ਅਧਿਆਇ 5

ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ

(Complex Numbers and Quadratic Equations)

❖*Mathematics is the Queen of Sciences and Arithmetic is the Queen of Mathematics. – GAUSS* ❖

5.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਅਤੇ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੀਆਂ ਰੇਖਿਕ (linear) ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਅਤੇ ਇੱਕ ਚਲ ਵਾਲੀ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ ਦੇਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮੀਕਰਣ $x^2 + 1 = 0$ ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਹੱਲ ਨਹੀਂ, ਕਿਉਂਕਿ $x^2 + 1 = 0$ ਤੋਂ $x^2 = -1$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗ ਅ-ਰਿਣਾਤਮਕ (non-negative) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੀ ਇੱਕ ਵੱਡੀ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਵਿੱਚ ਵਿਸਥਾਰ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਸੀ ਤਾਂ ਜੋ ਅਸੀਂ ਸਮੀਕਰਣ $x^2 = -1$ ਦਾ ਹੱਲ ਲੱਭ ਸਕੀਏ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਮੁਖ ਮੰਤਵ ਸਮੀਕਰਣ $ax^2 + bx + c = 0$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦਾ ਹੈ, ਜਦੋਂ $D = b^2 - 4ac < 0$ ਹੋਵੇ, ਜਿਸਦਾ ਹੱਲ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਸੀ।

W. R. Hamilton (1805-1865)

5.2 ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (Complex Numbers)

ਆਉ $\sqrt{-1}$ ਨੂੰ ਇੱਕ ਚਿੰਨ i ਨਾਲ ਦਰਸਾਈਏ ਤਾਂ ਸਾਡੇ ਕੋਲ $i^2 = -1$ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸਦਾ ਭਾਵ ਹੈ $x^2 + 1 = 0$ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ i ਇੱਕ ਹੱਲ ਹੈ।

$a + ib$ ਰੂਪ ਦੇ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਜਿੱਥੇ a ਅਤੇ b ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਨੂੰ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ (complex number) ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ $2 + i3$, $(-1) + i\sqrt{3}$, $4 + i\left(\frac{-1}{11}\right)$ ਸਾਰੀਆਂ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ $z = a + ib$ ਵਿੱਚ a ਨੂੰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਭਾਗ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ Re z ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ (ਨਿਰੂਪਤ) ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ b ਨੂੰ ਕਾਲਪਨਿਕ ਭਾਗ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ Im z ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਜੇਕਰ $z = 2 + i5$, ਤਾਂ Re $z = 2$ ਅਤੇ Im $z = 5$ ਦੋ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $z_1 = a + ib$ ਅਤੇ $z_2 = c + id$ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣਗੇ ਜੇਕਰ $a = c$ ਅਤੇ $b = d$.

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਜੇਕਰ $4x + i(3x - y) = 3 + i(-6)$, ਜਿੱਥੇ x ਅਤੇ y ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਤਾਂ x ਅਤੇ y ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ $\quad 4x + i(3x - y) = 3 + i(-6) \quad$ ... (1)

ਦੋਹਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਅਤੇ ਕਾਲਪਨਿਕ ਭਾਗਾਂ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰ ਲੈਂਦੇ ਹੋਏ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$4x = 3,\ 3x - y = -6,$$

ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਨਾਲੋਂ-ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰਨ 'ਤੇ $x = \frac{3}{4}$ ਅਤੇ $y = \frac{33}{4}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

5.3 ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਬੀਜਗਣਿਤ (Algebra of Complex Numbers)

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਬੀਜਗਣਿਤ ਦਾ ਵਿਕਾਸ ਕਰਾਂਗੇ।

5.3.1 ਦੋ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ : ਮੰਨ ਲਉ $z_1 = a + ib$ ਅਤੇ $z_2 = c + id$ ਦੋ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਜੋੜ $z_1 + z_2$ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :

$z_1 + z_2 = (a + c) + i\,(b + d)$, ਜੋ ਕਿ ਫਿਰ ਤੋਂ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ $(2 + i3) + (-6 + i5) = (2 - 6) + i\,(3 + 5) = -4 + i\,8$

ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਗੁਣਧਰਮਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ :

(i) ਬੰਦ ਦਾ ਨਿਯਮ (*The closure law*) : ਦੋ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਵੀ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ $z_1 + z_2$ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਸਾਰੀਆਂ z_1 ਅਤੇ z_2 ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ।

(ii) ਕ੍ਰਮਵਟਾਂਦਰਾ ਦਾ ਨਿਯਮ (*The commutative law*) : ਕਿਸੇ ਦੋ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ z_1 ਅਤੇ z_2 ਲਈ $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

(iii) ਸਹਿਚਾਰਤਾ ਦਾ ਨਿਯਮ (*The associative law*) : ਕਿਸੇ ਤਿੰਨ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ z_1, z_2 ਅਤੇ z_3 ਲਈ $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

(iv) ਜੋੜਾਤਮਕ ਤਤਸਮਕ ਦੀ ਹੋਂਦ (*The existance of additive identity*) : ਹਰ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ z ਲਈ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ $0 + i\,0$ (ਜਿਸ ਨੂੰ 0 ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ), ਜਿਸ ਨੂੰ ਜੋੜਾਤਮਕ ਤਤਸਮਕ (*additive identity*) ਜਾਂ ਸਿਫਰ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਕਿ $z + 0 = z$.

(v) ਜੁੜਨਯੋਗ ਉਲਟ ਦੀ ਹੋਂਦ (*The existance of additive inverse*) : ਹਰ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ $z = a + ib$ ਲਈ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ $-a + i(-b)$ ($-z$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ) ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਜੁੜਨਯੋਗ ਉਲਟ (*additive inverse*) ਜਾਂ z ਦਾ ਰਿਣਾਤਮਕ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $z + (-z) = 0$ ਜੁੜਨਯੋਗ ਉਲਟ ਹੈ।

5.3.2 ਦੋ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ (Difference of two complex numbers) : ਕਿਸੇ ਦੋ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ z_1 ਅਤੇ z_2, ਲਈ ਅੰਤਰ $z_1 - z_2$, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2).$$

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ $(6 + 3i) - (2 - i) = (6 + 3i) + (-2 + i) = 4 + 4i$

ਅਤੇ $(2 - i) - (6 + 3i) = (2 - i) + (-6 - 3i) = -4 - 4i$

5.3.3 ਦੋ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾਂ (Multiplication of two complex numbers) : ਮੰਨ ਲਉ $z_1 = a + ib$ ਅਤੇ $z_2 = c + id$ ਕੋਈ ਦੋ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾਂ $z_1.z_2$ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :

$$z_1.z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ $(3 + i5)(2 + i6) = (3 \times 2 - 5 \times 6) + i(3 \times 6 + 5 \times 2) = -24 + i28$

ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾਂ ਵਿੱਚ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗੁਣਧਰਮ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਬਿਨਾਂ ਸਬੂਤਾਂ ਦੇ ਹੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਾਂਗੇ–

(i) ਬੰਦ ਦਾ ਨਿਯਮ (The closure law) : ਦੋ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾਂ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਹਰ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ z_1 ਅਤੇ z_2 ਲਈ ਗੁਣਾਂ $z_1.z_2$ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

(ii) ਕ੍ਰਮਵਟਾਂਦਰਾ ਦਾ ਨਿਯਮ (The commutative law) : ਕਿਸੇ ਦੋ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ z_1 ਅਤੇ z_2 ਲਈ,

$$z_1\, z_2 = z_2\, z_1$$

(iii) ਸਹਿਚਾਰਤਾ ਦਾ ਨਿਯਮ (The associative law) : ਕਿਸੇ ਤਿੰਨ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ z_1, z_2 ਅਤੇ z_3 ਲਈ,

$$(z_1\, z_2)\, z_3 = z_1\, (z_2\, z_3)$$

(iv) ਗੁਣਾਤਮਕ ਤਤਸਮਕ ਦੀ ਹੋਂਦ (The existance of multiplicative identity) : ਹਰ ਇੱਕ Z ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ ਲਈ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ $1 + i\,0$ (1 ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ) ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਕਿ $z.1 = z$, ਇਸ ਨੂੰ ਗੁਣਾਤਮਕ ਤਤਸਮਕ (multiplicative identity) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

(v) ਗੁਣਾਤਮਕ ਉਲਟ ਦੀ ਹੋਂਦ (The existence of multiplicative inverse) : ਹਰ ਇੱਕ ਗ਼ੈਰ-ਸਿਫ਼ਰ ਮਿਸ਼ਰਿਤ (complex) ਸੰਖਿਆ $z = a + ib$ ਜਾਂ $a + ib (a \neq 0, b \neq 0)$, ਲਈ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ $\frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2}$ (ਜਿਸ ਨੂੰ $\frac{1}{z}$ ਜਾਂ z^{-1} ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ), ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਕਿ $z.\frac{1}{z} = 1$ ਇਸ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਗੁਣਾਤਮਕ ਉਲਟ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

(vi) ਵੰਡ ਦਾ ਨਿਯਮ (The distributive law) : ਤਿੰਨ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ z_1, z_2 ਅਤੇ z_3 ਲਈ,

(a) $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

(b) $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$

5.3.4 ਦੋ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਭਾਗ (Division of two complex numbers) : ਕੋਈ ਦੋ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ z_1 ਅਤੇ z_2, ਜਿੱਥੇ $z_2 \neq 0$ ਲਈ, ਭਾਗਫਲ $\frac{z_1}{z_2}$ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ,

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \frac{1}{z_2}$$

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਮੰਨ ਲਓ $z_1 = 6 + 3i$ ਅਤੇ $z_2 = 2 - i$

ਤਾਂ
$$\frac{z_1}{z_2} = \left((6+3i)\times\frac{1}{2-i}\right) = (6+3i)\left(\frac{2}{2^2+(-1)^2} + i\frac{-(-1)}{2^2+(-1)^2}\right)$$

$$= (6+3i)\left(\frac{2+i}{5}\right) = \frac{1}{5}\left[12-3+i(6+6)\right] = \frac{1}{5}(9+12i)$$

5.3.5 *i* ਦੀ ਘਾਤ (Power of *i*) ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$i^3 = i^2 i = (-1)\,i = -i, \qquad i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$$

$$i^5 = (i^2)^2\, i = (-1)^2\, i = i, \qquad i^6 = (i^2)^3 = (-1)^3 = -1, \text{ ਆਦਿ}$$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ
$$i^{-1} = \frac{1}{i}\times\frac{i}{i} = \frac{i}{-1} = -i, \qquad i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1,$$

$$i^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i}\times\frac{i}{i} = \frac{i}{1} = i, \qquad i^{-4} = \frac{1}{i^4} = \frac{1}{1} = 1$$

ਵਿਆਪਕ ਤੌਰ (ਆਮ ਤੌਰ) 'ਤੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ k ਲਈ $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$

5.3.6 ਕਿਸੇ ਰਿਣਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ (The square roots of a negative real number) :

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $i^2 = -1$ ਅਤੇ $(-i)^2 = i^2 = -1$

ਇਸ ਲਈ, -1 ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ $i, -i$ ਹੋਵੇਗਾ। ਪਰ ਚਿੰਨ੍ਹ $\sqrt{-1}$ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਸਿਰਫ i ਭਾਵ ਹੀ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮੀਕਰਣ $x^2 + 1 = 0$ ਜਾਂ $x^2 = -1$ ਦੇ i ਅਤੇ $-i$ ਦੋਵੇਂ ਹੀ ਹੱਲ ਹਨ।

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ,
$$\left(\sqrt{3}\,i\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 i^2 = 3(-1) = -3$$

$$\left(-\sqrt{3}\,i\right)^2 = \left(-\sqrt{3}\right)^2 i^2 = -3$$

ਇਸ ਲਈ, -3 ਦੇ ਵਰਗਮੂਲ $\sqrt{3}\,i$ ਅਤੇ $-\sqrt{3}\,i$ ਹਨ

ਫਿਰ ਤੋਂ $\sqrt{-3}$ ਚਿੰਨ੍ਹ ਸਿਰਫ $\sqrt{3}\,i$ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ $\sqrt{-3} = \sqrt{3}\,i$

ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਜੇਕਰ a ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ $\sqrt{-a} = \sqrt{a}\sqrt{-1} = \sqrt{a}\,i$,

ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\sqrt{a}\times\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ ਸਾਰੀਆਂ ਧਨਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਲਈ। ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਫਿਰ ਵੀ ਠੀਕ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ $a > 0, b < 0$ ਜਾਂ $a < 0, b > 0$ ਹੋਵੇ। ਜੇਕਰ $a < 0$ ਅਤੇ $b < 0$ ਤਾਂ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ? ਆਉ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ–

ਧਿਆਨ ਦਿਉ

$i^2 = \sqrt{-1}\,\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)\,(-1)}$ (ਇਹ ਮੰਨਣ ਨਾਲ ਕਿ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ $\sqrt{a}\times\sqrt{b} = \sqrt{ab}$)

$= \sqrt{1} = 1$, ਜਿਹੜੀ ਕਿ ਸੱਚਾਈ $i^2 = -1$ ਦਾ ਵਿਰੋਧ ਕਰਦੀ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\sqrt{a}\times\sqrt{b} \neq \sqrt{ab}$ ਜੇਕਰ a ਅਤੇ b ਦੋਵੇਂ ਰਿਣਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

ਅੱਗੇ, ਜੇਕਰ a ਅਤੇ b ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਤੌਰ 'ਤੇ $\sqrt{a}\times\sqrt{b} = \sqrt{ab} = 0$.

5.3.7 ਤਤਸਮਕਾਂ (Identities) ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਤਸਮਕਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ–

$(z_1 + z_2)^2 = z_1^2 + z_2^2 + 2z_1z_2$, ਸਾਰੀਆਂ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ z_1 ਅਤੇ z_2 ਲਈ

ਸਬੂਤ : ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ $(z_1 + z_2)^2 = (z_1 + z_2)\,(z_1 + z_2)$,

$= (z_1 + z_2)\,z_1 + (z_1 + z_2)\,z_2$ ਵੰਡ ਦਾ ਨਿਯਮ (Distributive law)

$= z_1^2 + z_2z_1 + z_1z_2 + z_2^2$ ਵੰਡ ਦਾ ਨਿਯਮ (Distributive law)

$= z_1^2 + z_1z_2 + z_1z_2 + z_2^2$ ਕ੍ਰਮਵਟਾਂਦਰਾ ਦਾ ਨਿਯਮ (Commutative law of multiplication)

$= z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਤਤਸਮਕਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

(i) $(z_1 - z_2)^2 = z_1^2 - 2z_1z_2 + z_2^2$

(ii) $(z_1 + z_2)^3 = z_1^3 + 3z_1^2z_2 + 3z_1z_2^2 + z_2^3$

(iii) $(z_1 - z_2)^3 = z_1^3 - 3z_1^2z_2 + 3z_1z_2^2 - z_2^3$

(iv) $z_1^2 - z_2^2 = (z_1 + z_2)(z_1 - z_2)$

ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਹੋਰ ਬਹੁਤ ਸਾਰੀਆਂ ਤਤਸਮਕਾਂ ਜਿਹੜੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਠੀਕ ਹਨ, ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਸਾਰੀਆਂ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਵੀ ਠੀਕ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਨੂੰ $a + bi$ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ।

(i) $(-5i)\left(\frac{1}{8}i\right)$ (ii) $(-i)\,(2i)\left(-\frac{1}{8}i\right)^3$

ਹੱਲ : (i) $(-5i)\left(\frac{1}{8}i\right) = \frac{-5}{8}i^2 = \frac{-5}{8}(-1) = \frac{5}{8} = \frac{5}{8} + i0$

(ii) $(-i)\,(2i)\left(-\frac{1}{8}i\right)^3 = 2\times\frac{1}{8\times8\times8}\times i^5 = \frac{1}{256}\left(i^2\right)^2 i = \frac{1}{256}i$.

ਉਦਾਹਰਣ 3 : $(5 - 3i)^3$ ਨੂੰ $a + ib$ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ, $(5 - 3i)^3 = 5^3 - 3\times5^2\times(3i) + 3\times5\,(3i)^2 - (3i)^3$

$= 125 - 225i - 135 + 27i = -10 - 198i$.

ਉਦਾਹਰਣ 4 : $\left(-\sqrt{3}+\sqrt{-2}\right)\left(2\sqrt{3}-i\right)$ ਨੂੰ $a + ib$ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ, $\left(-\sqrt{3}+\sqrt{-2}\right)\left(2\sqrt{3}-i\right) = \left(-\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i\right)\left(2\sqrt{3}-i\right)$

$= -6+\sqrt{3}i+2\sqrt{6}i-\sqrt{2}\,i^2 = \left(-6+\sqrt{2}\right)+\sqrt{3}\left(1+2\sqrt{2}\right)i$

5.4 ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਮਾਪ ਅੰਕ ਅਤੇ ਸੰਯੁਗਮ (The Modulus and the Conjugate of a Complex Number)

ਮੰਨ ਲਉ $z = a + ib$ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ z ਦੇ ਮਾਪ ਅੰਕ ਜਿਸ ਨੂੰ $|z|$ ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਇੱਕ ਅਰਿਣਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ $\sqrt{a^2+b^2}$ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਭਾਵ $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ ਅਤੇ z ਦੇ ਸੰਯੁਗਮੀ ਜਿਸ ਨੂੰ $\bar{z}$ ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ $a–ib$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਭਾਵ $\bar{z} = a–ib$

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ $\quad |3+i| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}, \quad |2-5i| = \sqrt{2^2+(-5)^2} = \sqrt{29}$,

ਅਤੇ $\quad \overline{3+i} = 3-i, \quad \overline{2-5i} = 2+5i, \quad \overline{-3i-5} = 3i-5$

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਕਿਸੇ ਗ਼ੈਰ-ਸਿਫਰ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ z ਦਾ ਗੁਣਾਤਮਕ ਉਲਟ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$z^{-1} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

ਜਾਂ $\quad z\bar{z} = |z|^2$

ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਕਿਸੇ ਦੋ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ z_1 ਅਤੇ z_2 ਲਈ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਨਤੀਜੇ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ।

(i) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ $\qquad$ (ii) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ ਜਿੱਥੇ $|z_2| \neq 0$

(iii) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ $\qquad$ (iv) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$ $\qquad$ (v) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ ਜਿੱਥੇ $z_2 \neq 0$.

ਉਦਾਹਰਣ 5 : $2 – 3i$ ਦਾ ਗੁਣਾਤਮਕ ਉਲਟ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $z = 2 – 3i$

ਤਾਂ $\quad \bar{z} = 2 + 3i$ ਅਤੇ $|z|^2 = 2^2 + (-3)^2 = 13$

ਇਸ ਲਈ, $2 – 3i$ ਦਾ ਗੁਣਾਤਮਕ ਉਲਟ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੋਵੇਗਾ

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{2+3i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$$

ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਹੱਲ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੀ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ

$$z^{-1} = \frac{1}{2-3i} = \frac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)}$$

$$= \frac{2+3i}{2^2-(3i)^2} = \frac{2+3i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$$

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਨੂੰ $a + ib$ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

(i) $\frac{5+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i}$ $\qquad$ (ii) i^{-35}

ਹੱਲ : (i) $\dfrac{5+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i} = \dfrac{5+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i} \times \dfrac{1+\sqrt{2}i}{1+\sqrt{2}i} = \dfrac{5+5\sqrt{2}i+\sqrt{2}i-2}{1-\left(\sqrt{2}i\right)^2}$

$$= \frac{3+6\sqrt{2}i}{1+2} = \frac{3(1+2\sqrt{2}i)}{3} = 1+2\sqrt{2}i.$$

(ii) $i^{-35} = \dfrac{1}{i^{35}} = \dfrac{1}{\left(i^2\right)^{17} i} = \dfrac{1}{-i} \times \dfrac{i}{i} = \dfrac{i}{-i^2} = i$

ਅਭਿਆਸ 5.1

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1 ਤੋਂ 10 ਤੱਕ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹਰ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ $a + ib$ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ :

1. $(5i)\left(-\dfrac{3}{5}i\right)$ **2.** $i^9 + i^{19}$ **3.** i^{-39}

4. $3(7 + i7) + i(7 + i7)$ **5.** $(1 - i) - (-1 + i6)$ **6.** $\left(\dfrac{1}{5}+i\dfrac{2}{5}\right)-\left(4+i\dfrac{5}{2}\right)$

7. $\left[\left(\dfrac{1}{3}+i\dfrac{7}{3}\right)+\left(4+i\dfrac{1}{3}\right)\right]-\left(-\dfrac{4}{3}+i\right)$ **8.** $(1 - i)^4$ **9.** $\left(\dfrac{1}{3}+3i\right)^3$

10. $\left(-2-\dfrac{1}{3}i\right)^3$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 11 ਤੋਂ 13 ਤੱਕ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹਰ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਾਤਮਕ ਉਲਟ ਪਤਾ ਕਰੋ :

11. $4 - 3i$ **12.** $\sqrt{5}+3i$ **13.** $-i$

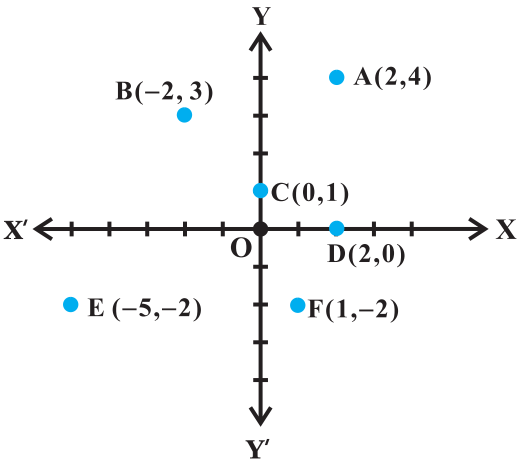
14. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਵਿਅੰਜਕ ਨੂੰ $a + ib$ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ :

$$\frac{\left(3+i\sqrt{5}\right)\left(3-i\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}i\right)-\left(\sqrt{3}-i\sqrt{2}\right)}$$

5.5 ਆਰਗੰਡ ਤਲ ਅਤੇ ਧਰੁਵੀ ਨਿਰੂਪਣ (Argand Plane and Polar Representation)

ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋ ਪਰਸਪਰ (ਆਪਸ ਵਿੱਚ) ਲੰਬ ਰੇਖਾਵਾਂ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ x-ਧੁਰਾ ਅਤੇ y-ਧੁਰਾ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਜੋੜੇ (x, y) ਲਈ ਸਾਡੇ ਕੋਲ XY–ਤਲ ਤੇ ਇੱਕ ਇਕੱਲਾ ਬਿੰਦੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਤੱਲ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹਰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਲਈ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਇਕ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਜੋੜਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ $x + iy$ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਜੋੜੇ (x, y) ਦੇ ਸੰਗਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ XY-ਤਲ ਤੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਤੌਰ 'ਤੇ ਇੱਕ ਇਕੱਲੇ ਬਿੰਦੂ P(x, y) ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਵੀ।

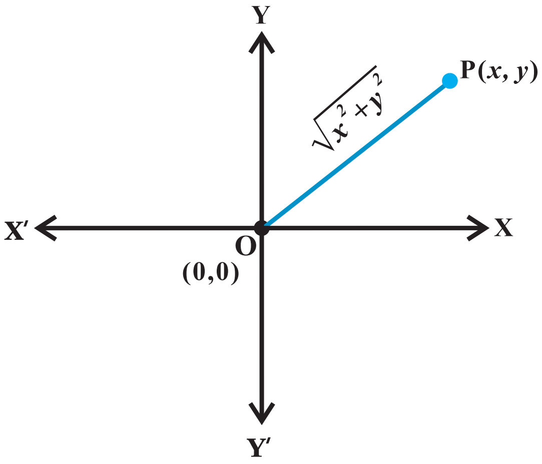
ਕੁਝ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $2 + 4i$, $-2 + 3i$, $0 + 1i$, $2 + 0i$, $-5 -2i$ ਅਤੇ $1 - 2i$ ਦੇ ਸੰਗਤ ਕ੍ਰਮਵਾਰ (2, 4), (–2, 3), (0, 1), (2, 0), (–5, –2), ਅਤੇ (1, – 2) ਕ੍ਰਮਬਧ ਜੋੜੇ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 5.1 ਵਿੱਚ ਜਿਮਾਇਤੀ ਤੌਰ 'ਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ A, B, C, D, E ਅਤੇ F ਨਾਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 5.1

ਉਹ ਤਲ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਹਰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਨੂੰ ਆਰਗੰਡ ਤਲ (Argand Plane) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

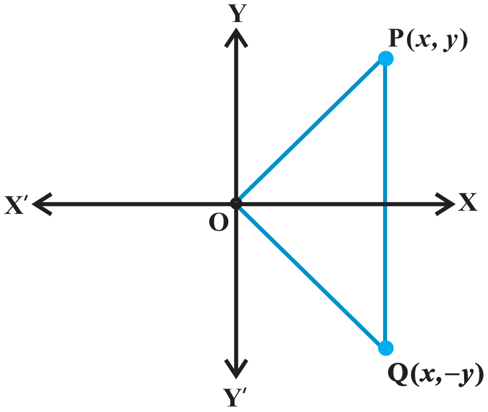
ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਆਰਗੰਡ ਤਲ ਵਿੱਚ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ $x + iy$ ਦਾ ਮਾਪ ਅੰਕ (Modulus) $\sqrt{x^2 + y^2}$ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ O(0, 0) ਤੋਂ P(x, y) ਤੱਕ ਦੀ ਦੂਰੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 5.2)। x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂ, ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $a + i0$ ਦੇ ਸੰਗਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ y-ਧੁਰੇ ਤੇ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂ, ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $0 + i\,b$. ਦੇ ਸੰਗਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਆਰਗੰਡ ਤਲ ਵਿੱਚ x-ਧੁਰੇ ਅਤੇ y–ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਧੁਰਾ ਅਤੇ ਕਾਲਪਨਿਕ ਧੁਰਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 5.2

ਆਰਗੰਡ ਤਲ ਵਿੱਚ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ $z = x + iy$ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਸੰਯੁਗਮ (conjugate) $\bar{z} = x - iy$ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ P (x, y) ਅਤੇ Q (x, $-y$) ਬਿੰਦੂਆਂ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

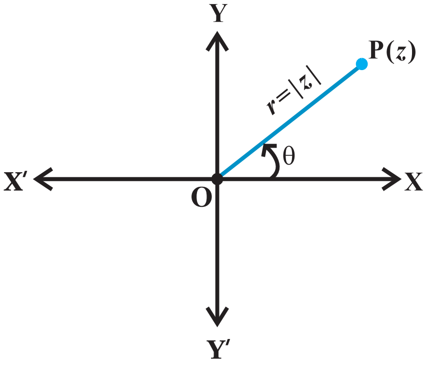
ਜਿਮਾਇਤੀ ਤੌਰ 'ਤੇ ਬਿੰਦੂ (x, $-y$) ਬਿੰਦੂ (x, y) ਦਾ ਵਾਸਤਵਿਕ ਧੁਰੇ ਤੇ ਸ਼ੀਸ਼ਾ (ਦਰਪਣ) ਪ੍ਰਤੀਬਿੰਬ ਹੁੰਦਾ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 5.3).



ਚਿੱਤਰ 5.3

5.5.1 ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਧਰੁਵੀ ਨਿਰੂਪਣ (Polar representation of a complex number) ਮੰਨ ਲਉ ਬਿੰਦੂ P ਕਿਸੇ ਗ਼ੈਰ–ਸਿਫਰ $z = x + iy$ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਰੇਖਾ–ਖੰਡ OP ਦੀ ਲੰਬਾਈ r ਹੈ ਅਤੇ OP ਦੁਆਰਾ x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਧਨਾਤਮਕ ਦਿਸ਼ਾ ਵੱਲ ਬਣਾਇਆ ਕੋਣ θ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 5.4).

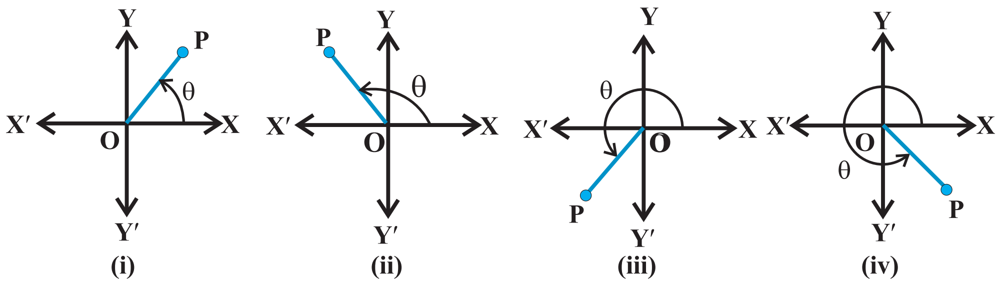
ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ P ਨੂੰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਜੋੜੇ (r, θ) ਨਾਲ ਸਿਰਫ਼ ਇੱਕ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ (uniquely) ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ P ਦੇ ਧਰੁਵ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਧਰੁਵ ਅਤੇ x-ਧੁਰੇ ਦੀ ਧਨਾਤਮਕ ਦਿਸ਼ਾ ਨੂੰ ਆਰੰਭਕ ਰੇਖਾ ਮੰਨਦੇ ਹਾਂ।



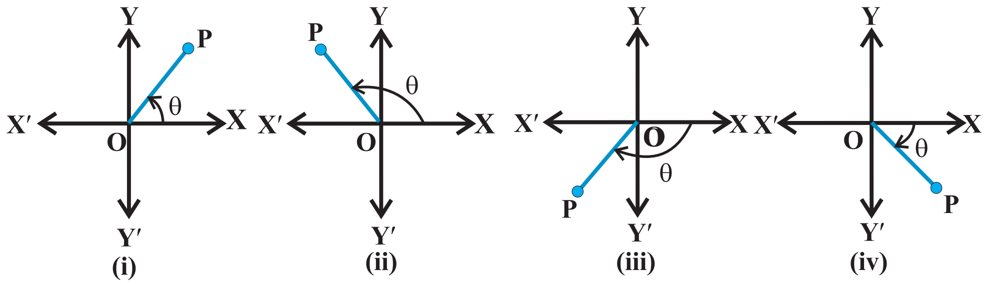
ਚਿੱਤਰ 5.4

ਇੱਥੇ $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. ਇਸ ਨੂੰ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਧਰੁਵੀ ਰੂਪ (Polar form) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇੱਥੇ $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$, z ਦਾ ਮਾਪ ਅੰਕ ਹੈ ਅਤੇ θ ਨੂੰ z ਦਾ ਆਰਗੂਮੈਂਟ (ਜਾਂ ਐਮਪਲੀਟਿਯੂਡ) (argument or amplitude) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਨੂੰ arg z ਦੁਆਰਾ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਕਿਸੇ ਵੀ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ $z \neq 0$ ਦੇ ਸੰਗਤ θ ਦਾ, $0 \leq \theta < 2\pi$ ਸਿਰਫ ਇੱਕ ਹੀ ਮੁੱਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਫਿਰ ਵੀ 2π ਲੰਬਾਈ ਦੇ ਕਿਸੇ ਦੂਸਰੇ ਅੰਤਰ ਵਿੱਚ, ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ $-\pi < \theta \leq \pi$, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਅੰਤਰਾਲ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ θ ਦਾ ਉਹ ਮੁੱਲ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $-\pi < \theta \leq \pi$ ਨੂੰ z ਦਾ ਮੁੱਖ ਆਰਗੂਮੈਂਟ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ $\arg z$ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 5.5 ਅਤੇ 5.6) ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਹੋਰ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾ ਲਿਖਿਆ ਜਾਵੇ।

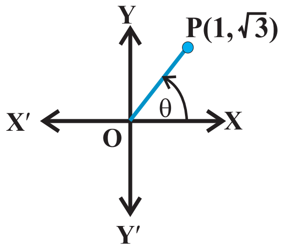


ਚਿੱਤਰ 5.5 $(0 \leq \theta < 2\pi)$



ਚਿੱਤਰ 5.6 $(-\pi < \theta \leq \pi)$

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ $z = 1 + i\sqrt{3}$ ਨੂੰ ਧਰੁਵੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ।



ਚਿੱਤਰ 5.7

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $1 = r\cos\theta$, $\sqrt{3} = r\sin\theta$

ਵਰਗ ਕਰਨ ਅਤੇ ਜੋੜਨ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$r^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = 4$$

ਭਾਵ $r = \sqrt{4} = 2$ (ਪ੍ਰਤੱਖ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $r > 0$)

ਇਸ ਲਈ $\cos\theta = \frac{1}{2}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ਜਿਸ ਤੋਂ $\theta = \frac{\pi}{3}$ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦਾ ਧਰੁਵੀ ਰੂਪ $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ ਹੈ

ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ $z = 1 + i\sqrt{3}$ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 5.7 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

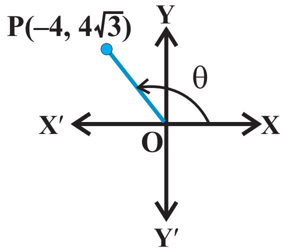
ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ $\frac{-16}{1+i\sqrt{3}}$ ਨੂੰ ਰੂਪ ਧਰੁਵੀ ਵਿੱਚ ਬਦਲੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ $\frac{-16}{1+i\sqrt{3}} = \frac{-16}{1+i\sqrt{3}} \times \frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$

$$= \frac{-16\left(1-i\sqrt{3}\right)}{1-\left(i\sqrt{3}\right)^2} = \frac{-16\left(1-i\sqrt{3}\right)}{1+3} = -4\left(1-i\sqrt{3}\right) = -4 + i4\sqrt{3}$$ (ਚਿੱਤਰ 5.8).

ਮੰਨ ਲਉ $-4 = r\cos\theta,\ 4\sqrt{3} = r\sin\theta$

ਵਰਗ ਕਰਨ ਅਤੇ ਜੋੜਨ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ



ਚਿੱਤਰ 5.8

$$16 + 48 = r^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)$$

ਜਿਸ ਤੋਂ $r^2 = 64$, ਭਾਵ $r = 8$ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

ਇਸ ਲਈ $$\cos\theta = -\frac{1}{2},\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੋੜੀਂਦਾ ਧਰੁਵੀ ਰੂਪ $8\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 5.2

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1 ਅਤੇ 2 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਹਰ ਇੱਕ ਦਾ ਮਾਪ ਅੰਕ ਅਤੇ ਆਰਗੂਮੈਂਟ ਪਤਾ ਕਰੋ :

1. $z = -1 - i\sqrt{3}$ **2.** $z = -\sqrt{3} + i$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 3 ਤੋਂ 8 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਹਰ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਧਰੁਵੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲੋ :

3. $1 - i$ **4.** $-1 + i$ **5.** $-1 - i$ **6.** -3 **7.** $\sqrt{3} + i$

8. i

5.6 ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ (Quadratic Equations)

ਅਸੀਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਜਾਣੂ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਜਦੋਂ ਡਿਸਕ੍ਰਿਮੀਨੈਂਟ ਅਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋਵੇ, ਭਾਵ, ≥ 0 ਹੋਵੇ।

ਆਉ ਹੁਣ ਵਾਸਤਵਿਕ ਗੁਣਾਕਾਂ (Coefficients) a, b, c ਜਿੱਥੇ $a \neq 0$ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $ax^2 + bx + c = 0$ ਲਈਏ। ਆਉ, ਇਹ ਵੀ ਮੰਨ ਲਈਏ ਕਿ $b^2 - 4ac < 0$.

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਹ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਰਿਣਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਲੱਭ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ ਉਪਰਲੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਹੱਲ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਹੋਣਗੇ, ਜਿਹੜੇ ਕਿ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2}\, i}{2a}$$

> **ਟਿੱਪਣੀ** ਇੱਥੇ ਕੁਝ ਲੋਕ ਇਹ ਜਾਨਣ ਲਈ ਉਤਸੁਕ ਹੋਣਗੇ ਕਿ ਕਿਸੇ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਹੱਲ ਹੋਣਗੇ ? ਇਸ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ, ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਪ੍ਰਮੇਯ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਕਿ "ਬੀਜਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲ ਪ੍ਰਮੇਯ" ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ (ਬਿਨਾਂ ਕਿਸੇ ਸਬੂਤ ਤੋਂ) ਦਾ ਉਲੇਖ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

"ਇੱਕ ਬਹੁਪਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਇੱਕ ਮੂਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।"

ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਫਲਸਰੂਪ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਨਤੀਜੇ ਤੇ ਪਹੁੰਚਦੇ ਹਾਂ :

"n ਘਾਤ ਵਾਲੀ ਬਹੁਪਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ n ਮੂਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।"

ਉਦਾਹਰਣ 9 : $x^2 + 2 = 0$ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ, $x^2 + 2 = 0$

ਜਾਂ $x^2 = -2$ ਭਾਵ, $x = \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{2}\, i$

ਉਦਾਹਰਣ 10 : $x^2 + x + 1 = 0$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3$

ਇਸ ਲਈ, ਹੱਲ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੋਣਗੇ $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2 \times 1} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

ਉਦਾਹਰਣ 11 : $\sqrt{5}x^2 + x + \sqrt{5} = 0$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਡਿਸਕ੍ਰਿਮੀਨੈਂਟ ਹੈ।

$1^2 - 4 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 1 - 20 = -19$

ਇਸ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਹੱਲ

$$\frac{-1 \pm \sqrt{-19}}{2\sqrt{5}} = \frac{-1 \pm \sqrt{19}i}{2\sqrt{5}} \text{ ਹਨ।}$$

ਅਭਿਆਸ 5.3

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ :

1. $x^2 + 3 = 0$ **2.** $2x^2 + x + 1 = 0$ **3.** $x^2 + 3x + 9 = 0$ **4.** $-x^2 + x - 2 = 0$

5. $x^2 + 3x + 5 = 0$ **6.** $x^2 - x + 2 = 0$ **7.** $\sqrt{2}x^2 + x + \sqrt{2} = 0$ **8.** $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{2}x + 3\sqrt{3} = 0$

9. $x^2 + x + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0$ **10.** $x^2 + \dfrac{x}{\sqrt{2}} + 1 = 0$

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 12 : $\dfrac{(3-2i)(2+3i)}{(1+2i)(2-i)}$ ਦਾ ਸਯੁੰਗਮ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ, $\dfrac{(3-2i)(2+3i)}{(1+2i)(2-i)}$

$$= \frac{6+9i-4i+6}{2-i+4i+2} = \frac{12+5i}{4+3i} \times \frac{4-3i}{4-3i} = \frac{48-36i+20i+15}{16+9} = \frac{63-16i}{25} = \frac{63}{25} - \frac{16}{25}i$$

ਇਸ ਲਈ, $\dfrac{(3-2i)(2+3i)}{(1+2i)(2-i)}$ ਦਾ ਸਯੁੰਗਮ $\dfrac{63}{25} + \dfrac{16}{25}i$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 13 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਮਾਪ-ਅੰਕ ਅਤੇ ਆਰਗੂਮੈਂਟ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\dfrac{1+i}{1-i}$ (ii) $\dfrac{1}{1+i}$

ਹੱਲ : (i) ਇੱਥੇ, $\dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{1+i}{1-i} \times \dfrac{1+i}{1+i} = \dfrac{1-1+2i}{1+1} = i = 0 + i$

ਆਉ, ਮੰਨ ਲਈਏ $0 = r\cos\theta$, $1 = r\sin\theta$

ਵਰਗ ਕਰਨ ਅਤੇ ਜੋੜਨ ਤੇ $r^2 = 1$ ਭਾਵ, $r = 1$ ਇਸ ਲਈ

$$\cos\theta = 0, \quad \sin\theta = 1$$

ਇਸ ਲਈ, $\theta = \frac{\pi}{2}$

ਇਸ ਲਈ, $\frac{1+i}{1-i}$ ਦਾ ਮਾਪ ਅੰਕ 1 ਅਤੇ ਆਰਗੂਮੈਂਟ $\frac{\pi}{2}$ ਹੈ।

(ii) ਇੱਥੇ $$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1+1} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$$

ਮੰਨ ਲਉ $$\frac{1}{2} = r\cos\theta, -\frac{1}{2} = r\sin\theta$$

(i) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੰਮ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $$\theta = \frac{-\pi}{4}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\frac{1}{1+i}$ ਦਾ ਮਾਪ ਅੰਕ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ਅਤੇ ਆਰਗੂਮੈਂਟ $\frac{-\pi}{4}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 14 : ਜੇਕਰ $x + iy = \frac{a+ib}{a-ib}$ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $x^2 + y^2 = 1$.

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ,

$$x + iy = \frac{(a+ib)(a+ib)}{(a-ib)(a+ib)} = \frac{a^2-b^2+2abi}{a^2+b^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + \frac{2ab}{a^2+b^2}i$$

ਇਸ ਤੋਂ, $$x - iy = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} - \frac{2ab}{a^2+b^2}i$$

ਇਸ ਲਈ,

$$x^2 + y^2 = (x+iy)(x-iy) = \frac{(a^2-b^2)^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2} = \frac{(a^2+b^2)^2}{(a^2+b^2)^2} = 1$$

ਉਦਾਹਰਣ 15 : θ ਦਾ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ

$\frac{3+2i\sin\theta}{1-2i\sin\theta}$ ਸਿਰਫ ਵਾਸਤਵਿਕ ਹੋਵੇ।

ਹਲ : ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ,

$$\frac{3+2i\sin\theta}{1-2i\sin\theta} = \frac{(3+2i\sin\theta)(1+2i\sin\theta)}{(1-2i\sin\theta)(1+2i\sin\theta)}$$

$$= \frac{3+6i\sin\theta+2i\sin\theta-4\sin^2\theta}{1+4\sin^2\theta} = \frac{3-4\sin^2\theta}{1+4\sin^2\theta} + \frac{8i\ \sin\theta}{1+4\sin^2\theta}$$

ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ ਵਾਸਤਵਿਕ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ

$$\frac{8\sin\theta}{1+4\sin^2\theta} = 0, \text{ ਭਾਵ, } \sin\theta = 0$$

ਇਸ ਲਈ $\theta = n\pi,\ n \in \mathbf{Z}$.

ਉਦਾਹਰਣ 16 : ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ $z = \dfrac{i-1}{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}}$ ਨੂੰ ਧਰੁਵੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ, $z = \dfrac{i-1}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$

$$= \frac{2(i-1)}{1+\sqrt{3}i} \times \frac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{2\left(i+\sqrt{3}-1+\sqrt{3}i\right)}{1+3} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i$$

ਆਉ ਹੁਣ $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} = r\cos\theta,\ \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} = r\sin\theta$ ਲਈਏ

ਵਰਗ ਕਰਨ ਅਤੇ ਜੋੜਨ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$r^2 = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2 = \frac{2\left(\left(\sqrt{3}\right)^2+1\right)}{4} = \frac{2\times 4}{4} = 2$$

ਇਸ ਲਈ $r = \sqrt{2}$ ਜਿਸ ਤੋਂ $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},\quad \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

ਇਸ ਲਈ, $\theta = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{12}$ (ਕਿਉਂ ?)

ਇਸ ਲਈ, ਧਰੁਵੀ ਰੂਪ (Polar form) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{12} + i\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$ ਹੈ।

ਅਧਿਆਇ-5 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. $\left[i^{18} + \left(\frac{1}{i}\right)^{25}\right]^3$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

2. ਕਿਸੇ ਦੋ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ z_1 ਅਤੇ z_2 ਲਈ, ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$\text{Re}(z_1 z_2) = \text{Re}\, z_1 \,\text{Re}\, z_2 - \text{Im} z_1 \,\text{Im} z_2$.

3. $\left(\dfrac{1}{1-4i} - \dfrac{2}{1+i}\right)\left(\dfrac{3-4i}{5+i}\right)$ ਨੂੰ ਮਾਨਕ ਰੂਪ (Standard form) ਵਿੱਚ ਬਦਲੋ।

4. ਜੇਕਰ $x-iy=\sqrt{\dfrac{a-ib}{c-id}}$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\left(x^2+y^2\right)^2=\dfrac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$

5. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਨੂੰ ਧਰੁਵੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲੋ :

(i) $\dfrac{1+7i}{(2-i)^2}$ (ii) $\dfrac{1+3i}{1-2i}$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 6 ਤੋਂ 9 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਹਰ ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ :

6. $3x^2-4x+\dfrac{20}{3}=0$ **7.** $x^2-2x+\dfrac{3}{2}=0$ **8.** $27x^2-10x+1=0$

9. $21x^2-28x+10=0$ **10.** ਜੇਕਰ $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 1 + i$, ਹੈ ਤਾਂ $\left|\dfrac{z_1+z_2+1}{z_1-z_2+1}\right|$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

11. ਜੇਕਰ $a + ib = \dfrac{(x+i)^2}{2x^2+1}$, ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $a^2 + b^2 = \dfrac{(x^2+1)^2}{\left(2x^2+1\right)^2}$.

12. ਮੰਨ ਲਉ $z_1 = 2 - i$, $z_2 = -2 + i$ ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $\text{Re}\left(\dfrac{z_1 z_2}{\bar{z}_1}\right)$ (ii) $\text{Im}\left(\dfrac{1}{z_1\bar{z}_1}\right)$.

13. ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ $\dfrac{1+2i}{1-3i}$ ਦਾ ਮਾਪ ਅੰਕ ਅਤੇ ਆਰਗੂਮੈਂਟ ਪਤਾ ਕਰੋ।

14. ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ x ਅਤੇ y ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ $(x - iy)(3 + 5i)$; $-6 - 24i$ ਦਾ ਸੰਯੁਗਮ ਹੋਵੇ।

15. $\dfrac{1+i}{1-i}-\dfrac{1-i}{1+i}$ ਦਾ ਮਾਪ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

16. ਜੇਕਰ $(x + iy)^3 = u + iv$, ਤਾਂ ਦਿਖਾਉ ਕਿ $\dfrac{u}{x}+\dfrac{v}{y}=4(x^2-y^2)$.

17. ਜੇਕਰ α ਅਤੇ β ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $|\beta|=1$ ਹੈ, ਤਾਂ $\left|\dfrac{\beta-\alpha}{1-\bar{\alpha}\beta}\right|$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

18. ਸਮੀਕਰਣ $|1-i|^x=2^x$ ਦੇ ਗ਼ੈਰ-ਸਿਫ਼ਰ ਸੰਪੂਰਕ ਹੱਲ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

19. ਜੇਕਰ $(a + ib)(c + id)(e + if)(g + ih) = A + iB$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)(e^2 + f^2)(g^2 + h^2) = A^2 + B^2$

20. ਜੇਕਰ $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^m=1$ ਤਾਂ m ਦਾ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਕ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

◆ $a + ib$, ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਜਿਸ ਵਿੱਚ a ਅਤੇ b ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੋਣ, ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ। a ਨੂੰ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਾਸਤਵਿਕ ਭਾਗ ਅਤੇ b ਨੂੰ ਕਾਲਪਨਿਕ ਭਾਗ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

◆ ਮੰਨ ਲਉ $z_1 = a + ib$ ਅਤੇ $z_2 = c + id$ ਤਾਂ

(i) $z_1 + z_2 = (a + c) + i\,(b + d)$

(ii) $z_1 z_2 = (ac - bd) + i\,(ad + bc)$

◆ ਕਿਸੇ ਗ਼ੈਰ–ਸਿਫਰ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ $z = a + ib\ (a \neq 0, b \neq 0)$ ਲਈ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ $\frac{a}{a^2+b^2}+i\frac{-b}{a^2+b^2}$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਿਸ ਨੂੰ $\frac{1}{z}$ ਜਾਂ z^{-1} ਨਾਲ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ z ਦਾ ਗੁਣਾਤਮਕ ਉਲਟ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ, ਜਿਸ ਨਾਲ

$$(a + ib)\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}+i\frac{-b}{a^2+b^2}\right) = 1 + i0 = 1$$

◆ ਕਿਸੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ k ਲਈ, $i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i$

◆ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ $z = a + ib$ ਦੇ ਸੰਯੁਗਮ ਨੂੰ $\bar{z}$ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $\bar{z} = a - ib$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

◆ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ $z = x + iy$ ਧਰੁਵੀ ਰੂਪ $r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $r = \sqrt{x^2+y^2}$ (z ਦਾ modulus ਹੈ) ਅਤੇ $\cos\theta = \frac{x}{r}$, $\sin\theta = \frac{y}{r}$. (θ ਨੂੰ z ਦਾ ਆਰਗੂਮੇਂਟ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ) θ ਦਾ ਉਹ ਮੁੱਲ ਜਿਸ ਲਈ $-\pi < \theta \leq \pi$, ਹੋਵੇ, ਨੂੰ z ਦਾ ਮੁਖ ਆਰਗੂਮੈਂਟ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

◆ n ਘਾਤ ਦੀ ਇੱਕ ਬਹੁਪਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ n ਮੂਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

◆ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $ax^2 + bx + c = 0$ ਜਿੱਥੇ $a, b, c \in R,\ a \neq 0,\ b^2 - 4ac < 0$ ਦੇ ਹੱਲ $x = \frac{-b \pm \sqrt{4ac-b^2}\,i}{2a}$ ਹਨ।

ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਨੋਟ

ਯੂਨਾਨੀਆਂ ਨੇ ਇਸ ਤੱਥ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਣਿਆ ਸੀ ਕਿ ਰਿਣਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਵਰਗਮੂਲ ਦਾ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵਜੂਦ ਨਹੀਂ, ਪਰ ਇਸ ਦਾ ਸਿਹਰਾ ਭਾਰਤੀ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ *Mahavira* (850 ਈ:) ਨੂੰ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸਨੇ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਇਸ ਕਠਨਾਈ ਦਾ ਸਪਸ਼ਟ ਉਲੇਖ ਕੀਤਾ। ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਆਪਣੇ ਰਚਨਾ '*Ganitasara Sangraha*' ਗਣਿਤ ਸਾਰ ਸੰਗ੍ਰਹਿ ਵਿੱਚ ਦੱਸਿਆ ਕਿ ਰਿਣਾਤਮਕ ਰਾਸ਼ੀ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਰਾਸ਼ੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ। ਇੱਕ-ਦੂਸਰੇ ਭਾਰਤੀ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ ਭਾਸਕਰ (*Bhaskara*) ਨੇ 1150 ਈ. ਵਿੱਚ ਆਪਣੀ ਰਚਨਾ

'ਬੀਜਗਣਿਤ' ਵਿੱਚ ਵੀ ਲਿਖਿਆ ਹੈ ਕਿ "ਰਿਣਾਤਮਕ ਰਾਸ਼ੀ ਦਾ ਕੋਈ ਵਰਗਮੂਲ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਇੱਕ ਵਰਗ ਨਹੀਂ ਹੈ"। *Cardan* (1545) ਨੇ $x + y = 10$, $xy = 40$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਸਮੇਂ ਉਤਪੰਨ ਹੋਈ ਸਮੱਸਿਆ ਤੇ ਧਿਆਨ ਦਿੱਤਾ।

ਉਸਨੇ $x = 5 + \sqrt{-15}$ ਅਤੇ $y = 5 - \sqrt{-15}$ ਨੂੰ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਉਸਨੇ ਆਪ ਹੀ ਨਕਾਰ ਦਿੱਤਾ ਕਿ ਇਹ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿਅਰਥ ('useless') ਹਨ। *Albert Girard* (ਲਗਭਗ 1625 ਈ.) ਨੇ ਰਿਣਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਮੂਲ ਨੂੰ ਸਵੀਕਾਰ ਕੀਤਾ ਅਤੇ ਕਿਹਾ ਕਿ ਇਸ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਬਹੁਪਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਉੱਨੇ ਮੂਲ ਲੱਭਣ ਵਿੱਚ ਕਾਬਲ ਹੋ ਜਾਵਾਂਗੇ ਜਿੰਨੀ ਉਸਦੀ ਘਾਤ ਹੈ। *Euler* ਨੇ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ $\sqrt{-1}$ ਨੂੰ i ਚਿੰਨ੍ਹ (ਸੰਕੇਤ) ਦਿੱਤਾ ਅਤੇ *W.R. Hamilton* (1830 ਈ. ਲਗਭਗ) ਨੇ ਸ਼ੁੱਧ ਗਣਿਤਿਕ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਕੇ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਵਾਸਤੇ ਕਾਲਪਨਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਛੱਡਦੇ ਹੋਏ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ $a + ib$ ਨੂੰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਜੋੜੇ (a, b) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪੇਸ਼ ਕੀਤਾ।