ગુજરાત રાજ્યના શિક્ષણવિભાગના પત્ર-ક્રમાંક
મશબ/1211/414/છ, તા. 19-1-2012 થી-મંજૂર

ગણિત

ધોરણ 12

(સિમેસ્ટર III)

પ્રતિજ્ઞાપત્ર

ભારત મારો દેશ છે.
બધાં ભારતીયો મારાં ભાઈબહેન છે.
હું મારા દેશને ચાહું છું અને તેના સમૃદ્ધ અને
વૈવિધ્યપૂર્ણ વારસાનો મને ગર્વ છે.
હું સદાય તેને લાયક બનવા પ્રયત્ન કરીશ.
હું મારાં માતાપિતા, શિક્ષકો અને વડીલો પ્રત્યે આદર રાખીશ
અને દરેક જણ સાથે સભ્યતાથી વર્તીશ.
હું મારા દેશ અને દેશબાંધવોને મારી નિષ્ઠા અર્પું છું.
તેમનાં કલ્યાણ અને સમૃદ્ધિમાં જ મારું સુખ રહ્યું છે.

રાજ્ય સરકારની વિનામૂલ્યે યોજના હેઠળનું પુસ્તક

ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ
'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર-382010

લેખન
ડૉ. એ. પી. શાહ (કન્વીનર) શ્રી રાજીવ ચોક્સી
શ્રી જયકૃષ્ણ એન. ભટ્ટ શ્રી વિપુલકુમાર આર. શાહ

અનુવાદ
ડૉ. એ. પી. શાહ શ્રી રાજીવ ચોક્સી
શ્રી જયકૃષ્ણ એન. ભટ્ટ શ્રી વિપુલકુમાર આર. શાહ

સમીક્ષા
ડૉ. અજય એસ. ગોર
શ્રી રવિ એન. બોરાણા
શ્રી રમેશચંદ્ર વી. વૈષ્ણવ
શ્રી નિલયભાઈ જે. મહેતા
શ્રી પરિમલભાઈ બી. પુરોહિત
શ્રી વિજયભાઈ જી. વોરા
શ્રી શૈલેષ જી. શેઠ
શ્રી નવરોજભાઈ બી. ગાંગાણી
શ્રી કમલેશભાઈ કે. પરીખ
શ્રી જગદીશભાઈ એ. નાયક
શ્રી ગીતાબહેન એ. ઝાલાવાડિયા
શ્રી બિંદિયાબહેન ડી. જોષી

ભાષાશુદ્ધિ
શ્રી અશોકકુમાર એમ. દવે

ચિત્રાંકન
શ્રી મનીષ પારેખ

સંયોજન
શ્રી આશિષ એચ. બોરીસાગર
(વિષય-સંયોજક : ગણિત)

નિર્માણ-આયોજન
શ્રી હરેશ એસ. લીમ્બાચીયા
(નાયબ નિયામક : શૈક્ષણિક)

મુદ્રણ-આયોજન
શ્રી હરેશ એસ. લીમ્બાચીયા
(નાયબ નિયામક : ઉત્પાદન)

પ્રસ્તાવના

એન.સી.ઈ.આર.ટી. દ્વારા તૈયાર કરવામાં આવેલા નવા રાષ્ટ્રીય અભ્યાસક્રમોના અનુસંધાનમાં ગુજરાત રાજ્ય માધ્યમિક અને ઉચ્ચતર માધ્યમિક શિક્ષણ બોર્ડે નવા અભ્યાસક્રમો તૈયાર કર્યા છે. આ અભ્યાસક્રમો ગુજરાત સરકાર દ્વારા મંજૂર કરવામાં આવ્યા છે.

ગુજરાત સરકાર દ્વારા મંજૂર થયેલા **ધોરણ 12 (સિમેસ્ટર III), ગણિત** વિષયના નવા અભ્યાસક્રમ અનુસાર તૈયાર કરવામાં આવેલું આ પાઠ્યપુસ્તક વિદ્યાર્થીઓ સમક્ષ મૂકતાં મંડળ આનંદ અનુભવે છે.

આ પાઠ્યપુસ્તક પ્રસિદ્ધ કરતાં પહેલાં એની હસ્તપ્રતની આ સ્તરે શિક્ષણકાર્ય કરતા શિક્ષકો અને તજ્જ્ઞો દ્વારા સર્વાંગી સમીક્ષા કરાવવામાં આવી છે. શિક્ષકો તથા તજ્જ્ઞોનાં સૂચનો અનુસાર હસ્તપ્રતમાં યોગ્ય સુધારાવધારા કર્યા પછી આ પાઠ્યપુસ્તક પ્રસિદ્ધ કરવામાં આવ્યું છે. મૂળ અંગ્રેજીમાં તૈયાર કરવામાં આવેલ પાઠ્યપુસ્તકનો આ ગુજરાતી અનુવાદ છે.

પ્રસ્તુત પાઠ્યપુસ્તકને રસપ્રદ, ઉપયોગી તથા ક્ષતિરહિત બનાવવા માટે મંડળે પૂરતી કાળજી લીધી છે. તેમ છતાં શિક્ષણમાં રસ ધરાવનાર વ્યક્તિઓ પાસેથી પાઠ્યપુસ્તકની ગુણવત્તા વધારે તેવાં સૂચનો આવકાર્ય છે.

ડૉ. ભરત પંડિત **ડૉ. નીતિન પેથાણી**
નિયામક કાર્યવાહક પ્રમુખ
તા.3-3-2015 ગાંધીનગર

પ્રથમ આવૃત્તિ : 2012, પુનઃમુદ્રણ : 2012, 2013, 2015
પ્રકાશક : ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, 'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર વતી
ડૉ. ભરત પંડિત, નિયામક
મુદ્રક :

મૂળભૂત ફરજો

ભારતના દરેક નાગરિકની ફરજ નીચે મુજબ રહેશે :*

(ક) સંવિધાનને વફાદાર રહેવાની અને તેના આદર્શો અને સંસ્થાઓનો, રાષ્ટ્રધ્વજનો અને રાષ્ટ્રગીતનો આદર કરવાની;

(ખ) આઝાદી માટેની આપણી રાષ્ટ્રીય લડતને પ્રેરણા આપનારા ઉમદા આદર્શોને હૃદયમાં પ્રતિષ્ઠિત કરવાની અને અનુસરવાની;

(ગ) ભારતનાં સાર્વભૌમત્વ, એકતા અને અખંડિતતાનું સમર્થન કરવાની અને તેમનું રક્ષણ કરવાની;

(ઘ) દેશનું રક્ષણ કરવાની અને રાષ્ટ્રીય સેવા બજાવવાની હાકલ થતાં, તેમ કરવાની;

(ચ) ધાર્મિક, ભાષાકીય, પ્રાદેશિક અથવા સાંપ્રદાયિક ભેદોથી પર રહીને, ભારતના તમામ લોકોમાં સુમેળ અને સમાન બંધુત્વની ભાવનાની વૃદ્ધિ કરવાની, સ્ત્રીઓના ગૌરવને અપમાનિત કરે તેવા વ્યવહારો ત્યજી દેવાની;

(છ) આપણી સમન્વિત સંસ્કૃતિના સમૃદ્ધ વારસાનું મૂલ્ય સમજી તે જાળવી રાખવાની;

(જ) જંગલો, તળાવો, નદીઓ અને વન્ય પશુપક્ષીઓ સહિત કુદરતી પર્યાવરણનું જતન કરવાની અને તેની સુધારણા કરવાની અને જીવો પ્રત્યે અનુકંપા રાખવાની;

(ઝ) વૈજ્ઞાનિક માનસ, માનવતાવાદ, જિજ્ઞાસા તથા સુધારણાની ભાવના કેળવવાની;

(ટ) જાહેર મિલકતનું રક્ષણ કરવાની અને હિંસાનો ત્યાગ કરવાની;

(ઠ) રાષ્ટ્ર પુરુષાર્થ અને સિદ્ધિમાં વધુ ને વધુ ઉન્નત સોપાનો ભણી સતત પ્રગતિ કરતું રહે એ માટે, વૈયક્તિક અને સામૂહિક પ્રવૃત્તિનાં તમામ ક્ષેત્રે શ્રેષ્ઠતા હાંસલ કરવાનો પ્રયત્ન કરવાની.

(ડ) માતા-પિતાએ અથવા વાલીએ 6 વર્ષથી 14 વર્ષ સુધીની વયના પોતાના બાળક અથવા પાલ્યને શિક્ષણની તકો પૂરી પાડવી.

*ભારતનું સંવિધાન : કલમ 51-क

અનુક્રમણિકા

આ પાઠ્યપુસ્તક વિશે...

NCERT ના અભ્યાસક્રમને અનુલક્ષીને તૈયાર થયેલા ધોરણ XI ના સિમેસ્ટર I તથા સિમેસ્ટર II ના પાઠ્યપુસ્તકની શૃંખલામાં હવે ધોરણ XII માટે સિમેસ્ટર III નું પાઠ્યપુસ્તક આપ સમક્ષ રજૂ કરતાં અમને આનંદ થાય છે.

ધોરણ XI ના બંને સિમેસ્ટરના પાઠ્યપુસ્તકની જેમ જ આ પાઠ્યપુસ્તક પણ સૌપ્રથમ અંગ્રેજીમાં તૈયાર કરવામાં આવ્યું. તે હસ્તપ્રતની ચકાસણી ઑક્ટોબર માસમાં શાળાના વિદ્વાન શિક્ષકો તથા મહાશાળાના અધ્યાપકો દ્વારા કરવામાં આવી. તેમનાં યોગ્ય સૂચનો - સુધારાઓને સ્વીકારી હસ્તપ્રતને સુધારી તેનો ગુજરાતી અનુવાદ કરવામાં આવ્યો. ગુજરાતીમાં તૈયાર થયેલ હસ્તપ્રતની ચકાસણી પણ શાળા તથા કૉલેજોના વિદ્વાન શિક્ષકોએ કરી હતી અને તેમનાં સૂચનો અનુસાર સુધારા કરવામાં આવ્યા હતા. અંગ્રેજી હસ્તપ્રતની તથા ગુજરાતી અનુવાદની ભાષાશુદ્ધિ ભાષાનિષ્ણાત દ્વારા કરવામાં આવી. આ રીતે તૈયાર થયેલ હસ્તપ્રતના અંતિમ મુસદ્દાનું પરામર્શન ગુજરાત માધ્યમિક અને ઉચ્ચતર માધ્યમિક શિક્ષણ બોર્ડની કચેરીમાં બોર્ડ દ્વારા નિમંત્રિત વિદ્વાન શિક્ષકો દ્વારા લેખકોની હાજરીમાં કરવામાં આવ્યું. તેમણે સૂચવેલા સુધારાને આમેજ કરી હસ્તપ્રતને આખરી રૂપ આપવામાં આવ્યું.

પ્રકરણ 1 માં સંબંધ, સંબંધના પ્રકાર, સામ્યવર્ગ, વિધેય, એક-એક તથા વ્યાપ્ત વિધેય, પ્રતિવિધેય તથા વિધેય તરીકે દ્વિક્ક્રિયાની સમજૂતી છે. NCERT ના પાઠ્યપુસ્તકમાં જે રીતની રજૂઆત છે તે જ રીતે આ મુદ્દા પાઠ્યપુસ્તકમાં સમાવવામાં આવ્યા છે. પ્રકરણ 2 માં ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેય અને તેના આલેખો તથા પ્રમેયો સમજાવ્યા છે. કલનશાસ્ત્રના અભ્યાસમાં આ પ્રકરણનાં પરિણામો ખૂબ ઉપયોગી છે. પ્રકરણ 3 માં નિશ્ચાયક અને તેના પ્રમેયો તથા સુરેખ સમીકરણોની સંહતિના ઉકેલોમાં તથા યામભૂમિતિમાં તેમના ઉપયોગ વિશેની માહિતી છે. પ્રકરણ 4 માં શ્રેણિકોનાં સુરેખ સમીકરણોના ઉકેલો વિશેની માહિતીને આગળ વધારવામાં આવી છે. શ્રેણિકોના વ્યસ્ત માટેની એશિલોન પદ્ધતિ આ પ્રકરણનો એક વિશિષ્ટ મુદ્દો છે. નિશ્ચાયકના ઉપયોગ સિવાય શ્રેણિકનો વ્યસ્ત શોધવા માટેની તે પદ્ધતિ છે. પ્રકરણ 5 માં સિમેસ્ટર II માં કરેલી લક્ષની શરૂઆતથી આગળ વધી સાતત્ય તથા વિકલનની વિશદ્ સમજૂતી છે. આગળ ઉપર સિમેસ્ટર IV માં વિકલનના ઉપયોગો અંગે આ પ્રકરણ અત્યંત ઉપયોગી રહેશે. પ્રકરણ 6 અનિયત સંકલનની શરૂઆત છે. સંકલન તથા વિકલન બંનેનો અભ્યાસ કલનશાસ્ત્રનો પાયો છે. લીબનીટ્ઝ તથા ન્યૂટને સંકલન તથા વિકલનનો જુદી જુદી દિશામાં અભ્યાસ કરી આ મુદ્દાને જોડ્યા હતા. આપણે વિકલનનો અભ્યાસ કરી સંકલનના આધાર તરીકે લીધું છે. પ્રકરણ 7 તથા 8 આંકડાશાસ્ત્રના વિભાગો છે. પ્રકરણ 7 માં ધોરણ IX થી શરૂ કરેલ સંભાવનાનો અભ્યાસ દ્વિપદી વિતરણ સુધી આગળ લઈ ગયા છીએ. પ્રકરણ 8 સુરેખ આયોજન વિશે છે અને ધોરણ XI ના સિમેસ્ટર I ના સુરેખ અસમતાઓના આલેખના ઉપયોગથી વ્યાવહારિક પ્રશ્નોના ઉકેલની દિશા મળે છે.

ચતુરંગી આકર્ષક મુખપૃષ્ઠ, ચતુરંગી મુદ્રણ તથા આકૃતિઓ પાઠ્યપુસ્તકને ખૂબ જ ઉપયોગી તથા મૂલ્યવાન બનાવે છે. સંકલ્પનાઓ સમજાવવા માટે વિપુલ પ્રમાણમાં ઉદાહરણો મૂકવામાં આવેલ છે તથા દૃઢીકરણ માટે સ્વાધ્યાયમાં વૈવિધ્યસભર પ્રશ્નો પૂરતા પ્રમાણમાં મૂકવામાં આવેલ છે, જે વિદ્યાર્થીને સિમેસ્ટરની પરીક્ષા અને સ્પર્ધાત્મક પરીક્ષામાં ઊંચો આંક મેળવવામાં સહાયક થશે.

અંતમાં પાઠ્યપુસ્તક તૈયાર કરવામાં સહાય કરનાર સૌનો આભાર. વિદ્યાર્થીઓ, શિક્ષકો તથા વાલીઓને પાઠ્યપુસ્તક ગમશે તેવી આશા. પાઠ્યપુસ્તકની ગુણવત્તા સુધારવા સકારાત્મક સૂચનો આવકાર્ય છે.

– લેખકો

•

Born	22 December, 1887 Erode, Madras Presidency
Died	26 April, 1920 (aged 32) Chetput, Madras, Madras Presidency
Nationality	India
Fields	Mathematics
Alma mater	Government Arts College Pachaiyappa's College The University of Cambridge
Academic advisors	G. H. Hardy J. E. Littlewood
Known for	Landau–Ramanujan constant Mock theta functions Ramanujan conjecture Ramanujan prime Ramanujan–Soldner constant Ramanujan theta function Ramanujan's sum Rogers–Ramanujan identities
Influences	G. H. Hardy

શ્રીનિવાસ રામાનુજન

શ્રી રામાનુજનની 125મી જન્મજયંતિ નિમિત્તે ભારત સરકારે ઈ.સ. 2012ના વર્ષને ગણિતવર્ષ તરીકે ઉજવવાનું જાહેર કરેલ છે.

સંબંધ અને વિધેય 1

The roots of education are bitter but the fruit is sweet.

– Gauss

Mathematicians do not study objects but relations between them. Thus they are free to replace some objects by others so long as the relations remain unchanged. Content to them is irrelevent. They are interested in form only.

– Henri Poincare

1.1 સંબંધ

ગયા વર્ષે આપણે સંબંધ અને વિધેયની સંકલ્પનાનો અભ્યાસ કર્યો. આપણે વિધેયો પરની બૈજિક ક્રિયાઓ અને સંબંધના તથા વિધેયના આલેખનો પણ અભ્યાસ કર્યો. આ પ્રકરણમાં આપણે આ સંકલ્પનાઓનો વધુ વિસ્તારથી અભ્યાસ કરીશું.

'સંબંધ' શબ્દ સામાજિક બંધનના અનુસંધાનમાં વપરાય છે. સામાજિક તથા કૌટુંબિક દૃષ્ટિએ શબ્દ 'સંબંધ' જે રીતે ઉપયોગમાં લેવાય છે તેને આપણે ગાણિતિક સંબંધ સાથે સાંકળીશું.

મનુષ્યોના ગણ H પર આપણે નીચે પ્રમાણે સંબંધ વ્યાખ્યાયિત કરીએ :

S = $\{(x, y) \mid x \in$ H, $y \in$ H, x એ yનો ભાઈ છે.$\}$

'દેવ એ રુચાનો ભાઈ છે.' આમ, ક્રમયુક્ત જોડ (દેવ, રુચા) $\in$ S.

પરંતુ, જો સીતા તથા ગીતા બે બહેનો હોય, તો (સીતા, ગીતા) $\notin$ S.

ધારો કે ગણ C એ ઈ.સ. 2011 સુધીના ભારતીય ક્રિકેટ ટીમના કપ્તાનોનો ગણ છે.

ધારો કે S = $\{(x, y) \mid x$ એ yનો પુરોગામી છે. $x, y \in$ C$\}$

તો (કપિલદેવ, એમ. એસ. ધોની) $\in$ S.

પરંતુ (એમ. એસ. ધોની, કપિલદેવ) $\notin$ S.

પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના ગણ Nમાં જો કોઈક $k \in$ N માટે $y = x + k$ તો x એ yનો પુરોગામી છે. ધારો કે S = $\{(x, y) \mid x$ એ yનો પુરોગામી છે. $x \in$ N, $y \in$ N$\}$ તો $(3, 5) \in$ S કારણ કે $5 = 3 + 2$ પરંતુ $(5, 3) \notin$ S.

જો S એ ગણ A પરનો સંબંધ હોય એટલે કે, S $\subset$ (A $\times$ A) અને $(x, y) \in$ S તો આપણે કહીએ છીએ કે x એ y સાથે S દ્વારા સંબંધ ધરાવે છે તથા આને સંકેતમાં xSy દ્વારા દર્શાવાય છે.

ધારો કે સંબંધ S એ ગણ N પર નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે.

S = $\{(x, y) \mid |x - y|$ યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે. $x, y \in$ N$\}$, તો જ્યારે $(x, y) \in$ S હોય, ત્યારે $(y, x) \in$ S.

વળી, નોંધીએ કે $(x, x) \notin$ S. (કેમ ?)

હવે આપણે કેટલાક જુદા જુદા પ્રકારના સંબંધ વ્યાખ્યાયિત કરીએ.

ખાલી અથવા રિક્ત (Void) સંબંધ : ગણ A પરના એક પણ ઘટક ન ધરાવતા સંબંધને ખાલી સંબંધ કહે છે. $\emptyset \subset$ (A $\times$ A). સંબંધ $\emptyset$ ને ખાલી સંબંધ કહે છે.

સંબંધ S એ N પર નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે :

S = $\{(x, y) \mid x + y = 0, x \in$ N, $y \in$ N$\}$. તો S એ ખાલી સંબંધ છે કારણ કે બે પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો ક્યારેય શૂન્ય ન થઈ શકે.

સાર્વત્રિક સંબંધ (Universal Relation) : જો ગણ A પરનો સંબંધ A $\times$ A હોય, તો તેને સાર્વત્રિક સંબંધ કહે છે.

વાસ્તવિક સંખ્યાગણ R પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ

S = $\{(x, y) \mid x \le y$ અથવા $y \le x\}$ એ ત્રિવિધ વિકલ્પના નિયમના કારણે સાર્વત્રિક સંબંધ છે.

વિદ્યમાન વ્યક્તિઓના ગણ પર સંબંધ S નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત છે :

S = $\{(x, y) \mid x$ અને y વચ્ચેની ઉંમરનો તફાવત 200 વર્ષ કરતાં ઓછો હોય$\}$. સ્પષ્ટ છે કે S એ સાર્વત્રિક સંબંધ છે.

સ્વવાચક સંબંધ (Reflexive Relation) : જો S એ ગણ A પરનો સંબંધ હોય અને aSa, $\forall a \in A$ એટલે કે $(a, a) \in S$, $\forall a \in A$ તો S એ સ્વવાચક સંબંધ છે તેમ કહેવાય.

ઉદાહરણ તરીકે ત્રિકોણની સમરૂપતા, ત્રિકોણની એકરૂપતા, સંખ્યાઓની સમાનતા, ઘાતગણમાં ઉપગણ હોવાનો સંબંધ ($A \subset A$, $A \in P(U)$) વગેરે સ્વવાચક સંબંધનાં ઉદાહરણો છે.

$<$ એ R પર સ્વવાચક સંબંધ નથી, કારણ કે $a < a$ $\forall a \in R$ એ સત્ય નથી. (ખરેખર તો $a < a$ કોઈ પણ $a \in R$ માટે સત્ય નથી.)

પરંતુ $\leq$ એ R પર સ્વવાચક સંબંધ છે. $a \leq a$ $\forall a \in R$

સંમિત સંબંધ (Symmetric Relation) : જો S એ ગણ A પરનો સંબંધ હોય અને $aSb \Rightarrow bSa$ એટલે કે, $(a, b) \in S \Rightarrow (b, a) \in S$, $\forall a, b \in A$ તો S એ સંમિત સંબંધ છે તેમ કહેવાય.

જો સંગતતા $ABC \leftrightarrow PQR$ એ સમરૂપતા હોય, તો સંગતતા $PQR \leftrightarrow ABC$ પણ સમરૂપતા હોય. આમ, ત્રિકોણોની સમરૂપતાનો સંબંધ સંમિત છે.

પૂર્ણાંકોના ગણ ઉપર આપણે એક સંબંધ S નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરીએ છીએ :

$(a, b) \in S \Leftrightarrow a - b$ એ d વડે વિભાજ્ય છે, જ્યાં d નિશ્ચિત શૂન્યેતર પૂર્ણાંક છે.

સ્પષ્ટ છે કે જો $a - b$ એ d વડે વિભાજ્ય હોય તો $b - a$ એ પણ d વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore \quad (a, b) \in S \Leftrightarrow (b, a) \in S, \ \forall a, b \in Z$

આથી S સંમિત છે.

જો $\Delta PQR \cong \Delta ABC$ તો $\Delta ABC \cong \Delta PQR$. આ બધાં સંમિત સંબંધનાં ઉદાહરણો છે.

બે ગણ A અને B માટે A એ Bનો ઉચિત ઉપગણ હોય, તો B એ Aનો ઉચિત ઉપગણ ન હોય.

તેથી ઉચિત ઉપગણનો સંબંધ એ P(U) પર સંમિત સંબંધ નથી.

પરંપરિત સંબંધ (Transitive Relation) : જો S એ ગણ A પરનો સંબંધ હોય અને

aSb તથા $bSc \Rightarrow aSc$, $\forall a, b, c \in A$ એટલે કે

$(a, b) \in S$ તથા $(b, c) \in S \Rightarrow (a, c) \in S$, $\forall a, b, c \in A$ તો S એ પરંપરિત સંબંધ છે તેમ કહેવાય.

$A \subset B$ અને $B \subset C \Rightarrow A \subset C$. $\forall A, B, C \in P(U)$ સત્ય હોવાથી સંબંધ $\subset$ એ P(U) પર પરંપરિત છે.

તે જ રીતે, $a < b$ અને $b < c \Rightarrow a < c$, $\forall a, b, c \in R$ સત્ય હોવાથી સંબંધ $<$ એ R પર પરંપરિત છે.

સામ્ય સંબંધ (Equivalence Relation) : જો ગણ A પરનો સંબંધ S એ સ્વવાચક, સંમિત તથા પરંપરિત હોય, તો S ને ગણ A પરનો સામ્ય સંબંધ કહે છે.

જો S સામ્ય સંબંધ હોય તથા $(x, y) \in S$ તો $x \sim y$ લખવામાં આવે છે.

સંખ્યાઓની સમાનતા એ R પર સામ્ય સંબંધ છે. ત્રિકોણોની એકરૂપતા એ સમતલીય ત્રિકોણોના ગણ પર સામ્ય સંબંધ છે.

ઉદાહરણ 1 : સાબિત કરો કે Z પર વ્યાખ્યાયિત નીચેનો સંબંધ સામ્ય સંબંધ છે :

$x \equiv y \pmod{m}$ (વંચાય : x એ y ને સમશેષ છે.) $\Leftrightarrow$ નિશ્ચિત ધનપૂર્ણાંક m એ $x - y$ નો ભાજક છે.

ઉકેલ : સ્વવાચકતા : $a - a = 0$ એ કોઈ પણ શૂન્યેતર પૂર્ણાંક સંખ્યા વડે વિભાજ્ય હોવાથી $a \equiv a \pmod{m}$.

[**નોંધ :** 0 કોઈ પણ શૂન્યેતર વાસ્તવિક સંખ્યા વડે વિભાજ્ય છે, પરંતુ કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા 0 વડે વિભાજ્ય નથી.]

સંમિતતા : જો $a \equiv b \pmod{m}$, તો $a - b$ એ m વડે વિભાજ્ય હોય.

ધારો કે $a - b = mn \qquad n \in Z$

$\therefore \quad b - a = -mn = m(-n) \qquad -n \in Z$

$\therefore \quad b \equiv a \pmod{m}$

આમ, જો $a \equiv b \pmod{m}$, તો $b \equiv a \pmod{m}$

$\therefore \quad \equiv$ એ Zમાં સંમિત સંબંધ છે.

પરંપરિતતા : જો $a \equiv b \pmod{m}$ અને $b \equiv c \pmod{m}$ તો $m \mid (a - b)$ અને $m \mid (b - c)$.

($m \mid (a - b)$ એટલે કે $(a - b)$ એ m વડે વિભાજ્ય છે)

$\therefore \quad$ કોઈક $k \in Z$, $t \in Z$ માટે $a - b = mk$ અને $b - c = mt$

$\therefore \quad a - b + b - c = mk + mt$

$\therefore \quad a - c = m(k + t) \qquad k + t \in Z$

$\therefore \quad a \equiv c \pmod m$

આમ, જો $a \equiv b \pmod m$ અને $b \equiv c \pmod m$, તો $a \equiv c \pmod m$

$\therefore$ Z પર વ્યાખ્યાયિત સમશેષતાનો સંબંધ એ સામ્ય સંબંધ છે.

ઉદાહરણ 2 : સાબિત કરો કે ત્રિકોણની સમરૂપતા એ સમતલના બધા જ ત્રિકોણના ગણ પર સામ્ય સંબંધ છે.

ઉકેલ : કોઈપણ ΔABC માટે સંગતતા $ABC \leftrightarrow ABC$ માટે $\Delta ABC \sim \Delta ABC$.

જો $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, તો $\Delta PQR \sim \Delta ABC$.

વળી, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ અને $\Delta PQR \sim \Delta XYZ$, તો $\Delta ABC \sim \Delta XYZ$.

$\therefore$ $\sim$ એ સામ્ય સંબંધ છે.

(**નોંધ :** ત્રિકોણની એકરૂપતા પણ સમતલના બધા જ ત્રિકોણના ગણ પર સામ્ય સંબંધ છે.)

ઉદાહરણ 3 : A = સમતલમાં આવેલ બધી જ રેખાઓનો ગણ

$S = \{(x, y) \mid x = y$ અથવા રેખા x એ રેખા yને સમાંતર હોય.$\}$

S એ ગણ A પર સામ્ય સંબંધ છે ?

ઉકેલ : અહીં $l = l$ હોવાથી, $(l, l) \in S$ **(આપેલ છે)**

તેથી S સ્વવાચક સંબંધ છે.

ધારો કે $(l, m) \in S$. આથી $l \parallel m$ અથવા $l = m$.

જો $l \parallel m$, તો $m \parallel l$ અથવા જો $l = m$ તો $m = l$.

$\therefore$ $(l, m) \in S$ તો $(m, l) \in S$.

$\therefore$ S સંમિત સંબંધ છે.

ધારો કે $(l, m) \in S$ તથા $(m, n) \in S$.

જો l, m, n ભિન્ન રેખાઓ હોય તો $l \parallel m$ અને $m \parallel n$ અને તેથી $l \parallel n$.

જો $l \parallel m$ અને $m = n$ અથવા જો $l = m$ અને $m \parallel n$ તો $l \parallel n$.

$\therefore$ જો $l = m$ અને $m = n$, તો $l = n$.

$\therefore$ જો $(l, m) \in S$ તથા $(m, n) \in S$ તો $(l, n) \in S$.

$\therefore$ S એ પરંપરિત સંબંધ છે.

આમ, S એ સ્વવાચક, સંમિત અને પરંપરિત છે.

$\therefore$ S એ સામ્ય સંબંધ છે.

ઉદાહરણ 4 : ગણ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ પર સંબંધ $S = \{(a, b) \mid |a - b|$ યુગ્મ પૂર્ણાંક છે.$\}$ એ સામ્ય સંબંધ છે તેમ સાબિત કરો.

ઉકેલ : | અયુગ્મ પૂર્ણાંક $-$ અયુગ્મ પૂર્ણાંક | = | યુગ્મ પૂર્ણાંક $-$ યુગ્મ પૂર્ણાંક | = યુગ્મ પૂર્ણાંક

$\therefore$ $S = \{(1, 3), (3, 1), (1, 5)\ (5, 1), (3, 5), (5, 3), (1, 7), (7, 1), (3, 7), (7, 3), (5, 7), (7, 5),$
$(2, 4), (4, 2), (2, 6), (6, 2), (4, 6), (6, 4), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7)\}$

$(x, x) \in S$ હોવાથી S સ્વવાચક સંબંધ છે.

ધારો કે $(x, y) \in S$.

$|x - y| = |y - x|$ હોવાથી $(x, y) \in S \Rightarrow (y, x) \in S$. આથી, S સંમિત સંબંધ છે.

ધારો કે $(x, y) \in S$ તથા $(y, z) \in S$.

$|x - y|$ અને $|y - z|$ બંને યુગ્મ સંખ્યા હોવાથી x તથા y બંને અયુગ્મ હોય અથવા બંને યુગ્મ હોય તેમજ y અને z બંને અયુગ્મ હોય અથવા બંને યુગ્મ હોય. આથી x અને z બંને યુગ્મ હોય અથવા બંને અયુગ્મ હોય.

$\therefore$ $|x - z|$ યુગ્મ હોય.

$\therefore$ જો $(x, y) \in S$ અને $(y, z) \in S$ તો $(x, z) \in S$

$\therefore$ S પરંપરિત સંબંધ છે.

આમ, S એ સ્વવાચક, સંમિત અને પરંપરિત સંબંધ છે.

$\therefore$ S એ સામ્ય સંબંધ છે.

વિસંમિત સંબંધ (Antisymmetric Relation) : જો S એ ગણ A પર કોઈ સંબંધ હોય અને જો $(a, b) \in S$ અને $(b, a) \in S$, $\forall a, b \in A \Rightarrow a = b$, તો S એ વિસંમિત સંબંધ છે.

ગણ U ના ઘાતગણ P(U) માટે $A \subset B$ અને $B \subset A \Rightarrow A = B$, $\forall A, B \in P(U)$ હોવાથી $\subset$ એ P(U) પર વિસંમિત સંબંધ છે.

વાસ્તવિક ગણ R માં $a \le b$ અને $b \le a \Rightarrow a = b \quad \forall a, b \in R$ હોવાથી $\le$ એ R પર વિસંમિત સંબંધ છે.

ઉદાહરણ 5 : નીચે મુજબની શરતનું પાલન કરતા સંબંધનું ઉદાહરણ આપો : (1) સ્વવાચક અને સંમિત હોય પરંતુ પરંપરિત ન હોય (2) સ્વવાચક અને પરંપરિત હોય પરંતુ સંમિત ન હોય (3) સંમિત અને પરંપરિત હોય પરંતુ સ્વવાચક ન હોય.

ઉકેલ :

(1) A = સમતલમાં આવેલ બધી રેખાનો ગણ

$S = \{(x, y) \mid x = y$ અથવા x એ yને લંબ હોય $x, y \in A\}$ એ A પરનો સંબંધ છે.

$l = l$ હોવાથી $(l, l) \in S$. તેથી S સ્વવાચક છે.

જો $(l, m) \in S$ તો $l = m$ અથવા l એ mને લંબ હોય.

$\therefore$ $m = l$ અથવા m એ lને લંબ હોય.

$\therefore$ $(l, m) \in S \Rightarrow (m, l) \in S$. તેથી S એ સંમિત છે.

ધારો કે $(l, m) \in S$ અને $(m, n) \in S$, $l \ne m$, $m \ne n$

$\therefore$ ભિન્ન રેખાઓ l, m, n માટે, $l \perp m$ અને $m \perp n$.

$l \perp m$ અને $m \perp n$ હોવાથી $l \parallel n$

$\therefore$ $(l, n) \notin S$

$\therefore$ S સ્વવાચક અને સંમિત સંબંધ છે પરંતુ પરંપરિત સંબંધ નથી.

(2) વાસ્તવિક સંખ્યાગણ R પર $\le$ એ સંબંધ છે.

$a \le a \quad \forall a \in R$ અને $a \le b$ અને $b \le c \Rightarrow a \le c \quad \forall a, b\ c \in R$

$\therefore$ $\le$ સ્વવાચક તથા પરંપરિત સંબંધ છે.

જો $a \le b$, તો $b \nleq a$ સિવાય કે $a = b$.

આમ, $(3, 5) \in S$, પરંતુ $(5, 3) \notin S$ જ્યાં S એ $\le$ સંબંધ છે.

$\therefore$ S એ સ્વવાચક અને પરંપરિત સંબંધ છે, પરંતુ સંમિત નથી.

(3) ધારો કે $A = \{1, 2, 3\}$.

$S = \{(1, 2), (2, 1), (1, 1), (2, 2)\}$

અહીં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે S સંમિત તથા પરંપરિત છે પરંતુ સ્વવાચક નથી કારણ કે $(3, 3) \notin S$.

ઉદાહરણ 6 : નીચે પ્રમાણેની શરતનું પાલન કરતા સંબંધનું ઉદાહરણ આપો : (1) સ્વવાચક હોય પરંતુ સંમિત અથવા પરંપરિત ન હોય. (2) સંમિત હોય પરંતુ સ્વવાચક અથવા પરંપરિત ન હોય. (3) પરંપરિત હોય પરંતુ સ્વવાચક અથવા સંમિત ન હોય.

ઉકેલ : (1) ધારો કે $A = \{1, 2, 3\}$.

$S = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)\}$

$(1, 1), (2, 2), (3, 3) \in S$. આથી S એ સ્વવાચક છે.

$(1, 2) \in S$ પરંતુ $(2, 1) \notin S$. આથી, S સંમિત નથી.

$(1, 2) \in S$, $(2, 3) \in S$ પરંતુ $(1, 3) \notin S$.

$\therefore$ S પરંપરિત નથી.

$\therefore$ S સ્વવાચક છે પરંતુ સંમિત અથવા પરંપરિત નથી.

(2) ધારો કે $A = \{1, 2, 3\}$, $S = \{(1, 2), (2, 1)\}$

S સંમિત છે પરંતુ સ્વવાચક અથવા પરંપરિત નથી.

(3) Rમાં સંબંધ $<$ વિશે વિચાર કરીએ.

$a < b$ અને $b < c \Rightarrow a < c \quad \forall a, b\ c \in R$

પરંતુ $a \nless a$ અને જો $a < b$ તો $b \nless a$.

$\therefore$ $<$ એ પરંપરિત છે પરંતુ સ્વવાચક કે સંમિત નથી.

ઉદાહરણ 7 : એક એવા સંબંધનું ઉદાહરણ આપો કે જે સ્વવાચક ન હોય, સંમિત ન હોય કે પરંપરિત ન હોય.

ઉકેલ : ધારો કે $A = \{1, 2, 3\}$, $S = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 3)\}$.

$(3, 3) \notin S$. તેથી S સ્વવાચક નથી.

$(1, 2) \in S$ પરંતુ $(2, 1) \notin S$. તેથી S સંમિત નથી.

$(1, 2) \in S$ અને $(2, 3) \in S$ પરંતુ $(1, 3) \notin S$. તેથી S પરંપરિત નથી.

$\therefore$ S સ્વવાચક નથી, સંમિત નથી, પરંપરિત નથી.

ઉદાહરણ 8 : જો સંબંધ સંમિત અને પરંપરિત હોય, તો સ્વવાચક પણ હોય તેની સાબિતી નીચે પ્રમાણે આપેલ છે. આ સાબિતીમાં રહેલી ભૂલ શોધો.

ધારો કે xSy

$\therefore$ ySx (સંમિતતા)

xSy અને ySx હોવાથી xSx (પરંપરિતતા)

$\therefore$ S એ સ્વવાચક છે.

ઉકેલ : આ દલીલ બરાબર નથી.

પ્રત્યેક $x \in A$ માટે કોઈક એવો y મળે કે જેથી $(x, y) \in S$ એ સત્ય ન પણ હોય.

આથી ઉપરની દલીલ અયોગ્ય છે.

ઉદાહરણ તરીકે, ધારો કે $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$S = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3), (2, 3), (3, 2)\}$

અહીં, $(4, 4) \notin S$ કારણ કે કોઈ પણ x માટે $(x, 4) \in S$ થતું નથી.

$\therefore$ S સ્વવાચક નથી. S સંમિત અને પરંપરિત તો છે.

ઉદાહરણ 9 : જો xSy અને $ySz \Rightarrow zSx$ હોય, તો સંબંધ Sને વૃત્તીય સંબંધ કહે છે. સાબિત કરો કે જો સંબંધ સ્વવાચક અને વૃત્તીય હોય, તો તે સામ્ય સંબંધ હોય.

ઉકેલ : સંબંધ S સ્વવાચક છે. (આપેલ છે)

ધારો કે xSy. વળી, ySy તો છે જ.

$\therefore$ xSy અને $ySy \Rightarrow ySx$ (S વૃત્તીય છે.)

$\therefore$ $xSy \Rightarrow ySx$

$\therefore$ S એ સંમિત સંબંધ છે.

ધારો કે xSy અને ySz.

$\therefore$ zSx (S વૃત્તીય છે.)

$\therefore$ xSz (S સંમિત છે.)

$\therefore$ S પરંપરિત છે.

$\therefore$ S એ સામ્ય સંબંધ છે.

સ્વૈર યોગ અને છેદ : ધારો કે I એ વાસ્તવિક સંખ્યાનો કોઈ પણ અરિક્ત ઉપગણ છે. ધારો કે પ્રત્યેક $i \in$ Iને સંગત એક ગણ A_i મળે છે.

સ્વૈર યોગ અને છેદ આ પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય : $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = \{x \mid \text{કોઈક } i \in I \text{ માટે } x \in A_i\}$

$$\bigcap\limits_{i \in I} A_i = \{x \mid \text{દરેક } i \in I \text{ માટે } x \in A_i\}$$

ઉદાહરણ તરીકે, ધારો કે $I = [0, 1]$. ધારો કે $A_i = [0, i]$

ઉદાહરણ તરીકે, $A_{\frac{1}{2}} = \left[0, \frac{1}{2}\right]$. આથી $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = [0, 1]$, $\bigcap\limits_{i \in I} A_i = \{0\}$

સામ્ય વર્ગો (Equivalent Classes) : ધારો કે S એ ગણ A પર સામ્ય સંબંધ છે. જો xSy હોય, તો આપણે $x \sim y$ (x એ y ને સામ્ય છે) તેમ કહીશું. ($\sim$ ને wiggle વંચાય છે.)

ધારો કે $A_p = \{x \mid x \sim p, x \in A\}$

આપણે નીચેનું પરિણામ સાબિત કરીશું :

જો $p \sim q$ તો $A_p = A_q$ અને જો p એ q ને સામ્ય ન હોય, તો $A_p \cap A_q = \emptyset$

જો $A_p \cap A_q \neq \emptyset$, તો ધારો કે $x \in (A_p \cap A_q)$

$\therefore \quad x \in A_p$ અને $x \in A_q$

$\therefore \quad x \sim p$ અને $x \sim q$

$\therefore \quad p \sim x$ અને $x \sim q$

$\therefore \quad p \sim q$

$\therefore \quad p \in A_q$ અને $q \in A_p$

$\therefore \quad A_p \subset A_q$ અને $A_q \subset A_p$

$\therefore \quad A_p = A_q$.

આમ, જો $A_p \cap A_q \neq \emptyset$, તો $A_p = A_q$.

વળી, $p \sim p$.

$\therefore \quad p \in A_p \quad \forall p \in A$

$\therefore \quad \bigcup\limits_{p \in A} A_p = A$

આમ, A નું A_p માં એવી રીતે અલગ-અલગ વર્ગમાં વર્ગ વિભાજન થાય છે કે જેથી,

(i) જો p અને q સામ્ય ન હોય, તો $A_p \cap A_q = \emptyset$ (ii) $\bigcup\limits_{p \in A} A_p = A$

આ વર્ગો A_p ને $\sim$ ને સંગત મળતા સામ્ય વર્ગો કહેવાય છે.

વળી, Aના કોઈ પણ વર્ગ વિભાજનથી Aમાં સામ્ય સંબંધનો ઉદ્ભવ થાય છે.

જો x અને y બંને એક જ વર્ગ A_p માં આવેલ હોય, તો $x \sim y$ છે તેમ આપણે વ્યાખ્યાયિત કરીએ.

x અને x બંને એક જ વર્ગમાં હોવાથી $x \sim x$.

x અને y બંને એક જ વર્ગમાં હોય તો y અને x બંને એક જ વર્ગમાં હોય. એટલે કે, જો $x \sim y$, તો $y \sim x$

જો $x \sim y$ અને $y \sim z$, તો x અને y તથા y અને z બંને એક જ વર્ગમાં હોય. તેથી x અને z પણ એક જ વર્ગમાં હોય.

$\therefore \quad x \sim z$

$\therefore \quad \sim$ એ સામ્ય સંબંધ છે.

ઉદાહરણ 10 : એક સંબંધ $\equiv$ એ Z પર વ્યાખ્યાયિત કરીએ. જો $a - b$ યુગ્મ પૂર્ણાંક હોય, તો $a \equiv b \pmod 2$. સાબિત કરો કે $\equiv$ એ Z પર સામ્ય સંબંધ છે. સામ્ય વર્ગો દર્શાવો.

ઉકેલ : $a - a = 0$ અને 0 યુગ્મ પૂર્ણાંક હોવાથી $a \equiv a \pmod 2$ $(\forall a \in Z)$

જો $a \equiv b \pmod 2$, તો $b \equiv a \pmod 2$ કારણ કે $a - b$ યુગ્મ પૂર્ણાંક છે $\Leftrightarrow$ $b - a$ યુગ્મ પૂર્ણાંક છે.

જો $a \equiv b \pmod 2$ અને $b \equiv c \pmod 2$, તો $a \equiv c \pmod 2$, કારણ કે $a - b$ યુગ્મ પૂર્ણાંક છે અને $b - c$ યુગ્મ પૂર્ણાંક છે, તો

$a - c = a - b + b - c$ યુગ્મ પૂર્ણાંક છે.

$\therefore \quad \equiv$ એ સામ્ય સંબંધ છે.

$\ldots -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots$ બધા એક સામ્યવર્ગ A_1 માં છે, કારણ કે $-7 \equiv 1 \pmod 2$, $-3 \equiv 1 \pmod 2$, વગેરે.

$\ldots -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots$ બધા એક સામ્યવર્ગ A_2 માં છે, કારણ કે $-8 \equiv 2 \pmod 2$, $-2 \equiv 2 \pmod 2$, વગેરે.

બધા જ પૂર્ણાંકો બે સામ્ય વર્ગમાં વહેંચાયેલા છે.

A_1 = બધા જ અયુગ્મ પૂર્ણાંકનો ગણ, A_2 = બધા જ યુગ્મ પૂર્ણાંકનો ગણ

ઉદાહરણ 11 : ધારો કે $Z = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, જ્યાં $A_1 = \{....1, 4, 7,...\}$

$A_2 = \{....2, 5, 8,...\}$

$A_3 = \{....3, 6, 9,...\}$

જેના સામ્ય વર્ગો A_1, A_2 અને A_3 હોય તેવો સામ્ય સંબંધ શોધો.

ઉકેલ : aSb નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરીએ. $3 \mid (a - b)$ અથવા $a \equiv b \pmod 3$ તો aSb.

$a \equiv a$ કારણ કે 3 વડે $a - a = 0$ વિભાજ્ય છે.

$$a \equiv b \pmod 3 \Rightarrow 3 \mid (a - b)$$
$$\Rightarrow 3 \mid (b - a)$$
$$\Rightarrow b \equiv a \pmod 3$$

$\therefore \quad aSb \Rightarrow bSa \quad \forall a, b \in Z$

$3 \mid (a - b)$ અને $3 \mid (b - c) \Rightarrow 3 \mid [(a - b) + (b - c)] = a - c$. આથી aSb અને $bSc \Rightarrow aSc$. આથી S સામ્ય સંબંધ છે. આમ હવે aSb માટે $a \sim b$ લખી શકાય. આ સામ્ય સંબંધ માટે,

$A_1 = \{....1, 4, 7, 10,...\}$, $A_2 = \{....2, 5, 8...\}$, $A_3 = \{....3, 6, 9...\}$ સામ્ય વર્ગો છે. આ સંબંધ માટે જો x અને y એક જ સામ્ય વર્ગમાં હોય, તો અને તો જ $x - y$ એ 3 વડે વિભાજ્ય હોય.

ઉદાહરણ 12 : ધારો કે ગણ L એ XY-સમતલમાં આવેલ બધી રેખાઓનો ગણ છે. L પર સંબંધ S નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત છે. $S = \{(L_1, L_2) \mid L_1 = L_2$ અથવા L_1 એ L_2ને સમાંતર છે.$\}$. સાબિત કરો કે S સામ્ય સંબંધ છે. તથા (i) X-અક્ષ અને (ii) Y-અક્ષને સમાવતા સામ્ય વર્ગો શોધો.

ઉકેલ : આપણે આગળ જોયું કે S એ સામ્ય સંબંધ છે.

X-અક્ષને સમાવતો સામ્ય વર્ગ એ રેખાઓ $y = b$, $b \in R$ પ્રકારની રેખાઓથી બનતો ગણ થશે.

Y-અક્ષને સમાવતો સામ્ય વર્ગ એ રેખાઓ $x = a$, $a \in R$ પ્રકારની રેખાઓથી બનતો ગણ થશે.

ઉદાહરણ 13 : સાબિત કરો કે ગણ $S = \{(P, Q) \mid P(x, y)$ અને $Q(x_1, y_1)$ના ઊગમબિંદુથી અંતર સમાન છે. $P, Q \in R^2\}$ તો S એ સામ્ય સંબંધ છે. બિંદુ (1, 0)ને સમાવતો સામ્ય વર્ગ લખો.

ઉકેલ : $d(P, O) = d(P, O)$. તેથી $(P, P) \in S$. તેથી S સ્વવાચક છે.

જો $d(P, O) = d(Q, O) = r$, તો $d(Q, O) = d(P, O) = r$. તેથી $(P, Q) \in S \Rightarrow (Q, P) \in S$. તેથી S સંમિત છે.

જો $d(P, O) = d(Q, O) = r$ અને $d(Q, O) = d(R, O) = r$ તો $d(P, O) = d(R, O) = r$

$\therefore \quad (P, Q) \in S, (Q, R) \in S \Rightarrow (P, R) \in S$. તેથી S પરંપરિત છે.

$\therefore \quad$ S એ સામ્ય સંબંધ છે.

$d(A(1, 0), O) = 1$

(1, 0) ને સમાવતો સામ્ય વર્ગ સમતલનાં એવાં બિંદુઓનાં ગણ છે કે જેનું ઊગમબિંદુથી અંતર 1 હોય, એટલે કે તે એકમ વર્તુળ થશે.

સ્વાધ્યાય 1.1

1. **નીચે આપેલામાંથી કયા સંબંધ સ્વવાચક, સંમિત કે પરંપરિત છે ?**
   (1) $A = \{1, 2, 3,...., 10\}$. $S = \{(x, y) \mid y = 2x\}$
   (2) $A = N$, $S = \{(x, y) \mid x$ એ y વડે વિભાજ્ય હોય$\}$
   (3) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $S = \{(x, y) \mid x$ એ y વડે વિભાજ્ય હોય$\}$
   (4) $A = Z$, $S = \{(x, y) \mid x - y \in Z\}$
   (5) $A = R$, $S = \{(x, y) \mid y = x + 1\}$
2. જો $6 \mid (a - b)$, તો aSb, $a, b \in Z$. સાબિત કરો કે S એ સામ્ય સંબંધ છે તથા સામ્ય વર્ગો લખો.
3. સાબિત કરો કે P(U) પર સંબંધ $\subset$ એ સ્વવાચક, વિસંમિત અને પરંપરિત છે.
4. (1) $f : N \to N$, $f(x) = x^2$ વિધેય છે. જો $f(x) = f(y)$ તો xSy. S સામ્ય સંબંધ છે ? સામ્ય વર્ગો કયા થશે ?
   (2) જો $f : Z \to Z$, $f(x) = x^2$, હોય તો ઉપરના સામ્ય સંબંધ માટે સામ્ય વર્ગો કયા થશે ?

5. $f : \mathrm{N} \times \mathrm{N} \rightarrow \mathrm{N} \times \mathrm{N}$, $f((m, n)) = (n, m)$. જો $f((a, b)) = f((c, d))$ તો $(a, b)\ \mathrm{S}\ (c, d)$. S સામ્ય સંબંધ છે ? (1, 2) ને સમાવતો સામ્ય વર્ગ કયો થશે ?

6. ધારો કે L એ XY સમતલમાં આવેલ રેખાઓનો ગણ છે. L પર સંબંધ S નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે :
$xSy \Leftrightarrow x = y$ અથવા $x \perp y$ અથવા $x \parallel y$.
S એ સામ્ય સંબંધ છે ? જો હા તો, સામ્ય વર્ગો દર્શાવો. X-અક્ષને સમાવતો સામ્ય વર્ગ કયો થાય ? જો L એ અવકાશમાં આવેલ બધી રેખાઓનો ગણ હોય, તો શું કહી શકાય ?

*

1.2 એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય

આપણે વિશિષ્ટ પ્રકારના સંબંધ 'વિધેય'નો અભ્યાસ કરી ગયા.

આપણે જાણીએ છીએ કે જો $\mathrm{A} \neq \emptyset$ અને $\mathrm{B} \neq \emptyset$ અને $f \subset (\mathrm{A} \times \mathrm{B})$ અને $f \neq \emptyset$ તથા પ્રત્યેક $x \in \mathrm{A}$ને સંગત અનન્ય ક્રમયુક્ત જોડ $(x, y) \in f$ હોય, તો f ને વિધેય કહેવાય છે.

આમ, f એ સંબંધ છે તથા તેનો પ્રદેશ A છે. આપણે વિધેયના આલેખ તથા વિધેયો પરની બૈજિક ક્રિયાઓ જેમકે સરવાળો, બાદબાકી, ગુણાકાર, ભાગાકારનો અભ્યાસ કરી ગયા.

નીચે આપેલાં બે વિધેયનો વિચાર કરો :

$f : \mathrm{N} \rightarrow \mathrm{N},\ \ f(x) = x^2$

$\therefore\ \ f = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), ...\}$

અહીં, જો $x_1 \neq x_2$ તો $f(x_1) \neq f(x_2)$.

$g : \mathrm{Z} \rightarrow \mathrm{Z},\ \ g(x) = x^2$

$g = \{(0, 0), (1, 1), (-1, 1), (2, 4), (-2, 4).....\}$

અહીં $-1 \neq 1$, પરંતુ $g(-1) = g(1) = 1$.

f જેવા વિધેયને એક-એક વિધેય (one-one function) કહે છે અને g જેવા વિધેયને અનેક-એક વિધેય (many-one function) કહે છે.

ચાલો આપણે આ સંકલ્પનાને વ્યાખ્યાયિત કરીએ :

એક-એક વિધેય : જો $f : \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$ વિધેય હોય અને $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{A}$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, તો $f : \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$ ને એક-એક વિધેય (one-one function, injection) કહે છે.

સામાન્ય રીતે આપણે સરળતા ખાતર ઉપરોક્ત અસમાનતાની જગ્યાએ સમાનાર્થી પ્રેરણનો ઉપયોગ કરીને સમતાથી એક-એક વિધેયને વ્યાખ્યાયિત કરીએ છીએ.

જો $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{A}$, તો $f : \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$ એક-એક વિધેય છે.

વિધેય $f : \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{A}$ ના સંદર્ભમાં $\mathrm{S} = \{(x_1, x_2) \mid f(x_1) = f(x_2);\ x_1, x_2 \in \mathrm{A}\}$ એ Aમાં સામ્ય સંબંધ છે.

$f(x_1) = f(x_1)$. આથી $(x_1, x_1) \in \mathrm{S}$ **(સ્વવાચકતા)**

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$. તેથી $(x_1, x_2) \in \mathrm{S} \Rightarrow (x_2, x_1) \in \mathrm{S}$ **(સંમિતતા)**

$f(x_1) = f(x_2)$ અને $f(x_2) = f(x_3) \Rightarrow f(x_1) = f(x_3)$ **(પરંપરિતતા)**

આથી $(x_1, x_2) \in \mathrm{S}$, $(x_2, x_3) \in \mathrm{S} \Rightarrow (x_1, x_3) \in \mathrm{S}$

$\therefore$ S એ સામ્ય સંબંધ છે.

એક-એક વિધેય $f : \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{A}$ માટે x_1 ને સમાવતો સામ્ય વર્ગ ફક્ત $\{x_1\}$ થશે.

આમ, $\mathrm{A} = \bigcup\limits_{x \in \mathrm{A}} \{x\}$ એ ઉપરના મુજબના સામ્ય સંબંધને સંગત Aનું વર્ગવિભાજન થશે.

$f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{2, 3, 6, 7, 8\}$

$f = \{(1, 2), (2, 2), (3, 3), (4, 6), (5, 6)\}$ માટે

$f(1) = f(2) = 2$ હોવાથી f એક-એક વિધેય નથી.

અનેક-એક વિધેય : $f : \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$ વિધેય છે. જો કોઈક $x_1, x_2 \in \mathrm{A}$ માટે $x_1 \neq x_2$ અને $f(x_1) = f(x_2)$, થાય તો $f : \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$ ને અનેક-એક વિધેય કહે છે.

અહીં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે અનેક-એક વિધેયની વ્યાખ્યાનું વિધાન એ એક-એક વિધેયની વ્યાખ્યાના વિધેયનું નિષેધ છે.

$f(C) = \{y \mid y = f(x), x \in C, C \subset A, C \neq \emptyset\}$ અને

$f^{-1}(D) = \{x \mid y = f(x), x \in A, y \in D, D \subset B\}$ વ્યાખ્યાયિત કરીએ.

અહીં $f(C)$ અને $f^{-1}(D)$ ફક્ત સંકેતો છે.

આપણે નોંધીએ કે $f(C)$ ક્યારેય ખાલી ગણ ન થાય. $f^{-1}(D)$ રિક્ત હોઈ શકે.

ઉપરના ઉદાહરણમાં જો $C = \{2, 3, 4\}$ હોય, તો $f(C) = \{2, 3, 6\}$

જો $C = \{1, 2\}$, $f(C) = \{2\}$

જો $D = \{8\}$, $f^{-1}(D) = \emptyset$

જો $D = \{2\}$, $f^{-1}(D) = \{1, 2\}$

જો $D = \{2, 6\}$, $f^{-1}(D) = \{1, 2, 4, 5\}$

અહીં, $f(A)$ એ વિધેય $f : A \to B$નો વિસ્તાર થશે.

$f^{-1}(D)$ એ Dના ઘટકોના પૂર્વપ્રતિબિંબનો ગણ થશે.

$f^{-1}(B) = A$

ચાલો કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ :

ઉદાહરણ 14 : $f : N \to N, f(x) = 2x$ એક-એક વિધેય છે કે નહિ તે નક્કી કરો.

ઉકેલ : ધારો કે $x_1, x_2 \in N$.

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

$\therefore$ $f : N \to N$, $f(x) = 2x$ એક-એક વિધેય છે.

ઉદાહરણ 15 : જો $f : R \to Z, f(x) = [x] = x$ નો પૂર્ણાંક ભાગ (અથવા floor function) તો $f : R \to Z$ એક-એક વિધેય છે ?

ઉકેલ : ના. અહીં, $f(2.1) = [2.1] = 2$

$f(2.23) = [2.23] = 2$

$\therefore$ f એક-એક વિધેય નથી.

ઉદાહરણ 16 : જો $f : R \to R^+ \cup \{0\}, f(x) = |x|$ એક-એક વિધેય છે ?

ઉકેલ : ના, $f(-1) = f(1) = 1$

$\therefore$ $f : R \to R^+ \cup \{0\}$ એક-એક વિધેય નથી.

ઉદાહરણ 17 : જો $f : N \cup \{0\} \to N \cup \{0\}, f(x) = x - 3\left[\frac{x}{3}\right]$, તો f એક-એક વિધેય છે ?

સંબંધ $S = \{(x_1, x_2) \mid f(x_1) = f(x_2)\}$ માટે સામ્ય વર્ગો શોધો.

ઉકેલ : $f(1) = 1 - 3\left[\frac{1}{3}\right] = 1, f(2) = 2, f(3) = 3 - 3 = 0, f(4) = 4 - 3\left[\frac{4}{3}\right] = 1,$

$f(5) = 5 - 3\left[\frac{5}{3}\right] = 2, f(6) = 6 - 3\left[\frac{6}{3}\right] = 0.$

ખરેખર, $f(n) = n$ ને 3 વડે ભાગતાં મળતી શેષ.

$\therefore$ $f(1) = f(4) = f(7) = f(10) = ... = 1$

$f(2) = f(5) = f(8) = f(11) = ... = 2$

$f(3) = f(6) = f(9) = f(12) = ... = 0$

$\therefore$ f એક-એક વિધેય નથી.

$\{1, 4, 7, 10,...\}, \{2, 5, 8, 11,...\}, \{0, 3, 6, 9, 12,...\}$ એ સામ્ય વર્ગો થશે.

વ્યાપ્ત વિધેય : જો વિધેય $f : A \to B$ નો વિસ્તાર તથા તેનો સહપ્રદેશ B સમાન ગણ હોય, તો f ને વ્યાપ્ત વિધેય (onto function, surjection) કહે છે.

જો $R_f = f(A) = B$ તો f વ્યાપ્ત હોય.

આમ, જો પ્રત્યેક $y \in B$ માટે, કોઈક $x \in A$નું અસ્તિત્વ હોય કે જેથી $y = f(x)$ થાય તો $f : A \to B$ એ વ્યાપ્ત વિધેય છે. જો કોઈક $y \in B$ માટે એવો કોઈ $x \in A$ ન મળે કે જેથી $y = f(x)$ થાય તો $f : A \to B$ વ્યાપ્ત વિધેય નથી.

ઉદાહરણ 18 : નીચે માગ્યા પ્રમાણે વિધેયનું એક ઉદાહરણ આપો : (1) એક-એક અને વ્યાપ્ત (2) એક-એક હોય પરંતુ વ્યાપ્ત ન હોય, (3) અનેક-એક અને વ્યાપ્ત (4) અનેક-એક હોય અને વ્યાપ્ત ન હોય.

ઉકેલ : (1) $f : N \to E$, જ્યાં E યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ, $f(x) = 2x$ એ વિધેય છે.

$f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), ...\}$

$\therefore$ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

$\therefore$ f એક-એક વિધેય છે.

$R_f = \{2, 4, 6, ...\} = E$

પ્રત્યેક $y \in E$ એ કોઈક $n \in N$ માટે $2n$ સ્વરૂપનો છે અને $f(n) = 2n = y \in E$

$\therefore$ $R_f = E$

$\therefore$ f એ વ્યાપ્ત વિધેય છે.

(2) $f : N \to N$, $f(x) = 2x$

$f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), ...\}$

(1) પ્રમાણે f એક-એક વિધેય છે.

$\therefore$ $R_f = \{2n \mid n \in N\} = E$, યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ

$\therefore$ $R_f = E \neq N$

$\therefore$ f વ્યાપ્ત વિધેય નથી.

(3) $f : R \to Z$, $f(x) = [x]$

$f(1.1) = 1$, $f(1.3) = 1$

$\therefore$ f અનેક-એક વિધેય છે.

પરંતુ $R_f = Z$. જો $n \in Z$ તો $f(n) = n$. તેથી પ્રત્યેક પૂર્ણાંક fના વિસ્તારમાં છે.

$\therefore$ f એ વ્યાપ્ત વિધેય છે.

(4) $f : Z \to Z$, $f(x) = x^2$

$f(-1) = f(1) = 1$. તેથી f એક-એક વિધેય નથી પરંતુ અનેક-એક વિધેય છે.

$R_f = \{0, 1, 4, 9, ...\} \neq Z$

$\therefore$ f વ્યાપ્ત વિધેય નથી.

એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય :

જો $f : A \to B$ એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય હોય, તો તેને એક-એક, વ્યાપ્ત વિધેય (Bijection) કહે છે.

ઉદાહરણ 19 : સાબિત કરો કે $f : R \to R$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$ એ એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય છે.

ઉકેલ : ધારો કે $f(x_1) = f(x_2)$

$\therefore$ $ax_1 + b = ax_2 + b$

$\therefore$ $ax_1 = ax_2$

$\therefore$ $x_1 = x_2$ $\qquad (a \neq 0)$

$\therefore$ f એક-એક વિધેય છે.

$y = ax + b \Leftrightarrow x = \frac{y - b}{a}$ $\qquad (a \neq 0)$

$\therefore$ પ્રત્યેક $y \in R$ ને સંગત $x \in R$ એવો મળે કે જેથી,

$$f(x) = f\left(\frac{y-b}{a}\right) = a\left(\frac{y-b}{a}\right) + b = y - b + b = y$$

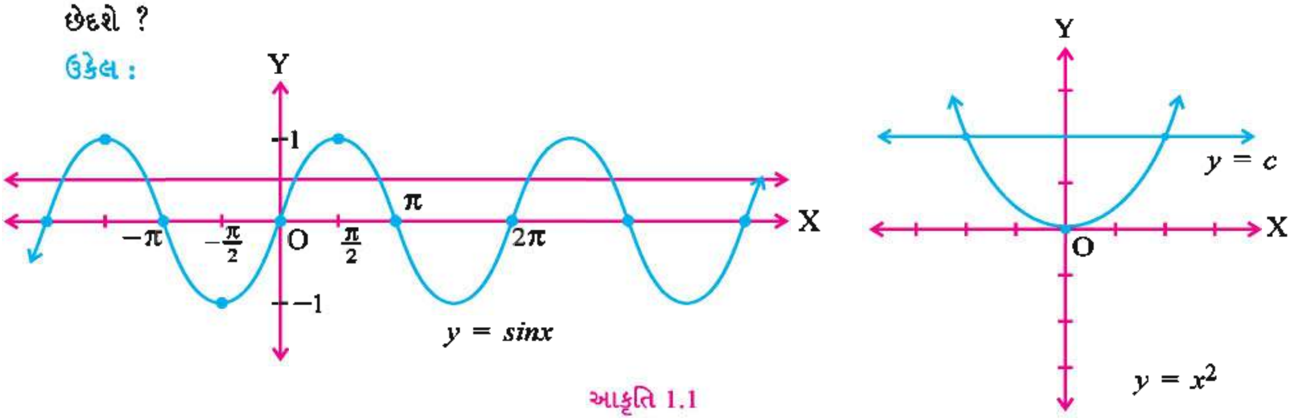
$\therefore$ f નો વિસ્તાર R છે.

$\therefore$ $f : R \to R$ વ્યાપ્ત વિધેય છે.

$\therefore$ $f : R \to R$ એ એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય છે.

ઉદાહરણ 20 : જો વિધેય $y = f(x)$ એક-એક હોય, તો કોઈ પણ સમક્ષિતિજ રેખા વિધેય f ના આલેખને કેટલાં બિંદુઓમાં છેદશે ?

ઉકેલ :



આકૃતિ 1.1

જો વિધેય $f : A \to B$ એક-એક હોય, તો કોઈ પણ સમક્ષિતિજ રેખા $y = c$ વિધેયના આલેખને વધુમાં વધુ એક બિંદુમાં છેદે.

જો $f : R \to R$, $f(x) = x^2$ હોય, તો સમક્ષિતિજ રેખા $y = c$ $(c > 0)$ એ f ના આલેખને બે બિંદુમાં છેદશે.

જો $f : R \to R$, $f(x) = x^2$ ને આપણે $g : R^+ \to R^+$ $g(x) = x^2$ માં મર્યાદિત કરીએ તો g એક-એક વિધેય થશે અને રેખા $y = c$ $(c > 0)$ $y = x^2$ ના આલેખને એક જ બિંદુમાં છેદશે. તે જ પ્રમાણે $y = sinx$ ના આલેખ માટે થશે. જો $x_1 \neq x_2$ તો $f(x_1) \neq f(x_2)$ થવું જોઈએ. જો $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ વગેરે તો સમક્ષિતિજ રેખા $y = c$ $(-1 \leq c \leq 1)$ એ $y = sinx$ના આલેખને વધુમાં વધુ એક બિંદુમાં છેદે. અન્યથા રેખા $y = c$ એ $y = sinx$, $x \in R$ ના આલેખને અનંત બિંદુઓમાં છેદે. $(-1 \leq c \leq 1)$

ઉદાહરણ 21 : જો $A = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ હોય, તો સાબિત કરો કે વિધેય $f : A \to A$ એક-એક હોય, તો અને તો જ વ્યાપ્ત હોય.

ઉકેલ : ધારો કે $f : A \to A$ એક-એક વિધેય છે.

$\therefore$ $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)$ એ A ના ભિન્ન ઘટકો છે.

પરંતુ સહપ્રદેશ A માં n ઘટકો $x_1, x_2, ..., x_n$ છે.

$\therefore$ $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)$ એ કોઈક ક્રમમાં $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ જ હોવા જોઈએ.

$\therefore$ $R_f = A$

$\therefore$ $f : A \to A$ વ્યાપ્ત છે.

વળી, ધારો કે $f : A \to A$ વ્યાપ્ત છે.

$\therefore$ $R_f = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$

હવે, $\{f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)\} = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$

$\therefore$ કોઈ પણ $f(x_i) = f(x_j)$ થાય તે શક્ય નથી. $(i \neq j)$

(જો કોઈક $f(x_i) = f(x_j)$, તો R_f માં તમામ $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ના હોય.)

$\therefore$ f એક-એક વિધેય છે.

ઉદાહરણ 22 : જો વિધેય $f : \{x_1, x_2, ..., x_m\} \to \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ એક-એક હોય, તો સાબિત કરો કે $m \le n$.

ઉકેલ : f એક-એક વિધેય છે.

$\therefore$ $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_m)$ એ $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ પૈકી m ભિન્ન ઘટકો છે.

$\therefore$ $m \le n$

ઉદાહરણ 23 : જો વિધેય $f : \{x_1, x_2, ..., x_m\} \to \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ વ્યાપ્ત હોય તો સાબિત કરો કે $m \ge n$.

ઉકેલ : $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_m)$ પૈકી અમુક ઘટકો સમાન હોઈ શકે પરંતુ તે બધા જ મળીને ગણ $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ બનાવે છે. (f વ્યાપ્ત છે.)

$\therefore$ જો $m < n$ હોય, તો $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ પૈકી વધુમાં વધુ m ઘટકો fના વિસ્તારમાં હોય પરંતુ બધા જ n ઘટકો $y_1, y_2, ..., y_n$ વિસ્તારમાં ન હોય.

$\therefore$ $m \ge n$

નોંધ : જો A, B સાન્ત ગણ હોય અને $f : A \to B$ એક-એક તથા વ્યાપ્ત હોય, તો $n(A) = n(B)$.

ઉદાહરણ 24 : $f : N \to Z$, $f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ યુગ્મ} \\ -\frac{n-1}{2} & n \text{ અયુગ્મ} \end{cases}$

સાબિત કરો કે f એક-એક અને વ્યાપ્ત છે.

ઉકેલ : $f = \{(1, 0), (2, 1), (3, -1), (4, 2), ...\}$

કારણ કે $f(1) = -\frac{1-1}{2} = 0$ (1 અયુગ્મ)

$f(2) = \frac{2}{2} = 1$ (2 યુગ્મ) વગેરે.

જો n ધનપૂર્ણાંક હોય, તો $f(2n) = \frac{2n}{2} = n$. $2n \in N$ હોવાથી $2n$ એ f ના પ્રદેશમાં છે.

જો n ઋણ પૂર્ણાંક અથવા શૂન્ય હોય, તો $f(-2n + 1) = -\left(\frac{-2n+1-1}{2}\right) = n$

વળી n ઋણ પૂર્ણાંક અથવા શૂન્ય હોય તો $-2n + 1$ એ ધનપૂર્ણાંક છે.

એટલે $(-2n + 1) \in N$

$\therefore$ $f : N \to Z$ના વિસ્તારમાં તમામ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ આવે.

$\therefore$ $R_f = Z$. તેથી f એ વ્યાપ્ત છે.

$f(n) = \frac{n}{2}$ અથવા $-\left(\frac{n-1}{2}\right)$

$\frac{n_1}{2} = \frac{n_2}{2} \Rightarrow n_1 = n_2$, $-\frac{n_1-1}{2} = -\frac{n_2-1}{2} \Rightarrow n_1 = n_2$

અને $\frac{n_1}{2} = -\frac{n_2-1}{2} \Rightarrow n_1 + n_2 = 1$, જે શક્ય નથી.

$\therefore$ કોઈ પણ $n_1, n_2 \in N$ માટે, $f(n_1) \ne f(n_2)$

$\therefore$ f એક-એક વિધેય છે.

$\therefore$ f એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય છે.

ઉદાહરણ 25 : સાબિત કરો કે $f : R - \{2\} \to R - \{2\}$, $f(x) = \frac{2x-1}{x-2}$ એ એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય છે.

ઉકેલ : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{2x_1-1}{x_1-2} = \frac{2x_2-1}{x_2-2}$

$$\Rightarrow 2x_1x_2 - x_2 - 4x_1 + 2 = 2x_1x_2 - x_1 - 4x_2 + 2$$
$$\Rightarrow 3x_1 = 3x_2$$
$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

$\therefore$ f એ એક-એક વિધેય છે.

ધારો કે $x \in R - \{2\}$.

ધારો કે $y = f(x) = \frac{2x-1}{x-2}$

$\therefore \quad xy - 2y = 2x - 1$

$\therefore \quad (y-2)x = 2y - 1$

$\therefore \quad x = \frac{2y-1}{y-2}$

$\therefore$ પ્રત્યેક $y \in R - \{2\}$ ને સંગત $x \in R - \{2\}$ એવો મળે કે જેથી,

$y = f(x)$, કારણ કે $f(x) = f\left(\frac{2y-1}{y-2}\right) = \dfrac{2\left(\frac{2y-1}{y-2}\right)-1}{\frac{2y-1}{y-2}-2}$

$= \dfrac{4y-2-y+2}{2y-1-2y+4} = y$

$\therefore \quad R_f = R - \{2\}$

$\therefore$ f વ્યાપ્ત વિધેય છે.

ઉદાહરણ 26 : $f : N \times N \to N,\ f((m, n)) = m + n$. f એક-એક છે ? f વ્યાપ્ત છે ?

ઉકેલ : $f((1, 2)) = 1 + 2 = 3,\ f((2, 1)) = 2 + 1 = 3$

પરંતુ $(1, 2) \neq (2, 1)$.

$\therefore$ f એક-એક વિધેય નથી.

$m \geq 1, n \geq 1 \Rightarrow m + n \geq 2$

$\therefore \quad f((m, n)) \geq 2$

$\therefore \quad 1 \notin R_f$

$\therefore$ f વ્યાપ્ત વિધેય નથી.

ઉદાહરણ 27 : $f : N \times N \to N \times N,\ f((m, n)) = (n, m)$. સાબિત કરો કે f એક-એક અને વ્યાપ્ત છે.

ઉકેલ : $\forall (m_1, n_1), (m_2, n_2) \in N \times N,\ f((m_1, n_1)) = f((m_2, n_2)) \Rightarrow (n_1, m_1) = (n_2, m_2)$

$\Rightarrow n_1 = n_2,\ m_1 = m_2$

$\Rightarrow (m_1, n_1) = (m_2, n_2)$

$\therefore$ f એક-એક વિધેય છે.

જો $(m, n) \in N \times N$, તો $f((n, m)) = (m, n)$. પ્રત્યેક $(m, n) \in R_f$.

$\therefore \quad R_f = N \times N$

$\therefore$ f વ્યાપ્ત વિધેય છે.

સ્વાધ્યાય 1.2

નીચે આપેલામાંથી કયાં વિધેય એક-એક છે ? કયા વ્યાપ્ત છે ? (1 થી 11)

1. $f : R \to R,\ f(x) = 5x + 7$
2. $f : R \to R,\ f(x) = 2 - 3x$
3. $f : R \to R,\ f(x) = x^2 + 4x + 5$
4. $f : R \to R,\ f(x) = x^2 - x - 2$
5. $f : N \to N,\ f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ યુગ્મ} \\ \frac{n+1}{2} & n \text{ અયુગ્મ} \end{cases}$
6. $f : R \to (-1, 1),\ f(x) = \frac{x}{1+|x|}$
7. $f : A \times B \to A,\ f((a, b)) = a$, A તથા B એકાકી ગણ નથી. $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$
8. $f : R \to R,\ f(x) = x^3$

9. $f : Z \to Z, \ f(n) = \begin{cases} n + 2 & n \text{ યુગ્મ} \\ 2n + 1 & n \text{ અયુગ્મ} \end{cases}$

10. $f : Z \to Z, \ f(n) = \begin{cases} n + 1 & n \text{ યુગ્મ} \\ n - 3 & n \text{ અયુગ્મ} \end{cases}$

11. $f : Z \to Z, \ f(n) = \begin{cases} n - 2 & n \text{ યુગ્મ} \\ 2n + 2 & n \text{ અયુગ્મ} \end{cases}$

12. ગણ $\{1, 2, 3, ..., n\}$ પર કેટલાં એક-એક વિધેય મળી શકે ?

13. $A_1 = \{1\}, A_2 = \{1, 2\}, A_3 = \{1, 2, 3\}$

$f : A_i \to A_i \ (i = 1, 2, 3)$ પ્રકારના કેટલાં વ્યાપ્ત વિધેય મળી શકે ? આ પરિણામને તમે વ્યાપક બનાવી શકો ?

*

1.3 સંયોજિત વિધેય

આપણે સંયોજિત વિધેયની સંકલ્પનાનો અભ્યાસ કરી ગયાં. આપણે તેને યાદ કરીએ.

$f : A \to B$ અને $g : B \to C$ બે વિધેયો છે. તેમનું સંયોજિત વિધેય $gof : A \to C$,
$(gof)(x) = g(f(x))$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત થાય છે.

જો $f : A \to B$ અને $g : C \to D$ વિધેયો હોય અને $R_f \subset D_g$, તો $gof : A \to D$
$(gof)(x) = g(f(x))$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત થાય છે.

ઉદાહરણ 28 : જો $f : N \to N, \ f(x) = 2x + 3$ અને $g : N \to N, g(x) = 5x + 7$, તો gof અને fog શોધો.

ઉકેલ : $gof : N \to N$

$(gof)(x) = g(f(x)) = g(2x + 3) = 5(2x + 3) + 7 = 10x + 22$

$fog : N \to N$

$(fog)(x) = f(g(x)) = f(5x + 7) = 2(5x + 7) + 3 = 10x + 17$

સામાન્ય રીતે, $gof \neq fog$.

ઉદાહરણ 29 : જો $f : R \to R, \ f(x) = x^3; \ \ g : R \to R, \ g(x) = x^5$, તો સાબિત કરો કે $gof = fog$.

ઉકેલ : $gof : R \to R, (gof)(x) = g(f(x)) = g(x^3) = (x^3)^5 = x^{15}$

$fog : R \to R, (fog)(x) = f(g(x)) = f(x^5) = (x^5)^3 = x^{15}$

$\therefore \ gof = fog$

(**નોંધ :** $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$)

ઉદાહરણ 30 : $f : \{1, 2, 4, 5\} \to \{2, 3, 6, 7\}, f = \{(1, 2), (2, 3), (4, 6), (5, 7)\}$ અને

$g : \{2, 3, 6, 7, 8\} \to \{1, 3, 5, 6\}, g = \{(2, 1), (3, 1), (6, 1), (7, 5), (8, 6)\}$. gof અને fog પૈકી જે શક્ય હોય તે શોધો.

ઉકેલ : $R_f = \{2, 3, 6, 7\} \subset D_g = \{2, 3, 6, 7, 8\}$

$\therefore \ gof$ નું અસ્તિત્વ છે.

$(gof)(1) = g(f(1)) = g(2) = 1, (gof)(2) = g(f(2)) = g(3) = 1$ વગેરે.

$\therefore \ gof = \{(1, 1), (2, 1), (4, 1), (5, 5)\}$

$R_g = \{1, 5, 6\} \not\subset D_f = \{1, 2, 4, 5\}$

$\therefore$ fog નું અસ્તિત્વ નથી.

ઉદાહરણ 31 : જો $f : A \to B$ અને $g : B \to C$ એક-એક વિધેયો હોય, તો સાબિત કરો કે વિધેય $gof : A \to C$ એક-એક છે.

ઉકેલ : $(gof)(x_1) = (gof)(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ $(x_1, x_2 \in A)$

$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ (g એક-એક છે.)

$\Rightarrow x_1 = x_2$ (f એક-એક છે.)

$\therefore$ $gof : A \to C$ એક-એક વિધેય છે.

ઉદાહરણ 32 : જો $f : A \to B$ અને $g : B \to C$ વ્યાપ્ત વિધેયો હોય, તો સાબિત કરો કે વિધેય $gof : A \to C$ વ્યાપ્ત હોય.

ઉકેલ : ધારો કે $y \in C$.

$g : B \to C$ વ્યાપ્ત હોવાથી, $z \in B$ એવો મળે કે જેથી $g(z) = y$ થાય.

હવે, $f : A \to B$ વ્યાપ્ત છે અને $z \in B$ છે.

$\therefore$ $x \in A$ એવો મળે કે જેથી $f(x) = z$ થાય.

$\therefore$ $g(z) = y \Rightarrow g(f(x)) = y$

$\therefore$ $(gof)(x) = y$

$\therefore$ પ્રત્યેક $y \in C$ માટે $x \in A$ એવો મળે કે જેથી $(gof)(x) = y$ થાય.

$\therefore$ $gof : A \to C$ વ્યાપ્ત વિધેય છે.

ઉદાહરણ 33 : જો $gof : A \to C$ એક-એક વિધેય હોય, તો વિધેયો $f : A \to B$ અને $g : B \to C$ એક-એક હોય તેવું કહી શકાય ?

ઉકેલ : ના.

ધારો કે $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

$f : A \to B$, $f = \{(1, 5), (2, 6), (3, 7), (4, 8), (5, 9)\}$

$$g : B \to B,\ g(x) = \begin{cases} x + 1 & x = 5, 6, 7, 8, 9 \\ 5 & x = 10, 11 \end{cases}$$

તો $gof : A \to B$, $gof = \{(1, 6), (2, 7), (3, 8), (4, 9), (5, 10)\}$ એક-એક વિધેય થશે,

પરંતુ $g : B \to B$ એક-એક વિધેય નથી.

(**નોંધ :** અહીં $B = C$ લીધેલ છે.)

ઉદાહરણ 34 : જો $f : A \to B$ અને $g : B \to C$ બે વિધેયો હોય અને વિધેય $gof : A \to C$ એક-એક હોય, તો સાબિત કરો કે $f : A \to B$ એક-એક વિધેય હોય.

ઉકેલ : ધારો કે $f(x_1) = f(x_2)$ $x_1, x_2 \in A$

$\therefore$ $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ $(f(x_1) \in B, f(x_2) \in B)$

$\therefore$ $(gof)(x_1) = (gof)(x_2)$

$\therefore$ $x_1 = x_2$ (gof એક-એક છે.)

$\therefore$ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$\therefore$ $f : A \to B$ એક-એક વિધેય છે.

ઉદાહરણ 35 : જો $gof : A \to C$ વ્યાપ્ત વિધેય હોય, તો વિધેયો $f : A \to B$ અને $g : B \to C$ વ્યાપ્ત થાય ?

ઉકેલ : ના. ધારો કે, $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $f(x) = x + 1$

$g : \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} \to \{4, 6, 8, 10\}$, $g(x) = 2x$, જ્યાં $x \neq 6$ અથવા 7

$g(6) = g(7) = 10$

તેથી $gof : \{1, 2, 3, 4\} \to \{4, 6, 8, 10\}$,

$gof = \{(1, 4), (2, 6), (3, 8), (4, 10)\}$

$\therefore$ $gof : A \to C$ વ્યાપ્ત છે, પરંતુ $f : A \to B$ વ્યાપ્ત નથી કારણ કે $6, 7 \notin R_f$

ઉદાહરણ 36 : જો $f : A \to B$ અને $g : B \to C$ બે વિધેયો હોય અને જો $gof : A \to C$ વ્યાપ્ત વિધેય હોય, તો સાબિત કરો કે $g : B \to C$ વ્યાપ્ત હોય.

ઉકેલ : $gof : A \to C$ વ્યાપ્ત વિધેય છે.

ધારો કે $z \in C$

$\therefore$ $x \in A$ એવો મળે કે જેથી $(gof)(x) = z$ થાય.

$\therefore$ $g(f(x)) = z$

$x \in A$ અને $f : A \to B$ વિધેય છે.

$\therefore$ $f(x) \in B$. ધારો કે $y = f(x)$.

$\therefore$ $g(y) = z$, જ્યાં $y \in B$.

$\therefore$ આમ, પ્રત્યેક $z \in C$ માટે $y \in B$ એવો મળે કે જેથી $g(y) = z$ થાય.

$\therefore$ $g : B \to C$ વ્યાપ્ત વિધેય છે.

સ્વાધ્યાય 1.3

1. $f : R \to R$, $g : R \to R$, $h : R \to R$ વિધેયો છે.

   સાબિત કરો કે : (i) $(fog)oh = fo(goh)$ (2) $(f + g)oh = foh + goh$

2. નીચે આપેલાં વિધેયો માટે gof અને fog શોધો :

   (1) $f : R \to R$, $f(x) = |x|$, $g : R \to R$, $g(x) = x^2$

   (2) $f : R^+ \to R^+$, $f(x) = x^3$, $g : R^+ \to R^+$, $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$

3. $f : R^+ \to R$, $f(x) = (3 - x^3)$નું ઘનમૂળ, તો fof શોધો.

4. $f : R \to R$, $f(x) = x^2 - x - 2$, તો fof શોધો.

5. $f : R - \{-1\} \to R - \{-1\}$, $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, તો fof શોધો.

6. $f : R \to R$ ચિહ્ન વિધેય છે.

   $$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

   $g : R \to Z$, $g(x) = [x]$, તો fog અને gof શોધો.

7. $f : Z \to Z$ અને $g : Z \to Z$ નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે :

   $$f(n) = \begin{cases} n + 2 & n \text{ યુગ્મ} \\ 2n - 1 & n \text{ અયુગ્મ} \end{cases} \qquad g(n) = \begin{cases} 2n & n \text{ યુગ્મ} \\ \frac{n-1}{2} & n \text{ અયુગ્મ} \end{cases}$$

   fog અને gof શોધો.

8. (1) જો $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ અને $f : A \to B$ એક-એક વિધેય હોય, તો સાબિત કરો કે કોઈક વિધેય $g : B \to A$ એવું મળે કે જેથી $gof = I_A$. (I તદેવ વિધેય છે.) થાય. (g ને fનો ડાબી બાજુનો વ્યસ્ત કહે છે.)

(2) જો A $\neq \emptyset$, B $\neq \emptyset$ અને $f : A \to B$ વ્યાપ્ત વિધેય હોય, તો સાબિત કરો કે કોઈક વિધેય $g : B \to A$ એવું મળે કે જેથી $fog = I_B$ થાય. (g ને fનો જમણી બાજુનો વ્યસ્ત કહે છે.)

(3) જો $f : A \to B$ એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય હોય, તો પરિણામ (1) અને (2) પરથી શું તારણ મળે ?

*

1.4 પ્રતિવિધેય

આપણે જાણીએ છીએ કે $3 \cdot 1 = 3$ જ્યાં 1 ગુણાકાર માટેનો તટસ્થ ઘટક છે. $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ અને $\frac{1}{3}$ એ 3નો વ્યસ્ત છે. તે જ પ્રમાણે આપણે ધોરણ XI માં જોઈ ગયા કે વિધેય $f : A \to B$ માટે $foI_A = f$ અને $I_Bof = f$ જ્યાં I_A અને I_B એ અનુક્રમે A અને B પરનાં તદેવ વિધેય છે. આપણને પ્રશ્ન થાય કે એવા કોઈ વિધેય $g : B \to A$નું અસ્તિત્વ હોઈ શકે કે જેથી $gof = I_A$ અને $fog = I_B$ થાય ? આ પ્રશ્નનો જવાબ કેટલીક શરતોને આધીન હા માં છે. આપણે પ્રતિવિધેયને નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરીએ.

વ્યાખ્યા : જો $f : A \to B$ વિધેય હોય તથા વિધેય $g : B \to A$ મળે કે જેથી $gof = I_A$ અને $fog = I_B$ બને તો $g : B \to A$ને $f : A \to B$ નું પ્રતિવિધેય (Inverse function) કહે છે અને તેને સંકેતમાં f^{-1} વડે દર્શાવાય છે.

$g : B \to A$ને $f : A \to B$ નું પ્રતિવિધેય નામ આપી f^{-1} સંકેતનો ઉપયોગ કરતાં પહેલાં સાબિત કરવું જોઈએ કે $g : B \to A$ અનન્ય છે.

અનન્યતા : ધારો કે $f : A \to B$ નાં બે પ્રતિવિધેયો $g : B \to A$ અને $h : B \to A$ છે.

$\therefore$ $gof = I_A$, $fog = I_B$, $hof = I_A$, $foh = I_B$.

$g = goI_B = go(foh) = (gof)oh = I_Aoh = h$

વળી, $g : B \to A$, $h : B \to A$ વિધેયો છે. આથી $g = h$.

$\therefore$ જો $f : B \to A$ના પ્રતિવિધેયનું અસ્તિત્વ હોય, તો તે અનન્ય હોય.

કોઈ પણ વિધેયને પ્રતિવિધેય ક્યારે મળે ? આ પ્રશ્નનો ઉત્તર આપણે નીચે આપેલા પ્રમેયમાં આપીશું.

પ્રમેય 1.1 : જો $f : A \to B$ નું પ્રતિવિધેય $g : B \to A$, મળે તો $f : A \to B$ એક-એક અને વ્યાપ્ત થાય.

સાબિતી : ધારો કે $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1, x_2 \in A$

$\therefore$ $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, $\quad f(x_1), f(x_2) \in B$

$\therefore$ $(gof)(x_1) = (gof)(x_2)$

$\therefore$ $I_A(x_1) = I_A(x_2)$ **($g : B \to A$ એ $f : A \to B$નું પ્રતિવિધેય છે.)**

$\therefore$ $x_1 = x_2$

$\therefore$ $f : A \to B$ એક-એક વિધેય છે.

ધારો કે $y \in B$

$\therefore$ $I_B(y) = y$

$\therefore$ $(fog)(y) = y$ **($fog = I_B$)**

$\therefore$ $f(g(y)) = y$

$g : B \to A$ વિધેય છે. $y \in B$. આથી $g(y) \in A$.

ધારો કે $g(y) = x$. તેથી $f(g(y)) = f(x) = y$

$\therefore$ $x \in A$ અને $f(x) = y$

$\therefore$ પ્રત્યેક $y \in B$ માટે $x \in A$ એવો મળે કે જેથી $y = f(x)$.

$\therefore$ $f : A \to B$ વ્યાપ્ત છે.

પ્રમેય 1.2 : જો f એક-એક અને વ્યાપ્ત હોય, તો $f : A \to B$ નું પ્રતિવિધેય $g : B \to A$ મળે.

સાબિતી : ધારો કે $f(x) = y$ **$x \in A$**

$g(y) = x$ વ્યાખ્યાયિત કરો.

$f : A \to B$ વ્યાપ્ત હોવાથી પ્રત્યેક $y \in B$ માટે $x \in A$ એવો મળે કે જેથી $f(x) = y$ થાય અને આ x અનન્ય હોય કારણ કે $f : A \to B$ એક-એક વિધેય આપેલ છે.

$\therefore$ $g : B \to A$ વિધેય છે.

$(gof)(x) = g(f(x)) = g(y) = x$

$(fog)(y) = f(g(y)) = f(x) = y$

$\therefore$ $gof = I_A$ અને $fog = I_B$.

$\therefore$ g એ fનું પ્રતિવિધેય છે.

પ્રમેય 1.1 અને પ્રમેય 1.2નું સંયુક્ત પરિણામ નીચે પ્રમાણે મળે :

જો $f : A \to B$ એક-એક અને વ્યાપ્ત હોય તો અને તો જ તેનું પ્રતિવિધેય $g : B \to A$ મળે.

એક પરિણામ :

જો $f : A \to B$ અને $g : B \to C$ એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય હોય, તો $gof : A \to C$ પણ એક-એક અને વ્યાપ્ત હોય તથા $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$.

સાબિતી : આપણે જાણીએ છીએકે $gof : A \to C$ એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય છે. (ઉદાહરણ 31, 32)

$\therefore$ $(gof)^{-1} : C \to A$નું અસ્તિત્વ છે અને $(gof)^{-1} : C \to A$ એ વિધેય છે.

$f^{-1} : B \to A$ અને $g^{-1} : C \to B$ વિધેયો છે.

$\therefore$ $f^{-1}og^{-1} : C \to A$ વિધેય છે.

$$\begin{aligned}(gof)\,o\,(f^{-1}og^{-1}) &= go((fof^{-1})\ og^{-1})\\ &= go(I_Bog^{-1})\\ &= gog^{-1}\\ &= I_C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f^{-1}og^{-1})\,o\,(gof) &= f^{-1}o((g^{-1}og)\,of)\\ &= f^{-1}o(I_Bof)\\ &= f^{-1}of\\ &= I_A\end{aligned}$$

$\therefore$ $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$

ઉદાહરણ 37 : $f : N \to E$, $f(x) = 2x$ માટે f^{-1} શોધો તથા $fof^{-1} = I_E$, $f^{-1}of = I_N$ ચકાસો જ્યાં E એ યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ છે.

ઉકેલ : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

$\therefore$ $f : N \to E$ એક-એક વિધેય છે.

જો $y \in E$, $y = 2n$, $n \in N$ તો $f(n) = 2n = y$

$\therefore$ પ્રત્યેક $y \in E$ માટે $n \in N$ એવો મળે કે જેથી $f(n) = y$ થાય.

$\therefore$ $f : N \to E$ વ્યાપ્ત થાય.

$y = f(x) = 2x \Rightarrow x = \frac{y}{2} \Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y}{2}$ $\qquad (x = f^{-1}(y))$

$\therefore$ $f^{-1} : E \to N$, $f^{-1}(y) = \frac{y}{2}$ અથવા $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$

fof^{-1} તથા $f^{-1}of$ની ચકાસણી વાચક પર છોડેલ છે.

ઉદાહરણ 38 : $f : R \to R$, $f(x) = ax + b$ $\ a \neq 0$ માટે $f^{-1} : R \to R$ શોધો.

ઉકેલ : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow ax_1 + b = ax_2 + b$

$\Rightarrow ax_1 = ax_2$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ $\qquad (a \neq 0)$

$\therefore$ f એક-એક વિધેય છે.

ધારો કે $y \in R$.

$y = ax + b \Rightarrow x = \dfrac{y-b}{a} \in R$ $\quad$ **($a \neq 0$)**

$\therefore$ પ્રત્યેક $y \in R$ માટે એવો $x \in R$ મળે કે જેથી $f(x) = f\left(\left(\dfrac{y-b}{a}\right)\right) = a\left(\dfrac{y-b}{a}\right) + b = y$

$\therefore$ f એ R પર વ્યાપ્ત છે.

$\therefore$ $f^{-1} : R \to R, \quad x = f^{-1}(y) = \dfrac{y-b}{a}$

અથવા આપણે લખી શકીએ કે $f^{-1} : R \to R, f^{-1}(x) = \dfrac{x-b}{a}$

ઉદાહરણ 39 : જો $f : R^+ \to R^+, f(x) = x^2$, તો f^{-1} શોધો.

ઉકેલ : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2$

$\Rightarrow |x_1| = |x_2|$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ $\quad$ **($x_1, x_2 \in R^+$)**

$\therefore$ f એક-એક વિધેય છે.

ધારો કે $y \in R^+$

$\therefore$ $x \in R^+$ એવો મળે કે જેથી $x = \sqrt{y}$. આથી $f(x) = x^2 = (\sqrt{y})^2 = y$.

$\therefore$ f એ R^+ પર વ્યાપ્ત છે.

$\therefore$ $f^{-1} : R^+ \to R^+, f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ $\quad$ **($x = f^{-1}(y)$)**

અથવા આપણે $f^{-1} : R^+ \to R^+, f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ લખી શકીએ.

ઉદાહરણ 40 : $f : R - \left\{-\frac{3}{2}\right\} \to R - \left\{\frac{3}{2}\right\}, \quad f(x) = \frac{3x+2}{2x+3}$ તો f^{-1} શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $f(x_1) = f(x_2) \qquad x_1, x_2 \in R - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

$\therefore$ $\dfrac{3x_1+2}{2x_1+3} = \dfrac{3x_2+2}{2x_2+3}$

$\therefore$ $6x_1x_2 + 9x_1 + 4x_2 + 6 = 6x_1x_2 + 9x_2 + 4x_1 + 6$

$\therefore$ $5x_1 = 5x_2$

$\therefore$ $x_1 = x_2$

$\therefore$ f એક-એક વિધેય છે.

ધારો કે $y = \dfrac{3x+2}{2x+3}$ અને $x \in R - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

$\therefore$ $2xy + 3y = 3x + 2$

$\therefore$ $(2y - 3)x = 2 - 3y$

$\therefore$ $x = \dfrac{2-3y}{2y-3}$ $\quad$ **$y \neq \frac{3}{2}$**

$\therefore$ પ્રત્યેક $y \in R - \left\{\frac{3}{2}\right\}$ માટે એવો $x \in R - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ મળે કે જેથી $f(x) = y$ થાય.

$\therefore$ f વ્યાપ્ત થાય.

$\therefore$ $f^{-1} : R - \left\{\frac{3}{2}\right\} \to R - \left\{-\frac{3}{2}\right\}, f^{-1}(y) = -\dfrac{3y-2}{2y-3}$ અથવા

$f^{-1} : R - \left\{\frac{3}{2}\right\} \to R - \left\{-\frac{3}{2}\right\}, f^{-1}(x) = -\dfrac{3x-2}{2x-3}$.

ઉદાહરણ 41 : જો $f : A \rightarrow B$ એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય હોય, તો સાબિત કરો કે $(f^{-1})^{-1}$નું અસ્તિત્વ હોય અને $(f^{-1})^{-1} = f$.

ઉકેલ : $f^{-1} : B \rightarrow A$ નું અસ્તિત્વ છે અને $fof^{-1} = I_B$, $f^{-1}of = I_A$ થાય.

જો $g : A \rightarrow B$ એવું વિધેય મળે કે જેથી $f^{-1}og = I_A$ તથા $gof^{-1} = I_B$ તો $f^{-1} : A \rightarrow B$ ને પ્રતિવિધેય છે તથા તે $g : A \rightarrow B$ છે તેમ કહેવાય. પરંતુ ઉપર્યુક્ત સમતાઓના કારણે આવું વિધેય, તો $f : A \rightarrow B$ છે. વળી પ્રતિવિધેય અનન્ય છે.

$\therefore$ $f^{-1} : A \rightarrow B$ નું પ્રતિવિધેય મળે અને $(f^{-1})^{-1} = f$.

ઉદાહરણ 42 : $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 4, 9\}$, $f : A \rightarrow B$, $f(x) = x^2$, તો f^{-1} શોધો અને $f^{-1}of = I_A$, $fof^{-1} = I_B$ ચકાસો.

ઉકેલ : $f = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$

$\therefore$ f એક-એક વિધેય છે.

$R_f = \{1, 4, 9\} = B$

$\therefore$ f એ B પર વ્યાપ્ત છે.

$\therefore$ $f^{-1} : B \rightarrow A$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ તથા $f^{-1} = \{(1, 1), (4, 2), (9, 3)\}$.

$\therefore$ $fof^{-1} = \{(1, 1), (4, 4), (9, 9)\} = I_B$.

$\therefore$ $f^{-1}of = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\} = I_A$.

ઉદાહરણ 43 : $f : R \rightarrow \{x \mid x \geq 5, x \in R\}$, $f(x) = x^2 + 4x + 9$ માટે જો શક્ય હોય, તો f^{-1} શોધો.

ઉકેલ : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 + 4x_1 + 9 = x_2^2 + 4x_2 + 9$

$$\Rightarrow x_1^2 - x_2^2 + 4(x_1 - x_2) = 0$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 4) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ અથવા } x_1 + x_2 + 4 = 0$$

ધારો કે $x_1 = 0$, $x_2 = -4$ **($x_1 + x_2 + 4 = 0$ કરવા માટે)**

તો $f(x_1) = f(0) = 9$, $f(x_2) = f(-4) = 16 - 16 + 9 = 9$

$\therefore$ f એક-એક વિધેય ન બને.

$\therefore$ f^{-1}નું અસ્તિત્વ નથી.

નોંધ : $f(x) = x^2 + 4x + 9 = x(x + 4) + 9$

$\therefore$ $f(0) = 9$ તથા $f(-4) = (-4)0 + 9 = 9$

$\therefore$ f એક-એક નથી.

ઉદાહરણ 44 : જો $f : R - \{-1\} \rightarrow R - \{-1\}$, $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, તો સાબિત કરો કે f^{-1}નું અસ્તિત્વ છે અને $f = f^{-1}$.

ઉકેલ : $(fof)(x) = f(f(x))$

$$= f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

$$= \frac{1 - \frac{1-x}{1+x}}{1 + \frac{1-x}{1+x}}$$

$$= \frac{1+x-1+x}{1+x+1-x}$$

$$= x = I_A(x), \text{ જ્યાં } A = R - \{-1\}$$

$\therefore$ $fof = I_A$

$\therefore$ પ્રતિવિધેયની અનન્યતા અને f^{-1}ની વ્યાખ્યા પરથી, f^{-1}નું અસ્તિત્વ છે અને $f = f^{-1}$.

નોંધ : * કરેલા પ્રશ્ન માત્ર જાણકારી માટે છે, પરીક્ષા માટે નહીં.

***ઉદાહરણ 45 :** જો f, g, h એ A થી A પરનાં વિધેય હોય અને fog અને goh એક-એક અને વ્યાપ્ત હોય તો સાબિત કરો કે f, g, h એક-એક અને વ્યાપ્ત હોય.

ઉકેલ : (1) પ્રથમ આપણે f, g, h એક-એક વિધેય છે તેમ સાબિત કરીએ.

(i) ધારો કે $g(x_1) = g(x_2)$, $x_1, x_2 \in A$

$\therefore$ $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$, $g(x_1) \in A$, $g(x_2) \in A$

$\therefore$ $(fog)(x_1) = (fog)(x_2)$

$\therefore$ $x_1 = x_2$ (fog એક-એક છે.)

$\therefore$ $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ $x_1, x_2 \in A$

$\therefore$ $g : A \to A$ એક-એક વિધેય છે.

(ii) ધારો કે $h(x_1) = h(x_2)$, $x_1, x_2 \in A$

$\therefore$ $g(h(x_1)) = g(h(x_2))$, $h(x_1) \in A$, $h(x_2) \in A$

$\therefore$ $(goh)(x_1) = (goh)(x_2)$

$\therefore$ $x_1 = x_2$ (goh એક-એક છે.)

$\therefore$ $h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ $x_1, x_2 \in A$

$\therefore$ $h : A \to A$ એક-એક વિધેય છે.

(iii) ધારો કે $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1, x_2 \in A$

વિધેય goh એ Aમાં વ્યાપ્ત હોવાથી, એવા $y_1, y_2 \in A$ મળે કે જેથી $(goh)(y_1) = x_1$, $(goh)(y_2) = x_2$

$\therefore$ $f((goh)(y_1)) = f((goh)(y_2))$ ($f(x_1) = f(x_2)$)

$\therefore$ $(fog)(h(y_1)) = (fog)(h(y_2))$

$\therefore$ $h(y_1) = h(y_2)$ (fog એક-એક છે.)

$\therefore$ $g(h(y_1)) = g(h(y_2))$, $h(y_1), h(y_2) \in A$

$\therefore$ $(goh)(y_1) = (goh)(y_2)$

$\therefore$ $x_1 = x_2$

$\therefore$ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ $x_1, x_2 \in A$

$\therefore$ $f : A \to A$ એક-એક વિધેય છે.

(2) હવે, આપણે f, g, h એ Aમાં વ્યાપ્ત છે તેમ સાબિત કરીએ.

ધારો કે $y \in A$

(i) વિધેય fog એ Aમાં વ્યાપ્ત હોવાથી $z \in A$ એવો મળે કે જેથી $(fog)(z) = y$ થાય.

$\therefore$ $f(g(z)) = y$

ધારો કે $g(z) = x$. તેથી $x \in A$. વળી, $f(x) = f(g(z)) = y$ અને $x \in A$

પ્રત્યેક $y \in A$ માટે $x \in A$ એવો મળે કે જેથી $f(x) = y$ થાય.

$\therefore$ f એ Aમાં વ્યાપ્ત છે.

(ii) તે જ પ્રમાણે $z \in A$ એવો મળે કે જેથી $(goh)(z) = y$ થાય.

$\therefore$ $g(h(z)) = y$

ધારો કે $h(z) = x$. તેથી $g(x) = g(h(z)) = y$ જ્યાં $x \in A$

$\therefore$ g એ Aમાં વ્યાપ્ત છે.

(iii) હવે $g(y) \in$ A.

વિધેય goh એ Aમાં વ્યાપ્ત હોવાથી $x \in$ A એવો મળે કે જેથી $(goh)(x) = g(y)$

$\therefore$ $g(h(x)) = g(y)$

પરંતુ g એક-એક વિધેય છે.

$\therefore$ $h(x) = y$

$\therefore$ પ્રત્યેક $y \in$ A માટે $x \in$ A એવો મળે કે જેથી $h(x) = y$ થાય.

$\therefore$ h એ Aમાં વ્યાપ્ત વિધેય છે.

***ઉદાહરણ 46 :** $f : A \to B$ અને $g : B \to C$ અને $h : B \to C$ વિધેયો છે.

(1) જો f વ્યાપ્ત વિધેય હોય અને $gof = hof$ હોય, તો $g = h$ સાબિત કરો.

(2) $gof = hof$ થાય પરંતુ $g \neq h$ હોય તેવું એક ઉદાહરણ આપો.

ઉકેલ : (1) ધારો કે $y \in$ B.

f એ Bમાં વ્યાપ્ત છે.

$\therefore$ $x \in$ A એવો મળે કે જેથી $f(x) = y$ થાય.

$\therefore$ $g(f(x)) = g(y)$ $\qquad$ ($f(x) \in$ B)

$\therefore$ $h(f(x)) = g(y)$ $\qquad$ ($gof = hof$)

$\therefore$ $h(y) = g(y)$

y એ Bનો કોઈ પણ યાદચ્છિક ઘટક હોવાથી અને $g : B \to C$ અને $h : B \to C$ વિધેયો હોવાથી $g = h$.

(2) $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{5, 6, 7\}$, $f = \{(1, 5), (2, 6), (3, 6), (4, 5)\}$

ધારો કે $g : \{5, 6, 7\} \to \{6, 8\}$, $g = \{(5, 6), (6, 8), (7, 8)\}$

ધારો કે $h : \{5, 6, 7\} \to \{6, 8\}$, $h = \{(5, 6), (6, 8), (7, 6)\}$

$gof = \{(1, 6), (2, 8), (3, 8), (4, 6)\}$

$hof = \{(1, 6), (2, 8), (3, 8), (4, 6)\}$

$\therefore$ $gof = hof$. પરંતુ $g \neq h$

***ઉદાહરણ 47 :** $f : A \to B$, $g : A \to B$ અને $h : B \to C$ વિધેય છે.

(1) જો $hof = hog$ અને h એક-એક વિધેય હોય, તો સાબિત કરો કે $f = g$.

(2) $hof = hog$ થાય, પરંતુ $f \neq g$ હોય તેવું એક ઉદાહરણ આપો.

ઉકેલ : (1) $hof : A \to C$ અને $hog : A \to C$ વિધેયો છે.

$(hof)(x) = (hog)(x), \ \forall x \in A$

$\therefore$ $h(f(x)) = h(g(x))$

$\therefore$ $f(x) = g(x) \quad \forall x \in A$ $\qquad$ (h એક-એક છે.)

$\therefore$ $f = g$

(2) $f : \{1, 2, 3\} \to \{4, 5\}$, $\quad f = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$

$g : \{1, 2, 3\} \to \{4, 5\}$, $\quad g = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5)\}$

$h : \{4, 5\} \to \{6, 7\}$, $\quad h = \{(4, 6), (5, 6)\}$

$hof = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6)\} = hog$, પરંતુ $f \neq g$.

સ્વાધ્યાય 1.4

જો f^{-1}નું અસ્તિત્વ હોય તો તે શોધો : (1 to 6)

1. $f : R \to R, \quad f(x) = 2x + 3.$

2. $f : Z \to Z, \quad f(x) = x - 7.$

3. $f : R^+ \to R^+, \quad f(x) = x^3.$

4. $f : \{1, 2, 3, 4, ..., n\} \to \{2, 4, 6, ..., 2n\}, f(n) = 2n.$

5. $f : Z \to Z \times \{0, 1\}, f(n) = \begin{cases} \left(\frac{n}{2}, 0\right) & n \text{ યુગ્મ} \\ \left(\frac{n-1}{2}, 1\right) & n \text{ અયુગ્મ} \end{cases}$

6. $f : Z \to N, f(n) = \begin{cases} 4n & n > 0, \quad n \text{ યુગ્મ} \\ 4|n| + 1 & n \le 0, \quad n \text{ યુગ્મ} \\ 4n + 2 & n > 0, \quad n \text{ અયુગ્મ} \\ 4|n| + 3 & n < 0, \quad n \text{ અયુગ્મ} \end{cases}$

સૂચન : $3 \notin R_f$. f વ્યાપ્ત નથી.

7. જો વિધેય $f : A \to B$ માટે એવું એક વિધેય $g : B \to A$ મળે કે જેથી $gof = I_A$ થાય, તો સાબિત કરો કે f એક-એક વિધેય હોય.

8. જો વિધેય $f : A \to B$ માટે એવું એક વિધેય $h : B \to A$ મળે કે જેથી $foh = I_B$ થાય, તો સાબિત કરો કે f એ Bમાં વ્યાપ્ત છે.

9. નીચે આપેલાં વિધેય માટે ચકાસો કે પ્રતિવિધેયનું અસ્તિત્વ છે કે નહીં. જો પ્રતિવિધેયનું અસ્તિત્વ હોય તો તે શોધો :

(1) $f : R \to R \qquad f(x) = [x]$

(2) $f : R \to R^+ \cup \{0\} \qquad f(x) = |x|$

(3) $f : R \to [0, 1) \qquad f(x) = x - [x]$

(4) $f : R \to Z \qquad f(x) = \lceil x \rceil$ (સિલિંગ વિધેય)

(5) $f : C \to C \qquad f(z) = \overline{z}$ (C = સંકર સંખ્યાનો ગણ)

(6) $f : N \times N \to N \qquad f((m, n)) = m + n$

(7) $f : N \times N \to N \times N \qquad f((m, n)) = (n, m)$

*

1.5 દ્વિક્ક્રિયાઓ

આપણે જાણીએ છીએ કે બે પ્રાકૃતિક સંખ્યાનો સરવાળો પ્રાકૃતિક સંખ્યા હોય છે.

એટલે કે, $a \in N, b \in N \Rightarrow a + b \in N.$

તે જ પ્રમાણે, $a, b \in Z$ તો, $a - b \in Z$

$a, b \in R$ તો, $a \times b \in R$

આમ, કોઈક અરિક્ત ગણ X અને $X \times X$ની ક્રમયુક્ત જોડ (a, b) ને સંગત 'સરવાળો', 'ગુણાકાર' વગેરે દ્વારા ગણ Xનો અનન્ય ઘટક મેળવી શકાય. આ ક્રિયાને X પરની દ્વિક્ક્રિયા કહે છે.

દ્વિક્ ક્રિયા : ધારો કે ગણ $A \neq \emptyset$. વિધેય $* : A \times A \to A$ ને A પરની દ્વિક્ક્રિયા (binary operation) કહે છે. આમ, $A \times A$ની પ્રત્યેક ક્રમયુક્ત જોડ (a, b)ને સંગત A નો અનન્ય ઘટક $*$ દ્વારા મળે છે. આ ઘટકને $f((a, b))$ અથવા $*(a, b)$, લખવાના બદલે $a * b$ લખાય છે. $*$ ને A પરની દ્વિક્ક્રિયા કહે છે. આમ, પ્રત્યેક $(a, b) \in A \times A$ને સંગત $*$ દ્વારા Aનો અનન્ય ઘટક $a * b$ મળે.

આમ, $+$ એ N, Z, Q, R, C પરની દ્વિક્ક્રિયા છે.

$\times$ એ N, Z, Q, R, C પરની દ્વિક્ક્રિયા છે.

$-$ એ Z, Q, R, C પરની દ્વિક્ક્રિયા છે. જો $a \in N$, $b \in N$ તો $a - b$ એ N માં હોય તે જરૂરી નથી. ઉદાહરણ તરીકે $3 \in N$, $7 \in N$, પરંતુ $3 - 7 = -4 \notin N$.

તે જ પ્રમાણે, $\div$ એ $Q - \{0\}$, $R - \{0\}$, $C - \{0\}$ પરની દ્વિક્ક્રિયા છે. જો $b = 0$ તો, $\frac{a}{b}$ એ Q અથવા R અથવા C પર વ્યાખ્યાયિત નથી.

$a \in N$, $b \in N$ પરંતુ $\frac{a}{b} \notin N$ સિવાય કે $b | a$.

આથી ભાગાકાર એ N પર દ્વિક્ક્રિયા નથી.

ક્રમનો નિયમ : $*$ એ ગણ A પરની દ્વિક્ક્રિયા છે. જો $a * b = b * a \quad \forall a, b \in A$, તો $*$ ક્રમના નિયમનું પાલન કરે છે તેમ કહેવાય.

$+$ એ N પર ક્રમના નિયમનું પાલન કરે છે.

$-$ એ Z પર ક્રમના નિયમનું પાલન ન કરે કારણ કે $a - b \neq b - a$, $\forall a, b \in Z$.

જૂથનો નિયમ : જો $(a * b) * c = a * (b * c) \quad \forall a, b, c \in A$, તો A પર વ્યાખ્યાયિત દ્વિક્ક્રિયા $*$ જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે તેમ કહેવાય.

આ નિયમની જરૂર શા માટે છે ?

$(a + b) + c = a + (b + c)$ એટલે કે $+$ એ R પર જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે તેથી આપણે $a + b + c$ એવું નિઃશંકપણે લખી શકીએ.

$(a - b) - c \neq a - (b - c)$

આથી, '$-$' એ R પર જૂથના નિયમનું પાલન ન કરે. તેથી જ્યારે '$-$'નો ઉપયોગ ત્રણ વાસ્તવિક સંખ્યા માટે આવે ત્યારે આપણે ફરજિયાતપણે કૌંસ દર્શાવવો પડે.

તટસ્થ ઘટક : $*$ એ ગણ A પરની દ્વિક્ક્રિયા છે. જો એવો ઘટક $e \in A$ મળે, જેથી

$a * e = e * a = a$, $\forall a \in A$ તો eને $*$ માટેનો તટસ્થ ઘટક કહે છે.

$0 + a = a + 0 = a, \quad \forall a \in R$

$1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \quad \forall a \in R$

$\therefore$ Rમાં સરવાળા માટે તટસ્થ ઘટક 0 તથા ગુણાકાર માટે તટસ્થ ઘટક 1 છે.

$a \in R$ માટે $a - 0 \neq 0 - a$ સિવાય કે $a = 0$.

$\therefore$ '$-$' ને કોઈ તટસ્થ ઘટક નથી.

વ્યસ્ત ઘટક : જો ગણ A પરની દ્વિક્ક્રિયા $*$ માટે તટસ્થ ઘટક e હોય તથા $a \in A$ને સંગત ઘટક $a' \in A$ મળે, જેથી $a * a' = a' * a = e$ તો a' ને aનો વ્યસ્ત ઘટક કહે છે અને તેને સંકેતમાં a^{-1} વડે દર્શાવાય છે.

$\therefore \quad a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

ગણ Rમાં, કોઈ પણ શૂન્યેતર ઘટક aનો ગુણાકાર માટે વ્યસ્ત ઘટક $\frac{1}{a}$ છે.

R માં સરવાળા માટે કોઈ પણ ઘટક aનો વ્યસ્ત (વિરોધી) $-a$ છે.

0ને Rમાં ગુણાકાર માટે વ્યસ્ત ન મળે.

ક્રિયા કોષ્ટક : જો A સાન્ત ગણ હોય અને $n(A)$ 'નાનો' હોય તો આપણે નીચે પ્રમાણે કોષ્ટક બનાવી શકીએ :

$*$	a_1	a_2	a_3	a_n
a_1				
a_2				
a_3				
.				
.				
.				
a_n				

$a_i * a_j$ એ iમી હાર અને jમો સ્તંભ જ્યાં છેદે તે ઘટક છે.

જો $*$ સમક્રમી હોય, તો કોષ્ટક મુખ્ય વિકર્ણની સાપેક્ષે સંમિત હોય.

ઉદાહરણ 48 : $N \cup \{0\}$ પર $*$ એ $a * b = |a - b|$ વડે વ્યાખ્યાયિત છે. $*$ દ્વિક્રિયા છે ?

ઉકેલ : હા. $a - b \in Z$ અને $|a - b| \in N \cup \{0\}$

$\therefore$ $*$ એ દ્વિક્રિયા છે.

ઉદાહરણ 49 : નીચે પ્રમાણેની ક્રિયા $*$ સમક્રમી છે ? જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે ?

(1) $N \cup \{0\}$ પર $a * b = 2^{ab}$

(2) R^+ પર $a * b = \frac{a}{b+1}$

ઉકેલ : (1) $a * b = 2^{ab} = 2^{ba} = b * a \quad \forall a, b \in N \cup \{0\}$

$\therefore$ દ્વિક્રિયા $*$ સમક્રમી છે.

$(2 * 3) * 4 = 2^6 * 4 = 2^{2^6 \cdot 4} = 2^{256} = 2^{2^8}$

$2 * (3 * 4) = 2 * 2^{12} = 2^{2 \cdot 2^{12}} = \; = 2^{2^{13}}$

$\therefore$ દ્વિક્રિયા $*$ જૂથના નિયમનું પાલન કરતી નથી.

(2) $a * b = \frac{a}{b+1}, \; b * a = \frac{b}{a+1}$

$$\frac{a}{b+1} = \frac{b}{a+1} \Rightarrow a^2 + a = b^2 + b$$

$$\Rightarrow (a - b)(a + b) + (a - b) = 0$$

$$\Rightarrow (a - b)(a + b + 1) = 0$$

$\therefore$ જો $a = b$ અથવા $a + b + 1 = 0$ તો $a * b = b * a$.

$2 * 3 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \qquad 3 * 2 = \frac{3}{3} = 1$

$\therefore$ દ્વિક્રિયા $*$ સમક્રમી નથી.

$(2 * 3) * 4 = \frac{2}{4} * 4 = \frac{1}{2} * 4 = \frac{\frac{1}{2}}{4+1} = \frac{1}{10}$

$2 * (3 * 4) = 2 * \frac{3}{5} = \frac{2}{\frac{3}{5}+1} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

$\therefore$ દ્વિક્રિયા $*$ જૂથના નિયમનું પાલન કરતી નથી.

ઉદાહરણ 50 : $\wedge : R \times R \to R$, $\wedge(a, b) = a \wedge b = min(a, b)$ (a તથા b પૈકી નાની સંખ્યા) વડે વ્યાખ્યાયિત છે. ઉપગણ $\{2, 3, 4, 7, 8\}$ માટે $\wedge$ થી રચાતું ક્રિયા-કોષ્ટક બનાવો.

ઉકેલ :

$\wedge$	2	3	4	7	8
2	2	2	2	2	2
3	2	3	3	3	3
4	2	3	4	4	4
7	2	3	4	7	7
8	2	3	4	7	8

ઉદાહરણ 51 : ગણ $\{2, 4, 6, 8\}$ પર $*$ એ $a * b = (a, b)$નો ગુ.સા.અ. વડે વ્યાખ્યાયિત છે.

$*$ માટે ક્રિયા કોષ્ટક બનાવો. દ્વિક્ક્રિયા $*$ સમક્રમી છે ?

ઉકેલ :

ગુ.સા.અ.	2	4	6	8
2	2	2	2	2
4	2	4	2	4
6	2	2	6	2
8	2	4	2	8

ગુ.સા.અ. (a, b) = ગુ.સા.અ. (b, a) થાય જ.

$\therefore$ $*$ સમક્રમી છે.

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે કોષ્ટક વિકર્ણની સાપેક્ષ સંમિત છે.

ઉદાહરણ 52 : N પર $*$ એ $a * b = a$ તથા b નો લ.સા.અ. વડે વ્યાખ્યાયિત દ્વિક્ક્રિયા છે.

(1) $8 * 10$, $5 * 3$, $12 * 24$ શોધો.

(2) $*$ સમક્રમી છે ?

(3) $*$ જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે ?

(4) જો શક્ય હોય, તો $*$ માટેનો તટસ્થ ઘટક શોધો.

(5) જે ઘટકના વ્યસ્ત અસ્તિત્વ ધરાવતા હોય તે શોધો.

ઉકેલ : (1) $8 * 10 = 8$ તથા 10 નો લ.સા.અ. $= 40$

$5 * 3 = 5$ તથા 3 નો લ.સા.અ. $= 15$

$12 * 24 = 12$ તથા 24 નો લ.સા.અ. $= 24$

(2) a તથા b નો લ.સા.અ. $= b$ તથા a નો લ.સા.અ.

$\therefore$ $*$ સમક્રમી છે.

(3) $*$ જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે.

(4) $a * e = a$, $\forall a \in$ N એટલે કે દરેક $a \in$ N માટે a તથા e નો લ.સા.અ. a થાય.

$\therefore$ $e \mid a \quad \forall a \in$ N

$\therefore$ વિશિષ્ટ કિસ્સામાં $e \mid 1$

$\therefore$ $e = 1$

$\therefore$ લ.સા.અ.ની દ્વિક્ક્રિયા માટે 1 તટસ્થ ઘટક છે.

(5) a તથા b નો લ.સા.અ. $\geq a$ અને a તથા b નો લ.સા.અ. $\geq b$.

$\therefore$ a તથા b નો લ.સા.અ. $\neq 1$ સિવાય કે $a = b = 1$. આથી માત્ર 1નો વ્યસ્ત મળે અને તે 1 છે.

ઉદાહરણ 53 : ધારો કે X $\neq \emptyset$. સાબિત કરો કે યોગક્રિયા અને છેદક્રિયા એ P(X) પર દ્વિક્ક્રિયા છે. તે સમક્રમી છે ? તે જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે ? $\cup$ અને $\cap$ માટે તટસ્થ ઘટક અને વ્યસ્ત ઘટક જો હોય, તો શોધો.

ઉકેલ : જો A, B $\in$ P(X) તો $A \cup B \in P(X)$ અને $A \cap B \in P(X)$

$\therefore$ $\cup$ અને $\cap$ એ P(X) પર દ્વિક્ક્રિયા છે.

ધારો કે A, B, C $\in$ P(X).

$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$

અને $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$\therefore$ $\cup$ અને $\cap$ સમક્રમી છે તથા જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે.

વળી, $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A \quad \forall A \in P(X)$

$\therefore$ $\emptyset$ એ યોગક્રિયા માટે તટસ્થ ઘટક છે.

$A \cap X = X \cap A = A \quad \forall A \in P(X)$

$\therefore$ X એ છેદક્રિયા માટે તટસ્થ ઘટક છે.

$A \cup B = \emptyset \Leftrightarrow A = B = \emptyset$.

$\therefore$ યોગક્રિયા માટે P(X)ના ફક્ત એક ઘટક $\emptyset$ ને વ્યસ્ત મળે છે અને તે $\emptyset$ છે.

$(A \cap B) \subset A$. આથી $A \cap B \neq X$ સિવાય કે $A = B = X$.

$\therefore$ છેદક્રિયા માટે P(X) ના ફક્ત એક ઘટક Xને વ્યસ્ત મળે છે અને તે X છે.

ઉદાહરણ 54 : ગણ N પર * એ $a * b = a + 2b$ વડે વ્યાખ્યાયિત છે. * સમક્રમી છે ? * જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે ? તટસ્થ ઘટક કે વ્યસ્ત ઘટકનું N માં અસ્તિત્વ છે ?

ઉકેલ : $2 * 3 = 2 + 6 = 8$

$3 * 2 = 3 + 4 = 7$

$\therefore$ * સમક્રમી નથી.

$(2 * 3) * 4 = 8 * 4 = 8 + 8 = 16$

$2 * (3 * 4) = 2 * 11 = 2 + 22 = 24$

$\therefore$ * જૂથના નિયમનું પાલન કરે નહીં.

જો $a * e = e * a = a, \quad \forall a \in N$, તો $a + 2e = e + 2a = a$

$\therefore \quad a + 2e = a$

$\therefore \quad e = 0$

પરંતુ $0 \notin N$.

$\therefore$ * માટે તટસ્થ ઘટકનું અસ્તિત્વ નથી. આથી વ્યસ્ત વિશે પ્રશ્ન ઊભો થતો નથી.

ઉદાહરણ 55 : Z પર * એ $a * b = a + b + 1$ વડે વ્યાખ્યાયિત છે. * જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે ? તટસ્થ ઘટક તથા વ્યસ્ત ઘટકનું અસ્તિત્વ હોય તો શોધો.

ઉકેલ : $(a * b) * c = (a + b + 1) * c$

$= a + b + 1 + c + 1 = a + b + c + 2$

$a * (b * c) = a * (b + c + 1) = a + (b + c + 1) + 1 = a + b + c + 2$

$\therefore$ * જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે.

ધારો કે $a * e = e * a = a, \quad \forall a \in Z$

$\therefore \quad a + e + 1 = a$

$\therefore \quad e = -1$

$a * (-1) = a + (-1) + 1 = a$. Also $(-1) * a = (-1) + a + 1 = a$.

$\therefore$ -1 એ * માટે તટસ્થ ઘટક છે.

$a * b = a + b + 1 = -1 \Rightarrow b = -2 - a$

વળી, $a * (-a - 2) = a + (-a - 2) + 1 = -1$

$\therefore$ $-a - 2$ એ aનો વ્યસ્ત છે.

ઉદાહરણ 56 : દ્વિક્રિયા * એ જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે તથા e એ તટસ્થ ઘટક છે. જો ઘટક a ને વ્યસ્ત મળે તો તે અનન્ય હોય તેમ સાબિત કરો.

ઉકેલ : ધારો કે aને બે વ્યસ્ત a' અને a'' મળે છે.

$\therefore$ $a * a' = a' * a = e$

$a * a'' = a'' * a = e$

હવે, $a' = a' * e = a' * (a * a'')$

$= (a' * a) * a''$

$= e * a''$

$= a''$

$\therefore$ વ્યસ્ત મળે તો તે અનન્ય હોય.

ઉદાહરણ 57 : ગણ R પર *, $a * b = a + b - (ab)^2$ વડે વ્યાખ્યાયિત છે.

(1) સાબિત કરો કે * સમક્રમી છે પરંતુ જૂથના નિયમનું પાલન કરે નહીં.

(2) * માટે તટસ્થ ઘટક શોધો.

(3) સાબિત કરો કે 1 ને * માટે બે વ્યસ્ત મળે છે.

(4) જો $a \in$ R હોય, તો સાબિત કરો કે a ને વધુમાં વધુ બે વ્યસ્ત મળે છે.

(5) કયા ઘટકને વ્યસ્ત ન મળે ? કયા ઘટકને ફક્ત એક વ્યસ્ત મળે ? કયા ઘટકને બે વ્યસ્ત મળે ?

ઉકેલ : (1) $a * b = a + b - (ab)^2 = b + a - (ba)^2 = b * a$

$\therefore$ * સમક્રમી છે.

$(2 * 3) * (-2) = (2 + 3 - 36) * (-2) = (-31) * (-2)$

$= -31 - 2 - (62)^2$

$= -33 - 3844$

$= -3877$

$2 * (3 * (-2)) = 2 * (3 - 2 - (-6)^2) = 2 * (-35)$

$= 2 + (-35) - 4900$

$= -4933$

$\therefore$ * દ્વારા જૂથના નિયમનું પાલન થતું નથી.

(2) $a * e = a + e - (ae)^2 = e + a - (ae)^2 = a \Rightarrow e - a^2e^2 = 0 \quad \forall a \in \text{R} \Rightarrow e = 0$

(વિશિષ્ટ કિસ્સામાં $a = 0$ લો.)

$a * 0 = a + 0 - 0 = a = 0 * a$

$\therefore$ 0 એ * માટે તટસ્થ ઘટક છે.

(3) ધારો કે $1^{-1} = a$.

$1 * a = 1 + a - a^2 = 0$

$\therefore$ $a^2 - a - 1 = 0$

$\therefore$ $a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\therefore$ $1^{-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ અથવા $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$\therefore$ 1 ને બે વ્યસ્ત મળે છે.

(4) ધારો કે b એ aનો વ્યસ્ત છે. $a \in R$.

જો $a * b = 0$ તો $a + b - a^2b^2 = 0$ (0 તટસ્થ ઘટક છે.)

$\therefore$ $b^2a^2 - b - a = 0$

આ bમાં દ્વિઘાત સમીકરણ છે.

$\therefore$ આ સમીકરણને વધુમાં વધુ બે બીજ મળે કારણ કે $\Delta = 1 + 4a^3$ અને Δની કિંમત ધન અથવા ઋણ અથવા શૂન્ય હોય.

$\therefore$ દરેક ઘટક aને વધુમાં વધુ બે વ્યસ્ત મળે.

(5) જો $4a^3 < -1$, તો $\Delta < 0$

$\therefore$ aને વ્યસ્ત ન મળે.

જો $4a^3 > -1$, તો aને બે વ્યસ્ત મળે.

જો $a^3 = \frac{-1}{4}$, તો aને ફક્ત એક વ્યસ્ત મળે.

$\therefore$ જો $a = \sqrt[3]{\frac{-1}{4}}$, તો aને ફક્ત એક વ્યસ્ત b મળે, $b = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a^3}}{2a^2} = \frac{1}{2a^2}$

$\therefore$ $a * \frac{1}{2a^2} = a + \frac{1}{2a^2} - \left(\frac{1}{2a}\right)^2 = a + \frac{1}{2a^2} - \frac{1}{4a^2} = a + \frac{1}{4a^2} = \frac{4a^3+1}{4a^2} = 0$

$\therefore$ $a = \sqrt[3]{\frac{-1}{4}}$ ને ફક્ત એક વ્યસ્ત મળે, જે $\frac{1}{2a^2}$ છે.

(નોંધ : અહીં $*$ એ જૂથના નિયમનું પાલન કરે નહીં. વ્યસ્તની અનન્યતા જળવાતી નથી.)

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ 58 : જો $x\text{S}y$ અને $x\text{S}z \Rightarrow y\text{S}z$ થાય તો સંબંધ S ને ત્રિકોણીય સંબંધ કહે છે.

સાબિત કરો કે S એ સામ્ય સંબંધ છે. $\Leftrightarrow$ S એ સ્વવાચક અને ત્રિકોણીય સંબંધ હોય.

ઉકેલ : ધારો કે S એ સામ્ય સંબંધ છે.

$\therefore$ S સ્વવાચક છે.

ધારો કે $x\text{S}y$ અને $x\text{S}z$

$\therefore$ $y\text{S}x$ અને $x\text{S}z$ (S એ સંમિત છે)

$\therefore$ $y\text{S}z$ (S એ પરંપરિત છે)

$\therefore$ $x\text{S}y$ અને $x\text{S}z \Rightarrow y\text{S}z$

$\therefore$ S ત્રિકોણીય છે.

હવે, ધારો કે S એ સ્વવાચક અને ત્રિકોણીય છે.

ધારો કે $x\text{S}y$. વળી, $x\text{S}x$.

$\therefore$ $y\text{S}x$

$\therefore$ $x\text{S}y \Rightarrow y\text{S}x$

$\therefore$ S એ સંમિત છે.

ધારો કે $x\text{S}y$ અને $y\text{S}z$

$\therefore$ $y\text{S}x$ અને $y\text{S}z$ (S એ સંમિત છે)

$\therefore$ $x\text{S}z$

$\therefore$ S એ પરંપરિત છે.

$\therefore$ S એ સામ્ય સંબંધ છે.

ઉદાહરણ 59 : ગણ Rમાં જો $x - y \in Z$ તો $x\mathrm{S}y$. સાબિત કરો કે S એ સામ્ય સંબંધ છે. સામ્ય વર્ગો કયા થાય ?

ઉકેલ : $x - x \in Z$ કારણ કે $0 \in Z$

$\therefore$ $x\mathrm{S}x$

$\therefore$ S એ સ્વવાચક છે.

જો $x - y \in Z$, તો $y - x \in Z$

$\therefore$ $x\mathrm{S}y \Rightarrow y\mathrm{S}x$

$\therefore$ S એ સંમિત છે.

જો $x - y \in Z$ અને $y - z \in Z$, તો

$x - y + y - z = x - z \in Z$

$\therefore$ જો $x\mathrm{S}y$ અને $y\mathrm{S}z$, તો $x\mathrm{S}z$

$\therefore$ S પરંપરિત છે.

$\therefore$ S એ સામ્ય સંબંધ છે.

હવે S ને બદલે $\sim$ નો ઉપયોગ કરીએ.

હવે, $x \sim y \Leftrightarrow x - y$ એ પૂર્ણાંક સંખ્યા હોય.

જેમકે, જો $x = 7.82$, $y = 2.82$, તો $x - y = 5 \in Z$

$\therefore$ $x \sim y$

$x - [x] = 7.82 - 7 = 0.82$

$y - [y] = 5.82 - 5 = 0.82$ સમાન છે.

$x - [x]$ અને $y - [y]$ એવી વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે જેમના દશાંશચિહ્ન પછીની દશાંશ અભિવ્યક્તિ સમાન હોય. એટલે કે, જો $x - [x] = y - [y]$ અથવા $x - y = [x] - [y]$, તો સંખ્યા y એ x ના સામ્ય વર્ગમાં મળે.

$x - y = [x] - [y]$ તો x અને y એક સામ્ય વર્ગમાં મળે.

ઉદાહરણ 60 : વિધેય $f : R - \{-2\} \rightarrow R - \{1\}$, $f(x) = \frac{x}{x+2}$ એક-એક અને વ્યાપ્ત છે તેમ સાબિત કરો. f^{-1} શોધો.

ઉકેલ : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1}{x_1+2} = \frac{x_2}{x_2+2}$

$\Rightarrow x_1x_2 + 2x_1 = x_1x_2 + 2x_2$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

$\therefore$ f એક-એક છે.

ધારો કે $x \in R - \{-2\}$

ધારો કે $y = \frac{x}{x+2}$

$\therefore$ $xy + 2y = x$

$x(y - 1) = -2y$

$x = \frac{-2y}{y-1} = \frac{2y}{1-y}$ $\qquad (y \in R - \{1\})$

$\therefore$ પ્રત્યેક $y \in R - \{1\}$ માટે $x \in R - \{-2\}$ એવો મળે કે જેથી $y = f(x)$ થાય.

$\therefore$ $R_f = R - \{1\}$

$\therefore$ f એ $R - \{1\}$માં વ્યાપ્ત થાય.

$\therefore$ $f^{-1} : R - \{1\} \rightarrow R - \{-2\}$, $f^{-1}(x) = \frac{2x}{1-x}$

ઉદાહરણ 61 : ગણ R પર * એ $a * b = a + b - ab$ વડે વ્યાખ્યાયિત છે. * માટે તટસ્થ ઘટક મળે ? $a \in R$ માટે જો અસ્તિત્વ ધરાવે તો તેનો વ્યસ્ત કયો મળે ?

ઉકેલ : $a * e = e * a = a, \forall a \in R \Rightarrow a + e - ae = a \quad \forall a \in R$

$\Rightarrow e - ae = 0 \quad \forall a \in R$

$\Rightarrow e = 0$ **($a = 0$ લેતાં)**

વળી, $a * 0 = 0 * a = a + 0 - 0 = a$

$\therefore$ 0 એ * માટે તટસ્થ ઘટક થશે.

હવે, $a * b = a + b - ab = 0 \Rightarrow (1 - a)b = -a$

$$\Rightarrow b = \frac{a}{a-1}, \text{ જ્યાં } a \neq 1$$

જો $a \neq 1$ તો a^{-1} નું અસ્તિત્વ છે અને $a^{-1} = \frac{a}{a-1}$

ઉદાહરણ 62 : $Z - \{0\} \times Z - \{0\}$ પર સંબંધ S આ પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત થાય છે. $(a, b)S(c, d) \Leftrightarrow ad = bc$. સાબિત કરો કે આ સંબંધ સામ્ય સંબંધ છે. સામ્ય વર્ગો વિશે શું કહી શકાય ?

ઉકેલ : $ab = ba$ હોવાથી $(a, b)S(a, b)$

$\therefore$ S સ્વવાચક છે.

જો $(a, b)S(c, d)$, તો $ad = bc$

$\therefore$ $cb = da$

$\therefore$ $(c, d)S(a, b)$

$\therefore$ S સંમિત છે.

ધારો કે $(a, b)S(c, d)$ અને $(c, d)S(e, f)$

$\therefore$ $ad = bc$ અને $cf = de$

$\therefore$ $ade = bce$ અને $acf = ade$

$\therefore$ $acf = bce$

$\therefore$ $af = be \quad (c \neq 0)$

$\therefore$ $(a, b)S(e, f)$

$\therefore$ S પરંપરિત છે.

$\therefore$ S એ સામ્ય સંબંધ છે.

જો $ad = bc$ તો $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$\therefore$ $\frac{2}{4} \sim \frac{3}{6} \sim \frac{1}{2} \sim \frac{5}{10} \ldots$

$\therefore$ અપૂર્ણાંકો (a, b)નો સામ્ય વર્ગ સંમેય સંખ્યા $\frac{a}{b}$ દર્શાવે છે.

ઉદાહરણ 63 : $a * b = \frac{ab}{10} \quad a, b \in Q^+$

* માટે તટસ્થ ઘટક શોધો. 4^{-1} અને $(4 * 5)^{-1}$ શોધો.

ઉકેલ : $a * b = a \Rightarrow \frac{ab}{10} = a \Rightarrow b = 10$ **($a \neq 0$)**

વળી, $a * 10 = 10 * a = \frac{a \cdot 10}{10} = a$

$\therefore$ 10 એ * માટે તટસ્થ ઘટક છે.

ધારો કે $4 * a = 10$

$\therefore$ $\frac{4a}{10} = 10$

$\therefore \quad a = 25$

$\therefore \quad 4^{-1} = 25 \qquad \left(4 * 25 = \frac{4 \cdot 25}{10} = 10\right)$

$\therefore \quad 4 * 5 = \frac{4 \cdot 5}{10} = 2$

હવે, $2 * a = 10 \Rightarrow \frac{2a}{10} = 10$

$\Rightarrow a = 50$

$\therefore \quad (4 * 5)^{-1} = 2^{-1} = 50$

સ્વાધ્યાય 1

1. સાબિત કરો કે $\{1, 2, 3\}$ પરના $(1, 2)$ અને $(1, 3)$ને સમાવતાં હોય તથા સ્વવાચક હોય, સંમિત હોય પરંતુ પરંપરિત ન હોય તેવા સંબંધોની સંખ્યા 1 હોય.

2. સાબિત કરો કે $\{1, 2, 3\}$ પરના $(1, 2)$ને સમાવતાં સામ્ય સંબંધોની સંખ્યા 2 હોય.

3. ગણ R પર S આ પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે : $(a, b) \in S \Leftrightarrow 1 + ab > 0 \quad \forall a, b \in R$
સાબિત કરો કે S સ્વવાચક છે, સંમિત છે પરંતુ પરંપરિત નથી.

(**સૂચન :** $a = \frac{1}{3}, b = \frac{-1}{2}, c = -8$ લો. $(a, b) \in S, (b, c) \in S$ તથા $(a, c) \notin S$)

4. $A = \{1, 2, 3, ..., 14, 15\}, S = \{(x, y) \mid y = 5x, x, y \in A\}$
ચકાસો કે S સ્વવાચક, સંમિત કે પરંપરિત છે ?

5. ગણ R પર Sનો સંબંધ નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત છે :
$S = \{(a, b) \mid a \le b^2, a, b \in R\}$
સાબિત કરો કે S સ્વવાચક નથી, સંમિત નથી અને પરંપરિત નથી.

6. ધારો કે $S \subset (R \times R)$. $S = \{(A, B) \mid d(A, B) < 2\}$. સાબિત કરો કે S પરંપરિત નથી.

7. $N \times N$ પર S નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત છે :
$(a, b)\ S\ (c, d) \Leftrightarrow ad(b + c) = bc(a + d)$. સાબિત કરો કે S સામ્ય સંબંધ છે.

8. **નીચે આપેલાં વિધેય એક-એક છે કે નહિ તથા વ્યાપ્ત છે કે નહિ તે નક્કી કરો :**

(1) $f : R \to R, \quad f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x \ge 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}$

(2) $f : R \to R, \quad f(x) = \begin{cases} -x + 1 & x \ge 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}$

(3) $f : Z \to Z, \quad f(n) = \begin{cases} n - 1 & n \text{ અયુગ્મ} \\ n & n \text{ યુગ્મ} \end{cases}$

(4) $f : Z \to Z, \quad f(n) = \begin{cases} n & n \text{ યુગ્મ} \\ \frac{n-1}{2} & n \text{ અયુગ્મ} \end{cases}$

(5) $f : R \times (R - \{0\}) \to R, f((x, y)) = \frac{x}{y}$

(6) $f : Z \to Z, f(n) = \begin{cases} n & n \text{ યુગ્મ} \\ 2n + 3 & n \text{ અયુગ્મ} \end{cases}$ (**સૂચન :** $3 \in R_f$ છે ?)

(7) $f : [-1, 1] \to [-1, 1], f(x) = x \mid x \mid$

(8) $f : N \to N \cup \{0\}, f(n) = n + (-1)^n$

(9) $f : N - \{1\} \to N$, $f(n) = n$નો મહત્તમ અવિભાજ્ય અવયવ

(10) $f : R - \{3\} \to R - \{1\}$, $f(x) = \dfrac{x-2}{x-3}$

(11) $f : R \to R$, $f(x) = x - [x]$

9. $f : [0, 1] \to [0, 1]$, $f(x) = \begin{cases} x & x \in Q \\ 1 - x & x \notin Q \end{cases}$

સાબિત કરો કે $(fof)(x) = x$.

10. $f : Z \to Z$, $f(n) = 5n$ અને

$g : Z \to Z$, $g(n) = \begin{cases} \frac{n}{5} & \text{જો } 5 \mid n \\ 0 & \text{અન્યથા} \end{cases}$ તો gof અને fog શોધો.

11. $f : R \to R$, $f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

અને $g : R \to R$, $g(x) = [x]$. સાબિત કરો કે $(fog)(x) = (gof)(x) \quad \forall x \in [-1, 0)$

12. જો બે વિધેય $f : A \to B$ અને $g : B \to A$ એવાં હોય કે જેથી $gof = I_A$ થાય તો સાબિત કરો કે f એક-એક છે અને g એ Aમાં વ્યાપ્ત છે.

13. વિધેય $f : A \to B$ અને $g : B \to C$ માટે નીચે પ્રમાણે સાબિત કરો :

(1) જો $gof : A \to C$ એ Cમાં વ્યાપ્ત હોય, તો $g : B \to C$ એ Cમાં વ્યાપ્ત હોય.

(2) જો $gof : A \to C$ એક-એક હોય, તો $f : A \to B$ એક-એક હોય.

(3) જો $gof : A \to C$ વ્યાપ્ત અને $g : B \to C$ એક-એક હોય, તો $f : A \to B$ વ્યાપ્ત હોય.

(4) જો $gof : A \to C$ એક-એક અને $f : A \to B$ એ Bમાં વ્યાપ્ત હોય, તો $g : B \to C$ એક-એક હોય.

14. $f : R^+ \cup \{0\} \to R^+ \cup \{0\}$, $f(x) = \sqrt{x}$, $g : R \to R$, $g(x) = x^2 - 1$. fog અને gof પૈકી જે શક્ય હોય તે શોધો.

15. જો $f : N \cup \{0\} \to N \cup \{0\}$, $f(n) = \begin{cases} n + 1 & n \text{ યુગ્મ} \\ n - 1 & n \text{ અયુગ્મ} \end{cases}$ તો સાબિત કરો કે $f = f^{-1}$ થાય.

16. $f : R \to (-1, 1)$, $f(x) = \dfrac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}}$. જો અસ્તિત્વ હોય, તો f^{-1} શોધો.

17. $f : R - \left\{\frac{2}{3}\right\} \to R$, $f(x) = \dfrac{4x+3}{6x-4}$. સાબિત કરો કે $(fof)(x) = x$. f^{-1} વિશે શું કહી શકાય ?

18. R પર $*$, $a * b = a + b + ab$ વડે વ્યાખ્યાયિત છે. $*$ સમક્રમી છે ? $*$ જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે ? જો $a * b = a - b + ab$ હોય, તો ઉપર પ્રમાણેના પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો.

19. નીચે આપેલી દ્વિક્ક્રિયા સમક્રમી છે કે નહિ ? જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે કે નહિ ?

(1) N પર $a * b = a^b$

(2) N પર $a * b = (a, b)$નો ગુ.સા.અ.

(3) Q પર $a * b = a - b$

(4) Q પર $a * b = a^2b$

(5) R પર $a * b = a + b - 5$

(6) $R - \{-1\}$ પર $a * b = \frac{a}{b+1}$

(7) Q પર $a * b = \frac{a+b}{2}$

(8) Q પર $a * b = \frac{a-b}{2}$

(9) Z પર $a * b = a + b - 2$

(10) Z પર $a * b = a + 2b - 3$

20. નીચે આપેલી દ્વિક્ક્રિયા માટે તટસ્થ ઘટક શોધો અને જો અસ્તિત્વ હોય, તો વ્યસ્ત શોધો (જો તટસ્થ ઘટકનું અસ્તિત્વ હોય, તો)

(1) $Q - \{-1\}$ પર $a * b = a + b + ab$

(2) $Q - \{0\}$ પર $a * b = \frac{ab}{2}$

(3) Z પર $a * b = a + b - 2$

(4) $R - \{1\}$ પર $a * b = a + b - ab$

(5) R પર $a * b = \sqrt{|a^2 - b^2|}$

(6) R પર $a * b = 3a + 4b - 2$

(7) Z પર $a * b = a + 3b^2$

(8) N પર $a * b$ = ગુ.સા.અ. (a, b)

(9) P(X) ઉપર $A * B = A \cap B$ જ્યાં, $X \neq \emptyset$

(10) P(X) ઉપર $A * B = A \cup B$ જ્યાં, $X \neq \emptyset$

વિભાગ A (1 ગુણ)

1. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને $\square$ માં લખો :

(1) ગણ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ પરનો સંબંધ $S = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$ એ ...... $\square$

(a) ફક્ત સંમિત હોય
(b) ફક્ત સ્વવાચક હોય
(c) ફક્ત પરંપરિત હોય
(d) સામ્ય સંબંધ હોય

(2) ગણ $A = \{1, 2, 3\}$ પરના $(1, 3)$ને સમાવતા સામ્ય સંબંધોની સંખ્યા .... હોય. $\square$

(a) 1
(b) 2
(c) 3
(d) 8

(3) Z પર સંબંધ S આ પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે : $(x, y) \in S \Leftrightarrow |x - y| \leq 1$. S એ ...... $\square$

(a) સ્વવાચક અને પરંપરિત છે, સંમિત નથી.
(b) સ્વવાચક અને સંમિત છે, પરંપરિત નથી.
(c) સંમિત અને પરંપરિત છે, સ્વવાચક નથી.
(d) સામ્ય સંબંધ છે.

(4) $R - \{0\}$ પર સંબંધ S આ પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે : $(x, y) \in S \Leftrightarrow xy > 0$. S એ ...... $\square$

(a) સામ્ય સંબંધ છે
(b) ફક્ત સ્વવાચક
(c) ફક્ત સંમિત
(d) ફક્ત પરંપરિત

(5) Z પર વ્યાખ્યાયિત નીચે આપેલામાંથી કયો સંબંધ સામ્ય સંબંધ નથી. $\square$

(a) $(x, y) \in S \Leftrightarrow x \geq y$
(b) $(x, y) \in S \Leftrightarrow x = y$
(c) $(x, y) \in S \Leftrightarrow x - y$ એ 3નો ગુણક હોય
(d) જો $|x - y|$ યુગ્મ $\Leftrightarrow (x, y) \in S$

(6) જો Z પર $a * b = a^2 + b^2$, તો $(2 * 3) * 4 =$ ......

(a) 13 (b) 16 (c) 185 (d) 13

(7) જો Z પર $a * b = a^2 + b^2 + ab + 2$, તો $3 * 4 =$ ......

(a) 40 (b) 39 (c) 25 (d) 41

(8) જો Q^+ પર $a * b = \frac{ab}{2}$ તો * માટે તટસ્થ ઘટક ...... છે.

(a) 2 (b) 3 (c) 0 (d) 1

(9) જો Q^+ પર $a * b = \frac{ab}{3}$, તો શૂન્યેતર aનો * માટે વ્યસ્ત ...... છે.

(a) $\frac{3}{a}$ (b) $\frac{9}{a}$ (c) $\frac{1}{a}$ (d) $\frac{2}{a}$

(10) ગણ {1, 2} પર દ્વિક્રિયાઓની કુલ સંખ્યા ...... છે.

(a) 16 (b) 8 (c) 2 (d) 4

(11) ગણ {1, 2, 3,..., n} પર દ્વિક્રિયાઓની કુલ સંખ્યા ...... છે.

(a) 2^n (b) n^{n^2} (c) n^3 (d) n^{2n}

(12) ગણ R − {−1} પર $a * b = a + b + ab$, તો a^{-1} ...... છે.

(a) a^3 (b) $\frac{1}{a}$ (c) $\frac{-a}{a+1}$ (d) $\frac{1}{a^2}$

(13) ગણ Z પર $a * b = a + b + 10$ માટે તટસ્થ ઘટક ...... છે.

(a) 0 (b) −5 (c) −10 (d) 1

(14) ગણ {1, 2} પર સમક્રમી દ્વિક્રિયાઓની સંખ્યા ...... છે.

(a) 8 (b) 4 (c) 16 (d) 27

(15) જો Q^+ પર $a * b = \frac{ab}{100}$ હોય, તો 0.1નો વ્યસ્ત ...... છે.

(a) 100000 (b) 10000 (c) 1000 (d) 10

વિભાગ B (2 ગુણ)

(16) A = [−1, 1], B = [0, 1], C = [−1, 0]

$S_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, x \in A, y \in A\}$

$S_2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, x \in A, y \in B\}$

$S_3 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, x \in A, y \in C\}$

$S_4 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, x \in B, y \in C\}$ તો...

(a) S_1 વિધેયનો આલેખ નથી. (b) S_2 વિધેયનો આલેખ નથી.

(c) S_3 વિધેયનો આલેખ નથી. (d) S_4 વિધેયનો આલેખ નથી.

(17) $f : R \rightarrow R, f(x) = 3^x + 3^{|x|} =$ ......

(a) એક-એક અને વ્યાપ્ત છે. (b) એક-એક છે પરંતુ વ્યાપ્ત નથી.

(c) અનેક-એક છે અને વ્યાપ્ત છે. (d) અનેક-એક છે પરંતુ વ્યાપ્ત નથી.

(18) $f : R - \{q\} \rightarrow R - \{1\}, f(x) = \frac{x-p}{x-q}, p \neq q$, તો f એ ......

(a) એક-એક અને વ્યાપ્ત છે. (b) અનેક-એક છે અને વ્યાપ્ત નથી.

(c) એક-એક છે અને વ્યાપ્ત નથી. (d) અનેક-એક છે અને વ્યાપ્ત છે.

(19) $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$, $f(x) = -x\,|x|$ એ ......

(a) એક-એક અને વ્યાપ્ત છે. (b) અનેક-એક અને વ્યાપ્ત છે.

(c) અનેક-એક છે અને વ્યાપ્ત નથી. (d) એક-એક છે અને વ્યાપ્ત નથી.

(20) જો $f : R \to R$, $f(x) = 2x - 3$, તો ...

(a) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2x-3}$ (b) $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$ (c) f^{-1} નું અસ્તિત્વ નથી. (d) $f^{-1}(x) = 3x - 2$

(21) જો $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ એ એક-એક અને વ્યાપ્ત હોય, તો $f(x) =$ ...... શક્ય છે.

(a) $f(x) = |x|$ (b) $f(x) = sinx$ (c) $f(x) = x^2$ (d) $f(x) = cosx$

(22) $f : R \to R$, $f(x) = x^2 + 2x + 3$ એ...

(a) એક-એક અને વ્યાપ્ત છે. (b) એક-એક છે પરંતુ વ્યાપ્ત નથી.

(c) વ્યાપ્ત છે પરંતુ એક-એક ન નથી. (d) અનેક-એક છે અને વ્યાપ્ત નથી.

(23) જો R પર $a * b = ab + 1$ તો $*$ એ...

(a) સમક્રમી છે પરંતુ જૂથના નિયમનું પાલન ન કરે.

(b) જૂથના નિયમનું પાલન કરે પરંતુ સમક્રમી નથી.

(c) સમક્રમી નથી અને જૂથના નિયમનું પાલન ન કરે.

(d) સમક્રમી છે અને જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે.

(24) જો Z પર $a * b = a^2 + b^2$, તો $*$ એ...

(a) સમક્રમી છે તથા જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે.

(b) સમક્રમી છે તથા જૂથના નિયમનું પાલન ન કરે.

(c) સમક્રમી નથી અને જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે.

(d) સમક્રમી નથી અને જૂથના નિયમનું પાલન કરતું નથી.

(25) જો $Q - \{1\}$ પર $a * b = a + b - ab$, હોય તો $*$ માટે અનુક્રમે તટસ્થ ઘટક ...... તથા aનો વ્યસ્ત ...... છે.

(a) 0 અને $\frac{a}{a-1}$ (b) 1 અને $\frac{a-1}{a}$ (c) -1 અને a (d) 0, $\frac{1}{a}$

(26) જો Q^+ પર $a * b = \frac{ab}{3}$, તો $3 * \left(\frac{1}{5} * \frac{1}{2}\right)$ એ ...... છે.

(a) $\frac{5}{160}$ (b) $\frac{1}{30}$ (c) $\frac{3}{160}$ (d) $\frac{3}{60}$

(27) જો P(X) ($X \neq \emptyset$) પર Δ એ $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$, વડે વ્યાખ્યાયિત હોય, તો...

(a) Δ માટે તટસ્થ ઘટક $\emptyset$ અને Aનો વ્યસ્ત A હોય છે.

(b) Δ માટે તટસ્થ ઘટક A અને Aનો વ્યસ્ત $\emptyset$ હોય છે.

(c) Δ માટે તટસ્થ ઘટક A' અને Aનો વ્યસ્ત A હોય છે.

(d) Δ માટે તટસ્થ ઘટક X અને Aનો વ્યસ્ત $\emptyset$ હોય છે.

વિભાગ C (3 ગુણ)

(28) $N \times N$ પર S આ પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે : $((a, b), (c, d)) \in S \Leftrightarrow a + d = b + c$...

(a) S સ્વવાચક છે પરંતુ સંમિત નથી. (b) S ફક્ત સ્વવાચક અને પરંપરિત છે.

(c) S સામ્ય સંબંધ છે. (d) S ફક્ત પરંપરિત છે.

(29) ગણ $A = \{5, 6, 7, 8\}$ પર સંબંધ S નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત છે :

$S = \{(5, 6), (6, 6), (5, 5), (8, 8), (5, 7), (7, 7), (7, 6)\}$, તો...

(a) S સ્વવાચક અને સંમિત છે પરંતુ પરંપરિત નથી.

(b) S સ્વવાચક અને પરંપરિત છે પરંતુ સંમિત નથી.

(c) S સંમિત અને પરંપરિત છે પરંતુ સ્વવાચક નથી.

(d) S સામ્ય સંબંધ છે.

(30) જો $f : R^+ \to R$, તો $f(x) = \frac{x}{x+1}$ એ ......

(a) એક-એક છે અને વ્યાપ્ત છે. (b) એક-એક છે અને વ્યાપ્ત નથી.

(c) એક-એક નથી અને વ્યાપ્ત નથી. (d) વ્યાપ્ત છે પરંતુ એક-એક નથી.

(31) જો $f : R \to R$, $f(x) = [x]$, $g : R \to R$, $g(x) = sinx$, $h : R \to R$, $h(x) = 2x$, તો

$ho(gof) =$ ......

(a) $sin[x]$ (b) $[sin2x]$ (c) $2(sin[x])$ (d) $sin2[x]$

(32) $f : R \to (-1, 1)$, $f(x) = \frac{-x|x|}{1+x^2}$, તો $f^{-1}(x) =$ ......

(a) $\frac{1}{x^2+1}$ (b) $-\text{signum}\, x\sqrt{\frac{|x|}{1-|x|}}$ (c) $-\frac{\sqrt{x}}{1-x}$ (d) $\frac{x^2}{x^2+1}$

(33) $f : R \to R$, $f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$

$g : R \to R$, $g(x) = 1 + x - [x]$, તો પ્રત્યેક x માટે, $f(g(x)) =$ ......

(a) 1 (b) 2 (c) 0 (d) -1

વિભાગ D (4 ગુણ)

(34) જો $f : \{x \mid x \ge 1, x \in R\} \to \{x \mid x \ge 2, x \in R\}$, $f(x) = x + \frac{1}{x}$ તો $f^{-1}(x) =$ ......

(a) $\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}$ (b) $\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}$ (c) $\frac{x^2+1}{x}$ (d) $\sqrt{x^2-4}$

(35) જો $f : R \to R$, $f(x) = x - [x]$, તો $f^{-1}(x)$ ......

(a) નું અસ્તિત્વ નથી. (b) $= x$ (c) $= [x]$ (d) $= x - [x]$

(36) જો $f : R^+ \to R^+$ $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, તો $(fo(fof))(x) =$ ......

(a) $\frac{x}{1+x^2}$ (b) $\frac{1+x^2}{x}$ (c) $\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$ (d) $\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$

(37) જો $f : R \to R$, $f(x) = x^2$, $g : R \to R$, $g(x) = 2^x$, તો $\{x \mid (fog)(x) = (gof)(x)\} =$ ......

(a) $\{0\}$ (b) $\{0, 1\}$ (c) R (d) $\{0, 2\}$

(38) $f : R \to Z, f(x) = [x]$ એ ......

(a) એક-એક છે અને વ્યાપ્ત છે અને તેના વ્યસ્તનું અસ્તિત્વ છે.

(b) અનેક-એક છે અને વ્યાપ્ત નથી, વ્યસ્તનું અસ્તિત્વ નથી.

(c) અનેક-એક છે અને વ્યાપ્ત છે, વ્યસ્તનું અસ્તિત્વ નથી.

(d) એક-એક છે અને વ્યાપ્ત નથી, વ્યસ્તનું અસ્તિત્વ નથી.

(39) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. જો $a, b \in A$, $a * b = ab$ ને 7 વડે ભાગતા મળતી શેષ, તો દ્વિક્ક્રિયાના કોષ્ટક પરથી 2 નો $*$ માટેનો વ્યસ્ત ...... છે.

(a) 1 (b) 5 (c) 6 (d) 4

*

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચે આપેલા મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. સંબંધ અને સામ્ય સંબંધ
2. એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય
3. વિધેયોનું સંયોજન
4. વિધેયનું પ્રતિવિધેય
5. ગણ પરની દ્વિક્ક્રિયાઓ

Srinivasa Ramanujan

Born in Erode, Madras Presidency, to a poor Brahmin family, Ramanujan first encountered formal mathematics at age 10. He demonstrated a natural ability, and was given books on advanced trigonometry written by S. L. Loney. He mastered them by age 12, and even discovered theorems of his own, including independently re-discovering Euler's identity. He demonstrated unusual mathematical skills at school, winning accolades and awards. By 17, Ramanujan conducted his own mathematical research on Bernoulli numbers and the Euler–Mascheroni constant. He received a scholarship to study at Government College in Kumbakonam, but lost it when he failed his non-mathematical coursework. He joined another college to pursue independent mathematical research, working as a clerk in the Accountant-General's office at the Madras Port Trust Office to support himself. In 1912–1913, he sent samples of his theorems to three academics at the University of Cambridge. Only Hardy recognised the brilliance of his work, subsequently inviting Ramanujan to visit and work with him at Cambridge. He became a Fellow of the Royal Society and a Fellow of Trinity College, Cambridge, dying of illness, malnutrition and possibly liver infection in 1920 at the age of 32.

During his short lifetime, Ramanujan independently compiled nearly 3900 results (mostly identities and equations). Although a small number of these results were actually false and some were already known, most of his claims have now been proven correct. He stated results that were both original and highly unconventional, such as the Ramanujan prime and the Ramanujan theta function, and these have inspired a vast amount of further research. However, the mathematical mainstream has been rather slow in absorbing some of his major discoveries. The Ramanujan Journal, an international publication, was launched to publish work in all areas of mathematics influenced by his work.

ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયો 2

No matter how correct a mathematical theorem may appear to be, one caught never to be satisfied that there was not something imperfect about it untill it also gives the impression of being beautiful.

– George Boole

Mathematics consists of proving the most obvious things in the least obvious way.

– George Polya

2.1 પ્રાસ્તાવિક

આપણે શીખી ગયાં છીએ કે જો વિધેય એક-એક અને વ્યાપ્ત હોય તો અને તો જ તેનું પ્રતિવિધેય મળે. ઘણાં વિધેયો એવાં છે કે જે એક-એક નથી કે વ્યાપ્ત નથી કે બંનેમાંથી એક પણ નથી. આવાં વિધેયોનાં પ્રતિવિધેય ન મળે. ધોરણ XIમાં આપણે શીખી ગયાં કે બધાં જ ત્રિકોણમિતીય વિધેયો આવૃત્ત વિધેયો હોઈ, અનેક-એક સંગતતાવાળાં વિધેયો છે અને તેથી તેમનાં પ્રતિવિધેયો પ્રાપ્ત થશે નહિ. પરંતુ તેમના પ્રદેશગણ અને સહપ્રદેશગણ મર્યાદિત કરીએ, કે જેથી આ મર્યાદિત પ્રદેશગણ અને સહપ્રદેશમાં તે એક-એક અને વ્યાપ્ત થાય તો આ મર્યાદિત પ્રદેશગણમાં અને સહપ્રદેશગણમાં તેમનાં પ્રતિવિધેય અસ્તિત્વ ધરાવશે.

આપણે જાણીએ છીએ કે $f = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in A, y \in B\}$ એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય હોય, તો તેનું પ્રતિવિધેય એ $f^{-1} = \{(y, x) \mid y = f(x), x \in A, y \in B\}$ દ્વારા મળે.

વળી, $fof^{-1} = I_B$ અને $f^{-1}of = I_A$

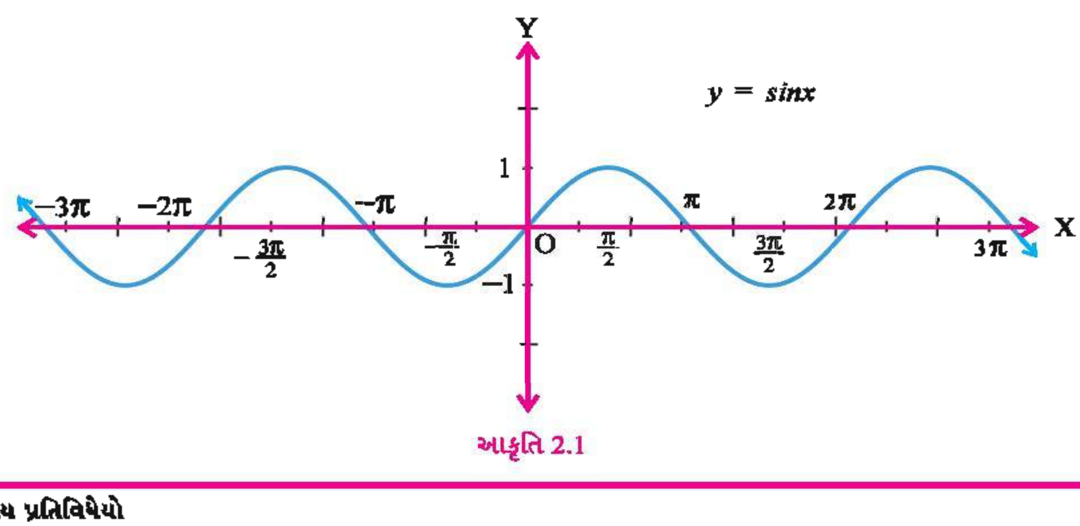
$\therefore \quad x \in A \Rightarrow (f^{-1}of)(x) = x, \ y \in B \Rightarrow (fof^{-1})(y) = y$

આ પ્રકરણમાં આપણે ત્રિકોણમિતીય વિધેયોનાં પ્રતિવિધેયોના અસ્તિત્વ અંગે વિચારીશું અને તેમના ગુણધર્મોની ચર્ચા કરીશું.

2.2 *sine* વિધેયનું પ્રતિવિધેય

આપણે જાણીએ છીએ કે $sin : R \rightarrow R$ એ અનેક-એક વિધેય છે અને તેનો વિસ્તાર $[-1, 1]$ હોવાથી તે R પર વ્યાપ્ત નથી.

$sin = \{(x, y) \mid y = sinx, x \in R, y \in [-1, 1]\}$ એ R માં અનેક-એક વિધેય છે અને $[-1, 1]$માં વ્યાપ્ત વિધેય છે. તે અનેક-એક છે અને તે આવર્તી વિધેય છે તથા તેનું આવર્તમાન 2π છે. આપણે આલેખ પરથી જોઈ શકીએ છીએ કે જો *sine* વિધેયનો પ્રદેશગણ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ અથવા $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ અથવા $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$ અથવા $\left[(2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right]$, $k \in Z$ લઈએ, તો તે એક-એક અને $[-1, 1]$ પર વ્યાપ્ત થાય.



આકૃતિ 2.1

તેથી *sine* વિધેયના પ્રતિવિધેયને વ્યાખ્યાયિત કરવા આપણે ઉપર લીધેલ કોઈ પણ અંતરાલને પ્રદેશગણ તરીકે લઈ શકીએ. આપણે મર્યાદિત પ્રદેશગણ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ લઈશું.

$sin = \left\{(x, y) \mid y = sinx, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], y \in [-1, 1]\right\}$ એક-એક સંગતતાવાળું અને વ્યાપ્ત વિધેય બનશે આથી તેનું પ્રતિવિધેય મળી શકે. *sine* વિધેયના પ્રતિવિધેયને sin^{-1} સંકેત વડે દર્શાવીશું.

$\therefore \quad sin^{-1} = \left\{(y, x) \mid y = sinx, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], y \in [-1, 1]\right\}.$

આમ વ્યાખ્યા અનુસાર $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ અને $y \in [-1, 1]$ માટે $y = sinx \Leftrightarrow sin^{-1}y = x$

sin^{-1} વિધેયનો પ્રદેશ $[-1, 1]$ અને વિસ્તાર $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ છે.

અહીં આપણે ધ્યાનમાં રાખીશું કે જો $y \in [-1, 1]$, તો $sin^{-1}y$ એ કોઈ પણ વાસ્તવિક x નથી કે જેને માટે $sinx = y$ થાય પરંતુ $sin^{-1}y$ તે એવી વાસ્તવિક સંખ્યા $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ છે કે જેને માટે $sinx = y$ થાય. ઉદાહરણ તરીકે, જો $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, તો આપણે જાણીએ છીએ કે $sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ અને $\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. તેથી $sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$. પરંતુ $sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ પરંતુ આપણે $sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi}{3}$ નહીં લઈએ, કારણ કે, $\frac{2\pi}{3} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

ઉદાહરણ તરીકે, $sin\left(sin^{-1}\frac{5}{7}\right) = \frac{5}{7}$, કારણ કે $\frac{5}{7} \in [-1, 1]$. $sin^{-1}\left(sin\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{2\pi}{5}$, કારણ કે $\frac{2\pi}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. પરંતુ $sin^{-1}\left(sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right) \neq \frac{3\pi}{5}$, કારણ કે $\frac{3\pi}{5} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

જો $f : A \to B$ વિધેયનું પ્રતિવિધેય $f^{-1} : B \to A$ હોય, તો

$fof^{-1} = I_B$ અને $f^{-1}of = I_A$ થાય તે આપણે જાણીએ છીએ.

અહીં, $sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$નું પ્રતિવિધેય $sin^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ છે.

$\therefore \quad sin^{-1}(sinx) = x, \ \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ અને $sin(sin^{-1}x) = x, \ \forall x \in [-1, 1].$

અહીં આપણે નોંધીશું કે,

(1) $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow |x| \le \frac{\pi}{2}$ અને

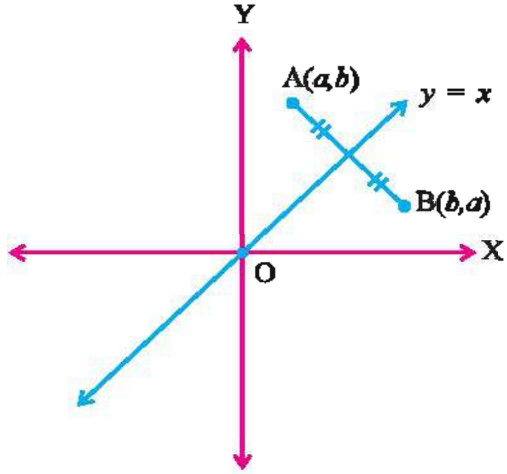
$y \in [-1, 1] \Leftrightarrow -1 \le y \le 1 \Leftrightarrow |y| \le 1.$

(2) $sin^{-1}x \neq \frac{1}{sinx}$, એટલે કે $sin^{-1}x \neq (sinx)^{-1}$

2.3 $y = sin^{-1}x$ નો આલેખ

sin^{-1} વિધેયનો પ્રદેશ $[-1, 1]$ અને વિસ્તાર $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ હોવાથી તેનો આલેખ શિરોલંબ રેખાઓ $x = -1$ અને $x = 1$ અને સમક્ષિતિજ રેખાઓ $y = -\frac{\pi}{2}$ અને $y = \frac{\pi}{2}$ વચ્ચેના મર્યાદિત પ્રદેશમાં મળશે.

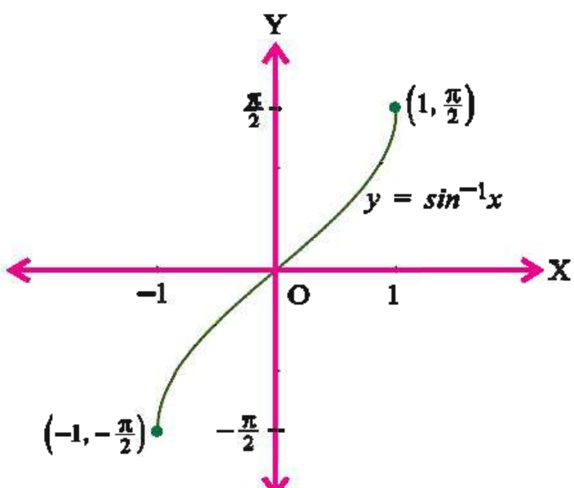
આપણે અહીં, $y = sinx$ વિધેયનો આલેખ દોરવાના જ્ઞાનનો ઉપયોગ કરી $y = sin^{-1}x$ નો આલેખ મેળવીશું. આ માટે પ્રથમ જો વિધેય fનું પ્રતિવિધેય f^{-1} અસ્તિત્વ ધરાવતું હોય તો fના આલેખ પરથી f^{-1}નો આલેખ કેવી રીતે મળે તે વિચારવું જરૂરી છે. $y = f(x)$ અને $y = f^{-1}(x)$ના આલેખો વચ્ચે રસપ્રદ સંબંધ છે. જો બિંદુ (a, b) એ $y = f(x)$ આલેખ પરનું બિંદુ હોય તો $b = f(a)$ અને તેથી $a = f^{-1}(b)$. તેથી બિંદુ (b, a) એ આલેખ $y = f^{-1}(x)$ પરનું બિંદુ થશે. આ વિધાનનું પ્રતિપ પણ સત્ય છે. તેથી જો $A(a, b)$ એ $y = f(x)$ ના આલેખ પર હોય તો અને તો જ $B(b, a)$ એ $y = f^{-1}(x)$ ના આલેખ પર હોય.



આકૃતિ 2.2

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે $y = x$ રેખા એ $A(a, b)$ અને $B(b, a)$ને જોડતા રેખાખંડનો લંબદ્વિભાજક છે. $A(a, b)$ અને $B(b, a)$ને જોડતાં રેખાખંડનો ઢાળ $\dfrac{b-a}{a-b} = -1$ થશે. રેખા $y = x$ નો ઢાળ 1 છે. તેથી $\overleftrightarrow{AB}$ એ $y = x$ ને લંબ રેખા છે. વળી, $\overline{AB}$નું મધ્યબિંદુ $\left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{a+b}{2}\right)$ એ $y = x$ રેખા પર છે.

આમ, રેખા $y = x$ એ $\overline{AB}$નો લંબદ્વિભાજક છે. આમ, $B(b, a)$ એ $A(a, b)$નું $y = x$ રેખાને સાપેક્ષ પ્રતિબિંબ થશે. આમ, $y = f^{-1}(x)$નો આલેખ એ $y = f(x)$ના આલેખનું $y = x$ રેખામાં પ્રતિબિંબ થશે.



આકૃતિ 2.3

આમ, $y = sin^{-1}x$ નો આલેખ એ sin વિધેયના આલેખનું $y = x$ રેખામાં પ્રતિબિંબ મેળવવાથી સહેલાઈથી મળી જશે. સૌ પ્રથમ એક કાગળ પર $y = sinx$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $y \in [-1, 1]$નો આલેખ દોરો. આ કાગળને $y = x$ રેખા ઉપર વાળો અને વાળેલા કાગળમાં દેખાતાં $y = sinx$ વિધેયના આલેખને વાળેલા કાગળ ઉપર દોરો. હવે કાગળને ઉલટાવી દો અને X-અક્ષને Y-અક્ષ તરીકે લઈ આલેખનું અવલોકન કરો. હવે તમને જે આલેખ દેખાશે તે $y = sin^{-1}x$નો આલેખ છે.

નોંધ : આ પ્રયોગ વિદ્યાર્થી વર્ગમાં સ્વયં કરે તે ઇચ્છનીય છે.

$y = sinx$ ના આલેખ માટે $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $y \in [-1, 1]$ અને $y = sin^{-1}x$ ના આલેખ માટે $x \in [-1, 1]$ અને $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

ઉદાહરણ 1 : મૂલ્ય મેળવો : (1) $sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, (2) $sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, (3) $sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$.

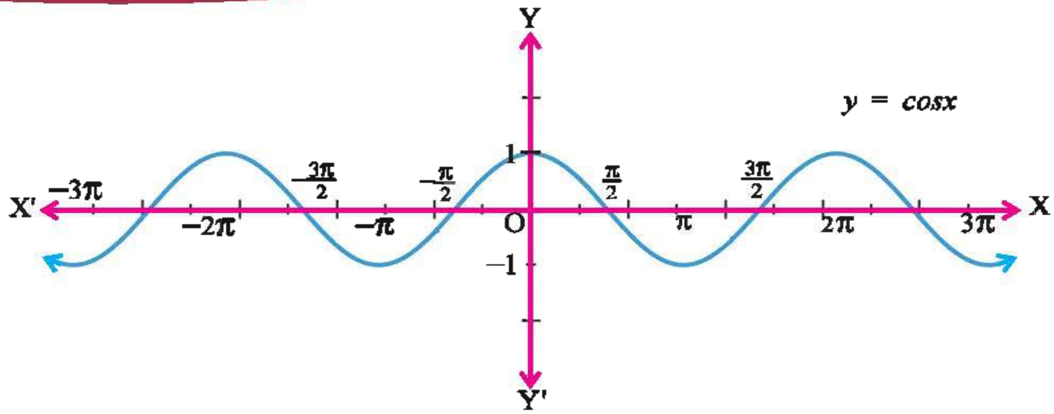
ઉકેલ : (1) $sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = sin^{-1}\left(sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$, કારણ કે $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

(2) $sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = sin^{-1}\left(sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$, કારણ કે $\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

(3) $sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right). = sin^{-1}\left(-sin\frac{\pi}{6}\right) = sin^{-1}\left(sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = -\frac{\pi}{6}$, કારણ કે $-\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

2.4 *cosine* વિધેયનું પ્રતિવિધેય

આપણે જાણીએ છીએ કે $cos : R \rightarrow R$ એ અનેક-એક વિધેય છે અને તેનો વિસ્તાર $[-1, 1]$ હોવાથી તે વ્યાપ્ત નથી. $cos = \{(x, y) \mid y = cosx, x \in R, y \in [-1, 1]\}$ અનેક-એક અને $[-1, 1]$ પર વ્યાપ્ત વિધેય છે અને તેનું



આકૃતિ 2.4

આવર્તમાન 2π છે. આલેખ પરથી જોતાં જો *cosine* નો પ્રદેશ $[0, \pi]$ અથવા $[\pi, 2\pi]$ અથવા $[2\pi, 3\pi]$ અથવા... $[k\pi, (k + 1)\pi]$, $k \in Z$ લઈએ, તો વિધેય એક-એક અને વ્યાપ્ત થાય.

આપણે *cosine* વિધેયનું પ્રતિવિધેય વ્યાખ્યાયિત કરવા મર્યાદિત પ્રદેશગણ $[0, \pi]$ લઈશું.

$cos = \{(x, y) \mid y = cosx, x \in [0, \pi], y \in [-1, 1]\}$ એક-એક સંગતતાવાળું અને વ્યાપ્ત વિધેય બનશે. માટે તેનું પ્રતિવિધેય મેળવી શકાય. તેના પ્રતિવિધેયને cos^{-1} સંકેત વડે દર્શાવીશું.

$\therefore$ $cos^{-1} = \{(y, x) \mid y = cosx, x \in [0, \pi], y \in [-1, 1]\}$. આમ, વ્યાખ્યા અનુસાર $x \in [0, \pi]$ અને $y \in [-1, 1]$ માટે $y = cosx \Leftrightarrow cos^{-1}y = x$.

cos^{-1} વિધેયનો પ્રદેશ $[-1, 1]$ અને વિસ્તાર $[0, \pi]$ છે.

sine વિધેયની જેમ અહીં પણ આપણે ધ્યાન રાખીશું કે જો $y \in [-1, 1]$ તો $cos^{-1}y$ એ એવી કોઈ પણ વાસ્તવિક x નથી કે જેને માટે $cosx = y$ થાય પણ $cos^{-1}y$ એવી જ વાસ્તવિક સંખ્યા $x \in [0, \pi]$ છે કે જેને માટે $cosx = y$ થાય.

ઉદાહરણ તરીકે, $cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ અને $\frac{\pi}{6} \in [0, \pi]$. આથી $cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$. પણ $cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. પરંતુ $-\frac{\pi}{6} \notin [0, \pi]$. આથી, $cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \neq -\frac{\pi}{6}$.

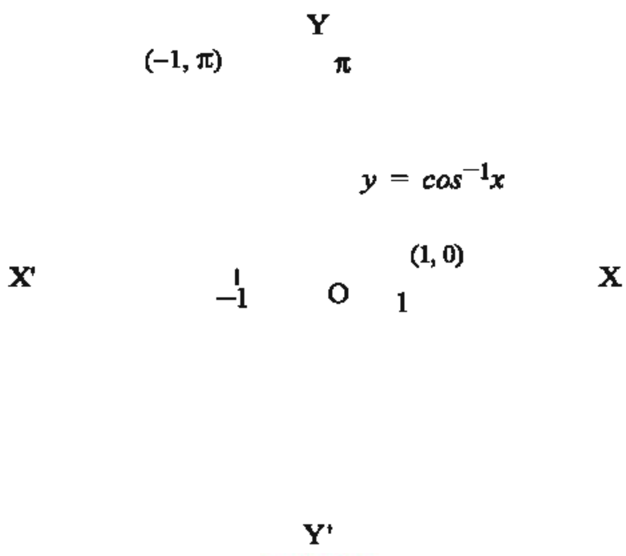
$cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$નું પ્રતિવિધેય $cos^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ છે.

આથી, $cos^{-1}(cosx) = x$, $\forall x \in [0, \pi]$ અને $cos(cos^{-1}x) = x$, $\forall x \in [-1, 1]$.

નોંધ : $\forall x \in R$, $sin^{-1}(sinx)$ અને $cos^{-1}(cosx)$નું અસ્તિત્વ છે, પરંતુ તે x ન પણ થાય. તેમ છતાં તે તેના મર્યાદિત પ્રદેશમાં x થાય છે. (ઉપરનો પ્રયોગ અહીં સહેજ ફેરફાર સાથે કરી શકાય.)

2.5 $y = cos^{-1}x$ નો આલેખ

આપણે આપેલ વિધેયના આલેખને આધારે તેના પ્રતિવિધેયનો આલેખ કેવી રીતે મેળવાય તેની ચર્ચા અગાઉ કરી. તે મુજબ cos^{-1} નો આલેખ sin^{-1}ના આલેખની જેમ $y = cosx$, $x \in [0, \pi]$ના આલેખ પરથી આકૃતિ 2.5 પ્રમાણે મળે.



આકૃતિ 2.5

ઉદાહરણ 2 : મૂલ્ય મેળવો : (1) $cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (2) $cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

ઉકેલ : (1) $cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = cos^{-1}\left(cos\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$, કારણ કે $\frac{\pi}{4} \in [0, \pi]$.

(2) $cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = cos^{-1}\left(cos\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6}$, કારણ કે $\frac{5\pi}{6} \in [0, \pi]$.

2.6 *tan* વિધેયનું પ્રતિવિધેય

આપણે જાણીએ છીએ કે $tan : R - \left\{(2k + 1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\} \rightarrow R$ એ અનેક-એક વિધેય છે અને તેનો વિસ્તાર R હોવાથી તે વ્યાપ્ત છે.

$tan = \left\{(x, y) \mid y = tanx, x \in R - \left\{(2k + 1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}, y \in R\right\}$ વિધેય અનેક-એક સંગતતાવાળું વ્યાપ્ત વિધેય છે તથા π આવર્તમાનવાળું વિધેય છે. જો તેનો પ્રદેશગણ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ અથવા $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ અથવા $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$ અથવા $\left((2k - 1)\frac{\pi}{2}, (2k + 1)\frac{\pi}{2}\right)$, $k \in Z$ લઈએ, તો વિધેય એક-એક અને વ્યાપ્ત થાય. અહીં આપેલ અંતરાલમાંથી કોઈ પણ અંતરાલને મર્યાદિત પ્રદેશગણ તરીકે લઈએ તો તેનું પ્રતિવિધેય મળે. આપણે $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ને મર્યાદિત પ્રદેશગણ લઈ તેનું પ્રતિવિધેય મેળવીશું અને તેને tan^{-1} સંકેત વડે દર્શાવીશું.

$tan^{-1} = \left\{(y, x) \mid y = tanx, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), y \in R\right\}$.

આમ, જો $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ **અને** $y \in R$ **તો** $y = tanx \Leftrightarrow tan^{-1}y = x$.

tan^{-1} **વિધેયનો પ્રદેશગણ R અને વિસ્તાર** $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ **છે.**

$tan^{-1}x \neq (tanx)^{-1}$, $tan^{-1}x \neq \frac{1}{tanx}$. $tan^{-1}x \neq \frac{sin^{-1}x}{cos^{-1}x}$.

$tan^{-1}(tanx) = x, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ અને $tan(tan^{-1}x) = x, \forall x \in R$.

$tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$ અને $-\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ તેથી, $tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$

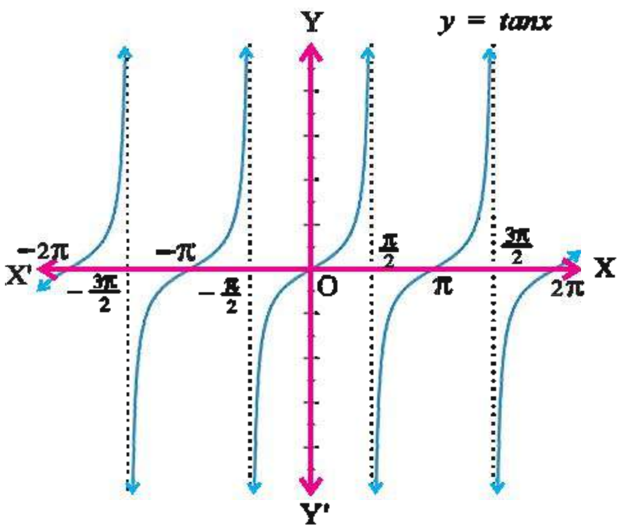
પરંતુ $tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$ હોવાથી $tan^{-1}(-1) = \frac{3\pi}{4}$ સત્ય નથી, કારણ કે $\frac{3\pi}{4} \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

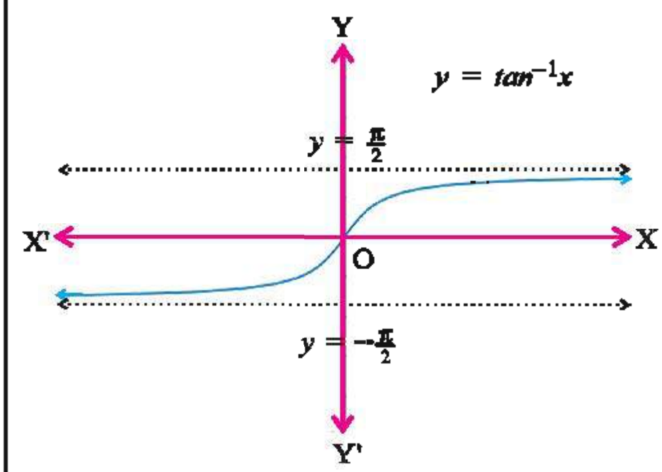
$tan^{-1}\left(tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = -\frac{\pi}{6}$, કારણ કે $-\frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ અને $tan\left(tan^{-1}\left(\frac{533}{413}\right)\right) = \frac{533}{413}$.

પરંતુ $tan^{-1}\left(tan\frac{5\pi}{6}\right) \neq \frac{5\pi}{6}$ કારણ કે $\frac{5\pi}{6} \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

2.7 $y = tan^{-1}x$ નો આલેખ

$y = tanx$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $y \in R$ ના આલેખનું $y = x$ રેખામાં પ્રતિબિંબ મેળવતાં $y = tan^{-1}x$ નો આલેખ આકૃતિ 2.6 પ્રમાણે મળશે :





આકૃતિ 2.6

2.8 *cot* વિધેયનું પ્રતિવિધેય

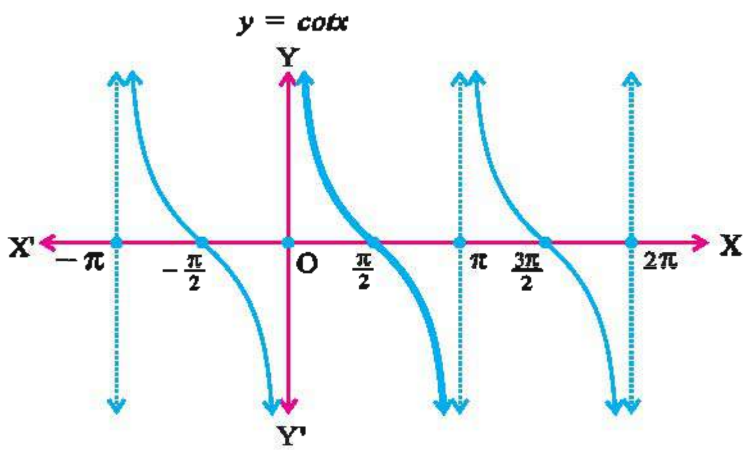
આપણે જાણીએ છીએ કે *cot* : R − {*k*π | *k* ∈ Z} → R એ અનેક-એક વિધેય છે અને તેનો વિસ્તાર R હોવાથી તે વ્યાપ્ત છે. *cot* = {(*x*, *y*) | *y* = *cotx*, *x* ∈ R − {*k*π | *k* ∈ Z}, *y* ∈ R} વિધેય અનેક-એક સંગતતાવાળું વ્યાપ્ત વિધેય છે તથા π આવર્તમાનવાળું વિધેય છે. જો તેનો પ્રદેશગણ (0, π) અથવા (π, 2π) અથવા (2π, 3π) અથવા (*k*π, (*k* + 1)π), *k* ∈ Z લઈએ તો વિધેય એક-એક અને વ્યાપ્ત થાય. અહીં આપણે મર્યાદિત પ્રદેશગણ (0, π) લઈશું. *cot* ના પ્રતિવિધેયને cot^{-1} સંકેત વડે દર્શાવીશું.

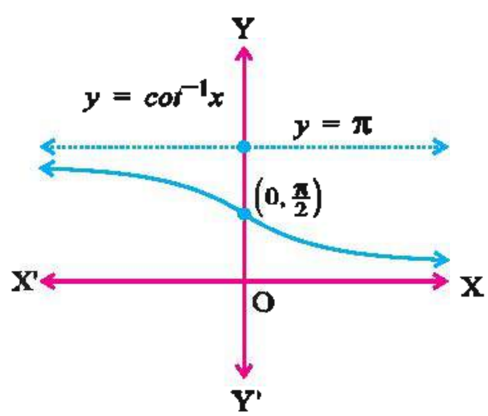
તેથી, $cot^{-1} = \{(y, x) \mid y = cotx, x \in (0, \pi), y \in R\}$.

આમ, જો $x \in (0, \pi)$ અને $y \in R$ તો $y = cotx \Leftrightarrow cot^{-1}y = x$.

cot^{-1} વિધેયનો પ્રદેશગણ R અને વિસ્તાર (0, π) છે.

$cot^{-1}(cotx) = x, x \in (0, \pi)$ અને $cot(cot^{-1}x) = x, x \in R$.





આકૃતિ 2.7

નોંધ : $\cot^{-1}\left(\cot\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \frac{3\pi}{4}$, કારણ કે $\frac{3\pi}{4} \in (0, \pi)$

વળી, $\cot\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow \cot^{-1}(-1) = \frac{3\pi}{4}$. પરંતુ $\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$ છતાં, $\cot^{-1}(-1) \neq -\frac{\pi}{4}$ ન લેવાય કારણ કે $-\frac{\pi}{4} \notin (0, \pi)$.

$\cot^{-1}\left(\cot\frac{4\pi}{3}\right) \neq \frac{4\pi}{3}$, કારણ કે $\frac{4\pi}{3} \notin (0, \pi)$.

પરંતુ, $\cot\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cot\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cot\frac{\pi}{3}$ અને $\frac{\pi}{3} \in (0, \pi)$.

તેથી $\cot^{-1}\left(\cot\frac{4\pi}{3}\right) = \cot^{-1}\left(\cot\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$.

$y = \cot x$ અને $y = \cot^{-1}x$ નાં આલેખ આકૃતિ 2.7 માં દર્શાવેલ પ્રમાણે મળશે.

2.9 *sec* વિધેયનું પ્રતિવિધેય

આપણે જાણીએ છીએ કે $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ એક-એક તથા વ્યાપ્ત વિધેય છે.

$\therefore \quad \sec : [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \to R - (-1, 1)$ એક-એક તથા વ્યાપ્ત વિધેય છે.

$\therefore \quad \sec = \left\{(x, y) \mid y = \sec x,\ x \in [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\},\ y \in R - (-1, 1)\right\}$ એક-એક સંગતતાવાળું વ્યાપ્ત વિધેય છે. તેથી તેનું પ્રતિવિધેય મળે તેનાં પ્રતિવિધેયને સંકેતમાં $\sec^{-1}$ વડે દર્શાવાય છે.

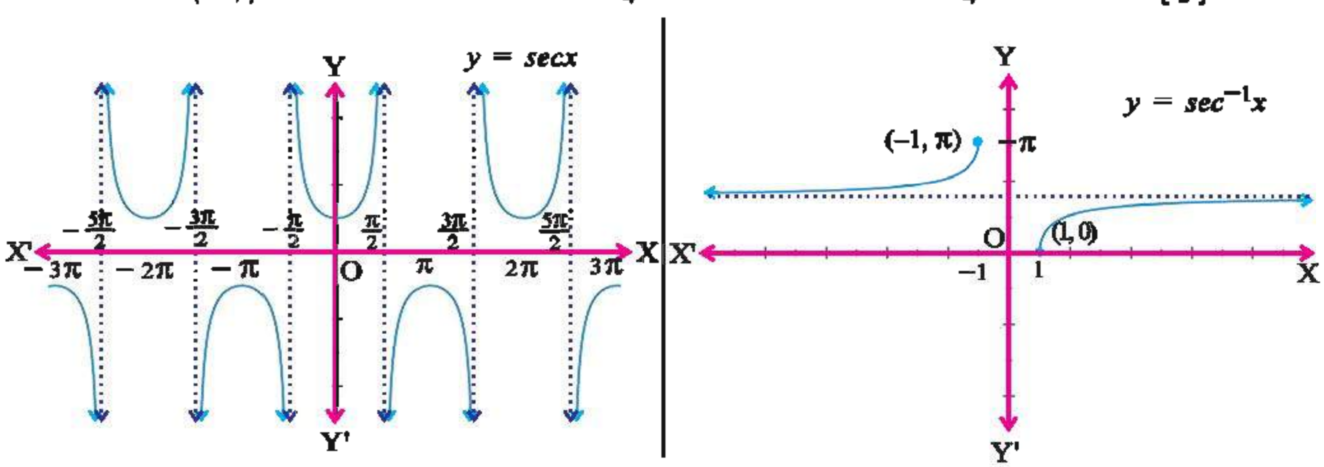
તેથી, $\sec^{-1} = \left\{(y, x) \mid y = \sec x,\ x \in [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\},\ y \in R - (-1, 1)\right\}$.

આમ, **જો $x \in [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\},\ y \in R - (-1, 1)$ તો $y = \sec x \Leftrightarrow \sec^{-1}y = x$.**

$\sec^{-1}$ નો પ્રદેશ $R - (-1, 1)$ અને વિસ્તાર $[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ છે.

વળી, $\sec\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$. તેથી, $\sec^{-1}(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$, કારણ કે $\frac{\pi}{4} \in [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

પરંતુ $\sec\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ તેથી, $\sec^{-1}(\sqrt{2}) = -\frac{\pi}{4}$ ન લખી શકાય, કારણ કે $-\frac{\pi}{4} \notin [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.



આકૃતિ 2.8

પ્રત્યેક $x \in [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ માટે $sec^{-1}(secx) = x$ અને પ્રત્યેક $x \in R - (-1, 1)$, $sec(sec^{-1}x) = x$.

અહીં આપણે નોંધીશું કે $x \in R - (-1, 1) \Leftrightarrow x \leq -1$ અથવા $x \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq 1$.

$y = secx$ અને $y = sec^{-1}x$ ના આલેખ આકૃતિ 2.8માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે મળશે.

2.10 *cosec* વિધેયનું પ્રતિવિધેય

આપણે જાણીએ છીએ કે $sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ એક-એક તથા વ્યાપ્ત વિધેય છે.

$\therefore$ $cosec : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\} \to R - (-1, 1)$ એક-એક તથા વ્યાપ્ત વિધેય છે.

$\therefore$ $cosec = \left\{(x, y) \mid y = cosecx, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}, y \in R - (-1, 1)\right\}$ એક-એક તથા વ્યાપ્ત વિધેય છે અને તેનું પ્રતિવિધેય મળશે તેના પ્રતિવિધેયને $cosec^{-1}$ સંકેત વડે દર્શાવીએ તો,

$$cosec^{-1} = \left\{(y, x) \mid y = cosecx, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}, y \in R - (-1, 1)\right\}.$$

આમ, જો $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}, y \in R - (-1, 1)$ તો, $y = cosecx \Leftrightarrow cosec^{-1}y = x$.

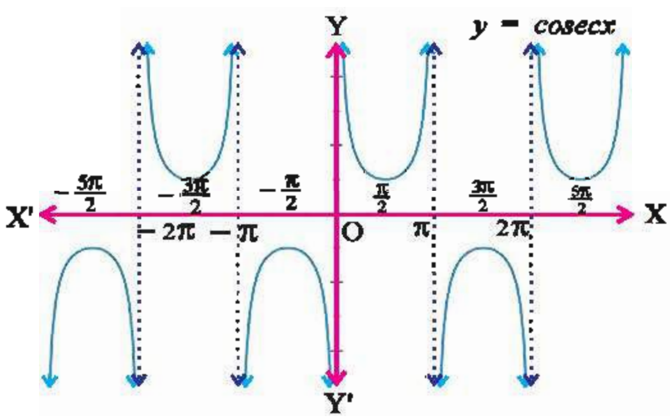
$cosec^{-1}$ નો પ્રદેશ $R - (-1, 1)$ અને વિસ્તાર $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ છે.

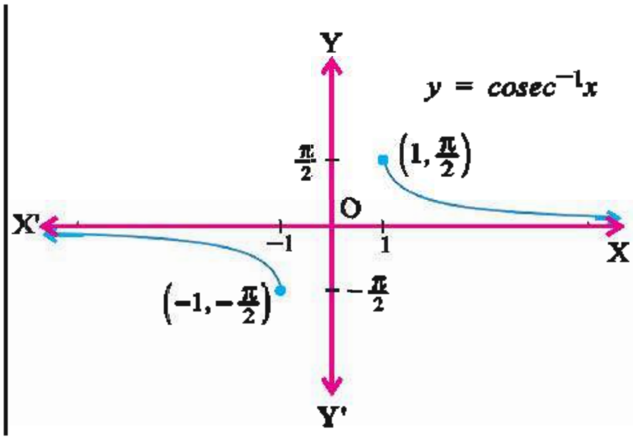
વળી, $cosec\frac{\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$. તેથી, $cosec^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$.

દરેક $x \in R - (-1, 1)$ માટે $cosec(cosec^{-1}x) = x$ અને

પ્રત્યેક $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ માટે $cosec^{-1}(cosecx) = x$.

$y = cosecx$ અને $y = cosec^{-1}x$ ના આલેખ આકૃતિ 2.9 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે મળશે :





આકૃતિ 2.9

ઉદાહરણ 3 : કિંમત શોધો : (1) $tan^{-1}(\sqrt{3})$ (2) $cot^{-1}(-\sqrt{3})$ (3) $cosec^{-1}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

ઉકેલ : (1) $tan^{-1}(\sqrt{3}) = tan^{-1}\left(tan\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$ $\left(\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$

(2) $cot^{-1}(-\sqrt{3}) = cot^{-1}\left(-cot\frac{\pi}{6}\right) = cot^{-1}\left(cot\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6}$ $\left(\frac{5\pi}{6} \in (0, \pi)\right)$

(3) $cosec^{-1}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = cosec^{-1}\left(-cosec\frac{\pi}{3}\right) = cosec^{-1}\left(cosec\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = -\frac{\pi}{3}$ $\left(-\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}\right)$

ઉદાહરણ 4 : કિંમત શોધો : (1) $cos^{-1}\left(cos\frac{2\pi}{3}\right)$ (2) $sin^{-1}\left(sin\frac{2\pi}{3}\right)$ (3) $tan^{-1}\left(tan\frac{3\pi}{4}\right)$

(4) $cot^{-1}\left(tan\frac{7\pi}{4}\right)$ (5) $cos^{-1}\left(sin\frac{\pi}{5}\right)$

ઉકેલ : (1) $cos^{-1}\left(cos\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$ $\left(\frac{2\pi}{3} \in [0, \pi]\right)$

(2) $sin^{-1}\left(sin\frac{2\pi}{3}\right) = sin^{-1}\left(sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right)$ $\left(\frac{2\pi}{3} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$

$= sin^{-1}\left(sin\frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore\ sin^{-1}\left(sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$ $\left(\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$

(3) $tan^{-1}\left(tan\frac{3\pi}{4}\right) = tan^{-1}\left(tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= tan^{-1}\left(-tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= tan^{-1}\left(tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$\therefore\ tan^{-1}\left(tan\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4}$ $\left(-\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$

(4) $cot^{-1}\left(tan\frac{7\pi}{4}\right) = cot^{-1}\left(tan\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= cot^{-1}\left(-tan\frac{\pi}{4}\right)$

$= cot^{-1}\left(cot\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= cot^{-1}\left(cot\frac{3\pi}{4}\right)$

$\therefore\ cot^{-1}\left(tan\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4}$ $\left(\frac{3\pi}{4} \in (0, \pi)\right)$

(5) $cos^{-1}\left(sin\frac{\pi}{5}\right) = cos^{-1}\left(cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right)\right)$

$= cos^{-1}\left(cos\frac{3\pi}{10}\right)$

$\therefore\ cos^{-1}\left(sin\frac{\pi}{5}\right) = \frac{3\pi}{10}$ $\left(\frac{3\pi}{10} \in [0, \pi]\right)$

ઉદાહરણ 5 : કિંમત શોધો :

(1) $cos\left(2sin^{-1}\frac{3}{4}\right)$ (2) $sin\left(2tan^{-1}\frac{4}{5}\right)$ (3) $tan^2\left(\frac{1}{2}cos^{-1}\frac{3}{4}\right)$ (4) $cos\left(3cos^{-1}\frac{2}{3}\right)$

ઉકેલ : (1) ધારો કે $sin^{-1}\frac{3}{4} = \theta$. $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. આથી $sin\theta = \frac{3}{4}$

તેથી, $\cos\left(2\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = \cos 2\theta$

$$= 1 - 2\sin^2\theta = 1 - 2\left(\frac{9}{16}\right) = -\frac{1}{8}$$

$\therefore \quad \cos\left(2\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{8}$

(2) ધારો કે $\tan^{-1}\frac{4}{5} = \theta$. $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. તેથી $\tan\theta = \frac{4}{5}$

$\sin\left(2\tan^{-1}\frac{4}{5}\right) = \sin 2\theta$

$$= \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{2\left(\frac{4}{5}\right)}{1+\frac{16}{25}} = \frac{40}{41}$$

$\therefore \quad \sin\left(2\tan^{-1}\frac{4}{5}\right) = \frac{40}{41}$

(3) ધારો કે $\cos^{-1}\frac{3}{4} = \theta$. $\theta \in [0, \pi]$. માટે $\cos\theta = \frac{3}{4}$

તેથી, $\tan^2\left(\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{3}{4}\right) = \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}} = \frac{4-3}{4+3} = \frac{1}{7}$

$\therefore \quad \tan^2\left(\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{7}$

(4) ધારો કે $\cos^{-1}\frac{2}{3} = \theta$. $\theta \in [0, \pi]$. માટે $\cos\theta = \frac{2}{3}$

તેથી, $\cos\left(3\cos^{-1}\frac{2}{3}\right) = \cos 3\theta$

$$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$= 4\left(\frac{8}{27}\right) - 3\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{32-54}{27} = -\frac{22}{27}$$

$\therefore \quad \cos\left(3\cos^{-1}\frac{2}{3}\right) = -\frac{22}{27}$

ઉદાહરણ 6 : નીચે આપેલાને સરળ સ્વરૂપમાં ફેરવો :

(1) $\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right), -\pi < x < \pi$ **(2)** $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right), -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

ઉકેલ : (1) $\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right) = \tan^{-1}\left(\sqrt{\tan^2\frac{x}{2}}\right) = \tan^{-1}\left(\left|\tan\frac{x}{2}\right|\right)$

વિકલ્પ 1 : જો $-\pi < x < 0$, તો $-\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < 0$

$\therefore \quad \tan\frac{x}{2} < 0$

$\therefore \quad \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right) = \tan^{-1}\left(-\tan\frac{x}{2}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\tan\left(-\frac{x}{2}\right)\right)$

હવે, $0 < -\frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$. તેથી $-\frac{\pi}{2} < -\frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$

$\therefore \quad \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right) = -\frac{x}{2}$

વિકલ્પ 2 : જો $0 \le x < \pi$, તો $0 \le \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$

$\therefore \quad \tan\frac{x}{2} \ge 0$

$$\tan^{-1}\left(\left|\tan\frac{x}{2}\right|\right) = \tan^{-1}\left(\tan\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} \qquad \left(0 \le \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore \quad \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right) = \begin{cases} \frac{x}{2} & 0 \le x < \pi \\ -\frac{x}{2} & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

(2) $$\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)}{\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)^2}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{1 - \tan\frac{x}{2}}{1 + \tan\frac{x}{2}}\right) \qquad \left(\cos\frac{x}{2} \ne 0, \text{ કેમ ?}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right)$$

હવે, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. આથી, $-\frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4}$. માટે $-\frac{\pi}{4} < -\frac{x}{2} < \frac{\pi}{4}$.

$\therefore \quad 0 < \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) < \frac{\pi}{2}$

હવે, $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right) = \tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$

$\therefore \quad \tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

સ્વાધ્યાય 2.1

1. કિંમત શોધો :

(1) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (2) $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ (3) $\sec^{-1}(-2)$

(4) $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ (5) $\sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ (6) $\mathrm{cosec}^{-1}(-\sqrt{2})$

2. કિંમત શોધો :

(1) $\cos^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{7}\right)$ (2) $\sin^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)$

(3) $\tan^{-1}\left(\tan\frac{5\pi}{4}\right)$ (4) $\sec^{-1}\left(\mathrm{cosec}\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$

3. કિંમત શોધો :

(1) $\sin\left(2\tan^{-1}\frac{2}{5}\right)$ (2) $\tan^2\left(\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{2}{3}\right)$

(3) $\sin\left(2\cos^{-1}\frac{4}{5}\right)$ (4) $\tan^2\left(\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)$ (5) $\sin\left(3\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)$

4. સરળ સ્વરૂપમાં ફેરવો :

$$tan^{-1}\left(\frac{cosx - sinx}{cosx + sinx}\right), -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$$

*

2.11 વિરોધી સંખ્યાઓ માટે ત્રિ-પ્રતિવિધેયોનાં મૂલ્યો માટેનાં સૂત્રો

આપણે જોયું કે ત્રિકોણમિતીય વિધેયોના પ્રદેશગણ અને સહપ્રદેશગણને મર્યાદિત કરતાં તે એક-એક અને વ્યાપ્ત બને છે, જે પ્રતિવિધેય મેળવવા માટેની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત છે. વળી આપણે મર્યાદિત પ્રદેશને એવી રીતે પસંદ કર્યો છે કે જેથી તે દરેકનો ઉપગણ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ હોય જ. એટલે કે વિધેયનું મૂલ્ય જ્યારે ધન હોય ત્યારે પ્રતિવિધેયનું મૂલ્ય $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ માં જ મળે. અહીં આપણે એ પણ નોંધીશું કે તેના મર્યાદિત પ્રદેશને એવી રીતે પસંદ કર્યો છે કે દરેક પ્રદેશમાં x હોય તો $-x$ પણ હોય જ. પ્રદેશગણ $[-1, 1]$ અથવા R અથવા R $-$ $(-1, 1)$, એટલે કે $|x| \le 1$ અથવા R અથવા $|x| \ge 1$ હોવાના કારણે જો A એ આમાંનો કોઈ પણ ગણ હોય, તો $x \in A \Leftrightarrow -x \in A$.

x અને $-x$ માટે ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયોનાં મૂલ્યો નીચે આપેલા પ્રમેયમાં દર્શાવ્યા મુજબનો સંબંધ ધરાવે છે :

પ્રમેય 2.1 : (1) $sin^{-1}(-x) = -sin^{-1}x, \quad |x| \le 1$

(2) $cos^{-1}(-x) = \pi - cos^{-1}x, \quad |x| \le 1$

(3) $tan^{-1}(-x) = -tan^{-1}x, \quad x \in R$

(4) $cot^{-1}(-x) = \pi - cot^{-1}x, \quad x \in R$

(5) $cosec^{-1}(-x) = -cosec^{-1}x, \quad |x| \ge 1$

(6) $sec^{-1}(-x) = \pi - sec^{-1}x, \quad |x| \ge 1$

સાબિતી : (1) $|x| \le 1$

ધારો કે $sin^{-1}x = \theta, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, તો $x = sin\theta$.

$$sin(-\theta) = -sin\theta = -x \quad \text{(i)}$$

$$\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} \ge -\theta \ge -\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} \le -\theta \le \frac{\pi}{2}$$

$\therefore \quad -\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ અને $|x| = |-x|$. આથી $|x| \le 1 \Rightarrow |-x| \le 1$

$\therefore \quad$ (i) પરથી, $sin(-\theta) = -x \qquad \left(-\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], |-x| \le 1\right)$

$\therefore \quad sin^{-1}(-x) = -\theta = -sin^{-1}x$

$\therefore \quad sin^{-1}(-x) = -sin^{-1}x$

(2) ધારો કે $cos^{-1}x = \theta, \theta \in [0, \pi], |x| \le 1$, તો $x = cos\theta$.

વળી, $cos(\pi - \theta) = -cos\theta = -x \quad$ (i)

$$\theta \in [0, \pi] \Rightarrow 0 \le \theta \le \pi$$

$$\Rightarrow 0 \ge -\theta \ge -\pi$$

$$\Rightarrow \pi \ge (\pi - \theta) \ge 0$$

$$\Rightarrow 0 \le (\pi - \theta) \le \pi$$

$\therefore$ $(\pi - \theta) \in [0, \pi]$ અને $|x| = |-x|$. આથી $|x| \le 1 \Rightarrow |-x| \le 1$

$\therefore$ (i) પરથી, $cos(\pi - \theta) = -x$ $\qquad (\pi - \theta \in [0, \pi], |-x| \le 1)$

$\therefore$ $cos^{-1}(-x) = \pi - \theta = \pi - cos^{-1}x$

$\therefore$ $cos^{-1}(-x) = \pi - cos^{-1}x$

(3) ધારો કે $tan^{-1}x = \theta$. અહીં, $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $x \in R$. આથી $x = tan\theta$.

હવે, $tan(-\theta) = -tan\theta = -x$ $\qquad$ (i)

$\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} > -\theta > -\frac{\pi}{2}$

$\therefore$ $-\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ અને $x \in R$. આમ $-x \in R$

$\therefore$ (i) પરથી, $tan(-\theta) = -x$ $\qquad \left(-\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), -x \in R\right)$

$\therefore$ $tan^{-1}(-x) = -\theta = -tan^{-1}x$

$\therefore$ $tan^{-1}(-x) = -tan^{-1}x$

આ જ પ્રમાણે (4), (5) અને (6) પણ સાબિત કરી શકાય.

ઉદાહરણ 7 : કિંમત શોધો :

(1) $sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ $\qquad$ (2) $cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\qquad$ (3) $tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ $\qquad$ (4) $cot^{-1}(-1)$

ઉકેલ : (1) $sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$

(2) $cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

(3) $tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$

(4) $cot^{-1}(-1) = \pi - cot^{-1}1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

2.12 વ્યસ્ત સંખ્યાઓ માટેનાં ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયોનાં મૂલ્યો માટેનાં સૂત્રો

હવે આપણે શૂન્યેતર x ના વ્યસ્ત $\frac{1}{x}$ માટે ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયોનાં મૂલ્યો માટેનાં સૂત્ર મેળવીએ.

પ્રમેય 2.2 : (1) $cosec^{-1}x = sin^{-1}\frac{1}{x}$, $|x| \ge 1$

(2) $sec^{-1}x = cos^{-1}\frac{1}{x}$, $|x| \ge 1$

(3) (a) $cot^{-1}x = tan^{-1}\frac{1}{x}$, $x > 0$

(b) $cot^{-1}x = tan^{-1}\frac{1}{x} + \pi$, $x < 0$

સાબિતી : (1) ધારો કે $cosec^{-1}x = \theta$. $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$. આથી, $x = cosec\theta$.

$|x| \ge 1$. તેથી $x \ne 0$ અને $\left|\frac{1}{x}\right| \le 1$.

$cosec\theta = x$

$\therefore$ $sin\theta = \frac{1}{x}$

$\therefore \quad \theta = sin^{-1}\frac{1}{x}$ $\qquad \left(\theta \in \left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}\right) \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \left|\frac{1}{x}\right| \le 1\right)$

$\therefore \quad cosec^{-1}x = sin^{-1}\frac{1}{x}$

(2) ધારો કે $sec^{-1}x = \theta$. $\quad \theta \in [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$. આથી, $x = sec\theta$.

$|x| \ge 1$. તેથી $\left|\frac{1}{x}\right| \le 1$ અને $x \ne 0$.

$sec\theta = x$

$\therefore \quad cos\theta = \frac{1}{x}$

$\therefore \quad \theta = cos^{-1}\frac{1}{x}$ $\qquad \left(\theta \in \left([0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}\right) \subset [0, \pi], \left|\frac{1}{x}\right| \le 1\right)$

$\therefore \quad sec^{-1}x = cos^{-1}\frac{1}{x}$

(3) (a) ધારો કે $cot^{-1}x = \theta$. $\quad \theta \in (0, \pi), x \in R$

$\therefore \quad cot\theta = x$

$x > 0$ અને તેથી $x \ne 0$. માટે $\frac{1}{x} \in R$.

$\therefore \quad tan\theta = \frac{1}{x}$ અને $\theta \in (0, \pi)$

હવે $x > 0$, હોવાથી આપણને $tan\theta = \frac{1}{x} > 0$ મળશે.

વળી, $0 < \theta < \pi$. તેથી $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. $\qquad (tan\theta > 0)$

આથી, $tan\theta = \frac{1}{x}, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \quad \theta = tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

$\therefore \quad cot^{-1}x = tan^{-1}\frac{1}{x}$

(b) આપણે ઉપર જોયું કે, જો $cot^{-1}x = \theta, \theta \in (0, \pi), x \in R$ તો $cot\theta = x$.

$cot\theta = x < 0$ હોવાથી, $tan\theta < 0$ અને $\theta \in (0, \pi)$.

વળી, $x \ne 0$ માટે $\frac{1}{x} \in R$ અને $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ $\qquad (x < 0)$

$\therefore \quad \frac{\pi}{2} - \pi < (\theta - \pi) < \pi - \pi$

$\therefore \quad -\frac{\pi}{2} < (\theta - \pi) < 0$

આમ, $\theta - \pi \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ અને $\frac{1}{x} \in R$, જ્યાં $x \ne 0$.

$tan(\theta - \pi) = tan\theta = \frac{1}{x}$ $\qquad$ (*tan* નું આવર્તમાન π છે)

$\therefore \quad tan(\theta - \pi) = \frac{1}{x}$

$\therefore \quad \theta - \pi = tan^{-1}\frac{1}{x}$ $\qquad \left(\theta - \pi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \frac{1}{x} \in R\right)$

$\therefore \quad tan^{-1}\frac{1}{x} = cot^{-1}x - \pi$

$\therefore \quad x < 0$ માટે $cot^{-1}x = tan^{-1}\frac{1}{x} + \pi$.

(નોંધ : આ પ્રમેય પરથી તારવી શકાય કે,

(1) $sin^{-1}x = cosec^{-1}\frac{1}{x}$, $x \in [-1, 1] - \{0\}$

(2) $cos^{-1}x = sec^{-1}\frac{1}{x}$, $x \in [-1, 1] - \{0\}$

(3) (a) $tan^{-1}x = cot^{-1}\frac{1}{x}$, $x > 0$

(b) $tan^{-1}x = cot^{-1}\frac{1}{x} - \pi$, $x < 0$

2.13 કોટિ સંખ્યાઓ માટે ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયોનાં મૂલ્યોનાં સૂત્રો

પ્રમેય 2.3 : (1) $sin^{-1}x + cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$, $|x| \le 1$

(2) $cosec^{-1}x + sec^{-1}x = \frac{\pi}{2}$, $|x| \ge 1$

(3) $tan^{-1}x + cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$, $x \in R$

સાબિતી : (1) ધારો કે $sin^{-1}x = \theta$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $|x| \le 1$. તો $x = sin\theta$.

હવે, $sin\theta = x$

$\therefore \quad cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = x$

હવે, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} \ge -\theta \le -\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \pi \ge \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \ge 0$

$\Rightarrow 0 \le \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \le \pi$

$\therefore \quad \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \in [0, \pi]$ અને $|x| \le 1$ તથા $cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = x$

$\therefore \quad cos^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - sin^{-1}x$

$\therefore \quad sin^{-1}x + cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

(2) ધારો કે $cosec^{-1}x = \theta$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$, $|x| \ge 1$. તો $x = cosec\theta$.

હવે, $cosec\theta = x$

$\therefore \quad sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = x$

હવે, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \theta \ne 0$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} \ge -\theta \ge -\frac{\pi}{2}, \theta \ne 0$

$\Rightarrow \pi \ge \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \ge 0, \theta \ne 0$

$\Rightarrow 0 \le \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \le \pi, \theta \ne 0$

વળી, $\frac{\pi}{2} - \theta \ne \frac{\pi}{2}$ $\qquad (\theta \ne 0)$

એટલે કે, $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \in [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

$\therefore \quad \frac{\pi}{2} - \theta \in [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, $|x| \geq 1$ તથા $sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = x$.

$\therefore \quad sec^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \theta$

$\therefore \quad \theta + sec^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \quad cosec^{-1}x + sec^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

અથવા બીજી રીતે વિચારતાં, $cosec^{-1}x + sec^{-1}x = sin^{-1}\frac{1}{x} + cos^{-1}\frac{1}{x}$ $\quad \left(|x| \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{|x|} \leq 1\right)$

$= \frac{\pi}{2}$ $\quad$ ((1) પરથી)

(1) પ્રમાણે (3) સાબિત કરી શકાય.

2.14 સરવાળા-બાદબાકી માટે મૂલ્યો

પ્રમેય 2.4 : જો $x > 0, y > 0$, હોય, તો

(1) $tan^{-1}x + tan^{-1}y = tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$, $\quad$ જ્યાં $xy < 1$

(2) $tan^{-1}x + tan^{-1}y = \pi + tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$, $\quad$ જ્યાં $xy > 1$

(3) $tan^{-1}x + tan^{-1}y = \frac{\pi}{2}$, $\quad$ જ્યાં $xy = 1$

(4) $tan^{-1}x - tan^{-1}y = tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$

સાબિતી : અહીં $x > 0, y > 0$.

ધારો કે $tan^{-1}x = \alpha$ અને $tan^{-1}y = \beta$, $\alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \quad tan\alpha = x$ તથા $x > 0$ અને $tan\beta = y$ તથા $y > 0$

$\therefore \quad tan\alpha$ અને $tan\beta$ ધન છે તથા $\alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ હોવાથી $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

(1) $tan(\alpha + \beta) = \frac{tan\alpha + tan\beta}{1 - tan\alpha\, tan\beta} = \frac{x+y}{1-xy}$

અહીં, $x > 0, y > 0$ અને $xy < 1$. તેથી, $(1 - xy) > 0$

$\therefore \quad \frac{x+y}{1-xy} > 0$. તેથી, $tan(\alpha + \beta) > 0$

વળી, $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ એટલે કે $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ અને $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$

$\therefore \quad 0 < \alpha + \beta < \pi$

પરંતુ $tan(\alpha + \beta) > 0$. આથી, $\alpha + \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

હવે, $tan(\alpha + \beta) = \frac{x+y}{1-xy}$

$\therefore \quad \alpha + \beta = tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$. $\quad \left((\alpha + \beta) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$

$\therefore \quad tan^{-1}x + tan^{-1}y = tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$.

(2) $tan(-\pi + \alpha + \beta) = tan(\alpha + \beta)$ (tan નું આવર્તમાન π છે.)

$$= \frac{tan\alpha + tan\beta}{1 - tan\alpha\, tan\beta}$$

$\therefore$ $tan(-\pi + \alpha + \beta) = \frac{x + y}{1 - xy}$

હવે, $x > 0$, $y > 0$. વળી, $xy > 1$ તેથી $1 - xy < 0$

$\therefore$ $\frac{x + y}{1 - xy} < 0$

$\therefore$ $tan(-\pi + \alpha + \beta) < 0$

હવે, $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$\therefore$ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ અને $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ $0 < \alpha + \beta < \pi$

$\therefore$ $-\pi < \alpha + \beta - \pi < 0$

પરંતુ, $tan(-\pi + \alpha + \beta) < 0$.

$\therefore$ $-\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta - \pi < 0$. આથી, $\alpha + \beta - \pi \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$

હવે, $tan(-\pi + \alpha + \beta) = \frac{x + y}{1 - xy}$, $\alpha + \beta - \pi \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$

$\therefore$ $-\pi + \alpha + \beta = tan^{-1}\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right)$.

$\therefore$ $\alpha + \beta = tan^{-1}\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right) + \pi$

$\therefore$ $tan^{-1}x + tan^{-1}y = tan^{-1}\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right) + \pi$

(3) $tan^{-1}x + tan^{-1}y = tan^{-1}x + tan^{-1}\frac{1}{x}$ $(xy = 1)$

$= tan^{-1}x + cot^{-1}x$ $(x > 0)$

$= \frac{\pi}{2}$

(4) આપણે જોયું કે, $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

તેથી, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ અને $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ એટલે કે $-\frac{\pi}{2} < -\beta < 0$.

$\therefore$ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ અને $-\frac{\pi}{2} < -\beta < 0$.

$\therefore$ $-\frac{\pi}{2} < (\alpha - \beta) < \frac{\pi}{2}$

તેથી, $(\alpha - \beta) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$tan(\alpha - \beta) = \frac{tan\alpha - tan\beta}{1 + tan\alpha\, tan\beta}$$

$\therefore$ $tan(\alpha - \beta) = \frac{x - y}{1 + xy}$ $\alpha - \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore$ $\alpha - \beta = tan^{-1}\left(\frac{x - y}{1 + xy}\right)$ $\left(\frac{x - y}{1 + xy} \in R \text{ અને } x > 0, y > 0\right)$

$\therefore$ $tan^{-1}x - tan^{-1}y = tan^{-1}\left(\frac{x - y}{1 + xy}\right)$

ઉદાહરણ 8 : સાબિત કરો :

(1) $tan^{-1}\frac{2}{11} + tan^{-1}\frac{7}{24} = tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

(2) $cot^{-1}\frac{1}{2} + cot^{-1}\frac{1}{3} = \frac{3\pi}{4}$

(3) $tan^{-1}\frac{1}{7} + tan^{-1}\frac{4}{7} + tan^{-1}\frac{9}{7} = \frac{\pi}{2}$

ઉકેલ : (1) ડા.બા. $= tan^{-1}\frac{2}{11} + tan^{-1}\frac{7}{24}$

$= tan^{-1}\left(\frac{\frac{2}{11}+\frac{7}{24}}{1-\frac{2}{11}\times\frac{7}{24}}\right)$ $\left(\frac{2}{11}\times\frac{7}{24}<1\right)$

$= tan^{-1}\left(\frac{48+77}{264-14}\right) = tan^{-1}\left(\frac{125}{250}\right) = tan^{-1}\frac{1}{2}$ = જ.બા.

(2) ડા.બા. $= cot^{-1}\frac{1}{2} + cot^{-1}\frac{1}{3}$

$= tan^{-1}2 + tan^{-1}3$ $(2 > 0, 3 > 0)$

$= \pi + tan^{-1}\left(\frac{2+3}{1-2\times 3}\right)$ $(2\times 3 > 1)$

$= \pi + tan^{-1}(-1)$

$= \pi - tan^{-1}(1)$ $(tan^{-1}(-x) = -tan^{-1}x)$

$= \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ = જ.બા.

(3) ડા.બા. $= tan^{-1}\frac{1}{7} + tan^{-1}\frac{4}{7} + tan^{-1}\frac{9}{7}$

$= tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{7}+\frac{4}{7}}{1-\frac{1}{7}\times\frac{4}{7}}\right) + tan^{-1}\frac{9}{7}$ $\left(\frac{1}{7}\times\frac{4}{7}<1\right)$

$= tan^{-1}\left(\frac{7+28}{49-4}\right) + tan^{-1}\frac{9}{7}$

$= tan^{-1}\left(\frac{35}{45}\right) + tan^{-1}\left(\frac{9}{7}\right)$

$= tan^{-1}\left(\frac{7}{9}\right) + tan^{-1}\left(\frac{9}{7}\right)$

$= \frac{\pi}{2}$ = જ.બા. $\left(\frac{7}{9}\times\frac{9}{7}=1\right)$

ઉદાહરણ 9 : સાબિત કરો કે $3sin^{-1}x = sin^{-1}(3x - 4x^3)$, જ્યાં, $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$.

ઉકેલ : ધારો કે $sin^{-1}x = \theta$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $|x| \le 1$. તો $x = sin\theta$.

હવે, $sin3\theta = 3sin\theta - 4sin^3\theta$

$\therefore \quad sin3\theta = 3x - 4x^3$

હવે, $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \Rightarrow sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \le sin\theta \le sin\frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{6} \qquad \left(sin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ પર } \uparrow \text{ છે.}\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} \le 3\theta \le \frac{\pi}{2}$$

હવે, $sin3\theta = 3x - 4x^3$. $\quad -\frac{\pi}{2} \le 3\theta \le \frac{\pi}{2}$

$\therefore \quad 3\theta = sin^{-1}(3x - 4x^3)$

$\therefore \quad 3sin^{-1}x = sin^{-1}(3x - 4x^3)$

ઉદાહરણ 10 : સાબિત કરો : **(1)** $tan^{-1}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}} = \frac{1}{2}cos^{-1}\frac{x}{a}$, $-a < x < a$, $a \in R^+$

(2) $cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+sinx}+\sqrt{1-sinx}}{\sqrt{1+sinx}-\sqrt{1-sinx}}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

(3) $tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}cos^{-1}x$, $0 < x < 1$.

ઉકેલ : (1) $tan^{-1}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$, $-a < x < a$, $a \in R^+$ નો વિચાર કરીએ.

$-a < x < a \Rightarrow -1 < \frac{x}{a} < 1 \qquad (a \in R^+)$

$\therefore \quad \frac{x}{a} \in (-1, 1)$

$\therefore \quad \exists\theta \in (0, \pi)$, $cos\theta = \frac{x}{a}$ અથવા $\theta = cos^{-1}\frac{x}{a}$

હવે,
$$tan^{-1}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}} = tan^{-1}\sqrt{\frac{a-acos\theta}{a+acos\theta}}$$
$$= tan^{-1}\sqrt{\frac{1-cos\theta}{1+cos\theta}}$$
$$= tan^{-1}\sqrt{tan^2\frac{\theta}{2}}$$
$$= tan^{-1}\left|tan\frac{\theta}{2}\right|$$
$$= tan^{-1}\left(tan\frac{\theta}{2}\right) \qquad \left(0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \frac{\theta}{2} \qquad \left(\frac{\theta}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2}cos^{-1}\frac{x}{a}$$

(2) ડા.બા. $= cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+sinx}+\sqrt{1-sinx}}{\sqrt{1+sinx}-\sqrt{1-sinx}}\right)$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

$$= cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{\left(cos\frac{x}{2}+sin\frac{x}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(cos\frac{x}{2}-sin\frac{x}{2}\right)^2}}{\sqrt{\left(cos\frac{x}{2}+sin\frac{x}{2}\right)^2}-\sqrt{\left(cos\frac{x}{2}-sin\frac{x}{2}\right)^2}}\right)$$

$$= cot^{-1}\left(\frac{\left|cos\frac{x}{2}+sin\frac{x}{2}\right|+\left|cos\frac{x}{2}-sin\frac{x}{2}\right|}{\left|cos\frac{x}{2}+sin\frac{x}{2}\right|-\left|cos\frac{x}{2}-sin\frac{x}{2}\right|}\right)$$

હવે, $\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$.

$\therefore \quad cos\frac{x}{2} < sin\frac{x}{2}$ અને $cos\frac{x}{2} > 0$, $sin\frac{x}{2} > 0$

વળી, $-\frac{\pi}{4} > -\frac{x}{2} > -\frac{\pi}{2}$. તેથી $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} > \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} > 0$.

$\therefore \quad 0 < \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4}$.

$\therefore$ ડા.બા. $= cot^{-1}\left(\frac{\left(cos\frac{x}{2} + sin\frac{x}{2}\right) - \left(cos\frac{x}{2} - sin\frac{x}{2}\right)}{\left(cos\frac{x}{2} + sin\frac{x}{2}\right) + \left(cos\frac{x}{2} - sin\frac{x}{2}\right)}\right)$ $\quad \left(\left|cos\frac{x}{2} - sin\frac{x}{2}\right| = -\left(cos\frac{x}{2} - sin\frac{x}{2}\right)\right)$

$= cot^{-1}\left(tan\frac{x}{2}\right)$

$= cot^{-1}\left(cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)\right)$

$= \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$ = જ.બા. $\quad$ ((i) પરથી)

(3) $tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}\right)$, $0 < x < 1$

ધારો કે $\theta = cos^{-1}x$, $\theta \in (0, \pi)$. $x \in (0, 1)$. તેથી $x = cos\theta$.

ડા.બા. $= tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+cos\,\theta} - \sqrt{1-cos\,\theta}}{\sqrt{1+cos\,\theta} + \sqrt{1-cos\,\theta}}\right)$

$= tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2cos^2\frac{\theta}{2}} - \sqrt{2sin^2\frac{\theta}{2}}}{\sqrt{2cos^2\frac{\theta}{2}} + \sqrt{2sin^2\frac{\theta}{2}}}\right)$

$= tan^{-1}\left(\frac{\left|cos\frac{\theta}{2}\right| - \left|sin\frac{\theta}{2}\right|}{\left|cos\frac{\theta}{2}\right| + \left|sin\frac{\theta}{2}\right|}\right)$

હવે, $0 < x < 1 \Rightarrow 0 < cos\theta < 1$

$\Rightarrow cos\frac{\pi}{2} < cos\,\theta < cos0$

$\Rightarrow 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ $\quad$ (cos પ્રથમ ચરણમાં ↓ વિધેય છે.)

$\Rightarrow 0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{4}$

વળી, $-\frac{\pi}{4} < -\frac{\theta}{2} < 0$

તેથી, $0 < \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) < \frac{\pi}{4}$

ડા.બા. $= tan^{-1}\left(\frac{cos\frac{\theta}{2} - sin\frac{\theta}{2}}{cos\frac{\theta}{2} + sin\frac{\theta}{2}}\right)$ $\quad \left(0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{4}\right)$

$= tan^{-1}\left(\frac{1 - tan\frac{\theta}{2}}{1 + tan\frac{\theta}{2}}\right)$ $\quad \left(cos\frac{\theta}{2} \neq 0.\right.$ કેમ ?$\left.\right)$

$= tan^{-1}\left(tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right)$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}cos^{-1}x$ = જ.બા. $\quad \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)\right)$

2.15 ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયોના આંતર સંબંધો

(1) $sin^{-1}x = cos^{-1}\sqrt{1-x^2} = tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, જ્યાં $0 < x < 1$.

(2) $cos^{-1}x = sin^{-1}\sqrt{1-x^2} = tan^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, જ્યાં $0 < x < 1$.

(3) $tan^{-1}x = cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, જ્યાં $x > 0$

સાબિતી : ધારો કે, $sin^{-1}x = \theta$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. તેથી $sin\theta = x$.

$sin\theta = x$ તથા $x > 0$. તેથી, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. $\left(x \neq 0, 1 \Rightarrow \theta \neq 0, \frac{\pi}{2}\right)$

તેથી, $cos^2\theta = 1 - sin^2\theta = 1 - x^2$

$\therefore \quad cos\theta = \sqrt{1-x^2}$ $\left(\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ માં } cos\theta > 0\right)$

$\therefore \quad \theta = cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$ $\left(\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), 0 < \sqrt{1-x^2} < 1\right)$

$\therefore \quad sin^{-1}x = cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$

હવે, $tan\theta = \frac{sin\theta}{cos\theta}$

$tan\theta = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\therefore \quad \theta = tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$\therefore \quad sin^{-1}x = tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

આ જ રીતે (2) અને (3) પણ મેળવી શકાય.

ઉદાહરણ 11 : સાબિત કરો : $sin^{-1}\frac{3}{5} + cos^{-1}\frac{15}{17} + sin^{-1}\frac{36}{85} = \frac{\pi}{2}$

ઉકેલ : ડા.બા. $= sin^{-1}\frac{3}{5} + cos^{-1}\frac{15}{17} + sin^{-1}\frac{36}{85}$

$$= tan^{-1}\frac{\frac{3}{5}}{\sqrt{1-\frac{9}{25}}} + tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\frac{225}{289}}}{\frac{15}{17}} + tan^{-1}\frac{\frac{36}{85}}{\sqrt{1-\frac{36^2}{85^2}}}$$

$$= tan^{-1}\frac{3}{\sqrt{25-9}} + tan^{-1}\frac{\sqrt{289-225}}{15} + tan^{-1}\frac{36}{\sqrt{85^2-36^2}}$$

$$= tan^{-1}\frac{3}{4} + tan^{-1}\frac{8}{15} + tan^{-1}\frac{36}{77}$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{\frac{3}{4}+\frac{8}{15}}{1-\frac{3}{4}\times\frac{8}{15}}\right) + tan^{-1}\left(\frac{36}{77}\right) \qquad \left(\frac{3}{4} \times \frac{8}{15} < 1\right)$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{45+32}{60-24}\right) + tan^{-1}\left(\frac{36}{77}\right)$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{77}{36}\right) + tan^{-1}\left(\frac{36}{77}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} = \text{જ.બા.} \qquad \left(\frac{77}{36} \times \frac{36}{77} = 1\right)$$

સ્વાધ્યાય 2.2

1. કિંમત શોધો :

(1) $sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} - cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2tan^{-1}(1)$

(2) $3sin^{-1}\frac{1}{2} + 4cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} + sec^{-1} 1$

(3) $cot^{-1}(1) + 3sin^{-1}\frac{1}{2} - cosec^{-1}(-2) - 3tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$

(4) $5cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 4tan^{-1}(-\sqrt{3}) + 3sin^{-1}(1)$

(5) $cos\left(sin^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right)\right) + sin\left(tan^{-1}\frac{3}{4}\right) + cos\left(cosec^{-1}\frac{5}{3}\right)$

(6) $sin\left(\frac{\pi}{2} - cos^{-1}\frac{3}{7}\right) + cos\left(\frac{3\pi}{2} - sin^{-1}\frac{2}{7}\right) + cot\left(tan^{-1}\frac{7}{6}\right)$

(7) $sin^{-1}\left(sin\frac{5\pi}{6}\right) + cos^{-1}\left(cos\frac{5\pi}{3}\right) + tan^{-1}\left(tan\frac{7\pi}{3}\right)$

2. સાબિત કરો :

(1) $tan^{-1}\frac{4}{5} + tan^{-1}\frac{2}{3} = tan^{-1}\frac{22}{7}$

(2) $tan^{-1}\frac{1}{7} + tan^{-1}\frac{1}{13} = tan^{-1}\frac{2}{9}$

(3) $tan^{-1}\frac{1}{2} + tan^{-1}\frac{1}{5} + tan^{-1}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

(4) $tan^{-1}\frac{1}{3} + \frac{1}{2}tan^{-1}\frac{1}{7} = \frac{\pi}{8}$

(5) $tan^{-1}\frac{1}{5} + tan^{-1}\frac{1}{3} - tan^{-1}\frac{1}{7} = tan^{-1}\frac{21}{53}$

(6) $tan^{-1}\frac{1}{5} + tan^{-1}\frac{1}{7} + tan^{-1}\frac{1}{3} + tan^{-1}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

3. સાબિત કરો :

(1) $cos^{-1}\frac{4}{5} + sin^{-1}\frac{5}{13} = tan^{-1}\left(\frac{56}{33}\right)$

(2) $sin^{-1}\frac{3}{5} + cos^{-1}\frac{4}{5} = cot^{-1}\left(\frac{7}{24}\right)$

(3) $2sin^{-1}\frac{5}{13} = cos^{-1}\frac{119}{169}$

(4) $2sin^{-1}\frac{3}{5} + cos^{-1}\frac{24}{25} = \frac{\pi}{2}$

(5) $2cot^{-1} 2 + cosec^{-1}\frac{5}{3} = \frac{\pi}{2}$

(6) $sin^{-1}\frac{3}{5} + sin^{-1}\frac{8}{17} + sin^{-1}\frac{36}{85} = \frac{\pi}{2}$

4. સાબિત કરો :

(1) $2cot^{-1}\frac{1}{3} + tan^{-1}\frac{3}{4} = \pi$

(2) $cot^{-1} 1 + tan^{-1} 2 + cot^{-1}\frac{1}{3} = \pi$

(3) $cot^{-1}\frac{1}{5} + \frac{1}{2}cot^{-1}\frac{12}{5} = \frac{\pi}{2}$

(4) $sin^{-1}\frac{12}{13} + cos^{-1}\frac{4}{5} + tan^{-1}\frac{63}{16} = \pi$

*

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ 12 : સાબિત કરો કે $cos^{-1} a + cos^{-1} b + cos^{-1} c = \pi \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$, જ્યાં $a, b, c \in [-1, 1]$.

ઉકેલ : ધારો કે $cos^{-1}a = \alpha$, $cos^{-1}b = \beta$, $cos^{-1}c = \gamma$ $\qquad [\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi]]$

$\therefore \quad a = cos\alpha, \ b = cos\beta, \ c = cos\gamma$

હવે, $cos^{-1}a + cos^{-1}b + cos^{-1}c = \pi$

$\therefore \quad \alpha + \beta + \gamma = \pi$

$\therefore \quad \alpha + \beta = \pi - \gamma$

$\therefore \quad cos(\alpha + \beta) = cos(\pi - \gamma)$

$\therefore \quad cos\alpha \, cos\beta - sin\alpha \, sin\beta = -cos\gamma$

$\therefore \quad cos\alpha \, cos\beta + cos\gamma = sin\alpha \, sin\beta$

$\therefore \quad (cos\alpha \, cos\beta + cos\gamma)^2 = sin^2\alpha \, sin^2\beta$

$\therefore \quad (ab + c)^2 = (1 - a^2)(1 - b^2)$

$\therefore \quad a^2b^2 + 2abc + c^2 = 1 - a^2 - b^2 + a^2b^2$

$\therefore \quad a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$

ઉદાહરણ 13 : સાબિત કરો કે $cosec[tan^{-1}(cos(cot^{-1}(sec(sin^{-1} a))))] = \sqrt{3-a^2}$, જ્યાં $0 < a < 1$.

ઉકેલ : ડા.બા. $= cosec[tan^{-1}(cos(cot^{-1}(sec(sin^{-1} a))))]$

$$= cosec\left[tan^{-1}\left(cos\left(cot^{-1}\left(sec\left(sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\right)\right)\right)\right)\right] \qquad \left(sin^{-1} a = cos^{-1}\sqrt{1-a^2}\right)$$

$$= cosec\left[tan^{-1}\left(cos\left(cot^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\right)\right)\right]$$

$$= cosec\left[tan^{-1}\left(cos\left(tan^{-1}\sqrt{1-a^2}\right)\right)\right] \qquad \left(\sqrt{1-a^2} > 0\right)$$

$$= cosec\left[tan^{-1}\left(cos\left(cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2-a^2}}\right)\right)\right] \qquad \left(tan^{-1}x = cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= cosec\left(tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2-a^2}}\right)$$

$$= cosec\left(sin^{-1}\frac{\frac{1}{\sqrt{2-a^2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{2-a^2}}}\right) \qquad \left(tan^{-1}x = sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= cosec\left(sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3-a^2}}\right)$$

$$= cosec\left(cosec^{-1}\sqrt{3-a^2}\right)$$

$$= \sqrt{3-a^2} = \text{જ.બા.}$$

ઉદાહરણ 14 : નીચે આપેલાં સમીકરણો ઉકેલો :

(1) $tan^{-1}\sqrt{3} + 2tan^{-1}x = \frac{5\pi}{6}$ $\qquad$ **(2)** $tan^{-1}2x + 2tan^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

ઉકેલ : (1) $tan^{-1}\sqrt{3} + 2tan^{-1}x = \frac{5\pi}{6}$

$\therefore \quad \frac{\pi}{3} + 2tan^{-1}x = \frac{5\pi}{6}$

$\therefore \quad 2tan^{-1}x = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}$

$\therefore \quad 2tan^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \quad tan^{-1}x = \frac{\pi}{4}$

$\therefore \quad x = tan\frac{\pi}{4}$

$\therefore \quad x = 1$

આ સમીકરણો ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયનાં સૂત્રોનો ઉપયોગ કરી સરળતાથી ઉકેલી શકાય છે. પ્રતિવિધેયો વ્યાખ્યાયિત કરવા માટે ત્રિકોણમિતીય વિધેયના પ્રદેશ અને વિસ્તાર મર્યાદિત કર્યા હોય છે તેથી ઉકેલ મેળવ્યા બાદ તેની ચકાસણી કરી ઉકેલ નક્કી કરવો જોઈએ.

ચકાસણી : સમીકરણમાં $x = 1$ લેતાં,

ડા.બા. $= tan^{-1}\sqrt{3} + 2tan^{-1}x = \frac{\pi}{3} + 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6} =$ જ.બા.

$\therefore$ ઉકેલગણ $\{1\}$ છે.

(2) $tan^{-1}2x + 2tan^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

સ્પષ્ટ છે કે જો $x \geq 1$, તો $2tan^{-1}x \geq 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ $\quad (x \geq 1)$

આથી, $tan^{-1}2x \leq 0$ જે શક્ય નથી.

જો $x < 0$, તો ડા.બા. < 0, જ.બા. > 0, જે શક્ય નથી.

$\therefore \quad 0 < x < 1.$

અહીં, $tan^{-1}2x + 2tan^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \quad tan^{-1}2x + tan^{-1}x + tan^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \quad tan^{-1}2x + tan^{-1}\left(\frac{x+x}{1-x^2}\right) = \frac{\pi}{2} \quad (0 < x^2 < 1)$

$\therefore \quad tan^{-1}2x + tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = \frac{\pi}{2}$

આપણે જાણીએ છીએ કે $xy = 1 \Leftrightarrow tan^{-1}x + tan^{-1}y = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \quad 2x \cdot \frac{2x}{1-x^2} = 1$

$\therefore \quad 4x^2 = 1 - x^2$

$\therefore \quad 5x^2 = 1$

$\therefore \quad x^2 = \frac{1}{5}$

$\therefore \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$. પરંતુ $x > 0$

$\therefore \quad x = \frac{1}{\sqrt{5}}$

ચકાસણી : $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ લેતાં,

ડા.બા. $= tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}} + 2tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}$

$= tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}} + tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} + tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}$

$= tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}} + tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}}{1-\frac{1}{5}}\right)$

$= tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}} + tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{5}}{5-1}\right)$

$= tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}} + tan^{-1}\frac{\sqrt{5}}{2}$

$= \frac{\pi}{2}$ = જ.બા.

$\therefore$ ઉકેલગણ $\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$ છે.

ઉદાહરણ 15 : જો $0 < x < 1$ અને $tan^{-1}(1 - x)$, $tan^{-1}x$ અને $tan^{-1}(1 + x)$ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તો સાબિત કરો કે $x^3 + x^2 = 1$.

ઉકેલ : અહીં, $tan^{-1}(1 - x)$, $tan^{-1}x$ અને $tan^{-1}(1 + x)$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$2tan^{-1}x = tan^{-1}(1 - x) + tan^{-1}(1 + x)$

$\therefore$ $tan^{-1}x + tan^{-1}x = tan^{-1}\frac{1-x+1+x}{1-(1-x^2)}$ $\quad$ **$(1 - x > 0,\ 1 + x > 0,\ 0 < 1 - x^2 < 1)$**

$\therefore$ $tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = tan^{-1}\left(\frac{2}{x^2}\right)$ $\quad$ **$(0 < x^2 < 1)$**

$\therefore$ $\frac{2x}{1-x^2} = \frac{2}{x^2}$ $\quad$ **(tan^{-1} એક-એક છે.)**

$\therefore$ $x^3 = 1 - x^2$

$\therefore$ $x^3 + x^2 = 1$

ઉદાહરણ 16 : ઉકેલો : $cos^{-1}x + sin^{-1}2x = \frac{\pi}{6}$

ઉકેલ : $cos^{-1}x + sin^{-1}2x = \frac{\pi}{6}$

ધારો કે $cos^{-1}x = \alpha$, $\alpha \in [0, \pi]$. તો $x = cos\alpha$

$\therefore$ $sin\alpha = \sqrt{1-cos^2\alpha} = \sqrt{1-x^2}$ $\quad$ **($sin\alpha \geq 0$ કારણ કે $\alpha \in [0, \pi]$)**

ધારો કે $sin^{-1}2x = \beta$, $\beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. તો $2x = sin\beta$

$\therefore$ $cos\beta = \sqrt{1-4x^2}$ $\quad$ **$\left(cos\beta \geq 0 \text{ કારણ કે } \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$**

હવે, $cos^{-1}x + sin^{-1}2x = \frac{\pi}{6}$

$\therefore$ $\alpha + \beta = \frac{\pi}{6}$

$\therefore$ $sin(\alpha + \beta) = sin\frac{\pi}{6}$

$\therefore$ $sin\alpha\, cos\beta + cos\alpha\, sin\beta = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad \sqrt{1-x^2}\ \sqrt{1-4x^2} + x(2x) = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad \sqrt{1-x^2}\ \sqrt{1-4x^2} = \frac{1}{2} - 2x^2$

$\therefore \quad \sqrt{1-5x^2+4x^4} = \frac{1}{2} - 2x^2$

$\therefore \quad 1 - 5x^2 + 4x^4 = \left(\frac{1}{2} - 2x^2\right)^2$

$\therefore \quad 1 - 5x^2 + 4x^4 = \frac{1}{4} - 2x^2 + 4x^4$

$\therefore \quad 3x^2 = \frac{3}{4}$

$\therefore \quad x^2 = \frac{1}{4}$

$\therefore \quad x = \pm\frac{1}{2}$

ચકાસણી : $x = \frac{1}{2}$ માટે

ડા.બા. $= cos^{-1}\frac{1}{2} + sin^{-1}1 = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \neq \frac{\pi}{6} \neq$ જ.બા.

$x = -\frac{1}{2}$ માટે

ડા.બા. $= cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + sin^{-1}(-1)$

$= \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} =$ જ.બા.

$\therefore$ ઉકેલગણ $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ છે.

સ્વાધ્યાય 2

1. સાબિત કરો :

(1) $sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2}) = 2sin^{-1}x, \quad |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$

(2) $cos^{-1}(2x^2 - 1) = 2cos^{-1}x, \quad 0 < x < 1$

(3) $cos^{-1}(4x^3 - 3x) = 3cos^{-1}x, \quad \frac{1}{2} < x < 1$

(4) $cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}tan^{-1}x$

(5) $sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = 2tan^{-1}x, |x| \le 1$

(6) $tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right) = 3tan^{-1}x, 0 < x < \frac{1}{\sqrt{3}}.$

(7) $cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+sinx}+\sqrt{1-sinx}}{\sqrt{1+sinx}-\sqrt{1-sinx}}\right) = \frac{x}{2}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$

(8) $tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+cosx}+\sqrt{1-cosx}}{\sqrt{1+cosx}-\sqrt{1-cosx}}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}, \quad \pi < x < \frac{3\pi}{2}.$

(9) $tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}cos^{-1}x^2, \quad -1 < x < 1, x \neq 0$

(10) $\tan^{-1}\left(\frac{a\cos x - b\sin x}{b\cos x + a\sin x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) - x,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},\ \frac{a}{b}\tan x > -1$

(11) $\sin^{-1}\left(\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4} + x, \quad -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$

2. (1) જો $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \pi$, તો સાબિત કરો કે $x + y + z = xyz$

(2) જો $\cot^{-1}\frac{1}{x} + \cot^{-1}\frac{1}{y} + \cot^{-1}\frac{1}{z} = \frac{\pi}{2}$, તો સાબિત કરો કે $xy + yz + zx = 1$

(3) જો $\cot^{-1}a + \cot^{-1}b + \cot^{-1}c = \pi$, તો સાબિત કરો કે $ab + bc + ca = 1$

(4) જો $a > b > c > 0$, તો સાબિત કરો કે $\cot^{-1}\left(\frac{ab+1}{a-b}\right) + \cot^{-1}\left(\frac{bc+1}{b-c}\right) + \cot^{-1}\left(\frac{ca+1}{c-a}\right) = \pi$.

(5) જો $\tan^{-1}\frac{yz}{xr} + \tan^{-1}\frac{zx}{yr} + \tan^{-1}\frac{xy}{zr} = \frac{\pi}{2}$, તો સાબિત કરો કે $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

(6) જો $\tan^{-1}\sqrt{\frac{ar}{bc}} + \tan^{-1}\sqrt{\frac{br}{ca}} + \tan^{-1}\sqrt{\frac{cr}{ab}} = \pi$, તો સાબિત કરો કે $a + b + c = r$. $(a, b, c, r > 0)$

(7) જો $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y + \sin^{-1}z = \pi$, તો સાબિત કરો કે $x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2} + z\sqrt{1-z^2} = 2xyz$.

(8) સાબિત કરો કે $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{a}{b}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{a}{b}\right) = \frac{2b}{a}$

(9) સાબિત કરો : $\sum_{r=1}^{n} \tan^{-1}\left(\frac{1}{1+r(r+1)}\right) = \tan^{-1}(n+1) - \frac{\pi}{4}$.

(10) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\tan 2A\right) + \tan^{-1}(\cot A) + \tan^{-1}(\cot^3 A) = \begin{cases} 0, \text{ જો } \frac{\pi}{4} < A < \frac{\pi}{2} \\ \pi, \text{ જો } 0 < A < \frac{\pi}{4} \end{cases}$

3. નીચે આપેલાં સમીકરણો ઉકેલો :

(1) $\tan^{-1}\frac{x-1}{x-2} + \tan^{-1}\frac{x+1}{x+2} = \frac{\pi}{4}$.

(2) $\tan^{-1}2x + \tan^{-1}3x = \frac{\pi}{4}$.

(3) $2\tan^{-1}(\cos x) = \tan^{-1}(2\operatorname{cosec} x)$

(4) $\sin^{-1}x + \cos^{-1}2x = \frac{\pi}{6}$

(5) $\sin^{-1}\frac{5}{x} + \sin^{-1}\frac{12}{x} = \frac{\pi}{2}$

(6) $\tan^{-1}(x + 1) + \tan^{-1}(x - 1) = \tan^{-1}\frac{8}{31}$

(7) $\tan^{-1}2x + \tan^{-1}\left(\frac{1}{x+4}\right) = \frac{\pi}{2}$

4. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને $\square$ માં લખો :

વિભાગ A (1 ગુણ)

(1) $\sin\left(3\sin^{-1}\frac{1}{3}\right) = ...$ $\square$

(a) $\frac{23}{27}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{27}{23}$ (d) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

(2) જો કોઈક $x \in (-1, 1)$ માટે $sin^{-1}x = \frac{\pi}{7}$ તો $cos^{-1}x = ...$

(a) $\frac{3\pi}{14}$ (b) $\frac{5\pi}{14}$ (c) $\frac{\pi}{14}$ (d) $\frac{6\pi}{7}$

(3) $sec^2(tan^{-1}2) + cosec^2(cot^{-1}3) = ...$.

(a) 15 (b) 6 (c) 13 (d) 25

(4) $cos^{-1}\left(cos\frac{7\pi}{6}\right) = ...$.

(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{5\pi}{6}$ (c) $-\frac{\pi}{6}$ (d) $\frac{7\pi}{6}$

(5) cos^{-1} નો પ્રદેશગણ ...... છે.

(a) $(-\infty, \infty)$ (b) $[0, 1]$ (c) $[0, \pi]$ (d) $[-1, 1]$

(6) tan^{-1} નો વિસ્તાર ...... છે.

(a) $(-\pi, \pi)$ (b) R (c) $(0, \pi)$ (d) $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

(7) $cos^{-1}\left(cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $-\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{4\pi}{3}$ (d) $\frac{2\pi}{3}$

(8) $sin^{-1}\left(cos\frac{\pi}{6}\right) = ...$.

(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{3\pi}{2}$

(9) $sin^{-1}\left(sin\frac{5\pi}{3}\right)$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $-\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{5\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{2\pi}{3}$

(10) $cos\left(cos^{-1}\left(-\frac{1}{5}\right) + sin^{-1}\left(-\frac{1}{5}\right)\right) = ...$.

(a) $\frac{4}{9}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) 0 (d) $-\frac{1}{3}$

(11) $cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = ...$.

(a) $\frac{5\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{4\pi}{3}$ (d) $\frac{4\pi}{6}$

(12) $sin^{-1}\left(sin\frac{7\pi}{6}\right) = ...$.

(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{5\pi}{6}$ (c) $\frac{-\pi}{6}$ (d) $\frac{7\pi}{6}$

(13) $sin\left\{\frac{\pi}{3} - sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right\} = ...$.

(a) 0 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) 1

(14) $sin\left(cos^{-1}\frac{4}{5}\right)$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{3}{5}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{3}{4}$

(15) $cos\left(tan^{-1}\frac{4}{3}\right)$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{3}{5}$

વિભાગ B (2 ગુણ)

(16) $2tan^{-1}5 + tan^{-1}\frac{5}{12} =$ ......

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{2\pi}{3}$ (c) π (d) $\frac{\pi}{2}$

(17) જો $sin^{-1}x + sin^{-1}y = \frac{2\pi}{3}$, તો $cos^{-1}x + cos^{-1}y =$ ......

(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) π

(18) $4sin^{-1}x + cos^{-1}x = \pi$, તો $x =$ ......

(a) $-\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $-\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{2}$

(19) $sin\left(tan^{-1}\left(tan\frac{7\pi}{6}\right)\right) + cos\left(cos^{-1}\left(cos\frac{7\pi}{3}\right)\right) =$ ......

(a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(20) જો $cos(2sin^{-1}x) = \frac{1}{9}$, તો xનું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

(21) $sin[2sin^{-1}(cosA)]$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $sinA$ (b) $cosA$ (c) $cos2A$ (d) $sin2A$

(22) $sin\left[3sin^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)\right]$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $-\frac{3}{5}$ (b) $\frac{79}{12}$ (c) $-\frac{71}{125}$ (d) $\frac{71}{125}$

(23) $tan^{-1}\left(-tan\frac{13\pi}{8}\right) =$ ......

(a) $-\frac{5\pi}{8}$ (b) $\frac{3\pi}{8}$ (c) $-\frac{3\pi}{8}$ (d) $\frac{13\pi}{8}$

(24) $sin^{-1}\left(sin\frac{32\pi}{7}\right) =$ ......

(a) $\frac{3\pi}{7}$ (b) $\frac{4\pi}{7}$ (c) $\frac{18\pi}{7}$ (d) $\frac{32\pi}{7}$

(25) $cos\left[\frac{\pi}{6} + cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ (c) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ (d) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

(26) $tan^{-1}2 + tan^{-1}3 =$ ......

(a) $-\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{3\pi}{4}$ (d) $\frac{3\pi}{2}$

(27) $sin\left[tan^{-1}(-\sqrt{3}) + cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) -1 (b) 0 (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

(28) $sin^{-1}\frac{3}{5} + tan^{-1}\frac{1}{7}$ = ...

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) π (d) $sin^{-1}\frac{4}{5}$

(29) $tan\left(cos^{-1}\frac{3}{4} + sin^{-1}\frac{3}{4} - sec^{-1}3\right)$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (c) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ (d) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

(30) $sec\left[tan^{-1}\left(\frac{b+a}{b-a}\right) - tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)\right]$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) 1 (b) $\sqrt{2}$ (c) 2 (d) 4

વિભાગ C (3 ગુણ)

(31) $cot\left[\frac{\pi}{4} - 2cot^{-1}3\right]$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) 3 (b) 7 (c) 9 (d) $\frac{3}{4}$

(32) $tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) - tan^{-1}\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$ = ... $\left(\frac{x}{y} \geq 0\right)$

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) π

(33) જો $x = \frac{1}{3}$, તો $cos(2cos^{-1}x + sin^{-1}x)$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $-\sqrt{\frac{8}{9}}$ (b) $-\sqrt{\frac{1}{3}}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\frac{1}{2}$

(34) $cos^{-1}\left(\frac{x}{5}\right) + cosec^{-1}\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$, તો x નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) 1 (b) 3 (c) 5 (d) 4

(35) $cot\left(cosec^{-1}\frac{5}{3} + tan^{-1}\frac{2}{3}\right)$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $\frac{3}{17}$ (b) $\frac{4}{17}$ (c) $\frac{5}{17}$ (d) $\frac{6}{17}$

(36) $tan\left(2cos^{-1}\frac{3}{5}\right)$ = ...

(a) $\frac{8}{3}$ (b) $\frac{24}{25}$ (c) $\frac{7}{25}$ (d) $-\frac{24}{7}$

(37) $tan\left[\frac{1}{2}cos^{-1}\frac{\sqrt{5}}{3}\right]$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ (b) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ (d) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

(38) જો $0 < x < 1$, તો $tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}\right)$ = ...

(a) $\frac{1}{2}sin^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{2}}$ (b) $\frac{1}{2}cos^{-1}x$ (c) $\frac{1}{2}cot^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ (d) $\frac{1}{2}tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$

(39) જો $cos(2tan^{-1}x) = \frac{1}{2}$, તો x નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $1 - \sqrt{3}$ (c) $1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) $\sqrt{3}$

(40) $tan\left\{sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) + cos^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)\right\}$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $-\frac{24}{5}$ (b) $-\frac{22}{15}$ (c) $-\frac{63}{16}$ (d) $-\frac{47}{12}$

(41) જો $sin^{-1}\frac{x}{5} + cosec^{-1}\frac{5}{4} = \frac{\pi}{2}$, તો x = ...

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

(42) $sin^{-1}(cos(sin^{-1}x)) + cos^{-1}(sin(cos^{-1}x))$ = ...

(a) 0 (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{3\pi}{4}$

વિભાગ D (4 ગુણ)

(43) $cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-sinx}+\sqrt{1+sinx}}{\sqrt{1-sinx}-\sqrt{1+sinx}}\right)$ = ... $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

(a) $\frac{x}{2}$ (b) $\frac{\pi}{2} - 2x$ (c) $2\pi - x$ (d) $\pi - \frac{x}{2}$

(44) જો $sin^{-1}\frac{1}{x} = 2tan^{-1}\frac{1}{7} + cos^{-1}\frac{3}{5}$, તો x = ...

(a) $\frac{24}{117}$ (b) $\frac{7}{3}$ (c) $\frac{125}{117}$ (d) $-\frac{117}{44}$

(45) જો $\alpha = cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$, $\beta = tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$, $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, તો $\alpha - \beta$ = ...

(a) $sin^{-1}\frac{2}{\sqrt{13}}$ (b) $tan^{-1}\left(\frac{1}{18}\right)$ (c) $cos^{-1}\left(\frac{1}{5\sqrt{3}}\right)$ (d) $sin^{-1}\left(\frac{6}{5\sqrt{13}}\right)$

(46) નીચે આપેલા પૈકી કઈ જોડ સાચી છે ?

વિભાગ (A)	વિભાગ (B)
(1) $tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$	(a) $\frac{\pi}{2}$
(2) $sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) + sin^{-1}\left(\frac{8}{17}\right) + sin^{-1}\left(\frac{36}{85}\right)$	(b) π
(3) $tan^{-1}(1) + cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$	(c) $tan^{-1}\left(\frac{7}{11}\right)$
(4) $2tan^{-1}(5) + tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$	(d) $\frac{3\pi}{4}$

(a) 1 – c, 2 – b, 3 – d, 4 – a (b) 1 – c, 2 – a, 3 – d, 4 – b

(c) 1 – c, 2 – a, 3 – b, 4 – d (d) 1 – a, 2 – b, 3 – d, 4 – c

(47) $tan\left(2tan^{-1}\frac{1}{5} - \frac{\pi}{4}\right) = ...$

(a) $\frac{14}{33}$ (b) $\frac{-7}{17}$ (c) $\frac{17}{7}$ (d) $\frac{24}{25}$

(48) જો $sin^{-1}(1 - x) - 2sin^{-1}x = \frac{\pi}{2}$, તો $x = ...$

(a) $-\frac{1}{2}$ (b) 0 (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{1}{2}$

(49) $tan^{-1}(x + 1) + tan^{-1}x + tan^{-1}(x - 1) = tan^{-1}3x$ સમીકરણનું સમાધાન કરતી xની કિંમતોની સંખ્યા ...... છે.

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) અનંત

(50) જો $cot^{-1}x + cot^{-1}y + cot^{-1}z = \frac{\pi}{2}$, તો $x + y + z = ...$

(a) $xy + yz + zx$ (b) xyz (c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ (d) $\frac{xy + yz + zx}{3}$

(51) જો $sin^{-1}\left(\frac{2a}{1+a^2}\right) + sin^{-1}\left(\frac{2b}{1+b^2}\right) = 2tan^{-1}x$, તો $x = ...$ $(0 < a, b < 1)$

(a) $\frac{a-b}{1+ab}$ (b) $\frac{a+b}{1-ab}$ (c) $\frac{b}{1-ab}$ (d) $\frac{b}{1+ab}$

*

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચે આપેલા મુદ્દાઓ શીખ્યા :

1. ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયોની વ્યાખ્યા
2. ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયોના આલેખ
3. (1) $sin^{-1}(-x) = -sin^{-1}x, \quad |x| \le 1$

   (2) $cos^{-1}(-x) = \pi - cos^{-1}x, \quad |x| \le 1$

   (3) $tan^{-1}(-x) = -tan^{-1}x, \quad x \in R$

   (4) $cot^{-1}(-x) = \pi - cot^{-1}x, \quad x \in R$

   (5) $cosec^{-1}(-x) = -cosec^{-1}x, \quad |x| \ge 1$

   (6) $sec^{-1}(-x) = \pi - sec^{-1}x, \quad |x| \ge 1$
4. (1) $cosec^{-1}x = sin^{-1}\frac{1}{x}, \quad |x| \ge 1$

   (2) $sec^{-1}x = cos^{-1}\frac{1}{x}, \quad |x| \ge 1$

   (3) $cot^{-1}x = tan^{-1}\frac{1}{x}, \quad x > 0$

   $= \pi + tan^{-1}\frac{1}{x}, \quad x < 0$

5. (1) $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$, $|x| \le 1$

(2) $\operatorname{cosec}^{-1}x + \sec^{-1}x = \frac{\pi}{2}$, $|x| \ge 1$

(3) $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$, $x \in R$

6. જો $x > 0$, $y > 0$, તો

(1) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$, જ્યાં $xy < 1$

(2) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \pi + \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$, જ્યાં $xy > 1$

(3) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \frac{\pi}{2}$, જ્યાં $xy = 1$

(4) $\tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$

7. (1) $\sin^{-1}x = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2} = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, જ્યાં $0 < x < 1$

(2) $\cos^{-1}x = \sin^{-1}\sqrt{1-x^2} = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, જ્યાં $0 < x < 1$

(3) $\tan^{-1}x = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, જ્યાં $x > 0$

Srinivasa Ramanujan : Adulthood in India

On 14 July 1909, Ramanujan was married to a nine-year old bride, Janaki Ammal. In the branch of Hinduism to which Ramanujan belonged, marriage was a formal engagement that was consummated only after the bride turned 17 or 18, as per the traditional calendar.

After the marriage, Ramanujan developed a hydrocele testis, an abnormal swelling of the tunica vaginalis, an internal membrane in the testicle. The condition could be treated with a routine surgical operation that would release the blocked fluid in the scrotal sac. His family did not have the money for the operation, but in January 1910, a doctor volunteered to do the surgery for free.

After his successful surgery, Ramanujan searched for a job. He stayed at friends' houses while he went door to door around the city of Madras (now Chennai) looking for a clerical position. To make some money, he tutored some students at Presidency College who were preparing for their F.A. exam.

In late 1910, Ramanujan was sick again, possibly as a result of the surgery earlier in the year. He feared for his health, and even told his friend, R. Radakrishna Iyer, to "hand these [my mathematical notebooks] over to Professor Singaravelu Mudaliar [mathematics professor at Pachaiyappa's College] or to the British professor Edward B. Ross, of the Madras Christian College." After Ramanujan recovered and got back his notebooks from Iyer, he took a northbound train from Kumbakonam to Villupuram, a coastal city under French control.

નિશ્ચાયક 3

In mathematics, the art of proposing a question must be held of higher value than solving it.

– Georg Cantor

*

Mathematics is the cheapest science. Unlike Physics and Chemistry, it does not require any expensive equipment. All one needs is a pencil and paper.

– George Polya

3.1 પ્રાસ્તાવિક

અભિવ્યક્તિ $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ને 2×2 નિશ્ચાયક કહે છે અને તેનું મૂલ્ય $ad - bc$ વડે વ્યાખ્યાયિત થાય છે. વાસ્તવિક સંખ્યા $ad - bc$ ને રજૂ કરવાની આ એક બીજી સાંકેતિક પદ્ધતિ છે. R^2 માં આપેલ બે સુરેખ સમીકરણની સંહતિનો ઉકેલ મેળવવાની ચોકડી ગુણાકારની રીત તો તમને યાદ હશે જ. તમને આ બે વચ્ચેના જોડાણનો ખ્યાલ આવે છે ?

3.2 દ્વિહાર નિશ્ચાયક

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ને દ્વિહાર નિશ્ચાયક (Second order determinant) કહે છે. વાસ્તવિક સંખ્યાઓ a, b, c, d ને નિશ્ચાયકના ઘટકો (elements or entries) કહેવામાં આવે છે. $a \quad b$ ને પ્રથમ હાર (first row), $c \quad d$ ને દ્વિતીય હાર (second row), $\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}$ ને પ્રથમ સ્તંભ (first column), $\begin{matrix} b \\ d \end{matrix}$ ને દ્વિતીય સ્તંભ (second column), $\begin{matrix} a & \\ & d \end{matrix}$ ને અગ્ર વિકર્ણ (principal diagonal), $\begin{matrix} & b \\ c & \end{matrix}$ ને પ્રતિવિકર્ણ (secondary diagonal) કહે છે. $ad - bc$ ને આ દ્વિહાર નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય કહે છે. આપણે $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ લખીશું.

આમ, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ = અગ્રવિકર્ણ પરના ઘટકોનો ગુણાકાર – પ્રતિવિકર્ણ પરના ઘટકોનો ગુણાકાર.

ઉદાહરણ તરીકે, $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = (1)(6) - (4)(5) = 6 - 20 = -14$

3.3 ત્રિહાર નિશ્ચાયક

જો આપણે ત્રણ ચલના ત્રણ સુરેખ સમીકરણોની સંહતિનો ઉકેલ મેળવવો હોય, તો આપણને ત્રિહાર નિશ્ચાયક (Third order determinant)ની જરૂરિયાત પડશે.

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ને ત્રિહાર નિશ્ચાયક કહે છે.

અહીં a_i, b_i, c_i $(i = 1, 2, 3)$ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે. આ વાસ્તવિક સંખ્યાઓને ત્રિહાર નિશ્ચાયકના ઘટકો કહે છે. a_1 b_1 c_1; a_2 b_2 c_2; a_3 b_3 c_3 ને અનુક્રમે પ્રથમ, દ્વિતીય અને તૃતીય હાર કહે છે. $\begin{matrix} a_1 \\ a_2; \\ a_3 \end{matrix}$ $\begin{matrix} b_1 \\ b_2; \\ b_2 \end{matrix}$ $\begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{matrix}$ ને અનુક્રમે પ્રથમ, દ્વિતીય અને તૃતીય સ્તંભ કહે છે.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 (b_2c_3 - b_3c_2) - b_1 (a_2c_3 - a_3c_2) + c_1 (a_2b_3 - a_3b_2)$$

$$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1$$

આ અભિવ્યક્તિને આપેલ **ત્રિહાર નિશ્ચાયકનું વિસ્તરણ** અથવા **મૂલ્ય** કહે છે.

આપણે નિશ્ચાયકના મૂલ્ય તથા નિશ્ચાયક બંને માટે સંકેત D જ વાપરીશું.

નોંધ : ત્રિહાર નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય મેળવવા માટે, a_1 નો ગુણિત શોધવા આપણે a_1 જે હાર અને જે સ્તંભમાં છે, તે હાર અને સ્તંભને દૂર કરતાં અને બાકીના ઘટકોને તે જ સ્થિતિમાં રાખતાં દ્વિહાર નિશ્ચાયક $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ મળે. આ દ્વિહાર નિશ્ચાયક a_1 નો ગુણિત થશે. આ જ પ્રમાણે b_1 અને c_1ના ગુણિત મેળવીશું.

3.4 કેટલાક સંકેતો

આપણે નિશ્ચાયક વિશે કામ કરતા હોઈએ ત્યારે નિશ્ચાયકને એક સ્વરૂપમાંથી બીજા સ્વરૂપમાં ફેરવવાની આપણને જરૂર પડે છે. આ માટે આપણે અવારનવાર નિશ્ચાયક પર કેટલીક ક્રિયાઓ કરવી પડે છે. આ ક્રિયાઓને ટૂંકા સ્વરૂપમાં દર્શાવવા માટે આપણે કેટલાક સંકેતોનો ઉપયોગ કરીએ છીએ. તે વિષે હવે આપણે જોઈએ.

(1) $R_i \to C_i$: પ્રત્યેક હારને અનુરૂપ સ્તંભમાં (અથવા પ્રત્યેક સ્તંભને અનુરૂપ હારમાં) ફેરવવાની ક્રિયા માટે આપણે આ સંકેતનો ઉપયોગ કરીશું.

આમ, $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ પર $R_i \to C_i$ ક્રિયા કરતાં મળતો નવો નિશ્ચાયક $D' = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ થાય.

(2) R_{ij} (C_{ij}) $(i \neq j)$: આ સંકેત આપણે i મી હાર (સ્તંભ) તથા j મી હાર (સ્તંભ)ની અદલબદલ કરવાની ક્રિયા માટે વાપરીશું.

ઉદાહરણ તરીકે, C_{23} એટલે કે બીજા અને ત્રીજા સ્તંભની અદલબદલ કરવાની ક્રિયા.

જો $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ હોય, તો તેના પર C_{23} ક્રિયા કરતાં મળતો નવો નિશ્ચાયક $D' = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}$ થશે.

(3) $R_i(k)$ $[C_i(k)]$: આ સંકેત આપણે i મી હાર (સ્તંભ)ના પ્રત્યેક ઘટકને $k \in R$ $(k \neq 0)$ વડે ગુણવાની ક્રિયા માટે વાપરીશું. (આપણે i મી હાર (સ્તંભ)ને k વડે ગુણતાં, એમ કહીશું.)

આમ, $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ પર $R_1(3)$ ક્રિયા કરતાં મળતો નિશ્ચાયક $D' = \begin{vmatrix} 3a_1 & 3b_1 & 3c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ થાય.

(4) $R_{ij}(k)$ $[C_{ij}(k)]$ $(i \neq j)$: આ સંકેત આપણે નિશ્ચાયકની i મી હાર (સ્તંભ)ના દરેક ઘટકને શૂન્યેતર વાસ્તવિક સંખ્યા k વડે ગુણીને j મી હાર (સ્તંભ)ના અનુરૂપ ઘટકમાં ઉમેરવાની ક્રિયા માટે વાપરીશું.

આમ, $R_{31}(-2)$ ક્રિયા કરતાં મળતો નવો નિશ્ચાયક $D' = \begin{vmatrix} a_1 - 2a_3 & b_1 - 2b_3 & c_1 - 2c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ થશે.

ઉદાહરણ 1 : મૂલ્ય શોધો : (1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} x+1 & x \\ x & x-1 \end{vmatrix}$.

ઉકેલ : (1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) - (-2) \cdot 3 = -4 + 6 = 2$

(2) $\begin{vmatrix} x+1 & x \\ x & x-1 \end{vmatrix} = (x + 1)(x - 1) - (x)(x) = x^2 - 1 - x^2 = -1$

ઉદાહરણ 2 : મૂલ્ય શોધો $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$.

ઉકેલ : $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$

$= 2(-6 - 3) - 3(-3 + 6) - 2(1 + 4)$

$= -18 - 9 - 10$

$= -37$

સ્વાધ્યાય 3.1

1. મૂલ્ય શોધો :

(1) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 11 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 2+\sqrt{3} & 3+\sqrt{11} \\ 3-\sqrt{11} & 2-\sqrt{3} \end{vmatrix}$

2. ઉકેલો :

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -1 \\ 5 & x \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 4 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2x & 5 \end{vmatrix}$.

3. ત્રિહાર નિશ્ચાયકનાં મૂલ્ય મેળવો :

(1) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 9 & -5 & 4 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 7 & 1 \\ 5 & -3 & 4 \end{vmatrix}$

4. સાબિત કરો : $\begin{vmatrix} -\cos\alpha & \sin\beta & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\alpha & 0 & -\sin\beta \end{vmatrix} = 0$

*

3.5 નિશ્ચાયકના ગુણધર્મો

હવે આપણે નિશ્ચાયકના કેટલાક ગુણધર્મો સાબિત કરીશું. આપણે આ ગુણધર્મોની સાબિતી ત્રિહાર નિશ્ચાયકો માટે જ આપીશું. પરંતુ તે દ્વિહાર નિશ્ચાયકો માટે પણ સત્ય છે.

પ્રમેય 3.1 : નિશ્ચાયકની બધી જ હારને અનુરૂપ સ્તંભોમાં ફેરવવામાં આવે, તો નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય બદલાતું નથી.

[જો $R_i \to C_i$ કરીએ તો નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય બદલાતું નથી.]

સાબિતી : ધારો કે $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ આપેલ નિશ્ચાયક છે.

નિશ્ચાયકની બધી જ હારને અનુરૂપ સ્તંભમાં ફેરવતાં ($R_i \to C_i$ ક્રિયા કરતાં) મળતો નવો નિશ્ચાયક D' હોય, તો

$$D' = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1$$

$$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

$$= D$$

આમ, નિશ્ચાયકની બધી જ હારને અનુરૂપ સ્તંભમાં ફેરવવાથી નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય બદલાતું નથી.

ઉદાહરણ 3 : $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{vmatrix}$ નું વિસ્તરણ કરો તથા D પર $R_i \to C_i$ ક્રિયા કરવાથી D નું મૂલ્ય બદલાતું નથી તેમ ચકાસો.

ઉકેલ : $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 2(16 + 6) - 1(12 - 10) + (-1)(-9 - 20)$

$$= 44 - 2 + 29 = 71$$

હવે, D પર $R_i \to C_i$ પ્રક્રિયા કરવાથી મળતો નવો નિશ્ચાયક D' હોય તો,

$$D' = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2(16 + 6) - 3(4 - 3) + 5(2 + 4)$$

$$= 44 - 3 + 30 = 71$$

તેથી D = D'.

પ્રમેય 3.2 : નિશ્ચાયકની કોઈ પણ બે હાર (સ્તંભ)ની અદલાબદલી કરતાં મળતા નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય, આપેલા નિશ્ચાયકના મૂલ્યની વિરોધી સંખ્યા છે.

[જો D પર R_{ij} (C_{ij}) પ્રક્રિયા કરીએ અને તેથી નવો નિશ્ચાયક D' મળે, તો D' = –D થાય.]

સાબિતી : ધારો કે $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ એ આપેલ નિશ્ચાયક છે.

D ની પ્રથમ અને દ્વિતીય હારની અદલાબદલી (R_{12} કરતાં) મળતો નવો નિશ્ચાયક D' હોય તો,

$$
\begin{aligned}
D' &= \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\
&= a_2(b_1c_3 - b_3c_1) - b_2(a_1c_3 - a_3c_1) + c_2(a_1b_3 - a_3b_1) \\
&= a_2b_1c_3 - a_2b_3c_1 - b_2a_1c_3 + b_2a_3c_1 + c_2a_1b_3 - c_2a_3b_1 \\
&= -[a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1] \\
&= -[a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)] \\
&= -D
\end{aligned}
$$

આમ, નિશ્ચાયકની કોઈ પણ બે હાર (સ્તંભ)ની અદલબદલ કરવાથી મળતા નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય, આપેલા નિશ્ચાયકના મૂલ્યની વિરોધી સંખ્યા છે તેમ સાબિત થાય છે. સ્તંભનો ઉપયોગ કરતાં પણ આ જ પરિણામ મળે. (સ્વ-પ્રયત્ને મેળવો !)

ઉદાહરણ 4 : $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ નું મૂલ્ય મેળવો તથા ચકાસો કે D પર C_{23} ક્રિયા કરવાથી મળતા નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય D ના મૂલ્યની વિરોધી સંખ્યા છે.

ઉકેલ : $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1(16 + 1) - 2(-12 + 2) + 3(-3 - 8)$

$$= 17 + 20 - 33 = 4$$

હવે D પર C_{23} ક્રિયા કરતાં મળતો નવો નિશ્ચાયક D' હોય તો,

$$D' = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1 - 16) - 3(-3 - 8) + 2(-12 + 2)$$

$$= -17 + 33 - 20 = -4$$

આમ, D' = –D.

પ્રમેય 3.3 : નિશ્ચાયકની કોઈ પણ હાર (સ્તંભ)ના પ્રત્યેક ઘટકને વાસ્તવિક સંખ્યા k વડે ગુણી મળતા નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય, આપેલા નિશ્ચાયકના મૂલ્ય કરતાં k ગણું હોય છે.

[જો D પર $R_i(k)$ અથવા $C_i(k)$ પ્રક્રિયા કરવામાં આવે અને નવો નિશ્ચાયક D' મળે, તો $D' = kD$.]

સાબિતી : ધારો કે $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ એ આપેલ નિશ્ચાયક છે.

નિશ્ચાયકની પ્રથમ હારના બધા ઘટકોને k વડે ગુણતાં ($R_1(k)$ ક્રિયા કરતાં) મળતો નવો નિશ્ચાયક D' હોય, તો

$$
\begin{aligned}
D' = \begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= ka_1(b_2c_3 - b_3c_2) - kb_1(a_2c_3 - a_3c_2) + kc_1(a_2b_3 - a_3b_2) \\
&= k[a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)] \\
&= kD
\end{aligned}
$$

તેથી, $\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$. $\qquad k \in R$

નોંધ : જો કોઈ નિશ્ચાયકની હાર (સ્તંભ)ના બધા જ ઘટકોને **શૂન્યેતર** વાસ્તવિક સંખ્યા k વડે ગુણીએ અને મળતા નિશ્ચાયકના મૂલ્યને k વડે ભાગીએ, તો નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય તે જ રહે.

એટલે કે, $\frac{1}{k}\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

ઉદાહરણ 5 : વિસ્તરણ કરો : $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ તથા D પર $C_1(3)$ પ્રક્રિયા કરતાં મળતા નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય D ના મૂલ્યના 3 ગણા જેટલું છે તેમ બતાવો.

ઉકેલ : $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 3(10 + 18) - 2(8 - 6) + 1(-12 - 5)$

$= 84 - 4 - 17 = 63$

હવે, D પર $C_1(3)$ ક્રિયા કરતાં મળતો નવો નિશ્ચાયક D' હોય તો,

$$D' = \begin{vmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 12 & 5 & 6 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 9(10 + 18) - 2(24 - 18) + 1(-36 - 15)$$

$$= 252 - 12 - 51$$
$$= 189$$
$$= 3(63)$$

$\therefore \quad D' = 3D.$

પ્રમેય 3.4 : $\begin{vmatrix} a_1 + d_1 & b_1 + e_1 & c_1 + f_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & e_1 & f_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

સાબિતી : ડા.બા. $= (a_1 + d_1)(b_2c_3 - b_3c_2) - (b_1 + e_1)(a_2c_3 - a_3c_2) + (c_1 + f_1)(a_2b_3 - a_3b_2)$

$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + d_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) - e_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) + f_1(a_2b_3 - a_3b_2)$

$= [a_1 (b_2c_3 - b_3c_2) - b_1 (a_2c_3 - a_3c_2) + c_1 (a_2b_3 - a_3b_2)] + [d_1 (b_2c_3 - b_3c_2) - e_1 (a_2c_3 - a_3c_2) + f_1 (a_2b_3 - a_3b_2)]$

$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & e_1 & f_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$ જ.બા.

[આમ, નિશ્ચાયકને બે નિશ્ચાયકોના સરવાળા તરીકે લખી શકાય. આ ક્રિયા આપણે કોઈ પણ હાર અથવા સ્તંભ માટે કરી શકીએ. પ્રમેય 3.3 અને 3.4 એ, નિશ્ચાયક એ સુરેખ (બહુચલ સુરેખ) વિધેય છે તેમ સૂચવે છે. આમ, નિશ્ચાયક એ બહુચલ સુરેખ વિધેય છે. પ્રમેય 3.2 ના કારણે આ પ્રમેય કોઈ પણ હાર કે સ્તંભના ઘટક વિભાજન માટે સત્ય છે.]

પ્રમેય 3.5 : જો કોઈ નિશ્ચાયકમાં કોઈ પણ બે હાર (સ્તંભ)ના અનુરૂપ ઘટકો સમાન હોય, તો તે નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય શૂન્ય થાય છે.

સાબિતી : ધારો કે નિશ્ચાયકની પ્રથમ અને દ્વિતીય હારના અનુરૂપ ઘટકો સમાન છે.

એટલે કે, $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

D ની પ્રથમ અને દ્વિતીય હારની અદલાબદલી કરતાં (R_{12} ક્રિયા કરતાં) મળતો નવો નિશ્ચાયક D' હોય, તો D' = –D થાય. **(પ્રમેય 3.2)**

પરંતુ પ્રથમ બે હાર સમાન હોવાથી D બદલાતો નથી, એટલે કે D' = D જ છે.

તેથી D' = –D તથા D' = D હોવાથી D = –D

$\therefore$ 2D = 0 તેથી D = 0

આમ, જો નિશ્ચાયકની બે હાર (સ્તંભ) સમાન હોય, તો નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય શૂન્ય મળે છે.

પ્રમેય 3.6 : નિશ્ચાયકની કોઈ પણ હાર (સ્તંભ)ના પ્રત્યેક ઘટકને વાસ્તવિક સંખ્યા k વડે ગુણી અન્ય હાર (સ્તંભ)ના અનુરૂપ ઘટકમાં ઉમેરતાં નિશ્ચાયકની કિંમત બદલાતી નથી. ($k \neq 0$)

સાબિતી : ધારો કે $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

હવે $R_{21}(k)$ ક્રિયા કરતાં મળતો નિશ્ચાયક D' હોય, તો

$$D' = \begin{vmatrix} a_1 + ka_2 & b_1 + kb_2 & c_1 + kc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\therefore D' = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ **(પ્રમેય 3.4)**

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ **(પ્રમેય 3.3)**

$= D + k(0)$ **(પ્રમેય 3.5)**

$= D$

આમ, નિશ્ચાયકમાં કોઈ પણ હાર (સ્તંભ)ના પ્રત્યેક ઘટકને શૂન્યેતર વાસ્તવિક સંખ્યા k વડે ગુણીને અન્ય હાર (સ્તંભ)ના અનુરૂપ ઘટકોમાં ઉમેરતાં નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય બદલાતું નથી.

ઉદાહરણ 6 : સાબિત કરો કે $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & a+b & b \\ 1 & a & a+b \end{vmatrix} = ab$

ઉકેલ : ધારો કે $D = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & a+b & b \\ 1 & a & a+b \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -b & 0 \\ 1 & a+b & b \\ 1 & a & a+b \end{vmatrix}$$ **$[R_{21}(-1)]$**

$= b(a + b - b)$ **(0 ના ગુણિત 0 થાય.)**

$= ab$

ઉદાહરણ 7 : વિસ્તરણ કર્યા સિવાય સાબિત કરો કે $\begin{vmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 0$

ઉકેલ : ધારો કે $D = \begin{vmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -a & b \\ a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} \qquad (R_i \to C_i)$$

$$= (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} \qquad (R_i(-1),\ i = 1, 2, 3)$$

$$= -D$$

આમ, $D = -D$ મળે. તેથી $2D = 0$ એટલે કે $D = 0$.

ઉદાહરણ 8 : સાબિત કરો કે $\begin{vmatrix} cos(\theta+\phi) & -sin(\theta+\phi) & cos 2\phi \\ sin\theta & cos\theta & sin\phi \\ -cos\theta & sin\theta & cos\phi \end{vmatrix}$ નું મૂલ્ય θ પર આધારિત નથી.

ઉકેલ : ધારો કે $D = \begin{vmatrix} cos(\theta+\phi) & -sin(\theta+\phi) & cos 2\phi \\ sin\theta & cos\theta & sin\phi \\ -cos\theta & sin\theta & cos\phi \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} cos\theta\, cos\phi - sin\theta\, sin\phi & -sin\theta\, cos\phi - cos\theta\, sin\phi & cos 2\phi \\ sin\theta & cos\theta & sin\phi \\ -cos\theta & sin\theta & cos\phi \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & cos 2\phi + 1 \\ sin\theta & cos\theta & sin\phi \\ -cos\theta & sin\theta & cos\phi \end{vmatrix} \qquad (R_{21}(sin\phi),\ R_{31}(cos\phi))$$

$$= (cos 2\phi + 1)(sin^2\theta + cos^2\theta)$$

$= 1 + cos 2\phi$, જે θ પર આધારિત નથી.

ઉદાહરણ 9 : સાબિત કરો કે $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$, 11 વડે વિભાજ્ય છે.

ઉકેલ : $C_{13}(100)$ અને $C_{23}(10)$ ક્રિયા કરતાં,

$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 264 \\ 5 & 0 & 506 \\ 3 & 5 & 352 \end{vmatrix}$ થાય.

$$= \begin{vmatrix} 2 & 6 & 11\times 24 \\ 5 & 0 & 11\times 46 \\ 3 & 5 & 11\times 32 \end{vmatrix}$$

$$= 11\begin{vmatrix} 2 & 6 & 24 \\ 5 & 0 & 46 \\ 3 & 5 & 32 \end{vmatrix} \qquad C_3\left(\frac{1}{11}\right)$$

$$= 11 \cdot n \qquad (n \in Z)$$

∴ આપેલ નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય 11 વડે વિભાજ્ય છે.

ઉદાહરણ 10 : પ્રમેયોનો ઉપયોગ કરી સાબિત કરો : $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(a-b)(b-c)(c-a)$.

$(a \neq b,\ b \neq c,\ c \neq a)$

ઉકેલ : $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \\ a-b & b-c & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (પ્રથમ $C_{21}(-1)$ અને પછી $C_{32}(-1)$)

$$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} a+b & b+c & c^2 \\ 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \left(C_1\left(\frac{1}{a-b}\right),\ C_2\left(\frac{1}{b-c}\right),\ a \neq b,\ b \neq c\right)$$

$$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} a-c & b+c & c^2 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad [C_{21}(-1)]$$

$$= (a-b)(b-c)(a-c)\begin{vmatrix} 1 & b+c & c^2 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \left(C_1\left(\frac{1}{a-c}\right),\ (a \neq c)\right)$$

$$= (a-b)(b-c)(a-c) \cdot (1)$$

$$= -(a-b)(b-c)(c-a)$$

(**નોંધ :** જો $a = b$ અથવા $b = c$ અથવા $c = a$ તો બે સ્તંભ સમાન થવાથી D = 0 = જ.બા.)

ઉદાહરણ 11 : વિસ્તરણ કર્યા સિવાય સાબિત કરો : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 0$

ઉકેલ : ધારો કે $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x+y+z & x+y+z & x+y+z \end{vmatrix} \qquad [R_{23}(1)]$$

$$= (x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \left(C_3\left(\frac{1}{x+y+z}\right),\ x+y+z \neq 0\right)$$

$$= (x+y+z)\ (0) \qquad [R_1 = R_3]$$

$$= 0$$

(**નોંધ :** જો $x + y + z = 0$ તો $R_3 = 0$ અને તેથી D = 0.)

ઉદાહરણ 12 : $\begin{vmatrix} 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix} = 0$ નો ઉકેલગણ શોધો.

ઉકેલ : $\begin{vmatrix} 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix} = 0$

$\therefore \begin{vmatrix} 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ x+2 & 2x+4 & 6x+12 \end{vmatrix} = 0$ **[$R_{13}(-1)$]**

$\therefore \begin{vmatrix} x+1 & x+1 & x+1 \\ x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ x+2 & 2(x+2) & 6(x+2) \end{vmatrix} = 0$ **[$R_{21}(-1)$]**

$\therefore (x+1)(x+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$ **(પ્રમેય 3.3)**

$\therefore (x+1)(x+2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+2 & x+1 & x+1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$ **($C_{23}(-1)$ અને $C_{12}(-1)$)**

$\therefore (x+1)(x+2)[(x+1)4 - 1(x+1)] = 0$

$\therefore 3(x+1)(x+2) \cdot (x+1) = 0$

$\therefore x = -1$ અથવા $x = -2$

$\therefore$ ઉકેલગણ $\{-1, -2\}$ મળે.

ઉદાહરણ 13 : સમીકરણ $\begin{vmatrix} x & 4 & 6 \\ 2 & 3 & -9 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 6 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -9 \\ 2x-1 & -8 & -11 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ ઉકેલો.

ઉકેલ : $(-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 & -9 \\ x & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 3 & -9 \\ 6 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 2 & 3 & -9 \\ 1-2x & 8 & 11 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ **(પ્રથમ નિશ્ચાયક પર R_{12}, બીજા નિશ્ચાયક પર R_{13} ક્રિયા કરતાં અને ત્રીજા નિશ્ચાયક પર $R_2(-1)$ ક્રિયા કરતાં)**

$\therefore \begin{vmatrix} 2 & 3 & -9 \\ x & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 & -9 \\ 6 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -9 \\ 1-2x & 8 & 11 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$

$\therefore \begin{vmatrix} 2 & 3 & -9 \\ x+6 & 8 & 11 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -9 \\ 1-2x & 8 & 11 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ **(પ્રમેય 3.4)**

$\therefore \begin{vmatrix} 2 & 3 & -9 \\ x+6 & 8 & 11 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 & -9 \\ 1-2x & 8 & 11 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & -9 \\ 3x+5 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \quad (3x+5)\begin{vmatrix} 2 & 3 & -9 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(પ્રમેય 3.3)}$$

$\therefore \quad 3x + 5 = 0$ (નિશ્ચાયક $\neq 0$)

$\therefore \quad x = -\frac{5}{3}$

$\therefore$ ઉકેલગણ $\left\{-\frac{5}{3}\right\}$ છે.

સ્વાધ્યાય 3.2

1. પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને સાબિત કરો :

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ yz & zx & xy \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x).$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^3 \\ 1 & y & y^3 \\ 1 & z & z^3 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z).$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ (x+1)^2 & (y+1)^2 & (z+1)^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x).$

(4) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x-y & y-z & z-x \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$

(5) $\begin{vmatrix} 0 & ab^2 & ac^2 \\ a^2b & 0 & bc^2 \\ a^2c & b^2c & 0 \end{vmatrix} = 2a^3b^3c^3.$

2. વિસ્તરણ કર્યા સિવાય સાબિત કરો : $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & \cos(\alpha+\delta) \\ \cos\beta & \sin\beta & \cos(\beta+\delta) \\ \cos\gamma & \sin\gamma & \cos(\gamma+\delta) \end{vmatrix} = 0$

3. $\begin{vmatrix} x & 5 & 9 \\ 16 & 3x+8 & 36 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0$ નો ઉકેલગણ શોધો.

4. સાબિત કરો : $\begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 3a & 4a+3b & 5a+4b+3c \\ 6a & 9a+6b & 11a+9b+6c \end{vmatrix} = -a^3.$

5. ઉકેલો : $\begin{vmatrix} 1+\sin^2\theta & \cos^2\theta & 4\sin 4\theta \\ \sin^2\theta & 1+\cos^2\theta & 4\sin 4\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 1+4\sin 4\theta \end{vmatrix} = 0;\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$

6. સાબિત કરો : $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$

7. $\begin{vmatrix} x-2 & 2x-3 & 3x-4 \\ x-4 & 2x-9 & 3x-16 \\ x-8 & 2x-27 & 3x-64 \end{vmatrix} = 0$ નો ઉકેલગણ મેળવો.

8. સાબિત કરો કે $\begin{vmatrix} a+x & a-x & a-x \\ a-x & a+x & a-x \\ a-x & a-x & a+x \end{vmatrix} = 0$ નાં બીજ $x = 0$ અને $x = 3a$ છે.

9. સાબિત કરો : $\begin{vmatrix} x^2 & yz & zx+z^2 \\ x^2+xy & y^2 & zx \\ xy & y^2+yz & z^2 \end{vmatrix} = 4x^2y^2z^2$.

10. સાબિત કરો : $\begin{vmatrix} a+bx & d+ex & p+qx \\ ax+b & dx+e & px+q \\ c & f & r \end{vmatrix} = (1 - x^2)\begin{vmatrix} a & d & p \\ b & e & q \\ c & f & r \end{vmatrix}$.

11. સાબિત કરો : $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & ab & ca \\ ab & (c+a)^2 & bc \\ ca & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc\,(a + b + c)^3$.

*

3.6 ઉપનિશ્ચાયક અને સહઅવયવ

ઉપનિશ્ચાયક : નિશ્ચાયકનો કોઈ પણ ઘટક જે હાર અને જે સ્તંભમાં હોય તે હાર અને તે સ્તંભને દૂર કરી બાકી રહેતા ઘટકોને તે જ સ્થિતિમાં રાખવાથી મળતા નિશ્ચાયકને તે ઘટકનો ઉપનિશ્ચાયક (Minor) કહે છે.

ઉદાહરણ તરીકે,

$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ માં c_3નો ઉપનિશ્ચાયક મેળવીએ. D માં ઘટક c_3 એ ત્રીજી હાર અને ત્રીજા સ્તંભમાં છે. આ ઘટકોને દૂર કરી બાકી રહેતા ઘટકોને તે જ સ્થાનમાં તે જ ક્રમમાં રાખતાં, આપણને નિશ્ચાયક $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ મળે છે. આ નિશ્ચાયકને c_3નો ઉપનિશ્ચાયક કહે છે.

સહઅવયવ : નિશ્ચાયકનો કોઈ પણ ઘટક i મી હાર તથા j મા સ્તંભમાં હોય તો તે ઘટકના ઉપનિશ્ચાયકને $(-1)^{i+j}$ વડે ગુણવાથી મળતા મૂલ્યને તે ઘટકનો સહઅવયવ (Cofactor) કહે છે.

$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ માં a_2નો ઉપનિશ્ચાયક $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ છે, તેને $(-1)^{2+1}$ વડે ગુણતાં a_2નો સહઅવયવ મળે છે.

(a_2 એ બીજી હાર તથા પહેલા સ્તંભમાં છે.)

આમ, a_2નો સહઅવયવ $(-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -(b_1c_3 - b_3c_1)$ થાય.

D ના ઘટકો a_i, b_i, c_i ના સહઅવયવોને અનુક્રમે A_i, B_i, C_i વડે દર્શાવાય છે, જ્યાં $i = 1, 2, 3$.

ઉચ્ચ ગણિતમાં, આપણે D ને નીચે પ્રમાણે લખીએ છીએ :

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

અહીં, a_{ij} એટલે કે i મી હાર અને j મા સ્તંભનો ઘટક.

a_{ij} નો સહઅવયવ = $(-1)^{i+j}$ (a_{ij} નો ઉપનિશ્ચાયક)

સામાન્ય રીતે બાજુમાં દર્શાવેલ ચિહ્નવાળા 'નિશ્ચાયક'નું સ્વરૂપ યાદ રાખો : $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$.

કોઈ પણ વિકર્ણના ઘટકોના ઉપનિશ્ચાયકનું ચિહ્ન + અને તે સિવાયના ઉપનિશ્ચાયકનું ચિહ્ન − લેવાથી આપણને જે-તે ઘટકનો સહઅવયવ મળે છે.

[**નોંધ :** નિશ્ચાયકના કોઈ પણ ઘટકનો સહઅવયવ એટલે કે, તે નિશ્ચાયકના વિસ્તરણમાં તે ઘટકનો સહગુણક.]

જો $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ હોય, તો

$A_1 = b_2c_3 - b_3c_2$ $\quad$ $B_1 = -(a_2c_3 - a_3c_2)$ $\quad$ $C_1 = a_2b_3 - a_3b_2$

$A_2 = -(b_1c_3 - b_3c_1)$ $\quad$ $B_2 = a_1c_3 - a_3c_1$ $\quad$ $C_2 = -(a_1b_3 - a_3b_1)$

$A_3 = b_1c_2 - b_2c_1$ $\quad$ $B_3 = -(a_1c_2 - a_2c_1)$ $\quad$ $C_3 = a_1b_2 - a_2b_1$ મળે.

ઉદાહરણ 14 : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 7 & -5 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ માં 2 અને −1ના ઉપનિશ્ચાયક તથા સહઅવયવ શોધો.

ઉકેલ : 2 નો ઉપનિશ્ચાયક = $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$ મળે છે.

2 નો સહઅવયવ = $(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \times 4 = -4$ થશે.

−1 નો ઉપનિશ્ચાયક = $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 7 & -5 \end{vmatrix}$ મળે છે.

−1 નો સહઅવયવ = $(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = 1 \times (-59) = -59$ થશે.

ઉદાહરણ 15 : $D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ ના ઘટકોના સહઅવયવોથી બનતા નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : $D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

1નો સહઅવયવ $A_1 = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times (6 + 1) = 7$ છે.

4 નો સહઅવયવ $B_1 = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-4 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix} = (-1)(-12) = 12$ છે.

0 નો સહઅવયવ $C_1 = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-4 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix} = (1)(4) = 4$ છે.

-4 નો સહઅવયવ $A_2 = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}4 & 0\\ -1 & 3\end{vmatrix} = (-1)(12) = -12$ છે.

2 નો સહઅવયવ $B_2 = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{vmatrix} = (1)(3) = 3$ છે.

તે જ પ્રમાણે, $C_2 = 1$, $A_3 = 4$, $B_3 = -1$, $C_3 = 18$. (સ્વપ્રયત્ને શોધો !)

$\therefore$ ઉપરના સહઅવયવો વડે બનતો નિશ્ચાયક $\begin{vmatrix}7 & 12 & 4\\ -12 & 3 & 1\\ 4 & -1 & 18\end{vmatrix}$ થશે.

તેનું મૂલ્ય $= 7(54 + 1) - 12(-216 - 4) + 4(12 - 12)$

$= 385 + 2640 + 0$

$= 3025$

(**નોંધ :** જુઓ કે D નું મૂલ્ય 55 છે અને D ના ઘટકોના સહઅવયવો વડે બનતા નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય $3025 = (55)^2$ છે. વ્યાપક રીતે આ પરિણામ સત્ય છે.)

પ્રમેય 3.7 : ત્રિહાર નિશ્ચાયકમાં કોઈ પણ હાર (સ્તંભ)ના ઘટકોને અનુરૂપ સહઅવયવો વડે ગુણીને ઉમેરતાં નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય મળે છે.

સાબિતી : ધારો કે $D = \begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$ છે. ઘટકો a_2, b_2, c_2ના સહઅવયવો અનુક્રમે A_2, B_2, C_2 થશે, જ્યાં

$$A_2 = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_3 & c_3\end{vmatrix} = -(b_1c_3 - b_3c_1)$$

$$B_2 = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_3 & c_3\end{vmatrix} = a_1c_3 - a_3c_1$$

$$C_2 = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_3 & b_3\end{vmatrix} = -(a_1b_3 - a_3b_1).$$

હવે, $a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2 = -a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + b_2(a_1c_3 - a_3c_1) - c_2(a_1b_3 - a_3b_1)$

$$= -a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + b_2a_1c_3 - b_2a_3c_1 - c_2a_1b_3 + c_2a_3b_1$$

$$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - b_1a_2c_3 + b_1a_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

$$= \begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix} = D$$

$\therefore \quad a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2 = D$ **(i)**

તે જ રીતે, $a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 = D$ (ii)

$$a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3 = D \quad \text{(iii)}$$

$$a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 = D \quad \text{(iv)}$$

$$b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3 = D \quad \text{(v)}$$

$$c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3 = D \quad \text{(vi)}$$

અહીં, (i), (ii) અને (iii) ને અનુક્રમે દ્વિતીય, પ્રથમ અને તૃતીય હાર દ્વારા નિશ્ચાયકનું વિસ્તરણ કહે છે. (iv), (v), (vi)ને અનુક્રમે પ્રથમ, દ્વિતીય અને તૃતીય સ્તંભ દ્વારા નિશ્ચાયકનું વિસ્તરણ કહે છે.

પ્રમેય 3.8 : ત્રિહાર નિશ્ચાયકની કોઈ પણ હાર (સ્તંભ)ના ઘટકોને અન્ય હાર (સ્તંભ)ના અનુરૂપ ઘટકોના સહઅવયવો વડે ગુણી ઉમેરતાં મળતો સરવાળો શૂન્ય થાય છે.

સાબિતી : નિશ્ચાયક $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ની પ્રથમ હારના ઘટકો a_1, b_1, c_1 ને બીજી હારના અનુરૂપ ઘટકોના સહઅવયવો A_2, B_2, C_2 વડે ગુણી તેમનો સરવાળો $a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2$ મેળવીએ.

હવે, $A_2 = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -(b_1c_3 - b_3c_1)$

$$B_2 = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1c_3 - a_3c_1$$

$$C_2 = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = -(a_1b_3 - a_3b_1).$$

આમ, $a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 = -a_1(b_1c_3 - b_3c_1) + b_1(a_1c_3 - a_3c_1) - c_1(a_1b_3 - a_3b_1)$

$$= -a_1b_1c_3 + a_1b_3c_1 + a_1b_1c_3 - a_3b_1c_1 - a_1b_3c_1 + a_3b_1c_1$$

$$= 0$$

તે જ રીતે, $a_1A_3 + b_1B_3 + c_1C_3 = 0$

$$a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 = 0$$

$$a_2A_3 + b_2B_3 + c_2C_3 = 0$$

$$a_3A_1 + b_3B_1 + c_3C_1 = 0$$

$$a_3A_2 + b_3B_2 + c_3C_2 = 0$$

(નોંધ : સ્તંભ માટે પણ આવાં જ પરિણામ મળે. $a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2$ = પ્રથમ અને દ્વિતીય હાર સમાન a_1 b_1 c_1 હોય તેવા નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય થાય.

$\therefore \quad a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 = 0$)

3.7 બે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણની સંહતિનો ઉકેલ

ધારો કે R^2માં સમીકરણ સંહતિ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ અને $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ નો ઉકેલ મેળવવો છે, જ્યાં $a_i, b_i, c_i \in R$ અને $a_i^2 + b_i^2 \neq 0$. $(i = 1, 2)$.

આપણે માત્ર a_1, a_2, b_1, b_2 પૈકી કોઈ પણ શૂન્ય ન હોય તેવાં જ સમીકરણોનો વિચાર કરીશું. (જો આમાંના કેટલાંક શૂન્ય હોય, તો સરળતાથી સમીકરણનો ઉકેલ મેળવી શકાય.)

બે સુરેખ સમીકરણની સંહતિના ઉકેલની **ચોકડી ગુણાકાર**ની રીત તમે શીખી ગયા છે. જે રીતમાં,

$$\frac{x}{\begin{matrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{matrix}} = \frac{y}{\begin{matrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{matrix}} = \frac{1}{\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}} \text{ એટલે કે } \frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$\therefore \quad \frac{x}{\begin{matrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{matrix}} = -\frac{y}{\begin{matrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{matrix}} = \frac{1}{\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}}$$

આ પ્રકરણમાં આપણે નિશ્ચાયકના સંકેતનો ઉપયોગ કરીશું.

$$\text{તેથી } x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \text{ અને } y = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \text{ જ્યાં } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

ઉકેલ મેળવવાની આ પદ્ધતિને **ક્રેમરનો નિયમ** કહે છે.

નોંધ : (1) જો $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, પરંતુ $a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0$ અથવા $b_1c_2 - b_2c_1 \neq 0$ તો ઉપરના સમીકરણોનો ઉકેલગણ $\emptyset$ છે.

(2) જો $a_1b_2 - a_2b_1 = b_1c_2 - b_2c_1 = a_1c_2 - a_2c_1 = 0$ તો સમીકરણ સંહતિનો ઉકેલ અનન્ય નથી પરંતુ અનંતગણ છે. $\{(x, y) \mid a_1x + b_1y + c_1 = 0, x, y \in R]$ ઉકેલગણ છે.

સુસંગત સમીકરણો : જો સમીકરણ સંહતિનો ઉકેલગણ ખાલીગણ ન હોય, તો તેને સુસંગત (Consistent) સમીકરણોની સંહતિ કહે છે.

સમાન સમીકરણો : સમીકરણો $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ અને $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ માટે કોઈક વાસ્તવિક શૂન્યેતર સંખ્યા k મળે કે જેથી $a_1 = ka_2$, $b_1 = kb_2$, $c_1 = kc_2$ થાય, તો સમીકરણો $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ અને $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ને **સમાન સમીકરણો (Equivalent Equations)** કહે છે, જો આ સમીકરણો સમાન ન હોય, તો તેમને **ભિન્ન (distinct)** સમીકરણો કહે છે.

ઉદાહરણ 16 : ક્રેમરના સૂત્રની મદદથી ઉકેલો : $2x + 3y - 8 = 0$ અને $5x - 4y + 3 = 0$.

ઉકેલ : અહીં, $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -8 - 15 = -23 \neq 0$.

તેથી આપણને અનન્ય ઉકેલ મળશે.

$$\text{ક્રેમરના નિયમ પ્રમાણે, } x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -8 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}}{-23} = \frac{9 - 32}{-23} = \frac{-23}{-23} = 1$$

$$\text{અને } y = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}}{-23} = -\frac{6 + 40}{-23} = \frac{-46}{-23} = 2$$

તેથી, $(x, y) = (1, 2)$.

$\therefore$ ઉકેલગણ $\{(1, 2)\}$ મળે.

ઉદાહરણ 17 : સમીકરણ ઉકેલો : $2x + 3y = 13xy$ અને $5x - 2y = 4xy$.

ઉકેલ : આ સમીકરણો સુરેખ સમીકરણો નથી. તે x અને y માં દ્વિઘાત સમીકરણો છે. તેથી તેમને બે ઉકેલ છે. એક ઉકેલ $x = 0$ અને $y = 0$ છે. $(x = 0 \Rightarrow 0 + 3y = 0 \Rightarrow y = 0)$

જો $x \neq 0$ તો $y \neq 0$ છે. $(y = 0 \Rightarrow x = 0)$

તેથી આપણે આ સમીકરણોને નીચે પ્રમાણે સુરેખ સ્વરૂપમાં ફેરવી શકીએ. $xy \neq 0$ લેતાં, સમીકરણોની બંને બાજુએ $xy \neq 0$ વડે ભાગતાં, આપણને

$\frac{2}{y} + \frac{3}{x} = 13$ અને $\frac{5}{y} - \frac{2}{x} = 4$ સ્વરૂપમાં સમીકરણ મળે.

હવે આપણે $\frac{1}{y} = m$ અને $\frac{1}{x} = n$ લઈએ, તો સમીકરણ સંહતિ $2m + 3n - 13 = 0$, $5m - 2n - 4 = 0$ થશે.

વળી, $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 15 = -19 \neq 0.$

તેથી આપેલ સમીકરણ સંહતિનો બીજો ઉકેલ મળશે.

$$(m, n) = \left(\frac{\begin{vmatrix} 3 & -13 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}}{D}, -\frac{\begin{vmatrix} 2 & -13 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}}{D} \right) = \left(\frac{-12 - 26}{-19}, -\frac{-8 + 65}{-19} \right) = \left(\frac{-38}{-19}, \frac{-57}{-19} \right) = (2, 3)$$

$\therefore \quad (m, n) = (2, 3).$

પરંતુ $m = \frac{1}{y}$ અને $n = \frac{1}{x}$

$\therefore \quad \left(\frac{1}{y}, \frac{1}{x} \right) = (2, 3)$, એટલે કે $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y} \right) = (3, 2)$

તેથી $(x, y) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right)$

$\therefore$ ઉકેલગણ : $\left\{ (0, 0), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right) \right\}.$

3.8 ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ

જો ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓના યામ આપ્યા હોય, ત્યારે તે ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધવા વિશે આપણે XI માં ધોરણમાં શીખી ગયાં છીએ.

જો ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુના યામ (x_1, y_1), (x_2, y_2) અને (x_3, y_3) હોય, તો તે ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ

$\frac{1}{2}\ [(x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$ ના માનાંક જેટલું છે.

આપણે ઉપરની અભિવ્યક્તિને નિશ્ચાયક સ્વરૂપમાં $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ સ્વરૂપે દર્શાવી શકીએ.

ક્ષેત્રફળ હંમેશાં ધન સંખ્યા છે. તેથી આપણે ઉપરના નિશ્ચાયકનો માનાંક લઈશું. આપણે ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળને Δ વડે દર્શાવીશું.

આમ, $\Delta = \frac{1}{2}|D|$ જ્યાં, $D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$

ઊગમબિંદુનું સ્થાનાંતર એ ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળને અસર કરતું નથી.

જો આપણે ઊગમબિંદુનું સ્થાનાંતર (h, k) બિંદુએ કરીએ તો ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓના યામ (x_1, y_1), (x_2, y_2) અને (x_3, y_3) બદલાઈને તેમના નવા યામ અનુક્રમે $(x_1 - h, y_1 - k)$, $(x_2 - h, y_2 - k)$ અને $(x_3 - h, y_3 - k)$ થશે.

હવે ઊગમબિંદુનું સ્થાનાંતર કર્યા પછી ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ, $\Delta = \frac{1}{2}|D'|$.

$$\text{જ્યાં, } D' = \begin{vmatrix} x_1 - h & y_1 - k & 1 \\ x_2 - h & y_2 - k & 1 \\ x_3 - h & y_3 - k & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \qquad (C_{31}(h) \text{ અને } C_{32}(k) \text{ ક્રિયાઓ કરતાં})$$

$$= D$$

$\therefore \quad \Delta = \frac{1}{2}|D'| = \frac{1}{2}|D|$

આમ, ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ તેનું તે જ રહે છે.

ઉદાહરણ તરીકે, (2, 3), (5, 1), (7, −2) શિરોબિંદુવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ મેળવીએ.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 7 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2(3) - 3(-2) + 1(-17)$$

$$= 6 + 6 - 17 = -5$$

$\therefore \quad \Delta = \frac{1}{2}|D| = \frac{1}{2}|-5| = \frac{5}{2}$

હવે આપણે ઊગમબિંદુનું સ્થાનાંતર (2, 3) બિંદુએ કરીએ, તો આપેલા શિરોબિંદુઓના નવા યામ આ રીતે મળશે. A(2, 3)ના (0, 0). B(5, 1)ના નવા યામ (5 − 2, 1 − 3) = (3, −2) અને C(7, −2)ના નવા યામ (7 − 2, −2 − 3) = (5, −5) થશે.

$$D' = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & -5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = -15 + 10 = -5$$

$\therefore \quad \Delta = \frac{1}{2}|D'| = \frac{1}{2}|-5| = \frac{5}{2}$

આમ, ક્ષેત્રફળ સમાન રહે છે.

ઉદાહરણ 18 : (5, 4), (2, 5), (2, 3) શિરોબિંદુવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ મેળવો.

ઉકેલ : $D = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5(5 - 3) - 4(2 - 2) + 1(6 - 10)$

$$= 10 - 0 - 4$$
$$= 6$$

$\therefore \quad \Delta = \frac{1}{2}|D| = \frac{1}{2}|6| = 3$

$\therefore$ ક્ષેત્રફળ 3 થશે.

ઉદાહરણ 19 : (8, 2), (k, 4) અને (6, 7) શિરોબિંદુવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ 13 હોય, તો k શોધો.

ઉકેલ : $D = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ k & 4 & 1 \\ 6 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 8(4 - 7) - 2(k - 6) + 1(7k - 24)$

$$= -24 - 2k + 12 + 7k - 24$$
$$= 5k - 36$$

હવે, $\Delta = \frac{1}{2}|D|$

$\therefore \quad 13 = \frac{1}{2}|5k - 36|$

$\therefore \quad 5k - 36 = 26$ અથવા $5k - 36 = -26$

$\therefore \quad 5k = 62$ અથવા $5k = 10$

$\therefore \quad k = \frac{62}{5}$ અથવા $k = 2$

$\therefore \quad k = 2$ અથવા $\frac{62}{5}$.

રેખાનું કાર્તેઝિય સમીકરણ :

જ્યારે રેખા પરના બે ભિન્ન બિંદુઓ આપ્યાં હોય ત્યારે રેખાનું સમીકરણ મેળવવાની રીત આપણે XI માં ધોરણમાં શીખી ગયાં છીએ.

જો $A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2)$ એ $\overleftrightarrow{AB}$ પરના બે ભિન્ન બિંદુઓ હોય, તો $\overleftrightarrow{AB}$નું સમીકરણ $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ થાય. **(અહીં રેખા $\overleftrightarrow{AB}$ કોઈ પણ અક્ષને લંબ નથી.)**

આ અભિવ્યક્તિને આપણે નિશ્ચાયકના સ્વરૂપે નીચે પ્રમાણે રજૂ કરી શકીએ :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

ઉદાહરણ 20 : (7, 8) અને (5, −2) માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ નિશ્ચાયકથી તથા બે બિંદુ સ્વરૂપની રીતથી મેળવો.

ઉકેલ : સ્પષ્ટ છે કે રેખા કોઈ પણ અક્ષને સમાંતર નથી.

રેખાનું સમીકરણ $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ જ્યાં, $(x_1, y_1) = (7, 8)$ અને $(x_2, y_2) = (5, -2)$

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 7 & 8 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore \quad x(8 + 2) - y(7 - 5) + 1(-14 - 40) = 0$

$\therefore \quad 10x - 2y - 54 = 0$

$\therefore \quad 5x - y - 27 = 0$

હવે, બે બિંદુ સ્વરૂપે રેખાનું સમીકરણ, $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

$\therefore \quad \frac{y - 8}{-2 - 8} = \frac{x - 7}{5 - 7}$

$\therefore \quad \frac{y - 8}{-10} = \frac{x - 7}{-2}$

$\therefore \quad -2y + 16 = -10x + 70$

$\therefore \quad 10x - 2y - 54 = 0$

$\therefore \quad 5x - y - 27 = 0$

સ્વાધ્યાય 3.3

1. ક્રેમરના સૂત્રથી નીચે આપેલી સમીકરણ સંહતિના ઉકેલ મેળવો :

(1) $4x + 10y = 2xy$
$5x + 16y = 3xy$

(2) $x - 2y = 17$
$5x - 3y = 6$

(3) $\frac{2}{y} + \frac{5}{x} = 9$
$\frac{4}{y} + \frac{3}{x} = 11, \ (xy \neq 0)$

2. $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \\ 5 & 4 & -7 \end{vmatrix}$ ની ત્રીજી હારના સહઅવયવોનો ઉપયોગ કરી વિસ્તરણ કરો.

3. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$ ના બીજા સ્તંભના સહઅવયવોનો ઉપયોગ કરી વિસ્તરણ કરો.

4. નીચે આપેલાં શિરોબિંદુવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ નિશ્ચાયકની મદદથી મેળવો :

(1) (11, 8), (3, 2), (8, 12)   (2) (7, 9), (10, 8), (12, 10)

5. (2, 2), (6, 6) અને (5, k) શિરોબિંદુવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ 4 હોય, તો k શોધો.

6. (5, a), (–2, 5) અને (–2, 3) શિરોબિંદુવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ 7 હોય, તો a શોધો.

7. આપેલાં બિંદુઓમાંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ નિશ્ચાયકની મદદથી મેળવો :

(1) (3, –2), (–1, 4)   (2) (5, –1), (5, 3)   (3) (1, –3), (5, –2)

8. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ નિશ્ચાયકના સહઅવયવો વડે બનતા નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય મેળવો.

*

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ 21 : સાબિત કરો : $\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4(a+b)(b+c)(c+a)$

ઉકેલ : $\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b+c & a+c & a+b \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix}$ ($R_{21}(1)$ અને $R_{31}(1)$)

$= \begin{vmatrix} a+b+2c & 2a+b+c & a+b \\ a-b & c-b & b+c \\ a+b+2c & b-c & -2c \end{vmatrix}$ (પ્રથમ $C_{21}(1)$ અને પછી $C_{32}(1)$)

$= \begin{vmatrix} 0 & 2(a+c) & a+b+2c \\ 2(a+c) & 0 & b-c \\ a+b+2c & b-c & -2c \end{vmatrix}$ ($R_{31}(-1)$ અને $R_{32}(1)$)

$= -2(a+c)\,[-4c(a+c) - (b-c)(a+b+2c)] + (a+b+2c)\cdot 2(a+c)(b-c)$

$= 8c(a+c)^2 + 2(a+c)(b-c)(a+b+2c) + 2(a+c)(b-c)(a+b+2c)$

$= 8c(a+c)^2 + 4(a+c)(b-c)(a+b+2c)$

$= 4(a+c)\,[2c(a+c) + (b-c)(a+b+2c)]$

$= 4(a+c)\,(2ac + 2c^2 + ab + b^2 + 2bc - ac - bc - 2c^2)$

$= 4(a+c)\,(ac + ab + b^2 + bc)$

$= 4(a+c)\,(a+b)(b+c)$

ઉદાહરણ 22 : સાબિત કરો : $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1+y & 1+2y & 1 \\ 1+z & 1+z & 1+3z \end{vmatrix} = 2xyz\left(3+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$.

$\left(xyz \neq 0, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + 3 \neq 0\right)$

ઉકેલ : ડા.બા. $= xyz\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{x} & \frac{1}{x} & \frac{1}{x} \\ 1+\frac{1}{y} & 2+\frac{1}{y} & \frac{1}{y} \\ 1+\frac{1}{z} & 1+\frac{1}{z} & 3+\frac{1}{z} \end{vmatrix}$ $\quad\left(R_1\left(\frac{1}{x}\right), R_2\left(\frac{1}{y}\right), R_3\left(\frac{1}{z}\right), xyz \neq 0\right)$

$$= xyz\begin{vmatrix} 3+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} & 3+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} & 3+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \\ 1+\frac{1}{y} & 2+\frac{1}{y} & \frac{1}{y} \\ 1+\frac{1}{z} & 1+\frac{1}{z} & 3+\frac{1}{z} \end{vmatrix} \quad (R_{21}(1) \text{ અને } R_{31}(1))$$

$$= xyz\left(3+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+\frac{1}{y} & 2+\frac{1}{y} & \frac{1}{y} \\ 1+\frac{1}{z} & 1+\frac{1}{z} & 3+\frac{1}{z} \end{vmatrix} \quad \left(R_1\left(\frac{1}{3+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}\right)\right)$$

$$= xyz\left(3+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1+\frac{1}{y} & 1 & -1 \\ 1+\frac{1}{z} & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad (C_{12}(-1) \text{ અને } C_{13}(-1))$$

$$= 2xyz\left(3+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

ઉદાહરણ 23 : $\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} = (1 + a^2 + b^2)^3$ સાબિત કરો.

ઉકેલ : ડા.બા. $= \begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1+a^2+b^2 & 0 & -2b \\ 0 & 1+a^2+b^2 & 2a \\ b(1+a^2+b^2) & -a(1+a^2+b^2) & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} \quad (C_{31}(-b) \text{ અને } C_{32}(a))$$

$$= (1 + a^2 + b^2)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2b \\ 0 & 1 & 2a \\ b & -a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} \quad \left(C_1\left(\frac{1}{1+a^2+b^2}\right), C_2\left(\frac{1}{1+a^2+b^2}\right)\right)$$

$$= (1 + a^2 + b^2)^2 [(1 - a^2 - b^2 + 2a^2) - 2b(-b)]$$

$$= (1 + a^2 + b^2)^2 (1 + a^2 + b^2)$$

$$= (1 + a^2 + b^2)^3$$

= જ.બા.

ઉદાહરણ 24 : જો $\begin{vmatrix} x-3 & x-4 & x-a \\ x-2 & x-3 & x-b \\ x-1 & x-2 & x-c \end{vmatrix} = 0$, તો સાબિત કરો કે a, b, c સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

ઉકેલ : $\begin{vmatrix} x-3 & x-4 & x-a \\ x-2 & x-3 & x-b \\ x-1 & x-2 & x-c \end{vmatrix} = 0$

$\therefore \begin{vmatrix} -1 & -1 & b-a \\ -1 & -1 & c-b \\ x-1 & x-2 & x-c \end{vmatrix} = 0$ **($R_{21}(-1)$ અને પછી $R_{32}(-1)$)**

$\therefore \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2b-a-c \\ -1 & -1 & c-b \\ x-1 & x-2 & x-c \end{vmatrix} = 0$ **[$R_{21}(-1)$]**

$\therefore$ $(2b - a - c)\,[-1(x - 2) - (x - 1)(-1)] = 0$

$\therefore$ $(2b - a - c)\,(-x + 2 + x - 1) = 0$

$\therefore$ $2b - a - c = 0$

$\therefore$ $2b = a + c$

$\therefore$ a, b, c સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

ઉદાહરણ 25 : નિશ્ચાયકની બે હાર સમાન હોય, તો તેનું મૂલ્ય શૂન્ય હોય છે. તે હકીકતનો ઉપયોગ કરી સાબિત કરો કે નિશ્ચાયકની બે હારની અદલબદલ કરતાં તેની કિંમત મૂળ નિશ્ચાયકથી વિરોધી સંખ્યા મળે છે.

ઉકેલ : $\begin{vmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 & c_1+c_2 \\ a_1+a_2 & b_1+b_2 & c_1+c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

$\therefore \begin{vmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 & c_1+c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 & c_1+c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

$\therefore \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

$\therefore \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

સ્વાધ્યાય 3

1. ઉકેલો : $\begin{vmatrix} x+5 & x \\ x+9 & x-2 \end{vmatrix} = 0$

2. ઉકેલો : $\begin{vmatrix} 3x+4 & x+2 & 2x+3 \\ 4x+5 & 2x+3 & 3x+4 \\ 10x+17 & 3x+5 & 5x+8 \end{vmatrix} = 0$

3. ઉકેલો : $\begin{vmatrix} x & 2 & 2 \\ 7 & -2 & -6 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & -2 & -6 \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 4 & 7 & -2 \\ 3 & 8 & -6 \end{vmatrix}$

4. જો $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 8 \\ x-3 & -8 & -16 \\ 3 & 9 & 4 \end{vmatrix} = 0$, તો x નું મૂલ્ય મેળવો.

5. સાબિત કરો : $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$.

6. સાબિત કરો : $\begin{vmatrix} y+z & x & x \\ y & z+x & y \\ z & z & x+y \end{vmatrix} = 4xyz$.

7. બતાવો કે $\begin{vmatrix} x^2 & (y-z)^2-x^2 & yz \\ y^2 & (z-x)^2-y^2 & zx \\ z^2 & (x-y)^2-z^2 & xy \end{vmatrix} = -(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)$.

8. સાબિત કરો : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$.

9. સાબિત કરો : $\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ (x+1)^2 & (y+1)^2 & (z+1)^2 \\ (x-1)^2 & (y-1)^2 & (z-1)^2 \end{vmatrix} = -4(x-y)(y-z)(z-x)$.

10. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :

વિભાગ A (1 ગુણ)

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4x & 6x & 8x \\ 5 & 7 & 8 \end{vmatrix} = ...$ ☐

(a) $18x$ (b) 0 (c) 1 (d) $18x^3$

(2) $\begin{vmatrix} 2008 & 2009 \\ 2010 & 2011 \end{vmatrix}$ નું મૂલ્ય ...... છે. ☐

(a) -1 (b) 1 (c) -2 (d) 2

(3) $\begin{vmatrix} x & 1 & y+z \\ y & 1 & z+x \\ z & 1 & x+y \end{vmatrix} = ...$ ☐

(a) $x+y+z$ (b) $(x+y)(y+z)(z+x)$

(c) 3 (d) 0

(4) $\begin{vmatrix} sin40^\circ & -cos40^\circ \\ sin50^\circ & cos50^\circ \end{vmatrix} = ...$

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) નું અસ્તિત્વ નથી.

(5) જો $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 7 & 4 & -1 \end{vmatrix}$, D પર $R_{12}(-1)$ ક્રિયા કરતાં D ...... થાય.

(a) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 7 & 4 & -1 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 7 & 4 & -1 \end{vmatrix}$

વિભાગ B (2 ગુણ)

(6) $\begin{vmatrix} 5^2 & 5^3 & 5^4 \\ 5^1 & 5^2 & 5^3 \\ 5^3 & 5^4 & 5^5 \end{vmatrix} = ...$

(a) 5^9 (b) 5^{12} (c) 5^0 (d) 0

(7) જો $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & yz & x \\ 1 & zx & y \\ 1 & xy & z \end{vmatrix}$ અને $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$, તો ......

(a) $D_1 + 2D_2 = 0$ (b) $2D_1 + D_2 = 0$ (c) $D_1 + D_2 = 0$ (d) $D_1 = D_2$

(8) જો $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ અને $\begin{vmatrix} 0 & x^2+a & x^4+b \\ x^2-a & 0 & x-c \\ x^3-b & x^2+c & 0 \end{vmatrix} = 0$, તો $x =$ ......

(a) 1 (b) 0 (c) $a + b + c$ (d) $-(a + b + c)$

(9) જો $x, y, z \in R, x > y > z$, તો $D = \begin{vmatrix} (x+1)^2 & (y+1)^2 & (z+1)^2 \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ એ ...... છે.

(a) ઋણ (b) ધન (c) શૂન્ય (d) વાસ્તવિક નથી.

(10) જો $D = \begin{vmatrix} 1 & cos\theta & 1 \\ -cos\theta & 1 & cos\theta \\ -1 & -cos\theta & 1 \end{vmatrix}$, તો D ...... અંતરાલમાં છે.

(a) $(2, \infty)$ (b) $(2, 4)$ (c) $[2, 4]$ (d) $[-2, 2]$

વિભાગ C (3 ગુણ)

(11) જો $\begin{vmatrix} a & b & ax+by \\ b & c & bx+cy \\ ax+by & bx+cy & 0 \end{vmatrix} = 0$ અને $ax^2 + 2bxy + cy^2 \neq 0$ તો ......

(a) a, b, c સમાંતર શ્રેણીમાં છે. (b) a, b, c સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

(c) a, b, c સમાંતર શ્રેણી તથા સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે. (d) a, b, c સમાંતર કે સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં નથી.

(12) જો $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & x & 5 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ તો $x = ...$

(a) 2 (b) −2 (c) 5 (d) −5

(13) $\begin{vmatrix} 1+x & 1-x & 1-x \\ 1-x & 1+x & 1-x \\ 1-x & 1-x & 1+x \end{vmatrix} = 0$ નાં બીજ ...... છે.

(a) 0, 1 (b) 0, −1 (c) 0, −3 (d) 0, 3

વિભાગ D (4 ગુણ)

(14) $\begin{vmatrix} x & -6 & -1 \\ 2 & -3x & x-3 \\ -3 & 2x & x+2 \end{vmatrix} = 0$ તો $x = ...$.

(a) −3, −2, 1 (b) −3, 2, −1 (c) −3, 2, 1 (d) 3, 2, 1

(15) $\begin{vmatrix} \sqrt{14}+\sqrt{3} & \sqrt{20} & \sqrt{5} \\ \sqrt{15}+\sqrt{28} & \sqrt{25} & \sqrt{10} \\ 3+\sqrt{70} & \sqrt{15} & \sqrt{25} \end{vmatrix} = ...$.

(a) $25\sqrt{3} - 15\sqrt{2}$ (b) $15\sqrt{2} + 25\sqrt{3}$ (c) $-25\sqrt{3} - 15\sqrt{2}$ (d) $15\sqrt{2} - 25\sqrt{3}$

(16) $\begin{vmatrix} a & b & ax+b \\ b & c & bx+c \\ ax+b & bx+c & 0 \end{vmatrix} = 0$ તો a, b, c ...... માં છે.

(a) સમાંતર શ્રેણી (b) સમગુણોત્તર શ્રેણી (c) વધતી શ્રેણી (d) ઘટતી શ્રેણી

*

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓ શીખ્યા :

1. દ્વિહાર નિશ્ચાયક $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ અને તેનું મૂલ્ય $ad - bc$.

2. ત્રિહાર નિશ્ચાયક $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$$= a_1 (b_2c_3 - b_3c_2) - b_1 (a_2c_3 - a_3c_2) + c_1 (a_2b_3 - a_3b_2)$$

3. કેટલાંક સંકેતો :

(1) $R_i \rightarrow C_i$: બધી જ હારને અનુરૂપ સ્તંભોમાં ફેરવવાની ક્રિયા.

(2) R_{ij} (C_{ij}) $(i \neq j)$: i મી અને j મી હાર (સ્તંભ)ની અદલાબદલીની ક્રિયા.

(3) $R_i(k)$ $[C_i(k)]$: i મી હાર (સ્તંભ)ના બધા ઘટકોને k વડે ગુણવાની ક્રિયા

(4) $R_{ij}(k)$ $[C_{ij}(k)]$ $(i \neq j)$: i મી હાર (સ્તંભ)ના ઘટકોને k વડે ગુણી j મી હાર (સ્તંભ)ના અનુરૂપ ઘટકોમાં ઉમેરવાની ક્રિયા.

4. નિશ્ચાયકના ગુણધર્મો :

(1) નિશ્ચાયકની બધી જ હારને અનુરૂપ સ્તંભમાં ફેરવતાં નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય બદલાતું નથી.

(2) નિશ્ચાયકની કોઈ પણ બે હાર (સ્તંભ)ની અદલાબદલી કરતાં મળતા નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય આપેલ નિશ્ચાયકના મૂલ્યની વિરોધી સંખ્યા છે.

(3) નિશ્ચાયકની કોઈ પણ હાર (સ્તંભ)ના બધા જ ઘટકોને k વડે ગુણતાં મળતા નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય, મૂળ નિશ્ચાયકના મૂલ્ય કરતાં k ગણું થાય છે.

(4) $$\begin{vmatrix} a_1+d_1 & b_1+e_1 & c_1+f_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & e_1 & f_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(5) નિશ્ચાયકની કોઈ પણ બે હાર (સ્તંભ)ના અનુરૂપ ઘટકો સમાન હોય, તો નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય શૂન્ય થાય છે.

(6) જો નિશ્ચાયકની કોઈ પણ હાર (સ્તંભ)ના ઘટકોને k વડે ગુણીને અન્ય હાર (સ્તંભ)ના અનુરૂપ ઘટકોમાં ઉમેરતાં મળતા નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય, મૂળ નિશ્ચાયકના મૂલ્યની બરાબર થાય છે.

5. ઉપનિશ્ચાયક : નિશ્ચાયકનો કોઈ પણ ઘટક જે હાર અને સ્તંભમાં હોય તે હાર અને સ્તંભને દૂર કરીને બાકી રહેતા ઘટકોને તે જ સ્થાને રાખી મળતા નિશ્ચાયકને તે ઘટકનો ઉપનિશ્ચાયક કહે છે.

6. સહઅવયવ : ત્રિહાર નિશ્ચાયકનો કોઈ પણ ઘટક i મી હાર તથા j મા સ્તંભમાં હોય, તો તેના ઉપનિશ્ચાયકને $(-1)^{i+j}$ વડે ગુણવાથી મળતા મૂલ્યને તે ઘટકનો સહઅવયવ કહે છે.

7. નિશ્ચાયકની કોઈ પણ હાર (સ્તંભ)ના ઘટકોને અનુરૂપ સહઅવયવો વડે ગુણીને ઉમેરતાં નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય મળે છે.

8. નિશ્ચાયકની કોઈ પણ હાર (સ્તંભ)ના ઘટકોને અન્ય હાર (સ્તંભ)ના અનુરૂપ ઘટકોના સહઅવયવો વડે ગુણીને ઉમેરતાં મળતો સરવાળો શૂન્ય થાય છે.

9. ક્રેમરના સૂત્રની મદદથી બે સુરેખ સમીકરણોની સંહતિનો ઉકેલ મેળવી શકાય છે.

10. (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) શિરોબિંદુવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ,

$$\frac{1}{2}|\mathrm{D}| \text{ જ્યાં } \mathrm{D} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

11. ઊગમબિંદુનું સ્થાનાંતર કરતાં ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ બદલાતું નથી.

12. બે ભિન્ન બિંદુઓ (x_1, y_1) અને (x_2, y_2) માંથી પસાર થતી રેખાનું કાર્તેઝિય સમીકરણ

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ છે.}$$

: નિશ્ચાયક એક વિધેય તરીકે :

આપણે સદિશ વિશે ધોરણ XI માં અભ્યાસ કર્યો, $\overline{x} = (x_1, x_2)$ એ R^2 નો અને $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ એ R^3 નો સદિશ છે.

હવે આપણે એક વિધેય $D : R^3 \times R^3 \times R^3 \to R$ વ્યાખ્યાયિત કરીએ.

$\overline{x} = (a_1, b_1, c_1)$, $\overline{y} = (a_2, b_2, c_2)$ અને $\overline{z} = (a_3, b_3, c_3)$ હોય, તો

$$D(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

તે જ પ્રમાણે $\overline{x} = (a_1, b_1)$, $\overline{y} = (a_2, b_2)$ હોય, તો

$D : R^2 \times R^2 \to R$, $D(\overline{x}, \overline{y}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ લઈ શકાય છે.

આમ, નિશ્ચાયક એક વાસ્તવિક વિધેય છે, જેનો પ્રદેશ R^3ના સદિશોની ક્રમયુક્ત ત્રય અથવા R^2ના સદિશોની ક્રમયુક્ત જોડનો બનેલો છે.

આમ, $k \in R$ તો $D(k\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = k \cdot D(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$

પ્રત્યેક ચલ $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ માટે આ રીતે લખી શકાય :

જો $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ તો $D(\overline{x} + \overline{u}, \overline{y}, \overline{z}) = D(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) + D(\overline{u}, \overline{y}, \overline{z})$

આ પરિણામ પ્રત્યેક ચલ માટે સત્ય છે.

આમ, નિશ્ચાયક વિધેય પ્રત્યેક ચલમાં સુરેખ (અન્ય ચલ અચળ રહે તો) વિધેય છે. આમ નિશ્ચાયક વિધેય એ બહુચલ સુરેખ વિધેય છે.

વળી, $D(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = -D(\overline{y}, \overline{x}, \overline{z})$

આવા વિધેયને એકાંતરિત વિધેય કહે છે.

આ પરથી આપણે મેળવી શકીએ કે $D(\overline{x}, \overline{x}, \overline{z}) = 0$

આ રીતે, ઉદાહરણ 25 ને સમજી શકાય :

$D(\overline{x} + \overline{y}, \overline{x} + \overline{y}, \overline{z}) = 0$

$\therefore \; D(\overline{x} + \overline{y}, \overline{x}, \overline{z}) + D(\overline{x} + \overline{y}, \overline{y}, \overline{z}) = 0$

$\therefore \; D(\overline{x}, \overline{x}, \overline{z}) + D(\overline{y}, \overline{x}, \overline{z}) + D(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) + D(\overline{y}, \overline{y}, \overline{z}) = 0$

$\therefore \; D(\overline{y}, \overline{x}, \overline{z}) = -D(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$

શ્રેણિક 4

It is easier to square the circle than to get round a mathematician.
– Augustus De Morgan

Our notion of symmetry is derived from the human face.
Hence we demand symmetry horizontally and in breadth only not vertically nor in depth.
– Blaise Pascal

4.1 પ્રાસ્તાવિક

જો તમારું વજન કિલોગ્રામમાં પૂછવામાં આવે, તો તમારો જવાબ 55 જેવી કોઈક વાસ્તવિક સંખ્યા હશે. આ જ પ્રમાણે જો તમારી ઊંચાઈ સેન્ટિમીટરમાં પૂછવામાં આવે, તો તમારો જવાબ 135 જેવી કોઈક બીજી વાસ્તવિક સંખ્યા હશે. આ પ્રમાણેની માહિતી સંગ્રહિત કરવાનો એક રસ્તો એ છે કે તેમને વજન અને ઊંચાઈની ક્રમયુક્ત જોડ (55, 135) દ્વારા દર્શાવી શકાય. આમ આ ક્રમયુક્ત જોડના ઘટકો આપણને અનુક્રમે વજન અને ઊંચાઈની માહિતી પૂરી પાડે છે. જો આ માહિતીમાં તમે તમારી અત્યારની ઉંમર 16 વર્ષ પણ ઉમેરવા માંગતા હો તો તેને દર્શાવવા માટે આપણે તેને ક્રમયુક્ત ત્રય (55, 135, 16) વડે દર્શાવી શકીએ. આ ક્રમયુક્ત ત્રયના ઘટકો આપણને અનુક્રમે વજન, ઊંચાઈ અને ઉંમરની માહિતી પૂરી પાડે છે. આ ત્રણ ઘટકોની શ્રેણીને આપણે એક હાર [55 135 16] અથવા એક સ્તંભ $\begin{bmatrix} 55 \\ 135 \\ 16 \end{bmatrix}$ દ્વારા પણ દર્શાવી શકીએ.

ઉપરના પ્રશ્નો રીટા, રમણ, રહીમ અને જૉન એમ ચાર વ્યક્તિઓને પૂછવામાં આવે અને આ અંગેની માહિતી એકત્રિત કરી તેને ક્રમયુક્ત ત્રયમાં અનુક્રમે (55, 135, 16), (58.5, 140, 18), (59, 138, 17) અને (60.5, 155, 20) વડે દર્શાવાય. જો આ બધી જ વ્યક્તિઓની બધી જ માહિતી કોઈ ગાણિતીય અભિવ્યક્તિમાં દર્શાવી શકીએ તો કેવું સરસ લાગે ! જો દરેક વ્યક્તિની માહિતી સ્તંભમાં દર્શાવીએ અને વ્યક્તિઓને હારમાં ગોઠવીએ તો તેને નીચે મુજબની એક અભિવ્યક્તિ તરીકે મૂકી શકાય :

$$\begin{array}{c} \\ \text{વજન} \\ \text{ઊંચાઈ} \\ \text{ઉંમર} \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{રીટા} & \text{રમણ} & \text{રહીમ} & \text{જૉન} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 55 & 58.5 & 59 & 60.5 \\ 135 & 140 & 138 & 155 \\ 16 & 18 & 17 & 20 \end{bmatrix} \end{array}$$

આ જ રીતે જો લશ્કરની કોઈક એક પાંખમાં સૈનિકોની ભરતી કરવા માટે ઉપર મુજબની માહિતી ઘણી વ્યક્તિઓ માટે એકત્રિત કરવાની હોય, તો તે માહિતીને ઉપરોક્ત અભિવ્યક્તિમાં રજૂ કરવાથી તેનું અર્થઘટન કરવામાં ઘણી જ સરળતા રહે તથા સૈનિકની પસંદગી કરવામાં સુગમ પડે.

વાસ્તવિક સંખ્યાઓની ઉપરોક્ત લંબચોરસીય ગોઠવણીને **શ્રેણિક** કહે છે. શ્રેણિકમાં દર્શાવેલ પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યાને શ્રેણિકનો **ઘટક (Element / Entry)** કહે છે.

અંગ્રેજી ભાષામાં શ્રેણિકને **Matrix** કહે છે, જે લેટિન ભાષાનો શબ્દ છે. સુરેખ સમીકરણોની સંહતિના અભ્યાસમાંથી શ્રેણિકની સંકલ્પના ઉદ્ભવી છે. ઈ.સ. પૂ. 300 અને ઈ.સ. 200 વચ્ચેના સમયગાળામાં ચીનમાં લખાયેલ Mathematical Art **(Chiu Chang Suan Shu)** નામના પુસ્તકના નવ પ્રકરણોમાં સુરેખ સમીકરણોની સંહતિના ઉકેલ માટે શ્રેણિકનો ઉપયોગ થયેલો માલૂમ પડ્યો છે. **Carl-Friedrich Gauss** (1777-1855) નામના ગણિતશાસ્ત્રીએ પણ સુરેખ સમીકરણ સંહતિના ઉકેલમાં શ્રેણિકનો ઉપયોગ કર્યો હતો.

શ્રેણિક પરની પ્રક્રિયાનો ઉપયોગ અણુભૌતિક વિજ્ઞાન (Electronics Physics)માં પણ થાય છે. કમ્પ્યૂટરમાં, બજેટમાં, કિંમતોના અંદાજ, પૃથક્કરણ અને પ્રયોગોમાં શ્રેણિકનો ઉપયોગ વિપુલ પ્રમાણમાં થાય છે. સંકેત લિપિ, આધુનિક મનોવિજ્ઞાન, પ્રજોત્પત્તિશાસ્ત્ર, ઔદ્યોગિક વ્યવસ્થાપનમાં પણ તેનો ઉપયોગ થાય છે.

શ્રેણિક : સંખ્યાઓની કોઈ પણ લંબચોરસ ગોઠવણીને શ્રેણિક કહે છે. આ સંખ્યાઓને [ ] અથવા ( ) પ્રકારના કૌંસમાં મૂકવામાં આવે છે. આપણે ફક્ત વાસ્તવિક સંખ્યાઓવાળા શ્રેણિકોનો જ વિચાર કરીશું. એટલે કે શ્રેણિકોના ઘટકો ફક્ત વાસ્તવિક સંખ્યાઓ જ લઈશું.

શ્રેણિક $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ ને બે હાર અને ત્રણ સ્તંભ છે. તેથી આપણે આ શ્રેણિકને 2×3 શ્રેણિક કહીશું. 2×3 ને શ્રેણિકની **કક્ષા (Order)** પણ કહે છે.

વ્યાપક સ્વરૂપે, $m \times n$ શ્રેણિકને m હાર અને n સ્તંભ છે. તેને આપણે નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકીએ,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

અહીં 'a_{ij}' એ 'i મી' હાર અને 'j મા' સ્તંભનો ઘટક છે. ટૂંકમાં આપણે આ શ્રેણિકને $[a_{ij}]_{m \times n}$, $i = 1, 2, 3, ..., m$; $j = 1, 2, 3, ..., n$ વડે દર્શાવીશું. સંદિગ્ધતાને અવકાશ ન હોય ત્યારે આપણે તેને $[a_{ij}]$ પણ લખીશું. આપણે શ્રેણિકોને A, B, C વગેરે દ્વારા દર્શાવીશું. શ્રેણિકની કક્ષા $m \times n$ માં m એ શ્રેણિકની હારની સંખ્યા અને n એ શ્રેણિકના સ્તંભની સંખ્યા દર્શાવે છે. $m \times n$ એ લંબચોરસ શ્રેણિક છે.

ઉદાહરણ 1 : 4×3 શ્રેણિક $A = [a_{ij}]$ મેળવો, જેના સભ્યો $a_{ij} = i - j$ દ્વારા મળે.

ઉકેલ : માંગેલ શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}$

અહીં, $a_{ij} = i - j$, તેથી $a_{11} = 1 - 1 = 0$, $a_{12} = 1 - 2 = -1$, $a_{13} = 1 - 3 = -2$,

$a_{21} = 2 - 1 = 1$. આ પ્રમાણે ઘટકો મેળવતાં શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ મળે.

નિશ્ચાયક અને શ્રેણિક :

(1) નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય એક વાસ્તવિક સંખ્યા છે જ્યારે શ્રેણિકને એક વાસ્તવિક મૂલ્યમાં આંકી શકાય નહીં, કારણ કે શ્રેણિક એ તો વાસ્તવિક સંખ્યાઓની ફક્ત ગોઠવણી જ છે.

(2) નિશ્ચાયકની હારની સંખ્યા અને સ્તંભની સંખ્યા હંમેશાં સમાન હોય છે જ્યારે શ્રેણિકની હારની સંખ્યા અને સ્તંભની સંખ્યા સમાન અથવા અસમાન હોઈ શકે છે.

4.2 શ્રેણિકોની સમાનતા

બે શ્રેણિકો $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ અને $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ માટે જો તેમની હારની સંખ્યા સમાન હોય, તેમના સ્તંભની સંખ્યા સમાન હોય અને પ્રત્યેક i, j માટે $a_{ij} = b_{ij}$ થાય, તો A અને B સમાન શ્રેણિકો કહેવાય અને સમાન શ્રેણિકો A તથા B ને A = B વડે દર્શાવાય છે.

આમ, $A = B \Leftrightarrow [a_{ij}]_{m \times n} = [b_{ij}]_{m \times n} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \;\; \forall \; i = 1, 2, 3, ..., m; \;\; j = 1, 2, 3, ..., n$

ઉદાહરણ 2 : જો $\begin{bmatrix} x-1 & 2y \\ x+y & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x-7 & y^2-3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$, તો x અને y શોધો.

ઉકેલ : બે શ્રેણિકોના અનુરૂપ ઘટકો સમાન છે.

$\therefore \;\; x - 1 = 3x - 7, \quad 2y = y^2 - 3$ અને $x + y = 6$ અને $4 = 4$.

$\therefore \quad 2x = 6,$ | $y^2 - 2y - 3 = 0$

$\therefore \quad x = 3,$ | $(y - 3)(y + 1) = 0$

$y = 3$ અથવા $y = -1$

અહીં, $x = 3$ અને $y = 3$ એ સમીકરણ $x + y = 6$નું સમાધાન કરે છે અને $x = 3$, $y = -1$ દ્વારા સમીકરણ $x + y = 6$ નું સમાધાન થતું નથી. તેથી $x = 3$ અને $y = 3$.

શ્રેણિકોના પ્રકારો :

હાર શ્રેણિક (Row Matrix) : $1 \times n$ શ્રેણિક $[a_{11} \ \ a_{12} \ \ a_{13} \ldots a_{1n}]$ ને હાર શ્રેણિક કહે છે.

હાર શ્રેણિકને ફક્ત એક જ હાર હોય છે. (સ્તંભની સંખ્યા કોઈ પણ હોઈ શકે છે.)

ઉદાહરણ તરીકે, $A = [3 \ \ 5 \ \ -1 \ \ 4 \ \ 0]$ એ 1×5 પ્રકારનો હાર શ્રેણિક છે.

સ્તંભ શ્રેણિક (Column Matrix) : $m \times 1$ શ્રેણિક $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$ ને સ્તંભ શ્રેણિક કહે છે.

સ્તંભ શ્રેણિકને ફક્ત એક જ સ્તંભ હોય છે. (હારની સંખ્યા કોઈ પણ હોઈ શકે છે.)

ઉદાહરણ તરીકે, $A = \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \\ 10 \\ -8 \end{bmatrix}$ એ 4×1 પ્રકારનો સ્તંભ શ્રેણિક છે.

ચોરસ શ્રેણિક (Square Matrix) : $n \times n$ પ્રકારના શ્રેણિકને ચોરસ શ્રેણિક કહે છે.

ચોરસ શ્રેણિકની હારની અને સ્તંભની સંખ્યા સમાન હોય છે.

ઉદાહરણ તરીકે $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 11 & 2 & 9 \\ -4 & 0 & -7 \end{bmatrix}$ એ 3×3 પ્રકારનો ચોરસ શ્રેણિક છે.

(નોંધ : $[a_{ij}]_{1 \times 1}$ એ હાર શ્રેણિક, સ્તંભ શ્રેણિક તથા ચોરસ શ્રેણિક પણ છે.)

વિકર્ણ શ્રેણિક (Diagonal Matrix) : જો ચોરસ શ્રેણિક $A = [a_{ij}]_{n \times n}$માં $i \neq j$ માટે $a_{ij} = 0$ હોય, તો Aને વિકર્ણ શ્રેણિક કહેવાય. આ પ્રકારના ચોરસ શ્રેણિકમાં ઉપર ડાબે ખૂણેથી જમણી બાજુ નીચે તરફ જતા વિકર્ણ (અગ્રવિકર્ણ)ના ઘટકો સિવાયના બધા જ ઘટકો શૂન્ય હોય છે.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ **વિકર્ણ શ્રેણિક છે.**

વિકર્ણ શ્રેણિકને $diag\,[a_{11} \ \ a_{22} \ \ a_{33} \ldots a_{nn}]$ વડે પણ દર્શાવાય છે.

ઉદાહરણ તરીકે, $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ વિકર્ણ શ્રેણિક છે, એટલે કે $diag\,[5 \ 0 \ 3]$.

અહીં, 5, 0, 3 એ શ્રેણિક Aના અગ્રવિકર્ણના ઘટકો છે.

શૂન્ય શ્રેણિક (Zero Matrix) : જે શ્રેણિકના બધા જ ઘટકો શૂન્ય હોય તે શ્રેણિકને શૂન્ય શ્રેણિક કહે છે. આપણે શૂન્ય શ્રેણિકને $[0]_{m \times n}$ અથવા $O_{m \times n}$ વડે દર્શાવીશું. $O_{m \times n}$ ને O વડે પણ દર્શાવી શકાય.

આમ, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **એ શૂન્ય શ્રેણિક છે, એટલે કે એ $O_{2 \times 3}$ શૂન્ય શ્રેણિક છે.**

4.3 શ્રેણિકો પરની પ્રક્રિયાઓ

બે શ્રેણિકોનો સરવાળો : જો $A = [a_{ij}]$ અને $B = [b_{ij}]$ બંને $m \times n$ શ્રેણિક હોય તો તેમનો સરવાળો શ્રેણિક $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત થાય છે. એટલે કે આપેલા બે શ્રેણિક A અને B ના અનુરૂપ ઘટકોના સરવાળાથી બનતો શ્રેણિક એ તેમનો સરવાળો A + B છે.

બે શ્રેણિકોના સરવાળા માટે બંને શ્રેણિકની હારની સંખ્યા સમાન હોવી જોઈએ તેમજ તેમના સ્તંભની સંખ્યા સમાન હોવી જોઈએ, નહીં તો બે શ્રેણિકોનો સરવાળો શક્ય થશે નહીં. A અને B બંને $m \times n$ શ્રેણિકો હોય, તો તેઓ સરવાળા માટે સુસંગત છે તેમ કહેવાય છે. સંકેતમાં, $[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$.

ઉદાહરણ તરીકે, જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 2 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}$, તો $A + B = \begin{bmatrix} 1-3 & 5+2 \\ 2+1 & -3+2 \\ 4-5 & -7-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 3 & -1 \\ -1 & -11 \end{bmatrix}$.

શ્રેણિકના સરવાળાના ગુણધર્મો :

(1) સરવાળા માટે ક્રમનો નિયમ :

જો $A = [a_{ij}]$ અને $B = [b_{ij}]$ બંને $m \times n$ શ્રેણિક હોય, તો $A + B = B + A$,

હવે, $A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}]$

$= [a_{ij} + b_{ij}]$

$= [b_{ij} + a_{ij}]$ (Rમાં સરવાળા વિષે ક્રમનો ગુણધર્મ)

$= [b_{ij}] + [a_{ij}]$

$= B + A$

$\therefore \quad A + B = B + A$

(2) સરવાળા માટે જૂથનો નિયમ :

$m \times n$ શ્રેણિકો $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ અને $C = [c_{ij}]$ માટે,

$(A + B) + C = A + (B + C)$.

હવે, $(A + B) + C = ([a_{ij}] + [b_{ij}]) + [c_{ij}]$

$= [a_{ij} + b_{ij}] + [c_{ij}]$

$= [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}]$

$= [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})]$ (Rમાં સરવાળાનો જૂથનો નિયમ)

$= [a_{ij}] + [b_{ij} + c_{ij}]$

$= [a_{ij}] + ([b_{ij}] + [c_{ij}])$

$= A + (B + C)$

$\therefore \quad (A + B) + C = A + (B + C)$

(3) સરવાળા માટે તટસ્થ શ્રેણિક :

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ અને શૂન્ય શ્રેણિક $O = [0]_{m \times n}$ માટે $A + O = O + A = A$

હવે, $A + O = [a_{ij}] + [0]$

$= [a_{ij} + 0]$

$= [a_{ij}] = A$ (0 એ Rમાં સરવાળા માટેનો તટસ્થ ઘટક છે.)

$\therefore \quad A + O = A$

ક્રમના નિયમ અનુસાર $A + O = O + A$

$\therefore \quad O + A = A$

આમ, **O એ સરવાળા માટેનો તટસ્થ શ્રેણિક છે.**

(4) વિરોધી શ્રેણિકનું અસ્તિત્વ :

શ્રેણિક $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ને અનુરૂપ એક શ્રેણિક $[-a_{ij}]_{m \times n}$ એવો મળે કે જેથી $A + [-a_{ij}] = O_{m \times n}$.

$$\begin{aligned} A + [-a_{ij}] &= [a_{ij}] + [-a_{ij}] \\ &= [a_{ij} - a_{ij}] \\ &= [\,0\,] \\ &= O_{m \times n} \end{aligned}$$

આપણે $[-a_{ij}]$ ને $-A$ વડે દર્શાવીશું.

ક્રમના નિયમ પરથી $A + (-A) = O = (-A) + A$.

આમ, **$-A = [-a_{ij}]$ ને $A = [a_{ij}]$નો વિરોધી શ્રેણિક કહે છે.**

શ્રેણિકોનો તફાવત : જો $A = [a_{ij}]$ અને $B = [b_{ij}]$ બંને $m \times n$ શ્રેણિકો હોય, તો A અને Bનો તફાવત $A - B = A + (-B) = [a_{ij}] + [-b_{ij}] = [a_{ij} - b_{ij}]$ એ રીતે વ્યાખ્યાયિત થાય.

ઉદાહરણ 3 : જો $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, તો $A + B$ અને $A - B$ શોધો.

ઉકેલ : $A + B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2+5 & -3+4 & 4-2 \\ 5+3 & 2+1 & 8+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 8 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

$$A - B = A + (-B) = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -4 & 2 \\ -3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-5 & -3-4 & 4+2 \\ 5-3 & 2-1 & 8-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -7 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

ઉદાહરણ 4 : આપણે $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$નો સરવાળો કરી શકીશું ? કારણ આપો.

ઉકેલ : અહીં A એ 3×2 અને B એ 2×2 શ્રેણિકો છે. તેમના સ્તંભની સંખ્યા સમાન છે, પરંતુ હારની સંખ્યા સમાન નથી. A તથા B સરવાળા માટે સુસંગત નથી. તેથી A અને B નો સરવાળો થઈ શકે નહીં.

શ્રેણિકનો અદિશ વડે ગુણાકાર તથા ગુણધર્મો :

જો $A = [a_{ij}]$ એ $m \times n$ શ્રેણિક હોય અને k કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય, તો શ્રેણિક $[ka_{ij}]$ ને શ્રેણિક Aનો અદિશ k વડે ગુણાકાર કહે છે. તેને kA વડે દર્શાવાય છે. આમ, $A = [a_{ij}]$ માટે $kA = [ka_{ij}]$ થાય.

શ્રેણિક kAમાં Aના દરેક ઘટકને k વડે ગુણવામાં આવે છે. (નિશ્ચાયકના અનુરૂપ ગુણધર્મ સાથે સરખાવો !)

શ્રેણિકોના સરવાળા તથા અદિશ વડે ગુણાકાર માટેના ગુણધર્મો :

ધારો કે $A = [a_{ij}]$ અને $B = [b_{ij}]$ એ $m \times n$ શ્રેણિકો છે અને $k, l \in R$,

(1) $k(A + B) = kA + kB$ (2) $(k + l)A = kA + lA$ (3) $(kl)A = k(lA)$

(4) $1A = A$ (5) $(-1)A = -A$

સાબિતી : (1) $k(A + B) = k[a_{ij} + b_{ij}]$

$= [k(a_{ij} + b_{ij})]$

$= [ka_{ij} + kb_{ij}]$

$= [ka_{ij}] + [kb_{ij}]$

$= k[a_{ij}] + k[b_{ij}]$

$= kA + kB$

(2) $(k + l)A = (k + l)[a_{ij}]$

$= [(k + l)\, a_{ij}]$

$= [ka_{ij} + la_{ij}]$

$= [ka_{ij}] + [la_{ij}]$

$= k[a_{ij}] + l[a_{ij}]$

$= kA + lA$

(3) $(kl)A = (kl)[a_{ij}]$

$= [(kl)\, a_{ij}]$

$= [k(la_{ij})]$

$= k[la_{ij}]$

$= k(lA)$

(4) $1A = 1\,[a_{ij}]$

$= [1 \cdot a_{ij}]$

$= [a_{ij}]$

$= A$

(5) $(-1)A = (-1)[a_{ij}] = [(-1)a_{ij}] = [-a_{ij}] = -A$

આમ, $(-1)\,A = -A$

ઉદાહરણ 5 : જો $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -5 & 7 \\ 2 & -9 & -8 & 5 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 4 & 0 & 1 & -6 \\ -2 & 3 & 6 & -7 \end{bmatrix}$, તો $3A - 2B$ મેળવો.

ઉકેલ : $3A - 2B = 3A + (-2)B$

$$= 3\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -5 & 7 \\ 2 & -9 & -8 & 5 \end{bmatrix} + (-2)\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 4 & 0 & 1 & -6 \\ -2 & 3 & 6 & -7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 6 & 3 & 0 \\ -9 & 3 & -15 & 21 \\ 6 & -27 & -24 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -4 & 6 & -10 \\ -8 & 0 & -2 & 12 \\ 4 & -6 & -12 & 14 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12-2 & 6-4 & 3+6 & 0-10 \\ -9-8 & 3+0 & -15-2 & 21+12 \\ 6+4 & -27-6 & -24-12 & 15+14 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 2 & 9 & -10 \\ -17 & 3 & -17 & 33 \\ 10 & -33 & -36 & 29 \end{bmatrix}$$

ઉદાહરણ 6 : જો $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$, તો શ્રેણિક X મેળવો કે જેથી $3A + 2X = 4B$.

ઉકેલ : આપણે શ્રેણિક X એવો મેળવવા માગીએ છીએ કે જેથી, $3A + 2X = 4B$

$\therefore \quad (-3A) + (3A + 2X) = (-3A) + 4B$ (3Aનો વિરોધી ઉમેરતા)

$\therefore \quad (-3A + 3A) + 2X = (-3A) + 4B$

$\therefore \quad O + 2X = 4B - 3A$

$\therefore \quad 2X = 4B - 3A$ (O એ સરવાળા માટેનો તટસ્થ શ્રેણિક છે.)

$\therefore \quad X = \frac{1}{2}(4B - 3A)$

$$\therefore \quad X = \frac{1}{2}\left(4\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} + (-3)\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 12 & -16 \\ 24 & -20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -15 & -12 \\ 0 & 6 \\ -9 & -18 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4-15 & 8-12 \\ 12+0 & -16+6 \\ 24-9 & -20-18 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -11 & -4 \\ 12 & -10 \\ 15 & -38 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{2} & -2 \\ 6 & -5 \\ \frac{15}{2} & -19 \end{bmatrix}$$

પરિવર્ત શ્રેણિક અને તેના ગુણધર્મો :

પરિવર્ત શ્રેણિક (Transpose of a Matrix) : જો $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ શ્રેણિકની બધી જ હારને અનુરૂપ સ્તંભોમાં ફેરવવામાં આવે અને તેથી જે શ્રેણિક મળે તેને શ્રેણિક Aનો પરિવર્ત શ્રેણિક કહેવાય.

જો $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ શ્રેણિક હોય તો તેનો પરિવર્ત શ્રેણિક $[a_{ji}]_{n \times m}$ થશે. તેને A^T અથવા A' વડે દર્શાવાય છે.

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ તો $A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$

ઉદાહરણ તરીકે, જો $A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{5} & 2 \\ \sqrt{2} & -1 & 0 \end{bmatrix}$, તો $A^T = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{5} & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

સંમિત શ્રેણિક (Symmetric Matrix) : જો ચોરસ શ્રેણિક A માટે $A^T = A$ થાય, તો Aને સંમિત શ્રેણિક કહેવાય. જો $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, તો $A^T = [a_{ji}]_{n \times n}$. હવે, $A^T = A$ હોવાથી પ્રત્યેક i અને j માટે $a_{ij} = a_{ji}$ થાય.

આમ, જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & 0 & 2 \\ -5 & 2 & -7 \end{bmatrix}$, તો $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & 0 & 2 \\ -5 & 2 & -7 \end{bmatrix}$.

તેથી, $A^T = A$ થશે. તેથી A સંમિત શ્રેણિક છે.

વિસંમિત શ્રેણિક (Skew-Symmetric Matrix) : જો ચોરસ શ્રેણિક A માટે $A^T = -A$ થાય, તો A ને વિસંમિત શ્રેણિક કહેવાય. આવા શ્રેણિક $A^T = [a_{ji}]_{n \times n}$ માટે પ્રત્યેક i અને j માટે $a_{ji} = -a_{ij}$ થાય.

હવે, $i = j$, તો $a_{ii} = -a_{ii}$, $\forall i$.

$\therefore \quad 2a_{ii} = 0$

$\therefore \quad a_{ii} = 0, \forall i.$

$a_{11} = a_{22} = ... = a_{nn} = 0$ થાય. આમ, વિસંમિત શ્રેણિકમાં અગ્ર વિકર્ણના બધા જ ઘટકો શૂન્ય થાય છે.

ઉદાહરણ તરીકે, શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -5 \\ -1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$, તો

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \\ 1 & -5 & 0 \end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -5 \\ -1 & 5 & 0 \end{bmatrix} = (-1)A = -A$$

$\therefore$ A વિસંમિત શ્રેણિક છે.

પરિવર્ત શ્રેણિક સંબંધી સરવાળા તથા અદિશ વડે ગુણાકારના ગુણધર્મો :

(1) $(A + B)^T = A^T + B^T$, (2) $(A^T)^T = A$, (3) $(kA)^T = kA^T$, $k \in R$

સાબિતી : (1) $m \times n$ શ્રેણિકો $A = [a_{ij}]$ અને $B = [b_{ij}]$ હોય, તો

$A^T = [a_{ji}]$ અને $B^T = [b_{ji}]$ એ $n \times m$ શ્રેણિકો છે.

હવે, $A + B = [a_{ij} + b_{ij}] = [c_{ij}]$, જ્યાં $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$$\therefore \quad (A + B)^T = [c_{ji}]$$
$$= [a_{ji} + b_{ji}]$$
$$= [a_{ji}] + [b_{ji}]$$

$\therefore \quad (A + B)^T = A^T + B^T$

(2) $A = [a_{ij}]$ લેતાં,

$A^T = [a_{ji}]$ અને તેથી $(A^T)^T = [a_{ij}] = A$

$\therefore \quad (A^T)^T = A$

(3) ધારો કે $A = [a_{ij}]$

$\therefore \quad kA = [ka_{ij}] = [c_{ij}]$, જ્યાં $c_{ij} = ka_{ij}$.

$$\therefore \quad (kA)^T = [c_{ji}]$$
$$= [ka_{ji}]$$
$$= k[a_{ji}]$$
$$= kA^T$$

ઉદાહરણ 7 : જો $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ -6 & 3 & 8 \end{bmatrix}$, તો $A + A^T$ અને $A - A^T$ મેળવો.

શ્રેણિકો $A + A^T$ અને $A - A^T$ વિષે તમે શું કહી શકશો ?

ઉકેલ : $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ -6 & 3 & 8 \end{bmatrix}$. તેથી $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & 8 \end{bmatrix}$

હવે, $A + A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ -6 & 3 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & -6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & 8 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 16 \end{bmatrix}$$

જો $B = A + A^T$

તો પછી $B^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 16 \end{bmatrix} = B$

આમ, $(A + A^T)^T = A + A^T$. તેથી $A + A^T$ એ સંમિત શ્રેણિક છે.

$$A - A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ -6 & 3 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 & -6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -4 & 11 \\ 4 & 0 & -7 \\ -11 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$C = A - A^T$ લેતાં,

$$\therefore \quad C^T = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -11 \\ -4 & 0 & 7 \\ 11 & -7 & 0 \end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix} 0 & -4 & 11 \\ 4 & 0 & -7 \\ -11 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad C^T = -C$

$\therefore \quad (A - A^T)^T = -(A - A^T)$. તેથી $A - A^T$ એ વિસંમિત શ્રેણિક છે.

ઉદાહરણ 8 : $cosec\theta \begin{bmatrix} cosec\theta & -cot\theta \\ cot\theta & -cosec\theta \end{bmatrix} + cot\theta \begin{bmatrix} -cot\theta & cosec\theta \\ -cosec\theta & cot\theta \end{bmatrix}$નું સાદું રૂપ આપો.

ઉકેલ : $cosec\theta \begin{bmatrix} cosec\theta & -cot\theta \\ cot\theta & -cosec\theta \end{bmatrix} + cot\theta \begin{bmatrix} -cot\theta & cosec\theta \\ -cosec\theta & cot\theta \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} cosec^2\theta & -cosec\theta\, cot\theta \\ cosec\theta\, cot\theta & -cosec^2\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -cot^2\theta & cot\theta\, cosec\theta \\ -cot\theta\, cosec\theta & cot^2\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} cosec^2\theta - cot^2\theta & -cosec\theta\, cot\theta + cot\theta\, cosec\theta \\ cot\theta\, cosec\theta - cot\theta\, cosec\theta & -cosec^2\theta + cot^2\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ઉદાહરણ 9 : સાબિત કરો કે જો A ચોરસ શ્રેણિક હોય, તો $A + A^T$ એ સંમિત શ્રેણિક છે અને $A - A^T$ એ વિસંમિત શ્રેણિક છે તથા દરેક શ્રેણિક A ને $A = B + C$ સ્વરૂપે અનન્ય રીતે રજૂ કરી શકાય, જ્યાં B સંમિત અને C વિસંમિત શ્રેણિક છે.

ઉકેલ : જો $B = A + A^T$, તો $B^T = (A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T = B$

$\therefore \quad B = A + A^T$ એ સંમિત શ્રેણિક છે.

ધારો કે $C = A - A^T$

તો $C^T = (A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T) = -C$

$\therefore \quad C = A - A^T$ એ વિસંમિત શ્રેણિક છે.

વળી, $A = \frac{1}{2}(A + A^T + A - A^T) = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$.

$\therefore$ A એ સંમિત શ્રેણિક $\frac{1}{2}B$ અને વિસંમિત શ્રેણિક $\frac{1}{2}C$ નો સરવાળો છે.

આથી ઉલટું, ધારો કે $A = B + C$, જ્યાં B સંમિત અને C વિસંમિત શ્રેણિક છે.

$\therefore$ $B^T = B$ અને $C^T = -C$

હવે, $A^T = B^T + C^T = B - C$

$\therefore$ $A + A^T = 2B, \ A - A^T = 2C$

$\therefore$ $B = \frac{A + A^T}{2}, \ C = \frac{A - A^T}{2}$

$\therefore$ શ્રેણિક Aને સંમિત અને વિસંમિત શ્રેણિકોના સરવાળા તરીકે અનન્ય રૂપે રજૂ કરી શકાય.

સ્વાધ્યાય 4.1

1. જો $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 5 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$, તો $A + B$, $A - B$, $2A + B$, $A - 2B$ શોધો.

2. જો $A = \begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$, તો $A + A^T$ અને $A - A^T$ શોધો.

3. જો $A = diag\,[1 \ \ -1 \ \ 2]$ અને $B = diag\,[3 \ \ 2 \ \ 1]$, $B - A$, $2A + 3B$ શોધો.

4. શ્રેણિક સમીકરણ $\begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 2x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 12 \end{bmatrix}$નો ઉકેલ મેળવો.

5. જો $a_{ij} = \frac{(i-2j)^2}{3}$, તો $[a_{ij}]_{2 \times 2}$ મેળવો.

6. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, તો $A - 2A^T$ શોધો.

7. જો $\begin{bmatrix} x+y & xy \\ -8 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ -8 & 3 \end{bmatrix}$, તો x અને y શોધો.

8. જો $\begin{bmatrix} a-2b & c+d \\ 2a-b & 3a-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$ તો a, b, c, d શોધો.

9. જો $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$ અને $A - B = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ તો શ્રેણિકો A અને B શોધો.

10. જો $5A - 3X = 2B$, જ્યાં $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ તો શ્રેણિક X શોધો.

11. ધારો કે $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -12 & -3 & 0 \\ -9 & -1 & -12 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & 1 & 9 \end{bmatrix}$ તથા $3A + 4B - X = O$, તો શ્રેણિક X શોધો.

12. જો $2\begin{bmatrix}5 & a\\3 & 4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10 & 5\\7 & 0\end{bmatrix}$ તો a અને b શોધો.

*

શ્રેણિકોના ગુણાકાર :

A અને B શ્રેણિકો છે. જો શ્રેણિક Aના સ્તંભની સંખ્યા અને શ્રેણિક Bની હારની સંખ્યા સમાન હોય તો અને તો જ A અને B શ્રેણિકોનો ગુણાકાર AB વ્યાખ્યાયિત થાય.

ધારો કે, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ અને $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ બે શ્રેણિકો છે. તેમનો ગુણાકાર $AB = [c_{ij}]_{m \times p}$ નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત થાય,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + ... + a_{in} \cdot b_{nj}.$$

શ્રેણિક ABની iમી હાર અને jમા સ્તંભનો ઘટક આપણે શ્રેણિક Aની iમી હારના ઘટકોનો શ્રેણિક Bના jમા સ્તંભના અનુરૂપ ઘટકો સાથે ગુણાકાર કરી આ તમામ ગુણાકારોનો સરવાળો કરવાથી મળે છે.

આમ, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ અને $B = [b_{ij}]_{n \times p}$, હોય તો

તેમનો ગુણાકાર શ્રેણિક $AB = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}\right]_{m \times p}$ થાય.

જો $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ અને $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ હોય, તો A અને B એ ગુણાકાર માટે સુસંગત છે તેમ કહેવાય છે.

ઉદાહરણ 10 : જો $A = \begin{bmatrix}2 & 3\\-4 & 5\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix}1 & -2\\3 & 4\end{bmatrix}$, તો AB અને BA શોધો તથા બતાવો કે $AB \neq BA$.

ઉકેલ : $AB = \begin{bmatrix}2 & 3\\-4 & 5\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & -2\\3 & 4\end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix}2(1)+3(3) & 2(-2)+3(4)\\-4(1)+5(3) & -4(-2)+5(4)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}11 & 8\\11 & 28\end{bmatrix} \qquad \text{(i)}$$

$$BA = \begin{bmatrix}1 & -2\\3 & 4\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}2 & 3\\-4 & 5\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1(2)+(-2)(-4) & 1(3)+(-2)5\\3(2)+4(-4) & 3(3)+4(5)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}10 & -7\\-10 & 29\end{bmatrix} \qquad \text{(ii)}$$

પરિણામ (i) અને (ii), નું અવલોકન કરતાં, $AB \neq BA$ મળે.

ઉદાહરણ 11 : જો $A = \begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\-3 & 2 & 4\\0 & 3 & -5\end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix}1 & 1\\4 & -2\\2 & -3\end{bmatrix}$ તો AB શોધો. BA વ્યાખ્યાયિત છે ? શા માટે ?

ઉકેલ : $AB = \begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\-3 & 2 & 4\\0 & 3 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\4 & -2\\2 & -3\end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2(1)+(-1)4+1(2) & 2(1)+(-1)(-2)+1(-3) \\ -3(1)+2(4)+4(2) & -3(1)+2(-2)+4(-3) \\ 0(1)+3(4)+(-5)2 & 0(1)+3(-2)+(-5)(-3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 13 & -19 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$

BA વ્યાખ્યાયિત નથી કારણ કે Bના સ્તંભની સંખ્યા 2 છે જ્યારે Aની હારની સંખ્યા 3 છે, જે સમાન નથી.

ઉદાહરણ 12 : જો $A = \begin{bmatrix} cos^2\alpha & cos\alpha\, sin\alpha \\ cos\alpha\, sin\alpha & sin^2\alpha \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} cos^2\beta & cos\beta\, sin\beta \\ cos\beta\, sin\beta & sin^2\beta \end{bmatrix}$ અને $\alpha - \beta = (2n-1)\frac{\pi}{2}$, $n \in Z$, તો સાબિત કરો કે AB એ શૂન્ય શ્રેણિક છે.

ઉકેલ : $AB = \begin{bmatrix} cos^2\alpha & cos\alpha\, sin\alpha \\ cos\alpha\, sin\alpha & sin^2\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} cos^2\beta & cos\beta\, sin\beta \\ cos\beta\, sin\beta & sin^2\beta \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} cos^2\alpha\, cos^2\beta + cos\alpha\, sin\alpha\, cos\beta\, sin\beta & cos^2\alpha\, cos\beta\, sin\beta + cos\alpha\, sin\alpha\, sin^2\beta \\ cos\alpha\, sin\alpha\, cos^2\beta + sin^2\alpha\, cos\beta\, sin\beta & cos\alpha\, sin\alpha\, cos\beta\, sin\beta + sin^2\alpha\, sin^2\beta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} cos\,\alpha\, cos\,\beta\,(cos\,\alpha\, cos\,\beta + sin\,\alpha\, sin\,\beta) & cos\,\alpha\, sin\,\beta\,(cos\,\alpha\, cos\,\beta + sin\,\alpha\, sin\,\beta) \\ cos\,\beta\, sin\,\alpha\,(cos\,\alpha\, cos\,\beta + sin\,\alpha\, sin\,\beta) & sin\,\alpha\, sin\,\beta\,(cos\,\alpha\, cos\,\beta + sin\,\alpha\, sin\,\beta) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} cos\,\alpha\, cos\,\beta\, cos\,(\alpha-\beta) & cos\,\alpha\, sin\,\beta\, cos\,(\alpha-\beta) \\ cos\,\beta\, sin\,\alpha\, cos\,(\alpha-\beta) & sin\,\alpha\, sin\,\beta\, cos\,(\alpha-\beta) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \left(cos(\alpha - \beta) = cos(2n-1)\frac{\pi}{2} = 0\right)$$

ઉદાહરણ 13 : જો $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$, તો સાબિત કરો કે $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

ઉકેલ : $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-6 & -3-12 \\ 2+8 & -6+16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & -15 \\ 10 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad B^2 = BB = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+20 & -4-8 \\ -5-10 & 20+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 21 & -12 \\ -15 & 24 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-15 & 4+6 \\ -2+20 & 8-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & 10 \\ 18 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad 2AB = \begin{bmatrix} -32 & 20 \\ 36 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^2 + 2AB + B^2 = \begin{bmatrix} -5 & -15 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -32 & 20 \\ 36 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 21 & -12 \\ -15 & 24 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^2 + 2AB + B^2 = \begin{bmatrix} -16 & -7 \\ 31 & 34 \end{bmatrix} \qquad \text{(i)}$$

$$\therefore \quad A + B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad (A + B)^2 = (A + B)(A + B)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+7 & 0+2 \\ 0+14 & 7+4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad (A + B)^2 = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 14 & 11 \end{bmatrix} \qquad \text{(ii)}$$

પરિણામ (i) અને (ii) પરથી કહી શકાય કે, $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

(**નોંધ :** ચોરસ શ્રેણિક A માટે Aના પ્રત્યેક ઘટકના સ્થાને તે ઘટકના વર્ગ મૂકવાથી A^2 મળે તેમ નથી. પરંતુ શ્રેણિક Aનો A સાથે ગુણાકાર $A^2 = A \cdot A$ થાય છે.)

શ્રેણિકોના ગુણાકાર માટેના ગુણધર્મો :

શ્રેણિકોના ગુણાકાર નીચેના ગુણધર્મોને અનુસરે છે. આ નિયમો આપણે સાબિતી વગર સ્વીકારીશું.

(1) વિભાજનના નિયમ :

(i) $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ અને $C = [c_{ij}]_{n \times p}$ માટે

$A(B + C) = AB + AC$

(ii) $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ અને $C = [c_{ij}]_{n \times p}$ માટે

$(A + B)C = AC + BC$

(2) જૂથનો નિયમ :

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ અને $C = [c_{ij}]_{p \times q}$ માટે

$A(BC) = (AB)C$

એકમ શ્રેણિક (Identity Matrix / Unit Matrix) : જે ચોરસ શ્રેણિકમાં પ્રત્યેક અગ્ર વિકર્ણ ઘટક 1 હોય તથા બાકીના ઘટકો શૂન્ય હોય તેવા શ્રેણિકને એકમ શ્રેણિક કહે છે તેને I વડે દર્શાવાય છે.

આમ, $I = [a_{ij}]_{n \times n}$ જ્યાં $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{જો } i = j \\ 0, & \text{જો } i \neq j \end{cases}$

I ને I_n અથવા $I_{n \times n}$ વડે પણ દર્શાવાય છે.

એટલે કે $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ એ 3×3 એકમ શ્રેણિક છે.

આ એકમ શ્રેણિક 3×3 હોવાથી તેને $I_{3 \times 3}$ અથવા I_3 વડે પણ દર્શાવાય છે.

જો $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ અને I_n એકમ શ્રેણિક હોય, તો $AI = IA = A$ થાય.

નોંધ : δ_{ij} સંકેતને ક્રોનેકર ડેલ્ટા કહે છે, તેનો ઉપયોગ I વ્યાખ્યાયિત કરવા કરાય છે.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

આમ, $I = [\delta_{ij}]$

અદિશ શ્રેણિક (Scalar Matrix) : જો $k \in R$ હોય તો kI_n ને અદિશ શ્રેણિક કહે છે.

આમ, $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ અદિશ શ્રેણિક છે.

અહીં $k = 4$ અને $A = 4I_3$.

ઉદાહરણ 14 : જો $A = [x \quad y \quad z]$, $B = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}$ અને $C = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, તો (AB)C શોધો.

ઉકેલ : હવે, $AB = [x \quad y \quad z] \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}$

$$= [ax + hy + gz \quad hx + by + fz \quad gx + fy + cz]$$

$$\therefore \quad (AB)C = [ax + hy + gz \quad hx + by + fz \quad gx + fy + cz] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$= [(ax + hy + gz)x + (hx + by + fz)y + (gx + fy + cz)z]$$

$$= [ax^2 + hxy + gzx + hxy + by^2 + fzy + gxz + fyz + cz^2]$$

$$= [ax^2 + by^2 + cz^2 + 2hxy + 2gzx + 2fyz]$$

ઉદાહરણ 15 : જો $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$, તો 2×2 શ્રેણિક X શોધો કે જેથી $BX - AC = O$ થાય.

ઉકેલ : ધારો કે $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

હવે, $BX - AC = O$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} -2a + 5c & -2b + 5d \\ 6a + c & 6b + d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -9 & -6 \\ 43 & 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} -2a + 5c + 9 & -2b + 5d + 6 \\ 6a + c - 43 & 6b + d - 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad -2a + 5c + 9 = 0,$

$6a + c - 43 = 0$

$\therefore \quad -6a + 15c = -27, \qquad$ (i)

$6a + c = 43 \qquad$ (ii)

$\therefore$ (i) અને (ii)નો સરવાળો કરતાં,

$16c = 16$. આથી $c = 1$ અને $a = 7$

$-2b + 5d + 6 = 0$

$6b + d - 22 = 0$

$-6b + 15d = -18 \qquad$ (iii)

$6b + d = 22 \qquad$ (iv)

$\therefore$ (iii) અને (iv)નો સરવાળો કરતાં,

$16d = 4$. આથી $d = \frac{1}{4}$ અને $b = \frac{29}{8}$

તેથી, $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & \frac{29}{8} \\ 1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

ઉદાહરણ 16 : જો $A(x) = \begin{bmatrix} cosx & -sinx \\ sinx & cosx \end{bmatrix}$, તો સાબિત કરો કે $A(\alpha)\,A(\beta) = A(\alpha + \beta)$ અને જો $\alpha + \beta = 2n\pi$, $n \in Z$ તો $A(\alpha)\,A(\beta)$ એકમ શ્રેણિક I_2 છે.

ઉકેલ : $A(\alpha)\,A(\beta) = \begin{bmatrix} cos\,\alpha & -sin\,\alpha \\ sin\,\alpha & cos\,\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\,\beta & -sin\,\beta \\ sin\,\beta & cos\,\beta \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} cos\,\alpha\, cos\,\beta - sin\,\alpha\, sin\,\beta & -cos\,\alpha\, sin\,\beta - sin\,\alpha\, cos\,\beta \\ sin\,\alpha\, cos\,\beta + cos\,\alpha\, sin\,\beta & -sin\,\alpha\, sin\,\beta + cos\,\alpha\, cos\,\beta \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} cos\,(\alpha + \beta) & -sin\,(\alpha + \beta) \\ sin\,(\alpha + \beta) & cos\,(\alpha + \beta) \end{bmatrix} = A(\alpha + \beta)$

જો $\alpha + \beta = 2n\pi$ તો $cos(\alpha + \beta) = 1$, $sin(\alpha + \beta) = 0$.

$A(\alpha)\,A(\beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= I_2$

સ્વાધ્યાય 4.2

1. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ અને $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, તો સાબિત કરો કે $A(B + C) = AB + AC$.

2. જો $\begin{bmatrix} a+b & 4 \\ 3 & c+d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & a \\ 2d & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3b & 3a \\ 3d & 3c \end{bmatrix}$, તો a, b, c, d શોધો.

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ અને $C = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, તો સાબિત કરો કે $A(B - C) = AB - AC$.

4. જો $A = [1 \quad -1 \quad 2]$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, તો શક્ય હોય તો AB અને BA શોધો.

5. જો $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, તો $A^2 - 5A$ શોધો.

6. જો $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, તો $A^2 - 5A$ શોધો.

7. જો $A = \begin{bmatrix} 0 & -tan\frac{\theta}{2} \\ tan\frac{\theta}{2} & 0 \end{bmatrix}$, તો સાબિત કરો કે $(I_2 - A)\begin{bmatrix} cos\,\theta & -sin\,\theta \\ sin\,\theta & cos\,\theta \end{bmatrix} = I_2 + A$.

8. જો $A = \begin{bmatrix} ab & b^2 \\ -a^2 & -ab \end{bmatrix}$, તો A^2 મેળવો.

9. જો સંમિત શ્રેણિક X તથા વિસંમિત શ્રેણિક Y માટે $X + Y = A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}$, તો X અને Y શોધો.

10. $\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -16 & -6 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ થાય તેવો 2×2 શ્રેણિક X મેળવો.

11. વાસ્તવિક સંખ્યા x અને y શોધો કે જેથી $(xI + yA)^2 = A$, જ્યાં $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

12. જો $[1 \quad x \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 15 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = O$, તો x શોધો.

13. જો $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, હોય તો ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતની મદદથી સાબિત કરો કે

$$A^n = \begin{bmatrix} 2n+1 & -4n \\ n & 1-2n \end{bmatrix}, n \in N.$$

*

4.4 ચોરસ શ્રેણિકનો નિશ્ચાયક

જો કોઈ ચોરસ શ્રેણિકના બધા જ ઘટકોને તે જ સ્થિતિમાં રાખી તેનો નિશ્ચાયક મેળવવામાં આવે, તો તે નિશ્ચાયકને આપેલ ચોરસ શ્રેણિકનો નિશ્ચાયક કહે છે. જો A કોઈ ચોરસ શ્રેણિક હોય, તો Aના નિશ્ચાયકને $|A|$ અથવા *det*A વડે દર્શાવાય છે.

ઉદાહરણ તરીકે, જો $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, તો તેનો નિશ્ચાયક $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ થાય.

જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, તો $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 15 = -13$.

પ્રમેય 4.1 : ચોરસ શ્રેણિકો A અને B માટે $|AB| = |A||B|$.

આપણે આ પ્રમેય સાબિત કર્યા સિવાય સ્વીકારીશું.

ઉદાહરણ 17 : જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & sin\,\theta & -cos\,\theta \\ 0 & cos\,\theta & sin\,\theta \end{bmatrix}$ તો $|A|$ શોધો.

ઉકેલ : $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & sin\,\theta & -cos\,\theta \\ 0 & cos\,\theta & sin\,\theta \end{vmatrix} = sin^2\theta + cos^2\theta = 1.$

સહઅવયવજ શ્રેણિક (Adjoint of a Matrix) : ચોરસ શ્રેણિક Aના દરેક ઘટકના સ્થાને Aના નિશ્ચાયકના સંગત ઘટકનો સહઅવયવ લખીને બનતા શ્રેણિકનો પરિવર્ત શ્રેણિક લેતાં મળતા શ્રેણિકને Aનો સહઅવયવજ શ્રેણિક કહે છે. તેને $adj\mathrm{A}$ વડે દર્શાવાય છે.

જો $\mathrm{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$, હોય, તો $adj\mathrm{A} = [\mathrm{A}_{ji}]_{n \times n}$ થશે, જ્યાં A_{ji} એ $|\mathrm{A}|$માં ઘટક a_{ji}નો સહઅવયવ છે.

જો $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, તો $adj\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{31} \\ \mathrm{A}_{12} & \mathrm{A}_{22} & \mathrm{A}_{32} \\ \mathrm{A}_{13} & \mathrm{A}_{23} & \mathrm{A}_{33} \end{bmatrix}$.

ઉદાહરણ 18 : $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, તો $adj\mathrm{A}$ શોધો.

ઉકેલ : આપણે $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ લઈશું.

તેથી, $\mathrm{A}_{11} = a_{22} = 5$, $\mathrm{A}_{12} = -a_{21} = -1$, $\mathrm{A}_{21} = -a_{12} = -2$ અને $\mathrm{A}_{22} = a_{11} = 4$

$\therefore \quad adj\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{21} \\ \mathrm{A}_{12} & \mathrm{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$.

[**નોંધ :** 2×2 શ્રેણિકનો સહઅવયવજ શ્રેણિક મેળવવા માટે, મુખ્ય વિકર્ણના ઘટકોની અદલબદલ કરવાની તથા પ્રતિવિકર્ણના ઘટકોની નિશાની બદલવાની હોય છે. જેમકે; જો $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ તો $adj\mathrm{A} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ થાય.]

ઉદાહરણ 19 : $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ માટે $adj\mathrm{A}$ મેળવો.

ઉકેલ : $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ લો.

$\mathrm{A}_{11} = -1 \qquad \mathrm{A}_{12} = -8 \qquad \mathrm{A}_{13} = -10$

$\mathrm{A}_{21} = -5 \qquad \mathrm{A}_{22} = -6 \qquad \mathrm{A}_{23} = 1$

$\mathrm{A}_{31} = -1 \qquad \mathrm{A}_{32} = 9 \qquad \mathrm{A}_{33} = 7$

$\therefore \quad adj\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}$.

4.5 વ્યસ્ત શ્રેણિક

જો ચોરસ શ્રેણિક Aને સંગત બીજો ચોરસ શ્રેણિક B એવો મળે કે જેથી AB = I = BA થાય. (I એ એકમ શ્રેણિક છે), તો B ને Aનો વ્યસ્ત શ્રેણિક કહે છે. A ના વ્યસ્ત શ્રેણિકને A^{-1} વડે દર્શાવાય છે.

સ્પષ્ટ છે કે, Aનો વ્યસ્ત શ્રેણિક B હોય, તો Bનો વ્યસ્ત શ્રેણિક A થાય.

પ્રમેય 4.2 : જો Aનો વ્યસ્ત શ્રેણિક હોય તો તે અનન્ય છે.

સાબિતી : શક્ય હોય તો, ધારો કે A ના બે વ્યસ્ત શ્રેણિકો B અને C છે.

$\therefore \quad \mathrm{AB} = \mathrm{I} = \mathrm{BA}$ અને $\mathrm{AC} = \mathrm{I} = \mathrm{CA}$.

હવે, $\mathrm{AB} = \mathrm{I}$

$\therefore \quad C(AB) = CI$

$\therefore \quad (CA)B = C$

$\therefore \quad IB = C$

$\therefore \quad B = C$

આમ સિદ્ધ થાય છે કે Aને વ્યસ્ત શ્રેણિક હોય, તો તે અનન્ય છે.

> **નોંધ :** યાદ કરો કે પ્રકરણ 1 માં આપણે જોયું કે, એકમ સહિતની જૂથના નિયમનું પાલન કરતી દ્વિક્ક્રિયામાં કોઈ પણ ઘટકને વ્યસ્ત હોય, તો તે અનન્ય છે. $n \times n$ શ્રેણિકોનો ગુણાકાર જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે અને તેને એકમ શ્રેણિક I_n છે.

પ્રમેય 4.3 : ચોરસ શ્રેણિક A માટે $A(adjA) = (adjA)A = |A|I$.

સાબિતી : આપણે આ પરિણામ ફક્ત 3×3 ચોરસ શ્રેણિક A માટે સાબિત કરીશું.

ધારો કે $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, તેથી $adjA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$.

હવે, $A(adjA) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$.

$$= \begin{bmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} & a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} & a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} & a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} & a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} & a_{31}A_{21} + a_{32}A_{22} + a_{33}A_{23} & a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix}$$ (નિશ્ચાયકના પ્રમેયો પરથી)

$$= |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= |A| I_3$$

તે જ પ્રમાણે આપણે $(adjA)A = |A|I_3$ સાબિત કરી શકીએ.

સામાન્ય શ્રેણિક (Non-singular Matrix) : ચોરસ શ્રેણિકના વ્યસ્ત શ્રેણિકનું અસ્તિત્વ હોય, તો તે ચોરસ શ્રેણિકને સામાન્ય શ્રેણિક કહે છે.

> **નોંધ :** જો ચોરસ શ્રેણિક A સામાન્ય શ્રેણિક હોય, તો A^{-1} પણ સામાન્ય શ્રેણિક છે તથા $(A^{-1})^{-1} = A$.

અસામાન્ય શ્રેણિક (Singular Matrix) : જો ચોરસ શ્રેણિક સામાન્ય ન હોય, તો તેને અસામાન્ય શ્રેણિક કહે છે.

પ્રમેય 4.4 : ચોરસ શ્રેણિક A સામાન્ય હોય, તો અને તો જ $|A| \neq 0$.

સાબિતી : ધારો કે A સામાન્ય શ્રેણિક છે અને B તેનો વ્યસ્ત શ્રેણિક છે.

$\therefore \quad AB = I$

$\therefore \quad |AB| = |I|$

$\therefore \quad |A||B| = 1 \neq 0$

$\therefore \quad |A| \neq 0$

હવે ધારો કે, $|A| \neq 0$. તેથી $\frac{1}{|A|}$ નું અસ્તિત્વ છે.

ધારો કે $B = \frac{1}{|A|} adjA$

તેથી $AB = A\left(\frac{1}{|A|} adj\, A\right) = \frac{1}{|A|}(A\, adjA) = \frac{1}{|A|}\, |A|\, I.$

$\therefore \quad AB = I$

તે જ પ્રમાણે આપણે $BA = I$ સાબિત કરી શકીએ.

$\therefore$ B એ Aનો વ્યસ્ત છે.

$\therefore$ A સામાન્ય શ્રેણિક છે.

નોંધ : શ્રેણિક Aનો વ્યસ્ત શ્રેણિક $A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA$, (જો અસ્તિત્વ ધરાવે તો.)

ઉદાહરણ 20 : $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$નો વ્યસ્ત શ્રેણિક અસ્તિત્વ ધરાવે તો શોધો.

ઉકેલ : અહીં $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 15 = 23 \neq 0.$

$\therefore$ A^{-1} અસ્તિત્વ ધરાવે છે.

હવે, $adjA = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

તેથી, $A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA$

$$= \frac{1}{23}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{23} & \frac{3}{23} \\ \frac{-5}{23} & \frac{2}{23} \end{bmatrix}$$

ઉદાહરણ 21 : જો $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, તો A^{-1} શોધો.

ઉકેલ : $|A| = \begin{vmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 5(-2-3) - 8(0-4) + 1(0-8)$

$$= -25 + 32 - 8$$

$$= -1 \neq 0$$

$\therefore$ A^{-1} અસ્તિત્વ ધરાવે છે.

હવે, $adjA = \begin{bmatrix} -5 & 11 & 6 \\ 4 & -9 & -5 \\ -8 & 17 & 10 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA$

$$= \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -5 & 11 & 6 \\ 4 & -9 & -5 \\ -8 & 17 & 10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -11 & -6 \\ -4 & 9 & 5 \\ 8 & -17 & -10 \end{bmatrix}$$

કેટલાંક અગત્યનાં પરિણામો :

(1) સામાન્ય શ્રેણિક Aના વ્યસ્તના નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય અને Aના નિશ્ચાયકની વ્યસ્ત સંખ્યા સમાન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે.

એટલે કે $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

સાબિતી : A સામાન્ય શ્રેણિક હોવાથી A^{-1} નું અસ્તિત્વ છે. વળી, $|A| \neq 0$.

તેથી, $AA^{-1} = I$

$\therefore \quad |AA^{-1}| = |I|$

$\therefore \quad |A||A^{-1}| = 1$

$\therefore \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

$\therefore \quad |A^{-1}| = |A|^{-1}$

(2) જો A અને B સામાન્ય શ્રેણિકો હોય, તો AB સામાન્ય શ્રેણિક છે તથા $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

સાબિતી : A અને B સામાન્ય છે, તેથી A^{-1} અને B^{-1} નું અસ્તિત્વ છે તથા $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$

$\therefore \quad |A||B| \neq 0$

$\therefore \quad |AB| \neq 0$

$\therefore$ AB એ સામાન્ય શ્રેણિક છે.

વળી, $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A[B(B^{-1}A^{-1})]$

$= A[(BB^{-1})A^{-1}]$

$= A[IA^{-1}]$

$= AA^{-1}$

$= I$

તે જ પ્રમાણે આપણે $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$ સાબિત કરી શકીએ.

તેથી, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(3) $m \times n$ શ્રેણિકો A અને B માટે $(AB)^T = B^TA^T$.

આપણે આ પરિણામ સાબિતી આપ્યા વગર સ્વીકારીશું.

(4) A સામાન્ય શ્રેણિક હોય, તો અને તો જ A^T સામાન્ય શ્રેણિક છે, તથા $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

સાબિતી : A સામાન્ય શ્રેણિક છે $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

$\Leftrightarrow |A^T| \neq 0 \qquad (|A| = |A^T|)$

$\Leftrightarrow$ A^T સામાન્ય શ્રેણિક છે.

વળી, $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

તેથી, $(AA^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T$

$\therefore \quad (A^{-1})^T A^T = A^T (A^{-1})^T = I$

$\therefore \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

(5) $adj\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = (adj\mathrm{A})^{\mathrm{T}}$

સાબિતી : ધારો કે $\mathrm{A} = [a_{ij}]$

$\therefore \quad \mathrm{A}^{\mathrm{T}} = [a_{ji}]$

$\therefore \quad adj\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = [\mathrm{A}_{ij}]$ (i)

પરંતુ $adj\mathrm{A} = [\mathrm{A}_{ji}]$

$\therefore \quad (adj\mathrm{A})^{\mathrm{T}} = [\mathrm{A}_{ij}]$ (ii)

(i) અને (ii) પરથી, $adj\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = (adj\mathrm{A})^{\mathrm{T}}$

4.6 હાર સંક્ષેપન એશિલોન પદ્ધતિ

આપણે R_{ij}, $\mathrm{R}_i(k)$ અને $\mathrm{R}_{ij}(k)$ જેવી પ્રક્રિયાઓ નિશ્ચાયક પર કરી છે અને આવી જ પ્રક્રિયાઓ સ્તંભ પર પણ કરી છે.

બંને પરની પ્રક્રિયાઓ સમાન છે. આપણે અહીં હાર પર પ્રક્રિયાઓ કરીશું.

(1) R_{ij} પ્રકારની ક્રિયા એકમ શ્રેણિક I_n પર કરવામાં આવે, તો પરિણામે મળતા શ્રેણિકને પ્રાથમિક શ્રેણિક E_{ij} કહીશું.

(2) જો $\mathrm{R}_i(k)$ પ્રકારની ક્રિયા એકમ શ્રેણિક I_n પર કરીએ, તો પરિણામે મળતા શ્રેણિકને પ્રાથમિક શ્રેણિક $\mathrm{E}_i(k)$ કહીશું.

(3) જો $\mathrm{R}_{ij}(k)$ પ્રકારની ક્રિયા એકમ શ્રેણિક I_n પર કરીએ, તો પરિણામે મળતા શ્રેણિકને પ્રાથમિક શ્રેણિક $\mathrm{E}_{ij}(k)$ કહીશું.

એક શ્રેણિક A પર R_{12} પ્રકારની ક્રિયા કરીએ અને E_{12} A પ્રકારનો શ્રેણિક મેળવીએ. બંને પરિણામ સમાન છે.

ધારો કે $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

R_{12} કરવાથી આપણને $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ મળે. (i)

વળી, $\mathrm{E}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ થાય.

$$\mathrm{E}_{12}\,\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \qquad \text{(ii)}$$

(i) અને (ii) એ આપણું પરિણામ સાબિત કરે છે.

તે જ પ્રમાણે કોઈ પણ શ્રેણિક A પર પ્રાથમિક પ્રક્રિયાઓ R_{ij}, $\mathrm{R}_i(k)$ અથવા $\mathrm{R}_{ij}(k)$ કરીએ તે અનુક્રમે E_{ij}, $\mathrm{E}_i(k)$ અથવા $\mathrm{E}_{ij}(k)$ વડે Aને પૂર્વગુણિત કરવા સમાન છે.

સ્તંભ પર પ્રક્રિયાઓ કરવા માટે ઉત્તરગુણિત કરવું પડશે.

હવે આપણે હાર સંક્ષિપ્ત એશિલોન શ્રેણિક વ્યાખ્યાયિત કરીએ. શ્રેણિકને હાર સંક્ષિપ્ત એશિલોનના સ્વરૂપમાં દર્શાવીએ.

(1) દરેક હારના પ્રથમ શૂન્યેતર ઘટકને અગ્રઘટક કહીશું.

(2) દરેક અગ્રઘટક એવા સ્તંભમાં છે, જે પહેલાની હારના અગ્રઘટકની જમણી બાજુએ આવેલો છે.

(3) જે હારમાં તમામ ઘટકો શૂન્ય હોય, તેને શૂન્યહાર કહે છે. જેનો ઓછામાં ઓછો એક ઘટક શૂન્યેતર હોય તેવી હારને શૂન્યેતર હાર કહે છે. જે હારમાં ઓછામાં ઓછો એક ઘટક શૂન્યેતર હોય તેવી હારની નીચે તમામ શૂન્યહાર આવે છે.

(4) કોઈ પણ સ્તંભમાં એકમાત્ર શૂન્યેતર ઘટક તે જે હારમાં છે તે હારનો અગ્રઘટક છે.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ એ હાર સંક્ષિપ્ત એશિલોન સ્વરૂપ છે.

એક પરિણામ : સામાન્ય શ્રેણિકનું હાર સંક્ષિપ્ત સ્વરૂપ I_n છે. આપણે સામાન્ય શ્રેણિકનો વ્યસ્ત શ્રેણિક નીચે પ્રમાણે મેળવીએ :

$A = IA$ લખો.

પ્રાથમિક હાર પ્રક્રિયાઓ બંને તરફ કરતાં ડાબી બાજુનો શ્રેણિક A હાર સંક્ષિપ્ત એશિલોન સ્વરૂપમાં પરિવર્તિત થશે. એટલે કે I_n બને (સામાન્ય શ્રેણિક હોવાથી). પછી આ ક્રિયાને અંતે આપણને સમીકરણ $I = PA$ મળે.

જ્યાં I ડાબી બાજુના શ્રેણિક A ઉપર પ્રાથમિક હાર ક્રિયાઓમાંથી મળતો શ્રેણિક અને P જમણી બાજુના શ્રેણિક A પર તે જ હાર પ્રક્રિયાઓ કરતાં મળતો શ્રેણિક છે. તો $P = A^{-1}$ થશે.

શ્રેણિક Aને હાર સંક્ષિપ્ત સ્વરૂપમાં કેવી રીતે મેળવીશું ?

(1) (a) પ્રથમ સ્તંભનો પ્રથમ શૂન્યેતર ઘટક મેળવો, જે પ્રથમ હારનો અગ્રઘટક છે.

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$. 1 અગ્રઘટક છે.

(b) જરૂર પડે તો હારની એ રીતે અદલબદલ કરો કે પ્રથમ સ્તંભમાં શૂન્યેતર અગ્રઘટકવાળી પ્રથમ હાર મળે. તેને અગ્રહાર કરીશું.

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$. અહીં R_{12} અથવા R_{13} કરવાથી શૂન્યેતર અગ્રઘટકવાળી પ્રથમ હાર મળે.

ઉદાહરણ તરીકે R_{13} કરતાં $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. 1 3 3 અગ્રહાર મળે અને 1 અગ્રઘટક મળે.

(c) અગ્રહારના દરેક ઘટકને અગ્રઘટકના વ્યસ્ત વડે ગુણો જેથી અગ્રઘટક 1 બને.

$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ માં અગ્રઘટક 3 હોવાથી પ્રથમ હારના દરેક ઘટકને $\frac{1}{3}$ વડે ગુણતાં પ્રથમ હાર 1 $\frac{5}{3}$ $\frac{1}{3}$ મળે.

તેથી શ્રેણિક $\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ સ્વરૂપમાં મળે.

(d) અગ્રહારના એવા ગુણિતો તેની નીચેની હારમાં ઉમેરો કે જેથી અગ્રસ્તંભનો દરેક ઘટક શૂન્ય બને.

(c) ના અંતિમ મળેલા શ્રેણિક પર $R_{12}(-2)$, $R_{13}(-4)$ કરતાં પ્રથમ સ્તંભ $\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$ બને.

$\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & \frac{-17}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ મળશે.

(2) (a) આગળની અગ્રહારને અવગણી ઉપરની વિધિનું બીજી હાર માટે પદ (1)થી શરૂ કરી પુનરાવર્તન કરો.

(b) કોઈ પણ અગ્રઘટક બાકી ન રહે ત્યાં સુધી આ વિધિ ચાલુ રાખો.

(c) પછી મળતો શ્રેણિક નીચેના જેવો ત્રિકોણીય શ્રેણિક બનશે :

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ ((1)(d) ના શ્રેણિક પર ક્રિયાઓ કરતાં મળતો શ્રેણિક)

(3) (a) જે છેલ્લી હારમાં અગ્રઘટક 1 હોય તે હાર શોધો અને હવે તેને અગ્રહાર કહો.

(b) આ અગ્રહારના ગુણિતો ઉપરની હારમાં ઉમેરો જેથી અગ્રઘટક ઉપરના તમામ ઘટક શૂન્ય થાય.

(c) આપેલ શ્રેણિકમાં આ ક્રિયા ઉપરની હારો સુધી પુનરાવર્તિત કરો.

આ પછી $R_{32}(1)$, $R_{31}\left(-\frac{1}{3}\right)$ કરતાં,

$\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ મળશે.

આ પછી $R_{21}\left(-\frac{5}{3}\right)$ કરતાં, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ એટલે કે I_3 મળે.

આ રીતે, $A = IA$ લઈ ક્રિયાઓ કરતાં $I = PA$ મળે તો $P = A^{-1}$.

ચાલો આપણે એક ઉદાહરણ લઈ સમજીએ :

ઉદાહરણ 22 : $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$નો વ્યસ્ત શોધો.

ઉકેલ : $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} A$ (R_{31}) (પ્રથમ હારમાં શૂન્યેતર અગ્રઘટક મેળવો)

$\therefore \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 2 \\ 3 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} A$ $R_1\left(\frac{1}{2}\right)$ (અગ્રઘટકને 1 બનાવો.)

$\therefore \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} A$ $R_{12}(-3)$

$\therefore \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{3} & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} A$ $R_2\left(\frac{2}{3}\right)$ (બીજી હારમાં અગ્રઘટક 1 બનાવો)

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{3} & -1 \\ 1 & \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix} A \qquad R_{23}(1)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{3} & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix} A$$ $R_3(-3)$ (ત્રીજી હારમાં અગ્રઘટક 1 બનાવો)

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -\frac{11}{2} \\ -4 & -2 & 3 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix} A \qquad R_{32}\left(\frac{4}{3}\right),\ R_{31}(-2)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 3 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix} A \qquad R_{21}\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 3 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

ઉદાહરણ 23 : પ્રાથમિક પ્રક્રિયાઓનો ઉપયોગ કરી Aનો વ્યસ્ત શ્રેણિક મેળવો, જ્યાં $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

ઉકેલ : આપણે $A = IA$ લઈએ.

આપણે આ શ્રેણિક સમીકરણમાં શ્રેણિકની હાર પર પ્રાથમિક પ્રક્રિયાઓનો ઉપયોગ કરીએ.

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} A \qquad R_{12}(-3)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{-1}{10} \end{bmatrix} A \qquad R_2\left(-\frac{1}{10}\right)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{10} & \frac{4}{10} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix} A \qquad R_{21}(-4)$$

આમ, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}$

ઉદાહરણ 24 : હાર સંક્ષેપન એશિલોનની રીતે શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ નો વ્યસ્ત શ્રેણિક મેળવો.

ઉકેલ : આપણે A = IA લઈએ,

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \qquad (R_{31}(-1))$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -17 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix} A \qquad (R_{13}(-4))$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -17 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix} A \qquad \left(R_{21}\left(-\frac{5}{2}\right)\right)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -17 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix} A \qquad \left(R_{2}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -4 & \frac{17}{2} & 5 \end{bmatrix} A \qquad (R_{23}(17))$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -11 & -6 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -4 & \frac{17}{2} & 5 \end{bmatrix} A \qquad (R_{31}(-1))$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -11 & -6 \\ -4 & 9 & 5 \\ -4 & \frac{17}{2} & 5 \end{bmatrix} A \qquad (R_{32}(1))$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -11 & -6 \\ -4 & 9 & 5 \\ 8 & -17 & -10 \end{bmatrix} A \qquad (R_{3}(-2))$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -11 & -6 \\ -4 & 9 & 5 \\ 8 & -17 & -10 \end{bmatrix}.$$

ઉદાહરણ 25 : $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ નો વ્યસ્ત શ્રેણિક હાર સંક્ષેપન એશિલોન પદ્ધતિથી મેળવો.

ઉકેલ : આપણે $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$ રીતે લખીશું.

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \qquad R_{12}(-1)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \qquad R_2\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{33}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix} A \qquad R_{21}(-5),\ R_{23}(3)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{33}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix} A \qquad R_3(4)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 & 26 & -33 \\ 4 & -4 & 5 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix} A \qquad R_{32}\left(\frac{5}{4}\right),\ R_{31}\left(\frac{-33}{4}\right)$$

$\therefore \quad I_3 = PA$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -25 & 26 & -33 \\ 4 & -4 & 5 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

વ્યસ્ત શ્રેણિકનો ઉપયોગ કરી સુરેખ સમીકરણ સંહતિનો અનન્ય ઉકેલ :

ધારો કે, $a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$

$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$

$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$

એ x, y, z માં ત્રણ સુરેખ સમીકરણની સંહતિ છે.

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$; $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ લેતાં,

સમીકરણ સંહતિને $AX = B$ પ્રમાણે લખી શકાય.

જો A સામાન્ય શ્રેણિક હોય, તો A^{-1}નું અસ્તિત્વ છે.

હવે, $AX = B$

$\therefore \quad A^{-1}(AX) = A^{-1}B$

$\therefore \quad (A^{-1}A)X = A^{-1}B$

$\therefore \quad IX = A^{-1}B$

$\therefore \quad X = A^{-1}B$

ધારો કે, $A^{-1}B = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$, તેથી $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$.

આમ, $x = p_1$, $y = p_2$, $z = p_3$ આપેલ સંહતિનો અનન્ય ઉકેલ છે.

(નોંધ : આ પદ્ધતિ બે ચલના બે સુરેખ સમીકરણના ઉકેલ માટે પણ સત્ય છે.)

ઉદાહરણ 26 : શ્રેણિકની રીતે ઉકેલો : $x - 2y = 4$ અને $-3x + 5y = -7$.

ઉકેલ : આપેલ સંહતિને $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}$ અથવા

$AX = B$ પ્રમાણે દર્શાવી શકાય, જ્યાં $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}$

હવે, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1 \neq 0$

$\therefore$ A^{-1} નું અસ્તિત્વ છે.

તેથી, સંહતિનો અનન્ય ઉકેલ મળે.

હવે, $adj A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

તેથી, $A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj A$

$$= \frac{1}{-1} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

હવે, $X = A^{-1}B$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20+14 \\ -12+7 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $x = -6$, $y = -5$ એ માંગેલ ઉકેલ છે.

ઉદાહરણ 27 : જો સમીકરણ સંહતિ $x + y + z = 3$, $2x - y - z = 3$, $x - y + z = 9$ નો અનન્ય ઉકેલ હોય, તો મેળવો.

ઉકેલ : સંહતિને $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$ સ્વરૂપે લખી શકાય.

ધારો કે $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$, તેથી $AX = B$.

હવે, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1-1) - 1(2+1) + 1(-2+1)$

$= -2 - 3 - 1 = -6 \neq 0$

$\therefore$ A^{-1}નું અસ્તિત્વ છે. આથી સંહતિનો અનન્ય ઉકેલ મળે.

હવે, $adj A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

$\therefore$ $A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj A$

$= \frac{1}{-6} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

હવે, $X = A^{-1}B$

$\therefore$ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{-6} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{-6} \begin{bmatrix} -6 + (-6) + 0 \\ -9 + 0 + 27 \\ -3 + 6 - 27 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{-6} \begin{bmatrix} -12 \\ 18 \\ -24 \end{bmatrix}$

$\therefore$ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$

તેથી, $x = 2$, $y = -3$ અને $z = 4$.

સ્વાધ્યાય 4.3

1. નીચે આપેલા શ્રેણિકોના સહઅવયવજ શ્રેણિક મેળવો :

(1) $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

2. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ માટે A^{-1}નું અસ્તિત્વ હોય, તો મેળવો.

3. જો $A = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$, તો સાબિત કરો કે $A^{-1} = A^T$.

4. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, તો $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ચકાસો.

5. શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ માટે બતાવો કે $adj(adjA) = A$.

6. જો $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$, તો $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ચકાસો.

7. જો $A = \begin{bmatrix} 5x & 10 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$ અને $|A| = 25$ તો $x \in R$ મેળવો.

8. હાર સંક્ષેપન એશિલોન પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરી, નીચે આપેલા શ્રેણિકોના વ્યસ્ત શ્રેણિક મેળવો :

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

9. **શ્રેણિકની મદદથી સમીકરણ સંહતિના ઉકેલ મેળવો :**

(1) $3x + 4y + 5 = 0$
$11x - 2y = 15$

(2) $5x - 7y = 2$
$7x - 5y = 3$

10. **શ્રેણિકની મદદથી સમીકરણ સંહતિના ઉકેલ મેળવો :**

(1) $4x - 3y + 2z = 4$
$3x - 2y + 3z = 8$
$4x + 2y - 2z = 2$

(2) $x + 2y + z = 4$
$x - y - z = 0$
$-x + 3y - z = -2$

*

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ 28 : $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ માટે સાબિત કરો કે $A^2 - 4A + 7I_2 = O$ અને તે પરથી A^{-1} મેળવો.

ઉકેલ : હવે, $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad A^2 - 4A + 7I_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -12 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-8+7 & 12-12+0 \\ -4+4+0 & 1-8+7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= O$$

વળી, $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3 = 7 \neq 0$

$\therefore$ A સામાન્ય શ્રેણિક છે. તેથી A^{-1} નું અસ્તિત્વ છે.

હવે, $A^2 - 4A + 7I_2 = O$ ને A^{-1} વડે બંને તરફ ગુણતાં,

$$A^{-1}(A^2 - 4A + 7I_2) = A^{-1}O$$

$$\therefore \quad A^{-1}(A^2) - 4(A^{-1}A) + 7(A^{-1}I_2) = O$$

$$\therefore \quad (A^{-1}A)A - 4I + 7A^{-1} = O$$

$$\therefore \quad IA - 4I + 7A^{-1} = O$$

$$\therefore \quad 7A^{-1} = 4I - A$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{1}{7}(4I - A)$$

$$= \frac{1}{7}\left\{4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{7}\left\{\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

ઉદાહરણ 29 : જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, તો સાબિત કરો કે $A^2 - 4A - 5I_3 = O$ અને તે પરથી A^{-1} મેળવો.

ઉકેલ : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad A^2 - 4A - 5I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -8 & -8 \\ -8 & -4 & -8 \\ -8 & -8 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= O$$

હવે, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1(-3) - 2(-2) + 2(2)$

$$= -3 + 4 + 4$$

$$= 5 \neq 0$$

$\therefore$ A^{-1} નું અસ્તિત્વ છે.

હવે, $A^2 - 4A - 5I_3 = O$ ની બંને તરફ A^{-1} વડે ગુણતાં,

$\therefore$ $A^{-1}(A^2) - 4(A^{-1}A) - 5(A^{-1}I_3) = A^{-1}O$ થશે.

$\therefore$ $(A^{-1}A)A - 4I_3 - 5A^{-1} = O$

$\therefore$ $I_3A - 4I_3 = 5A^{-1}$

$\therefore$ $A - 4I_3 = 5A^{-1}$

$\therefore$ $A^{-1} = \frac{1}{5}(A - 4I_3)$

$$= \frac{1}{5}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{5}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1-4 & 2+0 & 2+0 \\ 2+0 & 1-4 & 2+0 \\ 2+0 & 2+0 & 1-4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

ઉદાહરણ 30 : શ્રેણિક $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$ નો વ્યસ્ત શ્રેણિક મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$\therefore$ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{vmatrix} = -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -1 \neq 0$

$\therefore$ A^{-1} નું અસ્તિત્વ છે.

શ્રેણિક A ના ઘટકોના સહઅવયવો,

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{vmatrix} = -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & \sin\alpha \\ 0 & -\cos\alpha \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha \\ 0 & \sin\alpha \end{vmatrix} = 0$$

તે જ પ્રમાણે, $A_{21} = 0$, $A_{22} = -\cos\alpha$, $A_{23} = -\sin\alpha$

$$A_{31} = 0,\ A_{32} = -\sin\alpha,\ A_{33} = \cos\alpha$$

$$\therefore \quad adj A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj A$$

$$= \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

(**નોંધ :** $A^{-1} = A$. આવા શ્રેણિકને સ્વયંઘાતી શ્રેણિક (Idempotent matrix) કહે છે.)

ઉદાહરણ 31 : (2, −1) અને (4, 0)માંથી તથા (−1, −2) અને (4, 1)માંથી પસાર થતી રેખાનાં સમીકરણ નિશ્ચાયકની મદદથી મેળવો તથા શ્રેણિકની મદદથી તેમનું છેદબિંદુ (અસ્તિત્વ ધરાવે તો) મેળવો.

ઉકેલ : (2, −1) અને (4, 0)માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ છે.

$\therefore \quad x(-1) - y(-2) + 4 = 0$

$\therefore \quad -x + 2y + 4 = 0$

$\therefore \quad x - 2y = 4$

(−1, −2) અને (4, 1)માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ છે.

$\therefore \quad x(-3) - y(-5) + 7 = 0$

$\therefore \quad -3x + 5y = -7$

$\therefore \quad 3x - 5y = 7$

$\therefore$ રેખાઓનાં સમીકરણ : $x - 2y = 4$

$3x - 5y = 7$ છે.

આપેલ સમીકરણ સંહતિને શ્રેણિક સ્વરૂપે લખતાં,

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

અથવા AX = B, જ્યાં $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$.

હવે, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -5 + 6 = 1 \neq 0$

$\therefore$ A^{-1} નું અસ્તિત્વ છે.

$adjA = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$. તેથી $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\, adjA = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

હવે, $X = A^{-1}B$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -20 + 14 \\ -12 + 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $x = -6$ અને $y = -5$.

$\therefore$ આપેલ બે રેખાનું છેદબિંદુ $(-6, -5)$ છે.

ઉદાહરણ 32 : સુરેખ સમીકરણ સંહતિ $x + 3y + 4z = 8$, $2x + y + 2z = 5$, $5x + y + z = 7$ ને અનન્ય ઉકેલ છે ? જો હા, તો તે ઉકેલ શ્રેણિકની મદદથી મેળવો.

ઉકેલ : $x + 3y + 4z = 8$

$2x + y + 2z = 5$

$5x + y + z = 7$ ને શ્રેણિક સ્વરૂપે દર્શાવતાં,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$ મળશે.

ધારો કે $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

સંહતિ AX = B સ્વરૂપે મળશે.

હવે, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1) - 3(-8) + 4(-3)$

$= -1 + 24 - 12$

$= 11 \neq 0$

$\therefore$ A^{-1} નું અસ્તિત્વ છે.

$\therefore$ સંહતિને અનન્ય ઉકેલ છે.

હવે, શ્રેણિક $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ લેતાં Aના ઘટકોના સહઅવયવો નીચે પ્રમાણે મળશે :

$A_{11} = -1, A_{12} = 8, A_{13} = -3$

$A_{21} = 1, A_{22} = -19, A_{23} = 14$

$A_{31} = 2, A_{32} = 6, A_{33} = -5$

$$\therefore \quad adjA = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 8 & -19 & 6 \\ -3 & 14 & -5 \end{bmatrix}$$

હવે, $A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 8 & -19 & 6 \\ -3 & 14 & -5 \end{bmatrix}$$

$X = A^{-1}B$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 8 & -19 & 6 \\ -3 & 14 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -8+5+14 \\ 64-95+42 \\ -24+70-35 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 11 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad x = 1, y = 1, z = 1.$

સ્વાધ્યાય 4

1. જો $A = \begin{bmatrix} sin\,\theta & cos\,\theta \\ -cos\,\theta & sin\,\theta \end{bmatrix}$, તો AA^T શોધો અને સાબિત કરો કે $A^{-1} = A^T$.

2. જો $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$, તો સાબિત કરો કે $A^{-1} = \frac{1}{19}A$

3. જો $A = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$ અને $B^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$, તો $(AB)^{-1}$ શોધો.

4. જો $A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, તો $(AB)^{-1}$ શોધો.

5. જો $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, તો $B^{-1}AB$ શોધો.

6. સાબિત કરો : $A^2 - 6A + 17I_2 = O$ જ્યાં $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ અને તે પરથી A^{-1} મેળવો.

7. જો $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, તો સાબિત કરો કે $A^{-1} = A^2$.

8. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, માટે સાબિત કરો : $A^3 - 6A^2 + 5A + 11I_3 = O$. આ શ્રેણિક સમીકરણનો ઉપયોગ કરી A^{-1} શોધો.

9. જો $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$, તો શ્રેણિકોના ગુણાકાર કર્યા સિવાય $A^2 + AB + 6B$ મેળવો.

10. જો નીચે આપેલી સમીકરણ સંહતિનો અનન્ય ઉકેલ અસ્તિત્વ ધરાવે તો શ્રેણિકની મદદથી મેળવો :

(1) $3x - 5y = 1,\ x + 2y = 4$ (2) $3x + 4y - 5 = 0,\ y - x - 3 = 0$

11. જો નીચે આપેલી સમીકરણ સંહતિના અનન્ય ઉકેલ અસ્તિત્વ ધરાવે તો તેના ઉકેલગણ મેળવો :

(1) $2x + y + z = 2$
$x + 3y - z = 5$
$3x + y - 2z = 6$

(2) $\frac{2}{x} - \frac{3}{y} + \frac{3}{z} = 10$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 10$
$\frac{3}{x} - \frac{1}{y} + \frac{2}{z} = 13\ (xyz \neq 0)$

12. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & \frac{1+bc}{a} \end{bmatrix}$, માટે $(a^2 + bc + 1)I_2 - aA^{-1}$ શોધો.

13. m_1 અને m_2 ઢાળવાળી અને c_1 અને c_2 એ અનુક્રમે y-અંત:ખંડવાળી બે છેદતી રેખાઓનું છેદબિંદુ શ્રેણિકની મદદથી શોધો. $(m_1 \neq m_2)$

14. જો $A = \begin{bmatrix} 2x & 9 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ અને $|A| = 3$ તો $x \in R$ શોધો.

15. જો $[x\ \ -5\ \ -1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = O$ તો $x \in R$ શોધો.

16. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ ને એક સંમિત અને એક વિસંમિત શ્રેણિકના સરવાળા સ્વરૂપે દર્શાવો.

17. જો $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ તો $AA^T = I$ સાબિત કરો તથા તે પરથી $A^{-1} = A^T$ મેળવો.

18. જો ચોરસ શ્રેણિક A અને B માટે $AB = A$ અને $BA = B$ તો સાબિત કરો કે $A^2 = A$ અને $B^2 = B$.

19. જો B એ ચોરસ શ્રેણિક હોય અને $B^2 = B$, તો $A = I - B$ એ $A^2 = A$ અને $AB = BA = O$ નું પાલન કરે છે તેમ બતાવો.

20. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ તો સાબિત કરો કે $A^3 = O$. ($A \neq O$ હોવા છતાં $A^3 = O$ છે તે જુઓ.)

21. A એ 3×3 ચોરસ શ્રેણિક માટે સાબિત કરો કે $|adj A| = |A|^2$.

22. શ્રેણિક A અને B એવાં મેળવો કે $A \neq O$, $B \neq O$ પરંતુ $AB = O$.

23. જો $A(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, તો સાબિત કરો કે $A(\alpha)\, A(-\alpha) = I$.

24. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :

વિભાગ A (1 ગુણ)

(1) 3×3 શ્રેણિક A માટે $|3A| = \ldots\ldots |A|$ ☐

(a) 3 (b) 6 (c) 9 (d) 27

(2) $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ માટે $a_{ij} = 0$, $i \neq j$ તો A ...... શ્રેણિક છે. ($a_{ii} \neq a_{jj}$) ($n > 1$) ☐

(a) સ્તંભ શ્રેણિક (b) હાર શ્રેણિક (c) વિકર્ણ શ્રેણિક (d) અદિશ શ્રેણિક

(3) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ માટે ...... સત્ય વિધાન છે. ☐

(a) A^{-1} નું અસ્તિત્વ નથી. (b) $A = (-1) I_3$

(c) $A^2 = I$ (d) A વિકર્ણ શ્રેણિક છે.

(4) 3×4 શ્રેણિક A માટે જો A^TB અને BA^T વ્યાખ્યાયિત હોય, તો B ...... શ્રેણિક છે. ☐

(a) 4×3 (b) 3×3 (c) 4×4 (d) 3×4

(5) જો A એ 3×3 વિસંમિત શ્રેણિક હોય, તો $|A| = \ldots\ldots$. ☐

(a) 1 (b) 0 (c) -1 (d) 3

વિભાગ B (2 ગુણ)

(6) સમીકરણ સંહતિ $ax + y + z = a - 1$, $x + ay + z = a - 1$ અને $x + y + az = a - 1$ ને $a = ...$ હોય ત્યારે અનન્ય ઉકેલ મળે નહીં.

(a) 1 અથવા -2 (b) 3 (c) 2 (d) -1

(7) જો $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ અને $A^2 = \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix}$, તો $x = ...$, $y = ...$

(a) $x = a^2 + b^2$, $y = a^2 - b^2$ (b) $x = 2ab$, $y = a^2 + b^2$

(c) $x = a^2 + b^2$, $y = ab$ (d) $x = a^2 + b^2$, $y = 2ab$

(8) જો α અને β એ $\frac{\pi}{2}$ ના ગુણિત ન હોય, તો

$$\begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha \\ \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos^2\beta & \sin\beta\cos\beta \\ \sin\beta\cos\beta & \sin^2\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ તો $\alpha - \beta$ એ ...... છે.

(a) π નો ગુણિત (b) $\frac{\pi}{2}$ નો અયુગ્મ ગુણિત

(c) 0 (d) π નો અયુગ્મ ગુણિત

(9) જો $\begin{bmatrix} x & 0 \\ 1 & y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, તો $x = ...$, $y = ...$

(a) $x = 3, y = 2$ (b) $x = 3, y = -2$ (c) $x = -3, y = -2$ (d) $x = -3, y = 2$

(10) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ નો વ્યસ્ત શ્રેણિક $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & \alpha \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ હોય તો $\alpha = ...$

(a) 5 (b) -5 (c) 2 (d) -2

વિભાગ C (3 ગુણ)

(11) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ તો $B = ...$ જેથી $AB = BA$.

(a) $\begin{bmatrix} x & x \\ y & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & y \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} x & x \\ 1 & x \end{bmatrix}$

(12) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ અને $A^2 - kA - 5I = O$ તો $k = ...$.

(a) 3 (b) 7 (c) 5 (d) 9

(13) જો $[1 \quad x \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ x \end{bmatrix} = O$, તો $x = ...$

(a) $\frac{-9 \pm \sqrt{35}}{2}$ (b) $\frac{-7 \pm \sqrt{53}}{2}$ (c) $\frac{-9 \pm \sqrt{53}}{2}$ (d) $\frac{-7 \pm \sqrt{35}}{2}$

(14) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{bmatrix}$ માટે જો $AA^T = I$, તો $(x, y, z) = (\ldots, \ldots, \ldots)$. $(x, y, z > 0)$ ☐

(a) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ (b) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (c) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ (d) $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

વિભાગ D (4 ગુણ)

(15) જો $A\begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{bmatrix}$, તો $A = \ldots\ldots$ ☐

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

(16) $A = \begin{bmatrix} cos\frac{2\pi}{3} & -sin\frac{2\pi}{3} \\ sin\frac{2\pi}{3} & cos\frac{2\pi}{3} \end{bmatrix}$, તો $A^3 = \ldots\ldots$ ☐

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(17) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ નો વ્યસ્ત શ્રેણિક $\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -1 & 8 & \alpha \\ 1 & -19 & 14 \\ 2 & 6 & -5 \end{bmatrix}$ છે કે નહિ તે ચકાસો અને વ્યસ્ત શ્રેણિક હોય, તો $\alpha = \ldots\ldots$ ☐

(a) -3 (b) 2 (c) -5 (d) ન મળે.

*

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચે આપેલા મુદ્દાઓ શીખ્યા :

1. **શ્રેણિક :** સંખ્યાઓની કોઈ પણ લંબચોરસ ગોઠવણીને શ્રેણિક (સારણી) કહે છે. આ સંખ્યાઓને [ ] અથવા ( ) પ્રકારના કૌંસમાં મૂકવામાં આવે છે તથા આ સંખ્યાઓને શ્રેણિકના ઘટકો કહે છે.
2. **શ્રેણિકોની સમાનતા :** સમાન કક્ષાવાળા બે શ્રેણિકોના અનુરૂપ ઘટકો સમાન હોય, તો તે બે શ્રેણિક સમાન કહેવાય. $A = B \Rightarrow [a_{ij}] = [b_{ij}] \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}\ \forall i, j$
3. **શ્રેણિકોના પ્રકાર :** હાર શ્રેણિક, સ્તંભ શ્રેણિક, ચોરસ શ્રેણિક, વિકર્ણ શ્રેણિક, શૂન્ય શ્રેણિક, અદિશ શ્રેણિક
4. **બે શ્રેણિકોના સરવાળા :** જો બે શ્રેણિકની હારની સંખ્યા સમાન હોય અને સ્તંભની સંખ્યા સમાન હોય, તો તેમના અનુરૂપ ઘટકોના સરવાળાથી મળતા શ્રેણિકને બે શ્રેણિકોનો સરવાળો કહે છે.

   $[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$

5. **શ્રેણિકો માટે :**

(1) સરવાળા માટે ક્રમના નિયમનું અસ્તિત્વ છે.

(2) સરવાળા માટે જૂથના નિયમનું અસ્તિત્વ છે.

(3) સરવાળા માટે તટસ્થ શ્રેણિક $[O]_{m \times n}$ નું અસ્તિત્વ છે.

(4) સરવાળા માટે વિરોધી શ્રેણિક છે.

6. **શ્રેણિકનો અદિશ વડે ગુણાકાર અને તેના ગુણધર્મો :**

જો $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ અને $k \in R$, અદિશ હોય, તો $kA = [ka_{ij}]_{m \times n}$ થાય.

(1) $k(A + B) = kA + kB$ જ્યાં A, B શ્રેણિકો છે અને $k, l \in R$ છે.

(2) $(kl)A = k(lA)$

(3) $(k + l)A = kA + lA$

(4) $(-1)A = -A$

7. **પરિવર્ત શ્રેણિક :** જો $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, હોય, તો પરિવર્ત શ્રેણિક $A^T = A' = [a_{ji}]_{n \times m}$ થાય.

8. **સંમિત શ્રેણિક :** જો ચોરસ શ્રેણિક A માટે $A^T = A$, તો A સંમિત શ્રેણિક છે.

9. **વિસંમિત શ્રેણિક :** જો ચોરસ શ્રેણિક A માટે $A^T = -A$, તો A વિસંમિત શ્રેણિક છે.

10. (1) $(A + B)^T = A^T + B^T$, (2) $(A^T)^T = A$, (3) $(kA)^T = kA^T$

11. **બે શ્રેણિકોના ગુણાકાર :** શ્રેણિક Aના સ્તંભની સંખ્યા = શ્રેણિક Bની હારની સંખ્યા તો શ્રેણિક ગુણાકાર AB શક્ય બને.

12. **એકમ શ્રેણિક :** ચોરસ શ્રેણિકના અગ્રવિકર્ણ પરના ઘટકો 1 હોય અને બાકીના ઘટકો શૂન્ય થાય તો તે શ્રેણિક એકમ શ્રેણિક કહેવાય. તેને I વડે દર્શાવાય છે.

13. ચોરસ શ્રેણિક Aના નિશ્ચાયકને $|A|$ વડે દર્શાવાય છે.

14. ચોરસ શ્રેણિકો A અને B માટે $|AB| = |A||B|$.

15. **સહઅવયવજ શ્રેણિક :** ચોરસ શ્રેણિક A ના દરેક ઘટકના સ્થાને તેમના જ સહઅવયવ મૂકીને પરિવર્ત શ્રેણિક લેતાં સહઅવયવજ શ્રેણિક *adj*A મળે.

16. **વ્યસ્ત શ્રેણિક :** જો ચોરસ શ્રેણિકો A અને B માટે AB = BA = I થાય તો તેઓ એકબીજાના વ્યસ્ત શ્રેણિક કહેવાય.

17. **સામાન્ય શ્રેણિક :** જો ચોરસ શ્રેણિકના વ્યસ્ત શ્રેણિકનું અસ્તિત્વ હોય, તો તે શ્રેણિકને સામાન્ય શ્રેણિક કહેવાય. સામાન્ય શ્રેણિક માટે તેના નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય શૂન્યેતર વાસ્તવિક સંખ્યા છે.

18. Aનો વ્યસ્ત શ્રેણિક $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adjA)$ થાય. $|A| \neq 0$

19. શ્રેણિક પર પ્રાથમિક ક્રિયાઓ કરીને A^{-1} મેળવી શકાય. (નિશ્ચાયકના સંકેત જેવા જ સંકેત).

20. **એશિલોન પદ્ધતિથી વ્યસ્ત શ્રેણિક :** જો શ્રેણિક સમીકરણ A = IA ની ડાબી બાજુના શ્રેણિક A અને જમણી બાજુના I ની હાર પર શ્રેણીબદ્ધ પ્રાથમિક ક્રિયાઓ કરી Aનું I માં પરિવર્તન થાય ત્યારે જમણી બાજુના શ્રેણિક I નું A^{-1} માં પરિવર્તન થાય જેથી I = PA સમીકરણ મળે તો $P = A^{-1}$. વ્યસ્ત શ્રેણિક મેળવવાની આ પદ્ધતિને હાર સંક્ષેપન એશિલોન પદ્ધતિ કહે છે.

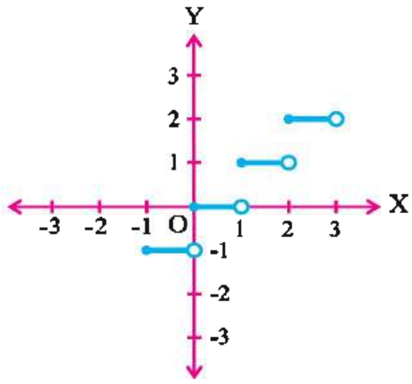
21. વ્યસ્ત શ્રેણિકના ઉપયોગથી સુરેખ સમીકરણ સંહતિનો ઉકેલ મેળવી શકાય છે.

સાતત્ય અને વિકલન 5

> *Do not worry about your difficulties in mathematics.*
> *I assure you that mine are greater.*
>
> **– Albert Einstein**
>
> *The last thing one knows when writing a book is what to put first.*
>
> **– Blaise Pascal**

5.1 પ્રાસ્તાવિક

આપણે ધોરણ XI માં લક્ષ વિષેનો ખ્યાલ મેળવ્યો. સાહજિક અભિગમ અને આલેખાત્મક સમજ આપણને લક્ષનો ખ્યાલ સમજવામાં મદદરૂપ થયાં. ઘણી જગ્યાએ આપણે 'સતત' શબ્દનો નિર્દેશ કરીએ છીએ. 'સતત વિધેય' શું છે ? હવે આપણે લક્ષના અભ્યાસ માટે જરૂરી સાતત્યની સંકલ્પનાનો અભ્યાસ કરવા પ્રયત્ન કરીશું. તે લક્ષ અને વિકલનીયતાને જોડતી કડીરૂપ છે. $f(x) = [x]$, $x \in$ Rનો આલેખ જુઓ. (આકૃતિ 5.1)



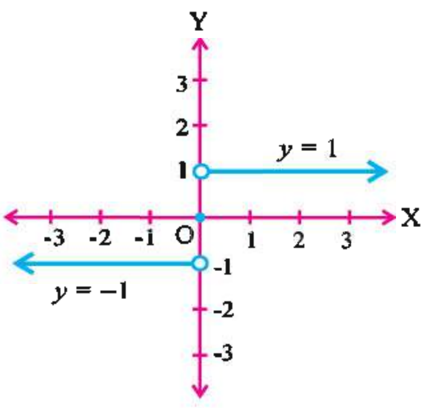
આકૃતિ 5.1

આપણે પેન્સિલ ઉઠાવ્યા વગર કાગળ પર $f(x) = [x]$ નો આલેખ દોરી શકીશું નહીં. આ પરિસ્થિતિનું નિર્માણ જ્યારે x-યામ પૂર્ણાંક હશે ત્યારે થશે. આવી જ પરિસ્થિતિ **ચિહ્ન વિધેય (Signum function)** માટે પણ થશે.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

અથવા

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



આકૃતિ 5.2

$x = 0$ આગળ આલેખ 'કૂદે' છે. (આકૃતિ 5.2)

અહીં $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = -1$ અને $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 1$.

તેથી $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ નું અસ્તિત્વ નથી. $f(x) = [x]$ના ઉદાહરણમાં પણ આલેખ પરથી એવું અનુમાન કરી શકાય.

$\lim\limits_{x \to 1-} [x] = 0$, $\lim\limits_{x \to 1+} [x] = 1$.

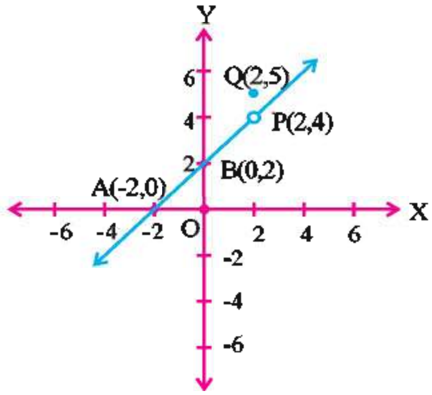
$\therefore$ $\lim\limits_{x \to 1} [x]$ નું અસ્તિત્વ નથી.

5.2 સાતત્ય

વિધેય $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & x \neq 2 \\ 5 & x = 2 \end{cases}$ લેતાં,

$f(x) = \begin{cases} x + 2 & x \neq 2 \\ 5 & x = 2 \end{cases}$ થશે.

અહીં વિધેયનો આલેખ $(\overleftrightarrow{AB} - \{P\}) \cup \{Q\}$નો બનેલો છે.



આકૃતિ 5.3

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2+} f(x) = 4$$

$\therefore \quad \lim_{x \to 2} f(x) = 4$

પરંતુ $f(2) = 5$

$\therefore \quad \lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$

અહીં પણ કાગળ પરથી પેન્સિલ ઉપાડ્યા વગર $f(x)$નો આલેખ દોરી શકાશે નહીં. આ જ સાતત્યનો ખ્યાલ છે. આલેખ 'તૂટે' છે એટલે કે સતત નથી અથવા આલેખ 'સળંગ' નથી, એટલે વિધેય 'સતત' નથી.

હવે આપણે સાતત્યની વિધિવત્ વ્યાખ્યા આપીએ.

સાતત્ય : વિધેય f એ c ને સમાવતા કોઈક અંતરાલ (a, b) પર વ્યાખ્યાયિત છે. $c \in R$

જો $\lim_{x \to c} f(x)$ નું અસ્તિત્વ હોય અને તે $f(c)$ની બરાબર હોય, તો આપણે કહીશું કે f એ $x = c$ આગળ સતત છે.

બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો, $\lim_{x \to c+} f(x)$ અને $\lim_{x \to c-} f(x)$ નું અસ્તિત્વ હોય અને તે બંને $f(c)$ ની બરાબર હોય તો આપણે કહી શકીએ કે વિધેય f એ $x = c$ આગળ સતત છે.

$\therefore$ f એ c આગળ સતત છે $\Leftrightarrow$ $\lim_{x \to c+} f(x)$ તથા $\lim_{x \to c-} f(x)$ નું અસ્તિત્વ છે તથા

$$\lim_{x \to c+} f(x) = \lim_{x \to c-} f(x) = f(c).$$

જો f એ $x = c$ આગળ સતત ન હોય તો આપણે કહીશું કે f એ $x = c$ આગળ અસતત છે.

એટલે કે જો f એ $x = c$ આગળ અસતત હોય, તો નીચેનામાંથી કોઈ એક પરિસ્થિતિનું નિર્માણ થાય :

(1) $\lim_{x \to c+} f(x)$ અથવા $\lim_{x \to c-} f(x)$ નું અસ્તિત્વ ન હોય.

(2) $\lim_{x \to c+} f(x)$ અને $\lim_{x \to c-} f(x)$ નું અસ્તિત્વ હોય પણ તેઓ સમાન ન હોય.

(3) $\lim_{x \to c+} f(x)$ અને $\lim_{x \to c-} f(x)$ નું અસ્તિત્વ હોય તથા સમાન હોય.

એટલે કે $\lim_{x \to c+} f(x) = \lim_{x \to c-} f(x) = \lim_{x \to c} f(x)$

પરંતુ f એ $x = c$ આગળ વ્યાખ્યાયિત ન હોય અથવા $\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$

જો f એ કોઈક પૃથક બિંદુઓએ વ્યાખ્યાયિત હોય, તો આપણે કહીશું કે f તે બિંદુઓ આગળ સતત છે. પરિણામે જો f એ સાન્ત ગણ $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ પર વ્યાખ્યાયિત હોય તો તે ગણ $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ પર સતત છે.

જ્યારે f એ તેના પ્રદેશના દરેક બિંદુએ સતત હોય ત્યારે આપણે વિધેય f એ તેના પ્રદેશ પર સતત છે એમ કહીશું.

જો f એ $[a, b]$ પર વ્યાખ્યાયિત હોય, અને

(1) f એ (a, b) પરના બધા બિંદુએ સતત હોય.

(2) $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a)$ (f એ $x < a$ માટે વ્યાખ્યાયિત નથી.)

(3) $\lim\limits_{x \to b-} f(x) = f(b)$ (f એ $x > b$ પર વ્યાખ્યાયિત નથી.)

તો f એ $[a, b]$ પર સતત છે.

ઉદાહરણ 1 : $f : R \to R$, $f(x) = 2x - 4$ નું $x = 3$ આગળ સાતત્ય ચકાસો.

ઉકેલ : $f(x) = 2x - 4$ એ x માં બહુપદી છે.

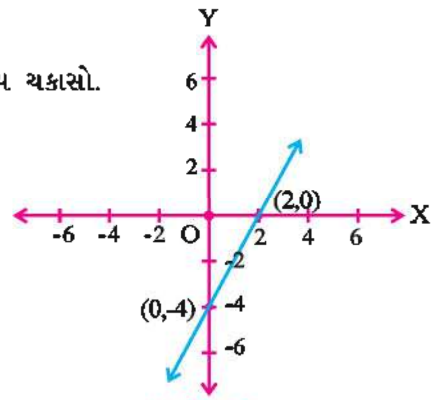
$\therefore \lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (2x - 4) = 2 \cdot 3 - 4 = 2$

$f(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2$

$\therefore \lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$

$\therefore$ f એ $x = 3$ આગળ સતત છે.

fનો આલેખ એક રેખા છે અને તે 'સળંગ' છે.



આકૃતિ 5.4

ઉદાહરણ 2 : $f : R \to R$, $f(x) = x^2$ નું $x = 2$ આગળ સાતત્ય ચકાસો.

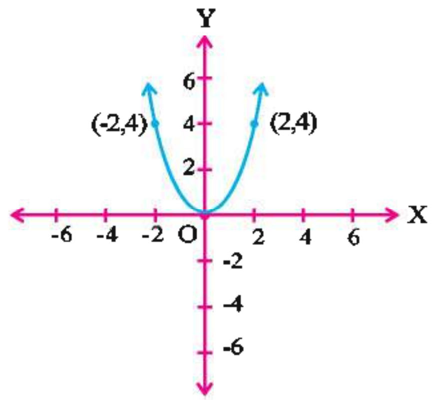
ઉકેલ : $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$, $f(2) = 4$

($f(x) = x^2$ એ બહુપદી વિધેય છે.)

$\therefore \lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$

$\therefore$ $f(x) = x^2$ એ $x = 2$ આગળ સતત છે.

$f(x) = x^2$ નો આલેખ 'સળંગ' છે.



આકૃતિ 5.5

ઉદાહરણ 3 : $f : R \to R$, $f(x) = |x|$ એ R પર સતત છે ?

ઉકેલ : આપણે $|x|$નું સાતત્ય તેના પ્રદેશ પર ચકાસીશું.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$c > 0$ માટે કોઈક $\delta > 0$ મળે કે જેથી,

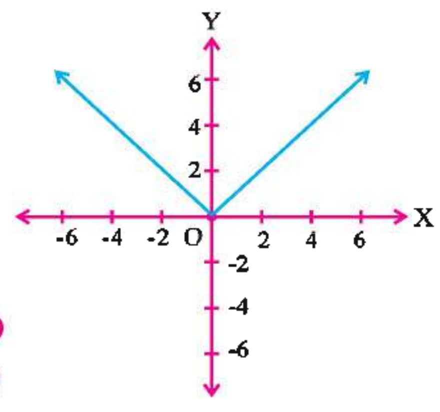
$c - \delta > 0$ (ઉદાહરણ તરીકે, $\delta = \frac{c}{2}$ લેતાં)

$(c - \delta, c + \delta)$માં $f(x) = |x| = x$ $(c - \delta > 0)$

$\therefore \lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} x = c$, $f(c) = |c| = c$ $(c > 0)$

$\therefore \lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

$\therefore$ f એ પ્રત્યેક $c > 0$ માટે સતત છે.



આકૃતિ 5.6

$c < 0$ લેતાં, કોઈક $\delta > 0$ મળે કે જેથી $c + \delta < 0$. (ઉદાહરણ તરીકે, $\delta = -\frac{c}{3}$ લેતાં)

$\therefore$ $(c - \delta, c + \delta)$ માં $f(x) = |x| = -x$ $\qquad (c + \delta < 0)$

$$\therefore \lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} (-x) = -c, f(c) = |c| = -c \qquad (c < 0)$$

$$\therefore \lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

$\therefore$ f એ પ્રત્યેક $c < 0$ માટે સતત છે.

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} |x| = \lim_{x \to 0+} x = 0 \qquad (x > 0)$$

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} |x| = \lim_{x \to 0-} -x = 0 \qquad (x < 0)$$

વળી, $f(0) = |0| = 0$

$$\therefore \lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$$

$\therefore$ f એ $x = 0$ આગળ સતત છે.

$\therefore$ f એ પ્રત્યેક $x \in R$ માટે સતત છે.

ઉદાહરણ 4 : અચળ વિધેય $f(x) = k$ ના R પરના સાતત્યની ચર્ચા કરો.

ઉકેલ : $c \in R$ માટે, $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} k = k = f(c)$ $\qquad (\lim\limits_{x \to c} k = k)$

$\therefore$ અચળ વિધેય R પર સતત છે.

ઉદાહરણ 5 : $f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 + x + 1 & x \neq 0 \\ 5 & x = 0 \end{cases}$

નું $x = 0$ આગળ સાતત્ય ચર્ચો.

ઉકેલ : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x^3 + x^2 + x + 1) = 1$ $\qquad$ (બહુપદી વિધેયનું લક્ષ)

$f(0) = 5$

$$\therefore \lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$$

$\therefore$ f એ $x = 0$ આગળ અસતત છે.

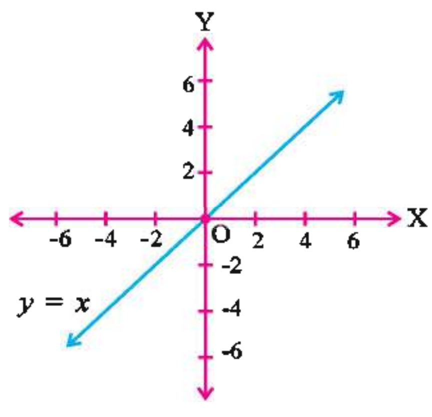
ઉદાહરણ 6 : તદેવ વિધેયનું સાતત્ય R પર ચર્ચો.

ઉકેલ : અહીં $f(x) = x$.

$a \in R$ લેતાં,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} x = a = f(a)$$

$\therefore$ તદેવ વિધેય R પર સતત છે.



આકૃતિ 5.7

ઉદાહરણ 7 : $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in R - \{0\}$ તો fનું સાતત્ય ચર્ચો.

ઉકેલ : $f(x) = \frac{1}{x}$ એ સંમેય વિધેય છે.

$c \neq 0$ લેતાં,

$$\lim_{x \to c} f(x) = \frac{\lim_{x \to c} 1}{\lim_{x \to c} x} = \frac{1}{c}$$

$$f(c) = \frac{1}{c}$$

$$\lim_{x \to c} f(x) = \frac{1}{c} = f(c)$$

$\therefore$ f એ પ્રત્યેક $c \in R - \{0\}$ માટે સતત છે.

નોંધ : $x = 0$ માટે $f(x) = \frac{1}{x}$ વ્યાખ્યાયિત નથી. $f(x)$ ના શૂન્ય આગળના વર્તનનો અભ્યાસ કરીએ.

$x > 0$ લેતાં,

x	0.1	0.01	0.001	10^{-n}
$f(x)$	10	$100 = 10^2$	$1000 = 10^3$	10^n

જો $x \to 0+$ તો $f(x)$ એ અસિમિત વધે છે.

આ વિકલ્પમાં આપણે કહી શકીએ કે $x \to 0+$ તો $f(x) \to \infty$. આપણે $\lim_{x \to 0+} f(x) = \infty$ લખીશું નહીં. $\lim_{x \to 0+} f(x)$ નું અસ્તિત્વ નથી.

વિધેયનું લક્ષ એ **વાસ્તવિક સંખ્યા** છે. ∞ એ વાસ્તવિક સંખ્યા નથી અથવા તો એ વિસ્તૃત વાસ્તવિક સંખ્યા સંહતિનો ઘટક છે.

$x < 0$ લેતાં,

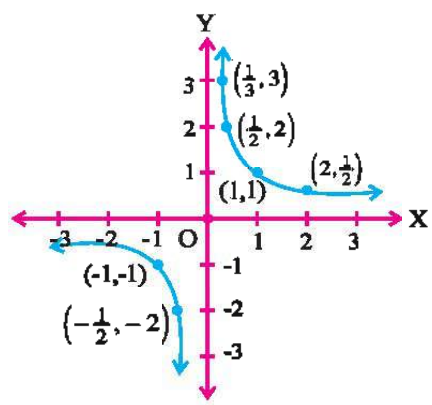
x	-0.1	-0.01	-0.001	-10^{-n}
$f(x)$	-10	$-100 = -10^2$	$-1000 = -10^3$	-10^n

$\therefore$ અહીં x ઘટે છે તેમ $f(x)$ ઘટે છે અને

$x \to 0-$ તેમ $f(x) \to -\infty$.

પુનઃ આપણે $\lim_{x \to 0-} f(x) = -\infty$ લખીશું નહીં.

$\lim_{x \to 0-} f(x)$ નું અસ્તિત્વ નથી.



આકૃતિ 5.8

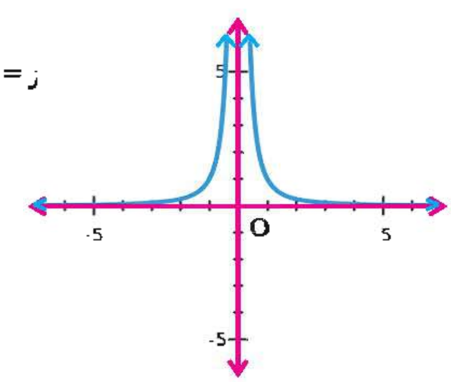
ઉદાહરણ 8 : $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$ નું $x \in R - \{0\}$ આગળ સાતત્ય ચર્ચો.

ઉકેલ : $c \neq 0$ લેતાં, $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} \frac{1}{x^2} = \frac{\lim_{x \to c} 1}{\lim_{x \to c} x^2} = \frac{1}{c^2} =$

$\therefore$ f એ પ્રત્યેક $c \in R - \{0\}$ માટે સતત છે.

નોંધ : $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$ નું અસ્તિત્વ નથી.

$x \to 0$ તો $\frac{1}{x^2} \to \infty$



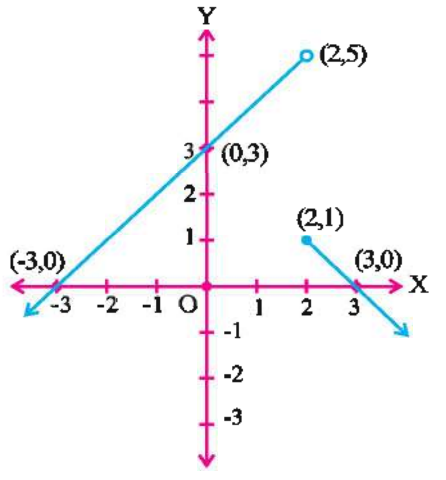
આકૃતિ 5.9

x	-0.1	0.1	-0.01	0.01	$\pm 10^{-n}$
$f(x)$	100	100	10000	10000	10^{2n}

ઉદાહરણ 9 : $f(x) = \begin{cases} x + 3 & x < 2 \\ 3 - x & x \geq 2 \end{cases}$

નું $x \in R$ આગળ સાતત્ય ચકાસો.

ઉકેલ : $a < 2$, તો a ને સમાવતા કોઈક અંતરાલમાં $f(x) = x + 3$ થશે.



આકૃતિ 5.10

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (x + 3) = a + 3 = f(a)$$

$\therefore$ f એ $a < 2$ હોય તેવા પ્રત્યેક $a \in R$ માટે સતત છે.

$a > 2$ તો a ને સમાવતા કોઈક અંતરાલમાં $f(x) = 3 - x$ થશે.

$\therefore$ $f(a) = 3 - a$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (3 - x) = 3 - a = f(a)$$

$\therefore$ f એ $a > 2$ હોય તેવા પ્રત્યેક $a \in R$ માટે સતત છે.

$a = 2$ લેતાં, $\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} (x + 3) = 5$ $\qquad (x < 2)$

$$\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} (3 - x) = 1$$

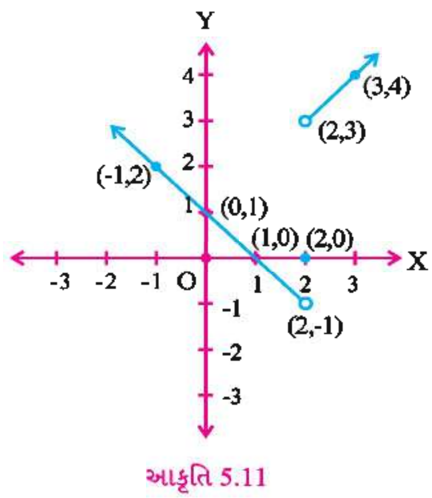
$\therefore$ $\lim_{x \to 2} f(x)$નું અસ્તિત્વ નથી.

$\therefore$ f એ $x = 2$ સિવાયના પ્રત્યેક $x \in R$ માટે સતત છે.

(નોંધ : જ્યારે $f(x)$નું સૂત્ર બદલાતું હોય તે સિવાયના બધાં જ બિંદુઓએ મહદ્ અંશે f સતત હોય છે.)

ઉદાહરણ 10 : $f(x) = \begin{cases} x + 1 & x > 2 \\ 0 & x = 2 \\ 1 - x & x < 2 \end{cases}$

જે બિંદુઓએ f અસતત છે તે બિંદુઓ શોધો.



આકૃતિ 5.11

ઉકેલ : ઉપરની નોંધ અને $y = f(x)$ ના આલેખ પરથી એ સ્પષ્ટ છે કે f એ $x = 2$ સિવાય પ્રત્યેક $x \in R$ માટે સતત છે.

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} (1 - x) = 1 - 2 = -1$$

$$\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} (x + 1) = 2 + 1 = 3$$

$\therefore$ $\lim_{x \to 2} f(x)$ નું અસ્તિત્વ નથી.

$\therefore$ f એ $x = 2$ આગળ અસતત છે.

ઉદાહરણ 11 : સાબિત કરો કે $f(x) = \begin{cases} x - 1 & x < 1 \\ 1 - x & x > 1 \end{cases}$ એ $R - \{1\}$ પર સતત છે.

ઉકેલ : $a < 1$ લેતાં, $f(a) = a - 1$ થશે.

કોઈક $\delta > 0$ માટે $a + \delta < 1$ મળે.

$x \in (a - \delta, a + \delta)$ લેતાં, $f(x) = x - 1$

$\therefore \quad \lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} (x - 1) = a - 1 = f(a)$

$\therefore \quad f$ એ $a < 1$ હોય તેવા પ્રત્યેક $a \in$ R માટે સતત છે.

$a > 1$ માટે $f(a) = 1 - a$ થશે.

કોઈક $\delta > 0$ માટે $a - \delta > 1$ મળે.

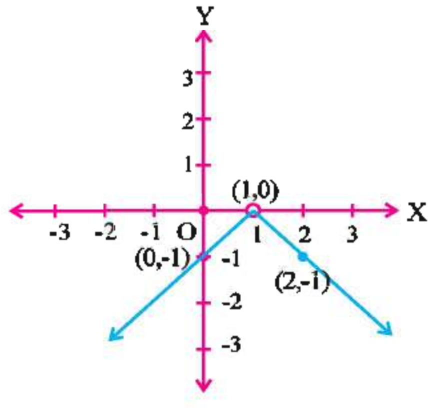
$x \in (a - \delta, a + \delta)$ લેતાં,

$f(x) = 1 - x \qquad (x > 1)$

$\therefore \quad \lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} (1 - x) = 1 - a = f(a)$

$\therefore \quad f$ એ $a > 1$ હોય તેવા પ્રત્યેક $a \in$ R માટે સતત છે.

$\therefore \quad f$ એ તેના પ્રદેશ પર સતત છે.



આકૃતિ 5.12

ઉદાહરણ 12 : જો $f(x) = \begin{cases} x - 1 & x < 1 \\ 0 & x = 1 \\ 1 - x & x > 1 \end{cases}$

તો fનું સાતત્ય ચકાસો.

ઉકેલ : ઉદાહરણ 11માં જોયું કે, f એ $x \neq 1$ હોય તેવા પ્રત્યેક $x \in$ R માટે સતત છે.

$\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-} (x - 1) = 0, \quad \lim\limits_{x \to 1+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+} (1 - x) = 0$

$\therefore \quad f(1) = 0$

$\therefore \quad f$ એ $x = 1$ માટે સતત છે.

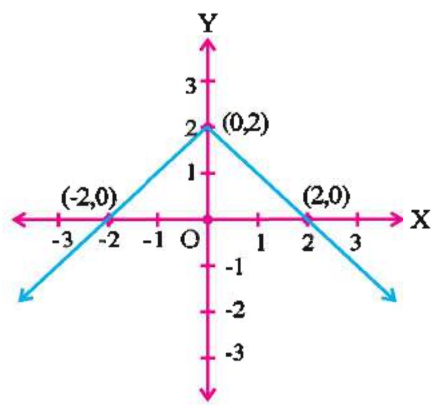
$\therefore \quad f$ એ R પર સતત છે.

નોંધ : શું f : R $\to$ R, $f(x) = -|x - 1|$ નથી ?

ઉદાહરણ 13 : જો $f(x) = \begin{cases} x + 2 & x < 0 \\ 2 - x & x > 0 \\ k & x = 0 \end{cases}$

f એ R પર સતત હોય, તો k મેળવો.

ઉકેલ : fનો આલેખ જોતાં તથા $f(x) = 2 - x$, $x > 0$ અને $f(x) = x + 2$, $x < 0$ બહુપદી વિધેયો છે. તેથી f એ પ્રત્યેક $x \in$ R $-$ {0} માટે સતત છે જ.



આકૃતિ 5.13

હવે આપણે $x = 0$ આગળ સાતત્ય ચકાસીએ.

$\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-} (x + 2) = 2$

$\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} (2 - x) = 2$

$\therefore \quad \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$

$\therefore \quad f$ એ $x = 0$ આગળ સતત છે અને તેથી $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2 = f(0)$. $\qquad \left(\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2\right)$

$\therefore \quad f(0) = k = 2$

$\therefore \quad f$ એ પ્રત્યેક $x \in$ R માટે સતત હોય તો $k = 2$.

ઉદાહરણ 14 : સાબિત કરો કે બહુપદી વિધેય સતત છે.

ઉકેલ : $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$, $a_i \in$ R $(i = 0, 1, 2, ..., n)$ $a_n \neq 0$ એ બહુપદી છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$

$\lim\limits_{x \to a} a_i = a_i$ (અચળ વિધેયનું લક્ષ)

વળી, $\lim\limits_{x \to a} (f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)) = \lim\limits_{x \to a} f_1(x) + \lim\limits_{x \to a} f_2(x) + ... + \lim\limits_{x \to a} f_n(x)$

હવે,
$$\begin{aligned}\lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0)\\ &= \lim_{x \to a} a_n \lim_{x \to a} x^n + \lim_{x \to a} a_{n-1} \lim_{x \to a} x^{n-1} + ... + \lim_{x \to a} a_0\\ &= a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + ... + a_0\\ &= f(a)\end{aligned}$$

$\therefore$ બહુપદી વિધેય પ્રત્યેક $x \in R$ માટે સતત છે.

ઉદાહરણ 15 : સાબિત કરો કે પૂર્ણાંકો સિવાયના પ્રત્યેક $x \in R$ માટે $f(x) = [x]$ સતત છે.

ઉકેલ :
$$f(x) = \begin{cases} ... & .... \\ ... & .... \\ ... & .... \\ -1 & -1 \le x < 0 \\ 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x < 2 \\ ... & .... \\ ... & .... \\ ... & .... \end{cases}$$

$\therefore$ f એ $n \in Z$ માટે કોઈ પણ અંતરાલ $(n, n + 1)$ પર અચળ વિધેય છે.

$\therefore$ f એ પ્રત્યેક અંતરાલ $(n, n + 1)$ પર સતત છે. $n \in Z$

હવે, $f(x) = \begin{cases} n - 1 & n - 1 \le x < n \\ n & n \le x < n + 1 \end{cases}$

$n \in Z$ લેતાં,

આપણે $\delta > 0$ એવો પસંદ કરીએ કે જેથી $n - 1 < n - \delta < n$. $(0 < \delta < 1)$

$\therefore$ $\lim\limits_{x \to n-} f(x) = \lim\limits_{x \to n-} n - 1 = n - 1$ $(x \in (n - \delta, n))$

હવે, $\delta > 0$ પસંદ કરો કે જેથી $n < n + \delta < n + 1$. $(0 < \delta < 1)$

$\therefore$ $\lim\limits_{x \to n+} f(x) = \lim\limits_{x \to n+} n = n$ $(x \in (n, n + \delta))$

$\therefore$ $\lim\limits_{x \to n} f(x)$ નું અસ્તિત્વ નથી. (જુઓ આકૃતિ 5.1)

$\therefore$ f એ દરેક પૂર્ણાંક માટે અસતત છે.

$\therefore$ $f(x) = [x]$ એ $R - Z$ પર સતત છે અને પ્રત્યેક $n \in Z$ માટે અસતત છે.

ઉદાહરણ 16 : $f(x) = \begin{cases} kx + 3 & x \le 2 \\ 7 & x > 2 \end{cases}$

f એ $x = 2$ આગળ સતત હોય, તો k શોધો.

ઉકેલ : $\lim\limits_{x \to 2-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2-} (kx + 3) = 2k + 3$

$\lim\limits_{x \to 2+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2+} 7 = 7$

$\therefore$ જો $2k + 3 = 7$ તો $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$નું અસ્તિત્વ હોય.

$\therefore$ $k = 2$ તો $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$નું અસ્તિત્વ હોય તથા તેનું મૂલ્ય 7 હોય.

વળી, $k = 2$ માટે $f(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7$

$\therefore$ $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$

$\therefore$ જો $k = 2$ તો f એ $x = 2$ આગળ સતત છે.

ઉદાહરણ 17 : $f(x) = \begin{cases} 3 & x \le 1 \\ ax + b & 1 < x < 3 \\ 7 & x \ge 3 \end{cases}$

એવા a અને b શોધો કે જેથી f સતત વિધેય થાય.

ઉકેલ : $x \in (1, 3)$ સિવાય f અચળ વિધેય હોવાથી સતત વિધેય છે.

f એ $(1, 3)$માં સુરેખ બહુપદી છે. તેથી સતત વિધેય છે.

તેથી f એ $x \in R - \{1, 3\}$ પર સતત છે, શક્યતઃ $x = 1$ અને 3 સિવાય તે R પર સતત છે.

$\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+} (ax + b) = a + b$, $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-} 3 = 3$

f એ $x = 1$ આગળ સતત હોવાથી, $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ નું અસ્તિત્વ હોવું જોઈએ.

$\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-} f(x)$

$\therefore$ $a + b = 3$ **(i)**

$\lim\limits_{x \to 3-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3-} (ax + b) = 3a + b$, $\lim\limits_{x \to 3+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3+} 7 = 7$

f એ $x = 3$ આગળ પણ સતત હોવાથી $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ નું અસ્તિત્વ હોવું જોઈએ.

$\lim\limits_{x \to 3+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3-} f(x)$

$\therefore$ $3a + b = 7$ **(ii)**

(i) અને (ii) ઉકેલતાં, $a = 2$, $b = 1$. વળી $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 7$

હવે, $f(1) = 3$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3 = f(1)$

$f(3) = 7$, $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 7 = f(3)$

$\therefore$ $a = 2$ અને $b = 1$ લેતાં f એ R પર સતત છે.

ઉદાહરણ 18 : $f(x) = \begin{cases} x + a & x < 0 \\ 2 & 0 \le x < 1 \\ bx - 1 & 1 \le x < 2 \end{cases}$

જો f એ $x = 0$ અને $x = 1$ આગળ સતત હોય, તો a અને b શોધો.

ઉકેલ : $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-} (x + a) = a$

$\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} 2 = 2.$

f એ $x = 0$ આગળ સતત હોવાથી, $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} f(x)$

$\therefore \quad a = 2$. વળી $f(0) = 2$

$\therefore \quad \lim_{x \to 0-} f(x) = 2 = f(0)$

$\therefore \quad a = 2$ લેતાં f એ $x = 0$ આગળ સતત છે.

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} 2 = 2$$

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} (bx - 1) = b - 1$$

f એ $x = 1$ આગળ સતત હોવાથી, $\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1-} f(x)$

$\therefore \quad b - 1 = 2$

$\therefore \quad b = 3$. આથી $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$

વળી, $f(1) = b - 1 = 3 - 1 = 2$

$\therefore \quad \lim_{x \to 1} f(x) = 2 = f(1)$

$\therefore \quad a = 2$ અને $b = 3$ લેતાં f એ $x = 0$ તથા $x = 1$ માટે સતત છે.

5.3 સતત વિધેયોનું બીજગણિત

સાતત્યની સંકલ્પના લક્ષ પર આધારિત છે, તેથી લક્ષનાં કાર્યનિયમો પ્રમાણે જ આપણને $f \pm g$, $f \times g$, $\frac{f}{g}$ વગેરેના સાતત્યના કાર્યનિયમો મળે.

પ્રમેય 5.1 : ધારો કે f અને g એ $x = c$ માટે સતત છે, જ્યાં (a, b) કોઈક અંતરાલ છે અને $c \in (a, b)$,

તો (1) $f + g$ એ $x = c$ માટે સતત છે.

(2) kf એ $x = c$ માટે સતત છે. $k \in R$

(3) $f - g$ એ $x = c$ માટે સતત છે.

(4) $f \times g$ એ $x = c$ માટે સતત છે.

(5) જો $g(c) \neq 0$ તો $\frac{k}{g}$ એ $x = c$ માટે સતત છે. $k \in R$

(6) જો $g(c) \neq 0$ તો $\frac{f}{g}$ એ $x = c$ માટે સતત છે.

સાબિતી : f અને g એ $x = c$ માટે સતત છે. તેથી $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ અને $\lim_{x \to c} g(x) = g(c)$

(1) $$\begin{aligned}\lim_{x \to c} (f + g)(x) = \lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) &= \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x) \\ &= f(c) + g(c) \\ &= (f + g)(c)\end{aligned}$$

$\therefore \quad f + g$ એ $x = c$ આગળ સતત છે.

(2) $$\begin{aligned}\lim_{x \to c} (kf)(x) &= \lim_{x \to c} kf(x) \\ &= \lim_{x \to c} k \lim_{x \to c} f(x) \\ &= kf(c) \\ &= (kf)(c)\end{aligned}$$

$\therefore \quad kf$ એ $x = c$ આગળ સતત છે.

(3) (2)માં $k = -1$ લેતાં, g સતત હોવાથી $-g$ એ $x = c$ આગળ સતત છે.

$\therefore$ $f + (-g) = f - g$ એ $x = c$ આગળ સતત છે.

(4) $\lim\limits_{x \to c} (f \times g)(x) = \lim\limits_{x \to c} f(x)g(x)$

$$= \lim_{x \to c} f(x) \ \lim_{x \to c} g(x)$$

$$= f(c)\, g(c)$$

$$= (f \times g)(c)$$

$\therefore$ $f \times g$ એ $x = c$ આગળ સતત છે.

(5) $\lim\limits_{x \to c} \left(\frac{k}{g}\right)(x) = \lim\limits_{x \to c} \frac{k}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to c} k}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}$ $\quad (g(x) \neq 0)$

$$= \frac{k}{g(c)} \qquad (g(c) \neq 0)$$

$\therefore$ $\frac{k}{g}$ એ $x = c$ આગળ સતત છે.

(6) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \left(f \times \frac{1}{g}\right)(x)$

(5)માં $k = 1$ લેતાં, g સતત હોવાથી $\frac{1}{g}$ એ $x = c$ આગળ સતત છે. $\quad (g(x) \neq 0)$

$\left(f \times \frac{1}{g}\right) = \frac{f}{g}$ એ $x = c$ આગળ સતત છે.

અથવા

$\lim\limits_{x \to c} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}$$

$$= \frac{f(c)}{g(c)} \qquad (g(c) \neq 0)$$

$$= \left(\frac{f}{g}\right)(c)$$

$\therefore$ $\frac{f}{g}$ એ $x = c$ આગળ સતત છે.

કેટલાંક અગત્યનાં પરિણામો :

(1) **સંમેય વિધેય તેના પ્રદેશ પર સતત છે.**

$h(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ એ સંમેય વિધેય છે, જ્યાં $p(x)$ અને $q(x)$ બહુપદી વિધેય છે અને $q(x) \neq 0$

$\lim\limits_{x \to a} h(x) = \lim\limits_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)}$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to a} p(x)}{\lim\limits_{x \to a} q(x)}$$

$$= \frac{p(a)}{q(a)} \qquad (q(a) \neq 0)$$

$$= h(a)$$

$\therefore$ h એ તેના પ્રદેશ પર સતત છે.

(2) *sine* વિધેય સતત છે.

ધોરણ XIમાં આપણે જોયું તે પ્રમાણે

આપણે $\lim\limits_{x \to 0} sinx = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} cosx = 1$ સ્વીકારી લઈશું.

ધારો કે $a \in$ R. $x = a + h$ લેતાં, જેમ $x \to a$ તેમ $h \to 0$ થશે.

$$\lim_{x \to a} sinx = \lim_{h \to 0} sin(a + h)$$

$$= \lim_{h \to 0} (sina\ cosh + cosa\ sinh)$$

$$= sina \lim_{h \to 0} cosh + cosa \lim_{h \to 0} sinh$$

$$= sina \cdot 1 + cosa \cdot 0$$

$$= sina$$

$\therefore$ $\lim\limits_{x \to a} sinx = sina$

$\therefore$ *sine* વિધેય સતત છે.

(3) *cosine* વિધેય સતત છે.

ધારો કે $a \in$ R. $x = a + h$ લેતાં, જેમ $x \to a$ તેમ $h \to 0$ થશે.

$$\lim_{x \to a} cosx = \lim_{h \to 0} cos(a + h)$$

$$= \lim_{h \to 0} (cosa\ cosh - sina\ sinh)$$

$$= cosa \lim_{h \to 0} cosh - sina \lim_{h \to 0} sinh$$

$$= cosa \cdot 1 - sina \cdot 0$$

$$= cosa$$

$\therefore$ $\lim\limits_{x \to a} cosx = cosa$

$\therefore$ *cosine* વિધેય સતત છે.

(4) *tan* વિધેય સતત છે :

$tanx = \frac{sinx}{cosx}$, $x \in \text{R} - \left\{(2k - 1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \text{Z}\right\}$

sine વિધેય સતત છે તથા *cosine* વિધેય સતત છે.

$cosx = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{(2k - 1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \text{Z}\right\}$

$\therefore$ f અને g સતત હોય, તો $\frac{f}{g}$ સતત છે એ કાર્યનિયમ મુજબ *tan* વિધેય તેના પ્રદેશ પર સતત છે.

(5) સંયોજિત વિધેયનું સાતત્ય :

ધારો કે $f : (a, b) \to (c, d)$ અને $g : (c, d) \to (e, f)$ વિધેયો છે અને તેથી gof વ્યાખ્યાયિત છે.

જો f એ $x_1 \in (a, b)$ અને g એ $f(x_1) \in (c, d)$ આગળ સતત હોય, તો gof એ $x_1 \in (a, b)$ આગળ સતત છે.

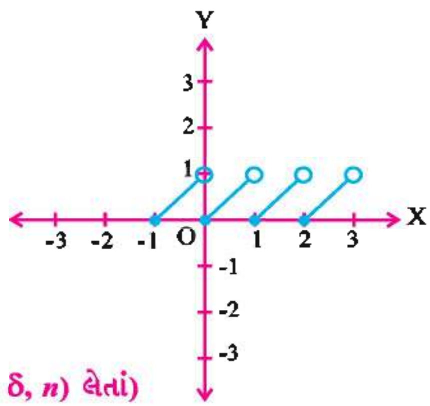
સંયોજિત વિધેયના લક્ષના નિયમ પ્રમાણે (ધોરણ XI, સિમેસ્ટર II).

$$\lim_{x \to x_1} g(f(x)) = g(\lim_{x \to x_1} (f(x)) = g(f(x_1)) = (gof)(x_1)$$

$\therefore$ gof એ $x = x_1$ આગળ સતત છે.

ઉદાહરણ 19 : સાબિત કરો કે પ્રત્યેક $n \in Z$ માટે $f(x) = x - [x]$ એ અસતત છે. $(x \in R)$

ઉકેલ : $f(x) = \begin{cases} .... & .... \\ .... & .... \\ x & 0 \le x < 1 \\ x - 1 & 1 \le x < 2 \\ x - 2 & 2 \le x < 3 \\ .... & .... \\ .... & .... \end{cases}$



આકૃતિ 5.14

કોઈ પણ $n \in Z$ માટે,

$$\lim_{x \to n-} f(x) = \lim_{x \to n-} (x - [x])$$

$$= \lim_{x \to n-} (x - (n - 1)) \quad (0 < \delta < 1 \text{ માટે } x \in (n - \delta, n) \text{ લેતાં})$$

$$= n - (n - 1)$$

$$= 1$$

અને $f(n) = n - [n] = n - n = 0$

$\therefore$ $\lim_{x \to n-} f(x) \ne f(n) \quad \forall n \in Z$

$\therefore$ $f(x) = x - [x]$ એ $n \in Z$ પર સતત નથી.

નોંધ : (0, 1), (1, 2),... વગેરે અંતરાલ પર $f(x) = x - [x]$ સતત છે. શક્ય હોય તો ધારો કે $n \in Z$ પર પણ $x - [x]$ સતત છે. $g(x) = x$ તો $x \in R$ પર સતત છે જ.

$\therefore$ $f(x) = x - [x]$ તથા $g(x) = x$ એ બંને R પર સતત થાય.

$\therefore$ $g(x) - f(x) = x - (x - [x]) = [x]$ પણ R પર સતત થાય. પરંતુ $[x]$ તો પ્રત્યેક પૂર્ણાંક આગળ અસતત છે.

આથી $f(x) = x - [x]$, $n \in Z$ માટે સતત નથી.

ઉદાહરણ 20 : સાબિત કરો કે $sin\,|x|$ એ R પર સતત છે.

ઉકેલ : $f : R \to R$, $f(x) = |x|$ અને $g : R \to R$, $g(x) = sinx$ સતત છે.

$\therefore$ $gof : R \to R$, $(gof)(x) = g(f(x)) = g(|x|) = sin\,|x|$ એ પ્રત્યેક $x \in R$ માટે સતત છે.

ઉદાહરણ 21 : સાબિત કરો કે $f : R \to R$, $f(x) = |\,1 - x + |x|\,|$ સતત છે.

ઉકેલ : $g : R \to R$, $g(x) = 1 - x$ અને $h : R \to R$, $h(x) = |x|$ એ સતત છે.

$\therefore$ $g(x) + h(x) = 1 - x + |x|$ એ R પર સતત છે.

$\therefore$ h અને $g + h$ એ R પર સતત હોવાથી $ho((g + h)(x)) = h((g + h)(x)) = |\,1 - x + |x|\,|$ એ R પર સતત છે.

ઉદાહરણ 22 : સાબિત કરો કે $cosx^3$ એ R પર સતત છે.

ઉકેલ : $f : R \to R, f(x) = x^3$ અને $g : R \to R, g(x) = cosx$ સતત છે.

$\therefore$ $gof : R \to R, (gof)(x) = g(f(x)) = g(x^3) = cosx^3$ સતત છે.

ઉદાહરણ 23 : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{kcosx}{\pi - 2x} & x \neq \frac{\pi}{2} \\ k^2 & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

એવો k મળી શકે કે જેથી f એ $x = \frac{\pi}{2}$ આગળ સતત થાય ?

ઉકેલ : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{kcosx}{2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{k \sin \alpha}{2\alpha} = \dfrac{k}{2}$ $\left(\alpha = \frac{\pi}{2} - x\right)$

વળી, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = k^2$

f એ $x = \frac{\pi}{2}$ આગળ સતત થાય તે માટે, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ થવું જોઈએ.

$\therefore$ $\frac{k}{2} = k^2$

$\therefore$ $k = \frac{1}{2}$ અથવા 0

$\therefore$ $k = 0$ અથવા $k = \frac{1}{2}$ લેતાં f એ $x = \frac{\pi}{2}$ આગળ સતત થાય.

(**નોંધ :** $k = 0$ તો પ્રત્યેક $x \in R$ માટે $f(x) = 0$)

ઉદાહરણ 24 : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{sinx}{|x|} & x \neq 0 \\ k & x = 0 \end{cases}$

f એ $x = 0$ આગળ સતત થાય તેવો k શોધી શકાશે ?

ઉકેલ : $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{sinx}{|x|} = \lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{sinx}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{sinx}{|x|} = \lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{sinx}{-x} = -1$

$\therefore$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$નું અસ્તિત્વ નથી.

$\therefore$ એવો કોઈ પણ $k \in R$ મળશે નહીં કે જેથી f એ $x = 0$ આગળ સતત થાય.

ઉદાહરણ 25 : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{sin4x}{9x} & x \neq 0 \\ k^2 & x = 0 \end{cases}$

f એ $x = 0$ આગળ સતત થાય તેવો k શોધો.

ઉકેલ : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sin4x}{9x}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sin4x}{4x} \cdot \dfrac{4}{9}$

$= \dfrac{4}{9}$

$f(0) = k^2$

$\therefore \quad k^2 = \frac{4}{9}$ માટે f એ $x = 0$ આગળ સતત છે.

$\therefore \quad k = \pm\frac{2}{3}$ માટે f એ $x = 0$ આગળ સતત છે.

સ્વાધ્યાય 5.1

1. સાબિત કરો કે *cot, cosec* અને *sec* તેમના પ્રદેશ પર સતત છે.
2. સાબિત કરો કે ન્યૂનતમ પૂર્ણાંક વિધેય $f(x) = \lceil x \rceil$ એ પ્રત્યેક $n \in Z$ માટે અસતત છે.
3. સાબિત કરો કે ચિહ્ન વિધેય $x = 0$ આગળ અસતત છે.

નીચે આપેલાં વિધેયોનું સાતત્ય ચકાસો : (4 થી 12)

4. $f(x) = \begin{cases} x + 3 & x \geq 2 \\ 3 - x & x < 2 \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ x & x < 0 \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & x < 1 \\ 5 & x = 1 \\ 3x + 2 & x > 1 \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} \frac{sinx}{x} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} \frac{tanx}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & x < 0 \\ 2 & x = 0 \\ 3x - 2 & x > 0 \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} \frac{sinx}{3x} & x \neq 0 \\ \frac{2}{3} & x = 0 \end{cases}$

11. $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+3}{3x+2} & x > 0 \\ \frac{sin3x}{2x} & x < 0 \\ \frac{3}{2} & x = 0 \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^2+1} & x > 0 \\ \frac{sinx}{|x|} & x < 0 \\ -1 & x = 0 \end{cases}$

xની આપેલ કિંમતો આગળ નીચે આપેલાં વિધેયો સતત હોય, તો k મેળવો. (13 થી 16)

13. $f(x) = \begin{cases} \frac{tan\, kx}{3x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ $\quad (x = 0)$

14. $f(x) = \begin{cases} \frac{sin5x}{kx} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ $\quad (x = 0)$

15. $f(x) = \begin{cases} \frac{(x+1)\, tan(x-1)}{sin(x^2-1)} & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases}$ $\quad (x = 1)$

16. $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + k & x < 0 \\ x^2 - 2k & x \geq 0 \end{cases}$ $\quad (x = 0)$

17. જો આપેલ xની કિંમતો આગળ f સતત હોય, તો a અને b શોધો :

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & 1 < x < 2 \\ ax + b & 2 \le x < 3 \\ 3x + 2 & 3 \le x \le 4 \end{cases}$$

($x = 2$ અને $x = 3$)

18. સાબિત કરો કે $sin^2x - cos^2x$ એ R પર સતત છે.

19. સાબિત કરો કે $sin2x\ cos3x$ એ R પર સતત છે.

20. સાબિત કરો કે $sin|x|$ એ R પર સતત છે.

21. સાબિત કરો કે $|sinx|$ એ R પર સતત છે.

22. સાબિત કરો કે sin^3x અને $sinx^3$ એ R પર સતત છે.

23. સાબિત કરો કે $cosx^n$ એ R પર સતત છે. ($n \in$ N)

24. સાબિત કરો કે cos^nx એ R પર સતત છે. ($n \in$ N)

25. $$f(x) = \begin{cases} sinx - cosx & x \ne 0 \\ -1 & x = 0 \end{cases}$$

સાબિત કરો કે f એ $x = 0$ પર સતત છે.

26. $$f(x) = \begin{cases} |sinx - cosx| & x \ne 0 \\ -1 & x = 0 \end{cases}$$

f એ $x = 0$ આગળ સતત છે ?

27. $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{sinx - cosx}{x - \frac{\pi}{4}} & x \ne \frac{\pi}{4} \\ k & x = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

જો f એ $x = \frac{\pi}{4}$ આગળ સતત હોય, તો k શોધો.

28. $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^n - 2^n}{x - 2} & x \ne 2 \\ 80 & x = 2 \end{cases}$$

જો f એ $x = 2$ આગળ સતત હોય, તો n શોધો.

*

5.4 ઘાતાંકીય અને લઘુગણકીય વિધેયો

વિધેય $f(x) = x^n$ નો ઉપયોગ બહુપદી વિધેયો અને સંમેય વિધેયોમાં થાય છે.

ધારો કે $f_n(x) = x^n$

$f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x^3$,..... વગેરે

ચાલો, આપણે નીચે આપેલા આલેખો દોરીએ :

$f_2(x)$ માટે,

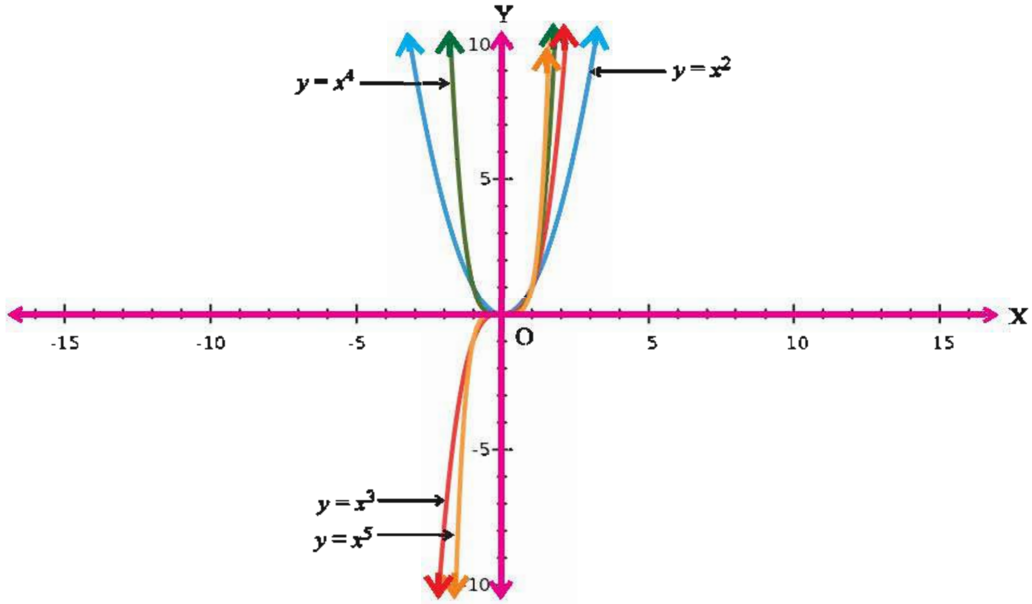
x	1	2	3	4	5	−1	−2	−3
$f_2(x)$	1	4	9	16	25	1	4	9

$f_3(x)$ માટે,

x	1	2	3	4	5	−1	−2	−3
$f_3(x)$	1	8	27	64	125	−1	−8	−27

જેમ x વધે છે તેમ $f_n(x)$ વધે છે. $x > 1$ માટે, xના નિશ્ચિત ઉપચય (વધારા) માટે જેમ n વધે છે તેમ $f_n(x)$ વધે છે. ઉદાહરણ તરીકે x એ 2 થી 3 થાય ત્યારે, $f_{10}(2) = 2^{10}$, $f_{10}(3) = 3^{10}$, $f_{20}(2) = 2^{20}$, $f_{20}(3) = 3^{20}$.

સ્વાભાવિક રીતે, $3^{20} - 2^{20} > 3^{10} - 2^{10}$.



આકૃતિ 5.15

હવે આપણે 'સામાન્ય ઘાતાંકીય વિધેય' $f(x) = 10^x$ લઈએ. આ વિધેય કોઈ પણ વિધેય $f_n(x)$ કરતાં ખૂબ ઝડપથી વધે છે.

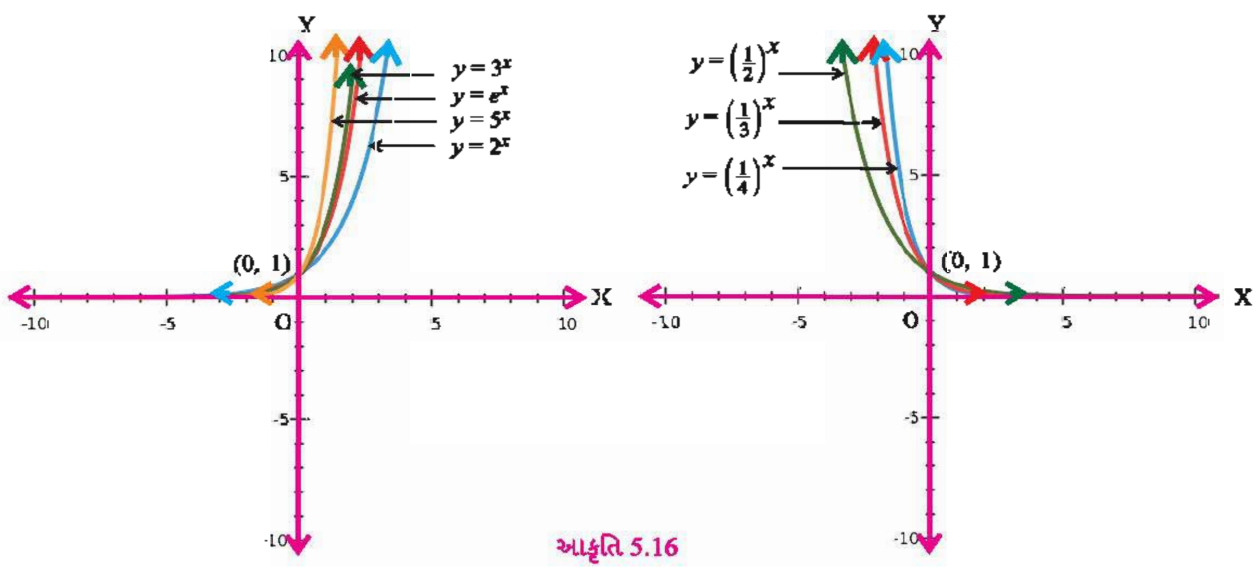
$x = 10^2$ લો. હવે, $f_{100}(x) = x^{100} = (10^2)^{100} = 10^{200}$, $f(x) = 10^{10^2} = 10^{100}$

$x = 10^3$ માટે, $f_{100}(x) = x^{100} = 10^{300}$, $f(x) = 10^{10^3} = 10^{1000}$

$x = 10^4$ માટે, $f_{100}(x) = (10^4)^{100} = 10^{400}$, $f(x) = 10^{10^4} = 10^{10000}$

સામાન્ય રીતે, જો $x > 10^3$, તો $f(x)$ એ $f_{100}(x)$ કરતાં ખૂબ જ ઝડપથી વધે છે.

($2 < e < 3$. પૃષ્ઠ 155 જુઓ.)



આકૃતિ 5.16

ઘાતાંકીય વિધેય : $f(x) = a^x$, $a > 0$, $x \in R$ ને ઘાતાંકીય વિધેય કહે છે.

(1) જો $a > 1$, તો x વધે તેમ $f(x)$ વધે છે.

જો $a < 1$, તો x વધે તેમ $f(x)$ ઘટે છે.

(2) કોઈ પણ $a \in R^+$ માટે fનો આલેખ (0, 1)માંથી પસાર થાય છે.

(3) જો $a \neq 1$, તો f એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય છે.

(4) fનો વિસ્તાર R^+ છે.

(5) જેમ aની કિંમત વધે તેમ, $a > 1$ માટે fનો આલેખ Y-અક્ષ તરફ ઢળે છે.

(6) $a > 1$ માટે જો x ઋણ હોય અને ઘટે તો fનો આલેખ X-અક્ષની નજીકને નજીક આવે છે પરંતુ X-અક્ષને છેદતો નથી.

વાસ્તવિક ઘાતાંકના નિયમો :

(1) $a^x a^y = a^{x+y}$ (2) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

(3) $(a^x)^y = a^{xy}$ (4) $(ab)^x = a^x b^x$ $a, b \in R^+, x, y \in R$

(આ ચર્ચા ફક્ત સમજવા માટે અને હવે પછીની ચર્ચાની કડીરૂપ છે અને પરીક્ષા માટે નથી.).

અચળ e : શ્રેણીનું લક્ષ : વિધેયની માફક જ, કેટલીક શ્રેણીઓને 'લક્ષ' હોય છે.

શ્રેણી $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{100}, ..., \frac{1}{n}$....નાં પદો 0ની નજીક અને નજીક જાય છે.

આપણે $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ કહીશું.

આપણે શ્રેણીનાં લક્ષની વિધિવત્ વ્યાખ્યા આપીશું નહીં. નીચેનાં પરિણામો આપણે સ્વીકારીશું.

(1) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$. ($n \in N$). આપણે સ્વીકારીએ છીએ કે $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ ($x \in R$)

(2) $\lim\limits_{n \to \infty} r^n = 0$ $\quad |r| < 1$

દાખલા તરીકે જો $r = \frac{1}{2}$, તો આપણને શ્રેણી $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ..$ મળે. જેમ nની કિંમત મોટી ને મોટી થાય છે તેમ $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ એ 0ની નજીક અને નજીક પહોંચે છે.

શ્રેણી $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ લઈએ.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + ... + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!\,n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!\,n^3} + ... + \frac{n(n-1)....1}{n!\,n^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2!} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!} + ... + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{n!}$$

$1-\frac{1}{n}, 1-\frac{2}{n}, 1-\frac{3}{n}$ બધાં જ 1 કરતાં નાનાં છે અને જ્યાં જ્યાં તેમનો ગુણાકાર હોય છે ત્યાં આ ગુણાકાર પણ 1 કરતાં નાનો છે.

$$\therefore \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+...+\frac{1}{n!} \qquad (n \geq 3)$$

$$< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^{n-1}} \qquad (2^{n-1} < n!)$$

$$\therefore \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \qquad \text{(સમગુણોત્તર શ્રેણી)}$$

$$\therefore \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 3-2\left(\frac{1}{2}\right)^n < 3 \qquad \text{(i)}$$

સ્વાભાવિક રીતે, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2 \qquad (n > 1) \quad \text{(ii)}$

આપણે શ્રેણી $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ને લક્ષ છે તે સ્વીકારી લઈશું અને તેને e કહીશું. પરિણામ (i) અને (ii) પરથી, $2 < e < 3$

આમ e એ નિશ્ચિત અચળ છે, જે $2 < e < 3$ નું પાલન કરે છે.

આ અચળાંકને નેપિયરનો અચળ કહે છે. તેનું લગભગ મૂલ્ય $e = 2.71828183$ છે.

શ્રેણી $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$નું લક્ષ e છે.

$$\therefore \quad \lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

આપણે સાબિત કરી શકીએ, કે શ્રેણી $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ને લક્ષ છે. પરંતુ અહીં તેની સાબિતી આપીશું નહીં.

$\lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ અથવા x ના બદલે $\frac{1}{x}$ લેતાં, $\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ પણ સ્વીકારી લઈશું.

લઘુગણકીય વિધેય :

આપણે જાણીએ છીએ કે ઘાતાંકીય વિધેય $f : R \to R^+, f(x) = a^x$ એ $a \in R^+ - \{1\}$ માટે એક-એક **અને વ્યાપ્ત છે. તેના પ્રતિવિધેય $g : R^+ \to R$ને લઘુગણકીય વિધેય કહે છે. તેથી જો $y = f(x) = a^x$, તો $x = g(y) = \log_a y$**

આપણે જાણીએ છીએ કે, વિધેય $f : A \to B$ અને પ્રતિવિધેય $g : B \to A$ માટે $(fog)(y) = y, y \in B$ અને $(gof)(x) = x, x \in A$.

હવે, $f(g(y)) = y$

$\therefore \quad f(\log_a y) = y$

$\therefore \quad a^{\log_a y} = y$

અથવા બીજા શબ્દોમાં, $a^{\log_a x} = x$ **જ્યાં** $x \in R^+$

જો $a = 10$, તો $\log_{10} x$ને સામાન્ય લઘુગણક કહીશું.

આમ, $f : R \to R^+, f(x) = 10^x$ તો તેનું પ્રતિવિધેય $g : R^+ \to R, g(x) = \log_{10} x$ થાય.

જો $a = e$ તો આપણને પ્રાકૃતિક લઘુગણક મળે અને તેને $\ln_e x$ વડે દર્શાવીશું. આપણે $\ln x$ ને $\log_e x$ અથવા સામાન્ય રીતે $\log x$ લખીશું.

(1) log વિધેયનો પ્રદેશ R^+ અને વિસ્તાર R છે. ફક્ત ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો લઘુગણક મેળવી શકાય અને જો $x \in R^+$ તો $\log x$ એ વાસ્તવિક સંખ્યા છે.

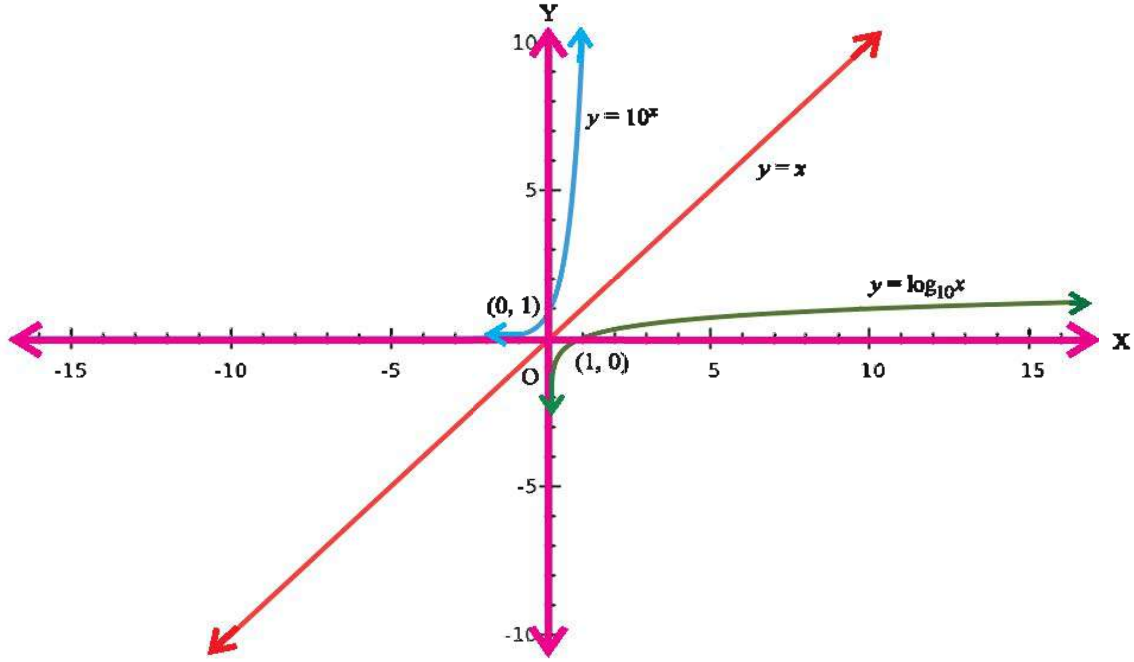
(2) $a^0 = 1.$ તેથી $\log_a 1 = 0$

તેથી $\log_e 1 = 0$, $\log_{10} 1 = 0$

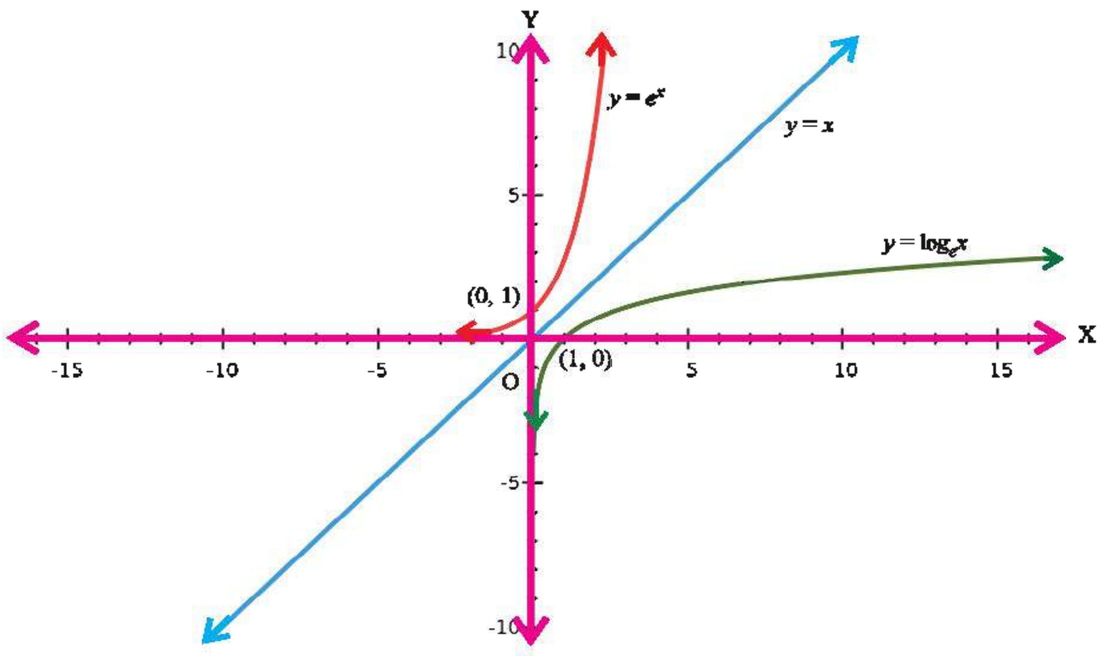
(3) $a^1 = a.$ તેથી $\log_a a = 1$

$\therefore$ $\log_e e = 1$, $\log_{10} 10 = 1$

$a^{\log_a x} = x$, $a \in R^+ - \{1\}$ હોવાથી $e^{\log_e x} = x$ થાય.



આકૃતિ 5.17



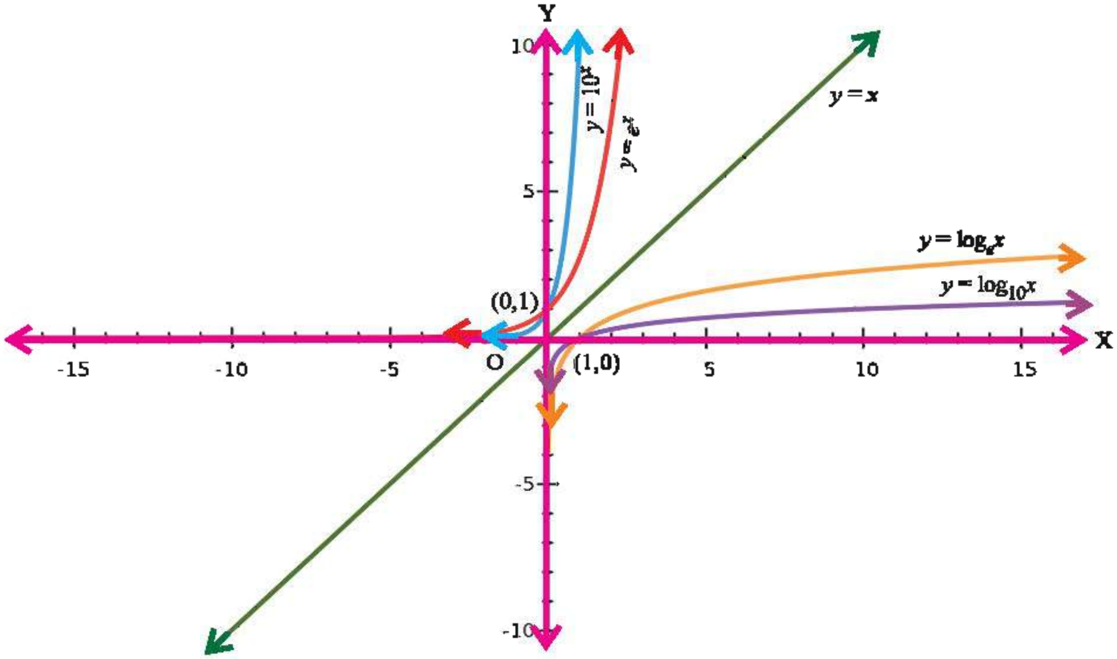
આકૃતિ 5.18

આપણને $f(x) = \log_e x$ અને $f(x) = e^x$ ના આલેખનું અવલોકન કરતાં માલૂમ પડે છે કે તે રેખા $y = x$ અરીસામાં એકબીજાનાં પ્રતિબિંબ છે :

(1) (1, 0) એ log વિધેયના આલેખનો ઘટક છે.

(2) $a > 1$ માટે $f(x) = \log_a x$ વધતું વિધેય છે.

$0 < a < 1$ માટે તે ઘટતું વિધેય છે.



આકૃતિ 5.19

લઘુગણકના કેટલાક નિયમો :

(1) $\log_a mn = \log_a m + \log_a n$ $\quad (m, n \in R^+, a \in R^+ - \{1\})$

ધારો કે $\log_a m = x$, $\log_a n = y$

$\therefore \quad m = a^x, n = a^y$

$\therefore \quad mn = a^x a^y = a^{x+y}$

$\therefore \quad \log_a mn = x + y = \log_a m + \log_a n$

(2) $\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$ $\quad (m, n \in R^+, a \in R^+ - \{1\})$

સાબિતી (1) પ્રમાણે મળે.

(3) $\log_a x^n = n\log_a x$ $\quad (x \in R^+, n \in Z, a \in R^+ - \{1\})$

ધારો કે $\log_a x = y$

$\therefore \quad x = a^y$

$\therefore \quad x^n = (a^y)^n = a^{ny}$

$\therefore \quad \log_a x^n = ny$

$\therefore \quad \log_a x^n = n\log_a x$

(4) આધાર પરિવર્તનનો નિયમ : $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ $(b \in R^+, a, c \in R^+ - \{1\})$

ધારો કે $\log_a b = x$, $\log_c a = y$

$\therefore \quad b = a^x, a = c^y$

$\therefore \quad b = (c^y)^x = c^{xy}$

$\therefore \quad \log_c b = xy = \log_a b \times \log_c a$

$\therefore \quad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ ($a \neq 1$ હોવાથી $\log_c a \neq 0$)

વળી,
$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_e(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \log_e(1+x)$$
$$= \lim_{x \to 0} \log_e(1+x)^{\frac{1}{x}}$$
$$= \log_e\left(\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}\right)$$ (log સતત છે અને સંયોજીત વિધેયનું લક્ષ)
$$= \log_e e$$
$$= 1$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

5.5 વિકલન

આપણે ધોરણ XIમાં વિકલનની સંકલ્પનાનો અભ્યાસ કર્યો. ચાલો આપણે યાદ કરીએ.

વ્યાખ્યા : જો $f : (a, b) \to R$ વિધેય હોય અને $c \in (a, b)$ તથા h એટલો નાનો હોય કે જેથી $c + h \in (a, b)$, $\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ નું અસ્તિત્વ હોય, તો આ લક્ષને f નું c આગળનું વિકલિત કહે છે. તેને $f'(c)$ અથવા $\left[\frac{d}{dx} f(x)\right]_{x=c}$ અથવા $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=c}$ વડે દર્શાવાય છે, જ્યાં $y = f(x)$. જો $x = c$ આગળ fના વિકલિતનું અસ્તિત્વ હોય, તો f એ $x = c$ આગળ વિકલનીય છે તેમ કહેવાય. $\frac{dy}{dx}$ માટે y_1 પણ ઉપયોગમાં લેવાય છે.

જો f એ દરેક $x \in A$ પર વિકલનીય હોય $(A \neq \emptyset)$ તો, f એ Aમાં વિકલનીય છે તેમ કહેવાય.

f એ $c \in (a, b)$ પર વિકલનીય છે નો અર્થ $\lim_{h \to 0+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ અને $\lim_{h \to 0-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ નું અસ્તિત્વ છે તથા તેઓ સમાન છે.

ધારો કે f એ $[a, b]$ પર વ્યાખ્યાયિત છે. f એ $[a, b]$ પર વિકલનીય છે એનો અર્થ છે કે,

(1) f એ (a, b) પર વિકલનીય છે.

(2) $\lim_{h \to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$નું અસ્તિત્વ છે.

આપણે f એ $x = a$ આગળ જમણી બાજુથી વિકલનીય છે તેમ કહીશું અને આ લક્ષને $f'(a+)$ લખીશું.

(3) $\lim_{h \to 0-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$ નું અસ્તિત્વ છે.

આપણે f એ $x = b$ આગળ ડાબી બાજુથી વિકલનીય છે તેમ કહીશું અને આ લક્ષને $f'(b-)$ વડે દર્શાવીશું.

આપણે નીચેના કાર્યનિયમો અને પ્રમાણિત રૂપો સ્વીકારી લઈશું.

જો f અને g એ x આગળ વિકલનીય હોય, તો

(1) $f \pm g$ એ x આગળ વિકલનીય છે અને $\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x)$

(2) $f \times g$ એ x આગળ વિકલનીય છે અને $\frac{d}{dx}f(x)\,g(x)) = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)$

(3) જો $g(x) \neq 0$, તો $\frac{f}{g}$ એ x આગળ વિકલનીય છે અને $\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{[g(x)]^2}$

(4) $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ $\qquad n \in R, x \in R^+$

(5) $\frac{d}{dx}sinx = cosx$ $\qquad x \in R$

(6) $\frac{d}{dx}cosx = -sinx$ $\qquad x \in R$

(7) $\frac{d}{dx}tanx = sec^2x$ $\qquad x \in R - \left\{(2k-1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}$

(8) $\frac{d}{dx}secx = secx\ tanx$ $\qquad x \in R - \left\{(2k-1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}$

(9) $\frac{d}{dx}cotx = -cosec^2x$ $\qquad x \in R - \{k\pi \mid k \in Z\}$

(10) $\frac{d}{dx}cosecx = -cosecx\ cotx$ $\qquad x \in R - \{k\pi \mid k \in Z\}$

હવે આપણે નીચેનું પ્રમેય સાબિત કરીશું.

પ્રમેય 5.2 : જો f એ $x = c$ આગળ વિકલનીય હોય તો તે $x = c$ આગળ સતત છે. $c \in (a, b)$

સાબિતી : ધારો કે f એ $x = c$ આગળ વિકલનીય છે.

$\therefore \lim\limits_{x \to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ નું અસ્તિત્વ છે.

હવે, $x \neq c$ માટે $f(x) - f(c) = \left(\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right)(x-c)$

$$\lim_{x \to c}(f(x) - f(c)) = \lim_{x \to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\ \lim_{x \to c}(x-c)$$

(કારણ કે f એ વિકલનીય હોવાથી બંને લક્ષનું અસ્તિત્વ છે.)

$$= f'(c) \cdot 0 = 0$$

($f'(c)$નું અસ્તિત્વ છે.)

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c}(f(x) - f(c) + f(c))$$

$$= \lim_{x \to c}(f(x) - f(c)) + \lim_{x \to c} f(c)$$

(બંને લક્ષનું અસ્તિત્વ છે.)

$$= 0 + f(c)$$

$$= f(c)$$

$\therefore$ f એ $x = c$ આગળ સતત છે.

પરંતુ સતત વિધેય વિકલનીય ન પણ હોય તે શક્ય છે.

$f(x) = |x|$ લઈએ.

$$\lim_{x \to 0+} |x| = \lim_{x \to 0+} x = 0, \quad \lim_{x \to 0-} |x| = \lim_{x \to 0-} (-x) = 0, \; f(0) = |0| = 0$$

$\therefore$ f એ $x = 0$ આગળ સતત છે.

પરંતુ, $\displaystyle\lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{x}{x} = 1$

$$\lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0-} \frac{-x}{x} = -1$$

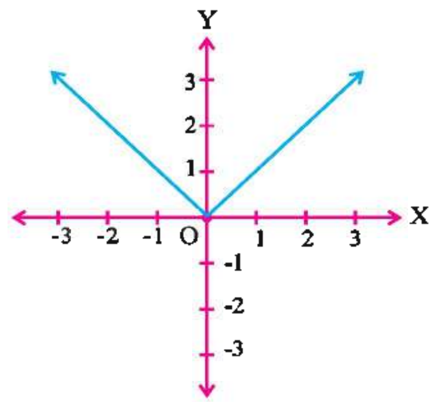
આમ, $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ નું અસ્તિત્વ નથી.

$\therefore$ $|x|$ એ $x = 0$ આગળ સતત છે, પરંતુ $x = 0$ આગળ વિકલનીય નથી.

શું આપણે આ પરિસ્થિતિ સમજાવી શકીશું ?

આપણે જોયું કે $f'(c)$ એ વક્ર $y = f(x)$ ના $x = c$ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ છે.

$f(x) = |x|$ નો આલેખ જુઓ. તે (0, 0) ઉદ્‌ભવબિંદુવાળા બે કિરણોનો બનેલો છે અને (0, 0) આગળ તેને કોઈ સ્પર્શક મળતો નથી. તે કિરણો એક ખૂણો બનાવે છે.



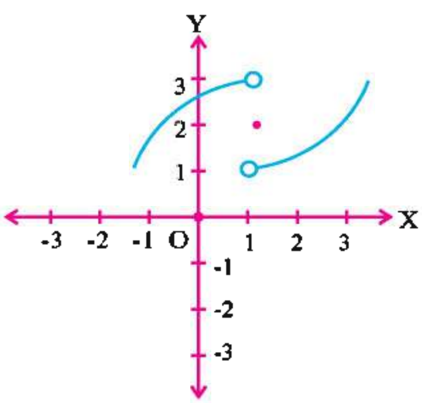
આકૃતિ 5.20

વિધેય ક્યારે વિકલનીય ન હોય ?

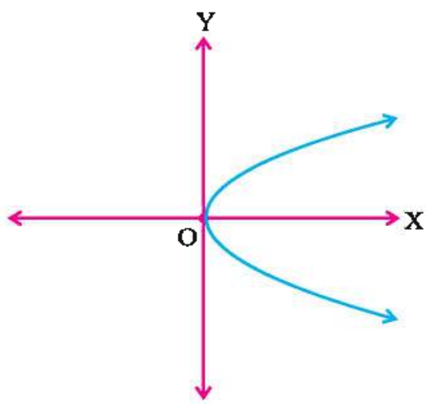
(1) વિધેય તે બિંદુએ સતત ન હોય. (આકૃતિ 5.21)

(2) $x = c$ આગળનો સ્પર્શક શિરોલંબ હોય. (આકૃતિ 5.22)

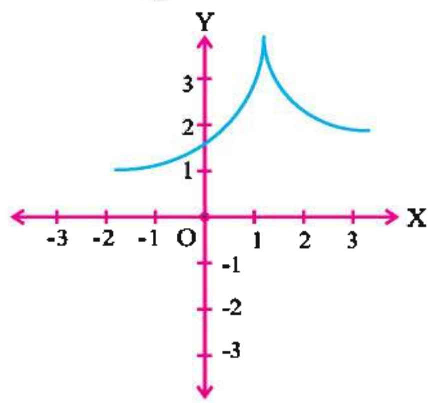
(3) $x = c$ આગળ સ્પર્શક ન હોય. (આકૃતિ 5.23)



આકૃતિ 5.21



આકૃતિ 5.22



આકૃતિ 5.23

સ્વાધ્યાય 5.2

1. સાબિત કરો કે $f(x) = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3|$ એ R પર સતત છે પરંતુ ફક્ત $x = 1$, 2 અને 3 માટે વિકલનીય નથી.

2. સાબિત કરો કે $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0, \end{cases}$ એ $x = 0$ આગળ સતત છે પરંતુ વિકલનીય નથી.

3. $f(x) = \begin{cases} x^2 sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$ સાબિત કરો કે $f'(0) = 0$ તથા તે પરથી દર્શાવો કે f એ $x = 0$ આગળ સતત છે.

4. $f'(x)$ શોધો : (1) $f(x) = sin^2x$, (2) $f(x) = tan^2x$, (3) $f(x) = x^4$, (4) $f(x) = cos^4x$

*

5.6 સાંકળનો નિયમ અથવા સંયોજિત વિધેયનું વિકલિત

આપણે જોઈ ગયા છીએ કે ગુણાકારના નિયમથી sin^2x અથવા tan^3x નો વિકલિત કેવી રીતે મેળવી શકાય અથવા ત્રિકોણમિતિનાં સૂત્રો જેવાં કે $sin2x = 2sinx\ cosx$, $cos2x = cos^2x - sin^2x$ નો ઉપયોગ ગુણાકારના નિયમ સાથે કરીને $sin2x$ અથવા $cos2x$નો વિકલિત મેળવી શકાય. પરંતુ આ તો સરળ છે.

આપણે $tan^5(x^2 - x + 1)$નો વિકલિત શોધવાનો હોય, તો તે ધારીએ તેટલું સરળ નથી.

ચાલો, આપણે એક ઉદાહરણ લઈએ.

ધારો કે $f(x) = (2x + 1)^4$

$$= 16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1$$

$$f'(x) = 64x^3 + 96x^2 + 48x + 8$$

$$= 8(8x^3 + 12x^2 + 6x + 1)$$

$$= 8(2x + 1)^3$$

$$= 2 \cdot 4\,(2x + 1)^3$$

હવે, ધારો કે $g(t) = t^4$ તથા $t = h(x) = 2x + 1$. આથી $g(h(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^4 = f(x)$

$\therefore \quad f(x) = g(h(x))$

હવે, $g'(t) = 4t^3$ અને $\frac{dt}{dx} = h'(x) = 2$

વળી, $f'(x) = 8(2x + 1)^3 = 4(2x + 1)^3 \cdot 2$

$$= 4t^3 \cdot 2 = g'(t)\frac{dt}{dx} = g'(t)\ h'(x)$$

એટલે કે $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}g(h(x)) = g'(t)\,h'(x) = g'(h(x))\ h'(x)$

અહીં આપણે $f(x)$ ને બે વિધેયો $g(t) = t^4$ અને $h(x) = 2x + 1$ ના સંયોજિત વિધેય તરીકે દર્શાવેલ છે કે જેથી તેમનો વિકલિત ખૂબ સરળ રીતે શોધી શકાય.

ચાલો આપણે તે નિયમ જાણીએ.

સાંકળનો નિયમ (Chain Rule) : $f : (a, b) \to (c, d)$ એ x આગળ અને $g : (c, d) \to (e, f)$ એ $f(x)$ આગળ વિકલનીય વિધેયો છે.

$(gof)(x) = g(f(x))$ તો $(gof)'(x) = g'(f(x))\ f'(x)$

બીજી રીતે કહીએ તો ધારો કે $h(x) = (gof)(x) = g(f(x))$. અહીં $f(x) = t$ લેતાં,

$h'(x) = (gof)'(x) = g'(f(x))\ f'(x) = g'(t)\ f'(x)$

$\therefore \quad \frac{d}{dx}g(f(x)) = \frac{d}{dt}g(t)\frac{d}{dx}f(x)$, જ્યાં $t = f(x)$

આમ, $\frac{d}{dx}g(f(x)) = \frac{du}{dt}\frac{dt}{dx}$. જ્યાં $u = g(t)$ અને $t = f(x)$.

તેથી $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt}\frac{dt}{dx}$, $u = g(t)$ અને $t = f(x)$ અને તેથી $u = g(f(x))$.

આમ જો u એ t નું વિધેય અને t એ x નું વિધેય હોય, તો u એ x નું સંયોજિત વિધેય છે.

અને $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt}\frac{dt}{dx}$

આ નિયમને સાંકળનો નિયમ કહે છે.

આ જ પ્રમાણે, $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt}\frac{dt}{ds}\frac{ds}{dv}\frac{dv}{dx}$

અહીં u એ t નું, t એ s નું, s એ v નું, v એ x નું વિધેય છે. આમ u એ x નું વિધેય છે.

ઉદાહરણ 26 : $f(x) = sin(tan\ x)$ હોય, તો $f'(x)$ શોધો.

ઉકેલ : $g(t) = sin\ t$ અને $t = h(x) = tanx$ લઈએ.

$\therefore\ f(x) = (goh)(x) = g(h(x)) = g(tanx) = sin(tanx)$

$$\begin{aligned}\therefore\ f'(x) &= g'(h(x))\ h'(x)\\ &= g'(t)\ h'(x)\\ &= cost \cdot h'(x)\\ &= cos(tanx)\ sec^2x \qquad (t = tanx)\end{aligned}$$

$\therefore\ f'(x) = cos(tanx)\ sec^2x$

મહદ્અંશે આપણે મૌખિક ગણતરી કરીશું.

પ્રથમ બહારનું વિધેય પસંદ કરી તેનું વિકલન તેના ચલને સાપેક્ષ કરો અને જ્યાં સુધી ચલ સુધી ન પહોંચીએ ત્યાં સુધી બહારથી અંદર તરફ આ રીતે વિકલન કરતા જાઓ અને આ બધાં વિકલિતોનો ગુણાકાર કરો.

ધારો કે, $f(x) = sin(cos(2x + 3))$

$\therefore\ f'(x) = cos\ (cos(2x + 3))\quad (-sin(2x + 3))\quad \cdot\quad 2$

સૌથી બહારના વિધેયનું વિકલિત તેના ચલ આગળ   (અંદરની બાજુના $cos(2x + 3)$નું વિકલિત   (અંતિમ વિધેય $2x + 3$નું વિકલિત

$= -2sin\ (2x + 3)\ cos(cos(2x + 3))$ (પદોનું પુનર્ગઠન)

ધારો કે $f(x) = sin(tan\ (cos\ (x^2 - 3x + 51)))$

$\therefore\ f'(x) = cos(tan\ (cos\ (x^2 - 3x + 51)))\ (sec^2\ (cos\ (x^2 - 3x + 51)))\ (-sin\ (x^2 - 3x + 51)) \times (2x - 3)$

તબક્કો 1   તબક્કો 2   તબક્કો 3   તબક્કો 4

$= -(2x - 3)\ sin(x^2 - 3x + 51)\ sec^2\ (cos\ (x^2 - 3x + 51))\ cos(tan(cos(x^2 - 3x + 51)))$

(પદોની પુનઃ ગોઠવણી કરતાં)

ઉદાહરણ 27 : $y = sin^3x\ cos^5x$ તો, $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

ઉકેલ : $\frac{dy}{dx} = sin^3x \frac{d}{dx} cos^5x + cos^5x \frac{d}{dx} sin^3x$

$= sin^3x \frac{d}{dx} (cosx)^5 + cos^5x \frac{d}{dx} (sinx)^3$

$= sin^3x \cdot 5cos^4x\ (-sinx) + cos^5x \cdot 3sin^2x\ cosx$

$= -5sin^4x\ cos^4x + 3sin^2x\ cos^6x$

[નોંધ : sin^nx માં $sin^nx = (sinx)^n$ હોવાથી ઘાત એ 'બહાર'નું વિધેય છે.]

ઉદાહરણ 28 : $\frac{d}{dx} sin^3(x^2 - x + 1)$ શોધો.

ઉકેલ : $\frac{d}{dx} sin^3(x^2 - x + 1) = \frac{d}{dx} [sin(x^2 - x + 1)]^3$

$= 3sin^2(x^2 - x + 1)\ cos(x^2 - x + 1)\ (2x - 1)$

$= 3(2x - 1)\ sin^2(x^2 - x + 1)\ cos(x^2 - x + 1)$

ઉદાહરણ 29 : $\frac{d}{dx} \sqrt{sinx^3}$ શોધો.

ઉકેલ : $\frac{d}{dx} \sqrt{sinx^3} = \frac{d}{dx} (sinx^3)^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}(sinx^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot cosx^3 \cdot 3x^2$ ($\sqrt{\ }$ સૌથી બહારનું વિધેય)

$= \frac{3}{2} \frac{x^2\ cosx^3}{\sqrt{sinx^3}}$

(નોંધ : યાદ રાખો $\frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$)

ઉદાહરણ 30 : $\frac{d}{dx} \sqrt[4]{sin^3x}$ શોધો.

ઉકેલ : $\frac{d}{dx} \sqrt[4]{sin^3x} = \frac{d}{dx} [(sinx)^3]^{\frac{1}{4}} = \frac{d}{dx} (sinx)^{\frac{3}{4}}$

$= \frac{3}{4} sin^{-\frac{1}{4}}x \cdot cosx$

$= \frac{3cosx}{4\sqrt[4]{sinx}}$

સ્વાધ્યાય 5.3

યોગ્ય પ્રદેશ પર વ્યાખ્યાયિત નીચે આપેલાં વિધેયોનાં વિકલિત મેળવો :

1. $sin^3(2x + 3)$ **2.** tan^3x **3.** $sin^3x\ cos^5x$

4. $cos(sin(sec(2x + 3)))$ **5.** $sec(cot(x^3 - x + 2))$

6. નિત્યસમ $sin3x = 3sinx - 4sin^3x$નું વિકલન કરો. તમે શું નિરીક્ષણ કર્યું ?

7. $\frac{d}{dx}(2x + 3)^m (3x + 2)^n$ શોધો.

8. $\frac{d}{dx}(sin^n x - cos^n x)$ શોધો.

9. $\frac{d}{dx} sin^3 x \ cos^3 x$ શોધો.

10. $\frac{d}{dx} sin^3(4x - 1) \ cos^3(2x + 3)$ શોધો.

*

5.7 પ્રતિવિધેયોનું વિકલિત

આપણે પ્રકરણ 2માં ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયોનો અભ્યાસ કર્યો. હવે આપણે તેમનું વિકલિત મેળવીશું.

પ્રતિવિધેયોનું વિકલિત : ધારો કે $f : (a, b) \to (c, d)$ એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય છે. તેથી તેના પ્રતિવિધેયનું અસ્તિત્વ છે. તેનું પ્રતિવિધેય, $g : (c, d) \to (a, b)$ છે.

જો $y = f(x)$ તો $x = g(y) = f^{-1}(y)$નું પાલન થાય છે.

આપણે સ્વીકારીશું કે $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ અથવા $f'(x) = \frac{1}{\frac{d}{dy}f^{-1}(y)}$

$\therefore \quad [f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'(x)}$

$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

કેટલાંક પ્રમાણિત રૂપો :

(1) $\frac{d}{dx} sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad |x| < 1$

જો $y = sin^{-1}x$. તો $x = siny$, $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ($y \neq \pm\frac{\pi}{2}$ કારણ કે $x \neq \pm 1$)

$\frac{dx}{dy} = cosy = \sqrt{1 - sin^2 y}$ ($cosy > 0$ કારણકે $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$)

$= \sqrt{1 - x^2}$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\therefore \quad \frac{d}{dx} sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(2) $\frac{d}{dx} cos^{-1}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad |x| < 1$

જો $y = cos^{-1}x$. તો $x = cosy$, $y \in (0, \pi)$ ($y \neq 0, \pi$ કારણકે $x \neq \pm 1$)

$\frac{dx}{dy} = -siny = -\sqrt{1 - cos^2 y}$ ($siny > 0$ કારણકે $y \in (0, \pi)$)

$= -\sqrt{1 - x^2}$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\therefore \quad \frac{d}{dx} cos^{-1}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

અથવા બીજી રીતે

$sin^{-1}x + cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \quad \frac{d}{dx} sin^{-1}x + \frac{d}{dx} cos^{-1}x = \frac{d}{dx} \frac{\pi}{2} = 0$

$\therefore \quad \frac{d}{dx} cos^{-1}x = -\frac{d}{dx} sin^{-1}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad |x| < 1$

(3) $\frac{d}{dx} tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2} \qquad x \in R$

જો $y = tan^{-1}x$ તો $x = tany, \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \quad \frac{dx}{dy} = sec^2y$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{sec^2y} = \frac{1}{1+tan^2y} = \frac{1}{1+x^2}$

$\therefore \quad \frac{d}{dx} tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$

(4) $\frac{d}{dx} cot^{-1}x = -\frac{1}{1+x^2} \qquad x \in R$

આપણે (3) પ્રમાણે સાબિત કરી શકીએ **અથવા** $tan^{-1}x + cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ લઈ પરિણામ મેળવી શકીએ.

(5) $\frac{d}{dx} sec^{-1}x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \qquad |x| > 1$

જો $y = sec^{-1}x$ તો, $x = secy, \quad y \in (0, \pi) - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ **(કેમ $y \neq 0, y \neq \pi$?)**

$\therefore \quad \frac{dx}{dy} = secy \ tany$

હવે, $secy = x, \quad y \in (0, \pi) - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

આપણને બે વિકલ્પ મળે. $y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ અથવા $y \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

(i) $y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \quad x = secy > 0$ તથા $tany > 0$ હોવાથી $tany = \sqrt{x^2-1}$

$\therefore \quad \frac{dx}{dy} = secy \ tany = x\sqrt{x^2-1} = |x|\sqrt{x^2-1}$ કારણ કે $x > 0$ હોવાથી $|x| = x$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

(ii) $y \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

$\therefore \quad x = secy < 0$. તેથી $|x| = -x$

$tan y < 0$ હોવાથી $tan y = -\sqrt{x^2-1}$,

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{sec y \; tan y} = \frac{1}{-x\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ $\quad (|x| = -x$ કારણ કે $x < 0)$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \qquad |x| > 1$

(6) તે જ પ્રમાણે આપણે, $\frac{d}{dx} cosec^{-1}x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ સાબિત કરી શકીએ, $\quad |x| > 1$

અથવા $sec^{-1}x + cosec^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ હોવાથી,

$\frac{d}{dx} sec^{-1}x + \frac{d}{dx} cosec^{-1}x = \frac{d}{dx}\frac{\pi}{2} = 0$

$\frac{d}{dx} cosec^{-1}x = -\frac{d}{dx} sec^{-1}x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \qquad |x| > 1$

આપણે આ પ્રકરણમાં eનો પરિચય મેળવ્યો છે. $2 < e < 3$, e એ પ્રાકૃતિક લઘુગણકનો આધાર છે.

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ આપણે સ્વીકારી લઈશું.

આપણે જાણીએ છીએ કે $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ **(i)**

ધારો કે $\log_e(1 + x) = h$. તેથી $x = e^h - 1$.

$\therefore$ (i) નો ઉપયોગ કરતાં,

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{h}{e^h - 1} = 1 \qquad (x \to 0,\; h = \log(1+x) \to 0)$

$\therefore \quad \lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

(7) $\frac{d}{dx} e^x = e^x \qquad x \in R$

$\therefore \quad \frac{d}{dx} e^x = \lim\limits_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim\limits_{h \to 0} e^x \lim\limits_{h \to 0} \left(\frac{e^h - 1}{h}\right) = e^x \cdot 1 = e^x$

$\therefore \quad \frac{d}{dx} e^x = e^x$

(8) $\frac{d}{dx} a^x = a^x \log_e a \qquad a > 0, x \in R$

આપણે જાણીએ છીએ કે, $a = e^{\log_e a}$

$\therefore \quad a^x = (e^{\log_e a})^x = e^{x \log_e a}$

$a^x = e^t$. અહીં, $t = x \log_e a$

સાંકળ નિયમ પ્રમાણે $\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dt} e^t \cdot \frac{dt}{dx}$

$= e^t \cdot \log_e a \qquad (\frac{d}{dx} kx = k)$

$= a^x \log_e a$

$\therefore \quad \frac{d}{dx} a^x = a^x \log_e a$

નોંધ : સાંકળના નિયમના ઉપયોગથી $\frac{d}{dx} e^{\sin x} = e^{\sin x} \cos x$.

તે $e^{\sin x} = \exp(\sin x)$ પ્રમાણે છે. (વાંચીશું એક્સ્પોનેન્શિયલ $(\sin x)$)

સૌથી બહારનું વિધેય exp. છે. $\frac{d}{dx}(\exp x) = \frac{d}{dx} e^x = e^x = \exp x$

$\therefore \quad \frac{d}{dx} e^{\sin x} = \frac{d}{dx} \exp(\sin x) = \exp(\sin x) \frac{d}{dx} \sin x = e^{\sin x} \cos x$

$\frac{d}{dx} e^{\tan 2x} = e^{\tan 2x} \frac{d}{dx} \tan 2x$

$= 2e^{\tan 2x} \sec^2 2x$

(9) $\frac{d}{dx} \log_e x = \frac{1}{x}$ $\qquad x \in \mathbb{R}^+$

ધારો કે, $y = \log_e x$

$\therefore \quad x = e^y$

$\therefore \quad \frac{dx}{dy} = e^y$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$

$\therefore \quad \frac{d}{dx} \log_e x = \frac{1}{x}$

ઉદાહરણ 31 : $\frac{d}{dx} \tan^{-1} \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$ શોધો. $\qquad |x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$

ઉકેલ : ધારોકે $\theta = \tan^{-1} x$, $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. આથી $x = \tan\theta$

$|x| < \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) < \tan\theta < \tan\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow -\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6}$ $\qquad$ ($\tan$ એ $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ માં વધતું વિધેય છે.)

$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} < 3\theta < \frac{\pi}{2}$

હવે, $y = \tan^{-1} \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} = \tan^{-1}\left(\frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}\right)$

$= \tan^{-1}(\tan 3\theta)$ $\qquad \left(3\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$

$= 3\theta$

$= 3\tan^{-1} x$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3}{1 + x^2}$

ઉદાહરણ 32 : $\frac{d}{dx} sin^{-1} 2x\sqrt{1-x^2}$ શોધો. $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$

ઉકેલ : ધારો કે $\theta = sin^{-1}x$. $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. તેથી, $x = sin\theta$

$|x| < \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \quad sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) < sin\theta < sin\frac{\pi}{4}$

$\therefore \quad -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ $\left(\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)\right.$ માં sin એ $\left.\uparrow\right)$

$\therefore \quad -\frac{\pi}{2} < 2\theta < \frac{\pi}{2}$

$\therefore \quad y = sin^{-1} 2x\sqrt{1-x^2}$

$= sin^{-1}(2sin\theta \ cos\theta)$ $\left(\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-sin^2\theta} = cos\theta\right.$ કારણ કે $\left.\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$

$= sin^{-1}(sin2\theta)$

$= 2\theta$ $\left(2\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$

$\therefore \quad y = 2sin^{-1}x$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

ઉદાહરણ 33 : $\frac{d}{dx} sec^{-1} \frac{1}{2x^2-1}$ શોધો. $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$

ઉકેલ : ધારો કે $\theta = cos^{-1}x$. $\theta \in (0, \pi)$. તેથી, $x = cos\theta$ (કેમ $\theta \ne 0$ અથવા π ?)

$\therefore \quad y = sec^{-1}\frac{1}{2x^2-1} = sec^{-1}\frac{1}{2cos^2\theta - 1} = sec^{-1}\frac{1}{cos\,2\theta}$

$\therefore \quad y = sec^{-1}(sec2\theta)$

હવે, $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow cos\frac{\pi}{2} < cos\theta < cos\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ $(cos \downarrow)$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} < 2\theta < \pi$

$\therefore \quad y = sec^{-1}(sec2\theta) = 2\theta = 2cos^{-1}x$ $\left(2\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \subset [0, \pi]\right)$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}}$

ઉદાહરણ 34 : (1) $\frac{1}{2} < x < 1$ (2) $0 < x < \frac{1}{2}$ માટે $\frac{d}{dx} cos^{-1}(4x^3 - 3x)$ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $\theta = cos^{-1}x$. $0 < \theta < \pi$. તેથી, $x = cos\theta$ $(x \ne \pm 1)$

$\therefore \quad y = cos^{-1}(4x^3 - 3x) = cos^{-1}(4cos^3\theta - 3cos\theta)$

$y = cos^{-1}(cos3\theta)$

(1) $\frac{1}{2} < x < 1 \Rightarrow cos\frac{\pi}{3} < cos\theta < cos0$

$\Rightarrow 0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ $\qquad (cos \downarrow)$

$\Rightarrow 0 < 3\theta < \pi$

$\therefore\ y = cos^{-1}(cos3\theta) = 3\theta = 3cos^{-1}x$ $\qquad (3\theta \in (0, \pi))$

$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{-3}{\sqrt{1-x^2}}$

(2) $0 < x < \frac{1}{2} \Rightarrow cos\frac{\pi}{2} < cos\theta < cos\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$ $\qquad (cos \downarrow)$

$\Rightarrow \pi < 3\theta < \frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow 0 < 3\theta - \pi < \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
\therefore\ y = cos^{-1}(cos3\theta) &= cos^{-1}(-cos(\pi - 3\theta)) \\
&= \pi - cos^{-1}(cos(\pi - 3\theta)) \\
&= \pi - cos^{-1}(cos(3\theta - \pi)) \\
&= \pi - (3\theta - \pi) \qquad \left((3\theta - \pi) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \subset [0, \pi]\right) \\
&= 2\pi - 3\theta \\
&= 2\pi - 3cos^{-1}x
\end{aligned}$$

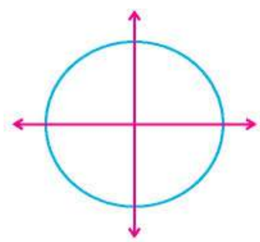
$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$

5.8 ગૂઢ વિધેયનું વિકલિત

કેટલીક વખત ઉપયોગમાં $f(x, y) = 0$ જેવાં સમીકરણ મળી જાય છે, કે જેમાં આપણે y ને x ના વિધેય તરીકે મેળવી શકીએ અથવા ન પણ મેળવી શકીએ. $y = sin^2x$ પ્રકારનું વિધેય એ x નું વિધેય છે, પરંતુ $3y - sin2x = 0$ પરથી $y = \frac{1}{3}sin2x$ મળશે.

આ ઉદાહરણ y એ x ના ગૂઢ વિધેયનું છે.

વર્તુળ $x^2 + y^2 = 1$ લો.



આકૃતિ 5.24

આકૃતિ 5.24 એ વિધેયનો આલેખ નથી. પરંતુ $x^2 + y^2 - 1 = 0$ સંબંધ પરથી વ્યાખ્યાયિત થતાં બે ગૂઢ વિધેયો $y = \sqrt{1-x^2}$ અને $y = -\sqrt{1-x^2}$ ના આલેખ એ એકમ વર્તુળ બનાવે છે.

આમ, આપણને બે **ગૂઢ વિધેય (Implict function)** મળે છે. જુઓ કે કોઈ પણ શિરોલંબ રેખા, આ વર્તુળને બે બિંદુમાં મળે છે. તે X-અક્ષથી બનતા દરેક અર્ધતલના અર્ધવર્તુળોને ફક્ત એક બિંદુમાં મળે છે. તેથી જ દરેક અર્ધવર્તુળ એ ગૂઢ વિધેયનો આલેખ છે.

પરંતુ કેટલાંક સમીકરણોનો ઉકેલ મેળવવો સરળ નથી.

$x^3 + y^3 = 3axy$ એ આવું જ સમીકરણ છે. આવા y ના ગૂઢ વિધેયનું વિકલિત કેવી રીતે શોધીશું ? y એ xનું ગૂઢ વિધેય છે તેમ ધારીને સાંકળ નિયમનો ઉપયોગ કરી આવા સમીકરણ (સંબંધ)નું વિકલિત મેળવીશું.

ઉદાહરણ તરીકે $\frac{d}{dx}x^4 = 4x^3$

જ્યારે, $\frac{d}{dx}y^4 = \frac{d}{dy}\ y^4 \frac{dy}{dx} = 4y^3 \frac{dy}{dx}$

તેથી, જ્યારે કોઈ પદમાં ચલ y હોય અને તેનું x વિશે વિકલન કરવાનું હોય, તો આપણે વિકલનના સામાન્ય નિયમોનો ઉપયોગ કરીશું અને મળતા પરિણામને $\frac{dy}{dx}$ વડે ગુણીશું.

ચાલો આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો લઈએ.

ઉદાહરણ 35 : $x + y = sinxy$ તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

ઉકેલ : સમીકરણનું વિકલન કરતાં,

$$\frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}\ y = \frac{d}{dx}\ sinxy$$

$$\therefore \quad 1 + \frac{dy}{dx} = cosxy\ \frac{d}{dx}\ (xy) \qquad \text{(સાંકળનો નિયમ)}$$

$$= cosxy\ \left(x\frac{d}{dx}y + y \cdot 1\right) \qquad \text{(ગુણાકારનો નિયમ)}$$

$$\therefore \quad 1 + \frac{dy}{dx} = x\,cosxy\ \frac{dy}{dx} + ycos\ xy$$

$$\therefore \quad (1 - xcos\ xy)\frac{dy}{dx} = y\,cosxy - 1$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{ycosxy - 1}{1 - xcosxy}$$

ઉદાહરણ 36 : $x^3 + y^3 = 3axy$, તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

ઉકેલ : $3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 3a\left(x\frac{dy}{dx} + y \cdot 1\right)$

$$\therefore \quad (y^2 - ax)\frac{dy}{dx} = ay - x^2$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$$

ઉદાહરણ 37 : $ax^2 + 2hxy + by^2 = 100$, તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

ઉકેલ : $2ax + 2h\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) + 2by\frac{dy}{dx} = 0$

$$\therefore \quad (hx + by)\frac{dy}{dx} = -(ax + hy)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{ax + hy}{hx + by}\right)$$

ઉદાહરણ 38 : $sin^2x + sin^2y = 1$, તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

ઉકેલ : $2sinx\ cosx + 2siny\ cosy\frac{dy}{dx} = 0$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-\sin 2x}{\sin 2y}$$

અથવા

$$\sin^2 y = 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$$

$$\therefore \quad \sin y = \pm \cos x$$ (બે વિધેયો)

$$\therefore \quad \cos y \frac{dy}{dx} = \mp \sin x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sin x}{\cos y}$$

> નોંધ : જો $\sin^2 x + \sin^2 y = 2$ હોય તો $\sin^2 x = \sin^2 y = 1$ થાય કારણ કે $|\sin x| \le 1$, $|\sin y| \le 1$. કોઈ વિધેય ના મળે. $\sin^2 x + \sin^2 y = 3$ હોય તો $\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin 2x}{\sin 2y}$ લખી શકાય ?
>
> ના. કારણ કે $\sin^2 x + \sin^2 y \le 2$. ગૂઢ વિધેય મળે જ નહીં. આપણે ધારણામાં ગૂઢ વિધેય મળે તે સ્વીકારીને વિકલન કરવાનું છે. પરંતુ આવી પરિસ્થિતિમાં ગૂઢ વિધેય જ ન મળે તે શક્ય છે.

સ્વાધ્યાય 5.4

$\frac{dy}{dx}$ શોધો : (1 થી 10)

1. $x^2 + y^2 = 1$ **2.** $x + \sin x = \sin y$ **3.** $\sin(x + y) = x - y$

4. $2x^2 + 3xy + y^2 = 1$ **5.** $\sin x + \sin y = \tan xy$ **6.** $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

7. $y^2 = 10x$ **8.** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ **9.** $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 25 = 0$

10. $\sin x = \sin y$

વિકલિત શોધો : (11 થી 16)

11. $y = \sin^{-1}(3x - 4x^3)$, $0 < x < \frac{1}{2}$ **12.** $y = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$, $x \ne \pm 1$

13. $y = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$ **14.** $y = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$

15. $y = \tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$, $|x| > \frac{1}{\sqrt{3}}$ **16.** $y = \sin^{-1} 2x\sqrt{1-x^2}$, $\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 1$

*

5.9 પ્રચલ વિધેયનું વિકલન

કેટલીક વખત x અને y એ કોઈ અન્ય ચલનાં વિધેય હોય છે, માનો કે t નાં. તે ચલ t ને **પ્રચલ** કહે છે.

ધારો કે $x = f(t)$ $y = g(t)$

ધારો કે $t = f^{-1}(x)$ મળે છે અને તેને $y = g(t)$માં મૂકતાં $y = g(f^{-1}(x))$ મળે છે, તેથી y એ xનું વિધેય છે.

પરંતુ આ પ્રમાણે ઉકેલ મેળવીને વિકલિત મેળવવાની ક્રિયા મુશ્કેલ છે. આપણે નીચે આપેલા નિયમને અનુસરીશું.

પ્રચલ વિધેયના વિકલિતનો નિયમ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)} \quad \text{જ્યાં } f'(t) \neq 0$$

ઉદાહરણ 39 : જો $x = acos\theta$, $y = bsin\theta$, તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

ઉકેલ : $\frac{dx}{d\theta} = -asin\theta$, $\frac{dy}{d\theta} = bcos\theta$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = -\frac{bcos\,\theta}{asin\,\theta} = \frac{-b}{a}\,cot\theta$$

વળી, $\frac{dy}{dx} = -\frac{bcos\,\theta}{asin\,\theta} = \frac{-b}{a}\left(\frac{\frac{x}{a}}{\frac{y}{b}}\right) = -\frac{b^2x}{a^2y}$

અથવા $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cos^2\theta + sin^2\theta = 1$

$$\therefore \quad \frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

ઉદાહરણ 40 : જો $x = at^2$, $y = 2at$, તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

ઉકેલ : $\frac{dx}{dt} = 2at$, $\frac{dy}{dt} = 2a$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t} \quad (t \neq 0)$$

ઉદાહરણ 41 : જો $x = asin^3\theta$, $y = bcos^3\theta$, તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

ઉકેલ : $\frac{dx}{d\theta} = 3asin^2\theta\ cos\theta$, $\frac{dy}{d\theta} = 3bcos^2\theta\,(-sin\theta)$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-3bcos^2\theta\, sin\,\theta}{3asin^2\theta\, cos\,\theta} = \frac{-b}{a}\,cot\theta$$

$cot^3\theta = \frac{cos^3\theta}{sin^3\theta} = \frac{ay}{bx}$. તેથી $cot\theta = \left(\frac{ay}{bx}\right)^{\frac{1}{3}}$.

તેથી $\frac{dy}{dx} = \frac{-b}{a}\left(\frac{ay}{bx}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$= -\frac{b^{\frac{2}{3}}\,y^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}\,x^{\frac{1}{3}}}$$

અથવા $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = cos^2\theta + sin^2\theta = 1$

$\therefore \quad \frac{2}{3}\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} + \frac{2}{3}\frac{y^{-\frac{1}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b^{\frac{2}{3}}\, y^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}\, x^{\frac{1}{3}}}$

સ્વાધ્યાય 5.5

$\frac{dy}{dx}$ શોધો : (y એ xના વિધેય તરીકે વ્યાખ્યાયિત છે અને $\frac{dx}{dt}$ અથવા $\frac{dx}{d\theta} \neq 0$) (1 થી 6)

1. $x = a\sec\theta,\ y = b\tan\theta \qquad \theta \in R - \left[\left\{(2k-1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\} \cup \{k\pi \mid k \in Z\}\right]$
2. $x = \cos\theta - \cos 2\theta \qquad y = \sin\theta - \sin 2\theta \qquad \theta \in R - \{k\pi \mid k \in Z\},\ \cos\theta \neq \frac{1}{4}$
3. $x = a(\theta - \sin\theta), \qquad y = a(1 - \cos\theta)$
4. $x = a(\cos t + \log \tan\frac{t}{2}), \qquad y = a\sin t$
5. $x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta), \qquad y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$
6. $x = \frac{a}{t^2}\ ,\ y = bt$
7. જો $x = \sqrt{a^{\sin^{-1}t}}\ ,\ y = \sqrt{a^{\cos^{-1}t}}$, તો સાબિત કરો કે, $\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x} \qquad |t| < 1$

*

5.10 લઘુગણકીય વિકલન

કેટલીક વખત આપણે કેટલાંક વિધેયોના ગુણાકારનું અથવા જટિલ ગુણાકાર અથવા $[f(x)]^{g(x)}$ પ્રકારનાં વિધેયોનું વિકલિત મેળવવાનું હોય છે.

આવા કિસ્સાઓમાં લઘુગણક લેતાં આપણને $\frac{dy}{dx}$ શોધવામાં સુગમતા રહે છે.

ઉદાહરણ 42 : જો $y = \sqrt{\frac{(2x+3)(3x-4)}{(4x+9)(x-8)}}$ તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

ઉકેલ : $\log y = \frac{1}{2}[\log(2x+3) + \log(3x-4) - \log(4x+9) - \log(x-8)]$

$\therefore \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{2x+3} + \frac{3}{3x-4} - \frac{4}{4x+9} - \frac{1}{x-8}\right]$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2}\left[\frac{2}{2x+3} + \frac{3}{3x-4} - \frac{4}{4x+9} - \frac{1}{x-8}\right]$

ઉદાહરણ 43 : જો $y = x^{\sin x}$ હોય, તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

ઉકેલ : $\log y = \sin x \log x$

$\therefore \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \sin x \cdot \frac{1}{x} + \cos x \log x$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \left[\frac{\sin x}{x} + \cos x \log x\right] y$

ઉદાહરણ 44 : જો $x^y + y^x + a^x + x^a = 1$ તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $u = x^y$, $v = y^x$, $w = a^x + x^a$

હવે, $\log u = y \log x$

$$\therefore \quad \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{y}{x} + \log x \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \quad \frac{du}{dx} = \left(\frac{y}{x} + \log x \frac{dy}{dx}\right) x^y$$

હવે, $v = y^x$

$$\therefore \quad \log v = x \log y$$

$$\therefore \quad \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \log y$$

$$\therefore \quad \frac{dv}{dx} = \left(\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \log y\right) y^x$$

હવે, $u + v + w = 1$

$$\therefore \quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx} = 0$$

$$\left(\frac{y}{x} + \log x \frac{dy}{dx}\right) x^y + \left(\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \log y\right) y^x + a^x \log_e a + ax^{a-1} = 0$$

$$\left(x^y \log x + \frac{x}{y} y^x\right)\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{x^y \cdot y}{x} + y^x \log y + a^x \log a + ax^{a-1}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-(yx^{y-1} + y^x \log y + a^x \log_e a + ax^{a-1})}{xy^{x-1} + x^y \log x}$$

ઉદાહરણ 45 : જો $y = (sinx)^x + sinx^x$ તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $u = (sinx)^x = e^{x \log sinx}$

કારણ કે $a = e^{\log_e a}$ હોવાથી, $sinx = e^{\log sinx}$

$$\therefore \quad \frac{du}{dx} = e^{x \log sinx}\frac{d}{dx}(x \log sinx)$$

$$= e^{x \log sinx}\left(1 \cdot \log sinx + \frac{xcosx}{sinx}\right)$$

$$= (sinx)^x (\log sinx + xcot\,x)$$

$$\frac{d}{dx} sinx^x = cosx^x \frac{d}{dx} x^x$$

$$= cosx^x \frac{d}{dx} e^{x \log x}$$

$$= cosx^x \cdot e^{x \log x}\left(x \frac{1}{x} + \log x\right)$$

$$= x^x cosx^x (1 + \log x)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = (sinx)^x (\log sinx + xcot\,x) + x^x cosx^x (1 + \log x)$$

(**નોંધ :** $a = e^{\log_e a}$ ના ઉપયોગથી સરળતા દેખાય ત્યાં લઘુગણક લેવાનું ટાળી શકાય.)

સ્વાધ્યાય 5.6

$\frac{dy}{dx}$ શોધો : (1 થી 14)

1. $y = \left(x+\frac{1}{x}\right)^x + \left(x+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

2. $y = cosx^x + sinx^x$

3. $y = \sqrt[3]{\frac{(2x+1)^3 (4x+3)^5}{(7x-1)^6}}$

4. $y = (\log x)^{cosx}$

5. $y = (x + 1)^2 (x + 2)^3 (x + 3)^4$

6. $y = (\log x)^x + \log x^x$

7. $y = x^{x \, sin\, x} + (sin\, x)^x$

8. $y = x^{\left(x+\frac{1}{x}\right)}$

9. $y = (sin\, x)^x + \left(\frac{1}{x}\right)^{cosx}$

10. $y = 3^{sinx} + 4^{cosx}$

11. $y^x = x^y$

12. $xy = e^{x-y}$

13. $x^y y^x = 1$

14. $y = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)$

15. જો $y = (x^2 - 2x + 3)(x^2 - 3x + 15)$, તો

(1) ગુણાકારના નિયમથી

(2) ગુણાકાર કરી બહુપદીના નિયમથી

(3) લઘુગણકીય વિકલનથી

$\frac{dy}{dx}$ શોધો અને તેમની સરખામણી કરો.

*

5.11 દ્વિતીય વિકલિત

જો f એ (a, b) પરનું x નું વિકલનીય વિધેય હોય અને $f'(x)$ પણ (a, b) પર x નું વિકલનીય વિધેય હોય, તો $f'(x)$ નાં વિકલિતને f નો દ્વિતીય વિકલિત કહે છે તથા તેને $f''(x)$ અથવા $\frac{d^2y}{dx^2}$ અથવા y_2 વડે દર્શાવાય છે, જ્યાં $y = f(x)$ છે.

આમ, $\frac{d}{dx}f'(x) = f''(x)$ અથવા $\frac{d^2y}{dx^2}$ અથવા y_2. અહીં y_1 એ $f'(x)$ અથવા $\frac{dy}{dx}$ દર્શાવે છે.

આપણે નીચે પ્રમાણે સાંકળના નિયમનો ઉપયોગ કરીશું :

$$\frac{d}{dx} y^2 = \frac{d}{dy} y^2 \frac{dy}{dx} = 2y \frac{dy}{dx} = 2yy_1$$

$$\frac{d}{dx} {y_1}^2 = \frac{d}{dy_1} {y_1}^2 \frac{d}{dx} y_1 = 2y_1 \frac{dy_1}{dx} = 2y_1y_2$$

યાદ રાખો કે $\frac{d}{dx} y^2 = 2yy_1$, $\frac{d}{dx} {y_1}^2 = 2y_1y_2$

ઉદાહરણ 46 : જો $y = acosx + bsinx$, તો સાબિત કરો કે $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

ઉકેલ : $y = acosx + bsinx$

$\therefore \quad y_1 = -asinx + bcosx$

$\therefore \quad y_2 = -acosx - bsinx = -y$

$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

ઉદાહરણ 47 : $y = ae^{4x} + be^{5x}$ તો સાબિત કરો કે $y_2 - 9y_1 + 20y = 0$

ઉકેલ : $y = ae^{4x} + be^{5x}$

$\therefore \quad y_1 = 4ae^{4x} + 5be^{5x}$

$\therefore \quad y_2 = 16ae^{4x} + 25be^{5x}$

$\therefore \quad y_2 - 9y_1 + 20y = [(16ae^{4x} + 25be^{5x}) - 9(4ae^{4x} + 5be^{5x}) + 20(ae^{4x} + be^{5x})]$

$= (16 - 36 + 20)\, ae^{4x} + (25 - 45 + 20)\, be^{5x} = 0$

$\therefore \quad y_2 - 9y_1 + 20y = 0$

ઉદાહરણ 48 : $y = x^4 + sin^3x$, તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ શોધો.

ઉકેલ : $y = x^4 + sin^3x$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 4x^3 + 3sin^2x\ cosx$

$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 + 6sinx\ cos^2x + 3sin^2x\ (-sinx)$ $\qquad \left(\frac{d}{dx}\ sin^2x = 2sinx\ cosx\right)$

$= 12x^2 + 6sinx\ cos^2x - 3sin^3x$

ઉદાહરણ 49 : $y = \log(\log x)$, તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ શોધો.

ઉકેલ : $y = \log(\log x)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \log(\log x) = \frac{1}{\log x}\, \frac{1}{x} = \frac{1}{x \log x}$

$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} \log(\log x) = \frac{(x \log x)\, 0 - 1 \cdot (1 \log x + x \cdot \frac{1}{x})}{(x \log x)^2}$

$= \frac{-(1 + \log x)}{(x \log x)^2}$

ઉદાહરણ 50 : જો $y = acos(\log x) + bsin(\log x)$, તો સાબિત કરો કે $x^2y_2 + xy_1 + y = 0$.

ઉકેલ : $y = acos(\log x) + bsin(\log x)$

$\therefore \quad y_1 = \frac{-asin(\log x)}{x} + \frac{bcos(\log x)}{x}$

$\therefore \quad xy_1 = -asin(\log x) + bcos(\log x)$

$\therefore \quad \frac{d}{dx}(xy_1) = \frac{-acos(\log x)}{x} - \frac{bsin(\log x)}{x}$

$\therefore \quad x(xy_2 + 1 \cdot y_1) = -acos(\log x) - bsin(\log x) = -y$

$\therefore \quad x^2y_2 + xy_1 + y = 0$

ઉદાહરણ 51 : જો $y = cos^{-1}x$, તો સાબિત કરો કે $(1 - x^2)y_2 - xy_1 = 0$.

ઉકેલ : $y = cos^{-1}x$

$\therefore \quad y_1 = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\therefore \quad (1 - x^2){y_1}^2 = 1$

$\therefore \quad \frac{d}{dx}(1 - x^2){y_1}^2 = 0$

$\therefore \quad (1 - x^2)2y_1y_2 + (-2x{y_1}^2) = 0$

$\therefore \quad (1 - x^2)y_2 - xy_1 = 0$ $\qquad (y_1 \neq 0)$

ઉદાહરણ 52 : જો $y = tan^{-1}x$ તો સાબિત કરો કે $(1 + x^2)y_2 + 2xy_1 = 0$.

ઉકેલ : $y = tan^{-1}x$

$\therefore \quad y_1 = \frac{1}{1+x^2}$

$\therefore \quad (1 + x^2)y_1 = 1$

$\therefore \quad (1 + x^2)y_2 + 2xy_1 = 0$

ઉદાહરણ 53 : જો $y = ae^{px} + be^{qx}$ તો સાબિત કરો કે $y_2 - (p + q)y_1 + pqy = 0$.

ઉકેલ : $y_1 = ape^{px} + bqe^{qx}$

$y_2 = ap^2e^{px} + bq^2e^{qx}$

$ape^{px} + bqe^{qx} - y_1 = 0$ $\qquad$ (i)

$ap^2e^{px} + bq^2e^{qx} - y_2 = 0$ $\qquad$ (ii)

e^{px} અને e^{qx} માટે (i) તથા (ii)ને ઉકેલતાં,

$$e^{px} = \frac{-bqy_2 + bq^2y_1}{abpq^2 - abp^2q} \qquad\qquad e^{qx} = -\frac{-apy_2 + ap^2y_1}{abpq\,(q-p)}$$

$$\therefore \quad e^{px} = \frac{-y_2 + qy_1}{ap\,(q-p)} \qquad\qquad e^{qx} = -\frac{-y_2 + py_1}{bq\,(q-p)}$$

$\therefore \quad y = ae^{px} + be^{qx}$ માં આ મૂલ્યો મૂકતાં,

$$y = \left(\frac{-y_2 + qy_1}{p\,(q-p)}\right) - \left(\frac{-y_2 + py_1}{q\,(q-p)}\right)$$

$$\therefore \quad pq(q - p)y = -qy_2 + q^2y_1 + py_2 - p^2y_1$$

$$= (p - q)y_2 - (p^2 - q^2)y_1$$

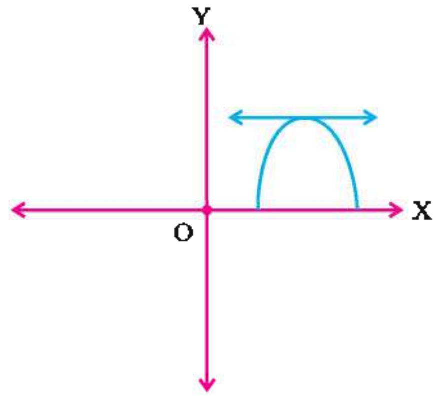
$$\therefore \quad y_2 - (p + q)y_1 + pqy = 0$$

5.12 મધ્યકમાન પ્રમેયો

વિકલનીય કલનશાસ્ત્રમાં કેટલાંક અગત્યનાં પ્રમેયો છે, જેમને મધ્યકમાન પ્રમેયો કહે છે.

રોલનું પ્રમેય : જો f એ $[a, b]$ પર સતત હોય અને (a, b) પર વિકલનીય હોય તથા $f(a) = f(b)$ થાય તો કોઈક $c \in (a, b)$ મળે કે જેથી $f'(c) = 0$ થાય.

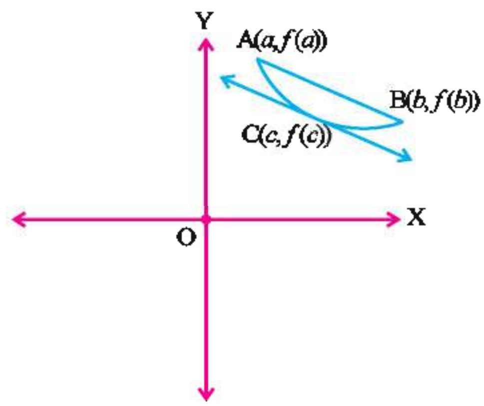
ભૌમિતિક અર્થઘટન : જો વિધેય $y = f(x)$ નો આલેખ $[a, b]$માં 'સળંગ' હોય અને દરેક $(x, f(x))$, $x \in (a, b)$ આગળ તેના સ્પર્શકનો ઢાળ મળે તથા જો $f(a) = f(b)$ થાય, તો કોઈક $c \in (a, b)$ એવો મળે કે જેથી વક્ર $y = f(x)$ નો $(c, f(c))$ બિંદુ આગળનો સ્પર્શક સમક્ષિતિજ થાય અથવા આપણે કહી શકીએ કે તે X-અક્ષ અથવા X-અક્ષને સમાંતર છે.



આકૃતિ 5.25

મધ્યકમાન પ્રમેય (લાગ્રાન્જે) : જો f એ $[a, b]$ માં સતત હોય અને (a, b) માં વિકલનીય હોય તો કોઈક $c \in (a, b)$ મળે કે જેથી $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ થાય.

ભૌમિતિક અર્થઘટન : જો વિધેય $y = f(x)$નો આલેખ $[a, b]$ માં 'સળંગ' હોય અને આલેખના દરેક બિંદુ $(x, f(x))$, $x \in (a, b)$ આગળ $y = f(x)$ના સ્પર્શકના ઢાળનું અસ્તિત્વ હોય, તો $\exists c \in (a, b)$ કે જેથી $(c, f(c))$ બિંદુ આગળનો સ્પર્શક એ બિંદુઓ $A(a, f(a))$ અને $B(b, f(b))$ને જોડતી છેદિકાને સમાંતર હોય.



આકૃતિ 5.26

આપણે જાણીએ છીએ કે $\overleftrightarrow{AB}$નો ઢાળ $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

અને $(c, f(c))$ બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ $= f'(c)$ અને તેથી ઉપરનું પરિણામ મળે છે.

ઉદાહરણ 54 : $f(x) = x^2 - 4x + 3$ માટે $[1, 3]$ માં રોલનું પ્રમેય ચકાસો.

ઉકેલ : f એ બહુપદી વિધેય હોવાથી $[1, 3]$ પર સતત અને $(1, 3)$ પર વિકલનીય છે.

$f(1) = 0, f(3) = 9 - 12 + 3 = 0$

$\therefore \quad \exists c \in (1, 3)$ કે જેથી $f'(c) = 0$

હવે, $f'(c) = 2c - 4 = 0 \Rightarrow c = 2$ અને $2 \in (1, 3)$

$\therefore \quad c = 2$

ઉદાહરણ 55 : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ માટે $[1, 3]$ માં રોલનું પ્રમેય ચકાસો.

ઉકેલ : f એ $[1, 3]$ પર સતત અને $(1, 3)$ પર વિકલનીય છે તથા $f(1) = 0 = f(3)$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 11 = 0 \Rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 132}}{6}$$

$\therefore \quad x = 2 \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \in (1, 3)$

$\therefore \quad c$ની બે કિંમતો છે. $2 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. વળી, $2 \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \in (1, 3)$. **$(c \in (1, 3))$**

ઉદાહરણ 56 : $f(x) = sinx$ માટે $[0, \pi]$માં રોલનું પ્રમેય ચકાસો.

ઉકેલ : *sine* એ $[0, \pi]$ માં સતત અને $(0, \pi)$ માં વિકલનીય છે તથા $sin\, 0 = sin\pi = 0$

$$f'(x) = cosx = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$\therefore \quad c = \frac{\pi}{2}$ અને $\frac{\pi}{2} \in (0, \pi)$. **$(c \in (0, \pi))$**

ઉદાહરણ 57 : $f(x) = cosx, x \in [0, \pi]$ પર મધ્યકમાન પ્રમેય લગાડો.

ઉકેલ : cos એ $[0, \pi]$ પર સતત અને $(0, \pi)$ પર વિકલનીય છે.

$a = 0, b = \pi$

હવે, $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$. તેથી $\frac{cos\,\pi - cos\,0}{\pi - 0} = -sinc$

$\therefore \quad \frac{-1-1}{\pi} = -sinc$

$sinc = \frac{2}{\pi}$. વળી, $0 < \frac{2}{\pi} < 1$.

તેથી $\exists c, 0 < c < \pi$ કે જેથી $sinc = \frac{2}{\pi}$

[ખરેખર $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ અને $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ દરેકમાં એક એમ c ની બે કિંમતો મળે કે જેથી $sinc = \frac{2}{\pi}$

જો આપણે $c = sin^{-1}\frac{2}{\pi}$ લઈએ તો, આપણને $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ માં c ની ફક્ત એક કિંમત મળે.]

ઉદાહરણ 58 : $f(x) = e^x$ ને $[0, 1]$ પર મધ્યકમાન પ્રમેય લગાડો.

ઉકેલ : $f(x) = e^x$ એ $[0, 1]$ પર સતત અને $(0, 1)$ પર વિકલનીય છે. $a = 0, b = 1$.

હવે, $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$. તેથી $\frac{e-1}{1-0} = e^c$

$\therefore \quad e^c = e - 1$

$\therefore \quad c = \log_e(e - 1)$

હવે, $2 < e < 3$

$\therefore \quad 1 < e - 1 < 2$

$\therefore \quad 0 < \log(e - 1) < \log_e 2 < \log_e e = 1$ **$(e > 2)$**

$\therefore \quad c \in (0, 1)$ અને $c = \log_e(e - 1)$

ઉદાહરણ 59 : $f(x) = \log x$ ને $[1, e]$ પર મધ્યકમાન પ્રમેય લગાડો.

ઉકેલ : લઘુગણકીય વિધેય એ $[1, e]$ પર સતત અને $(1, e)$ પર વિકલનીય છે.

$a = 1, b = e, f'(x) = \frac{1}{x}$

$\therefore \quad \frac{\log e - \log 1}{e - 1} = \frac{1}{c}$

$\therefore \quad \frac{1}{c} = \frac{1}{e-1}$ **$(\log 1 = 0, \log_e e = 1)$**

$\therefore \quad c = e - 1$

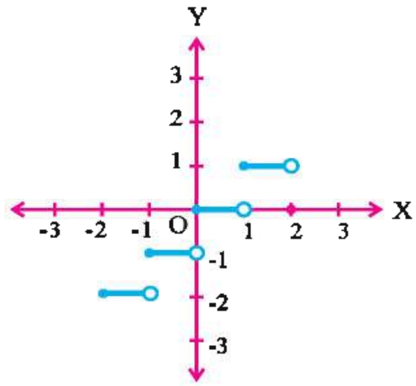
વળી, $1 < e - 1 < e$ કારણ કે $e > 2$

$\therefore \quad c = e - 1$ **$(c \in (0, e))$**

ઉદાહરણ 60 : $f(x) = [x]$ ને $[-2, 2]$ માં મધ્યકમાન પ્રમેય અને રોલનું પ્રમેય લગાડી શકાય ?

ઉકેલ : f એ $-1, 0, 1$ અને 2 પર અસતત છે. (-2 પર શા માટે નહીં ?)

f એ $(-2, 2)$માં $-1, 0, 1$ આગળ વિકલનીય નથી.



આકૃતિ 5.27

$$f(x) = \begin{cases} -2 & -2 \le x < -1 \\ -1 & -1 \le x < 0 \\ 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x < 2 \\ 2 & x = 2 \end{cases}$$

$\therefore \quad f'(x) = 0, x \in (-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2)$

(અચળ વિધેય)

કારણ કે f આ અંતરાલોમાં અચળ વિધેય છે. રોલના પ્રમેયની શરતોનું પાલન ન થતું હોવા છતાં 'ઘણા બધાં' x માટે $f'(x) = 0$ છે.

$\therefore$ રોલના પ્રમેયની શરતો પર્યાપ્ત છે પરંતુ જરૂરી નથી.

કોઈ પણ $c \in (-2, 2)$. માટે $f'(c) \neq \frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)} = \frac{2-(-2)}{4} = 1$

(ખરેખર તો $f'(c)$નું અસ્તિત્વ નથી અથવા $f'(c) = 0$, જ્યાં $c \in (-2, 2)$.)

(પૂર્ણાંક સંખ્યા ન ધરાવતા કોઈ પણ અંતરાલ $[a, b]$ માં f સતત વિધેય છે અને તેથી રોલનું પ્રમેય અને મધ્યકમાન પ્રમેય ચકાસાય છે પરંતુ તે સિવાય નહીં.)

સ્વાધ્યાય 5.7

રોલનું પ્રમેય ચકાસો : (1 થી 8)

1. $f(x) = x(x-3)^2$ $\quad x \in [0, 3]$
2. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ $\quad x \in [2, 3]$
3. $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ $\quad x \in [-3, 3]$
4. $f(x) = \log\left(\frac{x^2+ab}{x(a+b)}\right)$ $\quad x \in [a, b] \quad 0 < a < b$
5. $f(x) = \sin x + \cos x - 1$ $\quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
6. $f(x) = e^x(\sin x - \cos x)$ $\quad x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$
7. $f(x) = a^{\sin x}$ $\quad x \in [0, \pi], a > 0$
8. $f(x) = e^x \cos x$ $\quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

મધ્યકમાન પ્રમેય ચકાસો : (9-10)

9. $f(x) = x - 2\sin x, \quad x \in [-\pi, \pi]$
10. $f(x) = \log_e x, \quad x \in [1, 2]$
11. મધ્યકમાન પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી, $f(x) = \log_e x$ લઈ સાબિત કરો કે $\frac{x-y}{x} < \log_e \frac{x}{y} < \frac{x-y}{y}$, $0 < y < x$

12. મધ્યકમાન પ્રમેય ચકાસો અને c મેળવો :

(1) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ $\quad x \in [1, 3]$

(2) $f(x) = tan^{-1}x$ $\quad x \in [0, 1]$

13. સાબિત કરો કે $sec^2a < \frac{tanb - tana}{b - a} < sec^2b \qquad 0 < a < b < \frac{\pi}{2}$

14. $y = (x - 4)^2$ ના આલેખ પર એવું બિંદુ શોધો જ્યાં સ્પર્શક A(4, 0) તથા B(5, 1)ને જોડતી છેદિકાને સમાંતર હોય.

*

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ 61 : $\frac{d}{dx} \log_7 (\log_7 x)$ શોધો.

ઉકેલ : $y = \log_7 \left(\frac{\log x}{\log 7}\right) = \log_7(\log x) - \log_7(\log 7)$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \log_7 (\log x). \qquad \left(\frac{d}{dx} \log_7 (\log 7) = 0\right)$$

$$= \frac{d}{dx} \frac{\log (\log x)}{\log 7}$$

$$= \frac{1}{\log 7} \frac{d}{dx} \log (\log x)$$

$$= \frac{1}{\log 7} \frac{1}{\log x} \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x \log x \log 7}$$

ઉદાહરણ 62 : $\frac{d}{dx} tan^{-1} \left(\frac{sinx}{1 + cosx}\right)$ શોધો. $\qquad \pi < x < 2\pi$

ઉકેલ : $y = tan^{-1} \left(\frac{sinx}{1 + cosx}\right)$

$$= tan^{-1} \left(\frac{2 sin\frac{x}{2} cos\frac{x}{2}}{2cos^2\frac{x}{2}}\right)$$

$$= tan^{-1} \left(tan \frac{x}{2}\right) \qquad \frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \pi$$

હવે, $\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \pi \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} - \pi < 0$

હવે, $y = tan^{-1} \left(tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) = tan^{-1} \left(tan\left(\frac{x}{2} - \pi\right)\right) = \frac{x}{2} - \pi$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$$

ઉદાહરણ 63 : જો $f(x) = cos^{-1} \frac{1 - 9^x}{1 + 9^x}$, તો $f'(x)$ શોધો. $\quad x \in R$

ઉકેલ : $t = 3^x$ લો. $cos^{-1} \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$ નો વિચાર કરીએ.

ધારો કે, $\theta = tan^{-1}t$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

આથી $t = tan\theta$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

$3^x > 0$ હોવાથી $t > 0$. આથી $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$\therefore \quad 0 < 2\theta < \pi$

$$\therefore \quad cos^{-1}\frac{1-t^2}{1+t^2} = cos^{-1}\left(\frac{1-tan^2\theta}{1+tan^2\theta}\right)$$

$$= cos^{-1}(cos2\theta)$$

$$= 2\theta \qquad (0 < 2\theta < \pi)$$

$$= 2tan^{-1}t$$

$$\therefore \quad cos^{-1}\frac{1-9^x}{1+9^x} = 2tan^{-1}3^x \qquad (t = 3^x \text{ લેતાં})$$

$$\therefore \quad f(x) = cos^{-1}\frac{1-9^x}{1+9^x} = 2tan^{-1}3^x$$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{2\cdot 3^x \log_e 3}{1+(3^x)^2} = \frac{2\cdot 3^x \log_e 3}{1+3^{2x}}$$

ઉદાહરણ 64 : જો $x = a\,(cost + tsint)$, $y = a(sint - tcost)$, તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ શોધો.

ઉકેલ : $\frac{dx}{dt} = a(-sint + tcost + sint) = at\ cost$

$$\frac{dy}{dt} = a(cost - cost + tsint) = at\ sint$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = tant$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}(tant)$$

$$= \frac{d}{dt}(tant)\ \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{sec^2t}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{sec^2t}{a\,t\,cost} = \frac{sec^3t}{at}$$

ઉદાહરણ 65 : જો $y = e^{asin^{-1}x}$, $|x| \le 1$, તો સાબિત કરો કે $(1 - x^2)y_2 - xy_1 - a^2y = 0$.

ઉકેલ : $\frac{dy}{dx} = y_1 = e^{asin^{-1}x}\ \frac{a}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{ay}{\sqrt{1-x^2}}$

$\therefore \quad (1 - x^2)y_1^2 = a^2y^2$

$\therefore \quad (1 - x^2)2y_1y_2 + (-2x)y_1^2 = a^2 2yy_1$ $\qquad \left(\frac{d}{dx}y^2 = 2yy_1, \ \frac{d}{dx}y_1^2 = 2y_1y_2\right)$

$\therefore \quad (1 - x^2)y_2 - xy_1 - a^2y = 0$ $\qquad (y_1 \neq 0)$

ઉદાહરણ 66 : એવું કોઈ વિધેય અસ્તિત્વ ધરાવે છે કે જે દરેક વાસ્તવિક સંખ્યા માટે સતત હોય પરંતુ બરાબર n વાસ્તવિક સંખ્યાઓ માટે વિકલનીય ન હોય ?

ઉકેલ : ધારો કે $f(x) = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + ... + |x - n|$

$\therefore$ $|x|$ એ R પર સતત છે. તેથી $|x - 1|, |x - 2|, ..., |x - n|$ માંનું દરેક R પર સતત છે. કારણ કે સતત વિધેયોનું સંયોજિત વિધેય એ સતત છે.

તેથી $f(x)$ એ R પર સતત છે. કારણ કે સતત વિધેયોનો સરવાળો સતત છે.

$|x - 1|, |x - 2|, ..., |x - n|$ માંનું દરેક અનુક્રમે $x = 1, x = 2, ..., x = n$ સિવાયની પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા માટે વિકલનીય છે.

$|x - 2|, |x - 3|, ..., |x - n|$ એ $x = 1$ આગળ વિકલનીય છે.

$\therefore$ $g(x) = |x - 2| + |x - 3| + ... + |x - n|$ એ $x = 1$ આગળ વિકલનીય છે.

જો $f(x) = |x - 1| + |x - 2| + ... + |x - n|$ એ $x = 1$ આગળ વિકલનીય હોય, તો

$f(x) - g(x) = |x - 1|$ એ $x = 1$ આગળ વિકલનીય થવું જોઈએ.

પરંતુ $|x - 1|$ એ $x = 1$ આગળ વિકલનીય નથી.

$\therefore$ $f(x) = |x - 1| + |x - 2| + ... + |x - n|$ એ $x = 1$ આગળ વિકલનીય નથી.

તે જ પ્રમાણે $|x - 1| + |x - 2| + ... + |x - n|$ એ $x = 2, 3, ..., n$ આગળ વિકલનીય નથી.

$\therefore$ f એ R પર સતત હોવા છતાં $x = 1, 2, 3, ..., n$ પર વિકલનીય નથી.

ઉદાહરણ 67 : જો $siny = xsin(a + y)$, તો સાબિત કરો કે $\frac{dy}{dx} = \frac{sin^2(a + y)}{sina}$

ઉકેલ : $cosy\frac{dy}{dx} = sin(a + y) + xcos(a + y)\frac{dy}{dx}$

$\therefore \quad [cosy - xcos(a + y)]\frac{dy}{dx} = sin(a + y)$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{sin(a + y)}{cosy - xcos(a + y)}$$

$$= \frac{sin(a + y)}{cosy - \frac{siny}{sin(a + y)}cos(a + y)}$$

$$= \frac{sin^2(a + y)}{sin(a + y)cosy - cos(a + y)siny}$$

$$= \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$$

$(\sin(a+y)\cos y - \cos(a+y)\sin y = \sin(a+y-y) = \sin a)$

અથવા

$$x = \frac{\sin y}{\sin(a+y)}$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dy} = \frac{\sin(a+y)\cos y - \sin y\cos(a+y)}{\sin^2(a+y)} = \frac{\sin a}{\sin^2(a+y)}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$$

ઉદાહરણ 68 : જો $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, તો સાબિત કરો કે $\left|\frac{(1+y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{y_2}\right|$ અચળ છે.

ઉકેલ : $2(x-a) + 2(y-b)y_1 = 0$

$$\therefore \quad y_1 = -\frac{x-a}{y-b}$$

$$\therefore \quad y_2 = -\frac{(y-b)\cdot 1 - (x-a)y_1}{(y-b)^2}$$

$$= -\frac{(y-b) + \frac{(x-a)(x-a)}{y-b}}{(y-b)^2}$$

$$= -\frac{(x-a)^2 + (y-b)^2}{(y-b)^3}$$

$$= -\frac{r^2}{(y-b)^3}$$

$$\therefore \quad \left|\frac{(1+y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{y_2}\right| = \left|\frac{\left[1 + \frac{(x-a)^2}{(y-b)^2}\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{-r^2}{(y-b)^3}}\right|$$

$$= \left|\frac{[(x-a)^2 + (y-b)^2]^{\frac{3}{2}}}{-r^2}\right|$$

$= \left|-\frac{r^3}{r^2}\right| = |r|$ જે અચળ છે.

($\left|\frac{(1+y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{y_2}\right|$ ને વક્ર $y = f(x)$ ના કોઈ પણ બિંદુ $(x, f(x))$ આગળની વક્રત્રિજ્યા કહે છે. વર્તુળ એ દરેક બિંદુએ એકરૂપ વક્રત્રિજ્યાવાળો વક્ર છે.)

ઉદાહરણ 69 : યોગ્ય પ્રદેશ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય માટે $\frac{d}{dx}(\log x)^{\log x}$ શોધો.

ઉકેલ : $y = (\log x)^{\log x}$

$\therefore \quad \log y = \log x\, (\log (\log x))$

$$\therefore \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\log(\log x) + \frac{\log x}{\log x}\,\frac{1}{x}$$

$$= \frac{\log(\log x) + 1}{x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \left(\frac{1 + \log(\log x)}{x}\right)(\log x)^{\log x}$$

ઉદાહરણ 70 : વ્યાખ્યાની (પ્રથમ સિદ્ધાંતથી) મદદથી $\left[\frac{d}{dx} sec^{-1}x\right]_{x = -2}$ મેળવો.

ઉકેલ : $$\left[\frac{d}{dx} sec^{-1}x\right] = \lim_{x \to -2} \frac{sec^{-1}x - sec^{-1}(-2)}{x - (-2)}$$

$$= \lim_{t \to \frac{2\pi}{3}} \frac{t - (\pi - sec^{-1} 2)}{sec t + 2} \qquad (t = sec^{-1}x)$$

$$= \lim_{t \to \frac{2\pi}{3}} \frac{t - \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)}{sec t + 2}$$

$$= \lim_{t \to \frac{2\pi}{3}} \frac{t - \frac{2\pi}{3}}{sec t + 2}$$

$$= \lim_{t \to \frac{2\pi}{3}} \frac{t - \frac{2\pi}{3}}{2 sec t \left(cos t - cos \frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$= \lim_{t \to \frac{2\pi}{3}} \frac{t - \frac{2\pi}{3}}{2 sec t \left(-2 sin \frac{t + \frac{2\pi}{3}}{2} sin \frac{t - \frac{2\pi}{3}}{2}\right)}$$

$$= \lim_{t \to \frac{2\pi}{3}} \frac{\left(t - \frac{2\pi}{3}\right)/2}{-2 sec t \cdot sin \frac{t + \frac{2\pi}{3}}{2} sin \frac{t - \frac{2\pi}{3}}{2}}$$

$$= \frac{-1}{2 sec \frac{2\pi}{3} sin \frac{2\pi}{3}}$$

$$= \frac{-1}{2(-2)\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

ચકાસો : $\left(\frac{d}{dx} sec^{-1}x\right)_{x = -2} = \left(\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}\right)_{x = -2} = \frac{1}{|-2|\sqrt{4 - 1}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

સ્વાધ્યાય 5

નીચે આપેલાં વિધેયોમાંથી જે વિધેયો જે બિંદુએ અસતત હોય તે બિંદુઓ શોધો : (1 થી 4)

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 27}{x - 3} & x \neq 3 \\ 5 & x = 3 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} \frac{sin\,(x - 1)}{|x - 1|} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} & x \neq -1 \\ -1 & x = -1 \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - e^4}{e^x - e^2} & x \neq 2 \\ e^2 & x = 2 \end{cases}$

આપેલ x આગળ વિધેયો સતત હોય, તો k શોધો : (5 થી 8)

5. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} & x \neq 3 \\ k & x = 3, \end{cases}$ $x = 3$ આગળ

6. $f(x) = \begin{cases} kx^2 & x < 1 \\ x^2 + 1 & x \geq 1, \end{cases}$ $x = 1$ આગળ

7. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & x < 2 \\ k & x = 2 \\ 3x + 1 & x > 2 \end{cases}$ $x = 2$ આગળ

8. $f(x) = \begin{cases} cosx & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ k^2 - 4 & x = \frac{\pi}{2}, \\ sinx - 1 & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ $x = \frac{\pi}{2}$ આગળ

નીચે આપેલાં વિધેયો સતત હોય, તો a અને b શોધો : (9 થી 10)

9. $f(x) = \begin{cases} asinx + b & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ cosx & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \\ tanx + b & \pi < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} ax + b & 0 \leq x < 1 \\ 2x + 3 & 1 \leq x < 2 \\ x + a & x \geq 2 \end{cases}$

યોગ્ય પ્રદેશ પર વ્યાખ્યાયિત x નાં વિધેયો y માટે $\frac{dy}{dx}$ શોધો :

11. $y = \log_{10} (x^2 + 1)$

12. $y = cot^{-1} \frac{2x}{1 - x^2}$, $x \neq \pm 1$

13. $y = sin\,(\log\,(cosx))$

14. $x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2} = a$, $|x| < 1$, $|y| < 1$

15. $y = (sinx)^{sinx}$

16. $y = (sinx - cosx)^{sinx - cosx}$

17. $y = x^x + \left(x + \frac{1}{x}\right)^x$

18. $y = x^{\left(x + \frac{1}{x}\right)}$

19. $y = cos(x^x) + (tanx)^x$

20. $y = sin^{-1}x + sin^{-1}\sqrt{1 - x^2}$, $|x| < 1$

21. $y = tan^{-1}x + cot^{-1}x$, $x \in R$

22. $x = (cost)^t$, $y = (sint)^t$ $\quad 0 < t < \frac{\pi}{2}$

23. સાબિત કરો કે $\frac{d}{dx} e^{ax}cos\,(bx + c) = re^{ax}cos\,(bx + c + \alpha)$ જ્યાં $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $cos\alpha = \frac{a}{r}$, $sin\alpha = \frac{b}{r}$

અને $\frac{d^2}{dx^2}$ $e^{ax}cos\,(bx + c) = r^2 e^{ax}cos\,(bx + c + 2\alpha)$ સાબિત કરો.

24. $\frac{d}{dx}\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$, $x \in R - \{0\}$ શોધો.

25. $\frac{d}{dx}\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$ શોધો. $|x| < 1$

26. $\frac{d}{dx}\tan^{-1}\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$ શોધો. $0 < x < \frac{\pi}{2}$

27. જો $y = (\cos^{-1}x)^2$, તો સાબિત કરો કે $(1 - x^2)y_2 - xy_1 = 2$

28. જો $y = \sin pt$, $x = \sin t$, તો સાબિત કરો કે $(1 - x^2)y_2 - xy_1 + p^2y = 0$

29. જો $y = e^{m\tan^{-1}x}$, તો સાબિત કરો કે $(1 + x^2)y_2 + (2x - m)y_1 = 0$

30. જો $2x = y^{\frac{1}{m}} + y^{-\frac{1}{m}}$ $(x \ge 1)$, તો સાબિત કરો કે $(x^2 - 1)y_2 + xy_1 = m^2y$

31. જો $y = (x + \sqrt{x^2 - 1})^m$, તો સાબિત કરો કે $(x^2 - 1)y_2 + xy_1 = m^2y$

32. જો $x^y = e^{x-y}$, તો સાબિત કરો કે $\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(\log x + 1)^2}$

33. જો $y = e^{ax}\sin bx$, તો સાબિત કરો કે $y_2 - 2ay_1 + (a^2 + b^2)y = 0$

34. જો $(a - b\cos y)(a + b\cos x) = a^2 - b^2$, તો સાબિત કરો કે $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos x}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$

35. જો $y = (\tan^{-1}x)^2$, તો સાબિત કરો કે $(1 + x^2)^2y_2 + 2x(1 + x^2)y_1 = 2$

36. જો $y = x\log\frac{x}{a+bx}$, તો સાબિત કરો કે $x^3y_2 = (xy_1 - y)^2$

37. જો $x = a\sin t - b\cos t$, $y = a\cos t + b\sin t$, તો y_2 શોધો.

38. જો $y = \sin(\sin x)$, તો સાબિત કરો કે $y_2 + \tan x \cdot y_1 + y\cos^2x = 0$

39. જો $y = \cos^{-1}\frac{3+5\cos x}{5+3\cos x}$, તો સાબિત કરો કે $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{5+3\cos x}$.

40. $\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ નું $\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$ને સાપેક્ષ વિકલન કરો, જ્યાં $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$

41. $\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$ નું $\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$ ને સાપેક્ષ વિકલન કરો. $(0 < x < 1)$

42. $\left[\frac{d}{dx}(\mathrm{cosec}^{-1}x)\right]_{x=-2}$ વ્યાખ્યાથી મેળવો.

43. $\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ શોધો. $x > 0$

44. $\frac{d}{dx}\tan^{-1}\frac{4x}{1+21x^2}$ શોધો. $x > 0$

45. $\dfrac{d}{dx}\, tan^{-1} \dfrac{a+bx}{b-ax}$ શોધો.

46. $\dfrac{d}{dx}\, tan^{-1} \dfrac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$ શોધો.

47. $\dfrac{d}{dx}\, tan^{-1}(secx - tanx)$ શોધો.

48. **નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :**

વિભાગ A (1 ગુણ)

(1) $\left[\dfrac{d}{dx} sec^{-1}x\right]_{x\,=\,-3} = \ldots\ldots$ ☐

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ (b) $-\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ (c) $\dfrac{1}{6\sqrt{2}}$ (d) $\dfrac{-1}{6\sqrt{2}}$

(2) $\dfrac{d}{dx} x^x = \ldots\ldots\ (x > 0)$ ☐

(a) x^{x-1} (b) x^x (c) 0 (d) $x^x(1 + \log x)$

(3) $\dfrac{d}{dx}(sin^{-1}x + cos^{-1}x) = \ldots\ldots\ (|x| < 1)$ ☐

(a) 0 (b) $\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ (c) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (d) અસ્તિત્વ નથી.

(4) $\dfrac{d}{dx} a^a = \ldots\ldots\ (a > 0)$ ☐

(a) $a^a(1 + \log a)$ (b) 0 (c) a^a (d) અસ્તિત્વ નથી.

(5) $\dfrac{d}{dx} e^{5x} = \ldots\ldots$. ☐

(a) e^{5x} (b) $5e^{5x}$ (c) $5x\ e^{5x-1}$ (d) 0

(6) $\dfrac{d}{dx} \log|x| = \ldots\ldots\ .\ (x \neq 0)$ ☐

(a) $\dfrac{1}{|x|}$ (b) $\dfrac{1}{x}$ (c) અસ્તિત્વ નથી. (d) e^x

(7) $\dfrac{d}{dx} sin^3x = \ldots\ldots$. ☐

(a) $3sin^2x$ (b) $3cos^2x$ (c) $3sin^2x\ cosx$ (d) $-3cos^2x\ sinx$

(8) $\dfrac{d}{dx} tan^nx = \ldots\ldots$. ☐

(a) $ntan^{n-1}x$ (b) $ntan^{n-1}x\, sec^2x$ (c) $n\, sec^{2n}x$ (d) $ntan^{n-1}x\ sec^{n-1}x$

(9) જો $f(x) = \begin{cases} ax + b & 1 \le x < 5 \\ 7x - 5 & 5 \le x < 10 \\ bx + 3a & x \ge 10 \end{cases}$

સતત હોય, તો $(a, b) =$ ......

(a) (5, 10) (b) (5, 5) (c) (10, 5) (d) (0, 0)

(10) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{a} - a & x < a \\ 0 & x = a \\ a - \frac{x^2}{a} & x > a \end{cases}$ માટે

(a) $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = a$ (b) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -a$

(c) f એ $x = a$ આગળ સતત છે. (d) f એ $x = a$ આગળ વિકલનીય છે.

(11) જો $f(x) = \begin{cases} x & x \in (0, 1) \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$

(a) f એ ફક્ત $x = 1$ આગળ સતત છે. (b) f એ ફક્ત $x = 1$ આગળ અસતત છે.

(c) f એ R^+ પર સતત છે. (d) f એ $x = 1$ આગળ વ્યાખ્યાયિત નથી.

(12) $\frac{d}{dx} \frac{1}{\log|x|} =$ ....

(a) $\frac{1}{|x|}$ (b) $\frac{1}{(\log x)^2}$ (c) $-\frac{1}{x(\log|x|)^2}$ (d) e^x

(13) જો $y = asinx + bcosx$, તો $y^2 + (y_1)^2 =$ .... $(a^2 + b^2 \neq 0)$

(a) $acosx - bsinx$ (b) $(asinx - bcosx)^2$ (c) $a^2 + b^2$ (d) 0

(14) $\frac{d}{dx} (x^2 + sin^2x)^3 =$ ....

(a) $3(x^2 + sin^2x)$ (b) $3(x^2 + sin^2x)^2 (2x + sin2x)$

(c) $2x + 2sinx\ cosx$ (d) 0

(15) $\frac{d}{dx} \sqrt{xsinx} =$ .... $0 < x < \pi$

(a) $\frac{xsinx + cosx}{\sqrt{xsinx}}$ (b) $\frac{xcosx}{2\sqrt{xsinx}}$ (c) $\frac{xcosx + sinx}{2\sqrt{xsinx}}$ (d) $\frac{1}{2\sqrt{xsinx}}$

વિભાગ B (2 ગુણ)

(16) $\frac{d}{dx} tan^{-1} \frac{1-x}{1+x} =$ ....

(a) $\frac{-1}{1+x^2}$ (b) $\frac{1}{1+x^2}$ (c) $\frac{1+x}{1-x}$ (d) $\frac{2}{1+x^2}$

(17) $\frac{d}{dx}\ tan^{-1}\sqrt{\frac{1-cosx}{1+cosx}}$ = ... $\pi < x < 2\pi$

(a) $\frac{1}{1+cos^2x}$ (b) $-\frac{1}{1+cos^2x}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $-\frac{1}{2}$

(18) જો $x = e^{tan^{-1}\frac{y-x^2}{x^2}}$, તો $\frac{dy}{dx}$ = ...

(a) $2x\,(tan\,(\log x) + 1)$ (b) $2x\,(tan\,(\log x) + 1) + x\,sec^2\,(\log x)$

(c) $2x\,(tan\,(\log x) + 1) + x^2sec\,(\log x)$ (d) 0

(19) $\frac{d}{dx}\ sin^{-1}\left(\frac{3x}{5}+\frac{4}{5}\sqrt{1-x^2}\right)$ = ... $(0 < x < \frac{3}{5})$

(a) $\frac{3}{5} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (b) $\frac{4}{5}\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(20) $\frac{d}{dx}\ tan^{-1}\left(\frac{x+a}{1-xa}\right)$ = ... $(x,\ a \in R^+,\ xa > 1)$

(a) $\frac{1}{1+x^2}$ (b) $\frac{1}{1+a^2}$ (c) $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+a^2}$ (d) $\frac{1}{1+x^2a^2}$

(21) જો $f(x) = \log_7(\log_3 x)$, તો $f'(x)$ = ...

(a) $\frac{1}{x\log 7\log 3}$ (b) $\frac{1}{\log 3\log x}$ (c) $\frac{1}{x\log x\log 7}$ (d) $\frac{1}{x\log x}$

(22) $\frac{d}{dx}\ x\,|x|$ = ... $(x < 0)$

(a) $2x$ (b) $-2x$ (c) $|x|$ (d) 0

(23) જો $x = \frac{2t}{1+t^2}$, $y = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, તો $\frac{dy}{dx}$ = ...

(a) $\frac{2t^2}{1-t^2}$ (b) $\frac{2t}{1+t^2}$ (c) $2t$ (d) $\frac{-2t}{1-t^2}$

(24) $\frac{d}{dx}\ e^{x\log x}$ = ...

(a) $x^x\,(1 + \log x)$ (b) x^x (c) $1 + \log x$ (d) x^{x-1}

(25) $\frac{tan^{-1}x}{1+tan^{-1}x}$ નો $tan^{-1}x$ ને સાપેક્ષ વિકલિત = ...

(a) $\frac{1}{1+tan^{-1}x}$ (b) $\frac{1}{(1+tan^{-1}x)^2}$ (c) $\frac{1}{1+x^2}$ (d) $\frac{-1}{1+x^2}$

વિભાગ C (3 ગુણ)

(26) જો $x = at^2$, $y = 2at$, તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ = ...

(a) $\frac{-1}{t^2}$ (b) $\frac{1}{t^2}$ (c) $\frac{-1}{2at^3}$ (d) $\frac{1}{2at^3}$

(27) $\frac{d}{dx} cot^{-1} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ = ..., $x \in$ R − {0}

(a) $\frac{1}{1+x^2}$ (b) $\frac{-1}{2(1+x^2)}$ (c) $\frac{2}{1+x^2}$ (d) $-\frac{1}{1+x^2}$

(28) $\frac{d^2x}{dy^2}$ = ...

(a) $\frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}$ (b) $\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ (c) $-\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ (d) $-\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}\frac{d^2y}{dx^2}$

(29) વક્ર $f(x) = (x-3)^2$ ને [2, 4] પર મધ્યકમાન પ્રમેય લગાડતાં ...... બિંદુ આગળનો સ્પર્શક, A(2, 1) અને B(4, 1)ને જોડતી જીવાને સમાંતર છે.

(a) (1, 0) (b) (4, 3) (c) (2, 3) (d) (3, 0)

(30) વિધેય $f(x) = x^3$ ને [−1, 1] પર મધ્યકમાન પ્રમેય લગાડતાં c = ... થાય.

(a) $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $\pm\sqrt{3}$ (c) ± 1 (d) 0

(31) $f(x) = e^x sin\,x$ $x \in [0, \pi]$ માટે રોલના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં c = ...

(a) $\frac{3\pi}{4}$ (b) $\frac{5\pi}{4}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{7\pi}{4}$

(32) $f(x) = x^3 - 4x$, $x \in [0, 2]$ ને માટે રોલના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં c = ...

(a) $\sqrt{3}$ (b) 2 (c) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (d) −2

વિભાગ D (4 ગુણ)

(33) જો $x = sec\theta - cos\theta$, $y = sec^n\theta - cos^n\theta$, તો...

(a) $(x^2+4)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = n^2(y^2+4)$ (b) $(x^2-4)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = n^2(y^2-4)$

(c) $(x^2+4)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$ (d) $(x^2+4)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y^2+4$

(34) $\frac{d}{dx} tan^{-1} \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}$ = ... $|x| < 1$

(a) $\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$ (b) $\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$ (c) $\frac{1}{2\sqrt{1-x^4}}$ (d) $\frac{x^2}{1-x^4}$

(35) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} sin^{-1}\frac{x}{a}\right)$ = ... $(a > 0)$

(a) $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (b) $\sqrt{a^2-x^2}$ (c) $\sqrt{x^2-a^2}$ (d) $\sqrt{x^2+a^2}$

(36) ...... વિધેય [−1, 1]માં મધ્યકમાન પ્રમેયની શરતોનું પાલન કરતું નથી.

(a) $f(x) = |x|$ (b) $f(x) = x^3$ (c) $f(x) = sinx$ (d) $f(x) = x^2$

(37) વિધેય $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \in [1, 3]$ પર મધ્યકમાન પ્રમેય લગાડતાં અને વિધેય $f(x) = x^2 - 4x + 3$ પર રોલનું પ્રમેય લગાડતાં c નાં મૂલ્ય ...... મળે.

(a) $\sqrt{3}$, 1 (b) 2, 1 (c) $\sqrt{3}$, 2 (d) 2, $\sqrt{3}$

(38) $y = x \log x$ નો $(c, f(x))$ આગળ સ્પર્શક $A(1, 0)$ તથા $B(e, e)$ ને જોડતી રેખાને સમાંતર હોય તો $c =$ ....

(a) $\frac{e-1}{e}$ (b) $\log \frac{e-1}{e}$ (c) $e^{\frac{1}{1-e}}$ (d) $e^{\frac{1}{e-1}}$

(39) $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$ માટે $[0, \pi]$ પર મધ્યકમાનનું પ્રમેય ચકાસતાં મળતી c ની કિંમત ....

(a) π (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{\pi}{3}$

(40) $f(x) = \begin{cases} 2 + x^3 & x \le 1 \\ 3x & x > 1 \end{cases} \quad x \in [-1, 2]$

તો મધ્યકમાન પ્રમેય અનુસાર c નું મૂલ્ય...

(a) 2 (b) 0 (c) 1 (d) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

*

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચે આપેલા મુદ્દાઓ શીખ્યા :

1. સતત વિધેયો
2. સતત વિધેયોનું બીજગણિત
3. વિકલનીયતા અને સાતત્ય
4. ઘાતાંકીય વિધેય
5. લઘુગણકીય વિધેય
6. સાંકળનો નિયમ
7. પ્રતિવિધેયના વિકલિતનો નિયમ
8. ગૂઢ વિધેયનું વિકલિત
9. પ્રચલ વિધેયનું વિકલિત
10. લઘુગણકીય વિકલન
11. દ્વિતીય વિકલિત
12. મધ્યકમાન પ્રમેય

Prehistory

Excavations at Harappa, Mohenjo-daro and other sites of the Indus Valley Civilization have uncovered evidence of the use of "practical mathematics". The people of the IVC manufactured bricks whose dimensions were in the proportion 4:2:1, considered favorable for the stability of a brick structure. They used a standardized system of weights based on the ratios: 1/20, 1/10, 1/5, 1/2, 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, and 500, with the unit weight equal to approximately 28 grams (and approximately equal to the English ounce or Greek uncia). They mass produced weights in regular geometrical shapes, which included hexahedra, barrels, cones, and cylinders, thereby demonstrating knowledge of basic geometry.

The inhabitants of Indus civilization also tried to standardize measurement of length to a high degree of accuracy. They designed a ruler—the Mohenjo-daro ruler—whose unit of length (approximately 1.32 inches or 3.4 centimetres) was divided into ten equal parts. Bricks manufactured in ancient Mohenjo-daro often had dimensions that were integral multiples of this unit of length.

અનિયત સંકલન 6

What we know is not much, what we do not know is immense.
(Allegedly his last words)

– Laplace

A mathematics teacher is midwife to ideas.

– George Polya

6.1 પ્રાસ્તાવિક

વિકલનના પ્રકરણમાં આપણે આપેલું વિધેય f એ કોઈ અંતરાલ I પર વિકલનીય ક્યારે બને તથા તે વિકલનીય હોય ત્યારે તેનો અનન્ય વિકલિત f' અંતરાલ I ના દરેક બિંદુએ કેવી રીતે મેળવી શકાય તેનો અભ્યાસ કર્યો. હવે આપણે વિકલનની ક્રિયાથી ઊલટી હોય તેવી એક ક્રિયા જોઈશું. ઉદાહરણ તરીકે x^3 નું x ને સાપેક્ષ વિકિલત $3x^2$ છે તે આપણે જાણીએ છીએ. પરંતુ હવે આપણે પ્રશ્ન ઉલટાવીએ કે ક્યાં વિધેયનો વિકલિત $3x^2$ થાય તો જવાબ શોધવામાં મુશ્કેલી પડે. એ વ્યસ્ત ક્રિયાનો પ્રશ્ન છે.

વ્યાપક રીતે એવો પ્રશ્ન ઉઠાવીએ કે "આપેલ વિધેય $f(x)$ કયા વિધેયનું વિકલિત છે ?" આ પ્રશ્નનો ઉત્તર શોધવાની ક્રિયાને **પ્રતિવિકલન (Antiderivation)**ની ક્રિયા કહે છે. આ પ્રશ્નનો ઉત્તર ના મળે તે પણ શક્ય છે. આ પ્રશ્નના ઉત્તરો એક કરતાં વધુ પણ હોય. ઉદાહરણ તરીકે, (i) $\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$, $\frac{d}{dx}(x^3 - 15) = 3x^2$ છે. વ્યાપક રીતે $\frac{d}{dx}(x^3 + c) = 3x^2$, જ્યાં c કોઈ પણ અચળ છે. (ii) $\frac{d}{dx}(sinx) = cosx$, $\frac{d}{dx}(sinx - 3) = cosx$ વ્યાપક રીતે $\frac{d}{dx}(sinx + c) = cosx$.

આમ, ઉપરનાં વિધેયનાં પ્રતિવિકલિત અચળ નથી. હકીકતમાં તો વિધેયના પ્રતિવિકલિતોની સંખ્યા અનંત હોય છે. જે અચળ c ની પસંદગીથી મેળવી શકાય છે. તેથી આવા અચળને સ્વૈર અચળ કહે છે.

6.2 વ્યાખ્યા

કોઈ અંતરાલ $I \subset R$ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય g માટે, $\frac{d}{dx}(g(x)) = f(x)$, $\forall x \in I$, હોય તો $g(x)$ ને $f(x)$નો x વિશે **પૂર્વગ (Primitive)** અથવા **પ્રતિવિકલિત (Antiderivative)** અથવા **અનિયત સંકલિત (Indefinite Integral)** કહે છે. અને તેને સંકેતમાં $\int f(x)dx$ દ્વારા દર્શાવવામાં આવે છે. અહીં, $f(x)$ પરથી તેનો પૂર્વગ $g(x)$ શોધવાની ક્રિયાને **પ્રતિવિકલન (કે અનિયત સંકલન)** કહે છે.

વિધેય fનો પૂર્વગ ક્યારે મળી શકે તેનો જવાબ સરળતાથી મળી શકતો નથી, પણ કેટલીક પર્યાપ્ત શરતો એવી છે કે સતત વિધેય અને એકસૂત્રી (વધતું અથવા ઘટતું) વિધેયનો પૂર્વગ મળી શકે. $\frac{sinx}{x}$ સતત વિધેય હોવાથી $\int \frac{sinx}{x} dx$ વ્યાખ્યાયિત તો છે જ પણ તેને જાણીતા પ્રાથમિક વિધેય તરીકે દર્શાવી શકાતું નથી. તેવી રીતે $\int \sqrt{secx}\, dx$ અને $\int \sqrt{x^3+1}\, dx$ વ્યાખ્યાયિત છે પણ તેને પણ જાણીતા પ્રાથમિક વિધેય તરીકે દર્શાવી શકાતાં નથી. જો વિધેય fનો પ્રતિવિકલિત મળે તો તેને **પ્રતિવિકલનીય (Integrable) વિધેય** કહે છે.

$\int f(x)dx$ માં $\int ....dx$ સંકેત **x** ને સાપેક્ષ સંકલનની પ્રક્રિયા દર્શાવે છે. **$\int f(x)dx$** એટલે **$f(x)$** નો **x** વિશે (સાપેક્ષ) **પ્રતિવિકલિત** કે **સંકલિત (Integral)**. $\int f(x)dx$ માં $f(x)$ને **સંકલ્ય (Integrand)** કહે છે.

6.3 પ્રતિવિકલિતનાં કેટલાંક પ્રમેયો

પ્રમેય 6.1 : જો f અને g બંને (a, b) પર વિકલનીય વિધેયો હોય તથા $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in (a, b)$, તો $f(x) = g(x) + c$, જ્યાં c અચળ છે.

સાબિતી : ધારો કે $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in (a, b)$.

f અને g એ (a, b) પર વિકલનીય હોવાથી બંને વિધેયો (a, b) પર સતત છે.

$\therefore$ જો $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$, તો $[x_1, x_2]$ પર h સતત છે.

તથા (x_1, x_2) પર h વિકલનીય છે. કારણ કે $[x_1, x_2] \subset (a, b)$.

$\therefore$ મધ્યકમાન પ્રમેય પરથી,

$$\frac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1} = h'(c) \text{ જ્યાં, } c \in (x_1, x_2).$$

$\therefore$ $h(x_2) - h(x_1) = h'(c)(x_2 - x_1)$.

હવે, $c \in (x_1, x_2) \Rightarrow c \in (a, b)$ (i)

પરંતુ પક્ષ પરથી $\forall x \in (a, b)$, $f'(x) = g'(x)$.

$\therefore$ $f'(c) = g'(c)$

$\therefore$ $f'(c) - g'(c) = 0$

$\therefore$ $h'(c) = 0$ $(h(x) = f(x) - g(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x) - g'(x))$

$\therefore$ $h(x_2) - h(x_1) = 0 \quad \forall x_1, x_2 \in (a, b)$ ((i) પરથી)

$\therefore$ $h(x_1) = h(x_2)$

$\therefore$ $f(x_1) - g(x_1) = f(x_2) - g(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in (a, b)$

$\therefore$ $f - g$ એ (a, b) પર અચળ વિધેય છે.

$\therefore$ $f(x) - g(x) = c$, જ્યાં $c \in R$ અચળ છે.

$\therefore$ $f(x) = g(x) + c, \quad \forall x \in (a, b)$

વ્યાપક પ્રતિવિકલિત : $\frac{d}{dx}(f(x)) = \frac{d}{dx}(g(x)) = h(x)$, તો $\int h(x)dx = f(x)$ અને $\int h(x)dx = g(x)$ થાય. પરંતુ, પ્રમેય 6.1 પરથી $f(x) = g(x) + c$ હોવાથી, $\int h(x)dx = f(x) = g(x) + c$ જ્યાં, $g(x)$ એ (a, b) પર વિકલનીય કોઈ પણ વિધેય છે, જેથી $\frac{d}{dx}(g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) = h(x)$. વળી, જો $\frac{d}{dx}(g(x)) = h(x)$, તો $\frac{d}{dx}[g(x) + c] = \frac{d}{dx}g(x) = h(x)$ જ થાય.

આમ, $h(x)$નો એક સંકલિત $g(x)$ હોય, તો તેનાં તમામ સંકલિતો $g(x) + c$ તરીકે મળે, જ્યાં c કોઈ પણ વાસ્તવિક અચળ છે. c ને સ્વૈર અચળ (Arbitrary constant) કહે છે.

કોઈ વિધેય પર વિકલન અને સંકલનની ક્રિયાઓ વારાફરતી કરતાં,

$$\frac{d}{dx}g(x) = f(x), \ \forall x \in I \Leftrightarrow \int f(x)dx = g(x) + c.$$

હવે, $\frac{d}{dx}[\int f(x)dx] = \frac{d}{dx}[g(x) + c] = f(x)$.

$\therefore$ જો વિધેય $f(x)$નો પ્રથમ સંકલિત મેળવવામાં આવે અને પછી તે સંકલિતનું વિકલન કરવામાં આવે, તો પરિણામે તે જ વિધેય $f(x)$ મળે.

પરંતુ $\int\left[\frac{d}{dx}g(x)\right]dx = \int f(x)dx = g(x) + c$.

જો કોઈ વિધેય $g(x)$નો પ્રથમ વિકલિત મેળવી પછી તે વિકલિતનો સંકલિત મેળવીએ તો $g(x) + c$ મળે.

પ્રમેય 6.2 : જો f અને g અંતરાલ (a, b) પર પ્રતિવિકલનીય હોય તો $f + g$ પણ પ્રતિવિકલનીય છે તથા
$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

સાબિતી : $\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx + \int g(x)dx\right] = \frac{d}{dx}\int f(x)dx + \frac{d}{dx}\int g(x)dx$

$$= f(x) + g(x)$$

$\therefore$ પ્રતિવિકલનની વ્યાખ્યા પ્રમાણે,

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

વ્યાપક રીતે, $f_1, f_2, f_3, ..., f_n$ કોઈ અંતરાલ પર સંકલનીય હોય, તો

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)]\, dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + ... + \int f_n(x)dx.$$

પ્રમેય 6.3 : જો f એ કોઈ અંતરાલ (a, b) પર પ્રતિવિકલનીય વિધેય હોય તથા $k \in R$ તો kf પણ પ્રતિવિકલનીય છે તથા $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$

સાબિતી : $\frac{d}{dx}[k\int f(x)dx] = k\frac{d}{dx}\int f(x)dx$

$$= kf(x)$$

$\therefore$ પ્રતિવિકલનની વ્યાખ્યા પ્રમાણે,

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

ઉપપ્રમેય : જો f અને g એ કોઈ અંતરાલ (a, b) પર પ્રતિવિકલનીય વિધેય હોય તો

$$\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$

સાબિતી : $\int [f(x) - g(x)]dx = \int [f(x)dx + (-1)g(x)]dx$

$$= \int f(x)dx + \int (-1)g(x)dx$$

$$= \int f(x)dx + (-1)\int g(x)dx$$

$$= \int f(x)dx - \int g(x)dx$$

આમ, $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

વ્યાપક રીતે, $\int [k_1f_1(x) + k_2f_2(x) + ... + k_nf_n(x)]dx$

$$= k_1\int f_1(x)\,dx + k_2\int f_2(x)\,dx + ... + \int k_nf_n(x)dx$$

પ્રમેય 6.2, 6.3 અને આ ઉપપ્રમેયને સંકલનના કાર્યનિયમો પણ કહે છે.

6.4 પ્રમાણિત સંકલિતો

(1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ n \in R - \{-1\},\ x \in R^+.$

$\frac{x^{n+1}}{n+1}$ એ $\forall x \in R^+$ વિકલનીય વિધેય છે અને $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}[(n + 1)x^n] = x^n$

$\therefore$ પ્રતિવિકલિતની વ્યાખ્યા પ્રમાણે, $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ \ \forall x \in R^+.$

(અહીં આપણે યાદ કરીશું કે જો $g(x)$ એક પ્રતિવિકલિત હોય, તો તમામ પ્રતિવિકલિતો $g(x) + c$ તરીકે મળે.)

$n = 0$ લેતાં, $\int x^0\, dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + c = x + c$

$\therefore \quad \int dx = x + c$

(2) $\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c, x \in R - \{0\}$.

$\log|x|$ એ $\forall x \in R - \{0\}$ વિકલનીય વિધેય છે.

$x > 0$ તો $\frac{d}{dx}(\log|x|) = \frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x}$.

જો $x < 0$ તો $\frac{d}{dx}\log|x| = \frac{d}{dx}\log(-x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$

$\therefore$ $\frac{d}{dx}\log|x| = \frac{1}{x}, \quad \forall x \in R - \{0\}$

$\therefore$ પ્રતિવિકલિતની વ્યાખ્યા પ્રમાણે,

$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c, \quad \forall x \in R - \{0\}$.

આપણે $\int \frac{dx}{x} = \log|x| + c, x \neq 0$ લખી શકીએ.

(3) $\int cosx\, dx = sinx + c, \forall x \in R$

$sinx$ એ $\forall x \in R$ વિકલનીય છે અને $\frac{d}{dx}(sinx) = cosx, \quad \forall x \in R$

$\therefore$ પ્રતિવિકલિતની વ્યાખ્યા પ્રમાણે,

$\int cosx\, dx = sinx + c, \quad \forall x \in R$

તે જ પ્રમાણે સાબિત કરી શકાય કે,

(4) $\int sinx\, dx = -cosx + c, \forall x \in R$

(5) $\int sec^2x\, dx = tanx + c, x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$

$(2k-1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$ ને ન સમાવતા કોઈ પણ અંતરાલ પર $tanx$ વિકલનીય છે અને $\frac{d}{dx}(tanx) = sec^2x$.

$\therefore$ પ્રતિવિકલિતની વ્યાખ્યા પ્રમાણે, $\int sec^2x\, dx = tanx + c, x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$

તે જ પ્રમાણે સાબિત કરી શકાય કે,

(6) $\int cosec^2x\, dx = -cotx + c, x \neq k\pi, k \in Z$

(7) $\int secx\ tanx\, dx = secx + c, x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$

(8) $\int cosecx\ cotx\, dx = -cosecx + c, x \neq k\pi, k \in Z$

(9) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log_e a} + c, a \in R^+ - \{1\}, x \in R$

$\frac{a^x}{\log_e a}$ એ $\forall x \in R$ વિકલનીય છે અને $\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\log_e a}\right) = \frac{1}{\log_e a}(a^x \log_e a) = a^x, \quad \forall x \in R$

$\therefore$ પ્રતિવિકલિતની વ્યાખ્યા પ્રમાણે, $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log_e a} + c, a \in R^+ - \{1\}$.

$a = e$ લેતાં,

$\int e^x dx = \frac{e^x}{\log_e e} + c$

$\therefore$ $\int e^x\, dx = e^x + c, \quad \forall x \in R$.

(10) $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c, \quad a \in R - \{0\}, x \in R$

$= -\frac{1}{a} cot^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c_1, \quad a \in R - \{0\}, x \in R$

a કોઈ શૂન્યેતર અચળ છે અને $tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right), \forall x \in R$ વિકલનીય છે.

$\therefore \quad \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$, $\forall a \in R - \{0\}$ વિકલનીય છે અને

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right] = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}}\cdot\frac{1}{a} = \frac{1}{x^2+a^2}$$

$\therefore$ પ્રતિવિકલિતની વ્યાખ્યા પ્રમાણે $\int\frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c, \forall x \in R$

આમ, $\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$ અને $-\frac{1}{a}\cot^{-1}\frac{x}{a}$ બંને $\int\frac{dx}{x^2+a^2}$ તરીકે લઈ શકાય.

આનું કારણ સમજીએ.

જો $f(x) = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$ અને $g(x) = -\frac{1}{a}\cot^{-1}\frac{x}{a}$ લઈએ તો,

$\tan^{-1}\frac{x}{a} + \cot^{-1}\frac{x}{a} = \frac{\pi}{2}$ હોવાથી,

$$\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + \frac{1}{a}\cot^{-1}\frac{x}{a} = \frac{\pi}{2a}$$

$\therefore \quad f(x) - g(x) = \frac{\pi}{2a}$

$\therefore \quad f(x) = g(x) + \frac{\pi}{2a}$.

$\therefore \quad \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}g(x)$.

પ્રતિવિકલિત અનન્ય ન હોવાથી $\int h(x)dx = g(x)$ અને $\int h(x)dx = f(x)$ હોય તો $f(x) = g(x)$ થાય તે જરૂરી નથી પણ અચળ c મળે કે જેથી $f(x) = g(x) + c$ થાય.

(11) $\int\frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c, a \in R - \{0\}$ ($-a$ તથા a ને ન સમાવતા કોઈ પણ અંતરાલ પર)

$\frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$ એ $-a$ અને a ને ન સમાવતા કોઈપણ અંતરાલ પર વિકલનીય છે અને

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\right) &= \frac{1}{2a}\frac{d}{dx}\left[\log|x-a| - \log|x+a|\right]\\ &= \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right]\\ &= \frac{1}{2a}\left[\frac{x+a-x+a}{(x-a)(x+a)}\right]\\ &= \frac{1}{2a}\left(\frac{2a}{x^2-a^2}\right)\\ &= \frac{1}{x^2-a^2}\end{aligned}$$

$\therefore$ આમ, પ્રતિવિકલિતની વ્યાખ્યા પ્રમાણે, $\int\frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c, a \in R - \{0\}$

(12) $\int\frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + c, a \in R - \{0\}$ ($-a$ અને a ને ન સમાવતા કોઈ પણ અંતરાલ પર)

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{a^2-x^2}dx &= -1\int\frac{1}{x^2-a^2}dx\\ &= -\frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c\\ &= \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + c\end{aligned}$$

(13) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = sin^{-1}\frac{x}{a} + c, \quad x \in (-a, a),\ a > 0.$

$$= -cos^{-1}\frac{x}{a} + c_1, \quad x \in (-a, a),\ a > 0.$$

$sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ એ $x \in (-a, a)$, $a > 0$ માટે વિકલનીય છે અને

$$\frac{d}{dx}\left(sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\cdot\frac{1}{a}$$

$$= \frac{|a|}{\sqrt{a^2-x^2}}\cdot\frac{1}{a}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \qquad (a > 0,\ |a| = a)$$

આમ, પ્રતિવિકલિતની વ્યાખ્યા પ્રમાણે, $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = sin^{-1}\frac{x}{a} + c, \quad x \in (-a, a),\ a > 0.$

વળી, $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -cos^{-1}\frac{x}{a} + c_1$ પણ લખી શકાય, $x \in (-a, a)$.

પરિણામ (10)ની જેમ,

જો $a < 0$, હોય, તો $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -sin^{-1}\frac{x}{a} + c = cos^{-1}\frac{x}{a} + c_1$ થાય. $\qquad (|a| = -a)$

એક ઉદાહરણ લઈએ, $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{\left(\log\frac{1}{2}\right)^2 - x^2}}\,dx = -sin^{-1}\frac{1}{\log\frac{1}{2}} + c \qquad \left(\log\frac{1}{2} < 0\right)$

પરંતુ આપણે સામાન્ય રીતે $a > 0$ સ્વરૂપે સૂત્રનો ઉપયોગ કરીશું.

(14) $\displaystyle\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{1}{a}\,sec^{-1}\frac{x}{a} + c, \quad |x| > |a| > 0.$

$$= -\frac{1}{a}\,cosec^{-1}\frac{x}{a} + c_1, \quad |x| > |a| > 0.$$

જો $a \in R - \{0\}$ તો $\frac{1}{a}\,sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ એ $|x| > |a|$ માટે વિકલનીય છે, અને

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}\,sec^{-1}\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\left|\frac{x}{a}\right|\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}}\cdot\frac{1}{a}$$

$$= \frac{1}{a^2}\cdot\frac{|a|^2}{|x|\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$= \frac{1}{a^2}\cdot\frac{a^2}{|x|\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$= \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-a^2}}$$

$\therefore$ પ્રતિવિકલિતની વ્યાખ્યા પ્રમાણે, $\displaystyle\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{1}{a}\,sec^{-1}\frac{x}{a} + c, \quad (|x| > |a| > 0)$

પરિણામ (10) ની જેમ, $\displaystyle\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = -\frac{1}{a}\,cosec^{-1}\frac{x}{a} + c_1$ પણ લખી શકાય.

(15) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\, dx = \log |\, x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\,| + c, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$

$$\frac{d}{dx}\left(\log |\, x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\,|\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2 \pm a^2}} \frac{d}{dx}\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2 \pm a^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2 \pm a^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2 \pm a^2}}\left(\frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}+x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

$\therefore$ પ્રતિવિકલિતની વ્યાખ્યા પ્રમાણે, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \log |\, x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\,| + c, \forall x \in \mathbf{R}$

(**નોંધ :** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ ના અસ્તિત્વ માટે $|x| > |a|$ જરૂરી છે.)

સામાન્ય રીતે $\int f(x)dx = g(x) + c$ ના બદલે આપણે $g(x)$ લખીશું અને c નહીં લખીએ. સ્વૈર અચળનો સમાવેશ g માં થઈ ગયો છે, તેમ આપણે સમજીશું. $\int f(x)dx = \int g(x)dx + \int h(x)dx$ જેવા સમીકરણમાં c લખવાની જરૂર નથી. c એ $\int .....dx$ સંકેતમાં અભિપ્રેત છે.

$\int x^2dx = \frac{x^3}{3} + c$. અહીં c લખવો જરૂરી છે. $\frac{x^3}{3}$ એ વ્યાપક સંકલિત નથી. તે એક સંકલિત છે.

જ્યારે પ્રતિવિકલિત શોધીએ ત્યારે $\int .....dx$ જેવા તમામ સંકેતો દૂર થાય ત્યારે c દાખલ કરવો વ્યવહારુ છે.

$\int x^2dx + \int x^3\, dx = \frac{x^3}{3} + c_1 + \frac{x^4}{4} + c_2$ લખવું જરૂરી નથી. કારણ કે $c_1 + c_2$ પણ સ્વૈર અચળ જ છે.

આમ, $\int x^2dx + \int x^3dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + c$ લખી શકાય.

હવે નીચે આપેલાં ઉદાહરણોમાં સંકલ્ય $\mathbf{R}$ના યોગ્ય અંતરાલ પર વ્યાખ્યાયિત છે અને પ્રતિવિકલનીય છે તેમ માની લઈશું. પ્રત્યેક ઉદાહરણમાં માંગેલ સંકલિત માટે I લખીશું.

ઉદાહરણ 1 : નીચે આપેલાં વિધેયોનાં x વિશે સંકલિતો મેળવો :

(1) $x^{\frac{5}{2}} + 4 \cdot 3^x - \frac{1}{x}$ **(2)** $\frac{(2x+1)^3}{\sqrt{x}}, (x > 0)$ **(3)** $\frac{x}{a} + \frac{a}{x} + x^a + a^x$ **(4)** $\frac{1}{1+\cos 2x}$

(5) $\frac{1}{9-x^2}, x^2 \neq 9$ **(6)** $\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}, |x| > 2$

ઉકેલ : (1) $\mathrm{I} = \int \left(x^{\frac{5}{2}} + 4 \cdot 3^x - \frac{1}{x}\right) dx$

$$= \int x^{\frac{5}{2}}dx + 4\int 3^x dx - \int \frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + 4 \cdot \frac{3^x}{\log_e 3} - \log |x| + c$$

$$= \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{4 \cdot 3^x}{\log_e 3} - \log |x| + c$$

(2) $I = \int \frac{(2x+1)^3}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{8x^3+1+12x^2+6x}{\sqrt{x}}\,dx$

$$= \int \left(\frac{8x^3}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{12x^2}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{6x}{x^{\frac{1}{2}}}\right) dx$$

$$= 8\int x^{\frac{5}{2}}dx + \int x^{-\frac{1}{2}}dx + 12\int x^{\frac{3}{2}}dx + 6\int x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= 8 \cdot \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 12 \cdot \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 6 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{16}{7}x^{\frac{7}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{24}{5}x^{\frac{5}{2}} + 4x^{\frac{3}{2}} + c$$

(3) $I = \int \left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x} + x^a + a^x\right) dx = \frac{1}{a}\int x\,dx + a\int \frac{1}{x}\,dx + \int x^a dx + \int a^x dx$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{x^2}{2} + a\log|x| + \frac{x^{a+1}}{a+1} + \frac{a^x}{\log_e a} + c$$

$$= \frac{x^2}{2a} + a\log|x| + \frac{x^{a+1}}{a+1} + \frac{a^x}{\log_e a} + c$$

(4) $I = \int \frac{1}{1+\cos 2x}\,dx = \int \frac{1}{2\cos^2 x}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int \sec^2 x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\tan x + c$$

(5) $I = \int \frac{1}{9-x^2}\,dx = \int \frac{1}{(3)^2-(x)^2}\,dx$

$$= \frac{1}{2(3)}\log\left|\frac{x+3}{x-3}\right| + c$$

$$= \frac{1}{6}\log\left|\frac{x+3}{x-3}\right| + c$$

(6) $I = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-2^2}}\,dx$

$$= \log|x + \sqrt{(x)^2-(2)^2}| + c$$

$$= \log|x + \sqrt{x^2-4}| + c$$

ઉદાહરણ 2 : નીચે આપેલાં મૂલ્યો મેળવો :

(1) $\int \frac{dx}{4x^2+9}$ (2) $\int \frac{dx}{9x^2-25}$, $x^2 \neq \frac{25}{9}$ (3) $\int \frac{(x^4+x^2+3)dx}{2(x^2+1)}$ (4) $\int \frac{(x^2+5)dx}{x^2-5}$, $x^2 \neq 5$

(5) $\int \frac{\sin x\,dx}{1+\sin x}$ (6) $\int \sec^2 x \cdot \mathrm{cosec}^2 x\,dx$

ઉકેલ : (1) $I = \int \frac{1}{4x^2+9}\,dx$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^2+\frac{9}{4}}\,dx$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{1}{(x)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)} \; tan^{-1}\left(\frac{x}{\frac{3}{2}}\right) + c$$

$$= \frac{1}{6} \, tan^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right) + c$$

(2) $I = \int \frac{1}{9x^2 - 25} \, dx$

$$= \frac{1}{9} \int \frac{1}{x^2 - \frac{25}{9}} \, dx$$

$$= \frac{1}{9} \int \frac{1}{(x)^2 - \left(\frac{5}{3}\right)^2} \, dx$$

$$= \frac{1}{9} \frac{1}{2\left(\frac{5}{3}\right)} \log \left| \frac{x - \frac{5}{3}}{x + \frac{5}{3}} \right| + c$$

$$= \frac{1}{30} \log \left| \frac{3x - 5}{3x + 5} \right| + c$$

(3) $I = \int \frac{x^4 + x^2 + 3}{2(x^2 + 1)} \, dx$

$$= \int \frac{x^2 (x^2 + 1) + 3}{2(x^2 + 1)} \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \left(x^2 + \frac{3}{x^2 + 1} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int x^2 dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x^2 + 1^2} \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right] + \frac{3}{2} \; tan^{-1}x + c$$

$$= \frac{x^3}{6} + \frac{3}{2} \; tan^{-1}x + c$$

(4) $I = \int \frac{x^2 + 5}{x^2 - 5} \, dx, \; x^2 \neq 5$

$$= \int \frac{(x^2 - 5) + 10}{x^2 - 5} \, dx$$

$$= \int \left(1 + \frac{10}{x^2 - 5} \right) dx$$

$$= \int dx + 10 \int \frac{1}{(x)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2} \, dx$$

$$= x + \frac{10}{2\sqrt{5}} \log \left| \frac{x - \sqrt{5}}{x + \sqrt{5}} \right| + c$$

$$= x + \sqrt{5} \log \left| \frac{x - \sqrt{5}}{x + \sqrt{5}} \right| + c$$

(5) $I = \int \frac{sinx}{1 + sinx} \, dx$

$$= \int \frac{sinx}{1 + sinx} \times \frac{1 - sinx}{1 - sinx} \, dx$$

$$= \int \frac{sinx - sin^2x}{1 - sin^2x} \, dx$$

$$= \int \frac{sinx - sin^2x}{cos^2x} \, dx$$

$$= \int \left(\frac{sinx}{cos^2x} - \frac{sin^2x}{cos^2x} \right) dx$$

$$= \int (secx \; tanx - tan^2x) \, dx$$

$$= \int secx \; tanx \, dx - \int (sec^2x - 1) \, dx$$

$$= \int secx \; tanx \, dx - \int sec^2x \, dx + \int 1 \, dx$$

$$= secx - tanx + x + c$$

(6) $I = \int sec^2x \cdot cosec^2x \, dx$

$$= \int \frac{1}{cos^2x \, sin^2x} \, dx$$

$$= \int \frac{sin^2x + cos^2x}{sin^2x \cdot cos^2x} \, dx$$

$$= \int \left(\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \right) dx$$

$$= \int (\sec^2 x + \mathrm{cosec}^2 x)\, dx$$

$$= \int \sec^2 x\, dx + \int \mathrm{cosec}^2 x\, dx$$

$$= \tan x - \cot x + c$$

ઉદાહરણ 3 : $\int \frac{\cos 2x - \cos 2\alpha}{\cos x - \cos \alpha}\, dx$ નું મૂલ્ય મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \frac{\cos 2x - \cos 2\alpha}{\cos x - \cos \alpha}\, dx$

$$= \int \frac{(2\cos^2 x - 1) - (2\cos^2 \alpha - 1)}{(\cos x - \cos \alpha)}\, dx$$

$$= 2 \int \frac{\cos^2 x - \cos^2 \alpha}{\cos x - \cos \alpha}\, dx$$

$$= 2 \int (\cos x + \cos \alpha)\, dx$$

$$= 2 \int \cos x\, dx + 2\cos \alpha \int 1\, dx$$

$$= 2 \sin x + 2\cos \alpha \cdot x + c$$

$$= 2 (\sin x + x\cos \alpha) + c$$

ઉદાહરણ 4 : $\int \tan^{-1} \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}\, dx$ મેળવો. $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

ઉકેલ : $I = \int \tan^{-1} \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}\, dx$

$$= \int \tan^{-1} \sqrt{\frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}}\, dx$$

$$= \int \tan^{-1} \left| \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \right| dx$$

હવે $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. તેથી $-\frac{\pi}{4} < -\frac{x}{2} < \frac{\pi}{4}$.

$\therefore \quad 0 < \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$.

$\therefore \quad I = \int \tan^{-1} \left(\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \right) dx \qquad \left(0 < \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) < \frac{\pi}{2}\right)$

$$= \int \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{\pi}{4}x - \frac{x^2}{4} + c$$

ઉદાહરણ 5 : જો $f'(x) = 3x^2 - \frac{2}{x^3}$ અને $f(1) = 4$, તો $f(x)$ શોધો.

ઉકેલ : $f'(x) = 3x^2 - \frac{2}{x^3}$

$\therefore \quad f(x) = \int (3x^2 - 2x^{-3})\, dx$

$\therefore \quad f(x) = 3\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^{-2}}{-2} + c$

$\therefore \quad f(x) = x^3 + \frac{1}{x^2} + c$ **(i)**

હવે, $f(1) = 1^3 + \frac{1}{1^2} + c$

$\therefore \quad 4 = 1 + 1 + c$

$\therefore \quad c = 2$ **($f(1) = 4$)**

$\therefore \quad f(x) = x^3 + \frac{1}{x^2} + 2$ **((i)માં $c = 2$ મૂકતાં)**

સ્વાધ્યાય 6.1

નીચે આપેલાં યોગ્ય પ્રદેશ પર વ્યાખ્યાયિત અને પ્રતિવિકલનીય વિધેયોનાં x વિશે સંકલિતો મેળવો :

1. $3x^2 + 5x - 4 + \frac{7}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$
2. $\frac{5x^3 + x^2 + 2}{\sqrt{x}}$
3. $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3$
4. $(ax^2 + bx + c)\sqrt{x}$
5. $x^e + e^x + e^e$
6. $e^{a \log x} + e^{x \log a}$
7. $\frac{x^3 - 8}{x^2 - 2x}$
8. $2^x + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$
9. $\frac{2x^3 + 18x - 1}{x^2 + 9}$
10. $\frac{2x^4 + 7x^3 + 6x^2}{x^2 + 2x}$
11. $\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + x + 1}$
12. $\frac{x^6 + 2}{x^2 + 1}$
13. $\frac{x^4 + 1}{x^2 + 1}$
14. $3\sin x + 5\cos x + \frac{7}{\cos^2 x} - \frac{4}{\sin^2 x} + \tan^2 x$
15. $\frac{2 + 3\cos x}{\sin^2 x}$
16. $(2\tan x - 3\cot x)^2$
17. $\frac{\cos 2x}{\sin^2 2x}$
18. $\frac{\cos x}{\cos x - 1}$
19. $\frac{1}{1 + \cos x}$
20. $\frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$
21. $\frac{\cot x}{\operatorname{cosec} x - \cot x}$
22. $\frac{\tan x}{\sec x + \tan x}$
23. $(a\tan x + b\cot x)^2$
24. $\frac{x^2}{x^2 - 3}$
25. જો $f'(x) = 8x^3 - 2x$, $f(2) = 8$, તો $f(x)$ શોધો.

*

6.5 સંકલન માટે આદેશની રીત

આપેલું વિધેય કોઈ પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં હોય, તો તેનું સંકલન સરળતાથી મળે તે આપણે જોયું. પણ જો સંકલ્ય $f(x)$ પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં ન હોય અથવા પ્રમાણિત રૂપમાં મૂકી શકાય તેમ પ્રત્યક્ષ રીતે જણાતું ન હોય, તો પ્રતિવિકલિત શોધવા માટે આદેશની રીત (Method of Substitution) એ એક અતિઉપયોગી રીત છે.

યોગ્ય આદેશ $x = \phi(t)$ દ્વારા $\int f(x)dx$ નું રૂપાંતર $\int g(t)dt$ સ્વરૂપે કરવામાં આવે છે, જ્યાં $g(t)$ માટે આગળ આવી ગયેલ રીત કે પ્રમાણિત સ્વરૂપથી પ્રતિવિકલન શક્ય હોય. નીચે આપેલા પ્રમેયને **આદેશની રીતનો પ્રમેય** કહે છે.

પ્રમેય 6.4 (આદેશની રીત) : $g : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ સતત તથા (α, β) પર વિકલનીય વિધેય છે. $g'(t)$ એ (α, β) પર સતત છે તથા $g'(t) \neq 0$, $\forall t \in (\alpha, \beta)$. વળી, gનો વિસ્તાર $[a, b]$ નો ઉપગણ હોય એટલે કે $\mathbf{R}_g \subset [a, b]$ અને $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ સતત હોય, તો $x = g(t)$ લેતાં,

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))\ g'(t)dt.$$

સાબિતી : f એ $[a, b]$ પર સતત હોવાથી $\int f(x)dx$ નું અસ્તિત્વ છે. વળી $x = g(t)$ એ $[\alpha, \beta]$ પર સતત છે અને $f(x)$ સતત છે.

આથી, $f(g(t))$ પણ સતત છે. $g'(t)$ પણ સતત છે. $f(g(t)) \cdot g'(t)$ પણ સતત થશે. આમ,

$\int f(g(t)) \cdot g'(t)dt$ નું પણ અસ્તિત્વ છે.

ધારો કે, $h(x) = \int f(x)dx$

$\therefore \quad h'(x) = f(x)$

વળી, $x = g(t)$ હોવાથી,

$\therefore \quad h'(g(t)) = f(g(t))$

વળી, h એ xનું વિકલનીય વિધેય છે અને x એ tનું વિકલનીય વિધેય છે. આથી h એ tનું વિકલનીય વિધેય છે.

$$\therefore \quad \frac{d}{dt} h(g(t)) = \frac{d}{dt}(hog)(t)$$
$$= h'(g(t))\ g'(t)$$
$$= f(g(t))\ g'(t)$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt} h(g(t)) = f(g(t))\ g'(t)$$

$$\therefore \quad h(g(t)) = \int f(g(t))\ g'(t)dt$$

$$\therefore \quad h(x) = \int f(g(t))\ g'(t)dt$$

$$\therefore \quad \int f(x)dx = \int f(g(t))\ g'(t)dt$$

ડાબી બાજુએ xનું વિધેય છે તથા જમણી બાજુએ t નું વિધેય છે. પરંતુ $g'(t)$ સતત અને શૂન્યેતર હોવાથી $x = g(t)$ એક-એક વિધેય છે, આથી $t = g^{-1}(x)$ દ્વારા જમણી બાજુનું રૂપાંતર xના વિધેયમાં થઈ શકે.

આ રીતમાં ચલ xને બદલે નવો ચલ t દાખલ થતો હોવાથી, તેને **ચલ-પરિવર્તનની રીત** પણ કહે છે.

નોંધ : (1) આદેશની રીતના સૂત્રમાં જમણી બાજુ $g(t) = x$ મૂકતાં તેનું સ્વરૂપ $\int f(x)dx = \int f(x)\frac{dx}{dt}dt$ થશે.

(2) વ્યાખ્યા અનુસાર, $y = f(x)$, $f'(x) = \frac{dy}{dx}$.

અહીં, $\frac{dy}{dx}$ એ dy અને dx નું ગુણોત્તર નથી.

પરંતુ $f'(x) = \frac{(dy)}{(dx)}$ જ્યાં (dx) અને (dy) અનુક્રમે x અને y નાં વિકલ છે. આમ આપણે $dy = f'(x)dx$ લખી શકીએ. આથી જો $t = sinx$, તો $dt = cosx\ dx$. (આવતા સિમેસ્ટરમાં આપણે આનો વિગતે અભ્યાસ કરીશું.)

(3) સામાન્ય રીતે વ્યવહારમાં વપરાતાં વિધેયો e^x, $sinx$, $cosx$, $secx$ વગેરે કોઈક અંતરાલમાં ઉપરની શરતોનું પાલન કરતાં જ હોય છે, આથી દાખલા ગણતી વખતે તે શરતોની ચકાસણીમાં ઉતરીશું નહીં.

પ્રમેય 6.5 : જો $\int f(x)dx = F(x)$ હોય, તો $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)$, જ્યાં $f : I \to R$ એ અંતરાલ I માં સતત વિધેય છે. ($a \neq 0$).

સાબિતી : ધારો કે, $t = ax + b$. એટલે કે $x = \frac{t-b}{a}$.

અહીં, $x = g(t)$ સતત છે અને $\frac{dx}{dt} = g'(t) = \frac{1}{a} \neq 0$. વળી, $g'(t)$ પણ સતત છે.

$$\therefore \int f(ax+b)dx = \int f(t) \cdot \frac{dx}{dt}dt$$

$$= \int f(t)\frac{1}{a} \cdot dt$$

$$= \frac{1}{a}\int f(t)dt$$

$$= \frac{1}{a}F(t)$$

$$= \frac{1}{a}F(ax+b)$$

આમ, (1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ હોવાથી $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$

(2) $\int \frac{1}{x}dx = \log|x| + c$ હોવાથી $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\log|ax+b| + c$

(3) $\int cosx\, dx = sinx + c$ હોવાથી $\int cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}sin(ax+b) + c$

(4) $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$ હોવાથી $\int \frac{1}{(px+q)^2-(a)^2}dx = \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{2a}\log\left|\frac{(px+q)-(a)}{(px+q)+(a)}\right| + c$

આગળ આવી ગયેલા બધાં જ પ્રમાણિત રૂપો માટે આપણે આનો ઉપયોગ કરી શકીએ છીએ.

પ્રમેય 6.6 : $\int [f(x)]^n \cdot f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}$, ($n \neq -1$, $f(x) > 0$) જ્યાં f, f' સતત વિધેયો છે અને $f'(x) \neq 0$.

સાબિતી : ધારો કે $t = f(x)$. તેથી $1 = f'(x)\frac{dx}{dt}$

વળી, $f'(x) \neq 0$ તથા તે સતત હોવાથી $t = f(x)$ એક-એક વિધેય છે.

$$\int [f(x)]^n \cdot f'(x)dx = \int [f(x)]^n \cdot \left(f'(x)\frac{dx}{dt}\right)dt$$

$$= \int t^n \cdot 1\, dt$$

$$= \frac{t^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\therefore \int [f(x)]^n \cdot f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c \qquad (t = f(x))$$

આમ, (1) $\int sin^2x \cdot cosx\, dx = \int (sinx)^2 \cdot \left(\frac{d}{dx}sinx\right)dx = \frac{(sinx)^{2+1}}{2+1} + c = \frac{sin^3x}{3} + c$

(2) $\int \frac{\sqrt{tanx}}{cos^2x}dx = \int (tanx)^{\frac{1}{2}} \cdot sec^2x\, dx = \int (tanx)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{d}{dx}tanx\right)dx = \frac{(tanx)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c$

$$= \frac{2}{3}(tanx)^{\frac{3}{2}} + c$$

(3) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+5}}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int (x^2+5)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}(x^2+5)dx = \frac{1}{2}\,\frac{(x^2+5)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = \sqrt{x^2+5} + c$$

પ્રમેય 6.7 : જો f એ $[a, b]$ માં સતત તથા (a, b) માં વિકલનીય હોય તથા f' પણ સતત અને શૂન્યેતર હોય $\forall x \in [a, b]$ અને $f(x) \neq 0$, $\forall x \in [a, b]$, તો $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + c$.

સાબિતી : f' સતત અને શૂન્યેતર છે અને f સતત તથા એકસૂત્રી (વધતું અથવા ઘટતું) વિધેય છે.

આથી, આદેશ $t = f(x)$ પરથી $x = f^{-1}(t)$ મળે.

$\therefore \quad f'(x)\frac{dx}{dt} = 1$

હવે, $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt$

$$= \int \frac{1}{t}\,dt$$

$$= \log|t| + c$$

$\therefore \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + c$

આમ,

(1) $\int \frac{x}{x^2-15}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-15}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\frac{d}{dx}(x^2-15)}{x^2-15}\,dx = \frac{1}{2}\log|x^2-15| + c$$

(2) $\int \frac{2\cos x - 3\sin x}{6\cos x + 4\sin x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{-6\sin x + 4\cos x}{6\cos x + 4\sin x}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\frac{d}{dx}(6\cos x + 4\sin x)}{(6\cos x + 4\sin x)}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\log|6\cos x + 4\sin x| + c$$

6.6 કેટલાંક વધુ પ્રમાણિત રૂપો

(16) કોઈ પણ અંતરાલ $I = \left(k\pi, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$ અથવા $\left((2k-1)\frac{\pi}{2}, k\pi\right)$, $k \in Z$ માં

$\int \tan x\,dx = \log|\sec x| + c$.

અહીં, $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sec x \tan x}{\sec x}\,dx$ $\qquad (\sec x \neq 0)$

હવે આપેલ અંતરાલ પર $t = \sec x$ સતત અને વિકલનીય છે. $\frac{dt}{dx} = \sec x \tan x$ પણ સતત છે અને આપેલ અંતરાલ પર શૂન્યેતર છે.

હવે $t = \sec x$ લેતાં, $dt = \sec x \tan x\,dx$

$\therefore \quad \int \tan x\,dx = \int \frac{\sec x \tan x}{\sec x}\,dx$

$$= \int \frac{1}{t}\,dt$$

$= \log |t| + c$

$= \log |secx| + c$

(17) કોઈ પણ અંતરાલ $I = \left(k\pi, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$ અથવા $\left((2k-1)\frac{\pi}{2}, k\pi\right)$, $k \in Z$ પર

$\int cotx\ dx = \log |sinx| + c.$

અહીં, $\int cotx\ dx = \int \frac{cosx}{sinx}\ dx$

હવે આપેલ અંતરાલ પર $t = sinx$ સતત અને વિકલનીય છે તથા આપેલ અંતરાલ પર શૂન્યેતર છે. $\frac{dt}{dx} = cosx$ પણ સતત છે તથા આપેલ અંતરાલ પર શૂન્યેતર છે.

હવે, $t = sinx$ લેતાં, $dt = cosx\ dx$

$\therefore \int cotx\ dx = \int \frac{cosx}{sinx}\ dx$

$= \int \frac{1}{t}\ dt$

$= \log |t| + c$

$= \log |sinx| + c$

(18) કોઈ પણ અંતરાલ $I = \left(k\pi, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$ અથવા $\left((2k-1)\frac{\pi}{2}, k\pi\right)$, $k \in Z$ પર

$\int cosecx\ dx = \log |cosecx - cotx| + c,\ x \neq k\pi,\ k \in Z$

$= \log \left|tan\frac{x}{2}\right| + c$

આપેલ અંતરાલ પર $1 - cosx \neq 0$ અને $sinx \neq 0$

$\therefore\ cosecx - cotx = \frac{1 - cosx}{sinx} \neq 0.$

હવે, $I = \int cosecx\ dx = \int \frac{cosecx\ (cosecx - cotx)}{(cosecx - cotx)}\ dx$

$= \int \frac{cosec^2x - cotx\ cosecx}{cosecx - cotx}\ dx$

હવે, $t = cosecx - cotx$ એ આપેલ અંતરાલ પર સતત, વિકલનીય અને શૂન્યેતર છે.

$\frac{dt}{dx} = cosec^2x - cosecx\ cotx$ એ આપેલ અંતરાલ પર સતત અને શૂન્યેતર છે.

$\therefore\ I = \int \frac{1}{t}\ dt$

$= \log |t| + c$

$= \log |cosecx - cotx| + c$

વળી, $\log |cosecx - cotx| = \log \left|\frac{1 - cosx}{sinx}\right|$

$= \log \left|\frac{2sin^2\frac{x}{2}}{2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}\right|$

$= \log \left|tan\frac{x}{2}\right|$

આમ, $\int cosecx\ dx = \log |cosecx - cotx| + c$

$= \log \left|tan\frac{x}{2}\right| + c$

(19) કોઈ પણ અંતરાલ $I = \left(k\pi, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$ અથવા $\left((2k-1)\frac{\pi}{2}, k\pi\right)$, $k \in Z$ પર

$$\int secx\ dx = \log|secx + tanx| + c$$

$$= \log\left|tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| + c$$

$secx + tanx = \frac{1+sinx}{cosx}$, $x \neq (4k-1)\frac{\pi}{2}$, $k \in Z$.

આપેલ અંતરાલ પર $1 + sinx \neq 0$ અને $cosx \neq 0$

હવે, $I = \int secx\ dx = \int \frac{secx\,(secx + tanx)}{secx + tanx}\,dx$

હવે, $t = secx + tanx$ એ આપેલ અંતરાલ પર સતત, વિકલનીય અને શૂન્યેતર છે.

$\frac{dt}{dx} = secx\ tanx + sec^2x$ પણ આપેલ અંતરાલ પર સતત અને શૂન્યેતર છે.

$$\therefore \quad I = \int \frac{sec^2x + secx\,tanx}{secx + tanx}\,dt$$

$$= \int \frac{1}{t}\,dt$$

$$= \log|t| + c$$

$$= \log|secx + tanx| + c$$

વળી, $\log|secx + tanx| = \log\left|\frac{1+sinx}{cosx}\right|$

$$= \log\left|\frac{sin^2\frac{x}{2} + cos^2\frac{x}{2} + 2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2}}\right|$$

$$= \log\left|\frac{(cos\frac{x}{2} + sin\frac{x}{2})^2}{(cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2})}\right|$$

$$= \log\left|\frac{cos\frac{x}{2} + sin\frac{x}{2}}{cos\frac{x}{2} - sin\frac{x}{2}}\right|$$

$$= \log\left|\frac{1 + tan\frac{x}{2}}{1 - tan\frac{x}{2}}\right|$$

$$= \log\left|tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|$$

આમ, $\int secx\ dx = \log|secx + tanx| + c$

$$= \log\left|tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| + c$$

ઉદાહરણ 6 : $\int \frac{2x^3 + 5x^2 + 3x + 1}{2x - 1}\,dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \frac{2x^3 + 5x^2 + 3x + 1}{2x - 1}\,dx$

$$= \int \frac{(2x-1)(x^2+3x+3)+4}{2x-1}\,dx$$

$$= \int \left(x^2 + 3x + 3 + \frac{4}{2x-1}\right) dx$$

$$= \int x^2 dx + 3\int x\, dx + 3\int dx + 4\int \frac{1}{2x-1}\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + 3\,\frac{x^2}{2} + 3x + 4 \cdot \frac{1}{2} \log|2x-1| + c$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 3x + 2\log|2x-1| + c$$

ઉદાહરણ 7 : $\int \left(\frac{1}{\sqrt{16-9x^2}} + \frac{1}{25-9x^2}\right) dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \left(\frac{1}{\sqrt{16-9x^2}} + \frac{1}{25-9x^2}\right) dx$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{(4)^2-(3x)^2}}\, dx + \int \frac{1}{(5)^2-(3x)^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{3} sin^{-1}\left(\frac{3x}{4}\right) + \frac{1}{2(5)} \times \frac{1}{3} \log\left|\frac{5+3x}{5-3x}\right| + c$$

$$= \frac{1}{3} sin^{-1} \frac{3x}{4} + \frac{1}{30} \log\left|\frac{5+3x}{5-3x}\right| + c$$

ઉદાહરણ 8 : $\int (7x+5)\sqrt{3x+2}\, dx$ મેળવો.

ઉકેલ : આપણે એવા અચળો m અને n મેળવીશું, કે જેથી

$$7x + 5 = m(3x+2) + n$$

$$7x + 5 = 3mx + 2m + n$$

બંને બાજુએ x ના સહગુણક અને અચળ પદ સરખાવતાં,

$3m = 7$ અને $2m + n = 5$

$\therefore \quad m = \frac{7}{3}$ અને $\frac{14}{3} + n = 5$. આમ, $n = 5 - \frac{14}{3} = \frac{1}{3}$

$\therefore \quad I = \int [m(3x+2)+n]\sqrt{3x+2}\, dx$

$$= \int \left[\frac{7}{3}(3x+2) + \frac{1}{3}\right]\sqrt{3x+2}\, dx$$

$$= \int \left[\frac{7}{3}(3x+2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}(3x+2)^{\frac{1}{2}}\right] dx$$

$$= \frac{7}{3}\int (3x+2)^{\frac{3}{2}} dx + \frac{1}{3}\int (3x+2)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{7}{3}\,\frac{(3x+2)^{\frac{5}{2}}}{3 \times \frac{5}{2}} + \frac{1}{3}\,\frac{(3x+2)^{\frac{3}{2}}}{3 \times \frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{14}{45}(3x+2)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{27}(3x+2)^{\frac{3}{2}} + c$$

ઉદાહરણ 9 : $\int \frac{3x+4}{\sqrt{4x+5}}\,dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \frac{3x+4}{\sqrt{4x+5}}\,dx$

$$= \int \frac{\frac{3}{4}(4x+5)+\frac{1}{4}}{\sqrt{4x+5}}\,dx$$

$$= \frac{3}{4}\int \frac{4x+5}{\sqrt{4x+5}}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{4x+5}}\,dx$$

$$= \frac{3}{4}\int (4x+5)^{\frac{1}{2}}\,dx + \frac{1}{4}\int (4x+5)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{3}{4}\,\frac{(4x+5)^{\frac{3}{2}}}{4\times\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}\,\frac{(4x+5)^{\frac{1}{2}}}{4\times\frac{1}{2}} + c$$

$$= \frac{1}{8}(4x+5)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8}(4x+5)^{\frac{1}{2}} + c$$

ઉદાહરણ 10 : $\int sin^4x\, cos^4x\, dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int sin^4x\, cos^4x\, dx.$

$$= \frac{1}{16}\int (2sinx\, cosx)^4\,dx$$

$$= \frac{1}{16}\int (sin2x)^4\,dx$$

$$= \frac{1}{16}\int \left(\frac{1-cos\,4x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{64}\int (1 - 2cos\,4x + cos^2 4x)\,dx$$

$$= \frac{1}{64}\int \left(1 - 2cos\,4x + \left(\frac{1+cos\,8x}{2}\right)\right) dx$$

$$= \frac{1}{128}\int (3 - 4cos\,4x + cos\,8x)\,dx$$

$$= \frac{1}{128}\left[3x - \frac{4sin\,4x}{4} + \frac{sin\,8x}{8}\right] + c$$

$$= \frac{1}{128}\left[3x - sin\,4x + \frac{1}{8}sin\,8x\right] + c$$

ઉદાહરણ 11 : $\int sinax\, cosbx\, dx,\ a \neq \pm b$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int (sinax\, cosbx)\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int (2sinax\, cosbx)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int [sin\,(ax+bx) + sin(ax-bx)]\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int sin\,(a+b)x\,dx + \frac{1}{2}\int sin(a-b)x\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{cos\,(a+b)x}{a+b} - \frac{1}{2}\,\frac{cos\,(a-b)x}{a-b} + c$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{cos\,(a+b)x}{a+b} + \frac{cos\,(a-b)x}{a-b}\right] + c$$

ઉદાહરણ 12 : $\int sinx\ sin2x\ sin3x\ dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int sinx\ sin2x\ sin3x\ dx$

$$= \frac{1}{2}\int (2sin\ 2x \cdot sinx) \cdot sin3x\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (cosx - cos3x)\ sin3x\ dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (2sin\ 3x\ cosx - 2sin\ 3x\ cos3x)\ dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (sin\ 4x + sin\ 2x - sin\ 6x)\ dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\frac{cos4x}{4} - \frac{cos2x}{2} + \frac{cos6x}{6}\right] + c$$

$$= \frac{1}{24}\ cos6x - \frac{1}{16}\ cos4x - \frac{1}{8}\ cos2x + c$$

ઉદાહરણ 13 : $\int \frac{1}{sin(x-a)\ cos(x-b)}\ dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \frac{1}{sin(x-a)\ cos(x-b)}\ dx$

$$= \frac{1}{cos(a-b)}\int \frac{cos(a-b)}{sin(x-a)\ cos(x-b)}\ dx$$

$$= \frac{1}{cos(a-b)}\int \frac{cos[(x-a)-(x-b)]}{sin(x-a)\ cos(x-b)}\ dx \qquad (cos(b-a) = cos(a-b))$$

$$= \frac{1}{cos(a-b)}\int \frac{cos(x-a)\ cos(x-b) + sin(x-a)\ sin(x-b)}{sin(x-a) \cdot cos(x-b)}\ dx$$

$$= \frac{1}{cos(a-b)}\int [cot(x-a) + tan(x-b)]\ dx$$

$$= \frac{1}{cos(a-b)}\ [\log|sin(x-a)| - \log|cos(x-b)|] + c$$

$$= \frac{1}{cos(a-b)}\ \log\left|\frac{sin(x-a)}{cos(x-b)}\right| + c$$

ઉદાહરણ 14 : $\int \frac{sinx\ cosx}{3sin^2x - 4cos^2x}\ dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \frac{sinx\ cosx}{3sin^2x - 4cos^2x}\ dx$

ધારો કે $3sin^2x - 4cos^2x = t$

$\therefore$ $[3(2sinx\ cosx) + 4(2cosx\ sinx)]dx = dt$

$\therefore$ $14sinx\ cosx\ dx = dt$

$\therefore$ $sinx\ cosx\ dx = \frac{1}{14}dt$

$\therefore$ $I = \frac{1}{14}\int \frac{1}{t}\ dt$

$$= \frac{1}{14}\log|t| + c$$

$$= \frac{1}{14}\log|3sin^2x - 4sin^2x| + c$$

ઉદાહરણ 15 : $\int \frac{1}{2 - 3\cos 2x}\, dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \frac{1}{2 - 3\cos 2x}\, dx$

$$= \int \frac{1}{2 - 3\left(\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}\right)}\, dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x\, dx}{2(1 + \tan^2 x) - 3 + 3\tan^2 x}$$

$$= \int \frac{\sec^2 x\, dx}{5\tan^2 x - 1}$$

$\tan x = t$ લેતાં, $\sec^2 x\, dx = dt$

$$\therefore \quad I = \int \frac{dt}{5t^2 - 1}$$

$$= \int \frac{dt}{(\sqrt{5}t)^2 - (1)^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5}} \log \left| \frac{\sqrt{5}t - 1}{\sqrt{5}t + 1} \right| + c$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5}} \log \left| \frac{\sqrt{5}\tan x - 1}{\sqrt{5}\tan x + 1} \right| + c$$

ઉદાહરણ 16 : $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{1 - 9\sin x}}\, dx$ મેળવો. $\left(\sin x < \frac{1}{9}\right)$

ઉકેલ : $I = \int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{1 - 9\sin x}}\, dx$

$1 - 9\sin x = t^3$ લેતાં,

$-9\cos x\, dx = 3t^2\, dt$

$$\therefore \quad I = \int \frac{-\frac{1}{9} 3t^2\, dt}{t}$$

$$= -\frac{1}{3} \int t\, dt$$

$$= \frac{-t^2}{6} + c$$

$$= -\frac{1}{6}(1 - 9\sin x)^{\frac{2}{3}} + c$$

ઉદાહરણ 17 : $\int \frac{\cos^9 x}{\sin x}\, dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \frac{\cos^9 x}{\sin x}\, dx$

$\sin x = t$ લેતાં, $\cos x\, dx = dt$

$$\therefore \quad I = \int \frac{(\cos^2 x)^4}{\sin x} \cos x\, dx$$

$$= \int \frac{(1 - \sin^2 x)^4}{\sin x} \cos x\, dx$$

$$= \int \frac{(1 - t^2)^4}{t}\, dt$$

$$= \int \frac{1 - 4t^2 + 6t^4 - 4t^6 + t^8}{t}\, dt$$

$$= \int \left(\frac{1}{t} - 4t + 6t^3 - 4t^5 + t^7\right) dx$$

$$= \log|t| - \frac{4t^2}{2} + \frac{6t^4}{4} - \frac{4t^6}{6} + \frac{t^8}{8} + c$$

$$= \log|\sin x| - 2\sin^2 x + \frac{3}{2}\sin^4 x - \frac{2}{3}\sin^6 x + \frac{1}{8}\sin^8 x + c$$

ઉદાહરણ 18 : $\int \frac{x^2 \sin^{-1}(x^3)}{\sqrt{1 - x^6}}\, dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \frac{x^2 \sin^{-1}(x^3)}{\sqrt{1 - x^6}}\, dx$

$\sin^{-1} x^3 = t$ લેતાં, $\frac{3x^2 dx}{\sqrt{1 - x^6}} = dt$

$$\frac{x^2\, dx}{\sqrt{1 - x^6}} = \frac{1}{3} dt$$

$$\therefore \quad I = \int \sin^{-1}(x^3) \cdot \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1 - x^6}}$$

$$= \int \frac{1}{3} t \cdot dt$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{t^2}{2}\right] + c$$

$$= \frac{1}{6}[\sin^{-1}(x^3)]^2 + c$$

સ્વાધ્યાય 6.2

યોગ્ય પ્રદેશ પર વ્યાખ્યાયિત નીચે આપેલાં વિધેયોનાં x વિશે સંકલિતો મેળવો :

1. $\frac{1}{5x-3}$ **2.** $e^{7x+4} + (5x-3)^8$ **3.** $\frac{7^{2x+3}\sin^2 2x + \cos^2 2x}{\sin^2 2x}$

4. $5^{4x+3} - 3\sin(2x+3)$ **5.** $\frac{1}{\sqrt{5x^2-4}}$ **6.** $\frac{1}{\sqrt{16-9x^2}}$

7. $\frac{1}{\sqrt{5x^2+3}} + \frac{1}{9-4x^2}$ **8.** $\frac{1}{\sqrt{2x^2+3}} + \frac{1}{7x^2+3}$ **9.** $\frac{(2x+1)^2}{x-2}$

10. $\frac{x^5+2}{x+1}$ **11.** $\frac{1}{\sqrt{5-3x}}$ **12.** $3^{5x-2} + \frac{1}{(2x+1)^3}$

13. $\cot^2(3+5x)$ **14.** $\sin^2(3x+5)$ **15.** $\frac{1-\cos 3x}{\sin^2 3x}$

16. $\sqrt{1+\cos x}$, $0 < x < \pi$ **17.** $\frac{1}{\sqrt{3x+4}-\sqrt{3x+1}}$ **18.** $\frac{1}{\sqrt{5-2x}+\sqrt{3-2x}}$

19. $\frac{x+2}{(x+1)^2}$ **20.** $\frac{x^2+1}{(x+1)^2}$ **21.** $\frac{x^3+3x^2+2x+1}{x-1}$

22. $x\sqrt{x+3}$ **23.** $\frac{x}{\sqrt{x+1}}$ **24.** $\frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}$

25. $\frac{8x+13}{\sqrt{4x+7}}$ **26.** $\cos^4 x$ **27.** $\sin^3 x \cos^3 x$

28. $\sin^3(2x-1)$ **29.** $\cos 2x \cdot \cos 4x$ **30.** $\frac{\sin 4x}{\sin x}$

31. $\cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 6x$ **32.** $\frac{1}{\sqrt{1-\cos x}}$

33. $\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$ $0 < x < \pi$ **34.** $\sin mx \cdot \sin nx$, $m \neq n$, $m, n \in N$

35. $\frac{\sin x}{\sin(x-a)}$ **36.** $\frac{1}{\sin(x-a)\sin(x-b)}$ **37.** $\frac{3x+2}{3-2x}$

38. $(3x^2-4x+5)^{\frac{3}{2}}(3x-2)$ **39.** $\frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x+4}}$ **40.** $x^3\sqrt{5x^4+3}$

41. $\frac{\sin^2(\log x)}{x}$ **42.** $\frac{\sqrt{1+\log x}}{x}$ **43.** $\frac{\sin 2x}{(m+n\cos 2x)^2}$

44. $\frac{1-\tan x}{1+\tan x}$ **45.** $\frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)}$ **46.** $e^{-x}\operatorname{cosec}^2(2e^{-x}+3)$

47. $\frac{x^{e-1}+e^{x-1}}{x^e+e^x}$ **48.** $\frac{(3\tan^2 x+2)\sec^2 x}{(\tan^3 x+2\tan x+9)^2}$ **49.** $\frac{\sin 2x}{(b\cos^2 x+a\sin^2 x)^2}$

50. $\frac{\tan x}{a^2+b^2\tan^2 x}$, $(a < b)$ **51.** $\frac{x\sin^{-1}x^2}{\sqrt{1-x^4}}$ **52.** $\frac{(\tan^{-1}x)^{-\frac{3}{2}}}{1+x^2}$

53. $\dfrac{e^x \log(\sin e^x)}{\tan e^x}$ 54. $\dfrac{\log(x+1) - \log x}{x(x+1)}$ 55. $\tan^3 x$

56. $\sec^4 x \ \tan x$ 57. $\tan^6 x$ 58. $\dfrac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}}$

59. $\dfrac{x^2}{(x+2)^{\frac{1}{3}}}$ 60. $\dfrac{1}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$ 61. $\dfrac{1}{3 - 2\sin^2 x}$

62. $\dfrac{\sin x}{\sin 3x}$ 63. $\dfrac{1}{8\cos^2 x + 3\sin^2 x + 1}$ 64. $\dfrac{1}{3\sin^2 x + \cos 2x}$

*

6.7 ત્રિકોણમિતીય આદેશો

કેટલીકવાર યોગ્ય ત્રિકોણમિતીય આદેશની મદદથી આપેલા સંકલ્યને એવા સરળ સ્વરૂપમાં ફેરવી શકાય કે જેથી તેનું સંકલિત સહેલાઈથી પ્રાપ્ત થઈ શકે. ખાસ કરીને સંકલ્ય $\sqrt{x^2 - a^2}$, $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{x^2 + a^2}$ જેવાં સ્વરૂપમાં હોય ત્યારે ત્રિકોણમિતીય આદેશ બહુ ઉપયોગી છે. આ સમજવા આપણે એક ઉદાહરણ લઈએ.

ધારો કે $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx$ મેળવવું છે. $(0 < x < 2)$

$x = 2\sin\theta$ લેતાં, $dx = 2\cos\theta\, d\theta$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\therefore \quad I = \int \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx$$

$$= \int \frac{4\sin^2\theta}{\sqrt{4 - 4\sin^2\theta}} \cdot 2\cos\theta\, d\theta$$

$$= \int \frac{4\sin^2\theta \cdot 2\cos\theta\, d\theta}{2\cos\theta} \qquad \left(\cos\theta > 0 \text{ કારણ કે } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= 4\int \sin^2\theta\, d\theta$$

$$= 4\int \frac{1 - \cos 2\theta}{2}\, d\theta$$

$$= 2\left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right] + c$$

$$= 2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + c$$

પરંતુ, $x = 2\sin\theta$. આથી $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$2\sin\theta\cos\theta = 2 \cdot \frac{x}{2}\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}x\sqrt{4 - x^2}$$

$$\therefore \quad I = 2\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}x\sqrt{4 - x^2} + c$$

કેટલાંક વારંવાર ઉપયોગમાં આવતાં વિધેયો અને તેમનાં સંકલિતો શોધવા માટે ઉપયોગમાં લેવાતા ત્રિકોણમિતીય આદેશોની યાદી નીચે આપી છે. તે મહદ્અંશે સંકલ્યમાંથી વર્ગમૂળ દૂર કરે છે. અહીં આપણે $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ લઈશું.

સંકલ્ય	આદેશ
$\sqrt{x^2+a^2}$	$x = a\tan\theta$ અથવા $x = a\cot\theta$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a\sec\theta$ અથવા $x = a\operatorname{cosec}\theta$
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a\sin\theta$ અથવા $x = a\cos\theta$
$\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$	$x = a\cos2\theta$
$\sqrt{2ax-x^2}$	$x = 2a\sin^2\theta$
$\sqrt{2ax-x^2} = \sqrt{a^2-(x-a)^2}$	$x - a = a\sin\theta$ અથવા $a\cos\theta$

ઉદાહરણ 19 : $\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-b^4}}\,dx$ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, $I = \int \frac{1}{x\sqrt{x^4-b^4}}\,dx$

ધારો કે $x^2 = b^2\sec\theta$ $\quad (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$

$\therefore \quad 2x\,dx = b^2\sec\theta\,\tan\theta\,d\theta$

$$\therefore \quad I = \int \frac{2x\,dx}{2x^2\sqrt{x^4-b^4}}$$

$$= \int \frac{b^2\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{2b^2\sec\theta\sqrt{b^4\sec^2\theta-b^4}}$$

$$= \frac{1}{2b^2}\int d\theta \qquad (\tan\theta > 0)$$

$$= \frac{1}{2b^2}(\theta) + c$$

પરંતુ, $x^2 = b^2\sec\theta$.

આથી $\sec\theta = \frac{x^2}{b^2}$

$\therefore \quad \theta = \sec^{-1}\frac{x^2}{b^2}$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{2b^2}\sec^{-1}\left(\frac{x^2}{b^2}\right) + c$$

ઉદાહરણ 20 : $\int \frac{\sqrt{3-x}}{x}\,dx$ મેળવો. $(0 < x < 3)$

ઉકેલ : અહીં, $I = \int \frac{\sqrt{3-x}}{x}\,dx$

$x = 3\sin^2\theta$ લેતાં, $\quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$dx = 3(2\sin\theta\,\cos\theta)\,d\theta$

$\therefore \quad I = \int \frac{\sqrt{3 - 3sin^2\theta}}{3sin^2\theta}\, 6sin\theta\, cos\theta\, d\theta$

$= \int \frac{2\sqrt{3}\, cos^2\theta}{sin\theta}\, d\theta$

$= 2\sqrt{3} \int \frac{1 - sin^2\theta}{sin\theta}\, d\theta$

$= 2\sqrt{3} \int (cosec\theta - sin\theta)\, d\theta$

$= 2\sqrt{3}\, [\log |cosec\theta - cot\theta| + cos\theta] + c$

પરંતુ $sin^2\theta = \frac{x}{3}$, $cos^2\theta = 1 - \frac{x}{3}$

$\therefore \quad cos\theta = \sqrt{\frac{3-x}{3}}$ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow cos\theta > 0\right)$

$cosec^2\theta = \frac{3}{x}$. આથી $cosec\theta = \sqrt{\frac{3}{x}}$ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

વળી, $1 + cot^2\theta = \frac{3}{x}$. આથી $cot\theta = \sqrt{\frac{3}{x} - 1} = \sqrt{\frac{3-x}{x}}$ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \quad I = 2\sqrt{3}\left[\log\left|\sqrt{\frac{3}{x}} - \sqrt{\frac{3-x}{x}}\right| + \sqrt{\frac{3-x}{3}}\right] + c$

ઉદાહરણ 21 : $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4}\, dx$ મેળવો. $(x < 0)$

ઉકેલ : $I = \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4}\, dx$

ધારો કે $\theta = tan^{-1}x$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$. આથી $x = tan\,\theta$.

આથી $dx = sec^2\theta\, d\theta$, $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$

$\therefore \quad I = \int \frac{\sqrt{tan^2\theta + 1}}{tan^4\theta} \cdot sec^2\theta\, d\theta$

$= \int \frac{sec\,\theta \cdot sec^2\theta}{tan^4\theta}\, d\theta$ $(sec\theta > 0)$

$= \int \frac{cos\theta}{sin^4\theta}\, d\theta$

$= \int (sin\theta)^{-4} \frac{d}{d\theta}(sin\theta)\, d\theta$

$= \frac{(sin\,\theta)^{-3}}{-3} + c$

$= -\frac{1}{3}\, \frac{1}{sin^3\theta} + c$

$= -\frac{1}{3}\, cosec^3\theta + c$

હવે, $tan\theta = x$. આથી $cot\,\theta = \frac{1}{x}$

અને $cosec\theta = -\sqrt{1 + cot^2\theta} = -\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{-\sqrt{x^2+1}}{|x|} = \frac{-\sqrt{x^2+1}}{-x} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < 0\right)$

$\therefore \quad I = -\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)^3 + c$

$= -\frac{1}{3}\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^3} + c$

ઉદાહરણ 22 : $\int \frac{1}{(x-1)^{\frac{3}{2}}(x-2)^{\frac{1}{2}}}\,dx$ મેળવો. $(x > 2)$

ઉકેલ : $I = \int \frac{dx}{(x-1)^{\frac{3}{2}}(x-2)^{\frac{1}{2}}}$

$x - 1 = sec^2\theta$ લઈશું. આથી $dx = 2sec\theta\ sec\theta\ tan\theta\ d\theta$ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \quad dx = 2\ sec^2\theta\ tan\theta\ d\theta$

$\therefore \quad I = \int \frac{2sec^2\theta\ tan\theta\ d\theta}{(sec^2\theta)^{\frac{3}{2}}(sec^2\theta - 1)^{\frac{1}{2}}}$

$= \int \frac{2sec^2\theta\ tan\theta\ d\theta}{sec^3\theta \cdot tan\theta}$

$= 2\int cos\theta\ d\theta$

$= 2sin\theta + c$

હવે, $sec^2\theta = x - 1$. તેથી $cos^2\theta = \frac{1}{x-1}$

અને $sin^2\theta = 1 - cos^2\theta = 1 - \frac{1}{x-1} = \frac{x-2}{x-1}$

$\therefore \quad sin\theta = \sqrt{\frac{x-2}{x-1}}$ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \quad I = 2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}} + c$

6.8 એક વિશિષ્ટ આદેશ

સંકલ્ય $\frac{1}{a+bsinx}$, $\frac{1}{a+bcosx}$ અથવા $\frac{1}{a+bsinx+c\,cosx}$ સ્વરૂપનું હોય, તો આ વિકલ્પમાં $tan\frac{x}{2} = t$ આદેશ લઈ શકાય. આ આદેશ ઉપરના સ્વરૂપના સંકલ્યને t ના સરળ બૈજિક સંકલ્યમાં રૂપાંતરિત કરે છે.

$tan\frac{x}{2} = t$ લેતાં, $sec^2\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2}\,dx = dt$. વળી, $sec^2\frac{x}{2} = 1 + tan^2\frac{x}{2} = 1 + t^2$

$\therefore \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$sinx = \frac{2tan\frac{x}{2}}{1+tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$ અને $cosx = \frac{1-tan^2\frac{x}{2}}{1+tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

આમ, આપેલ સંકલ્ય t ના સંકલ્યમાં રૂપાંતરિત થશે.

ઉદાહરણ 23 : $\int \frac{1}{1-2\sin x}\,dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $\tan\frac{x}{2} = t$ લેતાં, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ અને $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$$\therefore \quad I = \int \frac{1}{1-2\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$= 2\int \frac{1}{t^2-4t+1}\,dt$$

$$= 2\int \frac{1}{t^2-4t+4-3}\,dt$$

$$= 2\int \frac{1}{(t-2)^2-(\sqrt{3})^2}\,dt$$

$$= 2 \times \frac{1}{2\sqrt{3}} \log\left|\frac{t-2-\sqrt{3}}{t-2+\sqrt{3}}\right| + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \log\left|\frac{\tan\frac{x}{2}-2-\sqrt{3}}{\tan\frac{x}{2}-2+\sqrt{3}}\right| + c$$

ઉદાહરણ 24 : $\int \frac{dx}{\cos\alpha + \cos x}$ મેળવો. $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

ઉકેલ : $I = \int \frac{dx}{\cos\alpha + \cos x}$

$\tan\frac{x}{2} = t$ લેતાં, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$\therefore \quad I = \int \frac{1}{\cos\alpha + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$= \int \frac{2\,dt}{\cos\alpha + t^2\cdot\cos\alpha + 1 - t^2}$$

$$= 2\int \frac{dt}{(1+\cos\alpha)-(1-\cos\alpha)t^2}$$

$$= 2\int \frac{dt}{2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot t^2}$$

$$= \int \frac{dt}{\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(t\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} \log\left|\frac{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}t}{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}t}\right| + c$$

$$= \frac{1}{\sin\alpha} \log\left|\frac{1+\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{x}{2}}\right| + c$$

6.9 $\int sin^m x\ cos^n x\ dx$ સ્વરૂપના સંકલિતો, જ્યાં $m, n \in N$

અહીં $m, n \in N$ ધન પૂર્ણાંકો છે, તેથી નીચે આપેલાં વિકલ્પો શક્ય છે :

(1) m, n બંને યુગ્મ પૂર્ણાંક (2) m અયુગ્મ અને n યુગ્મ

(3) m યુગ્મ અને n અયુગ્મ (4) m અને n બંને યુગ્મ.

ધારો કે $I = \int sin^m x\ cos^n x\ dx$

વિકલ્પ 1 : m, n બંને અયુગ્મ પૂર્ણાંક છે.

આ સંજોગોમાં I શોધવા માટે $sinx = t$ અથવા $cosx = t$ લઈશું. સામાન્ય રીતે $m > n$ હોય, તો $sinx = t$ અને જો $n > m$ હોય, તો $cosx = t$ અનુકૂળ રહેશે.

વિકલ્પ 2 : m અયુગ્મ અને n યુગ્મ છે.

આ સંજોગોમાં I શોધવા માટે $cosx = t$ લઈશું.

વિકલ્પ 3 : m યુગ્મ અને n અયુગ્મ છે.

આ સંજોગોમાં I શોધવા માટે $sinx = t$ લઈશું.

વિકલ્પ 4 : m અને n બંને યુગ્મ.

આ સંજોગોમાં $sin^m x\, cos^n x$ નું રૂપાંતર કરવા માટે $sin^2 x = \frac{1-cos2x}{2}$ અને $cos^2 x = \frac{1+cos2x}{2}$ સૂત્રો વાપરીશું.

અત્રે એ નોંધીશું કે m અને nની નાની કિંમતો માટે આ રીત સરળ રહેશે. m અને n બંનેની મોટી કિંમતો માટે બીજી રીતો ઉપલબ્ધ છે, જે આપણે આ કક્ષાએ શીખવાની નથી.

ઉદાહરણ 25 : $\int cos^2 x\ sin^5 x\ dx$ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, $m = 5$ અયુગ્મ છે.

$\therefore\ cos\, x = t$ લેતાં, $-sinx\ dx = dt$

$\therefore\ sinx\ dx = -dt$

$$\begin{aligned}
I &= \int cos^2 x\ sin^5 x\ dx \\
&= \int sin^4 x \cdot cos^2 x \cdot sinx\ dx \\
&= \int (1 - cos^2 x)^2 \cdot cos^2 x\ sinx\ dx \\
&= \int (1 - t^2)^2\, t^2\, (-dt) \\
&= \int (1 - 2t^2 + t^4)(-t^2)\, dt \\
&= \int (2t^4 - t^6 - t^2)\, dt \\
&= \frac{2t^5}{5} - \frac{t^7}{7} - \frac{t^3}{3} + c \\
&= \frac{2}{5}cos^5 x - \frac{1}{7}cos^7 x - \frac{1}{3}cos^3 x + c
\end{aligned}$$

ઉદાહરણ 26 : $\int sin^{23} x \cdot cos^3 x\ dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int sin^{23} x \cdot cos^3 x\ dx$

અહીં, $m = 23$, $n = 3$. m અને n બંને અયુગ્મ છે.

પરંતુ $m > n$. $sinx = t$ લેતાં, $cosx\ dx = dt$

$$\begin{aligned}
I &= \int sin^{23} x \cdot cos^2 x \cdot cosx\ dx \\
&= \int sin^{23} x \cdot (1 - sin^2 x)\ cosx\ dx \\
&= \int t^{23} (1 - t^2)\ dt \\
&= \int (t^{23} - t^{25})\ dt \\
&= \frac{t^{24}}{24} - \frac{t^{26}}{26} + c \\
&= \frac{sin^{24} x}{24} - \frac{sin^{26} x}{26} + c
\end{aligned}$$

ઉદાહરણ 27 : $\int sin^2 x \cdot cos^4 x\ dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int sin^2 x \cdot cos^4 x\ dx$

અહીં m અને n બંને યુગ્મ છે.

$$\therefore \quad sin^2x \cdot cos^4x = \frac{1}{4}(4sin^2x \cdot cos^2x)\ cos^2x$$
$$= \frac{1}{4}sin^2 2x \cdot cos^2x$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1 - cos\,4x}{2}\right)\left(\frac{1 + cos\,2x}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{16}(1 - cos4x + cos2x - cos4x\ cos2x)$$
$$= \frac{1}{16}\left[1 - cos4x + cos2x - \frac{(2cos4x\ cos2x)}{2}\right]$$
$$= \frac{1}{32}[2 - 2cos4x + 2cos2x - cos6x - cos2x]$$
$$= \frac{1}{32}(2 - 2cos4x + cos2x - cos6x)$$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{32}\int [2 + cos2x - 2cos4x - cos6x]\ dx$$
$$= \frac{1}{32}\left[2x + \frac{sin\,2x}{2} - \frac{2sin\,4x}{4} - \frac{sin\,6x}{6}\right] + c$$
$$= \frac{1}{192}[12x + 3sin2x - 3sin4x - sin6x] + c$$

સ્વાધ્યાય 6.3

યોગ્ય પ્રદેશ પર વ્યાખ્યાયિત નીચે આપેલાં વિધેયો માટે ત્રિકોણમિતીય આદેશો લઈ સંકલિતો મેળવો :

1. $\frac{1}{x^2\sqrt{1 - x^2}}$ $(|x| < 1)$
2. $\frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}$, $(0 < x < 3)$
3. $\frac{1}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$
4. $x^2\sqrt{a^6 - x^6}$, $(0 < x < a)$
5. $\frac{1}{\sqrt{2ax - x^2}}$ $(0 < x < 2a)$
6. $\sqrt{\frac{2 - x}{x}}$ $(0 < x < 2)$
7. $\sqrt{\frac{a - x}{a + x}}$ $(0 < x < a)$
8. $\frac{x^2}{\sqrt{a^6 - x^6}}$ $(0 < x < a)$
9. $\frac{1}{x^2(1 + x^2)^2}$
10. $\frac{x}{(16 - 9x^2)^{\frac{3}{2}}}$ $\left(0 < x < \frac{4}{3}\right)$
11. $\frac{x^2}{(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}$ $(|x| > |a|)$
12. $x\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}}$ $(0 < x < a)$
13. $\frac{1}{(x - 1)^{\frac{1}{2}}(x - 2)^{\frac{1}{2}}}$ $(x > 2)$
14. $\frac{\sqrt{25 - x^2}}{x^2}$ $(0 < x < 5)$
15. $\frac{1}{1 + sinx + cosx}$
16. $\frac{1}{3 + 2\,sinx + cosx}$
17. $\frac{1}{5 + 4\,cosx}$
18. $\frac{1}{1 + cos\alpha\,cosx}$
19. $\frac{1}{2 - cosx}$
20. $\frac{1}{cosx - sinx}$ $\left(0 < x < \frac{\pi}{4}\right)$

21. $\sin^4x \cos^3x$

22. $\sin^3x \cos^{10}x$

23. $\cos^3x \sin^7x$

24. $\sin^5x \cos^4x$

25. $\sin^5x$

26. $\sin^4x \cos^2x$

*

6.10 (1) $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ અને $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, (2) $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx$ અને $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ સ્વરૂપનાં સંકલિતો

(1) આ પ્રકારના સંકલિતો મેળવવાં આપણે $ax^2 + bx + c$ ને નીચેની રીતે પૂર્ણવર્ગના સરવાળા કે તફાવત તરીકે વ્યક્ત કરીશું.

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

$$= \begin{cases} a\,[(x+\alpha)^2 - \beta^2], \text{ જ્યાં } b^2 - 4ac > 0 \text{ તથા } \beta^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2} \\ a\,[(x+\alpha)^2 + \beta^2], \text{ જ્યાં } b^2 - 4ac < 0 \text{ તથા } \beta^2 = -\frac{b^2-4ac}{4a^2} \end{cases}$$

આમ, $ax^2 + bx + c = a\,[(x + \alpha)^2 \pm \beta^2]$. આથી, $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ અને $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ સંકલિતો, આગળ આપેલા સંકલનના પ્રમાણિત સ્વરૂપનો ઉપયોગ કરી મેળવી શકાય. આપેલાં ઉદાહરણોથી આ સંકલ્પના સ્પષ્ટ થશે.

(**નોંધ :** જો $b^2 = 4ac$, તો $ax^2 + bx + c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$)

ઉદાહરણ 28 : $\int \frac{dx}{3x^2+13x-10}$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \frac{dx}{3x^2+13x-10}$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+\frac{13}{3}x-\frac{10}{3}}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+\frac{13}{3}x+\left(\frac{13}{6}\right)^2-\left(\frac{13}{6}\right)^2-\frac{10}{3}}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{13}{6}\right)^2-\left(\frac{17}{6}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2\left(\frac{17}{6}\right)} \log \left| \frac{x + \frac{13}{6} - \frac{17}{6}}{x + \frac{13}{6} + \frac{17}{6}} \right| + c$$

$$= \frac{1}{17} \log \left| \frac{x - \frac{2}{3}}{x + 5} \right| + c$$

$$= \frac{1}{17} \log \left| \frac{3x - 2}{3(x + 5)} \right| + c$$

(નોંધ : $I = \frac{1}{17} \log \left| \frac{3x - 2}{3(x + 5)} \right| + c$

$$= \frac{1}{17} \left[\log |3x - 2| - \log 3 - \log |x + 5| \right] + c$$

$= \frac{1}{17} \log \left| \frac{3x - 2}{x + 5} \right| + c'$ જ્યાં $c' = c - \frac{1}{17} \log 3$)

ઉદાહરણ 29 : $\int \frac{1}{\sqrt{x(1 - 2x)}} \, dx$ મેળવો. $\left(0 < x < \frac{1}{2}\right)$

ઉકેલ : $I = \int \frac{1}{\sqrt{x(1 - 2x)}} \, dx$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{x - 2x^2}} \, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{2} - x^2}} \, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{16} - \left(x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16}\right)}} \, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{4}\right)^2}} \, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^{-1} \left(\frac{x - \frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} \right) + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^{-1} (4x - 1) + c$$

(2) આ પ્રકારના સંકલિતો મેળવવા પ્રથમ આપણે એવા બે અચળ m અને n શોધીશું કે જેથી,

$Ax + B = m(ax^2 + bx + c$ નો વિકલિત$) + n$

$Ax + B = m(2ax + b) + n$

$Ax + B = (2ma)x + (mb + n)$

બંને બાજુએ x ના સહગુણકો અને અચળ પદ સરખાવતાં,

$A = 2ma$ અને $mb + n = B$

$\therefore \quad m = \frac{A}{2a}$ અને $n = B - mb$

હવે, $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx = \int \frac{m(2ax+b)+n}{ax^2+bx+c}\,dx$

$$= m\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx + n\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx$$

$$= m\log|ax^2+bx+c| + n\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx$$

અહીં પ્રથમ સંકલિત $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)|$ થી સરળતાથી મળશે. જ્યારે બાકી રહેલું સંકલિત આગળ દર્શાવેલી રીત (i) મુજબ છેદમાં પૂર્ણવર્ગ બનાવી મેળવી શકાય.

હવે, $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \int \frac{m(2ax+b)+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$

$$= \int \frac{m(2ax+b)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx + n\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

$$= m\int (ax^2+bx+c)^{-\frac{1}{2}}(2ax+b)dx + n\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

$$= m\frac{(ax^2+bx+c)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + n\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

$$= 2m(ax^2+bx+c)^{\frac{1}{2}} + n\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

અહીં પ્રથમ સંકલિત $\int [f(x)]^n \cdot f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}$ થી સરળતાથી મળશે જ્યારે બાકી રહેલું સંકલિત આગળ દર્શાવેલી રીત (i) મુજબ છેદમાં પૂર્ણવર્ગ બનાવી મેળવી શકાય.

ઉદાહરણ 30 : $\int \frac{2x+3}{3x^2+4x+5}\,dx$ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં આપણે અચળો m અને n એવા મેળવીશું કે જેથી, $2x+3 = m\frac{d}{dx}(3x^2+4x+5)+n$

$2x+3 = m(6x+4)+n$

$2x+3 = (6m)x+4m+n$

બંને બાજુએ x ના સહગુણક અને અચળ પદો સરખાવતાં, $6m = 2$ અને $4m+n = 3$.

$\therefore\ m = \frac{1}{3}$ અને $\frac{4}{3}+n = 3$. આગળ $n = \frac{5}{3}$

$\therefore\ I = \int \frac{2x+3}{3x^2+4x+5}\,dx = \int \frac{\frac{1}{3}(6x+4)+\frac{5}{3}}{3x^2+4x+5}\,dx$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{6x+4}{3x^2+4x+5}\,dx + \frac{5}{3}\int \frac{1}{3x^2+4x+5}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{6x+4}{3x^2+4x+5}\,dx + 5\int \frac{1}{9x^2+12x+4+11}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{6x+4}{3x^2+4x+5}\,dx + 5\int \frac{1}{(3x+2)^2+(\sqrt{11})^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\log|3x^2+4x+5| + \frac{5}{3\sqrt{11}}\tan^{-1}\frac{3x+2}{\sqrt{11}} + c$$

ઉદાહરણ 31 : $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+4x+1}}\,dx$ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં છેદ x^2+4x+1 નું વિકલન $2x+4$ છે. અંશમાં $2x+3$ ના સ્થાને $2x+3=(2x+4)-1$ લેતાં,

$$\therefore \quad I = \int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+4x+1}}\,dx$$

$$= \int \frac{(2x+4)-1}{\sqrt{x^2+4x+1}}\,dx$$

$$= \int \frac{(2x+4)}{\sqrt{x^2+4x+1}}\,dx - \int \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+1}}\,dx$$

$$= \int (x^2+4x+1)^{-\frac{1}{2}}(2x+4)\,dx - \int \frac{1}{\sqrt{(x+2)^2-(\sqrt{3})^2}}\,dx$$

$$= \frac{(x^2+4x+1)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - \log\left|(x+2)+\sqrt{(x+2)^2-(\sqrt{3})^2}\right| + c$$

$$= 2\sqrt{x^2+4x+1} - \log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+1}\right| + c$$

ઉદાહરણ 32 : $\int \frac{x^2}{x^4+1}\,dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \frac{x^2}{x^4+1}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x^2}{x^4+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)+(x^2-1)}{x^4+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{x^2-1}{x^4+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2} + \frac{1}{2}\int \frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}$$

પ્રથમ સંકલિત માટે $x - \frac{1}{x} = u$ અને દ્વિતીય સંકલિત માટે $x + \frac{1}{x} = v$ લેતાં,

$$\left(1+\frac{1}{x^2}\right) dx = du \text{ અને } \left(1-\frac{1}{x^2}\right) dx = dv$$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+(\sqrt{2})^2} + \int \frac{dv}{v^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{2}} \log\left|\frac{v-\sqrt{2}}{v+\sqrt{2}}\right| + c$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \tan^{-1}\frac{\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \log\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right| + c$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \tan^{-1}\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}\right) + \frac{1}{4\sqrt{2}} \log\left|\frac{x^2+1-\sqrt{2}x}{x^2+1+\sqrt{2}x}\right| + c$$

સ્વાધ્યાય 6.4

નીચે આપેલાં વિધેયોનું x વિશે સંકલન કરો :

1. $\frac{1}{x^2+3x+3}$
2. $\frac{1}{4x^2-4x+3}$
3. $\frac{1}{1-6x-9x^2}$
4. $\frac{1}{3+2x-x^2}$
5. $\frac{1}{\sqrt{x^2-x+5}}$
6. $\frac{1}{\sqrt{2x^2+3x-2}}$
7. $\frac{1}{\sqrt{7-3x-2x^2}}$
8. $\frac{1}{\sqrt{3x^2+5x+7}}$
9. $\frac{1}{\sqrt{(x-1)(x-2)}}$
10. $\frac{1}{\sqrt{9+8x-x^2}}$
11. $\frac{4x+1}{x^2+3x+2}$
12. $\frac{3x+2}{2x^2+x+1}$
13. $\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+4x+5}}$
14. $\frac{3x+1}{\sqrt{5-2x-x^2}}$
15. $\frac{2\sin 2x-\cos x}{6-\cos^2 x-4\sin x}$
16. $\frac{e^x}{\sqrt{5-4e^x-e^{2x}}}$
17. $\frac{x^2}{\sqrt{x^6+2x^3+3}}$
18. $\frac{2x}{\sqrt{1-x^2-x^4}}$
19. $\frac{x^2+1}{x^4+1}$
20. $\frac{x^2+4}{x^4+16}$
21. $\frac{x^2+1}{x^4+7x^2+1}$
22. $\frac{1}{x^4+1}$
23. $\frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}$
24. $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$

*

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ 33 : $\int \frac{\sin 2x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)} dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \frac{\sin 2x}{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}\, dx$

$$= \int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x - \sin^2 \frac{\pi}{3}}\, dx$$

$$= \int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x - \frac{3}{4}}\, dx$$

$$= \int \frac{\frac{d}{dx}\left(\sin^2 x - \frac{3}{4}\right)}{\sin^2 x - \frac{3}{4}}\, dx$$

$$= \log\left|\sin^2 x - \frac{3}{4}\right| + c$$

ઉદાહરણ 34 : $\int \frac{1}{x(x^n + 1)}\, dx$ મેળવો. $(x > 0)$

ઉકેલ : $I = \int \frac{1}{x(x^n + 1)}\, dx$

$x^n + 1 = t$ લેતાં, $n \cdot x^{n-1}\, dx = dt$

$$\therefore \quad I = \int \frac{nx^{n-1}\, dx}{nx^n\,(x^n + 1)}$$

$$= \frac{1}{n}\int \frac{dt}{(t-1)t}$$

$$= \frac{1}{n}\int \frac{1}{t^2 - t + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}}\, dt$$

$$= \frac{1}{n}\int \frac{1}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}\, dt$$

$$= \frac{1}{n}\log\left|\frac{\left(t - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)}{\left(t - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)}\right| + c$$

$$= \frac{1}{n}\log\left|\frac{t-1}{t}\right| + c$$

$$= \frac{1}{n}\log\frac{x^n}{x^n + 1} + c$$

બીજી રીત :

$$I = \frac{1}{n}\int \frac{dt}{(t-1)t}$$

$$= \frac{1}{n}\int \frac{[t - (t-1)]\, dt}{(t-1)t}$$

$$= \frac{1}{n}\left[\int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{dt}{t}\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[\log|t-1| - \log|t|\right] + c$$

$$= \frac{1}{n}\log\left|\frac{t-1}{t}\right| + c$$

$$= \frac{1}{n}\log\left(\frac{x^n}{x^n + 1}\right) + c$$

ઉદાહરણ 35 : $\int \sqrt{\frac{\sin(x - \theta)}{\sin(x + \theta)}}\, dx$ મેળવો. $\theta < x < \frac{\pi}{2} + \theta,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$

ઉકેલ : $I = \int \sqrt{\frac{\sin(x - \theta)}{\sin(x + \theta)}}\, dx$

$$= \int \sqrt{\frac{\sin(x - \theta)}{\sin(x + \theta)} \times \frac{\sin(x - \theta)}{\sin(x - \theta)}}\, dx \qquad (\sin(x - \theta) > 0)$$

$$= \int \frac{\sin(x - \theta)}{\sqrt{\sin^2 x - \sin^2\theta}}\, dx$$

$$= \int \frac{\sin x \cos\theta - \cos x \sin\theta}{\sqrt{\sin^2 x - \sin^2\theta}}\, dx$$

$$= \cos\theta \int \frac{\sin x}{\sqrt{\sin^2 x - \sin^2\theta}}\, dx - \sin\theta \int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x - \sin^2\theta}}\, dx$$

$$= \cos\theta \int \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos^2 x - 1 + \cos^2\theta}}\, dx - \sin\theta \int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x - \sin^2\theta}}\, dx$$

$$= \cos\theta \int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{\cos^2\theta - \cos^2 x}} - \sin\theta \int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{\sin^2 x - \sin^2\theta}}$$

પ્રથમ સંકલિત માટે $\cos x = u$ અને દ્વિતીય સંકલિત માટે $\sin x = v$ લેતાં,

$\therefore\ -\sin x\, dx = du$ અને $\cos x\, dx = dv$

$$\therefore\ I = \cos\theta \int \frac{-du}{\sqrt{\cos^2\theta - u^2}} - \sin\theta \int \frac{dv}{\sqrt{v^2 - \sin^2\theta}}$$

$$= -\cos\theta \sin^{-1}\left(\frac{u}{\cos\theta}\right) - \sin\theta \log\left| v + \sqrt{v^2 - \sin^2\theta} \right| + c$$

$$= -\cos\theta \sin^{-1}\left(\frac{\cos x}{\cos\theta}\right) - \sin\theta \log\left| \sin x + \sqrt{\sin^2 x - \sin^2\theta} \right| + c$$

ઉદાહરણ 36 : $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \sin x}}\, dx$ મેળવો. $\quad 0 < x < \pi$

ઉકેલ : $I = \int \frac{(\sin x + 1) - 1}{\sqrt{1 + \sin x}}\, dx$

$$= \int \sqrt{1 + \sin x}\, dx - \int \frac{1}{\sqrt{1 + \sin x}}\, dx$$

$$= \int \sqrt{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\, dx - \int \frac{1}{\sqrt{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}}\, dx$$

$$= \int \left|\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right| dx - \int \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right|}\, dx$$

$$= \int \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) dx - \int \frac{1}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{2}\right)}\, dx \qquad \left(0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \int \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) dx - \int \frac{1}{\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}\, dx$$

$$= \int \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) dx - \frac{1}{\sqrt{2}} \int \sec\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) dx$$

$$= \frac{-\cos\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} + \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} \log\left|\sec\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right| + c$$

$$= 2\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right) - \sqrt{2} \log\left|\sec\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right| + c$$

સ્વાધ્યાય 6

નીચે આપેલાં વિધેયોનાં x વિશે સંકલિતો મેળવો :

1. $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ $(x > 0)$

2. $\dfrac{\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}$

3. $\dfrac{1}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}$

4. $\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$, $x \in (0, 1)$

5. $\sqrt{\dfrac{x+3}{x+2}}$ $(x > -2)$

6. $\dfrac{x^2+5x+3}{x^2+3x+2}$ $(x \neq -2, -1)$

7. $\dfrac{x^2}{x^2+7x+10}$ $(x \neq -5, -2)$

8. $\dfrac{1}{\cos(x-a)\cos(x-b)}$

9. $\dfrac{\sin(x+a)}{\sin(x+b)}$

10. $x(1-x)^n$

11. $\sqrt{\tan x}$

12. $\dfrac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}$

13. $\dfrac{1}{1-2a\cos x+a^2}$, $0 < a < 1$

14. **નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને $\square$ માં લખો :**

વિભાગ A (1 ગુણ)

(1) $\int f(x)dx = \dfrac{(\log x)^5}{5} + c$, લેતાં, $f(x) = \ldots\ldots$ $\square$

(a) $\dfrac{\log x}{4}$ (b) $\dfrac{(\log x)^5}{5}$ (c) $\dfrac{(\log x)^4}{x}$ (d) $\dfrac{(\log x)^6}{6}$

(2) $\int e^{x\log a} e^x\, dx = \ldots\ldots + c$ $\square$

(a) $a^x \cdot e^x$ (b) $\dfrac{(ae)^x}{(1+\log a)}$ (c) $\dfrac{e^x}{\log(ae)}$ (d) $\dfrac{a^x}{1+\log_e a}$

(3) $\int \dfrac{(\log x)^3}{x}\, dx = \ldots\ldots + c$ $\square$

(a) $(\log x)^2$ (b) $\dfrac{(\log x)^2}{2}$ (c) $\frac{1}{4}(\log x)^4$ (d) $\frac{2}{3}(\log x)^3$

(4) $\int \sec^2\left(5-\frac{x}{2}\right) dx = \ldots\ldots + c$ $\square$

(a) $\tan\left(5-\frac{x}{2}\right)$ (b) $2\tan\left(5-\frac{x}{2}\right)$ (c) $-2\tan\left(5-\frac{x}{2}\right)$ (d) $-\frac{1}{2}\tan\left(5-\frac{x}{2}\right)$

(5) $\int \dfrac{1}{4x^2+9}\, dx = \ldots\ldots + c$ $\square$

(a) $\frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right)$ (b) $\frac{1}{4}\tan^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right)$ (c) $\frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right)$ (d) $\frac{3}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right)$

(6) $\int \sqrt{1 - cosx}\ dx = ... + c,\ 2\pi < x < 3\pi$

(a) $-2\sqrt{2}\ cos\ \frac{x}{2}$ (b) $-\sqrt{2}\ cos\ \frac{x}{2}$ (c) $2\sqrt{2}\ cos\ \frac{x}{2}$ (d) $-\frac{1}{2}\ cos\left(\frac{x}{2}\right)$

(7) $\int \frac{dx}{x\sqrt{3 + \log x}} = ... + c$

(a) $2\sqrt{3 + \log x}$ (b) $\frac{2}{\sqrt{3 + \log x}}$ (c) $\sqrt{3 + \log x}$ (d) $-2\sqrt{3 + \log x}$

(8) $\int \frac{1}{\sqrt{4 - 3x}}\ dx = ... + c$

(a) $-\frac{2}{3}(4 - 3x)^{-\frac{1}{2}} + c$ (b) $-\frac{2}{3}(4 + 3x)^{\frac{1}{2}}$

(c) $-\frac{2}{3}(4 - 3x)^{\frac{1}{2}}$ (d) $\frac{2}{3}(4 + 3x)^{\frac{1}{2}}$

(9) $\int \frac{x - 2}{x^2 - 4x + 5}\ dx = ... + c$

(a) $\log |x^2 - 4x + 5| + c$ (b) $\log \sqrt{x^2 - 4x + 5}$

(c) $\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 5)^2$ (d) $\log\left(\frac{x - 3}{x - 1}\right)$

(10) $\int \frac{1}{3t^2 + 4}\ dt = ... + c$

(a) $\frac{1}{12}\ tan^{-1}\left(\frac{3t}{4}\right)$ (b) $\frac{1}{3}\ \log\left|\frac{t + 2}{t - 2}\right|$

(c) $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)$ (d) $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ tan^{-1}\left(\frac{3t}{4}\right)$

(11) $\int \frac{1}{1 - cost}\ dt = ... + c$

(a) $cosect + cot\ t$ (b) $-cot\ \frac{t}{2}$ (c) $-4cot\ \frac{t}{2}$ (d) $cosect + cot\ t$

(12) $\int \frac{e^{5 \log x} - e^{4 \log x}}{e^{3 \log x} - e^{2 \log x}}\ dx = ... + c$

(a) $e \cdot 3^{-3x}$ (b) $e^3 \log x$ (c) $\frac{x^3}{3}$ (d) $\frac{x^2}{3}$

(13) $\int sec^2x \cdot cosec^2x\ dx = ... + c$

(a) $tanx + cotx$ (b) $tanx - cotx$ (c) $sec^2x + cosec^2x$ (d) $cotx - tanx$

(14) $\int e^{3 \log x} \cdot (x^4 + 1)^{-1}\ dx = ... + c$

(a) $\log (x^4 + 1)$ (b) $-\log (x^4 + 1)$ (c) $\frac{1}{4} \log (x^4 + 1)$ (d) $\frac{-3}{(x^4 + 1)^2}$

(15) $\int \frac{(\log x)^4}{x}\ dx = ... + c$

(a) $\frac{(\log x)^5}{5}$ (b) $\frac{(\log x)^2}{2}$ (c) $\frac{\log x^5}{5x}$ (d) $\log x \cdot (\log x)^4 + \frac{(\log x)^5}{5x}$

(16) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \ldots\ldots$

(a) $sin^{-1}\sqrt{x} + c$ (b) $-2\sqrt{1-x} + c$ (c) $-sin^{-1}\sqrt{x} + c$ (d) $2\sqrt{1-x} + c$

(17) $\int \frac{(sinx)^{99}}{(cosx)^{101}}\, dx = \ldots\ldots + c$

(a) $\frac{(tanx)^{100}}{100}$ (b) $\frac{(tanx)^{2}}{2}$ (c) $\frac{(tanx)^{98}}{98}$ (d) $\frac{(tanx)^{97}}{97}$

(18) $\int \frac{\log x^2}{x}\, dx = \ldots\ldots$

(a) $\log|x^2| + c$ (b) $\log x + c$ (c) $(\log x)^2 + c$ (d) $\frac{1}{2}(\log x)^2 + c$

(19) $\int \frac{xsinx}{(xcosx - sinx + 5)}\, dx = \ldots\ldots + c$

(a) $\log|xcosx - sinx + 5|$ (b) $-\log|xcosx - sinx + 5|$

(c) $\log|xsinx - cosx + 5|$ (d) $-\log|xsinx - cosx + 5|$

(20) $\int (1 - cosx)\, cosec^2x\, dx = \ldots\ldots + c$

(a) $tan\,\frac{x}{2}$ (b) $cot\,\frac{x}{2}$ (c) $\frac{1}{2}\,tan\,\frac{x}{2}$ (d) $2\,tan\,\frac{x}{2}$

વિભાગ B (2 ગુણ)

(21) જો $f'(x) = x^2 + 5$, તો $\int f(x)dx = \ldots\ldots$. (c, k સ્વૈર અચળ)

(a) $\frac{x^4}{12} + \frac{5x^2}{8} + cx + k$ (b) $-\frac{x^4}{12} - \frac{5x^2}{2} - cx + k$

(c) $\frac{x^4}{12} - \frac{5x^2}{12} + cx + k$ (d) $\frac{x^4}{12} + \frac{5x^2}{2} + cx + k$

(22) $\int \frac{10x^9 + 10^x \log 10}{10^x + x^{10}}\, dx = \ldots\ldots + c$

(a) $10^x - x^{10}$ (b) $10^x + x^{10}$ (c) $(10^x - x^{10})^{-1}$ (d) $\log|10^x + x^{10}|$

(23) $\int cos^3x \cdot e^{\log sinx}\, dx = \ldots\ldots + c$

(a) $-\frac{sin^4x}{4}$ (b) $\frac{e^{sinx}}{4}$ (c) $\frac{e^{cosx}}{4}$ (d) $\frac{-cos^4x}{4}$

(24) $\int \frac{sinx}{1+4cosx}\, dx = \ldots\ldots + c$

(a) $\log|1 + 4cosx|$ (b) $-4\log|1 + 4cosx|$

(c) $-\frac{1}{4}\log|1 + 4cosx|$ (d) $-\log|1 + 4cosx|$

(25) $\int \frac{1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x}}\, dx = ... + c$

(a) $\frac{3}{2}(x+2)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ (b) $\frac{2}{9}(x+2)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{9}x^{\frac{1}{2}}$

(c) $\frac{2}{9}(x+3)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}$ (d) $\frac{2}{9}(x+2)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{9}x$

(26) જો $\int sin2x \cdot cos\ 3x\ dx = A\ cosx + Bcos\ 5x + c$, તો $A + B = ...$

(a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{3}{10}$ (c) $\frac{3}{5}$ (d) $\frac{2}{5}$

(27) જો $\int \frac{cos\ 4x+1}{cotx - tanx}\, dx = A\ cos4x + c$, તો $A = ...$

(a) $-\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{4}$ (c) $-\frac{1}{8}$ (d) $\frac{1}{8}$

(28) $\int \frac{1+cosx}{sinx\ cosx}\, dx = ... + c$

(a) $\log|sinx| + \log|cosx|$ (b) $\log\left|tanx \cdot tan\frac{x}{2}\right|$

(c) $\log\left|1 + tan\frac{x}{2}\right|$ (d) $\log\left|sec\frac{x}{2} + tan\frac{x}{2}\right|$

(29) $\int \frac{sinx - cosx}{sinx + cosx}\, dx = ... + c$

(a) $\frac{1}{sinx + cosx}$ (b) $\frac{1}{sinx - cosx}$

(c) $\log|sinx + cosx|$ (d) $\log\left|\frac{1}{sinx + cosx}\right|$

(30) $\int \frac{1-cosx}{cosx\,(1+cosx)}\, dx = ... + c$

(a) $2\log|cosx| + tan\frac{x}{2}$ (b) $\log|secx + tanx| - 2tan\frac{x}{2}$

(c) $\log|tanx| + 2tan\frac{x}{2}$ (d) $\frac{1}{2}\log|secx| - tan\frac{x}{2}$

(31) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = ... + c$

(a) $\log|e^x - e^{-x}|$ (b) $\log|e^x + e^{-x}|$ (c) $tan^{-1}(e^x)$ (d) $tan^{-1}(e^{2x})$

(32) $\int \frac{dx}{x + x\log x} = ... + c$

(a) $\log|x + x\log x|$ (b) $x\log|1 + \log x|$

(c) $\log|1 + \log x|$ (d) $\frac{1+\log x}{x^2}$

(33) $\int \frac{\sqrt{tanx}}{sinx\,cosx}\, dx = ... + c$

(a) $\frac{\sqrt{tanx}}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{cotx}}{2}$ (c) $2\sqrt{cotx}$ (d) $2\sqrt{tanx}$

વિભાગ C (3 ગુણ)

(34) $\int \frac{dx}{cosx - sinx} = ... + c$

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}} \log \left|tan\left(\frac{x}{2}+\frac{3\pi}{8}\right)\right|$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}} \log \left|tan\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)\right|$

(c) $\frac{1}{\sqrt{2}} \log \left|tan\left(\frac{x}{2}-\frac{3\pi}{8}\right)\right|$ (d) $\log \left|cos \frac{x}{2}\right|$

(35) $\int \frac{dx}{(1+sinx)^{\frac{1}{2}}} = ... + c$

(a) $\sqrt{2} \log \left|tan\left(\frac{3\pi}{8}-\frac{x}{4}\right)\right|$ (b) $\sqrt{2} \log \left|cosec\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)-cot\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)\right|$

(c) $\sqrt{2} \log \left|tan\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{4}\right)\right|$ (d) $\sqrt{2} \log \left|sec\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{4}\right)+tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{4}\right)\right|$

(36) $\int \frac{dx}{5-4\,cosx} = ... + c$

(a) $\frac{1}{3} tan^{-1}\left(3\,tan\frac{x}{2}\right)$ (b) $\frac{1}{3} tan^{-1}\left(\frac{2}{3} tan\frac{x}{2}\right)$

(c) $\frac{2}{3} tan^{-1}\left(\frac{1}{3} tan\frac{x}{2}\right)$ (d) $\frac{2}{3} tan^{-1}\left(3\,tan\frac{x}{2}\right)$

(37) $\int \frac{sinx}{sin(x-a)}\ dx = ... + c$

(a) $x\,cosa + sin\,a \log|\,sin(x-a)|$ (b) $(x-a)\,cosa - sin\,a \log|\,sin(x-a)|$

(c) $sin\,a\ \log|\,sin(x-a)| + cosa\ x$ (d) $sina \cdot x + cosa\ \log|\,sin(x-a)|$

(38) $\int \frac{\sin 2x}{pcos^2x + q\,sin^2x}\ dx = ... + c$

(a) $\frac{q}{p} \log|\,p\,sin2x + qcos\,2x|$ (b) $(q-p)\log|\,p\,cos^2x + q\,sin^2x|$

(c) $\frac{1}{q-p} \log|\,pcos^2x + qsin^2x|$ (d) $\frac{1}{p^2+q^2} \log|\,pcos^2x + qsin^2x|$

(39) $\int \frac{tanx}{4+9tan^2x}\ dx = ... + c$

(a) $\frac{2}{3} tan^{-1}\left(\frac{2}{3} tanx\right)$ (b) $\frac{3}{2} tan^{-1}\left(\frac{1}{3} tanx\right)$

(c) $\frac{1}{10} \log|\,4 + 9tan^2x\,|$ (d) $\frac{1}{10} \log|\,4cos^2x + 9sin^2x\,|$

(40) $\int \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\ dx = ... + c$

(a) $\frac{a}{2} sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt{a^2-x^2}$ (b) $\frac{1}{a} sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt{a^2-x^2}$

(c) $sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \sqrt{a^2-x^2}$ (d) $a\ sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \sqrt{a^2-x^2}$

(41) જો $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x}\, dx = px + q\sin 2x + r\cot x + c$, તો

(a) $p = -\frac{3}{2},\ q = -\frac{1}{4},\ r = -1$
(b) $p = -\frac{1}{4},\ q = -\frac{3}{2},\ r = -1$
(c) $p = 1,\ q = -\frac{1}{4},\ r = 1$
(d) $p = \frac{3}{2},\ q = -\frac{1}{4},\ r = 1$

(42) $\int \frac{e^x}{e^{2x} + e^x + 1}\, dx = \ldots\ldots + c$

(a) $\frac{1}{\sqrt{3}} \sec^{-1}\left(\frac{2e^x + 1}{\sqrt{3}}\right)$
(b) $\tan^{-1}(1 + e^x)$
(c) $\frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{2e^x + 1}{\sqrt{3}}\right)$
(d) $\frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{e^x + 1}{\sqrt{3}}\right)$

(43) $\int \frac{1}{\sqrt{2 - 3x - x^2}}\, dx = \ldots\ldots + c$

(a) $\sin^{-1}\left(\frac{2 - 3x}{\sqrt{3}}\right)$
(b) $\sin^{-1}\left(\frac{2x - 1}{\sqrt{15}}\right)$
(c) $\sin^{-1}\left(\frac{2x + 3}{\sqrt{17}}\right)$
(d) $\sin^{-1}\left(\frac{3 + 2x}{3\sqrt{2}}\right)$

વિભાગ D (4 ગુણ)

(44) $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1}\, dx = \ldots\ldots + c$

(a) $x \tan^{-1}\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)$
(b) $\tan^{-1}\left(\frac{x^2 - 1}{x}\right)$
(c) $\frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1}\left(\frac{x^2 + 1}{\sqrt{2}x}\right)$
(d) $\frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1}\left(\frac{x^2 - 1}{\sqrt{2}x}\right)$

(45) $\int (\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x})\, dx = \ldots\ldots + c$

(a) $\frac{\tan x}{\sqrt{2}} \tan^{-1}\left(\frac{\cot x + 1}{\sqrt{2\tan x}}\right)$
(b) $\sqrt{2} \tan^{-1}\left(\frac{\tan x - 1}{\sqrt{2\tan x}}\right)$
(c) $\sqrt{2} \tan^{-1}\left(\frac{\tan x + 1}{\sqrt{2\tan x}}\right)$
(d) $\frac{\tan x}{\sqrt{2}} \tan^{-1}\left(\frac{\cot x - 1}{\sqrt{2\tan x}}\right)$

(46) $\int \sqrt{\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}}\, \frac{dx}{x} = \ldots\ldots + c$

(a) $2\log\left(\frac{\sqrt{1 + x} - 1}{\sqrt{1 + x} + 1}\right) - 2\sin^{-1}\sqrt{x}$
(b) $\log\left(\frac{\sqrt{1 - x} - 1}{\sqrt{1 + x} + 1}\right) + 2\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 + x}}\right)$
(c) $2\log\left(\frac{1 - \sqrt{1 - x}}{1 + \sqrt{1 - x}}\right) + \frac{1}{2}\cot^{-1}\sqrt{x + 1}$
(d) $\log\left(\frac{\sqrt{1 - x} - 1}{\sqrt{1 - x} + 1}\right) - 2\sin^{-1}\sqrt{x}$

(47) $\int \frac{dx}{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \ldots\ldots + c$

(a) $\frac{x}{3\sqrt{9-x^2}}$ (b) $\frac{x}{9\sqrt{9+x^2}}$ (c) $\frac{x}{9\sqrt{9-x^2}}$ (d) $\frac{x}{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

(48) જો $\int x^3 \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\, dx = p\cos^{-1}x^2 + q\sqrt{1-x^4} + rx^2\sqrt{1-x^4} + c$, તો $p + q + r = \ldots\ldots$

(a) 0 (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) -1

*

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચે આપેલા મુદ્દા શીખ્યા :

1. પૂર્વગ અથવા પ્રતિવિકલિત અથવા અનિયત સંકલિતની વ્યાખ્યા
2. સંકલનના કાર્યનિયમો
3. પ્રમાણિત સંકલિત :

(1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ n \in R - \{-1\},\ x \in R^+.$

(2) $\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c,\ x \in R - \{0\}$

(3) $\int \cos x\, dx = \sin x + c,\ \forall x \in R$

(4) $\int \sin x\, dx = -\cos x + c,\ \forall x \in R$

(5) $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c,\ x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2},\ k \in Z$

(6) $\int \mathrm{cosec}^2 x\, dx = -\cot x + c,\ x \neq k\pi,\ k \in Z$

(7) $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + c,\ x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2},\ k \in Z$

(8) $\int \mathrm{cosec}\, x \cot x\, dx = -\mathrm{cosec}\, x + c,\ x \neq k\pi,\ k \in Z$

(9) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log_e a} + c,\ a \in R^+ - \{1\},\ x \in R$

(10) $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c,\quad a \in R - \{0\},\ x \in R$

(11) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c,\ a \in R - \{0\},\ x \neq \pm a$

(12) $\int \frac{1}{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + c,\ a \in R - \{0\},\ x \neq \pm a$

(13) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c,\quad x \in (-a, a),\ a > 0.$

(14) $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \frac{1}{a} sec^{-1} \frac{x}{a} + c, \ |x| > |a| > 0.$

(15) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \log | x + \sqrt{x^2 \pm a^2} | + c, \ \forall x \in R.$

4. સંકલન માટે આદેશની રીત

5. જો $\int f(x)dx = F(x)$, તો $\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b)$ જ્યાં $f : I \rightarrow R$ કોઈક અંતરાલ I પર સતત છે. $(a \neq 0)$.

6. $\int [f(x)]^n \cdot f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}$, $(n \neq -1, f(x) > 0)$ જ્યાં f, f' સતત છે અને $f'(x) \neq 0$.

7. જો f એ $[a, b]$માં સતત હોય અને (a, b)માં વિકલનીય હોય અને f' સતત હોય અને શૂન્યેતર હોય $\forall x \in [a, b]$ અને $f(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$, તો $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + c.$

(16) કોઈ પણ અંતરાલ $I = \left(k\pi, (2k + 1)\frac{\pi}{2}\right)$ અથવા $\left((2k - 1)\frac{\pi}{2}, k\pi\right)$, $k \in Z$ પર

$\int tanx \ dx = \log | secx | + c.$

(17) કોઈ પણ અંતરાલ $I = \left(k\pi, (2k + 1)\frac{\pi}{2}\right)$ અથવા $\left((2k - 1)\frac{\pi}{2}, k\pi\right)$, $k \in Z$ પર

$\int cotx \ dx = \log | sinx | + c.$

(18) કોઈ પણ અંતરાલ $I = \left(k\pi, (2k + 1)\frac{\pi}{2}\right)$ અથવા $\left((2k - 1)\frac{\pi}{2}, k\pi\right)$, $k \in Z$ પર

$\int cosecx \ dx = \log | cosecx - cotx | + c, \ x \neq k\pi, \ k \in Z.$

(19) કોઈ પણ અંતરાલ $I = \left(k\pi, (2k + 1)\frac{\pi}{2}\right)$ અથવા $\left((2k - 1)\frac{\pi}{2}, k\pi\right)$, $k \in Z$ પર

$\int secx \ dx = \log \left| tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \right| + c.$

Classical Period (400 – 1200)

This period is often known as the golden age of Indian Mathematics. This period saw mathematicians such as Aryabhata, Varahamihira, Brahmagupta, Bhaskara I, Mahavira, and Bhaskara II gave broader and clearer shape to many branches of mathematics. Their contributions would spread to Asia, the Middle East, and eventually to Europe. Unlike Vedic mathematics, their works included both astronomical and mathematical contributions. In fact, mathematics of that period was included in the 'astral science' (jyotisha-shatra) and consisted of three sub-disciplines: mathematical sciences (ganita or tantra), horoscope astrology (hora or jataka) and divination (samhita). This tripartite division is seen in Varahamihira's 6th century compilation—Pancasiddhantika (literally panca, "five," siddhanta, "conclusion of deliberation", dated 575 CE)—of five earlier works, Surya Siddhanta, Romaka Siddhanta, Paulisa Siddhanta, Vasishtha Siddhanta and Paitamaha Siddhanta, which were adaptations of still earlier works of Mesopotamian, Greek, Egyptian, Roman and Indian astronomy. As explained earlier, the main texts were composed in Sanskrit verse, and were followed by prose commentaries.

સંભાવના 7

The description of right lines and circles upon which geometry is founded belongs to mechanics. Geometry does not teach us to draw these lines but requires them to be drawn.

– Newton

7.1 પ્રાસ્તાવિક

ધોરણ IX માં આપણે સંભાવનાના અભ્યાસની શરૂઆત કરી હતી. અહીં યાદ કરીએ કે યાદચ્છિક પ્રયોગનાં તમામ પરિણામોના ગણને **નિદર્શાવકાશ (Sample space)** કહે છે અને નિદર્શાવકાશના કોઈ પણ ઉપગણને **ઘટના (event)** કહે છે. આપણે સંભાવનાની પૂર્વધારણાયુક્ત વ્યાખ્યા તેમજ તેને લગતા પ્રમેયો જાણીએ છીએ. આપણે સંભાવનાની પ્રશિષ્ટ વ્યાખ્યા યાદ કરી લઈએ. જો કોઈ યાદચ્છિક પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલા સાન્ત નિદર્શાવકાશના સમસંભાવી ઘટકોની સંખ્યા n હોય અને n પૈકીના r $(0 \le r \le n)$ ઘટકો ઘટના Aના ઉદ્ભવ માટે અનુકૂળ હોય, તો A ની સંભાવના $P(A) = \frac{r}{n}$.

હવે આપણે આ સંકલ્પનાનો વિગતવાર વધુ અભ્યાસ કરીએ.

7.2 શરતી સંભાવના

સંભાવનાની વ્યાખ્યા અનુસાર નિદર્શાવકાશનો ઉલ્લેખ કર્યા વગર કોઈપણ ઘટનાની સંભાવના વિશે વાત કરવી નિરર્થક છે. ઉદાહરણ તરીકે જો આપણે કોઈ પણ ઇજનેર વાર્ષિક ઓછામાં ઓછા ₹ 4,00,000 કમાણી કરે તેની સંભાવના પૂછીએ તો તે નિરર્થક છે. અહીં આપણે દર્શાવવું જોઈએ કે આપણે ભારતના બધા ઇજનેર વિશે પૂછીએ છીએ કે પછી કોઈ ચોક્કસ ઉદ્યોગમાં કામ કરતા ઇજનેર કે પછી શૈક્ષણિક ક્ષેત્રમાં સેવા આપતા ઈજનેર કે પછી સરકારી વિભાગમાં સેવા આપતા ઇજનેર વિશે પૂછીએ છીએ વગેરે. આમ, જ્યારે આપણે કોઈ પણ ઘટના A ની સંભાવના P(A) સંકેતનો ઉપયોગ કરીએ છીએ ત્યારે તેની સાથે કોઈક નિદર્શાવકાશ U જોડાયેલો હોય છે જ. હવે, આપણે સંકેત $P(A|B)$ દાખલ કરીએ, જેને "ઘટના Bને સાપેક્ષ ઘટના Aની સંભાવના" અથવા "B ની શરતે A ની સંભાવના" તરીકે વંચાય છે.

સંકેત $P(A|B)$ના ઉપયોગથી ખાતરી થાય છે કે અહીં નિદર્શાવકાશ તરીકે B છે. અહીં, $P(A|B)$ ને B ને સાપેક્ષ A ની શરતી સંભાવના કહે છે. આમ, **કોઈ પણ ઘટનાની સંભાવના એ શરતી સંભાવના છે.** અલબત્ત, જ્યારે નિદર્શાવકાશ U હોય ત્યારે આપણે સરળતા ખાતર સંકેત P(A) વાપરીએ છીએ. પરંતુ જ્યારે નિદર્શાવકાશ Uનો કોઈક ઉપગણ B હોય, ત્યારે, A ની શરતી સંભાવનાને આપણે $P(A|B)$ લખીશું. આમ, કોઈ પણ ઘટનાની શરતી સંભાવના એ બીજી કોઈ ઘટના ઉદ્ભવી હોય તેમ આપેલ હોય ત્યારે મળતી સંભાવના છે.

હવે આપણે શરતી સંભાવનાની સંકલ્પનાને ઉદાહરણ દ્વારા સમજવાનો પ્રયત્ન કરીએ. બે સમતોલ પાસાને એક વખત ઉછાળવાનો પ્રયોગ કરીએ. જ્યારે પ્રથમ પાસા પર અંક 6 આવે ત્યારે બંને પાસા પર આવતા અંકોનો સરવાળો 8 કરતાં વધુ થાય તેની સંભાવના શોધીએ. ધારો કે ઘટના A એ બંને પાસા પર આવતા અંકોનો સરવાળો 8 કરતાં વધુ થાય તે છે અને ઘટના B પ્રથમ પાસા પર આવતો અંક 6 આવે તે છે. આપણે P(A | B)ની કિંમત શોધવી છે. પ્રથમ આપણે ફક્ત પહેલા પાસા પર આવેલ અંક 6 હોય તેવા ઘટકો શોધીશું અને પછી આપણે માંગેલ ઘટનાના ઉદ્ભવ માટેના અનુકૂળ ઘટકો શોધીશું. બંને પાસા પર મળતાં કુલ શક્ય પરિણામો નીચે મુજબ છે :

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

પાસો 1	પાસો 2	કુલ
1	1	2
1	2	3
1	3	4
1	4	5
1	5	6
1	6	7
2	1	3
2	2	4
2	3	5
2	4	6
2	5	7
2	6	8
3	1	4
3	2	5
3	3	6
3	4	7
3	5	8
3	6	9

પાસો 1	પાસો 2	કુલ
4	1	5
4	2	6
4	3	7
4	4	8
4	5	9
4	6	10
5	1	6
5	2	7
5	3	8
5	4	9
5	5	10
5	6	11
6	1	7
6	2	8
6	3	9
6	4	10
6	5	11
6	6	12

આકૃતિ 7.1

પ્રથમ પાસા પર અંક 6 આવે તેવા 6 ઘટકો છે. આમાંથી ચાર ઘટકો એવા છે કે જેથી બંને પાસા પરના અંકોનો સરવાળો 8 થી વધુ હોય. (6, 3); (6, 4); (6, 5); (6, 6).

$\therefore \quad P(A \mid B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ **(i)**

હવે આપણે આ ઉદાહરણને બીજી રીતે જોઈએ. આપણે નોંધીએ કે નિદર્શાવકાશ U ની સાપેક્ષે

$P(A \cap B) = \frac{4}{36}$ $(n = 36, r = 4)$

અને $P(B) = \frac{6}{36}$ $(n = 36, r = 6)$

$\therefore \quad \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ **(ii)**

(i) અને (ii) પરથી આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે,

$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

ઉપરનાં તારણોને ધ્યાનમાં રાખીને નીચે પ્રમાણે વ્યાપક વ્યાખ્યા આપીએ.

શરતી સંભાવના (Conditional Probability) : ધારો કે A અને B એ સાન્ત નિદર્શાવકાશ Uના ઘાતગણ S ની ઘટનાઓ છે અને $P(B) \neq 0$. ઘટના Bને સાપેક્ષ ઘટના Aની શરતી સંભાવના

$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત થાય છે.

સૌપ્રથમ આપણે સાબિત કરીશું કે ચલ A નું ગણ વિધેય $P(A \mid B)$ હકીકતમાં નિશ્ચિત ઘટના B ને સાપેક્ષ સંભાવના વિધેય જ છે.

પ્રથમ આપણે સંભાવનાની પૂર્વધારણાયુક્ત વ્યાખ્યા યાદ કરી લઈએ.

ધારો કે U એક સાન્ત નિદર્શાવકાશ છે અને S નિદર્શાવકાશ U નો ઘાતગણ છે. જો ગણવિધેય $P : S \to R$ નીચેની પૂર્વધારણાઓનું પાલન કરે તો તેને સંભાવના વિધેય કહે છે.

પૂર્વધારણા 1 : પ્રત્યેક $A \in S$ માટે $P(A) \geq 0$

પૂર્વધારણા 2 : $P(U) = 1$

પૂર્વધારણા 3 : પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ $A_1 \in S$ અને $A_2 \in S$ માટે

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

પરિણામ : નિશ્ચિત ઘટના B ને સાપેક્ષ ગણ વિધેય $P(A|B)$ જ્યાં $P(B) > 0$, ચલ Aના વિધેય તરીકે સંભાવના વિધેય છે.

(1) $P(A \cap B) \geq 0$ અને $P(B) > 0$ હોવાથી,

$$\therefore \quad P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0$$

તેથી પ્રત્યેક $A \in S$ માટે અને S માં નિશ્ચિત ઘટના B માટે $P(A \mid B) \geq 0$. આમ, શરતી સંભાવના પૂર્વધારણા 1નું પાલન કરે છે.

(2) જો $A = U$ હોય, તો $P(A \mid B)$ની વ્યાખ્યા અનુસાર,

$$P(U \mid B) = \frac{P(U \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

આમ, શરતી સંભાવના પૂર્વધારણા 2નું પાલન કરે છે.

(3) જો A_1 અને A_2 પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ હોય, તો શરતી સંભાવનાની વ્યાખ્યા અનુસાર,

$$P((A_1 \cup A_2) \mid B) = \frac{P[(A_1 \cup A_2) \cap B]}{P(B)} \qquad \text{(i)}$$

હવે, $(A_1 \cup A_2) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)$ (વિભાજનનો નિયમ)

પરંતુ ઘટનાઓ A_1 અને A_2 પરસ્પર નિવારક હોવાથી $A_1 \cap B$ અને $A_2 \cap B$ પણ પરસ્પર નિવારક થશે.

$$\therefore \quad P[(A_1 \cup A_2) \cap B] = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) \qquad \text{(પૂર્વધારણા 3) (ii)}$$

$$\therefore \quad P((A_1 \cup A_2) \mid B) = \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)}{P(B)} \qquad \text{((i) અને (ii) પરથી)}$$

$$= \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)}$$

$$= P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B)$$

તેથી શરતી સંભાવના પૂર્વધારણા 3નું પાલન કરે છે.

આમ, શરતી સંભાવના, સંભાવના વિધેયની તમામ પૂર્વધારણાઓનું પાલન કરે છે.

શરતી સંભાવનાના ગુણધર્મો :

(1) જો A_1 અને A_2 એ નિદર્શાવકાશ U ની કોઈ પણ બે ઘટનાઓ હોય તથા U ની કોઈ ઘટના B એવી હોય જ્યાં $P(B) \neq 0$, તો $P((A_1 \cup A_2) \mid B) = P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B) - P((A_1 \cap A_2) \mid B)$

$$P((A_1 \cup A_2) \mid B) = \frac{P((A_1 \cup A_2) \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B))}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) - P(A_1 \cap A_2 \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} - \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap B)}{P(B)}$$

$$= P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B) - P((A_1 \cap A_2) \mid B)$$

(2) $P(A' \mid B) = 1 - P(A \mid B)$, જ્યાં $P(B) \neq 0$

B ની શરતે નિદર્શાવકાશ U ની સંભાવના $P(U \mid B) = 1$

$\therefore \ P((A \cup A') \mid B) = 1$ $\quad$ $(A \cup A' = U)$

$\therefore \ P(A \mid B) + P(A' \mid B) = 1$ $\quad$ (A અને A' પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ છે.)

$\therefore \ P(A' \mid B) = 1 - P(A \mid B)$

ઉદાહરણ 1 : એક પેટીમાં મોબાઈલ ફોન માટેના 100 મેમરી કાર્ડ્સ (memory cards) છે. 10 કાર્ડ્સમાં A પ્રકારની ખામી છે, 5 કાર્ડમાં B પ્રકારની ખામી છે તથા 2 કાર્ડ્સમાં બંને પ્રકારની ખામી છે. એક કાર્ડ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે.

(1) પસંદ થયેલ કાર્ડમાં A પ્રકારની ખામી હોય તેવું આપેલ હોય ત્યારે તેમાં B પ્રકારની ખામી હોય તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.

(2) પસંદ થયેલ કાર્ડમાં A પ્રકારની ખામી ન હોય તેવું આપેલ હોય ત્યારે તેમાં B પ્રકારની ખામી ન હોય તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : નીચે પ્રમાણેની ઘટનાઓ વ્યાખ્યાયિત કરીએ :

A : મેમરી કાર્ડમાં A પ્રકારની ખામી હોય.

B : મેમરી કાર્ડમાં B પ્રકારની ખામી હોય.

આપેલી માહિતી પરથી, $P(A) = \frac{10}{100} = 0.10$, $P(B) = \frac{5}{100} = 0.05$, $P(A \cap B) = \frac{2}{100} = 0.02$

(1) માંગેલી સંભાવના $P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.02}{0.10} = 0.2$

(2) માંગેલી સંભાવના $P(B' \mid A') = \frac{P(B' \cap A')}{P(A')} = \frac{P((A \cup B)')}{P(A')}$

$$= \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(A)}$$

$$= \frac{1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]}{1 - P(A)}$$

$$= \frac{1 - (0.10 + 0.05 - 0.02)}{1 - 0.10}$$

$$= \frac{0.87}{0.90} = \frac{87}{90} = \frac{29}{30}$$

ઉદાહરણ 2 : વિમાન નિયત સમયે ઉપડે તેની સંભાવના 0.83 છે. તે નિયત સમયે આવે તેની સંભાવના 0.82 તથા તે નિયત સમયે આવે અને નિયત સમયે ઉપડે તેની સંભાવના 0.78 છે. (1) જો વિમાન નિયત સમયે ઉપડે તેમ આપેલ હોય તો તે નિયત સમયે આવ્યું હોય તે ઘટનાની સંભાવના શોધો. (2) જો વિમાન નિયત સમયે આવે તેમ આપેલ હોય તો તે નિયત સમયે ઉપડે તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે ઘટના D એ વિમાન નિયત સમયે ઉપડે તે છે અને ઘટના A એ વિમાન નિયત સમયે આવે તે છે. આપેલ માહિતી અનુસાર, $P(D) = 0.83$, $P(A) = 0.82$, $P(D \cap A) = 0.78$

(1) જો વિમાન નિયત સમયે ઉપડે તેમ આપેલ હોય ત્યારે તે નિયત સમયે આવે તેની સંભાવના

$$P(A \mid D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0.78}{0.83} = \frac{78}{83}$$

(2) જો વિમાન નિયત સમયે આવે તેમ આપેલ હોય ત્યારે તે નિયત સમયે ઉપડે તેની સંભાવના

$$P(D \mid A) = \frac{P(D \cap A)}{P(A)} = \frac{0.78}{0.82} = \frac{78}{82} = \frac{39}{41}$$

ઉદાહરણ 3 : એક સમતોલ ન હોય તેવા પાસાને ઉછાળવાથી તેના પર મળતા પૂર્ણાંકની સંભાવના નીચે મુજબ છે :

પૂર્ણાંક	1	2	3	4	5	6
સંભાવના	0.10	0.32	0.21	0.15	0.05	0.17

ઉપર પ્રમાણેના પાસાને ઉછાળવામાં આવે છે. જો તેના પર મળતો પૂર્ણાંક 1 અથવા 2 હોય તેવું આપેલ હોય ત્યારે પાસા પર મળતો પૂર્ણાંક 1 હોય તે ઘટનાની સંભાવના કેટલી થાય ?

ઉકેલ : ધારો કે A : પાસા પર મળતો પૂર્ણાંક 1 હોય.

B : પાસા પર મળતો પૂર્ણાંક 2 હોય.

આપેલ માહિતી પરથી $P(A) = 0.10$, $P(B) = 0.32$.

હવે, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (A અને B પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ છે.)

$= 0.10 + 0.32 = 0.42$

આપણે $P(A \mid (A \cup B))$ની સંભાવના શોધવી છે.

$$P(A \mid (A \cup B)) = \frac{P[A \cap (A \cup B)]}{P(A \cup B)}$$

$$= \frac{P(A)}{P(A \cup B)}$$ (શા માટે ?)

$$= \frac{0.10}{0.42} = \frac{10}{42} = \frac{5}{21}$$

ઉદાહરણ 4 : 500 વ્યક્તિઓના સંતાનોના માસિક ખર્ચ વિશેની મોજણી કરવામાં આવી. મોજણીમાં વ્યક્તિને પૂછવામાં આવે છે કે તેમનું સંતાન કૉલેજમાં અભ્યાસ કરે છે કે નહિ અને તેમનો માસિક ખર્ચ કેટલો છે.

નીચે આપેલા કોષ્ટકમાં મોજણી દ્વારા મળતી સંભાવના દર્શાવેલ છે :

	માસિક ખર્ચની સંભાવના		
	ખૂબ વધુ	સમતોલ	ખૂબ ઓછો
સંતાન કૉલેજમાં છે	0.30	0.13	0.01
સંતાન કૉલેજમાં નથી	0.20	0.25	0.11

ધારો કે એક વ્યક્તિની યાદચ્છિક રીતે પસંદગી કરવામાં આવી. જો પસંદ થયેલી વ્યક્તિનું સંતાન કૉલેજમાં ભણે છે તેવું આપેલું હોય ત્યારે તે ખૂબ જ વધુ માસિક ખર્ચ કરતું હોય તે ઘટનાની સંભાવના કેટલી થાય ?

ઉકેલ : ધારો કે ઘટના B એ યાદચ્છિક રીતે પસંદ થયેલી વ્યક્તિનું સંતાન કૉલેજમાં અભ્યાસ કરે તે છે.

$\therefore \quad P(B) = 0.30 + 0.13 + 0.01 = 0.44$

ધારો કે ઘટના A એ યાદચ્છિક રીતે પસંદ થયેલી વ્યક્તિના સંતાનનો માસિક ખર્ચ ખૂબ વધુ છે.

આપેલી માહિતી પરથી, $P(A \cap B) = P$(માસિક ખર્ચ ખૂબ વધુ $\cap$ સંતાન કોલેજમાં અભ્યાસ કરતું હોય) $= 0.30$

આમ, માંગેલી સંભાવના $P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.30}{0.44} = \frac{15}{22}$

ઉદાહરણ 5 : જો એવું આપેલું હોય કે બે બાળકો ધરાવતા કુટુંબમાં ઓછામાં ઓછી એક છોકરી છે ત્યારે બંને છોકરીઓ હોય તેની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : જો બાળક છોકરો હોય તે પરિણામને b વડે અને છોકરી હોય તે પરિણામને g વડે દર્શાવીએ તો, બે બાળકો ધરાવતાં કુટુંબની તપાસના પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ

$U = \{(b, b), (g, b), (b, g), (g, g)\}$.

ધારો કે ઘટના A : બંને બાળકો છોકરીઓ હોય તે છે અને

B : બંને બાળકોમાં ઓછામાં ઓછી એક છોકરી હોય તે દર્શાવેલ છે.

$A = \{(g, g)\}$ અને $B = \{(b, g), (g, b), (g, g),\}$

$\therefore \quad A \cap B = \{(g, g)\}$

આમ, $P(B) = \frac{3}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

$\therefore$ માંગેલી સંભાવના $P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

સ્વાધ્યાય 7.1

1. જો $P(A) = 0.35$, $P(B) = 0.45$ અને $P(A \cup B) = 0.65$, તો $P(B | A)$ શોધો.
2. જો $P(A) = 0.40$, $P(B) = 0.35$ અને $P(A \cup B) = 0.55$, તો $P(A | B)$ શોધો.
3. જો $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.5$ અને $P(A | B) = 0.4$, તો $P(A \cap B)$ અને $P(B | A)$ શોધો.
4. એક સમતોલ પાસાને બે વખત ઉછાળવામાં આવે છે અને તેના પર આવતા પૂર્ણાંકોનો સરવાળો 7 છે તેમ આપેલ છે. પાસા પર ઓછામાં ઓછો એક વખત પૂર્ણાંક 2 મળે તેની સંભાવના કેટલી થાય ?
5. એક સમતોલ પાસો ઉછાળવામાં આવે છે. જો પાસા પર મળતો પૂર્ણાંક અયુગ્મ સંખ્યા હોય તેમ આપેલ હોય ત્યારે તે અવિભાજ્ય સંખ્યા હોય તેની સંભાવના કેટલી થાય ?
6. ઉદાહરણ 4ના કોષ્ટકનો ઉપયોગ કરી નીચે પ્રમાણેની સંભાવના શોધો : (1) જો વ્યક્તિનું સંતાન કોલેજમાં અભ્યાસ કરતું ન હોય તેમ આપેલું હોય ત્યારે તેનો માસિક ખર્ચ ખૂબ જ ઓછો હોય તેની સંભાવના શોધો. (2) જો વ્યક્તિનું સંતાન કૉલેજમાં અભ્યાસ કરે છે તેમ આપેલું હોય ત્યારે તેનો માસિક ખર્ચ સમતોલ હોય તેની સંભાવના શોધો.
7. એક કાર્ડ પર 1, બીજા કાર્ડ પર 2 એમ 1 થી 100 પૂર્ણાંક લખેલા 100 કાર્ડ્સને એક પેટીમાં મૂકી બરાબર મિશ્ર કરીને પછી યાદચ્છિક રીતે એક કાર્ડની પસંદગી કરવામાં આવે છે. જો પસંદ થયેલા કાર્ડ પરનો ક્રમાંક પૂર્ણવર્ગ હોય તેમ આપેલું હોય ત્યારે તે અયુગ્મ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા હોય તેની સંભાવના શોધો.
8. એક શહેરના 40 % રહીશો પાસે કમ્પ્યૂટર છે, 25 % રહીશો પાસે ઈન્ટરનેટ જોડાણ છે અને 15 % રહીશો પાસે બંને છે. આ શહેરના એક રહીશની યાદચ્છિક રીતે પસંદગી કરવામાં આવે છે : (1) પસંદ થયેલ રહીશ પાસે કમ્પ્યૂટર છે તેમ આપેલું હોય ત્યારે તેની પાસે ઈન્ટરનેટ જોડાણ હોય તેની સંભાવના શોધો. (2) પસંદ થયેલ રહીશ પાસે ઈન્ટરનેટ જોડાણ છે તેમ આપેલું હોય ત્યારે તેની પાસે કમ્પ્યૂટર ન હોય તેની સંભાવના શોધો.
9. એક સમતોલ પાસાને ત્રણ વખત ઉછાળવામાં આવે છે. ઘટના A એ ત્રીજા પ્રયત્નમાં મળતો પાસા પરનો પૂર્ણાંક 4 હોય તે છે તથા ઘટના B એ પ્રથમ અને દ્વિતીય પ્રયત્નમાં પાસા પર મળતો પૂર્ણાંક અનુક્રમે 6 અને 5 હોય તે છે. $P(A | B)$ શોધો.

10. એક સમતોલ સિક્કાને ત્રણ વખત ઉછાળવામાં આવે છે. ઘટનાઓ A, B, E, F, M, N નીચે મુજબ દર્શાવેલ છે : (1) A : ત્રીજા પ્રયત્નમાં છાપ મળે તે ઘટના છે. B : પ્રથમ પ્રયત્નમાં છાપ મળે તે ઘટના છે. $P(A|B)$ શોધો. (2) E : ઓછામાં ઓછી બે વખત છાપ મળે તે ઘટના છે. F : વધુમાં વધુ બે વખત છાપ મળે તે ઘટના છે. $P(E|F)$ શોધો. (3) M : વધુમાં વધુ બે વખત કાંટો મળે તે ઘટના છે. N : ઓછામાં ઓછો એક વખત કાંટો મળે તે ઘટના છે. $P(M|N)$ શોધો.

*

7.3 સંભાવનાનો ગુણાકારનો નિયમ

આપણે જાણીએ છીએ કે જ્યારે ઘટના B બની ગઈ હોય ત્યારે ઘટના Aની ઘટના Bને સાપેક્ષ શરતી સંભાવના

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},\ P(B) \neq 0$$

આ પરથી આપણે લખી શકીએ કે, $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$ **(i)**

વળી, $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)},\ P(A) \neq 0$

$\therefore \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ **$(A \cap B = B \cap A)$**

$\therefore \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$ **(ii)**

પરિણામ (i) અને (ii) પરથી,

જો $P(A) \neq 0$ તો $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$

જો $P(B) \neq 0$ તો $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$

ઉપરના પરિણામોને **સંભાવનાનો ગુણાકારનો નિયમ** કહેવાય છે.

ત્રણ ઘટનાઓ માટે સંભાવનાનો ગુણાકારનો નિયમ : જો A, B અને C એ ત્રણ ઘટનાઓ હોય, તો

$$\begin{aligned} P(A \cap B \cap C) &= P((A \cap B) \cap C) \\ &= P(A \cap B)\ P(C|(A \cap B)) \quad \text{(બે ઘટનાઓ માટે ગુણાકારનો નિયમ)} \\ &= P(A)\ P(B|A)\ P(C|(A \cap B)) \end{aligned}$$

પૂર્ણ સંભાવના માટેનું પ્રમેય (Total Probability) :

પ્રમેય 7.1 : ધારો કે B_1 અને B_2 પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ઘટનાઓ છે તથા $P(B_1) \neq 0$ અને $P(B_2) \neq 0$. S ની કોઈ પણ ઘટના A માટે.

$P(A) = P(B_1)\ P(A|B_1) + P(B_2)\ P(A|B_2)$

સાબિતી : અહીં B_1 અને B_2 પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ઘટનાઓ હોવાથી,

$B_1 \cup B_2 = U$ અને $B_1 \cap B_2 = \emptyset$

$$\begin{aligned} \therefore \quad A &= A \cap U \\ &= A \cap (B_1 \cup B_2) \\ &= (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \quad \text{(વિભાજનનો નિયમ) (i)} \end{aligned}$$

હવે, $(A \cap B_1) \cap (A \cap B_2) = A \cap (B_1 \cap B_2)$ **$(B_1 \cap B_2 = \emptyset)$**

$= A \cap \emptyset$

$= \emptyset$

$\therefore \quad A \cap B_1$ અને $A \cap B_2$ પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ છે.

$\therefore \quad$ (i) ના કારણે, $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2)$

$P(A) = P(B_1)\ P(A|B_1) + P(B_2)\ P(A|B_2)$ **(સંભાવનાનો ગુણાકારનો નિયમ)**

તે જ પ્રમાણે, જો B_1, B_2, B_3 પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ઘટનાઓ હોય અને $P(B_1) \neq 0$, $P(B_2) \neq 0$, $P(B_3) \neq 0$ તો S ની કોઈ પણ ઘટના A માટે

$P(A) = P(B_1)\ P(A|B_1) + P(B_2)\ P(A|B_2) + P(B_3)\ P(A|B_3)$

બેયઝનો નિયમ

બેયઝનો નિયમ પ્રથમ વખત રીવરેન્ડ થોમસ બેયઝે (1702 - 1761) રજૂ કર્યો.

પ્રમેય 7.2 : ધારો કે B_1, B_2 અને B_3 પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ઘટનાઓ છે. જો A ઘટના એવી હોય કે જેથી $P(A) \neq 0$, તો

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i)\,P(B_i)}{P(A \mid B_1)\,P(B_1) + P(A \mid B_2)\,P(B_2) + P(A \mid B_3)\,P(B_3)}, \qquad i = 1, 2, 3$$

સાબિતી : શરતી સંભાવનાની વ્યાખ્યા અનુસાર,

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} \qquad \text{(i)}$$

હવે, સંભાવનાના ગુણાકારના નિયમ અને પ્રમેય 7.1 અનુસાર,

$$P(A \cap B_i) = P(A \mid B_i)\,P(B_i) \qquad \text{(ii)}$$

અને $P(A) = P(A \mid B_1)\,P(B_1) + P(A \mid B_2)\,P(B_2) + P(A \mid B_3)\,P(B_3)$ (iii)

પરિણામ (i), (ii) અને (iii) પરથી,

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i)\,P(B_i)}{P(A \mid B_1)\,P(B_1) + P(A \mid B_2)\,P(B_2) + P(A \mid B_3)\,P(B_3)}, \qquad i = 1, 2, 3$$

$$= \frac{P(A \mid B_i)\,P(B_i)}{\sum_{i=1}^{3} P(A \mid B_i)\,P(B_i)}, \qquad i = 1, 2, 3$$

ઘટનાઓની નિરપેક્ષતા (Independent Events) :

જો ઘટના Aના ઉદ્ભવ થવા માટેની સંભાવના એ ઘટના Bના ઉદ્ભવ થવા માટેની સંભાવના પર આધારિત ન હોય તો $P(A \mid B) = P(A)$ થાય અને આ પરિસ્થિતિમાં A તથા B ને નિરપેક્ષ ઘટનાઓ કહે છે.

ઉદાહરણ તરીકે, એક પાસાને ઉછાળતા પ્રથમ પ્રયત્નમાં અંક 6 આવે તે ઘટના અને દ્વિતીય પ્રયત્નમાં અંક 6 આવે તે ઘટના નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે. આનાથી ઉલટું, પાસાને ઉછાળતાં પ્રથમ પ્રયત્નમાં અંક 6 આવે તે ઘટના અને પ્રથમ તથા બીજા પ્રયત્નમાં પાસા પરના અંકનો સરવાળો 8 થાય તે ઘટનાઓ નિરપેક્ષ નથી.

હવે, શરતી સંભાવનાની વ્યાખ્યા પરથી,

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad (P(B) \neq 0)$$

જો A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય તો

$$P(A \mid B) = P(A)$$

$$\therefore \quad \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

$$\therefore \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

વળી, $P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ $(P(A) \neq 0)$

$$\therefore \quad P(B) = P(B \mid A)$$

આમ, જો ઘટનાઓ A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય તો $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, તથા $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ અને $P(A \mid B) = P(A)$ અને $P(B \mid A) = P(B)$.

વળી, જો $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ તો આપણે કહી શકીએ કે A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે.

A અને B ઘટનાઓ નિરપેક્ષ હોય, તો અને તો જ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

પ્રમેય 7.3 : જો A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય, તો A અને B', A' અને B અને A' અને B' પણ નિરપેક્ષ હોય.

સાબિતી : ઘટનાઓ $A \cap B$ અને $A \cap B'$ પરસ્પર નિવારક છે અને $A = (A \cap B) \cup (A \cap B')$

$\therefore \quad P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B')$

$\therefore \quad P(A) = P(A) \cdot P(B) + P(A \cap B')$ (A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે)

$\therefore \quad P(A \cap B') = P(A)\,(1 - P(B))$

$\therefore \quad P(A \cap B') = P(A)\,P(B')$

$\therefore$ A અને B' નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે. આ જ પ્રમાણે આપણે સાબિત કરી શકીએ કે A' અને B પણ નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે.

હવે, $P(A' \cap B') = P[(A \cup B)']$ (દ મોર્ગનનો નિયમ)

$= 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))$

$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$

$= 1 - P(A) - P(B) + P(A)\,P(B)$ (A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે)

$= (1 - P(A)) - P(B)\,(1 - P(A))$

$= (1 - P(A))\,(1 - P(B))$

$\therefore \quad P(A' \cap B') = P(A')\,P(B')$

$\therefore$ A' અને B' નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે.

નોંધ : જો ત્રણ ઘટનાઓ A, B અને C માટે,

(1) $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

$P(B \cap C) = P(B)\,P(C)$

$P(A \cap C) = P(A)\,P(C)$

અને $P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C)$ હોય, તો ઘટનાઓ A, B, C પરસ્પર નિરપેક્ષ છે એમ કહેવાય.

જો આપેલ ત્રણ ઘટનાઓ ઓછામાં ઓછી એક શરતનું પાલન ન કરે તો તે પરસ્પર નિરપેક્ષ ન કહેવાય.

(2) $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

$P(B \cap C) = P(B)\,P(C)$

અને $P(A \cap C) = P(A)\,P(C)$ હોય, તો ઘટનાઓ A, B, C જોડયુક્ત નિરપેક્ષ છે એમ કહેવાય.

ઉદાહરણ 6 : રમવાના 52 પત્તાના ઢગમાંથી એક પછી એક યાદચ્છિક રીતે ત્રણ પત્તાં પસંદ કરવામાં આવે છે. (બીજું પત્તું પસંદ કરીએ ત્યારે પ્રથમ પત્તું પરત કરવામાં આવતું નથી.) જો ઘટનાઓ A_1 પસંદ થયેલ પ્રથમ પત્તું લાલ રંગનો એક્કો હોય, A_2 પસંદ થયેલ બીજું પત્તું 10 અથવા ગુલામ હોય અને A_3 પસંદ થયેલ ત્રીજા પત્તાં પરનો ક્રમાંક 3થી વધુ હોય અને 7થી ઓછો હોય તે છે તો $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ શોધો.

ઉકેલ : અહીં ઘટનાઓ A_1 : પસંદ થયેલ પ્રથમ પત્તું લાલ રંગનો એક્કો હોય. A_2 : પસંદ થયેલ બીજું પત્તું 10 અથવા ગુલામ હોય. A_3 : પસંદ થયેલ ત્રીજા પત્તા પરનો ક્રમાંક 3 થી વધુ અને 7થી ઓછો હોય.

હવે, $P(A_1) = \frac{2}{52}$ (લાલનો એક્કો અને ચોકટનો એક્કો)

$P(A_2 \mid A_1) = \frac{8}{51}$ (પૂરવણી વગર, 10 ક્રમાંકના 4 પત્તા અને ગુલામના 4 પત્તા)

$P(A_3 \mid (A_1 \cap A_2)) = \frac{12}{50}$ (શા માટે ?)

$\therefore$ સંભાવનાના ગુણાકારના નિયમ પરથી,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid (A_1 \cap A_2))$$

$$= \frac{2}{52} \cdot \frac{8}{51} \cdot \frac{12}{50}$$

$$= \frac{8}{5525}$$

ઉદાહરણ 7 : એક પેટીમાં 8 લાલ અને 5 સફેદ દડા છે. ત્રણ ત્રણ દડાઓ બે વખત એક પછી એક એવી રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે કે (1) બીજી પસંદગી પહેલાં પ્રથમ પ્રયત્ને પસંદ થયેલ દડા પરત કરવામાં આવે છે (2) બીજી પસંદગી પહેલાં પ્રથમ પ્રયત્ને પસંદ થયેલ દડા પરત કરવામાં આવતા નથી. પ્રથમ પસંદગી ત્રણ સફેદ દડાઓની થાય અને બીજી પસંદગી ત્રણ લાલ દડાઓની થાય તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે ઘટના A એ પ્રથમ પસંદગી ત્રણ સફેદ દડાઓની થાય છે તે દર્શાવે છે અને ઘટના B એ બીજી પસંદગી ત્રણ લાલ દડાઓની થાય તે છે. આપણે $P(A \cap B)$ની કિંમત શોધવી છે.

(1) પૂરવણી સહિતની પસંદગી : પ્રથમ પસંદગી વખતે લીધેલા દડા બીજી પસંદગી પહેલાં પેટીમાં પાછા મૂકવામાં આવે તો ઘટનાઓ A અને B નિરપેક્ષ છે. અને માંગેલી સંભાવના $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ દ્વારા મળે.

પ્રથમ પસંદગી : કુલ $8 + 5 = 13$ દડામાંથી ત્રણ દડાની પસંદગીના પ્રકારની સંખ્યા $\binom{13}{3}$.

$\therefore \quad n = \binom{13}{3}$

જો પસંદ થયેલ ત્રણેય દડા સફેદ હોય, તો $r = \binom{5}{3}$

$$\therefore \quad P(A) = \frac{r}{n} = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{13}{3}} = \frac{10}{286} = \frac{5}{143}$$

દ્વિતીય પસંદગી : પ્રથમ પસંદગી વખતે પસંદ થયેલા દડા પેટીમાં પરત મૂકવામાં આવે છે. તેથી પેટીમાં કુલ 13 દડા જ રહેશે. જો પસંદ થયેલા ત્રણેય દડા લાલ રંગના હોય તો $r = \binom{8}{3}$

$$\therefore \quad P(B) = \frac{r}{n} = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{13}{3}} = \frac{56}{286} = \frac{28}{143}$$

આમ, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$= \frac{\binom{5}{3}}{\binom{13}{3}} \cdot \frac{\binom{8}{3}}{\binom{13}{3}} = \frac{140}{(143)^2} = \frac{140}{20449}$$

(2) પૂરવણી સિવાયની પસંદગી : આ પ્રકારની પસંદગીમાં પ્રથમ પ્રયત્ને પસંદ થયેલ દડા પેટીમાં પરત કરવામાં આવતા નથી. આથી ઘટનાઓ A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ ન થાય અને માંગેલી સંભાવના

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$$

(1) માં ચર્ચા કર્યા મુજબ $P(A) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{13}{3}} = \frac{5}{143}$ **(i)**

જો પસંદ થયેલા ત્રણ સફેદ દડા પેટીમાં પરત કરવામાં ન આવે તો હવે પેટીમાં $13 - 3 = 10$ દડા બાકી રહેશે. (8 લાલ, 2 સફેદ)

આમ, $P(B \mid A) = \dfrac{\binom{8}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{56}{120} = \frac{7}{15}$ (ii)

આથી, પરિણામ (i) અને (ii) પરથી,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{13}{3}} \cdot \frac{\binom{8}{3}}{\binom{10}{3}} = \left(\frac{5}{143}\right)\left(\frac{7}{15}\right) = \frac{7}{429}$$

ઉદાહરણ 8 : A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે. જો $P(A \cup B) = 0.5$ અને $P(A) = 0.2$, તો $P(B)$ શોધો.

ઉકેલ : A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોવાથી, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

હવે, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= P(A) + P(B) - P(A)\ P(B)$

$= P(A) + P(B)\ (1 - P(A))$

$\therefore \quad 0.5 = 0.2 + P(B)\ (1 - 0.2)$

$\therefore \quad 0.3 = P(B)\ (0.8)$

$\therefore \quad P(B) = \frac{3}{8}$

ઉદાહરણ 9 : એક કંપનીમાં ઉત્પાદિત યંત્ર A અને B બે પ્રકારના ભાગમાં બનેલું છે. જો કંપની યંત્રના A પ્રકારના 100 ભાગ બનાવે તો તે પૈકી 9 ભાગ ખામીવાળા હોઈ શકે છે અને B પ્રકારના 100 ભાગ બનાવે તો તે પૈકી 5 ભાગ ખામીવાળા હોઈ શકે છે. કંપની દ્વારા ઉત્પાદિત યંત્ર ખામીરહિત હોય તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે ઘટના E : યંત્રનો A ભાગ ખામીવાળો હોય

તથા ઘટના F : યંત્રનો B ભાગ ખામીવાળો હોય તે છે.

આપેલ માહિતી પરથી,

$P(E) = \frac{9}{100}$, $P(F) = \frac{5}{100}$

ઘટના E' : યંત્રનો A ભાગ ખામીરહિત હોય અને

ઘટના F' : યંત્રનો B ભાગ ખામીરહિત હોય.

$\therefore \quad P(E') = 1 - P(E) = 1 - \frac{9}{100} = \frac{91}{100}$

$P(F') = 1 - P(F) = 1 - \frac{5}{100} = \frac{95}{100}$

E તથા F નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોવાથી E' અને F' પણ નિરપેક્ષ ઘટનાઓ થશે.

હવે, કંપની દ્વારા ઉત્પાદિત યંત્ર ખામીરહિત હોય તે ઘટના $E' \cap F'$ થાય.

$\therefore \quad P(E' \cap F') = P(E') \cdot P(F')$

$$= \frac{91}{100} \cdot \frac{95}{100} = \frac{8645}{10000} = 0.8645$$

ઉદાહરણ 10 : એક પાકિટમાં 6 ચાંદીના સિક્કાઓ અને 3 સોનાના સિક્કાઓ છે. બીજા પાકિટમાં 4 ચાંદીના અને 5 સોનાના સિક્કાઓ છે. એક પાકિટની યાદચ્છિક પસંદગી કરવામાં આવે છે અને તેમાંથી એક સિક્કો પસંદ કરવામાં આવે છે. આ સિક્કો ચાંદીનો હોય તે ઘટનાની સંભાવના કેટલી થાય ?

ઉકેલ : ધારો કે ઘટના B_1 પ્રથમ પાકીટ પસંદ થાય તે છે અને ઘટના B_2 બીજું પાકિટ પસંદ થાય તે છે.

બંનેની પસંદગીની સંભાવના સમાન હોવાથી,

$\therefore \quad P(B_1) = \frac{1}{2}$ અને $P(B_2) = \frac{1}{2}$

ઘટના A : પસંદ થયેલો સિક્કો ચાંદીનો હોય તે છે.

$\therefore \quad P(A \mid B_1) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ (કુલ 9 સિક્કાઓ, 6 ચાંદીના સિક્કા)

તે જ પ્રમાણે, $P(A \mid B_2) = \frac{4}{9}$

$\therefore$ માંગેલી સંભાવના, $P(A) = P(B_1)\ P(A \mid B_1) + P(B_2)\ P(A \mid B_2)$

$$= \frac{6}{9} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

ઉદાહરણ 11 : વિજ્ઞાનના એક વર્ગના 75 વિદ્યાર્થીઓમાંથી 15 વિદ્યાર્થીઓ AB જૂથના છે, 45 વિદ્યાર્થીઓ A જૂથના અને બાકીના B જૂથના છે. KVPY (કિશોર વિજ્ઞાન પ્રોત્સાહક યોજના)ની પરીક્ષામાં AB જૂથનો વિદ્યાર્થી ઉત્તીર્ણ ન થાય તેની સંભાવના 0.005, A જૂથનો વિદ્યાર્થી ઉત્તીર્ણ ન થાય તેની સંભાવના 0.05 અને B જૂથનો વિદ્યાર્થી ઉત્તીર્ણ ન થાય તેની સંભાવના 0.15 છે. જો એક વિદ્યાર્થી KVPY પરીક્ષામાં ઉત્તીર્ણ થયેલ છે તેમ આપેલું હોય તો તે B જૂથનો હોય તેની સંભાવના કેટલી થાય ?

ઉકેલ : નીચે પ્રમાણેની ઘટનાઓ વ્યાખ્યાયિત કરીએ :

B_1 : વિદ્યાર્થી AB જૂથનો છે.

B_2 : વિદ્યાર્થી A જૂથનો છે.

B_3 : વિદ્યાર્થી B જૂથનો છે.

A : વિદ્યાર્થી KVPY ની પરીક્ષામાં ઉત્તીર્ણ થાય તે છે.

આપેલી માહિતી પરથી,

$P(B_1) = \frac{15}{75} = 0.2,\ P(B_2) = \frac{45}{75} = 0.6,\ P(B_3) = \frac{15}{75} = 0.2$

$P(A \mid B_1) = 1 - 0.005 = 0.995,\ P(A \mid B_2) = 1 - 0.05 = 0.950,\ P(A \mid B_3) = 1 - 0.15 = 0.850$

હવે, $P(A) = P(A \mid B_1)\,P(B_1) + P(A \mid B_2)\,P(B_2) + P(A \mid B_3)\,P(B_3)$

$= (0.995)(0.2) + (0.95)(0.6) + (0.85)(0.2)$

$= 0.1990 + 0.570 + 0.170$

$= 0.939$ (i)

આપણે $P(B_3 \mid A)$ મેળવીએ.

બેયઝના નિયમથી,

$$P(B_3 \mid A) = \frac{P(A \mid B_3)\ P(B_3)}{\sum_{i=1}^{3} P(A \mid B_i)\ P(B_i)}$$

$$= \frac{P(A \mid B_3)\ P(B_3)}{P(A)}$$

$$= \frac{(0.2)\ (0.850)}{0.939} \qquad \text{((i) પરથી)}$$

$$= \frac{0.170}{0.939} = \frac{170}{939}$$

સ્વાધ્યાય 7.2

1. બરાબર ચીપેલાં 52 પત્તાંના ઢગમાંથી એક પત્તુ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. ઘટનાઓ A અને B નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત છે :

   A : પસંદ થયેલું પત્તું કાળીનું હોય

   B : પસંદ થયલું પત્તું એક્કો હોય.

   ચકાસો કે ઘટનાઓ A અને B નિરપેક્ષ છે કે નહિ.

2. જો $P(B') = 0.65$, $P(A \cup B) = 0.85$ તથા A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે, તો $P(A)$ શોધો.

3. એક વર્ગમાં 10 છોકરાઓ અને 5 છોકરીઓ છે. એક પછી એક ત્રણ વિદ્યાર્થીઓને યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. નીચે મુજબની સંભાવના શોધો :

   (1) પહેલા બે છોકરાઓ પસંદ થાય અને ત્રીજી છોકરી હોય.

   (2) પ્રથમ અને ત્રીજી પસંદગી છોકરાની થાય તથા બીજી પસંદગી છોકરીની થાય.

   (3) પ્રથમ અને ત્રીજી પસંદગી એક લિંગની હોય અને બીજી પસંદગી વિરુદ્ધ લિંગની હોય.

4. પોલીસ વિભાગ શહેરની હદમાં ત્રણ જુદાં જુદાં સ્થળોએ રડારની મદદથી ગતિ અવરોધકોનો ઉપયોગ કરવાનું નક્કી કરે છે. રડાર સંયત્ર આ ત્રણ સ્થળોએ 40 %, 30 % અને 20 % સમય કામ કરે છે. જો એક વ્યક્તિ તેના કામના સ્થળે વધુ પડતી ગતિથી જતો હોય ત્યારે આ રડારવાળાં ત્રણ સ્થળોએથી પસાર થવાની સંભાવના અનુક્રમે 0.2, 0.1 અને 0.5 હોય તો તેને દંડ થવાની સંભાવના કેટલી થાય ?

5. ધારો કે રંગીન દડા નીચે પ્રમાણે ત્રણ પેટીમાં વહેંચાયેલા છે :

રંગ ↓	પેટી 1	પેટી 2	પેટી 3
લાલ	2	4	3
સફેદ	3	1	4
વાદળી	5	3	3
કુલ	10	8	10

   એક પેટીને યાદચ્છિક પસંદ કરી તેમાંથી યાદચ્છિક રીતે એક દડો પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ થયેલો દડો લાલ રંગનો હોય તેની સંભાવના કેટલી થાય ?

6. એક કારખાનામાં ઉત્પાદિત કુલ વસ્તુઓમાંથી ત્રણ યંત્રો A, B અને C અનુક્રમે 50 %, 30 % અને 20 % ઉત્પાદન કરે છે. આ યંત્રો અનુક્રમે 3 %, 4 % અને 5 % ખામીવાળી વસ્તુઓનું ઉત્પાદન કરે છે. જો કોઈ ઉત્પાદિત વસ્તુ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે તો તે ખામીરહિત હોય તેની સંભાવના શોધો.

7. એક કૉલેજમાં 25 % છોકરાઓ અને 10 % છોકરીઓ ગણિત વિષયનો અભ્યાસ કરે છે. કૉલેજના કુલ વિદ્યાર્થીઓમાં છોકરીઓનું પ્રમાણ 60 % છે.

   (1) ગણિત વિષયનો અભ્યાસ થતો હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

   (2) કૉલેજના એક વિદ્યાર્થીની યાદચ્છિક પસંદગી કરવામાં આવે તો માલૂમ પડ્યું કે તે ગણિત વિષયનો અભ્યાસ કરે છે. આ પસંદ થયેલ વિદ્યાર્થી છોકરી હોવાની સંભાવના કેટલી ?

8. એક રોગથી પીડાતા દર્દી માટે રોગથી સાજા થવા માટે બે સારવાર પદ્ધતિઓ B_1 અને B_2 ઉપલબ્ધ છે. દર્દી આ બે પૈકીની ગમે તે એક પદ્ધતિ પસંદ કરી શકે છે. જો તે સારવાર પદ્ધતિ B_1 પસંદ કરે તો તેની રોગથી સાજા થવાની સંભાવના $\frac{7}{8}$ છે અને જો તે સારવાર પદ્ધતિ B_2 પસંદ કરે તો તેની રોગથી સાજા થવાની સંભાવના $\frac{9}{10}$ છે. (i) દર્દી રોગથી સાજો થઈ જશે તેની સંભાવના કેટલી ? (ii) જો દર્દી રોગથી સાજો થયેલો છે તેમ આપેલું હોય તો તેણે સાજા થવા માટે સારવાર પદ્ધતિ B_2નો ઉપયોગ કર્યો હશે તે ઘટનાની સંભાવના કેટલી ?

*

7.4 યાદચ્છિક ચલ અને સંભાવના વિતરણ

યાદચ્છિક પ્રયોગના શક્ય પરિણામોથી મળતા નિદર્શાવકાશના ઘાતગણ S પર વ્યાખ્યાયિત સંભાવના વિધેય દ્વારા વિવિધ ઘટનાઓની સંભાવના કેવી રીતે મેળવી શકાય તે વિશેનો અભ્યાસ આપણે કરી ગયા. વ્યવહારમાં યાદચ્છિક પ્રયોગના બધા પરિણામોની વિગતોનો અભ્યાસ કરવામાં આપણને રસ હોતો નથી. દાખલા તરીકે બે બાળકો ધરાવતા કુટુંબના યાદચ્છિક પ્રયોગના ચાર શક્ય પરિણામો bb, bg, gb, gg ને બદલે આ પ્રયોગમાં મળતી છોકરાઓની સંખ્યા (અથવા છોકરીઓની સંખ્યા) જાણવામાં વધુ રસ હોય છે. એક કારખાનામાં ઉત્પન્ન થયેલ વીજળીના ગોળાના સમૂહમાંથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ ગોળાના સમૂહમાંથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ ગોળાનું આયુષ્ય (કલાકમાં) કેટલું છે તે જાણવું વધુ રસપ્રદ છે. આમ, ઉપર વર્ણવેલ દરેક યાદચ્છિક પ્રયોગના પરિણામ સાથે આપણે એક યા બીજી રીતે એક વાસ્તવિક સંખ્યા સાંકળીએ છીએ. અર્થાત્ યાદચ્છિક પ્રયોગનાં તમામ પરિણામોથી મળતા નિદર્શાવકાશ પર એક વાસ્તવિક વિધેય વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય અને આ વાસ્તવિક વિધેયને આપણે **યાદચ્છિક ચલ** કહીશું. આ વિભાગમાં આપણે યાદચ્છિક ચલ અને તેના સંભાવના વિતરણ વિશે અભ્યાસ કરીશું.

યાદચ્છિક ચલ વિશેની સંકલ્પના મેળવવા આપણે એક સાદું ઉદાહરણ લઈએ. બે બાળકો ધરાવતા એક કુટુંબની પસંદગી કરીએ. આ યાદચ્છિક પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ નિદર્શાવકાશ $U = \{bb, bg, gb, gg\}$ છે.

જો U ના ઘટકો સમસંભાવી હોય તો સંભાવનાની પ્રશિષ્ટ વ્યાખ્યા મુજબ,

$$P(\{bb\}) = P(\{bg\}) = P(\{gb\}) = P(\{gg\}) = \frac{1}{4}$$

ધારો કે $X : U \to R$ એ U પર આ પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત થાય છે. $X(u) = u$ માં છોકરાઓની સંખ્યા

જો $u = bb$ તો $X(bb) = 2$. જો $u = gg$ તો $X(gg) = 0$ અને જો $u = bg$ કે gb હોય, તો $X(bg) = X(gb) = 1$.

આમ, વિધેય $X : U \to R$ નો વિસ્તાર $\{0, 1, 2\}$ થાય. હવે આપણે વિધેય Xના વિસ્તારનો ઉપગણ $\{1\}$ લઈએ. ગણ $\{1\}$નું પૂર્વપ્રતિબિંબ $\{u \in U \mid X(u) = 1\} = \{bg, gb\}$ થશે. તે જ પ્રમાણે ગણ $\{2\}$ના પૂર્વપ્રતિબિંબનો ગણ $\{bb\}$ થશે અને ગણ $\{0\}$ના પૂર્વપ્રતિબિંબનો ગણ $\{gg\}$ થશે. વળી, ગણ $\{0, 1, 2\}$ના પૂર્વપ્રતિબિંબનો ગણ $\{bb, bg, gb, gg\} = U$ થશે.

આમ, વિધેય X દ્વારા ગણ $\{0, 1, 2\}$માં ધારણ કરેલી કોઈ એક કિંમતને અનુરૂપ નિદર્શાવકાશ Uની એક નિશ્ચિત ઘટના સંગત થાય છે.

જેમ કે $X(u) = 0$, $u \in U$ને સંગત ઘટના $\{gg\}$ છે. તેથી $X(u) = 0$ હોય તેની સંભાવના એ ઘટના $\{gg\}$ની સંભાવનાની બરાબર થશે. એટલે કે $P(X(u) = 0) = P(\{gg\}) = \frac{1}{4}$.

આમ, Xના વિસ્તાર ગણની કિંમતો સાથે સંકળાયેલી સંભાવના નીચે આપેલા કોષ્ટક દ્વારા વ્યક્ત કરી શકાય :

<table>
<tr><th>Uનો ઘટક u</th><th>ઘટના $\{u\}$ની સંભાવના $P(\{u\})$</th><th>$X(u) = x$</th><th>$P(X(u) = x)$</th></tr>
<tr><td>bb</td><td>$P(\{bb\}) = \frac{1}{4}$</td><td>2</td><td>$\frac{1}{4}$</td></tr>
<tr><td>bg</td><td>$P(\{bg\}) = \frac{1}{4}$</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$</td></tr>
<tr><td>gb</td><td>$P(\{gb\}) = \frac{1}{4}$</td></tr>
<tr><td>gg</td><td>$P(\{gg\}) = \frac{1}{4}$</td><td>0</td><td>$\frac{1}{4}$</td></tr>
</table>

અહીં આપણે નિદર્શાવકાશ પર વ્યાખ્યાયિત Xથી દર્શાવેલા વાસ્તવિક વિધેયને **યાદચ્છિક ચલ** કહીશું અને x ને યાદચ્છિક ચલ X એ ધારણ કરેલી વાસ્તવિક કિંમત કહીશું. વધુમાં યાદચ્છિક ચલ X જે સંભાવના સાથે કિંમત x ધારણ કરે તેને સંકેત $p(x)$ વડે દર્શાવીશું.

અર્થાત્ $p(x) = P(X = x) = P(X(u) = x)$ ને યાદચ્છિક ચલ X એ ધારણ કરેલ કિંમત xની સંભાવના કહેવાય. આમ, ઉપર આપેલા કોષ્ટકમાં યાદચ્છિક ચલ X એ ધારણ કરેલી વિવિધ વાસ્તવિક કિંમત અને તેને અનુરૂપ સંભાવનાને નીચે પ્રમાણે રજૂ કરી શકાય.

$X = x$	0	1	2
$p(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

સ્પષ્ટ છે કે $\sum\limits_{x=0}^{2} p(x) = p(0) + p(1) + p(2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$

આ કોષ્ટકને યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના-વિતરણ કહેવાય છે અને $p(x)$ ને યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના વિધેય કહેવાય.

હવે આપણે યાદચ્છિક ચલ X અને તેના સંભાવના-વિતરણની વ્યાખ્યા આપીશું.

યાદચ્છિક ચલ (Random Variable) : ધારો કે U એક યાદચ્છિક પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ નિદર્શાવકાશ છે. U પર વ્યાખ્યાયિત વાસ્તવિક વિધેય $X : U \rightarrow R$ ને યાદચ્છિક ચલ કહે છે.

આંકડાશાસ્ત્રીય અભ્યાસમાં સામાન્ય રીતે બે પ્રકારના યાદચ્છિક ચલ પ્રચલિત છે : અસતત યાદચ્છિક ચલ અને સતત યાદચ્છિક ચલ. જો વાસ્તવિક વિધેય $X : U \rightarrow R$ નો વિસ્તાર વાસ્તવિક સંખ્યાઓની સાન્ત અથવા અનંત શ્રેણી હોય, તો X ને અસતત ચલ કહેવાય. જો Xનો વિસ્તાર R પરનો કોઈ અંતરાલ હોય તો X ને સતત ચલ કહેવાય.

આપણે માત્ર અસતત ચલ અને તેના સંભાવના-વિતરણનો અભ્યાસ કરીશું તથા અસતત ચલ $X : U \rightarrow R$ નો વિસ્તાર ગણ વાસ્તવિક સંખ્યાઓની સાન્ત શ્રેણી $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ છે એમ માની લઈશું.

યાદચ્છિક ચલનું સંભાવના-વિતરણ :

ધારો કે $X : U \rightarrow R$ એક યાદચ્છિક ચલ છે. ધારો કે યાદચ્છિક ચલ X નો વિસ્તાર $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ છે. ધારો કે X એ ધારણ કરેલી કિંમત x_i ની સંભાવના $p(x_i) = P(X = x_i)$ છે.

જો (i) $p(x_i) \geq 0$, $i = 1, 2, ..., n$ અને (ii) $\sum\limits_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$, હોય, તો વાસ્તવિક કિંમતોના ગણ $\{p(x_1), p(x_2), ..., p(x_n)\}$ ને યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના વિતરણ કહે છે.

યાદચ્છિક ચલ Xના સંભાવના-વિતરણને કોષ્ટકના રૂપમાં નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

$X = x$	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$p(x)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$p(x_3)$	...	$p(x_n)$

ઉદાહરણ 12 : એક સમતોલ સિક્કાને ત્રણ વખત ઉછાળવામાં આવે છે અને એ પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ નિદર્શાવકાશ U છે. યાદચ્છિક ચલ $X : U \rightarrow R$ આ પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે : પ્રત્યેક $u \in U$ માટે $X(u) = u$ માં આવેલી છાપની સંખ્યા. જો Uના પરિણામો સમસંભાવી હોય તો Xનું સંભાવના-વિતરણ મેળવો.

ઉકેલ : સમતોલ સિક્કાને ત્રણ વખત ઉછાળતાં મળતો નિદર્શાવકાશ

U = {HHH, HHT, HTH, THH, THT, HTT, TTH, TTT}

જો u = HHH, તો યાદચ્છિક ચલ Xની વ્યાખ્યા મુજબ X(HHH) = 3.

જો u = HHT અથવા HTH અથવા THH, તો $X(u) = 2$

જો u = THT અથવા HTT અથવા TTH, તો $X(u) = 1$

જો u = TTT, તો $X(u) = 0$

આમ, યાદચ્છિક ચલ Xનો વિસ્તારગણ {0, 1, 2, 3} થાય. હવે Uની પ્રાથમિક ઘટનાઓ સમસંભાવી હોવાથી,

$$P(\{HHH\}) = P(\{HHT\}) = P(\{HTH\}) = P(\{THH\}) = P(\{THT\}) = P(\{HTT\}) = P(\{TTH\}) = P(\{TTT\}) = \frac{1}{8}$$

યાદચ્છિક ચલ Xની વિવિધ કિંમતો સાથે સંકળાયેલી સંભાવના નીચે કોષ્ટકમાં મેળવી છે :

Uનો ઘટક u	સંભાવના $P(\{u\})$	$X(u) = x$	$P(X = x)$
HHH	$\frac{1}{8}$	3	$\frac{1}{8}$
HHT	$\frac{1}{8}$		
HTH	$\frac{1}{8}$	2	$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$
THH	$\frac{1}{8}$		
TTH	$\frac{1}{8}$		
THT	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$
HTT	$\frac{1}{8}$		
TTT	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$

આમ, યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના-વિતરણ નીચે મુજબ છે :

$X = x$	0	1	2	3
$p(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

ઉદાહરણ 13 : 16 સારી પાકેલી કેરી અને 4 ખરાબ કેરી મિશ્ર થઈ ગઈ છે. જો 2 કેરી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે તો ખરાબ કેરી પસંદ થાય તેનું સંભાવના-વિતરણ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે X એ પસંદ થયેલ કેરીમાં ખરાબ કેરીની સંખ્યા દર્શાવે છે. અહીં 16 સારી પાકેલી અને 4 ખરાબ કેરી મિશ્ર થયેલ છે અને તેમાંથી 2 કેરી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. X ની કિંમત 0, 1 અને 2 હોઈ શકે.

હવે, $P(X = 0)$: 0 ખરાબ કેરી પસંદ થાય તેની સંભાવના

$$= \frac{\binom{16}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{16 \times 15}{2} \times \frac{2}{20 \times 19} = \frac{12}{19}$$

$P(X = 1)$: 1 ખરાબ કેરી પસંદ થાય તેની સંભાવના

$$= \frac{\binom{4}{1}\binom{16}{1}}{\binom{20}{2}} = \frac{4 \times 16 \times 2}{20 \times 19} = \frac{32}{95}$$

અને $P(X = 2)$: 2 ખરાબ કેરી પસંદ થાય તેની સંભાવના

$$= \frac{\binom{4}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{4 \times 3}{2} \times \frac{2}{20 \times 19}$$

$$= \frac{3}{95}$$

આમ, યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ છે :

$X = x$	0	1	2
$p(x)$	$\frac{12}{19}$	$\frac{32}{95}$	$\frac{3}{95}$

ઉદાહરણ 14 : સંભાવના વિતરણ $p(x) = c\binom{5}{x}$, $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે, તો અચળ c શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $p(x) = c\binom{5}{x}$, $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

$p(x)$ એ યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના વિતરણ હોવાથી,

$$p(0) + p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) = 1$$

$$\therefore \quad c\left[\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}\right] = 1$$

$$\therefore \quad c(2^5) = 1$$

$$\therefore \quad 32c = 1$$

$$\therefore \quad c = \frac{1}{32}$$

વળી, પ્રત્યેક x માટે, $p(x) = \binom{5}{x} > 0$

$\therefore$ c ની માંગેલ કિંમત $\frac{1}{32}$ છે.

ઉદાહરણ 15 : અસતત યાદચ્છિક ચલ X નું સંભાવના વિતરણ નીચેના કોષ્ટકમાં આવેલું છે :

$X = x$	–3	–2	–1	0	1	2	3
$p(x)$	0.08	0.14	0.19	0.27	0.17	0.09	0.06

(1) યાદચ્છિક ચલ X ની કિંમત ઋણ હોવાની સંભાવના શોધો.

(2) $P(0 \le x < 3)$નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : (1) X ની કિંમત ઋણ હોવાની સંભાવના

$$p(-3) + p(-2) + p(-1) = 0.08 + 0.14 + 0.19 = 0.41$$

(2) $P(0 \le x < 3) = p(0) + p(1) + p(2)$

$$= 0.27 + 0.17 + 0.09$$

$$= 0.53$$

સ્વાધ્યાય 7.3

1. નીચે આપેલા પ્રત્યેક સંભાવના વિતરણ માટે c શોધો :

(1) $p(x) = cx$, $x = 1, 2, 3, 4$

(2) $p(x) = cx^2$, $x = 1, 2, ..., 10$

(3) $p(x) = c \cdot 3^x$, $x = 0, 1, 2, 3$

(4) $p(x) = c\left(\frac{1}{4}\right)^x$, $x = 1, 2, 3$

(5) $p(x) = c\binom{4}{x}$, $x = 0, 1, 2, 3, 4$

2. ચકાસો કે યાદચ્છિક ચલ X માટે નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત વિધેય $p(x)$ સંભાવના વિતરણ છે કે નહિ ?

$p(x) = \frac{2x}{n(n+1)}$, $x = 1, 2, 3, ..., n$

3. X એ યાદચ્છિક રીતે પસંદ થયેલી શાળાના કોઈ પણ દિવસ દરમિયાન અભ્યાસના કલાક દર્શાવે છે. X એ કિંમત x ધારણ કરે તેની સંભાવના નીચે પ્રમાણે છે, જ્યાં k અચળ છે.

$$P(X = x) = \begin{cases} 0.1, & x = 0 \text{ માટે} \\ kx, & x = 1 \text{ અથવા } 2 \text{ માટે} \\ k(5 - x), & x = 3 \text{ અથવા } 4 \text{ માટે} \\ 0, & \text{અન્યથા} \end{cases}$$

(1) kની કિંમત શોધો :

નીચે મુજબના અભ્યાસના કલાકની સંભાવના શોધો :

(2) ઓછામાં ઓછા બે કલાક (3) બરાબર બે કલાક (4) વધુમાં વધુ બે કલાક

4. બે સમતોલ પાસાને એક વખત ઉછાળવાના પ્રયોગ સાથે સંબંધિત નિદર્શાવકાશ U પર યાદચ્છિક ચલ X નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત છે :

$u \in U$ માટે $X(u) = u$ માંના પૂર્ણાંકોનો સરવાળો. તો યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના વિતરણ મેળવો.

5. એક પેટીમાં આવેલ 4 દડામાં 2 કાળા અને 2 સફેદ દડા છે. બે દડા યાદચ્છિક રીતે પૂરવણી સહિત પસંદ કરવામાં આવે છે. જો X એ પસંદ થયેલ બે દડા પૈકી કાળા દડાની સંખ્યા દર્શાવે તો યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના વિતરણ મેળવો.

6. વીજળીના 10 ગોળાના સમૂહમાં 3 ગોળા ખરાબ છે. 2 ગોળાની પસંદગી યાદચ્છિક રીતે કરવામાં આવે છે. ખરાબ ગોળાની સંખ્યા માટેનું સંભાવના વિતરણ મેળવો.

7. નીચેના કોષ્ટકમાં અસતત યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના વિતરણ આપેલ છે.

$X = x$	0	1	2
$p(x)$	$3c^3$	$4c - 10c^2$	$5c - 1$

જ્યાં $c > 0$.

(1) c (2) $P(X < 2)$ તથા (3) $P(1 < X \le 2)$ની કિંમત શોધો.

8. આપણે એકસરખી 8 કાગળની ચિઠ્ઠીઓ બનાવીએ. એક ચિઠ્ઠી પર અંક 0, ત્રણ ચિઠ્ઠી પર અંક 1, ત્રણ ચિઠ્ઠી પર અંક 2 તથા એક ચિઠ્ઠી પર અંક 3 લખવામાં આવે છે. આ ચિઠ્ઠીઓને વાળીને પેટીમાં મૂકી મિશ્ર કરવામાં આવે છે. એક ચિઠ્ઠીની યાદચ્છિક પસંદગી કરવામાં આવે છે. જો યાદચ્છિક ચલ X એ ચિઠ્ઠી પરનો અંક દર્શાવે તો Xનું સંભાવના વિતરણ મેળવો.

*

7.5 ગાણિતિક અપેક્ષા

ધારો કે અસતત યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ છે :

$X = x$	x_1	x_2	x_3	...	x_{n-1}	x_n
$p(x)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$p(x_3)$	...	$p(x_{n-1})$	$p(x_n)$

(i)

જ્યાં પ્રત્યેક x_i માટે $p(x_i) \ge 0$ અને $\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$

મધ્યક : ધારો કે યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના વિતરણ (i) મુજબ વ્યાખ્યાયિત છે. X ની **ગાણિતિક અપેક્ષા (Mathematical Expectation)** E(X) વડે દર્શાવાય છે અને તેની વ્યાખ્યા નીચે પ્રમાણે છે :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, p(x_i) \qquad \text{(ii)}$$

યાદચ્છિક ચલ X ની ગાણિતીક અપેક્ષાને X નું અપેક્ષિત મૂલ્ય અથવા X નો મધ્યક પણ કહેવાય છે. E(X) ને μ વડે પણ દર્શાવાય છે. ખરેખર, Xનો મધ્યક એ Xની શક્ય કિંમતોનો ભારિત મધ્યક છે, જ્યાં X જે કિંમત ધારણ કરે તેની સંભાવના એ ભાર છે.

ધારો કે $Y = g(X)$ અસતત યાદચ્છિક ચલનું વાસ્તવિક વિધેય છે. તો $Y = g(X)$ પણ અસતત યાદચ્છિક ચલ થશે અને તેની ગાણિતિક અપેક્ષા નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત થાય.

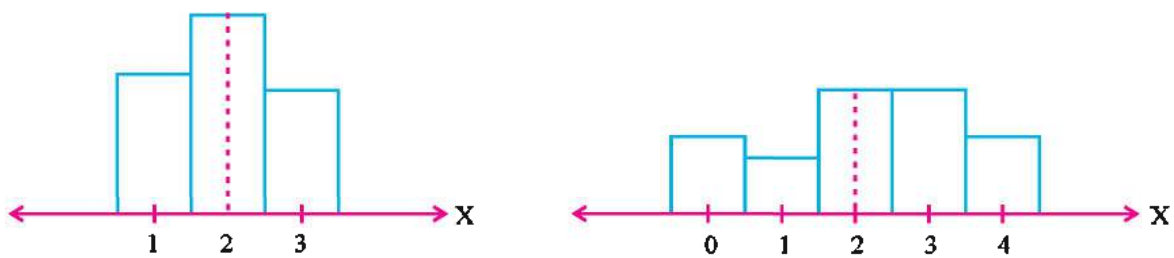
$$E(Y) = E[g(X)] = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) \, p(x_i) \qquad \text{(iii)}$$

ઉદાહરણ તરીકે, $g(X) = X^2$ હોય, તો

$$E[g(X)] = E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \, p(x_i) \qquad \text{(iv)}$$

યાદચ્છિક ચલ Xનું વિચરણ (Variance) :

આંકડાશાસ્ત્રમાં યાદચ્છિક ચલ Xનો મધ્યક ખાસ ઉપયોગી છે કારણ કે તે સંભાવના વિતરણનો મધ્યભાગ દર્શાવે છે. આમ છતાં ફક્ત મધ્યક એ સંભાવના વિતરણ માટેની પૂરતી માહિતી નથી. આપણે સંભાવના વિતરણના ચલનનું પણ વર્ણન કરવું જોઈએ. સમાન મધ્યક $\mu = 2$ વાળા બે અસતત યાદચ્છિક ચલના સંભાવના વિતરણના સ્તંભાલેખ આકૃતિ 7.2 માં દર્શાવેલ છે. આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે તેમના અવલોકનોનું મધ્યકથી ચલન ખૂબ જ જુદું પડે છે.



આકૃતિ 7.2

યાદચ્છિક ચલ X નાં ચલનના એક ખૂબ જ અગત્યના માપને તેનું **વિચરણ** કહે છે. તેને આપણે સંકેત σ_X^2 અથવા V(X) દ્વારા દર્શાવીએ છીએ. જો યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના વિતરણ (i)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેનું હોય, તો Xનું **વિચરણ** નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત થાય :

$$V(X) = \sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

સૂત્રો (ii) અને (iv) નો ઉપયોગ કરતાં σ_X^2 નું સૂત્ર નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

$$\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \, p(x_i) - \left[\sum_{i=1}^{n} x_i \, p(x_i)\right]^2 \qquad \text{(v)}$$

યાદચ્છિક ચલ Xનું પ્રમાણિત વિચલન (Standard Deviation) :

યાદચ્છિક ચલ Xના વિચરણ σ_X^2ના ધન વર્ગમૂળને Xનું પ્રમાણિત વિચલન કહે છે અને તેને સંકેત σ_X અથવા $\sqrt{V(X)}$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

ગાણિતિક અપેક્ષા વિશે કેટલાંક પરિણામો :

ધારો કે યાદચ્છિક ચલ Xની ગાણિતિક અપેક્ષા અને વિચરણ અનુક્રમે E(X) અને σ_X^2 છે. વાસ્તવિક અચલો a, b અને c માટે ધારો કે $Y = aX + b$ અને $Z = aX^2 + bX + c$ બંને Xનાં વિધેયો છે. નીચે આપેલાં પરિણામો આપણે સાબિતી આપ્યા વગર સ્વીકારી લઈશું.

$$E(Y) = E(aX + b) = aE(X) + b \qquad \text{(vi)}$$

$$\sigma_Y^2 = V(Y) = V(aX + b) = a^2\, V(X) = a^2 \sigma_X^2 \qquad \text{(vii)}$$

$$\sigma_Y = \sqrt{V(Y)} = |\, a \,|\, \sigma_X \qquad \text{(viii)}$$

$$E(Z) = E(aX^2 + bX + c) = aE(X^2) + bE(X) + c \qquad \text{(ix)}$$

ઉદાહરણ 16 : યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ છે :

$X = x$	-2	-1	0	1	2	3
$p(x)$	0.05	0.14	0.23	0.31	0.16	0.11

E(X) અને σ_X શોધો.

ઉકેલ : $E(X) = \Sigma x_i\, p(x_i)$

$= (-2)(0.05) + (-1)(0.14) + (0)(0.23) + (1)(0.31) + (2)(0.16) + (3)(0.11)$

$= -0.10 - 0.14 + 0 + 0.31 + 0.32 + 0.33$

$= 0.72$

$\therefore \quad E(X) = 0.72$

$\sigma_X^2 = \sum_i x_i^2\, p(x_i) - [E(X)]^2$

$= \{4(0.05) + 1(0.14) + 0(0.23) + 1(0.31) + 4(0.16) + 9(0.11)\} - (0.72)^2$

$= 2.28 - 0.5184 = 1.7616$

$\therefore \quad \sigma_X^2 = 1.7616$ અને

$\sigma_X = \sqrt{1.7616} = 1.3272$

ઉદાહરણ 17 : એક યાદચ્છિક ચલ Xના મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન અનુક્રમે $E(X) = 5$ અને $\sigma_X = 3$ છે, તો $E(X^2)$, $E((3X + 2)^2)$ શોધો. વધુમાં $2 - 3X$નું પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $E(X) = 5$ અને $\sigma_X = 3$

આપણે જાણીએ છીએ કે, $\sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$

$\therefore \quad E(X^2) = \sigma_X^2 + [E(X)]^2$

$= 9 + 25$

$E(X^2) = 34$

$E((3X + 2)^2) = E(9X^2 + 12X + 4)$

$= 9E(X^2) + 12E(X) + 4$

$= 9 \cdot 34 + 12 \cdot 5 + 4$

$= 306 + 60 + 4$

$E((3X + 2)^2) = 370$

હવે, $V(2 - 3X) = 3^2V(X) = 9V(X) = 9\ \sigma_X^2 = 9 \cdot 9 = 81$

$\therefore$ $2 - 3X$નું પ્રમાણિત વિચલન $\sqrt{81} = 9$.

કોઈ રમત રમતા બે ખેલાડીઓનું અપેક્ષિત મળતર શૂન્ય હોય તો તે રમતને સમતોલ રમત કહેવાય. જો કોઈ ખેલાડીનું અપેક્ષિત મળતર ધન સંખ્યા હોય તો રમત તે ખેલાડીની તરફેણમાં છે એમ કહેવાય. જો તેનું અપેક્ષિત મળતર ઋણ હોય, તો રમત તે ખેલાડીની વિરુદ્ધમાં છે તેમ કહેવાય.

ઉદાહરણ 18 : એક સમતોલ પાસા ઉછાળવાની એક રમતમાં ભાગ લેનાર ખેલાડીને પાસા પર મળતો પૂર્ણાંક 3 અથવા 4 હોય તો તેના હરીફ કે પ્રતિસ્પર્ધી તરફથી ₹ 10 મળે છે. જો પાસા પર પૂર્ણાંક 1, 2, 5 અથવા 6 મળે, તો ખેલાડીએ તેના હરીફને કેટલી રકમ ચૂકવવી જોઈએ કે જેથી રમત સમતોલ થાય ?

ઉકેલ : પાસા ઉછાળવાની રમતમાં સંકળાયેલ નિદર્શાવકાશ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. આપણે U પર યાદચ્છિક ચલ X નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરીએ :

$$X(u) = \begin{cases} 10 & u = 3, 4 \\ a & u = 1, 2, 5, 6 \end{cases}$$

અહીં a એ ખેલાડીએ તેના હરીફને ચૂકવવાની રકમ રૂપિયામાં દર્શાવે છે.

Xનું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ થાય છે :

$X = x$	10	a
$p(x)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{6}$

હવે, $E(X) = 10 \cdot \frac{2}{6} + a \cdot \frac{4}{6}$

$= \frac{4a + 20}{6}$

પાસા ઉછાળવાની રમત સમતોલ હોવાથી $E(X) = 0$.

$\therefore$ $\frac{4a + 20}{6} = 0$

$\therefore$ $4a + 20 = 0$

$\therefore$ $a = -5$

આમ, ખેલાડીએ તેના હરીફને ₹ 5 ચૂકવવા પડે.

સ્વાધ્યાય 7.4

1. બે સમતોલ પાસાને એક વખત ઉછાળવામાં આવે છે. બંને પાસા પર મળતા પૂર્ણાંકોમાં ન્યૂનતમ પૂર્ણાંક એ યાદચ્છિક ચલ X છે. આ અસતત યાદચ્છિક ચલ X માટે સંભાવના વિતરણ, Xની ગાણિતિક અપેક્ષા, વિચરણ તથા પ્રમાણિત વિચલન મેળવો.

2. એક ખેલાડી 3 સમતોલ સિક્કા ઉછાળે છે. જો ત્રણ છાપ આવે તો તે ₹ 500 જીતે છે, જો બે છાપ આવે તો તે ₹ 300 જીતે છે અને એક છાપ આવે તો તે ₹ 100 જીતે છે. બીજી બાજુ તે ત્રણેય કાંટા આવે તો તે ₹ 1500 ગુમાવે છે. ખેલાડીનું અપેક્ષિત મળતર શોધો. આ રમત ખેલાડીની તરફેણમાં છે ?

3. એક યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ છે :

$X = x$	1	2	3	4	5
$p(x)$	0.1	k	0.2	$3k$	0.3

(1) kની કિંમત શોધો.

(2) મધ્યક તથા વિચરણ શોધો.

4. એક યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ છે :

$X = x$	-1	0	1	2	3
$p(x)$	0.2	0.1	k	$2k$	0.1

(1) kની કિંમત શોધો.

(2) મધ્યક, વિચરણ તથા પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

5. એક સમતોલ પાસો ઉછાળતાં પાસા પર મળતા અંકોનું વિચરણ શોધો.

6. એક યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ છે :

$X = x$	-2	-1	0	1	2
$p(x)$	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

(1) $E(X)$ (2) $V(X)$ (3) $E(3X + 2)$ (4) $V(3X + 2)$ શોધો.

7. એક બેકરીના માલિકને તેના ભૂતકાળના અનુભવને આધારે માલૂમ પડે છે કે તેની બેકરીમાં બનાવેલી ચૉકલેટ કેકની સંખ્યાનું કોઈ પણ દિવસનું વેચાણ એક યાદચ્છિક ચલ X છે, જેનું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ છે :

કેકની સંખ્યા $X = x$	0	1	2	3	4	5
$p(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

પ્રત્યેક કેકના વેચાણ દીઠ તેને ₹ 5નો નફો થાય છે અને જો વેચાણ ન થાય તો નહિ વેચાયેલી કેક દીઠ તેને ₹ 2 ખોટ થાય છે. જો બેકરીનો માલિક કોઈ એક દિવસે 3 કેકનું ઉત્પાદન કરે તો તે દિવસના તેના નફાનું અપેક્ષિત મૂલ્ય કેટલું થશે ?

8. એક યાદચ્છિક ચલ Xના મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન અનુક્રમે 10 અને 5 છે. તો $E(X^2)$, $E[X(X + 1)]$, $E\left(\left(\frac{X-10}{5}\right)\right)$ અને $E\left(\left(\frac{X-10}{5}\right)^2\right)$ શોધો.

*

7.6 દ્વિપદી વિતરણ

આપણે આ પ્રકરણના અગાઉના વિભાગોમાં યાદચ્છિક ચલ અને તેના સંભાવના વિતરણનો અભ્યાસ કર્યો. આ પરિચ્છેદમાં આપણે એક વિશિષ્ટ સંભાવના વિતરણ, **દ્વિપદી વિતરણ (Binomial Distribution)**નો અભ્યાસ કરીશું.

દ્વિપદી વિતરણની શોધ સ્વીસ ગણિતશાસ્ત્રી **જેમ્સ બર્નુલી (1654-1705)** એ 1700માં કરી હતી. આથી દ્વિપદી વિતરણને **'બર્નુલી વિતરણ'** પણ કહે છે.

આપણે એક સિક્કાને ઉછાળવાના યાદચ્છિક પ્રયોગનો વિચાર કરીએ. આ સિક્કાને આપણે એકવાર ઉછાળીએ તો પ્રયોગના બે શક્ય પરિણામો 'છાપ' અથવા 'કાંટો' મળે છે. આપણે છાપને **સફળતા (Success)** અને કાંટાને **નિષ્ફળતા (Failure)** કહીશું. આમ, આ પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ $U = \{S, F\}$ થશે, જ્યાં S સફળતા અને F નિષ્ફળતાના સંકેત દર્શાવે છે. ધારો કે S મળવાની સંભાવના p છે અને F મળવાની સંભાવના q છે. એટલે કે $P(\{S\}) = p$ અને $P(\{F\}) = q$. આ પ્રયોગનાં માત્ર બે જ પરિણામો હોવાથી $p + q = 1$ અને તેથી $q = 1 - p$.

ધારો કે સિક્કાને સમાન પરિબળો હેઠળ n વખત ઉછાળવામાં આવે છે. બીજી રીતે કહીએ તો સમાન પરિબળો હેઠળ સિક્કો ઉછાળવાના યાદચ્છિક પ્રયોગનું n વખત પુનરાવર્તન કરવામાં આવે છે. આ પ્રયોગના n વખત થતા પુનરાવર્તનને આપણે n પ્રયત્નો પણ કહી શકીએ. પ્રયોગનું પુનરાવર્તન સમાન પરિબળો હેઠળ થતું હોવાથી n પૈકીના દરેક પ્રયત્ને સફળતા 'S' મળવાની સંભાવના સમાન એટલે કે p રહેશે. આ પ્રકારના ગુણધર્મ ધરાવતા યાદચ્છિક પ્રયોગના n પ્રયત્નોને **બર્નુલી પ્રયત્નો** કહેવામાં આવે છે. બર્નુલી પ્રયત્નો આપણે નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરીએ.

બર્નુલી પ્રયત્નો : ધારો કે એક યાદચ્છિક પ્રયોગનાં બે શક્ય પરિણામો સફળતા (S) અને નિષ્ફળતા (F) છે. જો આ પ્રયોગના n વખતના પુનરાવર્તન પૈકીના દરેક પ્રયત્ને સફળતા મળવાની સંભાવના p $(0 < p < 1)$ અચળ હોય, તો આવા પ્રયત્નોને બર્નુલી પ્રયત્નો કહે છે.

બર્નુલી પ્રયત્નો નીચે મુજબના ગુણધર્મો ધરાવે છે :

(1) દરેક બર્નુલી પ્રયત્નમાં સફળતા (S) મળવાની સંભાવના કે નિષ્ફળતા (F) મળવાની સંભાવના અચળ હોય છે.

(2) બર્નુલી પ્રયત્નો પરસ્પર નિરપેક્ષ હોય છે.

(3) જો કોઈ પણ બર્નુલી પ્રયત્નમાં સફળતા (S) મળવાની સંભાવના p $(0 < p < 1)$ હોય, તો નિષ્ફળતા (F) મળવાની સંભાવના $q = 1 - p$ થશે.

ધારો કે જેની સફળતાની સંભાવના p હોય તેવા યાદચ્છિક પ્રયોગના બર્નુલી પ્રયત્નોની શ્રેણીમાં X સફળતાની સંખ્યા દર્શાવે છે. ધારો કે યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના વિતરણ નીચેના સૂત્ર દ્વારા વ્યાખ્યાયિત થાય છે :

$$p(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \ x = 0, 1, 2, ... n \qquad \text{(i)}$$

જ્યાં $0 < p < 1$ અને $q = 1 - p$

યાદચ્છિક ચલ Xના સૂત્ર (i) દ્વારા મળતા સંભાવના વિતરણને દ્વિપદી વિતરણ કહે છે અને યાદચ્છિક ચલ X ને દ્વિપદી યાદચ્છિક ચલ કહે છે. ધન પૂર્ણાંક n અને સફળતા S ની સંભાવના p ને દ્વિપદી વિતરણના પ્રચલો કહેવામાં આવે છે.

$x = 0, 1, 2, ..., n$ માટે (i) દ્વારા મળતાં સૂત્ર $p(x)$ ને $(p + q)^n$ના દ્વિપદી વિતરણ દ્વારા મેળવી શકાય. $(p + q)^n$ ના વિતરણનું x મું પદ $\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ થશે અને તે સૂત્ર (i) માં દર્શાવેલ છે. આથી યાદચ્છિક ચલ Xને દ્વિપદી વિતરણ કહે છે. સ્પષ્ટ છે કે, બધા પ્રયત્નોની સંભાવનાનો સરવાળો

$$\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = (p + q)^n = 1^n = 1 \text{ થાય છે.}$$

દ્વિપદી વિતરણ નીચેની પરિસ્થિતિમાં ઉદ્ભવે છે : તકની રમત (ઉદાહરણ તરીકે પાસો ફેંકવાની રમત), ગુણવત્તાની ચકાસણી (ઉદાહરણ તરીકે ખામીવાળી ઉત્પાદિત વસ્તુની ગણતરી), મતનો અંદાજ કાઢવો (ઉદાહરણ તરીકે સમયમાં કરેલ ફેરફાર માટે કેટલા કર્મચારી તરફેણમાં છે), તબીબીશાસ્ત્ર (ઉદાહરણ તરીકે નવી શોધાયેલી દવાથી કેટલા દર્દી સાજા થયા) વગેરે.

પરિણામ : પ્રચલો n અને p વાળા દ્વિપદી યાદચ્છિક ચલ Xના મધ્યક અને વિચરણ અનુક્રમે np અને npq થાય.

ઉદાહરણ 19 : એવો દાવો કરવામાં આવે છે કે સૂર્યપ્રકાશથી ચાલતાં કુલ ઉપકરણોમાંથી 60 % ઉપકરણો એવાં છે કે તે બેસાડવાથી વપરાશનું બીલ ઓછામાં ઓછું ત્રીજા ભાગનું ઘટી જાય છે.

(1) પાંચ ઉપકરણોમાંથી ચાર ઉપકરણો

(2) પાંચ ઉપકરણોમાંથી ઓછામાં ઓછા ચાર ઉપકરણો બેસાડવાથી વીજવપરાશનું બીલ ઓછામાં ઓછું ત્રીજા ભાગનું ઘટી જાય તેની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે યાદચ્છિક ચલ X એ સૂર્યપ્રકાશથી ચાલતા 5 ઉપકરણોમાંથી પસંદ થયેલાં ઉપકરણોની સંખ્યા દર્શાવે છે. આ ઉપકરણો એવાં છે કે તેમને બેસાડવાથી વપરાશનું બીલ ઓછામાં ઓછું ત્રીજા ભાગનું ઘટી જાય છે.

અહીં X એ દ્વિપદી યાદચ્છિક ચલ છે જ્યાં પ્રચલો $n = 5$ અને $p = 0.60$ છે. Xનું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ થશે :

$$p(x) = \binom{5}{x}\left(\frac{6}{10}\right)^x\left(\frac{4}{10}\right)^{5-x}, \ x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

(1) પાંચ ઉપકરણોમાંથી ચાર ઉપકરણો બેસાડવાથી વપરાશનું બીલ ઓછામાં ઓછું ત્રીજા ભાગનું ઘટી જાય તેની સંભાવના $p(x)$ દ્વારા $x = 4$ મૂકવાથી મળે.

$\therefore \quad p(4) = \binom{5}{4}\left(\frac{6}{10}\right)^4\left(\frac{4}{10}\right)^{5-4}$

$= 5(0.6)^4\ (0.4)$

$= 0.2592$ (i)

(2) પાંચ ઉપકરણોમાંથી ઓછામાં ઓછા ચાર ઉપકરણો બેસાડવાથી વપરાશનું બીલ ઓછામાં ઓછું ત્રીજા ભાગનું ઘટી જાય તેની સંભાવના $p(4) + p(5)$ થશે. હવે,

$\therefore \quad p(5) = \binom{5}{5}\left(\frac{6}{10}\right)^5\left(\frac{4}{10}\right)^{5-5}$

$= (0.6)^5$

$= 0.07776$

આમ, માંગેલી સંભાવના $= p(4) + p(5)$

$= 0.2592 + 0.07776$ ((i) પરથી)

$= 0.337$

ઉદાહરણ 20 : એક દ્વિપદી વિતરણના મધ્યક અને વિચરણ અનુક્રમે 3 અને 2 છે. યાદચ્છિક ચલની કિંમત 2 અથવા 2થી ઓછી હોય તેની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે n અને p પ્રચલવાળા દ્વિપદી વિચરણ માટે

મધ્યક $np = 3$ (i)

અને વિચરણ $npq = 2$ (ii)

ભાગાકાર કરતાં, $\frac{npq}{np} = \frac{2}{3}$

$\therefore \quad q = \frac{2}{3}$. તેથી, $p = 1 - q = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$np = 3$ માં p ની કિંમત મૂકતાં, $n \cdot \frac{1}{3} = 3$. તેથી, $n = 9$

$\therefore$ દ્વિપદી યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ છે :

$p(x) = \binom{9}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{9-x}, x = 0, 1, 2, ..., 9$

યાદચ્છિક ચલ Xની કિંમત 2 અથવા 2થી ઓછી હોય તેની સંભાવના $P(x \le 2)$ થાય.

$P(x \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$= p(0) + p(1) + p(2)$

$= \binom{9}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^9 + \binom{9}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^8 + \binom{9}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^7$

$= \left(\frac{2}{3}\right)^7\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 9 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{9 \cdot 8}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]$

$= \left(\frac{2}{3}\right)^7\left[\frac{4}{9} + 2 + 4\right]$

$= \left(\frac{2}{3}\right)^7 \frac{58}{9} = \left(\frac{2^7}{3^9}\right)58 = \frac{7424}{19683}$

સ્વાધ્યાય 7.5

1. એક શિક્ષણશાસ્ત્રી દાવો કરે છે કે ઉચ્ચતર માધ્યમિક પરીક્ષામાં ઉત્તીર્ણ થનારા વિદ્યાર્થીઓ પૈકી 80 ટકા વિદ્યાર્થીઓ યુનિવર્સિટી શિક્ષણ માટે કૉલેજમાં પ્રવેશ મેળવે છે. ઉચ્ચતર માધ્યમિક પરીક્ષામાં ઉત્તીર્ણ થયેલા 10 વિદ્યાર્થીઓ પૈકી (1) 5 વિદ્યાર્થીઓ અને (2) 8 થી વધુ વિદ્યાર્થીઓ કૉલેજમાં પ્રવેશ મેળવે તેની સંભાવના કેટલી ?
2. અમુક પ્રકારની દવા ઉંદરોને આપવાથી 40 ટકા ઉંદરો ઉત્તેજિત થાય છે એવું દવાના પરીક્ષણ પ્રયોગ દ્વારા માલૂમ પડે છે. તો 5 ઉંદરોને આ દવા આપવાથી (1) ત્રણ અને (2) બધા જ ઉંદરો ઉત્તેજિત થાય તેની સંભાવના કેટલી ?
3. પાશ્ચાત્ય દેશના એક શહેરમાં પરિણિત વ્યક્તિઓ પૈકી 70 ટકા વ્યક્તિઓ છૂટાછેડા લે છે. 4 પરિણિત વ્યક્તિઓ પૈકી ઓછામાં ઓછી ત્રણ વ્યક્તિઓ છૂટાછેડા લે તેની સંભાવના શોધો.
4. હરિત નિશાન તાકવાની હરીફાઈમાં ભાગ લે છે. તેની નિશાન તાકવાની સંભાવના 0.2 છે. 5 વખત નિશાન તાકવાના પ્રયોગમાં તે બરાબર ત્રણ વખત નિશાન તાકી શકશે તેની સંભાવના કેટલી ?
5. એક દ્વિપદી યાદચ્છિક ચલ X ના મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન અનુક્રમે 8 અને 2 છે. તો Xના સંભાવના વિતરણના પ્રચલો શોધો અને $P(X = 0)$ અને $P(1 \le X \le 3)$ની કિંમત મેળવો.
6. 500 પાનાંના એક પુસ્તકમાં 50 મુદ્રણદોષ છે. આ પુસ્તકમાંથી 4 પાનાંની યાદચ્છિક પસંદગીમાં વધુમાં વધુ 2 મુદ્રણદોષ હોય તેની સંભાવના શોધો.
7. દ્વિચક્રી વાહન ચલાવતી 12 વ્યક્તિઓમાંથી 4 વ્યક્તિઓ પોતાની સાથે ડ્રાઈવિંગ લાઈસન્સ રાખતા હોતા નથી. જો ટ્રાફિક પોલીસ યાદચ્છિક રીતે 4 દ્વિચક્રી વાહન ચલાવતા વ્યક્તિઓની તપાસ કરે ત્યારે નીચે મુજબની સંભાવના શોધો : (1) 1 વ્યક્તિ પાસે ડ્રાઈવિંગ લાઈસન્સ ન હોય. (2) ઓછામાં ઓછી 2 વ્યક્તિ પાસે ડ્રાઈવિંગ લાઈસન્સ ન હોય.
8. નિશાન તાકવાની હરીફાઈમાં એક માણસ નિશાન તાકવાની સંભાવના $\frac{2}{5}$ છે. જો તે 5 વખત નિશાન તાકે તો માગ્યા પ્રમાણેની સંભાવના શોધો : (1) ઓછામાં ઓછી બે વખત નિશાન બરાબર લાગે. (2) વધુમાં વધુ બે વખત નિશાન બરાબર લાગે.
9. એક ગુણનિયંત્રક ઇજનેર 20 ગણનયંત્રોના જૂથમાં 3 ગણનયંત્રો યાદચ્છિક રીતે તપાસે છે. આવા જૂથમાં 4 ગણનયંત્રો થોડીક ખામીવાળા છે. માગ્યા મુજબની સંભાવના શોધો : (1) ખામીવાળા ગણનયંત્ર પસંદ ન થાય. (2) 1 ખામીવાળું ગણનયંત્ર પસંદ થાય. (3) ઓછામાં ઓછા બે ગણનયંત્ર ખામીવાળા પસંદ થાય.
10. ખામીવાળા બૉલ્ટ પસંદ થવાની સંભાવના 0.1 છે. કુલ 400 બૉલ્ટમાંથી ખામીવાળા બૉલ્ટ પસંદ થાય તે વિતરણ માટે (1) મધ્યક (2) વિચરણ શોધો.

*

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ 21 : ધારો કે E અને F નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે જ્યાં $P(E) < P(F)$. જો $P(E \cap F) = \frac{1}{12}$ અને $P(E' \cap F') = \frac{1}{2}$, તો $P(E)$ અને $P(F)$ શોધો.

ઉકેલ : આપેલ છે કે, $P(E \cap F) = \frac{1}{12}$ અને $P(E' \cap F') = \frac{1}{2}$.

E અને F નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોવાથી, E' અને F' પણ નિરપેક્ષ ઘટનાઓ થશે.

$P(E \cap F) = \frac{1}{12}$ હોવાથી $P(E)\ P(F) = \frac{1}{12}$ અને

$P(E' \cap F') = \frac{1}{2}$ હોવાથી $P(E')\ P(F') = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad [1 - P(E)]\,[1 - P(F)] = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad 1 - P(E) - P(F) + P(E)\ P(F) = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad 1 - P(E) - P(F) + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad P(E) + P(F) = 1 + \frac{1}{12} - \frac{1}{2}$

$\therefore \quad P(E) + P(F) = \frac{7}{12}$

આપણે જાણીએ છીએ કે જે સમીકરણનાં બીજ a અને b હોય તેવું દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 - (a + b)x + ab = 0$ થાય.

$\therefore$ P(E) અને P(F) બીજ ધરાવતું સમીકરણ

$x^2 - [P(E) + P(F)]x + P(E)\ P(F) = 0$

$\therefore \quad x^2 - \frac{7}{12}x + \frac{1}{12} = 0$

$\therefore \quad 12x^2 - 7x + 1 = 0$

$\therefore \quad (3x - 1)(4x - 1) = 0$

$\therefore \quad x = \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$

$P(E) < P(F)$ આપેલ હોવાથી, $P(E) = \frac{1}{4}$ અને $P(F) = \frac{1}{3}$.

ઉદાહરણ 22 : એક સમતોલ સિક્કાને કેટલી વખત ઉછાળવાથી ઓછામાં ઓછી એક વખત છાપ મળે તેની સંભાવના ઓછામાં ઓછી 0.95 થાય ?

ઉકેલ : ધારો કે માંગેલ શરત અનુસાર સમતોલ સિક્કાને n વખત ઉછાળવામાં આવે છે. યાદચ્છિક ચલ X એ સિક્કાને n વખત ઉછાળવાથી મળતી છાપની સંખ્યા દર્શાવે છે. અહીં ચલ X એ દ્વિપદી યાદચ્છિક ચલ થશે જ્યાં પ્રચલ n અને $p = \frac{1}{2}$ છે. X નું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ થશે :

$$p(x) = \binom{n}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{n-x},\ x = 0, 1, 2, ..., n$$

હવે, P(સિક્કા પર ઓછામાં ઓછી એક વખત છાપ મળે) $= P(X \geq 1)$

$$= 1 - P(X = 0)$$

$$= 1 - p(0)$$

$$= 1 - \binom{n}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^{n-0}$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

આપેલ છે કે, P(સિક્કા પર ઓછામાં ઓછી એક વખત છાપ મળે) ≥ 0.95

$\therefore \quad 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 0.95$

$\therefore \quad \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 0.05$

$\therefore \quad \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{20}$

$\therefore \quad 2^n \geq 20$

$\therefore \quad n \geq 5$

$\therefore$ n ની ન્યૂનતમ કિંમત 5 થાય.

આમ, આપેલ શરત અનુસાર સમતોલ સિક્કાને ઓછામાં ઓછી 5 વખત ઉછાળવો પડે.

ઉદાહરણ 23 : એક યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શાવકાશ U = {(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)} છે. ઘટનાઓ A, B, C નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરેલ છે :

A = {(0, 0, 0), (1, 0, 0)}, B = {(0, 0, 0), (0, 1, 0)}, C = {(0, 0, 0), (0, 0, 1)}

બતાવો કે ઘટનાઓ A, B, C જોડયુક્ત નિરપેક્ષ છે, પરંતુ પરસ્પર નિરપેક્ષ નથી.

ઉકેલ : અહીં, $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$A \cap B = B \cap C = A \cap C = \{(0, 0, 0)\} = A \cap B \cap C$

$\therefore \quad P(A \cap B) = P(B \cap C) = P(A \cap C) = \frac{1}{4} = P(A \cap B \cap C)$

હવે, $P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A)\ P(B)$

$P(B \cap C) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(B)\ P(C)$

$P(A \cap C) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A)\ P(C)$

$\therefore$ A, B, C જોડયુક્ત નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે.

પરંતુ $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A)\ P(B)\ P(C)$

$\therefore$ A, B, C પરસ્પર નિરપેક્ષ ઘટનાઓ નથી.

નોંધ : ચતુષ્ફલક OABC ના ચાર શિરોબિંદુઓમાંથી જો એક બિંદુ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે તો નિદર્શાવકાશ

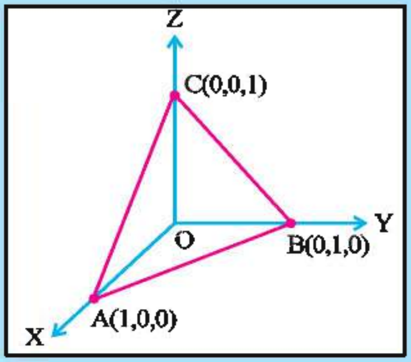
U = {(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)} થશે.

ઘટના A : પસંદ થયેલ શિરોબિંદુ X-અક્ષ પર હોય.

ઘટના B : પસંદ થયેલ શિરોબિંદુ Y-અક્ષ પર હોય.

ઘટના C : પસંદ થયેલ શિરોબિંદુ Z-અક્ષ પર હોય.

તો ઘટનાઓ A, B, C ઉદાહરણ 23 મુજબની થશે.



સ્વાધ્યાય 7

1. એક પેટીમાં 1 થી 10 ક્રમાંક ધરાવતાં 10 પત્તાં મૂકવામાં આવે છે અને તેને બરાબર મિશ્ર કરવામાં આવે છે. આ પેટીમાંથી એક પત્તું યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. જો પસંદ થયેલ પત્તાં પરનો અંક 3 થી વધુ છે તેમ આપેલું હોય તો તે યુગ્મ અંક હોય તેની સંભાવના શોધો.
2. એક દંપતીને બે બાળકો છે. માગ્યા મુજબની સંભાવના શોધો : (1) એક બાળક છોકરો હોય તેમ આપેલ હોય ત્યારે બંને બાળકો છોકરાઓ હોય અને (2) પ્રથમ બાળક છોકરો હોય તેમ આપેલ હોય ત્યારે બંને બાળકો છોકરાઓ હોય.
3. એક પેટીમાં 10 કાળા અને 5 સફેદ દડા છે. એક પછી એક પેટીમાંથી બે દડા પૂરવણી સિવાય પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ થયેલા બંને દડા કાળા હોય તેની સંભાવના કેટલી થાય ?
4. એક પેટીમાં 4 લાલ અને 7 ભૂરા રંગના દડા છે. બે દડા પૂરવણી સહિત પસંદ કરવામાં આવે છે. માંગેલ સંભાવના શોધો : (1) બંને દડા લાલ રંગના હોય (2) બંને દડા ભૂરા રંગના હોય (3) એક લાલ અને બીજો ભૂરા રંગનો દડો પસંદ થાય.

5. A પાંચ પ્રયત્નોમાંથી ચાર વખત નિશાન તાકી શકે છે, B ચાર પ્રયત્નોમાંથી ત્રણ વખત નિશાન તાકી શકે છે અને C ત્રણ પ્રયત્નોમાંથી બે વખત નિશાન તાકી શકે છે. નીચે પ્રમાણેની સંભાવના શોધો :

(1) A, B, C ત્રણે નિશાન તાકી શકે. (2) B, C નિશાન તાકી શકે પરંતુ A નિષ્ફળ જાય.

(3) A, B અને C પૈકી ગમે તે બે નિશાન તાકી શકે. (4) ત્રણેયમાંથી કોઈ પણ નિશાન ન તાકી શકે.

6. એક વર્ષના સમયગાળા માટે વાહનોનો વીમો ઉતારતી એક સામાન્ય વીમાકંપની તેના વીમેદારોનું નીચેના ત્રણ પરસ્પર નિવારક સમૂહોમાં વર્ગીકરણ કરે છે :

સમૂહ T_1 : અતિશય જોખમી પ્રકૃતિવાળા

સમૂહ T_2 : જોખમી પ્રકૃતિવાળા

સમૂહ T_3 : ઓછા જોખમી પ્રકૃતિવાળા

ભૂતકાળના અનુભવને આધારે કંપનીને માલૂમ પડે છે કે તેના વીમેદારો પૈકીના 30 % સમૂહ T_1 માં, 50 % સમૂહ T_2 માં અને બાકીના સમૂહ T_3 માં સમાવિષ્ટ છે. જો સમૂહ T_1, T_2 અને T_3 માં સમાવિષ્ટ હોય તેવા વીમેદારોને વીમાના વર્ષમાં અકસ્માત નડે તેની સંભાવના અનુક્રમે 0.30, 0.15 અને 0.05 હોય, તો એક વર્ષનો વીમો ધરાવતાં વીમેદારોને અકસ્માત નડે તેનું પ્રમાણ કેટલું ? જો યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ વીમેદારને અકસ્માત ન નડ્યો હોય તો તે T_2 સમૂહનો સભ્ય હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

7. રાજેશ પાસો ઉછાળવાની રમત રમવા માટે સંમત થાય છે. જો પાસા પરનો ક્રમાંક 1 અથવા 2 આવે તો તે ₹ 2 ગુમાવે છે. જો પાસા પરનો ક્રમાંક 3 અથવા 4 અથવા 5 આવે તો તે ₹ 5 મેળવે છે અને જો ક્રમાંક 6 આવે તો તે ₹ 10 મેળવે છે. જો રાજેશને મળતી રકમને આપણે યાદચ્છિક ચલ X લઈએ તો Xનું સંભાવના વિતરણ મેળવો.

8. એક યાદચ્છિક ચલ X એ 1 થી 100 પૂર્ણાંકમાંથી કોઈ પણ એક પૂર્ણાંક ધારણ કરે તેની સંભાવના સમાન છે : $E(X)$, $E(X^2)$ અને σ_X^2 શોધો.

9. નવ સમતોલ સિક્કાને એક સાથે એક વખત ઉછાળવામાં આવે છે. નીચે પ્રમાણેની સંભાવના શોધો :

(1) ચાર છાપ આવે અને (2) ઓછામાં ઓછી છ છાપ આવે.

10. દ્વિપદી વિતરણનું સંભાવના વિધેય આ પ્રમાણે છે : $p(x) = \binom{6}{x} p^x q^{6-x}$, $x = 0, 1, 2, ..., 6$.

જો $3p(2) = 2p(3)$ તો pની કિંમત શોધો.

11. જો દ્વિહાર નિશ્ચાયકનો દરેક ઘટક 0 અથવા 1 હોય તો નિશ્ચાયકની કિંમત ધન થાય તેની સંભાવના કેટલી ? (નિશ્ચાયકનો કોઈ પણ ઘટક સ્વતંત્ર રીતે પસંદ કરી શકાય છે.)

12. એક ભોજનાલયમાં A અને B એમ બે પ્રકારનાં વિશિષ્ટ ભોજન પીરસવામાં આવે છે. ભોજનાલયના ગ્રાહકોમાં 60 % પુરુષો અને 40 % સ્ત્રીઓ હોય છે. 80 % પુરુષો A પ્રકારનું ભોજન મંગાવે છે જ્યારે બાકીના પુરુષો B પ્રકારનું ભોજન મંગાવે છે. 70 % સ્ત્રીઓ B પ્રકારનું ભોજન મંગાવે છે જ્યારે બાકીની સ્ત્રીઓ A પ્રકારનું ભોજન મંગાવે છે. ભોજનાલયે બંને પ્રકારનું ભોજન (A થી B) કેટલા પ્રમાણમાં તૈયાર કરવું જોઈએ ?

13. એક રેલવે રિઝર્વેશન કાર્યાલયમાં બે કારકુન રિઝર્વેશન ફોર્મની ચકાસણી કરે છે. પ્રથમ કારકુન સરેરાશ 55 % ફોર્મની ચકાસણી કરે છે જ્યારે બાકીના ફોર્મની ચકાસણી બીજો કારકુન કરે છે. પ્રથમ કારકુનની ફોર્મ ચકાસણીમાં ભૂલનું પ્રમાણ 0.03 હોય છે જ્યારે બીજા કારકુનની ફોર્મ ચકાસણીમાં ભૂલનું પ્રમાણ 0.02 છે. દિવસ દરમિયાન ચકાસણી થયેલ ફોર્મમાંથી એક ફોર્મ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે અને માલૂમ પડ્યું કે તેમાં ચકાસણી દરમિયાન ભૂલ થઈ છે. આ ભૂલ બીજા કારકુનથી થઈ હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

14. એક સમતોલ સિક્કાને બે વખત ઉછાળવાનો પ્રયોગ કરવામાં આવે છે. નીચે મુજબની ઘટનાઓ વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે :

ઘટના A : પ્રથમ પ્રયત્નમાં છાપ મળે.

ઘટના B : બીજા પ્રયત્નમાં છાપ મળે.

ઘટના C : બંને પ્રયત્નમાં સરખું પરિણામ મળે.

ઘટનાઓ A, B, C જોડયુક્ત નિરપેક્ષ છે, પરંતુ પરસ્પર નિરપેક્ષ નથી તેમ બતાવો.

15. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :

વિભાગ A : (1 ગુણ)

(1) બરાબર ચીપેલાં 52 પત્તાના ઢગમાંથી એક પછી એક બે પત્તાં પસંદ કરવામાં આવે છે. જો આ પસંદગી પૂરવણી વગર કરવામાં આવે તો પસંદ થયેલ બંને પત્તાં એક્કા હોય તેની સંભાવના ...... છે. ☐

(a) 0.0045 (b) 0.0385 (c) 0.045 (d) 0.0059

(2) એક ગોળાકાર ચક્ર પર 1 થી 20 અંક અંકિત કરેલા છે. આ ચક્રને બે વખત ગોળ ફેરવવામાં આવે છે. બંને વખત અંક 13 આવે તેની સંભાવના ...... છે. ☐

(a) $\frac{1}{20}$ (b) $\frac{1}{40}$ (c) $\frac{1}{400}$ (d) $\frac{1}{200}$

(3) ધારો કે A અને B ઘટનાઓ છે. જ્યાં $P(A) = 0.4$, $P(A \cup B) = 0.7$ અને $P(B) = p$. જો A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય, તો pની કિંમત ...... છે. ☐

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{5}{6}$

(4) બે સમતોલ સિક્કાને ઉછાળવામાં આવે છે. જો પ્રથમ સિક્કા પર છાપ આવે ત્યારે બીજા સિક્કા પર પણ છાપ આવે તેની સંભાવના ...... છે. ☐

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{8}$ (d) 1

(5) ગણિતનો એક પ્રશ્ન ત્રણ વિદ્યાર્થીઓ A, B, C ને આપવામાં આવે છે. A, B, C પ્રશ્ન ઉકેલી શકે તેની સંભાવના અનુક્રમે $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ અને $\frac{1}{4}$ છે. પ્રશ્ન ઉકેલી શકાય તેની સંભાવના ...... છે. ☐

(a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{1}{3}$

(6) એક પાસાને 5 વખત ઉછાળવામાં આવે છે. અયુગ્મ અંક આવે તેને સફળતા ગણવામાં આવે તો આ યાદચ્છિક ચલના વિતરણનું વિચરણ ...... છે. ☐

(a) $\frac{8}{3}$ (b) $\frac{3}{8}$ (c) $\frac{4}{5}$ (d) $\frac{5}{4}$

(7) વ્યક્તિ A સાચું બોલે તેની સંભાવના $\frac{4}{5}$ છે અને વ્યક્તિ B સાચું બોલે તેની સંભાવના $\frac{3}{4}$ છે. કોઈ પણ ઘટના વિશે બોલવાનું હોય ત્યારે બંને વ્યક્તિઓનો અભિપ્રાય વિરોધાભાસી હોય તેની સંભાવના ...... છે. ☐

(a) $\frac{7}{20}$ (b) $\frac{1}{5}$ (c) $\frac{3}{20}$ (d) $\frac{4}{5}$

(8) જો A અને B એવી ઘટનાઓ હોય જ્યાં, $P(A) > 0$ અને $P(B) \neq 1$, તો $P(A|B') =$ ...... ☐

(a) $1 - P(A|B')$ (b) $1 - P(A|B)$ (c) $\frac{P(A')}{P(B)}$ (d) $1 - P(A'|B')$

(9) વિદ્યાર્થી તરવૈયો ન હોય તેની સંભાવના $\frac{4}{5}$ છે. 5 વિદ્યાર્થીઓમાંથી 4 વિદ્યાર્થીઓ તરવૈયા હોય તેની સંભાવના ...... છે.

(a) $\left(\frac{1}{5}\right)^3$ (b) $4\left(\frac{1}{5}\right)^4$ (c) ${}_5C_4\left(\frac{4}{5}\right)^4$ (d) $\left(\frac{4}{5}\right)^4$

(10) ધારો કે યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ છે :

$X = x$	0	1	2	3
$p(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

$E(2X + 3)$ની કિંમત ...... છે.

(a) $\frac{3}{2}$ (b) 1 (c) $\frac{1}{2}$ (d) 6

વિભાગ B : (2 ગુણ)

(11) એક ચોક્કસ પ્રકારની દવાથી દર્દીના રોગના લક્ષણમાં ફેર પડે છે કે નહિ તેનો અભ્યાસ કરવામાં આવ્યો. અભ્યાસનું પરિણામ નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે :

	ફેર પડે છે.	ફેર પડતો નથી.	કુલ
દવા સાથે	270	530	800
દવા વગર	120	280	400
કુલ	390	810	1200

જો દર્દીને દવા આપવામાં આવેલ હોય તેમ આપેલ હોય ત્યારે તેના રોગના લક્ષણમાં ફેર પડ્યો હોય તેની સંભાવના કેટલી થાય ?

(a) 0.4375 (b) 0.225 (c) 0.3375 (d) 0.3205

(12) પ્રશ્ન 11ના કોષ્ટકનો ઉપયોગ કરીને નીચે મુજબની સંભાવના શોધો : દર્દીના રોગના લક્ષણમાં ફેર પડે છે તેમ આપેલ હોય ત્યારે દર્દીને દવા આપવામાં આવી હોય તેની સંભાવના શોધો.

(a) 0.225 (b) 0.667 (c) 0.792 (d) 0.692

(13) એક પેટીમાં એક સરખા માપની ચાર લાલ, બે સફેદ અને ત્રણ લીલા રંગની લખોટીઓ છે. પેટીમાંથી એક પછી એક બે લખોટીઓ પસંદ કરવામાં આવે છે. (પૂરવણી વગર). પસંદ થયેલી બંને લખોટીઓ સરખા રંગની હોય તેની સંભાવના કેટલી થાય ?

(a) 0.67 (b) 0.5 (c) 0.14 (d) 0.28

(14) એક કંપનીને ત્રણ ઉત્પાદન સ્થળો છે. ઉત્પાદન સ્થળ A માં 30 % ઉત્પાદન થાય છે, B સ્થળે 50 % ઉત્પાદન થાય છે જ્યારે C સ્થળે બાકીનું ઉત્પાદન થાય છે. ધારો કે A, B, C સ્થળે ઉત્પાદિત વસ્તુઓમાં અનુક્રમે 1 %, 4 % અને 3 % ખામીવાળી વસ્તુઓનું ઉત્પાદન થાય છે. કુલ ઉત્પાદિત વસ્તુઓમાંથી ગમે તે એક વસ્તુ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. આ વસ્તુનું ઉત્પાદન B સ્થળે થયું હોય અને તે ખામીવાળી હોય તેની સંભાવના શોધો.

(a) 0.5 (b) 0.2 (c) 0.02 (d) 0.04

(15) જો દ્વિપદી વિતરણના યાદચ્છિક ચલ Xનો મધ્યક અને વિચરણ અનુક્રમે 4 અને 2 હોય, તો $P(X = 1) =$ ......

(a) $\frac{1}{16}$ (b) $\frac{1}{8}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{32}$

(16) જો બે ઘટનાઓ A અને B એવી હોય કે જ્યાં $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(A \mid B) = \frac{1}{2}$, $P(B \mid A) = \frac{2}{3}$, તો P(B) = ...

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{6}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{2}{3}$

(17) જો બે ઘટનાઓ A અને B એવી હોય કે જ્યાં $P(A') = 0.3$, $P(B) = 0.5$ અને $P(A \cap B) = 0.3$, તો $P(B \mid A \cup B') =$ ......

(a) 0.375 (b) 0.32 (c) 0.31 (d) 0.28

(18) જો દ્વિપદી વિતરણના પ્રચલો $n = 5$ અને $p = 0.30$ હોય, તો મધ્યક ...... અને વિચરણ .... હોય.

(a) 1.5, 1.5 (b) 1.5, 1.05 (c) 1.5, 1.40 (d) 1.5, 1.15

વિભાગ C : (3 ગુણ)

(19) એક કંપનીને ત્રણ ઉત્પાદન સ્થળો છે. ઉત્પાદન સ્થળ A માં 30 % ઉત્પાદન થાય છે, B સ્થળે 50 % ઉત્પાદન થાય છે, C સ્થળે 20 % ઉત્પાદન થાય છે. ધારો કે A, B, C સ્થળે ઉત્પાદિત વસ્તુઓમાં અનુક્રમે 1 %, 4 % અને 3 % ખામીવાળી વસ્તુઓનું ઉત્પાદન થાય છે. કુલ ઉત્પાદિત વસ્તુઓમાંથી ગમે તે એક વસ્તુને યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ થયેલ વસ્તુ ખામીવાળી હોય તેની સંભાવના કેટલી થાય ?

(a) 0.029 (b) 0.29 (c) 0.025 (d) 0.08

(20) કોઈ પણ પ્રયોગમાં પ્રથમ પ્રયત્ને ઘટના Aનો ઉદ્ભવ થાય તેની સંભાવના 0.4 છે. આ પ્રયોગના ત્રણ નિરપેક્ષ પ્રયત્નોમાં ઓછામાં ઓછી એક વખત ઘટના A ઉદ્ભવે તેની સંભાવના ...... થાય.

(a) 0.936 (b) 0.784 (c) 0.904 (d) 0.874

(21) યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ છે :

$X = x$	0	1	2	3
$p(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

$g(X) = 2X + 3$નું વિચરણ ..... છે.

(a) 6 (b) 36 (c) 4 (d) 8

વિભાગ D : (4 ગુણ)

(22) યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ છે :

$X = x$	1	2	3	4	5	6	7	8
$p(x)$	0.15	0.23	0.12	0.10	0.20	0.08	0.07	0.05

ઘટના E = {X એ અવિભાજ્ય સંખ્યા હોય} અને ઘટના F = {$X < 4$}, હોય તો $P(E \cup F) =$ ......

(a) 0.35 (b) 0.77 (c) 0.87 (d) 0.50

(23) યાદચ્છિક ચલ X એ બધી જ અનૃણ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ ધરાવે છે. જો યાદચ્છિક ચલ X કિંમત r ધારણ કરે તેની સંભાવના α^r $(0 < \alpha < 1)$ના સમપ્રમાણમાં હોય, તો $P(X = 0) =$ ......

(a) $1 - \alpha$ (b) α (c) $\frac{\alpha}{2}$ (d) α^2

(24) યાદૃચ્છિક ચલ Xનો મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન અનુક્રમે 10 અને 5 છે. યોગ્ય જોડ શોધો.

A		B	
(i)	$E(X^2)$	(p)	0
(ii)	$E(X(X + 1))$	(q)	135
(iii)	$E\left(\left(\frac{X-10}{5}\right)\right)$	(r)	125
(iv)	$E\left(\left(\frac{X-10}{5}\right)^2\right)$	(s)	1

(a) (i) : (q), (ii) : (r), (iii) : (p), (iv) : (s) (b) (i) : (r), (ii) : (q), (iii) : (s), (iv) : (p)

(c) (i) : (r), (ii) : (q), (iii) : (p), (iv) : (s) (d) (i) : (p), (ii) : (q), (iii) : (r), (iv) : (s)

*

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચે આપેલા મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. ઘટના B ઉદ્‌ભવે છે તેમ આપેલ હોય ત્યારે ઘટના Aની શરતી સંભાવના

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},\ P(B) \neq 0.$$

2. $0 \leq P(A \mid B) \leq 1,\quad P(A' \mid B) = 1 - (A \mid B)$

$P((A \cup B) \mid C) = P(A \mid C) + P(B \mid C) - P((A \cap B) \mid C)$

3. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A),\quad P(A) \neq 0$

$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B),\quad P(B) \neq 0$

4. જો B_1 અને B_2 પરસ્પર નિવારક અને નિ:શેષ ઘટનાઓ હોય તથા $P(B_1) \neq 0$, $P(B_2) \neq 0$, તો S ની કોઈ પણ ઘટના A માટે

$$P(A) = P(B_1) P(A \mid B_1) + P(B_2) P(A \mid B_2)$$

5. જો B_1, B_2 અને B_3 પરસ્પર નિવારક અને નિ:શેષ ઘટનાઓ હોય તથા A કોઈ પણ ઘટના હોય જ્યાં

$P(A) \neq 0$ તથા $P(B) \neq 0$ તો $P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i)\, P(B_i)}{P(A \mid B_1)\, P(B_1) + P(A \mid B_2)\, P(B_2) + P(A \mid B_3)\, P(B_3)}$, $i = 1, 2, 3$

6. જો A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય તો $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$

7. જો A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય, તો A અને B', A' અને B તથા A' અને B' પણ નિરપેક્ષ ઘટનાઓ થાય.

8. યાદૃચ્છિક ચલ એ વાસ્તવિક વિધેય છે કે જેનો પ્રદેશ યાદૃચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ હોય.

9. યાદૃચ્છિક ચલ X ના સંભાવના-વિતરણને કોષ્ટકના રૂપમાં નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

$X = x$	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$p(x)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$p(x_3)$	...	$p(x_n)$

10. **મધ્યક :** $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p(x_i)$

વિચરણ : $V(X) = \sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\, p(x_i) - \left[\sum_{i=1}^{n} x_i\, p(x_i)\right]^2$$

પ્રમાણિત વિચલન : $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$

11. $E(aX + b) = aE(X) + b$

12. $V(aX + b) = a^2\, V(X)$

13. **બર્નુલી પ્રયત્નો :**

(1) દરેક બર્નુલી પ્રયત્નમાં સફળતા (S) અથવા નિષ્ફળતા (F) મળવાની સંભાવના અચળ હોય છે.

(2) બર્નુલી પ્રયત્નો પરસ્પર નિરપેક્ષ હોય છે.

(3) જો કોઈ પણ બર્નુલી પ્રયત્નમાં સફળતા (S) મળવાની સંભાવના p $(0 < p < 1)$, હોય, તો નિષ્ફળતા (F) મળવાની સંભાવના $q = 1 - p$ થશે.

14. **દ્વિપદી વિતરણ :** ધારો કે જેની સફળતાની સંભાવના p હોય તેવા યાદચ્છિક પ્રયોગના n બર્નુલી પ્રયત્નોની શ્રેણીમાં X સફળતાની સંખ્યા દર્શાવે છે. યાદચ્છિક ચલ X નું સંભાવના વિતરણ

$$p(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x},\ x = 0, 1, 2, ... n$$

જ્યાં $0 < p < 1$ અને $q = 1 - p$ ને દ્વિપદી વિતરણ કહે છે. n અને pને દ્વિપદી વિતરણના પ્રચલો કહે છે.

15. પ્રચલો n અને p વાળા દ્વિપદી યાદચ્છિક ચલ X ના મધ્યક μ અને વિચરણ σ^2 અનુક્રમે np અને npq છે.

Ramanujan's notebooks

While still in Madras, Ramanujan recorded the bulk of his results in four notebooks of loose leaf paper. These results were mostly written up without any derivations. This is probably the origin of the misperception that Ramanujan was unable to prove his results and simply thought up the final result directly. Mathematician Bruce C. Berndt, in his review of these notebooks and Ramanujan's work, says that Ramanujan most certainly was able to make the proofs of most of his results, but chose not to.

This style of working may have been for several reasons. Since paper was very expensive, Ramanujan would do most of his work and perhaps his proofs on slate, and then transfer just the results to paper. Using a slate was common for mathematics students in the Madras Presidency at the time. He was also quite likely to have been influenced by the style of G. S. Carr's book studied in his teenage, which stated results without proofs. Finally, it is possible that Ramanujan considered his workings to be for his personal interest alone; and therefore only recorded the results.

The first notebook has 351 pages with 16 somewhat organized chapters and some unorganized material. The second notebook has 256 pages in 21 chapters and 100 unorganised pages, with the third notebook containing 33 unorganised pages. The results in his notebooks inspired numerous papers by later mathematicians trying to prove what he had found. Hardy himself created papers exploring material from Ramanujan's work as did G. N. Watson, B. M. Wilson, and Bruce Bert. A fourth notebook with 87 unorganised pages, the so-called "lost notebook", was rediscovered in 1976 by George Andrews.

સુરેખ આયોજન 8

Nature is an infinite sphere of which the centre is everywhere and
the circumference is nowhere.

– Blaise Pascal

In order to translate a sentence from English to French, two things are necessary.
First we must understend thoroughly the English sentence.
Second we must be familiar with the forms of expression peculiar to French language.
The situation is very similar when we attempt to express in mathematical symbols
a condition proposed in words. First we must understand thoroughly the condition.
Second we must be familiar with the forms of mathemaical expression.

– George Polya

8.1 પ્રાસ્તાવિક

સુરેખ આયોજન અને તેના ઉપયોગોની ચર્ચા શરૂ કરતા પહેલાં પ્રથમ આપણે શબ્દો **'સુરેખ' (Linear)** અને **'આયોજન' (Programming)**ની સમજૂતિ મેળવીએ. **પ્રશ્નો**માં આવતા ચલ વચ્ચે સુરેખ સંબંધ હોવાથી 'સુરેખ' શબ્દનું પ્રયોજન થાય છે. આમ, કોઈ એક ચલમાં ફેરફાર કરવાથી બીજા ચલમાં પહેલા ચલના ફેરફારના સમપ્રમાણમાં પરિવર્તન થાય છે. ઉદાહરણ તરીકે જો કોઈ ચોક્કસ મ્યુચ્યુઅલ ફંડમાં રોકાણ બમણું કરવામાં આવે તો વળતર પણ બમણું મળે છે. 'આયોજન' શબ્દનો અર્થ એ રીતે થાય છે કે પ્રશ્નોના ઉકેલ યોગ્ય રીતે આયોજન કરીને ગાણિતિક રીતે મેળવવા. ઈ.સ. 1939માં રશિયન ગણિતશાસ્ત્રી **લીયોનીદ્ કાન્તોર્વિચે (Leonid Kantorvich)** સૌપ્રથમ સુરેખ આયોજનનો ખ્યાલ આપ્યો. બીજા વિશ્વયુદ્ધ દરમિયાન જ્યારે અમેરિકન હવાઈદળમાં **જ્યોર્જ બી. ડેન્ટઝિંગ (George B. Dentzing)** કામ કરતા હતા ત્યારે તેણે લશ્કરી સાજસરંજામ પૂરો પાડવાની કળાનો વિકાસ સુરેખ આયોજન દ્વારા કર્યો.

અગાઉના ધોરણમાં આપણે સુરેખ સમીકરણો અને તેની વ્યવહારિક પ્રશ્નોમાં ઉપયોગિતાનો અભ્યાસ કર્યો. ધોરણ XI માં આપણે એકચલ સુરેખ અસમતા અને દ્વિચલ સુરેખ અસમતા સંહતિનો અભ્યાસ આલેખની મદદથી કર્યો. આ પ્રકરણમાં આપણે સુરેખ અસમતા સંહતિનો ઉપયોગ વાસ્તવિક જીવનના પ્રશ્નો ઉકેલવામાં કરીશું એટલે કે એવા પ્રકારના પ્રશ્નોના ઉકેલ કે જેમાં મહત્તમ (લઘુત્તમ) નફો (ખર્ચ) થાય. તે પ્રશ્નો એક સામાન્ય વર્ગમાં મૂકી શકાય છે કે જેમને આપણે **ઈષ્ટતમપણાના પ્રશ્નો (Optimisation)** કહી શકીએ. **મહત્તમ નફો, લઘુતમ ખર્ચ કે ઓછામાં ઓછા સંસાધનોના વપરાશ વગેરે પ્રકારના પ્રશ્નોનો ઈષ્ટતમપણાના પ્રશ્નોમાં સમાવેશ થાય છે.**

એક વિશિષ્ટ પરંતુ ખૂબ જ મહત્ત્વ ધરાવતા વર્ગના ઈષ્ટતમપણાના પ્રશ્નો એ **સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નો** હોય છે.

સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નો ખૂબ જ રસપ્રદ છે કારણ કે તેમનો ઉપયોગ લગભગ બધા જ પ્રકારના ક્ષેત્રો જેવા કે સંચાલન, વિમાનપરિવહન, કૃષિ, લશ્કરી સંચાલન, તેલ શુદ્ધિકરણ, શિક્ષણ, ઊર્જા આયોજન, પ્રદૂષણ નિયમન, પરિવહનના સમયપત્રકનું આયોજન, સંશોધન, તબીબી જેવાં ક્ષેત્રોમાં થાય છે.

આ પ્રકરણમાં આપણે કેટલાક સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નો અને તેના ઉકેલની ચર્ચા કરીશું. આપણે ઉકેલ ફક્ત આલેખની રીતે મેળવીશું. આવા પ્રકારના પ્રશ્નોના ઉકેલ માટેની બીજી રીતો પણ છે.

8.2 સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નનું ગાણિતીય સ્વરૂપ

આપણે એક ઉદાહરણ દ્વારા સમજણની શરૂઆત કરીએ. તે આપણને પ્રશ્નના દ્વિચલ ગાણિતીય સ્વરૂપ તરફ દોરી જશે.

એક દુકાનદાર ફક્ત બે વસ્તુઓનું જ વેચાણ કરે છે - વાતાકુલન માટેના એ.સી. (Air conditioner) અને કૂલર્સ (Coolers). તેની પાસે રોકાણ કરવા માટેની મૂડી ₹ 5,00,000 છે અને વધુમાં વધુ 60 વસ્તુઓને સંગ્રહી શકે તેટલી જગ્યા છે. એક એ.સી.ની કિંમત ₹ 25,000 અને એક કૂલરની કિંમત ₹ 5000 છે. દુકાનદારનો અંદાજ એવો છે કે એક નંગ એ.સી.ના વેચાણથી તેને ₹ 2500 નો નફો મળે તથા એક નંગ કૂલરના વેચાણથી તેને ₹ 750નો નફો મળે. દુકાનદારને એ જાણવું છે કે તેની

પાસેની મૂડીથી તેણે કેટલાં એ.સી. અને કેટલાં કૂલર્સ ખરીદવા જોઈએ કે જેથી તેને મહત્તમ નફો મળે. આપણે સ્વીકારી લઈએ છીએ કે દુકાનદાર ખરીદ કરેલી બધી જ વસ્તુઓ વેચી શકે છે.

આ પ્રશ્નમાં આપણે નીચે પ્રમાણે અવલોકન કરી શકીએ છીએ :

(1) દુકાનદાર તેની મૂડીનું રોકાણ તમામ એ.સી. ખરીદવામાં, તમામ કૂલર્સ ખરીદવામાં કે કેટલાંક એ.સી. અને કેટલાંક કૂલર્સ સાથે ખરીદવામાં કરી શકે છે. વળી, તે રોકાણની જુદી જુદી પદ્ધતિમાં જુદો જુદો નફો મેળવી શકે છે.

(2) અહીં કેટલીક મર્યાદાઓ છે જેમકે, દુકાનદાર પાસે ₹ 5,00,000 ની મૂડી છે અને તેની પાસે 60 વસ્તુઓ સંગ્રહી શકાય તેટલી જગ્યા છે.

ધારો કે દુકાનદાર ફક્ત એ.સી. જ ખરીદે અને કૂલર્સ ન ખરીદે તો તે 5,00,000 ÷ 25,000 = 20 એ.સી. ખરીદી શકે. આ વિકલ્પમાં તેનો નફો ₹ (2500 × 20) = ₹ 50,000 થાય.

જો તે ફક્ત કૂલર્સ ખરીદે અને એ.સી. ન ખરીદે તો તે તેની ₹ 5,00,000ની મૂડીમાંથી 100 કૂલર્સ ખરીદી શકે. પરંતુ તે ફક્ત 60 વસ્તુઓ જ સંગ્રહી શકે છે તેથી તેણે ફક્ત 60 કૂલર્સ જ ખરીદવા પડે. તેથી તે ₹ (60 × 750) = ₹ 45,000નો નફો મેળવી શકે.

આ સિવાય બીજા વિકલ્પો પણ છે જેમકે, તે 10 એ.સી. અને 50 કૂલર્સ પણ ખરીદી શકે (દુકાનદાર 60 વસ્તુઓ સંગ્રહી શકે છે). આ વિકલ્પમાં તેનો નફો ₹ (10 × 2500 + 50 × 750) = ₹ 62,500 વગેરે. આમ, દુકાનદાર જુદી જુદી પદ્ધતિઓ દ્વારા જુદો જુદો નફો મેળવી શકે છે. તેથી હવે પ્રશ્ન એ રહે કે, દુકાનદાર તેની મૂડીનું રોકાણ કેવી રીતે કરે કે જેથી તે મહત્તમ નફો મેળવી શકે ? આ પ્રશ્નનો ઉકેલ આપવા માટે આપણે તેનું ગાણિતીય સ્વરૂપ આપવાનો પ્રયત્ન કરીએ.

પ્રશ્નનું ગાણિતીય સ્વરૂપ :

ધારો કે દુકાનદાર x નંગ એ.સી. અને y નંગ કૂલર્સ ખરીદે છે.

દેખીતી રીતે, $x \geq 0,\ y \geq 0$ (અનૃણ મર્યાદા) (i)

એક એ.સી.ની કિંમત ₹ 25,000 છે અને એક કૂલરની કિંમત ₹ 5000 છે. તદ્ઉપરાંત દુકાનદાર વધુમાં વધુ ₹ 5,00,000નું રોકાણ કરી શકે છે. ગાણિતીક રીતે,

$$25{,}000\,x + 5000\,y \leq 5{,}00{,}000$$

$\therefore \quad 5x + y \leq 100$ (મૂડીની મર્યાદા) (ii)

દુકાનદાર વધુમાં વધુ 60 વસ્તુઓ રાખી શકે છે.

$\therefore \quad x + y \leq 60$ (સંગ્રહ મર્યાદા) (iii)

દુકાનદાર એવી રીતે રોકાણ કરવા માગે છે કે તે મહત્તમ નફો z મેળવી શકે.

અહીં આપેલ છે કે એક એ.સી.ના વેચાણ પર ₹ 2500 નફો મળે છે તથા એક કૂલરના વેચાણ પર ₹ 750નો નફો મળે છે. આમ, નફાનું વિધેય નીચે મુજબ લખી શકાય :

$z = 2500x + 750\,y$ (હેતુલક્ષી વિધેય) (iv)

ગાણિતિક રીતે આપેલ પ્રશ્નને નીચે મુજબ લખી શકાય :

$5x + y \leq 100$

$x + y \leq 60$

$x \geq 0,\ y \geq 0$ શરતોને અધીન :

મહત્તમ $z = 2500\,x + 750\,y$ મેળવો.

આમ, આપણે સુરેખ વિધેય z ને અમુક શરતોને અધીન મહત્તમ બનાવવાનું છે. આ શરતો સુરેખ અસમતાઓના સ્વરૂપમાં હોય છે. ચલરાશિઓ અનૃણ હોય છે. અમુક એવા પ્રકારના પણ પ્રશ્નો હોય છે કે જેમાં આપણે સુરેખ વિધેયને અમુક શરતોને અધીન ન્યૂનતમ બનાવવાનું હોય છે (ઉદાહરણ તરીકે, ખર્ચનું વિધેય). અહીં પણ શરતો સુરેખ અસમતાઓના સ્વરૂપમાં હોય છે અને ચલરાશિઓ અનૃણ હોય છે. આવા પ્રકારની સમસ્યાઓને ઈષ્ટતમ મૂલ્ય શોધવાના પ્રશ્નો કહે છે.

સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નો :

આપણે આગળ વધતાં પહેલા હવે ઔપચારિક રીતે અમુક પારિભાષિક શબ્દોને વ્યાખ્યાયિત કરીએ કે જેનો ઉપયોગ આપણે સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નોના ઉકેલમાં કરીશું.

સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નના બંધારણમાં સામાન્ય રીતે ત્રણ વિભાગ હોય છે :

(1) નિર્ણાયક ચલરાશિઓ (Decision Variables) : આપણે જુદા જુદા વિકલ્પો ચકાસીને હેતુલક્ષી વિધેયનું ઈષ્ટતમ મૂલ્ય (Optimum Value) શોધવું જરૂરી છે. સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નોના ઉકેલ મેળવવા માટે જે ચલ રાશિઓ દાખલ થાય છે તેની યોગ્ય કિંમત શોધવી જોઈએ. એટલે કે, જો ચલ રાશિઓની શ્રેષ્ઠતમ કિંમતો પ્રાપ્ત થઈ જાય તો પ્રશ્નનો ઉકેલ મળી ગયો તેમ કહી શકાય. આ ચલરાશિઓને નિર્ણાયક ચલ રાશિઓ કહેવાય છે. સામાન્ય રીતે જો ચલની સંખ્યા બે હોય તો તેમને x, y વડે દર્શાવાય છે અથવા જો ચલની સંખ્યા વધુ હોય તો તેમને $x_1, x_2, ..., x_n$ વડે દર્શાવાય છે.

આગળ ચર્ચા કરેલ પ્રશ્નમાં x, y નિર્ણાયક ચલ છે.

(2) હેતુલક્ષી વિધેય (Objective Function) : દરેક સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નમાં હેતુલક્ષી વિધેય (કે જેનું ઈષ્ટતમ મૂલ્ય જેમકે નફો, ખર્ચ વગેરે શોધવા) એ નિર્ણાયક ચલરાશિઓ ધરાવતું સુરેખ વિધેય હોય છે. આ વિધેય નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય છે :

$z = c_1x + c_2y$ અથવા $z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$

z નું ઈષ્ટતમ મૂલ્ય (મહત્તમ કે ન્યૂનતમ) શોધવાનું હોય છે.

આ પ્રકરણમાં આપણે આપેલ હેતુલક્ષી વિધેયનું ઈષ્ટતમ મૂલ્ય ફક્ત આલેખની રીતે શોધીશું.

(3) મર્યાદાઓ (પ્રતિબંધો) (Constraints) : કોઈ પણ સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નમાં હંમેશાં સંસાધનો મર્યાદિત હોય છે જેમકે મજૂર, કાચો માલ, જગ્યા, મૂડી, સમય વગેરે. આવા નિયંત્રણોને સુરેખ સમતા કે અસમતાઓના સ્વરૂપમાં નિર્ણાયક ચલ દ્વારા દર્શાવી શકાય છે. સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નનો ઉકેલ આ મર્યાદાઓનું સમાધાન કરે તે જરૂરી છે.

આમ, સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નનું ગાણિતીય સ્વરૂપ નીચે મુજબ થશે :

$a_{11}x + a_{12}y \ (\le, =, \ge) \ b_1$

$a_{21}x + a_{22}y \ (\le, =, \ge) \ b_2$

$a_{31}x + a_{32}y \ (\le, =, \ge) \ b_3$

$x \ge 0$, $y \ge 0$ શરતોને અધીન

નિર્ણાયક ચલ રાશિઓ x અને y ની એવી કિંમત શોધો કે જેથી $z = c_1x + c_2y$ નું મૂલ્ય ઈષ્ટતમ (મહત્તમ કે ન્યૂનતમ) થાય.

વ્યાપક રીતે નીચે મુજબ લખી શકાય :

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \quad (\le, =, \ge) \ b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \quad (\le, =, \ge) \ b_2 \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \quad (\le, =, \ge) \ b_m
\end{aligned}$$

અને $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0$ શરતોને અધીન

નિર્ણાયક ચલરાશિઓ $x_1, x_2, ..., x_n$ ની એવી કિંમત શોધો કે જેથી

$z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$ નું મૂલ્ય ઈષ્ટતમ (મહત્તમ કે ન્યૂનતમ) થાય.

જ્યાં સહગુણકો a_{ij} એ હેતુલક્ષી વિધેય માટેના નિર્ણાયક ચલ x_j ની એકમ દીઠ ફાળવણી દર્શાવે છે. **a_{ij} ને નિવેશ-નિર્ગમ સહગુણકો કહે છે અને તે કુલ સ્રોત દર્શાવે છે, જે ધન, ઋણ કે શૂન્ય હોઈ શકે. b_i ને i માં સ્રોતની કુલ પ્રાપ્યતા દર્શાવે છે.**

નીચેનું ઉદાહરણ સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નને ગાણિતીય સ્વરૂપમાં કેવી રીતે દર્શાવી શકાય તે સમજાવે છે.

ઉદાહરણ 1 : એક ફર્નિચર ઉત્પાદક ત્રણ મશીન A, B અને C ના ઉપયોગથી તૈયાર થતા ખુરશી અને ટેબલનું ઉત્પાદન કરે છે. એક ખુરશીનું ઉત્પાદન કરવા માટે મશીન A ને 2 કલાક, મશીન B ને 1 કલાક અને મશીન C ને 1 કલાક થાય છે. એક ટેબલનું ઉત્પાદન કરવા માટે મશીન A તથા B ની 1 કલાક અને મશીન C ની 3 કલાક જરૂર પડે છે. ઉત્પાદકને એક ખુરશીના વેચાણ દ્વારા ₹ 300 નો નફો મળે છે, જ્યારે એક ટેબલના વેચાણ દ્વારા ₹ 600 નો નફો થાય છે. મશીન A એક અઠવાડિયામાં 70 કલાક માટે પ્રાપ્ય છે, મશીન B 40 કલાક તથા મશીન C 90 કલાક માટે પ્રાપ્ય છે. એક અઠવાડિયામાં કેટલી ખુરશી તથા કેટલા ટેબલનું ઉત્પાદન કરવું પડે કે જેથી મહત્તમ નફો મળે ? આ પ્રશ્નને ગાણિતીય સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

ઉકેલ : આપેલ માહિતીને નીચેના કોષ્ટક દ્વારા દર્શાવી શકાય :

મશીન	ખુરશી દીઠ કલાકની સંખ્યા	ટેબલ દીઠ કલાકની સંખ્યા	અઠવાડિયામાં પ્રાપ્ય કુલ સમય (કલાકમાં)
A	2	1	70
B	1	1	40
C	1	3	90
પ્રતિ નંગ નફો	₹ 300	₹ 600	

ધારો કે મહત્તમ નફો મેળવવા માટે x નંગ ખુરશી અને y નંગ ટેબલનું ઉત્પાદન કરવામાં આવે છે.

ધારો કે z એ કુલ નફો દર્શાવે છે. તેથી $z = 300x + 600y$ **(i)**

આપેલ છે કે 1 નંગ ખુરશી બનાવવા માટે મશીન A ની 2 કલાક જરૂર પડે છે અને 1 નંગ ટેબલ બનાવવા માટે મશીન A ની 1 કલાક જરૂર પડે છે. તેથી x ખુરશી અને y ટેબલનું ઉત્પાદન કરવા માટે મશીન A ની $(2x + y)$ કલાક જરૂર પડે.

આ સમય મશીન A ને અઠવાડિયામાં મળતા કુલ સમય જેટલો અથવા તેનાથી ઓછો હોય.

$\therefore \quad 2x + y \le 70$ **(ii)**

1 નંગ ખુરશી બનાવવા માટે તથા 1 નંગ ટેબલ બનાવવા માટે મશીન B અને C ની અનુક્રમે એક-એક કલાકની જરૂર પડે છે. તેથી x ખુરશી અને y ટેબલનું ઉત્પાદન કરવા માટે મશીન B ની $(x + y)$ કલાક જરૂર પડે. આ સમય મશીન B ને અઠવાડિયામાં મળતા કુલ સમય જેટલો અથવા તેનાથી ઓછો હોય.

$\therefore \quad x + y \le 40$ **(iii)**

આ જ રીતે, મશીન C માટેની અસમતા નીચે મુજબ થશે :

$x + 3y \le 90$ **(iv)**

ખુરશી તથા ટેબલની સંખ્યા ઋણ ન હોઈ શકે.

$\therefore \quad x \ge 0$ અને $y \ge 0$ **(v)**

આમ, આપેલ સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નનું ગાણિતીય સ્વરૂપ નીચે મુજબ થશે :

$$2x + y \le 70$$
$$x + y \le 40$$
$$x + 3y \le 90$$

અને $x \ge 0, y \ge 0$ શરતોને અધીન

$z = 300x + 600y$ ની મહત્તમ કિંમત શોધો.

હવે આપણે સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નનો ઉકેલ કેવી રીતે મેળવી શકાય. તેની ચર્ચા કરીશું.

8.3 સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નના ઉકેલ માટે આલેખની રીત

આ વિભાગમાં પ્રથમ આપણે સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નના ઉકેલ સંબંધી કેટલીક વ્યાખ્યાઓની ચર્ચા કરીશું.

વ્યાખ્યા : નિર્ણાયક ચલરાશિઓ x_i ($i = 1, 2, ..., n$) ના જે મૂલ્યોનો ગણ સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નમાં આવેલ મર્યાદાઓની અસમતાઓનું સમાધાન કરે તે પ્રશ્નનો ઉકેલ રચે છે તેમ કહેવાય.

ઉદાહરણ તરીકે નીચેનાં સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નનો વિચાર કરો :

$$2x + y \leq 70$$

$$x + y \leq 40$$

$$x + 3y \leq 90$$

અને $x \geq 0$, $y \geq 0$ને અધીન

$z = 300x + 600y$ની મહત્તમ કિંમત શોધો.

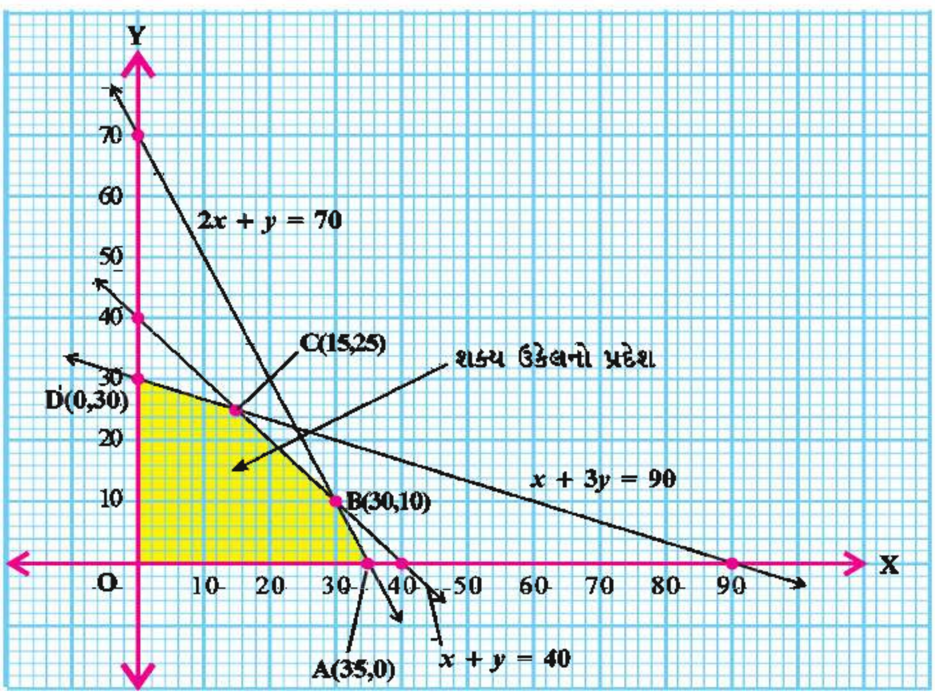
અહીં, $x = 1, y = 3$; $x = 7, y = 6$; $x = 10, y = 18$ વગેરે આપેલ સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નના ઉકેલો થશે કારણ કે તે મર્યાદાઓ $2x + y \leq 70$, $x + y \leq 40$ અને $x + 3y \leq 90$ અને $x \geq 0$, $y \geq 0$નું સમાધાન કરે છે. આપણે નોંધીએ કે $x = 10$, $y = 30$ એ આપેલ પ્રશ્નનો ઉકેલ નથી કારણ કે તે $x + 3y \leq 90$નું સમાધાન કરતો નથી.

શક્ય ઉકેલ (Feasible Solution) : ચલરાશિઓ $x_1, x_2, ..., x_n$ ની એવી કિંમતો કે જે આપેલા પ્રતિબંધોનું (મર્યાદાઓનું) સમાધાન કરે તથા તે બધી ચલરાશિઓની કિંમત અનૃણ (ધન અથવા શૂન્ય) હોય તેવી કિંમતોને શક્ય ઉકેલ કહે છે.

અશક્ય ઉકેલ (Infeasible Solution) : જે ચલરાશિઓની કિંમતો આપેલ પૈકી ઓછામાં ઓછી એક મર્યાદાનું સમાધાન ન કરે તેને અશક્ય ઉકેલ કહે છે.

ઈષ્ટતમ શક્ય ઉકેલ (Optimal feasible Solution) : જે શક્ય ઉકેલ હેતુલક્ષી વિધેયને ઈષ્ટતમ (મહત્તમ અથવા ન્યૂનતમ) બનાવે તે ઉકેલને ઈષ્ટતમ શક્ય ઉકેલ કહે છે.

શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ (Feasible region) : જ્યારે આપણે બધી જ મર્યાદાઓને (અનૃણ સહિત) આલેખ દ્વારા દર્શાવીએ ત્યારે આલેખના જે પ્રદેશના બિંદુઓના યામ બધી જ મર્યાદાઓનું સમાધાન કરે તે પ્રદેશને શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ કહે છે.



આકૃતિ 8.1

આકૃતિ 8.1માં પીળા રંગનો પ્રદેશ OABCD એ ઉદાહરણ 1 માટેના શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ છે.

અહીં નોંધીએ કે શક્ય ઉકેલના પ્રદેશની અંદર અને તેની સીમા પર આવેલા બિંદુઓ પ્રશ્નની મર્યાદાઓનું સમાધાન કરે છે તેથી તે શક્ય ઉકેલનો ગણ રચે છે. આકૃતિ 8.1માં શક્ય ઉકેલના પ્રદેશ OABCD ની અંદર અને તેની સીમા પર આવેલાં બધાં બિંદુઓ શક્ય ઉકેલનો ગણ દર્શાવે છે.

ઉદાહરણ તરીકે, બિંદુઓ (35, 0), (30, 10), (15, 25), (0, 30), (20, 0), (0, 10), (20, 10) વગેરે કેટલાક શક્ય ઉકેલો છે. બિંદુ (30, 20) એ આપેલ પ્રશ્નનો અશક્ય ઉકેલ છે. આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે શક્ય ઉકેલના પ્રદેશ OABCD ના બધાં જ બિંદુઓ ઉદાહરણ 1ની બધી જ મર્યાદાઓનું સમાધાન કરે છે. આપણે અવલોકન કરી શકીએ છીએ કે શક્ય પ્રદેશમાં અનંત બિંદુઓ આવેલ છે. આ અસંખ્ય બિંદુઓમાંથી આપણે એક એવું બિંદુ શોધવું છે કે જે હેતુલક્ષી વિધેય $z = 300x + 600y$ ને મહત્તમ બનાવે. આ પ્રકારની સ્થિતિમાંથી રસ્તો કાઢવા માટે આપણે સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નોના ઉકેલ માટેના મૂળભૂત પ્રમેયોનો ઉપયોગ કરીશું. અહીં આપણે આ પ્રમેયોની સાબિતી આપ્યા વગર ફક્ત તેમના વિધાન આપીશું.

પ્રમેય 8.1 : ધારો કે R એ સુરેખ આયોજનના પ્રશ્ન માટેના હેતુલક્ષી વિધેય $z = ax + by$ માટેના શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ છે. (જે બહિર્મુખ બહુકોણ હોય). જ્યારે z ને ઈષ્ટતમ મૂલ્ય (મહત્તમ અથવા ન્યૂનતમ) મળે ત્યારે તે ચલરાશિઓ x અને y થી બનતી અસમતાઓ દ્વારા રચાતા બહિર્મુખ બહુકોણના કોઈ પણ શિરોબિંદુ આગળ પ્રાપ્ત થાય છે.

પ્રમેય 8.2 : ધારો કે R એ સુરેખ આયોજનના પ્રશ્ન માટેના હેતુલક્ષી વિધેય $z = ax + by$ માટેના શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ છે. જો આ પ્રદેશ R સીમિત (bounded) હોય, તો હેતુલક્ષી વિધેય z ને મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્ય પ્રદેશ R ના કોઈ પણ શિરોબિંદુ આગળ પ્રાપ્ત થાય.

ઉપરના ઉદાહરણ 1માં સીમિત પ્રદેશ Rના શિરોબિંદુઓ O, A, B, C, D છે અને તેમના યામ અનુક્રમે (0, 0), (35, 0), (30, 10), (15, 25) અને (0, 30) છે. આ બિંદુઓ આગળ આપણે $z = 300x + 600y$ નું મૂલ્ય શોધીએ.

શક્ય ઉકેલ પ્રદેશના શિરોબિંદુ	$z = 300x + 600y$ ની કિંમત (₹)	
O(0, 0)	0	
A(35, 0)	10,500	
B(30, 10)	15,000	
C(15, 25)	19,500	← મહત્તમ
D(0, 30)	18,000	

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે જો ફર્નિચર ઉત્પાદક એક અઠવાડિયામાં 15 ખુરશી તથા 25 ટેબલનું ઉત્પાદન કરે તો તેને મહત્તમ નફો ₹ 19,500 મળે.

નોંધ : જો R એ અસીમિત પ્રદેશ હોય, તો હેતુલક્ષી વિધેયને મહત્તમ કે ન્યૂનતમ કિંમત ન પણ મળે. તેમ છતાં જો મળે તો તે Rના કોઈ શિરોબિંદુ આગળ જ મળે. (પ્રમેય 8.1)

આ પ્રકારે સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નો ઉકેલવાની પદ્ધતિને **શિરોબિંદુની રીત** કહે છે.

જો કોઈ પણ દ્વિચલ સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નનો આલેખની મદદથી શિરોબિંદુની રીતે ઉકેલ શોધવો હોય, તો નીચે જણાવેલ મુદ્દાનો ઉપયોગ કરી શકાય :

(1) જો સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નને ગાણિતીય સ્વરૂપમાં ન આપેલ હોય, તો તેને ગાણિતીય સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

(2) આપેલ સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નના શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ શોધો. આ પ્રદેશના શિરોબિંદુઓ શોધો. જે આલેખ પરથી શોધી શકાય અથવા પ્રશ્નમાં આવેલ મર્યાદાઓને ઉકેલીને પણ શિરોબિંદુઓ શોધી શકાય.

(3) દરેક શિરોબિંદુ આગળ હેતુલક્ષી વિધેય $z = ax + by$ ની કિંમત મેળવો. ધારો કે આ બિંદુઓ આગળ zની મહત્તમ કિંમત તથા ન્યૂનતમ કિંમત અનુક્રમે M તથા m છે.

(4) જો શક્ય ઉકેલનો પ્રશ્ન સીમિત હોય તો z ની મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ કિંમત અનુક્રમે M તથા m થાય.

(5) જો શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ અસીમિત હોય, તો નીચે મુજબ આગળ વધી શકાય :

(i) જો $ax + by > M$ થી રચાતા ખુલ્લા અર્ધતલનું કોઈ પણ બિંદુ શક્ય ઉકેલના પ્રદેશ સાથે સામાન્ય ન હોય તો zની મહત્તમ કિંમત M થાય. નહિ તો zને મહત્તમ કિંમત ન મળે.

(ii) જો $ax + by < m$ થી રચાતા ખુલ્લા અર્ધતલનું કોઈ પણ બિંદુ શક્ય ઉકેલના પ્રદેશ સાથે સામાન્ય ન હોય તો z ની ન્યૂનતમ કિંમત m થાય. નહિ તો z ને ન્યૂનતમ કિંમત ન મળે.

હવે આપણે શિરોબિંદુની રીતનો ઉપયોગ કરી કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 2 : નીચે આપેલા સુરેખ આયોજનનો પ્રશ્ન આલેખની રીતે ઉકેલો :

$180x + 120y \leq 1500$

$x + y \leq 10$

અને $x \geq 0, y \geq 0$ શરતોને અધીન

$z = 20x + 15y$ નું મહત્તમ મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : અહીં $x \geq 0$ અને $y \geq 0$ હોવાથી ઉકેલગણ પ્રથમ ચરણમાં $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$ કિરણ સુધી સીમિત રહેશે.

આકૃતિ 8.2

(i) $180x + 120y \le 1500$

$3x + 2y \le 25$

રેખા $3x + 2y = 25$ દોરો.

$$y = \frac{25 - 3x}{2}$$

x	0	5	$\frac{25}{3}$	1
y	$\frac{25}{2}$	5	0	11

$3x + 2y \le 25$ થી રચાતો પ્રદેશ નક્કી કરો.

(ii) $x + y \le 10$

રેખા $x + y = 10$ દોરો.

$$\therefore \quad y = 10 - x$$

x	0	10
y	10	0

એ જ આલેખપત્ર પર $x + y \le 10$ થી રચાતો પ્રદેશ નક્કી કરો. બંને અસમતાઓનો સામાન્ય પ્રદેશ પીળા રંગનો છે. વળી, $x \ge 0$, $y \ge 0$. આકૃતિ 8.2માં પીળા રંગનો પ્રદેશ OABC એ શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ છે. બિંદુ B(5, 5) એ રેખાઓ $3x + 2y = 25$ અને $x + y = 10$ નું છેદબિંદુ છે.

બહિર્મુખ બહુકોણ OABC ના શિરોબિંદુઓ O(0, 0), $A\left(\frac{25}{3}, 0\right)$, B(5, 5) અને C(0, 10) થશે. આ બિંદુઓ આગળ z ની કિંમત મેળવીએ.

શક્ય ઉકેલના પ્રદેશનું શિરોબિંદુ	$z = 20x + 15y$ ની કિંમત
O(0, 0)	0
$A\left(\frac{25}{3}, 0\right)$	166.67
B(5, 5)	175 ← મહત્તમ
C(0, 10)	150

$x = 5$ તથા $y = 5$ આગળ z ની મહત્તમ કિંમત 175 મળે છે.

ઉદાહરણ 3 : શિરોબિંદુની રીતનો ઉપયોગ કરીને $3x + 2y \le 6$, $-2x + 4y \le 8$, $x + y \ge 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ શરતોને અધીન $z = 2x + 5y$ ની મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ કિંમત મેળવો.

ઉકેલ : અહીં $x \ge 0$ અને $y \ge 0$ હોવાથી ઉકેલગણ પ્રથમ ચરણમાં તથા $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$ કિરણ સુધી સીમિત રહેશે.

(1) $3x + 2y \le 6$

રેખા $3x + 2y = 6$ દોરો.

$$y = \frac{6 - 3x}{2}$$

x	0	2
y	3	0

અસમતા $3x + 2y \le 6$ થી રચાતો પ્રદેશ નક્કી કરો.

(2) $-2x + 4y \le 8$

$\therefore \quad -x + 2y \le 4$

રેખા $-x + 2y = 4$ દોરો.

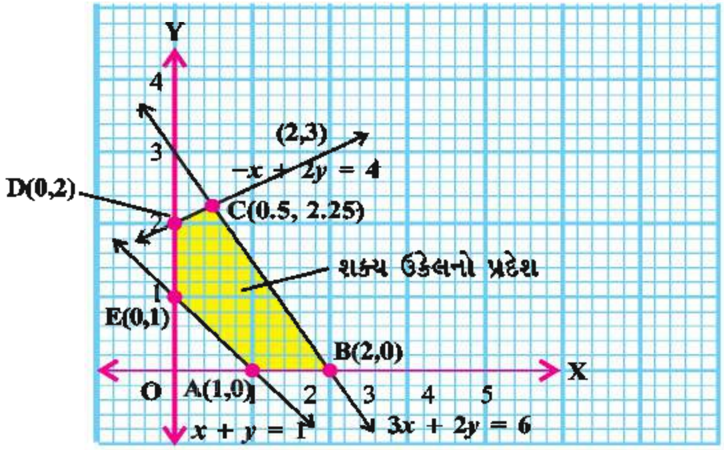
$$\therefore \quad y = \frac{x + 4}{2}$$

x	0	2
y	2	3

અસમતા $-x + 2y \le 4$ થી રચાતો પ્રદેશ નક્કી કરો.

(3) $x + y \ge 1$

રેખા $x + y = 1$ દોરી એ જ આલેખપત્ર પર અસમતા $x + y \ge 1$થી રચાતો પ્રદેશ નક્કી કરો.



આકૃતિ 8.3

હવે, ત્રણેય અસમતાઓથી રચાતો સામાન્ય પ્રદેશ પીળા રંગ વડે દર્શાવેલ છે.

આકૃતિ 8.3 માં દર્શાવ્યા મુજબ પીળા રંગનો પ્રદેશ ABCDE એ શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ થશે. બિંદુ C(0.5, 2.25) એ રેખાઓ $3x + 2y = 6$ અને $-2x + 4y = 8$નું છેદબિંદુ થશે.

બહિર્મુખ બહુકોણ ABCDE ના શિરોબિંદુઓ A(1, 0), B(2, 0), C(0.5, 2.25), D(0, 2), E(0, 1) થશે. આ બિંદુઓ આગળ zની કિંમત મેળવીએ.

શિરોબિંદુ	$z = 2x + 5y$ નું મૂલ્ય	
A(1, 0)	2	← ન્યૂનતમ
B(2, 0)	4	
C(0.5, 2.25)	12.25	← મહત્તમ
D(0, 2)	10	
E(0, 1)	5	

આમ, $x = 1$ તથા $y = 0$ આગળ zની ન્યૂનતમ કિંમત 2 મળે છે અને $x = 0.5$, $y = 2.25$ આગળ zની મહત્તમ કિંમત 12.25 મળે છે.

ઉદાહરણ 4 : $x + 2y \geq 10$; $3x + y \geq 10$; $x \geq 0$; $y \geq 0$ શરતોને અધીન $2x + 4y$ની ન્યૂનતમ કિંમત શોધો.

ઉકેલ : અહીં $x \geq 0$ અને $y \geq 0$ હોવાથી ઉકેલગણ પ્રથમ ચરણમાં તથા $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$ કિરણ સુધી સીમિત રહેશે.

(1) $x + 2y \geq 10$

રેખા $x + 2y = 10$ દોરો.

$y = \frac{10 - x}{2}$

x	0	10
y	5	0

અસમતા $x + 2y \geq 10$થી રચાતો પ્રદેશ નક્કી કરો.

(2) $3x + y \geq 10$

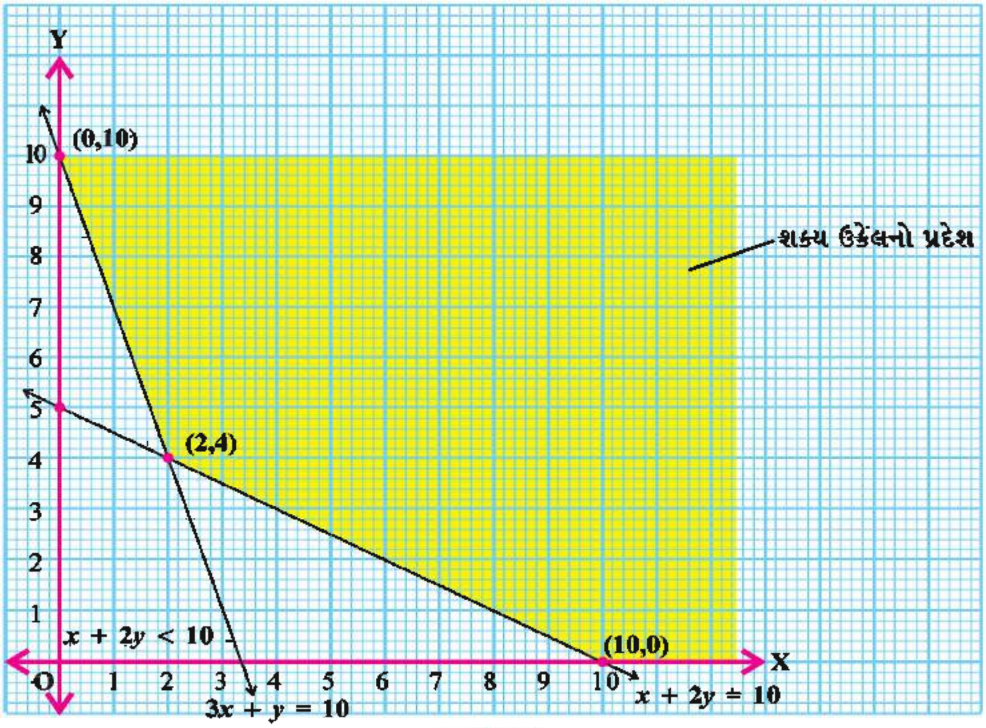
રેખા $3x + y = 10$ દોરો.

$\therefore \quad y = 10 - 3x$

x	0	2
y	10	4

એ જ આલેખપત્ર પર અસમતા $3x + y \geq 10$થી રચાતો પ્રદેશ નક્કી કરો.

બંને અસમતાઓથી રચાતા સામાન્ય પ્રદેશને પીળા રંગ વડે દર્શાવેલ છે. આકૃતિ 8.4 માં શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ દર્શાવેલો છે જે અસીમિત પ્રદેશ છે.



આકૃતિ 8.4

આ પ્રદેશના શિરોબિંદુઓ (0, 10), (2, 4), (10, 0) થશે. આ શિરોબિંદુઓ આગળ z ની કિંમત નીચે મુજબ છે :

શિરોબિંદુ	$z = 2x + 4y$ ની કિંમત
(0, 10)	40
(2, 4)	20
(10, 0)	20

ઉપરના કોષ્ટક પરથી માલૂમ પડે છે કે બિંદુ (2, 4), (10, 0) આગળ z ની ન્યૂનતમ કિંમત 20 હોઈ શકે. શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ અસીમિત હોવાથી z ની ન્યૂનતમ કિંમત 20 હોય પણ ખરી અને ન પણ હોય. આ નક્કી કરવા માટે આપણે અસમતા $2x + 4y < 20$ (શિરોબિંદુની રીતનો મુદ્દા ક્રમાંક 5(ii))ને આલેખીએ.

હવે, $2x + 4y < 20$

$\therefore \quad x + 2y < 10$

આપણે ચકાસવું પડશે કે $x + 2y < 10$ થી રચાતા ખુલ્લા અર્ધતલનું કોઈ બિંદુ શક્ય ઉકેલના પ્રદેશનું પણ બિંદુ છે કે નહિ. જો બંને પ્રદેશોને સામાન્ય બિંદુ મળે તો z ની ન્યૂનતમ કિંમત 20 થાય નહિ. આકૃતિ 8.4 માં દર્શાવ્યા મુજબ ખુલ્લા અર્ધતલનું કોઈ પણ બિંદુ શક્ય ઉકેલના પ્રદેશનું બિંદુ નથી. તેથી z ની ન્યૂનતમ કિંમત 20 થાય. ખરેખર, રેખા $x + 2y = 10$ પરનું કોઈ પણ બિંદુ z માં મૂક્તાં z ની ન્યૂનતમ કિંમત 20 થાય. આમ, આપેલી શરતોને અધીન $z = 2x + 4y$ ને ન્યૂનતમ બનાવે તેવાં અસંખ્ય બિંદુઓ મળે છે.

ઉદાહરણ 5 : $2x - y \geq -5$

$3x + y \geq 3$

$2x - 3y \leq 12$

$x \geq 0,\ y \geq 0$ શરતોને અધીન આલેખની રીતે $z = -50x + 20y$ ની ન્યૂનતમ કિંમત શોધો.

ઉકેલ : અહીં $x \geq 0$ અને $y \geq 0$ હોવાથી ઉકેલગણ પ્રથમ ચરણમાં તથા $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$ કિરણ સુધી સીમિત રહેશે.

(1) $2x - y \geq -5$

રેખા $2x - y = -5$ દોરો.

$$y = 2x + 5$$

x	0	1
y	5	7

અસમતા $2x - y \geq -5$ થી રચાતો પ્રદેશ નક્કી કરો.

(2) $3x + y \geq 3$

રેખા $3x + y = 3$ દોરો.

x	0	1
y	3	0

અસમતા $3x + y \geq 3$ થી રચાતો પ્રદેશ નક્કી કરો.

(3) $2x - 3y \leq 12$

રેખા $2x - 3y = 12$ દોરો.

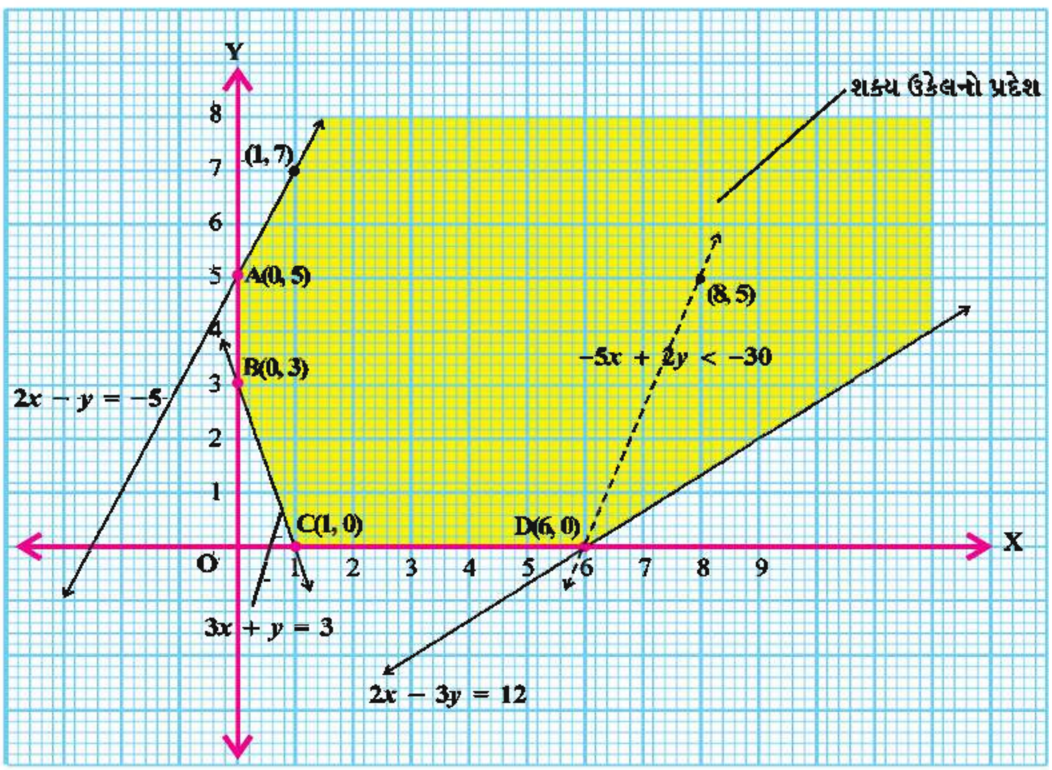
$$y = \frac{2x - 12}{3}$$

x	9	6
y	2	0

અસમતા $2x - 3y \leq 12$ થી રચાતો પ્રદેશ નક્કી કરો.

ત્રણેય અસમતાથી રચાતા સામાન્ય પ્રદેશને પીળા રંગ વડે દર્શાવેલ છે. આકૃતિ 8.5માં શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ દર્શાવેલો છે જે અસીમિત પ્રદેશ છે. આ પ્રદેશના શિરોબિંદુઓ (0, 5), (0, 3), (1, 0) અને (6, 0) છે. આ શિરોબિંદુઓ આગળ zની કિંમત નીચે પ્રમાણે છે :

શિરોબિંદુ	$z = -50x + 20y$ ની કિંમત	
A(0, 5)	100	
B(0, 3)	60	
C(1, 0)	–50	
D(6, 0)	–300	←ન્યૂનતમ



આકૃતિ 8.5

ઉપરના કોષ્ટક પરથી માલૂમ પડે છે કે બિંદુ (6, 0) આગળ zની ન્યૂનતમ કિંમત -300 હોઈ શકે. શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ અસીમિત હોવાથી zની ન્યૂનતમ કિંમત -300 હોય પણ ખરી અને ન પણ હોય. આ નક્કી કરવા માટે આપણે અસમતા $-50x + 20y < -300$ એટલે કે $-5x + 2y < -30$ ને આલેખીએ અને ચકાસીએ કે તેનાથી રચાતા ખુલ્લા અર્ધતલનું કોઈ બિંદુ શક્ય ઉકેલના પ્રદેશનું પણ બિંદુ છે કે નહિ. જો બંને પ્રદેશોને સામાન્ય બિંદુ મળે તો z ની ન્યૂનતમ કિંમત -300 થાય નહિ. આકૃતિ 8.5 માં દર્શાવ્યા મુજબ બંને પ્રદેશોને સામાન્ય બિંદુ મળે છે. આથી, આપેલી શરતોને અધીન $z = -50x + 20y$ની ન્યૂનતમ કિંમત ન મળે.

[ઉપરના ઉદાહરણમાં, આપણે એવું કહી શકીએ કે (0, 5) આગળ $z = -50x + 20y$ની મહત્તમ કિંમત 100 થાય ?]

ઉદાહરણ 6 : શરતો $x - y \le -1$

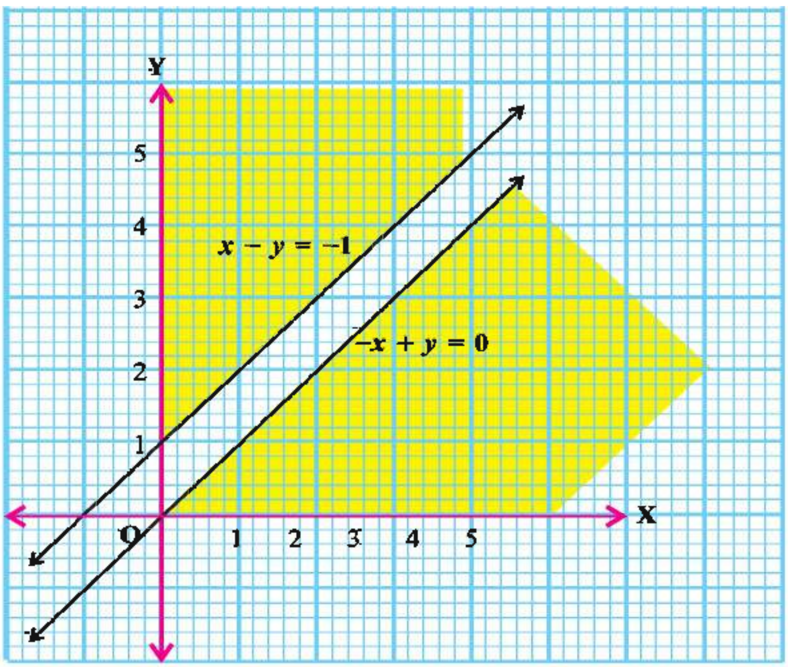
$$-x + y \le 0$$

$x \ge 0$, $y \ge 0$ ને અધીન

$z = 3x + 4y$ની મહત્તમ કિંમત (જો શક્ય હોય, તો) શોધો.

ઉકેલ : પ્રથમ આપણે આપેલ અસમતાઓ $x - y \le -1$, $-x + y \le 0$, $x \ge 0$ અને $y \ge 0$ને એક જ આલેખપત્ર પર આલેખીએ.

આકૃતિ 8.6 માં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે આપેલ બધી મર્યાદાઓનું એક સાથે સમાધાન થાય તેવું કોઈ પણ બિંદુ મળતું નથી. આમ, શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ મળતો નથી તેથી આપેલ સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નનો ઉકેલ મળતો નથી.



આકૃતિ 8.6

આપણે અગાઉના ઉદાહરણોની ચર્ચા કર્યા પછી નીચે મુજબના અવલોકનોની નોંધ કરીએ :

(1) શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ હંમેશાં બહિર્મુખ બહિકોણ હોય છે.

(2) હેતુલક્ષી વિધેયની મહત્તમ (ન્યૂનતમ) કિંમત બહિર્મુખ બહુકોણના શિરોબિંદુ આગળ મળે છે. જો હેતુલક્ષી વિધેયની મહત્તમ (ન્યૂનતમ) કિંમત બે શિરોબિંદુ આગળ મળે તો આ બે બિંદુઓને જોડતા રેખાખંડ પરના કોઈ પણ બિંદુ આગળ હેતુલક્ષી વિધેયની સમાન મહત્તમ (ન્યૂનતમ) કિંમત મળે.

સ્વાધ્યાય 8.1

1. એક કંપની બે જુદી જુદી બનાવટની વસ્તુઓ A અને Bનું વેચાણ કરે છે. કંપનીને એક નંગ A તથા એક નંગ B ના વેચાણથી અનુક્રમે ₹ 40 અને ₹ 30 નો નફો મળે છે. આ વસ્તુઓનું ઉત્પાદન એક જ જગ્યાએ થાય છે તથા તેમનું બે જુદા જુદા બજારમાં વેચાણ કરવામાં આવે છે. આ વસ્તુઓનું ઉત્પાદન કરવા માટેની કુલ ક્ષમતા 3,000 માનવ-કલાકોની છે. એક નંગ A નું ઉત્પાદન કરવા માટે 3 કલાકની જરૂર પડે છે, જ્યારે એક નંગ B નું ઉત્પાદન એક કલાકમાં કરી શકાય છે. આ વસ્તુઓના વેચાણ માટે બજારમાં મોજણી કરાવવાથી કંપનીના અધિકારીઓને લાગ્યું કે Aનું વેચાણ 8,000 નંગ કરી શકાય જ્યારે Bનું વેચાણ 1200 નંગ કરી શકાય. આ શરતોને અધીન A તથા Bના ગમે તેટલા નંગનું વેચાણ કરી શકાય. આ માહિતીને સુરેખ આયોજનના પ્રશ્ન તરીકે મહત્તમ નફો મેળવવા માટે ગાણિતીય સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

2. F_1 અને F_2 પ્રકારના ખોરાકમાંથી વિટામીન A તથા B મળે છે. એક એકમ ખોરાક F_1 ત્રણ એકમ વિટામીન A ધરાવે છે તથા ચાર એકમ વિટામીન B ધરાવે છે. એક એકમ ખોરાક F_2 છ એકમ વિટામીન A તથા ત્રણ એકમ વિટામીન B ધરાવે છે. એક એકમ ખોરાક F_1 તથા F_2 ની કિંમત અનુક્રમે ₹ 4 અને ₹ 5 છે. એક વ્યક્તિની દૈનિક જરૂરિયાત ઓછામાં ઓછા 80 એકમ વિટામીન A તથા 100 એકમ વિટામીન Bની છે. આપણે ધારી લઈશું કે ન્યૂનતમ જરૂરિયાત કરતા વધુ એકમ વિટામીન A અને B લેવાથી વ્યક્તિને નુકસાન થતું નથી. ખોરાક F_1 અને F_2 નું ઈષ્ટતમ મિશ્રણ એવી રીતે કરો કે જેથી ઓછામાં ઓછા ખર્ચમાં વ્યક્તિની વિટામીન A અને Bની ન્યૂનતમ દૈનિક જરૂરિયાત પૂરી કરી શકાય. ઉપરોક્ત માહિતીને સુરેખ આયોજનના પ્રશ્ન તરીકે ગાણિતીય સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

3. એક પેન્શન ભંડોળ સંચાલક A અને B કંપનીના શેરમાં રોકાણ કરવાનું વિચારે છે. નીચે મુજબની ધારણા રાખવામાં આવે છે :

   (1) A કંપનીના શેરમાં વાર્ષિક 12 ટકા ડિવિડન્ડ મળે અને B કંપનીના શેરમાં વાર્ષિક 4 ટકા ડિવિડન્ડ મળે.

   (2) A કંપનીના શેરમાં ₹ 1 ના રોકાણ પર વાર્ષિક 10 પૈસા તથા B કંપનીના શેરમાં વાર્ષિક 20 પૈસાનો બજારભાવમાં વધારો થાય.

   સંચાલક વધુમાં વધુ રોકાણ નીચે આપેલી શરતોને અધીન રહી કરે છે :

   (1) ડિવિડન્ડની વાર્ષિક આવક ₹ 600 થાય તથા

   (2) મૂળ રોકાણ પર વાર્ષિક ઓછામાં ઓછા ₹ 1000નો વધારો થાય.

   સંચાલકનો હેતુ સિદ્ધ થાય તે રીતે ઓછામાં ઓછું રોકાણ કરવું છે. ઉપરોક્ત માહિતીને સુરેખ આયોજનના પ્રશ્ન તરીકે તેને ગાણિતીય સ્વરૂપમાં દર્શાવો :

નીચેના સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નોને આલેખની રીતે ઉકેલો (4 થી 12) :

4. $x + 2y \le 40$, $3x + y \ge 30$, $4x + 3y \ge 60$ અને $x \ge 0$, $y \ge 0$ શરતોને અધીન $z = 20x + 10y$ ની મહત્તમ કિંમત શોધો.

5. $x + y \le 50$, $3x + y \le 90$ અને $x \ge 0$, $y \ge 0$ શરતોને અધીન $z = 4x + y$ ની મહત્તમ કિંમત શોધો.

6. $x + 2y \ge 10$, $3x + 4y \le 24$ અને $x \ge 0$, $y \ge 0$ શરતોને અધીન $z = 200x + 500y$ ની ન્યૂનતમ કિંમત શોધો.

7. $x + 3y \le 60$, $x + y \ge 10$, $x \ge y$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ શરતોને અધીન $z = 3x + 9y$ ની મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ કિંમત શોધો.

8. $x + y \ge 8$, $3x + 5y \le 15$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ શરતોને અધીન $z = 3x + 2y$ ની ન્યૂનતમ કિંમત શોધો.

9. $x + y \le 4$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ શરતોને અધીન $z = 3x + 4y$ ની મહત્તમ કિંમત શોધો.

10. $x + 2y \le 8$, $3x + 2y \le 12$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ શરતોને અધીન $z = 3x + 4y$ની મહત્તમ કિંમત શોધો.

11. $x \ge 3$, $x + y \ge 5$, $x + 2y \ge 6$, $y \ge 6$ શરતોને અધીન $z = -x + 2y$ની મહત્તમ કિંમત શોધો.

12. $x + 2y \le 120$, $x + y \ge 60$, $x - 2y \ge 0$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ શરતોને અધીન $z = 5x + 10y$ની ન્યૂનતમ કિંમત શોધો.

*

8.4 સુરેખ આયોજનના જુદા જુદા પ્રકારના પ્રશ્નો

આહાર સંબંધી સમસ્યાઓ : આ પ્રકારના પ્રશ્નમાં આપણે જુદા જુદા પ્રકારના ઘટકો ધરાવતો આહાર એવી રીતે બનાવવાનો હોય છે કે જેનો ખર્ચ લઘુત્તમ થાય અને જરૂરી દરેક પ્રકારના પોષક દ્રવ્યોનો સમાવેશ થાય.

ઉદાહરણ 7 : એક ગૃહિણી X અને Y બે પ્રકારનો ખોરાક એવી રીતે મિશ્ર કરવા માંગે છે કે જેથી એ મિશ્રણમાં વિટામીન Aના ઓછામાં ઓછા 10 એકમ હોય, વિટામીન Bના ઓછામાં ઓછા 12 એકમ હોય અને વિટામીન Cના ઓછામાં ઓછા 8 એકમ હોય. 1 કિલોગ્રામ ખોરાકમાં વિટામીનનું પ્રમાણ નીચે આપેલા કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે.

	વિટામીન A	વિટામીન B	વિટામીન C
આહાર X	1	2	3
આહાર Y	2	2	1

X પ્રકારના ખોરાકનો પ્રતિ કિગ્રા ભાવ ₹ 60 છે અને Y પ્રકારના ખોરાકનો ભાવ પ્રતિ કિગ્રા ₹ 100 છે. X અને Y પ્રકારનો ઉપર મુજબની શરતોને અધીન મિશ્રિત આહાર બનાવવા માટેનો લઘુતમ ખર્ચ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે x કિલોગ્રામ X પ્રકારનો ખોરાક અને y કિલોગ્રામ Y પ્રકારનો ખોરાક મિશ્ર કરી માંગેલો આહાર બનાવાય છે.

X પ્રકારના 1 કિલોગ્રામ ખોરાકમાં વિટામીન Aનું પ્રમાણ 1 એકમ અને Y પ્રકારના 1 કિલોગ્રામ ખોરાકમાં વિટામીન Aનું પ્રમાણ 2 એકમ હોવાથી x કિલોગ્રામ X પ્રકારના અને y કિલોગ્રામ Y પ્રકારના મિશ્ર ખોરાકમાં વિટામીન Aનું પ્રમાણ $x + 2y$ એકમ થાય. અહીં આપેલ છે કે આ મિશ્રણમાં વિટામીન Aનું પ્રમાણ ઓછામાં ઓછું 10 એકમ હોય.

$\therefore \quad x + 2y \ge 10$ **(i)**

આ જ રીતે, x કિલોગ્રામ X પ્રકારના અને y કિલોગ્રામ Y પ્રકારના મિશ્ર ખોરાકમાં વિટામીન Bનું પ્રમાણ $2x + 2y$ એકમ અને વિટામીન Cનું પ્રમાણ $3x + y$ એકમ થાય. વિટામીન B અને વિટામીન Cના લઘુતમ પ્રમાણ અનુક્રમે 12 અને 8 એકમ હોવાથી,

$\therefore \quad 2x + 2y \ge 12$ **(ii)**

અને $3x + y \ge 8$ **(iii)**

X અને Y પ્રકારના ખોરાકનો જથ્થો ઋણ ન હોઈ શકે તેથી,

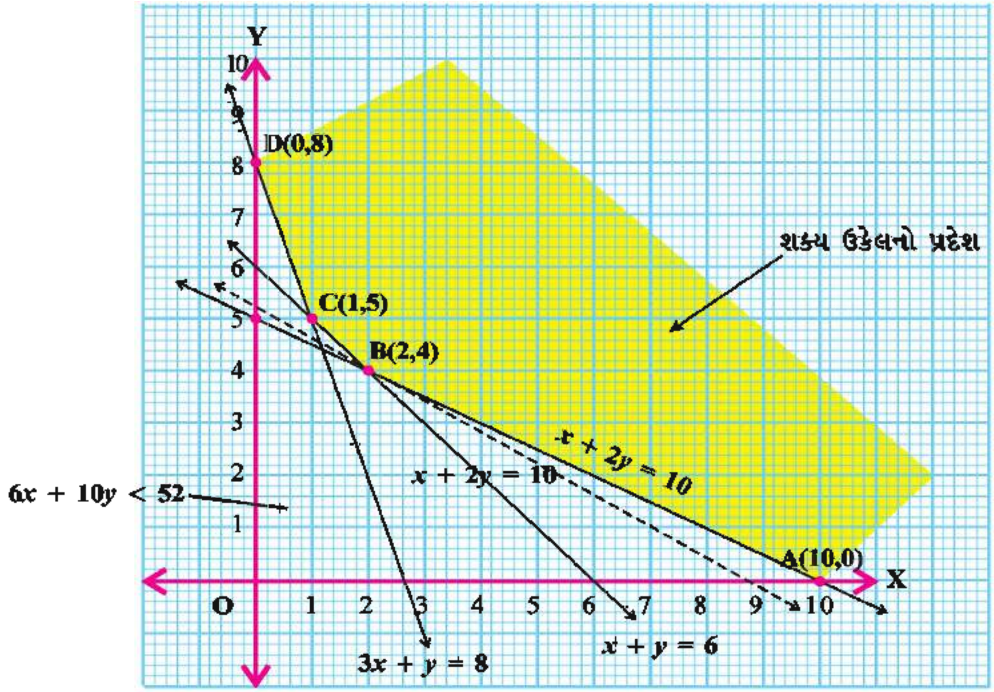
$\therefore \quad x \ge 0, y \ge 0$ **(iv)**

આપેલ છે કે X પ્રકારના ખોરાકનો પ્રતિ કિગ્રા ભાવ ₹ 60 અને Y પ્રકારના ખોરાકનો પ્રતિ કિગ્રા ₹ 100 હોવાથી, x કિલોગ્રામ X પ્રકારના અને y કિલોગ્રામ Y પ્રકારના મિશ્ર ખોરાકની કિંમત ₹ $(60x + 100y)$ થાય. આપેલ સુરેખ આયોજનનો પ્રશ્ન નીચે મુજબ થશે :

$x + 2y \ge 10$, $2x + 2y \ge 12$, $3x + y \ge 8$ અને $x \ge 0$, $y \ge 0$ શરતોને અધીન $z = 60x + 100y$ની ન્યૂનતમ કિંમત શોધો.

આપણે આ પ્રશ્નને આલેખની રીતે ઉકેલીશું.

આ સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નને ઉકેલવા માટે પ્રથમ રેખાઓ $x + 2y = 10$, $2x + 2y = 12$ એટલે કે $x + y = 6$ અને $3x + y = 8$ દોરો અને આપેલ અસમતાઓની મદદથી શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ નક્કી કરો જે આકૃતિ 8.7 દર્શાવ્યા મુજબ અસીમિત પ્રદેશ છે.



આકૃતિ 8.7

પીળા રંગનો પ્રદેશ ABCDના શિરોબિંદુઓ A(10, 0), B(2, 4), C(1, 5) અને D(0, 8) છે. આપેલ રેખાઓના સમીકરણો ઉકેલથી પણ આ બિંદુઓ મેળવી શકાય છે. નીચેના કોષ્ટકમાં આ બિંદુઓ આગળ હેતુલક્ષી વિધેયની કિંમત મેળવી છે.

શિરોબિંદુ	હેતુલક્ષી વિધેય $z = 60x + 100y$ ની કિંમત
A(10, 0)	600
B(2, 4)	520 ← ન્યૂનતમ
C(1, 5)	560
D(0, 8)	800

$x = 2$ અને $y = 4$ આગળ z ની ન્યૂનતમ કિંમત મળી શકે. શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ અસીમિત હોવાથી આપણે અસમતા $60x + 100y < 520$ એટલે કે, $3x + 5y < 26$ ને આલેખવી પડે અને ચકાસવું જોઈએ કે તેનાથી રચાતાં ખુલ્લાં અર્ધતલને શક્ય ઉકેલના પ્રદેશ સાથે કોઈ સામાન્ય બિંદુ મળે છે કે નહિ. આકૃતિ 8.7 પરથી આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે આવું સામાન્ય બિંદુ મળશે નહિ. તેથી, z ની ન્યૂનતમ કિંમત 520 થશે.

આમ, માંગેલો મિશ્ર ખોરાક (આહાર)ની ન્યૂનતમ કિંમત ₹ 520 થશે.

ઉત્પાદનને લગતી સમસ્યાઓ : આ પ્રકારના પ્રશ્નમાં આપણે કંપની દ્વારા જુદા જુદા પ્રકારની વસ્તુઓની સંખ્યાનું ઉત્પાદન અને વેચાણ અમુક નિયંત્રણોને અધીન મહત્તમ નફો મેળવવા માટે કરવાનું હોય છે. આ નિયંત્રણો આવાં હોઈ શકે, દરેક વસ્તુનું ઉત્પાદન કરવા ચોક્કસ માનવ-કલાકોની જરૂર, મશીન (યંત્ર)ના કલાકો, મજૂરી, ઉત્પાદિત વસ્તુઓને સંગ્રહ કરવાની જગ્યા વગેરે.

ઉદાહરણ 8 : એક નાની કંપની સોનાની ચેઇન અને વીંટીનું ઉત્પાદન કરે છે. એક દિવસમાં તે ચેઇન અને વીંટી મળીને વધુમાં વધુ 24 નંગ ઉત્પાદન કરી શકે છે. વીંટી બનાવવા માટે 1 કલાક અને ચેઇન બનાવવા માટે 30 મિનિટનો સમય લાગે છે. એક દિવસમાં વધુમાં વધુ 16 કલાકનું કામ થાય છે. એક વીંટીના વેચાણથી ₹ 300 અને એક ચેઈનના વેચાણથી ₹ 190નો નફો મળે છે. મહત્તમ નફો મેળવવા કંપનીએ એક દિવસમાં કેટલાં નંગ વીંટી અને કેટલાં નંગ ચેઈનનું ઉત્પાદન કરવું જોઈએ? આ પ્રશ્નને સુરેખ આયોજનના પ્રશ્ન તરીકે આલેખની રીતે ઉકેલો.

ઉકેલ : ધારો કે કંપની એક દિવસમાં x નંગ સોનાની વીંટી અને y નંગ ચેઈન બનાવે છે. આપેલ માહિતીને નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલી છે :

વસ્તુ	નંગ	ઉત્પાદન સમય	નફો (₹)
સોનાની વીંટી	x	x કલાક	$300x$
સોનાની ચેઈન	y	$\frac{1}{2}y$ કલાક	$190y$
કુલ	$x + y$	$\left(x+\frac{1}{2}y\right)$ કલાક	$300x + 190y$

આપણે $z = 300x + 190y$ ની મહત્તમ કિંમત નીચે આપેલી શરતોને અધીન શોધવી છે :

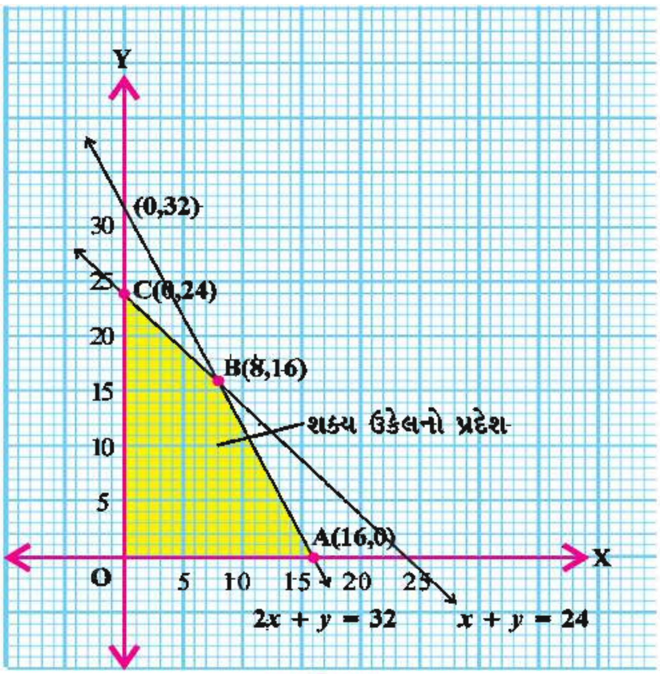
$x \geq 0,\ y \geq 0$ (i)

$x + \frac{1}{2}y \leq 16$

$\therefore\ 2x + y \leq 32$ (ii)

અને $x + y \leq 24$ (iii)

આપણે રેખાઓ $2x + y = 32$ અને $x + y = 24$ દોરી આપેલી અસમતાઓનો ઉપયોગ કરી ઉકેલનો પ્રશ્ન નક્કી કરીએ જે આકૃતિ 8.8માં દર્શાવેલ છે. શક્ય ઉકેલોનો પ્રદેશ OABCના શિરોબિંદુઓ O(0, 0), A(16, 0), B(8, 16), C(0, 24) છે. નીચેના કોષ્ટકમાં આ શિરોબિંદુ આગળ z ની કિંમત દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 8.8

શિરોબિંદુ	$z = 300x + 190y$ ની કિંમત (₹)
(0, 0)	0
(16, 0)	4800
(8, 16)	5440 ← મહત્તમ
(0, 24)	4560

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે $x = 8$ અને $y = 16$ માટે મહત્તમ નફો ₹ 5440 મળે છે.

આમ, મહત્તમ નફો મેળવવા એક દિવસમાં 8 નંગ વીંટી અને 16 નંગ ચેઈનનું ઉત્પાદન કરવું જોઈએ.

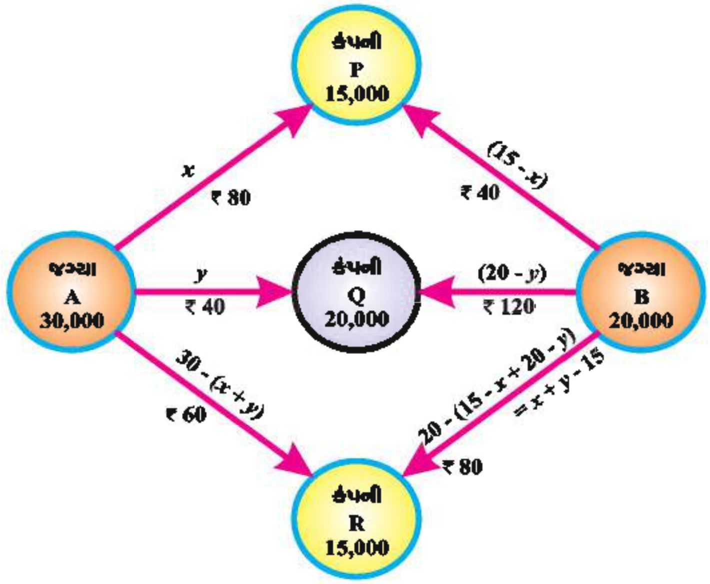
પરિવહનને લગતી સમસ્યાઓ : આ પ્રકારના પ્રશ્નમાં આપણે ઉત્પાદિત માલસામાનને જુદા જુદા સ્થળે આવેલા ઉત્પાદન-સ્થળે (કારખાના)થી જુદા જુદા સ્થળે આવેલા બજાર કે વખારમાં પહોંચાડવા માટેનો રસ્તો એવી રીતે પસંદ કરવો જોઈએ કે જેથી પરિવહન ખર્ચ ન્યૂનતમ થાય.

ઉદાહરણ 9 : એક ઈંટ ઉત્પાદકને ઉત્પાદિત ઈંટો મૂકવા માટે બે જગ્યા A અને B છે. જગ્યા A અને Bમાં તે અનુક્રમે 30,000 અને 20,000 નંગ ઈંટો મૂકી શકે છે. તેને બાંધકામ સંબંધી ત્રણ કંપની P, Q અને R ને અનુક્રમે 15,000, 20,000 અને 15,000 ઈંટો પૂરી પાડવાની છે. નીચે આપેલા કોષ્ટકમાં જુદી જુદી જગ્યાએથી જુદી જુદી બાંધકામ કંપનીઓને 1000 ઈંટો પૂરી પાડવાનો ખર્ચ દર્શાવેલ છે.

સુધી / માંથી	P	Q	R
A	₹ 80	₹ 40	₹ 60
B	₹ 40	₹ 120	₹ 80

ઈંટ ઉત્પાદક આ કંપનીઓને કેવી રીતે ઈંટો પહોંચાડશે કે જેથી તેના પરિવહનનો ખર્ચ ન્યૂનતમ થાય ?

ઉકેલ : આપેલ માહિતીને નીચેની આકૃતિ 8.9માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 8.9

ધારો કે જગ્યા A થી x હજાર ઈંટો કંપની P માં, y હજાર ઈંટો કંપની Q માં પહોંચાડવામાં આવે છે. જગ્યા A માં 30,000 ઈંટોનો સંગ્રહ કરેલ હોવાથી બાકીની ઈંટો $30 - (x + y)$ હજાર કંપની R માં પહોંચાડવામાં આવે છે. ઈંટોની સંખ્યા હંમેશાં અનૃણ હોવાથી,

$x \geq 0$, $y \geq 0$ અને $30 - (x + y) \geq 0$ એટલે કે $x + y \leq 30$ **(i)**

હવે, કંપની P ની જરૂરિયાત 15,000 ઈંટોની છે અને x હજાર ઈંટો જગ્યા A થી આવેલ છે તેથી બાકીની $(15 - x)$ હજાર ઈંટો જગ્યા B થી મંગાવવી પડે. કંપની Q ની જરૂરિયાત 20,000 ઈંટોની છે અને y હજાર ઈંટો જગ્યા Aથી આવેલ છે તેથી બાકીની $(20 - y)$ હજાર ઈંટો જગ્યા Bથી મંગાવવી પડે. હવે, જગ્યા B પર,

$20 - (15 - x + 20 - y) = x + y - 15$ હજાર ઈંટો બાકી રહે જેને કંપની Rમાં મોકલવાની રહેશે.

વળી, $15 - x \geq 0$, $20 - y \geq 0$ અને $x + y - 15 \geq 0$

$\therefore \quad x \leq 15$, $y \leq 20$ અને $x + y \geq 15$ **(ii)**

જગ્યા A થી કંપની P, Q અને R પર ઈંટો પહોંચાડવાનો પરિવહન ખર્ચ અનુક્રમે ₹ $80x$, ₹ $40y$ અને ₹ $60(30 - (x + y))$ થશે. તે જ રીતે, જગ્યા B થી કંપની P, Q અને R પર ઈંટો પહોંચાડવાનો પરિવહન ખર્ચ અનુક્રમે ₹ $40(15 - x)$, ₹ $120(20 - y)$ અને ₹ $80(x + y - 15)$ થશે. તેથી કુલ પરિવહન ખર્ચ નીચે પ્રમાણે મળે :

$$z = 80x + 40y + 60(30 - x - y) + 40(15 - x) + 120(20 - y) + 80(x + y - 15)$$

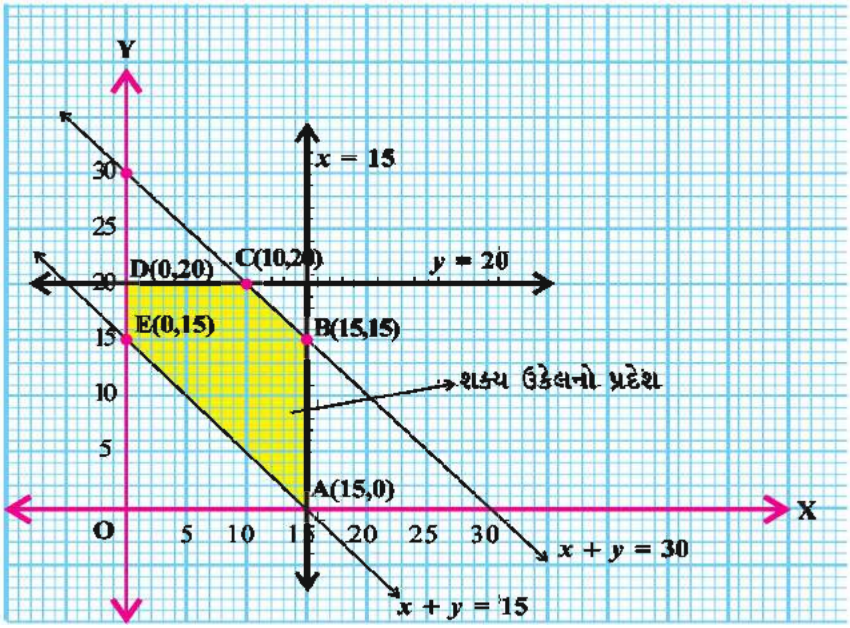
$$\therefore \quad z = 60x - 60y + 3600$$

આમ, ઉપરના સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નને ગાણિતીય રીતે નીચે મુજબ દર્શાવી શકાય :

$x + y \le 30$, $x \le 15$, $y \le 20$, $x + y \ge 15$ અને $x \ge 0$, $y \ge 0$ શરતોને અધીન $z = 60x - 60y + 3600$ની ન્યૂનતમ કિંમત શોધો.

અહીં, x અને y ની કિંમત હજારમાં છે.

આપણે આ પ્રશ્નને આલેખની રીતે ઉકેલીશું. રેખાઓ $x + y = 30$, $x = 15$, $y = 20$ અને $x + y = 15$ દોરી આપેલ અસમતાઓનો ઉપયોગ કરી શક્ય ઉકેલનો પ્રશ્ન નક્કી કરો, જે આકૃતિ 8.10માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે છે.



આકૃતિ 8.10

શક્ય ઉકેલના પ્રદેશ ABCDEના શિરોબિંદુઓ A(15, 0), B(15, 15), C(10, 20), D(0, 20), E(0, 15) છે.

આપણે આ શિરોબિંદુઓ આગળ z ની કિંમત મેળવીશું.

શિરોબિંદુઓ	$z = 60x - 60y + 3600$ ની કિંમત
(15, 0)	4500
(15, 15)	3600
(10, 20)	3000
(0, 20)	2400 ← ન્યૂનતમ
(0, 15)	2700

કોષ્ટક પરથી માલૂમ પડે છે કે $x = 0$ અને $y = 20$ આગળ z ની ન્યૂનતમ કિંમત 2400 થાય છે.

આમ, ઉત્પાદકે જગ્યા Aથી કંપની P, Q, Rને અનુક્રમે 0, 20,000 અને 10,000 ઈંટો પહોંચાડવી જોઈએ તથા જગ્યા B થી કંપની P, Q, R ને અનુક્રમે 15,000, 0 અને 5,000 ઈંટો પહોંચાડવી જોઈએ.

આ સંજોગોમાં પરિવહનનો ન્યૂનતમ ખર્ચ ₹ 2400 થશે.

અન્ય વિષયક સમસ્યાઓ : જાહેરાત અભિયાન ચલાવવા માટે કેટલા પ્રમાણમાં પ્રચાર માધ્યમનો ઉપયોગ કરવો તે સુરેખ આયોજનથી નક્કી કરી શકાય છે. ધારો કે પ્રચાર માધ્યમ રેડિયો, ટેલિવિઝન અને અખબાર છે. જાહેરખબરની કિંમત કયા માધ્યમમાં આપીએ છીએ તેના પર આધારિત છે. આપણે એ નક્કી કરવાનું હોય છે કે કેટલી જાહેરાત કયા માધ્યમમાં આપવી છે કે જેથી જાહેરાતનો ખર્ચ ઓછામાં ઓછો આવે અને વધુમાં વધુ વ્યક્તિઓમાં પ્રસાર થાય.

ઉદાહરણ 10 : એક જાહેરખબર આપતી સંસ્થા બે પ્રકારના દર્શકોમાં પહોંચવા માગે છે : એવા ગ્રાહકો કે જેમની વાર્ષિક આવક રૂપિયા એક લાખ કરતા વધુ હોય (લક્ષ્ય દર્શકો A) અને એવા ગ્રાહકો કે જેમની વાર્ષિક આવક રૂપિયા એક લાખ કરતા ઓછી હોય (લક્ષ્ય દર્શકો B). જાહેરાત માટેનું કુલ બજેટ ₹ 2,00,000 છે. ટેલિવિઝનની એક જાહેરખબરનો ભાવ ₹ 50,000 છે જ્યારે રેડિયો પરની એક જાહેરખબરનો ભાવ ₹ 20,000 છે. એ પ્રકારનો કરાર કરવામાં આવે છે કે ટેલિવિઝન પર ઓછામાં ઓછી ત્રણ અને રેડિયો પર વધુમાં વધુ 5 જાહેરખબર આપી શકાય. મોજણી કરવાથી એવું માલૂમ પડ્યું કે ટેલિવિઝન પરની એક જાહેરખબર A પ્રકારના 4,50,000 દર્શકો સુધી પહોંચે છે જ્યારે B પ્રકારના 50,000 દર્શકો સુધી પહોંચે છે. રેડિયો પરની એક જાહેરખબર A પ્રકારના 20,000 શ્રોતા સુધી પહોંચે છે જ્યારે B પ્રકારના 80,000 શ્રોતા સુધી પહોંચે છે. વધુમાં વધુ દર્શકો (શ્રોતા)ઓ સુધી પહોંચવા માટે ટેલિવિઝન પર કેટલી અને રેડિયો પર કેટલી જાહેરખબર આપવી જોઈએ ?

ઉકેલ : આપણે નીચે મુજબ નિર્ણાયક ચલરાશિઓ વ્યાખ્યાયિત કરીએ.

x એ ટેલિવિઝન પર પ્રસારિત થતી જાહેરખબરની સંખ્યા છે અને y એ રેડિયો પર પ્રસારિત થતી જાહેરખબરની સંખ્યા છે.

અહીં આપેલ છે કે ટેલિવિઝન પરની એક જાહેરાત A પ્રકારના 4,50,000 દર્શકો સુધી પહોંચે છે અને B પ્રકારના 50,000 દર્શકો સુધી પહોંચે છે. રેડિયો પરની એક જાહેરખબર A પ્રકારના 20,000 શ્રોતા સુધી પહોંચે છે અને B પ્રકારના 80,000 શ્રોતા સુધી પહોંચે છે.

આમ, આપણે $z = (4,50,000 + 50,000)x + (20,000 + 80,000)y$

$= 5,00,000x + 1,00,000y$ ની મહત્તમ કિંમત શોધવાની રહેશે. **(i)**

જાહેરખબર માટેનું કુલ બજેટ

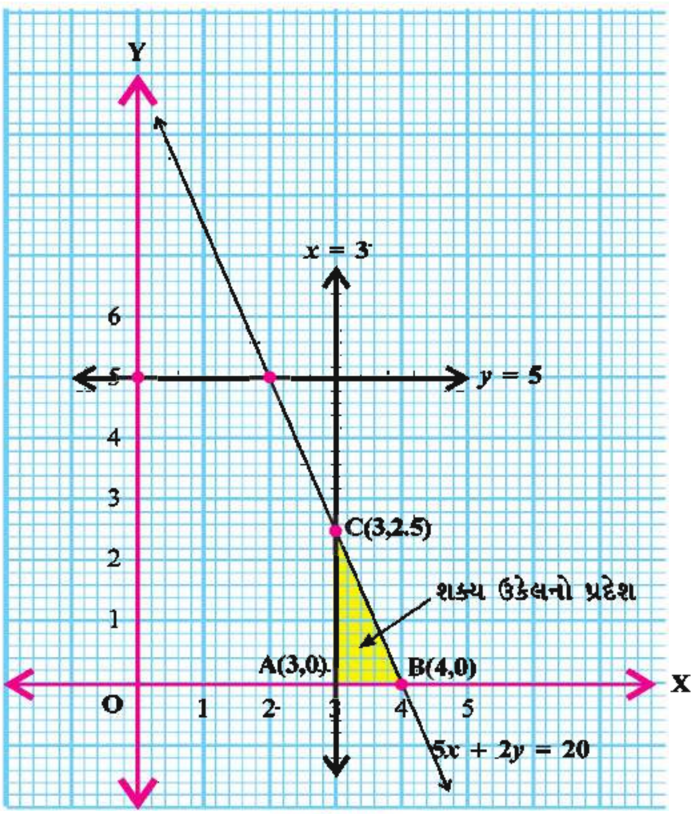
$50,000x + 20,000y \le 2,00,000$

એટલે કે, $5x + 2y \le 20$ **(ii)**

વળી, જાહેરખબરની સંખ્યા પર પણ મર્યાદા છે. ટેલિવિઝન પર ઓછામાં ઓછી 3 અને રેડિયો પર વધુમાં વધુ 5 જાહેરખબર આપી શકાય.

$\therefore$ $x \ge 3$ અને $y \le 5$ **(iii)**

વળી, જાહેરખબરની સંખ્યા ઋણ ન હોઈ શકે.



આકૃતિ 8.11

$\therefore \quad x \geq 0$ અને $y \leq 0$ **(iv)**

$5x + 2y \leq 20$, $x \geq 3$, $y \leq 5$ અને $x, y \geq 0$ શરતોને અધીન $z = 5,00,000x + 1,00,000y$નું મહત્તમ મૂલ્ય શોધીએ.

આપણે આ પ્રશ્નને આલેખની રીતે ઉકેલીએ. રેખાઓ $5x + 2y = 20$, $x = 3$, $y = 5$ દોરી આપેલ અસમતાઓનો ઉપયોગ કરી શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ નક્કી કરો, જે આકૃતિ 8.11માં દર્શાવેલ છે.

શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ ΔABCના શિરોબિંદુઓ A(3, 0), B(4, 0) અને C(3, 2.5) છે. આપણે આ શિરોબિંદુઓ આગળ z ની કિંમત મેળવીશું.

શિરોબિંદુઓ	$z = 5,00,000x + 1,00,000y$ ની કિંમત
(3, 0)	15,00,000
(4, 0)	20,00,000 ← મહત્તમ
$\left(3, \frac{5}{2}\right)$	17,50,000

આગળ z નું મહત્તમ મૂલ્ય 20,00,000 મળે છે. આમ, જાહેરખબર આપતી સંસ્થાએ જો વધુમાં વધુ દર્શકોમાં જાહેરખબર પ્રસરાવવી હોય તો ટેલિવિઝન પર 4 જાહેરખબર આપવી જોઈએ અને રેડિયો પર જાહેરખબર આપવી જોઈએ નહિ.

સ્વાધ્યાય 8

આલેખની રીતે નીચેના સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નો ઉકેલો : (1 થી 6)

1. $x + 2y \leq 10$, $x + y \leq 6$, $x - y \leq 2$, $x - 2y \leq 1$ અને $x \geq 0$, $y \geq 0$ શરતોને અધીન $z = 2x + y$ની મહત્તમ કિંમત શોધો.
2. $-x + 3y \leq 10$, $x + y \leq 6$, $x - y \leq 2$ અને $x \geq 0$, $y \geq 0$ શરતોને અધીન $z = -x + 2y$ની ન્યૂનતમ કિંમત શોધો.
3. $5x + y \geq 10$, $x + y \geq 6$, $x + 4y \geq 12$ અને $x \geq 0$, $y \geq 0$ શરતોને અધીન $z = 3x + 2y$ની ન્યૂનતમ કિંમત શોધો.
4. $x + y \geq 3$, $x + y \leq 4$, $0 \leq x \leq \frac{5}{2}$, $0 \leq y \leq \frac{3}{2}$ શરતોને અધીન $z = 7x + 3y$ની મહત્તમ કિંમત શોધો.
5. $x + 2y \leq 40$, $3x + y \geq 30$, $4x + 3y \geq 60$ અને $x \geq 0$, $y \geq 0$ શરતોને અધીન $z = 20x + 10y$ની ન્યૂનતમ કિંમત શોધો.
6. $x + y \leq 1$, $-3x + y \geq 3$ અને $x \geq 0$, $y \geq 0$ શરતોને અધીન $z = x + y$ની મહત્તમ કિંમત શોધો.
7. એક કારખાનાનો માલિક A અને B બે પ્રકારના યંત્રોની ખરીદી કરે છે. આ યંત્રોની જરૂરિયાત અને મર્યાદા નીચે મુજબ છે :

યંત્ર	જરૂરી જગ્યા	યંત્ર પર કામ કરવા જરૂરી કારીગરની સંખ્યા	દૈનિક ઉત્પાદન (એકમ)
A	1000 મી^{2}	12 વ્યક્તિઓ	60
B	1200 મી^{2}	8 વ્યક્તિઓ	40

કારખાનાના માલિક પાસે કુલ 9000 m^2 જગ્યા છે અને 72 યોગ્ય તાલીમ પામેલા કારીગરો છે. જે બંને યંત્રો પર કામ કરી શકે છે. કારખાનાના માલિકે દરેક પ્રકારનાં કુલ કેટલા યંત્રો ખરીદવાં જોઈએ કે જેથી દૈનિક ઉત્પાદન મહત્તમ થાય. આ પ્રશ્નને સુરેખ આયોજનના પ્રશ્ન તરીકે ગાણિતીય સ્વરૂપમાં દર્શાવો અને આલેખની રીતે ઉકેલો.

8. એક બીમાર વ્યક્તિનાં સમતોલ આહારમાં ઓછામાં ઓછા 4000 એકમ વિટામીન, 50 એકમ ખનીજતત્ત્વો અને 1400 એકમ કેલરી જરૂરી છે. A અને B બે પ્રકારનો ખોરાક ઉપલબ્ધ છે. A પ્રકારના એક એકમ ખોરાકની કિંમત ₹ 5 છે અને B પ્રકારના એક એકમ ખોરાકની કિંમત ₹ 4 છે. A પ્રકારનો એક એકમ ખોરાક 200 એકમ વિટામીન, 1 એકમ ખનીજતત્ત્વ અને 40 એકમ કેલરી ધરાવે છે જ્યારે B પ્રકારનો એક એકમ ખોરાક 100 એકમ વિટામીન, 2 એકમ ખનીજતત્ત્વો અને 40 એકમ કેલરી ધરાવે છે. ઓછામાં ઓછા ખર્ચમાં બીમાર વ્યક્તિનો જરૂરી સમતોલ આહાર બનાવવા માટે A અને B બંને પ્રકારના કેટલા એકમ ખોરાકનો ઉપયોગ કરવો જોઈએ ? આ પ્રશ્નને સુરેખ આયોજનના પ્રશ્ન તરીકે ગાણિતીય સ્વરૂપમાં દર્શાવો અને આલેખની રીતે ઉકેલો.

9. એક દુકાનદાર 5 લિટર તેલના ડબ્બા અને 1 કિગ્રા ઘીના ડબ્બા ખરીદવા ઇચ્છે છે. તેની પાસે રોકાણ કરવા માટે ₹ 5760 છે અને 20 ડબ્બા સંગ્રહી શકાય તેટલી જગ્યા છે. 5 લિટર તેલના એક ડબ્બાનો ભાવ ₹ 360 અને 1 ઘીના ડબ્બાનો ભાવ ₹ 240 છે. એક ડબ્બા તેલમાંથી તેને ₹ 22 નફો મળે છે જ્યારે એક ડબ્બા ઘીના વેચાણથી તેને ₹ 18 નફો મળે છે. ધારો કે દુકાનદાર જે વસ્તુ ખરીદે છે તે બધાનું વેચાણ થાય છે. દુકાનદાર તેની પાસે રહેલ રકમનું કેવી રીતે રોકાણ કરે કે જેથી તેને મહત્તમ નફો થાય ? આ પ્રશ્નને સુરેખ આયોજનના પ્રશ્ન તરીકે ગાણિતીય સ્વરૂપમાં દર્શાવો અને આલેખની રીતે ઉકેલો.

10. એક પ્રકારની કેક બનાવવા માટે 300 ગ્રામ લોટ અને 15 ગ્રામ મલાઈની જરૂર પડે છે જ્યારે બીજા પ્રકારની કેક બનાવવા માટે 150 ગ્રામ લોટ અને 30 ગ્રામ મલાઈની જરૂર પડે છે. 7.5 કિલોગ્રામ લોટ અને 600 ગ્રામ મલાઈથી વધુમાં વધુ કેટલી કેક બનાવી શકાય ? અહીં આપણે ધારી લઈશું કે કેક બનાવવા માટેના બીજા જરૂરી પદાર્થો ઉપલબ્ધ છે જ. આ પ્રશ્નને સુરેખ આયોજનના પ્રશ્ન તરીકે ગાણિતીય સ્વરૂપમાં દર્શાવો અને આલેખની રીતે ઉકેલો.

11. ઈંધણ તેલ ઉત્પાદક એક કંપનીને જુદી જુદી ક્ષમતા ધરાવતી A અને B બે પ્રકારની જગ્યા છે. A અને B જગ્યાએ અનુક્રમે 7000 લિટર અને 4000 લિટર ઈંધણનો સંગ્રહ કરી શકાય છે. કંપની ત્રણ પેટ્રોલ પંપ D, E અને F અનુક્રમે 4500 લિટર, 3000 લિટર અને 3500 લિટર ઈંધણની જરૂરિયાત પૂરી પાડે છે. ઈંધણની સંગ્રહિત જગ્યા અને પેટ્રોલ પંપ વચ્ચેનું અંતર (કિમી) નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે.

ક્યાં / ક્યાંથી	A	B
D	7	3
E	6	4
F	3	2

ધારો કે 10 લિટર ઈંધણનો પરિવહન ખર્ચ એક કિમી દીઠ ₹ 1 છે. સંગ્રહિત જગ્યાએથી પેટ્રોલ પંપ પર ઈંધણ કેવી રીતે મોકલવું જોઈએ કે જેથી પરિવહન ખર્ચ ન્યૂનતમ આવે ? ન્યૂનતમ પરિવહન ખર્ચ શોધો.

12. એક વિમાન વધુમાં વધુ 200 મુસાફરોને લઈ જઈ શકે છે. એક ઉચ્ચ વર્ગની ટિકિટમાંથી વિમાની કંપનીને ₹ 1000નો નફો થાય છે તેમજ એક સામાન્ય વર્ગની ટિકિટમાંથી કંપનીને ₹ 600 નફો થાય છે. વિમાની કંપની ઓછામાં ઓછી 20 બેઠકો ઉચ્ચ વર્ગ માટે અનામત રાખે છે. આમ છતાં ઉચ્ચવર્ગના મુસાફરો કરતાં સામાન્ય વર્ગમાં ઓછામાં ઓછા 4 ગણા મુસાફરો મુસાફરી કરતાં હોય છે. વિમાની કંપનીએ દરેક વર્ગની કેટલી ટિકિટોનું વેચાણ કરવું જોઈએ કે જેથી મહત્તમ નફો થાય ? મહત્તમ નફો કેટલો થશે ?

13. એક ઉત્પાદક એક જ વસ્તુના બે જુદા જુદા મોડલ X અને Y બનાવે છે. મોડલ Xના વેચાણથી ₹ 50 નો નફો થાય છે જ્યારે મોડલ Yના વેચાણથી ₹ 30નો નફો થાય છે. ઉત્પાદન માટે કાચો માલ r_1 અને r_2 ની જરૂરિયાત પડે છે. દૈનિક ઓછામાં ઓછા 18 કિગ્રા r_1 અને 12 કિગ્રા r_2 નો વપરાશ થાય છે. વળી, વધુમાં વધુ 34 કલાક માનવ-કલાકોનો ઉપયોગ થાય છે. મોડલ X બનાવવા માટે 2 કિગ્રા r_1 અને 1 કિગ્રા r_2 વપરાય છે. જ્યારે મોડલ Y બનાવવા માટે 1 કિગ્રા r_1 અને 1 કિગ્રા r_2 વપરાય છે. મોડલ X બનાવવા માટે 3 કલાકનો સમય લાગે છે જ્યારે મોડલ Y બનાવવા

માટે 2 કલાકનો સમય લાગે છે. મહત્તમ નફો મેળવવા માટે કેટલા નંગ X અને Y પ્રકારના મોડેલનું ઉત્પાદન કરવું જોઈએ.

14. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :

વિભાગ A : (1 ગુણ)

(1) સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નમાં આલેખ હેતુલક્ષી વિધેય... ☐

(a) અચળ હોય (b) નું ઈષ્ટતમ મૂલ્ય શોધવાનું હોય

(c) અસમતા હોય (d) દ્વિઘાત સમીકરણ હોય

(2) ધારો કે x અને y એ સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નનો ઈષ્ટતમ ઉકેલ હોય, તો ☐

(a) $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$, $\lambda \in R$ પણ ઈષ્ટતમ ઉકેલ હોય

(b) $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$, $0 \le \lambda \le 1$ પણ ઈષ્ટતમ ઉકેલ હોય

(c) $z = \lambda x + (1 + \lambda)y$, $0 \le \lambda \le 1$ પણ ઈષ્ટતમ ઉકેલ હોય

(d) $z = \lambda x + (1 + \lambda)y$, $\lambda \in R$ પણ ઈષ્ટતમ ઉકેલ હોય

(3) હેતુલક્ષી વિધેયનું ઈષ્ટતમ મૂલ્ય કયાં બિંદુએ પ્રાપ્ત થાય છે ? ☐

(a) અસમતા સમીકરણના અક્ષો સાથેના છેદબિંદુએ

(b) અસમતા સમીકરણના ફક્ત X-અક્ષ સાથેના છેદબિંદુએ

(c) શક્ય ઉકેલ પ્રદેશના શિરોબિંદુ આગળ

(d) ઊગમબિંદુએ

(4) કોઈક મર્યાદાઓની અસમતા સંહતિથી રચાતા શક્ય ઉકેલના પ્રદેશના શિરોબિંદુઓ (0, 10), (5, 5), (15, 15), (0, 20) છે. ધારો કે $z = px + qy$ જ્યાં $p, q > 0$. જો z ની મહત્તમ કિંમત શિરોબિંદુ (15, 15) અને (0, 20) બંને આગળ મળે તો p તથા q વચ્ચેનો સંબંધ ...... ☐

(a) $p = q$ (b) $p = 2q$ (c) $q = 2p$ (d) $q = 3p$

(5) નીચે આપેલામાંથી કયું વિધાન સત્ય છે ? ☐

(a) કોઈ પણ સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નને ઓછામાં ઓછો એક ઈષ્ટતમ ઉકેલ હોય જ

(b) દરેક સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નને અનન્ય ઈષ્ટતમ ઉકેલ હોય

(c) જો કોઈ પણ સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નને બે બિંદુઓએ ઈષ્ટતમ ઉકેલ મળે તો તેને અનંત બિંદુઓએ ઈષ્ટતમ ઉકેલ મળે.

(d) જો શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ અસીમિત હોય તો સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નને ઈષ્ટતમ ઉકેલ ન જ મળે.

(6) $x \ge 6$, $y \ge 2$, $2x + y \ge 10$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ શરતોને અધીન $z = 6x + 10y$ ની ન્યૂનતમ કિંમત શોધો. ઉપરના સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નમાં કઈ મર્યાદા બિનજરૂરી છે ? ☐

(a) $x \ge 6$, $y \ge 2$ (b) $2x + y \ge 10$, $x \ge 0$, $y \ge 0$

(c) $x \ge 6$ (d) $x \ge 6$, $y \ge 0$

(7) સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નનો શક્ય ઉકેલ ☐

(a) બધી જ મર્યાદાઓનું સમાધાન કરે જ.

(b) અમુક જ મર્યાદાઓનું સમાધાન કરે.

(c) હંમેશાં શક્ય ઉકેલના પ્રદેશનું શિરોબિંદુ હોય જ.

(d) હંમેશાં હેતુલક્ષી વિધેયનું ઈષ્ટતમપણાનું મૂલ્ય હોય જ.

વિભાગ B : (2 ગુણ)

(8) $3x + 6y \le 6$, $4x + 8y \ge 16$ અને $x \ge 0$, $y \ge 0$ શરતોને અધીન $z = x + 4y$ની મહત્તમ કિંમત... ☐

(a) 4 (b) 8

(c) શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ અસીમિત છે. (d) શક્ય ઉકેલનાં પ્રદેશનું અસ્તિત્વ નથી.

(9) સીમિત શક્ય ઉકેલના પ્રદેશના શિરોબિંદુઓ A(3, 3), B(20, 3), C(20, 10), D(18, 12) અને E(12, 12) છે. હેતુલક્ષી વિધેય $z = 2x + 3y$ની મહત્તમ કિંમત... ☐

(a) 72 (b) 80 (c) 82 (d) 70

(10) સીમિત શક્ય ઉકેલના પ્રદેશના શિરોબિંદુઓ A(3, 3), B(20, 3), C(20, 10), D(18, 12) અને E(12, 12) છે. હેતુલક્ષી વિધેય $z = 2x + 3y$ની ન્યૂનતમ કિંમત... ☐

(a) 49 (b) 15 (c) 10 (d) 05

વિભાગ C (3 ગુણ)

(11) $-x + y \le 1$, $2x + y \le 2$ અને $x \ge 0$, $y \ge 0$ શરતોને અધીન $z = 2x + 6y$ની મહત્તમ કિંમત ...... છે. ☐

(a) $\frac{4}{3}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{26}{3}$ (d) શક્ય ઉકેલના પ્રદેશનું અસ્તિત્વ નથી.

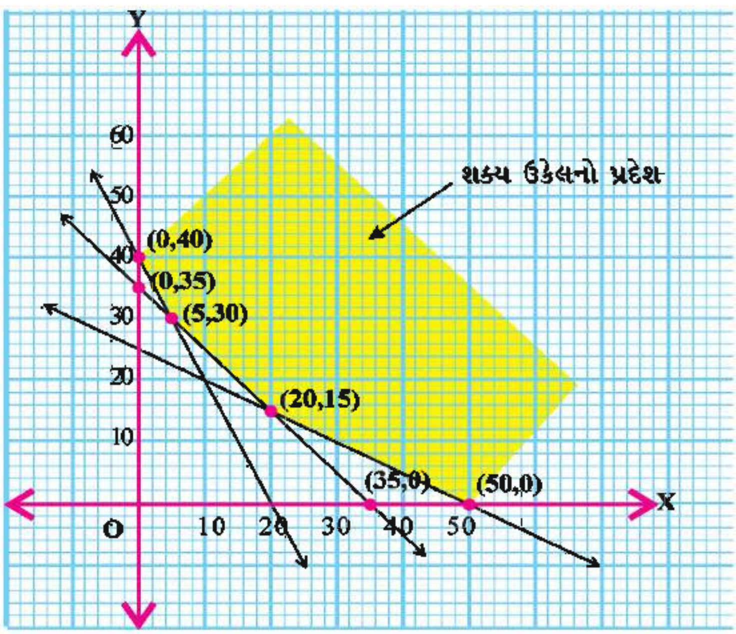
(12) $0 \le x \le 4$, $1 \le y \le 6$, $x + y \le 5$ શરતોને અધીન $z = -3x + 2y$ની ન્યૂનતમ કિંમત ...... છે. ☐

(a) -10 (b) 0 (c) 2 (d) 10

વિભાગ D : (4 ગુણ)

(13) નીચે દર્શાવેલ આલેખ શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ દર્શાવે છે. હેતુલક્ષી વિધેય $z = 5x + 4y$ની ન્યૂનતમ કિંમત ...... છે. ☐

(a) 150 (b) 145 (c) 160 (d) 250



આકૃતિ 8.12

(14) જો સીમિત શક્ય ઉકેલના પ્રદેશના શિરોબિંદુઓના યામ (0, 4), (6, 0), (12, 0), (12, 16) અને (0, 10) હોય તો હેતુલક્ષી વિધેય $z = 8x + 12y$ માટે...

(i) z ની ન્યૂનતમ કિંમત કયા શિરોબિંદુએ મળે છે ?

(ii) z ની મહત્તમ કિંમત કયા શિરોબિંદુએ મળે છે ?

(iii) z ની મહત્તમ કિંમત ...... છે.

(iv) z ની ન્યૂનતમ કિંમત ...... છે.

(a) (i) (6, 0) (ii) (12, 0) (iii) 288 (iv) 48

(b) (i) (0, 4) (ii) (12, 16) (iii) 288 (iv) 48

(c) (i) (0, 4) (ii) (12, 16) (iii) 288 (iv) 96

(c) (i) (6, 0) (ii) (12, 0) (iii) 288 (iv) 96

*

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચે મુજબના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નનું ગાણિતીય સ્વરૂપ
2. નિર્ણાયક ચલ રાશિઓ, હેતુલક્ષી વિધેય, મર્યાદાઓ (પ્રતિબંધો)ની સમજ
3. સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નના ઉકેલ માટેની આલેખની રીત
4. શક્ય ઉકેલ, અશક્ય ઉકેલ, ઈષ્ટતમ ઉકેલ, શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ, અશક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ વગેરેની સમજ

●

Fields of Indian mathematics

Some of the areas of mathematics studied in ancient and medieval India include the following :

Arithmetic : Decimal system, Negative numbers (see Brahmagupta), Zero (see Hindu numeral system), Binary numeral system, the modern positional notation numeral system, Floating point numbers (see Kerala school of astronomy and mathematics), Number theory, Infinity (see Yajur Veda), Transfinite numbers

Geometry : Square roots (see Bakhshali approximation), Cube roots (see Mahavira), Pythagorean triples (see Sulba Sutras; Baudhayana and Apastamba) statement of the Pythagorean theorem without proof), Transformation (see Panini), Pascal's triangle (see Pingala)

Algebra : Quadratic equations (see Sulba Sutras, Aryabhata, and Brahmagupta), Cubic equations and Quartic equations (biquadratic equations) (see Mahavira and Bhaskara II)

Mathematical logic : Formal grammars, formal language theory, the Panini–Backus form (see Panini), Recursion (see Panini)

General mathematics : Fibonacci numbers (see Pingala), Earliest forms of Morse code (see Pingala), infinite series, Logarithms, indices (see Jain mathematics), Algorithms, Algorism (see Aryabhata and Brahmagupta)

Trigonometry : Trigonometric functions (see Surya Siddhanta and Aryabhata), Trigonometric series (see Madhava and Kerala school)

જવાબો

(જે દાખલામાં ગણતરી કરવાની હોય તેના જ જવાબો આપ્યા છે.)

સ્વાધ્યાય 1.1

1. (1) સ્વવાચક નથી, સંમિત નથી, પરંપરિત નથી. (2) સ્વવાચક છે, સંમિત નથી, પરંપરિત છે.
   (3) સ્વવાચક છે, સંમિત નથી, પરંપરિત છે. (4) સ્વવાચક, સંમિત, પરંપરિત છે.
   (5) સ્વવાચક નથી, સંમિત નથી, પરંપરિત નથી.
2. સામ્ય વર્ગો : $A_1 = \{...., 1, 7, 13, 19,....\}$
   $A_2 = \{...., 2, 8, 14, 20,....\}$
   $A_3 = \{...., 3, 9, 15, 21,....\}$
   $A_4 = \{...., 4, 10, 16, 22,....\}$
   $A_5 = \{...., 5, 11, 17, 23,....\}$
   $A_6 = \{...., 6, 12, 18, 24,....\}$
3. સ્વવાચક, વિસંમિત, પરંપરિત છે. 4. (1) $\{1\}, \{2\}, \{3\},....$, (2) $\{0\}, \{1, -1\}, \{2, -2\},...$
5. $\{(1, 2)\}$ 6. X-અક્ષ, Y-અક્ષ અને તેમને સમાંતર રેખાઓનો ગણ

સ્વાધ્યાય 1.2

1. f એક-એક, વ્યાપ્ત છે.
2. f એક-એક અને વ્યાપ્ત છે.
3. f એક-એક નથી, વ્યાપ્ત નથી.
4. f એક-એક નથી, વ્યાપ્ત નથી.
5. f એક-એક નથી, વ્યાપ્ત છે.
6. f એક-એક અને વ્યાપ્ત છે.
7. f એક-એક નથી, વ્યાપ્ત છે.
8. f એક-એક અને વ્યાપ્ત છે.
9. f એક-એક છે, વ્યાપ્ત નથી.
10. f એક-એક છે, વ્યાપ્ત છે.
11. f એક-એક નથી, વ્યાપ્ત નથી.
12. $n!$ એક-એક વિધેયો
13. A_1 પર વ્યાપ્ત વિધેયોની સંખ્યા 1
    A_2 પર વ્યાપ્ત વિધેયોની સંખ્યા 2
    A_3 પર વ્યાપ્ત વિધેયોની સંખ્યા 6, વ્યાપક રીતે A_n પર વ્યાપ્ત વિધેયોની સંખ્યા $n!$

સ્વાધ્યાય 1.3

2. (1) $(gof)(x) = x^2$, $(fog)(x) = x^2$ (2) $(gof)(x) = x$, $(fog)(x) = x$
3. $(fof)(x) = x$ 4. $(fof)(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 5x + 4$
5. $(fof)(x) = x$ 6. $(fog)(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 1 \\ 0, & x \in [0, 1) \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ $(gof)(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0, gof = f \\ -1, & x < 0 \end{cases}$
7. $(fog)(n) = \begin{cases} 2n + 2, & n \text{ યુગ્મ} \\ \frac{n+3}{2}, & n \text{ અયુગ્મ}, n = 4k + 1, k \in Z \\ n - 2, & n \text{ અયુગ્મ}, n = 4k + 3, k \in Z \end{cases}$ $(gof)(n) = \begin{cases} 2n + 4, & n \text{ યુગ્મ} \\ n - 1, & n \text{ અયુગ્મ} \end{cases}$

સ્વાધ્યાય 1.4

1. $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$ 2. $f^{-1}(x) = x + 7$ 3. $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$ 4. $f^{-1}(n) = \frac{n}{2}$

5. $f^{-1}((n, 0)) = 2n$, $f^{-1}((n, 1)) = 2n + 1$ 6. f^{-1} શક્ય નથી.

9. (1) f^{-1} ના મળે. (2) f^{-1} ના મળે. (3) f^{-1} ના મળે.
(4) f^{-1} ના મળે. (5) $f^{-1}(z) = \overline{z}$ (6) f^{-1} ના મળે.
(7) $f^{-1}((n, m)) = (m, n)$, $f^{-1} = f$

સ્વાધ્યાય 1

4. S સ્વવાચક નથી, સંમિત નથી, પરંપરિત છે.

8. (1) એક-એક નથી, વ્યાપ્ત નથી. (2) એક-એક નથી, વ્યાપ્ત છે.
(3) એક-એક નથી, વ્યાપ્ત નથી. (4) એક-એક નથી, વ્યાપ્ત છે.
(5) એક-એક નથી, વ્યાપ્ત છે. (6) એક-એક છે, વ્યાપ્ત નથી.
(7) એક-એક છે, વ્યાપ્ત છે. (8) એક-એક છે, વ્યાપ્ત નથી.
(9) એક-એક નથી, વ્યાપ્ત નથી. (10) એક-એક છે, વ્યાપ્ત છે.
(11)એક-એક નથી, વ્યાપ્ત નથી.

10. $(gof)(n) = n$, જો $5 \mid n$ તો $(fog)(n) = n$. અન્યથા $(fog)(n) = 0$

14. fog ના મળે. $gof(x) = x - 1$

16. f એક-એક છે, વ્યાપ્ત છે, $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\log_{10}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ 17. f^{-1} ના મળે. f વ્યાપ્ત નથી.

18. $a * b = a + b + ab$ તો $*$ સમક્રમી છે અને જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે. જો $a * b = a - b + ab$ તો $*$ સમક્રમી નથી અને જૂથના નિયમનું પાલન ન કરે.

19. (1) જૂથનો નિયમ નથી, ક્રમનો નિયમ નથી. (2) જૂથનો નિયમ છે, ક્રમનો નિયમ છે.
(3) જૂથનો નિયમ નથી, ક્રમનો નિયમ નથી. (4) જૂથનો નિયમ નથી, ક્રમનો નિયમ નથી.
(5) જૂથનો નિયમ છે, ક્રમનો નિયમ છે. (6) ક્રમનો નિયમ નથી, જૂથનો નિયમ નથી.
(7) ક્રમનો નિયમ છે, જૂથનો નિયમ નથી. (8) ક્રમનો નિયમ નથી, જૂથનો નિયમ નથી.
(9) ક્રમનો નિયમ છે, જૂથનો નિયમ છે. (10) ક્રમનો નિયમ નથી, જૂથનો નિયમ નથી.

20. (1) $e = 0, a^{-1} = -\frac{a}{1+a}$ (2) $e = 2, a^{-1} = \frac{4}{a}$ (3) $e = 2, a^{-1} = 4 - a$ (4) $e = 0, a^{-1} = \frac{a}{a-1}$
(5) e ના મળે (6) e ના મળે (7) e ના મળે. (8) e ના મળે. (9) X એકમ ઘટક છે. $X^{-1} = X$
(10) $\emptyset$ એકમ ઘટક છે. $\emptyset^{-1} = \emptyset$

21. વિભાગ A : (1) d (2) b (3) b (4) a (5) a (6) c (7) b (8) a (9) b (10) a
(11) b (12) c (13) c (14) a (15) a
વિભાગ B : (16) a (17) d (18) a (19) a (20) b (21) b (22) d (23) a (24) b
(25) a (26) b (27) a
વિભાગ C : (28) c (29) b (30) b (31) c (32) b (33) a (34) a (35) a (36) d
(37) d (38) c (39) d

સ્વાધ્યાય 2.1

1. (1) $\frac{\pi}{6}$ (2) $-\frac{\pi}{6}$ (3) $\frac{2\pi}{3}$ (4) $-\frac{\pi}{3}$ (5) $\frac{\pi}{6}$ (6) $-\frac{\pi}{4}$ 2. (1) $\frac{5\pi}{14}$ (2) $\frac{3\pi}{10}$ (3) $\frac{\pi}{4}$ (4) $\frac{3\pi}{8}$

3. (1) $\frac{20}{29}$ (2) $\frac{1}{5}$ (3) $\frac{24}{25}$ (4) $\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$ (5) -1 4. $\frac{\pi}{4} - x$

સ્વાધ્યાય 2.2

1. (1) 0 (2) $\frac{7\pi}{6}$ (3) $\frac{5\pi}{12}$ (4) 7π (5) 2 (6) 1 (7) $\frac{5\pi}{6}$

સ્વાધ્યાય 2

3. (1) $\left\{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ (2) $\left\{\frac{1}{6}\right\}$ (3) $\left\{k\pi+\frac{\pi}{4} \mid k \in Z\right\}$ (4) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ (5) $\{13\}$ (6) $\left\{\frac{1}{4}\right\}$ (7) $\{4\}$

4. **વિભાગ A :** (1) a (2) b (3) a (4) b (5) d (6) d (7) b (8) b (9) a (10) c
(11) a (12) c (13) d (14) b (15) d

વિભાગ B : (16) c (17) b (18) d (19) c (20) b (21) d (22) d (23) b (24) a
(25) a (26) c (27) d (28) a (29) d (30) b

વિભાગ C : (31) b (32) a (33) a (34) d (35) d (36) d (37) b (38) b (39) a
(40) c (41) c (42) c

વિભાગ D : (43) d (44) c (45) b (46) b (47) b (48) b (49) b (50) b (51) b

સ્વાધ્યાય 3.1

1. (1) 43 (2) 1 (3) 3 **2.** (1) 2 (2) 6, −2 **3.** (1) 0 (2) 131

સ્વાધ્યાય 3.2

3. 4, $\frac{-23}{21}$ **5.** $\frac{7\pi}{24}, \frac{11\pi}{24}$ **7.** 4

સ્વાધ્યાય 3.3

1. (1) $\{(0, 0), (7, 7)\}$ (2) $\left\{\left(\frac{-39}{7}, \frac{-79}{7}\right)\right\}$ (3) $\left\{\left(1, \frac{1}{2}\right)\right\}$ **2.** −28 **3.** −37

4. (1) 25 (2) 4 **5.** $k = 3; 7$ **6.** $a \in R$

7. (1) $3x + 2y - 5 = 0$ (2) $x = 5$ (3) $x - 4y - 13 = 0$ **8.** 1

સ્વાધ્યાય 3

1. $x = \frac{-5}{3}$ **2.** $x = -1, -2$ **3.** $x = 2$ **4.** $x = -7$

10. (1) b (2) c (3) d (4) b (5) d (6) d (7) c (8) b (9) b (10) c (11) b
(12) a (13) d (14) c (15) d (16) b

સ્વાધ્યાય 4.1

1. $A + B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 7 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $A - B = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 3 & -3 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$, $2A + B = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 6 & 9 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $A - 2B = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 3 & -8 \\ -9 & 5 \end{bmatrix}$

2. $A + A^T = \begin{bmatrix} 2\sin\theta & 0 \\ 0 & 2\sin\theta \end{bmatrix}$, $A - A^T = \begin{bmatrix} 0 & -2\cos\theta \\ 2\cos\theta & 0 \end{bmatrix}$

3. $B - A = diag[2 \quad 3 \quad -1]$, $2A + 3B = diag[11 \quad 4 \quad 7]$ **4.** $x = 1$ અથવા 7; $y = -2$ અથવા 6

5. $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 3 \\ 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} -1 & -8 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -7 & -2 & -4 \end{bmatrix}$ **7.** $x = 2, y = 4;\ x = 4, y = 2$

8. $a = 4, b = 1, c = 2, d = -2$ **9.** $A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} 12 & \frac{4}{3} \\ 4 & -\frac{14}{3} \\ \frac{25}{3} & \frac{28}{3} \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 17 & -1 & 3 \\ -24 & -1 & -16 \\ -7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **12.** $a = 2, b = -8$.

સ્વાધ્યાય 4.2

2. $a = 2, b = 4, c = 1, d = 3$ **4.** $AB = [1]$, $BA = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} -5 & -1 & -3 \\ -1 & -7 & -10 \\ -5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **9.** $X = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & \frac{13}{2} \\ 5 & \frac{13}{2} & 8 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & \frac{5}{2} \\ -2 & \frac{-5}{2} & 0 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ **11.** $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = y$ **12.** $-2, -14$

સ્વાધ્યાય 4.3

1. (1) $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} -22 & 11 & -11 \\ 4 & -2 & 2 \\ 16 & -8 & 8 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} -5 & 11 & 6 \\ 4 & -9 & -5 \\ -8 & 17 & 10 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$ **7.** $x = 3$

8. (1) $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 3 & -1 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

9. (1) $\{(1, -2)\}$ (2) $\left\{\left(\frac{11}{24}, \frac{1}{24}\right)\right\}$ **10.** (1) $\{(1, 2, 3)\}$ (2) $\left\{\left(\frac{9}{5}, \frac{2}{5}, \frac{7}{5}\right)\right\}$

સ્વાધ્યાય 4

1. I **3.** $\begin{bmatrix} \frac{-61}{2} & \frac{47}{2} \\ \frac{87}{2} & \frac{-67}{2} \end{bmatrix}$ **4.** $\begin{bmatrix} 52 & -26 & -21 \\ -42 & 21 & 17 \\ 83 & -41 & -34 \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ **6.** $A^{-1} = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ **8.** $\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 9 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 36 & 0 \\ 0 & 36 \end{bmatrix}$ **10.** (1) $\{(2, 1)\}$ (2) $\{(-1, 2)\}$ **11.** (1) $\{(1, 1, -1)\}$ (2) $\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right)\right\}$

12. $\begin{bmatrix} a^2 & ab \\ ac & bc+1 \end{bmatrix}$ 13. $\left\{\left(\frac{c_1-c_2}{m_2-m_1}, \frac{m_2c_1-m_1c_2}{m_2-m_1}\right)\right\}$ 14. $x = 6$ 15. $x = \pm 4\sqrt{3}$

24. (1) d (2) c (3) c (4) d (5) b (6) a (7) d (8) b (9) b (10) a (11) b (12) c (13) c (14) b (15) c (16) b (17) a

સ્વાધ્યાય 5.1

4. $x = 2$ માટે અસતત 5. સતત 6. સતત 7. $x = 0$ માટે અસતત 8. સતત 9. $x = 0$ માટે અસતત

10. $x = 0$ માટે અસતત 11. સતત 12. સતત 13. $k = 3$ 14. $k = 5$ 15. $k = 1$

16. $k = 0$ 17. $a = 4, b = -1$ 26. અસતત 27. $k = \sqrt{2}$ 28. $n = 5$

સ્વાધ્યાય 5.2

4. (1) $2sinx\ cosx$ (2) $2tanx\ sec^2x$ (3) $4x^3$ (4) $-4cos^3x\ sinx$

સ્વાધ્યાય 5.3

1. $6sin^2(2x + 3) \cdot cos(2x + 3)$ 2. $3tan^2x \cdot sec^2x$ 3. $sin^2x \cdot cos^4x\ (3cos^2x - 5sin^2x)$

4. $-2sin(sin(sec(2x + 3))) \cdot cos(sec(2x + 3)) \cdot sec(2x + 3) \cdot tan(2x + 3)$

5. $-(3x^2 - 1) \cdot sec(cot(x^3 - x + 2)) \cdot tan(cot(x^3 - x + 2)) \cdot cosec^2(x^3 - x + 2)$

7. $(2x + 3)^{m-1} \cdot (3x + 2)^{n-1} \cdot [6(m + n)x + 4m + 9n]$

8. $n(sin^{n-1}x \cdot cosx + cos^{n-1}x \cdot sinx)$ 9. $3sin^2x \cdot cos^2x \cdot cos2x$ અથવા $\frac{3}{4}\ sin^2 2x\ cos\ 2x$

10. $6sin^2(4x - 1) \cdot cos^2(2x + 3)\ [2cos(2x + 3)\ cos(4x - 1) - sin(4x - 1)\ sin(2x + 3)]$

સ્વાધ્યાય 5.4

1. $-\frac{x}{y}$ 2. $\frac{1+cosx}{cosy}$ 3. $tan^2\frac{x+y}{2}$ 4. $-\frac{4x+3y}{3x+2y}$ 5. $\frac{ysec^2xy - cosx}{cosy - xsec^2xy}$ 6. $\frac{9x}{4y}$ 7. $\frac{5}{y}$

8. $\frac{-25x}{16y}$ 9. $\frac{x-2}{3-y}$ 10. $\frac{cosx}{cosy}$ 11. $\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$ 12. $\frac{2}{1+x^2}$

13. $f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2}, & x > 0 \\ -\frac{2}{1+x^2}, & x < 0 \end{cases}$

$x = 0$ આગળ $f'(x)$ નું અસ્તિત્વ નથી.

14. $f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2}, & |x| < 1 \\ -\frac{2}{1+x^2}, & |x| > 1 \end{cases}$

$x = \pm 1$ આગળ $f'(x)$ નું અસ્તિત્વ નથી.

15. $\frac{3}{1+x^2}$ 16. $\frac{-2}{\sqrt{1-x^2}}$

સ્વાધ્યાય 5.5

1. $\frac{b}{a}cosec\theta$ 2. $\frac{cos\ \theta - 2cos2\theta}{2sin2\theta - sin\ \theta}$ 3. $cot\frac{\theta}{2}$ 4. $tant$ 5. $tan\theta$ 6. $-\frac{bt^3}{2a}$

સ્વાધ્યાય 5.6

1. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^x\left(\frac{x^2-1}{x^2+1} + \log\left(x+\frac{1}{x}\right)\right) + \left(x+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{x^2-1}{x^2(x^2+1)} - \frac{1}{x^2}\log\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)$

2. $x^x \cdot (1 + \log x)(-\sin x^x + \cos x^x)$

3. $\frac{y}{3}\left[\frac{6}{2x+1} + \frac{20}{4x+3} - \frac{42}{7x-1}\right]$ 4. $(\log x)^{\cos x}\left(-\sin x \log(\log x) + \frac{\cos x}{x \log x}\right)$

5. $y\left[\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x+2} + \frac{4}{x+3}\right]$ 6. $(\log x)^x\left(\frac{1}{\log x} + \log(\log x)\right) + 1 + \log x$

7. $x^{x \sin x}(\sin x \log x + x\cos x \log x + \sin x) + (\sin x)^x(\log(\sin x) + x\cot x)$

8. $x^{\left(x+\frac{1}{x}\right)} \cdot \left(1 + \frac{1}{x^2} + \log x - \frac{1}{x^2}\log x\right)$

9. $(\sin x)^x(\log(\sin x) + x\cot x) + \left(\frac{1}{x}\right)^{\cos x}\left(-\frac{\cos x}{x} + \sin x \cdot \log x\right)$

10. $3^{\sin x} \cdot \cos x \log 3 - 4^{\cos x} \cdot \sin x \log 4$ 11. $\frac{y^2 - xy\log y}{x^2 - xy\log x}$ 12. $\frac{xy - y}{xy + x}$ 13. $-\frac{(x\log y + y)\,y}{(y\log x + x)\,x}$

14. $y\left(\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \frac{8x^7}{1+x^8}\right)$ અથવા $\frac{15x^{16} - 16x^{15} + 1}{(x-1)^2}$ 15. $4x^3 - 15x^2 + 48x - 39$

સ્વાધ્યાય 5.7

1. $c = 1$ 2. $c = 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ 3. $c = 0$ 4. $c = \sqrt{ab}$ 5. $c = \frac{\pi}{4}$ 6. $c = \pi$ 7. $c = \frac{\pi}{2}$

8. $c = \frac{\pi}{4}$ 9. $c = \pm\frac{\pi}{2}$ 10. $c = \log_2 e$ 12. (1) $c = \sqrt{3}$ (2) $c = \sqrt{\frac{4}{\pi} - 1}$ 14. $\left(\frac{9}{2}, \frac{1}{4}\right)$

સ્વાધ્યાય 5

1. $x = 3$ આગળ અસતત 2. $x = 1$ આગળ અસતત 3. $x = -1$ આગળ અસતત 4. $x = 2$ આગળ અસતત

5. $k = 5$ 6. $k = 2$ 7. $k = 7$ 8. $k = \pm 2$ 9. $a = 1, b = -1$ 10. $a = 5, b = 0$

11. $\frac{2x}{(x^2+1)\log 10}$ 12. $\frac{-2}{1+x^2}$ 13. $-\tan x \cdot \cos(\log(\cos x))$ 14. $-\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$

15. $(\sin x)^{\sin x} \cdot \cos x \cdot (\log \sin x + 1)$ 16. $(\sin x - \cos x)^{\sin x - \cos x} \cdot (\cos x + \sin x)(1 + \log(\sin x - \cos x))$

17. $x^x(1 + \log x) + \left(x + \frac{1}{x}\right)^x\left(\log\left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{x^2 - 1}{1 + x^2}\right)$ 18. $x^{x+\frac{1}{x}} \cdot \left(1 + \frac{1}{x^2} + \log x - \frac{\log x}{x^2}\right)$

19. $-\sin x^x \cdot x^x(1 + \log x) + (\tan x)^x\left(\log \tan x + x \sec x \ \operatorname{cosec} x\right)$

20. $\frac{dy}{dx} = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1 \\ \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}, & -1 < x < 0, \ x = 0 \text{ આગળ વિકલનીય નથી.} \end{cases}$ 21. 0

22. $\frac{(\sin t)^t(\log \sin t + t\cot t)}{(\cos t)^t(-t\tan t + \log(\cos t))}$ 24. $\frac{1}{2(1+x^2)}$ 25. $\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ 26. $\frac{1}{2}$ 37. $-\left(\frac{a^2+b^2}{y^3}\right)$

40. $\frac{1}{2}$ 41. 1 42. $\frac{-1}{2\sqrt{3}}$ 43. $\frac{2}{1+x^2}$ 44. $\frac{7}{1+49x^2} - \frac{3}{1+9x^2}$ 45. $\frac{1}{1+x^2}$

46. $\frac{-x}{\sqrt{1-x^4}}$ 47. $-\frac{1}{2}$

48. વિભાગ A : (1) c (2) d (3) a (4) b (5) b (6) b (7) c (8) b (9) b (10) c
(11) c (12) c (13) c (14) b (15) c

વિભાગ B : (16) a (17) d (18) b (19) c (20) a (21) c (22) b (23) d (24) a (25) b

વિભાગ C : (26) c (27) b (28) d (29) d (30) a (31) a (32) c

વિભાગ D : (33) a (34) b (35) b (36) a (37) c (38) d (39) d (40) d

સ્વાધ્યાય 6.1

1. $x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 4x + 7\log|x| + 4\sqrt{x} + c$ **2.** $\frac{10}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}} + c$

3. $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} - 6\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + c$ **4.** $\frac{2a}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{2b}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2c}{3}x^{\frac{3}{2}} + c'$

5. $\frac{x^{e+1}}{e+1} + e^x + e^e x + c$ **6.** $\frac{x^{a+1}}{a+1} + \frac{a^x}{\log_e a} + c$ **7.** $\frac{x^2}{2} + 2x + 4\log|x| + c$

8. $\frac{2^x}{\log_e 2} + \log|x + \sqrt{x^2 - 9}| + c$ **9.** $x^2 - \frac{1}{3}tan^{-1}\frac{x}{3} + c$ **10.** $\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + c$

11. $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c$ **12.** $\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + x + tan^{-1}x + c$ **13.** $\frac{x^3}{3} - x + 2tan^{-1}x + c$

14. $-3cosx + 5sinx + 8tanx + 4cotx - x + c$ **15.** $-2cotx - 3cosecx + c$

16. $4tanx - 9cotx - 25x + c$ **17.** $-\frac{1}{4}(cotx + tanx) + c$ **18.** $cosecx + cotx + x + c$

19. $-cotx + cosecx + c$ **20.** $tanx - cotx - 3x + c$ **21.** $-cosecx - cotx - x + c$

22. $secx - tanx + x + c$ **23.** $a^2tanx - b^2cotx - (a-b)^2x + c$ **24.** $x + \frac{\sqrt{3}}{2}\log\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right| + c$

25. $2x^4 - x^2 - 20$

સ્વાધ્યાય 6.2

1. $\frac{1}{5}\log|5x - 3| + c$ **2.** $\frac{1}{7}e^{7x+4} + \frac{(5x-3)^9}{45} + c$ **3.** $\frac{7^{2x+3}}{2\log_e 7} - \frac{cot2x}{2} - x + c$

4. $\frac{5^{4x+3}}{4\log_e 5} + \frac{3}{2}cos(2x+3) + c$ **5.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\log|\sqrt{5}x + \sqrt{5x^2 - 4}| + c$

6. $\frac{1}{3}sin^{-1}\left(\frac{3x}{4}\right) + c$ **7.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\log|\sqrt{5}x + \sqrt{5x^2+3}| + \frac{1}{12}\log\left|\frac{2x+3}{2x-3}\right| + c$

8. $\frac{1}{\sqrt{2}}\log|\sqrt{2}x + \sqrt{2x^2+3}| + \frac{1}{\sqrt{21}}tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{7}x}{\sqrt{3}}\right) + c$

9. $2x^2 + 12x + 25\log|x - 2| + c$ **10.** $\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \log|x + 1| + c$

11. $-\frac{2}{3}(5 - 3x)^{\frac{1}{2}} + c$ **12.** $\frac{3^{5x-2}}{5\log_e 3} - \frac{1}{4(2x+1)^2} + c$ **13.** $-\frac{1}{5}cot(3 + 5x) - x + c$

14. $\frac{x}{2} - \frac{1}{12}sin(6x + 10) + c$ **15.** $\frac{1}{3}(cosec3x - cot3x) + c$ **16.** $2\sqrt{2}\,sin\frac{x}{2} + c$

17. $\frac{2}{27}[(3x+4)^{\frac{3}{2}} + (3x+1)^{\frac{3}{2}}] + c$ **18.** $-\frac{1}{6}(5-2x)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{6}(3-2x)^{\frac{3}{2}} + c$

19. $\log|x + 1| - \frac{1}{x+1} + c$ **20.** $x - 2\log|x + 1| - \frac{2}{x+1} + c$

21. $\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 6x + 7\log|x - 1| + c$ **22.** $\frac{2}{5}(x+3)^{\frac{5}{2}} - 2(x+3)^{\frac{3}{2}} + c$

23. $\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - 2(x+1)^{\frac{1}{2}} + c$ **24.** $\frac{1}{6}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}(2x+1)^{\frac{1}{2}} + c$

25. $\frac{1}{3}(4x + 7)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}(4x + 7)^{\frac{1}{2}} + c$ **26.** $\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$

27. $\frac{-3}{64}\cos 2x + \frac{1}{192}\cos 6x + c$ **28.** $\frac{\cos^3(2x-1)}{6} - \frac{\cos(2x-1)}{2} + c$

29. $\frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$ **30.** $\frac{2}{3}\sin 3x + 2\sin x + c$

31. $\frac{1}{48}\sin 12x + \frac{1}{16}\sin 4x + \frac{1}{32}\sin 8x + \frac{x}{4} + c$ **32.** $\sqrt{2}\log\left|\operatorname{cosec}\frac{x}{2} - \cot\frac{x}{2}\right| + c$

33. $2\log\left|\sin\frac{x}{2}\right| + c$ **34.** $\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right] + c$

35. $x\cos a + \sin a \log|\sin(x-a)| + c$ **36.** $\frac{1}{\sin(b-a)}\log\left|\frac{\sin(x-b)}{\sin(x-a)}\right| + c$

37. $-\frac{3x}{2} - \frac{13}{4}\log|3-2x| + c$ **38.** $\frac{1}{5}(3x^2 - 4x + 5)^{\frac{5}{2}} + c$

39. $\sqrt{x^2+6x+4} + c$ **40.** $\frac{1}{30}(5x^4 + 3)^{\frac{3}{2}} + c$ **41.** $\frac{1}{2}\log x - \frac{1}{4}\sin(2\log x) + c$

42. $\frac{2}{3}(\log x + 1)^{\frac{3}{2}} + c$ **43.** $\frac{1}{2n(m+n\cos 2x)} + c$ **44.** $\log|\sin x + \cos x| + c$

45. $\tan(xe^x) + c$ **46.** $\frac{1}{2}\cot(2e^{-x} + 3) + c$ **47.** $\frac{1}{e}\log|x^e + e^x| + c$

48. $\frac{-1}{\tan^3 x + 2\tan x + 9} + c$ **49.** $\frac{1}{(b-a)(a\sin^2 x + b\cos^2 x)}$ **50.** $\frac{1}{2(b^2-a^2)}\log|a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x| + c$

51. $\frac{1}{4}(\sin^{-1}x^2)^2 + c$ **52.** $\frac{-2}{\sqrt{\tan^{-1}x}} + c$ **53.** $\frac{1}{2}[\log(\sin e^x)]^2 + c$ **54.** $-\frac{1}{2}\left\{\log\left(\frac{x+1}{x}\right)\right\}^2 + c$

55. $\frac{1}{2}\tan^2 x + \log|\cos x| + c$ **56.** $\frac{\sec^4 x}{4} + c$ **57.** $\frac{\tan^5 x}{5} - \frac{\tan^3 x}{3} + \tan x - x + c$

58. $2(x+1)^{\frac{1}{2}} - 3(x+1)^{\frac{1}{3}} + 6(x+1)^{\frac{1}{6}} - 6\log|(x+1)^{\frac{1}{6}} + 1| + c$

59. $\frac{3}{8}(x+2)^{\frac{8}{3}} - \frac{12}{5}(x+2)^{\frac{5}{3}} + 6(x+2)^{\frac{2}{3}} + c$ **60.** $\frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\tan x\right) + c$

61. $\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{\sqrt{3}}\right) + c$ **62.** $\frac{1}{2\sqrt{3}}\log\left|\frac{1+\sqrt{3}\cot x}{1-\sqrt{3}\cot x}\right| + c$ **63.** $\frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\tan x\right) + c$

64. $\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}(\sqrt{2}\tan x) + c$

સ્વાધ્યાય 6.3

1. $\frac{-\sqrt{1-x^2}}{x} + c$ **2.** $\frac{-\sqrt{9-x^2}}{x} - \sin^{-1}\frac{x}{3} + c$ **3.** $\frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + c$

4. $\frac{a^6}{6}\left[\sin^{-1}\frac{x^3}{a^3} + \frac{x^3}{a^6}\sqrt{a^6-x^6}\right] + c$ **5.** $2\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{2a}} + c$ **6.** $2\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{2}} + \sqrt{2x-x^2} + c$

7. $\sqrt{a^2-x^2} - a\cos^{-1}\frac{x}{a} + c$ **8.** $\frac{1}{3}\sin^{-1}\frac{x^3}{a^3} + c$ **9.** $-\frac{1}{x} - \frac{3}{2}\tan^{-1}x - \frac{x}{2(1+x^2)} + c$

10. $\frac{1}{9}\frac{1}{\sqrt{16-9x^2}} + c$ **11.** $\log|x + \sqrt{x^2-a^2}| - \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} + c$

12. $-\frac{a^2}{2}\cos^{-1}\left(\frac{x^2}{a^2}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{a^4-x^4} + c$ **13.** $2\log|\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}| + c$

14. $-\frac{\sqrt{25-x^2}}{x} - \sin^{-1}\frac{x}{5} + c$ 15. $\log\left|\tan\frac{x}{2} + 1\right| + c$ 16. $\tan^{-1}\left(1 + \tan\frac{x}{2}\right) + c$

17. $\frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{3}\right) + c$ 18. $\frac{2}{\sin\alpha}\tan^{-1}\left(\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{x}{2}\right) + c$ 19. $\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\tan\frac{x}{2}\right) + c$

20. $\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+1+\sqrt{2}}{\tan\frac{x}{2}+1-\sqrt{2}}\right| + c$ 21. $\frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + c$ 22. $\frac{\cos^{13} x}{13} - \frac{\cos^{11} x}{11} + c$

23. $\frac{\sin^8 x}{8} - \frac{\sin^{10} x}{10} + c$ 24. $-\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{2}{7}\cos^7 x - \frac{\cos^9 x}{9} + c$

25. $-\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{\cos^5 x}{5} + c$ 26. $\frac{1}{32}\left(2x - \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\sin 4x + \frac{1}{6}\sin 6x\right) + c$

સ્વાધ્યાય 6.4

1. $\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+3}{\sqrt{3}}\right) + c$ 2. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{2}}\right) + c$ 3. $-\frac{1}{6\sqrt{2}}\log\left|\frac{3x+1-\sqrt{2}}{3x+1+\sqrt{2}}\right| + c$

4. $\frac{1}{4}\log\left|\frac{x+1}{3-x}\right| + c$ 5. $\log\left|x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2-x+5}\right| + c$

6. $\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\frac{4x+3}{4} + \sqrt{x^2+\frac{3}{2}x-1}\right| + c$ 7. $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\left(\frac{4x+3}{\sqrt{65}}\right) + c$

8. $\frac{1}{\sqrt{3}}\log\left|x+\frac{5}{6}+\sqrt{x^2+\frac{5}{3}x+\frac{7}{3}}\right| + c$ 9. $\log\left|x-\frac{3}{2}+\sqrt{x^2-3x+2}\right| + c$

10. $\sin^{-1}\left(\frac{x-4}{5}\right) + c$ 11. $2\log\left|x^2+3x+2\right| - 5\log\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + c$

12. $\frac{3}{4}\log\left|2x^2+x+1\right| + \frac{5}{2\sqrt{7}}\tan^{-1}\left(\frac{4x+1}{\sqrt{7}}\right) + c$

13. $2\sqrt{x^2+4x+5} - \log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right| + c$ 14. $-3\sqrt{5-2x-x^2} - 2\sin^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{6}}\right) + c$

15. $2\log\left|\sin^2 x - 4\sin x + 5\right| + 7\tan^{-1}(\sin x - 2) + c$ 16. $\sin^{-1}\left(\frac{e^x+2}{3}\right) + c$

17. $\frac{1}{3}\log\left|x^3+1+\sqrt{x^6+2x^3+3}\right| + c$ 18. $\sin^{-1}\left(\frac{2x^2+1}{\sqrt{5}}\right) + c$ 19. $\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}\right) + c$

20. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x^2-4}{2\sqrt{2}x}\right) + c$ 21. $\frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x^2-1}{3x}\right) + c$

22. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}\right) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right| + c$

23. $\frac{1}{2}\log\left|\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right| + c$ 24. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{3}x}\right) + \frac{1}{4}\log\left|\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right| + c$

સ્વાધ્યાય 6

1. $x - \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - 2\cdot x^{\frac{1}{2}} + 3\cdot x^{\frac{1}{3}} - 6\cdot x^{\frac{1}{6}} + 6\log\left|1 + x^{\frac{1}{6}}\right| + c$

2. $\frac{1}{2}\left[\log\left|x + \sqrt{1+x^2}\right|\right]^2 + c$ 3. $-\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1} + c$

4. $-2\sqrt{1-x} + cos^{-1}\sqrt{x} + \sqrt{x-x^2} + c$ 5. $\sqrt{x^2+5x+6} + \frac{1}{2}\log|x + \frac{5}{2} + \sqrt{x^2+5x+6}| + c$

6. $x + \log|x^2 + 3x + 2| - 2\log\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + c$ 7. $x - \frac{7}{2}\log|x^2 + 7x + 10| + \frac{29}{6}\log\left|\frac{x+2}{x+5}\right| + c$

8. $\frac{1}{sin(a-b)}\log\left|\frac{cos(x-a)}{cos(x-b)}\right| + c$ 9. $x cos(a-b) + sin(a-b)\log|sin(x+b)| + c$

10. $\frac{-1}{n+1}(1-x)^{n+1} + \frac{1}{n+2}(1-x)^{n+2} + c$

11. $\frac{1}{\sqrt{2}} tan^{-1}\left(\frac{tanx - 1}{\sqrt{2\,tanx}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{tanx - \sqrt{2tanx} + 1}{tanx + \sqrt{2tanx} + 1}\right| + c$

12. $\frac{1}{\sqrt{2}} tan^{-1}\left(\frac{tan^2x - 1}{\sqrt{2}tanx}\right) + c$ 13. $\frac{2}{1-a^2}\, tan^{-1}\left[\left(\frac{1+a}{1-a}\right)tan\frac{x}{2}\right] + c$

14. વિભાગ A : (1) c (2) b (3) c (4) c (5) c (6) c (7) a (8) c (9) b (10) c (11) b (12) c (13) b (14) c (15) a (16) b (17) a (18) c (19) b (20) a

વિભાગ B : (21) d (22) d (23) d (24) c (25) c (26) d (27) c (28) b (29) d (30) b (31) c (32) c (33) d

વિભાગ C : (34) a (35) c (36) d (37) a (38) c (39) d (40) d (41) a (42) c (43) c

વિભાગ D : (44) b (45) b (46) d (47) c (48) d

સ્વાધ્યાય 7.1

1. $\frac{3}{7}$ 2. $\frac{4}{7}$ 3. $\frac{1}{5}, \frac{2}{3}$ 4. $\frac{1}{3}$ 5. $\frac{2}{3}$ 6. (1) $\frac{11}{56}$ (2) $\frac{13}{44}$ 7. $\frac{1}{2}$ 8. (1) $\frac{3}{8}$ (2) $\frac{2}{5}$ 9. $\frac{1}{6}$

10. (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{3}{7}$ (3) $\frac{6}{7}$

સ્વાધ્યાય 7.2

1. હા 2. $\frac{10}{13}$ 3. (1) $\frac{15}{91}$ (2) $\frac{15}{91}$ (3) $\frac{5}{21}$ 4. 0.21 5. $\frac{1}{3}$ 6. 0.963

7. (1) $\frac{4}{25}$ (2) $\frac{3}{8}$ 8. (1) $\frac{71}{80}$ (2) $\frac{36}{71}$

સ્વાધ્યાય 7.3

1. (1) $\frac{1}{10}$ (2) $\frac{1}{385}$ (3) $\frac{1}{40}$ (4) $\frac{64}{21}$ (5) $\frac{1}{16}$

2. (1) હા 3. (1) $\frac{3}{20}$ (2) $\frac{3}{4}$ (3) $\frac{3}{10}$ (4) $\frac{11}{20}$

4.

X = x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

5.

X = x	0	1	2
$p(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

6.

X = x	0	1	2
$p(x)$	$\frac{42}{90}$	$\frac{42}{90}$	$\frac{6}{90}$

7. (1) $c = \frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{2}{3}$

8.

$X = x$	0	1	2	3
$p(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

સ્વાધ્યાય 7.4

1.

$X = x$	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

મધ્યક = 2.53, વિચરણ = 1.96, પ્રમાણિત વિચલન = 1.4

2. ₹ 25, હા 3. (1) $k = \frac{1}{10}$ (2) મધ્યક = 3.6, વિચરણ = 1.64

4. (1) $k = \frac{1}{5}$ (2) મધ્યક = 1.1, વિચરણ = 1.69, પ્રમાણિત વિચલન = 1.3

5. $\frac{35}{12}$ 6. (1) 0 (2) 1.6 (3) 2 (4) 14.4 7. ₹ 8 8. 125, 135, 0, 1

સ્વાધ્યાય 7.5

1. (1) $\frac{63 \times 4^6}{5^{10}}$ (2) $\frac{4^9 \times 14}{5^{10}}$ 2. (1) $\frac{144}{625}$ (2) $\frac{32}{3125}$

3. 0.6517 4. 0.0512 5. $n = 16, p = \frac{1}{2}, \frac{1}{2^{16}}, \frac{696}{2^{16}}$ 6. 0.9963 7. (1) 0.3950 (2) 0.4074

8. (1) 0.6630 (2) 0.6826 9. (1) 0.512 (2) 0.384 (3) 0.104 10. (1) 40 (2) 36

સ્વાધ્યાય 7

1. $\frac{4}{7}$ 2. (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{2}$ 3. $\frac{3}{7}$ 4. (1) $\frac{16}{121}$ (2) $\frac{49}{121}$ (3) $\frac{56}{121}$

5. (1) $\frac{2}{5}$ (2) $\frac{1}{10}$ (3) $\frac{13}{30}$ (4) $\frac{1}{60}$ 6. 0.175, $\frac{17}{33}$

7.

$X = x$	-2	5	10
$p(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

8. $\frac{101}{2}, \frac{6767}{2}, \frac{3333}{4}$ 9. (1) $\frac{63}{256}$ (2) $\frac{65}{256}$ 10. $\frac{9}{17}$ 11. $\frac{3}{16}$ 12. 3 : 2 13. 0.35294

15. (1) a (2) c (3) a (4) b (5) a (6) d (7) a (8) d (9) b (10) d
(11) c (12) d (13) d (14) c (15) d (16) c (17) a (18) b (19) a (20) b
(21) c (22) b (23) a (24) c

સ્વાધ્યાય 8.1

4. 800 5. 120 6. 2300 7. 30, 180 8. શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ ના મળે

9. 16 10. 18 11. મહત્તમ કિંમત ના મળે 12. 300

સ્વાધ્યાય 8

1. 10 **2.** −2 **3.** 13 **4.** 22 **5.** 240 **6.** શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ ના મળે

7. A પ્રકારના મશીન 6, B પ્રકારના મશીન 0, મહત્તમ નિર્ગમ 360

8. A પ્રકારનો આહાર 5 એકમ, B પ્રકારનો આહાર 30 એકમ, ન્યૂનતમ ખર્ચ ₹ 145.

9. 5 લિટર તેલના ડબ્બા 8, 1 કિગ્રા ઘીના ડબ્બા 12, મહત્તમ નફો ₹ 392.

10. 30 **11.** Aથી D : 500 લિટર, Aથી E = 3000 લિટર, Aથી F : 3500 લિટર, Bથી D : 4000 લિટર, ન્યૂનતમ ખર્ચ ₹ 4,400.

12. 40 ઉચ્ચવર્ગની ટિકિટ, 160 સામાન્ય વર્ગની ટિકિટ, મહત્તમ નફો ₹ 1,36,000

13. 10, 2, ₹ 560

14. (1) b (2) b (3) c (4) d (5) c (6) b (7) a (8) d (9) a (10) b (11) c (12) a (13) b (14) b

Srinivasa Ramanujan : Life in England

Ramanujan boarded the S.S. Nevasa on 17 March 1914, and at 10 o'clock in the morning, the ship departed from Madras. He arrived in London on 14 April, with E. H. Neville waiting for him with a car. Four days later, Neville took him to his house on Chesterton Road in Cambridge. Ramanujan immediately began his work with Littlewood and Hardy. After six weeks, Ramanujan moved out of Neville's house and took up residence on Whewell's Court, just a five-minute walk from Hardy's room. Hardy and Ramanujan began to take a look at Ramanujan's notebooks. Hardy had already received 120 theorems from Ramanujan in the first two letters, but there were many more results and theorems to be found in the notebooks. Hardy saw that some were wrong, others had already been discovered, while the rest were new breakthroughs. Ramanujan left a deep impression on Hardy and Littlewood. Littlewood commented, "I can believe that he's at least a Jacobi", while Hardy said "he can compare him only with [Leonhard] Euler or Jacobi."

Ramanujan spent nearly five years in Cambridge collaborating with Hardy and Littlewood and published a part of his findings there. Hardy and Ramanujan had highly contrasting personalities. Their collaboration was a clash of different cultures, beliefs and working styles. Hardy was an atheist and an apostle of proof and mathematical rigour, whereas Ramanujan was a deeply religious man and relied very strongly on his intuition. While in England, Hardy tried his best to fill the gaps in Ramanujan's education without interrupting his spell of inspiration.

Ramanujan was awarded a B.A. degree by research (this degree was later renamed PhD) in March 1916 for his work on highly composite numbers, which was published as a paper in the Journal of the London Mathematical Society. The paper was over 50 pages with different properties of such numbers proven. Hardy remarked that this was one of the most unusual papers seen in mathematical research at that time and that Ramanujan showed extraordinary ingenuity in handling it. On 6 December 1917, he was elected to the London Mathematical Society. He became a Fellow of the Royal Society in 1918, becoming the second Indian to do so, following Ardaseer Cursetjee in 1841, and he was one of the youngest Fellows in the history of the Royal Society. He was elected "for his investigation in Elliptic functions and the Theory of Numbers." On 13 October 1918, he became the first Indian to be elected a Fellow of Trinity College, Cambridge.

પારિભાષિક શબ્દો

પ્રતિવિકલન	Antiderivation
પ્રતિવિકલિત	Antiderivative
સ્વૈર અચળ	Arbitrary Constant
દ્વિક્ક્રિયા	Binary Operation
દ્વિપદી વિતરણ	Binomial Distribution
સાંકળનો નિયમ	Chain Rule
સહઅવયવ	Cofactor
સ્તંભ	Column
સંયોજિત વિધેય	Composite Function
શરતી સંભાવના	Conditional Probability
સુસંગત	Consistent
મર્યાદાઓ	Constraints
નિર્ણાયક ચલરાશિઓ	Decision Variables
નિશ્ચાયક	Determinant
સામ્ય સંબંધ	Equivalence Relation
ઘટના	Event
શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ	Feasible Region
શક્ય ઉકેલ	Feasible Solution
ગૂઢ વિધેય	Implicit Function
અનિયત સંકલિત	Indefinite Integral
નિરપેક્ષ ઘટનાઓ	Independent Events
અશક્ય ઉકેલ	Infeasible Solution
પ્રતિવિકલનીય	Integrable
સંકલિત	Integral
સંકલ્ય	Integrand
પ્રતિવિધેય	Inverse Function
સુરેખ આયોજન	Linear Programming
અનેક-એક વિધેય	Many-one Function
ગાણિતિક અપેક્ષા	Mathematical Expectation
શ્રેણિક	Matrix
આદેશની રીત	Method of Substitution
ઉપનિશ્ચાયક	Minor
સામાન્ય શ્રેણિક	Non-singular Matrix
હેતુલક્ષી વિધેય	Objective Function
એક-એક વિધેય	One-one Function
વ્યાપ્ત વિધેય	Onto Function
ઈષ્ટતમ શક્ય ઉકેલ	Optimal Feasible Solution
ઈષ્ટતમ મૂલ્ય	Optimum Value
કક્ષા	Order
પૂર્વગ	Primitive
યાદચ્છિક ચલ	Random Variable
સ્વવાચક સંબંધ	Reflexive Relation
હાર	Row
નિદર્શાવકાશ	Sample Space
વિસંમિત શ્રેણિક	Skew-symmetric Matrix
પ્રમાણિત વિચલન	Standard Deviation
સંમિત શ્રેણિક	Symmetric Matrix
સંમિત સંબંધ	Symmetric Relation
પરંપરિત સંબંધ	Transitive Relation
પરિવર્ત શ્રેણિક	Transpose of a Matrix
સાર્વત્રિક સંબંધ	Universal Relation
વિચરણ	Variance