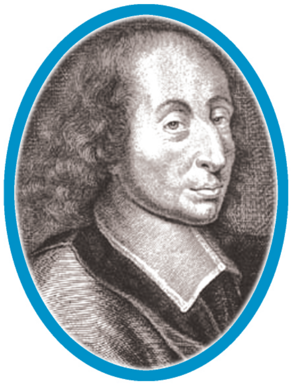
ਅਧਿਆਇ 8

ਦੋ ਪਦੀ ਪਰਿਮੇਯ
(Binomial Theorem)

❖*Mathematics is a most exact science ਅਤੇ its conclusions are capable of absolute proofs. – C.P. STEINMETZ*❖

8.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ $a + b$ ਅਤੇ $a - b$ ਵਰਗੀਆਂ ਦੋ ਪਦੀਆਂ ਦਾ ਵਰਗ ਅਤੇ ਘਣ ਕਰਨਾ ਸਿੱਖਿਆ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਅਤੇ ਘਣਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $(98)^2 = (100 - 2)^2$, $(999)^3 = (1000 - 1)^3$ ਆਦਿ ਅਤੇ ਫਿਰ ਵੀ, ਵੱਡੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $(98)^5$, $(101)^6$ ਆਦਿ ਦੀ ਗਣਨਾ ਲਈ ਵਾਰ-ਵਾਰ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਕਾਫ਼ੀ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਨੂੰ ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ (Binomial Theorem) ਦੁਆਰਾ ਦੂਰ ਕੀਤਾ ਗਿਆ। ਇਸ ਨਾਲ $(a + b)^n$ ਜਿੱਥੇ n ਸੰਪੂਰਨ ਜਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਨੂੰ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਖੋਜਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕੇਵਲ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਹੀ ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।



Blaise Pascal
(1623-1662)

8.2 ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਘਾਤ ਲਈ ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ (Binomial Theorem for Positive Integral Indices)

ਆਉ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਪੜ੍ਹੀਆਂ ਇਹਨਾਂ ਸਰਵਸਮਤਾਵਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ

$$(a + b)^0 = 1 \qquad a + b \neq 0$$
$$(a + b)^1 = a + b$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a + b)^4 = (a + b)^3 (a + b) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

ਇਹਨਾਂ ਪ੍ਰਸਾਰਾਂ (expansions) ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

(i) ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਪਦਾਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ, ਘਾਤ ਤੋਂ 1 ਵੱਧ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ $(a + b)^2$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਪਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਤਿੰਨ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਕਿ $(a + b)^2$ ਦੀ ਘਾਤ 2 ਹੈ।

(ii) ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੇ ਪਦ (ਰਾਸ਼ੀ) 'a' ਦੀ ਘਾਤ 1 ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਨਾਲ ਘੱਟਦੀ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਦੂਸਰੇ ਪਦ (ਰਾਸ਼ੀ) 'b' ਦੀ ਘਾਤ 1 ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਨਾਲ ਵੱਧਦੀ ਹੈ, ਹਰ ਇੱਕ ਅੱਗੇ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਪਦ ਲਈ।

(iii) ਪ੍ਰਸਾਰ ਦੇ ਹਰ ਇੱਕ ਪਦ ਵਿੱਚ a ਅਤੇ b ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਇੱਕੋ-ਜਿਹਾ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ $a + b$ ਦੀ ਘਾਤ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ $a + b$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਦੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਪਦਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤਰਤੀਬ ਕਰਦੇ ਹਾਂ (ਚਿੱਤਰ 8.1)

ਘਾਤ ਅੰਕ									
					ਗੁਣਾਂਕ				
0					1				
1				1		1			
2			1		2		1		
3		1		3		3		1	
4	1		4		6		4		1

ਚਿੱਤਰ 8.1

ਕੀ ਅਸੀਂ ਇਸ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਨਮੂਨਾ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਸਾਨੂੰ ਅਗਲੀ ਪੰਗਤੀ ਲਿਖਣ ਵਿੱਚ ਮਦਦ ਕਰੇ ? ਹਾਂ, ਇਹ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਘਾਤ 1 ਦੀ ਪੰਗਤੀ ਵਿੱਚ ਲਿਖੇ 1 ਅਤੇ 1 ਦਾ ਜੋੜ ਘਾਤ 2 ਦੀ ਪੰਗਤੀ ਲਈ 2 ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਘਾਤ 2 ਦੀ ਪੰਗਤੀ ਵਿੱਚ ਲਿਖੇ 1, 2 ਲਈ ਅਤੇ 2, 1 ਦਾ ਜੋੜ ਘਾਤ 3 ਦੀ ਪੰਗਤੀ ਦੇ ਲਈ 3 ਅਤੇ 3 ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੱਗੇ ਵੀ ਘਾਤ 3 ਦੀ ਪੰਗਤੀ ਲਈ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੱਗੇ ਵੀ ਹਰ ਇੱਕ ਪੰਗਤੀ ਦੇ ਸ਼ੁਰੂ ਅਤੇ ਖ਼ਤਮ ਹੋਣ ਤੇ 1 ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਇੱਛਾ ਅਨੁਸਾਰ ਕਿਸੇ ਵੀ ਘਾਤ ਦੇ ਲਈ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 8.2 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਨਮੂਨੇ ਨੂੰ ਕੁਝ ਹੋਰ ਪੰਗਤੀਆਂ ਲਿਖ ਕੇ ਅੱਗੇ ਵਧਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਘਾਤ ਅੰਕ (Index)	ਗੁਣਾਂਕ (Coefficients)
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1

ਚਿੱਤਰ 8.2

ਪਾਸਕਲ ਤ੍ਰਿਭੁਜ (Pascal's Triangle)

ਚਿੱਤਰ 8.2 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਨਮੂਨਾ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਿਖਾਈ ਦਿੰਦਾ ਹੈ, ਜਿਸਦੇ ਉਪਰਲੇ ਸਿਰੇ ਤੇ 1 ਹੈ ਅਤੇ ਦੋ ਤਿਰਛੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨਾਲ ਥੱਲੇ ਨੂੰ ਆ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਇਸ ਰਚਨਾ ਨੂੰ ਪਾਸਕਲ ਦੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ, ਇਹ ਨਾਮ ਫਰਾਂਸੀਸੀ ਗਣਿਤ ਸ਼ਾਸ਼ਤਰੀ Blaise Pascal ਦੇ ਨਾਮ ਤੋਂ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਪਿੰਗਲ ਦਾ ਮੇਰੂ ਪਰਾਸਤਾਰਾ (Meru Prastara) ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਦੋ ਪਦੀ ਦੀਆਂ ਵੱਡੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵੀ ਪਾਸਕਲ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਾਲ ਸੰਭਵ ਹੈ। ਆਉ $(2x + 3y)^5$ ਦਾ ਪ੍ਰਸਾਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ ਕਰੀਏ 1 ਘਾਤ 5 ਨਾਲ ਪੰਗਤੀ ਹੈ :

$$1 \qquad 5 \qquad 10 \qquad 10 \qquad 5 \qquad 1$$

ਇਸ ਪੰਗਤੀ ਅਤੇ ਉੱਪਰ (i), (ii) ਅਤੇ (iii) ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਜਾਂ ਸਿਟਿਆਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਸਾਨੂੰ

$$(2x + 3y)^5 = (2x)^5 + 5(2x)^4 (3y) + 10(2x)^3 (3y)^2 + 10 (2x)^2 (3y)^3 + 5(2x)(3y)^4 + (3y)^5$$

$$= 32x^5 + 240x^4y + 720x^3y^2 + 1080x^2y^3 + 810xy^4 + 243y^5$$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ $(2x + 3y)^{12}$ ਦਾ ਪ੍ਰਸਾਰ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਪਹਿਲਾਂ ਘਾਤ ਅੰਕ 12 ਲਈ ਪੰਗਤੀ ਲਿਖਣੀ ਪਵੇਗੀ। ਇਸ ਨੂੰ ਪਾਸਕਲ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਘਾਤ 12 ਤੱਕ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਪੰਗਤੀਆਂ ਲਿਖ ਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਵੱਡੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਲਈ ਲੰਬੀ ਅਤੇ ਕਠਿਨ ਹੋਵੇਗੀ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇੱਕ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਨਿਯਮ ਲੱਭਣ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਨਾਲ ਪਾਸਕਲ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਵਾਲੀ ਪੰਗਤੀ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਵਾਲੀਆਂ ਪੰਗਤੀਆਂ ਲਿਖੇ ਬਿਨਾਂ ਹੀ ਦੋ ਪਦੀ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਘਾਤ ਦਾ ਪ੍ਰਸਾਰ ਹੋ ਸਕੇ।

ਇਸਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੀ ਧਾਰਨਾ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ, ਪਾਸਕਲ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਵਿੱਚ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਫਿਰ ਤੋਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ${}^nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$, $0 \le r \le n$ ਅਤੇ n ਇੱਕ ਅ-ਰਿਣਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਪਾਸਕਲ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ (ਚਿੱਤਰ 8.3) ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਘਾਤ ਅੰਕ (Index)	ਗੁਣਾਂਕ (Coefficients)
0	${}^0C_0$ (=1)
1	${}^1C_0$ (=1) ${}^1C_1$ (=1)
2	${}^2C_0$ (=1) ${}^2C_1$ (=2) ${}^2C_2$ (=1)
3	${}^3C_0$ (=1) ${}^3C_1$ (=3) ${}^3C_2$ (=3) ${}^3C_3$ (=1)
4	${}^4C_0$ (=1) ${}^4C_1$ (=4) ${}^4C_2$ (=6) ${}^4C_3$ (=4) ${}^4C_4$ (=1)
5	${}^5C_0$ (=1) ${}^5C_1$ (=5) ${}^5C_2$ (=10) ${}^5C_3$ (=10) ${}^5C_4$ (=5) ${}^5C_5$ (=1)

ਚਿੱਤਰ 8.3 ਪਾਸਕਲ ਤ੍ਰਿਭੁਜ

ਉਪਰੋਕਤ ਨਮੂਨੇ ਨੂੰ ਦੇਖਦੇ ਹੋਏ, ਪਹਿਲਾਂ ਦੀਆਂ ਪੰਗਤੀਆਂ ਲਿਖੇ ਬਿਨਾਂ ਹੀ ਅਸੀਂ ਪਾਸਕਲ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਕਿਸੇ ਵੀ ਘਾਤ ਲਈ ਪੰਗਤੀ ਨੂੰ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ’ਤੇ ਘਾਤ 7 ਲਈ ਪੰਗਤੀ

$${}^7C_0 \quad {}^7C_1 \quad {}^7C_2 \quad {}^7C_3 \quad {}^7C_4 \quad {}^7C_5 \quad {}^7C_6 \quad {}^7C_7$$ ਹੋਵੇਗੀ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਸ ਪੰਗਤੀ ਅਤੇ ਸਿੱਟਿਆਂ (i), (ii) ਅਤੇ (iii) ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਸਾਨੂੰ

$(a + b)^7 = {}^7C_0\, a^7 + {}^7C_1 a^6 b + {}^7C_2 a^5 b^2 + {}^7C_3 a^4 b^3 + {}^7C_4 a^3 b^4 + {}^7C_5 a^2 b^5 + {}^7C_6 ab^6 + {}^7C_7 b^7$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਸਿੱਟਿਆਂ ਨੂੰ ਦੇਖਦੇ ਹੋਏ ਇੱਕ ਦੋ ਪਦੀ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਘਾਤ n ਲਈ ਪ੍ਰਸਾਰ ਦਿਖਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਦੋ ਪਦੀ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਘਾਤ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਨੂੰ ਲਿਖਣ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਹਾਂ।

8.2.1 *ਕਿਸੇ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ n ਲਈ ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ (Binomial theorem for any positive integer n)*

$$(a + b)^n = {}^nC_0 a^n + {}^nC_1 a^{n-1} b + {}^nC_2 a^{n-2} b^2 + ...+ {}^nC_{n-1} a.b^{n-1} + {}^nC_n b^n$$

ਸਬੂਤ : ਇਸ ਪਰਿਮੇਯ ਦਾ ਸਬੂਤ ਗਣਿਤਿਕ ਨਿਗਮਨ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਓ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਕਥਨ P(n) ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ :

$$P(n) : (a + b)^n = {}^nC_0 a^n + {}^nC_1 a^{n-1} b + {}^nC_2 a^{n-2} b^2 + ...+ {}^nC_{n-1} a.b^{n-1} + {}^nC_n b^n$$

$n = 1$ ਲਈ

$$P(1) : (a + b)^1 = {}^1C_0 a^1 + {}^1C_1 b^1 = a + b$$

ਇਸ ਲਈ P(1) ਸੱਚ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿਸੇ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ k ਲਈ P(k) ਸੱਚ (ਠੀਕ) ਹੈ,

ਭਾਵ $(a + b)^k = {}^kC_0 a^k + {}^kC_1 a^{k-1} b + {}^kC_2 a^{k-2} b^2 + ...+ {}^kC_k b^k$ ... (1)

ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ P(k + 1) ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ, ਭਾਵ

$$(a + b)^{k+1} = {}^{k+1}C_0\, a^{k+1} + {}^{k+1}C_1\, a^k b + {}^{k+1}C_2\, a^{k-1} b^2 + ...+ {}^{k+1}C_{k+1}\, b^{k+1}$$

ਹੁਣ $(a + b)^{k+1} = (a + b)\,(a + b)^k$

$= (a + b)\,({}^kC_0\, a^k + {}^kC_1 a^{k-1}\, b + {}^kC_2\, a^{k-2}\, b^2 +...+ {}^kC_{k-1}\, ab^{k-1} + {}^kC_k\, b^k)$ [(1) ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ]

$= {}^kC_0\, a^{k+1} + {}^kC_1\, a^k b + {}^kC_2 a^{k-1} b^2 +...+ {}^kC_{k-1}\, a^2 b^{k-1} + {}^kC_k\, ab^k + {}^kC_0\, a^k b$

$+ {}^kC_1 a^{k-1} b^2 + {}^kC_2 a^{k-2} b^3 +...+ {}^kC_{k-1} ab^k + {}^kC_k b^{k+1}$ [ਅਸਲ ਗੁਣਾ ਨਾਲ]

$$= {}^kC_0a^{k+1} + ({}^kC_1 + {}^kC_0)\, a^kb + ({}^kC_2 + {}^kC_1)a^{k-1}b^2 + \ldots + ({}^kC_k + {}^kC_{k-1})\, ab^k + {}^kC_kb^{k+1}$$

[ਇੱਕੋ-ਜਿਹੇ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਇਕੱਠਾ ਕਰਕੇ]

$$= {}^{k+1}C_0a^{k+1} + {}^{k+1}C_1a^kb + {}^{k+1}C_2\, a^{k-1}b^2 + \ldots + {}^{k+1}C_kab^k + {}^{k+1}C_{k+1}\, b^{k+1}$$

(${}^{k+1}C_0=1$, ${}^kC_r + {}^kC_{r-1} = {}^{k+1}C_r$ ਅਤੇ ${}^kC_k = 1 = {}^{k+1}C_{k+1}$ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ)

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ ਸਿੱਧ ਹੋ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਜਦੋਂ P(k) ਸੱਚ (ਠੀਕ) ਹੈ ਤਾਂ P(k + 1) ਵੀ ਸੱਚ (ਠੀਕ) ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਗਣਿਤਿਕ ਨਿਗਮਨ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਤੋਂ P(n) ਹਰ ਇੱਕ ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ n ਲਈ ਸੱਚ (ਠੀਕ) ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨੂੰ ਅਸੀਂ $(x + 2)^6$ ਦਾ ਪ੍ਰਸਾਰ ਕਰਕੇ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰਾਂਗੇ :

$$(x + 2)^6 = {}^6C_0x^6 + {}^6C_1x^5.2 + {}^6C_2x^42^2 + {}^6C_3x^3.2^3 + {}^6C_4x^2.2^4 + {}^6C_5x.2^5 + {}^6C_6.2^6$$

$$= x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64$$

ਇਸ ਲਈ $(x + 2)^6 = x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64$

ਸਿੱਟੇ (Observations)

1. ਸੰਕੇਤ $\sum_{k=0}^{n} {}^nC_k\, a^{n-k}b^k$ ਤੋਂ ਭਾਵ

${}^nC_0a^nb^0 + {}^nC_1a^{n-1}b^1 + \ldots + {}^nC_ra^{n-r}b^r + \ldots + {}^nC_na^{n-n}b^n$ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $b^0 = 1 = a^{n-n}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੀ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}^nC_k\, a^{n-k}b^k$$

2. ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਵਿੱਚ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ (coefficients) ${}^nC_r$ ਨੂੰ ਦੋ ਪਦੀ ਗੁਣਾਂਕ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

3. $(a+b)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਪਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ (n + 1) ਭਾਵ ਘਾਤ ਅੰਕ ਤੋਂ ਇੱਕ ਵੱਧ ਹੋਵੇਗੀ।

4. ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਅੱਗੇ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ a ਦੀ ਘਾਤ 1 ਨਾਲ ਘੱਟਦੀ ਜਾਵੇਗੀ। ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਵਿੱਚ ਇਹ n ਦੂਸਰੇ ਵਿੱਚ (n–1) ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੱਗੇ ਵੀ ਅੰਤਿਮ ਪਦ ਵਿੱਚ ਇਹ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਵੇਗੀ। ਇਸੇ ਸਮੇਂ ਹੀ b ਦੀ ਘਾਤ ਇੱਕ ਨਾਲ ਵੱਧਦੀ ਜਾਵੇਗੀ। ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਵਿੱਚ 0 ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋ ਕੇ, ਦੂਸਰੇ ਵਿੱਚ 1 ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੱਗੇ ਵੀ, ਅੰਤਿਮ ਪਦ ਵਿੱਚ ਇਹ n ਹੋਵੇਗੀ।

5. $(a+b)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ, a ਅਤੇ b ਦੇ ਘਾਤ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਵਿੱਚ $n + 0 = n$ ਦੂਸਰੇ ਪਦ ਵਿੱਚ $(n - 1) + 1 = n$ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਗਲੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਅੰਤਿਮ ਪਦ ਵਿੱਚ $0 + n = n$ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ a ਅਤੇ b ਦੇ ਘਾਤ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪ੍ਰਸਾਰ ਦੇ ਹਰ ਇੱਕ ਪਦ ਵਿੱਚ n ਹੋਵੇਗਾ।

8.2.2 *$(a + b)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸਥਿਤੀਆਂ (Some special cases)*

(i) $a = x$ ਅਤੇ $b = -y$ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ

$$(x - y)^n = [x + (-y)]^n$$

$$= {}^nC_0x^n + {}^nC_1x^{n-1}(-y) + {}^nC_2x^{n-2}(-y)^2 + {}^nC_3x^{n-3}(-y)^3 + \ldots + {}^nC_n\,(-y)^n$$

$$= {}^nC_0x^n - {}^nC_1x^{n-1}y + {}^nC_2x^{n-2}y^2 - {}^nC_3x^{n-3}y^3 + \ldots + (-1)^n\, {}^nC_n\, y^n$$

ਇਸ ਲਈ $(x - y)^n = {}^nC_0x^n - {}^nC_1x^{n-1}y + {}^nC_2x^{n-2}y^2 + \ldots + (-1)^n\, {}^nC_n\, y^n$

ਇਸ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ

$$(x - 2y)^5 = {}^5C_0x^5 - {}^5C_1x^4(2y) + {}^5C_2x^3(2y)^2 - {}^5C_3x^2(2y)^3 + {}^5C_4\, x(2y)^4 - {}^5C_5(2y)^5$$

$$= x^5 - 10x^4y + 40x^3y^2 - 80x^2y^3 + 80xy^4 - 32y^5$$

(ii) $a = 1$ ਅਤੇ $b = x$ ਲੈ ਕੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$(1 + x)^n = {}^nC_0(1)^n + {}^nC_1(1)^{n-1}x + {}^nC_2(1)^{n-2}x^2 + \ldots + {}^nC_nx^n$$

$$= {}^nC_0 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + {}^nC_3x^3 + ... + {}^nC_nx^n$$

ਇਸ ਲਈ $(1 + x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + {}^nC_3x^3 + ... + {}^nC_nx^n$

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ $x = 1$ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$2^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + ... + {}^nC_n$$

(iii) $a = 1$ ਅਤੇ $b = -x$ ਲੈਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$(1-x)^n = {}^nC_0 - {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 - ... + (-1)^n\, {}^nC_nx^n$$

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ $x = 1$ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$0 = {}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - ... + (-1)^n\, {}^nC_n$$

ਉਦਾਹਰਣ 1 : $\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^4$, $x \neq 0$ ਦਾ ਪ੍ਰਸਾਰ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^4 = {}^4C_0(x^2)^4 + {}^4C_1(x^2)^3\left(\frac{3}{x}\right) + {}^4C_2(x^2)^2\left(\frac{3}{x}\right)^2 + {}^4C_3(x^2)\left(\frac{3}{x}\right)^3 + {}^4C_4\left(\frac{3}{x}\right)^4$$

$$= x^8 + 4.x^6 . \frac{3}{x} + 6.x^4 . \frac{9}{x^2} + 4.x^2.\frac{27}{x^3} + \frac{81}{x^4}$$

$$= x^8 + 12x^5 + 54x^2 + \frac{108}{x} + \frac{81}{x^4}$$

ਉਦਾਹਰਣ 2 : $(98)^5$ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ 98 ਨੂੰ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਜਾਂ ਅੰਤਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਾਂਗੇ, ਜਿਨ੍ਹਾ ਦਾ ਘਾਤ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਅਸਾਨ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਫਿਰ ਅਸੀਂ ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਾਂਗੇ।

$98 = (100 - 2)$ ਲਿਖੋ

ਹੁਣ $(98)^5 = (100 - 2)^5$

$$= {}^5C_0\,(100)^5 - {}^5C_1\,(100)^4.2 + {}^5C_2\,(100)^3 2^2 - {}^5C_3\,(100)^2\,(2)^3 + {}^5C_4\,(100)\,(2)^4 - {}^5C_5\,(2)^5$$

$$= 10000000000 - 5 \times 100000000 \times 2 + 10 \times 1000000 \times 4 - 10 \times 10000 \times 8 + 5 \times 100 \times 16 - 32$$

$$= 10040008000 - 1000800032 = 9039207968$$

ਉਦਾਹਰਣ 3 : $(1.01)^{1000000}$ ਜਾਂ 10,000 ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀ ਸੰਖਿਆ ਵੱਡੀ ਹੈ ?

ਹੱਲ : 1.01 ਨੂੰ ਦੋ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਕੇ ਅਤੇ ਫਿਰ ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਪਹਿਲੇ ਕੁਝ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਲਿਖ ਕੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$(1.01)^{1000000} = (1 + 0.01)^{1000000}$

$= {}^{1000000}C_0 + {}^{1000000}C_1(0.01)$ + ਹੋਰ ਧਨਾਤਮਕ ਪਦ

$= 1 + 1000000 \times 0.01$ + ਹੋਰ ਧਨਾਤਮਕ ਪਦ

$= 1 + 10000$ + ਹੋਰ ਧਨਾਤਮਕ ਪਦ

> 10000

ਇਸ ਲਈ $(1.01)^{1000000} > 10000$

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $6^n - 5n$ ਨੂੰ ਜਦੋਂ 25 ਨਾਲ ਭਾਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਹਮੇਸ਼ਾ 1 ਬਾਕੀ ਬੱਚਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਲਈ, ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ q ਅਤੇ r ਲੱਭ ਸਕੀਏ ਤਾਂ ਜੋ $a = bq + r$, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ a ਨੂੰ b ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ ਤੇ q ਭਾਗਫਲ ਅਤੇ r ਬਾਕੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿ $6^n - 5n$ ਨੂੰ 25 ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ 'ਤੇ 1 ਬਾਕੀ ਬੱਚਦਾ ਹੈ, ਸਾਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਪਵੇਗਾ, $6^n - 5n = 25k + 1$, ਜਿੱਥੇ k ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ

$$(1 + a)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 a + {}^nC_2 a^2 + \ldots + {}^nC_n a^n$$

$a = 5$ ਰੱਖਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

$$(1 + 5)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 5 + {}^nC_2 5^2 + \ldots + {}^nC_n 5^n$$

ਜਾਂ $$(6)^n = 1 + 5n + 5^2.{}^nC_2 + 5^3.{}^nC_3 + \ldots + 5^n$$

ਜਾਂ $$6^n - 5n = 1 + 5^2 ({}^nC_2 + {}^nC_3 5 + \ldots + 5^{n-2})$$

ਜਾਂ $$6^n - 5n = 1 + 25 ({}^nC_2 + 5\,.{}^nC_3 + \ldots + 5^{n-2})$$

ਜਾਂ $$6^n - 5n = 25k + 1 \quad \text{ਜਿੱਥੇ} \quad k = {}^nC_2 + 5\,.{}^nC_3 + \ldots + 5^{n-2}.$$

ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ $6^n - 5n$ ਨੂੰ 25 ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਬਾਕੀ 1 ਬੱਚਦਾ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 8.1

ਅਭਿਆਸ 1 ਤੋਂ 5 ਤੱਕ ਹਰ ਇੱਕ ਵਿਅੰਜਕ ਦਾ ਪ੍ਰਸਾਰ ਕਰੋ :

1. $(1 - 2x)^5$ **2.** $\left(\frac{2}{x} - \frac{x}{2}\right)^5$ **3.** $(2x - 3)^6$ **4.** $\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{x}\right)^5$

5. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$

ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

6. $(96)^3$ **7.** $(102)^5$ **8.** $(101)^4$ **9.** $(99)^5$

10. ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਦੱਸੋ ਕਿ $(1.1)^{10000}$ ਅਤੇ 1000 ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀ ਸੰਖਿਆ ਵੱਡੀ ਹੈ।

11. $(a + b)^4 - (a - b)^4$ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇਸ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^4 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^4$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ?

12. $(x + 1)^6 + (x - 1)^6$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇਸਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਜਾਂ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ $(\sqrt{2} + 1)^6 + (\sqrt{2} - 1)^6$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

13. ਦਿਖਾਉ ਕਿ $9^{n+1} - 8n - 9$, 64 ਨਾਲ ਭਾਗਯੋਗ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ n ਇੱਕ ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

14. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\sum_{r=0}^{n} 3^r \, {}^nC_r = 4^n$

8.3 ਆਮ ਜਾਂ ਵਿਆਪਕ ਅਤੇ ਮੱਧ ਪਦ (General and Middle Terms)

1. ਦੋ ਪਦੀ $(a + b)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਪਹਿਲਾ ਪਦ ${}^nC_0 a^n$, ਦੂਸਰਾ ਪਦ ${}^nC_1 a^{n-1} b$, ਤੀਸਰਾ ਪਦ ${}^nC_2 a^{n-2} b^2$ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੱਗੇ ਵੀ। ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਪਦਾਂ ਦੇ ਨਮੂਨੇ ਨੂੰ ਦੇਖਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $(r + 1)$ਵਾਂ ਪਦ ${}^nC_r a^{n-r} b^r$ ਹੋਵੇਗਾ। $(r + 1)$ਵਾਂ ਪਦ ਨੂੰ ਅਸੀਂ $(a + b)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਪਦ ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਨੂੰ T_{r+1} ਨਾਲ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $T_{r+1} = {}^nC_r \, a^{n-r} b^r$

2. $(a + b)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਦੇ ਮੱਧ ਪਦ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ :

(i) ਜੇਕਰ n ਜਿਸਤ ਹੈ, ਤਾਂ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਪਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $n + 1$ ਹੋਵੇਗੀ। ਕਿਉਂਕਿ n ਜਿਸਤ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $n + 1$ ਟਾਂਕ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ ਮੱਧ ਪਦ $\left(\frac{n+1+1}{2}\right)$ਵਾਂ ਭਾਵ $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ਵਾਂ ਪਦ ਹੋਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ $(x + 2y)^8$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਮੱਧ ਪਦ $\left(\frac{8}{2}+1\right)$ਵਾਂ ਭਾਵ 5ਵਾਂ ਪਦ ਹੋਵੇਗਾ।

(ii) ਜੇਕਰ n ਟਾਂਕ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $n + 1$ ਜਿਸਤ ਹੋਵੇਗਾ, ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਦੋ ਮੱਧ ਪਦ ਹੋਣਗੇ, ਜੋ $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ਵਾਂ ਅਤੇ $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)$ਵਾਂ ਪਦ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $(2x - y)^7$, ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿਚੱ ਦੋ ਮੱਧ ਪਦ ਹਨ ਜਿਹੜੇ ਕਿ $\left(\frac{7+1}{2}\right)$ਵਾਂ ਭਾਵ 4 ਅਤੇ $\left(\frac{7+1}{2}+1\right)$ਵਾਂ ਭਾਵ 5ਵਾਂ ਪਦ ਹਨ।

3. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}$, ਜਿੱਥੇ $x \neq 0$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ $\left(\frac{2n+1+1}{2}\right)$ਵਾਂ ਪਦ, ਮੱਧ ਪਦ ਹੈ ਭਾਵ $(n + 1)$ਵਾਂ ਪਦ, ਕਿਉਂਕਿ $2n$ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਹ ${}^{2n}C_n x^n \left(\frac{1}{x}\right)^n = {}^{2n}C_n$ (ਅਚੱਲ) ਹੋਵੇਗਾ।

ਇਸ ਪਦ ਨੂੰ x ਤੋਂ ਸੁਤੰਤਰ ਪਦ ਜਾਂ ਅਚੱਲ ਪਦ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : a ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ $(2 + a)^{50}$ ਦੇ ਵਿਸਤ੍ਰਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ 17ਵਾਂ ਅਤੇ 18ਵਾਂ ਪਦ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : $(x + y)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ $(r + 1)$ਵਾਂ ਪਦ ਹੈ $T_{r+1} = {}^nC_r x^{n-r} y^r$

17ਵੇਂ ਪਦ ਲਈ, $r + 1 = 17$ ਭਾਵ $r = 16$ ਹੋਵੇਗਾ।

ਇਸ ਲਈ $T_{17} = T_{16+1} = {}^{50}C_{16}\,(2)^{50-16}\,a^{16}$

$= {}^{50}C_{16}\,2^{34}\,a^{16}.$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $T_{18} = {}^{50}C_{17}\,2^{33}\,a^{17}$

ਦਿੱਤਾ ਹੈ $T_{17} = T_{18}$

ਇਸ ਲਈ ${}^{50}C_{16}\,(2)^{34}\,a^{16} = {}^{50}C_{17}\,(2)^{33}\,a^{17}$

ਇਸ ਤੋਂ $$\frac{{}^{50}C_{16}.2^{34}}{{}^{50}C_{17}.2^{33}} = \frac{a^{17}}{a^{16}}$$

ਭਾਵ $$a = \frac{{}^{50}C_{16} \times 2}{{}^{50}C_{17}} = \frac{50!}{16!\,34!} \times \frac{17!\,.\,33!}{50!} \times 2 = 1$$

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਦਿਖਾਉ ਕਿ $(1 + x)^{2n}$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ $\frac{1.3.5...(2n-1)}{n!} 2^n x^n$ ਮੱਧ ਪਦ ਹੋਵੇਗਾ, ਜਿੱਥੇ n ਇੱਕ ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $2n$ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $(1 + x)^{2n}$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ $\left(\frac{2n}{2}+1\right)$ਵਾਂ ਪਦ ਭਾਵ $(n + 1)$ਵਾਂ ਪਦ ਮੱਧ ਪਦ ਹੋਵੇਗਾ, ਜੋ ਕਿ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ;

$$T_{n+1} = {}^{2n}C_n (1)^{2n-n}(x)^n = {}^{2n}C_n x^n = \frac{(2n)!}{n!\ n!} x^n$$

$$= \frac{2n\,(2n-1)\ (2n-2)\ ...4.3.2.1}{n!\ n!} x^n$$

$$= \frac{1.2.3.4...(2n-2)\,(2n-1)\,(2n)}{n!n!} x^n$$

$$= \frac{[1.3.5...(2n-1)][2.4.6...(2n)]}{n!n!} x^n$$

$$= \frac{[1.3.5...(2n-1)]2^n\,[1.2.3...n]}{n!n!} x^n$$

$$= \frac{[1.3.5...(2n-1)]\,n!}{n!\ n!} 2^n . x^n$$

$$= \frac{1.3.5...(2n-1)}{n!} 2^n x^n$$

ਉਦਾਹਰਣ 7 : $(x + 2y)^9$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ x^6y^3 ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $(x + 2y)^9$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ x^6y^3, $(r + 1)$ਵਾਂ ਪਦ ਵਿੱਚ ਆਉਂਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ $T_{r+1} = {}^9C_r\, x^{9-r}\,(2y)^r = {}^9C_r\, 2^r . x^{9-r} . y^r$.

T_{r+1} ਅਤੇ x^6y^3 ਵਿੱਚ x ਅਤੇ y ਦੇ ਘਾਤ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ $r = 3$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, x^6y^3 ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ

$${}^9C_3\, 2^3 = \frac{9!}{3!\,6!}.2^3 = \frac{9.8.7}{3.2}.2^3 = 672$$

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਸਾਰ $(x + a)^n$ ਵਿੱਚ ਦੂਸਰਾ, ਤੀਸਰਾ ਅਤੇ ਚੌਥਾ ਪਦ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 240, 720 ਅਤੇ 1080 ਹੈ। x, a ਅਤੇ n ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ, ਦੂਸਰਾ ਪਦ $T_2 = 240$

ਪਰ $T_2 = {}^nC_1 x^{n-1} . a$

ਇਸ ਲਈ ${}^nC_1 x^{n-1} . a = 240$ ... (1)

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ${}^nC_2 x^{n-2} a^2 = 720$ ... (2)

ਅਤੇ ${}^nC_3 x^{n-3} a^3 = 1080$ ... (3)

(2) ਨੂੰ (1) ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$\frac{{}^nC_2 x^{n-2} a^2}{{}^nC_1 x^{n-1} a} = \frac{720}{240} \quad \text{ਭਾਵ} \quad \frac{(n-1)!}{(n-2)!} \cdot \frac{a}{x} = 6$$

ਜਾਂ $$\frac{a}{x} = \frac{6}{(n-1)} \qquad \text{... (4)}$$

(3) ਨੂੰ (2) ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$\frac{a}{x} = \frac{9}{2(n-2)} \qquad \text{... (5)}$$

(4) ਅਤੇ (5) ਤੋਂ

$$\frac{6}{n-1} = \frac{9}{2(n-2)} \qquad \text{ਇਸ ਲਈ } n = 5$$

ਹੁਣ (1) ਤੋਂ $5x^4 a = 240$, ਅਤੇ (4) ਤੋਂ $\frac{a}{x} = \frac{3}{2}$

a ਅਤੇ x ਲਈ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ $x = 2$ ਅਤੇ $a = 3$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : $(1 + a)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਲਗਾਤਾਰ ਪਦਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ 1 : 7 : 42 ਹੈ, n ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ $(1 + a)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਦੇ ਤਿੰਨ ਲਗਾਤਾਰ $(r - 1)$ਵਾਂ, rਵਾਂ ਅਤੇ $(r + 1)$ਵਾਂ ਪਦ ਹਨ। $(r - 1)$ਵਾਂ ਪਦ ${}^nC_{r-2}\, a^{r-2}$, ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਗੁਣਾਂਕ ${}^nC_{r-2}$ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ rਵੇਂ ਅਤੇ $(r + 1)$ਵੇਂ ਪਦ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ${}^nC_{r-1}$ ਅਤੇ ${}^nC_r$ ਹੋਵੇਗਾ।

ਕਿਉਂਕਿ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ 1 : 7 : 42 ਹੈ, ਇਸ ਲਈ

$$\frac{{}^nC_{r-2}}{{}^nC_{r-1}} = \frac{1}{7}, \text{ ਭਾਵ } n - 8r + 9 = 0 \qquad \text{... (1)}$$

ਅਤੇ $$\frac{{}^nC_{r-1}}{{}^nC_r} = \frac{7}{42}, \text{ ਭਾਵ } n - 7r + 1 = 0 \qquad \text{... (2)}$$

(1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ $n = 55$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 8.2

ਗੁਣਾਂਕ ਪਤਾ ਕਰੋ :

1. x^5 ਦਾ $(x + 3)^8$ ਵਿੱਚ

2. a^5b^7 ਦਾ $(a - 2b)^{12}$ ਵਿੱਚ

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਦੋ ਪਦੀ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰਾਂ ਵਿੱਚ ਵਿਆਪਕ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ :

3. $(x^2 - y)^6$

4. $(x^2 - yx)^{12}, x \neq 0$

5. $(x - 2y)^{12}$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚੋਂ ਚੌਥਾ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

6. $\left(9x - \frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18}$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚੋਂ 13ਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿੱਥੇ $x \neq 0$

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਦੋ ਪਦੀ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰਾਂ ਵਿੱਚ ਮੱਧ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ :

7. $\left(3-\frac{x^3}{6}\right)^7$ **8.** $\left(\frac{x}{3}+9y\right)^{10}$

9. $(1 + a)^{m+n}$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ a^m ਅਤੇ a^n ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਬਰਾਬਰ ਹਨ।

10. $(x + 1)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ $(r – 1)$ਵੇਂ, rਵੇਂ ਅਤੇ $(r + 1)$ਵੇਂ ਪਦਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ 1 : 3 : 5 ਹੈ, n ਅਤੇ r ਪਤਾ ਕਰੋ।

11. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $(1 + x)^{2n}$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ x^n ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ, $(1 + x)^{2n-1}$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ x^n ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਤੋਂ ਦੋ ਗੁਣਾ ਹੈ।

12. m ਦਾ ਧਨਾਤਮਕ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ $(1 + x)^m$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ x^2 ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ 6 ਹੋਵੇ।

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 10 : $\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3x}\right)^6$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ x ਤੋਂ ਸੁਤੰਤਰ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ $\quad T_{r+1} = {}^6C_r\left(\frac{3}{2}x^2\right)^{6-r}\left(-\frac{1}{3x}\right)^r$

$$= {}^6C_r\left(\frac{3}{2}\right)^{6-r}\left(x^2\right)^{6-r}(-1)^r\left(\frac{1}{x}\right)^r\left(\frac{1}{3^r}\right)$$

$$= (-1)^r\ {}^6C_r\ \frac{(3)^{6-2r}}{(2)^{6-r}}\ x^{12-3r}$$

x ਤੋਂ ਸੁਤੰਤਰ ਪਦ ਲਈ x ਦਾ ਘਾਤ ਅੰਕ 0 ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਭਾਵ $12 – 3r = 0$, ਇਸ ਲਈ $r = 4$

ਇਸ ਲਈ 5ਵਾਂ ਪਦ x ਤੋਂ ਸੁਤੰਤਰ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ $(-1)^4\ {}^6C_4\ \frac{(3)^{6-8}}{(2)^{6-4}} = \frac{5}{12}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 11 : ਜੇਕਰ $(1 + a)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ a^{r-1}, a^r ਅਤੇ a^{r+1} ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਵਿੱਚ ਹੋਣ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ $n^2 – n(4r + 1) + 4r^2 – 2 = 0$

ਹੱਲ : $(1 + a)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ $(r + 1)$ਵਾਂ ਪਦ ${}^nC_r a^r$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ a^r, $(r + 1)$ਵੇਂ ਪਦ ਵਿੱਚ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਗੁਣਾਂਕ ${}^nC_r$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ a^{r-1}, a^r ਅਤੇ a^{r+1} ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ${}^nC_{r-1}$, ${}^nC_r$ ਅਤੇ ${}^nC_{r+1}$ ਹੋਣਗੇ। ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਗੁਣਾਂਕ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਵਿੱਚ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ${}^nC_{r-1} + {}^nC_{r+1} = 2.{}^nC_r$ ਹੋਵੇਗਾ, ਇਸ ਤੋਂ

$$\frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}+\frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!} = 2\times\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ਭਾਵ
$$\frac{1}{(r-1)!(n-r+1)(n-r)(n-r-1)!}+\frac{1}{(r+1)(r)(r-1)!(n-r-1)!}$$

$$=2\times\frac{1}{r(r-1)!(n-r)(n-r-1)!}$$

ਜਾਂ $\dfrac{1}{(r-1)!\ (n-r-1)!}\left[\dfrac{1}{(n-r)\,(n-r+1)}+\dfrac{1}{(r+1)\ \ (r)}\right]$

$$= 2\times\frac{1}{(r-1)!\ (n-r-1)![r(n-r)]}$$

ਭਾਵ $\dfrac{1}{(n-r+1)(n-r)}+\dfrac{1}{r(r+1)}=\dfrac{2}{r(n-r)},$

ਜਾਂ $\dfrac{r(r+1)+(n-r)(n-r+1)}{(n-r)(n-r+1)r(r+1)}=\dfrac{2}{r(n-r)}$

ਜਾਂ $r(r+1)+(n-r)(n-r+1)=2(r+1)(n-r+1)$

ਜਾਂ $r^2+r+n^2-nr+n-nr+r^2-r=2(nr-r^2+r+n-r+1)$

ਜਾਂ $n^2-4nr-n+4r^2-2=0$

ਭਾਵ $n^2-n(4r+1)+4r^2-2=0$

ਉਦਾਹਰਣ 12 : ਦਿਖਾਉ ਕਿ $(1+x)^{2n}$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਮੱਧ ਪਦ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ $(1+x)^{2n-1}$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਦੇ ਦੋ ਮੱਧ ਪਦਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇਗਾ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $2n$ ਜਿਸਤ ਹੈ ਇਸ ਲਈ $(1+x)^{2n}$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਹੀ ਮੱਧ ਪਦ ਹੋਵੇਗਾ ਜੋ ਕਿ $\left(\dfrac{2n}{2}+1\right)$ਵਾਂ ਭਾਵ $(n+1)$ਵਾਂ ਪਦ ਹੈ।

$(n+1)$ਵਾਂ ਪਦ ${}^{2n}C_n x^n$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ x^n ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ ${}^{2n}C_n$ ਹੈ।

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $(2n-1)$ ਟਾਂਕ ਹੈ, ਦੂਸਰੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਦੋ ਮੱਧ ਪਦ ਹੋਣਗੇ, $\left(\dfrac{2n-1+1}{2}\right)$ਵਾਂ ਅਤੇ $\left(\dfrac{2n-1+1}{2}+1\right)$ਵਾਂ ਭਾਵ nਵਾਂ ਅਤੇ $(n+1)$ਵਾਂ ਪਦ। ਇਹਨਾਂ ਪਦਾਂ ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਗੁਣਾਂਕ ${}^{2n-1}C_{n-1}$ ਅਤੇ ${}^{2n-1}C_n$ ਹਨ।

ਹੁਣ

${}^{2n-1}C_{n-1}+{}^{2n-1}C_n={}^{2n}C_n$ [ਕਿਉਂਕਿ ${}^{n}C_{r-1}+{}^{n}C_r={}^{n+1}C_r$] ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਲੋੜੀਂਦਾ ਸੀ।

ਉਦਾਹਰਣ 13 : $(1+2a)^4(2-a)^5$ ਦੀ ਗੁਣਾ ਵਿੱਚ a^4 ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ, ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨੂੰ ਵਰਤਦੇ ਹੋਏ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਗੁਣਾ ਵਿੱਚ ਹਰ ਇੱਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਦਾ ਪ੍ਰਸਾਰ ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਕਰਾਂਗੇ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ :

$$(1+2a)^4 = {}^4C_0+{}^4C_1(2a)+{}^4C_2(2a)^2+{}^4C_3(2a)^3+{}^4C_4(2a)^4$$
$$= 1+4(2a)+6(4a^2)+4(8a^3)+16a^4$$
$$= 1+8a+24a^2+32a^3+16a^4$$

ਅਤੇ $(2-a)^5 = {}^5C_0(2)^5-{}^5C_1(2)^4(a)+{}^5C_2(2)^3(a)^2-{}^5C_3(2)^2(a)^3+{}^5C_4(2)(a)^4-{}^5C_5(a)^5$
$$= 32-80a+80a^2-40a^3+10a^4-a^5$$

ਇਸ ਲਈ $(1+2a)^4(2-a)^5$

$$= (1+8a+24a^2+32a^3+16a^4)(32-80a+80a^2-40a^3+10a^4-a^5)$$

ਸਾਨੂੰ ਦੋਹਾਂ ਦੀ ਪੂਰੀ ਗੁਣਾਂ ਕਰਨ ਅਤੇ ਸਾਰੇ ਪਦ ਲਿਖਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਨਹੀਂ। ਅਸੀਂ ਸਿਰਫ ਉਹ ਹੀ ਪਦ ਲਿਖਾਂਗੇ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ a^4 ਆਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ $a^r.\ a^{4-r}=a^4$ ਇਸ ਲਈ ਉਹ ਪਦ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ a^4 ਆਉਂਦਾ ਹੈ, ਉਹ ਹਨ : $1(10a^4)+(8a)(-40a^3)+(24a^2)(80a^2)+(32a^3)(-80a)+(16a^4)(32)=-438a^4$

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਗੁਣਨਫਲ ਵਿੱਚ a^4 ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ -438 ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 14 : $(x + a)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਅੰਤ ਵਾਲੇ ਪਾਸੇ ਤੋਂ rਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $(x + a)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ $(n + 1)$ ਪਦ ਹੋਣਗੇ। ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਦੇਖਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅੰਤ ਵਾਲੇ ਪਾਸੇ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾ ਪਦ, ਅੰਤਿਮ ਪਦ ਹੈ ਭਾਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ $(n + 1)$ਵਾਂ ਪਦ ਹੈ ਅਤੇ $n + 1 = (n + 1) - (1 - 1)$। ਅੰਤ ਵਾਲੇ ਪਾਸੇ ਤੋਂ ਦੂਸਰਾ ਪਦ, ਪ੍ਰਸਾਰ ਦਾ nਵਾਂ ਪਦ ਹੈ ਅਤੇ $n = (n + 1) - (2 - 1)$। ਅੰਤ ਵਾਲੇ ਪਾਸੇ ਤੋਂ ਤੀਸਰਾ ਪਦ ਪ੍ਰਸਾਰ ਦਾ $(n - 1)$ਵਾਂ ਪਦ ਹੈ ਅਤੇ $n - 1 = (n + 1) - (3 - 1)$ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ ਅੰਤ ਵਾਲੇ ਪਾਸੇ ਤੋਂ rਵਾਂ ਪਦ, ਪ੍ਰਸਾਰ ਦਾ $(n + 1) - (r - 1) = (n - r + 2)$ਵਾਂ ਪਦ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ $(n - r + 2)$ਵਾਂ ਪਦ ${}^nC_{n-r+1}\, x^{r-1} a^{n-r+1}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 15 : $\left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^{18}$, $x > 0$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ x ਤੋਂ ਸੁਤੰਤਰ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਪ੍ਰਸਾਰ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਪਦ $T_{r+1} = {}^{18}C_r \left(\sqrt[3]{x}\right)^{18-r} \left(\dfrac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^r$

$$= {}^{18}C_r\, x^{\frac{18-r}{3}} \cdot \frac{1}{2^r . x^{\frac{r}{3}}} = {}^{18}C_r \frac{1}{2^r} . x^{\frac{18-2r}{3}} \text{ ਹੈ।}$$

ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ x ਤੋਂ ਸੁਤੰਤਰ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ, ਭਾਵ ਉਹ ਪਦ ਜਿਸ ਵਿੱਚ x ਨਾਂ ਹੋਵੇ ਅਸੀਂ $\dfrac{18-2r}{3} = 0$ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ $r = 9$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦਾ ਪਦ ${}^{18}C_9 \dfrac{1}{2^9}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 16 : $\left(x - \dfrac{3}{x^2}\right)^m$, $x \neq 0$, ਤੇ m ਪ੍ਰਾਕਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੇ ਤਿੰਨ ਪਦਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 559 ਹੈ। ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ x^3 ਵਾਲਾ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $\left(x - \dfrac{3}{x^2}\right)^m$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੇ ਤਿੰਨ ਪਦਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ, ${}^mC_0$, $(-3)\ {}^mC_1$ ਅਤੇ $9\ {}^mC_2$ ਹਨ। ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸ਼ਰਤ ਅਨੁਸਾਰ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

${}^mC_0 - 3\ {}^mC_1 + 9\ {}^mC_2 = 559$, ਭਾਵ $1 - 3m + \dfrac{9m(m-1)}{2} = 559$

ਜਿਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ $m = 12$ ਮਿਲਦਾ ਹੈ (ਕਿਉਂਕਿ m ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ)

ਹੁਣ $$T_{r+1} = {}^{12}C_r\, x^{12-r} \left(-\frac{3}{x^2}\right)^r = {}^{12}C_r (-3)^r \cdot x^{12-3r}$$

ਕਿਉਂਕਿ ਸਾਨੂੰ ਉਸ x^3 ਪਦ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $12 - 3r = 3$ ਲਉ ਇਸ ਤੋਂ $r = 3$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦਾ ਪਦ ${}^{12}C_3 (-3)^3 x^3$, ਭਾਵ $- 5940\, x^3$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 17 : $(1 + x)^{34}$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ $(r - 5)$ਵੇਂ ਅਤੇ $(2r - 1)$ਵੇਂ ਪਦਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਬਰਾਬਰ ਹਨ। r ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $(1 + x)^{34}$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ $(r - 5)$ਵੇਂ ਅਤੇ $(2r - 1)$ਵੇਂ ਪਦ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ${}^{34}C_{r-6}$ ਅਤੇ ${}^{34}C_{2r-2}$ ਹਨ। ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਦੋਵੇਂ ਬਰਾਬਰ ਦਿੱਤੇ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ${}^{34}C_{r-6} = {}^{34}C_{2r-2}$ ਇਸ ਤੋਂ

ਜਾਂ ਤਾਂ $r - 6 = 2r - 2$ ਜਾਂ $r - 6 = 34 - (2r - 2)$

[ਇਸ ਤੱਥ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਜੇਕਰ ${}^nC_r = {}^nC_p$, ਤਾਂ ਜਾਂ ਤਾਂ $r = p$ ਅਤੇ ਜਾਂ $r = n - p$]

ਇਸ ਤੋਂ $r = -4$ ਜਾਂ $r = 14$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ r ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਇਸ ਲਈ $r = -4$ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ, ਇਸ ਲਈ $r = 14$

ਅਧਿਆਇ 8 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. a, b ਅਤੇ n ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ $(a + b)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੇ ਤਿੰਨ ਪਦ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 729, 7290 ਅਤੇ 30375 ਹੋਣ।
2. a ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ $(3 + ax)^9$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ x^2 ਅਤੇ x^3 ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ।
3. $(1 + 2x)^6 (1 - x)^7$ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਵਿੱਚ ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਵਰਤਦੇ ਹੋਏ, x^5 ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।
4. ਜੇਕਰ a ਅਤੇ b ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੋਣ, ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $a - b$, $a^n - b^n$ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ ਜਿੱਥੇ n ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।
   [**ਸੰਕੇਤ :** $a^n = (a - b + b)^n$ ਲਿਖੋ ਅਤੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਕਰੋ]
5. ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^6 - \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^6$
6. ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ $\left(a^2+\sqrt{a^2-1}\right)^4 + \left(a^2-\sqrt{a^2-1}\right)^4$
7. ਪ੍ਰਸਾਰ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਤਿੰਨਾਂ ਪਦਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ $(0.99)^5$ ਦਾ ਲਗਭਗ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
8. n ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ $\left(\sqrt[4]{2}+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਸ਼ੁਰੂ ਤੋਂ ਪੰਜਵੇਂ ਪਦ ਅਤੇ ਆਖਿਰ ਵਾਲੇ ਪਾਸੇ ਤੋਂ ਪੰਜਵੇਂ ਪਦ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ $\sqrt{6}:1$ ਹੋਵੇ।
9. ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਵਰਤਦੇ ਹੋਏ $\left(1+\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\right)^4, x \neq 0$ ਦਾ ਪ੍ਰਸਾਰ ਕਰੋ।
10. ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ $(3x^2 - 2ax + 3a^2)^3$ ਦਾ ਪ੍ਰਸਾਰ ਕਰੋ।

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

- ਇੱਕ ਦੋ ਪਦੀ ਦਾ ਕਿਸੇ ਵੀ ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ n ਲਈ ਪ੍ਰਸਾਰ ਦੋ ਪਦੀ ਪਰਿਮੇਯ ਦੁਆਰਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਅਨੁਸਾਰ $(a + b)^n = {}^nC_0a^n + {}^nC_1a^{n-1}b + {}^nC_2a^{n-2}b^2 + ...+ {}^nC_{n-1}a.b^{n-1} + {}^nC_nb^n$
- ਪ੍ਰਸਾਰ ਦੇ ਪਦਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਇੱਕ ਨਮੂਨੇ ਵਿੱਚ ਜੋੜੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਪਾਸਕਲ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
- $(a + b)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਪਦ $T_{r+1} = {}^nC_ra^{n-r}. b^r$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
- $(a + b)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ n ਜਿਸਤ ਹੈ ਤਾਂ $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ ਵਾਂ ਪਦ, ਮੱਧ ਪਦ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇਕਰ n ਟਾਂਕ ਹੈ ਤਾਂ $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ ਵਾਂ ਅਤੇ $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)$ ਵਾਂ, ਦੋ ਮੱਧ ਪਦ ਹਨ।

ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਨੋਟ

ਪ੍ਰਾਚੀਨ ਭਾਰਤੀ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ $(x + y)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ $0 \leq n \leq 7$ ਲਈ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਬਾਰੇ ਜਾਣਦੇ ਸਨ। ਇਹਨਾਂ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦੀ ਤਰਤੀਬ ਇੱਕ ਚਿੱਤਰ ਵਾਂਗ ਸੀ ਜਿਸ ਨੂੰ *Meru-Prastara* ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ, Pinga ਦੁਆਰਾ ਉਸਦੀ ਕਿਤਾਬ *Chandra shastra* (200B.C.) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਗਈ। ਇਹ ਤ੍ਰਿਭੁਜੀ ਤਰਤੀਬ ਇੱਕ ਚਾਈਨੀਜ਼ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ Chu-shi-kie ਦੇ ਕੰਮ ਵਿੱਚ 1303 ਵਿੱਚ ਪਤਾ ਲੱਗੀ। ਸ਼ਬਦ ਦੋ ਪਦੀ ਗੁਣਾਂਕ ਦੀ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਵਰਤੋਂ ਜਰਮਨ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ Michael Stipel (1486-1567) ਦੁਆਰਾ ਲਗਭਗ 1544 ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਗਈ। Bombelli (1572) ਦੁਆਰਾ ਵੀ $(a + b)^n$, ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ $n = 1,2 ...,7$ ਲਈ ਗੁਣਾਂਕ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅਤੇ Oughtred (1631) ਨੇ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ $n = 1, 2,..., 10$ ਲਈ ਦਿੱਤਾ। ਇਹ ਅੰਕਗਣਿਤਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਜਿਸ ਨੂੰ ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਪਾਸਕਲ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਹੜੀ Pinga ਦੇ Meru Prastara ਵਰਗੀ ਹੈ, French ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ Blaise Pascal (1623-1662) ਦੁਆਰਾ 1665 ਵਿੱਚ ਬਣਾਈ ਗਈ।

ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਮੌਜੂਦਾ ਰੂਪ n ਦੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਮੁੱਲਾਂ ਲਈ *Trate du triange arithmetic* ਵਿੱਚ Pascal ਦੁਆਰਾ ਲਿਖੀ posthumously ਕਿਤਾਬ ਵਿੱਚ 1665 ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਹੋਇਆ।

— ❖ —