲਈ ਕਥਨ P(n) ਸਹੀ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $2.7 + 3.5 - 5 = 24$, 24 ਨਾਲ ਭਾਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ P(k) ਸਹੀ ਹੈ,

ਭਾਵ $2.7^k + 3.5^k - 5 = 24q$, ਜਿੱਥੇ $q \in \mathbf{N}$ ... (1)

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਜਦੋਂ P(k) ਸਹੀ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ P(k + 1) ਵੀ ਸਹੀ ਹੋਵੇਗਾ।

ਹੁਣ

$$\begin{aligned}2.7^{k+1} + 3.5^{k+1} - 5 &= 2.7^k \,.\, 7^1 + 3.5^k \,.\, 5^1 - 5\\ &= 7\,[2.7^k + 3.5^k - 5 - 3.5^k + 5] + 3.5^k \,.\, 5 - 5\\ &= 7\,[24q - 3.5^k + 5] + 15.5^k - 5\\ &= 7 \times 24q - 21.5^k + 35 + 15.5^k - 5\\ &= 7 \times 24q - 6.5^k + 30\\ &= 7 \times 24q - 6\,(5^k - 5)\\ &= 7 \times 24q - 6\,(4p) \quad [(5^k - 5) \text{ 4 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ (ਕਿਉਂ ?)}]\\ &= 7 \times 24q - 24p\\ &= 24\,(7q - p)\\ &= 24 \times r\,;\ r = 7q - p, \text{ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ} \qquad \dots (2)\end{aligned}$$

ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਵਾਲੀ ਵਿਅੰਜਕ 24 ਨਾਲ ਭਾਗਯੋਗ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ P(k + 1) ਸਹੀ ਹੈ, ਜਦੋਂ P(k) ਸਹੀ ਹੋਵੇ।

ਇਸ ਲਈ ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ (P.M.I.) ਤੋਂ, P(n) ਸਾਰੇ $n \in$ N ਲਈ ਸਹੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ, $n \in \mathbf{N}$ ਲਈ

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 > \frac{n^3}{3}$$

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ P(n) ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਕਥਨ ਹੈ।

ਭਾਵ $P(n) : 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 > \dfrac{n^3}{3},\ n \in \mathbf{N}$

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $n = 1$, ਕਥਨ P(n) ਸਹੀ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $1^2 > \dfrac{1^3}{3}$

ਮੰਨ ਲਉ P(k) ਸਹੀ (ਠੀਕ) ਹੈ।

ਭਾਵ $P(k) : 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 > \dfrac{k^3}{3}$ ...(1)

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ P(k + 1) ਸੱਚ (ਸਹੀ) ਹੈ, ਜਦੋਂ P(k) ਸਹੀ (ਠੀਕ/ਸੱਚ) ਹੋਵੇ।

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k + 1)^2$

$$= \left(1^2 + 2^2 + \dots + k^2\right) + (k+1)^2 > \frac{k^3}{3} + (k+1)^2 \qquad [(1) \text{ ਤੋਂ}]$$

$$= \frac{1}{3}\,[k^3 + 3k^2 + 6k + 3]$$

$$= \frac{1}{3} [(k+1)^3 + 3k + 2] > \frac{1}{3} (k+1)^3$$

ਇਸ ਲਈ, P(k + 1) ਸਹੀ ਹੈ ਜਦੋਂ P(k) ਸਹੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ (P.M.I.) ਤੋਂ P(n) ਸਾਰੇ $n \in \mathbf{N}$ ਲਈ ਸਹੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਨੂੰ ਵਰਤਦੇ ਹੋਏ, ਸਾਰੀਆਂ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ n ਲਈ ਘਾਤ ਦਾ ਨਿਯਮ $(ab)^n = a^n b^n$ ਸਿੱਧ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਕਥਨ P(n) ਹੈ,

ਭਾਵ $\quad P(n) : (ab)^n = a^n b^n$

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $n = 1$ ਲਈ P(n) ਸਹੀ (ਠੀਕ/ਸੱਚ) ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $(ab)^1 = a^1 b^1$

ਮੰਨ ਲਉ P(k) ਠੀਕ ਹੈ, ਭਾਵ

$$(ab)^k = a^k b^k \qquad \text{... (1)}$$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਜਦੋਂ P(k) ਸਹੀ ਹੋਵੇ, P(k + 1) ਵੀ ਸਹੀ ਹੋਵੇਗਾ,

ਹੁਣ

$$(ab)^{k+1} = (ab)^k (ab)$$

$$= (a^k b^k) (ab) \qquad [(1)\text{ਤੋਂ}]$$

$$= (a^k . a^1) (b^k . b^1) = a^{k+1} . b^{k+1}$$

ਇਸ ਲਈ, P(k + 1) ਸਹੀ ਹੈ, ਜਦੋਂ P(k) ਸਹੀ ਹੋਵੇ। ਇਸ ਲਈ ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਤੋਂ P(n) ਸਾਰੇ $n \in$ N ਲਈ ਸਹੀ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 4.1

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਨੂੰ ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ ਦਾ ਸਿਧਾਂਤ ਵਰਤਦੇ ਹੋਏ ਸਾਰੇ $n \in \mathbf{N}$ ਲਈ ਸਿੱਧ ਕਰੋ :

1. $1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{n-1} = \frac{(3^n - 1)}{2}$

2. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

3. $1 + \frac{1}{(1+2)} + \frac{1}{(1+2+3)} + ... + \frac{1}{(1+2+3+...n)} = \frac{2n}{(n+1)}$

4. $1.2.3 + 2.3.4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

5. $1.3 + 2.3^2 + 3.3^3 + \ldots + n.3^n = \frac{(2n-1)3^{n+1} + 3}{4}$

6. $1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + n.(n+1) = \left[\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\right]$

7. $1.3 + 3.5 + 5.7 + \ldots + (2n-1)(2n+1) = \dfrac{n(4n^2+6n-1)}{3}$

8. $1.2 + 2.2^2 + 3.2^2 + \ldots + n.2^n = (n-1)\,2^{n+1} + 2$

9. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}=1-\dfrac{1}{2^n}$

10. $\dfrac{1}{2.5}+\dfrac{1}{5.8}+\dfrac{1}{8.11}+\ldots+\dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\dfrac{n}{(6n+4)}$

11. $\dfrac{1}{1.2.3}+\dfrac{1}{2.3.4}+\dfrac{1}{3.4.5}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

12. $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

13. $\left(1+\dfrac{3}{1}\right)\left(1+\dfrac{5}{4}\right)\left(1+\dfrac{7}{9}\right)\ldots\left(1+\dfrac{(2n+1)}{n^2}\right)=(n+1)^2$

14. $\left(1+\dfrac{1}{1}\right)\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=(n+1)$

15. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

16. $\dfrac{1}{1.4}+\dfrac{1}{4.7}+\dfrac{1}{7.10}+\ldots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\dfrac{n}{(3n+1)}$

17. $\dfrac{1}{3.5}+\dfrac{1}{5.7}+\dfrac{1}{7.9}+\ldots+\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\dfrac{n}{3(2n+3)}$

18. $1 + 2 + 3 + \ldots + n < \dfrac{1}{8}(2n+1)^2$

19. $n(n+1)(n+5)$, 3 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ।

20. $10^{2n-1} + 1$, 11 ਨਾਲ ਭਾਗਯੋਗ ਹੈ।

21. $x^{2n} - y^{2n}$, $x + y$ ਨਾਲ ਭਾਗਯੋਗ ਹੈ।

22. $3^{2n+2} - 8n - 9$, 8 ਨਾਲ ਭਾਗਯੋਗ ਹੈ।

23. $41^n - 14^n$, 27 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ।

24. $(2n + 7) < (n + 3)^2$

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

- ਗਣਿਤਿਕ ਚਿੰਤਨ ਦਾ ਇੱਕ ਮੂਲ ਅਧਾਰ ਨਿਗਮਨਾਤਮਿਕ ਵਿਵੇਚਨ (reasoning) ਹੈ। ਨਿਗਮਨ ਦੇ ਉਲਟ ਆਗਮਨਿਕ ਵਿਵੇਚਨ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਹਾਲਤਾਂ (cases) ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਦੁਆਰਾ ਇੱਕ ਅਨੁਮਾਨਿਤ ਕਥਨ ਵਿਕਸਿਤ ਕਰਨ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਹਾਲਤ ਦਾ ਪ੍ਰੇਖਣ ਨਾ ਕਰ ਲਿਆ ਗਿਆ ਹੋਵੇ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਧਾਰਨ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸ਼ਬਦ ਆਗਮਨ ਤੋਂ ਭਾਵ ਖਾਸ ਹਾਲਤਾਂ ਜਾਂ ਤੱਥਾਂ ਤੋਂ ਆਮ ਵੱਲ ਵੱਧਦਾ ਹੈ।
- ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ ਸਿਧਾਂਤ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਸਾਧਨ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਗਣਿਤਿਕ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਤ ਹਰ ਇੱਕ ਕਥਨ ਨੂੰ P(n) ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, ਇਸਦੀ ਸਚਾਈ $n = 1$ ਲਈ ਜਾਂਚੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਕਿਸੇ ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ k ਦੇ ਲਈ P(k) ਦੀ ਸੱਚਾਈ ਨੂੰ ਮੰਨ ਕੇ P (k+1) ਦੀ ਸੱਚਾਈ ਸਿੱਧ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਨੋਟ

ਹੋਰ ਸੰਕਲਪਨਾਵਾਂ ਅਤੇ ਵਿਧੀਆਂ ਦੇ ਉਲਟ ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ ਦੁਆਰਾ ਸਬੂਤ ਕਿਸੇ ਵਿਅਕਤੀ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਦੁਆਰਾ ਕਿਸੇ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਾਲ ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਗਈ ਖੋਜ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਹ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ ਸਿਧਾਂਤ Pythagoras ਨੂੰ ਪਤਾ ਸੀ। ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ ਸਿਧਾਂਤ ਨੂੰ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਨ ਦਾ ਸਿਹਰਾ ਫਰਾਂਸੀਸੀ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ Blaise Pascal ਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਆਗਮਨ ਸ਼ਬਦ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਅੰਗਰੇਜ਼ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ John Wallis ਨੇ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਇਸ ਸਿਧਾਂਤ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਦੋ ਪਦੀ ਪਰਿਮੇਯ ਦਾ ਸਬੂਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਕੀਤੀ ਗਈ। De Morgan ਨੇ ਗਣਿਤ ਦੇ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਿਸ਼ਿਆਂ ਤੇ ਬਹੁਤ ਯੋਗਦਾਨ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। ਇਹ ਪਹਿਲੇ ਵਿਅਕਤੀ ਸਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੇ ਇਸ ਨੂੰ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਅਤੇ ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ ਜਾ ਨਾਮ ਦਿੱਤਾ ਅਤੇ ਗਣਿਤਿਕ ਸ਼੍ਰੇਣੀਆਂ ਦੇ ਕੇਂਦਰ ਵੱਲ ਝੁਕਾਅ (convergence) ਨੂੰ De Morgan ਦਾ ਨਿਯਮ ਵਿਕਸਿਤ ਕੀਤਾ।

G. Peano ਨੇ ਸ਼ਪਸ਼ਟ ਵਿਅਕਤ ਮੰਨਤਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂ ਦਾ ਨਿਗਮਨ ਕਰਨ ਦੀ ਜ਼ਿੰਮੇਵਾਰੀ ਲਈ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਹੁਣ ਪਿਆਨੋ ਦੇ ਸਵੈਸਿਧ ਕਥਨ (axioms) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਪਿਆਨੋ ਦੇ ਸਵੈਸਿਧ ਕਥਨ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਦੀ ਫ਼ਿਰ ਤੋਂ ਕਥਨ ਹੀ ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ ਦਾ ਸਿਧਾਂਤ ਹੈ।