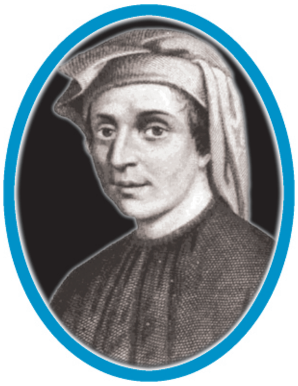
ਅਧਿਆਇ 9

ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਅਤੇ ਲੜੀਆਂ
(Sequence and Series)

❖*Natural numbers are the product of human spirit. – DEDEKIND*❖

9.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਗਣਿਤ ਵਿਚ, ਸ਼ਬਦ 'ਅਨੁਕ੍ਰਮ' ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਸਧਾਰਨ ਪੰਜਾਬੀ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮੂਹ ਦੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ (objects) ਨੂੰ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਵਿਚ ਸੂਚੀਬੱਧ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਕਹਿਣ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਲੜੀਬੱਧ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਪਹਿਲਾ ਮੈਂਬਰ, ਦੂਜਾ ਮੈਂਬਰ, ਤੀਜਾ ਮੈਂਬਰ ਆਦਿ ਨਾਲ ਪਹਿਚਾਣ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸਮੇਂ ਮਨੁੱਖ ਜਾਂ ਬੈਕਟੀਰੀਆ ਦੀ ਜਨਸੰਖਿਆ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਕੋਈ ਧੱਨਰਾਸ਼ੀ ਜੋ ਬੈਂਕ ਖਾਤੇ ਵਿਚ ਜਮ੍ਹਾਂ ਕਰਵਾ ਦਿੱਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਕੁਝ ਸਾਲਾਂ ਮਗਰੋਂ ਇੱਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਵਸਤੂ ਦੀ ਘੱਟਦੀ ਹੋਈ ਕੀਮਤ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਮਨੁੱਖੀ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੇ ਕਈ ਖੇਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਹੈ।



Fibonacci
(1175-1250)

ਖਾਸ ਨਮੂਨਿਆ (Pattern) 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਅਨੁਕ੍ਰਮ, ਲੜੀ (Progression) ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਪਿਛਲੀ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ (A.P.) ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿਚ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ (A.P.) ਬਾਰੇ ਹੋਰ ਵੱਧ ਚਰਚਾ ਕਰਨ ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ ਅਸੀਂ, ਅੰਕਗਣਿਤਕ ਮੱਧਮਾਨ (A.M.) ਜਿਮਾਇਤੀ ਮੱਧਮਾਨ (G.M.), ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਮੱਧਮਾਨ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧ, ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ, n ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਅਤੇ n ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਘਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦਾ ਵੀ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

9.2 ਅਨੁਕ੍ਰਮ (Sequence)

ਆਉ, ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ —

ਮੰਨ ਲਉ ਪੀੜ੍ਹੀਆਂ ਦਾ ਅੰਤਰ 30 ਸਾਲ ਹੈ, ਸਾਨੂੰ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ 300 ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਪੂਰਵਜਾਂ ਅਰਥਾਤ ਮਾਤਾ-ਪਿਤਾ, ਦਾਦਾ-ਦਾਦੀ, ਪੜਦਾਦਾ-ਪੜਦਾਦੀ ਆਦਿ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿਹਾ ਹੈ ।

ਇੱਥੇ ਪੀੜ੍ਹੀਆਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ $= \dfrac{300}{30} = 10$

ਪਹਿਲੀ, ਦੂਜੀ, ਤੀਜੀ, ..., ਦਸਵੀਂ ਪੀੜ੍ਹੀ ਦੇ ਲਈ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਪੂਰਵਜਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਕ੍ਰਮਵਾਰ: 2, 4, 8, 16, 32, …, 1024 ਹੈ। ਇਹ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ, ਇਹ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ।

10 ਨੂੰ 3 ਨਾਲ ਭਾਗ ਦਿੰਦੇ ਸਮੇਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਚਰਣਾਂ (ਪਗਾਂ) ਦੇ ਬਾਅਦ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਭਾਗਫਲ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ। ਇਸ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਵਿਚ ਅਸੀਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 3,3.3,3.33,3.333, ... ਆਦਿ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਭਾਗਫਲ ਵੀ ਇੱਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਇਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਜੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਆਉਂਦੀਆਂ ਹਨ ਉਹ ਇਸਦੇ ਪਦ (Terms) ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੇ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ ਆਦਿ ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਹਰੇਕ ਪਦ ਨਾਲ ਲੱਗੀ ਹੋਈ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਪਦ-ਅੰਕ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ, ਪਦ ਦਾ ਸਥਾਨ ਦੱਸਦੀ ਹੈ। ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦਾ nਵਾਂ ਪਦ, nਵੇਂ ਸਥਾਨ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ a_n ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਨੂੰ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦਾ ਆਮ ਪਦ (General term) ਜਾਂ ਵਿਆਪਕ ਪਦ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਿਅਕਤੀ ਦੀ ਪੂਰਵਜਾਂ ਦੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੇ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

$$a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 8, \ldots, a_{10} = 1024$$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਿਰੰਤਰ ਭਾਗਫਲਾਂ ਵਾਲੇ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ

$$a_1 = 3, a_2 = 3.3, a_3 = 3.33, \ldots, a_6 = 3.33333, \text{ ਆਦਿ}$$

ਉਹ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਜਿਸ ਵਿਚ ਪਦਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਸੀਮਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਉਸ ਨੂੰ ਸੀਮਿਤ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਪੂਰਵਜਾਂ ਦਾ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਸੀਮਿਤ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਉਸ ਵਿਚ 10 ਪਦ ਹਨ (ਸੀਮਿਤ ਸੰਖਿਆ)।

ਇੱਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ, ਅਸੀਮਿਤ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿਚ ਪਦਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਸੀਮਿਤ ਨਾ ਹੋਵੇ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਉੱਪਰ ਦਰਸਾਏ ਨਿਰੰਤਰ ਭਾਗਫਲਾਂ ਦਾ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਇੱਕ ਅਸੀਮਿਤ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਹੈ, ਅਸੀਮਿਤ ਦਾ ਅਰਥ ਜਿਸ ਦਾ ਕੋਈ ਅੰਤ ਨਹੀਂ।

ਅਕਸਰ, ਇਹ ਸੰਭਵ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਦੇ ਨਿਯਮ ਨੂੰ ਬੀਜ ਗਣਿਤਿਕ ਸੂਤਰ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮ 2, 4, 6....... ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਇੱਥੇ
$$a_1 = 2 = 2 \times 1 \quad a_2 = 4 = 2 \times 2$$
$$a_3 = 6 = 2 \times 3 \quad a_4 = 8 = 2 \times 4$$
$$\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots$$
$a_{23} = 46 = 2 \times 23, a_{24} = 48 = 2 \times 24,$ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੋਰ।

ਅਸਲ ਵਿਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦਾ nਵਾਂ ਪਦ $a_n = 2n$ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਕਿ 'n' ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮ 1,3,5, …, ਵਿੱਚ nਵੇਂ ਪਦ ਦੇ ਸੂਤਰ ਨੂੰ $a_n = 2n - 1$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿਚ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ n ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਕਈ ਵਾਰ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਤਰਤੀਬ 1, 1, 2, 3, 5, 8,.. ਦਾ ਕੋਈ ਖਾਸ **ਨਮੂਨਾ** ਦਿਖਾਈ ਨਹੀਂ ਦਿੰਦਾ, ਪ੍ਰੰਤੂ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੀ ਰਚਨਾ ਦੁਹਰਾਉਣ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਈ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ, ਜਿਵੇਂ

$$a_1 = a_2 = 1$$
$$a_3 = a_1 + a_2$$
$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}, n > 2$$

ਇਸ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਨੂੰ ਫ਼ਿਬੋਨਾਕੀ (Fibonacci) ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮ 2,3,5,7,…, ਵਿਚ nਵੀਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਕੋਈ ਸੂਤਰ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਨੂੰ ਬੋਲ ਕੇ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਹਰੇਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਵਿਚ ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਕਿ ਉਸ ਦਾ ਕੋਈ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸੂਤਰ ਹੋਵੇਗਾ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਫਿਰ ਵੀ ਅਜਿਹੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਲਈ ਕੋਈ ਨਾ ਕੋਈ ਸਿਧਾਂਤਕ ਯੋਜਨਾ ਜਾਂ ਨਿਯਮ ਦੀ ਉਮੀਦ ਤਾਂ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ ਜੋ ਪਦਾਂ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਕਰ ਸਕੇ।

ਉਪਰੋਕਤ ਤੱਥਾਂ ਦੇ ਅਧਾਰ 'ਤੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਇੱਕ **ਫਲਨ** (function) ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸਦਾ **ਪ੍ਰਾਂਤ** (Domain) ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜਾਂ ਉਸਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$ ਦੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਹੋਵੇ। ਕਈ ਵਾਰ ਅਸੀਂ ਫਲਨ (function) ਦੇ ਸੰਕੇਤ a_n ਦੇ ਲਈ $a(n)$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

9.3 ਲੜੀ (Series)

ਮੰਨ ਲਉ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n,$ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਹੈ, ਤਾਂ ਵਿਅੰਜਕ

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

ਸੰਬੰਧਿਤ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਤੋਂ ਬਣੀ ਲੜੀ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਲੜੀ ਸੀਮਿਤ ਜਾਂ ਅਸੀਮਿਤ ਹੋਵੇਗੀ, ਜੇਕਰ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਸੀਮਿਤ ਜਾਂ ਅਸੀਮਿਤ ਹੈ। ਲੜੀ ਨੂੰ ਅਕਸਰ **ਸੰਖੇਪ** (Compact) ਰੂਪ ਵਿਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸਨੂੰ ਸਿਗਮਾ ਸੰਕੇਤ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਜਿਸ ਲਈ ਗਰੀਕ ਅੱਖਰ ਸੰਕੇਤ $\sum$ (ਸਿਗਮਾ) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਜੋੜਨਾ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੜੀ $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ ਦਾ ਸੰਖੇਪ ਰੂਪ $\sum_{k=1}^{n} a_k$ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ— ਲੜੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ, ਜੋੜ ਲਈ ਨਹੀਂ, ਸਗੋਂ ਨਿਰੂਪਿਤ ਜੋੜ ਲਈ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ $1 + 3 + 5 + 7$ ਚਾਰ ਪਦਾਂ ਵਾਲੀ ਸੀਮਿਤ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ 'ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਦਾ ਜੋੜ' ਸ਼ਬਦ ਸਮੂਹ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਉਸ ਸੰਖਿਆ

ਤੋਂ ਹੈ ਜੋ ਪਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਇਸ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਦਾ ਜੋੜ 16 ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ—

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹਰੇਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਤਿੰਨ ਪਦ ਲਿਖੋ।

(i) $a_n = 2n + 5$ (ii) $a_n = \dfrac{n-3}{4}$

ਹੱਲ : (i) ਇੱਥੇ $a_n = 2n + 5$

$n = 1, 2, 3,$ ਰੱਖਣ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$a_1 = 2(1) + 5 = 7, a_2 = 9, a_3 = 11$

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੇ ਪਦ 7, 9 ਅਤੇ 11 ਹਨ।

(ii) ਇੱਥੇ $a_n = \dfrac{n-3}{4}$ ਤਾਂ $a_1 = \dfrac{1-3}{4} = -\dfrac{1}{2}, a_2 = -\dfrac{1}{4}, a_3 = 0$

ਇਸ ਲਈ ਪਹਿਲੇ ਤਿੰਨ ਪਦ $-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}$ ਅਤੇ 0 ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : $a_n = (n - 1)(2 - n)(3 + n)$ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਏ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦਾ 20ਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $n = 20$, ਭਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$a_{20} = (20 - 1)(2 - 20)(3 + 20)$$
$$= 19 \times (-18) \times (23) = -7866$$

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਮੰਨ ਲਉ ਅਨੁਕ੍ਰਮ a_n ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ

$$a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + 2 \text{ ਲਈ } n \geq 2$$

ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਪੰਜ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਸੰਗਤ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਲਿਖੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਡੇ ਕੋਲ

$a_1 = 1, a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3, a_3 = a_2 + 2 = 3 + 2 = 5,$

$a_4 = a_3 + 2 = 5 + 2 = 7, a_5 = a_4 + 2 = 7 + 2 = 9$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਪੰਜ ਪਦ 1,3,5,7 ਅਤੇ 9 ਹੈ ਅਤੇ ਸੰਗਤ ਸ਼੍ਰੇਣੀ 1 + 3 + 5 + 7 + 9 +... ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 9.1

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1 ਤੋਂ 6 ਤੱਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੇ ਦਿੱਤੇ nਵੇਂ ਪਦ ਤੋਂ ਹਰੇਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਪੰਜ ਪਦ ਲਿਖੋ।

1. $a_n = n(n + 2)$ **2.** $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ **3.** $a_n = 2^n$ **4.** $a_n = \dfrac{2n-3}{6}$

5. $a_n = (-1)^{n-1} 5^{n+1}$ **6.** $a_n = n\dfrac{n^2+5}{4}$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਨੰ: 7 ਤੋਂ 10 ਤੱਕ ਦੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮਾਂ ਵਿਚ ਹਰੇਕ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ nਵਾਂ ਪਦ ਦਿੱਤਾ ਹੈ।

7. $a_n = 4n - 3; a_{17}, a_{24}$ **8.** $a_n = \dfrac{n^2}{2^n}; a_7$ **9.** $a_n = (-1)^{n-1}n^3; a_9$ **10.** $a_n = \dfrac{n(n-2)}{n+3}; a_{20}$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 11 ਤੋਂ 13 ਤੱਕ ਹਰੇਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੇ ਪੰਜ ਪਦ ਲਿਖੋ ਅਤੇ ਸੰਗਤ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਪਤਾ ਕਰੋ

11. $a_1 = 3, a_n = 3a_{n-1} + 2 \;\forall\; n > 1$ **12.** $a_1 = -1, a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n}, n \geq 2$

13. $a_1 = a_2 = 2, a_n = a_{n-1} - 1, n > 2$

14. ਫ਼ਿੱਬੋਨਾਕੀ (Fibonacci) ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ $1 = a_1 = a_2$ ਅਤੇ $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n > 2$

ਤਾਂ $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ਲਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

9.4 ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ (Arithmetic Progression (A.P.))

ਆਉ ਪਹਿਲਾ ਪੜ੍ਹੇ, ਹੋਏ ਸੂਤਰਾਂ ਅਤੇ ਗੁਣਾਂ ਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰੀਏ।

ਇੱਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ $a_1, a_2, a_3,\ldots, a_n,\ldots$ ਨੂੰ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਜਾਂ ਅੰਕਗਣਿਤਕ ਲੜੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ $a_{n+1} = a_n + d,\; n \in \mathbf{N}$, a_1 ਨੂੰ ਪਹਿਲਾ ਪਦ ਅਤੇ ਸਥਿਰ ਪਦ d ਨੂੰ A.P. ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਮੰਨ ਲਉ ਇੱਕ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ (ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ) ਜਿਸਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ 'a' ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ d ਹੈ, $a, a + d, a + 2d, \ldots$ ਹੈ।

ਤਾਂ ਇਸ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਦਾ nਵਾਂ ਪਦ (ਆਮ ਰੂਪ ਜਾਂ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ) $a_n = a + (n-1)\,d$ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਦੀਆਂ ਆਮ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਦਾ ਪਰੀਖਣ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ—

(i) ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਦੇ ਹਰੇਕ ਪਦ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਅੰਕ ਜੋੜਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਨਵਾਂ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਹੀ ਹੋਵੇਗੀ।

(ii) ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਦੇ ਹਰੇਕ ਪਦ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਅੰਕ ਘਟਾਇਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਨਵਾਂ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਹੀ ਹੋਵੇਗੀ।

(iii) ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਦੇ ਹਰੇਕ ਪਦ ਨੂੰ ਸਥਿਰ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕੀਤੀ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਨਵਾਂ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਹੀ ਹੋਵੇਗੀ।

(iv) ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਦੇ ਹਰੇਕ ਪਦ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਗੈਰ ਸਿਫ਼ਰ (non zero) ਸਥਿਰ ਅੰਕ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਨਵਾਂ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਹੀ ਹੋਵੇਗੀ।

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੰਕੇਤਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ :

a = ਪਹਿਲਾ ਪਦ, l = ਆਖਰੀ ਪਦ, d = ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ

n = ਪਦਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ

S_n= A.P. ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ

ਮੰਨ ਲਉ $a, a + d, a + 2d, \ldots, a + (n-1)\,d$ ਇੱਕ A.P. ਹੈ, ਤਾਂ

$$l = a + (n-1)\,d$$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$$

ਅਸੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ $$S_n = \frac{n}{2}\left[a + l\right]$$

ਆਉ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਦਾ mਵਾਂ ਪਦ n ਅਤੇ nਵਾਂ ਪਦ m ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $m \neq n$ ਹੈ ਤਾਂ pਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਡੇ ਕੋਲ $a_m = a + (m-1)\,d = n$ ... (1)

ਅਤੇ $a_n = a + (n-1)\,d = m$ ... (2)

(1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$(m-n)\,d = n - m$ ਜਾਂ $d = -1$ ... (3)

ਅਤੇ $a = n + m - 1$ ... (4)

ਇਸ ਲਈ $a_p = a + (p - 1)d$

$= n + m - 1 + (p - 1)(-1) = n + m - p$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ pਵਾਂ ਪਦ $n + m - p$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਜੇਕਰ ਇੱਕ AP ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $n\mathrm{P}+\frac{1}{2}n(n-1)\mathrm{Q}$, ਜਿੱਥੇ P ਅਤੇ Q ਸਥਿਰ ਅੰਕ ਹਨ, ਤਾਂ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ਇੱਕ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ A.P. ਹੈ। ਤਾਂ

$$\mathrm{S}_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n = n\mathrm{P} + \frac{1}{2}n(n-1)\mathrm{Q}$$

ਇਸ ਲਈ $\mathrm{S}_1 = a_1 = \mathrm{P}$, $\mathrm{S}_2 = a_1 + a_2 = 2\mathrm{P} + \mathrm{Q}$

ਇਸ ਲਈ $a_2 = \mathrm{S}_2 - \mathrm{S}_1 = \mathrm{P} + \mathrm{Q}$

ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ $d = a_2 - a_1$

$= (\mathrm{P} + \mathrm{Q}) - \mathrm{P} = \mathrm{Q}$, ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਦੋ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀਆਂ ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜਾ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ $(3n + 8) : (7n + 15)$ ਹੈ। ਉਹਨਾਂ ਦੇ 12ਵੇਂ ਪਦਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ a_1, a_2 ਅਤੇ d_1, d_2 ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਪਹਿਲੀ ਅਤੇ ਦੂਜੀ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀਆਂ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ ਹਨ ਤਾਂ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸ਼ਰਤ ਅਨੁਸਾਰ ਸਾਡੇ ਕੋਲ

$$\frac{\text{ਪਹਿਲੀ A.P. ਦੇ } n \text{ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ}}{\text{ਦੂਜੀ A.P. ਦੇ } n \text{ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ}} = \frac{3n+8}{7n+15}$$

ਜਾਂ
$$\frac{\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d_1]}{\frac{n}{2}[2a_2+(n-1)d_2]} = \frac{3n+8}{7n+15}$$

ਜਾਂ
$$\frac{2a_1+(n-1)d_1}{2a_2+(n-1)d_2} = \frac{3n+8}{7n+15} \qquad \ldots (1)$$

ਹੁਣ
$$\frac{\text{ਪਹਿਲੀ A.P. ਦਾ 12ਵਾਂ ਪਦ}}{\text{ਦੂਜੀ A.P. ਦਾ 12ਵਾਂ ਪਦ}} = \frac{a_1+11d_1}{a_2+11d_2}$$

$$\frac{2a_1+22d_1}{2a_2+22d_2} = \frac{3\times 23+8}{7\times 23+15} \qquad [(1) \text{ ਵਿੱਚ } n = 23 \text{ ਰੱਖਣ 'ਤੇ}]$$

ਇਸ ਲਈ
$$\frac{a_1+11d_1}{a_2+11d_2} = \frac{\text{ਪਹਿਲੀ A.P. ਦਾ 12 ਵਾਂ ਪਦ}}{\text{ਦੂਜੀ A.P. ਦਾ 12 ਵਾਂ ਪਦ.}} = \frac{7}{16}$$

ਤਾਂ ਲੋੜੀਂਦਾ ਅਨੁਪਾਤ 7 : 16 ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਦੀ ਪਹਿਲੇ ਸਾਲ ਦੀ ਆਮਦਨ 3,00,000 ਰੁਪਏ ਅਤੇ ਉਸ ਦੀ ਆਮਦਨ 10,000 ਰੁਪਏ ਹਰ ਸਾਲ ਅਗਲੇ 19 ਸਾਲਾਂ ਤੱਕ ਵੱਧਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸ ਦੁਆਰਾ 20 ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਕੁੱਲ ਆਮਦਨ ਦੀ ਰਾਸ਼ੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ (A.P.) ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਵਿਚ $a = 3,00,000$, $d = 10,000$, ਅਤੇ $n = 20$ ਹੈ ਜੋੜ ਦੇ ਸੂਤਰ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$S_{20} = \frac{20}{2}[600000 + 19 \times 10000] = 10\,(790000) = 79{,}00{,}000$$

ਇਸ ਲਈ 20 ਸਾਲਾਂ ਦੇ ਅੰਤ ਤੱਕ ਵਿਅਕਤੀ 79,00,000 ਰੁਪਏ ਕੁੱਲ ਆਮਦਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

9.4.1 *ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਮੱਧ (Arithmetic Mean) :* ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦਿੱਤੀਆਂ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿਚਕਾਰ ਇਕ ਹੋਰ ਸੰਖਿਆ A ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਈ ਕਿ a, A, b ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ A ਨੂੰ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦਾ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਮੱਧਮਾਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿਚ ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਸਾਡੇ ਕੋਲ;

$$A - a = b - A, \quad \text{ਭਾਵ, } A = \frac{a+b}{2} \text{ ਹੈ}$$

ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਮੱਧ (A.M.) ਨੂੰ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਔਸਤ $\frac{a+b}{2}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ 4 ਅਤੇ 16 ਦਾ A.M. 10 ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਇਕ ਸੰਖਿਆ 10 ਨੂੰ 4 ਅਤੇ 16 ਦੇ ਮੱਧ ਵਿਚ ਰੱਖ ਕੇ 4, 10, 16 ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ (A.P.) ਦੀ ਰਚਨਾ ਕੀਤੀ ਹੈ। ਹੁਣ ਇੱਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਹੈ ਕਿ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੋ ਜਾਂ ਇਸ ਤੋਂ ਵੱਧ ਅੰਕ ਰੱਖਣ ਤੇ A.P. ਤਿਆਰ ਹੋ ਸਕੇਗੀ ? ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 8 ਅਤੇ 12 ਨੂੰ 4 ਅਤੇ 16 ਵਿਚਕਾਰ ਰੱਖਣ 'ਤੇ 4, 8, 12, 16 ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ (A.P.) ਬਣਦੀ ਹੈ।

ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਦਿੱਤੀਆਂ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਵਿਚਕਾਰ ਕਿੰਨੀਆਂ ਵੀ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਰੱਖ ਕੇ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ (A.P.) ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_n$, a ਅਤੇ b ਵਿਚਕਾਰ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ ਕਿ $a, A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, b$ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਹੈ

ਇਥੇ b, $(n + 2)$ ਵਾਂ ਪਦ ਹੈ, ਭਾਵ, $b = a + [(n + 2) - 1]d = a + (n + 1)\,d$

ਇਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ $$d = \frac{b-a}{n+1}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, a ਅਤੇ b ਵਿੱਚ n ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹਨ

$$A_1 = a + d = a + \frac{b-a}{n+1}$$

$$A_2 = a + 2d = a + \frac{2(b-a)}{n+1}$$

$$A_3 = a + 3d = a + \frac{3(b-a)}{n+1}$$

....

....

$$A_n = a + nd = a + \frac{n(b-a)}{n+1}.$$

ਉਦਾਹਰਣ 8 : 6 ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ 3 ਅਤੇ 24 ਵਿਚਕਾਰ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਇਕ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਬਣ ਜਾਵੇ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 ਅਤੇ A_6, 3 ਅਤੇ 24 ਵਿਚਕਾਰ ਛੇ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ ਕਿ 3, $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$, 24 A.P. ਹੈ। ਇੱਥੇ, $a = 3$, $b = 24$, $n = 8$

ਇਸ ਲਈ, $24 = 3 + (8 - 1)\,d$, ਤਾਂ $d = 3$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $A_1 = a + d = 3 + 3 = 6;$ $A_2 = a + 2d = 3 + 2 \times 3 = 9;$

$A_3 = a + 3d = 3 + 3 \times 3 = 12;$ $A_4 = a + 4d = 3 + 4 \times 3 = 15;$

$A_5 = a + 5d = 3 + 5 \times 3 = 18;$ $A_6 = a + 6d = 3 + 6 \times 3 = 21.$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ 3 ਅਤੇ 24 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ 6, 9, 12, 15, 18 ਅਤੇ 21 ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

ਅਭਿਆਸ 9.2

1. 1 ਤੋਂ 2001 ਤੱਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ।

2. 100 ਤੋਂ 1000 ਵਿਚਕਾਰ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ 5 ਦੀਆਂ ਗੁਣਜ ਹਨ।

3. ਕਿਸੇ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ (A.P.) ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ 2 ਹੈ। ਉਸਦੇ ਪਹਿਲੇ ਪੰਜ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਅਗਲੇ ਪੰਜ ਪਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦਾ ਇੱਕ ਚੋਥਾਈ ਹੈ। ਦਰਸਾਉ ਕਿ 20ਵਾਂ ਪਦ –112 ਹੈ।

4. ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ (A.P.) $-6, -\frac{11}{2}, -5, \ldots$ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ –25 ਹੈ ?

5. ਕਿਸੇ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ (A.P.) ਦਾ pਵਾਂ ਪਦ $\frac{1}{q}$ ਅਤੇ qਵਾਂ ਪਦ $\frac{1}{p}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਪਹਿਲੇ pq ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $\frac{1}{2}(pq+1)$ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $p \neq q$ ਹੈ।

6. ਜੇਕਰ A.P. 25, 22, 19, … ਦੇ ਕੁਝ ਪਦਾਂ ਜਾ ਜੋੜ 116 ਹੈ ਤਾਂ ਆਖ਼ਰੀ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

7. ਉਸ A.P. ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ kਵਾਂ ਪਦ $5k + 1$ ਹੈ।

8. ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ A.P. ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ $(pn + qn^2)$ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ p ਅਤੇ q ਸਥਿਰ ਹਨ, ਤਾਂ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

9. ਦੋ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀਆਂ ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ $(5n + 4) : (9n + 6)$ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਦੇ 18ਵੇਂ ਪਦਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

10. ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ A.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ p ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ, ਪਹਿਲੇ q ਪਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਪਹਿਲੇ $(p + q)$ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

11. ਕਿਸੇ A.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ p, q ਅਤੇ r ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਕ੍ਰਮਵਾਰ a, b ਅਤੇ c ਹੈ।

ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ $\frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}(r-p)+\frac{c}{r}(p-q)=0$ ਹੈ।

12. ਕਿਸੇ A.P. ਦੇ m ਅਤੇ n ਪਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ $m^2 : n^2$ ਹੈ ਤਾਂ ਦਿਖਾਉ ਕਿ mਵੇਂ ਅਤੇ nਵੇਂ ਪਦਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ $(2m – 1) : (2n – 1)$ ਹੈ।

13. ਕਿਸੇ A.P. ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $3n^2 + 5n$ ਅਤੇ mਵਾਂ ਪਦ 164 ਹੈ ਤਾਂ m ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

14. 5 ਅਤੇ 26 ਵਿਚਕਾਰ ਅਜਿਹੀਆਂ ਪੰਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੱਸੋ ਤਾਂ ਕਿ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਇੱਕ A.P. ਹੋਵੇ।

15. ਜੇਕਰ a ਅਤੇ b ਦਾ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਮੱਧ (A.M.) $\frac{a^n+b^n}{a^{n-1}+b^{n-1}}$ ਹੈ ਤਾਂ n ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

16. m ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ 1 ਅਤੇ 31 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਰੱਖਣ ’ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਇੱਕ A.P. ਹੈ ਅਤੇ 7ਵੀਂ ਅਤੇ $(m – 1)$ ਵੀਂ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ 5 : 9 ਹੈ। m ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

17. ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਕਰਜ਼ ਦਾ ਭੁਗਤਾਨ 100 ਰੁਪਏ ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਕਿਸ਼ਤ ਨਾਲ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਉਹ ਹਰੇਕ ਕਿਸ਼ਤ ਵਿਚ 5 ਰੁਪਏ ਪ੍ਰਤੀ ਮਹੀਨਾ ਵਧਾਉਂਦਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ 30 ਵੀਂ ਕਿਸ਼ਤ ਦੀ ਰਾਸ਼ੀ ਕਿੰਨੀ ਹੋਵੇਗੀ।

18. ਇੱਕ ਬਹੁਭੁਜ ਦੇ ਦੋ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਅੰਦਰਲੇ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ $5°$ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਕੋਣ $120°$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਬਹੁਭਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

9.5 ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ (Geometric Progression (G.P.))

ਆਉ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮਾ ਨੂੰ ਵੇਖੀਏ :

(i) 2,4,8,16,... (ii) $\frac{1}{9}, \frac{-1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{-1}{243}$... (iii) .01,.0001,.000001,...

ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੇ ਪਦ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੱਧਦੇ ਹਨ ? ਹਰੇਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਬਾਕੀ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਕ੍ਰਮ ਵਿਚ ਵੱਧਦੇ ਹਨ।

(i) ਵਿੱਚ ਸਾਡੇ ਕੋਲ $a_1 = 2, \frac{a_2}{a_1} = 2, \frac{a_3}{a_2} = 2, \frac{a_4}{a_3} = 2$ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ

(ii) ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ $a_1 = \frac{1}{9}, \frac{a_2}{a_1} = \frac{-1}{3}, \frac{a_3}{a_2} = \frac{-1}{3}, \frac{a_4}{a_3} = \frac{-1}{3}$ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਿਖਾਉ ਕਿ (iii) ਵਿੱਚ ਪਦ ਕਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਅੱਗੇ ਵੱਧਦੇ ਹਨ ? ਇਹ ਵੇਖਿਆ ਗਿਆ ਕਿ ਹਰੇਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿਚ ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ, ਹਰੇਕ ਅਗਲਾ ਪਦ ਪਿਛਲੇ ਪਦ ਨਾਲ ਸਥਿਰ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੱਧਦਾ ਹੈ। (i) ਵਿੱਚ ਇਹ ਸਥਿਰ ਅਨੁਪਾਤ 2 ਹੈ (ii) ਵਿੱਚ ਇਹ $-\frac{1}{3}$ ਹੈ *(iii)* ਵਿੱਚ ਇਹ ਸਥਿਰ ਅਨੁਪਾਤ 0.01 ਹੈ। ਅਜਿਹੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਨੂੰ ਜਿਮਾਇਤੀ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਜਾਂ ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਸੰਖੇਪ ਵਿਚ G.P. ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ ਨੂੰ ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਹੇਰਕ ਪਦ ਗੈਰ-ਸਿਫ਼ਰ (ਭਾਵ ਸਿਫ਼ਰ ਨਾ ਹੋਵੇ) ਅਤੇ $\frac{a_{k+1}}{a_k} = r$ (ਸਥਿਰ ਅੰਕ) ਹੈ। $k \geq 1$ ਦੇ ਲਈ।

$a_1 = a$ ਮੰਨਣ 'ਤੇ G.P. ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ : $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots.,$ ਜਿੱਥੇ a, G.P. ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ ਅਤੇ r, G.P. ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ ਹੈ। (i), (ii) ਅਤੇ (iii) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ G.P. ਦਾ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 2, $-\frac{1}{3}$, 0.01 ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ ਹੈ।

ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਵਿੱਚ, ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ ਦਾ nਵਾਂ ਪਦ ਲੱਭਣ ਦੀ ਸਮੱਸਿਆ ਜਾਂ ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ, ਜਿਸ ਵਿਚ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਪਦ ਹੋਣ, ਨੂੰ ਬਿਨਾਂ ਸੂਤਰ ਹੱਲ ਕਰਨਾ ਔਖਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਸੂਤਰਾਂ ਦੀ ਸਥਾਪਨਾ ਅਸੀਂ ਅਗਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਕਰਾਂਗੇ।

ਇਹਨਾਂ ਸੂਤਰਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੰਕੇਤਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਾਂਗੇ।

a = ਪਹਿਲਾ ਪਦ, r = ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ, l = ਆਖਰੀ ਪਦ,

n = ਪਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ

S_n = ਪਹਿਲੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ

9.5.1 *G.P. ਦਾ ਆਮ ਪਦ ਜਾਂ ਵਿਆਪਕ ਪਦ (General term of G.P.)*

ਮੰਨ ਲਉ ਇੱਕ G.P. ਜਿਸਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ ਗੈਰ-ਸਿਫ਼ਰ 'a' ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ 'r' ਹੈ ਨੂੰ ਵਿਚਾਰੀਏ। ਇਸ ਦੇ ਕੁਝ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਲਿਖੋ। ਦੂਜਾ ਪਦ, ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਨੂੰ ਸਾਂਝੇ ਅਨੁਪਾਤ r ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਰਥਾਤ $a_2 = ar$, ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੀਸਰਾ ਪਦ a_2 ਨੂੰ r ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਰਥਾਤ $a_3 = a_2 r = ar^2$ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਇਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਤੇ ਕੁਝ ਹੋਰ ਪਦ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

ਪਹਿਲਾ ਪਦ $= a_1 = a = ar^{1-1}$, ਦੂਜਾ ਪਦ $= a_2 = ar = ar^{2-1}$

ਤੀਸਰਾ ਪਦ $= a_3 = ar^2 = ar^{3-1}$

ਚੌਥਾ ਪਦ $= a_4 = ar^3 = ar^{4-1}$

5ਵਾਂ ਪਦ $= a_5 = ar^4 = ar^{5-1}$

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਨਮੂਨਾ ਦੇਖਦੇ ਹੋ ? 16ਵਾਂ ਪਦ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ

$$a_{16} = ar^{16-1} = ar^{15}$$

ਇਸ ਲਈ ਨਮੂਨਾ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ G.P. ਦਾ nਵਾਂ ਪਦ $a_n = ar^{n-1}$ ਹੈ। ਅਰਥਾਤ ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ ਇਸ ਰੂਪ ਵਿਚ ਲਿਖੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ :

$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots ar^{n-1}$; $a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-1} \ldots$; ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਲੜੀ ਸੀਮਿਤ ਹੋਵੇ ਜਾਂ ਅਸੀਮਿਤ ਹੋਵੇ।

ਲੜੀ $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$ ਜਾਂ $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਲੜੀ ਸੀਮਿਤ ਹੋਵੇ ਜਾਂ ਅਸੀਮਿਤ ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ।

9.5.2. G.P. ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ

ਮੰਨ ਲਉ G.P. ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦਾਂ, a ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ.r ਹੈ। G.P. ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਨੂੰ S_n ਨਾਲ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ

$$S_n = a + ar + ar^2 + ...+ ar^{n-1} \quad ... (1)$$

ਸਥਿਤੀ 1 ਜੇਕਰ $r = 1$, ਸਾਡੇ ਕੋਲ $S_n = a + a + a + ... + a$ (n ਪਦ) $= na$

ਸਥਿਤੀ 2 ਜੇਕਰ $r \neq 1$, (1) ਨੂੰ r ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^n \quad ... (2)$$

(2) ਨੂੰ (1), ਵਿੱਚੋਂ ਘਟਾਉਣ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ $(1 - r)\, S_n = a - ar^n = a(1 - r^n)$

ਇਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ $\quad S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ $\quad$ ਜਾਂ $\quad S_n = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

ਉਦਾਹਰਣ 9 : G.P. 5, 25, 125 ਦਾ 10ਵਾਂ ਅਤੇ nਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $a = 5$ ਅਤੇ $r = 5$ ਅਰਥਾਤ, $a_{10} = 5(5)^{10-1} = 5(5)^9 = 5^{10}$

ਅਤੇ $\quad a_n = ar^{n-1} = 5(5)^{n-1} = 5^n$

ਉਦਾਹਰਣ 10 : G.P., 2,8,32, ... ਦਾ ਕਿਹੜਾ ਪਦ 131072 ਹੈ ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ 131072 ਦਿੱਤੀ G.P. ਦਾ nਵਾਂ ਪਦ ਹੈ। ਇੱਥੇ $a = 2$, $r = 4$ ਹੈ । ਇਸ ਲਈ $131072 = a_n = 2(4)^{n-1}$ ਜਾਂ $65536 = 4^{n-1}$

ਇਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ $\quad 4^8 = 4^{n-1}$

ਇਸ ਲਈ $n - 1 = 8$, ਭਾਵ, $n = 9$ ਅਰਥਾਤ 131072 G.P. ਦਾ 9ਵਾਂ ਪਦ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 11 : G.P. ਦਾ ਤੀਸਰਾ ਪਦ 24 ਅਤੇ 6ਵਾਂ ਪਦ 192 ਹੈ। ਇਸ ਦਾ 10ਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ, $a_3 = ar^2 = 24 \quad ... (1)$

ਅਤੇ $\quad a_6 = ar^5 = 192 \quad ... (2)$

(2) ਨੂੰ (1) ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ $r = 2$

$r = 2$ ਨੂੰ (1) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ $a = 6$.

ਇਸ ਲਈ $\quad a_{10} = 6\,(2)^9 = 3072$

ਉਦਾਹਰਣ 12 : G.P. $1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{9}+...$ ਦੇ ਪਹਿਲੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਅਤੇ ਪਹਿਲੇ 5 ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $a = 1$ ਅਤੇ $r = \dfrac{2}{3}$ ਇਸ ਲਈ

$$S_n = \frac{a\,(1-r^n)}{1-r} = \frac{\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{2}{3}} = 3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ, $\quad S_5 = 3\left[1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^5\right] = 3\times\dfrac{211}{243} = \dfrac{211}{81}$

ਉਦਾਹਰਣ 13 : G.P. $3, \dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{4}, ...$ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਪਦਾਂ ਦੀ ਲੋੜ ਹੈ ਤਾਂ ਜੋ ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $\dfrac{3069}{512}$ ਹੋ ਜਾਵੇ ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ n ਪਦਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $a = 3$, $r = \dfrac{1}{2}$ ਅਤੇ $S_n = \dfrac{3069}{512}$

ਕਿਉਂਕਿ $$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

ਇਸ ਲਈ $$\frac{3069}{512} = \frac{3(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}} = 6\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

ਜਾਂ $$\frac{3069}{3072} = 1-\frac{1}{2^n}$$

ਜਾਂ $$\frac{1}{2^n} = 1-\frac{3069}{3072} = \frac{3}{3072} = \frac{1}{1024}$$

ਜਾਂ $2^n = 1024 = 2^{10}$, ਜਿਸ ਤੋਂ $n = 10$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 14 : G.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਤਿੰਨ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $\frac{13}{12}$ ਹੈ ਅਤੇ ਗੁਣਾ -1 ਹੈ। ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ ਅਤੇ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $\frac{a}{r}$, a, ar G.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਤਿੰਨ ਪਦ ਹਨ ਤਾਂ

$$\frac{a}{r} + ar + a = \frac{13}{12} \quad \ldots (1)$$

ਅਤੇ $$\left(\frac{a}{r}\right)(a)\,(ar) = -1 \quad \ldots (2)$$

(2) ਤੋਂ, ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ $a^3 = -1$, ਭਾਵ, $a = -1$ (ਕੇਵਲ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੂਲ ਲੈਣ 'ਤੇ)

$a = -1$ ਨੂੰ (1) ਵਿਚ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$-\frac{1}{r} - 1 - r = \frac{13}{12} \text{ ਜਾਂ } 12r^2 + 25r + 12 = 0$$

ਇਹ r ਵਿਚ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ $r = -\frac{3}{4}$ ਜਾਂ $-\frac{4}{3}$

ਇਸ ਲਈ G.P. ਦੇ ਤਿੰਨ ਪਦ : $\frac{4}{3}, -1, \frac{3}{4}$, $r = \frac{-3}{4}$ ਲਈ ਅਤੇ $\frac{3}{4}, -1, \frac{4}{3}$, $r = \frac{-4}{3}$ ਲਈ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 15 : ਅਨੁਕ੍ਰਮ 7, 77, 777, 7777, ... ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾਂ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇਹ G.P. ਨਹੀਂ ਹੈ ਫਿਰ ਵੀ ਇਸ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਢੰਗ ਨਾਲ ਲਿਖ ਕੇ G.P. ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$$S_n = 7 + 77 + 777 + 7777 + \ldots n \text{ ਪਦਾਂ ਤੱਕ}$$

$$= \frac{7}{9}[9+99+999+9999+ \ldots n \text{ ਪਦਾਂ ਤੱਕ}]$$

$$= \frac{7}{9}[(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+(10^4-1)+\ldots n \text{ ਪਦਾਂ ਤੱਕ}]$$

$$= \frac{7}{9}[(10 + 10^2 + 10^3 + ... n \text{ ਪਦਾਂ ਤੱਕ}) - (1+1+1+ ... n \text{ ਪਦਾਂ ਤੱਕ})]$$

$$= \frac{7}{9}\left[\frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - n\right] = \frac{7}{9}\left[\frac{10\,(10^n - 1)}{9} - n\right]$$

ਉਦਾਹਰਣ 16 : ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ 2 ਮਾਤਾ-ਪਿਤਾ, 4 ਦਾਦਾ-ਦਾਦੀ, 8 ਪੜਦਾਦਾ-ਪੜਦਾਦੀ ਆਦਿ ਹਨ। ਉਸਦੀ ਦਸਵੀਂ ਪੀੜ੍ਹੀ ਤੱਕ ਪੂਰਵਜਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $a = 2$, $r = 2$ ਅਤੇ $n = 10$

ਜੋੜ ਦਾ ਸੂਤਰ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ $S_n = \frac{a\,(r^n - 1)}{r - 1}$

ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ $S_{10} = 2(2^{10} - 1) = 2046$

ਇਸ ਲਈ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਪੂਰਵਜਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 2046 ਹੈ।

9.5.3 *ਜਿਮਾਇਤੀ ਮੱਧ (Geometric Mean (G.M.))* ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦਾ ਜਿਮਾਇਤੀ ਮੱਧ (G.M.) ਸੰਖਿਆ $\sqrt{ab}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ 2 ਅਤੇ 8 ਦਾ ਜਿਮਾਇਤੀ ਮੱਧ 4 ਹੈ। ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਤਿੰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 2, 4, 8 ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਪਦ ਹਨ। ਇਹ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਮੱਧ ਦੀ ਧਾਰਣਾ ਦੇ ਵਿਆਪੀਕਰਣ (Generalise) ਦੇ ਵੱਲ ਵਧਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦਿੱਤੀਆ ਗਈਆਂ ਹਨ ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਵਿਚਕਾਰ ਇੱਛਾ ਅਨੁਸਾਰ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਰੱਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਕਿ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਇੱਕ ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ ਬਣ ਜਾਵੇ।

ਮੰਨ ਲਉ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ n ਸੰਖਿਆਵਾਂ G_1, G_2........,G_n ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ ਕਿ $a, G_1, G_2, G_3, \ldots, G_n, b$ ਇੱਕ G.P. ਹੈ। ਇਸ ਲਈ b, $(n + 2)$ ਵਾਂ ਪਦ ਹੈ, ਸਾਡੇ ਕੋਲ

$$b = ar^{n+1} \quad \text{ਜਾਂ} \quad r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

ਇਸ ਲਈ
$$G_1 = ar = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}, \quad G_2 = ar^2 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}}, \quad G_3 = ar^3 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{n+1}},$$

$$G_n = ar^n = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$

ਉਦਾਹਰਣ 17 : ਇਹੋ ਜਿਹੀਆਂ ਤਿੰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ 1 ਅਤੇ 256 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਰੱਖਣ ਤੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਇੱਕ G.P. ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ G_1, G_2, G_3 1 ਅਤੇ 256 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਤਿੰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ ਕਿ

$1, G_1, G_2, G_3, 256$ ਇੱਕ G.P. ਹੈ

ਇਸ ਲਈ $256 = r^4$ ਤੋਂ $r = \pm 4$ (ਕੇਵਲ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੂਲ ਲੈਣ ਤੇ)

$r = 4$ ਲਈ, ਸਾਡੇ ਕੋਲ $G_1 = ar = 4$, $G_2 = ar^2 = 16$, $G_3 = ar^3 = 64$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $r = -4$ ਲਈ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $-4, 16$ ਅਤੇ -64 ਹਨ

ਇਸ ਲਈ 1 ਅਤੇ 256 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਅਸੀਂ 4, 16, 64 ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਰਖਾਂਗੇ ਤਾਂ ਜੋ ਬਣਿਆ ਅਨੁਕ੍ਰਮ G.P. ਹੋਵੇਗਾ।

9.6 A.M. (ਅੰਕਗਣਿਤਕ ਮੱਧ) ਅਤੇ G.M. (ਜਿਮਾਇਤੀ ਮੱਧ) ਵਿਚ ਸੰਬੰਧ (Relation between A.M. and G.M.)

ਮੰਨ ਲਉ A ਅਤੇ G ਦੋ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ A.M. ਅਤੇ G.M. ਹਨ ਇਸ ਲਈ

$$A = \frac{a+b}{2} \quad \text{ਅਤੇ} \quad G = \sqrt{ab}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਡੇ ਕੋਲ

$$A - G = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2} \geq 0 \qquad \ldots (1)$$

(1) ਤੋਂ ਅਸੀਂ $A \geq G$ ਸੰਬੰਧ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 18 : ਜੇਕਰ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦਾ A.M. ਅਤੇ G.M. ਕ੍ਰਮਵਾਰ 10 ਅਤੇ 8 ਹੈ ਤਾਂ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $\quad \text{A.M.} = \frac{a+b}{2} = 10 \qquad \ldots (1)$

ਅਤੇ $\quad \text{G.M.} = \sqrt{ab} = 8 \qquad \ldots (2)$

(1) ਅਤੇ (2), ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ $\quad a + b = 20 \qquad \ldots (3)$

$ab = 64 \qquad \ldots (4)$

(3) ਅਤੇ (4) ਤੋਂ a ਅਤੇ b ਦੀਆਂ ਕੀਮਤਾਂ ਤਤਸਮਕ $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$ ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ 'ਤੇ

$(a - b)^2 = 400 - 256 = 144$

ਜਾਂ $\quad a - b = \pm 12 \qquad \ldots (5)$

(3) ਅਤੇ (5) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$a = 4, b = 16$ ਜਾਂ $a = 16, b = 4$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ a ਅਤੇ b ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 4, 16 ਜਾਂ 16, 4 ਹਨ।

ਅਭਿਆਸ 9.3

1. G.P. $\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \ldots$ ਦਾ 20ਵਾਂ ਅਤੇ nਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. G.P. ਦਾ 12ਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ 8ਵਾਂ ਪਦ 192 ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ 2 ਹੈ।
3. ਕਿਸੇ G.P. ਦੇ 5ਵਾਂ, 8ਵਾਂ ਅਤੇ11ਵਾਂ ਪਦ ਕ੍ਰਮਵਾਰ p, q ਅਤੇ s ਹਨ ਦਿਖਾਉ ਕਿ $q^2 = ps$ ਹੈ।
4. ਇੱਕ G.P. ਦਾ ਚੌਥਾ ਪਦ ਉਸਦੇ ਦੂਜੇ ਪਦ ਦਾ ਵਰਗ ਹੈ ਅਤੇ ਪਹਿਲਾ ਪਦ -3 ਹੈ। ਇਸਦਾ 7ਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।
5. ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦਾ ਕਿਹੜਾ ਪਦ

   (a) $2, 2\sqrt{2}, 4, \ldots; 128$ ਹੈ ? $\qquad$ (b) $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, \ldots; 729$ ਹੈ ?

   (c) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots; \frac{1}{19683}$ ਹੈ?
6. x ਦੇ ਕਿਸ ਮੁੱਲ ਲਈ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $-\frac{2}{7}, x, -\frac{7}{2}$ G.P. ਹਨ ?

   ਪ੍ਰਸ਼ਨ 7 ਤੋਂ 10 ਤੱਕ ਹਰੇਕ G.P. ਦਾ ਦਿੱਤੇ ਪਦਾਂ ਤੱਕ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ
7. 0.15, 0.015, 0.0015, ... 20 ਪਦਾਂ ਦਾ
8. $\sqrt{7}, \sqrt{21}, 3\sqrt{7}, \ldots n$ ਪਦਾਂ ਦਾ
9. $1, -a, a^2, -a^3, \ldots n$ ਪਦਾਂ ਦਾ (ਜੇਕਰ $a \neq -1$).
10. $x^3, x^5, x^7, \ldots n$ ਪਦਾਂ ਦਾ (ਜੇਕਰ $x \neq \pm 1$).

11. ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ : $\sum_{k=1}^{11}(2+3^k)$

12. ਇੱਕ G.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਤਿੰਨ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $\frac{39}{10}$ ਹੈ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ 1 ਹੈ। ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ ਅਤੇ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

13. G.P. $3, 3^2, 3^3, \ldots$ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਪਦਾਂ ਜਾ ਜੋੜ 120 ਹੋਵੇਗਾ ?

14. ਇੱਕ G.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਤਿੰਨ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 16 ਹੈ ਅਤੇ ਅਗਲੇ ਤਿੰਨ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 128 ਹੈ। ਪਹਿਲਾ ਪਦ, ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ ਅਤੇ G.P ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ।

15. ਇੱਕ G.P. ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ $a = 729$,7ਵਾਂ ਪਦ 64 ਤਾਂ S_7 ਪਤਾ ਕਰੋ।

16. ਇੱਕ G.P. ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੇ ਪਹਿਲੇ ਦੋ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ – 4 ਅਤੇ ਪੰਜਵਾਂ ਪਦ ਤੀਜੇ ਪਦ ਦਾ 4 ਗੁਣਾ ਹੈ।

17. ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ G.P. ਦਾ ਚੌਥਾ, ਦਸਵਾਂ ਅਤੇ 16ਵਾਂ ਪਦ ਕ੍ਰਮਵਾਰ x, y ਅਤੇ z ਹਨ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ x, y, z G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ।

18. ਅਨੁਕ੍ਰਮ 8, 88, 888, 8888... . ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ।

19. ਅਨੁਕ੍ਰਮ 2, 4, 8, 16, 32 ਅਤੇ 128, 32, 8, 2, $\frac{1}{2}$ ਦੇ ਸੰਗਤ ਪਦਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਨਾਲ ਬਣੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ।

20. ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਅਨੁਕ੍ਰਮ $a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-1}$ ਅਤੇ A, AR, AR^2, ... AR^{n-1} ਦੇ ਸੰਗਤ ਪਦਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਨਾਲ ਬਣਿਆ ਅਨੁਕ੍ਰਮ G.P. ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

21. ਅਜਿਹੇ ਚਾਰ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ (G.P.) ਵਿਚ ਹੋਣ, ਜਿਸਦਾ ਤੀਸਰਾ ਪਦ ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਤੋਂ 9 ਵੱਧ ਅਤੇ ਦੂਜਾ ਪਦ, ਚੌਥੇ ਪਦ ਤੋਂ 18 ਵੱਧ ਹੋਵੇ।

22. ਕਿਸੇ G.P. ਦਾ pਵਾਂ, qਵਾਂ ਅਤੇ rਵਾਂ ਪਦ ਕ੍ਰਮਵਾਰ a, b ਅਤੇ c ਹੈ।

ਸਿੱਧ ਕਰੋ $$a^{q-r}\, b^{r-p} c^{p-q} = 1$$

23. ਇੱਕ G.P. ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਅਤੇ nਵਾਂ ਪਦ ਕ੍ਰਮਵਾਰ a ਅਤੇ b ਹੈ, ਅਤੇ ਜੇਕਰ P, n ਪਦਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ $P^2 = (ab)^n$.

24. ਦਿਖਾਉ ਕਿ G.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ n ਪਦਾਂ ਜੋੜ ਅਤੇ $(n + 1)$ਵੇਂ ਪਦ ਤੋਂ $(2n)$ਵੇਂ ਪਦ ਤੱਕ ਦੇ ਜੋੜ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ $\frac{1}{r^n}$ ਹੈ।

25. ਜੇਕਰ a, b, c ਅਤੇ d, G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ, ਤਾਂ ਦਿਖਾਉ

$(a^2 + b^2 + c^2)\,(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$

26. ਅਜਿਹੀਆਂ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ 3 ਅਤੇ 81 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਰੱਖਣ ਤੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮ G.P. ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇ।

27. n ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ $\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$, a ਅਤੇ b ਦਾ ਜਿਮਾਇਤੀ ਮੱਧ (G.M.) ਹੋਵੇ।

28. ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਉਹਨਾਂ ਦੇ G.M. ਤੋਂ 6 ਗੁਣਾ ਹੈ ਤਾਂ ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $\left(3+2\sqrt{2}\right):\left(3-2\sqrt{2}\right)$ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ।

29. ਜੇਕਰ A ਅਤੇ G ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ A.M. ਅਤੇ G.M., ਹੋਣ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ

$A \pm \sqrt{(A+G)(A-G)}$ ਹਨ।

30. ਕਿਸੇ ਕਲਚਰ (Culture) ਵਿੱਚ ਬੈਕਟੀਰੀਆ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਹਰ ਘੰਟੇ ਬਾਅਦ ਦੁੱਗਣੀ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਸ਼ੁਰੂ ਵਿੱਚ ਉਸ ਵਿੱਚ 30 ਬੈਕਟੀਰੀਆ ਸੀ ਤਾਂ ਦੂਜੇ, ਚੌਥੇ ਅਤੇ nਵੇਂ ਘੰਟੇ ਬਾਅਦ ਬੈਕਟੀਰੀਆ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਕਿੰਨੀ ਹੋਵੇਗੀ ?

31. 500 ਰੁਪਏ ਦੀ ਰਾਸ਼ੀ 10% ਸਾਲਾਨਾ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਵਿਆਜ ਨਾਲ 10 ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਕਿੰਨੀ ਹੋ ਜਾਵੇਗੀ ? ਪਤਾ ਕਰੋ।

32. ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ A.M. ਅਤੇ G.M. ਕ੍ਰਮਵਾਰ 8 ਅਤੇ 5 ਹੈ ਤਾਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

9.7 ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਅਨੁਕ੍ਰਮਾਂ ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ (Sum of n terms of Special Series)

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਅਨੁਕ੍ਰਮਾਂ ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ, ਜੋ ਕਿ ਹੈ

(i) $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ (ਪਹਿਲੀਆਂ n ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ)

(ii) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ (ਪਹਿਲੀਆਂ n ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ)

(iii) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$ (ਪਹਿਲੀਆਂ n ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਘਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ)

ਆਉ ਇਹਨਾਂ 'ਤੇ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਕਰਕੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ :

(i) $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$, ਤਾਂ $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ (9.4 ਭਾਗ ਵੇਖੋ)

(ii) ਇੱਥੇ $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$

ਅਸੀਂ ਤਤਸਮਕ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ $\quad k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$

ਕ੍ਰਮਵਾਰ $k = 1, 2, \ldots, n$ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$1^3 - 0^3 = 3(1)^2 - 3(1) + 1$$
$$2^3 - 1^3 = 3(2)^2 - 3(2) + 1$$
$$3^3 - 2^3 = 3(3)^2 - 3(3) + 1$$

....

....

....

$$n^3 - (n-1)^3 = 3(n)^2 - 3(n) + 1$$

ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਜੋੜਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$n^3 - 0^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) - 3(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n$$

$$n^3 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + n$$

(i), ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

ਇਸ ਲਈ $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{1}{3}\left[n^3 + \dfrac{3n(n+1)}{2} - n\right] = \dfrac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(iii) ਇੱਥੇ $S_n = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$

ਅਸੀਂ ਤਤਸਮਕ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, $\quad (k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$

$k = 1, 2, 3 \ldots n$, ਰੱਖਣ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$2^4 - 1^4 = 4(1)^3 + 6(1)^2 + 4(1) + 1$$
$$3^4 - 2^4 = 4(2)^3 + 6(2)^2 + 4(2) + 1$$
$$4^4 - 3^4 = 4(3)^3 + 6(3)^2 + 4(3) + 1$$

....

....

....

$$(n-1)^4 - (n-2)^4 = 4(n-2)^3 + 6(n-2)^2 + 4(n-2) + 1$$
$$n^4 - (n-1)^4 = 4(n-1)^3 + 6(n-1)^2 + 4(n-1) + 1$$

$(n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸੇ ਜੋੜਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$(n+1)^4 - 1^4 = 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3) + 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) + 4(1 + 2 + 3 + ... + n) + n$

$$= 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + n \quad ... (1)$$

ਭਾਗ (i) ਅਤੇ (ii) ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{ਅਤੇ} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ਇਹਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ (1), ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ’ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$4\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - \frac{6n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} - n$$

ਜਾਂ $4S_n = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - n(2n^2 + 3n + 1) - 2n(n+1) - n$

$= n^4 + 2n^3 + n^2$

$= n^2(n+1)^2$

ਇਸ ਲਈ, $S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} = \dfrac{[n(n+1)]^2}{4}$

ਉਦਾਹਰਣ 19 : ਲੜੀ 5 + 11 + 19 + 29 + 41… ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਆਉ ਲਿਖੀਏ

$S_n = 5 + 11 + 19 + 29 + ... + a_{n-1} + a_n$

ਜਾਂ $S_n = 5 + 11 + 19 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$

ਘਟਾਉਣ ’ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ,

$0 = 5 + [6 + 8 + 10 + 12 + ... + (n-1) \text{ ਪਦ}] - a_n$

ਜਾਂ $a_n = 5 + \dfrac{(n-1)[12 + (n-2)\times 2]}{2}$

$= 5 + (n-1)(n+4) = n^2 + 3n + 1$

ਇਸ ਲਈ $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(k^2 + 3k + 1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{2} + n = \frac{n(n+2)(n+4)}{3}.$$

ਉਦਾਹਰਣ 20 : ਉਸ ਲੜੀ ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦਾ nਵਾਂ ਪਦ $n(n+3)$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $a_n = n(n+3) = n^2 + 3n$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਹੈ

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+5)}{3}.$$

ਅਭਿਆਸ 9.4

ਅਭਿਆਸ 1 ਤੋਂ 7 ਤੱਕ ਹਰੇਕ ਲੜੀ ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ।

1. $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + \ldots$

2. $1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + 3 \times 4 \times 5 + \ldots$

3. $3 \times 1^2 + 5 \times 2^2 + 7 \times 3^2 + \ldots$

4. $\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \ldots$

5. $5^2 + 6^2 + 7^2 + \ldots + 20^2$

6. $3 \times 8 + 6 \times 11 + 9 \times 14 + \ldots$

7. $1^2 + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) + \ldots$

ਅਭਿਆਸ 8 ਤੋਂ 10 ਤੱਕ ਹਰੇਕ ਲੜੀ ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ nਵਾਂ ਪਦ ਦਿੱਤਾ ਹੈ।

8. $n(n+1)(n+4)$

9. $n^2 + 2^n$

10. $(2n-1)^2$

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 21 : ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ (A.P.) ਦਾ pਵਾਂ, qਵਾਂ, rਵਾਂ ਅਤੇ sਵਾਂ ਪਦ ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ (G.P.) ਵਿੱਚ ਹੈ ਤਾਂ ਦਿਖਾਉ ਕਿ $(p-q)$, $(q-r)$, $(r-s)$ ਵੀ G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ,

$$a_p = a + (p-1)d \quad \ldots (1)$$

$$a_q = a + (q-1)d \quad \ldots (2)$$

$$a_r = a + (r-1)d \quad \ldots (3)$$

$$a_s = a + (s-1)d \quad \ldots (4)$$

ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ a_p, a_q, a_r ਅਤੇ a_s, G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ

ਇਸ ਲਈ $$\frac{a_q}{a_p} = \frac{a_r}{a_q} = \frac{a_q - a_r}{a_p - a_q} = \frac{q-r}{p-q} \quad \text{(ਕਿਉਂ ?)} \quad \ldots (5)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $\frac{a_r}{a_q} = \frac{a_s}{a_r} = \frac{a_r - a_s}{a_q - a_r} = \frac{r-s}{q-r}$ (ਕਿਉਂ ?) ... (6)

ਇਸ ਲਈ (5) ਅਤੇ (6) ਦੁਆਰਾ $\frac{q-r}{p-q} = \frac{r-s}{q-r}$, ਭਾਵ $(p - q)$, $(q - r)$ ਅਤੇ $(r - s)$ G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 22 : ਜੇਕਰ $a, b, c,$ G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ ਅਤੇ $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}}$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $x, y, z,$ A.P. ਵਿੱਚ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}} = k$ ਤਾਂ

$a = k^x$, $b = k^y$ ਅਤੇ $c = k^z$. ... (1)

ਕਿਉਂਕਿ a, b, c, G.P. ਵਿਚ ਹਨ ਇਸ ਲਈ

$b^2 = ac$ ... (2)

(1) ਅਤੇ (2), ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$k^{2y} = k^{x+z}$, ਜਿਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ $2y = x + z$

ਇਸ ਲਈ, x, y ਅਤੇ z A.P. ਵਿੱਚ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 23 : ਜੇਕਰ a, b, c, d ਅਤੇ p ਵੱਖ-ਵੱਖ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ ਕਿ $(a^2 + b^2 + c^2)p^2 - 2(ab + bc + cd)\,p + (b^2 + c^2 + d^2) \le 0$, ਤਾਂ ਦਿਖਾਉ ਕਿ a, b, c ਅਤੇ d G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ

$(a^2 + b^2 + c^2)\,p^2 - 2\,(ab + bc + cd)\,p + (b^2 + c^2 + d^2) \le 0$ ... (1)

ਪ੍ਰੰਤੂ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ

$= (a^2p^2 - 2abp + b^2) + (b^2p^2 - 2bcp + c^2) + (c^2p^2 - 2cdp + d^2)$,

ਇਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ $(ap - b)^2 + (bp - c)^2 + (cp - d)^2 \ge 0$ ... (2)

ਕਿਉਂਕਿ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਰਿਣਾਤਮਕ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ

ਇਸ ਲਈ (1) ਅਤੇ (2), ਤੋਂ ਸਾਡੇ ਕੋਲ $(ap - b)^2 + (bp - c)^2 + (cp - d)^2 = 0$

ਜਾਂ $ap - b = 0,\ bp - c = 0,\ cp - d = 0$

ਇਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} = p$

ਇਸ ਲਈ a, b, c ਅਤੇ d, G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 24 : ਜੇਕਰ p,q,r, G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ ਅਤੇ ਸਮੀਕਰਣ $px^2 + 2qx + r = 0$ ਅਤੇ $dx^2 + 2ex + f = 0$ ਦੇ ਸਾਂਝੇ ਮੂਲ ਹਨ ਤਾਂ ਦਿਖਾਉ $\frac{d}{p}, \frac{e}{q}, \frac{f}{r}$, A.P. ਵਿੱਚ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਸਮੀਕਰਣ $px^2 + 2qx + r = 0$ ਦੇ ਮੂਲ ਹਨ

$$x = \frac{-2q \pm \sqrt{4q^2 - 4rp}}{2p}$$

ਕਿਉਂਕਿ p, q, r, G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ। $q^2 = pr$; $x = \frac{-q}{p}$ ਪ੍ਰੰਤੂ $\frac{-q}{p}$, $dx^2 + 2ex + f = 0$ ਦਾ ਵੀ ਮੂਲ ਹੈ (ਕਿਉਂ ?) ਇਸ ਲਈ

$$d\left(\frac{-q}{p}\right)^2 + 2e\left(\frac{-q}{p}\right) + f = 0,$$

ਜਾਂ $$dq^2 - 2eqp + fp^2 = 0 \qquad \text{... (1)}$$

(1) ਨੂੰ pq^2 ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ ਅਤੇ $q^2 = pr$ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਨ 'ਤੇ

$$\frac{d}{p} - \frac{2e}{q} + \frac{fp}{pr} = 0, \text{ ਜਾਂ } \quad \frac{2e}{q} = \frac{d}{p} + \frac{f}{r}$$

ਇਸ ਲਈ $\frac{d}{p}, \frac{e}{q}, \frac{f}{r}$ A.P. ਵਿੱਚ ਹਨ।

ਅਧਿਆਇ 9 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਕਿਸੇ A.P. ਦੇ $(m + n)$ਵੇਂ ਅਤੇ $(m - n)$ਵੇਂ ਪਦ ਦਾ ਜੋੜ m ਵੇਂ ਪਦ ਦਾ ਦੁਗਣਾ ਹੈ।
2. ਕਿਸੇ A.P. ਦੀਆਂ ਤਿੰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 24 ਅਤੇ ਗੁਣਾ 440 ਹੈ ਤਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।
3. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿਸੇ A.P. ਦੇ n, $2n$, $3n$ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਕ੍ਰਮਵਾਰ S_1, S_2 ਅਤੇ S_3, ਦਿਖਾਉ ਕਿ $S_3 = 3(S_2 - S_1)$
4. 200 ਅਤੇ 400 ਵਿਚਕਾਰ ਸਾਰੀਆ ਉਹਨਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਕਰੋ ਜੋ 7 ਨਾਲ ਭਾਗਯੋਗ ਹਨ।
5. 1 ਅਤੇ 100 ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਕਰੋ ਜੋ 2 ਜਾਂ 5 ਨਾਲ ਭਾਗਯੋਗ ਹਨ।
6. ਦੋ ਅੰਕਾ ਵਾਲੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਕਰੋ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ 4 ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ ਤੇ 1 ਬਾਕੀ ਬੱਚਦਾ ਹੋਵੇ।
7. ਸਾਰੇ $x, y \in$ N ਦੇ ਲਈ $f(x + y) = f(x) f(y)$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਫਲਨ ਹੈ ਕਿ

   $f(1) = 3$ ਅਤੇ $\sum_{x=1}^{n} f(x) = 120$, n ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
8. ਕਿਸੇ G.P. ਦੇ ਕੁਝ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 315 ਹੈ, ਉਸਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 5 ਅਤੇ 2 ਹੈ। ਆਖ਼ਰੀ ਪਦ ਅਤੇ ਪਦਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।
9. ਕਿਸੇ G.P. ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ 1 ਹੈ। ਤੀਜੇ ਅਤੇ ਪੰਜਵੇਂ ਪਦ ਦਾ ਜੋੜ 90 ਹੈ। G.P. ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।
10. ਕਿਸੇ G.P. ਦੇ ਤਿੰਨ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 56 ਹੈ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ 1, 7 ਅਤੇ 21 ਘਟਾਈਏ ਤਾਂ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।
11. ਕਿਸੇ G.P. ਦੇ ਪਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਉਸਦੇ ਸਾਰੇ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ, ਟਾਂਕ ਸਥਾਨਾਂ ਵਾਲੇ ਪਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦਾ 5 ਗੁਣਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।
12. ਇੱਕ A.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਚਾਰ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 56 ਹੈ। ਆਖਰੀ ਚਾਰ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 112 ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇਸਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ 11 ਹੈ ਤਾਂ ਪਦਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।
13. ਜੇਕਰ $\frac{a+bx}{a-bx} = \frac{b+cx}{b-cx} = \frac{c+dx}{c-dx} (x \neq 0)$, ਤਾਂ ਦਿਖਾਉ ਕਿ a, b, c ਅਤੇ d G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ।

14. ਕਿਸੇ G.P. ਵਿੱਚ S, n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ, P ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਅਤੇ R ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਦਾ ਜੋੜ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $P^2R^n = S^n$.

15. ਕਿਸੇ A.P. ਦਾ pਵਾਂ, qਵਾਂ and rਵਾਂ ਪਦ ਕ੍ਰਮਵਾਰ a, b, ਅਤੇ c ਹੈ ਦਿਖਾਉ ਕਿ

$$(q-r)a + (r-p)b + (p-q)c = 0$$

16. ਜੇਕਰ $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right), b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right), c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ A.P., ਵਿੱਚ ਹਨ, ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $a, b, c,$ A.P. ਵਿੱਚ ਹਨ।

17. ਜੇਕਰ $a, b, c, d,$ G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $(a^n + b^n), (b^n + c^n), (c^n + d^n)$ G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ।

18. ਜੇਕਰ a ਅਤੇ b, $x^2 - 3x + p = 0$ ਦੇ ਮੂਲ ਹਨ ਅਤੇ c, d , $x^2 - 12x + q = 0$ ਦੇ ਮੂਲ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ $a, b, c, d,$ G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $(q + p) : (q - p) = 17:15$।

19. ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ A.M. ਅਤੇ G.M. ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ $m : n$ ਹੈ। ਦਿਖਾਉ ਕਿ

$$a:b=\left(m+\sqrt{m^2-n^2}\right):\left(m-\sqrt{m^2-n^2}\right)$$

20. ਜੇਕਰ $a, b, c,$ A.P. ਵਿੱਚ ਹਨ, $b, c, d,$ G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ ਅਤੇ $\frac{1}{c},\frac{1}{d},\frac{1}{e}$ A.P. ਵਿੱਚ ਹਨ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ a, c, e G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ।

21. ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਲੜੀਆਂ ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) 5 + 55 +555 + … (ii) .6 +. 66 +. 666 +…

22. ਲੜੀ ਦਾ 20ਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ : $2 \times 4 + 4 \times 6 + 6 \times 8 + ... + n$ ਪਦ

23. ਲੜੀ ਦੇ ਪਹਿਲੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ : 3+ 7 +13 +21 +31 +…

24. ਜੇਕਰ S_1, S_2, S_3 ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਪਹਿਲੀਆਂ n ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ, ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ, ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਘਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $9S_2^2 = S_3(1 + 8S_1)$

25. ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਲੜੀ ਦਾ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ :

$$\frac{1^3}{1}+\frac{1^3+2^3}{1+3}+\frac{1^3+2^3+3^3}{1+3+5}+...$$

26. ਦਿਖਾਉ ਕਿ $\dfrac{1\times2^2+2\times3^2+...+n\times(n+1)^2}{1^2\times2+2^2\times3+...+n^2\times(n+1)}=\dfrac{3n+5}{3n+1}$

27. ਇੱਕ ਕਿਸਾਨ ਪੁਰਾਣਾ ਟ੍ਰੈਕਟਰ 12000 ਰੁਪਏ ਵਿਚ ਖਰੀਦਦਾ ਹੈ। ਉਹ 6000 ਰੁਪਏ ਨਕਦ ਭੁਗਤਾਨ ਕਰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਰਾਸ਼ੀ ਨੂੰ 500 ਰੁਪਏ ਦੀ ਸਾਲਾਨਾ ਕਿਸ਼ਤ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਉਸ ਰਾਸ਼ੀ ’ਤੇ ਜੋ ਭੁਗਤਾਨ ਨਹੀਂ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ। 12% ਸਲਾਨਾ ਵਿਆਜ ਵੀ ਦੇਣ ਦਾ ਵਾਅਦਾ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਕਿਸਾਨ ਨੂੰ ਟ੍ਰੈਕਟਰ ਦੀ ਕੁੱਲ ਕਿੰਨੀ ਕੀਮਤ ਦੇਣੀ ਪਵੇਗੀ।

28. ਸ਼ਮਸ਼ਾਦ ਅਲੀ 22000 ਰੁਪਏ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਕੂਟਰ ਖਰੀਦਦਾ ਹੈ। ਉਹ 4000 ਰੁਪਏ ਨਕਦ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਰਾਸ਼ੀ ਨੂੰ 1000 ਰੁਪਏ ਸਲਾਨਾ ਕਿਸ਼ਤ ਦੇ ਨਾਲ ਉਸ ਰਾਸ਼ੀ ’ਤੇ ਜੋ ਭੁਗਤਾਨ ਨਹੀਂ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ, 10% ਸਲਾਨਾ ਵਿਆਜ ਵੀ ਦੇਣ ਦਾ ਵਾਅਦਾ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਉਸ ਨੂੰ ਸਕੂਟਰ ਦੀ ਕੁੱਲ ਕਿੰਨੀ ਕੀਮਤ ਅਦਾ ਕਰਨੀ ਪਵੇਗੀ।

29. ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਆਪਣੇ ਚਾਰ ਮਿੱਤਰਾਂ ਨੂੰ ਪੱਤਰ ਲਿਖਦਾ ਹੈ। ਉਹ ਹਰੇਕ ਨੂੰ ਉਸਦੀ ਨਕਲ ਕਰਕੇ ਚਾਰ ਹੋਰ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਨੂੰ ਭੇਜਣ ਲਈ ਕਹਿੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਵੀ ਇਹੀ ਕਰਨ ਲਈ ਕਹਿੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਹਰੇਕ ਪੱਤਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਇਹ ਲੜੀ ਜਾਰੀ ਰੱਖੇ। ਇਹ ਮੰਨ ਲਿਆ ਜਾਵੇ ਕਿ ਲੜੀ ਨਾ ਟੁੱਟੇ ਅਤੇ ਇੱਕ ਪੱਤਰ ਦਾ ਡਾਕ ਖਰਚ 50 ਪੈਸੇ ਹੈ ਤਾਂ 8ਵੇਂ ਸਮੂਹ ਤੱਕ ਪੱਤਰ ਭੇਜੇ ਜਾਣ ਦਾ ਖਰਚ ਪਤਾ ਕਰੋ।

30. ਇੱਕ ਆਦਮੀ ਨੇ ਬੈਂਕ ਵਿੱਚ 10000 ਰੁਪਏ 5% ਸਲਾਨਾ ਦਰ ਨਾਲ ਸਾਧਾਰਨ ਵਿਆਜ ਤੇ ਜਮ੍ਹਾ ਕਰਵਾਏ। ਜਦੋਂ ਤੋਂ ਰਾਸ਼ੀ ਜਮਾਂ ਕਰਵਾਈ ਤਦ ਤੋਂ 15ਵੇਂ ਸਾਲ ਵਿਚ ਉਸ ਦੇ ਖਾਤੇ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀ ਰਾਸ਼ੀ ਹੋ ਗਈ ਅਤੇ 20 ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਕੁੱਲ ਕਿੰਨੀ ਰਾਸ਼ੀ ਹੋ ਗਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

31. ਇੱਕ ਨਿਰਮਾਤਾ ਘੋਸ਼ਣਾ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉਸ ਦੀ ਮਸ਼ੀਨ ਜਿਸ ਦਾ ਮੁੱਲ 15625 ਰੁਪਏ ਹੈ, ਹਰ ਸਾਲ 20% ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਕੀਮਤ ਘੱਟ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। 5 ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਮਸ਼ੀਨ ਦਾ ਅੰਦਾਜਨ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

32. ਕਿਸੇ ਕੰਮ ਨੂੰ ਕੁਝ ਦਿਨਾਂ ਵਿਚ ਪੂਰਾ ਕਰਨ ਲਈ 150 ਮਜ਼ਦੂਰ ਲਗਾਏ ਗਏ। ਦੂਜੇ ਦਿਨ 4 ਮਜ਼ਦੂਰਾਂ ਨੇ ਕੰਮ ਛੱਡ ਦਿੱਤਾ, ਤੀਜੇ ਦਿਨ 4 ਹੋਰ ਕਰਮਚਾਰੀਆਂ ਨੇ ਕੰਮ ਛੱਡ ਦਿੱਤਾ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੋਰਾਂ ਨੇ। ਹੁਣ ਕੰਮ ਪੂਰਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ 8 ਦਿਨ ਵੱਧ ਲੱਗਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਦਿਨਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੱਸੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਕੰਮ ਪੂਰਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ।

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

- ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਤੋਂ ਸਾਡਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ, "ਕਿਸੇ ਨਿਯਮ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਇੱਕ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਲੜੀ ਵਿਚ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਵਿਵਸਥਾ।" ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਨੂੰ ਇੱਕ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿਚ ਵੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜਾਂ ਉਸ ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ $\{1, 2, 3, ..., k\}$ ਦੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਹੈ। ਉਹ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਜਿਸ ਵਿਚ ਪਦਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਸੀਮਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਸੀਮਿਤ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਸੀਮਿਤ ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਉਸਨੂੰ ਅਸੀਮਿਤ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

- ਮੰਨ ਲਉ $a_1, a_2, a_3, ...$ ਇੱਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਹੈ ਤਾਂ $a_1 + a_2 + a_3 + ...$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜੋੜ ਲੜੀ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਜਿਸ ਲੜੀ ਵਿੱਚ ਪਦਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਸੀਮਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਉਸਨੂੰ ਸੀਮਿਤ ਲੜੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

- ਇੱਕ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ (A.P.) ਉਹ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਪਦ ਸਮਾਨ ਸਥਿਰ ਅੰਕ ਨਾਲ ਵੱਧਦੇ ਜਾਂ ਘੱਟਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਸਥਿਰ ਅੰਕ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ A.P. ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਅਸੀਂ A.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਨੂੰ a, ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ ਨੂੰ d ਅਤੇ ਆਖਰੀ ਪਦ ਨੂੰ l ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। A.P. ਦਾ ਆਮ ਪਦ ਜਾਂ nਵਾਂ ਪਦ $a_n = a + (n-1)d$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

  A.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right] = \frac{n}{2}(a + l)$ ਹੈ।

- ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦਾ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਮੱਧ A, $\frac{a+b}{2}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਅਨੁਕ੍ਰਮ a, A, b, A.P. ਵਿੱਚ ਹੈ।

- ਇੱਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਨੂੰ ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ ਜਾਂ G.P., ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਪਦ ਆਪਣੇ ਪਿਛਲੇ ਪਦ ਤੋਂ ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿਚ ਵੱਧਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਰ ਅਨੁਪਾਤ ਨੂੰ ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਅਸੀਂ G.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਨੂੰ a ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ ਨੂੰ r ਨਾਲ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। G.P. ਦਾ ਆਮ ਪਦ ਜਾਂ nਵਾਂ ਪਦ $a_n = ar^{n-1}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

  G.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ n ਪਦ ਦਾ ਜੋੜ $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ ਜਾਂ $\frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$, ਜੇਕਰ $r \neq 1$

- ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦਾ ਜਿਮਾਇਤੀ ਮੱਧ (G.M.) $\sqrt{ab}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਅਨੁਕ੍ਰਮ a, G, b, G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ।

ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਨੋਟ

ਸਬੂਤ ਮਿਲਦੇ ਹਨ ਕਿ 4000 ਸਾਲ ਪਹਿਲਾਂ ਬੇਬੀ ਲੋਨੀਆ ਦੇ ਵਾਸੀਆਂ ਨੂੰ ਅੰਕਗਣਿਤ ਅਤੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਅਨੁਕ੍ਰਮਾਂ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਸੀ। Boethius (510 A.D.) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਅੰਕਗਣਿਤ ਅਤੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਅਨੁਕ੍ਰਮਾਂ ਦੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਸ਼ੁਰੂ ਦੇ ਯੂਨਾਨੀ ਲੇਖਕਾਂ ਨੂੰ ਸੀ। ਭਾਰਤੀ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿਚ ਆਰੀਆ ਭੱਟ (476 A.D.) ਨੇ ਪਹਿਲੀ ਵਾਰ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਅਤੇ ਘਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ, ਆਪਣੀ ਮਸ਼ਹੂਰ ਪੁਸਤਕ 'ਆਰੀਆ ਭਟਿਅਮ' ਜੋ ਲਗਭਗ 499 A.D. ਵਿੱਚ ਲਿਖੀ ਗਈ ਸੀ, ਵਿਚ ਦਿੱਤਾ। ਉਹਨਾਂ ਨੇ pਵਾਂ ਪਦ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ, ਅੰਕਗਣਿਤਕ ਲੜੀ ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦਾ ਸੂਤਰ ਵੀ ਦਿੱਤਾ। ਹੋਰ ਮਹਾਨ ਭਾਰਤੀ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ ਬ੍ਰਹਮਗੁਪਤ (598 A.D.), ਮਹਾਵੀਰ (850 A.D.) ਅਤੇ ਭਾਸਕਰ (1114–1185 A.D.) ਨੇ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਅਤੇ ਘਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕੀਤਾ। ਇੱਕ ਹੋਰ ਖਾਸ ਕਿਸਮ ਦਾ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਜਿਸ ਦੀ ਗਣਿਤ ਵਿਚ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਵਰਤੋਂ ਹੈ ਜੋ ਫ਼ਿੱਬੋਨਾਕੀ (1170–1250 A.D.) ਨੇ ਦਿੱਤਾ। ਸਤਾਰ੍ਹਵੀਂ ਸਦੀ ਵਿੱਚ ਲੜੀਆਂ ਦਾ ਵਰਗੀਕਰਣ ਖਾਸ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੋਇਆ। 1671 ਈ: ਵਿਚ James Gregory ਨੇ ਅਸੀਮਿਤ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਅਸੀਮਿਤ ਲੜੀ ਸ਼ਬਦ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ। ਬੀਜ ਗਣਿਤਿਕ ਅਤੇ ਸਮੂਹ ਸਿਧਾਂਤਾ ਦੇ ਸੰਪੂਰਨ ਵਿਕਾਸ ਦੇ ਉਪਰੰਤ ਹੀ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਅਤੇ ਲੜੀਆਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਤ ਜਾਣਕਾਰੀ ਚੰਗੇ ਢੰਗ ਨਾਲ ਪੇਸ਼ ਹੋ ਸਕੀ।

— ❖ —