ਅਧਿਆਇ 7

ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਅਤੇ ਸੰਯੋਜਨ

(Permutations and Combinations)

❖*Every body of discovery is mathematical in form because there is no other guidance we can have – DARWIN*❖

7.1 ਭੂਮਿਕਾ

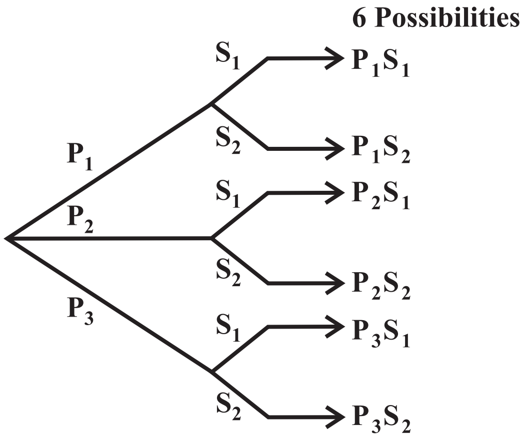
ਮੰਨ ਲਓ ਤੁਹਾਡੇ ਕੋਲ ਨੰਬਰਾਂ ਵਾਲੇ ਤਾਲੇ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਸੂਟਕੇਸ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਓ ਇਸ ਤਾਲੇ ਤੇ ਚਾਰ ਚੱਕਰ ਲੱਗੇ ਹਨ ਅਤੇ ਹਰ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਤੇ 0 ਤੋਂ 9 ਤੱਕ ਦੇ 10 ਅੰਕ ਲਿਖੇ ਹੋਏ ਹਨ। ਤਾਲੇ ਨੂੰ 4 ਖਾਸ ਅੰਕਾਂ ਨਾਲ, ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਬਿਨਾਂ ਦੁਹਰਾਏ, ਇੱਕ ਖਾਸ ਤਰਤੀਬ ਨਾਲ ਖੋਲਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਓ ਕਿਸੇ ਕਾਰਨ ਤੁਸੀਂ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਇਸ ਤਰਤੀਬ ਨੂੰ ਭੁੱਲ ਗਏ, ਤੁਹਾਨੂੰ ਸਿਰਫ ਪਹਿਲਾ ਅੰਕ ਜੋ 7 ਹੈ, ਉਹ ਯਾਦ ਹੈ। ਤਾਲੇ ਨੂੰ ਖੋਲਣ ਲਈ ਤੁਹਾਨੂੰ ਤਿੰਨ ਅੰਕਾਂ ਦੀਆਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਲੜੀਆਂ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰਨੀ ਪਵੇਗੀ ? ਇਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦੇ ਉੱਤਰ ਲਈ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਬਾਕੀ ਦੇ ਰਹਿੰਦੇ 9 ਅੰਕਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ 3 ਅੰਕ ਲੈਂਦੇ ਹੋਏ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਭਵ ਤਰਤੀਬਾਂ ਦੀ ਸੂਚੀ ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਲੱਗ ਜਾਉ। ਪਰ ਇਹ ਵਿਧੀ ਥਕਾਉਣ ਵਾਲੀ ਅਤੇ ਨੀਰਸ ਹੋਵੇਗੀ, ਕਿਉਂਕਿ ਸੰਭਵ ਕ੍ਰਮਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਵੱਡੀ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਇਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦਾ ਉੱਤਰ ਦੇਣ ਲਈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਗਣਨਾ ਤਕਨੀਕ ਬਾਰੇ ਸਿੱਖਾਂਗੇ, ਜਿਸ ਨਾਲ 3 ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਬਿਨਾਂ ਸੂਚੀਬੱਧ ਕੀਤੇ, ਉੱਤਰ ਦੇ ਸਕੀਏ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਹ ਤਕਨੀਕ ਵਸਤੂਆਂ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰਨ ਅਤੇ ਅਸਲ ਸੂਚੀਆਂ ਬਣਾਏ ਬਿਨਾਂ ਹੀ, ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਤਰਤੀਬਾਂ ਬਾਰੇ ਦੱਸੇਗੀ। ਪਹਿਲੇ ਪਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਉਸ ਸਿਧਾਂਤ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ, ਜੋ ਇਸ ਤਕਨੀਕ ਨੂੰ ਸਿੱਖਣ ਦੇ ਲਈ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਮੂਲਭੂਤ ਹੈ।

Jacob Bernoulli
(1654-1705)

7.2 ਗਣਨਾ ਦਾ ਮੂਲਭੂਤ ਜਾਂ ਅਧਾਰਭੂਤ ਜਾਂ ਮੁੱਢਲਾ ਸਿਧਾਂਤ (Fundamental Principle of Counting)

ਆਓ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਮੱਸਿਆ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ। ਮੋਹਨ ਕੋਲ 3 ਪੈਂਟਾਂ ਅਤੇ 2 ਕਮੀਜਾਂ ਹਨ। ਤਿਆਰ ਹੋਣ ਲਈ ਉਹ ਪੈਂਟਾਂ ਅਤੇ ਕਮੀਜਾਂ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਜੋੜੇ ਪਹਿਨ ਸਕਦਾ ਹੈ ? ਕਿਉਂਕਿ ਉਸ ਕੋਲ ਤਿੰਨ ਪੈਂਟਾਂ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਉਸ ਕੋਲ ਪੈਂਟ ਚੁਨਣ ਦੇ ਤਿੰਨ ਤਰੀਕੇ ਹਨ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਉਸ ਕੋਲ ਕਮੀਜ ਚੁਨਣ ਦੇ ਵੀ ਦੋ ਤਰੀਕੇ ਹਨ। ਹਰੇਕ ਪੈਂਟ ਦੀ ਚੋਣ ਲਈ, ਕਮੀਜ਼ ਚੁਨਣ ਦੇ ਦੋ ਵਿਕਲਪ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਪੈਂਟਾਂ ਅਤੇ ਕਮੀਜਾਂ ਨਾਲ ਕੁੱਲ $3 \times 2 = 6$ ਜੋੜੇ ਬਣਨਗੇ।

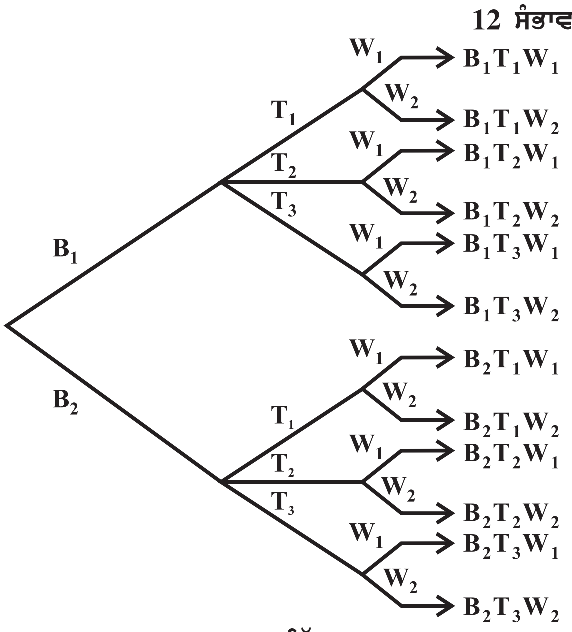
ਆਓ ਤਿੰਨੇ ਪੈਂਟਾਂ ਨੂੰ P_1, P_2, P_3 ਅਤੇ ਦੋਵੇਂ ਕਮੀਜਾਂ ਨੂੰ S_1, S_2 ਨਾਮ ਦੇਈਏ ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਛੇ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 7.1 ਦੁਆਰਾ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 7.1

ਆਓ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਹੋਰ ਸਮੱਸਿਆ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ। ਸ਼ਬਨਮ ਕੋਲ 2 ਸਕੂਲੀ ਬਸਤੇ, 3 ਖਾਣਾ ਲੈ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਡੱਬੇ ਅਤੇ 2 ਪਾਣੀ ਵਾਲੀਆਂ ਬੋਤਲਾਂ ਹਨ। ਉਹ ਇਹਨਾਂ ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਕਿੰਨੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਲੈ ਕੇ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ (ਹਰ ਇੱਕ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਚੁਣ ਕੇ)

ਸਕੂਲ ਬਸਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਚੁਨਣ ਦੇ 2 ਤਰੀਕੇ ਹਨ। ਬਸਤੇ ਦੀ ਚੋਣ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਖਾਣੇ ਵਾਲੇ ਡੱਬੇ ਦੀ ਚੋਣ ਦੇ 3 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰੀਕੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਬਸਤੇ ਅਤੇ ਖਾਣੇ ਵਾਲੇ ਡੱਬੇ ਦੇ $2 \times 3 = 6$ ਜੋੜੇ ਹੋਣਗੇ। ਇਸ ਹਰ ਇੱਕ ਜੋੜੇ ਲਈ ਪਾਣੀ ਦੀ ਬੋਤਲ ਚੁਨਣ ਦੇ 2 ਤਰੀਕੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਸ਼ਬਨਮ ਨੂੰ ਇਹਨਾਂ ਤਿੰਨਾਂ ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਸਕੂਲ ਲੈ ਕੇ ਜਾਣ ਦੇ $6 \times 2 = 12$ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰੀਕੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ 2 ਸਕੂਲੀ ਬਸਤਿਆਂ ਨੂੰ B_1, B_2; 3 ਖਾਣੇ ਵਾਲੇ ਡੱਬਿਆਂ ਨੂੰ T_1, T_2, T_3 ਅਤੇ 2 ਪਾਣੀ ਵਾਲੀਆਂ ਬੋਤਲਾਂ ਨੂੰ W_1, W_2 ਦਾ ਨਾਮ ਦੇ ਦੇਈਏ, ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 7.2 ਰਾਹੀਂ ਸਪਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 7.2

ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਉਪਰੋਕਤ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਿਧਾਂਤ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਸਿਧਾਂਤ ਨੂੰ ਗਣਨਾ ਦਾ ਅਧਾਰਭੂਤ (ਮੂਲਭੂਤ ਜਾਂ ਮੁੱਢਲਾ) ਸਿਧਾਂਤ ਜਾਂ ਸਧਾਰਨ ਤੌਰ ਤੇ ਗੁਣਨ ਸਿਧਾਂਤ (multiplication principle) ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਸਿਧਾਂਤ ਅਨੁਸਾਰ :

"ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਘਟਨਾ m ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਘਟ ਸਕਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸੇ ਸਮੇਂ (ਉਪਰੰਤ) ਇੱਕ ਹੋਰ ਘਟਨਾ n ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਘਟ ਸਕਦੀ ਹੈ, ਤਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਦੋਹਾਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਘਟਣ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ $m \times n$ ਹੋਵੇਗੀ।"

ਉਪਰਲੇ ਸਿਧਾਂਤ ਨੂੰ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਸੀਮਤ ਲੈ ਕੇ ਵਿਆਪਕ ਵੀ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ, 3 ਘਟਨਾਵਾਂ ਲਈ, ਸਿਧਾਂਤ ਹੇਠਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਹੋਵੇਗਾ :

"ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਘਟਨਾ m ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਘਟ ਸਕਦੀ ਹੋਵੇ, ਇਸ ਉਪਰੰਤ ਇੱਕ ਹੋਰ ਘਟਨਾ n ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਘਟਦੀ ਹੈ, ਇਸ ਉਪਰੰਤ ਇੱਕ ਤੀਸਰੀ ਘਟਨਾ p ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਘਟਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਤਿੰਨਾਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੇ ਇਸੇ ਹੀ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਘਟਣ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ $m \times n \times p$ ਹੋਵੇਗੀ।"

ਪਹਿਲੀ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ ਪੈਂਟ ਅਤੇ ਕਮੀਜ ਦੇ ਪਹਿਨਣ ਦੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਗਿਣਤੀ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਉਪਰੰਤ ਦੂਸਰੀ ਘਟਣ ਦੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੇ ਤੁਲ ਸੀ :

(i) ਇੱਕ ਪੈਂਟ ਚੁਨਣ ਦੀ ਘਟਨਾ
(ii) ਇੱਕ ਕਮੀਜ ਚੁਨਣ ਦੀ ਘਟਨਾ

ਦੂਸਰੀ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ, ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਲੋੜੀਂਦੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਉਪਰੰਤ ਇੱਕ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਦੀਆਂ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਸੀ :

(i) ਇੱਕ ਬਸਤੇ ਨੂੰ ਚੁਨਣ ਦੀ ਘਟਨਾ
(ii) ਇੱਕ ਖਾਣਾ ਲੈ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਡੱਬੇ ਨੂੰ ਚੁਨਣ ਦੀ ਘਟਨਾ
(iii) ਇੱਕ ਪਾਣੀ ਵਾਲੀ ਬੋਤਲ ਨੂੰ ਚੁਨਣ ਦੀ ਘਟਨਾ

ਇੱਥੇ ਦੋਹਾਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ, ਹਰ ਇੱਕ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ ਘਟਨਾ ਕਈ ਸੰਭਵ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਘਟ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਅਸੀਂ

ਇਹਨਾਂ ਸੰਭਵ ਕ੍ਰਮਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਸ ਚੋਣ ਕੀਤੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਦੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਸ਼ਬਦ ROSE ਦੇ ਅੱਖਰਾਂ ਤੋਂ ਬਨਣ ਵਾਲੇ 4 ਅੱਖਰਾਂ ਦੇ, ਅਰਥਪੂਰਨ ਜਾਂ ਅਰਥਹੀਨ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਕੋਈ ਵੀ ਅੱਖਰ ਦੁਬਾਰਾ ਨਹੀਂ ਲਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ?

ਹੱਲ : ਬਣਾਏ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ, 4 ਖਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ □□□□ ਨੂੰ ਚਾਰ ਅੱਖਰਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਤੋਂ ਬਾਦ ਇੱਕ ਭਰਨ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ, ਇੱਕ ਗੱਲ ਦਾ ਧਿਆਨ ਰੱਖਿਆ ਜਾਵੇ ਕਿ ਕੋਈ ਵੀ ਅੱਖਰ ਦੁਬਾਰਾ ਨਹੀਂ ਆ ਸਕਦਾ। ਪਹਿਲੇ ਸਥਾਨ ਨੂੰ 4 ਅੱਖਰਾਂ R,O,S ਅਤੇ E ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਇੱਕ ਅੱਖਰ ਲੈ ਕੇ 4 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਭਰਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਦ ਦੂਸਰੇ ਸਥਾਨ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਬਾਕੀ ਅੱਖਰਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਇੱਕ ਲੈ ਕੇ ਤਿੰਨ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਭਰਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਦ ਤੀਸਰੇ ਸਥਾਨ ਨੂੰ ਦੋ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਭਰਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਚੌਥੇ ਸਥਾਨ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਭਰਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਗੁਣਨ ਸਿਧਾਂਤ ਦੁਆਰਾ ਚਾਰੇ ਸਥਾਨਾਂ ਭਰਨ ਦੀ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 24 ਹੈ।

> **ਟਿੱਪਣੀ** ਜੇਕਰ ਅੱਖਰਾਂ ਨੂੰ ਵਾਰ-ਵਾਰ ਲੈਣ ਦੀ ਇਜਾਜਤ ਹੁੰਦੀ ਤਾਂ ਕਿੰਨੇ ਸ਼ਬਦ ਬਣਨੇ ਸਨ ? ਇਹ ਗੱਲ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਸਮਝੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ ਕਿ 4 ਖਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰ ਇੱਕ ਨੂੰ ਇੱਕ ਤੋਂ ਬਾਦ ਇੱਕ 4 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਭਰਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ $= 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਰੰਗਾਂ ਦੇ 4 ਝੰਡਿਆਂ ਨਾਲ, ਕਿੰਨੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਸੰਕੇਤ ਬਣਾਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸੰਕੇਤ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਦੇ ਥੱਲੇ, ਦੋ ਝੰਡਿਆਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੋਵੇ ?

ਹੱਲ : ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਸੰਕੇਤਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੋ ਖਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ ☐ ਨੂੰ ਚਾਰ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਝੰਡਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਉਪਰੰਤ ਦੂਸਰੀ ਦੇ ਭਰਨ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਉਪਰਲੇ ਖ਼ਾਲੀ ਸਥਾਨ ਨੂੰ 4 ਝੰਡਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਦੁਆਰਾ 4 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਭਰਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਹੇਠਲੇ ਖ਼ਾਲੀ ਸਥਾਨ ਨੂੰ ਬਾਕੀ ਬਚੇ 3 ਝੰਡਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਨਾਲ 3 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਭਰਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਗੁਣਨ ਸਿਧਾਂਤ ਦੁਆਰਾ ਲੋੜੀਂਦੇ ਸੰਕੇਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $4 \times 3 = 12$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਅੰਕਾਂ 1, 2, 3, 4, 5 ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ, ਕਿੰਨੀਆਂ ਦੋ ਅੰਕਾਂ ਵਾਲੀਆਂ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਬਣਾਈਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਵਾਰ-ਵਾਰ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੋਵੇ ?

ਹੱਲ : ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਤਰੀਕੇ, 2 ਖ਼ਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ □□ ਨੂੰ ਇੱਕ ਉਪਰੰਤ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਉਚਿਤ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਭਰਨ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਇਕਾਈ ਸਥਾਨ ਨੂੰ ਭਰਨ ਲਈ ਕੇਵਲ ਦੋ ਵਿਕਲਪ ਹਨ, ਅੰਕ 2 ਜਾਂ 4, ਇਸ ਲਈ ਇਕਾਈ ਸਥਾਨ ਦੋ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਭਰਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਉਪਰੰਤ ਦਹਾਈ ਦਾ ਸਥਾਨ ਪੰਜ ਅੰਕਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਵੀ ਇੱਕ ਅੰਕ ਨਾਲ ਭਰਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਵਾਰ-ਵਾਰ ਲਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸਦੇ ਪੰਜ ਵਿਕਲਪ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਗੁਣਨ ਸਿਧਾਂਤ ਤੋਂ ਦੋ ਅੰਕਾਂ ਵਾਲੀਆਂ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਗਿਣਤੀ $= 2 \times 5 = 10$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਪੰਜ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਝੰਡਿਆਂ ਤੋਂ ਬਣਾਏ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਸੰਕੇਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਦੋ ਝੰਡਿਆਂ ਨਾਲ (ਇੱਕ ਦੇ ਥੱਲੇ ਦੂਸਰਾ ਰੱਖ ਕੇ) ਤਿਆਰ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : ਇੱਕ ਸੰਕੇਤ 2 ਜਾਂ 3 ਜਾਂ 4 ਜਾਂ 5 ਝੰਡਿਆਂ ਨਾਲ ਬਣਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ 2, 3, 4 ਜਾਂ 5 ਝੰਡਿਆਂ ਨਾਲ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਸੰਕੇਤਾਂ ਦੀ ਸੰਭਵ ਗਿਣਤੀ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ ਅਤੇ ਫਿਰ ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਕਰ ਦੇਵਾਂਗੇ।

ਦੋ ਝੰਡਿਆਂ ਨਾਲ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਸੰਕੇਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 5 ਉਪਲਬਧ ਝੰਡਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਦੋ ਖਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ ☐ ਨੂੰ ਇੱਕ ਉਪਰੰਤ ਦੂਸਰਾ ਭਰਨ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਗੁਣਨ ਨਿਯਮ ਨਾਲ ਇਹ ਸੰਖਿਆ $5 \times 4 = 20$ ਹੈ।

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਤਿੰਨ ਝੰਡਿਆਂ ਨਾਲ ਬਨਣ ਵਾਲੇ ਸੰਕੇਤਾਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ, 5 ਝੰਡਿਆਂ ਵਿੱਚ 3 ਖਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ ☐☐☐ ਨੂੰ ਇੱਕ ਉਪਰੰਤ ਦੂਸਰੇ ਨਾਲ ਭਰਨ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇਗੀ, ਇਹ ਗਿਣਤੀ $5 \times 4 \times 3 = 60$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ 4 ਝੰਡਿਆਂ ਵਾਲੇ ਸੰਕੇਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $= 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ ਹੈ।

ਅਤੇ 5 ਝੰਡਿਆਂ ਵਾਲੇ ਸੰਕੇਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਕੁੱਲ ਲੋੜੀਂਦੇ ਸੰਕੇਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $= 20 + 60 + 120 + 120 = 320$ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 7.1

1. ਅੰਕਾਂ 1, 2, 3, 4 ਅਤੇ 5 ਤੋਂ ਤਿੰਨ ਅੰਕਾਂ ਵਾਲੀਆਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਬਣਾਈਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਜੇਕਰ (i) ਅੰਕ ਵਾਰ-ਵਾਰ ਲਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹੋਣ (ii) ਅੰਕ ਵਾਰ-ਵਾਰ ਨਾ ਲਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹੋਣ।
2. ਅੰਕਾਂ 1, 2, 3, 4, 5, 6 ਤੋਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਤਿੰਨ ਅੰਕਾਂ ਵਾਲੀਆਂ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਬਣਾਈਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਅੰਕ ਦੁਬਾਰਾ (ਵਾਰ-ਵਾਰ) ਲਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹੋਣ।
3. ਅੰਗਰੇਜੀ ਵਰਣਮਾਲਾ ਦੇ ਪਹਿਲੇ 10 ਅੱਖਰਾਂ ਨਾਲ 4 ਅੱਖਰਾਂ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਕੋਡ ਬਣਾਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਵੀ ਅੱਖਰ ਦੁਬਾਰਾ ਨਾ ਲਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੋਵੇ ?
4. 0 ਤੋਂ ਲੈ ਕੇ 9 ਤੱਕ ਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਕਿੰਨੇ 5 ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਟੈਲੀਫੋਨ ਨੰਬਰ ਬਣਾਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਹਰ ਇੱਕ ਨੰਬਰ 67 ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਕੋਈ ਅੰਕ ਇੱਕ ਵਾਰ ਤੋਂ ਵੱਧ ਵਾਰ ਨਾ ਆਉਂਦਾ ਹੋਵੇ ?
5. ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਤਿੰਨ ਵਾਰ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਨੂੰ ਦਰਜ ਕਰ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਸੰਭਵ ਗਿਣਤੀ ਕੀ ਹੈ ?
6. ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਰੰਗਾਂ ਦੇ 5 ਝੰਡੇ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹਨ, ਇਹਨਾਂ ਨਾਲ ਕਿੰਨੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਸੰਕੇਤ ਬਣਾਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਹਰ ਸੰਕੇਤ ਵਿੱਚ 2 ਝੰਡਿਆਂ, ਇੱਕ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਦੂਸਰਾ, ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੋਵੇ।

7.3 ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ (Permutations)

ਪਿਛਲੇ ਭਾਗ ਦੇ ਉਦਾਹਰਣ 1 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਅੱਖਰਾਂ ਦੀਆਂ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰਤੀਬਾਂ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ROSE, REOS, ..., ਆਦਿ ਦੀ ਸੰਭਵ ਗਿਣਤੀ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰ ਰਹੇ ਸੀ। ਇਸ ਸੂਚੀ ਵਿੱਚ ਹਰ ਇੱਕ ਤਰਤੀਬ ਦੂਸਰੇ ਤੋਂ ਅਲੱਗ ਹੈ। ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਅੱਖਰਾਂ ਨੂੰ ਲਿਖਣ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੈ। ਹਰ ਇੱਕ ਤਰਤੀਬ ਨੂੰ 4 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਅੱਖਰਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਸਾਰਿਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕੋ ਸਮੇਂ ਇਕੱਠਾ ਲੈ ਕੇ ਬਣਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਇਸ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ (permutation) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਹੁਣ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਸ਼ਬਦ NUMBER, ਦੇ ਅੱਖਰਾਂ ਵਿੱਚੋਂ 3 ਅੱਖਰੀ ਅਰਥਪੂਰਨ ਜਾਂ ਅਰਥਹੀਨ ਸ਼ਬਦ ਬਣਾਉਣੇ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ ਅੱਖਰਾਂ ਨੂੰ ਵਾਰ-ਵਾਰ ਵਰਤਣ ਦੀ ਇਜ਼ਾਜਤ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ NUM, NMU, MUN, NUB, ..., ਆਦਿ ਤਰਤੀਬਾਂ ਨੂੰ ਗਿਣਨਾ ਪਵੇਗਾ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ 6 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਅੱਖਰਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਸਮੇਂ 3 ਅੱਖਰਾਂ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ (permutation) ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰ ਰਹੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਲੋੜੀਂਦੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ $= 6 \times 5 \times 4 = 120$ (ਗੁਣਨ ਸਿਧਾਂਤ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਾਲ) ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਅੱਖਰਾਂ ਨੂੰ ਵਾਰ-ਵਾਰ ਲਏ ਜਾਣ ਦੀ ਇਜਾਜਤ ਹੁੰਦੀ ਤਾਂ ਲੋੜੀਂਦੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $6 \times 6 \times 6 = 216$ ਹੋਵੇਗੀ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 1 ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਤਰਤੀਬ ਹੈ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕੋ ਸਮੇਂ ਕੁਝ ਜਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਬਣਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਉਪ ਭਾਗ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਉਸ ਸੂਤਰ ਨੂੰ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਸਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਉੱਤਰ ਦੇਣ ਲਈ ਪੈਂਦੀ ਹੈ।

7.3.1 *ਕ੍ਰਮਸੰਚਣ ਜਦੋਂ ਸਾਰੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਹੋਣ (Permutations when all the objects are distinct)*

ਪ੍ਰਮੇਯ 1 : 7.3.1 ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਸਤੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਸਮੇਂ ਤੇ r ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਬਣਾਏ ਗਏ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਨੂੰ ਚਿੰਨ ^nP_r ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ $0 < r \le n$, ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਵਾਰ-ਵਾਰ ਦੁਹਰਾਏ ਜਾਣ ਦੀ ਇਜਾਜਤ ਨਹੀਂ ਹੈ; $^nP_r = n\,(n-1)\,(n-2)\,.\,.\,.\,(n-r+1)$

ਸਬੂਤ : ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਗਿਣਤੀ, r ਖ਼ਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ ਨੂੰ ☐ ☐ ☐ . . . ☐ ($\leftarrow r$ ਖਾਲੀ ਸਥਾਨ) n ਵਸਤੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਭਰਨ ਦੀ ਹੈ।

ਪਹਿਲੇ ਸਥਾਨ ਨੂੰ n ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਭਰਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਦੂਸਰਾ ਸਥਾਨ $(n-1)$ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ, ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਤੀਸਰਾ ਸਥਾਨ $(n-2)$ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਭਰਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ..., rਵਾਂ ਸਥਾਨ $[n-(r-1)]$ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਭਰਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ r ਖਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਇੱਕ (in succession) ਭਰਨ ਦੇ ਤਰੀਕੇ $n(n-1)(n-2)\ldots[n-(r-1)]$ ਜਾਂ $n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$ ਹਨ।

${}^nP_r$ ਦੇ ਲਈ ਇਹ ਵਿਅੰਜਕ ਬਹੁਤ ਮੁਸ਼ਕਿਲ (cumbersome) ਹੈ ਅਤੇ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸੰਕੇਤ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ ਜਿਸ ਨਾਲ ਇਸ ਵਿਅੰਜਕ ਦੇ ਵਿਸਥਾਰ ਨੂੰ ਘਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕੇ। ਚਿੰਨ੍ਹ $n!$ (ਜਿਸਨੂੰ n ਫੈਕਟੋਰੀਅਲ (factorial) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ) ਇਸ ਵਿੱਚ ਸਾਡੀ ਸਹਾਇਤਾ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਵਿਵਰਣ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸਿੱਖਾਂਗੇ ਕਿ ਅਸਲ ਵਿੱਚ $n!$ ਦਾ ਅਰਥ ਕੀ ਹੈ।

7.3.2 *ਫੈਕਟੋਰੀਅਲ ਚਿੰਨ (Factorial notation)* ਚਿੰਨ (Notation) $n!$ ਪਹਿਲੀਆਂ n ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਭਾਵ $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n$ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਨੂੰ $n!$ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ ਇਸ ਚਿੰਨ੍ਹ ਨੂੰ n ਫੈਕਟੋਰੀਅਲ ਪੜ੍ਹਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ $1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots \times (n-1) \times n = n!$

$1 = 1!$

$1 \times 2 = 2!$

$1 \times 2 \times 3 = 3!$

$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 4!$ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੱਗੇ ਵੀ

ਅਸੀਂ $0! = 1$ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

ਅਸੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ $5! = 5 \times 4! = 5 \times 4 \times 3! = 5 \times 4 \times 3 \times 2!$
$= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1!$

ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ n ਲਈ

$n! = n(n-1)!$

$= n(n-1)(n-2)!$ [ਜੇਕਰ $(n \geq 2)$ ਹੋਵੇ।]

$= n(n-1)(n-2)(n-3)!$ [ਜੇਕਰ $(n \geq 3)$ ਹੋਵੇ।]

ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਅੱਗੇ ਵੀ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ : (i) $5!$ (ii) $7!$ (iii) $7! - 5!$

ਹੱਲ : (i) $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$

(ii) $7! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5040$

ਅਤੇ (iii) $7! - 5! = 5040 - 120 = 4920$

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਪਤਾ ਕਰੋ (i) $\frac{7!}{5!}$ (ii) $\frac{12!}{(10!)(2!)}$

ਹੱਲ : (i) $\frac{7!}{5!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5!} = 7 \times 6 = 42$

ਅਤੇ (ii) $\frac{12!}{(10!)(2!)} = \frac{12 \times 11 \times (10!)}{(10!) \times (2)} = 6 \times 11 = 66$

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ $\frac{n!}{r!(n-r)!}$, ਜਦੋਂ $n = 5, r = 2$

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ $\frac{5!}{2!(5-2)!}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ (ਕਿਉਂਕਿ $n = 5, r = 2$)

ਹੁਣ $\frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{4 \times 5}{2} = 10$

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਜੇਕਰ $\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!}=\frac{x}{10!}$, x ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਦਿੱਤਾ ਹੈ $\frac{1}{8!}+\frac{1}{9\times 8!}=\frac{x}{10\times 9\times 8!}$

ਇਸ ਲਈ $1+\frac{1}{9}=\frac{x}{10\times 9}$ ਜਾਂ $\frac{10}{9}=\frac{x}{10\times 9}$

ਇਸ ਲਈ $x = 100$

ਅਭਿਆਸ 7.2

1. ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) 8 ! (ii) 4 ! – 3 !

2. ਜੇਕਰ 3 ! + 4 ! = 7 ! ?

3. $\frac{8!}{6!\times 2!}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4. ਜੇਕਰ $\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}=\frac{x}{8!}$, ਤਾਂ x ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

5. $\frac{n!}{(n-r)!}$, ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ :

(i) $n = 6, r = 2$ (ii) $n = 9, r = 5$

7.3.3 *^{n}P$_r$ ਦੇ ਲਈ ਸੂਤਰ ਦੀ ਵਿਉਤਪਨਤਾ (Derivation of the formula for ^{n}P$_r$)*

$$^{n}\mathrm{P}_{r}=\frac{n!}{(n-r)!},\ 0\le r\le n$$

ਆਓ ਅਸੀਂ ਉਸ ਅਵਸਥਾ ਤੇ ਵਾਪਿਸ ਜਾਈਏ ਜਿੱਥੇ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਾ ਸੂਤਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਸੀ :

$$^{n}\mathrm{P}_{r}=n\ (n-1)\ (n-2)\ .\ .\ .\ (n-r+1)$$

ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਨੂੰ $(n-r)\ (n-r-1)\ .\ .\ .\ 3\times 2\times 1$, ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$^{n}\mathrm{P}_{r}=\frac{n(n-1)\ (n-2)...(n-r+1)(n-r)(n-r-1)...3\times 2\times 1}{(n-r)(n-r-1)...3\times 2\times 1}=\frac{n!}{(n-r)!},$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $^{n}\mathrm{P}_{r}=\frac{n!}{(n-r)!}$, ਜਿੱਥੇ $0 < r \le n$

ਇਹ ਵਿਅੰਜਕ, ਪਿਛਲੀ $^{n}\mathrm{P}_{r}$ ਨਾਲੋਂ ਸੁਵਿਧਾਜਨਕ ਹੈ।

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਜਦੋਂ $r = n$, $^{n}\mathrm{P}_{n}=\frac{n!}{0!}=n!$

ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕੇਵਲ ਉਹਨਾਂ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਗਣਨਾ ਹੈ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕੋ ਸਮੇਂ ਦੌਰਾਨ ਕੁਝ ਜਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਫਿਰ ਤੋਂ ਤਰਤੀਬ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੋਵੇ। ਕਿਸੇ ਵੀ ਵਸਤੂ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ ਤਰਤੀਬਵਾਰ, ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਉਸ ਗਿਣਤੀ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਸਾਰੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਤਰਤੀਬਵਾਰ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਰਨ ਦਾ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਹੀ ਤਰੀਕਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$^{n}\mathrm{P}_{0}=1=\frac{n!}{n!}=\frac{n!}{(n-0)!} \quad ...\ (1)$$

ਇਸ ਲਈ, ਸੂਤਰ (1) $r = 0$ ਲਈ ਵੀ ਲਾਗੂ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $${}^{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}, 0 \le r \le n$$

ਪ੍ਰਮੇਯ 2 : n ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਸਤੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਸਮੇਂ ਤੇ r ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਗਿਣਤੀ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਵਾਰ-ਵਾਰ ਲਏ ਜਾਣ ਦੀ ਇਜਾਜ਼ਤ ਹੋਵੇ, n^r ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਇਸ ਦਾ ਸਬੂਤ ਪਿਛਲੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਸਬੂਤ ਵਰਗਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਪਾਠਕਾਂ ਲਈ ਛੱਡ ਰਹੇ ਹਾਂ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ${}^{n}P_{r}$ ਸੂਤਰ ਦੀ ਉਪਯੋਗਤਾ ਨੂੰ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰਨ ਲਈ ਪਿਛਲੇ ਭਾਗ ਦੇ ਕੁਝ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਸੂਤਰ ਰਾਹੀਂ ਹਲ ਕਰ ਰਹੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 ਵਿੱਚ, ਲੋੜੀਂਦੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $= {}^{n}P_{4} = 4! = 24$ ਹੈ, ਇੱਥੇ ਅੱਖਰਾਂ ਨੂੰ ਵਾਰ-ਵਾਰ ਦੁਹਰਾਉਣ ਦੀ ਇਜਾਜ਼ਤ ਨਹੀਂ ਸੀ। ਜੇਕਰ ਅੱਖਰਾਂ ਨੂੰ ਵਾਰ-ਵਾਰ ਦੁਹਰਾਉਣ ਦੀ ਇਜਾਜਤ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਲੋੜੀਂਦੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $4^4 = 256$ ਹੋਵੇਗੀ।

ਸ਼ਬਦ NUMBER ਤੋਂ ਤਿੰਨ ਅੱਖਰਾਂ ਨਾਲ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $= {}^{6}P_{3} = \frac{6!}{3!} = 4 \times 5 \times 6 = 120$ ਹੋਵੇਗੀ, ਇੱਥੇ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅੱਖਰਾਂ ਨੂੰ ਵਾਰ-ਵਾਰ ਲੈਣ ਦੀ ਇਜਾਜਤ ਨਹੀਂ। ਜੇਕਰ ਅੱਖਰ ਵਾਰ-ਵਾਰ ਲੈਣ ਦੀ ਇਜਾਜਤ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਲੋੜੀਂਦੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $6^3 = 216$ ਹੋਵੇਗੀ।

12 ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੇ ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਚੇਅਰਮੈਨ ਅਤੇ ਇੱਕ ਵਾਇਸ ਚੇਅਰਮੈਨ ਨੂੰ ਚੁਨਣ ਦੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ, ਇਹ ਮੰਨ ਕੇ ਕਿ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਨੂੰ ਇੱਕ ਹੀ ਅਹੁਦਾ ਮਿਲੇਗਾ, ਸਪੱਸ਼ਟ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ${}^{12}P_{2} = \frac{12!}{10!} = 11 \times 12 = 132$ ਹੋਵੇਗੀ।

7.3.4 *ਕ੍ਰਮਸੰਚਣ ਜਦੋਂ ਸਾਰੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਨਹੀਂ ਹਨ (Permutations when all the objects are not distinct objects)* ਮੰਨ ਲਓ ਅਸੀਂ ਸ਼ਬਦ ROOT ਦੇ ਅੱਖਰਾਂ ਦੇ ਫਿਰ ਤੋਂ ਤਰਤੀਬ ਕਰਨ ਦੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਸਾਰੇ ਅੱਖਰ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇੱਥੇ ਦੋ O ਹਨ ਜੋ ਕਿ ਇੱਕ ਹੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਅੱਖਰ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਅਸਥਾਈ ਤੌਰ 'ਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦੋਹਾਂ O ਨੂੰ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ O_1 ਅਤੇ O_2। ਹੁਣ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ 4 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਅੱਖਰਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਹੀ ਸਮੇਂ ਤੇ ਸਾਰੇ ਅੱਖਰ ਲੈਣ ਨਾਲ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 4! ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ RO_1O_2T ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਇਸ ਦੇ ਸੰਗਤ ਇੱਥੇ 2 ! ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ RO_1O_2T ਅਤੇ RO_2O_1T ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਹਨ ਜੋ ਇੱਕ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਹੁੰਦੇ ਜੇਕਰ O_1 ਅਤੇ O_2 ਨੂੰ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਨਾ ਮੰਨਿਆ ਗਿਆ ਹੁੰਦਾ ਭਾਵ ਜੇਕਰ O_1 ਅਤੇ O_2 ਦੋਹਾਂ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਵਿੱਚ O ਹੁੰਦੇ। ਇਸ ਲਈ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਗਿਣਤੀ $= \frac{4!}{2!} = 3 \times 4 = 12$। ਇਸ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :

ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਜਦੋਂ O_1, O_2 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਹਨ। ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਜਦੋਂ O_1, O_2, O ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹਨ।

$\left.\begin{matrix} RO_1O_2T \\ RO_2O_1T \end{matrix}\right] \longrightarrow$ R O O T

$\left.\begin{matrix} TO_1O_2R \\ TO_2O_1R \end{matrix}\right] \longrightarrow$ T O O R

$\left.\begin{matrix} RO_1TO_2 \\ RO_2TO_1 \end{matrix}\right] \longrightarrow$ R O T O

$\left.\begin{matrix} TO_1RO_2 \\ TO_2RO_1 \end{matrix}\right] \longrightarrow$ T O R O

$$\left.\begin{array}{l} R\,T\,O_1\,O_2 \\ R\,T\,O_2\,O_1 \end{array}\right] \longrightarrow R\,T\,O\,O$$

$$\left.\begin{array}{l} T\,R\,O_1\,O_2 \\ T\,R\,O_2\,O_1 \end{array}\right] \longrightarrow T\,R\,O\,O$$

$$\left.\begin{array}{l} O_1\,O_2\,R\,T \\ O_2\,O_1\,T\,R \end{array}\right] \longrightarrow O\,O\,R\,T$$

$$\left.\begin{array}{l} O_1\,R\,O_2\,T \\ O_2\,R\,O_1\,T \end{array}\right] \longrightarrow O\,R\,O\,T$$

$$\left.\begin{array}{l} O_1\,T\,O_2\,R \\ O_2\,T\,O_1\,R \end{array}\right] \longrightarrow O\,T\,O\,R$$

$$\left.\begin{array}{l} O_1\,R\,T\,O_2 \\ O_2\,R\,T\,O_1 \end{array}\right] \longrightarrow O\,R\,T\,O$$

$$\left.\begin{array}{l} O_1\,T\,R\,O_2 \\ O_2\,T\,R\,O_1 \end{array}\right] \longrightarrow O\,T\,R\,O$$

$$\left.\begin{array}{l} O_1\,O_2\,T\,R \\ O_2\,O_1\,T\,R \end{array}\right] \longrightarrow O\,O\,T\,R$$

ਆਓ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਸ਼ਬਦ INSTITUTE ਦੇ ਅੱਖਰਾਂ ਦੇ ਫਿਰ ਤੋਂ ਤਰਤੀਬ ਦੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੀਏ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ 9 ਅੱਖਰ ਹਨ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ I ਦੋ ਵਾਰ ਅਤੇ T ਤਿੰਨ ਵਾਰ ਆਉਂਦਾ ਹੈ।

ਅਸਥਾਈ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਅੱਖਰਾਂ ਨੂੰ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ I_1, I_2, T_1, T_2, T_3। 9 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਅੱਖਰਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਹੀ ਸਮੇਂ ਸਾਰਿਆਂ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਬਣੇ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 9! ਹੈ। ਇਸ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਮੰਨ ਲਓ $I_1\,NT_1\,SI_2\,T_2\,U\,E\,T_3$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਇੱਥੇ ਜੇਕਰ I_1 ਅਤੇ I_2 ਇੱਕੋ ਜਿਹੇ ਨਾ ਹੋਣ ਅਤੇ T_1, T_2, T_3 ਵੀ ਇੱਕੋ ਜਿਹੇ ਨਾ ਹੋਣ ਤੇ I_1, I_2 ਨੂੰ 2! ਢੰਗਾਂ (ਤਰੀਕਿਆਂ) ਨਾਲ ਤਰਤੀਬ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ T_1, T_2, T_3 ਨੂੰ 3! ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਤਰਤੀਬ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ I_1, I_2 ਇੱਕੋ ਜਿਹੇ ਹੋਣ ਅਤੇ T_1, T_2, T_3 ਵੀ ਇੱਕੋ ਜਿਹੇ ਹੋਣ ਤਾਂ $2! \times 3!$ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਇੱਕੋ ਜਿਹੇ ਹੋਣਗੇ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪੁੱਛੇ ਗਏ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ $\frac{9!}{2!\,3!}$ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਪ੍ਰਮੇਯ (ਬਿਨਾਂ ਸਬੂਤ ਦੇ) ਪਰਿਭਾਸ਼ਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

ਪ੍ਰਮੇਯ 3 : n ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਗਿਣਤੀ, ਜਿੱਥੇ p ਵਸਤੂਆਂ ਇੱਕ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਹੋਣ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਹੋਣ $= \frac{n!}{p!}$

ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਸ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਇੱਕ ਹੋਰ ਵਿਆਪਕ ਪ੍ਰਮੇਯ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 4 : n ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਗਿਣਤੀ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ p_1 ਵਸਤੂਆਂ ਇੱਕ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ, p_2 ਵਸਤੂਆਂ ਦੂਸਰੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ..., p_k ਵਸਤੂਆਂ k^{th} ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਜੇ ਕੋਈ ਰਹਿ ਗਈ ਹੋਵੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਹੋਣ, $\frac{n!}{p_1!\,p_2!\ldots\,p_k!}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : ALLAHABAD ਸ਼ਬਦ ਦੇ ਅੱਖਰਾਂ ਤੋਂ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇਸ ਸ਼ਬਦ ਵਿੱਚ 9 ਅੱਖਰ ਹਨ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ A, 4 ਵਾਰ ਆਇਆ ਹੈ, L ਦੋ ਵਾਰ ਆਇਆ ਹੈ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਸਾਰੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਗਿਣਤੀ $= \dfrac{9!}{4!2!} = \dfrac{5\times6\times7\times8\times9}{2} = 7560$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 10 : 1 ਤੋਂ 9 ਤੱਕ ਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ, 4 ਅੰਕਾਂ ਦੀਆਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਬਣਾਈਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਦੁਹਰਾਉਣ ਦੀ ਇਜਾਜਤ ਨਾ ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੈ, ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ 1234 ਅਤੇ 1324 ਦੋ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ 4 ਅੰਕਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 9 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਅੰਕਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਸਮੇਂ ਤੇ 4 ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ 4 ਅੰਕਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਗਿਣਤੀ $= {}^9P_4 = \dfrac{9!}{(9-4)!} = \dfrac{9!}{5!} = 9\times8\times7\times6 = 3024$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 11 : 100 ਤੋਂ 1000 ਤੱਕ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ, ਅੰਕਾਂ 0, 1, 2, 3, 4, 5, ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਕਿੰਨੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਬਣਾਈਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਵਾਰ-ਵਾਰ ਲੈਣ ਦੀ ਇਜਾਜਤ ਨਾ ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : 100 ਅਤੇ 1000 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਹਰ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਤਿੰਨਾ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਹੈ। ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ 6 ਅੰਕਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਸਮੇਂ ਤੇ 3 ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਸੰਖਿਆ ${}^6P_3$ ਹੈ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਹਨਾਂ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਵਿੱਚ ਉਹ ਵੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ 0 (ਸਿਫ਼ਰ) ਸੈਂਕੜੇ ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ 092, 042, . . ., ਆਦਿ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਜੋ ਅਸਲ ਵਿੱਚ 2 ਅੰਕਾਂ ਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ 2 ਅੰਕੀ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਨੂੰ ${}^6P_3$ ਵਿੱਚੋਂ ਘਟਾਉਣ ਪਵੇਗਾ। ਹੁਣ ਇਹਨਾਂ 2 ਅੰਕੀ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ 0 ਨੂੰ ਸੈਂਕੜੇ ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ ਸਥਿਰ ਕਰ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਬਾਕੀ 5 ਅੰਕਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਸਮੇਂ ਤੇ 2 ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੀਆਂ ਤਰਤੀਬਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਗਿਣਤੀ ${}^5P_2$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੀ ਗਿਣਤੀ $= {}^6P_3 - {}^5P_2 = \dfrac{6!}{3!} - \dfrac{5!}{3!}$

$$= 4\times5\times6 - 4\times5 = 100$$

ਉਦਾਹਰਣ 12 : n ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ :

(i) ${}^nP_5 = 42\ {}^nP_3,\ n>4$ (ii) $\dfrac{{}^nP_4}{{}^{n-1}P_4} = \dfrac{5}{3},\ n>4$

ਹੱਲ : (i) ਦਿੱਤਾ ਹੈ;

$${}^nP_5 = 42\ {}^nP_3$$

ਜਾਂ $n\ (n-1)\ (n-2)\ (n-3)\ (n-4) = 42\ n(n-1)\ (n-2)$

ਕਿਉਂਕਿ $n > 4$ ਹੈ ਇਸ ਲਈ $n(n-1)\ (n-2) \neq 0$

ਦੋਹਾਂ ਪਾਸੇ $n(n-1)\ (n-2)$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$(n-3)\ (n-4) = 42$$

ਜਾਂ $n^2 - 7n - 30 = 0$

ਜਾਂ $n^2 - 10n + 3n - 30 = 0$

ਜਾਂ $(n-10)(n+3)=0$

ਜਾਂ $n-10=0$ ਜਾਂ $n+3=0$

ਜਾਂ $n=10$ ਜਾਂ $n=-3$

ਕਿਉਂਕਿ n ਰਿਣਾਤਮਕ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ, ਇਸ ਲਈ $n = 10$.

(ii) ਦਿੱਤਾ ਹੈ $\frac{{}^{n}P_4}{{}^{n-1}P_4}=\frac{5}{3}$

ਇਸ ਲਈ $3n(n-1)(n-2)(n-3)=5(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$

ਜਾਂ $3n=5(n-4)$ [ਕਿਉਂਕਿ $(n-1)(n-2)(n-3)\neq 0,\ n>4$]

ਜਾਂ $n=10$

ਉਦਾਹਰਣ 13 : r ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ $5\ {}^{4}P_r = 6\ {}^{5}P_{r-1}$

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $5\ {}^{4}P_r = 6\ {}^{5}P_{r-1}$

ਜਾਂ $$5\times\frac{4!}{(4-r)!}=6\times\frac{5!}{(5-r+1)!}$$

ਜਾਂ $$\frac{5!}{(4-r)!}=\frac{6\times 5!}{(5-r+1)(5-r)(5-r-1)!}$$

ਜਾਂ $(6-r)(5-r)=6$

ਜਾਂ $r^2-11r+24=0$

ਜਾਂ $r^2-8r-3r+24=0$

ਜਾਂ $(r-8)(r-3)=0$

ਜਾਂ $r=8$ ਜਾਂ $r=3$

ਇਸ ਲਈ $r=8, 3$

ਉਦਾਹਰਣ 14 : DAUGHTER ਸ਼ਬਦ ਦੇ ਅੱਖਰਾਂ ਤੋਂ 8 ਅੱਖਰਾਂ ਵਾਲੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰਤੀਬਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ

(i) ਸਾਰੇ ਸਵਰ (Vowels) ਇਕੱਠੇ ਹੋਣ (ii) ਸਾਰੇ ਸਵਰ (vowels) ਇਕੱਠੇ ਨਾ ਹੋਣ

ਹੱਲ : (i) ਸ਼ਬਦ DAUGHTER ਵਿੱਚ 8 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਅੱਖਰ ਹਨ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ A, U ਅਤੇ E ਤਿੰਨ ਸਵਰ ਹਨ, ਕਿਉਂਕਿ ਸਾਰੇ ਸਵਰਾਂ ਨੇ ਇਕੱਠੇ ਰਹਿਣਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਕੁਝ ਸਮੇਂ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਸਨੂੰ ਇਕੱਠੇ ਇੱਕ ਵਸਤੂ (AUE) ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਇਕੱਲੀ ਵਸਤੂ ਬਾਕੀ 5 ਅੱਖਰਾਂ ਨਾਲ ਮਿਲ ਕੇ 6 ਵਸਤੂਆਂ (ਅੱਖਰ) ਹੋ ਜਾਣਗੇ। ਫਿਰ ਅਸੀਂ 6 ਵਸਤੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਹੀ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਸਾਰਿਆਂ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ (Permutation) ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਗਿਣਤੀ ${}^{6}P_6 = 6!$ ਹੈ। ਇਸ ਹਰ ਇੱਕ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ (Permutation) ਦੇ ਸੰਗਤ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਤਿੰਨ ਸਵਰ A, U, E ਵਿੱਚੋਂ ਸਾਰਿਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸਮੇਂ ਲੈ ਕੇ 3! ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ (Permutation) ਬਣਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਗੁਣਨ ਸਿਧਾਂਤ ਅਨੁਸਾਰ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ (Permutation) ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਗਿਣਤੀ $= 6!\times 3! = 4320$ ਹੈ।

(ii) ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ (Permutation) ਦੀ ਉਹ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਸਾਰੇ ਸਵਰ ਇਕੱਠੇ ਨਹੀਂ ਹਨ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ 8 ਅੱਖਰਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਹੀ ਸਮੇਂ ਤੇ ਸਾਰੇ ਅੱਖਰਾਂ ਨੂੰ ਇਕੱਠਾ ਲੈ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਤਰਤੀਬਾਂ (arrangements) ਦੀ ਸੰਭਵ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਪਵੇਗੀ, ਜੋ ਕਿ 8! ਹੈ। ਫਿਰ ਇਸ ਗਿਣਤੀ ਵਿੱਚੋਂ ਅਸੀਂ ਸਾਰੇ ਸਵਰਾਂ ਨੂੰ ਇਕੱਠਾ ਰਹਿਣ ਨਾਲ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ (Permutation) ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਨੂੰ ਘਟਾਵਾਂਗੇ।

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੀ ਗਿਣਤੀ $8\,!-6\,!\times 3\,! = 6\,!\,(7\times 8-6)$

$= 2\times 6\,!\,(28-3)$

$= 50\times 6\,! = 50\times 720 = 36000$

ਉਦਾਹਰਣ 15 : 4 ਲਾਲ, 3 ਪੀਲੀਆਂ ਅਤੇ 2 ਹਰੀਆਂ ਡਿਸਕਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਪੰਗਤੀ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਤਰਤੀਬ (arrange) ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਹੀ ਰੰਗ ਦੀਆਂ ਡਿਸਕਾਂ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਅੰਤਰ (indistinguishable) ਨਾ ਹੋਵੇ ?

ਹੱਲ : ਡਿਸਕਾਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ 4 + 3 + 2 = 9 ਹੈ। ਇਹਨਾਂ 9 ਡਿਸਕਾਂ ਵਿੱਚੋਂ 4 ਇੱਕ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ (ਲਾਲ), 3 ਦੂਸਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ (ਪੀਲੀਆਂ) ਅਤੇ 2 ਤੀਸਰੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ (ਹਰੀਆਂ) ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ ਡਿਸਕਾਂ ਨੂੰ ਤਰਤੀਬ (arrange) ਕਰਨ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $\frac{9!}{4!\,3!\,2!} = 1260$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 16 : INDEPENDENCE ਸ਼ਬਦ ਦੇ ਅੱਖਰਾਂ ਤੋਂ ਬਨਣ ਵਾਲੇ ਤਰਤੀਬਾਂ (arrangements) ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਇਹਨਾਂ ਤਰਤੀਬਾਂ ਵਿੱਚ :

(i) ਕਿੰਨੇ ਸ਼ਬਦ P ਨਾਲ ਸ਼ੁਰੂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ?

(ii) ਕਿੰਨਿਆਂ ਵਿੱਚ ਸਾਰੇ ਸਵਰ ਹਮੇਸ਼ਾ ਇਕੱਠੇ ਰਹਿੰਦੇ ਹਨ ?

(iii) ਕਿੰਨਿਆਂ ਵਿੱਚ ਸਵਰ ਕਦੇ ਵੀ ਇਕੱਠੇ ਨਹੀਂ ਰਹਿੰਦੇ ?

(iv) ਕਿੰਨੇ ਸ਼ਬਦ I ਨਾਲ ਸ਼ੁਰੂ ਅਤੇ P ਨਾਲ ਖ਼ਤਮ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ?

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ 12 ਅੱਖਰ ਹਨ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ N, ਤਿੰਨ ਵਾਰ; E ਚਾਰ ਵਾਰ, ਅਤੇ D ਦੋ ਵਾਰ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਸਾਰੇ ਅੱਖਰ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੇ ਤਰਤੀਬਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $= \frac{12!}{3!\,4!\,2!} = 1663200$ ਹੈ।

(i) ਅਸੀਂ P ਨੂੰ ਖੱਬੇ ਹੱਥ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲੇ ਸਥਾਨ ਤੇ ਸਥਿਰ ਕਰ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਫਿਰ ਬਾਕੀ 11 ਅੱਖਰਾਂ ਨਾਲ ਬਨਣ ਵਾਲੇ ਤਰਤੀਬਾਂ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ P ਨਾਲ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $= \frac{11!}{3!\,2!\,4!} = 138600$ ਹੈ।

(ii) ਦਿੱਤੇ ਸ਼ਬਦ ਵਿੱਚ 5 ਸਵਰ ਹਨ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ 4 ਵਾਰ E ਅਤੇ ਇੱਕ ਵਾਰ I ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਇਹਨਾਂ ਨੇ ਹਮੇਸ਼ਾ ਇਕੱਠੇ ਰਹਿਣਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਕੁਝ ਸਮੇਂ ਵਾਸਤੇ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਹੀ ਵਸਤੂ $\boxed{\text{EEEEI}}$ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਇਕੱਲੀ ਵਸਤੂ ਬਾਕੀ 7 ਅੱਖਰਾਂ (ਵਸਤੂਆਂ) ਨਾਲ ਮਿਲ ਕੇ ਕੁੱਲ 8 ਵਸਤੂਆਂ ਹੋ ਜਾਣਗੀਆਂ। ਇਹਨਾਂ 8 ਵਸਤੂਆਂ ਵਿੱਚ 3 ਵਾਰ N ਅਤੇ 2 ਵਾਰ D ਹੈ, ਇਹ $\frac{8!}{3!\,2!}$ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਫਿਰ ਤੋਂ ਤਰਤੀਬ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਹਰ ਇੱਕ ਤਰਤੀਬ ਦੇ ਸੰਗਤ, 5 ਸਵਰ E, E, E, E ਅਤੇ I, $\frac{5!}{4!}$ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਤਰਤੀਬ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਗੁਣਨ ਸਿਧਾਂਤ ਤੋਂ ਲੋੜੀਂਦੇ ਤਰਤੀਬਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ

$$= \frac{8!}{3!\,2!}\times\frac{5!}{4!} = 16800 \text{ ਹੈ।}$$

(iii) ਲੋੜੀਂਦੇ ਤਰਤੀਬਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ = ਕੁੱਲ ਤਰਤੀਬਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ (ਬਿਨਾਂ ਕਿਸੇ ਬੰਦਿਸ਼ ਦੇ) – ਤਰਤੀਬਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਸਾਰੇ ਸਵਰ ਹਮੇਸ਼ਾ ਇਕੱਠੇ ਹੋਣ = 1663200 – 16800 = 1646400

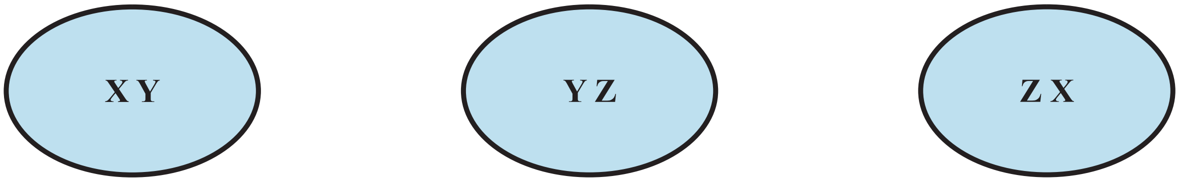
(iv) ਆਓ I ਅਤੇ P ਨੂੰ ਸਿਰਿਆਂ ਤੇ (I ਨੂੰ ਖੱਬੇ ਅਤੇ P ਨੂੰ ਸੱਜੇ ਸਿਰੇ ਤੇ) ਸਥਿਰ ਕਰੀਏ। ਹੁਣ ਸਾਡੇ ਕੋਲ 10 ਅੱਖਰ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਤਰਤੀਬਾਂ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਗਿਣਤੀ $= \frac{10!}{3!\,2!\,4!} = 12600$ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 7.3

1. 1 ਤੋਂ 9 ਤੱਕ ਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਤਿੰਨ ਅੰਕਾਂ ਦੀਆਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਬਣ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਵੀ ਅੰਕ ਨੂੰ ਦੁਹਰਾਇਆ ਨਾ ਜਾਵੇ।
2. ਚਾਰ ਅੰਕਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੱਸੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵੀ ਅੰਕ ਦੁਹਰਾਇਆ ਨਾ ਹੋਵੇ।
3. ਅੰਕਾਂ 1, 2, 3, 4, 6, 7 ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ ਤਿੰਨ ਅੰਕਾਂ ਦੀਆਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਬਣਾਈਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਵੀ ਅੰਕ ਦੁਹਰਾਇਆ ਨਾ ਜਾਵੇ।
4. ਅੰਕਾਂ 1, 2, 3, 4, 5 ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ ਕਿੰਨੀਆਂ 4 ਅੰਕਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਬਣਾਈਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਵੀ ਅੰਕ ਦੁਹਰਾਇਆ ਨਾ ਜਾਵੇ। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਜਿਸਤ ਹੋਣਗੀਆਂ ?
5. 8 ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਇੱਕ ਸੰਮਤੀ ਵਿੱਚੋਂ, ਅਸੀਂ ਕਿੰਨੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਇੱਕ ਪ੍ਰਧਾਨ ਅਤੇ ਇੱਕ ਉਪ ਪ੍ਰਧਾਨ ਚੁਣ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਅਹੁਦੇ ਤੇ ਨਹੀਂ ਰਹਿ ਸਕਦਾ ?
6. n ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ${}^{n-1}P_3 : {}^{n}P_4 = 1 : 9$
7. r ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ (i) ${}^{5}P_r = 2\,{}^{6}P_{r-1}$ (ii) ${}^{5}P_r = {}^{6}P_{r-1}$
8. EQUATION ਸ਼ਬਦ ਦੇ ਸਾਰੇ ਅੱਖਰਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ ਕਿੰਨੇ ਅਰਥਾਂ ਵਾਲੇ ਜਾਂ ਅਰਥਹੀਣ ਸ਼ਬਦ ਬਣਾਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਜਦੋਂ ਹਰ ਇੱਕ ਅੱਖਰ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਵਾਰ ਹੀ ਕੀਤੀ ਜਾਵੇ ?
9. ਬਿਨਾਂ ਕੋਈ ਅੱਖਰ ਦੁਹਰਾਏ, ਸ਼ਬਦ MONDAY ਦੇ ਅੱਖਰਾਂ ਤੋਂ ਅਰਥਾਂ ਵਾਲੇ ਜਾਂ ਬਿਨਾਂ ਅਰਥਾਂ ਵਾਲੇ ਸ਼ਬਦ ਬਣਾਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਜੇਕਰ
   (i) ਇੱਕ ਸਮੇਂ ਤੇ 4 ਅੱਖਰ ਲਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। (ii) ਇੱਕ ਸਮੇਂ ਤੇ ਸਾਰੇ ਅੱਖਰ ਲਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ।
   (iii) ਸਾਰੇ ਅੱਖਰਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਪਰ ਪਹਿਲਾਂ ਅੱਖਰ ਸਵਰ ਹੈ ?
10. MISSISSIPPI ਸ਼ਬਦ ਦੇ ਅੱਖਰਾਂ ਤੋਂ ਬਣੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਵਿੱਚ, ਕਿੰਨਿਆਂ ਵਿੱਚ ਚਾਰੇ I ਇਕੱਠੇ ਨਹੀਂ ਆਉਂਦੇ ਹਨ ?
11. PERMUTATIONS ਸ਼ਬਦ ਦੇ ਅੱਖਰਾਂ ਨੂੰ ਕਿੰਨੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਤਰਤੀਬ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ :
    (i) ਸ਼ਬਦ P ਨਾਲ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਵੇ ਅਤੇ S ਨਾਲ ਖ਼ਤਮ ਹੋਵੇ
    (ii) ਸਾਰੇ ਸਵਰ ਇਕੱਠੇ ਹੋਣ
    (iii) P ਅਤੇ S ਵਿਚਕਾਰ ਹਮੇਸ਼ਾ 4 ਅੱਖਰ ਹੋਣ ?

7.4 ਸੰਯੋਜਨ (Combinations)

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਤਿੰਨ ਲਾਲ ਟੈਨਿਸ ਖਿਡਾਰੀਆਂ X, Y, Z ਦਾ ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਇੱਕ ਟੀਮ ਜਿਸ ਵਿੱਚ 2 ਖਿਡਾਰੀ ਹੋਣ, ਬਣਾਈ ਜਾਣੀ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਕਿੰਨੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ? ਕੀ X ਅਤੇ Y ਦੀ ਟੀਮ, Y ਅਤੇ X ਦੀ ਟੀਮ ਤੋਂ ਭਿੰਨ (ਅਲੱਗ) ਹੈ ? ਇੱਥੇ ਕ੍ਰਮ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਟੀਮ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਕੇਵਲ ਤਿੰਨ ਹੀ ਸੰਭਵ ਤਰੀਕੇ ਹਨ। ਇਹ XY, YZ ਅਤੇ ZX ਹਨ। (ਚਿੱਤਰ 7.3)।



ਚਿੱਤਰ 7.3

ਇੱਥੇ ਹਰ ਇੱਕ ਚੋਣ, ਤਿੰਨ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਸਤੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ 2 ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਬਣਾਇਆ ਗਿਆ ਸੰਯੋਜਨ (Combination) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਸੰਯੋਜਨ ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ। ਆਓ ਕੁਝ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਇੱਕ ਕਮਰੇ ਵਿੱਚ 12 ਵਿਅਕਤੀ ਮਿਲਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਹਰ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਬਾਕੀ ਸਾਰਿਆਂ ਨਾਲ ਹੱਥ ਮਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਹੱਥ ਮਿਲਾਉਣ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ ਅਸੀਂ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। X ਨੇ Y ਨਾਲ ਹੱਥ ਮਿਲਾਇਆ ਅਤੇ Y ਨੇ X ਨਾਲ ਹੱਥ ਮਿਲਾਇਆ, ਦੋ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਹੱਥ ਮਿਲਾਉਣਾ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇੱਥੇ ਕ੍ਰਮ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਹੱਥ ਮਿਲਾਉਣ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ ਉਂਨੀ ਹੀ ਹੈ ਜਿੰਨੀ 12 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਸਤੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਹੀ ਸਮੇਂ ਤੇ 2 ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਹੈ।

ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਤੇ 7 ਬਿੰਦੂ ਸਥਿਤ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ 2 ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾ ਕੇ ਕਿੰਨੀਆਂ ਜੀਵਾਵਾਂ ਖਿੱਚੀਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ ? ਇੱਥੇ ਜੀਵਾਵਾਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ ਉਂਨੀ ਹੀ ਹੈ, ਜਿੰਨੀ 7 ਅਲੱਗ ਵਸਤੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਹੀ ਸਮੇਂ ਤੇ 2 ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੀ ਗਿਣਤੀ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ n ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਸਤੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਹੀ ਸਮੇਂ ਤੇ r ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੀ ਗਿਣਤੀ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਚਿੰਨ੍ਹ ${}^nC_r$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ, ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਸੂਤਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਮੰਨ ਲਓ ਸਾਡੇ ਕੋਲ 4 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਸਤਾਂ A, B, C ਅਤੇ D ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸਮੇਂ 2 ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਸੰਯੋਜਨ ਬਣਾਈਏ ਤਾਂ ਇਹ AB, AC, AD, BC, BD, CD ਹਨ। ਇੱਥੇ AB ਅਤੇ BA ਇੱਕ ਹੀ ਸੰਯੋਜਨ ਹਨ ਕਿਉਂਕਿ ਵਸਤੂਆਂ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਸੰਯੋਜਨ ਨੂੰ ਪਰਵਰਤਿਤ ਨਹੀਂ ਕਰਦਾ। ਇਹੀ ਕਾਰਨ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਸੂਚੀ ਵਿੱਚ BA, CA, DA, CB, DB ਅਤੇ DC ਨੂੰ ਸ਼ਾਮਿਲ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ 4 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਸਤੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਹੀ ਸਮੇਂ ਤੇ 2 ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 6 ਹੈ, ਭਾਵ ${}^4C_2 = 6$

ਇਸ ਸੂਚੀ ਵਿੱਚ ਹਰ ਇੱਕ ਸੰਯੋਜਨ ਦੇ ਸੰਗਤ ਸਾਨੂੰ 2! ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਮਿਲ ਸਕਦੇ ਹਨ ਕਿਉਂਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਸੰਯੋਜਨ ਦੀਆਂ 2 ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ 2! ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਫਿਰ ਤੋਂ ਤਰਤੀਬ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਗਿਣਤੀ = ${}^4C_2 \times 2!$

ਦੂਸਰੇ ਪਾਸੇ 4 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਸਤੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਹੀ ਸਮੇਂ ਤੇ 2 ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਗਿਣਤੀ = ${}^4P_2$

ਇਸ ਲਈ $${}^4P_2 = {}^4C_2 \times 2! \quad \text{ਜਾਂ} \quad \frac{4!}{(4-2)!\,2!} = {}^4C_2$$

ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਸਾਡੇ ਕੋਲ 5 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਸਤੂਆਂ A, B, C, D, E ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਹੀ ਸਮੇਂ ਤੇ 3 ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਸੰਯੋਜਨ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਇਹ ABC, ABD, ABE, BCD, BCE, CDE, ACE, ACD, ADE, BDE ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ${}^5C_3$ ਸੰਯੋਜਨ ਦੇ ਹਰ ਇੱਕ ਦੇ ਸੰਗਤ 3! ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਹਨ ਕਿਉਂਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਸੰਯੋਜਨ ਦੀਆਂ ਤਿੰਨ ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ 3! ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਫਿਰ ਤੋਂ ਤਰਤੀਬ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ = ${}^5C_3 \times 3!$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $${}^5P_3 = {}^5C_3 \times 3! \quad \text{or} \quad \frac{5!}{(5-3)!\,3!} = {}^5C_3$$

ਇਹ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਅਤੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੇ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧ ਸੁਝਾਉਣ ਵਾਲੀ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਿੰਦੇ ਹਨ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 5 : ${}^nP_r = {}^nC_r \; r!, \; 0 < r \le n$

ਸਬੂਤ : ਹਰ ਇੱਕ ਸੰਯੋਜਨ ${}^nC_r$ ਦੇ ਸੰਗਤ ਸਾਡੇ ਕੋਲ r ! ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਕਿਉਂਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਸੰਯੋਜਨ ਦੀਆਂ r ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ r ! ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਫਿਰ ਤੋਂ ਤਰਤੀਬ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ n ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਸਤੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਸਮੇਂ r ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਲੈਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ${}^nC_r \times r!$ ਹੈ। ਦੂਸਰੇ ਪਾਸੇ ਇਹ ${}^nP_r$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$${}^nP_r = {}^nC_r \times r!, \; 0 < r \le n.$$

ਟਿੱਪਣੀ 1. ਉੱਪਰ ਤੋਂ $\dfrac{n!}{(n-r)!} = {}^nC_r \times r!$, ਭਾਵ ${}^nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ $r = n$, ${}^nC_n = \dfrac{n!}{n!\,0!} = 1$

2. ਅਸੀਂ ${}^nC_0 = 1$, ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਭਾਵ n ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਸਤੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ ਵਸਤੂ ਲਏ ਬਿਨਾਂ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 1 ਮੰਨੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਸੰਯੋਜਨ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਨ ਤੋਂ ਭਾਵ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਨਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਜਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਦੀ ਇੱਕ ਹੀ ਸਮੇਂ ਚੋਣ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਕੁਝ ਵੀ ਨਾ ਚੋਣ ਕਰਨ ਤੋਂ ਭਾਵ ਹੈ ਸਾਰੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਪਿੱਛੇ ਛੱਡਣਾ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਹੀ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ${}^nC_0 = 1$ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

3. ਕਿਉਂਕਿ $\dfrac{n!}{0!(n-0)!} = 1 = {}^nC_0$, ਇਸ ਲਈ ਸੂਤਰ ${}^nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$, $r = 0$ ਲਈ ਵੀ ਠੀਕ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ

$${}^nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!},\ 0 \le r \le n.$$

4. $${}^nC_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!r!} = {}^nC_r,$$

ਭਾਵ, n ਵਸਤੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ r ਵਸਤੂਆਂ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰਨੀ, $(n - r)$ ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਅਸਵੀਕਾਰ ਕਰਨ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

5. ${}^nC_a = {}^nC_b \Rightarrow a = b$ ਜਾਂ $a = n - b$, ਭਾਵ, $n = a + b$

ਪ੍ਰਮੇਯ 6 : ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$

ਸਬੂਤ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ : ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!} + \dfrac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}$

$$= \frac{n!}{r\times(r-1)!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)\,(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r+1}\right]$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \times \frac{n-r+1+r}{r(n-r+1)} = \frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!} = {}^{n+1}C_r$$

ਉਦਾਹਰਣ 17 : ਜੇਕਰ ${}^nC_9 = {}^nC_8$, ਹੋਵੇ ਤਾਂ ${}^nC_{17}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ ${}^nC_9 = {}^nC_8$

ਭਾਵ, $$\frac{n!}{9!(n-9)!} = \frac{n!}{(n-8)!\,8!}$$

ਜਾਂ $$\frac{1}{9} = \frac{1}{n-8} \quad \text{ਜਾਂ} \quad n - 8 = 9 \quad \text{ਜਾਂ} \quad n = 17$$

ਇਸ ਲਈ ${}^nC_{17} = {}^{17}C_{17} = 1$

ਉਦਾਹਰਣ 18 : 2 ਆਦਮੀਆਂ ਅਤੇ 3 ਔਰਤਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚੋਂ 3 ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਇੱਕ ਸਮਿਤੀ ਬਣਾਈ ਜਾਣੀ ਹੈ। ਇਹ ਕਿੰਨੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ ? ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਸਮਿਤੀਆਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਹਨ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਮਰਦ ਅਤੇ 2 ਔਰਤਾਂ ਹੋਣ ?

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਕ੍ਰਮ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਸੰਯੋਜਨ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਨੀ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਸਮਿਤੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਉੰਨੀ ਹੀ ਹੈ ਜਿੰਨੀ 5 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਸਮੇਂ ਤੇ 3 ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਬਨਣ ਵਾਲੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਮਿਤੀ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਗਿਣਤੀ ${}^5C_3 = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{4\times5}{2} = 10$

ਹੁਣ 2 ਆਦਮੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਆਦਮੀ ਦੀ ਚੋਣ ${}^2C_1$ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਅਤੇ 2 ਔਰਤਾਂ ਦੀ 3 ਔਰਤਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਚੋਣ ${}^3C_2$ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਮਿਤੀਆਂ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਗਿਣਤੀ ${}^2C_1 \times {}^3C_2 = \frac{2!}{1!\,1!} \times \frac{3!}{2!\,1!} = 6$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 19 : ਤਾਸ਼ ਦੀ ਗੱਠੀ ਦੇ 52 ਪੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ 4 ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਚੋਣ ਕਿੰਨੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ ? ਇਹਨਾਂ ਤਰੀਕਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ, ਕਿੰਨੇ ਵਿੱਚ :

(i) ਚਾਰੇ ਪੱਤੇ ਇੱਕ ਹੀ ਸੂਟ ਦੇ ਹਨ ?

(ii) ਚਾਰੇ ਪੱਤੇ ਚਾਰ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸੂਟਾਂ ਦੇ ਹਨ।

(iii) ਤਸਵੀਰਾਂ ਹਨ ?

(iv) ਦੋ ਪੱਤੇ ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੇ ਅਤੇ ਦੋ ਪੱਤੇ ਕਾਲੇ ਰੰਗ ਦੇ ਹਨ ?

(v) ਸਾਰੇ ਪੱਤੇ ਇੱਕ ਹੀ ਰੰਗ ਦੇ ਹਨ।

ਹੱਲ : 52 ਪੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ 4 ਪੱਤਿਆਂ ਨੂੰ ਚੁਨਣ ਦੇ ਉਨੇ ਹੀ ਤਰੀਕੇ ਹਨ ਜਿੰਨੇ 52 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਸਤੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਸਮੇਂ ਤੇ ਚਾਰ ਵਸਤੂਆਂ ਲੈ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਸੰਯੋਜਨ।

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ = ${}^{52}C_4 = \frac{52!}{4!\,48!} = \frac{49\times50\times51\times52}{2\times3\times4} = 270725$

(i) ਤਾਸ਼ ਦੀ ਗੱਠੀ ਵਿੱਚ 4 ਸੂਟਾਂ ਦੇ ਪੱਤੇ ਹਨ, ਇੱਟ, ਚਿੜੀ, ਹੁਕਮ, ਪਾਨ ਅਤੇ ਹਰ ਇੱਕ ਦੇ 13 ਪੱਤੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ 4 ਇੱਟ ਦੇ ਪੱਤੇ ਚੁਨਣ ਦੇ ${}^{13}C_4$ ਤਰੀਕੇ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਚਾਰ ਚਿੜੀ ਦੇ ਪੱਤੇ ਚੁਨਣ ਦੇ ${}^{13}C_4$, 4 ਹੁਕਮ ਦੇ ਪੱਤੇ ਚੁਨਣ ਦੇ ${}^{13}C_4$ ਅਤੇ ਚਾਰ ਪਾਨ ਦੇ ਪੱਤੇ ਚੁਨਣ ਦੇ ${}^{13}C_4$ ਤਰੀਕੇ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਗਿਣਤੀ = ${}^{13}C_4 + {}^{13}C_4 + {}^{13}C_4 + {}^{13}C_4$

$$= 4\times\frac{13!}{4!\,9!} = 2860 \text{ ਹੈ।}$$

(ii) ਹਰ ਇੱਕ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ 13 ਪੱਤੇ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਇੱਟ ਦੇ 13 ਪੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਪੱਤਾ ਚੁਨਣ ਦੇ $^{13}C_1$ ਤਰੀਕੇ ਹਨ, ਪਾਨ ਦੇ 13 ਪੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ 1 ਚੁਨਣ ਦੇ $^{13}C_1$, ਚਿੜੀ ਦੇ 13 ਪੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ 1 ਪੱਤਾ ਚੁਨਣ ਦੇ ਤਰੀਕੇ $^{13}C_1$ ਅਤੇ ਹੁਕਮ ਦੇ 13 ਪੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ 1 ਪੱਤਾ ਚੁਨਣ ਦੇ ਤਰੀਕੇ $^{13}C_1$ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਗੁਣਨ ਸਿਧਾਂਤ ਤੋਂ, ਲੋੜੀਂਦੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ

$= {}^{13}C_1 \times {}^{13}C_1 \times {}^{13}C_1 \times {}^{13}C_1 = 13^4$ ਹੈ।

(iii) ਤਾਸ਼ ਦੀ ਗੱਠੀ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ 12 ਤਸਵੀਰਾਂ ਵਾਲੇ ਪੱਤੇ ਹਨ, ਇਹਨਾਂ 12 ਵਿੱਚੋਂ 4 ਪੱਤੇ ਚੁਨਣੇ ਹਨ। ਇਸਨੂੰ $^{12}C_4$ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਗਿਣਤੀ $= \dfrac{12!}{4!\ 8!} = 495$

(iv) ਗੱਠੀ ਵਿੱਚ 26 ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੇ ਅਤੇ 26 ਕਾਲੇ ਰੰਗ ਦੇ ਪੱਤੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $= {}^{26}C_2 \times {}^{26}C_2$

$$= \left(\frac{26!}{2!\ 24!}\right)^2 = (325)^2 = 105625$$

(v) 26 ਲਾਲ ਪੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ 4 ਲਾਲ ਪੱਤੇ ਚੁਨਣ ਦੇ $^{26}C_4$ ਤਰੀਕੇ ਹਨ। 26 ਕਾਲੇ ਪੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ 4 ਕਾਲੇ ਪੱਤੇ ਚੁਨਣ ਦੇ $^{26}C_4$ ਤਰੀਕੇ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $= {}^{26}C_4 + {}^{26}C_4 = 2\times\dfrac{26!}{4!\ 22!} = 29900$ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 7.4

1. ਜੇਕਰ $^nC_8 = {}^nC_2$, ਤਾਂ $^nC_2$ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. n ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ :

   (i) $^{2n}C_3 : {}^nC_3 = 12 : 1$

   (ii) $^{2n}C_3 : {}^nC_3 = 11 : 1$
3. ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਤੇ ਸਥਿਤ 21 ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀਆਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਵਤਰਾਂ (ਜੀਵਾਵਾਂ) ਖਿੱਚੀਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ ?
4. 5 ਲੜਕੇ ਅਤੇ 4 ਲੜਕੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ 3 ਲੜਕੇ ਅਤੇ 3 ਲੜਕੀਆਂ ਦੀਆਂ ਟੀਮਾਂ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਤਰੀਕੇ ਹਨ।
5. 6 ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੀਆਂ, 5 ਸਫੈਦ ਰੰਗ ਦੀਆਂ ਅਤੇ 5 ਨੀਲੇ ਰੰਗ ਦੀਆਂ ਗੇਂਦਾਂ ਵਿੱਚੋਂ 9 ਗੇਂਦਾਂ ਨੂੰ ਚੁਨਣ ਦੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ ਹਰ ਇੱਕ ਸੰਗ੍ਰਹਿ ਵਿੱਚ ਹਰ ਇੱਕ ਰੰਗ ਦੀਆਂ 3 ਗੇਂਦਾਂ ਹੋਣ।
6. 52 ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਇੱਕ ਗੱਠੀ ਵਿੱਚੋਂ 5 ਪੱਤੇ ਲੈ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਹਰ ਇੱਕ ਸੰਯੋਜਨ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਅਤੇ ਸਿਰਫ ਇੱਕ ਇੱਕਾ (ਯੱਕਾ) ਹੋਵੇ।
7. 17 ਖਿਡਾਰੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ 5 ਖਿਡਾਰੀ ਗੇਂਦਬਾਜੀ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ, 11 ਖਿਡਾਰੀਆਂ ਦੀ ਚੋਣ ਕਿੰਨੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਹਰ ਇੱਕ ਟੀਮ ਵਿੱਚ ਸਿਰਫ ਅਤੇ ਸਿਰਫ 4 ਗੇਂਦਬਾਜ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੋਣ ?
8. ਇੱਕ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ 5 ਕਾਲੀਆਂ ਅਤੇ 6 ਲਾਲ ਗੇਂਦਾਂ ਹਨ, 2 ਕਾਲੀਆਂ ਅਤੇ 3 ਲਾਲ ਗੇਂਦਾਂ ਦੀ ਚੋਣ ਦੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।
9. 9 ਉਪਲਬਧ ਪਾਠਕ੍ਰਮਾਂ ਵਿੱਚੋਂ, ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ 5 ਪਾਠਕ੍ਰਮਾਂ ਦੀ ਚੋਣ ਕਿੰਨੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਹਰ ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਲਈ 2 ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਪਾਠਕ੍ਰਮ ਜਰੂਰੀ ਹੋਣ।

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 20 : ਸ਼ਬਦ INVOLUTE ਦੇ ਅੱਖਰਾਂ ਤੋਂ 3 ਸਵਰਾਂ ਅਤੇ 2 ਵਿਅੰਜਨਾਂ ਵਾਲੇ ਅਰਥਪੂਰਨ ਜਾਂ ਅਰਥਹੀਣ ਕਿੰਨੇ ਸ਼ਬਦ ਬਣਾਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਸ਼ਬਦ INVOLUTE ਵਿੱਚ 4 ਸਵਰ I,O,E,U ਅਤੇ 4 ਵਿਅੰਜਨ N, V, L ਅਤੇ T ਹਨ।

4 ਵਿੱਚੋਂ 3 ਸਵਰ ਚੁਨਣ ਦੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ = ${}^4C_3 = 4$

4 ਵਿੱਚੋਂ 2 ਵਿਅੰਜਨ ਚੁਨਣ ਦੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ = ${}^4C_2 = 6$

ਇਸ ਲਈ 3 ਸਵਰ ਅਤੇ 2 ਵਿਅੰਜਨ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $4 \times 6 = 24$ ਹੈ।

ਹੁਣ ਇਹਨਾਂ 24 ਸੰਯੋਜਨਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰ ਇੱਕ ਵਿੱਚ 5 ਅੱਖਰ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ 5! ਢੰਗਾਂ ਨਾਲ ਤਰਤੀਬ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਗਿਣਤੀ $24 \times 5\,! = 2880$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 21 : ਕਿਸੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ 4 ਲੜਕੀਆਂ ਅਤੇ 7 ਲੜਕੇ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ 5 ਮੈਂਬਰਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਟੀਮ ਦੀ ਚੋਣ ਕਿੰਨੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ ਜੇਕਰ ਟੀਮ ਵਿੱਚ (i) ਇੱਕ ਵੀ ਲੜਕੀ ਨਹੀਂ ਹੈ (ii) ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਇੱਕ ਲੜਕਾ ਅਤੇ ਇੱਕ ਲੜਕੀ ਹੈ। (iii) ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 3 ਲੜਕੀਆਂ ਹਨ।

ਹੱਲ : (i) ਕਿਉਂਕਿ ਟੀਮ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵੀ ਲੜਕੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਨਹੀਂ, ਇਸ ਲਈ ਕੇਵਲ ਲੜਕਿਆਂ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰਨੀ ਹੈ। 7 ਲੜਕਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ 5 ਲੜਕਿਆਂ ਦੀ ਚੋਣ ${}^7C_5$ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੀ ਗਿਣਤੀ = ${}^7C_5 = \frac{7!}{5!\ 2!} = \frac{6 \times 7}{2} = 21$ ਹੈ।

(ii) ਕਿਉਂਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਟੀਮ ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਇੱਕ ਲੜਕਾ ਅਤੇ ਇੱਕ ਲੜਕੀ ਹੋਵੇ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਟੀਮ ਦੀ ਚੋਣ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੋਵੇਗੀ :

(a) 1 ਲੜਕਾ ਅਤੇ 4 ਲੜਕੀਆਂ (b) 2 ਲੜਕੇ ਅਤੇ 3 ਲੜਕੀਆਂ

(c) 3 ਲੜਕੇ ਅਤੇ 2 ਲੜਕੀਆਂ (d) 4 ਲੜਕੇ ਅਤੇ 1 ਲੜਕੀ।

1 ਲੜਕਾ ਅਤੇ 4 ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਚੋਣ ${}^7C_1 \times {}^4C_4$ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

2 ਲੜਕੇ ਅਤੇ 3 ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਚੋਣ ${}^7C_2 \times {}^4C_3$ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

3 ਲੜਕੇ ਅਤੇ 2 ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਚੋਣ ${}^7C_3 \times {}^4C_2$ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

4 ਲੜਕੇ ਅਤੇ 1 ਲੜਕੀ ਦੀ ਚੋਣ ${}^7C_4 \times {}^4C_1$ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ

$= {}^7C_1 \times {}^4C_4 + {}^7C_2 \times {}^4C_3 + {}^7C_3 \times {}^4C_2 + {}^7C_4 \times {}^4C_1$

$= 7 + 84 + 210 + 140 = 441$ ਹੈ।

(iii) ਕਿਉਂਕਿ ਟੀਮ ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 3 ਲੜਕੀਆਂ ਹੋਣੀਆਂ ਚਾਹੀਦੀਆਂ ਹਨ, ਟੀਮ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਣ ਸਕਦੀ ਹੈ :

(a) 3 ਲੜਕੀਆਂ ਅਤੇ 2 ਲੜਕੇ ਜਾਂ (b) 4 ਲੜਕੀਆਂ ਅਤੇ 1 ਲੜਕਾ

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਟੀਮ ਵਿੱਚ ਸਾਰੀਆਂ 5 ਲੜਕੀਆਂ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਕਿਉਂਕਿ ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਕੇਵਲ 4 ਹੈ।

3 ਲੜਕੀਆਂ ਅਤੇ 2 ਲੜਕਿਆਂ ਦੀ ਚੋਣ ${}^4C_3 \times {}^7C_2$ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ।

4 ਲੜਕੀਆਂ ਅਤੇ 1 ਲੜਕੇ ਦੀ ਚੋਣ ${}^4C_4 \times {}^7C_1$ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ

$= {}^4C_3 \times {}^7C_2 + {}^4C_4 \times {}^7C_1 = 84 + 7 = 91$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 22 : AGAIN ਸ਼ਬਦ ਦੇ ਸਾਰੇ ਅੱਖਰਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਤੋਂ ਅਰਥਪੂਰਣ ਜਾਂ ਅਰਥਹੀਣ ਬਣਾਏ ਜਾ ਸਕਣ ਵਾਲੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਜੇਕਰ ਇਹਨਾਂ ਸ਼ਬਦਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾਵੇ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸ਼ਬਦਕੋਸ਼ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ 50 ਵਾਂ ਸ਼ਬਦ ਕੀ ਹੈ ?

ਹੱਲ : ਸ਼ਬਦ AGAIN ਵਿੱਚ 5 ਅੱਖਰ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ A ਦੋ ਵਾਰ ਆਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਗਿਣਤੀ $= \frac{5!}{2!} = 60$ ਹੈ।

A ਅੱਖਰ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ A ਨੂੰ ਖੱਬੇ ਹੱਥ ਪਹਿਲੇ ਸਥਾਨ ਤੇ ਸਥਿਰ ਕਰ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ, ਫਿਰ ਅਸੀਂ ਬਾਕੀ ਰਹਿੰਦੇ ਚਾਰ ਅੱਖਰਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਸਾਰਿਆਂ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਫਿਰ ਤੋਂ ਤਰਤੀਬ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਤਰਤੀਬਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਉਨੀ ਹੀ ਹੈ, ਜਿੰਨੀ 4 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕੋ ਸਮੇਂ ਸਾਰਿਆਂ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਇਸ ਲਈ A ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $4! = 24$ ਹੈ। ਫਿਰ G ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $= \frac{4!}{2!} = 12$ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ G ਨੂੰ ਸਭ ਤੋਂ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਪਹਿਲੇ ਸਥਾਨ 'ਤੇ ਸਥਿਰ ਕਰਨ ਨਾਲ ਸਾਡੇ ਕੋਲ A, A, I ਅਤੇ N ਬਾਕੀ ਰਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ I ਨਾਲ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 12 ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੁਣ ਤੱਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $= 24 + 12 + 12 = 48$ ਹੈ, ਹੁਣ 49ਵਾਂ ਸ਼ਬਦ NAAGI ਹੈ। ਇਸ ਲਈ 50ਵਾਂ ਸ਼ਬਦ NAAIG ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 23 : ਅੰਕਾਂ 1, 2, 0, 2, 4, 2, 4 ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ 1000000 ਤੋਂ ਵੱਧ ਦੀਆਂ (ਵੱਡੀਆਂ) ਕਿੰਨੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਬਣਾਈਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ 1000000 ਇੱਕ 7 ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਵੀ 7 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਕੇਵਲ 7 ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗਣਨਾ ਹੀ ਕੀਤੀ ਜਾਵੇਗੀ। ਕਿਉਂਕਿ ਸੰਖਿਆ ਦਾ 1000000 ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੋਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਹ 1, 2 ਜਾਂ 4 ਨਾਲ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਵੇਗੀ।

1 ਨਾਲ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਣ ਵਾਲੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $= \frac{6!}{3!\,2!} = \frac{4\times5\times6}{2} = 60$ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਜਦੋਂ 1 ਨੂੰ ਸਭ ਤੋਂ ਖੱਬੇ ਸਥਾਨ 'ਤੇ ਸਥਿਰ ਕਰ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਫਿਰ ਬਾਕੀ ਅੰਕਾਂ 0, 2, 2, 2, 4, 4, ਨੂੰ ਫਿਰ ਤੋਂ ਤਰਤੀਬ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੰਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ 3 ਵਾਰ 2 ਅਤੇ 2 ਵਾਰ 4 ਆਉਂਦਾ ਹੈ।

2 ਨਾਲ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਣ ਵਾਲੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $= \frac{6!}{2!\,2!} = \frac{3\times4\times5\times6}{2} = 180$ ਹੈ। 4 ਨਾਲ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਣ ਵਾਲੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $= \frac{6!}{3!} = 4\times5\times6 = 120$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਗਿਣਤੀ $= 60 + 180 + 120 = 360$ ਹੈ।

ਵਿਕਲਪਿਕ ਵਿਧੀ

7 ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਤਰਤੀਬਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਸਪੱਸ਼ਟ ਤੌਰ 'ਤੇ $\frac{7!}{3!\,2!} = 420$ ਹੈ, ਪਰ ਇਸ ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਵੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ 0 ਪਹਿਲੇ ਖੱਬੇ ਸਥਾਨ ਤੇ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਤਰਤੀਬਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $\frac{6!}{3!\,2!}$ (0 ਨੂੰ ਬਿਲਕੁਲ ਖੱਬੇ ਪਹਿਲੇ ਸਥਾਨ 'ਤੇ ਰੱਖਣ 'ਤੇ) $= 60$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $= 420 - 60 = 360$ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ ਜੇਕਰ ਦਿੱਤੀ ਸੂਚੀ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਜਾਂ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਅੰਕ ਵਾਰ-ਵਾਰ ਆਉਂਦੇ ਭਾਵ ਦੁਹਰਾਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਇਹ ਮੰਨਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਵੀ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਉੱਨੀ ਹੀ ਵਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿੰਨੀ ਵਾਰ ਉਹ ਸੂਚੀ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਉੱਪਰਲੀ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ 1 ਅਤੇ 0 ਨੂੰ ਸਿਰਫ਼ ਇੱਕ ਵਾਰ ਵਰਤਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਦ ਕਿ 2 ਅਤੇ 4 ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 3 ਵਾਰੀ ਅਤੇ 2 ਵਾਰੀ ਵਰਤਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 24 : 5 ਲੜਕੀਆਂ ਅਤੇ 3 ਲੜਕਿਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਪੰਗਤੀ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਬਠਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕੋਈ ਵੀ ਦੋ ਲੜਕੇ ਨਾਲ-ਨਾਲ ਨਾ ਬੈਠਣ (ਬਹਿਣ)।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ 5 ਲੜਕੀਆਂ ਨੂੰ ਬਿਠਾ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ, ਇਹ ਅਸੀਂ 5! ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਹਰ ਇੱਕ ਤਰਤੀਬ ਲਈ, ਤਿੰਨ ਲੜਕਿਆਂ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਗੁਣਾ ਦੇ ਦਰਸਾਏ ਨਿਸ਼ਾਨ ਤੇ ਬਿਠਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ

$$\times G \times G \times G \times G \times G \times$$

ਗੁਣਾਂ ਦੇ ਨਿਸ਼ਾਨ ਨਾਲ ਦਰਸਾਏ 6 ਸਥਾਨਾਂ ਤੇ 3 ਲੜਕਿਆਂ ਨੂੰ ${}^6P_3$ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਬਿਠਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਗੁਣਨ ਸਿਧਾਂਤ ਤੋ, ਇਹਨਾਂ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ

$$= 5! \times {}^6P_3 = 5! \times \frac{6!}{3!}$$

$$= 4 \times 5 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 14400$$

ਅਧਿਆਇ 7 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. DAUGHTER ਸ਼ਬਦ ਦੇ ਅੱਖਰਾਂ ਤੋਂ ਕਿੰਨੇ ਅਰਥਪੂਰਨ ਜਾਂ ਅਰਥਹੀਣ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ, ਜਦਕਿ ਹਰ ਸ਼ਬਦ ਵਿੱਚ 2 ਸਵਰ ਅਤੇ 3 ਵਿਅੰਜਨ ਹੋਣ ?
2. ਸ਼ਬਦ EQUATION ਦੇ ਸਾਰੇ ਅੱਖਰਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕੋ ਸਮੇਂ ਲੈ ਕੇ ਕਿੰਨੇ ਅਰਥਪੂਰਨ ਜਾਂ ਅਰਥਹੀਣ ਸ਼ਬਦ ਬਣਾਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਜਦੋਂ ਸਵਰ ਅਤੇ ਵਿਅੰਜਨ ਇਕੱਠੇ ਆਉਣ ?
3. 9 ਲੜਕੇ ਅਤੇ 4 ਲੜਕੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ 7 ਦੀ ਇੱਕ ਸੰਮਤੀ ਬਣਾਈ ਜਾਣੀ ਹੈ। ਇਹ ਕਿੰਨੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਬਣਾਈ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਸੰਮਤੀ ਵਿੱਚ :

   (i) ਸਿਰਫ਼ 3 ਲੜਕੀਆਂ ਹੋਣ (ii) ਘੱਟੋ-ਘੱਟ 3 ਲੜਕੀਆਂ ਹੋਣ (iii) ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ 3 ਲੜਕੀਆਂ ਹੋਣ।
4. ਜੇਕਰ ਸ਼ਬਦ EXAMINATION ਦੇ ਸਾਰੇ ਅੱਖਰਾਂ ਨਾਲ ਬਣੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਨੂੰ ਸ਼ਬਦਕੋਸ਼ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੂਚੀਬੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ, ਤਾਂ E ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਪਹਿਲੇ ਸ਼ਬਦ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਕਿੰਨੇ ਸ਼ਬਦ ਹਨ ?
5. ਅੰਕਾਂ 0, 1, 3, 5, 7 ਅਤੇ 9 ਨਾਲ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਬਿਨਾਂ ਦੁਹਰਾਏ 6 ਅੰਕਾਂ ਦੀਆਂ 10 ਨਾਲ ਭਾਗ ਹੋਣ ਵਾਲੀਆਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਬਣਾਈਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ ?
6. ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਵਰਣਮਾਲਾ ਵਿੱਚ 5 ਸਵਰ ਅਤੇ 21 ਵਿਅੰਜਨ ਹਨ। ਦੋ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਸਵਰਾਂ ਅਤੇ ਦੋ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਿਅੰਜਨਾਂ ਨਾਲ, ਇਸ ਵਰਣਮਾਲਾ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿੰਨੇ ਸ਼ਬਦ ਬਣਾਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ ?
7. ਕਿਸੇ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਦੇ ਇੱਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਪੱਤਰ ਵਿੱਚ 12 ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਹਨ, ਜੋ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 5 ਅਤੇ 7 ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਾਲੇ ਦੋ ਭਾਗਾਂ ਭਾਵ ਭਾਗ I ਅਤੇ ਭਾਗ II ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਹੈ। ਇੱਕ ਪ੍ਰੀਖਿਆਰਥੀ ਨੂੰ ਹਰ ਇੱਕ ਭਾਗ ਵਿੱਚੋਂ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 3 ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਕੁੱਲ 8 ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਕਿੰਨੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ?
8. 52 ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਇੱਕ ਗੱਠੀ ਵਿੱਚੋਂ 5 ਪੱਤਿਆਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ 5 ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਹਰ ਇੱਕ ਚੋਣ ਵਿੱਚ ਸਿਰਫ ਇੱਕ ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਹੋਵੇ ?
9. 5 ਪੁਰਸ਼ਾਂ ਅਤੇ 4 ਔਰਤਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਪੰਗਤੀ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਿਠਾਇਆ ਜਾਣਾ ਹੈ ਕਿ ਔਰਤਾਂ ਜਿਸਤ ਸਥਾਨਾਂ ਤੇ ਬੈਠਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਤਰਤੀਬਾਂ ਸੰਭਵ ਹਨ ?

10. 25 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਇੱਕ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚੋਂ 10 ਦੀ ਚੋਣ ਇੱਕ ਸੈਰ ਸਪਾਟਾ ਪਾਰਟੀ ਦੇ ਲਈ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। 3 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਹਨ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੇ ਇਹ ਫੈਸਲਾ ਕੀਤਾ ਹੈ ਕਿ ਜਾਂ ਤਾਂ ਉਹ ਤਿੰਨੇ ਦਲ ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੋਣਗੇ, ਜਾਂ ਤਿੰਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ ਦਲ ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ। ਸੈਰ ਸਪਾਟਾ ਪਾਰਟੀ ਦਲ ਦੀ ਚੋਣ ਕਿੰਨੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ ?

11. ਸ਼ਬਦ ASSASSINATION ਦੇ ਅੱਖਰਾਂ ਦੇ ਕਿੰਨੀਆਂ ਤਰਤੀਬਾਂ ਬਣਾਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਸਾਰੇ S ਇਕੱਠੇ ਰਹਿਣ ?

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

- ਗਣਨਾ ਦਾ ਮੂਲਭੂਤ ਸਿਧਾਂਤ (Fundamental Principle of Counting) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਘਟਨਾ m ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਘੱਟਦੀ ਹੈ, ਇਸ ਉਪਰੰਤ ਦੂਸਰੀ ਘਟਨਾ n ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਘੱਟਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਘਟਨਾ ਘਟਣ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $m \times n$ ਹੈ।
- n ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਸਤੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਸਮੇਂ r ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਗਿਣਤੀ, ਜਦਕਿ ਦੁਹਰਾਏ ਜਾਣ ਦੀ ਇਜਾਜ਼ਤ ਨਹੀਂ ਹੈ ਨੂੰ ^nP_r ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $^nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$, ਜਿੱਥੇ $0 \le r \le n$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
- $n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$
- $n! = n \times (n-1)!$
- n ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਸਤੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਸਮੇਂ ਤੇ r ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਗਿਣਤੀ n^r ਹੈ, ਜਦੋਂ ਦੁਹਰਾਏ ਜਾਣ ਦੀ ਇਜਾਜ਼ਤ ਹੈ।
- n ਵਸਤੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਸਾਰਿਆਂ ਨੂੰ ਇਕੱਠੇ ਲੈ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $\dfrac{n!}{p_1!\,p_2!...\,p_k!}$ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ p_1 ਵਸਤੂਆਂ ਇੱਕ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ, p_2 ਵਸਤੂਆਂ ਦੂਸਰੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ, ... p_k ਵਸਤੂਆਂ kਵੇਂ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਸਾਰੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ, ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਹੈ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਹਨ।
- n ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਸਤੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਸਮੇਂ ਤੇ r ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਨੂੰ ^nC_r ਨਾਲ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ $^nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$, $0 \le r \le n$

ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਨੋਟ

ਭਾਰਤ ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਅਤੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੀ ਧਾਰਨਾ ਜੈਨ ਧਰਮ ਅਤੇ ਸੰਭਾਵੀ ਤੌਰ 'ਤੇ ਇਸ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਹੋਈ ਹੈ। ਫਿਰ ਵੀ ਇਸਦਾ ਸਿਹਰਾ ਜੈਨੀਆਂ ਨੂੰ ਹੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੇ 'ਵਿਕਲਪ' ਨਾਮ ਦੇ ਤਹਿਤ ਇਸਦੇ ਵਿਸ਼ਾ ਵਸਤੂ ਨੂੰ ਗਣਿਤ ਦੇ ਸਵੈ-ਸੰਪੰਨ ਵਿਸ਼ੇ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਿਕਸਿਤ ਕੀਤਾ।

ਜੈਨੀਆਂ ਵਿੱਚ ਮਹਾਂਵੀਰ (ਸੰਨ 850 ਈ. ਦੇ ਲਗਭਗ) ਸੰਭਾਵੀ ਤੌਰ 'ਤੇ ਵਿਸ਼ਵ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਗਣਿਤ ਸ਼ਾਸ਼ਤਰੀ ਹਨ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੇ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਅਤੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੇ ਸੂਤਰਾਂ ਨੂੰ ਦੇ ਕੇ ਸਰਾਹਨਾ ਭਰਪੂਰ ਕੰਮ ਕੀਤਾ।

ਈਸਾ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ 6 ਸ਼ਤਾਬਦੀ ਵਿੱਚ, Sushruta ਨੇ ਆਪਣੇ ਔਸ਼ਧੀ ਵਿਗਿਆਨ ਦੇ ਕੰਮ ਦੀ ਸੁਪਰਸਿੱਧ ਪੁਸਤਕ 'Sushruta Samhita' ਦੇ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਕਿ 6 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਰਸਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸਮੇਂ ਇੱਕ, ਦੋ .... ਆਦਿ ਲੈ ਕੇ 63 ਸੰਯੋਜਨ ਬਣਾਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਈਸਾ ਤੋਂ ਤਿੰਨ ਸ਼ਤਾਬਦੀ ਪਹਿਲਾਂ ਸੰਸਕ੍ਰਿਤ ਦੇ ਵਿਦਵਾਨ Pingala" ਨੇ ਆਪਣੇ ਪ੍ਰਸਿੱਧ ਕੰਮ "Chhandra Sutra" ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅੱਖਰਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ, ਦੋ ... ਆਦਿ ਲੈ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਬਾਰੇ ਵਰਣਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਭਾਸਕਰਾਚਾਰਿਆ (ਜਨਮ 1114 ਈ:) ਨੇ ਆਪਣੀ ਪ੍ਰਸਿੱਧ ਪੁਸਤਕ ਲੀਲਾਵਤੀ ਵਿੱਚ 'Anka

Pasha' (ਅੰਕ ਪਾਸ) ਨਾਮ ਹੇਠਾਂ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਅਤੇ ਸੰਯੋਜਨ ਤੇ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਕੰਮ ਕੀਤਾ। ਮਹਾਂਵੀਰ ਦੁਆਰਾ ^nC_r ਅਤੇ ^nP_r ਦੇਂ ਪਹਿਲਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸੂਤਰਾਂ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਭਸਕਰਾਚਾਰਯ ਨੇ ਵਿਸ਼ੇ ਪ੍ਰਤੀ ਅਨੇਕਾਂ ਪ੍ਰਮੇਯ ਅਤੇ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦਾ ਜਿਕਰ ਕੀਤਾ ਹੈ।

ਭਾਰਤ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਅਤੇ ਸੰਯੋਜਨ ਸੰਬੰਧੀ ਵਿਸ਼ਾ ਵਸਤੂ ਦੇ ਕੰਮ ਦਾ ਸ਼ੁਭ ਅਰੰਭ ਚੀਨੀ ਗਣਿਤ ਸ਼ਾਸ਼ਤਰੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਸਿੱਧ ਪੁਸਤਕ I–King ਵਿੱਚ ਵਰਣਿਤ ਹੈ। ਇਸ ਕੰਮ ਦਾ ਅੰਦਾਜਨ ਸਮਾਂ ਦੱਸਣਾ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ 213 ਈਸਵੀ ਪੂਰਵ ਵਿੱਚ ਉਸ ਸਮੇਂ ਦੇ ਸਮਰਾਟ ਨੇ ਆਦੇਸ਼ ਦਿੱਤਾ ਸੀ ਕਿ ਸਾਰੀਆਂ ਪੁਸਤਕਾਂ ਅਤੇ ਹੱਥ ਲਿਖਤ ਪਾਂਡੂਲਿਪੀਆਂ ਸਾੜ ਦਿੱਤੀਆਂ ਜਾਣ। ਸੌਭਾਗ ਨਾਲ ਇਸਦਾ ਪੂਰਣ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਾਲਣ ਨਹੀਂ ਹੋਇਆ। ਯੂਨਾਨੀ ਅਤੇ ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਲੈਟਿਨ ਗਣਿਤ ਸ਼ਾਸ਼ਤਰੀਆਂ ਨੇ ਵੀ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਅਤੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਤੇ ਕੁੱਛ ਛਿਟਪੁਟ ਕੰਮ ਕੀਤੇ ਹਨ।

ਕੁਝ ਅਰਬੀ ਅਤੇ ਹੇਬ੍ਰੋ ਲੇਖਕਾਂ ਨੇ ਵੀ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਅਤੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੀਆਂ ਸੰਕਲਪਨਾਵਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਜੋਤਿਸ਼ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਲਈ ਕੀਤੀ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ : Rabbi ben Ezra ਨੇ ਜਿਹੜੇ ਗ੍ਰਹਿ ਪਤਾ ਸਨ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰ ਇੱਕ, ਦੋ … ਆਦਿ ਲੈ ਕੇ ਬਣਾਏ ਸੰਯੋਜਨ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕੀਤੀ। ਇਹ ਕੰਮ 1140 ਈਸਵੀ ਪੂਰਵ ਵਿੱਚ ਹੋਇਆ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ Robbi ben Ezra ਨੂੰ ^nC_r ਦਾ ਸੂਤਰ ਪਤਾ ਨਹੀਂ ਸੀ, ਫਿਰ ਵੀ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਇਹ ਪਤਾ ਸੀ ਕਿ n ਅਤੇ r ਦੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਮੁੱਲਾਂ ਲਈ $^nC_r = {}^nC_{n-r}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਸੰਤ 1321 ਈ ਵਿੱਚ ਹੀਬਰੂ ਲੇਖਕ Levi Ben Gerson ਨੇ ^nP_r, ^nP_n ਦੇ ਸੂਤਰਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ^nC_r ਦੇ ਵਿਆਪਕ ਸੂਤਰਾਂ ਨੂੰ ਦੱਸਿਆ।

Ars Conjectandi, ਪਹਿਲੀ ਕਿਤਾਬ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਅਤੇ ਸੰਯੋਜਨ ਵਿਸ਼ੇ ਤੇ ਪੂਰਣ ਅਤੇ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਕੰਮ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਲੇਖਕ ਸਿਵਸ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ *Jacob Bernoulli* (1654 – 1705 ਈ) ਹਨ। ਇਸਦਾ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਨ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਮੌਤ ਤੋਂ ਬਾਅਦ 1713 ਈ. ਵਿੱਚ ਹੋਇਆ। ਇਸ ਪੁਸਤਕ ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਅਤੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤਾਂ ਦਾ ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਵਰਣਨ ਹੈ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਅੱਜ–ਕੱਲ ਜਾਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।