தமிழ்நாடு அரசு

எட்டாம் வகுப்பு

இரண்டாம் பருவம்

தொகுதி 2

கணக்கு

அறிவியல்

சமூக அறிவியல்

விற்பனைக்கு அன்று

தீண்டாமை மனிதநேயமற்ற செயலும் பெருங்குற்றமும் ஆகும்

தமிழ்நாடு அரசு
இலவசப்பாடநூல் வழங்கும்
திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்பட்டது

பள்ளிக் கல்வித்துறை

முதல் பதிப்பு – 2012
திருத்திய பதிப்பு – 2013 , 2014 , 2015
(பொதுப் பாடத்திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்பட்ட முப்பருவ நூல்)

பாடநூல் உருவாக்கமும் தொகுப்பும்

மாநிலக் கல்வியியல் ஆராய்ச்சி மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம்

கல்லூரிச் சாலை, சென்னை – 600 006.

நூல் அச்சாக்கம்

தமிழ்நாடு பாடநூல் மற்றும் கல்வியியல் பணிகள் கழகம்

கல்லூரிச் சாலை, சென்னை – 600 006.

இந்நூல் 80 ஜி. எஸ். எம். மேப்லித்தோ தாளில் அச்சிடப்பட்டுள்ளது.

விலை : ரூ.

வெப் ஆப்செட் முறையில் அச்சிட்டோர்:

பாடநூல் வலைதளம்

www.textbooksonline.tn.nic.in

பொருளடக்கம்

தொகுதி 2

கணக்கு - (1 - 79)

அறிவியல் - (80 - 151)

சமூக அறிவியல் - (152 - 211)

கணக்கு

எட்டாம் வகுப்பு

இரண்டாம் பருவம்

1

இயற்கணிதம்

டயோஃபாண்டஸ்

(ஏறத்தாழ கி.மு. 3ஆம் நூற்றாண்டு)

அலெக்ஸான்டிரியாவில் வாழ்ந்த கிரேக்கக் கணித மேதை. இவர் இயற் கணிதத்தின் தந்தை என்று அழைக்கப்படுகிறார்.

$x^n + y^n = z^n$ என்னும் சமன்பாடு டயோஃபாண்டைன் சமன்பாடு என்றழைக்கப் படுகிறது. இதில் $n > 2$ எனும்பொழுது x, y, z-களின் மிகை அடுக்கு மதிப்புகட்குத் தீர்வுகள் ஏதுமில்லை.

அல்—க்வாரிஸ்மி

(கி.பி. : 780-850)

'Kitab al-jabr-wa-l-muqabala' என்ற புத்தகத்தை எழுதிய அரபுக் கணித மேதை. இது இந்திய இயற் கணிதத்தையும் கிரேக்க வடிவியலையும் இணைத்து உருவாக்கப்பட்டது. இது கணிதத்தின் வளர்ச்சியில் மிகப்பெரும் தாக்கத்தை ஏற்படுத்தியது.

1.1 அறிமுகம்

இயற்கணிதத்தைக் குறிக்கும் *'Algebra'* என்னும் ஆங்கிலச் சொல் *'al-jabr'* என்ற அரேபியச் சொல்லிலிருந்து பெறப்பட்டது. *'Al'* என்றால் "அந்த'' என்றும், 'jabr' என்றால் "உடைந்த பகுதிகளின் ஒன்றிணைப்பு'' என்றும் பொருள்படும். அரேபியக் கணித மேதையான அல்-க்வாரிஸ்மி என்பவர் எழுதிய *'Kitab al-jabr wa l-muqabala'* என்ற புத்தகத் தலைப்பிலிருந்து இச்சொல் உருவாக்கப்பட்டுள்ளது. 'சமன்பாடுகளும் தொகுப்புகளும் பற்றிய புத்தகம்' என்பது இதன் பொருளாகும். நேரடியாக மொழி பெயர்த்தால் 'குறைத்தலும் ஒப்பிடுதலும்' என்ற பொருளைத் தருகிறது.

பழங்கால இந்தியாவில் இயற்கணிதம் 'பீஜ—கணிதம்' என்றழைக்கப் பட்டது. ('பீஜ' என்றால் 'பிற' அல்லது 'மற்ற' என்றும் 'கணிதம்' என்றால் 'கணக்கு' என்றும் பொருள்படும்)

ஆர்யபட்டர், பிரம்மகுப்தர், மஹாவீரர், பாஸ்கரர், ஸ்ரீதரர் போன்ற இந்தியக் கணிதமேதைகள் இப்பாடப் பிரிவை வளர்ப்பதில் பெரும் பங்காற்றியுள்ளனர்.

அலெக்ஸாண்டிரியாவில் வாழ்ந்த கிரேக்கக் கணித மேதையான டயோஃபாண்டஸ் என்பவர் இப்பாடப் பிரிவில் மாபெரும் வளர்ச்சியை உருவாக்கியதால் இவரை 'இயற்கணிதத்தின் தந்தை' என்றழைக்கின்றோம்.

1.2 இயற்கணிதக் கோவைகள் – கூட்டலும் கழித்தலும்

மாறிகள், மாறிலிகள், உறுப்புகளின் கெழுக்கள், கோவைகளின் படி போன்றவற்றை நாம் ஏழாம் வகுப்பிலேயே கற்றுள்ளோம். இப்பொழுது கோவைகளுக்கான கீழ்க்காணும் உதாரணங்களைக் கருதுவோம்.

உதாரணம்

(i) $x + 5$ (ii) $3y - 2$ (iii) $5m^2$ (iv) $2xy + 11$

$x + 5$ என்ற கோவையானது மாறி x ஐயும் மாறிலி 5 ஐயும் கொண்டு உருவாக்கப்பட்டுள்ளது.

$3y - 2$ என்ற கோவையானது மாறி y ஐயும் மாறிலிகள் 3 ஐயும் -2 ஐயும் கொண்டு உருவாக்கப்பட்டுள்ளது.

$5m^2$ என்ற கோவையானது மாறி m ஐயும் மாறிலி 5 ஐயும் கொண்டு உருவாக்கப் பட்டுள்ளது. $2xy + 11$ என்ற கோவையானது மாறிகள் x ஐயும் y ஐயும் மற்றும் மாறிலிகள் 2 ஐயும் 11 ஐயும் கொண்டு உருவாக்கப்பட்டுள்ளது.

1.2.1 இயற்கணிதக் கோவையின் மதிப்புகள்

ஒரு கோவையில் உள்ள மாறிகளின் மதிப்புகள் மாறும்பொழுது கோவையின் மதிப்பும் மாறும் என்பதை நாம் அறிவோம். உதாரணமாக $x + 5$ என்ற கோவையை எடுத்துக் கொள்வோம். x இன் மதிப்புகள் மாறும்பொழுது கோவையின் மதிப்புகளும் மாறுவதைக் கீழேயுள்ள அட்டவணை காட்டுகிறது.

x இன் மதிப்பு	கோவை $x + 5$ இன் மதிப்பு
1	$1 + 5 = 6$
2	$2 + 5 = 7$
3	$3 + 5 = 8$
4	$4 + 5 = 9$
-1	$-1 + 5 = 4$
-2	$-2 + 5 = 3$
-3	$-3 + 5 = 2$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} + 5 = \frac{11}{2}$

குறிப்பு :
அட்டவணையில், x இன் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கேற்ப கோவையின் மதிப்பு மாறுவதையும் மாறிலி 5 இன் மதிப்பில் மாற்றம் இல்லை என்பதையும் கவனிக்க.

செய்து பார்

1. மேற்கண்ட உதாரணத்தில் உள்ள ஏனைய கோவைகளில் உள்ள மாறிகளுக்கு வெவ்வேறு மதிப்புகளை அளித்து அவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

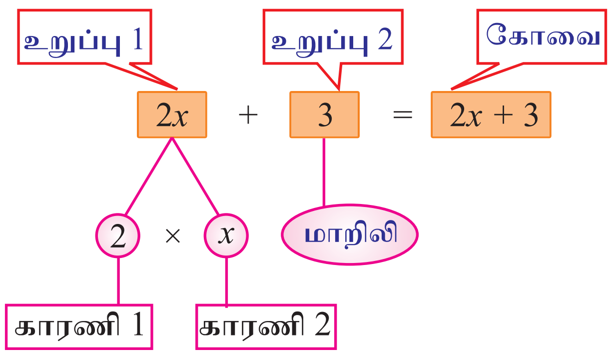
2. மாறிலிகளின் மதிப்புகளில் ஏதேனும் மாற்றம் உனக்குத் தெரிகின்றதா?

1.2.2 உறுப்புகள், காரணிகள் மற்றும் கெழுக்கள்.

ஒரு மாறி அல்லது மாறிலி தனியாகவோ அல்லது பெருக்கல், விகிதம் மூலம் சேர்ந்தோ ஓர் உறுப்பை உருவாக்கும்.

உதாரணம் $3, -y, ab, \frac{a}{b}, \frac{3x}{5y}, -\frac{21}{3}$

உறுப்புகள், கூட்டல் அல்லது கழித்தல் மூலம் சேர்ந்து கோவைகளாகின்றன. $2x + 3$ என்ற கோவையை எடுத்துக் கொள்வோம். இது $2x$, 3 ஆகிய இரு உறுப்புகளால் ஆனது. உறுப்புகள் காரணிகளின் பெருக்கலால் உருவாகின்றன. $2x$ என்ற உறுப்பு 2, x ஆகிய காரணிகளின் பெருக்கலால் உருவாக்கப்பட்டுள்ளது. 3 என்ற உறுப்பு ஒரே ஒரு காரணியால் மட்டும் ஆனது.



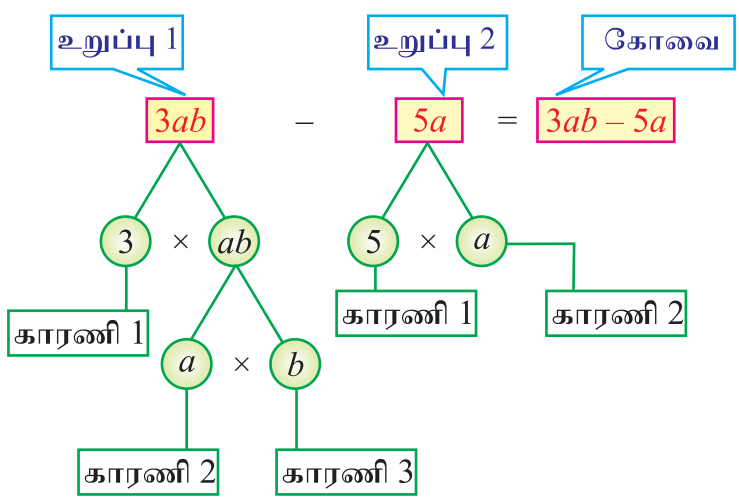
$3ab - 5a$ என்ற கோவையை எடுத்துக் கொள்வோம். இதில் $3ab$, $-5a$ என்ற இரு உறுப்புகள் உள்ளன. $3ab$ என்ற உறுப்பு காரணிகள் $3, a, b$ ஆகியவற்றின் பெருக்கல் பலனால் ஆனது. $-5a$ என்ற உறுப்பு -5 , a ஆகியவற்றின் பெருக்கல் பலனாகும். ஓர் உறுப்பில் ஒரு மாறியின் கெழு என்பது ஒரு காரணியாகவோ அல்லது காரணிகளாகவோ இருக்கும்.

உதாரணம் : $3ab$ என்ற உறுப்பில்:

(i) ab இன் கெழு 3 ஆகும் (ii) a இன் கெழு $3b$ ஆகும்

(iii) b இன் கெழு $3a$ ஆகும்.

மேலும், $-5a$ என்ற உறுப்பில் a இன் கெழு -5 ஆகும்.



செய்து பார்

$x^2y^2 - 5x^2y + \frac{3}{5}xy^2 - 11$ என்ற கோவையில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையும் உறுப்புகளின் கெழுக்களையும் கண்டறிந்து கீழேயுள்ள அட்டவணையை நிரப்புக.

வரிசை எண்	உறுப்பு	உறுப்பின் கெழு
1	x^2y^2	1
2		
3		
4		

1.2.3 பல்லுறுப்புக் கோவையின் அடிப்படைக் கருத்துக்கள் :

ஒருறுப்புக் கோவை, ஈருறுப்புக் கோவை, மூவுறுப்புக் கோவை, பல்லுறுப்புக் கோவை

ஒருறுப்புக் கோவை : ஒரே ஒரு உறுப்பை மட்டும் கொண்ட ஓர் இயற்கணிதக் கோவை ஒருறுப்புக் கோவை எனப்படும்.

உதாரணம் : $2x^2,\ 3ab,\ -7p,\ \frac{5}{11}a^2b,\ -8,\ 81xyz, ...$

ஈருறுப்புக் கோவை : இரண்டு உறுப்புகளை மட்டும் கொண்ட ஓர் இயற்கணிதக் கோவை ஈருறுப்புக் கோவை எனப்படும்.

உதாரணம் : $x + y,\ 4a - 3b,\ 2 - 3x^2y,\ l^2 - 7m, ...$

மூவுறுப்புக் கோவை : மூன்று உறுப்புகளை மட்டும் கொண்ட ஓர் இயற்கணிதக் கோவை மூவுறுப்புக் கோவை எனப்படும்.

உதாரணம் : $x + y + z,\ 2a - 3b + 4,\ x^2y + y^2z - z, ...$

பல்லுறுப்புக்கோவை : முடிவுறு எண்ணிக்கையில் அமைந்த பூச்சியமற்ற கெழுவையுடைய பல உறுப்புகளைக் கொண்ட கோவையைப் பல்லுருப்புக் கோவை என்கிறோம். இதையே, மாறிகள், கெழுக்கள், முழு எண் அடுக்குகளின் சேர்க்கையால் உருவான முடிவுறு எண்ணிக்கைக் கொண்ட உறுப்புகளால் ஆன கோவை என்றும் கூறலாம்.

உதாரணம் :

$a + b + c + d,\ 7xy,\ 3abc - 10,\ 2x + 3y - 5z,\ 3x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 72x + 5 ....$

> ஒருறுப்புக்கோவை, ஈருறுப்புக்கோவை, மூவுறுப்புக்கோவை, ...
> ஆகியவைகளும் பல்லுறுப்புக்கோவைகளே.

பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி: பல்லுறுப்புக் கோவையில் உள்ள ஒருறுப்புக் கோவைகள் அதன் உறுப்புகள் எனப்படுகின்றன. உறுப்புகளின் மிக உயர்ந்த அடுக்கு அல்லது படி அந்தப் பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி எனப்படும். மிக உயர்ந்த அடுக்கைப் பெற்ற உறுப்பின் கெழுவைப் பல்லுறுப்புக் கோவையின் ‘தலையாய கெழு’ அல்லது ‘வழி நடத்திச் செல்லும் கெழு’ என்கிறோம்.

உதாரணம் :

$2x^5 - x^4 + 7x^3 - 6x^2 + 12x - 4$ என்பது x இல் அமைந்த ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை. இங்கு $2x^5, -x^4, 7x^3, -6x^2, 12x, -4$ ஆகிய ஆறு ஒருறுப்புக் கோவைகள் உள்ளன. இவை இப்பல்லுறுப்புக் கோவையின் உறுப்புகள் எனப்படுகின்றன.

இப்பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி 5. தலையாய கெழு 2 ஆகும்.

$13x^4 - 2x^2y^3 - 4$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் படியைக் காணுமாறு மாணவர்களிடம் ஓர் ஆசிரியர் கூறியபோது இரு மாணவர்கள் கீழ்க்கண்டுள்ளவாறு விடையளித்தார்கள். யார் செய்தது சரி? கௌதமா? ஆயிஷாவா?

கௌதம்

பல்லுறுப்புக் கோவை:

$13x^4 - 2x^2y^3 - 4$

உறுப்புகளின் மிக உயர்ந்த அடுக்கு 4.

$\therefore$ பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி 4.

ஆயிஷா

பல்லுறுப்புக் கோவை:

$13x^4 - 2x^2y^3 - 4$

$= 13x^4 - 2x^2y^3 - 4x^0y^0$

உறுப்புகளின் மிக உயர்ந்த அடுக்கு 5.

$\therefore$ பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி 5.

உங்கள் விடை ஆயிஷா எனில் சரி.

உனது விடை கௌதம் எனில், தவறு எங்கே உள்ளது?

இப்பொழுது, $13x^4 - 2x^2y^3 - 4$ என்ற கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவையை ஆராய்வோம்.

முதல் உறுப்பு : $13x^4 \rightarrow$ இதில், x^4 - இன் கெழு 13. மாறி x, மேலும் x -இன் அடுக்கு 4. எனவே $13x^4 \rightarrow$ இன் படி 4.

இரண்டாம் உறுப்பு : $-2x^2y^3 \rightarrow$ இதில், x^2y^3 - இன் கெழு -2. மாறிகள் x, y. x-இன் அடுக்கு 2, y-இன் அடுக்கு 3. எனவே x^2y^3 - இன் படி $2 + 3 = 5$ (x, y ஆகிய மாறிகளின் அடுக்குகளின் கூடுதல்).

மூன்றாம் உறுப்பு : $-4 \rightarrow$ இது ஒரு மாறிலி உறுப்பு. இதை $-4x^0y^0$ எனவும் எழுதலாம். மாறிகள் x^0y^0 - இன் அடுக்கு பூச்சியம். எனவே -4 இன் படி பூச்சியம்.

கௌதம் செய்த தவறு என்ன?

இரண்டாம் உறுப்பான $-2x^2y^3$ இன் படி இரண்டாகவோ அல்லது மூன்றாகவோ இருக்கும் என கௌதம் நினைத்தான். இக்குழப்பமே அவனைத் தவறான முடிவுக்கு இழுத்துச் சென்றது. ஆனால் சரியான வழி மேலே விளக்கப்பட்டுள்ளது.

பல்லுறுப்புக் கோவையின் திட்ட வடிவம்

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையிலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பையும் அவற்றின் அடுக்குகளுக்கேற்ப இறங்கு வரிசையில் எழுதுவதை அப்பல்லுறுப்புக் கோவையின் திட்ட வடிவம் எனலாம்.

உதாரணம் :

$2 + 9x - 9x^2 + 2x^4 - 6x^3$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையைத் திட்ட வடிவில் எழுதுக.

$2x^4 - 6x^3 - 9x^2 + 9x + 2$ என நாம் இப்பல்லுறுப்புக் கோவையைத் திட்ட வடிவில் எழுதுகிறோம்.

நினைவில் கொள்க: அடுக்குகள் ஏதும் காண்பிக்கப்படவில்லை எனில் அதை '1' என்றே புரிந்துகொள்ள வேண்டும்.

உதாரணம் : $9x = 9x^1$

ஒத்த உறுப்புகள், மாறுபட்ட உறுப்புகள்

ஒத்த மாறிகளையும் ஒத்த அடுக்குகளையும் கொண்ட உறுப்புகள் ஒத்த அல்லது ஒரின உறுப்புகள் எனப்படுகின்றன. கீழ்க்கண்ட கோவைகளைக் கருதுக.

$\boxed{2x^2 + 3x - 5}$

மூன்று உறுப்புகள்

அனைத்தும் மாறுபட்ட உறுப்புகள்

$\boxed{2a^2 + 3a^2 + 7a - 7}$

ஒரின உறுப்புகள்

மாறி $\rightarrow a$

அடுக்கு $\rightarrow 2$

கீழேயுள்ள கோவைகளைக் காண்க :

$$3x,\ 5x^2,\ 2xy,\ -70x,\ -7,\ -3y^2,\ -3x^2,\ -20yx,\ 20,\ 4x,\ -\frac{2}{7},\ 3y.$$

ஒத்த அல்லது ஒரின உறுப்புகளை நாம் கீழேயுள்ளவாறு பட்டியலிடலாம் :

(i) $3x, -70x, 4x$

(ii) $5x^2, -3x^2$

(iii) $2xy, -20yx$

(iv) $-7, 20, -\frac{2}{7}$

1. $3x, 3y$ ஆகியவை ஏன் ஒரின உறுப்புகள் அல்ல?
2. $5x^2, -3y^2$ ஆகியவை ஏன் ஒரின உறுப்புகள் அல்ல?

1.2.4 இயற்கணிதக் கோவைகளின் கூட்டலும் கழித்தலும் – மீள் பார்வை

ஏழாம் வகுப்பில் நாம் இயற்கணிதக் கோவைகளின் கூட்டலையும் கழித்தலையும் கற்றுள்ளோம். ஒத்த அல்லது ஒரின உறுப்புகளை மட்டுமே கூட்டவோ கழிக்கவோ முடியும். இவற்றை இப்பொழுது நாம் மீண்டும் பார்ப்போம்.

கணக்கு

எடுத்துக்காட்டு 1.1

$3x^3 + x^2 - 2$, $2x^2 + 5x + 5$ ஆகியவற்றைக் கூட்டுக.

தீர்வு

முதலில் இவற்றை கீழேயுள்ளவாறு மாற்றியமைத்துப் பிறகு கூட்டுவோம்.

$$\begin{array}{rrrr} & 3x^3 + x^2 & & -2 \\ (+) & & 2x^2 + 5x & + 5 \\ \hline & 3x^3 + 3x^2 & + 5x & + 3 \\ \hline \end{array}$$

(அல்லது)

இதையே இவ்வாறும் எழுதலாம்

$$\begin{array}{rr} & 3x^3 + \ \ x^2 + 0x - 2 \\ (+) & 0x^3 + 2x^2 + 5x + 5 \\ \hline & 3x^3 + 3x^2 + 5x + 3 \\ \hline \end{array}$$

நாம் $2x^2$ என்ற இரண்டாவது பல்லுறுப்புக் கோவையின் உறுப்பை அதன் ஒத்த உறுப்பான x^2 என்ற முதல் பல்லுறுப்புக் கோவையின் உறுப்பின் கீழே எழுதியுள்ளதை உற்று நோக்கி அறிக. அதேபோல் மாறிலி உறுப்பான $+5$ ஆனது மாறிலி உறுப்பான -2 இன் கீழே எழுதப்பட்டுள்ளது. முதல் பல்லுறுப்புக் கோவையில் x உறுப்பும் இரண்டாம் பல்லுறுப்புக் கோவையில் x^3 உறுப்பும் இல்லாததால் கூட்டலை எளிமைப்படுத்துவதற்காக அவற்றுக்குரிய இடங்கள் காலியாக விடப்பட்டுள்ளன. மாற்றாக இல்லாத உறுப்புகளுக்குப் பதிலாகப் பூச்சியக் கெழுக்களை இணைத்தும் நாம் கூட்டல் கணக்குகளைச் செய்யலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.2

$3x - y, 2y - 2x$, $x + y$ ஆகிய பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் கூடுதலைக் காண்க.

தீர்வு

நிரல் முறைக் கூட்டல்

$$\begin{array}{rr} & 3x - \ y \\ & -2x + 2y \\ (+) & x + \ y \\ \hline & 2x + 2y \\ \hline \end{array}$$

($2y - 2x$ என்பதை $-2x + 2y$ என மாற்றியமைத்தல்)

நிரல் முறைக் கூட்டல்

$(3x - y) + (2y - 2x) + (x + y)$

$= (3x - 2x + x) + (-y + 2y + y)$

$= (4x - 2x) + (3y - y)$

$= 2x + 2y.$

ஒரின உறுப்புகளை ஒன்றாகச் சேர்த்தல் மூலம் பல்லுறுப்புக் கோவையின் கூட்டல் நிரைமுறையில் செய்யப்படுகிறது

எடுத்துக்காட்டு 1.3

(i) $8xy$ இலிருந்து $5xy$ஐக் கழிக்க. (ii) $5c - d^2$ இலிருந்து $3c + 7d^2$ ஐக் கழிக்க.

(iii) $3x^2 - 7y^2 + 9$ இலிருந்து $2x^2 + 2y^2 - 6$ ஐக் கழிக்க.

தீர்வு

(i) $8xy$ இருந்து $5xy$ ஐக் கழிக்க

முதலில் கீழேயுள்ளவாறு அமைப்போம் ; பிறகு கழிப்போம்.

$$\begin{array}{r} 8xy \\ -5xy \\ \hline 3xy \\ \hline \end{array}$$

($8xy, 5xy$ ஆகிய இரண்டும் ஒரின உறுப்புகள்)

$\therefore 8xy - 5xy = 3xy$

(ii) $5c - d^2$ இலிருந்து $3c + 7d^2$ ஐக் கழிக்க.

$$\begin{array}{r} 5c - d^2 \\ -(3c + 7d^2) \\ \hline \\ \hline \end{array} \quad \text{(அல்லது)} \quad \begin{array}{r} 5c - d^2 \\ -3c - 7d^2 \\ \hline 2c - 8d^2 \\ \hline \end{array}$$

அடிக்கடி நாம் இதை இவ்வாறு செய்வோம் →

$$\begin{array}{r} 5c - d^2 \\ 3c + 7d^2 \\ - \quad - \\ \hline 2c - 8d^2 \\ \hline \end{array}$$

மாற்றாக, இதை இவ்வாறும் செய்யலாம் :

$$\begin{aligned} (5c - d^2) - (3c + 7d^2) &= 5c - d^2 - 3c - 7d^2 \\ &= (5c - 3c) + (-d^2 - 7d^2) \\ &= 2c + (-8d^2) \\ &= 2c - 8d^2 \end{aligned}$$

(iii) $3x^2 - 7y^2 + 9$ இலிருந்து $2x^2 + 2y^2 - 6$ ஐக் கழிக்க.

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 7y^2 + 9 \\ 2x^2 + 2y^2 - 6 \\ - \quad - \quad + \\ \hline x^2 - 9y^2 + 15 \\ \hline \end{array}$$

(குறிகளை மாற்றுதல்)

மாற்று முறை :

$$\begin{aligned} &(3x^2 - 7y^2 + 9) - (2x^2 + 2y^2 - 6) \\ &= 3x^2 - 7y^2 + 9 - 2x^2 - 2y^2 + 6 \\ &= (3x^2 - 2x^2) + (-7y^2 - 2y^2) + (9 + 6) \\ &= x^2 + (-9y^2) + 15 \\ &= x^2 - 9y^2 + 15 \end{aligned}$$

பயிற்சி 1.1

1. கீழ்க்காணும் வினாக்களுக்குரிய சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடு.

(i) $-5x^7 + \frac{3}{7}x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 1$ இல் x^4 இன் கெழு ....

(A) -5 (B) -3 (C) $\frac{3}{7}$ (D) 7

(ii) $7x^2 - 14x^2y + 14xy^2 - 5$ இல் xy^2 இன் கெழு ....

(A) 7 (B) 14 (C) -14 (D) -5

(iii) $x^3y^2z^2$ என்ற உறுப்பின் படி ....

(A) 3 (B) 2 (C) 12 (D) 7

(iv) $x^2 - 5x^4 + \frac{3}{4}x^7 - 73x + 5$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி ....

(A) 7 (B) $\frac{3}{4}$ (C) 4 (D) -73

(v) $x^2 - 5x^2y^3 + 30x^3y^4 - 576xy$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி ....

(A) -576 (B) 4 (C) 5 (D) 7

(vi) $x^2 + y^2 - 2z^2 + 5x - 7$ என்பது ஒரு ....க் கோவை.

(A) ஒருறுப்பு (B) ஈருறுப்பு (C) மூவுறுப்பு (D) பல்லுறுப்பு

(vii) $0.4x^7 - 75y^2 - 0.75$ இன் மாறிலி உறுப்பு ....

(A) 0.4 (B) 0.75 (C) -0.75 (D) -75

2. கீழ்க்காணும் கோவைகளின் உறுப்புகளைப் பிரித்து அவற்றின் கெழுக்களைக் காண்க:

(i) $3abc - 5ca$ (ii) $1 + x + y^2$ (iii) $3x^2y^2 - 3xyz + z^3$

(iv) $-7 + 2pq - \frac{5}{7}qr + rp$ (v) $\frac{x}{2} - \frac{y}{2} - 0.3xy$

3. கீழேயுள்ள பல்லுறுப்புக் கோவைகளை ஒருறுப்பு, ஈருறுப்பு, மூவுறுப்பு கோவைகளாக வகைப்படுத்துக:

$3x^2$, $3x + 2$, $x^2 - 4x + 2$, $x^5 - 7$, $x^2 + 3xy + y^2$,

$s^2 + 3st - 2t^2$, $xy + yz + zx$, $a^2b + b^2c$, $2l + 2m$

4. பின்வரும் இயற்கணிதக் கோவைகளைக் கூட்டுக:

(i) $2x^2 + 3x + 5$, $3x^2 - 4x - 7$ (ii) $x^2 - 2x - 3$, $x^2 + 3x + 1$

(iii) $2t^2 + t - 4$, $1 - 3t - 5t^2$ (iv) $xy - yz$, $yz - xz$, $zx - xy$

(v) $a^2 + b^2$, $b^2 + c^2$, $c^2 + a^2$, $2ab + 2bc + 2ca$.

5. (i) $3a - b$ இலிருந்து $2a - b$ ஐக் கழிக்க.

(ii) $-7x - 10y$ இலிருந்து $-3x + 8y$ ஐக் கழிக்க.

(iii) $7ab - 2bc + 10ca$ இலிருந்து $2ab + 5bc - 3ca$ ஐக் கழிக்க.

(iv) $x^3 + 3x^2 + 1$ இலிருந்து $x^5 - 2x^2 - 3x$ ஐக் கழிக்க.

(v) $15 - 2x + 5y - 11xy + 2xy^2 + 8x^2y$ இலிருந்து $3x^2y - 2xy + 2xy^2 + 5x - 7y - 10$ ஐக் கழிக்க.

6. கீழ்க்காணும் பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் படிகளையும் தலையாய கெழுக்களையும் காண்க:

(i) $x^2 - 2x^3 + 5x^7 - \frac{8}{7}x^3 - 70x - 8$ (ii) $13x^3 - x^{13} - 113$

(iii) $-77 + 7x^2 - x^7$ (iv) $-181 + 0.8y - 8y^2 + 115y^3 + y^8$

(v) $x^7 - 2x^3y^5 + 3xy^4 - 10xy + 11$

1.3 இயற்கணிதக் கோவைகளின் பெருக்கல்

1.3.1 இரு ஒருறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கல்

கூட்டலின் சுருக்கப்பட்ட வடிவமே பெருக்கல் ஆகும்.

$x + x + x + x + x$ என்பதைச் சுருக்கமாக $5x$ என எழுதலாம்.

அதேபோல், $5 \times (2x) = (2x) + (2x) + (2x) + (2x) + (2x) = 10x$ என எழுதலாம். நாம் தற்பொழுது கீழ்க் காண்பவைகளை உற்று நோக்குவோம்.

உதாரணம்

(i) $x \times 5y = x \times 5 \times y = 5 \times x \times y = 5xy$

(ii) $2x \times 3y = 2 \times x \times 3 \times y = 2 \times 3 \times x \times y = 6xy$

(iii) $2x \times (-3y) = 2 \times (-3) \times x \times y = -6 \times x \times y = -6xy$

(iv) $2x \times 3x^2 = 2 \times x \times 3 \times x^2 = (2 \times 3) \times (x \times x^2) = 6x^3$

(v) $2x \times (-3xyz) = 2 \times (-3) \times (x \times xyz) = -6x^2yz$.

குறிப்பு: 1. ஒருறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கல் பலன் ஓர் ஒருறுப்புக் கோவை ஆகும்.

2. பெருக்கல் பலனின் கெழு = முதல் ஒருறுப்புக் கோவையின் கெழு $\times$ இரண்டாம் ஒருறுப்புக் கோவையின் கெழு

3. $a^m \times a^n = a^{m+n}$ என்ற அடுக்குக்குறி விதி உறுப்புகளின் பெருக்கல் பலனைக் காண உதவுகின்றது.

4. a , b இன் பெருக்கல் பலன் $a \times b$, ab, $a.b$, $a\,(b)$, $(a)\,b$, $(a)\,(b)$, (ab) என்றெல்லாம் குறிக்கப்படுகிறது.

(vi) $(3x^2)\,(4x^3)$

$= (3 \times x \times x)\,(4 \times x \times x \times x)$

$= (3 \times 4)\,(x \times x \times x \times x \times x)$

$= 12x^5$

(அல்லது) $(3x^2)\,(4x^3)$

$= (3 \times 4)\,(x^2 \times x^3)$

$= 12\,(x^{2+3}) = 12x^5$

($a^m \times a^n = a^{m+n}$ ஐப் பயன்படுத்தினால்)

மேலும் சில பயனுள்ள உதாரணங்கள் பின்வருமாறு:

(vii) $2x \times 3y \times 5z = (2x \times 3y) \times 5z$

$= (6xy) \times 5z$

$= 30\,xyz$

(அல்லது) $2x \times 3y \times 5z = (2 \times 3 \times 5) \times (x \times y \times z) = 30xyz$

(viii) $4ab \times 3a^2b^2 \times 2a^3b^3 = (4ab \times 3a^2b^2) \times 2a^3b^3$

$= (12a^3b^3) \times (2a^3\,b^3)$

$= 24a^6b^6$

(அல்லது) $4ab \times 3a^2b^2 \times 2a^3b^3 = 4 \times 3 \times 2 \times (ab \times a^2b^2 \times a^3b^3)$

$= 24\,(a^{1+2+3} \times b^{1+2+3})$

$= 24a^6b^6$

1.3.2 ஓர் ஒருறுப்புக் கோவையை ஓர் ஈருறுப்புக் கோவையால் பெருக்குதல்

பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகளின் மூலம் ஓர் ஒருறுப்புக் கோவையை ஓர் ஈருறுப்புக் கோவையால் எவ்வாறு பெருக்குவது என்பதை நாம் கற்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.4

சுருக்குக: $(2x) \times (3x + 5)$

தீர்வு

படி 1

$(2x) \times (3x + 5) = (2x \times 3x) + (2x \times 5)$ (பங்கீட்டுப் பண்பைப் பயன்படுத்தி இவ்வாறு எழுதுகிறோம்)

படி 2

$= 6x^2 + 10x$

எடுத்துக்காட்டு 1.5

சுருக்குக: $(-2x)\times(4-5y)$

தீர்வு

படி 1

$$(-2x)\times(4-5y) = [(-2x)\times 4] + [(-2x)\times(-5y)]$$

படி 2

$$= (-8x) + (10xy) \quad \text{(பங்கீட்டுப் பண்பின்படி)}$$

$$= -8x + 10xy$$

குறிப்பு: (i) ஓர் ஒருறுப்புக் கோவையை ஓர் ஈருறுப்புக் கோவையால் பெருக்கினால் பெருக்கல் பலன் ஓர் ஈருறுப்புக் கோவையாகும்.

(ii) பரிமாற்றுப் பண்பையும் பங்கீட்டுப் பண்புகளையும் நாம் கணக்குகளைச் செய்யும் போது பயன்படுத்துகிறோம். $a\times b = b\times a$ (பரிமாற்றுப் பண்பு)

$a(b+c) = ab+ac$ மற்றும் $a(b-c) = ab-ac$ (பங்கீட்டுப் பண்புகள்)

1.3.3 ஓர் ஒருறுப்புக் கோவையை ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையால் பெருக்குதல்

ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையை, ஓர் ஒருறுப்புக் கோவையால் பின்வருமாறு பெருக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.6

சுருக்குக: (i) $3(5y^2-3y+2)$

(ii) $2x^2\times(3x^2-5x+8)$

தீர்வு

(i) $3(5y^2-3y+2) = (3\times 5y^2)+(3\times -3y)+(3\times 2)$

$= 15y^2-9y+6$

(அல்லது)

$$\begin{array}{r} 5y^2-3y+2 \\ \times \qquad\quad 3 \\ \hline 15y^2-9y+6 \\ \hline \end{array}$$

(ii) $2x^2\times(3x^2-5x+8)$

$= (2x^2\times 3x^2)+(2x^2\times(-5x))+(2x^2\times 8)$

$= 6x^4-10x^3+16x^2$

(அல்லது)

$$\begin{array}{r} 3x^2-5x+8 \\ \times \qquad 2x^2 \\ \hline 6x^4-10x^3+16x^2 \\ \hline \end{array}$$

1.3.4 ஓர் ஈருறுப்புக் கோவையை மற்றோர் ஈருறுப்புக் கோவையால் பெருக்குதல்

பரிமாற்றுப் பண்பு மற்றும் பங்கீட்டுப் பண்புகளைப் பயன்படுத்தி ஓர் ஈருறுப்புக் கோவையை மற்றோர் ஈருறுப்புக் கோவையால் பெருக்குவதை நாம் இப்பொழுது கற்க உள்ளோம். பின்வரும் எடுத்துக்காட்டைக் கருதுவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.7

சுருக்குக : $(2a+3b)(5a+4b)$

தீர்வு

இப்பெருக்கலில், ஓர் ஈருறுப்புக் கோவையின் ஒவ்வொரு உறுப்பும் மற்றோர் ஈருறுப்புக் கோவையின் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் பெருக்குகிறது.

$$
\begin{aligned}
(2a+3b)\,(5a+4b) &= (2a\times 5a)+(2a\times 4b)+(3b\times 5a)+(3b\times 4b)\\
&= 10a^2+8ab+15ba+12b^2\\
&= 10a^2+8ab+15ab+12b^2 \qquad [\because ab=ba]\\
&= 10a^2+23ab+12b^2
\end{aligned}
$$

($8ab$, $15ab$ ஆகியவை ஒரின உறுப்புகள். எனவே அவற்றைக் கூட்டுகிறோம்)

$$(2a+3b)\,(5a+4b) = 10a^2+23ab+12b^2$$

குறிப்பு : மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில், இரு ஈருறுப்புக் கோவைகளைப் பெருக்கும்போது நாம் எதிர்பார்க்கும் $2\times 2 = 4$ உறுப்புகளுக்குப் பதிலாக விடையில் 3 உறுப்புகளே உள்ளன. ஏனெனில் ஒரின உறுப்புகளான $8ab$, $15ab$ ஆகியவற்றை நாம் சேர்த்துவிட்டோம்.

1.3.5 ஓர் ஈருறுப்புக் கோவையை ஒரு மூவுறுப்புக் கோவையால் பெருக்குதல்

ஈருறுப்புக் கோவையில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பாலும் மூவுறுப்புக் கோவையில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பையும் பெருக்குவதன் மூலம் இவ்வகைப் பெருக்கல் செய்யப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 1.8

சுருக்குக: $(x+3)\,(x^2-5x+7)$

தீர்வு

$$
\begin{aligned}
(x+3)\,(x^2-5x+7) &= x\,(x^2-5x+7) + 3\,(x^2-5x+7) && \text{(பங்கீட்டுப் பண்பின்படி)}\\
&= x^3-5x^2+7x+3x^2-15x+21\\
&= x^3-5x^2+3x^2+7x-15x+21 && \text{(ஒரின உறுப்புகளைத் தொகுத்தல்)}\\
&= x^3-2x^2-8x+21 && \text{(ஒரின உறுப்புகளைச் சேர்த்தல்)}
\end{aligned}
$$

மாற்று முறை :

$$
\begin{array}{lcr}
 & & (x+3)\\
 & & \times\ (x^2-5x+7)\\
x\,(x^2-5x+7) & : & x^3-5x^2+7x\\
3\,(x^2-5x+7) & : & 3x^2-15x+21\\
\hline
 & & = x^3-2x^2-8x+21\\
\hline
\end{array}
$$

இந்த எடுத்துக்காட்டில், பெருக்கும் போது $2\times 3 = 6$ உறுப்புகளை எதிர் பார்த்ததற்கு மாறாகப்பெருக்கல் பலனில் நமக்கு 4 உறுப்புகளே கிடைத்துள்ளன. இதன் காரணத்தை உன்னால் கண்டறிய முடியுமா?

குழப்பத்தை வெளியேற்று

1. $2xx = 2x$ என்பது சரியா?

   இல்லை. $2xx$ என்பதை நாம் $2\,(x)\,(x) = 2x^2$ என எழுதலாம். இது, $2, x, x$ ஆகியவற்றின் பெருக்கல் பலனாகும். ஆனால் $2x$ என்பது $x + x$ அல்லது $2\,(x)$ எனப் பொருள்படும்.

2. $7xxy = 7xy$ என்பது சரியா?

   இல்லை. $7xxy$ என்பது $7, x, x, y$ ஆகியவற்றின் பெருக்கல் பலனேயன்றி $7, x, y$ ஆகியவற்றின் பெருக்கல் பலன் அன்று. எனவே $7xxy$ என்பதற்குச் சரியான விடை $7\,(x)\,(x)\,(y) = 7x^2y$ என்பதாகும்.

கணக்கு

பயிற்சி 1.2

1. பின்வரும் ஒருறுப்புச் சோடிகளின் பெருக்கல் பலனைக் காண்க:
   (i) $3, 7x$ (ii) $-7x, 3y$ (iii) $-3a, 5ab$ (iv) $5a^2, -4a$ (v) $\frac{3}{7}x^5, \frac{14}{9}x^2$
   (vi) xy^2, x^2y (vii) x^3y^5, xy^2 (viii) abc, abc (ix) $xyz. x^2yz$ (x) $a^2b^2c^3, abc^2$

2. பின்வரும் அட்டவணையைப் பெருக்கல் பலன்களால் நிரப்புக:

முதலாம் ஒருறுப்புக் கோவை → இரண்டாம் ஒருறுப்புக் கோவை ↓	$2x$	$-3y$	$4x^2$	$-5xy$	$7x^2y$	$-6x^2y^2$
$2x$	$4x^2$					
$-3y$						
$4x^2$						
$-5xy$				$25x^2y^2$		
$7x^2y$						
$-6x^2y^2$		$18x^2y^3$				

3. பெருக்கல் பலன்களைக் காண்க:
   (i) $2a, 3a^2, 5a^4$ (ii) $2x, 4y, 9z$ (iii) ab, bc, ca
   (iv) $m, 4m, 3m^2, -6m^3$ (v) xyz, y^2z, yx^2 (vi) lm^2, mn^2, ln^2
   (vii) $-2p, -3q, -5p^2$

4. பெருக்கல் பலன்களைக் காண்க:
   (i) $(a^3)\times(2a^5)\times(4a^{15})$ (ii) $(5-2x)(4+x)$ (iii) $(x+3y)(3x-y)$
   (iv) $(3x+2)(4x-3)$ (v) $(\frac{2}{3}ab)\ (\frac{-15}{8}a^2b^2)$

5. பின்வருவனவற்றின் பெருக்கல் பலன்களைக் காண்க:
   (i) $(a+b)(2a^2-5ab+3b^2)$ (ii) $(2x+3y)(x^2-xy+y^2)$
   (iii) $(x+y+z)(x+y-z)$ (iv) $(a+b)(a^2+2ab+b^2)$ (v) $(m-n)(m^2+mn+n^2)$

6. (i) $2x(x-y-z)$, $2y(z-y-x)$ ஆகியவற்றைக் கூட்டுக.

   (ii) $4a(5a+2b-3c)$ இலிருந்து $3a(a-2b+3c)$ ஐக் கழிக்க.

1.4 முற்றொருமைகள்

$(x+2)(x+3) = x^2+5x+6$ என்ற சமன்பாட்டைக் கருதுவோம்.

இச்சமன்பாட்டின் இரு பக்கங்களின் மதிப்புகளையும் x இன் ஏதேனும் ஒரு மதிப்பிற்குக் காண்க. உதாரணமாக, $x = 5$ எனில்

இடப் பக்கம் $= (x+2)(x+3) = (5+2)(5+3) = 7\times 8 = 56$

வலப் பக்கம் $= x^2+5x+6 = 5^2+5(5)+6 = 25+25+6 = 56$

ஆகவே, இச்சமன்பாட்டின் இருபக்கங்களின் மதிப்புகளும் $x = 5$ எனும்போது சமம் ஆகின்றன.

இப்பொழுது, $x = -5$ என எடுத்துக்கொண்டால்,

இடப் பக்கம் $= (x+2)(x+3) = (-5+2)(-5+3) = (-3)(-2) = 6$

வலப் பக்கம் $= x^2 + 5x + 6 = (-5)^2 + 5(-5) + 6 = 25 - 25 + 6 = 6$

$x = -5$ எனும் போதும் இச்சமன்பாட்டின் இருபக்கத்து மதிப்புகளும் சமமாகின்றன.

ஆகவே இச்சமன்பாட்டில் உள்ள மாறிக்கு எந்த மதிப்பை அளித்தாலும், இடப்பக்க மதிப்பும் வலப்பக்க மதிப்பும் சமமாகிறது. எனவே $(x+2)(x+3) = x^2 + 5x + 6$ என்பது ஒரு முற்றொருமை ஆகும்.

முற்றொருமை: மாறி ஏற்கும் எல்லா மதிப்புகளும் ஒரு சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் எனில் அச்சமன்பாடு ஒரு முற்றொருமை எனப்படும்.

செய்து பார்

கீழ்க்காண்பவைகள் ஒரு முற்றொருமையா? இல்லையா? என்பதைச் சரிபார்.

(i) $5(x+4) = 5x + 20$ (ii) $6x + 10 = 4x + 20$.

1.4.1 இயற்கணித முற்றொருமைகள்

பல கணக்குகளைத் தீர்க்க அதிகம் பயன்படும் மூன்று முக்கிய இயற்கணித முற்றொருமைகளை நாம் இப்பொழுது கற்போம். ஓர் ஈருறுப்புக் கோவையை மற்றோர் ஈருறுப்புக் கோவையால் பெருக்குவதன் மூலம் நாம் இம்முற்றொருமைகளைப் பெறுகிறோம்.

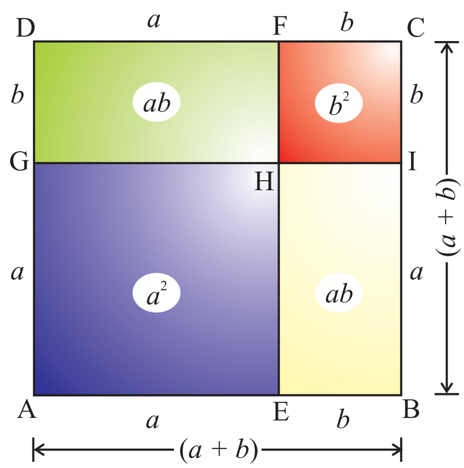
முதலாம் முற்றொருமை

$(a+b)^2$ என்பதைக் கருதுவோம்.

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= a^2 + ab + ba + b^2\\ &= a^2 + ab + ab + b^2 \qquad [\because ab = ba]\\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

ஆகவே, $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

$(a+b)^2$ இன் வடிவியல் விளக்கம்



இப்படத்தில்,

ABCD என்ற சதுரத்தின் பக்கம் $(a+b)$ ஆகும்.

$\therefore$ சதுரம் ABCD –இன் பரப்பு

$= (a+b)(a+b)$

= சதுரம் AEHG இன் பரப்பு + செவ்வகம் EBIH இன் பரப்பு + செவ்வகம் GHFD இன் பரப்பு + சதுரம் HICF இன் பரப்பு

$$= (a \times a) + (b \times a) + (a \times b) + (b \times b)$$

$$= a^2 + ba + ab + b^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\therefore \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

இரண்டாம் முற்றொருமை

$(a-b)^2$ என்பதைக் கருதுவோம்.

$$(a-b)^2 = (a-b)\ (a-b)$$

$$= a^2 - ab - ba + b^2$$

$$= a^2 - ab - ab + b^2$$

$$= a^2 - 2ab + b^2$$

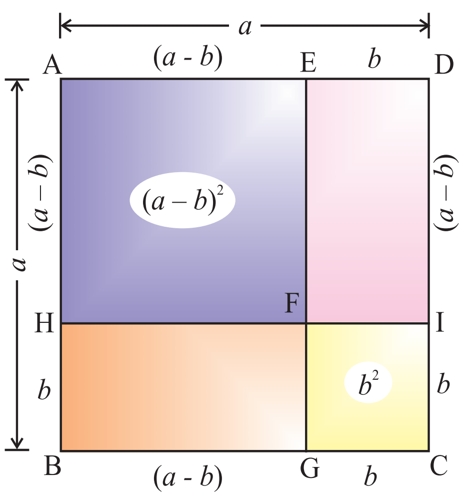
ஆகவே, $\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

$(a-b)^2$ இன் வடிவியல் விளக்கம்

ABCD என்ற சதுரத்தின் பரப்பு a^2 சதுர அலகுகள் ஆகும்.

$(a-b)$ ஐப் பக்கமாகக் கொண்ட AHFE என்ற சதுரத்தின் பரப்பு $(a-b)^2$ சதுர அலகுகள் ஆகும்.

இது படத்தில் நீலவண்ணத்தில் உள்ள சதுரப் பகுதியாகும்.



செவ்வகம் BCIH இன் பரப்பு = $a \times b$ சதுர அலகுகள்

செவ்வகம் EGCD இன் பரப்பு = $a \times b$ சதுர அலகுகள்

சதுரம் FGCI இன் பரப்பு = b^2 சதுர அலகுகள்

BGFH இன் பரப்பு = செவ்வகம் BCIH இன் பரப்பு – சதுரம் FGCI இன் பரப்பு

$$= ab - b^2$$

இப்பொழுது, சதுரம் AHFE இன் பரப்பு

= சதுரம் ABCD இன் பரப்பு – (செவ்வகம் EGCD இன் பரப்பு + செவ்வகம் BGFH இன் பரப்பு)

$$(a-b)^2 = a^2 - (ab + ab - b^2)$$

$$= a^2 - ab - ab + b^2$$

$$= a^2 - 2ab + b^2$$

$$\therefore \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

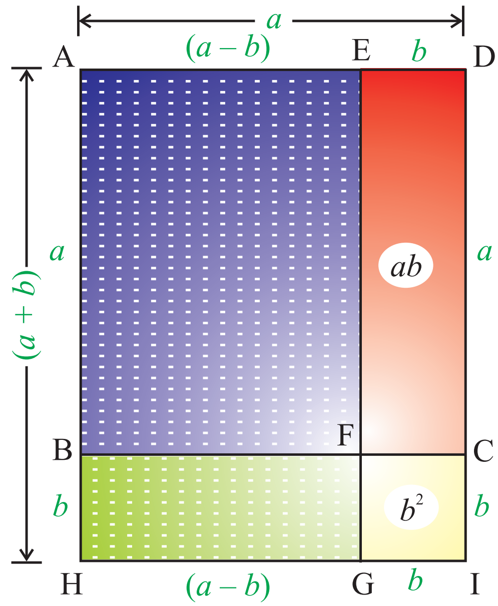
மூன்றாம் முற்றொருமை

$(a+b)(a-b)$ என்பதைக் கருதுவோம்.

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a^2 - ab + ba - b^2\\ &= a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ab} - b^2 \qquad [\because ab = ba]\\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

ஆகவே, $\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$

$(a+b)(a-b)$ இன் வடிவியல் விளக்கம்



செவ்வகம் AHGE இன் பரப்பு $= (a+b)\times(a-b)$

= சதுரம் ABCD இன் பரப்பு –
செவ்வகம் EFCD இன் பரப்பு +
செவ்வகம் BHIC இன் பரப்பு –
சதுரம் FGIC இன் பரப்பு

$= a^2 - ab + ab - b^2$

$= a^2 - b^2$

$\therefore \quad (a+b)\times(a-b) = a^2 - b^2$

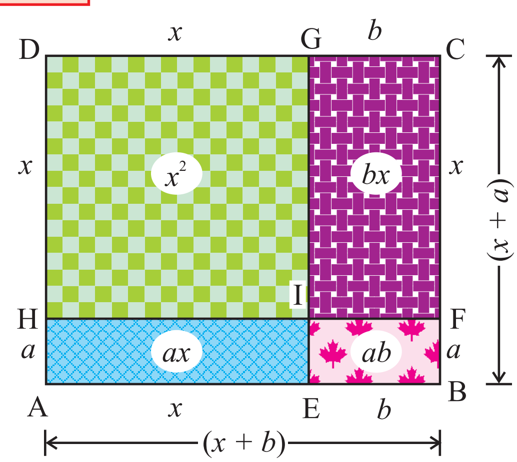
பொது முற்றொருமை

$(x+a)(x+b)$ என்பதைக் கருதுவோம்

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b) &= x^2 + bx + ax + ab\\ &= x^2 + ax + bx + ab\end{aligned}$$

ஆகவே, $\boxed{(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab}$

$(x+a)(x+b)$ இன் வடிவியல் விளக்கம்



செவ்வகம் ABCD இன் பரப்பு $= (x+a)(x+b)$

= சதுரம் DHIG இன் பரப்பு +
செவ்வகம் AEIH இன் பரப்பு +
செவ்வகம் IFCG இன் பரப்பு +
செவ்வகம் EBFI இன் பரப்பு

$= x^2 + ax + bx + ab$

$= x^2 + (a+b)x + ab$

$\therefore \quad (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

இயற்கணித முற்றொருமைகள்

- $(a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) \equiv a^2 - b^2$
- $(x+a)(x+b) \equiv x^2 + (a+b)x + ab$

(பொதுவாக முற்றொருமைகளின் சமநிலைக்கு '$\equiv$' என்ற குறியீட்டைப் பயன்படுத்துவது வழக்கம். எளிமை கருதி இங்கு நாம் '$=$' என்ற குறியீட்டைப் பயன்படுத்துகிறோம்.)

1.4.2 முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்துதல்

எடுத்துக்காட்டு 1.9

விரிவாக்குக : (i) $(x+5)^2$ (ii) $(x+2y)^2$ (iii) $(2x+3y)^2$ (iv) 105^2.

தீர்வு

(i)
$$\begin{aligned}(x+5)^2 &= x^2 + 2(x)(5) + 5^2\\ &= x^2 + 10x + 25\end{aligned}$$

முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தல் :
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
இங்கு, $a = x$, $b = 5$.

மாற்று முறை :
$$\begin{aligned}(x+5)^2 &= (x+5)(x+5)\\ &= x(x+5) + 5(x+5)\\ &= x^2 + 5x + 5x + 25\\ &= x^2 + 10x + 25\end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned}(x+2y)^2 &= x^2 + 2(x)(2y) + (2y)^2\\ &= x^2 + 4xy + 4y^2\end{aligned}$$

முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தல் :
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
இங்கு, $a = x$, $b = 2y$.

மாற்று முறை :
$$\begin{aligned}(x+2y)^2 &= (x+2y)(x+2y)\\ &= x(x+2y) + 2y(x+2y)\\ &= x^2 + 2xy + 2yx + 4y^2 && [\because xy = yx]\\ &= x^2 + 4xy + 4y^2\end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned}(2x+3y)^2 &= (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2\\ &= 4x^2 + 12xy + 9y^2\end{aligned}$$

முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தல் :
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
இங்கு, $a = 2x$, $b = 3y$.

மாற்றுமுறை :
$$\begin{aligned}(2x+3y)^2 &= (2x+3y)(2x+3y)\\ &= 2x(2x+3y) + 3y(2x+3y)\\ &= (2x)(2x) + (2x)(3y) + (3y)(2x) + (3y)(3y)\\ &= 4x^2 + 6xy + 6yx + 9y^2 && [\because xy = yx]\\ (2x+3y)^2 &= 4x^2 + 12xy + 9y^2\end{aligned}$$

(iv)
$$105^2 = (100+5)^2$$
$$= 100^2 + 2(100)(5) + 5^2$$
$$= (100 \times 100) + 1000 + 25$$
$$= 10000 + 1000 + 25$$
$$105^2 = 11025$$

முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தல் : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ இங்கு, $a = 100$, $b = 5$.

எடுத்துக்காட்டு 1.10

மதிப்புகளைக் காண்க : (i) $(x-y)^2$ (ii) $(3p-2q)^2$ (iii) 97^2 (iv) $(4.9)^2$

தீர்வு

(i)
$$(x-y)^2 = x^2 - 2(x)(y) + y^2$$
$$= x^2 - 2xy + y^2$$

முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தல் : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ இங்கு, $a = x$, $b = y$.

(ii)
$$(3p-2q)^2 = (3p)^2 - 2(3p)(2q) + (2q)^2$$
$$= 9p^2 - 12pq + 4q^2$$

முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தல் : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ இங்கு, $a = 3p$, $b = 2q$.

(iii)
$$97^2 = (100-3)^2$$
$$= (100)^2 - 2(100)(3) + 3^2$$
$$= 10000 - 600 + 9$$
$$= 9400 + 9$$
$$= 9409$$

முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தல் : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ இங்கு, $a = 100$, $b = 3$.

(iv)
$$(4.9)^2 = (5.0-0.1)^2$$
$$= (5.0)^2 - 2(5.0)(0.1) + (0.1)^2$$
$$= 25.00 - 1.00 + 0.01$$
$$= 24.01$$

முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தல் : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ இங்கு, $a = 5.0$, $b = 0.1$.

எடுத்துக்காட்டு 1.11

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ என்ற முற்றொருமையைப் பயன்படுத்திப் பின்வருவனவற்றை மதிப்பிடுக :

(i) $(x+3)(x-3)$ (ii) $(5a+3b)(5a-3b)$ (iii) 52×48 (iv) $997^2 - 3^2$.

தீர்வு

(i)
$$(x+3)(x-3) = x^2 - 3^2$$
$$= x^2 - 9$$

முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தல் : $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ இங்கு, $a = x$, $b = 3$

கணக்கு

(ii) $(5a+3b)(5a-3b) = (5a)^2-(3b)^2$

$= 25a^2-9b^2$

முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தல் :
$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$
இங்கு, $a = 5a$, $b = 3b$

(iii) $52 \times 48 = (50+2)(50-2)$

$= 50^2-2^2$

$= 2500-4$

$= 2496$

முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தல் :
$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$
இங்கு, $a = 50$, $b = 2$

(iv) $997^2-3^2 = (997+3)(997-3)$

$= (1000)(994)$

$= 994000$

முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தல் :
$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$
இங்கு, $a = 997$, $b = 3$

எடுத்துக்காட்டு 1.12

$(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$ என்ற முற்றொருமையைப் பயன்படுத்திப் பின்வருவனவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க :

(i) $(m+3)(m+5)$ (ii) $(p-2)(p-3)$ (iii) $(2x+3y)(2x-4y)$

(iv) 55×56 (v) 95×103 (vi) 501×505

தீர்வு

(i) $(m+3)(m+5) = m^2+(3+5)m+(3)(5)$

$= m^2+8m+15$

முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தல் :
$(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$
இங்கு, $x = m$, $a = 3$, $b = 5$.

(ii) $(p-2)(p-3) = p^2+(-2-3)p+(-2)(-3)$

$= p^2+(-5)p+6$

$= p^2-5p+6$

முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தல் :
$(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$
இங்கு, $x = p$, $a = -2$, $b = -3$.

(iii) $(2x+3y)(2x-4y) = (2x)^2+(3y-4y)(2x)+(3y)(-4y)$

$= 4x^2+(-y)(2x)-12y^2$

$= 4x^2-2xy-12y^2$

முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தல் :
$(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$
இங்கு, $x = 2x$, $a = 3y$, $b = -4y$.

(iv) $55 \times 56 = (50+5)(50+6)$

$= 50^2+(5+6)50+(5)(6)$

$= (50 \times 50)+(11)50+30$

$= 2500+550+30$

$= 3080$

முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தல் :
$(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$
இங்கு, $x = 50$, $a = 5$, $b = 6$.

(v) $$95 \times 103 = (100-5)(100+3)$$
$$= (100)^2 + (-5+3)(100) + (-5)(3)$$
$$= (100 \times 100) + (-2)(100) - 15$$
$$= 10000 - 200 - 15$$
$$= 9800 - 15$$
$$= 9785$$

முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தல் :
$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$
இங்கு, $x = 100$, $a = -5$, $b = 3$.

(vi) $$501 \times 505 = (500+1)(500+5)$$
$$= (500)^2 + (1+5)(500) + (1)(5)$$
$$= (500 \times 500) + (6)(500) + (1)(5)$$
$$= (500 \times 500) + (6)(500) + 5$$
$$= 250000 + 3000 + 5$$
$$= 253005$$

முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தல் :
$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$
இங்கு, $x = 500$, $a = 1$, $b = 5$.

1.4.3 மேலும் சில பயனுள்ள முற்றொருமைகளைத் தருவித்தல்

பின்வருவனவற்றை நாம் கருதுவோம்,

(i) $$(a+b)^2 + (a-b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 2ab + b^2)$$
$$= a^2 + 2\cancel{ab} + b^2 + a^2 - 2\cancel{ab} + b^2$$
$$= 2a^2 + 2b^2$$
$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$
$$\frac{1}{2}[(a+b)^2 + (a-b)^2] = a^2 + b^2$$

(ii) $$(a+b)^2 - (a-b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2)$$
$$= \cancel{a^2} + 2ab + \cancel{b^2} - \cancel{a^2} + 2ab - \cancel{b^2}$$
$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$
$$\frac{1}{4}[(a+b)^2 - (a-b)^2] = ab$$

(iii) $$(a+b)^2 - 2ab = a^2 + b^2 + 2\cancel{ab} - 2\cancel{ab}$$
$$= a^2 + b^2$$
$$(a+b)^2 - 2ab = a^2 + b^2$$

(iv) $$(a+b)^2 - 4ab = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab$$
$$= a^2 - 2ab + b^2$$
$$= (a-b)^2$$
$$(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$$

கணக்கு

(v) $(a-b)^2 + 2ab = a^2 - 2\cancel{ab} + b^2 + 2\cancel{ab}$

$= a^2 + b^2$

$$(a-b)^2 + 2ab = a^2 + b^2$$

(vi) $(a-b)^2 + 4ab = a^2 - 2ab + b^2 + 4ab$

$= a^2 + 2ab + b^2$

$= (a+b)^2$

$$(a-b)^2 + 4ab = (a+b)^2$$

தருவிக்கப்பட்ட முற்றொருமைகள்

- $\frac{1}{2}[(a+b)^2 + (a-b)^2] = a^2 + b^2$
- $\frac{1}{4}[(a+b)^2 - (a-b)^2] = ab$
- $(a+b)^2 - 2ab = a^2 + b^2$
- $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$
- $(a-b)^2 + 2ab = a^2 + b^2$
- $(a-b)^2 + 4ab = (a+b)^2$

எடுத்துக்காட்டு 1.13

$a+b, a-b$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகள் முறையே 7, 4 எனில் $a^2 + b^2, ab$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு

(i)
$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2}[(a+b)^2 + (a-b)^2]$$
$$= \frac{1}{2}[7^2 + 4^2] \quad (a+b=7,\ a-b=4 \text{ ஆகியவற்றைப் பிரதியிடல்})$$
$$= \frac{1}{2}(49+16)$$
$$= \frac{1}{2}(65) = \frac{65}{2}$$
$$a^2 + b^2 = \frac{65}{2}$$

(ii)
$$ab = \frac{1}{4}[(a+b)^2 - (a-b)^2]$$
$$= \frac{1}{4}(7^2 - 4^2) \quad (a+b=7,\ a-b=4 \text{ ஆகியவற்றைப் பிரதியிடல்})$$
$$= \frac{1}{4}(49-16) = \frac{1}{4}(33)$$
$$ab = \frac{33}{4}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.14

$(a+b) = 10,\ ab = 20$ எனில், $a^2 + b^2,\ (a-b)^2$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு

(i)
$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \quad (a+b=10,\ ab=20 \text{ ஆகியவற்றைப் பிரதியிடல்})$$
$$a^2 + b^2 = (10)^2 - 2(20)$$
$$= 100 - 40 = 60$$
$$a^2 + b^2 = 60$$

(ii) $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$ ($a + b = 10$, $ab = 20$ ஆகியவற்றைப் பிரதியிடல்)

$= (10)^2 - 4(20)$

$= 100 - 80$

$(a-b)^2 = 20$

எடுத்துக்காட்டு 1.15

$(x+l)(x+m) = x^2 + 4x + 2$ எனில் $l^2 + m^2$, $(l-m)^2$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு

பெருக்கற்பலன் சூத்திரத்திலிருந்து நாம் அறிவது,

எனவே, $(x+l)(x+m) = x^2 + (l+m)x + lm$

வலது பக்கத்தை $x^2 + 4x + 2$ உடன் ஒப்பிட, நமக்குக் கிடைப்பது

$l + m = 4, \; lm = 2$

இப்பொழுது, $l^2 + m^2 = (l+m)^2 - 2lm$

$= 4^2 - 2(2) = 16 - 4$

$l^2 + m^2 = 12$

$(l-m)^2 = (l+m)^2 - 4lm$

$= 4^2 - 4(2) = 16 - 8$

$(l-m)^2 = 8$

பயிற்சி 1.3

1. கீழ்க்காணும் வினாக்களுக்குரிய சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடு.

(i) $(a+b)^2 = (a+b)\times$ _____

(A) ab (B) $2ab$ (C) $(a+b)$ (D) $(a-b)$

(ii) $(a-b)^2 = (a-b)\times$ _____

(A) $(a+b)$ (B) $-2ab$ (C) ab (D) $(a-b)$

(iii) $(a^2 - b^2) = (a-b)\times$ _____

(A) $(a-b)$ (B) $(a+b)$ (C) $a^2 + 2ab + b^2$ (D) $a^2 - 2ab + b^2$

(iv) $(9.6)^2 =$ _____

(A) 9216 (B) 93.6 (C) 9.216 (D) 92.16

(v) $(a+b)^2 - (a-b)^2 =$ _____

(A) 4ab (B) 2ab (C) $a^2 + 2ab + b^2$ (D) $2(a^2 + b^2)$

(vi) $m^2 + (c+d)m + cd =$ _____

(A) $(m+c)^2$ (B) $(m+c)(m+d)$ (C) $(m+d)^2$ (D) $(m+c)(m-d)$

கணக்கு

2. பொருத்தமான முற்றொருமையைப் பயன்படுத்திப் பின்வருவனவற்றின் பெருக்கற்பலன்களைக் காண்க:

(i) $(x+3)(x+3)$ (ii) $(2m+3)(2m+3)$

(iii) $(2x-5)(2x-5)$ (iv) $\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(a-\frac{1}{a}\right)$

(v) $(3x+2)(3x-2)$ (vi) $(5a-3b)(5a-3b)$

(vii) $(2l-3m)(2l+3m)$ (viii) $\left(\frac{3}{4}-x\right)\left(\frac{3}{4}+x\right)$

(ix) $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$ (x) $(100+3)(100-3)$

3. $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ என்ற முற்றொருமையைப் பயன்படுத்திப் பின்வருவனவற்றின் பெருக்கற்பலன்களைக் காண்க:

(i) $(x+4)(x+7)$ (ii) $(5x+3)(5x+4)$ (iii) $(7x+3y)(7x-3y)$

(iv) $(8x-5)(8x-2)$ (v) $(2m+3n)(2m+4n)$ (vi) $(xy-3)(xy-2)$

(vii) $\left(a+\frac{1}{x}\right)\left(a+\frac{1}{y}\right)$ (viii) $(2+x)(2-y)$

4. முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் வர்க்கங்களைக் காண்க:

(i) $(p-q)^2$ (ii) $(a-5)^2$ (iii) $(3x+5)^2$

(iv) $(5x-4)^2$ (v) $(7x+3y)^2$ (vi) $(10m-9n)^2$

(vii) $(0.4a-0.5b)^2$ (viii) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$ (ix) $\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)^2$

(x) $0.54\times0.54-0.46\times0.46$

5. முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்திப் பின்வருவனவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க:

(i) 103^2 (ii) 48^2 (iii) 54^2 (iv) 92^2

(v) 998^2 (vi) 53×47 (vii) 96×104 (viii) 28×32

(ix) 81×79 (x) $(2.8)^2$ (xi) $(12.1)^2-(7.9)^2$ (xii) 9.7×9.8

6. நிரூபிக்க :

(i) $(3x+7)^2-84x=(3x-7)^2$

(ii) $(a-b)(a+b)+(b-c)(b+c)+(c-a)(c+a)=0$

7. $a+b=5$, $a-b=4$ எனில் a^2+b^2, ab ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

8. (i) $a+b$, ab ஆகியவற்றின் மதிப்புகள் முறையே 12, 32 எனில், a^2+b^2, $(a-b)^2$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(ii) $(a-b)$, ab ஆகியவற்றின் மதிப்புகள் 6, 40 எனில் a^2+b^2, $(a+b)^2$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

9. $(x+a)(x+b)=x^2-5x-300$ எனில் a^2+b^2 இன் மதிப்பைக் காண்க.

10. $(x+a)(x+b)(x+c)$ என்பதற்கான இயற்கணித முற்றொருமையை பெருக்கற்பலன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தித் தருவி.

(குறிப்பு : $(x+a)(x+b)(x+c)=(x+a)\ [(x+b)(x+c)]$)

1.5 காரணிப்படுத்தல்

20 என்ற இயல்எண்ணை எடுத்துக் கொள்வோம்.

இதை நாம் பின்வரும் எண்களின் பெருக்கற்பலனாக எழுதலாம்.

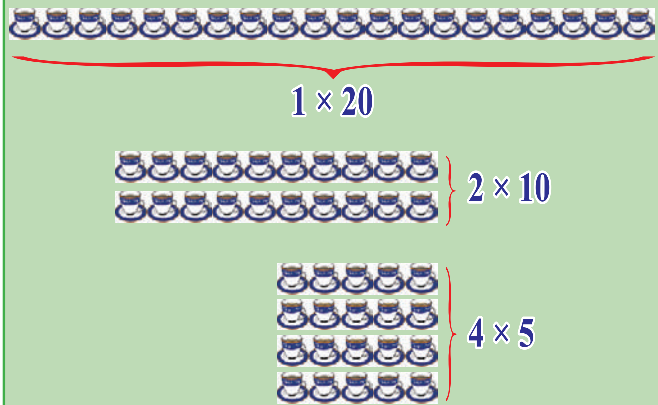
20 = 1 × 20

20 = 2 × 10

20 = 4 × 5

20: 1 × 20   20: 2 × 10   20: 4 × 5

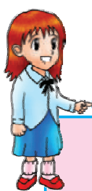
20 தேநீர்க் கோப்பைகளை நாம் கீழ்க்கண்டவாறு வெவ்வேறு வழிகளில் வரிசைப்படுத்தலாம்.



20 என்ற எண்ணிற்கு 6 காரணிகள் உள்ளன. அவை 1, 2, 4, 5, 10, 20 ஆகும். இவைகளுள் 2ம் 5ம், 20 இன் பகாக் காரணிகள் ஆகும்.

20 இன் பகாக் காரணி வடிவம் = 2 × 2 × 5.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 20 \\ \hline 2 & 10 \\ \hline & 5 \end{array}$$



நீவிர் அறிவீரா?

1. ஒன்றைவிடப் பெரிய எண்ணிற்கு 1 ஐயும் தன்னையும் தவிர வேறு காரணிகள் இல்லை எனில் அந்த எண்ணைப் பகா எண் என்கிறோம். உதாரணம் : 2, 3, 5, 7, ...
2. ஒன்றைவிடப் பெரிய எண்ணிற்கு இரண்டிற்கும் மேற்பட்ட காரணிகள் இருப்பின் அவ்வெண்ணைப் பகு எண் என்கிறோம். உதாரணம் : 4, 6, 8, 9, 10, ...
3. 1 என்பது எந்தவொரு எண்ணிற்கும் ஒரு காரணியாக அமைகிறது.
4. ஒன்றைத் தவிர்த்த எந்தவொரு இயல் எண்ணும் பகு எண்ணாகவோ அல்லது பகா எண்ணாகவோ இருக்கும்.
5. 1 என்ற எண் பகு எண்ணும் அன்று, பகா எண்ணும் அன்று.
6. 2 மட்டுமே இரட்டைப் பகா எண் ஆகும்.

1.5.1 காரணிப்படுத்தல் என்றால் என்ன ?

எந்தவொரு இயற்கணிதக் கோவையையும் கூட நாம் அதன் காரணிகளின் பெருக்கல் பலனாக எழுதலாம்.

காரணிப்படுத்தல் : எந்தவொரு பல்லுறுப்புக் கோவையையும் அதன் காரணிகளின் பெருக்கற்பலனாக எழுதுவதைக் காரணிப்படுத்தல் என்கிறோம்.

நம்மால் பின்வரும் இயற்கணிதக் கோவைகளை அவற்றின் காரணிகளின் பெருக்கற் பலனாக எழுத முடியும்.

(i) $6x^3 = (2x)(3x^2)$

(ii) $3a^2b + 3ab^2 = (3ab)(a+b)$

(iii) $2x^2 + x - 6 = (2x-3)(x+2)$

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டுகளை நாம் கீழ்க்கண்டுள்ளவாறும் எழுதலாம்:

இயற்கணிதக் கோவை	முதலாம் காரணி	இரண்டாம் காரணி	நம்மால் இவற்றை மேலும் காரணிப்படுத்த முடியுமா ?	
			முதலாம் காரணி	இரண்டாம் காரணி
$6x^3$	$2x$	$3x^2$	ஆம். $2x = 2 \times x$	ஆம். $3x^2 = 3 \times x \times x$
$3a^2b + 3ab^2$	$(3ab)$	$(a+b)$	ஆம். $3ab = 3 \times a \times b$	இல்லை. $(a+b)$ ஐ மேலும் காரணிப்படுத்த முடியாது.
$2x^2 + x - 6$	$(2x-3)$	$(x+2)$	இல்லை. $(2x-3)$ ஐ மேலும் காரணிப்படுத்த முடியாது.	இல்லை. $(x+2)$ ஐ மேலும் காரணிப்படுத்த முடியாது.

குறிப்பு : மேலும் காரணிகளாகப் பகுக்க முடியாத காரணிகளைப் பகாக் காரணிகள் என்கிறோம். மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில் $(a+b), (2x-3), (x+2)$ ஆகியவை பகாக் காரணிகள் ஆகும்.

1.5.2 பொதுக் காரணியை வெளியே எடுத்துக் காரணிப்படுத்தல்

இம்முறையில், கொடுக்கப்பட்ட கோவையின் பொதுக் காரணியைக் கண்டறிந்து அதை அடைப்புக் குறிக்கு வெளியே கொண்டு வந்து காரணிப்படுத்துகிறோம். இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட உறுப்புகளின் பொதுக் காரணி என்பது எல்லா உறுப்புகளிலும் வரும் காரணி என்பதை நினைவில் கொள்க.

எடுத்துக்காட்டு 1.16

பின்வரும் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்துக:

(i) $2x + 6$ (ii) $4x^2 + 20xy$ (iii) $3x^2 - 12xy$ (iv) $a^2b - ab^2$

(v) $3x^3 - 5x^2 + 6x$ (vi) $7l^3m^2 - 21lm^2n + 28lm$

தீர்வு

(i) $2x + 6 = 2x + (2 \times 3)$

$\therefore 2x + 6 = 2(x+3)$ (‘2’ என்பது இரு உறுப்புகட்கும் பொதுவாக உள்ளது)

குறிப்பு : (i) இங்கு, 2, $(x+3)$ ஆகியன $(2x+6)$ இன் காரணிகளாகும்.

(ii) 2, $(x+3)$ ஆகிய காரணிகளை மேலும் காரணிகளாகப் பகுக்க முடியாது. எனவே 2, $(x+3)$ ஆகியவை பகாக் காரணிகளாகும்.

(ii) $4x^2 + 20xy = (4 \times x \times x) + (4 \times 5 \times x \times y)$

$= 4x\,(x + 5y)$ (பொதுக் காரணியான $4x$-ஐ வெளியே எடுத்தல்)

(iii) $3x^2 - 12xy = (3 \times x \times x) - (3 \times 4 \times x \times y)$

$= 3x\,(x - 4y)$ (பொதுக் காரணியான $3x$-ஐ வெளியே எடுத்தல்)

(iv) $a^2b - ab^2 = (a \times a \times b) - (a \times b \times b)$

$= ab\,(a - b)$ (பொதுக் காரணியான ab-ஐ வெளியே எடுத்தல்)

(v) $3x^3 - 5x^2 + 6x = (3 \times x \times x \times x) - (5 \times x \times x) + (6 \times x)$

$= x\,(3x^2 - 5x + 6)$ (பொதுக் காரணியான x-ஐ வெளியே எடுத்தல்)

(vi) $7l^3m^2 - 21\,lm^2n + 28lm$

$= (7 \times l \times l \times l \times m \times m) - (7 \times 3 \times l \times m \times m \times n) + (7 \times 4 \times l \times m)$

$= 7lm\,(l^2m - 3mn + 4)$ (பொதுக் காரணியான $7lm$-ஐ வெளியே எடுத்தல்)

1.5.3 உறுப்புகளைத் தொகுத்துக் காரணிப்படுத்தல்

இம்முறையில், கொடுக்கப்பட்ட கோவையை இரண்டு அல்லது மூன்று உறுப்புகளின் தொகுப்புகளின் கூட்டலாக எழுதி பிறகு ஒரு பொதுக்காரணியைப் பெற்று காரணிப்படுத்துகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.17

பின்வருவனவற்றைக் காரணிப்படுத்துக:

(i) $x^3 - 3x^2 + x - 3$ (ii) $2xy - 3ab + 2bx - 3ay$

(iii) $2m^2 - 10mn - 2m + 10n$ (iv) $ab\,(x^2 + 1) + x\,(a^2 + b^2)$

தீர்வு

(i) $\underbrace{x^3 - 3x^2} + \underbrace{x - 3} = x^2\,(x - 3) + 1\,(x - 3)$ (முதல் இரு உறுப்புகளையும் முதலில் தொகுத்த பின் பொதுக் காரணியை வெளியே எடுத்தல்)

$= (x^2 + 1)\,(x - 3)$

(ii) $2xy - 3ab + 2bx - 3ay = \underbrace{2xy + 2bx} - \underbrace{3ab - 3ay}$ (காரணிகளை மாற்றியமைத்தல்)

$= 2x\,(y + b) - 3a\,(y + b)$

(பொதுக் காரணியை வெளியே எடுத்தல்)

$= (2x - 3a)\,(y + b)$

(iii) $\underbrace{2m^2 - 10mn} - \underbrace{2m + 10n} = 2m\,(m - 5n) - 2\,(m - 5n)$

$= (2m - 2)\,(m - 5n)$ (பொதுக் காரணியை வெளியே எடுத்தல்)

(iv) $ab\,(x^2 + 1) + x\,(a^2 + b^2) = abx^2 + ab + xa^2 + xb^2$

$= \underbrace{abx^2 + a^2\,x} + \underbrace{b^2\,x + ab}$ (உறுப்புகளை மாற்றியமைத்தல்)

$= ax\,(bx + a) + b\,(bx + a)$

(பொதுக் காரணியான வெளியே எடுத்தல்)

$= (ax + b)\,(bx + a)$

கணக்கு

1.5.4. முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்திக் காரணிப்படுத்தல்

நினைவு கூர்க:

(i) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(ii) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(iii) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

சில நேரங்களில் கொடுக்கப்பட்ட கோவையை அல்லது பல்லுறுப்புக் கோவையை மேற்குறிப்பிடப்பட்ட முற்றொருமைகளின் வடிவில் எழுத முடியும். அவ்வாறு எழுத முடிந்தால் வலப்புறம் உள்ள கோவைகளுக்கு அவற்றின் இடப்புறம் உள்ள கோவைகளே காரணிகளாகும்.

இம்முறையில் நாம் எவ்வாறு முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்தி காரணிப் படுத்துகிறோம் என்பதைக் கீழ்க்கண்டுள்ள எடுத்துக்காட்டுகளைக் கற்பதன் மூலம் அறியலாம்.

கோவை	காரணிகள்
$a^2 + 2ab + b^2$	$(a + b), (a + b)$
$a^2 - 2ab + b^2$	$(a - b), (a - b)$
$a^2 - b^2$	$(a + b), (a - b)$

எடுத்துக்காட்டு 1.18

முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்தி பின்வருவனவற்றைக் காரணிப்படுத்துக:

(i) x^2+6x+9 (ii) $x^2-10x+25$ (iii) $49m^2-56m+16$

(iv) x^2-64 (v) $9x^2y-4y^3$ (vi) m^8-n^8

தீர்வு

(i) x^2+6x+9

x^2+6x+9 ஐ $a^2+2ab+b^2$ உடன் ஒப்பிட்டால், $a = x, b = 3$ எனக் கிடைக்கும்.

$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$, $a = x, b = 3$ என்பதால்

$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$ என்பதைப் பெறுகிறோம்.

$\therefore$ $x^2 + 6x + 9$ இன் காரணிகள் $(x + 3), (x + 3)$ ஆகியவைகளாகும்.

(ii) $x^2 - 10x + 25$

$x^2 - 10x + 25$ ஐ $a^2 - 2ab + b^2$ உடன் ஒப்பிட்டால், $a = x, b = 5$ எனக் கிடைக்கும்.

$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$, $a = x, b = 5$ என்பதால்

$x^2 - 10x + 25 = x^2 - 2(x)(5) + 5^2$

$x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$ என்பதைப் பெறுகிறோம்.

$\therefore$ $x^2 - 10x + 25$ இன் காரணிகள் $(x - 5), (x - 5)$ ஆகியவைகளாகும்.

(iii) $49m^2-56m+16$

இதில், $49m^2 = (7m)^2 ; 16 = 4^2$ என்றும் நாம் எழுதலாம்.

$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ என்ற முற்றொருமையைப் பயன்படுத்திப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$49m^2 - 56m + 1 = (7m)^2 - 2(7m)(4) + 4^2$$
$$= (7m-4)^2$$

$\therefore\ 49m^2 - 56m + 16$ இன் காரணிகள் $(7m-4)$, $(7m-4)$.

(iv) $x^2 - 64$ ஐ $a^2 - b^2$, உடன் ஒப்பிட்டால் $a = x,\ b = 8$ எனக் கிடைக்கும்.

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ என்ற முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தி இவ்வாறு எழுதலாம்.

$$x^2 - 64 = x^2 - 8^2$$
$$= (x+8)(x-8)$$

$\therefore\ x^2 - 64$இன் காரணிகள் $(x+8)$, $(x-8)$ ஆகியவைகளாகும்.

(v) $9x^2y - 4y^3 = y\,[9x^2 - 4y^2]$
$$= y[(3x)^2 - (2y)^2]$$

$(a^2 - b^2) = (a+b)(a-b)$ என்பதுடன் $(3x)^2 - (2y)^2$ ஐ ஒப்பிட்டால் $a = 3x$, $b = 2y$ எனக் கிடைக்கும். $\therefore\ 9x^2y - 4y^3 = y[(3x+2y)(3x-2y)]$

(vi) $m^8 - n^8 = (m^4)^2 - (n^4)^2$
$$= (m^4+n^4)(m^4-n^4)$$
($a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ என்ற முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தல்)
$$= (m^4+n^4)[(m^2)^2 - (n^2)^2]$$
$$= (m^4+n^4)[(m^2+n^2)(m^2-n^2)] \qquad [\because m^2 - n^2 = (m+n)(m-n)]$$
$$= (m^4+n^4)(m^2+n^2)[(m+n)(m-n)]$$
$$m^8 - n^8 = (m^4+n^4)(m^2+n^2)(m+n)(m-n)$$

1.5.5 $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ என்ற முற்றொருமையைப் பயன்படுத்திக் காரணிப்படுத்தல்

$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ என்ற முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தி எவ்வாறு கோவைகளைக் காரணிப்படுத்துகிறோம் என்பதை இப்பொழுது நாம் விரிவாகக் காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.19

காரணிப்படுத்துக : $x^2 + 5x + 6$

தீர்வு

$x^2 + 5x + 6$ ஐ $x^2 + (a+b)x + ab$ உடன் ஒப்பிட

நமக்கு, $ab = 6$, $a + b = 5$, $x = x$ எனக் கிடைக்கின்றன.

இதில் $ab = 6$ எனில், a யும் b யும் 6 இன் காரணிகள் ஆகும்.

இங்கு, $a = 2$, $b = 3$ என்ற மதிப்புகளைப் பெறும் போது $ab = 6$, $a + b = 5$ ஆகிய நிபந்தனைகளை நிறைவு செய்ய வேண்டும். எனவே $a = 2$, $b = 3$ என்பவை சரியான மதிப்புகளாகும். இப்பொழுது,

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b) \text{ ஐப் பயன்படுத்தினால்}$$
$$x^2 + 5x + 6 = x^2 + (2+3)x + (2 \times 3)$$
$$= (x+2)(x+3)$$

$x^2 + 5x + 6$ இன் காரணிகள் $(x+2), (x+3)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.20

காரணிப்படுத்துக: $x^2 + x - 6$

தீர்வு

$x^2 + x - 6$ ஐ $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$ என்பதுடன் ஒப்பிட,

நமக்கு $ab = -6$, $a + b = 1$ என்பவை கிடைக்கின்றன.

ஆகவே, $ab = -6, a + b = 1$ என்று அமையும்படி a, b ஆகியவைகட்கு இரு எண்களைச் சிந்தித்துக் கண்டறிக. a, b ஆகியவற்றின் மதிப்புகள் கீழ்கண்டுள்ளவாறு அமையலாம்.

a	b	ab	$a+b$	தெரிவு
1	6	6	7	✗
1	– 6	– 6	– 5	✗
2	3	6	5	✗
2	– 3	– 6	– 1	✗
– 2	3	– 6	1	✓

இங்கு, நாம் $a = -2, b = 3$ ஆகிய காரணிச் சோடிகளையே தெரிவு செய்ய வேண்டும். ஏனெனில் அவை மட்டுமே $ab = -6$ மற்றும் $a + b = 1$ என்ற நிபந்தனைகளை நிறைவு செய்கின்றன.

$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ - ஐப் பயன்படுத்தினால் நாம் பெறுவது :

$$x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3).$$

எடுத்துக்காட்டு 1.21

காரணிப்படுத்துக: $x^2 + 6x + 8$

தீர்வு

$x^2 + 6x + 8$ ஐ $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$ உடன் ஒப்பிட,

நமக்கு $ab = 8$, $a + b = 6$ என்பவை கிடைக்கின்றன.

8 இன் காரணிகள்	காரணிகள் கூடுதல்
1, 8	9
2, 4	6

இங்கு, 2, 4 ஆகியவையே சரியான காரணிகளாகும்.

$$\therefore\ x^2 + 6x + 8 = x^2 + (2+4)x + (2 \times 4)$$
$$= (x+2)(x+4)$$

$x^2 + 6x + 8$ இன் காரணிகள் $(x+2)$, $(x+4)$ ஆகியவைகளாகும்.

பயிற்சி 1.4

1. கீழ்க்காணும் வினாக்களுக்குரிய சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடு.

(i) $3a + 21ab$ இன் காரணிகள் ....

(A) ab , $(3 + 21)$ (B) 3, $(a + 7b)$ (C) $3a$, $(1 + 7b)$ (D) $3ab$, $(a + b)$

(ii) $x^2 - x - 12$ இன் காரணிகள் ....

(A) $(x + 4), (x - 3)$ (B) $(x - 4), (x - 3)$ (C) $(x + 2), (x - 6)$ (D) $(x + 3), (x - 4)$

(iii) $6x^2 - x - 15$ இன் காரணிகள் $(2x + 3)$ மற்றும் ....

(A) $(3x - 5)$ (B) $(3x + 5)$ (C) $(5x - 3)$ (D) $(2x - 3)$

(iv) $169l^2 - 441m^2$ இன் காரணிகள் ....

(A) $(13l - 21\,m), (13l - 21\,m)$ (B) $(13l + 21\,m), (13l + 21\,m)$

(C) $(13l - 21\,m), (13l + 21\,m)$ (D) $13\,(l + 21\,m), 13(l - 21\,m)$

(v) $(x - 1)\,(2x - 3)$ இன் மதிப்பு ....

(A) $2x^2 - 5x - 3$ (B) $2x^2 - 5x + 3$ (C) $2x^2 + 5x - 3$ (D) $2x^2 + 5x + 3$

2. பின்வரும் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்துக :

(i) $3x - 45$ (ii) $7x - 14y$ (iii) $5a^2 + 35a$ (iv) $-12y + 20y^3$

(v) $15a^2b + 35ab$ (vi) $pq - pqr$ (vii) $18m^3 - 45mn^2$ (viii) $17l^2 + 85m^2$

(ix) $6x^3y - 12x^2y + 15x^4$ (x) $2a^5b^3 - 14a^2b^2 + 4a^3b$

3. காரணிப்படுத்துக :

(i) $2ab + 2b + 3a$ (ii) $6xy - 4y + 6 - 9x$ (iii) $2x + 3xy + 2y + 3y^2$

(iv) $15b^2 - 3bx^2 - 5b + x^2$ (v) $a^2x^2 + axy + abx + by$

(vi) $a^2x + abx + ac + aby + b^2y + bc$ (vii) $ax^3 - bx^2 + ax - b$

(viii) $mx - my - nx + ny$ (ix) $2m^3 + 3m - 2m^2 - 3$ (x) $a^2 + 11b + 11ab + a$

4. காரணிப்படுத்துக :

(i) $a^2 + 14a + 49$ (ii) $x^2 - 12x + 36$ (iii) $4p^2 - 25q^2$

(iv) $25x^2 - 20xy + 4y^2$ (v) $169m^2 - 625n^2$ (vi) $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$

(vii) $121a^2 + 154ab + 49b^2$ (viii) $3x^3 - 75x$

(ix) $36 - 49x^2$ (x) $1 - 6x + 9x^2$

5. காரணிப்படுத்துக :

(i) $x^2 + 7x + 12$ (ii) $p^2 - 6p + 8$ (iii) $m^2 - 4m - 21$

(iv) $x^2 - 14x + 45$ (v) $x^2 - 24x + 108$ (vi) $a^2 + 13a + 12$

(vii) $x^2 - 5x + 6$ (viii) $x^2 - 14xy + 24y^2$

(ix) $m^2 - 21m - 72$ (x) $x^2 - 28x + 132$

1.6 இயற்கணிதக் கோவைகளின் வகுத்தல்

1.6.1 ஓர் ஒருறுப்புக் கோவையை மற்றோர் ஒருறுப்புக் கோவையால் வகுத்தல்

$10 \div 2$ என்பதைக் கருதுவோம். இதை நாம் இவ்வாறு எழுதலாம் $\frac{10}{2} = \frac{5 \times \cancel{2}}{\cancel{2}} = 5$

அதே போல், (i) $10x \div 2$ ஐ $\frac{10x}{2} = \frac{5 \times \cancel{2} \times x}{\cancel{2}} = 5x$ என எழுதலாம்.

(ii) $10x^2 \div 2x = \frac{10x^2}{2x} = \frac{5 \times 2 \times x^2}{2x} = \frac{5 \times \cancel{2} \times \cancel{x} \times x}{\cancel{2} \times \cancel{x}} = 5x$

(iii) $10x^3 \div 2x = \frac{10x^3}{2x} = \frac{5 \times \cancel{2} \times \cancel{x} \times x \times x}{\cancel{2} \times \cancel{x}} = 5x^2$

(iv) $10x^5 \div 2x^2 = \frac{10x^5}{2x^2} = \frac{5 \times \cancel{2} \times \cancel{x} \times \cancel{x} \times x \times x \times x}{\cancel{2} \times \cancel{x} \times \cancel{x}} = 5x^3$

இதற்குப் பதிலாக, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ என்ற அடுக்குக்குறி விதியைப் பயன்படுத்தி (iv) ஆம் கணக்கை நாம் பின்வருமாறு செய்யலாம் :

$$\frac{10x^5}{2x^2} = \frac{10}{2}x^{5-2} = 5x^3$$

(v) $5a^2b^2c^2 \div 15abc = \frac{5a^2b^2c^2}{15abc} = \frac{\cancel{5} \times \cancel{a} \times a \times \cancel{b} \times b \times \cancel{c} \times c}{\cancel{5} \times 3 \times \cancel{a} \times \cancel{b} \times \cancel{c}} = \frac{abc}{3} = \frac{1}{3}abc$

(அல்லது) $5a^2b^2c^2 \div 15abc = \frac{5a^2b^2c^2}{15abc}$

$= \frac{5}{15}a^{2-1}b^{2-1}c^{2-1} = \frac{1}{3}abc$ ($\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ஐப் பயன்படுத்தல்)

1.6.2 ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையை ஓர் ஒருறுப்புக் கோவையால் வகுத்தல்

எடுத்துக்காட்டு 1.22

சுருக்குக : (i) $(7x^2 - 5x) \div x$ (ii) $(x^6 - 3x^4 + 2x^2) \div 3x^2$ (iii) $(8x^3 - 5x^2 + 6x) \div 2x$

தீர்வு

(i) $(7x^2 - 5x) \div x = \frac{7x^2 - 5x}{x}$

$= \frac{7x^2}{x} - \frac{5x}{x}$

$= \frac{7 \times x \times x}{x} - \frac{5 \times x}{x}$

$= 7x - 5$

மாற்று முறை :

$\frac{7x^2 - 5x}{x} = 7x^{2-1} - 5x^{1-1}$

$= 7x^1 - 5x^0 = 7x - 5 (1)$

$[\because a^0 = 1]$

$= 7x - 5$

(ii) $(x^6 - 3x^4 + 2x^2) \div 3x^2$

$= \frac{x^6 - 3x^4 + 2x^2}{3x^2}$

$= \frac{x^6}{3x^2} - \frac{3x^4}{3x^2} + \frac{2x^2}{3x^2}$

$= \frac{1}{3}x^4 - x^2 + \frac{2}{3}$

மாற்று முறை :

x^2 என்ற பொதுக் காரணியைக் கண்டறிந்து நாம் இவ்வாறும் சுருக்கலாம்

$\frac{x^6 - 3x^4 + 2x^2}{3x^2} = \frac{x^2(x^4 - 3x^2 + 2)}{3x^2}$

$= \frac{1}{3}(x^4 - 3x^2 + 2)$

$= \frac{x^4}{3} - x^2 + \frac{2}{3}$

(iii) $(8x^3 - 5x^2 + 6x) \div 2x$

$$= \frac{8x^3 - 5x^2 + 6x}{2x}$$

$$= \frac{8x^3}{2x} - \frac{5x^2}{2x} + \frac{6x}{2x}$$

$$= 4x^2 - \frac{5}{2}x + 3$$

மாற்று முறை :

$8x^3 - 5x^2 + 6x$ இன் ஒவ்வொரு உறுப்பிலிருந்தும் $2x$ ஐப் பிரித்தெடுத்தால் நமக்கு,

$$8x^3 - 5x^2 + 6x = 2x(4x^2) - 2x\left(\frac{5}{2}x\right) + 2x(3)$$

$$= 2x\left(4x^2 - \frac{5}{2}x + 3\right)$$ எனக் கிடைக்கும்.

$$\frac{8x^3 - 5x^2 + 6x}{2x} = \frac{2x(4x^2 - \frac{5}{2}x + 3)}{2x}$$

$$= 4x^2 - \frac{5}{2}x + 3$$

எடுத்துக்காட்டு 1.23

சுருக்குக : $(5x^2 + 10x) \div (x + 2)$.

தீர்வு

$$(5x^2 + 10x) \div (x + 2) = \frac{5x^2 + 10x}{x + 2}$$

தொகுதி $(5x^2 + 10x)$ ஐக் காரணிப்படுத்தினால்

$$5x^2 + 10x = (5 \times x \times x) + (5 \times 2 \times x)$$

$= 5x(x + 2)$ (பொதுக் காரணியான $5x$ ஐ வெளியே எடுத்தல்)

இப்பொழுது, $(5x^2 + 10x) \div (x + 2) = \dfrac{5x^2 + 10x}{x + 2}$

$= \dfrac{5x\cancel{(x + 2)}}{\cancel{(x + 2)}} = 5x$. ($(x + 2)$ ஐ நீக்குதல்)

பயிற்சி 1.5

1. சுருக்குக:

   (i) $16x^4 \div 32x$ (ii) $-42y^3 \div 7y^2$ (iii) $30a^3b^3c^3 \div 45abc$

   (iv) $(7m^2 - 6m) \div m$ (v) $25x^3y^2 \div 15x^2y$ (vi) $(-72l^4m^5n^8) \div (-8l^2m^2n^3)$

2. பின்வரும் வகுத்தல்களைச் செய்க:

   (i) $5y^3 - 4y^2 + 3y \div y$ (ii) $(9x^5 - 15x^4 - 21x^2) \div (3x^2)$

   (iii) $(5x^3 - 4x^2 + 3x) \div (2x)$ (iv) $4x^2y - 28xy + 4xy^2 \div (4xy)$

   (v) $(8x^4yz - 4xy^3z + 3x^2yz^4) \div (xyz)$

3. கீழ்க்காணும் கோவைகளைச் சுருக்குக:

   (i) $(x^2 + 7x + 10) \div (x + 2)$ (ii) $(a^2 + 24a + 144) \div (a + 12)$

   (iii) $(m^2 + 5m - 14) \div (m + 7)$ (iv) $(25m^2 - 4n^2) \div (5m + 2n)$

   (v) $(4a^2 - 4ab - 15b^2) \div (2a - 5b)$ (vi) $(a^4 - b^4) \div (a - b)$

1.7 ஒருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தல்

ஏழாம் வகுப்பில் நாம் இயற்கணிதக் கோவைகள், ஒரு மாறியில் அமைந்த ஒருபடிச் சமன்பாடுகள் ஆகியவற்றைப் பற்றி கற்றுள்ளோம். அவற்றை நாம் இப்பொழுது நினைவு கூர்வோம்.

பின்வரும் உதாரணங்களைக் காண்க:

(i) $2x = 8$ (ii) $3x^2 = 50$ (iii) $5x^2 - 2 = 102$ (iv) $2x - 3 = 5$

(v) $\frac{2}{5}x + \frac{3}{4}y = 4$ (vi) $3x^3 = 81$ (vii) $2(5x + 1) - (2x + 1) = 6x + 2$

இவை யாவும் சமன்பாடுகளாகும்.

ஒரு ‘ = ’ குறியால் இணைக்கப்பட்டுள்ள இரு கோவைகளைக் கொண்ட ஒரு கூற்று சமன்பாடு எனப்படும். இதையே, ‘ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளைக் கொண்ட சமத்தன்மையுள்ள கூற்று’ என்றும் கூறலாம்.

பிறகு, ஒருபடிச் சமன்பாடு என்பது யாது?

அடுக்கு அல்லது படியை ஒன்றாகக் கொண்ட ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளால் ஆன சமன்பாட்டை நேரியல் அல்லது ஒருபடிச் சமன்பாடு என்கிறோம்.

ஆகவே, மேற்கண்ட சமன்பாடுகளுள் (i), (iv), (v), (vii) ஆகியவற்றில் உள்ள மாறிகளின் படி ஒன்றாகும். ஆகவே, அவை ஒருபடிச் சமன்பாடுகளாகும்.

மேலும், சமன்பாடுகள் (ii), (iii), (vi) ஆகியவை ஒருபடிச் சமன்பாடுகள் அல்ல. ஏனெனில் மாறியின் மிக உயர்ந்த அடுக்கு அல்லது படி ஒன்றை விட அதிகம்.

சமன்பாடுகளைப் புரிந்துகொள்ளுதல்

$2x - 3 = 5$ என்ற சமன்பாட்டைக் கருதுவோம்.

(i) ஒரு இயற்கணித சமன்பாடு என்பது மாறிகள், மாறிலிகள் ஆகியவைகளால் ஆன சமத்தன்மையுள்ள கூற்று ஆகும்.

மாறி சமக்குறி

$$\underbrace{2x \; - \; 3 \; = \; 5}_{\text{சமன்பாடு}}$$

(ii) ஒவ்வொரு சமன்பாடும் ஒரு சமக்குறியைப் பெற்றிருக்கும். சமக்குறிக்கு இடது கை புறம் உள்ள கோவையை (இடதுபக்கம்) என்றும் வலது கை புறம் உள்ள கோவையை (வலது பக்கம்) என்றும் குறிக்கிறோம்.

$2x - 3$ = இடது பக்கம்

5 = வலது பக்கம்

(iii) ஒரு சமன்பாட்டின் இடதுபக்கக் கோவையின் மதிப்பும் வலதுபக்கக் கோவையின் மதிப்பும் சமம் ஆகும். இது மாறிகளின் குறிப்பிட்ட சில மதிப்பு களுக்கே உண்மையாகும். இவ்வாறு சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் மதிப்பு களை தீர்வுகள் அல்லது மூலங்கள் என்கிறோம்.

$x = 4$ என்பது $2x - 3 = 5$ என்ற சமன்பாட்டை நிறைவு செய்கிறது. எனவே, $x = 4$ என்பது இச்சமன்பாட்டின் தீர்வு ஆகும்.

இடதுபக்கம் $= 2(4) - 3$

$= 8 - 3 = 5 =$ வலது பக்கம்

$x = 5$ என்பது இச்சமன்பாட்டிற்கு தீர்வு அல்ல. ஏனெனில் $x = 5$ எனில்,

இடது பக்கம் $= 2(5) - 3$

$= 10 - 3 = 7 \neq$ வலது பக்கம்

சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க உதவும் விதிகள்

சமன்பாட்டினைத் தீர்க்கும்போது நாம் கீழ்க்கண்ட விதிகளுள் ஒன்றையோ இரண்டையோ அனைத்தையுமோ பயன்படுத்த நேரிடலாம்.

1. ஒரு சமன்பாட்டின் இரு பக்கமும் ஒரே எண்ணைக் கூட்டினாலோ அல்லது கழித்தாலோ சமன்பாட்டின் மதிப்பு மாறாது.
2. பூச்சியமற்ற ஓர் எண்ணால் சமன்பாட்டின் இருபக்கமும் பெருக்கினாலோ அல்லது வகுத்தாலோ அதன் மதிப்பு மாறாது.
3. இடமாற்று முறை : ஒரு சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும்போது, மாறிகளைக் கொண்ட உறுப்புகளை எல்லாம் ஒரு பக்கமாகவும், மாறிலிகளையெல்லாம் மறுபக்கமாகவும் கொண்டு செல்ல வேண்டும். சில உறுப்புகளை ஒரு பக்கத்திலிருந்து மறுபக்கத்திற்கு இடமாறுதல் செய்வதன் மூலம் இதனைச் செய்யலாம். சமன்பாட்டின் எந்தவொரு உறுப்பையும் அதன் குறியை மாற்றி ஒரு பக்கத்திலிருந்து மறுபக்கத்திற்கு எடுத்துச் செல்லலாம். இவ்வாறு உறுப்புகளை மாற்றும் முறைக்கு இட மாற்று முறை என்று பெயர்.

1.7.1 ஒரு மாறியில் அமைந்த ஒருபடிச் சமன்பாடு

ஏழாம் வகுப்பிலேயே நாம் ஒரு மாறியில் அமைந்த ஒருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கக் கற்றுள்ளோம். $ax + b = 0$, இங்கு $a \neq 0$ என்ற வடிவில் அமைந்த ஒருபடிச் சமன்பாட்டைக் கருதுவோம்.

ஒரு மாறியில் அமைந்த ஒருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு ஒரே ஒரு தீர்வு மட்டுமே உண்டு

எடுத்துக்காட்டு 1.24

$5x - 13 = 42$ இன் தீர்வைக் காண்க.

தீர்வு

படி 1 : இருபக்கமும் 13ஐக் கூட்ட, $5x - 13 + 13 = 42 + 13$

$$5x = 55$$

படி 2 : இருபக்கத்தையும் 5ஆல் வகுக்க, $\frac{5x}{5} = \frac{55}{5}$

$$x = 11$$

சரிபார்த்தல் :

இடப் பக்கம்

$= 5 \times 11 - 13$

$= 55 - 13$

$= 42$

= வலப் பக்கம்

இடமாற்று முறை:

$$5x - 13 = 42$$

$$5x = 42 + 13$$ (– 13 ஐ வலப்பக்கத்திற்கு மாற்றுதல்)

$$5x = 55$$

$$\frac{5x}{5} = \frac{55}{5}$$ (இருபக்கத்தையும் 5ஆல் வகுத்தல்)

$$x = 11$$

எடுத்துக்காட்டு 1.25

தீர்க்க : $5y + 9 = 24$

மாற்றுமுறை :

$5y + 9 = 24$

$5y = 24 - 9$ (9ஐ வலப்பக்கத்திற்கு மாற்றிடல்)

$5y = 15$ மற்றும் $y = \frac{15}{5}$. எனவே $y = 3$.

தீர்வு

$$5y + 9 = 24$$

$$5y + 9 - 9 = 24 - 9 \quad \text{(இருபக்கமும் 9ஐக் கழித்தல்)}$$

$$5y = 15$$

$$\frac{5y}{5} = \frac{15}{5} \quad \text{(இருபக்கத்தையும் 5ஆல் வகுத்தல்)}$$

$$y = 3$$

சரிபார்த்தல் :

இடது பக்கம் = 5 (3) + 9 = 24 = வலது பக்கம்

எடுத்துக்காட்டு 1.26

தீர்க்க: $2x + 5 = 23 - x$

மாற்றுமுறை :

$2x + 5 = 23 - x$

$2x + x = 23 - 5$ (இடமாற்று முறை)

$3x = 18$

$x = \frac{18}{3}$ (இருபக்கத்தையும் 3ஆல் வகுத்தல்)

$x = 6$

தீர்வு

$$2x + 5 = 23 - x$$

$$2x + 5 - 5 = 23 - x - 5$$

(– 5 ஐ இருபுறமும் சேர்த்தல்)

$$2x = 18 - x$$

$$2x + x = 18 - x + x$$

$$3x = 18$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{18}{3} \quad \text{(இருபக்கத்தையும் 3ஆல் வகுத்தல்)}$$

$$x = 6$$

சரிபார்த்தல் : இடப் பக்கம் = $2x + 5 = 2(6) + 5 = 17$,

வலப் பக்கம் = $23 - x = 23 - 6 = 17$.

எடுத்துக்காட்டு 1.27

தீர்க்க : $\frac{9}{2}m + m = 22$

சரிபார்த்தல் :

இடப்பக்கம் = $\frac{9}{2}m + m = \frac{9}{2}(4) + 4$

= 18 + 4 = 22 = வலப் பக்கம்

தீர்வு

$$\frac{9}{2}m + m = 22$$

$$\frac{9m + 2m}{2} = 22 \quad \text{(இடப்பக்கத்திற்கு மீ.பொ.ம. எடுத்தல்)}$$

$$\frac{11m}{2} = 22$$

$$m = \frac{22 \times 2}{11} \quad \text{(குறுக்குப் பெருக்கலின்படி)}$$

$$m = 4$$

எடுத்துக்காட்டு 1.28

தீர்க்க : $\frac{2}{x} - \frac{5}{3x} = \frac{1}{9}$

தீர்வு

$$\frac{2}{x} - \frac{5}{3x} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{6-5}{3x} = \frac{1}{9} \quad \text{(இடப்பக்கத்திற்கு மீபொம எடுத்தல்)}$$

$$\frac{1}{3x} = \frac{1}{9}$$

$$3x = 9; \; x = \frac{9}{3}\; ; x = 3.$$

சரிபார்த்தல் :

இடப் பக்கம்

$$= \frac{2}{x} - \frac{5}{3x}$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{5}{3(3)} = \frac{2}{3} - \frac{5}{9}$$

$$= \frac{6-5}{9}$$

$= \frac{1}{9}$ = வலப் பக்கம்

எடுத்துக்காட்டு 1.29

இரு அடுத்தடுத்த மிகை ஒற்றை முழுக்களின் கூடுதல் 32 எனில் அவ்வெண்களைக் காண்க.

தீர்வு

இரு அடுத்தடுத்த மிகை ஒற்றை முழுக்கள் x , $(x+2)$ என்க.

மேலும், அவற்றின் கூடுதல் 32.

$$\therefore (x) + (x+2) = 32$$

$$2x + 2 = 32$$

$$2x = 32 - 2$$

$$2x = 30$$

$$x = \frac{30}{2} = 15$$

சரிபார்த்தல் :

15 + 17 = 32

ஒரு எண் $x = 15$ எனில், மற்றொரு எண் $x + 2 = 15 + 2 = 17$.

$\therefore$ தேவைப்படும் அவ்விரு அடுத்தடுத்த மிகை ஒற்றை முழுக்கள் 15, 17 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.30

ஓர் எண்ணின் மூன்றில் ஒரு பங்கின் இரண்டில் ஒருபங்கின் ஐந்தின் ஒரு பங்கு 15 எனில் அவ்வெண்ணைக் காண்க.

தீர்வு

தேவையான எண் x என்க.

கணக்கின்படி, x இன் $\frac{1}{3}$ இன் $\frac{1}{2}$ இன் $\frac{1}{5}$ பங்கு = 15.

அதாவது, $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times x = 15$

$$x = 15 \times 3 \times 2 \times 5$$

$$x = 45 \times 10$$

$$= 450$$

எனவே, தேவையான அவ்வெண் 450 ஆகும்.

சரிபார்த்தல் :

இடப்பக்கம்

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times x$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times 450$$

= 15 = வலப்பக்கம்

கணக்கு

எடுத்துக்காட்டு 1.31

ஒரு விகிதமுறு எண்ணை $\frac{5}{2}$ ஆல் பெருக்கி வரும் பெருக்கற் பலனுடன் $\frac{2}{3}$ ஐக் கூட்டினால் $\frac{-7}{12}$ கிடைக்கும் எனில் அவ்விகிதமுறு எண் எது?

தீர்வு

அந்த விகிதமுறு எண் x என்க.

இதை $\frac{5}{2}$ ஆல் பெருக்கி வரும் பெருக்கல் பலனுடன் $\frac{2}{3}$ ஐக் கூட்ட, நமக்குக்கிடைப்பது $\frac{-7}{12}$.

அதாவது, $x \times \frac{5}{2} + \frac{2}{3} = \frac{-7}{12}$

$$\frac{5x}{2} = \frac{-7}{12} - \frac{2}{3}$$

$$= \frac{-7-8}{12} = \frac{-15}{12}$$

$$x = \frac{-15}{12} \times \frac{2}{5} = \frac{-1}{2}.$$

சரிபார்த்தல் :

இடப் பக்கம்

$$= \frac{-1}{2} \times \frac{5}{2} + \frac{2}{3} = \frac{-5}{4} + \frac{2}{3}$$

$$= \frac{-15+8}{12} = \frac{-7}{12}$$

= வலப் பக்கம்.

எனவே, தேவைப்பட்ட அவ்விகிதமுறு எண் $\frac{-1}{2}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.32

அருணின் தற்போதைய வயது அவருடைய தந்தையின் வயதில் பாதியாகும். பன்னிரண்டு ஆண்டுகட்கு முன்பு தந்தையின் வயதானது அருணின் வயதைப் போல் மும்மடங்காக இருந்தது. அவர்களின் தற்போதைய வயதினைக் காண்க.

தீர்வு

அருணின் தற்போதைய வயது x என்க.

அவருடைய தந்தையின் தற்போதைய வயது $2x$ ஆண்டுகள் ஆக இருக்கும்.

12 ஆண்டுகட்கு முன்பு, அருணின் வயது $(x-12)$ ஆண்டுகளாகவும்,

அவருடைய தந்தையின் வயது $(2x-12)$ ஆண்டுகளாகவும் இருந்திருக்கும்.

கணக்கின்படி, $(2x-12) = 3(x-12)$

$$2x - 12 = 3x - 36$$

$$36 - 12 = 3x - 2x$$

$$x = 24$$

சரிபார்த்தல் :

அருணின் வயது	தந்தையின் வயது
இப்பொழுது : 24	இப்பொழுது : 48
12 ஆண்டுகட்கு முன்பு 24 – 12 = 12	48 – 12 = 36 36 = 3 × (அருணின் வயது) = 3 (12) = 36

எனவே, அருணின் தற்போதைய வயது = 24 ஆண்டுகள்.

அவருடைய தந்தையின் தற்போதைய வயது = 2 (24) = 48 ஆண்டுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 1.33

ஒரு நபர் ஒரு மகிழுந்தை ₹ 1,40,000க்கு விற்பனை செய்ததன் மூலம் 20% நட்ட மடைந்தார் எனில் மகிழுந்தின் அடக்கவிலை யாது?

தீர்வு

மகிழுந்தின் அடக்க விலை x என்க.

நட்டம் 20% = x இன் $\frac{20}{100} = \frac{1}{5} \times x = \frac{x}{5}$

அடக்கவிலை – நட்டம் = விற்பனை விலை

$$x - \frac{x}{5} = 140000$$
$$\frac{5x - x}{5} = 140000$$
$$\frac{4x}{5} = 140000$$
$$x = 140000 \times \frac{5}{4}$$
$$x = 175000$$

சரிபார்த்தல் :

நட்டம் = 175000 இல் 20%

= $\frac{20}{100} \times 175000$

= ₹ 35,000

வி.வி. = அ.வி. – நட்டம்

= 175000 – 35000

= ₹ 140000

எனவே, அந்த மகிழுந்தின் அடக்கவிலை ₹ 1,75,000 ஆகும்.

பயிற்சி 1.6

1. பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க :

(i) $3x + 5 = 23$

(ii) $17 = 10 - y$

(iii) $2y - 7 = 1$

(iv) $6x = 72$

(v) $\frac{y}{11} = -7$

(vi) $3(3x - 7) = 5(2x - 3)$

(vii) $4(2x - 3) + 5(3x - 4) = 14$

(viii) $\frac{7}{x-5} = \frac{5}{x-7}$

(ix) $\frac{2x+3}{3x+7} = \frac{3}{5}$

(x) $\frac{m}{3} + \frac{m}{4} = \frac{1}{2}$

2. கீழ்க்காணும் கூற்றுகளுக்குச் சமன்பாடுகளை அமைத்துத் தீர்வு காண்க:

(i) ஓர் எண்ணின் பாதியுடன் அவ்வெண்ணின் மூன்றிலொரு பங்கைக் கூட்டினால் 15 கிடைக்கும் எனில் அந்த எண்ணைக் காண்க.

(ii) அடுத்தடுத்த மூன்று எண்களின் கூடுதல் 90 எனில் அவ்வெண்களைக் காண்க.

(iii) ஒரு செவ்வகத்தின் அகலம் அதன் நீளத்தைவிட 8 செ.மீ. குறைவு. மேலும், அச்செவ்வகத்தின் சுற்றளவு 60 செ.மீ. எனில் அதன் நீள, அகலங்களைக் காண்க.

(iv) இரு எண்களின் கூடுதல் 60. அவற்றுள் பெரிய எண்ணானது சிறிய எண்ணைப் போல் 4 மடங்கு எனில் அவ்வெண்களைக் காண்க.

(v) இரு எண்களின் கூடுதல் 21 அவ்விரு எண்களுக்கு இடையே உள்ள வேறுபாடு 3 எனில் அவ்வெண்களைக் காண்க.

(குறிப்பு: பெரிய எண்ணை x என்க. எனவே, சிறிய எண் $x - 3$ ஆகும்)

(vi) இரு எண்கள் 5 : 3 என்ற விகிதத்தில் உள்ளன. அவற்றின் வேறுபாடு 18 எனில் அவ்வெண்களைக் காண்க.

(vii) எந்த எண்ணிலிருந்து அதனுடைய 5% ஐக் குறைத்தால் 3800 கிடைக்கும் ?

(viii) ஒரு பின்னத்தின் பகுதி அதன் தொகுதியைவிட 2 அதிகம். மேலும் அப்பின்னத்தின் தொகுதியுடனும் பகுதியுடனும் ஒன்றைக் கூட்டினால் $\frac{2}{3}$ கிடைக்கும். எனில் அந்தப் பின்னத்தைக் காண்க.

(ix) மேரி, நந்தினியின் வயதைப் போல் மும்மடங்கு மூத்தவர். 10 ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு அவர்களின் வயதுகளின் கூடுதல் 80 ஆக இருக்கும் எனில் அவர்களின் தற்போதைய வயதினைக் காண்க.

(x) முரளி தன்னுடைய சேமிப்பில் பாதியை மனைவிக்கும், மீதியில் மூன்றில் இரு பங்கை மகனுக்கும் எஞ்சிய ₹ 50,000 ஐத் தனது மகளுக்கும் கொடுத்தார் எனில் அவருடைய மனைவியின் பங்கையும் மகனின் பங்கையும் காண்க.

கருத்துச் சுருக்கம்

- ஒருறுப்புக் கோவை: ஒரே ஒரு உறுப்பை மட்டும் கொண்ட ஓர் இயற்கணிதக் கோவை ஒருறுப்புக் கோவை எனப்படும்.
- ஈருறுப்புக் கோவை: இரண்டு உறுப்புகளை மட்டும் கொண்ட ஓர் இயற்கணிதக் கோவை ஈருறுப்புக் கோவை எனப்படும்.
- மூவுறுப்புக் கோவை: மூன்று உறுப்புகளை மட்டும் கொண்ட ஓர் இயற்கணிதக் கோவை மூவுறுப்புக் கோவை எனப்படும்.
- பல்லுறுப்புக் கோவை: முடிவுறு எண்ணிக்கையில் அமைந்த பூச்சியமற்ற கெழுவையுடைய பல உறுப்புகளைக் கொண்ட கோவையைப் பல்லுறுப்புக் கோவை என்கிறோம்.
- பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி: உறுப்புகளின் மிக உயர்ந்த அடுக்கு அல்லது படி அப்பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி எனப்படும்.

  ஒத்த மாறிகளையும் ஒத்த அடுக்குகளையும் கொண்ட உறுப்புகள் ஒத்த அல்லது ஓரின உறுப்புகள் எனப்படுகின்றன.

  - ஒத்த அல்லது ஓரின உறுப்புகளை மட்டுமே கூட்டவோ கழிக்கவோ முடியும்.
  - ஒருறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கல் பலனும் ஓர் ஒருறுப்புக்கோவையே.
  - ஓர் ஒருறுப்புக் கோவையை ஓர் ஈருறுப்புக்கோவையால் பெருக்கினால் பெருக்கல் பலன் ஓர் ஈருறுப்புக் கோவையாகும்.

முற்றொருமைகள்
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

- காரணிப்படுத்தல்: எந்தவொரு பல்லுறுப்புக் கோவையையும் அதன் காரணிகளின் பெருக்கல் பலனாக எழுதுவதையே காரணிப்படுத்தல் என்கிறோம்.
- ஒருபடிச் சமன்பாடு: அடுக்கு அல்லது படியை ஒன்றாகக் கொண்ட ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளால் ஆன சமன்பாட்டை நேரியல் அல்லது ஒருபடிச் சமன்பாடு என்கிறோம்.

  $ax + b = 0$ என்பது ஒரு மாறியில் அமைந்த ஒருபடிச் சமன்பாட்டின் பொது வடிவம் ஆகும். இங்கு $a \neq 0$; a, b ஆகியவை மாறிலிகள், x என்பது மாறி ஆகும்.
- ஒரு மாறியில் அமைந்த ஓர் ஒருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு ஒரே ஒரு தீர்வு மட்டுமே உண்டு.

கணித மன்றச் செயல்பாடு

இயற்கணித வேடிக்கை

நம்மால் $2 = 3$ என நிரூபிக்க இயலுமா?

இது கேள்விப்படாத ஒன்றல்லவா? ஆம்.

நிரூபணம் :

$2 = 3$ என நிறுவ, கீழ்க்காணும் சமன்பாட்டுடன் தொடங்குவோம்.

$$4 - 10 = 9 - 15$$

$6\frac{1}{4}$ என்பதைச் சமன்பாட்டின் இருபக்கமும் கூட்ட

$$4 - 10 + 6\frac{1}{4} = 9 - 15 + 6\frac{1}{4}$$ இதையே நாம்,

$$2^2 - 2(2)(\frac{5}{2}) + (\frac{5}{2})^2 = 3^2 - 2(3)(\frac{5}{2}) + (\frac{5}{2})^2$$ என்றவாறு எழுதலாம்.

அதாவது, $(2 - \frac{5}{2})^2 = (3 - \frac{5}{2})^2$

இருபக்கமும் வர்க்கமூலம் காண, நமக்கு $(2 - \frac{5}{2}) = (3 - \frac{5}{2})$ என்பது கிடைக்கும்.

இருபக்கமும் $\frac{5}{2}$ ஐக் கூட்டினால்,

$$2 - \frac{5}{2} + \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2} + \frac{5}{2}$$

$2 = 3$ என நமக்குக் கிடைக்கிறது

இப்பொழுது, நாம் 2 ம் 3 ம் சமம் என நிரூபித்து விட்டோம்.

தவறு எங்கே உள்ளது?

நாம் சற்று விரிவாகக் காண்போம் : $\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2$ என்பதை

$$2 - \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2}$$

என்று நாம் முடிவு செய்த இடத்தில் ஒரு தவறு நிகழ்ந்து விட்டது.

இரு எண்களின் வர்க்கங்கள் சமம் எனில் அவ்விரு எண்கள் சமமாக இருக்கவேண்டும் என்ற முடிவுக்கு வருவது தவறு.

உதாரணமாக. $(-5)^2 = 5^2$ $[\because (-5)(-5) = (5)(5) = 25]$

எனில் -5 என்பது 5-க்குச் சமம் அன்று.

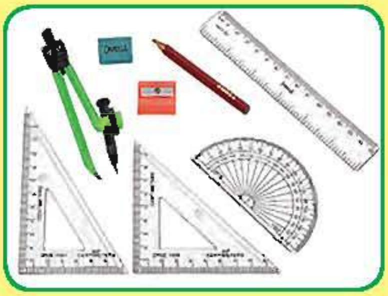
மேலே உள்ள கணக்கில் நாம் $\left(\frac{-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$, என்ற முடிவினைப் பெற்றோம்.

இதிலிருந்து, $\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$ என நாம் முடிவு செய்ததே இத்தவறு ஏற்படக் காரணமாகும்.

உங்களுக்குத் தற்பொழுது புரிந்துவிட்டதா?

செய்முறை வடிவியல்

2

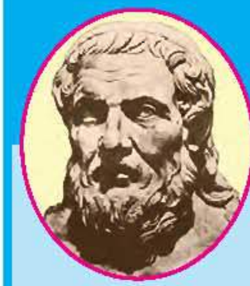


2.1 அறிமுகம்

நமது அன்றாட வாழ்வில் சதுரம், செவ்வகம், சாய் சதுரம் போன்ற வடிவங்கள் பெரிதும் பயன்படுகின்றன. பழங்காலக் கணித வல்லுநர்கள் சதுரம், செவ்வகம், சாய் சதுரம் போன்ற வடிவங்களைப் பரப்பளவுகளைக் காணப் பயன்படுத்தினர். இந்த வடிவங்களைப் பயன்படுத்தி பல பயனுள்ள கண்களைக் கவரக்கூடிய உருவங்களைப் பெறலாம். நம்மிடம் உள்ள பல இயந்திரங்கள், பொருள்கள், வடிவமைப்புகள், உருவங்கள் இவை அனைத்தும் சதுரம், செவ்வகம், சாய் சதுரம் போன்ற வடிவத்தில் ஏதேனும் ஒன்றை ஒத்திருக்கும்.

இவ்வடிவங்களைப் பற்றிய அடிப்படை அறிவானது கட்டடக் கலை, எந்திர வடிவமைப்பியல், பொறியியல், ஆடை மற்றும் தோல் தொழில் நுட்பம் ஆகிய துறைகளில் மிகுதியாக எடுத்தாளப்படுகின்றது.

முதல் பருவத்தில் நாம் நாற்கரம், சரிவகம், இணைகரம் ஆகியவற்றை வரையும் முறைகளைக் கற்றறிந்தோம். இப்பருவத்தில் சதுரம், செவ்வகம், சாய் சதுரம் ஆகியவைகளை வரையும் முறைகளைக் கற்க உள்ளோம்.



அப்போலோனியஸ்

[கி.மு. 262 – 200]

மாபெரும் கணித மேதையும் வானியல் வல்லுநருமான அப்போலோனியஸ் தெற்கு ஆசியா மைனரில் உள்ள பெர்காவில் பிறந்தார். அங்கிருந்து அலெக்ஸாண்ட்ரியா சென்று யூக்ளிடின் சீடர்களிடம் பயின்றார். பல்வேறு கணிதத் தலைப்புகளிலும் நூல்களை எழுதியுள்ளார். அவர் கூம்பு வெட்டி வடிவங்களான பரவளையம், அதிபரவளையம், நீள்வட்டம் ஆகியவற்றைக் கண்டறிந்தார்.

கணக்கு

2.2 சாய்சதுரம்

2.2.1. அறிமுகம்

அடுத்துள்ள பக்கங்கள் சமமாக உள்ள ஓர் இணைகரம் சாய்சதுரமாகும்.

ABCD என்ற சாய்சதுரத்தில்

(படம் 2.1 இல் பார்க்கவும்)

(i) அனைத்துப் பக்கங்களும் சமம்.

அதாவது, AB = BC = CD = DA

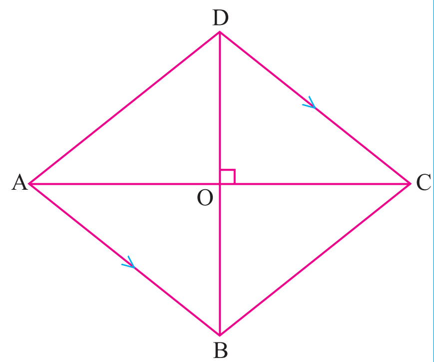
(ii) எதிர்க் கோண அளவுகள் சமம்.

அதாவது, $\angle A = \angle C$ மற்றும் $\angle B = \angle D$

(iii) மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக இருசமக் கூறிடுகின்றன.

அதாவது, AO = OC ; BO = OD,

'O' இல் $\overline{AC}$ ம் $\overline{BD}$ ம் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகும்.



படம் 2.1

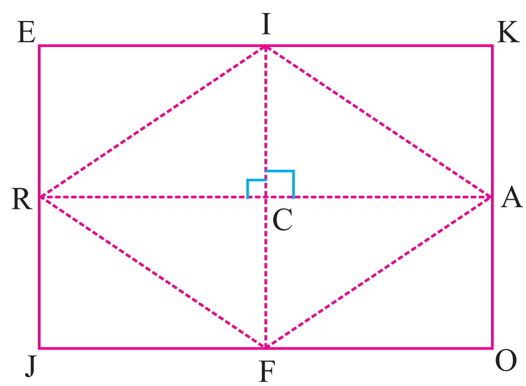
(iv) எவையேனும் இரு அடுத்துள்ள கோண அளவுகளின் கூடுதல் 180° ஆகும்.

(v) ஒவ்வொரு மூலைவிட்டமும் சாய்சதுரத்தை இரண்டு சர்வசம முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கின்றன.

(vi) மூலைவிட்டங்கள் அளவில் சமமற்றவை.

2.2.2 சாய்சதுரத்தின் பரப்பளவு

JOKE என்ற ஒரு செவ்வகத்தாளை எடுத்துக் கொள்வோம்.



படம் 2.2

இதன் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளைக் குறிக்கவும். இம்மையப் புள்ளிகளைக் காகித மடிப்புகளின் மூலம் செய்து காணவும். $\overline{JO}$ இன் நடுப்புள்ளி F; $\overline{OK}$ இன் நடுப்புள்ளி A; $\overline{KE}$ இன் நடுப்புள்ளி I மற்றும் EJ இன் நடுப்புள்ளி R. $\overline{RA}$, $\overline{IF}$ களை இணைப்போம். இவை C இல் வெட்டட்டும். FAIR என்பது சாய்சதுரம்.

நமக்கு 8 சர்வசமச் செங்கோண முக்கோணங்கள் கிடைத்துள்ளன.

தேவையான சாய்சதுரம் FAIR-இன் பரப்பு 4 செங்கோண முக்கோணங்களின் பரப்பாகும். (அதாவது Δ ICR, Δ ICA, Δ FCA, Δ FCR)

எனவே, சாய்சதுரம் FAIR-இன் பரப்பு என்பது செவ்வகம் JOKE-இன் பரப்பில் பாதியாகும்.

செவ்வகத்தின் நீளம் $\overline{JO}$ ஆனது சாய்சதுரத்தின் ஒரு மூலை விட்டம் $(\overline{RA}) = d_1$ ஆகும். செவ்வகத்தின் அகலம் $\overline{JE}$ ஆனது சாய்சதுரத்தின் மற்றொரு மூலை விட்டம் $(\overline{IF}) = d_2$ ஆகும்.

சாய்சதுரம் FAIR-இன் பரப்பு $= \frac{1}{2} \times \overline{JO} \times \overline{JE}$

$= \frac{1}{2} \times \overline{RA} \times \overline{IF}$

சாய்சதுரத்தின் பரப்பு $A = \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$ சதுர அலகுகள்

d_1, d_2 என்பன சாய்சதுரத்தின் மூலை விட்டங்களின் நீளங்கள் ஆகும்.

2.2.3 சாய்சதுரம் அமைத்தல்

சாய்சதுரத்தை இரண்டு பொருத்தமான முக்கோணங்களாகப் பிரிப்பதன் மூலம் வரையலாம். கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளிலிருந்து ஒரு முக்கோணம் வரைந்த பின்னர் நான்காவது உச்சியைக் காண்கிறோம். எனவே சாய்சதுரம் அமைப்பதற்கு ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பில்லாத இரண்டு அளவுகள் தேவைப்படுகின்றன.

பின்வருமாறு அளவுகள் அமைந்தால் நாம் சாய்சதுரத்தை வரைய இயலும்.

(i) ஒரு பக்கம், ஒரு மூலைவிட்டம்

(ii) ஒரு பக்கம், ஒரு கோணம்

(iii) இரண்டு மூலைவிட்டங்கள்

(iv) ஒரு மூலைவிட்டம், ஒரு கோணம்

2.2.4 ஒரு பக்கமும், ஒரு மூலைவிட்டமும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் போது சாய்சதுரம் அமைத்தல்

எடுத்துக்காட்டு 2.1

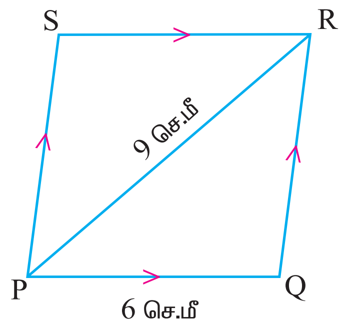
PQ = 6 செ.மீ. மற்றும் PR = 9 செ.மீ. அளவுகள் கொண்ட PQRS என்ற சாய்சதுரம் வரைந்து அதன் பரப்பளவைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

தீர்வு

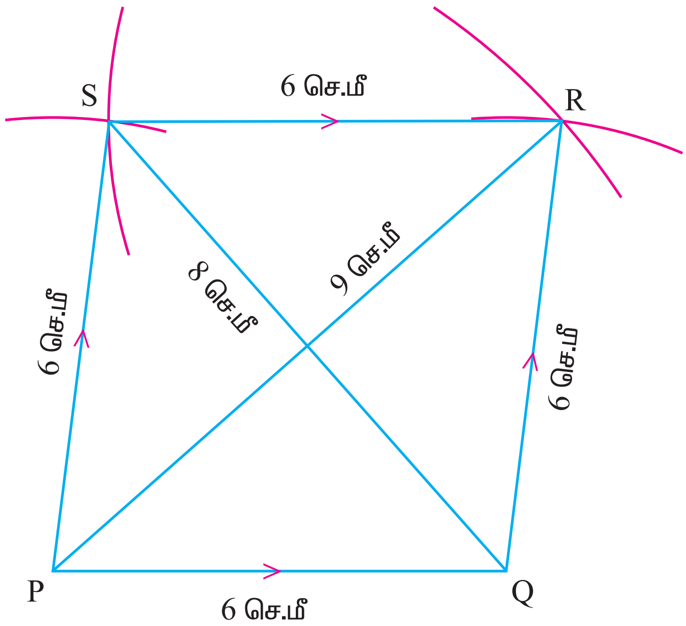
தரவு: PQ = 6 செ.மீ. மற்றும் PR = 9 செ.மீ.

சாய்சதுரம் அமைத்தல்

உதவிப்படம்



படம் 2.3



படம் 2.4

வரைதலுக்கான படிகள்

படி 1 : உதவிப்படம் ஒன்றினை வரைந்து அதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் குறிக்கவும்.

படி 2 : 6 செ.மீ நீளமுடைய PQ என்ற ஒரு கோட்டுத்துண்டை வரையவும்.

படி 3 : P மற்றும் Q களை மையங்களாகக் கொண்டு முறையே 9 செ.மீ., 6 செ.மீ. ஆர அளவுகளையுடைய இரண்டு வட்ட வில்கள் வரையவும். அவை ஒன்றையொன்று R இல் வெட்டட்டும்.

படி 4 : $\overline{PR}$ மற்றும் $\overline{QR}$ ஐ வரையவும்.

படி 5 : P மற்றும் R ஐ மையங்களாகக் கொண்டு 6 செ.மீ. ஆர அளவுடைய இரண்டு வட்ட வில்கள் வரையவும். அவை ஒன்றையொன்று S இல் வெட்டட்டும்.

படி 6 : $\overline{PS}$ மற்றும் $\overline{RS}$ ஐ வரையவும்.

PQRS தேவையான சாய்சதுரம் ஆகும்.

படி 7 : QS இன் அளவு காணவும்.

QS = d_2 = 8 செ.மீ. PR = d_1 = 9 செ.மீ. ஆகும்.

பரப்பளவு கணக்கிடுதல்:

PQRS என்ற சாய்சதுரத்தில், d_1 = 9 செ.மீ. மற்றும் d_2 = 8 செ.மீ.

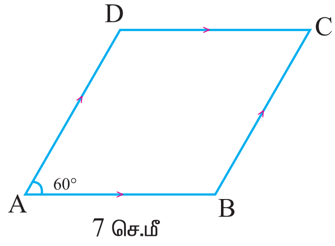
சாய்சதுரம் PQRS இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2 = \frac{1}{2} \times 9 \times 8 = 36$ செ.மீ ^{2}.

2.2.5 ஒரு பக்கமும், ஒரு கோணமும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் போது சாய்சதுரம் அமைத்தல்

எடுத்துக்காட்டு 2.2

AB = 7 செ.மீ. மற்றும் $\angle A = 60°$ அளவுகள் கெண்ட ABCD என்ற சாய்சதுரம் அமைத்து அதன் பரப்பளவைக் காணவும்.

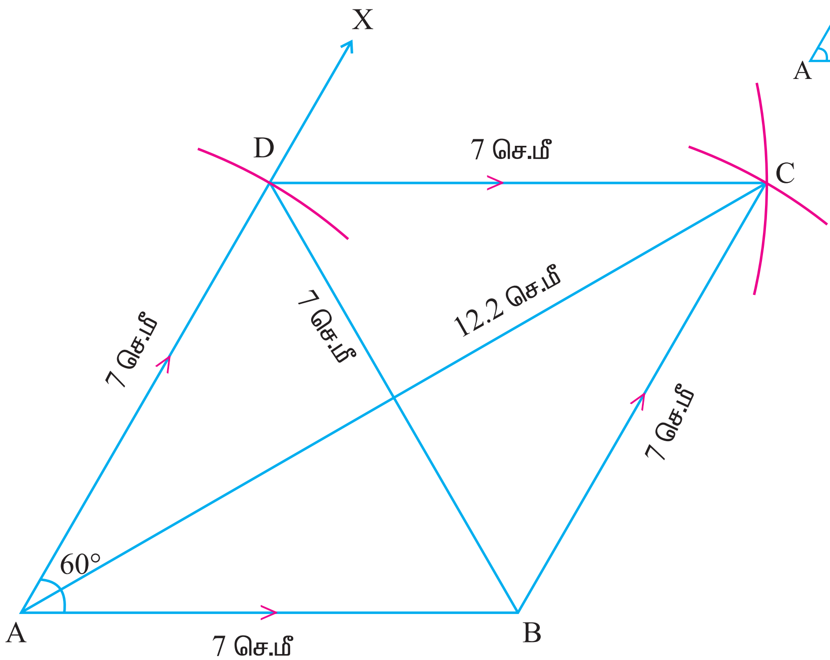
உதவிப்படம்



படம் 2.5

தீர்வு

தரவு: AB = 7 செ.மீ. மற்றும் $\angle A = 60°$



படம் 2.6

சாய்சதுரம் அமைத்தல்

வரைதலுக்கான படிகள்

படி 1 : உதவிப்படம் ஒன்றினை வரைந்து அதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் குறிக்கவும்.

படி 2 : 7 செ.மீ. நீளமுடைய AB என்ற ஒரு கோட்டுத் துண்டை வரையவும்.

படி 3 : AB என்ற கோட்டுத்துண்டின் மேல் A இடத்து $\angle BAX = 60°$ உள்ளவாறு $\overrightarrow{AX}$ ஐ அமைக்கவும்.

படி 4 : A ஐ மையமாகக் கொண்டு 7 செமீ ஆர அளவுடைய வட்டவில் ஒன்று வரையவும். இது $\overrightarrow{AX}$ ஐ D இல் வெட்டட்டும்.

படி 5 : B ஐயும், D ஐயும் மையங்களாகக் கொண்டு 7 செமீ ஆர அளவுடைய வட்டவில்கள் வரையவும். அவை ஒன்றையொன்று C இல் வெட்டட்டும்.

படி 6 : $\overline{BC}$ மற்றும் $\overline{DC}$ ஐ வரையவும்.

ABCD தேவையான சாய்சதுரம் ஆகும்.

படி 7 : AC மற்றும் BD களின் அளவுகளைக் காணவும்.

AC = d_1 = 12.2 செ.மீ. மற்றும் BD = d_2 = 7 செ.மீ. ஆகும்.

பரப்பளவு கணக்கிடுதல்:

ABCD என்ற சாய்சதுரத்தில், d_1 = 12.2 செ.மீ. மற்றும் d_2 = 7 செ.மீ.

சாய்சதுரம் ABCD இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$

$= \frac{1}{2} \times 12.2 \times 7$

= 42.7 செ.மீ ^{2}.

2.2.6 இரண்டு மூலைவிட்டங்கள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் போது சாய்சதுரம் அமைத்தல்

எடுத்துக்காட்டு 2.3

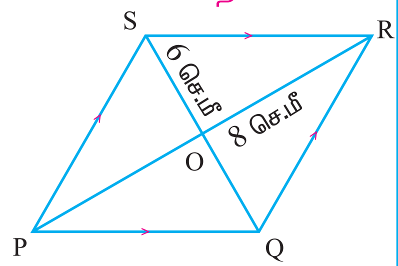
PR = 8 செ.மீ. மற்றும் QS = 6 செ.மீ. அளவுகள் கொண்ட PQRS சாய்சதுரம் அமைத்து அதன் பரப்பளவைக் காண்க.

தீர்வு

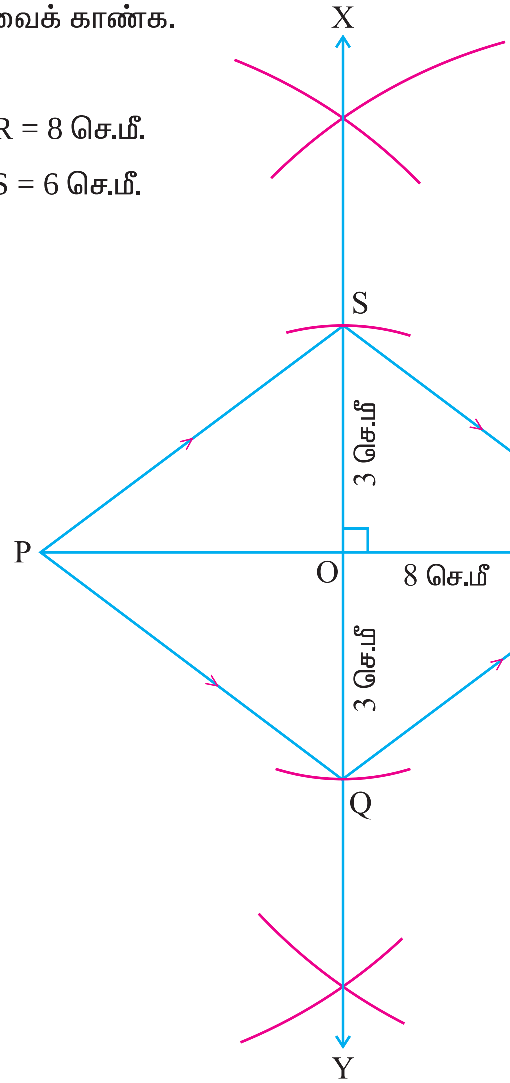
தரவு: PR = 8 செ.மீ.

QS = 6 செ.மீ.

உதவிப்படம்



படம் 2.7



படம் 2.8

வரைதலுக்கான படிகள்

படி **1** : உதவிப்படம் ஒன்றினை வரைந்து அதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் குறிக்கவும்.

படி **2** : 8 செமீ நீளமுடைய PR என்ற ஒரு கோட்டுத் துண்டை வரையவும்.

படி **3** : $\overline{PR}$ க்கு மையக்குத்துக்கோடாகிய $\overleftrightarrow{XY}$ ஐ வரையவும். அது $\overline{PR}$ ஐ 'O' இல் வெட்டட்டும்.

படி **4** : 'O' ஐ மையமாகக்கொண்டு 3 செ.மீ. (QS இன் பாதியளவு) ஆர அளவுடைய வில்கள் $\overleftrightarrow{XY}$ இன் மேல் 'O' இன் இருபுறங்களிலும் $\overleftrightarrow{XY}$ ஐ (படம் 6.43 இல் காட்டியுள்ளது போல்) Q மற்றும் S இல் வெட்டுமாறு வரையவும்.

படி **5** : $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RS}$ மற்றும் $\overline{SP}$ ஐ வரையவும்.

PQRS என்பது தேவையான சாய்சதுரம் ஆகும்.

படி **6** : PR = d_1 = 8 செ.மீ., QS = d_2 = 6 செ.மீ ஆகியன கொடுக்கப்பட்ட அளவுகள்.

பரப்பளவு கணக்கிடுதல்:

PQRS என்ற சாய்சதுரத்தில் $d_1 = 8$ செ.மீ. மற்றும் $d_2 = \mathbf{6}$ செ.மீ.

சாய்சதுரம் PQRS இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$

$= \frac{1}{2} \times 8 \times 6$

= 24 செ.மீ ².

2.2.7 ஒரு மூலைவிட்டமும், ஒரு கோணமும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் போது சாய்சதுரம் அமைத்தல்

எடுத்துக்காட்டு 2.4

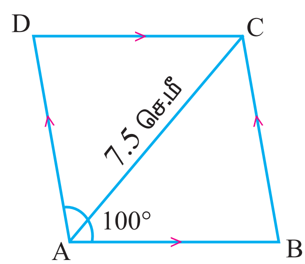
AC = 7.5 செ.மீ. மற்றும் $\angle A = 100°$ அளவுகள் கொண்ட ABCD என்ற சாய்சதுரம் வரைந்து அதன் பரப்பளவைக் காண்க.

தீர்வு

தரவு: AC = 7.5 செ.மீ. மற்றும் $\angle A = 100°$

சாய்சதுரம் அமைத்தல்

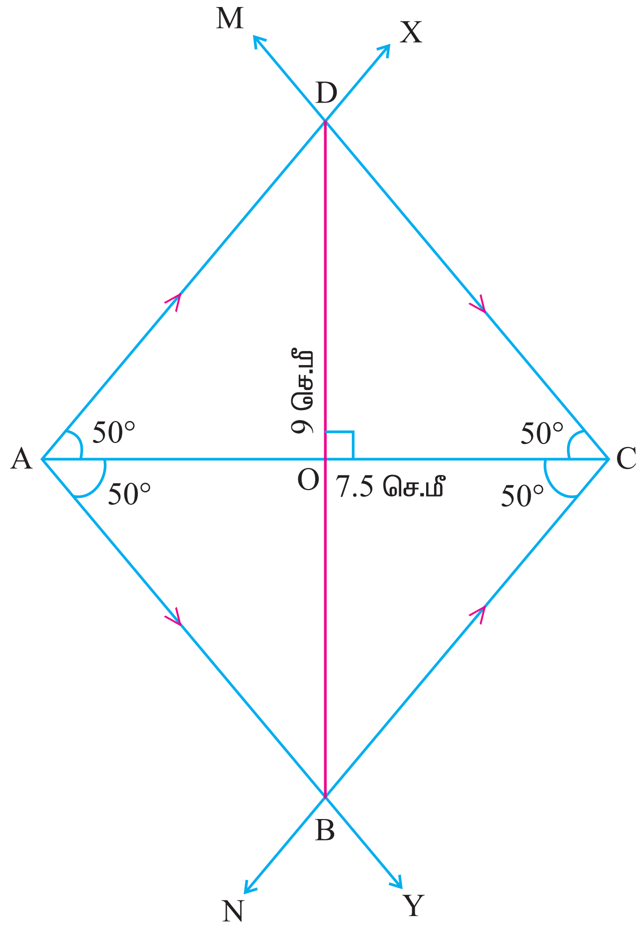
உதவிப்படம்



படம் **2.9**

வரைதலுக்கான படிகள்

படி **1** : உதவிப்படம் ஒன்றினை வரைந்து அதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் குறிக்கவும்.



படம் 2.10

படி 2 : 7.5 செ.மீ. நீளமுடைய AC என்ற ஒரு கோட்டுத்துண்டை வரையவும்.

படி 3 : $\overline{AC}$ இன் இருபக்கங்களிலும் A இடத்து 50° கோணம் உண்டாக்குமாறு $\overrightarrow{AX}$ மற்றும் $\overrightarrow{AY}$ களை வரையவும்.

படி 4 : $\overline{CA}$ இன் இருபக்கங்களிலும் C இடத்து 50° கோணம் உண்டாக்குமாறு $\overrightarrow{CM}$ மற்றும் $\overrightarrow{CN}$ களை வரையவும்.

படி 5 : $\overrightarrow{AX}$ மற்றும் $\overrightarrow{CM}$ என்பன D இல் வெட்டட்டும்.

$\overrightarrow{AY}$ மற்றும் $\overrightarrow{CN}$ என்பன B இல் வெட்டட்டும்.

ABCD தேவையான சாய்சதுரம் ஆகும்.

படி 6 : BD இன் அளவைக் காணவும்.

BD = d_2 = 9 செ.மீ. AC = d_1 = 7.5 செ.மீ. ஆகும்.

பரப்பளவு கணக்கிடுதல்:

ABCD என்ற சாய்சதுரத்தில், d_1 = 7.5 செ.மீ. மற்றும் d_2 = 9 செ.மீ.

சாய்சதுரம் ABCD இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2 \quad = \frac{1}{2} \times 7.5 \times 9$

$= 7.5 \times 4.5 \quad = 33.75$ செ.மீ ^{2}.

பயிற்சி 2.1

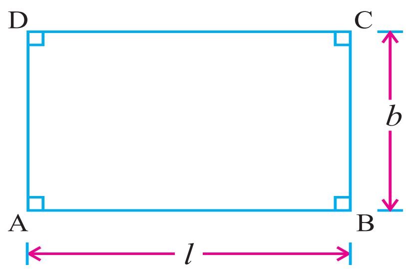
கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் கொண்டு BEST என்ற சாய்சதுரம் வரைந்து அதன் பரப்பளவைக் கணக்கிடவும்.

1. BE = 5 செ.மீ. மற்றும் BS = 8 செ.மீ.
2. BE = 6 செ.மீ. மற்றும் ET = 8.2 செ.மீ.
3. BE = 6 செ.மீ. மற்றும் $\angle$B = 45°.
4. BE = 7.5 செ.மீ. மற்றும் $\angle$E = 65°.
5. BS = 10 செ.மீ. மற்றும் ET = 8 செ.மீ.
6. BS = 6.8 செ.மீ. மற்றும் ET = 8.4 செ.மீ.
7. BS = 10 செ.மீ. மற்றும் $\angle$B = 60°.
8. ET = 9 செ.மீ. மற்றும் $\angle$E = 70°.

2.3 செவ்வகம் மற்றும் சதுரம்

2.3.1 செவ்வகம்

இணைகரத்தில் ஒரு கோணஅளவு 90° எனில் அது செவ்வகமாகும்.



படம் 2.11

இதன் பண்புகளாவன:

(i) எதிர்ப் பக்கங்கள் சமம்.

(ii) எல்லாக் கோண அளவுகளும் சமம்.

(iii) ஒவ்வொரு கோண அளவும் 90°.

(iv) மூலைவிட்டங்களின் அளவுகள் சமம்.

(v) மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமக் கூறிடுகின்றன.

செவ்வகத்தின் பரப்பு

ABCD என்ற செவ்வகத்தின் பரப்பு = நீளம் × அகலம் சதுர அலகுகள்

A = $l \times b$ சதுர அலகுகள்.

2.3.2 செவ்வகம் அமைத்தல்

பின்வரும் அளவுகள் கொடுக்கப்பட்டால் செவ்வகங்களை வரையலாம்.

(i) நீளம் மற்றும் அகலம்.

(ii) ஒரு பக்கம் மற்றும் ஒரு மூலைவிட்டம்

2.3.3 நீளம் மற்றும் அகலம் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்போது செவ்வகம் அமைத்தல்

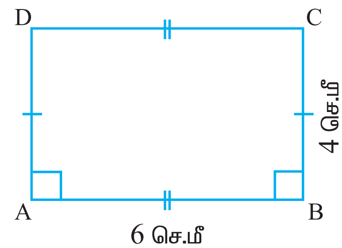
எடுத்துக்காட்டு 2.5

அடுத்துள்ள பக்கங்களின் அளவுகள் 6 செ.மீ. மற்றும் 4 செ.மீ. என்ற அளவுகளைக் கொண்ட செவ்வகம் வரைந்து, அதன் பரப்பளவைக் காண்க.

தீர்வு

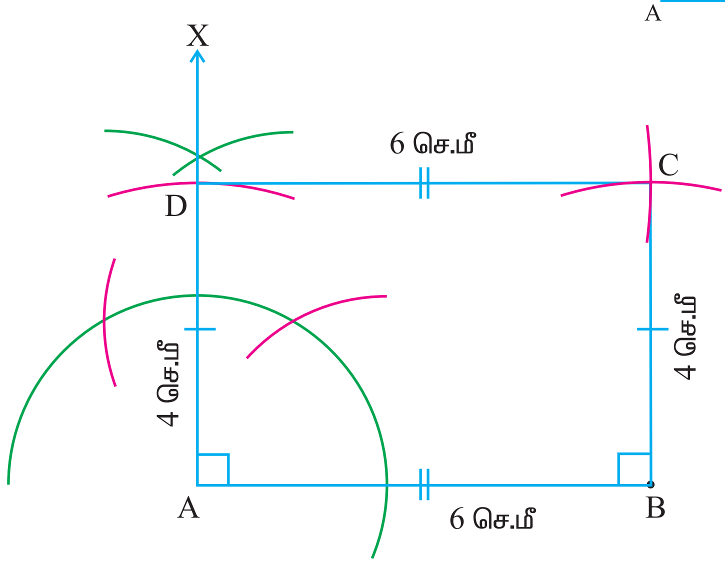
தரவு : செவ்வகத்தின் அடுத்துள்ள பக்கங்களின் அளவுகள் 6 செ.மீ. மற்றும் 4 செ.மீ.

உதவிப்படம்



படம் 2.12

செவ்வகம் அமைத்தல்



படம் 2.13

வரைதலுக்கான படிகள்

படி 1 : உதவிப்படம் ஒன்றினை வரைந்து அதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் குறிக்கவும்

படி 2 : 6 செ.மீ. நீளமுடைய AB என்ற ஒரு கோட்டுத்துண்டை வரையவும்.

படி 3 : A இல் கவராயத்தைப் பயன்படுத்தி $\overrightarrow{AX} \perp \overline{AB}$ ஆக வரையவும்.

படி 4 : A ஐ மையமாகவும், 4 செ.மீ. ஆரம் கொண்ட ஒரு வட்ட வில்லை $\overrightarrow{AX}$ ஐ D இல் வெட்டும்படி வரையவும்.

படி 5 : D ஐ மையமாகவும் 6 செ.மீ. ஆர அளவு கொண்டு ஒரு வட்டவில்லை $\overline{AB}$ இன் மேற்புறத்தில் வரையவும்.

படி 6 : B ஐ மையமாகவும், 4 செ.மீ. ஆர அளவு கொண்டு முன்பு வரைந்த வட்டவில்லை C இல் வெட்டும்படி வரைக. $\overline{BC}$ மற்றும் $\overline{CD}$ ஐ வரையவும். ABCD தேவையான செவ்வகம் ஆகும்.

படி 7 : AB = l = 6 செ.மீ. மற்றும்
BC = b = 4 செ.மீ. ஆகியன கொடுக்கப்பட்ட அளவுகள் ஆகும்.

பரப்பளவு கணக்கிடுதல்:

ABCD என்ற செவ்வகத்தில், l = 6 செ.மீ. மற்றும் b = 4 செ.மீ.

செவ்வம்ABCD இன் பரப்பளவு $= l \times b$ $= 6 \times 4$ = 24 செ.மீ ^{2}.

2.3.4 ஒரு மூலைவிட்டமும், ஒரு பக்கத்தின் அளவும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் போது செவ்வகம் அமைத்தல்

எடுத்துக்காட்டு 2.6

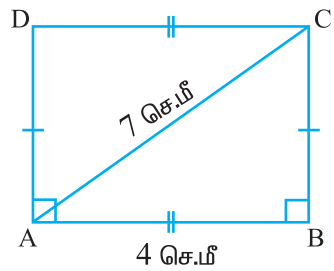
மூலைவிட்டத்தின் அளவு 7 செ.மீ., ஒரு பக்கத்தின் அளவு 4 செ.மீ., உள்ள செவ்வகத்தை அமைத்து, அதன் பரப்பளவைக் காண்க.

தீர்வு

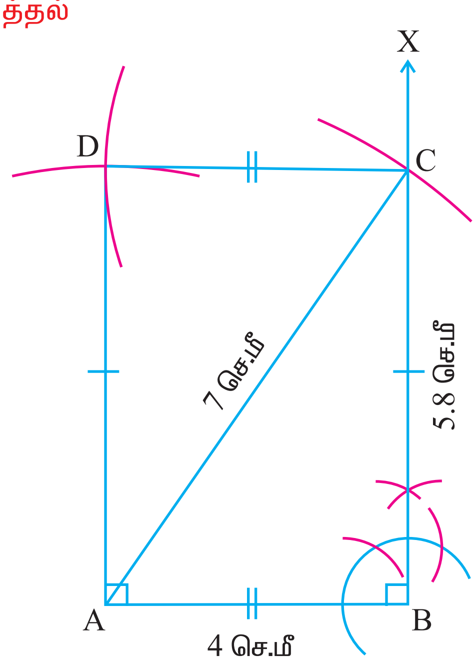
தரவு : செவ்வகத்தின் மூலைவிட்டம் 7 செ.மீ., மற்றும் ஒரு பக்கத்தின் அளவு 4 செ.மீ.

செவ்வகம் அமைத்தல்

உதவிப்படம்



படம் 2.14



படம் 2.15

வரைதலுக்கான படிகள்

படி 1 : உதவிப்படம் ஒன்றினை வரைந்து அதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் குறிக்கவும்.

படி 2 : 4 செ.மீ. நீளமுடைய AB என்ற ஒரு கோட்டுத்துண்டை வரையவும்.

படி 3 : $\overrightarrow{BX} \perp \overline{AB}$ ஆக வரையவும்.

படி 4 : A ஐ மையமாகவும், 7 செ.மீ. ஆர அளவுள்ள ஒரு வட்டவில்லை $\overrightarrow{BX}$ ஐ C இல் வெட்டும்படி வரையவும்.

படி 5 : BC அளவு ஆரமாகவும், A ஐ மையமாகவும் உடைய வட்டவில்லை $\overline{AB}$ இன் மேற்புறம் வரையவும்.

படி 6 : C ஐ மையமாகவும் 4 செ.மீ. ஆர அளவுள்ள ஒரு வட்டவில்லை முன்பு வரைந்த வட்டவில்லை D இல் வெட்டும்படி வரையவும்.

படி 7 : $\overline{AD}$ மற்றும் $\overline{CD}$ ஐ வரையவும். ABCD தேவையான செவ்வகம் ஆகும்.

படி 8 : BC இன் அளவு காணவும். BC = l = 5.8 செ.மீ. ஆகும்

பரப்பளவு கணக்கிடுதல்:

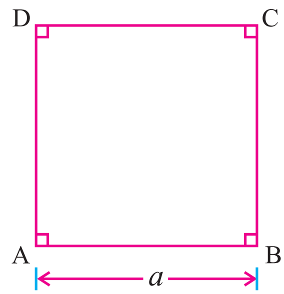
ABCD என்ற செவ்வகத்தில், $l = 5.8$ செ.மீ. மற்றும் $b = 4$ செ.மீ.

செவ்வகம் ABCD இன் பரப்பளவு $= l \times b = 5.8 \times 4 = 23.2$ செ.மீ ^{2}.

2.3.5 சதுரம் அமைத்தல்

சதுரம்

அடுத்துள்ள பக்கங்கள் சமமாக உள்ள செவ்வகம் சதுரமாகும்.



படம் 2.16

சதுரத்தின் பண்புகள்

(i) எல்லாக் கோண அளவுகளும் சமம்.

(ii) எல்லாப் பக்க அளவுகளும் சமம்.

(iii) ஒவ்வொரு கோணமும் செங்கோணம்.

(iv) மூலைவிட்டங்கள் சமஅளவுடையன.

(v) மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று செங்கோணத்தில் இருசமக் கூறிடுகின்றன.

சதுரத்தின் பரப்பளவு = பக்கம் × பக்கம்

$$A = a \times a = a^2 \text{ சதுர அலகுகள்.}$$

> குறிப்பு : மூலைவிட்ட அளவு கொடுக்கப்பட்டால் சதுரத்தின் பரப்பளவு $A = \dfrac{d^2}{2}$

சதுரம் வரைய ஒரே ஒரு அளவு தேவைப்படுகிறது.

ஒரு சதுரத்தின் (i) ஒரு பக்க அளவு அல்லது (ii) ஒரு மூலைவிட்ட அளவு கொடுக்கப்பட்டால் நாம் சதுரத்தை வரையலாம்.

2.3.6 ஒரு பக்க அளவு கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் போது சதுரத்தை அமைத்தல்

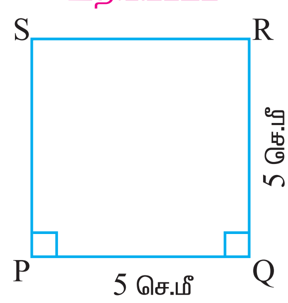
எடுத்துக்காட்டு 2.7

5 செ.மீ. பக்க அளவுடைய சதுரம் வரைந்து, அதன் பரப்பளவைக் காண்க.

தீர்வு

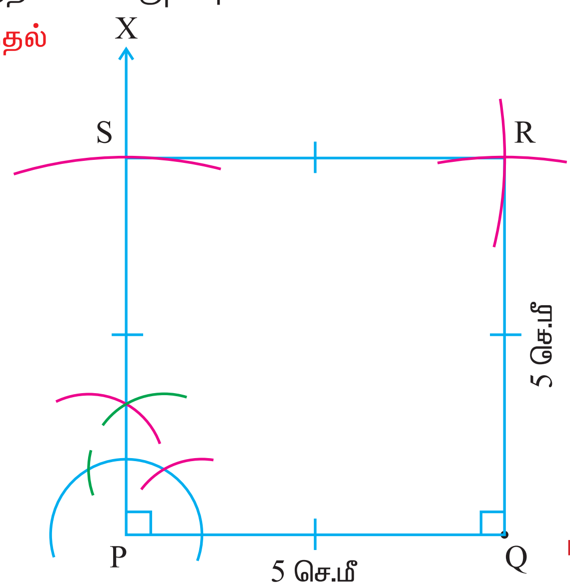
தரவு: சதுரத்தின் பக்க அளவு = 5 செ.மீ.

உதவிப்படம்



படம் 2.17

சதுரம் அமைத்தல்



படம் 2.18

வரைதலுக்கான படிகள்

படி 1 : உதவிப்படம் ஒன்றினை வரைந்து அதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவைக் குறிக்கவும்.

படி 2 : 5 செ.மீ. நீளமுடைய PQ என்ற ஒரு கோட்டுத்துண்டை வரையவும்.

படி 3 : P இல் கவராயம் கொண்டு $\overrightarrow{PX} \perp \overline{PQ}$ ஆக வரையவும்.

படி 4 : P ஐ மையமாகவும், 5 செ.மீ. அளவு ஆர அளவாகவும் கொண்ட ஒரு வட்டவில்லை $\overrightarrow{PX}$ ஐ S இல் வெட்டும்படி வரையவும்.

படி 5 : S ஐ மையமாகக் கொண்டு 5 செ.மீ. அளவுடைய ஆரத்தில் $\overline{PQ}$ க்கு மேற்புறமாக ஒரு வட்டவில் வரையவும்.

படி 6 : Q ஐ மையமாகவும் 5 செ.மீ. ஆர அளவாகவும் கொண்டு முன்னர் வரைந்த வட்டவில்லை R இல் வெட்டும்படி வட்டவில் வரையவும்.

படி 7 : $\overline{QR}$ மற்றும் $\overline{RS}$ ஐ வரையவும். PQRS தேவையான சதுரமாகும்.

பரப்பளவு கணக்கிடுதல்:

PQRS என்ற சதுரத்தின் பக்க அளவு a = 5 செ.மீ.

சதுரம் PQRS இன் பரப்பளவு = $a \times a = 5 \times 5 = 25$ செ.மீ ^{2}.

2.3.7 ஒரு மூலைவிட்டம் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்போது சதுரம் அமைத்தல்

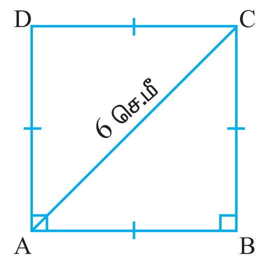
எடுத்துக்காட்டு 2.8

6 செ.மீ. அளவுள்ள மூலைவிட்டத்தைக் கொண்டு சதுரம் வரைக. அதன் பரப்பளவைக் காண்க.

தீர்வு

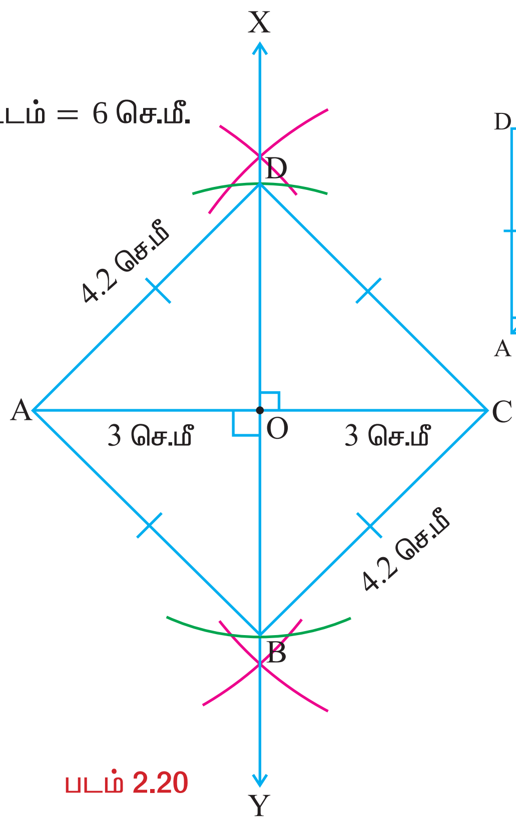
தரவு: சதுரத்தின் ஒரு மூலைவிட்டம் = 6 செ.மீ.

உதவிப்படம்



படம் 2.19

சதுரம் அமைத்தல்



படம் 2.20

வரைதலுக்கான படிகள்

படி 1 : உதவிப்படம் ஒன்றினை வரைந்து அதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவைக் குறிக்கவும்.

படி 2 : 6 செ.மீ. நீளமுடைய AC என்ற ஒரு கோட்டுத்துண்டை வரையவும்.

படி 3 : $\overline{AC}$ க்கு மையக் குத்துக்கோடு $\overleftrightarrow{XY}$ ஐ வரையவும்.

படி 4 : $\overleftrightarrow{XY}$, $\overline{AC}$ வெட்டும் புள்ளி O என்க. எனவே OC = AO = 3 செ.மீ. ஆகும்.

படி 5 : O ஐ மையமாகக் கொண்டு 3 செ.மீ. ஆர அளவினைக் கொண்டு இரு வட்ட விற்கள் $\overleftrightarrow{XY}$ என்ற கோட்டை B, D களில் வெட்டும்படி வரையவும்.

படி 6 : $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ மற்றும் $\overline{DA}$ ஐ வரையவும்.

ABCD தேவையான சதுரம் ஆகும்.

பரப்பளவு கணக்கிடுதல்:

ABCD என்ற சதுரத்தில் மூலைவிட்டம் d = 6 செ.மீ.

சதுரம் ABCD இன் பரப்பளவு = $\dfrac{d^2}{2} = \dfrac{6\times 6}{2}$ = 18 செ.மீ ^{2}.

பயிற்சி 2.2

1. கொடுக்கப்பட்டுள்ள அளவுகளைக் கொண்டு **JUMP** என்ற செவ்வகம் வரைந்து அதன் பரப்பளவைக் கணக்கிடவும்.
   - (i) JU = 5.4 செ.மீ. மற்றும் UM = 4.7 செ.மீ.
   - (ii) JU = 6 செ.மீ. மற்றும் JP = 5 செ.மீ.
   - (iii) JP = 4.2 செ.மீ. மற்றும் MP = 2.8 செ.மீ.
   - (iv) UM = 3.6 செ.மீ. மற்றும் MP = 4.6 செ.மீ.
2. கொடுக்கப்பட்டுள்ள அளவுகளைக் கொண்டு **MORE** என்ற செவ்வகம் வரைந்து அதன் பரப்பளவைக் கணக்கிடவும்.
   - (i) MO = 5 செ.மீ. மற்றும் மூலைவிட்டம் MR = 6.5 செ.மீ.
   - (ii) MO = 4.6 செ.மீ. மற்றும் மூலைவிட்டம் OE = 5.4 செ.மீ.
   - (iii) OR = 3 செ.மீ. மற்றும் மூலைவிட்டம் MR = 5 செ.மீ.
   - (iv) ME = 4 செ.மீ. மற்றும் மூலைவிட்டம் OE = 6 செ.மீ.
3. கொடுக்கப்பட்டுள்ள பக்க அளவைக் கொண்டு **EASY** என்ற சதுரம் வரைந்து அதன் பரப்பளவைக் கணக்கிடவும்.
   - (i) 5.1 செ.மீ. (ii) 3.8 செ.மீ.
   - (iii) 6 செ.மீ. (iv) 4.5 செ.மீ.
4. கொடுக்கப்பட்டுள்ள மூலைவிட்ட அளவுகளைக் கொண்டு **GOLD** என்ற சதுரம் வரைந்து அதன் பரப்பளவைக் கணக்கிடவும்.
   - (i) 4.8 செ.மீ. (ii) 3.7 செ.மீ.
   - (iii) 5 செ.மீ. (iv) 7 செ.மீ.

கருத்துச் சுருக்கம்

- எதிர்ப் பக்கங்கள் இணையாகவும், அடுத்துள்ள பக்கங்கள் சமமாகவும் உள்ள நாற்கரம் ஒரு சாய் சதுரம் ஆகும்.

- ஒரு சாய்சதுரம் அமைப்பதற்கு ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பில்லாத இரண்டு அளவுகள் தேவை.

- ஒரு சாய்சதுரத்தின் பரப்பளவு $A = \frac{1}{2} d_1 \times d_2$ சதுர அலகுகள். இதில் d_1 மற்றும் d_2 என்பன மூலைவிட்டங்களின் அளவுகள்.

- இணைகரத்தில் ஒரு கோண அளவு 90° எனில் அது செவ்வகமாகும்.

- செவ்வகத்தின் பரப்பு = நீளம் × அகலம் சதுர அலகுகள்

  $A = l \times b$ சதுர அலகுகள்.

- அடுத்துள்ள பக்கங்கள் சமமாக உள்ள செவ்வகம் சதுரமாகும்.

- சதுரத்தின் பக்க அளவு a அலகுகள் எனில்

  சதுரத்தின் பரப்பளவு = $a \times a$ சதுர அலகுகள்

3 வரைபடங்கள்

ரெனே டெஸ்கார்ட்டஸ்

(1596- 1650 A.D)

கணித மேதையும் பிரெஞ்சு தத்துவ ஞானியுமான இவர் 'Discourse on Method' என்ற புத்தகத்தை எழுதியுள்ளார். இயற்கணிதத்தையும் வடிவியலையும் ஒருங்கிணைக்க இவர் எடுத்த முயற்சிகளால் இரு புதிய கணிதப் பிரிவுகளான பகுமுறை வடிவியலும் வரைபடங்களும் பிறந்தன.

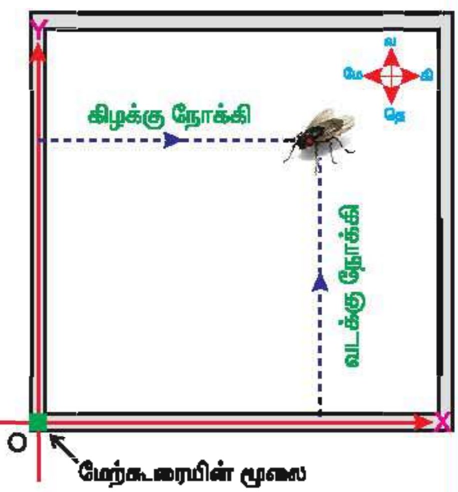
"நான் சிந்திக்கிறேன், ஆகவே நான் இருக்கின்றேன்", என்பது இவரது பெரும்புகழ் பெற்ற கூற்றுகளுள் ஒன்றாகும்.

3.1 அறிமுகம்

ஓர் ஈயும் வரைபடமும் : ஒரு கதை

17 ஆம் நூற்றாண்டின் முற்பகுதியைச் சார்ந்த பிரெஞ்சுக் கணிதமேதை ரெனே டெஸ்கார்ட்டஸ் என்பவரே வரைபடத்தைக் கண்டறிந்தவர் ஆவார். அவரது வாழ்வில் நிகழ்ந்த ஒரு சுவையான நிகழ்ச்சி இங்கே தரப்பட்டுள்ளது.

ரெனே டெஸ்கார்ட்டஸ் சிறுவனாக இருந்தபோது நோயாளியாக இருந்தார். ஆகவே அவர் காலையில் வெகுநேரம் படுக்கையிலேயே படுத்திருக்க அனுமதிக்கப்பட்டார். பின்னர் அதுவே அவரது இயல்பாகிப் போனது. அவ்வாறு ஒருநாள் அவர் படுக்கையில் படுத்திருந்தபோது மேற்கூரையின் ஒரு மூலைக்கருகே ஓர் ஈ இருந்ததைக் கண்டார். அது பல்வேறு நேரங்களில் மேற்கூரையின் பல இடங்களில் அமர்ந்தது. ரெனே டெஸ்கார்ட்டஸ் அந்த ஈ அமர்ந்த பல்வேறு இடங்களைத் தீர்மானிக்க எண்ணினார். இது அவரை மேலும் சிந்திக்க வைத்தது. அவர் மேற்கூரையின் மூலை O விலிருந்து கிழக்கு நோக்கியும், வடக்கு நோக்கியும் எவ்வளவு தொலைவில் அந்த ஈ இருந்தது எனக் கண்டால் போதுமானது என நினைத்தார். (படத்தைப் பார்க்கவும்) இதுவே 'வரைபடங்கள்' என்ற பாடப்பிரிவின் தொடக்கமாகும்.

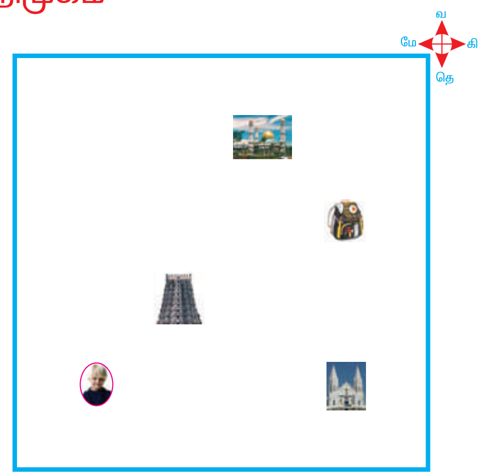


ஒரு புள்ளியை இரு அளவுகளைக் (ஒரு கிடை மற்றும் ஒரு செங்குத்து) கொண்டு குறிப்பிடும் இம்முறையை “கார்ட்டீசியன் அமைப்பு” என்கிறோம். Rene Descartes என்ற அவரது பெயரில் இருந்து ‘Cartes’ என்ற சொல் எடுக்கப்பட்டு “ கார்ட்டீசியன் அமைப்பு” என்று அவருடைய நினைவாகப் பெயரிடப்பட்டுள்ளது, x அச்சு, y அச்சு ஆகிய இவ்விரு அச்சுகளையும், ‘கார்ட்டீசியன் அச்சுகள்’ என்றே அழைக்கிறோம்.

3.2 கார்ட்டீசியன் தளம், ஆய அச்சுகள்–ஓர் அறிமுகம்

3.2.1 ஒரு புள்ளியின் அமைவிடம்

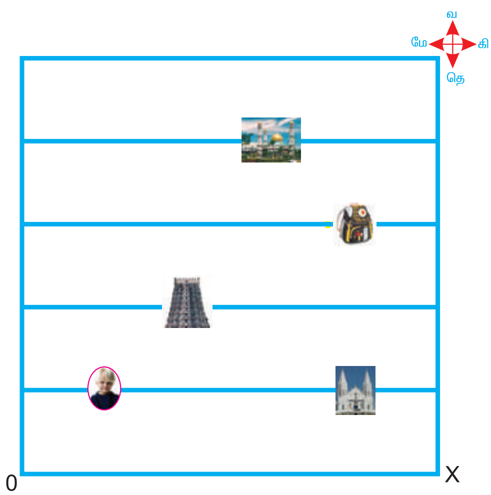
படம் 3.1 ஐக் காண்க. நம்மால் சிறுவன் எங்கே இருக்கிறான்? சர்ச் எங்கே இருக்கிறது? கோயில் எங்கே இருக்கிறது? பை எங்கே இருக்கிறது? மசூதி எங்கே இருக்கிறது? என்று கூற இயலுமா? இது எளிதா? இல்லை. நாம் சிறுவன், சர்ச், கோயில், பை, மசூதி ஆகியவற்றின் அமைவிடங்களை எவ்வாறு சரியாகக் கூற இயலும்?



படம் 3.1

நாம் முதலில், ஒன்றுக்கொன்று ஓரலகுத்தொலைவில் அமைந்த இணைகோடுகளை வரைவோம். அடியில் உள்ள கிடைக்கோடு ‘OX’ ஆகும். இப்பொழுது, படம் 3.1 ஆனது படம் 3.2 ஐப் போன்று தோன்றும்.

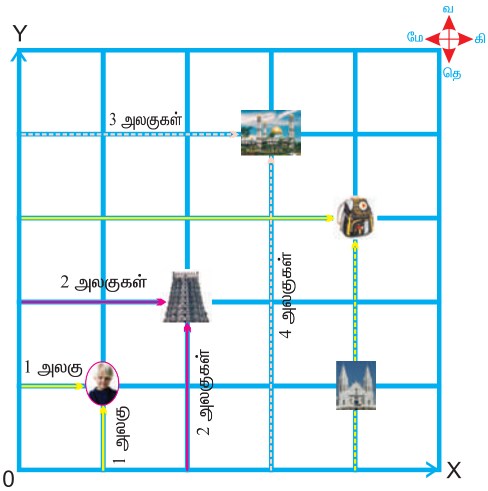
இப்பொழுது சிறுவன், சர்ச், கோயில், பை, மசூதி ஆகியவைகளின் இருப்பிடங்களைக் கூற முயல்வோம். சிறுவனின் இருப்பிடமும் சர்ச்சின் இருப்பிடமும் முதல் இணைக்கோட்டில் அமைந்துள்ளன. அதாவது OX என்ற அடிக்கோட்டிலிருந்து இவை ஓரலகுத் தொலைவு தள்ளியுள்ளன. இப்பொழுதும் கூட நம்மால் இவைகளின் அமைவிடங்களை மிகச் சரியாகச் சுட்டிக்காட்ட இயலவில்லை. நமக்கு இன்னும் ஏதோ குழப்பம் இருக்கின்றது. இவ்வாறே கோயில், பை, மசூதி ஆகியவற்றின் மிகச் சரியான இருப்பிடங்களை கூறவும் நமக்கு கடினமாகவே உள்ளது. ஏனெனில் அவை யாவும் வெவ்வேறு இணை கோடுகளில் அமைந்துள்ளன.



படம் 3.2

இக்குழப்பத்தைத் தவிர்க்க, நாம் ஒன்றுக்கொன்று ஓரலகுத் தொலைவில் அமைந்த செங்குத்துக் கோடுகளை படம் 3.2 இல் வரைவோம். இடது ஓரம் உள்ள செங்குத்து கோடு ‘OY’ ஆகும். பின்பு அது படம் 3.3 இல் உள்ளது போல் தோன்றும்.

இணை மற்றும் செங்குத்துக் கோடுகளின் உதவியுடன் நாம் கொடுக்கப்பட்டுள்ள பொருட்களின் அமைவிடங்களைத் தீர்மானிக்கலாம். முதலில் சிறுவனின் இருப்பிடத்தைக் காண்போம். அவன் OY என்ற செங்குத்துக் கோட்டிலிருந்து 1 அலகுத் தொலைவிலும் OX என்ற கிடைக் கோட்டிலிருந்து 1 அலகுத் தொலைவிலும் உள்ளான். எனவே அவனது அமைவிடம் (1, 1) என்ற புள்ளியால் குறிப்பிடப்படுகிறது.



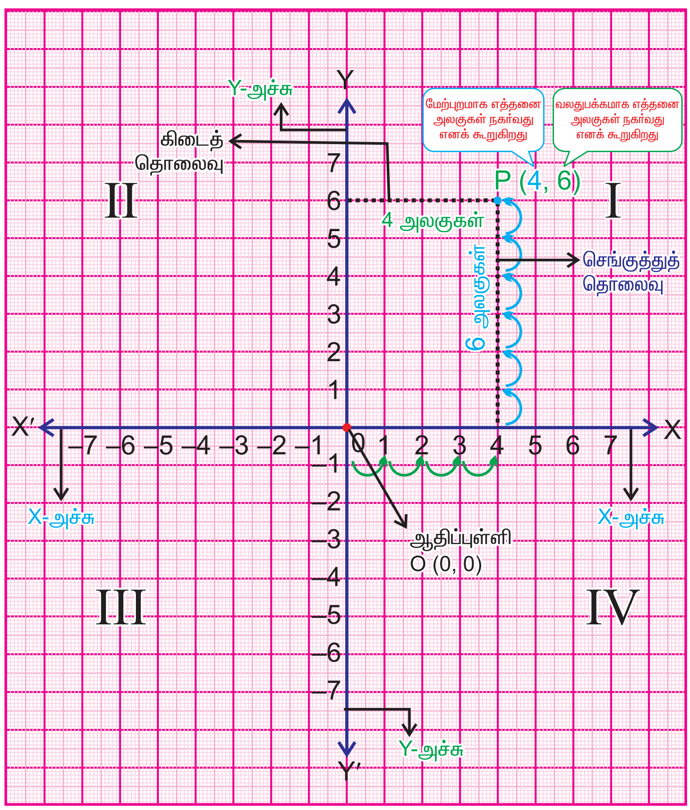
படம் 3.3

அதே போல், சர்ச்சின் அமைவிடம் (4, 1) என்ற புள்ளியாலும், கோயிலின் அமைவிடம் (2, 2) என்ற புள்ளியாலும், பையின் அமைவிடம் (4, 3) என்ற புள்ளியாலும், மசூதியின் அமைவிடம் (3, 4) என்ற புள்ளியாலும் குறிப்பிடப்படுகின்றன.

3.2.2 ஆய அச்சு முறை

நாம் இப்பொழுது ஆய அச்சு முறை என்பது யாதென முறையாக வரையறுப்போம்.

X′OX, Y′OY ஆகியவை இரு எண் கோடுகள் என்றும் இவை ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக பூச்சியத்தில் வெட்டிக் கொள்கின்றன என்றும் கொள்வோம். இவை தாளின் முழுத் தளத்தை நான்கு சமப் பகுதிகளாகப் பிரிக்கும். நாம் இவற்றைக் காற்பகுதிகள் [I, II, III மற்றும் IV] என்கிறோம். படத்தைக் காண்க. இதில்,



X′OX என்ற கோட்டை

x−அச்சு என்கிறோம்.

Y′OY என்ற கோட்டை

y−அச்சு என்கிறோம்.

‘O’ என்ற புள்ளியை ஆதிப்புள்ளி என்கிறோம்.

இப்புள்ளியே *x*-அச்சும், *y*-அச்சும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியாகும்.

இதுவே கார்ட்டீசியன் ஆயஅச்சுமுறை எனப்படுகிறது.

குறிப்பு : ஒரு புள்ளியைக் குறிக்க, நாம் முதலில் x அச்சுத் தொலைவையும் (அல்லது கிடையச்சின் மீதுள்ள எண்) பிறகு y அச்சுத் தொலைவையும் (அல்லது செங்குத்து அச்சின் மீதுள்ள எண்) எழுதுவதே வழக்கமாகும். வரிசை சோடியின் முதல் எண் x அச்சுத் தொலைவு அல்லது கிடைத் தொலைவு எனப்படுகிறது, வரிசை சோடியின் இரண்டாம் எண் y அச்சுத் தொலைவு அல்லது செங்குத்துத் தொலைவு எனப்படுகிறது.

உற்று நோக்கல்: படத்தில் உள்ள P (4, 6) என்ற புள்ளியைக் கருதுவோம். இது y-அச்சிலிருந்து வலது புறம் 4 அலகுத் தொலைவிலும் x-அச்சிலிருந்து மேற்புறம் 6 அலகுத் தொலைவிலும் தள்ளி அமைந்துள்ளது. P என்ற புள்ளியின் அச்சுத் தூரங்களை (4, 6) என்றழைக்கிறோம்.

3.3 வெவ்வேறு சூழல்களில் புள்ளிகளைக் குறித்தல்

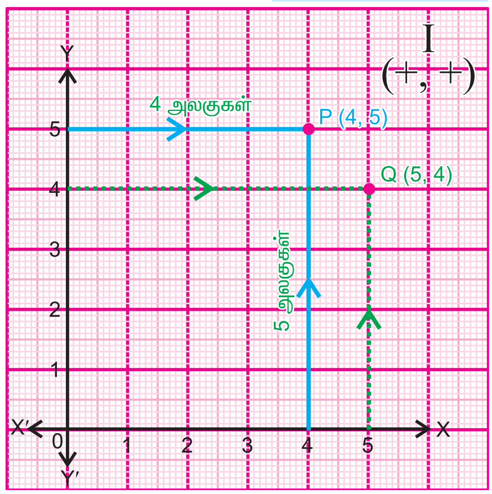
3.3.1 வரைபடத்தாளில் ஒரு புள்ளியைக் குறித்தல்

எடுத்துக்காட்டு 3.1

(4, 5) என்ற புள்ளியை வரைபடத்தாளில் குறி. இப்புள்ளியும் (5, 4) ம் ஒன்றா?

தீர்வு

அளவுத் திட்டம்:
X அச்சு 1 செ.மீ = 1 அலகு
Y அச்சு 1 செ.மீ = 1 அலகு



X′OX, Y′OY ஆகிய இரு எண்கோடுகளை வரைக. அவை ஆதிப்புள்ளி ‘O’ இல் வெட்டிக் கொள்கின்றன.

பொருத்தமான அளவுத் திட்டத்தை முடிவு செய்து x, y அச்சுகளில் அளவுகளைக் குறிக்கிறோம் கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி P (4, 5). இங்கு P யின், x அச்சுத்தொலைவு 4, y அச்சுத் தொலைவு 5 ஆகும்.

இவ்விரண்டுமே மிகை. எனவே P (4, 5) என்ற புள்ளி முதற் கால் பகுதியில் அமையும். புள்ளியைக் குறிக்க ஆதிப்புள்ளி O (0, 0) இல் தொடங்கி, x அச்சின் மீது வலது பக்கமாக 4 அலகுகள் நகர்வோம். பிறகு மேல்நோக்கித் திரும்பி y அச்சுக்கிணையாக 5 அலகுகள் நகர்வோம். இப்பொழுது, நாம் P (4, 5) என்ற புள்ளியை வந்தடைந்துள்ளோம். அதனைக் குறிக்கிறோம். (மேற்கண்ட படத்தில் காட்டியுள்ளபடி).

அடுத்து, Q (5, 4) என்ற புள்ளியை நாம் குறிப்போம். இங்கு Q வின் x அச்சுத் தொலைவு 5, y அச்சுத் தொலைவு 4 ஆகும். இரண்டுமே மிகை. எனவே Q (5, 4) என்ற இப்புள்ளியும் முதற் காற்பகுதியிலேயே அமையும். Q (5, 4) என்ற இப்புள்ளியைக் குறிக்க ஆதிப்புள்ளியில் தொடங்கி, x அச்சின் மீது வலப்பக்கமாக **5** அலகுகள் நகர்வோம். பிறகு மேல்நோக்கித் திரும்பி y அச்சுக்கிணையாக 4 அலகுகள் நகர்வோம். இப்பொழுது, நாம் Q (5, 4) என்ற புள்ளியினை வந்தடைந்துள்ளோம். அதனைக் குறிக்கிறோம். (மேற்கண்ட படத்தில் காட்டியுள்ளபடி)

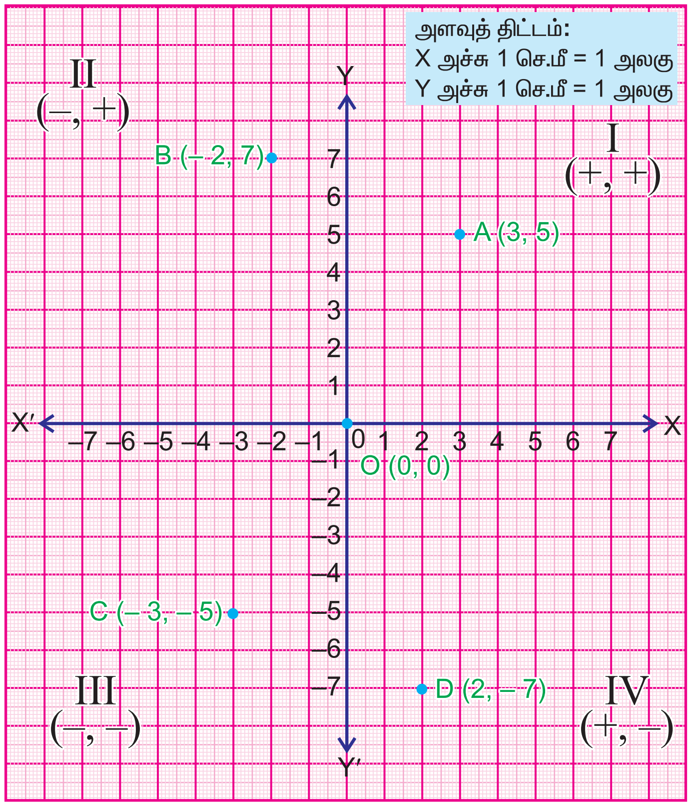
முடிவு

மேற்கண்ட படத்திலிருந்து P (4, 5) என்ற புள்ளியும் Q (5, 4) என்ற புள்ளியும் இரு வெவ்வேறு புள்ளிகள் என்பது மிகத் தெளிவாகத் தெரிகின்றது.

எடுத்துக்காட்டு 3.2

பின்வரும் புள்ளிகளை ஒரு வரைபடத்தாளில் குறித்து அவை எந்த எந்தக் காற்பகுதிகளில் அமைகின்றன என்றும் காண்க.

(i) A (3,5) (ii) B (–2 , 7)
(iii) C (–3,–5) (iv) D (2, – 7)
(v) O (0, 0)



தீர்வு

x, y அச்சுகளை வரைகிறோம். பொருத்தமான அளவுத்திட்டத்தை முடிவு செய்து x, y அச்சுகளின் அளவுகளைக் குறிப்போம்.

(i) A (3 , 5) என்ற புள்ளியைக் குறிக்க:

இங்கு A யின் x அச்சுத் தொலைவு 3, y அச்சுத் தொலைவு 5 ஆகும். இரண்டுமே மிகை. எனவே A (3, 5) என்ற புள்ளி முதற் காற்பகுதியில் அமையும். ஆதிப் புள்ளியில் தொடங்கி, x அச்சின் மீது வலது பக்கமாக 3 அலகுகள் நகர்வோம். பிறகு மேல்நோக்கித் திரும்பி y அச்சுக்கிணையாக 5 அலகுகள் நகர்ந்து A (3, 5) என்ற புள்ளியைக் குறிக்கிறோம்.

(ii) B (–2 , 7) என்ற புள்ளியைக் குறிக்க

இங்கு B யின் x அச்சுத் தொலைவு –2, y அச்சுத் தொலைவு 7, இது மிகை. எனவே B (–2, 7) என்ற புள்ளி இரண்டாம் காற்பகுதியில் அமையும். ஆதிப் புள்ளியில் தொடங்கி, x அச்சின் மீது இடது பக்கமாக 2 அலகுகள் நகர்வோம். பிறகு மேல்நோக்கித் திரும்பி y அச்சுக்கு இணையாக 7 அலகுகள் நகர்ந்து B (–2 , 7) என்ற புள்ளியைக் குறிக்கிறோம்.

(iii) C (–3 , –5) என்ற புள்ளியைக் குறிக்க

இங்கு C யின் x அச்சுத்தொலைவு – 3, y அச்சுத் தொலைவு – 5 ஆகும். இரண்டுமே குறை. எனவே C (– 3, – 5) என்ற புள்ளி மூன்றாம் காற்பகுதியில் அமையும். ஆதிப்புள்ளியில் தொடங்கி, x அச்சின் மீது இடது பக்கமாக 3 அலகுகள் நகர்வோம். பிறகு கீழ்நோக்கித் திரும்பி y அச்சுக்கிணையாக 5 அலகுகள் நகர்ந்து C (– 3, – 5) என்ற புள்ளியைக் குறிக்கிறோம்.

(iv) D (2, – 7) என்ற புள்ளியைக் குறிக்க

இங்கு, D யின் x அச்சுத் தொலைவு 2, இது மிகை. y அச்சுத் தொலைவு –7, இது குறை. எனவே D (2, – 7) என்ற புள்ளி நான்காம் காற்பகுதியில் அமையும். ஆதிப் புள்ளியில்

தொடங்கி, x அச்சின் மீது வலது பக்கமாக 2 அலகுகள் நகர்வோம். பிறகு கீழ்நோக்கித் திரும்பி y அச்சுக்கிணையாக 7 அலகுகள் நகர்ந்து D (2, – 7) என்ற புள்ளியைக் குறிக்கிறோம்.

(v) O (0, 0) என்ற புள்ளியைக் குறிக்க

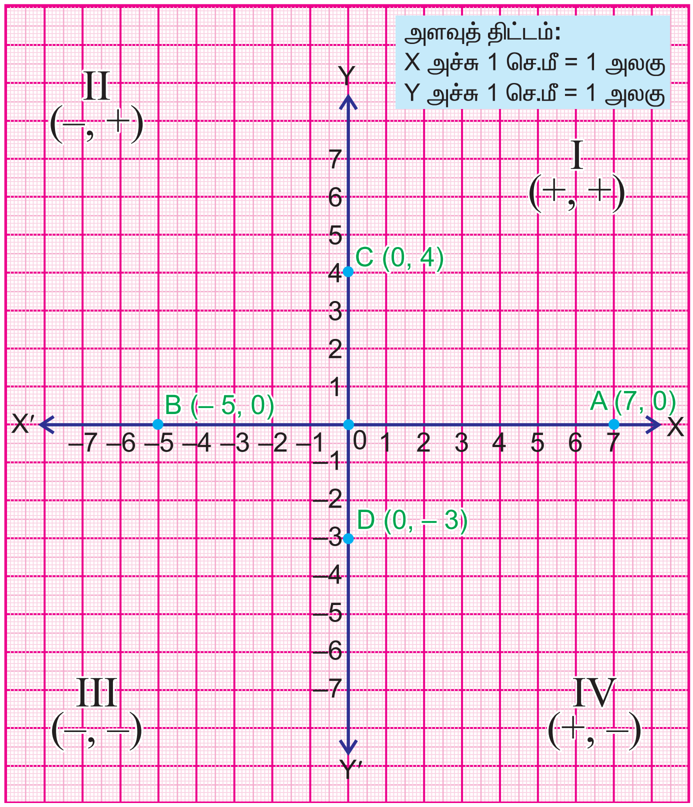
இது ஆதிப்புள்ளியாகும். x, y ஆகிய இரு அச்சுத்தூரங்களும் பூச்சியமே. x, y ஆகிய இரு அச்சுகளும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி இதுவாகும். இதனை O (0, 0) என்ற புள்ளியாகக் குறிக்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.3

பின்வரும் புள்ளிகளை ஒரு வரைபடத்தாளில் குறித்து அவற்றின் அமைவிடங்களைக் காண்க.

(i) A (7, 0) (ii) B (– 5, 0)

(iii) C (0 , 4) (iv) D (0, – 3)



தீர்வு

x, y அச்சுகளை வரைகிறோம். பொருத்தமான அளவுத்திட்டத்தை முடிவுசெய்து x, y அச்சுகளில் அளவுகளைக் குறிக்கிறோம்.

(i) A (7, 0) என்ற புள்ளியைக் குறிக்க

இங்கு, A யின் x அச்சுத் தொலைவு 7, இது மிகை, y அச்சுத் தொலைவு பூச்சியம். எனவே A (7, 0) என்ற புள்ளி x அச்சின் மீது அமையும். ஆதிப்புள்ளியில் தொடங்கி, x அச்சின் மீது வலதுபக்கமாக 7 அலகுகள் நகர்ந்து வந்தடையும் புள்ளியைக் குறிக்கிறோம்.

(ii) B (–5 , 0) என்ற புள்ளியைக் குறிக்க

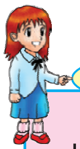
இங்கு, B யின் x அச்சுத் தொலைவு – 5, இது குறை, y அச்சுத் தொலைவு பூச்சியம். எனவே B (– 5, 0) என்ற புள்ளி x அச்சின் மீது அமையும். ஆதிப்புள்ளியில் தொடங்கி, x அச்சின் மீது இடதுபக்கமாக 5 அலகுகள் நகர்ந்து வந்தடையும் புள்ளியைக் குறிக்கிறோம்.

(iii) C (0 ,4) என்ற புள்ளியைக் குறி

இங்கு, C யின் x அச்சுத் தொலைவு பூச்சியம், y அச்சுத் தொலைவு 4, இது மிகை. எனவே C (0, 4) என்ற புள்ளி y அச்சின் மீது அமையும். ஆதிப்புள்ளியில் தொடங்கி y அச்சின் மீது மேல்நோக்கி 4 அலகுகள் நகர்ந்து வந்தடையும் புள்ளியைக் குறிக்கிறோம்.

(iv) D (0 , –3) என்ற புள்ளியைக் குறிக்க

இங்கு, x அச்சுத் தொலைவு பூச்சியம், y அச்சுத் தொலைவு – 3, இது குறை. எனவே D (0, – 3) என்ற புள்ளி y அச்சின் மீது அமையும். ஆதிப்புள்ளியில் தொடங்கி y அச்சின் மீது கீழ்நோக்கி 3 அலகுகள் நகர்ந்து வந்தடையும் புள்ளியைக் குறிக்கிறோம்.



நீவிர் அறிவீரா?

புள்ளிகள் எங்கு அமைகின்றன என்பதை வரைபடத்தாளில் குறிக்காமலேயே நம்மால் கூற முடியுமா? இதை அறிய, கீழ்க்காணும் அட்டவணையை உற்று நோக்குக.

வ. எண்	எடுத்துக் காட்டுகள்	புள்ளியின் x அச்சுத் தொலைவு	புள்ளியின் y அச்சுத் தொலைவு	புள்ளியின் அமைவிடம்
1.	(3,5)	மிகை (+)	மிகை (+)	முதலாம் காற்பகுதி
2.	(–4,10)	குறை (–)	மிகை (+)	இரண்டாம் காற்பகுதி
3.	(–5,–7)	குறை (–)	குறை (–)	மூன்றாம் காற்பகுதி
4.	(2,–4)	மிகை (+)	குறை (–)	நான்காம் காற்பகுதி
5.	(7,0)	பூச்சியமற்ற எண்	பூச்சியம்	X அச்சின் மீது
6.	(0,–5)	பூச்சியம்	பூச்சியமற்ற எண்	Y அச்சின் மீது
7	(0,0)	பூச்சியம்	பூச்சியம்	ஆதிப்புள்ளி

முயற்சி செய்

பின்வரும் புள்ளிகளை வரைபடத்தாளில் குறிக்காமலேயே உன்னால் அவற்றின் அமைவிடங்களைக் கூற இயலுமா?

(i) (2 , 7) (ii) (–2 , 7) (iii) (–2 , –7) (iv) (2 , –7)

(v) (2 , 0) (vi) (–2 , 0) (vii) (0 , 7) (viii) (0 , –7)

3.4 நேர்க்கோடுகளையும் ஆய அச்சுகளுக்கு இணையான கோடுகளையும் வரைதல்

கொடுக்கப்பட்ட இரு புள்ளிகளால் ஆன நேர்க்கோட்டினையும் ஆய அச்சுகளுக்கு இணையான கோடுகளையும் வரைவது எவ்வாறு என்பதை இப்பகுதியில் நாம் கற்கவுள்ளோம். மேலும் தள உருவங்களின் பரப்பளவுகளையும் கண்டறியவுள்ளோம்.

3.4.1 கொடுக்கப்பட்ட இரு புள்ளிகளையும் இணைக்கும் கோட்டை வரைதல்

எடுத்துக்காட்டு 3.4

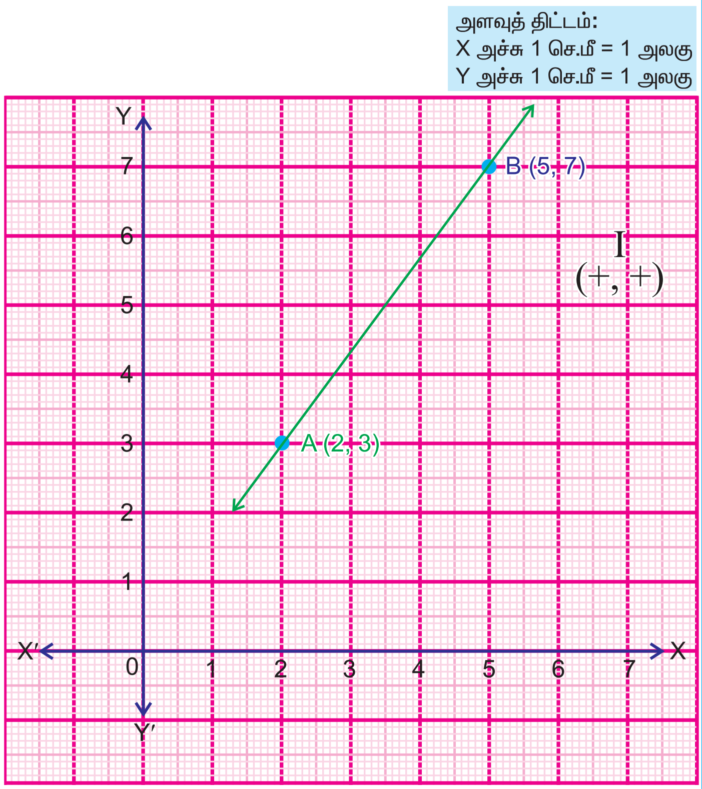
பின்வரும் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டை வரைக.

(i) A (2,3), B (5, 7),

(ii) P (–4,5), Q (3,–4).

தீர்வு

(i) A (2 , 3), B (5 , 7) ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டை வரைதல்:



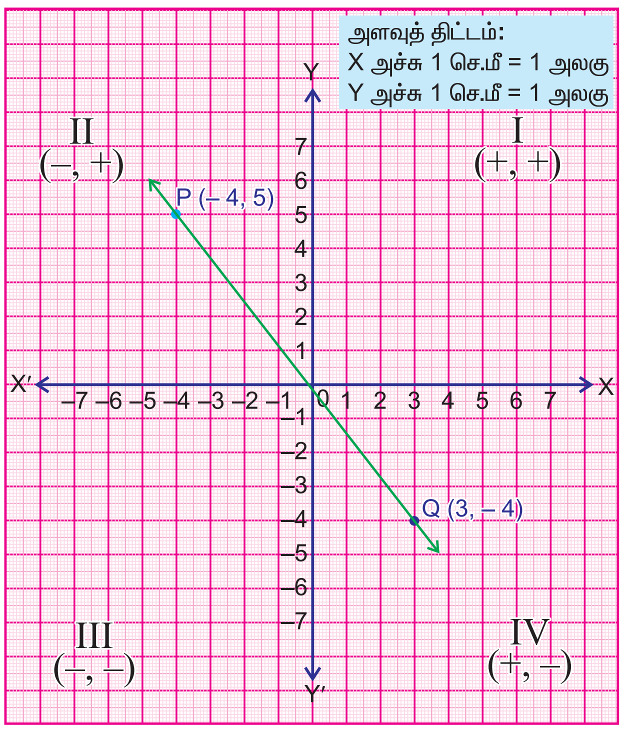
முதலில் (2, 3) என்ற புள்ளியைக் குறித்து அதற்கு A எனப் பெயரிடுகிறோம்.

அடுத்து (5, 7) என்ற புள்ளியைக் குறித்து அதற்கு B எனப் பெயரிடுகிறோம்.

பிறகு புள்ளிகள் A ஐயும் B ஐயும் சேர்க்கிறோம்.

AB என்பது தேவையான கோடாகும்.

(ii) P (– 4, 5), Q (3, – 4) ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டை வரைதல்:



முதலில் (– 4, 5) என்ற புள்ளியைக் குறித்து அதற்கு P எனப் பெயரிடுகிறோம்.

அடுத்து (3, – 4) என்ற புள்ளியைக் குறித்து அதற்கு Q எனப் பெயரிடுகிறோம்.

பிறகு புள்ளிகள் P ஐயும் Q ஐயும் சேர்க்கிறோம்.

PQ என்பது தேவையான கோடாகும்.

கணக்கு

3.4.2 ஆய அச்சுகளுக்கு இணையான நேர்க்கோடுகளை வரைதல்

எடுத்துக்காட்டு 3.5

(i) $x = 3$ இன் வரைபடம் வரைக. (ii) $y = -5$ இன் வரைபடம் வரைக.

(iii) $x = 0$ என்பதன் வரைபடம் வரைக.

தீர்வு

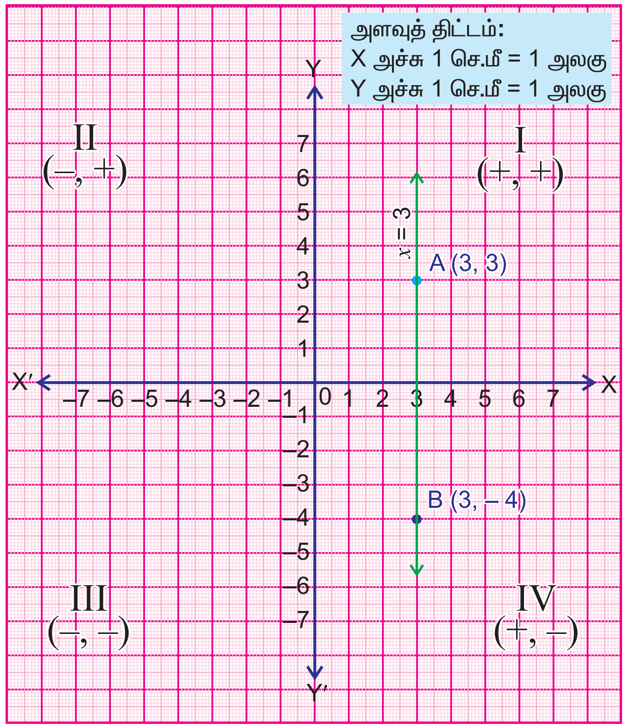
(i) $x = 3$ என்ற சமன்பாட்டின் பொருள்

y அச்சுத் தொலைவு எதுவாக இருந்தாலும் x அச்சுத் தொலைவானது, எப்பொழுதும் 3 ஆகவே இருக்கும் என்பதாகும். ஆகவே, நமக்கு

x	3	3
y	3	–4

என்ற அட்டவணை கிடைக்கிறது.

A (3, 3), B (3, – 4) ஆகிய புள்ளிகளைக் குறிக்கிறோம். இவ்விரு புள்ளிகளையும் இணைத்து இருபக்கமும் கோட்டை நீட்டினால் $x = 3$ என்பதன் வரைபடம் கிடைக்கின்றது.



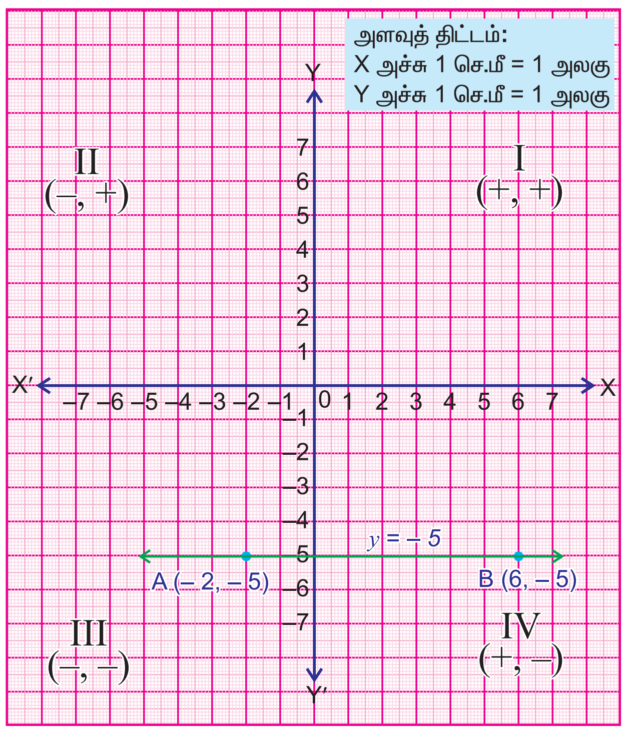
(ii) $y = -5$ என்ற சமன்பாட்டின் பொருள்

x அச்சுத் தொலைவு எதுவாக இருந்தாலும் y அச்சுத் தொலைவானது, எப்பொழுதும் – 5 ஆகவே இருக்கும் என்பதாகும். ஆகவே, நமக்கு

x	–2	6
y	–5	–5

என்ற அட்டவணை கிடைக்கிறது.

A (– 2, – 5), B (3, – 5) ஆகிய புள்ளிகளைக் குறிக்கிறோம். இவ்விரு புள்ளிகளையும் இணைத்து இருபக்கமும் கோட்டை நீட்டினால் $y = -5$ என்பதன் வரைபடம் கிடைக்கின்றது.



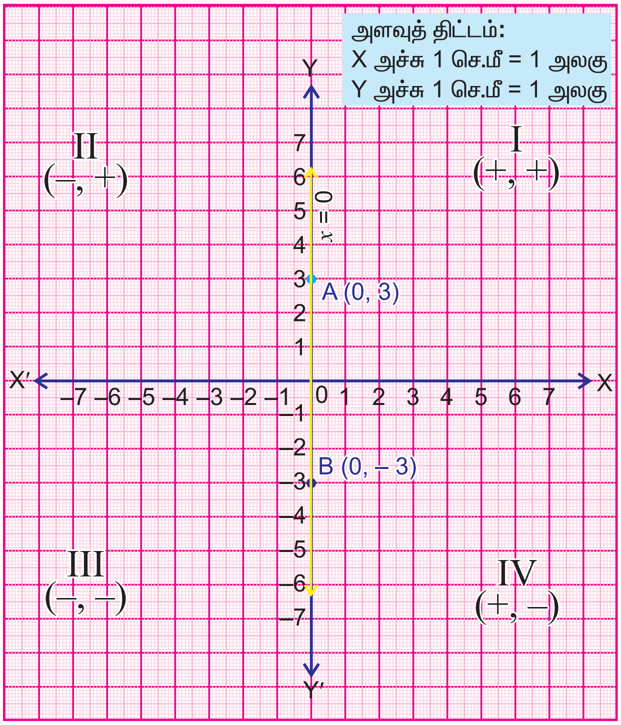
(iii) $x = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் பொருள்

y அச்சுத் தொலைவு எதுவாக இருந்தாலும் x அச்சுத் தொலைவானது, எப்பொழுதும் பூச்சியமாகவே இருக்கும் என்பதாகும். ஆகவே, நமக்கு

x	0	0
y	3	–3

என்ற அட்டவணை கிடைக்கிறது.

A (0, 3) , B (0, – 3) ஆகிய புள்ளிகளைக் குறிக்கிறோம். இவ்விரு புள்ளிகளையும் இணைத்து கோட்டை நீட்டினால் $x = 0$ என்பதன் வரைபடம் கிடைக்கின்றது.



3.4.3 தள உருவங்களின் பரப்பளவு

ஒரு வரைபடத்தாளில் வரையப்பட்ட சதுரம், செவ்வகம், இணைகரம், சரிவகம், முக்கோணம் போன்ற தள உருவங்களால் அடைபடும் பகுதிகளின் பரப்பளவுகளை வரைபடத்தாளில் உள்ள அலகு சதுரங்களை எண்ணித் தீர்மானிக்க முடியும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.6

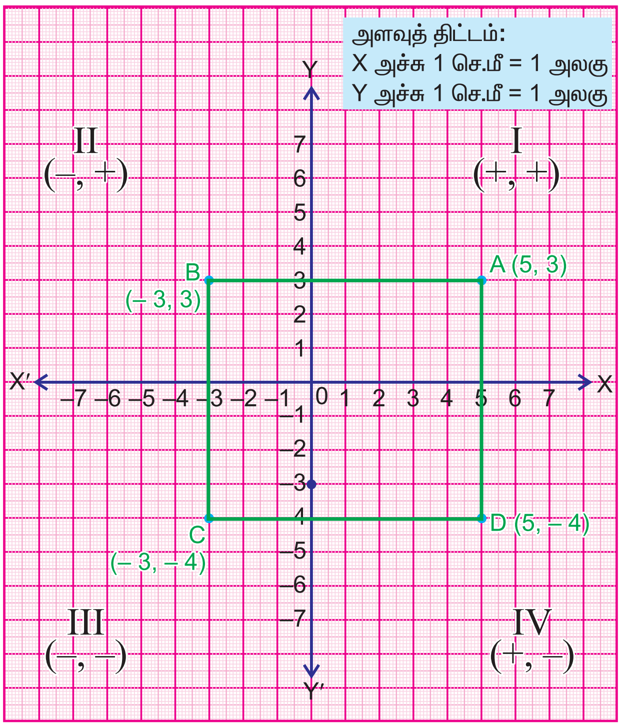
A (5 , 3), B (–3 , 3), C (–3 , –4), D (5 , –4) ஆகிய புள்ளிகளைக் குறித்து ABCD என்ற வடிவத்தால் அடைபடும் பகுதியின் பரப்பளவைக் காண்க.

தீர்வு

x, y அச்சுகளைப் பொருத்தமான அளவுத் திட்டத்துடன் வரைகிறோம்.

A (5 , 3), B (–3 , 3), C (– 3 , –4), D (5 , –4) ஆகிய புள்ளிகளைக் குறிக்கிறோம்.

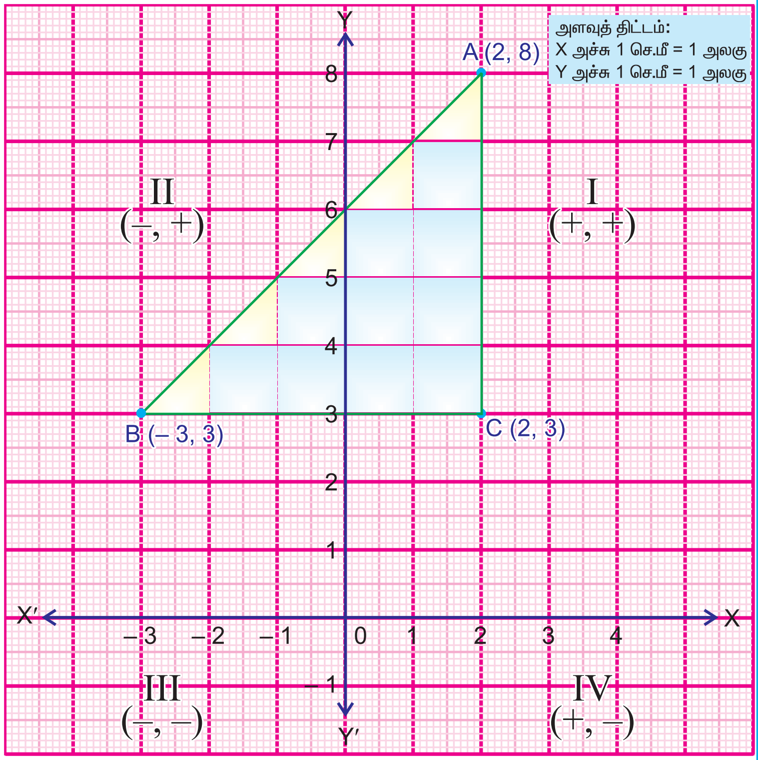
A மற்றும் B, B மற்றும் C, C மற்றும் D, D மற்றும் A ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கிறோம். ABCD என்ற ஓர் அடைபட்ட வடிவம் நமக்குக் கிடைக்கின்றது. தெளிவாக இது ஒரு செவ்வகம் ஆகும். நான்கு பக்கங்களுக்குள்ளும் அடைபட்டுள்ள அலகு சதுரங்களைக் கூட்டினால் 56 அலகு சதுரங்கள் உள்ளன.



எனவே செவ்வகம் ABCD இன் பரப்பளவு 56 சதுர செ.மீ. ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.7

A (2, 8), B (– 3, 3), C (2, 3) ஆகிய புள்ளிகளைக் குறித்து ABC என்ற வடிவத்தால் அடைபடும் பகுதியின் பரப்பளவைக் காண்க.



தீர்வு

x, *y* அச்சுகளை பொருத்தமான அளவுத் திட்டத்துடன் வரைகிறோம்.

A (2 , 8), B (–3 , 3) , C (2 , 3) ஆகிய புள்ளிகளைக் குறிக்கிறோம்.

A மற்றும் B, B மற்றும் C, C மற்றும் A ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கிறோம். ABC என்ற ஓர் அடைபட்ட வடிவம் நமக்குக் கிடைக்கின்றது. தெளிவாக இது ஒரு முக்கோணம் ஆகும். அடைப்பட்டுள்ள வடிவத்தில் உள்ள முழு அலகுச் சதுரங்களை எண்ணுவோம். இதில் 10 முழு அலகுச் சதுரங்கள் உள்ளன.

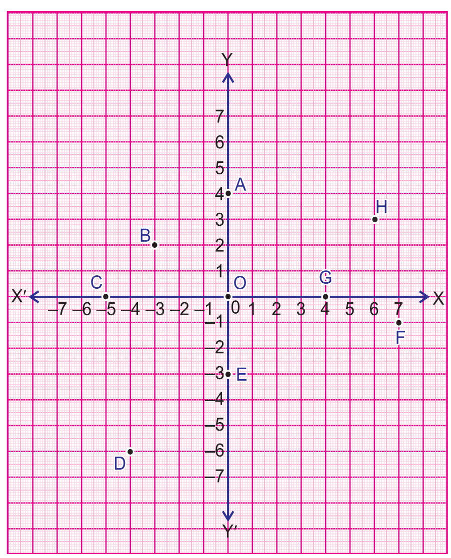
அரை அலகுச் சதுரங்களை எண்ணிப்பார்க்கிறோம். இதில் 5 அரை அலகுச் சதுரங்கள் உள்ளன. எனவே, முக்கோணத்தில் பரப்பு $10 + \frac{5}{2} = 10 + 2.5 = 12.5$ சதுர செ.மீ. ஆகும்.

பயிற்சி 3.1

1. பின்வரும் புள்ளிகளை ஒரு வரைபடத்தாளில் குறித்து அவற்றின் அமைவிடங்களைக் காண்க.
   (i) A (2 , 3) (ii) B (– 3 , 2) (iii) C (–5 ,–5) (iv) D (5 , –8)
   (v) E (6 , 0) (vi) F (–4 , 0) (vii) G (0 , 9)
   (viii) H (0 , –3) (ix) J (7 , 8) (x) O (0 , 0).

2. வரைபடத்தாளில் குறிக்காமலேயே, கீழே உள்ள புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றும் எங்கு அமையும் என்று எழுதுக.
   (i) (8 , 15) (ii) (–15 , 2) (iii) (–20 , –10)
   (iv) (6 , –9) (v) (0 , 18) (vi) (–17 , 0)
   (vii) (9 , 0) (viii) (–100 , –200)
   (ix) (200 , 500) (x) (–50 , 7500).

3. படத்தில் உள்ள A, B, C, D, E, F, G, H மற்றும் O ஆகிய புள்ளியின் அமைவிடங்களையும் அச்சுத்தூரங்களையும் காண்க.



4. பின்வரும் புள்ளிகளைக் குறித்து அவற்றின் வழிச்செல்லும் கோடுகளை வரைக.

   (i) (2 , 7) , (–2 ,– 3) (ii) (5 , 4), (8 , –5) (iii) (–3 , 4), (–7 , –2)

   (iv) (–5 , 3), (5 , –1) (v) (2 , 0), (6 , 0) (vi) (0 , 7), (4 , –4)

5. கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகளின் வரைபடங்களை வரைக.

   (i) $y = 0$ (ii) $x = 5$ (iii) $x = –7$ (iv) $y = 4$ (v) $y = –3$

6. பின்வரும் புள்ளிகளைக் குறித்து அவற்றால் அடைபடும் வடிவங்களின் பரப்பளவுகளைக் காண்க.

   (i) A (3 , 1), B (3 , 6), C (–5 , 6), D (–5 , 1)

   (ii) A (– 2 , – 4), B (5 , – 4), C (5 , 4), D (–2 , 4)

   (iii) A (3 , 3), B (–3 , 3), C (–3 , –3), D (3 , –3)

   (iv) O (0 , 0), A (0 , 7), B (–7 , 7), C (–7 , 0)

   (v) A (0 , – 2), B (–4 , – 6), C (4 ,– 6)

   (vi) A (1 , 2), B (9, 2), C (7 , 4), D (3 , 4)

   (vii) A (–4, 1), B (–4, 7), C (–7, 10), D (–7 , 4)

7. முந்தைய கணக்கு எண் 6 (i), (ii), (iii) மற்றும் (iv) இல் கிடைக்கும் செவ்வகங்கள் மற்றும் சதுரங்களின் சுற்றளவுகளைக் காண்க.

3.5 நேர்க்கோட்டு வரைபடங்கள்

வரைபடத்தாளில் நேர்க்கோடுகளையும் இணை கோடுகளையும் வரைவதை நாம் ஏற்கெனவே கற்றறிந்துள்ளோம். ஒரு வரைபடத்தாளில் ஏதேனும் இரண்டு புள்ளிகளை இணைப்பதன் மூலம் நமக்கு ஒரு நேர்க்கோடு கிடைக்கிறது எனில் அந்த வரைபடத்தை நேர்க்கோட்டு வரைபடம் என்கிறோம்.

3.5.1 'காலம்–தொலைவு' வரைபடம்

காலத்திற்கும் தொலைவிற்கும் இடையே உள்ள தொடர்பைக் குறித்து அறிய கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள எடுத்துக்காட்டைக் கருதுவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.8

அமுதா மணிக்கு **3** கி.மீ வேகத்தில் நடக்கிறாள். காலத்திற்கும் தொலைவிற்குமிடையே உள்ள உறவைக் காட்டும் நேர்க்கோட்டு வரைபடத்தை வரைக.

தீர்வு

அமுதா மணிக்கு 3 கி.மீ வேகத்தில் நடக்கிறார், இதன் பொருள் அவர் 1 மணி நேரத்தில் 3 கி.மீ, 2 மணி நேரத்தில் 6 கி.மீ, 3 மணி நேரத்தில் 9 கி.மீ என்றவாறு நடக்கிறார் என்பதாகும்.

ஆகவே, நமக்கு

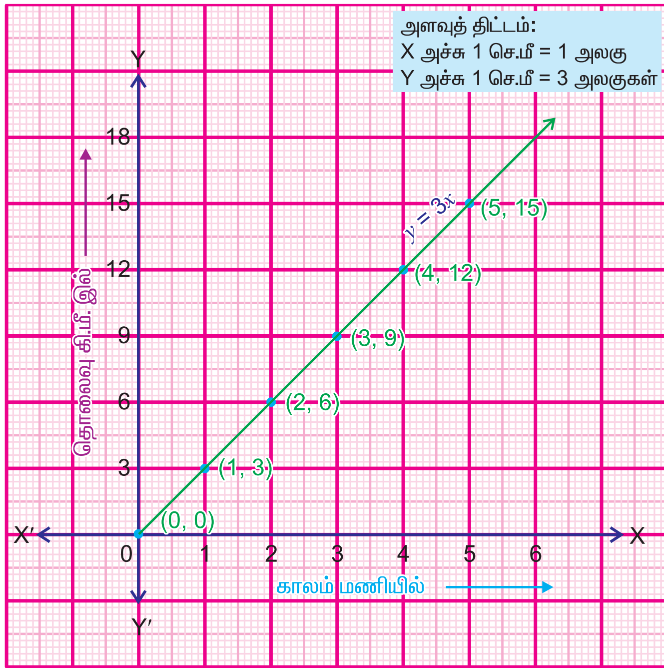
காலம் (x மணியில்)	0	1	2	3	4	5
தூரம் (y கி.மீ.இல்)	0	3	6	9	12	15

என்ற அட்டவணை கிடைக்கிறது

புள்ளிகள்: (0 , 0), (1 , 3), (2 , 6), (3 , 9), (4 , 12), (5 , 15).

மேற்கண்ட புள்ளிகளைக் குறிக்கிறோம்.

அனைத்துப் புள்ளிகளையும் இணைக்கிறோம். நமக்கு ஒரு நேர்க்கோடு கிடைக்கின்றது. இதுவே இதன் நேர்க்கோட்டு வரைபடம் ஆகும்.



x, y ஆகியவற்றிற்கிடையே உள்ள தொடர்பு

தொலைவு = வேகம் × காலம்

என்பது நாமறிந்ததே.

மேற்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து

$0 = 3 \times 0$		$9 = 3 \times 3$
$3 = 3 \times 1$		$12 = 3 \times 4$
$6 = 3 \times 2$		$15 = 3 \times 5$

$$\Longrightarrow y = 3x$$

(இங்கு, y = தொலைவு, x = காலம் மணியில் மற்றும் 3 என்பது வேகத்தையும் குறிக்கிறது)

இந்த கணக்கின் ஒருபடிச் சமன்பாடு $y = 3x$ என்பது ஆகும்.

3.5.2 'ஒரு சதுரத்தின் சுற்றளவு – பக்கம்' வரைபடம்

எடுத்துக்காட்டு 3.9

ஒரு சதுரத்தின் சுற்றளவுக்கும் பக்கத் திற்குமிடையே உள்ள தொடர்பைக் காட்டும் நேர்க்கோட்டு வரைபடத்தை வரைக.

தீர்வு

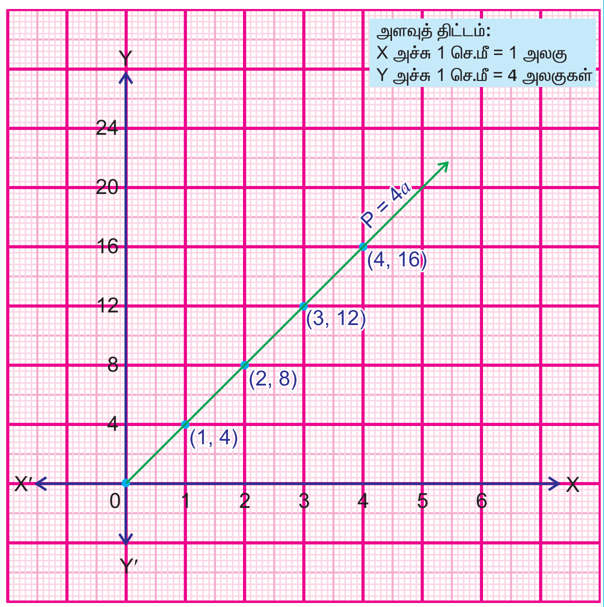
ஒரு சதுரத்தின் சுற்றளவு என்பது அதன் பக்கத்தைப் போன்று நான்கு மடங்கு என்பது நாமறிந்ததே.

அதாவது $P = 4a$.

(இங்கு, P = சுற்றளவு மற்றும் a = பக்கம்)

a வெவ்வேறு மதிப்புகட்கான P இன் மதிப்புகளை அட்டவணைப் படுத்தினால்

a (செ.மீ. இல்)	1	2	3	4
P = 4a (செ.மீ. இல்)	4	8	12	16



புள்ளிகள்: (1, 4), (2, 8), (3, 12), (4, 16).

மேற்கண்ட புள்ளிகளைக் குறிக்கிறோம். அனைத்துப் புள்ளிகளையும் இணைக்கிறோம். நமக்கு P = 4a என்பதன் நேர்க்கோட்டு வரைபடம் கிடைக்கிறது.

3.5.3 ஒரு சதுரத்தின் பரப்பளவிற்கும் பக்கத்திற்கும் இடையே உள்ள சார்பு

எடுத்துக்காட்டு 3.10

ஒரு சதுரத்தின் பரப்பளவிற்கும் பக்கத்திற்கும் இடையே உள்ள தொடர்பைக்காட்டும் வரைபடத்தை வரைக.

தீர்வு

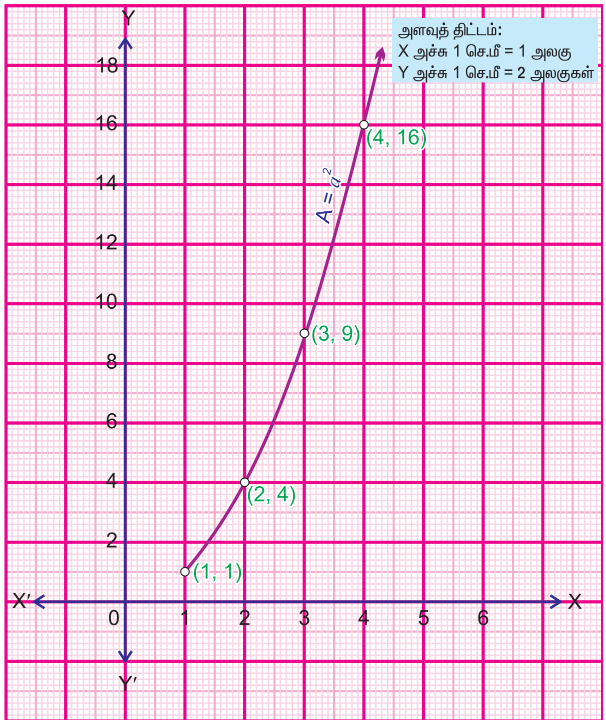
ஒரு சதுரத்தின் பரப்பளவு என்பது அதனுடைய பக்கத்தின் வர்க்கமாகும் என்பது நாமறிந்ததே. அதாவது A = a^2.

(இங்கு, A = பரப்பளவு, a = பக்கம்).

a யின் வெவ்வேறு மதிப்புகட்கான A யின் மதிப்புகளை அட்டவணைப்படுத்தினால்.

a (செ.மீ. இல்)	1	2	3	4	5
A = a^2 (ச.செ.மீ. இல்)	1	4	9	16	25

புள்ளிகள்: (1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25)



மேற்கண்ட புள்ளிகளைக் குறிக்கிறோம். அனைத்துப் புள்ளிகளையும் இணைக்கிறோம். இது ஒரு நேர்க்கோட்டு வரைபடமா? இல்லை. இது ஒரு வளைகோடு ஆகும்.

3.5.4 ஓர் எண்ணின் வெவ்வேறு மடங்குகளை வரைபடத்தில் குறித்தல்

எடுத்துக்காட்டு 3.11

மூன்றின் மடங்குகளைக் காட்டும் வரைபடத்தை வரைக.

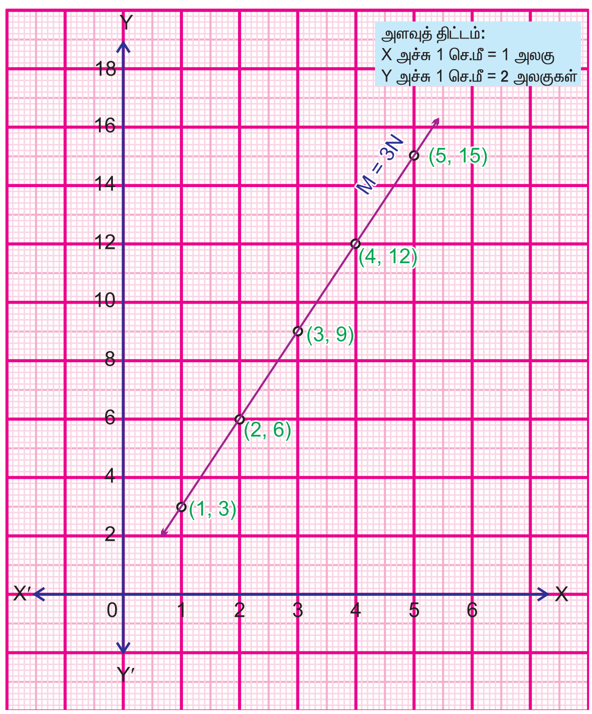
தீர்வு

இப்பொழுது நாம் மூன்றின் மடங்குகளை எழுதுவோம்.

3, 6, 9, 12, 15... போன்றவை 3 இன் மடங்குகளாகும்.

3 இன் மடங்குகளை நாம் இவ்வாறு எழுதலாம் 3 × n (இங்கு, n = 1, 2, 3, ...)

m = 3 n (m என்பது 3 இன் மடங்கு ஆகும்)



ஆகவே, நமக்கு

n	1	2	3	4	5
$m = 3n$	3	6	9	12	15

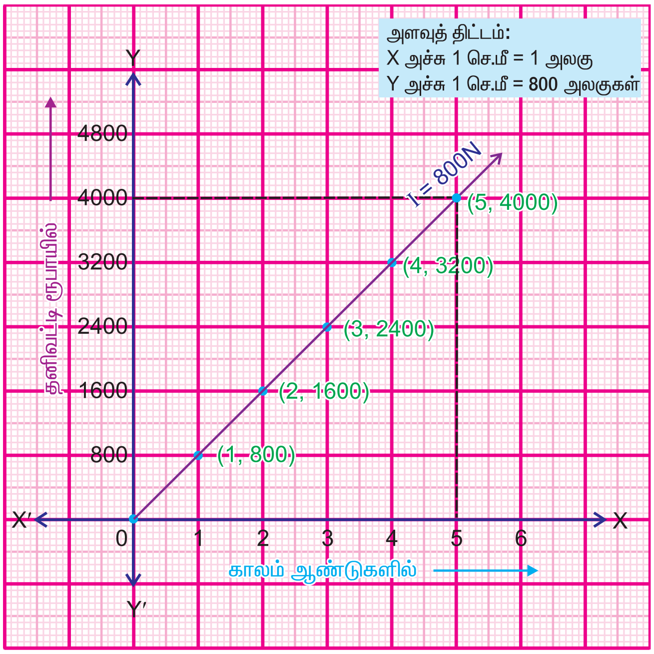
புள்ளிகள்: (1 , 3), (2 , 6), (3 , 9), (4 , 12), (5 , 15).

அனைத்துப் புள்ளிகளையும் குறித்து இணைத்தால். நமக்கு 3 இன் மடங்குகளின் வரைபடம் கிடைக்கிறது.

3.5.5 'தனிவட்டி – காலம்' வரைபடம்

எடுத்துக்காட்டு 3.12

அசோக் ₹ 10,000 ஆண்டுக்கு 8% என்ற வட்டி வீதத்தில் ஒரு வங்கியில் முதலீடு செய்துள்ளார். தனி வட்டிக்கும் காலத்திற்கும் இடையே உள்ள தொடர்பைக் காட்டும் ஒரு நேர்க்கோட்டு வரைபடத்தை வரைக. மேலும், 5 ஆண்டுகளில் கிடைக்கும் தனி வட்டியையும் காண்க.



தீர்வு

தனிவட்டி $= \frac{Pnr}{100}$ என்பது நாமறிந்ததே.

[இங்கு, P = அசல், n = காலம் ஆண்டுகளில், r = வட்டி விகிதம்]

அசல், P = 10000

காலம், n = ?

வட்டி விகிதம், r = 8%

$$I = \frac{P \times n \times r}{100}$$

$$I = \frac{10000 \times n \times 8}{100}$$

$$I = 800\, n.$$

(இங்கு, தனிவட்டி I ஆனது n ஐச் சார்ந்துள்ளது)

n இன் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்குரிய I யின் மதிப்புகளை அட்டவணைப்படுத்துவோம்.

n (காலம் ஆண்டுகளில்)	1	2	3	4	5
I = 800 n (₹ இல்)	800	1600	2400	3200	4000

புள்ளிகள்: (1, 800), (2, 1600), (3, 2400), (4, 3200), (5, 4000)

அனைத்துப் புள்ளிகளையும் குறித்து அவைகளை இணைத்து நேர்க்கோட்டு வரைபடத்தை வரைகிறோம்.

ஆகவே, 5 ஆண்டுகட்குப் பிறகு அசோக்கிற்குக் கிடைக்கும் தனி வட்டி ₹ 4,000 ஆகும். (வரைபடத்தில் விடை புள்ளியிட்ட கோடுகளால் அடையாளம் காட்டப்பட்டுள்ளது).

3.6 நேர்க்கோட்டு வரைபடங்களைப் படித்தறிதல்

நாணயப் பரிமாற்றம்: உலகம் இன்று மிகவும் சிறியதாகி விட்டது. அயல் நாடுகளுடன் வர்த்தகம் செய்வது என்பது தவிர்க்க இயலாத ஒன்றாகி விட்டது. நாம் அவ்வாறு செய்கையில் நமது நாட்டு நாணயத்தை (இந்திய பணத்தை) பிற நாடுகளின் நாணயங்களாக மாற்ற வேண்டியுள்ளது. வெவ்வேறு நாடுகள் வெவ்வேறு பெயருடைய வெவ்வேறு நாணயங்களைப் பயன்படுத்துகின்றன. எனவே பணப் பரிமாற்றம் அல்லது நாணயப் பரிமாற்றம் குறித்த கருத்துகளை நாம் அறிந்து கொள்ள வேண்டியுள்ளது. கீழ்க்காணும் எடுத்துக்காட்டைக் கருதுவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.13

ஒரு குறிப்பிட்ட நாளில் ஒரு யூரோவிற்கு நிகரானப் பணப் பரிமாற்ற வீதம் ₹ 55 ஆக இருந்தது. கீழே உள்ள நேர்க்கோட்டு வரைபடம் நாணயங்களுக்கிடையே உள்ள தொடர்பை காட்டுகிறது. கவனமாக வரைபடத்தைப் படித்தறிந்து அடியில் கண்ட வினாக்களுக்கு விடையளி.

(i) 4 யூரோக்களுக்குச் சமமான ரூபாயின் மதிப்பைக் காண்க.

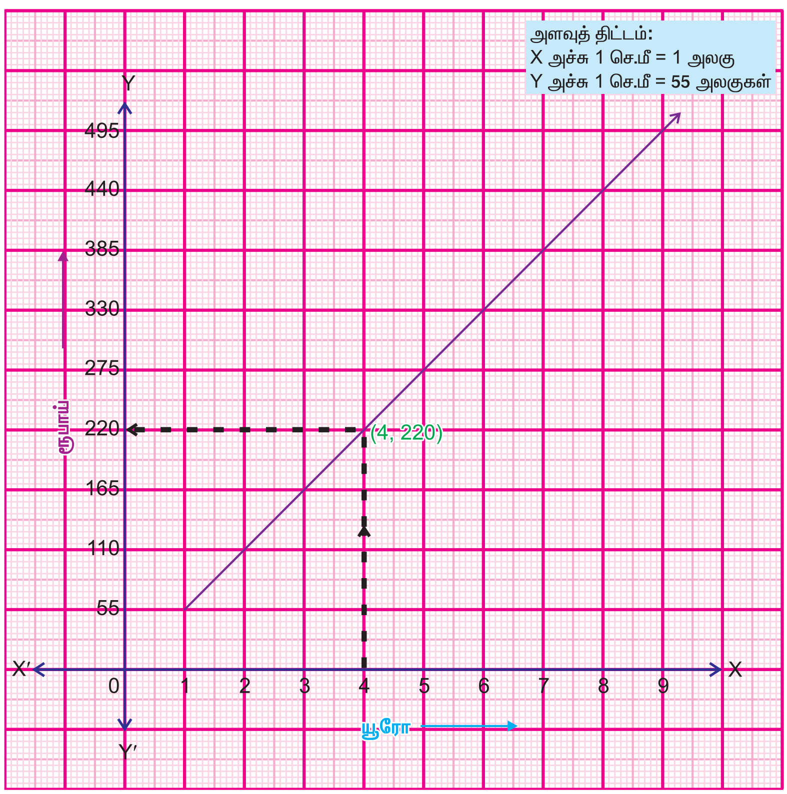
(ii) 6 யூரோக்களுக்குச் சமமான ரூபாயின் மதிப்பைக் காண்க.

(iii) ₹ 275க்கு சமமான யூரோவின் மதிப்பைக் காண்க.

(iv) ₹ 440க்கு சமமான யூரோவின் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

4 யூரோக்களுக்குச் சமமான ரூபாயின் மதிப்பைக் காணல் :



இந்த வரைபடத்தில், $x = 4$ இல் y அச்சுக்கு இணையாக ஒரு புள்ளியிடப் பட்ட கோட்டை வரைகிறோம்.

கொடுக்கப்பட்ட கோட்டுடன் இது வெட்டும் புள்ளியைக் குறிக்கிறோம்.

அப்புள்ளியிலிருந்து x அச்சுக்கிணையாக ஒரு புள்ளியிட்ட கோட்டை வரைகிறோம்.

இது y அச்சை 220 இல் வெட்டுகிறது. (படத்தைக் காண்க)

எனவே, 4 யூரோக் களுக்குச் சமமான மதிப்பு ₹ 220 ஆகும்.

செய்து பார்

மேலே உள்ள (ii), (iii) மற்றும் (iv) ஆகிய வினாக்களுக்கான விடைகளை முயன்று கண்டறிக.

பயிற்சி 3.2

1. பின்வரும் விவரங்களுக்குரிய நேர்க்கோட்டு வரைபடத்தை வரைக.

(i)

x	5	5	5	5	5	5
y	1	2	3	4	5	6

(ii)

x	1	2	3	4	5
y	1	2	3	4	5

2. நேர்க்கோட்டு வரைபடம் வரைந்து விடுபட்ட மதிப்புகளைக் கண்டறிக.

x	1	2	3	4	–
y	6	12	–	–	30

3. ஒரு சதுரத்தின் பரப்பளவிற்கும் பக்கத்திற்கும் இடையே உள்ள தொடர்பைக் காட்டும் நேர்க்கோட்டு வரைபடத்தை வரைக.

பக்கம் (மீட்டரில்)	2	3	4	5	6
பரப்பு (ச. மீட்டரில்)	4	9	16	25	36

4. $y = 7x$ என்பதன் வரைபடத்தை வரைக.

5. அக்பர் ஒரு மகிழுந்தை 40 கி.மீ / மணி என்ற சீரான வேகத்தில் ஓட்டிச் செல்கிறார். ‘தொலைவு – காலம்’ வரைபடம் வரைக. மேலும் 200 கி.மீ செல்ல அக்பருக்கு ஆகும் காலத்தையும் கண்டறிக.

6. எலீசா ஒரு வங்கியில் ₹ 20,000 ஐ ஆண்டுக்கு 10% வட்டி வீதத்தில் முதலீடு செய்துள்ளார். தனி வட்டிக்கும் காலத்திற்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பைக் காட்டும் ஒரு நேர்க்கோட்டு வரைபடத்தை வரைக. இதிலிருந்து 4 ஆண்டுகட்குரிய தனி வட்டியையும் காண்க.

விடைகள்

அத்தியாயம் 1

பயிற்சி 1.1

1. i) C ii) B iii) D iv) A v) D vi) D vii) C

2.

வ. எண்	உறுப்புகள்	மாறிகளின் கெழுக்கள்
i)	$3\,abc$ $-5\,ca$	3 -5
ii)	$1, x, y^2$	மாறிலி உறுப்பு, 1, 1
iii)	$3x^2y^2$ $-3xyz$ z^3	3 -3 1
iv)	-7 $2\,pq$ $\frac{-5}{7}qr$ rp	மாறிலி உறுப்பு 2 $\frac{-5}{7}$ 1
v)	$\frac{x}{2}$ $\frac{-y}{2}$ $-0.3\,xy$	$\frac{1}{2}$ $\frac{-1}{2}$ -0.3

3. ஒருறுப்புக் கோவை : $3x^2$

ஈருறுப்புக் கோவைகள் : $3x + 2$, $x^5 - 7$, $a^2b + b^2c$, $2l + 2m$.

மூவுறுப்புக் கோவைகள் : $x^2 - 4x + 2$, $x^2 + 3xy + y^2$, $s^2 + 3st - 2t^2$

4. i) $5x^2 - x - 2$ ii) $2x^2 + x - 2$ iii) $-3t^2 - 2t - 3$
iv) 0 v) $2(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)$

5. i) a ii) $-4x - 18y$ iii) $5ab - 7bc + 13ca$
iv) $-x^5 + x^3 + 5x^2 + 3x + 1$ v) $5x^2y - 9xy - 7x + 12y + 25$

6. i) 7, 5 ii) 13, – 1 iii) 7, – 1 iv) 8, 1 v) 8, – 2

பயிற்சி 1.2

1. i) $21\,x$ ii) $-21\,xy$ iii) $-15a^2b$ iv) $-20a^3$ v) $\frac{2}{3}x^7$ vi) x^3y^3
vii) x^4y^7 viii) $a^2b^2c^2$ ix) $x^3y^2z^2$ x) $a^3b^3c^5$

2.

முதலாம் ஒருறுப்புக்கோவை → இரண்டாம் ஒருறுப்புக்கோவை ↓	$2x$	$-3y$	$4x^2$	$-5xy$	$7x^2y$	$-6x^2y^2$
$2x$	$4x^2$	$-6xy$	$8x^3$	$-10x^2y$	$14x^3y$	$-12x^3y^2$
$-3y$	$-6xy$	$9y^2$	$-12x^2y$	$15xy^2$	$-21x^2y^2$	$18x^2y^3$
$4x^2$	$8x^3$	$-12x^2y$	$16x^4$	$-20x^3y$	$28x^4y$	$-24x^4y^2$
$-5xy$	$-10x^2y$	$15xy^2$	$-20x^3y$	$25x^2y^2$	$-35x^3y^2$	$30x^3y^3$
$7x^2y$	$14x^3y$	$-21x^2y^2$	$28x^4y$	$-35x^3y^2$	$49x^4y^2$	$-42x^4y^3$
$-6x^2y^2$	$-12x^3y^2$	$18x^2y^3$	$-24x^4y^2$	$30x^3y^3$	$-42x^4y^3$	$36x^4y^4$

3. i) $30a^7$ ii) $72xyz$ iii) $a^2b^2c^2$ iv) $-72m^7$ v) $x^3y^4z^2$
vi) $l^2m^3n^4$ vii) $-30p^3q$

4. i) $8a^{23}$ ii) $-2x^2-3x+20$ iii) $3x^2+8xy-3y^2$ iv) $12x^2-x-6$
v) $\frac{-5}{4}a^3b^3$

5. i) $2a^3-3a^2b-2ab^2+3b^3$ ii) $2x^3+x^2y-xy^2+3y^3$
iii) $x^2+2xy+y^2-z^2$ iv) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ v) m^3-n^3

6. i) $2(x^2-2xy+yz-xz-y^2)$ ii) $17a^2+14ab-21ac$

பயிற்சி 1.3

1. i) C ii) D iii) B iv) D v) A vi) B

2. i) x^2+6x+9 ii) $4m^2+12m+9$ iii) $4x^2-20x+25$
iv) $a^2-2+\frac{1}{a^2}$ v) $9x^2-4$ vi) $25a^2-30ab+9b^2$
vii) $4l^2-9m^2$ viii) $\frac{9}{16}-x^2$ ix) $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}$ x) 9991

3. i) $x^2+11x+28$ ii) $25x^2+35x+12$ iii) $49x^2-9y^2$
iv) $64x^2-56x+10$ v) $4m^2+14mn+12n^2$ vi) $x^2y^2-5xy+6$
vii) $a^2+\left(\frac{x+y}{xy}\right)a+\frac{1}{xy}$ viii) $4+2x-2y-xy$

4. i) $p^2-2pq+q^2$ ii) $a^2-10a+25$ iii) $9x^2+30x+25$
iv) $25x^2-40x+16$ v) $49x^2+42xy+9y^2$ vi) $100m^2-180mn+81n^2$
vii) $0.16a^2-0.4ab+0.25b^2$ viii) $x^2-2+\frac{1}{x^2}$
ix) $\frac{x^2}{4}-\frac{xy}{3}+\frac{y^2}{9}$ x) 0.08

5. i) 10609 ii) 2304 iii) 2916 iv) 8464 v) 996004 vi) 2491
vii) 9984 viii) 896 ix) 6399 x) 7.84 xi) 84 xii) 95.06

7. $ab = \frac{9}{4}$, $a^2 + b^2 = \frac{41}{2}$

8. i) 80, 16, ii) 196, 196

9. 625

10. $x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x + abc.$

பயிற்சி 1.4

1. i) C ii) D iii) A iv) C v) B

2. i) $3(x - 15)$ ii) $7(x - 2y)$ iii) $5a(a + 7)$
   iv) $4y(5y^2 - 3)$ v) $5ab(3a + 7)$ vi) $pq(1 - r)$
   vii) $9m(2m^2 - 5n^2)$ viii) $17(l^2 + 5m^2)$ ix) $3x^2(2xy - 4y + 5x^2)$
   x) $2a^2b(a^3b^2 - 7b + 2a)$

3. i) $a(2b + 3) + 2b$ (or) $2b(a + 1) + 3a$
   ii) $(3x - 2)(2y - 3)$
   iii) $(x + y)(3y + 2)$
   iv) $(5b - x^2)(3b - 1)$
   v) $(ax + y)(ax + b)$
   vi) $(a + b)(ax + by + c)$
   vii) $(ax - b)(x^2 + 1)$
   viii) $(x - y)(m - n)$
   ix) $(2m^2 + 3)(m - 1)$
   x) $(a + 11b)(a + 1)$

4. i) $(a + 7)^2$ ii) $(x - 6)^2$
   iii) $(2p + 5q)(2p - 5q)$ iv) $(5x - 2y)^2$
   v) $(13m + 25n)(13m - 25n)$ vi) $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2$
   vii) $(11a + 7b)^2$ viii) $3x(x + 5)(x - 5)$
   ix) $(6 + 7x)(6 - 7x)$ x) $(1 - 3x)^2$

5. i) $(x + 3)(x + 4)$ ii) $(p - 2)(p - 4)$ iii) $(m - 7)(m + 3)$
   iv) $(x - 9)(x - 5)$ v) $(x - 18)(x - 6)$ vi) $(a + 12)(a + 1)$
   vii) $(x - 2)(x - 3)$ viii) $(x - 2y)(x - 12y)$
   ix) $(m - 24)(m + 3)$ x) $(x - 22)(x - 6)$

பயிற்சி 1.5

1. i) $\frac{x^3}{2}$ ii) $-6y$ iii) $\frac{2}{3}a^2b^2c^2$ iv) $7m - 6$
   v) $\frac{5}{3}xy$ vi) $9l^2m^3n^5$

2. i) $5y^2 - 4y + 3$ ii) $3x^3 - 5x^2 - 7$ iii) $\frac{5}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}$
   iv) $x + y - 7$ v) $8x^3 - 4y^2 + 3xz^3$.
3. i) $(x + 5)$ ii) $(a + 12)$ iii) $(m - 2)$ iv) $(5m - n)$
   v) $(2a + 3b)$ vi) $(a^2 + b^2)(a + b)$

பயிற்சி 1.6

1. i) $x = 6$ ii) $y = -7$ iii) $y = 4$ iv) $x = 12$ v) $y = -77$
   vi) $x = -6$ vii) $x = 2$ viii) $x = 12$ ix) $x = 6$ x) $m = \frac{6}{7}$
2. i) 18 ii) 29, 30, 31 iii) l = 19செ. மீ., b = 11செ. மீ.
   iv) 12, 48 v) 12, 9 vi) 45, 27 vii) 4000 viii) $\frac{3}{5}$
   ix) நந்தினியின் தற்போதைய வயது 15 ஆண்டுகள்,
   மேரியின் தற்போதைய வயது 45 ஆண்டுகள்.
   x) மனைவியின் பங்கு = ₹ 1,50,000 மகனின் பங்கு = ₹ 1,00,000

அத்தியாயம் 3

பயிற்சி 3.1

2. i) முதல் கால்பகுதி ii) இரண்டாம் கால்பகுதி
   iii) மூன்றாம் கால்பகுதி iv) நான்காம் கால்பகுதி v) y-அச்சின் மீது
   vi) x-அச்சின் மீது vii) x-அச்சின் மீது viii) மூன்றாம் கால்பகுதி
   ix) முதல் கால்பகுதி x) இரண்டாம் கால்பகுதி
3.

புள்ளி	கால்பகுதி/ அச்சு	அச்சுத்தூரங்கள்
A	y - அச்சின் மீது	(0,4)
B	இரண்டாம் கால்பகுதி	(-3,2)
C	x-அச்சின் மீது	(-5,0)
D	மூன்றாம் கால்பகுதி	(-4,-6)
E	y-அச்சின் மீது	(0.-3)
F	நான்காம் கால்பகுதி	(7,-1)
G	x-அச்சின் மீது	(4,0)
H	முதல் கால்பகுதி	(6,3)
O	ஆதிப் புள்ளி	(0,0)

6. i) 40 செ.மீ^{2} ii) 56 செ.மீ^{2} iii) 36 செ.மீ^{2} iv) 49 செ.மீ^{2}
   v) 16 செ.மீ^{2} vi) 12 செ.மீ^{2} vii) 18 செ.மீ^{2}
7. i) 26 செ.மீ. ii) 30 செ.மீ. iii) 24 செ.மீ. iv) 28 செ.மீ.

பயிற்சி 3.2

5. 5 மணி 6. ₹ 8,000

"என்னால் முடியும், நான் செய்தேன்"

('I can, I did')

மாணவர் கற்றல் செயல்பாடுகள் பதிவேடு

பாடம் :

வ.எண்	நாள்	பாட எண்	பாடத்தலைப்பு	செயல்பாடுகள்	குறிப்புரை