ਅਧਿਆਇ 6

ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ

(Linear Inequalities)

❖*Mathematics is the art of saying many things in many different ways. – MAXWELL*❖

6.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਚਲ ਅਤੇ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਕੁਝ ਕਥਨਾਂ ਵਾਲੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਕੇ ਹਲ ਵੀ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਸਾਡੇ ਦਿਮਾਗ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਘੁੰਮਦਾ ਹੈ ਕਿ "ਕੀ ਕਥਨਾਂ ਵਾਲੇ (ਸ਼ਾਬਦਿਕ) ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣਾ ਸੰਭਵ ਹੈ ?" ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਤੁਹਾਡੀ ਜਮਾਤ ਦੇ ਸਾਰੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਉਚਾਈ 160 ਸੈ.ਮੀ. ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ, ਤੁਹਾਡੀ ਜਮਾਤ ਦੇ ਕਮਰੇ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ 60 ਮੇਜ ਜਾਂ ਕੁਰਸੀਆਂ ਜਾਂ ਦੋਵੇਂ ਰੱਖੀਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਇੱਥੇ ਸਾਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਕਥਨ ਮਿਲਦੇ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ $<$ (ਤੋਂ ਘੱਟ), $>$ (ਤੋਂ ਵੱਧ), $\leq$ (ਤੋਂ ਘੱਟ ਜਾਂ ਬਰਾਬਰ), $\geq$ (ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਬਰਾਬਰ) ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਚਲ ਅਤੇ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੀਆਂ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਾਂਗੇ। ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ, ਵਿਗਿਆਨ, ਗਣਿਤ, ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ, ਅਨੁਕੂਲਿਤ (optimisation) ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ, ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ, ਮਨੋਵਿਗਿਆਨ ਆਦਿ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਉਪਯੋਗੀ ਹੈ।

6.2 ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ (Inequalities)

ਆਉ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਥਿਤੀ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ :

(i) ਰਵੀ 200 ਰੁ: ਲੈ ਕੇ ਬਜਾਰ ਵਿੱਚ ਚੌਲ ਖਰੀਦਣ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜੋ ਕਿ 1 ਕਿ.ਗ੍ਰਾ. ਦੇ ਪੈਕਟਾਂ ਵਿੱਚ ਉਪਲਬਧ ਹਨ। ਇੱਕ ਕਿਲੋ ਚਾਵਲ ਦੇ ਪੈਕਟ ਦਾ ਮੁੱਲ 30 ਰੁ: ਹੈ। ਜੇਕਰ ਉਸ ਦੁਆਰਾ ਖਰੀਦੇ ਹੋਏ ਪੈਕਟਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ x ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਉਸ ਦੁਆਰਾ ਕੁੱਲ ਖਰਚ ਕੀਤੀ ਰਕਮ $30x$ ਹੋਵੇਗੀ। ਕਿਉਂਕਿ ਉਸ ਨੇ ਚੌਲ ਸਿਰਫ ਪੈਕਟਾਂ ਵਿੱਚ ਹੀ ਖਰੀਦਣੇ ਹਨ, ਉਹ 200 ਰੁ: ਦੀ ਪੂਰੀ ਰਾਸ਼ੀ ਨੂੰ ਖਰਚ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕੇਗਾ (ਕਿਉਂ ?) ਇਸ ਲਈ

$$30x < 200 \qquad \ldots (1)$$

ਸਪੱਸ਼ਟ ਤੌਰ 'ਤੇ ਕਥਨ (i) ਸਮੀਕਰਣ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇਸ ਵਿੱਚ ਬਰਾਬਰ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(ii) ਰੇਸ਼ਮਾ ਕੋਲ 120 ਰੁ: ਹਨ ਜਿਸ ਨਾਲ ਉਹ ਕੁਝ ਰਜਿਸਟਰ ਅਤੇ ਪੈੱਨ ਖਰੀਦਣਾ ਚਾਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇੱਕ ਰਜਿਸਟਰ ਦੀ ਕੀਮਤ 40 ਰੁ: ਅਤੇ ਇੱਕ ਪੈੱਨ ਦੀ ਕੀਮਤ 20 ਰੁ: ਹੈ। ਜੇਕਰ ਉਸ ਦੁਆਰਾ ਖਰੀਦੇ ਗਏ ਰਜਿਸਟਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ x ਅਤੇ ਪੈੱਨਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ y ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਰੇਸ਼ਮਾ ਦੁਆਰਾ ਖਰਚ ਕੀਤੇ ਪੈਸੇ $(40x + 20y)$ ਰੁ: ਹੋਣਗੇ। ਇਸ ਲਈ

$$40x + 20y \leq 120 \qquad \ldots (2)$$

ਕਿਉਂਕਿ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਖਰਚ ਕੀਤੀ ਗਈ ਕੁੱਲ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ 120 ਰੁ: ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਕਥਨ (2) ਦੇ ਦੋ ਭਾਗ ਹਨ

$$40x + 20y < 120 \qquad \ldots (3)$$

ਅਤੇ

$$40x + 20y = 120 \qquad \ldots (4)$$

ਕਥਨ (3) ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਣ ਨਹੀਂ ਹੈ ਭਾਵ ਇਹ ਇੱਕ ਅਸਮਾਨਤਾ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਕਿ (4) ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 1 ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜਾਂ ਦੋ ਅਲਜਬਰਈ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ '$<$', '$>$', '$\leq$' ਜਾਂ '$\geq$' ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਨੂੰ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ (1), (2) ਅਤੇ (3) ਕਥਨ ਸਾਰੇ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਹਨ।

$3 < 5$; $7 > 5$ ਆਦਿ ਸੰਖਿਆਤਮਕ (numerical) ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਹਨ, ਜਦੋਂ ਕਿ

$x < 5$; $y > 2$; $x \geq 3$, $y \leq 4$ ਆਦਿ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਸ਼ਬਦਿਕ ਜਾਂ ਸ਼ਬਦੀ (lateral) ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਹਨ।

$3 < 5 < 7$ (ਇਸ ਨੂੰ 5, 3 ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਅਤੇ 7 ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਹੈ, ਪੜ੍ਹਦੇ ਹਾਂ), $3 \leq x < 5$ (ਇਸ ਨੂੰ x,3 ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਜਾਂ ਬਰਾਬਰ ਅਤੇ 5 ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਪੜ੍ਹਦੇ ਹਾਂ) ਅਤੇ $2 < y \leq 4$ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੋਹਰੀਆਂ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਹਨ। ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ :

$ax + b < 0$ ... (5)

$ax + b > 0$ ... (6)

$ax + b \leq 0$ ... (7)

$ax + b \geq 0$ ... (8)

$ax + by < c$ ... (9)

$ax + by > c$ ... (10)

$ax + by \leq c$ ... (11)

$ax + by \geq c$ ... (12)

$ax^2 + bx + c \leq 0$ ... (13)

$ax^2 + bx + c > 0$ ... (14)

ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ (5), (6), (9), (10) ਅਤੇ (14) ਨਿਸ਼ਚਿਤ (strict) ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਹਨ ਜਦੋਂ ਕਿ (7), (8), (11), (12), ਅਤੇ (13) ਲਚਕੀਲੀ (Slack) ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਹਨ। (5) ਤੋਂ (8) ਤੱਕ ਦੀਆਂ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਇੱਕ ਚਲ ਵਾਲੀਆਂ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਹਨ ਜਦੋਂ $a \neq 0$ ਅਤੇ (9) ਤੋਂ (12) ਤੱਕ ਦੀਆਂ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਹਨ ਜਦੋਂ $a \neq 0$, $b \neq 0$.

ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ (13) ਅਤੇ (14) ਰੇਖੀ ਨਹੀਂ ਹਨ (ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਹ ਇੱਕ ਚਲ x ਵਾਲੀਆਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਹਨ ਜਦੋਂ $a \neq 0$).

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸਿਰਫ ਇੱਕ ਅਤੇ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੀਆਂ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਬਾਰੇ ਹੀ ਪੜ੍ਹਾਂਗੇ।

6.3 ਇੱਕ ਚਲ ਵਾਲੀਆਂ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦਾ ਬੀਜਗਣਿਤੀ ਹੱਲ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਆਲੇਖੀ ਨਿਰੂਪਣ (Algebric Solutions of Linear Inequalities in One Variable and their Graphical Representation)

ਆਉ ਭਾਗ 6.2 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਅਸਮਾਨਤਾ (1) ਭਾਵ $30x < 200$ ਲਈਏ।
ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਇੱਥੇ x, ਚਾਵਲਾਂ ਦੇ ਪੈਕਟਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ।

ਸਪਸ਼ਟ ਤੌਰ 'ਤੇ x ਰਿਣਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਭਿੰਨ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗੀ। ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਖੱਬਾ ਹੱਥ (L.H.S.) $30x$ ਅਤੇ ਸੱਜਾ ਹੱਥ (R.H.S) 200 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$x = 0$, ਲਈ ਖੱਬਾ ਹੱਥ $= 30 (0) = 0 < 200$ (ਸੱਜਾ ਹੱਥ), ਜੋ ਕਿ ਸੱਚ ਹੈ।

$x = 1$, ਲਈ ਖੱਬਾ ਹੱਥ $= 30 (1) = 30 < 200$ (ਸੱਜਾ ਹੱਥ), ਜੋ ਕਿ ਸੱਚ ਹੈ।

$x = 2$, ਲਈ ਖੱਬਾ ਹੱਥ $= 30 (2) = 60 < 200$, (ਸੱਜਾ ਹੱਥ), ਜੋ ਕਿ ਸੱਚ ਹੈ।

$x = 3$, ਲਈ ਖੱਬਾ ਹੱਥ $= 30 (3) = 90 < 200$, (ਸੱਜਾ ਹੱਥ), ਜੋ ਕਿ ਸੱਚ ਹੈ।

$x = 4$, ਲਈ ਖੱਬਾ ਹੱਥ $= 30 (4) = 120 < 200$, (ਸੱਜਾ ਹੱਥ), ਜੋ ਕਿ ਸੱਚ ਹੈ।

$x = 5$, ਲਈ ਖੱਬਾ ਹੱਥ $= 30 (5) = 150 < 200$, (ਸੱਜਾ ਹੱਥ), ਜੋ ਕਿ ਸੱਚ ਹੈ।

$x = 6$, ਲਈ ਖੱਬਾ ਹੱਥ $= 30 (6) = 180 < 200$, (ਸੱਜਾ ਹੱਥ), ਜੋ ਕਿ ਸੱਚ ਹੈ।

$x = 7$, ਲਈ ਖੱਬਾ ਹੱਥ $= 30 (7) = 210 < 200$, (ਸੱਜਾ ਹੱਥ), ਜੋ ਕਿ ਗਲਤ ਹੈ।

ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ x ਦੇ ਮੁੱਲ ਜਿਸ ਨਾਲ ਉੱਪਰਲੀ ਅਸਮਾਨਤਾ ਸਹੀ ਕਥਨ ਸਾਬਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ 0,1,2,3,4,5,6 ਹਨ। x ਦੇ ਇਹ ਮੁੱਲ, ਜੋ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਅਸਮਾਨਤਾ ਨੂੰ ਸਹੀ ਕਥਨ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਨ ਨੂੰ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਹੱਲ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਸਮੂਹ $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ ਨੂੰ ਇਸਦਾ ਹੱਲ ਸਮੂਹ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ ਚਲ ਵਾਲੀ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਹੱਲ, ਚਲ ਦਾ ਉਹ ਮੁੱਲ ਹੈ ਜਿਸ ਨਾਲ ਇਹ ਕਥਨ ਸੱਚ (ਭਾਵ ਅਸਮਾਨਤਾ ਸਹੀ) ਹੋਵੇ।

ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਹੱਲ ਅਸੀਂ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਅਤੇ ਭੁੱਲ (trial and error) ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਕੀਤਾ ਹੈ, ਜੋ ਬਹੁਤ ਸੁਵਿਧਾਜਨਕ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਸਪੱਸ਼ਟ ਤੌਰ 'ਤੇ ਇਸ ਵਿਧੀ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਸਾਰਾ ਸਮਾਂ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਕਦੇ-ਕਦੇ ਸੰਭਵ ਵੀ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ। ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਈ ਹੋਰ ਵਧੀਆ ਜਾਂ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਤਕਨੀਕ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਸਾਨੂੰ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਹੋਰ ਗੁਣ ਸਿੱਖਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ ਇਹਨਾਂ ਨਿਯਮਾਂ ਦਾ ਪਾਲਣ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਨਿਯਮਾਂ ਦੀ ਪਾਲਣਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

ਨਿਯਮ 1 : ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਦੋਹਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕੋ ਜਿਹੀ ਸੰਖਿਆ ਜੋੜੀ (ਜਾਂ ਘਟਾਈ) ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਨਿਯਮ 2 : ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਦੋਹਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕੋ ਜਿਹੀ ਗੈਰ ਸਿਫਰ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ (ਜਾਂ ਭਾਗ) ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ ਵੀ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਨਿਯਮਾਂ ਦੀ ਪਾਲਨਾ ਕਰਾਂਗੇ, ਨਿਯਮ 2 ਵਿੱਚ ਇਸ ਸ਼ਰਤ ਨਾਲ ਕਿ ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਗੁਣਾਂ (ਜਾਂ ਭਾਗ) ਕਿਸੇ ਰਿਣਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਕਰਾਂਗੇ ਤਾਂ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਉਲਟ ਜਾਵੇਗਾ (ਭਾਵ '$<$' ਦੀ ਜਗ੍ਹਾ '$>$' ਅਤੇ '$\le$' ਜਗ੍ਹਾ '$\ge$' ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ।) ਇਸਦਾ ਕਾਰਣ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਤੱਥਾਂ ਤੋਂ ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ :

$3 > 2$ ਜਦੋਂ ਕਿ $-3 < -2$,

$-8 < -7$ ਜਦੋਂ ਕਿ $(-8)(-2) > (-7)(-2)$, ਭਾਵ $16 > 14$.

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸਮਾਨਤਾ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਨਿਯਮਾਂ ਦਾ ਉਲੇਖ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

ਨਿਯਮ 1 : ਅਸਮਾਨਤਾ ਦੇ ਦੋਹਾਂ ਪਾਸੇ ਇੱਕੋ ਜਿਹੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਜੋੜਿਆ (ਜਾਂ ਘਟਾਇਆ) ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਨਾਲ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦੇ ਚਿੰਨ੍ਹ ਤੇ ਕੋਈ ਫਰਕ ਨਹੀਂ ਪਵੇਗਾ।

ਨਿਯਮ 2 : ਕਿਸੇ ਅਸਮਾਨਤਾ ਨੂੰ ਦੋਹਾਂ ਪਾਸੇ ਇੱਕੋ ਜਿਹੀ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ (ਜਾਂ ਭਾਗ) ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਦੋਹਾਂ ਪਾਸੇ ਇੱਕੋ ਜਿਹੀ ਰਿਣਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ (ਜਾਂ ਭਾਗ) ਕਰਨ ਨਾਲ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਉਲਟ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਆਉ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : $30x < 200$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ ਜਦੋਂ :

(i) x ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। (ii) x ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $30x < 200$

ਜਾਂ $\frac{30x}{30} < \frac{200}{30}$ (ਨਿਯਮ 2), ਭਾਵ $x < \frac{20}{3}$

(i) ਜਦੋਂ x ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਤਾਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ x ਦੇ ਮੁੱਲ ਕਥਨ ਨੂੰ ਸਹੀ ਕਰਨਗੇ;

1, 2, 3, 4, 5, 6.

ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਹੱਲ, ਸਮੂਹ $\{1,2,3,4,5,6\}$ ਹੋਵੇਗਾ।

(ii) ਜਦੋਂ x ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਦਿੱਤੀ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਹੱਲ

$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ਹੋਵੇਗਾ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਹੱਲ $\{\ldots,-3, -2,-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : $5x - 3 < 3x + 1$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ ਜਦੋਂ

(i) x ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। (ii) x ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $5x - 3 < 3x + 1$

ਜਾਂ $5x - 3 + 3 < 3x + 1 + 3$ (ਨਿਯਮ 1)

ਜਾਂ $5x < 3x + 4$

ਜਾਂ $5x - 3x < 3x + 4 - 3x$ (ਨਿਯਮ 1)

ਜਾਂ $2x < 4$

ਜਾਂ $x < 2$ (ਨਿਯਮ 2)

(i) ਜਦੋਂ x ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦੇ ਹੱਲ

$..., -4, -3, -2, -1, 0, 1$ ਹੋਣਗੇ।

(ii) ਜਦੋਂ x ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਹੱਲ $x < 2$ ਹੈ ਭਾਵ 2 ਤੋਂ ਘੱਟ ਵਾਲੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ। ਇਸ ਲਈ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਹੱਲ, ਸਮੂਹ $x \in (-\infty, 2)$ ਹੋਵੇਗਾ।

ਅਸੀਂ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਕੇ ਪਤਾ ਕੀਤੇ ਹਨ। ਅੱਗੇ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਲਿਖਿਆ ਨਾ ਜਾਵੇ, ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦਾ ਹੱਲ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਹੀ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਹੱਲ ਕਰੋ $4x + 3 < 6x + 7$.

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $4x + 3 < 6x + 7$

ਜਾਂ $4x - 6x < 6x + 4 - 6x$

ਜਾਂ $-2x < 4$ ਜਾਂ $x > -2$

ਭਾਵ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜੋ -2 ਤੋਂ ਵੱਧ ਹਨ, ਉਹ ਇਸ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਹੱਲ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਹੱਲ ਸਮੂਹ $(-2, \infty)$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : $\frac{5-2x}{3} \le \frac{x}{6} - 5$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $\frac{5-2x}{3} \le \frac{x}{6} - 5$

ਜਾਂ $2(5 - 2x) \le x - 30$

ਜਾਂ $10 - 4x \le x - 30$

ਜਾਂ $-5x \le -40$, ਭਾਵ $x \ge 8$

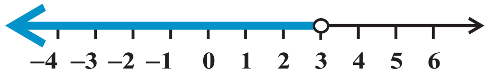
ਇਸ ਲਈ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜੋ 8 ਜਾਂ 8 ਤੋਂ ਵੱਡੀਆਂ ਹਨ, ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦੇ ਹੱਲ ਹਨ, ਭਾਵ $x \in [8, \infty)$.

ਉਦਾਹਰਣ 5 : $7x + 3 < 5x + 9$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ ਅਤੇ ਹੱਲ ਨੂੰ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਤੇ ਦਰਸਾਉ (ਦਿਖਾਉ)।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ, $7x + 3 < 5x + 9$

ਜਾਂ $2x < 6$ ਜਾਂ $x < 3$

ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਤੇ ਅਸੀਂ ਇਸ ਹੱਲ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 6.1 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਦਰਸਾਵਾਂਗੇ।



ਚਿੱਤਰ 6.1

ਉਦਾਹਰਣ 6 : $\frac{3x-4}{2} \ge \frac{x+1}{4} - 1$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ ਅਤੇ ਹੱਲ ਨੂੰ ਸੰਖਿਆ ਉੱਤੇ ਦਿਖਾਉ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ, $\frac{3x-4}{2} \ge \frac{x+1}{4} - 1$

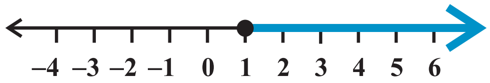
ਜਾਂ $\frac{3x-4}{2} \ge \frac{x-3}{4}$

ਜਾਂ $2(3x - 4) \geq (x - 3)$

ਜਾਂ $6x - 8 \geq x - 3$

ਜਾਂ $5x \geq 5$ or $x \geq 1$

ਹੱਲ ਦਾ ਆਲੇਖੀ ਰੂਪ ਚਿੱਤਰ 6.2 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.2

ਉਦਾਹਰਣ 7 : XI ਜਮਾਤ ਦੇ ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨੇ ਪਹਿਲੇ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਸਤ੍ਰ ਦੀਆਂ ਪ੍ਰੀਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 62 ਅਤੇ 48 ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ। ਉਹ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਸਲਾਨਾ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਕੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਔਸਤ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 60 ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੇ ਸਲਾਨਾ ਇਮਤਿਹਾਨ ਵਿੱਚੋਂ ਅੰਕ x ਹਨ, ਤਾਂ

$$\frac{62+48+x}{3} \geq 60$$

ਜਾਂ $110 + x \geq 180$

ਜਾਂ $x \geq 70$

ਇਸ ਲਈ, ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 60 ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਔਸਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੇ 70 ਅੰਕ ਆਉਣੇ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਦੋਵੇਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 10 ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੋਣ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 40 ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਦੋ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਵਿੱਚ x ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੂਸਰੀ ਸੰਖਿਆ $x+2$ ਹੋਵੇਗੀ। ਤਾਂ ਸਾਡੇ ਕੋਲ

$x > 10$ ... (1)

ਅਤੇ $x + (x + 2) < 40$ ... (2)

(2) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$2x + 2 < 40$

ਭਾਵ $x < 19$ ... (3)

(1) ਅਤੇ (3) ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ

$10 < x < 19$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ x ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ x ਦੇ ਮੁੱਲ 11, 13, 15, ਅਤੇ 17 ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੇ ਸੰਭਵ ਜੋੜੇ (11, 13), (13, 15), (15, 17), (17, 19) ਹੋਣਗੇ।

ਅਭਿਆਸ 6.1

1. $24x < 100$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ, ਜਦੋਂ :
   (i) x ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। (ii) x ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।
2. ਹੱਲ ਕਰੋ– $12x > 30$, ਜਦੋਂ :
   (i) x ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। (ii) x ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।
3. ਹੱਲ ਕਰੋ $5x – 3 < 7$, ਜਦੋਂ :
   (i) x ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। (ii) x ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

4. $3x + 8 > 2$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ, ਜਦੋਂ :

(i) x ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। (ii) x ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 5 ਤੋਂ 16 ਦੀਆਂ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ x ਲਈ ਹੱਲ ਕਰੋ।

5. $4x + 3 < 5x + 7$

6. $3x - 7 > 5x - 1$

7. $3(x - 1) \le 2(x - 3)$

8. $3(2 - x) \ge 2(1 - x)$

9. $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} < 11$

10. $\frac{x}{3} > \frac{x}{2} + 1$

11. $\frac{3(x-2)}{5} \le \frac{5(2-x)}{3}$

12. $\frac{1}{2}\left(\frac{3x}{5} + 4\right) \ge \frac{1}{3}(x - 6)$

13. $2(2x + 3) - 10 < 6(x - 2)$

14. $37 - (3x + 5) \ge 9x - 8(x - 3)$

15. $\frac{x}{4} < \frac{(5x-2)}{3} - \frac{(7x-3)}{5}$

16. $\frac{(2x-1)}{3} \ge \frac{(3x-2)}{4} - \frac{(2-x)}{5}$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 17 ਤੋਂ 20 ਤੱਕ ਦੀਆਂ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ ਅਤੇ ਉਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਤੇ ਆਲੇਖਿਤ ਕਰੋ (ਦਰਸਾਉ)।

17. $3x - 2 < 2x + 1$

18. $5x - 3 \ge 3x - 5$

19. $3(1 - x) < 2(x + 4)$

20. $\frac{x}{2} \ge \frac{(5x-2)}{3} - \frac{(7x-3)}{5}$

21. ਰਵੀ ਨੇ ਪਹਿਲੀਆਂ ਦੋ ਯੂਨਿਟ ਪ੍ਰੀਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ 70 ਅਤੇ 75 ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ। ਤੀਸਰੀ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ ਉਹ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਕਿੰਨੇ ਅੰਕ ਲਵੇ ਕਿ ਉਸਦੀ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਔਸਤ 60 ਅੰਕ ਹੋ ਜਾਵੇ।

22. ਕਿਸੇ ਪਾਠਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ 'A' ਗ੍ਰੇਡ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਨੂੰ ਸਾਰੀਆਂ ਪੰਜ ਪ੍ਰੀਖਿਆਵਾਂ (ਹਰ ਇੱਕ 100 ਅੰਕ ਦੀ) 90 ਅੰਕ ਜਾਂ ਇਸ ਤੋਂ ਵੱਧ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਔਸਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨੀ ਪੈਂਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਸੁਨੀਤਾ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਚਾਰ ਇਮਤਿਹਾਨਾਂ ਵਿੱਚ ਅੰਕ 87, 92, 94 ਅਤੇ 95 ਹੋਣ, ਤਾਂ ਦੱਸੋ ਕਿ ਸੁਨੀਤਾ ਪੰਜਵੀਂ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਕਿੰਨੇ ਅੰਕ ਲਏ ਕਿ ਉਸ ਨੂੰ ਪਾਠਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ 'A' ਗ੍ਰੇਡ ਮਿਲ ਸਕੇ।

23. 10 ਤੋਂ ਘੱਟ ਲਗਾਤਾਰ ਧਨ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 11 ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੋਵੇ।

24. 5 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਿਸਤ ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਗਾਤਾਰ ਜੋੜੇ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 23 ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੋਵੇ।

25. ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਸਭ ਤੋਂ ਲੰਬੀ ਭੁਜਾ, ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਭੁਜਾ ਦੀ 3 ਗੁਣਾ ਹੈ ਅਤੇ ਤੀਸਰੀ ਭੁਜਾ ਸਭ ਤੋਂ ਲੰਬੀ ਭੁਜਾ ਤੋਂ 2 ਸੈਂ.ਮੀ. ਘੱਟ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 61 ਸੈਂ.ਮੀ. ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਭੁਜਾ ਦੀ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

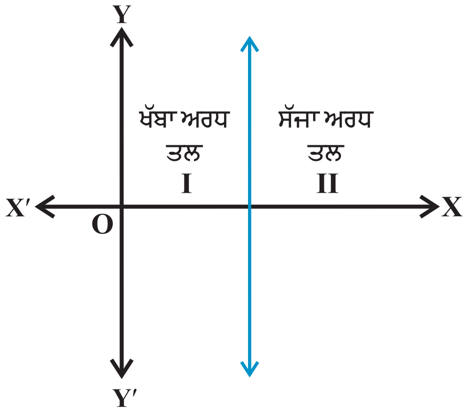
26. ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ 91 ਸੈਂ.ਮੀ. ਲੰਬੇ ਬੋਰਡ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਲੰਬਾਈਆਂ ਕੱਟਣਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਦੂਸਰੀ ਲੰਬਾਈ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਲੰਬਾਈ ਤੋਂ 3 ਸੈਂ.ਮੀ. ਵੱਧ ਅਤੇ ਤੀਸਰੀ ਲੰਬਾਈ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਲੰਬਾਈ ਤੋਂ ਦੁੱਗਣੀ ਹੈ। ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੇ ਬੋਰਡ ਦੀ ਸੰਭਵ ਲੰਬਾਈ ਕੀ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਤੀਸਰਾ ਟੁਕੜਾ ਦੂਸਰੇ ਟੁਕੜੇ ਤੋਂ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 5 ਸੈਂ.ਮੀ. ਵੱਧ ਲੰਬਾ ਹੋਵੇ ?

[*ਸੰਕੇਤ* : ਜੇਕਰ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੇ ਬੋਰਡ ਦੀ ਲੰਬਾਈ x ਸੈਂ.ਮੀ. ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਦੂਸਰੇ ਅਤੇ ਤੀਸਰੇ ਟੁਕੜਿਆਂ ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $(x + 3)$ ਸੈਂ.ਮੀ. ਅਤੇ $2x$ ਹੋਣਗੀਆਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x + (x + 3) + 2x \le 91$ ਅਤੇ $2x \ge (x + 3) + 5$].

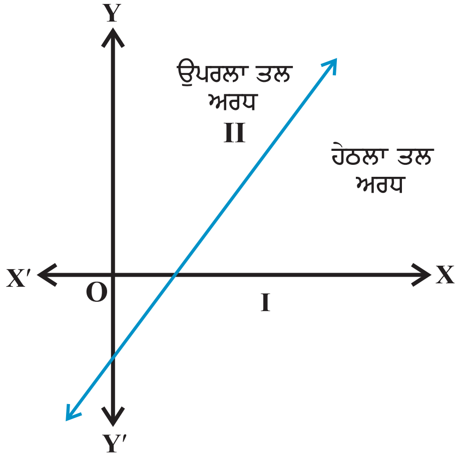
6.4 ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੀਆਂ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦਾ ਆਲੇਖੀ ਹੱਲ (Graphical Solution of Linear Inequalities in Two Variables)

ਪਹਿਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਚਲ ਵਾਲੀ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਆਲੇਖ ਇੱਕ ਚਿੱਤਰੀ ਨਿਰੂਪਣ ਹੈ ਅਤੇ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦੇ ਹੱਲ ਦਾ ਵਰਨਣ ਕਰਨ ਲਈ ਇੱਕ ਸਰਲ ਵਿਧੀ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੀਆਂ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦੇ ਆਲੇਖਾਂ ਬਾਰੇ ਵਰਨਣ ਕਰਾਂਗੇ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਤਲ ਨੂੰ ਦੋ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦੀ ਹੈ। ਹਰ ਇੱਕ ਭਾਗ ਨੂੰ ਅੱਧਾ (ਅਰਧ) ਤਲ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਲੰਬ ਰੇਖਾ, ਤਲ ਨੂੰ ਖੱਬੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਅੱਧ ਤਲਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਗ਼ੈਰ-ਲੰਬ ਰੇਖਾ ਤਲ ਨੂੰ ਉਪਰਲੇ ਅਤੇ ਹੇਠਲੇ ਅਰਧ ਤਲਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦੀ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 6.3 ਅਤੇ 6.4)



ਚਿੱਤਰ 6.3



ਚਿੱਤਰ 6.4

ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਤਲ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਜਾਂ ਤਾਂ ਰੇਖਾ ਉੱਪਰ ਸਥਿਤ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ ਜਾਂ ਅਰਧ ਤਲ I ਜਾਂ II ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੋਵੇਗਾ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਹ ਦੇਖਾਂਗੇ ਕਿ ਕੀ ਇੱਕ ਤਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂ ਦਾ ਅਸਮਾਨਤਾ $ax + by < c$ ਜਾਂ $ax + by > c$ ਨਾਲ ਕੋਈ ਸੰਬੰਧ ਹੈ ?

ਆਉ ਰੇਖਾ $ax + by = c, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0$ ... (1) ਲਈਏ

ਹੁਣ ਇੱਥੇ ਤਿੰਨ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਹਨ :

(i) $ax + by = c$ (ii) $ax + by > c$ (iii) $ax + by < c$.

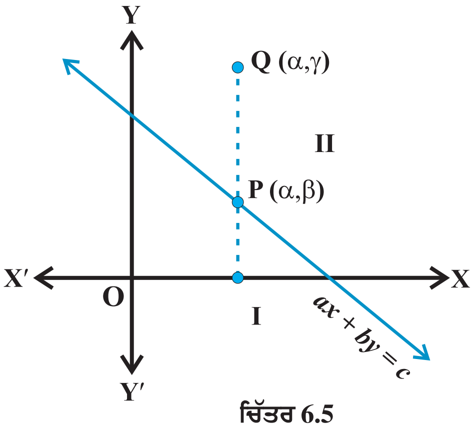
ਸਪੱਸ਼ਟ ਤੌਰ ’ਤੇ ਸਥਿਤੀ (i) ਵਿੱਚ (i) ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂ (x, y) (i) ਦੁਆਰਾ ਨਿਰੂਪਤ ਰੇਖਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਉਲਟ ਵੀ। ਸਥਿਤੀ (ii) ਵਿੱਚ ਆਉ ਪਹਿਲਾਂ ਮੰਨ ਲਈਏ ਕਿ $b > 0$ ਹੈ। ਰੇਖਾ $ax + by = c$, $b > 0$ ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ $P(\alpha, \beta)$ ਲਉ ਤਾਂ ਕਿ $a\alpha + b\beta = c$। ਹੁਣ ਕੋਈ ਹੋਰ ਬਿੰਦੂ $Q(\alpha, \gamma)$ ਅਰਧ ਤਲ II (ਚਿੱਤਰ 6.5) ਵਿੱਚ ਲਉ।

ਹੁਣ ਚਿੱਤਰ 6.5 ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$\gamma > \beta$ (ਕਿਉਂ ?)

ਜਾਂ $b\gamma > b\beta$ ਜਾਂ $a\alpha + b\gamma > a\alpha + b\beta$ (ਕਿਉਂ ?)

ਜਾਂ $a\alpha + b\gamma > c$



ਚਿੱਤਰ 6.5

ਭਾਵ, $Q(\alpha, \gamma)$ ਅਸਮਾਨਤਾ $ax + by > c$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਅਰਧ ਤਲ II ਵਿੱਚ ਰੇਖਾ $ax + by = c$ ਤੋਂ ਉੱਪਰ ਸਥਿਤ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂ ਅਸਮਾਨਤਾ $ax + by > c$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਉਲਟ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਮੰਨ ਲਉ (α, β) ਰੇਖਾ $ax + by = c$ ਤੇ ਸਥਿਤ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ $Q(\alpha, \gamma)$ ਅਸਮਾਨਤਾ $ax + by > c$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ

ਤਾਂ ਕਿ $a\alpha + b\gamma > c$

$\Rightarrow$ $a\alpha + b\gamma > a\alpha + b\beta$ (ਕਿਉਂ ?)

$\Rightarrow$ $\gamma > \beta$ (ਕਿਉਂਕਿ $b > 0$)

ਇਸ ਤੋਂ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਬਿੰਦੂ (α, γ) ਅਰਧ ਤਲ II ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਅਰਧ ਤਲ II ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵੀ ਬਿੰਦੂ ਅਸਮਾਨਤਾ $ax + by > c$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਕੋਈ ਵੀ ਬਿੰਦੂ ਜੋ $ax + by > c$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਉਹ ਅਰਧ ਤਲ II ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੈ।

ਜੇਕਰ $b < 0$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕੋਈ ਵੀ ਬਿੰਦੂ ਜੋ $ax + by > c$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਉਹ ਅਰਧ ਤਲ I ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਉਲਟ ਵੀ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਤੇ ਪਹੁੰਚਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂ ਜੋ $ax + by > c$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ ਅਰਧ ਤਲ II ਜਾਂ I ਵਿੱਚ ਹੋਣਗੇ, $b > 0$ ਜਾਂ $b < 0$ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਅਨੁਸਾਰ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਉਲਟ ਵੀ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $ax + by > c$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਇਹਨਾਂ ਅਰਧ ਤਲਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਅਰਧ ਤਲ ਹੋਵੇਗਾ [ਜਿਸਨੂੰ ਹੱਲ ਖੇਤਰ (solution region)] ਅਤੇ ਇਸ ਦੇ ਸੰਗਤ ਅਰਧ ਤਲ ਨੂੰ ਛਾਇਆਕ੍ਰਿਤ (Shaded) ਕਰਕੇ ਇਸ ਨੂੰ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ **1.** ਉਹ ਖੇਤਰ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਪੂਰਾ ਹੱਲ ਸਥਿਤ ਹੋਵੇ, ਨੂੰ ਉਸ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਹੱਲ ਖੇਤਰ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

2. ਕਿਸੇ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਏ ਖੇਤਰ ਦੀ ਪਹਿਚਾਣ ਲਈ ਕਿਸੇ ਅਰਧ ਤਲ ਦੇ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ (ਜੋ ਰੇਖਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਨਾ ਹੋਵੇ) (a, b) ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਜਾਂਚ ਕਰਨਾ ਹੀ ਕਾਫ਼ੀ ਹੈ, ਕਿ ਉਹ ਬਿੰਦੂ ਉਸ ਅਸਮਾਨਤਾ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ। ਜੇਕਰ ਇਹ ਬਿੰਦੂ ਅਸਮਾਨਤਾ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸਮਾਨਤਾ ਉਸ ਅਰਧ ਤਲ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਅਰਧ ਤਲ ਨੂੰ ਛਾਇਆਕ੍ਰਿਤ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇਹ ਬਿੰਦੂ ਹੈ, ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਅਸਮਾਨਤਾ ਉਸ ਅਰਧ ਤਲ ਨੂੰ ਦਰਸਾਏਗੀ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇਹ ਬਿੰਦੂ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਸੁਵਿਧਾ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਬਿੰਦੂ $(0, 0)$ ਨੂੰ ਪਹਿਲ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ।

3. ਜੇਕਰ ਇਹ ਅਸਮਾਨਤਾ $ax + by \geq c$ ਜਾਂ $ax + by \leq c$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਰੇਖਾ $ax + by = c$ ਤੇ ਸਥਿਤ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂ ਵੀ ਇਸਦੇ ਹੱਲ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਹੱਲ ਖੇਤਰ ਤੇ ਗਹਿਰੀ ਕਾਲੀ ਰੇਖਾ ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ।

4. ਜੇਕਰ ਅਸਮਾਨਤਾ $ax + by > c$ ਜਾਂ $ax + by < c$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਰੇਖਾ $ax + by = c$ ਤੇ ਸਥਿਤ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂ ਇਸ ਦੇ ਹੱਲ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਨਹੀਂ ਹੋਣਗੇ। ਇਸ ਲਈ ਹੱਲ ਖੇਤਰ ਤੇ ਰੇਖਾ ਟੁੱਟਵੀਂ ਜਾਂ ਖੰਡਿਤ ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ।

ਭਾਗ 6.2 ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਦੋ ਚਲਾਂ x ਅਤੇ y ਵਿੱਚ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਅਸਮਾਨਤਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਈ ਸੀ

$40x + 20y \leq 120$ ... (1)

ਜੋ ਰੇਸ਼ਮਾ ਦੁਆਰਾ ਰਜਿਸਟਰ ਅਤੇ ਪੈਨ ਖਰੀਦਣ ਸੰਬੰਧੀ ਸ਼ਬਦਿਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਨੂੰ ਗਣਿਤਿਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਈ ਸੀ।

ਆਓ ਹੁਣ ਇਸ ਅਸਮਾਨਤਾ ਨੂੰ ਇਹ ਧਿਆਨ ਵਿੱਚ ਰੱਖਦੇ ਹੋਏ ਹੱਲ ਕਰੀਏ ਕਿ x ਅਤੇ y ਕੇਵਲ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੀ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ, ਕਿਉਂਕਿ ਵਸਤੂਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਭਿੰਨਾਂ ਜਾਂ ਰਿਣਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ x ਅਤੇ y ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਜੋੜਿਆਂ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਸ ਨਾਲ ਕਥਨ (1) ਸਹੀ ਸਾਬਤ ਹੋਏ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਹਨਾਂ ਜੋੜਿਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ, ਅਸਮਾਨਤਾ (1) ਦਾ ਹੱਲ ਸਮੂਹ ਹੋਵੇਗਾ।

$x = 0$ ਲੈ ਕੇ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, (1) ਦਾ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ

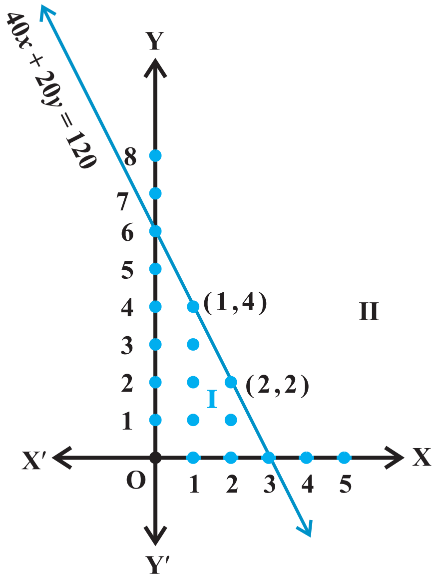
$40x + 20y = 40\,(0) + 20y = 20y$ ਹੋਵੇਗਾ

ਇਸ ਲਈ $20y \leq 120$ ਜਾਂ $y \leq 6$ ... (2)

$x = 0$ ਲਈ y ਦੇ ਸੰਗਤ ਮੁੱਲ ਸਿਰਫ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ (1) ਦੇ ਹੱਲ (0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0, 5) ਅਤੇ (0, 6) ਹਨ।

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ (1) ਦੇ ਹੋਰ ਹੱਲ, ਜਦੋਂ $x = 1, 2$ ਅਤੇ 3 ਹੋਵੇ ਤਾਂ (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (3, 0) ਹੋਣਗੇ।

ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 6.6 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.6

ਆਓ ਹੁਣ x ਅਤੇ y ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਨੂੰ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਤੋਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਤੱਕ ਵਧਾ ਦੇਈਏ ਅਤੇ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ (1) ਦਾ ਹੱਲ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ। ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਆਲੇਖੀ ਵਿਧੀ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਸੁਵਿਧਾਜਨਕ ਹੈ। ਇਸ ਉਦੇਸ਼ ਲਈ ਆਓ ਇਸਦੇ ਸੰਗਤ ਸਮੀਕਰਣ

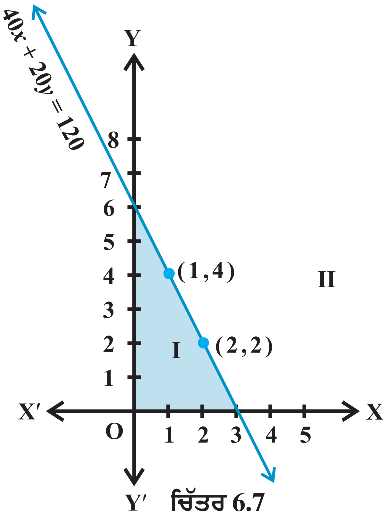
$$40x + 20y = 120 \qquad \ldots (3)$$

ਲਈਏ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਆਲੇਖ ਖਿੱਚੀਏ। ਇਹ ਇੱਕ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਹੈ ਜੋ ਤੱਲ ਨੂੰ ਦੋ ਅਰਧ ਤਲ I ਅਤੇ ਅਰਧ ਤਲ II ਵਿੱਚ ਵੰਡਦੀ ਹੈ। ਅਸਮਾਨਤਾ (1) ਦਾ ਆਲੇਖ ਖਿੱਚਣ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਮੰਨ ਲਓ (0, 0) ਅਰਧ ਤਲ (1) ਵਿੱਚ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਹ ਜਾਂਚਦੇ ਹਾਂ ਕਿ x ਅਤੇ y ਦਾ ਇਹ ਮੁੱਲ ਅਸਮਾਨਤਾ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ।

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $x = 0, y = 0$ ਅਸਮਾਨਤਾ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅਰਧ ਤਲ I ਦਿੱਤੀ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਆਲੇਖ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 6.7)। ਕਿਉਂਕਿ ਰੇਖਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂ ਵੀ ਅਸਮਾਨਤਾ (1) ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਰੇਖਾ ਵੀ ਆਲੇਖ ਦਾ ਇੱਕ ਹਿੱਸਾ ਹੋਵੇਗੀ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਆਲੇਖ ਅਰਧ ਤਲ-I ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਰੇਖਾ ਵੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ। ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਅਰਧ ਤਲ-II ਆਲੇਖ ਦਾ ਹਿੱਸਾ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸਮਾਨਤਾ (1) ਦਾ ਹੱਲ ਇਸਦੇ ਆਲੇਖ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹਰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੋਵੇਗਾ (ਅਰਧ ਤਲ I ਸਮੇਤ ਰੇਖਾ)

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰਨ ਲਈ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੀਆਂ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀਆਂ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲਵਾਂਗੇ।



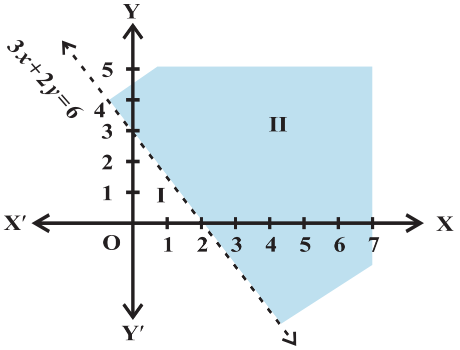
ਚਿੱਤਰ 6.7

ਉਦਾਹਰਣ 9 : $3x + 2y > 6$ ਨੂੰ ਆਲੇਖੀ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $3x + 2y = 6$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 6.8 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਈ ਖੰਡਿਤ ਰੇਖਾ ਹੈ। ਇਹ ਰੇਖਾ xy ਤਲ ਨੂੰ ਦੋ ਅਰਧ ਤਲਾਂ I ਅਤੇ II ਵਿੱਚ ਵੰਡਦੀ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ (ਰੇਖਾ ਤੇ ਨਹੀਂ) ਮੰਨ ਲਓ (0, 0) ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, ਜੋ ਕਿ ਦੋ ਅਰਧ ਤਲਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਵਿੱਚ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 6.8) ਅਤੇ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕੀ ਇਹ ਬਿੰਦੂ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਅਸਮਾਨਤਾ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ :

$$3\,(0) + 2\,(0) > 6$$

ਜਾਂ $0 > 6$, ਜੋ ਕਿ ਗ਼ਲਤ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.8

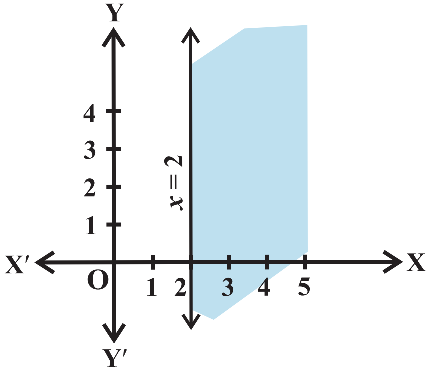
ਇਸ ਲਈ ਅਰਧ ਤਲ-I ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਹੱਲ ਖੇਤਰ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਰੇਖਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਕੋਈ ਵੀ ਬਿੰਦੂ ਇਸ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਸਮਾਨਤਾ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਨਹੀਂ ਕਰਦਾ। ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਛਾਇਆ-ਅੰਕਿਤ ਅਰਧ ਤਲ II, ਰੇਖਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਨਾ ਲੈਂਦੇ ਹੋਏ, ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਹੱਲ ਖੇਤਰ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 10 : $3x - 6 \geq 0$ ਨੂੰ ਦੋ-ਵਿਮਾਈ ਤਲ ਵਿੱਚ ਆਲੇਖੀ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $3x - 6 = 0$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 6.9 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਮੰਨ ਲਓ (0, 0) ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਅਸਮਾਨਤਾ ਵਿੱਚ ਰੱਖਦੇ ਹਾਂ, ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ

$3\,(0) - 6 \geq 0$ ਜਾਂ $- 6 \geq 0$ ਜੋ ਕਿ ਗ਼ਲਤ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਹੱਲ ਖੇਤਰ ਛਾਇਆ-ਅੰਕਿਤ ਖੇਤਰ ਹੈ, ਰੇਖਾ $x = 2$ ਦੇ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਵਾਲੇ ਪਾਸੇ।

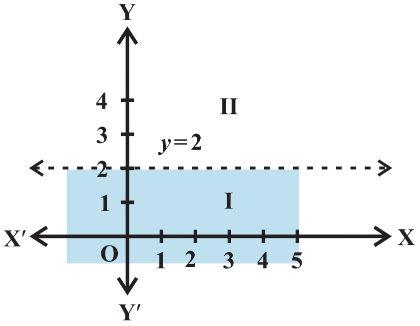


ਚਿੱਤਰ 6.9

ਉਦਾਹਰਣ 11 : $y < 2$ ਨੂੰ ਆਲੇਖੀ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $y = 2$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 6.10 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ।

ਆਓ ਬਿੰਦੂ (0, 0) ਜੋ ਕਿ ਹੇਠਲੇ ਅਰਧ ਤਲ I ਵਿੱਚ ਹੈ, ਲਈਏ ਅਤੇ $y = 0$ ਨੂੰ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਅਸਮਾਨਤਾ ਵਿੱਚ ਰੱਖੀਏ।



ਚਿੱਤਰ 6.10

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ, $1 \times 0 < 2$ ਜਾਂ $0 < 2$ ਜੋ ਕਿ ਠੀਕ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਹੱਲ ਖੇਤਰ ਰੇਖਾ $y = 2$ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਛਾਇਆ-ਅੰਕਿਤ ਖੇਤਰ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਰੇਖਾ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਸਥਿਤ ਹਰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ (ਰੇਖਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਛੱਡਦੇ ਹੋਏ) ਦਿੱਤੀ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 6.2

ਦੋ-ਵਿਮਾਈ (two-Dimensional) ਤਲ ਵਿੱਚ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ :

1. $x + y < 5$ **2.** $2x + y \geq 6$ **3.** $3x + 4y \leq 12$ **4.** $y + 8 \geq 2x$

5. $x - y \leq 2$ **6.** $2x - 3y > 6$ **7.** $-3x + 2y \geq -6$ **8.** $3y - 5x < 30$

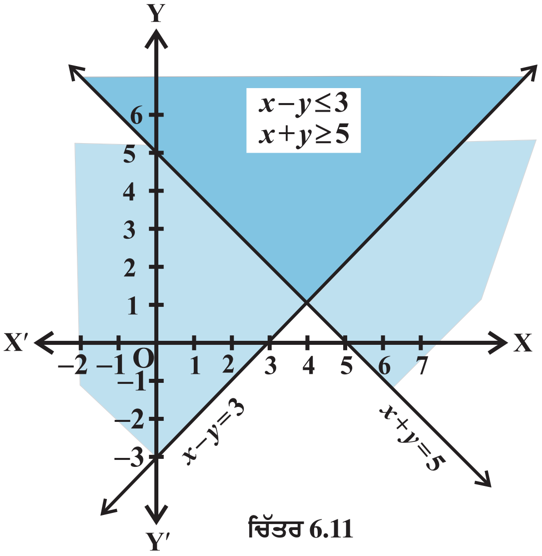
9. $y < -2$ **10.** $x > -3.$

6.5 ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੀਆਂ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਹੱਲ (Solution of System of Linear Inequalities in Two Variables)

ਪਿਛਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੀਆਂ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਆਲੇਖੀ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰਨਾ ਸਿੱਖਿਆ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਦੋ ਚਲ ਵਾਲੀਆਂ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 12 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਆਲੇਖੀ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰੋ।

$$x + y \geq 5 \quad \text{... (1)}$$
$$x - y \leq 3 \quad \text{... (2)}$$



ਚਿੱਤਰ 6.11

ਹੱਲ : ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਨ

$$x + y = 5$$

ਦਾ ਆਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 6.11 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅਸਮਾਨਤਾ (1) ਦਾ ਹੱਲ, ਰੇਖਾ $x + y = 5$ ਦੇ ਉੱਪਰਲੇ ਛਾਇਆ-ਅੰਕਿਤ ਖੇਤਰ ਨਾਲ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਰੇਖਾ ਉੱਪਰਲੇ ਬਿੰਦੂ ਵੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ।

ਇਸੇ ਹੀ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕੀ ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਸਮੀਕਰਨ $x - y = 3$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਵੀ ਚਿੱਤਰ 6.11 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਖਿਚਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅਸਮਾਨਤਾ (2) ਦਾ ਹੱਲ ਰੇਖਾ $x - y = 3$ ਦੇ ਉੱਪਰਲਾ ਛਾਇਆ-ਅੰਕਿਤ ਭਾਗ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਰੇਖਾ ਉੱਪਰ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂ ਵੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ।

ਸਪੱਸ਼ਟ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਦੋਹਰਾ ਛਾਇਆ-ਅੰਕਿਤ ਖੇਤਰ, ਜੋ ਕਿ ਦੋਵੇਂ ਛਾਇਆ-ਅੰਕਿਤ ਖੇਤਰ ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਹੈ, ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਅਸਮਾਨਤਾ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਲੋੜੀਂਦਾ ਹੱਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 13 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਅਸਮਾਨਤਾ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਆਲੇਖੀ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰੋ।

$5x + 4y \leq 40$ ... (1)

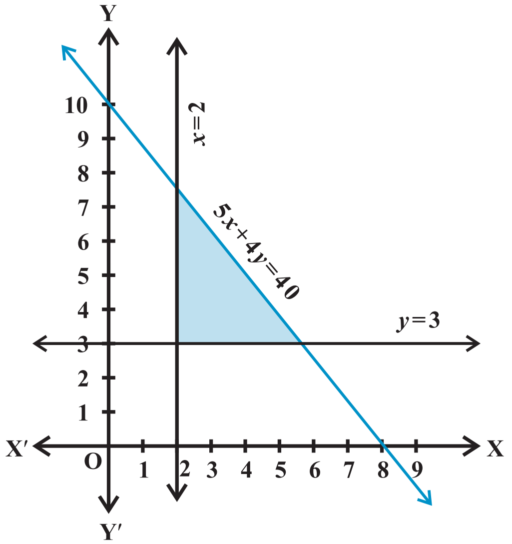
$x \geq 2$ ... (2)

$y \geq 3$ ... (3)

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਰੇਖਾਵਾਂ,

$5x + 4y = 40$, $x = 2$ ਅਤੇ $y = 3$ ਦੇ ਆਲੇਖ ਖਿੱਚਾਂਗੇ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅਸਮਾਨਤਾ (1), ਰੇਖਾ $5x + 4y = 40$ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਛਾਇਆ-ਅੰਕਿਤ ਖੇਤਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਰੇਖਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂ ਵੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ। ਅਸਮਾਨਤਾ (2), ਰੇਖਾ $x = 2$ ਦੇ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਵਾਲੇ ਪਾਸੇ ਦਾ ਛਾਇਆ-ਅੰਕਿਤ ਖੇਤਰ ਅਤੇ ਅਸਮਾਨਤਾ (3), ਰੇਖਾ $y = 3$ ਦੇ ਉੱਪਰਲੇ ਪਾਸੇ ਛਾਇਆ-ਅੰਕਿਤ ਖੇਤਰ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇਹਨਾਂ ਰੇਖਾਵਾਂ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂ ਵੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ, ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਾਂਝਾ ਛਾਇਆ-ਅੰਕਿਤ ਖੇਤਰ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਤੇ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੇ ਹੱਲ ਹਨ (ਚਿੱਤਰ 6.12)।



ਚਿੱਤਰ 6.12

ਬਹੁਤ ਸਾਰੀਆਂ ਵਿਹਾਰਕ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਅਸਮਾਨਤਾ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਵਿੱਚ ਚਲ x ਅਤੇ y ਦੇ ਮੁੱਲ ਰਿਣਾਤਮਕ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੇ, ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਉਤਪਾਦਕ ਇਕਾਈਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ, ਖਰੀਦੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ, ਕੰਮ ਕੀਤੇ ਘੰਟਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਆਦਿ। ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ $x \geq 0$, $y \geq 0$ ਅਤੇ ਹੱਲ ਖੇਤਰ ਪਹਿਲੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇਗਾ।

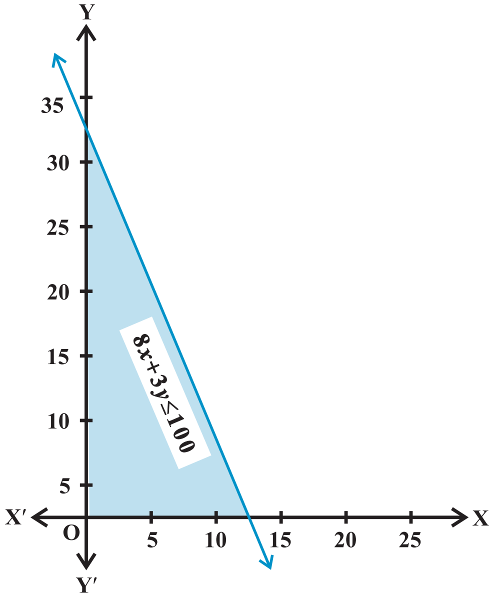
ਉਦਾਹਰਣ 14 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਅਸਮਾਨਤਾ ਪ੍ਰਣਾਲੀ (System of inequalities) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

$8x + 3y \leq 100$ ... (1)

$x \geq 0$ ... (2)

$y \geq 0$ ... (3)

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਰੇਖਾ $8x + 3y = 100$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਖਿੱਚਾਂਗੇ। ਅਸਮਾਨਤਾ $8x + 3y \leq 100$, ਰੇਖਾ ਦੇ ਥੱਲੇ ਛਾਇਆ-ਅੰਕਿਤ ਖੇਤਰ ਅਤੇ ਰੇਖਾ $8x + 3y = 100$ ਤੇ ਸਥਿਤ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 6.13)।



ਚਿੱਤਰ 6.13

ਕਿਉਂਕਿ $x \geq 0$, $y \geq 0$, ਇਸ ਲਈ ਪਹਿਲੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਛਾਇਆ-ਅੰਕਿਤ ਖੇਤਰ ਦਾ ਹਰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਰੇਖਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂ ਅਤੇ ਧੁਰਿਆਂ ਤੇ ਸਥਿਤ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਅਸਮਾਨਤਾ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੇ ਹੱਲ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 15 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਅਸਮਾਨਤਾ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

$x + 2y \leq 8$ ... (1)

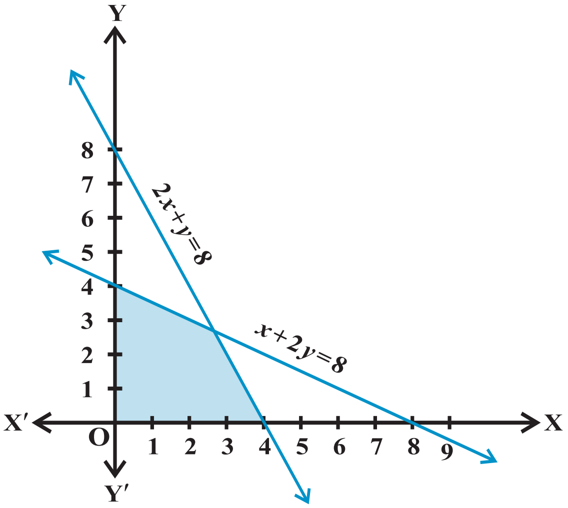
$2x + y \leq 8$ ... (2)

$x \geq 0$ ... (3)

$y \geq 0$ ... (4)

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਰੇਖਾਵਾਂ $x + 2y = 8$ ਅਤੇ $2x + y = 8$ ਦੇ ਆਲੇਖ ਬਣਾਵਾਂਗੇ। ਅਸਮਾਨਤਾ (1) ਅਤੇ (2) ਦੋਵੇਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਹੇਠਲੇ ਖੇਤਰ ਅਤੇ ਸੰਬੰਧਤ ਰੇਖਾਵਾਂ ਉੱਪਰਲੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ।

ਕਿਉਂਕਿ $x \geq 0$, $y \geq 0$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਪਹਿਲੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਛਾਇਆ-ਅੰਕਿਤ ਖੇਤਰ, ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਅਸਮਾਨਤਾ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੇ ਹੱਲ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 6.14)



ਚਿੱਤਰ 6.14

ਅਭਿਆਸ 6.3

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਅਸਮਾਨਤਾ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਆਲੇਖੀ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰੋ :

1. $x \geq 3, y \geq 2$

2. $3x + 2y \leq 12,\ x \geq 1, y \geq 2$

3. $2x + y \geq 6, 3x + 4y \leq 12$

4. $x + y \geq 4,\ 2x - y > 0$

5. $2x - y > 1, x - 2y < -1$

6. $x + y \leq 6,\ x + y \geq 4$

7. $2x + y \geq 8,\ x + 2y \geq 10$

8. $x + y \leq 9,\ y > x,\ x \geq 0$

9. $5x + 4y \leq 20,\ x \geq 1, y \geq 2$

10. $3x + 4y \leq 60, x + 3y \leq 30, x \geq 0,\ y \geq 0$

11. $2x + y \geq 4,\ x + y \leq 3,\ 2x - 3y \leq 6$

12. $x - 2y \leq 3, 3x + 4y \geq 12,\ x \geq 0, y \geq 1$

13. $4x + 3y \leq 60, y \geq 2x,\ x \geq 3,\ x, y \geq 0$

14. $3x + 2y \leq 150, x + 4y \leq 80,\ x \leq 15,\ y \geq 0, x \geq 0$

15. $x + 2y \leq 10, x + y \geq 1, x - y \leq 0, x \geq 0, y \geq 0$

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 16 : $-8 \leq 5x - 3 < 7$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਦੋ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ, $-8 \leq 5x - 3$ ਅਤੇ $5x - 3 < 7$ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਨਾਲ-ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰਾਂਗੇ।

ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ $-8 \leq 5x -3 < 7$

ਜਾਂ $\quad -5 \leq 5x < 10 \quad$ ਜਾਂ $\quad -1 \leq x < 2$

ਉਦਾਹਰਣ 17 : $-5 \leq \dfrac{5-3x}{2} \leq 8$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $\quad -5 \leq \dfrac{5-3x}{2} \leq 8$

ਜਾਂ $\quad -10 \leq 5 - 3x \leq 16 \quad$ ਜਾਂ $\quad -15 \leq -3x \leq 11$

ਜਾਂ $\quad 5 \geq x \geq -\dfrac{11}{3}$

ਇਸ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੀ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, $\dfrac{-11}{3} \leq x \leq 5$

ਉਦਾਹਰਣ 18 : ਅਸਮਾਨਤਾ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

$$3x - 7 < 5 + x \qquad \ldots (1)$$

$$11 - 5x \leq 1 \qquad \ldots (2)$$

ਅਤੇ ਹੱਲ ਨੂੰ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਤੇ ਦਰਸਾਉ।

ਹੱਲ : ਅਸਮਾਨਤਾ (1) ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$3x - 7 < 5 + x$$

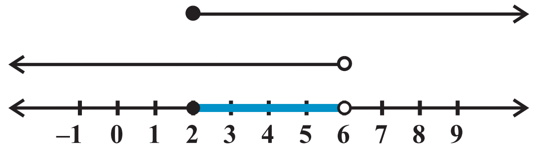
ਜਾਂ $\quad x < 6 \qquad \ldots (3)$

ਅਸਮਾਨਤਾ (2) ਤੋਂ,

$$11 - 5x \leq 1$$

ਜਾਂ $\quad -5x \leq -10 \quad$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $x \geq 2 \qquad \ldots (4)$

ਜੇਕਰ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਤੇ (3) ਅਤੇ (4) ਨੂੰ ਆਲੇਖਿਤ ਕਰੀਏ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ x ਦੇ ਸਾਂਝੇ ਮੁੱਲ 2 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਜਾਂ 2 ਤੋਂ ਵੱਡੇ ਅਤੇ 6 ਤੋਂ ਛੋਟੇ ਹਨ। ਚਿੱਤਰ 6.15 ਵਿੱਚ ਗੂੜੀ ਕਾਲੀ ਰੇਖਾ ਨਾਲ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 6.15

ਇਸ ਲਈ ਅਸਮਾਨਤਾ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਹੱਲ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ x, 2 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਜਾਂ 2 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਅਤੇ 6 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $2 \leq x < 6$.

ਉਦਾਹਰਣ 19 : ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ, ਤੇਜ਼ਾਬ (Hydrochloric acid) ਦੇ ਘੋਲ ਨੂੰ 30° ਤੋਂ 35° ਸੈਲਸੀਅਸ ਤਾਪਮਾਨ ਦੇ ਵਿੱਚ ਰੱਖਿਆ ਜਾਣਾ ਹੈ। ਤਾਪਮਾਨ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਫਾਰਨਹੀਟ ਪੈਮਾਨੇ ਵਿੱਚ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ, ਜੇਕਰ ਸੈਲਸੀਅਸ ਅਤੇ ਫਾਰਨਹੀਟ ਪੈਮਾਨੇ ਦਾ ਪਰਿਵਰਤਨ ਸੂਤਰ $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ ਹੋਵੇ। ਇੱਥੇ C ਅਤੇ F ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਤਾਪਮਾਨ ਨੂੰ ਡਿਗਰੀ ਸੈਲਸੀਅਸ ਅਤੇ ਡਿਗਰੀ ਫਾਰਨਹੀਟ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਦਿੱਤਾ ਹੈ $30 < C < 35$

$C = \frac{5}{9}(F - 32)$ ਰੱਖਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$30 < \frac{5}{9}(F - 32) < 35$$

ਜਾਂ $\frac{9}{5} \times (30) < (F - 32) < \frac{9}{5} \times (35)$

ਜਾਂ $54 < (F - 32) < 63$

ਜਾਂ $86 < F < 95$.

ਇਸ ਲਈ ਤਾਪਮਾਨ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦਾ ਵਿਸਥਾਰ 86°F ਅਤੇ 95°F ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਹੋਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ 20 : ਇੱਕ ਨਿਰਮਾਤਾ ਕੋਲ 12% ਤੇਜ਼ਾਬ ਵਾਲਾ ਘੋਲ 600 ਲੀਟਰ ਹੈ। ਇਸ ਵਿੱਚ 30% ਤੇਜਾਬ ਵਾਲਾ ਘੋਲ ਕਿੰਨਾ ਮਿਲਾਇਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਜੋ ਆਖਿਰ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਘੋਲ ਵਿੱਚ ਤੇਜ਼ਾਬ ਦੀ ਮਾਤਰਾ 15% ਤੋਂ ਵੱਧ ਪਰ 18% ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੋਵੇ ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ 30% ਤੇਜ਼ਾਬ ਵਾਲੇ ਘੋਲ ਦੀ ਮਾਤਰਾ x ਲੀਟਰ ਹੈ, ਤਾਂ

ਕੁੱਲ ਘੋਲ = $(x + 600)$ ਲੀਟਰ

ਇਸ ਲਈ x ਦਾ 30% = 600 ਦਾ 12% > $(x + 600)$ ਦਾ 15%

ਅਤੇ x ਦਾ 30% = 600 ਦਾ 12% < $(x + 600)$ ਦਾ 18%

ਜਾਂ $\frac{30x}{100} + \frac{12}{100}(600) > \frac{15}{100}(x + 600)$

ਅਤੇ $\frac{30x}{100} + \frac{12}{100}(600) < \frac{18}{100}(x + 600)$

ਜਾਂ $30x + 7200 > 15x + 9000$

ਅਤੇ $30x + 7200 < 18x + 10800$

ਜਾਂ $15x > 1800$ ਅਤੇ $12x < 3600$

ਜਾਂ $x > 120$ ਅਤੇ $x < 300$

ਭਾਵ $120 < x < 300$

ਇਸ ਲਈ 30% ਤੇਜ਼ਾਬ ਵਾਲੇ ਘੋਲ ਦੀ ਮਾਤਰਾ 120 ਲੀਟਰ ਤੋਂ ਵੱਧ ਪਰ 300 ਲੀਟਰ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ।

ਅਧਿਆਇ 6 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1 ਤੋਂ 6 ਤੱਕ ਦੀਆਂ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ :

1. $2 \le 3x - 4 \le 5$

2. $6 \le -3(2x - 4) < 12$

3. $-3 \le 4 - \frac{7x}{2} \le 18$

4. $-15 < \frac{3(x-2)}{5} \le 0$

5. $-12 < 4 - \frac{3x}{-5} \le 2$

6. $7 \le \frac{(3x+11)}{2} \le 11$.

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 7 ਤੋਂ 10 ਤੱਕ ਦੀਆਂ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ ਅਤੇ ਹੱਲ ਨੂੰ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਦਰਸਾਉ :

7. $5x + 1 > -24$, $5x - 1 < 24$

8. $2(x - 1) < x + 5$, $3(x + 2) > 2 - x$

9. $3x - 7 > 2(x - 6)$, $6 - x > 11 - 2x$

10. $5(2x - 7) - 3(2x + 3) \le 0$, $2x + 19 \le 6x + 47$.

11. ਇੱਕ ਘੋਲ ਨੂੰ 68° F ਅਤੇ 77° F ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਰੱਖਿਆ ਜਾਣਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਾਪਮਾਨ ਦੀ ਡਿਗਰੀ (degree) ਸੈਲਸੀਅਸ (C) ਵਿੱਚ (range) ਕੀ ਹੋਵੇਗੀ, ਜੇਕਰ ਸੈਲਸੀਅਸ (C) ਅਤੇ ਫਾਰਨਹੀਟ (F) ਪਰਿਵਰਤਨ ਸੂਤਰ $F = \frac{9}{5}C + 32$ ਹੋਵੇ ?

12. 8% ਬੋਰਿਕ ਤੇਜ਼ਾਬ ਦੇ ਘੋਲ ਵਿੱਚ 2% ਬੋਰਿਕ ਤੇਜ਼ਾਬ ਦਾ ਘੋਲ ਮਿਲਾ ਕੇ ਪਤਲਾ ਕੀਤਾ ਜਾਣਾ ਹੈ। ਅਖੀਰਲੇ ਮਿਸ਼ਰਣ ਵਿੱਚ ਬੋਰਿਕ ਤੇਜ਼ਾਬ 4% ਤੋਂ ਵੱਧ ਪਰ 6% ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੋਵੇ। ਜੇਕਰ ਸਾਡੇ ਕੋਲ 8% ਘੋਲ ਦੀ ਮਾਤਰਾ 640 ਲੀਟਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਦੱਸੋ ਕਿ 2% ਘੋਲ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਕਿੰਨੇ ਲੀਟਰ ਇਸ ਵਿੱਚ ਮਿਲਾਉਣੀ ਹੋਵੇਗੀ।

13. 45% ਤੇਜਾਬ ਵਾਲੇ 1125 ਲੀਟਰ ਘੋਲ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਲੀਟਰ ਪਾਣੀ ਮਿਲਾਇਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਜੋ ਅਖੀਰਲੇ ਮਿਸ਼ਰਣ ਵਿੱਚ ਤੇਜ਼ਾਬ ਦੀ ਮਾਤਰਾ 25% ਤੋਂ ਵੱਧ ਪਰ 30% ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੋਵੇ ?

14. ਕਿਸੇ ਵਿਅਕਤੀ ਦਾ IQ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦਾ ਸੂਤਰ

$$IQ = \frac{MA}{CA} \times 100$$

ਜਿੱਥੇ MA ਮਾਨਸਿਕ ਉਮਰ ਅਤੇ CA ਸਮਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਉਮਰ ਹੈ। ਜੇਕਰ 12 ਸਾਲ ਦੇ ਉਮਰ ਦੇ ਬੱਚਿਆਂ ਦੇ ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਦਾ IQ, $80 \le IQ \le 140$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਮਾਨਸਿਕ ਉਮਰ ਦੀ ਵਿਸਥਾਰ (range) ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

- ਇੱਕ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜਾਂ ਦੋ ਬੀਜ ਗਣਿਤਿਕ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਵਿੱਚ $<$, $>$, $\leq$ ਜਾਂ $\geq$ ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਾਲ ਬਣਦੀ ਹੈ।
- ਇੱਕ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦੇ ਦੋਹਾਂ ਪਾਸੇ ਇੱਕੋ ਜਿਹੀ ਸੰਖਿਆ ਜੋੜੀ ਜਾਂ ਘਟਾਈ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।
- ਕਿਸੇ ਵੀ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦੇ ਦੋਹਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਇੱਕੋ ਜਿਹੀ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ (ਜਾਂ ਭਾਗ) ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਪ੍ਰੰਤੂ ਦੋਹਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕੋ ਜਿਹੀ ਰਿਣਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਗੁਣਾ (ਜਾਂ ਭਾਗ) ਕਰਨ ਤੇ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਚਿੰਨ ਉਲਟ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
- x ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਜਿਸ ਨਾਲ ਅਸਮਾਨਤਾ ਸਹੀ ਕਥਨ ਸਿੱਧ ਹੋ ਜਾਵੇ, ਨੂੰ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਹੱਲ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
- ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਤੇ $x < a$ (ਜਾਂ $x > a$) ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਸੰਖਿਆ a ਉੱਤੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਲਗਾਉ ਅਤੇ a ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ (ਜਾਂ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ) ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਗੂੜੀ ਕਰ ਦਿਉ।
- $x \leq a$ (ਜਾਂ $x \geq a$) ਨੂੰ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਤੇ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਸੰਖਿਆ ਉੱਪਰ ਇੱਕ ਗੂੜਾ ਚੱਕਰ ਲਗਾਉ ਅਤੇ a ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ (ਜਾਂ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ) ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਗੂੜੀ ਕਰ ਦਿਉ।
- ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਅਸਮਾਨਤਾ ਵਿੱਚ $\leq$ ਜਾਂ $\geq$ ਚਿੰਨ੍ਹ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦੇ ਹੱਲ ਵਿੱਚ ਰੇਖਾ ਉੱਪਰ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂ ਵੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੋਣਗੇ ਅਤੇ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਆਲੇਖ ਇਸ ਰੇਖਾ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ (ਹੇਠਾਂ) ਜਾਂ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ (ਉੱਪਰੋਂ) ਦਾ ਉਹ ਸਾਰਾ ਖੇਤਰ ਹੋਵੇਗਾ ਜਿਸਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਬਿੰਦੂ ਅਸਮਾਨਤਾ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰੇ।
- ਅਸਮਾਨਤਾ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਹੱਲ ਖੇਤਰ ਉਹ ਸਾਂਝਾ ਖੇਤਰ ਹੈ ਜੋ ਸਾਰੀਆਂ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕੋ ਸਮੇਂ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ।