

# ગાન્ધીનાના

ધોરણ 11

(સિમેસ્ટર II)



## પ્રતિજ્ઞાપત્ર

ભારત મારો દેશ છે.  
બધાં ભારતીયો મારાં ભાઈબહેન છે.  
હું મારા દેશને ચાહું છું અને તેના સમૃદ્ધ અને  
વૈવિધ્યપૂર્વી વાસસાનો મને ગર્વ છે.  
હું સદાય તેને લાયક જનવા મ્યાલ કરીશ.  
હું મારાં માતાપિતા, શિક્ષકો અને વડીલો પ્રત્યે આદર રાખીશ  
અને દરેક જાણ સાથે સભ્યતાથી વર્તિશ.  
હું મારા દેશ અને દેશબાંધવોને મારી નિષ્ઠા અર્પું છું.  
તેમનાં કલ્યાણ અને સમૃદ્ધિમાં જ મારું સુખ રહ્યું છે.

રાજ્ય સરકારની વિનામૂલ્યે યોજના ફેટાનું પુસ્તક



ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ  
'વિદ્યાધન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર-382010

© ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, ગાંધીનગર  
આ પાઠ્યપુસ્તકના સર્વ હક ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળને હસ્તક છે.  
આ પાઠ્યપુસ્તકનો કોઈ પણ ભાગ કોઈ પણ રૂપમાં ગુજરાત રાજ્ય શાળા  
પાઠ્યપુસ્તક મંડળના નિયામકની લેખિત પરવાનગી વગર પ્રકાશિત કરી શકાશે નહિ.

### લેખન

ડૉ. એ. પી. શાહ (કન્વીનર)  
શ્રી રાજીવભાઈ ચોક્સી  
ડૉ. એ. એચ. હાસમણી  
શ્રી જ્યેષ્ઠ અન. બહુ  
શ્રી વિપુલ આર. શાહ

### અનુવાદ

ડૉ. એ. પી. શાહ  
શ્રી રાજીવભાઈ ચોક્સી  
ડૉ. એ. એચ. હાસમણી  
શ્રી જ્યેષ્ઠ અન. બહુ  
શ્રી વિપુલ આર. શાહ

### સમીક્ષા

ડૉ. પી. આઈ. અંધારિયા	શ્રી નરસિંહભાઈ એમ. પટેલ
શ્રી રવિનારાયણ બોરાણા	શ્રી શૈલેષભાઈ શેઠ
ડૉ. કૃષ્ણાકુમાર એમ. મહેતા	શ્રી આર. વી. વૈષ્ણવ
શ્રી આર. ડી. મોઢા	શ્રી નવરોજભાઈ ગાંગાણી
શ્રી જ્યંતીભાઈ જે. પટેલ	શ્રી ભાવેશભાઈ પાઠક

### ચિત્રાંકન

શ્રી મનીષ પી. પારેખ

### સંયોજન

શ્રી આશિષ એચ. બોરીસાગર  
(વિષય-સંયોજક : ગણિત)

### નિર્માણ-આયોજન

શ્રી હરેશ એસ. લીભાચીયા  
(નાયબ નિયામક : શૈક્ષણિક)

### મુદ્રણ-આયોજન

શ્રી હરેશ એસ. લીભાચીયા  
(નાયબ નિયામક : ઉત્પાદન)

### પ્રસ્તાવના

એન.સી.ઈ.આર.ટી. દ્વારા તૈયાર કરવામાં આવેલા  
નવા રાષ્ટ્રીય અભ્યાસક્રમોના અનુસંધાનમાં ગુજરાત  
રાજ્ય માધ્યમિક અને ઉચ્ચતર માધ્યમિક શિક્ષણ બોર્ડ  
નવા અભ્યાસક્રમો તૈયાર કર્યા છે. આ અભ્યાસક્રમો  
ગુજરાત સરકાર દ્વારા મંજૂર કરવામાં આવે છે.

ગુજરાત સરકાર દ્વારા મંજૂર થયેલા **ધોરણ 11  
(ક્ષિમેસ્ટર II)** ના ગણિત વિષયના નવા અભ્યાસક્રમ  
અનુસાર તૈયાર કરવામાં આવેલું આ પાઠ્યપુસ્તક  
વિદ્યાર્થીઓ સમક્ષ મૂક્તાં મંડળ આનંદ અનુભવે છે.

આ પાઠ્યપુસ્તક પ્રસિદ્ધ કરતાં પહેલાં એની  
હસ્તપ્રતની આ સરે શિક્ષણકાર્ય કરતા શિક્ષકો અને  
તજ્જ્ઞો દ્વારા સર્વાંગી સમીક્ષા કરાવવામાં આવી છે.  
શિક્ષકો તથા તજ્જ્ઞોનાં સૂચનો અનુસાર હસ્તપ્રતમાં  
યોગ્ય સુધારાવધારા કર્યા પછી આ પાઠ્યપુસ્તક પ્રસિદ્ધ  
કરવામાં આવ્યું છે. મૂળ અંગ્રેજીમાં તૈયાર કરવામાં  
આવેલ પાઠ્યપુસ્તકનો આ ગુજરાતી અનુવાદ છે.

પ્રસ્તુત પાઠ્યપુસ્તકને રસમદ, ઉપયોગી તથા  
ક્ષતિરહિત બનાવવા માટે મંડળે પૂરતી કાળજી  
લીધી છે. તેમ ધતાં શિક્ષણમાં રસ ધરાવનાર વ્યક્તિઓ  
પાસેથી પુસ્તકની ગુણવત્તા વધારે તેવાં સૂચનો  
આવકાર્ય છે.

**ડૉ. ભરત પંડિત**

નિયામક

તા. 05-08-2015

**સુજીત ગુલાટી IAS**

કાર્યવાહક પ્રમુખ

ગાંધીનગર

પ્રથમ આવૃત્તિ : 2011, પુનઃમુદ્રણ : 2012, 2013, 2014, 2015

**પ્રકાશક :** ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, ‘વિદ્યાયન’, સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર વતી

ડૉ. ભરત પંડિત, નિયામક

**મુદ્રક :**

## મૂળભૂત ફરજો

ભારતના દરેક નાગરિકની ફરજ નીચે મુજબ રહેશે :\*

- (ક) સંવિધાનને વફાદાર રહેવાની અને તેના આદર્શો અને સંસ્થાઓનો, રાષ્ટ્રર્થજનો અને રાષ્ટ્રગીતનો આદર કરવાની;
- (ખ) આજાદી માટેની આપણી રાષ્ટ્રીય લડતને પ્રેરણા આપનારા ઉમદા આદર્શોને હદ્યમાં પ્રતિષ્ઠિત કરવાની અને અનુસરવાની;
- (ગ) ભારતનાં સાર્વભૌમત્વ, એકતા અને અખંડિતતાનું સમર્થન કરવાની અને તેમનું રક્ષણ કરવાની;
- (ઘ) દેશનું રક્ષણ કરવાની અને રાષ્ટ્રીય સેવા ભજવવાની હાકલ થતી, તેમ કરવાની;
- (ઝ) ધાર્મિક, ભાષાકીય, માર્દિશ્વક અથવા સાંપ્રદાયિક બેદોધી પર રહીને, ભારતના તમામ લોકોમાં સુમેળ અને સમાન બંધુત્વની ભાવનાની વૃદ્ધિ કરવાની, સ્ત્રીઓના ગૌરવને અપમાનિત કરે તેવા વ્યવહારો ત્યજી દેવાની;
- (ઝી) આપણી સમાન્વિત સંસ્કૃતિના સમૃદ્ધવારસાનું મૂલ્ય સમજી તે જાળવી રાખવાની;
- (ઝી) જંગલો, તળાવો, નદીઓ અને વન્ય પશુપક્ષીઓ સહિત કુદરતી પર્યાવરણનું જતન કરવાની અને સુધારણા કરવાની અને જીવો પ્રત્યે અનુકૂળ રાખવાની;
- (ઝી) વૈજ્ઞાનિક ભાનસ, ભાનવતાવાદ અને જિજ્ઞાસા તથા સુધારણાની ભાવના કેળવવાની;
- (ઝી) જ્ઞાને મિલકતનું રક્ષણ કરવાની અને લિંગાનો ત્યાગ કરવાની;
- (ઝી) રાષ્ટ્ર પુરુષાર્થ અને સિદ્ધિનાં વધુ ને વધુ ઉન્ત સોપાનો ભણી સતત પ્રગતિ કરતું રહે એ માટે, વૈધકીક અને સામૂહિક પ્રવૃત્તિનાં તમામ કોરે શ્રેષ્ઠતા હાંસલ કરવાનો પ્રયત્ન કરવાની;
- (ઝી) ભાતા-પિતાએ અથવા વાલીએ ૬ વર્ષથી ૧૪ વર્ષ સુધીની વયના પોતાના બાળક અથવા પાલ્યને શિક્ષણની તકો પૂરી પાડવી.

\*ભારતનું સંવિધાન : કલમ ૫૧-ક

## અનુકમણિકા

1. ગણિતીય અનુમાનનો વિદ્વાન	1
2. સંકર સંખ્યાઓ	22
3. દ્વિપદી પ્રમેય	48
4. સરવાળાનાં સૂત્રો અને અવયવ સૂત્રો	62
5. ગુણિત અને ઉપગુણિત સંખ્યાઓ માટે નિકોષામિતીય વિધેયનાં મૂલ્યો માટેનાં સૂત્રો	91
6. નિકોષામિતીય સમીકરણો અને નિકોષાના ગુણાધમો	111
7. શ્રેષ્ઠી અને શ્રેષ્ઠી	130
8. શાંકવો	160
9. ત્રિપરિમાણીય બૂભિતિ	200
10. લક્ષ	225
11. વિકલન	256
● જવાબો	274
● પારિભાષિક શબ્દો	282



## આ પાઠ્યપુસ્તક વિશે...

ધોરણ 11 ગણિતના સિમેસ્ટર I ના પુસ્તકમાં અભ્યાસક્રમની રૂચના તથા NCERT ના અભ્યાસક્રમને અનુકૂળ પુસ્તક લખવા વિશેની પૂર્વભૂમિકા તો રચાઈ ગઈ છે.

આ પુસ્તક પણ સૌપ્રથમ અંગેજમાં લખવામાં આવ્યું તથા અંગેજ માધ્યમમાં શીખવતા શિક્ષકો તથા અધ્યાપકો દ્વારા તેનું પરામર્શન કરવામાં આવ્યું નિષ્ણાતોનાં સૂચનો અનુસાર આવશ્યક પરિવર્તનો કરી છસ્તપ્રતનો અનુવાદ ગુજરાતીમાં કરવામાં આવ્યો તથા તેનું પરામર્શન ગુજરાતી માધ્યમથી પરિચિત નિષ્ણાતો દ્વારા કરવામાં આવ્યું તથા સૂચનોને ધ્યાનમાં રાખીને પુનઃ આવશ્યક ફેરફારો કરવામાં આવ્યા.

આ પછી તૈયાર થયેલી છસ્તપ્રતને લેખકોએ કાર્યશિલ્પિઓમાં સંપૂર્ણપણે વાંચી અને અંતિમ સ્વરૂપ આપ્યું.

પ્રકરણ 1, ગણિતીય અનુમાન એ એક સાધન છે. પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ સંબંધી ઘણા ગુણધર્મો આ નિયમ દ્વારા સાબિત થઈ શકે છે. વિવિધ ક્ષેત્રોમાં વિવિધ પ્રકારે ગણિતીય અનુમાનના નિયમનો ઉપયોગ પ્રકરણ 1 માં દર્શાવ્યો છે. પ્રકરણ 2, સંકર સંખ્યા સંહતિના પરિચયની શરૂઆત છે. બીજગણિતના મુખ્ય પ્રમેય, સંકર સંખ્યાના વર્ગમૂળ, ધનમૂળ, આર્ગાન્ડ ચિત્ર, અસમતા વગેરેની રજૂઆત પ્રકરણમાં સરળતાથી કરી છે. આમ સંકર સંખ્યાના ઉપયોગથી 1 ઘાતવાળું વાસ્તવિક સહગુણકોવાળું કોઈ પણ બૈજિક સમીકરણ ઉકેલી શકાય છે અને સંકર સંખ્યાઓ આ રીતે ઉપયોગી છે.

ધન પૂર્ણાંક માટે દ્વિપદી પ્રમેય વર્ગ તથા ઘનનાં વિસ્તરણોનું વ્યાપક સ્વરૂપ છે. પ્રકરણ 4, 5, 6 ત્રિકોણમિતિના સિમેસ્ટર I માં કરેલા અભ્યાસને આગળ ધરાવે છે. ત્રિકોણના ગુણધર્મોનો અભ્યાસ કરવા માટે તથા ત્રિકોણમિતિ સમીકરણોના વ્યાપક ઉકેલ માટે આ પ્રકરણો ઉપયોગી છે.

પ્રકરણ 7 માં સમાંતર શ્રેઢી, સમગુણોત્તર શ્રેઢી તથા ઘાત શ્રેઢી (ઘાત 1, 2 તથા 3)નો અભ્યાસ કરવામાં આવ્યો છે.

પ્રકરણ 8 માં શાંકવો વિશે પ્રાથમિક અભ્યાસ અને માહિતી આપેલ છે, વ્યાપક દ્વિઘાત વક્ત તથા શંકુના છે વિશેની માહિતીનો માત્ર ઉલ્લેખ છે.

પ્રકરણ 9 માં ત્રિપરિમાળીય ભૂમિતિનો અભ્યાસ છે. આના માટે અગત્યનું સાધન સદિશ હોવાથી પ્રકરણની શરૂઆતમાં સદિશનો માત્ર જરૂર પરિચય જ આપ્યો છે. ત્રિપરિમાળીય ભૂમિતિનો અભ્યાસ રેખાખંડના વિભાજન સુધી મર્યાદિત છે.

પ્રકરણ 10 તથા 11 કલનશાખની શરૂઆત સૂચવે છે. લક્ષની માત્ર સાહજિક સંકલ્પના જ લઈ, વ્યાખ્યા આપી પૂર્વપ્રમેયો તથા પ્રમેયોના આધારે લક્ષ કેવી રીતે મેળવી શકાય તે પર ભાર મૂક્યો છે. આલેખોના આધારે લક્ષની સંકલ્પના સમજાવી છે. વિદ્યાર્થી આલેખો દોરે તે અપેક્ષિત નથી. વિકલનની વ્યાખ્યા આપી પ્રાથમિક વિધેયોના વિકલિતો કેવી રીતે મેળવી શકાય તે સમજાવ્યું છે.

આ પુસ્તકમાં વિપુલ પ્રમાણમાં ઉદાહરણ આપ્યા છે, જેથી કરીને વિદ્યાર્થી સ્વ-પ્રયત્ને તમામ સંકલ્પનાઓ સારી રીતે સમજ શકે તથા શિક્ષક વિદ્યાર્થનિ સ્વ-અભ્યાસ તરફ દોરી શકે. દરેક પ્રકરણના અંતે પૂરતા પ્રમાણમાં બહુવિકલ્પી પ્રશ્નો આપ્યા છે, જેથી સંકલ્પનાની સમજાવીની કસોટી થઈ શકે.

ચાર રંગોમાં આકર્ષક મુદ્રણ એ પુસ્તકની વિશિષ્ટતા છે. પુસ્તકમાં ભારતીય ગણિતશાસ્ત્રીઓના પ્રદાન વિશે પણ કેટલીક માહિતી આપી છે. કેટલાંક પ્રકરણના અંતે આવી માહિતી આપી છે. વિદ્યાર્થીનિ અભ્યાસ માટે પૂર્તું અભ્યાસ સાહિત્ય પુસ્તકમાંથી જ મળી શકે તેવો અમારો હેતુ છે.

પુસ્તક ક્ષતિરહિત બને તે માટે પૂર્તો પ્રયત્ન કર્યો હોવા છતાં કેટલીક ક્ષતિ રહી ગઈ હોય તો ધ્યાન દોરવા વિનંતી.

આશા છે કે વિદ્યાર્થીઓને તથા શિક્ષકો, બધાને પુસ્તક બહુમૂલ્ય તથા ઉપયોગી લાગશે.

— લેખકો

### પાઠ્યપુસ્તકનો અભ્યાસ કરાવતા નીચેની બાબતોનો ખ્યાલ રાખવો.

શિક્ષકો અને વિદ્યાર્થીઓને અભ્યાસ માટે જરૂરી છે પરંતુ બોર્ડની પરીક્ષામાં પૂછવું નહિ.

પ્રકરણ	સ્વાધ્યાય	ઉદાહરણ
પ્રકરણ 1	સ્વાધ્યાય 1 : દાન. 21	21, 24
પ્રકરણ 2	સ્વાધ્યાય 2 : દાન. 16	—
પ્રકરણ 5	સ્વાધ્યાય 5 : દાન. 19 થી 22	—
પ્રકરણ 8	—	13, 14, 19, 32
પ્રકરણ 10	આર્ટિકલ 10.3 સ્વાધ્યાય 10 : દાન. 1, 2, 3ની સૂચનામાંથી 'વ્યાખ્યા' શબ્દ કાઢી નાખવો.	14, 15, 16
પ્રકરણ 11	સ્વાધ્યાય 11 : દાન. 6, 20(4)	17, 26 ગેલ. 19માં $P(n) = \frac{d}{dx} \sin^n x = n \sin^{n-1} x \cos x$ સ્વીકારવું.

વિદ્યાર્થીઓને ઉચ્ચ અભ્યાસ અને સ્પર્ધાત્મક પરીક્ષા માટે ઉપયોગી છે. પરંતુ બોર્ડની પરીક્ષામાં પૂછવું નહિ.

પ્રકરણ	સ્વાધ્યાય	ઉદાહરણ
પ્રકરણ 1	સ્વાધ્યાય 1 : દાન. 9, 24, 29	23
પ્રકરણ 2	સ્વાધ્યાય 2.3 : દાન. 3	—
પ્રકરણ 8	સ્વાધ્યાય 8.3 : દાન. 3, 4 સ્વાધ્યાય 8.4 : દાન. 8, 9 સ્વાધ્યાય 8 : દાન. 6	—
પ્રકરણ 10	સ્વાધ્યાય 10 : 9	
પ્રકરણ 11	સ્વાધ્યાય 11 : 20(23)	

## ગણિતીય અનુમાનનો સિદ્ધાંત

*Mathematics is the queen of science and number theory is the queen of mathematics.*

— Gauss

*Mathematics passes not only truth but also supreme beauty !*

— Bertrand Russell

### 1.1 પ્રાસ્તાવિક

આપણે તર્ક પરથી તારણ પર આવવાની એક પદ્ધતિ શીખી ગયાં. ઉદાહરણ તરીકે,  
નીચે આપેલાં વિધાનો જુઓ :

$$(1) \quad 1 + 2 + 3 + \dots + 100 = 5050$$

$$(2) \quad 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(3) \quad (2) \text{ માં } n = 100 \text{ લઈએ તો, } 1 + 2 + 3 + \dots + 100 = \frac{(100)(101)}{2} = (50)(101) = 5050$$

અહીં આપણે સાબિત કરવા માટીએ છીએ કે 1 થી 100નો સરવાળો 5050 થાય. આપણી પણ વ્યાપક પરિણામ  
 $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  છે. તેમાં આપણે  $n = 100$  મૂકીને જરૂરી પરિણામ મેળવી શકીએ. અહીં આપણે  
 વ્યાપક પરિણામનો ઉપયોગ કોઈ વિશિષ્ટ પરિણામ મેળવવા માટે કર્યો.

(1) જો  $ab$  એ 3 વડે વિભાજ્ય હોય, તો  $a$  એ 3 વડે વિભાજ્ય હોય અથવા  $b$  એ 3 વડે વિભાજ્ય હોય. (2) જો  $p$  અવિભાજ્ય  
 સંખ્યા હોય અને  $ab$  એ  $p$  વડે વિભાજ્ય હોય, તો  $a$  એ  $p$  વડે વિભાજ્ય હોય અથવા  $b$  એ  $p$  વડે વિભાજ્ય હોય. (3) ધારો  
 કે  $p = 3$ . (2) પ્રમાણે 3 અવિભાજ્ય સંખ્યા હોવાથી જો  $ab$  એ 3 વડે વિભાજ્ય હોય તો  $a$  એ 3 વડે વિભાજ્ય હોય અથવા  
 $b$  એ 3 વડે વિભાજ્ય હોય.

અહીં પણ આપણે વ્યાપક પરિણામનો ઉપયોગ કોઈ વિશિષ્ટ પરિણામ મેળવવા માટે કર્યો.

- (1) અમિતાલ બચ્યન એક સારા કલાકાર છે.
- (2) જો કલાકાર પસંદગી પામે તો તેમના વર્ગમાં તેમને રાષ્ટ્રીય પુરસ્કાર પદ્મભૂષણથી સન્માનિત કરવામાં  
 અવે છે.
- (3) અમિતાલ બચ્યન પદ્મભૂષણ પુરસ્કાર વડે સન્માનિત થયા હતા.

અહીં પણ સમાન પ્રકારની પરિસ્થિતિ થાય છે.

પરંતુ તાઈક તારણથી વિશુદ્ધ નીચેનાં વિધાનો જુઓ :

$4 - 1 = 3$  એ 3 વડે વિભાજ્ય છે.

$4^2 - 1 = 15$  એ 3 વડે વિભાજ્ય છે.

$4^3 - 1 = 63$  એ 3 વડે વિભાજ્ય છે.

અહીં આપણે ઉપર મુજબના અવલોકનોની રીત પરથી અનુમાન કરી શકીએ કે પ્રત્યેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા  $n$  માટે,  $n^2 - n + 41$  એ 3 વડે વિભાજ્ય થાય. આમ વિશાળ પરિષામ પરથી આપણે બાપક પરિષામનું અનુમાન કરી શકીએ છીએ. આ રીતે મેળવેલ અનુમાન એ પરિષામની સાભિતી નથી. આ રીતે કરાયેલા અનુમાનની સાભિતી આપવી પડે. આવાં બધાં અનુમાનો સાચાં ન પણ હોઈ શકે. ઉદાહરણ તરીકે,  $n^2 - n + 41$  એ  $n = 1, 2, 3, \dots, 39$  સુધીની માંની ડિમતો માટે અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ દર્શાવે છે.

પરંતુ  $n = 41$  માટે  $41^2 - 41 + 41 = 41^2$  એ સ્વાભાવિક રીતે અવિભાજ્ય સંખ્યા નથી. આમ, આપણે  $n^2 - n + 41$  એ  $n = 1, 2, 3, \dots, 39$  સુધીની ડિમતોનું અવલોકન કરીને તે પ્રત્યેક  $n \in \mathbb{N}$  માટે અવિભાજ્ય સંખ્યા છે તેવું અનુમાન ન કરી શકીએ.

ચોક્કસ પ્રકારનાં અવલોકનો પરથી અનુમાન કરી પરિષામનો તાઈક રીતે ચકાસણો કરી અનુમાનને સાભિત કરવું જોઈએ.

ઈતિહાસમાં પ્લેટોના સમયમાં આ પ્રકારની માહિતી છે. 370 B.C. માં પ્લેટોનું લખાણ ‘**parmenides**’ (ચર્ચા અથવા સંવાદો)માં એવા પ્રકારનાં ઉદાહરણો છે કે જેની સાભિતી અનુમાનના આધારે આપી હોય. પુરુષીદે ગણિતીય અનુમાનની મદદથી સાભિત કર્યું હતું કે અવિભાજ્ય સંખ્યાઓનો ગણ અનંત ગણ છે. ભાસ્કરાચાર્ય II ના લખાણ ‘**cyclic method**’ (ચક્રીય પદ્ધતિ)માં પણ આ પદ્ધતિના અંશ જોવા મળે છે.

સોરાઈટ્સે અધ્યોર્દિશા અનુમાન પ્રથમનો ઉપયોગ કર્યો. તેના કહેવા મુજબ 10,00,000 રેતીના દાઢાના ફગલામાંથી જો એક દાઢો ઓછો કરીને તો ફગલામાં કોઈ ફરજ પડતો નથી, તે ફગલો જ રહે છે. આ રીતે, આગળ વધતાં એક-એક દાઢો ઘટાડીને એક જ દાઢાથી અથવા એક પણ દાઢા વગર રેતીનો ફગલો બનાવી શકાય !

1000 A.D. ના અરસામાં અલ-કરાજી (Al-Karaji) નામના ગણિતશી ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ સમાંતર શ્રેષ્ઠી માટે અલ-ફખ્રી (Al-Fakhri)માં કર્યો અને દ્વિપદી પ્રમેય તથા પાસ્કલના ગુણપત્રો સાભિત કર્યા.

સૌપ્રથમ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતને સ્પષ્ટપદો સૂઅના રૂપમાં પાસ્કલ નામના ગણિતશી ‘**Traité-du-triangle arithmetique**’ (1665)માં રજૂ કર્યો. ફેન્ચ ગણિતશી ફર્મો (Fermat) અને સ્વીસ ગણિતશી જેકોબ બર્નુલી (Jacob Bernoulli) એ આ સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કર્યો હતો. 19મી સદીમાં જ્યોર્જ બૂલ (George Boole), સન્ડર્સ પીર્સ (Sanders Peirce), પીનો (Peano) અને ડેડ્કિન્ડ (Dedekind) નામના ગણિતશીએ અર્વાચીન રીતે આ સિદ્ધાંતનું પદ્ધતિસરનું નિરૂપણ કર્યું.

## 1.2 અનુમાનનો સિદ્ધાંત

આપણે નીચેના ‘ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત’ તરીકે ઓળખાતા સિદ્ધાંતથી શરૂઆત કરીએ.

**ગણિતીય અનુમાનનો સિદ્ધાંત :** જો પ્રાકૃતિક ચલનું કોઈ વિધાન  $P(n)$  એ  $n = 1$  માટે સત્ય હોય તથા જો  $k \in \mathbb{N}$  માટે  $P(k)$ ની સત્યાર્થી પરથી  $P(k + 1)$ ની સત્યાર્થીતા ફિલિત થતી હોય તો પ્રત્યેક  $n \in \mathbb{N}$  માટે  $P(n)$  સત્ય છે.

અહીં  $P(n)$  એ પ્રાકૃતિક ચલનું વિધાન છે. આપણે તેને બે સોચાનોમાં સિદ્ધ કરીશું :

(1) આધાર : આપણે તેને  $n = 1$  માટે સાભિત કરીશું. (0 અથવા ન્યૂનતમ ડિમત માટે)

(2) આનુસંગિક સોચાન : આપેલ વિધાન કોઈ પ્રાકૃતિક સંખ્યા  $n = k$  માટે સાચું છે તે સ્વીકારી તે વિધાનને  $n = k + 1$  માટે સાભિત કરીશું.

તો,  $P(n)$  પ્રથમ  $n \in N$  માટે સત્ય છે.

**ડેમિનો અસર :** આપણે અહીં સોગટાંવાળી એક રમતમાં વપરાતા ડેમિનોની લાંબી લાર બલાવી છે, કે જેથી

(1) પ્રથમ ડેમિનો પરી જરૂર.

(2) જો કોઈ ડેમિનો પરી જાય તો તેના પછીનો ડેમિનો પરી જરૂર.

આ પરથી એંતું સાબિત કરી શકાય કે બધા જ ડેમિનો પરી જરૂર.

વિધાનોની અનંત શેરીનું પ્રથમ વિધાન સાચું છે અને જો તેમાંનું કોઈ પણ સત્ય હોય તો તે પછીનું પણ સત્ય હોય તો વિધાનોની આ શેરી દરેક  $n \in N$  માટે સત્ય બને.

તાઈક સંકેતમાં,  $(\forall P) [P(1) \wedge (\forall k \in N) (P(k) \Rightarrow P(k + 1))] \Rightarrow (\forall n \in N)[P(n)]$

આને આપણે ક્રમના સુવ્યવસ્થાના સિદ્ધાંતની મદદથી પણ સાબિત કરી શકીએ. પ્રકૃતિક સંખ્યા ગણના કોઈ પણ અરિકત ઉપગણને ન્યૂનતમ ઘટક હોય. એ ક્રમનો સુવ્યવસ્થિતતાનો (Well-ordering principle) સિદ્ધાંત છે.

**સાબિતી :** ધારો કે  $S$  જેના માટે  $P(n)$  સત્ય નથી તેવી પ્રાકૃતિક સંખ્યાગણનો ઉપગણ છે.  $P(1)$  સત્ય હોવાથી  $1 \in S$ . જો  $S$  ખાલી ગણ ન હોય તો તેમાં ન્યૂનતમ ઘટક  $i$  અવે કે જેથી  $i \neq 1$  હોય. ધારો કે  $i = n + 1$ ,  $i$  એ  $S$  નો ન્યૂનતમ ઘટક હોવાથી  $P(i)$  સત્ય નથી તથા  $P(n)$  સત્ય છે. વળી,  $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$ . આમ,  $P(n + 1) = P(i)$  સત્ય બને, જે વિસંગત છે. આમ,  $S = \emptyset$ .

$\therefore \forall n \in N, P(n)$  સત્ય બને.

ક્યારેક સિદ્ધાંતનો ખોરો ઉપયોગ કરીને વિરોધાભાસ પેદા કરી શકાય છે.

**પોલ્યા (Polya)**ની એક જાણીતી સાબિતી છે કે કોઈ પણ ધોરો જુદા રંગનો નથી એટલે કે બધા ધોરા એક રંગના છે.

**આધાર :** જો એક જ ધોરો હોય, તો એક જ રંગ હોય. આમ,  $P(1)$  સત્ય બને.

**અનુમાનિક સોધાન :** ધારો કે  $n$  ધોરાઓના વાણમાં દરેક ધોરાનો રંગ સમાન છે. હવે  $n + 1$  ધોરાઓના વાણમાં દરેક ધોરાને  $1, 2, 3, \dots, n + 1$  કમ આપો. ઉપગણો  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  અને  $\{2, 3, 4, \dots, n + 1\}$  એ બંને  $n$  ધોરાઓના વાણ અરિકત છેદગણવાળા છે. માટે તે દરેકનો રંગ સમાન હોય. બંને વાણોના ધોરાઓનો રંગ સમાન હોવાથી  $n + 1$  ધોરાઓનો રંગ સરખી જાય. આ દલીલ 1 ધોરા માટે સત્ય છે. જ.  $n \geq 3$  ધોરાઓ માટે સાચી છે. પરંતુ 2 ધોરાઓનો વાણ (1) અને (2) એ અલગઅલ હોવાથી ઉપરની દલીલ જાચી ન હશે.

### 1.3 ઉદાહરણો

હવે આપણે ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કેટલાંક ઉદાહરણોમાં કરીએ :

**ઉદાહરણ 1 :** સાબિત કરો :  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, n \in N$

**ઉકેલ :** ધારો કે,  $P(n) : 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, n \in N$

$n = 1$  માટે ડા.ભા. = 1 અને જ.ભા. =  $\frac{1 \times 2}{2} = 1$ . આમ,  $P(1)$  સત્ય છે.

ધારો કે  $P(k)$  સત્ય છે. એટલે કે,  $P(n)$  એ  $n = k, k \in N$  માટે સત્ય છે.

$$\therefore 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2} \quad (i)$$

$n = k + 1$  લેતાં,

$$1 + 2 + 3 + \dots + (k + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \text{ સાબિત કરવું પડે.}$$

$$\text{હવે, } 1 + 2 + 3 + \dots + (k + 1) = (1 + 2 + 3 + \dots + k) + (k + 1)$$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1) \quad ((i) \text{ પરથી})$$

$$= (k + 1) \left( \frac{k}{2} + 1 \right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$



આમ,  $P(k+1)$  સત્ય છે.

$\therefore P(1)$  સત્ય છે અને  $P(k)$  સત્ય છે  $\Rightarrow P(k+1)$  સત્ય છે.

$\therefore$  ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી પ્રલેક  $n \in \mathbb{N}$  માટે  $P(n)$  સત્ય છે.

**નોંધ :** ઉપરના ઉદાહરણનું ઐતિહાસિક મહાત્વ છે.

ઉપરના સૂત્ર મુજબ સ્પષ્ટ છે કે,  $1 + 2 + 3 + \dots + 100 = 5050$ . જ્યારે આ સૂત્ર જાણીતું ન હતું ત્યારે નાની ઉમરે ગોસે (Gauss) નીચે મુજબની ગણિતરી કરીને તેના શિક્ષક બટ્ટનર (Buttner) અને સહરિકાક બાર્ટેલ્સ (Bartels)ને અચ્યાભામાં મૂડી દીક્ષા હતી.

$$\text{ધારો } k: S = 1 + 2 + 3 + \dots + 100 \quad (i)$$

$$\therefore S = 100 + 99 + 98 + \dots + 1 \quad (ii)$$

$$\therefore 2S = (101) + (101) + \dots + 100 \text{ વખત} \quad ((i) + (ii) \text{ કરતાં})$$

$$\therefore S = \frac{101 \times 100}{2} = 5050. \text{ આ પરિણામ ખૂબ જ ઓછા સમયમાં તેણે મેળવ્યું હતું.}$$

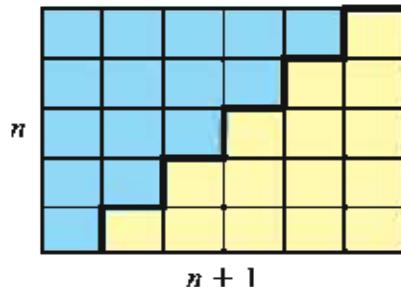
યાદો આપણે ભૌગોલિક સાધિતી જોઈએ.

$n \times (n+1)$  બાજુવાળો એક લંબચોરસ લો. આકૃતિમાં બતાવ્યા મુજબ તેને એકમ લંબાઈના  $n(n+1)$  નાના લંબચોરસોમાં વિભાજિત કરો. ઘારી નોસરણીની નોચેના બાગનું ક્ષેત્રફળ  $1 + 2 + 3 + \dots + n$  થાય.

સંમિતતાથી જોઈ શકાય છે કે લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ

$$2(1 + 2 + 3 + \dots + n) = n(n+1)$$

$$\therefore 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$



**ઉદાહરણ 2 :** સાધિત કરો :  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n-1)(2n+1)}{6}, n \in \mathbb{N}$

**ઉકેલ :** ધારો કે,  $P(n) : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n-1)(2n+1)}{6}, n \in \mathbb{N}$

$$n = 1 \text{ હેતાં, ડ.બા.} = 1^2 = 1 \text{ અને જ.બા.} = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1.$$

$\therefore P(1)$  સત્ય છે.

ધારો કે  $P(k), k \in \mathbb{N}$  માટે સત્ય છે.

$$\therefore 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

ધારો કે  $n = k+1$ .

$$\begin{aligned} \therefore \text{ડ.બા.} &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= (k+1) \left[ \frac{k(2k+1)}{6} + (k+1) \right] \\ &= (k+1) \left( \frac{2k^2 - k - 6k - 6}{6} \right) \\ &= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k+1+1)(2(k+1)+1)}{6} = \text{જ.બા.} \end{aligned}$$

- ∴  $P(k+1)$  સત્ય છે.
- ∴  $P(k)$  સત્ય છે.  $\Rightarrow P(k+1)$  સત્ય છે.
- ∴ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી પ્રત્યેક  $n \in \mathbb{N}$  માટે  $P(n)$  સત્ય છે.

**ઉદાહરણ 3 :** સાધિત કરો :  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ ,  $n \in \mathbb{N}$

**ઉકેલ :** ધારો કે,  $P(n) : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ ,  $n \in \mathbb{N}$

$$n=1 \text{ માટે } \text{LS.A.L.} = 1^3 = 1 \text{ અને } \text{RS.A.L.} = \frac{1^2 \times 2^2}{4} = 1.$$

∴  $P(1)$  સત્ય છે.

ધારો કે  $P(k)$  સત્ય છે.

$$\therefore 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

ધારો કે  $n = k + 1$ .

$$\begin{aligned} \text{LS.A.L.} &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\ &= \frac{(k+1)^2}{4} [k^2 + 4(k+1)] \\ &= \frac{(k+1)^2}{4} (k^2 + 4k + 4) \\ &= \frac{(k+1)^2 (k+2)^2}{4} \\ &= \frac{(k+1)^2 (k+1+1)^2}{4} = \text{RS.A.L.} \end{aligned}$$

∴  $P(k+1)$  સત્ય છે.

∴  $P(k)$  સત્ય છે.  $\Rightarrow P(k+1)$  સત્ય છે.

∴ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી પ્રત્યેક  $n \in \mathbb{N}$  માટે  $P(n)$  સત્ય છે.

**ઉદાહરણ 4 :** સાધિત કરો :  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$

**ઉકેલ :** ધારો કે,  $P(n) : 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$

$$n=1 \text{ માટે } \text{LS.A.L.} = 1 \text{ અને } \text{RS.A.L.} = 1^2 = 1.$$

∴  $P(1)$  સત્ય છે.

ધારો કે  $P(k)$  સત્ય છે.

$$\therefore 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$$

ધારો કે,  $n = k + 1$ .

$$\begin{aligned} \text{LS.A.L.} &= 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k+1)^2 = \text{RS.A.L.} \end{aligned}$$

∴  $P(k+1)$  સત્ય છે.

∴  $P(k)$  સત્ય છે.  $\Rightarrow P(k+1)$  સત્ય છે.

∴ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી પ્રત્યેક  $n \in \mathbb{N}$  માટે  $P(n)$  સત્ય છે.

**ઉદાહરણ 5 :** સાબિત કરો :  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$

**ઉકેલ :** ધરો કે,  $P(n) : \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$

$$n = 1 \text{ હેતું, ડા.ભા.} = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} \text{ અને જ.ભા.} = \frac{1}{2}$$

$\therefore P(1)$  સત્ય છે.

ધરો કે,  $P(k)$  સત્ય છે.

$$\therefore \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

ધરો કે,  $n = k + 1$ .

$$\begin{aligned} \text{ડા.ભા.} &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k(k+2)-1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k+1}{k+2} = \text{જ.ભા.} \end{aligned}$$

$\therefore P(k+1)$  સત્ય છે.

$\therefore P(k)$  સત્ય છે.  $\Rightarrow P(k+1)$  સત્ય છે.

$\therefore$  ગણિતીય અનુમાનના સ્વિદ્ધાંતથી પ્રલેખ  $n \in \mathbb{N}$  માટે  $P(n)$  સત્ય છે.

**ઉદાહરણ 6 :** સાબિત કરો :  $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$

**ઉકેલ :** ધરો કે,  $P(n) : 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$

$$n = 1 \text{ હેતું, ડા.ભા.} = 1 \cdot 1! = 1, \text{ જ.ભા.} = 2! - 1 = 1$$

$\therefore P(1)$  સત્ય છે.

ધરો કે,  $P(k)$  સત્ય છે.

$$\therefore 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + k \cdot k! = (k+1)! - 1$$

ધરો કે,  $n = k + 1$ .

$$\begin{aligned} \text{ડા.ભા.} &= 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + k \cdot k! + (k+1)(k+1)! \\ &= (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)! \\ &= (k+1)! [1 + (k+1)] - 1 \\ &= (k+1)! (k+2) - 1 \\ &= (k+2)! - 1 = \text{જ.ભા.} \end{aligned}$$

$\therefore P(k+1)$  सत्य छे.

$\therefore P(k)$  सत्य छे.  $\Rightarrow P(k+1)$  सत्य छे.

$\therefore$  गणितीय अनुमानना सिद्धांतधी प्रत्येक  $n \in \mathbb{N}$  भाटे  $P(n)$  सत्य छे.

**नोंदृ :** सीधी रीते,  $n \cdot n! = (n+1-1) n! = (n+1) n! - n!$   
 $= (n+1)! - n!$

हो,  $n = 1, 2, 3, \dots$  वर्गे लाई सरवाणो करतां,

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (2! - 1!) + (3! - 2!) + (4! - 3!) + \dots + ((n+1)! - n!)$$

$$= (n+1)! - 1$$

**उदाहरण 7 :** साबित करो :  $\left(1 + \frac{3}{1}\right)\left(1 + \frac{5}{4}\right)\left(1 - \frac{7}{9}\right) \dots \left(1 + \frac{2n+1}{n^2}\right) = (n+1)^2, n \in \mathbb{N}$

**उक्तिः** घरो के,  $P(n) : \left(1 + \frac{3}{1}\right)\left(1 + \frac{5}{4}\right)\left(1 - \frac{7}{9}\right) \dots \left(1 + \frac{2n+1}{n^2}\right) = (n+1)^2, n \in \mathbb{N}$

$$n = 1$$
 लेतां, श.भा.  $= 1 + \frac{3}{1} = 4$  अने ज.भा.  $= (1+1)^2 = 2^2 = 4$

$\therefore P(1)$  सत्य छे.

घरो के,  $P(k)$  सत्य छे.

$$\therefore \left(1 + \frac{3}{1}\right)\left(1 + \frac{5}{4}\right) \dots \left(1 + \frac{2k+1}{k^2}\right) = (k+1)^2$$

$n = k+1$  लेतां,

$$\begin{aligned} \text{श.भा.} &= \left(1 + \frac{3}{1}\right)\left(1 + \frac{5}{4}\right)\left(1 + \frac{7}{9}\right) \dots \left(1 + \frac{2k+1}{k^2}\right)\left(1 + \frac{2k+3}{(k+1)^2}\right) \\ &= (k+1)^2 \times \left(\frac{k^2 - 2k - 1 + 2k + 3}{(k+1)^2}\right) \\ &= k^2 + 4k + 4 \\ &= (k+2)^2 = \text{ज.भा.} \end{aligned}$$

$\therefore P(k+1)$  सत्य छे.

$\therefore P(k)$  सत्य छे.  $\Rightarrow P(k+1)$  सत्य छे.

$\therefore$  गणितीय अनुमानना सिद्धांत परथी प्रत्येक  $n \in \mathbb{N}$  भाटे  $P(n)$  सत्य छे.

**नोंदृ :** सीधो गुणाकार करतां,  $\left(1 + \frac{3}{1}\right)\left(1 + \frac{5}{4}\right)\left(1 + \frac{7}{9}\right) \dots \left(1 + \frac{2n+1}{n^2}\right) = \frac{4}{1} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{16}{9} \dots \frac{(n+1)^2}{n^2} = (n+1)^2$

**उदाहरण 8 :** साबित करो :  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n = (n-1)2^{n+1} + 2, n \in \mathbb{N}$

(आ प्रकारनी शेषीने समांतर समगुणोत्तर शेषी कडे छे.)

**उक्तिः** घरो के,  $P(n) : 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n = (n-1)2^{n+1} + 2, n \in \mathbb{N}$

$$n = 1$$
 लेतां, श.भा.  $= 2$  अने ज.भा.  $= 0 + 2 = 2$

$\therefore P(1)$  सत्य छे.

घरो के,  $P(k)$  सत्य छे.

આમ,  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + \dots + k \cdot 2^k = (k-1)2^{k-1} + 2$

હવે,  $n = k+1$  કેન્દ્રાં,

$$\begin{aligned}\text{ડા.ભા.} &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + k \cdot 2^k + (k+1)2^{k+1} \\ &= (k-1)2^{k-1} + 2 + (k+1)2^{k+1} \\ &\quad - (k-1+k+1)2^{k+1} + 2 \\ &\quad - 2k \cdot 2^{k+1} + 2 \\ &= k \cdot 2^{k+2} + 2 = \text{જ.ભા.}\end{aligned}$$

$\therefore P(k+1)$  સત્ય છે.

$\therefore P(k)$  સત્ય છે.  $\Rightarrow P(k+1)$  સત્ય છે.

$\therefore$  ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક  $n \in \mathbb{N}$  માટે  $P(n)$  સત્ય છે.

**ઉદાહરણ 9 :** સાબિત કરો :  $a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$   $(r \neq 1), n \in \mathbb{N}$

**ઉકેલ :** ધારો કે,  $P(n) : a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$   $(r \neq 1), n \in \mathbb{N}$

$$n = 1 \text{ કેન્દ્રાં, } \text{ડા.ભા.} = a \text{ અને } \text{જ.ભા.} = \frac{a(r-1)}{r-1} = a$$

$\therefore P(1)$  સત્ય છે.

ધારો કે  $P(k)$  સત્ય છે.

$$\therefore a + ar + ar^2 + \dots + ar^{k-1} = \frac{a(r^k - 1)}{r - 1}$$

ધારો કે  $n = k+1$ .

$$\therefore \text{ડા.ભા.} = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{k-1} + ar^k$$

$$= \frac{a(r^k - 1)}{r - 1} + ar^k$$

$$= a \left( \frac{r^k - 1}{r - 1} + r^k \right)$$

$$= a \frac{r^k - 1 + r^k(r-1)}{r-1}$$

$$= \frac{a(r^k - 1 + r^{k+1} - r^k)}{r-1}$$

$$= \frac{a(r^{k+1} - 1)}{r-1} = \text{જ.ભા.}$$

$\therefore P(k+1)$  સત્ય છે.

$\therefore P(k)$  સત્ય છે.  $\Rightarrow P(k+1)$  સત્ય છે.

$\therefore$  ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક  $n \in \mathbb{N}$  માટે  $P(n)$  સત્ય છે.

**ઉદાહરણ 10 :** સાબિત કરો કે  $3^{2n+2} - 8n - 9$  એ 8 વડે વિભાજ્ય છે.  $n \in \mathbb{N}$

**ઉકેલ :** ધારો કે  $P(n) : 3^{2n+2} - 8n - 9$  એ 8 વડે વિભાજ્ય છે.  $n \in \mathbb{N}$

$$n = 1 \text{ કેન્દ્રાં, } 3^4 - 8 - 9 = 81 - 8 - 9 = 64 \text{ એ 8 વડે વિભાજ્ય છે.}$$

ધારો કે  $P(k)$  સત્ય છે. આથી  $3^{2k+2} - 8k - 9$  એ 8 વડે વિભાજ્ય છે.

ધારો કે  $n = k + 1$ .

$$\text{હવે, } 3^{2k+4} - 8(k+1) - 9 \quad (2(k+1)+2 = 2k+4)$$

$$\begin{aligned} &= 3^{2k+2} \cdot 3^2 - 8k - 8 - 9 \\ &- 3^{2k+2}(8+1) - 8k - 8 - 9 \quad (3^2 = 9 = 8+1) \\ &= 8 \cdot 3^{2k+2} + 3^{2k+2} - 8k - 8 - 9 \\ &- 3^{2k+2} - 8k - 9 + 8(3^{2k+2}-1) \end{aligned}$$

હવે,  $3^{2k+2} - 8k - 9$  એ 8 વડે વિભાજ્ય છે. ( $P(k)$  પરથી)

વળી,  $8(3^{2k+2}-1)$  એ 8 વડે વિભાજ્ય છે.

$$\therefore 3^{2k+2} - 8k - 9 + 8(3^{2k+2}-1) એ 8 વડે વિભાજ્ય છે.$$

$$\therefore 3^{2(k+1)+2} - 8(k+1) - 9 એ 8 વડે વિભાજ્ય છે.$$

$\therefore P(k+1)$  સત્ય છે.

$\therefore P(k)$  સત્ય છે.  $\Rightarrow P(k+1)$  સત્ય છે.

$\therefore$  ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી પ્રત્યેક  $n \in \mathbb{N}$  માટે  $P(n)$  સત્ય છે.

**નોંધ :** સપણ છે કે,

$$\begin{aligned} 3^{2n+2} - 8n - 9 &= (3^2)^{n+1} - 1 - 8n - 8 \\ &- (3^2 - 1)((3^2)^n + (3^2)^{n-1} + \dots + 1) - 8n - 8 \quad (\text{ઉદાહરણ 9}) \\ &= 8(3^{2n} + 3^{2n-2} + \dots + 1) - 8n - 8 \text{ એ 8 વડે વિભાજ્ય છે.} \end{aligned}$$

**બીજી રીત :**

અહીં  $P(n) : 3^{2n+2} - 8n - 9$  એ 8 વડે વિભાજ્ય છે.  $n \in \mathbb{N}$

$n = 1$  માટે,  $3^{2+2} - 8(1) - 9 = 64$  એ 8 વડે વિભાજ્ય છે.  $n \in \mathbb{N}$

$\therefore P(1)$  સત્ય છે.

ધારો કે  $P(k)$  સત્ય છે.

ઓટલે કે,  $3^{2k+2} - 8k - 9$  એ 8 વડે વિભાજ્ય છે.

ધારો કે  $3^{2k+2} - 8k - 9 = 8m$  જ્યાં  $m \in \mathbb{N}$  (i)

$n = k + 1$  લેતાં,

$$\begin{aligned} 3^{2(k+1)+2} - 8(k+1) - 9 &= 3^{2k+2} \times 3^2 - 8k - 8 - 9 \\ &= (8k + 9 + 8m)9 - 8k - 8 - 9 \quad ((i) \text{ પરથી}) \\ &= 72k + 81 + 72m - 8k - 8 - 9 \\ &= 64k + 72m + 64 \\ &= 8(8k + 9m + 8) \text{ એ 8 વડે વિભાજ્ય છે.} \end{aligned}$$

$\therefore P(k+1)$  સત્ય છે.

$\therefore P(k)$  સત્ય છે  $\Rightarrow P(k+1)$  સત્ય છે.

$\therefore$  ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી પ્રત્યેક  $n \in \mathbb{N}$  માટે  $P(n)$  સત્ય છે.

**ઉદાહરણ 11 :** સાંબિત કરો :  $2002^{2n+1} + 2003^{2n+1}$  એ દરેક  $n \in \mathbb{N}$  માટે 4005 થી વિભાજ્ય છે.

**ઉકેલ :** ધારો કે,  $P(n) : 2002^{2n+1} + 2003^{2n+1}$  એ દરેક  $n \in \mathbb{N}$  માટે 4005 થી વિભાજ્ય છે.

ધારો કે,  $n = 1$  ખેતરાની,

$$\begin{aligned} 2002^3 + 2003^3 &= (2002 + 2003) [(2002)^2 - (2002)(2003) + (2003)^2] \\ &= (4005) [(2002)^2 - (2002)(2003) + (2003)^2] \end{aligned}$$

$\therefore (2002)^3 + (2003)^3$  એ 4005 વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore P(1)$  સત્ય છે.

ધારો કે  $P(k)$  સત્ય છે.

$\therefore 2002^{2k+1} + 2003^{2k+1}$  એ 4005 વડે વિભાજ્ય છે.

ધારો કે  $n = k + 1$ .

$$\text{ઉકેલ } 2002^{2(k+1)+1} + 2003^{2(k+1)+1}$$

$$\begin{aligned} &= 2002^{2k+3} - 2002^{2k+1} (2003)^2 + (2002)^{2k+1} \cdot (2003)^2 + (2003)^{2k+3} \\ &\quad - (2002)^{2k+1} [(2002)^2 - (2003)^2] + (2003)^2 [(2002)^{2k+1} + (2003)^{2k+1}] \\ &\quad - (4005) (2002)^{2k+1} + (2003)^2 [(2002)^{2k+1} + (2003)^{2k+1}] \end{aligned}$$

ઉકેલ,  $(2002)^{2k+1} + (2003)^{2k+1}$  એ 4005 વડે વિભાજ્ય છે. **(P(k))**

$\therefore (2002)^{2(k+1)+1} + (2003)^{2(k+1)+1}$  એ 4005 વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore P(k+1)$  સત્ય છે.

$\therefore P(k)$  સત્ય છે  $\Rightarrow P(k+1)$  સત્ય છે.

$\therefore$  અંગીતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી પ્રત્યેક  $n \in \mathbb{N}$  માટે  $P(n)$  સત્ય છે.

**ઉદાહરણ 12 :** સાંબિત કરો :  $x^{2n} - y^{2n}$  એ  $x + y$  વડે વિભાજ્ય છે.  $n \in \mathbb{N}$

**ઉકેલ :** ધારો કે,  $P(n) : x^{2n} - y^{2n}$  એ  $x + y$  વડે વિભાજ્ય છે.  $n \in \mathbb{N}$

ધારો કે,  $n = 1$

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) અને તેથી  $x^2 - y^2$  એ  $x + y$  વડે વિભાજ્ય છે.$$

$\therefore P(1)$  સત્ય છે.

ધારો કે  $P(k)$  સત્ય છે.

$\therefore x^{2k} - y^{2k}$  એ  $x + y$  વડે વિભાજ્ય છે.

ધારો કે  $n = k + 1$ .

$$\begin{aligned} x^{2(k+1)} - y^{2(k+1)} &= x^{2k+2} - x^{2k} y^2 + x^{2k} y^2 - y^{2k+2} \\ &= x^{2k} (x^2 - y^2) + y^2 (x^{2k} - y^{2k}) \\ &= x^{2k} (x - y)(x + y) + y^2 (x^{2k} - y^{2k}) \end{aligned}$$

ઉકેલ,  $x^{2k}(x - y)(x + y)$  એ  $x + y$  વડે વિભાજ્ય છે.

$x^{2k} - y^{2k}$  એ  $x + y$  વડે વિભાજ્ય છે. **(P(k))**

$\therefore x^{2(k+1)} - y^{2(k+1)}$  એ  $x + y$  વડે વિભાજ્ય છે.

- $\therefore P(k+1)$  સત્ય છે.  
 $\therefore P(k)$  સત્ય છે  $\Rightarrow P(k+1)$  સત્ય છે.  
 $\therefore$  ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી પ્રત્યેક  $n \in \mathbb{N}$  માટે  $P(n)$  સત્ય છે.

**ઉદાહરણ 13 :** સાબિત કરો :  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 > \frac{n^3}{3}$ ,  $n \in \mathbb{N}$

**ઉકેલ :** ધારો કે,  $P(n) : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 > \frac{n^3}{3}$ ,  $n \in \mathbb{N}$

ધારો કે,  $n = 1$ . ત.થ.  $= 1^2 - 1$ , જ.થ.  $= \frac{1}{3}$  અને  $1 > \frac{1}{3}$ .

$\therefore P(1)$  સત્ય છે.

ધારો કે  $P(k)$  સત્ય છે.

$\therefore 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 > \frac{k^3}{3}$

ધારો કે  $n = k + 1$ .

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 > \frac{k^3}{3} + (k+1)^2 \quad (\text{i})$$

$$\begin{aligned} \text{એટે, } \frac{k^3}{3} + (k+1)^2 &= \frac{1}{3}(k^3 + 3k^2 + 6k + 3) \\ &= \frac{1}{3}(k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 3k + 2) \\ &> \frac{1}{3}(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) \text{ કારણ } \frac{1}{3}(3k+2) \geq \frac{5}{3} > 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{k^3}{3} + (k+1)^2 > \frac{1}{3}(k+1)^3 \quad (\text{ii})$$

$$\therefore 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (k+1)^2 > \frac{1}{3}(k+1)^3 \quad ((\text{i}) \text{ અને } (\text{ii}) \text{ પરથી})$$

$\therefore P(k+1)$  સત્ય છે.

$\therefore P(k)$  સત્ય છે  $\Rightarrow P(k+1)$  સત્ય છે.

$\therefore$  ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક  $n \in \mathbb{N}$  માટે  $P(n)$  સત્ય છે.

**નોંધ :**  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} > \frac{2n^3}{6} = \frac{n^3}{3}$ ,  $n \in \mathbb{N}$

**ઉદાહરણ 14 :** સાબિત કરો :  $1 + 2 + 3 + \dots + n < \frac{1}{8}(2n+1)^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$

**ઉકેલ :** ધારો કે,  $P(n) : 1 + 2 + 3 + \dots + n < \frac{1}{8}(2n+1)^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$

$n = 1$  લેતાં, ત.થ.  $= 1$ , જ.થ.  $= \frac{1}{8}(3)^2 = \frac{9}{8}$  અને  $1 < \frac{9}{8}$

$\therefore P(1)$  સત્ય છે.

ધારો કે  $P(k)$  સત્ય છે.

$\therefore 1 + 2 + 3 + \dots + k < \frac{1}{8}(2k+1)^2$

બંને બાજુ (k+1) ઉમેરતાં,

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) < \frac{1}{8}(2k+1)^2 + (k+1) \quad (\text{i})$$

$$\begin{aligned}
 \text{છે, } \frac{1}{8}(2k+1)^2 + (k+1) &= \frac{1}{8}(4k^2 + 4k + 1 + 8k + 8) \\
 &= \frac{1}{8}(4k^2 + 12k + 9)
 \end{aligned} \tag{ii}$$

$$\frac{1}{8}(2k+1)^2 + (k+1) = \frac{1}{8}(2k+3)^2 \tag{ii}$$

$$\therefore 1+2+3+\dots+(k+1) < \frac{1}{8}(2k+3)^2 \tag{(i) અને (ii) પરથી}$$

$\therefore P(k+1)$  સત્ય છે.

$\therefore P(k)$  સત્ય છે  $\Rightarrow P(k+1)$  સત્ય છે.

$\therefore$  ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક  $n \in \mathbb{N}$  માટે  $P(n)$  સત્ય છે.

$$\text{નોંધ : } 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{4n^2+4n}{8} < \frac{4n^2+4n+1}{8} = \frac{1}{8}(2n+1)^2$$

**ઉદાહરણ 15 :** સાબિત કરો :  $(1+x)^n \geq 1+nx, n \in \mathbb{N}$   $(x > -1)$

**ઉકેલ :** ધારો કે,  $P(n) : (1+x)^n \geq 1+nx, n \in \mathbb{N}$

$$n=1 \text{ હેતું, } (1+x)^1 = 1+x \geq 1+1 \cdot x$$

$\therefore P(1)$  સત્ય છે.

ધારો કે  $P(k)$  સત્ય છે.

$$\therefore (1+x)^k \geq 1+kx \quad k \in \mathbb{N}$$

$$n=k+1 \text{ હેતું, }$$

$$\text{છે, } (1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x)$$

$$\geq (1+kx)(1+x) \tag{P(k) અને x > -1 પરથી}$$

$$\therefore (1+x)^{k+1} \geq 1+kx+x+kx^2 \geq 1+kx+x \text{ કરણી કે } k \in \mathbb{N}, x^2 \geq 0$$

$$\therefore (1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$$

$\therefore P(k+1)$  સત્ય છે.

$\therefore P(k)$  સત્ય છે  $\Rightarrow P(k+1)$  સત્ય છે.

$\therefore$  ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક  $n \in \mathbb{N}$  માટે  $P(n)$  સત્ય છે.

**ઉદાહરણ 16 :** સાબિત કરો :  $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$

**ઉકેલ :** ધારો કે,  $P(n) : \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$

$$n=1 \text{ હેતું, L.H.S.} = 1, R.H.S. = 2 - 1 = 1$$

$\therefore P(1)$  સત્ય છે.

ધારો કે  $P(k)$  સત્ય છે.

$$\therefore \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{k}$$

$$\text{બને બાજુ } \frac{1}{(k+1)^2} \text{ ઉમેરતાં,}$$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \tag{i}$$

$$\begin{aligned}
\text{ફેરા} \quad 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} &= 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1} \\
&= 2 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{-k-1+k}{k(k+1)} \\
&= 2 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{k(k+1)} \\
&= 2 - \frac{1}{k+1} + \frac{k-k-1}{k(k+1)^2} \\
&= 2 - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k(k+1)^2} \\
\therefore \quad 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} &< 2 - \frac{1}{k+1} \quad \left( \frac{1}{k(k+1)^2} > 0 \right) \text{ (ii)} \\
\therefore \quad \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(k+1)^2} &< 2 - \frac{1}{(k+1)} \quad \text{(i) અને (ii) પરથી} \\
\therefore \quad P(k+1) \text{ સત્ય છે.} \\
\therefore \quad P(k) \text{ સત્ય છે} \Rightarrow P(k+1) \text{ સત્ય છે.} \\
\therefore \quad \text{ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક } n \in \mathbb{N} \text{ માટે } P(n) \text{ સત્ય છે. 
\end{aligned}$$

**નોંધ :** ન ગમે તેટલો મોટો હોય તો પણ સરવાળો  $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$  સિમિટ થાય અને 2 ધી

ઓળો થાય.

**ઉદાહરણ 17 :** સાખિત કરો :  $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n; \quad n \in \mathbb{N}$

**ઉકેલ :** ધારો કે,  $P(n) : \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n; \quad n \in \mathbb{N}$

$$n = 1 \text{ વેતાં, ડા.ભા.} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 2, \text{ જ.ભા.} = 2^1 = 2$$

$\therefore P(1)$  સત્ય છે.

ધારો કે  $P(k)$  સત્ય છે.

$$\therefore \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \dots + \binom{k}{k} = 2^k$$

ધારો કે  $n = k + 1$ .

$$\begin{aligned}
\text{ડા.ભા.} &= \binom{k+1}{0} + \binom{k+1}{1} + \dots + \binom{k+1}{k} + \binom{k+1}{k+1} \\
&= \binom{k}{0} + \left( \binom{k}{0} + \binom{k}{1} \right) + \left( \binom{k}{1} + \binom{k}{2} \right) + \dots + \left( \binom{k}{k-1} + \binom{k}{k} \right) + \binom{k}{k} \\
&\quad \left( \binom{k}{0} = \binom{k+1}{0} = 1, \binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1} = 1, \binom{k}{r} = \binom{k-1}{r-1} + \binom{k}{r} \right) \\
&= 2 \left[ \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \dots + \binom{k}{k} \right] \\
&= 2 \cdot 2^k \\
&= 2^{k+1}
\end{aligned}$$

- $P(k+1)$  सत्य छे.
- $P(k)$  सत्य छे  $\Rightarrow P(k+1)$  सत्य छे.
- गणितीय अनुमानना सिद्धांत परथी प्रत्येक  $n \in N$  माटे  $P(n)$  सत्य छे.

#### 1.4 केटलाक विशिष्ट चल प्रकारोमां गणितीय अनुमानना सिद्धांतनो उपयोग

(1) चल प्रकार 1 : जो  $P(n)$  प्राकृतिक चल  $n$  नंू विधान होय अने जो प्रोईक धन पूऱ्हांक  $k_0$  माटे  $P(k_0)$  सत्य होय तथा  $k \geq k_0$  माटे  $P(k)$  सत्य होय  $\Rightarrow P(k+1)$  पशा सत्य बने, तो प्रत्येक  $n \geq k_0, n \in N$  माटे  $P(n)$  सत्य बने.

उदाहरण 18 : सामित करो :  $2^n > n^2, n \geq 5, n \in N$

उक्ल : धारो के  $P(n) : 2^n > n^2, n \geq 5, n \in N$

$$n = 5 \text{ वेतां, } (k_0 = 5), 2^5 = 32, 5^2 = 25 \text{ अने } 32 > 25.$$

$\therefore P(5)$  सत्य छे.

धारो के  $k \geq 5$  तथा  $k \in N$  माटे  $P(k)$  सत्य छे.

$$\therefore 2^k > k^2 \quad k \geq 5, k \in N$$

धारो के  $n = k + 1$ .

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k^2 \quad (2^k > k^2) \quad (i)$$

$$\begin{aligned} \text{हवे, } 2k^2 - (k+1)^2 &= 2k^2 - k^2 - 2k - 1 \\ &= k^2 - 2k + 1 - 2 \\ &= (k-1)^2 - 2 > 0 \end{aligned} \quad (k \geq 5)$$

$$\therefore 2k^2 > (k+1)^2 \quad (ii)$$

$$\therefore 2^{k+1} > (k+1)^2 \quad ((i) \text{ अने } (ii) \text{ परथी})$$

$\therefore P(k+1)$  सत्य छे.

$\therefore P(k)$  सत्य छे  $\Rightarrow P(k+1)$  सत्य छे.

गणितीय अनुमानना सिद्धांत परथी प्रत्येक  $n \in N, n \geq 5$  माटे  $P(n)$  सत्य छे.

(2) चल प्रकार 2 : धारो के  $P(n)$  ओ प्राकृतिक चलनंू विधान छे.

जो  $P(1)$  अने  $P(2)$  सत्य होय तथा जो प्रत्येक धन पूऱ्हांक  $k$  माटे

$P(k)$  अने  $P(k+1)$  सत्य होय  $\Rightarrow P(k+2)$  सत्य होय तो प्रत्येक  $n \in N$  माटे  $P(n)$  सत्य छे.

उदाहरण 19 : धारो के  $a_n$  ओ प्राकृतिक संख्याओनी श्रेणी छे, ज्यां  $a_1 = 5, a_2 = 13$  अने  $n \geq 1$  माटे  $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ . सामित करो :  $a_n = 2^n + 3^n \quad \forall n \in N$ .

उक्ल : धारो के,  $P(n) : \text{जो श्रेणी } \{a_n\} \text{ माटे } a_1 = 5, a_2 = 13 \text{ अने } n \geq 1 \text{ माटे } a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n,$  तो  $a_n = 2^n + 3^n \quad \forall n \in N$ .

धारो के  $n = 1, a_1 = 5$  अने  $2^1 + 3^1 = 2 + 3 = 5$ . आथी,  $P(1)$  सत्य छे.

धारो के  $n = 2, a_2 = 13$  अने  $2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$ . आथी,  $P(2)$  सत्य छे.

धारो के  $a_k = 2^k + 3^k, a_{k+1} = 2^{k+1} + 3^{k+1} \quad (k \geq 1)$

$$\text{हवे, } a_{k+2} = 5a_{k+1} - 6a_k$$

$$\begin{aligned}
&= 5(2^k + 1 + 3^k + 1) - 6(2^k + 3^k) \\
&= 5 \cdot 2^k \cdot 2 + 5 \cdot 3^k \cdot 3 - 6 \cdot 2^k - 6 \cdot 3^k \\
&= 2^k(10 - 6) + 3^k(15 - 6) \\
&= 2^k \cdot 2^2 + 3^k \cdot 3^2 \\
&= 2^k \cdot 2 + 3^k \cdot 2
\end{aligned}$$

$\therefore P(k+2)$  सत्य छ.

$P(k)$  सत्य छ अने  $P(k+1)$  सत्य छ  $\Rightarrow P(k+2)$  सत्य छ.

$\therefore$  गणितीय अनुमानना सिद्धांत परवी प्रत्येक  $n \in N$  माटे  $P(n)$  सत्य छ.

**नोट :**  $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$  ने आवृत्त संबंध कहे छ. तेनो उकेल  $a_n = A\alpha^n + B\beta^n$  छ, ज्यां,  $\alpha, \beta$  ए समीकरण  $x^2 - 5x + 6 = 0$  नां बीज छ. ( $5$  ए  $a_{n+1}$  नो सहगुणक,  $-6$  ए  $a_n$  नो सहगुणक छ.)

$$\therefore \alpha = 3, \beta = 2$$

$$\therefore a_n = A3^n + B2^n$$

$$\therefore a_1 = 3A + 2B = 5; \quad a_2 = 9A + 4B = 13$$

आभ,  $A = B = 1$ . आधी,  $a_n = 3^n + 2^n$ .

$$a_{n+2} = la_{n+1} - ma_n \text{ तो } \alpha, \beta \text{ ए समीकरण } x^2 - lx + m = 0 \text{ नां बीज थाय.}$$

### प्रकीर्ण उदाहरणो :

**उदाहरण 20 :** साबित करो के जो  $n \geq 4$  तो  $\mathbb{R}$  मानी चुकवणी  $\mathbb{R} 2$  अने  $\mathbb{R} 5$  ना सिक्काओना उपयोगथी ज करी शकाय. ( $n \in N$  तथा  $n \geq 4$ )

**उकेल :**  $P(n) : n \geq 4$  तो  $\mathbb{R}$  मानी चुकवणी  $\mathbb{R} 2$  अने  $\mathbb{R} 5$  ना सिक्काओ द्वारा ज थई शके.  $n \in N$

धारो के  $n = 4$ ,  $\mathbb{R} 4$  नी चुकवणी करवा भाटे आपाणने  $\mathbb{R} 2$  ना बे सिक्कानी ज्वर पडे.

$\therefore P(4)$  सत्य छ.

धारो के  $k \geq 4$  भाटे विधान  $P(k)$  सत्य छ.

हवे  $n = k + 1$  लाईमे.

अही बे विकल्पो मधी शके.

(1) जो  $\mathbb{R} k$  नी चुकवणीमां  $\mathbb{R} 5$  नो एक सिक्को होय, तो ते पाणो लाई  $\mathbb{R} 2$  ना 3 सिक्का आपो. आधी,  $k + 6 - 5 = k + 1$  इपिधानी चुकवणी थई ज्ञाय.

(2) जो  $\mathbb{R} k$  नी चुकवणीमां  $\mathbb{R} 5$  ना एक पष्ठ सिक्कानो उपयोग ना थयो होय तो  $k \geq 4$  होवायो  $\mathbb{R} 2$  ना ओछामां ओछां बे सिक्कानो उपयोग थयो होवो ज ज्ञाईमे.  $\mathbb{R} 2$  ना 2 सिक्का पाणो लाई  $\mathbb{R} 5$  नो एक सिक्को आपो. आधी  $k + 5 - 4 = k + 1$  इपिधानी चुकवणी थई ज्ञाय.

$\therefore P(k+1)$  सत्य छ.

$\therefore P(k)$  सत्य छ  $\Rightarrow P(k+1)$  सत्य छ.

$\therefore$  गणितीय अनुमानना सिद्धांत परवी  $n \in N, n \geq 4$  भाटे  $P(n)$  सत्य छ.

**उदाहरण 21 :** साबित करो के क्रोधि पष्ठ पूर्णां  $n > 23$  ने  $7x + 5y = n$  स्वरूपमां दर्शावी शकाय.

ज्यां,  $x \in N \cup \{0\}, y \in N \cup \{0\}$ .

**उकेल :** धारो के  $P(n) : 7x + 5y = n, x, y \in N \cup \{0\}, n \in N$  नो उकेल  $n > 23$  भाटे शक्य छ.

धारो के  $n = 24, x = y = 2$  थेती,  $7 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = 24$  थाय.

A. P(24) સત્ય છે.

ધારો કે  $7x + 5y = k$ ,  $k \geq 24$ ,  $x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . (i)

હવે,  $5 \cdot 3 - 7 \cdot 2 = 1$  (ii)

$\therefore 7(x - 2) + 5(y + 3) = k + 1$

((i) અને (ii)નો સરવાળો કરતાં)

અહીં,  $y + 3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  અને જો  $x \neq 0$  અથવા 1 તો  $x - 2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

ધારો કે  $x = 0$ ,  $5y = k \geq 24$ . આમ,  $y \geq 5$ .

$7 \cdot 3 - 5 \cdot 4 = 1$  અને  $5y = k$  ઉમેરતાં,

$\therefore 7 \cdot 3 + 5(y - 4) = k + 1$

અહીં,  $x = 3 \geq 0$ ,  $y - 4 \geq 0$

( $y \geq 5$ )

$\therefore x = 0$  માટે  $P(k + 1)$  સત્ય છે.

ધારો કે  $x = 1$

આખી ફરીથી,  $7 + 5y = k$

$5y = k - 7 \geq 17$ . હોવાથી  $y \geq 4$

$\therefore 7 \cdot 3 - 5 \cdot 4 = 1$  અને  $7 + 5y = k$  ઉમેરતાં,

$7 \cdot 4 + 5(y - 4) = k + 1$  જ્યાં  $y - 4 \geq 0$  અને  $x = 4 \in \mathbb{N}$

$\therefore P(k + 1)$  સત્ય છે.

$\therefore P(k)$  સત્ય છે  $\Rightarrow P(k + 1)$  સત્ય છે.

$\therefore$  ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી  $n \in \mathbb{N}$  તથા  $n \geq 24$  માટે  $P(n)$  સત્ય છે.

**ઉદાહરણ 22 :** (Tower of Hanoi, બ્રહ્માનો શપર) આપણી ધારો ત્રણ ભીલાવાળું એક પાણ્યનું છે તથા જુદી જુદી નિજખાઓવાળી ઘણાળી ગોળકાર  $n$  તકતીઓને છે. શરૂઆતમાં એક ભીલામાં બધી તકતીઓને તેમનું માપ પ્રમાણે ભરાવેલી છે, સોથી મોટા માપની નિજખાવાળી તકતી છેક તથિયે અને સોથી નાચા માપની નિજખાવાળી તકતી સૌથી ઊપર રાખેલ છે. આ તકતીઓને એવી રીતે એક ભીલાથી બીજા કે બીજા ભીલા પર લઈ જવાની છે, કે જેથી કોઈ પણ તથક્કામાં મોટી તકતી નાચા તકતી પર ન હોય. સાંભિત કરો કે પ્રથમ ભીલાથી બીજા ભીલાનો ઉપયોગ કરીને ત્રીજા ભીલા પર બધી તકતીઓને ગોઠવવાના ન્યૂનતમ પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા  $2^n - 1$  હોય.



**ઉકેલ :** ધારો કે  $P(n) : n$  તકતીઓને પ્રથમ ભીલાથી ત્રીજા (કે બીજા) ભીલામાં ગોઠવવાના પ્રકારોની સંખ્યા  $2^n - 1$  છે.  $n \in \mathbb{N}$

જો  $n = 1$  તો સ્પષ્ટ છે કે એક જ પ્રયત્નમાં તકતીને પહેલા ભીલાથી ત્રીજા ભીલામાં ગોઠવી શકાય. વળી,  $2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$ . આખી  $P(1)$  સત્ય છે.

ધારો કે  $P(k)$  સત્ય છે એટલે કે  $k$  તકતીઓને પહેલા ભીલાથી ત્રીજા ભીલા પર માંગ્યા પ્રમાણે ગોઠવવાના પ્રયત્નોની ન્યૂનતમ સંખ્યા  $2^k - 1$  છે.

હવે આપણે  $k + 1$  તકતીઓનો વિચાર કરીએ. પ્રથમ આપણે તરણીયાની તકતી સિવાયની ઉપરની કે તકતીઓને ત્રીજા ભીલાનો ઉપયોગ કરીને બીજા ભીલામાં આપેલ શરત અનુસાર ગોઠવીએ.  $P(k)$  સત્ય હોવાથી તે કિયા આપણે  $2^k - 1$  પ્રયત્નમાં કરી શકીએ. હવે છેલ્લી તકતીને ત્રીજા ભીલામાં ગોઠવો. આ એક પ્રયત્ન થયો. હવે, બીજા ભીલાની કે તકતીઓને ત્રીજા ભીલામાં માંગ્યા પ્રમાણે ગોઠવો. તે કિયા  $2^k - 1$  પ્રયત્નમાં થઈ શકાયે. (કારણ કે  $P(k)$  સત્ય છે.)

$\therefore$  પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા  $= 2^k - 1 + 1 + 2^k - 1 = 2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$

$\therefore P(k+1)$  સત્ય છે.

$\therefore P(k)$  સત્ય છે  $\Rightarrow P(k+1)$  સત્ય છે.

$\therefore$  ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક  $n \in \mathbb{N}$  માટે  $P(n)$  સત્ય છે.

**ઉદાહરણ 23 :** સાબિત કરો :  $\frac{n^{11}}{11} + \frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{62n}{165} \in \mathbb{N}, \quad n \in \mathbb{N}$  (પ્રકરણ તનો અભ્યાસ કર્યા પછી)

**ઉકેલ :** ધારો કે,  $P(n) : \frac{n^{11}}{11} + \frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{62n}{165} \in \mathbb{N}, \quad n \in \mathbb{N}$

$$n = 1 \text{ માટે, } \frac{n^{11}}{11} + \frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{62n}{165} = \frac{1}{11} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{62}{165} = \frac{15 + 33 + 55 + 62}{165} = \frac{165}{165} = 1$$

$\therefore P(1)$  સત્ય છે.

ધારો કે  $P(k)$  સત્ય છે.  $\frac{k^{11}}{11} + \frac{k^5}{5} + \frac{k^3}{3} + \frac{62k}{165} \in \mathbb{N}$ .

ધારો કે  $n = k + 1$

$$\begin{aligned} \text{એટા, } & \left( \frac{(k+1)^{11}}{11} + \frac{(k+1)^5}{5} + \frac{(k+1)^3}{3} + \frac{62(k+1)}{165} \right) - \left( \frac{k^{11}}{11} + \frac{k^5}{5} + \frac{k^3}{3} + \frac{62k}{165} \right) \\ &= \frac{1}{11}((k+1)^{11} - k^{11}) + \frac{1}{5}((k+1)^5 - k^5) + \frac{1}{3}((k+1)^3 - k^3) + \frac{62}{165} \\ &= \frac{1}{11}\left(1 + \binom{11}{1}k + \binom{11}{2}k^2 + \dots + \binom{11}{10}k^{10}\right) + \frac{1}{5}\left(1 + \binom{5}{1}k + \binom{5}{2}k^2 + \dots + \binom{5}{4}k^4\right) \\ &\quad + \frac{1}{3}\left(1 + \binom{3}{1}k + \binom{3}{2}k^2\right) + \frac{62}{165} \\ &= \frac{1}{11}\binom{11}{1}k + \frac{1}{11}\binom{11}{2}k^2 + \dots + \frac{1}{11}\binom{11}{10}k^{10} + \frac{1}{5}\binom{5}{1}k + \frac{1}{5}\binom{5}{2}k^2 + \dots + \frac{1}{5}\binom{5}{4}k^4 \\ &\quad + \frac{1}{3}\binom{3}{1}k + \frac{1}{3}\binom{3}{2}k^2 + \frac{1}{11} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{62}{165} \end{aligned} \tag{i}$$

હવે, 11 અવિભાજ્ય હોવાથી,  $\binom{11}{r}$  એ  $r = 1, 2, \dots, 10$  માટે 11 વડે વિભાજ્ય છે.

5 અવિભાજ્ય હોવાથી,  $\binom{5}{r}$  એ  $r = 1, 2, 3, 4$  માટે 5 વડે વિભાજ્ય છે.

3 અવિભાજ્ય હોવાથી,  $\binom{3}{r}$  એ  $r = 1, 2$  માટે 3 વડે વિભાજ્ય છે.

$$\text{અને } \frac{1}{11} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{62}{165} = 1$$

$\therefore$  (1) ની જ.બા.ની સંખ્યા પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.

$$\text{એટા, } \frac{k^{11}}{11} + \frac{k^5}{5} + \frac{k^3}{3} + \frac{62k}{165} \in \mathbb{N}.$$

$$\therefore \frac{(k+1)^{11}}{11} + \frac{(k+1)^5}{5} + \frac{(k+1)^3}{3} + \frac{62(k+1)}{165}$$

$$= \frac{k^{11}}{11} + \frac{k^5}{5} + \frac{k^3}{3} + \frac{62k}{165} + \text{પ્રાકૃતિક સંખ્યા} \in \mathbb{N}$$

$\therefore P(k+1)$  સત્ય છે.

$\therefore P(k)$  સત્ય છે  $\Rightarrow P(k+1)$  સત્ય છે.

$\therefore$  ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક  $n \in \mathbb{N}$  માટે  $P(n)$  સત્ય છે.

**ઉદાહરણ 24 :** એક સભાગૃહમાં  $2n$  માણસો છે. અમુક માણસો બીજા માણસો સાથે હસ્તધૂનન કરે છે. કોઈ પણ એવી ત્રણ વ્યક્તિઓ નથી કે જેમણે એકબીજા સાથે હસ્તધૂનન કર્યું હોય. સાબિત કરો કે આમ મળતી હસ્તધૂનનની વધુમાં વધુ સંખ્યા  $n^2$  હોય.

**ઉકેલ :**  $P(n)$  : અમુક માણસો બીજા માણસો સાથે હસ્તધૂનન કરે છે. કોઈ પણ એવી ત્રણ વ્યક્તિઓ નથી કે જેમણે એકબીજા સાથે હસ્તધૂનન કર્યું હોય. આમ મળતી હસ્તધૂનનની વધુમાં વધુ સંખ્યા  $n^2$  હોય.

$$n = 1 \text{ લેતાં, બે વ્યક્તિઓ છે. આમ, હસ્તધૂનનની વધુમાં વધુ સંખ્યા } 1 = 1^2.$$

$$\therefore P(1) \text{ સત્ય છે.}$$

$$\text{પારો કે } P(k) \text{ સત્ય છે. હસ્તધૂનનની વધુમાં વધુ સંખ્યા } n^2 \text{ છે.}$$

$$\text{ધારો કે } n = k + 1$$

$$\text{હવે } 2k + 2 \text{ વ્યક્તિઓ છે. હસ્તધૂનન કર્યું હોય તેવી બે વ્યક્તિઓ A અને B પસંદ કરેલ.}$$

$$(ઝો એવી બે વ્યક્તિઓ ન મળો તો હસ્તધૂનનની કુલ સંખ્યા 0 થાય. જે વધુમાં વધુ } (k + 1)^2 \text{ છે તેમ સાબિત થાય.)$$

$$\text{હવે, બાકીની } 2k \text{ વ્યક્તિઓ દ્વારા હસ્તધૂનનની કુલ સંખ્યા વધુમાં વધુ } k^2 \text{ છે. } (P(k) \text{ સત્ય છે.})$$

$$A \text{ અને } B \text{ દ્વારા એક હસ્તધૂનન થાય છે.}$$

$$2k \text{ વ્યક્તિઓમાંની દરેક વ્યક્તિ } A \text{ અથવા } B \text{ સાથે } \not\perp \text{ હસ્તધૂનન કરી શકે પણ બંને સાથે નહિએ.}$$

$$\text{હસ્તધૂનનની વધુમાં વધુ સંખ્યા } k^2 + 1 + 2k = (k + 1)^2$$

$$\therefore P(k + 1) \text{ સત્ય છે.}$$

$$\therefore P(k) \text{ સત્ય છે} \Rightarrow P(k + 1) \text{ સત્ય છે.}$$

$$\therefore \text{ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક } n \in \mathbb{N} \text{ માટે } P(n) \text{ સત્ય છે.}$$

### એક વિરોધાભાસ (Paradox) :

$$P(n) : \text{તરસ્યો માણસ પાણીનાં } n \text{ ટીપાં પી શકે. } n \in \mathbb{N}$$

$$n = 1 \text{ માટે સાચ છે} \Rightarrow \text{તરસ્યા માણસને 1 ટીપું પાણી પીવું ગમે.}$$

$$\text{જો તે } k \text{ ટીપાં પાણી પી શકે તો ચોક્કસ } k + 1 \text{ ટીપાં પાણી પણ પી શકે.}$$

$$\text{આમ, તે ગમે તેટલાં } \infty \text{ ટીપાં પાણી પી શકે અને પૃથ્વી પરનું વધું } \not\perp \text{ પાણી પીને પૃથ્વીને પાણીવિદોષી બનાવી શકે!}$$

**નોંધ :** પરિષામોનો ખોટી રીતે ઉપયોગ કરીને કોઈ ખોટા પરિષામ પર પહોંચીએ તેને વિરોધાભાસ કહે છે.

### સ્વાધ્યાય 1

ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરીને નીચેનાં પરિષામો સાબિત કરો : (1 થી 20)

$$1. \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2(n+1) = \frac{n(n-1)(n+2)(3n-1)}{12}$$

$$2. \quad a + (a+d) + (a+2d) + \dots + (a+(n-1)d) = \frac{1}{2}n(2a + (n-1)d)$$

$$3. \quad \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n-1}$$

$$4. \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n-1)(n+2)(n+3)}{4}$$

$$5. \quad 1 + 5 + 9 + \dots + (4n-3) = n(2n-1)$$

$$6. \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

7.  $\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+n} = \frac{2n}{n+1}$
8.  $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n-1)(n+2)} = \frac{n(n-3)}{4(n+1)(n+2)}$
9.  $1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$
10. જો  $a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 3$  તો  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = a_{n+2} - 1$
11.  $41^n - 1$  એ 40 વડે વિભાજ્ય છે.
12.  $4007^n - 1$  એ 2003 વડે વિભાજ્ય છે.
13.  $7^n - 6n - 1$  એ 36 વડે વિભાજ્ય છે.
14.  $2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5$  એ 24 વડે વિભાજ્ય છે.
15.  $11^{n+2} + 12^{2n+1}$  એ 133 વડે વિભાજ્ય છે.
16.  $n(n+1)(2n+1)$  એ 6 વડે વિભાજ્ય છે.
17.  $1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \dots + n \cdot 3^n = \frac{(2n-1)3^{n+1} + 3}{4}$
18.  $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$  એ 9 વડે વિભાજ્ય છે.
19.  $\frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{7n}{15} \in \mathbb{N}$ .
20.  $\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$
21. લુકાસની શ્રેષ્ઠી  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$  ( $n \geq 3$ );  $a_1 = 1, a_2 = 3$  માટે સાબિત કરો કે  $a_n \leq (1.75)^n$ .
22. સાબિત કરો :  $2^n > n^3$ , જ્યાં  $n \geq 10, n \in \mathbb{N}$
23. સાબિત કરો કે  $n$  બાજુઓ વાળા અહૃતોષણને  $\frac{n(n-3)}{2}$  વિકારો હોય જ્યાં,  $n > 3, n \in \mathbb{N}$
24. જો  $a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, (n \geq 3, n \in \mathbb{N})$  તો સાબિત કરો કે  

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$
 (આ શ્રેષ્ઠી  $\{a_n\}$ ને ફિબોનાકી શ્રેષ્ઠી કહે છે.)
25. જો  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(1) = 1, f(2) = 5, f(n+1) = f(n) + 2f(n-1), n \geq 2$   
તો સાબિત કરો કે  $f(n) = 2^n + (-1)^n$
26. જો  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(1) = 1, f(n+1) - f(n) = 2^n$   
તો સાબિત કરો કે  $f(n) = 2^n - 1$
27. જો  $a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}; n \geq 3$   
તો સાબિત કરો કે  $a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2n} = a_{2n-1} - 1$
28. જો  $a_1 = 1, a_2 = 11$  અને  $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}; n \geq 3$   
તો સાબિત કરો કે  $a_n = 2(-1)^n + 3^n, n \in \mathbb{N}$
29. કોઈ પણ ધન પૂર્ણક  $n \geq 12$  ને  $7x + 3y = n$  સ્વરૂપમાં લખી શકાય તેમ સાબિત કરો.  
જ્યાં,  $x \in \mathbb{N} \cup \{0\}, y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

- 30.** સામિત કરો કે  $(3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$  યુગ્મ છે.  $n \in \mathbb{N}$  પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.
- 31.** નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી ચોણ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને  માં લખો :
- (1)  $P(n) : 2^n < n!$  માટે ..... સત્ય છે.
  - (a)  $P(1)$   (b)  $P(2)$    
(c) કોઈ પણ  $P(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$   (d)  $P(4)$
  - (2)  $P(n) : 2^n = 0$  માટે ..... સત્ય છે.
  - (a)  $P(1)$   (b)  $P(3)$    
(c)  $P(10)$   (d)  $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ ,  $k \in \mathbb{N}$
  - (3)  $1 + 2 + 3 + \dots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$
  - (a)  $P(1)$  માટે ડા.આ. = 7 = જ.આ.   
(b)  $P(1)$  માટે ડા.આ. = 3 = જ.આ.   
(c)  $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  માટે સત્ય નથી.   
(d) ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક  $n \in \mathbb{N}$  માટે  $P(n)$  સત્ય છે તેમ નથી.
  - (4) જો ..... સત્ય હોય અને  $P(k)$  સત્ય હોય  $\Rightarrow P(k+1)$  સત્ય હોય,  $k \geq -1$ , તો પ્રત્યેક  $n \in \mathbb{N} \cup \{0, -1\}$  માટે  $P(n)$  સત્ય હોય.
  - (a)  $P(-1)$   (b)  $P(0)$   (c)  $P(1)$   (d)  $P(2)$
  - (5)  $P(n) : P = 2^{2^n} + 1$  અવિભાજ્ય સંખ્યા છે, એ  $n = \dots$  માટે સત્ય નથી.
  - (a) 1  (b) 2  (c) 0  (d) 5
  - (6)  $P(n) : 2^n - 1$  એ  $n = \dots$  માટે અવિભાજ્ય સંખ્યા છે.
  - (a) 1  (b) 3  (c) 4  (d) 8
  - (7)  $P(n) : n^2 - n + 41$  એ  $n = \dots$  માટે અવિભાજ્ય સંખ્યા નથી.
  - (a) 1  (b) 2  (c) 3  (d) 41
  - (8)  $P(n) : 2n + 1$  એ  $n = \dots$  માટે અવિભાજ્ય સંખ્યા નથી.
  - (a) 1  (b) 2  (c) 3  (d) 4
  - (9)  $P(n) : 4n + 1$  એ  $n = \dots$  માટે અવિભાજ્ય સંખ્યા નથી.
  - (a) 1  (b) 3  (c) 7  (d) 11
  - (10)  $P(n) : 2^n > n^2$  એ  $n = \dots$  માટે સત્ય છે.
  - (a) 2  (b) 3  (c) 4  (d) 5

\*

### સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. ગણિતીય અનુમાનનો સિદ્ધાંત અને તેના ઉપરના ઉદાહરણો
2. વિશિષ્ટ ચલ પ્રકારના ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત તથા તેના ઉપયોગો

## કોયડો

એક ઓરડામાં ન વ્યક્તિ છે.  $n - 1$  કાળી ટોપી તથા ઓછામાં ઓછી ન સર્કદ ટોપી છે. દરેક વ્યક્તિના માથે એક ટોપી છે. આ વ્યક્તિઓ એક હારમાં એવી રીતે ઊંચી રહી છે કે દરેક વ્યક્તિ તેની આગળની વ્યક્તિની ટોપી જોઈ શકે. હવે છેલ્લેથી શરૂ કરી દરેક વ્યક્તિને પૂછવામાં આવે છે, 'તમારી ટોપીનો રંગ કહી શકશો?' જો પાછળની  $n - 1$  વ્યક્તિ પોતાની ટોપીનો રંગ ના કહી શકે તો સૌથી આગળની વ્યક્તિ કહે છે, 'છા, મારી ટોપીનો રંગ સર્કદ છે.'

હવે ગણિતીય અનુમાનથી આગળ વધીએ.  $n = 1$  માટે 1 વ્યક્તિ, ઓછામાં ઓછી 1 સર્કદ ટોપી તથા  $1 - 1 = 0$  કાળી ટોપી છે. આથી તે વ્યક્તિ કહે છે કે મારા માથા ઉપર સર્કદ ટોપી છે.

ધરો કે  $P(k)$  સત્ય છે.  $k$  વ્યક્તિ, ઓછામાં ઓછી  $k$  સર્કદ ટોપી તથા  $k - 1$  કાળી ટોપી હોય અને પાછળની  $k - 1$  વ્યક્તિ પોતાની ટોપીનો રંગ કહેવામાં નિષ્ફળ જાય છે, તો પ્રથમ ઉભેલી વ્યક્તિ કહી શકે કે 'મારા માથા પર સર્કદ ટોપી છે'.  $n = k + 1$  લેતાં,  $k + 1$  વ્યક્તિ,  $k$  કાળી ટોપી તથા ઓછામાં ઓછી  $k + 1$  સર્કદ ટોપી છે. હવે પ્રથમ વ્યક્તિ વિચારે છે કે જો મારા માથા ઉપર કાળી ટોપી હોય તો પાછળની  $k$  વ્યક્તિ વચ્ચે ઓછામાં ઓછી  $k$  સર્કદ ટોપી તથા  $k - 1$  કાળી ટોપી રહે.  $P(k)$  સત્ય હોવાથી મારી પાછળની વ્યક્તિ કહી શકે કે તેના માથા પર સર્કદ ટોપી છે. પરંતુ મારી પાછળની વ્યક્તિ અનુત્તર છે. આથી મારા માથા પર સર્કદ ટોપી છે.

સમજૂતી :  $n = 2$  માટે બે વ્યક્તિ એક કાળી ટોપી તથા ઓછામાં ઓછી બે સર્કદ ટોપી છે.



જો છેલ્લી વ્યક્તિ પ્રથમ વ્યક્તિના માથા ઉપર કાળી ટોપી જુએ તો એક જ કાળી ટોપી હોવાથી તે નિર્ધિતપણે કહી શકે કે તેના માથા પર સર્કદ ટોપી છે. તે જવાબ આપી શકતી ન હોવાથી પ્રથમ વ્યક્તિની તાર્દીક દલીલ એ છે કે તેના માથે સર્કદ ટોપી જ હોવી જોઈએ અને તેની પાછળની વ્યક્તિના માથા પર સર્કદ અથવા કાળી ગમે રે ટોપી હોય. કરતો કે એક કાળી ટોપી તથા ઓછામાં ઓછી બે સર્કદ ટોપી છે. આથી પ્રથમ વ્યક્તિ કહી શકે કે તેના માથા પર સર્કદ ટોપી છે.

— ♦ —

**Srinivasa Ramanujan (1887-1920)** was one of India's greatest mathematical geniuses. He made substantial contributions to the analytical theory of numbers and worked on elliptical functions, continued fractions and infinite series.

In 1990 he began to work on his own on mathematics summing geometric and arithmetic series.

Ramanujan had shown how to solve cubic equations in 1902 and he went to find his own method to solve the quartic.

1904 Ramanujan had begun to undertake deep research. He investigated the series  $\Sigma(\frac{1}{n})$  and calculated Euler's constant to 15 decimal places.

Continuing his mathematical work Ramanujan studied continued fractions and divergent series in 1908.

## સંકર સંખ્યાઓ

*A mathematician is a device for turning coffee into theorems.*

- Paul Erdos

*As far as the laws of mathematics refer to reality, they are not certain and as far as they are certain, they do not refer to reality.*

- Albert Einstein

### 2.1 પ્રાસ્તાવિક

આપણે અગ્રાહિનાં પોરશોમાં સંખ્યાઓના ગજી N, Z, Q અને R નો અભ્યાસ કરી ગયાં. આપણે જાણીએ છીએ કે સંમેય સંખ્યાઓનો ગજી અને અસંમેય સંખ્યાઓનો ગજી બેગા મળીને વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગજી રહ્યે છે. આપણે સંખ્યાઓના ગુણધર્મો તેમજ એક ચલ અને દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણોના ઉકેલનો અભ્યાસ કરી ગયાં. તદ્વારાંત આપણે એક ચલ દ્વિઘાત સમીકરણોના ઉકેલની પણ ચર્ચા કરી ગયાં. આપણે જોયું કે જો વિવેગક  $t^2 - 4ac < 0$  હોય, તો દ્વિઘાત સમીકરણ  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a, b, c \in R$ ,  $a \neq 0$  ને વાસ્તવિક ઉકેલ નથી. ઉદાહરણ તરીકે  $x^2 + 1 = 0$  ને R માં ઉકેલ નથી. કર્ષ સંખ્યાઓનું વર્ગમૂળ મેળવવા માટે વાસ્તવિક સંખ્યાગણનો તેનાથી મોટા ગણમાં વિસ્તાર કરવો પડે. વાસ્તવમાં કર્ષ સંખ્યાઓનું વર્ગમૂળ વાસ્તવિક સંખ્યાગણમાં અસ્તિત્વ ધરાવતું નથી તે સૌથી પહેલાં ગ્રોકવાનીઓ જોઈ શક્યા હતા. બારતીય ગણિતશાસ્ત્રી મહાવીરીએ અધ્યાત્મ મહાવીરાચાર્ય (850 A.D.) પણ તેમના ગ્રંથ 'ગણિતસાર સંગ્રહ'માં આ મુશ્કેલીનો ઉલ્લેખ કર્યો છે. વાસ્તવિક સંખ્યાગણનો વિસ્તાર એવી રીતે થયો જોઈએ કે જેથી સરવાળો, બાદબાકી, ગુણકાર, ભાગકાર જેવી બૈઝિક કિયાઓ યોગ્ય રીતે વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય અને તે મર્યાદિત ઉપગણ R માં હાલ વ્યાખ્યાયિત બૈઝિક કિયાઓ સાથે સુસંગત રહે. આ નવા ગજને સંકર સંખ્યાઓનો ગજી (set of complex numbers) કહેવાય છે અને તેને સંકેતમાં C વડે દર્શાવાય છે.

### 2.2 ગજી R × R અને સંકર સંખ્યા

સંકર સંખ્યાનો ગજી C મેળવવા માટે આપણે વાસ્તવિક સંખ્યાગણ R થી શરૂઆત કરીએ. R × R એ વાસ્તવિક સંખ્યાઓની ક્રમયુક્ત જોડનો ગજી છે.

$$R \times R = \{(a, b) \mid a \in R, b \in R\}$$

આપણે R × R ના બે ઘટકોની સમાનતા તથા તેમનો સરવાળો અને ગુણકાર વ્યાખ્યાયિત કરીશું.

(1) સમાનતા : જો  $a = c$  અને  $b = d$  તો  $R \times R$  ના બે ઘટકો  $(a, b)$  અને  $(c, d)$  સમાન થાય.

$$\text{આમ, } a = c, b = d \Rightarrow (a, b) = (c, d)$$

ઉદાહરણ તરીકે,  $(1, 0) = (\sin^2 x + \cos^2 x, \log)$  પરંતુ,  $(1, 4) \neq (4, 1)$

(2) સરવાળો :  $R \times R$  ના બે ઘટકો  $(a, b)$  અને  $(c, d)$  નો સરવાળો નીચે પ્રમાણે વાખ્યાપિત કરીએ છીએ :

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

ઉદાહરણ તરીકે,  $(5, 2) + (2, 3) = (5 + 2, 2 + 3) = (7, 5)$

(3) ગુણાકાર :  $R \times R$  ના બે ઘટકો  $(a, b)$  અને  $(c, d)$  નો ગુણાકાર નીચે પ્રમાણે વાખ્યાપિત કરીએ છીએ.

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

ઉદાહરણ તરીકે,  $(5, 2)(2, 3) = (5 \times 2 - 2 \times 3, 5 \times 3 + 2 \times 2) = (4, 19)$

આ બધા નિયમો સાથેના ગણ  $R \times R$  ને સંકર સંખ્યાઓનો ગણ કરે છે તથા તેને  $C$  વડે દર્શાવાય છે.

સામાન્ય રીતે આપણે સંકર સંખ્યાને  $z$  વડે દર્શાવીશું.

### 2.3 સંકર સંખ્યાઓના મૂળભૂત બેન્જિક ગુણધર્મો

સરવાળા અને ગુણાકારની ડિયાઓ વિશે ગણ  $R$  માં સંવૃતતા, કમ, જૂથ અને વિભાજનના ગુણધર્મોની ચર્ચા આપણે કરી શક્યાં છીએ. આ ડિયાઓ વિશે ગણ  $C$  માં પણ આ જ ગુણધર્મો સાચા છે તે હવે આપણે જોઈશું.

સરવાળા વિશેની ડિયા નીચેના ગુણધર્મોનું પાલન કરે છે :

(1) સંવૃતતાનો નિયમ : બે સંકર સંખ્યાઓનો સરવાળો સંકર સંખ્યા હોય છે.

$$\text{એટલે કે, } z_1 + z_2 \in C \quad \forall z_1, z_2 \in C$$

આ નિયમને માટે એમ પણ કહેવાય છે કે  $C$  પર સરવાળો એ હિક્કિયા છે.

(2) કમનો નિયમ :  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad \forall z_1, z_2 \in C$

(3) જૂથનો નિયમ :  $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in C$

(4) સરવાળા માટે એકમ સંખ્યાનું અસ્તિત્વ : સંકર સંખ્યા  $O = (0, 0)$  એવી મળે છે કે જેથી  $z + O = z = O + z$

$\forall z \in C$ .  $O = (0, 0)$  ને સરવાળા માટેનો એકમ ઘટક કે શૂન્ય સંકર સંખ્યા કહે છે. સરવાળા માટેનો એકમ ઘટક  $O$  અનન્ય છે તેમ સાબિત કરી શકાય.

ખરેખર જો,  $(a, b) + (x, y) = (a, b) \quad \forall (a, b) \in C$

$$\text{તો } a + x = a, \quad b + y = b$$

$$\therefore x = 0, \quad y = 0. \text{ આમ, } (x, y) = (0, 0)$$

$$\text{વળી, } (a, b) + (0, 0) = (a, b).$$

(5) સરવાળા માટે વિરોધી સંખ્યાનું અસ્તિત્વ : પ્રત્યેક સંકર સંખ્યા  $z = (a, b)$ , ને સંગત સંકર સંખ્યા  $(-a, -b)$

મળે કે જેથી  $z + (-a, -b) = O$ . આ સંકર સંખ્યા  $(-a, -b)$  ને  $-z$  વડે દર્શાવાય છે અને તે  $z$ ની સરવાળા માટેની વિરોધી સંખ્યા છે.

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે,  $z + (-z) = (a, b) + (-a, -b)$

$$= (a + (-a), b + (-b))$$

$$= (0, 0)$$

$$= O \quad (O \text{ સરવાળા માટેનો એકમ સંખ્યા છે.)$$

$$\text{વળી, } (-z) + z = O$$

આપણે સાબિત કરી શકીએ કે પ્રત્યેક  $z \in C$  માટે તેની વિરોધી સંખ્યા  $-z$  અનન્ય છે.

નોંધ :  $(a, b) + (x, y) = (0, 0)$  માટે  $a + x = 0 = b + y$  જરૂરી છે.

$$\therefore x = -a, y = -b$$

$\therefore (-a, -b)$  એ  $(a, b)$ ને સંગત સરવાળા માટેની વિરોધી સંખ્યા છે.

ગુણકાર વિશેની કિયા નીચેના ગુણધર્મોનું પાલન કરે છે :

(1) સંવૃતતાનો નિયમ : બે સંકર સંખ્યાઓનો ગુણકાર સંકર સંખ્યા હોય છે.

$$\text{એટલે કે, } z_1 z_2 \in C \quad \forall z_1, z_2 \in C$$

આમ, ગુણકાર પણ  $C$  પર દિક્કિયા છે.

(2) ક્રમનો નિયમ :  $z_1 z_2 = z_2 z_1 \quad \forall z_1, z_2 \in C$

(3) જૂથનો નિયમ :  $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3) \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in C$

(4) ગુણકાર માટેના એકમ ઘટકનું અસ્તિત્વ : સંકર સંખ્યા  $(1, 0)$  એવી મળે છે કે જેથી

$$z(1, 0) = z = (1, 0)z \quad \forall z \in C$$

$$z = (a, b) \text{ કેન્દ્રી, } z(1, 0) = (a, b)(1, 0) = (a - 0, 0 + b) = (a, b) = z$$

વળી,  $(1, 0)z = z$

$$\therefore z(1, 0) = (1, 0)z = z$$

$(1, 0)$  ને ગુણકાર માટેનો એકમ ઘટક કહે છે. ગુણકાર માટેનો એકમ ઘટક  $(1, 0)$  અનન્ય છે.

**નોંધ :** જો  $(a, b)(x, y) = (a, b) \quad \forall (a, b) \in C$ , તો

$$ax - by = a \text{ અને } ay + bx = b, \quad \forall a, b \in R.$$

વિશેષતા:  $a = 1, b = 0$  માટે  $x = 1, y = 0$ .

$$\text{આમ, } (a, b)(1, 0) = (a, b) \quad \forall (a, b) \in C.$$

(5) ગુણકાર માટેની વસ્તુ સંખ્યાનું અસ્તિત્વ : શૂન્યેતર સંકર સંખ્યા  $z = (a, b)$  ને સંગત સંકર સંખ્યા

$$\left( \frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right) \text{ મળે કે જેથી } z \left( \frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right) = (1, 0). \text{ સંકર સંખ્યા } \left( \frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right) \text{ ને } z^{-1} \text{ વડે દર્શાવાય છે અને તેને } z \text{ ની વસ્તુ સંખ્યા કહેવાય છે.$$

$((1, 0)$  એ ગુણકાર માટેનો એકમ ઘટક છે.).

$$(a, b) \neq (0, 0) \text{ હોવાથી } a^2 + b^2 \neq 0. \text{ તેથી } z^{-1} = \left( \frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right) \in C \text{ અને}$$

$$z \cdot z^{-1} = (a, b) \left( \frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right)$$

$$= \left( a \cdot \frac{a}{a^2+b^2} - b \cdot \frac{-b}{a^2+b^2}, a \cdot \frac{-b}{a^2+b^2} + b \cdot \frac{a}{a^2+b^2} \right)$$

$$= \left( \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab+ab}{a^2+b^2} \right) = (1, 0)$$

વળી,  $z^{-1} \cdot z = (1, 0)$

અહીં નોંધોએ કે પ્રત્યેક શૂન્યેતર સંકર સંખ્યા  $z \in C$  માટે તેનો વસ્તુ અનન્ય છે.  $z^{-1}$  ને  $\frac{1}{z}$  વડે પડા દર્શાવાય છે.

**નોંધ :** ધારો કે  $z'$  એવી સંકર સંખ્યા છે કે જેથી  $zz' = (1, 0)$

ધારો કે  $z' = (x, y)$

$$\therefore zz' = (a, b)(x, y) = (1, 0)$$

$$\therefore (ax - by, ay + bx) = (1, 0)$$

$$\therefore ax - by = 1, ay + bx = 0$$

$$\text{આ સમીકરણો ઉકેલાં } x = \frac{a}{a^2+b^2}, y = \frac{-b}{a^2+b^2}$$

$$\therefore z' = \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

$\therefore z = (a, b) \neq (0, 0)$  હોવાથી  $a^2 + b^2 \neq 0$ .

$$\therefore z'' = \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{b}{a^2 + b^2} \right)$$

ગુણકાર માટેની વ્યસ્ત સંખ્યાઓના અસ્તિત્વ પરથી ફિલ્પિત કરી શકાય કે જો  $z_1 z_2 = 0$  તો  $z_1 = 0$  અથવા  $z_2 = 0$ . (ચકાસો !)

(6) વિભાજનનો નિયમ : કોઈ પણ ત્રણ સંકર સંખ્યાઓ  $z_1, z_2, z_3$  માટે

$$(a) z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

$$(b) (z_1 + z_2)z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$$

## 2.4 C ના ઉપગણ તરીકે R

વ્યાખ્યા પરથી પ્રત્યેક સંકર સંખ્યા એ વાસ્તવિક સંખ્યાઓની એક ક્રમયુક્ત જોડ છે. જે સંકર સંખ્યા  $(a, b)$  માં  $b = 0$  હોય તેવી સંકર સંખ્યાઓના ગણને  $R'$  વડે દર્શાવીએ. આમ,  $R' = \{(a, 0) | a \in R\}$ , સ્પષ્ટ છે કે  $R' \subset C$ .  $R'$  ના કોઈ પણ બે ઘટકો  $(a, 0)$  અને  $(b, 0)$  માટે,

$$(1) (a, 0) = (b, 0) \Leftrightarrow a = b$$

$$(2) (a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \in R'$$

$$(3) (a, 0)(b, 0) = (ab, 0) \in R'$$

આમ,  $R'$  ની કોઈ પણ બે સંકર સંખ્યાઓનો સરવાળો અને ગુણકાર R' માં જ છે. વળી,  $R'$  ની બે સંખ્યાઓ  $(a, 0)$  અને  $(b, 0)$ -નો સરવાળો કે ગુણકાર કરવામાં વાસ્તવિક રીતે તો બે ક્રમયુક્ત જોડની પ્રથમ સંખ્યાઓ  $a$  અને  $b$  નો જ સરવાળો કે ગુણકાર કરવાનો રહે છે. ક્રમયુક્ત જોડની બીજી સંખ્યા તો શૂન્ય જ રહે છે. ખરેખર, C ની માફક R' માં પણ સરવાળો તથા ગુણકાર માટે સંવૃતતાના નિયમનું પાલન થાય છે.  $(a, 0)$  પ્રકારની સંકર સંખ્યા ખરેખર તો વાસ્તવિક સંખ્યાની જેમ જ વર્તે છે. તેથી આપણો  $(a, 0)$  ને  $a$  ની સાથે સંગત કરીશું અને  $(a, 0) = a$  લખીશું.  $(4, 0) = 4, (0, 0) = 0$  વરેરે. આ પ્રકારે આપણો દેશેક વાસ્તવિક સંખ્યા  $a$  ને સંકર સંખ્યા  $(a, 0)$  તરીકે કોઈ શરીરે. તેથી આપણો  $R'$  ને R તરીકે ઓળખી શકીએ તથા  $R' = R \subset C$ . આમ હવે  $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$ . હવે,  $(0, 0) = 0$ , સરવાળા માટે તટસ્ય ઘટક,  $(1, 0) = 1$  ગુણકાર માટે તટસ્ય ઘટક મળે.

## 2.5 સંકર સંખ્યાનું $a + ib$ સ્વરૂપમાં નિરૂપણ

$(a, 0)$  ને  $a$  તરીકે બખવાથી આપણો કોઈ પણ સંકર સંખ્યા  $(a, b)$  ને એક અન્ય સ્વરૂપમાં દર્શાવીશું.

પ્રથમ આપણે એક મહત્વાની સંકર સંખ્યા  $(0, 1)$  નો પરિચય મેળવીએ. તેને આપણો સંકેતમાં i વડે દર્શાવીશું. આમ, સંકર સંખ્યા  $i = (0, 1)$ .

હવે,  $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$ . ઈ.સ. 1737 માં ઓઈલરે (Euler) પ્રથમ વખત સંકેત i રજૂ કર્યો, જ્યાં  $i^2 = -1$ .  $i = (0, 1)$  ને કાલ્યનિક સંખ્યા (Imaginary number) કહે છે.

$$\text{હવે, } (a, b) = (a, 0) + (0, b)$$

$$= (a, 0) + (0, 1)(b, 0)$$

$$((0, 1)(b, 0) = (0 - 0, 0 + b) = (0, b))$$

$$= a + ib$$

$$\therefore (a, b) = a + ib$$

આમ, પ્રત્યેક સંકર સંખ્યા  $(a, b)$  ને  $a + ib$  સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય છે, જ્યાં  $a, b \in R$  અને  $i^2 = -1$ .

$$\therefore C = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

ગુણકાર વિરોના કમના નિયમ પરથી,  $ib = bi$ .

$\therefore a + ib$  ને  $a + bi$  તરીકે પણ લખી શકાય.

$$\text{ઉદાહરણ તરીકે}, (3, 5) = 3 + 5i, (0, 7) = 0 + 7i, (5, 0) = 5 + 0i = 5$$

અંકર સંખ્યા  $z = a + bi$  માં  $a$  ને જો **વાસ્તવિક ભાગ (real part)** કહે છે. તેને સ્કેટમાં  $Re(z)$  વડે દર્શાવાય છે.

$b$  ને  $z$  નો **કાલ્યનિક ભાગ (imaginary part)** કહે છે. તેને સ્કેટમાં  $Im(z)$  વડે દર્શાવાય છે.

આમ,  $z = a + bi = Re(z) + iIm(z)$ . ઉદાહરણ તરીકે જો  $z = 3 + 2i$ , તો  $Re(z) = 3$  અને  $Im(z) = 2$ .

આપણે નોંધીએ કે સંકર સંખ્યા  $z$  નો વાસ્તવિક અને કાલ્યનિક ભાગ એ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ જ છે.

જો કોઈ સંકર સંખ્યાનો વાસ્તવિક ભાગ શૂન્ય હોય અને કાલ્યનિક ભાગ શૂન્ય ન હોય, તો તે સંકર સંખ્યાને **શુદ્ધ કાલ્યનિક સંખ્યા (purely imaginary number)** કહેવાય છે. ઉદાહરણ તરીકે,  $9i = 0 + 9i$  એ શુદ્ધ કાલ્યનિક સંખ્યા છે.

હવે સંકર સંખ્યાઓ  $a + bi$  સ્વરૂપમાં હોય ત્યારે બૈઝિક કિયાઓની ચર્ચા કરીએ.

### બે સંકર સંખ્યાઓની સમાનતા :

બે સંકર સંખ્યાઓ  $z_1 = a + bi$  અને  $z_2 = c + di$  સમાન હોય એટલે કે  $(a, b) = (c, d)$  તો  $a = c$  તથા  $b = d$ .

જો  $z = a + bi = 0 + 0i$  એટલે કે  $(0, 0)$  હોય, તો  $a = 0$  તથા  $b = 0$ .

**ઉદાહરણ 1 :** જો  $3x + (3x - y)i = 4 + (-6)i$ , જ્યાં  $x, y \in \mathbb{R}$  તો  $x$  અને  $y$  શોધો.

**ઉકેલ :** અહીં  $3x + (3x - y)i = 4 + (-6)i$ , જો  $a + bi = c + di$  તો  $a = c$  તથા  $b = d$ .

આથી  $3x = 4$ ,  $3x - y = -6$ . સમીકરણો ઉકેલતાં,  $x = \frac{4}{3}$ ,  $y = 10$ .

### બે સંકર સંખ્યાઓનો સરવાળો :

ધારો કે  $z_1 = a + bi$  તથા  $z_2 = c + di$  બે સંકર સંખ્યાઓ છે.  $z_1 = (a, b)$  અને  $z_2 = (c, d)$  વર્ણનો સરવાળો નીચે પ્રમાણે મળશે :

$$z_1 + z_2 = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = a + c + (b + d)i$$

$$\begin{aligned} \text{ઉદાહરણ તરીકે}, (2 + 2\sqrt{2}i) + (-3 + \sqrt{2}i) &= (2 - 3) + (2\sqrt{2} + \sqrt{2})i \\ &= -1 + 3\sqrt{2}i \end{aligned}$$

### બે સંકર સંખ્યાઓનો તફાવત :

ધારો કે  $z_1$  અને  $z_2$  બે સંકર સંખ્યાઓ છે. તેમનો તફાવત  $z_1 - z_2$  નીચે પ્રમાણે વાખ્યાપિત થાય છે :

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

ધારો કે,  $z_1 = (a, b)$ ,  $z_2 = (c, d)$

$$\therefore -z_2 = (-c, -d)$$

$$\begin{aligned} \therefore z_1 - z_2 &= z_1 + (-z_2) \\ &= (a, b) + (-c, -d) \\ &= (a - c, b - d) \\ &= (a - c) + (b - d)i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ઉદાહરણ તરીકે}, (2 + \sqrt{3}i) - (-3 + 2\sqrt{3}i) &= 2 - (-3) + (\sqrt{3} - 2\sqrt{3})i \\ &= 5 - \sqrt{3}i \end{aligned}$$

## બે સંકર સંખ્યાઓનો ગુણાકાર :

ધારો કે  $z_1 = a + bi$  અને  $z_2 = c + di$  બે સંકર સંખ્યાઓ છે.

$$z_1 = (a, b), z_2 = (c, d)$$

$$\therefore z_1 z_2 = (ac - bd, ad + bc)$$

$$\therefore z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\text{ઉદાહરણ તરીકે, } (2 + \sqrt{3}i)(-3 + \sqrt{3}i) = (2 \times (-3) - \sqrt{3}\sqrt{3}) + (2\sqrt{3} + \sqrt{3} \times (-3))i \\ = (-6 - 3) + (2\sqrt{3} - 3\sqrt{3})i = -9 - \sqrt{3}i$$

વિભાજનનો નિયમ તથા જૂથનો નિયમ હોવાથી આપણે બે ક્રોસનો ગુણાકાર કરી સાહું રૂપ આપી શકીએ.

## બે સંકર સંખ્યાઓનો ભાગાકાર :

ધારો કે  $z_1$  અને  $z_2$  બે સંકર સંખ્યાઓ છે, જ્યાં  $z_2 \neq 0$ . તેમનો ભાગાકાર  $\frac{z_1}{z_2}$  નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાપિત થાય છે :

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = z_1 \frac{1}{z_2}$$

$$\text{ખરેખર, } \frac{1}{z} = z^{-1} = \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{bi}{a^2 + b^2}$$

$$\text{ઉદાહરણ તરીકે, } \frac{6 + 3i}{10 + 8i} = (6 + 3i)(10 + 8i)^{-1} \\ = (6 + 3i) \frac{(10 - 8i)}{164} \\ = \frac{60 + 30i - 48i - 24i^2}{164} \\ = \frac{84 - 18i}{164} \\ = \frac{21}{41} + \frac{(-9)}{82} i \quad (i^2 = -1)$$

## i ના ઘાતાંકો

સંકર સંખ્યાઓના પૂર્ણાંક ઘાતાંકો માટે આપણે ઘાતાંકના નિયમો સત્ય છે તે સ્વીકારી લઈશું.

આપણે જાણીએ છીએ કે  $i^2 = -1, i^3 = i^2i = -i, i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1, i^5 = i, i^6 = -1$  વગેરે.

યાદ રાખો,  $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$

$$\text{વળી, } i^{-1} = \frac{1}{i} \times \frac{i}{i} = \frac{i}{-1} = -i, i^{-2} = -1, i^{-3} = i, i^{-4} = 1 \text{ વગેરે.}$$

વ્યાપક રીતે, કોઈ પણ પૂર્ણાંક  $k$  માટે,  $i^{4k} = 1, i^{4k+1} = i, i^{4k+2} = -1, i^{4k+3} = -i$

ગણિતમાં **ત્રિવિધ વિકલ્પના** નિયમ (law of trichotomy) પ્રમાણે બે વાસ્તવિક સંખ્યાઓ માટે  $x < y, x = y$  અથવા  $x > y$  પેટી એક અને માત્ર એક જ વિકલ્પ શક્ય છે. આ ત્રિવિધ વિકલ્પનો નિયમ કોઈ પણ બે વાસ્તવિક સંખ્યાઓની સરખામણી કરવા માટેનો છે. આ નિયમ સંકર સંખ્યાઓ માટે સાચો નથી. C માં કમ નથી.

**ઉદાહરણ 2 :** કિંમત શોધો : (i)  $\left[ i^{19} + \left( \frac{1}{i} \right)^{25} \right]^2$       (ii)  $i^1 + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{1000}$

$$\text{ઉકેલ : (i) } \left[ i^{19} + \left( \frac{1}{i} \right)^{25} \right]^2 = \left[ i^{16} i^3 + \left( \frac{1}{i} \right)^{24} \left( \frac{1}{i} \right) \right]^2 \\ = (-i - i)^2 = (-2i)^2 = -4$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad & i^1 + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{997} + i^{998} + i^{999} + i^{1000} \\
 & = (i - 1 - i + 1) + (i - 1 - i + 1) + \dots + (i - 1 - i + 1) (250 \text{ કોણ સૂધી}) \\
 & = 0 + 0 + \dots + 0 = 0
 \end{aligned}$$

**સંકર સંખ્યાની અનુભદ સંખ્યા :**

જો  $z = (a, b) = a + bi$  તો તેની અનુભદ સંકર સંખ્યા  $a - bi = (a, -b)$  તરીકે વ્યાખ્યાયિત થાય છે. તેને સંકેતમાં  $\bar{z}$  વડે દર્શાવાય છે.

આપણે નોંધીએ કે  $z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2$ . આમ, કરુણીની ભાફક ટ એ સંમેખકારક અવધવની જેમ વર્તો છે.  $z\bar{z} = a^2 + b^2$  વાસ્તવિક સંખ્યા હોવાથી આપણે સંકર સંખ્યા  $\frac{p}{q}$  ને  $\frac{p\bar{q}}{q\bar{q}}$  તરીકે દર્શાવી શકીએ. આમ કરવાથી છેદ  $q\bar{q}$  વાસ્તવિક સંખ્યા બને. ચાલો આપણે આ સંકલ્પનાને કેટલાંક ઉદાહરણો દ્વારા સમજુએ.

**ઉદાહરણ 3 :** નીચેની સંખ્યાઓને  $a + ib$  સરફપમાં દર્શાવો,  $a, b \in \mathbb{R}$

$$(1) \frac{(2 - 8i)(7 + 8i)}{1 + i} \quad (2) (3 + 4i)^{-1} \quad (3) \frac{(1 + i)^3}{4 + 3i} \quad (4) \frac{1}{1 + \cos \theta - i \sin \theta}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ઉકેલ : } (1) \frac{(2 - 8i)(7 + 8i)}{1 + i} &= \frac{14 + 16i - 56i - 64i^2}{1 + i} \\
 &= \frac{14 - 40i + 64}{1 - i} \quad (i^2 = -1) \\
 &= \frac{78 - 40i}{1 - i} \\
 &= \frac{78 - 40i}{1 + i} \times \frac{1 - i}{1 - i} \quad (1 + i \text{ ની અનુભદ સંકર સંખ્યા વડે ગુણતાં અને ભાગતાં) \\
 &= \frac{78 - 78i - 40i + 40i^2}{1 - i^2} \\
 &= \frac{38 - 118i}{2} \\
 &= 19 - 59i
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad (3 + 4i)^{-1} = \frac{1}{3 + 4i} = \frac{1}{3 + 4i} \times \frac{3 - 4i}{3 - 4i} = \frac{3 - 4i}{9 - 16} = \frac{3 - 4i}{-7} = \frac{3}{7} - i\left(-\frac{4}{7}\right)$$

$$\text{અથવા સીધી રીતે, } (3 + 4i)^{-1} = \frac{3 - 4i}{3^2 + 4^2} = \frac{3 - 4i}{25} = \frac{3}{25} - \frac{4i}{25} \quad (z^{-1} \text{નું સૂત્ર})$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \frac{(1 + i)^3}{4 + 3i} &= \frac{1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot i + 3 \cdot 1 \cdot i^2 + i^3}{4 + 3i} \\
 &= \frac{1 + 3i - 3 - i}{4 + 3i} \\
 &= \frac{-2 + 2i}{4 + 3i} \\
 &= \frac{(-2 + 2i)(4 - 3i)}{(4 + 3i)(4 - 3i)} \\
 &= \frac{-8 + 8i - 6i - 6i^2}{16 - 9} \\
 &= -\frac{2}{25} + \frac{14}{25}i \quad (i^2 = -1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \frac{1}{1 + \cos\theta - i\sin\theta} &= \frac{1}{1 + \cos\theta - i\sin\theta} \times \frac{1 + \cos\theta + i\sin\theta}{1 + \cos\theta + i\sin\theta} \\
 &= \frac{1 + \cos\theta + i\sin\theta}{(1 + \cos\theta)^2 + \sin^2\theta} \\
 &= \frac{1 + \cos\theta + i\sin\theta}{1 + \cos^2\theta + 2\cos\theta + \sin^2\theta} \\
 &= \frac{1 + \cos\theta + i\sin\theta}{2 + 2\cos\theta} \\
 &= \frac{1 + \cos\theta}{2(1 + \cos\theta)} + i \frac{\sin\theta}{2(1 + \cos\theta)} \\
 &= \frac{1}{2} + i \frac{\sin\theta}{2(1 + \cos\theta)}
 \end{aligned}$$

**નોંધ :** પ્રકરણ 5 શીખ્યા પછી તમે  $\frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \tan\frac{\theta}{2}$  લખી શકશો.

**ઉદાહરણ 4 :** નીચેનાં સમીકરણોમાંથી  $x, y \in \mathbb{R}$  શોધો :

$$(1) \quad \frac{(1+i)x - 2i}{3+i} + \frac{(2-3i)y + i}{3-i} = -i \quad (2) \quad \frac{iy}{ix+1} - \frac{3y+4i}{3x+y} = 0$$

**ઉકેલ :** (1)  $\frac{(1+i)x - 2i}{3+i} + \frac{(2-3i)y + i}{3-i} = -i$

$$\therefore [x + (x-2)i](3-i) + [2y + (1-3y)i](3+i) = (3+i)(3-i)i$$

(બંને બાજુએ  $(3+i)(3-i)$  વડે ગુણતાં)

$$\therefore 3x + (x-2) + [3(x-2)-x]i + 6y - (1-3y) + [2y + 3(1-3y)]i = (9+1)i$$

$$\therefore (4x + 9y - 3) + (2x - 7y - 3)i = 10i$$

$$\therefore 4x + 9y - 3 = 0 \text{ અને } 2x - 7y - 3 = 10$$

(સંકર સંખ્યાઓની સમાનતા)

$$\therefore 4x + 9y - 3 = 0 \text{ અને } 2x - 7y - 13 = 0$$

ઉપરની સમીકરણ સંહતિને ઉકેલતાં,  $x = 3, y = -1$

$$(2) \quad \frac{iy}{ix+1} - \frac{3y+4i}{3x+y} = 0$$

$$\therefore iy(3x+y) - (3y+4i)(ix+1) = 0$$

(બંને બાજુ  $(ix+1)(3x+y)$  વડે ગુણતાં)

$$\therefore (-3y+4x) + i(3xy+y^2 - 3xy - 4) = 0 + i0$$

$$\therefore (-3y+4x) + i(y^2 - 4) = 0 + i0$$

$$\therefore -3y+4x = 0 \text{ અને } y^2 - 4 = 0$$

( $a + bi = 0 \Rightarrow a = 0, b = 0$ )

$$y^2 - 4 = 0 \text{ પરથી } y = \pm 2.$$

$$y = 2 \text{ માટે } x = \frac{3}{2} \text{ તથા } y = -2 \text{ માટે } x = -\frac{3}{2}.$$

$$\therefore \text{ઉકેલાણ } \left\{ \left( \frac{3}{2}, 2 \right), \left( -\frac{3}{2}, -2 \right) \right\} \text{ હો.$$

### સ્વાધ્યાય 2.1

1. નીચેની સંકર સંખ્યાઓને  $a + bi$  સ્વરૂપમાં દર્શાવો :

$$(1) (\sqrt{2} - i) - i(1 - \sqrt{2}i) \quad (2) (2 - 3i)(-2 + i)$$

$$(3) (3 + i)(3 - i)\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10}i\right) \quad (4) \frac{4+i}{2-3i} \quad ((2-3i)^{-1} \text{નો ઉપયોગ કરીને})$$

$$(5) \frac{1+2i}{3-4i} + \frac{2-i}{5i}$$

$$(6) \frac{5i}{(1-i)(2-i)(3-i)}$$

$$(7) (1-i)^4$$

$$(8) \left[ i^{17} - \left( \frac{1}{i} \right)^{34} \right]^2$$

$$(9) \left( \frac{4i^3 - 1}{2i+1} \right)^2$$

$$(10) \frac{(3+\sqrt{5}i)(3-\sqrt{5}i)}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)-(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)}$$

2. નીચેનાં સમીકરણોએથી  $x, y \in \mathbb{R}$  શોધો :

$$(1) x + 4yi = xi + y + 3$$

$$(2) (4+5i)x + (3-2i)y + i^2 + 6i = 0$$

$$(3) \frac{x}{1-i} + \frac{y}{1+i} = 1 + 3i$$

$$(4) (x^4 + 2xi) - (3x^2 + yi) = (3 - 5i) + (1 + 2yi)$$

$$(5) (3x - 2yi)(2 + i)^2 = 10(1 + i)$$

3. નીચેની સંકર સંખ્યાઓની વ્યસ્ત સંકર સંખ્યા મેળવો :

$$(1) 3 - 2i \quad (2) -1 + i\sqrt{3} \quad (3) \frac{4+3i}{5-3i} \quad (4) (2-3i)^2 \quad (5) -i$$

4. બતાવો કે, (1)  $Re(iz) = -Im(z)$     (2)  $Im(iz) = Re(z)$

5. ચકાસો કે સંકર સંખ્યાઓ જે જે સમીકરણ  $z^2 - 2z + 2 = 0$  નો ઉકેલ છે.

\*

## 2.6 અનુભવ સંકર સંખ્યા તથા સંકર સંખ્યાનો માનાંક

**અનુભવ સંકર સંખ્યા :** આપણે જાણીએ છીએ કે જો  $z = a + bi$  તો  $\bar{z} = a - bi$ .

ઉદાહરણ તરીકે,

$$(1) જો  $z = 3 + 5i$  તો  $\bar{z} = 3 - 5i$$$

$$(2) જો  $z = 5 - 3i$  તો  $\bar{z} = 5 + 3i$$$

$$(3) જો  $z = 3 = 3 + 0i$  તો  $\bar{z} = 3 - 0i = 3$$$

$$(4) જો  $z = 3i = 0 + 3i$  તો  $\bar{z} = 0 - 3i = -3i$$$

અનુભવ સંખ્યાઓનાં કેટલાંક મૂળભૂત પરિણામો નોંધીએ.

કોઈ પણ ગ્રાફ ગ્રાફ સંકર સંખ્યાઓ જે,  $z, z_1, z_2$  નીચેના ગુણધર્મો અસ્તિત્વ ધરાવે છે :

$$(1) \overline{(\bar{z})} = z$$

$$(2) \frac{z + \bar{z}}{2} = Re(z)$$

$$(3) \frac{z - \bar{z}}{2i} = Im(z)$$

$$(4) z = \bar{z} \Leftrightarrow z એ વાસ્તવિક સંખ્યા છે.$$

$$(5) \bar{z} = -z \Leftrightarrow z એ શુદ્ધ કાલ્યનિક સંખ્યા છે.$$

$$(6) \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$$

$$(7) \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

$$(8) \overline{\left( \frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, જ્યાં z_2 \neq 0$$

ઉપરના ગુણધર્મોની સાબિતી સરળ છે. ચાલો, આપણે કેટલાંક ગુણધર્મો સાબિત કરીએ :

પારો કે  $z = a + ib$

$$(1) \bar{z} = a - ib$$

$$\therefore \overline{(\bar{z})} = \overline{a - ib} = a + ib = z$$

$$(2) z + \bar{z} = a + ib + a - ib = 2a = 2Re(z) \quad (a = Re(z))$$

$$\therefore \frac{z + \bar{z}}{2} = Re(z)$$

$$(3) z - \bar{z} = a + ib - a - ib = 2ib = 2i Im(z) \quad (b = Im(z))$$

$$\therefore \frac{z - \bar{z}}{2i} = Im(z)$$

$$(4) z = \bar{z} \Leftrightarrow a + ib = a - ib \Leftrightarrow b = -b \Leftrightarrow 2b = 0 \Leftrightarrow b = 0.$$

આમ,  $z = \bar{z} \Leftrightarrow z$  એ વાસ્તવિક સંખ્યા છે.

### સંકર સંખ્યાનો માનાંક :

સંકર સંખ્યા  $z = a + ib$  નો માનાંક, નીચે મુજબ વાખ્યાપિત થાય છે :

$$z \text{ નો માનાંક} = \sqrt{a^2 + b^2}. z \text{ ના માનાંક માટેનો સંકેત } |z| \text{ છે.}$$

$$\therefore |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \text{ જ્યાં } z = a + bi$$

આપણે નોંધોએ કે,  $|z|$  એ વાસ્તવિક સંખ્યા છે અને  $|z| \geq 0 \quad \forall z \in C$ .

ઉદાહરણ તરીકે, જો  $z = 3 + 4i$  હોય તો,

$$|z| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

જો  $z$  વાસ્તવિક સંખ્યા હોય (એટલે કે  $z = a + 0i$ ) તો,  $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$  જ્યાં  $z$  નો માનાંક  $|z|$  એ સંકર સંખ્યાનો માનાંક છે અને  $a$  નો માનાંક  $|a|$  એ વાસ્તવિક સંખ્યાનો માનાંક છે. (આપણે જાહીએ છીએ કે કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા  $a$  માટે  $\sqrt{a^2} = |a|$ ).

### સંકર સંખ્યાના માનાંકના ગુણધર્મો :

$$(1) |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

$$(2) |z| \geq |Re(z)|, |z| \geq |Im(z)|$$

$$(3) z\bar{z} = |z|^2$$

$$(4) |z| = |\bar{z}|$$

$$(5) |z| = |-z|$$

$$(6) \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}, \text{ જ્યાં } z_2 \neq 0$$

$$(7) |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$(8) \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \text{ જ્યાં } z_2 \neq 0$$

$$(9) |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

(નિકોણીય અસમતા) (શા માટે નિકોણીય ?)

$$(10) |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$

શાલો આપણે ઉપરના પેઢી કેટલાક ગુણધર્મો ચકાસીએ :

$$(1) |z| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ તથા } b = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

$$(2) |z|^2 = a^2 + b^2 = (Re(z))^2 + (Im(z))^2 \geq (Re(z))^2$$

$$\therefore |z| \geq |Re(z)|, \text{ તે જ રીતે } |z| \geq |Im(z)|$$

$$(3) z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

$$(4) |z| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ અને } |\bar{z}| = |a - bi| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$\text{તેથી } |z| = |\bar{z}|.$$

$$\begin{aligned}
 (7) \quad |z_1 z_2|^2 &= (z_1 z_2) (\overline{z_1 z_2}) \\
 &= (z_1 z_2) (\overline{z_1} \overline{z_2}) \\
 &= (z_1 \overline{z_1}) (z_2 \overline{z_2}) \\
 &= |z_1|^2 |z_2|^2
 \end{aligned}$$

$$\therefore |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$\begin{aligned}
 (9) \quad |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\
 &= z_1 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} + z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1} \\
 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2 \\
 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) \\
 &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1| |\overline{z_2}| \\
 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1| |z_2| \\
 &= (|z_1| + |z_2|)^2
 \end{aligned}$$

$$\therefore |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$(10) z_1 - z_2 + z_2 = z_1$$

$$\therefore |z_1 - z_2 + z_2| = |z_1| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|$$

$$\therefore |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$$

$$\text{ते } \forall \text{ शैरे, } |z_2| - |z_1| \leq |z_2 - z_1| = |z_1 - z_2|$$

परंतु,  $|z_1| - |z_2|$  अथवा  $|z_2| - |z_1| = ||z_1| - |z_2||$ . (जैसा कि  $a \in \mathbb{R}$  तो  $|a| = a$  or  $-a$ )  
 $\therefore ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$  अद्यते कि  $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$ .

**ઉદાહરણ 5 :** નીચેની સંખ્યાઓની અનુભવ સંકર સંખ્યા તથા માત્રાંક શોધો : (1)  $(2 - 3i)^2$  (2)  $\frac{-3 + 7i}{1 + i}$

**ઉકેલ :** (1)  $(2 - 3i)^2 = 4 - 12i - 9 = -5 - 12i$

$\therefore (2 - 3i)^2$  ની અનુભવ સંકર સંખ્યા  $-5 + 12i$  છે અને

$$|(2 - 3i)^2| = |2 - 3i|^2 = 4 + 9 = 13$$

(2) પ્રાર્થો કि  $z = \frac{-3 + 7i}{1 + i}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-3 + 7i}{1 - i} \times \frac{1 - i}{1 - i} \\
 &= \frac{-3 + 3i + 7i + 7}{1 - i^2} \\
 &= \frac{4 + 10i}{2} = 2 + 5i
 \end{aligned}$$

$(i^2 = -1)$

$$\therefore \bar{z} = 2 - 5i \text{ અને } |z| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$$

**અથવા**  $|z| = \frac{|-3 + 7i|}{|1 + i|} = \frac{\sqrt{49 - 9}}{\sqrt{2}} = \sqrt{29}$

**ઉદાહરણ 6 :** જો  $z = x + yi$  અને  $|3z| = |z - 4|$ , તો સાંભળ કરો કે  $x^2 + y^2 + x = 2$

**ઉકેલ :** અહીં  $|3z| = |z - 4|$

$$\therefore |3x + 3yi| = |(x - 4) + yi|$$

$$\therefore 3\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x - 4)^2 + y^2}$$

$$\therefore 9(x^2 + y^2) = (x - 4)^2 + y^2$$

$$\therefore 9x^2 + 9y^2 = x^2 - 8x + 16 + y^2$$

$$\therefore 8x^2 + 8y^2 + 8x = 16$$

$$\therefore x^2 + y^2 + x = 2$$

**ઉદાહરણ 7 :** જો  $z_1 = 3 + 4i$  અને  $z_2 = 12 - 5i$  તો ચકાસો કે

$$(1) \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2} \quad (2) |z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2| \quad (3) |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

અહીં,  $z_1 = 3 + 4i$  અને  $z_2 = 12 - 5i$

$$(1) z_1 z_2 = (3 + 4i)(12 - 5i) = 36 - 15i + 48i - 20i^2$$

$$= 36 - 15i + 48i + 20$$

$$= 56 + 33i$$

$$\therefore \overline{z_1 z_2} = 56 - 33i$$

$$\text{હવે, } \overline{z_1 z_2} = (3 - 4i)(12 + 5i) = 36 - 48i + 15i - 20i^2 = 56 - 33i$$

આમ,  $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$  ચકાસી શકાય છે.

$$(2) z_1 + z_2 = 3 + 4i + 12 - 5i = 15 - i$$

$$\therefore |z_1 + z_2| = \sqrt{225 + 1} = \sqrt{226}$$

$$\text{જીથી, } |z_1| = \sqrt{9 + 16} = 5, |z_2| = \sqrt{144 + 25} = 13$$

$$\text{આમ, } |z_1| + |z_2| = 5 + 13 = 18 = \sqrt{324}$$

$$\text{સ્પષ્ટ છે } \sqrt{226} < \sqrt{324}$$

આમ,  $|z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|$  ચકાસી શકાય છે.

$$(3) |z_1 z_2| = \sqrt{56^2 + 33^2} = \sqrt{3136 + 1089} = \sqrt{4225} = 65 \quad (\text{(1) પરથી})$$

$$\text{જીથી, } |z_1| |z_2| = 5 \cdot 13 = 65$$

આમ,  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$  ચકાસી શકાય છે.

**ઉદાહરણ 8 :** (1) જો  $z \in C$  અને  $|z + 3| \leq 8$ , તો  $|z - 2|$  ની મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ ક્રમતો શોધો.

(2) જો  $z \in C$  અને  $|z - 4| \leq 4$ , તો  $|z + 1|$  ની મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ ક્રમતો શોધો.

**ઉકેલ :** (1) અહીં  $|z + 3| \leq 8$

$$\begin{aligned} z - 2 &= |(z + 3) - 5| \leq |z + 3| + |-5| \\ &\leq 8 + 5 = 13 \end{aligned}$$

(ત્રિકોણીય અસમતા)

$$\therefore |z - 2| \leq 13$$

જો આપણે  $z = -11$  લઈએ, તો  $|z + 3| = |-11 + 3| = 8$  અને  $|z - 2| = 13$

$\therefore |z + 3| \leq 8$  શરતને આધીન  $|z - 2|$  ની મહત્વમાં કિમત 13 થાય.  $(z = -11$  માટે)

હવે,  $|z - 2| \geq 0$  એ હંમેશાં સત્ય છે.

$z = 2$  માટે  $|z + 3| \leq 8$  સત્ય છે અને  $|z - 2| = 0$ .

$|z + 3| \leq 8$  શરતને આધીન  $|z - 2|$  ની ન્યૂનત્વમાં કિમત 0 થાય.  $(z = 2$  માટે)

(2) અહીં  $|z - 4| \leq 4$

$$|z + 1| = |(z - 4) + 5| \leq |z - 4| + |5| \leq 4 + 5 = 9 \quad (\text{ત્રિકોણીય અસમતા})$$

$$\therefore |z + 1| \leq 9$$

જો આપણે  $z = 8$  લઈએ, તો  $|z - 4| = 4$  અને  $|z + 1| = 9$ .

$\therefore |z - 4| \leq 4$  શરતને આધીન  $|z + 1|$  ની મહત્વમાં કિમત 9 છે.  $(z = 8$  માટે)

હવે,  $|z + 1| \geq 0$ . જો આપણે  $z = -1$  લઈએ તો  $|z + 1| = 0$  થાય.

પરંતુ  $|z - 4| = |-1 - 4| = 5 \neq 4$ .

આમ,  $z = -1$  માટે  $|z - 4| \leq 4$  શરતનું પાલન થતું નથી.

$$\begin{aligned} \text{હવે, } |z + 1| &= |(z - 4) + 5| = |(z - 4) - (-5)| \geq ||z - 4| - |-5|| \\ &\quad (\|z_1 - z_2\| \geq ||z_1| - |z_2||) \\ &\geq 5 - 4 = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore |z + 1| \geq 1$$

જો આપણે  $z = 0$  લઈએ, તો  $|z - 4| = 4$  અને  $|z + 1| = 1$ .

$\therefore |z - 4| \leq 4$  શરતને આધીન  $|z + 1|$  ની ન્યૂનત્વમાં કિમત 1 થાય.  $(z = 0$  માટે)

**ઉદાહરણ 9 :**  $z \in C$  માટે  $\frac{z-1}{z+1}$  ( $z \neq -1$ ) એ શુદ્ધ કાલ્યનિક સંખ્યા હોય તો બતાવો કે,  $|z| = 1$ .

**ઉકેલ :** ધારો કે  $z = x + iy$ .

$$\therefore \frac{z-1}{z+1} = \frac{x+iy-1}{x+iy+1} = \frac{(x-1)+iy}{(x+1)+iy} \times \frac{(x+1)-iy}{(x+1)-iy} = \frac{(x^2+y^2-1)+2iy}{(x+1)^2+y^2}$$

$\frac{z-1}{z+1}$  શુદ્ધ કાલ્યનિક સંખ્યા હોવાથી,  $Re\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = 0$ .

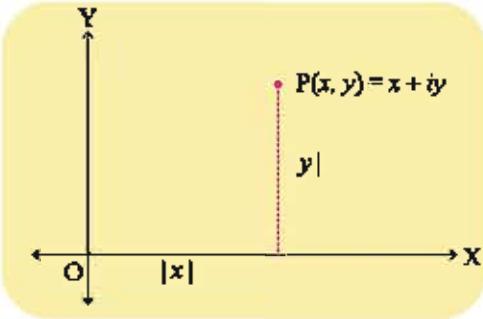
$$\therefore \frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2} = 0$$

$$\therefore x^2+y^2 = 1$$

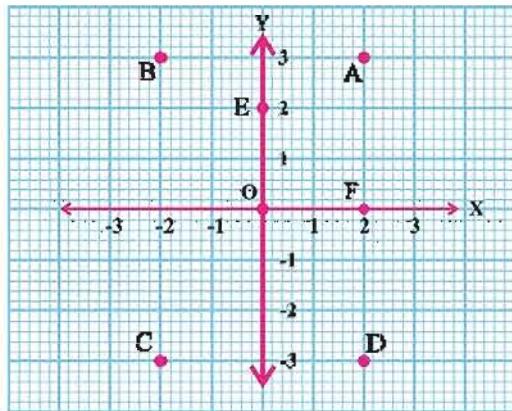
$$\therefore |z| = 1. \quad (\|z\| = \sqrt{x^2+y^2})$$

## 2.7 આર્ગાન્ડ આકૃતિ અને ધૂવીય સ્વરૂપ

એતિહાસિક રીતે જોતાં સંકર અંભ્યાનું સમતલના બિંદુ તરીકેનું ભૌમિકિક નિરૂપણ ઉપયોગી છે, કારણ કે સંકર સંખ્યાને  $R^2$  માં ક્રમયુક્ત જોડ તરીકે દર્શાવવાથી તેની સાથે ભૌમિકિની સંકળનાને જોડી શકાય છે. આપણે જાણીએ છીએ કે વાસ્તવિક સંખ્યાઓની ક્રમયુક્ત જોડ અને XY-સમતલનાં બિંદુઓ વચ્ચે એક-એક સંગતતા છે. સંકર સંખ્યા  $x + iy$  ને સંગત ક્રમયુક્ત જોડ  $(x, y)$  ને XY-સમતલના અનન્ય બિંદુ  $P(x, y)$  તરીકે ભૌમિકિ રીતે દર્શાવી શકાય તેમજ XY-સમતલના બિંદુ  $P(x, y)$  ને સંગત અનન્ય સંકર સંખ્યા  $x + iy$  મળે. (જુઓ આકૃતિ 2.1.)



આકૃતિ 2.1



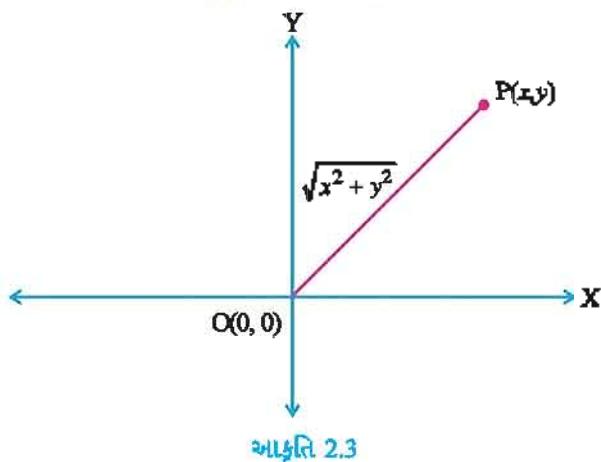
આકૃતિ 2.2

સંકર સંખ્યાઓ જેવી કે  $2 + 3i$ ,  $-2 + 3i$ ,  $-2 - 3i$ ,  $2 - 3i$ ,  $0 + 2i$ ,  $2 + 2i$  એટલે કે ક્રમયુક્ત જોડ  $(2, 3)$ ,  $(-2, 3)$ ,  $(-2, -3)$ ,  $(2, -3)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(2, 0)$  ને સંગત બિંદુઓ અનુક્રમે A, B, C, D, E, F આકૃતિ 2.2 માં દર્શાવેલ છે.

યાદું સમતલના પ્રતેક બિંદુને અનન્ય સંકર સંખ્યા સાથે સંગત કરી શકાય છે અને તેને સંકર સમતલ (Complex plane) અથવા આર્ગન્ડ સમતલ (Argand plane) કહેવાય છે. X-અક્ષ પરના બિંદુઓને સંગત સંકર સંખ્યા  $a + bi$  (વાસ્તવિક સંખ્યા) સ્વરૂપમાં હોય છે અને Y-અક્ષ પરના બિંદુઓને સંગત સંકર સંખ્યા  $a + bi$  (શૂદ્ધ કાલ્યાનિક સંખ્યા) સ્વરૂપમાં હોય છે. આર્ગન્ડ સમતલમાં X-અક્ષ અને Y-અક્ષને અનુક્રમે વાસ્તવિક અક્ષ તથા કાલ્યાનિક અક્ષ કહેવાય છે.

(જેન રોબર્ટ આર્ગન્ડ (Jean-Robert Argand) (1768 - 1822) એક પ્રતિબાધારી ગણિતજ્ઞ હતો. 1806 માં ફરારે તે પેરિસમાં એક પુસ્તકની દુકાન સંલાયતો હતો ત્યારે તેણે સંકર સંખ્યાઓના બૌધ્યાત્મક નિરૂપજ્ઞનો ખ્યાલ આપ્યો તે નિરૂપજ્ઞને આપણે આર્ગન્ડ આકૃતિ તરીકે ઓળખીએ છીએ.)

### સંકર સંખ્યાના માનાંકનું ભૌગોલિક નિરૂપજ્ઞ :

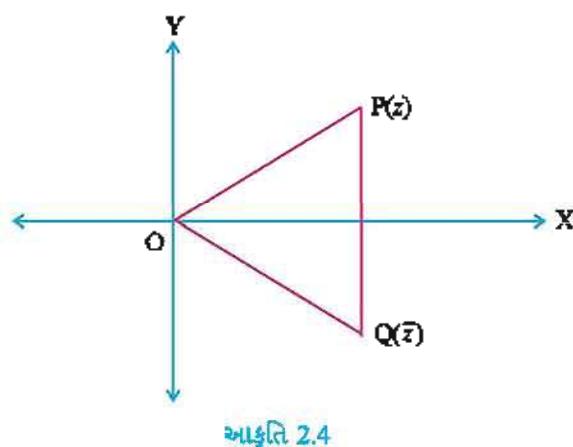


આકૃતિ 2.3

આર્ગન્ડ આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ સંકર સંખ્યા  $x + iy$  નો માનાંક એ ઊંઘમણિકું O(0,0) થી P(x,y) વર્ગોનું અંતર દર્શાવે છે. (આકૃતિ 2.3)

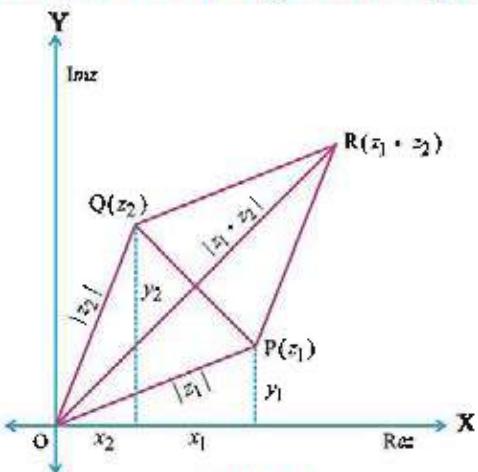
### અનુભવ સંકર સંખ્યાનું ભૌગોલિક નિરૂપજ્ઞ :

સંકર સંખ્યા  $z = x + iy$  અને તેની અનુભવ સંકર સંખ્યા  $\bar{z} = x - iy$  ને આર્ગન્ડ આકૃતિમાં અનુક્રમે બિંદુઓ P(x,y) અને Q(x,-y) વડે દર્શાવાય છે. ભૌગોલિક રીતે બિંદુ Q(x,-y) ને બિંદુ P(x,y) નું વાસ્તવિક અક્ષને આપેલ આરસી પ્રતિનિંબ (Mirror Image) કહેવાય છે. (આકૃતિ 2.4)



આકૃતિ 2.4

## દ્વારા સંકર સંખ્યાઓના સરવાળાનું ભૌમિતિક નિરૂપણ :



આકૃતિ 2.5

આકૃતિ 2.5 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે આર્ગાન્ડ સમતલમાં  $P, Q$  તથા  $R$  અનુક્રમે  $z_1, z_2$  તથા  $z_1 + z_2$  દર્શાવે છે, જ્યાં  $z_1 = x_1 + iy_1$  તથા  $z_2 = x_2 + iy_2$  છે.  $\overline{OR}$  તથા  $\overline{PQ}$  નું મધ્યબિંદુ  $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$  છે.

$\therefore \overline{OR} \text{ તથા } \overline{PQ}$  પરસ્પર દુલ્લાઙે છે.

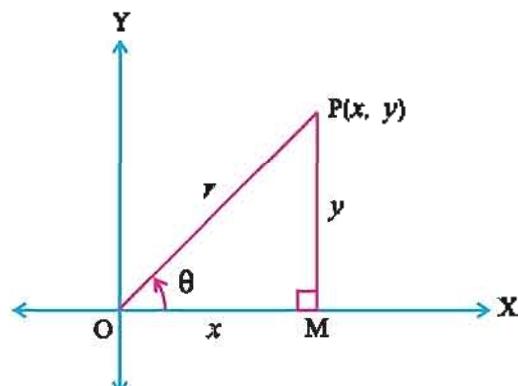
$\therefore OPRQ$  સ.બા.ચ. છે.

થાં,  $O, P, Q$  સમર્દેખ નથી એમ ધારી લેવામાં આવ્યું છે.

ભૌમિતિક રીતે અનુક્રમે  $z_1, z_2$  અને  $z_1 + z_2$  ના માનાંક  $|z_1| = OP, |z_2| = OQ = PR$  અને  $|z_1 + z_2| = OR$ . છે. આપણે જાહીએ છીએ કે ટિકોણની બે બાજુઓના ભાગનો સરવાળો તેની ત્રીજી બાજુના ભાગ કરતા ઘોટો હોય છે. તેવી  $\Delta ORP$  માં  $OR < OP + PR$ . આથી  $|z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|$ . આ કારણથી સંકર સંખ્યાઓની આ અસમતાને ટિકોણીય અસમતા કહે છે. (ખરેખર તો ટિકોણીય અસમતા  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$  છે. તેમાં સમાનતા ક્યારે થાય ?)

### સંકર સંખ્યાનું ઝુલીપ સ્વરૂપ :

સંકર સંખ્યા  $z = x + iy$  ને બીજા એક સ્વરૂપમાં દર્શાવી રહ્યા છે. તેને સંકર સંખ્યાનું ઝુલીપ સ્વરૂપ (Polar form) કહેવાય છે. ચાલો આપણે કોઈ પદ્ધતિ સંકર સંખ્યાને તેના ઝુલીપ સ્વરૂપમાં કેવી રીતે દર્શાવી રહ્યા રહ્યા તે સમજું. ખારો કે સંકર સંખ્યા  $x + iy$  ને આર્ગાન્ડ આકૃતિમાં બિંદુ  $P(x, y)$  વડે દર્શાવી છે. (આકૃતિ 2.6)  $\overline{PM} \perp \overline{OX}$  દોરો  $M \in \overline{OX}$  માટે  $OM = x$  અને  $PM = y$ . ખારો કે  $OP = r$  અને  $m\angle MOP = \theta$ . તો  $x = r \cos \theta$  અને  $y = r \sin \theta$ .



આકૃતિ 2.6

**નોંધ :** અહીં  $P$  પ્રથમ ચરણમાં છે તથા  $x > 0, y > 0$  છે. પરંતુ જો  $P(x, y)$  આર્ગાન્ડ સમતલનું ઉંગમણિંદુ સિવાયનું કોઈ પદ્ધતિ હોય તો પણ  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  સત્ય છે.

$$\therefore z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\text{અહીં, } r^2 = x^2 + y^2.$$

$$(r = OP > 0)$$

$$\therefore r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(r > 0)$$

$$\therefore r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| \text{ અને } \tan \theta = \frac{y}{x}.$$

સંકર સંખ્યા  $z = x + iy$  ના  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  સ્વરૂપને તેનું ઝુલીપ સ્વરૂપ (Polar Form) કહેવાય છે. થી ને  $z$  નો કોષાંક (Argument) કહે છે, તેને સ્કેટમાં  $\arg(z)$  વડે દર્શાવાય છે.  $\cos \theta$  અને  $\sin \theta$  વિષેષો આવતી હોવાથી  $x = r \cos \theta$  અને  $y = r \sin \theta$  નું સમાધાન કરે તેવી થાં એ કોઈ કિનતો મળે. આવો દરેક થાં એ  $z$  નો કોષાંક છે.  $x = r \cos \theta$  અને  $y = r \sin \theta$  નું સમાધાન કરતી થાં એ અનન્ય કિનત  $-\pi < \theta \leq \pi$  માં આવેલી હોય તે કિનતને  $z$  નો ઝુલીપ કોષાંક

**(Principal argument)** કહેવાય છે. જ્યારે આપણે કોઈ પણ સંકર સંખ્યાને તેના પુરુષ સ્વરૂપમાં દર્શાવીનો ત્યારે  $\arg(z)$  નો મુખ્ય કોષાંક જ લઈશું. જો અન્યથા દર્શાવેલ ન હોય તો સંકેત  $\arg(z)$  નો અર્થ  $\arg(z)$  નો મુખ્ય કોષાંક. જ્યારે આપણે  $\arg(z)$ -ની ઉમેત શોધીએ ત્યારે બિંદુ  $P(x, y)$ નું સ્થાન સમતલમાં ક્યારે આવેલું છે તેનું સ્થાન રાખવું જોઈએ.

આપણે નોંધીએ કે, સંકર સંખ્યા 0 નો કોષાંક વ્યાખ્યાપિત નથી. (કેમ ?)

$$\arg(x + iy) = \begin{cases} 0, & \text{જો } x > 0 \\ \pi, & \text{જો } x < 0 \end{cases} \quad \arg(0 + iy) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{જો } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{જો } y < 0 \end{cases}$$

∴ એન વાસ્તવિક સંખ્યાનો મુખ્ય કોષાંક 0 અને ઋષા વાસ્તવિક સંખ્યાનો મુખ્ય કોષાંક  $\pi$  છે. તે જ રીતે શુદ્ધ કાલ્યનિક સંખ્યા  $yi$  નો મુખ્ય કોષાંક  $y > 0$  માટે  $\frac{\pi}{2}$  છે અને  $y < 0$  માટે  $-\frac{\pi}{2}$  છે.

વળી,  $\cos\theta = \frac{x}{r}$ ,  $\sin\theta = \frac{y}{r}$  તથા  $-\pi < \theta \leq \pi$ .

(i) જો  $x > 0, y > 0$  તો,  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  થાપ તેવો  $\theta$  મળો કે જેથી  $\cos\theta = \frac{x}{r}$ ,  $\sin\theta = \frac{y}{r}$ .

(ii) જો  $x < 0, y > 0$  તો  $\alpha$  શોધો કે જેથી  $\cos\alpha = \frac{|x|}{r}$ ,  $\sin\alpha = \frac{|y|}{r}$ .

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ .  $\theta = \pi - \alpha$  મળો કે જેથી  $\cos\theta = \frac{x}{r}$ ,  $\sin\theta = \frac{y}{r}$ .

(iii) જો  $x < 0, y < 0$  તો  $\alpha$  શોધો કે જેથી  $\cos\alpha = \frac{|x|}{r}$ ,  $\sin\alpha = \frac{|y|}{r}$ .

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ .  $\theta = -\pi + \alpha$  મળો કે જેથી  $\cos\theta = \frac{x}{r}$ ,  $\sin\theta = \frac{y}{r}$ .

(iv) જો  $x > 0, y < 0$  તો  $\alpha$  શોધો કે જેથી  $\cos\alpha = \frac{|x|}{r}$ ,  $\sin\alpha = \frac{|y|}{r}$ .

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ .  $\theta = -\alpha$  મળો કે જેથી  $\cos\theta = \frac{x}{r}$ ,  $\sin\theta = \frac{y}{r}$ .

**ઉદાહરણ 10 :** નીચેની સંકર સંખ્યાઓને પુરુષ સ્વરૂપમાં વિકાર કરો. દરેકના માનાંક તથા મુખ્ય કોષાંક પણ મેળવો :

(1)  $1+i$       (2)  $-1+\sqrt{3}i$       (3)  $-\sqrt{3}-i$       (4)  $1-i$

(5)  $-3$       (6)  $-2i$       (7)  $1$       (8)  $2i$

**ઉકેલ :** (1) ધારો કે  $z = 1+i = x+iy$

∴  $x=1, y=1$

∴  $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  તથા  $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

∴  $P(\theta)$  નું સ્થાન પ્રથમ ચર્ચામાં છે.

∴  $\theta = \frac{\pi}{4}$

∴  $z$  નું પુરુષ સ્વરૂપ  $\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$  છે.

$|z| = r = \sqrt{2}$ ,  $\arg z = \theta = \frac{\pi}{4}$ .

(2) ધારો કે  $z = -1+\sqrt{3}i = x+iy$

∴  $x=-1, y=\sqrt{3}$ .

∴  $r = |z| = \sqrt{1+3} = 2$

$$\cos\theta = \frac{-1}{r} = \frac{-1}{2} \text{ અને } \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \cos\alpha = \frac{1}{2}, \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (|x| = 1, |y| = \sqrt{3})$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$x < 0$  તથા  $y > 0$  હોવાથી, P( $\theta$ ) દ્વિતીય ચરણમાં છે.

$$\therefore \theta = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore z \text{ નું પ્રૂવીય સ્વરૂપ } 2 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \ છે.$$

$$\therefore |z| = r = 2, \arg z = \theta = \frac{2\pi}{3}.$$

(3) ધારો કે  $z = -\sqrt{3} - i = x + iy$

$$\therefore x = -\sqrt{3}, y = -1$$

$$\therefore r = |z| = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \text{ અને } \sin\theta = \frac{-1}{2}$$

$$\therefore \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\alpha = \frac{1}{2} \quad (|x| = \sqrt{3}, |y| = 1)$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$x < 0$  તથા  $y < 0$  હોવાથી, P( $\theta$ ) ત્રોજા ચરણમાં છે.

$$\theta = -\pi + \alpha = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$$

$$\therefore z \text{ નું પ્રૂવીય સ્વરૂપ } 2 \left( \cos \left( -\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left( -\frac{5\pi}{6} \right) \right)$$

$$\text{હળો, } |z| = r = 2, \arg z = \theta = -\frac{5\pi}{6}.$$

(4) ધારો કે  $z = 1 - i = x + iy$

$$\therefore x = 1, y = -1$$

$$\therefore r = |z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ અને } \sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (|x| = 1, |y| = 1)$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$x > 0$  તથા  $y < 0$  હોવાથી, P( $\theta$ ) ચતુર્થ ચરણમાં છે.

$$\therefore \theta = -\alpha = -\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore z \text{ નું પ્રૂવીય સ્વરૂપ } \sqrt{2} \left( \cos \left( -\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$\text{હળો, } |z| = r = \sqrt{2}, \arg z = \theta = -\frac{\pi}{4}.$$

(5) ધારો કે  $z = -3$ . અહીં  $z = x + iy$  તથા  $x < 0$ .

આથી તેનું પ્રૂવીય સ્વરૂપ  $z = 3(\cos\pi + i \sin\pi)$  ધાર્ય.

$$\text{હળો, } |z| = 3, \arg z = \theta = \pi.$$

(6) ધરો કે  $z = -2i$ . અહીં  $z = 0 + iy$  તથા  $y < 0$ . આથી તેનું પ્રવીષ સ્વરૂપ

$$2 \left( \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) ધાય.$$

$$\text{વળી, } |z| = 2, \arg z = \theta = -\frac{\pi}{2}.$$

(7) ધરો કે  $z = 1$ . અહીં  $z = x + iy$  તથા  $x > 0$ . આથી તેનું પ્રવીષ સ્વરૂપ  $1(\cos 0 + i \sin 0)$  ધાય.

$$\text{વળી, } |z| = 1, \arg z = \theta = 0.$$

(8) ધરો કે  $z = 2i$ . અહીં  $z = 0 + iy$  તથા  $y > 0$ . આથી તેનું પ્રવીષ સ્વરૂપ  $2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right)$  ધાય.

$$\text{વળી, } |z| = 2, \arg z = \theta = \frac{\pi}{2}.$$

## સ્વાધ્યાય 2.2

1. નીચેની સંકર સંખ્યાઓના માનાંક તથા મુખ્ય કોશાંક શોધો :

$$(1) \frac{1+7i}{(2-i)^2} \quad (2) \left(\frac{2+i}{3-i}\right)^2 \quad (3) \sqrt{3} - i \quad (4) \frac{(1+i)(1+\sqrt{3}i)}{1-i} \quad (5) -3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$$

2. જો  $z = 3 + 2i$ , તો નીચેનાં પરિણામ ચકાસો.

$$(1) |z| = |\bar{z}| \quad (2) -|z| \leq \operatorname{Re}(z) \leq |z| \quad (3) z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

3. જો  $z_1 = 3 + 2i$  અને  $z_2 = 2 - i$ , તો નીચેનાં પરિણામ ચકાસો :

$$(1) \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad (2) \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2 \quad (3) \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \quad (4) \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

4. જો  $z$  એ શૂન્યેતર સંકર સંખ્યા હોય, તો બતાવો કે  $\overline{(z^{-1})} = (\bar{z})^{-1}$

5. જો  $(a+ib)^2 = \frac{1+i}{1-i}$ , હોય તો બતાવો કે  $a^2 + b^2 = 1$ .

6.  $z_1$  અને  $z_2$  એવી સંકર સંખ્યાઓ છે કે જેથી  $|z_1| = |z_2|$ . તો  $z_1 = z_2$  સાબિત થાય ? કેમ ?

7. જો સંકર સંખ્યા  $z = a + ib$  માટે,  $\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{\pi}{4}$  તો સાબિત કરો કે,  $a^2 + b^2 = 2b = 1$ .

8. જો  $z \in C$ ,  $|z| \leq 3$  હોય તો  $|1+z+z^2+z^3|$  ની મહત્વમાં કિંમત શોધો.

9. (1) જો  $z = a + ib$  અને  $2|z-1| = |z-2|$ , તો સાબિત કરો કે  $3(a^2 + b^2) = 4a$

(2) જો  $z \in C$  હોય, અને  $|2z-3| = |3z-2|$ , તો સાબિત કરો કે  $|z| = 1$ .

(3) જો  $z \in C$  હોય, અને  $|2z-1| = |z-2|$ , તો સાબિત કરો કે  $|z| = 1$ .

10. સાબિત કરો કે સંકર સંખ્યા  $-3 + 2i$  એ  $1 + 4i$  કરતાં ઊગમણિદુષી વધુ નાણક છે.

11. સંખ્યાઓ  $-2 + 3i$ ,  $-2 - i$  અને  $4 - i$  ને આર્ગન્ડ આકૃતિમાં દર્શાવો અને સાબિત કરો કે તે કાટકોણ ટ્રિકોણનાં ગિરોબિંદુઓ છે.

12. જેનો માનાંક 4 અને મુખ્ય કોશાંક  $\frac{5\pi}{6}$  હોય તેવી સંકર સંખ્યા શોધો.

13. જો  $z_1$  અને  $z_2$  એક્ઝીજની અનુભવ સંકર સંખ્યા હોય તથા  $(1 - 5i)z_1 - 2z_2 = 3 - 7i$  હોય, તો  $z_1$  અને  $z_2$  શોધો.

14. જો  $(a+ib)^2 = x+iy$  હોય, તો સાબિત કરો કે  $x^2 + y^2 = (a^2 + b^2)^2$ .

15. જો  $\frac{(1+i)^2}{2-i} = x+iy$  હોય, તો  $x+y$  ની કિંમત શોધો.

\*

## 2.8 સંકર સંખ્યાનું વર્ગમૂળ

જો  $(a + ib)^2 = z = x + iy$ , તો આપણે  $a + ib$  ને  $z = x + iy$  નું વર્ગમૂળ કહીશું.

ધારો કે  $z = x + iy$ . ધારો કે  $z$  નું વર્ગમૂળ સંકર સંખ્યા  $a + ib$  છે. (જો અસ્તિત્વ પદ્ધતે તો)

$$\therefore x + iy = (a + ib)^2$$

$$\therefore x + iy = (a^2 - b^2) + (2ab)i$$

$$\therefore a^2 - b^2 = x \text{ અને } 2ab = y \quad (i)$$

$$\text{હવે, } a^2 + b^2 = \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| \quad ((i) \text{ પરથી}) \quad (ii)$$

$$(i) \text{ અને } (ii) \text{ પરથી } 2a^2 = |z| + x \text{ એટલે કે, } a = \pm \sqrt{\frac{|z|+x}{2}} \text{ અને } b = \pm \sqrt{\frac{|z|-x}{2}}$$

જો  $y > 0$ , તો  $a$  અને  $b$  બંને ધન અથવા બંને ઋષા

$$\therefore x + iy \text{ નાં વર્ગમૂળ } \pm \left( \sqrt{\frac{|z|+x}{2}} + i\sqrt{\frac{|z|-x}{2}} \right)$$

જો  $y < 0$ , તો  $a$  અને  $b$  પેકી એક ધન અને બીજો ઋષા હોય.

$$\therefore x + iy \text{ નાં વર્ગમૂળ } \pm \left( \sqrt{\frac{|z|+x}{2}} - i\sqrt{\frac{|z|-x}{2}} \right) \text{ થાય.}$$

હવે, આપણે સાધિત કર્યું કે દરેક સંકર સંખ્યાને બે વર્ગમૂળ મળે છે.

**ઉદાહરણ 11 :** નીચેની સંખ્યાઓનાં વર્ગમૂળ મેળવો : (1)  $\sqrt{3} - i$  (2)  $7 + 24i$

**ઉકેલ :** (1) : ધારો કે  $z = \sqrt{3} - i$ . અહીં  $x = \sqrt{3}$  તથા  $y = -1 < 0$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\text{આપણે જાણીએ છીએ કે જો } y < 0 \text{ હોય તો } x + iy \text{ નાં વર્ગમૂળ } \pm \left( \sqrt{\frac{|z|+x}{2}} - i\sqrt{\frac{|z|-x}{2}} \right)$$

$$\text{આમ, } \sqrt{3} - i \text{ નાં વર્ગમૂળ } \pm \left( \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} - i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} \right).$$

$$\text{હવે, } 2 + \sqrt{3} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}$$

$$\therefore \sqrt{3} - i \text{ નાં વર્ગમૂળ } \pm \left( \frac{\sqrt{3}+1}{2} - i\frac{\sqrt{3}-1}{2} \right) \text{ હૈ.} \quad (\sqrt{2}\sqrt{2} = 2 \text{ લીધાં છે.})$$

(2) ધારો કે  $z = 7 + 24i$ . અહીં  $x = 7$ ,  $y = 24 > 0$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{49+576} = 25$$

$$\text{આપણે જાણીએ છીએ કે જો } y > 0, \text{ હોય તો } x + iy \text{ નાં વર્ગમૂળ } \pm \left( \sqrt{\frac{|z|+x}{2}} + i\sqrt{\frac{|z|-x}{2}} \right)$$

$$\text{આમ, } 7 + 24i \text{ નાં વર્ગમૂળ } \pm \left( \sqrt{\frac{25+7}{2}} + i\sqrt{\frac{25-7}{2}} \right) = \pm(4 + 3i) \text{ હૈ.}$$

**ઉદાહરણ 12 :** નીચેની સંખ્યાઓનાં વર્ગમૂળ શોધો : (1) 1 (2) -1 (3)  $i$  (4)  $-i$

(1) ધારો કે  $z = 1$

$\therefore |z| = 1$ . ધારો કે  $z$  નું વર્ગમૂળ  $a + ib$  છે.

$$\therefore (a + ib)^2 = 1$$

$$\therefore a^2 - b^2 + 2abi = 1 = 1 + 0i$$

$$\therefore a^2 - b^2 = 1, 2ab = 0, 2ab = 0 \text{ પરથી } a = 0 \text{ અથવા } b = 0.$$

$a = 0$  પરથી  $-b^2 = 1$ . પરંતુ  $b \in \mathbb{R}$  હોવાથી તે શક્ય નથી.

$$\therefore 2ab = 0 \text{ પરથી } b = 0. \text{ આમ } a^2 - b^2 = 1 \text{ માં } b = 0 \text{ લેતાં,$$

$$a^2 = 1$$

$$\therefore a = \pm 1$$

$$\therefore a + ib = \pm 1$$

$$\therefore 1 \text{ નાં વર્ગમૂળ } \pm 1 \text{ છે.}$$

**નોંધ :** આપણો જાણીએ છીએ કે,  $\mathbb{R}$  માં 1 નાં વર્ગમૂળ  $\pm 1$  છે.

(2) ધરો કે  $z = -1$ . ધરો કે  $z$  નું વર્ગમૂળ  $a + ib$  છે.

$$\therefore (a + ib)^2 = -1$$

$$\therefore a^2 - b^2 + 2abi = -1$$

$$\therefore a^2 - b^2 = -1, 2ab = 0$$

$$2ab = 0 \text{ પરથી } a = 0 \text{ અથવા } b = 0$$

પરંતુ  $b = 0$  પરથી  $a^2 = -1$  જે  $a \in \mathbb{R}$  માટે શક્ય નથી.

$$\therefore a = 0 \text{ અને } b^2 = 1$$

$$\therefore b = \pm 1$$

$\therefore -1$  નાં વર્ગમૂળ  $\pm i$  છે. (જે આપણી ધરણા મુજબ યથાર્થ છે, કારણ કે  $i^2 = -1$ )

યાદ રાખો કે  $i^2 = -1$ .

તે જ રીતે  $-4$  નાં વર્ગમૂળ  $\pm 2i$

$$-3 \text{ નાં વર્ગમૂળ } \pm \sqrt{3}i$$

(3) ધરો કે  $i$  નું વર્ગમૂળ  $a + ib$  છે.

$$\therefore (a + ib)^2 = i$$

$$\therefore a^2 - b^2 + 2iab = i$$

$$\therefore a^2 - b^2 = 0 \text{ અને } 2ab = 1$$

$$\therefore a = b \text{ અથવા } a = -b$$

પરંતુ  $a = -b$  પરથી  $-2a^2 = 1$  કારણ કે  $2ab = 1$ . આ શક્ય નથી.

$$\therefore a = b \text{ અને } 2a^2 = 1$$

$$\therefore a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ તથા } a = b \text{ હોવાથી } b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore i \text{ નાં વર્ગમૂળ } \pm \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right).$$

(4)  $z = -i$  આગળ (3)ની જેમ  $a^2 - b^2 = 0, 2ab = -1$

$$\therefore a = b \text{ અથવા } a = -b$$

જે  $a = b$  તો  $2a^2 = -1$  જે શક્ય નથી.

$$\therefore a = -b \text{ તથા } 2a^2 = 1$$

$$\therefore a = \frac{1}{\sqrt{2}}, b = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ અથવા } a = -\frac{1}{\sqrt{2}}, b = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore -i \text{ નાં વર્ગમૂળ } \pm \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \text{ છે.}$$

## 2.9 સંકર બીજ ધરાવતાં દ્વિધાત સમીકરણો

આપણે દ્વિધાત સમીકરણોનો અભ્યાસ કરી ગયાં. જ્યારે વિશેષક અનુષ્ઠાની હોય એટલે કે  $D \geq 0$  હોય ત્યારે તેમના ઉકેલોની અચ્છી હતી. હવે આપણે અનુત્તર પ્રશ્નનો જવાબ આપી શકીશું.  $D < 0$  હોય તો શું?

આપણે દ્વિધાત સમીકરણ  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$  નો ઉકેલ જ્યારે  $D = b^2 - 4ac < 0$  હોય ત્યારે મેળવવાનો પ્રયત્ન કરીએ.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= \frac{1}{a} (a^2x^2 + abx + ac) \\ &= \frac{1}{a} \left[ \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + ac - \frac{b^2}{4}\right] \\ &= \frac{1}{a} \left[ \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4}\right] \end{aligned}$$

જો  $ax^2 + bx + c = 0$  તો  $\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4}$

હવે,  $b^2 - 4ac < 0$ .

$$\therefore \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 નું વર્ગમૂળ અથવા \frac{b^2 - 4ac}{4} નું વર્ગમૂળ છે, જે \frac{\pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2} છે.$$

$$\therefore ax + \frac{b}{2} = \frac{\pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2}$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad (a \neq 0)$$

આમ, જો  $D < 0$  હોય, તો  $ax^2 + bx + c = 0$  નાં બીજ  $\frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a}$  હૈ.

**બીજગણિતનો મૂળભૂત પ્રમેય :**

સંકર સહગુણકોવાળા અને એક અથવા એક કરતાં વધારે ઘાતવાળા દરેક બહુપદીય સમીકરણને ઓછામાં ઓછું એક સંકર બીજ હોય છે.

**ઉદાહરણ 13 :** ઉકેલો : (1)  $x^2 + 3 = 0$  (2)  $2x^2 + x + 1 = 0$  (3)  $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{2}x + 3\sqrt{3} = 0$ .

**ઉકેલ :** (1)  $x^2 + 3 = 0$

$$\therefore x^2 = -3$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{3}i$$

(2) અહીં,  $a = 2$ ,  $b = 1$ ,  $c = 1$

$$\therefore b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -7 < 0$$

$$\therefore માંગેલ ઉકેલ, x = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{4}$$

(3) અહીં,  $a = \sqrt{3}$ ,  $b = -\sqrt{2}$ ,  $c = 3\sqrt{3}$

$$\therefore b^2 - 4ac = 2 - 4\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2 - 36 = -34 < 0$$

$$\therefore માંગેલ ઉકેલ, x = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a} = \frac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{34}}{2\sqrt{3}} = \frac{1 \pm \sqrt{17}i}{\sqrt{6}}$$

## 2.10 1 નાં ઘનમૂળ

ધારો કે  $z$  એ 1 નું ઘનમૂળ છે.

$$\therefore z^3 = 1$$

$$\therefore z^3 - 1 = 0$$

$$\therefore (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0$$

$$\therefore z = 1 \text{ અથવા } z^2 + z + 1 = 0$$

$$\therefore z = 1 \text{ અથવા } z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

આમ, 1 નાં ઘનમૂળ 1,  $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ ,  $\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$  હો.

( $a = 1$ ,  $b = 1$ ,  $c = 1$ ,  $D = -3$ )

### 1 નાં ઘનમૂળના ગુણધર્મો :

(1) 1 નાં બંને અવાસ્તવિક ઘનમૂળ એકાણના વર્ગ ભરાબર હો.

$$\text{ધરો કે } \omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}. \text{ તો } \omega^2 = \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1 - 2\sqrt{3}i + 3i^2) = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

હવી,  $(\omega^2)^2 = \omega^4 = \omega^3\omega = \omega$ . આમ, 1 નાં ઘનમૂળ 1,  $\omega$ ,  $\omega^2$  હો.

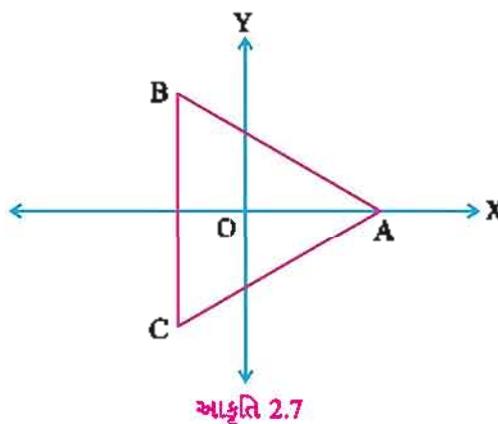
(2) આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે 1 નાં ત્રણેય ઘનમૂળનો સરવાળો 0 થાય હો. એટલે કે  $1 + \omega + \omega^2 = 0$

(3) સહેલાઈથી ચકાસી શકાય હો કે 1 નાં ત્રણેય ઘનમૂળનો ગુણાકાર 1 થાય. એટલે કે  $1 \cdot \omega \cdot \omega^2 = \omega^3 = 1$

(4) જો  $1, \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$  ને આર્ગન આકૃતિમાં અનુક્રમે A, B, C વડે દર્શાવવામાં આવે તો A(1, 0),

$$B\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ અને } C\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \text{ આપણે નોંધીએ કે } AB = BC = AC = \sqrt{3}. \text{ તેથી } A, B, C \text{ એ}$$

સમબાજુ નિકોણનાં પારોબિંદુઓ થશે. (આકૃતિ 2.7)



### સ્વાધ્યાય 2.3

1. ઉકેલો :

$$(1) x^2 + 2 = 0 \quad (2) x^2 + x + 1 = 0 \quad (3) \sqrt{5}x^2 + x + \sqrt{5} = 0$$

$$(4) x^2 + x + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \quad (5) x^2 + \frac{x}{\sqrt{2}} + 1 = 0 \quad (6) 3x^2 - 4x + \frac{20}{3} = 0$$

2. નીચેની સંખ્યાઓનાં વર્ગમૂળ મેળવો :

$$(1) 4 + 4\sqrt{3}i \quad (2) 5 - 12i \quad (3) -48 + 14i \quad (4) 3 - 4\sqrt{10}i$$

$$(5) \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} + \frac{1}{i^5} + \frac{1}{i^6} \quad (6) 4i \quad (7) -16i \quad (8) -25 \quad (9) -10$$

3.  $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$  ક્યારે થાય ? તમારું અનુમાન સાબિત કરો.

4. આર્ગન આકૃતિમાં જો બિંદુ Pને z દ્વારા તથા બિંદુ Qને z દ્વારા દર્શાવવામાં આવે તો સાબિત કરો કે  $OP = OQ$  અને  $m\angle POQ = \frac{\pi}{2}$ . લોગિક અર્થાત પણ કરો.

5. આર્ગન આકૃતિમાં બિંદુઓ z, iz, -z તથા  $-iz$  એ ચોરસનાં પારોબિંદુઓ હો તેમ સાબિત કરો.

6. આર્ગન આકૃતિમાં z અને  $\bar{z}$  વચ્ચે ક્ષેત્રે સંબંધ હો ?

\*

### પ્રક્રિયા ઉદાહરણો :

**ઉદાહરણ 14 :**  $\bar{z} = z^2$  શરતનું પાલન કરતી બધી સંકર સંખ્યાઓ જી શોધો.

**ઉકેલ :** ધારો કે  $z = x + iy$ ,  $\bar{z} = z^2$

$$\therefore x - iy = (x^2 - y^2) + i(2xy)$$

સંકર સંખ્યાઓની સમાનતાની વાખ્યા અનુસાર  $x = x^2 - y^2$  અને  $-y = 2xy$

બીજા પરિષ્ઠામ પરથી,  $y = 0$  અથવા  $x = \frac{1}{2}$ .

ગ્રધમ ધારો કે  $y = 0$ .

$$x = x^2 - y^2$$
 પરથી  $x = x^2$

$$\therefore x = 0$$
 અથવા  $x = 1$ .

$$\therefore z = 0$$
 અથવા  $z = 1$ .  $(y = 0 \ \text{થ.})$

$$\text{એવે, જો } x = -\frac{1}{2}, \text{ તો } -\frac{1}{2} = \frac{1}{4} - y^2$$

$$\therefore y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{આમ, } z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ અથવા } z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

પરિષ્ઠામે  $\bar{z} = z^2$  શરતનું પાલન કરતી ચાર સંકર સંખ્યાઓ  $0, 1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$  મળે.

**ઉદાહરણ 15 :** જો  $\frac{3 - 2i\sin\theta}{1 - 2i\sin\theta}$  વાસ્તવિક સંખ્યા હોય તો  $\theta \in \mathbb{R}$  શોધો તથા સંખ્યા શોધો.

$$\begin{aligned}\text{ઉકેલ : } \frac{3 + 2i\sin\theta}{1 - 2i\sin\theta} &= \frac{3 - 2i\sin\theta}{1 - 2i\sin\theta} \times \frac{1 + 2i\sin\theta}{1 + 2i\sin\theta} \\ &= \frac{3 + 6i\sin\theta + 2i\sin\theta + 4i^2\sin^2\theta}{1 - 4\sin^2\theta} \\ &= \frac{3 - 4\sin^2\theta}{1 + 4\sin^2\theta} + i\frac{8\sin\theta}{1 + 4\sin^2\theta}\end{aligned}$$

આપણે જાણોએ છીએ કે જો સંકર સંખ્યા વાસ્તવિક સંખ્યા હોય તો તેનો કાલ્યનિક ભાગ 0 થાય.

$$\therefore \frac{8\sin\theta}{1 + 4\sin^2\theta} = 0$$

$$\therefore \sin\theta = 0$$

$$\therefore \theta = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
 આથી સંખ્યા  $\frac{3 + 0}{1 - 0} = 3$

### સ્વાધ્યાય 2

1. નોંધેની સંખ્યાઓનું પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં રૂપાંતર કરો :

$$(1) \left[ i^{18} + \left(\frac{1}{i}\right)^{25} \right]^3 \quad (2) \left( \frac{1}{1-4i} - \frac{2}{1+i} \right) \left( \frac{3-4i}{5+i} \right)$$

$$2. \frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i} \text{ નો માનાંક શોધો.}$$

3. કોઈ પણ બે સંકર સંખ્યાઓ  $z_1$  અને  $z_2$  માટે સાબિત કરો કે,

$$\operatorname{Re}(z_1 z_2) = \operatorname{Re}(z_1) \operatorname{Re}(z_2) - \operatorname{Im}(z_1) \operatorname{Im}(z_2).$$

4.  $f(z) = \frac{1}{1-z}$  માટે  $z = 7 + 2i$  આગળ  $\operatorname{Re}(f(z))$  અને  $\operatorname{Im}(f(z))$ ની ક્રમત શોધો.
5. ભતાવો કે  $|z - 1| = |z + i|$  નો બિંહગાળ વિગમબિંહમાંથી પસાર થતી અને  $-1$  દળવાળી રેખા દર્શાવે છે.
6. સાખિત કરો કે  $|(2\bar{z} + 5)(\sqrt{2} - i)| = \sqrt{3}|2z + 5|$ .
7. જો  $z_1$  અને  $z_2$  બિના સંકર સંખ્યાઓ હોય તથા  $|z_2| = 1$  તો  $\left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|$  ની ક્રમત શોધો.
8. જો  $\frac{1}{\alpha + i\beta} + \frac{1}{a + ib} = 1$ , જ્યાં  $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}$ ; તો  $b$  ને  $\alpha$  તથા તિના સ્વરૂપમાં દર્શાવો.
9. જો  $(x + iy)^3 = a + ib$ , તો સાખિત કરો કે  $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 4(x^2 - y^2)$ .
10. ઉકેલો : (1)  $x^2 - 2x + \frac{3}{2} = 0$  (2)  $27x^2 - 10x + 1 = 0$  (3)  $21x^2 - 28x + 10 = 0$
11. જો  $z \in \mathbb{C}$  અને  $|z| \leq 2$ , તો  $|z - 3|$ ની મહત્વમ તથા ન્યૂનતમ ક્રમતો શોધો.
12.  $z = 3 - 2i$  માટે ભતાવો કે  $z^2 - 6z + 13 = 0$ . આ પરથી  $z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 17$ ની ક્રમત શોધો.
13.  $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^m = 1$  થાય તેવી  $m$  ની ન્યૂનતમ ક્રમત શોધો. જ્યાં,  $m \in \mathbb{N}$ .
14. જો  $(x - iy)^2 = \frac{a - ib}{c - id}$  હોય, તો સાખિત કરો કે  $(x^2 + y^2)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}$  થાય.
15. સમીકરણ  $|z| - z = 1 + 2i$  નું સમાધન કરતાં  $z$  ની ક્રમત શોધો.
16. જો સંકર સંખ્યાઓ  $z_1, z_2, z_3$  એ સમબાજુ ત્રિકોણનાં શિરોબિંહઓ દર્શાવે તથા  $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ , તો ભતાવો કે  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ .
17. ભતાવો કે આર્ગન આકૃતિમાં સંકર સંખ્યાઓ  $z, iz$  અને  $z + iz$  થી બનતા ત્રિકોણનું કેતેકણ  $\frac{1}{2}|z|^2$  હોય.
18. જો  $z = x + iy$  અને  $w = \frac{1-iz}{z-i}$ , તો ભતાવો કે  $|w| = 1 \Rightarrow z$  એ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય.
19. જો  $z = -5 + 4i$ , તો ભતાવો કે  $z^4 + 9z^3 + 35z^2 - z + 164 = 0$ .
20. જો  $z = x + iy$ , તો સાખિત કરો કે  $|x| + |y| \leq \sqrt{2}|z|$ .
21. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું અને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને  માં લખો :
- (1)  $|z - 4| < |z - 2|$  નો ઉકેલ...
- (a)  $\operatorname{Re}(z) > 0$       (b)  $\operatorname{Re}(z) < 0$       (c)  $\operatorname{Re}(z) > 3$       (d)  $\operatorname{Re}(z) > 2$
- (2) જો  $|z - 1|^2 = |z|^2 + 1$ , તો આર્ગન આકૃતિમાં  $z$  નું સ્થાન ..... પર છે.
- (a)  $x^2 + y^2 = 1$       (b) કાલ્યનિક અક્ષ      (c) વાસ્તવિક અક્ષ      (d)  $2x + 3 = 0$
- (3) જો  $|z + 4| \leq 3$ , તો  $|z + 1|$  નું મહત્વ મૂલ્ય ..... છે.
- (a) 6      (b) 0      (c) 4      (d) 10
- (4) એક સંકર સંખ્યાની અનુભૂત સંખ્યા  $\frac{1}{i-1}$  છે, તો તે સંકર સંખ્યા ..... છે.
- (a)  $\frac{1}{i-1}$       (b)  $\frac{-1}{i-1}$       (c)  $\frac{1}{i+1}$       (d)  $\frac{-1}{i+1}$
- (5)  $i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3}$  ની ક્રમત ..... છે.
- (a) 1      (b) -1      (c) 0      (d)  $i^n$

- (6)  $\frac{3+4i}{4-5i}$  ની વયસ્તા... □
- (a)  $-\frac{8}{25} + \frac{31}{25}i$       (b)  $\frac{8}{25} - \frac{31}{25}i$       (c)  $-\frac{8}{25} - \frac{31}{25}i$       (d)  $\frac{8}{25} + \frac{31}{25}i$
- (7) જો  $x + iy = \frac{u+iv}{u-iv}$  હોય, તો  $x^2 + y^2 = \dots$  □
- (a) 1      (b) -1      (c) 0      (d) 2
- (8) જેથી  $(1+i)^{2n} - (1-i)^{2n}$  ધ્યાય તેવી ન્યૂનતમ પ્રાકૃતિક સંખ્યા  $n$  ..... હોય. □
- (a) 4      (b) 8      (c) 2      (d) 12
- (9) આર્ગાન આકૃતિમાં સંકર સંખ્યા  $\frac{1+2i}{1-i}$  નું સ્થાન ..... ચરણમાં હોય. □
- (a) પ્રથમ      (b) દ્વિતીય      (c) તૃતીય      (d) ચતુર્થ
- (10)  $\arg(-1) = \dots$  □
- (a) 0      (b)  $\pi$       (c)  $\frac{\pi}{2}$       (d)  $-\pi$
- (11)  $\sin x + i\cos 2x$  અને  $\cos x - i\sin 2x$  એ એકબીજાની અનુભવ સંકર સંખ્યાઓ હોય, તો... □
- (a)  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$       (b)  $x = 0$   
 (c)  $x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, k \in \mathbb{Z}$       (d) એવો કોઈ  $x$  ન મળે.
- (12) જો એક સંકર સંખ્યા જીજા ચરણમાં હોય, તો તેની અનુભવ સંખ્યા ..... ચરણમાં હોય ? □
- (a) પ્રથમ      (b) દ્વિતીય      (c) તૃતીય      (d) ચતુર્થ
- (13) જેનો માનાંક 2 અને મુજબ કોણાંક  $\frac{2\pi}{3}$  હોય તેવો સંકર સંખ્યા ..... હોય. □
- (a)  $-1 + i\sqrt{3}$       (b)  $-1 - i\sqrt{3}$       (c)  $-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$       (d)  $\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$
- (14)  $1 - i\sqrt{3}$  નો મુજબ કોણાંક ..... હોય. □
- (a)  $\frac{\pi}{3}$       (b)  $\frac{2\pi}{3}$       (c)  $-\frac{\pi}{3}$       (d)  $-\frac{2\pi}{3}$
- (15) જો  $1$ નાં ઘનમૂળ  $1, \omega, \omega^2$  હોય, તો  $1 + \omega + \omega^2 = \dots$  □
- (a) 1      (b) 0      (c) -1      (d)  $\omega$

\*

### સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1.  $a + ib$ , જ્યાં  $a, b \in \mathbb{R}$  સ્વરૂપની સંખ્યાને સંકર સંખ્યા કહે છે. અહીં  $i^2 = -1$ .
2. ધારો કે  $z_1 = a + ib$  અને  $z_2 = c + id$  બે સંકર સંખ્યાઓ હોય.  

$$z_1 + z_2 = (a+c) + i(b+d), \quad z_1 z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)$$
3.  $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$
4. શૂન્યેતર સંકર સંખ્યા  $z = a + ib$ ની વયસ્ત સંખ્યા  $\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-bi}{a^2 + b^2}$  હોય.
5.  $i^{4k} = 1, i^{4k+1} = i, i^{4k+2} = -1, i^{4k+3} = -i$
6. સંકર સંખ્યા  $z = a + bi$  ની અનુભવ સંકર સંખ્યા  $\bar{z} = a - bi$  હોય.

7.  $z = a + ib$  નો માત્રાક  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  છે.
8. સંકર સંખ્યા  $x + iy$  ને સંગત કમ્પ્યુક્ટ જોડ  $(x, y)$  ને લૌભિતિક રીતે XY-સમતલમાં બિંગ્પ  $P(x, y)$  તરફે દર્શાવવામાં આવે છે અને આનાથી જીલટું પણ આવ્યું છે.
9.  $x + iy$  નાં વર્ગમૂળ  $\begin{cases} \pm\left(\sqrt{\frac{|z|+x}{2}} + i\sqrt{\frac{|z|-x}{2}}\right), & y > 0 \\ \pm\left(\sqrt{\frac{|z|+x}{2}} - i\sqrt{\frac{|z|-x}{2}}\right), & y < 0 \end{cases}$
10. 1 નાં ઘનમૂળ 1,  $0i = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, 0i^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$  છે.
11. જો  $b^2 - 4ac < 0$ , તો ફ્રિયાન સમીકરણ  $ax^2 + bx + c = 0$  જ્યાં  $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$  હીજે  $\frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2}i}{2a}$  છે.



**Brahmagupta** was the first to use zero as a number. He gave rules to compute with zero. Negative numbers did not appear in *Brahmasphuta siddhanta* but in the Nine Chapters on the Mathematical Art (*Jiu zhang suan-shu*) around 200 BC. Brahmagupta's most famous work is his *Brahmasphutasiddhanta*.

Brahmagupta gave the solution of the general linear equation in chapter eighteen of *Brahmasphutasiddhanta*.

The difference between *rupas*, when inverted and divided by the difference of the unknowns, is the unknown in the equation. The *rupas* are [subtracted on the side] below that from which the square and the unknown are to be subtracted, which is a solution equivalent to  $x = \frac{e-c}{b-d}$ , where *rupas* represent constants. He further gave two equivalent solutions to the general quadratic equation.

Diminish by the middle [number] the square-root of the rupas multiplied by four times the square and increased by the square of the middle; divide the remainder by twice the square. The middle whatever is the square-root of the rupas multiplied by the square [and] increased by the square of half the unknown, diminish that by half the unknown [and] divide [the remainder] by its square. [The result is] the unknown, which are, respectively, solutions equivalent to,  $x = \frac{\sqrt{4ac+b^2} - b}{2a}$

Brahmagupta then goes on to give the sum of the squares and cubes of the first  $n$  integers.

The sum of the squares is that [sum] multiplied by twice the [number of] step[s] increased by one [and] divided by three. The sum of the cubes is the square of that [sum]. Piles of these with identical balls [can also be computed].

It is important to note here Brahmagupta found the result in terms of the sum of the first  $n$  integers.

He gives the sum of the squares of the first  $n$  natural numbers as  $n(n+1)(2n+1)/6$  and the sum of the cubes of the first  $n$  natural numbers as  $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ .

## દ્વિપદી પ્રમેય

*The laws of nature are but the mathematical thoughts of God.*

— Euclid

\*

*I like mathematics because it is not human and has nothing particular to do with this planet or with the whole accidental universe, because like Spinoza's God, it won't love us in return.*

— Bertrand Russell

\*

*If there is God, he is a great mathematician.*

— Paul Dirac

### 3.1 ગ્રાસ્તાવિક

આપડો આગળના વર્ગોમાં નીચેનાં વિસ્તરણોનો અભ્યાસ કરો છો :

$$(a + b)^1 = a + b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 અને (a + b)^4 મેળવવા$$

( $a + b$ )<sup>3</sup> નો ( $a + b$ ) વડે ગુણાકાર કરીએ તો તેનું વિસ્તરણ મેળવી શકીએ.

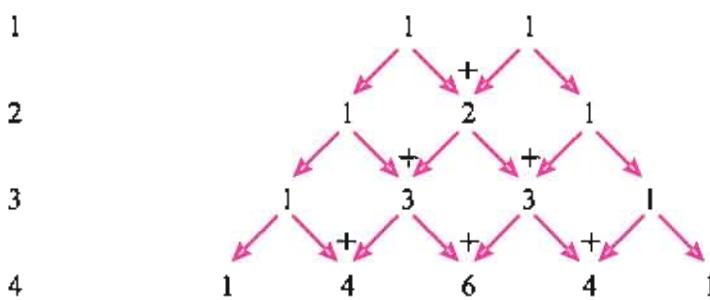
$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

જો કે, આ જ પ્રમાણે ગુણાકારના ઉપયોગથી ( $a + b$ )<sup>5</sup>, ( $a + b$ )<sup>6</sup>, ... જેવાં વિસ્તરણ મેળવવાં મુશ્કેલ પડે.

એવું માનવામાં આવે છે કે, ધન પૂણીઓ  $n$  માટે ( $a + b$ )<sup>n</sup> નું વાપક સૂત્ર અગિયારમી સદીના જાણીતા પર્શીયન કર્ણ અને ગણિતજ્ઞ ઓમર જૈયામે આધું હતું. આ સૂત્ર અધવા વિસ્તરણને દ્વિપદી પ્રમેય (Binomial Theorem) કહે છે.

ઓથી સદી (B.C.)ના શીક ગણિતજ્ઞાની યુક્તિલે દ્વિપદી પ્રમેયના વિસ્તરણનું  $n = 2$  માટે વિશિષ્ટ ઉદાહરણ આધું શીજુ સદી (B.C.)માં ભારતીય ગણિતજ્ઞાની પિંગલા (Pingala)એ ઉચ્ચકક્ષા માટેના વિસ્તરણની વાત કરી હતી. 10મી સદીમાં વાપક દ્વિપદી પ્રમેય અને પાલકલા ટ્રિકોણની વિગતોથી ભારતીય ગણિતજ્ઞાની હલાયુધ (Halayadha) પરિચિત હતી. પર્શીયન ગણિતજ્ઞાની અલ-કરજી (Al-Karaji) અને 13મી સદીમાં ચીની ગણિતજ્ઞાની યાન્ગ હુએ (Yang-hui) પણ આવા જ પરિજ્ઞામો મેળવ્યા હતાં.

$n = 1, 2, 3, \dots$  લઈ, ( $a + b$ )<sup>n</sup> ના વિસ્તરણમાં આવતાં કમિક પદોના સહગુણકો નીચે આપેલી ટ્રિકોણીય રીતે ગોઠવાયેલી સંખ્યાઓનો હાર પરથી પડા મેળવી શકાય છે. આ ગોઠવણી ફેન્ચ ગણિતજ્ઞ બ્લેજ પાસ્કલ (1623-1662) ના નામથી પાસ્કલનો ટ્રિકોણ (Pascal's Triangle) તરીકે જાણીતો છે.



5	1	5	10	10	5	1
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.

પાસ્કલના ટ્રિકોણની કોઈ પદા હારમાં પ્રથમ અને છેલ્લો ઘટક 1 છે, આ બે ઘટકની વચ્ચેના ઘટક એ ઘટકની ઉપરની હારના બે તીરના આરંભિંદુ પરની સંખ્યાઓનો સરવાળો છે.

**પાસ્કલનો ટ્રિકોણ :** પ્રથમ હાર :

$$\text{એટલે કે, } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

બીજી હાર :

$$1 \quad 2 \quad 1$$

અહીં પ્રથમ અને છેલ્લા ઘટક 1 અને વચ્ચેનું પદ 2, પ્રથમ હારનાં બે પદોનો સરવાળો કરવાથી મળે છે, કારણ કે  $\binom{1}{0} + \binom{1}{1} = \binom{2}{1}$  ના ઉપયોગથી

તે જ પ્રમાણે, બીજી હાર 1 3 3 1 માં પ્રથમ અને છેલ્લું પદ 1, બીજું પદ એ બીજી હારનાં પ્રથમ અને દ્વિતીય પદનો સરવાળો 1 + 2 = 3, જે  $\binom{2}{0} + \binom{2}{1} = \binom{3}{1}$  છે અને તૃતીય પદ એ બીજી હારનાં દ્વિતીય અને તૃતીય પદનો સરવાળો 2 + 1 = 3, જે  $\binom{2}{1} + \binom{2}{2} = \binom{3}{2}$  છે.

ઉપરની ચર્ચા પરથી, આ જ પ્રમાણે પાંચમી હાર આપણે ચકાસીએ.

ચોથી હાર :

$$\text{એટલે કે, } \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

હવે પાંચમી હાર : 1      (1 + 4)      (4 + 6)      (6 + 4)      (4 + 1)      1  
                        1                5                10                10                5                1

$$\text{એટલે કે, } \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{અહીં, } \binom{4}{0} + \binom{4}{1} = \binom{5}{1}; \binom{4}{1} + \binom{4}{2} = \binom{5}{2}; \binom{4}{2} + \binom{4}{3} = \binom{5}{3}; \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = \binom{5}{4}.$$

$$\left( \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} \right) = \binom{n+1}{r}$$

$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}, 0 \leq r \leq n$ , સૂત્ર તથા  $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$ , ના ઉપયોગથી પાસ્કલનો ટ્રિકોણ નીચે પ્રમાણે પણ લખી શકાય.

ઘાતાંક

સહગુણક

1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$		
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$	
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

ઉપરની ગોઠવણીના અવલોકન પરથી, આગળની ટાર લખયા. સિવાય આપણે કોઈ પણ ઘાતાંક  $n$  માટે  $(a + b)^n$  ના વિસ્તરણનાં પદોના સહગુણકો લખી શકીએ, દાખલા તરીકે ઘાતાંક 7 માટે આપણને પદોના સહગુણકો  $\binom{7}{0}, \binom{7}{1}, \binom{7}{2}, \binom{7}{3}, \binom{7}{4}, \binom{7}{5}, \binom{7}{6}, \binom{7}{7}$  મળે.

હવે આપણે કોઈ પણ ધનપૂર્ણક  $n$  માટે  $(a + b)^n$  નું ડિપટી વિસ્તરણ લખવા માટે સંબંધ છીએ.

### 3.2 ડિપટી પ્રમેય

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2}a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + \binom{n}{r}a^{n-r} \cdot b^r + \dots + \binom{n}{n}b^n, n \in \mathbb{N}$$

આ પ્રમેય આપણે ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતના ઉપયોગથી સાબિત કરીશું.

$$\text{ધારો કે, } P(n) : (a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2}a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + \binom{n}{r}a^{n-r} \cdot b^r + \dots + \binom{n}{n}b^n$$

$n = 1$  કેન્દ્રા,

$$\text{જ.આ.} = (a + b)^1 = a + b \text{ અને } \text{જ.આ.} = \binom{1}{0}a^1 + \binom{1}{1}a^{1-1} \cdot b = a + b$$

$\therefore P(1)$  સત્ય છે.

ધારો કે  $P(k)$  સત્ય છે.

$$\therefore (a + b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1} \cdot b + \binom{k}{2}a^{k-2} \cdot b^2 + \dots$$

$$+ \binom{k}{r-1}a^{k-(r-1)} \cdot b^{r-1} + \binom{k}{r}a^{k-r} \cdot b^r + \dots + \binom{k}{k}b^k$$

$$\text{હવે, } (a + b)^{k+1} = (a + b)(a + b)^k$$

$$= (a + b) \left[ \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1} \cdot b + \binom{k}{2}a^{k-2} \cdot b^2 + \dots \right]$$

$$+ \binom{k}{r-1}a^{k-(r-1)} \cdot b^{r-1} + \binom{k}{r}a^{k-r} \cdot b^r + \dots + \binom{k}{k}b^k \right]$$

બંને અવયવોનો ગુણાકાર કરી પદોનું પુનર્ગઠન કરતાં, આપણે જોઈ શકીએ કે,

$$(a + b)^{k+1} = \binom{k}{0}a^{k+1} + \left[ \binom{k}{0} + \binom{k}{1} \right]a^k \cdot b + \left[ \binom{k}{1} + \binom{k}{2} \right]a^{k-1} \cdot b^2 + \dots$$

$$+ \left[ \binom{k}{r-1} + \binom{k}{r} \right]a^{k-(r-1)} \cdot b^{r-1} + \dots + \binom{k}{k}b^{k+1}$$

આપણે જાણીએ છીએ કે,  $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$  અને  $\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$ ,  $1 \leq r \leq n$

$$\therefore (a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^k + 1 + \binom{k+1}{1}a^{(k+1)-1} \cdot b + \binom{k+1}{2}a^{(k+1)-2} \cdot b^2 + \dots \\ + \binom{k+1}{r}a^{(k+1)-r} \cdot b^r + \dots + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

$\therefore P(k+1)$  સત્ય છે.

$\therefore$  ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી  $P(n)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  ખાટે સત્ય છે.

### કેટલાંક ઉપપ્રમેયો :

(1)  $(a+b)^n$  ના દ્વિપદી વિસ્તરણમાં  $a = 1$ ,  $b = x$  મૂક્તાં,

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{r}x^r + \dots + \binom{n}{n}x^n, \forall n \in \mathbb{N}$$

(2)  $b$  ના બદલે  $-b$  મૂક્તાં,

$$(a-b)^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2}a^{n-2} \cdot b^2 - \binom{n}{3}a^{n-3} \cdot b^3 + \dots \\ + (-1)^r \cdot \binom{n}{r}a^{n-r} \cdot b^r + \dots + (-1)^n \cdot \binom{n}{n}b^n$$

(3) (1) માં  $x = 1$  લેતાં,

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{r} + \dots + \binom{n}{n}$$

$$\therefore \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{r} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

(4) (1) માં  $x = -1$  લેતાં,

$$0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^n \cdot \binom{n}{n} \quad (i)$$

$$\text{હજી, } 2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} \quad (ii)$$

$\therefore$  (i) તથા (ii) નાં અનુરૂપ પદોનો સરવાળો કરતાં,

$$2^n = 2 \left[ \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots \right]$$

$$\therefore \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots = 2^n - 1 \quad (iii)$$

$$\therefore \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \dots = 2^n - 1 \quad (ii) \text{ તથા (iii) પરથી (iv)}$$

**નોંધ :**  $(a+b)^n$  ના વિસ્તરણ પરથી, આપણે નીચેના મુદ્દાઓનું અવલોકન કરીએ :

(1) વિસ્તરણમાં  $(n+1)$  પદી છે.

(2) પ્રથમ પદમાં ‘ $a$ ’ નો ઘાતાંક  $n$  છે અને ત્યાર પછી કમશાઃ પદોમાં ‘ $a$ ’ નો ઘાતાંક 1 જેટલો ઘટતો જાય છે અને સાથે સાથે પ્રથમ પદમાં ‘ $b$ ’ નો ઘાતાંક શૂન્ય છે અને ત્યાર પછી કમશાઃ પદોમાં ‘ $b$ ’ નો ઘાતાંક 1 જેટલો વધતો જાય છે.

(3) દરેક પદની ઘાત (એટલે કે  $a$  અને  $b$ ના ઘાતાંકનો સરવાળો)  $n$  છે કે  $(a+b)$ નો ઘાતાંક છે.

(4) પદીના સહગુણકો કમશાઃ  $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}$  છે.

(5) અપણે જાહોમે છીએ કે,  $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ . તેથી વિસ્તરણનાં પદોના સહગુજરાતી ક્રમશાસની તથા જમજી તરફથી સંભિત રીતે ગોઠવાપેલાં છે, એટલે કે,

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n}; \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1}; \quad \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2}, \dots$$

**ઉદાહરણ 1 :** વિસ્તરણ કરો :  $\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x}\right)^5$ ,  $x \neq 0$

**ઉક્તાનું :** અર્દી  $a = \frac{x}{2}$ ,  $b = \frac{1}{x}$ ,  $n = 5$

આ કેંભો ડિપદી પ્રમેય (સૂત્ર)માં મૂકતાં,

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x}\right)^5 &= \binom{5}{0} \left(\frac{x}{2}\right)^5 + \binom{5}{1} \left(\frac{x}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{x}\right) + \binom{5}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \binom{5}{3} \left(\frac{x}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{x}\right)^3 + \binom{5}{4} \left(\frac{x}{2}\right) \left(\frac{1}{x}\right)^4 + \binom{5}{5} \left(\frac{1}{x}\right)^5 \\ &= 1 \left(\frac{x^5}{32}\right) + 5 \left(\frac{x^4}{16}\right) \left(\frac{1}{x}\right) + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \left(\frac{x^3}{8}\right) \left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{x^2}{4}\right) \left(\frac{1}{x^3}\right) \\ &\quad + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \left(\frac{x}{2}\right) \left(\frac{1}{x^4}\right) + 1 \cdot \left(\frac{1}{x^5}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{x^5}{32} + \frac{5x^3}{16} + \frac{5x}{4} + \frac{5}{2x} + \frac{5}{2x^3} + \frac{1}{x^5}$$

**ઉદાહરણ 2 :** વિસ્તરણ કરો :  $\left(2x - 1 + \frac{1}{x}\right)^4$ ,  $x \neq 0$

**ઉક્તાનું :**  $a = 2x$ ,  $b = 1 - \frac{1}{x}$ ,  $n = 4$  ઉપપ્રમેય (2)માં મૂકતાં,

$$\begin{aligned} \left(2x - 1 + \frac{1}{x}\right)^4 &= \left[2x - \left(1 - \frac{1}{x}\right)\right]^4 \\ &= \binom{4}{0}(2x)^4 - \binom{4}{1}(2x)^3\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \binom{4}{2}(2x)^2\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 - \binom{4}{3}(2x)\left(1 - \frac{1}{x}\right)^3 \\ &\quad + \binom{4}{4}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^4 \\ &= 16x^4 - 4(8x^3)\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} (4x^2)\left(1 - \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{x^2}\right) \\ &\quad - \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} (2x)\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) \\ &\quad + \left[\binom{4}{0} - \binom{4}{1}\left(\frac{1}{x}\right) + \binom{4}{2}\left(\frac{1}{x^2}\right) - \binom{4}{3}\left(\frac{1}{x^3}\right) + \binom{4}{4}\left(\frac{1}{x^4}\right)\right] \\ &= 16x^4 - 32x^3 + 32x^2 + 24x^2 - 48x + 24 - 8x + 24 - \frac{24}{x} + \frac{8}{x^2} \\ &\quad + 1 - \frac{4}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x^4}. \\ &= 16x^4 - 32x^3 + 56x^2 - 56x + 49 - \frac{28}{x} + \frac{14}{x^2} - \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x^4}. \end{aligned}$$

**ઉદાહરણ 3 :** ડિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી  $(0.99)^5$  નું મૂલ્ય શોધો.

**ઉક્તાનું :**  $(0.99)^5 = (1 - 0.01)^5$

$$\begin{aligned} &= \binom{5}{0} - \binom{5}{1}(0.01) + \binom{5}{2}(0.01)^2 - \binom{5}{3}(0.01)^3 + \binom{5}{4}(0.01)^4 - \binom{5}{5}(0.01)^5 \\ &= 1 - 5(0.01) + 10(0.0001) - 10(0.000001) + 5(0.00000001) - (0.0000000001) \\ &= 0.9509900499 \end{aligned}$$

ઉદાહરણ 4 :  $(1.1)^{100000}$  અને 10000 માંથી કોણ નાનું છે ?

$$\begin{aligned}\text{ઉકેલ : } (1.1)^{100000} &= (1 + 0.1)^{100000} \\ &= \binom{100000}{0} + \binom{100000}{1}(0.1) + \text{કેટલાંક ધન પદો} \\ &= 1 + 10000 + \text{કેટલાંક ધન પદો} \\ &> 10000\end{aligned}$$

$\therefore (1.1)^{100000}$  તથા 10000 એકી 10000 નાની સંખ્યા છે.

### સ્વાધ્યાય 3.1

1. વિસ્તરણ કરો :

$$(1) \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^5, (x \neq 0) \quad (2) (1 - 2x)^4 \quad (3) (3x - 2)^6 \quad (4) \left(x - \frac{1}{2x}\right)^5, (x \neq 0)$$

2. વિસ્તરણ કરો : (1)  $(1 + x + x^2)^4$  (2)  $(1 - x + x^2)^3$

3. દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી કિભત શોધો :

$$(1) (0.98)^4 \quad (2) (99)^4 \quad (3) (101)^6$$

4. દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી  $(1.01)^{10000}$  અને 100 માંથી કોણ મોટું છે તે નક્કી કરો.

\*

### 3.3 વ્યાપક અને મધ્યમ પદ

1.  $(a + b)^n$  ના વિસ્તરણમાં  $(n + 1)$  પદ હોય છે, આપણે  $(a + b)^n$  ના વિસ્તરણનાં પ્રથમ, દ્વિતીય, તૃતીય ... $(n + 1)$  માં પદને અનુક્રમે  $T_1, T_2, T_3, \dots, T_{n+1}$  કહીએ તો,

$$T_1 = \binom{n}{0} a^n, T_2 = \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b, T_3 = \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2, \dots, T_{n+1} = \binom{n}{n} b^n.$$

આ પદોનાં અવલોકન પરથી આપણને વ્યાપક પદ (General Term)  $T_{r+1} = \binom{n}{r} a^{n-r} \cdot b^r, 0 \leq r \leq n$  મળે.

2. જો  $(a + b)^n$  માં  $n$  યુગમ હોય, તો  $n + 1$  અયુગમ થશે. તેથી  $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$  મું પદ એટલે કે

$$\left(\frac{n}{2} + 1\right) \text{ મું પદ} = \left(\frac{n+2}{2}\right) \text{ મું પદ મધ્યમ પદ (Middle Term)} \ થશે.$$

દાખલા તરીકે,  $(2x + y)^{10}$  ના વિસ્તરણમાં  $\frac{10+2}{2} = 6$  મું પદ એ મધ્યમ પદ થશે.

જો  $n$  અયુગમ હોય, તો  $n + 1$  યુગમ થશે. તેથી જે મધ્યમ પદો મળશે,  $\left(\frac{n+1}{2}\right)$  મું અને  $\left(\frac{n+3}{2}\right)$  મું પદ.

દાખલા તરીકે,  $(2x + y)^9$  ના વિસ્તરણમાં  $\frac{9+1}{2} = 5$  મું પદ અને  $\frac{9+3}{2} = 6$  મું પદ મધ્યમ પદ થશે.

ઉદાહરણ 5 :  $(3x - y)^7$  ના વિસ્તરણનું ચોણ્યું પદ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં,  $a = 3x, b = -y, n = 7$

$$\text{હવે, } T_{r+1} = \binom{n}{r} a^{n-r} \cdot b^r$$

$T_4$  રોધે  $r = 3$  લેતાં,

$(r + 1 = 4)$

$$\therefore T_4 = T_{3+1} = \binom{7}{3}(3x)^7 - 3(-y)^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} (81x^4)(-y)^3 \\ = -2835x^4y^3$$

**ઉદાહરણ 6 :**  $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{16}$ , ( $x \neq 0$ ) ના વિસ્તરણમાં  $x^{-2}$  નો સહગુણક શોધો.

**ઉકેલ :** અહીં  $a = x$ ,  $b = -\frac{1}{x^2}$ ,  $n = 16$

$$T_{r+1} = \binom{n}{r} a^r - r \cdot b^r \\ = \binom{16}{r} (x)^{16-r} \left(-\frac{1}{x^2}\right)^r = \binom{16}{r} (-1)^r \cdot x^{16-3r}$$

$x$  નો ઘાતાંક  $-2$  મેળવવા આપણે  $16 - 3r = -2$  એટલે કે  $r = 6$  લઈશું.

$$\therefore T_{6+1} = \binom{16}{6} (-1)^6 \cdot x^{16-3(6)}$$

$$\therefore T_7 = \binom{16}{6} \cdot 1 \cdot x^{-2}$$

$$\therefore x^{-2} \text{ નો સહગુણક } \binom{16}{6} \text{ અથવા } 8008 \text{ મળે.}$$

**ઉદાહરણ 7 :**  $(2x^2 - \frac{1}{x})^{11}$ , ( $x \neq 0$ ) ના વિસ્તરણમાં અચળ પદ અસ્થિત્વ ધરાવે, તો મેળવો.

**ઉકેલ :** ધારો કે અચળ પદ (એટલે કે જે પદમાં  $x$  નો ઘાતાંક શૂન્ય છે) અસ્થિત્વ ધરાવે છે અને તે  $(r+1)$ મું પદ છે.

અહીં,  $a = 2x^2$ ,  $b = -\frac{1}{x}$ ,  $n = 11$

$$T_{r+1} = \binom{n}{r} a^r - r \cdot b^r \\ = \binom{11}{r} (2x^2)^{11-r} \left(-\frac{1}{x}\right)^r = \binom{11}{r} (2)^{11-r} \cdot (-1)^r \cdot x^{22-3r}$$

અચળ પદ માટે,  $x$  નો ઘાતાંક શૂન્ય લેતાં,

$$\therefore 22 - 3r = 0$$

$$\therefore r = \frac{22}{3} \notin \mathbb{N}.$$

∴ આપણી ધારણા ખોટી છે.

∴ આપેક્ષા વિસ્તરણમાં અચળ પદનું અસ્થિત્વ નથી.

**ઉદાહરણ 8 :**  $\left(\frac{x}{2} + 3y\right)^9$  ના વિસ્તરણમાં મધ્યમ પદ/પદો શોધો.

**ઉકેલ :**  $n = 9$  અયુગ્મ હોવાથી, આપણાને બે મધ્યમ પદો મળશે.

$$\therefore \frac{n+1}{2} = \frac{9+1}{2} = 5 \text{ મું અને } \frac{n+3}{2} = \frac{9+3}{2} = 6 \text{ મું પદ છે.}$$

અહીં,  $a = \frac{x}{2}$ ,  $b = 3y$ ,  $n = 9$

$$T_{r+1} = \binom{n}{r} a^r - r \cdot b^r$$

$$\therefore T_5 = T_{4+1} = \binom{9}{4} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{9-4} \cdot (3y)^4 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \left(\frac{x^5}{32}\right) (81y^4) = \frac{5103}{16} x^5 y^4$$

$$\text{અને } T_6 = \binom{9}{5} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{9-5} \cdot (3y)^5 \quad (r+1=6)$$

$$= \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \left(\frac{x^4}{16}\right) (243y^5)$$

$$= \frac{15309}{8} x^4 y^5$$

$\therefore$  મધ્યમ પદો  $\frac{5103}{16} x^5 y^4$  અને  $\frac{15309}{8} x^4 y^5$  હોય.

**ઉદાહરણ 9 :**  $\left( \sqrt{\frac{x}{3}} + \sqrt{\frac{3}{2x^2}} \right)^{12}$  ના વિસ્તરણનું અચળ પદ મેળવો.  $(x > 0)$

$$\begin{aligned} \text{ઉકેલ : અહીં, } T_{r+1} &= \binom{12}{r} \left( \sqrt{\frac{x}{3}} \right)^{12-r} \cdot \left( \sqrt{\frac{3}{2x^2}} \right)^r \\ &= \binom{12}{r} \cdot \frac{\sqrt{3}^r}{(\sqrt{3})^{12-r}} \times \frac{1}{(\sqrt{2})^r} \cdot x^{6-\frac{r}{2}-r} \\ &= \binom{12}{r} \cdot \frac{1}{(\sqrt{3})^{12-2r}} \times \frac{1}{(\sqrt{2})^r} \times x^{6-\frac{3r}{2}} \end{aligned}$$

અચળ પદ માટે,  $6 - \frac{3r}{2} = 0$  હેતું,  $r = 4$

$$T_5 = \binom{12}{4} \cdot \frac{1}{(\sqrt{3})^4} \cdot \frac{1}{(\sqrt{2})^4} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{36} = \frac{55}{4}$$

### સ્વાધ્યાય 3.2

- (1)  $(x + 2)^9$  ના વિસ્તરણમાં  $x^6$  નો અને (2)  $\left(x^4 - \frac{1}{x^3}\right)^{15}$ , ( $x \neq 0$ ) ના વિસ્તરણમાં  $x^{32}$  નો સહગુણક મેળવો.
- અચળ પદ મેળવો : (1)  $\left(\frac{3}{x^2} + \frac{\sqrt{x}}{3}\right)^{10}$ , ( $x > 0$ ) (2)  $\left(\frac{3x^2}{2} - \frac{1}{3x}\right)^9$ , ( $x \neq 0$ )
- $\left(2 + \frac{x}{3}\right)^n$  ના વિસ્તરણમાં  $x^7$  અને  $x^8$  ના સહગુણક સમાન હોય, તો  $n$  શોધો.
- નીચેના વિસ્તરણમાં મધ્યમ પદ / પદો શોધો :
  - (1)  $\left(2 - \frac{x^3}{3}\right)^7$  (2)  $\left(\frac{x}{2} + 3y\right)^8$  (3)  $\left(\frac{3}{2x} - \frac{2x^2}{3}\right)^{20}$ , ( $x \neq 0$ ) (4)  $(3x + 2y)^5$
- $(1 + x)^n$  ના વિસ્તરણમાં  $x^3$  નો સહગુણક 20 હોય, તો  $n$  શોધો.
- $(1 + x)^n$  ના વિસ્તરણમાં 5 મા, 6 કા અને 7 મા પદોના સહગુણકો સમાંતર શ્રેષ્ઠીમાં હોય, તો  $n$  શોધો.

\*

#### પ્રક્રિયા ઉદાહરણો :

**ઉદાહરણ 10 :**  $(1 - x)^{15} \cdot (1 + 3x)^4$  ના ગુણાકારના વિસ્તરણમાં  $x^3$  નો સહગુણક મેળવો.

**ઉકેલ :**  $(1 - x)^{15}$  અને  $(1 + 3x)^4$  ના વિસ્તરણ માટે દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં,

$$(1-x)^{15} = \binom{15}{0} - \binom{15}{1}x + \binom{15}{2}x^2 - \binom{15}{3}x^3 + \dots - \binom{15}{15}x^{15} \text{ અને}$$

$$(1+3x)^4 = (3x+1)^4 = \binom{4}{0}(3x)^4 + \binom{4}{1}(3x)^3 + \binom{4}{2}(3x)^2 + \binom{4}{3}(3x) + \binom{4}{4} \cdot 1$$

હવે  $(1-x)^{15} - (1+3x)^4$  ના ગુણકારમાં  $x^3$  નો સહગુણક મેળવવા માટે, આપણે પૂરેપૂરો ગુણકાર કરવાને બધ્યે ફક્ત  $x^3$  વાળા પદો એકઠાં કરીએ.

$$\begin{aligned} & \text{તો } \binom{15}{0} \cdot \binom{4}{1}(27x^3) - \binom{15}{1}x \cdot \binom{4}{2}(9x^2) + \binom{15}{2}x^2 \cdot \binom{4}{3}(3x) - \binom{15}{3}x^3 \cdot \binom{4}{4} \\ &= 1 \cdot 4 \cdot 27x^3 - 15 \cdot x \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot 9x^2 + \frac{15 \cdot 14}{1 \cdot 2}x^2 \cdot 4 \cdot 3x - \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 \cdot 1 \\ &= (108 - 810 + 1260 - 455)x^3 = 103x^3 \end{aligned}$$

$\therefore (1-x)^{15} - (1+3x)^4$  ના વિસ્તરણમાં  $x^3$  નો સહગુણક 103 છે.

**ઉદાહરણ 11 :**  $\left(\frac{x}{3} + 3\right)^{10}$  ના વિસ્તરણમાં મધ્યમ પદ 8064 હોય, તો  $x$  શોધો.

**ઉકેલ :** અહીં,  $n = 10$

$$\therefore n \text{ પુરુષ હોવાથી, મધ્યમ પદ } \frac{n+2}{2} = \frac{10+2}{2} = 6 \text{ પદ થશે.}$$

$$\therefore T_6 = T_{5+1} = \binom{10}{5} \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^{10-5} \cdot 3^5$$

$$\therefore 8064 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{x^5}{3^5} \cdot 3^5$$

$$\therefore \frac{8064}{252} = x^5$$

$$\therefore x^5 = 32 = 2^5$$

$$\therefore x = 2$$

**ઉદાહરણ 12 :** સાબિત કરો :  $(3 + \sqrt{8})^5 + (3 - \sqrt{8})^5 = 6726$ . તે પરથી તારવો છે,

$$6725 < (3 + \sqrt{8})^5 < 6726. \text{ આ પરથી } [(3 + \sqrt{8})^5] \text{ મેળવો.}$$

$$\begin{aligned} \text{ઉકેલ : } (3 + \sqrt{8})^5 &= \binom{5}{0}(3)^5 + \binom{5}{1}(3)^4(\sqrt{8}) + \binom{5}{2}(3)^3(\sqrt{8})^2 + \binom{5}{3}(3)^2(\sqrt{8})^3 \\ &\quad + \binom{5}{4}(3)(\sqrt{8})^4 + \binom{5}{5}(\sqrt{8})^5 \quad (\text{i}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3 - \sqrt{8})^5 &= \binom{5}{0}(3)^5 - \binom{5}{1}(3)^4(\sqrt{8}) + \binom{5}{2}(3)^3(\sqrt{8})^2 - \binom{5}{3}(3)^2(\sqrt{8})^3 \\ &\quad + \binom{5}{4}(3)(\sqrt{8})^4 - \binom{5}{5}(\sqrt{8})^5 \quad (\text{ii}) \end{aligned}$$

પરિણામ (i) અને (ii) પરથી,

$$\begin{aligned} (3 + \sqrt{8})^5 + (3 - \sqrt{8})^5 &= 2 \left[ \binom{5}{0}(3)^5 + \binom{5}{2}(3)^3(\sqrt{8})^2 + \binom{5}{4}(3)(\sqrt{8})^4 \right] \\ &= 2 \left[ 1 \cdot 243 + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot 27 \cdot 8 + 5 \cdot 3 \cdot 64 \right] \quad \left( \binom{5}{4} = \binom{5}{1} \right) \\ &= 2[243 + 2160 + 960] \\ &= 2[3363] \\ &= 6726 \end{aligned}$$

હવે,  $(3 + \sqrt{8})(3 - \sqrt{8}) = 9 - 8 = 1$  અને  $(3 + \sqrt{8}) > 0$ . તેથી  $3 - \sqrt{8} > 0$ .

તથા  $(3 + \sqrt{8}) > 1$

$$\therefore 3 - \sqrt{8} < 1$$

$$\therefore 0 < 3 - \sqrt{8} < 1$$

$$\therefore 0 < (3 - \sqrt{8})^5 < 1$$

$$\therefore (3 + \sqrt{8})^5 < (3 + \sqrt{8})^5 + (3 - \sqrt{8})^5 = 6726 < (3 + \sqrt{8})^5 + 1$$

$$\therefore (3 + \sqrt{8})^5 < 6726 \text{ અને } 6726 < (3 + \sqrt{8})^5 + 1$$

$$\therefore 6725 < (3 + \sqrt{8})^5 < 6726$$

પૂર્ણક ભાગની વ્યાખ્યા અનુસાર સ્પષ્ટ છે કે  $[(3 + \sqrt{8})^5] = 6725$

**ઉદાહરણ 13 :**  $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^n$  ના વિસ્તરણમાં  $x$  ની ધાતવાળા પ્રથમ ત્રણ પદોના સહગુણકોનો સરવાળો 127 હોય, તો  $n$  શેષો (નિયમિત) ( $x \neq 0$ ) ( $n \in \mathbb{N}$ )

**ઉકેલ :**  $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^n$  ના વિસ્તરણમાં પ્રથમ ત્રણ પદો  $\binom{n}{0}(x^2)^n, \binom{n}{1}(x^2)^{n-1} \cdot \left(\frac{-2}{x}\right)$  અને  $\binom{n}{2}(x^2)^{n-2} \cdot \left(\frac{-2}{x}\right)^2$  હોય.

આ પદોના સહગુણકોનો સરવાળો 127 હોય, તેથી

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1}2 + \binom{n}{2} \cdot 4 = 127$$

$$\therefore 1 - 2n + \frac{4n(n-1)}{2} = 127$$

$$\therefore 1 - 2n + 2n(n-1) = 127$$

$$\therefore 1 - 2n + 2n^2 - 2n = 127 = 0$$

$$\therefore 2n^2 - 4n - 126 = 0$$

$$\therefore n^2 - 2n - 63 = 0$$

$$\therefore (n-9)(n+7) = 0$$

$$\therefore n = 9 \text{ or } n = -7. \text{ પરંતુ } -7 \notin \mathbb{N}$$

$$\therefore n = 9$$

**ઉદાહરણ 14 :** દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી બતાવો કે,  $8^n - 7n$  ને 49 વડે ભાગતાં શેષ 1 વધે છે.

$$\text{ઉકેલ : } 8^n = (1 + 7)^n$$

$$= 1 + \binom{n}{1}7 + \binom{n}{2}7^2 + \binom{n}{3}7^3 + \dots + \binom{n}{n}7^n$$

$$= 1 + 7n + 7^2 \left[ \binom{n}{2} + \binom{n}{3}7 + \dots + \binom{n}{n}7^{n-2} \right]$$

$$\therefore 8^n - 7n = 1 + 49m, જ્યાં m = \left[ \binom{n}{2} + \binom{n}{3}7 + \dots + \binom{n}{n}7^{n-2} \right] \in \mathbb{N}$$

$$\therefore 8^n - 7n \text{ ને } 49 \text{ વડે ભાગતાં શેષ 1 વધે છે.}$$

**ઉદાહરણ 15 :** સાબિત કરો :  $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}, \forall n \in \mathbb{N}$

**ઉકેલ :** [વિચારો : જુઓ કે જ.ખ. =  $\frac{(2n)!}{(n!)(n!)} = \frac{(2n)!}{(2n-n)n!} = \binom{2n}{n}$ .

જે  $(1+x)^{2n}$  ના વિસ્તરણમાં  $x^n$  નો સહગુણક છે.]

$$\begin{aligned}(1+x)^{2n} &= (1+x)^n (x+1)^n \\&= \left[ \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n \right] \times \\&\quad \left[ \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1}x + \binom{n}{n} \right]\end{aligned}$$

હવે  $(1+x)^{2n}$  ના વિસ્તરણમાં  $x^n$  નો સહગુણક  $\binom{2n}{n}$  છે અને

જ.ખ.માં  $x^n$  નો સહગુણક =  $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2$  (પદવાર ગુણાકાર કરતાં)

$$\therefore \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

**ઉદાહરણ 16 :** સાબિત કરો :  $\binom{n}{0}\binom{n}{1} + \binom{n}{1}\binom{n}{2} + \binom{n}{2}\binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n-1}\binom{n}{n} = \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}, \forall n \in \mathbb{N}$

**ઉકેલ :** [વિચારો : જુઓ કે જ.ખ. =  $\frac{(2n)!}{[2n-(n-1)]!(n-1)!} = \binom{2n}{n-1}$

જે  $(1+x)^{2n}$  ના વિસ્તરણમાં  $x^{n-1}$  નો સહગુણક છે.]

$$\begin{aligned}(1+x)^{2n} &= (1+x)^n (x+1)^n \\&= \left[ \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n \right] \times \\&\quad \left[ \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2} + \binom{n}{3}x^{n-3} + \dots + \binom{n}{n} \right]\end{aligned}$$

હવે  $(1+x)^{2n}$  ના વિસ્તરણમાં  $x^{n-1}$  નો સહગુણક  $\binom{2n}{n-1}$  છે અને

જ.ખ.માં  $x^{n-1}$  નો સહગુણક  $\binom{n}{0}\binom{n}{1} + \binom{n}{1}\binom{n}{2} + \binom{n}{2}\binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n-1}\binom{n}{n}$

$$\therefore \binom{n}{0}\binom{n}{1} + \binom{n}{1}\binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1}\binom{n}{n} = \binom{2n}{n-1} = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}$$

**ઉદાહરણ 17 :** સાબિત કરો :  $\binom{n}{0} + 3\binom{n}{1} + 5\binom{n}{2} + \dots + (2n+1)\binom{n}{n} = (n+1)2^n, \forall n \in \mathbb{N}$

**ઉકેલ :** ધરો કે  $\binom{n}{0} + 3\binom{n}{1} + 5\binom{n}{2} + \dots + (2n-1)\binom{n}{n-1} + (2n+1)\binom{n}{n} = S$  (i)

$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$  સૂત્રનો ઉપયોગ કરી, પદોને ઉલાદા કમમાં ગોઠવતાં,

$$(2n+1)\binom{n}{0} + (2n-1)\binom{n}{1} + (2n-3)\binom{n}{2} + \dots + 5\binom{n}{n-2} + 3\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = S (ii)$$

(i) અને (ii) નાં અનુરૂપ પદોનો સરવાળો કરતાં,

$$\begin{aligned}\therefore (1+(2n+1))\binom{n}{0} + (3+(2n-1))\binom{n}{1} + (5+(2n-3))\binom{n}{2} + \dots + \\((2n-3)+5)\binom{n}{n-2} + ((2n-1)+3)\binom{n}{n-1} + ((2n+1)+1)\binom{n}{n} = 2S\end{aligned}$$

$$\therefore (2n+2)[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}] = 2S$$

$$\therefore 2(n+1) \cdot 2^n = 2S$$

$$\therefore S = (n+1)2^n$$

$$\text{લેખી, } \binom{n}{0} + 3\binom{n}{1} + 5\binom{n}{2} + \dots + (2n+1)\binom{n}{n} = (n+1)2^n.$$

**ઉદાહરણ 18 :**  $(x - 2y)^n$  ના વિસ્તરણમાં જો પાંચમાં અને છટા પદોનો સરવાળો શૂન્ય હોય, તો  $\frac{x}{y}$ નું મૂલ્ય શોધો.  
જો  $n = 8$  હોય તો  $\frac{x}{y}$  શોધો.

$$\text{ઉકેલ : અહીં, } T_5 = \binom{n}{4} \cdot x^{n-4} \cdot (-2y)^4 \text{ અને } T_6 = \binom{n}{5} \cdot x^{n-5} \cdot (-2y)^5$$

$$\text{અહીં, } T_5 + T_6 = 0. \text{ આથી, } T_5 = -T_6$$

$$\therefore \binom{n}{4} \cdot (-2)^4 \cdot x^{n-4} \cdot y^4 = -\binom{n}{5} \cdot (-2)^5 \cdot x^{n-5} \cdot y^5$$

$$\therefore \frac{n!}{4!(n-4)!} \cdot 16 \cdot x^{n-4} \cdot y^4 = -\frac{n!}{5!(n-5)!} \cdot (-32) \cdot x^{n-5} \cdot y^5$$

$$\therefore \frac{x^{n-4} \cdot y^4}{x^{n-5} \cdot y^5} = \frac{n!}{5!(n-5)!} \times \frac{4!(n-4)!}{n!} \times \frac{32}{16}$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{4!(n-4)(n-5)!}{5 \cdot 4!(n-5)!} \times 2$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{n-4}{5} \times 2$$

$$\text{હેઠે, } n = 8 \text{ લેતાં, } \frac{x}{y} = \frac{8}{5}$$

**ઉદાહરણ 19 :**  $(1+x)^{59}$  ના વિસ્તરણમાં છેલ્લા 30 પદોના સહગુણકોનો સરવાળો મેળવો.

$$\text{ઉકેલ : } (1+x)^{59} \text{ ના વિસ્તરણમાં કુલ 60 પદો ભાગશે.}$$

$$\therefore \text{છેલ્લા 30 પદોના સહગુણકોનો સરવાળો,}$$

$$S = \binom{59}{30} + \binom{59}{31} + \binom{59}{32} + \dots + \binom{59}{58} + \binom{59}{59}$$

(પ્રથમ 30 સહગુણકો  $\binom{59}{0}, \binom{59}{1}, \dots, \binom{59}{29}$ ) (i)

$$\text{એટલે કે } S = \binom{59}{29} + \binom{59}{28} + \binom{59}{27} + \dots + \binom{59}{1} + \binom{59}{0}$$

$\left(\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}\right)$  સૂત્રના ઉપયોગથી (ii)

$$\therefore 2S = \binom{59}{0} + \binom{59}{1} + \dots + \binom{59}{59}$$

(i) અને (ii)ની અનુરૂપ બાજુઓનો સરવાળો કરતાં)

$$\therefore S = \frac{2^{59}}{2} = 2^{58}$$

### સ્વાધ્યાય 3

1.  $(1+x)^{2n}$  અને  $(1+x)^{2n}-1$  ના વિસ્તરણમાં  $x^n$  ના સહગુણકોનો ગુણોત્તર મેળવો.
2. જો  $(1+x)^{36}$  ના વિસ્તરણમાં  $(r-2)$  માં અને  $(2r-5)$ માં પદોના સહગુણકો સમાન હોય, તો  $r$  શોધો.
3. જો  $(x+y)^n$  ના વિસ્તરણમાં પ્રથમ જાડા પદો અનુક્રમે 64, 960 અને 6000 હોય, તો  $x, y$  અને  $n$  શોધો.
4. જો  $(a+b)^n$  ના વિસ્તરણમાં બીજા, ત્રીજા અને ચોથા પદ અનુક્રમે 240, 720 અને 1080, હોય, તો  $a, b$  અને  $n$  શોધો.

5. સાબિત કરો :  $(2 + \sqrt{3})^7 + (2 - \sqrt{3})^7 = 10084$ , તથા ને પરદી તારવો કે,  
 $10083 < (2 + \sqrt{3})^7 < 10084$ .
6. જો  $\left(\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^n$  ના વિસ્તરણમાં ચોથા પદ અને છેલ્યેથી ચોથા પદનો ગુણોત્તર  $6 : 1$  હોય તો  $n$  શોધો.
7.  $(1 - x)^{12} \cdot (1 + 2x)^6$  ના વિસ્તરણમાં  $x^4$  નો સહગુણક મેળવો.
8. જો  $\left(x^2 - \frac{3}{x}\right)^n$ , ( $x \neq 0$ ) ના વિસ્તરણમાં પ્રથમ ગજ પદોના સહગુણકોનો સરવાળો 376 હોય, તો  $x^8$  નો સહગુણક શોધો.
9. ડિપટી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી ભત્તાનો કે,  $3^{2n} - 8n - 1$  એ 64 વડે વિભાજ્ય છે.  $n \in \mathbb{N}$ .
10. સાબિત કરો : ( $\forall n \in \mathbb{N}$ )
- (1)  $\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 3\binom{n}{2} + \dots + (n+1)\binom{n}{n} = (n+2) \cdot 2^n - 1$
  - (2)  $\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \dots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$
11. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને  માં લખો :
- (1) જો  $(1 + x)^n$  ના વિસ્તરણમાં 5 મા અને 19 મા પદોના સહગુણકો સમાન હોય, તો  $n$  ..... છે. 
    - (a) 18
    - (b) 24
    - (c) 22
    - (d) 20
  - (2) જો  $(1 + x)^{22}$  ના વિસ્તરણમાં  $(r - 6)$  મા અને  $(2r - 2)$  મા પદોના સહગુણકો સમાન હોય, તો  $r$  ..... છે.  
    - (a) -2
    - (b) 14
    - (c) 34
    - (d) 20
  - (3)  $(x + x^2)^{20}$  ના વિસ્તરણમાં  $x^{21}$  નો સહગુણક ..... છે.  
    - (a)  $\binom{20}{1}$
    - (b)  $\binom{20}{0}$
    - (c)  $\binom{20}{2}$
    - (d)  $\binom{20}{12}$
  - (4)  $(2x + 3y + 4z)^5$  ના વિસ્તરણમાં  $x^a y^b z^c$  પ્રકારના પદોની સંખ્યા ..... છે.  
    - (a) 10
    - (b) 15
    - (c) 21
    - (d) 42
  - (5) જો  $(2 + \sqrt{3})^4 + (2 - \sqrt{3})^4 = x + y\sqrt{3}$ , તો  $y$  ..... છે.  
    - (a) 0
    - (b) 56
    - (c) 112
    - (d) 97
  - (6) જો  $(a + b)^{10}$  નું મધ્યમ પદ  $T_{r-1}$  હોય, તો  $r =$  .....  
    - (a) 6
    - (b) 5
    - (c) 7
    - (d) 8
  - (7)  $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^{12}$  ના વિસ્તરણનું અચળ પદ ..... છે. ( $x \neq 0$ )  
    - (a) 7920
    - (b) 495
    - (c) -7920
    - (d) -495
  - (8)  $\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \dots + \binom{n-1}{n-1} =$  ..... ( $n > 1$ )  
    - (a)  $2^n$
    - (b)  $2^{n-1}$
    - (c)  $2^n - 1$
    - (d)  $2^{n-1} - 1$

(9)  $\left(2x + \frac{1}{2x}\right)^8$  ના વિસ્તરણનું મધ્યમ પદ ..... છ. ( $x \neq 0$ )

- (a)  $\binom{8}{4}$  (b)  $\binom{8}{4}(2x)$  (c)  $\binom{8}{4}\left(\frac{1}{2x}\right)$  (d)  $\binom{8}{4}(2)$

(10)  $(x+y)^{15}$  ના વિસ્તરણમાં  $x^{13}y^2$  અને  $x^2y^{13}$  ના સહગુણકોનો સરવાળો ..... છ.

- (a)  $\binom{15}{2}$  (b)  $2\binom{15}{13}$  (c)  $\binom{15}{3}$  (d)  $2\binom{15}{3}$

\*

### સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેનાં મુદ્દાઓનો અત્યાસ કર્યો :

#### 1. દ્વિપદી વિસ્તરણ

$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2}a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + \binom{n}{r}a^{n-r} \cdot b^r + \dots + \binom{n}{n}b^n, n \in \mathbb{N}$  ને દ્વિપદી પ્રમેય કહે છે.

#### 2. દ્વિપદી પ્રમેયના સહગુણકોની લાખબદ ગોઠવણીને પાસ્કલનો નિકોઝ કહે છે.

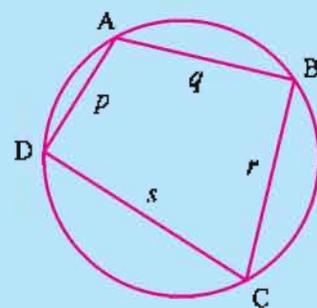
#### 3. $(a+b)^n$ ના વિસ્તરણનું વ્યાપક પદ $T_{r+1} = \binom{n}{r}a^{n-r} \cdot b^r$ છે.

#### 4. જો $n$ યુગમ હોય, તો $(a+b)^n$ ના વિસ્તરણનું મધ્યમ પદ $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ મું અથવા $\left(\frac{n+2}{2}\right)$ મું અથવા $\left(\frac{n+3}{2}\right)$ મું હોય, તો બે મધ્યમ પદ મળે જે $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ મું અને $\left(\frac{n+3}{2}\right)$ મું પદ છે.

— ♦ —

### Brahmagupta's formula

Brahmagupta's most famous result in geometry is his formula for cyclic quadrilaterals. Given the lengths of the sides of any cyclic quadrilateral, Brahmagupta gave an approximate and an exact formula for the figure's area.



The approximate area is the product of the halves of the sums of the sides and opposite sides of a quadrilateral. The accurate [area] is the square root from the product of the halves of the sums of the sides diminished by [each] side of the quadrilateral.

So given the lengths  $p$ ,  $q$ ,  $r$  and  $s$  of a cyclic quadrilateral, the approximate area is  $\left(\frac{p+r}{2}\right)\left(\frac{q+s}{2}\right)$  while, letting  $t = \frac{p+q+r+s}{2}$ , the exact area is

$$\sqrt{(t-p)(t-q)(t-r)(t-s)}$$

Heron's formula is a special case of this formula and it can be derived by setting one of the sides equal to zero.

## સરવાળાનાં સૂત્રો અને અવયવ સૂત્રો

*Music is the pleasure the human mind experiences from counting without being aware that it is counting.*

– Gottfried Leibnitz

### 4.1 પ્રાસ્તાવિક

આપણે નિકોઝામિતીય વિધેયોના મૂળભૂત સંકલ્પના અને ગુણધર્મોનો અભ્યાસ કર્યો. હવે, આપણે કોઈ પણ બે વાસ્તવિક સંખ્યાઓ  $\alpha$  અને  $\beta$  ના સરવાળાથી ભગતી સંખ્યા  $\alpha + \beta$  અને બાદબાકીથી ભગતી સંખ્યા  $\alpha - \beta$  માટે નિકોઝામિતીય વિધેયોના મૂલ્યોને  $\alpha$  અને  $\beta$  માટેના નિકોઝામિતીય વિધેયોના મૂલ્યોના ઉપયોગથી કેવી રીતે બનત કરી શકાય તે જોઈશું. આ સૂત્રોને સરવાળાનાં સૂત્રો કહે છે. ત્યારબાદ આ સૂત્રોના ઉપયોગથી અવયવ સૂત્રો તરીકે ઓળખાતાં અન્ય સૂત્રો મેળવીશું અને તેમના ઉપયોગો જોઈશું.

જો  $f(x) = ax$ ,  $x \in \mathbb{R}$  સુરેખ વિધેય હોય તો તેને માટે,

$$f(x - y) = a(x - y) = ax - ay = f(x) - f(y)$$

એટલે કે,  $f(x - y) = f(x) - f(y)$

હવે, નિકોઝામિતીય વિધેય  $f(x) = \cos x$  માટે  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  અને  $\beta = \frac{\pi}{6}$  બેતાં,

$$\alpha - \beta = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \text{ અને } \cos(\alpha - \beta) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{પરંતુ } \cos \alpha - \cos \beta = \cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

એટલે કે,  $\cos(\alpha - \beta) \neq \cos \alpha - \cos \beta$

આમ, સુરેખ વિધેય માટે સત્ય જણાતું પરિણામ નિકોઝામિતીય વિધેય માટે સત્ય નથી. આવાં બીજાં પણ પરિણામો છે. તો હવે આપણે  $\cos(\alpha - \beta)$  નું સૂત્ર  $\cos \alpha, \cos \beta, \sin \alpha, \sin \beta$  પરથી મેળવોયો.

### 4.2 સરવાળાનાં સૂત્રો

આપણે પહેલા  $\cos(\alpha - \beta)$  અને  $\cos(\alpha + \beta)$  નાં સૂત્રો મેળવીશું.

સૌ પ્રથમ  $\cos(\alpha - \beta)$ ની અભિવ્યક્તિ મેળવીયો.

**પ્રશ્ન 1 :**  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  માટે,

$$(1) \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

$$(2) \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

**સાંબિતી :** વિકલ્પ (1) : ધ્યાચો કે  $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$ .

આંદો અને  $\beta$  માટે ત્રિભુંસાના નિયમ પ્રયોગે ત્રણ શક્યતા છે :

$$(i) \alpha > \beta \quad (ii) \alpha = \beta \quad (iii) \alpha < \beta$$

$$(i) \alpha > \beta$$

ધ્યાચો કે વાલ્યુવિક સંખ્યાઓ અને  $\beta$  અને  $\alpha - \beta$  ને સંગત એકમ વર્તુળ પરનાં ત્રિકોણમિત્તીય બિંદુઓ અનુકૂળે P, Q અને R હો.

$$\therefore \text{વાખ્યા પ્રમાણે, } P(\alpha) = (\cos\alpha, \sin\alpha),$$

$$Q(\beta) = (\cos\beta, \sin\beta) \text{ અને}$$

$$R(\alpha - \beta) = (\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta)).$$

અહીં A(1, 0) હો.

$$\text{આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે } I(\widehat{AP}) = \alpha, I(\widehat{AQ}) = \beta \text{ અને } I(\widehat{AR}) = \alpha - \beta.$$

ક્ષે.  $\beta < \alpha$  અને તેથી  $Q \in \widehat{AP}$ ,

$$I(\widehat{PQ}) = I(\widehat{AP}) - I(\widehat{AQ})$$

$$\therefore I(\widehat{PQ}) = \alpha - \beta = I(\widehat{AR})$$

$$\therefore \widehat{PQ} \cong \widehat{AR}$$

એક જ વર્તુળમાં એકરૂપ ચાપને સંગત જીવાઓ એકરૂપ હોય હો.

$$\therefore PQ = AR$$

$$\therefore PQ^2 = AR^2$$

અંતર સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$PQ^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2$$

$$= \cos^2\alpha - 2\cos\alpha \cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha \sin\beta + \sin^2\beta$$

$$= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\beta + \sin^2\beta - 2\cos\alpha \cos\beta - 2\sin\alpha \sin\beta$$

$$= 2 - 2(\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta)$$

$$AR^2 = (1 - \cos(\alpha - \beta))^2 + (0 - \sin(\alpha - \beta))^2$$

$$= 1 - 2\cos(\alpha - \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) + \sin^2(\alpha - \beta)$$

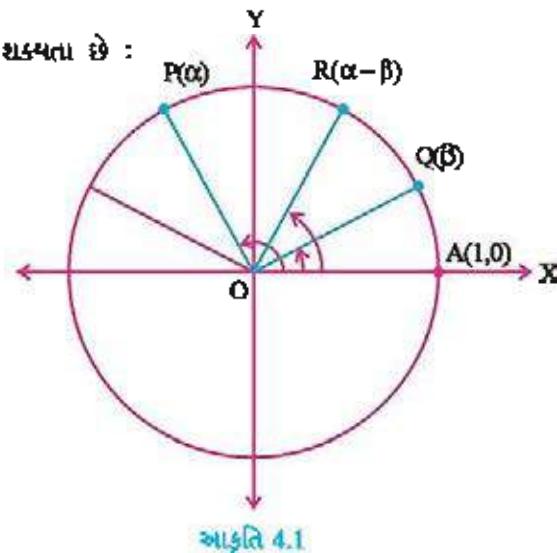
$$= 2 - 2\cos(\alpha - \beta)$$

$$\text{પરંતુ } AR^2 = PQ^2$$

$$\therefore 2 - 2\cos(\alpha - \beta) = 2 - 2(\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta)$$

$$\therefore -2\cos(\alpha - \beta) = -2(\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta)$$

$$\therefore \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$



### (ii) ધૂરો કે $\alpha = \beta$

$$\text{L.H.S.} = \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha - \alpha) = \cos 0 = 1$$

$$\begin{aligned}\text{R.H.S.} &= \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \\ &= \cos\alpha \cos\alpha + \sin\alpha \sin\alpha \\ &= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1\end{aligned}$$

$$\therefore \text{L.H.S.} = \text{R.H.S.}$$

### (iii) ધૂરો કે $\alpha < \beta$

$$\text{તો, } \alpha - \beta = -(\beta - \alpha)$$

$$\begin{aligned}\therefore \cos(\alpha - \beta) &= \cos(-(\beta - \alpha)) \\ &= \cos(\beta - \alpha) \\ &= \cos\beta \cos\alpha + \sin\beta \sin\alpha \\ \therefore \cos(\alpha - \beta) &= \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta\end{aligned}$$

(cosine યુંમ વિધેય છે)

$(\beta > \alpha)$

વિકલ્પ (2) :  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R} હોવાથી \alpha_1 અને \beta_1 એવા મળે કે જેથી \alpha_1, \beta_1 \in [0, 2\pi]$$

$$\text{તથા } \alpha - 2m\pi + \alpha_1 \text{ અને } \beta - 2n\pi + \beta_1, \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned}\therefore \alpha - \beta &= 2m\pi + \alpha_1 - (2n\pi + \beta_1) \\ &= 2(m-n)\pi + \alpha_1 - \beta_1 \\ &= 2k\pi + \alpha_1 - \beta_1, \text{ જ્યાં } k = m - n \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

વળી,  $\sin$  અને  $\cos$  વિધેયોનું મુજબ આવર્તમાન  $2\pi$  હોવાથી,

$$\cos\alpha = \cos\alpha_1, \cos\beta = \cos\beta_1 \text{ અને } \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha_1 - \beta_1)$$

$$\begin{aligned}\text{તથા } \cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha_1 - \beta_1) \\ &= \cos\alpha_1 \cos\beta_1 + \sin\alpha_1 \sin\beta_1 \\ &= \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta\end{aligned}$$

(વિકલ્પ (1))

$$\therefore \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

આમ, વિકલ્પ (1) તથા (2) પરથી સાબિત થાય છે કે, પ્રત્યેક  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  માટે

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

$$(2) \text{ હીં, } \cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta))$$

$$\begin{aligned}&= \cos\alpha \cos(-\beta) + \sin\alpha \sin(-\beta) \\ &= \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta \quad (\cos(-\beta) = \cos\beta, \sin(-\beta) = -\sin\beta)\end{aligned}$$

$$\therefore \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

$$\text{ઉપાય 1 : (1)} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta \quad (2) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

સાબિતી : (1) અપણો જાણીએ છીએ કે, પ્રત્યેક  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  માટે

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

ઉપરના સૂત્રમાં  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  અને  $\beta = \theta$  હેતાં,

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \cos\frac{\pi}{2} \cos\theta + \sin\frac{\pi}{2} \sin\theta \\ &= 0 \cdot \cos\theta + 1 \cdot \sin\theta \\ &= \sin\theta \end{aligned}$$

$$\therefore \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$

(2) આ સૂત્રમાં  $\theta$  ને બદલો  $\frac{\pi}{2} - \theta$  હેતાં,

$$\cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right] = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$\therefore \cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$\therefore \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

**પ્રમેય 2 :** (1)  $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$

(2)  $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$

સાબિતી : (1)  $\sin(\alpha - \beta) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)\right]$   $(\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right))$

$$\begin{aligned} &= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \beta\right] \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos\beta - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin\beta \\ &= \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta \end{aligned}$$

$$\therefore \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$$

(2)  $\sin(\alpha + \beta) = \sin[\alpha - (-\beta)]$   $(\cos(-\theta) = \cos\theta \text{ અને } \sin(-\theta) = -\sin\theta)$

$$\begin{aligned} &= \sin\alpha \cdot \cos(-\beta) - \cos\alpha \cdot \sin(-\beta) \\ &= \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta \end{aligned}$$

$$\therefore \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

### 4.3 સંબંધિત સંખ્યાઓ માટેનાં સૂત્રો

પ્રત્યેક  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  માટે, આપણે પ્રમેય 1 અને 2 પરથી નીચેનાં સૂત્રો મેળવ્યા છે :

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \quad (i)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta \quad (ii)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta \quad (iii)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta \quad (iv)$$

આપણે જોયું કે પ્રત્યેક  $\theta \in \mathbb{R}$  માટે,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta, \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$

$$\therefore \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \left( \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} \right) = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$$

હવે (iv) અને (ii) માં  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  અને  $\beta = \theta$  મૂકતાં,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \sin\frac{\pi}{2} \cos\theta + \cos\frac{\pi}{2} \sin\theta = 1 \cdot \cos\theta + 0 \cdot \sin\theta = \cos\theta$$

$$\therefore \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\frac{\pi}{2} \cos\theta - \sin\frac{\pi}{2} \sin\theta = 0 \cdot \cos\theta - 1 \cdot \sin\theta = -\sin\theta$$

$$\therefore \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$$

અને તે પરથી  $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cot\theta$ .

તે જ રીતે સૂત્ર (iii) તથા (i) માં  $\alpha = \frac{3\pi}{2}$  અને  $\beta = \theta$  મૂકતાં નીચેનાં પરિષ્કાર મળો,

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\cos\theta, \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin\theta$$

$$\therefore \tan\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$$

$$\text{તે જ રીતે } \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\cos\theta, \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = \sin\theta$$

$$\therefore \tan\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\cot\theta$$

હવે (i) થી (iv) માં  $\alpha = \pi, \beta = \theta$  અને  $\alpha = 2\pi, \beta = \theta$  માં મૂકતાં નીચેનાં પરિષ્કાર મળો છે :

$$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta, \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta, \tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$$

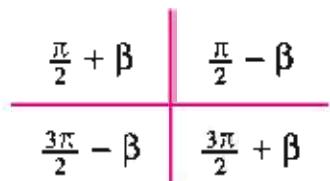
$$\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta, \cos(\pi + \theta) = -\cos\theta, \tan(\pi + \theta) = \tan\theta$$

$$\sin(2\pi - \theta) = -\sin\theta, \cos(2\pi - \theta) = \cos\theta, \tan(2\pi - \theta) = -\tan\theta$$

$$\sin(2\pi + \theta) = \sin\theta, \cos(2\pi + \theta) = \cos\theta, \tan(2\pi + \theta) = \tan\theta$$

આ સૂત્રોનો આપણો દાખલાઓની ગણતરીમાં સતત ઉપયોગ કરીશું. તેને ધાર રાખવા માટે આપણો નીચે પ્રમાણે વિચારીએ.

સૌ પ્રથમ આપણો ત્રિકોણમિતીય વિધેયો  $\sin\alpha, \cos\alpha$  ની ક્રિમતો વિશે વિચારીશું, જ્યાં  $0 \leq \alpha < 2\pi$ , કરતું કે પ્રલેક  $\theta \in \mathbb{R}$  માટે  $\theta = 2n\pi + \alpha, 0 \leq \alpha < 2\pi$  છે. પછો કે  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$  છે. તો  $\frac{\pi}{2} - \beta, \frac{\pi}{2} + \beta, \frac{3\pi}{2} - \beta$  અને  $\frac{3\pi}{2} + \beta$  અનુકૂળે પ્રથમ, બીજા, ત્રીજા તથા ચોથા ચરણના ત્રિકોણમિતીય બિંદુને સંગત વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે.



આકૃતિ 4.2

આકૃતિ 4.2 માં કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા માટે, ત્રિકોણમિતીય વિધેયનું નીચે પ્રમાણે પરિવર્તન થાય છે :  $\sin \rightarrow \cos, \cos \rightarrow \sin, \tan \rightarrow \cot, \cot \rightarrow \tan, \sec \rightarrow \cosec, \cosec \rightarrow \sec$ .

$$P\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) \text{ બીજા ચરણમાં છે.}$$

$$\text{બીજા ચરણમાં } \sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) > 0 \text{ થાય. આથી } \sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = \cos\beta.$$

**નોંધ :** ડાબીબાજુના વિધેયનું મૂલ્ય ઘન છે કે જ્ઞાન તે આધારે નિશાની + કે - લેવી.

$$P\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right) \text{ ત્રીજા ચરણમાં છે અને } \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right) < 0 \text{ છે.}$$

$$\therefore \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right) = -\sin\beta.$$

હવે આફૂતિ 4.3 જુઓ.

આ પ્રકારના પરિવર્તનમાં કોઈ પદ્ધતિ સંખ્યા માટે નિકોઝામિતીય વિધેય તેજું તે જ રહે છે. એટલે કે  $\sin \rightarrow \sin, \cos \rightarrow \cos$  વગેરે.

હવે વિધેયનું મૂલ્ય ધન છે કે ઝણ છે તે આપણારે + કે - ની પસંદગી થાય. હવે નિકોઝામિતીય બિંદુ P( $\pi + \beta$ ) ત્રીજા ચરણમાં છે અને  $\sin(\pi + \beta)$  ત્રીજા ચરણમાં ઝણ છે.

તેથી,  $\sin(\pi + \beta) = -\sin\beta,$

$$\tan(\pi + \beta) = \tan\beta$$

( $\tan(\pi + \beta)$  નું મૂલ્ય ત્રીજા ચરણમાં ધન છે)

હવે, P( $2\pi - \beta$ ) ચોથા ચરણમાં છે.

તેથી,  $\sec(2\pi - \beta) = \sec\beta, \cosec(2\pi - \beta) = -\cosec\beta.$

(P( $2\pi - \beta$ ) ચોથા ચરણમાં હોવાથી  $\sec(2\pi - \beta) > 0$  અને  $\cosec(2\pi - \beta) < 0$ )

અને,  $\sin\left(\frac{38\pi}{3}\right)$  અને  $\cos\left(\frac{61\pi}{4}\right)$  નાં મૂલ્યો આપણો આ નિયમોના આપણારે શોભાએ.

$$\sin\left(\frac{38\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{36\pi + 2\pi}{3}\right)$$

$$= \sin\left(12\pi + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \sin\frac{2\pi}{3}$$

( $12\pi$  એ  $\sin$  નું આવર્તમાન છે.)

$$= \sin\left(\frac{3\pi - \pi}{3}\right)$$

$$= \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

( $\sin$  નું મૂલ્ય બીજા ચરણમાં ધન છે.)

$$\cos\left(\frac{61\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{60\pi + \pi}{4}\right)$$

$$= \cos\left(15\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \cos\left(14\pi + \pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

( $14\pi$  એ  $\cos$  નું આવર્તમાન છે.)

$$= -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

( $\cos$  નું મૂલ્ય ત્રીજા ચરણમાં ઝણ છે.)

### $\tan$ વિધેયનું મુખ્ય આવર્તમાન

આપણે જાણીએ છીએ કે  $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta, \cos(\pi + \theta) = -\cos\theta.$  તેથી  $\tan(\pi + \theta) = \tan\theta.$

અને,  $\pi$  એ  $\tan$  નું એક આવર્તમાન છે. હવે આપણો સાબિત કરીશું કે  $\pi$  એ  $\tan$  નું મુખ્ય આવર્તમાન છે.

$\pi - \beta$	$\beta$
$\pi + \beta$	$2\pi - \beta$

આફૂતિ 4.3

ધારો કે  $\tan$  નું મુખ્ય આવર્તમાન  $p$  છે.

હવે,  $\tan(\theta + p) = \tan\theta, \forall \theta \in \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\right\}$ ,

$$\theta + p \in \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\right\}$$

વિશિષ્ટ ક્રિમત  $\theta = 0$  હેતાં,

$$\tan p = 0$$

$$\therefore p = k\pi$$

$\therefore p$  નું ન્યૂનતમ ધન મૂલ્ય  $\pi$  છે.

$\therefore \tan$  વિશેયનું મુખ્ય આવર્તમાન  $\pi$  છે.

**ઉદાહરણ 1 :** મૂલ્ય શોધો : (1)  $\cos 120^\circ$  (2)  $\sin\left(-\frac{17\pi}{4}\right)$  (3)  $\tan\left(\frac{13\pi}{4}\right)$  (4)  $3\sec\left(\frac{-7\pi}{4}\right)$

$$\text{ઉકેલ : (1)} \cos 120^\circ = \cos(90^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2} \quad \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta\right)$$

$$\therefore \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$(2) \sin\left(-\frac{17\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{17\pi}{4}\right) \quad (\sin(-\theta) = -\sin\theta)$$

$$= -\sin\left(\frac{16\pi + \pi}{4}\right)$$

$$= -\sin\left(4\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

(4π એ sine નું આવર્તમાન છે.)

$$\therefore \sin\left(-\frac{17\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(3) \tan\left(\frac{13\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{12\pi + \pi}{4}\right) = \tan\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\frac{\pi}{4} = 1 \quad (3\pi એ \tan નું આવર્તમાન છે.)$$

$$\therefore \tan\left(\frac{13\pi}{4}\right) = 1$$

$$(4) 3\sec\left(\frac{-7\pi}{4}\right) = 3\sec\left(\frac{7\pi}{4}\right) \quad (\sec(-\theta) = \sec\theta)$$

$$= 3\sec\left(\frac{8\pi - \pi}{4}\right)$$

$$= 3\sec\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 3\sec\left(\frac{-\pi}{4}\right)$$

$$= 3\sec\frac{\pi}{4} = 3\sqrt{2}$$

(2π એ sec નું આવર્તમાન છે.)

$$\therefore 3\sec\left(\frac{-7\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}$$

**ઉદાહરણ 2 :** મૂલ્ય શોધો : (1)  $\frac{\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos(\theta - \pi)} + \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{\cot(3\pi + \theta)} + \frac{\cosec(2\pi + \theta)}{\sec\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)}$

$$(2) \sin\frac{10\pi}{3} \cdot \cos\frac{11\pi}{6} + \cos\frac{2\pi}{3} \cdot \sin\frac{5\pi}{6}$$

$$(3) \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8}$$

**ઉક્તાં :** (1)  $\frac{\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos(\theta - \pi)} + \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{\cot(3\pi + \theta)} + \frac{\cosec(2\pi + \theta)}{\sec\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)}$

$$= \frac{-\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\cos(\pi - \theta)} + \frac{-\cot \theta}{\cot 0} + \frac{\cosec \theta}{-\cosec 0}$$

$$= \frac{-\cos \theta}{-\cos \theta} + (-1) + (-1) = 1 - 1 - 1 = -1$$

(2)  $\sin\frac{10\pi}{3} \cdot \cos\frac{11\pi}{6} + \cos\frac{2\pi}{3} \cdot \sin\frac{5\pi}{6}$

$$= \sin\left(\frac{9\pi + \pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{12\pi - \pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{3\pi - \pi}{3}\right) \cdot \sin\left(\frac{6\pi - \pi}{6}\right)$$

$$= \sin\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= -\sin\frac{\pi}{3} \cdot \cos\frac{\pi}{6} + \left(-\cos\frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\frac{\pi}{6}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = -1$$

(3)  $\cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8}$

$$= \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{8}\right)$$

$$= \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\left(\frac{-\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{-3\pi}{8}\right)$$

$$= \left(\cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8}\right) + \left(\cos^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8}\right) = 1 + 1 = 2$$

**ઉદાહરણ 3 :** નીચેની વાસ્તવિક સંખ્યા ધન છે કે જ્ઞાત તે નક્કી કરો :

(1)  $\sin 110^\circ + \cos 110^\circ$  (2)  $\cosec \frac{17\pi}{12} - \sec \frac{17\pi}{12}$

**ઉક્તાં :** (1)  $\sin 110^\circ + \cos 110^\circ = \sin(180^\circ - 70^\circ) + \cos(90^\circ + 20^\circ)$   
 $= \sin 70^\circ - \sin 20^\circ$

હવે,  $\sin$  પ્રથમ ચરણમાં વધ્યતું વિષેય છે.

$$\therefore 70 > 20 \text{ હોવાથી } \sin 70^\circ > \sin 20^\circ$$

$$\therefore \sin 70^\circ - \sin 20^\circ > 0$$

∴  $\sin 110^\circ + \cos 110^\circ$  ધન વાસ્તવિક સંખ્યા છે.

(2)  $\cosec \frac{17\pi}{12} - \sec \frac{17\pi}{12}$

$$= \cosec\left(\frac{12\pi + 5\pi}{12}\right) - \sec\left(\frac{18\pi - \pi}{12}\right)$$

$$= \cosec\left(\pi + \frac{5\pi}{12}\right) - \sec\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right)$$

$$= -\cosec\frac{5\pi}{12} + \cosec\frac{\pi}{12}$$

હવે,  $\sin$  પ્રથમ ચરણમાં વધ્યતું વિષેય છે. તેથી  $\cosec$  ધટ્ટતું વિષેય થશે.

$$\frac{\pi}{12} < \frac{5\pi}{12}$$

$$\therefore \cosec \frac{\pi}{12} > \cosec \frac{5\pi}{12}$$

$$\therefore \left( \cosec \frac{\pi}{12} - \cosec \frac{5\pi}{12} \right) > 0$$

$$\therefore \cosec \frac{17\pi}{12} = \sec \frac{17\pi}{12} \text{ એનું વાસ્તવિક સંખ્યા છે.}$$

### સ્વાધ્યાય 4.1

1. મૂલ્ય મેળવો :

$$(1) \cos 135^\circ \quad (2) \tan\left(-\frac{23\pi}{6}\right) \quad (3) \cos\left(\frac{-50\pi}{3}\right)$$

$$(4) \sec 690^\circ \quad (5) \cosec \frac{15\pi}{4} \quad (6) \cot\left(\frac{-7\pi}{3}\right)$$

સાંબિત કરો : (2 ટી 11)

$$2. \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \cdot \sec(-\theta) \cdot \tan(\pi - \theta) + \sec(2\pi + \theta) \cdot \sin(\pi + \theta) \cdot \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 0$$

$$3. \frac{\sin(\pi - \theta)}{\sin(\pi + \theta)} \cdot \frac{\cosec(\pi + \theta)}{\cosec(-\pi + \theta)} \cdot \frac{\cosec(2\pi + \theta)}{\sin(3\pi - \theta)} = -\cosec^2 \theta$$

$$4. \frac{\sin(-\theta) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sin(\pi - \theta) \cdot \sec\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)}{\sin(\pi - \theta) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) \cdot \cosec(\pi - \theta) \cdot \cot(2\pi - \theta)} = 1$$

$$5. \sin(n+1)\alpha \cdot \cos(n+2)\alpha - \cos(n+1)\alpha \cdot \sin(n+2)\alpha = -\sin\alpha$$

$$6. \sin^2(40^\circ + \theta) + \sin^2(50^\circ - \theta) = 1$$

$$7. \frac{\cot 333^\circ - \cos 567^\circ}{\tan 297^\circ + \sin 477^\circ} = 1$$

$$8. \frac{\sec^2 129^\circ - \cosec^2 31^\circ}{\cosec 39^\circ - \sec 121^\circ} = \cosec 39^\circ - \sec 59^\circ.$$

$$9. \cos(A + B + C) = \cos A \cos B \cos C - \sin A \sin B \cos C - \sin A \cos B \sin C - \cos A \sin B \sin C$$

$$10. \sin \alpha \cdot \sin(\beta - \gamma) + \sin \beta \cdot \sin(\gamma - \alpha) + \sin \gamma \cdot \sin(\alpha - \beta) = 0$$

$$11. (\sin \alpha - \cos \alpha) \cdot (\sin \beta + \cos \beta) = \sin(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

12.  $\Delta ABC$  નાટે, સાંબિત કરો :

$$(1) \sin(B + C) = \sin A \quad (2) \cos(A + B) = -\cos C$$

$$(3) \sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos \frac{A}{2} \quad (4) \tan(A - B - C) = \tan 2A$$

$$(5) \frac{\sin(B + C) \cdot \cos(B + C) \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}}{\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{B+C}{2}\right) \cdot \sin(\pi + A) \cdot \cos(2\pi - A)} = 1$$

$$(6) \text{જો } \cos A = \cos B \cos C, \text{ તો સાંબિત કરો } 2 \cot B \cot C = 1.$$

13. બદ્ધિમૂલ ચતુર્ભુજ ABCD નાટે સાંબિત કરો :

$$(1) \sin(A + B) + \sin(C + D) = \sin(B + C) + \sin(A + D)$$

$$(2) \cot(A + B + C) + \cot D = 0$$

**14.** ચક્કીય ચતુર્ભુંષા ABCD માટે સાબિત કરો :

$$(1) \cos A + \cos B + \cos C + \cos D = 0$$

$$(2) \sin A + \sin B = \sin C + \sin D$$

**15.** જો  $\alpha - \beta = \frac{\pi}{6}$ , તો  $2\sin\alpha - \cos\beta = \sqrt{3}\sin\beta$  સાબિત કરો.

**16.** જો  $\theta = \frac{19\pi}{4}$ , તો  $\cos^2\theta - \sin^2\theta - 2\tan\theta + \sec^2\theta - 4\cot^2\theta = 0$  સાબિત કરો.

**17.** ક્રમત શોધો : (1)  $\sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{3\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{12} + \sin^2 \frac{7\pi}{12} + \sin^2 \frac{9\pi}{12} + \sin^2 \frac{11\pi}{12}$

$$(2) \sin x + \sin(\pi + x) + \sin(2\pi + x) + \dots + 2n વિના$$

$$(3) \cos x + \cos(\pi - x) + \cos(2\pi - x) + \cos(3\pi - x) + \dots + (2n + 1) વિના, જ્યાં x = \frac{\pi}{3}.$$

$$(4) \cot \frac{\pi}{20} \cdot \cot \frac{3\pi}{20} \cdot \cot \frac{5\pi}{20} \cdot \cot \frac{7\pi}{20} \cdot \cot \frac{9\pi}{20}$$

**18.** નીચેની સંખ્યાઓ ઘન ઢુ કે જ્ઞાન તે નક્કી કરો :

$$(1) \sin 155^\circ + \cos 155^\circ \quad (2) \tan \frac{6\pi}{7} + \cot \left( \frac{-6\pi}{7} \right).$$

$$(3) \tan 111^\circ - \cot 111^\circ \quad (4) \cosec \frac{7\pi}{12} + \sec \frac{7\pi}{12}.$$

**19.** જો  $\tan\theta = \frac{-3}{4}$  અને  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ , તો  $\frac{\sin(\pi - \theta) + \tan(\pi + \theta) + \tan(4\pi - \theta)}{\sin\left(\frac{5\pi}{2} + \theta\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{2} - \theta\right)}$  નું મૂલ્ય શોધો.

**20.** પ્રત્યેક  $n \in \mathbb{N}$  માટે, સાબિત કરો કે  $\sin(n\pi + (-1)^n \theta) = \sin\theta$ .

\*

#### 4.4 કેટલાંક અગત્યનાં પરિણામો

**(1)** આપણે આગળ  $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$  માટે નિયોજિતીએ વિધેયોનાં મૂલ્યો મેળવ્યા. હવે આપણે  $\sin(\alpha - \beta)$  અને  $\cos(\alpha - \beta)$ ના ઉપયોગથી  $\sin \frac{\pi}{12}$  અને  $\cos \frac{\pi}{12}$  તથા અન્ય મૂલ્યો મેળવીશું.

$$\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{4} અથવા \alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{\pi}{6} હેતાં, \alpha - \beta = \frac{\pi}{12}$$

$$\therefore \sin \frac{\pi}{12} = \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{આ જ રીતે, } \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \text{ મેળવી શકાય.}$$

$$\text{જવી, } \sin\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4},$$

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

(2) (i)  $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$

(ii)  $\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\alpha$

(i)  $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = (\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta)(\sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta)$   
 $= \sin^2\alpha \cdot \cos^2\beta - \cos^2\alpha \cdot \sin^2\beta$   
 $= \sin^2\alpha (1 - \sin^2\beta) - (1 - \sin^2\alpha) \cdot \sin^2\beta$   
 $= \sin^2\alpha - \sin^2\alpha \sin^2\beta - \sin^2\beta + \sin^2\alpha \sin^2\beta$   
 $= \sin^2\alpha - \sin^2\beta$

$$\therefore \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$$

હવે,  $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$   
 $= (1 - \cos^2\alpha) - (1 - \cos^2\beta)$   
 $= \cos^2\beta - \cos^2\alpha$

$$\therefore \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$$

આ જ રીતે સાધિત કરી શકીએ છે,

$$\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\alpha$$

4.5  $f(\alpha) = a\cos\alpha + b\sin\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$  નો વિસ્તાર ગણ,  $a, b \in \mathbb{R}$  તથા  $a^2 + b^2 \neq 0$

અહીં  $a^2 + b^2 \neq 0$  હોવાથી આપણે ત્રણ વિકલ્પો લઈશું :

- (1)  $a = 0, b \neq 0$  (2)  $a \neq 0, b = 0$  (3)  $a \neq 0$  તથા  $b \neq 0$

**વિકલ્પ (1) :  $a = 0, b \neq 0$**

અહીં,  $f(\alpha) = b\sin\alpha$ . એવી  $\sin\alpha$  વિષેયનો વિસ્તાર  $[-1, 1]$  છે.

$$-1 \leq \sin\alpha \leq 1 \Leftrightarrow -b \leq b\sin\alpha \leq b \quad (b > 0)$$

$$\therefore b > 0 \text{ માટે } b\sin\alpha \text{ નો વિસ્તાર } [-b, b] = [-|b|, |b|] \text{ છે.} \quad (|b| = b)$$

હવે,  $b < 0$  હોય, તો

$$-1 \leq \sin\alpha \leq 1 \Leftrightarrow -b \geq b\sin\alpha \geq b \Leftrightarrow b \leq b\sin\alpha \leq -b$$

$$\therefore b < 0 \text{ માટે તેનો વિસ્તાર } [b, -b] = [-|b|, |b|] \text{ છે.} \quad (|b| = -b)$$

$$\therefore f(\alpha) = b\sin\alpha \text{ નો વિસ્તાર } [-|b|, |b|] \text{ થાય.}$$

**વિકલ્પ (2) :  $a \neq 0, b = 0$**

અહીં,  $f(\alpha) = a\cos\alpha$  થાય અને તેનો વિસ્તાર આગળની જેમ  $[-|a|, |a|]$  થાય.

**વિકલ્પ (3) :  $a \neq 0, b \neq 0$**

આ વિકલ્પમાં આપણે  $a\cos\alpha + b\sin\alpha$  ને  $r \cos(\theta - \alpha)$  સ્વરૂપમાં પરિવર્તિત કરીશું.

$r \cos(\theta - \alpha) = r \cos\theta \cos\alpha + r \sin\theta \sin\alpha$ , હોવાથી આપણે  $r$  અને  $\theta$  એવા શોધાશું કે જેથી,  $a = r \cos\theta$ ,  $b = r \sin\theta$ . ( $r > 0$ )

$$\therefore a^2 + b^2 = r^2 \text{ તથા } \tan\theta = \frac{b}{a} \text{ થવા જોઈએ.}$$

$$\therefore r = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ તથા } \tan \text{ વિધેયનો વિસ્તાર } R \text{ દોષાથી વાસ્તવિક સંખ્યા } \frac{b}{a} \text{ ને અનુરૂપ}$$

$$\theta \in R - \left\{ (2n-1)\frac{\pi}{2} \mid n \in Z \right\} \text{ મળું જ કે જેથી } \tan\theta = \frac{b}{a} \text{ થાય.}$$

તેથી આપેલો  $a$  અને  $b$  નો શૂન્યેતર વાસ્તવિક ક્રમતો માટે આપણે  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$  અને  $\theta$  એવા ક્રમતો કે જેથી  $\tan\theta = \frac{b}{a}$  થાય. આપણે  $\theta$  પસંદ કરી શકીએ કે જેથી  $r\cos\theta = a, r\sin\theta = b$ .

$$\text{હવે, } f(\alpha) = a\cos\alpha + b\sin\alpha$$

$$= r\cos\theta \cos\alpha + r\sin\theta \sin\alpha$$

$$= r(\cos\theta \cos\alpha + \sin\theta \sin\alpha)$$

$$= r\cos(\theta - \alpha)$$

$$f(\alpha) = r\cos(\theta - \alpha)$$

$$-1 \leq \cos(\theta - \alpha) \leq 1 \Leftrightarrow -r \leq r\cos(\theta - \alpha) \leq r \quad (r > 0)$$

$$\therefore f(\alpha) \text{ નો વિસ્તાર } [-r, r] \text{ છે.}$$

$$\text{તેથી } f(\alpha) \text{ નો વિસ્તાર } [-\sqrt{a^2 + b^2}, \sqrt{a^2 + b^2}] \text{ છે.}$$

$$\text{આમ, } f(\alpha) \text{ નું મહત્વમાં મૂલ્ય } \sqrt{a^2 + b^2} \text{ અને ન્યૂનતમ મૂલ્ય } -\sqrt{a^2 + b^2} \text{ થશે.}$$

#### 4.6 $\tan$ અને $\cot$ વિધેયનાં સરવાળા - સૂત્રો

$$(1) \text{ જો } \alpha, \beta \text{ અને } \alpha + \beta \in R - \left\{ (2k-1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z \right\}, \text{ તો}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

$$\text{અને જો } \alpha, \beta \text{ અને } \alpha - \beta \in R - \left\{ (2k-1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z \right\}, \text{ તો}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

$$\text{સાબિતી: } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta} \quad (\alpha + \beta \in R - \left\{ (2k-1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z \right\})$$

$$\text{હવે, } \alpha, \beta \in R - \left\{ (2k-1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z \right\}, \cos\alpha \neq 0, \cos\beta \neq 0$$

$$\text{તેથી અંશ અને છેદને } \cos\alpha \cdot \cos\beta, \sin\alpha \cdot \sin\beta \text{ બાળતાં,}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}.$$

$$\text{આ જ રીતે, } \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta} \text{ મેળવી શકાય.}$$

(2) જો  $\alpha, \beta$  અને  $\alpha + \beta \in \mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ , તો

$$\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot\alpha \cdot \cot\beta - 1}{\cot\beta + \cot\alpha}$$

અને જો  $\alpha, \beta$  અને  $\alpha - \beta \in \mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ , તો

$$\cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot\alpha \cdot \cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha}$$

સાબિતી :  $\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta}$

$(\alpha + \beta \in \mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\})$

હવે,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}, \sin\alpha \neq 0, \sin\beta \neq 0$

તેથી અંશ અને છેદની  $\sin\alpha \cdot \sin\beta$  વડે ભાગતાં,

$$\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot\alpha \cdot \cot\beta - 1}{\cot\beta + \cot\alpha}.$$

આ જ રીતે,  $\cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot\alpha \cdot \cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha}$  મેળવો શકત્ય.

#### 4.7 $\tan \frac{\pi}{12}$ અને $\cot \frac{\pi}{12}$ નાં મૂલ્યો

અહીં,  $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$  અથવા  $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$

$$\begin{aligned} (1) \quad \tan \frac{\pi}{12} &= \tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{3} - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} \\ &= \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\therefore \tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \cot \frac{\pi}{12} &= \cot\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\cot \frac{\pi}{3} \cot \frac{\pi}{4} - 1}{\cot \frac{\pi}{4} - \cot \frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1 + 1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \\ &= \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} \times \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} \\ &= \frac{3 + 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\cot \frac{\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\text{હવે, } \tan \frac{5\pi}{12} = \tan \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \right) = \cot \frac{\pi}{12} = 2 + \sqrt{3} \text{ અને}$$

$$\cot \frac{5\pi}{12} = \cot \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \right) = \tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}.$$

**ઉદાહરણ 4 :** જો  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ,  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  અને  $\tan \beta = -\frac{12}{5}$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$ , તો  $P(\alpha + \beta)$  અને  $P(\alpha - \beta)$ નું ચરણ નક્કી કરો.

**ઉત્તેખ :** અહીં,  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  અને  $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$  પરથી સરવાળો કરતાં  $0 < \alpha + \beta < \pi$  મળે.

∴  $P(\alpha + \beta)$  પ્રથમ ચરણમાં અથવા બીજા ચરણમાં છે.  $\cos$ ine વિષેયનું મૂલ્ય પ્રથમ ચરણમાં ધન અને બીજા ચરણમાં ઋણ છે અને  $\sin$ e વિષેયનું મૂલ્ય પ્રથમ અને બીજા ચરણમાં ધન છે. તેથી  $P(\alpha + \beta)$  નું ચરણ નક્કી કરવા  $\cos(\alpha + \beta)$  નું મૂલ્ય શોધવું જોઈએ.

$$\therefore \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\frac{3}{5} \quad \left( \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \right)$$

$$\tan \beta = -\frac{12}{5}, -\frac{\pi}{2} < \beta < 0$$

$$\therefore \sec \beta = \sqrt{1 - \tan^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{144}{25}} = \frac{13}{5} \quad \left( -\frac{\pi}{2} < \beta < 0 \right)$$

$$\therefore \cos \beta = \frac{5}{13}, \sin \beta = \tan \beta \cdot \cos \beta = -\frac{12}{5} \times \frac{5}{13} = -\frac{12}{13}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$= \left( -\frac{3}{5} \right) \left( \frac{5}{13} \right) - \left( \frac{4}{5} \right) \left( -\frac{12}{13} \right)$$

$$= -\frac{15}{65} + \frac{48}{65} = \frac{33}{65}$$

$$\therefore \cos(\alpha + \beta) > 0$$

$$\therefore P(\alpha + \beta) \text{ પ્રથમ ચરણમાં છે.}$$

**ચરણ નક્કી કરવાની બીજી રીત :**

$P(\alpha + \beta)$ નું ચરણ નક્કી કરવાની બીજી રીત જોઈએ :

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$= \left( \frac{4}{5} \right) \left( \frac{5}{13} \right) + \left( -\frac{3}{5} \right) \left( -\frac{12}{13} \right)$$

$$= \frac{20 + 36}{65} = \frac{56}{65} > 0$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{33}{65} > 0 \quad (\text{પ્રથમ રીત})$$

હવે,  $\sin(\alpha + \beta) > 0$  અને  $\cos(\alpha + \beta) > 0$  હોવાથી  $P(\alpha + \beta)$  પ્રથમ ચરણમાં છે.

હવે,  $P(\alpha - \beta)$  માટે,  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  અને  $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$

$$\therefore \frac{\pi}{2} > -\beta > 0$$

$$\therefore 0 < -\beta < \frac{\pi}{2} \text{ તથા } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \quad (i)$$

$$\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < \frac{3\pi}{2}$$

((i) પરથી સરવાળો કરતાં)

$\therefore P(\alpha - \beta)$  बीजा अथवा त्रीजा चरणमां छे.  $\sin$  विधेयनु मूल्य बीजा चरणमां धन अने त्रीजा चरणमां ऋण अने  $\cos$  विधेयनु मूल्य लोका अने त्रीजा बने चरणमां ऋण छे. तेथो  $P(\alpha - \beta)$  नु चरण नक्की करवा आपको  $\sin(\alpha - \beta)$  शोध्नु पड्दो.

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta \\ &= \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right) - \left(\frac{-3}{5}\right)\left(\frac{-12}{13}\right) \\ &= \frac{20 - 36}{65} = \frac{-16}{65}\end{aligned}$$

$$\therefore \sin(\alpha - \beta) < 0$$

$$\therefore P(\alpha - \beta) \text{ त्रीजा चरणमां छे.}$$

**उदाहरण 5 :**  $\sin\theta + \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$  नो विस्तार भेण्यो.

$$\begin{aligned}\text{उक्त : } \text{पारो के } f(\theta) &= \sin\theta + \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \sin\theta + \cos\theta \cos\frac{\pi}{3} - \sin\theta \sin\frac{\pi}{3} \\ &= \sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta \\ f(\theta) &= \frac{1}{2}\cos\theta + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sin\theta = a\cos\theta + b\sin\theta\end{aligned}$$

$f(\theta)$  ने  $a\cos\theta + b\sin\theta$  साथे सरभावता,

$$a = \frac{1}{2}, b = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{हे, } r^2 = a^2 + b^2 = \frac{1}{4} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + 1 - \sqrt{3} + \frac{3}{4}$$

$$r^2 = 2 - \sqrt{3}$$

$$\therefore r = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2}}$$

$$\therefore r = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore f(\theta) \text{ नो विस्तार } [-r, r] - \left[\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \text{ दि.}$$

**उदाहरण 6 :**  $\sin 110^\circ + \cos 110^\circ$  धन छे के ऋण ते नक्की करो.

**उक्त :** पारो के  $f(\theta) = \sin 110^\circ + \cos 110^\circ$

$$\begin{aligned}&= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 110^\circ + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 110^\circ\right) \\ &= \sqrt{2}(\cos 45^\circ \sin 110^\circ + \sin 45^\circ \cos 110^\circ) \\ &= \sqrt{2} \sin(110^\circ + 45^\circ) \\ &= \sqrt{2} \sin 155^\circ > 0 \quad (90^\circ < 155^\circ < 180^\circ)\end{aligned}$$

$\therefore \sin 110^\circ + \cos 110^\circ$  धन संघा छे.

**नोंद :** आपको आ प्रकरणमां गणेल उदाहरण 3 आ रीते पषा करी शकाय.

**ઉદાહરણ 7 :**  $\sqrt{3}\sin\alpha - \cos\alpha$  ને  $r\sin(\alpha - \theta)$  સ્વરૂપે ફર્શીવી  $r$  અને  $\theta$  શોધો.

જ્યાં  $r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ .

**ઉકેલ :** ધારો કે  $f(\alpha) = \sqrt{3}\sin\alpha - \cos\alpha$

$$\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2 \text{ વડે ગુણતાં અને ભાગતાં,}$$

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha - \frac{1}{2}\cos\alpha\right) \\ &= 2\left(\sin\alpha \cos\frac{\pi}{6} - \cos\alpha \sin\frac{\pi}{6}\right) \\ &= 2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

હવે,  $r\sin(\alpha - \theta)$  સાથે સરખાવતાં,

$$r = 2, \theta = \frac{\pi}{6} \text{ મળે. અહીં } \theta = \frac{\pi}{6} \text{ એ } 0 \leq \theta < 2\pi \text{ નું સમાધાન કરે છે. \quad (r > 0)$$

(i)  $\frac{-\pi}{2} < \theta < 0$  (ii)  $0 < \theta < 2\pi$

**ઉકેલ :** ધારો કે  $f(\alpha) = \sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha$

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2 \text{ વડે ગુણતાં અને ભાગતાં,}$$

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha\right) \\ &= 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{6}\sin\alpha\right) \\ &= 2\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \\ &= 2\cos\left(\alpha - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) \end{aligned}$$

હવે,  $r\cos(\alpha - \theta)$  સાથે સરખાવતાં,

$$\therefore r = 2 \text{ અને } \theta = \frac{-\pi}{6} \text{ મળે, જે } \frac{-\pi}{2} < \theta < 0 \text{ નું સમાધાન કરે છે.}$$

$$2\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6} - 2\pi\right) = 2\cos\left(\alpha - \frac{11\pi}{6}\right)$$

$$\therefore \theta = \frac{11\pi}{6} \text{ વેરીં, } \theta \text{ એ } 0 < \theta < 2\pi \text{ નું સમાધાન કરે છે.}$$

**ઉદાહરણ 9 :** સાબિત કરો કે,  $\sin^2A = \cos^2(A - B) + \cos^2B - 2\cos(A - B)\cos A \cos B$ .

**ઉકેલ :** જાણો  $\sin^2A = \cos^2(A - B) + \cos^2B - 2\cos(A - B)\cos A \cos B$ .

$$-\cos^2B + \cos^2(A - B) - 2\cos(A - B) \cos A \cos B$$

$$= \cos^2B + \cos(A - B) [\cos(A - B) - 2\cos A \cos B]$$

$$= \cos^2B + \cos(A - B) [\cos A \cos B + \sin A \sin B - 2\cos A \cos B]$$

$$= \cos^2B + \cos(A - B) (\sin A \sin B - \cos A \cos B)$$

$$= \cos^2B - \cos(A - B) \cos(A + B)$$

$$- \cos^2B - (\cos^2A - \sin^2B)$$

$$= \cos^2B + \sin^2B - \cos^2A - 1 - \cos^2A - \sin^2A = \text{L.H.S.}$$

## स्वाध्याय 4.2

**1.** उमंत शोधो :

$$(1) \sin^2 37\frac{1}{2}^\circ = \sin^2 7\frac{1}{2}^\circ \quad (2) \sin^2 52\frac{1}{2}^\circ = \cos^2 7\frac{1}{2}^\circ \quad (3) \cos^2 37\frac{1}{2}^\circ = \sin^2 37\frac{1}{2}^\circ$$

**2.** सांजित करो :  $\sin^2 A + \sin^2 B + \cos^2(A + B) + 2\sin A \sin B \cos(A + B) = 1$ .

**3.** (1) जै  $\cos A = \frac{1}{7}$ ,  $\cos B = \frac{13}{14}$  अने  $0 < A, B < \frac{\pi}{2}$ , तो सांजित करो कि,  $A - B = \frac{\pi}{3}$

$$(2) \text{ जै } \sin A = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos B = \frac{3}{\sqrt{10}} \text{ अने } 0 < A, B < \frac{\pi}{2}, \text{ तो सांजित करो कि, } A + B = \frac{\pi}{4}$$

**4.** (1) जै  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ ,  $\cos \beta = \frac{12}{13}$ ,  $\frac{3\pi}{2} < \alpha, \beta < 2\pi$ , तो  $P(\alpha - \beta)$  नु चरणा नक्की करो.

$$(2) \text{ जै } \cos \alpha = \frac{-5}{13}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ अने } \tan \beta = \frac{4}{3}, \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}, \text{ तो } P(\alpha + \beta) \text{ नु चरणा नक्की करो.}$$

**5.** जै  $\cot \alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\sec \beta = \frac{-5}{3}$ , ज्यां  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$  अने  $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$  तो  $\tan(\alpha + \beta)$  नु मूल्य शोधो अने  $P(\alpha + \beta)$  नु चरणा नक्की करो.

**6.** नीचेनानो विस्तार मेणवो :

$$(1) 7\sin \theta + 24\cos \theta \quad (2) \cos \theta + \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) + 1.$$

**7.** सांजित करो कि  $5\cos \theta + 3\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + 7$  नु मूल्य  $[0, 14]$  मां छे.

**8.**  $\sqrt{3}\sin \theta + \cos \theta$  ने  $r\cos(\theta - \alpha)$  खाल्ये दर्शावो. ज्यां  $r > 0$  अने  $0 < \alpha < 2\pi$ .

**9.** जै  $\frac{-\pi}{2} < \theta < 0$  अने  $\cos \alpha = \sqrt{3}\sin \alpha = r\cos(\alpha - \theta)$ , तो  $r$  अने  $\theta$  शोधो.

**10.** सांजित करो :

$$(1) \tan\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{\sqrt{3}\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sqrt{3}\sin \alpha} \quad (2) \tan 39^\circ = \frac{\sqrt{3}\cos 21^\circ - \sin 21^\circ}{\cos 21^\circ + \sqrt{3}\sin 21^\circ}$$

$$(3) \tan 3\Lambda \cdot \tan 2\Lambda \cdot \tan \Lambda = \tan 3\Lambda - \tan 2\Lambda - \tan \Lambda$$

$$(4) \cot A \cdot \cot 2A - \cot 2A \cdot \cot 3A - \cot 3A \cdot \cot A = 1$$

$$(5) \tan 25^\circ \cdot \tan 15^\circ + \tan 15^\circ \cdot \tan 50^\circ + \tan 25^\circ \cdot \tan 50^\circ = 1$$

**11.** जै  $A + B = \frac{\pi}{4}$ , तो, सांजित करो कि

$$(1) (1 + \tan A)(1 + \tan B) = 2$$

$$(2) (\cot A - 1)(\cot B - 1) = 2$$

**12.** (1) सांजित करो कि  $A + B = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan A = \tan B + 2\tan(A - B)$

$$(2) सांजित करो कि  $\tan 65^\circ = \tan 25^\circ + 2\tan 40^\circ$$$

**13.** जै  $A + B + C = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , तो सांजित करो कि,

$$(1) \tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A = 1$$

$$(2) \cot A + \cot B + \cot C = \cot A \cot B \cot C$$

14. જો  $A + B + C = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , તો સાંભિત કરો કે,

- (1)  $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$
- (2)  $\cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A + \cot A \cdot \cot B = 1$

15. જો  $\tan A = 3$ ,  $\tan B = \frac{1}{2}$ ,  $0 < A, B < \frac{\pi}{2}$ , તો સાંભિત કરો કે,  $A - B = \frac{\pi}{4}$ .

16. જો  $\Delta ABC$  માં,  $\tan B = 2$  અને  $\tan C = 3$ , તો સાંભિત કરો કે,  $\tan A = 1$ .

17. જો  $0 < A, B < \frac{\pi}{2}$ ,  $\tan A = \frac{a}{a+1}$  અને  $\tan B = \frac{1}{2a+1}$ , તો સાંભિત કરો કે,  $A + B = \frac{\pi}{4}$ .

18. જો  $\alpha + \beta = \theta$ ,  $\alpha - \beta = \phi$  અને  $\frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = \frac{x}{y}$ , તો સાંભિત કરો કે,  $\frac{\sin \theta}{\sin \phi} = \frac{x+y}{x-y}$ .

19. જો  $\frac{\tan(A-B)}{\tan A} + \frac{\sin^2 C}{\sin^2 A} = 1$ , તો સાંભિત કરો કે,  $\tan A \cdot \tan B = \tan^2 C$ .

20. જો  $\tan(A+B) = 3$  અને  $\tan(A-B) = 2$ , તો  $\tan 2A$  અને  $\tan 2B$  નાં મૂલ્ય શોધો.

21. જો  $\tan \beta = \frac{n \sin \alpha \cos \alpha}{1 - n \sin^2 \alpha}$ , તો સાંભિત કરો કે  $\tan(\alpha - \beta) = (1-n) \tan \alpha$ .

\*

#### 4.8 ગુણાકારનું સરવાળા અથવા તકાવતના સ્વરૂપમાં નિરૂપણ

આપણે  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  માટે નીચેનાં સૂત્રો તારવ્યાં છે :

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (i)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad (ii)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (iii)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (iv)$$

સૂત્રો (i) અને (ii)નો સરવાળો અને બાદબાકી કરતાં,

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$$

એટલે કે,

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \quad (v)$$

$$2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \quad (vi)$$

તે જ પ્રમાણે, સૂત્રો (iii) અને (iv) નો સરવાળો અને બાદબાકી કરતાં,

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$$

એટલે કે,

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \quad (vii)$$

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \quad (viii)$$

આ સૂત્રો (v), (vi), (vii) અને (viii) માં ડાબી બાજુનાં પરિણામો નિકોણિતીય વિધેયોનાં મૂલ્યોના ગુણાકાર સ્વરૂપમાં છે, જ્યારે જમણી બાજુનાં પદ બે સંખ્યાઓના સરવાળા અને તકાવત સ્વરૂપે ચલ  $\alpha + \beta$  અથવા  $\alpha - \beta$  હોય તેવાં નિકોણિતીય વિધેયોનાં મૂલ્ય છે. આથી બે નિકોણિતીય વિધેયોના ગુણાકારનું સરવાળા-બાદબાકીના સ્વરૂપમાં નિરૂપણ કરવું સરળ બનશે.

$$\begin{aligned}
 \text{ઉદાહરણ. તરીકે } 2\sin 3\theta \cos 5\theta &= \sin(3\theta + 5\theta) + \sin(3\theta - 5\theta) \\
 &= \sin 8\theta + \sin(-2\theta) \\
 &= \sin 8\theta - \sin 2\theta \quad (\sin(-\theta) = -\sin\theta)
 \end{aligned}$$

હવે, આમાં જ જો મોટા માપનો ખૂલ્લો પહેલા લેવામાં આવે તો ગણતરી સરળ બનશે :

$$\begin{aligned}
 2\cos 3\theta \cdot \sin 5\theta &= 2\sin 5\theta \cdot \cos 3\theta = \sin(5\theta + 3\theta) + \sin(5\theta - 3\theta) \\
 &= \sin 8\theta + \sin 2\theta
 \end{aligned}$$

**ઉદાહરણ 11 :** નીચેનાને સરવાળા કે તકાવત વ્યક્તિમાં દર્શાવો :

$$(1) 2\sin 5\theta \cos \theta \quad (2) 2\cos \frac{5\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \quad (3) 2\sin 3\theta \sin 5\theta \quad (4) \sin^2 \theta \quad (5) 2\cos 5\theta \cos \frac{\theta}{2}$$

**ઉકેલ :** (1)  $2\sin 5\theta \cos \theta = \sin(5\theta + \theta) + \sin(5\theta - \theta) = \sin 6\theta + \sin 4\theta$

(2)  $2\cos \frac{5\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} = \sin\left(\frac{5\theta}{2} + \frac{3\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{5\theta}{2} - \frac{3\theta}{2}\right) = \sin 4\theta - \sin \theta$

(3)  $2\sin 3\theta \sin 5\theta = 2\sin 5\theta \sin 3\theta = \cos(5\theta - 3\theta) - \cos(5\theta + 3\theta)$   
 $= \cos 2\theta - \cos 8\theta$

(4)  $\sin^2 \theta = \sin \theta \sin \theta = \frac{1}{2}[2\sin \theta \sin \theta] = \frac{1}{2}[\cos(\theta - \theta) - \cos(\theta + \theta)]$   
 $= \frac{1}{2}[\cos 0 - \cos 2\theta] = \frac{1}{2}[1 - \cos 2\theta]$

(5)  $2\cos 5\theta \cos \frac{\theta}{2} = \cos\left(5\theta + \frac{\theta}{2}\right) + \cos\left(5\theta - \frac{\theta}{2}\right) = \cos \frac{11\theta}{2} + \cos \frac{9\theta}{2}$

**ઉદાહરણ 12 :** સાબિત કરો કે,  $\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 80^\circ = \frac{3}{16}$

**ઉકેલ :** ડા.ભા. =  $\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 80^\circ$   
 $= \sin 60^\circ \cdot (\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ) \cdot \sin 80^\circ$   
 $= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} (2\sin 40^\circ \cdot \sin 20^\circ) \cdot \sin 80^\circ$   
 $= \frac{\sqrt{3}}{4} [\cos(40^\circ - 20^\circ) - \cos(40^\circ + 20^\circ)] \sin 80^\circ$   
 $= \frac{\sqrt{3}}{4} [\cos(20^\circ) - \cos 60^\circ] \sin 80^\circ$   
 $= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\cos 20^\circ - \frac{1}{2}\right) \sin 80^\circ$   
 $= \frac{\sqrt{3}}{8} (2\sin 80^\circ \cos 20^\circ - \sin 80^\circ)$   
 $= \frac{\sqrt{3}}{8} [\sin(80^\circ + 20^\circ) + \sin(80^\circ - 20^\circ) - \sin 80^\circ]$   
 $= \frac{\sqrt{3}}{8} [\sin 100^\circ + \sin 60^\circ - \sin 80^\circ]$   
 $= \frac{\sqrt{3}}{8} \left[\sin(180^\circ - 80^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 80^\circ\right]$   
 $= \frac{\sqrt{3}}{8} \left(\sin 80^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 80^\circ\right)$   
 $= \frac{3}{16} = \text{ગ.ભ.}$

**ઉદાહરણ 13 :** જો  $A + B = 90^\circ$ , તો  $\sin A \cdot \sin B$  ની મહત્વમ અને ન્યૂનતમ મુલ્યો શોધો.

**ઉકેલ :** પારો કે  $y = \sin A \cdot \sin B = \sin A \sin(90^\circ - A) = \sin A \cos A$

$$\text{હવે, } y = \frac{1}{2}(2\sin A \cdot \cos A) = \frac{1}{2}[\sin(A + A) - \sin(A - A)] \\ = \frac{1}{2}\sin 2A \quad (\sin 0 = 0)$$

$$\text{હવે, } -1 \leq \sin 2A \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}\sin 2A \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$$

અને,  $\sin A \sin B$  ની મહત્વમ અને ન્યૂનતમ ક્રમતો અનુક્રમે  $\frac{1}{2}$  અને  $-\frac{1}{2}$  છે.

### સ્વાધ્યાય 4.3

**1.** નીચેનાને સરવાળા કે તફાવત સ્વરૂપમાં દર્શાવો :

- |  |  |  |
|--|--|--|
| (1) $2\sin 7\theta \cdot \cos 3\theta$                     | (2) $2\sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{5\theta}{2}$  | (3) $2\cos 5\theta \cdot \sin 3\theta$                     |
| (4) $2\cos \frac{5\theta}{2} \cdot \sin \frac{7\theta}{2}$ | (5) $2\cos 11\theta \cdot \cos 3\theta$                    | (6) $2\cos \frac{5\theta}{2} \cdot \cos \frac{3\theta}{2}$ |
| (7) $\sin 9\theta \cdot \sin 11\theta$                     | (8) $2\sin \frac{7\theta}{2} \cdot \sin \frac{9\theta}{2}$ | (9) $2\sin \theta \cdot \cos \theta$                       |

**2.** ક્રમત શોધો :

- |  |  |  |
|--|--|--|
| (1) $2\sin \frac{5\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{12}$  | (2) $2\sin \frac{5\pi}{12} \cdot \cos \frac{7\pi}{12}$       | (3) $2\cos \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{5\pi}{12}$        |
| (4) $2\cos \frac{5\pi}{12} \cdot \cos \frac{7\pi}{12}$ | (5) $8\cos 15^\circ \cdot \cos 45^\circ \cdot \cos 75^\circ$ | (6) $8\sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ$ |

**3.** સાંભિત કરો :

- (1)  $\sin\left(\frac{\pi}{4} + 0\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{1}{2}\cos 2\theta$
- (2)  $\sin \theta \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) = \frac{1}{4}\sin 3\theta$
- (3)  $2\cos \frac{\pi}{13} \cdot \cos \frac{9\pi}{13} + \cos \frac{3\pi}{13} + \cos \frac{5\pi}{13} = 0$
- (4)  $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{16}$
- (5)  $4\cos 12^\circ \cdot \cos 48^\circ \cdot \cos 72^\circ = \cos 36^\circ$

**4.**  $4\cos \theta \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) = \cos 3\theta$  સાંભિત કરો તથા તે પરથી

$$\cos 6^\circ \cos 42^\circ \cos 66^\circ \cos 78^\circ = \frac{1}{16} \text{ તારેખો.}$$

**5.**  $\frac{1}{2\sin 10^\circ} = 2\sin 70^\circ$  ની ક્રમત શોધો.

**6.** સાંભિત કરો કે,  $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = \frac{-1}{2}$ .

\*

#### 4.9 સરવાળા અથવા તફાવતનું ગુણાકાર તરીકે નિરૂપણ

આપણે આગળ સૂત્રો (v) થી (viii) જોવાં, જે નીચે પ્રમાણે છે :

$$2\sin\alpha \cdot \cos\beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \quad (\text{v})$$

$$2\cos\alpha \cdot \sin\beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \quad (\text{vi})$$

$$2\cos\alpha \cdot \cos\beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \quad (\text{vii})$$

$$2\sin\alpha \cdot \sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \quad (\text{viii})$$

અહીં,  $\alpha + \beta = C$  અને  $\alpha - \beta = D$  લેતાં,

$$\alpha = \frac{C+D}{2} \text{ અને } \beta = \frac{C-D}{2} \text{ મળે.}$$

$$\sin C + \sin D = 2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right) \cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

$$\sin C - \sin D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right) \sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

$$\cos C + \cos D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right) \cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

$$\cos C - \cos D = 2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right) \sin\left(\frac{C-D}{2}\right) \text{ અથવા}$$

$$\cos C - \cos D = -2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right) \sin\left(\frac{C-D}{2}\right).$$

આ સૂત્રો ટ્રિકોણમિતીય વિધેયોનાં મૂલ્યોના સરવાળા કે તફાવતનું ગુણાકાર તરીકે નિરૂપણ કરવામાં ઉપયોગી છે.

**ઉદાહરણ 14 :** નીચેનાને ગુણાકાર સ્વરૂપમાં ફેરફારો :

$$(1) \sin 6\theta + \sin 4\theta \quad (2) \sin 6\theta - \sin 2\theta \quad (3) \cos 5\theta + \cos 2\theta$$

$$(4) \cos 6\theta - \cos 10\theta \quad (5) \sin \theta - 1 \quad (6) \cos \theta + 1$$

**ઉકેલ :** (1)  $\sin 6\theta + \sin 4\theta = 2\sin\left(\frac{6\theta+4\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{6\theta-4\theta}{2}\right) = 2\sin 5\theta \cos \theta$

$$(2) \sin 6\theta - \sin 2\theta = 2\cos\left(\frac{6\theta+2\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{6\theta-2\theta}{2}\right) = 2\cos 4\theta \sin 2\theta$$

$$(3) \cos 5\theta + \cos 2\theta = 2\cos\left(\frac{5\theta+2\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{5\theta-2\theta}{2}\right) = 2\cos \frac{7\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$$

$$(4) \cos 6\theta - \cos 10\theta = -2\sin\left(\frac{6\theta+10\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{6\theta-10\theta}{2}\right) \\ = -2\sin 8\theta \sin(-2\theta) = 2\sin 8\theta \sin 2\theta$$

$$(5) \sin \theta - 1 = \sin \theta - \sin \frac{\pi}{2} = 2\cos\left(\frac{\theta+\frac{\pi}{2}}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta-\frac{\pi}{2}}{2}\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$(6) \cos\theta + 1 = \cos\theta + \cos 0 - 2\cos\left(\frac{\theta+0}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-0}{2}\right)$$

$$= 2\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$$

**ઉદાહરણ 15 :** સાબીત કરો :

- (1)  $\cos 20^\circ + \cos 60^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ = \frac{1}{2}$
- (2)  $1 + \cos 2A + \cos 4A + \cos 6A = 4\cos A \cdot \cos 2A \cdot \cos 3A$
- (3)  $\sqrt{3}\sin 10^\circ + \sqrt{2}\sin 55^\circ = \cos 80^\circ + 2\cos 50^\circ$

**ઉકેલ :** (1) ડા.ની. =  $\cos 20^\circ + \cos 60^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ$

$$\begin{aligned} &= \cos 20^\circ + \frac{1}{2} + 2\cos\left(\frac{100^\circ - 140^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{100^\circ - 140^\circ}{2}\right) \\ &= \cos 20^\circ + \frac{1}{2} + 2\cos(120^\circ) \cos(20^\circ) \quad (\cos(-20^\circ) = \cos 20^\circ) \\ &= \cos 20^\circ + \frac{1}{2} + 2\cos(180^\circ - 60^\circ) \cos 20^\circ \\ &= \frac{1}{2} + \cos 20^\circ - 2\cos 60^\circ \cos 20^\circ \\ &\quad - \frac{1}{2} + \cos 20^\circ - 2 \cdot \frac{1}{2} \cos 20^\circ \\ &= \frac{1}{2} + \cos 20^\circ - \cos 20^\circ - \frac{1}{2} = \text{જ.ની.} \end{aligned}$$

(2) ડા.ની. =  $1 + \cos 2A + \cos 4A + \cos 6A$

$$\begin{aligned} &= (\cos 0 + \cos 2A) + (\cos 4A + \cos 6A) \\ &= 2\cos A \cdot \cos A + 2\cos 5A \cdot \cos A \\ &= 2\cos A(\cos A + \cos 5A) \\ &= 2\cos A(2\cos 3A \cdot \cos 2A) \\ &= 4\cos A \cdot \cos 2A \cdot \cos 3A = \text{જ.ની.} \end{aligned}$$

(3) ડા.ની. =  $\sqrt{3}\sin 10^\circ + \sqrt{2}\sin 55^\circ$

$$\begin{aligned} &= 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 10^\circ + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 55^\circ \\ &= 2\sin 60^\circ \sin 10^\circ + 2\sin 45^\circ \sin 55^\circ \\ &= \cos 50^\circ - \cos 70^\circ + \cos 10^\circ - \cos 100^\circ \\ &\quad - \cos 50^\circ - \cos(180^\circ - 80^\circ) - (\cos 70^\circ - \cos 10^\circ) \quad (\text{પદોનું પુનર્ગંઠન}) \\ &\quad - \cos 50^\circ + \cos 80^\circ + 2\sin 40^\circ \sin 30^\circ \\ &= \cos 50^\circ + \cos 80^\circ + 2\sin(90^\circ - 50^\circ) \cdot \frac{1}{2} \\ &\quad - \cos 50^\circ + \cos 80^\circ + \cos 50^\circ - \cos 80^\circ + 2\cos 50^\circ = \text{જ.ની.} \end{aligned}$$

### સ્વાધ્યાય 4.4

**1.** ગુજરાતી સ્વરૂપમાં ક્રોનો :

- (1)  $\sin 7\theta + \sin 3\theta$       (2)  $\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2}$       (3)  $\sin 3\theta - \sin 5\theta$   
 (4)  $\sin \frac{7\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2}$       (5)  $\cos 11\theta + \cos 9\theta$       (6)  $\cos \frac{5\theta}{2} + \cos \frac{11\theta}{2}$   
 (7)  $\cos 5\theta - \cos 11\theta$       (8)  $\cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2}$       (9)  $\cos \theta - 1$   
 (10)  $\sin \theta + 1$       (11)  $\cos \theta + \sin \theta$       (12)  $\sin \theta - \cos \theta$

સાંભળત કરો : (2 થી 7)

**2.** (1)  $\cos 55^\circ + \cos 65^\circ + \cos 175^\circ = 0$       (2)  $\cos \frac{5\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

(3)  $\sin 65^\circ + \cos 65^\circ = \sqrt{2} \cos 20^\circ$       (4)  $\frac{\sin \frac{5\pi}{12} - \cos \frac{5\pi}{12}}{\cos \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{5\pi}{12}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(5)  $\frac{\cos 7A + \cos 5A}{\sin 7A - \sin 5A} = \cot A$

(6)  $\cos 2\theta \cos \frac{0}{2} - \cos 3\theta \cos \frac{90}{2} = \sin 5\theta \sin \frac{50}{2}$

(7)  $\sin \theta + \sin \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) + \sin \left( \theta + \frac{4\pi}{3} \right) = 0$

**3.** (1)  $(\cos \alpha + \cos \beta)^2 + (\sin \alpha + \sin \beta)^2 = 4 \cos^2 \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$ .

(2)  $(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 = 4 \sin^2 \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$ .

**4.** (1)  $\sin A + \sin B + \sin C - \sin(A + B + C) = 4 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{B-C}{2} \sin \frac{C-A}{2}$ .

(2)  $\cos A + \cos B + \cos C + \cos(A + B + C) = 4 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{B-C}{2} \cos \frac{C-A}{2}$ .

**5.** (1)  $\frac{\sin(A + B) - 2 \sin A + \sin(A - B)}{\cos(A + B) - 2 \cos A + \cos(A - B)} = \tan A$

(2)  $\frac{\cos 3A + 2 \cos 5A + \cos 7A}{\cos A + 2 \cos 3A + \cos 5A} = \cos 2A - \sin 2A \tan 3A$

**6.** (1)  $\frac{1}{\sin 10^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 4$       (2)  $\sqrt{2} \sin 10^\circ + \sqrt{3} \cos 35^\circ = \sin 55^\circ + 2 \cos 65^\circ$

**7.** (1)  $\sin \theta = n \sin(\theta + 2\alpha) \Leftrightarrow \tan(\theta + \alpha) = \frac{1+n}{1-n} \tan \alpha$

(2)  $\sin(2A + 3B) = 5 \sin B \Rightarrow 2 \tan(A + 2B) = 3 \tan(A + B)$ .

\*

**પ્રક્રીણી ઉદાહરણો**

**ઉદાહરણ 16 :** સાંભળત કરો :  $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin(\alpha + \beta) < \sin \alpha + \sin \beta$  અને તે પરથી તારવો કે  $\sin 49^\circ + \sin 41^\circ > 1$ .

**ઉક્તા :**  $\sin(\alpha + \beta) - \sin\alpha - \sin\beta$

$$\begin{aligned}
 &= \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta - \sin\alpha - \sin\beta \\
 &= \sin\alpha (\cos\beta - 1) + \sin\beta (\cos\alpha - 1)
 \end{aligned} \tag{i}$$

હવે,  $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ . તેથો  $0 < \sin\alpha < 1, 0 < \sin\beta < 1$  અને

$$\begin{aligned}
 &0 < \cos\alpha < 1, 0 < \cos\beta < 1 \\
 \therefore &\cos\alpha - 1 < 0, \cos\beta - 1 < 0 \\
 \therefore &\sin\alpha(\cos\beta - 1) < 0 \text{ અને } \sin\beta(\cos\alpha - 1) < 0 \\
 \therefore &\sin\alpha(\cos\beta - 1) + \sin\beta(\cos\alpha - 1) < 0 \\
 \therefore &\sin(\alpha + \beta) - \sin\alpha - \sin\beta < 0 \\
 \therefore &\sin(\alpha + \beta) < \sin\alpha + \sin\beta
 \end{aligned}$$

હવે,  $\alpha = 49^\circ, \beta = 41^\circ$  હેતું,

આપણે જાણીએ છીએ કે,  $0 < 49 < 90$  અને  $0 < 41 < 90$

$$\begin{aligned}
 &\sin(49^\circ + 41^\circ) < \sin 49^\circ + \sin 41^\circ \\
 \therefore &\sin 90^\circ < \sin 49^\circ + \sin 41^\circ \\
 \therefore &\sin 49^\circ + \sin 41^\circ > 1
 \end{aligned}$$

**ઉદાહરણ 17 :** જો  $\cos(\alpha + \beta) = \frac{4}{5}, \sin(\alpha - \beta) = \frac{5}{13}$  અને  $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{4}$ , તો સાબિત કરો કે,  $\tan 2\alpha = \frac{56}{33}$ .

**ઉક્તા :** અહીં,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}, 0 < \beta < \frac{\pi}{4}$  આપેલ છે.

$$\begin{aligned}
 \therefore &0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2} \text{ અને } -\frac{\pi}{4} < \alpha - \beta < \frac{\pi}{4}, \\
 \therefore &\cos(\alpha - \beta) \text{ અને } \sin(\alpha + \beta) \text{ ધન થાય.}
 \end{aligned}$$

$$\text{હવે, } \sin(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \beta)} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5} \quad (0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2})$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha - \beta)} = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \frac{12}{13} \quad (-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{4} < \alpha - \beta < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2})$$

$$\therefore \sin(\alpha + \beta) = \frac{3}{5} \text{ અને } \cos(\alpha - \beta) = \frac{12}{13}$$

$$\text{હવે, } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

$$\text{અને } \tan(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$$

$$\tan 2\alpha = \tan[(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)]$$

$$= \frac{\tan(\alpha + \beta) + \tan(\alpha - \beta)}{1 - \tan(\alpha + \beta)\tan(\alpha - \beta)} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{5}{12}}{1 - \frac{3}{4} \times \frac{5}{12}} = \frac{56}{33}$$

$$\therefore \tan 2\alpha = \frac{56}{33}$$

**ઉદાહરણ 18 :** જો  $\alpha$  અને  $\beta$  એ સમીકરણ  $a\cos\theta + b\sin\theta = c$  નાં બીજ હોય, તો સાબિત કરો કે,

$$(1) \cos(\alpha + \beta) = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \quad (2) \cos(\alpha - \beta) = \frac{2c^2 - (a^2 + b^2)}{a^2 + b^2}$$

**ઉકેલ :** અહીં,  $a\cos\theta + b\sin\theta = c$  આપેલ છે. (i)

$$\therefore a\cos\theta = c - b\sin\theta$$

$$\therefore a^2\cos^2\theta = (c - b\sin\theta)^2$$

$$\therefore a^2(1 - \sin^2\theta) = c^2 - 2bc\sin\theta + b^2\sin^2\theta$$

$$\therefore (a^2 + b^2)\sin^2\theta - 2bc\sin\theta + (c^2 - a^2) = 0 \quad (ii)$$

અહીં,  $\alpha$  અને  $\beta$  સમીકરણ (i)નાં બીજ છે તેથી  $\sin\alpha$  અને  $\sin\beta$  સમીકરણ (ii)નાં બીજ થશે.

$$\therefore \sin\alpha \sin\beta = \frac{c^2 - a^2}{a^2 + b^2}. \quad (iii)$$

$$\text{ફરી, } a\cos\theta + b\sin\theta = c$$

$$\therefore b\sin\theta = c - a\cos\theta$$

$$\therefore b^2(1 - \cos^2\theta) = c^2 - 2ac\cos\theta + a^2\cos^2\theta$$

$$\therefore b^2 - b^2\cos^2\theta = a^2\cos^2\theta - 2ac\cos\theta + c^2$$

$$\therefore (a^2 + b^2)\cos^2\theta - 2ac\cos\theta + (c^2 - b^2) = 0 \quad (iv)$$

અહીં  $\alpha$  અને  $\beta$  સમીકરણ (i)નાં બીજ છે તેથી  $\cos\alpha, \cos\beta$  સમીકરણ (iv)નાં બીજ થશે.

$$\therefore \cos\alpha \cos\beta = \frac{c^2 - b^2}{a^2 + b^2}. \quad (v)$$

$$\text{હવે, } \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

$$= \frac{c^2 - b^2}{a^2 + b^2} - \frac{c^2 - a^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

$$\therefore \cos(\alpha + \beta) = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

$$\text{અને, } \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

$$= \frac{c^2 - b^2}{a^2 + b^2} + \frac{c^2 - a^2}{a^2 + b^2} = \frac{2c^2 - (a^2 + b^2)}{a^2 + b^2} \quad ((iii) \text{ અને } (v) \text{ પરથી})$$

$$\therefore \cos(\alpha - \beta) = \frac{2c^2 - (a^2 + b^2)}{a^2 + b^2}$$

**ઉદાહરણ 19 :** યો  $a\sin\theta = b\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = c\sin\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right)$ , તો સાબિત કરો કે,

$$ab + bc + ca = 0. \quad (abc \neq 0)$$

**ઉકેલ :** ધારો કે  $a\sin\theta = b\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = c\sin\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) = k$

સ્પષ્ટ છે કે  $k \neq 0$ . (કેમ ?)

$$\begin{aligned}
\therefore \frac{k}{a} + \frac{k}{b} + \frac{k}{c} &= \sin\theta + \sin\left(0 + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(0 + \frac{4\pi}{3}\right) \\
&= \sin\theta + \sin\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) + \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\
&= 2\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \cos\frac{2\pi}{3} + \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\
&= 2\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\
&= -\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = 0 \\
\therefore \frac{k}{a} + \frac{k}{b} + \frac{k}{c} &= 0 \\
\therefore k \left( \frac{bc + ca - ab}{abc} \right) &= 0 \\
\therefore ab + bc + ca &= 0 \quad (k \neq 0)
\end{aligned}$$

#### स्वाध्याय 4

1. सांकेत करो :

$$(1) \frac{\cos^2 33^\circ - \cos^2 57^\circ}{\sin^2 \frac{21^\circ}{2} - \sin^2 \frac{69^\circ}{2}} = -\sqrt{2} \quad (2) \frac{\sqrt{3}}{\sin 20^\circ} - \frac{1}{\cos 20^\circ} = 4$$

2. सांकेत करो  $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan(\alpha + \beta) > \tan\alpha + \tan\beta$  अने  
तारखो के,  $\tan 35^\circ + \tan 25^\circ < \sqrt{3}$ .

3. सांकेत करो :  $2\tan\beta + \cot\beta - \tan\alpha \Rightarrow 2\tan(\alpha - \beta) - \cot\beta$ .

4. जो  $\theta + \beta = \alpha$  अने  $\sin\theta = k\sin\beta$ , तो सांकेत करो कि,  $\tan\theta = \frac{k \sin\alpha}{1 + k \cos\alpha}$  अने  $\tan\beta = \frac{\sin\alpha}{k - \cos\alpha}$ .

5.  $\Delta ABC$  मां जो  $\sin A + \cos B = 0$ , तो सांकेत करो कि  $\Delta ABC$  गुरुक्रेष्ट दिक्षेष्ट छ तथा  $0 < \sin A < \frac{1}{\sqrt{2}}$  छ.

6. जो  $\cos(\beta - \gamma) + \cos(\gamma - \alpha) + \cos(\alpha - \beta) = \frac{-3}{2}$ , तो सांकेत करो कि,  
 $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 0$  अने  $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0$ .

7. जो  $\tan(\alpha + \theta) = n\tan(\alpha - \theta)$ , तो सांकेत करो कि,  $(n+1)\sin 2\theta = (n-1)\sin 2\alpha$ .

8. जो  $\alpha$  अने  $\beta$  ए समीकरण  $a\tan\theta + b\sec\theta = c$  नां बीज होय तो सांकेत करो कि,  $\tan(\alpha + \beta) = \frac{2ac}{a^2 - c^2}$ .

9.  $3\cos\theta + 5\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$  नां महतम अने न्यूनतम मूल्यो मेणवो.

10. सांकेत करो :  $\sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = \frac{1}{16}$ .

11. सांकेत करो :  $\cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$ .

12. સાંભિત કરો કે,  $\frac{\cos 8\theta \cos 5\theta - \cos 12\theta \cos 9\theta}{\sin 8\theta \cos 5\theta + \cos 12\theta \sin 9\theta} = \tan 4\theta$ .

13. સાંભિત કરો કે,  $m \tan\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = n \tan\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow \cos 2\theta = \frac{m+n}{2(m-n)}$ .

14. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે શીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને  માં લખો :

(1)  $\frac{\cos 10^\circ + \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ - \sin 10^\circ}$  નું મૂલ્ય ..... હૈ.

- (a)  $\tan 25^\circ$       (b)  $\tan 35^\circ$       (c)  $\tan 55^\circ$       (d)  $\tan 80^\circ$

(2)  $\cos 245^\circ + \sin 155^\circ$  નું મૂલ્ય ..... હૈ.

- (a) 0      (b)  $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$       (c)  $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$       (d)  $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

(3)  $\cos(270^\circ + \alpha) \cos(90^\circ - \alpha) - \sin(270^\circ - \alpha) \cos \alpha$  નું મૂલ્ય ..... હૈ.

- (a) -1      (b) 0      (c)  $\frac{1}{2}$       (d) 1

(4)  $2 \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$  નું મૂલ્ય ..... હૈ.

- (a)  $-\frac{1}{4}$       (b) 1      (c)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$       (d)  $\frac{1}{2}$

(5) જે A = 125 અને  $x = \sin A^\circ + \cos A^\circ$ , તો .....

- (a)  $x < 0$       (b)  $x = 0$       (c)  $x > 0$       (d)  $x \geq 0$

(6) જે  $\tan \alpha = \frac{n}{n+1}$  અને  $\tan \beta = \frac{1}{2n+1}$ , ( $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{4}$ ), તો  $\alpha + \beta =$  .....

- (a) 0      (b)  $\frac{\pi}{4}$       (c)  $\frac{\pi}{3}$       (d)  $\frac{\pi}{2}$

(7)  $\frac{\tan 50^\circ - \tan 40^\circ}{\tan 10^\circ}$  નું મૂલ્ય ..... હૈ.

- (a) 0      (b) 1      (c) 2      (d) 3

(8)  $\sin 190^\circ + \cos 190^\circ$  .....

- (a) ઋષ્ટ      (b) શૂન્ય      (c) પણ      (d) અવાસ્તાદેશ

(9) જે  $\cot 15^\circ = m$ , તો  $\frac{\tan 225^\circ + \tan 345^\circ}{\tan 195^\circ - \tan 105^\circ} =$  .....

- (a)  $\frac{m-1}{m^2+1}$       (b)  $\frac{2m}{m^2+1}$       (c)  $\frac{m^2-1}{m^2+1}$       (d)  $\frac{m+1}{m^2+1}$

(10)  $\log \tan 1^\circ + \log \tan 2^\circ + \dots + \log \tan 89^\circ$  નું મૂલ્ય ..... હૈ.

- (a) 0      (b) 1      (c) 2      (d) 3

(11)  $\frac{1 - \tan^2 15^\circ}{1 + \tan^2 15^\circ}$  નું મૂલ્ય ..... હૈ.

- (a) 1      (b)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       (c) 2      (d)  $\sqrt{3}$

(12)  $\cos 480^\circ \sin 150^\circ + \sin 600^\circ \cos 390^\circ$  નું મૂલ્ય ..... હૈ.

- (a)  $-\frac{1}{2}$       (b) 0      (c) -1      (d)  $\frac{1}{2}$

(13)  $\tan 25^\circ + \tan 20^\circ + \tan 25^\circ \tan 20^\circ = \dots$

- (a) 0      (b) 1      (c)  $\frac{1}{2}$       (d) 2

(14)  $\Delta ABC$  ખાતે  $\tan A = \frac{1}{2}$ ,  $\tan B = \frac{1}{3}$ , તો  $\angle C$  નું રેઝિયન મળ્યા હશે ..... હૈ.

- (a)  $\frac{\pi}{4}$       (b)  $\frac{\pi}{3}$       (c)  $\frac{3\pi}{4}$       (d)  $\frac{2\pi}{3}$

(15)  $\sqrt{3} \operatorname{cosec} 20^\circ - \sec 20^\circ$  નું મૂલ્ય ..... હૈ.

- (a) -4      (b) 1      (c) 2      (d) 4

(16)  $(\sqrt{3} \sin 75^\circ - \cos 75^\circ)$  નું મૂલ્ય ..... હૈ.

- (a)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$       (b) 1      (c)  $\sqrt{2}$       (d)  $2\sqrt{2}$

(17)  $\cos^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{3\pi}{12} + \cos^2 \frac{5\pi}{12} = \dots$

- (a)  $-\frac{1}{2}$       (b) 0      (c)  $\frac{1}{2}$       (d)  $\frac{3}{2}$

(18)  $\cos 15^\circ - \sin 15^\circ$  નું મૂલ્ય ..... હૈ.

- (a)  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$       (b) 0      (c)  $\frac{1}{2}$       (d)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(19)  $\cos^2 7\frac{1}{2}^\circ - \cos^2 37\frac{1}{2}^\circ = \dots$

- (a)  $\frac{3}{4}$       (b)  $\frac{2}{\sqrt{2}}$       (c)  $\frac{1}{2}$       (d)  $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

\*

### સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1.  $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$

2.  $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$

3.  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta, \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$

4.  $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$

5.  $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$

6.  $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

7.  $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$

$\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$

$$8. \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos^2\beta - \sin^2\alpha$$

$$9. f(\alpha) = a\cos\alpha + b\sin\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R} \text{ नो विस्तार } [-\sqrt{a^2 + b^2}, \sqrt{a^2 + b^2}] \text{ दृ.$$

(जैसे  $a^2 + b^2 \neq 0$ )

प्र०य प्रदेशम्,

$$10. \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

$$11. \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

$$12. \cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot\alpha \cdot \cot\beta - 1}{\cot\beta + \cot\alpha}$$

$$13. \cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot\alpha \cdot \cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha}$$

$$14. \tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}, \cot\frac{\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$$

$$15. 2\sin\alpha \cos\beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$$

$$16. 2\cos\alpha \sin\beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$$

$$17. 2\cos\alpha \cos\beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

$$18. 2\sin\alpha \sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

$$19. \sin C + \sin D = 2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right) \cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

$$20. \sin C - \sin D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right) \sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

$$21. \cos C + \cos D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right) \cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

$$22. \cos C - \cos D = -2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right) \sin\left(\frac{C-D}{2}\right).$$



**Aryabhata** is also known as **Aryabhata I** to distinguish him from the later mathematician of the same name who lived about 400 years later.

The surviving text is Aryabhata's masterpiece the *Aryabhatiya* which is a small astronomical treatise written in 118 verses giving a summary of Hindu mathematics up to that time. Its mathematical section contains 33 verses giving 66 mathematical rules without proof.

The mathematical part of the *Aryabhatiya* covers arithmetic, algebra, plane trigonometry and spherical trigonometry. It also contains continued fractions, quadratic equations, sums of power series and a table of *sines*.

**ગુણિત અને ઉપગુણિત સંખ્યાઓ માટે  
નિકોણમિતીય વિધેયનાં મૂલ્યો માટેનાં સૂત્રો**

*Geometry is not true, it is advantageous.*

— Henri Poincaré

*Since the mathematicians have invaded the theory of relativity, I do not understand it myself anymore.*

— Albert Einstein

### 5.1 પ્રાસ્તાવિક

આ પ્રકરણમાં આપણે સરવાળા-સૂત્રોનો ઉપયોગ કરી  $2\alpha$ ,  $3\alpha$  વગેરે વાસ્તવિક સંખ્યા અના ગુણિતો (Multiples) અને  $\frac{\alpha}{2}$  જેવા અના ઉપગુણિત (Submultiples) માટે નિકોણમિતીય વિધેયોનાં મૂલ્યો માટેનાં સૂત્રો મેળવીશું. ત્યારબાદ આ સૂત્રોના ઉપયોગથી કેટલીક વિશ્રાંટ સંખ્યાઓ માટે નિકોણમિતીય વિધેયોની ઠંડતો મેળવીશું, તથા છેલ્લે શરતી નિત્યસમોની સાબિતીમાં તેમનો ઉપયોગ જોઈશું.

### 5.2 $2\alpha$ માટે નિકોણમિતીય વિધેયોનાં મૂલ્યો

(1)  **$\sin 2\alpha$  નું સૂત્ર :**  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  માટે,

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

આ સૂત્રમાં  $\beta = \alpha$  મૂક્તાં,

$$\sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha \cos\alpha + \cos\alpha \sin\alpha$$

$$\therefore \sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha \quad (i)$$

(2)  **$\cos 2\alpha$  નું સૂત્ર :**  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  માટે,

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

આ સૂત્રમાં  $\beta = \alpha$  મૂક્તાં,

$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha \cos\alpha - \sin\alpha \sin\alpha$$

$$\therefore \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \quad (ii)$$

$$\therefore \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha)$$

$$\therefore \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \quad (iii)$$

$$\begin{aligned}
 \text{करीयी, } \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\
 &= 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\
 \therefore \cos 2\alpha &= 1 - 2\sin^2 \alpha \tag{iv}
 \end{aligned}$$

अम,  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$

उपरना सूत्रोनी मददथी आपણે ઓઈક વાસ્તવિક સંખ્યા  $\alpha$  માટે  $\sin \alpha$  અને  $\cos \alpha$  નાં મૂલ્યો જાણતા હોઈએ તો વાસ્તવિક સંખ્યા  $2\alpha$  માટે  $\sin 2\alpha$  અને  $\cos 2\alpha$  નાં મૂલ્યો મેળવી શકીએ.

ઉપરનાં સૂત્રો (iii) અને (iv) પરથી આપણને,

$$1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha, 1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2 \alpha \text{ મળે.}$$

આ સ્વરૂપ ખૂબ જ ઉપયોગી છે.

હવે આપણે  $2\alpha$  નાં સ્થાને  $\alpha$  (અટલે  $\alpha$  નાં સ્થાને  $\frac{\alpha}{2}$ ), મૂકીએ તો

$$\sin \alpha = 2\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}.$$

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

વળી,  $1 + \cos \alpha = 2\cos^2 \frac{\alpha}{2}$  અને  $1 - \cos \alpha = 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}$

(3)  $\tan \alpha$  નાં ઉપયોગથી  $\sin 2\alpha, \cos 2\alpha$  અને  $\tan 2\alpha$  નાં સૂત્રો :

$$\begin{aligned}
 \sin 2\alpha &= 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha \\
 &= \frac{2\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} \tag{cos^2 \alpha + sin^2 \alpha = 1}
 \end{aligned}$$

જે  $\alpha \in \mathbb{R} - \{(2k-1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ , તો  $\cos \alpha \neq 0$ . તેથી  $\cos^2 \alpha$  વડે અંશ અને છેદને ભાગતાં,

$$\sin 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \tag{v}$$

$$\begin{aligned}
 \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\
 &= \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}
 \end{aligned}$$

કરી,  $\alpha \in \mathbb{R} - \{(2k-1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ , કેતાં,  $\cos \alpha \neq 0$ . તેથી  $\cos^2 \alpha$  વડે અંશ અને છેદને ભાગતાં,

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \tag{vi}$$

હવે,  $\alpha$  અને  $2\alpha$  બંને  $\tan$  વિધેયના પ્રદેશમાં હોય તો,

$$\begin{aligned}
 \tan 2\alpha &= \tan(\alpha + \alpha) \\
 &= \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \tan \alpha} \tag{\alpha \in \mathbb{R} - \{(2k-1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(2k-1)\frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\}}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \tag{vii}$$

હવે, ખરો કે  $\alpha$  અને  $2\alpha$  બંને  $\cot$  વિધેયના પ્રદેશમાં હોય તો ઉપર પ્રમાણે સાચિત કરી શકાય છે,

$$\cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2\cot \alpha} \tag{\alpha \in \mathbb{R} - \{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}} \tag{viii}$$

**નોંધ :** જે  $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}, \forall k \in \mathbb{Z}$ , તો સ્પષ્ટ છે કે  $\alpha \neq k\pi$  પ્રત્યેક  $k \in \mathbb{Z}$  કરણું  $k\pi = \frac{2k\pi}{2}, 2k \in \mathbb{Z}$ .

સૂત્રો (v), (vi) અને (vii) માં  $2\alpha$  ને બદલો  $\alpha$  (અને  $\alpha$  ને બદલો  $\frac{\alpha}{2}$ ) લેતાં,

$$\sin \alpha = \frac{2\tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \text{ અને } \tan \alpha = \frac{2\tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

હવે, ઉપર મેળવેલ સૂત્રોમાં  $\tan \frac{\alpha}{2} = t$  લેતાં,

$$\sin \alpha = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ અને } \tan \alpha = \frac{2t}{1-t^2}.$$

### 5.3 $3\alpha$ માટે નિકોણમિતીય વિધેયનાં સૂત્રો

$$(1) \quad \sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha)$$

$$\begin{aligned} &= \sin 2\alpha \cdot \cos \alpha + \cos 2\alpha \cdot \sin \alpha \\ &= (2\sin \alpha \cdot \cos \alpha) \cdot \cos \alpha + (1 - 2\sin^2 \alpha) \cdot \sin \alpha \\ &= 2\sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \sin \alpha - 2\sin^3 \alpha \\ &= 2\sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha - 2\sin^3 \alpha \\ &= 2\sin \alpha - 2\sin^3 \alpha + \sin \alpha - 2\sin^3 \alpha \\ &= 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha \end{aligned}$$

$$\therefore \sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha \quad (\text{ix})$$

$$(2) \quad \cos 3\alpha = \cos(\alpha + 2\alpha)$$

$$\begin{aligned} &= \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha - \sin \alpha \cdot \sin 2\alpha \\ &= \cos \alpha \cdot (2\cos^2 \alpha - 1) - \sin \alpha (2\sin \alpha \cos \alpha) \\ &= 2\cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2\cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha \\ &= 2\cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2\cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha) \\ &= 2\cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2\cos \alpha + 2\cos^3 \alpha \\ &= 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha \end{aligned}$$

$$\therefore \cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha \quad (\text{x})$$

(3)  $\alpha, 2\alpha, 3\alpha$  એ તાન વિધેયનાં પ્રદેશમાં હોતાં,

$$\alpha \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}, \quad \alpha \neq (2k-1)\frac{\pi}{4} \text{ અને } \alpha \neq (2k-1)\frac{\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

આપણે જાણીએ છીએ કે પ્રત્યેક  $\frac{\pi}{2}$  નો અધુભુ ગુણક એ નીચે નો અધુભુ ગુણક પણ છે. દાખલા તરીકે  $\frac{3\pi}{2} = \frac{9\pi}{6}$ .

$$\text{એટલે } \left\{ (2k-1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \subset \left\{ (2k-1)\frac{\pi}{6} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\tan 3\alpha = \tan(2\alpha + \alpha)$$

$$= \frac{\tan 2\alpha + \tan \alpha}{1 - \tan 2\alpha \cdot \tan \alpha}$$

$$= \frac{\frac{2\tan \alpha}{1-\tan^2 \alpha} + \tan \alpha}{1 - \frac{2\tan \alpha}{1-\tan^2 \alpha} \cdot \tan \alpha}$$

$$= \frac{2\tan \alpha + \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - \tan^2 \alpha - 2\tan^2 \alpha}$$

$$= \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}, \alpha \in \mathbb{R} - \{(2k-1)\frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\therefore \tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}, \alpha \in \mathbb{R} - \{(2k-1)\frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}\} \quad (\text{xii})$$

આ સૂત્ર જો  $2\alpha$  એટા  $\tan$  વિધેયનાં પ્રદેશમાં હોય તો પણ સત્ય રહે છે.

જો  $\alpha, 2\alpha$  અને  $3\alpha \in D_{\cot}$  લેતાં,

$$\alpha \neq k\pi, \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, \alpha \neq \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \subset \{\frac{k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\cot 3\alpha = \frac{\cot^3\alpha - 3\cot\alpha}{3\cot^2\alpha - 1}, \alpha \in \mathbb{R} - \{\frac{k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\} \text{ પણ આ રીતે સહેલાઈથી મળે.} \quad (\text{xiii})$$

પ્રત્યેક,  $\alpha = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$  માટે પણ સૂત્ર સત્ય છે.

આમ, કોઈક વાસ્તવિક સંખ્યા  $\alpha$  માટે,  $\sin\alpha, \cos\alpha$  અને  $\tan\alpha$  નાં મૂલ્યો પરથી અનુક્રમે  $\sin 3\alpha, \cos 3\alpha$  અને  $\tan 3\alpha$  નાં મૂલ્યો મેળવી શકાય છે. અને તે જ રીતે નિકોણભિત્તીય વિધેયોનાં  $4\alpha, 5\alpha, \dots$  વગેરે જેવાં મૂલ્યો માટે પણ  $\alpha$  નાં નિકોણભિત્તીય વિધેયનાં સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય છે.

$$\text{ઉદાહરણ 1 : સાબિત કરો : (1) } \frac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta} = \tan\theta \quad (2) \frac{\sin\theta + \cos\frac{\theta}{2}}{1 + \sin\frac{\theta}{2} - \cos\theta} = \cot\frac{\theta}{2}$$

$$(3) \frac{\cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \quad (4) \sec\theta + \tan\theta = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$$

$$\text{ઉકેલ : (1) } \text{L.H.L.} = \frac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta} = \frac{2\sin\theta \cos\theta}{2\cos^2\theta} = \tan\theta = \text{R.H.L.}$$

$$(2) \text{L.H.L.} = \frac{\sin\theta + \cos\frac{\theta}{2}}{1 + \sin\frac{\theta}{2} - \cos\theta}$$

$$= \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2} + (1 - \cos\theta)}$$

$$= \frac{\cos\frac{\theta}{2}(2\sin\frac{\theta}{2} + 1)}{\sin^2\frac{\theta}{2} + 2\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{\cos\frac{\theta}{2}(2\sin\frac{\theta}{2} + 1)}{\sin^2\frac{\theta}{2}(1 + 2\sin\frac{\theta}{2})} = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} = \cot\frac{\theta}{2} = \text{R.H.L.}$$

$$(3) \text{L.H.L.} = \frac{\cos 2\theta}{1 - \sin 2\theta} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)} \quad \left(\cos\Lambda = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \Lambda\right), \sin\Lambda = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \Lambda\right)\right)$$

$$= \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \text{R.H.L.}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \text{SL.IL.} &= \sec\theta + \tan\theta = \frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\
 &= \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta} \\
 &= \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} \\
 &= \frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} \\
 &= \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) = \text{જ.ખ.}
 \end{aligned}$$

**ઉદાહરણ 2 :**  $\cos 4\theta$  નું  $\cos\theta$  માં બલ્યુપદ્ધી તરીકે પદોમાં અને  $\sin 5\theta$  નું  $\sin\theta$  માં બલ્યુપદ્ધી તરીકે પદોમાં વિસ્તરણ કરો.

$$\begin{aligned}
 \text{ઉકેલ : } \cos 4\theta &= \cos 2(2\theta) \\
 &= 2\cos^2 2\theta - 1 \\
 &= 2(2\cos^2\theta - 1)^2 - 1 \\
 &= 2(4\cos^4\theta - 4\cos^2\theta + 1) - 1 \\
 &= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1 \\
 \sin 5\theta &= (\sin 5\theta + \sin\theta) - \sin\theta \\
 &= 2\sin 3\theta \cos 2\theta - \sin\theta \\
 &= 2(3\sin\theta - 4\sin^3\theta)(1 - 2\sin^2\theta) - \sin\theta \\
 &= 6\sin\theta - 12\sin^3\theta - 8\sin^3\theta + 16\sin^5\theta - \sin\theta \\
 \therefore \sin 5\theta &= 16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta
 \end{aligned}$$

**ઉદાહરણ 3 :** સાંબિત કરો :  $\cos A \cdot \cos(60^\circ - A) \cos(60^\circ + A) = \frac{1}{4}\cos 3A$  અને આ પરથી  $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ$  નું મૂલ્ય મેળવો.

$$\begin{aligned}
 \text{ઉકેલ : } \text{SL.IL.} &= \cos A \cdot \cos(60^\circ - A) \cos(60^\circ + A) \\
 &= \cos A(\cos^2 60^\circ - \sin^2 A) \\
 &\quad - \cos A\left(\frac{1}{4} - \sin^2 A\right) \\
 &= \cos A\left(\frac{1}{4} - (1 - \cos^2 A)\right) \\
 &= \cos A\left(-\frac{3}{4} + \cos^2 A\right) \\
 &= \frac{1}{4}(4\cos^3 A - 3\cos A) = \frac{1}{4}\cos 3A = \text{જ.ખ.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{દરે, } \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ &= \frac{1}{2}(\cos 20^\circ \cdot \cos(60^\circ + 20^\circ) \cos(60^\circ - 20^\circ)) \\
 &\quad - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\cos 3(20^\circ)\right] \quad (\text{A} = 20^\circ) \\
 &= \frac{1}{8}\cos 60^\circ = \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}
 \end{aligned}$$

**ઉદાહરણ 4 :** સાંબિત કરો :  $\cos^3\theta + \cos^3\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right) + \cos^3\left(\frac{4\pi}{3} + \theta\right) = \frac{3}{4}\cos 3\theta$

$$\text{ઉકેલ : } \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta. \text{ આથી } \cos^3\theta = \frac{1}{4}(\cos 3\theta + 3\cos\theta)$$

$$\begin{aligned}
\text{L.H.S.} &= \cos^3\theta + \cos^3\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right) + \cos^3\left(\frac{4\pi}{3} + \theta\right) \\
&= \frac{1}{4}[\cos 3\theta + 3\cos \theta] + \frac{1}{4}[\cos(2\pi + 3\theta) + 3\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right)] \\
&\quad + \frac{1}{4}[\cos(4\pi + 3\theta) + 3\cos\left(\frac{4\pi}{3} + \theta\right)] \\
&= \frac{1}{4}[\cos 3\theta + 3\cos \theta] + \frac{1}{4}[\cos 3\theta + 3\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right)] \\
&\quad + \frac{1}{4}[\cos 3\theta + 3\cos\left(\frac{4\pi}{3} - \theta\right)] \\
&= \frac{3}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}[\cos \theta + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3} - \theta\right)] \\
&= \frac{3}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}[\cos \theta + 2\cos(\pi + \theta)\cos\frac{\pi}{3}] \\
&= \frac{3}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}[\cos \theta - 2\cos \theta \times \frac{1}{2}] \\
&= \frac{3}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}(\cos \theta - \cos \theta) = \frac{3}{4}\cos 3\theta = \text{R.H.S.}
\end{aligned}$$

**ઉદાહરણ 5 :**  $\cos A \cdot \cos 2A \cdot \cos 2^2 A \cdot \cos 2^3 A \cdots \cos 2^{n-1} A = \frac{\sin 2^n A}{2^n \cdot \sin A}$  સાબેત કરો અને તે પરથી  $\cos \frac{2\pi}{15} \cdot \cos \frac{4\pi}{15} \cdot \cos \frac{8\pi}{15} \cdot \cos \frac{14\pi}{15}$  મૂલ્ય મેળવો.

**ઉક્તિ :**  $\sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\sin 2\theta}{2\sin \theta}$$

$$\begin{aligned}
\text{L.H.S.} &= \cos A \cdot \cos 2A \cdot \cos 2^2 A \cdot \cos 2^3 A \cdots \cos 2^{n-1} A \\
&= \frac{\sin 2A}{2\sin A} \cdot \frac{\sin 2(2A)}{2\sin 2A} \cdot \frac{\sin 2(2^2 A)}{2\sin 2^2 A} \cdot \frac{\sin 2(2^3 A)}{2\sin 2^3 A} \cdots \frac{\sin 2(2^{n-1} A)}{2\sin 2^{n-1} A} \\
&= \frac{\sin 2(2^{n-1} A)}{2^n \cdot \sin A} = \frac{\sin 2^n A}{2^n \cdot \sin A} = \text{R.H.S.}
\end{aligned}$$

$$\cos \frac{2\pi}{15} \cdot \cos \frac{4\pi}{15} \cdot \cos \frac{8\pi}{15} \cdot \cos \frac{14\pi}{15} = -\cos \frac{2\pi}{15} \cdot \cos \frac{4\pi}{15} \cdot \cos \frac{8\pi}{15} \cdot \cos \frac{\pi}{15}$$

$$\begin{aligned}
\left( \cos \frac{14\pi}{15} \right) &= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{15}\right) = -\cos \frac{\pi}{15} \\
&= -\frac{\sin \frac{16\pi}{15}}{16\sin \frac{\pi}{15}} \\
&= -\frac{\sin(\pi + \frac{\pi}{15})}{16\sin \frac{\pi}{15}} \\
&= \frac{\sin \frac{\pi}{15}}{16\sin \frac{\pi}{15}} = \frac{1}{16}
\end{aligned}$$

### સ્વાધ્યાય 5.1

સાબેત કરો : (1 થી 19)

- |   |  |
|---|--|
| 1. $\frac{\sin 2\theta}{1 - \cos 2\theta} = \cot \theta$            | 2. $\frac{\cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta} = \cot\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$         |
| 3. $\tan \frac{\theta}{2} + \cot \frac{\theta}{2} = 2\cosec \theta$ | 4. $\frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$ |

5.  $\frac{1 + \sin 2\theta + \cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta - \cos 2\theta} = \cot \theta$

6.  $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = 2\sec \theta$

7.  $\frac{\cot \theta - \tan \theta}{1 - 2\sin^2 \theta} = \sec \theta \cdot \cosec \theta = 2\cosec 2\theta$

8.  $\sec 2\theta - \tan 2\theta = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$

9.  $\frac{\sin 5\theta - 2\sin 3\theta + \sin \theta}{\cos 5\theta - \cos 3\theta} = \tan \theta$

10.  $\frac{\sin \theta - \sin 3\theta}{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta} = 2\sin \theta$

11.  $\sqrt{3}\cosec 20^\circ - \sec 20^\circ = 4$

12.  $2(\cos^8 \theta - \sin^8 \theta) = \cos 2\theta + \cos 32\theta$

13. यदि  $\tan \alpha = \frac{1}{3}$  और  $\tan \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}$ , तो  $\tan(\alpha + \beta) = 3$ .

14. यदि  $\cos \theta = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})$ , तो  $\cos 2\theta = \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$  और  $\cos 3\theta = \frac{1}{2}\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)$

15.  $\frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin 2A - \sin 2B} = \frac{1}{2}\tan(A + B)$

16.  $\frac{\sin 3\theta}{\sin \theta} - \frac{\cos 3\theta}{\cos \theta} = 2$

17.  $\frac{\cos 3\theta}{\cos \theta} + \frac{\sin 3\theta}{\sin \theta} = 4\cos 2\theta$

18.  $\cos^3 \theta \sin 3\theta + \sin^3 \theta \cos 3\theta = \frac{3}{4}\sin 4\theta$

19.  $\cos^3 \theta \cos 3\theta + \sin^3 \theta \sin 3\theta = \cos^3 2\theta$

20. यदि  $\sin A = \frac{3}{5}$ ,  $0 < A < \frac{\pi}{2}$  तो  $\sin 2A$ ,  $\cos 2A$ ,  $\tan 2A$  और  $\sin 4A$  नां मूल्यों में छेद.

21. यदि  $15\theta = \pi$  तो  $\cos \theta \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 3\theta \cdot \cos 4\theta \cdot \cos 5\theta \cdot \cos 6\theta \cdot \cos 7\theta = \frac{1}{128}$  साबित करो.

22. साबित करो कि  $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\cos 8\theta}}} = 2\cos \theta$ , जबकि  $0 < \theta < \frac{\pi}{8}$

23. साबित करो कि  $\tan \theta + \tan\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) + \tan\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right) - 3\tan 3\theta$  और आ परथी तारचो के  $\tan 20^\circ + \tan 80^\circ + \tan 140^\circ = 3\sqrt{3}$ .

24. साबित करो कि  $\tan \theta \cdot \tan\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) = \tan 3\theta$  और आ परथी तारचो के  $\tan 6^\circ \cdot \tan 42^\circ \cdot \tan 66^\circ \cdot \tan 78^\circ = 1$ .

25. साबित करो :  $\cos 6\theta = 32\cos^6 \theta - 48\cos^4 \theta + 18\cos^2 \theta - 1$ .

\*

#### 5.4 $\frac{\alpha}{2}$ माटेनां त्रिकोणमितीय विधेयोनां मूल्यों $\cos \alpha$ नां मूल्योंमां अभिव्यक्ति

- (1)  $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$  मां  $2\alpha$  ने बदले  $\alpha$  मूकता, (जबकि  $\alpha$  ने बदले  $\frac{\alpha}{2}$  मूकता),  
 $\cos \alpha = 1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}$  मध्ये.

$$\therefore 2\sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha$$

$$\therefore \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \quad (\text{xiii})$$

(2) તે જ પ્રમાણે  $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$  માં  $2\alpha$  ને બદલે  $\alpha$  (અને  $\alpha$  ને બદલે  $\frac{\alpha}{2}$ ) મૂકતાં,

$$\therefore 2\cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha$$

$$\therefore \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \quad (\text{xiv})$$

$$(3) \tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \quad \alpha \neq (2k - 1)\pi; k \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore \tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}. \quad (\text{xv})$$

## 5.5 વિશિષ્ટ સંખ્યાઓ માટેનાં નિકોણમિતીય વિધેયોનાં મુલ્યો

(1)  $\sin 18^\circ$  :

$$\text{ધરો કે } \theta = 18^\circ$$

$$\therefore 5\theta = 90^\circ$$

$$\therefore 3\theta + 2\theta = 90^\circ$$

$$\therefore 2\theta = 90^\circ - 3\theta$$

$$\therefore \sin 2\theta = \sin(90^\circ - 3\theta)$$

$$\therefore \sin 2\theta = \cos 3\theta$$

$$\therefore 2\sin \theta \cos \theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$$

$$\therefore 2\sin \theta = 4\cos^2 \theta - 3 \quad (\cos 18^\circ \neq 0)$$

$$\therefore 2\sin \theta = 4(1 - \sin^2 \theta) - 3$$

$$\therefore 2\sin \theta = 4 - 4\sin^2 \theta - 3$$

$$\therefore 4\sin^2 \theta + 2\sin \theta - 1 = 0$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(4)(-1)}}{2(4)} \\ = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

અહીં,  $\theta = 18^\circ$  હોવાથી  $P(\theta)$  પ્રથમ અરણમાં છે.

$$\therefore \sin \theta > 0$$

$$\therefore \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

(2)  $\cos 18^\circ$  :

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \text{ માં } \theta = 18^\circ \text{ મૂકતાં,}$$

$$\cos^2 18^\circ = 1 - \sin^2 18^\circ$$

$$= 1 - \left( \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \right)^2 = \frac{16 - 5 + 2\sqrt{5} - 1}{16}$$

$$\therefore \cos^2 18^\circ = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{16}$$

$$\therefore \cos 18^\circ = \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{16}}$$

(0 < 18 < 90 હોવાથી  $\cos 18^\circ > 0$ )

(3)  $\cos 36^\circ$  :

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta \text{ અને } \theta = 18^\circ \text{ મૂકતાં,}$$

$$\begin{aligned} \cos 36^\circ &= 1 - 2\sin^2 18^\circ \\ &= 1 - 2 \left( \frac{\sqrt{5}-1}{4} \right)^2 \\ &= 1 - 2 \left( \frac{5-2\sqrt{5}+1}{16} \right) \\ &= \frac{8-5+2\sqrt{5}-1}{8} = \frac{2+2\sqrt{5}}{8} = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

(4)  $\sin 36^\circ$  :

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \text{ અને } \theta = 36^\circ \text{ મૂકતાં,}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 36^\circ &= 1 - \cos^2 36^\circ \\ &= 1 - \left( \frac{\sqrt{5}+1}{4} \right)^2 \\ &= 1 - \left( \frac{5+2\sqrt{5}+1}{16} \right) = \frac{16-6-2\sqrt{5}}{16} = \frac{10-2\sqrt{5}}{16} \\ \therefore \sin 36^\circ &= \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}} \end{aligned}$$

(0 < 36 < 90 હોવાથી  $\sin 36^\circ > 0$ )

આ જ પ્રમાણે 18 ની ગુણિત સંખ્યાઓ 54, 72, 144 વગેરે માટે પડી sine અને cosine નાં મૂલ્યો મેળવી શકાય.

$$\sin 72^\circ = \sin(90^\circ - 18^\circ) = \cos 18^\circ = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}}$$

$$\text{અને } \sin 54^\circ = \sin(90^\circ - 36^\circ) = \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

તે જ રીતે  $\cos 72^\circ = \sin 18^\circ$  અને  $\cos 54^\circ = \sin 36^\circ$ .

(5)  $\sin 22\frac{1}{2}^\circ$  અથવા  $\sin \frac{\pi}{8}$  :

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \text{ અને } \theta = \frac{45^\circ}{2} \text{ મૂકતાં,}$$

$$\sin^2 \frac{45^\circ}{2} = \frac{1 - \cos 45^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore \sin \frac{45^\circ}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2} \quad (0 < 22\frac{1}{2} < 90 \text{ હોવાથી } \sin 22\frac{1}{2}^\circ > 0)$$

(6) તે જ રીતે,  $\cos 22\frac{1}{2}^\circ = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$  મેળવી શકાય.

(7)  $\tan 22\frac{1}{2}^\circ$  :

$$\tan^2 22\frac{1}{2}^\circ = \tan^2 \frac{45^\circ}{2} = \frac{1 - \cos 45^\circ}{1 + \cos 45^\circ} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} \times \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{(\sqrt{2} - 1)^2}{2 - 1}$$

હવે,  $0 < 22\frac{1}{2} < 90$  હોવાથી  $\tan 22\frac{1}{2}^\circ > 0$  છે.

$$\therefore \tan 22\frac{1}{2}^\circ = \sqrt{2} - 1$$

તે જે રીતે  $\cot 22\frac{1}{2}^\circ = \sqrt{2} + 1$  ભયે. આ જ રીતે  $67\frac{1}{2}$  માટે *sine* અને *cosine* ના મૂલ્યો મેળવી શકાય.

$$\cos 67\frac{1}{2}^\circ = \sin 22\frac{1}{2}^\circ, \sin 67\frac{1}{2}^\circ = \cos 22\frac{1}{2}^\circ અને \tan 67\frac{1}{2}^\circ = \cot 22\frac{1}{2}^\circ$$

**ઉદાહરણ 6 :** જો  $\cot \theta = \frac{-5}{12}$ ,  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$  તો  $\sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2}$ નું મૂલ્ય શોધાયો.

**ઉક્તિ :** અહીં  $\cot \theta = \frac{-5}{12}$ , આથી,  $\tan \theta = \frac{-12}{5}$ .

$$\therefore \sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta = 1 + \frac{144}{25} = \frac{169}{25}$$

$$\therefore \sec \theta = \pm \frac{13}{5}, \frac{\pi}{2} < \theta < \pi હોવાથી \sec \theta < 0$$

$$\therefore \sec \theta = -\frac{13}{5}, આથી \cos \theta = \frac{-5}{13}$$

$$\text{હવે, } \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2} = \frac{1 + \frac{5}{13}}{2} = \frac{18}{26}$$

$$\therefore \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{9}{13}$$

$$\sin \frac{\theta}{2} > 0 કરણા કે \frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore \sin \frac{\theta}{2} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2} = \frac{1 - \frac{5}{13}}{2} = \frac{8}{26} = \frac{4}{13}$$

$$\therefore \cos \frac{\theta}{2} = \frac{2}{\sqrt{13}} \quad \left( \frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\therefore \sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} = \frac{3}{\sqrt{13}} + \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{5}{\sqrt{13}}$$

**ઉદાહરણ 7 :** સાબિત કરો :  $\sin^4 \frac{\pi}{8} + \sin^4 \frac{3\pi}{8} + \sin^4 \frac{5\pi}{8} + \sin^4 \frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$ .

$$\begin{aligned} \text{ઉક્તિ : L.H.S.} &= \sin^4 \frac{\pi}{8} + \sin^4 \frac{3\pi}{8} + \sin^4 \frac{5\pi}{8} + \sin^4 \frac{7\pi}{8} \\ &= \sin^4 \frac{\pi}{8} + \sin^4 \frac{3\pi}{8} + \sin^4 \left( \pi - \frac{3\pi}{8} \right) + \sin^4 \left( \pi - \frac{\pi}{8} \right) \\ &= 2 \left( \sin^4 \frac{\pi}{8} + \sin^4 \frac{3\pi}{8} \right) \\ &= 2 \left[ \left( \sin^2 \frac{\pi}{8} \right)^2 + \left( \sin^2 \frac{3\pi}{8} \right)^2 \right] \\ &= 2 \left[ \left( \frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2} \right)^2 + \left( \frac{1 - \cos \frac{3\pi}{4}}{2} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\left( \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{4} \left[ \left( 1 - \cos \frac{\pi}{4} \right)^2 + \left( 1 - \cos \frac{3\pi}{4} \right)^2 \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1}{2} - \sqrt{2} + 1 + \frac{1}{2} + \sqrt{2} \right] = \frac{3}{2} = \text{જ.ખ્લ.}
\end{aligned}$$

**ઉદાહરણ 8 :** જે  $\sin\alpha + \sin\beta = a$  અને  $\cos\alpha + \cos\beta = b$ , તો સાબિત કરો કે

$$(1) \cos(\alpha - \beta) = \frac{a^2 + b^2 - 2}{2} \quad (2) \tan\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{4 - a^2 - b^2}{a^2 + b^2}}$$

**ઉકેલ :** (1) અહીં,  $\sin\alpha + \sin\beta = a$  અને  $\cos\alpha + \cos\beta = b$

વર્ગ કરીને ઉમેરતાં,

$$\begin{aligned}
&(\sin\alpha + \sin\beta)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta)^2 = a^2 + b^2 \\
\therefore &\sin^2\alpha + 2\sin\alpha \sin\beta + \sin^2\beta + \cos^2\alpha + 2\cos\alpha \cos\beta + \cos^2\beta = a^2 + b^2 \\
\therefore &2 + 2(\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta) = a^2 + b^2 \\
\therefore &2 + 2\cos(\alpha - \beta) = a^2 + b^2 \\
\therefore &\cos(\alpha - \beta) = \frac{a^2 + b^2 - 2}{2}
\end{aligned}$$

$$(ii) એવી, \tan^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha - \beta)}{1 + \cos(\alpha - \beta)}$$

$$\therefore \tan^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \frac{1 - \frac{a^2 + b^2 - 2}{2}}{1 + \frac{a^2 + b^2 - 2}{2}}$$

$$\therefore \tan^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \frac{4 - a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

$$\therefore \tan\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{4 - a^2 - b^2}{a^2 + b^2}}$$

**ઉદાહરણ 9 :** સાબિત કરો :  $\sin^4\theta \cdot \cos^4\theta = \frac{1}{128} (3 - 4\cos 4\theta + \cos 8\theta)$

**ઉકેલ :**  $\sin^4\theta \cdot \cos^4\theta = (\sin\theta \cos\theta)^4$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{16} (2\sin\theta \cos\theta)^4 \\
&= \frac{1}{16} (\sin 2\theta)^4 \\
&= \frac{1}{16} (\sin^2 2\theta)^2 \\
&= \frac{1}{16} \left( \frac{1 - \cos 4\theta}{2} \right)^2 \\
&= \frac{1}{64} (1 - 2\cos 4\theta + \cos^2 4\theta) \\
&= \frac{1}{64} \left( 1 - 2\cos 4\theta + \frac{1 + \cos 8\theta}{2} \right) \\
&= \frac{1}{128} (2 - 4\cos 4\theta + 1 + \cos 8\theta) \\
&= \frac{1}{128} (3 - 4\cos 4\theta + \cos 8\theta)
\end{aligned}$$

1. જે  $\tan x = \frac{3}{4}$ ,  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ , હોય તો  $\sin \frac{x}{2}$ ,  $\cos \frac{x}{2}$  અને  $\tan \frac{x}{2}$ -ના મૂલ્યો મેળવો.
2. જે  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\cos \beta = \frac{5}{13}$ ,  $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$  તો  $\sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$  અને  $\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ -ના મૂલ્યો મેળવો.

સાબિત કરો : (3 થી 12)

3.  $\cos^6 \theta - \sin^6 \theta = \frac{1}{4}(\cos^3 2\theta + 3\cos 2\theta)$
4.  $\cos^2 A + \cos^2\left(A + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos^2\left(A - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$
5.  $\sin^2 A + \sin^2\left(A + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin^2\left(A - \frac{4\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$ . પ્રશ્ન 4 પરથી તારવો.
6.  $(1 + \cos \frac{\pi}{8})(1 + \cos \frac{3\pi}{8})(1 + \cos \frac{5\pi}{8})(1 + \cos \frac{7\pi}{8}) = \frac{1}{8}$
7.  $\sin^4 \theta \cdot \cos^2 \theta = \frac{1}{32} [2 - \cos 2\theta - 2\cos 4\theta + \cos 6\theta]$
8.  $\sin^6 \theta = \frac{1}{32} [10 - 15\cos 2\theta + 6\cos 4\theta - \cos 6\theta]$
9.  $\sin 6^\circ \cdot \sin 42^\circ \cdot \sin 66^\circ \cdot \sin 78^\circ = \frac{1}{16}$
10.  $\cos 6^\circ \cdot \cos 42^\circ \cdot \cos 66^\circ \cdot \cos 78^\circ = \frac{1}{16}$
11.  $16\cos \frac{2\pi}{15} \cdot \cos \frac{4\pi}{15} \cdot \cos \frac{8\pi}{15} \cdot \cos \frac{14\pi}{15} = 1$
12.  $(1 + \cos \frac{\pi}{10})(1 + \cos \frac{3\pi}{10})(1 + \cos \frac{7\pi}{10})(1 + \cos \frac{9\pi}{10}) = \frac{1}{16}$

\*

### 5.6 શરતી નિત્યસમો

અહીં આપણે કેટલીક શરતોને આપીન મજાતાં નિત્યસમો વિશે વિચારીશું.

ઉદાહરણ તરીકે,  $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A \sin B \sin C$  એ અને  $A + B + C = \pi$  હોય એવી A, B અને C ની કોઈ પણ ક્રિમતો માટે સત્ય છે એવું સાબિત કરી શકાય. પરંતુ તે માટે  $A + B + C = \pi$  થાય તેવી જ અને C ની ક્રિમતો લેવી તે શરત છે. આવા નિત્યસમને શરતી નિત્યસમ કહેવાય છે. જ્યારે  $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$  એ અની પ્રત્યેક વાસ્તવિક ક્રિમત માટે સત્ય છે. આથી આવાં વિધાનોને નિત્યસમો કહે છે.

મુજબત્વે ક્રિકોષના ખૂલ્ઘાઓને સંકષણ સંબંધો આ પ્રકારના શરતી નિત્યસમો છે.

$$A + B + C = \pi$$

$$\therefore A + B - \pi - C \text{ અને } \frac{A+B}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$$

$$\therefore \sin(A + B) = \sin(\pi - C) \text{ અને } \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)$$

$$\therefore \sin(A + B) = \sin C \text{ અને } \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cos\frac{C}{2}$$

તે જ રીતે,

$$\cos(A + B) = -\cos C \text{ અને } \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = \sin\frac{C}{2}$$

**ઉદાહરણ 10 :** જો  $A + B + C = \pi$  હોય તો સાંક્રિત કરો કે,

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C.$$

**ઉકેલ :** ડિ.ભા. =  $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$

$$= 2 \sin(A + B) \cos(A - B) + 2 \sin C \cdot \cos C$$

$$= 2 \sin(\pi - C) \cos(A - B) + 2 \sin C \cdot \cos C \quad (\text{A} + \text{B} + \text{C} = \pi)$$

$$= 2 \sin C \cdot \cos(A - B) + 2 \sin C \cdot \cos C$$

$$= 2 \sin C [\cos(A - B) + \cos C]$$

$$= 2 \sin C [\cos(A - B) - \cos(A + B)] \quad (\text{A} + \text{B} + \text{C} = \pi)$$

$$= 2 \sin C [-2 \sin A \cdot \sin(-B)]$$

$$= 4 \sin A \sin B \sin C \quad (\sin(-B) = -\sin B)$$

$$= \text{જ.ભા.}$$

**ઉદાહરણ 11 :** જો  $A + B + C = \frac{\pi}{2}$  હોય તો સાંક્રિત કરો કે,

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 2[1 + \sin A \sin B \sin C].$$

**ઉકેલ :** ડિ.ભા. =  $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$

$$= \frac{1 + \cos 2A}{2} + \frac{1 + \cos 2B}{2} + \frac{1 + \cos 2C}{2}$$

$$= \frac{1}{2}[3 + \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C]$$

$$= \frac{1}{2}[3 + 2 \cos(A + B) \cos(A - B) + 1 - 2 \sin^2 C]$$

$$= \frac{1}{2}[4 + 2 \cos(A + B) \cdot \cos(A - B) - 2 \sin^2 C]$$

$$= 2 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - C\right) \cdot \cos(A - B) - \sin^2 C \quad (\text{A} + \text{B} = \frac{\pi}{2} - \text{C})$$

$$= 2 + \sin C [\cos(A - B) - \sin C] \quad (\cos\left(\frac{\pi}{2} - C\right) = \sin C)$$

$$= 2 + \sin C [\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$

$$= 2 + \sin C [-2 \sin A \cdot \sin(-B)]$$

$$= 2 + 2 \sin A \sin B \sin C = 2 [1 + \sin A \sin B \sin C]$$

**અથવા બીજી રીત**

$$\begin{aligned} \text{ડિ.ભા.} &= \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \\ &= \cos^2 A + 1 - \sin^2 B + 1 - \sin^2 C \\ &\quad - 2 + (\cos^2 A - \sin^2 B) - \sin^2 C \\ &\quad - 2 + \cos(A + B) \cos(A - B) - \sin^2 C \\ &= 2 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - C\right) \cdot \cos(A - B) - \sin^2 C \\ &= 2 + \sin C \cdot \cos(A - B) - \sin^2 C \\ &= 2 + \sin C [\cos(A - B) - \sin C] \\ &= 2 + \sin C [\cos(A - B) - \cos(A + B)] \\ &= 2 + \sin C [-2 \sin A \cdot \sin(-B)] \\ &= 2 [1 + \sin A \sin B \sin C] = \text{જ.ભા.} \end{aligned}$$

**1.** જો  $A + B + C = \pi$ , તો સાધિત કરો :

- (1)  $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4\cos A \cos B \cos C$
- (2)  $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$
- (3)  $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$
- (4)  $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A \cos B \cos C)$
- (5)  $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cos B \cos C$
- (6)  $\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = 1 - 2\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$
- (7)  $\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} = 2\left(1 + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}\right)$
- (8)  $\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 2\sin A \sin B \cos C$

**2.** જો  $A + B + C = \frac{\pi}{2}$ , તો સાધિત કરો :

- (1)  $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 1 - 2\sin A \sin B \sin C$
- (2)  $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\cos A \cos B \cos C$
- (3)  $\sin^2 A - \sin^2 B + \sin^2 C = 1 - 2\cos A \sin B \cos C$

\*

### પ્રક્રિયા ઉદાહરણો

**ઉદાહરણ 12 :** સાધિત કરો :  $\tan 142\frac{1}{2}^\circ = 2 + \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6}$ .

$$\begin{aligned}
 \text{ઉકેલ : } & \tan 142\frac{1}{2}^\circ = \tan\left(90^\circ + 52\frac{1}{2}^\circ\right) \\
 &= -\cot 52\frac{1}{2}^\circ \\
 &= -\cot\left(45^\circ + 7\frac{1}{2}^\circ\right) \\
 &= -\frac{\cot 7\frac{1}{2}^\circ - 1}{\cot 7\frac{1}{2}^\circ + 1} \\
 &= -\frac{\cos 7\frac{1}{2}^\circ - \sin 7\frac{1}{2}^\circ}{\cos 7\frac{1}{2}^\circ + \sin 7\frac{1}{2}^\circ} \\
 &= -\frac{\cos 7\frac{1}{2}^\circ - \sin 7\frac{1}{2}^\circ}{\cos 7\frac{1}{2}^\circ + \sin 7\frac{1}{2}^\circ} \times \frac{\cos 7\frac{1}{2}^\circ - \sin 7\frac{1}{2}^\circ}{\cos 7\frac{1}{2}^\circ - \sin 7\frac{1}{2}^\circ} \\
 &= -\frac{\left(\cos 7\frac{1}{2}^\circ - \sin 7\frac{1}{2}^\circ\right)^2}{\cos^2 7\frac{1}{2}^\circ - \sin^2 7\frac{1}{2}^\circ} \\
 &= -\frac{1 - 2\sin 7\frac{1}{2}^\circ \times \cos 7\frac{1}{2}^\circ}{\cos^2 7\frac{1}{2}^\circ - \sin^2 7\frac{1}{2}^\circ}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1 - \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} \\
&= -\frac{1 - \sin(45^\circ - 30^\circ)}{\cos(45^\circ - 30^\circ)} \\
&= -\frac{1 - \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} \\
&= -\frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = -\frac{(2\sqrt{2} - \sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} \\
&= -\frac{(2\sqrt{6} - 2\sqrt{2} - 3 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1)}{2} \\
&= -\sqrt{6} + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{3} \\
&= 2 + \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6} = 4.61.
\end{aligned}$$

**ઉદાહરણ 13 :** જો  $A + B + C = \pi$ , તો સાંભિત કરો કે,

$$\begin{aligned}
\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} &= 1 + 4 \sin \left( \frac{\pi - A}{4} \right) \sin \left( \frac{\pi - B}{4} \right) \sin \left( \frac{\pi - C}{4} \right) \\
\text{ઉકેલ : } 4.61. &= 1 + 4 \sin \left( \frac{\pi - A}{4} \right) \sin \left( \frac{\pi - B}{4} \right) \sin \left( \frac{\pi - C}{4} \right) \\
&= 1 + 4 \sin \left( \frac{B+C}{4} \right) \sin \left( \frac{A+C}{4} \right) \sin \left( \frac{A+B}{4} \right) \quad (\mathbf{A + B + C = \pi}) \\
&= 1 + 2 \left( 2 \sin \left( \frac{B+C}{4} \right) \sin \left( \frac{A+C}{4} \right) \right) \sin \left( \frac{A+B}{4} \right) \\
&= 1 + 2 \sin \left( \frac{A+B}{4} \right) \left[ \cos \left( \frac{B-A}{4} \right) - \cos \left( \frac{A+B+2C}{4} \right) \right] \\
&= 1 + 2 \sin \left( \frac{A+B}{4} \right) \cos \left( \frac{B-A}{4} \right) - 2 \sin \left( \frac{\pi-C}{4} \right) \cos \left( \frac{\pi+C}{4} \right) \\
&= 1 + \left( \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{A}{2} \right) - \left( \sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{C}{2} \right) \\
&= 1 + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{A}{2} - \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{C}{2} \\
&= \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} = 4.61.
\end{aligned}$$

**ઉદાહરણ 14 :** જો  $\alpha$  અને  $\beta$  સમીકરણ  $a \cos \theta + b \sin \theta = c$  ના બીજ હોય તો સાંભિત કરો કે,  $\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2} = \frac{2b}{a+c}$

અને આ પરથી તારવો કે,  $\tan \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = \frac{b}{a}$ .

**ઉકેલ :**  $a \cos \theta + b \sin \theta = c$

$$\therefore a \left( \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} \right) + b \left( \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} \right) = c$$

$$\therefore a - a \tan^2 \frac{\theta}{2} + 2b \tan \frac{\theta}{2} = c + c \tan^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore (a + c) \tan^2 \frac{\theta}{2} - 2b \tan \frac{\theta}{2} + (c - a) = 0$$

આ  $\tan\frac{\theta}{2}$  માં દ્વિધાત સમીકરણ છે અને  $\tan\frac{\alpha}{2}$  અને  $\tan\frac{\beta}{2}$  તેનાં બીજ છે.

$$\therefore \tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2} = -\left(\frac{-2b}{a+c}\right) = \frac{2b}{a+c} અને \tan\frac{\alpha}{2} \cdot \tan\frac{\beta}{2} = \frac{c-a}{c+a}$$

$$\text{એટે, } \tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2}}{1 - \tan\frac{\alpha}{2} \tan\frac{\beta}{2}}$$

$$= \frac{\frac{2b}{a+c}}{1 - \frac{c-a}{c+a}} = \frac{2b}{a+c - c+a} = \frac{2b}{2a} = \frac{b}{a}$$

**ઉદાહરણ 15 :** ગણિતીય અનુમાલથી સાબિત કરો કે,

$$\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \dots + \cos n\theta = \sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \cdot \cosec\frac{\theta}{2} - 1.$$

**ઉત્તેસી :** ધારો કે

$$P(n) : \cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \dots + \cos n\theta = \sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \cdot \cosec\frac{\theta}{2} - 1$$

$$n = 1 \text{ માટે, ડા.ભા.} = \cos\theta, \text{ જ.ભા.} = \sin\theta \cdot \cos\frac{\theta}{2} \cdot \cosec\frac{\theta}{2} - 1$$

$$= \frac{\sin\theta \cdot \cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} - 1$$

$$= \frac{2\sin\frac{\theta}{2} \cdot \cos\frac{\theta}{2} \cdot \cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} - 1$$

$$= 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$$

$$= \cos\theta - \text{જ.ભા.}$$

$$(\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1)$$

$\therefore P(1)$  સત્ય છે.

ધારો કે  $P(k)$  સત્ય છે.

$$\therefore \cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \dots + \cos k\theta = \sin\left(k+1\right)\frac{\theta}{2} \cdot \cos\left(\frac{k\theta}{2}\right) \cdot \cosec\frac{\theta}{2} - 1.$$

$n = k + 1$  લેતાં,

$$\text{ડા.ભા.} = \cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \dots + \cos k\theta + \cos(k+1)\theta$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{k+1}{2}\right)\theta \cdot \cos\frac{k\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} - 1 + \cos(k+1)\theta$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}} \left( 2\sin\left(\frac{k+1}{2}\right)\theta \cos\frac{k\theta}{2} + 2\sin\frac{\theta}{2} \cdot \cos(k+1)\theta \right) - 1$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}} \left[ \sin\left(\frac{(2k+1)\theta}{2}\right) + \sin\frac{\theta}{2} + \sin\left(\frac{(2k+3)\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{(2k+1)\theta}{2}\right) \right] - 1$$

$$= \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}} \left[ \frac{1}{2} \left( \sin\frac{(2k+3)\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2} \right) \right] - 1$$

$$= \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}} \left[ \frac{1}{2} \cdot 2\sin\frac{(k+2)\theta}{2} \cdot \cos\frac{(k+1)\theta}{2} \right] - 1$$

$$= \sin\frac{(k+2)\theta}{2} \cdot \cos\frac{(k+1)\theta}{2} \cdot \cosec\frac{\theta}{2} - 1$$

$\therefore P(k+1)$  સત્ય છે.

$\therefore P(k)$  સત્ય છે.  $\Rightarrow P(k+1)$  સત્ય છે.

ગણિતોચ અનુમાનના સિદ્ધાંત પ્રમાણે,  $P(n)$  પ્રત્યેક  $n \in \mathbb{N}$  માટે સત્ય છે.

### સ્વાધ્યાય 5

સાંભિત કરો : (1 થી 15)

1.  $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) = \sec\theta + \tan\theta$

2.  $\frac{\cot\theta + \cosec\theta - 1}{\cot\theta - \cosec\theta + 1} = \cot\frac{\theta}{2}$

3.  $\tan\alpha = \sqrt{5}\tan\beta \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{3\cos 2\beta - 2}{3 - 2\cos 2\beta}$

4.  $\tan\frac{\alpha}{2} = \cos\theta \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1 - \tan^4\frac{\theta}{2}}{1 + \tan^4\frac{\theta}{2}}$

5. જો  $\sin\theta = a$ , તો  $a(1+x^2) = 2x$  નાં બીજ  $\tan\frac{\theta}{2}$  અને  $\cot\frac{\theta}{2}$  છે.

6. જો  $\cos\theta = a$ , તો  $4x^2 - 4x + 1 = a^2$  નાં બીજ  $\cos^2\frac{\theta}{2}$  અને  $\sin^2\frac{\theta}{2}$  છે.

7. જો  $\alpha$  અને  $\beta$  સમ્પોકરણ  $a\cos\theta + b\sin\theta = c$  નાં બીજ હોય, તો

(1)  $\cos\alpha + \cos\beta = \frac{2ac}{a^2+b^2}$  અને  $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{c^2-b^2}{a^2+b^2}$

(2)  $\tan\alpha + \tan\beta = \frac{-2ab}{b^2-c^2}$  અને  $\tan\alpha \cdot \tan\beta = \frac{a^2-c^2}{b^2-c^2}$

(3)  $\sin(\alpha + \beta) = \frac{2ab}{a^2+b^2}$ .

8.  $\cos^5\theta = \frac{1}{16} [10\cos\theta + 5\cos 3\theta + \cos 5\theta]$

9.  $(2\cos\theta + 1)(2\cos\theta - 1)(2\cos 2\theta - 1)(2\cos 4\theta - 1) = 2\cos 8\theta + 1$

10.  $\cosec\theta + \cosec 2\theta + \cosec 4\theta + \cot 4\theta = \cot\frac{\theta}{2}$

11.  $(\cos^2 48^\circ - \sin^2 12^\circ) - (\cos^2 66^\circ - \sin^2 6^\circ) = \frac{1}{4}$

12.  $\frac{\sec 8\theta - 1}{\sec 4\theta - 1} = \frac{\tan 8\theta}{\tan 2\theta}$

13.  $\cot\frac{\pi}{24} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{6}$

14.  $\tan\frac{\pi}{16} = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} - (\sqrt{2} + 1)$

15.  $4\sin 27^\circ = \sqrt{5+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}$

16. જો  $x = \sin\theta + \cos\theta \cdot \sin 2\theta$  અને  $y = \cos\theta + \sin\theta \cdot \sin 2\theta$  તો

$$\text{સાંબિત કરો કે, } (x+y)^{\frac{2}{3}} + (x-y)^{\frac{2}{3}} = 2$$

17. જો  $A + B + C = \pi$ , સાંબિત કરો કે,

$$(1) \sin(B+2C) + \sin(C+2A) + \sin(A+2B) = 4\sin\left(\frac{B-C}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{C-A}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$(2) \cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} = 4\cos\left(\frac{\pi-A}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi-B}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi-C}{4}\right).$$

18. જો  $\Delta ABC$  કાટકોણ નિકોણ હોય તો સાંબિત કરો કે,

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 \Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2.$$

ગણિતિક અનુમાનનાં રિલાન્ટપદ્ધતિ નોચેનાં પરિષામો સાંબિત કરો : (19 થી 22)

19.  $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \dots + \sin(2n-1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}$ .

20.  $\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\tan\frac{x}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n} - \cot x$

21.  $\sin\theta + \sin 2\theta + \dots + \sin n\theta = \sin\frac{(n+1)\theta}{2} \cdot \sin\frac{n\theta}{2} \cdot \cosec\frac{\theta}{2}$

22.  $\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \dots \cdot \cos^{2^n-1}\alpha = \frac{\sin^n 2\alpha}{2^n \cdot \sin \alpha}$

23. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી ખોજ્ય વિકલ્પ પણંદ કરીને  માં લખો :

(1)  $4x^3 - 3x = \frac{1}{2}$  નું એક બીજ ..... ભ.

- (a)  $\sin 70^\circ$       (b)  $\sin 10^\circ$       (c)  $\sin 20^\circ$       (d)  $\cos 70^\circ$

(2)  $\cos^4 \theta - \sin^4 \theta$  નો વિસ્તાર ..... ભ.

- (a)  $[0, 1]$       (b)  $[-1, 1]$       (c)  $(0, 1)$       (d)  $(-1, 1)$

(3)  $\sec^4 \theta + \cosec^4 \theta$  નો વિસ્તાર ..... ભ.

- (a)  $[1, \infty)$       (b)  $\mathbb{R}^+$       (c)  $[8, \infty)$       (d)  $\mathbb{R} - (-1, 1)$

(4)  $\cos 67\frac{1}{2}^\circ$  નું મૂલ્ય ..... ભ.

- (a)  $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$       (b)  $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$       (c)  $\sqrt{2} - 1$       (d)  $\sqrt{2} + 1$

(5)  $3\sin\frac{\pi}{9} - 4\sin^3\frac{\pi}{9}$  નું મૂલ્ય ..... ભ.

- (a)  $\frac{1}{2}$       (b)  $-1$       (c)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       (d)  $-\frac{1}{2}$

(6) જો  $\sin\theta = \frac{3}{5}$ ,  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ , તો  $P(2\theta)$  નું અરણ ..... ભ.

- (a) પદેશ્વર      (b) બીજું      (c) બીજું      (d) ચોથું

(7)  $6x - 8x^3 = \sqrt{3}$  નું એક બીજ ..... ભ.

- (a)  $\sin 20^\circ$       (b)  $\sin 30^\circ$       (c)  $\sin 10^\circ$       (d)  $\cos 10^\circ$

(8) જો  $\alpha$  એ સમીકરણ  $25\cos^2\theta + 5\cos\theta - 12 = 0$ નું બીજ હોય, તો,  $\sin 2\alpha$  શોધો.  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

(a)  $\frac{-24}{25}$

(b)  $\frac{-13}{18}$

(c)  $\frac{13}{18}$

(d)  $\frac{24}{25}$

(9)  $\frac{\sin 3\theta}{1+2\cos 2\theta}$  નું મૂલ્ય ..... હો.

(a)  $-\sin\theta$

(b)  $-\cos\theta$

(c)  $\cos\theta$

(d)  $\sin\theta$

(10)  $\left( \frac{1-\sin\theta-\cos\theta}{1-\sin\theta+\cos\theta} \right)^2$  નું મૂલ્ય ..... હો.

(a)  $\tan^2\frac{\theta}{2}$

(b)  $2\cot\frac{\theta}{2}$

(c)  $\cot^2\frac{\theta}{2}$

(d)  $2\operatorname{cosec}\frac{\theta}{2}$

(11)  $12\sin 40^\circ - 16\sin^3 40^\circ$  નું મૂલ્ય ..... હો.

(a)  $-3\sqrt{2}$

(b)  $2\sqrt{3}$

(c)  $-2\sqrt{3}$

(d)  $3\sqrt{2}$

(12) જો  $\sin\alpha = \frac{-3}{5}$ ,  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ , તો  $\cos\frac{\alpha}{2}$  નું મૂલ્ય ..... હો.

(a)  $\frac{-3}{\sqrt{10}}$

(b)  $\frac{-1}{\sqrt{10}}$

(c)  $\frac{1}{\sqrt{10}}$

(d)  $\frac{3}{\sqrt{10}}$

(13) જો  $\frac{1+\cos A}{1-\cos A} = \frac{m^2}{n^2}$ , તો  $\tan A =$  .....

(a)  $\pm \frac{2mn}{m^2-n^2}$

(b)  $\pm \frac{2mn}{m^2+n^2}$

(c)  $\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$

(d)  $\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$

(14)  $\cos^4\left(\frac{\pi}{24}\right) - \sin^4\left(\frac{\pi}{24}\right) =$  .....

(a)  $\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}}$

(b)  $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

(c)  $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

(d)  $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{4}$

(15) જો  $\cos\alpha = -0.6$  અને  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ , તો  $\tan\frac{\alpha}{4} =$  .....

(a)  $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

(b)  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

(c)  $\frac{\sqrt{5}}{2}$

(d)  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

(16) જો  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  અને  $2x + \sin^2\frac{\theta}{2} + 1 = x$ , તો  $\tan\theta$  ..... હો.

(a)  $\sqrt{x^2-1}$

(b)  $\sqrt{x^2+1}$

(c)  $\sqrt{x^2-2}$

(d)  $\sqrt{x^2-\frac{1}{2}}$

(17) જો  $\tan x = \frac{b}{a}$ , તો  $a\cos 2x + b\sin 2x$  નું મૂલ્ય ..... હો.

(a)  $a - b$

(b)  $a$

(c)  $b$

(d)  $a + b$

(18)  $\cos 6^\circ \cdot \sin 24^\circ \cdot \cos 72^\circ$  નું મૂલ્ય ..... હો.

(a)  $\frac{-1}{8}$

(b)  $\frac{-1}{4}$

(c)  $\frac{1}{8}$

(d)  $\frac{1}{4}$

(19)  $\sin^6\theta + \cos^6\theta$  નું મહત્વમાં મૂલ્ય ..... હો.

(a) 1

(b)  $\frac{1}{2}$

(c)  $\frac{5}{8}$

(d)  $\frac{13}{8}$

(20) જે  $\cos A = \frac{3}{4}$ , તો  $32\sin\frac{A}{2}\sin\frac{5A}{2}$ નું મૂલ્ય ..... છે.



(a) -11

(b)  $-\sqrt{11}$

(c)  $\sqrt{11}$

(d) 11

\*

### સરાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેનાં મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

$$1. \sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha$$

$$2. \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$3. 1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha \text{ અને } 1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$$

$$4. \sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$$

$$5. \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$$

$$6. \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

$$\alpha \in \mathbb{R} - \left[ \left\{ (2k-1)\frac{\pi}{2} \right\} \cup \left\{ (2k-1)\frac{\pi}{4} \right\} \right] \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$7. \cot 2\alpha = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$$

$$\alpha \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$8. \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$9. \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$10. \tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$$

$$\alpha \in \mathbb{R} - \left\{ (2k-1)\frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$11. \cot 3\alpha = \frac{\cot^3\alpha - 3\cot\alpha}{3\cot^2\alpha - 1}$$

$$\alpha \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$12. \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}$$

$$13. \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}$$

$$14. \tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

$$\alpha \in \mathbb{R} - \left\{ (2k-1)\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$15. \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \quad \cos 18^\circ = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}}$$

$$16. \sin 36^\circ = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}}, \quad \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$17. \sin 22\frac{1}{2}^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \quad \cos 22\frac{1}{2}^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \quad \tan 22\frac{1}{2}^\circ = \sqrt{2} - 1$$

- ♦ -

## ત્રિકોણમિતીય સમીકરણો અને ત્રિકોણના ગુણધર્મો

*If equations are trains threading the landscape of numbers, then no train stops at pi.*

– Richard Preston

*Pure mathematics is in its way, the poetry of logical ideas.*

– Albert Einstein

### 6.1 પ્રાસ્તાવિક

સિમેસ્ટર-1માં અને પ્રકરણ 4, 5 માં આપણે ત્રિકોણમિતીય વિષેયો, તેમના આલેખો અને તેમના ગુણધર્મો જેવા કે શૂન્યોનો ગણ, વિસ્તાર, આવર્તમાન, નિત્યસમોનો અભ્યાસ કર્યો. ત્રિકોણમિતિનો ઉપયોગ જરૂરન મોજક્કી કરવામાં થાય છે. આપણે જાણીએ છીએ કે ત્રિકોણમિતિનો મદદથી ટેક્નોની ઊચાઈ માયા વગર શોધી શકાય છે. બંગાળના એક જરૂર મોજક્કીદાર અને ભારતીય ગણિતજ્ઞ ‘રાધાનાથ સિફ્ટદે’ ત્રિકોણમિતીય ગણતરીની મદદથી ઈ.સ. 1852માં સ્થાનિત કર્યું કે માઉન્ટ એવરેસ્ટ એ દુનિયાનું સૌથી ઊચામાં ઊચું સ્પાન છે. ત્રિકોણમિતિનો ઉપયોગ નોપરિવહન, ઉપગ્રહ તત્ત્વ રચના, ખગોળજ્ઞાત્મક, વિમાન-સંચાલન જેવા ક્ષેત્રોમાં થાય છે.

આ પ્રકરણમાં આપણે ત્રિકોણમિતીય સમીકરણોના ઉકેલની રીતો તથા ત્રિકોણમિતિના ઉપયોગથી ત્રિકોણના ગુણધર્મનો અભ્યાસ કરીશું.

### 6.2 ત્રિકોણમિતીય સમીકરણો

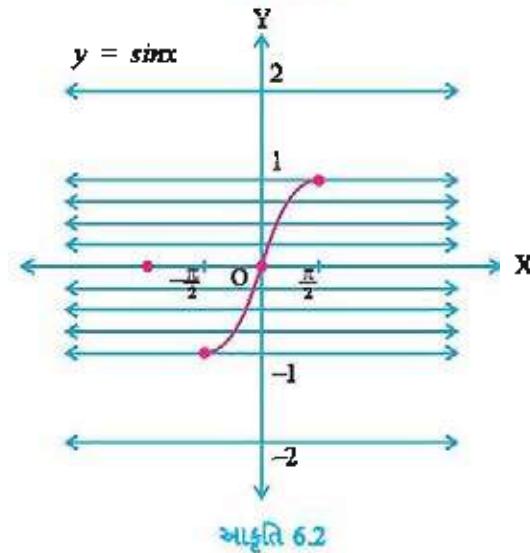
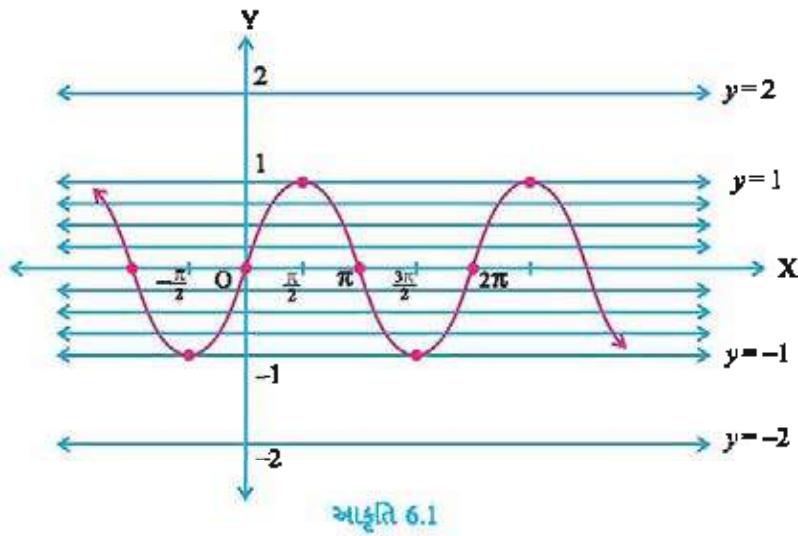
જે સમીકરણમાં ત્રિકોણમિતીય વિષેયો આવેલાં હોય તેવા સમીકરણને ત્રિકોણમિતીય સમીકરણ કહે છે. જેમકે,  $\sin^2 x - 4\cos x = 1$  એ એક ત્રિકોણમિતીય સમીકરણ છે.

જે ત્રિકોણમિતીય સમીકરણ તેના પ્રદેશની દરેક ડિમ્યુન માટે સત્ય બને તેને ત્રિકોણમિતીય નિત્યસમ કહે છે. જેમકે,  $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$  એ એક નિત્યસમ છે.

કેટલાંક ત્રિકોણમિતીય સમીકરણોનું તેના પ્રદેશના ઉપગ્રહની કોઈક ડિમ્યુન માટે સમાધાન થાય છે. આપણે આવા ત્રિકોણમિતીય સમીકરણોના ઉકેલની રીતો મેળવીશું તથા સમીકરણના એક ઉકેલના ઉપયોગથી તેનો વ્યાપક ઉકેલ કેવી રીતે મેળવી શકાય તે જોઈશું. સમીકરણ  $\sin x = \frac{1}{2}$  નો ઉકેલ ફક્ત  $x = \frac{\pi}{6}$  નથી પરંતુ  $x = \frac{5\pi}{6}$ ,  $x = 2\pi + \frac{\pi}{6}$ ,  $x = 3\pi - \frac{\pi}{6}$  વગેરે પણ તેના ઉકેલો છે. આમ, આપણે કહી શકીએ કે  $\sin x = \frac{1}{2}$  નો એક ઉકેલ  $x = \frac{\pi}{6}$  છે, પરંતુ તે તેનો વ્યાપક ઉકેલ નથી. કોઈ પણ ત્રિકોણમિતીય સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ એટલે તેના શક્ય તમામ ઉકેલોનો ગણ.

અહીં નોંધાએ કે તેટલાંક નિકોશમિતીય સમીકરણોનો ઉકેલ ખાલી ગણ હોય, જેમાં  $\sin x = \pi$ . નિકોશમિતીય વિષેથો આવતી હોવાથી, જો નિકોશમિતીય સમીકરણને એક ઉકેલ હોય તો તેને અસંખ્ય ઉકેલો મળી શકે. આવા તમામ ઉકેલોના ગણને તેનો **વ્યાપક ઉકેલ** કહે છે.

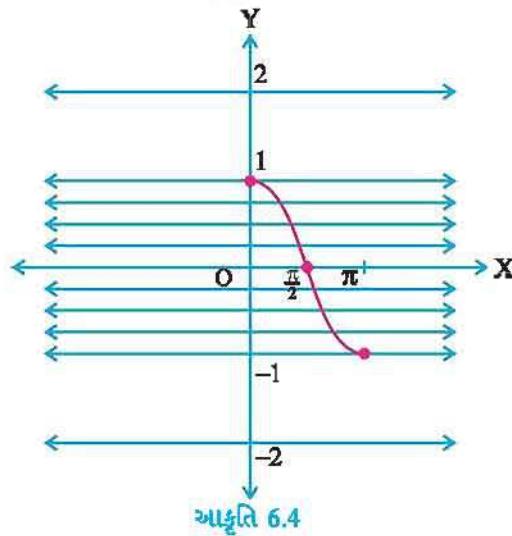
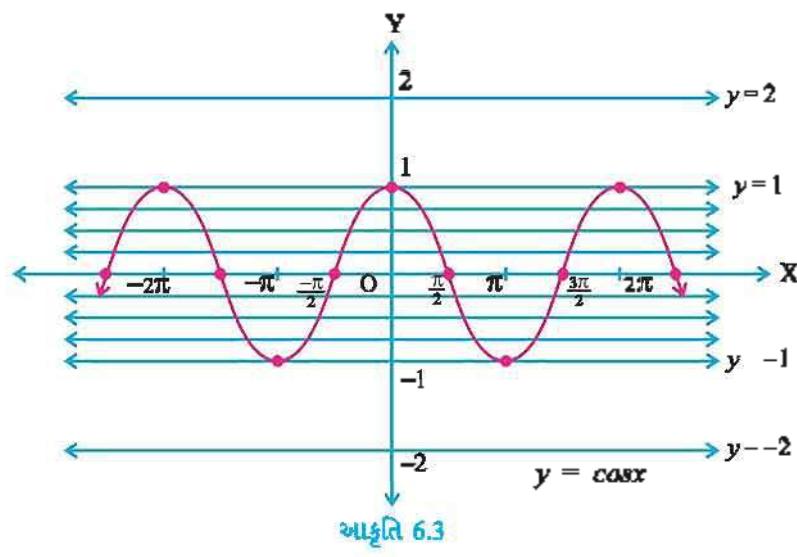
$y = \sin x$  નો આવેખ જુઓ. કોઈ પણ સમાનિતિજી રેખા  $y = k, k \in [-1, 1]$  લો. આપણો જોઈ શકીએ છીએ કે રેખા  $y = k, k \in [-1, 1]$  એ કે  $y = \sin x$  ના આવેખને અસંખ્ય બિંદુઓમાં છેદે છે. (આદૃતિ 6.1) જાનો મતલબ એ થયો કે કોઈ પણ  $a \in [-1, 1]$  માટે સમીકરણ  $\sin x = a$ નો ઉકેલગણ અનંતગણ મળે. નિકોશમિતીય સમીકરણના ઉકેલ માટે આપણને અનન્ય  $\alpha \in \mathbb{R}$  ની જરૂર પડે કે જેથી  $\sin \alpha = a$  થાય. તેના માટે આપણો પ્રદેશને યોગ્ય રીતે મર્યાદિત કરવો પડે. જો આપણો પ્રદેશને  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  અથવા  $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$  અથવા  $[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$ , વગેરે જેવો મર્યાદિત કરીએ તો એવો અનન્ય  $\alpha$  મળે કે જેથી  $\sin \alpha = a$  થાય. આપણો  $y = \sin x$  માટેનો મર્યાદિત પ્રદેશ  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  સ્વીકારીએ છીએ. આ પ્રદેશમાં કોઈ પણ સમાનિતિજી રેખા  $y = k, k \in [-1, 1]$  એ કે  $y = \sin x$  ના આવેખને એક જ બિંદુમાં છેદ છે. (આદૃતિ 6.2).



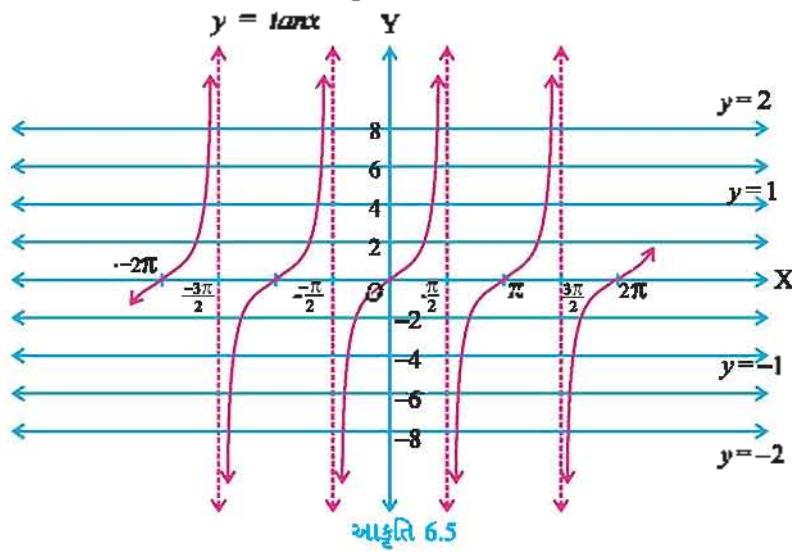
આવા જ પ્રકારની પરિસ્થિતિ  $y = \cos x$  માટે થાય છે. (આદૃતિ 6.3)

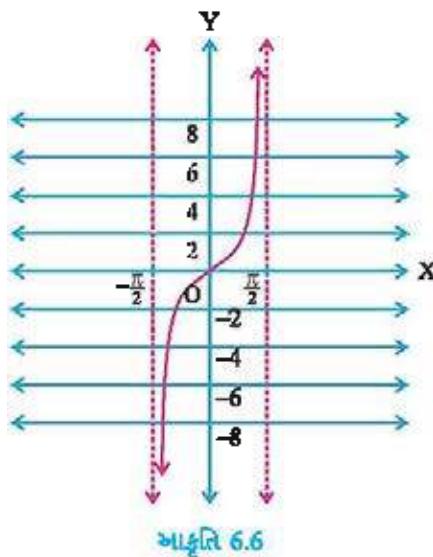
આપણો  $y = \cos x$  માટેનો મર્યાદિત પ્રદેશ  $[0, \pi]$  સ્વીકારીએ છીએ. (આદૃતિ 6.4)

આપણો નોંધાએ કે કોઈ પણ સમાનિતિજી રેખા  $y = a$  જ્યાં  $|a| > 1$  એ કે  $y = \sin x$  અથવા  $y = \cos x$  ના આવેખને છેદતી નથી. આમ,  $\sin x = a$  અથવા  $\cos x = a, |a| > 1$  ને કોઈ ઉકેલ નથી.



જો સમતલમાં આપણે કોઈ પદ્ધતિ રેખા દોરીએ તો તે  $y = \tan x$  ના આલેખને અસંખ્ય બિંદુઓમાં છેદશે. (અકૃતિ 6.5). આનો અર્થ એ થથો કે સમીકરણ  $\tan x = a$ ,  $a \in \mathbb{R}$  નો ઉલ્લગણ અનંતગણ થાય. આપણને અનાન્ય રૂપી જરૂર છે, જ્યાં  $\tan x = a$  થાય. તેથી આપણે પ્રદેશને યોગ્ય રીતે મર્યાદિત કરવો પડે. આપણે  $y = \tan x$  માટેનો મર્યાદિત પ્રદેશ  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  સ્વીકારીએ છીએ. (અકૃતિ 6.6). આ સંક્ષ્યનાની વિસ્તૃત ર્થાં આપણે પોરસ 12ના પ્રવમ સિમેસ્ટરમાં ટ્રિકોણમિતીય પ્રતિવિષેષોના પ્રકરણમાં કરીશું.





આમ, કોઈ પણ  $a \in [-1, 1]$  માટે અનન્ય  $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , એવો મળો કે જેથી  $a = \sin \alpha$ .

કોઈ પણ  $a \in [-1, 1]$  માટે અનન્ય  $\alpha \in [0, \pi]$ , એવો મળો કે જેથી  $a = \cos \alpha$ .

કોઈ પણ  $a \in \mathbb{R}$  માટે અનન્ય  $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , એવો મળો કે જેથી  $a = \tan \alpha$ .

આપણે  $\sin$ ,  $\cos$  અને  $\tan$  વિધેયોના શૂન્યોનો ગણ જાણીએ છીએ. આને ખરેખર અર્થ એવો થાય છે કે આપણે નિયોજનિતીય સમીકરણો  $\sin \theta = 0$ ,  $\cos \theta = 0$ ,  $\tan \theta = 0$  વાપસ ઉકેલથી જાત છીએ.

$$\sin \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

હવે, આપણે વાપસ સ્વરૂપમાં  $\sin \theta = a$ ,  $-1 \leq a \leq 1$ ,  $\cos \theta = a$ ,  $-1 \leq a \leq 1$  અને  $\tan \theta = a$ ,  $a \in \mathbb{R}$  ના ઉકેલ મેળવીએ.

### 6.3 (i) $\sin \theta = a$ નો વાપસ ઉકેલ જ્યાં $-1 \leq a \leq 1$

અહીં,  $-1 \leq a \leq 1$ , માટે અનન્ય  $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , એવો મળો કે જેથી  $a = \sin \alpha$ .

હવે,  $\sin \theta = a = \sin \alpha$ .

$$\therefore \sin \theta - \sin \alpha = 0 \Leftrightarrow 2\cos \frac{\theta + \alpha}{2} \sin \frac{\theta - \alpha}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{\theta + \alpha}{2} = 0 \text{ અથવા } \sin \frac{\theta - \alpha}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\theta + \alpha}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \text{ અથવા } \frac{\theta - \alpha}{2} = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (\text{કેમ ?})$$

$$\Leftrightarrow \theta = (2n+1)\pi - \alpha \text{ અથવા } \theta = 2n\pi + \alpha, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \theta = (2n+1)\pi + (-1)^{2n+1}\alpha \text{ અથવા } \theta = 2n\pi + (-1)^{2n}\alpha, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore \text{સમીકરણનો વાપસ ઉકેલ } \theta = k\pi + (-1)^k\alpha, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \theta.$$

$(2n+1)$  અથવા  $2n$  ની જગ્યાએ કે દાખી રાખાય કરાય કે કોઈ પણ પૂર્ણ  $2n+1$  અથવા  $2n$  સ્વરૂપમાં હોય છે,  $n \in \mathbb{Z}$ )

$$\text{આમ, } \sin \theta = \sin \alpha \Leftrightarrow \theta = k\pi + (-1)^k\alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

તેથી,  $\sin\theta = a$ ,  $-1 \leq a \leq 1$  નો વાપક ઉકેલગણા  $\{k\pi + (-1)^k\alpha \mid k \in \mathbb{Z}\}$  છે, જ્યાં

$$\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] અને \sin\theta = a = \sin\alpha.$$

(આપણે એવો કોઈ પદ્ધતિ  $\alpha \in \mathbb{R}$  લઈ શકીએ જ્યાં  $a = \sin\alpha$  થાય. ઉકેલગણા બદલતો નથી. પરંતુ ઉકેલગણાની ઓફરેપત્ર માટે આપણે  $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  લઈએ છીએ.)

(ii)  $\cos\theta = a$  નો વાપક ઉકેલ જ્યાં  $-1 \leq a \leq 1$  :

અહીં,  $-1 \leq a \leq 1$  માટે અનન્ય  $\alpha \in [0, \pi]$  એવો મળે કે જેથી  $a = \cos\alpha$ .

$$\text{હવે, } \cos\theta = a = \cos\alpha$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos\theta - \cos\alpha &= 0 \Leftrightarrow -2\sin\frac{\theta + \alpha}{2} \sin\frac{\theta - \alpha}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin\frac{\theta + \alpha}{2} = 0 \text{ અથવા } \sin\frac{\theta - \alpha}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\theta - \alpha}{2} = k\pi \text{ અથવા } \frac{\theta - \alpha}{2} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \theta = 2k\pi - \alpha \text{ અથવા } \theta = 2k\pi + \alpha, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$\therefore$  સમીકરણનો વાપક ઉકેલ  $\theta = 2k\pi \pm \alpha, k \in \mathbb{Z}$  છે.

આમ,  $\cos\theta = \cos\alpha \Leftrightarrow \theta = 2k\pi \pm \alpha, k \in \mathbb{Z}$

આથી,  $\cos\theta = a$ ,  $-1 \leq a \leq 1$  નો વાપક ઉકેલગણા  $\{2k\pi \pm \alpha \mid k \in \mathbb{Z}\}$  છે, જ્યાં

$$\alpha \in [0, \pi] અને \cos\theta = a = \cos\alpha.$$

(iii)  $\tan\theta = a$  નો વાપક ઉકેલ જ્યાં  $a \in \mathbb{R}$  :

અહીં,  $a \in \mathbb{R}$  માટે અનન્ય  $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  એવો મળે કે જેથી  $a = \tan\alpha$  થાય.

$$\text{હવે, } \tan\theta = a = \tan\alpha$$

$$\begin{aligned} \therefore \tan\theta - \tan\alpha &= 0 \Leftrightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\sin\theta \cos\alpha - \cos\theta \sin\alpha}{\cos\theta \cos\alpha} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos\theta \cos\alpha} = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin(\theta - \alpha) = 0 \\ &\Leftrightarrow \theta - \alpha = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \theta = k\pi + \alpha, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

આમ,  $\tan\theta = \tan\alpha \Leftrightarrow \theta = k\pi + \alpha, k \in \mathbb{Z}$

આથી,  $\tan\theta = a$ ,  $a \in \mathbb{R}$  નો ઉકેલગણા  $\{k\pi + \alpha \mid k \in \mathbb{Z}\}$  છે, જ્યાં  $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  અને  $\tan\theta = a = \tan\alpha$ .

શાબ્દ 'ઉકેલ'નો અર્થ આપણે એવો કરીયું કે આપેલ સમીકરણનો ઉકેલગણા.

**ઉદાહરણ 1 :** ઉકેલો : (1)  $2\sin 2\theta - 1 = 0$  (2)  $\sin^2\theta - \sin\theta - 2 = 0$

ઉકેલ : (1)  $2\sin 2\theta - 1 = 0$

$$\therefore \sin 2\theta = \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$\sin\theta = \sin\alpha$  नो व्यापक उक्ता  $k\pi + (-1)^k\alpha, k \in \mathbb{Z}$  दू.

$$\therefore 2\theta = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore \theta = \frac{k\pi}{2} + (-1)^k \frac{\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}$$

$\therefore$  आपेल समीकरणनो उक्तवग़ा  $\left\{ \frac{k\pi}{2} + (-1)^k \frac{\pi}{12} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$  दू.

$$(2) \sin^2\theta - \sin\theta - 2 = 0$$

$$\therefore (\sin\theta + 1)(\sin\theta - 2) = 0$$

$$\therefore \sin\theta = -1 \text{ अथवा } \sin\theta = 2$$

परंतु  $\sin\theta = 2$  शक्य नदू.

(अनु ?)

$$\text{आम, } \sin\theta = -1 = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore \theta = k\pi + (-1)^k \left(-\frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbb{Z}$$

$\therefore$  आपेल समीकरणनो उक्तवग़ा  $\left\{ k\pi + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$  दू.

**उदाहरण 2 :** उक्तो : (1)  $2\cos 5\theta + \sqrt{3} = 0$  (2)  $2\cos^2\theta + \sqrt{3}\cos\theta = 0$

**उक्त :** (1)  $2\cos 5\theta + \sqrt{3} = 0$

$$\therefore \cos 5\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \quad \left(\frac{5\pi}{6} \in [0, \pi]\right)$$

$\cos\theta = \cos\alpha$  नो व्यापक उक्त  $\theta = 2k\pi \pm \alpha, k \in \mathbb{Z}$  दू.

$$\therefore 5\theta = 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore \theta = \frac{2k\pi}{5} \pm \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

$\therefore$  आपेल समीकरणनो उक्तवग़ा  $\left\{ \frac{2k\pi}{5} \pm \frac{\pi}{6} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$  दू.

$$(2) 2\cos^2\theta + \sqrt{3}\cos\theta = 0$$

$$\therefore \cos\theta(2\cos\theta + \sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore \cos\theta = 0 \text{ अथवा } \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\therefore \theta = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \text{ अथवा } \theta = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

$\therefore$  आपेल समीकरणनो उक्तवग़ा  $\left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$  दू.

**उदाहरण 3 :** उक्तो : (1)  $\sin 5x - \sin 3x - \sin x = 0$  (2)  $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$

**उक्त :** (1)  $\sin 5x - \sin 3x - \sin x = 0$

$$\therefore 2\cos 4x \sin x - \sin x = 0$$

$$\therefore \sin x(2\cos 4x - 1) = 0$$

- $\therefore \sin x = 0$  અથવા  $\cos 4x = \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$
- $\therefore x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$  અથવા  $4x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$
- $\therefore x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$  અથવા  $x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}$
- $\therefore$  આપેલ સમીકરણનો ઉકેલગણ  $\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \neq \emptyset$ .
- (2)  $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$
- $\therefore \cos 3x + \cos x + \cos 2x = 0$
- $\therefore 2\cos 2x \cos x + \cos 2x = 0$
- $\therefore \cos 2x (2\cos x + 1) = 0$
- $\therefore \cos 2x = 0$  અથવા  $\cos x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$   $\left(\frac{2\pi}{3} \in [0, \pi]\right)$
- $\therefore 2x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$  અથવા  $x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$
- $\therefore x = (2k+1)\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$  અથવા  $x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$
- આપેલ સમીકરણનો ઉકેલગણ  $\{(2k+1)\frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\} \neq \emptyset$ .

**ઉદાહરણ 4 :** ઉકેલો : (1)  $\tan^2\theta + (1 - \sqrt{3})\tan\theta - \sqrt{3} = 0$

$$(2) \tan\theta + \tan 4\theta + \tan 7\theta = \tan\theta \tan 4\theta \tan 7\theta$$

**ઉકેલ :** (1)  $\tan^2\theta + (1 - \sqrt{3})\tan\theta - \sqrt{3} = 0$

$$\therefore \tan^2\theta + \tan\theta - \sqrt{3}\tan\theta - \sqrt{3} = 0$$

$$\therefore \tan\theta(\tan\theta + 1) - \sqrt{3}(\tan\theta + 1) = 0$$

$$\therefore (\tan\theta + 1)(\tan\theta - \sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore \tan\theta = -1 \text{ અથવા } \tan\theta = \sqrt{3}$$

$$\therefore \tan\theta = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \text{ અથવા } \tan\theta = \tan\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \theta = k\pi - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \text{ અથવા } \theta = k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore$$
 આપેલ સમીકરણનો ઉકેલગણ  $\{k\pi - \frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{k\pi + \frac{\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\} \neq \emptyset$ .

$$(2) \tan\theta + \tan 4\theta + \tan 7\theta = \tan\theta \tan 4\theta \tan 7\theta$$

$$\therefore \tan\theta + \tan 4\theta = -\tan 7\theta + \tan\theta \tan 4\theta \tan 7\theta$$

$$\therefore \tan\theta + \tan 4\theta = -\tan 7\theta (1 - \tan\theta \tan 4\theta) \quad \text{(i)}$$

પ્રથમ આપણે  $1 - \tan\theta \tan 4\theta \neq 0$  સાબિત કરીએ.

જો  $1 - \tan\theta \tan 4\theta = 0$  તો (i) પરથી  $\tan\theta + \tan 4\theta = 0$  હોવાથી,

$$\tan\theta \tan 4\theta = 1 \text{ અને } \tan 4\theta = -\tan\theta$$

$$\therefore \tan^2\theta = -1, \text{ જે R માં શક્ય નથી.}$$

$$\text{હવે, (i) પરથી } \frac{\tan\theta + \tan 4\theta}{1 - \tan\theta \tan 4\theta} = -\tan 7\theta$$

$$\therefore \tan(\theta + 4\theta) = -\tan 7\theta$$

$$\therefore \tan 5\theta = \tan(-7\theta)$$

$$\therefore 5\theta = k\pi - 7\theta, k \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore \theta = \frac{k\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}$$

વળી,  $\tan\theta, \tan 4\theta, \tan 7\theta$  વ્યાખ્યાપિત થવા જોઈએ.

$$\therefore \theta \neq (2m+1)\frac{\pi}{2}, 4\theta \neq (2m+1)\frac{\pi}{2}, 7\theta \neq (2m+1)\frac{\pi}{2}, m \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore \theta = \frac{k\pi}{12}, k \in \mathbb{Z} \text{ તો } k \neq 6, 18, 30, \dots$$

$$4\theta = \frac{k\pi}{3} \neq (2m+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} - \{6, 18, \dots\}$$

$$7\theta = \frac{7k\pi}{12} \neq (2m+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} - \{6, 18, \dots\}$$

$$\therefore k \neq 6, 18, \dots$$

$$\therefore k \neq 12n+6, n \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore \text{આપેલ સમીકરણનો ઉકેલગણ છે } \left\{ \frac{k\pi}{12} \mid k \in \mathbb{Z} \text{ જ્યાં } k \neq 12n+6 \right\}, n \in \mathbb{Z}$$

**ઉદાહરણ 5 :** ઉકેલો : (1)  $4\sin\theta = \cosec\theta$  (2)  $\sec\theta + \tan\theta = 2 - \sqrt{3}$

**ઉકેલ :** (1)  $4\sin\theta = \cosec\theta$

$$\therefore 4\sin\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\therefore 4\sin^2\theta = 1$$

$$\therefore \sin\theta = \pm \frac{1}{2}$$

$$\therefore \sin\theta = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \text{ અથવા } \sin\theta = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\therefore \theta = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \text{ અથવા } \theta = k\pi + (-1)^k \left(-\frac{\pi}{6}\right), k \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore \theta = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \text{ અથવા } \theta = k\pi + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore \theta = k\pi \pm \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore \text{આપેલ સમીકરણનો ઉકેલગણ } \left\{ k\pi \pm \frac{\pi}{6} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ હૈ.}$$

$$(2) \sec\theta + \tan\theta = 2 - \sqrt{3} \quad (i)$$

$$\text{હવે, } \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1,$$

$$\therefore \sec\theta - \tan\theta = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\therefore \sec\theta - \tan\theta = 2 + \sqrt{3} \quad (ii)$$

$$(i) \text{ અને (ii) ને ઉકેલતાં, } \sec\theta = 2 \text{ અને } \tan\theta = -\sqrt{3}$$

અહીં નોંધોણે કે ઉપરાં સમીકરણો નિકોણિતોથ સમીકરણોની સંહતિ છે.

હવે,  $\cos\theta = \frac{1}{2} > 0$  અને  $\tan\theta = -\sqrt{3} < 0$ . આથી,  $P(\theta)$  ચોથા ચરણમાં છે.

$$\therefore \cos\theta = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \text{ અને } \tan\theta = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\therefore \theta = 2k\pi - \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

(P( $\theta$ ) ચોથા ચરણમાં છે.)

$$\therefore \text{આપેલ સમીકરણનો ઉકેલગણા } \left\{ 2k\pi - \frac{\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ છે.}$$

#### 6.4 $a\cos x + b\sin x = c, a, b, c \in \mathbb{R}$ અને $a^2 + b^2 \neq 0$ નો વ્યાપક ઉકેલગણા

કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ  $a, b \in \mathbb{R}$  માટે આપણને  $r > 0$  અને  $\alpha \in [0, 2\pi)$  એવાં મળે કે જેથી  $a = r\cos\alpha$  અને  $b = r\sin\alpha$  થાય.

$$\therefore a^2 + b^2 = r^2 \cos^2\alpha + r^2 \sin^2\alpha = r^2$$

$$\therefore r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (r > 0)$$

$$\text{હવે, } a\cos x + b\sin x = c$$

$$\therefore r\cos\alpha \cos x + r\sin\alpha \sin x = c$$

$$\therefore r\cos(x - \alpha) = c$$

$$\therefore \cos(x - \alpha) = \frac{c}{r} \quad (\text{i})$$

અહીં આપેલ સમીકરણ એટલે કે સમીકરણ (i)નો ઉકેલ હોવાની આવશ્યક અને પર્યાયત શરત

$$\left| \frac{c}{r} \right| \leq 1 \Leftrightarrow c^2 \leq r^2$$

$$\Leftrightarrow c^2 \leq a^2 + b^2 \text{ છે.}$$

જો  $\cos(x - \alpha) = \cos\beta$ , જ્યાં  $\cos\beta = \frac{c}{r}$ ,  $\beta \in [0, \pi]$ , હોય તો સમીકરણ (i)નો વ્યાપક ઉકેલ  $x - \alpha = 2k\pi \pm \beta, k \in \mathbb{Z};$  જ્યાં  $\alpha \in [0, 2\pi)$  તથા  $a = r\cos\alpha, b = r\sin\alpha$ .

આમ, જો  $c^2 \leq a^2 + b^2$  તો  $a\cos x + b\sin x = c$  નો વ્યાપક ઉકેલ

$x = 2k\pi + \alpha \pm \beta, k \in \mathbb{Z},$  જ્યાં  $\alpha \in [0, 2\pi)$  તથા  $a = r\cos\alpha, b = r\sin\alpha$  અને  $\cos\beta = \frac{c}{r},$   $\beta \in [0, \pi], r = \sqrt{a^2 + b^2}.$

જો  $c^2 > a^2 + b^2$  હોય, તો આપેલ સમીકરણને ઉકેલ ન મળે એટલે કે ઉકેલગણા નથી થાય.

**ઉદાહરણ 6 :** ઉકેલો :  $\sqrt{3}\cos x + \sin x = \sqrt{2}$

**ઉકેલ :** રીત 1 : અહીં,  $a = \sqrt{3}, b = 1, c = \sqrt{2}.$

$$\therefore r^2 = a^2 + b^2 = 3 + 1 = 4.$$

આથી,  $r = 2.$  અહીં,  $c^2 < a^2 + b^2$  હોવાથી આપેલ સમીકરણને ઉકેલ મળે.

$a = r\cos\alpha$  અને  $b = r\sin\alpha$  પરથી  $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$  અને  $\sin\alpha = \frac{1}{2},$  આથી,  $\alpha = \frac{\pi}{6}.$

$$\text{હવે, } \cos\beta = \frac{c}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \beta = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \text{માંગેલ ઉકેલગણા } \{2k\pi + \alpha \pm \beta \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \left\{ 2k\pi + \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

ચીત 2 :  $\sqrt{3}\cos x + \sin x = \sqrt{2}$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

( $r = 2$  એ બાગતાં)

$$\therefore \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore માંગેલ ઉકેલગણ {2k\pi + \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}}$$

$$= \left\{2k\pi + \frac{5\pi}{12} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{2k\pi - \frac{\pi}{12} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

ઉકેલરજી 7 : ઉકેલો :  $3\cos\theta + 4\sin\theta = 6$ .

ઉકેલ : અહીં,  $a = 3, b = 4, c = 6$ .

$$\therefore r^2 = a^2 + b^2 = 25, c^2 = 36. તેથી, c^2 > a^2 + b^2.$$

$\therefore$  અધેલ સમીકરણનો ઉકેલગણ નથી છે.

### સ્વાધ્યાય 6.1

નીચેનાં સમીકરણો ઉકેલો :

- |  |   |
|--|---|
| 1. $2\cos 2\theta + \sqrt{2} = 0$                            | 2. $2\cos^2\theta + \sqrt{3}\cos\theta = 0$ |
| 3. $2\cos\theta + \sec\theta = 3$                            | 4. $4\sin^2\theta - 8\cos\theta + 1 = 0$    |
| 5. $\sqrt{2}\cosec 3\theta - 2 = 0$                          | 6. $2\sin^2\theta - \sin\theta = 0$         |
| 7. $2\sin\theta + \cosec\theta = 3$                          | 8. $\sin 2\theta + \cos\theta = 0$          |
| 9. $\sin 7\theta = \sin\theta + \sin 3\theta$                | 10. $\cot^2\theta - \cos\theta = 0$         |
| 11. $\tan 2\theta - \sqrt{3} = 0$                            | 12. $\sqrt{3}\cot\theta - \cot^2\theta = 0$ |
| 13. $\tan^2\theta - (\sqrt{3} + 1)\tan\theta + \sqrt{3} = 0$ | 14. $\cos\theta + \sin\theta = 1$           |
| 15. $\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}$             | 16. $2\cos\theta + \sin\theta = 3$          |
| 17. $3 - \cot^2 5\theta = 0$                                 | 18. $\cosec^2 2\theta - 2 = 0$              |
| 19. $\sqrt{2} + \sec 4\theta = 0$                            | 20. $\tan 3\theta + \cot\theta = 0$         |

\*

### 6.5 ત્રિકોણના ગુણ્ઠાંખો

ત્રિકોણભિત્તિ શબ્દનો મૂળભૂત અર્થ ત્રિકોણના પટ્ટેનું માપકરણ સૂચને છે. દરેક ત્રિકોણને ત્રણ બાજુઓ અને ત્રણ ખૂશાંખો હોય છે. ત્રિકોણની બાજુઓ અને ખૂશાંખોના માપ વચ્ચે નિશ્ચિત સંબંધ હોય છે. આ વિબાગમાં આપણે આ પટ્ટેના ખૂશાંખ સંબંધો મેળવીશું.

$\Delta ABC$  માટે સામાન્ય રીતે નીચેનાં સંકેતો પ્રચાલિત છે :

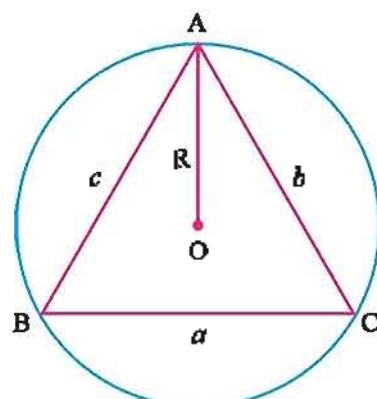
$$m\angle BAC = A, m\angle ABC = B, m\angle BCA = C$$

$$A + B + C = \pi$$

(ખૂશાંખોનાં માપ A, B, C રેડિયન માપમાં કરીશું.)

$$AB = c, BC = a, CA = b$$

ત્રિકોણના પરિવૃત્તાની ત્રિજ્યાનું માપ એટસે કે પરિત્રિજ્યા = R



આકૃતિ 6.7

*sine* સૂત્ર :

$\Delta ABC$  માં,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

અહીં  $\frac{a}{\sin A} = 2R$  આપેનું બાકીના એ તે જ પ્રમાણે ભેગવી શકાય.

A સંબંધી નિયમ વિકલ્પ છે :

- (1)  $0 < A < \frac{\pi}{2}$  (2)  $A = \frac{\pi}{2}$  (3)  $\frac{\pi}{2} < A < \pi$

વિકલ્પ 1 :  $0 < A < \frac{\pi}{2}$

ઘરો કે  $\Delta ABC$  નું પરિચેન્દ્ર O છે.  $\vec{BO}$  પરિવૃત્તને D માં છે છે.  
અહીં  $BD = 2OB = 2R$  અને  $D = m\angle BDC = m\angle CAB = A$   
(એક જ વૃત્તાંદના ખૂબ્ખા)

$\Delta ABCD$  માં,  $m\angle BCD = \frac{\pi}{2}$

(અર્થવર્તુળમાં અંતર્ગત ખૂબ્ખો કાટખૂબ્ખો હોય છે.)

$$\therefore \sin D = \frac{BC}{BD} = \frac{a}{2R}$$

$$\therefore \sin A = \frac{a}{2R} \quad (\text{(i) દ્વારા})$$

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = 2R$$

વિકલ્પ 2 :  $\Delta ABC$  કાટકોણ નિષેષ છે અને  $A = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \overline{BC}$  પરિવૃત્તનો વાસ છે.

$\therefore BC = 2R$ .

$$\text{હવે, } a = BC = 2R = 2R \sin \frac{\pi}{2} = 2R \sin A$$

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = 2R$$

વિકલ્પ 3 :  $\frac{\pi}{2} < A < \pi$

$\angle BAC$  એ ગુરુઓંસ કોવાચી પિરોણિંદુ લખાયાપ  $BC$  પર છે. હવે,  
જુદ્દાય  $BC$  પર બિંદુ  $A'$  લો

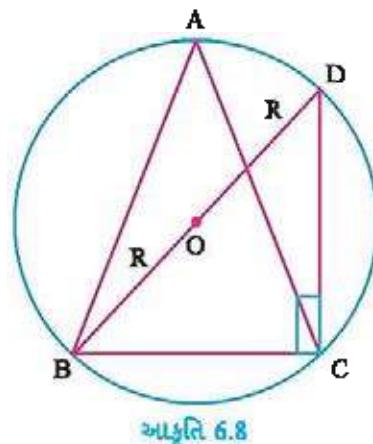
$$m\angle BA'C = (\pi - A) < \frac{\pi}{2} \quad \left( \frac{\pi}{2} < A < \pi \right)$$

$\therefore \Delta BA'C$  માટે વિકલ્પ (1) પ્રમાણે,

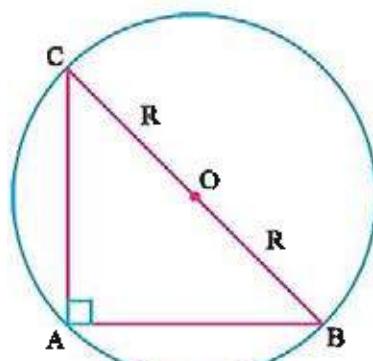
$$BC = a = 2R \sin A' = 2R \sin(\pi - A) = 2R \sin A$$

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = 2R$$

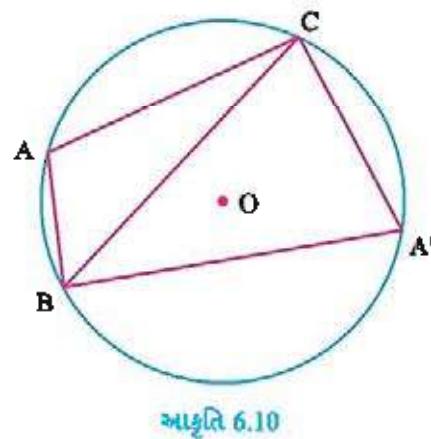
આમ, દરેક વિકલ્પમાં  $\frac{a}{\sin A} = 2R$  ખણે છે.



આકૃતિ 6.8



આકૃતિ 6.9



આકૃતિ 6.10

આ જ રીતે,  $\frac{b}{\sin B} = 2R$  અને  $\frac{c}{\sin C} = 2R$  મેળવી શકાય.

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

### *cosine સૂત્ર :*

$\Delta ABC$  અને,

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \text{ અને } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\text{આપણે, } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \text{ સાબિત કરીશું.}$$

આકૃતિ 6.11 માં દર્શાવ્યું પ્રમાણે  $\Delta ABC$  અને  $A$  ને ઉગમાંનાં તથા  $\vec{AB}$  ને X-અક્ષની ધરણ દરખામાં લઈએ. અહીં,  $AB = c$  હોવાથી  $B$  ના યાચ  $(c, 0)$  થાય. હવે,  $AC = b$  અને  $m\angle CAB = A$  હોવાથી,  $C$  ના યાચ  $(b\cos A, b\sin A)$  થાય.

$$\text{હવે, } a = BC$$

$$\therefore a^2 = BC^2$$

$$= (b\cos A - c)^2 + (b\sin A - 0)^2$$

$$= b^2\cos^2 A - 2bc \cos A + c^2 + b^2\sin^2 A$$

$$= b^2(\cos^2 A + \sin^2 A) - 2bc \cos A + c^2$$

$$\therefore a^2 = b^2 - 2bc \cos A + c^2$$

$$\therefore 2bc \cos A = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\therefore \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\text{તે જ રીતે, } \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \text{ અને } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

**નોંધ :** (1)  $\Delta ABC$  માં  $\angle A$  કટકોશ હોય અથવા ઝુરુકોશ હોય તો પણ ઉપરનું પરિશામ સત્ત્ય જ છે.

(2) નિષેષની જરૂર બાજુનાં માપ આપ્યાં હોય તો cosine સૂત્રથી જરૂર ખૂબાનાં માપ અનન્ય રીતે નક્કી થઈ શકે. નિષેષની જરૂર બાજુઓ જાત હોય તો તેના ખૂબાનાં માપ અન્ય રીતે નક્કી થઈ શકે. તે જ રીતે, બે બાજુઓ અને અંતર્ગત ખૂબો આપ્યો હોય તો પણ આ સૂત્ર પ્રમાણે જીછ બાજુ અનન્ય મળે.

### *એક અગત્યનું સૂત્ર :*

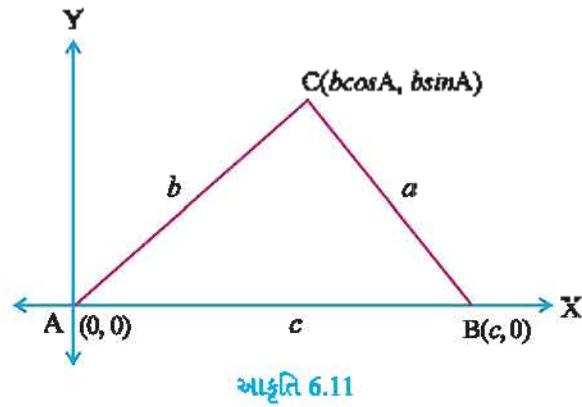
*sine* અને *cosine* સૂત્રોની મદદથી આપણે અહીં એક અગત્યનું પરિશામ મેળવીશું :

### *પ્રશ્નેપ સૂત્ર :*

$$a = b\cos C + c\cos B, b = c\cos A + a\cos C, c = a\cos B + b\cos A$$

$$\text{આપણે, } a = b\cos C + c\cos B \text{ સાબિત કરીશું.}$$

આપણે *cosine* સૂત્રની મદદથી સાબિતી આપીશું. (*sine* સૂત્રની મદદથી સાબિતી આપવાનો પ્રયત્ન કરો.)



આકૃતિ 6.11

$$\begin{aligned}
 b\cos C + c\cos B &= b \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + c \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \\
 &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a} \\
 &= \frac{a^2 + b^2 - c^2 + c^2 + a^2 - b^2}{2a} = \frac{2a^2}{2a} = a
 \end{aligned}$$

આમ,  $a = b\cos C + c\cos B$

તે જ રીતે અન્ય બે પ્રશ્ને સુન્દરો મેળવી શકાય.

**ઉદાહરણ 8 :**  $\Delta ABC$  માટે સાબિત કરો કે,

$$(1) \quad a(\sin B - \sin C) + b(\sin C - \sin A) + c(\sin A - \sin B) = 0$$

$$(2) \quad a \sin \frac{A}{2} \sin\left(\frac{B-C}{2}\right) + b \sin \frac{B}{2} \sin\left(\frac{C-A}{2}\right) + c \sin \frac{C}{2} \sin\left(\frac{A-B}{2}\right) = 0$$

**ઉકેલ :** (1) ડા.ભા. =  $a(\sin B - \sin C) + b(\sin C - \sin A) + c(\sin A - \sin B)$

$$= a\left(\frac{b}{2R} - \frac{c}{2R}\right) + b\left(\frac{c}{2R} - \frac{a}{2R}\right) + c\left(\frac{a}{2R} - \frac{b}{2R}\right)$$

$$= \frac{a(b-c) - b(c-a) + c(a-b)}{2R} = 0 = જ.ભા.$$

$$(2) \quad a \sin \frac{A}{2} \sin\left(\frac{B-C}{2}\right) - a \sin\left(\frac{\pi - (B+C)}{2}\right) \sin\left(\frac{B-C}{2}\right) \quad (\text{A} + \text{B} + \text{C} = \pi)$$

$$= a \cos\left(\frac{B+C}{2}\right) \sin\left(\frac{B-C}{2}\right)$$

$$- \frac{a}{2}(\sin B - \sin C)$$

$$- \frac{a}{2}\left(\frac{b}{2R} - \frac{c}{2R}\right) - \frac{1}{4R}(ab - ac) \quad (i)$$

$$\text{તે જ રીતે, } b \sin \frac{B}{2} \sin\left(\frac{C-A}{2}\right) = \frac{1}{4R}(bc - ab) \quad (ii)$$

$$c \sin \frac{C}{2} \sin\left(\frac{A-B}{2}\right) = \frac{1}{4R}(ac - bc) \quad (iii)$$

(i), (ii) અને (iii) નો સરવાળો કરતાં,

$$\begin{aligned}
 \text{ડા.ભા.} &= a \sin \frac{A}{2} \sin\left(\frac{B-C}{2}\right) + b \sin \frac{B}{2} \sin\left(\frac{C-A}{2}\right) + c \sin \frac{C}{2} \sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{4R}(ab - ac + bc - ab + ac - bc) = 0 = જ.ભા.
 \end{aligned}$$

**ઉદાહરણ 9 :**  $\Delta ABC$  માટે સાબિત કરો :

$$(1) \quad \frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2abc}$$

$$(2) \quad \frac{\tan C}{\tan A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{a^2 + b^2 - c^2}$$

ઉક્તા :

$$\begin{aligned}
 (1) \text{ ડિ.ગી.} &= \frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} \\
 &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \times \frac{1}{a} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \times \frac{1}{b} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \times \frac{1}{c} \quad (\text{cosine સૂત્ર}) \\
 &= \frac{b^2 + c^2 - a^2 + c^2 + a^2 - b^2 + a^2 + b^2 - c^2}{2abc} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc} = \text{જ.ગી.}
 \end{aligned}$$

આમ,  $\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$

$$(2) \text{ ડિ.ગી.} = \frac{\tan C}{\tan A} = \frac{\sin C \cos A}{\cos C \sin A}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{c}{2R} \left( \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)}{\frac{a}{2R} \left( \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right)} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{a^2 + b^2 - c^2} = \text{જ.ગી.}
 \end{aligned}$$

ઉદાહરણ 10 :  $\Delta ABC$  માટે સાબિત કરો :

$$(a + b)\cos C + (b + c)\cos A + (c + a)\cos B = a + b + c$$

$$\begin{aligned}
 \text{ઉક્તા : ડિ.ગી.} &= (a + b)\cos C + (b + c)\cos A + (c + a)\cos B \\
 &= a \cos C + b \cos C + b \cos A + c \cos A + c \cos B + a \cos B \\
 &= b \cos C + c \cos B + c \cos A + a \cos C + a \cos B + b \cos A \\
 &= a + b + c = \text{જ.ગી.}
 \end{aligned}$$

### સ્વાધ્યાય 6.2

$\Delta ABC$  માટે સાબિત કરો : (1 થી 9)

1.  $a \sin(B - C) + b \sin(C - A) + c \sin(A - B) = 0$
2.  $a^2(\cos^2 B - \cos^2 C) + b^2(\cos^2 C - \cos^2 A) + c^2(\cos^2 A - \cos^2 B) = 0$
3.  $\frac{a^2 \sin(B - C)}{\sin A} + \frac{b^2 \sin(C - A)}{\sin B} + \frac{c^2 \sin(A - B)}{\sin C} = 0$
4.  $a^3 \sin(B - C) + b^3 \sin(C - A) + c^3 \sin(A - B) = 0$
5.  $a \sin\left(\frac{A}{2} + C\right) = (b + c) \sin \frac{A}{2}$
6.  $a \cos\left(\frac{B - C}{2}\right) = (b + c) \sin \frac{A}{2}$
7.  $\sin\left(\frac{A - B}{2}\right) = \frac{a - b}{c} \cos \frac{C}{2}$
8.  $\tan\left(\frac{A}{2} + B\right) = \frac{c + b}{c - b} \tan \frac{A}{2}$
9.  $\frac{1 + \cos A \cos(B - C)}{1 + \cos C \cos(A - B)} = \frac{b^2 + c^2}{b^2 + a^2}$
10. સાબિત કરો :  $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C \Rightarrow \Delta ABC$  શાશ્વત છે જ્યાં C કાટખૂલો છે.

11. સાબિત કરો :  $(a^2 + b^2)\sin(A - B) = (a^2 - b^2)\sin(A + B) \Rightarrow \Delta ABC$  સમદિલ્લુજ અથવા કાટકોણ છે.
12. સાબિત કરો :  $(b^2 - c^2)\cot A + (c^2 - a^2)\cot B + (a^2 - b^2)\cot C = 0$
13. સાબિત કરો :  $\left(\frac{b^2 - c^2}{a^2}\right)\sin 2A + \left(\frac{c^2 - a^2}{b^2}\right)\sin 2B + \left(\frac{a^2 - b^2}{c^2}\right)\sin 2C = 0$
14. સાબિત કરો :  $2\left(asin^2\frac{E}{2} + csin^2\frac{A}{2}\right) = c + a - b$
15. સાબિત કરો :  $4\left(bc\cos^2\frac{A}{2} + ca\cos^2\frac{B}{2} + ab\cos^2\frac{C}{2}\right) = (a + b + c)^2$
16. બતાવો કે 3, 5, 7 માપની બાજુઓવાળો ત્રિકોણ ગુરુકોણ ત્રિકોણ છે અને ગુરુકોણનું માપ શોધો.
17. જો કોઈ ત્રિકોણના ખૂઝાઓનાં માપ  $1 : 2 : 3$  ગુણોત્તરમાં હોય તો તેમની સામેની બાજુઓના માપનો ગુણોત્તર શોધો.
18. જો  $\Delta ABC$  ના ખૂઝાઓનાં માપ A, B, C સમાંતર શ્રેષ્ઠીમાં હોય તથા  $b : c = \sqrt{3} : \sqrt{2}$  તો A શોધો.
19. જો  $\Delta ABC$  માં  $\frac{\sin A}{\sin C} = \frac{\sin(A - B)}{\sin(B - C)}$ , હોય તો સાબિત કરો કે  $a^2, b^2, c^2$  સમાંતર શ્રેષ્ઠીમાં હોય.
20.  $\Delta ABC$  માં  $a = 2b$  અને  $|A - B| = \frac{\pi}{3}$  તો C શોધો.

\*

### પ્રીર્ણ ઉદાહરણો :

**ઉદાહરણ 11 :** ઉકેલો :  $\sin 3\alpha = 4\sin\alpha \sin(x + \alpha) \sin(x - \alpha)$ , જ્યાં,  $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

**ઉકેલ :**  $\sin 3\alpha = 4\sin\alpha \sin(x + \alpha) \sin(x - \alpha)$ , જ્યાં,  $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\therefore \sin 3\alpha = 4\sin\alpha (\sin^2 x - \sin^2 \alpha)$$

$$\therefore 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = 4\sin\alpha \sin^2 x - 4\sin^3\alpha$$

$$\therefore 3\sin\alpha = 4\sin\alpha \sin^2 x$$

$$\therefore \sin^2 x = \frac{3}{4} \quad (\alpha \neq k\pi, \sin\alpha \neq 0)$$

$$\therefore \sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\therefore x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \quad \text{અથવા} \quad x = k\pi + (-1)^k \left(-\frac{\pi}{3}\right), k \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

આમ, માંગેલ ઉકેલનું  $\left\{k\pi \pm \frac{\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$  હૈ.

**ઉદાહરણ 12 :** ઉકેલો :  $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = 4$

**ઉકેલ :**  $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = 4$

$$\therefore \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta} + \frac{1 - \tan\theta}{1 + \tan\theta} = 4$$

$$\therefore \frac{(1 + \tan\theta)^2 - (1 - \tan\theta)^2}{(1 - \tan\theta)(1 + \tan\theta)} = 4$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{2 + 2\tan^2\theta}{1 - \tan^2\theta} &= 4 \\ \therefore 1 + \tan^2\theta &= 2 - 2\tan^2\theta \\ \therefore 3\tan^2\theta &= 1 \\ \therefore \tan^2\theta &= \frac{1}{3} \\ \therefore \tan\theta &= \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\left(\pm\frac{\pi}{6}\right) \\ \therefore \theta &= k\pi \pm \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

अतः, भाँगेवा उक्तलगांठा  $\{k\pi \pm \frac{\pi}{6} \mid k \in \mathbb{Z}\}$  वृ.

**ઉदाहरण 13 :** यो  $\frac{\sin A}{4} = \frac{\sin B}{5} = \frac{\sin C}{6}$ , तो स्थानित करो के  $\frac{\cos A}{12} = \frac{\cos B}{9} = \frac{\cos C}{2}$  अने ते परथी.

$\cos A + \cos B + \cos C$  नी उक्तमता शोधो.

$$\begin{aligned}\text{उक्त :} \text{ अही, } \frac{\sin A}{4} &= \frac{\sin B}{5} = \frac{\sin C}{6} \\ \therefore \frac{a}{2R} &= \frac{b}{2R} = \frac{c}{2R} \\ \therefore \frac{a}{4} &= \frac{b}{5} = \frac{c}{6} = k \text{ (पारो क), ज्यां } k > 0 \\ \therefore a &= 4k, b = 5k, c = 6k \\ \text{तरुं, } \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{25k^2 + 36k^2 - 16k^2}{2 \cdot 5k \cdot 6k} = \frac{45k^2}{60k^2} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\cos A}{12} = \frac{1}{16}$$

ते ज रीते  $\frac{\cos B}{9} = \frac{1}{16}$  अने  $\frac{\cos C}{2} = \frac{1}{16}$

$$\text{अतः, } \frac{\cos A}{12} = \frac{\cos B}{9} = \frac{\cos C}{2}.$$

$$\text{वजी, } \cos A + \cos B + \cos C = \frac{12}{16} + \frac{9}{16} + \frac{2}{16} = \frac{23}{16}.$$

### स्वाध्याय 6

उक्तवा : (1 थी 10)

- |  |  |
|--|--|
| 1. $2(\sec^2\theta + \sin^2\theta) = 5$  | 2. $2 - \cos x = 2\tan\frac{x}{2}$           |
| 3. $4\sin\theta \sin 2\theta \sin 4\theta = \sin 3\theta$                        | 4. $\sin^2\theta - \cos\theta = \frac{1}{4}$ |
| 5. $\sqrt{3}\tan 3\theta + \sqrt{3}\tan 2\theta + \tan 3\theta \tan 2\theta = 1$ |  |
| 6. $\operatorname{cosec} x = 1 + \cot x$   | 7. $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{32}$     |

8.  $\tan\theta + \tan\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = 3$

9.  $\sin x - 3\sin 2x + \sin 3x = \cos x - 3\cos 2x + \cos 3x$

10.  $2\sin^2\theta + \sqrt{3}\cos\theta + 1 = 0$

$\Delta ABC$  માં સાંભિત કરો : (11 થી 14)

11.  $a\cos A + b\cos B + c\cos C = 4R\sin A \sin B \sin C = \frac{abc}{2R^2}$

12.  $a(\cos C - \cos B) = 2(b - c)\cos^2 \frac{A}{2}$

13.  $a^3\cos(B - C) + b^3\cos(C - A) + c^3\cos(A - B) = 3abc$

14. જો  $\frac{b \cdot c}{11} = \frac{c + a}{12} = \frac{a \cdot b}{13}$ , તો સાંભિત કરો કે  $\frac{\cos A}{7} = \frac{\cos B}{19} = \frac{\cos C}{25}$

15.  $\sin e$  સૂત્રની મદદથી  $\cosine$  સૂત્ર મેળવો.

16. સાંભિત કરો :  $(a - b)^2 \cos^2 \frac{C}{2} + (a + b)^2 \sin^2 \frac{C}{2} = c^2$

17. સાંભિત કરો :  $abc(\cot A + \cot B + \cot C) = R(a^2 + b^2 + c^2)$

18. જો ક્રેટ નિકોઝનની બાજુઓનાં માપ 4, 5 અને 6 હોય, તો સાંભિત કરો કે નિકોઝનના સૌથી મોટા માપવાળા ખૂંધાનું માપ સૌથી નાના માપવાળા ખૂંધાના માપ કરતાં બમણું છે.

19. જો નિકોઝનની બાજુઓનાં માપ  $m, n, \sqrt{m^2 + mn + n^2}$  હોય, તો નિકોઝનના સૌથી મોટા માપવાળા ખૂંધાનું માપ  $\frac{2\pi}{3}$  હોય.

20. જો નિકોઝનની બાજુઓનાં માપ સમીકરણ  $x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0$  નાં ભીજ હોય અને તે બાજુઓ વર્ણના ખૂંધાનું માપ  $\frac{\pi}{3}$  હોય, તો નિકોઝનની પરિમિતિ  $2\sqrt{3} + \sqrt{6}$  છે તેમ બતાવો.

21. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને   માં લખો :

(1)  $\frac{\tan 3x - \tan 2x}{1 + \tan 3x \tan 2x} = 1$  નો ઉકેલગણ તો હોય.



(a)  $\emptyset$

(b)  $\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

(c)  $\left\{k\pi + \frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

(d)  $\left\{2k\pi + \frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

(2) સમીકરણ  $\sec^2(a + 2)x + a^2 - 1 = 0$  નું  $-\pi < x < \pi$  માં સમાધાન કરતી કમ્યુન્ટ જોડ (a, x) ની સંખ્યા તો હોય.



(a) 2

(b) 1

(c) 3

(d) અનંત

(3) સમીકરણ  $\sin^{50}x - \cos^{50}x = 1$  નો વ્યાપક ઉકેલ તો હોય.



(a)  $2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

(b)  $2k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

(c)  $k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

(d)  $k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

(4) સમીકરણ  $3\sin^2x - 7\sin x + 2 = 0$  ના અંતરાલ  $[0, 5\pi]$  માં ઉકેલોની સંખ્યા તો હોય.



(a) 0

(b) 5

(c) 6

(d) 10

(5) સમીકરણ  $\cos^2 x + \sin^4 x = 1$  અંતરાલ  $(-\pi, \pi)$  માં વાસ્તવિક ઉકેલો ..... છે.

- (a)  $0, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$       (b)  $0, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}$       (c)  $0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$       (d)  $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$

(6)  $2y = 1$  અને  $y = \sin x, -2\pi < x \leq 2\pi$  ના આંદોના છેદાંદુઓની સંખ્યાઓની સંખ્યા.....

- (a) 2      (b) 4      (c) 3      (d) 1

(7)  $\sin\theta + \cos\theta = 2$  નો ઉકેલગણ તથા ..... છે.

- (a)  $k\pi, k \in \mathbb{Z}$       (b)  $2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$   
(c)  $\emptyset$       (d)  $(2k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

(8)  $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$  નો ઉકેલગણ તથા ..... છે.

- (a) R      (b)  $k\pi, k \in \mathbb{Z}$   
(c)  $\emptyset$       (d)  $(2k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

(9)  $\Delta ABC$  માં જો  $\frac{\cos A}{a} = \frac{\cos B}{b} = \frac{\cos C}{c}$  અને  $a = 2$  દ્વારા  $\Delta ABC$  નું કેન્દ્રસ્થાન ..... છે.

- (a) 1      (b) 2      (c)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       (d)  $\sqrt{3}$

(10)  $\Delta ABC$  માં  $a = 5, b = 7$  અને  $\sin A = \frac{3}{4}$  તો આવા ..... ટ્રિકોઝો શક્ય બને.

- (a) 1      (b) 0      (c) 2      (d) અનંત

(11)  $\Delta ABC$  ની પરિભિતી તેના ખૂબાંદોની sine રૂમાંના મધ્યકથી 6 ગઢી છે. જો બાજુ  $a = 1$  હોય તો  $A =$  ..... છે.

- (a)  $\frac{\pi}{6}$       (b)  $\frac{\pi}{3}$       (c)  $\frac{\pi}{2}$       (d)  $\pi$

(12)  $\Delta ABC$  માં જો  $a = 2b$  અને  $A = 3B$  તો  $A =$  ..... છે.

- (a)  $\frac{\pi}{2}$       (b)  $\frac{\pi}{3}$       (c)  $\frac{\pi}{6}$       (d)  $\frac{\pi}{4}$

(13) જો  $\Delta ABC$  માટે A, B, C સમાંતર શ્રેષ્ઠીમાં હોય તથા તેમની સામેની બાજુઓનાં માપ  $a, b, c$  સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠીમાં હોય તો  $a^2, b^2, c^2$ ....

- (a) સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠીમાં હોય.      (b) સમાંતર શ્રેષ્ઠીમાં હોય.

- (c)  $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}$  સમાંતર શ્રેષ્ઠીમાં હોય.      (d) કોઈ સંબંધ ન હોય.

(14)  $\Delta ABC$  માં  $A = \frac{\pi}{4}, C = \frac{\pi}{3}$ , દ્વારા  $a + c\sqrt{2} =$  .....

- (a)  $b$       (b)  $\sqrt{3}b$       (c)  $\sqrt{2}b$       (d)  $2b$

(15)  $\Delta ABC$  માં  $2ac \sin \frac{1}{2}(A - B + C) =$  .....

- (a)  $a^2 + b^2 - c^2$       (b)  $c^2 + a^2 - b^2$       (c)  $b^2 - c^2 + a^2$       (d)  $c^2 - a^2 - b^2$

\*

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓનો અવ્યાસ કર્યો :

1.  $\sin\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
2.  $\cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
3.  $\tan\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
4.  $\sin\theta = a, -1 \leq a \leq 1$  નો ઉકેલગણક  $\{k\pi + (-1)^k\alpha \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ,  
જ્યાં  $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  અને  $\sin\theta = a = \sin\alpha$ .
5.  $\cos\theta = a, -1 \leq a \leq 1$  નો ઉકેલગણક  $\{2k\pi \pm \alpha \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ,  
જ્યાં  $\alpha \in [0, \pi]$  અને  $\cos\theta = a = \cos\alpha$ .
6.  $\tan\theta = a, a \in \mathbb{R}$  નો ઉકેલગણક  $\{k\pi + \alpha \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ,  
જ્યાં  $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  અને  $\tan\theta = a = \tan\alpha$ .
7. જો  $c^2 \leq a^2 + b^2$ , તો  $a\cos\alpha + b\sin\alpha = c$  ની ઉકેલ  
 $x = 2k\pi + \alpha \pm \beta, k \in \mathbb{Z}$ , જ્યાં  $\alpha \in [0, 2\pi)$  તથા  $a = r\cos\alpha$  અને  $b = r\sin\alpha$ ,  
 $\cos\beta = \frac{c}{r}, \beta \in [0, \pi], r = \sqrt{a^2 + b^2}$   
જો  $c^2 > a^2 + b^2$ , તો સમીકરણનો ઉકેલગણક નથી.
8. **sine સૂત્ર :**  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$
9. **cosine સૂત્ર :**  
 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$  અને  $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$
10. **પ્રશ્ને સૂત્ર :**  
 $a = b\cos C + c\cos B, b = c\cos A + a\cos C, c = a\cos B + b\cos A$



**Aryabhata** gave an accurate approximation for  $\pi$ . He wrote in the *Aryabhatiya* the following :

*Add four to one hundred, multiply by eight and then add sixty-two thousand. The result is approximately the circumference of a circle of diameter twenty thousand. By this rule the relation of the circumference to diameter is given.*

This gives  $\pi = \frac{62832}{20000} = 3.1416$  which is a surprisingly accurate value. In fact  $\pi = 3.14159265$  correct to 8 places.

He gave a table of *sines* calculating the approximate values at intervals of  $90^\circ/24 = 3^\circ 45'$ . In order to do this he used a formula for  $\sin(n+1)x - \sin nx$  in terms of  $\sin nx$  and  $\sin(n-1)x$ . He also introduced the versine ( $\text{versin} = 1 - \cosine$ ) into trigonometry.

Aryabhata gives the radius of the planetary orbits in terms of the radius of the Earth/Sun orbit as essentially their periods of rotation around the Sun. He believes that the Moon and planets shine by reflected sunlight. Incredibly he believes that the orbits of the planets are ellipses. He correctly explains the causes of eclipses of the Sun and the Moon. The Indian belief up to that time was that eclipses were caused by a demon called Rahu. His value for the length of the year at 365 days 6 hours 12 minutes 30 seconds is an overestimate since the true value is less than 365 days 6 hours.

## શ્રેષ્ઠી અને શ્રેઢી

### 7.1 પ્રાસ્તાવિક

બાધામાં અને ગણિતશાલમાં શ્રેષ્ઠી શબ્દ સમાન અર્થમાં વાપરવામાં આવે છે. શ્રેષ્ઠી (Sequence) એ ઉદ્ભવના કમ પર ભાર આપે છે. આપણે જ્યારે ઘટનાઓની શ્રેષ્ઠી વિશે વાત કરીએ, ત્યારે એ સ્પષ્ટપણે ઘટનાઓના ઉદ્ભવના કમનું સૂચન કરે છે. દાખલા તરીકે, ભારતે આઈસોસી વર્લ્ડક્રફ 2011 અત્યો. આપણે જોઈએ છીએ કે આ માટે ભારતના ખેલાડીઓના જ્યે સ્પર્ધાની શ્રેષ્ઠીમાં કેટલીક સ્પર્ધાઓ છતી અને હેવટે આપણે સ્પર્ધા પર પહોંચ્યા. અહીં આપણે જોઈએ છીએ કે, કોઈ ચોક્કસ કમમાં ઘટનાઓની શ્રેષ્ઠી તરફ તે દોરી જાય છે. આ જ પ્રમાણે ગણિતમાં આપણે સંખ્યાઓથી બનતી શ્રેષ્ઠીની વાત કરીએ, તો તે ચોક્કસપણે પ્રથમ સંખ્યા, દ્વિતીય સંખ્યા, તૃતીય સંખ્યા... એમ દર્શાવશે. ઐતિહાસિક રીતે જોઈએ, તો પ્રથમ  $n$  પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના વર્ગના સરવાળાનું સૂત્ર, પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના વનના સરવાળાનું સૂત્ર વળેરે સૂત્રો આપનાર પ્રથમ ગણિતશ આર્યભાત્ત (Aryabhatta) હતા. તેમના ગ્રંથ આર્યભાતીયમ (Aryabhatiyam) માં આ કાર્ય જોવા મળે છે. આ પ્રમાણેનું કાર્ય ઈટલીના પ્રખ્યાત ગણિતશ ફિબોનાકી (Fibonacci) (1175-1250)ના કાર્યમાં પણ જોવા મળે છે. ફિબોનાકી શ્રેષ્ઠીની સંખ્યાઓ ફિબોનાકી સંખ્યાઓ તરીકે પણ ઓળખાય છે. અને આ સંખ્યાઓ માહિતીના ઘણા કોરોમાં જોવા મળે છે.

હવે આપણે ગાણિતિક દર્શિએ શ્રેષ્ઠીની ચર્ચા કરીએ. પુરણ સંખ્યાઓની શ્રેષ્ઠી 2, 4, 6,..., નું અવલોકન કરીએ. આપણે સહેલાઈથી જોઈ શકીએ છીએ કે, તે 2(1), 2(2), 2(3),..., શ્રેષ્ઠી છે. તે પરથી આપણે વ્યાપક રીતે કમી પુરણ સંખ્યા  $2(n)$  મેળવી શકીએ. તેથી આપણને વિધેય  $f : N \rightarrow R, f(n) = 2n$  નો વિચાર આવે. આ જ પ્રમાણે શ્રેષ્ઠી 1, 4, 9, 16,... ને આપણે  $f : N \rightarrow R, f(n) = n^2$  સ્વરૂપમાં વખી શકીએ. તેથી આપણે જે વિધેયનો પ્રદેશ  $N$  હોય અથવા  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  હોય તેવા વિધેયને શ્રેષ્ઠી તરીકે વ્યાખ્યાપિત કરીએ.

શ્રેષ્ઠી : વિધેય  $f : N \rightarrow R$  અથવા  $f : \{1, 2, 3, \dots, n\} \rightarrow R$  ને શ્રેષ્ઠી કહે છે.

$f : \{1, 2, 3, \dots, n\} \rightarrow R$  ને સાન્ત શ્રેષ્ઠી કહે છે.

દાખલા તરીકે,  $f : N \rightarrow R, f(n) = 3n - 1$ .

$n = 1, 2, 3, \dots$  બેટાં,  $f(1) = 2, f(2) = 5, f(3) = 8, \dots$  મળે. આમ, 2, 5, 8,... ને અનુક્રમે શ્રેષ્ઠીનાં પ્રથમ પદ, દ્વિતીય પદ, તૃતીય પદ,... કહે છે.  $f(n)$  ને શ્રેષ્ઠીનું નમું પદ અથવા વ્યાપક પદ કહે છે.

$f(n)$  ને  $a_n$  અથવા  $t_n$  અથવા  $T_n$  અથવા  $u_n$  વડે પડી દર્શાવાય છે.

શ્રેષ્ઠિનું  $n$  મું પદ  $f(n)$  અથવા  $a_n$  અથવા  $t_n$  હોય, તો તે શ્રેષ્ઠી અનુક્રમે  $\{f(n)\}$  અથવા  $\{a_n\}$  અથવા  $\{t_n\}$  વડે દર્શાવાય છે.

જેનો સહપ્રદેશ  $N, Z$  કે  $R$  હોય તેવો શ્રેષ્ઠોને અનુક્રમે પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો શ્રેષ્ઠી કે પૂર્ણક સંખ્યાઓનો શ્રેષ્ઠો કે વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો શ્રેષ્ઠી કહે છે.

શ્રેષ્ઠિનું  $n$  મું પદ એ સૂત્ર અવ્યપમાં હોઈ શકે, પરંતુ એ જરૂરી નથી કે હંમેશાં તમા પદ માટે સૂત્ર મળે. અવિભાજ્ય સંખ્યાઓનો શ્રેષ્ઠોનો વિચાર કરીએ.  $2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots$  અહીં  $n$  મી અવિભાજ્ય સંખ્યા મેળવવા માટે કોઈ સૂત્ર મળતું નથી. તેથી આ શ્રેષ્ઠી કોઈ ચોક્કસ સૂત્રથી નિર્દિષ્ટ કરી શકાય નહીં.

આપણે એક શ્રેષ્ઠી  $f(n) = (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) + (2n - 1)$  જોઈએ. અવ્યપમાં  $f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 5$ . આપણાને એમ કહેવાની હશ્ચા થઈ આવે કે  $f(4) = 7$  થશે. પરંતુ તેમ નથી, તે 13 છે. આમ, આપણે કેટલાંક પદોનો મદદથી શ્રેષ્ઠીના વ્યાપક પદ વિશે અનુમાન કરી શકીએ તે જરૂરી નથી.

**ઉદાહરણ 1 :**  $f : N \rightarrow R, f(n) = 2n^2 - 4$  નાં પ્રથમ પાંચ પદો મેળવો.

**ઉકેલ :** અહીં,  $f(n) = 2n^2 - 4$

$$\therefore f(1) = 2(1)^2 - 4 = -2, \quad f(2) = 2(2)^2 - 4 = 4,$$

$$f(3) = 2(3)^2 - 4 = 14, \quad f(4) = 2(4)^2 - 4 = 28, \quad f(5) = 2(5)^2 - 4 = 46.$$

આમ, પ્રથમ પાંચ પદો  $-2, 4, 14, 28, 46$  મળે.

**ઉદાહરણ 2 :**  $f : N \rightarrow R, f(n) = n(-1)^n$  માટે 17 મા અને 16 મા પદોનો તકાવત શોધો.

**ઉકેલ :** અહીં,  $f(n) = n(-1)^n$

$$\therefore f(16) = 16(-1)^{16} = 16 \text{ અને } f(17) = 17(-1)^{17} = -17$$

$$\text{હવે, } f(17) - f(16) = (-17) - (16) = -33$$

$$\therefore \text{તકાવત} = |f(17) - f(16)| = 33.$$

**ઉદાહરણ 3 :**  $f : N \rightarrow R, f(n) = 8 - n^3$  માટે શ્રેષ્ઠીનાં પ્રથમ ચાર પદો મેળવો.

**ઉકેલ :**  $f(1) = 8 - (1)^3 = 7, f(2) = 8 - (2)^3 = 0, f(3) = 8 - (3)^3 = -19$  અને  $f(4) = 8 - (4)^3 = -56$ .

$$\therefore \text{પ્રથમ ચાર પદો } 7, 0, -19 \text{ અને } -56 \text{ છે.}$$

**ઉદાહરણ 4 :** શ્રેષ્ઠી  $f : N \rightarrow R$  એ કે  $f(1) = 1$  અને  $f(n) = f(n - 1) - 1, n \geq 2$  થી વ્યાખ્યાપિત છે.

આ શ્રેષ્ઠીનાં પ્રથમ પાંચ પદો શોધો.

**ઉકેલ :** અહીં,  $f(1) = 1$ .

$$\text{હવે, } f(n) = f(n - 1) - 1, n \geq 2 \text{ લેતાં,}$$

$$\therefore f(2) = f(2 - 1) - 1 = f(1) - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$f(3) = f(2) - 1 = -1, \quad f(4) = f(3) - 1 = -2, \quad f(5) = f(4) - 1 = -3$$

$$\therefore \text{પ્રથમ પાંચ પદો } 1, 0, -1, -2, -3 \text{ છે.}$$

**ઉદાહરણ 5 :** જો  $f : N \rightarrow R, f(n) = \cos \frac{n\pi}{2}$  હોય, તો આ શ્રેષ્ઠીનાં પ્રથમ છ પદો શોધો.

**ઉકેલ :** અહીં,  $f(n) = \cos \frac{n\pi}{2}$

$$\therefore f(1) = \cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad f(2) = \cos\pi = -1, \quad f(3) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$$

$$f(4) = \cos 2\pi = 1, \quad f(5) = \cos\frac{5\pi}{2} = 0, \quad f(6) = \cos 3\pi = -1$$

તેથી પ્રથમ ૭ પદો : ૦, -૧, ૦, ૧, ૦, -૧ છે.

**ઉદાહરણ 6 :** શ્રેષ્ઠી  $f(n) = (n-1)(n+2)(n-3)$  નું ૧૦ મું પદ ક્યું છે ?

**ઉક્તિ :** અહીં,  $f(n) = (n-1)(n+2)(n-3)$

$$\therefore f(10) = (10-1)(10+2)(10-3) \\ = 9 \cdot 12 \cdot 7$$

$$= 756$$

∴ ૧૦ મું પદ 756 છે.

## 7.2 શ્રેઢી

ધારો કે  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  શ્રેષ્ઠી છે. હવે આપણે આપેલ શ્રેષ્ઠીનાં પદોનો ઉપયોગ કરી નીચે પ્રમાણેની શ્રેષ્ઠી બનાવવાનો વિચાર કરીએ.

$a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \dots, a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$  આ પ્રમાણે કરવાથી મળતી નવી શ્રેષ્ઠીને આપેલ શ્રેષ્ઠી  $\{a_n\}$  પરથી મેળવેલી **શ્રેઢી (Series)** કહે છે.

સામાન્યત: શ્રેષ્ઠીના પ્રથમ  $n$  પદોના સરવાળાને  $S_n$  વડે દર્શાવાય છે.  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$  એ મૂળ શ્રેષ્ઠીને સંબંધિત શ્રેઢી બનાતે છે.

આમ, દરેક શ્રેઢી એ શ્રેષ્ઠી છે અને તેનું  $n$  મું પદ એ સંબંધિત શ્રેષ્ઠીનાં પ્રથમ  $n$  પદોનો સરવાળો છે.

દાખલા તરીકે, અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના શ્રેષ્ઠી લઈએ એટલે ૩, ૧, ૩, ૫, ૭, ૯, ...

$$\therefore S_1 = a_1 = 1$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = 1 + 3 = 4$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 3 + 5 = 9$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

.

.

.

આપણને એક શ્રેષ્ઠી ૧, ૪, ૯, ૧૬, ... મળશે, જે પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના વર્ગની શ્રેષ્ઠી છે, એટલે કે  $S_n = n^2$ . તેને શ્રેષ્ઠી  $f(n) = 2n - 1$  પરથી મેળવેલી **શ્રેઢી** કહે છે.

ચાલો, આપણે શ્રેષ્ઠીના પ્રથમ  $n$  પદોના સરવાળા  $S_n$  પરથી તે જ શ્રેષ્ઠીનું  $n$  મું પદ  $a_n$  મેળવીએ.

$$\text{હવે, } S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3$$

.

.

.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n = S_{n-1} + a_n$$

આપણને  $n = 2, 3, 4, \dots$  માટે  $S_n = S_{n-1} + a_n$  મળે છે.

$$\therefore S_n - S_{n-1} = a_n \quad \forall n \geq 2 \text{ અને } S_1 = a_1$$

આ સૂત્ર આપણને પ્રત્યેક  $n \in \mathbb{N}$  માટે પ્રથમ  $n$  પદોના જરૂરાળ્યા  $S_n$  પરથી  $n$  માં પદનું સૂત્ર  $a_n$  આપે છે.

**ઉદાહરણ 7 :** શ્રેષ્ઠી  $\{a_n\}$  માટે  $S_n = n^3 - 2n$  હોય, તો શ્રેષ્ઠી  $\{a_n\}$  નાં પ્રથમ ચાર પદો તથા 8 મું પદ મેળવો.

$$\text{ઉકેલ : } S_n = n^3 - 2n$$

$$\therefore S_1 = (1)^3 - 2(1) = 1 - 2 = -1 \quad S_2 = (2)^3 - 2(2) = 8 - 4 = 4,$$

$$S_3 = (3)^3 - 2(3) = 27 - 6 = 21 \quad S_4 = (4)^3 - 2(4) = 64 - 8 = 56.$$

$$\text{તેથી, } a_1 = S_1 = -1, \quad a_2 = S_2 - S_1 = 4 - (-1) = 5, \quad a_3 = S_3 - S_2 = 21 - 4 = 17$$

$$a_4 = S_4 - S_3 = 56 - 21 = 35.$$

$$\therefore \{a_n\} \text{નાં પ્રથમ ચાર પદો : } -1, 5, 17, 35 \text{ છે.}$$

$$\text{શ્રેષ્ઠીનું 8 મું પદ, } a_8 = S_8 - S_7$$

$$= [(8)^3 - 2(8)] - [(7)^3 - 2(7)]$$

$$= [512 - 16] - [343 - 14] = 167$$

**ઉદાહરણ 8 :** શ્રેઢી સૂત્ર  $S_n = 4^n - 1$  પરથી તેને સંબંધિત શ્રેષ્ઠી સૂત્ર મેળવો.

$$\text{ઉકેલ : } a_1 = S_1 = 4 - 1 = 3.$$

$$S_n = 4^n - 1$$

$$\therefore S_{n-1} = 4^{n-1} - 1$$

$$a_n = S_n - S_{n-1}, \quad \forall n \geq 2 = (4^n - 1) - (4^{n-1} - 1)$$

$$= 4^n - 4^{n-1}$$

$$= 4^{n-1}(4 - 1)$$

$$= 3 \cdot 4^{n-1}, \quad \forall n \geq 2$$

આ સૂત્રમાં  $n = 1$  હેતુ,  $3 \cdot 4^1 - 1 = 3 = a_1$  અને  $a_1 = 3$  છે જ.

$$\therefore a_n = 3 \cdot 4^{n-1}, \quad \forall n \geq 1$$

### સ્વાધ્યાય 7.1

1. નીચેની શ્રેષ્ઠીઓનાં પ્રથમ પાંચ પદો લખો :

$$(1) f(n) = 3n + 1 \quad (2) f(n) = \frac{n - (-1)^n}{2}, \quad (3) f(n) = n \text{ એ અવિભાજ્ય સંખ્યા}$$

2. ફિલોનાકી શ્રેષ્ઠી  $a_1 = a_2 = 1$  અને  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 2$  હોય, તો  $a_3, a_4, a_5, a_6$  શોધો.

3. નીચેની શ્રેષ્ઠીઓ માટે  $a_2, a_3, a_4$  શોધો :

$$(1) a_1 = -3 \text{ અને } a_n = 2a_{n-1} + 1, \quad \forall n \geq 1$$

$$(2) a_1 = \frac{1}{2} \text{ અને } a_n = 3a_{n-1} + (-1)^n, \quad \forall n \geq 2.$$

4. શ્રેષ્ઠી  $\{a_n\}$  નાં પ્રથમ ત્રણ પદો તથા દર્શાવું પદ શોધો :

$$(1) S_n = n^2 - 1 \quad (2) S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

5. આપેલ શ્રેઢી સૂત્ર  $S_n$  પરથી તેને સંબંધિત શ્રેષ્ઠી સૂત્ર મેળવો :

$$(1) S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, \quad r \neq 1, a \neq 0 \quad (2) S_n = 4\{1 - (-3)^{n-1}\}$$

\*

### 7.3 સમાંતર શ્રેષ્ઠી

શ્રેષ્ઠી 1, 3, 5, 7, ..., નું અવલોકન કરીએ. અહીં દરેક પદ (પ્રથમ પદ પછીનું) તેની આગણના પદમાં 2 ઉમેરવાથી મળે છે. બે કમિક પદો વચ્ચેનો તકાવત શૂન્યેતર અચળ છે. આવી શ્રેષ્ઠીને સમાંતર શ્રેષ્ઠી (Arithmetic Progression, A.P.) કહે છે. આપણે તેને નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરીએ.

**સમાંતર શ્રેષ્ઠી :** શ્રેષ્ઠી  $f: N \rightarrow R, f(n) = an + b, a, b \in R, a \neq 0$  ને સમાંતર શ્રેષ્ઠી કહે છે. આમ સમાંતર શ્રેષ્ઠી એ  $n$  નું સુરેખ વિધેય છે.

ઉદાહરણારૂપે, શ્રેષ્ઠી  $f(n) = 3n - 4, n \in N$  એ સમાંતર શ્રેષ્ઠી છે તથા  $-1, 2, 5, 8, 11, \dots$  તેનાં પદો છે. અહીં કોઈ પદ બે કમિક પદોનો તકાવત 3 છે અને તે શૂન્યેતર અચળ છે.

ઉપરની ચર્ચામાં આપણે અવલોકન કરીએ કે બે કમિક પદોનો તકાવત શૂન્યેતર અચળ છે અને  $f$  એ  $n$  નું સુરેખ વિધેય છે, જ્યાં  $n \in N$ . હવે આપણે આ બે ગુણધર્મોને નીચેના પ્રમેયમાં વ્યકૃત કરીએ.

**પ્રમેય 1 :** સમાંતર શ્રેષ્ઠીનાં બે કમિક પદોનો તકાવત શૂન્યેતર અચળ છે.

સાબિતી : ધરો કે  $\{f(n)\} = \{an + b\}$  એ સમાંતર શ્રેષ્ઠી છે,  $a, b \in R, a \neq 0$ .

$$\begin{aligned} \text{કોઈ પદ } k \in N \text{ માટે, } f(k+1) - f(k) &= [a(k+1) + b] - (ak + b) \\ &= ak + a + b - ak - b \\ &= a, \text{ શૂન્યેતર અચળ} \end{aligned}$$

આમ, બે કમિક પદો  $f(k+1)$  અને  $f(k)$ નો તકાવત શૂન્યેતર અચળ મળે છે. આપણે તેને સમાંતર શ્રેષ્ઠીનો સામાન્ય તકાવત (Common Difference) કહીશું અને સામાન્ય રીતે આપણે તેને 'd' વડે દર્શાવીશું. હવે પછી આપણે સામાન્ય તકાવતને બદલે તકાવત શરૂણનો ઉપયોગ પણ કરીશું. અહીં  $d = f(k+1) - f(k)$  લઈશું અને તે ધન અથવા ઋણ હોઈ શકે.

ઉપરના પ્રમેયનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે. ધરો કે શ્રેષ્ઠી  $\{f(n)\}$ નું પ્રથમ પદ 'a' છે અને પ્રત્યેક  $k \in N$  માટે તકાવત  $f(k+1) - f(k) = d, d \neq 0$  છે. સ્પષ્ટ છે કે સમાંતર શ્રેષ્ઠી મળશે, વ્યાપક રીતે, આપણે તારચીએ કે સમાંતર શ્રેષ્ઠીનું  $n$  નું પદ  $f(n) = a + (n-1)d, d \neq 0$  છે અને તે નાનું સુરેખ વિધેય છે. આપણે તેને ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી સાબિત કરીશું.

**પ્રમેય 2 :** જો શ્રેષ્ઠી  $\{f(n)\}$  નું પ્રથમ પદ  $a$  અને બે કમિક પદોનો તકાવત  $d \neq 0$  હોય, તો  $f(n) = a + (n-1)d, \forall n \in N$  થાય અને તેથી તે સમાંતર શ્રેષ્ઠી છે.

સાબિતી : ધરો કે વિધાન  $P(n) : f(n) = a + (n-1)d, \forall n \in N$

$$(1) \quad n = 1 \text{ લેતાં, } f(1) = a, \text{ પ્રથમ પદ અને } a + (n-1)d = a + (1-1)d = a$$

$\therefore P(1)$  સત્ય છે.

$$(2) \quad \text{ધરો કે } P(k) : f(k) = a + (k-1)d, k \in N \text{ માટે સત્ય છે.} \quad (i)$$

હવે આપણે  $P(k+1)$  સત્ય છે તેમ સાબિત કરીશું.

$$f(k+1) = f(k) + d \quad (f(k+1) - f(k) = d)$$

$$= [a + (k-1)d] + d \quad ((i) \text{ પરથી})$$

$$\therefore f(k+1) = a + kd$$

$$= a + [(k+1)-1]d$$

આમ,  $P(k)$  સત્ય છે  $\Rightarrow P(k+1)$  સત્ય છે.

$\therefore$  ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી  $P(n)$  એ પ્રત્યેક  $n \in N$  માટે સત્ય છે.

અહીં,  $f(n) = a + (n - 1)d = dn + (a - d)$  એ ન નું સુરેખ વિધેય છે ( $d \neq 0$ ). તેથી  $f$  એ સમાંતર શ્રેણી છે.

આપણે ઉપરના બે પ્રમેય પરથી તારવી શકીએ કે, જો સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ 'a' અને સામાન્ય તકાવત 'd' હોય, તો તે સમાંતર શ્રેણી  $a, a + d, a + 2d, \dots, a + (n - 1)d, \dots$  રીતે લખી શકાય.

આમ સમાંતર શ્રેણીના નમા પદનું સૂત્ર  $f(n) = a + (n - 1)d$  થાય.  $n$  પદોની સાંત શ્રેણીના છેલ્લા પદ માટે પડા  $a_n$  નો ઉપયોગ થાય છે. તેનો પ્રદેશ  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  છે.

જો આપણે  $n$  મા પદને  $t_n$  વડે દર્શાવીએ તો  $t_n = a + (n - 1)d$ , જ્યાં  $a$  એ પ્રથમ પદ અને  $d$  એ સામાન્ય તકાવત છે.

$$\begin{aligned} \text{નોંધ : } a, b, c \text{ સમાંતર શ્રેણીના કંચિક પદો છે} &\Leftrightarrow b - a = c - b \\ &\Leftrightarrow 2b = a + c \end{aligned}$$

**ઉદાહરણ 9 :** સમાંતર શ્રેણી 3, 8, 13, 18, ... નું જાતરમાં અને ચાતીસમાં પદ શોધો.

**ઉક્તિ :**  $a = 3, d = 5$

$$\begin{aligned} \text{સમાંતર શ્રેણીનું } n \text{ મું પદ } t_n &= a + (n - 1)d \\ &= 3 + (n - 1)5 = 5n - 2 \end{aligned}$$

હવે,  $n = 17$  લેતાં,  $t_{17} = 5(17) - 2 = 83$  અને

$$n = 40 \text{ લેતાં, } t_{40} = 5(40) - 2 = 198.$$

$$\therefore 17 \text{ મું પદ } 83 \text{ અને } 40 \text{ મું પદ } 198 \text{ છે.}$$

**ઉદાહરણ 10 :** સમાંતર શ્રેણી 3, 14, 25, 36, ... નું કેટલાં પદ તેના 37 મા પદ કરતાં 121 ઓછું છે?

**ઉક્તિ :** અહીં,  $a = 3, d = 11, m = 37$

$$\begin{aligned} m \text{ મું પદ, } t_m &= a + (m - 1)d \\ t_{37} &= 3 + (37 - 1)11 = 3 + 396 = 399 \end{aligned}$$

ધારો કે  $t_{37}$  કરતાં 121 ઓછું હોય તેવું પદ  $t_n$  છે.

$$\therefore t_n = t_{37} - 121 = 399 - 121 = 278$$

$$\therefore a + (n - 1)d = 278$$

$$\therefore 3 + (n - 1)11 = 278$$

$$\therefore (n - 1)11 = 278 - 3 = 275$$

$$\therefore n - 1 = 25$$

$$\therefore n = 26$$

આમ, 26 મું પદ એ 37 મા પદ કરતાં 121 ઓછું છે.

**નોંધ :** 121 જેટલું પદ ઓછું થાય તે માટે પદનો કમાં  $\frac{121}{11} = 11$  ઓછો થવો જોઈએ. (તકાવત = 11)

$$\therefore 37 - 11 = 26 \text{ મું પદ ભાગ્યા પ્રમાણે મળે.}$$

**ઉદાહરણ 11 :** જો કોઈ સમાંતર શ્રેણીનું 11 મું પદ શૂન્ય હોય, તો આખિત કરો કે તે શ્રેણીનું 31મું પદ એ 21 મા પદ કરતાં બમણ્ણું છે.

**ઉક્તિ :**  $t_n = a + (n - 1)d$

$$\therefore t_{11} = a + 10d$$

$$\therefore 0 = a + 10d \quad (i)$$

$$\begin{aligned} \text{હવે, } 2 \cdot t_{21} &= 2(a + 20d) \\ &= 2a + 40d \\ &= (a + 30d) + (a + 10d) \\ &= t_{31} + 0 \end{aligned} \quad ((ii) \text{ પરથી})$$

આમ, 31મું પદ એ ટીમા પદ કરતાં બમણું છે.

**ઉદાહરણ 12 :** જો સમાંતર શ્રેષ્ઠીનું  $p$  મું પદ  $q$  હોય અને  $q$  મું પદ  $p$  હોય તો તે સમાંતર શ્રેષ્ઠીનું  $n$  મું પદ મેળવો. ( $p \neq q$ )

$$\text{ઉકેલ : અહીં, } t_p \text{ એ } a + (p - 1)d = q \quad (i)$$

$$\text{અને } t_q \text{ એ } a + (q - 1)d = p \quad (ii)$$

(i) અને (ii)ને ઉકેલતાં,

$$(p - q)d = q - p$$

$$\therefore d = -1 \text{ (કારણ કે } p \neq q) \text{ અને } a = p + q - 1$$

$$\begin{aligned} \text{હવે } n\text{મું પદ } t_n &= a + (n - 1)d \\ &= p + q - 1 + (n - 1)(-1) \\ &= p + q - n \end{aligned}$$

**સમાંતર શ્રેઢી :**

સમાંતર શ્રેષ્ઠીને સંબંધિત શ્રેઢીને સમાંતર શ્રેઢી (Arithmetic series) કહે છે.

સમાંતર શ્રેષ્ઠી  $a, a + d, a + 2d, \dots, a + (n - 1)d$  ને સંબંધિત સમાંતર શ્રેષ્ઠીનું  $n$  મું પદ,

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + [a + (n - 1)d]$$

હવે આપણો સમાંતર શ્રેષ્ઠીનાં પ્રથમ  $n$  પદોના સરવાળાની અભિવ્યક્તિ સાબિત કરીએ.

$$\text{એટલે કે, ગણિતોય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી } S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d] \text{ સાબિત કરીએ.}$$

**પ્રમેય 3 :** જે સમાંતર શ્રેષ્ઠીનું પ્રથમ પદ  $a$  અને સામાન્ય તફાવત  $d$  હોય, તેનાં પ્રથમ  $n$  પદોનો સરવાળો

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d] \text{ થાય. } \forall n \in \mathbb{N}.$$

**સાબિતી :** ધારો કે વિધાન  $P(n) : S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

$$(1) \quad n = 1 \text{ માટે } S_1 = \frac{1}{2}[2a + (1 - 1)d] = a, \text{ એટલે કે પ્રથમ પદનો સરવાળો પ્રથમ પદ } 'a' \text{ છે.}$$

$$\therefore P(1) \text{ સત્ય છે.}$$

$$(2) \quad \text{ધારો કે } P(k) : S_k = \frac{k}{2}[2a + (k - 1)d] \text{ એ } k \in \mathbb{N} \text{ માટે સત્ય છે.} \quad (i)$$

$n = k + 1$  દેતાં,

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (k + 1)\text{મું પદ} \\ &= \frac{k}{2}[2a + (k - 1)d] + a + [(k + 1) - 1]d \\ &= \frac{1}{2}[2ak + k(k - 1)d + 2a + 2kd] \\ &= \frac{1}{2}[2a(k + 1) + kd(k - 1 + 2)] \end{aligned} \quad ((ii) \text{ પરથી})$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2}[2a(k+1) + kd(k+1)] \\
 &= \frac{k+1}{2}[2a + \{(k+1)-1\}d]
 \end{aligned}$$

આમ,  $P(k)$  સત્ય છે  $\Rightarrow P(k+1)$  સત્ય છે.

$\therefore$  ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતની મદદથી  $P(n)$  એ  $\forall n \in \mathbb{N}$  સત્ય છે.

**નોંધ :**  $n$  પદોની સાન્ત સમાંતર શ્રેષ્ઠી માટે

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{n}{2}[a + \{a + (n-1)d\}] = \frac{n}{2}(a+l)$$

જ્યાં  $a$  પ્રથમ પદ અને  $l$  છેલ્લું પદ છે, એટલે કે  $l = t_n = a + (n-1)d$ .

$$\text{આમ, સમાંતર શ્રેષ્ઠીના } S_n \text{ માટનું સૂત્ર} = \frac{\text{પદોની કુલ સંખ્યા}}{2} [\text{પ્રથમ પદ} + \text{છેલ્લું પદ}]$$

**ઉદાહરણ 13 :** સમાંતર શ્રેષ્ઠી 15, 11, 7, 3, ...ના પ્રથમ પદ પદોનો સરવાળો કરો.

**ઉકેલ :** અહીં,  $a = 15$ ,  $d = 11 - 15 = -4$  અને  $n = 15$

$$\text{હવે, } S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$\begin{aligned}
 \therefore S_{15} &= \frac{15}{2}[2(15) + (15-1)(-4)] \\
 &= \frac{15}{2}[30 - 56] = \frac{15}{2}[-26] = -195
 \end{aligned}$$

$\therefore$  પ્રથમ પદ પદોનો સરવાળો  $-195$  છે.

**ઉદાહરણ 14 :** બે સમાંતર શ્રેષ્ઠીઓનાં પ્રથમ  $n$  પદોના સરવાળાનો ગુણોત્તર પ્રત્યેક  $n \in \mathbb{N}$  માટે  $(3n+6) : (5n-13)$  છે. તેમના અભિયારમા પદોનો ગુણોત્તર મેળવો.

**ઉકેલ :** ધારો કે એક સમાંતર શ્રેષ્ઠીનું પ્રથમ પદ  $a_1$  અને સામાન્ય તશીવત  $d_1$  છે તથા બીજી સમાંતર શ્રેષ્ઠીનું પ્રથમ પદ  $a_2$  અને સામાન્ય તશીવત  $d_2$  છે.

$$\text{હવે, } \frac{\text{પ્રથમ શ્રેષ્ઠીના પ્રથમ } n \text{ પદોનો સરવાળો}}{\text{બીજી શ્રેષ્ઠીના પ્રથમ } n \text{ પદોનો સરવાળો}} = \frac{3n+6}{5n-13}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \frac{\frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d_1]}{\frac{n}{2}[2a_2 + (n-1)d_2]} &= \frac{3n+6}{5n-13} \\
 \therefore \frac{2a_1 + (n-1)d_1}{2a_2 + (n-1)d_2} &= \frac{3n+6}{5n-13}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{2a_1 + (n-1)d_1}{2a_2 + (n-1)d_2} = \frac{3n+6}{5n-13} \quad (i)$$

શ્રેષ્ઠીઓનાં  $n$  માં પદોને અનુક્રમે  $t_n$  તથા  $t_n'$  રૂપીએ હોય તો,

$$\begin{aligned}
 \text{હવે, } \frac{t_{11}}{t'_{11}} &= \frac{a_1 + 10d_1}{a_2 + 10d_2} \\
 &= \frac{2a_1 + 20d_1}{2a_2 + 20d_2} \\
 &= \frac{2a_1 + (21-1)d_1}{2a_2 + (21-1)d_2}
 \end{aligned}$$

તેથી (i) અને  $n = 21$  લેતાં,

$$\frac{t_{11}}{t_{11}} = \frac{a_1 + 10d_1}{a_1 + 10d_2} = \frac{3(21) + 6}{3(21) - 13} = \frac{69}{92} = \frac{3}{4}$$

∴ આપેલ બે શ્રેષ્ઠીઓનાં 11 માં પદોનો ગુણોત્તર  $3 : 4$  છે.

**નોંધ :** કેટલીક વખત સમાંતર શ્રેષ્ઠીના કેટલાંક કમિક પદોની આવશ્યકતા ઉભી થાય છે.

જો સમાંતર શ્રેષ્ઠીનાં ત્રણ અથવા પાંચ અથવા સાત કમિક પદો આપેલ હોય, ત્યારે આપણે તેમાંનું મધ્યમપદ 'a' ધરીશું અને તેની પહેલાનાં પદોમાં કમશા: 'd' ઘટાડતા જઈશું તથા તે પછીનાં પદોમાં કમશા: 'd' વધારતા જઈશું.

આમ, સમાંતર શ્રેષ્ઠીનાં 3 કમિક પદો :  $a - d, a, a + d$

5 કમિક પદો :  $a - 2d, a - d, a, a + d, a + 2d$

7 કમિક પદો :  $a - 3d, a - 2d, a - d, a, a + d, a + 2d, a + 3d$  લઈ શકાય.

જો ચાર અથવા 9 પદો આપેલ હોય, તો તેમાં બે મધ્યમપદ થશે, જેમને આપણે  $a - d$  અને  $a + d$  ધરીશું અહીં બે કમિક પદો વર્ણેનો તફાવત '2d' લઈશું તેથી પહેલાનાં પદો માટે કમશા: '2d' ઘટાડીશું અને પછીનાં પદો માટે '2d' વધારીશું.

આમ, સમાંતર શ્રેષ્ઠીનાં 4 કમિક પદો :  $a - 3d, a - d, a + d, a + 3d$

6 કમિક પદો :  $a - 5d, a - 3d, a - d, a + d, a + 3d, a + 5d$  લઈ શકાય.

**ઉદાહરણ 15 :** સમાંતર શ્રેષ્ઠીનાં ત્રણ કમિક પદોનો સરવાળો અને ગુણાકાર અનુક્તિ 24 અને 312 છે. આ ત્રણ પદો શોધો.

**ઉકેલ :** ધારો કે સમાંતર શ્રેષ્ઠીનાં ત્રણ કમિક પદો  $a - d, a, a + d$  છે.

$$(a - d) + a + (a + d) = 24 \text{ અને } (a - d) \cdot a \cdot (a + d) = 312$$

$$\text{આમ, } 3a = 24 \text{ તેથી } a = 8$$

$$(8 - d) \cdot 8 \cdot (8 + d) = 312$$

$$\therefore 64 - d^2 = 39$$

$$\therefore d^2 = 25$$

$$\therefore d = 5 \text{ અથવા } d = -5$$

જો  $a = 8$  અને  $d = 5$  લઈએ, તો તે પદો 3, 8, 13 થશે અને જો  $a = 8$  અને  $d = -5$  લઈએ, તો તે 13, 8, 3 થશે.

આમ, માંગેલ પદો 3, 8, 13 છે.

**ઉદાહરણ 16 :** સમાંતર શ્રેષ્ઠીનાં ચાર કમિક પદોનો સરવાળો 24 છે અને પ્રથમ તથા છેલ્લાં પદોનો ગુણાકાર  $-45$  છે, તો આ પદો શોધો.

**ઉકેલ :** ધારો કે સમાંતર શ્રેષ્ઠીનાં ચાર કમિક પદો  $a - 3d, a - d, a + d, a + 3d$  છે.

$$\text{તેમનો સરવાળો } (a - 3d) + (a - d) + (a + d) + (a + 3d) = 24$$

$$\therefore 4a = 24, \text{ તેથી } a = 6$$

$$(a - 3d)(a + 3d) = -45$$

$$\therefore (6 - 3d)(6 + 3d) = -45$$

$$\therefore 36 - 9d^2 = -45$$

$$\therefore 9d^2 = 81$$

$$\therefore d^2 = 9$$

$$\therefore d = 3 \text{ અથવા } d = -3$$

જો  $a = 6$  અને  $d = 3$  લઈએ, તો તે પદો  $-3, 3, 9, 15$  અને જો  $a = 6$  અને  $d = -3$  લઈએ, તો તે પદો  $15, 9, 3, -3$  થશે.

**ઉદાહરણ 17 :** એક વાર્ક્ષિસની પ્રથમ વર્ષની આવક ₹ 3,50,000 છે. તેની આવકમાં દર વર્ષ ₹ 15,000 નો ઈજાફો (વધારો) થાય છે. 15 મા વર્ષ તેની આવક કેટલી હશે? 15 વર્ષમાં તે કુલ કેટલી રકમ મેળવશે?

**ઉકેલ :** અહીં, પ્રથમ પદ  $a = 3,50,000$  અને  $d = 15,000$

$$\text{હવે, } t_n = a + (n - 1)d$$

$$\therefore t_{15} = 3,50,000 + 14(15000) = 5,60,000$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a + l)$$

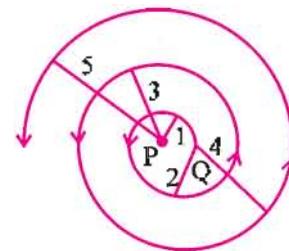
$$= \frac{15}{2}(3,50,000 + 5,60,000) = 68,25,000$$

$\therefore$  15 મા વર્ષ તેની આવક ₹ 5,60,000 હશે અને 15 વર્ષમાં તે કુલ ₹ 68,25,000 મેળવશે.

### સ્વાધ્યાય 7.2

- નીચે આપેલી સમાંતર શ્રેષ્ઠીઓમાં નિર્દિશિત પદો શોધો :
  - $-17, -13, -9, \dots$  નું 16મું પદ,
  - 101, 96, 91, ... નું 31મું પદ,
  - $3, \frac{9}{2}, 6, \frac{15}{2}, \dots$  નું 10મું પદ
- એક સમાંતર શ્રેષ્ઠીનું નવમું પદ 30 હોય, તો તેનાં પ્રથમ સતત પદોનો સરવાળો શોધો.
- જેમને 5 વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય તેવી 100 અને 500 વચ્ચેની તમામ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો કરો.
- એક સમાંતર શ્રેષ્ઠીનું પ્રથમ પદ 4 છે અને પ્રથમ પાંચ પદોનો સરવાળો, તે પછીના પાંચ પદોના સરવાળાથી  $\frac{1}{6}$  ગણ્યો હોય, તો તેનું 8મું પદ શોધો.
- જો સમાંતર શ્રેષ્ઠીનાં પ્રથમ  $n$  પદોનો સરવાળો  $3n^2 + 5n$  હોય, તો તેનું કેટલામું પદ 164 હશે?
- એક સમાંતર શ્રેષ્ઠીના પ્રથમ  $m$  પદોનો સરવાળો  $m$  અને પ્રથમ  $n$  પદોનો સરવાળો  $n$  હોય, તો પ્રથમ  $(m + n)$  પદોનો સરવાળો મેળવો.
- એક સમાંતર શ્રેષ્ઠીનું  $p$ મું  $q$ મું અને  $r$ મું પદ અનુક્રમે  $l, m, n$  હોય, તો  $k(q - r) + m(r - p) + n(p - q)$ નું મૂલ્ય મેળવો.
- બે સમાંતર શ્રેષ્ઠીઓનાં પ્રથમ  $n$  પદોના સરવાળાનો ગુણોત્તર પ્રત્યેક  $n \in \mathbb{N}$  માટે  $(3n - 13) : (5n - 1)$  છે. તેમનાં 13માં પદોનો ગુણોત્તર મેળવો.
- બે સમાંતર શ્રેષ્ઠીઓનાં  $n$  માં પદોનો ગુણોત્તર પ્રત્યેક  $n \in \mathbb{N}$  માટે  $(2n - 1) : (4n + 3)$  છે. તેમનાં પ્રથમ 25 પદોના સરવાળાનો ગુણોત્તર મેળવો.
- જો પૂર્ણાંકને 2 વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય પરંતુ 5 વડે નિઃશેષ ન ભાગી શકાય તેવા 100 થી 200 સુધીના પૂર્ણાંકનો સરવાળો શોધો.
- જો એક સમાંતર શ્રેષ્ઠીનું 10મું પદ  $\frac{1}{20}$  અને 20મું પદ  $\frac{1}{10}$  હોય, તો તેનું 200 મું પદ શોધો.
- એક સમાંતર શ્રેષ્ઠીનાં ગ્રાન્ટ કમિશ પદોનો સરવાળો 9 અને તેમનાં વર્ગોનો સરવાળો 59 હોય, તો તે પદો મેળવો.

13. એક સમાંતર શ્રેષ્ઠીનાં ચાર ક્રમિક પદોનો સરવાળો 32 છે અને તેનાં બીજા તથા તૃજા પદોનો ગુણાકાર 60 છે, તો આ પદો શોધો.
14. એક વ્યક્તિ તેની લોનની ચૂકવણી માટે પ્રથમ હામારી ર 200 ભરે છે. જો તે દર માસે હપતાની રકમમારી ર 20 વધારે, તો 20માં હપતાના અંતે તેણે કુલ કેટલી રકમ ભરપાઈ કરી છે?
15. ભાર્ગવ પ્રથમ અઠવાડિયે ર 50 બચાવે છે અને તે પ્રત્યેક અઠવાડિયે ર 17.50ની બચત વધારતો જાય છે. જો માં અઠવાડિયાની તેની બચત ર 207.50 થતી હોય, તો જો શોધો તથા તેની કુલ બચત શોધો.
16. વારાફરતી P અને Q ને કેન્દ્ર લઈ ક્રમિક અર્ધવર્તુળોની મદદથી એક કુલ (spiral) બનાવ્યું છે. પ્રથમ P ને કેન્દ્ર લઈ 1 સેમી, 3 સેમી, 5 સેમી. આ પ્રમાણે નિયમાઓ લઈ અર્ધવર્તુળો દોરવામાં આવે છે અને પછી Q ને કેન્દ્ર લઈ 2 સેમી, 4 સેમી, 6 સેમી,... નિયમાઓ લઈ અર્ધવર્તુળો દોરવામાં આવે છે. જો આવાં 20 અર્ધવર્તુળોની મદદથી કુલ બનાવ્યું હોય, તો તેની લંબાઈ શોધો. (જુઓ આકૃતિ 7.1)



આકૃતિ 7.1

\*

### 7.3 સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠી

આપણે કેટલોક શ્રેષ્ઠોનું નિર્દેખણ કરીએ :

- (1) 3, 6, 12, 24,... (2)  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$  (3) 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001,...

આપણે નોંધીએ કે દરેક પદ (પ્રથમ પદ સિવાપનું) કોઈક ચોક્કસ કમમાં આગળ વધે છે. (1) માં બીજું પદ અને તે પછીના દરેક પદો, આગળના પદથી બમણાં છે. (3) માં દરેક પદ આગળના પદ કરતાં 0.1 ગણ્યું છે.

તેથી કોઈ પણ પદોનો તેની આગળના પદ સાથેનો ગુણોત્તર અચળ છે. એટલે કે દરેક પદ (પ્રથમ પદ સિવાય) માટે તે સમાન છે. આ ગુણધર્મ ધરાવતી શ્રેષ્ઠીને સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠી (Geometric Progression, G.P.) કહે છે, અચળ ગુણોત્તરને સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠીનો સામાન્ય ગુણોત્તર કહે છે. આમ જો દરેક ક્રમિક પદોની જોરી માટે પદનો પૂર્વપદ સાથેનો ગુણોત્તર શૂન્યેતર અચળ હોય, તો તે શ્રેષ્ઠીને સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠી કહે છે. આપણે સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠીને નીચે પ્રમાણે વાખ્યાપિત કરીશું.

**સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠી :** શ્રેષ્ઠી  $f : N \rightarrow R, f(n) = Ar^n, A \in R - \{0\}, r \in R - \{0\}$  ને સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠી કહે છે. સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠી એ ઘાતાંકીય વિવેય છે.

$n = 1, 2, 3, \dots$  લેતાં સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠીનાં પદો  $Ar, Ar^2, Ar^3, \dots$  મળશે.

**પ્રમેય 4 :** સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠીના કોઈ પણ બે ક્રમિક પદોનો ગુણોત્તર શૂન્યેતર અચળ હોય છે.

**સાબિતી :** ધારો કે  $f : N \rightarrow R$  એક સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠી છે. કોઈક  $A \neq 0$  અને કોઈક  $r \neq 0$  માટે,  $f(n) = Ar^n, \forall n \in N$ .

બે ક્રમિક પદો  $f(k+1)$  અને  $f(k)$  નો ગુણોત્તર  $\frac{f(k+1)}{f(k)} = \frac{Ar^{k+1}}{Ar^k} = r$ , શૂન્યેતર અચળ.

આ પ્રમેયનું પ્રતીપ પ્રમેય પણ સત્ય છે.

ધારો કે શ્રેષ્ઠોનું પ્રથમ પદ  $a \neq 0$  અને પ્રત્યેક બે ક્રમિક પદોનો ગુણોત્તર  $r$  છે, જ્યાં  $r \neq 0$ . તો તે શ્રેષ્ઠીનાં પદો  $a, ar, ar^2, \dots, ar^{n-1}$  આમ, તેનું જ મું પદ  $t_n = ar^{n-1}$  ધાય.

આપણે આ સાબિતી ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી આપીશું.

**પ્રમેય 5 :** જો શ્રેષ્ઠીનાં કોઈ પણ બે ક્રમિક પદોનો ગુણોત્તર શૂન્યેતર વાસ્તવિક સંખ્યા હોય, તો તે સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠી છે.

**સાબિતી :** ધરો કે  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(n) = ar^{n-1}$  ( $a \neq 0, r \neq 0$ )

$P(n) : f(n) = ar^{n-1}$  વર્ણા.  $a, r \in \mathbb{R} - \{0\}$

(1)  $n = 1$  માટે,  $f(1) = ar^0 = a$ , પ્રથમ પદ.

$\therefore P(1)$  સત્ય છે.

(2) ધરો કે  $P(k) : f(k) = ar^{k-1}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  માટે સત્ય છે.

હવે આપણે  $P(k+1)$  સત્ય સાબિત કરશું.

$$\therefore \frac{f(k+1)}{f(k)} = r \quad (4)$$

$$\therefore f(k+1) = r \cdot f(k) = r \cdot (ar^{k-1}) = ar^k = ar^{(k+1)-1}$$

$\therefore P(k)$  સત્ય છે.  $\Rightarrow P(k+1)$  સત્ય છે.

$\therefore$  ગણિતિય અનુમાનના સિદ્ધાંત પ્રમાણે પ્રત્યેક  $n \in \mathbb{N}$  માટે  $P(n)$  સત્ય છે.

$\{f(n)\}$  એ સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠી છે.

આપણે નોંધીએ કે, જે શ્રેષ્ઠીનું પ્રથમ પદ  $a$  અને સામાન્ય ગુણોત્તર  $r$  છે, તે સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠી  $a, ar, ar^2, \dots, ar^{n-1}, \dots$  છે.

હવે પણ આપણે સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠીનું  $n$  મું પદ  $t_n$  દ્વારા દર્શાવીશું.

તેથી,  $t_n = ar^{n-1}$ ,  $a \neq 0, r \neq 0$ .

**નોંધ :** (1) હવે પછી આપણે સામાન્ય ગુણોત્તરને 'ગુણોત્તર' જ કહીશું.

(2) જો  $a, b, c$  સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠીના કંપિક પદો હોય, તો  $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$  એટલે જ  $b^2 = ac$  ધાર્ય.

**ઉદાહરણ 18 :** સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠી 54, 36, 24, 16, ..., નું  $n$  મું અને 8 મું પદ શોધો.

**ઉકેલ :** અહીં,  $a = 54, r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{36}{54} = \frac{2}{3}$ .

$$\begin{aligned} \text{હવે } t_n &= ar^{n-1} = 54 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{2 \times 3^3 \times 2^{n-1}}{3^{n-1}} \end{aligned}$$

$$\therefore t_n = 2^n \cdot 3^{4-n}$$

$$t_n \text{ માં } n = 8 \text{ લેતાં, } t_8 = 2^8 \cdot 3^{-4}$$

$$= \frac{256}{81}$$

$$\therefore \text{શ્રેષ્ઠીનું } n \text{ મું પદ } 2^n \cdot 3^{4-n} \text{ અને } 8 \text{ મું પદ } \frac{256}{81} \text{ છે.}$$

**ઉદાહરણ 19 :** એક સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠીનું ગોજું પદ 18 અને છું 486 હોય, તો તેનું 9મું પદ શોધો.

**ઉકેલ :** અહીં,  $t_3 = 18$  અને  $t_6 = 486$ .

$$\text{હવે, } t_n = ar^{n-1}$$

$$\therefore t_3 = ar^2 = 18 \text{ અને } t_6 = ar^5 = 486$$

$$\therefore \frac{t_6}{t_3} = \frac{ar^5}{ar^2} = \frac{486}{18}$$

$$\therefore r^3 = 27$$

$$\therefore r = 3$$

જીથી,  $ar^2 = 18$ . અથી,  $9a = 18$

$$\therefore a = 2$$

$$\therefore t_9 = ar^8 = 2(3)^8 = 13122$$

$\therefore$  નું પદ 13122 છે.

### સમગુણોત્તર શ્રેઢી

સમગુણોત્તર શ્રેઢીને સંબંધિત શ્રેઢીને સમગુણોત્તર શ્રેઢી (Geometric Series) કહે છે.

જો સમગુણોત્તર શ્રેઢીનું પ્રથમ પદ 'a' અને ગુણોત્તર 'r' હોય, તો સમગુણોત્તર શ્રેઢીનું n મું પદ

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} \text{ થશે.}$$

હવે આપણે ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી  $S_n$  નું સૂત્ર મેળવીએ.

**પ્રમેય 6 :** જો સમગુણોત્તર શ્રેઢીનું પ્રથમ પદ a અને ગુણોત્તર r હોય, તો તેના પ્રથમ n પદોનો સરવાળો

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, \quad a \neq 0, r \neq 0, r \neq 1, n \in \mathbb{N} \text{ તથા } r = 1 \text{ તો } S_n = na.$$

**સાબિતી :** ધારો કે વિધાન P(n) :  $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ ,  $a \neq 0, r \neq 0, r \neq 1, n \in \mathbb{N}$ .

$$(1) \quad n = 1 \text{ માટે } S_1 = \frac{a(r - 1)}{r - 1} = a \text{ એટલે કે પ્રથમ પદનો સરવાળો એ પ્રથમ પદ 'a' જ થશે.}$$

આમ, P(1) સત્ય છે.

$$(2) \quad \text{ધારો કે } P(k) : S_k = \frac{a(r^k - 1)}{r - 1} \text{ એ } k \in \mathbb{N} \text{ માટે સત્ય છે.}$$

ધારો કે  $n = k + 1$

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \frac{a(r^k - 1)}{r - 1} + ar^{k+1} - 1 \\ &= \frac{a(r^k - 1)}{r - 1} + ar^k \\ &= \frac{a}{r - 1} [r^k - 1 + r^{k+1} - r^k] \\ &= \frac{a(r^{k+1} - 1)}{r - 1} \end{aligned}$$

આમ, P(k) સત્ય છે  $\Rightarrow P(k + 1)$  સત્ય છે.

$\therefore$  ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતને આપણે પ્રલોક  $n \in \mathbb{N}$  માટે P(n) સત્ય છે.

જો  $r = 1$  તો સ્પષ્ટ છે કે  $S_n = a + a + \dots + a$  (n વખત) =  $n \cdot a$

**નોંધ :** જ્યારે  $r < 1$  હોય, ત્યારે આપણે  $S_n$  ના સૂત્રનો ઉપયોગ  $S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$  વિડુપે કરીશું.

**ઉદાહરણ 20 :** સમગુણોત્તર શ્રેઢી માટે  $t_2 = 6$  અને  $t_5 = 48$  તો  $S_6$  શોધો.

**ઉકેલ :**  $t_2 = 6$  અને  $t_5 = 48$

$$\therefore ar = 6 \text{ અને } ar^4 = 48$$

$$\therefore \frac{ar^4}{ar} = \frac{48}{6}$$

$$\therefore r^3 = 8 = 2^3$$

$$\therefore r = 2 \text{ અને } ar = 6$$

$$\therefore a = 3$$

$$\text{હવે, } S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$\therefore S_6 = \frac{3(2^6 - 1)}{2 - 1} = 189$$

**ઉદાહરણ 21 :** એક સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠોનું ગ્રીજું પદ  $\frac{3}{4}$  છે. પ્રથમ પાંચ પદોનો સરવાળો એ પ્રથમ દશ પદોના સરવાળાથી  $\frac{32}{33}$  ગણો હોય, તો પ્રથમ ચાર પદોનો સરવાળો શોધો.

**ઉકેલ :** અહીં,  $r_3 = \frac{3}{4}$  અને  $S_5 = \frac{32}{33} \cdot S_{10}$

$$\therefore ar^2 = \frac{3}{4} \text{ અને } \frac{a(r^5 - 1)}{r - 1} = \frac{32}{33} \cdot \frac{a(r^{10} - 1)}{r - 1}$$

$$\therefore \frac{32}{33} = r^5 + 1$$

$$\therefore r^5 = \frac{32}{33} - 1$$

$$\therefore r^5 = \frac{1}{32} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$\therefore r = \frac{1}{2}$$

$$\text{હવે, } ar^2 = \frac{3}{4} \text{ હેઠળ } a\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$\therefore a = 3$$

$$\text{હવે, } S_4 = \frac{a(1 - r^4)}{1 - r} = \frac{3(1 - \frac{1}{16})}{1 - \frac{1}{2}} = 6\left(\frac{15}{16}\right)$$

$$\therefore S_4 = \frac{45}{8}$$

$$\therefore \text{પ્રથમ ચાર પદોનો સરવાળો } \frac{45}{8} \text{ છે.}$$

**નોંધ :** કેટલોક વખત આપણે સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠીના કેટલાંક કમિક પદો ખારવાં આવશ્યક હોય છે.

જો સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠીનાં **ત્રણ** અથવા **પાંચ** અથવા **સાત** કમિક પદો આપ્યાં હોય, તો આપણે મધ્યમપદને 'a' ખારીશું અને તેની પહેલાનાં પદો માટે a ને  $r, r^2, r^3, \dots$  વડે બાળીશું તથા પાછળનાં પદો માટે a ને  $r, r^2, r^3, \dots$  વડે ગુજીશું આપણે સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠીનાં,

$$3 \text{ કમિક પદો : } \frac{a}{r}, a, ar$$

$$5 \text{ કમિક પદો : } \frac{a}{r^2}, \frac{a}{r}, a, ar, ar^2$$

$$7 \text{ કમિક પદો : } \frac{a}{r^3}, \frac{a}{r^2}, \frac{a}{r}, a, ar, ar^2, ar^3 \text{ લઈશું.}$$

જો સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠીનાં **ચાર** અથવા **6** કમિક પદો આપ્યાં હોય, તો બે મધ્યમપદો  $\frac{a}{r}$  અને  $ar$  ખારીશું તથા  $\frac{a}{r}$  ની પહેલાનાં પદો માટે  $\frac{a}{r}$  ને  $r^2, r^4, r^6, \dots$  વડે બાળીશું અને  $ar$  પછીનાં પદો માટે  $r^2, r^4, r^6, \dots$  વડે  $ar$  ને ગુજીશું આપણે, સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠીનાં

4 કચ્છિક પદો :  $\frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}, ar, ar^3$

6 કચ્છિક પદો :  $\frac{a}{r^5}, \frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}, ar, ar^3, ar^5$  લઈયું.

**ઉદાહરણ 22 :** નાણ સંખ્યાઓ સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠીનાં નાણ કચ્છિક પદો છે. તેમનો સરવાળો અને ગુણાકાર અનુફ્રમે  $\frac{31}{5}$  અને 1 છે. આ સંખ્યાઓ શોધો.

**ઉકેલ :** ધારો કે સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠીનાં નાણ કચ્છિક પદો  $\frac{a}{r}, a, ar$  છે.

$$\text{તેમનો ગુણાકાર } \left(\frac{a}{r}\right)(a)(ar) = 1 \text{ અને અરવાળો } \frac{a}{r} + a + ar = \frac{31}{5}$$

$$\therefore a^3 = 1 \text{ તેથી } a = 1 \text{ અને } \frac{1}{r} + 1 + r = \frac{31}{5}$$

$$\therefore 5r^2 - 26r + 5 = 0$$

$$\therefore (5r - 1)(r - 5) = 0$$

$$\therefore r = \frac{1}{5} \text{ અથવા } r = 5$$

$a = 1$  અને  $r = \frac{1}{5}$  બેતાં, તે સંખ્યાઓ 5, 1,  $\frac{1}{5}$  થશે.

(જો આપણે  $r = 5$  લઈએ તો આ જ સંખ્યાઓ મળે.)

**ઉદાહરણ 23 :** શ્રેષ્ઠી 5, 55, 555,...નાં પ્રથમ  $n$  પદોનો સરવાળો કરો.

**ઉકેલ :**  $S_n = 5 + 55 + 555 + \dots n$  પદો

$$= \frac{5}{9}[9 + 99 + 999 + \dots n \text{ પદો}]$$

$$= \frac{5}{9}[(10 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + \dots n \text{ પદો}]$$

$$= \frac{5}{9}[(10 + 10^2 + 10^3 + \dots n \text{ પદો}) - (1 + 1 + 1 + \dots n \text{ પદો})]$$

$$= \frac{5}{9} \left[ \frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - n \right] \quad (\text{અહીં, } a = 10, r = 10)$$

$$= \frac{5}{9} \left[ \frac{10}{9}(10^n - 1) - n \right]$$

$$= \frac{50}{81}(10^n) - \frac{50}{81} - \frac{5n}{9}.$$

**ઉદાહરણ 24 :** ચોક્કસ પ્રકારના સૂક્ષ્મ જીવાશું (બેક્ટેરિયા) દર કલાકે 4 % પ્રમાણે વધે છે. શરૂઆતમાં 40 જીવાશુંનો હોય, તો ચોથા કલાકના અંતે કેટલા જીવાશુંનો હાજર હશે? ચોથા કલાકમાં કેટલા જીવાશુંનો વધ્યા હશે?

**ઉકેલ :** શરૂઆતના બેક્ટેરિયાની સંખ્યા 40 છે. પ્રથમ કલાકના અંતે 4 % જીવાશુંનો વધ્યા હશે.

તેથી પ્રથમ કલાકના અંતે જીવાશુંનો સંખ્યા

$$40 + 40\left(\frac{4}{100}\right) = 40(1 + 0.04) = 40(1.04)$$

બીજા કલાકના અંતે જીવાશુંનો સંખ્યા  $40(1.04)^2$  થશે.

ત્રીજા કલાકના અંતે જીવાશુંનો સંખ્યા  $40(1.04)^3$  છે.

આમ, કચ્છિક કલાકોમાં જીવાશુંનો સંખ્યા એ એક સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠી બનાવે છે. શરૂઆતમાં  $T_1 = a = 40$  અને  $r = 1.04$ .

હવે, ચોથા કલાકના અંતે જીવાશુંનો સંખ્યા  $40(1.04)^4 = 46.7943$

એટલે કે લગભગ 47 બેક્ટેરિયા 4 કલાકના અંતે હાજર હોય.

ચોથા કલાકમાં વર્ષેલા જીવાણુઓની સંખ્યા

$$\begin{aligned}
 &= ચાર કલાકના અંતે જીવાણુઓની સંખ્યા - ત્રણ કલાકના અંતે જીવાણુઓની સંખ્યા \\
 &= 40[(1.04)^4 - (1.04)^3] \\
 &= 40(1.04)^3 (1.04 - 1) \\
 &= 40(1.04)^3 (0.04) \\
 &= 1.7987
 \end{aligned}$$

∴ ચોથા કલાકમાં લગભગ 2 જીવાણુ વર્ષે.

### સ્વાધ્યાય 7.3

1. નીચેની સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠીઓ માટે દર્શાવેલ પદો શોધો :

- $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \dots$  નું 12 મું પદ
- $7, \frac{-7}{2}, \frac{7}{4}, \frac{-7}{8}, \dots$  નું 11 મું પદ
- $-2, -2\sqrt{2}, -4, -4\sqrt{2}, \dots$  નું 8 મું પદ

2. નીચેની સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠીઓ માટે માન્યા પ્રમાણે ગણો :

- $t_7 = 96, r = 2$ , તો  $t_{10}$  શોધો. (2)  $a = 2, r = \sqrt{2}, t_n = 128$  તો  $n$  શોધો.
- $a = 3, r = 3, S_n = 363$ , તો  $n$  શોધો. (4)  $r = \frac{1}{3}, S_3 = \frac{585}{4}$ , તો  $a$  શોધો.

3. સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠીનાં પ્રથમ ત્રણ પદોનો સરવાળો 21 અને તે પછીનાં ત્રણ પદોનો સરવાળો 168 હોય, તો પ્રથમ પાંચ પદોનો સરવાળો કરો.

4. જો સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠીનાં પ્રથમ બે પદોનો સરવાળો  $\frac{9}{2}$  અને છહું પદ એ તેના ત્રીજા પદથી 8 ગણું હોય, તો તે શ્રેષ્ઠી શોધો.

5. શ્રેષ્ઠીનાં પ્રથમ  $n$  પદોનો સરવાળો કરો :

- 7, 77, 777, 7777, ... (2) 3, 33, 303, 3003, ...

6. સરવાળો કરો :  $a(a + b) + a^2(a^2 + b^2) + a^3(a^3 + b^3) + \dots n$  પદો સુધી. ( $a, b \neq 0, \pm 1$ )

7. સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠીની પાંચ કમિક પન સંખ્યાઓનો ગુણાકાર 32 અને સૌથી મોટી અને સૌથી નાની સંખ્યાઓનો ગુણોત્તર 81 : 1 હોય, તો તે સંખ્યાઓ શોધો.

8. એક સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠીનું  $(p + q)$ મું પદ  $m$  અને  $(p - q)$ મું પદ  $n$  છે. આ શ્રેષ્ઠીનું  $p$  મું પદ  $m$  અને  $n$  માં શોધો.

9. જો  $1, a, b, c, 2$  એ સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠીના કમિક પદો હોય, તો  $abc$  ની ડિમત શોધો.

10. સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠીનું  $p$ મું,  $q$ મું અને  $r$ મું પદ પણ અન્ય સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠીના ત્રણ કમિક પદો હોય, તો સાબિત કરો કે  $p, q, r$  સમાંતર શ્રેષ્ઠીમાં છે.

11. જો  $x, y, z$  સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠીના કમિક પદો હોય, તો સાબિત કરો કે,  $\frac{1}{x-y} + \frac{1}{y-z} = \frac{1}{y}$ .

12. સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠીનાં ચાર કમિક પદોનો ગુણાકાર 16 છે તથા બિજી અને ત્રીજી સંખ્યાનો સરવાળો 5 છે, તો તે સંખ્યાઓ શોધો.

13. એક મોટરસાઈકલ ₹ 60,000 માં ખરીદી, જો દર વર્ષ તેની ડિમતમાં 10 % ઘટાડો થતો હોય, તો ચોથા વર્ષના અંતે તેની ડિમત કેટલી હશે ?

\*

## 7.4 મધ્યકો

**સમાંતર મધ્યક :** જો ત્રણ બિન્ન સંખ્યાઓ  $a, A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  સમાંતર શ્રેષ્ઠીનાં ત્રણ કમિક પદો હોય તો  $A$  ને બે સંખ્યાઓ  $a$  અને  $b$  નો સમાંતર મધ્યક (Arithmetic Mean) કહે છે. સમાંતર મધ્યકને સેકેત  $A$  વડે દર્શાવાય છે.

$a, A$  અને  $b$  એ સમાંતર શ્રેષ્ઠીમાં છે.

$$\therefore A - a = b - A$$

$$\therefore 2A = a + b$$

$$\therefore A = \frac{a+b}{2}$$

આમ,  $a$  અને  $b$ નો સમાંતર મધ્યક  $A = \frac{a+b}{2}$  છે. તે  $a$  અને  $b$ નો સરેરાશ છે.

જેમકે, 4 અને 12 નો સમાંતર મધ્યક  $A = \frac{4+12}{2} = 8$  છે.

**સમાંતર મધ્યકો :** બે બિન્ન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ  $a$  અને  $b$  માટે જો સંખ્યાઓ  $a, A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, b$  સમાંતર શ્રેષ્ઠીનાં કમિક પદો હોય, તો  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  ને બે બિન્ન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ  $a$  અને  $b$  વચ્ચેના  $n$  સમાંતર મધ્યકો કહેવાય.

ધારો કે,  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  એ  $a$  અને  $b$  વચ્ચેના  $n$  સમાંતર મધ્યકો છે.

અહીં, આપજાને સમાંતર શ્રેષ્ઠીનાં  $n+2$  પદો મળે છે. તેમાં પ્રથમ પદ  $a$  અને  $(n+2)$ મું પદ  $b$  છે.

$$\therefore t_{n+2} = b = a + [(n+2)-1] d$$

$$\therefore b - a = (n+1)d$$

$$\therefore \frac{b-a}{n+1} = d$$

$$\text{અહીં, સમાંતર મધ્યક } A_1 = a + d = a + \left( \frac{b-a}{n+1} \right)$$

$$\text{આમ, } A_1 = a + \left( \frac{b-a}{n+1} \right), A_2 = a + 2\left( \frac{b-a}{n+1} \right), A_3 = a + 3\left( \frac{b-a}{n+1} \right), \dots$$

તેથી  $a$  અને  $b$  વચ્ચેના  $n$  સમાંતર મધ્યકો  $A_k = a + k\left( \frac{b-a}{n+1} \right)$ , જ્યાં  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ .

અહીં,  $A_1$  એ  $a$  અને  $b$  વચ્ચેના  $n$  સમાંતર મધ્યકો પેકીનો ક્રમો સમાંતર મધ્યક છે.

અહીં,  $n = 1$  માટે  $A_1 = a + \frac{b-a}{n+1} = \frac{a+b}{2}$ , જે  $a$  અને  $b$ નો સમાંતર મધ્યક છે.

આમ, બે બિન્ન સંખ્યાઓ  $a$  અને  $b$  માટેનો સમાંતર મધ્યક  $A = \frac{a+b}{2}$  છે.

**ઉદાહરણ 25 :** 8 અને 23 વચ્ચે ચાર સમાંતર મધ્યકો શોધો.

**ઉકેલ :** અહીં,  $a = 8, b = 23$  અને  $n = 4$

$$\text{તેથી, } d = \frac{b-a}{n+1} = \frac{23-8}{4+1} = \frac{15}{5} = 3$$

$\therefore 8$  અને 23 વચ્ચેના ચાર સમાંતર મધ્યકો,

$$8+3, 8+2(3), 8+3(3), 8+4(3). \text{ મધ્યકો } 11, 14, 17 \text{ અને } 20 \text{ છે.}$$

**ઉદાહરણ 26 :** 1 અને 31 વચ્ચે  $n$  સમાંતર મધ્યકો એવી રીતે મૂકવામાં આવે છે કે જેથી,  $(n - 1)$ માં અને 7 માં મધ્યકનો ગુણોત્તર  $9 : 5$  થાય, તો  $n$  શોધો.

**ઉકેલ :** અહીં,  $a = 1$ ,  $b = 31$ .

$$\begin{aligned} \text{સામાન્ય તકાપત દ} &= \frac{b-a}{n-1} = \frac{31-1}{n-1} = \frac{30}{n-1} \\ \frac{(n-1)\text{માં મધ્યક}}{7\text{માં મધ્યક}} &= \frac{9}{5} \\ \therefore \frac{1-(n-1)\left(\frac{30}{n-1}\right)}{1+7\left(\frac{30}{n-1}\right)} &= \frac{9}{5} \\ \therefore \frac{n-1+30n-30}{n-1-210} &= \frac{9}{5} \\ \therefore 5(31n-29) &= 9(n+211) \\ \therefore 155n-145 &= 9n+1899 \\ \therefore 146n &= 2044 \\ \therefore n &= 14 \end{aligned}$$

**સમગુણોત્તર મધ્યક :** આપેલી બે બિન્ન ધન સંખ્યાઓ અને બ માટે ધન સંખ્યા  $G$  એવી મળે કે જેથી,  $a, G, b$  સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠીનાં કંચિક પદો હોય, તો  $G$  ને અને બ નો સમગુણોત્તર મધ્યક (Geometric Mean) અથવા ગુણોત્તર મધ્યક કહે છે.  $a$  અને  $b$  ના સમગુણોત્તર મધ્યકને  $G$  વડે દર્શાવાય છે.

$a, G, b$  સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠીમાં છે.

$$\begin{aligned} \therefore \frac{G}{a} &= \frac{b}{G} \\ \therefore G^2 &= ab \\ \therefore G &= \sqrt{ab} \end{aligned}$$

જેમકે, 2 અને 18 નો ગુણોત્તર મધ્યક  $G = \sqrt{2 \times 18} = 6$  છે.

**ગુણોત્તર મધ્યકો :** આપેલ બિન્ન ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ  $a$  અને  $b$  માટે ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ  $G_1, G_2, \dots, G_n$  મળે કે જેથી,  $a, G_1, G_2, G_3, \dots, G_n, b$  સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠીનાં કંચિક પદો હોય, તો  $G_1, G_2, G_3, \dots, G_n$  ને  $a$  અને  $b$  વચ્ચેના ગુણોત્તર મધ્યકો કહે છે.

હવે,  $a$  અને  $b$  વચ્ચેના  $n$  ગુણોત્તર મધ્યકો માટેનું સૂત્ર મેળવીશું.

ધરો કે,  $G_1, G_2, G_3, \dots, G_n$  એ  $a$  અને  $b$  વચ્ચેના  $n$  ગુણોત્તર મધ્યકો છે. તેથી  $a, G_1, G_2, G_3, \dots, G_n, b$  સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠીનાં કંચિક પદો છે, જેનું પ્રયત્ન પદ  $a$  અને  $(n + 2)$ મું પદ  $b$  છે.

$\therefore t_{n+2} = b = ar^{n+1}$ , જ્યાં  $r$  એ સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠીનો સામાન્ય ગુણોત્તર છે.

$$\therefore r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

આમ,  $G_1 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}, G_2 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}}, G_3 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{n+1}}, \dots$

$\therefore a$  અને  $b$  વચ્ચેના  $n$  ગુણોત્તર મધ્યકો,  $G_k = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{n+1}}$ , જ્યાં,  $k = 1, 2, 3, \dots, n$

અહીં,  $G_k$  એ  $a$  અને  $b$  વચ્ચેના  $n$  ગુણોત્તર મધ્યકો પૈકીનો ક્રમો ગુણોત્તર મધ્યક છે.

$$n = 1 \text{ માટે, } G_1 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{1+1}} = \sqrt{ab}, \text{ જે } a \text{ અને } b \text{ નો ગુણોત્તર મધ્યક છે.}$$

આમ, બે મિનન ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ  $a$  અને  $b$  નો ગુણોત્તર મધ્યક  $G = \sqrt{ab}$  થાય.

**ઉદાહરણ 27 :** 2 અને  $\frac{2}{81}$  વચ્ચેના ત્રણ ગુણોત્તર મધ્યક શોધો.

**ઉકેલ :** અહીં,  $a = 2$ ,  $b = \frac{2}{81}$ ,  $n = 3$ .

$$\therefore r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}} = \left(\frac{2}{81} \times \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3+1}} = \left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{હવે, } G_1 = ar = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, G_2 = ar^2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}, G_3 = ar^3 = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{2}{27}.$$

$$\therefore 2 \text{ અને } \frac{2}{81} \text{ વચ્ચેના ત્રણ ગુણોત્તર મધ્યકો } \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27} \text{ છે.}$$

**ઉદાહરણ 28 :** જો બે ધન સંખ્યાઓનો સમાંતર મધ્યક અને ગુણોત્તર મધ્યક અનુક્રમે 7 અને  $2\sqrt{6}$  હોય, તો તે બે સંખ્યાઓ શોધો.

**ઉકેલ :** ધારો કે બે ધન સંખ્યાઓ  $a$  તથા  $b$  નો સમાંતર મધ્યક 7 અને સમગુણોત્તર મધ્યક  $2\sqrt{6}$  છે.

$$A = \frac{a+b}{2} = 7 \text{ અને } G = \sqrt{ab} = 2\sqrt{6}$$

$$\therefore a + b = 14 \text{ અને } ab = 24$$

$$\therefore b = \frac{24}{a}$$

$$\therefore a + \frac{24}{a} = 14$$

$$\therefore a^2 - 14a + 24 = 0$$

$$\therefore (a - 12)(a - 2) = 0$$

$$\therefore a = 12 \text{ અથવા } a = 2$$

$$\text{હવે } a = 12, \text{ તો } b = 2 \text{ અને } a = 2 \text{ તો } b = 12$$

$$\therefore \text{માંગેલ સંખ્યાઓ } 2 \text{ અને } 12 \text{ છે.}$$

**ઉદાહરણ 29 :** જો  $a$  અને  $b$  નો ગુણોત્તર મધ્યક  $G$  તથા  $A_1$  અને  $A_2$  એ  $a$  અને  $b$  વચ્ચેના બે સમાંતર મધ્યકો હોય, તો સાબિત કરો કે  $G^2 = (2A_1 - A_2)(2A_2 - A_1)$ .

**ઉકેલ :**  $A_1, A_2$  એ અને  $b$  વચ્ચેના બે સમાંતર મધ્યકો છે.

$$\therefore a, A_1, A_2, b \text{ સમાંતર શ્રેષ્ઠીનાં કંબિક પદો છે.}$$

$$\therefore A_1 = \frac{a+A_2}{2} \text{ અને } A_2 = \frac{A_1+b}{2}$$

$$\therefore 2A_1 - A_2 = a \text{ અને } 2A_2 - A_1 = b$$

$$\text{હવે, } G^2 = ab = (2A_1 - A_2)(2A_2 - A_1)$$

**પ્રમેય 7 :** જો બે મિનન ધન સંખ્યાઓ  $a$  અને  $b$  ના સમાંતર મધ્યક અને સમગુણોત્તર મધ્યક અનુક્રમે  $A$  અને  $G$  હોય, તો સાબિત કરો કે,  $A > G$ .

**સાબિતી :**  $a$  અને  $b$  એ બિના ધન સંખ્યાઓ છે.

$$\text{તેથી, } A = \frac{a+b}{2} \text{ અને } G = \sqrt{ab}$$

$$\begin{aligned}\therefore A - G &= \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \\ &= \frac{1}{2}(a+b-2\sqrt{ab}) \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 > 0 \quad (a \neq b; a, b > 0)\end{aligned}$$

$$\therefore A > G$$

**ઉદાહરણ 30 :** બે ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓના સમાંતર મધ્યક અને ગુણોત્તર મધ્યકનો તફાવત 12 છે તથા તે બે સંખ્યાઓનો ગુણોત્તર 1 : 9 છે. આ સંખ્યાઓ શોધો.

**ઉકેલ :** ધારો કે માંગેલ સંખ્યાઓ  $a$  અને  $b$  છે,  $a, b \in \mathbb{R}^+$ .

$$\therefore A = \frac{a+b}{2} \text{ અને } G = \sqrt{ab}$$

$$\text{હવે, } A > G \text{ હોવાથી } A - G = 12 \text{ અને } \frac{a}{b} = \frac{1}{9}$$

$$\therefore \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = 12 \text{ અને } b = 9a$$

$$\therefore \frac{a+9a}{2} - \sqrt{a \cdot 9a} = 12$$

$$\therefore 5a - 3a = 12$$

$$\therefore a = 6 \text{ અને } b = 54$$

$$\therefore \text{માંગેલ બે સંખ્યાઓ } 6 \text{ અને } 54 \text{ છે.}$$

**ઉદાહરણ 31 :** ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ  $a, b, c$  માટે સાબિત કરો કે  $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$ .

**ઉકેલ :** આપણે જાણીએ છીએ કે,  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

તે જ પ્રમાણે  $\frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}$  અને  $\frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ca}$ .

ઉપરના પરિણામોની અનુક્રમ બાજુઓનો ગુણકાર કરતાં,  $\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b+c}{2}\right)\left(\frac{c+a}{2}\right) \geq abc$

$$\therefore (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

#### સ્વાધ્યાય 7.4

1. 3 અને 4 વચ્ચે પાંચ સમાંતર મધ્યકો મૂકો.
2. -3 અને 29 વચ્ચે ત્રણ સમાંતર મધ્યકો મૂકો.
3.  $\frac{1}{8}$  અને 8 વચ્ચેના પાંચ ગુણોત્તર મધ્યકો શોધો.
4. 2 અને  $\frac{1}{2}$  વચ્ચે ત્રણ ગુણોત્તર મધ્યકો મૂકો.
5. જે બે ધન સંખ્યાઓના સમાંતર અને ગુણોત્તર મધ્યકો અનુક્રમે 25 અને 15 હોય, તે સંખ્યાઓ શોધો.
6. દ્વિધાત સમીકરણના બે બીજના સમાંતર અને ગુણોત્તર મધ્યકો અનુક્રમે 10 અને 8 હોય, તો તે દ્વિધાત સમીકરણ મેળવો.

7. जो  $\sec(x + y)$ ,  $\sec x$ ,  $\sec(x - y)$  ए समांतर श्रेष्ठीमां होय, तो साबित करो कि  $\cos x = \pm\sqrt{2} \cos \frac{y}{2}$ , ज्यां  $\cos x \neq 1$ ;  $\cos y \neq 1$ .
8. जो  $\frac{1}{q}$  ए  $\frac{1}{p}$  अने  $\frac{1}{r}$  नो समांतर भाष्यक होय, तो साबित करो कि  $\frac{r+p}{q}$  ए  $\frac{p+q}{r}$  अने  $\frac{q+r}{p}$  नो समांतर भाष्यक हो, ज्यां  $p, q, r \neq 0$ .

\*

### 7.5 केटलीक विशिष्ट श्रेष्ठीओना सरवाणा

**प्राकृतिक संख्याओना घातनी श्रेष्ठी :** आपणे समांतर श्रेष्ठी अने समगुज्जोतर श्रेष्ठीना प्रथम ना पदोना सरवाणा माटेनां सूत्र मेणव्यां, परंतु दरेक श्रेष्ठी माटे आवां सूत्र मेणववा शक्य नव्ही. केटलीक अगत्यनी श्रेष्ठीओ ऐवी छे के जेओ समांतर श्रेष्ठी नव्ही तेमज समगुज्जोतर श्रेष्ठी पडू नव्ही अने असां आपणे तेमनां ना पदोना सरवाणानी गङ्गातरी उरी शक्यांचे छीओ. आपणे आवो केटलीक विशिष्ट श्रेष्ठीओने ध्यानमां लाईअ. आपणे प्रथम ना प्राकृतिक संख्या, तेमनां वर्ग, तेमना घनना सरवाणानां सूत्रो शोधीअ.

आपणे 'Σ' ( $\Sigma$  ने सीगमा वंचाय) संकेतनो उपयोग करीशु. तेनो आवी श्रेष्ठीओ माटे विशिष्ट उपयोग छे. ते केपीटल श्रीक अक्षर सीगमानुं ओक विशिष्ट स्वरूप छे. Σ नो अर्थ सरवाणे अस थाय छे.

$$\sum_{n=2}^{n=6} t_n \text{ ने आपणे 'सीगमा } t_n \text{ ज्यां } n \text{ नुं मूल्य } 2 \text{ थी } 6 \text{ तेम वांचीशु. } \text{ ते } n = 2, 3, 4, 5 \text{ अने } 6 \text{ माटे } t_n \text{ नो सरवाणे सूचवे छे. ऐटले के, } \sum_{n=2}^{n=6} t_n = t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6. \text{ दाखला तरीके,}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{n=6} (2n + 3) &= \{2(2) + 3\} + \{2(3) + 3\} + \{2(4) + 3\} + \{2(5) + 3\} + \{2(6) + 3\} \\ &= 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 55 \end{aligned}$$

ऐटले के, आपणे  $n = 2, 3, 4, 5$  अने  $6$  ने  $(2n + 3)$  मां मूळीने आपणे परिणामे फे संख्याओ भाले तेनो सरवाणे करीशु.

$$\sum_{n=2}^{n=6} t_n \text{ ने बदले } \sum_{n=2}^{6} t_n \text{ लाखवू अनुकूल रहेशे.}$$

Σ संकेतना नीये प्रभासे सहेलाईथी साबित थई शके तेवा गुणाधर्मो छे :

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n m a_i = m \sum_{i=1}^n a_i, \text{ ज्यां } m \text{ ए } i \text{ पर आधारित न होय तेवी अचण संख्या छे.}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \sum_{i=1}^n 1 &= \sum_{i=1}^n (i)^0 = 1^0 + 2^0 + 3^0 + \dots + n^0 \\ &= 1 + 1 + 1 + \dots + n \text{ वर्षत } = n \end{aligned}$$

$$(4) \quad \sum_{i=1}^n m = m \sum_{i=1}^n 1 = mn, \text{ ज्यां } m \text{ अचण}$$

**નોંધ :** (1)  $\sum_{i=1}^n (a_i \cdot b_i) \neq \sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n b_i$

(2)  $\sum_{i=1}^n \left( \frac{a_i}{b_i} \right) \neq \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n b_i}, b_i \neq 0, \forall i \in N$

હવે આપણે કેટલીક વિશેષ શ્રેષ્ઠીઓના પ્રથમ ન પદોનો સરવાળો શોધીએ,

(1)  $\sum_{r=1}^n r, (2) \sum_{r=1}^n r^2, (3) \sum_{r=1}^n r^3.$

હવે,  $\sum_{r=1}^n r = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  એ આપણે સમાંતર શ્રેષ્ઠી માટે પ્રથમ ન પદોના સરવાળાના સૂત્રની મદદથી સાબિત કરી શકીએ. (પ્રયત્ન કરો !)

**નોંધ :** એવું માનવામાં આવે છે કે ભાગન ગણિતશા ગોસે લગભગ 5 થી 6 વર્ષની ઉંમરે  $1 + 2 + 3 + \dots + 100$ નો સરવાળો મેળવ્યો હતો. જ્યારે તેના રિસ્લેક્ટ તેને 1 થી 100 નો સરવાળો કરવાનું કહ્યું, તો તેણે આ પ્રશ્ન ગણતરીની કષ્ટોમાં જ ઉકેલ મેળવ્યો હતો. તેને  $1 + 100 = 101, 2 + 99 = 101, 3 + 98 = 101, \dots, 50 + 51 = 101$ , જેવી જોડીઓ બનાવી આ જોડીઓનો સરવાળો કર્યો, દરેક જોડીમાં સરવાળો 101 બને છે અને તેવી 50 જોડીઓ છે. તેથી 1 થી 100 સુધીનો સરવાળો  $50 \times 101 = 5050$ .

આ પરથી પણ આપકુને  $\sum_{r=1}^n r = \frac{n(n+1)}{2}$  સૂત્ર મળે.

**પ્રમેય 8 :**  $\sum_{r=1}^n r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n \in N$

**સાબિતી :** અહીં,  $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ .

આપણે એક નિત્યસમ લઈએ :  $x^3 - (x-1)^3 = 3x^2 - 3x + 1$

તેમાં,  $x = 1, 2, 3, \dots, n$ , હેતાં,

$$1^3 - 0^3 = 3(1)^2 - 3(1) + 1$$

$$2^3 - 1^3 = 3(2)^2 - 3(2) + 1$$

$$3^3 - 2^3 = 3(3)^2 - 3(3) + 1$$

⋮

⋮

$$n^3 - (n-1)^3 = 3(n)^2 - 3(n) + 1$$

ઉપરના પરિણામોનો સરવાળો કરતાં,

$$n^3 - 0^3 = 3[1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2] - 3[1 + 2 + 3 + \dots + n] + [1 + 1 + 1 + \dots + 1, n વખત]$$

$$\therefore n^3 = 3 \cdot S_n - 3 \sum_{r=1}^n r + n$$

$$\therefore 3S_n = n^3 + \frac{3n(n+1)}{2} - n$$

$$\therefore S_n = \frac{1}{6} (2n^3 + 3n^2 + 3n - 2n)$$

$$= \frac{1}{6} (2n^3 + 3n^2 + n)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot n (2n^2 + 3n + 1)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot n (n+1)(2n+1)$$

$$\therefore \sum_{r=1}^n r^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

**પ્રમેય 9 :**  $\sum_{r=1}^n r^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ ,  $n \in \mathbb{N}$

સાબિતી : અહીં,  $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$ .

આપણે એક નિત્યસમ લઈએ :  $x^4 - (x-1)^4 = 4x^3 - 6x^2 + 4x - 1$

તેમાં,  $x = 1, 2, 3, \dots, n$ , હોતાં,

$$1^4 - 0^4 = 4(1)^3 - 6(1)^2 + 4(1) - 1$$

$$2^4 - 1^4 = 4(2)^3 - 6(2)^2 + 4(2) - 1$$

$$3^4 - 2^4 = 4(3)^3 - 6(3)^2 + 4(3) - 1$$

⋮

⋮

$$n^4 - (n-1)^4 = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1$$

ઉપરના પરિણામોનો સરવાળો કરતાં,

$$n^4 - 0^4 = 4[1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3] - 6[1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2] \\ + 4[1 + 2 + 3 + \dots + n] - [1 + 1 + 1 + \dots + 1, n જાઓ]$$

$$\therefore n^4 = 4S_n - 6 \sum_{r=1}^n r^2 + 4 \sum_{r=1}^n r - n$$

$$\therefore 4S_n = n^4 + 6 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4 \frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$\therefore S_n = \frac{1}{4} [n^4 + n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) + n]$$

$$= \frac{1}{4} \cdot n [n^3 + (n+1)(2n+1) - 2(n+1) + 1]$$

$$= \frac{1}{4} \cdot n (n^3 + 2n^2 + 3n + 1 - 2n - 2 + 1)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot n (n^3 + 2n^2 + n)$$

$$= \frac{1}{4} n \cdot n (n^2 + 2n + 1)$$

$$= \frac{1}{4} n^2(n+1)^2$$

$$\therefore S_n = \frac{1}{4} \cdot n^2(n+1)^2 \text{ અથવા } S_n = \left[ \frac{1}{2} n(n+1) \right]^2$$

$$\therefore \sum_{r=1}^n r^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

આપણે  $\sum_{r=1}^n r$ ,  $\sum_{r=1}^n r^2$ ,  $\sum_{r=1}^n r^3$  ને અનુક્રમે  $\Sigma n$ ,  $\Sigma r^2$ ,  $\Sigma r^3$  એ દર્શાવીશું.

**ઉદાહરણ 32 :** નીચેના સરવાળા કરો :

$$(1) \sum_{r=7}^{16} 2r^3, \quad (2) \sum_{r=10}^{20} (3r - r^2)$$

$$\text{ઉકેલ : } (1) \sum_{r=7}^{16} 2r^3 = 2 \sum_{r=7}^{16} r^3$$

$$\begin{aligned} &= 2 \left[ \sum_{r=1}^{16} r^3 - \sum_{r=1}^6 r^3 \right] \\ &= 2 \left[ \frac{(16)^2 \cdot (17)^2}{4} - \frac{(6)^2 \cdot (7)^2}{4} \right] \\ &= 2 [18496 - 441] = 2 [18055] = 36110 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \sum_{r=10}^{20} (3r - r^2) &= 3 \left[ \sum_{r=1}^{20} r - \sum_{r=1}^9 r \right] - \left[ \sum_{r=1}^{20} r^2 - \sum_{r=1}^9 r^2 \right] \\ &= 3 \left[ \frac{20(20+1)}{2} - \frac{9(9+1)}{2} \right] - \left[ \frac{20(20-1)(20(2)+1)}{6} - \frac{9(9+1)(2(9)+1)}{6} \right] \\ &= 3 \left[ \frac{(20)(21)}{2} - \frac{9(10)}{2} \right] - \left[ \frac{20(21)(41)}{6} - \frac{9(10)(19)}{6} \right] \\ &= 3 (210 - 45) - (2870 - 285) = 495 - 2585 = -2090 \end{aligned}$$

**ઉદાહરણ 33 :**  $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + n$  પદોનો સરવાળો કરો.

**ઉકેલ :** આપણે સમાંતર શ્રેઢી 1, 3, 5, ..., ના ન મા પદ (વ્યાપક પદ)નો વિચાર કરીએ. તેનું પ્રથમ પદ  $a = 1$  અને  $d = 2$  છે.

$$\therefore t_n = a + (n-1)d = 1 + (n-1)2 = 2n - 1$$

∴ આપેલ શ્રેઢીનું  $n$  મું પદ  $(2n - 1)^3$  થશે.

**નોંધ :** જ્યારે આપણે વ્યાપક પદ મેળવતું હોય, તો તે મેળવવા માટેની પદ્ધતિ બતાવવાની જરૂર રહેતી નથી. દાખલા તરીકે આ પ્રથમાં 1, 3, 5, ... એ અયુગમ પ્રાફુલ્લિક સંખ્યાઓની શ્રેઢી છે. જેથી સ્વાભાવિક રીતે, તમી અયુગમ પ્રાફુલ્લિક સંખ્યા  $2n - 1$  છે.

$$\text{હવે, } S_n = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n - 1)^3$$

$$= \sum_{r=1}^n (2r - 1)^3$$

$$= \sum_{r=1}^n (8r^3 - 12r^2 + 6r - 1)$$

$$\begin{aligned}
&= 8 \sum_{r=1}^n r^3 - 12 \sum_{r=1}^n r^2 + 6 \sum_{r=1}^n r - \sum_{r=1}^n 1 \\
&= 8 \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} - 12 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 6 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n \\
&= n(n+1) [2n(n+1) - 2(2n+1) + 3] - n \\
&= n(n+1) (2n^2 + 2n - 4n - 2 + 3) - n \\
&= n(n+1) (2n^2 - 2n + 1) - n \\
&= n[(n+1)(2n^2 - 2n + 1) - 1] \\
&= n(2n^3 + 2n^2 - 2n^2 - 2n + n + 1 - 1) \\
&= n(2n^3 - n) \\
&= n^2(2n^2 - 1)
\end{aligned}$$

**ઉદાહરણ 34 :** શ્રેઢી  $1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + \dots + n$  પદોનો સુધીનો સરવાળો કરો અને તે પરથી પ્રથમ 50 પદોનો સરવાળો મેળવો.

**ઉકેલ :** અહીં, શરૂઆતમાં આપણે 1, 2, 3, ... અને 4, 5, 6, ... નું  $n$  મું પદ મેળવીએ, જે અનુક્રમે  $n$  તથા  $(n+3)$  થશે.

$$\therefore t_n = n(n+3)$$

$$\begin{aligned}
\therefore S_n &= \sum_{r=1}^n r(r+3) \\
&= \sum_{r=1}^n (r^2 + 3r) \\
&= \sum_{r=1}^n r^2 + 3 \sum_{r=1}^n r \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 9n(n+1)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1+9)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(n+5)}{3}
\end{aligned}$$

$n = 50$ , મુક્તલા,

$$S_{50} = \frac{50(51)(55)}{3} = 46750$$

આમ, પ્રથમ  $n$  પદોનો સરવાળો  $S_n = \frac{n(n+1)(n+5)}{3}$  અને પ્રથમ 50 પદોનો સરવાળો 46750 થાય.

**ઉદાહરણ 35 :**  $(1+x) + (1+x+x^2) + (1+x+x^2+x^3) + \dots$  પ્રથમ  $n$  પદોનો સરવાળો કરો. ( $x \neq 1$ )

$$\begin{aligned}\text{ઉકેલ :} \quad & \text{અહીં, } S_n = \frac{1-x^2}{1-x} + \frac{1-x^3}{1-x} + \frac{1-x^4}{1-x} + \dots n \text{ પદો} \\ & = \frac{1}{1-x} [(1+1+1+\dots n \text{ પદો}) - (x^2+x^3+x^4+\dots n \text{ પદો})] \\ & = \frac{1}{1-x} \left[ n - \frac{x^2(1-x^n)}{1-x} \right] \\ & \quad (x^2+x^3+x^4+\dots n \text{ પદો એ સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠી છે, જ્યાં; a = x^2, r = x)\end{aligned}$$

**ઉદાહરણ 36 :** જો શ્રેઢી  $1^2 + 2 \cdot 2^2 + 3^2 + 2 \cdot 4^2 + 5^2 + \dots + 2(n-1)^2 + n^2$ . ના પ્રથમ  $n$  પદોનો સરવાળો  $\frac{n(n+1)^2}{2}$  હોય, જ્યાં  $n$  યુગ્મ સંખ્યા હોય, તો જ્યારે  $n$  અયુગ્મ હોય, ત્યારે આ શ્રેઢીનો સરવાળો કેટલો થશે?

**ઉકેલ :** જ્યારે  $n$  અયુગ્મ હોય, ત્યારે છેલ્યું પદ  $n^2$  થશે.

$$\begin{aligned}& \therefore 1^2 + 2 \cdot 2^2 + 3^2 + 2 \cdot 4^2 + 5^2 + \dots + 2(n-1)^2 + n^2 \\ & = \frac{(n-1)[(n-1)+1]^2}{2} + n^2 \quad ((n-1) \text{ યુગ્મ છે.}) \\ & = \frac{(n-1) \cdot n^2 + 2n^2}{2} \\ & = \frac{n^2(n-1+2)}{2} \\ & = \frac{n^2(n+1)}{2}\end{aligned}$$

**ઉદાહરણ 37 :** શ્રેણી  $1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \dots 16$  પદ સુધીનો સરવાળો કરો.

**ઉકેલ :** અહીં,  $t_n = \frac{1}{n}(1+2+3+\dots+n)$

$$\begin{aligned}& = \frac{1}{n} \sum n = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ & = \frac{n+1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore S_n &= \sum_{r=1}^{16} \left( \frac{r+1}{2} \right) = \frac{1}{2} \left( \sum_{r=1}^{16} r + \sum_{r=1}^{16} 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{16(17)}{2} + 16 \right] \\ &= \frac{1}{2}(136 + 16) \\ &= \frac{1}{2}(152) = 76\end{aligned}$$

1. નીચે આપેલા સરવાળા મેળવો :

$$(1) \sum_{r=1}^{10} (2r^2 + 3) \quad (2) \sum_{r=2}^{10} (4r^2 - 28r + 49) \quad (3) \sum_{r=6}^{15} (r^2 - r - 1) \quad (4) \sum_{r=8}^{20} (2 - r^2)$$

2. નીચે આપેલ પ્રથમ  $n$  પદના સરવાળા મેળવો :

$$\begin{array}{ll} (1) 3^2 + 7^2 + 11^2 + \dots & (2) 1^3 + 4^3 + 7^3 + \dots \\ (3) 2 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 8 \cdot 5 + \dots & (4) 3 \cdot 4 \cdot 5 + 4 \cdot 6 \cdot 5 + 5 \cdot 8 \cdot 5 + \dots \\ (5) (5^4 - 1^4) + (8^4 - 4^4) + (11^4 - 7^4) + \dots & (6) 1^2 + \left(\frac{1^2 + 2^2}{2}\right) + \left(\frac{1^2 + 2^2 + 3^2}{3}\right) + \dots \\ (7) (2^2 - 1^2) + (4^2 - 3^2) + (6^2 - 5^2) + \dots & (8) 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \dots \\ (9) (n^2 - 1^2) + 2(n^2 - 2^2) + 3(n^2 - 3^2) + \dots & \end{array}$$

3. નીચેના સરવાળા મેળવો :

$$\begin{array}{l} (1) 2^3 - 3^3 + 4^3 - 5^3 + \dots + 22^3 - 23^3 \\ (2) 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \dots + 29^2 - 30^2 \end{array}$$

\*

પ્રક્રીષ્ટ ઉદાહરણો :

**ઉદાહરણ 38 :** જો  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  અનુકૂળ પ્રથમ  $n$  પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો, તેમના વર્ગોનો સરવાળો તથા તેમના ઘનનો સરવાળો દર્શાવે, તો સાંબિત કરો કે,  $9\alpha_2^2 = \alpha_3(1 + 8\alpha_1)$ .

$$\text{ઉકેલ : } \alpha_1 = \frac{n(n+1)}{2}, \alpha_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \alpha_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{એવે, } \alpha_3 [1 + 8\alpha_1] &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \left[ 1 + 8 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right] \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} [4n^2 + 4n + 1] \\ &= \frac{n^2(n+1)^2(2n+1)^2}{4} \times \frac{9}{9} \\ &= \left( \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)^2 \cdot 9 \\ &= 9\alpha_2^2 \end{aligned}$$

**ઉદાહરણ 39 :** સરવાળો કરો :

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^2 + \dots n \text{ પદો } (x \neq 0, x \neq \pm 1)$$

$$\begin{aligned} \text{ઉકેલ : } &\left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x^4 + 2 + \frac{1}{x^4}\right) + \left(x^6 + 2 + \frac{1}{x^6}\right) + \dots n \text{ પદો} \\ &= (x^2 + x^4 + x^6 + \dots + n \text{ પદો}) + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} + \dots n \text{ પદો}\right) + (2 + 2 + 2 + \dots n \text{ પદો}) \\ &= \frac{x^2(x^{2n} - 1)}{x^2 - 1} + \frac{\frac{1}{x^2}(1 - \frac{1}{x^{2n}})}{1 - \frac{1}{x^2}} + 2n \\ &= \frac{x^2(x^{2n} - 1)}{x^2 - 1} + \frac{x^{2n} - 1}{(x^2 - 1) \cdot x^{2n}} + 2n \end{aligned}$$

स्वाध्याय ७

- (5) સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠી માટે  $r = \frac{1}{3}$  અને  $S_4 = \frac{80}{27}$  હોય, તો  $a = \dots$
- (a)  $\frac{2}{3}$       (b) 3      (c) 2      (d)  $\frac{3}{2}$
- (6) જો  $25, x - 6$  અને  $x - 12$  સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠીના કંચિક પદો હોય, તો  $x = \dots$
- (a) 8      (b) 12      (c) 16      (d) 20
- (7)  $\sum_{r=1}^n \left( \sum_{m=1}^r m \right) = \dots$
- (a)  $\frac{n(n-1)(2n+1)}{6}$       (b)  $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$       (c)  $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$       (d)  $\frac{n(n+1)(2n-1)}{12}$
- (8) જો સમાંતર શ્રેષ્ઠીના પ્રથમ  $n_1, n_2, n_3$  પદોના સરવાળા અનુક્રમે  $S_1, S_2$  અને  $S_3$  હોય, તો  $\frac{2S_1}{n_1}(n_2 - n_3) + \frac{2S_2}{n_2}(n_3 - n_1) + \frac{2S_3}{n_3}(n_1 - n_2) = \dots$
- (a) 0      (b) 1      (c)  $S_1 S_2 S_3$       (d)  $n_1 n_2 n_3$
- (9) જો સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠીનું પ્રથમ પદ 3 અને સામાન્ય ગુણોત્તર 2 હોય, તો તેના 5મા પદથી 10મા પદ સુધીનો સરવાળો ..... થાય.
- (a) 2976      (b) 3024      (c) 1488      (d) 3114
- (10)  $3 + 4 + 8 + 9 + 13 + 14 + 18 + 19 + \dots 20$  પદ સુધીનો સરવાળો ..... થાય.
- (a) 511      (b) 536      (c) 549      (d) 520
- (11) જો સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠીનું ત્રીજું પદ 3 હોય, તો પ્રથમ પાંચ પદોનો ગુણાકાર ..... થાય.
- (a)  $3^5$       (b)  $5^3$       (c)  $3^3$       (d)  $5^5$
- (12)  $a$  અને  $b$  વચ્ચે બે સમાંતર મધ્યકો  $A_1$  અને  $A_2$  તથા  $G_1$  અને  $G_2$  બે ગુણોત્તર મધ્યકો મૂકવામાં આવે, તો  $\frac{G_1 G_2}{A_1 \cdot A_2} = \dots$
- (a)  $\frac{a+b}{2ab}$       (b)  $\frac{a+b}{ab}$       (c)  $\frac{2ab}{a+b}$       (d)  $\frac{ab}{a+b}$
- (13) જો કાટકોણ નિકોણની બાજુઓની લંબાઈ સમાંતર શ્રેષ્ઠીમાં હોય તો તેના લઘુકોણના cosines ..... થાય.
- (a)  $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}$       (b)  $\frac{5}{13}, \frac{12}{13}$       (c)  $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}$       (d)  $\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}$
- (14) જી  $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n - 1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , હોય, તો .....
- (a)  $S_{100} < 100$       (b)  $S_{100} > 100$       (c)  $S_{200} = 100$       (d)  $S_{200} > 200$
- (15)  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  સમાંતર શ્રેષ્ઠીમાં છે, જો તેનો સામાન્ય વક્ષિપત્ત  $d$  હોય તો  $\sin d [\cosec a_1 \cdot \cosec a_2 + \cosec a_2 \cdot \cosec a_3 + \dots + \cosec a_{n-1} \cdot \cosec a_n] = \dots$
- (a)  $\cosec a_1 - \cosec a_n$       (b)  $\sec a_1 - \sec a_n$       (c)  $\cot a_1 - \cot a_n$       (d)  $\tan a_1 - \tan a_n$
- (16) સમાંતર શ્રેષ્ઠી માટે જો  $4t_4 = 7t_7$ , તો  $t_{11} = \dots$
- (a) -1      (b) 0      (c) 11      (d) 44

1

સ્વરૂપશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

- જો  $S_n$  નું સૂત્ર આપ્યું હોય, તો  $a_n$  નું સૂત્ર નીચે પ્રમાણે મેળવી શકાય :  

$$a_1 = S_1; a_n = S_n - S_{n-1}, n > 1$$
  - સમાંતર શ્રેષ્ઠીનું  $n$  મું પદ  $t_n = a + (n-1)d$ , જ્યાં  $a$  પ્રથમ પદ,  $d$  સામાન્ય તફાવત છે.
  - સમાંતર શ્રેષ્ઠીના પ્રથમ  $n$  પદોનો સરવાળો  $S_n = \frac{n}{2} \{2a + (n-1)d\}$ .
  - સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠીનું  $n$  મું પદ  $t_n = ar^{n-1}$ ,  $a \neq 0, r \neq 0$ , જ્યાં  $a$  પ્રથમ પદ અને  $r$  સામાન્ય ગુણોત્તર છે.

સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠીના પ્રથમ  $n$  પદોનો સરવાળો  $S_n = \begin{cases} \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} & r \neq 1 \\ na & r = 1 \end{cases}$

  - બે સંખ્યાઓ  $a$  અને  $b$  નો સમાંતર મધ્યક  $A = \frac{a+b}{2}$  થાય. જો  $a$  અને  $b$  વચ્ચે  $n$  સમાંતર મધ્યકો મૂકવામાં આવે તો  $d = \frac{b-a}{n+1}$  થાય અને  $k$  મો મધ્યક  $A_k = a + k\left(\frac{b-a}{n+1}\right)$ , જ્યાં  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ .
  - બે ધન સંખ્યાઓ  $a$  અને  $b$  નો સમગુણોત્તર મધ્યક  $G = \sqrt{ab}$  થાય. જો  $a$  અને  $b$  વચ્ચે  $n$  સમગુણોત્તર મધ્યક મૂકવામાં આવે તો  $r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$  થાય;  $k$  મો મધ્યક  $G_k = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{n+1}}$ , જ્યાં  $k = 1, 2, 3, \dots, n$
  - $\sum_{r=1}^n r = \frac{n(n+1)}{2}$ ,  $\sum_{r=1}^n r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ,  $\sum_{r=1}^n r^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ .



**Bhaskara** (1114–1185), also known as Bhaskara II and Bhaskaracharya ("Bhaskara the teacher"), was an Indian mathematician and astronomer. He was born near Vijayvada. Bhaskara is said to have been the head of an astronomical observatory at Ujjain, the leading mathematical center of ancient India.

Bhaskara and his works represent a significant contribution to mathematical and astronomical knowledge in the 12th century. He has been called the greatest mathematician of medieval India. His main work was the *Siddhanta Shiromani*, Sanskrit for "Crown of treatises," is divided into four parts called *Lilavati*, *Bijaganita*, *Grahaganita* and *Goladhyaya*. These four sections deal with arithmetic, algebra, mathematics of the planets, and spheres respectively.

## શાંકવો

*Proof is an idol before whom the pure mathematician tortures himself.*

— Arthur Stenley Eddington

*In most sciences one generation tears down what another has built and what one has established another undoes. In mathematics alone each generation adds a new story to the old structure.*

— Hermann Hankel

### 8.1 પ્રાસ્તાવિક

આ પ્રકરણમાં આપણે કેટલાક વિશેષ વક્તો જેવા કે વર્તુળ, ઉપવલય, પરવલય, અતિવલયનો અભ્યાસ કરીશું. આ વક્તો દિશાંકુના સમતલ જાપેના છેદ તરીકે મેળવી શકાય છે. આ વક્તો શાંકવો (Conics) તરીકે ઓળખાય છે. પરવલય, અતિવલય વગેરે નામ એપોલોનીયસે (Apollonius) આધ્યાત્મિક હતા. તે ખરેખર આવા વક્તોના અભ્યાસનો પ્રદેશીય ગજાય છે, આ વક્તોનો બૌતિકશાખામાં ખાલી, પ્રકાશ વગેરે ઘણા સૈન્યોમાં બહોળો ઉપયોગ થાય છે. સોણમી સદીમાં ગાલેલીયો (Galileo) એ દર્શાવ્યું કે મુજબ રોતે પ્રાણિના પદ્ધતિનો પણ પરવલય હોય છે. આ હસ્તકિરણનો ઉપયોગ હવે તોપખાનાની રચનામાં થાય છે. સતતરમી સદીમાં બ્યાપક અવલોકનો બાદ કેપ્લર (Keplar) અહોની ગતિના નિયમ આપ્યા. તે મુજબ પૃથ્વી અને અન્ય ગ્રહોની સૂર્ય ફરતે કક્ષા (Orbit) ઉપવલય આકારની હોય છે. ત્યારબાદ ન્યૂટન (Newton) કેપ્લર (Keplar)ના નિયમોની વ્યાપક પરિસ્તિતિમાં સૈદ્ધાંતિક સાભિતી આપી. આપુનિક સમયમાં ટેલીવિજન તેમજ સંદેશાચ્ચવહારમાં વપરાતા રિશ એનેનાની રચના શાંકવોના ગુણપર્માણ પરથી કરવામાં આવે છે. આમ શાંકવોનો અભ્યાસ અતિ મહત્વનો છે; અને તેનો ઉપયોગ મંત્રશાખા, અવકાશ વિજ્ઞાન, સંદેશ વિવહાર, પ્રકાશશાખા વગેરેમાં બહોળા પ્રમાણમાં થાય છે. આ પ્રકરણમાં આપણે આ વક્તોનાં સમીકરણ અને તેમના ગુણપર્માણનો અભ્યાસ કરીશું.

### 8.2 વર્તુળ

આપણે જાણીએ છીએ કે ચોક્કસ બિંદુથી સમાન અંતરે આવેલા સમતલનાં તમામ બિંદુઓના ગજને વર્તુળ કહેવાય છે. ચોક્કસ બિંદુને તે વર્તુળનું કેન્દ્ર (Centre) અને ચોક્કસ અંતરને વર્તુળની રિઝિયા (Radius) કહેવાય છે.



Apollonius (262 BC - 190 BC)

(h, k) કેન્દ્ર અને r નિયમાવાળા વર્તુળનું કાર્ટોગ્રાફ સમીકરણ :

પણ કે બિંદુ C(h, k) એક વર્તુળનું કેન્દ્ર છે અને r તેની નિયમા છે અને P(x, y) વર્તુળ પરનું કોઈ પણ બિંદુ છે. હવે, વર્તુળની નિયમા r આપેલ હોવાથી,

$$CP = r \Leftrightarrow CP^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

આમ, C(h, k) કેન્દ્ર અને r નિયમાવાળા વર્તુળનું કાર્ટોગ્રાફ સમીકરણ

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

વર્તુળના આ સમીકરણને વર્તુળનું કેન્દ્ર-નિયમ સ્વરૂપનું સમીકરણ  
પણ કરી છે.

### 8.3 વર્તુળના સમીકરણનું પ્રમાણિત સ્વરૂપ

વર્તુળના સમીકરણનું પ્રમાણિત સ્વરૂપ (Standard form) વર્તુળનું કેન્દ્ર ઉગમબિંદુ લઈ મેળવામાં આવે છે. આમ, વર્તુળના પ્રમાણિત સમીકરણમાં કેન્દ્ર ઉગમબિંદુ તેમજ નિયમ ર લેતાં,  $h = 0, k = 0$  મુકવાથી વર્તુળનું સમીકરણ  $x^2 + y^2 = r^2$  મળે છે. વર્તુળના આ સમીકરણને વર્તુળનું પ્રમાણિત સમીકરણ કહે છે.

ધ્યાનમાં, જો  $r = 1$  હોય તો વર્તુળના સમીકરણનું પ્રમાણિત સ્વરૂપ  $x^2 + y^2 = 1$  ચાચ છે. આને એકમ વર્તુળનું સમીકરણ કહે છે.

**ઉદાહરણ 1 :** (1, -1) કેન્દ્ર અને 2 નિયમાવાળા વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો.

**ઉકેલ :** અહીં, વર્તુળનું કેન્દ્ર (1, -1) અને નિયમા 2 હોવાથી વર્તુળનું સમીકરણ

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2^2 = 4$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0 એ માંગેલ વર્તુળનું સમીકરણ છે.$$

**ઉદાહરણ 2 :** બિંદુ (2 sin \alpha, 2 cos \alpha); \alpha \in \mathbb{R} વર્તુળ  $x^2 + y^2 = 4$  ઉપર આવેલું છે તેમ દર્શાવો

**ઉકેલ :** જો કોઈ બિંદુના ધાર્ય વર્તુળના સમીકરણનું સમાધાન કરે તો તે બિંદુ વર્તુળ ઉપર આવેલું હોય છે. આપેલ સમીકરણમાં  $x = 2 \sin \alpha, y = 2 \cos \alpha$  મૂકતાં,

$$\text{ડ.બા. } = (2 \sin \alpha)^2 + (2 \cos \alpha)^2 = 4 \sin^2 \alpha + 4 \cos^2 \alpha = 4 = \text{જ.બા.}$$

$$\therefore (2 \sin \alpha, 2 \cos \alpha) એ \alpha \in \mathbb{R} માટે વર્તુળ  $x^2 + y^2 = 4$  પર છે.$$

**ઉદાહરણ 3 :** જે વર્તુળનું કેન્દ્ર રેખાઓ  $x + y = 1$  અને  $4x + 3y = 0$  નું છેદબિંદુ હોય અને જેની નિયમા 5 હોય તેવા વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો.

**ઉકેલ :** રેખાઓનું છેદબિંદુ, બંને રેખાઓ ઉપર હોય. આમ, તેના ધાર્ય સમીકરણો  $x + y = 1$  અને  $4x + 3y = 0$  નું સમાધાન કરે. આ સમીકરણો ઉકેલતાં, વર્તુળનું કેન્દ્ર (-3, 4) મળે.

વર્તુળની નિયમા 5 હોવાથી માંગેલ વર્તુળનું સમીકરણ,

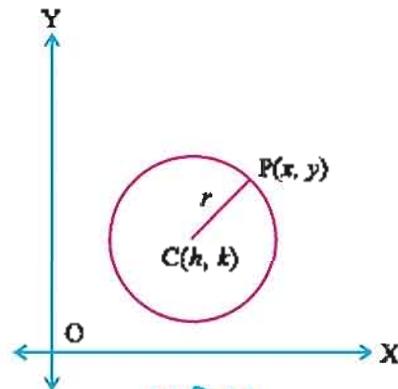
$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 5^2, એટલે કે x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0 એ માંગેલ વર્તુળનું સમીકરણ છે.$$

**નોંધ :** જો કેન્દ્ર બે રેખાઓનું છેદબિંદુ હોય, તો આ રેખાઓ વર્તુળના વાસને સમાવે છે.

**ઉદાહરણ 4 :** જો વર્તુળ  $x^2 + y^2 - 2x + 448y + k = 0$  ઉગમબિંદુમાંથી પસાર થતું હોય તો k શોધો.

**ઉકેલ :** વર્તુળ ઉગમબિંદુ (0, 0) માંથી પસાર થતું હોવાથી (0, 0) વર્તુળના સમીકરણનું સમાધાન કરે. આથી,  $0 + 0 - 0 + 0 + k = 0$ . આમ,  $k = 0$ .

**નોંધ :** જો વર્તુળના સમીકરણમાં અથળ પદ શૂન્ય હોય તો અને તો જ વર્તુળ ઉગમબિંદુમાંથી પસાર ધાર્ય.



આકૃતિ 8.1

**ઉદાહરણ 5 :** સંકર સંખ્યા  $z = x + iy$  અને  $z_1 = 1 - 2i$  માટે  $|z - z_1| = 5$  થાય તેવી સંકર સંખ્યાઓ જીના ગજાનું સમીકરણ મેળવો.

**ઉકેલ :** આપેલું છે કે,  $|z - z_1| = 5$

$$\therefore |z - z_1|^2 = 5^2$$

$$\therefore |(x + iy) - (1 - 2i)|^2 = 25$$

$$\therefore |(x - 1) + i(y + 2)|^2 = 25$$

$$\therefore (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25 \quad (1)$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$$

સમીકરણ (1) ઉપરથી સ્પષ્ટ છે કે આ ગજા  $(1, -2)$  કેન્દ્ર અને

$\sqrt{25}$  વર્તુળનું વર્તુળ છે.

**નોંધ :** વ્યાપક રીતે,  $|z - z_1| = a$ ,  $a \in \mathbb{R}^+$  હોય તેવી તમામ સંકર સંખ્યાઓને ગજા  $z_1$  કેન્દ્ર અને  $a$  વર્તુળવાળું વર્તુળ દર્શાવે છે. આપેલ વર્તુળનો આર્ગાન્ડ (Argand) આવેદ આકૃતિ 8.2 માં દર્શાવ્યો છે. જો આર્ગાન્ડ સમતલમાં C અને P અનુક્રમે  $z_1$  અને z દર્શાવે અને  $CP = |z - z_1| = a$  હોય, તો તંદુર P એટલું કેન્દ્ર અને  $a$  વર્તુળવાળા વર્તુળ પર છે.

**ઉદાહરણ 6 :** X-અક્ષને સ્પર્શતાં  $a$  વર્તુળવાળા વર્તુળનાં સમીકરણ મેળવો.

**ઉકેલ :** વર્તુળની રિઝિયા  $a$  છે. તેનું C ના ધામ  $(h, \pm a)$  અથવા  $(-h, \pm a)$  ધાર્ય. (આકૃતિ 8.3).

આવા વર્તુળોનાં સમીકરણ

$$(x - h)^2 + (y \pm a)^2 = a^2$$

અથવા

$$(x + h)^2 + (y \pm a)^2 = a^2$$

$$x^2 + y^2 - 2hx \pm 2ay + h^2 = 0$$

અથવા

$$x^2 + y^2 + 2hx \pm 2ay + h^2 = 0$$

આમ, આ ચાર સમીકરણો માંગેલ વર્તુળો દર્શાવે છે.

**નોંધ :** જો  $a$  વર્તુળવાળું વર્તુળ Y-અક્ષને સ્પર્શતો તો તેનું કેન્દ્ર  $(\pm a, k)$  અથવા  $(\pm a, -k)$  ધાર્ય. (આકૃતિ 8.4) આવા વર્તુળોનાં સમીકરણ નીચે મુજબ થાય :

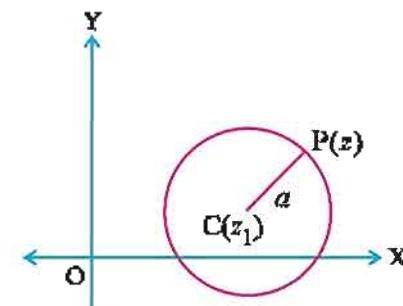
$$x^2 + y^2 \pm 2ax + 2ky + k^2 = 0$$

અથવા

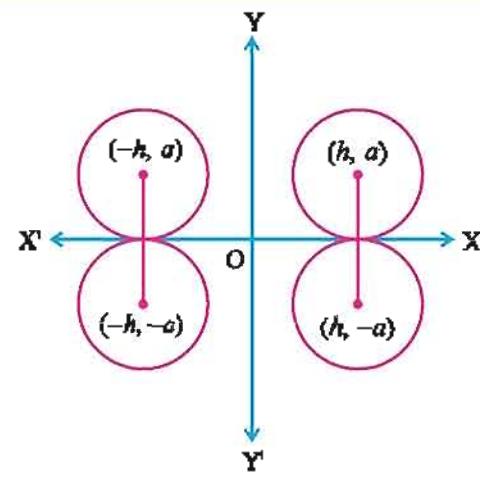
$$x^2 + y^2 \pm 2ax - 2ky + k^2 = 0$$

**ઉદાહરણ 7 :** બંને અક્ષોને સ્પર્શતા અને પ્રથમ ચરણમાં આવેલ તથા  $a$

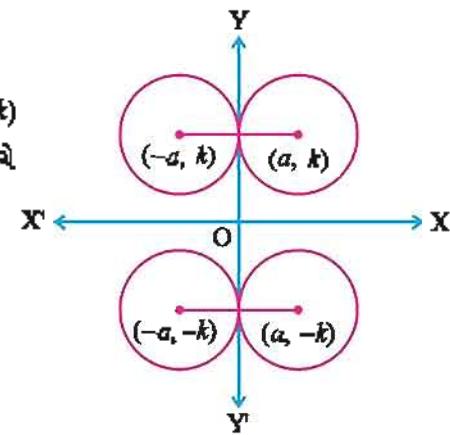
વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો



આકૃતિ 8.2



આકૃતિ 8.3



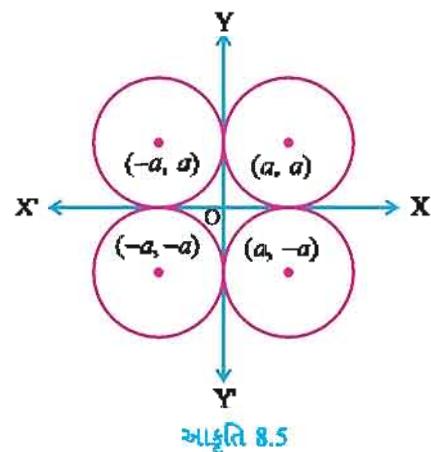
આકૃતિ 8.4

**ઉકેલ :** બંને અક્ષોને સ્પર્શતા પ્રથમ ચરણમાં આવેલ વર્તુળનું કેન્દ્ર  $C(a, a)$  ધાર્ય. (આકૃતિ 8.5) અને રિઝિયા  $a$  છે. તેનું સમીકરણ  $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$  છે.

$$\therefore x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0 \text{ માંગેલ વર્તુળનું સમીકરણ છે.}$$

**નોંધ :** અન્ય ચરણમાં આવેલા બંને અંગોને સ્પર્શતા અને દ્વિજ્યાવાળા વર્તુળના કેન્દ્રના યામ નીચે કોષ્ટકમાં દર્શાવ્યા છે. (સાથે અફ્ટુની 8.5 પણ જુઓ.)

ચરણ	કેન્દ્ર
I	(a, a)
II	(-a, a)
III	(-a, -a)
IV	(a, -a)



### સ્વાધ્યાય 8.1

1. નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ કેન્દ્ર અને દ્વિજ્યાવાળા વર્તુળોનાં સમીકરણ મેળવો :

ક્રમ	કેન્દ્ર	દ્વિજ્યા
1.	(-2, 3)	5
2.	(-1, 1)	$\sqrt{2}$
3.	(-4 cos\alpha, 4 sin\alpha)	5
4.	(-\sqrt{2}, -\sqrt{5})	$\sqrt{5}$
5.	(1, 0)	1

2. જેના વાસને સમાવતી રેખાઓ  $x - y = 5$ ,  $2x + y = 4$  હોય અને જેની દ્વિજ્યા 5 હોય તેવા વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો.
3. (-2, -5) કેન્દ્રવાળા દ્વિજ્યાને સ્પર્શતા વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો.
4. બંને અંગોને સ્પર્શતા 3 દ્વિજ્યાવાળા તૃતીય ચરણમાં આવેલ વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો.
5. ઉગામ ડિંકુમાંથી પસાર થતું  $\sqrt{5}$  દ્વિજ્યાવાળું અને જેનું કેન્દ્ર  $\overrightarrow{OX}$  પર હોય તેવા વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો.

\*

### 8.4 વર્તુળનું વ્યાપક સમીકરણ

ઉપર ચર્ચા કર્યા મુજબ પ્રાપ્તેક વર્તુળને અનન્ય કેન્દ્ર અને દ્વિજ્યા હોય છે. ધોરો કે, એક વર્તુળનું કેન્દ્ર (h, k) અને દ્વિજ્યા  $r$  છે. આથી વર્તુળનું સમીકરણ  $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$  અથવા  $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$  હોય. અહીં  $h$  અને  $k$  કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે અને  $r$  ધન સંખ્યા છે. આ સમીકરણ ઉપરથી નીચેનાં તારણો મેળવી શકાય :

- (1) કોઈ પણ વર્તુળનું સમીકરણ દ્વિબ્લાંડિલાં સમીકરણ હોય છે.
- (2)  $x^2$  અને  $y^2$  ના સહગુણકો યુન્નેતર અને સમાન હોય છે. (આપણે આ સહગુણકો 1 વર્ણિયું.)
- (3) સમીકરણમાં ગ્રાફ નથી એટલે કે ગ્રાફનો સહગુણક શૂન્ય છે.

આમ, વર્તુળના સમીકરણનું વ્યાપક રૂપથી

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \text{ લઈશું.}$$

હવે, જો વર્તુળનું સમીકરણ ઉપર દર્શાવ્યા પ્રમાણે આખ્યું હોય તો તેનાં કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યા નક્કી કરવા જોઈએ. આ માટે પદોનું પુનર્ગઠન કરી સમીકરણને કેન્દ્ર-ત્રિજ્યા સ્વરૂપમાં ગોઠવું પડે. આમ,

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad (i)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2gx + g^2 + y^2 + 2fy + f^2 - g^2 - f^2 + c = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + g)^2 + (y + f)^2 = g^2 + f^2 - c$$

જો  $g^2 + f^2 - c > 0$ , હોય તો ઉપરોક્ત સમીકરણને,

$$(x + g)^2 + (y + f)^2 = \left( \sqrt{g^2 + f^2 - c} \right)^2 \text{ તરીકે લખી શકાય.}$$

ઉપરોક્ત સમીકરણ પરથી કહી શકાય કે બિંદુ  $P(x, y)$  નું બિંદુ  $C(-g, -f)$  થી અંતર  $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$  છે.

જો અચાળાંકો  $g, f$  અને  $c$  માટે  $g^2 + f^2 - c > 0$  હોય તો સમીકરણ (i) વર્તુળ દર્શાવે છે; અને તે સંઝેગોમાં વર્તુળનું કેન્દ્ર  $C(-g, -f)$  છે અને ત્રિજ્યા  $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$  છે. સમીકરણ (i)ને વર્તુળનું વ્યાપક સમીકરણ કહે છે.

**નોંધ :** જો  $g^2 + f^2 - c = 0$ , હોય તો ફક્ત  $(-g, -f)$  સમીકરણ (i)નું સમાપ્તાન કરે છે.

**ઉદાહરણ 8 :** સમીકરણ  $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 20 = 0$  વર્તુળ દર્શાવે છે ? જો હા, તો તેનું કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યા શોધો.

**ઉકેલ :** આપેલ સમીકરણને વર્તુળના વ્યાપક સમીકરણ સાથે સરખાવતાં,  $g = 3, f = -4$  અને  $c = 20$ . આમ,  
 $g^2 + f^2 - c = 3^2 + (-4)^2 - 20 = 5 > 0$ .

આમ, આપેલ સમીકરણ વર્તુળ દર્શાવે છે.

$$\text{વર્તુળનું કેન્દ્ર } (-g, -f) = (-3, 4) \text{ અને ત્રિજ્યા } \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{5}.$$

**બીજી રીત :**

આપેલ સમીકરણને વર્ગાના સરવાળા તરીકે દર્શાવવા પદોનું પુનર્ગઠન કરતાં

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y + 20 = 0$$

$$\therefore x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 - 5 = 0$$

$$\therefore (x + 3)^2 + (y - 4)^2 - 5$$

આ  $C(-3, 4)$  કેન્દ્ર અને  $r = \sqrt{5}$  ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું સમીકરણ છે.

**ઉદાહરણ 9 :** નીચેનાં પૈકી કયાં સમીકરણો વર્તુળ દર્શાવે છે તે નક્કી કરો. જે સમીકરણ વર્તુળ દર્શાવે તેનું કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યા શોધો.

$$(1) \ x^2 + 2y^2 - 2x + 6y - 8 = 0$$

$$(2) \ 2x^2 + 2y^2 - 2x + 6y - 8 = 0$$

$$(3) \ x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x + y - \frac{21}{4} = 0$$

$$(4) \ x^2 + y^2 - 2x \cos\beta + 2y \sin\beta = 0; \beta \in \mathbb{R}$$

$$(5) \ 2x^2 + 2y^2 - 2xy + 6y + 22x - 1008 = 0$$

$$(6) \ x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$$

- ઉક્તે :** (1) આ સમીકરણમાં  $x^2$  અને  $y^2$  ના સહગુણકો સમાન નથી માટે તે વર્તુળનું સમીકરણ નથી.
- (2) આપેલ સમીકરણને 2 વડે ભાગતાં  $x^2 + y^2 - x + 3y - 4 = 0$  મળે. તે ઉપરથી  $g = -\frac{1}{2}$ ,  $f = \frac{3}{2}$  અને  $c = -4$  મળે. હવે,  $g^2 + f^2 - c = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - (-4) = \frac{13}{2} > 0$ , માટે આ સમીકરણ  $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$  કેન્દ્ર અને  $\sqrt{\frac{13}{2}}$  નિયાવાળું વર્તુળ દર્શાવે છે.
- (3) અહીં,  $g = -\sqrt{2}$ ,  $f = \frac{1}{2}$  અને  $c = -\frac{91}{4}$ . હવે,  $g^2 + f^2 - c = 2 + \frac{1}{4} + \frac{91}{4} = 25 > 0$  માટે સમીકરણ  $(\sqrt{2}, -\frac{1}{2})$  કેન્દ્ર અને 5 નિયાવાળું વર્તુળ દર્શાવે છે.
- (4) અહીં,  $g = -\cos\beta$ ,  $f = \sin\beta$  અને  $c = 0$ . હવે,
- $$g^2 + f^2 - c = \cos^2\beta + \sin^2\beta = 1 > 0. \text{ માટે, આ સમીકરણ } (\cos\beta, -\sin\beta) \text{ કેન્દ્ર અને } 1 \text{ નિયાવાળું વર્તુળ દર્શાવે છે.$$
- (5) આ સમીકરણમાં  $xy$  વાળું પદ હોવાથી તે વર્તુળનું સમીકરણ નથી.
- (6) અહીં,  $g = -2$ ,  $f = -3$  અને  $c = 13$ . હવે,  $g^2 + f^2 - c = (-2)^2 + (-3)^2 - 13 = 0$ . માટે આપેલ સમીકરણ વર્તુળનું સમીકરણ નથી.

**નોંધ :** ઉપરનાં ઉદાહરણમાં સમીકરણો (2), (3), (4) અને (6)માં પદાવલિને પૂર્ણવર્ગોના સરવાળા તરીકે દર્શાવવાની પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરી રહ્યાં હશે. વળી  $c < 0$  હોય, તો હંમેશાં  $g^2 + f^2 - c > 0$  હોય જ. આમ,  $c < 0$  હોય તો  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$  હંમેશાં વર્તુળ દર્શાવે જ.

**ઉદાહરણ 10 :** રેખા  $x + 3y - 1 = 0$  ઉપર જેનું કેન્દ્ર હોય તથા જે  $(1, 1)$  અને  $(-5, 1)$  માંથી પસાર થતું હોય તેવા વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો.

**ઉક્તે :** ધારો કે વર્તુળનું સમીકરણ  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$  છે. (i)

આપેલ શરતોની મદદથી અચળાંકો  $g, f$  અને  $c$  નાં મૂલ્યો મેળવવા જોઈએ. સમીકરણ (i) માં આપેલ વર્તુળનું કેન્દ્ર  $(-g, -f)$  છે. આપેલ શરત મુજબ વર્તુળનું કેન્દ્ર રેખા  $x + 3y - 1 = 0$  ઉપર આવેલ છે. આથી  $(-g, -f)$  આપેલ રેખાના સમીકરણનું સમાધાન કરે. આથી,

$$-g - 3f - 1 = 0 \quad \text{અટલે કે} \quad g + 3f + 1 = 0 \quad \text{(ii)}$$

$(1, 1)$  અને  $(-5, 1)$  બંને માંગેલ વર્તુળ પર છે.

આપેલ બિંદુઓના ધારી સમીકરણ (i) માં મૂકૃતાં અન્ય બે સમીકરણો નીચે મુજબ મળે,

$$2g + 2f + c + 2 = 0 \quad \text{(iii)}$$

$$-10g + 2f + c + 26 = 0 \quad \text{(iv)}$$

$$\text{અટલે કે} \quad 10g - 2f - c - 26 = 0 \quad \text{(v)}$$

સમીકરણ (ii), (iii) અને (iv) ક્રમા અન્શાત  $f, g$  અને  $c$  માં સુરેખ સમીકરણોની સંહતિ આપે છે.

$$\text{સમીકરણ (iii) + (iv) કરતાં, } 12g - 24 = 0$$

$$\therefore g = 2,$$

$$\therefore g + 3f + 1 = 0 \text{ પરથી } f = -1$$

$$\text{જીથી, } 2g + 2f + c + 2 = 0$$

$$\therefore 4 - 2 + c + 2 = 0 \quad (g = 2 \text{ અને } f = -1 \text{ હેતું})$$

$$\therefore c = -4.$$

$$\therefore \text{માંગેલ વર્તુળનું સમીકરણ } x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0 \text{ છે.}$$

**ઉદાહરણ 11 :** A( $x_1, y_1$ ) અને B( $x_2, y_2$ ) વર્તુળનાં વ્યાસાંત બિંદુઓ હોય તો વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો.

**ઉકેલ :** આફુતિ 8.6 માં બતાવ્યા પ્રમાણે A( $x_1, y_1$ ) અને B( $x_2, y_2$ ) વર્તુળનાં વ્યાસાંત બિંદુઓ છે અને P( $x, y$ ) વર્તુળ ઉપર આવેલ A અને B સિવાપનું કોઈ પણ બિંદુ છે. ધોરણ 10માં શીખ્યા તે પ્રમાણે અર્ધવર્તુળમાં વાસે આંતરેલો ખૂબો કાટકોણ હોય છે. આમ,  $\Delta PAB$  કાટકોણ જિકોણ છે અને  $\angle P$  કાટખૂબો છે. પાયથાગોરસના પ્રમેય મુજબ,

$$PA^2 + PB^2 = AB^2.$$

$$PA^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$$

$$PB^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$$

$$AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$\therefore (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2$$

$$= x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2 + x^2 - 2xx_2 + x_2^2 + y^2 - 2yy_2 + y_2^2$$

$$\Leftrightarrow -2x_1x_2 - 2y_1y_2 = x^2 - 2xx_1 + y^2 - 2yy_1 + x^2 - 2xx_2 + y^2 - 2yy_2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 - 2xx_1 - 2yy_1 - 2xx_2 - 2yy_2 + 2x_1x_2 + 2y_1y_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - xx_1 - yy_1 - xx_2 - yy_2 + x_1x_2 + y_1y_2 = 0$$

આ સમીકરણને  $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$  પ્રમાણે પણ લખી શકાય. (i)

A( $x_1, y_1$ ) અને B( $x_2, y_2$ ) પણ સમીકરણ (i)-નું સમાધાન કરે છે.

આમ, સમીકરણ (i)  $\overline{AB}$  વાસવાળું વર્તુળ દર્શાવે છે.

**નોંધ રીત :**

$\overline{AB}$  વાસ હોવાથી કેન્દ્ર  $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$  છે અને

$$\text{ક્રિએટિ} = \sqrt{\left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_1\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2}{2} - y_1\right)^2} = \sqrt{\frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{2}} \quad \text{છે.}$$

$\therefore$  વર્તુળનું સમીકરણ,

$$\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 = \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{4}$$

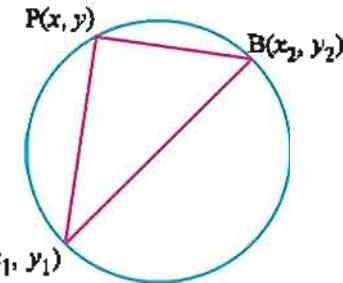
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - (x_1 + x_2)x - (y_1 + y_2)y + \frac{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - (x_1 + x_2)x - (y_1 + y_2)y + x_1x_2 + y_1y_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$

વર્તુળના આ સમીકરણને વ્યાસાંત બિંદુ સ્વરૂપે વર્તુળનું સમીકરણ કરે છે.

**નોંધ :** રેખાખંડો  $\overline{AP}$  અને  $\overline{BP}$  પરસ્પર લંબ હોવાથી તેમના ઢાળનો ચૂષાકરણ -1 થામ. આ ઉપરથી પણ  $\overline{AB}$  વાસવાળું વર્તુળનું સમીકરણ મેળવી શકાય.



આફુતિ 8.6

## સ્વાધ્યાય 8.2

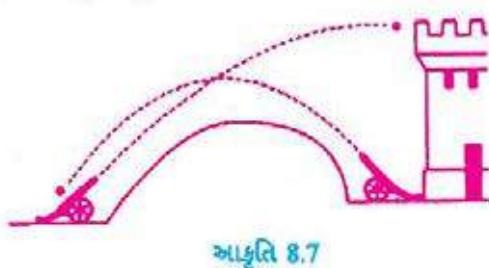
- નીચેનાં સમીકરણો પેઢી કાંચાં સમીકરણ વર્તુળ દર્શાવે છે ? જે સમીકરણ વર્તુળ દર્શાવે છે તેનું કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યા શોધો :
  - $x - y + 4 = 0$
  - $x^2 + y^2 = 1$
  - $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$
  - $x^2 - y^2 - 2x + 2y = 1008$
  - $x^2 + 3y^2 - 6x + 8y = 0$
  - $3x^2 + 3y^2 - 5x + 6y + 8 = 0$
  - $x^2 + y^2 - x + y = 0$
  - $9x^2 - 6x + 9y - 35 = 0$
  - $x^2 + y^2 - 2x \tan\alpha + 2y \sec\alpha + 2 \tan^2\alpha = 0; (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq \frac{(2n+1)\pi}{2}; n \in \mathbb{Z})$
  - $x^2 + y^2 - 2xy \tan\alpha + 2y \sec\alpha + 2 \tan^2\alpha = 0; \alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$
- ઉંમણિંહુમાંથી પસાર થતા અને (3, 4) કેન્દ્રવાળા વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો.
- (2, -1) માંથી પસાર થતા અને જેનું કેન્દ્ર અને રેખાઓ  $x + y = 5$  અને  $4x + y = 5$  હોય તેવા વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો.
- (-6, 3) માંથી પસાર થતા અને બંને અક્ષોને સ્પર્શતા વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો.
- સાંભિત કરો કે  $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ ,  $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$  અને  $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 1 = 0$  નાં કેન્દ્રો સમર્થે છે. વધુમાં સાંભિત કરો કે તેમની ત્રિજ્યાઓ સમબુદ્ધોત્તર શેષાંથી છે.
- વ્યાસાંત બિંદુઓ આપેલ હોય તો તે પરથી રેખાઓના ઢાળની મદદથી વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો.

\*

### 8.5 ઉલ્કેન્દ્રતા

શાંકવની ભૌગોલિક વ્યાખ્યા : જે બિંદુના એક નિયિત બિંદુથી અંતર તથા તે નિયિત બિંદુમાંથી પસાર ન થતી હોય તેવી રેખાથી લંબઅંતરનો ગુણોત્તર અચણ હોય તેવા બિંદુઓના ગણને શાંકવ (Conic) કહે છે. નિયિત બિંદુને શાંકવની નામિ (Focus) તથા નિયિત રેખાને શાંકવની નિયામિકા (Directrix) કહે છે. આ અચણ ગુણોત્તરને શાંકવની ઉલ્કેન્દ્રતા (Eccentricity) કહે છે તથા તેને સંક્ષિત e દ્વારા દર્શાવાય છે.

### 8.6 પરવલય



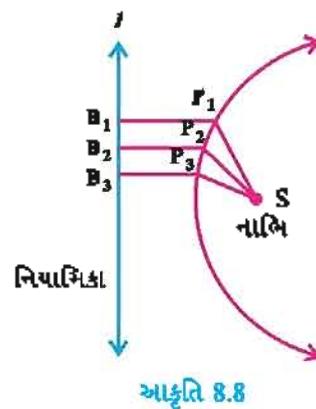
આકૃતિ 8.7

સતતરથી સંદીધાં જેલીલીયોએ શોધી કાઢ્યું કે, જ્યારે કોઈ વસ્તુ ઉદ્ઘાટરણ તરીકે, પણ રને છવામાં ફક્કવામાં આવે છે ત્યારે તેનો ગતિમાર્ગ પરવલય હોય છે. આ હક્કિકતના આધારે પથનું નામ parabola આપવામાં આવ્યું છે. અહીં 'para' નો અર્થ 'માટે' (for) અને 'bola' નો અર્થ 'ફુકવું' (throwing) એવો થાય છે. આથી વર્તનું નામ પડ્યું 'parabola'. જેલીલીયોની આ શોધથી તોપગીઓ માટે ચોક્કસ ખૂશાથી હવામાં અંતેલા તોપગોયાના પથની પારશ્શ કરવાનું શક્ય બન્યું. પરવલયની વિધિવિરુદ્ધ વ્યાખ્યા નીચે મુજબ છે :

**વ્યાખ્યા :** કોઈ નિયિત રેખા અને રેખા પર ન હોય તેવા નિયિત બિંદુથી સમાન અંતરે આવેલાં સમતલનાં તમામ બિંદુઓના ગણને પરવલય (Parabola) કહે છે. (આકૃતિ 8.8). અહીં રેખાથી બિંદુનું અંતર એટલે રેખાથી બિંદુનું લંબઅંતર.

$B_1P_1 = SP_1, B_2P_2 = SP_2, B_3P_3 = SP_3$ . તે જ રીતે પરવલય પરનાં તમામ બિંદુઓ માટે પરિસ્થાપન સત્ય છે.

ધ્યારો કે નિયિત બિંદુ S અને નિયિત રેખા l છે. S ને પરવલયની નામિ તથા l ને પરવલયની નિયામિકા કહે છે. પરવલય પર કોઈ પણ



આકૃતિ 8.8

બિંદુ P હોય તથા P નું નિયામિકાધી લંબઅંતર PM હોય તો વાખ્યા

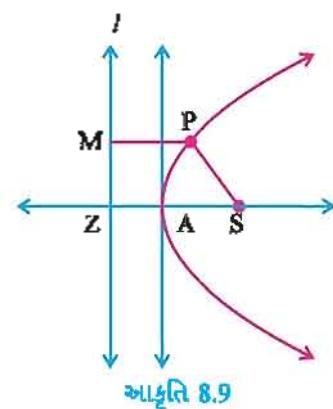
અનુસાર  $SP = PM$ .

$$\therefore \frac{SP}{PM} = 1$$

$\therefore$  શાંકવની વાખ્યા અનુસાર પરવલય જેણી ઉત્કેન્દ્રા 1 હોય તેવો શાંકવ છે.

ધારો કે નાભિ S પરથી નિયામિકા / પર દોરેલા લંબનો લંબપાદ Z છે.

ધારો કે  $\overline{ZS}$  નું મધ્યબિંદુ A છે. આમ,  $SA = AZ$  તથા  $\overline{ZS}$  નિયામિકા પરનો લંબ છે. આથી A પરવલય પરનું બિંદુ છે. A ને ઊગમબિંદુ તરીકે પસંદ કરતાં  $\leftrightarrow AS$  એ X-અક્ષ અને  $\overrightarrow{AS}$ ની દિશાને X-અક્ષની ધન દિશા હઈએ. અંતર  $ZS = 2a$  હોતાં,  $S(a, 0)$  ધરો અને  $Z(-a, 0)$  ધરો. આમ નિયામિકા / નું સમીકરણ  $x = -a$  ધરો. (તે રિઝોલંબ દેખા ચૂંચો.)



ધારો કે P(x, y) પરવલય પરનું કોઈ પણ બિંદુ છે અને P પરથી નિયામિકા / પર દોરેલા લંબનો લંબપાદ M છે, M ના ધામ  $(-a, 0)$  ધરો. બિંદુ P પરવલય પરનું બિંદુ હોવાથી,

$$SP = PM$$

$$\therefore SP^2 = PM^2$$

$$\therefore (x - a)^2 + y^2 = (x + a)^2$$

$$\therefore y^2 = (x + a)^2 - (x - a)^2$$

$$\therefore y^2 = 4ax$$

(i)

આથી ઉલ્લંઘન, જો કોઈ બિંદુ P(x, y) સમીકરણ  $y^2 = 4ax$  સમાધાન કરે તો (ઉપરના સોધાન ઉલ્લંઘનમાં લખતાં)  $SP = PM$  ધામ એટલે કે બિંદુ P પરવલય પર હોય.

$$\therefore \text{પરવલયનું સમીકરણ } y^2 = 4ax \text{ થાય.}$$

આ સમીકરણને પરવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ કહે છે.

**ઉદાહરણ 12 :** જેણી નાભિ  $(4, 0)$  હોય અને જેણી નિયામિકાનું સમીકરણ  $x + 4 = 0$  હોય તેવા પરવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ મેળવો.

**ઉકેલા :** નાભિ  $(4, 0)$  છે અને નિયામિકા  $x + 4 = 0$  હોવાથી  $a = 4$  થાય. પરવલયનું સમીકરણ

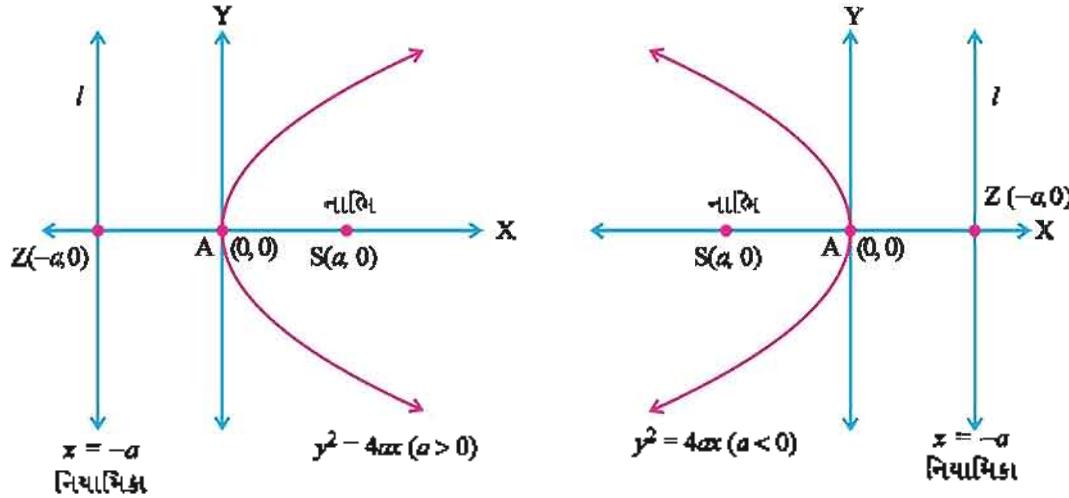
$$y^2 = 4(4)x$$

$$\therefore y^2 = 16x$$

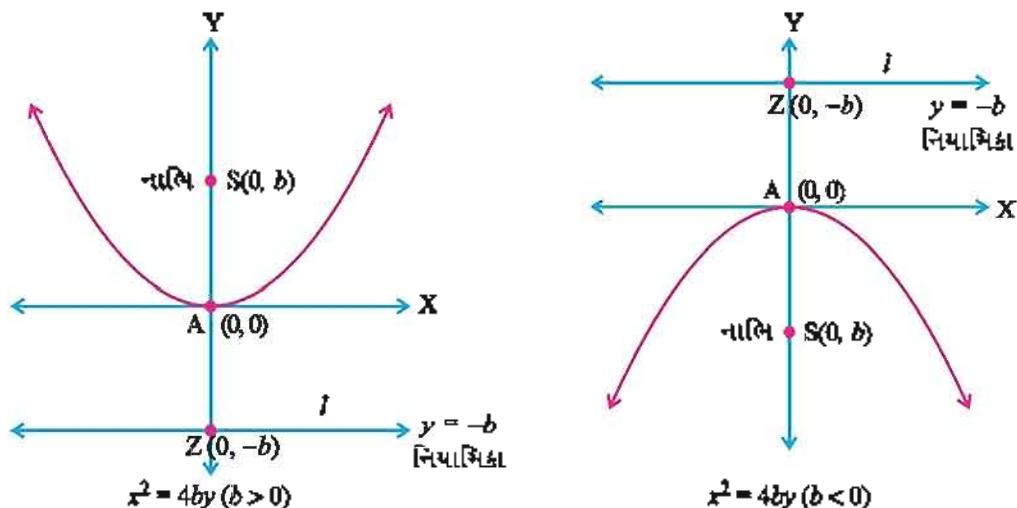
### 8.7 કેટલીક વાખ્યાઓ અને પરવલય અંગે કેટલાંક તારણો

- (1) નાભિયાંથી પસાર થતી અને નિયામિકાને લંબ રેખા પરવલયનો અંગ કહેવાય છે. આમ, પરવલય  $y^2 = 4ax$ નો અંગ X-અક્ષ થાય.
- (2) પરવલય અને તેના અક્ષનું છેદબિંદુ પરવલયનું શિરોબિંદુ (vertex) કહેવાય છે. પરવલય  $y^2 = 4ax$  નું શિરોબિંદુ ઊગમબિંદુ છે.
- (3) જો ઊગમબિંદુને શિરોબિંદુ તથા Y-અક્ષને પરવલયના અંગ તરીકે પસંદ કરીએ, તો પરવલયનું સમીકરણ  $x^2 = 4by$  સ્વરૂપમાં મળે છે. (અનુસાર 8.10(ii)). આ ઉસ્સામાં પરવલયની નાભિના ધામ  $(0, b)$  થાય તથા નિયામિકાનું સમીકરણ  $y = -b$  થાય. અહીં  $|b|$  એ પરવલયના શિરોબિંદુથી નાભિનું અંતર દર્શાવે છે.

- (4) જો બિંદુ  $P(x, y)$  પરવલય  $y^2 = 4ax$  પર આવેલું હોય તો  $P(x, -y)$  પણ પરવલય પર હોય આમ પરવલય  $y^2 = 4ax$ , X-અક્ષ પ્રત્યે સંસ્કૃત (symmetric) હોય છે. (એટલે કે  $y$  ને સ્થાને  $-y$  લખતાં સમીકરણ બદલાતું નહીં) તે જ રીતે, પરવલય  $x^2 = 4by$ , Y-અક્ષ પ્રત્યે સંસ્કૃત હોય છે. (એટલે કે  $x$  ને સ્થાને  $-x$  લેતાં સમીકરણ બદલાતું નહીં.)
- (5) પરવલયો  $y^2 = 4ax$  અને  $x^2 = 4by$  આદૂતિમાં દર્શાવ્યા છે. ( $a \neq 0, b \neq 0$ ).



આકૃતિ 8.10 (i)



આકૃતિ 8.10(ii)

- (6) પરવલયના કોઈ પણ બે બિંદુઓને જોડતા રેખાંડંડને પરવલયની જીવા (chord) કહે છે. પરવલયની નાભિમાંથી પસાર થતી જીવાને પરવલયની નાભિજીવા (focal chord) કહે છે. પરવલયના અક્ષને લંબ હોય તેવી નાભિજીવાને પરવલયનો નાભિલંબ (Latus-rectum) કહે છે.

### 8.8 પરવલયનો નાભિલંબ

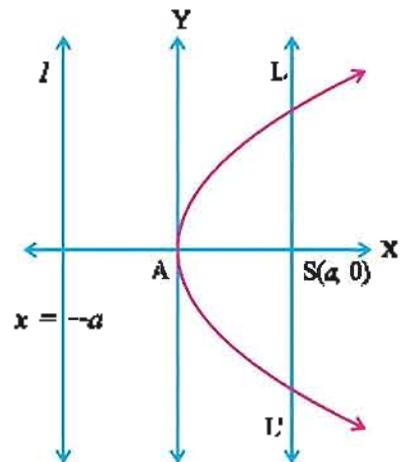
પરિયોજના કોઈ પણ બે બિંદુઓને જોડતા રેખાંડંડને પરવલય  $y^2 = 4ax$  ના નાભિલંબના અંત્યબિંદુઓ  $L$  અને  $L'$  અને  $\overleftrightarrow{LL'}$  ચિહ્નોલંબ રેખા છે. આ રેખા નાભિ  $(a, 0)$ માંથી પસાર થતી હોવાથી તેનું સમીકરણ  $x = a$  છે. કહે, બિંદુઓ  $L$  અને  $L'$  પરવલય ઉપર આવેલા હોવાથી  $y^2 = 4ax = 4a \cdot a = 4a^2$ . આથી  $y = \pm 2a$ . આમ, નાભિલંબના અંત્યબિંદુઓના પામ  $L(a, 2|a|)$  અને  $L'(a, -2|a|)$  હશે. નાભિલંબની લંબાઈ  $LL'$  થાય,

$$\text{नाभिवंबनी लंबाई} = LL'$$

$$= \sqrt{(a-a)^2 + (2|a|+2|a|)^2}$$

$$= 4|a|$$

**नोट :** परवलय  $x^2 = 4by$  माटे नाभिवंबना अंत्यनिंदुओं  $L(2|b|, b)$  अने  $L'(-2|b|, b)$  थरो अने तेथी नाभिवंबनी लंबाई  $4|b|$  थरो.



आकृति 8.11

### 8.9 परवलयां प्रथल समीकरणे

कोઈ पक्ष वास्तविक प्रथल  $t$  माटे,  $x = at^2$  अने  $y = 2at$ , समीकरण  $y^2 = 4ax$  नुं समाधान करे छे. धारो  $t$   $(x_1, y_1)$  परवलय  $y^2 = 4ax$  उपर छे. हवे जो  $t = \frac{y_1}{2a}$  लहाने तो  $x_1 = at^2$ . आम, परवलय परना कोई पक्ष निंदुने संगत,  $x = at^2$  अने  $y = 2at$  थाय तेवी वास्तविक संभ्या  $t$  असो.

आम,  $(at^2, 2at)$  परवलय  $y^2 = 4ax$  उपर होय अने परवलयानुं कोई पक्ष निंदु  $(at^2, 2at)$ ;  $t \in \mathbb{R}$  प्रकारनुं होय.

$x = at^2, y = 2at$  ने परवलय  $y^2 = 4ax$  नां प्रथल समीकरणे कहेवाय छे. निंदु  $P(at^2, 2at)$  ने परवलयानुं एवं निंदु कहेवाय छे अने ते  $P(t)$  वडे दर्शावाय छे.

**उदाहरण 13 :** जेनी नाभिक  $(2, 3)$  होय तथा नियामिका  $3x + 4y - 10 = 0$  होय तेवा परवलयानुं समीकरण मेणवो.

**उकेल :** धारो  $t$   $P(x, y)$  परवलय पर कोई पक्ष निंदु छे. हवे परवलयानी व्याख्या अनुसार नाभि  $S$  होय तथा  $PM$  अने  $PN$  नियामिकाची लंबांतर होय तो,

$$SP = PM \text{ एवंते } SP^2 = PM^2$$

$$\therefore (x-2)^2 + (y-3)^2 = \left( \frac{3x+4y-10}{\sqrt{9+16}} \right)^2 = \frac{(3x+4y-10)^2}{25}$$

$$\therefore 25(x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9) = 9x^2 + 16y^2 + 24xy - 60x - 80y + 100$$

$$\therefore 16x^2 - 24xy + 9y^2 - 40x - 70y + 125 = 0 \text{ अे. मांगेल परवलयानुं समीकरण छे.}$$

**उदाहरण 14 :** उगमिंदुनुं  $(4, 3)$  आणण स्थानांतर करी परवलय  $(y-3)^2 = 16(x-4)$ नी नाभिना घाम तथा नियामिकानुं समीकरण मेणवो.

**उकेल :** जो नवा उगमिंदुने सापेक्ष  $P(x, y)$ -ांचा घाम  $(x', y')$  होय, तो

$$x = x' + h = x' + 4, \quad y = y' + k = y' + 3$$

$$\therefore \text{परवलयानुं समीकरण } (y')^2 = 16x' \text{ अने.}$$

$$\therefore 4a = 16 \text{ एवंते } a = 4$$

$$\text{नाभिना नवा घाम } (x', y') = (a, 0) = (4, 0)$$

$$x = x' + 4, \quad y = y' + 3$$

$$\therefore \text{नाभिना भूषा घाम } = (8, 3)$$

∴ नियामिकानु समीकरण :  $x' + a = 0$

ऐसे के  $x' + 4 = 0$  थाय.

∴ तेनु समीकरण  $x - 4 + 4 = 0$

∴ नियामिकानु समीकरण  $x = 0$  थाय.

**चक्रसंगी :**  $SP = PM$  परथी  $(x - 8)^2 + (y - 3)^2 = x^2$

∴  $(y - 3)^2 = x^2 - (x^2 - 16x + 64) = 16(x - 4)$  परवलयनु समीकरण भजे.

**ઉદાહરણ 15 :** નીચેના પ્રત્યેક સમીકરણ માટે પરવલયની નામિના ધામ, નિયામિકાનુ સમીકરણ, નામિલંબની લંબાઈ તથા નામિલંબના અંત્યબિંદુઓ શોધો.

$$(1) x^2 = -8y \quad (2) y^2 = 8x \quad (3) x^2 = 3y \quad (4) y^2 = -10x$$

**ઉકેલ :** (1)  $x^2 = -8y$  ને પરવલયના પ્રમાણિત સમીકરણ  $x^2 = 4by$  સાથે સરખાવતાં,  $b = -2$  ભજો. અહીં પરવલયનો અક્ષ Y-અક્ષ છે. આથી નામિના ધામ  $(0, b) = (0, -2)$  થશે.

નિયામિકાનુ સમીકરણ  $y = -b$ , એટલે કે  $y = 2$  થશે.

નામિલંબની લંબાઈ  $4|b| = 8$ .

નામિલંબના અંત્યબિંદુઓ  $L(2|b|, b) = L(4, -2)$  અને  $L'(-2|b|, b) = L'(-4, -2)$  થાય.

$$(2) y^2 = 8x$$
 ને  $y^2 = 4ax$  સાથે સરખાવતાં  $a = 2$  ભજો. પરવલયનો અક્ષ X-અક્ષ છે.

નામિ  $(a, 0) = (2, 0)$  થાય.

નિયામિકાનુ સમીકરણ  $x = -a$  હોવાથી તે  $x = -2$  થાય. આમ  $x + 2 = 0$  નિયામિકાનુ સમીકરણ છે.

નામિલંબની લંબાઈ  $4|a| = 8$ .

નામિલંબના અંત્યબિંદુઓ  $L(a, 2|a|) = L(2, 4)$  અને  $L'(a, -2|a|) = L'(-2, -4)$  છે.

(3) સમીકરણ  $x^2 = 3y$  ને  $x^2 = 4by$  સાથે સરખાવતાં  $4b = 3$  એટલે  $\frac{3}{4}b = \frac{3}{4}$  ભજો. અહીં પરવલયનો અક્ષ Y-અક્ષ છે.

નામિ  $(0, b) = \left(0, \frac{3}{4}\right)$  થાય.

નિયામિકાનુ સમીકરણ  $y = -b$  એટલે કે  $y = -\frac{3}{4}$ . આમ  $4y + 3 = 0$  નિયામિકાનુ સમીકરણ છે.

નામિલંબની લંબાઈ  $4|b| = 3$ .

નામિલંબના અંત્યબિંદુઓ  $L(2|b|, b) = L\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$  અને  $L'(-2|b|, b) = L'\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$  છે.

$$(4) y^2 = -10x$$
 ને  $y^2 = 4ax$  સાથે સરખાવતાં  $a = -\frac{5}{2}$  ભજો. અહીં પરવલયનો અક્ષ X-અક્ષ છે.

નામિ  $(a, 0) = \left(-\frac{5}{2}, 0\right)$  થાય.

નિયામિકાનુ સમીકરણ  $x = -a$  એટલે કે  $x = \frac{5}{2}$ . આમ  $2x - 5 = 0$  નિયામિકાનુ સમીકરણ થાય.

નામિલંબની લંબાઈ  $4|a| = 10$  થાય.

નામિલંબના અંત્યબિંદુઓ  $L(a, 2|a|) = L\left(-\frac{5}{2}, 5\right)$  અને  $L'(a, -2|a|) = L'\left(-\frac{5}{2}, -5\right)$  છે.

**ઉદાહરણ 16 :** જેનું શિરોબિંહુ ઉગમબિંહુ હોય, નાભિના યામ  $(0, -3)$  અને નિયામિકાનું સમીકરણ  $y = 3$  હોય તેવા પરવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ મેળવો.

**ઉકેલ :** અહીં નાભિના  $(0, -3)$  Y-અક્ષ પર છે અને નિયામિકા  $y = 3$ , X-અક્ષને સમાંતર છે. આમ પરવલયનું સમીકરણ  $x^2 = 4by$  પ્રકારનું હોય, જ્યાં  $b = -3$ . આમ, માગેલ પરવલયનું સમીકરણ  $x^2 = -12y$  છે.

**ઉદાહરણ 17 :** X-અક્ષ પ્રત્યે સંભિત હોય, શિરોબિંહુ ઉગમબિંહુ હોય અને  $(5, -5)$  માંથી પસાર થતા હોય તેવા પરવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ મેળવો.

**ઉકેલ :** પરવલય X-અક્ષ પ્રત્યે સંભિત છે તેમજ શિરોબિંહુ ઉગમબિંહુ છે તેમ આપેલું છે. આથી પરવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ  $y^2 = 4ax$  થાય. વધુમાં, પરવલય  $(5, -5)$  માંથી પસાર થાય છે.

$$(-5)^2 = 4a(5)$$

$$\therefore 25 = 20a$$

$$\therefore a = \frac{5}{4}. આથી પરવલયનું સમીકરણ y^2 = 5x છે.$$

## 8.10 પરવલયના ગુણધર્મો

**ગુણધર્મ 1 :** ધારો કે  $P(t_1)$  અને  $Q(t_2)$  પરવલય  $y^2 = 4ax$  પરના બિંહુઓ છે. જો  $\overline{PQ}$  નાભિજીવા હોય તો  $t_1 t_2 = -1$ .

**સાબિતી :** બિંહુઓ P અને Q યામ અનુક્રમે  $(at_1^2, 2at_1)$  અને  $(at_2^2, 2at_2)$  થાય. પરવલય  $y^2 = 4ax$  નો નાભિના યામ  $(a, 0)$  છે.  $\overline{PQ}$  નાભિજીવા હોવાથી બિંહુઓ P, Q અને S સમર્દેખ બિંહુઓ છે.

ધારો કે  $\overline{PQ}$  નાભિલંબ છે.

તો  $P(a, 2a)$  થાય.

$$\therefore at_1^2 = a, \quad 2at_1 = 2a$$

$$\therefore t_1 = 1$$

તે જ રીતે  $Q(a, -2a)$  માટે  $t_2 = -1$

$$\therefore t_1 t_2 = -1$$

હવે ધારો કે  $\overline{PQ}$  નાભિલંબ નથી.

$$\therefore at_1^2 \neq a, \quad at_2^2 \neq a.$$

હવે,  $\overleftrightarrow{SP}$ -નો ફળ =  $\overleftrightarrow{SQ}$ -નો ફળ

$$\therefore \frac{2at_1}{at_1^2 - a} = \frac{2at_2}{at_2^2 - a}$$

$$\therefore \frac{t_1}{t_1^2 - 1} = \frac{t_2}{t_2^2 - 1}$$

$$\therefore t_1(t_2^2 - 1) = t_2(t_1^2 - 1)$$

$$\therefore t_1 t_2^2 - t_1 = t_2 t_1^2 - t_2$$

$$\therefore t_1 t_2^2 - t_2 t_1^2 = t_1 - t_2$$

$$\therefore t_1 t_2 (t_2 - t_1) = -(t_2 - t_1)$$

$$\therefore t_1 t_2 = -1$$

( $\because t_1 \neq t_2$ )

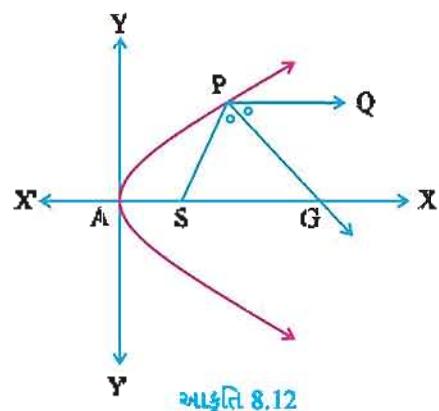
**ગુણવર્મ 2 :** જો પરવલય  $y^2 = 4ax$  ( $a > 0$ )ની નાભિ S હોય અને  $\overline{PQ}$  નાભિશીલન કોણ, તો  $\frac{1}{SP} + \frac{1}{SQ} = \frac{1}{a}$ .

**સાબિતી :** ધોરો કે, P( $t_1$ ) અને Q( $t_2$ ) નાભિશીલનનાં અંત્યબિંદુઓ છે. નાભિના યામ ( $a, 0$ ) છે. બિંદુનો P અને Q ના યામ અનુકૂળો  $(at_1^2, 2at_1)$  અને  $(at_2^2, 2at_2)$  છે.

$$\begin{aligned} SP^2 &= (at_1^2 - a)^2 + (2at_1)^2 \\ &= (at_1^2 - a)^2 + 4a^2t_1^2 \\ &= (at_1^2 + a)^2 \\ \therefore SP &= a(t_1^2 + 1), \text{ તે જ રીતે, } SQ = a(t_2^2 + 1) \quad (a > 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{હવે, } \frac{1}{SP} + \frac{1}{SQ} &= \frac{1}{a(t_1^2 + 1)} + \frac{1}{a(t_2^2 + 1)} \\ &= \frac{1 + t_1^2 + t_2^2 + 1}{a(t_1^2 + 1)(t_2^2 + 1)} \\ &= \frac{1 + t_1^2 + t_2^2 - t_1^2 t_2^2}{a(t_1^2 + 1)(t_2^2 + 1)} \quad (t_1 t_2 = -1) \\ &= \frac{(1 + t_1^2)(1 - t_2^2)}{a(t_1^2 + 1)(t_2^2 + 1)} = \frac{1}{a} \end{aligned}$$

**ગુણવર્મ 3 :** ધોરો કે પરવલય  $y^2 = 4ax$  ની નાભિ S છે અને P પરવલય પરનું શોર્ટ પણ બિંદુ છે. ધોરો કે  $\overrightarrow{PQ}$  પરવલયના અથને સમાંતર છે.  $\angle SPQ$  નો દ્વાબાજુક પરવલયના અથને બિંદુ G માં ઉદ્દે તો  $\overline{SP} \equiv \overline{SG}$ .



**સાબિતી :** અહીં,  $\overrightarrow{PQ}$  પરવલયના અથને સમાંતર છે એટલે કે, X-અથને સમાંતર છે વધુમાં  $\overrightarrow{PG}$ ,  $\angle SPQ$  ને દુલ્ઘાળે છે. આથી આકૃતિ 8.12 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે  $\overleftrightarrow{PG}$  સમાંતર રેખાઓ  $\overleftrightarrow{PQ}$  અને  $\overleftrightarrow{SG}$ ની છેદક છે. આથી  $m\angle SGP = m\angle QPG$ . વળી,  $m\angle SPG = m\angle QPG$  આથી  $m\angle SGP = m\angle SPG$  આથી,  $\triangle SPG$  સમદિલ્પાજુ તિકોણ ધાર્ય અને તેથી  $\overline{SP} \equiv \overline{SG}$ .

**નોંધ :** પરવલયના આ ગુણવર્મનો વધુભાજુ ઉપયોગ પ્રકાશયાલમાં અરીસાઓ તેયાર કરવામાં ધાર્ય છે. જો પ્રકાશનો જોત પરવલયકાર અરીસાની નાભિ પાસે હોય તો પ્રકાશ પરાવતીત થઈ અરીસાના અથને સમાંતર ગતિ કરે. આ ગુણવર્મનો ઉપયોગ મોટરગાડીની ડેવલાઇટમાં ધાર્ય છે. તે જ રીતે પરવલયકાર અરીસાના અથને સમાંતર પ્રકાશના ડિરેક્શો નાભિ પાસે પરાવતીત ધાર્ય છે. આનો ઉપયોગ ટૈલીવીઝન માટેના ડિશ એન્ટેનામાં ધાર્ય છે.

### સ્વાધ્યાય 8.3

1. નીચેનાં પરવલયો માટે નાભિના યામ તથા નિયાનિકાનાં સમીકરણો મેળવો અને તેમનો સ્વૂળ આખેન દોરો :

- (1)  $2y^2 = x$     (2)  $x^2 = -4y$     (3)  $4x^2 = -y$     (4)  $y^2 = 12x$

2. નીચેની શરતો પ્રમાણે પરવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ મેળવો :
- સિરોઅંદુ (0, 0), નાભિ (0, -2)
  - સિરોઅંદુ (0, 0), X-અંશ પરવલયના અંશ તરીકે તેમજ (1, -4) માંથી પસાર થાય.
3. (1) જેની નાભિ (-1, 2) હોય તથા નિયામિકા  $x - y + 1 = 0$  હોય તેવા પરવલયનું સમીકરણ મેળવો.
- (2) જેની નાભિ (-3, -4) હોય તથા નિયામિકા  $3x - 4y - 5 = 0$  હોય તેવા પરવલયનું સમીકરણ મેળવો.
4. ઉગમાંદુનું સ્થાનાંતર (-1, -2) આગળ કરી  $(x + 1)^2 = 4(y + 2)$ ના નાભિલંબની લંબાઈ તથા તેની નિયામિકાનું સમીકરણ શોધો.
5. પરવલય  $x^2 = 12y$ નું સિરોઅંદુ અને તેના નાભિલંબના અંત્યાંદુઓ દ્વારા ર૱ખાતાં ટ્રિકોઝનનું બેન્ડણ મેળવો.
6. પરવલય  $y^2 = 4ax$ -ની કોઈ નાભિલંબનું એક અંત્યાંદુ  $(\frac{a}{2}, 2a)$  હોય તો તેનું બીજું અંત્યાંદુ શોધો આ પરથી બતાવો કે નાભિલંબની લંબાઈ  $\left(\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\right)^2$  છે.
7. પરવલય  $y^2 = 12x$  પરના કોઈ બિંદુ P નું નાભિ S થી અંતર SP = 6 એકમ હોય, તો બિંદુ P ના ધાર શોધો.

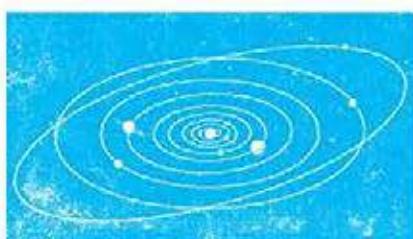
\*

### 8.11 ઉપવલય

કોઈ નણાકારને ગ્રાંસો કાપતાં તેનો આપછે ઉપવલય થાય છે. આના નિર્ધારન માટે પાણી બરેલા જ્વાસને ગ્રાંસો કરતાં પ્રવાહીની ઉપરી સ્પાટી ઉપવલીય આકાર ધારણ કરે. (આકૃતિ 8.14) તેમજ સલાહમાં કાકરીને ગ્રાંસી કાપી ઉપવલીય પતીકા મેળવવામાં આવે છે.



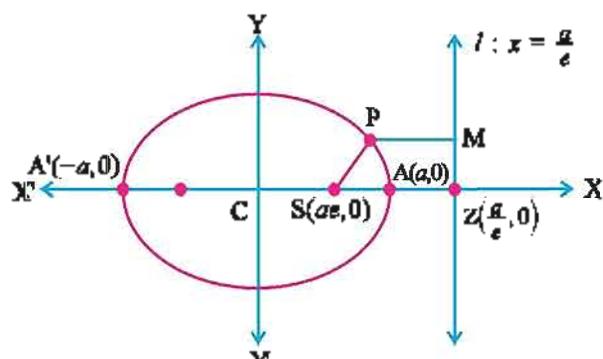
આકૃતિ 8.13



આકૃતિ 8.14

પ્રાચીન શ્રીક અવકાશશાસ્ત્રીઓની ભાન્યતા હતી કે પૃથ્વી સિદ્ધ છે અને ગ્રહો તેની કષેત્રે વર્તુલાકાર કક્ષામાં પરિબ્રમણ કરે છે; કરણ કે વર્તુળ એ સૌધી સરળ વક છે. 17મી સદીમાં જ્હોનીસ કોલ્ડરે શોધી કાન્દું કે ગ્રહોની કક્ષા ઉપવલીય હોય છે, જેમાં સૂર્ય એક નાભિ સ્થાને હોય છે.

આપણે શાંકવની ઉત્કેન્તતા વિષે જાણીએ છીએ. જો શાંકવની ઉત્કેન્તતા  $e < 1$  હોય, તો મળતા શાંકવને ઉપવલય કહે છે.



આકૃતિ 8.15

### ઉપવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ :

ધારો કે કોઈ ઉપવલયની નાભિ S, નિયામિકા / અને ઉત્કેન્તતા e છે. ધારો કે P એ ઉપવલય પર આવેલું કોઈ પક્ષ બિંદુ છે. ધારો કે P પરથી રેખા / પર દોરેખ લંબનો લંબપાદ M છે.

$$\text{उत्कृष्टतानी व्याख्या परस्थि } e = \frac{SP}{PM} \quad (\text{i})$$

धारो के S थी / पर दोरेल बंबनो लंबयाद Z थे. धारो के, बिंदु A अने A' एवं  $\overline{SZ}$  नुं अनुक्रमे  $e : 1$  अने  $-e : 1$  गुणोत्तरमां S तरफथी विभाजन करे थे.

$$\frac{SA}{AZ} = e \text{ अथवा } SA = e(AZ). \text{ तेमજ } \frac{SA'}{AZ} = -e \text{ आधी, } SA' = -eA'Z.$$

$SA = S$  थी  $A$  नुं अंतर,  $AZ = A$  थी  $H$  नुं लंबअंतर. ते ज रीते  $A'$  माटे पश्च सत्य थे.

तथा  $\frac{SA}{AZ} = \frac{SA'}{AZ} = -e$ . आधी,  $A$  अने  $A'$  बाटे उपवलय पर थे. धारो के  $\overline{AA'}$  नुं मध्यबिंदु C थे. धारो के, C उगभाविंदु थे अने  $\vec{CA}$  इशा X-अक्षनी पन इशा थे. धारो के  $CA = a$ . आधी  $A$  अने  $A'$  नां याम अनुक्रमे  $(a, 0)$  अने  $(-a, 0)$  थे. धारो के S ना याम  $(p, 0)$  अने Z ना याम  $(q, 0)$  थे. बिंदु  $A(a, 0)$  एवं  $\overline{SZ}$  नुं S तरफथी  $e : 1$  गुणोत्तरमां विभाजन करतुं होवाथी,

$$a = \frac{eq + p}{e + 1} \quad (\text{ii})$$

ते ज रीते  $A'$  माटे विभाजननो गुणोत्तर  $-e : 1$  होवाथी

$$-a = \frac{-eq + p}{-e + 1} \quad (\text{iii})$$

(ii) अने (iii) परस्थि,

$$eq + p = ae + a \text{ अने } -eq + p = ae - a. \text{ आ समीकरणोने } p \text{ अने } q \text{ माटे उकेलां,}$$

$$p = ae \text{ अने } q = \frac{a}{e} \text{ भजे.}$$

आम, नाभिना याम  $S(ae, 0)$  थे अने Z ना याम  $(\frac{a}{e}, 0)$  थे. नियामिका शिरोलंब रेखा थे अने Z भाँधी पसार थाय थे. आधी तेनु समीकरण  $x - \frac{a}{e}$  थाय.

हवे,  $P(x, y)$  उपवलय परनुं डोर्ड पश्च बिंदु होय तो (i) उपरस्थि,

$$\begin{aligned} \frac{SP}{PM} = e &\Leftrightarrow SP = e(PM) \\ &\Leftrightarrow SP^2 = e^2(PM^2) \end{aligned} \quad (\text{iv})$$

अही,  $PM = P(x, y)$  नुं रेखा / थी अंतर

$$= P(x, y) नुं रेखा  $x - \frac{a}{e} = 0$  थी अंतर$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\left| x - \frac{a}{e} \right|}{\sqrt{1+0}} \\ &= \left| x - \frac{a}{e} \right| \end{aligned} \quad \left( \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ परस्थि} \right)$$

$$\therefore PM^2 = \left( x - \frac{a}{e} \right)^2 \quad (\text{v})$$

$$\text{तेमજ } SP^2 = (x - ae)^2 + y^2 \quad (\text{vi})$$

(v) अने (vi) नो (iv) मां उपयोग करतां,

$$\begin{aligned}
 \frac{SP}{PM} = e &\Leftrightarrow (x - ae)^2 + y^2 = e^2 \left( x - \frac{a}{e} \right)^2 \\
 &\Leftrightarrow (x - ae)^2 + y^2 = e^2 \left( x^2 - \frac{2ax}{e} + \frac{a^2}{e^2} \right) \\
 &\Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = e^2 x^2 - 2ax + a^2 \\
 &\Leftrightarrow x^2(1 - e^2) + y^2 = a^2(1 - e^2) \\
 &\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1
 \end{aligned} \tag{vii}$$

હવે,  $a > 0$  અને  $e < 1$ . આથી  $a^2(1 - e^2) > 0$

આમ,  $a^2(1 - e^2) = b^2$  ધાર્ય તેવી પણ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય છે. આથી, (vii) ને

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ તરીકે લખી શકાય.}$$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ને ઉપવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ કરે છે.

કેટલાંક તારણો :

(1) ઉપવલયના સમીકરણ  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,

જીથી  $b^2 = a^2(1 - e^2)$  ( $a > b$ ) નો ઉપયોગ કરી ઉકેલતા શોધી શકાય.

(2) સંભિતતા :

ઉપવલયના પ્રમાણિત સમીકરણ જીથી ઉપરથી ઉપવલય પરના કોઈ પણ બિંદુ  $P(x, y)$  માટે નીચેનાં અવલોકનો સ્પષ્ટ છે.

(i) બિંદુ  $(x, -y)$  પણ ઉપવલય પર છે, એટલે કે ઉપવલય X-અખ પ્રત્યે સંભિત છે.

(ii) બિંદુ  $(-x, y)$  ઉપવલય પર છે, એટલે કે, ઉપવલય Y-અખ પ્રત્યે સંભિત છે.

(iii) બિંદુ  $(-x, -y)$  ઉપવલય પર છે. આમ, ઉપવલય ઊગમણિંદુ પ્રત્યે સંભિત છે તેમ કહેવાય. આ બિંદુ  $C(0, 0)$  ને ઉપવલયનું કેન્દ્ર કહેવાય છે. આમ, ઉપવલયને કેન્દ્રીય શાંકવ (Central conic) પણ કહે છે.

(3) ધાર્માકો સાથે છેદ :

ઉપરલયનું સમીકરણ મેળવવામાં આપણે બિંદુઓ  $A(a, 0)$

અને  $A'(-a, 0)$  ઉપવલય પર લીધ્યાં છે, આમ ઉપવલય

X-અખને  $x = \pm a$  માં છેદ છે. ઉપવલય  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  નો

Y-અખ સાથે છેદગાળ શોધવા માટે  $x = 0$  હેતાં,  $y = \pm b$  મળે,

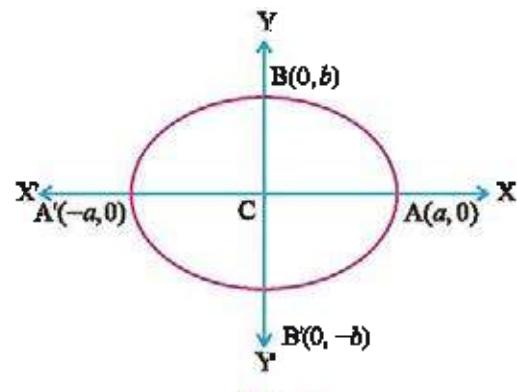
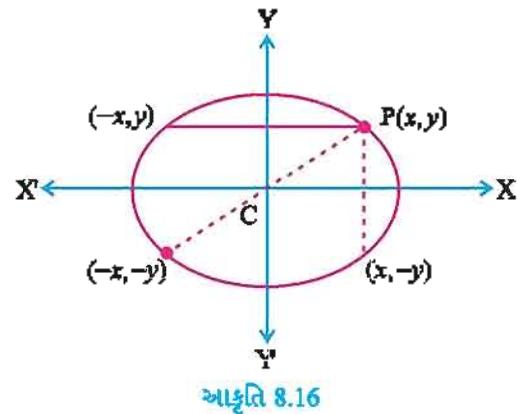
આમ ઉપવલય Y-અખને બિંદુઓ  $B(0, b)$  અને  $B'(0, -b)$  માં

છેદ છે. (આકૃતિ 8.18). આવી જ રીતે  $y = 0$  હેતાં

ઉપવલય X-અખને A અને A' બિંદુમાં છેદ છે તે જોઈ

શકાય છે. આ બિંદુઓ A, A', B અને B'ને ઉપવલયના

કિરોનિંદુઓ કહે છે.



(4) નાભિ અને નિયામિકાની બે જોડ :

$$\text{ઉપવલયનું સમીકરણ } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b) \text{ છે.} \quad (\text{i})$$

આપણે જાણીએ છીએ કે,  $b^2 = a^2(1 - e^2)$ .

$$\therefore \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$$

$$\therefore x^2(1 - e^2) + y^2 = a^2(1 - e^2)$$

$$\therefore x^2 - x^2e^2 + y^2 = a^2 - a^2e^2$$

$$\therefore x^2 + 2aex + a^2e^2 + y^2 = x^2e^2 + a^2 + 2aex$$

$$\therefore (x + ae)^2 + y^2 = e^2 \left(x + \frac{a}{e}\right)^2 \quad (\text{ii})$$

(ii)ના અર્થાતન પાટે  $S' = (-ae, 0)$  અને રેખા  $l$  નું સમીકરણ  $x + \frac{a}{e} = 0$  લઈએ.

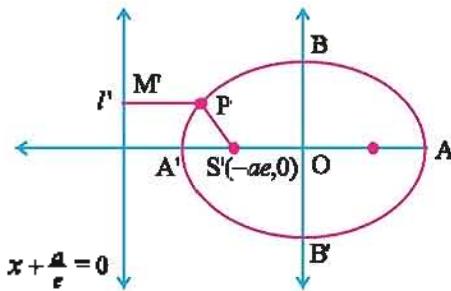
ધરો કે  $M'$  એ  $P$  માંથી રેખા  $x + \frac{a}{e} = 0$  પરનો લંબપાદ છે.

હવે,  $l$  એ  $P$ નું લંબાંતર  $PM'$  થાપ છે.

$$PM' = \sqrt{\left|x + \frac{a}{e}\right|^2} = \left|x + \frac{a}{e}\right|$$

$$\therefore PM'^2 = \left(x + \frac{a}{e}\right)^2 \quad (\text{iii})$$

$$\text{તેમજ } SP^2 = (x + ae)^2 + y^2 \quad (\text{iv})$$



આકૃતિ 8.18

(iii) અને (iv) ઉપરથી (ii) દ્વારા

$$(SP)^2 = e^2 (PM')^2$$

$$\therefore \frac{SP}{PM'} = e$$

ઉત્કેન્દ્રતાની વ્યાખ્યા મુજબ  $S'$  ને નાભિ અને  $l$  ને નિયામિક તરીકે લઈ શકાય. આમ, ઉપવલયને બે નાભિઓ  $(\pm ae, 0)$  અને તેમને અનુકૂળ બે નિયામિકાઓ  $x \mp \frac{a}{e} = 0$  હીએ છે.

(5) આપણે જોપું કે ઉપવલય  $\overline{AA'}$  અને  $\overline{BB'}$  પ્રત્યે સંસ્કૃત હોય છે, આ રેખાઓને ઉપવલયના અશો કહેવાય છે. ઉપરાંત,  $AA' = 2a$  અને  $BB' = 2b$  અને  $b < a$ , આમ,  $\overline{AA'}$  ને પ્રધાન અશ (major axis) અને  $\overline{BB'}$  ને ગૌણ અશ (minor axis) કહે છે. એને ગૌણ અશની અર્ધલંબાઈ (length of semi minor axis) તેમજ  $a$ ને પ્રધાન અશની અર્ધલંબાઈ (length of semi major axis) કહે છે.

અડી પ્રધાન અશ X-અશની દિશામાં છે, જો પ્રધાન અશ Y-અશની દિશામાં હોય તેવા સંજોગોમાં ઉપવલયની નાભિઓ Y-અશ પર હોય અને નિયામિકાઓ X-અશને સમાંતર હોય આવા ઉપવલયનું સમીકરણ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ થાય, જ્યાં } b > a \text{ અને } a^2 = b^2(1 - e^2).$$

નાભિઓના યામ  $(0, \pm ae)$  અને નિયામિકાઓનાં સમીકરણ  $y \mp \frac{b}{e} = 0$  થાય.

- (6) ઉપવલયના બે અંકુઓને જોડતા રેખાંને ઉપવલયની જીવા કહે છે. ઉપવલયની નાભિલંબની પસાર થતી જીવાને તેની નાભિજીવા કહે છે. જો નાભિજીવા ઉપવલયના પ્રધાન અંકને લંબ છોય તો તેને ઉપવલયનો નાભિલંબ કહે છે. (આકૃતિ 8.20). આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે નાભિલંબોના અંત્યઅંકુઓ જુદા જુદા ચર્ચામાં છોય. તેમને  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  અને  $L_4$  થી દર્શાવ્યા છે,  $\overline{L_1L_4}$  અને  $\overline{L_2L_3}$  બે નાભિલંબો છે.

### (7) નાભિલંબની લંબાઈ :

નાભિલંબ  $\overline{L_1L_4}$  નાભિ  $S(ae, 0)$  માંથી પસાર થાય છે તેને વિચાર કરીએ.  $\overline{L_1L_4}$  Y-અક્ષને સમાંતર હોવાથી તેની લંબાઈ,  $L_1$  અને  $L_4$ ના ય-યામોના તકાવત જેણી થાય  $L_1$  અને  $L_4$ ના ય-યામ નક્કી કરવા માટે ઉપવલયના સમીકરણ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ નિઃ } x = ae \text{ મુક્તાના,$$

$$e^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\therefore y^2 = b^2(1 - e^2)$$

$$\text{પરંતુ } 1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2}$$

$$\therefore y^2 = \frac{b^4}{a^2}$$

$$\therefore y = \pm \frac{b^2}{a}$$

$\therefore L_1$  અને  $L_4$  ના ય-યામ અનુકૂમે  $\frac{b^2}{a}$  અને  $-\frac{b^2}{a}$  થાય. આથી,

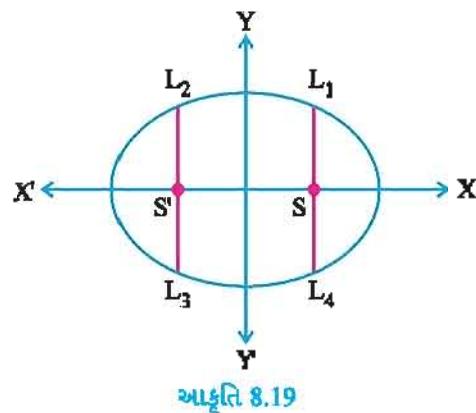
$$L_1L_4 = \frac{b^2}{a} - \left(-\frac{b^2}{a}\right) = \frac{2b^2}{a}$$

$$L_1\left(ae, \frac{b^2}{a}\right) \text{ અને } L_4\left(ae, -\frac{b^2}{a}\right) \text{ યાય.}$$

$$\text{તે જ રીતે } L_2\left(-ae, \frac{b^2}{a}\right) \text{ અને } L_3\left(-ae, -\frac{b^2}{a}\right).$$

$$\therefore \text{નાભિલંબની લંબાઈ} = \frac{2b^2}{a}.$$

**ઉદાહરણ 18 :** કેની એક નાભિના યામ  $(2, 0)$  છોય, સંગત નિયામિકાનું સમીકરણ  $x - 5 = 0$  છોય તથા ઉત્કેન્દ્રા  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  છોય તેવા ઉપવલયનું સમીકરણ મેળવો.



**ઉકેલ :** ધારો કે  $P(x, y)$  ઉપવલયનું કોઈ પણ બિંદુ છે, જે નાભિ છે અને PM એ પણ નિયામિકાથી લંબાંતર છે.

$$\therefore SP^2 = e^2 PM^2$$

$$\therefore (x - 2)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 (x - 5)^2$$

$$\therefore 2(x^2 - 4x + 4 + y^2) = x^2 - 10x + 25$$

$$\therefore x^2 + 2y^2 + 2x - 17 = 0 માંગેલ ઉપવલયનું સમીકરણ છે.$$

**ઉદાહરણ 19 :** ગ્રામ્યાંદ્રનું  $(1, 2)$  આગળ સ્થાનાંતર કરી સાબિત કરો કે  $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$  ઉપવલય દર્શાવે છે. તેની નાભિના યામ તથા નિયામિકાનાં સમીકરણ શોયો.

**ઉકેલ :** પ્રમાણિત સંકેતમાં  $x = x' + 1, y = y' + 2$  લેતાં,

$$\text{પરિવર્તિત સમીકરણ } \frac{(x')^2}{16} + \frac{(y')^2}{9} = 1 \text{ મળે, જે એક ઉપવલય દર્શાવે છે.}$$

$$a^2 = 16, b^2 = 9, \text{ અથી } a^2 > b^2 \text{ હોવાથી}$$

$$b^2 = a^2(1 - e^2) \text{ પરથી } 9 = 16(1 - e^2)$$

$$\therefore e^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

$$\therefore e = \frac{\sqrt{7}}{4} \quad (e > 0)$$

$$\text{નાભિના યામ } (\pm ae, 0) = (\pm\sqrt{7}, 0) \text{ તથા નિયામિકાનાં સમીકરણ } x' \mp \frac{16}{\sqrt{7}} = 0 \quad (x' - y' \text{ યામ પદ્ધતિમાં})$$

$$\therefore \text{મૂળ યામ પદ્ધતિમાં નાભિના યામ } = \left(1 \pm \frac{\sqrt{7}}{4}, 2\right) \text{ તથા નિયામિકાનાં સમીકરણ } x - 1 \mp \frac{16}{\sqrt{7}} = 0 \text{ યામ.}$$

**ઉદાહરણ 20 :** નીચેના ઉપવલયોની નાભિઓના યામ, નિયામિકાઓનાં સમીકરણ, ઉત્કેન્દ્રતા અને નાભિલંબની લંબાઈ શોધો :

$$(1) \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \quad (2) 4x^2 + y^2 = 25$$

**ઉકેલ :** (1)  $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$  ઉપરથી  $a^2 = 9, b^2 = 1$ . આથી,  $a = 3, b = 1$ .

$a > b$  હોવાથી પ્રધાન અક્ષ X-અક્ષ પર છે.

(i) **ઉત્કેન્દ્રતા :** આપણે જાણીએ છીએ કે,  $b^2 = a^2(1 - e^2)$ .

$$\therefore 1 = 9(1 - e^2)$$

$$\therefore \frac{1}{9} = 1 - e^2$$

$$\therefore e^2 = \frac{8}{9}$$

$$\therefore e = \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$(ii) \text{ નાભિઓ : } (\pm ae, 0) = \left(\pm 3\left(\frac{\sqrt{8}}{3}\right), 0\right) = (\pm 2\sqrt{2}, 0)$$

(iii) **નિયામિકાઓ :**  $x = \pm \frac{a}{e}$

$$\therefore x = \pm 3\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) = \pm \frac{9}{\sqrt{8}} = \pm \frac{9}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{નિયામિકાઓનાં સમીકરણ } x \pm \frac{9}{2\sqrt{2}} = 0 \text{ છે.}$$

(iv) નાભિલંબની લંબાઈ :  $\frac{2b^2}{a} = \frac{2}{3}$

(2) અપેલ સમીકરણ ઉપરથી  $\frac{4x^2}{25} + \frac{y^2}{25} = 1$  એટલે કે  $\frac{x^2}{(\frac{25}{4})} + \frac{y^2}{25} = 1$

આમ,  $a^2 = \frac{25}{4}$ ,  $b^2 = 25$ .

$\therefore a = \frac{5}{2}$ ,  $b = 5$ . આથી,  $b > a$

$\therefore$  પ્રધાન અક્ષ ચા-અક્ષ ઉપર છે.

(i) ઉત્કેન્દ્રતા :  $a^2 = b^2(1 - e^2)$ .

$\therefore \frac{25}{4} = 25(1 - e^2)$

$\therefore 1 - e^2 = \frac{1}{4}$

$\therefore e^2 = \frac{3}{4}$

$\therefore e = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(ii) નાભિઓ :  $(0, \pm be) = \left(0, \pm 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \left(0, \pm \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$

(iii) નિયામિકાઓ :  $y = \pm \frac{b}{e} = \pm 5\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

$\therefore y \pm \frac{10}{\sqrt{3}} = 0$  નિયામિકાઓનાં સમીકરણ છે.

(iv) નાભિલંબની લંબાઈ :  $\frac{2a^2}{b} = 2\left(\frac{25}{4}\right)\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{5}{2}$

ઉદાહરણ 21 : નીચેના પ્રતેક માટે ઉપવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ મેળવો :

(1) પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ 6, ઉત્કેન્દ્રતા  $\frac{1}{3}$  અને પ્રધાન અક્ષ ચા-અક્ષ ઉપર.

(2) નાભિલંબની લંબાઈ 8, ઉત્કેન્દ્રતા  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , અને પ્રધાન અક્ષ ચા-અક્ષ ઉપર.

ઉકેલ : (1) અહીં પ્રધાન અક્ષ ચા-અક્ષ ઉપર છે અને પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ 6 છે.

$\therefore 2a = 6$ , માટે,  $a = 3$

આથી  $a^2 = 9$ , વધુમાં  $e = \frac{1}{3}$

હવે,  $b^2 = a^2(1 - e^2)$

$\therefore b^2 = 9(1 - e^2) = 9\left(1 - \frac{1}{9}\right) = 9\left(\frac{8}{9}\right) = 8$

$\therefore$  ઉપવલયનું સમીકરણ  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$  મળે.

(2) અહીં પ્રધાન અક્ષ ચા-અક્ષ ઉપર છે.

$\therefore$  નાભિલંબની લંબાઈ  $\frac{2a^2}{b} = 8$ . આથી  $a^2 = 4b$ . (i)

વધી, ઉત્કેન્દ્રતા  $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$  અને  $a^2 = b^2(1 - e^2) = b^2\left(1 - \frac{1}{2}\right)$

$\therefore a^2 = \frac{1}{2}b^2$  (ii)

(i) અને (ii) પરથી,

$$\frac{1}{2}b^2 = 4b \text{ એટલે } \frac{1}{2}b^2 - 8b = 0$$

$$\therefore b = 8 \text{ કરણા કે } b \neq 0.$$

$$\therefore b^2 = 64, \text{ આથી } a^2 = \frac{b^2}{2} = \frac{64}{2} = 32$$

$$\text{આમ, ઉપવલયનું સમીકરણ } \frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{64} = 1 \text{ છે.}$$

**ઉદાહરણ 22 :** પ્રધાન અક્ષ X-અક્ષ ઉપર હોય, ગૌણ અક્ષની અર્ધલંબાઈ 4 હોય અને જેની બે નાભિઓ વચ્ચે અંતર 5 હોય તેવા ઉપવલયનું સમીકરણ મેળવો.

**ઉકેલ :** અહીં, ગૌણ અક્ષની અર્ધલંબાઈ  $b = 4$ .

(પ્રધાન અક્ષ X-અક્ષ પર છે.)

ધારો કે,  $S(ae, 0)$  અને  $S'(-ae, 0)$  નાભિઓ છે. તેમની વચ્ચેનું અંતર  $SS' = 2ae = 5$ .

$$\therefore ae = \frac{5}{2} \quad (i)$$

$$\text{જીથી, } b^2 = a^2(1 - e^2) = a^2 - a^2e^2$$

$$16 = a^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{25}{4} \quad ((ii) \text{ પરથી})$$

$$\therefore a^2 = 16 + \frac{25}{4} = \frac{89}{4}$$

$$\text{આમ, માંગેલ ઉપવલયનું સમીકરણ } \frac{x^2}{\frac{89}{4}} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

$$\therefore \frac{4x^2}{89} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

#### સ્વાધ્યાય 8.4

1. નીચેના પ્રત્યેક માટે ઉપવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ શોધો :

- (1) નાભિઓ  $(\pm 2, 0)$ , ઉત્કેન્દ્રતા  $= \frac{1}{2}$
- (2) નાભિઓ  $(\pm 4, 0)$ , શિરોબંદુઓ  $(\pm 5, 0)$
- (3) ગૌણ અક્ષની અર્ધ-લંબાઈ 6, ઉત્કેન્દ્રતા  $\frac{4}{5}$ ; X-અક્ષ પર પ્રધાન અક્ષ.
- (4) એક નાભિ  $(0, 4)$ , ઉત્કેન્દ્રતા  $\frac{4}{5}$
- (5) ઉત્કેન્દ્રતા  $\frac{2}{3}$ , નાભિલંબની લંબાઈ 5; X-અક્ષ પર પ્રધાન અક્ષ.
- (6) પ્રધાન અક્ષની અર્ધલંબાઈ 4, ઉત્કેન્દ્રતા  $\frac{1}{2}$ ; X-અક્ષ પર પ્રધાન અક્ષ.
- (7) ગૌણ અક્ષની અર્ધલંબાઈ 8, નાભિ  $(0, 6)$ .

2. જેની નાભિઓ  $(\pm 3, 0)$  હોય અને જે  $(4, 1)$  માંથી પસાર થતો હોય તેવા ઉપવલયનું સમીકરણ શક્ય હોય તો મેળવો.

3. નીચેના ઉપવલયો માટે નાભિના ધારુ, ઉત્કેન્દ્રતા, નિયામિકાઓનાં સમીકરણો અને નાભિલંબની લંબાઈ મેળવો :

- (1)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$
- (2)  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$
- (3)  $x^2 + 2y^2 = 100$
- (4)  $\frac{x^2}{43} + \frac{7y^2}{688} = 1$
- (5)  $5x^2 + 9y^2 = 81$

4. એક ઉપવલયની બે નિયામિકાઓ વર્ણનું અંતર તેની નાભિઓ વર્ણના અંતરથી જાણ ગણું હોય તો તેની ઉત્કેન્દ્રતા શોધો.
5. ઉપવલય  $16x^2 + 25y^2 = 1600$  ની નિયામિકાઓનાં સમીકરણ મેળવો. સાખિત કરો કે, બિંદુ  $(5\sqrt{3}, 4)$  ઉપવલય ઉપર છે. આ બિંદુના કોઈ નિયામિકાથી અંતર અને તેને સંગત નાભિથી અંતરનો ગુણોત્તર શોધો.
6. સાખિત કરો કે, રેખા  $x + y = 3$  ઉપવલય  $20x^2 + 36y^2 = 405$  ની નાભિખંચવાને સમાવે છે. (એટલે કે તે કોઈ નાભિમંથી પસાર થાય છે.)
7. બિંદુઓ  $(4, 3)$  અને  $(-1, 4)$  માંથી પસાર થતાં ઉપવલયનું સમીકરણ મેળવો.
8. જેની નાભિસ  $(3, 2)$ , સંગત નિયામિકાનું સમીકરણ  $y = 5$  તથા ઉત્કેન્દ્રતા  $\frac{1}{2}$  હોય તેવા ઉપવલયનું સમીકરણ મેળવો.
9.  $(2, 1)$  આથથ બ્રિજમબિંદુનું સ્થાનાંતર કરી સાખિત કરો કે  $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$  ઉપવલય દર્શાવે છે તથા તેની નાભિઓના યામ તથા નિયામિકાનાં સમીકરણ શોધો.

\*

### 8.12 ઉપવલયનાં પ્રચલ સમીકરણો

$$\text{ઉપવલયનું સમીકરણ: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ છે.}$$

આથી,  $\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)$  એકમ વર્ત્તન પર છે.

$$\therefore \text{જેથી } \exists \theta \in (-\pi, \pi], \text{ જેથી } \frac{x}{a} = \cos\theta, \frac{y}{b} = \sin\theta$$

$$\therefore x = a\cos\theta, y = b\sin\theta,$$

ઘણુમાં  $x = a\cos\theta, y = b\sin\theta$  માંથી ઠ નો લોપ કરતાં  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  મળે. આમ, જોઈ શકાય છે કે,  $x = a\cos\theta, y = b\sin\theta, \theta \in (-\pi, \pi]$  ઉપવલયનાં પ્રચલ સમીકરણો છે. ઉપવલય પરના બિંદુ  $(a\cos\theta, b\sin\theta)$  ને થાંડિંગ કરેવાય છે.

#### ઉપવલયના ગુણાધ્યો :

**ગુણાધ્ય 1:** ઉપવલયની નાભિનું ગૌણ અખણા કોઈ પણ અંતયબિંદુની

અંતર પ્રધાન અખણી અર્દ-લંબાઈ કેટલું થાય.

$$\text{સાખિતી : } \text{ઉપવલય } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ ના ગૌણ અખણનું}$$

એક અંતયબિંદુ  $B(0, b)$  છે. કોઈ એક નાભિ  $S$  ના યામ  $(ae, 0)$  બુધુ.

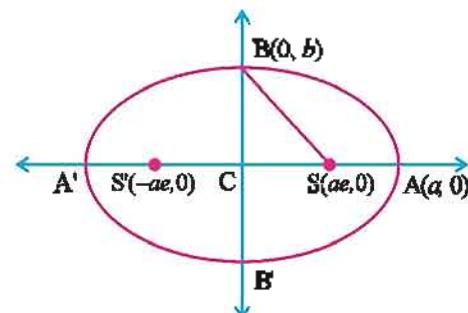
$$\therefore SB^2 = a^2e^2 + b^2 = a^2e^2 + a^2(1 - e^2) = a^2$$

$$\therefore SB = a$$

$$\text{તે જ રીતે, } S'(-ae, 0) \text{ માટે, } S'B'^2 = a^2e^2 + b^2 = a^2$$

$$\therefore S'B' = a$$

તેમજ, ગૌણ અખણા બીજા અંતયબિંદુ  $B'(0, -b)$  માટે પણ  $SB' = a = S'B'$  દર્શાવી શકાય.



આફ્ટર 8.20

ગુણધર્મ 2 : જો S એ નાભિ હોય અને A અને A' પ્રધાન અક્ષનાં અંત્યબિંદુઓ હોય તો  $AS \cdot A'S = b^2$ .

સાબિતી : અહીં નાભિ  $S(ae, 0)$ ,  $A(a, 0)$  અને  $A'(-a, 0)$  છે.

$$\begin{aligned} \therefore AS \cdot A'S &= \sqrt{(a - ae)^2} \sqrt{(a + ae)^2} \\ &= a(1 - e) a(1 + e) \\ &= a^2(1 - e^2) = b^2 \end{aligned} \quad (0 < e < 1)$$

ગુણધર્મ 3 : ઉપવલય  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  પરના કોઈ પશ બિંદુ P(x, y) માટે,  $SP + S'P = 2a$ , જ્યાં S અને S' નાભિઓ છે અને  $b < a$ .

સાબિતી : ઉપવલયની નિયામિકાઓનાં સમીક્ષરણ  $x \pm \frac{a}{e} = 0$  છે. આમ, બિંદુ P(x, y) નાં નિયામિકાઓથી અંતર અનુક્રમે,  $\left| \frac{a}{e} \mp x \right|$  થાય. ઉપવલયની વ્યાખ્યા મુજબ,

$$SP = e \left| \frac{a}{e} - x \right| = |a - ex|$$

$$S'P = e \left| \frac{a}{e} + x \right| = |a + ex|$$

$$\text{વળી, } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \text{ તેથી } \frac{x^2}{a^2} \leq 1$$

$$\therefore |x| \leq a. \text{ વળી, } e < 1$$

$$\therefore |ex| < a \text{ અથવા } -a < ex < a$$

$$\therefore a - ex > 0. \text{ તે જ રીતે } a + ex > 0$$

$$\therefore SP = a - ex, S'P = a + ex$$

$$\therefore SP + S'P = 2a$$

ઉપરના ગુણધર્મનું પ્રતીપ પશ સારું છે. એટલે કે, સમતલમાંના એવા બિંદુઓનો ગણ, કે જેમનાં સમતલમાંના કોઈ બે નિયિત બિંદુઓથી અંતરનો સરવાળો અથળ હોય, તે ઉપવલય હોય છે, જેના પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ તે અથળ અંતર જોડલી છે.

આની સાબિતી નીચે મુજબ છે :

ધારો કે,  $S(c, 0)$  અને  $S'(-c, 0)$  સમતલમાંના નિયિત બિંદુઓ છે. અથ્વો એવી રીતે પસંદ કર્યા છે કેચી લંબાઈ  $\overline{SS'}$ નું મધ્યબિંદુ ઉગમબિંદુ થાય અને  $\overrightarrow{CS}$  ની દિશા X-અક્ષની ઘન દિશા થાય. ધારો કે સમતલમાંનું કોઈ બિંદુ એવું P છે, જેચી  $SP + S'P = 2a$ , a અથળ છે. ( $a \neq c$ )

$$\therefore P \notin \overline{SS'}$$

$$(જો P \in \overline{SS'} ત્થાં SP + S'P = SS' એટલે કે 2a = 2c)$$

અહીં,  $SP + S'P > SS'$ .

$$2a > 2c$$

(i)

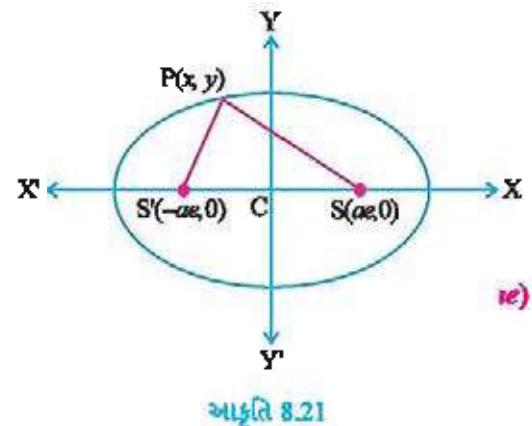
$$\text{હવે, } SP + S'P = 2a$$

$$\therefore \sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\therefore \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

$$\therefore (x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2$$

$$\begin{aligned} \therefore a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= a^2 - ex \\ \therefore \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= a - \frac{e}{a}x \\ \therefore \frac{e}{a} &= e \text{ હેઠળ, } \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - ex \\ \therefore (x - ae)^2 + y^2 &= (a - ex)^2 \\ \therefore x^2 - 2ae x + a^2 e^2 + y^2 &= a^2 - 2ae x + e^2 x^2 \\ \therefore x^2 (1 - e^2) + y^2 &= a^2 (1 - e^2) \\ \therefore \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} &= 1 \end{aligned}$$



$$(i) \text{ પરથી } a > c, e = \frac{c}{a} < 1. \text{ આથી, } a^2(1 - e^2) > 0.$$

$$\therefore \text{ ફરન વાસ્તવિક સંખ્યા } b \text{ મળે જોઈએ. } b^2 = a^2(1 - e^2)$$

$$\text{આમ, } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ મળે.}$$

તે પ્રધાન અકરણી લંબાઈ  $2a$  હોય તેવો ઉપવલય છે. આ પ્રમેયને ઉપવલયની વ્યાખ્યા તરીકે પણ લેવામાં આવે છે.

### ઉપવલયની અગત્યની વ્યવહારુ ઉપયોગીતા

જો ઉપવલય આકારના અરીસામાં નાભિ ડ એ પ્રકાશનું (ખંચિયું અથવા વ્યાપક રીતે, કોઈ પણ તરંગનું) ઉદ્ગમસ્થાન હોય, તો ડ માંથી નીકળતા પ્રકાશનાં કિરણો અરીસામાંથી પરાવર્તિત થઈ ઉપવલયની બીજી નાભિ ડ' માં કેન્દ્રીત થાય છે.

ઉપવલયના આ ગુણપર્યનો ઉપયોગ ભારતીય પ્રાચીન સ્થપતિઓએ વિશિષ્ટ ખંચિકણના નિર્માણમાં કર્યો હતો. આવાં ખંચિકણ અર્થાત્કરમાં બિલ્ઝપુરમાં અને હેદરાબાદના ગોલકોડાના દ્વાલામાં જોવા મળે છે. ટેલિસ્કોપના નિર્માણમાં ઉપવલયના આ ગુણપર્યનો ઉપયોગ થાય છે.

તથાભીશ્વરામાં મૂત્રપિંડ તેમજ મૂત્રાશયની પથરી તોડવા લિથોટ્રીપર (Lithotripper) પણીનાં ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. આમાં પણ ઉપવલયનો આ ગુણપર્ય વર્ણાય છે. અહીં લિથોટ્રીપરને ઉપવલયની એક નાભિ પણે મૂકવામાં આવે છે અને ઉપવલયની બીજી નાભિ પણે ઉચ્ચ આવૃત્તિવાળા આધાતી તરંગો આપાત કરવામાં આવે છે પરાવર્તિત થઈ મૂત્રપિંડની પથરી તોડી નાભે છે.

**ઉદાહરણ 23 :** ઉપવલય  $3x^2 + 5y^2 = 15$  નાં પ્રચલ સમીકરણો મેળવો.

$$\text{ઉકેલ : સમીકરણને } 15 \text{ વડે બાળાતાં, } \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$$

$$\text{આમ, } a = \sqrt{5} \text{ અને } b = \sqrt{3}, \text{ આથી ઉપવલયનાં પ્રચલ સમીકરણો } x = \sqrt{5} \cos \theta, y = \sqrt{3} \sin \theta, \theta \in (-\pi, \pi).$$

**ઉદાહરણ 24 :** ઉપવલય  $x = 2\cos \theta, y = 5\sin \theta$  ની ઉકેન્દ્રતા, નાભિના યાં તથા નિયામિકણાં સમીકરણ હોયાં.

**ઉકેલ :** અહીં,  $a = 2, b = 5$ . કાબી,  $b > a$  હોવાથી પ્રધાન અનુ પ્રાણનો ઉપગ્રહ હોય.

$$(1) \text{ ઉકેન્દ્રતા : અહીં } a^2 = b^2(1 - e^2)$$

$$\therefore 4 = 25(1 - e^2)$$

$$\therefore \frac{4}{25} = 1 - e^2$$

$$\therefore e^2 = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25} \text{ અથી } e = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$(2) \text{ નાભિઓના યામ : } (0, \pm be) = \left( 0, \pm 5 \frac{\sqrt{21}}{5} \right) = (0, \pm \sqrt{21})$$

$$(3) \text{ નિયામિકાઓનાં સમીકરણ : } y = \pm \frac{b}{e} = \pm 5 \times \frac{5}{\sqrt{21}} = \pm \frac{25}{\sqrt{21}}$$

### સ્વાધ્યાય 8.5

1. નીચે ઉપરથોળાં પ્રથમ સમીકરણો મેળવો :

$$(1) \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad (2) \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$

$$(3) 3x^2 + 4y^2 - 12 = 0 \quad (4) \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1 \quad (5) x^2 + 2y^2 - 18 = 0$$

2. નીચેના ઉપરથોળી ઉકેન્દ્રતા તેમજ નાભિઓ મેળવો :

$$(1) x = 2\cos\theta, y = 3\sin\theta \quad \theta \in (-\pi, \pi]$$

$$(2) 3x = 5\cos\theta, 5y = 7\sin\theta \quad \theta \in (-\pi, \pi]$$

$$(3) x = 4\cos\theta, y = 3\sin\theta \quad \theta \in (-\pi, \pi]$$

3. જો બે બિંદુ S(1, 0) તથા S'(-1, 0) વી ચલ બિંદુ P નાં ગંતરોળો સરવાળો અવળ 8 હોય તો P બિંદુગણ શોધો.

\*

### 8.13 અતિવલય

અતિવલય પુદ્જવિદ્યામાં ઉપરોક્તી એક અગત્યનો વાફ છે. ઉદાહરણ તરીકે ગોળીબારનું ઉદ્ભબવસ્થાન અતિવલયના ગુણ્યમાં અને ઘનિની તિક્રિયા ઉપરથી નક્કી કરી શકાય છે.

જેણી ઉકેન્દ્રતા  $e > 1$  હોય તેવો શાંકવ અતિવલય (hyperbola) કહેવાય છે.

અતિવલયનું પ્રાણિકત સમીકરણ :

પણો કે, બિંદુ S અતિવલયની નાભિ, રેખા Z

નિમાનિક અને  $e$  એ અતિવલયની ઉકેન્દ્રતા દર્શાવે છે.

બિંદુ S માંથી નિયામિકા / પરસો લંબપાદ Z લો. હવે,

$\overline{SZ}$  નું S તરફથી  $e : 1$  અને  $-e : 1$  ના ગુણોત્તરમાં

વિલાજન કરતાં બિંદુઓ અનુકૂળે A અને A' લો.

$$\frac{SA}{AZ} = e \text{ તથા } \frac{SA'}{AZ} = e \text{ હોવાથી } A \text{ અને } A' \text{ અતિવલય}$$

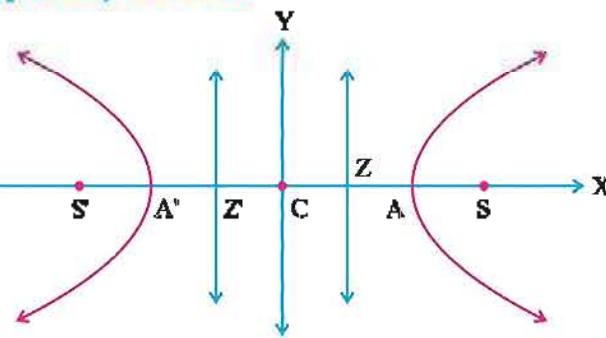
પર છે.

પણો કે,  $AA' = 2a$  અને C એ  $\overline{AA'}$  નું મધ્યબિંદુ છે.  $CA = CA' = a$ .

પણો કે, C ઉગમબિંદુ છે તથા  $\overline{CA}$  ની રેખા એ X-અક્ષની પણ દિશાની તરીકે હેતાં,  $A = (a, 0)$  અને  $A' = (-a, 0)$ .  
પણો કે, S તથા Z ના યામ અનુકૂળે  $(p, 0)$  તથા  $(q, 0)$  છે. A તથા  $A'$  એ  $\overline{SZ}$  નું S તરફથી  $e$  તથા  $-e$  ગુણોત્તરમાં  
વિલાજન કરતાં હોવાથી,

$$\frac{eq + p}{e - 1} = a \text{ તથા } \frac{-eq + p}{e + 1} = -a$$

$$\therefore eq + p = ae + a \text{ તથા } -eq + p = ae - a$$



આકૃતિ 8.22

$$\therefore p = ae \text{ तथा } q = \frac{a}{e}$$

$\therefore$  नाभि S ना याम  $(ae, 0)$  છે તथा નियामिका / नुં सમीકરण  $x = \frac{a}{e}$  છે.

धारो કે, P(x, y) એ અतિવલય પરનું કોઈ બિંદુ છે તથા P માથી નિયામિકા / પરનો લંબપાદ M છે. આથી M ના યામ  $\left(\frac{a}{e}, y\right)$  થાય.

$$\text{હવે, } \frac{SP}{PM} = e \Leftrightarrow SP^2 = e^2 PM^2$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (x - ae)^2 + y^2 = (ex - a)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2aex + a^2e^2 + y^2 = e^2x^2 - 2aex + a^2 \\ &\Leftrightarrow (e^2 - 1)x^2 - y^2 = a^2(e^2 - 1) \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2 - 1)} = 1 \end{aligned}$$

અહીં  $a^2 > 0$  તથા  $e > 1$  હોવાથી  $e^2 - 1 > 0$

$\therefore a^2(e^2 - 1) > 0$  થાય. આથી ધન વાસ્તવિક સંખ્યા નું મળે કે જેથી  $a^2(e^2 - 1) = b^2$ .

$\therefore \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  એ અતિવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ છે.

અતિવલયના પ્રમાણિત સમીકરણ પરથી નીચે મુજબનાં તારણો મેળવી શકાય :

### (1) સંમિતતા :

અતિવલય બંને અક્ષો પ્રત્યે તેમજ ઊગમાંદું પ્રત્યે સંમિત છે. ઉપરાંત, ઊગમાંદું કેન્દ્ર છે. આમ અતિવલય પડી કેન્દ્રીય શાંકય છે.

### (2) યામાશો સાથે છેદ :

અતિવલયનો યામાશો સાથે છેદ મેળવવા  $y = 0$  લેતાં,

$$\frac{x^2}{a^2} = 1. \text{ આમ } x = \pm a \text{ મળે.}$$

આમ, અતિવલય X-અક્ષને બિંદુઓ A(a, 0) અને A'(-a, 0)માં છેદ છે. A અને A' ને અતિવલયના શાશેબિંદુઓ કહેવાય છે.

હવે અતિવલયના સમીકરણમાં  $x = 0$  મૂક્તાં,  $y^2 = -b^2$  મળે,  $b \neq 0$  હોવાથી,  $y$  ના કોઈ પણ વાસ્તવિક મૂલ્ય માટે  $y^2 = -b^2$  ન થાય. આમ અતિવલય Y-અક્ષને છેદે નહીં. ઉપરલયની માફક બિંદુઓ B(0, b) અને B'(0, -b) ને પણ અતિવલયના શાશેબિંદુઓ કહેવાય છે, અહીં નોંધીએ કે આ બિંદુઓ અતિવલય પર આવેલા નથી. અતિવલય માટે  $\overline{AA'}$  અને  $\overline{BB'}$  ને અનુકૂળ મુખ્ય અક્ષ (Transverse axis) અને અનુબદ્ધ અક્ષ (Conjugate axis) કહેવાય છે.

અતિવલય  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , Y-અક્ષને છેદે નહીં પરંતુ તે Y-અક્ષની બંને બાજુ આવેલ હોય છે. અતિવલયના આ બંને બાજોને કોઈ સામાન્ય બિંદુ દોતું નથી અને તેમને અતિવલયની શાખાઓ (Branches) કહેવાય છે.

### (3) નાભિ અને નિયામિકાની બીજી જોડ :

અતિવલયનું સમીકરણ  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  હૈ.

$$\therefore \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2 - 1)} = 1$$

$$\therefore (e^2 - 1)x^2 - y^2 = a^2(e^2 - 1)$$

$$\therefore x^2 + 2aex + a^2e^2 + y^2 = a^2 + 2aex + e^2x^2$$

$$\therefore (x + ae)^2 + y^2 = e^2(x + \frac{a}{e})^2$$

ધરો કે,  $S'(-ae, 0)$  હૈ, તથા રેખા  $I'$  :  $x + \frac{a}{e} = 0$

$P(x, y)$  માંથી  $I'$  પરનો લંબપદ  $M'$  હૈ.

$$\therefore (SP)^2 = e^2(PM)^2$$

$$\therefore \text{અતિવલય માટે બીજા નિયમિકા } x + \frac{a}{e} = 0 \text{ મળે તથા બીજું નાભિ } (-ae, 0) \text{ હૈ.}$$

આમ, અતિવલય  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ને બે નાભિ  $(+ae, 0)$  તથા અનુરૂપ બે નિયમિકાઓ  $x + \frac{a}{e} = 0$  હૈ.

#### (4) જીવાઓ, નાભિશ્વાઓ અને નાભિલંબો

અતિવલયના બે નિયમિકાને જોડતા રેખાંનાંને અતિવલયની જીવા કહે છે. જો જીવા અતિવલયની નાભિશ્વાની પસાર થાય તો તેને અતિવલયની નાભિશ્વા કહે છે. અતિવલયના મુખ્ય અક્ષને લંબ નાભિશ્વાને અતિવલયનો નાભિલંબ કહે છે.

#### (5) નાભિલંબની લંબાઈ :

ધરો કે,  $\overline{L_1 L_4}$  નાભિ  $S(ae, 0)$ માંથી પસાર થતો નાભિલંબ હૈ. (આકૃતિ 8.24). આ નાભિલંબને સમાવતી રેખાનું સમીકરણ  $x = ae$  હૈ. આમ,  $\overleftrightarrow{L_1 L_4}$  બંનેના  $x$ -માઝ  $ae$  હૈ.

આમ, અતિવલયના સમીકરણ  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  માં  $x = ae$  મુક્તાં,

$$\frac{(ae)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\therefore \frac{y^2}{b^2} = e^2 - 1$$

$$\begin{aligned} \therefore y^2 &= b^2(e^2 - 1) \\ &= b^2 \cdot \frac{b^2}{a^2} \\ &= \frac{b^4}{a^2} \end{aligned}$$

$$\therefore y = \pm \frac{b^2}{a}$$

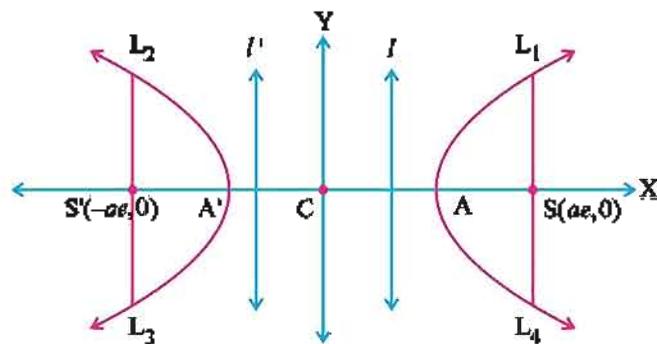
$$\therefore L_1\left(ae, \frac{b^2}{a}\right) \text{ અને } L_4\left(ae, -\frac{b^2}{a}\right) \text{ બને.}$$

$$\therefore L_1 L_4 = \frac{2b^2}{a}$$

#### (6) અતિવલયના સમીકરણનું અન્ય સ્વરૂપ :

ઉપરલયની માફક અતિવલય માટે મુખ્ય અક્ષ Y-અક્ષના ઉપગ્રહ તરીકે લઈએ તો તેનું પ્રમાણિત સમીકરણ  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ .

આ અતિવલયને અતિવલય  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ને અનુભદ અતિવલય (conjugate hyperbola) કહેવામ.



આકૃતિ 8.23

### अतिवलयनां प्रथम सभीकरण :

सभीकरण  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ने त्रिकोशाभितीय नित्यसम  $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$  साथे सरभावतं,

अतिवलय परना कोई पक्ष निंदा ( $x, y$ ) माटे  $-\pi < \theta \leq \pi$  होय अने  $\theta \neq \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$  एवो  $\theta$  मणे के जेडी,  $x = a \sec\theta$ ,  $y = b \tan\theta$ .

आधी उष्टु, कोई पक्ष  $\theta \in (-\pi, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right\}$  माटे  $x = a \sec\theta$ ,  $y = b \tan\theta$ , लहिए तो निंदा ( $x, y$ ), अतिवलय  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  पर आवे. अहीं  $\theta$  ए प्रथम छे. अगाउ ज्ञावा या मुजब निंदा ( $a \sec\theta, b \tan\theta$ ) ने अतिवलयनुं ठ-निंदा क्षेवाय छे.

आ ज रीते  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$  नां प्रथम सभीकरणो  $x = a \tan\theta$ ,  $y = b \sec\theta$ ,  $\theta \in (-\pi, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right\}$  फू.

### लंबातिवलय :

अतिवलय  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  आटे जो  $a^2 = b^2$  होय तो ते अतिवलयने लंबातिवलय (Rectangular hyperbola) क्षेवाय छे. आम लंबातिवलयनुं सभीकरण

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \text{ अथवा } x^2 - y^2 = a^2 \text{ थाय.}$$

**उत्केन्द्रता :** अतिवलयनी उत्केन्द्रता भेषजवा माटे  $b^2 = a^2(e^2 - 1)$  वपराय छे. लंबातिवलय माटे  $a^2 = b^2$  छे.

$$\therefore a^2 = a^2(e^2 - 1)$$

$$\therefore e^2 = 2$$

$$\therefore e = \sqrt{2}$$

(अरण के  $e > 1$ )

**ठ-निंदा :** लंबातिवलय माटे ठ-निंदा ( $a \sec\theta, a \tan\theta$ ) फू.

**नाभिलंबनी लंबाई :** अतिवलय माटे नाभिलंबनी लंबाई  $\frac{2b^2}{a}$  छे. अहीं  $b^2 = a^2$  लोवाही नाभिलंबनी लंबाई  $2a$  थाय.

### अतिवलयना गुणधर्मो :

जो S अने S' अतिवलय  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  नी नाभिओ होय अने निंदा P अतिवलयनुं कोई पक्ष निंदा होय तो  $|SP - S'P|$  अचण होय छे.

**साबिती :** S( $ae, 0$ ) अने S'( $-ae, 0$ ) नाभिओ छे.

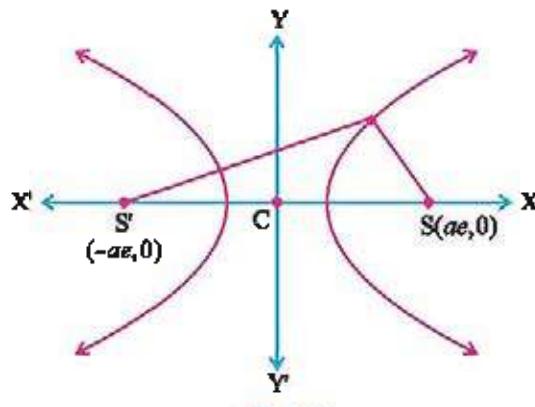
$$\text{हवे, } SP = ePM$$

$$= e \left| x - \frac{a}{e} \right|$$

अहीं,  $\overline{PM}$  ए निंदा P( $x, y$ ) थी नियाभिका  $x = \frac{a}{e}$  परनो लंब छे.

$$\therefore SP = ePM = e \left| x - \frac{a}{e} \right| = |ex - a|$$

$$\therefore SP = |ex - a|, \text{ ते } \text{ ज रीते } SP = |ex + a|$$



आकृति 8.24

$$\begin{aligned}
 \therefore (SP - SP)^2 &= SP^2 + SP^2 - SP \cdot SP \\
 &= (ex - a)^2 + (ex + a)^2 - 2|e^2x^2 - a^2| \\
 &= (ex - a)^2 + (ex + a)^2 - 2(e^2x^2 - a^2) \quad (e^2 > 1, x^2 \geq a^2 \Rightarrow e^2x^2 > a^2) \\
 &= 4a^2
 \end{aligned}$$

$$\therefore |SP - SP| = 2a$$

ઉપરોક્ત વિધાનનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે. આપ, 'અતિવલય એટલે (સમતલમાંના) એવા બિંદુઓનો ગણ કે જેના એ નિશ્ચિત બિંદુઓથી અંતરનો તશીખત અચળ હોય' તેવી વાખ્યા મળે.

અતિવલયની આ વાખ્યાની અદદ્ધયી પણ અતિવલયનું સમીકરણ મેળવી શકાય.

ધરો કે S અને S' એ નિશ્ચિત બિંદુ છે તથા P સમતલનું ઐવું બિંદુ છે કે, જેથી  $|SP - SP| = 2a$

ધરો કે S તથા S' ના પાય અનુકૂલે (c, 0) તથા (-c, 0) છે અને  $\overleftrightarrow{SS'}$  નું મધ્યબિંદુ C ઉગમબિંદુ છે.

$$\therefore \left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a$$

$$\therefore \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

$$\therefore \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a$$

$$\therefore (x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2$$

$$\therefore ex - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\therefore \left(\frac{e}{a}x - a\right)^2 = (x - ae)^2 + y^2$$

$$\frac{e}{a} = e \text{ હેઠાં } c = ae$$

$$\therefore (ex - a)^2 = (x - ae)^2 + y^2$$

$$\therefore (x - ae)^2 + y^2 = e^2(x - \frac{a}{e})^2 \quad (1)$$

$$\text{જેણા, } S = (c, 0) = (ae, 0)$$

$$\text{ધરો કે } l : x - \frac{a}{e} = 0 \text{ રેખા દર્શાવે છે.}$$

M એ P માં l પરનો લંબપાદ છે.

$$\therefore (SP)^2 = e^2(PM)^2$$

$$\therefore \frac{SP}{PM} = e$$

$$\text{તદ્દુરાંત } |SP - SP| = 2a < SS' = 2c$$

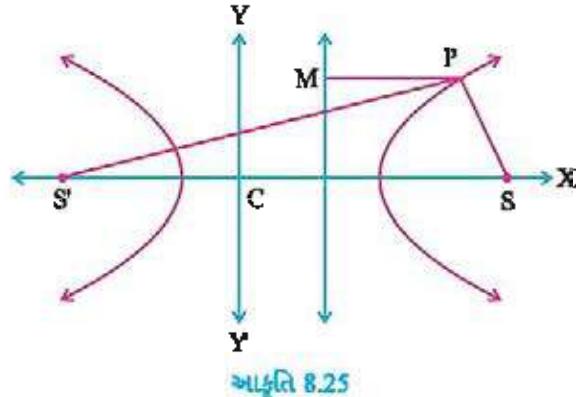
$$(P \notin \overleftrightarrow{SS'} - \overleftrightarrow{SS'})$$

$$\therefore \frac{e}{a} > 1$$

$$\therefore e > 1$$

Pનો બિંદુગણ ઉત્કેન્દ્રાં  $e$  વાળો એક અતિવલય છે.

**ઉદાહરણ 25 :** જેણી નાભિ (0, 1) હોય, નિયામિકાનું સમીકરણ  $x + 3 = 0$  હોય તથા ઉત્કેન્દ્રાં  $\sqrt{2}$  હોય તેવા અતિવલયનું સમીકરણ મેળવો.



**ઉકેલ :**  $SP^2 = e^2 PM^2$  પરથી,

$$\therefore x^2 + (y - 1)^2 = 2(x + 3)^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 2y + 1 = 2(x^2 + 6x + 9)$$

$$\therefore x^2 - y^2 + 12x + 2y + 17 = 0$$
 માત્રેલ અતિવલયનું સમીકરણ છે.

**ઉદાહરણ 26 :** ઉગમણિંદુનું  $(-1, -2)$  આગળ સ્થાનાંતર કરી સાબિત કરો કે સમીકરણ  $(x + 1)^2 - (y + 2)^2 = 16$  અતિવલય દર્શાવે છે. તેની ઉત્કેન્દ્રતા, નાભિઓનાં ધામ તથા નિયામિકાઓનાં સમીકરણ શોધો.

**ઉકેલ :** પ્રમાણિત સેકેતમાં  $x = x' - 1, y = y' - 2$  લેતાં,

$$(x')^2 - (y')^2 = 16$$

આ સમીકરણ લંબાતિવલય દર્શાવે છે.  $a = b = 4$  તથા  $e = \sqrt{2}$ .

$$\therefore \text{નાભિનાં ધામ } (\pm 4\sqrt{2}, 0) \text{ તથા નિયામિકાનાં સમીકરણ } x' \mp 2\sqrt{2} = 0 \quad (x' - y' \text{ પદતિમાં})$$

$$\therefore \text{મૂળ ધામ પદતિમાં નાભિનાં ધામ } (\pm 4\sqrt{2} - 1, -2) \text{ છે.}$$

$$\text{અને નિયામિકાનાં સમીકરણ } x + 1 \pm 2\sqrt{2} = 0 \text{ છે.}$$

**ઉદાહરણ 27 :** P એવું ચલવણી છે કે તેના એકબીજાથી 12 જેટલા અંતરે આવેલા નિયામિકાનું S તથા S' થી અંતરોનો તરફાપત્ર અવળ છે અને 8 જેટલો છે તો P નો બિંદુગઢ મેળવો.

**ઉકેલ :**  $|SP - S'P| = 2a = 8$

$$\therefore a = 4, SS' = 2c = 12. \text{ અથી } c = 6$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\text{છે, } b^2 = a^2(e^2 - 1) = 16\left(\frac{9}{4} - 1\right) = 36 - 16 = 20$$

$$\therefore \text{અતિવલયનું સમીકરણ } \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1 \text{ છે.}$$

**ઉદાહરણ 28 :** નોચેના અતિવલય માટે નાભિઓના ધામ, નિયામિકાઓનાં સમીકરણ, ઉત્કેન્દ્રતા, નાભિલંબનો લંબાઈ અને મુખ્ય અક્ષ તેમજ અનુંગ અક્ષની લંબાઈ શોધો :

$$(1) \quad x^2 - 16y^2 = 16 \qquad \qquad (2) \quad \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$$

$$(3) \quad \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1 \qquad \qquad (4) \quad x^2 - y^2 = 4$$

**ઉકેલ :** (1) સમીકરણને  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{1} = 1$  તરીકે લખતાં,  $a = 4, b = 1$

$$\text{છે, } b^2 = a^2(e^2 - 1), \quad 1 = 16(e^2 - 1)$$

$$\therefore e^2 - 1 = \frac{1}{16} \quad \text{અથવા} \quad e^2 = \frac{17}{16}$$

$$\therefore e = \frac{\sqrt{17}}{4}$$

$$\text{નાભિઓ : } (\pm ae, 0) = \left( \pm 4\left(\frac{\sqrt{17}}{4}\right), 0 \right) = (\pm\sqrt{17}, 0)$$

$$\text{નિયામિકાઓ : } x = \pm \frac{a}{e} \text{ i.e. } x = \pm 4\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$$

$$\therefore x = \pm \frac{16}{\sqrt{17}}$$
 નિયામિકાઓનાં સમીકરણ છે.

$$\text{नाभिलंबनी लंबाई} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{मुख्य अक्षनी लंबाई} = 2a = 8, \text{ अनुभव अक्षनी लंबाई} = 2b = 2$$

(2) अर्थाৎ,  $a^2 = 25, b^2 = 24$

$$\therefore b^2 = a^2(e^2 - 1)$$

$$\therefore 24 = 25(e^2 - 1)$$

$$\therefore e^2 - 1 = \frac{24}{25}$$

$$\therefore e^2 = \frac{49}{25}$$

$$\therefore e = \frac{7}{5}$$

$$\text{नाभिओ : } (\pm ae, 0) = \left( \pm 5\left(\frac{7}{5}\right), 0 \right) = (\pm 7, 0)$$

$$\text{नियामिकाओ : } x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{5}{\left(\frac{7}{5}\right)} = \pm \frac{25}{7}$$

$$\therefore \text{नियामिकाओंनां समीकरण } x = \pm \frac{25}{7} \text{ ठ.$$

$$\text{नाभिलंबनी लंबाई} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(24)}{5} = \frac{48}{5}$$

$$\text{मुख्य अक्षनी लंबाई} = 2a = 10$$

$$\text{अनुभव अक्षनी लंबाई} = 2b = 2\sqrt{24} = 4\sqrt{6}$$

(3) आ अतिवलयनी नियामिकाओ X-अक्षने समांतर छ. अर्थात्,  $a^2 = 9, b^2 = 25$

$$a^2 = b^2(e^2 - 1)$$

$$\therefore 9 = 25(e^2 - 1)$$

$$\therefore e^2 = 1 + \frac{9}{25} = \frac{34}{25}. \text{ अर्थात् } e = \frac{\sqrt{34}}{5}$$

$$\text{नाभिओ : } (0, \pm be) = \left( 0, \pm 5\left(\frac{\sqrt{34}}{5}\right) \right) = (0, \pm \sqrt{34})$$

$$\text{नियामिकाओ : } y = \pm \frac{b}{e} = \pm 5\left(\frac{5}{\sqrt{34}}\right) = \pm \frac{25}{\sqrt{34}}$$

$$\therefore y = \pm \frac{25}{\sqrt{34}} \text{ अतिवलयनी नियामिकाओंनां समीकरण छ.}$$

$$\text{नाभिलंबनी लंबाई} = \frac{2a^2}{b} = \frac{2 \cdot 9}{5} = \frac{18}{5}$$

$$\text{मुख्य अक्षनी लंबाई} = 2b = 10, \text{ अनुभव अक्षनी लंबाई} = 2a = 6$$

(4) समीकरण  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$  तरीके लप्ती शक्ति. आ लंबातिवलय छ.  $a^2 = b^2 = 4$

उत्कृष्टता :  $e = \sqrt{2}$ . नाभिओना याम  $(\pm 2\sqrt{2}, 0)$ . नियामिकाओंनां समीकरण  $x = \pm \sqrt{2}$

$$\text{नाभिलंबनी लंबाई } 2a = 4$$

$$\text{मुख्य अक्षनी लंबाई } 2a = 4, \text{ अनुभव अक्षनी लंबाई } 2b = 4$$

**ઉદાહરણ 29 :** નીચે આપેલ શરતો પ્રમાણે અતિવલયનાં પ્રમાણિત સમીકરણો મેળવો :

- (1) નાભિઓ  $(\pm 7, 0)$ , શિરોબિંદુઓ  $(\pm 5, 0)$
- (2) નાભિઓ  $(0, \pm 3)$ , ઉત્તેજનતા = 2
- (3) નાભિઓ વચ્ચેનું અંતર 16 (નાભિઓ X-અક્ષ પર છે), ઉત્તેજનતા =  $\sqrt{2}$

**ઉકેલ :** (1) નાભિઓ  $(\pm ae, 0) = (\pm 7, 0)$

$$\therefore ae = 7 \quad \text{(i)}$$

$$\text{શિરોબિંદુઓ } (\pm 5, 0) \text{ હોવાથી, } a = 5 \quad \text{(ii)}$$

$$\therefore ae = 5e = 7$$

$$\therefore e = \frac{7}{5}$$

$$\text{હવે, } b^2 = a^2(e^2 - 1) = 25\left(\frac{49}{25} - 1\right) = 24$$

$$\therefore \text{અતિવલયનું સમીકરણ } \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1 \text{ મળે.}$$

(2) નાભિઓ  $(0, \pm 3)$ , નાભિઓ Y-અક્ષ પર છે. આમ નિયામિકાનો X-અક્ષને સમાંતર થાય.

$$\text{હળી, } e = 2 \text{ આપેલું છે.}$$

$$\text{હવે, } be = 3$$

$$\therefore 2b = 3$$

$$\therefore b = \frac{3}{2}$$

$$\text{હવે, } a^2 = b^2(e^2 - 1) = \frac{9}{4}(4 - 1) = \frac{9}{4} \cdot 3 = \frac{27}{4}$$

$$\therefore \text{અતિવલયનું સમીકરણ } \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \text{ પ્રમાણે } \frac{y^2}{\frac{9}{4}} - \frac{x^2}{\frac{27}{4}} = 1 \text{ થાય.}$$

$$\therefore \frac{4y^2}{9} - \frac{4x^2}{27} = 1 \text{ માંગેલ અતિવલયનું સમીકરણ છે.}$$

(3) નાભિઓ વચ્ચેનું અંતર =  $2ae = 16$ . આથી  $ae = 8$  (i)

$$e = \sqrt{2}, \text{ આથી લંબાતિવલય છે.}$$

$$\therefore a\sqrt{2} = 8$$

$$a = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} = b$$

$$\therefore \text{અતિવલયનું સમીકરણ } \frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{32} = 1 \text{ અથવા } x^2 - y^2 = 32 \text{ થાય.}$$

### સ્વાધ્યાય 8.6

1. નીચે આપેલ અતિવલયોની નાભિઓના ધામ, નિયામિકાનાં સમીકરણો, નાભિલંબની લંબાઈ, મુખ્ય અક્ષ તેમજ અનુભૂત અક્ષની લંબાઈ શોધો.

- (1)  $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{25} = 1$       (2)  $x^2 - y^2 = 64$       (3)  $2x^2 - 3y^2 = 5$
- (4)  $9y^2 - 16x^2 = 144$       (5)  $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{39} = 1$

2. નીચેના પ્રત્યેક ક્રિસ્પમાં અતિવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ મેળવો તેમજ તેનાં પ્રચલ સમીકરણો લખો :
- ઉત્કેન્દ્રતા  $e = \frac{4}{3}$ , રિશોભિંદુઓ  $(0, \pm 7)$
  - નાભિઓ  $(\pm \sqrt{13}, 0)$ , ઉત્કેન્દ્રતા  $\frac{\sqrt{13}}{3}$
  - નાભિઓ  $(\pm 3\sqrt{5}, 0)$ , નાભિલંબની લંબાઈ = 8
  - નાભિઓ  $(0, \pm 8)$ , ઉત્કેન્દ્રતા  $\sqrt{2}$
  - $Y$ -અક્ષ પરની નાભિઓ વચ્ચેનું અંતર = 10, ઉત્કેન્દ્રતા =  $\frac{5}{4}$
3. જો  $e_1$  અને  $e_2$  અનુક્રમે  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  અને  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$  ની ઉત્કેન્દ્રતા હોય તો સાભિત કરો કે,  $e_1^2 + e_2^2 = e_1^2 e_2^2$ .
4. અતિવલયના રિશોભિંદુનું નાભિઓથી અંતર 9 અને 1 હોય તો અતિવલયનું સમીકરણ મેળવો.
5. અતિવલય  $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$  નાં પ્રચલ સમીકરણ લખો.

\*

### પ્રક્રિયા ઉદાહરણો :

**ઉદાહરણ 30 :** પરવલયાકારના ગૂલતા પુલના બે આધાર સંલો 30 મીટર ઊચા અને 200 મીટરના અંતરે આવેલા છે. પુલ તેની મધ્યમાં જરૂરીની 5 મીટર ઊચ્ચો છે. પુલના એક આધાર સંલની ઊચાઈ 11.25 મીટર હોય તો તેનું તેનથી અંતર શોધો.

**ઉક્તા :** આફુતિ 8.26માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે CAB પરવલયાકારનો ગૂલતો પુલ છે. તેનું કેન્દ્ર પરવલયનું રિશોભિંદુ છે. તેની ઊચાઈ 5 મીટર છે. A ને ઉગમભિંદુ તરીકે લઈએ અને  $\overleftrightarrow{OA}$  ને Y-અક્ષ તરીકે લઈએ તો પરવલયનું સમીકરણ  $x^2 = 4ay$  થાય. હવે, Oના યામ  $(0, -5)$ , આમ, ઉગમભિંદુનું સ્થાનાંતર O પર કરવાથી પરવલયનું સમીકરણ,

$$(x)^2 = 4a(y - 5) \quad (i)$$

આધાર સંલ C અને B માટે, તેમના યામો અનુક્રમે  $(-100, 30)$  અને  $(100, 30)$  આવેલા છે. આનો ઉપયોગ (i) માં કરતાં,

$$(100)^2 = 4a(30 - 5)$$

$$\therefore 10000 = 100a$$

$$\therefore a = 100$$

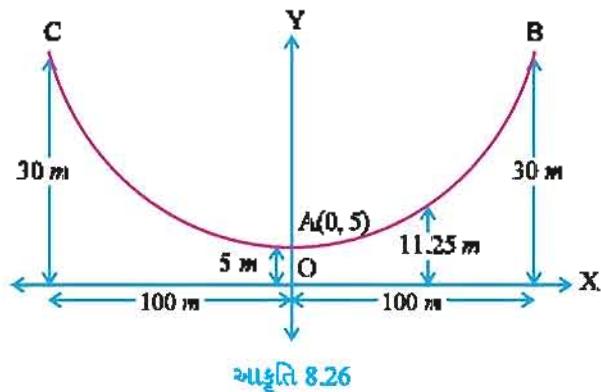
આમ, (i) પરથી પરવલયનું સમીકરણ  $x^2 = 400(y - 5)$  છે. (ii)

હવે, 11.25 મીટર ઊચાઈના આધાર સંલનું અંતર શોધવા માટે સમીકરણ (ii)માં  $y = 11.25$  નૂકાયાં,

$$x^2 = 400(11.25 - 5) = 400(6.25) = 2500$$

$$\therefore x = \pm 50$$

આમ, કેન્દ્રની બંને બાજુ, કેન્દ્રથી 50 મીટર અંતરે 11.25 મીટર ઊચાઈના આધાર સંલ આવેલા હોય.



**ઉદાહરણ 31 :** 12 મી લંબાઈનો એક સાધિયો એવી રીતે ખસે છુટ, કે જેવી તેનાં અંત્યાંદ્રુંથો પામાશો પર રહે. X-અખ પરના અંત્યાંદ્રુંથી 3 મી અંતરે આવેલા સાધિયા પરના અંદુનો અંદુગણ શોધો.

**ઉકેલ :** ખારો કે, 12 મી લંબાઈના સાધિયા  $\overline{AB}$  નાં અંત્યાંદ્રુંથો A(0, 0) અને B(0, b) છે. અંદુ A થી 3 મી અંતરે આવેલું સાધિયા પરનું અંદુ P(h, k) છે.

આમ,  $AP = 3$  મી અને  $PB = 9$  મી.

$\therefore$  અંદુ P એ  $\overline{AB}$  નું A તરફથી 1 : 3ના ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે.

$$\therefore h = \frac{3a}{4} \text{ અને } k = \frac{b}{4}$$

$$\therefore a = \frac{4h}{3} \text{ અને } b = 4k$$

એવે કાટકોણ  $\Delta AOB$ માં  $OA^2 + OB^2 = AB^2$ . આપી,  $a^2 + b^2 = 144$

$$\therefore \frac{16h^2}{9} + \frac{16k^2}{1} = 144$$

$$\therefore \frac{h^2}{\frac{81}{16}} + \frac{k^2}{\frac{9}{16}} = 1.$$

$\therefore$  આપું અંદુ P નો અંદુગણ  $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{9} = 1$  છે. અને તે એક ઉપવલય છે.

**ઉદાહરણ 32 :** પૃથ્વીનો સૂર્યની આસપાસનો ગતિમાર્ગ એક ઉપવલય છે. સૂર્ય આ ઉપવલયની એક નાલિ છે. જો આ ઉપવલયના પ્રધાન અંશની લંબાઈ 300 મિલિયન કિમી હોય અને ગતિમાર્ગની ઉત્કેન્દ્રતા 0.0167 હોય, તો પૃથ્વીનું સૂર્યથી ન્યૂનતમ અને મહત્તમ અંતર શોધો.

**ઉકેલ :** અહીં સૂર્ય ઉપવલયની નાલિ S છે તથા પૃથ્વી ઉપવલય પરનું અંદુ P છે.  $SP = a(1 - e \cos \theta)$  થામ.

$$\text{એટા, } 2a = 3 \times 10^8 \text{ કિમી}$$

$$\therefore a = 1.5 \times 10^8 \text{ કિમી}$$

$$\therefore SP = 1.5 \times 10^8 \text{ કિમી} (1 - 0.0167 \cos \theta) \text{ કિમી}$$

અહીં  $\cos \theta = 1$  ત્યારે અંતર  $SP$  ન્યૂનતમ થામ અને  $\cos \theta = -1$  ત્યારે અંતર  $SP$  મહત્તમ થામ.

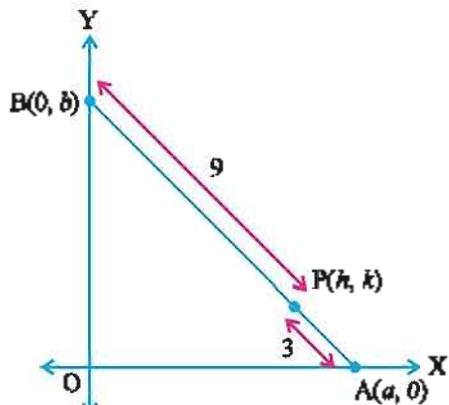
$$\text{ન્યૂનતમ } SP = 1.5 \times 10^8 (1 - 0.0167)$$

$$= 147,495,000 \text{ કિમી}$$

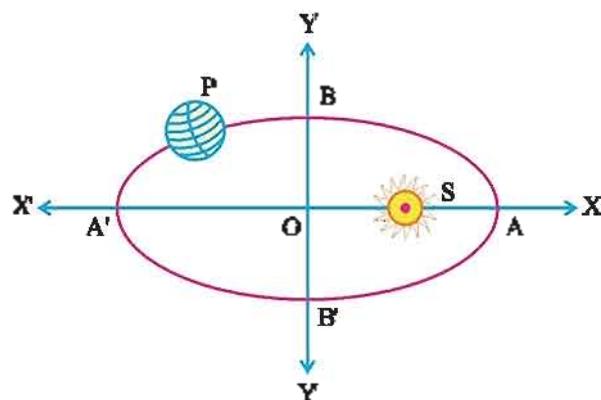
(પૃથ્વી મુખ્ય અંતરાલ બીજા અંત્યાંદ્રુંથી આગળ હોય ત્યારે પૃથ્વીનું સૂર્યથી અંતર મહત્તમ થામ.)

પૃથ્વીનું સૂર્યથી મહત્તમ અંતર

$$1.5 \times 10^8 (1 + 0.0167) \text{ કિમી} = 152,505,000 \text{ કિમી}$$

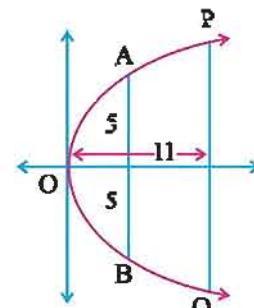


આકૃતિ 8.27



આકૃતિ 8.28

- જેના વ્યાસંત રિંકુઓ (1, 2), (2, -3) હોય તેવા વર્તુળનું સમીક્ષરણ મેળવો.
  - રિંકુઓ (4, 0), (-4, 0) અને (0, 8) માંથી પસાર ધતા વર્તુળનું સમીક્ષરણ મેળવો.
  - વર્તુળ  $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 5 = 0$  ને સમ્પોદ્ધી હોય અને X-અક્ષને સ્પર્શિત હોય તેવા વર્તુળનું સમીક્ષરણ મેળવો.
  - પરવલય  $y^2 = x$  ની નાભિ અને નાભિવિલંબની લંખાઈ શોધો.
  - જેની નાભિઓ X-અક્ષ પર હોય અને એકબીજાથી 8 અંતરે હોય તથા જેની ઉત્કેન્દ્રતા  $\frac{1}{3}$  હોય તેવા ઉપવલયનું પ્રમાણિત સમીક્ષરણ મેળવો.
  - જેની નિયામિકા X-અક્ષને સમાંતર હોય તેવા અતિવલયનું પ્રમાણિત સમીક્ષરણ મેળવો.
  - જેની નાભિ (-4, 0) હોય અને નિયામિકા  $x = 2$  હોય તેવા પરવલયનું સમીક્ષરણ વ્યાખ્યાની મદદથી મેળવો.



અંકડા 8.29

9. એક પરવલયાકાર પરાવર્તકનો વ્યાસ 24 સેમી છે અને ઉંચાઈ 6 સેમી છે. તેની નાખિના ધામ શોધો. તે ક્યા જ્ઞાને છે ?
  10. એક અર્ધ-ઉપવલયાકારની ક્રમાન 10 મી પહોણી અને તેની ઉંડ પાસે ઉંચાઈ 4 મી છે. આ ક્રમાનની તેના એક છેડેણી 2 મી અંતરે ઉંચાઈ શોધો.
  11. રમકડાની એક ટ્રેન, જેવી રીતે કરે છે કે જેથી તેના બે સિગનલોએ અંતરનો સરવાળો અચળ રહે અને 10 મી ફેટલો થાય, બે સિનબલો વચ્ચેનું અંતર 8 મી હોય તો તે ટ્રેનનો ગતિપથ મેળવો.
  12. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને

માં લખો :

- (1) વર્તુળો  $x^2 + y^2 + 6x - 14y = 1$  અને  $x^2 + y^2 - 4x + 10y = 2$  ના કેન્દ્રો જેણાં વ્યાસાંત નિંદુઓ હોય તેવા વર્તુળનું સમીક્ષણાં

(a)  $x^2 + y^2 + x - 2y - 41 = 0$       (b)  $x^2 + y^2 + x + 2y - 41 = 0$   
 (c)  $x^2 + y^2 + x + 2y + 41 = 0$       (d)  $x^2 + y^2 - x - 2y - 41 = 0$

(2) વર્તુળ  $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 5 = 0$  ના વ્યાસનું એક અંતયિંદુ (-3, 2), હોય તો બીજા અંતયિંદુના પામ ..... હોય.

(a) (5, 3)      (b) (6, 2)      (c) (1, -8)      (d) (11, 2)

(3) જેનું કેન્દ્ર X-અક્ષ પર, ટ્રિજયા 5 હોય અને જે (2, 3) માંથી પસ્સાર થતું હોય તેવા વર્તુળનું સમીક્ષણાં

(a)  $x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$       (b)  $x^2 + y^2 - 12y + 11 = 0$   
 (c)  $x^2 + y^2 - 12x - 11 = 0$       (d)  $x^2 + y^2 - 4x + 12y = 0$

(4) (4, 5) કેન્દ્રવાખા અને વર્તુળ  $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 12$  ના કેન્દ્રમાંથી પસ્સાર થતા વર્તુળનું સમીક્ષણાં

(a)  $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 1 = 0$       (b)  $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 1 = 0$   
 (c)  $x^2 + y^2 - 8x + 10y - 1 = 0$       (d)  $x^2 + y^2 - 8x - 10y - 1 = 0$

- (5) (1, 2) કેન્દ્રથાળી અને બિંદુ (4, 6) માંથી પસાર થતા વર્તુળનું કોન્ટ્રક્ષણ ..... થાય.
- (a)  $30\pi$  ચો એકમ (b)  $5\pi$  ચો એકમ (c)  $15\pi$  ચો એકમ (d)  $25\pi$  ચો એકમ
- (6) બિંદુઓ (0, 0), (a, 0), (0, b) માંથી પસાર થતા વર્તુળના કેન્દ્રના યામ ..... થાય.
- (a)  $\left(\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right)$  (b)  $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$  (c) (b, a) (d) (a, b)
- (7) સમીક્ષણ પરવલય  $x^2 = 4ay$  નાં પ્રચલ સમીક્ષણ ..... છે.
- (a)  $x = at^2$ ,  $y = at^2$  (b)  $x = 2at$ ,  $y = 2at$  (c)  $x = 2at$ ,  $y = at^2$  (d)  $x = 2at^2$ ,  $y = at$
- (8) રેખા  $2x - 3y + 8 = 0$  પરવલય  $y^2 = 8x$  ને P અને Q માં છે છે.  $\overline{PQ}$  ના મધ્યબિંદુના યામ ..... થાય.
- (a) (2, 4) (b) (8, 8) (c) (5, 6) (d) (6, 5)
- (9) જેના નાભિલંબની લંબાઈ ગૌડ્ય અક્ષ કરતાં અડધી હોય તેવા ઉપવલયની ઉત્કેન્દ્રતા ..... થાય.
- (a)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  (b)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (c)  $\frac{1}{2}$  (d)  $\sqrt{2}$
- (10) જેના ગૌડ્ય અક્ષની લંબાઈ નાભિઓ વચ્ચેના અંતર જેટલી હોય તેવા ઉપવલયની ઉત્કેન્દ્રતા ..... થાય.
- (a)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  (b)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$  (c)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (d)  $\frac{2}{\sqrt{3}}$
- (11) ઉપવલય  $9x^2 + 25y^2 = 225$  ની ઉત્કેન્દ્રતા .....
- (a)  $\frac{2}{5}$  (b)  $\frac{4}{5}$  (c)  $\frac{3}{5}$  (d) 0
- (12) ઉપવલય  $4x^2 + 9y^2 = 1$  ના નાભિલંબની લંબાઈ .....
- (a)  $\frac{4}{9}$  (b)  $\frac{9}{4}$  (c)  $\frac{2}{9}$  (d)  $\frac{2}{3}$
- (13) ઉપવલય  $9x^2 + 4y^2 = 36$  ની એક નાભિ ..... છે.
- (a)  $(\sqrt{5}, 0)$  (b)  $(0, \sqrt{5})$  (c)  $(3\sqrt{5}, 0)$  (d)  $(0, 3\sqrt{5})$
- (14) ઉપવલય  $25x^2 + 9y^2 = 1$  ના પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ ..... છે.
- (a)  $\frac{2}{5}$  (b)  $\frac{2}{3}$  (c)  $\frac{1}{5}$  (d)  $\frac{1}{9}$
- (15) અતિવલય  $9x^2 - 16y^2 = 144$  ની નાભિઓ ..... છે.
- (a)  $(\pm 4, 0)$  (b)  $(0, \pm 4)$  (c)  $(\pm 5, 0)$  (d)  $(0, \pm 5)$
- (16) અતિવલય  $16x^2 - 9y^2 = 144$  ના નાભિલંબની લંબાઈ ..... છે.
- (a)  $\frac{32}{3}$  (b)  $\frac{16}{3}$  (c)  $\frac{8}{3}$  (d)  $\frac{4}{3}$
- (17) અતિવલય  $16y^2 - 9x^2 = 144$  ની ઉત્કેન્દ્રતા ..... છે.
- (a)  $\frac{5}{3}$  (b)  $\frac{3}{5}$  (c)  $\frac{5}{4}$  (d)  $\frac{4}{5}$

(18) अतिवलय  $x^2 - 4y^2 = 1$  नी उत्केन्द्रता ..... ?.

- (a)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       (b)  $\frac{\sqrt{5}}{2}$       (c)  $\frac{2}{\sqrt{3}}$       (d)  $\frac{2}{\sqrt{5}}$

(19) जो परवलय  $y^2 = 4ax$  बिंदु  $(2, -6)$  मांधी पसार थतो होय तो नाभिलंबनी लंबाई ..... थाय.

- (a) 9      (b) 16      (c) 18      (d) 8

(20) उपवलय  $5x^2 + 9y^2 = 45$  ना नाभिलंबनी लंबाई ..... ?.

- (a)  $\frac{5\sqrt{5}}{3}$       (b)  $\frac{5}{3}$       (c)  $\frac{2\sqrt{5}}{3}$       (d)  $\frac{10}{3}$

\*

### सारांश

आ प्रकरणमां आपणे नीयेना मुद्दाओनो अभ्यास कर्यो :

1. वर्तुणनु प्रमाणित सभीकरण  $x^2 + y^2 = r^2$  छ.

वर्तुणनु व्यापक सभीकरण  $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$  छ.

2. सभीकरण  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$  भाटे जो  $g^2 + f^2 - c > 0$  थाय तो ते वर्तुण दर्शावे छे, अन्यथा नही. जो ते वर्तुण दर्शावे तो तेनु केन्द्र  $(-g, -f)$  अने ग्रिज्या  $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$  थाय.

3. परवलयनु प्रमाणित सभीकरण  $y^2 = 4ax$ . आ परवलयनां प्रथल सभीकरण  $x = at^2, y = 2at, t \in \mathbb{R}$ . नाभिलंबनी लंबाई  $4|a|$ .

4. परवलयनी नाभिलेपा भाटे  $t_1 t_2 = -1$

5. परवलयनो अगत्यनो गुणधर्म  $\frac{1}{SP} + \frac{1}{SQ} = \frac{1}{|a|}$

6. उपवलयनु प्रमाणित सभीकरण  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . (a > b)

तेनी नाभिओ  $(\pm ae, 0)$  अने तेमने अनुरूप नियामिकाओनां सभीकरण  $x \mp \frac{a}{e} = 0$ . आ उपवलयनां प्रथल सभीकरण  $x = a\cos\theta, y = b\sin\theta; \theta \in (-\pi, \pi]$ , नाभिलंबनी लंबाई  $\frac{2b^2}{a}$ , प्रधान अक्षनी लंबाई  $2a$ ; गोष्ठा अक्षनी लंबाई  $2b$ .

7. उपवलयनी नाभिओ S अने S' होय अने P उपवलय परनु कोઈ पक्ष बिंदु होय तो  $SP + S'P = 2a$

8. अतिवलयनु प्रमाणित सभीकरण  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

नाभिओ  $(\pm ae, 0)$ , तेमने अनुरूप नियामिकाओ  $x \mp \frac{a}{e} = 0$

प्रथल सभीकरण  $x = a\sec\theta, y = b\tan\theta, \theta \in (-\pi, \pi] - \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

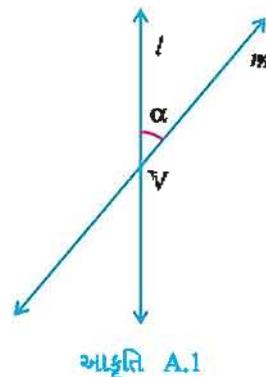
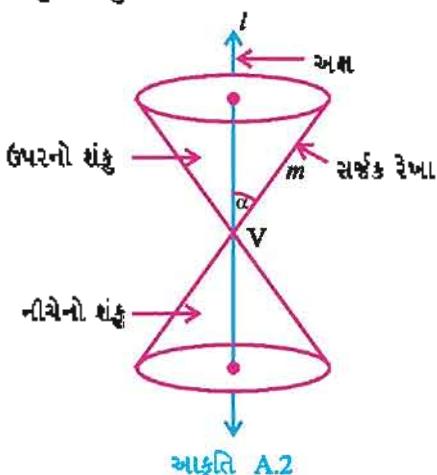
नाभिलंबनी लंबाई  $\frac{2b^2}{a}$

9. अतिवलयनो अगत्यनो गुणधर्म :  $|SP - S'P| = 2a$

— ♦ —

### દિશાંક અને સમતલનો છેદ :

ધ્યારો કે / એક નિયિત શિરોવંબ રેખા છે અને  $l$  મો અન્ય કોઈ રેખા છે. તે / ને નિયિત બિંદુ  $V$  માં છેદ છે. ધ્યારો કે / અને  $l$  વચ્ચેના ખૂઝાનું માપ  $\alpha$  ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ) છે. તે અધ્યક્તિ A.1માં દર્શાવેલ છે. ધ્યારો કે રેખા  $m$  ને / આસપાસ એવી રીતે પરિવ્રમજ આપવામાં આવે છે કે જેથી ખૂઝો  $\alpha$  અન્યાન રહે છે. આ રીતે સર્જતી સપાટીને શંકુ કહેવાય છે. રેખાઓનું છેદબિંદુ  $V$  શંકુને બે ભાગમાં વંદરે છે. આવી આવા શંકુને દિશાંક કરે છે, સરળતા ખાતર આપવો તેને શંકુ કહીશું.



અધ્યક્તિ A.1

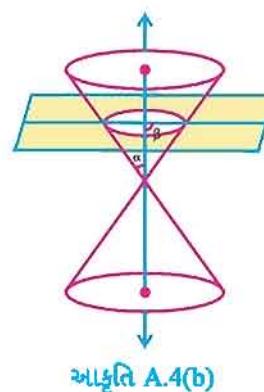
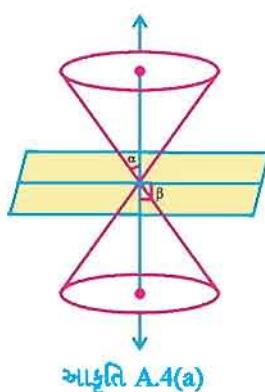
શંકુનો વ્યાપ બંને દિશામાં અનંત ઢોય છે. (અધ્યક્તિ A.2). બિંદુ  $V$  ને શંકુનું શિરોબિંદુ (Vertex) કહે છે. રેખા / ને શંકુનો અષ્ટ કહે છે અને રેખા  $l$  ની કોઈ પણ સ્થિતિમાં તેને શંકુની સર્જક રેખા (Generator) કહે છે. જ્યારે શંકુના ભાગને ફલક (Lateral surface) કહે છે. અહીં જુઓ કે શંકુને જોઈને રેખા  $l$  નિયિત કરી શકાય નહીં ખરેખર તો શંકુની સપાટી પરની કોઈ પણ રેખા રેખાને સર્જક રેખા તરીકે લઈ શકાય.

હવે શંકુના કોઈ સમતલ સાથેના છેદનો વિચાર કરીએ, આવા છેદને શાંકવ (Conic) કહે છે. અહીં શંકુનો છેદ લેવાનો હોવાથી નામ શાંકવ આપવામાં આવ્યું છે.

જ્યારે શંકુનો સમતલ સાથે છેદ લેવાનો હોય ત્યારે, સમતલનું સ્થાન તેજો શંકુના અષ્ટ સાથે બનાવેલ ખૂઝા વગેરેના આધ્યાત્મ, ઘણી બધી શક્યતાઓ રહેલી છે. અધ્યક્તિ A.3 માં દર્શાવ્યા ખૂઝાં ધ્યારો કે, સમતલ શંકુના શિરોવંબ અષ્ટ સાથે  $\beta$  ( $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ ) માપનો ખૂઝો રહે છે. હવે બે શક્યતાઓ જોઈએ : (1) સમતલ શંકુના શિરોબિંદુમાંથી પસાર થાય છે. અથવા (2) સમતલના શંકુના શિરોબિંદુમાંથી પસાર થતું નથી. આ શક્યતાઓ ખૂઝાં છેદ શિરોબિંદુ બને અથવા શંકુના શિરોબિંદુથી ઉપરના અથવા નીચેના ફલકમાં છેદગણ મળે.

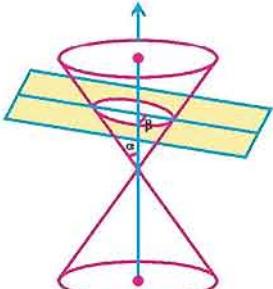
હવે આપણે છેદની વિશિષ્ટ પરિસ્થિતિનો અભ્યાસ કરીશું, દેખો પરિશીલિતમાં ઉપરોક્ત બંને શક્યતાઓની ચર્ચા કરીશું.

ધ્યારો કે સમતલ શંકુના અષ્ટ સાથે કટકોશ બનાવે છે. મેટલે કે,  $\beta = \frac{\pi}{2}$ . જો સમતલ શિરોબિંદુમાંથી પસાર થાય, તો બનેના છેદ શિરોબિંદુ મળે. (અધ્યક્તિ A.4 (a)) અને જો સમતલ શિરોબિંદુમાંથી પસાર ન થાય તો તેમનો છેદ વર્તૂલ થાય.

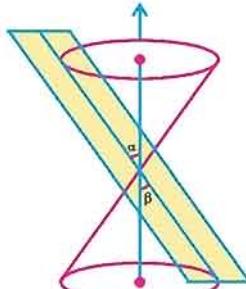


समतलना स्पान प्रभावो वर्तुण शंकुना उपरी फलक अथवा निम्न फलकमां मળे. (आकृति A.4 (b)) प्रथम उत्सामां छेद एक बिंदु मध्ये छे वर्तुणनु विसर्जन्त रूप छे.

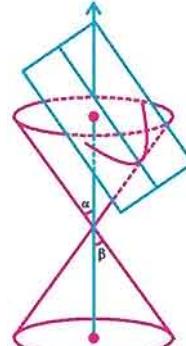
धारो के,  $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ . जो समतल शंकुना शिरोबिंदुमांधी पसार थाप तो छेद करी एक वर्षत शिरोबिंदु ज मध्ये, जो आम न होप तो छेद उत्पत्तय मग्न. अहो पक्ष निंदु ए उपवलयनु विसर्जन्त रूप छे. (आने साहशा करवानो प्रयत्न करो) (आकृति A.5(a)).



आकृति A.5(a)



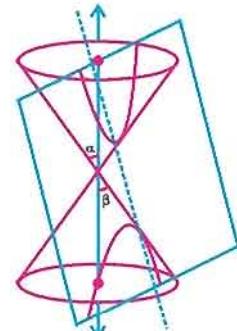
आकृति A.5(b)



आकृति A.5(c)

इये जो  $\alpha = \beta$  नो विचार करीने. आ उत्सामां समतल सर्जक रेखाने समांतर होय. जो समतल शिरोबिंदुमांधी पसार थाप तो छेद सुरेखा मग्न. (आकृति A.6). जुझो के छेदमां मग्नेक सुरेखा शंकुना एक सर्जक रेखा ज छे. जो शिरोबिंदु समतलमां न होप, तो आकृति A.5(c) मां दर्शव्या भुजब छेद परवत्तय मग्न. प्रथम उत्सामां मग्नेली रेखा परवलयनु विसर्जन्त रूप छे.

अंतमां,  $\beta < \alpha$  नो विचार करीने. आ उत्सामां समतल बने फलकने छेद छे, जे अपागणना बने उत्सामां बन्यु न हत्तु, आ छेद गणा अतिवलय छ अने तेने बे शाखाओ छे, जे आकृति A.6 मां दर्शवेल छे. अहो पक्ष विसर्जन्त उत्सो  $\beta = 0$  मां मध्ये छे, आमां समतल शंकुना शिरोबिंदुमांधी पसार थाप छे अने छेद, रेखापुऱ्म मध्ये छे.



आकृति A.6



Some of Bhaskara's contributions to mathematics include the following :

- A proof of the Pythagorean theorem by calculating the same area in two different ways and then cancelling out terms to get  $a^2 + b^2 = c^2$ .
- In *Lilavati*, solutions of quadratic, cubic and quartic indeterminate equations are explained.
- Solutions of indeterminate quadratic equations (of the type  $ax^2 + b = y^2$ ).
- A cyclic *Chakravala* method for solving indeterminate equations of the form  $ax^2 + bx + c = y$ . The solution to this equation was traditionally attributed to William Brouncker in 1657, though his method was more difficult than the *chakravala* method.
- The first general method for finding the solutions of the problem  $x^2 - ny^2 = 1$  (so-called "Pell's equation") was given by Bhaskara II.

## ત્રિપરિમાણીય ભૂમિતિ

*As far as the laws of mathematics refer to reality they are not certain and as far as they are certain they do not refer to reality.*

— Albert Einstein

### 9.1 પ્રાસ્તાવિક

સત્તરબી સદીની શકુભાતમાં ફેન્ચ ગણિતશાસ્ત્રી રેને દ'કર્ટે (René Descartes) અને તે જ સમયગ્રાળમાં ફર્મા (Fermat) એ સમતલમાં ધામલ્યુમિતિની શકુભાત કરી હતી. તેને વ્યવસ્થિત કરવાનું કાર્ય 18મી સદીમાં બર્નૂલી (Bernoulli) અને ઓઈલર (Euler) દ્વારા કરવામાં આવ્યું હતું. 19મી સદીમાં તેનું ઉચ્ચ પરિમાણમાં વ્યાપ સ્વરૂપ ઉપયોગમાં આવ્યું હતું. અને તેનો રસ્તાપ્રદ ઉપયોગ ગઈ સદીમાં કરવામાં આવ્યો હતો.

આ પ્રકરણમાં ગણિત તથા વિજ્ઞાનમાં ઉપયોગી એવા સદિશોની પાયાની સમજજ્ઞ મેળવીશું. આ ઉપરાંત સમતલમાંની ધામલ્યુમિતિનો ત્રિપરિમાણીય વિસ્તાર કરીશું એટલે કે અવકાશમાં ધામલ્યુમિતિની ચર્ચા કરીશું. અવકાશમાં આવેલ ઘન પદાર્થો અને આપણો આસપાસના અવકાશમાં આવેલો વસ્તુઓના અભ્યાસમાં આ સમજજ્ઞ ઉપયોગી છે. ત્રિપરિમાણીય ભૂમિતિ માટે આપણો સદિશોનો સાધન તરીકે ઉપયોગ કરીશું.

### 9.2 સદિશો

અમૃક ભૌતિક રચિયોના પૂર્ણ વર્ણન તેમજ તેના ઉપયોગ માટે દિશા અને માન બંનેની જરૂર પડે. આવી રચિયે સદિશ (vectors) કહેવાય છે. વેગ એ સદિશ છે કારણ કે તેના પૂર્ણ અર્થ માટે માન તેમજ દિશા બંનેની જરૂર પડે. અન્યથા તેનો અર્થ અધૂરો રહે. સંકર સંખ્યાની આર્ગન્ડ સમતલમાં રજુભાત વિશે તો આપણો જાણોએ જ છીએ. તેની પ્રૂધીય રજુભાત  $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$  માં બે અગ્રાત્યના પ્રચલ  $r$  તથા  $\theta$  છે.  $r$  તેનું માન છે તથા  $\theta$  પરથી દિશા નક્કી ધાય છે અને સંકર સંખ્યાની રજુભાત મળે છે. આમ પ્રત્યેક શૂન્યેતર સંકર સંખ્યા એક સદિશ છે અને તેને માન તથા દિશા બંને છે. પણ કે દેવ પૂર્વ તરફ 300 મી ચાલે તથા ઉત્તર તરફ 400 મીટર ચાલે છે. આમ તેના મૂળ સ્થાનથી અંતિમ સ્થાનની માહિતી મેળવવા તેણે ચાલેલાં બંને અંતર તથા દિશા જાણવા જરૂરી છે. આ પણ સદિશની એક પ્રાથમિક ઘટના છે.

ગણિતમાં પણ જેમને માન અને દિશા બંને હોય તેવી રચિયોનો વિચાર કરી શકાય. દાખલા તરીકે, આપણે વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો કમયુક્ત જોડીયોના ગણ તરીકે  $R^2$  થી માહિતગાર છીએ. આપણો જાણીએ છીએ કે,  $R^2$  અને સમતલના બિંદુઓ

ઘણે એક-એક સંગતતા છે. બિંદુ O(0, 0)ને વિગમબિંદુ લઈ, O સિવાયના કોઈ પણ ઘટક દાત, (1, -2) સાથે માન અને દિશા સાંકળી શકીએ. ધારો કે બિંદુ P એ (1, -2)નું સમતલમાં નિરૂપણ કરે છે, તો (1, -2) સાથે  $\overrightarrow{OP}$  લંબાઈ (એટલે કે  $OP = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2}$ ) અને  $\overrightarrow{OP}$ ની દિશા સાંકળી શકાય. આમ, (1, -2) ને સાદિશ તરીકે લઈ શકાય, તે જ રીતે કમયુક્ત ત્રયના ગણ R<sup>3</sup> ના ઘટકોને પણ સાદિશ તરીકે લઈ શકાય.

R<sup>2</sup> અથવા R<sup>3</sup> ના ઘટકોને સાદિશ તરીકે લઈ તેમના સમુચ્ચય R<sup>2</sup> અથવા R<sup>3</sup> ને ‘સાદિશ અવકાશ’ તરીકે લઈ શકાય.

### 9.3 R<sup>2</sup> અને R<sup>3</sup>માં સદિશો

R<sup>2</sup> અને R<sup>3</sup> ને અનુક્રમે વાસ્તવિક સંખ્યાઓની કમયુક્ત યુગ્મ તથા ત્રયના ગણ તરીકે લઈ, R<sup>2</sup> અથવા R<sup>3</sup> ના ઘટકોને રૂધી દર્શાવીશું. આમ, R<sup>3</sup> નો ઘટક  $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , જ્યારે R<sup>2</sup> નો ઘટક  $\bar{x} = (x_1, x_2)$  લઈશું.

સૌ પ્રયત્ન આપણે R<sup>2</sup> અને R<sup>3</sup> માં બે ઘટકોની સમાનતા વ્યાખ્યાપિત કરીશું.

R<sup>2</sup> માં જો  $x_1 = y_1$  અને  $x_2 = y_2$  હોય, તો  $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$  લઈશું.

R<sup>3</sup> માં જો  $x_1 = y_1$ ,  $x_2 = y_2$  અને  $x_3 = y_3$  હોય, તો  $(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$  લઈશું.

આમ, R<sup>2</sup> માં (1, 2) અને (2, 1) લિન્ન ઘટકો છે.

હવેની ચર્ચામાં આપણે R<sup>3</sup> નો વિચાર કરીશું. આ લખાં જ પરિષ્કારો R<sup>2</sup> માં પણ સત્ય છે.

**વ્યાખ્યા :** ધારો કે,  $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$  અને  $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$  એ R<sup>3</sup> ના બે ઘટકો છે. તેમનો સરવાળો  $\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$  હી વ્યાખ્યાપિત થાય છે. આમ, જો  $\bar{z} = (z_1, z_2, z_3)$  તથા  $\bar{z} = \bar{x} + \bar{y}$  હોય, તો  $z_1 = x_1 + y_1$ ,  $z_2 = x_2 + y_2$ ,  $z_3 = x_3 + y_3$ .

સ્પષ્ટ છે કે, જો  $\bar{x} \in R^3$ ,  $\bar{y} \in R^3$  હોય, તો  $\bar{x} + \bar{y} \in R^3$  એટલે કે, ઉપર વ્યાખ્યાપિત કરેલ સરવાળો સંવૃતાતાનો ગુણવર્મ ધરાવે છે.  $\bar{x} + \bar{y}$ ને  $\bar{x}$  અને  $\bar{y}$ નો સરવાળો કહેવાય છે.

**વ્યાખ્યા :** ધારો કે  $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ .  $k \in R$ .  $k$  વડે  $\bar{x}$  નો ગુણાકાર,  $k\bar{x} = (kx_1, kx_2, kx_3)$  દ્વારા વ્યાખ્યાપિત થાય છે.

દેખીતું છે કે,  $k \in R$  અને  $\bar{x} \in R^3$  તો  $k\bar{x} \in R^3$ .

#### કેટલાંક દેખીતાં પરિષ્કારો :

કોઈ પણ  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in R^3$  અને  $k, l \in R$  માટે,

(i)  $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$  (કમનો નિયમ)

(ii)  $\bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}) = (\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z}$  (જૂથનો નિયમ)

(iii) એક ઘટક  $\bar{0} = (0, 0, 0)$  મળે છે, જેથી  $\bar{0} = (0, 0, 0)$  માટે  $\bar{x} + \bar{0} = \bar{x}$  (તટસ્થ ઘટકનું અસ્તિત્વ)  
તટસ્થ ઘટક  $\bar{0}$  અનન્ય છે.

(iv) પ્રત્યેક  $\bar{x} \in R^3$  માટે  $\bar{y} \in R^3$  મળે જેથી  $\bar{x} + \bar{y} = \bar{0}$  (વિરોધી ઘટકનું અસ્તિત્વ)

જો  $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$  હોય, તો  $\bar{y} = (-x_1, -x_2, -x_3)$  લેવાથી  $\bar{x} + \bar{y} = \bar{0}$  સાબિત કરી શકાય.

$\bar{y}$  ને  $\bar{x}$  નો વિરોધી ઘટક કહે છે અને તે પ્રત્યેક  $\bar{x}$  ને સંગત અનન્ય છે.  $\bar{x}$  ના વિરોધી ઘટક માટે સંકેત  $(-\bar{x})$  વપરાય છે.

$\therefore -\bar{x} = (-x_1, -x_2, -x_3)$

(v)  $k(\bar{x} + \bar{y}) = k\bar{x} + k\bar{y}$

(vi)  $(k + l)\bar{x} = k\bar{x} + l\bar{x}$

(vii)  $(kl)\bar{x} = k(l\bar{x})$

(viii)  $1\bar{x} = \bar{x}$ .

ઉપરોક્ત ગુણવર્માઓ વાળા ગણ  $R^3$  ને  $R$  ઉપરનો સદિશ અવકાશ (Vector Space) કહે છે. યોગ્ય રીતે વ્યાખ્યાયિત સરવાળા અને  $R$ ના ઘટકો વડે અદિશ ગુણકાર વાળા આ ગુણવર્માવણા ઘણા સદિશ અવકાશો હોય છે. ગણિતશાસ્ત્રની પરિભાષામાં સદિશ અવકાશના ઘટકોને સદિશ (Vector) કહેવાય છે. આમ  $R^3$  નો કોઈ પણ ઘટક સદિશ કહેવાય છે.  $R^2$  પણ  $R$  ઉપરનો સદિશ અવકાશ છે.

$R^3$  (અથવા  $R^2$ ) માં વ્યાખ્યાયિત ઉપરના સરવાળાને સદિશ સરવાળો (Vector Addition) કહેવાય છે. જ્યારે  $R^3$  ને (અથવા  $R^2$ )  $R$  ઉપરના સદિશ અવકાશ તરીકે લઈએ ત્યારે  $R$  ના ઘટકોને અદિશ (Scalar) કહેવાય છે, આ પરિપ્રેક્ષ્યમાં વાસ્તવિક સંખ્યાઓ અદિશ રાશિઓ છે. આથી,  $k \in R$ ,  $\bar{x} \in R^3$  માટે  $k\bar{x}$  ને સદિશનો અદિશ વડે ગુણકાર કહે છે. અહીં ગુણકાર  $k\bar{x}$  એ સદિશ છે.  $\bar{0} = (0, 0, 0)$  ને શૂન્ય સદિશ કહે છે.

#### 9.4 સદિશનું માન

જો  $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$  હોય તો રોના માનની વ્યાખ્યા  $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$  તરીકે આપવામાં આવે છે અને રોના માનને  $|\bar{x}|$  વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

$$\text{આમ, } |\bar{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

આ જ રીતે,  $R^2$  માંના સદિશ  $\bar{x}$ , એટલે કે  $\bar{x} = (x_1, x_2)$  માટે,  $|\bar{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ .

નીચેનાં પરિણામો સ્વયં સ્પષ્ટ છે :

$$(1) |\bar{x}| \geq 0 \text{ કરશું કે, } |\bar{x}| = \sqrt{x_1^2 - x_2^2 - x_3^2} \geq 0$$

$$(2) |\bar{x}| = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$$

$$(3) |k\bar{x}| = |(kx_1, kx_2, kx_3)|$$

$$= \sqrt{k^2 x_1^2 - k^2 x_2^2 + k^2 x_3^2}$$

$$= \sqrt{k^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}$$

$$= \sqrt{k^2} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$|k\bar{x}| = |k| |\bar{x}|.$$

અહીં  $\sqrt{k^2} = |k|$  એ વાસ્તવિક સંખ્યા કંઠો માનાંક છે અને

$$|\bar{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \text{ સદિશ } \bar{x} \text{ નું માન છે.}$$

**વ્યાખ્યા :** કોઈ સદિશ  $\bar{x}$  માટે  $|\bar{x}| = 1$  હોય તો તેને એકમ સદિશ કહેવાય છે.

$R^2$  માં એકમ સદિશના કેટલાંક ઉદાહરણો આ પ્રમાણે છે.  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, -1)$ ,  $\alpha \in R$  માટે  $(\sin\alpha, \cos\alpha)$

$R^2$  માં એકમ સદિશો છે.  $R^3$  માં કેટલાંક ઉદાહરણો આ પ્રમાણે છે.  $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ .

$\alpha \in R$  માટે  $(\cos\theta \sin\alpha, \cos\theta \cos\alpha, \sin\theta)$  એ  $R^3$  માં એકમ સદિશો છે.

**ઉદાહરણ 1 :** જો  $\bar{u} = (3, -1, 4)$ ,  $\bar{v} = (1, -2, -3)$  હોય, તો  $3\bar{u} + \bar{v}$  મેળવો.

$$\text{ઉકેલ : } 3\bar{u} + \bar{v} = 3(3, -1, 4) + (1, -2, -3)$$

$$= (9, -3, 12) + (1, -2, -3)$$

$$= (9 + 1, -3 - 2, 12 - 3) = (10, -5, 9)$$

**ઉદાહરણ 2 :**  $\bar{x} = (1, -1, 3)$ ,  $\bar{y} = (1, 1, 1)$  હીએટ, તો  $\bar{x} - 2\bar{y}$  મેળવો.

$$\begin{aligned}\text{ઉકેલ : } \bar{x} - 2\bar{y} &= \bar{x} + (-2)\bar{y} \\ &= (1, -1, 3) + (-2)(1, 1, 1) \\ &= (1, -1, 3) + (-2, -2, -2) \\ &= (1 - 2, -1 - 2, 3 - 2) = (-1, -3, 1)\end{aligned}$$

**ઉદાહરણ 3 :** સાંબિત કરો કે,  $R^3$  ના સાંદર્ભોને  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  માટે  $\bar{x} + \bar{y} = \bar{x} + \bar{z} \Rightarrow \bar{y} = \bar{z}$

$$\begin{aligned}\text{ઉકેલ : } \text{ધારો } \text{કે } \bar{x} = (x_1, x_2, x_3), \bar{y} = (y_1, y_2, y_3) \text{ અને } \bar{z} = (z_1, z_2, z_3) \text{ અને } \bar{x} + \bar{y} = \bar{x} + \bar{z} \Rightarrow \bar{y} = \bar{z} \\ \therefore (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2, x_3) + (z_1, z_2, z_3) \\ \therefore (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) = (x_1 + z_1, x_2 + z_2, x_3 + z_3) \\ \therefore x_1 + y_1 = x_1 + z_1, x_2 + y_2 = x_2 + z_2, x_3 + y_3 = x_3 + z_3 \\ \therefore y_1 = z_1, y_2 = z_2, y_3 = z_3 \\ \therefore (y_1, y_2, y_3) = (z_1, z_2, z_3) \\ \therefore \bar{y} = \bar{z}\end{aligned}$$

**બીજુ રીત :**

$$\begin{aligned}\bar{x} + \bar{y} &= \bar{x} + \bar{z} \\ \therefore (-\bar{x}) + (\bar{x} + \bar{y}) &= (-\bar{x}) + \bar{x} + \bar{z} \quad (-\bar{x} \text{ અનન્ય છે.)} \\ \therefore (-\bar{x} + \bar{x}) + \bar{y} &= (-\bar{x} + \bar{x}) + \bar{z} \\ \therefore \bar{0} + \bar{y} &= \bar{0} + \bar{z} \\ \therefore \bar{y} &= \bar{z}\end{aligned}$$

**ઉદાહરણ 4 :** ઉકેલો :  $x(3, 1) + y(4, 2) = (1, 0)$

$$\begin{aligned}\text{ઉકેલ : } x(3, 1) + y(4, 2) = (1, 0) &\Leftrightarrow (3x, x) + (4y, 2y) = (1, 0) \\ &\Leftrightarrow (3x + 4y, x + 2y) = (1, 0) \\ &\Leftrightarrow 3x + 4y = 1, x + 2y = 0\end{aligned}$$

$$\therefore x = 1, y = -\frac{1}{2}$$

### સ્વાધ્યાય 9.1

**1.** નીચેના સરવાળા મેળવો :

- (1)  $x_1(1, 0) + x_2(0, 1); (x_1, x_2 \in R)$
- (2)  $x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1); (x, y, z \in R)$
- (3)  $2(1, 2, 1) + 3(1, -2, 0)$
- (4)  $2(1, -1, -1) - 2(-1, 1, 1)$
- (5)  $-2(1, 2, 3) + (1, 0, -1)$
- (6)  $3(1, -1, 0) - (2, 2, 2)$

**2.** નીચેના સમીકરણો  $x$  અને  $y$  માટે ઉકેલો :

- (1)  $x(3, 2) + y(1, -1) = (2, 3)$
- (2)  $x(1, 1) + y(1, -1) = (0, 0)$
- (3)  $y(1, 2) = x(3, 1) + (1, 3)$
- (4)  $x(1, 0) + y(0, 1) = \bar{0}$

**3.** નીચેના સાંદર્ભોનાં માન મેળવો :

- (1)  $(1, 1, 1)$
- (2)  $(1, -1, -1)$
- (3)  $(3, -4, 0)$
- (4)  $(-1, -2, -3)$
- (5)  $(2, 3, -5)$
- (6)  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

4. નીચે આપેલા સદિશો રૂ અને  $\bar{y}$  માટે  $|\bar{x} + \bar{y}| \leq |\bar{x}| + |\bar{y}|$  શક્યાંતર.
- $\bar{x} = (1, -1, 2), \bar{y} = (1, 2, 4)$
  - $\bar{x} = \left(\frac{-3}{2}, 9, -9\right), \bar{y} = (-1, 6, -6)$
5.  $\bar{u} = (2, 3)$  અને  $\bar{v} = (2k, k+2)$  સમાન સદિશો હોય, તો કણું મૂલ્ય શોધો.
6.  $\bar{u} = \left(\frac{-1}{2}, \frac{3}{5}, 0\right)$  અને  $\bar{v} = \left(\frac{1}{6}, \frac{-2}{3}, 0\right)$  હોય, તો  $3\bar{u} - 2\bar{v}$  શોધો.

\*

### 9.5 સદિશની દિશા

અગાઉ જ્ઞાન્યા મુજબ ભૌતિકશાસ્ત્રમાં સદિશની સાથે તેના માન અને દિશા સંગત કરવામાં આવે છે. હવે આપણે પ્રત્યેક શૂન્યેતર સદિશ સાથે દિશાને સંઝીશું આપણે આ ચર્ચાને બે શૂન્યેતર સદિશોની દિશાની સમાનતા, વિરુદ્ધ દિશા પરાવતાં બે શૂન્યેતર સદિશો અને લિન્ન દિશા પરાવતાં બે શૂન્યેતર સદિશો વ્યાખ્યાપિત કરવા પૂર્તું સીમિટ રાજીશું આ ચર્ચા  $R^2$  અથવા  $R^3$  માં સદિશોનો બૌભિતિક સમજશરીર ઉપયોગી થશે.

પારો કે,  $\bar{x}$  અને  $\bar{y}$  એ  $R^2$  અથવા  $R^3$  માં શૂન્યેતર સદિશો છે. જો કોઈ  $k > 0$  માટે  $\bar{y} = k\bar{x}$  થાય તો  $\bar{x}$  તથા  $\bar{y}$ -ની દિશા સમાન છે તેમ કહેવાય અને  $k < 0$  માટે  $\bar{y} = k\bar{x}$  થાય તો  $\bar{x}$  અને  $\bar{y}$ -ની દિશાઓ પરસ્પર વિરુદ્ધ છે તેમ કહેવાય. વધુમાં જો  $\bar{x}$  અને  $\bar{y}$ -ની દિશાઓ સમાન કે વિરુદ્ધ ન હોય તો તેમની દિશાઓ લિન્ન છે તેમ કહેવાય. જો  $\bar{x}$  તથા  $\bar{y}$ -ની દિશા સમાન હોય તો તેમને સમદિશ સદિશો પણ કહેવાય છે.  $\bar{x}$  તથા  $\bar{y}$ -ની દિશા પરસ્પર વિરુદ્ધ હોય તો તેમને વિરુદ્ધ દિશાના સદિશો કહે છે.

આમ,  $(1, -1, 1)$  અને  $(2, -2, 2)$ -ની દિશાઓ સમાન છે, કારણ કે,

$$(2, -2, 2) = 2(1, -1, 1) \text{ અને } 2 > 0$$

વધુમાં,  $(-1, 1, -1) = (-1)(1, -1, 1)$  હોવાથી  $(1, -1, 1)$  અને  $(-1, 1, -1)$ -ની દિશાઓ પરસ્પર વિરુદ્ધ છે.

સદિશો  $(1, -1, 1)$  અને  $(2, 0, 2)$  ને લિન્ન દિશાઓ છે કારણ કે,  $(1, -1, 1) = k(2, 0, 2)$  થાય તેવો  $k \in R$  નથી. (કેમ ?)

શૂન્યેતર સદિશ  $(x_1, x_2, x_3)$  વડે નક્કી ધતી દિશાને  $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$  થી દર્શાવવામાં આવે છે.  $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$  ની વિરુદ્ધ દિશાને  $-\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$  થી દર્શાવવામાં આવે છે.

જો  $k > 0$  હોય, તો  $\langle kx_1, kx_2, kx_3 \rangle = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$  અને

જો  $k < 0$  હોય, તો  $\langle kx_1, kx_2, kx_3 \rangle = \langle -x_1, -x_2, -x_3 \rangle$ .

અહીં નોંધીએ કે  $k = 1$  સિવાય  $(kx_1, kx_2, kx_3) = (x_1, x_2, x_3)$  લખી શક્ય નથી.

### 9.6 સદિશનાં માન અને દિશા અને એકમ સદિશ

**પ્રમેય 1 :** જો શૂન્યેતર સદિશો  $\bar{x}$  અને  $\bar{y}$  માટે  $|\bar{x}| = |\bar{y}|$  અને  $\bar{x}$  તથા  $\bar{y}$ -ની દિશાઓ સમાન હોય તો અને તો જ  $\bar{x}$  તથા  $\bar{y}$  સમાન સદિશો થાય.

**સાબિતી :** ધારો કે,  $\bar{x} = \bar{y}$

$$\therefore (x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$$

$$\therefore x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = y_3$$

$$\therefore |\bar{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} = |\bar{y}|$$

તેમજ,  $\bar{x} = \bar{y}$  હોવાથી,  $k = 1 > 0$  માટે  $\bar{x} = k\bar{y}$

$\therefore \bar{x}$  અને  $\bar{y}$ -ની દિશાઓ સમાન છે.

એટલે કે,  $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle = \langle y_1, y_2, y_3 \rangle$

આમ,  $\bar{x} = \bar{y} \Rightarrow |\bar{x}| = |\bar{y}|$  અને  $\bar{x}$  અને  $\bar{y}$  ની દિશાઓ સમાન છે.

આથી ઉલ્લંઘન, ધારો કે,  $\bar{x} \neq \bar{0}, \bar{y} \neq \bar{0}, |\bar{x}| = |\bar{y}|$  અને  $\bar{x}$  અને  $\bar{y}$  ની દિશાઓ સમાન છે.

હવે,  $\bar{x}$  અને  $\bar{y}$  ની દિશાઓ સમાન હોવાથી કોઈક  $k > 0$  માટે  $\bar{y} = k\bar{x}$ .

$$\therefore |\bar{y}| = |k\bar{x}| = |k| |\bar{x}|$$

પરંતુ  $|\bar{x}| = |\bar{y}|$  આપેલું છે. આથી  $|\bar{x}| = |k| |\bar{x}|$

વળી  $\bar{x} \neq \bar{0}$  હોવાથી  $|\bar{x}| \neq 0$ .

$$\therefore |k| = 1.$$

$$\therefore k = \pm 1. \text{ પરંતુ } k > 0$$

$$\therefore k = 1$$

$$\therefore \bar{y} = k\bar{x} = 1\bar{x} = \bar{x}$$

$$\therefore |\bar{x}| = |\bar{y}| \text{ અને } \bar{x}, \bar{y} \text{ ની દિશાઓ સમાન છે} \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}.$$

આ પ્રમેય, બૌતિકશાખમાં આપવામાં આવતો સંદર્ભની વ્યાખ્યાને પ્રસ્તાવિત કરે છે.

**પ્રમેય 2 :** જો  $\bar{x} \neq \bar{0}$  હોય તો  $\bar{x}$ -ની દિશામાં અનન્ય એકમ સદિશનું અસ્તિત્વ હોય.

**સાબિતી :**  $\bar{x} \neq \bar{0}$  હોવાથી  $|\bar{x}| \neq 0$ .

$$\text{ધરો કે, } \bar{y} = \frac{\bar{x}}{|\bar{x}|} = k\bar{x}, \text{ જ્યાં } k = \frac{1}{|\bar{x}|} > 0$$

$$\therefore |\bar{y}| = |k\bar{x}| = |k| |\bar{x}| = \left| \frac{1}{|\bar{x}|} \right| |\bar{x}| = \frac{1}{|\bar{x}|} |\bar{x}| = 1 \quad (||\bar{x}|| = |\bar{x}|)$$

∴  $\bar{y}$ -નું માન 1 છે. વળી,  $k > 0$  માટે  $\bar{y} = k\bar{x}$  હોવાથી  $\bar{y}$  તથા  $\bar{x}$ -ની દિશા સમાન છે.

આવો એકમ સદિશ અનન્ય હોય તેવું સાબિત કરવા માટે ધારો કે એ પણ રુની દિશામાં એકમ સદિશ છે.

હવે,  $|\bar{y}| = |\bar{z}| = 1$  અને  $\bar{y}$  અને  $\bar{z}$  નો દિશા સમાન છે. ( $\bar{x}$ -ની દિશા).

$$\therefore \text{પ્રમેય-1 પરથી, } \bar{y} = \bar{z}$$

આમ, આપેલા શુંચેતર સંદર્ભની દિશામાં એકમ સદિશ અનન્ય હોય.

આપણો  $\bar{x} = (2, 1, 2)$  ની દિશામાં એકમ સદિશ મેળવીએ.

$$|\bar{x}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{4+1+4} = 3$$

$$\text{આમ, } \bar{y} = \frac{\bar{x}}{|\bar{x}|} = \left( \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) \text{ માંગેલ રુની દિશાનો એકમ સદિશ છે.}$$

## 9.7 નિપરિમાણીય યામ ભૂમિતિ

આપણો અત્યાર સુધીનો ભૂમિતિનો અભ્યાસ સમતલ સુધી સીમિત હતો. ઘણી વખત આપણે સમતલમાં ન હોય તેવી વસ્તુઓનો અભ્યાસ કરવાનો હોય છે. ખરેખર તો રોજબરોજના જીવનમાં સમતલનો ઘ્યાલ અપૂરતો છે. દાખલા તરફે, અવકાશમાં કેદેલ દડાની પ્રત્યેક કાણો સ્થિતિનો વિચાર કરીએ અથવા જ્યારે આકાશમાં પતંગ ઊરતો હોય ત્યારે તેની સ્થિતિ અવકાશમાં સતત બદલતી હોય છે. યાદ કરો કે, સમતલમાં કોઈ બિંદુનું સ્થાન નક્કી કરવા માટે સમતલમાંની પરસ્પર લંબ હોય તેવી બે રેખાઓની જરૂર પડે છે. આ રેખાઓને **યામાંથી અથવા અસ્ત્રો** કહે છે અને તેમને **X-અસ્ત્ર અને Y-અસ્ત્ર** એવાં નામ અપાય છે. અને બિંદુના યામનું નિરપેક્ષ મૂલ્ય એટલે યામાંથી બિંદુનું લંબઅંતર. આમ, આ રેખાઓની મદદથી સમતલના કોઈ પણ બિંદુ સાથે વાસ્તવિક સંખ્યાનું અનન્ય કમયુક્ત યુગ્મ સંગત કરી શકાય છે. તેમજ વાસ્તવિક સંખ્યાના કોઈ પણ કમયુક્ત યુગ્મને સંગત સમતલમાં એક અનન્ય બિંદુ મળે, જેના યામ આપેલ વાસ્તવિક સંખ્યાનું કમયુક્ત યુગ્મ હોય. આમ, સમતલનાં બિંદુઓ અને  $R^2$  વચ્ચે એક-એક સંગતતા મળે છે.

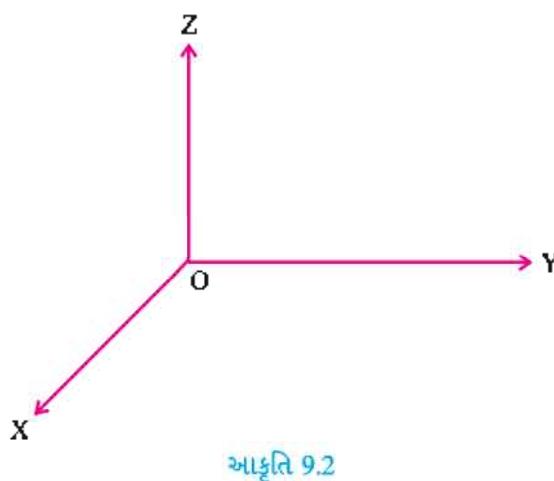
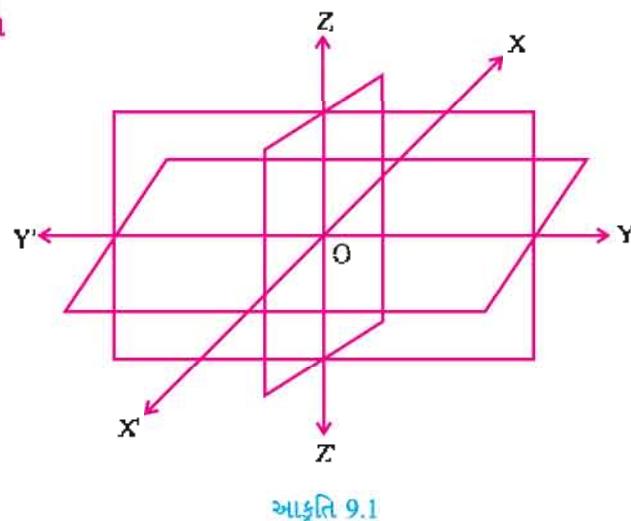
જો અવકાશમાંના કોઈ બિંદુનું સ્થાન નક્કી કરવું હોય તો બે વાસ્તવિક સંખ્યાઓ પૂરતી નથી. દાખલા તરીકે છત પર લટકતા પંખાનું કેન્દ્ર નક્કી કરવા માટે ઓરડાની પરસ્પર લંબ હોય તેવી બે દીવાલોથી તેનું અંતર તેમજ કેન્દ્રની બોયતળિયાથી ગોચાઈની જરૂર પડે. આમ, ત્રણ પરસ્પર લંબ સમતલો, એટલે કે બોયતળિયનું તથા અન્ય બે પરસ્પર લંબ દીવાલોથી અંતર એમ કુલ ત્રણ સંખ્યાનો જરૂરત પડે. વાપક રીતે, અવકાશના કોઈ પણ બિંદુનું સ્થાન પરસ્પર લંબ હોય તેવા ત્રણ સમતલથી બિંદુના લંબઅંતર દ્વારા નક્કી કરી શકાય. આ લંબઅંતરો પરથી બિંદુના યામ નિશ્ચિત કરી શકાય. આ પરસ્પર લંબ સમતલોને **યામ સમતલ** કહેવાય છે. XY-સમતલમાંના બિંદુના યામની માફક અવકાશમાંના બિંદુ માટે પણ યામ ધન અથવા ત્રણ હોઈ શકે છે. આથી, અવકાશના કોઈ પણ બિંદુને ત્રણ યામ હોય છે. તેમજ, વાસ્તવિક સંખ્યાઓના આપેલ ક્રમયુક્ત ત્રય માટે અવકાશમાં એક બિંદુ એવું મળે કે જેના યામ આપેલ ત્રય હોય. આ પ્રકાશમાં આપણે **ત્રિપરિમાણીય (Three dimensional)** અવકાશની ભૂમિતિની પ્રાચ્યમિક ચર્ચા કરીશું. અહીં નોંધીએ કે  $R^3$  ના ઘટકો અને ત્રિપરિમાણીય અવકાશનાં બિંદુઓ વચ્ચે એક-એક સંગતતા છે.

### 9.8 ત્રિપરિમાણીય અવકાશમાં યામાંથી અને યામ સમતલો

સમતલના ડિસ્ટ્રામાં બે પરસ્પર લંબ રેખાઓને સંદર્ભ રેખાઓ તરીકે દેવામાં આવે છે. અવકાશમાંના બિંદુના યામ નક્કી કરવા માટે પરસ્પર લંબ હોય, તેવા ત્રણ સમતલોને સંદર્ભ તરીકે દેવામાં આવે છે. બિંદુ O માં પરસ્પર છેદતાં અને પરસ્પર લંબ હોય તેવા ત્રણ સમતલોનો વિચાર કરીએ. (આદૃતિ 9.1). આ ત્રણ સમતલો પેઢી બલ્યેની જોડમાં સમતલો રેખા X'OX, Y'OY અને Z'OZ માં છેદે છે. આ રેખાઓને અનુક્રમે X-અક્ષ, Y-અક્ષ અને Z-અક્ષ કહેવાય છે. અહીં નોંધીએ કે આ રેખાઓ પરસ્પર લંબ છે. આ રેખાઓ પરસ્પર લંબ હોવાથી તેઓ લંબ યામ પદ્ધતિ (Rectangular Co-ordinate System)નું નિર્માણ કરે છે. બિંદુ O માંથી પસાર થતી આ પરસ્પર લંબરેખાઓને યામાંથી અથવા સરળતા ખાતર અક્ષો કહીશું. (આદૃતિ 9.2).

બિંદુ O ને યામ પદ્ધતિનું ઊગમબિંદુ કહેવાય છે. સમતલો XY, YOZ અને ZOXને અનુક્રમે **XY-તલ**, **YZ-તલ** અને **ZX-તલ** કહેવાય છે અને તેમને **યામ સમતલો** તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. આપણે આ કાગળના સમતલને XOY સમતલ તરીકે લઈશું અને O માંથી પસાર થતી તેને લંબરેખાને Z'OZ તરીકે લઈશું. જો કાગળનું સમતલ સમક્ષિતિજ હોય, તો રેખા Z'OZ રિઝોલબ રેખા થશે.

સમતલના ડિસ્ટ્રામાં આપણે જોયું છે કે યામાંથી સમતલને ચાર લાગમાં વહેંચે છે, જેને ચરણ કહે છે. તે જ રીતે યામ સમતલો અવકાશને **અષ્ટાંશ (Octant)** તરીકે ઓળખાતા આઠ લાગમાં વહેંચે છે. આ અષ્ટાંશોને X0YZ, X'0YZ, X'0Y'Z, X0Y'Z, X0YZ', X'0YZ', X'0Y'Z' અને X0Y'Z' એમ નામ આપી શકાય. તે અનુક્રમે I, II, III, ..., VIII અષ્ટાંશ તરીકે દર્શાવાય છે.



**નોંધ :** ઉપર ચર્ચા કરેલી યામ પદ્ધતિ, અવકાશમાં કોઈ બિંદુના યામ આપવાની પદ્ધતિઓમાંની એક છે. આ યામ પદ્ધતિને ફેન્ચ ગણિતજ્ઞાળી **રેને દ'કર્ટો (René Descartes)**ના નામ ઉપરથી કાર્તેજીય યામપદ્ધતિ કહેવાય છે. આ સિવાયની યામ પદ્ધતિઓ પણ પ્રચાલિત છે.

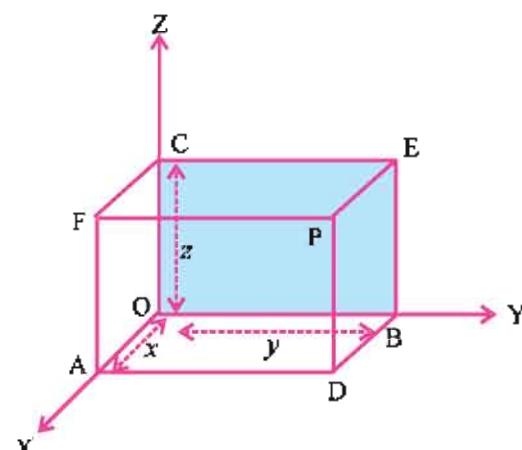
### અવકાશમાંના બિંદુના યામ :

ઉગમબિંદુ અને યામાંની મદદથી સમતલમાં આવેલ કોઈ પણ બિંદુના યામ નક્કી કરવાની પદ્ધતિને અનુસરીને, અવકાશમાં આવેલ કોઈ બિંદુના ત્રણ યામ કેવી રીતે નક્કી કરવા તેની હવે ચર્ચા કરીશું. તેમજ વાસ્તવિક સંખ્યાઓના આપેલ ક્રમયુક્ત ત્રયને સંગત અવકાશમાં બિંદુ કેવી રીતે મેળવી શકાય તે જોઈશું.

બિંદુ P માંથી આકૃતિ 9.3માં બતાવ્યા પ્રમાણે યામ સમતલને સમ્પાંતર ત્રણ સમતલો દોરો ધરો કે, તે X-અક્ષ, Y-અક્ષ અને Z-અક્ષને અનુક્રમે બિંદુઓ A, B અને C માં છે છે. જો A(x, 0, 0), B(0, y, 0) અને C(0, 0, z), હોય તો બિંદુ P ના યામ x, y અને z ધરો. P ને આપણે P(x, y, z) તરીકે લખીશું. આથી ઉલદું આપણે વાસ્તવિક સંખ્યાઓ x, y અને z ને સંગત X-અક્ષ, Y-અક્ષ અને Z-અક્ષ ઉપર અનુક્રમે બિંદુઓ A(x, 0, 0), B(0, y, 0) અને C(0, 0, z) મેળવીશું. હવે, A, B અને C માંથી અનુક્રમે X-અક્ષ, Y-અક્ષ અને Z-અક્ષને લંબ સમતલો દોરો. આ ત્રણ સમતલો ADPF, BDPE અને CEPF નું છેદબિંદુ P છે. તે વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ક્રમયુક્ત ત્રય (x, y, z) ને સંગત બિંદુ છે. અહીં જુઓ કે P(x, y, z) અવકાશનું કોઈ પણ બિંદુ હોય તો  $|x|, |y|$  અને  $|z|$  અનુક્રમે YZ, ZX અને XY સમતલથી અંતરો છે. આમ, સમતલના બિંદુઓ અને વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ક્રમયુક્ત ત્રય વચ્ચે એક-એક સંગતતા ભરે. આમ, અવકાશ અને ક્રમયુક્ત ત્રયનો ગણ રૂપ  $R^3$  સમરૂપ છે.

**નોંધ :** ઉગમબિંદુના યામ  $(0, 0, 0)$  છે. X-અક્ષ પરના કોઈ પણ બિંદુના યામ  $(x, 0, 0)$  અને YZ-સમતલના કોઈ પણ બિંદુના યામ  $(0, y, z)$  ચાય. આ જ રીતે અન્ય યામાંની અને યામ સમતલના બિંદુઓના યામ લખી શકાય.

**નોંધ :** ધન અને ઋણ ધારોની ગોઠવણી પરથી બિંદુને સમાવતું અભાશ નક્કી કરી શકાય. નીચેના કોષ્ટકમાં આ માહિતી દર્શાવી છે :



આકૃતિ 9.3

### કોષ્ટક 9.1

અષ્ટાંશ $\rightarrow$ યામ $\downarrow$	I OXYZ	II OX'YZ	III OXY'Z	IV OXY'Z	V OXYZ'	VI OX'YZ'	VII OX'Y'Z	VIII OXY'Z'
x	+	-	-	+	+	-	-	+
y	+	+	-	-	+	+	-	-
z	+	+	+	+	-	-	-	-

**ઉદાહરણ 5 :** આકૃતિ 9.4 માં બતાવ્યા મુજબ લંબાઈ એક વિરોધિંદુ  $A(1, 3, 2)$

છે. તેની બાજુ  $\overrightarrow{AB}$  એ ખાંડને લંબ છે. વિરોધિંદુ  $B$ નો ખામી શોધો.

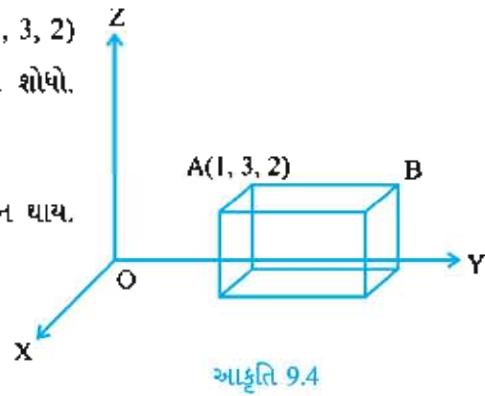
બાજુ  $\overrightarrow{AB}$  ની લંબાઈ 3 હોય, તો બિંદુ  $B$  નો ખામી શોધો.

**ઉકેલ :**  $\overrightarrow{AB}$  એ ખાંડને લંબ હોવાથી  $A$  તથા  $B$  ના ખામી સમાન થાય.

આમ બિંદુ  $B$ નો ખામી 2 છે.

હવે,  $\overrightarrow{AB}$  એ ખાંડને સમાંતર છે.

આમ,  $B$  નો ખામી =  $A$ નો ખામી + 3 = 3 + 3 = 6.



### સ્વાધ્યાય 9.2

1. નાચેના ક્રોષ્કમાં પ્રથમ સ્તરમાં આપેલ બિંદુને સમાવતા ભાષ્યાંશનું નામ બાજી સ્તરમાં પૂરો :

બિંદુ	અષાંશ
(1, 2, 3)	
(1, -2, -4)	
( $\sqrt{2}$ , 2, -1)	
(-1, -2, 0)	
(-1, -1, -1)	

2. શરી, બિંદુ (-1, 2, 0)થી ચાલવાનું શરૂ કરે છે. તે  $\overrightarrow{OX}$ ની દિશામાં 1 એકમ ચાલે છે. ત્યારબાદ  $\overrightarrow{OY}$  દિશામાં વધુ 2 એકમ ચાલે છે. રામનું અંતિમ સ્થાન શું હશે ?

\*

### 9.9 સદિશનું ભૌમિતિક નિરૂપણ

ધારો કે, બિંદુ  $P$  ધામ સમતલનું ઉગમબિંદુ સ્થિવાયનું કોઈ પણ બિંદુ છે.  $O$  થી  $P$  ની દિશા એટલે કે,  $\overrightarrow{OP}$ ની દિશાના  $\overrightarrow{OP}$  વડે દર્શાવીશું. આમ,  $\overrightarrow{OP}$  એ  $\overrightarrow{OP}$  ની દિશામાંનો દિશાયુક્ત રેખાખંડ છે.

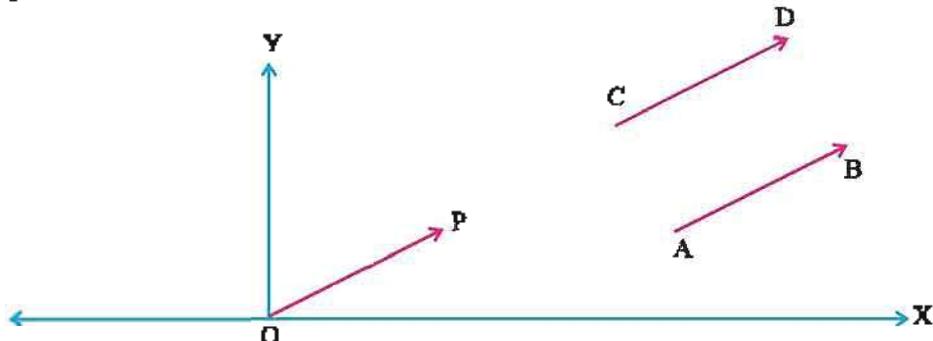
આપણે જાળીએ છીએ કે ધામ સમતલમાંના કોઈ પણ બિંદુ  $P$  ને વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ક્રમયુક્ત યુગ્મ  $(x_1, x_2)$  સાથે સંગત કરી શકાય, આથી ઉવ્યક્ત વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ક્રમયુક્ત યુગ્મને સંગત સમતલમાં એક બિંદુ મળે. બિંદુના ધામ  $(x_1, x_2)$  છે તેમ કહેવાય. આમ, સમતલ મને ક્રમયુક્ત યુગ્મનો ગજા  $R^2$  એકરૂપ છે, આથી આપણે  $R^2$  મને સમતલનો સમાનાર્થી શરી તરીકે ઉપયોગ કરીશું.

**સ્થાનસદિશ :** ધારો કે સમતલમાં  $P$ ના ધામ  $(x_1, x_2)$  છે.  $P$  ઉગમબિંદુ નથી. દિશાયુક્ત રેખાખંડ  $\overrightarrow{OP}$  ને, ઉગમબિંદુ  $O$  ને સાપેક્ષ બિંદુ  $P$  નો સ્થાનસદિશ (Position Vector) કહેવાય છે.  $x_1$  તથા  $x_2$  ને  $\overrightarrow{OP}$  ના ઘટક કહે છે. સરળતા ધાતર  $(x_1, x_2)$  ને બિંદુ  $P$  નો સ્થાનસદિશ કહીશું.

ઉગમબિંદુના સ્થાનસદિશના ઘટકો 0 અને 0 થાય. બે સદિશોના સરવાળા અને અદિશ દ્વારા ગુણકારની વ્યાખ્યાની મદદથી ને સ્થાનસદિશોના સરવાળા અને અદિશ વડે ગુણકાર સરળતારી વ્યાખ્યાપિત કરી શકાય.

હવે કોઈ રેખાખંડ  $\overrightarrow{AB}$  નો વિચાર કરો. તો તેની સાથે પણ સ્થાનસંદિશની માફક દિશા સાંકળી શકાય. રેખાખંડ  $\overrightarrow{AB}$  -ની દિશા પણ બિંદુ A થી બિંદુ B તરફના ઉર્ધ્વ અંતિમ દિશા થાય. આમ,  $\overrightarrow{AB}$  લંબાઈવાળા અને ઉર્ધ્વ અંતિમ દિશાવાળા દિશાયુક્ત રેખાખંડ  $\overrightarrow{AB}$  ને બિંદુ B-ના બિંદુ A ને સાપેક્ષ સ્થાનસંદિશ તરીકે વ્યાખ્યાપિત કરી શકાય. કોઈ પણ બિંદુનો પોતાના સાપેક્ષ સ્થાનસંદિશ શૂન્ય સંદિશ થાય.

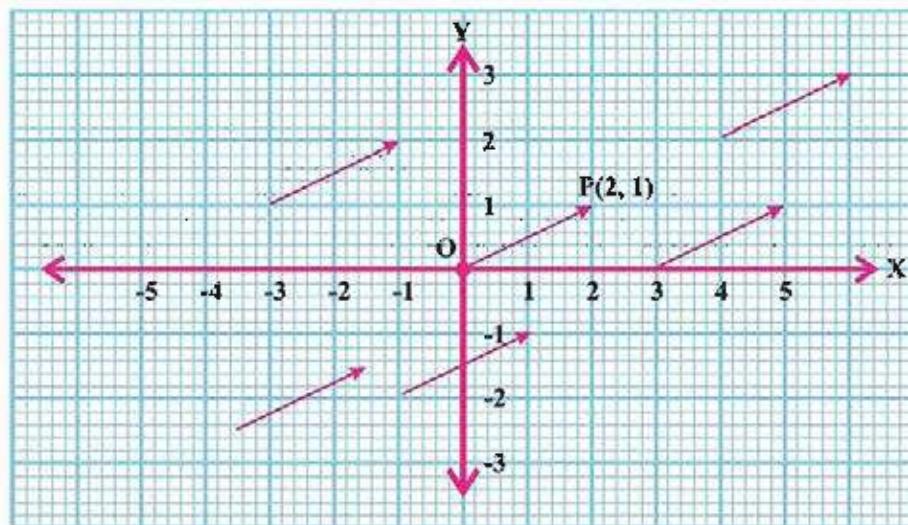
નિશેની આકૃતિ જુઓ :



આકૃતિ 9.5

એ સંદર્ભેની સમાનતાની વાખ્ય અનુસાર એ દિશાયુક્ત રેખાખંડોની સમાનતા વ્યાખ્યાપિત કરીશું. આમ, જો  $AB = CD$  અને  $\overrightarrow{AB}$  અને  $\overrightarrow{CD}$  ની દિશા સમાન હોય તો  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  લઈશું. પ્રત્યેક  $\overrightarrow{AB}$  માટે એવો દિશાયુક્ત રેખાખંડ  $\overrightarrow{OP}$  એવો મળે કે જેથી  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$ . આકૃતિમાં  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$  તેમજ  $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OP}$ . સમતલબાં સમાન હોય તેવા અન્યાં દિશાયુક્ત રેખાખંડો મળે પણ રેખાખંડ તરીકે તેઓ બિના હોય. પ્રત્યેક દિશાયુક્ત રેખાખંડ  $\overrightarrow{AB}$  માટે  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$  થાય તેવો સ્થાનસંદિશ  $\overrightarrow{OP}$  મળે. આમ,  $\overrightarrow{OP}$  એ દિશાયુક્ત રેખાખંડ  $\overrightarrow{AB}$  ને સમાન હોય તેવા રેખાખંડોના સમૂહનું પ્રતિનિધિત્વ કરે છે.  $\overrightarrow{OP}$  જેવા સ્થાનસંદિશો નિયત સંદિશો (bound vectors) કહેવાય છે. કારણ કે તેમનું એક અંત્યબિંદુ O નિશ્ચિત હોય છે, જ્યારે  $\overrightarrow{OP}$ ને સમાન અન્ય દિશાયુક્ત રેખાખંડો (જોમકે  $\overrightarrow{AB}$ ) ને મુક્ત સંદિશો (free vectors) કહેવાય છે કારણ કે તેમનાં બંને અંત્યબિંદુઓ, સંદિશ બદલ્યા બિના થયેશે હીતે પણ કરી શકાય છે.

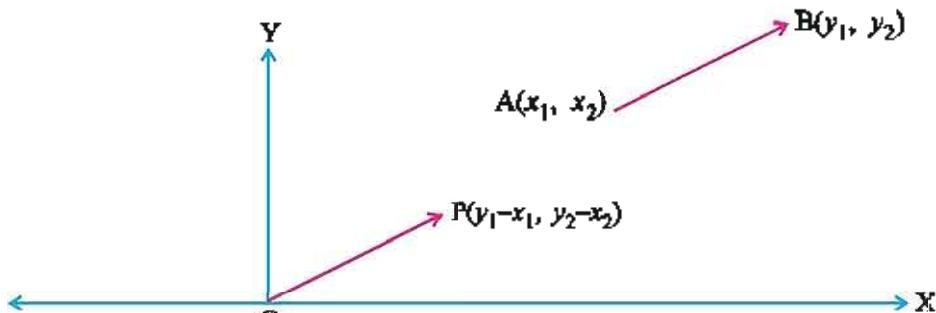
હવે આકૃતિ 9.6 જુઓ :



આકૃતિ 9.6

અહીં તમામ રેખાખર્દો સમાન રીતે દિશાયુક્ત છે અને તેના શરૂઆતના બિંદુને જમણી તરફ 2 એકમ અને ત્યારથી 1 એકમ ઉપરની દિશામાં (જીએ ચેસ બોર્ડના ધોડાની ચાલ) ચાલી અંતથીંદુ ભણે છે. આનો અર્થ એ કે આ બધાં જ સ્થાનસંદિશ (2, 1)-ને સમાન છે. બીજા શરૂઆતાં (2, 1), આકૃતિ 9.6ના બધાં જ સંદર્ભો દર્શાવે છે.

ધારો કે  $A(x_1, x_2)$ ,  $B(y_1, y_2)$  તથા  $P(y_1 - x_1, y_2 - x_2)$  સમતથનાં બિંદુઓ છે.



આકૃતિ 9.7

આકૃતિ 9.6માં દર્શાવ્યા પ્રયત્નથી  $\vec{AB}$ -ની મૌલિક રીત =  $\vec{OP}$ -ની દિશા અને

$$AB = OP = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}.$$

આમ, મુક્ત સંદર્ભાને  $\vec{AB}$  અને નિયત સંદર્ભાને  $\vec{OP}$  સમાન સંદર્ભો છે. તેમજ,

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= \vec{OP} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2) \\ &= (y_1, y_2) - (x_1, x_2) \\ &= B\text{-નો સ્થાનસંદિશ} - A\text{-નો સ્થાનસંદિશ}\end{aligned}$$

આ જ રીતે, આપણે અવકાશમાં સ્થાનસંદિશાની વ્યાખ્યા આપી શકીએ, તેમજ અવકાશમાં મુક્ત સંદર્ભ તેમજ નિયત સંદર્ભની વ્યાખ્યા આપીશું. ધારો કે  $A(x_1, x_2, x_3)$ ,  $B(y_1, y_2, y_3)$  તથા  $P(y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3)$  બિંદુઓ હોય, તો મુક્ત સંદર્ભાને  $\vec{AB}$  માટે,

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= \vec{OP} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3) \\ &= (y_1, y_2, y_3) - (x_1, x_2, x_3) \\ &= B\text{-નો સ્થાનસંદિશ} - A\text{-નો સ્થાનસંદિશ\end{aligned}$$

વધુમાં, આ મુક્ત સંદર્ભાને  $\vec{AB}$  ને સંગત,  $\vec{AB} = \vec{OP}$  થાપ તેવો સ્થાનસંદિશ  $\vec{OP}$  મળે.

આ રીતે અવકાશમાંના સંદર્ભનું બૌધ્યાત્મક નિરૂપણ થાપ.

**ઉદાહરણ 5 :** નીચે આપેલ સંદર્ભોની પ્રત્યેક જોડ માટે સંદર્ભોની દિશા સમાન, બિંદુ કે બિન્ન છે તે નક્કી કરો :

- |                            |                                |
|----------------------------|--------------------------------|
| (1) (1, 1, 1), (2, 2, 2)   | (2) (1, -1, 2), (0.5, -0.5, 1) |
| (3) (1, -1, 0), (0, 1, -1) | (4) (3, 6, -9), (-1, -2, 3)    |
| (5) (1, 0, 0), (0, 1, 0)   | (6) (2, 5, 7), (-2, 5, -7)     |

**ઉક્તા :** (1)  $(2, 2, 2) = 2(1, 1, 1)$ . અહીં,  $k = 2 > 0$

$\therefore$  સદિશોની દિશા સમાન છે.  $\langle 2, 2, 2 \rangle = \langle 1, 1, 1 \rangle$

(2)  $(0.5, -0.5, 1) = (0.5)(1, -1, 2)$ ,

અહીં,  $k = 0.5 > 0$

$\therefore$  સદિશોની દિશા સમાન છે.  $\langle 0.5, -0.5, 1 \rangle = \langle 1, -1, 2 \rangle$

(3) શક્ય હોય, તો ધારો કે, કોઈક  $k \in \mathbb{R} - \{0\}$  માટે  $(0, 1, -1) = k(1, -1, 0)$ ,

$\therefore 0 = k, 1 = -k, -1 = 0$  નથી શક્ય નથી.

આમ, કોઈ પણ  $k \in \mathbb{R} - \{0\}$  ના મળે જેથી  $(0, 1, -1) = k(1, -1, 0)$ .

આથી આ સદિશોની દિશાઓ બિના છે.

(4)  $(3, 6, -9) = -3(-1, -2, 3)$ ; અહીં,  $k = -3 < 0$

$\therefore$  સદિશો વિરુદ્ધ દિશાઓ પરાવે છે.  $\langle 3, 6, -9 \rangle = -\langle -1, -2, 3 \rangle$

(5) ઉપર (3)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે કોઈ પણ  $k \in \mathbb{R}$  માટે,

$(1, 0, 0) = k(0, 1, 0)$  ન થાય.

$\therefore$  સદિશો  $(1, 0, 0)$  તથા  $(0, 1, 0)$ ની દિશાઓ બિના છે.

(6) શક્ય હોય તો ધારો કે, કોઈક  $k \in \mathbb{R} - \{0\}$  માટે,

$(2, 5, 7) = k(-2, 5, -7)$

$2 = -2k, 5 = 5k, 7 = -7k$

આ શક્ય નથી કારણ કે પ્રથમ સમીકરણનું  $k = -1$  માટે સમાધાન થાય છે. પરંતુ બીજા સમીકરણનું સમાધાન થતું નથી. આમ સદિશોની દિશાઓ બિના છે.

**નોંધ :** (1) ધારો કે રૂ અને  $\bar{y}$  શૂન્યેતર સદિશો છે અને  $x_i \neq 0, y_i \neq 0$  ( $i = 1, 2, 3$ )

જો  $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = k$  હોય, તો  $k > 0$  અથવા  $k < 0$  હોય તે અનુસાર રૂ અને  $\bar{y}$  ની દિશા સમાન હોય કે વિરુદ્ધ હોય. જો  $\frac{y_1}{x_1} \neq \frac{y_2}{x_2}$  અથવા  $\frac{y_2}{x_2} \neq \frac{y_3}{x_3}$  અથવા  $\frac{y_3}{x_3} \neq \frac{y_1}{x_1}$  હોય તો તેમની દિશાઓ બિના થાય.

(2) જો  $x_1 = 0 = y_1$  અને  $\frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = k > 0$ , તો રૂ અને  $\bar{y}$  ને સમાન દિશા હોય અને જો  $k < 0$  હોય તો રૂ અને  $\bar{y}$  વિરુદ્ધ દિશાઓ પરાવે છે.  $\frac{y_2}{x_2} \neq \frac{y_3}{x_3}$  હોય તો તેમની દિશાઓ બિના થાય.

$x_2 = 0 = y_2$  અથવા  $x_3 = 0 = y_3$  માટે પણ આવાં જ પરિશામો સત્ય છે.

(3) જો  $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 0$  હોય, તો  $\frac{y_3}{x_3} > 0$  માટે તેમની દિશા સમાન થાય અને  $\frac{y_3}{x_3} < 0$  માટે તેમની દિશાઓ વિરુદ્ધ થાય.

$\bar{0} = (0, 0, 0)$ -ની દિશા વ્યાખ્યાયિત નથી તે ફરી ચાચ કરીએ.

**ઉદાહરણ 6 :**  $\bar{u} = (6, -7, 6)$ ની દિશામાં એકમ સંદિશ મેળવો.

$$\text{ઉકેલ : અહીં, } |\bar{u}| = \sqrt{6^2 + (-7)^2 + 6^2} = \sqrt{121} = 11$$

$$\therefore \bar{u} \text{ ની દિશામાં એકમ સંદિશ, } \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} = \left( \frac{6}{11}, \frac{-7}{11}, \frac{6}{11} \right).$$

**ઉદાહરણ 7 :**  $\bar{x} = (4, 7, -2)$ ,  $\bar{y} = (1, 2, 2)$  આપેલ છે.  $\bar{x} - 2\bar{y}$ ની દિશાની વિકુદ દિશામાં એકમ સંદિશ મેળવો.

$$\text{ઉકેલ : } \bar{x} - 2\bar{y} = (4, 7, -2) - 2(1, 2, 2) = (2, 3, -6) = \bar{z} \text{ (આરો)}$$

$$\text{હવે, } |\bar{z}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$\therefore \bar{z} \text{ ની દિશાની વિકુદ દિશામાં એકમ સંદિશ, } -\frac{\bar{z}}{|\bar{z}|} = \left( -\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{6}{7} \right).$$

**ઉદાહરણ 8 :** નીચે આપેલ બિંદુઓ A અને B માટે  $\vec{AB}$  મેળવો :

- |                            |                              |
|----------------------------|------------------------------|
| (1) A(1, -1), B(1, 2)      | (2) A(1, -1, 1), B(1, 1, -1) |
| (3) A(1, 2, 3), B(4, 5, 6) | (4) A(1, -2, 1), B(-1, 1, 1) |

$$\text{ઉકેલ : } \vec{AB} = \text{Bનો સ્થાનસંદિશ} - \text{Aનો સ્થાનસંદિશ}$$

- |   |
|---|
| (1) $\vec{AB} = (1, 2) - (1, -1) = (0, 3)$ .            |
| (2) $\vec{AB} = (1, 1, -1) - (1, -1, 1) = (0, 2, -2)$ . |
| (3) $\vec{AB} = (4, 5, 6) - (1, 2, 3) = (3, 3, 3)$ .    |
| (4) $\vec{AB} = (-1, 1, 1) - (1, -2, 1) = (-2, 3, 0)$ . |

### સ્વાધ્યાય 9.3

1. નીચે આપેલ સંદિશોના યુઝ માટે તેમની દિશા સમાન, વિકુદ કે લિના છે તે નક્કી કરો :

- |                                  |                          |
|----------------------------------|--------------------------|
| (1) A(2, -5, 3), B(0.4, -1, 0.6) | (2) (1, 2, 4), (3, 4, 6) |
| (3) A(2, 4, -6), B(-1, -2, 3)    | (4) (1, 0, 1), (0, 1, 1) |

2. નીચેના સંદિશોની દિશામાં એકમ સંદિશ મેળવો :

- |  |                           |                           |
|--|---------------------------|---------------------------|
| (1) $\bar{x} = (3, -4)$                                  | (2) $\bar{y} = (-3, -4)$  | (3) $\bar{x} = (1, 3, 5)$ |
| (4) $\bar{y} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ | (5) $\bar{y} = (1, 0, 0)$ | (6) $\bar{y} = (-5, 12)$  |

3. જો  $\bar{x} = (x_1, x_2)$  અને  $\bar{x} = \alpha(1, 2) + \beta(2, 1)$  હોય, તો  $\alpha$  અને  $\beta$  શોધો.

\*

### 9.10 અંતરસૂત્ર

ધૂરો કે બિંદુઓ A અને Bના સ્થાનસંદિશો અનુક્રમે  $\bar{r}_1$  અને  $\bar{r}_2$  છે અને  $\bar{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$  અને  $\bar{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$  હે. આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$\vec{AB} = \text{Bનો સ્થાનસંદિશ} - \text{Aનો સ્થાનસંદિશ}$$

$$\begin{aligned} &= (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) \\ &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \end{aligned}$$

$$\therefore AB = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

આને અંતરસૂત્ર કહેવાય છે અને તે  $\mathbb{R}^3$ ના બે બિંદુઓ  $A(x_1, y_1, z_1)$  અને  $B(x_2, y_2, z_2)$  વચ્ચેનું અંતર દર્શાવે છે.

**નોંધ :** XY-સમતલમાં કોઈ પણ બિંદુનો z-યામ શૂન્ય હોય છે. આમ ઉપરોક્ત અંતરસૂત્રમાં  $z_1 = z_2 = 0$  લેતાં સમતલમાં અંતરસૂત્ર મળે, જેનો આપણે ઘોરણ 10 માં અભ્યાસ કર્યો હતો.

**ઉદાહરણ 9 :** બિંદુઓ  $(1, -1, 2)$  અને  $(-2, 1, 8)$  વચ્ચેનું અંતર મેળવો.

**ઉકેલ :**  $P(1, -1, 2)$  અને  $Q(-2, 1, 8)$  લેતાં,

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{(1 - (-2))^2 + (-1 - 1)^2 + (2 - 8)^2} \\ &= \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{49} = 7 \end{aligned}$$

આમ, બે બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર 7 છે.

**ઉદાહરણ 10 :** અંતરસૂત્ર દરા બિંદુઓ  $P(4, -3, -1)$ ,  $Q(5, -7, 6)$  અને  $R(3, 1, -8)$  સમર્દેખ છે, તેમ સાંબિત કરો.

$$\begin{aligned} \text{ઉકેલ: અહીં, } PQ &= \sqrt{(4 - 5)^2 + (-3 + 7)^2 + (-1 - 6)^2} = \sqrt{1 + 16 + 49} = \sqrt{66} \\ QR &= \sqrt{(5 - 3)^2 + (-7 - 1)^2 + (6 + 8)^2} = \sqrt{4 + 64 + 196} = 2\sqrt{66} \\ PR &= \sqrt{(4 - 3)^2 + (-3 - 1)^2 + (-1 + 8)^2} = \sqrt{1 + 16 + 49} = \sqrt{66} \end{aligned}$$

આમ,  $PQ + PR = QR$  એટલે કે  $Q = P + R$ .

$\therefore$  આપેલ બિંદુઓ સમર્દેખ છે.

**ઉદાહરણ 11 :** બિંદુઓ  $A(1, 2, 4)$ ,  $B(1, 2, 0)$  અને  $C(1, 5, 0)$  માટે  $\Delta ABC$  કાટકોણ નિકોણ છે તેમ સાંબિત કરો.

$$\text{ઉકેલ: } AB^2 = (1 - 1)^2 + (2 - 2)^2 + (4 - 0)^2 = 16. \text{ તેથી } AB = 4$$

$$BC^2 = (1 - 1)^2 + (2 - 5)^2 + (0 - 0)^2 = 9. \text{ તેથી } BC = 3$$

$$AC^2 = (1 - 1)^2 + (5 - 2)^2 + (0 - 4)^2 = 25. \text{ તેથી } AC = 5$$

$\therefore$  બિંદુઓ સમર્દેખ નથી અને તેઓ નિકોણ રચે છે.

અને  $AC^2 = AB^2 + BC^2$ . આથી  $\Delta ABC$  કાટકોણ નિકોણ છે અને  $\angle B$  કાટખૂલો છે.

**ઉદાહરણ 12 :** બિંદુ  $A(2, -1, 1)$  થી  $3\sqrt{3}$  અંતરે આવેલ X-અક્ષ પરના બિંદુઓ શોધો.

**ઉકેલ :** X-અક્ષ પરનું કોઈ પણ બિંદુ  $P(x, 0, 0)$  હોય. હવે,

$$\sqrt{(x - 2)^2 + (0 + 1)^2 + (0 - 1)^2} = 3\sqrt{3}$$

$$\therefore x^2 - 4x + 4 + 1 + 1 = 27$$

$$\therefore x^2 - 4x + 4 = 25$$

$$\therefore (x - 2)^2 = 25$$

$$\therefore x - 2 = \pm 5$$

$$\therefore x = 7 \text{ અથવા } x = -3$$

આમ,  $x$  પર બે બિંદુઓ  $P(7, 0, 0)$  અને  $P(-3, 0, 0)$  માંયા પ્રમાણે મળે.

**ઉદાહરણ 13 :** બિંદુઓ  $(2, -1, 1)$  અને  $(1, 3, 1)$  થી સમાન અંતરે આવેલ બિંદુઓના બિંદુગણનું સમીકરણ મેળવો.

**ઉકેલ :** ધારો કે આપેલ બિંદુઓ  $(2, -1, 1)$  અને  $(1, 3, 1)$  થી સમાન અંતરે આવેલ શેરી બિંદુ યામ  $(x, y, z)$  છે.

$$\text{આમ, } (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = (x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2$$

$$\begin{aligned} \therefore x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 2z + 1 \\ = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 + z^2 - 2z + 1 \end{aligned}$$

$$\therefore -4x + 2y + 5 = -2x - 6y + 10$$

$$\therefore 2x - 8y + 5 = 0 \text{ માંગેલ બિંદુગણનું આ સમીકરણ છે.}$$

**નોંધ :** સમતલમાં આ પ્રકારના બિંદુગણને આપેલ રેખાખંડનો લંબદ્વિભાજક (Perpendicular Bisector) કહેવામાં આવે છે. અવકાશમાં આને આપેલ રેખાખંડનું લંબદ્વિભાજક સમતલ (Perpendicular Bisector Plane) કહેવાય છે. તે આપેલ રેખાખંડના મધ્યબિંદુમાંથી પસાર થતું રેખાખંડને લંબ હોય તેવું સમતલ છે.

#### સ્વાધ્યાય 9.4

1. નીચે આપેલ બિંદુયુગમ વચ્ચેનું અંતર શોધો :

- (1)  $(1, -1, 3), (1, -1, 3)$       (2)  $(1, 2, 3), (3, 4, 5)$
- (3)  $(2, -3, 18), (0, 1, 14)$       (4)  $(1, \sqrt{2}, -1), (3, 3\sqrt{2}, 1)$
- (5)  $(1, -2, 5014), (4, 2, 5014)$       (6)  $(1, 1, 0), (0, 1, 0)$

2. નીચે આપેલાં બિંદુઓ સમરેખ છે કે નહિ તે અંતરસૂત્રની મદદથી નક્કી કરો :

- (1)  $P(1, 3, 2), Q(1, 2, 1), R(2, 3, 1)$
- (2)  $A(0, 1, 0), B(0, -1, 0), C(0, 2, 0)$
- (3)  $L(1, 2, 3), M(-3, -1, 1), A(-3, 2, 7)$
- (4)  $V(1, 2, 3), A(2, 3, 1), H(3, 1, 2)$

3. આપેલ બિંદુઓ  $A(0, 7, 10), B(-1, 6, 6), C(-4, 9, 6)$ , માટે  $\Delta ABC$ નો પ્રકાર નક્કી કરો.

4. બિંદુઓ  $(-2, 1, 3)$  થી  $\sqrt{14}$  અંતરે આવેલ Z-અક્ષ પરનાં બિંદુઓ શોધો.

5. બિંદુઓ  $A(3, 4, 5), B(-1, 2, 7)$  માટે  $PA^2 + PB^2 = 2k^2$  થાય તેવા બિંદુગણનું સમીકરણ મેળવો.  $k \in \mathbb{R}$

6.  $O(0, 0, 0), A(2, -3, 6), B(0, -7, 0)$  સમદ્વિભૂજ ટ્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ છે તેમ દર્શાવો.

\*

#### 9.11 વિભાજન સૂત્ર

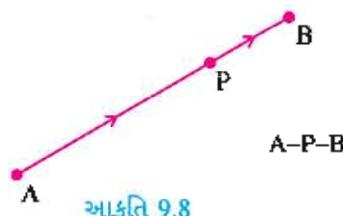
$R^2$  માં બે બિંદુઓને જોડતા રેખાખંડના વિભાજન સૂત્રની ચર્ચા અગાઉ કરેલ છે. હવે આપણે  $R^3$  ના બે બિંદુઓને જોડતા રેખાખંડના વિભાજનનું સૂત્ર સદિશોની મદદથી મેળવીશું.

ધારો કે અવકાશનાં બિંદુઓ અનુક્રમે  $A$  અને  $B$  ના સ્થાનસંદિશો  $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$  અને  $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$  છે. ધારો કે,  $P \in \overset{\leftrightarrow}{AB}$  ( $P \neq A, P \neq B$ ). બિંદુઓ  $A, B$  અને  $P$  એક જ રેખા પર આવેલા હોવાથી  $\vec{AP}$  અને  $\vec{PB}$  ની દિશાઓ સમાન અથવા વિરુદ્ધ હોય. આમ,  $\vec{AP} = k\vec{PB}$ , જ્યાં,  $k \neq 0$ .

$$\therefore |\vec{AP}| = |k| |\vec{PB}| \quad \text{અથવા} \quad AP = |k| PB$$

$$\therefore \frac{AP}{PB} = |k|$$

ધારો કે, બિંદુ  $P$  નો સ્થાનસંદિશ  $\vec{r} = (x, y, z)$ .



- (i) જો  $A-P-B$  અને  $\frac{AP}{PB} = \lambda$  અને  $\lambda > 0$  તો બિંદુ  $P$  એ ક્રમાંગ  $\overline{AB}$ નું  $A$  તરફથી અંતઃવિભાજન કરે છે તેમ કહીએ.  
(આકૃતિ 9.8)

$$\therefore \frac{AP}{PB} = |k| = \lambda$$

અથવા,  $\vec{AP}$  અને  $\vec{PB}$  ની દિશા સમાન હોવાથી  $k > 0$ .

આથી,  $|k| = k$ .

આથી,  $|k| = \lambda$  હોવાથી  $k = \lambda$ .

આમ,  $\vec{AP} = \lambda \vec{PB}$ .

- (ii) જો  $P-A-B$  અથવા  $A-B-P$  તથા  $\frac{AP}{PB} = -\lambda$  અને  $\lambda < 0$  હોય તો આ ક્રમાંગમાં  $P$  એ ક્રમાંગ  $\overline{AB}$ નું  $A$  તરફથી  $\lambda$  ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે તેમ કહેવામાંથી. આકૃતિ 9.9 અને 9.10માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે  $\vec{AP}$  અને  $\vec{PB}$  ની દિશાઓ વિરુદ્ધ હોય. આથી  $k < 0$ .

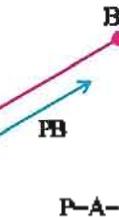
$$\therefore |k| = -k$$

$$\therefore \frac{AP}{PB} = -\lambda = -k$$

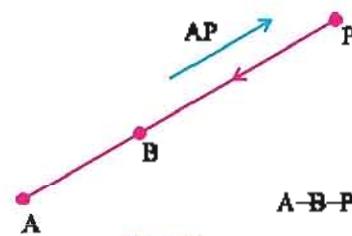
આથી,  $k = \lambda$ .

$\vec{AP} = \lambda \vec{PB}$ .

આમ, અંગે ક્રમાંગ  $\vec{AP} = \lambda \vec{PB}$ .



આકૃતિ 9.9



આકૃતિ 9.10

( $|k| = -k$  અને  $\frac{AP}{PB} = -\lambda$ )

( $\vec{AP} = k \vec{PB}$ )

$$\therefore \vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r})$$

$$\therefore \vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda \vec{r}_2 - \lambda \vec{r}$$

$$\therefore (1 + \lambda) \vec{r} = \lambda \vec{r}_2 + \vec{r}_1$$

વિભાજનની વ્યાખ્યા પ્રમાણે  $\lambda \neq -1$  હોવાથી,

$$\therefore \vec{r} = \frac{1}{\lambda+1} (\lambda \vec{r}_2 + \vec{r}_1)$$

$$(x, y, z) = \frac{1}{\lambda+1} (\lambda(x_2, y_2, z_2) + (x_1, y_1, z_1))$$

$$= \frac{1}{\lambda+1} (\lambda x_2 + x_1, \lambda y_2 + y_1, \lambda z_2 + z_1)$$

$$\therefore (x, y, z) = \left( \frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda+1}, \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda+1}, \frac{\lambda z_2 + z_1}{\lambda+1} \right)$$

આને વિભાજન સૂત્ર કહે છે અને તે રેખાંગ  $\overline{AB}$ નું  $A(x_1, y_1, z_1)$  તરફથી  $\lambda$  ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરતા બિંદુનું પામ આપે છે.

જો ગુણોત્તર  $\lambda = m:n$  હોય, તો ઉપરોક્ત સૂત્ર પરથી,

$$\vec{r} = \frac{1}{m+n} \left( \frac{m}{n} \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \right) = \frac{1}{m+n} (m \vec{r}_2 + n \vec{r}_1); \quad m+n \neq 0$$

## 9.12 વિભાજન સૂત્રના ઉપયોગો

(i) મધ્યબિંદુના યામ : જો P એ  $\overline{AB}$  નું મધ્યબિંદુ હોય, તો  $AP = PB$  અને  $A - P - B$ .

$$\therefore \frac{AP}{PB} = \lambda = 1$$

$\therefore$  P નો સ્થાનસંદિશ  $\vec{r}$  નીચે મુજબ અણે :

જો  $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$  અને  $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$  અને  $\vec{r} = (x, y, z)$  હોય, તો વિભાજન સૂત્રની મદદથી

$$(x, y, z) = \frac{1}{2} ((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) \quad (\lambda = 1)$$

$$= \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

$\therefore \overline{AB}$  ના મધ્યબિંદુનો સ્થાનસંદિશ  $\left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$  થી મળે.

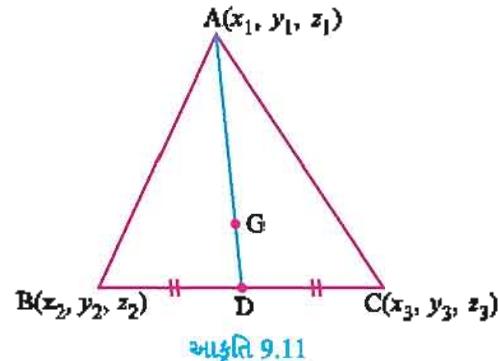
(ii) ટ્રિકોણનું મધ્યકેન્દ્ર : ધ્યાં કે  $R^3$  નાં  $\Delta ABC$  આપેલ છે. ધ્યાં કે, A, B અને C નાં સ્થાનસંદિશો અનુક્રમે  $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$  અને  $\vec{r}_3 = (x_3, y_3, z_3)$  છે.

આદ્યતી 9.11 નાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે,  $\overline{BC}$ નું મધ્યબિંદુ D છે.

આદ્ય તેનો સ્થાનસંદિશ  $\frac{\vec{r}_2 + \vec{r}_3}{2}$  થાયે.

$\overline{AD}$ નું A તરફથી 2 : 1 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરતું નિઃદિષ્ટ  
G હોય તો G નો સ્થાનસંદિશ,

$$\frac{1}{2+1} \left( 2 \cdot \frac{1}{2} (\vec{r}_2 + \vec{r}_3) + \vec{r}_1 \right) = \frac{1}{3} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3) \text{ થાય}$$



ઉપરોક્ત પરિણામની સંભિતતા ઉપરથી કોઈ શક્ય છે કે બિંદુ G નજેય મધ્યગાળો ઉપર હોય. આમ, કોઈ પણ ટ્રિકોણની નજેય મધ્યગાળો સંગામી હોય છે અને તેઓ પરસ્પર G માં છેટે છે.

G એ  $\Delta ABC$  નું મધ્યકેન્દ્ર કહેવાય છે અને તેનો સ્થાનસંદિશ  $\frac{1}{3}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3)$  છે.

આદ્ય G ના યામ  $\left( \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \right)$  છે.

**ઉદાહરણ 14 :** નિઃદિષ્ટાં A(2, 3, -1) અને B(1, -3, 5) ને જોડતા  $\overline{AB}$ નું A તરફથી (i) 3 : 5 ગુણોત્તરમાં અંતાવિભાજન કરતાં (ii) 3 : 5 ગુણોત્તરમાં બિનિર્બિંદુજન કરતાં નિઃદિષ્ટાંના યામ શોખો.

**ઉકેલ :** (i) ધ્યાં કે, P(x, y, z) એ  $\overline{AB}$  નું A તરફથી 3 : 5 ગુણોત્તરમાં અંતાવિભાજન કરે છે, આમ  $m = 3$ ,  $n = 5$ . હવે, A તરફથી વિભાજન સૂત્ર,

$$x = \frac{3(1) + 5(2)}{3+5} = \frac{3+10}{8} = \frac{13}{8}$$

$$y = \frac{3(-3) + 5(3)}{3+5} = \frac{-9+15}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$z = \frac{3(5) + 5(-1)}{3+5} = \frac{15-5}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

આમ, નિઃદિષ્ટ  $\left( \frac{13}{8}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4} \right)$  એ  $\overline{AB}$  નું A તરફથી 3 : 5 ગુણોત્તરમાં અંતાવિભાજન કરે છે.

(ii) અર્દી બહિર્વિભાજન હોવાથી,

$$m = -3, n = 5$$

$$x = \frac{-3(1) + 5(2)}{-3 + 5} = \frac{-3 + 10}{2} = \frac{7}{2}$$

$$y = \frac{-3(-3) + 5(3)}{-3 + 5} = \frac{9 + 15}{2} = 12$$

$$z = \frac{-3(5) - 5(-1)}{-3 + 5} = \frac{-15 - 5}{2} = -10$$

આમ,  $\overline{AB}$ નું A તરફથી 3 : 5 ગુણોત્તરમાં બહિર્વિભાજન કરતાં બિંદુના ધામ  $\left(\frac{7}{2}, 12, -10\right)$  છે.

**ઉદાહરણ 15 :** વિભાજન સૂત્રનો ઉપયોગ કરી બિંદુઓ (1, -3, 3), (3, 7, 1), (1, 1, 1) સમરેખ છે કે નહિ તે ચકાસો.

**ઉકેલ :** જો બિંદુઓ A(1, -3, 3), B(3, 7, 1) અને C(1, 1, 1) સમરેખ બિંદુઓ હોય, તો તે પૈકી કોઈ એક બિંદુ બાકીના બે બિંદુઓને જોડતા રેખાખંડનું કોઈક ગુણોત્તર k : 1 માં વિભાજન કરે. ધારો કે B એ  $\overline{AC}$ નું કોઈક ગુણોત્તર k માં અંતઃવિભાજન કે બહિર્વિભાજન કરે છે.

$$\therefore 3 = \frac{k(1) + 1}{k + 1} = \frac{k + 1}{k + 1} = 1$$

ફેરફાર નથી. આથી બિંદુઓ સમરેખ નથી.

**ઉદાહરણ 16 :** સાંબિત કરો કે (-1, 6, 6), (-4, 9, 6) અને (0, 7, 10) શિરોબિંદુઓ વાળો નિકોણ કાટકોણ નિકોણ છે.

વધુમાં ચકાસો કે કર્ણનું મધ્યબિંદુ તમામ શિરોબિંદુઓથી સમાન અંતરે આવેલું છે.

**ઉકેલ :** ધારો કે, A(-1, 6, 6), B(-4, 9, 6) અને C(0, 7, 10).

$$\text{હવે, } AB^2 = (-4 + 1)^2 + (9 - 6)^2 + (6 - 6)^2 = 9 + 9 = 18$$

$$BC^2 = (0 + 4)^2 + (7 - 9)^2 + (10 - 6)^2 = 16 + 4 + 16 = 36$$

$$AC^2 = (0 + 1)^2 + (7 - 6)^2 + (10 - 6)^2 = 1 + 1 + 16 = 18$$

$$\therefore AB^2 + AC^2 = BC^2$$

આમ,  $\Delta ABC$  કાટકોણ નિકોણ છે અને  $\overline{BC}$  કર્ણ છે.

ધારો કે  $\overline{BC}$ નું મધ્યબિંદુ M(x, y, z) છે, તો

$$(x, y, z) = \left( \frac{0-4}{2}, \frac{7+9}{2}, \frac{10+6}{2} \right) = (-2, 8, 8).$$

હવે, M એ  $\overline{BC}$ નું મધ્યબિંદુ હોવાથી અને  $BC = \sqrt{36} = 6$  હોવાથી,

$$BM = CM = 3$$

$$\text{તેમજ, } AM = \sqrt{(-2+1)^2 + (8-6)^2 + (8-6)^2} = \sqrt{1+4+4} = 3$$

આમ,  $AM = BM = CM$  એટલે કે, M,  $\Delta ABC$  નાં શિરોબિંદુઓથી સમાન અંતરે છે.

**પ્રક્રીષ્ટ ઉદાહરણો :**

સમતલમાં આપેલ ચાર બિંદુઓ પૈકી કોઈ પણ ત્રણ સમરેખ ન હોય તો તેઓ એક **ચતુર્ભુણ (quadrilateral)** રહે. અંતર-સૂત્ર અને વિભાજન સૂત્રની મદદથી ચતુર્ભુણનો પ્રકાર નક્કી કરી શકાય. અવકાશના ડિસ્સામાં જો આપેલ ચાર બિંદુઓ સમતલીય (coplanar) હોય તો તેઓ ચતુર્ભુણ રહ્યી શકે. આમ, ચતુર્ભુણનો પ્રકાર નક્કી કરતા પહેલા તેઓ સમતલીય હોવાની ખાતરી કરવી પડે. નીચેના ઉદાહરણો આ હકીકત ઉપર આધારિત છે :

**ઉદાહરણ 17 :** બિંદુઓ A(0, 0, 0), B(1, 0, 0), C(0, 1, 0), D(0, 0, 1) ચતુર્ભુણના શિરોબિંદુઓ છે કે કેમ તે નક્કી કરો. જો તેઓ ચતુર્ભુણ બનાવે તો તેનો પ્રકાર નક્કી કરો.

ઉક્ત :  $\vec{AC} = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{BD} = (-1, 0, 1)$ .

$\vec{AC}$  અને  $\vec{BD}$  ની દિશા બિના છે. તેથી  $\vec{AC} \parallel \vec{BD}$ .

હવે આપણે ગજસીશું કે તે એક બિંદુમાં છેદે છે કે નહિ.

જો તે એક બિંદુમાં છેદે તો શક્ય છે કે છેદબિંદુ A અથવા B અથવા C અથવા D હોય.

$\vec{AC} = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{AD} = (0, 0, 1)$ .

$\vec{AC}$  અને  $\vec{AD}$  ની દિશા બિના છે.

$\therefore A, C, D$  સમર્દેખ ન હોઈ શકે.

$\vec{BC} = (-1, 1, 0)$ ,  $\vec{BD} = (-1, 0, 1)$ .

$\therefore B, C$  અને D સમર્દેખ ન હોઈ શકે.

તે જ રીતે, (i) અને (ii) પરથી A, B, C અથવા A, B, D સમર્દેખ નથી.

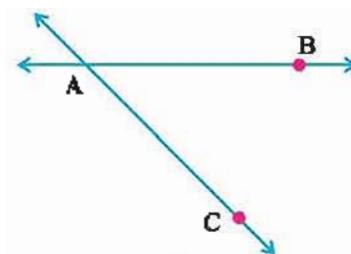
હવે, ધરો કે  $\vec{AB}$  અને  $\vec{CD}$  A અથવા B અથવા C અથવા D સિવાયના કોઈ બિંદુ P માં છેદે છે.

આપ  $P \in \vec{AC}$  અને  $P \in \vec{BD}$ . ધરો કે બિંદુ P,  $\vec{AC}$ નું A તરફથી  $\lambda$  ગુણોત્તરમાં અને તે  $\vec{BD}$ નું B તરફથી  $\mu$  ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે. ( $\lambda \in \mathbb{R} - \{0, -1\}$ ,  $\mu \in \mathbb{R} - \{0, -1\}$ ). વિભાજન સૂત્ર ઉપરથી,

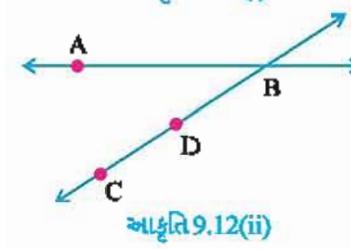
$$\left. \begin{aligned} P \in \vec{AC} \Rightarrow x &= \frac{\lambda(0)+0}{\lambda+1} = 0 \\ y &= \frac{\lambda(1)+0}{\lambda+1} = \frac{\lambda}{\lambda+1} \\ z &= \frac{\lambda(0)+0}{\lambda+1} = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{અને } P \in \vec{BD} \Rightarrow x &= \frac{\mu(0)+1}{\mu+1} = \frac{1}{\mu+1} \\ y &= \frac{\mu(1)+0}{\mu+1} = 0 \\ z &= \frac{\mu(0)+1}{\mu+1} = \frac{\mu}{\mu+1} \end{aligned} \right\}$$

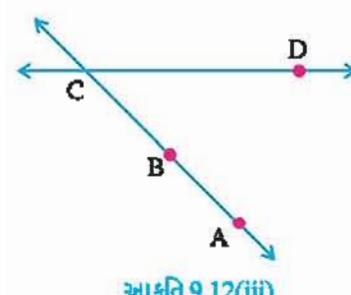
આપ (iii) અને (iv) ઉપરથી  $x = 0 = \frac{1}{\mu+1}$  જે શક્ય નથી આથી  $\vec{AC}$  અને  $\vec{BD}$  એકલીજને છેદે નહીં આપ,  $\vec{AC}$  અને  $\vec{BD}$  પરસ્પર સમાંતર નથી કે એકલીજને છેદતી નથી આપ, બિંદુઓ A, B, C અને D સમતલીય નથી આથી તેઓ ચતુર્ભુષણા રીતોબિંદુઓ નથી.



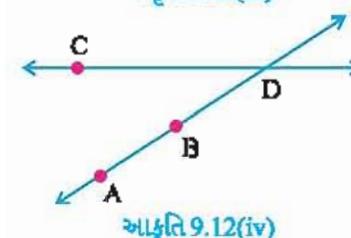
આકૃતિ 9.12(i)



આકૃતિ 9.12(ii)



આકૃતિ 9.12(iii)



આકૃતિ 9.12(iv)

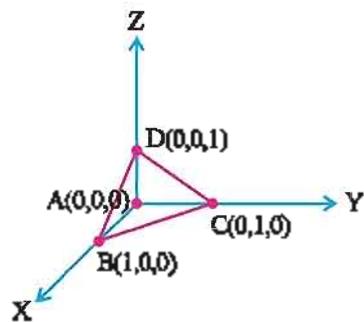
(iii)

(iv)

**નોંધ :** અવકાશના ચાર અસમતલીય બિંદુઓએ ચતુર્ભળક

**(Tetrahedron)** નામની બૌધ્યિક આકૃતિ બનાવે છે.

(આકૃતિ 9.12(v)) ચતુર્ભળકને ચાર નિકોણાકાર સપાટીઓ અને છ બાજુઓ હોય છે.



આકૃતિ 9.12(v)

**ઉદાહરણ 18 :** બિંદુઓ  $P(1, 1, 1)$ ,  $Q(-2, 4, 1)$ ,  $R(-1, 5, 5)$  અને  $S(2, 2, 5)$ ની સમતલીયતા ચકાસો. જો તેઓ ચતુર્ભળક રૂપ્તા હોય તો તેનો પ્રકાર નક્કી કરો.

**ઉકેલ :**  $\overrightarrow{PR}$  નું મધ્યબિંદુ  $M(0, 3, 3)$  છે.

$\overrightarrow{QS}$  નું મધ્યબિંદુ  $M(0, 3, 3)$  છે.

$\therefore \overleftrightarrow{PR}$  અને  $\overleftrightarrow{QS}$  બિંદુ  $M$  માં છેદ છે.

$\therefore P, Q, R, S$  સમતલીય છે.

$$\text{હવે, } \overrightarrow{PQ} = (-2, 4, 1) - (1, 1, 1) = (-3, 3, 0)$$

$$\overrightarrow{QR} = (-1, 5, 5) - (-2, 4, 1) = (1, 1, 4)$$

$$\overrightarrow{SR} = (-1, 5, 5) - (2, 2, 5) = (-3, 3, 0)$$

$$\overrightarrow{PS} = (2, 2, 5) - (1, 1, 1) = (1, 1, 4)$$

હવે,  $\overrightarrow{PQ}$  અને  $\overrightarrow{SR}$  ની દિશા સમાન છે; અને  $\overrightarrow{QR}$  અને  $\overrightarrow{PS}$  ની દિશા સમાન છે. વધુમાં,

$$PQ = \sqrt{(-3)^2 + (3)^2 + 0} = \sqrt{18} = RS$$

$$QR = \sqrt{1^2 + 1^2 - 4^2} = \sqrt{18} = PS$$

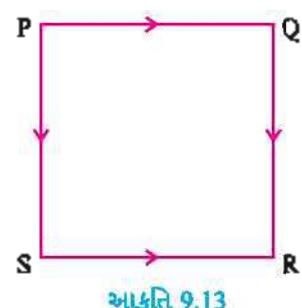
તેમજ ઉપર જણાવ્યા મુજબ વિક્રોંનો  $\overrightarrow{PR}$  અને  $\overrightarrow{QS}$  એકબીજાને હુલાગે છે.

$$PR = \sqrt{(1+1)^2 - (1-5)^2 - (1-5)^2} = \sqrt{4+16+16} = 6$$

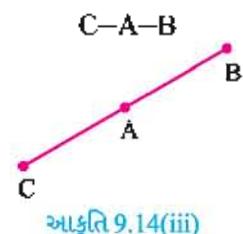
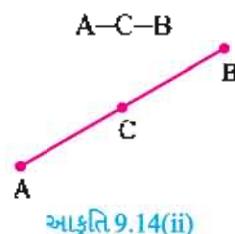
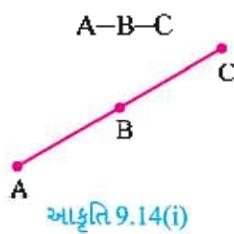
$$QS = \sqrt{(-2-2)^2 + (4-2)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{16+4+16} = 6$$

આમ, સમાંતરખાળું ચતુર્ભળક  $PQRS$ ની ઘારેય બાજુઓની લંબાઈ સરથી છે. તેમજ તે વિક્રોં એકબીજાને હુલાગે છે તેમજ તેમની લંબાઈ સમાન છે. આમ,  $\square PQRS$  ચોરસ છે.

અત્યાર સૂધી ગ્રાફ બિંદુઓની સમરેખતાની ચકાસણી અંતર-સૂત્ર અને વિભાજન સૂત્રથી પણ કરી હતી જો ગ્રાફ બિંદુઓ  $A, B$  અને  $C$  આપેલા હોય, તો તેઓ નીચેનું કોઈ એક ખાચું હોય તો જ સમરેખ ચાચ.



આકૃતિ 9.13



આ પ્રશ્નમાં  $\vec{AB}$  અને  $\vec{BC}$  ને સમાન અથવા વિરુદ્ધ દિશાઓ હોય. આથી જો  $\vec{AB}$  અને  $\vec{BC}$ ની દિશાઓ સમાન અથવા વિરુદ્ધ હોય તો જ બિંદુઓ A, B અને C સમરેખ થાય. નીચેના ઉદાહરણો આ હકીકત પર આપાયિત છે :

**ઉદાહરણ 19 :** નોંધ આપેલ બિંદુઓના ન્યાનો સમરેખતા દિશાનો મદદથી ગઠાસો :

- (1) A(0, 2), B(2, 4), C(-2, 0)      (2) P(1, -1, 0), Q(-3, 1, 2), R(-1, 0, 1)  
 (3) A(1, 2, 3), P(5, 2, 2), S(2, 3, 1)      (4) L(0, 0), M(1, 0), N(0, 1)

$$\text{ઉક્ત : } (1) \vec{AB} = (2, 4) - (0, 2) = (2, 2)$$

$$\vec{BC} = (-2, 0) - (2, 4) = (-4, -4)$$

$$\text{સ્પષ્ટ છે કે, } \vec{BC} = (-2)\vec{AB}$$

આથી,  $\vec{AB}$  અને  $\vec{BC}$  ની દિશાઓ વિરુદ્ધ હોય. આમ, બિંદુઓ A, B અને C સમરેખ છે.  $(\vec{AB} \neq \vec{BC})$

$$(2) \vec{PQ} = (-3, 1, 2) - (1, -1, 0) = (-4, 2, 2)$$

$$\vec{QR} = (-1, 0, 1) - (-3, 1, 2) = (2, -1, -1)$$

અહીં  $\vec{PQ} = (-2)\vec{QR}$ . સદિશ  $\vec{PQ}$  તથા  $\vec{QR}$  ની દિશા પરસ્પર વિરુદ્ધ હોય. આથી P, Q, R સમરેખ છે.

$$(3) \vec{AP} = (5, 2, 2) - (1, 2, 3) = (4, 0, -1)$$

$$\vec{PS} = (2, 3, 1) - (5, 2, 2) = (-3, 1, -1)$$

શક્ય હોય તો ધારો કે, કોઈ શૂન્યોત્તર  $k \in \mathbb{R}$  માટે

$$\vec{AP} = k(\vec{PS})$$

$$\therefore (4, 0, -1) = k(-3, 1, -1)$$

$$\therefore 4 = -3k, 0 = k, -1 = -k$$

કોઈ પણ  $k \in \mathbb{R}$  આ તમામને સંતોષે નહીં આયી  $\vec{AP}$  તથા  $\vec{PS}$  ની દિશા બિના છે. આથી A, P અને S અસમરેખ છે.

$$(4) \vec{LM} = (1, 0) - (0, 0) = (1, 0)$$

$$\vec{MN} = (0, 1) - (1, 0) = (-1, 1)$$

શક્ય હોય તો ધારો કે  $k \in \mathbb{R} - \{0\}$  માટે,

$$\vec{LM} = k(\vec{MN})$$

$$\therefore (1, 0) = k(-1, 1)$$

$$\therefore 1 = -k, k = 0$$

જે શક્ય નથી. આથી  $\vec{LM}$  તથા  $\vec{MN}$  ની દિશા બિના છે. આથી આપેલ બિંદુઓ અસમરેખ છે.

**ઉદાહરણ 20 :** સાંબિત કરો કે A(1, 2, 3), B(-1, -2, -1), C(2, 3, 2) તથા D(4, 7, 6) ચમાંતરખાજુ અનુષોદ રહે છે.

**ઉકેલ :**  $\overrightarrow{AC}$  નું મધ્યભિંદુ =  $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ ,  $\overrightarrow{BD}$  નું મધ્યભિંદુ =  $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ .

$\therefore \overrightarrow{AC}$  તથા  $\overrightarrow{BD}$  પરસ્પર દુલ્ઘાગે છે અને મધ્યભિંદુમાં છોદતી હોવાથી  $\overleftrightarrow{AC}$  તથા  $\overleftrightarrow{BD}$  સમતલીય છે.

$\therefore A, B, C, D$  સમતલીય અનુષોદ રહે છે અને તેના વિકારો પરસ્પર દુલ્ઘાગતા હોવાથી  $\square ABCD$  સંભાસ. છે.

**નોંધ રીત :**

$$\overrightarrow{AB} = (-2, -4, -4), \overrightarrow{BC} = (3, 5, 3), \overrightarrow{DC} = (-2, -4, -4)$$

$\therefore \overrightarrow{AB}$  તથા  $\overrightarrow{DC}$  સમાંદિશા છે.

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$  અથવા A, B, C, D સમરેખ છે. પરંતુ  $\overrightarrow{AB}$  અને  $\overrightarrow{DC}$  ની દિશા વિભિન્ન છે.

$\therefore C \notin \overleftrightarrow{AB}$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

તે જ રીતે  $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ .  $(\overrightarrow{AD} = (3, 5, 3))$

$\therefore A, B, C, D$  સમતલીય છે અને  $\square ABCD$  સંભાસ. છે.

**નોંધ :** નીચેની રીતનો ઉકેલ યોગ્ય નથી.

$$AB = \sqrt{4+16+16} = 6, CD = \sqrt{4+16+16} = 6, AD = \sqrt{9+25+9} = \sqrt{43} = BC$$

$\therefore$  આભસામેની બાજુઓ એકરૂપ હોવાથી  $\square ABCD$  સંભાસ. છે.  $\square ABCD$  સમતલીય હોય તો જ આ નિર્ણય યોગ્ય કરે. A, B, C, Dની સમતલીયતા શિફ્ટ કરવી જરૂરી છે. નીચેનું ઉદાહરણ જુઓ :

**ઉદાહરણ 21 :** સાંબિત કરો કે O(0, 0, 0), A(1, 1, 0), B(1, 0, 1), C(0, 1, 1) માટે  $OA = AB = BC = AC = OB = OC$ ,

પરંતુ O, A, B, C દ્વારા સંભાસ. ન બને.

**ઉકેલ :**  $\overrightarrow{OA} = (1, 1, 0), \overrightarrow{OB} = (1, 0, 1), \overrightarrow{OC} = (0, 1, 1)$

$$\overrightarrow{AB} = (0, -1, 1), \overrightarrow{BC} = (-1, 1, 0), \overrightarrow{AC} = (-1, 0, 1)$$

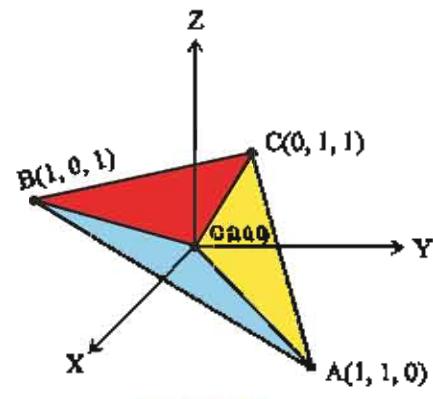
$\therefore OA = OB = OC = AB = BC = AC = \sqrt{2}$ .

પરંતુ ક્રેદિ પણ બે સંદિશની દિશા સમાન કે વિરુદ્ધ નથી.

$\therefore O, A, B, C$  દ્વારા સંભાસ. ન બને.

આ બિંદુઓ સમતલીય નથી તે શિફ્ટ કરી શકાય આ બિંદુઓ

O, A, B, C અનુષ્ઠળક (Tetrahedron) બનાયે છે.



આકૃતિ 9.15

### સ્વાચ્છાય 9.5

- જો A(1, 1, -2), B(2, 4, -1) માટે  $\overrightarrow{AB}$ નું વિભાજન કરતાં બિંદુઓના યામ મેળવો.
- વિભાજન સૂચનો ઉપયોગ કરી નીચેના બિંદુઓ સમરેખ છે કે નહિ તે ચકાસો :
  - P(1, -1, 1), Q(1, 0, 3), R(2, 0, 0)
  - A(5, 6, -1), B(1, -1, 3), C(1, 1, 1)
  - L(2, -3, 4), M(-1, 2, 1), N( $-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}$ )
  - O(0, 0, 0), A(1, 1, 1), B(2, 2, 2)
  - L(1, 2, 3), M(-1, -2, -3), N(1, -2, 3)

1. બિંદુઓ  $A(-2, -3, -1)$ ,  $B(2, 1, 1)$ ,  $C(-3, -2, -2)$  અને  $D(-7, -6, -4)$  સમાંતરાજી ચતુર્ભોગા ર્ણે છે તેમ દર્શાવો. શું તે લંબસોરસ છે ?
2. આપેલ બિંદુઓ  $A(0, 1, 2)$ ,  $B(2, -1, 3)$ ,  $C(1, -3, 1)$  માટે  $\Delta ABC$ નો પ્રકાર નક્કી કરો.
3. બિંદુઓ  $(1, 2, 3)$  અને  $(3, 2, -1)$ થી સમાન અંતરે આવેલ બિંદુઓના ગુણનું સમીક્રણ મેળવો.
4. નીચેના ટ્રિકોણો માટે મધ્યગાળોની લંબાઈ તેમજ મધ્યકેન્દ્રના યામ મેળવો :
  - (1)  $A(1, 0, 1)$ ,  $B(1, 2, 0)$ ,  $C(1, 1, 2)$
  - (2)  $P(1, 2, 3)$ ,  $Q(-1, 1, 0)$ ,  $R(0, 0, 3)$
  - (3)  $L(-1, -2, -3)$ ,  $M(1, 2, 3)$ ,  $N(1, 2, 1)$
5. ધારો કે  $\Delta ABC$  ની બાજુઓના મધ્યબિંદુઓ  $P(1, 2, -3)$ ,  $Q(3, 0, 1)$  અને  $R(-1, 1, 4)$  છે તો  $\Delta ABC$ નું મધ્યકેન્દ્ર શોધો.
6. સારિશોની મહાદ્વારી નીચેના બિંદુઓ સમરેખ છે કે કેમ તે ચકાસો તથા સમરેખ હોય તો તેમાંનું કોઈ પણ બિંદુ બાકીના બેને જોડતા રેખાખંડનું ક્યા ગુણોત્તરમાં કોના તરફથી વિભાજન કરે છે તે શોધો :
  - (1)  $A(5, 4, 6)$ ,  $B(1, -1, 3)$ ,  $C(4, 3, 2)$
  - (2)  $A(2, 3, 4)$ ,  $B(-4, 1, -10)$ ,  $C(-1, 2, -3)$
  - (3)  $A(1, 2, 3)$ ,  $B(0, 4, 1)$ ,  $C(-1, -1, -1)$
  - (4)  $L(3, 2, -4)$ ,  $M(5, 4, -6)$ ,  $N(9, 8, -10)$
  - (5)  $P(2, 3, 4)$ ,  $Q(3, 4, 5)$ ,  $R(1, 2, 3)$
7. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને  માં લાયો :
  - (1)  $(1, -\sqrt{2})$  અને  $(2, \sqrt{2})$  સારિશોના સરવાળાનું માન ..... છે.
 

<input type="checkbox"/>	(a) $-3$	(b) $3$	(c) $9$	(d) $-9$
--------------------------	----------	---------	---------	----------
  - (2) બિંદુઓ  $A(1, 0, 1)$ ,  $B(2, -1, 3)$  અને  $C(3, -2, 5)$  સમરેખ છે તો  $C$  એ  $\overline{AB}$ નું  $\Lambda$  તરફથી ..... ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.
 

<input type="checkbox"/>	(a) $2 : 1$	(b) $-3 : 2$	(c) $1 : 2$	(d) $-2 : 1$
--------------------------	-------------	--------------	-------------	--------------
  - (3) જેના શિરોબિંદુઓ  $P(1, -2, 1)$ ,  $Q(2, 3, -1)$ ,  $R(1, -1, -1)$  હોય તે ટ્રિકોણનું મધ્યકેન્દ્ર ..... છે.
 

<input type="checkbox"/>	(a) $(1, 2, 1)$	(b) $\left(\frac{4}{3}, 0, -\frac{1}{3}\right)$	(c) $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$	(d) $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$
--------------------------	-----------------	---	--	---
  - (4) જો  $A$  તથા  $B$  ના સ્થાનસંદર્ભો અનુક્રમે  $(1, 1, 0)$  તથા  $(0, 1, 1)$  હોય, તો  $\vec{AB} = \dots$ .
 

<input type="checkbox"/>	(a) $(0, 0, 0)$	(b) $(1, 0, -1)$	(c) $(-1, 0, 1)$	(d) $(1, 2, 1)$
--------------------------	-----------------	------------------	------------------	-----------------
  - (5)  $(1, 1, 2)$  તથા  $(2, 1, 0)$  નો દિશા ..... છે.
 

<input type="checkbox"/>	(a) સમાન	(b) વિરુદ્ધ	(c) બિના	(d) અવાયાર્થિત
--------------------------	----------	-------------	----------	----------------
  - (6)  $\langle 2, 2, 2 \rangle = \dots$ 

<input type="checkbox"/>	(a) $\langle -4, -4, -4 \rangle$	(b) $\langle 1, 1, -1 \rangle$	(c) $\langle -1, 1, -1 \rangle$	(d) $\langle 0, 0, 0 \rangle$
--------------------------	----------------------------------	--------------------------------	---------------------------------	-------------------------------
  - (7)  $\left\langle \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\rangle = \dots$ 

<input type="checkbox"/>	(a) $\langle 1, 1, -1 \rangle$	(b) $\langle \cos\theta \cos\alpha, \cos\theta \sin\alpha, \sin\theta \rangle$
	(c) $\langle 5, 5, 5 \rangle$	(d) $\langle 3, 3, -3 \rangle$

- (8)  $(2, 2, -1)$  ની દિશામાં એકમ સંદર્ભ ..... છે.  
 (a)  $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$       (b)  $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$       (c)  $(2, 2, 1)$       (d)  $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$
- (9)  $(1, 0, 0)$  ની દિશામાં એકમ સંદર્ભ ..... છે.  
 (a)  $(0, 1, 0)$       (b)  $(0, 0, 1)$       (c)  $(-1, 0, 0)$       (d)  $(1, 0, 0)$
- (10) A(1, 1, 1), B(2, 1, 2), C(x, y, z) હી બનતા  $\Delta ABC$  નું મધ્યકેન્દ્ર (0, 0, 0) હોય, તો (x, y, z) = .....  
 (a) (3, 2, 3)      (b) (0, 0, 0)      (c) (-3, -2, -3)      (d) (1, -1, 1)
- (11) જો A(1, 1, 2), B(2, 1, 2), C(2, 2, 1) હી A, B, C ..... છે.  
 (a) ટ્રિકોણના વિરોધિન્દુ (b) સમર્દેખ      (c) અક્ષો પર      (d) અસમતલીય
- (12) જો A(1, 2, 1), B(2, 3, 2), C(2, 1, 3), D(3, 2, 4) માટે  $\overrightarrow{AB}$  તથા  $\overrightarrow{CD}$  ની દિશા ..... છે.  
 (a) સમાન      (b) પરસ્પર વિરુદ્ધ      (c) બિના      (d) અવ્યાખ્યાયિત
- (13) જો A(1, 2, 1), B(2, 3, 2), C(2, 1, 3), D(3, 2, 4) તો .....  
 (a)  $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$       (b)  $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{CD}$   
 (c)  $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD}$  એકાંકી ગણ છે.      (d) C  $\in \overleftrightarrow{AB}$
- (14)  $(0, 0, 0)$  સંદર્ભ ..... .  
 (a) ને દિશા નથી      (b) ને માન નથી  
 (c) (1, 1, 1) ને સમદિશ છે      (d) (-1, -1, -1) ની વિરુદ્ધ દિશાનો સંદર્ભ છે.
- (15) P(2, 3, 1) તથા Q(7, 15, 1) તો  $|\overrightarrow{PQ}| =$  .....  
 (a) 5      (b) 12      (c) 13      (d) 17
- (16) (3, 6, 2) ની દિશામાં 4 માનવાળો સંદર્ભ ..... છે.  
 (a)  $\left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{2}{7}\right)$       (b) (12, 24, 8)      (c)  $\left(\frac{12}{7}, \frac{24}{7}, \frac{8}{7}\right)$       (d) (-12, -24, -8)
- (17) (2, -2, 1) ની વિરુદ્ધ દિશામાં એકમ સંદર્ભ ..... છે.  
 (a)  $\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$       (b) (-2, 2, -1)      (c)  $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$       (d)  $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$
- (18)  $(\cos\alpha, \sin\alpha)$  તથા  $(\cos(\pi + \alpha), \sin(\pi + \alpha))$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) ની દિશાઓ ..... .  
 (a) સમાન છે      (b) પરસ્પર વિરુદ્ધ છે      (c) બિના છે      (d) (1, 0) ને સમાન છે
- (19) જો રેશૂન્યેતર સંદર્ભ હોય તથા  $k > 0, k \neq 1$  તો  $\frac{-k\bar{x}}{|\bar{x}|}$  ..... .  
 (a)  $\bar{x}$  ની દિશાનો એકમ સંદર્ભ છે.  
 (b)  $\bar{x}$  ની દિશાનો  $k$  માનવાળો સંદર્ભ છે.  
 (c)  $\bar{x}$  ની વિરુદ્ધ દિશાનો એકમ સંદર્ભ છે.  
 (d)  $\bar{x}$  ની વિરુદ્ધ દિશાનો  $k$  માનવાળો સંદર્ભ છે.
- (20) જો રેશૂન્યેતર સંદર્ભ હોય તથા  $k < 0, k \neq -1$  તો  $\frac{k\bar{x}}{|\bar{x}|}$  ..... .  
 (a)  $\bar{x}$  ની દિશાનો એકમ સંદર્ભ છે.  
 (b)  $\bar{x}$  ની વિરુદ્ધ દિશાનો એકમ સંદર્ભ છે.  
 (c)  $\bar{x}$  ની વિરુદ્ધ દિશાનો  $|k|$  માનવાળો સંદર્ભ છે.  
 (d)  $\bar{x}$  ની દિશાનો  $|k|$  માનવાળો સંદર્ભ છે.

\*

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓની ચર્ચા કરી :

1. વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ક્રમયુક્ત યુગ્મ અને ક્રમયુક્ત ત્રયના ગણ અનુક્રમે  $R^2$  અને  $R^3$  ગાંઠ R ઉપર સહિત અવકાશ બનાવે છે.
2. સહિત  $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$  માન | $\bar{x}$ | =  $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$  છે. જો  $\bar{x} \in R^2$  અને  $\bar{x} = (x_1, x_2)$  હોય, તો | $\bar{x}$ | =  $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ .
3. | $\bar{x}$ | = 0  $\Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$   
| $k\bar{x}$ | = | $k$ | | $\bar{x}$ |
4. બે શૂન્યોત્તર સહિતો રે અને યે માટે જો  $\bar{x} = k\bar{y}$  હોય અને  $k > 0$  હોય, તો રે અને યેની દિશા સમાન છે અને જો  $k < 0$  હોય, તો તેમની દિશાઓ વિરુદ્ધ છે. આમ ન જાને તો  $\bar{x}, \bar{y}$  ની દિશા બિનન છે.
5. બિંદુઓ A અને B માટે  $\vec{AB} = B$ નો સ્થાનસહિત - Aનો સ્થાનસહિત
6. બે બિંદુઓ A( $x_1, y_1, z_1$ ) અને B( $x_2, y_2, z_2$ ) વચ્ચેનું અંતર  
 $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$  છે.
7. બિંદુઓ A અને B ના સ્થાનસહિતો અનુક્રમે  $\bar{r}_1$  અને  $\bar{r}_2$  હોય અને બિંદુ P એ અનુક્રમે  $\bar{r}_1 + \bar{r}_2$  અનુક્રમે  $\frac{\lambda \bar{r}_2 + \bar{r}_1}{\lambda + 1}$  હોય તો તેની સ્થાનસહિત  $\frac{\lambda \bar{r}_2 + \bar{r}_1}{\lambda + 1}$  હોય.
8. A( $x_1, y_1, z_1$ ), B( $x_2, y_2, z_2$ ) અને C( $x_3, y_3, z_3$ ) એ આંગન ABC ના મધ્યકેન્દ્રનો સ્થાનસહિત  $\left( \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \right)$  હોય.



### Bhaskara II

- Solutions of Diophantine equations of the second order, such as  $61x^2 + 1 = y^2$ . This very equation was posed as a problem in 1657 by the French mathematician Pierre de Fermat, but its solution was unknown in Europe until the time of Euler in the 18th century.
- Solved quadratic equations with more than one unknown, and found negative and irrational solutions.
- Preliminary concept of infinitesimal calculus, along with notable contributions towards integral calculus.
- Conceived differential calculus, after discovering the derivative and differential coefficient.
- Stated Rolle's theorem, a special case of one of the most important theorems in analysis, the mean value theorem. Traces of the general mean value theorem are also found in his works.
- Calculated the derivatives of trigonometric functions and formulae.
- In *Siddhanta Shiromani*, Bhaskara developed spherical trigonometry along with a number of other trigonometric results.

**Bhaskara II gave the formula :**  $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$

Bhaskaracharya studied Pell's equation  $px^2 + 1 = y^2$  for  $p = 8, 11, 32, 61$  and  $67$ . When  $p = 61$ , he found the solutions  $x = 226153980, y = 1776319049$ . When  $p = 67$  he found the solutions  $x = 5967, y = 48842$ . He studied many Diophantine problems.

The topics covered in Lilavati thirteen chapters of the book are: definitions; arithmetical terms; interest; arithmetical and geometrical progressions; plane geometry; solid geometry; the shadow of the gnomon; the kuttaka; combinations.

## લક્ષિત

*If people do not believe that mathematics is simple, it is only because they do not realise how complicated life is.*

— John Louis Von Neumann

### 10.1 પ્રાસ્તાવિક અને લક્ષનો ઇતિહાસ

હવે આપણે કલનશાસનો અભ્યાસ કરીશું. અત્યાર સુધીનો આપણો અભ્યાસ પ્રાકૃતિક અભ્યાસ હતો. *Calculus* એ એક લેટીન શબ્દ છે. તેનો અર્થ ગણિતરી કરવા માટેનો નાનો પથ્યર એવો થાય છે. જેમ લૂભિતિ એ આકારોનો અભ્યાસ છે, બીજગાળિત ડિયારોનો અભ્યાસ છે અને તેનો ઉપયોગ સમીકરણોનો ઉકેલ મેળવવા થાય છે, તે જ પ્રમાણે કલનશાસન એ સતત બદલતી જતી રાશિઓનો અભ્યાસ છે. કલનશાસનો વિજ્ઞાન, અર્થશાખ અને ઈજનેરી જેવી શાખાઓમાં બહોળો ઉપયોગ થાય છે.

પુરાણા કેટલાક વિચારો આપણાને અનિયત સંકલન તરફ દોરી જાય છે. ઇન્ડિયના મૌસ્કો પેપીરસ (Moscow Papyrus) (1820 B.C.) ગ્રંથમાં ક્રેત્રકળ અને ઘનકળને લગતી ગણિતરી અનિયત સંકલનથી જોવા મળે છે. પરંતુ તેને લગતા સૂત્રો ફક્ત માહિતી સ્વરૂપે છે અને તેમાંના કેટલાક ખોટાં પણ છે. જો કે શીક ગણિતજ્ઞ યુડોક્સસ (Eudoxus) (408-355 B.C.) ક્રેત્રકળ અને ઘનકળ શોધવા માટે ક્રમશ: સૂળભ ભાગ કરવાની પદ્ધતિ (Method of exhaustion)નો ઉપયોગ કરી લક્ષ (Limit)ની સંકલ્પના આપી. આર્કિમીડિઝ (Archimedes) (287-212 B.C.) આ સંકલ્પનાને આગળ વિકસાવી. ત્રીજી સદીમાં ચીની ગણિતજ્ઞ લીહુએ (Lie Huo) એ ક્રમશ: સૂળભાતિસૂળભ ભાગોની સંકલ્પનાનો ફરી ઉપયોગ કરી વર્તુળનું ક્રેત્રકળ મેળવ્યું.

ભ્રગુભૂતનું યુક્તિભાષા (Yuktibhasha) કલનશાસન પરનું પ્રથમ પુસ્તક ગણાય છે. ભાસ્કરરનું કલનશાસન પરનું કાર્ય ન્યूટન તથા લીબનીટ્રાના કાળ કરતાં ઘણું પહેલાનું છે. ભાસ્કર-2એ વિકલ-કલનના સિદ્ધાંતોનો ઉપયોગ ખગોળશાસનના પ્રક્રોમાં કર્યો. એવો નક્કર આધ્યાર છે કે ભાસ્કર વિકલ-કલનના કેટલાક સિદ્ધાંતોના કામમાં અશ્રેષ્ટ હતા. ચલના માંયકમાન પ્રમેયનું વિધાન પણ તેમણે કર્યું હતું. તેમના પુસ્તક સિદ્ધાંત શિરોમણીમાં ગાંધિતોથ વિશ્લેષણ અને શૂન્યાભિલક્ષી કલનનો પ્રાથમિક સંકલ્પના જોવા મળે છે.

આ બધા વિચારો દ્વારા વિકલ-કલનના વિકાસનું શ્રેય ગોટફિ વિલિયમ લીબનીટ્સ (Gottfried Wilhelm Leibnitz)ના ફળે જાય છે. તેણે ન્યૂટન (Newton)ના સમયમાં જ સ્વતંત્ર રીતે કલનની શોધ કરી. કલનશાસના શોધનો પણ લીબનીટ્સ

અને ન્યુટન બંનેના કાળે જાપ છે. ન્યુટને કલનના પરિણામ પહેલાં તારવા પરંતુ લીભનીટ્રે તેને પ્રથમ પ્રકાશિત કર્યા, બંનેએ એકલીજિયાની સ્વતંત્ર રીતે પરિણામ ગેવવા, પરંતુ લીભનીટ્રે અનિયત સંકલનની શરૂઆત કરી અને ન્યુટને વિકલનની શરૂઆત કરી કલનશાળ એવું નામ એ લીભનીટ્રે આધું ઓગસ્ટિસાની સદીમાં કોશી (Cauchy), રીમાન (Riemann) અને વાયરસ્ટ્રાસ (Weierstrass) કલનનો આગળ વિકાસ કર્યો, લક્ષની દ-ઈ ની આધુનિક વ્યાખ્યા વાયરસ્ટ્રાસની ઉપર છે.

વિષેયના લક્ષની આધુનિક સંકલના એ બોલ્ફાનોના સમયની છે. તેણે દ-ઈ ની રીત વિષેયના સાતાય માટે ઈ.સ. 1817 માં વાપરી હતી કોશીએ *Cours d' analyse* (1821)માં 1821 માં લક્ષની ચર્ચા કરી હતી. પણ તેણે ફક્ત અનૌપચાર્યક વ્યાખ્યા આપી હતી. વાયરસ્ટ્રાસે દ-ઈ સર્વપ્રે લક્ષની આધુનિક વ્યાખ્યા આપી. તેનો આજે ઉપયોગ થાય છે. તેણે  $\lim_{x \rightarrow x_0}$  અને  $\lim_{x \rightarrow \infty}$  છાવમાં પ્રચલિત છે તેવો સંકેત આપ્યો.

## 10.2 લક્ષનો સાહજિક વ્યાખ

હવે આપણે કલનશાળના મૂળભૂત વ્યાખ લક્ષ પર આવીએ. લક્ષની વ્યાખ્યા આપતાં પહેલાં આપણે લક્ષનો સાહજિક વ્યાખ મેળવીએ. હવે આપણે આગળ જે ચર્ચા કરીશું તે આપણને લક્ષ વિષે સાહજિક વ્યાખ આપણે અને ઉદાહરણોની ચર્ચા આપણાને લક્ષની સંકલના તરફ દોરી જશે.

જ્યારે કોઈ રચના પ્રદેશમાં સતત બદલાતો હોય અને તે કોઈ રોકસ ક્રિમતની નષ્ટક જાપ ત્યારે તે વિષેયનું ‘લક્ષ’ જો અસ્થિત્વ પરાવતું હોય તો તે એ વિષેયનું અંતિમ મૂલ્ય (Ultimate Value) છે. ચાલો, વધુ સ્પષ્ટતા કરીએ. જ્યારે  $x$  ની ક્રિમત 1 ની વધુ નષ્ટક જાપ ત્યારે વિષેય  $f(x) = (3x + 2)$  નું લક્ષ  $\lim_{x \rightarrow 1} 3x + 2$  એમ લખાય. હવે તે તેવી રીતે શોધતું તે જોઈએ.  $x$  અને  $f(x)$ ની કેટલાંક મૂલ્યોનું કોષ્ટક બનાવીએ.

$x$	0.9	0.99	0.999	0.9999	1.1	1.01	1.001	1.0001
$f(x)$	4.7	4.97	4.997	4.9997	5.3	5.03	5.003	5.0003

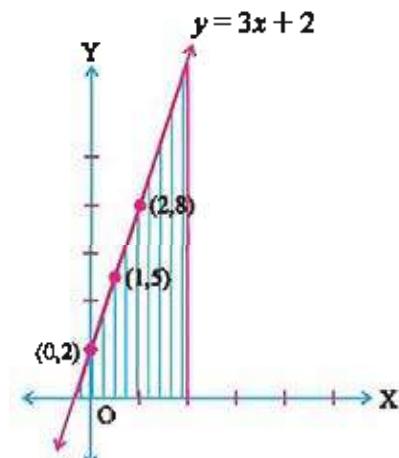
કોષ્ટક પરથી જોઈ શકાય કે જેમ ખાલી ની ક્રિમતો 1 થી નાની રહીને 1ની વધુ ને વધુ નષ્ટક જાપ છે, તેમ  $f(x)$ ની ક્રિમતો 5 ને અનુલખે છે. આ પરિસ્થિતિ દર્શાવવા આ પ્રમાણે વિષ્યાન કરાય છે. ‘જેમ  $x$  એ 1 ને ડાબી બાજુથી અનુલખે છે, તેમ  $f(x)$  નું લક્ષ 5 છે.’ આને ખાટે સંકેત  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 5$  લખાય છે. તે જ પ્રમાણે જેમ  $x$ ની ક્રિમતો 1થી મોટી રહીને 1ની વધુ ને વધુ નષ્ટક જાપ ત્યારે ‘જેમ  $x$  એ 1 ને જમણી બાજુથી અનુલખે છે તેમ  $f(x)$ નું લક્ષ 5 છે.’ અથવા  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 5$  લખાય છે. વધી અહીં,  $f(1) = 3 + 2 = 5$  છે પરંતુ આ જરૂરી નથી.

જો  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  અને  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  નું અસ્થિત્વ હોય અને બંને સમાન હોય, તો  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  નું અસ્થિત્વ હોય અને તે  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  અથવા  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  બરાબર છે.

ચાલો હવે એને આવેં પરથી સમજાઓ.

અહીં જોઈ શકાય છે કે જેમ  $x \rightarrow 1^-$ ,  $y$ -યામ 5 ને અનુલખે છે અને તેવું જ  $x \rightarrow 1^+$ . ખાટે થાય છે. અહીં લક્ષની ચર્ચામાં આપણે નોંધીએ કે  $f(1) = 5$ .

ઉદાહરણ 1 થી 13 લક્ષની સંકલનાની સમજૂતી માટે જ છે.  
તે પરિણામાં પૂર્ણાના પ્રશ્નો નથી.



આકૃતિ 10.1

**ઉદાહરણ 1 :**  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x - 1} = 2$  કોણતી મદદથી જાણો.  $(x \neq \frac{1}{2})$

x	0.49	0.499	0.4999	0.51	0.501	0.5001
f(x)	1.98	1.998	1.9998	2.02	2.002	2.0002

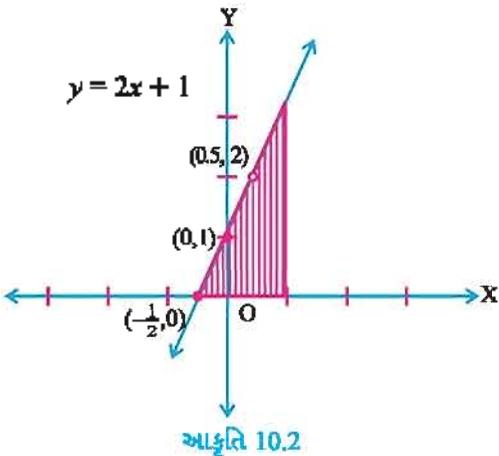
જુઓ કે,

$$f(x) = \frac{4x^2 - 1}{2x - 1}$$

$$= 2x + 1, જ્યાં x \neq \frac{1}{2}.$$

આમ, આપણો જોઈ શકીએ છીએ કે,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = 2.$$



**સમજૂતી :** જેમ કે x એ  $\frac{1}{2}$  ને જમણી કે ગણી બાજુથી અનુલખે તેમ કે f(x) એ 2ને અનુલખે છે. અહીં આવેચ પર x =  $\frac{1}{2}$  ને અનુરૂપ નિંદુ  $(\frac{1}{2}, 2)$  અસ્થિત ખાંચતું નથી. આમ, જેમ કે 1 ને અનુલખે તેમ કે f(x) નું 'અતિમ મૂલ્ય' 2 છે.

**ઉદાહરણ 2 :**  $\lim_{x \rightarrow 0} |x|$  શોધો.

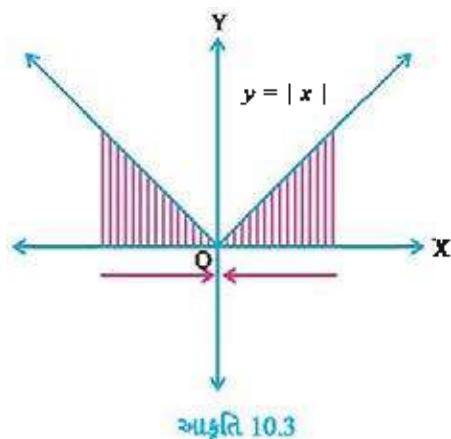
**ઉકેલ :** આપણો જાણીએ છીએ  $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

x	-0.1	-0.01	-0.001	0.1	0.01	0.001
f(x)	0.1	0.01	0.001	0.1	0.01	0.001

આમ, અનુભાગ કરી શક્ય છે,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

જુઓ કે f(0) = 0.



**ઉદાહરણ 3 :** સાખિત કરો કે,  $\lim_{x \rightarrow 2} [x]$  નું અસ્થિત નથી.

**ઉકેલ :**  $f(x) = [x] = \begin{cases} 1 & જ્યાં 1 \leq x < 2 \\ 2 & જ્યાં 2 \leq x < 3 \end{cases}$

$x$	1.9	1.99	1.999	1.9999	2.1	2.01	2.001	2.0001
$f(x)$	1	1	1	1	2	2	2	2

આમ,  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$  અને  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  નું અસિલ્ય નથી.

**સમજૂતી :** અહીં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે P અને Q વખે અવકાશ છે, જ્ઞમણી બાજુનું લક્ષ અને ડાખી બાજુનું લક્ષ સમાન નથી.

**ઉદાહરણ 4 :**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$  ( $x \neq 0$ ) વિશે શું કઢી શકાય?

$$\text{ઉકેલ : અહીં, } f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{જ્યાં } x > 0 \\ -1 & \text{જ્યાં } x < 0 \end{cases}$$

$f$  એ  $x = 0$  અને વાયાપ્તિક નથી.

$x$	-0.1	-0.01	-0.001	0.1	0.01	0.001
$f(x)$	-1	-1	-1	1	1	1

સ્વપ્ન છે કે,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  નું અસિલ્ય નથી.

**નોંધ :** ઉદાહરણ 1માં  $f\left(\frac{1}{2}\right)$  વાયાપ્તિક નથી પણ  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$  નું અસિલ્ય છે.

ઉદાહરણ 2માં  $f(0)$  વાયાપ્તિક છે અને  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ .

ઉદાહરણ 3માં  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ . અહીં  $f(2)$  નું અસિલ્ય છે. પડા લક્ષનું અસિલ્ય નથી.

ઉદાહરણ 4માં  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  અને  $f(0)$  નું અસિલ્ય નથી. લક્ષનું અસિલ્ય પણ નથી.

હવે આપણી પાસે નક્કર આપાર છે કે જેના પરથી આપણે તપરાં પર આવી શકીએ કે  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  નું મૂલ્ય કે અસિલ્ય

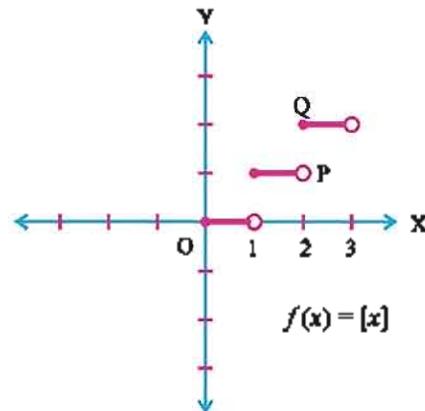
તેનાં  $a$  આપણનાં મૂલ્ય  $f(a)$  કે  $f(a)$  ના અસિલ્ય પર આપારિત નથી.

**ઉદાહરણ 5 :**  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  શોધો, જ્યાં  $f(x) = \begin{cases} x + 3 & x < 0 \\ 3 - x & x \geq 0 \end{cases}$

**ઉકેલ :** અહીં  $x < 0$  માટે  $f(x) = x + 3$  અને  $x > 0$  માટે  $f(x) = 3 - x$ .

$\therefore$  કૃમતોનું કોઈક નીચે પ્રમાણે થાં :

$x$	-0.1	-0.01	-0.001	0.1	0.01	0.001
$f(x)$	2.9	2.99	2.999	2.9	2.99	2.999



આકૃતિ 10.4

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3$$

आम,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$ .

**समझौती :**  $(0, 3)$  एवं आवेद्य परन्तु निंदा के अने केवल  $x \rightarrow 0^-$  तेव प्रकार निंदा के अने केवल  $x \rightarrow 0^+$  तेव B एवं C तरक जाय के अने केवल  $x \rightarrow 0^+$  समान थाये।

वर्णी,  $f(0) = 3$ . आम ग्रहण समान के।

**उदाहरण 6 :**  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  शोधो, जबकि  $f(x) = \begin{cases} x + 3 & x > 1 \\ 10 & x = 1 \\ x + 5 & x < 1 \end{cases}$

**उत्तर :**

$x$	0.9	0.99	0.999	1.1	1.01	1.001
$f(x)$	5.9	5.99	5.999	4.1	4.01	4.001

$x < 1$                                    $x > 1$

आम,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  के 6 छोय तेव वागे के अने  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  के 4 छोय तेव वागे के। आम,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  के अस्तित्व नयी।

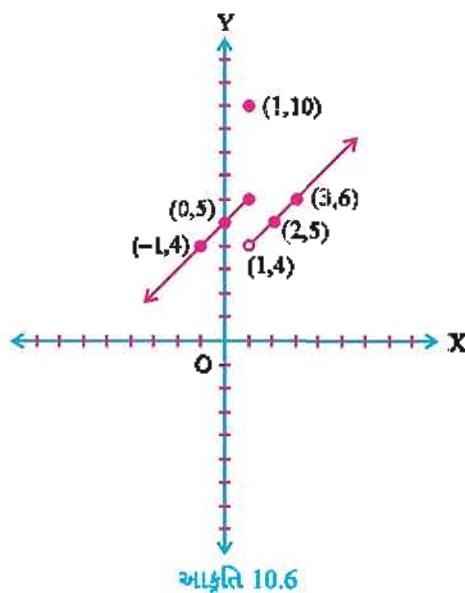
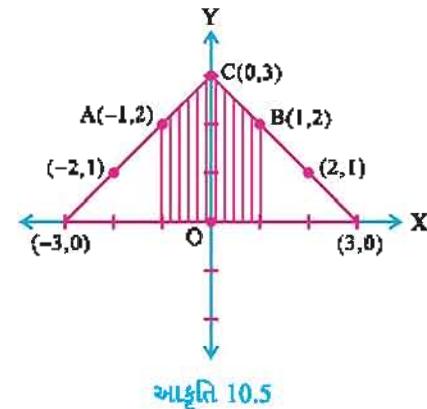
वर्णी,  $f(1) = 10$ . ग्रहण लिन। के।

**समझौती :**

आम,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

अने बने लिन। के।

**उदाहरण 7 :**  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - x)$  शोधो।

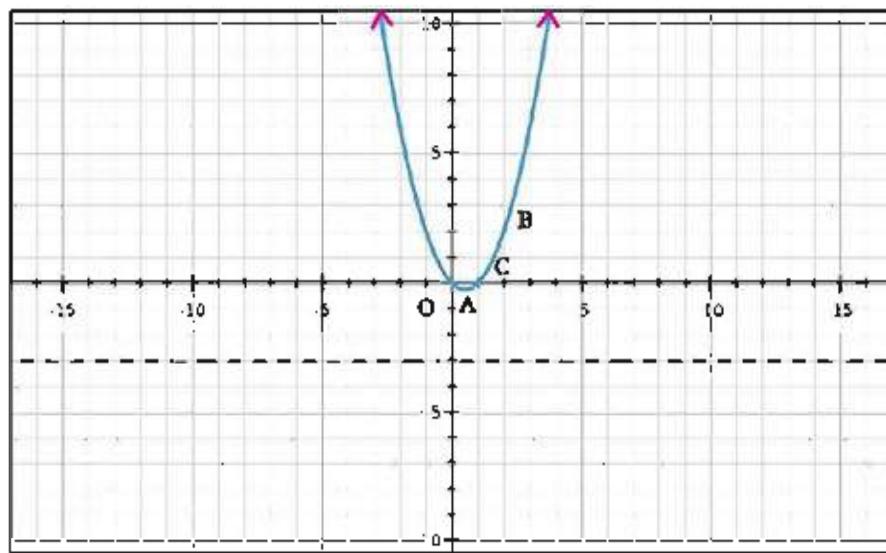


**उत्तर :**

$x$	0.9	0.99	0.999	1.1	1.01	1.001
$f(x)$	-0.09	-0.0099	-0.000999	0.11	0.0101	0.001001

आम,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$ ,  $f(1) = 1^2 - 1 = 0$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 = f(1)$



આકૃતિ 10.7

**સમજૂતી :** જેમ,  $x \rightarrow 1^-$ , A એ C ને અનુશ્લેષે છે અને જેમ  $x \rightarrow 1^+$  તેમ B એ C ને અનુશ્લેષે છે.

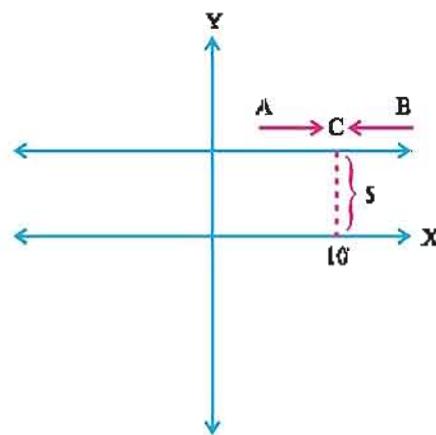
$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

**ઉદાહરણ 8 :**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 5$  માટે  $\lim_{x \rightarrow 10} f(x)$  શોધો.

**ઉકેલ :**

$x$	9.9	9.99	9.999	10.1	10.01	10.001
$f(x)$	5	5	5	5	5	5

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 10} f(x) = 5$$



આકૃતિ 10.8

**સમજૂતી :** જેમ,  $x \rightarrow 10^-$ , તેમ A એ C ને અનુશ્લેષે છે અને જેમ  $x \rightarrow 10^+$ , તેમ B એ C ને અનુશ્લેષે છે.  $C(10, 5)$  છે.

$$\lim_{x \rightarrow 10} f(x) = 5$$

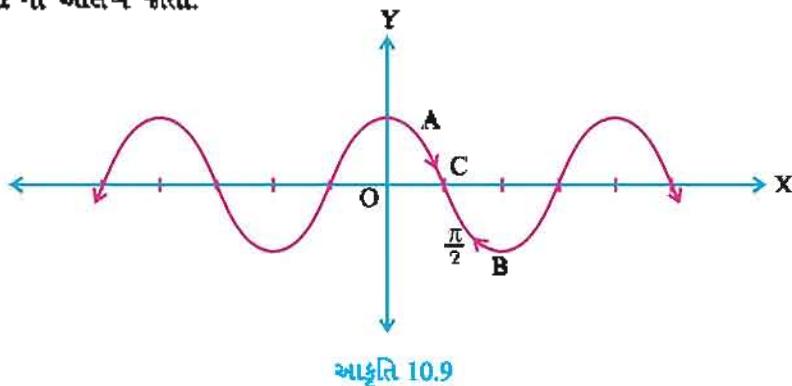
**ઉદાહરણ 9 :**  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x$  શોધો.

**ઉકેલ :**

x	$\frac{\pi}{2} - 0.1$	$\frac{\pi}{2} - 0.01$	$\frac{\pi}{2} - 0.001$	$\frac{\pi}{2} + 0.1$	$\frac{\pi}{2} + 0.01$	$\frac{\pi}{2} + 0.001$
$f(x)$	0.099833	0.009999833	0.0009999998	-0.099833	-0.009999833	-0.0009999998

આમ,  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x = 0$

**સમજૂતી :**  $\cos x$  નો આદેખ જોતા.



અકૃતિ 10.9

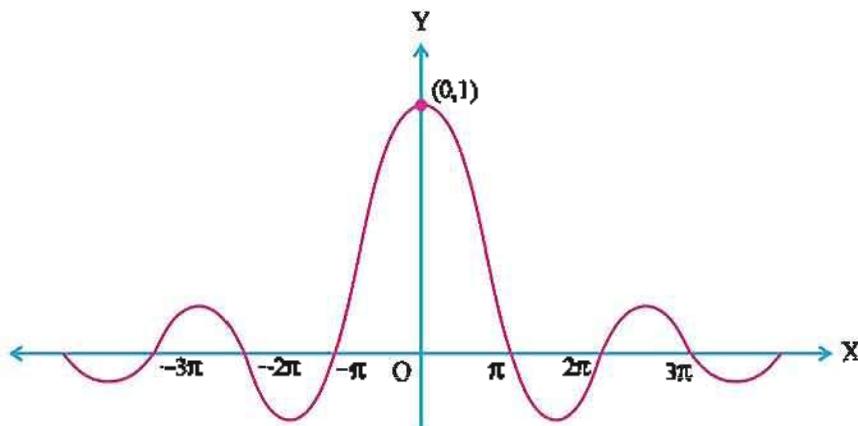
જેમ,  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}-$  અને  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}+$  તેમ અનુક્રમે A એ C ને અને B એ C ને અનુવળે છે.

$\therefore \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x = 0$

**ઉદાહરણ 10 :**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, (x \neq 0)$  ચકાલો.

**ઉકેલ :**

x	-0.7	-0.2	-0.05	0.4	0.3	0.03	0.01
$f(x)$	0.92031	0.993347	0.999583	0.97275	0.98506	0.99985	0.999983



અકૃતિ 10.10

**સમજૂતી :** નોંધીએ કે  $\frac{\sin x}{x}$  એ યુગ્મ વિષેય છે. એટલે કે,  $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x}$ .

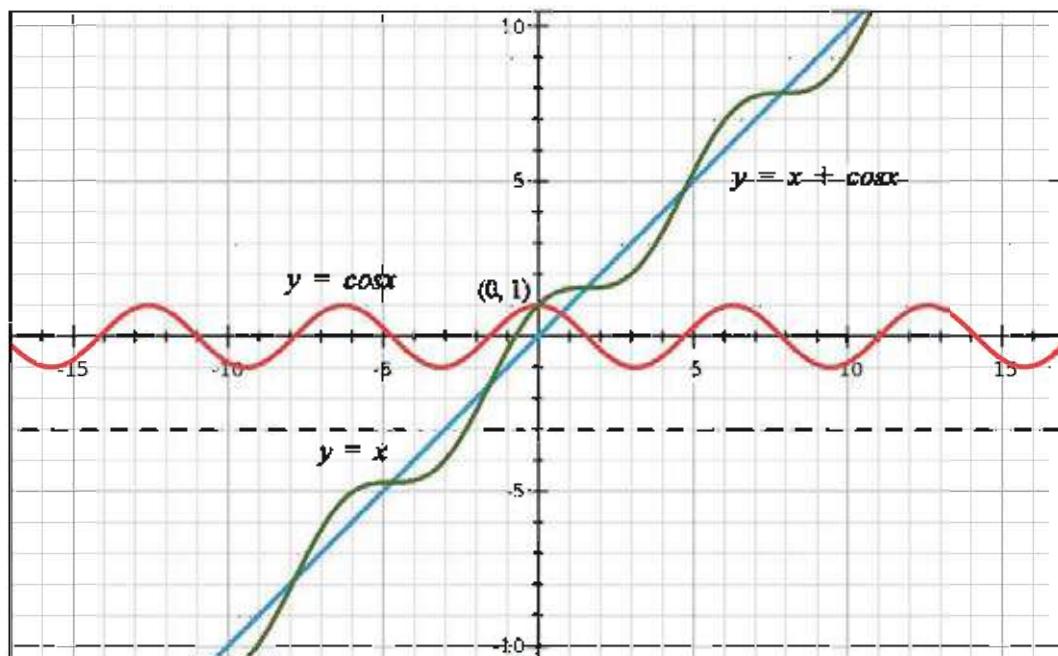
તેથી આપણો  $x > 0$  જ વર્દિયું, એમ અનુમાન કરી શકાય કે,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ . જે આવેખ પરથી પણ જોઈ શકાય છે અને તે આપણો આ પ્રકરણમાં આગળ સાંજિત પણ કરીયું.

**ઉદાહરણ 11 :**  $\lim_{x \rightarrow 0} (x + \cos x)$  શોધો.

ઉકેલ :

$x$	-0.1	-0.01	-0.001	0.1	0.01	0.001
$f(x)$	0.895004165	0.98995	0.9989995	1.095004165	1.009995	1.0009995

સમજૂતી : કોષ્ટક પરથી અનુમાન કરી શકાય કે,  $\lim_{x \rightarrow 0} (x + \cos x) = 1$ .



આપૃતી 10.11

જુઓ,  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ .

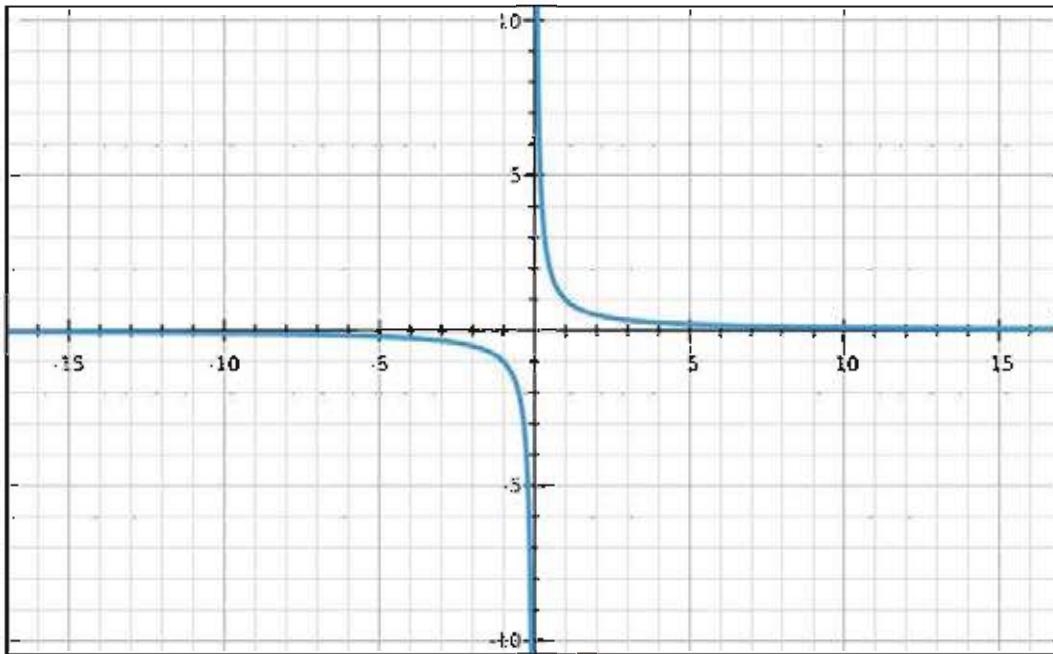
$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} (x + \cos x) = \lim_{x \rightarrow 0} x + \lim_{x \rightarrow 0} \cos x$$

**ઉદાહરણ 12 :**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$  ના અસિન્ટોન વિશે ગર્વી કરો.

ઉકેલ :

$x$	-0.1	-0.01	-0.001	0.1	0.01	0.001
$f(x)$	-10	-100	-1000	10	100	1000

સમજૂતી : અર્થી, આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે જેમ એ  $x \rightarrow 0+$  તેમ એ  $\frac{1}{x}$  અપરિભિત રીતે વધે અને જેમ એ  $x \rightarrow 0-$  તેમ એ  $\frac{1}{x}$  અપરિભિત રીતે ઘટે છે. તેથી  $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x}$  અધ્યવા  $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x}$  અસિન્ટોન નથી જેમ એ  $x \rightarrow 0+$ ,  $\frac{1}{x} \rightarrow \infty$  જેમ એ  $x \rightarrow 0-$  તેમ એ  $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$  કરેલાય. તેથી  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$  નું અસિન્ટોન નથી.



અધ્યક્તિ 10.12

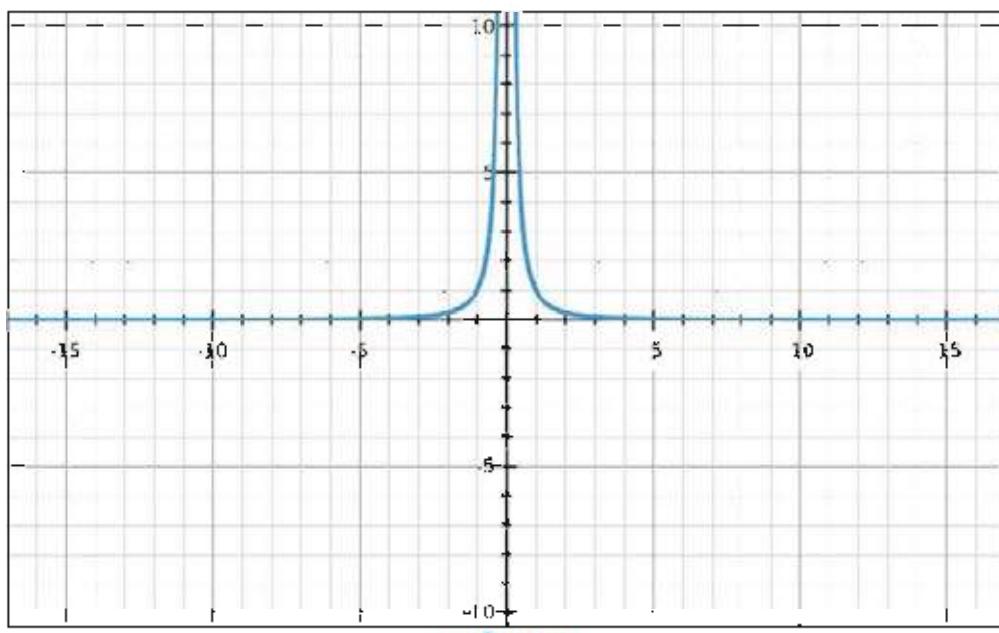
$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$  અથવા  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$  કહેતું ખોટું છે. અહીં આપણે નોંધીશું કે  $\infty$  એને  $-\infty$  એ માત્ર સંકેતો છે અથવા વિસ્તૃત વાસ્તવિક સંખ્યા સંકરિતના ઘટકો છે. આપણે તો વાસ્તવિક સંખ્યા સંકરિતમાં જ લક્ષ શોધીએ છીએ.

**ઉદાહરણ 13 :**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$  રિશે રચો.

ઉકેલ :

x	-0.1	-0.01	-0.001	0.1	0.01	0.001
$f(x)$	$10^2$	$10^4$	$10^6$	$10^2$	$10^4$	$10^6$

**સમજૂતી :** અહીં, જેમ કે  $x \rightarrow 0^+$  કે  $x \rightarrow 0^-$ ,  $\frac{1}{x^2}$  એ અપરિભિત રીતે વધે છે અથવા  $\frac{1}{x^2} \rightarrow \infty$  પણ આપણે  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$  લખતાં નથી.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$  નું અસિન્ટોન નથી.

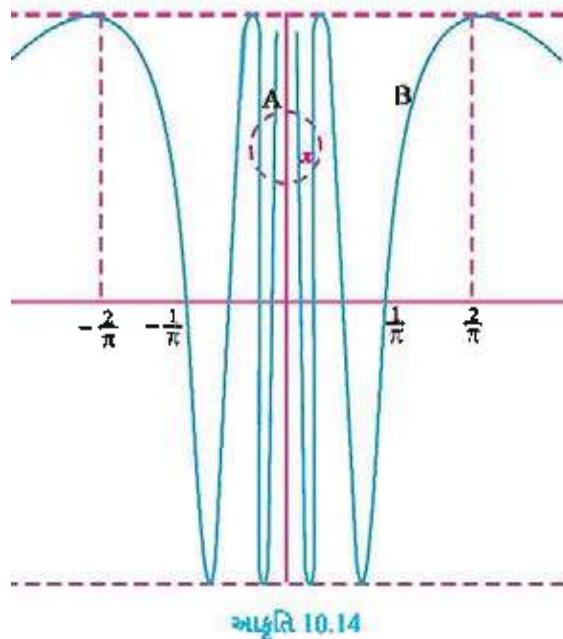


અધ્યક્તિ 10.13

### 10.3 લક્ષની ઔપचારિક વ્યાખ્યા

હવે આપણે લક્ષની ઔપचારિક વ્યાખ્યા આપવા તૈયાર છીએ. અત્યાર સુધી આપણે કોઈકો અને આલેખોના આધારે વિશેયોના લક્ષ વિશે અનુમાન બાંધું. પણ તે બધાનું નથી. ઘણીવાર બધું સરળ દાખલા વિશે પણ અનુમાન બાંધી શકતું નથી તથા તેનું કોઈક આપણને મેરમાર્યે પણ દોરે છે.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$  નો આધેખ જુઓ (આકૃતિ 10.14). શું આપણે  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$  વિશે અનુમાન બાંધી શકીએ ? જ્યારે  $x = \frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{Z} - \{0\}$  શેષીની કોઈ પણ ડિમત લે તો  $\sin \frac{1}{x} = 0$ , જ્યારે  $x = \frac{2}{(4m-1)\pi}$  ત્યારે  $\sin \frac{1}{x} = 1$  અને  $x = \frac{2}{(4m+3)\pi}$  માટે  $\sin \frac{1}{x} = -1$ . તે સિવાયની પણ  $x$ -ની ડિમતોને આપણે લક્ષમાં લીધી નથી. આમ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$  વિશે કશું પણ અનુમાન બાંધવું મુશ્કેલ છે.

**વ્યાખ્યા :** વિશેયનું લક્ષ : ધારો કે વિશેય  $f(x)$  એ એ ને સમાવતા કોઈ અંતરાલમાં  $a$  સિવાયની વાસ્તવિક સંખ્યાઓ માટે વ્યાખ્યાપિત છે. ( $a$  એ  $f$ ના પ્રદેશમાં ન પણ હોય.) જો પ્રત્યેક  $\epsilon > 0$  માટે  $\delta > 0$  એવો મળે કે જેથી,



આકૃતિ 10.14

$a - \delta < x < a + \delta, x \neq a \Rightarrow 1 - \epsilon < f(x) < 1 + \epsilon$  તો  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  તેમ કહેવાય અથવા જેમ એ એ ને અનુલો છે તેમ  $f(x)$ નું લક્ષ  $l$  છે.

અહીં જોઈ શકાય છે કે  $\delta > 0$  એ કોઈ પણ ધન સંખ્યા છે. આપણે  $f(x)$ ને  $l$  ની વધુ નજીક લઈ જવા  $|f(x) - l| < \epsilon$  અથવા  $|f(x) - l| < \epsilon$  લઈ શકાય તે માટે  $\delta$ ની અનુદ્દ્યુપ પસંદગી કરવી પડે કે જેથી  $a - \delta < x < a + \delta, x \neq a$  અથવા  $-\delta < x - a < \delta, x \neq a$  એટલે કે  $|x - a| < \delta, x \neq a$ .

આમ, આપણે  $\delta > 0$  એવો પસંદ કરીએ કે જેથી  $x$  ને અની વધુ નજીક વચ્ચા અને તેથી  $f(x)$  પણ  $l$  ની વધુ નજીક આયે.

**ડાબી બાજુનું લક્ષ :** જો વિશેય  $f(x)$  કોઈ અંતરાલ  $(a - h, a), (h > 0)$  માં વ્યાખ્યાપિત છે. અને પ્રત્યેક  $\epsilon > 0$  ને સંગત  $\delta > 0$  મળે કે જેથી, પ્રત્યેક  $x \in (a - \delta, a)$  અને  $\delta < h$  માટે  $l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon$ , તો જેમ  $x \rightarrow a-$  તેમ  $f(x)$ નું (ડાબી બાજુનું) લક્ષ  $l$  છે તેમ કહેવાય અથવા  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$ .

**જમણી બાજુનું લક્ષ :** જો વિશેય  $f(x)$  કોઈક અંતરાલ  $(a, a + h), (h > 0)$  માં વ્યાખ્યાપિત છે. અને પ્રત્યેક  $\epsilon > 0$  ને સંગત  $\delta > 0$  એવો મળે કે પ્રત્યેક  $x \in (a, a + \delta), \delta < h$  માટે  $l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon$ , તો જેમ  $x \rightarrow a+$  તેમ  $f(x)$ નું (જમણી બાજુનું) લક્ષ  $l$  છે તેમ કહેવાય અથવા  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$ .

- નોંધ :** (1) વ્યાખ્યામાં હેવું ક્યાંય પણ નથી કે  $a$  એ  $f$  ના પ્રદેશમાં હોવો જોઈએ.  $f(x)$  એ  $a$  ને સમાવતા કોઈક અંતરાલમાં  $a$  સિવાયની કિમતો ભાગે વ્યાખ્યાપિત હેવું જોઈએ.  $a$  એ  $f$  ના પ્રદેશમાં હોઈ પણ શકે કે ના પણ હોય.
- (2)  $\epsilon > 0$  આપેલ સંખ્યા છે અને  $f$  પર આપ્યારિત  $\delta > 0$  શોખો પડે.

હવે આપણે વ્યાખ્યા સમજવા કેટલાંક ઉદાહરણ લઈએ.

**ઉદાહરણ 14 :** સાબિત કરો :  $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 2) = 8$ .

**ઉકેલ :** ધરો કે  $\epsilon > 0$  એ આપેલ ધન સંખ્યા છે.

આપણે  $8 - \epsilon < 3x + 2 < 8 + \epsilon$  મેળવ્યા હુંદ્દીને છીએ. (I = 8)

$$8 - \epsilon < 3x + 2 < 8 + \epsilon \Leftrightarrow 6 - \epsilon < 3x < 6 + \epsilon$$

$$\Leftrightarrow 2 - \frac{\epsilon}{3} < x < 2 + \frac{\epsilon}{3}.$$

$2 - \delta < x < 2 + \delta$  સાથે સરખાવતાં  $\delta = \frac{\epsilon}{3}$  કેવાનું સૂચન મળે છે. (a = 2)

આમ,  $\delta = \frac{\epsilon}{3}$  લેતાં,

$$\begin{aligned} \therefore 2 - \delta < x < 2 + \delta, x \neq 2 &\Rightarrow 2 - \frac{\epsilon}{3} < x < 2 + \frac{\epsilon}{3} \\ &\Rightarrow 6 - \epsilon < 3x < 6 + \epsilon \\ &\Rightarrow 8 - \epsilon < 3x + 2 < 8 + \epsilon \end{aligned}$$

આ જ આપણે મેળવ્યા હુંદ્દતા હતી અને  $\delta = \frac{\epsilon}{3} > 0$  એવો મળે છે કે જેથી

$$2 - \delta < x < 2 + \delta, x \neq 2 \Rightarrow 8 - \epsilon < 3x + 2 < 8 + \epsilon$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} (3x + 2) = 8.$$

**ઉદાહરણ 15 :** સાબિત કરો :  $\lim_{x \rightarrow a} x = a$ .

**ઉકેલ :** ધરો કે  $\epsilon = \delta, \epsilon > 0$  તો,  $a - \delta < x < a + \delta, x \neq a \Rightarrow a - \epsilon < x < a + \epsilon$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} x = a.$$

**નોંધ :** એ કેખીનું નથી કે જેમ કે  $x \rightarrow a$  તેમ  $x \rightarrow a$  પણ તે આપણે વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરી સાબિત કર્યું.

**ઉદાહરણ 16 :** સાબિત કરો :  $\lim_{x \rightarrow a} (mx + c) = ma + c$  ( $m \neq 0$ )

**ઉકેલ :** ધરો કે  $\delta = \frac{\epsilon}{|m|}, \epsilon > 0$ .

$$a - \delta < x < a + \delta, x \neq a \Rightarrow a - \frac{\epsilon}{|m|} < x < a + \frac{\epsilon}{|m|}$$

$$\Rightarrow ma - \frac{\epsilon}{|m|}m < mx < ma + \frac{\epsilon}{|m|}m \quad (m > 0 \text{ લેતાં})$$

$$\Rightarrow ma - \epsilon < mx < ma + \epsilon$$

$$\Rightarrow ma - \epsilon + c < mx + c < ma + \epsilon + c$$

$I = ma + c$  લેતાં,

$$\therefore a - \delta < x < a + \delta, x \neq a \Rightarrow I - \epsilon < mx + c < I + \epsilon$$

$$\therefore જે m > 0 તો \lim_{x \rightarrow a} (mx + c) = ma + c.$$

ते ज प्रमाणे,  $m < 0$  माटे पक्ष सामित करी शक्य.

$$\begin{aligned} a - \delta < x < a + \delta, x \neq a \Rightarrow ma + c + \epsilon > mx + c > ma + c - \epsilon \quad (\mid m \mid = -m) \\ \Rightarrow ma + c - \epsilon < mx + c < ma + c + \epsilon \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} (mx + c) = ma + c.$$

#### 10.4 लक्षनु बीजगणित

बधे ज लक्षनी व्याख्यानो उपयोग करवो मुझेल अने अधरो होवाथी आपको विधेयनु लक्ष शोधवा माटे केटलांक अर्थनियमो झोर्हाशु. तेमने सामित करी शक्य पक्ष आपके ते सामिती विना स्वीकारीशु.

धारो के  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  तथा  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  नु असितव छे अने तेमनां मूल्यो अनुकमे / तथा  $m$  छे.

तो (1)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$  नु असितव छे अने

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l + m$$

(2)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) g(x))$  नु असितव छे अने

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x) = lm$$

$$(3) \text{ जो } m \neq 0, \text{ तो } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ नु असितव छे अने } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{l}{m}$$

**उदाहरण 17 :** सामित करो के जो  $f(x)$  ए अचण विधेय छे अने जो  $f(x) = c$ , तो  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$  अथवा बीजा

शब्दोमां  $\lim_{x \rightarrow a} c = c$  अने ते परथी तारवो के जो,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  नु असितव होए तो  $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

**उक्ति :** धारो के  $f(x) = c$  अने  $x \in (a - \delta, a + \delta) - \{a\}$ . धारो के  $l = c$ .

$$a - \delta < x < a + \delta, x \neq a \Rightarrow |f(x) - l| = |c - c| = 0 < \epsilon \text{ ज्यां } 0 < \epsilon.$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \text{ ऐट्टो } \lim_{x \rightarrow a} c = c$$

$$\begin{aligned} \text{जो } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ नु असितव होए, तो } \lim_{x \rightarrow a} cf(x) &= \lim_{x \rightarrow a} c \lim_{x \rightarrow a} f(x) \\ &= c \lim_{x \rightarrow a} f(x) \end{aligned}$$

**नोट :**  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$  तथा  $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  नो उपयोग करीने

आपको  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$  सामित करी शक्य.

$$\begin{aligned} \text{जो } c = -1 \text{ दै, } \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) &= \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + (-1)g(x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} (-1)g(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) \end{aligned}$$

**प्रमेय 1 :** सामित करो :  $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$   $n \in \mathbb{N}$

**सामिती :** आ प्रमेय आपको गणितीय अनुमानना सिद्धांतस्थी सामित करीशु.

$$\text{ધારો } \text{કે } P(n) : \lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\text{આપણે સાબિત કર્યું છે, } \lim_{x \rightarrow a} x = a$$

$\therefore P(1)$  સત્ય છે.

ધારો કે  $P(k)$  સત્ય છે.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} x^k = a^k$$

ધારો કે  $n = k + 1$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} x^{k+1} = \lim_{x \rightarrow a} x^k \cdot x$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} x^k \lim_{x \rightarrow a} x \\ = a^k \cdot a = a^{k+1}$$

(લક્ષના ગુણકાર માટેનો કાર્યનિયમ)

( $P(k)$  અને  $P(1)$ )

$\therefore P(k+1)$  સત્ય છે.

$\therefore$  ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત દ્વારા  $P(n), \forall n \in \mathbb{N}$  સત્ય છે.

**પ્રશ્ન 2 :** જો  $\lim_{x \rightarrow a} f_i(x) (i = 1, 2, 3, \dots, n)$  નું અસ્તિત્વ હોય, તો

$$\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) + \dots + \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$$

**સાબિતી :** આ પરિણામ આપણે ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી સાબિત કરીશું.

ધારો કે,

$$P(n) : \lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) + \dots + \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$$

$n = 1$  માટે પરિણામ સ્પષ્ટ છે.

ધારો કે  $P(k)$  સત્ય છે.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_k(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) + \dots + \lim_{x \rightarrow a} f_k(x)$$

ધારો કે  $n = k + 1$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) + \dots + f_k(x) + f_{k+1}(x))$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) + \dots + f_k(x)) + \lim_{x \rightarrow a} f_{k+1}(x) \quad \left( \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) + \dots + \lim_{x \rightarrow a} f_k(x) + \lim_{x \rightarrow a} f_{k+1}(x) \quad (\text{P}(k))$$

$\therefore P(k+1)$  સત્ય છે.

$\therefore$  ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત દ્વારા  $P(n), \forall n \in \mathbb{N}$  સત્ય છે.

**બહુપદી વિષેયનું લક્ષ :**

આપણે જાણીએ છીએ કે  $f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_0, x \in \mathbb{R} (c_n \neq 0, c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R})$

$n$  ધાત વાળી બહુપદી છે.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} (c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_0) \\
&= \lim_{x \rightarrow a} c_n x^n + \lim_{x \rightarrow a} c_{n-1} x^{n-1} + \dots + \lim_{x \rightarrow a} c_0 \\
&\quad \left( \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow a} c_n \lim_{x \rightarrow a} x^n + \lim_{x \rightarrow a} c_{n-1} \lim_{x \rightarrow a} x^{n-1} + \dots + \lim_{x \rightarrow a} c_0 \\
&\quad \left( \lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right) \\
&= c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} + \dots + c_0 \\
&= f(a)
\end{aligned}$$

આમ, જેમ ક્રમ  $x \rightarrow a$  તેમ બહુપદીનું લક્ષ આપણો બહુપદીમાં  $x = a$  મુક્કવાથી મેળવી શકીએ.

(આ ગુણધર્મને બહુપદી વિધેયનું ‘સતત્ત્વ’ કહે છે.)

**ઉદાહરણ 18 :**  $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^3 + 3x^2 - 5x + 1)$  શોધો.

$$\begin{aligned}
\text{ઉક્તથી : } \lim_{x \rightarrow 2} (2x^3 + 3x^2 - 5x + 1) &= 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 1 \\
&= 16 + 12 - 10 + 1 = 19
\end{aligned}$$

સંમેય વિધેયનું લક્ષ :

ધારો કે  $p(x)$  અને  $q(x)$  બહુપદીઓ જ્યાં  $q(x) \neq 0$  તેવા પ્રદેશ પર વ્યાખ્યાયિત છે.  $h(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  ને સંમેય વિધેય કહે છે.

જો  $p(x)$  અને  $q(x)$  એ એ ને સમાવત્તા પ્રદેશ પર વ્યાખ્યાયિત હોય અને  $q(a) \neq 0$  તો,

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} p(x)}{\lim_{x \rightarrow a} q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)} = h(a).$$

આમ, સંમેય વિધેય  $h(x)$  પણ સતત વિધેય છે.

**ઉદાહરણ 19 :**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x^2 + 3x + 4}$  શોધો.

ઉક્તથી : અહીં,  $x = 1$  માટે  $x^2 + 3x + 4 \neq 0$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x^2 + 3x + 4} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

આમ જો  $q(a) \neq 0$  તો સંમેય વિધેય  $h(x) = \frac{P(x)}{q(x)}$  માટે  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = h(a)$  આપણને  $h(x)$  માં  $x = a$  મુક્કવાથી મળશે. પરંતુ જો  $q(a) = 0$  હોય તો ?

શેષ પ્રમેય મુજબ  $x - a$  એ  $q(x)$ -નો અવયવ થાય. હવે આપણો કેટલાંક વિકલ્પો જોઈશું,

**વિકલ્પ (1) :**  $p(x) = (x - a)^k f(x)$

$$q(x) = (x - a)^k g(x), f(a) \neq 0, g(a) \neq 0, k \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned}
 \text{इति, } \lim_{x \rightarrow a} h(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)^k f(x)}{(x-a)^k g(x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \\
 &= \frac{f(a)}{g(a)}
 \end{aligned}
 \quad (\text{लक्षनी चर्चामां } x \neq a)$$

आम,  $(x - a)$  की समान घात अंश अने छेदमां होय तो आपको तेने दूर करी त्यार भाए  $x = a$  मुळी लक्ष मेणवीशु.

**उदाहरण 20 :**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3x^2 + x}{4x^3 - 5x^2 + 3x}$  शोधो.

$$\begin{aligned}
 \text{उत्कल : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3x^2 + x}{4x^3 - 5x^2 + 3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^2 - 3x + 1)}{x(4x^2 - 5x + 3)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x + 1}{4x^2 - 5x + 3} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

**उदाहरण 21 :**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 3x + 1}{3x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 10x + 6}$  शोधो.

$$\begin{aligned}
 \text{उत्कल : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 3x + 1}{3x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 10x + 6} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^3 - 6x^2 + 2x - 1)}{(x-1)(3x^3 - 2x^2 + 4x - 6)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 2x - 1}{3x^3 - 2x^2 + 4x - 6} \\
 &= \frac{-4}{-1} = 4
 \end{aligned}$$

**नोंद :** अही  $p(1) = q(1) = 0$ , तेथी  $(x - 1)$  ए  $p(x)$  अने  $q(x)$ नो अवयव उ.  $p(x)$  अने  $q(x)$ ना अवयवो पाड्या भाए  $(x - 1)$ ने अंश अने छेदमांशी दूर करी,  $x = 1$  लेतां लक्ष भणे.

**उदाहरण 22 :**  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{2x^3 - 9x^2 + 12x - 4}$  शोधो.

**उत्कल :**  $p(2) = 8 - 20 + 16 - 4 = 0$ ,  $q(2) = 16 - 36 + 24 - 4 = 0$

$\therefore (x - 2)$  ए  $p(x)$  अने  $q(x)$ नो अवयव उ.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{2x^3 - 9x^2 + 12x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2(x-1)}{(x-2)^2(2x-1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{2x-1} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

अही,  $(x - 2)^2$  ए  $p(x)$  तथा  $q(x)$  बानेनो अवयव उ.

**विकल्प (2) :** हवे जो  $(x - a)^k$  अने  $(x - a)^m$  अनुकमे  $p(x)$  अने  $q(x)$ ना अवयवो होय ज्यां  $k \neq m$  अने  $\frac{p(x)}{(x - a)^k}$

अने  $\frac{q(x)}{(x - a)^m}$  नो अवयव  $x - a$  न होय तो शु थाय ते हवे आपको जोईओ.

$$\text{હવે, જો } k > m \text{ તો } h(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{(x-a)^k f(x)}{(x-a)^m g(x)} = \frac{(x-a)^{k-m} f(x)}{g(x)}$$

અહીં,  $k - m \in \mathbb{N}$ .

$\therefore f(a) \neq 0, g(a) \neq 0$ .

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \frac{0 \cdot f(a)}{g(a)} = 0$$

આમ, જો  $p(x)$ નું  $(x-a)$ નો ઘાતાંક વધુ હોય તો,  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0$ .

**વિકલ્પ (3) :** જો  $p(x) = (x-a)^k f(x), q(x) = (x-a)^m g(x)$  જ્વાલ  $k < m$  અને  $\frac{p(x)}{(x-a)^k} = f(x)$  અને  $\frac{q(x)}{(x-a)^m} = g(x)$  એ  $x=a$  માટે શુદ્ધેતર છે તો,

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)^k f(x)}{(x-a)^m g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^{m-k} g(x)}$$

હવે,  $f(a) \neq 0$  એ વાસ્તવિક સંખ્યા છે.  $(a-a)^{m-k} g(a) = 0$

$\therefore$  જેમણે  $x \rightarrow a$  તેમણે  $h(x)$ નો છેદ અસિમિન પણ અને  $\lim_{x \rightarrow a} h(x)$  અસ્થિત્વ નથી.

**ઉદાહરણ 23 :**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 - 1}$  શોધો.

$$\begin{aligned} \text{ઉકેલ : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^3}{(x-1)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{x+1} = \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

**ઉદાહરણ 24 :**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - x^3 - x^2}{x^6 - x^5 + x}$  શોધો.

$$\begin{aligned} \text{ઉકેલ : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - x^3 - x^2}{x^6 - x^5 + x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(x^2 - x + 1)}{x(x^5 - x^4 + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^2 - x + 1)}{x^5 - x^4 + 1} = \frac{0 \cdot 1}{1} = 0 \end{aligned}$$

એક અગત્યનું લક્ષણ :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (x \neq a), \quad x, a \in \mathbb{R}$$

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે આ એક સંમેય વિધેય છે.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \dots + a^{n-1})}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \dots + a^{n-1}) \\ &= a^{n-1} + a^{n-2}a + a^{n-3}a^2 + \dots + a^{n-1} = na^{n-1} \end{aligned}$$

**નોંધ :** આ પરિણામ પ્રત્યેક  $n \in \mathbb{R}$  માટે સત્ય છે. આપણે તેનો ઉપયોગ  $x \in \mathbb{R}^+, a \in \mathbb{R}^+, x \neq a$  માટે આપણું કરીશું.

**ઉદાહરણ 25 :**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{18}-1}{x^{16}-1}$  શોધો.

$$\text{ઉકેલ : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{18}-1}{x^{16}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{18}-1}{x-1} \times \frac{x-1}{x^{16}-1}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{18}-1}{x-1}}{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{16}-1}{x-1}}$$

$$= \frac{18(1)^{17}}{16(1)^{15}} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}$$

**ઉદાહરણ 26 :**  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^5+32}{x^3+8}$  શોધો.

$$\text{ઉકેલ : } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^5+32}{x^3+8} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^5-(-2)^5}{x^3-(-2)^3}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^5-(-2)^5}{x-(-2)}}{\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3-(-2)^3}{x-(-2)}}$$

$$= \frac{5(-2)^4}{3(-2)^2} = \frac{5 \cdot 16}{3 \cdot 4} = \frac{20}{3}$$

**ઉદાહરણ 27 :**  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4-16}{x^3-3x^2+3x-2}$  શોધો.

$$\text{ઉકેલ : } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4-16}{x^3-3x^2+3x-2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4-2^4}{x-2}}{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2-x+1)}{x-2}}$$

$$= \frac{4 \cdot 2^3}{4-2+1} = \frac{32}{3}$$

આદેશનો નિયમ અથવા સંયોજિત વિધેયના લક્ષનો નિયમ :

ધારો કે  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ નું અસ્થિત્વ છે અને  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  તથા  $\lim_{y \rightarrow b} g(y)$ નું અસ્થિત્વ છે અને  $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = l$ ,

તો  $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = l$ .

અહીં,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ નું અસ્થિત્વ છે એટલે  $f$  એ કોઈક  $\delta > 0$  માટે  $(a - \delta, a + \delta) - \{a\}$ માં વ્યાખ્યાયિત છે અને

$y = f(x)$ ,  $g$  એ કોઈક  $\delta' > 0$  માટે  $(b - \delta', b + \delta') - \{b\}$ માં વ્યાખ્યાયિત છે.

**ઉદાહરણ 28 :**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)^5-32}{x}$  શોધો.

$$\text{ઉકેલ : } જો y = f(x) = x+2 તો \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2 = b.$$

$$\lim_{y \rightarrow 2} g(y) = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{y^5 - 2^5}{y - 2} = 5 \cdot 2^4 = 80$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)^5 - 32}{x} = 80$$

વબહારમાં આપણે  $y = x + 2$  આદેશ લઈશું અને દાખલામાં જેમ ક્રમ  $x \rightarrow 0$  તેમ યું કરીએ કે ક્રમ  $y \rightarrow 2$  થશે. 'સતત' વિધેય માટે આ સત્ત્ય છે.

**બીજી રીત :**

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)^5 - 32}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 + \binom{5}{1}x^4 \cdot 2 + \binom{5}{2}x^3 \cdot 2^2 + \binom{5}{3}x^2 \cdot 2^3 + \binom{5}{4}x \cdot 2^4 + \binom{5}{5}2^5 - 32}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( x^4 + \binom{5}{1}2x^3 + \binom{5}{2}4x^2 + \binom{5}{3}8x + \binom{5}{4}16 \right) = 5 \cdot 16 = 80 \end{aligned}$$

**ઉદાહરણ 29 :**  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$  શોધો.

**ઉકેલ :** ધારો કે  $y = x + h$ , આથી,  $h \rightarrow 0$  એટાં  $y \rightarrow x$  થશે.

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{y^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}}{y - x} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

**ઉદાહરણ 30 :**  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{3x + 2}}$  શોધો.

$$\text{ઉકેલ : } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{3x + 2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)(\sqrt{x^2 + x + 2} + \sqrt{3x + 2})}{(\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{3x + 2})(\sqrt{x^2 + x + 2} + \sqrt{3x + 2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)(\sqrt{x^2 + x + 2} + \sqrt{3x + 2})}{(x^2 + x + 2) - (3x + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)(\sqrt{x^2 + x + 2} + \sqrt{3x + 2})}{x^2 - 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)(\sqrt{x^2 + x + 2} + \sqrt{3x + 2})}{x(x-2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 2x - 4)(\sqrt{x^2 + x + 2} + \sqrt{3x + 2})}{x}$$

$$= \frac{(12)(\sqrt{8} + \sqrt{8})}{2} = 6(4\sqrt{2}) = 24\sqrt{2}$$

$$\left( \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2 + x + 2} \right) = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x + 2)} = \sqrt{8}$$

**સંયોજિત વિધેયના લક્ષનો નિયમ**

### બે અગત્યના નિયમો :

(1) જો સમાન પ્રદેશમાં  $f(x) < g(x), \forall x$  અને જો  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  અને  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ નું અસ્થિત્વ હોય તો  
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x).$

(2) જો સમાન પ્રદેશમાં વ્યાખ્યાપિત વિષેયો માટે  $g(x) < f(x) < h(x), \forall x$ . જો  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  અને  $\lim_{x \rightarrow a} h(x)$ નું  
અસ્થિત્વ હોય અને બંને / હોય, તો  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ નું અસ્થિત્વ હોય અને તે પણ / થાય.

આને સેન્ડવીચ પ્રમેય (Sandwich Theorem) કે સ્વીજ પ્રમેય (Squeeze Theorem) કહે છે. આપણે આ પ્રમેયને  
સાધિત નહિએ કરીએ.

**ઉદાહરણ 31 :** સાધિત કરો :  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0. (x \neq 0)$

$$\text{ઉકેલ : } -1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$$

$$\therefore -x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq x \quad (x > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = -\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$\therefore \text{સેન્ડવીચ પ્રમેય પરથી, } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

$$\text{તે જે પ્રમાણે, } \lim_{x \rightarrow 0^-} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

**નોંધ :** નીચે પ્રમાણેનો તર્ક ખોટો છે.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \\ &= 0 (-1 \text{ અને } 1 \text{ વાળેની કોઈ પણ સંખ્યા) \\ &= 0 \end{aligned}$$

જ્યારે બધાં જ ઘટક વિષેયનું લક્ષ અસ્થિત્વ ધરાવતું હોય ત્યારે જ ગુણકારનો નિયમ વપરાય. અહીં  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$  નું  
અસ્થિત્વ નથી. (જુઓ આફ્ટિનિંઝ 10.14)

**ઉદાહરણ 32 :** સાધિત કરો :  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0. (x \neq 0)$

$$\text{ઉકેલ : } -1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$$

$$\therefore -x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2 \quad (x^2 > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0, \lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = -\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

$$\therefore \text{સેન્ડવીચ પ્રમેય પરથી } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0.$$

**નોંધ :** ઉપરના ઉદાહરણમાં કિભવેના કોષ્ટક પરથી અધ્યપણને વોક્સસ પરિણામ નથી મળતું તેણી આપણે વ્યાખ્યાની મદદથી જાગ્રત વધી શકીએ.

$$\text{ધારો } \frac{1}{x} = \delta = \sqrt{\epsilon}.$$

$\epsilon > 0$  હોવાથી  $\delta > 0$  અસ્લિત્વ પદબે.

$$0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow 0 < |x| < \sqrt{\epsilon}$$

$$\Rightarrow 0 < |x|^2 < \epsilon$$

$$\text{હવે, જો } 0 < |x - 0| < \delta \text{ દિ } \left| x^2 \sin \frac{1}{x} - 0 \right| = \left| x^2 \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|^2 < \epsilon$$

$$\text{કારણ કે } \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$$

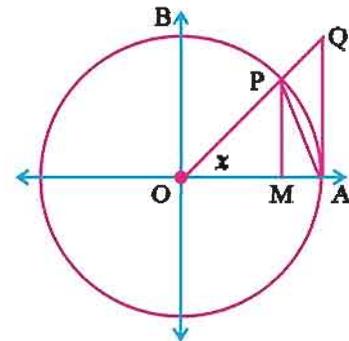
$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$$

## 10.5 નિકોશામિતીય લક્ષ

આપણે કેટલાંક નિકોશામિતીય પરિણામો મેળવીશું.

**પૂર્વપ્રમેય 1 :**  $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1; \quad 0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ .

**સાચિત્તી :** જો  $x$  એ  $\angle AOP$ નું રેઝિયન માપ હોય, જ્યાં  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , તો  $P(x) \in \widehat{AB}$ . અને છાયાં  $O(O, OA)$  એકમ વર્તુળ છે. આ આગળનો વર્તુળનો સ્પર્શિક  $\overrightarrow{OP}$  ને  $Q$  માં છુટે છે.  $\overline{PM} \perp X$ -અક્ષ અને  $M \in \overline{OP}$ .



આકૃતિ 10.15

$$\text{સ્વાચ્છ છે } \Delta OAP \text{નું કેન્દ્રક્ષણ} < \text{વૃત્તાંશનું કેન્દ્રક્ષણ} < \Delta OAQ \text{નું કેન્દ્રક્ષણ} \quad (i)$$

$$\text{હવે, } PM = \sin x, AQ = \frac{AQ}{OA} \cdot OA = OA \tan x = \tan x$$

$$\therefore \frac{1}{2} OA \cdot PM < \frac{1}{2} (OA)^2 x < \frac{1}{2} OA \cdot AQ$$

$$(ii) \text{ અને વૃત્તાંશનું કેન્દ્રક્ષણ} = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

$$\therefore \sin x < x < \tan x$$

$$(OA = 1)$$

$$\therefore 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$(\sin x > 0)$$

$$\therefore \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

જો  $x < 0$  તો, ધારો કે  $x = -y$ , દિ  $y > 0$

$$\therefore \cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{-x} < 1 \quad 0 < -x < \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad 0 < |x| < \frac{\pi}{2} \quad (|x| = -x)$$

**પૂર્વપ્રમેય 2 :**  $| \sin x | \leq |x|$   $\forall x \in \mathbb{R}$

સાબિતી : જો  $|x| \geq 1$ , તો  $|\sin x| \leq 1 \leq |x|$  સત્ય છે.

$$x = 0 \text{ માટે } |\sin 0| = 0 \leq 0 = |0|$$

હવે આપણે આ પરિણામ  $0 < |x| < 1$  માટે સાબિત કરીશું.

$$\text{આપણે જોયું કે, } \frac{\sin x}{x} < 1 \quad 0 < |x| < \frac{\pi}{2}$$

ધારો કે  $0 < x < 1$

$$\therefore 0 < x < 1 < \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \frac{\sin x}{x} < 1 \quad (\text{પૂર્વપ્રમેય 1})$$

$$\therefore \sin x < x \quad (x > 0)$$

$$\therefore |\sin x| \leq |x| \text{ કારણ કે } 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ હોવાથી } x > 0, \sin x > 0$$

જો  $-1 < x < 0$  તો  $x = -y$  લેતાં,

$-1 < -y < 0$  અથવા  $0 < y < 1$

$$\therefore |\sin y| < |y|$$

$$\therefore |\sin(-x)| < |-x|$$

$$\therefore |- \sin x| < |-x|. \text{ અથવા } |\sin x| < |x|$$

$$\therefore |\sin x| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

**પૂર્વપ્રમેય 3 :**  $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$

સાબિતી :  $\varepsilon = \delta$  લેતાં,  $-\delta < x < \delta \Rightarrow |x| < \delta$

$$\Rightarrow |x| < \varepsilon \quad (\delta = \varepsilon)$$

$$\Rightarrow ||x|| < \varepsilon \quad (|||x||| = |x|)$$

$$\Rightarrow ||x| - 0| < \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$$

**પૂર્વપ્રમેય 4 :** જો  $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 0$  તો,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

સાબિતી :  $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$

$$\lim_{x \rightarrow 0} -|f(x)| = -\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 0, \lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 0$$

$$\therefore \text{સેન્ટવીચ પ્રમેય પરથી, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

**પૂર્વપ્રમેય 5 :**  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$

સાબિતી :  $0 \leq |\sin x| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0, \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} |\sin x| = 0$$

(સેન્ડવીચ પ્રમેય)

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$

(પૂર્વપ્રમેય 4)

**પૂર્વપ્રમેય 6 :**  $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

સાબિતી : આપણે જાણીએ છીએ કે,  $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$

$$\text{જે, } |\sin x| \leq |x|$$

$$\therefore \left| \sin \frac{x}{2} \right| \leq \left| \frac{x}{2} \right|$$

$$\therefore \sin^2 \frac{x}{2} \leq \frac{x^2}{4}$$

$$\therefore 1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} \leq 2 \times \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{2}$$

$$\therefore 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1$$

**પ્રમેય 3 :**  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$

સાબિતી :  $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{x^2}{2} = 1 - 0 = 1 \text{ અને } \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

(બહુપદીનું લક્ષ)

$$\therefore \text{સેન્ડવીચ પ્રમેય પરથી, } \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$$

**પ્રમેય 4 :**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

સાબિતી :  $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad 0 < |x| < \frac{\pi}{2}$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1, \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

$$\therefore \text{સેન્ડવીચ પ્રમેય પરથી, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

**પ્રમેય 5 :**  $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$

સાબિતી : ધારો કે  $x - a = h$  તો  $x = a + h$

$$\therefore x \rightarrow a \text{ તો } h \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \sin h &= \lim_{h \rightarrow 0} \sin(a+h) = \lim_{h \rightarrow 0} (\sin a \cos h + \cos a \sin h) \\
 &= \sin a \lim_{h \rightarrow 0} \cos h + \cos a \lim_{h \rightarrow 0} \sin h \quad (\text{लक्षनां कार्यनियमो}) \\
 &= \sin a \cdot 1 + \cos a \cdot 0 \quad \left( \lim_{h \rightarrow 0} \cosh = 1, \lim_{h \rightarrow 0} \sinh = 0 \right) \\
 &= \sin a
 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$$

**પ્રમેય 6 :**  $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$

સાબિતી :  $x = a + h$  હેતું, જેમણે  $x \rightarrow a$  તેમણે  $h \rightarrow 0$

$$\text{હવે, } \lim_{h \rightarrow 0} \cos h = 1 \text{ તથા } \lim_{h \rightarrow 0} \sin h = 0$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow a} \cos x &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos(a+h) = \lim_{h \rightarrow 0} (\cos a \cos h - \sin a \sin h) \\
 &= \cos a \lim_{h \rightarrow 0} \cos h - \sin a \lim_{h \rightarrow 0} \sin h \quad (\text{लક्षનાં કાર્યનિયમો}) \\
 &= \cos a \cdot 1 + \sin a \cdot 0 \\
 &= \cos a
 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

**પ્રમેય 7 :**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

$$\begin{aligned}
 \text{સાબિતી : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x} \\
 &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \sin x}{\lim_{x \rightarrow 0} \cos x} \\
 &= \frac{1}{1} = 1 \quad \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \right)
 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

હવે આપણે આ પરિણામોનો ઉપયોગ કરી ઉદાહરણો ગણીશું.

**ઉદાહરણ 33 :**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$  શોધો,  $a, b \neq 0$

$$\begin{aligned}
 \text{ઉકેલ : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} \cdot a}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin bx}{bx} \cdot b} \\
 &= \frac{a \cdot 1}{b \cdot 1} = \frac{a}{b} \quad \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \right)
 \end{aligned}$$

**ઉદાહરણ 34 :**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos x}$  શોધો.

$$\begin{aligned}
 \text{ઉકેલ : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\frac{x}{2} + 2}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{x}{2} + 2}{\sin \frac{x}{2}} \\
 &= 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 = 4
 \end{aligned}$$
  

$$\begin{aligned}
 \text{બીજી રીત : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x)(1 + \cos x)}{(1 + \cos 2x)(1 - \cos x)(1 + \cos x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x(1 - \cos x)}{\sin^2 x(1 - \cos 2x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{4x^2} \cdot \frac{4x^2}{\sin^2 x} \cdot \frac{(1 + \cos x)}{(1 + \cos 2x)} \\
 &= 1 \cdot 4 \cdot \frac{(2)}{(2)} = 4
 \end{aligned}$$

**ઉદાહરણ 35 :**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax + bx}{ax + \sin bx}$  શોધો.

$$\begin{aligned}
 \text{ઉકેલ : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax + bx}{ax + \sin bx} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin ax}{x} + b}{a + \frac{\sin bx}{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \frac{\sin ax}{ax} + b}{a + b \frac{\sin bx}{bx}} = \frac{a + b}{a + b} = 1
 \end{aligned}$$

**ઉદાહરણ 36 :**  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 2x}{\frac{\pi}{2} - x}$  શોધો.

ઉકેલ : ધૂરો કે  $\frac{\pi}{2} - x = \alpha$ . તો જેમાં  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$  ત૆માં  $\alpha \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 2x}{\frac{\pi}{2} - x} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\tan 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\alpha} \\
 &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\tan(\pi - 2\alpha)}{\alpha} \\
 &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{-\tan 2\alpha}{2\alpha} \cdot 2 = -2
 \end{aligned}$$

**ઉદાહરણ 37 :**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$  શોધો.

$$\begin{aligned}
 \text{ઉકેલ : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{\cos x \cdot x^3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x \cdot 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}}{x \cdot 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

**ઉદાહરણ 38 :**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosecx - \cotx}{x}$  શોધો.

$$\begin{aligned}\text{ઉક્તિ : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosecx - \cotx}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x \cdot x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}}{2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot 2} \cdot \frac{x}{\sin x} \\&= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{અથવા } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x \cdot x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{(1 + \cos x) x \sin x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x \sin x (1 + \cos x)} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x(1 + \cos x)} \\&= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

**ઉદાહરણ 39 :**  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\frac{\pi}{4} - x}$  શોધો.

$$\begin{aligned}\text{ઉક્તિ : } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\frac{\pi}{4} - x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right)}{\frac{\pi}{4} - x} \\&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \left( \sin x \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cos x \right)}{\frac{\pi}{4} - x} \\&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right)}{- \left( x - \frac{\pi}{4} \right)} \\&= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} \sin \alpha}{-\alpha} \quad \left( \alpha = x - \frac{\pi}{4} \text{ હેતુ } \alpha \rightarrow 0 \right) \\&= -\sqrt{2}\end{aligned}$$

પ્રક્રીષ્ટ દાખલા :

**ઉદાહરણ 40 :**  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right)$  શોધો.

$$\begin{aligned}\text{ઉક્તિ : } \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1-2}{x^2-1} \\&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(x+1)} \\&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

ઉદાહરણ 41 :  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + x^2 + 4x + 12}{x^3 - 3x + 2}$  શોધો.

$$\begin{aligned}\text{ઉકેલ : } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + x^2 + 4x + 12}{x^3 - 3x + 2} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2+x+6)}{(x+2)(x^2-2x-1)} \\&= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+x+6}{x^2-2x-1} \\&= \frac{4+2+6}{4+4+1} \\&= \frac{12}{9} = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

ઉદાહરણ 42 :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x + 1}}{x^2}$  શોધો.

$$\begin{aligned}\text{ઉકેલ : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x + 1}\right)\left(\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x + 1}\right)}{x^2\left(\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x + 1}\right)} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x + 1 - x - 1}{x^2\left(\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x + 1}\right)} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x + 1}} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

ઉદાહરણ 43 :  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x \tan x - \frac{\pi}{2} \sec x\right)$  શોધો.

$$\begin{aligned}\text{ઉકેલ : } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x \tan x - \frac{\pi}{2} \sec x\right) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x - \frac{\pi}{2}}{\cos x} \\&= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \alpha - \frac{\pi}{2}}{\sin \alpha} \quad \left(\frac{\pi}{2} - x = \alpha, \alpha \rightarrow 0\right) \\&= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{2} (\cos \alpha - 1)}{\sin \alpha} - \frac{\alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} \\&= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left( \frac{-\frac{\pi}{2} \left(2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} - \frac{\alpha}{\tan \alpha} \right) \\&= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left( -\frac{\pi}{2} \tan \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{\tan \alpha} \right) \\&= -1\end{aligned}$$

ઉદાહરણ 44 :  $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2}$  શોધો.

ઉકેલ : ઘણો કે  $1-x = \alpha$  એની  $x \rightarrow 1$  તેમાં  $\alpha \rightarrow 0$ .

$$\begin{aligned}
\therefore \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha \tan \frac{\pi}{2} (1-\alpha) \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha \tan \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi \alpha}{2} \right) \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha \cot \frac{\pi \alpha}{2} \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi \alpha}{2}}{\frac{\pi}{2} \tan \frac{\pi \alpha}{2}} \\
&= \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.
\end{aligned}$$

**ઉદાહરણ 45 :**  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right)$  શોધો. ( $m, n \in \mathbb{N}$ )

$$\text{ઉક્તિ : } \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{m(1-x^n) - n(1-x^m)}{(1-x^n)(1-x^m)}$$

આરો કે  $x = 1 + h$ , આમ તો  $x \rightarrow 1$  એટા  $h \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m[1-(1+h)^n] - n[1-(1+h)^m]}{[(1+h)^m - 1][(1+h)^n - 1]} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m\left(1-1-nh-\binom{n}{2}h^2-\binom{n}{3}h^3-\dots-h^n\right)-n\left(1-1-\binom{m}{1}h-\binom{m}{2}h^2-\dots-h^m\right)}{\left[\binom{m}{1}h+\binom{m}{2}h^2+\dots+h^m\right]\left[\binom{n}{1}h+\binom{n}{2}h^2+\dots+h^n\right]} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h\left(-mn-m\binom{n}{2}h-m\binom{n}{3}h^2-\dots-mh^{n-1}+nm+n\binom{m}{2}h+n\binom{m}{3}h^2+\dots+nh^{m-1}\right)}{h\left(\binom{m}{1}+\binom{m}{2}h+\dots+h^{m-1}\right)\cdot h\left(\binom{n}{1}+\binom{n}{2}h+\dots+h^{n-1}\right)} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h\left(-m\binom{n}{2}-m\binom{n}{3}h-\dots-mh^{n-2}+n\binom{m}{2}+n\binom{m}{3}h+\dots+nh^{m-2}\right)}{h\left(\binom{m}{1}+\binom{m}{2}h+\dots+h^{m-1}\right)\left(\binom{n}{1}+\binom{n}{2}h+\dots+h^{n-1}\right)} \\
&= \frac{-m\binom{n}{2}-n\binom{m}{2}}{\binom{m}{1}\binom{n}{1}} \\
&= \frac{-mn(n-1)+nm(m-1)}{mn} \\
&= \frac{m-n+1}{2} \\
&= \frac{m-n}{2}
\end{aligned}$$

## સ્વાધ્યાય 10

લક્ષના બીજગાણિત તથા વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરી નીચેના સાંબિત કરો : (1 થી 3)

1.  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$       2.  $\lim_{x \rightarrow 1} |x|^2 = 1$       3.  $\lim_{x \rightarrow 3} x^3 = 27$

સાંબિત કરો કે નીચેનાં લક્ષનું અસ્થિત્વ નથી : (4 થી 6)

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$       5.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-3|}{x-3}$       6.  $\lim_{x \rightarrow 2} |x|$

7.  $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ ,  $x \neq 3$ ,  $f(3) = 6$  માટે સાંબિત કરો કે  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$ .

8.  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ ,  $x \neq -1$ ,  $f(-1) = 5$  માટે સાંબિત કરો કે  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \neq f(-1)$

9. જો કોઈક  $\delta > 0$  માટે પ્રત્યેક  $x \in (a - \delta, a + \delta) - \{a\}$  માટે  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$  તો એમ કહી શકાય કે પ્રત્યેક  $x \in (a - \delta, a + \delta) - \{a\}$  માટે  $f(x) = g(x)$  ?

10. જો  $x^2 + 1 \leq f(x) \leq 2x^4 + x^2 + 1$  તો સાંબિત કરો કે  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ .

નીચેનાં લક્ષ શોધો : (11 થી 32)

11.  $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{x^{\frac{1}{6}} - 2}{\sqrt[4]{x} - 8}$       12.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan mx}{\tan nx}$

13.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3} \cos x - \sin x}{x - \frac{\pi}{3}}$

14.  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{9 \sin x - 40 \cos x}{x - \alpha}$  જ્યાં,  $\tan \alpha = \frac{40}{9}$ ,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

15.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{4}}}{h}$

16.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}}{h}$

17.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 3x + 1}$

18.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x)$

19.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^3-1}}$

(કેવા કે  $x \rightarrow 1^+$  ?)

20.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n-1} - (n-1)x + n}{(x-1)^2}$ ;  $n \in \mathbb{N}$       21.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{x^3}$

22.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 3x + \cos 3x}{x - \frac{\pi}{4}}$

23.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$ ;  $m, n \in \mathbb{N}$

24.  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{10 \cdot \cos x} - 3}{(\pi - x)^2}$

$$25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 7x}{x^2}$$

26.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{x^2}$

$$27. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sec x - \tan x}{\frac{\pi}{2} - x}$$

28.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+3h) - 3\sin(a+2h) - 3\sin(a+h) + \sin a}{h^3}$

**29.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3+x) - \sin(3-x)}{x}$

30.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{2a + 3x} - \sqrt{x + 4a}}{\sqrt{3a + 2x} - \sqrt{4x + a}}$

$$31. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^2 \sin(a+h) - a^2 \sin a}{h}$$

$$32. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) \sec(x+h) - x \sec x}{h}$$

**33.** નોંધ આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે શીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને  માં લખો :

$$(1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \dots$$



$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} \dots$$

- (a) 1 છે.                    (b) -1 છે.                    (c) શરૂઆતી છે.                    (d) નાથ અસ્તિત્વ નથી.

$$(3) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\tan x}{\pi - x} \dots$$

- (a) 1 છે. (b) -1 છે. (c) નાં અસ્તિત્વ નથી. (d) 0 છે.

(4) यदि  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^n - 2^n}{x - 2} = 80$ , तो  $n = \dots$  है।



$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos mx}{1 - \cos nx} \dots \text{Ans}$$

- (a)  $\frac{m}{n}$       (b)  $\frac{m^2}{n^2}$       (c)  $\frac{m^3}{n^3}$       (d) 0

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\sin x|}{x} \dots$$

- (a) 1 ફૂ. (b) -1 ફૂ. (c) નાથ અસ્તિત્વ નથી. (d) 0 ફૂ.

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{|x|} \dots \quad (-1 < x < 0, x \in \mathbb{R})$$

- (a) 1 घ.  
(b) ३/४ घ.  
(c) -1 घ.  
(d)  $\sin 1$  घ.

- (8)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}} = \dots \text{ } \emptyset.$  □
- (a) 1      (b) 2      (c) 0      (d) -1
- (9)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(2x-3)}{2x^2+x-3} = \dots$  □
- (a) नहीं अस्तित्व नाथी. (b) 1 अ. □  
(c)  $\frac{1}{10}$  अ.      (d)  $-\frac{1}{10}$  अ.
- (10)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 2\sin 3x + \sin 5x}{x} = \dots \text{ } \emptyset.$  □
- (a) 5      (b) 6      (c) 0      (d) 10
- (11) If  $1 \leq f(x) \leq x^2 + 2x + 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \dots \text{ } \emptyset.$  □
- (a) 2      (b) 0      (c) -1      (d) 1
- (12)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{|x|} \right) = \dots \text{ } \emptyset.$  □
- (a) 2      (b) 1      (c) 0      (d) -1
- (13)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \dots \text{ } \emptyset \text{ या } f(x) = \begin{cases} 2x+3 & x < 2 \\ 5 & x = 2 \\ 3x+2 & x > 2 \end{cases}$  □
- (a) 5 अ.      (b) 3 अ.      (c) 2 अ.      (d) नहीं अस्तित्व नाथी.
- (14)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \dots \text{ } \emptyset \text{ या } f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & x < 0 \\ 3x^2 + 1 & x \geq 0 \end{cases}$  □
- (a) 1      (b) -1      (c) 0      (d)  $\frac{1}{3}$
- (15)  $\lim_{x \rightarrow 5^+} [x] = \dots \text{ } \emptyset.$  □
- (a) 6      (b) 5      (c) -5      (d) 4
- (16)  $\lim_{x \rightarrow -4^-} [x] = \dots \text{ } \emptyset.$  □
- (a) 5      (b) -5      (c) -4      (d) 4
- (17)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \dots \text{ } \emptyset.$  □
- (a)  $\cos a$       (b)  $\sin a$       (c)  $a$       (d) 0
- (18)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} \quad (a > 0) = \dots \text{ } \emptyset.$  □
- (a)  $\cos a$       (b)  $\frac{\cos a}{2\sqrt{a}}$       (c)  $2\sqrt{a} \cos a$       (d)  $2\sqrt{a}$

(19)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - 5x}{7x - \sin x}$  ..... ઠ.

(a)  $\frac{2}{3}$

(b)  $\frac{-2}{3}$

(c)  $\frac{5}{7}$

(d)  $\frac{-5}{7}$

(20)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{5}{3}} - a^{\frac{5}{3}}} (a > 0)$  ..... ઠ.

(a)  $\frac{1}{3}a^{\frac{1}{5}}$

(b)  $\frac{1}{5}a^{\frac{1}{15}}$

(c)  $\frac{5}{3}a^{\frac{4}{3}}$

(d)  $\frac{5}{3}a^{\frac{2}{15}}$

\*

### સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. લક્ષનો ઈતિહાસ
2. આલોચ અને કોષ્ટકથી લક્ષનું અનુમાન
3. લક્ષની ઔપचારિક વ્યાખ્યા અને ઉપયોગ.
4. લક્ષનું બીજગણિત. જો  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  અને  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ નું અસ્થિત્વ હોય તો,

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \text{ (જ્યાં, } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0)$$

5.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$  અને આદેશની રીત

6. સેન્ટ્રાલ પ્રમેય અને ટ્રિકોણામેટ્રીય લક્ષ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a, \quad \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$



### Bhaskara I

Bhaskara stated theorems about the solutions of today so called Pell equations. For instance, he posed the problem: "Tell me, O mathematician, what is that square which multiplied by 8 becomes - together with unity - a square?" In modern notation, he asked for the solutions of the Pell equation  $8x^2 + 1 = y^2$ . It has the simple solution  $x = 1, y = 3$ , or shortly  $(x,y) = (1,3)$ , from which further solutions can be constructed, e.g.,  $(x,y) = (6,17)$ .

## વિકલન

*Mathematics is as much an aspect of culture as it is a collection of algorithms.*

— Carl Boyer (in a Calculus Textbook)

### 11.1 પ્રાસ્તાવિક

કલનશાસ્કમાં, કોઈ વિધેયનું તેના ચલ ને સાપેક્ષ થતાં ફેરફારનું માપ વિકલિત કહેવાય છે. સ્થૂળ ભાગમાં વિકલન એટલે કોઈ રાશિમાં અન્ય કોઈ રાશિ ને સાપેક્ષ થતો ફેરફાર એમ હઠી શકાય. કોઈ પદાર્થનો, સમયને સાપેક્ષ સ્વિતિમાં થતો ફેરફાર **તાત્કષિક વેગ (Instantaneous Velocity)** કહેવાય છે.

કોઈ વિધેયનું વિકલન તેના ચલની આપેલ કિમત આગળનું ‘સીથી સારુ’ સુરેખ આસન મૂલ્ય હોય છે. વાસ્તવિક ચલના વાસ્તવિક વિધેય માટે કોઈ બિંદુ આગળ વિધેયનું વિકલિત, તે વિધેયના આલોખના તે બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ દર્શાવે છે.

કોઈ ‘નાની’ સંખ્યા  $h$  માટે બિંદુઓ  $(a, f(a))$  અને  $(a + h, f(a + h))$  માંથી પસાર થતી રેખાને વક્ત ય =  $f(x)$ ના છિદ્દ રેખા (Secant line) કહે છે. મશૂન્યાભિવજ્ઞ હોય તો છેદકનો ઢાળ વક્ત ય =  $f(x)$  ના  $(a, f(a))$  આગળના સ્પર્શકના ઢાળનું આસન મૂલ્ય આપે છે, તથા  $h$  નું મૂલ્ય જેટલું નાનું હોય તેટલું ઢાળનું આસન મૂલ્ય સ્પર્શકના ઢાળના મૂલ્યની વધારે નજીક મળે છે.

રેખાનો બિંદુ  $(a, f(a))$  આગળ ઢાળ

$$m = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} થી મળે.$$

આને **ન્યૂટનનો તફાવત ગુણોત્તર (Newton's Difference Quotient)** કહેવાય છે.

જો  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$  નું અસ્થિત્વ હોય તો તેને  $f'$  નું  $a$  આગળ વિકલિત કહેવાય છે. અને તેને  $f'(a)$  વક્ત દર્શાવાય છે. આ રાશિ વક્ત ય =  $f(x)$ ના બિંદુ  $(a, f(a))$  આગળ સ્પર્શકનો ઢાળ દર્શાવે છે.

$$\text{હવે, } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a) - hf'(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - f'(a) \\ = f'(a) - f'(a) \\ = 0$$

આમ,  $f(a+h) \equiv f(a) + hf'(a)$  એટલે કે નાના અત્યંત નાના મૂલ્ય માટે  $f(a+h)$  એ  $f(a) + hf'(a)$ નું સુરેખ આસન્ન મૂલ્ય દર્શાવે છે.

જો  $Q(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$  લઈએ તો,  $Q(h)$  બિંદુઓ  $(a, f(a))$  તથા  $(a+h, f(a+h))$  માંથી પસાર થતી રેખાનો ઢળ આપે છે. જો  $f$ નો આલોખ 'સંગ' હોય અને વચ્ચે તૂટક ના હોય અને  $\lim_{h \rightarrow 0} Q(h)$  અસ્થિત્વ ધરાવે તો તેને  $f$ નું  $a$  આગળ વિકલિત કહેવાય છે, અને  $f$  એ  $x = a$  આગળ વિકલનીય છે તેમ કહેવાય છે.

રોકેટશાસ્ક્રમાં વૈજ્ઞાનિકોને રોકેટની ઊંચાઈની માહિતી પરથી, ઉપગ્રહ છોડવાની ગતિની ગણતરી કરવાની હોય છે. કોઈ શેરના વર્તમાન ભાવ ઉપરથી તેમાં થનારા ફેરફારની આગાહી નાશાસંસ્થાઓ કર્તી હોય છે. આ બધામાં કોઈ ચારિ (સાપેક્ષ ચલ)માં, અન્ય કોઈ ચારિ (નિરાપેક્ષ ચલ)ને સાપેક્ષ થતા ફેરફારની માહિતી જરૂરી છે.

## 11.2 વ્યાખ્યા અને ઉદાહરણો

**વ્યાખ્યા :** ધારો કે  $f$  એ અંતરાલ  $(a, b)$  પર વ્યાખ્યાપિત વાસ્તવિક વિષેય છે. ધારો કે  $c \in (a, b)$  અને  $h$  એટલો 'નાનો' છે કે  $c+h \in (a, b)$ .

જો  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$  નું અસ્થિત્વ હોય તો તેને  $f$  નું  $c$  આગળ વિકલિત કહે છે, અને તેને  $f'(c)$  એ દર્શાવાય છે.

**ઉદાહરણ 1 :**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x + 5$  છે. જો  $f'(1)$ નું અસ્થિત્વ હોય તો તે શોધો.

$$\begin{aligned} \text{ઉકેલ : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(1+h)+5-8}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = 3 \end{aligned} \quad (f(1) = 8)$$

$\therefore f'(1)$  અસ્થિત્વ ધરાવે છે અને  $f'(1) = 3$

**ઉદાહરણ 2 :**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 + 3x - 1$  માટે જો  $f'(0)$ નું અસ્થિત્વ હોય તો તે શોધો.

$$\begin{aligned} \text{ઉકેલ : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2 + 3h - 1 - (-1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2 + 3h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2h + 3) = 3 \end{aligned} \quad (f(0) = -1)$$

$\therefore f'(0)$ નું અસ્થિત્વ છે અને  $f'(0) = 3$

**ઉદાહરણ 3 :**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x$  માટે જો  $f'(0)$ નું અસ્થિત્વ હોય તો તે શોધો.

$$\begin{aligned} \text{ઉકેલ : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \end{aligned} \quad (\sin 0 = 0)$$

$\therefore f'(0)$ નું અસ્થિત્વ છે અને  $f'(0) = 1$

**ઉદાહરણ 4 :**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$  માટે  $f'(0)$ નું અસિન્ટિવ હોય તો તે શોધો.

$$\text{ઉકેલ : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \sin \frac{1}{h}}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \sin \frac{1}{h} \text{ નાં અસિન્ટિવ નથી. (જુઓ પ્રકરણ 10)}$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases} \text{ ને } x=0 \text{ આગળ વિકલ્પિત નથી.}$$

**ઉદાહરણ 5 :**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$  માટે  $f'(0)$ નું અસિન્ટિવ હોય તો તે શોધો.

$$\text{ઉકેલ : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h}$$

$$\text{હવે, } 0 \leq \left| \sin \frac{1}{h} \right| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \left| h \sin \frac{1}{h} \right| \leq |h| \text{ અને } \lim_{h \rightarrow 0} |h| = 0, \lim_{h \rightarrow 0} |h| = 0$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \left| h \sin \frac{1}{h} \right| = 0$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h} = 0$$

$$\therefore f'(0) \text{ નાં અસિન્ટિવ છે અને } f'(0) = 0$$

**વ્યાખ્યા :** ધારો કે  $f$  એ  $(a, b)$  ઉપર વ્યાખ્યાપિત છે. ધારો કે  $x \in (a, b)$  અને  $h$  એટલો ‘નાનો’ છે કે જેથી  $x + h \in (a, b)$ . જો  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  નાં અસિન્ટિવ હોય તો  $f$  એ  $x$  આગળ વિકલનીય છે તેમ કહીશું અને આ લક્ષને  $f$  નાં  $x$  આગળનું વિકલ્પિત કહીશું. આની મદદથી આપણે પ્રત્યેક વિષેય  $f(x)$ ને સંગત એક વિષેય  $\frac{d}{dx} f(x)$  વ્યાખ્યાપિત કરી શકીએ.  $(a, b)$  નાં જે બિંદુઓ આગળ  $f$  વિકલનીય હોય તે બિંદુઓ માટે

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ એમ લખીશું.}$$

(અહીં  $f$  એ  $(a, b)$ ના ઓછામાં ઓછા એક બિંદુ આગળ વિકલનીય છે તેમ ધારી લીધું છે.)

જો  $y = f(x)$  લખીએ તો  $\frac{dy}{dx}$  લખી શકાય. તેનું  $x = c$  આગળનું મૂલ્ય  $\left[ \frac{dy}{dx} \right]_{x=c}$  અથવા  $\left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=c}$  અથવા ક્યારેક  $[Df(x)]_{x=c}$  અથવા  $f'(c)$  એમ વિવિધ રીતે લખી શકાય.

**ઉદાહરણ 6 :**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$  માટે  $f'(x)$  અને  $f'(0)$  શોધો.

$$\text{ઉકેલ : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[a(x+h)^2 + b(x+h) + c] - (ax^2 + bx + c)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[a(x^2 + 2hx + h^2) + bx + bh + c] - (ax^2 + bx + c)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2ahx + ah^2 + bh}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (2ax + ah + b)$$

$$= 2ax + b$$

$\therefore \forall x \in \mathbb{R}, f'(x)$  નું અસિલેટ્વ છે અને  $f'(x) = 2ax + b$

$$\therefore f'(0) = b$$

( $f'(x)$  માં  $x = 0$  લેતાં)

નોંધ : જો  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$  ની મદદથી  $f'(0)$  મેળવીએ તો પણ  $f'(0) = b$  મળે.

ઉદાહરણ 7 :  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$  માટે  $f'(x)$  શોધો.

$$\begin{aligned} \text{ઉકેલ : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h) + b - (ax+b)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ah}{h} = a \end{aligned}$$

$\therefore f'(x)$  નું અસિલેટ્વ છે, તેમજ  $f'(x) = a, \forall x \in \mathbb{R}$

ઉદાહરણ 8 :  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  માટે  $f'(x)$  અને  $f'(0)$  મેળવો. અહીં,  $x \neq -\frac{d}{c}$ .

$$\begin{aligned} \text{ઉકેલ : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{a(x+h)+b}{c(x+h)+d} - \frac{ax+b}{cx+d}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(ax+ah+b)(cx+d) - (ax+b)(cx+ch+d)}{(cx+ch+d)(cx+d)h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(acx+ad-acx-bc)}{(cx+ch+d)(cx+d)h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(ad-bc)}{(cx+ch+d)(cx+d)} \\ &= \frac{(ad-bc)}{(cx+d)^2} \end{aligned} \tag{i}$$

$\therefore f'(x)$  નું અસિલેટ્વ છે અને  $f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

$$\therefore f'(0) = \frac{ad-bc}{d^2}$$

નોંધ : (i) માં  $a = 0, b = 1, c = 1, d = 0$  લેતાં  $\frac{d}{dx} \frac{1}{x} = \frac{-1}{x^2}$

### 11.3 વિકલિત પરની બેઝિક કિયાઓ

ધારો કે  $f$  અને  $g$  બંને  $(a, b)$  ઉપર વિકલનીય છે.

તો, (1)  $f+g$  પણ  $(a, b)$  ઉપર વિકલનીય છે અને

$$\frac{d}{dx} (f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d}{dx} g(x)$$

(2)  $f-g$  પણ  $(a, b)$  ઉપર વિકલનીય છે અને

$$\frac{d}{dx} (f(x) - g(x)) = \frac{d}{dx} f(x) - \frac{d}{dx} g(x)$$

(3)  $f \times g$  પણ (a, b) ઉપર વિકલનીય છે અને

$$\frac{d}{dx} (f(x) \cdot g(x)) = g(x) \frac{d}{dx} f(x) + f(x) \frac{d}{dx} g(x)$$

(4)  $\frac{f}{g}$  પણ (a, b) ઉપર વિકલનીય છે અને

$$\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \quad (g(x) \neq 0)$$

આને વિકલિત માટેના કાર્યનિયમો પણ કહે છે.

અગત્યનાં પરિણામો :

$$(1) f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

$$\text{આપણે જોયું છી, } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ખરો કે  $x + h = t$  તો જેમણું  $h \rightarrow 0$  તેમણે  $t \rightarrow x$

$$\therefore f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

(2) અચળ વિષેયનું વિકલિત શુન્ય થાય છે.

ખરો કે  $f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$ .

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$\therefore \frac{d}{dx} c = 0$$

$$(3) \frac{d}{dx} kf(x) = k \frac{d}{dx} f(x) \quad (k \in \mathbb{R} \text{ અચળ છે.})$$

$$\frac{d}{dx} kf(x) = k \frac{d}{dx} f(x) + f(x) \frac{d}{dx} k \quad ((2) \text{ પરથી})$$

$$= k \frac{d}{dx} f(x) + f(x) \cdot 0$$

$$= k \frac{d}{dx} f(x)$$

**ઉદાહરણ 9 :**  $\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d}{dx} g(x)$  અને  $\frac{d}{dx} kf(x) = k \frac{d}{dx} f(x)$  ઉપરથી

$$\frac{d}{dx}(f(x) - g(x)) = \frac{d}{dx} f(x) - \frac{d}{dx} g(x) \text{ સાંકેતિક કરો.}$$

$$\text{ઉકેલ : } \frac{d}{dx}(f(x) - g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x) + (-1)g(x))$$

$$= \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d}{dx} (-1)g(x)$$

$$= \frac{d}{dx} f(x) + (-1) \frac{d}{dx} g(x)$$

$$= \frac{d}{dx} f(x) - \frac{d}{dx} g(x)$$

**ઉદાહરણ 10 :**  $k \in \mathbb{R}$  માટે  $\frac{d}{dx} kf(x) = k \frac{d}{dx} f(x)$  સાબિત કરો.

$$\text{ઉકેલ : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{kf(x+h) - kf(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} k \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= k \frac{d}{dx} f(x)$$

(લક્ષનો નિયમ)

$$\therefore \frac{d}{dx} kf(x) = k \frac{d}{dx} f(x)$$

કેટલાંક પ્રમાણિત રૂપો :

$$(1) \frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$$

$$\text{સાબિતી : } \frac{d}{dx} x^n = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[ x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \dots + h^n \right] - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \dots + h^n}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left( nx^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h + \binom{n}{3} x^{n-3} h^2 + \dots + h^{n-1} \right) - nx^{n-1}$$

**બીજી સાબિતી :** આપણે આ સાબિતી ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી આપીશું.

$$\text{ધારો } 3, P(n) : \frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}.$$

$$\text{આપણે જોવું કે, } \frac{d}{dx} x^1 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1. \text{ કાર્ય } 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot 1 = 1 \quad (x \neq 0)$$

$\therefore P(1)$  સત્ય છે.

ધારો 3 P(k) સત્ય છે.

$$\therefore \frac{d}{dx} x^k = kx^{k-1}.$$

ધારો 3,  $n = k+1$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} x^{k+1} &= \frac{d}{dx} x^k \cdot x \\ &= x^k \frac{d}{dx} x + x \frac{d}{dx} x^k \\ &= x^k \cdot 1 + x \cdot kx^{k-1} \\ &= x^k + kx^k \\ &= (k+1)x^k \end{aligned}$$

$\therefore P(k+1)$  સત્ય છે.

$\therefore P(k)$  સત્ય છે.  $\Rightarrow P(k+1)$  સત્ય છે.

$\therefore$  ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત મુજબ  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $P(n)$  સત્ય છે.

$$\begin{aligned}
 \text{ग्रीष्म सांखिति : } \frac{d}{dx} x^n &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{t^n - x^n}{t - x} \\
 &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{(t-x)(t^{n-1} + t^{n-2}x + t^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1})}{t - x} \\
 &= \lim_{t \rightarrow x} (t^{n-1} + t^{n-2}x + t^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1}) \\
 &= x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x + x^{n-3} \cdot x^2 + \dots + x^{n-1} \\
 &= nx^{n-1}
 \end{aligned}$$

**नोंदृ :** आपको  $n \in \mathbb{N}$  अने  $x \in \mathbb{R}$  माटे सांखित आपी, परंतु आ परिष्कारम  $n \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^+$  माटे पढा सत्य छ. आनी सांखिति आपको आपीशु नहि.

### (2) अडुपटीनु विकलित :

धारो कि  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n \neq 0$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ )

अे  $n$ -क्षाली अडुपटी छ.

$$\begin{aligned}
 \therefore \frac{d}{dx} P(x) &= \frac{d}{dx} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0) \\
 &= \frac{d}{dx} a_n x^n + \frac{d}{dx} a_{n-1} x^{n-1} + \frac{d}{dx} a_{n-2} x^{n-2} + \dots + \frac{d}{dx} a_0
 \end{aligned}$$

(सरवाणानु विकलित)

$$\begin{aligned}
 &= a_n \frac{d}{dx} x^n + a_{n-1} \frac{d}{dx} x^{n-1} + a_{n-2} \frac{d}{dx} x^{n-2} + \dots + \frac{d}{dx} a_0 \\
 &= n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + (n-2) a_{n-2} x^{n-3} + \dots + 0
 \end{aligned}$$

$$\left( \frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1} \right)$$

### (3) संभेद विधेयनु विकलित :

धारो कि,  $h(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  संभेद विधेय छ. अही  $p(x)$  अने  $q(x)$  अडुपटी विधेय छ.  $q(x) \neq 0$

$$\therefore h'(x) = \frac{q(x)p'(x) - p(x)q'(x)}{[q(x)]^2}, \text{ अही } p'(x) \text{ अने } q'(x) \text{ परिष्कारम (2) परथी भेषवी शकाय.}$$

### (4) $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$ , $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\cos \frac{x+h}{2} \sin \frac{h}{2}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos \left( x + \frac{h}{2} \right) \sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x
 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$(5) \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2\sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin\frac{h}{2}}{h} \\ &= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \\ &= -\sin x\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

$$(6) \frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x \quad x \in \mathbb{R} - \left\{ (2k-1) \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \tan x &= \frac{d}{dx} \frac{\sin x}{\cos x} \\ &= \frac{\cos x \frac{d}{dx} \sin x - \sin x \frac{d}{dx} \cos x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos x (\cos x) - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \sec^2 x\end{aligned}$$

$\left( \frac{d}{dx} \frac{f}{g} \text{ ना नियम मुजब} \right)$

$$(7) \frac{d}{dx} \cot x = -\operatorname{cosec}^2 x, \quad x \in \mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \cot x &= \frac{d}{dx} \frac{\cos x}{\sin x} \\ &= \frac{\sin x \frac{d}{dx} \cos x - \cos x \frac{d}{dx} \sin x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\sin x (-\sin x) - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-1}{\sin^2 x} \\ &= -\operatorname{cosec}^2 x\end{aligned}$$

$\left( \frac{d}{dx} \frac{f}{g} \text{ ना नियम मुजब} \right)$

$$(8) \frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x, \quad x \in \mathbb{R} - \left\{ (2k-1) \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \sec x &= \frac{d}{dx} \frac{1}{\cos x} \\ &= \frac{\cos x \frac{d}{dx} 1 - 1 \frac{d}{dx} \cos x}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

$$= \frac{\cos x \cdot 0 - 1(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \sec x \tan x$$

(9)  $\frac{d}{dx} \operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} x \cot x, x \in \mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \operatorname{cosec} x &= \frac{d}{dx} \frac{1}{\sin x} \\&= \frac{\sin x \frac{d}{dx} 1 - 1 \frac{d}{dx} \sin x}{\sin^2 x} \\&= \frac{\sin x \cdot 0 - 1(\cos x)}{\sin^2 x} \\&= \frac{-\cos x}{\sin^2 x} \\&= -\operatorname{cosec} x \cot x\end{aligned}$$

નોંધ :  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  ને વ્યાખ્યા અથવા પ્રથમ સિદ્ધાંતથી મેળવેલું વિકલિત કહેવાય છે. ઉપરના

પ્રમાણિત રૂપો (6) થી (9) પ્રથમ સિદ્ધાંતથી મેળવી શકાય છે.

$$\frac{d}{dx} (f_1(x) + f_2(x)) = \frac{d}{dx} f_1(x) + \frac{d}{dx} f_2(x) \text{ નું વ્યાપક રૂપ}$$

$$\frac{d}{dx} (f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)) = \frac{d}{dx} f_1(x) + \frac{d}{dx} f_2(x) + \dots + \frac{d}{dx} f_n(x)$$

ગણિતોપ અનુમાનના સિદ્ધાંતથી મેળવી શકાય. આપણો આ પરિણામ બહુપદીના વિકલિતમાં ઉપયોગમાં લીધું છે.

અહીં નોંધીએ કે આ પરિણામ ફક્ત  $n$ -પદોના સાંતુષ્ટ સરવાળા માટે જ સત્ય છે, અનંત સરવાળામાં આ પરિણામ સત્ય ન પણ હોય, એટલે કે  $\frac{d}{dx} (f_1(x) + f_2(x) + \dots) = \frac{d}{dx} f_1(x) + \frac{d}{dx} f_2(x) + \dots$  સત્ય ન પણ હોય. આની ચર્ચા માટે શ્રેદીના એકરૂપ અભિસાર (Uniform convergence) અને અભિસાર વિષેની માહિતીની જરૂર પડે, જે આ તબક્ક આપણે કરી શકીએ નહિ.

**પ્રક્રીણા ઉદાહરણો :**

**ઉદાહરણ 11 :**  $f(x) = \cos^2 x$  નું વિકલિત મેળવો.

$$\begin{aligned}\text{ઉકેલ : } \frac{d}{dx} \cos^2 x &= \frac{d}{dx} \cos x \cos x \\&= \cos x \frac{d}{dx} \cos x + \cos x \frac{d}{dx} \cos x \\&= 2\cos x (-\sin x) \\&= -2\sin x \cos x \\&= -\sin 2x\end{aligned}$$

**ઉદાહરણ 12 :**  $x \sin x$  નું પ્રથમ સિદ્ધાંતથી વિકલિત મેળવો.

$$\text{ઉકેલ : } \frac{d}{dx} x \sin x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) \sin(x+h) - x \sin x}{h}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)\sin(x+h) - (x+h)\sin x + (x+h)\sin x - x\sin x}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} (x+h) \left( \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \right) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h-x)\sin x}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) 2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \sin\frac{h}{2}}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) \cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} + \sin x \quad \left( \lim_{h \rightarrow 0} c = c \right) \\
&= x\cos x + \sin x
\end{aligned}$$

**ઉદાહરણ 13 :** પ્રથમ નિયતથી  $\frac{d}{dx} \tan x$  મેળવો,  $x \in \mathbb{R} - \left\{ (2k-1) \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

$$\begin{aligned}
\text{ઉકેલ : } \frac{d}{dx} \tan x &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan(x+h) - \tan x}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan(x+h-x)}{h} (1 + \tan x \tan(x+h)) \quad (\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan h}{h} \lim_{h \rightarrow 0} (1 + \tan x \tan(x+h)) \\
&= 1 \cdot (1 + \tan^2 x) \\
&= \sec^2 x
\end{aligned}$$

**ઉદાહરણ 14 :** પ્રથમ નિયતથી  $\frac{d}{dx} \sec x$  મેળવો,  $x \in \mathbb{R} - \left\{ (2k-1) \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

$$\begin{aligned}
\text{ઉકેલ : } \frac{d}{dx} \sec x &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sec(x+h) - \sec x}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos(x+h)} - \frac{1}{\cos x}}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos(x+h)}{h \cos x \cos(x+h)} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2\sin\left(\frac{-h}{2}\right) \sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h \cos x \cos(x+h)} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}{\frac{h}{2}} \frac{\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{\cos x \cos(x+h)} \\
&= \frac{1 \cdot \sin x}{\cos x \cos x} \\
&= \sec x \tan x
\end{aligned}$$

ઉદાહરણ 15 :  $\frac{d}{dx} \sin 2x$  શોધો.

$$\begin{aligned}\text{ઉકેલ : } \frac{d}{dx} \sin 2x &= \frac{d}{dx} 2\sin x \cos x \\&= 2 \left[ \sin x \frac{d}{dx} \cos x + \cos x \frac{d}{dx} \sin x \right] \\&= 2[\sin x (-\sin x) + \cos x \cdot \cos x] \\&= 2(\cos^2 x - \sin^2 x) \\&= 2\cos 2x\end{aligned}$$

ઉદાહરણ 16 :  $f(x) = \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n-1}}{n-1} + \frac{x^{n-2}}{n-2} + \dots + x + 1$  નું વિકલ્પિત શોધો.

$$\begin{aligned}\text{ઉકેલ : } \frac{d}{dx} \left( \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n-1}}{n-1} + \dots + x + 1 \right) &= \frac{nx^{n-1}}{n} + \frac{(n-1)x^{n-2}}{n-1} + \frac{(n-2)x^{n-3}}{n-2} + \dots + 1 + 0. \\&= x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + 1 \\&= \frac{x^n - 1}{x - 1} \quad (\text{સમગુણોત્તર શ્રેણીનો સરવાળો})\end{aligned}$$

ઉદાહરણ 17 :  $\frac{d}{dx} (ax + b)^n$  મેળવો અને તે પરથી  $\frac{d}{dx} (ax + b)^m (cx + d)^n$  તારવો.

ઉકેલ :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} (ax + b)^n &= \frac{d}{dx} \left( a^n x^n + \binom{n}{1} (ax)^{n-1} b + \binom{n}{2} (ax)^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} ax \cdot b^{n-1} + b^n \right) \\&= a^n n \cdot x^{n-1} + n(n-1) x^{n-2} a^{n-1} b + (n-2) \binom{n}{2} x^{n-3} a^{n-2} b^2 \\&\quad + \dots + \binom{n}{n-1} a \cdot 1 \cdot b^{n-1} + 0 \\&= na \left[ a^{n-1} x^{n-1} + (n-1)(ax)^{n-2} b + \frac{(n-2)(n-1)}{2} (ax)^{n-3} b^2 + \dots + b^{n-1} \right] \\&= na \left( (ax)^{n-1} + (n-1)(ax)^{n-2} b + \binom{n-1}{2} (ax)^{n-3} b^2 + \dots + b^{n-1} \right) \\&= na(ax + b)^{n-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{એવી, } \frac{d}{dx} (ax + b)^m (cx + d)^n &= (cx + d)^m \frac{d}{dx} (ax + b)^m + (ax + b)^m \frac{d}{dx} (cx + d)^n \\&= (cx + d)^m m a (ax + b)^{m-1} + (ax + b)^m n c (cx + d)^{n-1} \\&= (ax + b)^{m-1} (cx + d)^{n-1} [ma(cx + d) + nc(ax + b)]\end{aligned}$$

ઉદાહરણ 18 :  $\frac{d}{dx} \left( \frac{a + b \sin x}{c + d \sin x} \right)$  શોધો. ( $c + d \sin x \neq 0$ )

$$\begin{aligned}\text{ઉકેલ : } \frac{d}{dx} \left( \frac{a + b \sin x}{c + d \sin x} \right) &= \frac{(c + d \sin x) \frac{d}{dx} (a + b \sin x) - (a + b \sin x) \frac{d}{dx} (c + d \sin x)}{(c + d \sin x)^2} \\&= \frac{(c + d \sin x) b \cos x - (a + b \sin x) d \cos x}{(c + d \sin x)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{bc\cos x + bd\sin x \cos x - ad\cos x - bd\sin x \cos x}{(c + d\sin x)^2} \\
 &= \frac{(bc - ad)\cos x}{(c + d\sin x)^2}
 \end{aligned}$$

**ઉદાહરણ 19 :**  $\frac{d}{dx} \frac{x}{\sin^n x}$ . ( $\sin x \neq 0$ ),  $n \in \mathbb{N}$  મેળવો.

**ઉક્તા :** સૌપ્રથમ આપણે ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી  $\frac{d}{dx} \sin^n x = n \sin^{n-1} x \cos x$  સાબેત કરીશું.

$$n = 1 \text{ માટે}, \frac{d}{dx} \sin x = \cos x = 1 \cdot \sin^0 x \cos x$$

$\therefore P(1)$  સત્ય છે.

$$\text{ધારો કે, } \frac{d}{dx} \sin^k x = k \sin^{k-1} x \cos x \text{ એટલે કે કોઈક } k \in \mathbb{N} \text{ માટે } P(k) \text{ સત્ય છે.}$$

$$\begin{aligned}
 n = k + 1 \text{ માટે } \frac{d}{dx} \sin^{k+1} x &= \frac{d}{dx} \sin^k x \cdot \sin x \\
 &= \sin x \frac{d}{dx} \sin^k x + \sin^k x \frac{d}{dx} \sin x \\
 &= \sin x \cdot k \sin^{k-1} x \cos x + \sin^k x \cos x \\
 &= k \cdot \sin^k x \cos x + \sin^k x \cos x \\
 &= (k + 1) \sin^k x \cos x
 \end{aligned}$$

$\therefore P(k + 1)$  સત્ય છે.

$\therefore P(k)$  સત્ય છે.  $\Rightarrow P(k + 1)$  સત્ય છે.

$\therefore$  ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત મુજબ  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $P(n)$  સત્ય છે.

$$\begin{aligned}
 \text{ફરે, } \frac{d}{dx} \frac{x}{\sin^n x} &= \frac{\sin^n x \frac{d}{dx} x - x \frac{d}{dx} \sin^n x}{\sin^{2n} x} \\
 &= \frac{\sin^n x - x \cdot n \sin^{n-1} x \cos x}{\sin^{2n} x} \\
 &= \frac{\sin^{n-1} x (\sin x - nx \cos x)}{\sin^{2n} x} \\
 &= \frac{\sin x - nx \cos x}{\sin^{n-1} x}
 \end{aligned}$$

**ઉદાહરણ 20 :** પ્રથમ સિદ્ધાંતથી  $\sqrt{\sin x}$  નું વિકલ્પિત મેળવો.

( $\sin x > 0$ )

$$\begin{aligned}
 \text{ઉક્તા : } \frac{d}{dx} \sqrt{\sin x} &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{\sqrt{\sin t} - \sqrt{\sin x}}{t - x} \\
 &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{\sin t - \sin x}{(\sqrt{\sin t} + \sqrt{\sin x})(t - x)} \\
 &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{2 \cos \frac{t+x}{2} \sin \frac{t-x}{2}}{(\sqrt{\sin t} + \sqrt{\sin x}) \left( \frac{t-x}{2} \right)^2} \\
 &= \frac{\cos x \cdot 1}{2\sqrt{\sin x}} = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}
 \end{aligned}$$

**ઉદાહરણ 21 :** વ્યાખ્યાની મદદથો  $\frac{d}{dx} x^2 \sin x$  મેળવો અને સૂત્રની મદદથી તે અકાસો.

**ઉકેલ :**

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} x^2 \sin x &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 \sin(x+h) - x^2 \sin x}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 \sin(x+h) - (x+h)^2 \sin x + (x+h)^2 \sin x - x^2 \sin x}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (x+h)^2 \left( \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \right) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^2 - x^2] \sin x}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 \left[ 2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \sin\frac{h}{2} \right]}{2 \cdot \frac{h}{2}} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2hx + h^2) \sin x}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 \cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} + \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) \sin x \\
 &= x^2 \cos x + 2x \sin x
 \end{aligned}$$

$$\text{ઝડા, } \frac{d}{dx} x^2 \sin x = x^2 \frac{d}{dx} \sin x + \sin x \frac{d}{dx} x^2 \\
 = x^2 \cos x + 2x \sin x$$

**ઉદાહરણ 22 :**  $\frac{d}{dx} \frac{\cos x}{1 + \sin x}$  શોધો.  $(\sin x \neq -1)$

$$\begin{aligned}
 \text{ઉકેલ : } \frac{d}{dx} \frac{\cos x}{1 + \sin x} &= \frac{(1 + \sin x) \frac{d}{dx} \cos x - \cos x \frac{d}{dx} (1 + \sin x)}{(1 + \sin x)^2} \\
 &= \frac{(1 + \sin x)(-\sin x) - \cos x \cdot \cos x}{(1 + \sin x)^2} \\
 &= \frac{-\sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(1 + \sin x)^2} \\
 &= \frac{-(1 + \sin x)}{(1 + \sin x)^2} \quad (\sin^2 x + \cos^2 x = 1) \\
 &= \frac{-1}{1 + \sin x}
 \end{aligned}$$

**ઉદાહરણ 23 :**  $f(x) = x^{100} + x^{99} + x^{98} + \dots + 1$  નું કે  $f'(1)$  શોધો.

$$\text{ઉકેલ : } f(x) = x^{100} + x^{99} + x^{98} + \dots + 1$$

$$f'(x) = 100x^{99} + 99x^{98} + \dots + 0$$

$$\therefore f'(1) = 100 + 99 + 98 + \dots + 1 = \frac{100(101)}{2} = 5050$$

$$\left( \Sigma n = \frac{n(n+1)}{2} \right)$$

ઉદાહરણ 24 :  $\frac{d}{dx} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$  શોધો.

( $\sin x \neq \cos x$ )

ઉકેલ :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} &= \frac{(\sin x - \cos x) \frac{d}{dx} (\sin x + \cos x) - (\sin x + \cos x) \frac{d}{dx} (\sin x - \cos x)}{(\sin x - \cos x)^2} \\&= \frac{(\sin x - \cos x)(\cos x - \sin x) - (\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} \\&= \frac{-[(\sin x - \cos x)^2 + (\sin x + \cos x)^2]}{(\sin x - \cos x)^2} \\&= \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2} \quad (\sin^2 x + \cos^2 x = 1)\end{aligned}$$

ઉદાહરણ 25 :  $f(x) = |x|$  માટે  $f'(0)$ નું અસિલવ હોય તો તે શોધો.

ઉકેલ : આપણે  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}$  શોધવાની છે.

$$\text{હવે, } \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h}{h} = 1,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-h}{h} = -1$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \text{ નથી અસિલવ નથી.}$$

$\therefore f(x) = |x|$  એ ખાત્રી વિકલનીમ નથી.

ઉદાહરણ 26 :  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $f(x) = [x]$ .  $f'(1)$ નું અસિલવ હોય તો તે શોધો.  $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ નું અસિલવ હોય તો તે શોધો.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{જો } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{જો } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1-1}{h} = 0 \quad (h > 0, 1+h > 1 \text{ અને } [1+h] = 1)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{0-1}{h} \text{ નથી અસિલવ નથી.} \quad (h < 0, 1+h < 1)$$

$\therefore f'(1)$  અસિલવ નથી.

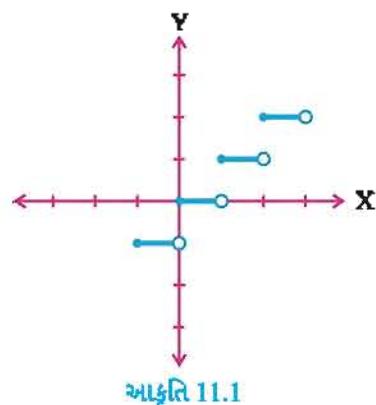
સમજૂતી :  $\frac{1}{2} - h < x < \frac{1}{2} + h$  માટે ( $h < \frac{1}{2}$ ),  $f(x) = 0$

$\therefore f'(x) = 0$ . તેથી  $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

$\therefore \frac{1}{2} < h$  માટે અંતરાલ  $\left(\frac{1}{2} - h, \frac{1}{2} + h\right)$  માં

$f$  અચાનક વિષેય હોયાછી,

$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ . (આંદેખ ઝુબો.)



## સ્વાધ્યાય 11

1. વ્યાખ્યાની મદદથી નીચેના વિષેયોના આપેલ બંદુએ વિકલિત શોધો :

- |                                      |  |
|--------------------------------------|--|
| (1) $\sin x; x = 0$ આગળ              | (2) $\frac{1}{x}; x = 1$ આગળ           |
| (3) $2x + 3; x = 2$ આગળ              | (4) $\frac{3x+2}{2x+3}; x = 1$ આગળ     |
| (5) $3x^2 - 2x + 1; x = -1$ આગળ      | (6) $\cos x; x = \frac{\pi}{2}$ આગળ    |
| (7) $\tan x; x = \frac{\pi}{4}$ આગળ  | (8) $\sec x; x = \frac{\pi}{3}$ આગળ    |
| (9) $\cot x; x = \frac{5\pi}{4}$ આગળ | (10) $\cosec x; x = \frac{\pi}{6}$ આગળ |

2. વ્યાખ્યાની મદદથી નીચેના વિકલિતો મેળવો : (યોગ્ય પ્રદેશ પર)

- |                               |                               |                               |
|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| (1) $10x$                     | (2) $\sec x + \tan x$         | (3) $\cosec x - \cot x$       |
| (4) $2\sin^2 x + 3\cos x + 1$ | (5) $\cos 2x$                 | (6) $\sin 2x$                 |
| (7) $\tan 2x$                 | (8) $\frac{1-\cos x}{\sin x}$ | (9) $\frac{\cos x}{1-\sin x}$ |
| (10) $x^3$                    | (11) $x^4$                    | (12) $x^6$                    |
| (13) $\sin^4 x$               | (14) $\cos^4 x$               | (15) $\sec^2 x$               |

3.  $f(x) = g(x)$  અથળ વિષેય હોય તો સાંભિત કરો કે,  $f'(x) = g'(x)$ .

4. વ્યાખ્યાની મદદથી  $\frac{d}{dx} \cos 2x$  મેળવો અને મળતા પરિશ્કારમને  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$  ની મદદથી ચકાસો.

5.  $\frac{d}{dx} \frac{x^n - 1}{x - 1}, x \neq 1$  શોધો.

6. 
$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{x^n - 1}{x - 1} &= \frac{d}{dx} (x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x + 1) \\ &= (n-1)x^{n-2} + (n-2)x^{n-3} + (n-3)x^{n-4} + \dots + 1 + 0 \end{aligned}$$

$$\therefore x = 1 \text{ આગળ } \frac{d}{dx} \frac{x^n - 1}{x - 1} = (n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

સિફારિ આપો !

નીચે વ્યાખ્યાયિત વિષેયોના વિકલિત મેળવો :

- |   |   |   |
|---|---|---|
| 7. $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$            | 8. $\frac{x^n - a^n}{x - a} \quad (x \neq a)$ | 9. $x^{-5}(7 + 3x)$                         |
| 10. $x^{-6}(4x^2 - 8x^3)$               | 11. $2\sec x - 3\tan x + 5\sin x \cos x$      | 12. $\frac{\sec x - 1}{\sec x + 1}$         |
| 13. $\frac{4x + 7\sin x}{5x + 8\cos x}$ | 14. $\frac{x}{1 + \cot x}$                    | 15. $(x^2 - 1)\sin^2 x + (x^2 + 1)\cos^2 x$ |
| 16. $(ax^2 + bx + \sin x)(p + q\tan x)$ | 17. $\sin(x + a)$                             |   |
| 18. $\frac{\sin(x + a)}{\cos x}$        | 19. $\tan(x + a)$                             |   |

**20.** નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે શીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને  માં લખો :

$$(1) f(x) = \sin^2 x \text{ 使得 } f'(\frac{\pi}{2}) \dots \text{ ③.}$$



(2)  $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$  માટે  $f'(1) = \dots$

- (a)  $-\frac{1}{2}$       (b)  $\frac{1}{2}$       (c) 0      (d)

$$(3) f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \dots + x^{99} + x^{100} \text{ မူလ } f'(-1) = \dots$$



$$(4) \frac{d}{dx} \cos^n x = \dots$$



$$(5) \frac{d}{dx} (\sin^2 x + \cos^2 x) = \dots$$

- (a)  $\sin 2x + \cos 2x$     (b)  $\sin 2x - \cos 2x$     (c) 0    (d)  $\sin x + \cos x$

(6) यदि  $y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ , तो  $\frac{dy}{dx} = \dots$



$$(7) \text{ If } y = \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}}, x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \text{ then } \frac{dy}{dx} = \dots$$

- (a)  $\sec^2 x$       (b)  $-\sec^2 x$       (c)  $\cos^2 x$       (d)  $|\tan x|$

(8) જે  $f$  એ  $a$  આગળ વિકલનીય હોય તો  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x-a} = \dots$

- (a)  $af'(a)$       (b)  $f(a) - af'(a)$       (c)  $f'(a)$       (d)  $\frac{f'(a)}{a}$

$$(9) f(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1, \quad -1 < x < 1, \text{ 试求 } f'(x) = \dots$$

- $$(a) \frac{1}{(x-1)^2} \qquad (b) \frac{1}{x-1}$$

(c)  $\frac{1}{x^n - 1}$

- $$f(4) = 16, f'(4) = 2 \text{ અને } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{f(x)} - 4}{x - 4}$$

- (11)  $f(x) = \frac{x^2}{|x|}$ ,  $x \in [3, 5]$ , वैध ना हो  $f'(x)$  ..... □  
 (a) 1 वै. (b) -1 वै. (c) ना हो सकता नहीं. (d) 0 वै.
- (12)  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$  तभी  $\frac{d}{dx} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} =$  ..... □  
 (a)  $-\sin x$  (b)  $\sin x$  (c)  $\cos x$  (d)  $\sin 2x$
- (13)  $\pi < x < 2\pi$  तभी,  $\frac{d}{dx} \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}} =$  ..... □  
 (a)  $\sin x$  (b)  $\cos x$  (c)  $-\cos x$  (d)  $-\sin 2x$
- (14)  $\frac{d}{dx} \sqrt{x^2 - 2x - 1}$  ( $x \in [-2, -1]$ ) ..... □  
 (a) ना हो सकता नहीं. (b) 0 वै. (c) 1 वै. (d) -1 वै.
- (15)  $\frac{d}{dx} (x + |x|) |_{x < 0} =$  ..... □  
 (a) 1 (b) 0 (c) 2 (d) 4
- (16)  $\frac{d}{dx} (x + |x|) |_{x > 0} =$  ..... □  
 (a)  $-4x$  (b)  $4x$  (c)  $2x^2$  (d)  $x^2$
- (17)  $\frac{d}{dx} |x|^2$  ..... ( $x = 0$  अविभाज्य)  
 (a) 0 वै. (b) ना हो सकता नहीं. (c) 2 वै. (d) 1 वै. □
- (18)  $\frac{d}{dx} x|x|$  ( $x > 0$ ) ..... □  
 (a)  $x^2$  (b)  $-2x$  (c)  $2x$  (d) 0
- (19)  $\frac{d}{dx} (\cos^2 x - \sin^2 x) =$  ..... □  
 (a)  $\sin 2x$  (b)  $\cos 2x$  (c)  $-\cos 2x$  (d)  $-2\sin 2x$
- (20)  $\frac{d}{dx} (3\sin x - 4\sin^3 x) =$  ..... □  
 (a)  $3\cos 3x$  (b)  $\cos 3x$  (c)  $3\sin 3x$  (d)  $-3\cos 3x$
- (21)  $\frac{d}{dx} \sin 18^\circ =$  ..... □  
 (a)  $\cos 18^\circ$  (b)  $-\sin 18^\circ$  (c)  $-\cos 18^\circ$  (d) 0
- (22)  $\frac{d}{dx} \sin x^\circ =$  ..... □  
 (a)  $\cos x^\circ$  (b)  $-\sin x^\circ$  (c)  $\frac{\pi}{180} \cos x^\circ$  (d) 0
- (23)  $\frac{d}{dx} (2x + 3)^n =$  ..... □  
 (a)  $n(2x + 3)^{n-1}$  (b)  $2n(2x + 3)^{n-1}$   
 (c)  $3n(2x + 3)^{n-1}$  (d)  $2^n n(2x + 3)^{n-1}$

(24)  $\frac{d}{dx} \sqrt{\sin x}$ , ( $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ) = .....

(a)  $\sqrt{\cos x}$

(b)  $\sqrt{\sin x}$

(c)  $\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

(d)  $\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$

(25)  $\frac{d}{dx} \tan^2 x = .....$

(a)  $2\tan x$

(b)  $\sec^2 x$

(c)  $\cot^2 x$

(d)  $2\tan x \sec^2 x$

\*

### સારાંશ

આ પ્રકાશમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓની ચર્ચા કરી :

- વિકલનની વ્યાખ્યા તેમજ તેના પર આધારિત ઉદાહરણો.
- વિકલિતની બેન્ડિક ડિયાઓ અને સૂત્રો આધારિત ઉદાહરણો
- ઓ  $f(x)$  અને  $g(x)$  અંતરાલ  $(a, b)$ માં વિકલનીય હોય, તો

(1)  $\frac{d}{dx} (f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d}{dx} g(x)$

(2)  $\frac{d}{dx} (f(x) - g(x)) = \frac{d}{dx} f(x) - \frac{d}{dx} g(x)$

(3)  $\frac{d}{dx} (f(x) g(x)) = g(x) \frac{d}{dx} f(x) + f(x) \frac{d}{dx} g(x)$

(4)  $\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x) f'(x) - f(x) g'(x)}{[g(x)]^2}, g(x) \neq 0$

(5)  $\frac{d}{dx} kf(x) = k \frac{d}{dx} f(x), K \in \mathbb{R}$

- કેટલાંક પ્રમાણિત સૂત્રો :

(1)  $\frac{d}{dx} c = 0$

(2)  $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$

(3)  $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$

(4)  $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$

(5)  $\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$

(6)  $\frac{d}{dx} \cot x = -\operatorname{cosec}^2 x$

(7)  $\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$

(8)  $\frac{d}{dx} \operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} x \cot x$

- બહુપદી તેમજ સંમેય વિષેયનું વિકલન



### Bhaskara I

Bhaskara wrote three astronomical contributions. In 629 he created the Aryabhatiya, written in verses, about mathematical astronomy. The comments referred exactly to the 33 verses dealing with mathematics. There he considered variable equations and trigonometric formulae.

His work *Mahabhaskariya* is divided into eight chapters about mathematical astronomy. In chapter 7, he gives a remarkable approximation formula for  $\sin x$ , that is

$$\sin x \sim \frac{16x(\pi - x)}{5\pi^2 - 4x(\pi - x)} \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$$

## જવાબો

(જે દાખલામાં ગણતરી કરવાની હોય તેના જ જવાબો આપ્યા છે.)

### સ્વાધ્યાય 1

- 31.** (1) d    (2) d    (3) b    (4) a    (5) d    (6) b    (7) d    (8) d    (9) d    (10) d

### સ્વાધ્યાય 2.1

- 1.** (1)  $-2i$     (2)  $-1 + 8i$     (3)  $2 + i$     (4)  $\frac{5}{13} + \frac{14}{13}i$     (5)  $-\frac{2}{5}$     (6)  $-\frac{1}{2}$     (7)  $-4$   
 (8)  $2i$     (9)  $\frac{77}{25} + \frac{36}{25}i$     (10)  $-\frac{7}{\sqrt{2}}i$
- 2.** (1)  $x = 4, y = 1$     (2)  $x = -\frac{16}{23}, y = \frac{29}{23}$     (3)  $x = 4, y = -2$   
 (4)  $\left[ (2, 3) \left( -2, \frac{1}{3} \right) \right]$     (5)  $x = \frac{14}{15}, y = \frac{1}{5}$
- 3.** (1)  $\frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$     (2)  $-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$     (3)  $\frac{11}{25} - \frac{27}{25}i$     (4)  $-\frac{5}{169} + \frac{12}{169}i$     (5)  $i$

### સ્વાધ્યાય 2.2

- 1.** (1)  $\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}$     (2)  $\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}$     (3)  $2, -\frac{\pi}{6}$     (4)  $2, \frac{5\pi}{6}$     (5)  $6, \frac{3\pi}{4}$
- 6.**  $z_1, z_2$  સમાન ન પણ હોય **8.** 40 **12.**  $-2\sqrt{3} + 2i$  **13.**  $z_1 = 2 + i, z_2 = 2 - i$  **15.**  $\frac{2}{5}$

### સ્વાધ્યાય 2.3

- 1.** (1)  $\pm\sqrt{2}i$     (2)  $\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$     (3)  $\frac{-1 \pm \sqrt{19}i}{2\sqrt{5}}$     (4)  $\frac{-1 \pm \sqrt{2\sqrt{2}-1}i}{2}$     (5)  $\frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2\sqrt{2}}$     (6)  $\frac{2 \pm 4i}{3}$
- 2.** (1)  $\pm\sqrt{2}(\sqrt{3} + i)$     (2)  $\pm(3 - 2i)$     (2)  $\pm(1 + 7i)$     (4)  $\pm(2\sqrt{2} - \sqrt{5}i)$   
 (5)  $\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{\sqrt{2}-1} - i\sqrt{\sqrt{2}+1} \right)$     (6)  $\pm\sqrt{2}(1 + i)$     (7)  $\pm(2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i)$     (8)  $\pm 5i$     (9)  $\pm\sqrt{10}i$

### સ્વાધ્યાય 2

- 1.** (1)  $2 - 2i$     (2)  $\frac{307 + 599i}{442}$     **2.** 2    **4.**  $-\frac{3}{20}, \frac{1}{20}$     **7.** 1    **8.**  $b = \frac{-\beta}{(\alpha - 1)^2 + \beta^2}$
- 10.** (1)  $1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$     (2)  $\frac{5 \pm \sqrt{2}i}{27}$     (3)  $\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{14}}{21}i$
- 11.** મદ્ધત્તમ ક્રિમિનિટ 5, ન્યૂનત્તમ ક્રિમિનિટ 1    **12.**  $-48$     **13.** 4    **15.**  $\frac{3}{2} - 2i$
- 21.** (1) c    (2) b    (3) a    (4) d    (5) e    (6) c    (7) a    (8) c    (9) b    (10) b  
 (11) d    (12) b    (13) a    (14) e    (15) b

### સ્વાધ્યાય 3.1

- 1.** (1)  $x^{10} + 5x^7 + 10x^4 + 10x + \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^5}$     (2)  $1 - 8x + 24x^2 - 32x^3 + 16x^4$   
 (3)  $729x^6 - 2916x^5 + 4860x^4 - 4320x^3 + 2160x^2 - 576x + 64$   
 (4)  $x^5 - \frac{5}{2}x^3 + \frac{5}{2}x - \frac{5}{4x} + \frac{5}{16x^3} - \frac{1}{32x^5}$

- 2.** (1)  $x^8 + 4x^7 + 10x^6 + 16x^5 + 19x^4 + 16x^3 + 10x^2 + 4x + 1$   
(2)  $x^6 - 3x^5 + 6x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 3x + 1$
- 3.** (1) 0.92236816 (2) 96059601 (3) 1061520150601     **4.**  $(1.01)^{10000}$  મોટી સંખ્યા છે.

### સ્વાધ્યાય 3.2

- 1.** (1) 672 (2) 1365    **2.** (1)  $\frac{5}{81}$  (2)  $\frac{7}{18}$     **3.**  $n = 55$
- 4.** (1)  $\frac{280}{81}x^{12}, \frac{-560}{27}x^9$     (2)  $\frac{2835}{8}x^4y^4$     (3)  $\binom{20}{10}x^{10}$     (4)  $720x^2y^3, 1080x^3y^2$
- 5.**  $n = 6$     **6.**  $n = 14$  અથવા 7

### સ્વાધ્યાય 3

- 1.** 2 : 1    **2.**  $r = 3$  અથવા 15    **3.**  $n = 6, x = 2, y = 5$     **4.**  $a = 2, b = 3, n = 5$     **6.**  $n = 11$     **7.** 135    **8.** 17010  
**11.** (1) c (2) b (3) a (4) c (5) a (6) c (7) a (8) d (9) a (10) b

### સ્વાધ્યાય 4.1

- 1.** (1)  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$  (2)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  (3)  $-\frac{1}{2}$  (4)  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  (5)  $-\sqrt{2}$  (6)  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$     **17.** (1) 3 (2) 0 (3)  $\frac{1}{2}$  (4) 1  
**18.** (1) ક્રમા (2) ધન (3) ક્રમા (4) ક્રમા    **19.**  $\frac{3}{7}$

### સ્વાધ્યાય 4.2

- 1.** (1)  $\frac{1}{2\sqrt{2}}$  (2)  $\frac{-1}{2\sqrt{2}}$  (3)  $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$     **4.** (1) ચોણુ ચરણ (2) ચોણુ ચરણ  
**5.**  $\frac{2}{11}$ , પ્રથમ ચરણ    **6.** (1)  $[-25, 25]$  (2)  $[0, 2]$     **8.**  $r = 2, \alpha = \frac{\pi}{3}$   
**9.**  $r = 2, \theta = -\frac{\pi}{3}$     **20.**  $-1, \frac{1}{7}$

### સ્વાધ્યાય 4.3

- 1.** (1)  $\sin 10\theta + \sin 4\theta$  (2)  $\sin 3\theta - \sin 2\theta$  (3)  $\sin 8\theta - \sin 2\theta$  (4)  $\sin 6\theta + \sin \theta$   
(5)  $\cos 14\theta + \cos 8\theta$  (6)  $\cos 4\theta + \cos \theta$  (7)  $\frac{1}{2}(\cos 2\theta - \cos 20\theta)$  (8)  $\cos \theta - \cos 8\theta$  (9)  $\sin 2\theta$   
**2.** (1)  $\frac{1}{2}$  (2)  $-\frac{1}{2}$  (3)  $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$  (4)  $\frac{\sqrt{3}-2}{2}$  (5)  $\sqrt{2}$  (6) 1    **5.** 1

### સ્વાધ્યાય 4.4

- 1.** (1)  $2\sin 5\theta \cos 2\theta$  (2)  $2\sin \theta \cos \frac{\theta}{2}$  (3)  $-2\cos 4\theta \sin \theta$  (4)  $2\cos \frac{5\theta}{2} \sin \theta$   
(5)  $2\cos 10\theta \cos \theta$  (6)  $2\cos 4\theta \cos \frac{3\theta}{2}$  (7)  $2\sin 8\theta \sin 3\theta$  (8)  $2\sin \theta \sin \frac{\theta}{2}$   
(9)  $-2\sin^2 \frac{\theta}{2}$  (10)  $2\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$  (11)  $\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - 0\right)$  (12)  $\sqrt{2} \sin\left(0 - \frac{\pi}{4}\right)$

### સ્વાધ્યાય 4

- 9.**  $\sqrt{19}, -\sqrt{19}$
- 14.** (1) c (2) a (3) d (4) d (5) c (6) b (7) c (8) a (9) a (10) a  
(11) b (12) c (13) b (14) c (15) d (16) c (17) d (18) d (19) d

### स्वाध्याय 5.1

**20.**  $\frac{24}{25}, \frac{7}{25}, \frac{24}{7}, \frac{336}{625}$

### स्वाध्याय 5.2

**1.**  $\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}, -3 \quad \text{2. } \frac{1}{65}, \frac{64}{65}$

### स्वाध्याय 5

- 23.** (1) a (2) b (3) c (4) b (5) c (6) d (7) a (8) a (9) d (10) a  
 (11) b (12) b (13) a (14) c (15) d (16) a (17) b (18) c (19) a (20) d

### स्वाध्याय 6.1

- 1.**  $\left\{k\pi \pm \frac{3\pi}{8} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$
- 2.**  $\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{2k\pi \pm \frac{5\pi}{6} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$
- 3.**  $\{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$
- 4.**  $\left\{2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$
- 5.**  $\left\{\frac{k\pi}{3} + (-1)^k \frac{\pi}{12} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$
- 6.**  $\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$
- 7.**  $\left\{k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$
- 8.**  $\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{k\pi - (-1)^k \frac{\pi}{6} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$
- 9.**  $\left\{\frac{k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$
- 10.**  $\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
- 11.**  $\left\{\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$
- 12.**  $\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{k\pi + \frac{\pi}{6} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$
- 13.**  $\left\{k\pi + \frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{k\pi + \frac{\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$
- 14.**  $\{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{2k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$
- 15.**  $\left\{2k\pi + \frac{5\pi}{12} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{2k\pi - \frac{13\pi}{12} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$
- 16.** Ø
- 17.**  $\left\{\frac{k\pi}{5} \pm \frac{\pi}{30} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$
- 18.**  $\left\{\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{8} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$
- 19.**  $\left\{(8k \pm 3)\frac{\pi}{16} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$
- 20.**  $\left\{(2k+1)\frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

### स्वाध्याय 6.2

**16.**  $\frac{2\pi}{3} \quad \text{17. } 1 : \sqrt{3} : 2 \quad \text{18. } \frac{5\pi}{12} \quad \text{20. } \frac{\pi}{3}$

### स्वाध्याय 6

- 1.**  $\left\{2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{2k\pi \pm \frac{3\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$
- 2.**  $\left\{(4k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$
- 3.**  $\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{(3k \pm 1)\frac{\pi}{9} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$
- 4.**  $\left\{2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$
- 5.**  $\left\{(6k+1)\frac{\pi}{30} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$
- 6.**  $\left\{2k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$
- 7.**  $\left\{(4k \pm 1)\frac{\pi}{8} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

8.  $\left\{ (4k+1)\frac{\pi}{12} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$  9.  $\left\{ (4k+1)\frac{\pi}{8} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$  10.  $\left\{ (12k \pm 5)\frac{\pi}{6} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

21. (1) a (2) c (3) d (4) c (5) c (6) b (7) c (8) a (9) d (10) b  
 (11) a (12) a (13) b (14) d (15) b

### સ્વાધ્યાય 7.1

1. (1) 4, 7, 10, 13, 16 (2) 1,  $\frac{1}{2}$ , 2,  $\frac{3}{2}$ , 3 (3) 2, 3, 5, 7, 11

2. 2, 3, 5, 8 3. (1) -5, -9, -17 (2)  $\frac{5}{2}$ ,  $\frac{13}{2}$ ,  $\frac{41}{2}$  4. (1) 0, 3, 5, 19 (2) 1, 2, 3, 10

5. (1)  $a_n = ar^{n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  (2)  $a_1 = 0$ ,  $a_n = 16(-3)^{n-2}$ ,  $n \geq 2$

### સ્વાધ્યાય 7.2

1. (1) 43 (2) -49 (3)  $\frac{33}{2}$  2. 510 3. 23,700 4.  $d = -4$ ,  $t_8 = -24$

5. 27 6. -( $m + n$ ) 7. 0 8. 1 : 2 9. 5 : 11 10. 6000 11. 1 12. -1, 3, 7

13. 2, 6, 10, 14 14. ₹ 7800 15.  $n = 10$ , ₹ 1287.50 16. 660 રૂપાઈ

### સ્વાધ્યાય 7.3

1. (1) 256 (2)  $\frac{7}{1024}$  (3)  $-16\sqrt{2}$  2. (1) 768 (2) 13 (3) 5 (4)  $\frac{405}{4}$

3. 93 4.  $\frac{3}{2}$ , 3, 6, 12, 24,... 5. (1)  $\frac{7}{9}\left[\frac{10}{9}(10^n - 1) - n\right]$  (2)  $3\left[n + \frac{10}{9}(10^n - 1) - 1\right]$

6.  $\frac{a^2(a^{2n}-1)}{a^2-1} + \frac{ab(a^n b^n - 1)}{ab-1}$  7.  $\frac{2}{9}, \frac{2}{3}, 2, 6, 18$  8.  $\sqrt{mn}$  9.  $2\sqrt{2}$

12.  $\frac{1}{4}, 1, 4, 16$  13. ₹ 39,366

### સ્વાધ્યાય 7.4

1.  $\frac{19}{6}, \frac{10}{3}, \frac{7}{2}, \frac{11}{3}, \frac{23}{6}$  2. 5, 13, 21 3.  $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4$  4.  $\sqrt{2}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}$

5. 45, 5 6.  $x^2 - 20x + 64 = 0$

### સ્વાધ્યાય 7.5

1. (1) 800 (2) 465 (3) 1070 (4) -2704

2. (1)  $\frac{n}{3}(16n^2 + 12n - 1)$  (2)  $\frac{n}{4}(27n^3 - 18n^2 - 9n + 4)$  (3)  $\frac{n}{2}(4n^2 + n - 1)$   
 (4)  $\frac{10n}{3}(n^2 + 6n + 11)$  (5)  $12n(n+1)(9n^2 + 9n + 8)$  (6)  $\frac{n}{36}(4n^2 + 15n + 17)$   
 (7)  $2n^2 + n$  (8)  $\frac{n(n+1)}{12}(3n^2 + 11n + 10)$  (9)  $\frac{n^2(n^2-1)}{4}$

3. (1) -6479 (2) -465

### સ્વાધ્યાય 7

1. -140, 42 2. -2, 4, 10, 16,... 3. 9 કલાક 4. 16 છાર, 5 લંબધન 6. 1 : 2 : 3

7.  $\frac{20n}{3} - \frac{20}{27} + \frac{20}{27} \times 10^{-n}$  9. 740 10.  $\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$  11.  $\frac{n}{2}(1 - 5n)$

12. 11, 14, 17, 20,... 13.  $(3 + 2\sqrt{2}) : (3 - 2\sqrt{2})$  14.  $\frac{25025}{2}$

15.  $3, 5, 7, 9, 11, 13$     16.  $48, 12, 3, \frac{3}{4}, \frac{3}{16}$

17. (1) c    (2) d    (3) a    (4) a    (5) c    (6) c    (7) b    (8) a    (9) b    (10) d  
 (11) a    (12) d    (13) c    (14) a    (15) c    (16) b    (17) a    (18) c

### स्वाध्याय 8.1

1. (1)  $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$                           (2)  $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$   
 (3)  $x^2 + y^2 + 8x \cos\alpha - 8y \sin\alpha - 9 = 0$     (4)  $x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{5}y + 2 = 0$   
 (5)  $x^2 + y^2 - 2x = 0$   
 2.  $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$                                   3.  $x^2 + y^2 + 4x + 10y + 25 = 0$   
 4.  $x^2 + y^2 + 6x + 6y + 9 = 0$                                   5.  $x^2 + y^2 - 2\sqrt{5}x = 0$

### स्वाध्याय 8.2

1. (1) वर्तुण नथी.  
 (3) वर्तुण, केन्द्र  $(1, 1)$ , निष्कर्षा 1  
 (5) वर्तुण नथी.  
 (7) वर्तुण, केन्द्र  $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ , निष्कर्षा  $= \frac{1}{\sqrt{2}}$   
 (9) वर्तुण, केन्द्र  $= (\tan\alpha, -\sec\alpha)$ , निष्कर्षा  $= 1$ .  
 (10) निष्कर्ष-1 :  $\alpha = 0$     केन्द्र  $(0, -1)$ , निष्कर्षा  $= 1$   
 निष्कर्ष-2 :  $\alpha \neq 0$     वर्तुण नथी.
- (2) वर्तुण, केन्द्र  $(0, 0)$ , निष्कर्षा 1  
 (4) वर्तुण नथी.  
 (6) वर्तुण नथी.  
 (8) वर्तुण नथी.

2.  $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$                                   3.  $x^2 + y^2 - 10y - 15 = 0$   
 4.  $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 9 = 0$  अने  $x^2 + y^2 + 30x - 30y + 225 = 0$

### स्वाध्याय 8.3

1. (1) नाभि  $\left(\frac{1}{8}, 0\right)$ , नियामिका  $8x + 1 = 0$     (2) नाभि  $(0, -1)$ , नियामिका  $y = 1$   
 (3) नाभि  $\left(0, -\frac{1}{16}\right)$ , नियामिका  $16y - 1 = 0$     (4) नाभि  $(3, 0)$ , नियामिका  $x + 3 = 0$
2. (1)  $x^2 = -8y$     (2)  $y^2 = 16x$     3. (1)  $x^2 + y^2 + 2xy + 2x - 6y + 9 = 0$   
 (2)  $16x^2 + 9y^2 + 24xy + 180x + 160y + 600 = 0$     4.  $4, y + 3 = 0$   
 5. 18    6.  $\left(\frac{a}{t_1^2}, \frac{-2a}{t_1}\right)$     7.  $(3, \pm 6)$

### स्वाध्याय 8.4

1. (1)  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$     (2)  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$     (3)  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$     (4)  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$   
 (5)  $\frac{4x^2}{81} + \frac{4y^2}{45} = 1$     (6)  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$     (7)  $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$
2.  $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$

ક્રમ	$e$	નાભિ	નિયામિકા	નાભિલંબની લંબાઈ
(1)	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	$(0, \pm\sqrt{5})$	$y = \pm\frac{9}{\sqrt{5}}$	$\frac{8}{3}$
(2)	$\frac{2}{3}$	$(\pm 4, 0)$	$x = \pm 9$	$\frac{20}{3}$
(3)	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$(\pm 5\sqrt{2}, 0)$	$x = \pm 10\sqrt{2}$	10
(4)	$\frac{3}{4}$	$(0, \pm \frac{3\sqrt{43}}{\sqrt{7}})$	$y = \pm \frac{16\sqrt{43}}{3\sqrt{7}}$	$\frac{\sqrt{301}}{2}$
(5)	$\frac{2}{3}$	$(\pm \frac{6}{\sqrt{5}}, 0)$	$x = \pm \frac{27}{2\sqrt{5}}$	$2\sqrt{5}$

4.  $e = \frac{1}{\sqrt{3}}$     5.  $x = \pm \frac{50}{3}, 5 : 3$     7.  $7x^2 + 15y^2 = 247$     8.  $4x^2 + 3y^2 - 24x - 6y + 27 = 0$

9. નાભિ  $(2, 1 \pm \sqrt{5})$ , નિયામિકા  $y = 1 \pm \frac{9}{\sqrt{5}}$

### સ્વાધ્યાય 8.5

પ્રશ્ન 1 માં બધે જ થી  $\theta \in (-\pi, \pi]$

1. (1)  $x = 4\cos\theta, y = 3\sin\theta$     (2)  $x = 4\cos\theta, y = 2\sqrt{3}\sin\theta$   
             (3)  $x = 2\cos\theta, y = \sqrt{3}\sin\theta$     (4)  $x = 4\cos\theta, y = \sqrt{7}\sin\theta$     (5)  $x = 3\sqrt{2}\cos\theta, y = 3\sin\theta$   
 2. (1)  $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$ , Foci :  $(0, \pm\sqrt{5})$     (2)  $e = \frac{\sqrt{184}}{25}$ , Foci :  $(\pm \frac{\sqrt{184}}{15}, 0)$     (3)  $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$ , Foci :  $(\pm\sqrt{7}, 0)$   
 3.  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{15} = 1$

### સ્વાધ્યાય 8.6

ક્રમ	નાભિઓ	નિયામિકાઓ	નાભિલંબની લંબાઈ	મુખ્ય અશની લંબાઈ	અનુભવ અશની લંબાઈ
(1)	$(\pm 5\sqrt{5}, 0)$	$x = \pm 4\sqrt{5}$	5	20	10
(2)	$(\pm 8\sqrt{2}, 0)$	$x = \pm 4\sqrt{2}$	16	16	16
(3)	$(\pm \frac{5}{\sqrt{6}}, 0)$	$x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$	$\frac{2\sqrt{10}}{3}$	$\sqrt{10}$	$2\sqrt{\frac{5}{3}}$
(4)	$(0, \pm 5)$	$y = \pm \frac{16}{5}$	$\frac{9}{2}$	8	6
(5)	$(0, \pm 8)$	$y = \pm \frac{25}{8}$	$\frac{78}{5}$	10	$2\sqrt{39}$

પ્રશ્ન 2 તથા 5 માં બધે જ થી  $\theta \in (-\pi, \pi] - \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$

2. (1)  $\frac{y^2}{49} - \frac{9x^2}{343} = 1; x = \frac{\sqrt{343}}{3} \tan\theta, y = 7\sec\theta$     (2)  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1; x = 3\sec\theta, y = 2\tan\theta$   
             (3)  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{20} = 1; x = 5\sec\theta, y = \sqrt{20}\tan\theta$     (4)  $\frac{y^2}{32} - \frac{x^2}{32} = 1; x = 4\sqrt{2}\tan\theta, y = 4\sqrt{2}\sec\theta$   
             (5)  $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1; x = 3\tan\theta, y = 4\sec\theta$   
 4.  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$     5.  $x = 4\tan\theta, y = 3\sec\theta$

### સ્વાધ્યાય 8

1.  $x^2 + y^2 - 3x + y - 4 = 0$
2.  $x^2 + y^2 - 6y - 16 = 0$
3.  $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$
4. નાભિ :  $(\frac{1}{4}, 0)$ . નાભિબંદની લંબાઈ = 1
5.  $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{128} = 1$
6.  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

7.  $y^2 = -12(x + 1)$     8. (a)  $y^2 = 10x$ , (b)  $2\sqrt{110}$     9. (6, 0)    10. 3.2 m

11. ઉપરલય,  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

12. (1) a    (2) d    (3) a    (4) b    (5) d    (6) b    (7) c    (8) c    (9) b    (10) a  
 (11) b    (12) a    (13) b    (14) b    (15) c    (16) a    (17) a    (18) b    (19) c    (20) d

### સ્વાધ્યાય 9.1

1. (1)  $(x_1, x_2)$     (2)  $(x, y, z)$     (3)  $(5, -2, 2)$     (4)  $(4, -4, -4)$     (5)  $(-1, -4, -7)$     (6)  $(1, -5, -2)$
2. (1)  $x = 1, y = -1$     (2)  $x = 0, y = 0$     (3)  $x = \frac{1}{5}, y = \frac{8}{5}$     (4)  $x = 0, y = 0$
3. (1)  $\sqrt{3}$     (2)  $\sqrt{3}$     (3) 5    (4)  $\sqrt{14}$     (5)  $\sqrt{38}$     (6) 1
4. (1)  $|\bar{x} + \bar{y}| < |\bar{x}| + |\bar{y}|$     (2)  $|\bar{x} + \bar{y}| = |\bar{x}| + |\bar{y}|$     5.  $k = 1$     6.  $(\frac{-11}{6}, \frac{47}{15}, 0)$

### સ્વાધ્યાય 9.2

1. (1) OXYZ    (2) OXYZ'    (3) OXYZ'    (4) OXYZ    (5) OX'YZ'    2. (0, 0, 0)

### સ્વાધ્યાય 9.3

1. (1) સમાન દિશાઓ    (2) અનેત્તા દિશાઓ    (3) વિરુદ્ધ દિશાઓ    (4) અનેત્તા દિશાઓ
2. (1)  $(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5})$     (2)  $(\frac{-3}{5}, \frac{-4}{5})$     (3)  $(\frac{1}{\sqrt{35}}, \frac{3}{\sqrt{35}}, \frac{5}{\sqrt{35}})$     (4)  $(\frac{6}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7})$     (5) (1, 0, 0)    (6)  $(\frac{-5}{13}, \frac{12}{13})$
3.  $\alpha = \frac{2x_2 - x_1}{3}, \beta = \frac{2x_1 - x_2}{3}$

### સ્વાધ્યાય 9.4

1. (1) 0    (2)  $2\sqrt{3}$     (3) 6    (4) 4    (5) 5    (6) 1
2. (1) અસમરેખ    (2) સમરેખ    (3) અસમરેખ    (4) અસમરેખ
3. સમદિલ્લોજ કાટકોણ નિકોણ    4. (0, 0, 0) અથવા (0, 0, 6)    5.  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y - 12z + 52 = k^2$

### સ્વાધ્યાય 9.5

1.  $(\frac{4}{3}, \frac{10}{3}, \frac{-5}{3})$  and  $(\frac{5}{3}, \frac{11}{3}, \frac{-4}{3})$
2. (1) અસમરેખ    (2) અસમરેખ    (3) અસમરેખ    (4) સમરેખ    (5) અસમરેખ

### સ્વાધ્યાય 9

1. સમાંતરબાજુ ચતુર્ભુષા, લંબચોરસ નથી    2. સમદિલ્લોજ કાટકોણ નિકોણ    3.  $x = 2z$
4. (1)  $\frac{3}{2}, \frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2}; (1, 1, 1)$     (2)  $\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{5}}{2}, \frac{3}{\sqrt{2}}; (0, 1, 2)$     (3)  $3\sqrt{5}, \sqrt{21}, \sqrt{6}; (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$
5.  $(1, 1, \frac{2}{3})$
6. (1) અસમરેખ

- (2) સમરેખ, A, B તરફથી  $-2 : 1$  ગુણોત્તરમાં; A, C તરફથી  $-1 : 2$  ગુણોત્તરમાં  
 B, A તરફથી  $-2 : 1$  ગુણોત્તરમાં; B, C તરફથી  $-1 : 2$  ગુણોત્તરમાં  
 C, A તરફથી  $1 : 1$  ગુણોત્તરમાં; C, B તરફથી  $1 : 1$  ગુણોત્તરમાં

(3) અસમરેખ

- (4) સમરેખ, L, M તરફથી  $-1 : 3$  ગુણોત્તરમાં; L, N તરફથી  $-3 : 1$  ગુણોત્તરમાં  
 M, L તરફથી  $1 : 2$  ગુણોત્તરમાં; M, N તરફથી  $2 : 1$  ગુણોત્તરમાં  
 N, L તરફથી  $-3 : 2$  ગુણોત્તરમાં; N, M તરફથી  $-2 : 3$  ગુણોત્તરમાં
- (5) સમરેખ, P, Q તરફથી  $1 : 1$  ગુણોત્તરમાં P, R તરફથી  $1 : 1$  ગુણોત્તરમાં  
 Q, P તરફથી  $-1 : 2$  ગુણોત્તરમાં Q, R તરફથી  $-2 : 1$  ગુણોત્તરમાં  
 R, P તરફથી  $-1 : 2$  ગુણોત્તરમાં R, Q તરફથી  $-2 : 1$  ગુણોત્તરમાં

7. (1) b (2) d (3) b (4) c (5) c (6) a (7) c (8) a (9) d (10) c (11) a (12) a (13) a  
 (14) a (15) c (16) c (17) a (18) b (19) c (20) c

### સ્વાધ્યાપ 10

11.  $\frac{1}{12}$  12.  $\frac{m}{n}$  13.  $-2$  14. 41 15.  $\frac{1}{4} \cdot x^{\frac{3}{4}}$  16.  $\frac{1}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}}$  17.  $\frac{5}{4}$  18. 0  
 19.  $\sqrt{3} - \sqrt{2}$  20.  $\frac{n(n+1)}{2}$  21. 1 22.  $-3\sqrt{2}$  23.  $\frac{mn(n-m)}{2}$  24.  $\frac{1}{12}$   
 25. 12 26.  $\frac{1}{4\sqrt{2}}$  27.  $\frac{1}{2}$  28.  $-\cos a$  29.  $2\cos 3$  30.  $-1$   
 31.  $2a\sin a + a^2\cos a$  32.  $\sec x(\tan x + 1)$   
 33. (1) b (2) d (3) b (4) c (5) b (6) a (7) d (8) a (9) d (10) c  
 (11) d (12) c (13) d (14) a (15) b (16) b (17) a (18) c (19) b (20) d

### સ્વાધ્યાપ 11

1. (1) 1 (2)  $-1$  (3) 2 (4)  $\frac{1}{5}$  (5)  $-8$  (6)  $-1$  (7) 2 (8)  $2\sqrt{3}$  (9)  $-2$  (10)  $-2\sqrt{3}$   
 2. (1) 10 (2)  $\sec x \tan x + \sec^2 x$  (3)  $\cosec^2 x - \cosec x \cot x$   
 (4)  $4\sin x \cos x - 3\sin x$  (5)  $-2\sin 2x$  (6)  $2\cos 2x$  (7)  $2\sec^2 2x$   
 (8)  $\frac{1}{1-\cos x}$  (9)  $\frac{1}{1-\sin x}$  (10)  $3x^2$  (11)  $4x^3$  (12)  $6x^5$  (13)  $4\sin^3 x \cos x$   
 (14)  $-4\cos^3 x \sin x$  (15)  $2\sec^2 x \tan x$   
 4.  $-2\sin 2x$  5.  $\frac{(n-1)x^n - n \cdot x^{n-1} - 1}{(x-1)^2}$  7.  $\frac{4x}{(x^2+1)^2}$  8.  $\frac{(n-1)x^n - a \cdot nx^{n-1} - a^n}{(x-a)^2}$   
 9.  $-35x^{-6} - 12x^{-5}$  10.  $-16x^{-5} + 24x^{-4}$  11.  $2\sec x \tan x - 3\sec^2 x + 5\cos 2x$   
 12.  $\frac{2\sec x \tan x}{(\sec x + 1)^2}$  13.  $\frac{56 + 35(x\cos x - \sin x) + 32(\cos x + \sin x)}{(5x - 8\cos x)^2}$  14.  $\frac{1 + \cot x + x\cosec^2 x}{(1 + \cot x)^2}$   
 15.  $2(x - \sin 2x)$  16.  $(p + q\tan x)(2ax + b + \cos x) + (ax^2 + bx + \sin x)q\sec^2 x$   
 17.  $\cos(x + a)$  18.  $\cos a \cdot \sec^2 x$  19.  $\sec^2(x + a)$   
 20. (1) b (2) c (3) a (4) d (5) c (6) c (7) b (8) b (9) d (10) c  
 (11) a (12) b (13) c (14) d (15) b (16) b (17) a (18) c (19) d (20) a  
 (21) d (22) c (23) b (24) c (25) d



# પારિભાષિક શબ્દો

અંતર્કેન્દ્ર	Incentre	સમગુણોત્તર શ્રેષ્ઠી	Geometric
અવકાશ	Space	સમાંતર શ્રેષ્ઠી	Progression (G.P.)
અવધિ સૂત્રો	Factor Formulae	સમાંતર શ્રેષ્ઠી	Arithmetic
આલેખ	Graph	છેડિકા	Progression (A.P.)
આર્ગન્ડ આકૃતિ	Argand diagram	દ્વિપદી પ્રમેય	Secant
આદેશનો નિયમ	Rule of Substitution	વિકલ્પના	Binomial Theorem
આવૃત્ત સંબંધ	Recurrence Relation	વિકલ્પન	Differentiation
અદિશ	Scalar	વિકલ્પિત	Derivative
અતિવલય	Hyperbola	શિરોભિંદુ	Vertex
અનુભદ અતિવલય	Conjugate Hyperbola	વિભાજ્ય	Divisible
અનુભદ અક્ષ	Conjugate Axis	ફાળ	Slope
અનુભદ સંકર સંખ્યા	Conjugate of a Complex Number	ત્રિવિધ વિકલ્પનો નિયમ	Law of Trichotomy
જીવા	Chord	દિશા	Direction
ઉકેન્દ્રતા	Eccentricity	નિયામિકા	Directrix
ઉપવલય	Ellipse	નિયામિકાઓ	Directrices
ઉપગુણિત	Submultiple	નિયત સંદિશ	Bound Vector
ઘંબાતિવલય	Rectangular Hyperbola	શ્રેષ્ઠી	Sequence
કલનશાસ્ક	Calculus	શ્રેષ્ઠી	Series
વર્ગમૂળ	Square Root	તાત્કાલિક વેગ	Instantaneous Velocity
શુદ્ધ કાલ્યનિક સંખ્યા	Purely Imaginary Number	પરિકેન્દ્ર	Circumcentre
ગુણીત	Multiple	પરવલય	Parabola
શાંકવ	Conic / Conic Section	પ્રચલ	Parameter
શાખા	Branch	પ્રૂણીય સ્વરૂપ	Polar Form
કાલ્યનિક ભાગ	Imaginary Part	પ્રધાન અક્ષ	Major Axis
વાસ્તવિક ભાગ	Real Part	પ્રક્ષેપ સૂત્ર	Projection Formula
ગણિતીય અનુમાન	Mathematical Induction	નાલિ	Focus
કેન્દ્રીય શાંકવ	Central Conic	નાલિઓ	Foci
ગૌપ્ત્ર અક્ષ	Minor Axis	નાલિશ્વા	Focal Chord
કોઝાંડ	Argument	નાલિલંબ	Latus-rectum
લક્ષ	Limit	નાલિલંબનો	Latera-recta
સંકર સંખ્યાઓ	Complex Numbers	મુક્ત સંદિશ	Free Vector
સંકર સંખ્યાનો માનાંડ	Modulus of a Complex Number	મુખ્ય અક્ષ	Transverse Axis
		માન	Magnitude
		મધ્યક	Mean
સંમેત	Symmetric	મધ્યકેન્દ્ર	Centroid
સંબંધિત સંખ્યાઓ	Allied Numbers	સ્થાન સંદિશ	Position Vector
સામાન્ય તશીષત	Common Difference	સ્પર્શક	Tangent
સંદિશ	Vector	યામ	Coordinate
સરવાળાના સૂત્રો	Addition Formulae	યામાંશ	Coordinate Axis