अध्याय 6

कार्य, ऊर्जा और शक्ति

6.1 भूमिका

दैनिक बोल चाल की भाषा में हम प्राय: 'कार्य', 'ऊर्जा', और 'शक्ति' शब्दों का प्रयोग करते हैं। यदि कोई किसान खेत जोतता है, कोई मिस्त्री ईंट ढोता है, कोई छात्र परीक्षा के लिए पढ़ता है या कोई चित्रकार सुन्दर दृश्यभूमि का चित्र बनाता है तो हम कहते हैं कि सभी कार्य कर रहे हैं परन्तु भौतिकी में कार्य शब्द को परिशुद्ध रूप से परिभाषित करते हैं। जिस व्यक्ति में प्रतिदिन चौदह से सोलह घण्टें कार्य करने की क्षमता होती है, उसे अधिक शक्ति या ऊर्जा वाला कहते हैं। हम लंबी दूरी वाले घातक को उसकी शक्ति या ऊर्जा के लिए प्रशंसा करते हैं। इस प्रकार ऊर्जा कार्य करने की क्षमता है। भौतिकी में भी ऊर्जा कार्य से इसी प्रकार सम्बन्धित है परन्तु जैसा ऊपर बताया गया है शब्द कार्य को और अधिक परिशुद्ध रूप से परिभाषित करते हैं। शक्ति शब्द का दैनिक जीवन में प्रयोग विभिन्न अर्थों में होता है। कराटे या बॉक्सिंग में शक्तिशाली मुक्का वही माना जाता है जो तेज गति से मारा जाता है। शब्द 'शक्ति' का यह अर्थ भौतिकी में इस शब्द के अर्थ के निकट है। हम यह देखेंगे कि इन पदों की भौतिक परिभाषाओं तथा इनके द्वारा मस्तिष्क में बने कार्यकीय चित्रणों के बीच अधिक से अधिक यह सम्बन्ध अल्प ही होता है। इस पाठ का लक्ष्य इन तीन भौतिक राशियों की धारणाओं का विकास करना है लेकिन इसके पहले हमें आवश्यक गणितीय भाषा मुख्यत: दो सदिशों के अदिश गुणनफल को समझना होगा।

6.1.1 अदिश गुणनफल

अध्याय 4 में हम लोगों ने सदिश राशियों और उनके प्रयोगों के बारे में पढ़ा है। कई भौतिक राशियाँ; जैसे-विस्थापन, वेग, त्वरण, बल आदि सदिश हैं। हम लोगों ने सदिशों को जोड़ना और घटाना भी सीखा है। अब हम लोग सदिशों के गुणन के बारे में अध्ययन करेंगे। सदिशों को गुणा करने की दो विधियाँ हैं। प्रथम विधि से दो सदिशों के गुणनफल से अदिश गुणनफल प्राप्त होता है और इसे अदिश गुणनफल कहते हैं। दूसरी विधि में दो सदिशों के गुणनफल से एक सदिश प्राप्त होता है और इसे सदिश गुणनफल कहते हैं। सदिश गुणनफल के बारे में हम लोग अध्याय 7 में पढ़ेंगे। इस अध्याय में हम लोग अदिश गुणनफल की विवेचना करेंगे।

किन्हीं दो सदिशों **A** तथा **B** के अदिश या बिंदु-गुणनफल (डॉट गुणनफल) को हम [**A.B** (**A** डॉट **B**)] के रूप में लिखते हैं और निम्न प्रकार से परिभाषित करते हैं :

$$\mathbf{A.B} = AB\cos\theta \qquad (6.1a)$$

यहाँ θ दो सदिशों **A** तथा **B** के बीच का कोण है। इसे चित्र 6.1a में दिखाया गया है। क्योंकि, B तथा $\cos\theta$ सभी अदिश हैं इसलिए **A** तथा **B** का बिंदु गुणनफल भी अदिश राशि है। **A** व **B** में से प्रत्येक की अपनी-अपनी दिशा है किन्तु उनके अदिश गुणनफल की कोई दिशा नहीं है।

समीकरण (6.1a) से हमें निम्नलिखित परिणाम मिलता है :

$$\mathbf{A\cdot B} = A\,(B\cos\theta)$$
$$= B\,(A\cos\theta)$$

ज्यामिति के अनुसार $B\cos\theta$ सदिश **B** का सदिश **A** पर प्रक्षेप है (चित्र 6.1b)। इसी प्रकार $A\cos\theta$ सदिश **A** का सदिश **B** पर प्रक्षेप है (देखिए चित्र 6.1c)। इस प्रकार **A·B** सदिश **A** के परिमाण तथा **B** के अनुदिश **A** के घटक के गुणनफल के बराबर होता है। दूसरे तरीके से यह **B** के परिमाण तथा **A** का सदिश **B** के अनुदिश घटक के गुणनफल के बराबर है।

समीकरण (6.1a) से यह संकेत भी मिलता है कि अदिश गुणनफल क्रम विनिमेय नियम का पालन करता है–

$$\mathbf{A\cdot B} = \mathbf{B\cdot A}$$

अदिश गुणनफल **वितरण-नियम** का भी पालन करते हैं :

$$\mathbf{A\cdot(B + C)} = \mathbf{A\cdot B} + \mathbf{A\cdot C}$$

तथा,

$$\mathbf{A.}(\lambda\,\mathbf{B}) = \lambda(\mathbf{A\cdot B})$$

यहाँ λ एक वास्तविक संख्या है।

उपरोक्त समीकरणों की व्युत्पत्ति आपके लिए अभ्यास हेतु छोड़ी जा रही है।

अब हम एकांक सदिशों $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ का अदिश गुणनफल निकालेंगे। क्योंकि वे एक दूसरे के लंबवत् हैं, इसलिए

$$\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = 1$$
$$\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = 0$$

दो सदिशों

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}$$
$$\mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}$$

का अदिश गुणनफल होगा :

$$\mathbf{A\cdot B} = \left(A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}\right)\cdot\left(B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}\right)$$
$$= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \qquad (6.1b)$$

अदिश गुणनफल परिभाषा तथा समीकरण (6.1b) से हमें निम्न प्राप्त होता है :

(i) $\mathbf{A\cdot A} = A_xA_x + A_yA_y + A_zA_z$

अथवा $A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \qquad (6.1c)$

क्योंकि $\mathbf{A\cdot A} = |\mathbf{A}||\mathbf{A}|\cos 0 = A^2$

(ii) $\mathbf{A\cdot B} = 0$ यदि **A** व **B** एक दूसरे के लंबवत् हैं।

उदाहरण 6.1 बल $\mathbf{F} = (3\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} - 5\hat{\mathbf{k}})$ तथा विस्थापन $\mathbf{d} = (5\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}})$ के बीच का कोण ज्ञात करें। **F** का **d** पर प्रक्षेप भी ज्ञात करें।

हल $\mathbf{F\cdot d} = F_xd_x + F_yd_y + F_zd_z$
$= 3(5) + 4(4) + (-5)(3)$
$= 16$ unit

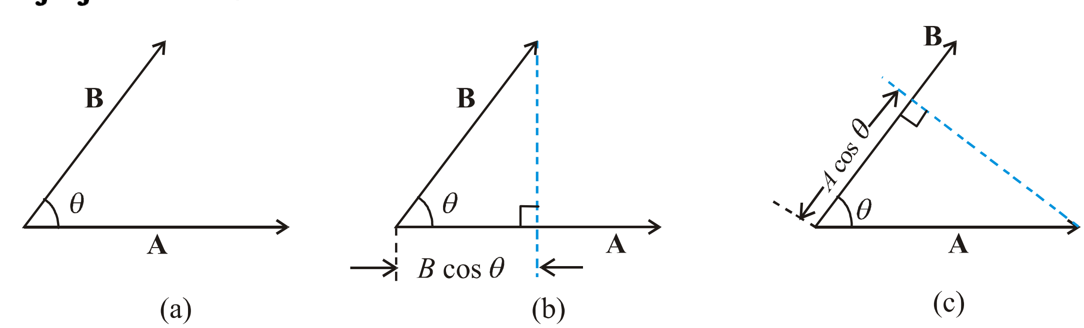
अत: $\mathbf{F\cdot d} = Fd\cos\theta = 16$ unit

अब $\mathbf{F\cdot F} = F^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2$
$= 9 + 16 + 25$
$= 50$ unit

तथा $\mathbf{d\cdot d} = d^2 = d_x^2 + d_y^2 + d_z^2$
$= 25 + 16 + 9$
$= 50$ unit

$$\therefore \cos\theta = \frac{16}{\sqrt{50}\sqrt{50}} = \frac{16}{50} = 0.32$$

$$\theta = \cos^{-1} 0.32$$



चित्र 6.1 *(a) दो सदिशों* **A** *व* **B** *का अदिश गुणनफल एक अदिश होता है अर्थात्* $\mathbf{A\cdot B} = AB\cos\theta$, *(b)* $B\cos\theta$ *सदिश* **B** *का सदिश* **A** *पर प्रक्षेप है, (c)* $A\cos\theta$ *सदिश* **A** *का* **B** *पर प्रक्षेप है।*

6.2 कार्य और गतिज ऊर्जा की धारणा : कार्य-ऊर्जा प्रमेय

अध्याय 3 में, नियत त्वरण a के अंतर्गत सरल रेखीय गति के लिए आप निम्न भौतिक संबंध पढ़ चुके हैं;

$$v^2 - u^2 = 2as \tag{6.2}$$

जहाँ u तथा v क्रमशः आरंभिक व अंतिम चाल और s वस्तु द्वारा चली गई दूरी है। दोनों पक्षों को $m/2$ से गुणा करने पर

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2 = mas = Fs \tag{6.2a}$$

जहाँ आखिरी चरण न्यूटन के द्वितीय नियमानुसार है। इस प्रकार सदिशों के प्रयोग द्वारा सहज ही समीकरण (6.2) का त्रिविमीय व्यापकीकरण कर सकते हैं

$$v^2 - u^2 = 2\,\mathbf{a.d}$$

यहाँ a और b पिंड के क्रमशः त्वरण और विस्थापन सदिश हैं। एक बार फिर दोनों पक्षों को $m/2$ से गुणा करने पर हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2 = m\,\mathbf{a.d} = \mathbf{F.d} \tag{6.2b}$$

उपरोक्त समीकरण कार्य एवं गतिज ऊर्जा को परिभाषित करने के लिए प्रेरित करता है। समीकरण (6.2 b) में बायाँ पक्ष वस्तु के द्रव्यमान के आधे और उसकी चाल के वर्ग के गुणनफल के अंतिम और आरंभिक मान का अंतर है। हम इनमें से प्रत्येक राशि को 'गतिज ऊर्जा' कहते हैं और संकेत K से निर्दिष्ट करते हैं। समीकरण का दायाँ पक्ष वस्तु पर आरोपित बल का विस्थापन के अनुदिश घटक और वस्तु के विस्थापन का गुणनफल है। इस राशि को 'कार्य' कहते हैं और इसे संकेत W से निर्दिष्ट करते हैं। अतः समीकरण (6.2 b) को निम्न प्रकार लिख सकते हैं :

$$K_f - K_i = W \tag{6.3}$$

जहाँ K_i तथा K_f वस्तु की आरंभिक एवं अंतिम गतिज ऊर्जा हैं। कार्य किसी वस्तु पर लगने वाले बल और इसके विस्थापन के संबंध को बताता है। **अतः किसी निश्चित विस्थापन के दौरान वस्तु पर लगाया गया बल कार्य करता है।**

समीकरण (6.3) कार्य-ऊर्जा प्रमेय की एक विशेष स्थिति है जो यह प्रदर्शित करती है कि **किसी वस्तु पर लगाए गए कुल बल द्वारा किया गया कार्य उस वस्तु की गतिज ऊर्जा में परिवर्तन के बराबर होता है।** परिवर्ती बल के लिए उपरोक्त व्युत्पत्ति का व्यापकीकरण हम अनुभाग 6.6 में करेंगे।

उदाहरण 6.2 हम अच्छी तरह जानते हैं कि वर्षा की बूँद नीचे की ओर लगने वाले गुरुत्वाकर्षण बल और बूँद के गिरने की दिशा के विपरीत लगने वाले प्रतिरोधी बल के प्रभाव के अधीन गिरती है। प्रतिरोधी बल बूँद की चाल के अनुक्रमानुपाती, परंतु अनिर्धारित होता है। माना कि 1.00 g द्रव्यमान की वर्षा की बूँद 1.00 km ऊँचाई से गिर रही है। यह धरातल पर 50.00 m s^{-1} की चाल से संघट्ट करती है। (a) गुरुत्वीय बल द्वारा किया गया कार्य क्या है? (b) अज्ञात प्रतिरोधी बल द्वारा किया गया कार्य क्या है ?

हल (a) बूँद की गतिज ऊर्जा में परिवर्तन

$$\Delta K = \frac{1}{2}m\,v^2 - 0$$

$$= \frac{1}{2} \times 10^{-3} \times 50 \times 50$$

$$= 1.25\ \text{J}$$

यहाँ हमने यह मान लिया है कि बूँद विरामावस्था से गिरना आरंभ करती है।

गुरुत्वाकर्षण बल द्वारा किया गया कार्य $W_g = m\,g\,h$

मान लीजिए कि $g = 10$ m s^{-2} है।

अतः $W_g = m\,g\,h$

$= 10^{-3} \times 10 \times 10^3$

$= 10$ J

(b) कार्य-ऊर्जा प्रमेय से, $\Delta K = W_g + W_r$

जहाँ W_r प्रतिरोधी बल द्वारा किया गया कार्य है। अतः

$W_r = \Delta K - W_g$

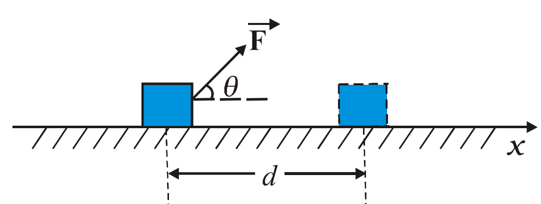
$= 1.25 - 10$

$= -8.75$ J

ऋणात्मक है।

6.3 कार्य

उपरोक्त अनुभाग में आपने देखा कि कार्य, बल और उसके द्वारा वस्तु के विस्थापन से संबंधित होता है। माना कि एक अचर बल **F**, किसी m द्रव्यमान के पिंड पर लग रहा है जिसके कारण पिंड का धनात्मक x-दिशा में होने वाला विस्थापन **d** है जैसा कि चित्र 6.2 में दर्शाया गया है।



*चित्र 6.2 किसी पिंड का आरोपित बल **F** के कारण विस्थापन **d** ।*

अतः किसी बल द्वारा किया गया कार्य "बल के विस्थापन की दिशा के अनुदिश घटक और विस्थापन के परिमाण के गुणनफल" के रूप में परिभाषित किया जाता है। अतः

$$W = (F\cos\theta)\,d = \mathbf{F}\cdot\mathbf{d} \qquad (6.4)$$

हम देखते हैं कि यदि वस्तु का विस्थापन शून्य है तो बल का परिमाण कितना ही अधिक क्यों न हो, वस्तु द्वारा किया गया कार्य शून्य होता है। जब कभी आप किसी ईंटों की दृढ़ दीवार को धक्का देते हैं तो कोई कार्य नहीं होता है। इस प्रक्रिया में आपकी मांसपेशियों का बारी-बारी से संकुचन और शिथिलीकरण हो रहा है और आंतरिक ऊर्जा लगातार व्यय हो रही है और आप थक जाते हैं। भौतिक विज्ञान में कार्य का अर्थ इसके दैनिक भाषा में प्रयोग के अर्थ से भिन्न है।

कोई भी कार्य संपन्न हुआ नहीं माना जाता है यदि :

(i) वस्तु का विस्थापन शून्य है, जैसा कि पूर्ववर्ती उदाहरण में आपने देखा। कोई भारोत्तोलक 150 kg द्रव्यमान के भार को 30 s तक अपने कंधे पर लगातार उठाए हुए खड़ा है तो वह कोई कार्य नहीं कर रहा है।

(ii) बल शून्य है। किसी चिकनी क्षैतिज मेज पर गतिमान पिंड पर कोई क्षैतिज बल कार्य नहीं करता है, (क्योंकि घर्षण नहीं है) परंतु पिंड का विस्थापन काफी अधिक हो सकता है।

(iii) बल और विस्थापन परस्पर लंबवत् हैं क्योंकि $\theta = \pi/2$ rad (= 90°), $\cos(\pi/2) = 0$। किसी चिकनी क्षैतिज मेज पर गतिमान पिंड के लिए गुरुत्वाकर्षण बल mg कोई कार्य नहीं करता है क्योंकि यह विस्थापन के लंबवत् कार्य कर रहा है। पृथ्वी के परितः चंद्रमा की कक्षा लगभग वृत्ताकार है। यदि हम चंद्रमा की कक्षा को पूर्ण रूप से वृत्ताकार मान लें, तो पृथ्वी का गुरुत्वाकर्षण बल कोई कार्य नहीं करता है क्योंकि चंद्रमा का तात्कालिक विस्थापन स्पर्शरेखीय है जबकि पृथ्वी का बल त्रिज्यीय (केंद्र की ओर) है, अर्थात् $\theta = \pi/2$।

कार्य धनात्मक व ऋणात्मक दोनों प्रकार का हो सकता है। यदि θ, 0° और 90° के मध्य है तो समीकरण (6.4) में $\cos\theta$ का मान धनात्मक होगा। यदि θ, 90° और 180° के मध्य है तो $\cos\theta$ का मान ऋणात्मक होगा। अनेक उदाहरणों में घर्षण बल, विस्थापन का विरोध करता है और $\theta = 180°$ होता है। ऐसी दशा में घर्षण बल द्वारा किया गया कार्य ऋणात्मक होता है ($\cos 180° = -1$)।

समीकरण (6.4) से स्पष्ट है कि कार्य और ऊर्जा की विमाएँ समान $[ML^2T^{-2}]$ हैं। ब्रिटिश भौतिकविद जेम्स प्रेसकॉट जूल (1818-1869) के सम्मान में इनका SI मात्रक 'जूल' कहलाता है। चूंकि कार्य एवं ऊर्जा व्यापक रूप से भौतिक धारणाओं के रूप में प्रयोग किए जाते हैं, अतः ये वैकल्पिक मात्रकों से भरपूर हैं और उनमें से कुछ सारणी 6.1 में सूचीबद्ध हैं।

सारणी 6.1 : कार्य/ऊर्जा के वैकल्पिक मात्रक (जूल में)

अर्ग	10^{-7} J
इलेक्ट्रॉन वोल्ट (eV)	1.6×10^{-19} J
कैलोरी (cal)	4.186 J
किलोवाट-घंटा (kWh)	3.6×10^{6} J

▶ ***उदाहरण 6.3*** कोई साइकिल सवार ब्रेक लगाने पर फिसलता हुआ 10 m दूर जाकर रुकता है। इस प्रक्रिया की अवधि में, सड़क द्वारा साइकिल पर लगाया गया बल 200 N है जो उसकी गति के विपरीत है। (a) सड़क द्वारा साइकिल पर कितना कार्य किया गया? (b) साइकिल द्वारा सड़क पर कितना कार्य किया गया?

हल सड़क द्वारा साइकिल पर किया गया कार्य सड़क द्वारा साइकिल पर लगाए गए विरोधी (घर्षण बल) द्वारा किया किया कार्य है।

(a) यहाँ विरोधी बल और साइकिल के विस्थापन के मध्य कोण 180° (या π rad) है। अतः सड़क द्वारा किया गया कार्य

$$\begin{aligned} W_r &= Fd\cos\theta \\ &= 200 \times 10 \times \cos\pi \\ &= -2000\ \text{J} \end{aligned}$$

कार्य-ऊर्जा प्रमेय के अनुसार, इस ऋणात्मक कार्य के कारण ही साइकिल रुक जाती है।

(b) न्यूटन के गति के तृतीय नियमानुसार साइकिल द्वारा सड़क पर लगाया गया बल सड़क द्वारा साइकिल पर लगाए बल के बराबर परंतु विपरीत दिशा में होगा। इसका परिमाण 200 N है। तथापि, सड़क का विस्थापन नहीं होता है। अतः साइकिल द्वारा सड़क पर किया गया कार्य शून्य होगा। ◀

इस उदाहरण से हमें यह पता चलता है कि यद्यपि पिंड B द्वारा A पर लगाया गया बल, पिंड A द्वारा पिंड B पर लगाए गए बल के बराबर तथा विपरीत दिशा में है (न्यूटन का गति का तीसरा नियम) तथापि यह आवश्यक नहीं है कि पिंड B द्वारा A पर किया गया कार्य, पिंड A द्वारा B पर किए गए कार्य के बराबर तथा विपरीत दिशा में हो।

6.4 गतिज ऊर्जा

जैसा कि पहले उल्लेख किया गया है, यदि किसी पिंड का द्रव्यमान m और वेग $\mathbf{v}$ है तो इसकी गतिज ऊर्जा,

$$K = \frac{1}{2}m\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (6.5)$$

गतिज ऊर्जा एक अदिश राशि है।

सारणी 6.2 विशिष्ट गतिज ऊर्जाएँ (K)

पिंड	द्रव्यमान (kg)	चाल (m s^{-1})	K (J)
कार	2000	25	6.3×10^{5}
धावक (ऐथलीट)	70	10	3.5×10^{3}
गोली	5×10^{-2}	200	10^{3}
10 m की ऊँचाई से गिरता पत्थर	1	14	10^{2}
अंतिम वेग से गिरती वर्षा की बूँद	3.5×10^{-5}	9	1.4×10^{-3}
वायु का अणु	$\simeq 10^{-26}$	500	$\simeq 10^{-21}$

किसी पिंड की गतिज ऊर्जा, उस पिंड द्वारा किए गए कार्य की माप होती है जो वह अपनी गति के कारण कर सकता है। इस धारणा का अंतर्ज्ञान काफी समय से है। तीव्र गति से बहने वाली जल की धारा की गतिज ऊर्जा का उपयोग अनाज पीसने के लिए किया जाता है। पाल जलयान पवन की गतिज ऊर्जा का प्रयोग करते हैं। सारणी 6.2 में विभिन्न पिंडों की गतिज ऊर्जाएँ सूचीबद्ध हैं।

▶ ***उदाहरण 6.4*** किसी प्राक्षेपिक प्रदर्शन में एक पुलिस अधिकारी 50 g द्रव्यमान की गोली को 2cm मोटी नरम परतदार लकड़ी (प्लाइवुड) पर 200 m s^{-1} की चाल से फायर करता है। नरम लकड़ी को भेदने के पश्चात् गोली की गतिज ऊर्जा प्रारंभिक ऊर्जा की 10% रह जाती है। लकड़ी से निकलते समय गोली की चाल क्या होगी?

हल गोली की प्रारंभिक गतिज ऊर्जा

$$mv^2/2 = 1000 \text{ J}$$

गोली की अंतिम गतिज ऊर्जा = $0.1 \times 1000 = 100$ J। यदि गोली की नरम लकड़ी को भेदने के पश्चात् चाल v_f है तो,

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = 100 \text{ J}$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2 \times 100 \text{ J}}{0.05 \text{ kg}}}$$

$$= 63.2 \text{ m s}^{-1}$$

नरम लकड़ी को भेदने के पश्चात् गोली की चाल लगभग 68% कम हो गई है (90% नहीं)। ◀

6.5 परिवर्ती बल द्वारा किया गया कार्य

अचर बल दुष्प्राप्य है। अधिकतर परिवर्ती बल के उदाहरण ही देखने को मिलते हैं। चित्र 6.3 एकविमीय परिवर्ती बल का आलेख है।

यदि विस्थापन Δx सूक्ष्म है तब हम बल $F(x)$ को भी लगभग नियत ले सकते हैं और तब किया गया कार्य

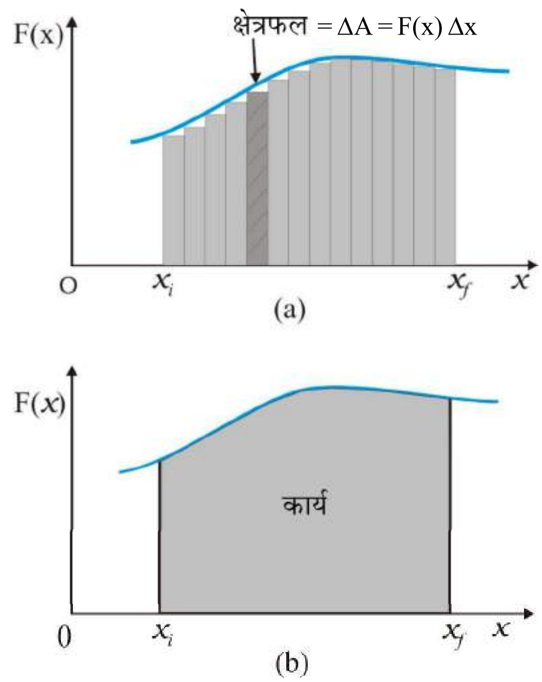
$$\Delta W = F(x)\, \Delta x$$

इसे चित्र 6.3(a) में समझाया गया है। चित्र 6.3 (a) में क्रमिक आयताकार क्षेत्रफलों का योग करने पर हमें कुल किया गया कार्य प्राप्त होता है जिसे इस प्रकार लिखा जाता है :

$$W \cong \sum_{x_i}^{x_f} F(x)\Delta x \qquad (6.6)$$

जहाँ संकेत 'Σ' का अर्थ है संकलन-फल (योगफल), जबकि 'x_i' वस्तु की आरंभिक स्थिति और 'x_f' वस्तु की अंतिम स्थिति को निरूपित करता है।

यदि विस्थापनों को अतिसूक्ष्म मान लिया जाए तब योगफल में पदों की संख्या असीमित रूप से बढ़ जाती है लेकिन योगफल एक निश्चित मान के समीप पहुंच जाता है जो चित्र 6.3(b) में वक्र के नीचे के क्षेत्रफल के समान होता है।



चित्र 6.3 *(a) परिवर्ती बल $F(x)$ द्वारा सूक्ष्म विस्थापन Δx में किया गया कार्य $\Delta W = F(x)\Delta x$ छायांकित आयत से निरूपित है। (b) $\Delta x \to 0$ के लिए सभी आयतों के क्षेत्रफलों को जोड़ने पर, वक्र द्वारा आच्छादित क्षेत्रफल, बल $F(x)$ द्वारा किए गए कार्य के ठीक बराबर है।*

अतः किया गया कार्य

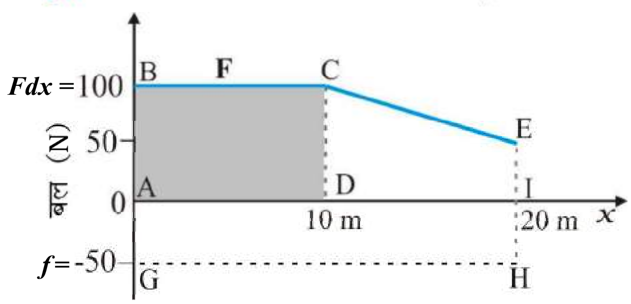
$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_i}^{x_f} F(x)\Delta x$$

$$= \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,\mathrm{d}x \qquad (6.7)$$

जहाँ '*lim*' का अर्थ है 'योगफल की सीमा' जबकि Δx नगण्य रूप से सूक्ष्म मानों की ओर अग्रसर है। इस प्रकार परिवर्ती बल के लिए किए गए कार्य को बल का विस्थापन पर सीमांकित समाकलन, के रूप में व्यक्त कर सकते हैं (परिशिष्ट 3.1 भी देखें)

उदाहरण 6.4 कोई स्त्री खुरदरी सतह वाले रेलवे प्लेटफार्म पर संदूक को खिसकाती है। वह 10 m की दूरी तक 100 N का बल आरोपित करती है। उसके पश्चात्, उत्तरोत्तर वह थक जाती है और उसके द्वारा आरोपित बल रेखीय रूप से घटकर 50 N हो जाता है। संदूक को कुल 20 m की दूरी तक खिसकाया जाता है। स्त्री द्वारा संदूक पर आरोपित बल और घर्षण बल जो कि 50 N है, तथा विस्थापन के बीच ग्राफ खींचिए। दोनों बलों द्वारा 20 m तक किए गए कार्य का परिकलन कीजिए।

हल चित्र 6.4 में आरोपित बल का आलेख प्रदर्शित किया गया है।



चित्र 6.4 किसी स्त्री द्वारा आरोपित बल F और विरोधी घर्षण बल f तथा विस्थापन के बीच ग्राफ।

$x = 20$ m पर $F = 50$ N$(\neq 0)$ है। हमें घर्षण बल f दिया गया है जिसका परिमाण है

$|f| = 50$ N

यह गति का विरोध करता है और आरोपित बल **F** के विपरीत दिशा में कार्य करता है। इसलिए, इसे बल-अक्ष की ऋणात्मक दिशा की ओर प्रदर्शित किया गया है।

स्त्री द्वारा किया गया कार्य $W_F \rightarrow$(आयत ABCD + समलंब CEID) का क्षेत्रफल

$$W_F = 100 \times 10 + \frac{1}{2}(100 + 50) \times 10$$
$$= 1000 + 750$$
$$= 1750 \text{ J}$$

घर्षण बल द्वारा किया गया कार्य $W_F \rightarrow$ आयत AGHI का क्षेत्रफल

$$W_f = (-50) \times 20$$
$$= -1000 \text{ J}$$

यहाँ क्षेत्रफल का बल-अक्ष के ऋणात्मक दिशा की ओर होने से, क्षेत्रफल का चिह्न ऋणात्मक है। ◀

6.6 परिवर्ती बल के लिए कार्य-ऊर्जा प्रमेय

हम परिवर्ती बल के लिए कार्य-ऊर्जा प्रमेय को सिद्ध करने के लिए कार्य और गतिज ऊर्जा की धारणाओं से भलीभांति परिचित हैं। यहाँ हम कार्य-ऊर्जा प्रमेय के एकविमीय पक्ष तक ही विचार को सीमित करेंगे। गतिज ऊर्जा परिवर्तन की दर है :

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\,v^2\right)$$

$$= m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}v$$

$$= Fv \text{ (न्यूटन के दूसरे नियमानुसार } = \mathrm{m}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F)$$

$$= F\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

अतः $\mathrm{d}K = F\mathrm{d}x$

प्रारंभिक स्थिति x_i से अंतिम स्थिति x_f तक समाकलन करने पर,

$$\int_{K_i}^{K_f} \mathrm{d}K = \int_{x_i}^{x_f} F\mathrm{d}x$$

जहाँ x_i और x_f के संगत K_i और K_f क्रमशः प्रारंभिक एवं अंतिम गतिज ऊर्जाएँ हैं।

या $$K_f - K_i = \int_{x_i}^{x_f} F\mathrm{d}x \qquad (6.8\text{ a})$$

समीकरण (6.7) से प्राप्त होता है

$$K_f - K_i = W \qquad (6.8\text{ b})$$

इस प्रकार परिवर्ती बल के लिए कार्य-ऊर्जा प्रमेय सिद्ध होती है।

हालांकि कार्य-ऊर्जा प्रमेय अनेक प्रकार के प्रश्नों को हल करने में उपयोगी है परंतु यह न्यूटन के द्वितीय नियम की पूर्णरूपेण गतिकीय सूचना का समावेश नहीं करती है। वास्तव में यह न्यूटन के द्वितीय नियम का समाकल रूप है। न्यूटन का द्वितीय नियम किसी क्षण, त्वरण तथा बल के बीच संबंध दर्शाता है। कार्य-ऊर्जा प्रमेय में एक काल के लिए समाकल निहित है। इस दृष्टि से न्यूटन के द्वितीय नियम में निहित कालिक सूचना कार्य ऊर्जा प्रमेय में स्पष्ट रूप से प्रकट नहीं होता। बल्कि एक निश्चित काल के लिए समाकलन के रूप में होता है। दूसरी ध्यान देने की बात यह है कि दो या तीन विमाओं में न्यूटन का द्वितीय नियम सदिश रूप में होता है जबकि कार्य-ऊर्जा प्रमेय अदिश रूप में होता है।

न्यूटन के द्वितीय नियम में दिशा संबंधित निहित ज्ञान भी कार्य ऊर्जा प्रमेय जैसे- अदिश संबंध में निहित नहीं है।

उदाहरण 6.6 m (=1kg) द्रव्यमान का एक गुटका क्षैतिज सतह पर $v_i = 2\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ की चाल से चलते हुए $x = 0.10$ m से $x = 2.01$m के खुरदरे हिस्से में प्रवेश करता है। गुटके पर लगने वाला मंदक बल (F_r) इस क्षेत्र में x के व्युत्क्रमानुपाती है,

$$F_r = \frac{-k}{x} \quad 0.1 < x < 2.01\mathrm{m}$$

$$= 0 \quad x < 0.1\mathrm{m} \text{ और } x > 2.01\mathrm{m} \text{ के लिए}$$

जहाँ $k = 0.5$J। गुटका जैसे ही खुरदरे हिस्से को पार करता है, इसकी अंतिम गतिज ऊर्जा और चाल v_f की गणना कीजिए।

हल समीकरण (6.8 a) से

$$K_f = K_i + \int_{0.1}^{2.01} \frac{(-k)}{x} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2} m v_i^2 - k \ln(x)\Big|_{0.1}^{2.01}$$

$$= \frac{1}{2} m v_i^2 - k \ln(2.01/0.1)$$

$$= 2 - 0.5 \ln(20.1)$$

$$= 2 - 1.5 = 0.5\ \mathrm{J}$$

$$v_f = \sqrt{2K_f / m} = 1\ \mathrm{m\ s^{-1}}$$

ध्यान दीजिए कि ln आधार e पर किसी संख्या का प्राकृतिक लघुगणक है, न कि आधार 10 पर किसी संख्या का [$\ln X = \log_e X = 2.303 \log_{10} X$]

6.7 स्थितिज ऊर्जा की अभिधारणा

यहाँ 'स्थितिज' शब्द किसी कार्य को करने की संभावना या क्षमता को व्यक्त करता है। स्थितिज ऊर्जा की धारणा 'संग्रहित' ऊर्जा से संबंधित है। किसी खिंचे हुए तीर-कमान के तार (डोरी) की ऊर्जा स्थितिज ऊर्जा होती है। जब इसे ढीला छोड़ा जाता है तो तीर तीव्र चाल से दूर चला जाता है। पृथ्वी के भूपृष्ठ पर भ्रंश रेखाएँ संपीडित कमानियों के सदृश होती हैं। उनकी स्थितिज ऊर्जा बहुत अधिक होती है। जब ये भ्रंश रेखाएँ फिर से समायोजित हो जाती हैं तो भूकंप आता है। किसी भी पिंड की स्थितिज ऊर्जा (संचित ऊर्जा) उसकी स्थिति या अभिविन्यास के कारण होती है। पिंड को मुक्त रूप से छोड़ने पर इसमें संचित ऊर्जा, गतिज ऊर्जा के रूप में निर्मुक्त होती है। आइए, अब हम स्थितिज ऊर्जा की धारणा को एक निश्चित रूप देते हैं।

पृथ्वी की सतह के समीप m द्रव्यमान की एक गेंद पर आरोपित गुरुत्वाकर्षण बल mg है। g को पृथ्वी की सतह के समीप अचर माना जा सकता है । यहाँ समीपता से तात्पर्य यह है कि गेंद की पृथ्वी की सतह से ऊँचाई h, पृथ्वी की त्रिज्या R_E की तुलना में अति सूक्ष्म है ($h << R_E$), अतः हम पृथ्वी के पृष्ठ पर g के मान में परिवर्तन की उपेक्षा कर सकते हैं।* माना कि गेंद को बिना कोई गति प्रदान किए h ऊँचाई तक ऊपर उठाया जाता है। अत: बाह्य कारक द्वारा गुरुत्वाकर्षण बल के विरुद्ध किया गया कार्य mgh होगा। यह कार्य, स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचित हो जाता है। किसी पिण्ड की h ऊँचाई पर गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा उसी पिण्ड को उसी ऊँचाई तक उठाने में गुरुत्वाकर्षण बल द्वारा किए गए कार्य के ऋणात्मक मान के बराबर होता है।

$$V(h) = mgh$$

यदि h को परिवर्ती लिया जाता है तो यह सरलता से देखा जा सकता है कि गुरुत्वाकर्षण बल F, h के सापेक्ष $V(h)$ के ऋणात्मक अवकलज के समान है

$$F = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h} V(h) = -mg$$

यहाँ ऋणात्मक चिह्न प्रदर्शित करता है कि गुरुत्वाकर्षण बल नीचे की ओर है। जब गेंद को छोड़ा जाता है तो यह बढ़ती हुई चाल से नीचे आती है । पृथ्वी की सतह से संघट्ट से पूर्व इसकी चाल शुद्धगतिकी संबंध द्वारा निम्न प्रकार दी जाती है

$$v^2 = 2gh$$

इसी समीकरण को निम्न प्रकार से भी लिखा जा सकता है :

$$\frac{1}{2} m v^2 = mgh$$

जो यह प्रदर्शित करता है कि जब पिण्ड को मुक्त रूप से छोड़ा जाता है तो पिंड की h ऊँचाई पर गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा पृथ्वी पर पहुंचने तक स्वत: ही गतिज ऊर्जा में परिवर्तित हो जाती है ।

प्राकृतिक नियमानुसार, स्थितिज ऊर्जा की धारणा केवल उन्हीं बलों की श्रेणी में लागू होती है जहाँ बल के विरुद्ध किया गया कार्य, ऊर्जा के रूप में संचित हो जाता है और जो बाह्य कारक के हट जाने पर स्वत: गतिज ऊर्जा के रूप में दिखाई पड़ती है। गणितानुसार स्थितिज ऊर्जा $V(x)$ को (सरलता के लिए एक-विमा में)

* गुरुत्वीय त्वरण g के मान में ऊंचाई के साथ परिवर्तन पर विचार गुरुत्वाकर्षण (अध्याय 8) में करेंगे ।

परिभाषित किया जाता है यदि $F(x)$ बल को निम्न रूप में लिखा जाता है :

$$F(x) = -\frac{dV}{dx}$$

यह निरूपित करता है कि

$$\int_{x_i}^{x_f} F(x)dx = -\int_{V_i}^{V_f} dV = V_i - V_f$$

किसी संरक्षी बल जैसे गुरुत्वाकर्षण बल द्वारा किया गया कार्य पिण्ड की केवल आरंभिक तथा अंतिम स्थिति पर निर्भर करता है। पिछले अध्याय में हमने आनत समतल से संबंधित उदाहरणों का अध्ययन किया । यदि m द्रव्यमान का कोई पिण्ड h ऊंचाई के चिकने (घर्षणरहित) आनत तल के शीर्ष से विरामावस्था से छोड़ा जाता है तो आनत समतल के अधस्तल (तली) पर इसकी चाल, आनति (झुकाव) कोण का ध्यान रखे बिना $\sqrt{2gh}$ होती है। इस प्रकार यहां पर पिण्ड mgh गतिज ऊर्जा प्राप्त कर लेता है। यदि किया गया कार्य या गतिज ऊर्जा दूसरे कारकों, जैसे पिण्ड के वेग या उसके द्वारा चले गए विशेष पथ की लंबाई पर निर्भर करता है तब यह बल असंरक्षी होता है।

कार्य या गतिज ऊर्जा के सदृश स्थितिज ऊर्जा की विमा $[ML^2T^{-2}]$ और SI मात्रक जूल (J) है। याद रखिए कि संरक्षी बल के लिए, स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन ΔV बल द्वारा किए गए ऋणात्मक कार्य के बराबर होता है।

$$\Delta V = -F(x)\,\Delta x \qquad (6.9)$$

इस अनुभाग में गिरती हुई गेंद के उदाहरण में हमने देखा कि किस प्रकार गेंद की स्थितिज ऊर्जा उसकी गतिज ऊर्जा में परिवर्तित हो गई थी। यह यांत्रिकी में संरक्षण के महत्त्वपूर्ण सिद्धांत की ओर संकेत करता है जिसे हम अब परखेंगे।

6.8 यांत्रिक ऊर्जा का संरक्षण

सरलता के लिए, हम इस महत्त्वपूर्ण सिद्धांत का एकविमीय गति के लिए निदर्शन कर रहे हैं। मान लीजिए कि किसी पिण्ड का संरक्षी बल F के कारण विस्थापन Δx होता है। कार्य-ऊर्जा प्रमेय से, किसी बल F के लिए

$$\Delta K = F(x)\,\Delta x$$

संरक्षी बल के लिए स्थितिज ऊर्जा फलन $V(x)$ को निम्न रूप से परिभाषित किया जा सकता है :

$$-\Delta V = F(x)\Delta x$$

उपरोक्त समीकरण निरूपित करती है कि

$$\Delta K + \Delta V = 0$$

$$\Delta(K + V) = 0 \qquad (6.10)$$

इसका अर्थ है कि किसी पिण्ड की गतिज और स्थितिज ऊर्जाओं का योगफल, $K + V$ अचर होता है। इससे तात्पर्य है कि संपूर्ण पथ x_i से x_f के लिए

$$K_i + V(x_i) = K_f + V(x_f) \qquad (6.11)$$

यहाँ राशि $K + V(x)$, निकाय की कुल यांत्रिक ऊर्जा कहलाती है। पृथक रूप से, गतिज ऊर्जा K और स्थितिज ऊर्जा $V(x)$ एक स्थिति से दूसरी स्थिति तक परिवर्तित हो सकती है परंतु इनका योगफल अचर रहता है। उपरोक्त विवेचन से शब्द 'संरक्षी बल' की उपयुक्तता स्पष्ट होती है।

आइए, अब हम संक्षेप में संरक्षी बल की विभिन्न परिभाषाओं पर विचार करते हैं।

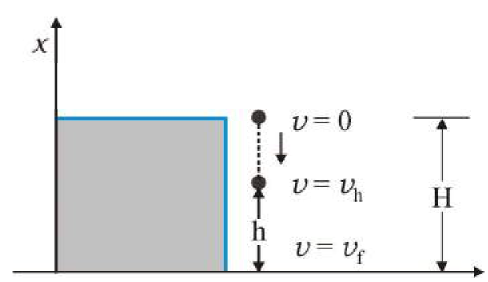
- कोई बल $F(x)$ संरक्षी है यदि इसे समीकरण (6.9) के प्रयोग द्वारा अदिश राशि $V(x)$ से प्राप्त कर सकते हैं। त्रिविमीय व्यापकीकरण के लिए सदिश अवकलज विधि का प्रयोग करना पड़ता है जो इस पुस्तक के विवेचना क्षेत्र से बाहर है।
- संरक्षी बल द्वारा किया गया कार्य केवल सिरे के बिंदुओं पर निर्भर करता है जो निम्न संबंध से स्पष्ट है :

  $W = K_f - K_i = V(x_i) - V(x_f)$
- तीसरी परिभाषा के अनुसार, इस बल द्वारा बंद पथ में किया गया कार्य शून्य होता है।

यह एक बार फिर समीकरण (6.11) से स्पष्ट है, क्योंकि $x_i = x_f$ है।

अत: यांत्रिक ऊर्जा-संरक्षण नियम के अनुसार ***किसी भी निकाय की कुल यान्त्रिक ऊर्जा अचर रहती है यदि उस पर कार्य करने वाले बल संरक्षी हैं।***

उपरोक्त विवेचना को अधिक मूर्त बनाने के लिए, एक बार फिर गुरुत्वाकर्षण बल के उदाहरण पर विचार करते हैं और स्प्रिंग बल के उदाहरण पर अगले अनुभाग में विचार करेंगे। चित्र 6.5 H ऊँचाई की किसी चट्टान से गिराई, m द्रव्यमान की गेंद का चित्रण करता है।



चित्र 6.5 H ऊँचाई की किसी चट्टान से गिराई गई, m द्रव्यमान की गेंद की स्थितिज ऊर्जा का गतिज ऊर्जा में रूपांतरण।

गेंद की निदर्शित ऊँचाई, शून्य (भूमितल), h और H के संगत कुल यांत्रिक ऊर्जाएँ क्रमशः E_o, E_h और E_H हैं

$$E_H = mgH \tag{6.11a}$$

$$E_h = mgh + \frac{1}{2}mv_h^2 \tag{6.11b}$$

$$E_0 = (1/2)mv_f^2 \tag{6.11c}$$

अचर बल, त्रिविम-निर्भर बल $F(x)$ का एक विशेष उदाहरण है। अतः यांत्रिक ऊर्जा संरक्षित है। इस प्रकार

$$E_H = E_0$$

अथवा, $mgH = \frac{1}{2}mv_f^2$

$$v_f = \sqrt{2gH}$$

उपरोक्त परिणाम अनुभाग 6.7 में मुक्त रूप से गिरते हुए पिण्ड के वेग के लिए प्राप्त किया गया था।

इसके अतिरिक्त

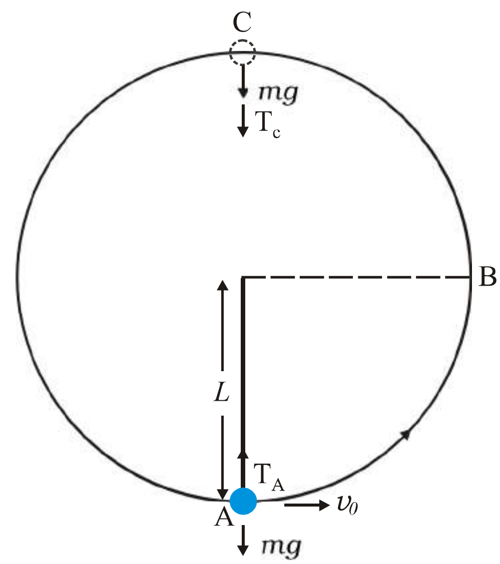
$$E_H = E_h$$

जो इंगित करता है कि

$$v_h^2 = 2g(H-h) \tag{6.11d}$$

उपरोक्त परिणाम, शुद्धगतिकी का एक सुविदित परिणाम है। H ऊँचाई पर, पिण्ड की ऊर्जा केवल स्थितिज ऊर्जा है। यह h ऊँचाई पर आंशिक रूप से गतिज ऊर्जा में रूपांतरित हो जाती है तथा भूमि तल पर पूर्णरूपेण गतिज ऊर्जा में रूपांतरित हो जाती है। इस प्रकार उपरोक्त उदाहरण, यांत्रिक ऊर्जा के संरक्षण के सिद्धांत को स्पष्ट करता है।

उदाहरण 6.7 m द्रव्यमान का एक गोलक L लंबाई की हलकी डोरी से लटका हुआ है। इसके निम्नतम बिंदु A पर क्षैतिज वेग v_o इस प्रकार लगाया जाता है कि यह ऊर्ध्वाधर तल में अर्धवृत्ताकार प्रक्षेप्य पथ को इस प्रकार तय करता है कि डोरी केवल उच्चतम बिंदु C पर ढीली होती है जैसा कि चित्र 6.6 में दिखाया गया है। निम्न राशियों के लिए व्यंजक प्राप्त कीजिए : (*a*) v_0, (*b*) बिंदुओं B तथा C पर गोलक की चाल, तथा (*c*) बिंदु B तथा C पर गतिज ऊर्जाओं का अनुपात (K_B/K_C)। गोलक के बिंदु C पर पहुंचने के बाद पथ की प्रकृति पर टिप्पणी कीजिए।



चित्र 6.6

हल (*a*) यहाँ गोलक पर लगने वाले दो बाह्य बल हैं-गुरुत्व बल और डोरी में तनाव (T)। बाद वाला बल (तनाव) कोई कार्य नहीं करता है क्योंकि गोलक का विस्थापन हमेशा डोरी के लंबवत् है। अतः गोलक की स्थितिज ऊर्जा केवल गुरुत्वाकर्षण बल से संबंधित है। निकाय की संपूर्ण यांत्रिक ऊर्जा E अचर है। हम निकाय की स्थितिज ऊर्जा निम्नतम बिंदु A पर शून्य ले लेते हैं। अतः बिंदु A पर

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{6.12}$$

$$T_A - mg = \frac{mv_0^2}{L}$$ [न्यूटन के गति के द्वितीय नियमानुसार]

यहाँ T_A, बिंदु A पर डोरी का तनाव है। उच्चतम बिंदु C पर डोरी ढीली हो जाती है; अतः यहाँ बिंदु C पर डोरी का तनाव $T_C = 0$। अतः बिंदु C पर हमें प्राप्त होता है

$$E = \frac{1}{2}mv_c^2 + 2mgL \tag{6.13}$$

$$mg = \frac{mv_c^2}{L} \quad \text{[न्यूटन के द्वितीय नियमानुसार]} \tag{6.14}$$

जहाँ v_c बिंदु C पर गोलक की चाल है। समीकरण (6.13) व (6.14) से प्राप्त होता है

$$E = \frac{5}{2}mgL$$

इसे बिंदु A पर ऊर्जा से समीकृत करने पर

$$\frac{5}{2}mgL = \frac{m}{2}v_0^2$$

अथवा $\quad v_0 = \sqrt{5gL}$

(b) समीकरण (6.14) से यह स्पष्ट है कि

$$v_C = \sqrt{gL}$$

अतः बिंदु B पर ऊर्जा है

$$E = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgL$$

इसे बिंदु A पर ऊर्जा के व्यंजक के बराबर रखने पर और (a) के परिणाम $v^2_0 = 5gL$ प्रयोग में लाने पर हमें प्राप्त होता है।

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + mgL = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$= \frac{5}{2}m\,g\,L$$

$$\therefore v_B = \sqrt{3gL}$$

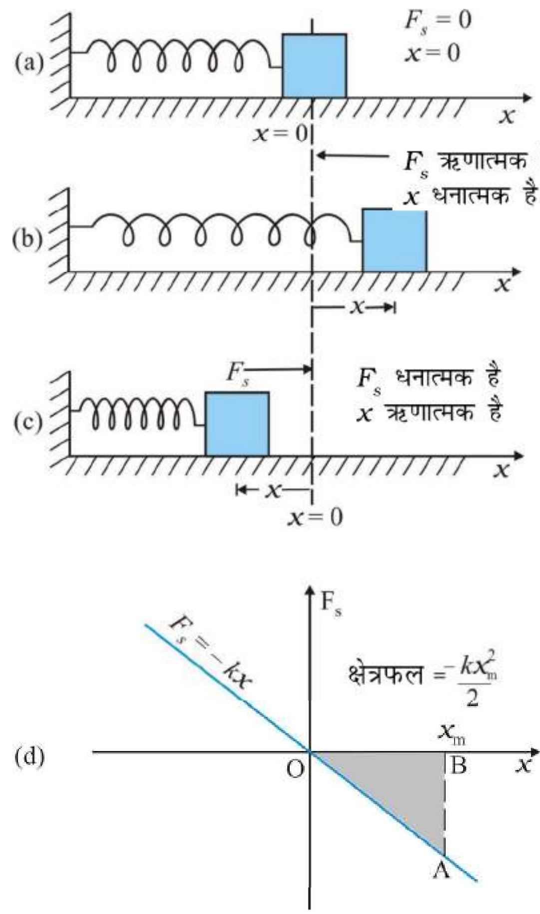
(c) बिंदु B व C पर गतिज ऊर्जाओं का अनुपात

$$\frac{K_B}{K_C} = \frac{\frac{1}{2}mv_B^2}{\frac{1}{2}mv_C^2} = \frac{3}{1}$$

बिंदु C पर डोरी ढीली हो जाती है और गोलक का वेग बाईं ओर को एवं क्षैतिज हो जाता है। यदि इस क्षण पर डोरी को काट दिया जाए तो गोलक एक क्षैतिज प्रक्षेप की भांति प्रक्षेप्य गति ठीक उसी प्रकार दर्शाएगा जैसा कि खड़ी चट्टान से क्षैतिज दिशा में किसी पत्थर को फेंकने पर होता है। अन्यथा गोलक लगातार अपने वृत्ताकार पथ पर गति करता रहेगा और परिक्रमण को पूर्ण करेगा। ◂

6.9 किसी स्प्रिंग की स्थितिज ऊर्जा

कोई स्प्रिंग-बल एक परिवर्ती-बल का उदाहरण है जो संरक्षी होता है। चित्र 6.7 स्प्रिंग से संलग्न किसी गुटके को दर्शाता है जो किसी चिकने क्षैतिज पृष्ठ पर विरामावस्था में है। स्प्रिंग का दूसरा सिरा किसी दृढ़ दीवार से जुड़ा है। स्प्रिंग हलका है और द्रव्यमान-रहित माना जा सकता है। किसी आदर्श स्प्रिंग में, स्प्रिंग-बल F_s, गुटके का अपनी साम्यावस्था स्थिति से विस्थापन x के समानुपाती होता है। गुटके का साम्यावस्था से विस्थापन धनात्मक (चित्र 6.7b) या ऋणात्मक (चित्र 6.7c) हो सकता है। स्प्रिंग के लिए बल का नियम, हुक का नियम कहलाता है और गणितीय रूप में इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है :



चित्र 6.7 किसी स्प्रिंग के मुक्त सिरे से जुड़े हुए गुटके पर स्प्रिंग-बल का निदर्शन

(a) जब माध्य स्थिति से विस्थापन x शून्य है तो स्प्रिंग बल F_s भी शून्य है।

(b) खिंचे हुए स्प्रिंग के लिए $x > 0$ और $F_s < 0$

(c) संपीडित स्प्रिंग के लिए $x < 0$ और $F_s > 0$

(d) F_s तथा x के बीच खींचा गया आलेख। छायांकित त्रिभुज का क्षेत्रफल स्प्रिंग-बल द्वारा किए गए कार्य को निरूपित करता है। F_s और x के विपरीत चिह्नों के कारण, किया गया कार्य ऋणात्मक है,

$$W_s = -kx_m^2\,/\,2$$

$$F_s = -\,kx$$

जहाँ नियतांक k एक स्प्रिंग नियतांक है जिसका मात्रक N m^{-1} है। यदि k का मान बहुत अधिक है, तब स्प्रिंग को दृढ़ कहा जाता है। यदि k का मान कम है, तब इसे नर्म (मृदु) कहा जाता है।

मान लीजिए कि हम गुटके को बाहर की तरफ, जैसा कि चित्र 6.7(b) में दिखाया गया है, धीमी अचर चाल से खींचते हैं। यदि स्प्रिंग का खिंचाव x_m है तो स्प्रिंग-बल द्वारा किया कार्य

$$W_s = \int_0^{x_m} F_s \, dx = -\int_0^{x_m} kx \, dx$$

$$= -\frac{k x_m^2}{2} \qquad (6.15)$$

इस व्यंजक को हम चित्र 6.7(d) में दिखाए गए त्रिभुज के क्षेत्रफल से भी प्राप्त कर सकते हैं। ध्यान दीजिए कि बाह्य खिंचाव बल द्वारा किया गया कार्य धनात्मक है।

$$W = +\frac{k x_m^2}{2} \qquad (6.16)$$

यदि स्प्रिंग का विस्थापन x_c (<0) से संपीडित किया जाता है तब भी उपरोक्त व्यंजक सत्य है। स्प्रिंग-बल $W_s = -kx_c^2/2$ कार्य करता है जबकि बाह्य बल $W = -kx_c^2/2$ कार्य करता है।

यदि गुटके को इसके आरंभिक विस्थापन x_i से अंतिम विस्थापन x_f तक विस्थापित किया जाता है तो स्प्रिंग-बल द्वारा किया गया कार्य

$$W_s = -\int_{x_i}^{x_f} k\,x\,dx = \frac{k\,x_i^2}{2} - \frac{k\,x_f^2}{2} \qquad (6.17)$$

अत: स्प्रिंग-बल द्वारा किया गया कार्य केवल सिरे के बिंदुओं पर निर्भर करता है। विशेष रूप से जब गुटके को स्थिति x_i से खीचा गया हो और वापस x_i स्थिति तक आने दिया गया हो तो

$$W_s = -\int_{x_i}^{x_i} k\,x\,dx = \frac{k\,x_i^2}{2} - \frac{k\,x_i^2}{2} = 0 \qquad (6.18)$$

अत: स्प्रिंग बल द्वारा किसी चक्रीय प्रक्रम में किया गया कार्य शून्य होता है। हमने यहां स्पष्ट कर दिया है कि (i) स्प्रिंग बल केवल स्थिति पर निर्भर करता है जैसा कि हुक द्वारा पहले कहा गया है ($F_s = -k\,x$); (ii) यह बल कार्य करता है जो किसी पिण्ड की आरंभिक एवं अंतिम स्थितियों पर निर्भर करता है; उदाहरणार्थ, समीकरण (6.17) । अत: स्प्रिंग बल एक **संरक्षी बल** है।

जब गुटका साम्यावस्था में है अर्थात् माध्य स्थिति से उसका विस्थापन शून्य है तब स्प्रिंग की स्थितिज ऊर्जा $V(x)$ को हम शून्य मानते हैं। किसी खिंचाव (या संपीडन) x के लिए उपरोक्त विश्लेषण सुझाता है कि

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 \qquad (6.19)$$

इसे सुविधापूर्वक सत्यापित किया जा सकता है कि $-dV/dx = -k\,x$ जो कि स्प्रिंग बल है। जब m द्रव्यमान के गुटके को चित्र 6.7 के अनुसार x_m तक खींचा जाता है और फिर विरामावस्था से छोड़ा जाता है, तब इसकी समूची यांत्रिक ऊर्जा स्वेच्छा से चुनी गई किसी भी स्थिति x पर निम्नलिखित रूप में दी जाएगी, जहाँ x का मान $-x_m$ से $+x_m$ के बीच है:

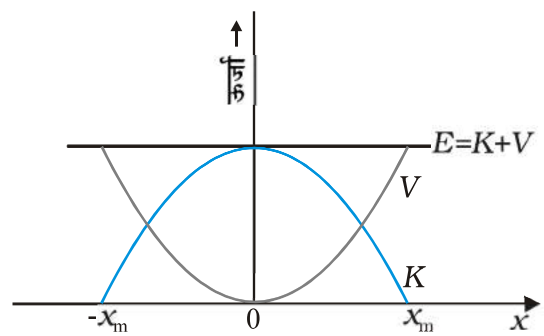
$$\frac{1}{2}k\,x_m^2 = \frac{1}{2}k\,x^2 + \frac{1}{2}m\,v^2$$

जहाँ हमने यांत्रिक ऊर्जा के संरक्षण नियम का उपयोग किया है । इसके अनुसार गुटके की चाल v_m और गतिज ऊर्जा साम्यावस्था $x = 0$ पर अधिकतम होगी, अर्थात्

$$\frac{1}{2}m\,v_m^2 = \frac{1}{2}k\,x_m^2$$

या, $$v_m = \sqrt{\frac{k}{m}}\,x_m$$

ध्यान दीजिए कि k/m की विमा $[T^{-2}]$ है और यह समीकरण विमीय रूप से सही है। यहाँ निकाय की गतिज ऊर्जा, स्थितिज ऊर्जा में, और स्थितिज ऊर्जा, गतिज ऊर्जा में परिवर्तित हो जाती है, तथापि कुल यांत्रिक ऊर्जा नियत रहती है । चित्र 6.8 में इसका ग्राफीय निरूपण किया गया है।



चित्र 6.8 किसी स्प्रिंग से जुड़े हुए गुटके की स्थितिज ऊर्जा V और गतिज ऊर्जा K के परवलयिक आलेख जो हुक के नियम का पालन करते हैं। ये एक-दूसरे के पूरक हैं अर्थात् इनमें जब एक घटता है तो दूसरा बढ़ता है, परंतु कुल यांत्रिक ऊर्जा E = K + V हमेशा अचर रहती है।

▶ ***उदाहरण 6.8*** कार दुर्घटना को दिखाने के लिए (अनुकार) मोटरकार निर्माता विभिन्न स्प्रिंग नियतांकों के स्प्रिंगों का फ्रेम चढ़ाकर चलती हुई कारों के संघट्ट का अध्ययन करते हैं। मान लीजिए किसी प्रतीकात्मक अनुरूपण में कोई 1000 kg द्रव्यमान की कार एक चिकनी सड़क पर 18 km/h की चाल से चलते हुए, क्षैतिज फ्रेम पर चढ़ाए गए स्प्रिंग से संघट्ट करती है जिसका स्प्रिंग नियतांक 6.25×10^3 N m^{-1} है। स्प्रिंग का अधिकतम संपीडन क्या होगा?

हल कार की गतिज ऊर्जा अधिकतम संपीडन पर संपूर्ण रूप से स्प्रिंग की स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तित हो जाती है। गतिमान कार की गतिज ऊर्जा :

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 10^3 \times 5 \times 5$$

$$K = 1.25 \times 10^4 \text{ J}$$

जहाँ कार की चाल 18 km h^{-1} को इसके SI मान 5 m s^{-1} में परिवर्तित कर दिया गया है। **[यहाँ यह ध्यान रखने योग्य है कि 36 km h^{-1} = 10 m s^{-1}]**। यांत्रिक ऊर्जा-संरक्षण नियम के अनुसार अधिकतम संपीडन x_m पर स्प्रिंग की स्थितिज ऊर्जा (V), गतिशील कार की गतिज ऊर्जा (K) के बराबर होती है।

अत: $$V = \frac{1}{2} k x_m^2$$

$$= 1.25 \times 10^4 \text{ J}$$

हल करने पर हम प्राप्त करते हैं कि $x_m = 2.00$ m

ध्यान दें कि यहाँ इस स्थिति को हमने आदर्श रूप में प्रस्तुत किया है। यहाँ स्प्रिंग को द्रव्यमानरहित माना है और सड़क का घर्षण नगण्य लिया है। ◂

हम संरक्षी बलों पर कुछ टिप्पणी करते हुए इस अनुभाग का समापन करते हैं :

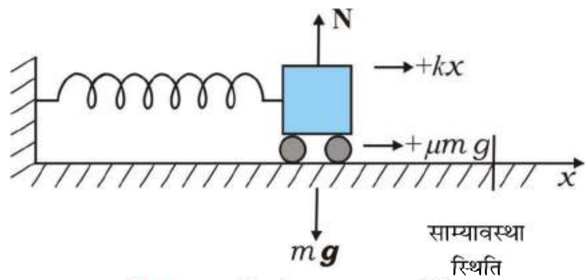
(i) उपरोक्त विवेचना में समय के विषय में कोई सूचना नहीं है। इस उदाहरण में हम संपीडन का परिकलन कर सकते हैं लेकिन उस समय अंतराल का परिकलन नहीं कर सकते जिसमें यह संपीडन हुआ है। अत: कालिक सूचना प्राप्त करने के लिए, इस निकाय के लिए न्यूटन के द्वितीय नियम के हल की आवश्यकता है।

(ii) सभी बल संरक्षी नहीं हैं। उदाहरणार्थ, घर्षण एक असंरक्षी बल है। इस स्थिति में, ऊर्जा-सरंक्षण नियम में किंचित परिवर्तन करना पड़ेगा। इसे उदाहरण 6.9 में स्पष्ट किया गया है।

(iii) स्थितिज ऊर्जा का शून्य स्वेच्छा से लिया गया है जिसे सुविधानुसार निश्चित कर लिया जाता है। स्प्रिंग-बल के लिए, $x = 0$ पर हम $V = 0$ लेते हैं, अर्थात् बिना खिंचे स्प्रिंग की स्थितिज ऊर्जा शून्य थी। नियत गुरुत्वाकर्षण बल mg के लिए हमने पृथ्वी की सतह पर $V = 0$ लिया था। अगले अध्याय में हम देखेंगे कि गुरुत्वाकर्षण के सार्वत्रिक नियमानुसार बल के लिए, गुरुत्वाकर्षण स्रोत से अनन्त दूरी पर शून्य सर्वोत्तम रूप से परिभाषित होती है तथापि, किसी विवेचना में स्थितिज ऊर्जा के लिए एक बार शून्य की स्थिति निश्चित करने के पश्चात्, शुरू से अंत तक विवेचना में उसी नियम का पालन करना चाहिए।

▸ **उदाहरण 6.9** उदाहरण 6.8 में घर्षण गुणांक μ का मान 0.5 लेकर कमानी के अधिकतम संपीडन का परिकलन कीजिए।

हल : स्प्रिंग बल और घर्षण बल, दोनों ही संपीडन का विरोध करने में संयुक्त रूप से कार्य करते हैं, जैसा कि चित्र 6.9 में दिखाया गया है।



चित्र 6.9 किसी कार पर आरोपित बल।

यहाँ हम यांत्रिक ऊर्जा-संरक्षण के सिद्धांत के बजाय कार्य-ऊर्जा प्रमेय का प्रयोग करते हैं।

गतिज ऊर्जा में परिवर्तन है :

$$\Delta K = K_f - K_i = 0 - \frac{1}{2} m v^2$$

कुल बल द्वारा किया गया कार्य :

$$W = -\frac{1}{2} k x_m^2 - \mu m g x_m$$

ΔK और W को समीकृत करने पर हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} k x_m^2 + \mu m g x_m$$

यहाँ $\mu mg = 0.5 \times 10^3 \times 10 = 5 \times 10^3$ N ($g = 10$ m s^{-2} लेने पर) । उपरोक्त समीकरण को व्यवस्थित करने पर हमें अज्ञात x_m के लिए निम्न द्विघातीय समीकरण प्राप्त होती है :

$$k x_m^2 + 2\mu m g x_m - m v^2 = 0$$

$$x_m = \frac{-\mu m g + \left[\mu^2 m^2 g^2 + m k v^2\right]^{1/2}}{k}$$

जहाँ हमने x_m धनात्मक होने के कारण इसका धनात्मक वर्गमूल ले लिया है। आंकिक मानों को समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं

$$x_m = 1.35 \text{ m}$$

जो आशानुसार उदाहरण 6.8 में प्राप्त परिणाम से कम है। ◂

यदि मान लें कि पिंड पर लगने वाले दोनों बलों में एक संरक्षी बल F_c और दूसरा असंरक्षी बल F_{nc} है तो यांत्रिक ऊर्जा-संरक्षण के सूत्र में किंचित् परिवर्तन करना पड़ेगा। कार्य-ऊर्जा प्रमेय से :

$$(F_c + F_{nc})\,\Delta x = \Delta K$$

परंतु $$F_c\,\Delta x = -\,\Delta V$$

अतः $$\Delta(K + V) = F_{nc}\,\Delta x$$

$$\Delta E = F_{nc}\,\Delta x$$

जहाँ E कुल यांत्रिक ऊर्जा है। समस्त पथ पर यह निम्न रूप ले लेती है

$$E_f - E_i = W_{nc}$$

जहाँ W_{nc} असंरक्षी बल द्वारा किसी पथ पर किया गया कुल कार्य है। ध्यान दीजिए कि W_{nc} i से f तक एक विशेष पथ पर निर्भर करता है जैसा कि संरक्षी बल में नहीं है।

6.10 ऊर्जा के विभिन्न रूप : ऊर्जा-संरक्षण का नियम

पिछले अनुभाग में हमने यांत्रिक ऊर्जा की विवेचना की और यह पाया कि इसे दो भिन्न श्रेणियों में विभाजित किया जा सकता है। पहली गति पर आधारित है अर्थात् गतिज ऊर्जा, और दूसरी संरूपण अथवा स्थिति पर आधारित अर्थात् स्थितिज ऊर्जा। ऊर्जा बहुत से रूपों में प्राप्त होती है जिनको एक रूप से दूसरे रूप में कई विधियों द्वारा रूपान्तरित किया जाता है जो प्रायः हमें भी कभी-कभी स्पष्ट नहीं होते।

6.10.1 ऊष्मा

हम पहले ही देख चुके हैं कि घर्षण बल संरक्षी बल नहीं है। लेकिन कार्य, घर्षण बल से संबंधित है (उदाहरण 6.5)। कोई m द्रव्यमान का गुटका रूक्ष क्षैतिज पृष्ठ पर v_0 चाल से फिसलता हुआ x_0 दूरी चलकर रुक जाता है। x_0 पर गतिज घर्षण बल f द्वारा किया गया कार्य $-f\,x_0$ है। कार्य-ऊर्जा प्रमेय से $\frac{1}{2}mv_0^2 = f\,x_0$ प्राप्त होता है। यदि हम अपने विषय-क्षेत्र को यांत्रिकी तक ही सीमित रखें तो हम कहेंगे कि गुटके की गतिज ऊर्जा, घर्षण बल के कारण क्षयित हो गई है। मेज और गुटके का परीक्षण करने पर हमें पता चलेगा कि इनका ताप मामूली-सा बढ़ गया है। घर्षण बल द्वारा किया गया कार्य क्षयित नहीं हुआ है अपितु ऊष्मीय ऊर्जा के रूप में मेज और गुटके को स्थानान्तरित हो गया है जो गुटके और मेज की आंतरिक ऊर्जा को बढ़ा देता है। शीतकाल में हम अपनी हथेलियों को आपस में जोर से रगड़कर ऊष्मा उत्पन्न करते हैं। हम बाद में देखेंगे कि आंतरिक ऊर्जा प्रायः अणुओं की निरंतर यादृच्छिक गति से संबंधित है । ऊष्मीय ऊर्जा के स्थानान्तरण की परिमाणात्मक धारणा इस लक्षण से प्राप्त की जा सकती है कि 1 kg जल 10° C ठंडा होने पर 42000 J ऊर्जा मुक्त करता है।

6.10.2 रासायनिक ऊर्जा

मानव जाति ने महानतम् तकनीकी सफलता प्राप्त की जब यह पता लगा कि अग्नि को कैसे प्रज्वलित और नियंत्रित किया जाता है। हमने दो फ्लिन्ट पत्थरों को आपस में रगड़ना (यांत्रिक ऊर्जा), उन्हें गर्म होने देना और पत्तियों के ढेर को सुलगाना (रासायनिक ऊर्जा) सीखा जिसके कारण हम सतत् ऊष्मा प्राप्त कर पाए। माचिस की एक तीली जब विशेष रूप से तैयार की गई रासायनिक सतह पर रगड़ी जाती है तो एक चमकीली ज्वाला के रूप में प्रज्वलित होती है। जब सुलगाई गई माचिस की तीली पटाखे में लगाई जाती है तो उसके परिणामस्वरूप ध्वनि एवं प्रकाश ऊर्जाओं का भव्य

ERROR: stackunderflow
OFFENDING COMMAND: ~

STACK: