ସରଳ ଗଣିତ

(ବୀଜଗଣିତ)

ଅଷ୍ଟମ ଶ୍ରେଣୀ

ଶିକ୍ଷା ଅଧିକାର

ସର୍ବଶିକ୍ଷା ଅଭିଯାନ
ସଭିଏଁ ପଢ଼ନ୍ତୁ, ସଭିଏଁ ବଢ଼ନ୍ତୁ

ଶିକ୍ଷକ ଶିକ୍ଷା ନିର୍ଦ୍ଦେଶାଳୟ ଏବଂ ରାଜ୍ୟ
ଶିକ୍ଷା ଗବେଷଣା ଓ ପ୍ରଶିକ୍ଷଣ ପରିଷଦ,
ଓଡ଼ିଶା, ଭୁବନେଶ୍ୱର

ଓଡ଼ିଶା ପ୍ରାଥମିକ ଶିକ୍ଷା କାର୍ଯ୍ୟକ୍ରମ
ପ୍ରାଧିକରଣ, ଭୁବନେଶ୍ୱର

ସରଳ ଗଣିତ (ବୀଜଗଣିତ)

ଅଷ୍ଟମ ଶ୍ରେଣୀ

ଲେଖକମଣ୍ଡଳୀ :

ଡ. ପ୍ରସନ୍ନ କୁମାର ଶତପଥି (ସମୀକ୍ଷକ)

ଡ. ରଜନୀ ବଲ୍ଲଭ ଦାଶ

ଶ୍ରୀ ନଗେନ୍ଦ୍ର କୁମାର ମିଶ୍ର

ଶ୍ରୀମତୀ କୁମୁଦିନୀ ଜୀ

ଶ୍ରୀ କୈଳାସ ଚନ୍ଦ୍ର ସ୍ୱାଇଁ

ସଂଶୋଧନ :

ଶ୍ରୀ ମଦନ ମହୋନ ମହାନ୍ତି

ଶ୍ରୀ ନାରାୟଣ ସାହୁ

ଶ୍ରୀ ମାନସ ମିଶ୍ର

ଶ୍ରୀ କାର୍ତ୍ତିକ ଚନ୍ଦ୍ର ବେହେରା

ସଂଯୋଜନା :

ଡ. ନଳିନୀକାନ୍ତ ମିଶ୍ର

ଡ. ତିଲୋତ୍ତମା ସେନାପତି

ପ୍ରକାଶକ :

ବିଦ୍ୟାଳୟ ଓ ଗଣଶିକ୍ଷା ବିଭାଗ, ଓଡ଼ିଶା ସରକାର

ମୁଦ୍ରଣ ବର୍ଷ :

୨୦୧୭

ମୁଦ୍ରଣ :

ପାଠ୍ୟପୁସ୍ତକ ଉତ୍ପାଦନ ଓ ବିକ୍ରୟ, ଭୁବନେଶ୍ୱର

ପ୍ରସ୍ତୁତି :

ମାଧ୍ୟମିକ ଶିକ୍ଷା ପରିଷଦ, ଓଡ଼ିଶା, କଟକ

ଓ

ଶିକ୍ଷକ ଶିକ୍ଷା ନିର୍ଦ୍ଦେଶାଳୟ ଏବଂ ରାଜ୍ୟ ଶିକ୍ଷା ଗବେଷଣା ପ୍ରତିଷ୍ଠାନ ଓ
ପ୍ରଶିକ୍ଷଣ ପରିଷଦ, ଓଡ଼ିଶା, ଭୁବନେଶ୍ୱର

ଏହି ପୁସ୍ତକ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ପଦେ

ଆଜିର ଯୁଗ ହେଉଛି ବିଜ୍ଞାନ ଓ ପ୍ରଯୁକ୍ତି ବିଦ୍ୟାର ଯୁଗ । ତାତ୍ତ୍ୱିକ ଓ ପ୍ରୟୋଗାତ୍ମକ – ଏ ଉଭୟ ଦିଗରେ ବିଜ୍ଞାନର ଅଗ୍ରଗତି ନିମନ୍ତେ ଗଣିତ ଶାସ୍ତ୍ରର ଏକ ବଳିଷ୍ଠ ଭୂମିକା ରହିଛି । ଗଣିତ ଶାସ୍ତ୍ରର ବୀଜଗଣିତ ହେଉଛି ଏକ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ଅଙ୍ଗ । ବିଦ୍ୟାଳୟ ସ୍ତରରୁ ବୀଜଗଣିତ ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ଏକ ଉପଯୁକ୍ତ ଭିତ୍ତିଭୂମି ଉପରେ ପ୍ରତିଷ୍ଠିତ ହେବା ବାଞ୍ଛନୀୟ ।

ସାରା ବିଶ୍ୱରେ ଅନ୍ୟାନ୍ୟ ବିକାଶଶୀଳ ଦେଶମାନଙ୍କ ଭଳି ଭାରତ ମଧ୍ୟ ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଉଲ୍ଲେଖନୀୟ ଭୂମିକା ଗ୍ରହଣ କରିଛି । ମାଧ୍ୟମିକ ଶିକ୍ଷାସ୍ତର ପାଇଁ ଜାତୀୟ ସ୍ତରରେ ପ୍ରସ୍ତୁତ National Curriculum Frame Work - 2005 ରେ ଗଣିତ ଶିକ୍ଷାକୁ ଅଧିକ ଗୁରୁତ୍ୱ ଦିଆଯାଇଛି । ତଦନୁଯାୟୀ ଜାତୀୟ ଶିକ୍ଷା ଗବେଷଣା ଓ ତାଲିମ ପରିଷଦ (NCERT), ପାଠ୍ୟଖସଡ଼ା ଓ ପାଠ୍ୟପୁସ୍ତକ ପ୍ରଣୟନ କରିଛନ୍ତି । ଜାତୀୟ ଶିକ୍ଷାସ୍ରୋତକୁ ଦୃଷ୍ଟି ଦେଇ ଓଡ଼ିଶା ମାଧ୍ୟମିକ ଶିକ୍ଷା ପରିଷଦ; ଶିକ୍ଷକ ଶିକ୍ଷା ନିର୍ଦ୍ଦେଶାଳୟ ଏବଂ ରାଜ୍ୟ ଶିକ୍ଷା ଗବେଷଣା ପ୍ରତିଷ୍ଠାନ ଓ ପ୍ରଶିକ୍ଷଣ ପରିଷଦ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରସ୍ତୁତ ରାଜ୍ୟ ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ଆଧାରରେ ଅଷ୍ଟମ ଶ୍ରେଣୀ ପାଇଁ ସିଲାବସ୍ ପ୍ରସ୍ତୁତ କରିଥିଲେ ଓ ତଦନୁଯାୟୀ ନୂତନ ଭାବରେ **ସରଳ ଗଣିତ (ବୀଜଗଣିତ)** ପାଠ୍ୟପୁସ୍ତକ ପ୍ରକାଶ କରିଛନ୍ତି । ଅଭିଜ୍ଞ ଲେଖକମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ପାଠ୍ୟପୁସ୍ତକ ରଚନା କରାଯାଇ ପୁସ୍ତକର ପାଣ୍ଡୁଲିପିକୁ ରାଜ୍ୟସ୍ତରୀୟ ଏକ କର୍ମଶାଳାରେ କାର୍ଯ୍ୟରତ ଗଣିତ ଶିକ୍ଷକ ଶିକ୍ଷୟିତ୍ରୀଙ୍କଦ୍ୱାରା ପୁଙ୍ଖାନୁପୁଙ୍ଖ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି । ପରବର୍ତ୍ତୀ ସମୟରେ ସିଲାବସ୍ କମିଟିରେ ମଧ୍ୟ ପାଣ୍ଡୁଲିପିଟି ପଠିତ ଓ ଆଲୋଚିତ ହୋଇଛି । ଆଲୋଚନା ଲବ୍ଧ ପରାମର୍ଶକୁ ପାଥେୟ କରି ପାଣ୍ଡୁଲିପିଟି ସଂଶୋଧିତ ହୋଇଛି ।

ଶିକ୍ଷକ ଶିକ୍ଷା ନିର୍ଦ୍ଦେଶାଳୟ ଏବଂ ରାଜ୍ୟ ଶିକ୍ଷା ଗବେଷଣା ପ୍ରତିଷ୍ଠାନ ଓ ପ୍ରଶିକ୍ଷଣ ଏହି ପୁସ୍ତକଟିର ଆବଶ୍ୟକୀୟ ସଂଶୋଧନ ପାଇଁ ଗଣିତ ବିଶାରଦ ଓ କାର୍ଯ୍ୟରତ ଗଣିତ ଶିକ୍ଷକ ଶିକ୍ଷୟିତ୍ରୀଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ୨୦୧୪ ମସିହାରେ ପ୍ରୟାସ କରିଥିଲେ ମଧ୍ୟ ଏହା ହୋଇ ନଥିଲା । ୨୦୧୬ ମସିହାରେ ଏହି ପୁସ୍ତକର ସଂଶୋଧନ କାର୍ଯ୍ୟ କରାଯାଇଛି । ତଥାପି ତଥ୍ୟଗତ ତ୍ରୁଟି ଯଦି ରହିଥାଏ, କର୍ତ୍ତୃପକ୍ଷଙ୍କୁ ଜଣାଇବେ ।

ସୂଚୀପତ୍ର

ସେଟ୍ (SET)

ଅଧ୍ୟାୟ 1

1.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ବିଖ୍ୟାତ ଜର୍ମାନ ଗଣିତଜ୍ଞ **ଜର୍ଜ କ୍ୟାଣ୍ଟର (Georg Cantor),** (1845-1918) ହେଉଛନ୍ତି ସେଟ୍ ତତ୍ତ୍ୱ (Set Theory) ର ପ୍ରବର୍ତ୍ତକ । ସେଟ୍ ତତ୍ତ୍ୱ ଗଣିତକୁ ସରଳ ଓ ସୁନ୍ଦର କରିବାରେ ମୁଖ୍ୟ ଭୂମିକା ଗ୍ରହଣ କରିଛି । ଏହା ମାଧ୍ୟମରେ ଜଟିଳ ଗାଣିତିକ ତତ୍ତ୍ୱକୁ ସାବଲୀଳ ଢଙ୍ଗରେ ବିଶ୍ଳେଷଣ କରାଯାଇପାରୁଛି । ସେଟ୍ ତତ୍ତ୍ୱ ଗଣିତ ଶାସ୍ତ୍ରର ମୂଳଦୁଆକୁ ସୁଦୃଢ଼ କରିବା ସହ ଗଣିତର ବିଭିନ୍ନ ବିଭାଗଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ବନ୍ଧକୁ ଦୃଢ଼ୀଭୂତ କରିପାରିଛି ।

1.2 ସେଟ୍ ଓ ଏହାର ଉପାଦାନ (Set and its elements) :

ଆମେ ଅନେକ ସମୟରେ କଥା ପ୍ରସଙ୍ଗରେ ଚାବିନେଛା, ଛାତ୍ରଦଳ, ଗୋରୁପଲ, ତାରକାପୁଞ୍ଜ, କ୍ରିକେଟ୍ ଟିମ୍ ଆଦି କହିଥାଉ । ଏଠାରେ ନେଛା, ଦଳ, ପଲ, ପୁଞ୍ଜ, ଟିମ୍ ଆଦି ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଗୋଷ୍ଠୀ (collection) ବା ସମାହାର (aggregate) । ସେହିପରି ବାସନ ସେଟ୍ ଓ ସୋଫାସେଟ୍ କହିଲେ ଆମେ ଯଥାକ୍ରମେ ବାସନର ସମାହାର ଓ ସୋଫାର ସମାହାରକୁ ବୁଝିଥାଉ । ତେଣୁ ଯେକୌଣସି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ (well defined) ବସ୍ତୁମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଏକ ସେଟ୍‌ର ପରିକଳ୍ପନା କରାଯାଏ । ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ :

(i) ଓଡ଼ିଶାର ଜିଲ୍ଲାସମୂହ
(ii) ଇଂରାଜୀ ଭାଷାର ବର୍ଣ୍ଣମାଳା
(iii) ସପ୍ତାହର ଦିନଗୁଡ଼ିକ
(iv) ବାଘ, ଭାଲୁ, ସିଂହମାନଙ୍କ ଦଳ
(v) ସେଓ, ଅଙ୍ଗୁର, କମଳା, ନଡ଼ିଆ ଫଳସମୂହ
(vi) ଆଳୁ, ବାଇଗଣ, କଖାରୁ, କୋବି ପରିବାସମୂହ
(vii) ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାସମୂହ
(viii) ଯୁଗ୍ମସଂଖ୍ୟା 2,4,6,8.....ସମୂହ

ଏହି ସମାହାରକୁ ନେଇ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ସେଟ୍‌ର ପରିକଳ୍ପନା କରାଯାଇ ପାରିବ ।

ଯେଉଁ ବସ୍ତୁଗୁଡ଼ିକୁ ନେଇ ସେଟ୍‌ଟି ଗଠିତ, ସେଗୁଡ଼ିକୁ ସେଟ୍‌ର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ **ଉପାଦାନ (Element)** କୁହାଯାଏ । ଓଡ଼ିଶାର ଜିଲ୍ଲାସମୂହରେ ପୁରୀ, କଟକ, ବାଲେଶ୍ୱର, ସମ୍ବଲପୁର, ଫୁଲବାଣୀ ଆଦି ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଉପାଦାନ । ସେହିପରି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ର 1,2,3,.... ଆଦି ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଉପାଦାନ ।

ତୁମ ପାଇଁ କାମ (i) ଇଂରାଜୀ ଭାଷାର ବର୍ଣ୍ଣମାଳାରେ ଥିବା ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକୁ ଲେଖ ।
(ii) ଏକ ଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ଅଯୁଗ୍ମ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକୁ ଲେଖ ।

ସେଟ୍ ଗଠନ କରିବା ସମୟରେ ଆମକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ ରଖିବାକୁ ହେବ ଯେ କୌଣସି ଦତ୍ତବସ୍ତୁ ଉକ୍ତ ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନ କି ନୁହେଁ, ତାହା ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଭାବରେ ସ୍ଥିରୀକୃତ କରାଯାଇ ପାରୁଥିବା ଆବଶ୍ୟକ ।

ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ 'ସୁନ୍ଦର ଫୁଲ' ମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଏକ ସେଟ୍ ଗଠନ ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ । କାରଣ ସୌନ୍ଦର୍ଯ୍ୟର ଏପରି କିଛି ମାପକାଠି ନାହିଁ, ଯାହା ଦ୍ୱାରା ଆମେ କେଉଁ ଫୁଲଟି ସୁନ୍ଦର ଓ କେଉଁ ଫୁଲଟି ସୁନ୍ଦର ନୁହେଁ, ତାହା ନିଶ୍ଚିତ ଭାବରେ କହିପାରିବା । ସେହିପରି ''ବୃହତ୍ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା''ମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଏକ ସେଟ୍ ଗଠନ ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ । କାରଣ କେଉଁ କେଉଁ ସଂଖ୍ୟା ବୃହତ୍, ତାହାର ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଉପାୟ କହି ହେବ ନାହିଁ । ସୁତରାଂ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଭାବେ ସ୍ଥିରୀକୃତ ହୋଇ ନ ଥିବା ଉପାଦାନମାନଙ୍କୁ ନେଇ ସେଟ୍ ଗଠନ ଅସମ୍ଭବ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ – ମନେରଖ ଯେ ସେଟ୍ ଓ ଏହାର ଉପାଦାନର କୌଣସି ସଂଜ୍ଞା ନାହିଁ । ଏହି ଦୁଇଟି ପଦ ସଂଜ୍ଞା ବିହୀନ ଅଟନ୍ତି ।

ତୁମ ପାଇଁ କାମ (i) ପାଞ୍ଚଟି ବିଭିନ୍ନ ସେଟ୍‌ର ଉଦାହରଣ ଦେଇ, ସେମାନଙ୍କର ଉପାଦାନ ଗୁଡ଼ିକୁ ଲେଖ ।
(ii) ଦୁଇଟି ଉଦାହରଣ ଦିଅ, ଯାହାକୁ ନେଇ ସେଟ୍ ଗଠନ ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ ।

1.3 ସସୀମ ଓ ଅସୀମ ସେଟ୍ (Finite and Infinite Sets) :

ଯଦି କୌଣସି ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନମାନଙ୍କୁ ଗୋଟି ଗୋଟି କରି ଗଣିଲେ, ଗଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟାର ପରିସମାପ୍ତି ଘଟେ, ତେବେ ଉକ୍ତ ସେଟ୍‌ଟି ଏକ ସସୀମ ସେଟ୍ ଅଟେ; ଅନ୍ୟଥା ଉକ୍ତ ସେଟ୍‌କୁ ଅସୀମ ସେଟ୍ କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ ଇଂରାଜୀ ଭାଷାର ବର୍ଣ୍ଣମାଳାମାନଙ୍କର ସେଟ୍, ଏକ ଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ସେଟ୍, ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ସସୀମ ସେଟ୍; କିନ୍ତୁ ସମସ୍ତ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ସେଟ୍ ଗୋଟିଏ ଅସୀମ ସେଟ୍ ଅଟେ ।

ତୁମ ପାଇଁ କାମ : ଦୁଇଟି ସସୀମ ସେଟ୍ ଓ ଦୁଇଟି ଅସୀମ ସେଟ୍‌ର ଉଦାହରଣ ଦିଅ ।

1.4 ସେଟ୍‌ର ଲିଖନ (Presentation of Sets) :

ସାଧାରଣତଃ ସେଟ୍‌ଗୁଡ଼ିକୁ ଇଂରାଜୀ ବର୍ଣ୍ଣମାଳାର ବଡ଼ ଅକ୍ଷର A,B,C,D... ଆଦି ଦ୍ୱାରା ନାମକରଣ କରାଯାଏ ଓ ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକୁ ଛୋଟ ଅକ୍ଷର a,b,c,d.. ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ । ଯଦି ସେଟ୍ A ର ଗୋଟିଏ ଉପାଦାନ 'a' ହୋଇଥାଏ, ତେବେ ଆମେ ଲେଖିବା **$a \in A$ ଏବଂ ଏହାକୁ 'a belongs to A' ବା 'a is an element of A'** ବୋଲି ପଢ଼ାଯାଏ । b, A ର ଏକ ଉପାଦାନ ହୋଇ ନ ଥିଲେ, **$b \notin A$** ଲେଖାଯାଏ । ଏହାକୁ **b, A ର ଉପାଦାନ ନୁହେଁ (b does not belong to A କିମ୍ବା b is not an element of A)** ବୋଲି ପଢ଼ାଯାଏ ।

ସେଟ୍ ଲେଖିବା ପାଇଁ ଦୁଇପ୍ରକାର ପଦ୍ଧତି ଅବଲମ୍ବନ କରାଯାଏ । ଯଥା:

(a) ତାଲିକା ପଦ୍ଧତି ବା ସାରଣୀ ପଦ୍ଧତି (Tabular or Roster method)

(b) ସୂତ୍ର ପଦ୍ଧତି ବା ସେଟ୍ ଗଠନକାରୀ ପଦ୍ଧତି (Formula or Set builder method)

(a) ତାଲିକା ପଦ୍ଧତି : ଏକ ଯୋଡ଼ା କୁଟୀଳ ବନ୍ଧନୀ { } ମଧ୍ୟରେ ଯେଉଁ ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକୁ ନେଇ ସେଟ୍‌ଟି ଗଠିତ, ସେଗୁଡ଼ିକୁ ଗୋଟିକ ପରେ ଗୋଟିଏ ରଖାଯିବ ଓ ପ୍ରତି ଉପାଦାନ ପରେ (,) କମା ଦିଆଯିବ । ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ, ଯଦି A ସେଟ୍ ସପ୍ତାହର ବାରମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଗଠିତ, ତେବେ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଏହାକୁ ନିମ୍ନମତେ ଲେଖାଯାଏ ।

A = {ସୋମବାର, ମଙ୍ଗଳବାର, ବୁଧବାର, ଗୁରୁବାର, ଶୁକ୍ରବାର, ଶନିବାର, ରବିବାର} । ଯଦି B ସେଟ୍‌ଟି ଏକ ଅଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ଗଣନ ବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ ସେଟ୍‌ହୁଏ, ତେବେ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖିବା,

$B = \{1, 4, 9\}$

ଲକ୍ଷ୍ୟକର ଯେ A ଓ B ଉଭୟ ସେଟ୍ ସସୀମ ସେଟ୍ ।

କିନ୍ତୁ ଆମେ ଯଦି ଏକ ଅସୀମ ସେଟ୍‌କୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖିବା, ତେବେ ପ୍ରଥମେ ଏହାର ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକର ଅନୁକ୍ରମ (sequence) କୁ ଲକ୍ଷ୍ୟକରି ଅତିକମ୍‌ରେ ତିନୋଟି ଉପାଦାନ ଲେଖି ଅବଶିଷ୍ଟ ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକ ପାଇଁ କିଛି ବିନ୍ଦୁ ଦେଇଦେବା । ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ :

ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ସେଟ୍ $\mathbf{N}=\{1,2,3,....\}$

ଏବଂ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ସେଟ୍ $\mathbf{Z}=\{0, \pm 1, \pm 2,.....\}$ ଅଥବା $\mathbf{Z}=\{....-2, -1, 0, 1, 2,.....\}$

ମନେରଖ : (i) କୌଣସି ସେଟ୍‌କୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖିବା ବେଳେ ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକୁ ଯେ କୌଣସି କ୍ରମରେ ଲେଖିଲେ ମଧ୍ୟ ସେଟ୍‌ଟି ଅପରିବର୍ତ୍ତିତ ରହେ । ଯଥା :

$\{a, b, c\} = \{b, a, c\} = \{c, a, b\} = \{a, c, b\}$

(ii) ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନମାନଙ୍କୁ ଲେଖିଲା ବେଳେ ଯଦି କୌଣସି ଉପାଦାନ ଏକାଧିକ ବାର ଲେଖାଥାଏ, ତେବେ ସେହି ଉପାଦାନମାନଙ୍କୁ ସେଟ୍‌ରେ ଥରେ ମାତ୍ର ଲେଖାଯିବ । ଯଥା:

$\{1, 2, 3, 3, 2\} = \{1, 2, 3\}$

(b) ସୂତ୍ର ପଦ୍ଧତି :

କେତେକ ସେଟ୍ ଅଛନ୍ତି, ଯେଉଁମାନଙ୍କୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖିବା ଅସମ୍ଭବ ବା ଅତ୍ୟନ୍ତ କଷ୍ଟସାଧ୍ୟ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, ସମସ୍ତ ଭାରତୀୟମାନଙ୍କ ସେଟ୍‌କୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖି ହେବ ନାହିଁ । ଏହିପରି ଅନେକ ଉଦାହରଣ ପାଇପାରିବା । ମାତ୍ର ଏ ସମସ୍ତ ସୂତ୍ର ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖି ପ୍ରକାଶ କରିବା ସହଜ ଅଟେ । ଏହି ପଦ୍ଧତିରେ ଯଦି ସମସ୍ତ ଭାରତୀୟଙ୍କ ସେଟ୍‌ଟି S ରୂପେ ସୂଚିତ, ତେବେ ସୂତ୍ର ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖିବା –

S = {x | x, ଜଣେ ଭାରତୀୟ }

କିମ୍ବା S = {x : x, ଜଣେ ଭାରତୀୟ}

ଏଠାରେ '|' କିମ୍ବା ':' କୁ **ଯେପରିକି (such that)** ବୋଲି ପଢ଼ାଯାଏ ଓ ବନ୍ଧନୀ ଅନ୍ତର୍ଗତ ଉକ୍ତିକୁ 'ସମସ୍ତ x ମାନଙ୍କର ସେଟ୍ ଯେପରିକି x ଜଣେ ଭାରତୀୟ' ବୋଲି କୁହାଯାଏ । ମନେରଖ 'ଯେପରିକି' ପରେ ଥିବା ଉକ୍ତିଟି x ର ଏକ ଧର୍ମ ଅଟେ । ଏଠାରେ S ର ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ ସେହି ସମସ୍ତ ବ୍ୟକ୍ତି ଯେଉଁମାନେ ଭାରତୀୟ ଅଟନ୍ତି ।

ଏହି ପଦ୍ଧତିରେ ସମସ୍ତ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ଓ ସମସ୍ତ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟାର ସେଟ୍ N ଓ Z କୁ ସୂତ୍ର ପଦ୍ଧତିରେ ପ୍ରକାଶ କରିପାରିବା ।

N = {x | x ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା}

Z = {x | x ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା}

ପୁନଶ୍ଚ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ସେଟ୍ $P = \{2,4,6,8...\}$ ହେଲେ, ସୂତ୍ର ପଦ୍ଧତିରେ ସେଟ୍ $P = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbf{N}\}$ ଲେଖାଯିବ । କାରଣ ସେଟ୍ P ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ ଧନାତ୍ମକ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ଅଟେ ।

ଅପରପକ୍ଷେ ଯଦି ଏକ ସେଟ୍ $B=\{x \mid x = 2n, n \in \mathbf{N}, n \leq 5\}$ କୁ ସୂତ୍ର ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖାଯାଇଥାଏ ତେବେ ଉକ୍ତ ସେଟ୍‌କୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ $B = \{2,4,6,8,10\}$ ଭାବେ ଲାଖାଯିବ ।

ତୁମ ପାଇଁ କାମ

(i) ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖିପାରିବା କି ? (a) **N** ସେଟ୍ (b) **Z** ସେଟ୍

(ii) **N, Z** ଏବଂ **Q** ସେଟ୍‌ଗୁଡ଼ିକ ସସୀମ ନା ଅସୀମ ସେଟ୍ ?

(iii) ଉପରୋକ୍ତ ସେଟ୍‌ମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ଏପରି ଏକ ସେଟ୍‌କୁ ବାଛ, ଯାହାକୁ ଉଭୟ ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖାଯାଇ ପାରିବ ।

ଉଦାହରଣ - 1 : ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ପ୍ରକାଶିତ ନିମ୍ନଲିଖିତ ସେଟ୍‌ଗୁଡ଼ିକୁ ସୂତ୍ର ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖ ।

(i) $S = \{-1, 1\}$ (ii) $P = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ ଏବଂ (iii) $T = \{-1, -2, -3, ...\}$

ସମାଧାନ : (i) $S = \{x \mid x^2 = 1\}$ (ii) $P = \{x \mid x = 3n, n \in \mathbf{N}, n \le 5\}$ (iii) $T = \{-x \mid x \in \mathbf{N}\}$

ଉଦାହରଣ – 2 : ସୂତ୍ର ପଦ୍ଧତିରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ନିମ୍ନଲିଖିତ ସେଟ୍ ଗୁଡ଼ିକୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖ ।

(i) $A = \{x \mid x \in \mathbf{N}, 5 \le x \le 10\}$ (ii) $B = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbf{N}, x \le 5\}$

ଏବଂ (iii) $C = \{x \mid x = 3^n, n \in \mathbf{N}\}$

ସମାଧାନ :

(i) ଏଠାରେ A ର ଉପାଦନ ଗୁଡ଼ିକ 5 ଓ 10 ତଥା ଏମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ସମସ୍ତ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା । ସୁତରାଂ

$A = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

(ii) ଏଠାରେ B ସେଟ୍‌ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ ଏକ ଯୁଗ୍ମ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ଯାହାକି 5 ଠାରୁ ସାନ ।

$B = \{2, 4\}$

(iii) ଏଠାରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦନ 3^n , $n \in \mathbf{N}$ । ଅତଏବ ଉପାଦାନ ଗୁଡ଼ିକ 3, 9, 27, 81, ... ଇତ୍ୟାଦି ।

$\therefore C = \{3, 9, 27, 81, ...\}$ । ଏହି ସେଟ୍‌ଟି ଏକ ଅସୀମ ସେଟ୍ ।

ଉଦାହରଣ - 3 : ନିମ୍ନଲିଖିତ ସେଟ୍‌ଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ ସସୀମ ସେଟ୍ ଗୁଡ଼ିକୁ ବାଛ ।

(i) $A = \{x \mid x^2 = 1\}$ (ii) $B = \{-x \mid x \in \mathbf{N}\}$

(iii) $C = \{x \mid x \in 2^n, n \in \mathbf{N}\}$ (iv) $D = \{x \mid x \in \mathbf{Z}, -5 < x < 5\}$

ସମାଧାନ : ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖିଲେ,

(i) $A = \{1, -1\}$ (ii) $B = \{-1, -2, -3, ...\}$

(iii) $C = \{2, 4, 8, 16, ...\}$ (iv) $D = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

ଏଥି ମଧ୍ୟରୁ A ଓ D ସସୀମ ସେଟ୍ ।

1.5 ଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍ (Empty Set) :

ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଶୂନ 'O' ଯେପରି ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ଭୂମିକା ଗ୍ରହଣ କରିଥାଏ, ଠିକ୍ ସେହିପରି ସେଟ୍‌ମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍‌ର ଭୂମିକା ମଧ୍ୟ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ।

ସଂଜ୍ଞା: ଯେଉଁ ସେଟ୍‌ରେ କୌଣସି ଉପାଦାନ ନ ଥାଏ, ସେହି ସେଟ୍‌କୁ ଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍ କୁହାଯାଏ । ଶୂନ୍ୟସେଟ୍‌କୁ ϕ ସଂକେତ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ । ϕ ର ଏକ ବିକଳ୍ପ ରୂପ { } ଅଟେ ।

ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ, (i) $A = \{x \mid x \neq x\} = \phi$ ଅର୍ଥାତ୍ A ସେଟ୍‌ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ ନିଜ ସହ ସମାନ ନୁହେଁ । ତେଣୁ ଏହା ଏକ ଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍ । କାରଣ ଏପରି କୌଣସି ବସ୍ତୁ ନାହିଁ, ଯାହାକି ନିଜ ସହ ସମାନ ନୁହେଁ ।

(ii) $B = \{x \mid x \in \mathbf{N}\ 1 < x < 2\} = \phi$

B ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନ 1 ଓ 2 ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା କିନ୍ତୁ 1 ଓ 2 ମଧ୍ୟରେ କୌଣସି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ନ ଥିବା ହେତୁ B ଏକ ଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍ ।

1.6 ଉପସେଟ୍ (Subset) :

A ଓ B ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଯଦି A ସେଟ୍‌ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ B ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନ ହୋଇଥାଏ, ତେବେ ସେଟ୍ A କୁ ସେଟ୍ B ର ଏକ ଉପସେଟ୍ କୁହାଯାଏ (A is a subset of B) । ସଂକେତରେ ଏହାକୁ $A \subset B$ ଲେଖାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ, ମନେକର $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ତେବେ $A \subset B$

କାରଣ A ସେଟ୍‌ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ B ସେଟ୍‌ରେ ଅଛି ।

A, B ର ଏକ ଉପସେଟ୍ ହୋଇଥିଲେ, B କୁ A ର **ଅଧିସେଟ୍ (superset)** କୁହାଯାଏ । ସଂକେତରେ ଏହାକୁ $B \supset A$ ଲେଖାଯାଏ ।

ମନେରଖ : (i) ପ୍ରତ୍ୟେକ ସେଟ୍ ନିଜର ଉପସେଟ୍ ଅଟେ ଅର୍ଥାତ୍,

ଯଦି A ଏକ ସେଟ୍, ତେବେ $A \subset A$ । ସେହିପରି $\phi \subset \phi$ ।

କାରଣ A ସେଟ୍‌ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ ସେହି ସେଟ୍ A ର ମଧ୍ୟ ଏକ ଉପାଦାନ ।

(ii) ଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍‌ରେ କୌଣସି ଉପାଦାନ ନ ଥିବା ହେତୁ ତାହା ଯେକୌଣସି ସେଟ୍‌ର ଏକ ଉପସେଟ୍

ଅର୍ଥାତ୍, ଯଦି S ଗୋଟିଏ ସେଟ୍, ତେବେ $\phi \subset S$ ।

ତୁମ ପାଇଁ କାମ

(i) ଦୁଇଟି ଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍‌ର ଉଦାହରଣ ଦିଅ । (ଆଲୋଚିତ ଉଦାହରଣ ବ୍ୟତୀତ)

1.7 ସେଟ୍ ପ୍ରକ୍ରିୟା (Set Operations) :

ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା କ୍ଷେତ୍ରରେ ଯୋଗ, ବିୟୋଗ, ଗୁଣନ ଯେପରି ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ପ୍ରକ୍ରିୟା, ଠିକ୍ ସେହିପରି ସେଟ୍‌ମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ସଂଯୋଗ, ଛେଦ ଓ ଅନ୍ତର ମଧ୍ୟ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ପ୍ରକ୍ରିୟା । ଆମେ ଏଠାରେ ସେଟ୍ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଏହି ପ୍ରକ୍ରିୟାଗୁଡ଼ିକ ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

(a) ସଂଯୋଗ (Union) :

A ଓ B ସେଟ୍‌ଦ୍ୱୟରେ ଥିବା ସମସ୍ତ ଉପାଦାନକୁ ନେଇ ଗଠିତ ସେଟ୍‌କୁ A ଓ B ର ସଂଯୋଗ କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଏହା $A \cup B$ ସଂକେତ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୁଏ । $A \cup B$ ମଧ୍ୟ ଏକ ସେଟ୍ ।

ସୂତ୍ର ପ୍ରଣାଳୀରେ ଲେଖିବା : $A \cup B = \{x \mid x \in A$ ବା $x \in B\}$ ।

ଏଠାରେ **$x \in A$ ବା $x \in B$ ର ଅର୍ଥ ହେଉଛି x ଉପାଦାନଟି A କିମ୍ବା B କିମ୍ବା ଉଭୟ A ଓ B ର ଉପାଦାନ ଅଟେ ।** ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ

ଯଦି $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, ତେବେ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ପୁନଶ୍ଚ $S = \{a, b, c\}$, $T = \{b, c\}$, ତେବେ $S \cup T = \{a, b, c\}$

(b) ଛେଦ (Intersection) :

A ଓ B ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟରେ ଥିବା ଉପାଦାନମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ଯେଉଁ ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକ ଉଭୟ A ଓ B ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନ ହୋଇଥିବେ, ସେହିମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଗଠିତ ସେଟ୍‌କୁ A ଓ B ର ଛେଦ କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଏହା $A \cap B$ ସଂକେତ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୁଏ ।

ସୂତ୍ର ପ୍ରଣାଳୀରେ $A \cap B = \{x \mid x \in A$ ଏବଂ $x \in B\}$

ଏଠାରେ **$x \in A$ ଏବଂ $x \in B$ ର ଅର୍ଥ ହେଉଛି, A ଓ B ଉଭୟ ସେଟ୍‌ର x ହେଉଛି ଏକ ସାଧାରଣ ଉପାଦାନ (Common element)** । ଦତ୍ତ ଉଦାହରଣଗୁଡ଼ିକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

ମନେକର A= {1, 2, 3}, B = {1, 3, 5}, ତେବେ $A \cap B = \{1, 3\}$

ସେହିପରି S = {a,b,c}, T = {p, q, r}, ତେବେ $S \cap T = \phi$ ଅଥବା $S \cap T = \{\ \}$

କାରଣ S ଓ T ଉଭୟ ସେଟ୍‌ରେ କୌଣସି ସାଧାରଣ ଉପାଦାନ ନାହିଁ । ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଆମେ S ଓ T ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟକୁ **ଅଣଛେଦୀ ସେଟ୍ (Disjoint sets ବା Non-intersecting sets)** ବୋଲି କହିବା ।

(c) ଅନ୍ତର (Difference) :

ଯଦି A ଓ B ଦୁଇଟି ସେଟ୍, ତେବେ A ସେଟ୍‌ର ଯେଉଁ ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକ B ସେଟ୍‌ରେ ନାହାନ୍ତି, ସେମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଗଠିତ ସେଟ୍‌କୁ A ଅନ୍ତର B ସେଟ୍ କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଏହା A – B ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୁଏ ।

ସୂତ୍ର ପ୍ରଣାଳୀରେ $A - B = \{x \mid x \in A$ ଏବଂ $x \notin B\}$ । ସେହିପରି $B - A = \{x \in B$ ଏବଂ $x \notin A\}$ ।

ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ, ମନେକର A = {1, 2, 3, 4} , B = {3, 4}, ତେବେ A –B = {1, 2} ଏବଂ $B - A = \phi$

ତୁମ ପାଇଁ କାମ

1. ମନେକର A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, B = {2, 4, 6}

   ତେବେ $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ ଏବଂ $B - A$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

2. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର:

   $A \cup A$ = ..., $A \cap A$ = ..., $A - A$ = ...

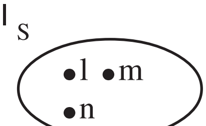
   $A \cup \phi$ = ..., $A \cap \phi$ = ..., $A - \phi$ = ...

1.8 ଭେନ୍‌ଚିତ୍ର (Venn Diagram) :

ସେଟ୍, ଉପସେଟ୍ ଓ ସେଟ୍ ପ୍ରକ୍ରିୟାକୁ ସହଜରେ ବୁଝିବା ପାଇଁ ଆମେ ସେଟ୍ ତତ୍ତ୍ୱରେ ଚିତ୍ରର ସାହାଯ୍ୟ ନେଇଥାଉ । ଏହାକୁ **ଭେନ୍‌ଚିତ୍ର** କୁହାଯାଏ । ପ୍ରଥମେ ଏହି ଚିତ୍ରର ଧାରଣା ଦେଇଥିଲେ ବିଶିଷ୍ଟ ଇଂରେଜ ତର୍କ ଶାସ୍ତ୍ରବିତ୍ **ଜନ୍ ଭେନ୍ (John Venn) (1834 - 1883)** । ଚିତ୍ରରେ ସେଟ୍‌ମାନଙ୍କୁ ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ର ବା ବୃତ୍ତାକାର କ୍ଷେତ୍ର ଦ୍ୱାରା ସୂଚାଯାଇଥାଏ । ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକ ଥିବାର ଧାରଣା କରାଯାଏ ।

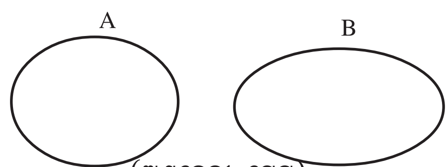
ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ

(i) S = {l, m, n} ସେଟ୍‌ର ଭେନ୍‌ଚିତ୍ର ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଦର୍ଶାଯାଇଅଛି ।



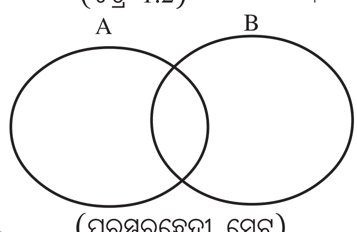
S = {l, m, n} (ଚିତ୍ର 1.1)

(ii) ଯଦି ଦୁଇଟି ସେଟ୍ A ଓ B ପରସ୍ପର ଅଣଛେଦୀ ହୋଇଥାନ୍ତି, ତେବେ ଏହାର ଭେନ୍‌ଚିତ୍ରକୁ ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।

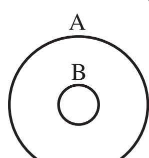


(ଅଣଛେଦୀ ସେଟ୍)
(ଚିତ୍ର 1.2) $A \cap B = \phi$

ଯଦି A ସେଟ୍‌ର କିଛି ଉପାଦାନ B ସେଟ୍‌ରେ ଥାଆନ୍ତି, ତେବେ ଏହାର ଭେନ୍‌ଚିତ୍ରକୁ ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।



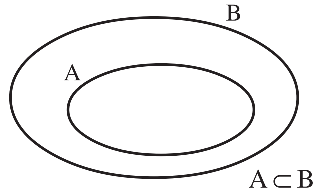
(ପରସ୍ପରଛେଦୀ ସେଟ୍)
(ଚିତ୍ର 1.3(a))



(ଚିତ୍ର 1.3(b))

$B \subset A$ (b) (B, A ର ଏକ ଉପସେଟ୍)

(iii) ଦୁଇଟି ସେଟ୍ A ଓ B ମଧ୍ୟରୁ ଯଦି $A \subset B$ ହୋଇଥାଏ, ତେବେ ଉକ୍ତ ଭେନ୍‌ଚିତ୍ରକୁ ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।



$A \subset B$
(ଚିତ୍ର 1.4)

ପୂର୍ବ ବର୍ଣ୍ଣିତ ସେଟ୍ ପ୍ରକ୍ରିୟାଗୁଡ଼ିକୁ ଭେନ୍ ଚିତ୍ର ଦ୍ୱାରା ଦର୍ଶାଇ ପାରିବା ।

ଉଦାହରଣ –4 :

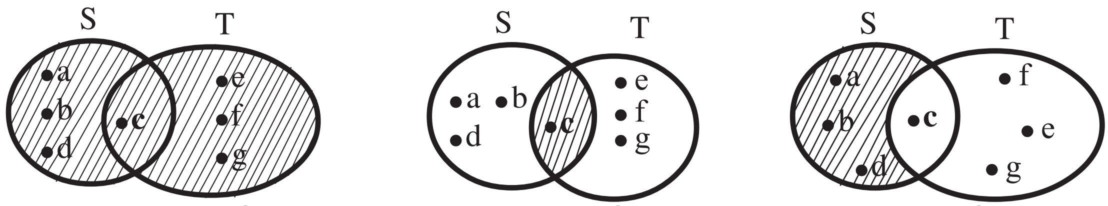
ଯଦି $S = \{a, b, c, d\}$ ଓ $T = \{c, e, f, g\}$ ହୁଏ,

ତେବେ $S \cup T$, $S \cap T$ ଓ $S - T$ ନିର୍ଣ୍ଣୟକରି ପ୍ରତ୍ୟେକର ଭେନ୍‌ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ।

(a) $S \cup T = \{a, b, c, d\} \cup \{c, e, f, g\} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

(b) $S \cap T = \{a, b, c, d\} \cap \{c, e, f, g\} = \{c\}$

(c) $S - T = \{a, b, c, d\} - \{c, e, f, g\} = \{a, b, d\}$



$(S \cup T)$ ରେଖାଙ୍କିତ (a) $(S \cap T)$ ରେଖାଙ୍କିତ (b) $(S - T)$ ରେଖାଙ୍କିତ (c)

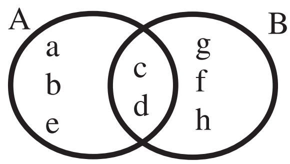
(ଚିତ୍ର 1.5)

ଉଦାହରଣ –5 : ଦତ୍ତ ଭେନ୍ ଚିତ୍ରରୁ $A \cup B$, $A \cap B$ ଓ $A - B$ କୁ ତାଲିକା ପ୍ରଣାଳୀରେ ଲେଖ ।

ସମାଧାନ : $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$,

$A \cap B = \{c, d\}$

$A - B = \{a, b, e\}$



(ଚିତ୍ର 1.6)

ଅନୁଶୀଳନୀ – 1

1. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ହେଲେ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଉକ୍ତି ଲାଗି T ଓ ଭୁଲ ଉକ୍ତି ଲାଗି F ଲେଖ ।

(i) $3 \in A$ (ii) $5 \in A$ (iii) $4 \notin A$

(iv) $7 \notin A$ (v) $\{3\} \in A$ (vi) $\{3\} \subset A$

(vii) $3 \subset A$ (viii) $\{3, 4\} \in A$ (ix) $\{3, 4\} \subset A$

(x) $\{1, 2, 3, 4\} \in A$ (xi) $\{1, 2, 3, 4\} \subset A$

2. $\subset, \supset, =, \in, \notin$ ସଙ୍କେତମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ଉପଯୁକ୍ତ ସଂକେତ ବାଛି ନିମ୍ନସ୍ଥ ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ଗୁଡ଼ିକ ପୂରଣ କର ।

(i) a .... {a, b, c} (ii) {a} ..... {a, b , c} (iii) {c, a, b} .... {a, b, c}

(iv) d .... {a, b , c} (v) {b, c} ..... {a, c , b} (vi) (a, b, c} ...... {a, b}

3. ନିମ୍ନଲିଖିତ ସେଟ୍‌ମାନଙ୍କୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖ ।

(i) $\{x \mid x \in \mathbf{N}$ ଓ $1 < x < 10\}$ (ii) $\{2n \mid n \in \mathbf{N}$ ଓ $n \leq 4\}$

(iii) {n | n ଏକ ଯୁଗ୍ମ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା} (iv) {x | x ଏକ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା, $x \in \mathbf{N}$ ଓ $x < 10$}

(v) {x | x ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା–$5 \leq x < 4$} (vi) {x | x ଏକ ସପ୍ତାହର ଗୋଟିଏ ଦିନ}

(vii) {x | x ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା, $2 < x < 3$} (viii) $\{x \mid x = 2^n$ $n \in \mathbf{N}$ ଏବଂ $5 \leq x \leq 27\}$

4. ନିମ୍ନଲିଖିତ ସେଟ୍‌ମାନଙ୍କୁ ସୂତ୍ର ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖ ।

(i) $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ (ii) $\{a, e, i, o, u\}$ (iii) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

(iv) $\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ (v) $\{2, 4, 6, 8, 10....\}$ (vi) $\{3, 6, 9, 12, 15\}$

(vii) $\{5, 25, 125, 625\}$ (viii) $\{a, b, c, ...z\}$ (ix) $\{2, 4, 8, 16,32...\}$

5. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଶବ୍ଦମାନଙ୍କର ବ୍ୟବହୃତ ଅକ୍ଷରମାନଙ୍କର ସେଟ୍ ଲେଖ ।

(i) mathematics (ii) arithmetic

(iii) programme (iv) committee

6. ଯଦି $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ଏବଂ $B = \{2, 4, 6, 8\}$ ହୁଏ, ତେବେ $A \cup B$ ଓ $A \cap B$ କୁ ତାଲିକା ପ୍ରଣାଳୀରେ ଲେଖ ।

7. ଯଦି $\{x \mid x \in N$ ଏବଂ $1 < x \leq 6\}$ ଏବଂ $B = \{x \mid x \in N$ ଏବଂ $4 < x \leq 10\}$ ହେଲେ, $A \cup B$ ଏବଂ $A \cap B$ କୁ ତାଲିକା ପ୍ରଣାଳୀରେ ଲେଖ ।

8. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ଏବଂ $B = \{2, 3, 5\}$ ଏବଂ $C = \{2, 4, 6\}$ ହେଲେ, ନିମ୍ନୋକ୍ତ ସେଟ୍ ଗୁଡ଼ିକୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖ ।

(i) $A \cup B$ (ii) $A \cap C$ (iii) $B \cap C$ (iv) $A \cup C$ (v) $B \cup C$ (vi) $A \cap B$

9. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଭେନ୍‌ଚିତ୍ରରୁ ନିମ୍ନ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର ଦିଅ ।

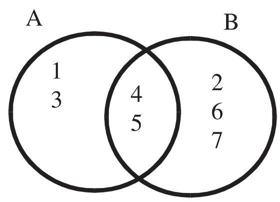
(i) ସେଟ୍ A ଓ ସେଟ୍ B କୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖ ।

(ii) $A \cap B$ କୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖ ।

(iii) $A \cup B$ କୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖ ।

(iv) $A - B$ କୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖ ।

(v) $B - A$ କୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖ ।



(ଚିତ୍ର 1.7)

10. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଭେନ୍ ଚିତ୍ରରୁ ନିମ୍ନ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର ଦିଅ ।

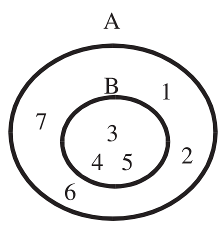
(i) ସେଟ୍ A ଓ B ସେଟ୍‌କୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖ ।

(ii) $A \cap B$ କୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖ ।

(iii) $A \cup B$ କୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖ ।

(iv) $A \cup \phi$ କୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖ ।

(v) $A \cap \phi$ କୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖ ।



(ଚିତ୍ର 1.8)

11. $A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{c, d, e, f\}$ ହେଲେ

(a) $A - B$ ଓ $B - A$ ସେଟ୍ ଗୁଡ଼ିକୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖ ।

(b) $(A - B) \cup (B - A)$ ସେଟ୍‌କୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖ ।

(c) $(A - B) \cap (B - A)$ ସେଟ୍‌କୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

*****

ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା
(RATIONAL NUMBERS)

ଅଧ୍ୟାୟ
2

2.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା (Rational Numbers) ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ପୂର୍ବରୁ ଆସ ଆମେ ପୂର୍ବଶ୍ରେଣୀରେ ପାଠ୍ୟକ୍ରମରେ ବର୍ଣ୍ଣିତ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ବା ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା, ସଂପ୍ରସାରିତ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ଓ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ବିଷୟରେ ସଂକ୍ଷେପରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

2.1.1 ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ବା ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା (Natural Numbers) :

ଗୋଟିଏ ସାଧାରଣ ମଣିଷର ଦୈନନ୍ଦିନ ଜୀବନ ଓ ଜୀବିକାର ପ୍ରଥମେ ଯେଉଁ ସଂଖ୍ୟା ସମୂହ ବ୍ୟବହୃତ ହୋଇଥିଲା ତାହା ହେଲା ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ବା ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ।

ଏହି ସଂଖ୍ୟାସମୂହର ସେଟ୍‌କୁ N ଦ୍ୱାରା ଚିହ୍ନଟ କରାଯାଏ । **N = {1, 2, 3, 4...}**

2.1.2 ସଂପ୍ରସାରିତ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା (Extended Natural Numbers) :

ମନେକର ତୁମ ପାଖରେ 10 ଟଙ୍କା ଅଛି ।

ତୁମେ ଗୋଟିଏ 10 ଟଙ୍କା ମୂଲ୍ୟର ପେନ୍ କିଣିଲ । ତୁମ ପାଖରେ ଆଉ କେତେ ଟଙ୍କା ରହିଲା ? ତୁମ ପାଖରେ ଯେତେ ଟଙ୍କା ରହିଲା ତାହା ହେଉଛି 0 ଟଙ୍କା ।

ଏହା ଭାରତୀୟ ଗଣିତଜ୍ଞମାନଙ୍କର ଅବଦାନ ବୋଲି ଦୃଢ଼ ମତ ପୋଷଣ କରାଯାଏ । ଗଣନ ପଦ୍ଧତିରେ ଏହାର ବହୁଳ ବ୍ୟବହାରକୁ ଭିତ୍ତିକରି ପରବର୍ତ୍ତୀ ସମୟରେ ଏହାକୁ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ରେ ସାମିଲ କରାଯାଇ ଉକ୍ତ ସେଟ୍‌କୁ **ସଂପ୍ରସାରିତ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ (Extended Natural Number Set)** ବୋଲି ନିଆଗଲା । ଏହି ସଂଖ୍ୟା ସମୂହକୁ N* ବା W ଦ୍ୱାରା ଚିହ୍ନିତ କରାଯାଏ । **N* = {0, 1, 2, 3, 4...}**

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : {0,1, 2, 3...} ସେଟ୍‌କୁ ମଧ୍ୟ ସାମଗ୍ରିକ ସଂଖ୍ୟାସେଟ୍ (Whole Number Set) କୁହାଯାଏ ।

2.1.3 ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା (Integers) :

ପୂର୍ବବର୍ଣ୍ଣିତ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ଅଟେ । କେତେକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ପରିସ୍ଥିତିରେ ସଂଖ୍ୟା ଭିତ୍ତିକ ଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶ ପାଇଁ କିପରି ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ପର୍ଯ୍ୟାପ୍ତ ନୁହେଁ ଆସ, ତାହା ଜାଣିବା ।

ମନେକର ତୁମ ପାଖରେ 10 ଟଙ୍କା ଅଛି । ତୁମର ଗୋଟିଏ 11 ଟଙ୍କା ମୂଲ୍ୟର କଲମ କିଣିବାକୁ ଅଛି । ତୁମ ପାଖରେ ଥିବା ଟଙ୍କା ଏଥିପାଇଁ ପର୍ଯ୍ୟାପ୍ତ ନୁହେଁ । ଏହି ପରିସ୍ଥିତିର ସମାଧାନ ପାଇଁ ତୁମକୁ 1 ଟଙ୍କା ଋଣ କରିବାକୁ ପଡ଼ିବ । ଏହି ପରିସ୍ଥିତିରେ ଗାଣିତିକ ସମାଧାନ କେବଳ ଧନାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା '1' ଦ୍ୱାରା ନ ହୋଇ 'ଋଣାତ୍ମକ 1' (ଯାହାକୁ ଆମେ -1 ଭାବେ ଲେଖିବା) ଦ୍ୱାରା ସମ୍ଭବ ।

ଅର୍ଥାତ୍ $10 - 11 = -1$ ସେହିପରି $10 - 12 = -2$

ଏହିପରି ପରିସ୍ଥିତିର ସମାଧାନ ପାଇଁ $-1, -2, -3$ .... ଆଦି ଋଣାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଆବିଷ୍କୃତ ହେଲା ।

ମନେରଖ : 0 ଏକମାତ୍ର ସଂଖ୍ୟା ଯାହା ଧନାତ୍ମକ ନୁହେଁ କି ଋଣାତ୍ମକ ନୁହେଁ ।

ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା, ଶୂନ ଓ ଋଣାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ସମୂହକୁ ଆମେ Z ସେଟ୍ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶ କରୁ ।

ଅର୍ଥାତ୍ $Z = \{...., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

Z ସେଟ୍ ଏକ ଅସୀମ ସେଟ୍ ଏବଂ N ସେଟ୍ Z ସେଟ୍‌ର ଏକ ଉପସେଟ୍, ଅର୍ଥାତ୍ $N \subset Z$

ସେହିପରି ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ $\{1, 2, 3...\}$ ଏବଂ ଋଣାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ $\{...-4, -3, -2, -1\}$ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଅସୀମ ସେଟ୍ ଓ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଉପସେଟ୍ ।

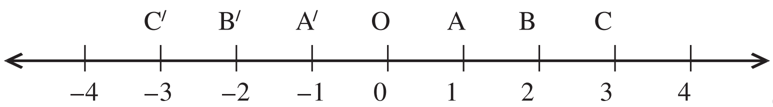
ଟୀକା : ଅଣଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା (Non-Positive Integers) ସେଟ୍ $= \{...-4, -3, -2, -1, 0\}$

ଅଣଋଣାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା (Non-Negative Integers) ସେଟ୍

ଅଥବା ସଂପ୍ରସାରିତ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ $(N^*) = \{0, 1, 2, 3...\}$

ଉଭୟ ସେଟ୍ ଅସୀମ ସେଟ୍ ଏବଂ ଉଭୟ ସେଟ୍‌ର ସଂଯୋଗରେ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ (**Z**) ହୁଏ ।

ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଗୁଡ଼ିକୁ ସଂଖ୍ୟାରେଖାର ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଚିହ୍ନଟ କରାଯାଇ ପାରେ । ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ସଂଖ୍ୟାରେଖାକୁ ଦେଖ ।



(ଚିତ୍ର 2.1)

ସରଳରେଖାର ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁକୁ O ନାମରେ ନାମିତ କର ଓ ଏହି ବିନ୍ଦୁକୁ 0 (ଶୂନ) ସଂଖ୍ୟାର ପ୍ରତୀକ ବୋଲି ଧରିନିଅ । ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନେଇ O ବିନ୍ଦୁର ଡାହାଣ ପାଖରେ A ବିନ୍ଦୁ ବସାଅ । ଏହି ବିନ୍ଦୁକୁ ସଂଖ୍ୟା 1ର ପ୍ରତୀକ ବୋଲି କୁହ । $\overrightarrow{OA}$ ରୁ OA ଦୂରତା ସଂଗେ ସମାନ କରି Aର ଡାହାଣକୁ ରେଖାଖଣ୍ଡମାନ ଛେଦ କର ଓ ଛେଦବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କୁ B,C ଆଦି ନାମ ଦିଅ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଏହି ବିନ୍ଦୁମାନ ଯଥାକ୍ରମେ 2,3... ମାନଙ୍କର ପ୍ରତୀକ ହେବେ । ଏହିପରି **N** ସେଟ୍‌ର ସମସ୍ତ ଉପାଦାନ ପାଇଁ ସରଳରେଖାରେ 'O'ର ଡାହାଣକୁ ବିନ୍ଦୁମାନ ଚିହ୍ନଟ କରାଯାଇ ପାରିବ । 'O'ର ବାମପାର୍ଶ୍ୱରେ A', B', C'.... ବିନ୍ଦୁମାନ ଚିହ୍ନଟ କର ଯେପରିକି $OA = OA' = A'B' = B'C' =$ .... ବର୍ତ୍ତମାନ A', B', C'.... ବିନ୍ଦୁମାନ ଯଥାକ୍ରମେ ଋଣାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା $-1, -2, -3$... ମାନଙ୍କ ପ୍ରତୀକ ହେବେ । ଏହି ପ୍ରକାରରେ ସେଟ୍ **Z** (ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍)ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ ପାଇଁ ସରଳରେଖାରେ ବିନ୍ଦୁମାନ ଚିହ୍ନଟ କରାଯାଇ ପାରିବ । ଉକ୍ତ ସରଳରେଖାକୁ **ସଂଖ୍ୟାରେଖା (Number line)** କୁହାଯାଏ । ଉକ୍ତ ସଂଖ୍ୟାରେଖାକୁ **ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ସୂଚକ ରେଖାଚିତ୍ର** ମଧ୍ୟ କୁହାଯାଏ ।

ଏଠାରେ ମନେରଖିବା ଉଚିତ ହେବ ଯେ, **Z**ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ, ରେଖାଚିତ୍ରରେ ଏହାର ଡାହାଣକୁ ଥିବା ଉପାଦାନଠାରୁ ସାନ । ବିପରୀତ କ୍ରମେ **Z**ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ, ରେଖାଚିତ୍ରରେ ଏହାର ବାମକୁ ଥିବା ଉପାଦାନ ଅପେକ୍ଷା ବଡ଼ ।

2.2 ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା (Rational Number) :

ମନେକର p ଓ q ଉଭୟେ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଏବଂ $q \neq 0$ତେବେ p କୁ q ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ, ଆମେ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟାଟିଏ ପାଇବା କି ?

6 କୁ 3 ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ, ଭାଗଫଳ 2 ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା । କିନ୍ତୁ 6କୁ 5 ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ, ଭାଗଫଳ $\frac{6}{5}$ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ନୁହେଁ । ତେଣୁ ହରଣ ପ୍ରକ୍ରିୟାକୁ ଅଧିକ ବ୍ୟାପ୍ତ ଓ 0 ଭିନ୍ନ ଯେ କୌଣସି ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ହରଣକୁ ଅର୍ଥ ପୂର୍ଣ୍ଣ କରିବାକୁ ହେଲେ, ଆମକୁ ସଂଖ୍ୟା ସଂପର୍କୀୟ ଜ୍ଞାନର ପରିସରକୁ ବଢ଼ାଇବାକୁ ହେବ ।

ଯଦି p ଓ q ଦୁଇଗୋଟି ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଓ $q \neq 0$ ତେବେ $p \div q$ ବା $\frac{p}{q}$ କୁ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା କୁହାଯାଏ । ସମସ୍ତ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ସେଟ୍‌କୁ Q ସଂକେତ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ ।

ଯେକୌଣସି ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା m ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା । କାରଣ m କୁ $\frac{m}{1}$ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରେ । ସେ ଦୃଷ୍ଟିରୁ **0 ମଧ୍ୟ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ।** **Q ସେଟ୍ ଏକ ଅସୀମ ସେଟ୍ ଏବଂ $N \subset Z \subset Q$**

ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା $\frac{p}{q}$ର ହର $q \neq 0$, କାରଣ କୌଣସି ସଂଖ୍ୟାକୁ '0' ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରିବା ଅସମ୍ଭବ ଅର୍ଥାତ୍ ସଂଜ୍ଞାହୀନ ।

2.2.1. ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ଧର୍ମ (Properties of Rational numbers) :

1. ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ (Closure Law) :

(i) ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା (Natural Numbers) ଏବଂ ସଂପ୍ରସାରିତ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା (Extended Natural Nudmbers)

ତଳ ଶ୍ରେଣୀରେ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟାରେ ବିଭିନ୍ନ ବୀଜଗାଣିତିକ ପ୍ରକ୍ରିୟା ପାଇଁ ଏହି ନିୟମ ବିଷୟରେ ପଢ଼ିଛ । ଆସ ନିମ୍ନ ସାରଣୀ ଜରିଆରେ ସେଗୁଡ଼ିକ ମନେ ପକାଇବା ।

ପ୍ରକ୍ରିୟା	ଉଦାହରଣ	ଟିପ୍ପଣୀ
ଯୋଗକ୍ରିୟା	1+5= 6 ଏକ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା, ସେହିପରି 7+5= 12 ଏହା ମଧ୍ୟ ଏକ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା । ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା a ଓ b ପାଇଁ a+b ଏକ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ।	ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ରେ ଯୋଗପ୍ରକ୍ରିୟା ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ ପାଳନ କରେ । ସଂପ୍ରସାରିତ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ପାଇଁ ମଧ୍ୟ ଏହା ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ।
ବିୟୋଗକ୍ରିୟା	5–2=3 ଏକ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା । କିନ୍ତୁ 2–5= –3 ଏକ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ନୁହେଁ ।	ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ରେ ବିୟୋଗ ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ ପାଳନ କରେ ନାହିଁ । ସଂପ୍ରସାରିତ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ପାଇଁ ମଧ୍ୟ ଏହା ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ।
ଗୁଣନକ୍ରିୟା	2 x 4 = 8 ଏକ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା 3 x7=21,ଏହା ମଧ୍ୟ ଏକ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା । ଯଦି a ଓ b ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ହୁଏ, ତେବେ ସେମାନଙ୍କର ଗୁଣଫଳ a xb ବା ab ମଧ୍ୟ ଏକ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ।	ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟାସେଟ୍‌ରେ ଗୁଣନକ୍ରିୟା ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ ପାଳନ କରେ । ସଂପ୍ରସାରିତ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ପାଇଁ ମଧ୍ୟ ଏହା ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ।
ଭାଗକ୍ରିୟା	$8 \div 4 = 2$ ଏକ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା । $5 \div 8 = \frac{5}{8}$ ଏହା ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ନୁହେଁ ।	ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ରେ ଭାଗକ୍ରିୟା ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ ପାଳନ କରେ ନାହିଁ । ସଂପ୍ରସାରିତ ସ୍ୱାଭବିକ ସଂଖ୍ୟା ପାଇଁ ମଧ୍ୟ ଏହା ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ।

(ii) ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା (Integers)

ଆସ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ରେ ବିଭିନ୍ନ ବୀଜଗାଣିତିକ ପ୍ରକ୍ରିୟା ପାଇଁ ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

ପ୍ରକ୍ରିୟା	ଉଦାହରଣ	ଟିପ୍ପଣୀ
ଯୋଗକ୍ରିୟା	$0 + 5 = 5$ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା । $7+5 = 12$, ମଧ୍ୟ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା । ଯେ କୌଣସି ଦୁଇଟି ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା a ଓ b ପାଇଁ a+b ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା	ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ରେ ଯୋଗ କ୍ରିୟା ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ ପାଳନ କରେ ।
ବିୟୋଗକ୍ରିୟା	$5 - 2 = 3$ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ $2 -5 = -3$ ମଧ୍ୟ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା a ଓ b ଦୁଇଟି ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ପାଇଁ a – b ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ଅଟେ ।	ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ରେ ବିୟୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟା ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ ପାଳନ କରେ ।
ଗୁଣନକ୍ରିୟା	$0 \times 3 = 0$ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା $3 \times 7 = 21$ ମଧ୍ୟ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା । a ଓ b ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ ab ମଧ୍ୟ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ଅଟେ ।	ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ସେଟରେ ଗୁଣନ କ୍ରିୟା ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ ପାଳନ କରେ ।
ଭାଗକ୍ରିୟା	$-14 \div 2 = -7$ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା । $5 \div 8 = \frac{5}{8}$ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ନୁହେଁ ।	ଏଣୁ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ସେଟରେ ଭାଗକ୍ରିୟା ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ ପାଳନ କରେ ନାହିଁ ।

ଉପରୋକ୍ତ ସାରଣୀରୁ ଆମେ ଜାଣିବାକୁ ପାଇଲୁ ଯେ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ରେ ଯୋଗକ୍ରିୟା, ବିୟୋଗ କ୍ରିୟା ଓ ଗୁଣନ କ୍ରିୟା ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ ପାଳନ କରିବା ବେଳେ ଭାଗକ୍ରିୟା ଉକ୍ତ ନିୟମ ପାଳନ କରୁ ନାହିଁ ।

(iii) ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା (Rational Numbers) :

(a) ଯୋଗ କ୍ରିୟା:– ବର୍ତ୍ତମାନ କେତେକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଯୋଡ଼ିକୁ ଯୋଗ କରାଯାଉ ।

$\frac{3}{8} + \frac{(-5)}{7} = \frac{21+(-40)}{56} = \frac{-19}{56}$ ଏହା ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା । ସେହିପରି

$-\frac{3}{8} + \frac{(-4)}{5} = \frac{-15+(-32)}{40} = \frac{-47}{40}$ ଏହା ମଧ୍ୟ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ।

$\frac{4}{7} + \frac{6}{11} =$....... ଏହା ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା କି ?

ଆଉ କେତେକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଯୋଡ଼ି ପାଇଁ ଏହିପରି ଯୋଗ କ୍ରିୟାର ଫଳାଫଳ ପରୀକ୍ଷା କର ।

ଏହି ପରୀକ୍ଷାରୁ ଆମେ ଜାଣିବା ଯେ ଦୁଇଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗଫଳ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଅଟେ । ଅର୍ଥାତ୍ **ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ରେ ଯୋଗକ୍ରିୟା ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ ପାଳନ କରେ ।**

ଅର୍ଥାତ୍ ଯଦି $\mathbf{a, b \in Q}$, ତେବେ $\mathbf{a + b \in Q}$

(b) ବିୟୋଗ କ୍ରିୟା : କେତେ ଯୋଡ଼ା ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାକୁ ନେଇ ଆମେ ବିୟୋଗ କ୍ରିୟା କରିବା ଓ ଦେଖିବା ଦୁଇଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ବିୟୋଗଫଳ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହେବ କି ନାହିଁ ?

$-\frac{5}{7}-\frac{2}{3}=\frac{-5\times3-2\times7}{21}=\frac{-15-14}{21}=\frac{-29}{21}$ ଏହା ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା । ସେହିପରି

$\frac{5}{8}-\frac{4}{5}=\frac{25-32}{40}=\frac{-17}{40}$ ଏହା ମଧ୍ୟ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ।

$\frac{3}{7}-\left(-\frac{8}{5}\right)=\ldots\ldots\ldots$ ଏହା ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା କି ?

ଆଉ କେତେ ଯୋଡ଼ା ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାକୁ ନେଇ ଏହି ପରି ବିୟୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ଦେଖିବ ଯେ **ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ଟିରେ ବିୟୋଗ କ୍ରିୟା ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ ପାଳନ କରେ । ଅର୍ଥାତ୍ a, b $\in$ Q ହେଲେ, a – b $\in$ Q ।**

(c) ଗୁଣନ କ୍ରିୟା : ଦୁଇଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣଫଳ ବିଷୟ ଆଲୋଚନା କରାଯାଉ ।

$-\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=-\frac{8}{15},\ \frac{3}{7}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{35}$ ଏହି ଦୁଇଟି କ୍ଷେତ୍ରରେ ଗୁଣଫଳ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ।

$-\frac{4}{5}\times\frac{-6}{11}=\ldots\ldots$ ଏହା ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା କି ?

ଏହିପରି ଆଉ କେତେଗୁଡ଼ିଏ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଯୋଡ଼ିକୁ ନେଇ ଗୁଣଫଳ ସ୍ଥିର କରି ଦେଖ । ତୁମେ ନିଶ୍ଚୟ ଏହି ସତ୍ୟରେ ଉପନୀତ ହେବ ଯେ **ଦୁଇଟି ପରିମେୟ ସଂଖାର ଗୁଣଫଳ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଅଟେ । ଅତଏବ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ଟିରେ ଗୁଣନକ୍ରିୟା ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ ପାଳନ କରେ ।**

ଅର୍ଥାତ୍ ଯଦି a, b $\in$ Q, ତେବେ a x b $\in$ Q ।

(d) ଭାଗକ୍ରିୟା : ବର୍ତ୍ତମାନ ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣଗୁଡ଼ିକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

$-\frac{5}{3}\div\frac{2}{5}=\frac{-5}{3}\times\frac{5}{2}=\frac{-25}{6}$ ଏହା ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା । ସେହିପରି

$\frac{2}{7}\div\frac{5}{3}=\frac{2}{7}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{35}$ ଏହା ମଧ୍ୟ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ।

$-\frac{3}{8}\div\frac{-2}{9}=\ldots\ldots$ ଏହା ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା କି ?

କିନ୍ତୁ ଯେକୌଣସି ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା a ପାଇଁ a $\div$ 0 ନିରର୍ଥକ । ତେଣୁ **ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସେଟରେ ଭାଗକ୍ରିୟା ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ ପାଳନ କରେ ନାହିଁ ।** ମାତ୍ର ଶୂନକୁ ଛାଡ଼ିଦେଲେ ଅନ୍ୟ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଗୁଡ଼ିକ ପାଇଁ ଭାଗକ୍ରିୟା ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ ପାଳନ କରେ ।

ନିଜେ କର ଦତ୍ତ ସେଟ୍‌ଗୁଡ଼ିକ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକ୍ରିୟାରେ ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ ପାଳନ କରେ କି ନାହିଁ (ହଁ / ନାହିଁ) ମାଧ୍ୟମରେ ଦତ୍ତ ସାରଣୀର ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନଗୁଡ଼ିକୁ ପୂରଣ କର :

ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍	ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ (Closure Law)			
	ଯୋଗକ୍ରିୟା	ବିୟୋଗ କ୍ରିୟା	ଗୁଣନ କ୍ରିୟା	ଭାଗକ୍ରିୟା
ପରିମେୟ	–	–	–	–
ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା	–	–	–	–
ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା	–	–	–	–
ସଂପ୍ରସାରିତ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା	–	–	–	–

2. କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମ (Commutative Law) :

(i) ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା:– ଆସ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ବା ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟାରେ କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମକୁ ମନେ ପକାଇବା ।

ପ୍ରକ୍ରିୟା	ଉଦାହରଣ	ଟିପ୍ପଣୀ
ଯୋଗକ୍ରିୟା	$0 + 7 = 7 + 0 = 7$ $2 + 3 = 3 + 2 = 5$ ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା a ଓ b ପାଇଁ $a + b = b + a$	ଯୋଗକ୍ରିୟା କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମ ପାଳନ କରେ ।
ବିୟୋଗ କ୍ରିୟା	$5 - 3 \neq 3 - 5$	ବିୟୋଗ କ୍ରିୟା କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମ ପାଳନ କରେ ନାହିଁ ।
ଗୁଣନ କ୍ରିୟା	$5 \times 3 = 3 \times 5$	କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମ ପାଳିତ ହୁଏ ।
ଭାଗ କ୍ରିୟା	$5 \div 3 \neq 3 \div 5$	ଭାଗକ୍ରିୟା କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମ ପାଳନ କରେ ନାହିଁ ।

ସଂପ୍ରସାରିତ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା କ୍ଷେତ୍ରରେ ଉକ୍ତ ପ୍ରକ୍ରିୟାଗୁଡ଼ିକ କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମ ପାଳନ କରେ କି ନାହିଁ ନିଜେ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ ।

(ii) ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା

ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ପାଇଁ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଗୁଡ଼ିକରେ କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ କି ନାହିଁ ମନେପକାଇବା ।

ପ୍ରକ୍ରିୟା	ଉଦାହରଣ	ଟିପ୍ପଣୀ
ଯୋଗକ୍ରିୟା	$-3 + 5 = 5 + (-3)$	ଯୋଗକ୍ରିୟା କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମ ପାଳନ କରେ ।
ବିୟୋଗକ୍ରିୟା	$5 - (-3) \neq -3 - 5$	ବିୟୋଗ କ୍ରିୟା କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମ ପାଳନ କରେ ନାହିଁ ।
ଗୁଣନକ୍ରିୟା	$(-3) \times 5 = 5 \times (-3)$	ଗୁଣନକ୍ରିୟା କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମ ପାଳନ କରେ ।
ଭାଗକ୍ରିୟା	$-3 \div 5 \neq 5 \div (-3)$	ଭାଗକ୍ରିୟା କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମ ପାଳନ କରେ ନାହିଁ ।

(iii) ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା :

(a) ଯୋଗକ୍ରିୟା – ବର୍ତ୍ତମାନ କେତେ ଯୋଡ଼ା ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଯୋଗ କରିବା ।

$-\frac{2}{3} + \frac{5}{7} = \frac{-14 + 15}{21} = \frac{1}{21}$ ଓ $\frac{5}{7} + \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{15 - 14}{21} = \frac{1}{21}$ ତେଣୁ $-\frac{2}{3} + \frac{5}{7} = \frac{5}{7} + \left(-\frac{2}{3}\right)$

ସେହିପରି $\frac{-6}{5}+\left(\frac{-8}{3}\right)=\frac{-58}{15}$ ଓ $\frac{-8}{3}+\left(\frac{-6}{5}\right)=\frac{-58}{15}$ ତେଣୁ $\frac{-6}{5}+\left(\frac{-8}{3}\right)=\frac{-8}{3}+\left(\frac{-6}{5}\right)$

$-\frac{3}{8}+\frac{1}{7}=\frac{1}{7}+\left(-\frac{3}{8}\right)$ ନିଜେ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ ।

ତୁମେ ଦେଖିବ ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଯେକୌଣସି କ୍ରମରେ ଯୋଗ କରାଯାଇ ପାରେ । ସେଥିପାଇଁ ଆମେ କହୁ ଯେ **ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା କ୍ଷେତ୍ରରେ ଯୋଗ କ୍ରିୟା କ୍ରମବିନିମୟୀ ଅଟେ । ଅର୍ଥାତ୍ ଯଦି a ଓ b ଦୁଇଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହୁଏ, ତେବେ a + b = b + a ହେବ ।**

(b) ବିୟୋଗ କ୍ରିୟା : $\frac{2}{3}-\frac{5}{4}=\frac{-7}{12}$ ଏବଂ $\frac{5}{4}-\frac{2}{3}=\frac{7}{12}$ ତେଣୁ $\frac{2}{3}-\frac{5}{4}\neq\frac{5}{4}-\frac{2}{3}$

ତୁମେ ଦେଖିବ **ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ପାଇଁ ବିୟୋଗକ୍ରିୟା କ୍ରମବିନିମୟୀ ନୁହେଁ ।**

ସେହିପରି ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ ଯେ, $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\neq\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$

(c) ଗୁଣନକ୍ରିୟା : $-\frac{7}{3}\times\frac{6}{5}=\frac{-42}{15}$ ଓ $\frac{6}{5}\times\left(-\frac{7}{3}\right)=\frac{-42}{15}$ ସେହିପରି $-\frac{8}{9}\times\left(-\frac{4}{7}\right)=\frac{-4}{7}\times\left(\frac{-8}{9}\right)$

ଏହିପରି ଆଉ କିଛି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଯୋଡ଼ାକୁ ଗୁଣନ କରି ଦେଖ । ତୁମେ ଦେଖିବ ଯେ **ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାରେ ଗୁଣନକ୍ରିୟା କ୍ରମବିନିମୟୀ** ଅଟେ । ଅର୍ଥାତ୍ **ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା a ଓ b ପାଇଁ a x b = b x a**

(d) ଭାଗକ୍ରିୟା : $-\frac{5}{4}\div\frac{3}{7}\neq\frac{3}{7}\div\left(\frac{-5}{4}\right)$ (ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ)

ସେହିପରି ଅନ୍ୟ ଯୋଡ଼ା ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନେଇ ପରୀକ୍ଷା କର । ଦେଖିବ ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ ଓ ଅଣଶୂନ୍ୟ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା a ଓ b ପାଇଁ $a \div b \neq b \div a$ (ନିଜେ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ) ।

ନିଜେ କର

ଦତ୍ତ ସେଟ୍‌ଗୁଡ଼ିକ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକ୍ରିୟାରେ କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମ ପାଳନ କରେ କି ନାହିଁ (ହଁ / ନାହିଁ) ମାଧ୍ୟମରେ ଦତ୍ତ ସାରଣୀର ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନଗୁଡ଼ିକୁ ପୂରଣ କର ।

ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍	କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମ			
	ଯୋଗକ୍ରିୟା	ବିୟୋଗକ୍ରିୟା	ଗୁଣନକ୍ରିୟା	ଭାଗକ୍ରିୟା
ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା	–	–	–	–
ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା	–	–	–	–
ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା	–	–	–	–
ସଂପ୍ରସାରିତ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା	–	–	–	–

3. ସହଯୋଗୀ ନିୟମ (Associative Law) :

(i) ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା – ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାରେ ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀରେ ପଢ଼ିଥିବା ସହଯୋଗୀ ନିୟମକୁ ମନେକାଇବା ।

ପ୍ରକ୍ରିୟା	ଉଦାହରଣ	ଟିପ୍ପଣୀ
ଯୋଗକ୍ରିୟା	$(3 + 4) + 5 = 3 + (4 + 5)$	ଯୋଗକ୍ରିୟା ସହଯୋଗୀ ନିୟମ ପାଳନ କରେ ।
ବିୟୋଗ କ୍ରିୟା	$(3–4) – 5 \neq 3 – (4 – 5)$	ବିୟୋଗକ୍ରିୟା ସହଯୋଗୀ ନିୟମ ପାଳନ କରେ ନାହିଁ ।
ଗୁଣନକ୍ରିୟା	$7x\ (2x5) = (7\ x\ 2)\ x\ 5$ $4\ x\ (6\ x\ 10) = (4\ x\ 6)\ x\ 10$	ଗୁଣନକ୍ରିୟା ସହେଯୋଗୀ ନିୟମ ପାଳନ କରେ ।
ଭାଗକ୍ରିୟା	$(3 \div 4) \div 5 \neq 3 \div (4 \div 5)$	ଭାଗକ୍ରିୟା ସହଯୋଗୀ ନିୟମ ପାଳନ କରେ ନାହିଁ ।

ସଂପ୍ରସାରିତ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା କ୍ଷେତ୍ରରେ ଉପରୋକ୍ତ ନିୟମ ପାଳିତ ହୁଏ କି ନାହିଁ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ ।

(ii) ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା (Integers) :

ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟାରେ ସହଯୋଗ ନିୟମକୁ ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ଦିଆଗଲା ।

ପ୍ରକ୍ରିୟା	ଉଦାହରଣ	ଟିପ୍ପଣୀ
ଯୋଗ କ୍ରିୟା	$–2+ [3 + (– 4)] = [(– 2) + 3] + (– 4)$ ଯେକୌଣସି ତିନୋଟି ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା a, b, c ପାଇଁ $a + (b + c) = (a + b) + c$	ଯୋଗକ୍ରିୟା ସହଯୋଗୀ ନିୟମ ପାଳନ କରେ ।
ବିୟୋଗ କ୍ରିୟା	$5–(7–3) \neq (5 – 7) – 3$	ବିୟୋଗ କ୍ରିୟା ସହଯୋଗୀ ନିୟମ ପାଳନ କରେ ନାହିଁ ।
ଗୁଣନକ୍ରିୟା	$5\ x\ [(–7)\ x\ (–8)] = [5x\ (-–7)]\ x\ (–8)$ ଯେକୌଣସି ତିନୋଟି ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା a, b ଓ c ପାଇଁ $a\ x\ (b\ x\ c) = (a\ x\ b)\ x\ c$	ଗୁଣନ କ୍ରିୟା ସହଯୋଗୀ ନିୟମ ପାଳନ କରେ ।
ଭାଗକ୍ରିୟା	$[(–10) \div 2] \div(–5) \neq (–10) \div [2\div (–5)]$	ଭାଗକ୍ରିୟା ସହଯୋଗୀ ନିୟମ ପାଳନ କରେ ନାହିଁ ।

(iii) ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା :

(a) ଯୋଗ କ୍ରିୟା :

$$-\frac{2}{3}+\left[\frac{3}{5}+\left(\frac{-5}{6}\right)\right]=\frac{-2}{3}+\left(\frac{18-25}{30}\right)=\frac{-2}{3}+\left(\frac{-7}{30}\right)=\frac{(-20)+(-7)}{30}=\frac{-27}{30}$$ ଏବଂ

$$\left[-\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\right]+\left(\frac{-5}{6}\right)=\left(\frac{-10+9}{15}\right)+\left(\frac{-5}{6}\right)=\frac{-1}{15}+\left(\frac{-5}{6}\right)=\frac{-2-25}{30}=\frac{-27}{30}$$

$$\therefore -\frac{2}{3}+\left[\frac{3}{5}+\left(\frac{-5}{6}\right)\right]=\left[-\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\right]+\left(\frac{-5}{6}\right)$$

ସେହିପରି ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ, $-\frac{1}{2}+\left[\frac{3}{7}+\left(\frac{-4}{3}\right)\right] = \left[\frac{-1}{2}+\frac{3}{7}\right]+\left(\frac{-4}{3}\right)$

ଆହୁରି କିଛି ଅଧିକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନେଇ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ । ଏଥିରୁ ଆମେ ଜାଣିବା ଯେ **ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ପାଇଁ ଯୋଗକ୍ରିୟା ସହଯୋଗୀ ଅଟେ । ଅର୍ଥାତ୍ $a,b,c \in Q$ ହେଲେ $a+(b+c) = (a+b)+c$ ।**

(b) ବିୟୋଗକ୍ରିୟା :

ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ : $\frac{-2}{3}-\left[-\frac{4}{5}-\frac{1}{2}\right]=\left[-\frac{2}{3}-\left(\frac{-4}{5}\right)\right]-\frac{1}{2}$ ସତ୍ୟ କି ?

ବାମପକ୍ଷ $= \frac{-2}{3}-\left[\frac{-8-5}{10}\right]=\frac{-2}{3}-\left(\frac{-13}{10}\right)=\frac{-20+39}{30}=\frac{19}{30}$

ଦକ୍ଷିଣ ପକ୍ଷ $= \left(\frac{-10+12}{15}\right)-\frac{1}{2}=\frac{2}{15}-\frac{1}{2}=\frac{4-15}{30}=\frac{-11}{30}$ $\therefore$ ବାମପକ୍ଷ $\neq$ ଦକ୍ଷିଣ ପକ୍ଷ ।

ଆହୁରି କିଛି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନେଇ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ ।

ଏଥିରୁ ଆମେ ଜାଣିବା ଯେ, ବିୟୋଗ କ୍ରିୟା ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାରେ ସହଯୋଗୀ ନିୟମ ପାଳନ କରେ ନାହିଁ ।

(c) ଗୁଣନ କ୍ରିୟା :

ବର୍ତ୍ତମାନ ଗୁଣନକ୍ରିୟା ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାରେ ସହଯୋଗୀ କି ନୁହେଁ ଦେଖିବା ।

$-\frac{7}{3}\times\left(\frac{5}{4}\times\frac{2}{9}\right)=\frac{-7}{3}\times\frac{10}{36}=\frac{-70}{108}=\frac{-35}{54}$ ଏବଂ $\left(-\frac{7}{3}\times\frac{5}{4}\right)\times\frac{2}{9}=\frac{-35}{12}\times\frac{2}{9}=\frac{-70}{108}=\frac{-35}{54}$

$\therefore\ -\frac{7}{3}\times\left(\frac{5}{4}\times\frac{2}{9}\right)=\left(\frac{-7}{3}\times\frac{5}{4}\right)\times\frac{2}{9}$, ସେହିପରି $\frac{2}{3}\times\left(\frac{-6}{7}\times\frac{4}{5}\right)=\left(\frac{2}{3}\times\frac{-6}{7}\right)\times\frac{4}{5}$

ଏଥିରୁ ଆମେ ଜାଣିବା ଯେ, **ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା କ୍ଷେତ୍ରରେ ଗୁଣନକ୍ରିୟା ସହଯୋଗୀ ଅଟେ ।**

ଅର୍ଥାତ୍ $a, b, c \in Q$ ପାଇଁ $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ ।

(d) ଭାଗକ୍ରିୟା :

ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ : $\frac{1}{2}\div\left[-\frac{1}{3}\div\frac{2}{5}\right]\neq\left[\frac{1}{2}\div\left(-\frac{1}{3}\right)\right]\div\frac{2}{5}$ ସତ୍ୟ କି ?

ବାମ ପାର୍ଶ୍ୱ $=\frac{1}{2}\div\left[-\frac{1}{3}\div\frac{2}{5}\right]=\frac{1}{2}\div\left[-\frac{1}{3}\times\frac{5}{2}\right]=\frac{1}{2}\div\left(-\frac{5}{6}\right)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{-6}{5}\right)=\frac{-3}{5}$ ଏବଂ

ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ $=\left[\frac{1}{2}\div\left(-\frac{1}{3}\right)\right]\div\frac{2}{5}=\left(\frac{1}{2}\times\frac{-3}{1}\right)\div\frac{2}{5}=\frac{-3}{2}\div\frac{2}{5}=\frac{-3}{2}\times\frac{5}{2}=\frac{-15}{4}$ $\therefore$ ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $\neq$ ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ ।

ଆହୁରି କିଛି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନେଇ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ ।

ଦେଖିବ ଯେ **ଭାଗକ୍ରିୟା ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାରେ ସହଯୋଗୀ ନିୟମ ପାଳନ କରେ ନାହିଁ ।**

ନିଜେ କର

ଦତ୍ତ ସେଟ୍‌ଗୁଡ଼ିକ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକ୍ରିୟାରେ ସହଯୋଗୀ ନିୟମ ପାଳନ କରେ କି ନାହିଁ (ହଁ / ନାହିଁ) ମାଧ୍ୟମରେ ଦତ୍ତ ସାରଣୀର ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର :

ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍	ସହଯୋଗୀ ନିୟମ			
	ଯୋଗକ୍ରିୟା	ବିୟୋଗ କ୍ରିୟା	ଗୁଣନ କ୍ରିୟା	ଭାଗ କ୍ରିୟା
ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା	–	–	–	–
ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା	–	–	–	–
ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା	–	–	–	–
ସଂପ୍ରସାରିତ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା	–	–	–	–

2.3 ଶୂନର ତାତ୍ପର୍ଯ୍ୟ :

ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଥିବା କେତେକ ଉଦାହରଣକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

$2 + 0 = 0 + 2 = 2$ (ଏଠାରେ ଶୂନକୁ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ସହ ମିଶାଗଲା ।)

$\frac{-2}{7} + 0 = 0 + \left(-\frac{2}{7}\right) = -\frac{2}{7}$ (ଏଠାରେ ଶୂନକୁ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସହିତ ମିଶାଗଲା ।)

ଆଉ କେତୋଟି ସଂଖ୍ୟା ନେଇ ତା ସହିତ ଶୂନ ଯୋଗ କରି ଦେଖ ।

ଏଥିରୁ ତୁମେ କ'ଣ ଜାଣିଲ ? ତୁମେ ଦେଖି କହିବ ଯେ 0 କୁ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ସହିତ ଯୋଗକଲେ ଯୋଗଫଳ ମଧ୍ୟ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ହେବ । ସେହିପରି 0 ସହିତ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଯୋଗକଲେ ଯୋଗଫଳ ମଧ୍ୟ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହେବ । ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା କ୍ଷେତ୍ରରେ ମଧ୍ୟ ଏହା ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ହୋଇଥାଏ ।

ସାଧାରଣତଃ $b + 0 = 0 + b = b$ (b, ଯଦି ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ହୁଏ)

$x + 0 = 0 + x = x$ (x, ଯଦି ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହୁଏ)

ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା କ୍ଷେତ୍ରରେ (Q ସେଟ୍‌ରେ) ଶୂନକୁ ଯୋଗାତ୍ମକ ଅଭେଦ ବୋଲି କୁହାଯାଏ ।

2.4 ସଂଖ୍ୟା 1 ର ତାତ୍ପର୍ଯ୍ୟ :

ବର୍ତ୍ତମାନ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

$5 \times 1 = 5 = 1 \times 5$ (ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାକୁ 1 ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ)

$-\frac{2}{7} \times 1 = 1 \times \frac{-2}{7} = -\frac{2}{7}$; $\frac{3}{8} \times 1 = 1 \times \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$ (ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାକୁ 1 ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ)

ଏଥିରୁ ତୁମେ କ'ଣ ଜାଣିଲ ?

ଯେକୌଣସି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା, ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ବା ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାକୁ 1 ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କଲେ ସେହି ସଂଖ୍ୟାଟି ମିଳିଥାଏ । ଅର୍ଥାତ୍ x, ଯେକୌଣସି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ, $x \times 1 = 1 \times x = x$ ହେବ ।

1 କୁ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା କ୍ଷେତ୍ରରେ (Q ସେଟ୍‌ରେ) ଗୁଣନାତ୍ମକ ଅଭେଦ ବୋଲି କୁହାଯାଏ ।

2.5 ସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ (Additive Inverse of a Number) :

ନିମ୍ନ ପରିସ୍ଥିତିକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

$1 + (-1) = (-1) + 1 = 0$, $2 + (-2) = (-2) + 2 = 0$ ଏଥିରୁ ଜାଣିଲ

a ଯଦି ଯେକୌଣସି ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ହୁଏ, ତେବେ $a + (-a) = (-a) + a = 0$ ହେବ ।

ଏଠାରେ –a, a ର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ଅଥବା a, –a ର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ।

ସେହିପରି $\frac{2}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2 + (-2)}{3} = 0$ ଏବଂ $\left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3} = 0$

ପୁନଶ୍ଚ, ଯେକୌଣସି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା $\frac{a}{b}$ ପାଇଁ $\frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right) = \left(-\frac{a}{b}\right) + \frac{a}{b} = 0$ ହେବ ।

$-\frac{a}{b}$ କୁ $\frac{a}{b}$ ର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ବୋଲି କୁହାଯାଏ । ଅନ୍ୟ ପକ୍ଷରେ $\frac{a}{b}$ କୁ $-\frac{a}{b}$ ର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ମଧ୍ୟ କୁହାଯାଏ ।

କୌଣସି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା x ର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ –x ଅଟେ । ଅର୍ଥାତ୍ $x + (-x) = (-x) + x = 0$ ।

2.6 ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ (Reciprocal of a Number) :

କେଉଁ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱାରା $\frac{8}{21}$ କୁ ଗୁଣିଲେ ଗୁଣଫଳ 1 ହେବ ?

ନିଶ୍ଚିତ ଭାବେ ସଂଖ୍ୟାଟି $\frac{21}{8}$ କାରଣ $\frac{8}{21} \times \frac{21}{8} = 1$ ସେହିପରି $\frac{-5}{7}$ କୁ $\frac{7}{-5}$ ସହିତ ଗୁଣନ କଲେ ଗୁଣଫଳ 1 ହୁଏ ।

ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଆମେ $\frac{21}{8}$ କୁ $\frac{8}{21}$ ର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ (Inverse) ଓ $\frac{7}{-5}$ କୁ $\frac{-5}{7}$ ର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ ବୋଲି କହୁ ।

ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟାର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମକୁ ଉକ୍ତ ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ବୋଲି କୁହାଯାଏ ।

$\frac{c}{d}$ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଟି ଅନ୍ୟ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା $\frac{a}{b}$ ର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ ବା ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ହେଲେ $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = 1$ ହେବ ।

ଯଦି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା $x \neq 0$, ତେବେ xର ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ $\frac{1}{x}$ ଏବଂ $\frac{1}{x}$ ର ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ x ହେବ ।

2.7 ବଣ୍ଟନ ନିୟମ (Distributive Law) :

ତିନୋଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା $\frac{-3}{4}, \frac{2}{3}$ ଓ $\frac{-5}{6}$ କୁ ନିଆଯାଉ ।

ଦେଖିବ, $\frac{-3}{4} \times \left\{\frac{2}{3} + \left(-\frac{5}{6}\right)\right\} = -\frac{3}{4} \times \left\{\frac{(4)+(-5)}{6}\right\} = \frac{-3}{4} \times \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$

ପୁନଶ୍ଚ $\left(-\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{3}{4} \times \frac{-5}{6}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{5}{8} = \frac{-4+5}{8} = \frac{1}{8}$ $\quad \therefore \frac{-3}{4} \times \left\{\frac{2}{3} + \frac{-5}{6}\right\} = \left(-\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{-3}{4} \times \frac{-5}{6}\right)$

ଏହିପରି ଆଉ କେତେକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନେଇ ପରୀକ୍ଷା କରି ଜାଣିବ ଯେ, ଯଦି **a, b ଓ c ଯେକୌଣସି ତିନୋଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହୁଏ, ତେବେ**

$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ । ଏହି ନିୟମକୁ **ବଣ୍ଟନ ନିୟମ** କୁହାଯାଏ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 2 (a)

1. ନିମ୍ନସ୍ଥ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $\frac{2}{8}$ (ii) $-\frac{5}{9}$ (iii) $\frac{-6}{-5}$ (iv) $\frac{2}{-9}$ (v) $\frac{19}{-6}$

2. ନିମ୍ନସ୍ଥ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) -13, (ii) $\frac{13}{19}$ (iii) $\frac{1}{5}$ (iv) $\frac{-5}{8} \times \frac{-3}{7}$ (v) $-1 \times \frac{-2}{5}$ (vi) -1

3. ନିମ୍ନସ୍ଥ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକରେ କେଉଁ ନିୟମ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଇଛି ଲେଖ ।

(i) $-\frac{4}{5} \times 1 = 1 \times \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$ (ii) $-\frac{13}{17} \times \frac{-2}{7} = \frac{-2}{7} \times -\frac{13}{17}$

(iii) $-\frac{19}{29} \times \frac{29}{-19} = 1$ (iv) $\frac{1}{3} \times \left(6 \times \frac{4}{3}\right) = \left(\frac{1}{3} \times 6\right) \times \frac{4}{3}$

4. $\frac{6}{13}$ କୁ $\frac{-7}{16}$ ର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ ସହିତ ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

5. $\frac{8}{9}, 1\frac{1}{8}$ ର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ ହେବ କି ? ଯଦି ନୁହେଁ ତେବେ କାହିଁକି ?

6. $0.3, 3\frac{1}{3}$ ର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ ହେବକି ? ଯଦି ନୁହେଁ ତେବେ କାହିଁକି ?

7. ଉତ୍ତର ଦିଅ :-

(i) ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଯାହାର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ ନାହିଁ ।

(ii) ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଯାହାର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ ସେହି ସଂଖ୍ୟା ସହ ସମାନ ।

(iii) ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଯାହା ସେହି ସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ସଂଗେ ସମାନ ।

8. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର :

(i) ଶୂନର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ ---- ।

(ii) ---- ଓ ---- ସଂଖ୍ୟାମାନେ ନିଜ ନିଜର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ ।

(iii) –5 ର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ ---- ।

(iv) $\frac{1}{x}, (x \neq 0)$ ର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ ---- ।

(v) ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣଫଳ ଏକ ---- ।

(vi) ଏକ ଋଣାତ୍ମକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ ଏକ ---- ।

2.8 ବିଭିନ୍ନ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ ମଧ୍ୟରେ ସଂପର୍କ :

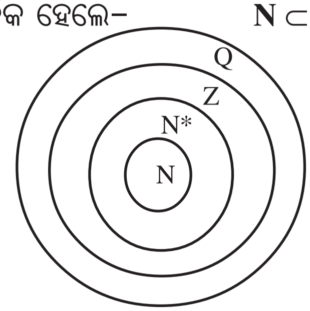
ଏ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଆମେ ଆଲୋଚନା କରିଥିବା ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ ଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ– $\mathbf{N \subset N^* \subset Z \subset Q}$

(i) **N** (ଗଣନ / ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍)

(ii) **N*** (ସଂପ୍ରସାରିତ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍)

(iii) **Z** (ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍)

(iv) **Q** (ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍)



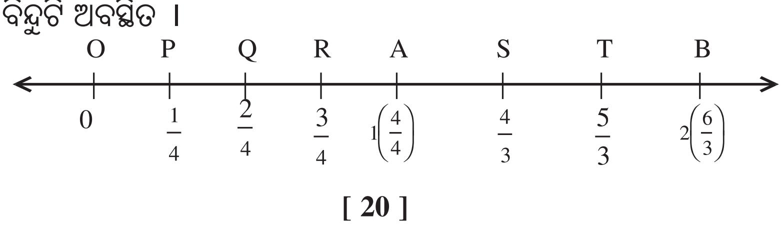
(ଚିତ୍ର 2.2)

2.9 ସଂଖ୍ୟାରେଖାରେ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା :

ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କୁ କିପରି ଏକ ସରଳରେଖା (ସଂଖ୍ୟାରେଖା) ଉପରେ ବିନ୍ଦୁ ଭାବେ ଚିହ୍ନଟ କରାଯାଏ ତାହା ଆମେ ଜାଣିଛେ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଦେଖିବା ଯେ Q ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନମାନଙ୍କୁ (ଅର୍ଥାତ୍ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କୁ) କିପରି ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରେ ବିନ୍ଦୁ ଭାବେ ଚିହ୍ନଟ କରାଯାଇପାରିବ ?

ସଂଖ୍ୟାରେଖାର ଧନାତ୍ମକ ଦିଗରେ ଧନାତ୍ମକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ଓ ଋଣାତ୍ମକ ଦିଗରେ ଋଣାତ୍ମକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ବିନ୍ଦୁ ରୂପେ ଚିହ୍ନଟ କରାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ - 1 : ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା $\frac{3}{4}$ ର ସଂଖ୍ୟାରେଖାରେ ସୂଚକ ବିନ୍ଦୁଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା । $\frac{3}{4}$ ର ଅର୍ଥ ହେଲା 4 ସମାନ ଭାଗରୁ 3 ଭାଗ । $\frac{3}{4}$ ସଂଖ୍ୟାଟି 0 (ଶୂନ) ଠାରୁ ବଡ଼ ଓ 1 ଠାରୁ ସାନ ଏବଂ $\frac{3}{4}$ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଟି ଧନାତ୍ମକ । ତେଣୁ ସଂଖ୍ୟାରେଖାର ଧନାତ୍ମକ ଦିଗରେ 0 ଓ 1 ର ସୂଚକ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ଦ୍ୱାରା ନିରୂପିତ ରେଖାଖଣ୍ଡ $\overline{OA}$ ଉପରେ $\frac{3}{4}$ ସଂଖ୍ୟାଟିର ସୂଚକ ବିନ୍ଦୁଟି ଅବସ୍ଥିତ ।

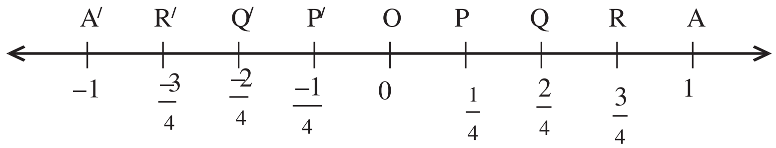


(ଚିତ୍ର 2.3)

$\overline{OA}$ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ସମାନ ଚାରିଭାଗ କଲେ ଆମେ P, Q ଓ R ତିନିଗୋଟି ବିନ୍ଦୁ ପାଇବା । $\overline{OP}$ = ପ୍ରଥମ ଭାଗ, $\overline{PQ}$ = ଦ୍ୱିତୀୟ ଭାଗ, $\overline{QR}$ = ତୃତୀୟ ଭାଗ ଓ $\overline{RA}$ = ଚତୁର୍ଥ ଭାଗ । R ବିନ୍ଦୁଟି ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଟି $\frac{3}{4}$ । ଆସ $\frac{5}{3}$ ର ସଂଖ୍ୟାରେଖାରେ ସୂଚକ ବିନ୍ଦୁଟି ସ୍ଥିର କରିବା । ଯେହେତୁ $\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$ ତେଣୁ $1<\frac{5}{3}<2$ ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{5}{3}$ ର ସୂଚକ ବିନ୍ଦୁଟି 1 ଓ 2 ସଂଖ୍ୟାସୂଚକ ବିନ୍ଦୁର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ । ତେଣୁ $\overline{AB}$ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ସମାନ ତିନିଭାଗ କରୁଥିବା ବିଭାଜନ ବିନ୍ଦୁ S ଓ T (A ରୁ B ଆଡ଼କୁ) ହେଲେ, T ବିନ୍ଦୁଟି $\frac{5}{3}$ ର ସୂଚକ ବିନ୍ଦୁ ଅଟେ । (ଚିତ୍ର 2.3 ଦେଖ)

ସୂଚନା : $\frac{p}{q}$ ଧନାତ୍ମକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଟିର ସୂଚକ ବିନ୍ଦୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ ପ୍ରଥମେ $\frac{p}{q}$ କେଉଁ କେଉଁ କ୍ରମିକ ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ତାହା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଓ ଉକ୍ତ ଧନାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟର ସୂଚକ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟକୁ ସଂଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ q ସମାନ ଭାଗ କରି p ସଂଖ୍ୟକ ଭାଗ ନେଇ ଏହାର ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁଟି ଚିହ୍ନଟ କର ।

ଉଦାହରଣ - 2 : $-\frac{3}{4}$ ସଂଖ୍ୟାଟି ଋଣାତ୍ମକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହେତୁ ଏହାର ସୂଚକ ବିନ୍ଦୁଟି ସଂଖ୍ୟାରେଖାର ଋଣ ଦିଗ (ମୂଳ ବିନ୍ଦୁର ବାମପାର୍ଶ୍ୱ)ରେ ଅବସ୍ଥିତ ।



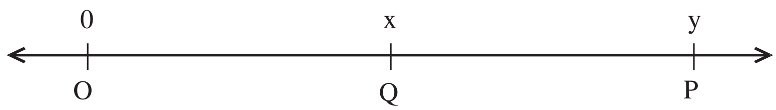
(ଚିତ୍ର 2.4)

ପ୍ରଥମେ ଧନାତ୍ମକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା $\frac{3}{4}$ ଚିହ୍ନଟ କର ଅର୍ଥାତ୍ R ବିନ୍ଦୁଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ସଂଖ୍ୟାରେଖାର ଋଣାତ୍ମକ ଦିଗରେ O ବିନ୍ଦୁଠାରୁ OR ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନେଲେ R' ବିନ୍ଦୁ ପାଇବା ଓ R' ବିନ୍ଦୁଟି $-\frac{3}{4}$ ର ସୂଚକ ବିନ୍ଦୁ ଅଟେ ।

ସୂଚନା : ସୁତରାଂ $\frac{p}{q}$ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଟି ଋଣାତ୍ମକ ହେଲେ $-\frac{p}{q}=x$ ଧନାତ୍ମକ ଅଟେ । ପ୍ରଥମେ ସଂଖ୍ୟାରେଖାରେ ଧନାତ୍ମକ ଦିଗରେ x ର ସୂଚକ ବିନ୍ଦୁ K ନିଅ । O ବିନ୍ଦୁର ବାମ ପାର୍ଶ୍ୱରେ OK ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନେଇ K' ବିନ୍ଦୁଟି ଚିହ୍ନଟ କଲେ ଏହି ବିନ୍ଦୁଟି ଋଣାତ୍ମକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା $-x=\frac{p}{q}$ କୁ ସୂଚାଇ ଥାଏ ।

ମନେରଖ :

ଯଦି x ଓ y ଦୁଇଗୋଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଓ $y>x$ ହୁଏ, ତେବେ y ର ସୂଚକ ବିନ୍ଦୁ P, x ର ସୂଚକ ବିନ୍ଦୁ Q ର ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ରହିବ ।

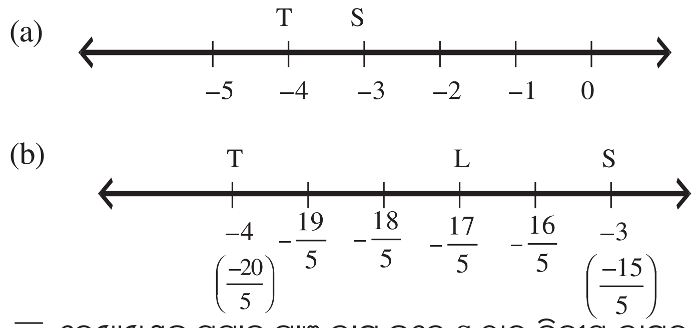


ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣକୁ ଦେଖ : (ଚିତ୍ର 2.5)

ଉଦାହରଣ –1 : ସଂଖ୍ୟାରେଖାରେ $-\frac{17}{5}$ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଟିକୁ ସୂଚାଅ ।

ସମାଧାନ : $-\frac{17}{5}=-3\frac{2}{5}$ ତେଣୁ

$\therefore -\frac{17}{5}$ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଟି –3 ଓ –4 ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ବିନ୍ଦୁ S ଓ T ଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ।



(ଚିତ୍ର 2.6)

$\overline{ST}$ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ସମାନ ପାଞ୍ଚ ଭାଗ କଲେ S ଠାରୁ ଦ୍ୱିତୀୟ ଭାଗର ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ L ଦ୍ୱାରା $-\frac{17}{5}$ $\left(=-3\frac{2}{5}\right)$ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଟି ସୂଚିତ ହୁଏ ।

ବିକଳ୍ପ ସମାଧାନ ପାଇଁ ସୂଚନା : ପ୍ରଥମେ $\frac{17}{5}$ ପାଇଁ ସଂଖ୍ୟାରେଖାରେ ସୂଚକ ବିନ୍ଦୁ (K) ସ୍ଥିର କରିବା ପରେ 'O' ବିନ୍ଦୁର ବାମପାର୍ଶ୍ୱରେ OK ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନେଇ K ବିନ୍ଦୁ ଚିହ୍ନଟ କରାଯାଇ ପାରିବ, ଯାହା $\frac{-17}{5}$ ର ସୂଚକ ବିନ୍ଦୁ ହେବ ।

ଉଦାହରଣ –2 : $\frac{3}{5}$ ଓ $\frac{8}{13}$ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ବଡ଼ ?

ସମାଧାନ : $\frac{3}{5}$ ଓ $\frac{8}{13}$ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ବଡ଼, ଏହା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ହେଲେ ପ୍ରଥମେ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟର ହରକୁ ସମାନ କରିବା ଆବଶ୍ୟକ ।

5 ଓ 13 ର ଲ.ସା.ଗୁ. = 65 $\therefore$ 65 ÷ 5 = 13, 65 ÷ 13 = 5

ସୁତରାଂ $\frac{3}{5}=\frac{3\times13}{5\times13}=\frac{39}{65}$ ଏବଂ $\frac{8}{13}=\frac{8\times5}{13\times5}=\frac{40}{65}$ (ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟକୁ ସମହର ବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟାରେ ପରିଣତ କରାଗଲା ।)

$\frac{39}{65}$ ଓ $\frac{40}{65}$ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ ଯଥାକ୍ରମେ $\frac{3}{5}$ ଓ $\frac{8}{13}$ ସହ ସମାନ ଅଟେ । ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟକୁ ସୂଚାଉଥିବା ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ସମାନ 65 ଭାଗ କଲେ, $\frac{39}{65}$ ସଂଖ୍ୟାଟିକୁ ସୂଚାଉଥିବା ବିନ୍ଦୁର ଡାହାଣକୁ $\frac{40}{65}$ ସଂଖ୍ୟାଟିକୁ ସୂଚାଉଥିବା ବିନ୍ଦୁଟି ରହିବ । ତେଣୁ $\frac{40}{65} > \frac{39}{65}$ ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{8}{13} > \frac{3}{5}$ ।

ବି.ଦ୍ର. : $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ ହେବ ଯଦି ଏବଂ କେବଳ ଯଦି ad > bc ହେବ ଏବଂ $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ହେବ ଯଦି ଏବଂ କେବଳ ଯଦି ad < bc ହେବ । ଉପରୋକ୍ତ ତଥ୍ୟକୁ ଭିତ୍ତି କରି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ତୁଳନା ସମ୍ଭବ । ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ ।

2.10 ଦୁଇଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା :

ଆମେ ଜାଣିଛୁ 1 ଓ 5 ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ଦୁଇଟି ମଧ୍ୟରେ 2,3, 4 ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ଗୁଡ଼ିକ ଅଛନ୍ତି ।

7 ଓ 9 ମଧ୍ୟରେ କେବଳ 8 ଗୋଟିଏ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ଅଛି ।

ସେହିପରି –5 ଓ 4 ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ଗୁଡ଼ିକ ହେଲା –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3 ଏବଂ

–1 ଓ 1 ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟାଟି (0) ଶୂନ । ମାତ୍ର –9 ଓ –10 ମଧ୍ୟରେ କୌଣସି ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ନାହିଁ ।

ଉପରୋକ୍ତ ଆଲୋଚନାରୁ ଆମେ ଜାଣୁଛେ ଯେ, କ୍ରମିକ ହୋଇନଥିବା ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା (ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା) ମଧ୍ୟରେ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା (ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା) ବିଦ୍ୟମାନ ।

ଆସ ଦେଖିବା ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା କ୍ଷେତ୍ରରେ ଏହା ସତ୍ୟ କି ନୁହେଁ ?

ବର୍ତ୍ତମାନ ଦେଖାଯାଉ $\frac{3}{10}$ ଓ $\frac{7}{10}$ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟରେ କେତୋଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ରହୁଅଛି ?

ପ୍ରଥମ ପରିସ୍ଥିତି :

ଯେହେତୁ $\frac{3}{10} < \frac{4}{10} < \frac{5}{10} < \frac{6}{10} < \frac{7}{10}$ ତେଣୁ ଆମେ କହିପାରିବା $\frac{4}{10}, \frac{5}{10}$ ଓ $\frac{6}{10}$, $\frac{3}{10}$ ଓ $\frac{7}{10}$ ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ।

ଦ୍ୱିତୀୟ ପରିସ୍ଥିତି :

ପୁନଶ୍ଚ $\frac{3}{10} = \frac{30}{100}$ ଲେଖିଥିଲେ ଓ $\frac{7}{10} = \frac{70}{100}$ ଲେଖିଲେ,

$\frac{31}{100}, \frac{32}{100}, \ldots \frac{69}{100}$ ଆଦି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ଯ $\frac{3}{10}$ ଓ $\frac{7}{10}$ ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହେବେ ।

ତୃତୀୟ ପରିସ୍ଥିତି :

ଯଦି $\frac{3}{10} = \frac{3000}{10000}$ ଓ $\frac{7}{10} = \frac{7000}{10000}$ ଆକାରରେ ଲେଖାଯାଏ ତେବେ $\frac{3001}{10000}, \frac{3002}{10000}, \ldots \frac{6998}{10000}, \frac{6999}{10000}$ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ଯ $\frac{3}{10}$ ଓ $\frac{7}{10}$ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ହେବେ ।

ଉପରୋକ୍ତ ପରିସ୍ଥିତିଗୁଡ଼ିକୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କଲେ ଆମେ ଜାଣୁଛେ ଯେ, $\frac{3}{10}$ ଓ $\frac{7}{10}$ ମଧ୍ୟରେ ଅଧିକରୁ ଅଧିକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଭର୍ତ୍ତି କରାଯାଇ ପାରେ ।

ତେଣୁ ଏଥିରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଅନୁମେୟ ଯେ, **ଦୁଇଟି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟରେ ଅସଂଖ୍ୟ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ବିଦ୍ୟମାନ ।**

ଉଦାହରଣ – 3 : -2 ଓ 0 ଭିତରେ ଥିବା 3ଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଲେଖ ।

ସମାଧାନ : $-2 = \frac{-20}{10}$ ଓ $0 = \frac{0}{10}$ ଲେଖିଲେ, $\frac{-19}{10}, \frac{-18}{10}, \ldots \frac{-16}{10}, \frac{15}{10}, \ldots, \frac{-1}{10}$ ଆଦି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା -2 ଓ 0 ମଧ୍ୟରେ ରହିବେ, ଏଥିରୁ ଯେକୌଣସି ତିନୋଟିକୁ ନେଇ ଉତ୍ତରଟି ଲେଖାଯାଇପାରେ ।

ଉଦାହରଣ – 4 : $\frac{-5}{6}$ ଓ $\frac{5}{8}$ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ଯେକୌଣସି ଦଶଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ପ୍ରଥମେ $\frac{-5}{6}$ ଓ $\frac{5}{8}$ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟକୁ ସମାନ ହର ବିଶିଷ୍ଟ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାରେ ପରିଣତ କର ।

ଯଥା : $\frac{-5}{6} = \frac{-5 \times 4}{6 \times 4} = \frac{-20}{24}$ ଏବଂ $\frac{5}{8} = \frac{5 \times 3}{8 \times 3} = \frac{15}{24}$ ଏଠାରେ $\frac{-20}{24} < \frac{15}{24} \; (\because -20 < 15)$

ଅତଏବ $\frac{-19}{24}, \frac{-18}{24}, \frac{-17}{24}, \ldots\ldots, \frac{14}{24}$ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ $\frac{-5}{6}$ ଓ $\frac{5}{8}$ ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ।

ସେଥିରୁ ଯେକୌଣସି ଦଶଟିକୁ ନେଇପାରିବା ।

ବିକଳ୍ପ ସମାଧାନ :

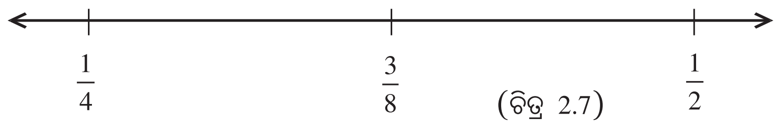
ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ଅସମାନ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟରେ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପାଇଁ ସେହି ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟର ହାରାହାରି ସ୍ଥିର କରାଯାଏ । ଉକ୍ତ ହାରାହାରି ଆବଶ୍ୟକ ହେଉଥିବା ଗୋଟିଏ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହୋଇଥାଏ ।

ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ, 1 ଓ 2 ର ହାରାହାରି = $\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$ ଯାହା 1 ଓ 2 ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ।

ଏହି ଉଦାହରଣରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ, **ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟରେ ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ରହି ନ ପାରେ ମାତ୍ର ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ରହିବା ସୁନିଶ୍ଚିତ ।**

ଉଦାହରଣ – 5 : $\frac{1}{4}$ ଓ $\frac{1}{2}$ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $\frac{1}{4}$ ଓ $\frac{1}{2}$ ର ମାଧ୍ୟମାନ



(ଚିତ୍ର 2.7)

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା = $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1+2}{4}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$

$\therefore \frac{3}{8}$ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଯାହା $\frac{1}{4}$ ଓ $\frac{1}{2}$ ମଧ୍ୟରେ ଅବସ୍ଥିତ । ଚିତ୍ର 2.7 ରେ ଏହାକୁ ସଂଖ୍ୟାରେଖାରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।

ଟୀକା :– ଯଦି a ଓ b ଦୁଇଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହୁଏ, ତେବେ $\frac{a+b}{2}$, a ଓ b ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା

$a < b$ ହେଲେ $a < \frac{a+b}{2} < b$ ହେବ ।

ଏହି ହାରାହାରି ପ୍ରକ୍ରିୟାକୁ ପ୍ରୟୋଗ କରି ଆମେ ଦୁଇଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟରେ ଅସଂଖ୍ୟ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ପାଇପାରିବା ।

ଉଦାହରଣ – 6 : $\frac{1}{4}$ ଓ $\frac{1}{2}$ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ତିନୋଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟର ହାରାହାରି $= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$

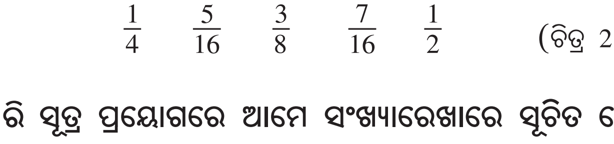
$\therefore \frac{3}{8}, \frac{1}{4}$ ଓ $\frac{1}{2}$ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା । ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{1}{4} < \frac{3}{8} < \frac{1}{2}$

ବର୍ତ୍ତମାନ $\frac{1}{4}$ ଓ $\frac{3}{8}$ ର ହାରାହାରି $= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{16}$ $\quad \therefore \frac{1}{4} < \frac{5}{16} < \frac{3}{8} < \frac{1}{2}$

ପୁନଶ୍ଚ $\frac{3}{8}$ ଓ $\frac{1}{2}$ ର ହାରାହାରି $= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{16}$ $\quad \therefore \frac{1}{4} < \frac{5}{16} < \frac{3}{8} < \frac{7}{16} < \frac{1}{2}$

ତେଣୁ $\frac{5}{16}$, $\frac{3}{8}$ ଓ $\frac{7}{16}$ ତିନୋଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଯାହା $\frac{1}{4}$ ଓ $\frac{1}{2}$ ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ।

ଏହି ସଂଖ୍ୟା ତିନୋଟି ସଂଖ୍ୟାରେଖାରେ B,A ଓ C ନାମରେ ନାମିତ କରାଯାଇଛି ।



(ଚିତ୍ର 2.8)

ଟୀକା : ହାରାହାରି ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗରେ ଆମେ ସଂଖ୍ୟାରେଖାରେ ସୂଚିତ ଯେକୌଣସି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଅସଂଖ୍ୟ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ପାଇପାରିବା ।

ଅନୁଶୀଳନୀ – 2 (b)

1. ପ୍ରଦତ୍ତ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ସଂଖ୍ୟାରେଖାରେ ସୂଚିତ କର । (i) $\frac{7}{4}$, (ii) $\frac{-5}{6}$, (iii) $\frac{8}{3}$

2. $\frac{-2}{11}, \frac{-5}{11}, \frac{-9}{11}$ କୁ ସଂଖ୍ୟାରେଖାରେ ଦେଖାଅ ।

3. (i) 2 ଠାରୁ ସାନ ପାଞ୍ଚଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଲେଖ ।

(ii) $\frac{3}{5}$ ଓ $\frac{3}{4}$ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ଦଶଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. (i) $\frac{-2}{5}$ ଓ $\frac{1}{2}$ ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦଶଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ii) – 2 ଠାରୁ ବଡ଼ ପାଞ୍ଚଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

5. ନିମ୍ନ ପ୍ରଦତ୍ତ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ପାଞ୍ଚଟି ଲେଖାଏଁ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $\frac{2}{3}$ ଓ $\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{-3}{2}$ ଓ $\frac{5}{3}$ (iii) $\frac{1}{4}$ ଓ $\frac{1}{2}$

6. ନିମ୍ନ ସଂଖ୍ୟା ଯୋଡ଼ିଗୁଡ଼ିକରେ ଥିବା ବଡ଼ ସଂଖ୍ୟାଟିକୁ ସ୍ଥିର କର ।

(i) $\frac{2}{3}$ ଓ $\frac{5}{7}$ (ii) $\frac{3}{4}$ ଓ $\frac{7}{9}$ (iii) $\frac{3}{7}$ ଓ $\frac{4}{11}$

2.11 ସଂଖ୍ୟା ଖେଳ (Playing with Numbers) :

ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀରେ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା (ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା), ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ଓ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି । ଉକ୍ତ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଧର୍ମ ଗୁଡ଼ିକର ମଧ୍ୟ ସବିଶେଷ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇସାରିଛି । ଦଶମିକ ସଂଖ୍ୟା ପଦ୍ଧତିରେ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ସମସ୍ତ ସଂଖ୍ୟାରେ ବ୍ୟବହୃତ ଅଙ୍କସମୂହ; ଯଥା– 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ର ସ୍ଥାନୀୟ ମାନ ଅନୁଯାୟୀ ସଂଖ୍ୟା ଲିଖନ କିପରି ହୁଏ ତାହା ମଧ୍ୟ ତୁମେ ଆଗରୁ ଜାଣିଛ । ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ସଂଖ୍ୟା ଲିଖନ ସହ ବିସ୍ତାରିତ ସଂଖ୍ୟାର ରୂପ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଆଲୋଚନା ହେବା ସହିତ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କୁ ନେଇ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାରର ଖେଳ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରାଯିବ । ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀମାନଙ୍କରେ ପଢ଼ାଯାଇଥିବା ସଂଖ୍ୟାର ବିଭାଜ୍ୟତା ସଂପର୍କରେ ମଧ୍ୟ କିଛି ଅଧିକ ଆଲୋଚନା ଏହି ଅଧ୍ୟାୟର ଅନ୍ୟ ଏକ ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ । ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ କେତେଗୁଡ଼ିଏ ସଂରଚନାର ଅବତାରଣା କରାଯାଇ ପିଲାମାନଙ୍କର ବୋଧଶକ୍ତିକୁ ମଧ୍ୟ ବଢ଼ାଇବାର ପ୍ରୟାସ କରାଯାଇଛି ।

2.12. ସଂଖ୍ୟାର ବିସ୍ତାରିତ ରୂପ (General Form of Numbers):

ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟାର ବିସ୍ତାରିତ ରୂପ ଅଥବା ବ୍ୟାପକ ରୂପ କହିଲେ ସଂଖ୍ୟାର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ଅଙ୍କମାନଙ୍କର ସ୍ଥାନୀୟମାନ ଅନୁଯାୟୀ ସଂଖ୍ୟାର ଲିଖନକୁ ବୁଝାଯାଏ । ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ, $52 = 5 \times 10 + 2 \times 1$, $135 = 1 \times 100 + 3 \times 10 + 5 \times 1$

ସେହିପରି $496 = 4 \times 100 + 9 \times 10 + 6 \times 1$

(496 ର "4" ଶତକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ, "9" ଦଶକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ ଏବଂ '6' ଏକକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ)

ମନେକର "ab" ଗୋଟିଏ ଦୁଇ ଅଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା । ଏହାର ବ୍ୟାପକ ରୂପଟି $a \times 10 + b \times 1 = 10a + b$

ବର୍ତ୍ତମାନ କହି ପାରିବ କି "ba" ର ବ୍ୟାପକ ରୂପଟି କ'ଣ ? (ଏଠାରେ "ab"କୁ axb ଭାବେ ନିଆଯାଇ ନାହିଁ)

ସେହିପରି ତିନି ଅଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା abc ର ବ୍ୟାପକ ରୂପଟି ହେବ : $100a + 10b + c$ ।

ଅନୁରୂପଭାବେ "cba" ର ବ୍ୟାପକ ରୂପଟି ହେବ : $100c + 10b + a$ ।

(ନିଜେ କର) 1. ନିମ୍ନ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକର ବ୍ୟାପକ ରୂପ ଲେଖ ।

(i) 25 (ii) 73 (iii) 569

2. ନିମ୍ନରେ କେତେଗୁଡ଼ିଏ ସଂଖ୍ୟାର ବ୍ୟାପକ ରୂପକୁ ଦର୍ଶାଯାଇଛି । ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ଲେଖ ।

(i) $10 \times 5 + 6$ (ii) $100 \times 7 + 10 \times 1 + 8$ (iii) $10\,p + 10\,q + r$

2.13. ସଂଖ୍ୟାକୁ ନେଇ ଖେଳ (Game with Numbers) :

2.13.1 ଦୁଇ ଅଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟାକୁ ନେଇ ଖେଳ :

ପ୍ରଥମ ଖେଳ : ଶରତ, ସୁନିତାକୁ ଗୋଟିଏ ଦୁଇ ଅଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା ଭାବିବାକୁ କହି ନିମ୍ନ ପ୍ରକାରରେ ନିର୍ଦ୍ଦେଶ ଦେବାକୁ ଲାଗିଲା ।

ଶରତ

1. ଯେ କୌଣସି ଗୋଟିଏ ଦୁଇ ଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା ଭାବ ।	ମନେକର ସଂଖ୍ୟାଟି (49)
2. ଭାବିଥିବା ସଂଖ୍ୟାଟିର ସ୍ଥାନ ବିନିମୟ କର ।	ସଂଖ୍ୟାର ସ୍ଥାନ ବିନିମୟ କଲେ (94)
3. ସ୍ଥାନ ବିନିମୟ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ସଂଖ୍ୟାକୁ ପ୍ରଥମେ ନେଇ ଥିବା ସଂଖ୍ୟା ସହ ମିଶାଅ :	ଉତ୍ପନ୍ନ ସଂଖ୍ୟା ଓ ପୂର୍ବ ସଂଖ୍ୟାର ସମଷ୍ଟି (143)
4. ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟିକୁ "11" ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରି ଭାଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।	ସମଷ୍ଟିକୁ "11"ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ ଭାଗଫଳ (13)
5. ଦେଖିବ "11" ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରିବା ଫଳରେ ଭାଗଶେଷ ରହିବ ନାହିଁ ।	ଭାଗଶେଷ (0) ଶୂନ

ସୁନିତା

ସୁନିତା, ଶରତକୁ କହିଲା ଭାଇ ତୁମେ କିପରି ଜାଣିଲ ଯେ, ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଭାଗଶେଷ କିଛି ରହିବ ନାହିଁ ?
ବର୍ତ୍ତମାନ ଆସ ଏ ଖେଳ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କୌଶଳଟି କ'ଣ ବୁଝିବା ।

ଖେଳରେ ବ୍ୟବହୃତ କୌଶଳର ବିଶ୍ଳେଷଣ :

ମନେକର ସଂଖ୍ୟାଟି ab, ଯାହାର ବ୍ୟାପକ ରୂପ $10a + b$ । ସଂଖ୍ୟାର ସ୍ଥାନବିନିମୟ କରିବା ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ସଂଖ୍ୟାଟି ba ହେବ । ଯାହାର ବ୍ୟାପକ ରୂପ $10b + a$ ହେବ ।

ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି $= 10a + b + 10b + a = 10a + a + 10b + b = 11a + 11b = 11\,(a + b)$

ଏଥିରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଜଣାପଡ଼ିଲା ଯେ, ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି ସଦାସର୍ବଦା "11' ର ଏକ ଗୁଣିତକ; ତେଣୁ ସଂଖ୍ୟା ସମଷ୍ଟିକୁ 11 ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ ଭାଗଶେଷ ରହିବ ନାହିଁ ।

ଲକ୍ଷ୍ୟ କର: ସଂଖ୍ୟା ସମଷ୍ଟିକୁ ''11' ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ ଭାଗଫଳ, ଭାବିଥିବା ସଂଖ୍ୟାର ଅଙ୍କ ଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି ସହ ସମାନ ହେବ ।

ପ୍ରଥମ ଖେଳରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ହେବ ଯେ, ଭାଗକ୍ରିୟାରେ ଭାଗଫଳଟି 13 ଯାହା ଭାବିଥିବ ସଂଖ୍ୟା 49 ର ଅଙ୍କ ଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି ।

(ନିଜେ କର)

ପ୍ରଥମ ଖେଳକୁ ଅନୁସରଣ କରି ନିମ୍ନ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଭାଗଶେଷ ଏବଂ ଭାଗଫଳ କେତେ ରହୁଛି ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ – (i) 27 (ii) 39 (iii) 64 (iv) 78

ଦ୍ୱିତୀୟ ଖେଳ :

ଶରତ ପୁଣି ସୁନିତାକୁ ଗୋଟିଏ ଦୁଇ ଅଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା ଭାବିବାକୁ କହି ନିମ୍ନ ପ୍ରକାରରେ ନିର୍ଦ୍ଦେଶ ଦେବାକୁ ଲାଗିଲା ।

ଶରତ

1. ଯେ କୌଣସି ଗୋଟିଏ ଦୁଇ ଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା ଭାବ ।
2. ଭାବିଥିବା ସଂଖ୍ୟାଟିର ସ୍ଥାନ ବିନିମୟ କର ।
3. ସ୍ଥାନ ବିନିମୟ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ସଂଖ୍ୟାକୁ ପ୍ରଥମେ ନେଇ ଥିବା ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତରଫଳ ସ୍ଥିର କର । (ଅନ୍ତରଫଳ ଧନାତ୍ମକ ହେବା ଆବଶ୍ୟକ)
4. ଅନ୍ତରଫଳକୁ "9" ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କର ।
5. ଦେଖିବ "9" ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରିବା ଫଳରେ ଭାଗଶେଷ ରହିବ ନାହିଁ ।

ମନେକର ସଂଖ୍ୟାଟି (29)

ସଂଖ୍ୟାର ସ୍ଥାନ ବିନିମୟ କଲେ (92)

ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କଲା (92–29=63)

ଅନ୍ତରଫଳକୁ "9" ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ, ଭାଗଫଳ (7)

ଭାଗଶେଷ (0)

ସୁନିତା

ସୁନିତା ପୁଣି ଶରତକୁ କହିଲା ଭାଇ ତୁମେ କିପରି ଜାଣିଲ ଯେ, ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଭାଗଶେଷ କିଛି ରହିବ ନାହିଁ ? ବର୍ତ୍ତମାନ ଆସ ଏ ଖେଳ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କୌଶଳଟି କ'ଣ ବୁଝିବା ।

ଖେଳରେ ବ୍ୟବହୃତ କୌଶଳର ବିଶ୍ଳେଷଣ :

ମନେକର ସଂଖ୍ୟାଟି ab ଯାହାର ବ୍ୟାପକ ରୂପ $10a + b$ । ସଂଖ୍ୟାର ସ୍ଥାନବିନିମୟ କରିବା ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ସଂଖ୍ୟାଟି ba ହେବ, ଯାହାର ବ୍ୟାପକ ରୂପ $10b + a$ ହେବ ।

ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତରଫଳ $= (10b + a) - (10a + b)\ (a < b)$

$= 10b + a - 10a - b$

$= 10b - b + a - 10a$

$= 9b - 9a = 9(b - a)$

[ଯଦି $a > b$ ହୋଇଥାଏ ଅନ୍ତରଫଳ $9(a - b)$ ହେବ

ବିଶ୍ଳେଷଣ : $(10a + b) - (10b + a) = 10a + b - 10b - a = 10a - a + b - 10b = 9a - 9b = 9(a - b)$]

ଏଥିରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଜଣାପଡ଼ିଲା ଯେ, ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତରଫଳ ସଦାସର୍ବଦା "9" ର ଗୁଣିତକ । ତେଣୁ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତରଫଳକୁ "9" ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ ଭାଗଶେଷ ରହିବ ନାହିଁ ।

ଲକ୍ଷ୍ୟକର : ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତରଫଳକୁ "9" ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ ଭାଗଫଳ, ଭାବିଥିବା ସଂଖ୍ୟାର ଅଙ୍କଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତରଫଳ ସହ ସମାନ ହେବ ।

(i) $a < b$ ହେଲେ $b - a$ ଏବଂ (ii) $a > b$ ହେଲେ $a - b$ ହେବ ।

ଦ୍ୱିତୀୟ ଖେଳରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ହେବ ଯେ, ଭାଗ କରିବା ଦ୍ୱାରା ଭାଗଫଳଟି '7' ଯାହା ଭାବିଥିବା ସଂଖ୍ୟା 29 ର ଅଙ୍କଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତରଫଳ ସହ ସମାନ ।

ନିଜେ କର ଦ୍ୱିତୀୟ ଖେଳକୁ ଅନୁସରଣ କରି ନିମ୍ନ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଭାଗଶେଷ ଏବଂ ଭାଗଫଳ କେତେ ରହୁଛି ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ : (i) 17 (ii) 21 (iii) 96 (iv) 37

2.13.2 ତିନି ଅଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟାକୁ ନେଇ ଖେଳ :

ତୃତୀୟ ଖେଳ : ବର୍ତ୍ତମାନ ସୁନିତାର ପାଳି । ସୁନିତା, ଶରତକୁ ଗୋଟିଏ ତିନି ଅଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା ଭାବିବାକୁ କହିଲା ଏବଂ ପରେ ନିର୍ଦ୍ଦେଶ ଅନୁଯାୟୀ କାର୍ଯ୍ୟ କରିବାକୁ କହିଲା ।

ସୁନିତା

ଶରତ

ନିର୍ଦ୍ଦେଶଗୁଡ଼ିକ ହେଲା –	ନିର୍ଦ୍ଦେଶ ଅନୁଯାୟୀ ଶରତ ଦ୍ୱାରା ସଂପୂର୍ଣ୍ଣ କାର୍ଯ୍ୟ
(i) ଗୋଟିଏ ତିନି ଅଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା ଭାବ ।	(i) (349)
(ii) ସଂଖ୍ୟାଟିକୁ ଓଲଟାଇ କ୍ରମରେ ଲେଖ ।	(ii) (943)
(iii) ବଡ଼ ସଂଖ୍ୟାରୁ ସାନ ସଂଖ୍ୟା ବିୟୋଗ କର ।	(iii) (594) $(943 - 349 = 594)$
(iv) ବିୟୋଗଫଳକୁ "99" ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରି ଭାଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।	(iv) ଭାଗଫଳ $(594 \div 99 = 6)$ ଓ ଭାଗଶେଷ ରହୁନାହିଁ ।

ଖେଳରେ ବ୍ୟବହୃତ କୌଶଳର ବିଶ୍ଳେଷଣ :

ମନେକର ସଂଖ୍ୟାଟି abc ଯାହାର ବ୍ୟାପକ ରୂପ $100a + 10b + c$ $(a > c)$ ସଂଖ୍ୟାଟିକୁ ଓଲଟା କ୍ରମରେ ଲେଖିଲେ cba ହେବ । cba ର ବ୍ୟାପକ ରୂପ ହେଲା $100c + 10b + a$ ହେବ ।

ବଡ଼ ସଂଖ୍ୟାରୁ ସାନ ସଂଖ୍ୟା ବିୟୋଗ କଲେ ପାଇବା : $(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a)$

$$= 100a + 10b + c - 100c - 10b - a$$

$$= 100a - a - 100c + c = 99a - 99c = 99\,(a - c)$$

(ଯଦି $c > a$ ହୋଇ ଥାଏ ତେବେ ବିୟୋଗଫଳ $99\,(c - a)$ ହେବ)

ଏଥିରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଜଣାପଡ଼ିଲା ଯେ, ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟର ବିୟୋଗଫଳ "99" ର ଏକ ଗୁଣିତକ । ତେଣୁ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟର ବିୟୋଗଫଳକୁ "99" ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ ଭାଗଶେଷ ରହିଲା ନାହିଁ ।

ଲକ୍ଷ୍ୟ କର :

ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟର ବିୟୋଗଫଳକୁ "99" ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ ଭାଗଫଳ ଶତକ ଏବଂ ଏକକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ ଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତରଫଳ ସହ ସମାନ ହେବ ।

ଉକ୍ତ ଖେଳରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ହେବ ଯେ, ଭାଗ କରିବା ଦ୍ୱାରା ଭାଗଫଳ "6" ଯାହା ଭାବିଥିବା ତିନି ଅଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା "349"ର ଏକକ ଓ ଶତକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ ଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତରଫଳ ସହ ସମାନ ।

ନିଜେ କର

ତୃତୀୟ ଖେଳକୁ ଅନୁସରଣ କରି ନିମ୍ନ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଭାଗଶେଷ ଓ ଭାଗଫଳ କେତେ ରହୁଛି ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ :

(i) 132 (ii) 469 (iii) 543 (iv) 901

ଚତୁର୍ଥ ଖେଳ :

ବର୍ତ୍ତମାନ ଶରତର ପାଳି । ଶରତ ସୁନିତାକୁ ତିନୋଟି ଅଙ୍କ ଭାବିବାକୁ କହିଲା ଏବଂ ନିର୍ଦ୍ଦେଶ ମୁତାବକ କାର୍ଯ୍ୟ କରିବାକୁ କହିଲା ।

ଶରତ

ସୁନିତା

ନିର୍ଦ୍ଦେଶ ସମୂହ :	**ନିର୍ଦ୍ଦେଶ ମୁତାବକ ସୁନିତାର କାର୍ଯ୍ୟ**
(i) ତିନୋଟି ଭିନ୍ନ ଅଙ୍କ ଭାବିବାକୁ କହିଲା ।	(i) 2, 3, ଏବଂ 7
(ii) ଏ ଅଙ୍କ ତ୍ରୟକୁ ନେଇ ତିନୋଟି ତିନି ଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା ଗଠନ କରିବାକୁ କହିଲା; ଯେଉଁଥିରେ ଅଙ୍କଗୁଡ଼ିକ ଗଠିତ ସଂଖ୍ୟାରେ ଥରେ ମାତ୍ର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ସ୍ଥାନ ନେବେ । ଯଥା : ଅଙ୍କତ୍ରୟ ଯଦି a, b, c ହୋଇଥାଏ, ତେବେ abc, cab ଏବଂ bca	(ii) 237, 723, 372
(iii) ସଂଖ୍ୟା ତ୍ରୟର ସମଷ୍ଟି ସ୍ଥିର କରି ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ କହିଲା ।	(iii) 237 + 723 + 372 = 1332
(iv) ସମଷ୍ଟିକୁ 37 ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରିବାକୁ କହିଲା	(iv) $1332 \div 37 = 36$
(v) ଦେଖିବ ସଂଖ୍ୟାତ୍ରୟର ସମଷ୍ଟି କୁ 37 ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ ଭାଗଶେଷ ରହୁନାହିଁ ।	(v) ଭାଗଶେଷ ରହୁ ନାହିଁ ।

ଖେଳରେ ବ୍ୟବହୃତ କୌଶଳର ବିଶ୍ଳେଷଣ :

abc ର ବ୍ୟାପକ ରୂପ $100a + 10b + c$,

cab ର ବ୍ୟାପକ ରୂପ $100c + 10a + b$ ଏବଂ bca ର ବ୍ୟାପକ ରୂପ $100b + 10c + a$ ।

ସଂଖ୍ୟାତ୍ରୟର ସମଷ୍ଟି $= (100a + 10b + c) + (100c + 10a + b) + (100b + 10c + a)$

$$= (100a + 10a + a) + (100b + 10b + b) + (100c + 10c + c)$$

$$= 111a + 111b + 111c = 111(a + b + c) = 37 \times 3(a + b + c)$$

ଏଥିରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଜଣାପଡ଼ିଲା ଯେ, ସଂଖ୍ୟାତ୍ରୟର ସମଷ୍ଟି ସଦାସର୍ବଦା "37" ର ଏକ ଗୁଣିତକ । ତେଣୁ ସଂଖ୍ୟାତ୍ରୟର ସମଷ୍ଟିକୁ 37 ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ ଭାଗଶେଷ ରହିବ ନାହିଁ ।

ଲକ୍ଷ୍ୟକର :

ସଂଖ୍ୟା ତ୍ରୟର ସମଷ୍ଟି କୁ "37" ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ ଭାଗଫଳ, ଭାବିଥିବା ସଂଖ୍ୟାର ଅଙ୍କତ୍ରୟର ସମଷ୍ଟିର 3 ଗୁଣ ସହ ସମାନ ହେବ ।

ଉକ୍ତ ଖେଳରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ହେବ ଯେ, ଭାଗକରିବା ଦ୍ୱାରା ଭାଗଫଳଟି 36; ଯାହା ଅଙ୍କ ତ୍ରୟର ସମଷ୍ଟିର 3 ଗୁଣ ସହ ସମାନ ।

ଦତ୍ତ ସଂରଚନାକୁ ଦେଖ ଏବଂ ମନେରଖ :

$3 \times 37 = 111$	$12 \times 37 = 444$
$6 \times 37 = 222$	$15 \times 37 = 555$
$9 \times 37 = 333$	$18 \times 37 = 666$ ଇତ୍ୟାଦି ।

(ନିଜେ କର)

1. ଚତୁର୍ଥ ଖେଳକୁ ଅନୁସରଣ କରି ନିମ୍ନ ଅଙ୍କଗୁଡ଼ିକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଭାଗଶେଷ ଓ ଭାଗଫଳ କେତେ ରହୁଛି ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ : (i) 4, 1, 7 (ii) 6, 3, 2 (iii) 1, 2, 3 (iv) 9, 3, 7

2. ନିମ୍ନ ସଂରଚନାଗୁଡ଼ିକୁ ଦେଖି ଅତିକମ୍‌ରେ ପରବର୍ତ୍ତୀ ଦୁଇଟି ଧାଡ଼ି ଲେଖ ।

(a)

$$\begin{aligned} 7 \times 9 &= 63 \\ 77 \times 99 &= 7623 \\ 777 \times 999 &= 776223 \\ 7777 \times 9999 &= 77762223 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 2178 \times 4 &= 8712 \\ 21978 \times 4 &= 87912 \\ 219978 \times 4 &= 879912 \\ 2199978 \times 4 &= 8799912 \end{aligned}$$

2.14. ବିଭାଜ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା (Tests of Divisibility) :

ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀରେ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ପ୍ରଭୃତି ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ ପାଇଁ ବିଭାଜ୍ୟତା କିପରି ପରୀକ୍ଷା କରାଯାଏ ତାହା ତୁମେମାନେ ପଢ଼ିଛ, ଅର୍ଥାତ୍ କୌଣସି ସଂଖ୍ୟା ଉକ୍ତ ସଂଖ୍ୟା / ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ କି ନାହିଁ ତୁମେମାନେ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖିସାରିଛ । ଉପରୋକ୍ତ ବିଭାଜ୍ୟତା ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଅଧିକ ଆଲୋଚନା ଏଠାରେ କରିବା ।

2.14.1 ସଂଖ୍ୟା 10 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟତା (Divisibility by 10):

କୌଣସି ସଂଖ୍ୟା '10' ର ଗୁଣିତକ ହେଲେ, ସଂଖ୍ୟାଟି 10 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବ । ଏଥିରେ କୌଣସି ସନ୍ଦେହ ନାହିଁ । ନିମ୍ନ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

10, 20, 30, 40, 50 .....ଆଦି '10' ର ଗୁଣିତକ ଅଟନ୍ତି ଏବଂ ଏମାନଙ୍କର ଏକକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ '0' । ତେଣୁ ଏଥିରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଜଣାଗଲା ଯେ, କୌଣସି ସଂଖ୍ୟାର ଏକକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ "0' ହେଲେ ସଂଖ୍ୟାଟି 10 ର ଗୁଣିତକ ହେବ ଏବଂ ସଂଖ୍ୟାଟି 10 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଉକ୍ତ ବିଭାଜ୍ୟତା ନିୟମ ବୁଝିବାକୁ ଚେଷ୍ଟା କରିବା ।

".....cba' ମନେକର ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟା ।

ଉକ୍ତ ସଂଖ୍ୟାର ବ୍ୟାପକ ରୂପ ..... + 100c + 10b + a ହେବ ।

ଏଠାରେ "a' ଏକକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ, "b" ଦଶକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ ଏବଂ c ଶତକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ ଇତ୍ୟାଦି ।

10, 100 ଇତ୍ୟାଦି 10 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେତୁ 10b ଏବଂ 100c ମଧ୍ୟ 10 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ । କିନ୍ତୁ "a" 10 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବା ଦରକାର । ଏଥିପାଇଁ a = 0 ହେବା ଆବଶ୍ୟକ । ଅର୍ଥାତ୍ ଏକକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ a, 0 ହେଲେ ଦତ୍ତ ସଂଖ୍ୟାଟି "10" ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜିତ ହେବ । ତେଣୁ

10 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟତା ନିୟମଟି ହେଲା –

କୌଣସି ସଂଖ୍ୟାର ଏକକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ 0 ହୋଇଥିଲେ ଦତ୍ତ ସଂଖ୍ୟାଟି 10 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବ ।

(ନିଜେ କର) ନିମ୍ନ ସଂରଚନାକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରି ପରବର୍ତ୍ତୀ ଦୁଇ ଧାଡ଼ି ଲେଖ ।

(a)

$$\begin{aligned} 10 &= 10^1 \\ 10 \times 10 = 100 &= 10^2 \\ 10 \times 10 \times 10 = 1000 &= 10^3 \\ 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000 &= 10^4 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \frac{1}{10} &= 10^{-1} = 0.1 \\ \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} &= 10^{-2} = 0.01 \\ \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} &= 10^{-3} = 0.001 \\ \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} &= 10^{-4} = 0.0001 \end{aligned}$$

2.14.2 ସଂଖ୍ୟା 5 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟତା (Divisibility by 5) :

'5' ର ଗୁଣିତକ ଗୁଡ଼ିକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର । ସେଗୁଡ଼ିକ ହେଲା : 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55......

ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କଲେ ଦେଖିବା ଯେ ଏଗୁଡ଼ିକର ଏକକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ 5 କିମ୍ବା 0 । 5 ଏବଂ 0 ବ୍ୟତୀତ ଅନ୍ୟ କୌଣସି ସଂଖ୍ୟା ନୁହେଁ ।

ତେଣୁ ବିଭାଜ୍ୟତା ନିୟମଟି ହେଲା –

କୌଣସି ସଂଖ୍ୟାର ଏକକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ 0 କିମ୍ବା 5 ହୋଇଥିଲେ ସଂଖ୍ୟାଟି '5' ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଉକ୍ତ ବିଭାଜ୍ୟତା ନିୟମର ଅବତାରଣା କାହିଁକି ? ଆସ ବୁଝିବା ।

ପୂର୍ବ ପରି .... cab ଏକ ସଂଖ୍ୟା । ଯାହାର ବ୍ୟାପକ ରୂପଟି .... 100c + 10b + a । ଏଠାରେ 10b, 100c...... ଇତ୍ୟାଦି 5 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବ । କାରଣ 5 ର ଗୁଣିତକ 10 ଓ 100 । ଦତ୍ତ ସଂଖ୍ୟାଟି '5' ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବାକୁ ହେଲେ a ମଧ୍ୟ 5 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜିତ ହେବା ଦରକାର । ତେଣୁ a ର ମାନ 0 କିମ୍ବା 5 ହେବା ଦରକାର ।

2.14.3. ସଂଖ୍ୟା "2" ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟତା (Divisibility by 2) :

"2" ର ଗୁଣିତକ (ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା) ଗୁଡ଼ିକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

କୌଣସି ସଂଖ୍ୟାର ଏକକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ ଯଦି 0, 2, 4, 6 କିମ୍ବା 8 ହୋଇଥାଏ ତେବେ ସଂଖ୍ୟାଟି "2' ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ । ଅନ୍ୟପ୍ରକାରେ କହିବାକୁ ଗଲେ,

ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ 2 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଉକ୍ତ ବିଭାଜ୍ୟତା ନିୟମର ଅବତାରଣା କରାଯାଉ ।

ପୂର୍ବ ଉଦାହରଣ ପରି .....c b a ଏକ ସଂଖ୍ୟା ତେବେ ଏହାର ବ୍ୟାପକ ରୂପ ....+100c + 10b + a । ପ୍ରଥମ ଦୁଇଟି ପଦ 100c ଏବଂ 10 b ପ୍ରତ୍ୟେକେ 2 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ କାରଣ 100 ଏବଂ 10 '2' ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ । ଏଠାରେ ଦତ୍ତ ସଂଖ୍ୟାଟି "2" ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବ ଯଦି "a' "2' ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବ ।

ଏହା କେବଳ ସମ୍ଭବ ଯଦି a = 0, 2, 4, 6 କିମ୍ବା 8 ହେବ ।

2.14.4 ସଂଖ୍ୟା '9' ଏବଂ '3' ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟତା (Divisibility by 9 and 3) :

10, 5 ଏବଂ 2 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷଣ, ସଂଖ୍ୟାର କେବଳ ଏକକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ ଉପରେ ନିର୍ଭର କରିଥାଏ । ଅର୍ଥାତ୍ 10, 5 ଏବଂ 2 ର ବିଭାଜ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷଣ ପାଇଁ ସଂଖ୍ୟାର ଏକକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କକୁ ଛାଡ଼ି ଅନ୍ୟ ଅଙ୍କ ଗୁଡ଼ିକର ଆବଶ୍ୟକତା ପଡ଼ି ନଥାଏ । କିନ୍ତୁ "9" କିମ୍ବା "3" ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷଣ ପାଇଁ ସଂଖ୍ୟାରେ ଥିବା ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅଙ୍କର ଆବଶ୍ୟକତା ପଡ଼ିଥାଏ । "9" ଏବଂ "3" ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟତା ନିୟମଟିକୁ ମନେ ପକାଅ ।

ବିଭାଜ୍ୟ ନିୟମଟି ହେଲା –

(i) କୌଣସି ସଂଖ୍ୟାର ଅଙ୍କମାନଙ୍କ ସମଷ୍ଟି 9 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟହେଲେ ସଂଖ୍ୟଟି 9 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହୁଏ । ଅନ୍ୟଥା ସଂଖ୍ୟାଟି 9 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବ ନାହିଁ ।

(ii) କୌଣସି ସଂଖ୍ୟାର ଅଙ୍କମାନଙ୍କ ସମଷ୍ଟି 3 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେଲେ ସଂଖ୍ୟାଟି 3 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହୁଏ । ଅନ୍ୟଥା 3 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବ ନାହିଁ ।

ଉକ୍ତ ବିଭାଜ୍ୟତା ସୂତ୍ରର ଅବତାରଣା କାହିଁକି ହୋଇଛି ଆସ ତାହାକୁ ବୁଝିବାକୁ ଚେଷ୍ଟା କରିବା ।

ବିଶ୍ଳେଷଣ : ମନେକର ସଂଖ୍ୟାଟି c b a ।

c b a ସଂଖ୍ୟାର ବ୍ୟାପକ ରୂପ $= 100c + 10b + a$

$= (99c + c) + (9b + b) + a = 99c + 9b + (a + b + c) = 9\,(11c + b) + (a + b + c)$

ଏଠାରେ cba ସଂଖ୍ୟାର ବ୍ୟାପକ ରୂପର ରୂପାନ୍ତରଣରେ ସୃଷ୍ଟି ହୋଇଥିବା 9 (11c + b) ପଦଟି "9" ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ । ଯଦି (a + b + c) ଅର୍ଥାତ୍ ସଂଖ୍ୟାର ଅଙ୍କ ତ୍ରୟର ସମଷ୍ଟି 9 ଦ୍ୱାରା (କିମ୍ବା 3 ଦ୍ୱାରା) ବିଭାଜ୍ୟ ହେବ, ତେବେ "cba" ସଂଖ୍ୟାଟି 9 (କିମ୍ବା 3 ଦ୍ୱାରା) ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବ ।

ଆସ ଏକ ଉଦାହରଣ ମାଧ୍ୟମରେ ଉକ୍ତ ବିଭାଜ୍ୟତାକୁ ବୁଝିବାକୁ ଚେଷ୍ଟାକରିବା ।

ଉଦାହରଣ – 7 : "3573" ସଂଖ୍ୟାଟି "9" ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ କି ନୁହେଁ ପରୀକ୍ଷା କରିବା ।

ସମାଧାନ : 3573 ର ବ୍ୟାପକ ରୂପ $= 3 \times 1000 + 5 \times 100 + 7 \times 10 + 3 \times 1$

$= 3 \times (999 + 1) + 5\,(99 + 1) + 7\,(9 + 1) + 3 \times 1$

$= 3 \times 999 + 5 \times 99 + 7 \times 9 + (3 + 5 + 7 + 3)$

$= 9\,(3 \times 111 + 5 \times 11 + 7) + (3 + 5 + 7 + 3)$

ଏଥିରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଜଣାପଡୁଛି ଯେ, ସଂଖ୍ୟାର ଅଙ୍କଗୁଡ଼ିକର ସମଷ୍ଟି $(3 + 5 + 7 + 3 = 18)$, 9 କିମ୍ବା 3 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ଅର୍ଥାତ୍ 3573, 9 କିମ୍ବା 3 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜିତ ହେବ ।

ଉଦାହରଣ – 8 : 3576 ସଂଖ୍ୟାଟି 9 କିମ୍ବା 3 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା କର ।

ସମାଧାନ : 3576 $= 3 \times 1000 + 5 \times 100 + 7 \times 10 + 6$

$= 3\,(999 + 1) + 5\,(99 + 1) + 7\,(9 + 1) + 6$

$= 3 \times 999 + 5 \times 99 + 7 \times 9 + (3 + 5 + 7 + 6)$

ଏଠାରେ $(3 + 5 + 7 + 6)$ ଅର୍ଥାତ୍ 21 "9" ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ନୁହେଁ କିନ୍ତୁ "3" ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ।

ତେଣୁ ସଂଖ୍ୟା 3576 କେବଳ 3 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ।

ଟୀକା : '9' ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟ '3' ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ । କାରଣ '3'ର '9' ଏକ ଗୁଣିତକ । କିନ୍ତୁ '3' ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ସଂଖ୍ୟା '9' ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ନ ହୋଇ ପାରେ ।

ନିଜେ କର

1. '9' ର ବିଭାଜ୍ୟତା ନିୟମକୁ ଆଧାର କରି ନିମ୍ନ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକର "9" ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟତାକୁ ପରୀକ୍ଷା କର ।
   (i) 108 (ii) 616 (iii) 294 (iv) 432 (v) 927
2. '3' ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜିତ ନିୟମକୁ ଆଧାର କରି ନିମ୍ନ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକର "3" ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟତାକୁ ପରୀକ୍ଷା କର ।
   ନିମ୍ନ ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଗୁଡ଼ିକ ଉଭୟ 3 ଏବଂ 9 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ?
   (i) 117, (ii) 213, (iii) 1735, (iv) 52722, (v) 317424, (vi) 63171423

2.14.5 ସଂଖ୍ୟା '11' ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟତା (Divisibility by 11) :

"11" ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟତା ନିୟମକୁ ମନେପକାଅ ।

ବିଭାଜ୍ୟତା ନିୟମଟି ହେଲା:

କୌଣସି ସଂଖ୍ୟାର ଯୁଗ୍ମ ସ୍ଥାନୀୟ ଏବଂ ଅଯୁଗ୍ମ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ ଗୁଡ଼ିକର ସମଷ୍ଟିର ଅନ୍ତର ଯଦି 11 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହୁଏ, ତେବେ ସଂଖ୍ୟାଟି ମଧ୍ୟ 11 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବ ।

ଉକ୍ତ ନିୟମର ଅବତାରଣାର ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ ସମ୍ପର୍କରେ ଆସ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

(i) ଏକ ତିନି ଅଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା cba ର ସାଧାରଣ ରୂପ $= 100c + 10b + a$

$= 99c + c + 11b - b + a = (99c + 11b) + (c - b + a)$

$= 11\,(9c + b) + (a + c - b)$

ଯଦି cba ସଂଖ୍ୟାଟି "11" ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବ ତେବେ $(a + c - b)$ ସଂପର୍କରେ କ'ଣ କୁହାଯାଇପାରେ ଭାବି ଦେଖ ।

(ii) ମନେକର d c b a ଏକ ଚାରି ଅଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା ।

d c b a ର ବ୍ୟାପକ ରୂପ $= 1000\,d + 100\,c + 10\,b + a$

$= 1001\,d - d + 99\,c + c + 11b - b + a$

$= 1001\,d + 99\,c + 11b + \{(a+c) - (b+d)\} = 11\,(91d + 9c + b) + \{(a+c) - (b+d)\}$

ଯଦି ଦତ୍ତ ସଂଖ୍ୟାଟି 11 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବ ତେବେ $((a+c) - (b+d))$ ସଂପର୍କରେ କ'ଣ କୁହାଯାଇ ପାରେ ଭାବି ଦେଖ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ (i) ଓ (ii) ର ବିଶ୍ଳେଷଣରୁ ପାଇବା – **କୌଣସି ସଂଖ୍ୟାର ଯୁଗ୍ମ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି ଏବଂ ଅଯୁଗ୍ମ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟିର ଅନ୍ତର, 11 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେଲେ, ସଂଖ୍ୟାଟି "11" ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବ ।**

ଉଦାହରଣ – 9 : 1309 ସଂଖ୍ୟାଟି 11 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ କି ନାହିଁ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖିବା ।

ସମାଧାନ : 1309 ସଂଖ୍ୟାର ଯୁଗ୍ମ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି

(ବାମରୁ ଦ୍ୱିତୀୟ ଓ ଚତୁର୍ଥ ସ୍ଥାନର ଅଙ୍କମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି) $=3 + 9 = 12$

ଅଯୁଗ୍ମ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି (ବାମରୁ ପ୍ରଥମ ଓ ତୃତୀୟ ସ୍ଥାନର ଅଙ୍କମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି) $=1+ 0=1$

ଏଠାରେ ପ୍ରାପ୍ତ ସମଷ୍ଟି ଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତରଫଳ $=12-1=11$ ଯାହା 11 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ

$\therefore$ ସଂଖ୍ୟାଟି 11 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ।

ଉଦାହରଣ – 10 : 3521745238 ସଂଖ୍ୟାଟି "11" ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ କି ନାହିଁ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ ।

ସମାଧାନ : 3521745238 ସଂଖ୍ୟାର ଯୁଗ୍ମ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି $(5 + 1 + 4 + 2 + 8) = 20$

ଏବଂ ଅଯୁଗ୍ମ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି $= (3+2+7+5+3) = 20$

ସମଷ୍ଟି ଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତରଫଳ $= 20 - 20 = 0$,

ଯାହା "11" ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ; ତେଣୁ ସଂଖ୍ୟାଟି "11" ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବ ।

ନିଜେ କର

1. '11' ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟତା ନିୟମକୁ ଆଧାର କରି ନିମ୍ନ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକର 11 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟତାକୁ ପରୀକ୍ଷା କର ।

   (i) 1331, (ii) 14641, (iii) 132055, (iv) 2354012, (v) 2573439

2. ନିମ୍ନ ସଂରଚନାଗୁଡ଼ିକୁ ଦେଖି ପରବର୍ତ୍ତୀ ଧାଡ଼ିଟି ଲେଖ ।

$11 = 11$	$1 + 1 = 2^1$
$11 \times 11 = 121$	$1 + 2 + 1 = 2^2$
$11 \times 11 \times 11 = 1331$	$1 + 3 + 3 + 1 = 2^3$

ଟୀକା : (i) ଉତ୍ପନ୍ନ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ଓଲଟାଇ ଲେଖିଲେ ମଧ୍ୟ ସଂଖ୍ୟାଟି ଅପରିବର୍ତ୍ତିତ ରହେ ।

(ii) ଗୁଣଫଳର ଅଙ୍କମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି ଯଥାକ୍ରମେ $2^1, 2^2, 2^3, 2^4$ ... ଇତ୍ୟାଦି ହେବ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 2 (c)

1. ନିମ୍ନ ସଂରଚନାଗୁଡ଼ିକୁ ଦେଖି ପରବର୍ତ୍ତୀ ଦୁଇଟି ଧାଡ଼ି ଲେଖ ।

(a)
$1 \times 9 + 1 = 10$
$12 \times 9 + 2 = 110$
$123 \times 9 + 3 = 1110$

(b)
$1 \times 8 + 1 = 9$
$12 \times 8 + 2 = 98$
$123 \times 8 + 3 = 987$

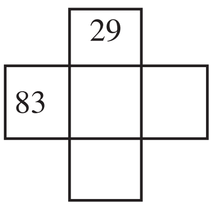
(c)
$6 \times 11 = 66$
$89 \times 101 = 8989$
$706 \times 1001 = 706706$

(d)
$1 + 2 = 3$
$4+5+6 = 7+8$
$9+10+11+12 = 13+14+15$

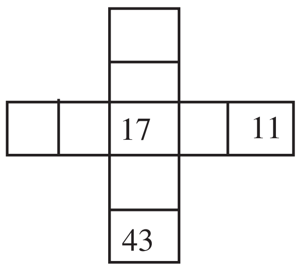
(e)
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

(f)
$2^2 - 1^2 = 2+1 = 3$
$3^2 - 2^2 = 3+2 = 5$
$4^2 - 3^2 = 4+3 = 7$
$5^2 - 4^2 = 5+4 = 9$
$6^2 - 5^2 = 6+5 = 11$

2. ନିମ୍ନ ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ (ଶୂନ୍ୟ ବର୍ଗଚିତ୍ର)ଗୁଡ଼ିକୁ ଦୁଇ ଅଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ପୂରଣ କର ଯେପରିକି ଯେଉଁପଟରୁ ମିଶାଇଲେ (ଉଲ୍ଲମ୍ବ ବା ଭୂ-ସମାନ୍ତର ଭାବେ) ମିଶାଣଫଳ (i) 123 ହେବ (ଚିତ୍ର - 1) ଓ
(ii) 161 ହେବ (ଚିତ୍ର - 2)



(ଚିତ୍ର - 1)



(ଚିତ୍ର - 2)

3. ନିମ୍ନ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅକ୍ଷର ପାଇଁ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ (0 ରୁ 9 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ) ଅଙ୍କ ବାଛ; ଯେପରିକି ଦତ୍ତ ସର୍ତ୍ତଗୁଡ଼ିକର ସତ୍ୟତା ନିରୂପଣ ହୋଇପାରିବ । କେଉଁ ଅକ୍ଷର ପାଇଁ କେଉଁ ଅଙ୍କ ବ୍ୟବହାର କଲ ଲେଖ ।

(i) $xy = yx$

(ii) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$

(iii) $A \times C \times AC = CCC$

(iv) $ABCD \times 9 = DCBA$

(v) $AB + BA = P(A+B)$

(vi) $AB - BA = P(A-B)$ $(A > B)$

(vii) $ABC + BCA + CAB = 111\,(A + B + C)$

(viii) $ABC - CBA = 99\,(A - C)$

ବି.ଦ୍ର. : ଉପରୋକ୍ତ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ସମାଧାନ ପାଇଁ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଭାବେ କୌଣସି ସୂତ୍ର ନାହିଁ । ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀମାନେ ନିଜର ବୋଧଶକ୍ତି ବଳରେ ଉକ୍ତ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ସମାଧାନ କରିପାରିବେ ।

4.(a) ନିମ୍ନସ୍ଥ କେଉଁ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ '2' ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ?

24, 127, 210, 86, 95, 437, 251

(b) ନିମ୍ନସ୍ଥ କେଉଁ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ 5 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ଏବଂ କେଉଁଗୁଡ଼ିକ 2 ଓ 5 ଉଭୟ ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ?

105, 214, 420, 235, 930, 715

(c) ନିମ୍ନସ୍ଥ କେଉଁ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ 3 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ଏବଂ ଏଥି ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁ ଗୁଡ଼ିକ 2 ଓ 3 ଉଭୟ ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ?

78, 403, 504, 917, 235, 216, 774, 804

(d) ନିମ୍ନସ୍ଥ କେଉଁ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ 3 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ କିନ୍ତୁ 9 ଦ୍ୱାରା ନୁହେଁ ?

702, 501, 213, 102, 675, 462

5. ତାରକା (*) ଚିହ୍ନିତ ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ଗୁଡ଼ିକୁ କେଉଁ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ଅଙ୍କଦ୍ୱାରା ପୂରଣ କଲେ ସଂଖ୍ୟାଟି

(i) 3 ଦ୍ୱାରା (ii) 9 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବ ?

(a) 7 *5, (b) 3 * 2, (c) 17*, (d) 14*, (e) 2*2

6. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉକ୍ତିମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟି ବାଛି ଲେଖ ।

(i) 9 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ସଂଖ୍ୟା 3 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବେ ।

(ii) 3 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ସଂଖ୍ୟା 9 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବେ ।

(iii) 3 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ସଂଖ୍ୟା 6 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବେ ।

(iv) 10 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ସଂଖ୍ୟା 5 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବେ ।

(v) 6 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ସଂଖ୍ୟା 2 ଓ 3 ଉଭୟ ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବେ ।

7. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉକ୍ତିମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟି ବାଛି ଲେଖ ।

(i) 710, 10 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ କିନ୍ତୁ 5 ଦ୍ୱାରା ନୁହେଁ ।

(ii) 105, 3 ଓ 5 ଉଭୟ ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ।

(iii) 897, 3 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ନୁହେଁ କିନ୍ତୁ 9 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ।

(iv) 14641 ସଂଖ୍ୟାଟି 11 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ।

(v) 432 ସଂଖ୍ୟାଟି 3, 6 ଓ 9 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ।

*****

ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶ ଓ ଅଭେଦ
(ALGEBRAIC EXPRESSIONS & IDENTITIES)

ଅଧ୍ୟାୟ
3

3.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ପୂର୍ବଶ୍ରେଣୀରେ ତୁମେମାନେ କେତେଗୁଡ଼ିଏ ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶ (Algebraic expression) ସମ୍ବନ୍ଧରେ ପଢ଼ିଛ । ଅର୍ଥାତ୍ ଏମାନଙ୍କର ମଧ୍ୟରେ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକ୍ରିୟା; ଯଥା– ମିଶାଣ, ଫେଡାଣ, ଗୁଣନ ଆଦି କିପରି ସଂଗଠିତ ହୋଇଥାଏ, ତା'ର ଧାରଣା ପାଇସାରିଛ । ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶରେ କେତେଗୁଡ଼ିଏ ଅକ୍ଷର –ସଂକେତ (literals) ବ୍ୟବହୃତ ହୁଏ, ଯେଉଁଗୁଡ଼ିକୁ **ଚଳରାଶି (Variable)** କୁହାଯାଇଥାଏ । କେବଳ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ଚଳରାଶି ଥାଇ ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରେ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକ୍ରିୟା କିପରି ସଂଗଠିତ ହୋଇଥାଏ, ତାହା ଜାଣିଛ । ଏହି ପରିପ୍ରକାଶ, ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଠାରୁ କିପରି ଭିନ୍ନ ସେ ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା ଏ ଅଧ୍ୟାୟର ମୁଖ୍ୟ ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ । ଏଥି ସହ ପଲିନୋମିଆଲ୍ କ୍ଷେତ୍ରରେ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକ୍ରିୟା କିପରି ସଂଗଠିତ ହୁଏ ସେ ବିଷୟରେ ମଧ୍ୟ ଆଲୋଚନା ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ କରାଯିବ ।

3.2 ପଲିନୋମିଆଲ୍ (Polynomial) :

ଆକ୍ଷରିକ ସଂକେତ (ଯଥା x, y, z .... a, b, c... ଇତ୍ୟାଦି) ଦ୍ୱାରା ଯେକୌଣସି ପରିପ୍ରକାଶ ମାଧ୍ୟମରେ 'ବୀଜଗାଣିତିକ ତତ୍ତ୍ୱ'କୁ ପରିବେଷଣ କରାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ, "x ଓ y ଦୁଇଟି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ, $x + y$ ମଧ୍ୟ ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ।"

ଏଠାରେ x ଓ y ର ଯେକୌଣସି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ମାନ ପାଇଁ ଉପରୋକ୍ତ ଉକ୍ତିଟି ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ।

ଏଠାରେ "x ଓ y ଦୁଇଟି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା $\Rightarrow x + y$ ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା" । ଏହା ଏକ ବୀଜଗାଣିତିକ ତତ୍ତ୍ୱ ।

'$x + y$' ହେଉଛି ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶ, x ଏବଂ y ହେଉଛି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ପାଇଁ ବ୍ୟବହୃତ ଆକ୍ଷରିକ ସଂକେତ (literal) । ତୁମେ ସପ୍ତମ ଶ୍ରେଣୀରେ ପଢ଼ିଥିବା କେତେଗୁଡ଼ିଏ ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶର ଉଦାହରଣ ହେଲା,

(i) $3x$, (ii) $2x + 3$ (iii) $5x^2 - 2x - 3$, (iv) $x^4 + 3x^2 - 9x + 5$

ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର (a) ଦତ୍ତ ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶ ଗୁଡ଼ିକରେ କେବଳ ଗୋଟିଏ ଚଳରାଶି 'x' ରହିଛି ।

(b) ପରିପ୍ରକାଶଗୁଡ଼ିକରେ ଥିବା ଚଳରାଶି 'x' ର ଘାତ ଅଣରଣାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା । ଅର୍ଥାତ୍ କୌଣସି କ୍ଷେତ୍ରରେ ଘାତଗୁଡ଼ିକ ରଣାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ନୁହେଁ ।

(0, 1, 2, 3...... ଇତ୍ୟାଦିକୁ ଅଣରଣାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା କୁହାଯାଏ । ଉକ୍ତ ସଂଖ୍ୟାସମୂହକୁ ସଂପ୍ରସାରିତ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା କୁହାଯାଏ ।)

(c) (i), (ii), (iii) ଓ (iv) ରେ ଦତ୍ତ ପରିପ୍ରକାଶଗୁଡ଼ିକର ପଦସଂଖ୍ୟା ଯଥାକ୍ରମେ 1, 2, 3 ଏବଂ 4 । ତେଣୁ ସେଗୁଡ଼ିକୁ ଯଥାକ୍ରମେ ଏକପଦ, ଦୁଇପଦ, ତିନି ପଦ ଓ ଚାରିପଦ ବିଶିଷ୍ଟ ବହୁପଦ ରାଶି ବା ପରିପ୍ରକାଶ କହିବା ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଆସ ଦେଖିବା ନିମ୍ନଲିଖିତ ପରିପ୍ରକାଶଗୁଡ଼ିକ, ଉପରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ପରିପ୍ରକାଶଗୁଡ଼ିକଠାରୁ କିପରି ଭିନ୍ନ ?

(1) $6 + 2x^{-2} + x^2$, (2) $x + x^{-1}$, (3) $2x^2 + x^{-\frac{1}{3}} + 4$

ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ଯେ, ପ୍ରତ୍ୟେକ ପରିପ୍ରକାଶରେ କିଛି ରଣାତ୍ମକ ଅଥବା ଭଗ୍ନସଂଖ୍ୟା ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ପଦ ରହିଛି । ଯଥା: (1) ରେ ମଧ୍ୟମ ପଦଟି $2x^{-2}$, (2) ରେ ଦ୍ୱିତୀୟ ପଦଟି x^{-1} ଏବଂ (3)ରେ ମଧ୍ୟମ ପଦଟି $x^{-\frac{1}{3}}$

କିନ୍ତୁ (i), (ii), (iii) ଓ (iv) ପରିପ୍ରକାଶରେ (ବହୁପଦ ରାଶି), ଚଳରାଶି x ର ଘାତାଙ୍କ ରଣାତ୍ମକ ଅଥବା ଭଗ୍ନସଂଖ୍ୟା ନୁହେଁ ।

ତେବେ ଆମେ (1), (2) ଓ (3) ପରିପ୍ରକାଶଗୁଡ଼ିକୁ, (i), (ii), (iii) ଓ (iv) ପରିପ୍ରକାଶଗୁଡ଼ିକଠାରୁ କିପରି ଭିନ୍ନ ଉପାୟରେ ପ୍ରକାଶ କରିପାରିବା ?

ଏଠାରେ ମନେରଖିବା ଯେ, (i), (ii), (iii), (iv) ଏବଂ (1), (2), (3) ଏମାନେ ପ୍ରତ୍ୟେକେ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶ । କିନ୍ତୁ ପୃଥକ୍ କରି ପ୍ରକାଶ କରିବା ନିମନ୍ତେ (i), (ii), (iii) ଓ (iv) ପରିପ୍ରକାଶଗୁଡ଼ିକୁ ଅଲଗା ଭାବରେ ନାମକରଣ କରିବା ଯାହାକୁ **ପଲିନୋମିଆଲ୍** କହିବା ।

ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ସଂଜ୍ଞା ପ୍ରକରଣ କରିବା ।

ସଂଜ୍ଞା : ଯେଉଁ ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶଗୁଡ଼ିକରେ ଚଳରାଶିର ଘାତାଙ୍କ ଅଣରଣାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା, ସେଗୁଡ଼ିକୁ ପଲିନୋମିଆଲ୍ (Polynomial) କୁହାଯାଏ ।

ଲକ୍ଷ୍ୟକର ନିମ୍ନ ଦତ୍ତ ଉଦାହରଣ ଗୁଡ଼ିକର କେବଳ ଏକ ମାତ୍ର ଚଳରାଶି 'x' ରହିଛି । ଏଗୁଡ଼ିକୁ 'x'ରେ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ପଲିନୋମିଆଲ୍ କୁହାଯାଏ । (i) $3x$, (ii) $2x + 3$ (iii) $5x^2 - 2x - 3$, (iv) $x^4 + 3x^2 - 9x + 5$

ବି.ଦ୍ର. : ଏକ ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଆଲୋଚନା କେବଳ ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ କରାଯିବ ।

3.2.1 ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଘାତ :

ପଲିନୋମିଆଲରେ ଥିବା ଚଳରାଶି (x ର) ଉଚ୍ଚତମ ଘାତାଙ୍କକୁ ଦତ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲର ଘାତ କୁହାଯାଏ । ପ୍ରକାଶ ଥାଉକି ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଉଚ୍ଚତମ ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ପଦର ସହଗ ଅଣଶୂନ୍ୟ ହେବା ଆବଶ୍ୟକ ।

ଲକ୍ଷ୍ୟ କର : (i) ଓ (ii) ପଲିନୋମିଆଲର ଘାତ 1 ଥିବା ବେଳେ, (iii) ଓ (iv) ରେ ଦତ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଘାତ ଯଥାକ୍ରମେ 2 ଓ 4 ।

ନିଜେ କର

1. $x+1$ ଏକ ଏକଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ । ଏହାକୁ $0.x^2+x+1$ ଆକାରରେ ଲେଖିଲେ ଏହାର ଘାତ କେତେ ହେବ ?
2. $x^2 + x + 1$ କୁ $0.x^3 + x^2 + x + 1$ ଆକାରରେ ଲେଖିଲେ ଏହା ଏକ ତିନିଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ହେବ କି ?

ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

ଉଦାହରଣ –1 : ନିମ୍ନ ପଲିନୋମିଆଲ୍ମାନଙ୍କର ଘାତ ସ୍ଥିର କର ।

(i) $5x^2 + 13x - 9$, (ii) $y^3 + 17y$, (iii) $2p + 3$, (iv) -5

ସମାଧାନ : (i) $5x^2 + 13x - 9$ ର ଘାତ 2 ।

ତେଣୁ ଏହାକୁ ଏକ **ଦ୍ୱିଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍ (Second degree Polynomial)** କୁହାଯାଏ ।

(ii) $y^3 + 17y$ ର ଘାତ 3 । ତେଣୁ ଏହାକୁ ଏକ **ତ୍ରିଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍ (Third degree Polynomial)** କୁହାଯାଏ ।

(iii) $2p + 3$ ର ଘାତ 1 । ତେଣୁ ଏହାକୁ **ଏକଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍ (First degree ଅଥବା Linear Polynomial)** କୁହାଯାଏ ।

(iv) -5 ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ୍ । କାରଣ ଏହା $-5x^0$ ଆକାରରେ ପ୍ରକାଶିତ ହୋଇ ପାରିବ ।

ସୁତରାଂ -5 ଏକ **ଶୂନଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍** ।

ଟୀକା :– (1) ଯେକୌଣସି ଅଣଶୂନ୍ୟ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଏକ '0' ଘାତ ବିଶିଷ୍ଟ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ହୋଇପାରିବ । ଏହାକୁ **ଧ୍ରୁବ ପଲିନୋମିଆଲ୍ (Constant Polynomial)** କୁହାଯାଏ ।

(2) ସଂକ୍ଷେପରେ ଦୁଇଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌କୁ Quadratic Polynomial, ତିନିଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌କୁ Cubic Polynomial ଏବଂ ଚାରିଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌କୁ Biquadratic ଅଥବା Quartic Polynomial କୁହାଯାଏ ।

3.2.2 ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ପଦ :

ପଲିନୋମିଆଲର ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଦକୁ ମନୋମିଆଲ୍ (Monomial) କୁହାଯାଏ ।

ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଯଦି ଏକପଦୀ ହୋଇଥାଏ ତେବେ ଏହାକୁ ମନୋମିଆଲ୍ କୁହାଯାଏ ।

ସେହିପରି ପଲିନୋମିଆଲ୍, ଦୁଇଟି ମନୋମିଆଲ୍‌କୁ ନେଇ ଗଠିତ ହୋଇଥିଲେ, ତାକୁ ଦ୍ୱିପଦୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍ (Binomial) କୁହାଯାଏ ଏବଂ ତିନି ସଂଖ୍ୟକ ମନୋମିଆଲ୍ ଠାରୁ ଅଧିକ ଥିଲେ, ଆମେ କେବଳ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ବୋଲି କହିବା ।

3.2.3 ମନୋମିଆଲ୍‌ର ସହଗ :

$x^2 - 2x - 3$ ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ୍ । ଏହାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଦ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ମନୋମିଆଲ୍ । ପଦଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟ କେତେକ ଉତ୍ପାଦକ (Factor)ର ଗୁଣଫଳ ହୋଇପାରେ । **କୌଣସି ପଦର ସାଂଖ୍ୟିକ ଉତ୍ପାଦକଟିକୁ ଉକ୍ତ ପଦର ସହଗ କୁହାଯାଏ ।** ଏଠାରେ $x^2 = 1 \times x^2$ ଏବଂ $-2x = -2 \times x$ ତେଣୁ x^2ର ସାଂଖ୍ୟିକ ସହଗ 1 ଏବଂ $-2x$ର ସାଂଖ୍ୟିକ ସହଗ -2 । ଦତ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ତୃତୀୟପଦ -3 ।

$-3 = -3 \times x^0$ ହେତୁ -3, x^0ର ସହଗ ବା -3 ଏକ ଧ୍ରୁବକ ବୋଲି କହିପାରିବା ।

ନିଜେ କର

1. $2x - 5$ ଓ $3x^2 - 2x + 7$ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ରେ ଥିବା ପଦଗୁଡ଼ିକର ସହଗଗୁଡ଼ିକୁ ସ୍ଥିର କର ।

2. ଦୁଇଟି ଲେଖାଏଁ ଦ୍ୱିପଦୀ ଏବଂ ତ୍ରିପଦୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ନେଇ, ସେମାନଙ୍କର ପଦସଂଖ୍ୟା, ଘାତ ଏବଂ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଦର ସାଂଖ୍ୟିକ ସହଗଗୁଡ଼ିକୁ ଲେଖ ।

3.2.4. ସଦୃଶ ପଦ (Like Monomials) :

ଯଦି ଏକ ଚଳରାଶି ଦ୍ୱାରା ଗଠିତ ଦୁଇଟି ମନୋମିଆଲ୍ ବା ଏକାଧିକ ମନୋମିଆଲ୍ ସମାନ ଘାତ ବିଶିଷ୍ଟ ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ ସେମାନଙ୍କୁ ସଦୃଶ ମନୋମିଆଲ ବା ସଦୃଶ ପଦ କୁହାଯାଏ । ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ $2x$, $9x$, $-5x$ ଇତ୍ୟାଦି ସଦୃଶ ମନୋମିଆଲ୍ ।

ସେହିପରି $-3x^2$, x^2, $7x^2$ ଇତ୍ୟାଦି ମଧ୍ୟ ସଦୃଶ ମନୋମିଆଲ୍ ଅଟନ୍ତି । ମାତ୍ର $2x$, $3y$, $5z$, ଇତ୍ୟାଦି ସଦୃଶ ପଦ ନୁହଁନ୍ତି ।

ଟୀକା :(1) ଆମର ଆଲୋଚନା କେବଳ ଏକ ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ପଲିନୋମିଆଲ୍ କ୍ଷେତ୍ରରେ ସୀମିତ ରହିବ ।

(2) ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଚଳରାଶି କହିଲେ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିକୁ ବୁଝିବ ।

3.3 ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଯୋଗ :

ସଦୃଶ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଯୋଗ :

ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣକୁ ଦେଖ ।

(i) $2x + 3x = (2 + 3)x = 5x$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମର ପ୍ରୟୋଗ)

(ii) $\frac{2x^2}{5} + 3x^2 = \left(\frac{2}{5} + 3\right)x^2 = \frac{17}{5}x^2$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମର ପ୍ରୟୋଗ)

ଯୋଗ ସମ୍ବନ୍ଧରେ କେତୋଟି ଜାଣିବା କଥା :

(i) ବଣ୍ଟନ ନିୟମ ବ୍ୟବହାର କରି ସଦୃଶ ପଦମାନଙ୍କର ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଏ । (ଉପର ଉଦାହରଣକୁ ଦେଖ)

(ii) ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ଲାଗି ସଦୃଶ ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ଏକାଠି କରି ଯୋଗ କରାଯାଏ ।

(iii) ଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟାର ସୁବିଧା ଲାଗି ପ୍ରଥମେ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ପଦଗୁଡ଼ିକ ଚଳରାଶିର ଘାତ ଅନୁଯାୟୀ (ଅଧଃକ୍ରମ ବା ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱକ୍ରମ) ଲେଖାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ -2 : ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର: $(7x + 8x^2+10)$ ଏବଂ $(3x^2+4x+30)$

ସମାଧାନ :

(i) ଧାଡ଼ି ପ୍ରଣାଳୀ : ଏହି ପ୍ରଣାଳୀରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ବଡ଼ରୁ ସାନ କ୍ରମରେ ଲେଖି ଯୋଗ କରାଯାଏ ।

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଯୋଗଫଳ $= (7x + 8x^2 + 10) + (3x^2 + 4x + 30)$

$= (8x^2 + 7x + 10) + (3x^2 + 4x + 30)$

$= (8x^2 + 3x^2) + (7x + 4x) + (10 + 30)$ (ସଦୃଶ ପଦ ଏକାଠି କରାଗଲା)

$= (8+3)x^2 + (7 + 4)x + (10 + 30)$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ କରାଗଲା)

$= 11x^2 + 11x + 40$

(ii) ସ୍ତମ୍ଭ ପ୍ରଣାଳୀ : ଏହି ପ୍ରଣାଳୀରେ ଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟାକୁ ଧାଡ଼ିରେ ନ ଲେଖି ସ୍ତମ୍ଭ ଆକାରରେ ଲେଖି ଯୋଗ କରାଯାଏ ।

ପ୍ରଥମ : $8x^2 + 7x + 10$

ଦ୍ୱିତୀୟ : $3x^2 + 4x + 30$

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଯୋଗଫଳ $= (8+3)\, x^2 + (7+4)x + (10 + 30) = 11x^2 + 11x + 40$

ଉଦାହରଣ-3 : ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : $(2x^2-3+5x),(6-2x-x^2)$ ଏବଂ $(5x+3x^2-4)$

ସମାଧାନ : (ଧାଡ଼ି ପ୍ରଣାଳୀ)

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଯୋଗଫଳ $= (2x^2-3+5x) + (6-2x-x^2) + (5x+3x^2-4)$

$= (2x^2+5x-3) + (-x^2-2x+6) + (3x^2+5x-4)$

$= (2x^2-x^2+3x^2) + (5x-2x+5x) + (-3+6-4)$

$= (2-1+3)x^2 + (5-2+5)x + (-3+6-4) = 4x^2 + 8x - 1$

ସ୍ତମ୍ଭ ପ୍ରଣାଳୀ : ପ୍ରଥମ : $2x^2+5x-3$

ଦ୍ୱିତୀୟ : $-x^2-2x+6$

ତୃତୀୟ : $3x^2+5x-4$

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଯୋଗଫଳ $= (2-1+3)x^2 + (5-2+5)x + (-3+6-4) = 4x^2 + 8x - 1$

ଉଦାହରଣ-4 : ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

$(3x^3-4x+7), (4-3x^2+8x+4x^3)$ ଏବଂ $(7x^3-2x^2+9)$

ସମାଧାନ : (ଧାଡ଼ି ପ୍ରଣାଳୀ)

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଯୋଗଫଳ $= (3x^3-4x+7)+(4-3x^2+8x+4x^3)+(7x^3-2x^2+9)$

$= (3x^3-4x+7)+(4x^3-3x^2+8x+4)+(7x^3-2x^2+9)$

$= (3x^3+4x^3+7x^3)+(-3x^2-2x^2)+(-4x+8x)+(7+4+9)$

$= (3+4+7)x^3+(-3-2)x^2+(-4+8)x+(7+4+9)$

$= 14x^3-5x^2+4x+20$

ସ୍ତମ୍ଭ ପ୍ରଣାଳୀ : $3x^3-0.x^2-4x+7$ (x^2 ର ସହଗକୁ '0' ନିଆଗଲା)

$4x^3-3x^2+8x+4$

$7x^3-2x^2+0.x+9$ (x ର ସହଗକୁ '0' ନିଆଗଲା)

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଯୋଗଫଳ $= (3+4+7)x^3+(-3-2)x^2+(-4+8)x+(7+4+9)$

$= 14x^3-5x^2+4x+20$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3(a)

1. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(i) $3x+2x = (3+ ....)\ x = ...$

(ii) $5x + 7x = (.... + 7)\ x = ...$

(iii) $-6x + 4x = \{(...) + (...)\}\ x = ...$

(iv) $-2x - 3x = \{(...) + (...)\}x = ...$

(v) $x - 2x = \{(...) + (...)\}x = ...$

2. ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $4x$ ଓ $3x$ (ii) $2x$ ଓ $-3x$ (iii) $-3x^3$ ଓ $-2x^3$ (iv) $-5x^2$ ଓ $2x^2$

(v) $4x$ ଓ -4 (vi) $2x^2+3$ ଓ x^2-1 (vii) x^2+1 ଓ $x-1$ (viii) x^2+3+2x ଓ $x+1$

3. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(i) $3x + 2x = (\quad)$ (ii) $(\quad) + x = 8x$

(iii) $2x + (\quad) = 6x$ (iv) $3x + 4x = 4x + (\quad)$

(v) $2x + 5x = (\quad) + 2x = (\quad)$ (vi) $2x + 5y + z = (\quad)+z = (2x+z) + (\quad)$

4. ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $2x,\ 3x,\ 5x$

(ii) $5x^2,\ x^2,\ 3x^2$

(iii) $2x^3,\ 3x^3,\ 4x^3$

(iv) $3x^2 + 2x$ ଓ x^2+3x

(v) $x^3 + 3$ ଓ $4 - x^2+x$

(vi) $2x^2 + x - 2$ ଓ $x+2$

(vii) $5 - 2x+x^2$ ଓ $x^2+2x - 5$

(viii) $3x - 2 + x^2$ ଓ $x^2+3x - 2$

(ix) $1+ 2x^2 - 3x$ ଓ $2x+3+4x^2$

(x) $2x^2 - 4x - 3$ ଓ $4x+3- 2x^2$

3.4 ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ମାନଙ୍କର ବିୟୋଗ :

ଆମେ ଜାଣିଛେ ଯେ, a ରୁ b ବିୟୋଗ କରିବା ଯାହା a ସହ b ର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ଯୋଗକରିବା ତାହା, ତେଣୁ ଲେଖିବା $a - b = a + (-b)$

ଏହି ପଦ୍ଧତି ଅବଲମ୍ବନ କରି ଆମେ ଦୁଇଟି ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ବିୟୋଗ ଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବା ।

ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣଗୁଡ଼ିକ ଦେଖ ।

ଉଦାହରଣ – 5 : (ଧାଡ଼ି ପ୍ରଣାଳୀ) $(3x^2 - 6x + 17)$ ରୁ $(5x - 3x^2 + 19)$ ର ବିୟୋଗ କର ।

ସମାଧାନ :

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ବିୟୋଗ ଫଳ $= (3x^2 - 6x + 17) - (5x - 3x^2 + 19)$

$$= (3x^2 - 6x + 17) + (3x^2 - 5x - 19)$$
$$= (3x^2 + 3x^2) + (-6x - 5x) + (17-19)$$
$$= (3 + 3)x^2 + (-6 - 5)x + (17-19)$$
$$= 6x^2 - 11x - 2$$

ସ୍ତମ୍ଭ ପ୍ରଣାଳୀ :
$$\begin{array}{rrr} 3x^2 & -\ 6x & +\ 17 \\ -3x^2 & +\ 5x & +\ 19 \\ (+) & (-) & (-) \\ \hline \end{array}$$

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ବିୟୋଗ ଫଳ $= (3 + 3)x^2 + (-6 - 5)x + (17-19) = 6x^2 - 11x - 2$

ଉଦାହରଣ – 6 : $(4x^3 - 2x^2 + 5)$ ରୁ $(2x^3 - 3 - 5x)$ ର ବିୟୋଗ କର ।

ସମାଧାନ :

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ବିୟୋଗ ଫଳ $= (4x^3 - 2x^2 + 5) - (2x^3 - 3 - 5x)$

$$= (4x^3 - 2x^2 + 5) + (-2x^3 + 3 + 5x)$$
$$= (4x^3 - 2x^2 + 5) + (-2x^3 + 5x + 3)$$
$$= (4x^3 - 2x^3) + (-2x^2) + 5x + (5 + 3)$$
$$= (4 - 2)x^3 + (-2x^2) + 5x + (5 + 3)$$
$$= 2x^3 - 2x^2 + 5x + 8$$

ସ୍ତମ୍ଭ ପ୍ରଣାଳୀ : $4x^3 - 2x^2 + 0.x + 5$

$2x^3 + 0.x^2 - 5x - 3$

$(-)\quad(-)\quad(+)\quad(+)$

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ବିୟୋଗଫଳ $= (4-2)x^3 + (-2x^2) + 5x + (5+3)$

$= 2x^3 - 2x^2 + 5x + 8$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3(b)

1. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର :

   (i) $5x - 3x = 5x + (\ ) = \{(\ ) + (\ )\}\ x = (...)$

   (ii) $3x - (-2x) = 3x + (\ ) = \{(\ ) + (\ )\}\ x = (...)$

   (iii) $-2x - 3x = -2x + (\ ) = \{(\ ) + (\ )\}\ x = (...)$

   (iv) $(2+3x) - (3-2x) = (2+3x) + (...) = (2-3) + (3x+...) = (...)+(...)$

   (v) $(x - 4) - (-3x+2) = (x - 4) + (...) = (x+3x) + (...) = ...+...$

2. ବିୟୋଗ କର :

   (i) $12x$ ରୁ $9x$ (ii) $5x$ ରୁ $-3x$ (iii) $-2x$ ରୁ $3x$

   (iv) $-4x$ ରୁ $-6x$ (v) $(x+2)$ ରୁ $(3x+2)$ (vi) 3 ରୁ x^2+x+1

   (vii) $2x^2 - 2x - 2$ ରୁ $x^2 + 2x + 4$

3. ବିୟୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

   (i) $2x^2 + 2x$ ରୁ $2x^2$ (ii) $5x^2+3x$ ରୁ $x^2 + 3x$

   (iii) $2x^2 - 2x$ ରୁ $x^2 + 2x$ (iv) $3x^2 + 3x + 2$ ରୁ $x^2 + 3x - 2$

   (v) $2x^2 - 5x - 1$ ରୁ $x^2 + 5x - 1$ (vi) $4 + 3x + 2x^2 + x^3$ ରୁ $x^3 + 2x^2 - 3x - 4$

   (vii) $2x^3 - 5 - 2x^2 - 10x$ ରୁ $x^3 + 20x - x^2 + 3$

3.5 ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣନ :

(a) ଏକ ମନୋମିଆଲ୍ ସହିତ ଅନ୍ୟ ଏକ ମନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣନ :

ଆମେ ଜାଣିଛେ ଯେ,

$3 \times x = 3x,\quad x \times x = x^2,\quad x \times x^2 = x^3,\quad 2x^2 \times x = 2x^3$ ଇତ୍ୟାଦି ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ନିମ୍ନସ୍ଥ ଗୁଣନ ଗୁଡ଼ିକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର :

(i) $2x \times 3x = (2 \times 3) \times (x \times x) = 6x^2$

(ii) $5x \times 4x^2 = (5 \times 4) \times (x \times x^2) = 20x^3$

(iii) $-7y \times 3y^3 = (-7 \times 3) \times (y \times y^3) = -21y^4$

ଲକ୍ଷ୍ୟ କଲେ ଜାଣିପାରିବ ଯେ,

(i) ଦୁଇଟି ମନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣଫଳ ଏକ ମନୋମିଆଲ୍ ଅଟେ ।

(ii) ଦୁଇଟି ମନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣଫଳର ସହଗ = ପ୍ରଥମ ମନୋମିଆଲ୍‌ର ସହଗ x ଦ୍ୱିତୀୟ ମନୋମିଆଲ୍‌ର ସହଗ

(iii) ତିନି ବା ତତୋଧିକ ମନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣଫଳ ସ୍ଥିର କରିବାକୁ ହେଲେ, ପ୍ରଥମେ ପ୍ରଥମ ଦୁଇଟିର ଗୁଣଫଳ ବାହାର କରାଯାଏ । ତପ୍ରରେ ଉକ୍ତ ଗୁଣଫଳକୁ ତୃତୀୟ ମନୋମିଆଲ୍ ସହିତ ଗୁଣନ କରାଯାଏ ।

ଏହିପରି ପରବର୍ତ୍ତୀ ମନୋମିଆଲ୍‌କୁ ପୂର୍ବବର୍ତ୍ତୀ ଗୁଣଫଳ ସହ ଗୁଣନ କରାଯାଇ ଗୁଣଫଳ ସ୍ଥିର କରାଯାଇପାରେ ।

(iv) ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟାରେ କ୍ରମବିନିମୟୀ ଓ ସହଯୋଗୀ ନିୟମକୁ ମଧ୍ୟ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଇପାରେ ।

(b) ଏକ ମନୋମିଆଲ୍ ସହିତ ଏକ ବାଇନୋମିଆଲ୍ ଓ ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣନ :

$2x$ ଓ $(3x+5)$ ର ଗୁଣଫଳ ସ୍ଥିର କରିବା ।

$2x \times (3x+5) = 2x \times 3x + 2x \times 5$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

$= 6x^2 + 10x$

ସେହିପରି ଅନ୍ୟ ଏକ ଉଦାହରଣ ନେବା ।

$-3y$ ଓ $(6 - 7y)$ ର ଗୁଣଫଳ ସ୍ଥିର କରିବା ।

$-3y \times (6 - 7y) = -3y \times \{6 + (-7y)\} = (-3y) \times 6 + (-3y) \times (-7y) = -18y + 21y^2$

ବଣ୍ଟନ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ କରି ତୁମେମାନେ ଏକ ମନୋମିଆଲ୍ ସହିତ ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣନ କରିପାରିବ ।

ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ : $2x \times (x^2+3x+5)$

$= 2x \times x^2 + 2x \times 3x + 2x \times 5 = 2x^3 + 6x^2 + 10x$

(c) ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ସହିତ ଅନ୍ୟ ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣନ :

ଦୁଇଗୋଟି ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କଲାବେଳେ ଆମେ ବଣ୍ଟନ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ କରିଥାଉ । ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ : $(2x + 1)$ ଏବଂ $(x+3)$ ର ଗୁଣଫଳ ଅର୍ଥାତ୍

$(2x + 1)(x+3) = 2x(x + 3) + 1(x + 3)$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

$= 2x^2 + 6x + x + 3 = 2x^2 + 7x + 3$ (ପୁନଃ ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

ସେହିପରି $(2x^2 + 1)$ ଏବଂ $(x-5)$ର ଗୁଣଫଳ

$= (2x^2 + 1)(x - 5) = 2x^2(x - 5) + 1(x - 5)$

$= 2x^2 \times x + 2x^2 \times (-5) + 1 \times (x) + 1 \times (-5) = 2x^3 - 10x^2 + x - 5$

ଗୁଣନ ପରେ ଗୁଣଫଳରେ ଥିବା ସଦୃଶପଦମାନଙ୍କୁ ଏକତ୍ର କରି ଦିଆଯାଏ ଓ x ର ଘାତାଙ୍କ କ୍ରମରେ ସଜାଇ ଉତ୍ତର ଲେଖାଯାଏ ।

ଟୀକା : ବଣ୍ଟନ ନିୟମ : $a(b+c) = ab + ac$ ବା $(b+c)a = ba + ca = ab + ac$

ମନେରଖ :

(i) ପଲିନୋମିଆଲ୍‌କୁ 0 (ଶୂନ) ଦ୍ୱାରା ଗୁଣିଲେ, ଗୁଣଫଳ ଶୂନ ହୁଏ ।

(ii) ପଲିନୋମିଆଲ୍‌କୁ 1 ଦ୍ୱାରା ଗୁଣିଲେ, ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଟି ନିଜେ ଗୁଣଫଳ ହୋଇଥାଏ ।

(iii) ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଆରମ୍ଭ କରିବା ପୂର୍ବରୁ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଗୁଡ଼ିକୁ ଘାତାଙ୍କ କ୍ରମରେ ସଜାଇ ଲେଖାଯାଏ ।

(iv) ବଣ୍ଟନ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ କରି ଗୁଣନ କରାଯାଏ ।

(v) ଗୁଣଫଳର ସଦୃଶ ପଦମାନଙ୍କୁ ସଜାଇ ଏକତ୍ର ଲେଖି ସରଳ କରାଯାଏ ।

(vi) ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟାରେ କ୍ରମବିନିମୟୀ ଓ ସହଯୋଗୀ ନିୟମ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ହୋଇଥାଏ ।

ଉଦାହରଣ-7 : ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : $(x + 4)$ ଏବଂ $(3x - 5)$

ସମାଧାନ : ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଗୁଣଫଳ $= (x + 4)\ (3x-5) = x(3x - 5) + 4(3x - 5)$

$$= x.\,3x + x\,.\,(-5) + 4.3x + 4.\,(-5)$$

$$= 3x^2 - 5x + 12x - 20 = 3x^2 + 7x - 20$$

ଲକ୍ଷ୍ୟ କର **ଦୁଇଟି ଏକଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣଫଳରେ ଏକ ଦ୍ୱିଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ସୃଷ୍ଟି ହୁଏ ।**

ଉଦାହରଣ-8 : $(x+2), (x-1)$ ଏବଂ $(2x-5)$ ର ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

ସମାଧାନ :

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଗୁଣଫଳ $= (x+2)\ (x-1)(2x-5) = \{(x+2) \times (x-1)\} \times (2x-5)$

$$= \{(x+2)x + (x + 2)(-1)\} \times (2x-5) = (x^2 + 2x - x - 2)\ (2x - 5)$$

$$= (x^2 + x - 2)\ (2x - 5) = (x^2 + x - 2)2x + (x^2 + x - 2)\ (-5)$$

$$= 2x^3 + 2x^2 - 4x - 5x^2 - 5x + 10 = 2x^3 + 2x^2 - 5x^2 - 4x - 5x + 10$$

$$= 2x^3 - 3x^2 - 9x + 10$$

ଉଦାହରଣ-9 : ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : $(x^2 + x + 1)$ ଏବଂ $(x^2 - x + 1)$

ସମାଧାନ : ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଗୁଣଫଳ $= (x^2 + x + 1)\ (x^2 - x + 1)$

$$= x^2.\,(x^2 - x + 1) + x.\,(x^2 - x + 1) + 1.\,(x^2 - x + 1)$$

$$= x^2.\,x^2 + x^2\,(-x) + x^2.\,1 + x.\,x^2 + x\,.\,(-x) + x.\,1 + x^2 - x + 1$$

$$= x^4 - x^3 + x^2 + x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1$$

$$= x^4 - x^3 + x^3 + x^2 - x^2 + x^2 + x - x + 1 = x^4 + x^2 + 1$$

ଲକ୍ଷ୍ୟ କର, **ଦୁଇଟି ଦ୍ୱିଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣଫଳ ଏକ ଚାରିଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଅଟେ ।**

ଉଦାହରଣ-10 : ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : $(2x + 5)$ ଏବଂ $(x^2 + 3x - 7)$

ସମାଧାନ :

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଗୁଣଫଳ $= (2x + 5)\ (x^2 + 3x - 7)$

$$= 2x\,.\,(x^2 + 3x - 7) + 5\ (x^2 + 3x - 7)$$

$$= 2x\,.x^2 + 2x\,.3x + 2x\,.(-7) + 5\,.\,x^2 + 5.3x + 5.(-7)$$

$$= 2x^3 + 6x^2 - 14x + 5x^2 + 15x - 35$$

$$= 2x^3 + 6x^2 + 5x^2 - 14x + 15x - 35 = 2x^3 + 11x^2 + x - 35$$

ଅନୁଶୀଳନୀ – 3(c)

1. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର :

   (i) $3 \times 5x = (...)$ (ii) $3x^2 \times 2x^2 = (...)$

   (iii) $2x \times 0 = (...)$ (iv) $3x^3 \times 1 = (...)$

2. ନିମ୍ନ ସାରଣୀଟିକୁ ପୂରଣ କର :

ପ୍ରଥମ ମନୋମିଆଲ୍ → / ଦ୍ୱିତୀୟ ମନୋମିଆଲ୍ ↓	$2x$	$-5x$	$3x^2$	$-4x$	$7x^2$	$9x^3$
$2x$					$14x^3$	
$-5x$			$-15x^3$			
$3x^2$						
$-4x$		$20x^2$				
$7x^3$						
$-9x^2$						

3. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର :

   (i) $3 \times (2x - 7) = 3 \times 2x + 3 \times (.........)$

   (ii) $(-2) \times (3x + 1) = (-2) \times 3x + (-2) \times (.........)$

   (iii) $(2x - 6) \times (-x) = 2x \times (.........) + (.........)(-x)$

   (iv) $(-3x^2)(2x + 4) = (.........) \times 2x + (-3x^2) \times (.........)$

4. ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

   (i) $(x-1) \times (x+1)$ (ii) $(x-1) \times (x^2 + x + 1)$ (iii) $(x+1) \times (x^2 - x + 1)$

   (iv) $(2x+1) \times (x-2)$ (v) $(2x+3) \times (x^2 - 2x + 5)$ (vi) $(-x-3) \times (x^2 - 5x - 2)$

   (vii) $(x^2+1) \times (x^2 - 1)$ (viii) $(x^2+1) \times (2x^2 - x + 1)$ (ix) $(x^2 - 1) \times (x^2 + x + 1)$

3.6 ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଭାଗକ୍ରିୟା :

ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟା ସହ ତୁମେ ଅଭ୍ୟସ୍ତ । ତେଣୁ କୁହ $20x \div 5$ ଭାଗକ୍ରିୟାର ଭାଗଫଳ ଆମେ କିପରି ପାଇବା ?
ତେଣୁ ଆମକୁ ପ୍ରଥମେ ସ୍ଥିର କରିବାକୁ ହେବ ଯେ $5 \times$ (କେତେ ?) $= 20x$

ତେଣୁ ତୁମେ ସହଜରେ ଜାଣିପାରିବ ଯେ $5 \times (4x) = 20x$ $\therefore\ 20x \div 5 = \frac{20x}{5} = 4x$

ନିଜେ କର ନିମ୍ନସ୍ଥ ସାରଣୀଟି ପୂରଣ କର ।

$2x \times 7 =$ ___	___ $\times 7 = 14x$	$\frac{14x}{7} =$ ___
$3x \times 8 =$ ___	___ $\times 8 = 24x$	$\frac{24x}{8} =$ ___
$4x \times 6 =$ ___	___ $\times 6 = 24x$	$\frac{24x}{6} =$ ___
$x \times a =$ ___	___ $\times a = ax$	$\frac{ax}{a} =$ ___, $a \neq 0$

(a) ଶୂନଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍ (ଧ୍ରୁବରାଶି) ଭାଜକ ଦ୍ୱାରା ଭାଗକ୍ରିୟାର କେତେକ ଉଦାହରଣ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଗଲା ।

(i) $10x \div 5 = \frac{10x}{5} = 2x$

(ii) $(21x + 7) \div 7 = \frac{21x+7}{7} = \frac{21x}{7} + \frac{7}{7} = 3x+1$

ମନେରଖ : ଯଦି $c \neq 0$ ହୁଏ, ତେବେ $(ax+b) \div c = \frac{ax+b}{c} = \frac{a}{c}x + \frac{b}{c}$

ଆବଶ୍ୟକତା ଦୃଷ୍ଟିରୁ ସ୍ଥିର କରିବା : $x^2 \div x$ ର ଅର୍ଥ କ'ଣ ?

$x^2 \div x = \frac{x^2}{x} = \frac{x \times x}{x} = x$ $\quad (X \neq O)$

ମନେରଖ : ଯଦି $x \neq 0$ ହୁଏ, ତେବେ $\frac{x}{x} = 1$ ହେବ ।

(b) ବର୍ତ୍ତମାନ ଏକଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍ – ଭାଜକ ଦ୍ୱାରା ଭାଗକ୍ରିୟାର କେତେକ ଉଦାହରଣ ଦେଖ ।

(i) $20x^2 \div 5x = \frac{20x^2}{5x} = \frac{20 \times x \times x}{5x} = 4x$

(ii) $(20x^2 + 10x) \div 5x = \frac{20x^2 + 10x}{5x} = \frac{20x^2}{5x} + \frac{10x}{5x} = 4x + 2$

ଉଦାହରଣ – 11 : ଭାଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : (i) $12x \div 4$ (ii) $15x^2 \div 5$ (iii) $24x^2 \div 8x$

ସମାଧାନ : (i) $12x \div 4$ କେତେ, ଏହା ପାଇବା ଲାଗି ଆମେ ସ୍ଥିର କରିବା :

$4 \times$ (କେତେ ?) $= 12x$

ଆମେ ଜାଣୁ, $4 \times 3 = 12$ $\therefore 4 \times 3x = 12x$ ତେଣୁ $12x \div 4 = 3x$

(ii) $15x^2 \div 5$ କେତେ, ଏହା ପାଇବା ପାଇଁ ଆମେ ସ୍ଥିର କରିବା :

$5 \times$ (କେତେ ?) $= 15x^2$ ଆମେ ଜାଣୁ $5 \times 3 = 15$ ତେଣୁ $5 \times 3x^2 = 15x^2$ $\therefore 15x^2 \div 5 = 3x^2$

(iii) $24x^2 \div 8x =$ କେତେ ସ୍ଥିର କରିବା ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ସ୍ଥିର କରିବା : $8 \times$ (କେତେ ?) $= 24$ ଓ $x \times$ (କେତେ ?) $= x^2$

ଆମେ ଜାଣୁ $8 \times (3) = 24$ ଓ $x \times (x) = x^2$ $\therefore 8x \times 3x = 24x^2$ ତେଣୁ $24x^2 \div 8x = 3x$

ଉଦାହରଣ– 12 : ଭାଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $3x^2 + 9x \div 3x$ (ii) $2x^2 + 6x \div 2x$ (iii) $24x^3 - 16x^2 + 8x \div 4x$

ସମାଧାନ :– (i) $\frac{3x^2 + 9x}{3x} = \frac{3x^2}{3x} + \frac{9x}{3x} = x + 3$

(ii) $\frac{2x^2 + 6x}{2x} = \frac{2x^2}{2x} + \frac{6x}{2x} = x + 3$

(iii) $\frac{24x^3 - 16x^2 + 8x}{4x} = \frac{24x^3}{4x} - \frac{16x^2}{4x} + \frac{8x}{4x} = 6x^2 - 4x + 2$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3(d)

1. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(i) $3 \times (\text{——}) = 12x$ (ii) $2x \times (\text{——}) = 12x^2$

(iii) $4 \times (\text{——}) = -16x^2$ (iv) $-3x \times (\text{——}) = 15x^2$

ଭାଗଫଳ ସ୍ଥିର କର ।

2. (i) $8x \div 4$ (ii) $8x \div (-4)$ (iii) $(-8x) \div 4$ (iv) $(-8x) \div (-4)$

3. (i) $21x^2 \div 3$ (ii) $-21x^2 \div 3x$ (iii) $21x^2 \div (-7x)$

(iv) $21x^2 \div 3x^2$ (v) $21x^2 \div (-3x^2)$

4. (i) $(15x^2 + 10) \div 5$ (ii) $(16x^2 - 12) \div 4$

(iii) $(24x^2 - 8x+12) \div 4$ (iv) $(20x^2 + 15x) \div 5x$

(v) $(24x^2 + 20x) \div 4x$ (vi) $(48x^2 - 44x) \div (-4x)$

3.7 ବିସ୍ତୃତ ପ୍ରଣାଳୀରେ ଭାଗକ୍ରିୟା:

ମନେକର ଆମେ $12x^2 + 9x$ କୁ $3x$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରିବା ।

ଏଠାରେ ଭାଜ୍ୟ $= 12x^2 + 9x$, ଭାଜକ $= 3x$

ଭାଜକ 3xକୁ ଯେଉଁ ରାଶିରେ ଗୁଣିଲେ ଭାଜ୍ୟର ପ୍ରଥମ ପଦ $12x^2$ ମିଳିବ, ତାହା ଭାଗଫଳର ପ୍ରଥମ ପଦ ହେବ । ଭାଜକ 3x କୁ ଯେଉଁ ରାଶିରେ ଗୁଣିଲେ ଭାଜ୍ୟର ଦ୍ୱିତୀୟ ପଦ 9x ମିଳିବ, ତାହାହେବ ଭାଗଫଳର ଦ୍ୱିତୀୟ ପଦ ।

ଆମେ ନିମ୍ନମତେ ପ୍ରକ୍ରିୟାଟି ଦେଖାଇବା ।

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x + 3 \\
\hline
3x & 12x^2 + 9x \\
 & 12x^2 \\
 & (-) \\
\hline
 & \quad + 9x \\
 & \quad + 9x \\
 & \quad (-) \\
\hline
 & \quad 0
\end{array}
$$

ଏକାଧିକ ପଦବିଶିଷ୍ଟ ପଲିନୋମିଆଲ୍– ଭାଜକ ଦ୍ୱାରା ଭାଗକ୍ରିୟା

ଏକାଧିକ ପଦବିଶିଷ୍ଟ ପଲିନୋମିଆଲ୍ – ଭାଜକ ଦ୍ୱାରା ଭାଗକ୍ରିୟାର ବିଭିନ୍ନ ସୋପାନ ଓ କେତେକ ଉଦାହରଣ ନିମ୍ନରେ ଦେଖ ।

ଭାଗକ୍ରିୟାର ବିଭିନ୍ନ ସୋପାନ :

(i) ଏକାଧିକ ପଦବିଶିଷ୍ଟ ପଲିନୋମିଆଲ୍ – ଭାଜକ ଦ୍ୱାରା ଭାଗକ୍ରିୟା ସମୟରେ ପ୍ରଥମେ ଭାଜ୍ୟ ଓ ଭାଜକ ଉଭୟର ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ବଡ଼ରୁ ସାନ (ବା ସାନରୁ ବଡ଼) ଘାତ କ୍ରମରେ ସଜାଇବା ଆବଶ୍ୟକ ।

(ii) ଭାଜକ ଏକାଧିକ ପଦବିଶିଷ୍ଟ ହେଲେ ମଧ୍ୟ ଭାଜ୍ୟର ପ୍ରଥମ ପଦକୁ ଭାଜକର ପ୍ରଥମ ପଦ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରି ଭାଗଫଳର ପ୍ରଥମ ପଦ ସ୍ଥିର କରାଯାଏ ।

(iii) ଭାଜକ ଓ ଭାଗଫଳର ପ୍ରଥମ ପଦର ଗୁଣଫଳକୁ ଭାଜ୍ୟରୁ ବିୟୋଗ କରାଯାଏ ।

(iv) ନିର୍ଣ୍ଣିତ ବିୟୋଗଫଳକୁ ପରବର୍ତ୍ତୀ ପର୍ଯ୍ୟାୟରେ ଭାଜ୍ୟ ରୂପେ ନିଆଯାଏ । ପୁନଶ୍ଚ ଏହି ଭାଜ୍ୟର ପ୍ରଥମ ପଦକୁ ଭାଜକର ପ୍ରଥମ ପଦଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରାଯାଇ ଭାଗଫଳର ଦ୍ୱିତୀୟ ପଦ ସ୍ଥିର କରାଯାଏ ।

ଏହିପରି ଭାବରେ ଭାଗଶେଷ 0 ହେବା ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ପ୍ରକ୍ରିୟା ସମ୍ପାଦନ କରାଯାଇ ଭାଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ – 13 : ଭାଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର: $(x^3 + x^2 + x + 6) \div (x + 2)$

ସମାଧାନ :

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 - x + 3 \\ \hline
x+2 & x^3 + x^2 + x + 6 \\
 & x^3 + 2x^2 \\
 & (-)\ (-) \\ \hline
 & \quad -x^2 + x + 6 \\
 & \quad -x^2 - 2x \\
 & \quad (+)\ \ (+) \\ \hline
 & \qquad 3x + 6 \\
 & \qquad 3x + 6 \\
 & \qquad (-)\ (-) \\ \hline
 & \qquad\quad 0
\end{array}$$

ଟୀକା :- ଯେଉଁ ପର୍ଯ୍ୟାୟରେ ବିୟୋଗଫଳର ଘାତ, ଭାଜକର ଘାତ ଠାରୁ କମ୍ ହେବ , ସେହି ପର୍ଯ୍ୟାୟରେ ଭାଗକ୍ରିୟା ଶେଷ ହେବ ଏବଂ ପ୍ରାପ୍ତ ବିୟୋଗଫଳ ହେବ ଭାଗଶେଷ ।

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଭାଗଫଳ $= x^2 - x + 3$

ଦତ୍ତ ଭାଗକ୍ରିୟା ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ସୂଚନା :

ପ୍ରଥମ ସୋପାନ : ଭାଜ୍ୟର ପ୍ରଥମ ପଦକୁ ଭାଜକର ପ୍ରଥମ ପଦରେ ଭାଗକଲେ ଭାଗଫଳ x^2 ହେଲା ।

$\therefore$ ଭାଗଫଳର ପ୍ରଥମ ପଦ $= x^2$

ନିର୍ଣ୍ଣିତ ଭାଗଫଳ x^2 ଓ ଭାଜକର ଗୁଣଫଳକୁ ଭାଜ୍ୟରୁ ବିୟୋଗ କରାଗଲା ।

ଦ୍ୱିତୀୟ ସୋପାନ : ଉପରିସ୍ଥ ବିୟୋଗଫଳ ଏହି ପର୍ଯ୍ୟାୟରେ ଭାଜ୍ୟ ହେଲା ।

ଏହି ଭାଜ୍ୟର ପ୍ରଥମପଦକୁ ଭାଜକର ପ୍ରଥମପଦ ଦ୍ୱାରା ଭାଗକରି ମିଳିଥିବା ଭାଗଫଳ ହେଲା $(-x)$ ।

$\therefore$ ଭାଗଫଳର ଦ୍ୱିତୀୟ ପଦ $= -x$

ଏହି ସୋପାନର ନିର୍ଣ୍ଣିତ ଭାଗଫଳ ଓ ଭାଜକର ଗୁଣଫଳକୁ ଭାଜ୍ୟରୁ ବିୟୋଗ କରାଗଲା ।

ତୃତୀୟ ସୋପାନ : ଉପରିସ୍ଥ ବିୟୋଗଫଳ ଏହି ପର୍ଯ୍ୟାୟରେ ଭାଜ୍ୟ ହେଲା ।

ଏହି ଭାଜ୍ୟର ପ୍ରଥମ ପଦକୁ ଭାଜକର ପ୍ରଥମ ପଦ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ ଭାଗଫଳ ହେଲା 3 ।

$\therefore$ ଭାଗଫଳର ତୃତୀୟ ପଦ $= +3$

ଏହି ପର୍ଯ୍ୟାୟରେ ମିଳିଥିବା ଭାଗଫଳ ଓ ଭାଜକର ଗୁଣଫଳକୁ ଭାଜ୍ୟରୁ ବିୟୋଗ କରାଗଲା ।

ବିୟୋଗଫଳ (ଅର୍ଥାତ୍ ଭାଗଶେଷ) 0 ହେବାରୁ ଭାଗକ୍ରିୟା ଶେଷ ହେଲା ଏବଂ ଭାଗକ୍ରିୟା ତିନି ସୋପାନରେ ମିଳିଥିବା ଭାଗଫଳ ତ୍ରୟର ସମଷ୍ଟି ନେବାରୁ ଭାଗଫଳ ହେଲା $(x^2 - x + 3)$ ।

ଉଦାହରଣ –14 : ଭାଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : $(-8x^3 + 12x^2 - 6x + 1) \div (2x - 1)$

ସମାଧାନ :

$$
\begin{array}{r|l}
 & -4x^2 + 4x - 1 \\ \hline
2x-1 & -8x^3 + 12x^2 - 6x + 1 \\
 & -8x^3 + 4x^2 \\
 & \;\;(+) \quad (-) \\ \hline
 & \qquad 8x^2 - 6x + 1 \\
 & \qquad 8x^2 - 4x \\
 & \qquad (-) \quad (+) \\ \hline
 & \qquad\qquad -2x + 1 \\
 & \qquad\qquad -2x + 1 \\
 & \qquad\qquad (+) \quad (-) \\ \hline
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଭାଗଫଳ $= -4x^2 + 4x - 1$

ଉଦାହରଣ –15 : ଭାଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : $(x^3 - 5x + 2) \div (x - 2)$

ସମାଧାନ :

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 2x - 1 \\ \hline
x-2 & x^3 \qquad\qquad - 5x + 2 \\
 & x^3 - 2x^2 \\
 & (-) \quad (+) \\ \hline
 & \qquad 2x^2 - 5x + 2 \\
 & \qquad 2x^2 - 4x \\
 & \qquad (-) \quad (+) \\ \hline
 & \qquad\qquad -x + 2 \\
 & \qquad\qquad -x + 2 \\
 & \qquad\qquad (+) \; (-) \\ \hline
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଭାଗଫଳ $= x^2 + 2x - 1$

ଟୀକା : ଲକ୍ଷ୍ୟକର ଯେ, ଭାଜ୍ୟରେ ପଦଗୁଡ଼ିକ ଘାତାଙ୍କର ଅଧଃକ୍ରମରେ ସଜ୍ଜିତ ଅଛନ୍ତି, ମାତ୍ର x^2 ଥିବା କୌଣସି ପଦ ଏଥିରେ ନାହିଁ । ଏଣୁ ଭାଗକ୍ରିୟାରେ ଭାଜ୍ୟ ଲେଖିଲାବେଳେ x^3 ଓ $-5x$ ପଦଦ୍ୱୟ ଲେଖିବା ସମୟରେ ଏହି ପଦଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଗୋଟିଏ ପଦଲାଗି ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ରଖାଯାଇଛି ।

3.7.1. ଭାଗକ୍ରିୟାରେ ଇଉକ୍ଲିଡୀୟ ପଦ୍ଧତି (Euclidean Algorithm) :

ଉପରଲିଖିତ ଉଦାହରଣ ଦୁଇଟିରେ ଭାଗଶେଷ 0 ହେଉଛି । ମାତ୍ର 7 କୁ 2 ରେ ଭାଗକଲେ ଭାଗଶେଷ 0 ହୁଏ ନାହିଁ । ସେହିପରି 9 କୁ 2 ରେ ଭାଗକଲେ ଭାଗଶେଷ ମଧ୍ୟ 0 ହେବ ନାହିଁ । କାରଣ 7 ରୁ 3 ଥର 2 ନେଲା ପରେ 1 ବଳକା ହୁଏ । ଅର୍ଥାତ $7 = 2 \times 3 + 1$

ସାଧାରଣ ଭାବେ କହିଲେ, **ଭାଜ୍ୟ = ଭାଜକ x ଭାଗଫଳ + ଭାଗଶେଷ**

ଏହାକୁ **ଇଉକ୍ଲିଡୀୟ ପଦ୍ଧତି (Euclidean Algorithm)** କୁହାଯାଏ ।

ଗୋଟିଏ ପଲିନୋମିଆଲ୍ – ଭାଜ୍ୟକୁ ଅନ୍ୟ ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ୍ – ଭାଜକ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲା ବେଳେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କଲେ ଜଣାଯିବ ଯେ ଗୋଟିଏ ସୋପାନରୁ ପରବର୍ତ୍ତୀ ସୋପାନକୁ ଭାଜ୍ୟର ଘାତ କ୍ରମଶଃ କମି କମି ଯାଉଛି । ମାତ୍ର ଭାଜକର ଘାତ ସ୍ଥିର ଅଛି । ଏଣୁ ଏକ ସମୟ ଆସିବ ଯେଉଁଠି ଭାଜ୍ୟର ଘାତ ଭାଜକର ଘାତରୁ କମିଯିବ । ଏହି ସମୟରେ ମିଳିଥିବା ରାଶିଟିକୁ ଭାଗଶେଷ କୁହାଯିବ । ଦେଖିବା ଏହ କିପରି ହେଉଛି ।

ଉଦାହରଣ–16 : ଭାଗଫଳ ଓ ଭାଗଶେଷ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର: $(x^2 + 11x + 21) \div (x + 2)$

ସମାଧାନ :

$$\begin{array}{r|l}
 & x + 9 \\ \hline
x + 2 & x^2 + 11x + 21 \\
 & x^2 + 2x \\
 & (-) \quad (-) \\ \hline
 & \qquad 9x + 21 \\
 & \qquad 9x + 18 \\
 & \qquad (-) \ (-) \\ \hline
 & \qquad\qquad 3 \ (\text{ଭାଗଶେଷ})
\end{array}$$

ଲକ୍ଷ୍ୟ କର : ଭାଗଶେଷ 3 ର ଘାତ 0, ଭାଜକ $(x + 2)$ ର ଘାତ (1) ଠାରୁ କମ୍

ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ $x^2 + 11x + 21 = (x + 2)(x + 9) + 3$

ଅର୍ଥାତ୍ ଭାଗକ୍ରିୟାରେ ଭାଗଫଳ = $x+9$, ଭାଗଶେଷ $=3$

ଉଦାହରଣ–17 : ଭାଗଫଳ ଓ ଭାଗଶେଷ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର: $(x^3 + 8) \div (x - 2)$

ସମାଧାନ :

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 2x + 4 \\ \hline
x - 2 & x^3 \qquad\qquad\qquad +8 \\
 & x^3 - 2x^2 \\
 & (-) \quad (+) \\ \hline
 & \qquad 2x^2 \qquad\qquad + 8 \\
 & \qquad 2x^2 - 4x \\
 & \qquad (-) \quad (+) \\ \hline
 & \qquad\qquad\qquad 4x + 8 \\
 & \qquad\qquad\qquad 4x - 8 \\
 & \qquad\qquad\qquad (-) \quad (+) \\ \hline
 & \qquad\qquad\qquad\qquad 16 \ (\text{ଭାଗଶେଷ})
\end{array}$$

ଭାଗଫଳ = $x^2 + 2x + 4$, ଭାଗଶେଷ $=16$

ଉଦାହରଣ–18 : ଏକ ଭାଗପ୍ରକ୍ରିୟାରେ ଭାଜ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯଦି,

ଭାଜକ = $x+5$, ଭାଗଫଳ = x^2-1 ଓ ଭାଗଶେଷ = -3

ସମାଧାନ : ଭାଜ୍ୟ = ଭାଜକ x ଭାଗଫଳ + ଭାଗଶେଷ

$$= (x + 5)(x^2 - 1) + (-3) = x(x^2-1) + 5(x^2 - 1) - 3$$

$$= x^3 - x + 5x^2 - 5 - 3 = x^3 + 5x^2 - x - 8$$

ଉଦାହରଣ-19 : ଯଦି $x^2 - 7x + a$, $x - 3$ ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହୁଏ, ତେବେ a ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ :

$$
\begin{array}{r|l}
 & x - 4 \\
\hline
x - 3 & x^2 - 7x + a \\
 & x^2 - 3x \\
 & (-)\ (+) \\
\hline
 & -4x + a \\
 & -4x + 12 \\
 & (+)\ \ (-) \\
\hline
 & a - 12
\end{array}
$$

ଏଠାରେ ଭାଗଶେଷ = $a - 12$

କିନ୍ତୁ ଦତ୍ତ ଅଛି $x^2 - 7x + a$, $x - 3$ ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ, ତେଣୁ ଏଠାରେ $a - 12 = 0$ ହେବ ।

$\therefore$ $a = 12$ ହେବ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ – 3(e)

1. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର :

(i) ଭାଜକ = $2x+1$, ଭାଗଶେଷ $=0$ ଓ ଭାଗଫଳ $=3x$ ହେଲେ ଭାଜ୍ୟ=....(0, $3x$, $2x+1$, $6x^2 + 3x$)

(ii) ଭାଜ୍ୟ = $3x^2$, ଭାଗଶେଷ = 0, ଓ ଭାଗଫଳ = $3x$ ହେଲେ ଭାଜକ = ... (0, $2x$, $3x$, x...)

(iii) ଭାଜ୍ୟ = $6x^3 + 4x + 1$, ଭାଗଶେଷ $=1$ ଓ ଭାଜକ = $2x$ ହେଲେ

ଭାଗଫଳ = ...(1, $2x^2+2$, $3x^2+1$, $3x^2 + 2$)

(iv) ଭାଜକ = $2x^2$, ଭାଜ୍ୟ = $8x^4 + 6x^2 + 1$ ଏବଂ ଭାଗଫଳ = $4x^2+3$ ହେଲେ

ଭାଗଶେଷ =...(0, 1, $4x^2 + 3$, $3x^2 + 4$)

(v) ଭାଜକ = $4x$, ଭାଗଫଳ $=3x+2$ ଓ ଭାଗଶେଷ = 2 ହେଲେ ଭାଜ୍ୟ = ...

(0, $12x^2$, $12x^2 + 8x$, $12x^2 + 8x + 2$)

2. ଭାଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $(x^2 - 11x + 28) \div (x - 4)$

(ii) $(x^2 - 11x + 28) \div (x - 7)$

(iii) $(x^2 + 8x + 15) \div (x + 3)$

(iv) $(x^2 - 1) \div (x + 1)$

(v) $(x^3 + 1) \div (x+1)$

(vi) $(x^3 - 1) \div (x - 1)$

(vii) $(2x^3 - x^2 + x + 1) \div (2x + 1)$

(viii) $(x^3 - 4x^2 + x + 6) \div (-x-1)$

(ix) $(x^3 - 4x^2 + x + 6) \div (x - 3)$

(x) $(5x^2 - 4 + 6x^3) \div (-2 + 3x)$

3. ଭାଗଫଳ ଓ ଭାଗଶେଷ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $(x^2 + 15x + 56) \div (x + 1)$ (ii) $(x^2 - 12x + 30) \div (x - 1)$

(iii) $(-7 - 6x + 4x^2) \div (2x - 1)$ (iv) $(6x + 27x^3 - 9x^2 + 1) \div (3x - 1)$

(v) $(8x^3-1) \div (2x + 1)$ (vi) $(x^3 - 1) \div (-x -1)$

4. a ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) ଯଦି, $x^2 - 5x + a$, $x + 2$ ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ; (ii) ଯଦି, $4x^2 - 6x + a$, $2x -1$ ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ;

(iii) ଯଦି, $6x^2 - 4x + a$, $3x + 1$ ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ।

3.8 ଅଭେଦ (Identity) :

ଆସ ଆମେ ନିମ୍ନ ଗାଣିତିକ ଉକ୍ତିକୁ ପରୀକ୍ଷା କରିବା ।

$(a +1) (a + 2) = a^2 + 3a + 2$... (1)

$a = 10$ ପାଇଁ

ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= (a+1) (a+2)= (10 +1) (10 +2) = 11 \times 12 = 132$

ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ $= a^2 + 3a + 2 = 10^2 + 3 \times 10 + 2$

$= 100 + 30 + 2 = 132$

$\therefore a = 10$ ପାଇଁ (1) ଉକ୍ତିର ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ

ସେହିପରି $a = -5$ ନେଲେ

ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= (a + 1) (a + 2) = (-5+1) (-5 + 2) = (-4) \times (-3) = 12$

ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ $= a^2 + 3a + 2 = (-5)^2 + 3 \times (-5) + 2 = 25 - 15 + 2 = 12$

ଏଠାରେ ମଧ୍ୟ $a = -5$ ପାଇଁ (1) ଉକ୍ତିର ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ

a ର ଆଉ କେତେକ ମୂଲ୍ୟ ନେଇ ଦେଖ । ଦେଖିବ a ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ, (1) ଉକ୍ତିର ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ ହେବ ।

ମନେରଖ : **ଯେଉଁ ଉକ୍ତିଟି ଏଥିରେ ଥିବା ବୀଜଗାଣିତିକ ସଂକେତମାନଙ୍କର ଯେକୌଣସି ମାନ ପାଇଁ ସତ୍ୟ ହୁଏ, ତାହାକୁ ଅଭେଦ କୁହାଯାଏ ।**

ଅତଏବ $(a+ 1) (a+2) = a^2 + 3a + 2$ ଏକ ଅଭେଦ ଅଟେ ।

ଅନ୍ୟ ପକ୍ଷରେ ଅନ୍ୟ ଏକ ଉକ୍ତିକୁ ନିଆଯାଉ । ଉକ୍ତିଟି ହେଲା : $a^2 + 3a + 2 = 132$ ... (2)

ଏହା $a = 10$ ପାଇଁ ସତ୍ୟ ଅଟେ । (ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ)

ମାତ୍ର $a = -5$ କିମ୍ବା $a = 2$ ଇତ୍ୟାଦି ପାଇଁ ସତ୍ୟ ନୁହେଁ । ତେଣୁ (2) ଉକ୍ତିଟି ଅଭେଦ ନୁହେଁ । **ଉକ୍ତିଟି ବୀଜଗାଣିତିକ ସଂକେତର କେବଳ କେତେକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ମାନ ପାଇଁ ସତ୍ୟ ହେଉଥିଲେ ସେହି ଉକ୍ତିଟିକୁ ଆମେ, ଅଭେଦ ନ କହି ସମୀକରଣ କହିବା** । ପରବର୍ତ୍ତୀ ଅଧ୍ୟାୟରେ ସମୀକରଣ ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା କରାଯିବ ।

3.9 କେତେକ ଉପଯୋଗୀ ଅଭେଦ :

(a) ଦୁଇଟି ଦ୍ୱିପଦୀ ପରିପ୍ରକାଶ (Binomial) ର ଗୁଣଫଳରୁ ସୃଷ୍ଟ ନିମ୍ନ ଅଭେଦଗୁଡ଼ିକ ବୀଜଗଣିତର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଉପଯୋଗୀ ଅଭେଦ ।

(i) $\mathbf{(a+b)^2 = (a+b)\,(a+b)}$ (ସଂଜ୍ଞା)

$= a(a+b) + b\,(a+b)$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

$= a^2 + ab + ba + b^2$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

$= a^2 + ab + ab + b^2$ ($\because ab = ba$) (ଗୁଣନର କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମ)

$= a^2 + 2ab + b^2$ $\quad\therefore (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ... (I)

(ii) $\mathbf{(a-b)^2 = (a-b)\,(a-b)}$ (ସଂଜ୍ଞା)

$= a\,(a-b) - b(a-b)$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

$= a^2 - ab - ba + b^2$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

$= a^2 - ab - ab + b^2$ ($\because ab = ba$) (ଗୁଣନର କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମ)

$= a^2 - 2ab + b^2$ $\quad\therefore (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ .....(II)

(iii) $\mathbf{(a+b)\,(a-b) = a\,(a-b) + b\,(a-b)}$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

$= a^2 - ab + ba - b^2$

$= a^2 - ab + ab - b^2$ ($\because ab = ba$)(ଗୁଣନର କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମ)

$= a^2 - b^2$

$\therefore (a+b)\,(a-b) = a^2 - b^2$........ (III)

(iv) $\mathbf{(x+a)\,(x+b) = x\,(x+b) + a\,(x+b)}$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

$= x^2 + xb + ax + ab$ (ପୁନଃ ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

$= x^2 + bx + ax + ab$ (ଗୁଣନର କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମ)

$= x^2 + ax + bx + ab$ (ଯୋଗର କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମ)

$= x^2 + (a + b)\ x + ab$

$\therefore (x+a)\ (x + b) = x^2 + (a+b)\ x + ab$........ (IV)

ଟୀକା : 1. ଅଭେଦ (IV)ରେ $b = -b$ ନେଲେ ପାଇବା,

$(x+a)\ (x - b) = x^2 + (a - b)\ x - ab$

2. ଅଭେଦ (IV)ରେ $a = -a$ ଏବଂ $b = -b$ ନେଲେ ପାଇବା,

$(x-a)\ (x - b) = x^2 - (a+b)\ x + ab$

3. ଅଭେଦ (IV)ରେ $a = -a$ ନେଲେ ପାଇବା,

$(x-a)\ (x + b) = x^2 - (a-b)\ x - ab$

ନିଜେ କର

1. ଅଭେଦ (I) ରେ b ସ୍ଥାନରେ $-b$ ନେଇ ଦେଖ; ଅଭେଦ (II) ମିଳୁଛି କି ?
2. $a = 2, b = 3, x = 5$ ନେଇ, ଅଭେଦ (IV) ର ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା କର ।
3. ଅଭେଦ (IV) ରେ $a = b$ ନେଲେ ତୁମକୁ କ'ଣ ମିଳିବ ?

   ଏହାର କ'ଣ ଅଭେଦ (I) ସହିତ କିଛି ସମ୍ବନ୍ଧ ଅଛି ?
4. ଅଭେଦ (IV) ରେ $a = -c$ ଏବଂ $b = -c$ ନେଲେ କ'ଣ ମିଳିବ ? ଏହାର ଅଭେଦ (II) ସହିତ କ'ଣ ସମ୍ବନ୍ଧ ଅଛି ?
5. ଅଭେଦ (IV) ରେ $b = -a$ ନେଲେ ତୁମେ କ'ଣ ପାଇବ ? ଏହାର ଅଭେଦ (III) ସହିତ କ'ଣ ସମ୍ବନ୍ଧ ଅଛି ?

ଉଦାହରଣ-1: ଅଭେଦ (I) ବ୍ୟବହାର କରି (i) $(2x + 3y)^2$ (ii) $(103)^2$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : (i) $(2x + 3y)^2$

$= (2x)^2 + 2(2x)\ (3y) + (3y)^2$ (ଅଭେଦ (I) ବ୍ୟବହାର କରି)

$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$

(ii) $(103)^2$

$= (100 + 3)^2$

$= (100)^2 + 2 \times 100 \times 3 + 3^2$ (ଅଭେଦ (I) ବ୍ୟବହାର କରି)

$= 10000 + 600 + 9 = 10609$

ଉଦାହରଣ-2: ଅଭେଦ (II) ବ୍ୟବହାର କରି(i) $(4p - 3q)^2$ (ii) $(4.9)^2$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : (i) $(4p - 3q)^2$

$= (4p)^2 - 2(4p)(3q) + (3q)^2 = 16p^2 - 24pq + 9q^2$

(ii) $(4.9)^2$

$= (5.0 - 0.1)^2 = (5.0)^2 - 2(5.0)(0.1) + (0.1)^2$

$= 25.00 - 1.00 + 0.01 = 24.01$

ଉଦାହରଣ-3: ଅଭେଦ (III) ବ୍ୟବହାର କରି

(i) $(3m + 2n)(3m - 2n)$ (ii) $983^2 - 17^2$ (iii) 194×209 ର ସରଳୀକୃତ ମାନ ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ :

(i) $(3m + 2n)(3m - 2n) = (3m)^2 - (2n)^2 = 9m^2 - 4n^2$

(ii) $983^2 - 17^2 = (983 + 17)(983 - 17) = 1000 \times 966 = 966000$

[$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ ଅଭେଦରେ $a = 983$ ଏବଂ $b = 17$ ନେଇ]

(iii) $194 \times 206 = (200 - 6) \times (200 + 6) = 200^2 - 6^2 = 40000 - 36 = 39964$

ଉଦାହରଣ-4: ଅଭେଦ (IV) ପ୍ରୟୋଗରେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $(P + 5)(P + 3)$; (ii) $(a + 2)(a - 4)$; (iii) $(x - 7)(x - 6)$

ସମାଧାନ :- (i) $(P + 5)(P + 3)$

$= P^2 + (5 + 3)P + 5 \times 3 = P^2 + 8P + 15$

(ii) $(a + 2)(a - 4)$

$= a^2 + \{2 + (-4)\}a + 2(-4) = a^2 - 2a - 8$

(iii) $(x - 7)(x - 6)$

$= x^2 + \{(-7) + (-6)\}x + (-7)(-6) = x^2 - 13x + 42$

ଉଦାହରଣ-5: ଅଭେଦ (IV) ପ୍ରୟୋଗରେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) 501×502 (ii) 95×103

ସମାଧାନ :

(i) $501 \times 502 = (500 + 1) \times (500 + 2)$

$= 500^2 + (1 + 2) \times 500 + 1 \times 2$

$= 250000 + 1500 + 2 = 251502$

(ii) $95 \times 103 = (100 - 5) \times (100 + 3)$

$= 100^2 + (-5 + 3) \times 100 + (-5) \times 3$

$= 10000 - 200 - 15 = 9785$

(b) ଦୁଇଟି ତ୍ରିପଦୀ ପରିପ୍ରକାଶ (ପଲିନୋମିଆଲ୍)ର ଗୁଣଫଳରୁ ସୃଷ୍ଟ ଅନ୍ୟ ଏକ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ଅଭେଦ ସଂପର୍କରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

$(a + b + c)^2 = (a + b + c)\ (a + b + c)$ (ସଂଜ୍ଞା)

$= a(a + b + c) + b(a + b + c) + c(a + b + c)$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

$= a^2 + ab + ac + ba + b^2 + bc + ca + cb + c^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + ab + ba + ac + ca + bc + cb$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ ($\because$ $ab = ba$, $bc = cb$ ଏବଂ $ca = ac$)

$\therefore (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ .... (V)

ବିକଳ୍ପ ପ୍ରଣାଳୀ :

ଅଭେଦ (I)ର ପ୍ରୟୋଗରେ ପାଇବା

$(a + b + c)^2 = \{(a + b) + c)\}^2 = (a + b)^2 + 2\ (a + b)c + c^2$ (ଅଭେଦ (I)ର ପ୍ରୟୋଗ)

$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ca + 2bc + c^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

$\therefore (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ .... (V)

ଟୀକା : 1. ଅଭେଦ (V) ରେ $c = -c$ ନେଲେ ପାଇବା,

$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ca$

2. ଅଭେଦ (V) ରେ $b = -b$ ନେଲେ ପାଇବା,

$(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ca$

3. ଅଭେଦ (V) ରେ $b = -b$ ଏବଂ $c = -c$ ନେଲେ ପାଇବା,

$$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ca$$

ଉଦାହରଣ-6 : ନିମ୍ନସ୍ଥ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଗୁଡ଼ିକର ବର୍ଗ ସ୍ଥିର କରିବା ।

(i) $a + 2b + c$ (ii) $x + 2y - 3z$

ସମାଧାନ : (i) $(a + 2b + c)^2 = a^2 + (2b)^2 + c^2 + 2.a.2b + 2.\ 2b.c + 2.c.a$

$$= a^2 + 4b^2 + c^2 + 4ab + 4bc + 2ca$$

(ii) $(x + 2y - 3z)^2 = x^2 + (2y)^2 + (-3z)^2 + 2.x.2y + 2.2y.(-3z) + 2(-3z).x$

$$= x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy - 12yz - 6zx$$

ଉଦାହରଣ-7 : ନିମ୍ନଲିଖିତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଗୁଡ଼ିକୁ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ରାଶିରେ ପରିଣତ କର ।

(i) $a^2 + 8ab + 16b^2$ (ii) $4x^2 - 4x + 1$

(iii) $9x^2 - 12xy + 4y^2$ (iv) $x^2 + 6xy + 9y^2$

(v) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy + 24\ yz + 16\ xz$

(vi) $m^2 + 4n^2 + 25z^2 - 4mn - 20nz + 10\ mz$

ସମାଧାନ :

(i) $a^2 + 8ab + 16b^2 = (a)^2 + 2.\ a.\ 4b + (4b)^2 = (a + 4b)^2$ ଅଭେଦ -(I)

(ii) $4x^2 - 4x + 1 = (2x)^2 - 2.2x.1 + (1)^2 = (2x - 1)^2$ ଅଭେଦ -(II)

(iii) $9x^2 - 12xy + 4y^2 = (3x)^2 - 2.3x.2y + (2y)^2 = (3x - 2y)^2$ ଅଭେଦ -(II)

(iv) $x^2 + 6xy + 9y^2 = (x)^2 + 2.x.3y + (3y)^2 = (x + 3y)^2$ ଅଭେଦ -(I)

(v) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy + 24\ yz + 16\ xz$

$= (2x)^2 + (3y)^2 + (4z)^2 + 2.2x.3y + 2.3y.4z + 2.4z.2x$

$= (2x + 3y + 4z)^2$ ଅଭେଦ -(V)

(vi) $m^2 + 4n^2 + 25z^2 - 4mn - 20nz + 10\ mz$

$= (m)^2 + (2n)^2 + (5z)^2 - 2.m.2n - 2.2n.5z + 2.5zm$

$= (m - 2n + 5z)^2$ ଅଭେଦ -(V), ଟୀକା-(2)

ବିକଳ୍ପ ପ୍ରଣାଳୀ :

$m^2 + 4n^2 + 25z^2 - 4mn - 20nz + 10\ mz$

$= (m)^2 + (-2n)^2 + (5z)^2 + 2.m\ (-2n) + 2.(-2n)\ 5z + 2.5z.m$

$= (m - 2n + 5z)^2$ ଅଭେଦ -(V)

ଅନୁଶୀଳନୀ –3(f)

1. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(i) $(a + 2)^2 = a^2 + (\text{——})\ a + 2^2$ (2, 2a, 4, 4a)

(ii) $(3 + y)^2 = 9 + 3\ (\text{——}) + y^2$ (y, 2y, 3y, 4y)

(iii) $(4 - y)^2 = 16 + 2\ (\text{——}) + y^2$ (–2, –2y, –4, –4y)

(iv) $(2x - 3y)^2 = 4x^2 - 3\ (\text{——}) + 9y^2$ (2xy, 3xy, 4xy, 12xy)

(v) $(x + a)\ (x-b) = x^2 + (\text{——})\ x - ab$ (a+b, a–b, b–a, –(a+b))

2. ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କରି ନିମ୍ନଲିଖିତ ରାଶିର ବର୍ଗ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $b + c$ (ii) $(4 + b)$ (iii) $r - 10$ (iv) $3n + 2$

(v) $2m + n$ (vi) $7p - q$ (vii) $2x + 3y$ (viii) $2m - 3n - P$

(ix) $x - y + 4z$ (x) $a + 2b + 3c$

3. ଆବଶ୍ୟକ ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କରି ନିମ୍ନସ୍ଥ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ବର୍ଗ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) 102 (ii) 304 (iii)1003 (iv) 4001

4. ଆବଶ୍ୟକ ଅଭେଦ ପ୍ରୟୋଗ କରି ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

(i) 99^2 (ii) 998^2 (iii) 297×303 (iv) 78×82

(v) 8.9^2 (vi) 1.05×9.5 (vii) $51^2 - 49^2$ (viii) $(1.02)^2 - (0.98)^2$

(ix) $153^2 - 147^2$

5. $(x + a)\ (x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ ଅଭେଦ ପ୍ରୟୋଗ କରି ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) 103×104 (ii) 5.1×5.2 (iii) 103×98 (iv) 9.7×9.8

6. ଆବଶ୍ୟକ ଅଭେଦ ପ୍ରୟୋଗ କରି ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $(x + 3)(x + 3)$ (ii) $(2y + 5)(2y + 5)$

(iii) $2a - 7(2a - z)$ (iv) $(1.1m - 0.4)(1.1m + 0.4)$

(v) $(a^2 + b^2)(-a^2 + b^2)$ (vi) $(6x - 7)(6x + 7)$

(vii) $(P - 5)(P + 5)$ (viii) $(2x + 3y)(3y - 2x)$

(ix) $(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)$ (x) $(2y + 3)(2y - 3)(4y^2 + 9)$

7. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ ଅଭେଦ ପ୍ରୟୋଗ କରି ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $(x + 3)(x + 7)$ (ii) $(4x + 5)(4x + 1)$

(iii) $(4x - 5)(4x - 1)$ (iv) $(4x + 5)(4x - 1)$

(v) $(2a^2 + 9)(2a^2 + 5)$ (vi) $(xyz - 4)(xyz - 2)$

8. ସରଳ କର ।

(i) $(a^2 - b^2)^2 + (a^2 + b^2)^2$ (ii) $(2x + 5)^2 - (2x - 5)^2$

(iii) $(7m - 8n)^2 + (7m + 8n)^2$ (iv) $(4m + 5n)^2 + (5m + 4n)^2$

(v) $(2.5p - 1.5q)^2 - (1.5p - 2.5q)^2$ (vi) $(ab + bc)^2 - 2ab^2c$

(vii) $(m^2 - n^2m)^2 + 2m^2n^2$ (viii) $(a+b-c)^2 + (a-b-c)^2$

(ix) $(2a-3b-c)^2+(2a-b+5c)^2$ (x) $(3x-4y+z)^2-(x-2y-z)^2$

9. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଗୁଡ଼ିକୁ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗରେ ପରିଣତ କର ।

(i) $4x^2 + 12xy + 9y^2$ (ii) $64m^2 - 48mn + 9n^2$

(iii) $4x^2 - 4x + 1$ (iv) $x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy + 4yz + 2zx$

(v) $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy + 2yz - 4xz$ (vi) $9x^2 + 4y^2 + z^2 - 12xy - 4yz + 6zx$

10. (i) ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$ (ii) ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$

(iii) ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab$ (iv) ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $(2a+b)^2 = (2a-b)^2 = 8ab$

(v) ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $(3x-2y)^2 + 12xy = 9x^2+4y^2$

ସୂଚନା : ଅଭେଦ (I) ଓ ଅଭେଦ (II) ପ୍ରୟୋଗରେ ଉପରୋକ୍ତ ଅଭେଦଗୁଡ଼ିକୁ ପାଇବାକୁ ଚେଷ୍ଟା କର ।

*****

ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ (FACTORISATION)

ଅଧ୍ୟାୟ 4

4.1. ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀମାନଙ୍କରେ ଗଣନସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ଉତ୍ପାଦକ (Factors) ବା ଗୁଣନୀୟକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ଶିଖିଛ ଏବଂ ଏହାର ବ୍ୟବହାରରେ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ଗରିଷ୍ଠ ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ (ଗ.ସା.ଗୁ.) ଏବଂ ଲଘିଷ୍ଠ ସାଧାରଣ ଗୁଣିତକ (ଲ.ସା.ଗୁ.) ନିର୍ଣ୍ଣୟ କିପରି କରାଯାଏ ସେ ବିଷୟରେ ମଧ୍ୟ ଜାଣିଛ । **ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ବା ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟାକୁ କେତେକ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣନୀୟକ ଭାବେ ପରିଣତ କରିବାର ପ୍ରଣାଳୀକୁ ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ କୁହାଯାଏ ।** ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, 30 କୁ ଅନ୍ୟ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ଗୁଣଫଳ ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କଲେ ପାଇବା –

$30 = 1 \times 30 = 2 \times 15 = 3 \times 10 = 5 \times 6 = 2 \times 3 \times 5$

ତେଣୁ 30 ର ଗୁଣନୀୟକ ବା ଉତ୍ପାଦକଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ 1,2, 3, 5, 6, 10, 15 ଓ 30 । ଏହି ଉତ୍ପାଦକଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ 2,3 ଏବଂ 5 ହେଉଛନ୍ତି ମୌଳିକ ଉତ୍ପାଦକ । ଅତଏବ 30 କୁ ମୌଳିକ ଗୁଣନୀୟକ ବା ଉତ୍ପାଦକରେ ପ୍ରକାଶ କଲେ ପାଇବା $30 = 2 \times 3 \times 5$

ଏଠାରେ ମନେରଖିବାକୁ ହେବ ଯେ **କୌଣସି ଯୌଗିକ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଅନନ୍ୟ ଭାବେ କେତେକ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣନୀୟକ ଭାବେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇଥାଏ ।** ଯେପରି $30 = 2 \times 3 \times 5$, $42 = 2 \times 3 \times 7$ ଇତ୍ୟାଦି ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଉକ୍ତ ଅଧ୍ୟାୟରେ ଦୁଇ ବା ଅଧିକ ପଦବିଶିଷ୍ଟ ରାଶିମାନଙ୍କର ବା ପରିପ୍ରକାଶମାନଙ୍କର ଉତ୍ପାଦକ ବିଶ୍ଳେଷଣ ବା ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ନିମିତ୍ତ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରଣାଳୀ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

4.2. ଉତ୍ପାଦକ (Factors) ଏବଂ ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ (Factorisation) :

ଦୁଇ ବା ଅଧିକ ପଦବିଶିଷ୍ଟ ରାଶିମାନଙ୍କର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣର ଆଲୋଚନା ପୂର୍ବରୁ ଆମେ ପ୍ରଥମେ ଗୋଟିଏ ପଦରେ ଥିବା ବିଭିନ୍ନ ଉତ୍ପାଦକ ବା ଗୁଣନୀୟକ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା । ଲକ୍ଷ୍ୟ କର $2a^2bc$ ଗୋଟିଏ ପଦବିଶିଷ୍ଟ ବୀଜଗାଣିତିକ ରାଶି । ଏଠାରେ $2a^2bc = 2 \times a \times a \times b \times c$

ଉକ୍ତ ରାଶି $2a^2bc$ ର 2, a, a, b ଏବଂ c ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଉତ୍ପାଦକ ବା ଗୁଣନୀୟକ ।

ସେହିପରି $5xy = 5 \times x \times y$ ହେତୁ 5, x, y ପ୍ରତ୍ୟେକେ 5xy ରାଶିର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଗୁଣନୀୟକ ।

କୌଣସି ବୀଜଗାଣିତିକ ରାଶି, କେତେକ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା ଓ ଅନ୍ୟ କେତେକ ବୀଜଗାଣିତିକ ରାଶିମାନଙ୍କର ଗୁଣଫଳ ସହ ସମାନ ହେଲେ ଉକ୍ତ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ଉତ୍ପନ୍ନ ରାଶିମାନଙ୍କୁ ଦତ୍ତ ରାଶିର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଉତ୍ପାଦକ କୁହାଯାଏ ।

ଅନ୍ୟ ପକ୍ଷରେ ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ଏକ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଯେଉଁଥିରେ ଆମେ ଦତ୍ତ ବୀଜଗାଣିତିକ ରାଶିକୁ କେବଳ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା ବା ମୌଳିକ ଉତ୍ପାଦକ (ଯାହାକୁ ଅନ୍ୟ ଉତ୍ପାଦକର ଗୁଣଫଳ ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କରିହେବ ନାହିଁ) ମାନଙ୍କର ଗୁଣଫଳ ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କରିପାରିବା ।

4.2.1 ବଣ୍ଟନ ନିୟମ ବ୍ୟବହାର କରି ଉତ୍ପାଦକ ବିଶ୍ଳେଷଣ :

ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ରେ ବଣ୍ଟନ ନିୟମଟି ହେଲା $\mathbf{x(a+b) = xa + xb}$ ।

ଅନ୍ୟ ପ୍ରକାରରେ ଲେଖିଲେ $\mathbf{xa + xb = x (a + b)}$

ଏଠାରେ x(a+b) ପରିପ୍ରକାଶର x ଏକ ଉତ୍ପାଦକ ଓ a+b ଅନ୍ୟ ଏକ ଉତ୍ପାଦକ ।

ବଣ୍ଟନ ନିୟମଟି ଦୁଇରୁ ଅଧିକ ପଦବିଶିଷ୍ଟ ରାଶି ପାଇଁ ମଧ୍ୟ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ । ଯଥା : $xa + xb + xc = x (a + b+c)$

ମନେରଖ : (i) ପଦମାନଙ୍କର କୌଣସି ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ ନ ଥିଲେ ଏ ପ୍ରଣାଳୀ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ହେବ ନାହିଁ ।

(ii) ଦ୍ୱିପଦ, ତ୍ରିପଦ ବା ବହୁପଦବିଶିଷ୍ଟ ରାଶି ମଧ୍ୟ ଗୁଣନୀୟକ ହୋଇପାରେ ।

(iii) ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ, ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟା ବା ବୀଜଗାଣିତିକ ସଂକେତ ଯଥା : a, b, c, x, y, z ପ୍ରଭୃତି ହୋଇପାରେ ।

ଉଦାହରଣ –1 : $2x + 4$ କୁ ଉତ୍ପାଦକରେ ବିଶ୍ଳେଷଣ କର ।

ସମାଧାନ : $2x + 4 = 2 (x + 2)$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

ଉଦାହରଣ –2 : $12 a^2b + 15ab^2$ ର ଉତ୍ପାଦକ ବିଶ୍ଳେଷଣ କର ।

ସମାଧାନ : $12a^2b + 15ab^2 = 3ab (4a + 5b)$

ଏଠାରେ 3ab ଏବଂ 4a + 5b ର ଗୁଣଫଳ $12a^2b + 15 ab^2$ ସହ ସମାନ । ଅତଏବ 3, a, b ଏବଂ (4a+5b) ପ୍ରତ୍ୟେକେ $12a^2b+15ab^2$ ର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଗୁଣନୀୟକ ବା ଉତ୍ପାଦକ ।

ଉଦାହରଣ –3 : $a^2bc + ab^2c + abc^2$ କୁ ଉତ୍ପାଦକରେ ବିଶ୍ଳେଷଣ କର ।

ସମାଧାନ : $a^2bc + ab^2c + abc^2 = a \times b \times c (a + b + c) = abc (a + b + c)$

ଏଠାରେ a, b, c ଏବଂ (a + b + c), $a^2bc + ab^2c + abc^2$ ର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଉତ୍ପାଦକ ଅଟନ୍ତି ।

ଉଦାହରଣ –4 : $14x^4 - 18x^3 + 10x^2$ କୁ ଉତ୍ପାଦକରେ ବିଶ୍ଳେଷଣ କର ।

ସମାଧାନ : $14x^4 - 18x^3 + 10x^2 = 2x^2 (7x^2 - 9x + 5)$

ଉଦାହରଣ –5 : ଉତ୍ପାଦକରେ ବିଶ୍ଳେଷଣ କର ।

(i) $2x (a - b) + 3y (a - b)$ (ii) $2a (x - y) + 5b (y - x)$

ସମାଧାନ : (i) $2x (a - b) + 3y (a - b)$

$= (a - b) (2x + 3y)$ [ଲକ୍ଷ୍ୟ କର: ଏଠାରେ ପଦଦୁଇଟିର ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ $(a - b)$]

(ii) $2a (x - y) + 5b (y - x) = 2a(x - y) + 5b \{-(x-y)\}$

$= 2a (x-y) - 5b (x-y) = (x - y) (2a - 5b)$

[ଲକ୍ଷ୍ୟ କର : $(y - x) = -x+y = -(x-y)$]

ଅନୁଶୀଳନୀ - 4 (a)

ଉତ୍ପାଦକରେ ବିଶ୍ଳେଷଣ କର ।

1. $12x + 36$

2. $8a + 4b$

3. $22y - 33z$

4. $14pq + 35pqr$

5. $10a^2b + 5a$

6. $15a^2bc - 10ab^2c$

7. $8a^3 + 4a^2 + 2a$

8. $30a^3b^3c^3 + 25\, a^5b^3c^6 - 15a^6b^6c^6$

9. $7(2x + 5) + 3 (2x + 5)$

10. $5a (2x + 3y) - 2b (2x + 3y)$

11. $8(5x + 9y)^2 + 12 (5x + 9y)$

12. $9a (6a - 5b) - 12a^2 (6a - 5b)$

13. $5 (x - 2y)^2 + 3 (x - 2y)$

14. $6(a + 2b) - 4(a + 2b)^2$

15. $a(a - 1) + b (a - 1)$

16. $(x - y)^2 + (x - y)$

17. $a (x - y) + 2b (y - x) + c (x - y)$

18. $a (b - c) + b (b - c) + c (b - c)$

19. $x^3 (a - 2b) + x^2 (a - 2b)$

20. $4 (x +y) (3a - b) + 6(x + y) (2b - 3a)$

21. $(2x - 3y) (a + b) + (3x - 2y) (a + b)$

22. $a^2 (x + y) + b^2 (x + y) + x^2 (x + y)$

4.2.2 ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ଦୁଇ ବା ତତୋଽଧିକ ଭାଗରେ ବିଭକ୍ତ କରି ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

(Factorisation by grouping method) :

ଚାରି ବା ଅଧିକ ପଦବିଶିଷ୍ଟ ପରିପ୍ରକାଶମାନଙ୍କର ଉତ୍ପାଦକ ବିଶ୍ଳେଷଣ ଉକ୍ତ ପ୍ରଣାଳୀରେ ହୋଇପାରିବ । ଏଠାରେ ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶକୁ ଏପରି ଦୁଇ ବା ତତୋଧିକ ଭାଗରେ ବିଭକ୍ତ କରାଯିବ ଯେପରି ପ୍ରତ୍ୟେକ ଭାଗରୁ ଗୋଟିଏ ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ ମିଳିବ । ଦରକାର ପଡ଼ିଲେ ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ପୁନଃସଜ୍ଜୀକରଣ କରିବାକୁ ପଡ଼ିବ । ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣଗୁଡ଼ିକୁ ଅନୁଧାନ କର ।

ଉଦାହରଣ –6 : ଉତ୍ପାଦକରେ ବିଶ୍ଳେଷଣ କର :

(i) $ax + by + bx + ay$ (ii) $3m - 6n - am + 2an$

ସମାଧାନ :

ପରିପ୍ରକାଶଟିକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କଲେ ଦେଖାଯିବ ଯେ ଏହାର ସାଧାରଣ ଉତ୍ପାଦକ ନାହିଁ । କିନ୍ତୁ ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ଅନ୍ୟ ପ୍ରକାରରେ ସଜାଇ ଦେଲେ ପରିପ୍ରକାଶଟିର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ସହଜ ହେବ ।

(i) $ax + by + bx + ay = ax + bx + ay + by$

(ଏଠାରେ 'x' ଥିବା ପଦ ଓ 'y' ଥିବା ପଦକୁ ଏକତ୍ର ରଖାଗଲା ।)

$= x(a + b) + y(a + b) = (a + b)(x + y)$

ବିକଳ୍ପ ପ୍ରଣାଳୀ : ପଦ ଚାରୋଟି ମଧ୍ୟରୁ 'a' ପଦଥିବା ଏବଂ 'b' ପଦ ଥିବା ପଦମାନଙ୍କୁ ଏକତ୍ର ଲେଖି ମଧ୍ୟ ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇ ପାରିବ । $ax + by + bx + ay = ax + ay + bx + by = a(x+y) + b(x+y) = (x+y)(a+b)$

(ii) $3m - 6n - am + 2an = 3(m - 2n) - a(m - 2n) = (m - 2n)(3 - a)$

(ଏଠାରେ ପ୍ରଥମ ଓ ତୃତୀୟ ପଦଦ୍ୱୟକୁ ଏବଂ ଦ୍ୱିତୀୟ ଓ ଚତୁର୍ଥ ପଦଦ୍ୱୟକୁ ଦୁଇଟି ଅଲଗା ଅଲଗା ଭାଗରେ ପରିଣତ କରି ଉତ୍ପାଦକ ନିରୂପଣ କରିବାକୁ ଚେଷ୍ଟା କର ।)

ଉଦାହରଣ –7 : ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : (i) $2xy + 3 + 2y + 3x$ (ii) $6xy - 4y + 6 - 9x$

ସମାଧାନ :

(i) $2xy + 3 + 2y + 3x = 2xy + 2y + 3x + 3$

$= 2y(x + 1) + 3(x + 1) = (x + 1)(2y + 3)$

(ii) $6xy - 4y + 6 - 9x = 6xy - 9x - 4y + 6$

$= 3x(2y - 3) - 2(2y - 3)$

$= (2y - 3)(3x - 2) = (3x - 2)(2y - 3)$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 4 (b)

ଉତ୍ପାଦକରେ ବିଶ୍ଳେଷଣ କର ।

1. $x^2 + xy + 8x + 8y$
2. $pq + pr + q^2 + qr$
3. $ab + db + ac + dc$
4. $pq + qr + pr + r^2$
5. $15xy - 6x + 5y - 2$
6. $ax + bx - ay - by$
7. $15pq + 15 + 9q + 25p$
8. $2a + 6b - 3(a + 3b)^2$
9. $a^2 + 2a + ab + 2b$
10. $x^2 - xz + xy - yz$
11. $a^2 + bc - ba - ac$
12. $2p^2 - pq - 2pr + qr$
13. $x^2 - 3x + 2x - 6$
14. $2x^2 - 5x + 4x - 10$
15. $x^2 - y^2 + x - xy^2$
16. $lm^2 - mn^2 - lm + n^2$
17. $x^3 - 2x^2y + 3xy^2 - 6y^3$
18. $6ab - b^2 + 12ac - 2bc$
19. $x^2 - 11xy - x + 11y$
20. $3ax - 6ay - 8by + 4bx$

4.3 ଦ୍ୱିଘାତ ବିଶିଷ୍ଟ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ପ୍ରଣାଳୀ :

ଦ୍ୱିଘାତ ବିଶିଷ୍ଟ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ସ୍ୱରୂପ ହେଉଛି $x^2 + px + q$ । ଏହାର ମଧ୍ୟମ ପଦ px, ଯେଉଁଥିରେ 'x' ଚଳରାଶି ଓ 'p' ସହଗ । ଏଠାରେ p ଓ q ପ୍ରତ୍ୟେକ ଧ୍ରୁବକ ।

ତୁମେ ଜାଣିଛ **$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$**

ଅନ୍ୟ ପ୍ରକାରରେ ଲେଖିଲେ **$x^2 + (a + b)x + ab = (x+a)(x+b)$** (ପୂର୍ବ ଅଧ୍ୟାୟରେ ଆଲୋଚିତ ଅଭେଦ)

ତେଣୁ ଯଦି ପରିପ୍ରକାଶଟି $x^2 + px + q$ ରୂପରେ ଥାଏ ଆମେ p କୁ a+b ରୂପେ ଭାଙ୍ଗିବା ଯେପରି କି $q = ab$ ହେବ । ଏଠାରେ ପରିପ୍ରକାଶର ଉତ୍ପାଦକ ଗୁଡ଼ିକ $(x + a)$ ଏବଂ $(x + b)$ ହେବ । ଉତ୍ପାଦକ ବିଶ୍ଳେଷଣ କରିବା ପାଇଁ ନିମ୍ନ ସୋପାନ ଗୁଡ଼ିକୁ ଅବଲମ୍ୱନ କରିବା ।

(i) ଦ୍ୱିଘାତ ପରିପ୍ରକାଶକୁ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିର ଘାତର ଅଧଃ କ୍ରମରେ ସଜାଇ ରଖିବାକୁ ହେବ ।

(ii) ଏପରି ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ହେବ, ଯାହାର ଯୋଗଫଳ ମଧ୍ୟମ ପଦର ସହଗ ସହ ସମାନ ଓ ଗୁଣଫଳ ତୃତୀୟ ପଦ ସହ ସମାନ ହେବ ।

(iii) ବର୍ତ୍ତମାନ ମଧ୍ୟମପଦଟିକୁ ଆମର ଆବଶ୍ୟକତା ଅନୁଯାୟୀ ଦୁଇଟି ପଦରେ ପ୍ରକାଶ କରି ପାରିବା ।

(iv) ବର୍ତ୍ତମାନ ଚାରିପଦ ବିଶିଷ୍ଟ ରାଶିକୁ ଉତ୍ପାଦକରେ ପୂର୍ବ ବର୍ଣ୍ଣିତ ପ୍ରଣାଳୀରେ ବିଶ୍ଳେଷଣ କରିବା ।

ଉଦାହରଣ – 8 : ଉତ୍ପାଦକରେ ବିଶ୍ଳେଷଣ କର ।

(i) $x^2 + 9x + 20$ (ii) $y^2 - 7y + 12$ (iii) $x^2 - x - 30$

ସମାଧାନ : (i) $x^2 + 9x + 20$ କୁ $x^2 + px + q$ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କରିବା ।

(ଏଠାରେ $p = 9$ ଓ $q = 20$ । ଏପରି ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟା ବାଛିବା, ଯାହାର ଯୋଗଫଳ 9 ଓ ଗୁଣଫଳ 20 ହେବ । ଚିନ୍ତାକଲେ ଜାଣିପାରିବା ଯେ ସଂଖ୍ୟା ଦୁଇଟି 4 ଓ 5 ହେବ । ଯେହେତୁ ଗୁଣଫଳ ଧନାତ୍ମକ ଏବଂ ଯୋଗ ବା ମିଶାଣଫଳ ମଧ୍ୟ ଧନାତ୍ମକ ।)

$\therefore x^2 + 9x + 20 = x^2 + (4 + 5)x + 4 \times 5$ ...(i)

$= x^2 + 4x + 5x + 20 = x(x + 4) + 5(x + 4) = (x + 4)(x + 5)$

ସୋପାନ (i) ରୁ ଆମେ ସିଧାସଳଖ ଉତ୍ପାଦକଦ୍ୱୟ $(x + 4)$ ଓ $(x + 5)$ କୁ ଲେଖିପାରିବା ।

(ii) $y^2 - 7y + 12$

ଏଠାରେ $p = -7$ ଓ $q = 12$ ହେତୁ ଆମେ ଏପରି ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା, ଯାହାର ଯୋଗଫଳ -7 ଓ ଗୁଣଫଳ 12 ହେବ । ଏଠାରେ ଗୁଣଫଳ ଧନାତ୍ମକ ହେତୁ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ ଋଣାତ୍ମକ ହେବେ ।$\therefore$ ସଂଖ୍ୟା ଦୁଇଟି ହେବ -4 ଓ -3 ।

$y^2 - 7y + 12 = y^2 + \{(-4)+(-3)\}y + (-4)(-3)$............ (ii)

$= y^2 - 4y - 3y + 12 = y(y - 4) - 3(y - 4) = (y - 4)(y - 3)$

ଆମେ ସୋପାନ (ii) ରୁ ସିଧାସଳଖ ଉତ୍ପାଦକଦ୍ୱୟକୁ ଅର୍ଥାତ୍ $(y - 4)$ ଏବଂ $(y - 3)$ କୁ ଲେଖିପାରିବା ।

(iii) $x^2 - x - 30$

ଏଠାରେ ଗୁଣଫଳ (-30) ଏବଂ ଯୋଗଫଳ (-1) ହେତୁ ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ -6 ଏବଂ 5 ।

$$x^2 - x - 30 = x^2 + \{(-6) + 5\}x + (-6)5$$
$$= x^2 - 6x + 5x + (-6)5$$
$$= x(x-6) + 5(x-6) = (x-6)(x+5)$$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 4 (c)

ଉତ୍ପାଦକ ବିଶ୍ଳେଷଣ କର ।

1. (i) $a^2 + 8a + 15$ (ii) $x^2 + 5x + 6$ (iii) $x^2 + 7x + 6$

(iv) $x^2 + 8x + 12$ (v) $x^2 + 11x + 24$ (vi) $x^2 + 2x + 1$

2. (i) $p^2 - 10p + 24$ (ii) $x^2 - 8x + 12$ (iii) $x^2 - 7x + 10$

(iv) $x^2 - 9x + 14$ (v) $x^2 + 4x - 21$ (vi) $x^2 - 3x + 2$

3. (i) $a^2 - 4a - 5$ (ii) $x^2 - 11x - 42$ (iii) $x^2 - 4x - 21$

(iv) $x^2 - x - 90$ (v) $x^2 - 2x - 63$ (vi) $x^2 - x - 2$

4. (i) $(a+1)^2 + 16(a+1) + 60$

ସୂଚନା : $(a + 1)$ କୁ P ରୂପେ ନେଇ ଦତ୍ତ ପରିପ୍ରକାଶକୁ ଲେଖିଲେ ରାଶିଟି ହେବ $P^2 + 16P + 60$ ।

ତତ୍ପରେ ଉତ୍ପାଦକ ବିଶ୍ଳେଷଣ କରାଯାଇପାରିବ ।

(ii) $(a+3)^2 - 14(a+3) + 45$ (iii) $(x-2)^2 + 2(x-2) - 8$

5. $(a+7)(a-10) + 16$ 6. $(x-2y)^2 - 5(x-2y) + 6$

4.4 ବିଭିନ୍ନ ଅଭେଦ ସାହାଯ୍ୟରେ ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ (Factorisation using different Identities) :

ପୂର୍ବ ଅଧ୍ୟାୟରେ କେତେକ ଅଭେଦର ଧାରଣା ତୁମେମାନେ ପାଇସାରିଛ । ସେଗୁଡ଼ିକୁ ମନେପକାଅ ।

ଉତ୍ପାଦକ ବିଶ୍ଳେଷଣରେ ଆବଶ୍ୟକ ଅଭେଦାବଳୀ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

1. $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$
2. $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$
3. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
4. $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a+b+c)^2$
5. $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ca = (a-b+c)^2$
6. $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ca = (a+b-c)^2$
7. $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ca = (a-b-c)^2$

ବଣ୍ଟନ ନିୟମ ବ୍ୟବହାର କରି ଉପରୋକ୍ତ ଅଭେଦଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରମାଣ କରିପାରିବ ।

ଉଦାହରଣ –9 : $x^2 + 6xy + 9y^2$ ର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ଦର୍ଶାଅ ।

ସମାଧାନ :

$x^2 + 6xy + 9y^2 = (x)^2 + 2.\ x.\ 3y + (3y)^2$

$= (x+3y)^2 = (x + 3y)\ (x+3y)$ (ଅଭେଦ – 1)

ଉଦାହରଣ –10 : $4a^2 – 4ab + b^2$ ର ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $4a^2 – 4ab + b^2 = (2a)^2 – 2.\ (2a)b + (b)^2 = (2a – b)^2$

$= (2a –b)\ (2a –b)$ (ଅଭେଦ – 2)

ଉଦାହରଣ –11 : $9x^2 + 4y^2 + z^2 + 12xy + 6xz + 4yz$ ର ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $9x^2 + 4y^2 + z^2 + 12xy + 6xz + 4yz$

$= (3x)^2 + (2y)^2 + (z)^2 + 2(3x)(2y) + 2(3x)(z) + 2(2y)z$

$=(3 + 2y + z)^2$

$=(3x + 2y + z)(3x + 2y + z)$ (ଅଭେଦ – 4)

ଉଦାହରଣ –12 : $4x^2 + 9y^2 + z^2 – 4xz – 12xy + 6yz$ ର ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $4x^2 + 9y^2 + z^2 – 4xz – 12xy + 6yz$

$=(2x)^2 + (3y)^2 + (z)^2 – 2(2x)z – 2(2x)(3y) + 2(3y)z$

$= (2x – 3y –z)^2$ (ଅଭେଦ – 7)

$=(2x – 3y – z)\ (2x – 3y – z)$

ଉଦାହରଣ –13 : $9x^2 – 16y^2$ ର ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $9x^2 – 16y^2 = (3x)^2 – (4y)^2$

$= (3x + 4y)\ (3x – 4y)$ (ଅଭେଦ – 3)

ଉଦାହରଣ –14 : $a^2 + 2ab + b^2 – 4c^2$ ର ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $a^2 + 2ab + b^2 – 4c^2 = (a+b)^2 – (2c)^2$ (ଅଭେଦ – 1)

$= (a + b + 2c)\ (a + b – 2c)$ (ଅଭେଦ – 3)

ଉଦାହରଣ –15 : ଦୁଇଟି ପୂର୍ଣ୍ଣ ବର୍ଗର ଅନ୍ତର ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କରି ଉତ୍ପାଦକ ନିରୂପଣ କର ।

(i) $x^2 – 2x – 323$ (ii) $x^2 + 6x – 4087$

ସମାଧାନ : (i) $x^2 – 2x – 323$

$= (x)^2 – 2.\ x\ .\ 1 +(1)^2 – (1)^2 – 323$

$= (x –1)^2 – 324 = (x – 1)^2 – (18)^2$ (ଅଭେଦ – 2)

$= (x – 1 + 18)\ (x – 1 – 18)$ (ଅଭେଦ – 3)

$= (x + 17)\ (x – 19)$

(ii) $x^2 + 6x – 4087$

$= x^2 + 2x.3 + (3)^2 – (3)^2 – 4087$

$= (x+3)^2 - 4096 = (x+3)^2 - (64)^2$ (ଅଭେଦ – 1)

$= (x+3+64)(x+3-64) = (x+67)(x-61)$ (ଅଭେଦ – 3)

ଉଦାହରଣ –16 : $a^4 + 4b^4$ ର ଉତ୍ପାଦକ ବିଶ୍ଳେଷଣ କର ।

ସମାଧାନ : $a^4 + 4b^4 = (a^2)^2 + (2b^2)^2 = (a)^2 + (2b^2)^2 + 2 . a^2 . 2b^2 - 2 . a^2 . 2b^2$

$= (a^2 + 2b^2)^2 - 4a^2b^2$ (ଅଭେଦ – 1)

$= (a^2+2b^2)^2 - (2ab)^2 = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab)$ (ଅଭେଦ – 3)

$= (a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2)$

ଅନୁଶୀଳନୀ – 4(d)

ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କରି ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । (1 ରୁ 7 ନମ୍ବର ପ୍ରଶ୍ନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ)

1. (i) $4x^2 + 4x + 1$ (ii) $9b^2 + 12bc + 4c^2$ (iii) $16a^2 + 40ab + 25b^2$
(iv) $49x^2 + 112xy + 64y^2$ (v) $a^4 + 6a^2b^2 + 9b^4$

2. (i) $9x^2 - 6x + 1$ (ii) $16x^2 - 40xy + 25y^2$ (iii) $49a^2 - 126ab + 81b^2$
(iv) $64a^2 - 16a + 1$ (v) $100a^4 - 20a^2b + b^2$

3. (i) $16x^2 + 9y^2 + 25z^2 + 24xy + 40xz + 30yz$
(ii) $49x^2 + 25y^2 + z^2 + 70xy + 10zy + 14xy$
(iii) $4a^2 + 9b^2 + c^2 + 12ab + 4ac - 6bc$
(iv) $100a^2 + 81b^2 + 49c^2 - 180ab - 140ac + 126bc$
(v) $x^4 + y^2 + z^2 - 2x^2y - 2x^2z + 2yz$

4. (i) $16a^2 - 9b^2$ (ii) $25a^2 - 36b^2$ (iii) $81a^2 - 100b^2$
(iv) $16a^2 - 49b^2$ (v) $144a^2 - 225b^2$ (vi) $256a^2 - 289b^2$
(vii) $400a^2 - 225b^2$ (viii) $441a^2 - 900b^2$ (ix) $121a^2 - 289b^2$
(x) $81a^2 - 361b^2$ (xi) $(a+b)^2 - c^2$ (xii) $(a)^2 - (b-c)^2$

5. (i) $a^4 + a^2 + 1$ (ii) $4x^4 + 1$ (iii) $x^4 + 36x^2y^2 + 1296y^4$
(iv) $x^4 + 9x^2y^2 + 81y^4$ (v) $x^4 + 16x^2 + 256$

6. (i) $a^2 + 6a + 9 - b^2$ (ii) $a^2 - 4a + 4 - c^2$ (iii) $4a^2 - 4a + 1 - 9b^2$
(iv) $a^2 - 6ab + 9b^2 - 16c^2$ (v) $16a^2 - 24ab + 9b^2 - 25c^2$

7. ଦୁଇଟି ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗର ଅନ୍ତର ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କରି ସମାଧାନ କର ।
(i) $x^2 - 2x - 195$ (ii) $x^2 + 4x - 357$ (iii) $x^2 + 6x - 112$
(iv) $x^2 + 2x - 899$ (v) $x^2 - 4x - 621$ (vi) $x^2 - 10x - 171$
(vii) $x^2 - 6x - 891$ (viii) $x^2 + 4x - 192$

*****