ગુજરાત રાજ્યના શિક્ષણવિભાગના પત્ર-ક્રમાંક
મશપ / 102012 / 901 / છ, તા. 30-8-2012 થી મંજૂર

ગણિત

ધોરણ 12

(સિમેસ્ટર IV)

પ્રતિજ્ઞાપત્ર

ભારત મારો દેશ છે.
બધાં ભારતીયો મારાં ભાઈબહેન છે.
હું મારા દેશને ચાહું છું અને તેના સમૃદ્ધ અને
વૈવિધ્યપૂર્ણ વારસાનો મને ગર્વ છે.
હું સદાય તેને લાયક બનવા પ્રયત્ન કરીશ.
હું મારાં માતાપિતા, શિક્ષકો અને વડીલો પ્રત્યે આદર રાખીશ
અને દરેક જણ સાથે સભ્યતાથી વર્તીશ.
હું મારા દેશ અને દેશબાંધવોને મારી નિષ્ઠા અર્પું છું.
તેમનાં કલ્યાણ અને સમૃદ્ધિમાં જ મારું સુખ રહ્યું છે.

રાજ્ય સરકારની વિનામૂલ્યે યોજના હેઠળનું પુસ્તક

ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ
'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર-382 010

લેખન-સંપાદન
ડૉ. એ. પી. શાહ (કન્વીનર)
શ્રી રાજીવભાઈ ચોક્સી શ્રી જે. એન. ભટ્ટ
શ્રી વિપુલ આર. શાહ શ્રી પરિમલ બી. પુરોહિત

અનુવાદ
ડૉ. એ. પી. શાહ
શ્રી રાજીવભાઈ ચોક્સી શ્રી જે. એન. ભટ્ટ
શ્રી વિપુલ આર. શાહ શ્રી પરિમલ બી. પુરોહિત

પરામર્શન
ડૉ. બી. આઇ. દવે ડૉ. એચ. સી. પટેલ
શ્રી નિલયભાઈ જે. મહેતા શ્રી આર. વી. વૈષ્ણવ
શ્રી વિજયભાઈ જી. વોરા શ્રી જયંતિભાઈ જે. પટેલ
શ્રી નવરોજભાઈ ગાંગાણી શ્રી જગદીશભાઈ નાયક
શ્રી કમલેશભાઈ કે. પરીખ શ્રી આર. ડી. મોઢા
શ્રી સંજયભાઈ આર. પટેલ શ્રી રાજેશભાઈ એસ. પટેલ

દ્વિતીય પરામર્શન
ડૉ. એમ. એચ. વસાવડા
ડૉ. જે. પી. શર્મા
ડૉ. પી. જે. ભટ્ટ

ભાષાશુદ્ધિ
ડૉ. ભૂપેન્દ્રભાઈ એન. જોષી

ચિત્રાંકન
શ્રી મનીષ પારેખ

સંયોજન
શ્રી આશિષ એચ. બોરીસાગર
(વિષય-સંયોજક : ગણિત)

નિર્માણ-આયોજન
શ્રી હરેશ એસ. લીમ્બાચીયા
(નાયબ નિયામક : શૈક્ષણિક)

મુદ્રણ-આયોજન
શ્રી હરેશ એસ. લીમ્બાચીયા
(નાયબ નિયામક : ઉત્પાદન)

પ્રસ્તાવના

એન.સી.ઈ.આર.ટી. દ્વારા તૈયાર કરવામાં આવેલા નવા રાષ્ટ્રીય અભ્યાસક્રમોના અનુસંધાનમાં ગુજરાત રાજ્ય માધ્યમિક અને ઉચ્ચતર માધ્યમિક શિક્ષણ બોર્ડે નવા અભ્યાસક્રમો તૈયાર કર્યા છે. આ અભ્યાસક્રમો ગુજરાત સરકાર દ્વારા મંજૂર કરવામાં આવ્યા છે.

ગુજરાત સરકાર દ્વારા મંજૂર થયેલા **ધોરણ 12 (સિમેસ્ટર IV)**, **ગણિત** વિષયના નવા અભ્યાસક્રમ અનુસાર તૈયાર કરવામાં આવેલું આ પાઠ્યપુસ્તક વિદ્યાર્થીઓ સમક્ષ મૂકતાં મંડળ આનંદ અનુભવે છે.

આ પાઠ્યપુસ્તક પ્રસિદ્ધ કરતાં પહેલાં એની હસ્તપ્રતની આ સ્તરે શિક્ષણકાર્ય કરતા શિક્ષકો અને તજ્જ્ઞો દ્વારા સર્વાંગી સમીક્ષા કરાવવામાં આવી છે. શિક્ષકો તથા તજ્જ્ઞોનાં સૂચનો અનુસાર હસ્તપ્રતમાં યોગ્ય સુધારાવધારા કર્યા પછી આ પાઠ્યપુસ્તક પ્રસિદ્ધ કરવામાં આવ્યું છે. મૂળ અંગ્રેજીમાં તૈયાર કરવામાં આવેલ પાઠ્યપુસ્તકનો આ ગુજરાતી અનુવાદ છે.

પ્રસ્તુત પાઠ્યપુસ્તકને રસપ્રદ, ઉપયોગી તથા ક્ષતિરહિત બનાવવા માટે મંડળે પૂરતી કાળજી લીધી છે. તેમ છતાં શિક્ષણમાં રસ ધરાવનાર વ્યક્તિઓ પાસેથી પાઠ્યપુસ્તકની ગુણવત્તા વધારે તેવાં સૂચનો આવકાર્ય છે.

ડૉ. ભરત પંડિત
નિયામક
તા.05-08-2015

સુજીત ગુલાટી IAS
કાર્યવાહક પ્રમુખ
ગાંધીનગર

પ્રથમ આવૃત્તિ : 2012, પુનઃમુદ્રણ : 2013, 2014, 2015
પ્રકાશક : ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, 'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર વતી ડૉ.ભરત પંડિત, નિયામક
મુદ્રક :

મૂળભૂત ફરજો

ભારતના દરેક નાગરિકની ફરજ નીચે મુજબ રહેશે :*

(ક) સંવિધાનને વફાદાર રહેવાની અને તેના આદર્શો અને સંસ્થાઓનો, રાષ્ટ્રધ્વજનો અને રાષ્ટ્રગીતનો આદર કરવાની;

(ખ) આઝાદી માટેની આપણી રાષ્ટ્રીય લડતને પ્રેરણા આપનારા ઉમદા આદર્શોને હૃદયમાં પ્રતિષ્ઠિત કરવાની અને અનુસરવાની;

(ગ) ભારતના સાર્વભૌમત્વ, એકતા અને અખંડિતતાનું સમર્થન કરવાની અને તેમનું રક્ષણ કરવાની;

(ઘ) દેશનું રક્ષણ કરવાની અને રાષ્ટ્રીય સેવા બજાવવાની હાકલ થતાં, તેમ કરવાની;

(ચ) ધાર્મિક, ભાષાકીય, પ્રાદેશિક અથવા સાંપ્રદાયિક ભેદોથી પર રહીને, ભારતના તમામ લોકોમાં સુમેળ અને સમાનબંધુત્વની ભાવનાની વૃદ્ધિ કરવાની, સ્ત્રીઓના ગૌરવને અપમાનિત કરે તેવા વ્યવહારો ત્યજી દેવાની;

(છ) આપણી સમન્વિત સંસ્કૃતિના સમૃદ્ધ વારસાનું મૂલ્ય સમજી તે જાળવી રાખવાની;

(જ) જંગલો, તળાવો, નદીઓ અને વન્ય પશુપક્ષીઓ સહિત કુદરતી પર્યાવરણનું જતન કરવાની અને તેની સુધારણા કરવાની અને જીવો પ્રત્યે અનુકંપા રાખવાની;

(ઝ) વૈજ્ઞાનિક માનસ, માનવતાવાદ અને જિજ્ઞાસા તથા સુધારણાની ભાવના કેળવવાની;

(ટ) જાહેર મિલકતનું રક્ષણ કરવાની અને હિંસાનો ત્યાગ કરવાની;

(ઠ) રાષ્ટ્ર પુરુષાર્થ અને સિદ્ધિનાં વધુ ને વધુ ઉન્નત સોપાનો ભણી સતત પ્રગતિ કરતું રહે એ માટે, વૈયક્તિક અને સામૂહિક પ્રવૃત્તિનાં તમામ ક્ષેત્રે શ્રેષ્ઠતા હાંસલ કરવાનો પ્રયત્ન કરવાની;

(ડ) માતા-પિતાએ અથવા વાલીએ 6 વર્ષથી 14 વર્ષ સુધીની વયના પોતાના બાળક અથવા પાલ્યને શિક્ષણની તકો પૂરી પાડવાની.

* ભારતનું સંવિધાન : કલમ 51-क

અનુક્રમણિકા

1.	વિકલિતના ઉપયોગો	1
2.	અનિયત સંકલન	57
3.	નિયત સંકલન	90
4.	સંકલનનો એક ઉપયોગ	133
5.	વિકલ સમીકરણો	157
6.	સદિશનું બીજગણિત	191
7.	ત્રિપરિમાણીય ભૂમિતિ	227
•	જવાબો	269
•	પારિભાષિક શબ્દો	281

આ પાઠ્યપુસ્તક વિશે...

NCERT ના અભ્યાસક્રમ અનુસાર ગુજરાત માધ્યમિક અને ઉચ્ચતર માધ્યમિક શિક્ષણ બોર્ડ દ્વારા તૈયાર કરવામાં આવેલ નવા અભ્યાસક્રમ પ્રમાણે ધોરણ XI ના સિમેસ્ટર I તથા II અને ધોરણ XII ના સિમેસ્ટર III ના તૈયાર થયેલા પાઠ્યપુસ્તકની શૃંખલામાં હવે ધોરણ XII માટે સિમેસ્ટર IV નું પાઠ્યપુસ્તક આપ સમક્ષ રજૂ કરતાં અમને આનંદ થાય છે.

ધોરણ XI ના બંને સિમેસ્ટર તથા ધોરણ XIIના સિમેસ્ટર IIIની જેમ જ આ પાઠ્યપુસ્તક પણ સૌપ્રથમ અંગ્રેજીમાં તૈયાર કરવામાં આવ્યું. તે હસ્તપ્રતની ચકાસણી જૂન માસમાં શાળાના વિદ્વાન શિક્ષકો તથા મહાશાળાના અધ્યાપકો દ્વારા કરવામાં આવી. તેમનાં યોગ્ય સૂચનો - સુધારાઓને સ્વીકારી હસ્તપ્રતને સુધારી તેનો ગુજરાતી અનુવાદ કરવામાં આવ્યો. ગુજરાતીમાં તૈયાર થયેલ હસ્તપ્રતની ચકાસણી પણ શાળા તથા કૉલેજોના વિદ્વાન શિક્ષકોએ કરી હતી અને તેમનાં સૂચનો અનુસાર સુધારા કરવામાં આવ્યા હતા. અંગ્રેજી હસ્તપ્રતની તથા ગુજરાતી અનુવાદની ભાષાશુદ્ધિ ભાષાનિષ્ણાત દ્વારા કરવામાં આવી. તેમણે સૂચવેલા સુધારાને આમેજ કરી હસ્તપ્રતને આખરી રૂપ આપવામાં આવ્યું.

જુલાઈ માસમાં ગુજરાતી માધ્યમની હસ્તપ્રત માટે બીજી સમીક્ષાનું આયોજન કરવામાં આવ્યું હતું. જુદી જુદી યુનિવર્સિટીના તથા તકનીકી મહાવિદ્યાલયોના વિખ્યાત નિવૃત્ત ગણિતજ્ઞો દ્વારા આ સમીક્ષા કરવામાં આવી હતી તથા તેમનાં સૂચનો પણ આમેજ કરવામાં આવ્યાં.

પ્રકરણ 1 માં ગણિતના વિવિધ પ્રશ્નોમાં વિકલિતોનો ઉપયોગ કરવામાં આવ્યો છે. યામભૂમિતિ, આસન્ન મૂલ્યો, મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો, એક ચલનો બીજા ચલને સાપેક્ષ, ખાસ કરીને સમયને સાપેક્ષ વૃદ્ધિદર જેવા વિવિધ પ્રશ્નોમાં વિકલિતોનો ઉપયોગ કરવામાં આવ્યો છે. આનાથી વિજ્ઞાનમાં વિકલિતનો ઉપયોગ સમજવામાં સહાય મળે છે. પ્રકરણ 2 માં સિમેસ્ટર III માં શરૂ કરેલ અનિયત સંકલનની સંકલ્પનાને આગળ ધપાવી છે. અહીં પ્રકરણોના સાતત્યના કારણે સિમેસ્ટર III માં અભ્યાસ કરેલ અનિયત સંકલનનું પૂર્વજ્ઞાન આવશ્યક બને છે. કેટલાક પ્રશ્નો આ બંને પ્રકરણોમાંથી કોઈ પણ પ્રકરણની તકનીકથી ઉકેલી શકાય, કેટલાકમાં બંનેની આવશ્યકતા છે. પ્રકરણ 3 માં નિયત સંકલનનો પ્રારંભ થાય છે. તેના દાખલાઓ તથા ઉદાહરણો અને પ્રમેયોમાં અનિયત સંકલનની તકનીકોનો મુક્તપણે ઉપયોગ થાય છે. પ્રકરણ 4 માં સંકલનના એક ઉપયોગ વિશે છે. કેટલાક જાણીતા વક્રો દ્વારા આવૃત્ત કેટલાંક ક્ષેત્રફળ કેવી રીતે શોધવા તે આ પ્રકરણમાં દર્શાવ્યું છે. પ્રકરણ 5 માં સંકલનનો એક વધુ ઉપયોગ વિકલ સમીકરણોના ઉકેલ શોધવા માટે કર્યો છે. વિકલ સમીકરણના ઉકેલની માત્ર કેટલીક સહેલી રીતો જ સમજાવી છે. પ્રકરણ 6 ત્રિપરિમાણીય ભૂમિતિ સમજવા માટે ઉપયોગી સદિશ બીજગણિત વિશે છે. સિમેસ્ટર II માં સદિશોના અભ્યાસનો પ્રારંભ થયો અને અહીં આ સંકલ્પનાનું પુનરાવર્તન કર્યું છે. સદિશનો અરૂપ અભિગમ તથા ભૌમિતિક

અર્થઘટન બંનેનો અભ્યાસ આ પ્રકરણમાં કરવામાં આવ્યો છે. પ્રકરણ 7માં રેખા તથા સમતલ વિશેની ત્રિપરિમાણીય ભૂમિતિ સમજવામાં સદિશનો ઉપયોગ કર્યો છે.

પ્રકરણોમાં કેટલીક સમજૂતી 'બૉક્સ'માં આપવામાં આવી છે. આગળ આપેલી સંકલ્પનાઓની વધુ સમજૂતી માટે અથવા તેના પર નોંધ તરીકે આ 'બૉક્સ'ની વિગતો આપવામાં આવી છે. આ વિગતો માત્ર વધુ સમજૂતી માટે જ છે.

ચતુરંગી આકર્ષક મુખપૃષ્ઠ, ચતુરંગી મુદ્રણ તથા આકૃતિઓ પાઠ્યપુસ્તકને ખૂબ જ ઉપયોગી તથા મૂલ્યવાન બનાવે છે. સંકલ્પનાઓ સમજાવવા માટે વિપુલ પ્રમાણમાં ઉદાહરણો મૂકવામાં આવેલ છે તથા દૃઢીકરણ માટે સ્વાધ્યાયમાં વૈવિધ્યસભર પ્રશ્નો પૂરતા પ્રમાણમાં મૂકવામાં આવેલ છે, જે વિદ્યાર્થીને સિમેસ્ટરની પરીક્ષા અને સ્પર્ધાત્મક પરીક્ષામાં ઊંચો આંક મેળવવામાં સહાયક થશે.

અંતમાં પાઠ્યપુસ્તક તૈયાર કરવામાં સહાય કરનાર સૌનો આભાર. વિદ્યાર્થીઓ, શિક્ષકો તથા વાલીઓને પાઠ્યપુસ્તક ગમશે તેવી આશા. પાઠ્યપુસ્તકની ગુણવત્તા સુધારવા સકારાત્મક સૂચનો આવકાર્ય છે.

– લેખકો

વિકલિતના ઉપયોગો 1

Life is good only for two things - discovering mathematics and teaching mathematics.
– Siméon Poisson

Each problem I solved became a rule which served afterwards to solve other problems.
– Des Cartes

1.1 પ્રાસ્તાવિક :

આપણે વિધેયના વિકલિતની વ્યાખ્યા આપી અને તેના વિકલિત શોધવાની કેટલીક રીતો વિશે પણ અભ્યાસ કર્યો છે.

ધોરણ XI, સિમેસ્ટર II ના વિકલિતના પ્રકરણના પ્રાસ્તાવિકમાં આપણે વક્રના સ્પર્શકના ઢાળ તરીકે વિકલિતની સંકલ્પનાની સાહજિક સમજ દાખલ કરી હતી. હવે આપણે આ ઉપયોગ અને એક રાશિના બીજી રાશિને સાપેક્ષ બદલાવાનો દર, પ્રદેશમાં આવેલ કોઈક ઘટક આગળ વિધેયના આસન્ન મૂલ્યની પ્રાપ્તિ, વક્રના સ્પર્શક તથા અભિલંબનાં સમીકરણ, વક્રોના લંબચ્છેદી હોવાની શરત, વધતાં તથા ઘટતાં વિધેયો અને વિધેયનાં મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધવાં વગેરે વિકલિતના અન્ય ઉપયોગો વિશે માહિતી મેળવીશું. આ ગણિતીય સંકલ્પનાઓનો ઉપયોગ ભૌતિકવિજ્ઞાન, અર્થશાસ્ત્ર, સામાજિક વિજ્ઞાન, જીવવિજ્ઞાન, રસાયણશાસ્ત્ર વગેરેમાં ઈષ્ટતમ મૂલ્ય શોધવાના પ્રશ્નોમાં થાય છે. દ-કાર્ત અને ન્યૂટન બંનેએ આ સંકલ્પનાઓનો ઉપયોગ કરી મેઘધનુષ્યની રચના, આકાર, રંગો વિશેની સમજૂતી આપી હતી. ભૂસ્તરશાસ્ત્રીઓ ખનિજ તેલના સંશોધન માટે પૃથ્વીના પડળોની રચનાનો અભ્યાસ કરવા માટે કલન શાસ્ત્રનો ઉપયોગ કરે છે.

1.2 દર :

ધારો કે એક કણની રેખીય ગતિના માર્ગનું સૂત્ર $s = f(t)$ છે. s એ t સમયે સ્થાનાંતર એટલે કે ઊગમબિંદુથી દિશાયુક્ત અંતર દર્શાવે છે. જો t_1 તથા t_2 સમયે સ્થાનાંતરો અનુક્રમે s_1 તથા s_2 હોય તો, $t_2 - t_1$ સમયગાળા દરમિયાન પદાર્થનો સરેરાશ વેગ ગુણોત્તર $\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$ દ્વારા મળે છે. $\Delta s = s_2 - s_1$ તથા $\Delta t = t_2 - t_1$ કહીએ, તો સરેરાશ વેગ $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ થાય.

જો $t_2 \to t_1$, તો લક્ષ લેતાં આપણને t_1 સમયે પદાર્થકણનો તાત્ક્ષણિક વેગ(Instantaneous Velocity) મળે.

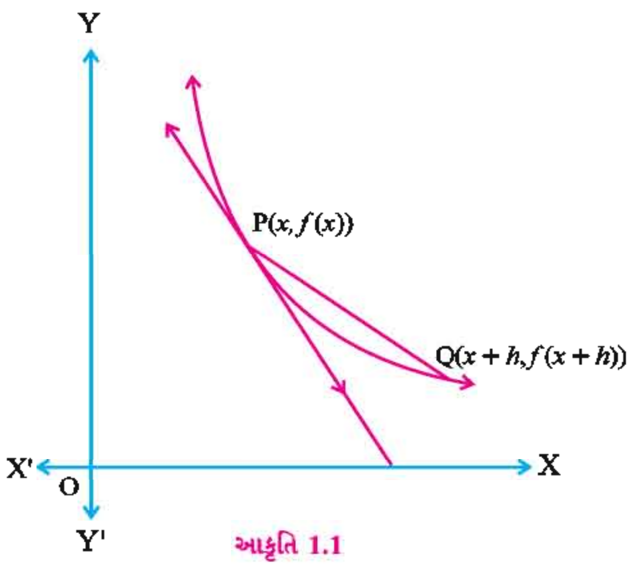
તાત્ક્ષણિક વેગ $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$

આમ સ્થાનાંતર $s = f(t)$ નો સમય t ને સાપેક્ષ બદલાવાનો દર(Rate) એ કણનો t સમયે તાત્ક્ષણિક વેગ છે.

એ જ રીતે કોઈપણ વિધેય $y = f(x)$ માટે, y નો x ને સાપેક્ષ બદલાવાનો દર $\frac{dy}{dx}$ છે.

અન્ય ઉદાહરણ તરીકે ગોલકની ત્રિજ્યા r હોય અને ઘનફળ $V = f(r)$, હોય તો $\frac{dV}{dr}$ ત્રિજ્યાને સાપેક્ષ ઘનફળના બદલાવાનો દર છે.

સતત વક્ર $y = f(x)$ પર $P(x, f(x))$ અને $Q(x + h, f(x + h))$ બે ભિન્ન બિંદુઓ છે.(આકૃતિ 1.1)



આકૃતિ 1.1

છેદિકા $\overleftrightarrow{PQ}$નો ઢાળ $= \dfrac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x}$

$= \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

જેમ $h \to 0$, તેમ વક્ર પર રહીને $Q \to P$. વક્ર સતત હોવાથી,

P આગળ વક્રના સ્પર્શકનો ઢાળ $= \lim\limits_{Q \to P}$ (છેદિકા $\overleftrightarrow{PQ}$ નો ઢાળ)

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$= f'(x)$

$\therefore$ વક્ર $y = f(x)$ ના $P(x, f(x))$ બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ $f'(x)$ છે.

વ્યવહારમાં ઘણા પ્રશ્નોમાં સમયને સાપેક્ષ દર આવશ્યક હોય તેવી સમસ્યાઓનો અભ્યાસ કરવામાં આવે છે.

આ સંજોગોમાં ચલ x, y વગેરે સમય t નાં વિધેય હોય છે.

સાંકળ નિયમથી સૂત્ર $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dt}$ આ પ્રકારના દર શોધવા માટે સહાયક થશે.

ઉદાહરણ 1 : ગોલકના ઘનફળનો ત્રિજ્યાને સાપેક્ષ બદલાવાનો દર શોધો. $r = 3$ સેમી હોય ત્યારે આ દર શોધો.

ઉકેલ : ગોલક માટે ઘનફળ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, જ્યાં r = ગોલકની ત્રિજ્યા છે.

$\therefore \dfrac{dV}{dr} = \frac{4}{3}\pi(3r^2) = 4\pi r^2$

$\therefore \left(\dfrac{dV}{dr}\right)_{r=3} = 4\pi \times 9 = 36\pi$ સેમી^{3}/સેમી

$\therefore$ જ્યારે ગોલકની ત્રિજ્યા 3 સેમી હોય ત્યારે ત્રિજ્યાને સાપેક્ષ તેના ઘનફળના બદલાવાનો દર 36π સેમી^{3}/સેમી છે.

ઉદાહરણ 2 : એક ગોલકના ઘનફળનો સમયને સાપેક્ષ બદલાવાનો દર 16π સેમી^{3}/સે છે. જ્યારે તેની ત્રિજ્યા 2 સેમી હોય ત્યારે તેના પૃષ્ઠફળનો સમયને સાપેક્ષ બદલાવાનો દર શોધો.

ઉકેલ : ગોલકનું ઘનફળ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, જ્યાં r ગોલકની ત્રિજ્યા છે.

ઘનફળમાં સમયને સાપેક્ષ ફેરફાર થાય છે.

તેથી r તથા V એ સમય t નાં વિધેય છે.

$\therefore \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{dV}{dr} \cdot \dfrac{dr}{dt} = \frac{4}{3}\pi \times 3r^2 \dfrac{dr}{dt}$

$= 4\pi r^2 \dfrac{dr}{dt}$

$\therefore 16\pi = 4\pi r^2 \dfrac{dr}{dt}$ $\left(\dfrac{dV}{dt} = 16\pi \text{ સેમી}^3\text{/સે}\right)$

$\therefore \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{4}{r^2}$ સેમી/સે

હવે ગોલકનું પૃષ્ઠફળ $S = 4\pi r^2$

$\therefore \dfrac{dS}{dt} = \dfrac{dS}{dr} \cdot \dfrac{dr}{dt}$

$= 8\pi r \dfrac{dr}{dt}$

$= 8\pi r \cdot \dfrac{4}{r^2}$

$= \dfrac{32\pi}{r}$

$= \dfrac{32\pi}{2} = 16\pi$ સેમી^{2}/સે $(r = 2)$

$\therefore \left(\dfrac{ds}{dt}\right)_{r=2} = 16\pi$ સેમી^{2}/સે

$\therefore$ ગોલકના પૃષ્ઠફળના બદલાવાનો દર $r = 2$ સેમી હોય ત્યારે 16π સેમી^{2}/સે છે.

ઉદાહરણ 3 : શાંત સરોવરમાં એક પથ્થર નાખવામાં આવે છે અને પાણીમાં વર્તુળાકાર વમળ સર્જાય છે. વર્તુળાકાર વમળો ત્રિજ્યાની 5 સેમી/સે ઝડપે આગળ વધે છે. જ્યારે ત્રિજ્યા 10 સેમી હોય ત્યારે આ વર્તુળોનું ક્ષેત્રફળ કેટલી ઝડપે વધે છે ?

ઉકેલ : વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ $A = \pi r^2$, જ્યાં r વર્તુળની ત્રિજ્યા છે.

$$\therefore \quad \frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$= 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

હવે $r = 10$ સેમી તથા $\frac{dr}{dt} = 5$ સેમી/સે

$\therefore \quad \frac{dA}{dt} = 2\pi \times 10 \times 5 = 100\pi$ સેમી^{2}/સે.

$\therefore$ વર્તુળાકાર વમળો દ્વારા ઘેરાયેલ ક્ષેત્રફળ 100π સેમી^{2}/સે ની ઝડપે વધે છે.

જો $\frac{dy}{dx} > 0$ હોય તો અને તો જ આપણે કહીએ કે જેમ x વધે છે તેમ y વધે છે.

તથા $\frac{dy}{dx} < 0$ હોય તો અને તો જ આપણે કહીએ છીએ કે જેમ x વધે છે તેમ y ઘટે છે.

આપણે આગળ વધતા(ઘટતા) વિધેયની સંકલ્પના જોઈશું. $\frac{dy}{dx} > 0$ તો y એ x નું વધતું વિધેય છે તથા $\frac{dy}{dx} < 0$ તો y એ x નું ઘટતું વિધેય છે.

ઉદાહરણ 4 : ગોળાકાર બલૂનમાં એવી રીતે હવા ભરવામાં આવે છે કે તેનું ઘનફળ 80 સેમી^{3}/સે ના દરથી વધે છે. જ્યારે તેનો વ્યાસ 32 સેમી હોય ત્યારે તેની ત્રિજ્યા કેટલા દરથી વધે છે ?

ઉકેલ : જો ગોલકની ત્રિજ્યા r હોય તો તેનું ઘનફળ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$\therefore \quad \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = \frac{4}{3}\pi(3r^2)\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

હવે $\frac{dV}{dt} = 80$ સેમી^{3}/સે, $r = \frac{32}{2} = 16$ સેમી

$$\therefore \quad 80 = 4\pi \cdot 256 \frac{dr}{dt}$$

$\therefore \quad \frac{dr}{dt} = \frac{5}{64\pi}$ સેમી/સે

$\therefore$ બલૂનની ત્રિજ્યા $\frac{5}{64\pi}$ સેમી/સે ના દરથી વધે છે.

ઉદાહરણ 5 : એક 5 મી લાંબી નિસરણી દિવાલે ટેકવી છે. સીડીનો નીચેનો છેડો જમીન પર દિવાલથી દૂર 3 સેમી/સેના દરથી દૂર લઈ જવામાં આવે છે. આ વખતે સીડીનો નીચલો છેડો દિવાલથી 4 મી દૂર છે. દિવાલ પર નિસરણીની ઊંચાઈ કેટલા દરથી ઘટે છે ?

ઉકેલ : ધારો કે નિસરણીની લંબાઈ l છે. A દિવાલ પર નિસરણીનું અંત્યબિંદુ છે. નિસરણી જમીનને C આગળ સ્પર્શે છે. $\overline{AB}$ દિવાલનો એક ભાગ દર્શાવે છે.

આકૃતિ 1.2 પરથી, $x^2 + y^2 = l^2$.

$$\therefore \quad 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

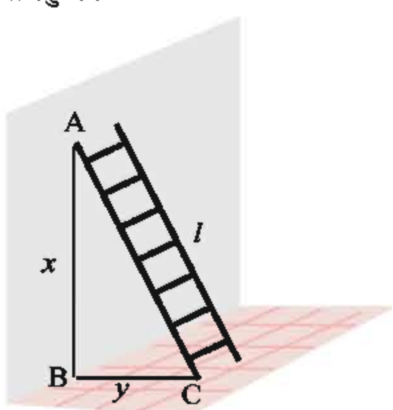
$$\therefore \quad x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0$$

હવે $l = 5$ મી, $y = 4$ મી

$$\therefore \quad x = \sqrt{l^2 - y^2}$$

$$= \sqrt{25 - 16}$$

$= 3$ મી



આકૃતિ 1.2

વળી $\frac{dy}{dt} = 3$ સેમી/સે (*t* વધે તેમ *y* વધતો હોવાથી $\frac{dy}{dt} > 0$ છે.)

$\therefore \quad \frac{dy}{dt} = 0.03$ મી/સે

$\therefore \quad 3\frac{dx}{dt} + 4(0.03) = 0$

$\therefore \quad \frac{dx}{dt} = -0.04$ (*t* વધે તેમ *x* ઘટતો હોવાથી $\frac{dx}{dt} < 0$ છે.)

$\therefore$ સીડીની ઊંચાઈ 4 સેમી/સેના દરથી ઘટે છે.

ઉદાહરણ 6 : વક્ર $y = x^3 + 7$ પર એવું બિંદુ શોધો જ્યાં આગળ *y* નો સમયને સાપેક્ષ બદલાવાનો દર એ *x* ના સમયને સાપેક્ષ બદલાવાના દર કરતાં 3 ગણો હોય અને શૂન્યેતર હોય.

ઉકેલ : $\frac{dy}{dt} = 3\frac{dx}{dt}$ (આપેલ છે.) (i)

$y = x^3 + 7$ આપેલ છે.

$\therefore \quad \frac{dy}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt}$ (ii)

$\therefore$ (i) અને (ii) પરથી $3\frac{dx}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt}$

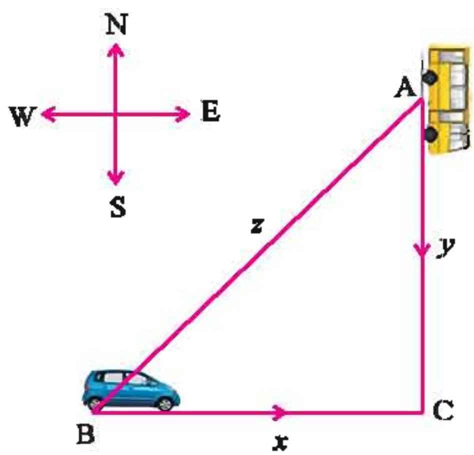
$\therefore \quad x^2 = 1$ $\left(\frac{dx}{dt} \neq 0\right)$

$\therefore \quad x = 1$ અથવા -1

$\therefore$ અનુરૂપ $y = 8, 6$

$\therefore$ વક્ર $y = x^3 + 7$ પરનાં બિંદુઓ $(1, 8)$ તથા $(-1, 6)$ આગળ *y* ના બદલાવાનો દર *x* ના બદલાવાના શૂન્યેતર દર કરતાં 3 ગણો છે.

ઉદાહરણ 7 : રાષ્ટ્રીય ધોરીમાર્ગ પર એક ગાડી પૂર્વ તરફ 60 કિમી/કલાકની ગતિથી જાય છે. એક કર્મી બસ દક્ષિણ તરફ 50 કિમી/કલાકની ઝડપે જાય છે. બંને આ રસ્તાના છેદ તરફ ગતિ કરી રહી છે. ગાડી આ જંક્શનથી 600 મી દૂર છે તથા બસ ત્યાંથી 800 મી દૂર છે. બંને ગાડીઓ એકબીજાની નજીક ક્યા દર થી જઈ રહી છે તે દર શોધો.



આકૃતિ 1.3

ઉકેલ : C બંને રસ્તાનું છેદબિંદુ છે. કોઈપણ સમયે B ગાડીની સ્થિતિ તથા A બસની સ્થિતિ દર્શાવે છે. ધારો કે કોઈ પણ સમયે $BC = x$ તથા $AC = y$. ગાડી તથા બસ વચ્ચેનું આ સમયે અંતર $AB = z$ છે.

આકૃતિ 1.3 પરથી $x^2 + y^2 = z^2$.

ગાડી તથા બસ એકબીજાની નજીક જતા હોવાથી *x* તથા *y* એ *t* નાં ઘટતા વિધેય છે.

આથી $\frac{dx}{dt} = -60$ કિમી / કલાક તથા $\frac{dy}{dt} = -50$ કિમી / કલાક

$x = 0.6$ કિમી તથા $y = 0.8$ કિમી

$\therefore \quad z = \sqrt{(0.6)^2 + (0.8)^2} = 1$ કિમી

હવે $x^2 + y^2 = z^2$

$\therefore \quad 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2z\frac{dz}{dt}$

$\therefore \quad \frac{dz}{dt} = \frac{1}{z}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$

$= \frac{1}{1}(0.6(-60) + 0.8(-50))$

$= -76$ કિમી/કલાક

$\therefore$ બસ તથા ગાડી 76 કિમી/કલાકની ઝડપે એકબીજાની નજીક જઈ રહ્યા છે.

ઉદાહરણ 8 : એક વસ્તુના x એકમ ઉત્પાદનનો ખર્ચ (રૂપિયામાં) સૂત્ર $C(x) = 0.005x^3 - 0.02x^2 + 10x + 10000$ દ્વારા મળે છે. જ્યારે 20 એકમનું ઉત્પાદન કરવામાં આવે ત્યારે સીમાંત ખર્ચ શોધો.

[સીમાંત ખર્ચ (Marginal cost) એટલે કુલ ખર્ચનો નિર્ગમ(Ouptut) x ને સાપેક્ષ દર]

ઉકેલ : $C(x) = 0.005x^3 - 0.02x^2 + 10x + 10000$

$\therefore$ સીમાંત ખર્ચ $\frac{dC}{dx} = (0.005)3x^2 - (0.02)2x + 10$

$\therefore \quad \left(\frac{dC}{dx}\right)_{x=20} = (0.005)1200 - (0.02)40 + 10$

$= 6 - 0.8 + 10$

$= 15.2$

$\therefore$ માંગેલ સીમાંત ખર્ચ ₹ 15.2 છે.

ઉદાહરણ 9 : એક વસ્તુના x એકમના વેચાણમાંથી થતી કુલ આવક $R(x) = 10x^2 + 20x + 1500$ દ્વારા મળે છે. $x = 5$ હોય ત્યારે સીમાંત આવક શોધો.

[સીમાંત આવક (Marginal revenue) એટલે વેચાયેલા કુલ એકમોને સાપેક્ષ કુલ આવકનો દર.]

ઉકેલ : $R(x) = 10x^2 + 20x + 1500$

$\therefore \quad \frac{dR}{dx} = 20x + 20$

$\therefore \quad \left(\frac{dR}{dx}\right)_{x=5} = 100 + 20 = 120$

$\therefore$ સીમાંત આવક ₹ 120 છે.

ઉદાહરણ 10 : એક સમઘનનું કદ 12 સેમી^{3}/સે ના દરથી વધે છે. જ્યારે ઘનની ધારની લંબાઈ 10 સેમી હોય ત્યારે તેના પૃષ્ઠફળના વધવાનો દર શોધો.

ઉકેલ : જો સમઘનની ધારની લંબાઈ x હોય તો તેનું ઘનફળ $V = x^3$.

$\therefore \quad \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt}$

$= 3x^2\frac{dx}{dt}$

પરંતુ $\frac{dV}{dt} = 12$ સેમી^{3}/સે

$\therefore \quad 12 = 3x^2\frac{dx}{dt}$

$\therefore \quad \frac{dx}{dt} = \frac{4}{x^2}$

હવે સમઘનનું પૃષ્ઠફળ $S = 6x^2$

$$\therefore \quad \frac{dS}{dt} = \frac{dS}{dx}\frac{dx}{dt}$$

$$= 12x\frac{dx}{dt}$$

$$= 12x \times \frac{4}{x^2}$$

$$= \frac{48}{x}$$

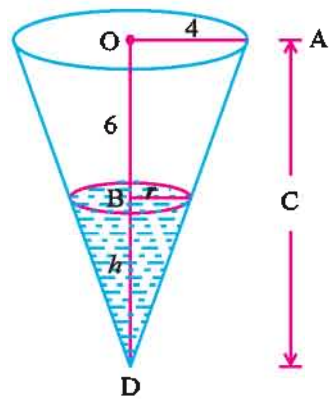
$$\therefore \quad \left(\frac{dS}{dt}\right)_{x = 10} = \frac{48}{10} \text{ સેમી}^2\text{/સે}$$

$\therefore$ સમઘનના પૃષ્ઠફળના વધવાનો દર 4.8 સેમી^{2}/સે છે.

ઉદાહરણ 11 : પાણીની એક ટાંકી ઊંધા શંકુ આકારની છે. તેના પાયાની ત્રિજ્યા 4 મી તથા ઊંચાઈ 6 મી છે. ટાંકીને સફાઈ માટે 2 મી^{3}/મિનિટના દરથી ખાલી કરવામાં આવી રહી છે. જ્યારે પાણીની ઊંડાઈ 3 મી હોય ત્યારે પાણીની સપાટીની ઊંચાઈ ઘટવાનો દર શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે કોઈપણ ક્ષણે પાણીથી બનતા શંકુની ઊંચાઈ તથા ત્રિજ્યા અનુક્રમે h તથા r છે.

ત્રિકોણોની સમરૂપતા પરથી, $\frac{OA}{BC} = \frac{OD}{BD}$



આકૃતિ 1.4

$$\therefore \quad \frac{4}{r} = \frac{6}{h}$$

$$\therefore \quad \frac{r}{h} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \quad r = \frac{2h}{3}$$

કોઈપણ ક્ષણ t સમયે ટાંકીમાં સમાયેલા પાણીનું કદ

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{4h^2}{9}\right)h$$

$$= \frac{4\pi h^3}{27}$$

$$\therefore \quad \frac{dV}{dt} = \frac{4\pi}{27}\left(3h^2\frac{dh}{dt}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{dV}{dt} = \frac{4\pi h^2}{9}\frac{dh}{dt}$$

$$\therefore \quad \frac{dh}{dt} = \frac{9}{4\pi h^2}\frac{dV}{dt}$$

પરંતુ $\frac{dV}{dt} = -2$ મી^{3}/મિનિટ (કદ ઘટે છે)

$$\therefore \quad \frac{dh}{dt} = \frac{9}{4\pi h^2}(-2)$$

$$\therefore \quad \left(\frac{dh}{dt}\right)_{h = 3} = \frac{-9}{2\pi(9)}$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \text{ મી/મિનિટ}$$

$\therefore$ પાણીની ઊંચાઈ $\frac{1}{2\pi}$ મી/મિનિટના દરે ઘટે છે.

સ્વાધ્યાય 1.1

1. એક સમઘનનું પૃષ્ઠફળ 12 સેમી^{2}/સે ના દરથી વધે છે. જ્યારે સમઘનની ધારની લંબાઈ 5 સેમી હોય ત્યારે તેના ઘનફળના વધવાનો દર શોધો.
2. જો શંકુની ઊંચાઈ અચળ હોય તો તેના ઘનફળનો ત્રિજ્યાને સાપેક્ષ બદલાવાનો દર શોધો.
3. જો શંકુની ઊંચાઈ અચળ હોય તો તેની વક્રસપાટીના ક્ષેત્રફળનો ત્રિજ્યાને સાપેક્ષ બદલાવાનો દર શોધો.
4. ગોલકનું કદ 8 સેમી^{3}/સે ના દરથી વધે છે. જ્યારે ત્રિજ્યા 4 સેમી હોય ત્યારે તેના પૃષ્ઠફળના વધવાનો દર શોધો.
5. એક બંધ અર્ધગોલકનું ઘનફળ 4 સેમી^{3}/સે ના દરથી વધે છે. જ્યારે તેની ત્રિજ્યા 4 સેમી હોય ત્યારે તેના પૃષ્ઠફળના વધવાનો દર શોધો.
6. એક નળાકારને એવી રીતે ગરમ કરવામાં આવે છે કે જેથી તેની ત્રિજ્યા હંમેશા તેની ઊંચાઈ કરતાં બમણી રહે છે. જ્યારે ત્રિજ્યા 3 સેમી હોય ત્યારે તેના ઘનફળના વધારાનો દર શોધો. ત્રિજ્યા વધવાનો દર 2 સેમી/સે છે. નળાકારના કુલ પૃષ્ઠફળના વધારાનો દર પણ આ સમયે શોધો.
7. શાંત સરોવરમાં એક પથ્થર નાખવામાં આવે છે અને 4 સેમી/સે ના દરથી વધતી ત્રિજ્યાવાળાં વમળો પેદા કરે છે. જ્યારે વમળની ત્રિજ્યા 10 સેમી હોય ત્યારે તેમનાથી ઘેરાયેલા ક્ષેત્રફળના વધારાનો દર શોધો.
8. લંબચોરસ આકારની એક તકતી વિસ્તરી રહી છે. તેની લંબાઈ x ના વધારાનો દર 1 સેમી/સે છે. તેની પહોળાઈ y, 0.5 સેમી/સે ના દરથી ઘટી રહી છે. જ્યારે $x = 4$ સેમી અને $y = 3$ સેમી હોય ત્યારે તકતીનાં (1) ક્ષેત્રફળ (2) પરિમિતિ (3) વિકર્ણના બદલાવાના દર શોધો.
9. 7.5 મી લાંબી એક સીડી દિવાલે ટેકવી છે. સીડી ભીંત પર 3 સેમી/સે ના દરથી સરકી રહી છે. જ્યારે સીડીનો નીચલો છેડો દિવાલથી 6 મી દૂર હોય ત્યારે સીડીની ઊંચાઈ ઘટવાનો દર શોધો.
10. સીમેન્ટ કોંક્રીટનું એક મિશ્રણ 8 સેમી^{3}/સેના દરથી જમીન પર પડી રહ્યું છે અને તેનાથી એક શંકુ બને છે. આ શંકુની ઊંચાઈ કોઈપણ ક્ષણે તેની ત્રિજ્યા કરતાં $\frac{1}{4}$ ગણી છે. જ્યારે ત્રિજ્યા 8 સેમી હોય ત્યારે શંકુની ઊંચાઈ વધવાનો દર શોધો.
11. એક વસ્તુના x એકમના ઉત્પાદનનો કુલ ખર્ચ (રૂપિયામાં)

    $C(x) = 0.005x^3 - 0.004x^2 + 20x + 1000$ દ્વારા મળે છે. $x = 10$ હોય ત્યારે સીમાંત ખર્ચ શોધો.
12. એક ઉત્પાદિત વસ્તુના x એકમના વેચાણથી મળતી કુલ આવક (રૂપિયામાં)

    $R(x) = 20x^2 + 15x + 50$ દ્વારા મળે છે. $x = 15$ હોય ત્યારે સીમાંત આવક શોધો.
13. 2 મી ઊંચો એક માણસ 4 મી/મિનિટના દરે પ્રકાશના સ્રોતથી દૂર જઈ રહ્યો છે. પ્રકાશના સ્રોતની જમીનથી ઊંચાઈ 6 મી છે. તેના પડછાયાની લંબાઈ કેટલી ઝડપથી બદલાઈ રહી છે ?
14. ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ 4 સેમી^{2}/સે ના દરથી વધી રહ્યું છે. તેના વેધની લંબાઈ 2 સેમી/સે ના દરથી વધી રહી છે. જ્યારે તેના વેધની લંબાઈ 20 સેમી હોય તથા ક્ષેત્રફળ 30 સેમી^{2} હોય ત્યારે તેના આધારની લંબાઈના બદલાવાનો દર શોધો.
15. એક ત્રિકોણની બે બાજુઓની લંબાઈ 4 મી તથા 5 મી (અચળ) છે. તેમની વચ્ચેના ખૂણાનું માપ 0.05 રેડિયન/સે ના દરે વધી રહ્યું છે. જ્યારે તેમની નિશ્ચિત બાજુઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\frac{\pi}{3}$ હોય ત્યારે ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળનો વધવાનો દર શોધો.

16. એક ત્રિકોણની બે બાજુઓનાં માપ 10 મી તથા 15 મી છે. તેમની વચ્ચેના ખૂણાનું માપ 0.01 રેડિયન/સેના દરે વધી રહ્યું છે. જ્યારે તેની 10 મી તથા 15 મી નિશ્ચિત લંબાઈની બાજુઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\frac{\pi}{3}$ હોય ત્યારે ત્રીજી બાજુ વધવાનો દર શોધો.

17. ગોળાકાર ફૂગ્ગાની ત્રિજ્યા 0.3 સેમી/સેના દરથી વધે છે. જ્યારે ત્રિજ્યા 5 સેમી હોય ત્યારે તેના પૃષ્ઠફળના વધવાનો દર શોધો.

18. જો $y = 3x - x^3$ તથા x પ્રતિસેકંડ 3 એકમના દરે વધે તો $x = 2$ હોય ત્યારે વક્રના ઢાળનો વધવાનો દર શોધો.

19. એક પદાર્થ વક્ર $y = x^3$ પર ગતિ કરે છે. વક્ર પરના જે બિંદુએ તેનો y-યામ એ સમયને સાપેક્ષ x-યામ કરતાં ત્રણ ગણા દરથી વધે તે બિંદુઓ શોધો.

20. $y^2 = 4x$ પરના જે બિંદુ આગળ x-યામ તથા y-યામ સમાન દરથી વધે છે તે બિંદુ શોધો.

*

1.3 વધતાં તથા ઘટતાં વિધેયો

આપણે ત્રીજા સિમેસ્ટરમાં જોયું કે $f(x) = a^x$, $a \in R^+$, $x \in R$ એ $a > 1$ માટે x નું વધતું વિધેય છે. એનો અર્થ એ કે જેમ x ની કિંમત વધે છે તેમ $f(x)$ ની કિંમત પણ વધે છે. આ અવલોકન આપણે $f(x) = a^x$ ના આલેખ પરથી કર્યું હતું. પરંતુ આ પદ્ધતિ હંમેશા બધાં વિધેયો માટે શક્ય પણ નથી કે અનુકૂળ પણ નથી. આથી આપણે તેના માટે એક કસોટી મેળવીશું.

$f(x) = 2x + 3$, $x \in R$ નો વિચાર કરીએ. દેખીતું જ છે કે,

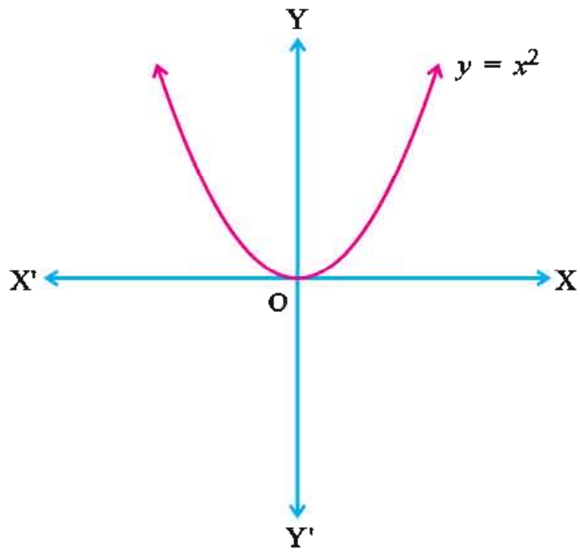
$$x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2$$
$$\Rightarrow 2x_1 + 3 < 2x_2 + 3$$
$$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2), \forall x_1, x_2 \in R$$

આમ, f એ R પર વધતું વિધેય છે.

આપણે જોયું છે કે $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ પર *sine* વધતું વિધેય છે. $f(x) = x^2$, $x \in R$ લઈએ. (આકૃતિ 1.5)

પહેલા ચરણમાં જેમ x વધે છે તેમ $f(x) = x^2$ વધે છે. જેમ x એ Y-અક્ષની જમણી બાજુ આગળ વધે છે તેમ y યામ વધતો જાય છે. પરંતુ Y-અક્ષની ડાબી બાજુ જેમ x વધે છે, તેમ y ઘટે છે.

હવે આપણે આ સંકલ્પના વિધિવત્ વ્યાખ્યાયિત કરીએ.



આકૃતિ 1.5

વ્યાખ્યા : ધારો કે (a, b) એ એક વિધેયના પ્રદેશનો ઉપગણ છે.

(1) **જો $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ તો આપણે એમ કહીએ છીએ કે f એ (a, b) પર વધતું વિધેય છે અને તેને સંકેતમાં $f\uparrow$ દ્વારા દર્શાવીએ છીએ.**

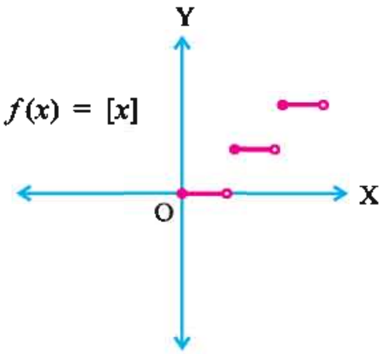
(2) **જો $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ તો f એ (a, b) પર ચુસ્ત વધતું વિધેય કહેવાય છે.**

(3) **જો $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ તો f એ (a, b) પર ઘટતું વિધેય કહેવાય છે અને તેને સંકેતમાં $f\downarrow$ દ્વારા દર્શાવાય છે.**

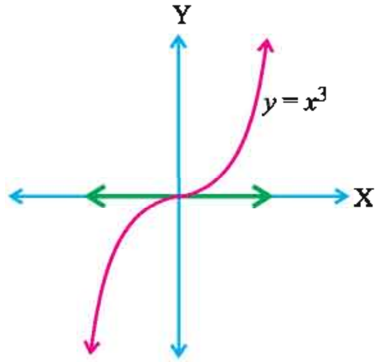
(4) **જો $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ તો f એ (a, b) પર ચુસ્ત ઘટતું વિધેય કહેવાય છે.**

જો f એ R ના પ્રત્યેક વિવૃત અંતરાલ પર વધતું (ઘટતું, ચુસ્ત વધતું, ચુસ્ત ઘટતું) વિધેય હોય તો તે R પર વધતું (અનુક્રમે ઘટતું, ચુસ્ત વધતું, ચુસ્ત ઘટતું) વિધેય કહેવાય છે. જો f નો પ્રદેશ D એ Rનો કોઈપણ ઉપગણ હોય તો D પર વધતા (ઘટતાં, ચુસ્ત વધતાં, ચુસ્ત ઘટતાં) વિધેય વિશે આ રીતે સમજણ આપી શકાય.

નીચેના આલેખ જુઓ :



આકૃતિ 1.6



આકૃતિ 1.7

આકૃતિ 1.6, [0, 1), [1, 2),...માં $f(x) = [x]$ નો આલેખ દર્શાવે છે. તે R માં વધતું વિધેય છે.

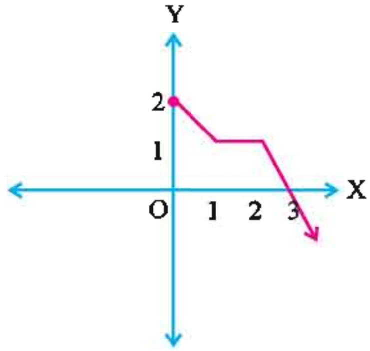
નોંધ : આપણે અવલોકન કરીએ કે વધતું વિધેય એટલે ખરેખર ઘટતું નહિ તેવું વિધેય એવો અર્થ થાય છે.

આકૃતિ 1.7 માં એક ચુસ્ત વધતા વિધેયનો આલેખ દર્શાવેલ છે.

આકૃતિ 1.8 એ $f(x) = \begin{cases} 2 - x & 0 \le x \le 1 \\ 1 & 1 < x < 2 \\ 3 - x & x \ge 2 \end{cases}$ નો આલેખ દર્શાવે છે.

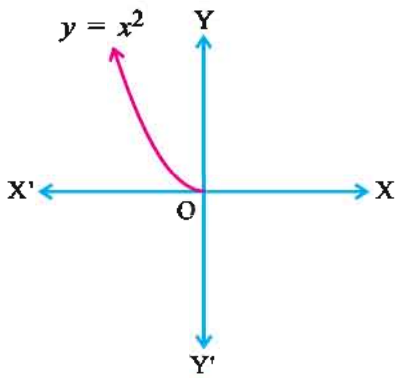
અહીં $x \ge 0$ માટે f ઘટતું વિધેય છે.

નોંધ : $1 < x < 2$ માટે f વધતું કે ઘટતું નહિ તેવું અચળ વિધેય છે.



આકૃતિ 1.8

$f(x) = x^2$, $x < 0$ ઘટતા વિધેયનો આલેખ દર્શાવે છે. (આકૃતિ 1.9)



આકૃતિ 1.9

કોઈ બિંદુ આગળ વધતું કે ઘટતું વિધેય :

ધારો કે વિવૃત અંતરાલ I એ વિધેય f ના પ્રદેશનો ઉપગણ છે. ધારો કે $x_0 \in$ I. ધારો કે $h > 0$ એટલો નાનો છે કે જેથી $(x_0 - h, x_0 + h) \subset$ I.

જો f એ $(x_0 - h, x_0 + h)$માં વધતું વિધેય હોય તો આપણે કહીએ છીએ f એ x_0 આગળ વધતુ વિધેય છે.

જો f એ $(x_0 - h, x_0 + h)$માં ઘટતું વિધેય હોય તો આપણે કહીએ છીએ f એ x_0 આગળ ઘટતું વિધેય છે.

જો f એ $(x_0 - h, x_0 + h)$માં ચુસ્ત વધતું વિધેય હોય તો આપણે કહીએ છીએ f એ x_0 આગળ ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

જો f એ $(x_0 - h, x_0 + h)$માં ચુસ્ત ઘટતું વિધેય હોય તો આપણે કહીએ છીએ f એ x_0 આગળ ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

જો પ્રત્યેક $x_0 \in$ I આગળ f વધતું વિધેય (ઘટતું, ચુસ્ત ઘટતું, ચુસ્ત વધતું) હોય તો f એ I પર વધતું (અનુક્રમે ઘટતું, ચુસ્ત ઘટતું, ચુસ્ત વધતું) વિધેય છે તેમ કહેવાય છે.

હવે આપણે વિધેય વધતું છે કે ઘટતું તે નક્કી કરવાની કેટલીક કસોટીઓ મેળવીશું.

પ્રમેય 1.1 : f એ $[a, b]$ પર સતત અને (a, b)માં વિકલનીય છે.

(1) જો પ્રત્યેક $x \in (a, b)$ માટે $f'(x) \geq 0$ તો f એ (a, b) માં વધતું વિધેય છે.

(2) જો પ્રત્યેક $x \in (a, b)$ માટે $f'(x) \leq 0$ તો f એ (a, b) માં ઘટતું વિધેય છે.

(3) જો પ્રત્યેક $x \in (a, b)$ માટે $f'(x) > 0$ તો f એ (a, b) માં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

(4) જો પ્રત્યેક $x \in (a, b)$ માટે $f'(x) < 0$ તો f એ (a, b) માં ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

(5) જો પ્રત્યેક $x \in (a, b)$ માટે $f'(x) = 0$ તો f એ (a, b) માં અચળ વિધેય છે.

સાબિતી : ધારો કે $x_1 \in (a, b), x_2 \in (a, b)$ તથા $x_1 < x_2$. f એ $[a, b]$ પર સતત અને (a, b) માં વિકલનીય હોવાથી $c \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$ મળે જેથી $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c), \quad \forall x_1, x_2 \in (a, b)$

(મધ્યકમાન પ્રમેય)

(1) પ્રત્યેક $x \in (a, b)$ માટે $f'(x) \geq 0$ હોવાથી $f'(c) \geq 0$ કારણકે $c \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$

$x_2 - x_1 > 0$ કારણ કે $x_1 < x_2$

$\therefore \quad f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0$

$\therefore \quad f(x_2) - f(x_1) \geq 0$

$\therefore \quad f(x_1) \leq f(x_2)$

$\therefore \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in (a, b)$

$\therefore$ f એ (a, b) પર વધતું વિધેય છે

(2) પ્રત્યેક $x \in (a, b)$ માટે $f'(x) \leq 0$ હોવાથી $f'(c) \leq 0$

$\therefore \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in (a, b),$

$\therefore$ f એ (a, b) પર ઘટતું વિધેય છે.

(3) પ્રત્યેક $x \in (a, b)$ માટે $f'(x) > 0$ હોવાથી $f'(c) > 0$

$\therefore \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in (a, b),$

$\therefore$ f એ (a, b) પર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

(4) પ્રત્યેક $x \in (a, b)$ માટે $f'(x) < 0$ હોવાથી $f'(c) < 0$

$\therefore \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in (a, b),$

$\therefore$ f એ (a, b) પર ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

(5) જો પ્રત્યેક $x \in (a, b)$ માટે $f'(x) = 0$ તો $f'(c) = 0$

$f(x_2) - f(x_1) = 0, \quad \forall x_1, x_2 \in (a, b)$

$\therefore \quad f(x_2) = f(x_1) \qquad \forall x_1, x_2 \in (a, b)$

$\therefore$ f એ (a, b) પર અચળ વિધેય છે.

નોંધ : અનિયત સંકલનમાં સ્વૈર અચળ કેવી રીતે આવ્યો હતો તે યાદ કરીએ.

પ્રમેય પહેલાની ટિપ્પણીઓ પરથી સ્પષ્ટ છે કે (a, b) માં $f'(x) \geq 0$ કે $f'(x) \leq 0$ તદ્દનુસાર f એ $[a, b]$માં વધતું વિધેય છે કે ઘટતું વિધેય છે.

આ જ પ્રકારની ટિપ્પણી ચુસ્ત વધતાં કે ચુસ્ત ઘટતાં વિધેયોને પણ લાગુ પડે છે.

ઉદાહરણ 12 : સાબિત કરો કે $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ માં *sine* વિધેય ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

ઉકેલ : $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$

જો $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ તો $\cos x > 0$.

$\therefore$ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ માં *sine* વિધેય ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

ઉદાહરણ 13 : સાબિત કરો કે $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ એ R પર ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

ઉકેલ : $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$

$\therefore$ $f'(x) = -2^{-x} \log 2 < 0$ કારણ કે $\log_e 2 > 0$ તથા $2^{-x} > 0$.

$\therefore$ f એ Rના કોઈપણ વિવૃત અંતરાલ (a, b) પર ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

$\therefore$ $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ એ R પર ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

ઉદાહરણ 14 : સાબિત કરો કે $f(x) = tanx, x \in R - \left\{(2k-1)\frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in Z\right\}$ એ પ્રત્યેક ચરણમાં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

ઉકેલ : $f(x) = tanx$

$\therefore$ $f'(x) = sex^2 x > 0$ $\quad\quad \forall x \in R - \left\{(2k-1)\frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in Z\right\}$.

$\therefore$ $f(x) = tanx$ એ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \ldots$ જેવા પ્રત્યેક અંતરાલમાં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

$\therefore$ $f(x) = tanx$ પ્રત્યેક ચરણમાં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

ઉદાહરણ 15 : સાબિત કરો કે $f: R \to R, f(x) = ax + b$ એ $a > 0$ માટે ચુસ્ત વધતું વિધેય છે તથા $a < 0$ માટે ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

ઉકેલ : $f(x) = ax + b$

$\therefore$ $f'(x) = a$

$\therefore$ જો $a > 0$ તો $f'(x) > 0$. તેથી f એ R પર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

$\therefore$ જો $a < 0$ તો $f'(x) < 0$. તેથી f એ R પર ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

ઉદાહરણ તરીકે $f(x) = 5x + 7$ ચુસ્ત વધતું વિધેય છે તથા $f(x) = -2x + 3$ ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

ઉદાહરણ 16 : સાબિત કરો કે $f(x) = x^3, x \in R$ એ R પર વધતું વિધેય છે.

ઉકેલ : $f'(x) = 3x^2 \geq 0$

$\therefore$ f એ R ના કોઈપણ અંતરાલ (a, b) પર વધતું વિધેય છે.

$\therefore$ f એ R પર વધતું વિધેય છે.

ઉદાહરણ 17 : સાબિત કરો કે $f: R \to R, f(x) = x^3 + 3x^2 + 5x$ એ R પર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

ઉકેલ : $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5x$

$$\begin{aligned} \therefore \quad f'(x) &= 3x^2 + 6x + 5 \\ &= 3x^2 + 6x + 3 + 2 \\ &= 3(x + 1)^2 + 2 > 0, \quad \forall x \in R \end{aligned}$$

$\therefore$ f એ R પર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

ઉદાહરણ 18 : R ના જે અંતરાલમાં $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 15$ ચુસ્ત વધતું અને જે અંતરાલમાં ચુસ્ત ઘટતું વિધેય હોય તે અંતરાલો નક્કી કરો.

ઉકેલ : $f(x) = x^2 - 6x + 15$

$\therefore \quad f'(x) = 2x - 6$

જો $x < 3$ હોય, તો $2x < 6$ અને તેથી $f'(x) < 0$.

$\therefore$ f એ અંતરાલ $(-\infty, 3)$ પર ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

જો $x > 3$ હોય તો, $2x > 6$ અને તેથી $f'(x) > 0$.

$\therefore$ f એ અંતરાલ $(3, \infty)$ પર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

ઉદાહરણ 19 : વિધેય $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, $f(x) = x^3 - 6x^2 - 36x + 2$ જે અંતરાલોમાં વધે છે અને જેમાં ઘટે છે તે અંતરાલો નક્કી કરો.

ઉકેલ : $f(x) = x^3 - 6x^2 - 36x + 2$

$\therefore \quad f'(x) = 3x^2 - 12x - 36$

$= 3(x^2 - 4x - 12)$

$= 3(x - 6)(x + 2)$

(1) જો $x < -2$ તો $x < 6$

$\therefore$ $x + 2 < 0$ તથા $x - 6 < 0$

$\therefore$ $f'(x) = 3(x - 6)(x + 2) > 0$

$\therefore$ f એ $(-\infty, -2)$માં વધતું વિધેય છે. (ખરેખર તો ચુસ્ત વધતું)

(2) જો $-2 < x < 6$ તો, $x + 2 > 0$ તથા $x - 6 < 0$

$\therefore$ $f'(x) = 3(x - 6)(x + 2) < 0$

$\therefore$ f એ $(-2, 6)$માં ઘટતું વિધેય છે.

(3) જો $x > 6$ તો, $x + 2 > 0$ તથા $x - 6 > 0$

$\therefore$ $f'(x) > 0$

$\therefore$ f એ $(6, \infty)$માં વધતું વિધેય છે.

ઉદાહરણ 20 : વિધેય $f(x) = tan^{-1}(sinx + cosx)$, $x \in (0, \pi)$ કયા અંતરાલમાં વધે છે અને કયા અંતરાલમાં ઘટે છે તે નક્કી કરો.

ઉકેલ : $f(x) = tan^{-1}(sinx + cosx)$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{1}{1 + (sinx + cosx)^2} \times (cosx - sinx)$$

$$= \frac{cosx - sinx}{1 + (sinx + cosx)^2}$$

(1) જો $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, તો $cosx > sinx$

$\left(cosx \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) \text{ અને } sinx \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$

વળી, $1 + (sinx + cosx)^2 > 0$

$\therefore$ $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ માટે $f'(x) > 0$.

$\therefore$ f એ $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ માં વધતું વિધેય છે.

(2) જો $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ તો $cosx < sinx$. આથી $cosx - sinx < 0$. વળી જો $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ તો $cosx < 0$, $sinx > 0$

$\therefore$ $cosx - sinx < 0$. $x = \frac{\pi}{2}$ માટે $cosx - sinx = 0 - 1 = -1 < 0$

$\therefore$ જો $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$, તો $f'(x) < 0$

$\therefore$ $\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$ માં f ઘટતું વિધેય છે.

ઉદાહરણ 21 : સાબિત કરો કે $f(x) = x^{100} + sinx - 1$ એ $x \in (0, \pi)$ પર વધતું વિધેય છે.

ઉકેલ : $f(x) = x^{100} + sinx - 1$

$\therefore$ $f'(x) = 100x^{99} + cosx$

જો $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, તો $x^{99} > 0$ તથા $cosx > 0$. તેથી $f'(x) > 0$.

$x = \frac{\pi}{2}$ માટે $x^{99} > 0$ તથા $cosx = 0$. તેથી $f'(x) > 0$.

જો $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $x^{99} > 1$ તથા $-1 < cosx < 0$.

$\therefore$ $f'(x) > 0$.

$\therefore$ f એ $(0, \pi)$ પર (ચુસ્ત) વધતું વિધેય છે.

ઉદાહરણ 22 : સાબિત કરો કે $f(x) = \log sinx$ એ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ માં વધતું વિધેય છે.

ઉકેલ : $f(x) = \log sinx$

$\therefore$ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ માં $f'(x) = \frac{1}{sinx} \times cosx = cotx > 0$.

$\therefore$ f એ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ માં વધતું વિધેય છે.

ઉદાહરણ 23 : વિધેય $f(x) = \frac{x}{\log x}$, $x > 1$ જે અંતરાલમાં વધે છે અથવા જે અંતરાલમાં ઘટે છે તે અંતરાલો નક્કી કરો.

ઉકેલ : $f(x) = \frac{x}{\log x}$

$\therefore$ $f'(x) = \frac{\log x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\log x)^2} = \frac{\log x - 1}{(\log x)^2}$

(1) જો $x < e$, તો $\log x < \log e = 1$

$\therefore$ $\log x - 1 < 0$. વળી $(\log x)^2 > 0$

$\therefore$ $f'(x) < 0$.

$\therefore$ f એ $(1, e)$ માં ઘટતું વિધેય છે. **$(x > 0)$**

(2) જો $x > e$, તો $\log x > 1$. આથી $\log x - 1 > 0$ અને $(\log x)^2 > 0$

$\therefore$ $f'(x) > 0$.

$\therefore$ f એ (e, ∞) માં વધતું વિધેય છે.

ઉદાહરણ 24 : સાબિત કરો કે $f(x) = \frac{tan x}{x}$ એ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ પર વધતું વિધેય છે.

ઉકેલ : $f(x) = \frac{tan x}{x} = \frac{sin x}{x cos x}$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{x cos x \cdot cos x - sin x\,(cos x - x sin x)}{(x cos x)^2}$$

$$= \frac{x(cos^2 x + sin^2 x) - sin x cos x}{(x cos x)^2}$$

$$= \frac{x - sin x\, cos x}{(x cos x)^2}$$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ હોવાથી $0 < sin\, x < x$ તથા $0 < cos\, x < 1$

$\therefore \quad 0 < sin x\, cos x < x$

$\therefore \quad x - sin x\, cos x > 0$. વળી $(x cos\, x)^2 > 0$

$\therefore \quad f'(x) > 0$

$\therefore \quad f$ એ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ માં વધતું વિધેય છે.

સ્વાધ્યાય 1.2

1. સાબિત કરો કે $cot : R - \{k\pi \mid k \in Z\} \to R$ પ્રત્યેક ચરણમાં ઘટતું વિધેય છે.
2. સાબિત કરો કે $(0, \pi)$ માં *cosine* ઘટતું વિધેય છે.
3. સાબિત કરો કે $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ માં *sec* વધતું વિધેય છે.
4. સાબિત કરો કે $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ માં *cosec* વધતું વિધેય છે.
5. સાબિત કરો કે $a > 1$ તો $f(x) = a^x$ વધતું વિધેય છે.
6. જો $x \in R^+$ તો $f(x) = \log_e x$ વધતું વિધેય છે તેમ સાબિત કરો.
7. **જે અંતરાલમાં f વધે છે કે ઘટે છે તે નક્કી કરો :**

(1) $f : R \to R, \quad f(x) = 3x + 7$

(2) $f : R \to R, \quad f(x) = 8 - 5x$

(3) $f : R \to R, \quad f(x) = x^2 - 2x + 5$

(4) $f : R \to R, \quad f(x) = 9 + 3x - x^2$

(5) $f : R \to R, \quad f(x) = x^3 + 3x + 10$

(6) $f : R \to R, \quad f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$

(7) $f : (0, \pi) \to R, \quad f(x) = sin\, x + cos\, x$

(8) $f : R \to R, \quad f(x) = -2x^3 - 9x^2 - 12x + 1$

(9) $f : R \to R, \quad f(x) = (x + 1)^3 (x - 3)^3$

(10) $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to R, \quad f(x) = \log\, cos x$

(11) $f : \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \to R, \quad f(x) = \log |\cos x|$

(12) $f : R - \{0\} \to R, \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

8. જો I વિવૃત અંતરાલ હોય અને $I \cap [-1, 1] = \emptyset$, તો સાબિત કરો કે $f(x) = x + \frac{1}{x}$ એ I પર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે

9. સાબિત કરો કે $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 100$ એ R પર વધતું વિધેય છે.

10. સાબિત કરો કે $f(x) = x^{100} + \sin x - 1$ એ (0, 1) પર વધતું વિધેય છે.

11. જે અંતરાલમાં $f(x) = \frac{3}{10}x^4 - \frac{4}{5}x^3 - 3x^2 + \frac{36}{5}x + 11$ વધતું વિધેય છે કે ઘટતું વિધેય છે તે અંતરાલો નક્કી કરો.

12. $f : R \to R, f(x) = \frac{4\sin x - 2x - x\cos x}{2 + \cos x}$ એ કયા અંતરાલમાં વધે છે અને કયા અંતરાલમાં ઘટે છે તે નક્કી કરો.

13. સાબિત કરો કે $f(x) = x^x, x \in R^+$ એ $x > \frac{1}{e}$ માટે વધતું વિધેય અને $0 < x < \frac{1}{e}$ માટે ઘટતું વિધેય છે.

14. જે અંતરાલોમાં $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ વધતું વિધેય છે કે ઘટતું વિધેય છે તે નક્કી કરો. $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

15. a ની જે કિંમતો માટે $x \in R$ માટે $f(x) = ax^3 - 3(a + 2)x^2 + 9(a + 2)x - 1$ ઘટતું વિધેય હોય તે કિંમતો શોધો.

16. a ની જે કિંમતો માટે $f(x) = ax^3 - 9ax^2 + 9x + 25$ એ R પર વધતું વિધેય હોય તે કિંમતો મેળવો.

17. સાબિત કરો $x > 0$ માટે $f(x) = (x - 1)e^x + 1$ વધતું વિધેય છે.

18. સાબિત કરો કે $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ પર $f(x) = x^2 - x\sin x$ વધતું વિધેય છે.

19. વિકલિત કસોટીનો ઉપયોગ કર્યા વગર અને માત્ર વ્યાખ્યાના આધારે સાબિત કરો કે $f : R \to R, f(x) = x^2$ એ $x \in R^+$ માટે વધતું વિધેય છે.

20. સાબિત કરો કે $f : R \to R, f(x) = 2^x + 2^{-x}$ એ $x \in (0, \infty)$ માટે વધતું વિધેય છે તથા $x \in (-\infty, 0)$ માટે ઘટતું વિધેય છે.

21. **જે અંતરાલોમાં નીચેનાં વિધેય ચુસ્ત વધે છે કે ચુસ્ત ઘટે છે તે નક્કી કરો :**

(1) $f : R \to R, \quad f(x) = x^3 - 6x^2 - 36x + 2$

(2) $f : R \to R, \quad f(x) = x^4 - 4x$

(3) $f : R \to R, \quad f(x) = (x - 1)(x - 2)^2$

(4) $f : R \to R, \quad f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x + 15$

(5) $f : R^+ \to R, \quad f(x) = x\sqrt{x+1}$

(6) $f : R^+ \to R, \quad f(x) = x^{\frac{1}{3}} (x + 3)^{\frac{2}{3}}$

(7) $f : (0, \pi) \to R, \quad f(x) = 2x + \cot x$

(8) $f : R \to R, \quad f(x) = 2\cos x + \sin^2 x$

(9) $f : R \to R, \quad f(x) = \log(1 + x^2)$

(10) $f : R \to R$, $f(x) = x^6 + 192x + 10$

(11) $f : R \to R$, $f(x) = xe^x$

(12) $f : R \to R$, $f(x) = x^2e^x$

(13) $f : R^+ \to R^+$, $f(x) = \frac{\log x}{\sqrt{x}}$

(14) $f : R^+ \to R^+$, $f(x) = x \log x$

*

1.4 ભૂમિતિમાં વિકલિતના ઉપયોગો

(1) સ્પર્શક અને અભિલંબ (Tangent and Normal) : આપણે જાણીએ છીએ કે જો $y = f(x)$ એ (a, b) માં વિકલનીય વિધેય હોય તો $f'(x_0)$ એ વક્ર $y = f(x)$ પરના $x_0 \in (a, b)$ માટે $(x_0, f(x_0))$ બિંદુ આગળ સ્પર્શકનો ઢાળ છે.

વક્ર $y = f(x)$ નો $(x_0, f(x_0))$ બિંદુ આગળનો સ્પર્શક (x_0, y_0)માંથી પસાર થતી તથા $f'(x_0)$ ઢાળવાળી રેખા છે, જ્યાં $y_0 = f(x_0)$. જો (x_0, y_0) આગળનો વક્રનો સ્પર્શક શિરોલંબ હોય તો તેને ઢાળ ન હોય.

જો સ્પર્શક શિરોલંબ ન હોય તો (x_0, y_0) આગળ વક્ર $y = f(x)$ ના સ્પર્શકનું સમીકરણ

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ છે. જો (x_0, y_0) આગળનો સ્પર્શક શિરોલંબ હોય તો તેનું સમીકરણ $x = x_0$ છે.

નોંધ : સ્પર્શક વક્રને ફરી છેદે તે શક્ય છે. $y = sinx, x \in R$ના સ્પર્શકો $y = 1$ તથા $y = -1$ આલેખને અનંત બિંદુઓમાં છેદે છે. (સ્પર્શે છે.)

વક્ર $y = f(x)$નો (x_0, y_0)આગળ અભિલંબ એ સ્પર્શકને બિંદુ (x_0, y_0) આગળની લંબરેખા છે. જો સ્પર્શક સમક્ષિતિજ ન હોય તો, $f'(x_0) \neq 0$. પરસ્પર લંબ રેખાઓના ઢાળ m_1, m_2 માટે $m_1 m_2 = -1$ હોવાથી (x_0, y_0) આગળ અભિલંબનો ઢાળ $-\frac{1}{f'(x_0)}$ છે.

$\therefore$ (x_0, y_0) આગળ અભિલંબનું સમીકરણ $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ છે. $(f'(x_0) \neq 0)$

જો $f'(x_0) = 0$ હોય તો (x_0, y_0) આગળના અભિલંબનું સમીકરણ $x = x_0$ છે. જો (x_0, y_0) આગળનો સ્પર્શક શિરોલંબ હોય તો (x_0, y_0) આગળના અભિલંબનું સમીકરણ $y = y_0$ છે.

ઉદાહરણ 25 : $y = x^3 - 2x + 4$ ના $(1, 3)$ બિંદુએ સ્પર્શક તથા અભિલંબના ઢાળ શોધો.

ઉકેલ : વક્રનું સમીકરણ $y = x^3 - 2x + 4$ છે.

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2$$

$$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x = 1} = 1$$

$\therefore$ $y = x^3 - 2x + 4$ પરના $(1, 3)$ બિંદુ આગળ સ્પર્શકનો ઢાળ 1 છે.

તથા અભિલંબ સ્પર્શકને લંબ હોવાથી $(1, 3)$ આગળ તેનો ઢાળ -1 છે. $(m_1m_2 = -1)$

ઉદાહરણ 26 : $x^2 + y^2 = a^2$ પરના (x_1, y_1) બિંદુ આગળ સ્પર્શક તથા અભિલંબનાં સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : વક્રનું સમીકરણ $x^2 + y^2 = a^2$ છે.

$\therefore \quad 2x + 2y\dfrac{dy}{dx} = 0$

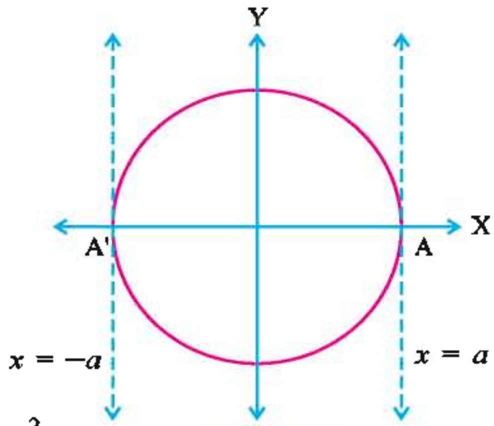
$\therefore \quad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$, જ્યાં $y \neq 0$.

$\therefore \quad (x_1, y_1)$ આગળ સ્પર્શકનું સમીકરણ

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1) \qquad (y_1 \neq 0)$$

$\therefore \quad yy_1 - {y_1}^2 = -xx_1 + {x_1}^2$

$\therefore \quad xx_1 + yy_1 = {x_1}^2 + {y_1}^2$



આકૃતિ 1.10

પરંતુ (x_1, y_1) વર્તુળ $x^2 + y^2 = a^2$ પર છે. તેથી ${x_1}^2 + {y_1}^2 = a^2$

$\therefore \quad x^2 + y^2 = a^2$ પરના (x_1, y_1) બિંદુએ સ્પર્શકનું સમીકરણ $xx_1 + yy_1 = a^2$ છે. $\qquad (y_1 \neq 0)$

જો $y_1 = 0$, તો વર્તુળ પર અનુરૂપ બે બિંદુઓ $A(a, 0)$ તથા $A'(-a, 0)$ મળે છે.

$\therefore$ આ બિંદુઓ A તથા A' આગળના સ્પર્શક શિરોલંબ છે તથા તેમનાં સમીકરણ અનુક્રમે $x = a$ તથા $x = -a$ છે.

સમીકરણ $xx_1 + yy_1 = a^2$ માં પણ $(x_1, y_1) = (a, 0)$ અથવા $(-a, 0)$ અનુક્રમે લેતાં,

$xa + 0 = a^2$ એટલે કે $xa = a^2$ અથવા $-xa = a^2$ મળે છે.

$\therefore$ A તથા A' આગળના સ્પર્શકો અનુક્રમે $x = a$ તથા $x = -a$ છે. $\qquad (a \neq 0)$

$\therefore \quad (x_1, y_1)$ આગળ $x^2 + y^2 = a^2$ ના સ્પર્શકનું સમીકરણ $xx_1 + yy_1 = a^2$ છે.

$x^2 + y^2 = a^2$ નો અભિલંબ $xx_1 + yy_1 = a^2$ ને લંબ છે તથા (x_1, y_1) માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore$ તેનું સમીકરણ $xy_1 - yx_1 = x_1y_1 - y_1x_1 = 0$ છે.

> (x_1, y_1) માંથી પસાર થતી $ax + by + c = 0$ ને લંબ રેખાનું સમીકરણ
> $bx - ay = bx_1 - ay_1$ છે.

$\therefore \quad (x_1, y_1)$ બિંદુએ $x^2 + y^2 = a^2$ ના અભિલંબનું સમીકરણ $xy_1 - yx_1 = 0$ છે. તે વર્તુળના કેન્દ્ર $(0, 0)$ માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore$ વર્તુળનો અભિલંબ ત્રિજ્યાને સમાવતી રેખા છે.

ઉદાહરણ 27 : $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ના $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ માટેના બિંદુએ સ્પર્શક તથા અભિલંબનાં સમીકરણ શોધો.

$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. $\qquad (a > 0)$

ઉકેલ : સૌપ્રથમ જુઓ કે $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (a\cos^3\theta)^{\frac{2}{3}} + (a\sin^3\theta)^{\frac{2}{3}}$

$$= a^{\frac{2}{3}}(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

$$= a^{\frac{2}{3}}$$

$\therefore \quad (a\cos^3\theta, a\sin^3\theta)$ એ $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ પર છે.

હવે, $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\dfrac{dy}{dx} = 0$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{-(a\sin^3\theta)^{\frac{1}{3}}}{(a\cos^3\theta)^{\frac{1}{3}}} = -\tan\theta$$

$\therefore$ બિંદુ $(a\cos^3\theta, a\sin^3\theta)$ આગળ સ્પર્શકનું સમીકરણ $y - a\sin^3\theta = -\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}(x - a\cos^3\theta)$ છે.

$\therefore \quad y\cos\theta - a\sin^3\theta\cos\theta = -x\sin\theta + a\sin\theta\cos^3\theta$

$\therefore \quad x\sin\theta + y\cos\theta \quad = a \sin\theta \cos\theta \, (\sin^2\theta + \cos^2\theta)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad = a \sin\theta \cos\theta$

$\therefore \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ માટે $(a\cos^3\theta, a\sin^3\theta)$ આગળ સ્પર્શકનું સમીકરણ

$$x\sin\theta + y\cos\theta = a\sin\theta \cos\theta \text{ છે.}$$

$\therefore \quad (a\cos^3\theta, a\sin^3\theta)$ આગળ અભિલંબનું સમીકરણ

$$\begin{aligned} x\cos\theta - y\sin\theta &= a\cos^3\theta \cos\theta - a\sin^3\theta \sin\theta \\ &= a(\cos^4\theta - a\sin^4\theta) \\ &= a(\cos^2\theta - \sin^2\theta)(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\ &= a\cos 2\theta \end{aligned}$$

$\therefore \quad (a\cos^3\theta, a\sin^3\theta)$ આગળ અભિલંબનું સમીકરણ $x\cos\theta - y\sin\theta = a\cos 2\theta$ છે.

નોંધ : યાદ કરીએ કે (x_1, y_1)માંથી $ax + by + c = 0$ ને લંબ રેખાનું સમીકરણ $bx - ay = bx_1 - ay_1$ છે.

ઉદાહરણ 28 : $y^2 = 4ax$ પરના $(at^2, 2at)$ બિંદુએ સ્પર્શક તથા અભિલંબનાં સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : વક્રનું સમીકરણ $y^2 = 4ax$ છે.

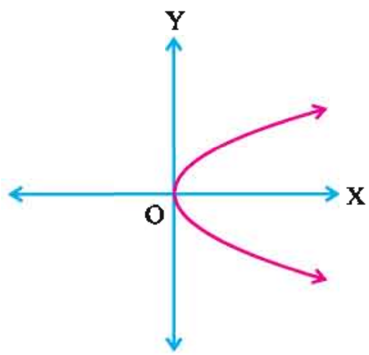
$\therefore \quad 2y \frac{dy}{dx} = 4a$

$\therefore \quad 2(2at) \frac{dy}{dx} = 4a$

$\therefore \quad$ જો $t \neq 0$, તો $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{t}$

$\therefore \quad (at^2, 2at)$ આગળ સ્પર્શકનું સમીકરણ,

$\quad y - 2at = \frac{1}{t}(x - at^2) \qquad (t \neq 0)$



આકૃતિ 1.11

$\therefore \quad ty - 2at^2 = x - at^2$

$\therefore \quad y^2 = 4ax$ પરના $(at^2, 2at)$ બિંદુએ સ્પર્શકનું સમીકરણ,

$\quad x - ty + at^2 = 0 \qquad (t \neq 0)$

$\therefore \quad (at^2, 2at)$ આગળ અભિલંબનું સમીકરણ $tx + y = t(at^2) + 2at$.

$\therefore \quad tx + y - 2at - at^3 = 0$ એ $(at^2, 2at)$ બિંદુએ $y^2 = 4ax$ ના અભિલંબનું સમીકરણ છે. $\quad (t \neq 0)$

જો $t = 0$ તો $(0, 0)$ આગળ સ્પર્શક શિરોલંબ છે અને તેનું સમીકરણ $x = 0$ છે. $t = 0$ આગળનો અભિલંબ $x = 0$ ને લંબ છે અને $(0, 0)$ માંથી પસાર થાય છે.

તેનું સમીકરણ $y = 0$ છે.

નોંધ : આ જ સમીકરણો સ્પર્શક તથા અભિલંબના વ્યાપક સમીકરણમાં $t = 0$ મૂકવાથી પણ મળે.

ઉદાહરણ 29 : $y = \sqrt{3x - 2}$ ના $4x - 2y + 5 = 0$ ને સમાંતર સ્પર્શકનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : $4x - 2y + 5 = 0$ નો ઢાળ $m = -\frac{a}{b} = -\frac{4}{-2} = 2$ છે.

$\therefore$ $y = \sqrt{3x-2}$ ના માંગેલ સ્પર્શકનો ઢાળ 2 છે.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 2 \qquad \text{(i)}$$

અહીં, $y = \sqrt{3x-2}$ એ વક્રનું સમીકરણ હોવાથી,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 \cdot 3}{2\sqrt{3x-2}} = 2 \qquad \text{((i) પરથી)}$$

$\therefore$ $9 = 16(3x - 2)$

ધારો કે (x_0, y_0) સ્પર્શબિંદુ છે.

$$\therefore \quad x_0 = \frac{1}{3}\left(\frac{9}{16}+2\right) = \frac{41}{48}, \quad y_0 = \sqrt{3 \times \frac{41}{48} - 2}$$

$$= \sqrt{\frac{41}{16} - 2} = \frac{3}{4}$$

$\therefore$ $\left(\frac{41}{48}, \frac{3}{4}\right)$ આગળ વક્રના સ્પર્શકનું સમીકરણ $y - \frac{3}{4} = 2\left(x - \frac{41}{48}\right)$ છે. $(m = 2)$

$\therefore$ $24y - 18 = 48x - 41$

$\therefore$ $y = \sqrt{3x-2}$ ના $4x - 2y + 5 = 0$ ને સમાંતર સ્પર્શકનું સમીકરણ $48x - 24y = 23$ છે.

[ચકાસો કે $48x - 24y = 23$ એ $4x - 2y + 5 = 0$ ને સમાંતર છે અને $4x - 2y + 5 = 0$ સાથે સંપાતી નથી.]

ઉદાહરણ 30 : $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ ના X-અક્ષ ને સમાંતર સ્પર્શકોનાં સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : વક્રનું સમીકરણ $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$

$$\therefore \quad 2x + 2y\frac{dy}{dx} - 2 = 0 \qquad \text{(i)}$$

સ્પર્શક X-અક્ષને સમાંતર હોવાથી તેનો ઢાળ 0 છે.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 0$$

$\therefore$ $2x - 2 = 0$ ((i) પરથી)

$\therefore$ $x = 1$

હવે, $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$

$\therefore$ $1 + y^2 - 2 - 3 = 0$

$\therefore$ $y^2 = 4$

$\therefore$ $y = \pm 2$

$\therefore$ $(1, 2)$ તથા $(1, -2)$ આગળ વર્તુળના સ્પર્શકોનાં સમીકરણ $y = \pm 2$ છે અને તે X-અક્ષને સમાંતર છે.

ઉદાહરણ 31 : $y = x^3 - 11x + 5$ પરનાં જે બિંદુએ સ્પર્શકનું સમીકરણ $y = x - 11$ હોય તે બિંદુ મેળવો

ઉકેલ : વક્રનું સમીકરણ $y = x^3 - 11x + 5$ છે.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 11 \qquad \text{(i)}$$

અહીં, $y = x - 11$ નો ઢાળ 1 છે.

$\therefore$ સ્પર્શકનો ઢાળ 1 છે.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 1$$

$\therefore$ $3x^2 - 11 = 1$ **((i) પરથી)**

$\therefore$ $3x^2 = 12$

$\therefore$ $x^2 = 4$

$\therefore$ $x = \pm 2$

$\therefore$ જો $x = 2$, તો $y = x^3 - 11x + 5 = -9$. જો $x = -2$, તો $y = x^3 - 11x + 5 = 19$

$\therefore$ સ્પર્શબિંદુ $(2, -9)$ અથવા $(-2, 19)$ હોઈ શકે.

$\therefore$ $(2, -9)$, આગળ સ્પર્શકનું સમીકરણ $y + 9 = 1(x - 2)$ છે. **(ઢાળ = 1)**

$\therefore$ $y = x - 11$.

$\therefore$ $(-2, 19)$ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ $y = x - 11$ ના હોઈ શકે કારણ કે $(-2, 19)$ એ $y = x - 11$ પર નથી.

$\therefore$ $(2, -9)$ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ $y = x - 11$ છે.

ઉદાહરણ 32 : સાબિત કરો કે $y = 7x^3 + 11$ ના $x = 2$ તથા $x = -2$ આગળના સ્પર્શકો પરસ્પર સમાંતર છે.

ઉકેલ : વક્રનું સમીકરણ $y = 7x^3 + 11$ છે.

$\therefore$ જો $x = \pm 2$ તો $\frac{dy}{dx} = 21x^2 = 84$

જો $x = 2$ તો $y = 7x^3 + 11 = 67$ તથા તે જ રીતે જો $x = -2$ તો $y = -45$.

$\therefore$ $(2, 67)$ તથા $(-2, -45)$ આગળના સ્પર્શકોનાં સમીકરણ અનુક્રમે

$y - 67 = 84(x - 2)$ તથા $y + 45 = 84(x + 2)$ છે. **($m = 84$)**

$\therefore$ $84x - y = 101$ તથા $84x - y + 123 = 0$ એ અનુક્રમે $(2, 67)$ તથા $(-2, -45)$ આગળના સ્પર્શકનાં સમીકરણો છે.

તેમના ઢાળ સમાન છે તથા બંને રેખાઓ ભિન્ન છે.

$\therefore$ તે સ્પર્શકો પરસ્પર સમાંતર છે.

ઉદાહરણ 33 : $x^2 = 4y$ ના $(1, 2)$માંથી પસાર થતાં અભિલંબનું સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : વક્રનું સમીકરણ $x^2 = 4y$ છે.

$\therefore$ $2x = 4\frac{dy}{dx}$

$\therefore$ $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2}$

$\therefore$ (x_0, y_0) આગળ અભિલંબનો ઢાળ $-\frac{2}{x_0}$ છે. **($x_0 \neq 0$)**

$\therefore$ સ્પર્શબિંદુ (x_0, y_0) આગળ અભિલંબનું સમીકરણ $y - y_0 = -\frac{2}{x_0}(x - x_0)$ **(i)**

આ અભિલંબ $(1, 2)$માંથી પસાર થાય તો $2 - y_0 = -\frac{2}{x_0}(1 - x_0)$

$\therefore$ $x_0\left(2 - \frac{x_0^2}{4}\right) = -2 + 2x_0$ **($x_0^2 = 4y_0$)**

$\therefore$ $8x_0 - x_0^3 = -8 + 8x_0$

$\therefore$ $x_0^3 = 8$

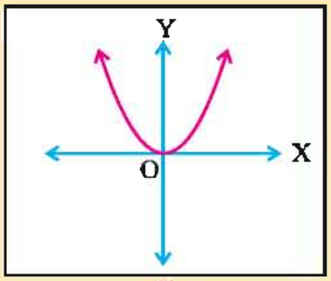
$\therefore$ $x_0 = 2$, $y_0 = \frac{x_0^2}{4} = 1$

$\therefore$ $(2, 1)$ આગળ અભિલંબનું સમીકરણ $y - 1 = -\frac{2}{2}(x - 2) = -x + 2$ છે. **((i) પરથી)**

$\therefore$ $x + y = 3$ એ $x^2 = 4y$ ના $(1, 2)$ માંથી પસાર થતા અભિલંબનું સમીકરણ છે.

નોંધ : (1) જો $x_0 = 0$, તો $y_0 = 0$. (x_0, y_0) આગળ અભિલંબનું સમીકરણ $x = 0$ છે. તે (1, 2)માંથી પસાર ન થાય.

(2) અહીં અભિલંબ (1, 2)માંથી પસાર થાય છે અને તે (1, 2) આગળનો અભિલંબ નથી, તે (2, 1) આગળનો અભિલંબ છે અને (1, 2) એ $x^2 = 4y$ પર નથી.



આકૃતિ 1.12

ઉદાહરણ 34 : સાબિત કરો કે $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ ના કોઈપણ સ્પર્શકના અક્ષો પરના અંતઃખંડોનો સરવાળો અચળ છે. $(c > 0)$, જ્યાં $x \neq 0$ અને $y \neq 0$.

ઉકેલ : વક્રનું સમીકરણ $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ છે.

$\therefore \quad \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{y}{x}}$ $\qquad (x \neq 0)$

$\therefore$ (x_1, y_1) આગળ સ્પર્શકનું સમીકરણ $y - y_1 = -\sqrt{\frac{y_1}{x_1}} (x - x_1)$

$\therefore \quad \frac{y}{\sqrt{y_1}} - \frac{y_1}{\sqrt{y_1}} = -\frac{x}{\sqrt{x_1}} + \frac{x_1}{\sqrt{x_1}}$ $\qquad (x_1 \neq 0, y_1 \neq 0)$

$\therefore \quad \frac{x}{\sqrt{x_1}} + \frac{y}{\sqrt{y_1}} = \sqrt{x_1} + \sqrt{y_1} = \sqrt{c}$ $\qquad$ ((x_1, y_1) એ $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ પર છે.)

$\therefore$ તે અક્ષોને $(\sqrt{x_1}\sqrt{c}, 0)$ તથા $(0, \sqrt{y_1}\sqrt{c})$ માં છેદે છે.

$\therefore$ અક્ષો પરના અંતઃખંડોનો સરવાળો
$$\sqrt{x_1}\sqrt{c} + \sqrt{y_1}\sqrt{c} = \sqrt{c}(\sqrt{x_1} + \sqrt{y_1}) = \sqrt{c}\sqrt{c} = c$$

$\therefore$ $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ના કોઈપણ સ્પર્શકના અક્ષો પરના અંતઃખંડનો સરવાળો અચળ છે.

નોંધ : જો $x_1 = 0$ અથવા $y_1 = 0$, તો વક્ર પરના બિંદુઓ $(0, c)$ અથવા $(c, 0)$ મળે. આ બિંદુઓ આગળના સ્પર્શકો અનુક્રમે $x = 0$ અને $y = 0$ છે. તેમને અંતઃખંડો ના મળે.

ઉદાહરણ 35 : સાબિત કરો કે $x = a\cos\theta + a\theta \sin\theta$, $y = a\sin\theta - a\theta \cos\theta$ પ્રચલ સમીકરણવાળા વક્રના કોઈ પણ અભિલંબનું ઊગમબિંદુથી અંતર અચળ છે. $\theta \neq \frac{k\pi}{2}, k \in Z$

ઉકેલ : $x = a\cos\theta + a\theta \sin\theta$ અને $y = a\sin\theta - a\theta \cos\theta$ હોવાથી,

$\frac{dx}{d\theta} = -a\sin\theta + a\sin\theta + a\theta \cos\theta = a\theta \cos\theta$

$\frac{dy}{d\theta} = a\cos\theta - a\cos\theta + a\theta \sin\theta = a\theta \sin\theta$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\qquad (\cos\theta \neq 0)$

$\therefore$ θ-બિંદુ આગળ અભિલંબનો ઢાળ $-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ છે. $\qquad (\sin\theta \neq 0)$

∴ θ-બિંદુ આગળ અભિલંબનું સમીકરણ $(y - a\sin\theta + a\theta\cos\theta) = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}(x - a\cos\theta - a\theta\sin\theta)$ છે.

∴ $y\sin\theta - a\sin^2\theta + a\theta\sin\theta\cos\theta = -x\cos\theta + a\cos^2\theta + a\theta\sin\theta\cos\theta$

∴ $x\cos\theta + y\sin\theta = a(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = a$

∴ $x\cos\theta + y\sin\theta = a$

તેનું ઊગમબિંદુથી લંબઅંતર p હોય, તો $p = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$= \frac{|-a|}{\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}}$

$= |a|$ જે અચળ છે.

(જો $\theta = \frac{k\pi}{2}$ હોય તો ?)

(2) બે વક્રો વચ્ચેના ખૂણાનું માપ :

બે છેદતાં વક્રો વચ્ચેના ખૂણાનું માપ તેમના છેદબિંદુ આગળ દોરેલા સ્પર્શકો વચ્ચેના ખૂણાના માપ તરીકે લેવાય છે.

એક પરિણામ : $x \in (a, b)$ તથા $y = f(x)$ તથા $y = g(x)$ એ બે વક્રોનાં સમીકરણો છે અને $f(x)$ તથા $g(x)$ એ (a, b) માં વિકલનીય છે. જો આ વક્રો એકબીજાને (x_0, y_0) આગળ છેદે તો તેમની વચ્ચેના ખૂણાનું માપ α નીચેના સૂત્ર દ્વારા અપાય છે. $x_0 \in (a, b)$.

$$\tan\alpha = \left|\frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0)g'(x_0)}\right|$$

સમજૂતી :

આપણે જાણીએ છીએ કે જો બે રેખાના ઢાળ m_1 તથા m_2 હોય તો તેમની વચ્ચેના ખૂણાનું માપ α નીચેના સૂત્રથી મળે છે :

$$\tan\alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

(x_0, y_0) બિંદુ આગળ સ્પર્શકોના ઢાળ અનુક્રમે $f'(x_0)$ તથા $g'(x_0)$ છે.

આથી $m_1 = f'(x_0)$ તથા $m_2 = g'(x_0)$. આથી ઉપરોક્ત પરિણામ મળે.

જો $f'(x_0)\, g'(x_0) = -1$, તો $\alpha = \frac{\pi}{2}$ અને આપણે કહીએ છીએ કે વક્રો લંબચ્છેદી છે.

જો $f'(x_0) = g'(x_0)$, તો વક્રો એકબીજાને (x_0, y_0) આગળ સ્પર્શે છે તેમ કહેવાય.

ઉદાહરણ 36 : સાબિત કરો કે પ્રત્યેક છેદબિંદુ આગળ $x^2 - y^2 = 5$ અને $4x^2 + 9y^2 = 72$ લંબચ્છેદી છે.

ઉકેલ : સૌ પ્રથમ આપણે બંને વક્રોનાં (લંબાતિવલય તથા ઉપવલય) છેદબિંદુ શોધીએ.

$x^2 - y^2 = 5,\ 4x^2 + 9y^2 = 72$ (i)

$x^2 - y^2 = 5$ પરથી, $4x^2 - 4y^2 = 20$ (ii)

(i) અને (ii) ઉકેલતાં $13y^2 = 52$

∴ $y^2 = 4$. તેથી, $y = \pm 2$

∴ $x^2 - 4 = 5$ $(x^2 - y^2 = 5)$

∴ $x^2 = 9$. તેથી, $x = \pm 3$

∴ છેદબિંદુઓના યામ $(3, 2), (3, -2), (-3, -2), (-3, 2)$ છે.

પ્રથમ વક્ર માટે $2x - 2y\frac{dy}{dx} = 0$

$x^2 - y^2 = 5$ ના (x, y)આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ m_1 હોય તો $m_1 = \frac{x}{y}$. $(y \neq 0)$

બીજા વક્ર માટે $8x + 18y\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore$ (x, y) આગળ $4x^2 + 9y^2 = 72$ ના સ્પર્શકનો ઢાળ $m_2 = -\frac{4x}{9y}$ $(y \neq 0)$

$\therefore$ $m_1m_2 = -\frac{4x^2}{9y^2} = -\frac{36}{36} = -1$

$\therefore$ પ્રત્યેક છેદબિંદુ આગળ વક્રો લંબચ્છેદી છે. (લંબાતિવલય અને ઉપવલય)

ઉદાહરણ 37 : સાબિત કરો કે વક્રો $y = ax^3$ તથા $x^2 + 3y^2 = b^2$ લંબચ્છેદી છે.

ઉકેલ : $y = ax^3$ માટે સ્પર્શકનો ઢાળ m_1 હોય તો $m_1 = \frac{dy}{dx} = 3ax^2$

$x^2 + 3y^2 = b^2$ પરથી $2x + 6y\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore$ $x^2 + 3y^2 = b^2$ ના સ્પર્શકનો ઢાળ m_2 હોય તો $m_2 = \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{3y}$

$\therefore$ $m_1m_2 = (3ax^2)\left(-\frac{x}{3y}\right) = -\frac{ax^3}{y} = -1$ કારણ કે છેદબિંદુ આગળ $y = ax^3$

$\therefore$ બંને વક્રો લંબચ્છેદી છે.

[બંને વક્રો છેદે છે જ કારણ કે $x^2 + 3y^2 = b^2$ માં $y = ax^3$ લેતાં $x^2 + 3a^2x^6 = b^2$ નો ઉકેલ છે.]

ઉદાહરણ 38 : વર્તુળો $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ તથા $x^2 + y^2 - 2y - 9 = 0$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.

ઉકેલ : વર્તુળોનાં સમીકરણ $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ તથા $x^2 + y^2 - 2y - 9 = 0$ છે.

$\therefore$ તેમના છેદબિંદુ આગળ $x^2 + y^2 = 4x + 1 = 2y + 9$.

$\therefore$ $4x - 2y = 8$

$\therefore$ $2x - y = 4$

$\therefore$ $y = 2x - 4$

$\therefore$ સમીકરણ $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ માં $y = 2x - 4$ મૂકતાં $x^2 + (2x - 4)^2 - 4x - 1 = 0$

$\therefore$ $5x^2 - 20x + 15 = 0$

$\therefore$ $x^2 - 4x + 3 = 0$

$\therefore$ $x = 3$ અથવા 1. તેમને અનુરૂપ અનુક્રમે $y = 2x - 4 = 2$ અથવા -2

$\therefore$ વર્તુળોનાં છેદબિંદુઓ $(3, 2)$ તથા $(1, -2)$ છે.

$x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ પરથી $2x + 2y\frac{dy}{dx} - 4 = 0$ તથા **(i)**

$x^2 + y^2 - 2y - 9 = 0$ પરથી $2x + 2y\frac{dy}{dx} - 2\frac{dy}{dx} = 0.$ **(ii)**

(1) (3, 2) આગળ : $6 + 4\frac{dy}{dx} - 4 = 0,\ 6 + 4\frac{dy}{dx} - 2\frac{dy}{dx} = 0$ **((i) તથા (ii) પરથી)**

$\therefore$ $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ ના સ્પર્શકનો ઢાળ $m_1 = -\frac{1}{2}$.

$x^2 + y^2 - 2y - 9 = 0$ ના સ્પર્શકનો ઢાળ $m_2 = -3$.

$\therefore$ $\tan\alpha = \left|\frac{-\frac{1}{2}+3}{1+\frac{3}{2}}\right| = 1$ $\left(\tan\alpha = \left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|\right)$

$\therefore$ $\alpha = \frac{\pi}{4}$

(2) (1, −2) આગળ : $2 - 4\frac{dy}{dx} - 4 = 0$ તથા $2 - 4\frac{dy}{dx} - 2\frac{dy}{dx} = 0$ **((i) તથા (ii) પરથી)**

$\therefore$ $m_1 = -\frac{1}{2},\ m_2 = \frac{1}{3}$

$\therefore$ $\tan\alpha = \left|\frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}}\right| = 1$

$\therefore \quad \alpha = \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ બંને છેદબિંદુ આગળ વક્રો વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\frac{\pi}{4}$ છે.

ઉદાહરણ 39 : વક્ર $x^2 - xy + y^2 = 3$ નો $(-1, 1)$ આગળનો અભિલંબ વક્રને ફરી ક્યાં છેદશે ?

ઉકેલ : $x^2 - xy + y^2 = 3$ એ વક્રનું સમીકરણ છે.

$\therefore \quad 2x - \left(x\frac{dy}{dx} + y\right) + 2y\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore \quad (-1, 1)$ આગળ $-2 - \left(-\frac{dy}{dx} + 1\right) + 2\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore \quad 3\frac{dy}{dx} = 3$

$\therefore \quad (-1, 1)$ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ $\frac{dy}{dx} = 1$.

તેથી, $(-1, 1)$ આગળ અભિલંબનો ઢાળ -1 છે.

$\therefore \quad (-1, 1)$ આગળ અભિલંબનું સમીકરણ $y - 1 = -1\,(x + 1)$ છે.

$\therefore \quad x + y = 0$ એ $(-1, 1)$ આગળ અભિલંબનું સમીકરણ છે.

છેદબિંદુઓ શોધવા માટે આપણે હવે,

$x + y = 0$ તથા $x^2 - xy + y^2 = 3$ ઉકેલીએ.

$y = -x$ મૂકતાં $x^2 - xy + y^2 = 3$ પરથી, $3x^2 = 3$

$\therefore \quad x = \pm 1$

હવે $x = -y$, હોવાથી અભિલંબનું વક્ર સાથેનું બીજું છેદબિંદુ $(1, -1)$ છે કારણકે $x \neq -1$ છે.
[$(-1, 1)$ આગળ અભિલંબ દોરવામાં આવ્યો છે એટલે કે તે અભિલંબનું પાદબિંદુ છે. આથી છેદબિંદુ માટે $x \neq -1$]

ઉદાહરણ 40 : સાબિત કરો કે $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a^2 \neq b^2)$ અને $xy = c^2$ લંબચ્છેદી બની શકે નહિ. $(c \neq 0)$

ઉકેલ : આપેલ વક્રો પૈકી એક વક્રનું સમીકરણ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ છે.

$\therefore \quad \frac{2x}{a^2} - \frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore \quad (x, y)$ આગળ વક્રના સ્પર્શકનો ઢાળ $m_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y}$ (કેમ $y \neq 0$)

બીજા વક્રનું સમીકરણ $xy = c^2$ છે.

$\therefore \quad x\frac{dy}{dx} + y = 0$

$\therefore \quad (x, y)$ આગળ વક્રના સ્પર્શકનો ઢાળ $m_2 = -\frac{y}{x}$

$\therefore \quad m_1m_2 = \left(\frac{b^2x}{a^2y}\right)\left(-\frac{y}{x}\right) = -\frac{b^2}{a^2} \neq -1$ કારણ કે $a^2 \neq b^2$.

$\therefore$ બંને વક્રો (અતિવલયો) લંબચ્છેદી બની શકે નહિ.

નોંધ : જો $a^2 = b^2$ તો બંને વક્રો લંબચ્છેદી છે. આથી લંબાતિવલય $x^2 - y^2 = a^2$ તથા $xy = c^2$ લંબચ્છેદી છે. એ ચકાસી શકાય કે વક્રો પરસ્પર છેદે છે.

સ્વાધ્યાય 1.3

1. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ પરના (x_1, y_1) બિંદુએ સ્પર્શકનું સમીકરણ મેળવો.
2. $y^2 = 4ax$ પરના (x_1, y_1) બિંદુએ સ્પર્શકનું સમીકરણ મેળવો.
3. $y = x^3 + 5x + 2$ પરના $(2, 20)$ બિંદુએ સ્પર્શકનો ઢાળ મેળવો.
4. $y^2 = 4x$ પર $(1, 2)$ બિંદુ આગળ અભિલંબનો ઢાળ મેળવો.
5. $y^2 = 16x$ ના $4x - y = 1$ ને સમાંતર સ્પર્શકનું સમીકરણ મેળવો.
6. $y^2 = 8x$ ના $2x - y - 1 = 0$ ને લંબ અભિલંબનું સમીકરણ મેળવો.
7. સાબિત કરો કે જો વક્રો $\frac{x^2}{a^2+\lambda_1} + \frac{y^2}{b^2+\lambda_1} = 1$ તથા $\frac{x^2}{a^2+\lambda_2} + \frac{y^2}{b^2+\lambda_2} = 1$ પરસ્પર છેદતાં હોય તો તે લંબચ્છેદી છે. $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$
8. સાબિત કરો કે $x = acos^3\theta$, $y = asin^3\theta$ પ્રચલ સમીકરણવાળા વક્રના કોઈ પણ સ્પર્શકના અક્ષો વચ્ચે કપાયેલા રેખાખંડની લંબાઈ અચળ છે.
9. સાબિત કરો કે $2x^2 + y^2 = 3$ તથા $y^2 = x$ લંબચ્છેદી છે.
10. સાબિત કરો કે $x^2 + y^2 = ax$ તથા $x^2 + y^2 = by$ લંબચ્છેદી છે.
11. (1) $y = sinx$ ના $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ મેળવો.

    (2) આ સ્પર્શક વક્રને ફરી ક્યાં છેદે છે ?
12. $x = cos\theta$, $y = sin\theta$ $\theta \in [0, 2\pi)$ પ્રચલ સમીકરણવાળા વક્ર પરના $\theta = \frac{\pi}{4}$ ને સંગત બિંદુએ સ્પર્શકનું સમીકરણ મેળવો.
13. $y = 4x^3 - 2x^5$ના ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતા સ્પર્શકનું સમીકરણ મેળવો.
14. બિંદુ $(2, 3)$ એ $y^2 = ax^3 + b$ પર છે. $(2, 3)$ આગળ આ વક્રના સ્પર્શકનો ઢાળ 4 છે. a અને b શોધો.
15. $xy + ax + by = 2$ પરના $(1, 1)$ બિંદુ આગળ સ્પર્શકનો ઢાળ 2 છે. a અને b મેળવો.
16. $x = a(\theta - sin\theta)$, $y = a(1 - cos\theta)$ના કોઈપણ સ્પર્શકનું સમીકરણ મેળવો
17. જો $8k^2 = 1$ તો પરવલય $y^2 = x$ અને લંબાતિવલય $xy = k$ લંબચ્છેદી છે તેમ સાબિત કરો.
18. $y = x - x^2$ નો $(1, 0)$ આગળનો અભિલંબ વક્રને ફરી ક્યાં છેદશે ?
19. જો $y = ax^2 + bx$ના $(1, 1)$ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ $y = 3x - 2$ હોય તો a તથા b મેળવો.
20. $x^3 + y^3 = 6xy$ પરના $(3, 3)$ બિંદુએ સ્પર્શકનું સમીકરણ મેળવો. કયા બિંદુઓએ સ્પર્શક સમક્ષિતિજ કે શિરોલંબ છે ?
21. સાબિત કરો કે $xy = c^2$, $c \neq 0$ તથા $x^2 - y^2 = k^2$ $k \neq 0$ એકબીજાને કાટખૂણે છેદે છે. (ઉદાહરણ 40 સાથે સરખાવો)
22. નીચેના વક્રો પરનાં આપેલ બિંદુઓએ સ્પર્શકનાં સમીકરણ શોધો :

    (1) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ $\quad\left(-5, \frac{9}{4}\right)$ આગળ

    (2) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$ $\quad(-1, 4\sqrt{2})$ આગળ

    (3) $y^2 = x^3(2 - x)$ $\quad(1, 1)$ આગળ

    (4) $y^2 = 5x^4 - x^2$ $\quad(1, 2)$ આગળ

    (5) $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$ $\quad(3, 1)$ આગળ
23. $x^2y^2 + xy = 2$ પરના જે બિંદુઓએ સ્પર્શકનો ઢાળ -1 હોય તેવાં બિંદુઓ શોધો.

24. નીચેના વક્રો વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.

(1) $y = x^2, y = (x - 2)^2$ **(2)** $x^2 - y^2 = 3, x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$

25. $y = cos(x + y)$ ના $x + 2y = 0$ ને સમાંતર સ્પર્શકોનાં સમીકરણ શોધો.

26. $y = \frac{1}{x-1}, x \neq 1$ ના $x + y + 7 = 0$ ને સમાંતર સ્પર્શકોનાં સમીકરણ શોધો.

27. સાબિત કરો $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$ એ $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 2$ ને પ્રત્યેક $n \in N - \{1\}$ માટે સ્પર્શે છે તથા સ્પર્શબિંદુના યામ (a, b) છે.

28. X અક્ષ એ $y = ax^3 + bx^2 + cx + 5$ ને $P(-2, 0)$ આગળ સ્પર્શે છે અને Y-અક્ષને Q આગળ છેદે છે. Q આગળ સ્પર્શકનો ઢાળ 3 છે. a, b, c મેળવો.

*

1.5 આસન્ન મૂલ્યો તથા વિકલ

ત્રુટિ : ધારો કે f એ (a, b) માં વિકલનીય વિધેય છે તથા $x \in (a, b), x + h \in (a, b)$. આપણે જાણીએ છીએ કે $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$.

$\therefore$ જો h 'ખૂબ નાનો' હોય તો,

$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + u(h)$ જ્યાં $u(h)$ એ h નું વિધેય છે તથા જેમ $h \to 0$ તેમ $u(h) \to 0$.

$\therefore$ $f(x + h) - f(x) = f'(x)h + u(h)h$.

ધારો કે $f(x + h) - f(x) = \Delta f(x)$ તથા $h = (x + h) - x = \Delta x$.

$\therefore$ અહીં x માં થતા 'નાના' પરિવર્તન Δx ને અનુરૂપ $\Delta f(x)$ એ $f(x)$ માં થતું 'નાનું' પરિવર્તન છે.

$\therefore$ $\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + u(\Delta x)\Delta x$

$f'(x)\Delta x$ ને $y = f(x)$ નો વિકલ કહે છે તથા તેને સંકેત dy દ્વારા દર્શાવાય છે. વળી, $\Delta f(x) = \Delta y$.

$\Delta y = dy + u(\Delta x)\Delta x$

$u(\Delta x)\Delta x$ તુલનાત્મક રીતે ઘણો નાનો હોવાથી તેને અવગણી શકાય. આથી આપણે કહીએ છીએ કે dy એ Δyનું આસન્ન મૂલ્ય છે.

$dy \simeq \Delta y$.

હવે $dy = f'(x)\Delta x$ **(i)**

વિધેય $y = x$ માટે $f'(x) = 1$.

$dx = 1 \cdot \Delta x$

$\therefore$ નિરપેક્ષ ચલ માટે $\Delta x = dx$.

$\therefore$ $dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$

$\therefore$ $f'(x) = \frac{(dy)}{(dx)}$

$\therefore$ $\frac{dy}{dx} = \frac{(dy)}{(dx)}$

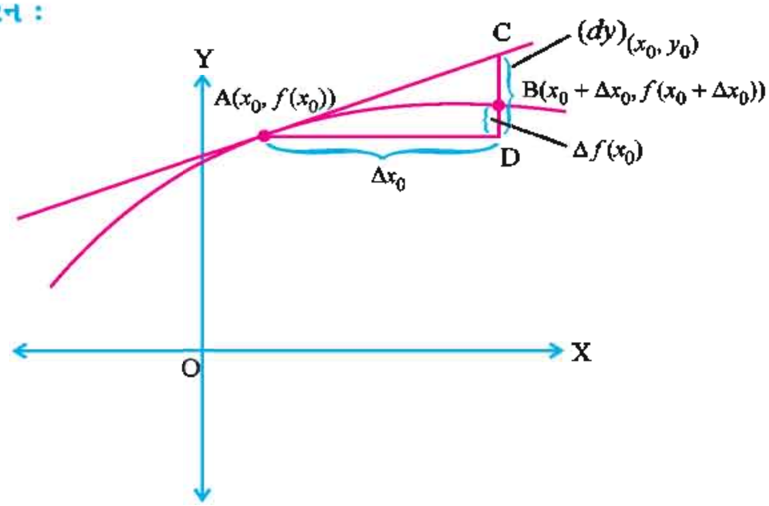
ડાબી બાજુમાં $y = f(x)$ નો વિકલિત દર્શાવ્યો છે, તે ગુણોત્તર નથી, પરંતુ જમણી બાજુએ આપણી પાસે y ના વિકલ તથા x ના વિકલનો ગુણોત્તર $\frac{(dy)}{(dx)}$ છે.

Δy એ $f(x)$ની ગણતરીમાં આવતી ત્રુટિ છે.

$\therefore \quad \Delta y \simeq dy = f'(x)dx.$

વળી, $f(x + \Delta x) \simeq f(x) + f'(x)\Delta x.$

વિકલનું ભૌમિતિક અર્થઘટન :



આકૃતિ 1.13

ધારો કે $A(x_0, f(x_0))$ એ વક્ર $y = f(x)$ પર બિંદુ છે.

$B(x_0 + \Delta x_0, f(x_0 + \Delta x_0))$ પણ વક્ર પરનું અન્ય બિંદુ છે. A આગળ વક્ર $y = f(x)$ ના સ્પર્શક પર B માંથી દોરેલ શિરોલંબ રેખા પર બિંદુ C આવેલ છે.

A આગળ વક્રના સ્પર્શકનું સમીકરણ $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ છે. ($f'(x_0)$ એ સ્પર્શકનો ઢાળ છે)

C માટે $x = x_0 + \Delta x_0$

$\therefore$ C નો y-યામ, $y = y_0 + (x_0 + \Delta x_0 - x_0)f'(x_0)$

$$= f(x_0) + f'(x_0)\Delta x_0$$

$$= f(x_0) + (dy)_{(x_0, y_0)}$$

CD = C નો y-યામ $- f(x_0) = (dy)_{(x_0, y_0)}$

$BD = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0) = \Delta f(x_0) = \Delta y_0$

$\therefore \quad CD = (dy)_{(x_0, y_0)}, \; BD = \Delta y_0$

$\therefore \quad BC = \left| \Delta y_0 - dy_{(x_0, y_0)} \right|$

હવે જેમ B વક્ર પર રહીને Aની નજીક અને વધુ નજીક જાય છે, તેમ BC $\to 0$. આથી $dy \simeq \Delta y$.

$\therefore \quad f(x_0 + \Delta x_0) \simeq f(x_0) + f'(x_0)\Delta x_0$ એ વક્ર $y = f(x)$ ના સ્પર્શકના ઉપયોગથી મળતી $x = x_0 + \Delta x_0$ આગળ $f(x)$ ની સુરેખ આસન્ન કિંમત છે.

આપણે નીચેનાં ઉદાહરણોમાં $f(x_0 + \Delta x_0) \simeq f(x_0) + f'(x_0)\Delta x_0$ પરથી $f(x_0 + \Delta x_0)$ નું આસન્ન મૂલ્ય મેળવીશું.

ઉદાહરણ 41 : $\sqrt{101}$ તથા $\sqrt{99}$નાં આસન્ન મૂલ્ય વિકલના ઉપયોગથી મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે $f(x) = \sqrt{x}$. $x \in R^+$

ધારો કે $x = 100$ અને $x + \Delta x = 101$ (આપણે $\sqrt{100}$ જાણીએ છીએ.)

તેથી $\Delta x = 1$. $(\Delta x = x + \Delta x - x = 101 - 100)$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{100}} = \frac{1}{20} = 0.05$

હવે $f(x + \Delta x) \simeq f(x) + f'(x)\,\Delta x$

$\therefore \quad f(101) \simeq f(100) + f'(100)\,\Delta x$

$= \sqrt{100} + (0.05)\,(1) = 10.05$

$\therefore$ $\sqrt{101}$નું આસન્ન મૂલ્ય 10.05 છે.

$\sqrt{99}$ શોધવા માટે $x = 100$ લો. $x + \Delta x = 99$, $\Delta x = -1$ $(\Delta x = 99 - 100 = -1)$

$\therefore \quad \sqrt{99} = f(99) \simeq f(100) + f'(100)\,\Delta x$

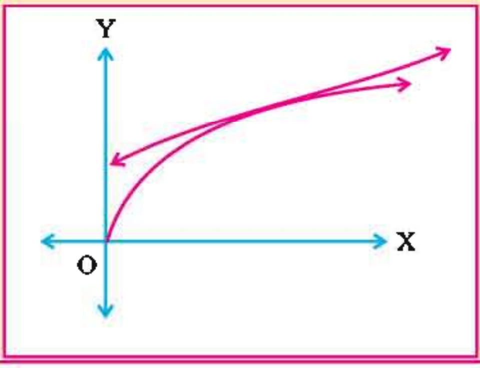
$= \sqrt{100} + (0.05)(-1)$

$= 10 - 0.05 = 9.95$

$\sqrt{99}$નું આસન્ન મૂલ્ય 9.95 છે.

x	આસન્ન મૂલ્ય	ખરેખર સન્નિકટ કિંમત
$\sqrt{101}$	10.05	10.0498756....
$\sqrt{99}$	9.95	9.94987437....
$\sqrt{102}$	10.1	10.0995049....
$\sqrt{98}$	9.9	9.89949483....

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે જેમ $\Delta x \to 0$, તેમ તેમ આસન્ન મૂલ્ય સાચી કિંમતની વધુ ને વધુ નજીક જાય છે. અહીં ખરેખરી કિંમત આસન્ન મૂલ્ય કરતાં નાની જ છે કારણ કે સ્પર્શક $y = \sqrt{x}$ એટલે કે $y^2 = x$ ના આલેખની ઉપર રહે છે.



ઉદાહરણ 42 : $(65)^{\frac{1}{3}}$ નું આસન્ન મૂલ્ય શોધો.

[**નોંધ :** હવેથી આપણે 'વિકલનના ઉપયોગથી' એવા શબ્દસમૂહનો ઉપયોગ કરીશું નહિ, પરંતુ તે ગર્ભિત છે.]

ઉકેલ : ધારો કે $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$. $x \in R^+$

$x = 64$, $x + \Delta x = 65$. તેથી $\Delta x = 1$

$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3(64)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{48}$. વળી $\Delta f(x) \simeq f'(x)\,\Delta x = \frac{1}{48}\,(1) = \frac{1}{48}$

$\therefore\ (65)^{\frac{1}{3}} \simeq (64)^{\frac{1}{3}} + \Delta f(x) \simeq 4 + \frac{1}{48} = \frac{193}{48}$

$\therefore\ (65)^{\frac{1}{3}}$નું આસન્ન મૂલ્ય $\frac{193}{48}$ છે.

ઉદાહરણ 43 : $tan\ 46^{\circ}$નું આસન્ન મૂલ્ય મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે $f(x) = tan x$ તથા $x = \frac{\pi}{4}$. $x \in R - \left\{(2k-1)\frac{\pi}{2} / k \in Z\right\}$ $\left(45^{\circ} = \frac{\pi}{4}^{R}\right)$

$\Delta x = 1 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{180}^{R}$

$\therefore\quad f'(x) = sec^2 x = (\sqrt{2})^2 = 2$

$\therefore \quad \Delta f(x) \simeq f'(x)\,\Delta x = 2 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{90}$

$\therefore \quad tan46^{\circ} \simeq tan45^{\circ} + \Delta f(x)$

$\simeq 1 + \frac{\pi}{90}$

$\therefore$ $tan\,46^{\circ}$નું આસન્ન મૂલ્ય $1 + \frac{\pi}{90}$ છે.

ઉદાહરણ 44 : (1) $cos^{-1}\,(-0.49)$ (2) $sec^{-1}\,(-2.01)$નાં આસન્ન મૂલ્ય મેળવો.

ઉકેલ : (1) ધારો કે $f(x) = cos^{-1}x,\ x \in [-1, 1],\ x = -0.5,\ \Delta x = 0.01$

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = -\frac{2}{\sqrt{3}},\quad \Delta f(x) \simeq f'(x)\,\Delta x = -\frac{1}{50\sqrt{3}}$$

$\therefore \quad cos^{-1}\,(-0.49) \simeq cos^{-1}\,(-0.5) + \Delta f(x)$

$= \pi - cos^{-1}\,(0.5) + \Delta f(x)$

$\simeq \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{50\sqrt{3}}$

બીજી રીત : ધારો કે $f(x) = cos^{-1}x,\ x \in [-1, 1],\ x = 0.5,\ \Delta x = -0.01$

$\therefore \quad cos^{-1}\,(-0.49) = \pi - cos^{-1}\,(0.49)$

$\simeq \pi - (cos^{-1}\,(0.5) + f'(x)\,\Delta x)$

$= \pi - \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)(-0.01)$

$= \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{50\sqrt{3}}$

$\therefore$ $cos^{-1}(-0.49)$ નું આસન્ન મૂલ્ય $\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{50\sqrt{3}}$ છે.

(2) ધારો કે $f(x) = sec^{-1}x,\ |x| \geq 1.\ x = 2,\ \Delta x = 0.01$

$$f'(x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2\sqrt{3}},\ \Delta f(x) \simeq f'(x)\,\Delta x = \frac{1}{200\sqrt{3}}$$

$\therefore \quad sec^{-1}\,(-2.01) = \pi - sec^{-1}\,(2.01)$

$\simeq \pi - (sec^{-1}2 + f'(x)\,\Delta x)$

$= \pi - \left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{200\sqrt{3}}\right)$

$= \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{200\sqrt{3}}$

$\therefore$ $sec^{-1}\,(-2.01)$નું આસન્ન મૂલ્ય $\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{200\sqrt{3}}$ છે.

ઉદાહરણ 45 : આસન્ન મૂલ્ય શોધો (1) $\log_e 10.01$ (2) $\log_{10} 10.1$ (3) $\log_e(e + 0.1)$

($\log_{10}e = 0.4343,\ \log_e 10 = 2.3026$)

ઉકેલ : (1) ધારો કે $f(x) = \log_e x,\ x \in R^+$

ધારો કે $x = 10,\ \Delta x = 0.01,\ f'(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{10} = 0.1$

$\therefore \quad \Delta f(x) \simeq f'(x)\,\Delta x = 0.001$

$\therefore \quad \log_e(10.01) \simeq \log_e 10 + f'(x)\,\Delta x$

$= 2.3026 + 0.001$

$= 2.3036$

$\therefore$ $\log_e(10.01)$નું આસન્ન મૂલ્ય 2.3036 છે.

(ખરેખર તો $\log_e 10.01 = 2.30358459....$)

(2) ધારો કે $f(x) = \log_{10}x = \frac{\log_e x}{\log_e 10} = \log_e x \cdot \log_{10}e, \ \ x \in R^+$

$= (0.4343) \log_e x$

ધારો કે $x = 10, \ \Delta x = 0.1$

$\therefore \quad f'(x) = \frac{0.4343}{x} = \frac{0.4343}{10} = 0.04343$

$\therefore \quad \Delta f(x) \simeq f'(x)\,\Delta x = (0.04343)\,(0.1) = 0.004343$

$\therefore \quad \log_{10}(10.1) \simeq \log_{10}10 + f'(x)\,\Delta x$

$= 1.004343$

$\therefore$ $\log_e(10.1)$નું આસન્ન મૂલ્ય 1.004343 છે.

(ખરેખર તો $\log_{10}(10.1) = 1.00432137....$)

(3) ધારો કે $f(x) = \log_e x, \ \ x \in R^+$. $x = e, \ \Delta x = 0.1$

$\therefore \quad f'(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{e}, \ \ \Delta f(x) \simeq f'(x)\,\Delta x = \frac{(0.1)}{(e)} = \frac{1}{10e}$

$\therefore \quad \log_e(e + 0.1) \simeq \log_e e + f'(x)\,\Delta x$

$= 1 + \frac{1}{10e} = 1.03678794$

$\therefore$ $\log_e(e + 0.1)$નું આસન્ન મૂલ્ય $1 + \frac{1}{10e}$ છે.

(ખરેખર કિંમત 1.0361274....)

ઉદાહરણ 46 : ગોલકની ત્રિજ્યાના માપનમાં x% ત્રુટિ પ્રવેશે તો તેના ઘનફળ તથા પૃષ્ઠફળના માપનમાં આશરે કેટલી ત્રુટિ પ્રવેશે ?

ઉકેલ : ગોલકની ત્રિજ્યાના માપનમાં x % ત્રુટિ છે.

$\therefore \quad \Delta r = \frac{xr}{100}$.

ગોલકનું ઘનફળ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$\therefore \quad \frac{dV}{dr} = \frac{4}{3}\pi(3r^2) = 4\pi r^2$

$\therefore$ ઘનફળ V માં ત્રુટિ ΔV નું આસન્ન મૂલ્ય $= \frac{dV}{dr}\Delta r$

$= 4\pi r^2 \cdot \frac{xr}{100}$

$= \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \frac{3x}{100} = \frac{3xV}{100}$

$\therefore$ ગોલકના ઘનફળમાં પ્રવેશતી ત્રુટિનું આસન્ન મૂલ્ય $3x$ % છે.

ગોલકનું પૃષ્ઠફળ $S = 4\pi r^2$

$\therefore \quad \frac{dS}{dr} = 8\pi r$

$\therefore$ પૃષ્ઠફળ S માં ત્રુટિ ΔS નું આસન્ન મૂલ્ય $= \frac{dS}{dr}\Delta r$

$= 8\pi r \cdot \frac{xr}{100}$

$= 2(4\pi r^2)\frac{x}{100}$

$= \frac{2xS}{100}$

$\therefore$ પૃષ્ઠફળની ગણતરીમાં પ્રવેશતી ત્રુટિનું આસન્ન મૂલ્ય $2x$ % છે.

ઉદાહરણ 47 : ગોલકની ત્રિજ્યા 7 મી છે અને તેના માપનમાં 0.02 મી જેટલી ત્રુટિ છે. ગોલકના ઘનફળમાં આશરે કેટલી ત્રુટિ આવશે ?

ઉકેલ : ગોલકનું ઘનફળ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$r = 7$ મી, $\Delta r = 0.02$ મી

$\therefore \quad \frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$

$$\therefore \quad \Delta V \simeq \frac{dV}{dr}\Delta r$$

$$= 4\pi r^2 \cdot \Delta r$$

$$= 4\pi(49)(0.02)$$

$$= 3.92\ \pi \text{ મી}^3$$

$\therefore$ ગોલકના ઘનફળમાં આશરે $3.92\ \pi$ મી^{3} ત્રુટિ પ્રવેશશે.

ઉદાહરણ 48 : જ્યારે સમઘનની બાજુ x સેમી હોય તથા બાજુની લંબાઈમાં 2 % નો વધારો થાય તો, તેના પૃષ્ઠફળમાં આશરે કેટલા ટકા વધારો થાય ?

ઉકેલ : સમઘનનું પૃષ્ઠફળ $S = 6x^2$, $\Delta x = \frac{2x}{100}$

$\therefore \quad \frac{dS}{dx} = 12x$

$$\therefore \quad \Delta S \simeq \frac{dS}{dx}\Delta x$$

$$= 12x \cdot \frac{2x}{100}$$

$$= \frac{4(6x^2)}{100} = \frac{4S}{100}$$

$\therefore$ સમઘનના પૃષ્ઠફળમાં પ્રવેશતી ત્રુટિનું આસન્ન મૂલ્ય 4 % છે.

ઉદાહરણ 49 : નિશ્ચિત ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળમાં અંતર્ગત ત્રિકોણ માટે સાબિત કરો કે $\frac{da}{\cos A} + \frac{db}{\cos B} + \frac{dc}{\cos C} = 0$ જ્યાં da, db, dc એ બાજુઓની લંબાઈમાં 'નાની' ત્રુટિ છે.

ઉકેલ : *sine* સૂત્ર પ્રમાણે $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

$a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$, જ્યાં R અચળ છે.

$\therefore \quad \frac{da}{dA} = 2R\cos A, \frac{db}{dB} = 2R\cos B, \frac{dc}{dC} = 2R\cos C$

$\therefore \quad da = \frac{da}{dA}\Delta A = 2R\cos A\ \Delta A$ વગેરે

$$\therefore \quad \frac{da}{\cos A} + \frac{db}{\cos B} + \frac{dc}{\cos C} = 2R(\Delta A + \Delta B + \Delta C)$$

$$= 2R(\Delta(A + B + C))$$

$$= 2R\ \Delta(\pi)$$

$$= 0$$

$$\therefore \quad \frac{da}{\cos A} + \frac{db}{\cos B} + \frac{dc}{\cos C} = 0$$

ઉદાહરણ 50 : એક વર્તુળાકાર તકતીને ગરમ કરતાં તેની ત્રિજ્યામાં થતો વધારો 0.1 સેમી છે. જ્યારે તેની ત્રિજ્યા 5 સેમી હોય ત્યારે તેના ક્ષેત્રફળમાં આશરે કેટલો વધારો થશે ?

ઉકેલ : વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ $A = \pi r^2$

$\therefore \quad \frac{dA}{dr} = 2\pi r$

$\therefore \quad \Delta A \simeq \frac{dA}{dr}\Delta r = 2\pi r\,\Delta r = 2\pi(5)(0.1)$

$\therefore$ ΔA નું આસન્ન મૂલ્ય $= \pi$ સેમી^{2}

$\therefore$ ક્ષેત્રફળનાં વધારાનું આસન્ન મૂલ્ય π સેમી^{2} છે.

ઉદાહરણ 51 : જો $y = f(x) = cosx$, હોય તો, તેનો વિકલ dy મેળવો અને $x = \frac{\pi}{6}$ તથા $\Delta x = 0.01$ હોય ત્યારે dy મેળવો.

ઉકેલ : $f(x) = cosx$

$\therefore$ $f'(x) = -sinx$. તેથી $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} = -0.5$

$\therefore \quad dy = f'(x)\,\Delta x = (-0.5)(0.01)$

$\therefore \quad dy = -0.005$

ઉદાહરણ 52 : સાબિત કરો કે h 'ખૂબ નાનો' હોય તો $sinh \simeq h$.

ઉકેલ : ધારો કે $f(x) = sinx$, $x = 0$, $x + \Delta x = h$

$\therefore \quad f'(x) = cosx = cos0 = 1$

$\therefore \quad f(x + \Delta x) \simeq f(x) + f'(x)\,\Delta x$

$\therefore \quad f(h) \simeq f(0) + f'(0)\,h \qquad (h = \Delta x)$

$\therefore \quad sinh \simeq sin0 + cos0 \cdot h$

$\therefore \quad sinh \simeq h$

$\therefore$ h ખૂબ નાનો હોય તો $sinh$ નું આસન્ન મૂલ્ય h છે.

સ્વાધ્યાય 1.4

નીચેનાં આસન્ન મૂલ્ય શોધો. (1 to 12) :

1. $\sqrt{0.37}$	2. $(0.999)^{\frac{1}{10}}$	3. $(80)^{\frac{1}{4}}$	4. $(255)^{\frac{1}{4}}$
5. $(399)^{\frac{1}{2}}$	6. $(32.1)^{\frac{1}{5}}$	7. $cos\,29^\circ$	8. $sin61^\circ$
9. $tan31^\circ$	10. $\log_e(100.1)$	11. $\log_{10}(10.01)$	12. $(16.1)^{\frac{1}{4}}$

13. શંકુની ત્રિજ્યા તેની ઊંચાઈ કરતાં બમણી હોય તથા તેની ત્રિજ્યા 10 સેમી હોય અને ત્રિજ્યામાં ત્રુટિ 0.01 સેમી હોય ત્યારે શંકુના ઘનફળમાં પ્રવેશતી ત્રુટિનું આસન્ન મૂલ્ય શોધો.
14. ગોલકની ત્રિજ્યા માપવામાં Δr જેટલી ત્રુટિ આવે તો તેના ઘનફળના માપમાં આશરે કેટલી ત્રુટિ આવે ?
15. ગતિશક્તિનું સૂત્ર $k = \frac{1}{2}mv^2$. દળ અચળ છે. અચળ દળ માટે ગતિશક્તિ ઊર્જામાં આશરે 1 % વધારો થાય તો તેને માટે કારણભૂત ઝડપનો વધારો કેટલો હશે ?
16. ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ $A = \frac{1}{2}absinC$ સૂત્ર દ્વારા ગણવામાં આવ્યું. જો $C = \frac{\pi}{6}$ તથા C ના માપમાં x %, ત્રુટિ આવે તથા a તથા b અચળ હોય તો ક્ષેત્રફળના માપમાં પ્રવેશતી ત્રુટિનું આસન્ન મૂલ્ય કેટલું ?
17. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 1$ હોય તો $f(3.01)$ નું આસન્ન મૂલ્ય શોધો.
18. $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ હોય તો $f(1.05)$ નું આસન્ન મૂલ્ય શોધો.
19. જ્યારે સમઘનની ધારની લંબાઈ 0.2 સેમી જેટલી વધે તથા તે સમયે ધારની લંબાઈ 10 સેમી હોય તો તે ઘનફળના મૂલ્યમાં પ્રવેશતી ત્રુટિનું આસન્ન મૂલ્ય શોધો.

20. શંકુની ઊંચાઈ અચળ રહે છે અને તેની ત્રિજ્યા 2 % જેટલી વધે છે. ત્રિજ્યા 8 સેમી તથા ઊંચાઈ 6 સેમી હોય ત્યારે શંકુના કુલ પૃષ્ઠફળમાં થતા વધારાનું આસન્ન મૂલ્ય મેળવો.

21. $cos\,\frac{\pi}{3}$ ના જ્ઞાત મૂલ્ય પરથી $cos\,\frac{11\pi}{36}$ નું આસન્ન મૂલ્ય મેળવો.

*

1.6 મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો

આપણે વિકલ કલનના કેટલાક ઉપયોગો જોયા. હવે આપણે ઈષ્ટતમ મૂલ્યોના પ્રશ્નોમાં તેનો મહત્ત્વનો ઉપયોગ જોઈશું.

આપણે પેટીનું મહત્તમ ઘનફળ મેળવવા ઈચ્છતા હોઈએ, ફળોનો રસ સમાવતા ડબ્બા બનાવવાની ન્યૂનતમ પડતર કિંમત જાણવા ઈચ્છતા હોઈએ કે ન્યૂનતમ ખર્ચ કે મહત્તમ નફો મેળવવા ઈચ્છતા હોઈએ એવા પ્રશ્નોના ઉકેલ માટે વિકલ કલનનો ઉપયોગ હવે આપણે જોઈશું.

વ્યાખ્યા : **જો કોઈ પ્રદેશ D_f પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય f માટે $c \in D_f$ હોય તથા $\forall x \in D_f$, $f(c) \geq f(x)$, હોય તો f ને c આગળ વૈશ્વિક(Global) અથવા નિરપેક્ષ(Absolute) મહત્તમ(Maximum) મૂલ્ય છે તેમ કહેવાય છે. જો $f(c) \leq f(x)$, $\forall x \in D_f$, $c \in D_f$, તો f ને c આગળ નિરપેક્ષ અથવા વૈશ્વિક ન્યૂનતમ(Minimum) મૂલ્ય છે તેમ કહેવાય છે.**

આ સંજોગોમાં $f(c)$ ને અનુક્રમે f નું D_f માં મહત્તમ મૂલ્ય કે ન્યૂનતમ મૂલ્ય કહેવાય છે. f નાં મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્યને D_f પર f નાં આત્યંતિક(Extreme) મૂલ્ય પણ કહે છે.

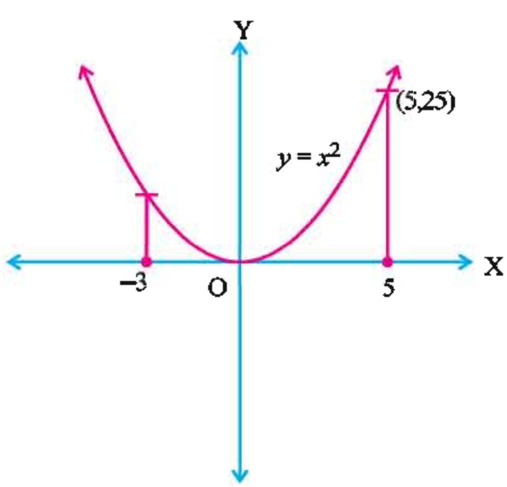
વ્યાખ્યા : **એક વિધેય અંતરાલ I પર વ્યાખ્યાયિત છે. જો કોઈક $h > 0$ માટે $(c - h, c + h) \subset I$ અને $\forall x \in (c - h, c + h)$ $f(c) \geq f(x)$ હોય તો f ને c આગળ સ્થાનીય(local) મહત્તમ મૂલ્ય છે તેમ કહેવાય છે. વિધેય f અંતરાલ I પર વ્યાખ્યાયિત છે. જો કોઈક $h > 0$ માટે $(c - h, c + h) \subset I$ અને $f(c) \leq f(x)$ $\forall x \in (c - h, c + h)$ તો f ને c આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે તેમ કહેવાય છે.**

નોંધ : **જો I સંવૃત અંતરાલ હોય તો સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો અંતરાલના અંત્યબિંદુઓએ ના મળે કારણ કે $(c - h, c + h) \subset I$ એવી શરત છે.**

આમ છતાં વૈશ્વિક મહત્તમ કે વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્ય અંતરાલના અત્યબિંદુઓ આગળ સંભવી શકે.

$f(x) = sinx$, $x \in R$ ની વૈશ્વિક મહત્તમ કિંમત 1, $x = (4n + 1)\frac{\pi}{2}$, $n \in Z$ આગળ મળે છે તથા વૈશ્વિક ન્યૂનતમ કિંમત -1, $x = (4n + 3)\frac{\pi}{2}$, $n \in Z$ આગળ મળે છે.

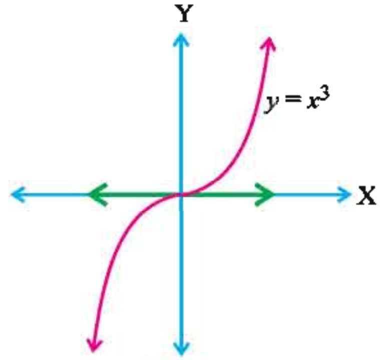
$f(x) = x^2$, $x \in R$ નો વિચાર કરો. $x \in R$ માટે $x^2 \geq 0$. તેથી $f(0) = 0$ એ વૈશ્વિક તથા સ્થાનીય ન્યૂનતમ કિંમત છે. પરંતુ f ને વૈશ્વિક મહત્તમ મૂલ્ય નથી. જો f નો મર્યાદિત પ્રદેશ $[-3, 5]$ લેવામાં આવે તો તેની વૈશ્વિક મહત્તમ કિંમત $f(5) = 25$ મળે.



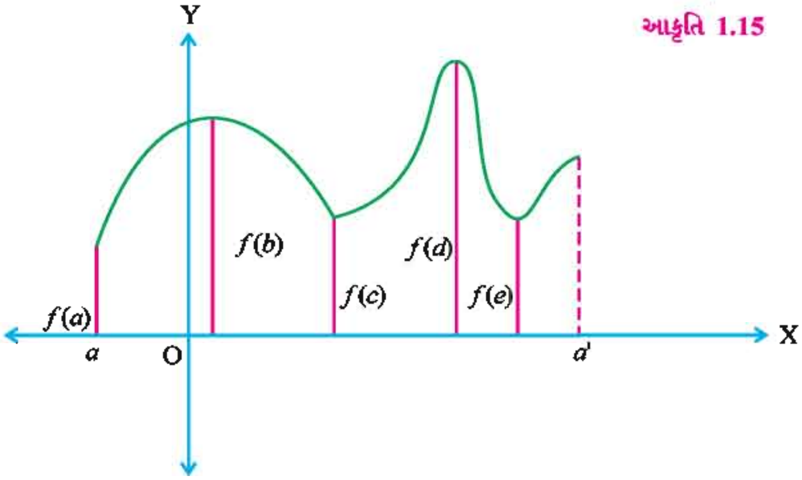
આકૃતિ 1.14

વિધેય $f(x) = x^3, x \in \mathbf{R}$ ને આત્યંતિક મૂલ્ય નથી.

નીચેનો આલેખ જુઓ.



આકૃતિ 1.15

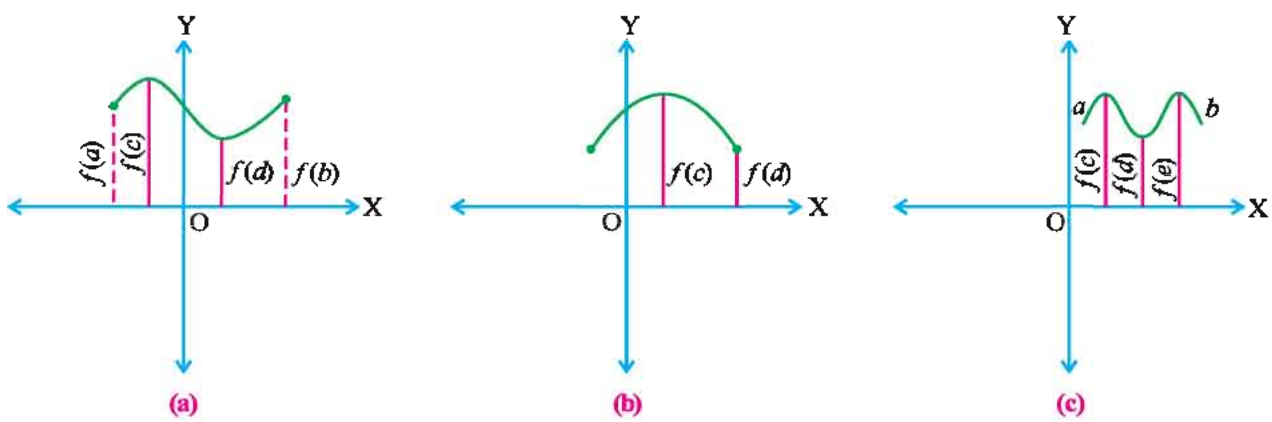


આકૃતિ 1.16

$[a, d]$ માં $x = a$ આગળ વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્ય મળે છે તથા $x = d$ આગળ વૈશ્વિક મહત્તમ મૂલ્ય મળે છે. $f(b)$ સ્થાનીય મહત્તમ તથા $f(c)$ અને $f(e)$ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો છે. વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્ય અંતરાલના અંત્યબિંદુ આગળ મળે છે તથા વૈશ્વિક મહત્તમ મૂલ્ય અંતરાલના અંદરના બિંદુએ મળે છે.

હવે આપણે નીચેનું પ્રમેય સાબિતી વગર સ્વીકારીશું.

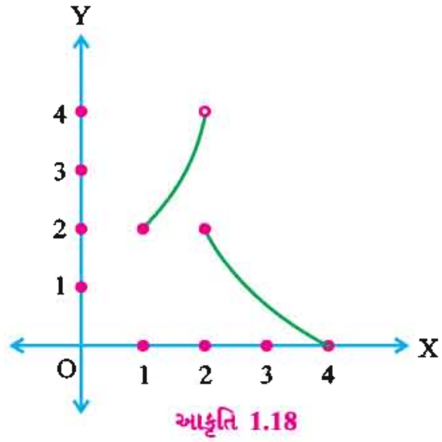
આત્યંતિક મૂલ્ય પ્રમેય : જો વિધેય f એ $[a, b]$ પર સતત હોય તો f ને કોઈક $c \in [a, b]$ આગળ વૈશ્વિક મહત્તમ મૂલ્ય મળે તથા કોઈક $d \in [a, b]$ આગળ વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્ય મળે.



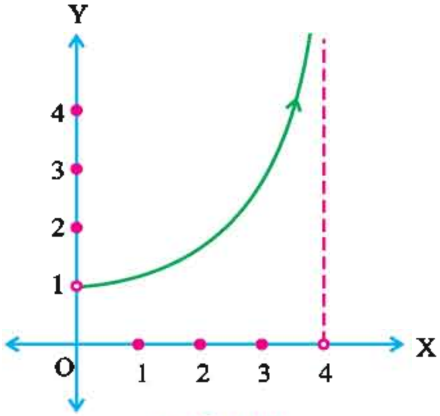
આકૃતિ 1.17

આકૃતિ 1.17(a) માં વિધેય બંને નિરપેક્ષ મહત્તમ તથા નિરપેક્ષ ન્યૂનતમ મૂલ્યો અંતરાલના અંદરના બિંદુએ ધારણ કરે છે. આકૃતિ 1.17(b) માં વિધેય નિરપેક્ષ મહત્તમ મૂલ્ય $[a, b]$ ના અંદરના બિંદુએ ધારણ કરે છે, જ્યારે નિરપેક્ષ ન્યૂનતમ મૂલ્ય $d = b$ આગળ ધારણ કરે છે. આકૃતિ 1.17(c) માં બે બિંદુઓએ નિરપેક્ષ મહત્તમ મૂલ્ય (a, b) માં મળે છે.

અહીં વિધેયનો પ્રદેશ [1, 4] છે. પરંતુ વિધેય $x = 2$ આગળ અસતત છે. તેનો વિસ્તાર [0, 4). છે. કોઈપણ $x \in [1, 4]$ માટે $f(x) \neq 4$. વિધેયને મહત્તમ મૂલ્ય નથી. આથી આપણે આત્યંતિક મૂલ્ય માટે વિધેયના સાતત્યની શરત મૂકી છે. જો કે અસતત વિધેયને પણ મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્ય મળી તો શકે. (જુઓ આકૃતિ 1.18)



આકૃતિ 1.18



આકૃતિ 1.19

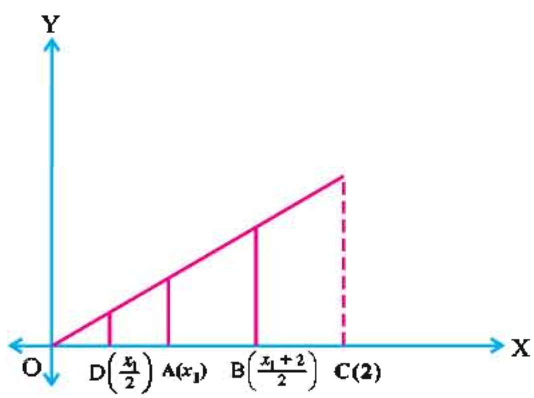
આકૃતિ 1.19 માં જેનો આલેખ છે તે વિધેય (0, 4), પર સતત છે. પરંતુ તેને નિરપેક્ષ મહત્તમ કે નિરપેક્ષ ન્યૂનતમ મૂલ્ય નથી. તેનો વિસ્તાર $(1, \infty)$ છે. આથી આત્યંતિક મૂલ્ય પ્રમેયમાં પ્રદેશ સંવૃત અંતરાલની શરત પણ મૂકી છે.

વિધેય $f(x) = x$, $x \in (0, 2)$ ને મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્ય નથી, પરંતુ $[0, 2]$ માં $f(x) = x$ ને મહત્તમ મૂલ્ય $f(2) = 2$ અને ન્યૂનતમ મૂલ્ય $f(0) = 0$ છે. $f(x) = x$ માટે, જો $x_1 \in (0, 2)$ હોય, તો $x_1 < 2$ માટે $x_1 < \left(\frac{x_1+2}{2}\right) < 2$.

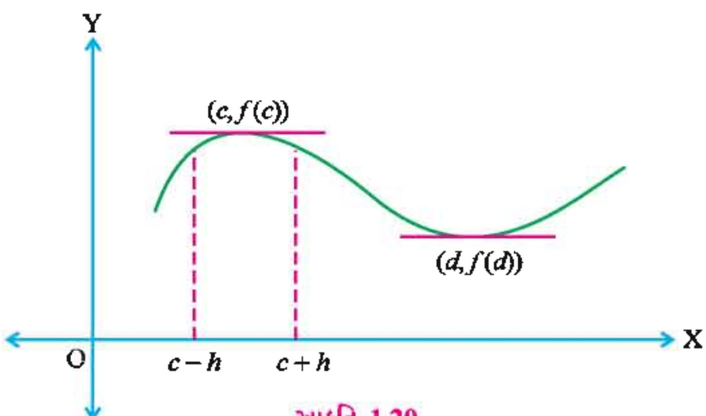
જુઓ કે આકૃતિ 1.19(a) માં $f\left(\frac{x_1+2}{2}\right) = \frac{x_1+2}{2}$ મળે જેથી $f(x_1)$ કરતાં મોટું મૂલ્ય $f\left(\frac{x_1+2}{2}\right)$ મળે છે, જ્યાં $x_1 \in (0, 2)$. આમ કોઈપણ $f(x)$ મહત્તમ ન હોઈ શકે.

તે જ રીતે $f\left(\frac{x_1}{2}\right) < f(x_1)$ હોવાથી કોઈપણ $f(x)$ ન્યૂનતમ ન હોઈ શકે.

$\overline{AC}$ નું મધ્યબિંદુ B તથા $\overline{AO}$ નું મધ્યબિંદુ D છે. આમ કોઈપણ A માટે મળતા $f(x_1)$ ના મૂલ્ય કરતાં B આગળ મોટું મૂલ્ય $f\left(\frac{x_1+2}{2}\right)$ મળે છે. અને D આગળ નાનું મૂલ્ય $f\left(\frac{x_1}{2}\right)$ મળે છે. આમ f ને મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્યો નથી.



આકૃતિ 1.19(a)



આકૃતિ 1.20

આકૃતિ 1.20 જુઓ. f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ છે, $(c - h, c)$ માં f વધતું વિધેય છે. આથી $(c - h, c)$ માં $f'(x) > 0$. $(c, c + h)$ માં f ઘટતું વિધેય છે અને તેથી $(c, c + h)$ માં $f'(x) < 0$. x એ $(c - h, c + h)$ માં c માંથી પસાર થાય છે ત્યારે $f'(x)$ ધનમાંથી ઋણ બને છે તથા $f'(c) = 0$.

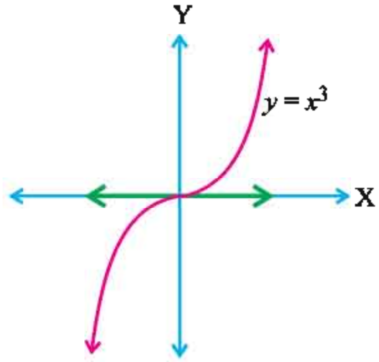
તે જ રીતે $x = d$ આગળ f ને સ્થાનીય ન્યૂનતમ છે તથા f' ઋણમાંથી ધન બને છે તથા $f'(d) = 0$.

આથી આપણે નીચેના પ્રમેયનું વિધાન સાબિતી વગર સ્વીકારીશું.

પ્રમેય 1.2 (ફર્માનું પ્રમેય) : જો f ને c આગળ સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય હોય તથા f એ c આગળ વિકલનીય હોય તો $f'(c) = 0$.

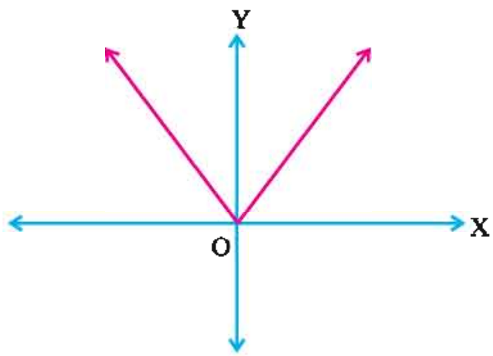
આ માત્ર આવશ્યક શરત છે અને તે પર્યાપ્ત નથી. $f(x) = x^3$, માટે $f'(0) = 0$ પરંતુ f ને $x = 0$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય નથી. આવા બિંદુને નતિબિંદુ કહે છે. તેના નતિબિંદુ આગળ આલેખ વક્રના સ્પર્શકને ઓળંગે છે.

અહીં (0, 0) આગળ સમક્ષિતિજ સ્પર્શક છે.



આકૃતિ 1.21

Pierre Fermat (1601-1665) ફ્રેંચ વકીલ હતા તથા ગણિત તેમનો શોખ હતો. તેમના નામ પરથી આ પ્રમેયનું નામ આપ્યું છે તે **Des Cartes** ઉપરાંત વૈશ્લેષિક ભૂમિતિના શોધક હતા.



આકૃતિ 1.22

વળી f ને c આગળ આત્યંતિક મૂલ્ય હોય અને તે $x = c$ આગળ વિકલનીય ના હોય તે પણ શક્ય છે.

$f(x) = |x|$, $x \in R$ ને $x = 0$ આગળ વૈશ્વિક તથા સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે પરંતુ આ વિધેય $x = 0$ આગળ સતત છે અને વિકલનીય નથી.

નિર્ણાયક(Critical) સંખ્યા : વિધેય f ના પ્રદેશ D_f માં આવેલ જે સંખ્યા c માટે $f'(c) = 0$ અથવા f એ $x = c$ આગળ વિકલનીય ન હોય તે સંખ્યા c ને વિધેય f ની નિર્ણાયક સંખ્યા અથવા નિર્ણાયક બિંદુ કહે છે.

આમ જો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ કે સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય હોય તો c એ f ની નિર્ણાયક સંખ્યા છે.

ઉપરની ચર્ચાના આધારે આપણને નીચેની પ્રથમ વિકલિત કસોટી મળે.

પ્રથમ વિકલિત કસોટી : ધારો કે f એ $I = (a, b)$ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય છે. $c \in I$ એ f ની નિર્ણાયક સંખ્યા છે. f એ c આગળ સતત છે.

(1) જો એવી ધન સંખ્યા h મળે કે જેથી $(c - h, c + h) \subset I$ તથા $(c - h, c)$ માં $f'(x) > 0$ તથા $(c, c + h)$ માં $f'(x) < 0$ તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે.

(2) જો ધન સંખ્યા h મળે જેથી $(c - h, c + h) \subset I$ અને $(c - h, c)$ માં $f'(x) < 0$ તથા $(c, c + h)$ માં $f'(x) > 0$ તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે.

(3) જો કોઈપણ $h > 0$ માટે $(c - h, c + h) \subset I$ હોય અને $x \in (c - h, c + h)$ માટે $f'(x)$ નિશાની ન બદલે તો f ને $x = c$ માટે ન્યૂનતમ કે મહત્તમ મૂલ્ય ન મળે. આવા c ને અનુરૂપ આલેખ પરના બિંદુને નતિબિંદુ કહે છે.

જો કોઈક $h > 0$ માટે $f'(x)$ (c નિર્ણાયક સંખ્યા છે.)

$(c - h, c)$ માં ધન હોય તથા $(c, c + h)$ માં ઋણ હોય તો	$f(c)$ સ્થાનીય મહત્તમ છે.
$(c - h, c)$ માં ઋણ હોય તથા $(c, c + h)$ માં ધન હોય તો	$f(c)$ સ્થાનીય ન્યૂનત્તમ છે.

કેટલીક વાર પ્રથમ વિકલિત કસોટીનો ઉપયોગ અનુકૂળ ન રહે. આવા સંજોગોમાં નીચેની દ્વિતીય વિકલિત કસોટી ઉપયોગી છે.

દ્વિતીય વિકલિત કસોટી : ધારો કે વિધેય f અંતરાલ $I = [a, b]$ પર વ્યાખ્યાયિત છે. ધારો કે $c \in (a, b)$. ધારો કે $f''(c)$ નું અસ્તિત્વ છે.

(1) જો $f''(c) < 0$ તથા $f'(c) = 0$ તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે.

(2) જો $f''(c) > 0$ તથા $f'(c) = 0$ તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે.

(3) જો $f'(c) = f''(c) = 0$ તો કસોટી કોઈપણ તારણ આપવામાં નિષ્ફળ જાય છે.

નોંધ : $f''(c) < 0$ તથા $f'(c) = 0$ નો અર્થ એ કે $f'(x)$ એ $x = c$ આગળ તેની નિશાની ધનમાંથી ઋણમાં બદલે છે.

$\therefore$ $f(x)$ ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે.

તે જ રીતે જો $f''(c) > 0$ તથા $f'(c) = 0$ તો આપણે f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે એવા તારણ પર આવી શકીએ.

ઉદાહરણ 53 : $f(x) = x^{\frac{3}{5}}(4 - x)$, $x \in R^+ \cup \{0\}$ ની નિર્ણાયક સંખ્યાઓ શોધો.

ઉકેલ : $f(x) = 4x^{\frac{3}{5}} - x^{\frac{8}{5}}$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{12}{5}x^{-\frac{2}{5}} - \frac{8}{5}x^{\frac{3}{5}}$$

$$= \frac{4}{5}\left(\frac{3}{x^{\frac{2}{5}}} - 2x^{\frac{3}{5}}\right)$$

$$= \frac{4}{5}\left(\frac{3 - 2x}{x^{\frac{2}{5}}}\right)$$

$\therefore$ જો $x = \frac{3}{2}$ તો $f'(x) = 0$ તથા $x = 0$ આગળ $f'(x)$નું અસ્તિત્વ નથી. પરંતુ $0 \in D_f$

$\therefore$ નિર્ણાયક સંખ્યાઓ 0 તથા $\frac{3}{2}$ છે.

ઉદાહરણ 54 : $f(x) = |x|$ નાં સ્થાનીય મહત્તમ તથા સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધો. $x \in R$

ઉકેલ : f એ $x = 0$ આગળ વિકલનીય નથી. $0 \in D_f$. આથી 0 નિર્ણાયક બિંદુ છે. વળી $x = 0$ આગળ દ્વિતીય વિકલિત પણ નથી જ.

$$\therefore \quad f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$\therefore$ $f'(x) = 1$ જ્યાં $x > 0$

તથા $f'(x) = -1$ જ્યાં $x < 0$.

$\therefore$ x એ 0 માંથી પસાર થાય ત્યારે $f'(x)$ ઋણમાંથી ધન થાય છે તથા $x = 0$ આગળ વિકલનીય નથી. એટલે કે x એ $(-h, 0)$ માંથી પસાર થઈ $(0, h)$ માં કિંમતો ધારણ કરે $(h > 0)$ તો $f'(x)$ ઋણમાંથી ધન બને.

$\therefore$ f ને $x = 0$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય $f(0) = 0$ મળે. f ને સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય નથી.

નોંધ : દેખીતું છે કે $f(x) = |x| \geq 0 \quad \forall x \in R$

$\therefore$ f ને સ્થાનીય તથા વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્ય $x = 0$ આગળ મળે.

સંવૃત્ત અંતરાલ $[a, b]$ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેયનાં આત્યંતિક મૂલ્યો શોધવા માટે

(1) f ના સ્થાનીય મહત્તમ તથા સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો મેળવવા.

(2) $[a, b]$ ના અંત્યબિંદુઓએ f નાં મૂલ્યો મેળવો.

(1) તથા (2) માં મળેલા મૂલ્યોમાં મોટામાં મોટું મૂલ્ય વૈશ્વિક મહત્તમ મૂલ્ય છે તથા નાનામાં નાનું મૂલ્ય એ વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે.

ઉદાહરણ 55 : $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$, $x \in [-1, 4]$ નાં મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો અંગે પરીક્ષણ કરો.

ઉકેલ : $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$

$\therefore$ $f'(x) = 12x^3 - 48x^2 + 36x$

$= 12x(x^2 - 4x + 3)$

$= 12x(x - 3)(x - 1)$

$\therefore$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ અથવા 1 અથવા 3.

$\therefore$ $f''(x) = 36x^2 - 96x + 36$

$\therefore$ $f''(0) = 36 > 0, f''(1) = -24 < 0, f''(3) = 72 > 0$

$\therefore$ $f(0)$ સ્થાનીય ન્યૂનતમ છે અને સ્થાનીય ન્યૂનતમ $f(0) = 0$.

$x = 1$ આગળ f ને સ્થાનીય મહત્તમ છે તથા સ્થાનીય મહત્તમ $f(1) = 5$.

f ને $x = 3$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ છે તથા સ્થાનીય ન્યૂનતમ $f(3) = -27$.

સ્થાનીય મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો અંતરાલના અંદરના બિંદુએ એટલે કે $(-1, 4)$ માં મળે. પરંતુ વૈશ્વિક મહત્તમ તથા વૈશ્વિક ન્યૂનતમ માટે $f(-1)$ તથા $f(4)$ શોધીએ.

$f(-1) = 37$ તથા $f(4) = 32$

આમ $f(0) = 0, \ f(1) = 5, \ f(3) = -27, \ f(-1) = 37, \ f(4) = 32$

$\therefore$ વૈશ્વિક મહત્તમ $f(-1) = 37$ અંતરાલના અંત્યબિંદુએ મળે છે.

$\therefore$ $f(3) = -27$ વૈશ્વિક ન્યૂનતમ છે તથા તે અંતરાલના અંદરના બિંદુ 3 આગળ મળે છે.

ઉદાહરણ 56 : $f(x) = x^3 - 12x + 1$ નાં મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધો. $x \in [-3, 5]$

ઉકેલ : $f(x) = x^3 - 12x + 1$

$\therefore$ $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x - 2)(x + 2)$

$\therefore$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

$f''(x) = 6x$

$\therefore$ $f''(2) = 12 > 0$

$\therefore$ $f(2) = 8 - 24 + 1 = -15$ એ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે.

$\therefore$ $f''(-2) = -12 < 0$

$\therefore$ $f(-2) = -8 + 24 + 1 = 17$ એ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે.

વધુમાં $f(-3) = -27 + 36 + 1 = 10$ તથા $f(5) = 125 - 60 + 1 = 66, f(2) = -15, f(-2) = 17$

$\therefore$ $f(5) = 66$ એ f નું વૈશ્વિક મહત્તમ મૂલ્ય છે.

$f(2) = -15$ એ f નું વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે.

ઉદાહરણ 57 : $x \in [-2, 2]$ માટે $f(x) = 3x^5 - 5x^3 - 1$ નાં મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધો.

ઉકેલ : $f'(x) = 15x^4 - 15x^2$

$= 15x^2(x^2 - 1)$

$= 15x^2(x - 1)(x + 1)$

$\therefore$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ અથવા $x = \pm 1$

$f''(x) = 60x^3 - 30x$

$f''(1) = 30 > 0$

$\therefore$ $f(1) = -3$ એ f નું સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે.

$f''(-1) = -30 < 0$

$\therefore$ $f(-1) = 1$ એ f નું સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે.

હવે $f''(0) = 0$

$\therefore$ $x = 0$ આગળ દ્વિતીય વિકલિત કસોટી નિષ્ફળ જાય છે.

$\therefore$ $f'(x) = 15x^2(x - 1)(x + 1)$

જો $x \neq 0$ તો $x^2 > 0$

જો $-1 < x < 1$ તો $x + 1 > 0$ અને $x - 1 < 0$

$\therefore$ $-1 < x < 1$ માટે $f'(x) < 0$ $(x \neq 0)$

$\therefore$ x એ $(-1, 1)$ માં કિંમતો ધારણ કરે છે ત્યારે $f'(x)$ ની નિશાની બદલાતી નથી.

$\therefore$ 0 એ f નું નતિબિંદુ છે.

$\therefore$ $f(2) = 96 - 40 - 1 = 55$

$f(-2) = -96 + 40 - 1 = -57$. તથા $f(1) = -3$, $f(-1) = 1$.

$\therefore$ $f(2) = 55$ એ વૈશ્વિક મહત્તમ તથા $f(-2) = -57$ એ વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે.

ઉદાહરણ 58 : $x \in [-\pi, \pi]$ માટે $f(x) = x - 2\cos x$ નાં મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધો.

ઉકેલ : $f(x) = x - 2\cos x$

$\therefore$ $f'(x) = 1 + 2\sin x$

$\therefore$ $f'(x) = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ $x = -\frac{\pi}{6}, \frac{-5\pi}{6}$, $\quad x \in (-\pi, \pi)$

હવે $f''(x) = 2\cos x$

$\therefore$ $f''\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} > 0$

$\therefore$ $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6} - 2\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}$

$\therefore$ $x = -\frac{\pi}{6}$ આગળ f નું સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}$ છે.

$\therefore \quad f''\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = 2cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = 2cos\,\frac{5\pi}{6} = 2cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

$= -2cos\frac{\pi}{6}$

$= -2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3} < 0$

$\therefore$ હવે $f\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{5\pi}{6} + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} - \frac{5\pi}{6}$ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે.

$f(\pi) = \pi - 2cos\pi = \pi + 2$

$f(-\pi) = -\pi - 2cos(-\pi) = -\pi - 2cos\pi = -\pi + 2$

$\therefore \quad f(\pi) = \pi + 2$ વૈશ્વિક મહત્તમ મૂલ્ય છે.

$\therefore \quad f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$ વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે.

ઉદાહરણ 59 : $f(x) = 4x + cot\,x$ નાં મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધો. $x \in (0, \pi)$

ઉકેલ : $f'(x) = 4 - cosec^2x = 0$ લઈએ.

$\therefore \quad cosec^2x = 4$

$\therefore \quad sin^2x = \frac{1}{4}$

$\therefore \quad sinx = \frac{1}{2}$ $\qquad x \in (0, \pi)$

$\therefore \quad x = \frac{\pi}{6}$ અથવા $\frac{5\pi}{6}$

હવે $f''(x) = -2cosecx\ (-cosecx\ cotx)$

$= 2cosec^2x\ cotx$

$\therefore \quad f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = 8\sqrt{3} > 0,\ f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -8\sqrt{3} < 0$

$\therefore \quad x = \frac{\pi}{6}$ આગળ f ને સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય મળે તથા સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$.

$x = \frac{5\pi}{6}$ આગળ f ને સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય મળે તથા સ્થાનીય મહત્તમ $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{10\pi}{3} - \sqrt{3}$.

[વૈશ્વિક ન્યૂનતમ કે વૈશ્વિક મહત્તમ કેમ નહીં ?]

ઉદાહરણ 60 : સાબિત કરો કે આપેલ ક્ષેત્રફળવાળા તમામ લંબચોરસોમાં ચોરસની પરિમિતિ ન્યૂનતમ છે.

ઉકેલ : ધારો કે આપેલ ક્ષેત્રફળ A છે અને લંબચોરસની બાજુઓની લંબાઈ x તથા y છે.

$\therefore \quad A = xy$

હવે લંબચોરસની પરિમિતિ $p = 2x + 2y$

$= 2x + \frac{2A}{x}$

હવે $\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow 2 - \frac{2A}{x^2} = 0$

$\therefore \quad x^2 = A$

$\therefore \quad x = \sqrt{A}$ $\qquad$ (લંબચોરસની બાજુની લંબાઈ $x > 0$)

$\therefore \quad y = \frac{A}{x} = \frac{A}{\sqrt{A}} = \sqrt{A}$

$x = y$ હોવાથી આપેલ લંબચોરસ એ ચોરસ છે.

વળી $\frac{d^2p}{dx^2} = 0 - 2A(-2x^{-3}) = \frac{4A}{x^3} > 0$

$\therefore$ આપેલ ક્ષેત્રફળવાળા લંબચોરસોમાં ચોરસની પરિમિતિ ન્યૂનતમ છે.

નોંધ : $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy = (x - y)^2 + 4A$

$\therefore$ $(x + y)^2$ એટલે કે $x + y$ ન્યૂનતમ હોવા માટે $x = y$ કારણ કે $(x - y)^2 \geq 0$ તથા A અચળ છે. આ જ રીતે આપેલ ક્ષેત્રફળવાળા લંબચોરસોમાં ચોરસની પરિમિતિ ન્યૂનતમ છે.

ઉદાહરણ 61 : $y^2 = 8x$ પર A(10, 4)ની સૌથી નજીકનું બિંદુ P તથા ન્યૂનતમ અંતર AP મેળવો.

ઉકેલ : પરવલયનાં પ્રચલ સમીકરણ $(at^2, 2at)$ છે.

અહીં $4a = 8$ પરથી $a = 2$.

$\therefore$ પરવલય પરનું કોઈપણ બિંદુ $P(2t^2, 4t)$ છે.

હવે $AP^2 = (2t^2 - 10)^2 + (4t - 4)^2$

$= 4t^4 - 40t^2 + 100 + 16t^2 - 32t + 16$

ધારો કે $f(t) = 4t^4 - 24t^2 - 32t + 116$

$f'(t) = 16t^3 - 48t - 32$

$= 16(t^3 - 3t - 2)$

$= 16(t + 1)(t^2 - t - 2)$

$= 16(t + 1)^2(t - 2)$

$\therefore$ $f'(t) = 0 \Rightarrow t = -1$ અથવા $t = 2$

ધારો કે $t \in (-1 - h, -1 + h)$, $h > 0$. ધારો કે $t = -1 + t_1$

તો $-1 - h < -1 + t_1 < -1 + h$ એટલે કે $-h < t_1 < h$

$\therefore$ $f'(t) = 16(t + 1)^2 (t - 2)$ $\qquad (t = -1 + t_1)$

$= 16{t_1}^2(-3 + t_1) < 0$ જ્યાં $0 < t_1 < 3$

$\therefore$ $(-1 - h, -1 + h)$ માં $f'(t)$ ની નિશાની બદલાતી નથી.

$\therefore$ f ને $t = -1$ આગળ આત્યંતિક મૂલ્ય નથી.

$\therefore$ $f''(t) = 48t^2 - 48$

$\therefore$ $f''(2) = 192 - 48 = 144 > 0$

$\therefore$ $t = 2$ માટે $f(t)$ સ્થાનીય ન્યૂનતમ છે.

$\therefore$ AP^2 ન્યૂનતમ છે. $t = 2$ માટે P (8, 8) મળશે.

$$AP = \sqrt{(10-8)^2 + (8-4)^2}$$

$$= \sqrt{4+16}$$

$$= 2\sqrt{5}$$

$\therefore$ P(8, 8) એ A(10, 4) ની સૌથી નજીકનું પરવલય પરનું બિંદુ છે તથા ન્યૂનતમ અંતર $AP = 2\sqrt{5}$ છે.

ઉદાહરણ 62 : r ત્રિજ્યાવાળા અર્ધવર્તુળમાં અંતર્ગત લંબચોરસનું મહત્તમ ક્ષેત્રફળ શોધો.

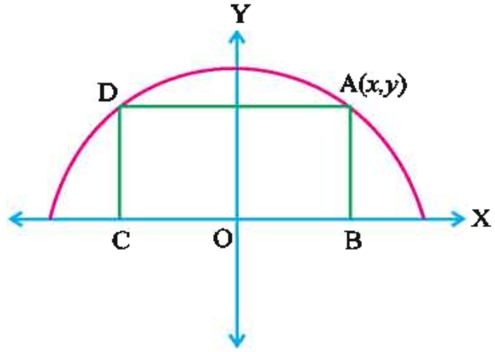
ઉકેલ : આપણે X-અક્ષ ઉપરના અર્ધતલમાં વર્તુળ લઈએ.

પ્રથમ ચરણમાં લંબચોરસનું એક શિરોબિંદુ $A(x, y)$ લો. દેખીતું જ અન્ય શિરોબિંદુ $B(x, 0)$, $C(-x, 0)$ તથા $D(-x, y)$ છે.

$\therefore \quad AD = 2x,\ AB = y$

$\therefore$ લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ $f(x) = 2xy$

વળી, $x^2 + y^2 = r^2$



આકૃતિ 1.23

$\therefore \quad y = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad (y > 0)$

$\therefore \quad f(x) = 2x\sqrt{r^2 - x^2}$

$$\therefore \quad f'(x) = 2\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{2x(-2x)}{2\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$= 2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$= \frac{2(r^2 - 2x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$\therefore \quad f'(x) = 0 \Rightarrow r^2 = 2x^2 \Rightarrow x = \frac{r}{\sqrt{2}}$

$\therefore \quad y = \sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = \frac{r}{\sqrt{2}}$

$\therefore \quad x = y = \frac{r}{\sqrt{2}}$

$$f''(x) = 2\left[(r^2 - 2x^2)\left(-\frac{1}{2}\right)(r^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x) + \frac{(-4x)}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right]$$

$$f''\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-8 \times \frac{r}{\sqrt{2}}}{\frac{r}{\sqrt{2}}} = -8 < 0$$

$\therefore$ ચોરસનું ક્ષેત્રફળ મહત્તમ છે અને મહત્તમ ક્ષેત્રફળ $A = 2xy = 2 \cdot \frac{r}{\sqrt{2}} \cdot \frac{r}{\sqrt{2}} = r^2$ છે.

નોંધ : (1) $A = 2xy$

વળી, $x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy$

$= (x - y)^2 + A$. વળી $x^2 + y^2 = r^2$

$\therefore \quad A = r^2 - (x - y)^2$ મહત્તમ થવા માટે $(x - y)^2$ ન્યૂનતમ થાય તે જરૂરી છે. $(x - y)^2 \geq 0$ હોવાથી $(x - y)^2$ નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય $x = y$ માટે 0 છે. આથી મહત્તમ $A = r^2$

(2) ધારો કે $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ ($x^2 + y^2 = r^2$ નાં પ્રચલ સમીકરણ)

$\therefore \quad A = 2xy = 2r^2\sin\theta\cos\theta = r^2\sin2\theta$

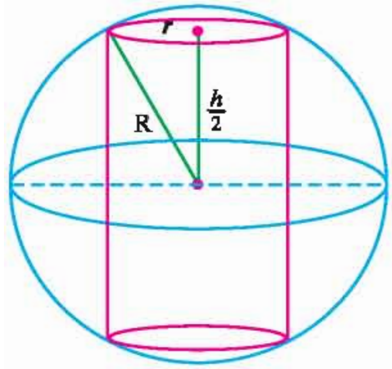
$\therefore \quad \sin2\theta = 1$ એટલે કે $\theta = \frac{\pi}{4}$ હોય ત્યારે A મહત્તમ છે.

$\therefore$ મહત્તમ ક્ષેત્રફળ $= r^2$ તથા $x = r\cos\theta = \frac{r}{\sqrt{2}},\ y = r\sin\theta = \frac{r}{\sqrt{2}}$

ઉદાહરણ 63 : R ત્રિજ્યાવાળા ગોલકમાં નળાકાર અંતર્ગત છે. સાબિત કરો કે તેની ઊંચાઈ $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ હોય ત્યારે તેનું ઘનફળ મહત્તમ છે.

ઉકેલ : ધારો કે નળાકારની ત્રિજ્યા તથા ઊંચાઈ અનુક્રમે r તથા h છે.

$R^2 = r^2 + \frac{h^2}{4}$



આકૃતિ 1.24

નળાકારનું ઘનફળ $V = \pi r^2 h$

$\therefore \quad V = \pi\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)h$

$= \pi R^2 h - \frac{\pi}{4}h^3$

$\therefore \quad \frac{dV}{dh} = \pi R^2 - \frac{3\pi}{4}h^2$

$\therefore \quad \frac{dV}{dh} = \frac{\pi}{4}(4R^2 - 3h^2)$

$\therefore \quad \frac{dV}{dh} = 0 \Rightarrow h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$

વળી, $\frac{d^2V}{dh^2} = \frac{\pi}{4}(-6h) = \frac{-3\pi h}{2} = -\sqrt{3}\pi R < 0$ $\quad (h > 0)$

$\therefore$ જ્યારે નળાકારની ઊંચાઈ $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ હોય ત્યારે તેનું ઘનફળ મહત્તમ થાય.

મહત્તમ ઘનફળ $\pi r^2 h = \pi\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)h$

$= \pi\left(R^2 - \frac{R^2}{3}\right)\frac{2R}{\sqrt{3}}$

$= \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$

ઉદાહરણ 64 : 1 લીટર તેલ સમાવતો એક નળાકાર ડબ્બો બનાવવાનો છે. ન્યૂનતમ ખર્ચ થાય તે માટે તેની ત્રિજ્યા તથા ઊંચાઈ શોધો.

ઉકેલ : ડબ્બો બનાવવાનું ખર્ચ ન્યૂનતમ થાય તે માટે તેમાં ઓછામાં ઓછું પતરું વપરાવું જોઈએ.

ડબ્બાનું કુલ પૃષ્ઠફળ $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

વળી નળાકારનું કદ $V = \pi r^2 h$. તેમાં 1 લી = 1000 સેમી^{3} તેલ સમાય છે.

$\therefore \quad V = \pi r^2 h = 1000$

$\therefore \quad h = \frac{1000}{\pi r^2}$

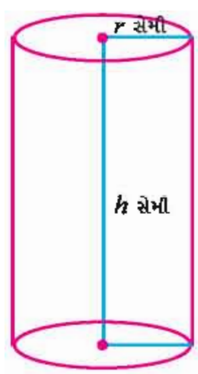
$\therefore \quad S = 2\pi r^2 + 2\pi r \times \frac{1000}{\pi r^2}$

$= 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$

$\therefore \quad \frac{dS}{dr} = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0 \Rightarrow r^3 = \frac{500}{\pi}$

$\therefore \quad r = \left(\frac{500}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ સેમી

$\frac{d^2S}{dr^2} = 4\pi + \frac{4000}{r^3} > 0$



આકૃતિ 1.25

$\therefore$ કુલ પૃષ્ઠફળ અને તેથી ખર્ચ ન્યૂનતમ થાય તે માટે $r = \left(\frac{500}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ સેમી અને

$h = \frac{1000(\pi)^{\frac{2}{3}}}{\pi(500)^{\frac{2}{3}}} = 2\left(\frac{500}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ સેમી $= 2r$.

ખર્ચ ન્યૂનતમ કરવા માટે તેની ઊંચાઈ તેના વ્યાસ જેટલી હોવી જોઈએ.

ઉદાહરણ 65 : $y = 2x - 3$ પરનું ઊગમબિંદુથી સૌથી નજીકનું બિંદુ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $M = (x, 2x - 3)$ આપેલ રેખા પરનું કોઈપણ બિંદુ છે.

$OM^2 = x^2 + (2x - 3)^2$

$= 5x^2 - 12x + 9$

ધારો કે $f(x) = 5x^2 - 12x + 9$

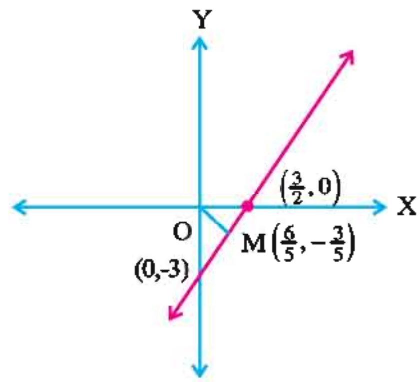
$\therefore \quad f'(x) = 10x - 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{5}$

વળી, $f''(x) = 10 > 0$

$\therefore \quad x = \frac{6}{5}, y = 2x - 3 = \frac{12}{5} - 3 = -\frac{3}{5},$

$M = \left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ હોય તો અંતર OM ન્યૂનતમ છે.

$OM^2 = \sqrt{\frac{36}{25} + \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{45}{25}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} = \frac{3}{\sqrt{5}}$



આકૃતિ 1.26

નોંધ : $p = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \left|\frac{0 + 0 - 3}{\sqrt{4+1}}\right| = \frac{3}{\sqrt{5}}$

$\therefore$ OM એ $y = 2x - 3$ નું ઊગમબિંદુથી ન્યૂનતમ અંતર છે તથા M લંબપાદ છે.

સ્વાધ્યાય 1.5

નીચેનાં વિધેયોનાં મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધો : (1 થી 15)

1. $f(x) = 5 - 3x + 5x^2 - x^3 \qquad x \in R$
2. $f(x) = x^4 - 6x^2 \qquad x \in R$
3. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(x + 3)^{\frac{2}{3}} \qquad x \in R^+$
4. $f(x) = 2cosx + sin^2x \qquad x \in R$
5. $f(x) = \log_e(1 + x^2) \qquad x \in R$
6. $f(x) = xe^{-x} \qquad x \in [0, 2]$
7. $f(x) = \frac{\log_e x}{x} \qquad x \in [1, 3]$
8. $f(x) = \sqrt{16 - x^2} \qquad |x| \le 4$
9. $f(x) = \frac{x}{x+1} \qquad x \in [1, 2]$
10. $f(x) = sinx + cosx \qquad x \in [0, 2\pi]$
11. $f(x) = \frac{cosx}{sinx + 2} \qquad x \in [0, 2\pi]$
12. $f(x) = x\sqrt{1 - x} \qquad 0 < x < 1$

13. $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 48x + 125 \qquad x \in [0, 3]$

14. $f(x) = sin2x \qquad x \in [0, 2\pi]$

15. $f(x) = 2x^3 - 24x + 107 \qquad x \in [1, 3]$

16. એક બારી લંબચોરસ પર અર્ધવર્તુળ ગોઠવેલ હોય તે આકારની છે. બારીની કુલ પરિમિતિ 10 મી છે. બારીમાંથી હવાની મહત્તમ આવનજાવન થાય તે માટે બારીનાં પરિમાણ શોધો.

17. r ત્રિજ્યાવાળા ગોલકમાં અંતર્ગત મહત્તમ ઘનફળવાળા લંબવૃત્તીય શંકુની ઊંચાઈ $\frac{4r}{3}$ છે તેમ સાબિત કરો.

18. એવી બે ધન સંખ્યાઓ શોધો જેનો સરવાળો 16 હોય તથા જેમના ઘનનો સરવાળો ન્યૂનતમ હોય.

19. એવી બે ધન સંખ્યાઓ x, y શોધો જેથી $x + y = 35$ તથા ગુણાકાર x^2y^5 મહત્તમ થાય.

20. આપેલ તિર્યક ઊંચાઈ l અને મહત્તમ ઘનફળવાળા શંકુનો અર્ધશિર્ષકોણ $tan^{-1}\sqrt{2}$ છે તેમ સાબિત કરો.

21. ચોરસ આધારવાળી એક ખુલ્લી પેટી બનાવવાની છે. જો તેનું કુલ પૃષ્ઠફળ c^2 હોય તો સાબિત કરો કે તેનું મહત્તમ ઘનફળ $\frac{c^3}{6\sqrt{3}}$ છે. (c અચળ)

22. વર્તુળ $x^2 + y^2 = 25$ પર એવું બિંદુ શોધો જેનું (12, 9)થી અંતર ન્યૂનતમ થાય તથા એવું બિંદુ પણ શોધો જેનું (12, 9)થી અંતર મહત્તમ થાય. ભૌમિતિક રીતે સમજાવો.

23. એક વર્તુળના પરિઘ તથા ચોરસની પરિમિતિનો સરવાળો અચળ છે સાબિત કરો કે જ્યારે વર્તુળની ત્રિજ્યા તથા ચોરસની બાજુની લંબાઈનો ગુણોત્તર 1:2 હોય ત્યારે તેમના ક્ષેત્રફળનો સરવાળો ન્યૂનતમ છે.

24. ચોરસ આધારવાળી એક ખુલ્લી ટાંકી બનાવવાની છે. તેમાં 4000 લી પાણી સમાવવાનું છે. ખર્ચ ન્યૂનતમ કરવા માટે ટાંકીનાં પરિમાણ શોધો.

25. $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3bx + c$ નું મહત્તમ મૂલ્ય $x = -1$ માટે મળે છે તથા ન્યૂનતમ મૂલ્ય 0 એ $x = 1$ માટે મળે છે. a, b, c મેળવો. $x \in R$

26. કાટકોણ ત્રિકોણના કર્ણની લંબાઈ 10 સેમી છે. તેનું મહત્તમ ક્ષેત્રફળ શોધો.

*

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 66 : ધારો કે $g(x)$ નું સૂત્ર આપણે જાણતા નથી. પરંતુ $g'(x) = \sqrt{x^2 + 12}$, $\forall x \in R$ તથા $g(2) = 4$. તો $g(1.95)$નું આસન્ન મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : અહીં $x = 2$. $\Delta x = 1.95 - 2 = -0.05$

$$g(x + \Delta x) \simeq g(x) + g'(x)\Delta x$$

$$\therefore \quad g(1.95) \simeq g(2) + g'(2)(-0.05)$$

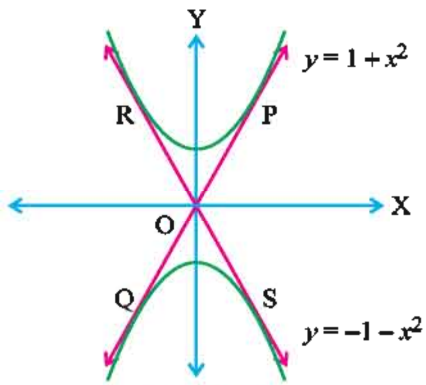
$$= 4 - (0.05)4$$

$$= 4 - 0.2 = 3.8$$

ઉદાહરણ 67 : $y = 1 + x^2$ તથા $y = -1 - x^2$ ના સામાન્ય સ્પર્શકનું સમીકરણ તથા સ્પર્શબિંદુના યામ મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે $\overleftrightarrow{PQ}$ એ $y = 1 + x^2$ ને P આગળ તથા $y = -1 - x^2$ ને Q આગળ સ્પર્શે છે.

ધારો કે P નો x-યામ a છે.



આકૃતિ 1.27

$\therefore$ $P(a, 1 + a^2)$ તથા $Q = (-a, -(1 + a^2))$ છે.

$\overleftrightarrow{PQ}$ નો ઢાળ $= \dfrac{1 + a^2 - (-(1 + a^2))}{a - (-a)}$

$= \dfrac{2(1 + a^2)}{2a} = \dfrac{1 + a^2}{a}$

$y = 1 + x^2 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 2x$

$\therefore$ P આગળ સ્પર્શકનો ઢાળ $= 2a$.

$\therefore$ $\dfrac{1 + a^2}{a} = 2a$ ($\overleftrightarrow{PQ}$ સ્પર્શક છે.)

$\therefore$ $1 + a^2 = 2a^2$

$\therefore$ $a^2 = 1$

$\therefore$ $a = \pm 1$

$\therefore$ $P = (1, 2)$ તથા $Q = (-1, -2)$ છે.

તે રીતે $R = (-1, 2)$ તથા $S(1, -2)$ છે.

$\overleftrightarrow{PQ}$ નું સમીકરણ $y - 2 = 2(x - 1)$ (ઢાળ $= 2a = 2$)

$\therefore$ $y - 2 = 2x - 2$

$\therefore$ $2x - y = 0$

તે જ રીતે સ્પર્શક $\overleftrightarrow{RS}$ નું સમીકરણ $2x + y = 0$.

$\therefore$ સામાન્ય સ્પર્શકોનાં સમીકરણ $2x - y = 0$ અને $2x + y = 0$ છે.

ઉદાહરણ 68 : પદાર્થકણની ગતિનું સમીકરણ $s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ છે. s મીટરમાં તથા t સેકંડમાં છે.

(1) $t = 2$ સમયે તાત્ક્ષણિક વેગ શોધો.

(2) પદાર્થ સ્થિર ક્યારે થશે ?

(3) પ્રથમ 5 સેકંડમાં પદાર્થકણે કાપેલ અંતર શોધો.

ઉકેલ : $\dfrac{ds}{dt} = f'(t) = 3t^2 - 12t + 9$

(1) $t = 2$ સમયે તાત્ક્ષણિક વેગ $= [f'(t)]_{t=2} = 12 - 24 + 9 = -3$ મી/સે

(2) જ્યારે કણ સ્થિર હોય ત્યારે તાત્ક્ષણિક વેગ 0 થાય.

$\therefore$ $3t^2 - 12t + 9 = 0$

$\therefore$ $t^2 - 4t + 3 = 0$

$\therefore$ $t = 1$ અથવા 3

$\therefore$ કણ $t = 1$ તથા $t = 3$ સમયે સ્થિર થશે.

(3) $f'(t) = 3(t - 1)(t - 3)$

$\therefore$ $t < 1$ તથા $t > 3$ માટે $f'(t)$ ધન છે. આમ $t < 1$ તથા $t > 3$ માટે $f(t)$ વધે અને $t \in (1, 3)$ માટે $f(t)$ ઘટે છે. પદાર્થ કણની ગતિ ત્રણ ભાગમાં વહેંચાઈ જાય છે; (0, 1), (1, 3), (3, 5).

∴ કાપેલ કુલ અંતર $s_1 + s_2 + s_3$, જ્યાં

$s_1 = |f(1) - f(0)| = 4, \quad s_2 = |f(3) - f(1)| = |0 - 4| = 4$

$s_3 = |f(5) - f(3)| = 20$

∴ કણે કાપેલ કુલ અંતર $20 + 4 + 4 = 28$ મી

નોંધ : $|f(5) - f(0)| = 20$ એ કાપેલ કુલ અંતર નથી.

ઉદાહરણ 69 : એક લંબચોરસ મેદાનમાં પ્રદર્શન યોજવાનું છે. લંબચોરસ મંડપની ત્રણ બાજુઓ 80 મી કાપડથી બંધ કરવી છે. ચોથી બાજુ ખુલ્લી રાખવી છે. આ મંડપનાં પરિમાણો કેવી રીતે નક્કી કરવા કે જેથી મહત્તમ ક્ષેત્રફળ આવૃત્ત કરી શકાય ?

ઉકેલ : આપેલ છે કે $2x + y = 80$

$A = xy = x(80 - 2x) = 80x - 2x^2$

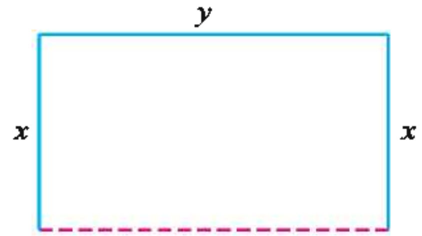
∴ $\frac{dA}{dx} = 0 \Rightarrow 80 - 4x = 0 \Rightarrow x = 20$

∴ $\frac{d^2A}{dx^2} = -4 < 0$

જો લંબાઈ $y = 80 - 2x = 80 - 40 = 40$ મી હોય

તથા પહોળાઈ 20 મી હોય તો આવૃત્ત ક્ષેત્રફળ મહત્તમ થાય.

∴ આવૃત્ત મહત્તમ ક્ષેત્રફળ $40 \times 20 = 800$ મી^{2} થાય.



આકૃતિ 1.28

માત્ર માહિતી માટે :

x એકમનો ઉત્પાદન ખર્ચ $C(x)$ છે. $C(x)$ ખર્ચ વિધેય છે.

$C'(x)$ સીમાંત ખર્ચ છે.

$c(x) = \frac{C(x)}{x}$ પ્રત્યેક એકમની (એકમદીઠ) કિંમત છે.

$c(x)$ સરેરાશ મૂલ્ય વિધેય છે.

$c'(x) = \frac{xC'(x) - C(x)}{x^2}$

∴ ન્યૂનતમ સરેરાશ ખર્ચ માટે $c'(x) = 0$.

∴ $xC'(x) = C(x)$

∴ $C'(x) = \frac{C(x)}{x} = c(x)$

જો સરેરાશ ખર્ચ ન્યૂનતમ હોય તો સીમાંત ખર્ચ = સરેરાશ ખર્ચ

યાદ રાખો : જ્યારે નફો મહત્તમ થાય ત્યારે સીમાંત આવક $\frac{dR}{dx}$ = સીમાંત ખર્ચ $\frac{dC}{dx}$

તથા $R''(x) < C''(x)$ હોય.

જો એકમદીઠ વેચાણ મૂલ્ય $p(x)$ હોય અને x એકમ વેચાતા હોય તો p ને માંગનું વિધેય કહે છે.

કુલ આવક $R(x) = xp(x)$

$R(x)$ ને આવકનું વિધેય કહે છે. $R'(x)$ સીમાંત આવકનું વિધેય છે.

જો $P(x)$ નફાનું વિધેય હોય તો

$P(x) = R(x) - C(x)$

મહત્તમ નફા માટે $P'(x) = 0$

∴ $R'(x) = C'(x)$

∴ મહત્તમ નફા માટે સીમાંત આવક = સીમાંત ખર્ચ

વળી $P''(x) = R''(x) - C''(x) < 0$

∴ મહત્તમ નફા માટે $R''(x) < C''(x)$

ઉદાહરણ : એક કંપની x બૉલપેન બનાવવાની કિંમત $C(x) = 3000 + 2x + 0.001x^2$ અંદાજે છે.

(1) 1000 બૉલપેન બનાવવાનો કુલ ખર્ચ, સરેરાશ ખર્ચ અને સીમાંત ખર્ચ શોધો.

(2) કેટલા ઉત્પાદન માટે સરેરાશ ખર્ચ ન્યૂનતમ થાય તથા તે ન્યૂનતમ સરેરાશ ખર્ચ કેટલું હશે ?

ઉકેલ : (1) સરેરાશ ખર્ચનું વિધેય $c(x) = \frac{C(x)}{x}$

$$= \frac{3000 + 2x + 0.001x^2}{x}$$

$$= \frac{3000}{x} + 2 + 0.001x \text{ છે.}$$

સીમાંતખર્ચ $C'(x) = 2 + 0.002x$

$\therefore$ 1000 બૉલપેનના ઉત્પાદન માટે કુલ ખર્ચ $C(1000) = 3000 + 2000 + \frac{1}{1000} \times (1000)^2$

$$= ₹\ 6000$$

$\therefore$ પ્રતિપેન સરેરાશ ખર્ચ $c(x) = \frac{6000}{1000} = ₹\ 6$

સીમાંત ખર્ચ $C'(x) = 2 + \frac{2}{1000} \times 1000 = ₹\ 4$

(2) ન્યૂનતમ સરેરાશ ખર્ચ માટે :

સીમાંત ખર્ચ = સરેરાશ ખર્ચ

$C'(x) = c(x)$

$\therefore\ 2 + 0.002x = \frac{3000}{x} + 2 + 0.001x$

$\therefore\ 0.001x = \frac{3000}{x}$

$\therefore\ x^2 = 3000 \times 1000$

$\therefore\ x = \sqrt{3 \times 10^6} = \sqrt{3} \times 10^3 = 1730$

$\therefore$ ખર્ચ ન્યૂનતમ કરવા માટે 1730 બૉલપેન બનાવવી જોઈએ.

ન્યૂનતમ સરેરાશ ખર્ચ $= c(1730) = \frac{3000}{1730} + 2 + (0.001)(1730)$

$$= \frac{300}{173} + 2 + 1.73$$

$$= 1.73 + 2 + 1.73$$

$$= ₹\ 5.46$$

ઉદાહરણ 70 : $xy = 8$ પરનું $P(3, 0)$ ની સૌથી નજીકનું પૂર્ણાંક યામવાળું બિંદુ શોધો તથા ન્યૂનતમ અંતર મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે $xy = 8$ પર બિંદુ $Q\left(x, \frac{8}{x}\right)$ છે.

$\therefore\ PQ^2 = (x - 3)^2 + \frac{64}{x^2}$

ધારો કે $f(x) = (x - 3)^2 + \frac{64}{x^2}$

$f'(x) = 2(x - 3) - \frac{128}{x^3} = 0 \Rightarrow x - 3 = \frac{64}{x^3}$

$\therefore\ x^4 - 3x^3 - 64 = 0$

$\therefore \quad (x - 4)(x^3 + x^2 + 4x + 16) = 0$

($x^3 + x^2 + 4x + 16 = 0$ નો પૂર્ણાંક ઉકેલ નથી. ચકાસો !)

$\therefore \quad x = 4$

$\therefore \quad f''(x) = 2 - \frac{(128)(-3)}{x^4}$

$\therefore \quad f''(4) = 2 + \frac{(128)(3)}{256} = \frac{7}{2} > 0$

$\therefore$ $x = 4$ માટે $f(x)$ ન્યૂનતમ છે.

$\therefore$ $xy = 8$ પરનું P(3, 0) ની સૌથી નજીકનું બિંદુ Q(4, 2) છે.

ન્યૂનતમ અંતર PQ $= \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

ઉદાહરણ 71 : $y^2 = 2x$ પર (1, 4) ની સૌથી નજીકનું બિંદુ શોધો તથા ન્યૂનતમ અંતર શોધો.

ઉકેલ : $y^2 = 2x = 4ax$. આથી $a = \frac{1}{2}$

$\therefore$ $y^2 = 2x$ પરનું પ્રચલ બિંદુ $P\left(\frac{1}{2}t^2, t\right)$ છે.

ધારો કે Q(1, 4) છે.

$\therefore \quad PQ^2 = \left(\frac{1}{2}t^2 - 1\right)^2 + (t - 4)^2$

$= \frac{1}{4}t^4 - t^2 + 1 + t^2 - 8t + 16$

$= \frac{1}{4}t^4 - 8t + 17$

ધારો કે $f(t) = \frac{1}{4}t^4 - 8t + 17$

$f'(t) = 0 \Rightarrow t^3 - 8 = 0 \Rightarrow t = 2$

$f''(t) = 3t^2 = 12 > 0$

$\therefore$ $t = 2$ માટે $f(t)$ ન્યૂનતમ છે.

$\therefore$ P(2, 2) છે તથા Q(1, 4) છે.

$\therefore$ ન્યૂનતમ અંતર PQ $= \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$.

ઉદાહરણ 72 : 45 સેમી $\times$ 24 સેમી લંબચોરસ પતરાના દરેક ખૂણેથી ચાર એકરૂપ ચોરસ કાપી ખુલ્લી પેટી બનાવવામાં આવે છે. પેટીનું ઘનફળ મહત્તમ થાય તે માટે પતરામાંથી કાપવામાં આવતા ચોરસની લંબાઈ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે દરેક ખૂણેથી કાપવામાં આવતા ચોરસની લંબાઈ x છે. તો પેટીની લંબાઈ, પહોળાઈ તથા ઊંચાઈ અનુક્રમે $(45 - 2x)$, $(24 - 2x)$ તથા x થશે.

પેટીનું ઘનફળ $V = (45 - 2x)(24 - 2x)x$

$= 4x^3 - 138x^2 + 1080x$

$\frac{dV}{dx} = 0 \Rightarrow 12x^2 - 276x + 1080 = 0 \Rightarrow x^2 - 23x + 90 = 0$

$\therefore \quad x = 18$ અથવા 5

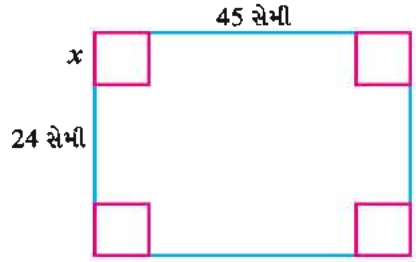
પરંતુ $x = 18$ હોય તો પહોળાઈ $24 - 2x = 24 - 36 < 0$

$\therefore \quad x \neq 18$ અને તેથી $x = 5$

દરેક ખૂણેથી કપાતા ચોરસની લંબાઈ 5 સેમી છે.

વળી $\frac{d^2V}{dx^2} = 24x - 276 = 120 - 276 < 0$

$\therefore \quad x = 5$ માટે ઘનફળ મહત્તમ છે.



આકૃતિ 1.29

સ્વાધ્યાય 1

1. શંકુ આકારની ગરણીની નીચેના છિદ્રમાંથી 5 સેમી^{3}/સેના દરથી પાણી ટપકી રહ્યું છે. પાણીથી બનતા શંકુની ત્રાંસી ઊંચાઈ 4 સેમી છે. શંકુના અર્ધશિરઃકોણનું માપ $\frac{\pi}{6}$ છે. પાણીથી બનતા શંકુની ત્રાંસી ઊંચાઈ ઘટવાનો દર શોધો.

2. એક પતંગ 40 મી ઊંચાઈએ ઉડે છે. દોરીની લંબાઈ 50 મી છે. તે સમયે પતંગનો સમક્ષૈતિજ વેગ 25 મી/સે છે. તે સમયે દોરી છોડવાનો દર શોધો.

3. ત્રિકોણની ઊંચાઈ 2 સેમી/મિનિટના દરે વધે છે. તેનું ક્ષેત્રફળ 5 સેમી^{2}/મીના દરે વધે છે. જ્યારે ઊંચાઈ 10 સેમી હોય અને ક્ષેત્રફળ 100 સેમી^{2} હોય ત્યારે આધારની લંબાઈના ફેરફારનો દર શોધો.

4. જે અંતરાલમાં $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 25$, $x \in R$ (1) ચુસ્ત વધે છે કે (2) ચુસ્ત ઘટે છે તે અંતરાલ નક્કી કરો.

5. જે અંતરાલમાં $f(x) = (x + 1)^3(x - 3)^3$, $x \in R$ (1) ચુસ્ત વધે છે કે (2) ચુસ્ત ઘટે છે તે નક્કી કરો.

6. સાબિત કરો કે $f(x) = x^{101} + sinx - 1$, $x \in R$ એ $|x| > 1$ માટે વધતું વિધેય છે.

7. $f(x) = x^4 + 32x$ જે અંતરાલમાં વધે છે કે ઘટે છે તે નક્કી કરો. $x \in R$

8. જે અંતરાલમાં $f(x) = x^2e^{-x}$ વધે છે કે ઘટે છે તે અંતરાલ નક્કી કરો. $x \in R$

9. સાબિત કરો કે વક્રો $xy = a^2$ તથા $x^2 + y^2 = 2a^2$ એકબીજાને સ્પર્શે છે.

10. વક્ર $y = be^{-\frac{x}{a}}$ Y-અક્ષને જે બિંદુએ છેદે ત્યાં સ્પર્શકનું સમીકરણ મેળવો.

11. વક્રો $y^2 = 4ax$ તથા $x^2 = 4ay$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.

12. સાબિત કરો કે $y = 6x^3 + 15x + 10$ ના કોઈપણ સ્પર્શકનો ઢાળ 12 હોઈ શકે નહીં. $x \in R$

13. ઉપવલય $x^2 + 2y^2 = 9$ પરના જે બિંદુઓએ સ્પર્શકનો ઢાળ $\frac{1}{4}$ હોય તે બિંદુઓ શોધો.

14. $f(x) = x - 2sinx$ નાં મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધો. $x \in [0, 2\pi]$

15. $f(x) = 1 - e^{-x}$ નાં મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધો. $x \geq 0$

16. $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ નાં મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધો. $x \neq 0$

17. $f(x) = 4x - tanx$ ક્યાં વધે અને ક્યાં ઘટે છે તે નક્કી કરો તથા તેનાં મહત્તમ અને ન્યૂનતમ મૂલ્યો મેળવો. $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

18. $f(x) = x + \sqrt{1-x}$, $0 < x < 1$ માટે જ્યાં વધે છે કે ઘટે છે તે નક્કી કરો તથા તેનાં મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધો.

19. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(6-x)^{\frac{1}{3}}$, $x \in [0, 6]$ માટે નિર્ણાયક સંખ્યાઓ શોધો. વિધેય ક્યાં વધે છે કે ઘટે છે તે નક્કી કરો તથા તેનાં મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો પણ મેળવો.

20. $f(x) = sin^4x + cos^4x$ નાં મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધો. $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

21. સાબિત કરો કે $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^x$ ને $x = \frac{1}{e}$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય મળે છે. $x \in R^+$

22. સાબિત કરો કે નિશ્ચિત ક્ષેત્રફળ વાળા લંબચોરસોમાં ચોરસની પરિમિતિ ન્યૂનતમ છે.

23. સાબિત કરો કે વર્તુળમાં અંતર્ગત તમામ લંબચોરસમાં ચોરસનું ક્ષેત્રફળ મહત્તમ છે.

24. અચળ લંબાઈના કર્ણવાળા કાટકોણ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ મહત્તમ હોય તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિભૂજ હોય તેમ સાબિત કરો.

25. કાટકોણ ત્રિકોણના કર્ણ પરના એક બિંદુના કાટખૂણો બનાવતી બાજુઓથી લંબઅંતર a તથા b છે. (a, b અચળ) સાબિત કરો કે કર્ણની ન્યૂનતમ લંબાઈ $\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ છે.

26. જો લંબવૃતીય શંકુનું પૃષ્ઠફળ અચળ હોય તો તેનો અર્ધશિર:કોણ $sin^{-1}\frac{1}{3}$ હોય ત્યારે તેનું ઘનફળ મહત્તમ થાય તેમ સાબિત કરો.

27. નીચેના વક્રો છેદે તો તેમની વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.

(1) $xy = 6$, $x^2y = 12$

(2) $y = x^2$, $x^2 + y^2 = 20$

(3) $2y^2 = x^3$, $y^2 = 32x$ $(x, y) \neq (0, 0)$

(4) $y^2 = 4ax$, $x^2 = 4by$

(5) $y^2 = 8x$, $x^2 = 27y$

(6) $x^2 + y^2 = 2x$, $y^2 = x$

28. (1) સાબિત કરો કે વક્રો $x^2 = 4y$ તથા $x^2 + 4y = 8$ એ (2, 1) આગળ તથા (−2, 1) આગળ એક બીજાને કાટખૂણે છેદે છે.

(2) સાબિત કરો કે $x^2 = y$ તથા $x^3 + 6y = 7$ એ (1, 1) આગળ લંબચ્છેદી છે.

29. **નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c), (d)માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :**

(1) સમભૂજ ત્રિકોણની બાજુ $\sqrt{3}$ સેમી/સેના દરથી વધે છે. જ્યારે તેની બાજુની લંબાઈ 12 સેમી હોય ત્યારે તેનો ક્ષેત્રફળ વધવાનો દર ...... છે. ☐

(a) 12 સેમી^{2}/સે (b) 18 સેમી^{2}/સે (c) $3\sqrt{3}$ સેમી^{2}/સે (d) 10 સેમી^{2}/સે

(2) પદાર્થકણે t સમયમાં કાપેલ અંતર s માટે $s = t^3 - 6t^2 + 6t + 8$ છે. જ્યારે પ્રવેગ 0 હોય ત્યારે વેગ ...... છે. ☐

(a) 5 સેમી/સે (b) 2 સેમી/સે (c) 6 સેમી/સે (d) −6 સેમી/સે

(3) ગોલકનું ઘનફળ π સેમી^{3}/સે ના દરે વધે છે. જ્યારે ત્રિજ્યા 3 સેમી હોય ત્યારે ત્રિજ્યા વધવાનો દર ......છે. ☐

(a) $\frac{1}{36}$ સેમી/સે (b) 36 સેમી/સે (c) 9 સેમી/સે (d) 27 સેમી/સે

(4) સાદા લોલકનો આવર્તકાળ માપવામાં આશરે 4 % ત્રુટિ આવે છે. તો લંબાઈ માપવામાં ત્રુટિ ...... છે.

(સૂચન : $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$)

(a) 4 % (b) 8 % (c) 2 % (d) 6 %

(5) $(31)^{\frac{1}{5}}$ નું આસન્ન મૂલ્ય ...... છે.

(a) 2.01 (b) 2.1 (c) 2.0125 (d) 1.9875

(6) નળાકારની ઊંચાઈ તથા ત્રિજ્યા સમાન છે. ઊંચાઈ માપવામાં 2 % ત્રુટિ પ્રવેશે છે. ઘનફળના માપમાં આશરે ...... ત્રુટિ પ્રવેશે.

(a) 6 % (b) 4 % (c) 3 % (d) 2 %

(7) $(at^2, 2at)$ પ્રચલ સમીકરણવાળા વક્રનો સ્પર્શક ...... આગળ X-અક્ષને લંબ છે. $t \in R$

(a) $(4a, 4a)$ (b) $(a, 2a)$ (c) $(0, 0)$ (d) $(a, -2a)$

(8) જો રેખા $y = mx + 1$ એ $y^2 = 4x$ ને સ્પર્શે તો $m =$ ......

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) 2

(9) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ પરના $\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}, \frac{a}{2\sqrt{2}}\right)$ બિંદુએ અભિલંબનું સમીકરણ ...... છે.

(a) $2x + y = 0$ (b) $y = 1$ (c) $x = 0$ (d) $x = y$

(10) $f(x) = x^x$ એ ...... માં ઘટે છે. $x \in R^+$

(a) $(0, e)$ (b) $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ (c) $(0, 1)$ (d) $(0, \infty)$

(11) $f(x) = 2|x - 2| + 3|x - 4|$ એ અંતરાલ $(2, 4)$ માં ...... છે. $x \in R$

(a) ઘટે છે (b) વધે છે (c) અચળ છે (d) નક્કી ન થઈ શકે.

(12) $f(x) = x^7 + 5x^3 + 125$, $x \in R$ એ ....

(a) $(0, \infty)$ માં ઘટે છે. (b) $(-\infty, 0)$ માં ઘટે છે.

(c) R પર વધે છે. (d) R માં વધતું કે ઘટતું વિધેય નથી.

(13) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ નું સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય ...... છે. $x \neq 0$

(a) 2 (b) -2 (c) 4 (d) -4

(14) $\frac{x}{\log x}$ નું સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય ...... છે. $x \in R^+$

(a) -1 (b) 0 (c) $\frac{1}{e}$ (d) e

(15) $\log_e 4 = 1.3868$, તો $\log_e 4.01$ ની આસન્ન કિંમત ...... છે.

(a) 1.3867 (b) 1.3869 (c) 1.3879 (d) 1.3893

(16) વર્તુળનો પરિઘ 20 સેમી છે અને તે માપવામાં 0.02 સેમી ત્રુટિ છે. ક્ષેત્રફળમાં ત્રુટિ આશરે ...... % છે.

(a) 0.02 (b) 0.2 (c) π (d) $\frac{1}{\pi}$

(17) રેખા $y = x$ એ વક્ર $y = x^2 + bx + c$ ને $(1, 1)$, આગળ સ્પર્શે તો ......

(a) $b = 1, c = 2$ (b) $b = -1, c = 1$ (c) $b = 1, c = 1$ (d) $b = 0, c = 1$

(18) જો ...... તો $y = ae^x$, તથા $y = be^{-x}$ લંબચ્છેદી છે. $(a \neq 0, b \neq 0)$

(a) $a = \frac{1}{b}$ (b) $a = b$ (c) $a = -\frac{1}{b}$ (d) $a + b = 0$

(19) $y = 5x^5 + 10x + 15$ નો સ્પર્શક ......

(a) હંમેશા શિરોલંબ છે.

(b) હંમેશા સમક્ષિતિજ છે.

(c) X-અક્ષની ધનદિશા સાથે લઘુકોણ બનાવે છે.

(d) X-અક્ષની ધનદિશા સાથે ગુરુકોણ બનાવે છે.

(20) $f(x) = 2x + cot^{-1}x - \log | x + \sqrt{1+x^2} |$ ...... છે. $x \in R$

(a) $(-\infty, 0)$ માં ઘટતું વિધેય (b) $(0, \infty)$ માં ઘટતું વિધેય

(c) અચળ વિધેય (d) R પર વધતું વિધેય

(21) બે શૂન્યેતર સંખ્યાઓનો સરવાળો 12 છે. તેમના વ્યસ્તનો ન્યૂનતમ સરવાળો ...... છે.

(a) $\frac{1}{10}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{3}$

(22) $f(x) = x^2 + 4x + 5$ નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય ...... છે. $x \in R$

(a) 2 (b) 4 (c) 1 (d) -1

(23) $f(x) = 5cosx + 12sinx$ નું મહત્તમ મૂલ્ય ...... છે. $x \in R$

(a) 13 (b) 12 (c) 5 (d) 17

(24) $f(x) = 3cosx + 4sinx$ નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય ...... છે. $x \in R$

(a) 7 (b) 5 (c) -5 (d) 4

(25) $f(x) = x \log x$ નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય ...... છે. $x \in R^+$

(a) 1 (b) 0 (c) e (d) $-\frac{1}{e}$

(26) $f(x) = \sqrt{3}\,cosx + sinx$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ એ $x =$ ...... માટે મહત્તમ છે.

(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) 0

(27) $f(x) = (x - a)^2 + (x - b)^2 + (x - c)^2$ ની ન્યૂનતમ કિંમત $x =$ ...... માટે મળે. $x \in R$

(a) $\sqrt[3]{abc}$ (b) $a + b + c$ (c) $\frac{a+b+c}{3}$ (d) 0

(28) $f(x) = (x + 2)\,e^{-x}$ ...... પર વધે છે. $x \in R$

(a) $(-\infty, -1)$ (b) $(-1, -\infty)$ (c) $(2, \infty)$ (d) R^+

(29) $y^2 = x$ તથા $x^2 = y$ ના ઊગમબિંદુ સિવાયના છેદબિંદુ આગળ તેમની વચ્ચેના ખૂણાનું માપ ...... છે.

(a) $tan^{-1}\frac{4}{3}$ (b) $tan^{-1}\frac{3}{4}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

(30) $y = x^2 - 2x + 3$ ના ...... બિંદુએ અભિલંબ Y-અક્ષ ને સમાંતર છે.

(a) (0, 3) (b) (–1, 2) (c) (1, 2) (d) (3, 6)

(31) $(3t^2 + 1, t^3 - 1)$ પ્રચલ સમીકરણવાળા વક્રના $t = 1$ માટેના બિંદુએ અભિલંબનો ઢાળ ...... છે. $t \in R$

(a) $\frac{1}{2}$ (b) –2 (c) 2 (d) $-\frac{1}{2}$

(32) $3x^2 - y^2 = 8$ ના (2, –2) બિંદુએ અભિલંબનું સમીકરણ ...... છે.

(a) $x + 2y = -2$ (b) $x - 3y = 8$ (c) $3x + y = 4$ (d) $x + y = 0$

(33) $x = e^t cost,\ y = e^t sint$ વક્ર પરના $t = \frac{\pi}{4}$ ને સંગત બિંદુએ સ્પર્શક X-અક્ષની ધનદિશા સાથે ...... માપનો ખૂણો બનાવે છે. $t \in R$

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) 0 (d) $\frac{\pi}{3}$

(34) $y = cosx$ પરના (0, 1) બિંદુએ સ્પર્શકનું સમીકરણ ...... છે.

(a) $x = 0$ (b) $y = 0$ (c) $x = 1$ (d) $y = 1$

(35) $y = sinx$ પરના $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ બિંદુએ અભિલંબનું સમીકરણ ...... છે.

(a) $x = 1$ (b) $x = 0$ (c) $y = \frac{\pi}{2}$ (d) $x = \frac{\pi}{2}$

(36) $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ પરના ...... બિંદુએ સ્પર્શક સમક્ષિતિજ છે.

(a) $(0, \pm\sqrt{3})$ (b) $(2, \pm\sqrt{3})$ (c) (1, 2), (1, –2) (d) (3, 0)

(37) $y^2 = x$ પરના જે બિંદુએ સ્પર્શક X-અક્ષની ધનદિશા સાથે $\frac{\pi}{4}$ માપનો ખૂણો બનાવે તે બિંદુ ...... છે.

(a) $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ (b) (2, 1) (c) (0, 0) (d) (–1, 1)

(38) એક શંકુનું ઊંચાઈ તેના આધારના વ્યાસ જેટલી છે તેનું કદ 50 સેમી^{3}/સે ના દરે વધે છે. જો આધારનું ક્ષેત્રફળ 1 મી^{2} હોય તો તેની ત્રિજ્યાનો વૃદ્ધિદર ...... છે.

(a) 0.0025 સેમી/સે (b) 0.25 સેમી/સે (c) 1 સેમી/સે (d) 4 સેમી/સે

(39) $x =$ ...... માટે $f(x) = x^3 - 5x^2 + 5x + 25$ નો વૃદ્ધિદર x ના વૃદ્ધિદર કરતાં બમણો છે. $x \in R$

(a) $-3, -\frac{1}{3}$ (b) $3, \frac{1}{3}$ (c) $-3, \frac{1}{3}$ (d) $3, -\frac{1}{3}$

(40) શંકુની ત્રિજ્યા 4 સેમી/સે ના દરથી વધે છે. તેની ઊંચાઈ 3 સેમી/સે ના દરથી ઘટે છે. જ્યારે તેની ત્રિજ્યા 3 સેમી તથા ઊંચાઈ 4 સેમી હોય ત્યારે તેની તિર્યક સપાટીનો વૃદ્ધિદર ...... છે.

(a) 30π સેમી^{2}/સે (b) 10 સેમી^{2}/સે (c) 20π સેમી^{2}/સે (d) 22π સેમી^{2}/સે

(41) ગોલકના પૃષ્ઠફળનો તેની ત્રિજ્યાને સાપેક્ષ વૃદ્ધિદર .... છે.

(a) 8π (વ્યાસ) (b) 3π (વ્યાસ) (c) 4π (ત્રિજ્યા) (d) 8π (ત્રિજ્યા)

(42) જે નળાકારની ઊંચાઈ તેની ત્રિજ્યા જેટલી હોય તેના કદનો ત્રિજ્યાને સાપેક્ષ દર ...... છે.

(a) 4 (આધારનું ક્ષેત્રફળ) (b) 3 (આધારનું ક્ષેત્રફળ) (c) 2 (આધારનું ક્ષેત્રફળ) (d) (આધારનું ક્ષેત્રફળ)

(43) $f(x) = tan^{-1} x - x$ .... $x \in R$

(a) R પર વધે છે (b) R પર ઘટે છે (c) R^+ પર વધે છે (d) $(-\infty, 0)$ પર વધે છે

(44) $f(x) = tan\, x - x$, $x \in R - \{(2k-1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\}$ ....

(a) તેના પ્રદેશ પર વધે છે (b) તેના પ્રદેશ પર ઘટે છે

(c) $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ પર વધે છે (d) $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ પર ઘટે છે

(45) $f(x) = 2x - tan^{-1} x - \log \left| x + \sqrt{1+x^2} \right|$ .... $x \in R$

(a) R પર વધતું વિધેય છે (b) R પર ઘટતું વિધેય છે

(c) ને $x = 1$ માટે ન્યૂનતમ મૂલ્ય મળે (d) ને $x = 1$ માટે મહત્તમ મૂલ્ય મળે

(46) જો ......, તો $f(x) = x^2 - kx + 20$, $[0, 3]$ માં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

(a) $k < 0$ (b) $0 < k < 1$ (c) $1 < k < 2$ (d) $2 < k < 3$

(47) જો ...... તો $f(x) = |x - 1| + |x - 2|$ વધતું વિધેય છે.

(a) $x > 2$ (b) $x < 1$ (c) $x < 0$ (d) $x < -2$

(48) $9y^2 = x^3$ નો ...... આગળનો અભિલંબ અક્ષો પર એકરૂપ અંતઃખંડો કાપે.

(a) $\left(-4, -\frac{8}{3}\right)$ (b) $\left(4, \pm\frac{8}{3}\right)$ (c) $\left(\pm 4, \frac{8}{3}\right)$ (d) $\left(8, \frac{8}{3}\right)$

(49) જો m = ... તો $y = mx + 4$ એ $y^2 = 8x$ ને સ્પર્શે.

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) 2 (d) -2

(50) $x = \frac{\pi}{6}$ આગળ વક્રો $y = 2\, sin^2 x$ તથા $y = cos\, 2x$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ ...... છે.

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

(51) (1, 2)માંથી પસાર થતા $x^2 = 4y$ ના અભિલંબનું સમીકરણ ...... છે.

(a) $2x = y$ (b) $x + y - 3 = 0$ (c) $2x + 3y - 8 = 0$ (d) $x - y + 1 = 0$

(52) $x^2 + \frac{16}{x}$ નું સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય ...... છે. $x \in R - \{0\}$

(a) 12 (b) 22 (c) -12 (d) 2

(53) $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$ માં sec નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય ...... છે.

(a) 1 (b) -2 (c) 2 (d) π

(54) $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ માં $cosec$ નું મહત્તમ મૂલ્ય ...... છે.

(a) 2 (b) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (c) $\frac{\pi}{6}$ (d) $\frac{\pi}{3}$

(55) જો f એ $[a, b]$ પર ઘટતું વિધેય હોય તો તેનાં ન્યૂનતમ તથા મહત્તમ મૂલ્યો અનુક્રમે ...... અને ...... છે.

(a) $f(a)$ અને $f(b)$ (b) $f(b)$ અને $f(a)$

(c) $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ અને $f(a)$ (d) $f(b)$ અને $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દા શીખ્યા :

(1) દરમાપક તરીકે વિકલિત

(2) વધતાં તથા ઘટતાં વિધેયો

(3) ભૂમિતિમાં વિકલિતના ઉપયોગ : સ્પર્શક તથા અભિલંબ

(4) બે વક્રો વચ્ચેના ખૂણાનું માપ

(5) વિકલ તથા આસન્ન મૂલ્યો

(6) મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો

(7) ઈષ્ટતમ મૂલ્યો (મહત્તમ, ન્યૂનતમ)ના પ્રશ્નો તથા વ્યવહારુ ઉપયોગો.

■

RAMANUJAN

He was born on 22na of December 1887 in a small village of Tanjore district, Madras.

He failed in English in Intermediate, so his formal studies were stopped but his self-study of mathematics continued.

He sent a set of 120 theorems to Professor Hardy of Cambridge. As a result he invited Ramanujan to England.

Ramanujan showed that any big number can be written as sum of not more than four prime numbers.

He showed that how to divide the number into two or more squares or cubes.

when Mr Litlewood came to see Ramanujan in taxi number 1729, Ramanujan said that 1729 is the smallest number which can be written in the form of sum of cubes of two numbers in two ways,

i.e. $1729 = 9^3 + 10^3 = 1^3 + 12^3$

since then the number 1729 is called Ramanujan's number.

અનિયત સંકલન **2**

Science without religion is lame, religion without science is blind.
– Albert Einstein

A man is like a fraction whose numerator is what he is and whose denominator is what he thinks of himself. The larger the denominator, the smaller the fraction.
– Tolstoy

2.1 પ્રાસ્તાવિક

સિમેસ્ટર-IIIમાં આપણે અનિયત સંકલનની વ્યાખ્યા, પ્રમાણિત સંકલિતો, સંકલનના કાર્યનિયમો અને આદેશની રીતનો અભ્યાસ કર્યો. તે ઉપરાંત આપણે ત્રિકોણમિતીય આદેશ, એક વિશિષ્ટ આદેશ $tan\frac{x}{2} = t$; $\int sin^m x \cdot cos^n x \, dx$, $m, n \in$ N સ્વરૂપના સંકલિતો અને $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, $\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} \, dx$ અને $\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \, dx$. સ્વરૂપના સંકલિતોનો પણ અભ્યાસ કર્યો. તેમ છતાંય કેટલાંક સતત વિધેયો એવાં છે કે જેનું સંકલિત ઉપર દર્શાવેલ રીતોથી મેળવવું મુશ્કેલ છે; ઉદાહરણ તરીકે $\log x$, $sec^{-1}x$, $e^x sinx$, $\frac{x^2 + 1}{(x^2 + 2)(2x^2 + 1)}$ વગેરે. આપણે આવાં વિધેયોના સંકલિતો શોધવા માટે બીજી કેટલીક વધુ પદ્ધતિઓ વિકસાવવી પડશે.

આવાં વિધેયોના સંકલિતો શોધવાની રીતો આપણે આ પ્રકરણમાં શીખીશું. બે વિધેયોના ગુણાકારનું વિકલન કરવા માટેનો નિયમ આપણે જોઈ ગયા. હવે બે વિધેયોના ગુણાકારના સંકલન માટે એક ખૂબ જ ઉપયોગી રીત **ખંડશઃ સંકલન (Integration by Parts)** ની રીત શીખીશું.

2.2 ખંડશઃ સંકલનનો નિયમ

જો (1) વિધેય f અને g એ કોઈ અંતરાલ I = (a, b) પર વિકલનીય હોય,

(2) f' અને g' એ I પર સતત હોય, તો $\int f(x) \, g'(x) \, dx = f(x) \, g(x) - \int f'(x) \, g(x) \, dx$

સાબિતી : અહીં f અને g એ x નાં વિકલનીય વિધેયો છે એટલે $f \cdot g$ પણ વિકલનીય થશે અને વિકલનના ગુણાકારના નિયમ પ્રમાણે,

$$\frac{d}{dx}[f(x) \; g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x) \qquad \text{(i)}$$

હવે આપેલ શરતો મુજબ f, g, f', g' અંતરાલ I પર સતત છે અને તેથી સંકલનીય છે.

$\therefore$ fg' અને gf' પણ સતત થાય અને તેથી સંકલનીય થાય.

$\therefore$ પરિણામ (i) પરથી પ્રતિવિકલનની વ્યાખ્યા પ્રમાણે,

$$f(x) \; g(x) = \int [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)] \, dx$$

$$= \int f(x) \, g'(x) \, dx + \int f'(x)g(x) \, dx$$

$$\therefore \int f(x) \; g'(x) \, dx = f(x) \, g(x) - \int f'(x)g(x) \, dx \qquad \text{(ii)}$$

આ નિયમ **ખંડશઃ સંકલનના નિયમ** તરીકે ઓળખાય છે.

ખંડશઃ સંકલનના નિયમનું એક પ્રચલિત સ્વરૂપ :

ખંડશઃસંકલનનો નિયમ $\int f(x) \; g'(x) \, dx = f(x) \, g(x) - \int f'(x) \, g(x) \, dx$ છે.

આ નિયમમાં $f(x) = u$ અને $g'(x) = v$, લઈએ તો $f'(x) = \frac{du}{dx}$ અને $g(x) = \int v\, dx$ થાય.

$\therefore$ હવે નવા સંકેતોમાં ખંડશઃ સંકલનનો નિયમ નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

$$\int uv\, dx = u \int v\, dx - \int \left(\frac{du}{dx} \int v\, dx\right) dx. \qquad \text{(iii)}$$

નોંધ : (1) ઉપરનાં સૂત્રમાં આપેલ બે વિધેયો u, v ના ગુણાકારનું સંકલિત મેળવવા માટે આપેલ ગુણાકારને બીજાં બે વિધેયોના ગુણાકારમાં રૂપાંતરિત કરીએ છીએ, એક વિધેયનો વિકલિત $\frac{du}{dx}$ અને બીજા વિધેયનો સંકલિત $\int v\, dx$. $\left(\text{i.e. } \frac{du}{dx} \int v\, dx\right)$. એટલે કે આપેલ ગુણાકાર $\int u \cdot v\, dx$ નો સંકલિત સીધે સીધો મળતો નથી, પરંતુ તે બીજા પ્રકારના શક્યતઃ વધુ સરળ સંકલનીય ગુણાકાર $\int \left(\frac{du}{dx} \int v\, dx\right) dx$ માં પરિવર્તિત થાય છે, આથી તેને ખંડશઃસંકલનનું સૂત્ર કહે છે.

(2) આ સૂત્રનો ઉપયોગ કરતી વખતે u અને v ની પસંદગી યોગ્ય રીતે થાય તે ખૂબ જ જરૂરી છે.

ખંડશઃ સંકલનનો નિયમ સમજવા આપણે એક ઉદાહરણ લઈએ.

$\int x \cdot sinx\ dx$ મેળવો

અહીં આપણે $u = x$ અને $v = sinx$ લઈએ તો,

$$\int x \cdot sinx\ dx = x \int sinx\ dx - \int \left(\frac{d}{dx} x \int sin\, x\, dx\right) dx$$

$$= -x\, cosx + \int (1 \cdot cos\, x)\, dx$$

$$= -x\, cosx + sin\, x + c$$

પણ જો $u = sinx$ અને $v = x$ પસંદ કરીએ તો,

$$\int x \cdot sinx\ dx = sin\, x \int x\ dx - \int \left(\frac{d}{dx}(sin\, x) \int x\, dx\right) dx$$

$$= sin\, x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \left(cos\, x \cdot \frac{x^2}{2}\right) dx$$

$$= \frac{x^2}{2} sin\, x - \frac{1}{2} \int x^2\ cos\, x\ dx$$

આમ, u અને v ની આવી પસંદગી કરવાથી x નો ઘાતાંક વધે છે અને બે વિધેયોના ગુણાકારનો સંકલિત x ના વધુ ઘાતાંક વાળા બે વિધેયોના ગુણાકારના સંકલિતમાં ફેરવાય છે, જે મેળવવો મુશ્કેલ થશે. અહીં u અને v ની પસંદગી કરતી વખતે નીચેની બાબતો ધ્યાનમાં રાખીશું :

(i) v નો સંકલિત જ્ઞાત હોય.

(ii) $\frac{du}{dx} \int v\, dx$ નું સંકલન કરવાનું સરળ હોય.

આમ, ઉપરની બે બાબતો ધ્યાનમાં રાખી u અને vની પસંદગી માટે નીચેનો ક્રમ ધ્યાનમાં રાખીશું.

L : Logarithmic function-લઘુગણકીય વિધેય, **I :** Inverse trigonometric function-ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેય, **A :** Algebraic function-બૈજિક વિધેય, **T :** Trigonometric function-ત્રિકોણમિતીય વિધેય, **E :** Exponential function-ઘાતાંકીય વિધેય. આમ, દરેક વિધેયના પહેલા અંગ્રેજી મૂળાક્ષરથી બનતું સૂત્ર **LIATE**. યાદ રાખીશું અને **LIATE** ક્રમમાં પ્રથમ આવતા વિધેયને u કહીશું.આ ક્રમ ઉપર્યુક્ત બે બાબતોને ધ્યાનમાં રાખી નક્કી કર્યો છે. આ એક રૂઢિ છે તે ફરજિયાત નથી.

ઉદાહરણ તરીકે : (1) $x \cdot sin^{-1}x$ માં x બૈજિક વિધેય છે અને $sin^{-1}x$ એ ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેય છે. LIATE સૂત્રમાં ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેય એ બૈજિક વિધેય કરતાં પહેલાં આવે છે, તેથી $u = sin^{-1}x$ અને $v = x$ લઈશું.

(2) $x \cdot e^x$ માં x બૈજિક વિધેય છે અને e^x એ ઘાતાંકીય વિધેય છે. અહીં બૈજિક વિધેય x એ ઘાતાંકીય વિધેય e^x કરતાં ક્રમમાં પ્રથમ આવે છે. તેથી $u = x$ અને $v = e^x$ લઈશું

(3) ખંડશ:સંકલનના નિયમના ઉપયોગ વખતે જ્યારે વિધેય v નું સંકલન કરીએ ત્યારે દરેક વખતે સ્વૈર અચળ દાખલ કરવો જરૂરી નથી. જો આપણે $u = sinx$ નું સંકલન $-cos\,x + k$, કરીએ, જ્યાં k કોઈ અચળ છે,

તો, $\int x\,sinx\,dx = x\int sin\,x\,dx - \int\left(\frac{d}{dx}x\int sin\,x\,dx\right)dx$

$$= x\,(-cosx + k) - \int(-cosx + k)\,dx$$

$$= -x\,cosx + kx + \int cosx\,dx - \int k\,dx$$

$$= -x\,cosx + kx + sin\,x - kx + c$$

$$= -x\,cosx + sin\,x + c$$

આમ, આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે $u = sinx$ નો સંકલિત $-cos\,x + k$ લેતાં k નો લોપ થાય છે, માટે અંતમાં $\int\left(\frac{du}{dx}\int v\,dx\right)dx$ કરતી વખતે જ c લખીશું.

(4) $\log x$, $cosec^{-1}x$, $tan^{-1}x$ જેવા એક જ વિધેયનું સંકલન કરતી વખતે આપણે એવું વિધેય નથી જાણતા કે જેનો વિકલિત $\log x$, $cosec^{-1}x$, $tan^{-1}x$ થાય. તેથી તેમનું સંકલન કરવાં આપણે ખંડશ:સંકલનનો નિયમ વાપરીશું અને આ વિધેયને u સ્વીકારી $v = 1$ લઈશું. અહીં 1 નો સંકલિત x થશે.

ઉદાહરણ તરીકે, $I = \int \log x\,dx$,

$$I = \int \log x \cdot 1\,dx$$

અહીં $u = \log x$ અને $v = 1$ લેતાં,

$$I = \log x\int 1\,dx - \int\left[\frac{d}{dx}\log x\int 1\,dx\right]dx$$

$$= \log x \cdot x - \int\left(\frac{1}{x}\cdot x\right)dx$$

$$= x\log x - \int 1\,dx$$

$$= x\log x - x + c$$

(5) કેટલીક વાર આ સૂત્રનો ઉપયોગ એક થી વધુ વખત(પુનરાવર્તિત રીતે) કરવો પડે છે.

ઉદાહરણ તરીકે, $I = \int x^2 e^{5x}\,dx$ લઈએ.

અહીં, $u = x^2$ અને $v = e^{5x}$ લેતાં,

$$I = x^2\int e^{5x}\,dx - \int\left(\frac{d}{dx}x^2\int e^{5x}\,dx\right)dx$$

$$= x^2\cdot\frac{e^{5x}}{5} - \int\left(2x\,\frac{e^{5x}}{5}\right)dx$$

$$= \frac{x^2}{5}e^{5x} - \frac{2}{5}\int x\,e^{5x}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{5}e^{5x} - \frac{2}{5}\left[x\int e^{5x}\,dx - \int\left(\frac{d}{dx}x\int e^{5x}\,dx\right)dx\right]. \qquad (u = x,\ v = e^{5x})$$

$$= \frac{x^2}{5} e^{5x} - \frac{2}{5}\left[x \cdot \frac{e^{5x}}{5} - \int \left(1 \cdot \frac{e^{5x}}{5}\right) dx\right]$$

$$= \frac{x^2}{5} e^{5x} - \frac{2}{5}\left[\frac{x}{5} e^{5x} - \frac{1}{5} \cdot \frac{e^{5x}}{5}\right] + c$$

$$= \frac{x^2}{5} e^{5x} - \frac{2x}{25} e^{5x} + \frac{2}{125} e^{5x} + c$$

$$= e^{5x}\left[\frac{1}{5} x^2 - \frac{2x}{25} + \frac{2}{125}\right] + c$$

નોંધ : (i) વ્યાપક રીતે $\int x^n e^{ax} dx = e^{ax}\left[\frac{1}{a} x^n - \frac{n}{a^2} x^{n-1} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^3} + \ldots + \frac{(-1)^n \cdot n!}{a^{n+1}}\right] + c$

(ii) સામાન્ય રીતે આપણે માંગેલા અનિયત સંકલિતને I વડે દર્શાવીશું.

ઉદાહરણ 1 : $\int x \cos(3x + 5)\, dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $u = x$ અને $v = \cos(3x + 5)$ લેતાં,

$$I = \int x \cos(3x + 5)\, dx$$

$$= x \int \cos(3x + 5)\, dx - \int \left(\frac{d}{dx} x \int \cos(3x + 5)\, dx\right) dx$$

$$= x \frac{\sin(3x + 5)}{3} - \int \left(1 \cdot \frac{\sin(3x + 5)}{3}\right) dx$$

$$= \frac{x}{3} \sin(3x + 5) - \frac{1}{3} \int \sin(3x + 5)\, dx$$

$$= \frac{x}{3} \sin(3x + 5) + \frac{1}{3} \frac{\cos(3x + 5)}{3} + c$$

$$= \frac{x}{3} \sin(3x + 5) + \frac{1}{9} \cos(3x + 5) + c$$

ઉદાહરણ 2 : $\int \sec^{-1}x\, dx,\ x > 0$ મેળવો.

ઉકેલ : $u = \sec^{-1}x$ અને $v = 1$ લેતાં,

$$I = \int \sec^{-1}x \cdot 1\, dx$$

$$= \sec^{-1}x \int 1\, dx - \int \left(\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) \int 1\, dx\right) dx$$

$$= \sec^{-1}x \cdot x - \int \left(\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \cdot x\right) dx \qquad (|x| = x \text{ કારણ કે } x > 0)$$

$$= x \sec^{-1}x - \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\, dx$$

$$= x \sec^{-1}x - \log |x + \sqrt{x^2 - 1}| + c$$

$$= x \sec^{-1}x - \log (x + \sqrt{x^2 - 1}) + c \qquad (x > 0)$$

ઉદાહરણ 3 : $\int \frac{x \sin^{-1}x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx,\ \ 0 < x < 1$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \frac{x \sin^{-1}x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx,\ \ 0 < x < 1$

ધારો કે $\sin^{-1}x = \theta$. અહીં $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ કારણ કે $0 < x < 1$

$\therefore \quad x = sin\theta,\ dx = cos\theta\ d\theta$

$$\therefore \quad I = \int \frac{\theta\ sin\theta}{\sqrt{1 - sin^2\theta}} \cdot cos\theta\ d\theta$$

$$\therefore \quad I = \int \frac{\theta\ sin\theta}{cos\theta} \cdot cos\theta\ d\theta \qquad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \int \theta\ sin\theta\ d\theta$$

$$= \theta \int sin\theta\ d\theta - \int \left(\frac{d}{d\theta}\theta \int sin\ \theta\ d\theta\right) d\theta$$

$$= -\theta\ cos\theta + \int (1 \cdot cos\theta)\ d\theta$$

$$= -\theta\ cos\theta + sin\theta + c$$

$$= -\theta \sqrt{1 - sin^2\theta} + sin\theta + c \qquad (cos\theta = \sqrt{1 - sin^2\theta})$$

$$= -sin^{-1}x \cdot \sqrt{1 - x^2} + x + c$$

$$= -\sqrt{1 - x^2} \cdot sin^{-1}x + x + c$$

બીજી રીત :

$u = sin^{-1}x$ અને $v = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ લઈએ.

સૌપ્રથમ આપણે v નું સંકલન કરીશું. એટલે કે, $\int \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\ dx$ મેળવીશું.

$$\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\ dx = \int (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot x\ dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x)\ dx$$

$$= -\frac{1}{2}\ \frac{(1 - x^2)^{-\frac{1}{2} + 1}}{-\frac{1}{2} + 1}$$

$$= -(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\sqrt{1 - x^2}$$

$$\therefore \quad \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\ dx = -\sqrt{1 - x^2}$$

હવે, $\quad I = \displaystyle\int \frac{x\ sin^{-1}x}{\sqrt{1 - x^2}}\ dx$

$$= sin^{-1}x \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\ dx - \int \left(\frac{d}{dx} sin^{-1}x \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\ dx\right) dx$$

$$= (sin^{-1}x)(-\sqrt{1 - x^2}) - \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot (-\sqrt{1 - x^2})\ dx$$

$$= -\sqrt{1 - x^2}\ sin^{-1}x + x + c$$

ઉદાહરણ 4 : મેળવો : $\int e^x \cos x \, dx$

ઉકેલ : $I = \int e^x \cos x \, dx$

ધારો કે $u = e^x$ અને $v = \cos x$

$$\therefore \quad I = e^x \int \cos x \, dx - \int \left(\frac{d}{dx} e^x \int \cos x \, dx\right) dx$$

$$= e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$$

$$= e^x \sin x - \left[e^x \int \sin x \, dx - \int \left(\frac{d}{dx} e^x \int \sin x \, dx\right) dx\right] \qquad (u = e^x, v = \sin x)$$

$$= e^x \sin x - [-e^x \cos x - \int (e^x (-\cos x)) \, dx]$$

$$= e^x \sin x - [-e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx]$$

$$= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx$$

$$\therefore \quad I = e^x \sin x + e^x \cos x - I + c'$$

$$\therefore \quad 2I = e^x (\sin x + \cos x) + c'$$

$$\therefore \quad I = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + \frac{c'}{2}$$

$$\therefore \quad I = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + c \qquad \left(\frac{c'}{2} = c\right)$$

નોંધ : $e^x \cos x$ માં ત્રિકોણમિતીય વિધેય એ ઘાતાંકીય વિધેય કરતાં LIATE ક્રમમાં પ્રથમ આવે છે. તેથી $u = \cos x$ અને $v = e^x$ લેવાય, પરંતુ આપણે $u = e^x$ અને $v = \cos x$ લીધું. આમ, LIATE નિયમ માત્ર અનુકૂળતા માટે છે. $u = \cos x$ તથા $v = e^x$ લઈને પણ સંકલન કરી શકાશે.

ઉદાહરણ 5 : $\int x^2 2^x \, dx$ મેળવો

ઉકેલ : $u = x^2$, $v = 2^x$ લેતાં,

$$I = \int x^2 2^x \, dx$$

$$= x^2 \int 2^x \, dx - \int \left(\frac{d}{dx} x^2 \int 2^x \, dx\right) dx$$

$$= x^2 \frac{2^x}{\log_e 2} - \int \left(2x \frac{2^x}{\log_e 2}\right) dx$$

$$= \frac{x^2 2^x}{\log_e 2} - \frac{2}{\log_e 2} \int x 2^x \, dx$$

$$= \frac{x^2 2^x}{\log_e 2} - \frac{2}{\log_e 2} \left[x \int 2^x \, dx - \int \left(\frac{d}{dx} x \int 2^x \, dx\right) dx\right] \qquad (u = x, v = 2^x)$$

$$= \frac{x^2 2^x}{\log_e 2} - \frac{2}{\log_e 2} \left[x \frac{2^x}{\log_e 2} - \int \left(\frac{1 \cdot 2^x}{\log_e 2}\right) dx\right]$$

$$= \frac{x^2 2^x}{\log_e 2} - \frac{2}{\log_e 2} \left[\frac{x \cdot 2^x}{\log_e 2} - \frac{1}{\log_e 2} \cdot \frac{2^x}{\log_e 2}\right] + c$$

$$= \frac{x^2 2^x}{\log_e 2} - \frac{x \cdot 2^{x+1}}{(\log_e 2)^2} + \frac{2^{x+1}}{(\log_e 2)^3} + c$$

$$\int x^2 2^x \, dx = \int x^2 e^{x \log 2} \, dx$$

$$= e^{x \log 2} \left[\frac{x^2}{\log 2} - \frac{2x}{(\log 2)^2} + \frac{2}{(\log 2)^3}\right] + c = 2^x \left[\frac{x^2}{\log 2} - \frac{2x}{(\log 2)^2} + \frac{2}{(\log 2)^3}\right] + c$$

નોંધ : ઉપરના ઉદાહરણમાં જોઈ શકાય છે કે કોઈ વાર ખંડશઃસંકલનના સૂત્રનો ઉપયોગ એક કરતાં વધુ વખત કરવો પડે છે.

ઉદાહરણ 6 : $\int x\, sec^2x\ tan\, x\ dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int x\, sec^2x\ tan\, x\ dx$

$u = x$ અને $v = sec^2x\, tan\, x$ લઈએ.

સૌપ્રથમ આપણે $\int v\ dx$ એટલે કે $\int tan\, x\, sec^2x\ dx$ મેળવીએ.

$$\int tan\, x\, sec^2x\ dx = \int (tan\, x)\left(\frac{d}{dx}(tan\, x)\right)dx$$

$$= \frac{(tan\, x)^2}{2}$$

$$= \frac{tan^2x}{2}$$

$$\therefore \int tan\, x\, sec^2x\ dx = \frac{tan^2x}{2}$$

હવે, $I = \int x\, sec^2x\ tan\, x\ dx$

$$= x\int tan\, x\, sec^2x\ dx - \int\left(\frac{d}{dx}x\int tan\, x \cdot sec^2x\ dx\right)dx$$

$$= x\frac{tan^2x}{2} - \int\left(1\cdot\frac{tan^2x}{2}\right)dx$$

$$= \frac{x}{2}\ tan^2x - \frac{1}{2}\int(sec^2x - 1)\ dx$$

$$= \frac{x}{2}\ tan^2x - \frac{1}{2}[tan\, x - x] + c$$

$$= \frac{x}{2}\ tan^2x - \frac{1}{2}\ tan\, x + \frac{x}{2} + c$$

ઉદાહરણ 7 : $\int cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) dx,\ x > 0$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) dx$

$\theta = tan^{-1}x$ લો, જેથી $x = tan\theta$ અને $dx = sec^2\theta\, d\theta$. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ કારણ કે $x > 0$

$$\therefore\ I = \int cos^{-1}\left(\frac{1-tan^2\theta}{1+tan^2\theta}\right) sec^2\theta\ d\theta$$

$$= \int cos^{-1}(cos2\theta)\cdot sec^2\theta\ d\theta$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ છે.

$\therefore\ 0 < 2\theta < \pi$

$\therefore\ cos^{-1}(cos2\theta) = 2\theta$ **(i)**

$$\therefore\ I = 2\int \theta\ sec^2\theta\ d\theta$$

$$= 2\left[\theta\int sec^2\theta\ d\theta - \int\left(\frac{d}{d\theta}\theta\int sec^2\theta\ d\theta\right)d\theta\right]$$

$$= 2\ [\theta\cdot tan\theta - \int 1\cdot tan\theta\ d\theta]$$

$= 2\ [\theta \cdot tan\theta - \log |sec\theta|] + c$

હવે, $\theta = tan^{-1}x$ તથા $x = tan\theta$

$sec^2\theta = 1 + tan^2\theta = 1 + x^2$

$\therefore \quad sec\theta = \sqrt{1+x^2}$ $\left(sec\theta > 0 \text{ કારણ કે } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \quad I = 2\ [x \cdot tan^{-1}x - \log \sqrt{1+x^2}\,] + c$

$= 2x\ tan^{-1}x - 2 \log (1 + x^2)^{\frac{1}{2}} + c$

$= 2x\ tan^{-1}x - \log (1 + x^2) + c$

બીજી રીત : $cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ ને પરિવર્તિત કરીએ.

ધારો કે $x = tan\theta$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ કારણ કે $x > 0$

$$\therefore \quad cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = cos^{-1}\left(\frac{1-tan^2\theta}{1+tan^2\theta}\right)$$

$$= cos^{-1}\ (cos2\theta)$$

$$= 2\theta \qquad (0 < 2\theta < \pi)$$

$$= 2\ tan^{-1}x$$

હવે, $\int cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) dx$

$$= \int 2\ tan^{-1}x\ dx$$

$$= 2\left[tan^{-1}x \int 1dx - \int\left(\frac{d}{dx} tan^{-1}x \int 1\ dx\right) dx\right]$$

$$= 2\left[tan^{-1}x \,.\, x - \int\left(\frac{1}{1+x^2} \,.\, x\right) dx\right]$$

$$= 2\left[x \,.\, tan^{-1}x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1}\ dx\right]$$

$$= 2\left[x\ tan^{-1}x - \frac{1}{2} \log\ (1 + x^2)\right] + c$$

$$= 2x\ tan^{-1}x - \log\ (1 + x^2) + c$$

નોંધ : જો $x < 0$, તો $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$.

$\therefore \quad -\pi < 2\theta < 0$

$\therefore \quad 0 < -2\theta < \pi$

(i)માં $cos^{-1}(cos\ 2\theta) = cos^{-1}(cos\ (-2\theta)) = -2\theta$

$\therefore \quad I = -2\ [\theta\ tan\theta - \log |sec\theta|] + c$

$= -2x\ tan^{-1}x + \log(1 + x^2) + c$

સ્વાધ્યાય 2.1

નીચેનાં વિધેયોનાં x વિશે સંકલિત મેળવો.

1. $x^2 \log x \qquad x > 0$
2. $(3 + 5x) \cos 7x$
3. $\cos^{-1}x \qquad x \in [-1, 1]$
4. $x^2 e^{3x}$
5. $x^2 \tan^{-1}x$
6. $\sin^{-1}\frac{1}{x}, \; x > 1$
7. $\sin (\log x) \qquad x > 0$
8. $\sec^3 x$
9. $\frac{x}{1-\cos x} \qquad x \neq 2n\pi, \; n \in Z$
10. $x^3 \sin x^2$
11. $\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}, \; 0 < x < 1$
12. $x \cot x \, \text{cosec}^2 x$
13. $x \cos^3 x$
14. $x^{2n-1} \cos x^n$
15. $(1 - x^2) \log x \qquad x > 0$
16. $\frac{\log x}{(1+x)^2} \qquad x > 0$
17. $\frac{\sin^{-1}x}{x^2} \qquad x \in (0, 1)$
18. $\frac{\sin^{-1}\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \qquad 0 < x < 1$

*

2.3 સંકલનનાં કેટલાંક વધુ પ્રમાણિત રૂપો

હવે આપણે કેટલાંક વિધેયો $\sqrt{x^2 \pm a^2}$, $\sqrt{a^2 - x^2}$, $e^{ax}\sin(bx + k)$, $e^{ax}\cos(bx + k)$ નાં સંકલિતો ખંડશઃસંકલન અને ત્રિકોણમિતીય આદેશનો ઉપયોગ કરી મેળવીશું અને તેમને સંકલનનાં પ્રમાણિત રૂપો તરીકે સ્વીકારીશું.

(1) $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \log \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + c \qquad (x^2 > a^2)$

સાબિતી : $I = \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$

$$\therefore \quad I = \int \sqrt{x^2 - a^2} \cdot 1 \, dx$$

$$= \sqrt{x^2 - a^2} \int 1 \, dx - \int \left(\frac{d}{dx}(\sqrt{x^2 - a^2}) \int 1 \, dx\right) dx$$

$$= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 - a^2}} \cdot x\right) dx$$

$$= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} \, dx$$

$$= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2 - a^2 + a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} \, dx$$

$$= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \sqrt{x^2 - a^2} \, dx - a^2 \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} \, dx$$

$$I = x\sqrt{x^2 - a^2} - I - a^2 \log \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + c'$$

$$\therefore \quad 2I = x\sqrt{x^2-a^2} - a^2 \log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c'$$

$$\therefore \quad I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c \qquad \left(\frac{c'}{2} = c\right)$$

બીજી રીત :

આ જ પ્રમાણિત સ્વરૂપ આદેશ $x = a\,sec\theta$. $(x > a > 0)$ લઈને મેળવીએ.

$$I = \int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$$

સાબિતી : $x = a\,sec\theta$ લેતાં, $dx = a\,sec\theta\,tan\theta\,d\theta$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ તથા $x > a > 0$.

$$\therefore \quad I = \int \sqrt{a^2 sec^2\theta - a^2} \cdot a\,sec\theta\,tan\theta\,d\theta$$

$$= \int \sqrt{a^2 tan^2\theta} \cdot a\,sec\theta\,tan\theta\,d\theta$$

$$I = a^2 \int sec\theta \cdot tan^2\theta\,d\theta \qquad (a > 0 \text{ તથા } tan\theta > 0)$$

$$= a^2 \int sec\theta\,(sec^2\theta - 1)\,d\theta$$

$$= a^2 \int (sec^3\theta - sec\theta)\,d\theta$$

$$= a^2 \int sec^3\theta\,d\theta - a^2 \int sec\theta\,d\theta$$

$$= a^2 \int sec\theta \cdot sec^2\theta\,d\theta - a^2 \int sec\theta\,d\theta$$

$$= a^2 \left[sec\theta \int sec^2\theta\,d\theta - \int \left(\frac{d}{d\theta} sec\theta \int sec^2\theta\,d\theta\right) d\theta\right] - a^2 \int sec\theta\,d\theta$$

$$= a^2\,[sec\theta\,tan\theta - \int (sec\theta\,tan\theta \cdot tan\theta)\,d\theta] - a^2 \int sec\theta\,d\theta$$

$$= a^2\,[sec\theta\,tan\theta - \int sec\theta \cdot tan^2\theta\,d\theta] - a^2 \int sec\theta\,d\theta$$

$$= a^2\,sec\theta\,tan\theta - a^2 \int sec\theta\,tan^2\theta\,d\theta - a^2 \log|sec\theta + tan\theta| + c'$$

$$\therefore \quad I = a^2\,sec\theta\,tan\theta - I - a^2 \log|sec\theta + tan\theta| + c' \qquad \left(I = a^2 \int sec\theta\,tan^2\theta\,d\theta\right)$$

$$\therefore \quad 2I = a^2\,sec\theta\,tan\theta - a^2 \log|sec\theta + tan\theta| + c'$$

$$\therefore \quad I = \frac{a^2}{2}\,sec\theta\sqrt{sec^2\theta - 1} - \frac{a^2}{2}\log\left|sec\theta + \sqrt{sec^2\theta-1}\right| + \frac{c'}{2} \qquad (tan\theta > 0)$$

$$= \frac{a^2}{2}\cdot\frac{x}{a}\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1} - \frac{a^2}{2}\log\left|\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right| + \frac{c'}{2}$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\log\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + \frac{c'}{2} \qquad (|a| = a)$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + \frac{c'}{2} + \frac{a^2}{2}\log a$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c \qquad \left(\frac{c'}{2} + \frac{a^2}{2}\log a = c\right)$$

$$\therefore \quad \int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c$$

ઉદાહરણ તરીકે,

$$\int \sqrt{x^2-25}\, dx = \int \sqrt{x^2-5^2}\; dx$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-5^2} - \frac{5^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-5^2}\right| + c$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-25} - \frac{25}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-25}\right| + c$$

(2) $\int \sqrt{x^2+a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\log|x+\sqrt{x^2+a^2}| + c$

સાબિતી : $I = \int \sqrt{x^2+a^2}\cdot 1\, dx$

$$= \sqrt{x^2+a^2}\int 1\, dx - \int\left(\frac{d}{dx}(\sqrt{x^2+a^2})\int 1\, dx\right)dx$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}\, x\, dx$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\, dx$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\, dx$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \sqrt{x^2+a^2}\, dx + a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$I = x\sqrt{x^2+a^2} - I + a^2\log|x+\sqrt{x^2+a^2}| + c'$$

$$\therefore\ 2I = x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\log|x+\sqrt{x^2+a^2}| + c'$$

$$\therefore\ I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\log|x+\sqrt{x^2+a^2}| + c \qquad \left(\frac{c'}{2} = c\right)$$

$$\therefore\ \int\sqrt{x^2+a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\log|x+\sqrt{x^2+a^2}| + c \qquad (a > 0)$$

આ જ પ્રમાણિત રૂપ આદેશ $x = a\tan\theta$ $(a > 0)$ લઈને મેળવી શકાય.

ઉદાહરણ તરીકે, $\int\sqrt{x^2+4}\, dx = \int\sqrt{x^2+2^2}\; dx$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2+2^2} + \frac{2^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+2^2}\right| + c$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2+4} + 2\log\left|x+\sqrt{x^2+4}\right| + c$$

(3) $\int\sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + c \qquad (a > 0)$

સાબિતી : $I = \int\sqrt{a^2-x^2}\cdot 1\, dx$

$$= \sqrt{a^2-x^2}\int 1\, dx - \int\left(\frac{d}{dx}(\sqrt{a^2-x^2})\int 1\, dx\right)dx$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \left(\frac{1}{2\sqrt{a^2 - x^2}}(-2x) \cdot x\right) dx$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{a^2 - x^2 - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$I = x\sqrt{a^2 - x^2} - I + a^2 \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c' \qquad (a > 0)$$

$$\therefore \quad 2I = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c'$$

$$\therefore \quad I = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c \qquad \left(\frac{c'}{2} = c\right)$$

$$\therefore \quad \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1}\frac{x}{a} + c$$

નોંધ : $a < 0$ હોય તો શું ફેર પડશે ?

ઉદાહરણ તરીકે,

$$\int \sqrt{9 - x^2}\, dx = \int \sqrt{3^2 - x^2}\, dx$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{3^2 - x^2} + \frac{3^2}{2} \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + c$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{9 - x^2} + \frac{9}{2} \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + c$$

આ સૂત્ર આદેશ $x = a\sin\theta$ લઈને પણ સાબિત કરી શકાય.

(4) $\int e^x [f(x) + f'(x)]\, dx = e^x f(x) + c$

સાબિતી : $I = \int e^x [f(x) + f'(x)]\, dx$

$$= \int e^x f(x)\, dx + \int e^x f'(x)\, dx$$

$$= f(x)\int e^x\, dx - \int \left(\frac{d}{dx} f(x) \int e^x\, dx\right) dx + \int e^x \cdot f'(x)\, dx$$

$$= f(x)\, e^x - \int f'(x)\, e^x\, dx + \int f'(x)\, e^x\, dx$$

$$= e^x f(x) + c$$

ઉદાહરણ તરીકે,

(1) $\int e^x \sec x\, (1 + \tan x)\, dx = \int e^x (\sec x + \sec x \tan x)\, dx$

$$= \int e^x \left[\sec x + \frac{d}{dx}(\sec x)\right] dx$$

$$= e^x \sec x + c$$

(2) $\int e^x \left(\frac{x-1}{x^2}\right) dx = \int e^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx$

$$= \int e^x \left[\frac{1}{x} + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)\right] dx$$

$$= e^x \cdot \frac{1}{x} + c$$

(3) $\int x\, e^x\, dx \;= \int [(x-1)+1]\, e^x\, dx$

$$= \int \left[(x-1) + \frac{d}{dx}(x-1)\right] e^x\, dx$$

$$= e^x (x-1) + c$$

(5) $\int e^{ax} \sin(bx+k)\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} [a \sin(bx+k) - b \cos(bx+k)] + c, \quad a, b \neq 0$

સાબિતી : $I = \int e^{ax} \cdot \sin(bx+k)\, dx$

$$= \sin(bx+k) \int e^{ax}\, dx - \int \left(\frac{d}{dx} \sin(bx+k) \int e^{ax}\, dx\right) dx$$

$$= \sin(bx+k) \cdot \frac{e^{ax}}{a} - \int \left(b \cos(bx+k) \cdot \frac{e^{ax}}{a}\right) dx$$

$$= \frac{e^{ax}}{a} \sin(bx+k) - \frac{b}{a} \int \cos(bx+k)\, e^{ax}\, dx$$

$$= \frac{e^{ax}}{a} \sin(bx+k) - \frac{b}{a}\left[\cos(bx+k) \int e^{ax}\, dx - \int \left(\frac{d}{dx} \cos(bx+k) \int e^{ax}\, dx\right) dx\right]$$

$$= \frac{e^{ax}}{a} \sin(bx+k) - \frac{b}{a}\left[\cos(bx+k) \frac{e^{ax}}{a} - \int \left(-b \sin(bx+k) \frac{e^{ax}}{a}\right) dx\right]$$

$$= \frac{e^{ax}}{a} \sin(bx+k) - \frac{b}{a^2} e^{ax} \cos(bx+k) - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \cdot \sin(bx+k)\, dx$$

$$\therefore \quad I = \frac{e^{ax}}{a^2} [a \sin(bx+k) - b \cos(bx+k)] - \frac{b^2}{a^2} I + c'$$

$$\therefore \quad I + \frac{b^2}{a^2} I = \frac{e^{ax}}{a^2} [a \sin(bx+k) - b \cos(bx+k)] + c'$$

$$\therefore \quad (a^2+b^2) I = e^{ax} [a \sin(bx+k) - b \cos(bx+k)] + a^2 c'$$

$\therefore \quad I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} [a \sin(bx+k) - b \cos(bx+k)] + c$, જ્યાં $c = \frac{a^2 c'}{a^2+b^2}$

હવે, આપણે આ સૂત્રને બીજા સ્વરૂપમાં પરિવર્તિત કરીએ.

$$I = \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2+b^2}} \left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin(bx+k) - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos(bx+k)\right] + c$$

અહીં $a \neq 0$, $b \neq 0$. તેથી,

$$0 < \left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| < 1, \; 0 < \left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| < 1$$

અને $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$.

કોઈક $\alpha \in (0, 2\pi)$ મળે કે જેથી,

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

$$\therefore\quad I = \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2+b^2}}\,[\sin(bx+k)\cos\alpha - \cos(bx+k)\sin\alpha] + c$$

$$= \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\sin(bx+k-\alpha) + c,\ \text{જ્યાં } \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

$$\therefore\quad \int e^{ax}\cdot\sin(bx+k)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\,(a\sin(bx+k) - b\cos(bx+k)) + c,\quad a, b \neq 0$$

$$= \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\sin(bx+k-\alpha) + c$$

જ્યાં, $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. $\alpha \in (0, 2\pi)$

ઉદાહરણ તરીકે, $\int e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx = \frac{e^{2x}}{2^2+3^2}(2\sin 3x - 3\cos 3x) + c = \frac{e^{2x}}{13}(2\sin 3x - 3\cos 3x) + c$

બીજા સ્વરૂપમાં $\int e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx$ જોઈએ.

$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$. તેથી $\tan\alpha = \frac{3}{2}$

$\therefore\quad \alpha = \tan^{-1}\frac{3}{2}$, કારણ કે $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$$\therefore\quad \int e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx = \frac{e^{2x}}{\sqrt{13}}\,\sin\left(3x - \tan^{-1}\frac{3}{2}\right) + c$$

(6) $\int e^{ax}\cos(bx+k)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\,[a\cos(bx+k) + b\sin(bx+k)] + c,\quad a \neq 0, b \neq 0$

$$= \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\cos(bx+k-\alpha) + c$$

જ્યાં $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. $\alpha \in (0, 2\pi)$.

સાબિતી : $I = \int e^{ax}\cos(bx+k)\,dx$

$$= \cos(bx+k)\int e^{ax}\,dx - \int\left(\frac{d}{dx}\cos(bx+k)\int e^{ax}\,dx\right)dx$$

$$= \cos(bx+k)\,.\,\frac{e^{ax}}{a} - \int\left(-b\sin(bx+k)\,.\,\frac{e^{ax}}{a}\right)dx$$

$$= \frac{e^{ax}}{a}\cos(bx+k) + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin(bx+k)\,dx$$

$$= \frac{e^{ax}}{a}\cos(bx+k) + \frac{b}{a}\left[\sin(bx+k)\int e^{ax}\,dx - \int\left(\frac{d}{dx}\sin(bx+k)\int e^{ax}\,dx\right)dx\right]$$

$$= \frac{e^{ax}}{a}\cos(bx+k) + \frac{b}{a}\left[\sin(bx+k)\,.\,\frac{e^{ax}}{a} - \int\left(b\cos(bx+k)\,.\,\frac{e^{ax}}{a}\right)dx\right]$$

$$= \frac{e^{ax}}{a}\cos(bx+k) + \frac{b}{a^2}e^{ax}\sin(bx+k) - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\cdot\cos(bx+k)\,dx$$

$$\therefore \quad I = \frac{e^{ax}}{a}\cos(bx + k) + \frac{b}{a^2}e^{ax}\cdot\sin(bx + k) - \frac{b^2}{a^2}I + c'$$

$$\therefore \quad I + \frac{b}{a^2}I = \frac{e^{ax}}{a^2}[a\cos(bx + k) + b\sin(bx + k)] + c'$$

$$\therefore \quad (a^2 + b^2)I = e^{ax}[a\cos(bx + k) + b\sin(bx + k)] + a^2c'$$

$$\therefore \quad I = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}[a\cos(bx + k) + b\sin(bx + k)] + c, \text{ જ્યાં } c = \frac{a^2c'}{a^2 + b^2}$$

બીજું સ્વરૂપ :

કોઈક $\alpha \in (0, 2\pi)$, માટે $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

$$\therefore \quad I = \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2 + b^2}}[\cos(bx + k)\cdot\cos\alpha + \sin(bx + k)\cdot\sin\alpha] + c$$

$$= \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos(bx + k - \alpha) + c$$

$$\therefore \quad \int e^{ax}\cos(bx + k)\,dx = \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos(bx + k - \alpha) + c$$

જ્યાં $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\quad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

ઉદાહરણ તરીકે : $\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}\,dx = \frac{e^{-x}}{(1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}\left(-1\cos\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\right) + c$

$$= \frac{4e^{-x}}{5}\left(-\cos\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\right) + c$$

$\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}\,dx$ નું બીજું સ્વરૂપ જોઈએ.

અહીં, $\cos\alpha = \frac{-2}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. આથી $\tan\alpha = -\frac{1}{2}$, $\quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

$$\therefore \quad \alpha = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \quad \int e^{-x}\cos\frac{x}{2}\,dx = \frac{2}{\sqrt{5}}e^{-x}\left[\cos\left(\frac{x}{2} - \left(\pi - \tan^{-1}\frac{1}{2}\right)\right)\right] + c$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}e^{-x}\cos\left(\frac{x}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{2} - \pi\right) + c$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{5}}e^{-x}\cos\left(\frac{x}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{2}\right) + c$$

2.4 (1) $\int\sqrt{ax^2 + bx + c}\,dx$ અને (2) $\int(Ax + B)\sqrt{ax^2 + bx + c}\,dx$ સ્વરૂપના સંકલિતો :

(1) $ax^2 + bx + c$ ને પૂર્ણવર્ગના સ્વરૂપમાં વ્યક્ત કરી ત્યારબાદ આગળનાં પ્રમાણિત સ્વરૂપ (1), (2) કે (3) નો ઉપયોગ કરી સંકલન કરી શકાય.

(2) આપણે એવા બે અચળ m અને n મેળવીશું કે જેથી,

$Ax + B = m(ax^2 + bx + c$ નું વિકલિત$) + n$

$$Ax + B = m\left(\frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c)\right) + n$$

$$Ax + B = m(2ax + b) + n$$

બંને બાજુ x ના સહગુણકો તથા અચળ પદ સરખાવતાં,

$m = \frac{A}{2a}$ તથા $n = B - mb$

હવે, $\int (Ax + B)\sqrt{ax^2+bx+c}\ dx = \int [m(2ax + b) + n]\sqrt{ax^2+bx+c}\ dx$

$$= m\int (2ax + b)\sqrt{ax^2+bx+c}\ dx + n\int\sqrt{ax^2+bx+c}\ dx$$

$$= mI_1 + nI_2$$

જ્યાં, $I_1 = \int (ax^2 + bx + c)^{\frac{1}{2}}\ (2ax + b)\, dx$

$$= \int (ax^2 + bx + c)^{\frac{1}{2}}\ \frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c)\, dx$$

$$= \frac{(ax^2+bx+c)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c_1$$

$$= \frac{2}{3}(ax^2 + bx + c)^{\frac{3}{2}} + c_1$$

અને $I_2 = \int \sqrt{ax^2+bx+c}\ dx$

I_2 દર્શાવેલી રીત (1) મુજબ મેળવી શકાય.

ઉદાહરણ 8 : $\int x\sqrt{x^4-25}\ dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int x\sqrt{x^4-25}\ dx$

ધારો કે, $x^2 = t$. આથી, $2x\, dx = dt$ એટલે કે $x\, dx = \frac{1}{2}dt$

$$\therefore\quad I = \int \sqrt{(x^2)^2-(5)^2}\cdot x\, dx$$

$$= \int \sqrt{t^2-5^2}\ \frac{1}{2}\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{t}{2}\sqrt{t^2-5^2} - \frac{5^2}{2}\log\left|t + \sqrt{t^2-5^2}\right|\right] + c$$

$$= \frac{t}{4}\sqrt{t^2-25} - \frac{25}{4}\log\left|t + \sqrt{t^2-25}\right| + c$$

$$= \frac{x^2}{4}\sqrt{x^4-25} - \frac{25}{4}\log\left|x^2 + \sqrt{x^4-25}\right| + c$$

$$= \frac{x^2}{4}\sqrt{x^4-25} - \frac{25}{4}\log\left(x^2 + \sqrt{x^4-25}\right) + c, \text{ કારણ કે } x^2 > 0$$

ઉદાહરણ 9 : $\int \sqrt{(x-3)(7-x)}\ dx$ મેળવો. $(3 < x < 7)$

ઉકેલ : $I = \int \sqrt{(x-3)(7-x)}\ dx$

$$= \int \sqrt{10x-x^2-21}\ dx$$

હવે, $10x - x^2 - 21 = -[x^2 - 10x + 21]$

$$= -[x^2 - 10x + 25 - 4]$$

$$= -[(x - 5)^2 - 4]$$

$$= 4 - (x - 5)^2$$

$$\therefore \quad I = \int \sqrt{2^2 - (x-5)^2}\, dx$$

$$= \frac{x-5}{2}\sqrt{2^2 - (x-5)^2} + \frac{4}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-5}{2}\right) + c$$

$$= \frac{x-5}{2}\sqrt{(x-3)(7-x)} + 2\sin^{-1}\left(\frac{x-5}{2}\right) + c$$

ઉદાહરણ 10 : $\int e^x\left(\frac{1+\sin x\cos x}{\cos^2 x}\right) dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int e^x\left(\frac{1+\sin x\cos x}{\cos^2 x}\right) dx$

$$= \int e^x\left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x}\right) dx$$

$$= \int e^x(\sec^2 x + \tan x)\, dx$$

$$= \int e^x\left(\tan x + \frac{d}{dx}(\tan x)\right) dx$$

$$= e^x \tan x + c$$

ઉદાહરણ 11 : $\int \frac{\sqrt{1-\sin x}}{1+\cos x} e^{-\frac{x}{2}} dx,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \frac{\sqrt{1-\sin x}}{1+\cos x} e^{-\frac{x}{2}} dx$

$$= \int \frac{\sqrt{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}}{2\cos^2\frac{x}{2}} e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)^2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$= \int \frac{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} e^{-\frac{x}{2}} dx \qquad \left(0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4} \text{ હોવાથી } \cos\frac{x}{2} > \sin\frac{x}{2}\right)$$

$-\frac{x}{2} = t$ લેતાં, $-dx = 2dt$ એટલે કે $dx = -2dt$

$$\therefore \quad I = -\int \frac{\cos t + \sin t}{2\cos^2 t} e^t \cdot (2dt)$$

$$= -\int \left(\frac{1}{\cos t} + \frac{\sin t}{\cos^2 t}\right) e^t\, dt$$

$= -\int (\sec t + \sec t \tan t)\ e^t\, dt$

$= -\int \left(\sec t + \frac{d}{dt}(\sec t)\right) e^t\, dt$

$= -\sec t \cdot e^t + c$

$= -e^{-\frac{x}{2}} \cdot \sec\left(\frac{x}{2}\right) + c$ $\qquad \left(\sec\left(-\frac{x}{2}\right) = \sec \frac{x}{2}\right)$

ઉદાહરણ 12 : $\int e^x \sin^2 x\, dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int e^x \sin^2 x\, dx$

$= \int e^x \frac{(1 - \cos 2x)}{2}\, dx$

$= \frac{1}{2}\int e^x\, dx - \frac{1}{2}\int e^x \cdot \cos 2x\, dx$

$= \frac{1}{2} e^x - \frac{1}{2}\left[\frac{e^x}{1^2 + 2^2}(\cos 2x + 2\sin 2x)\right] + c$

$= \frac{e^x}{2} - \frac{e^x}{10}(\cos 2x + 2\sin 2x) + c$

ઉદાહરણ 13 : $\int 2^x \cos^2 x\, dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int 2^x \cos^2 x\, dx$

$= \int 2^x \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) dx$

$= \frac{1}{2}\int 2^x\, dx + \frac{1}{2}\int 2^x \cos 2x\, dx$

$= \frac{1}{2}\int 2^x\, dx + \frac{1}{2}\int e^{x \cdot \log_e 2} \cos 2x\, dx$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2^x}{\log_e 2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{x \log_e 2}}{4 + (\log_e 2)^2}\ [(\log_e 2) \cos 2x + 2\sin 2x)] + c$

$\therefore \quad I = \frac{2^{x-1}}{\log_e 2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2^x}{4 + (\log_e 2)^2} \cdot [(\log_e 2) \cos 2x + 2\sin 2x)] + c$

ઉદાહરણ 14 : $\int (x - 5)\sqrt{x^2 + x}\, dx$ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં m અને n એવાં મેળવીશું કે જેથી,

$x - 5 = m\left[\frac{d}{dx}(x^2 + x)\right] + n$

$= m(2x + 1) + n$

$\therefore \quad x - 5 = 2mx + m + n$

હવે x ના સહગુણકો અને અચળ પદ સરખાવતાં,

$2m = 1$ અને $m + n = -5$

$\therefore \quad m = \frac{1}{2}$ અને $n = -5 - \frac{1}{2} = -\frac{11}{2}$

$\therefore \quad x - 5 = \frac{1}{2}(2x + 1) - \frac{11}{2}$

$$\therefore \quad I = \int (x-5)\sqrt{x^2+x}\,dx$$

$$= \int \left[\frac{1}{2}(2x+1) - \frac{11}{2}\right]\sqrt{x^2+x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (2x+1)\sqrt{x^2+x}\,dx - \frac{11}{2}\int \sqrt{x^2+x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (x^2+x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dx}(x^2+x)\,dx - \frac{11}{2}\int \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{11}{2}\left[\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2}\sqrt{x^2+x} - \frac{1}{8}\log\left|\left(x+\frac{1}{2}\right) + \sqrt{x^2+x}\right| + c\right.$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{11}{2}\left[\frac{2x+1}{4}\sqrt{x^2+x} - \frac{1}{8}\log\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right|\right] + c$$

સ્વાધ્યાય 2.2

યોગ્ય પ્રદેશ પર વ્યાખ્યાયિત નીચેનાં વિધેયોનાં x વિશે સંકલિતો મેળવો :

1. $\sqrt{9-x^2}$

2. $\sqrt{2x^2+10}$

3. $\sqrt{5x^2-3}$

4. $\sqrt{4-3x-2x^2}$

5. $\sqrt{4x^2+4x-15}$

6. $x^2\sqrt{8-x^6}$

7. $\cos x\sqrt{4-\sin^2 x}$

8. $e^x(\log \sin x + \cot x)$

9. $e^x\dfrac{1-\sin x}{1-\cos x}$

10. $\dfrac{1+\sin 2x}{1+\cos 2x}e^{2x}$

11. $\dfrac{x^2e^x}{(x+2)^2}$

12. $\dfrac{x^2-x+1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}e^x$

13. $e^x\left(\dfrac{1-x}{1+x^2}\right)^2$

14. $x\sqrt{1+x-x^2}$

15. $(3x-2)\sqrt{x^2+x+1}$

16. $(2x-5)\sqrt{2+3x-x^2}$

17. $e^{2x}\sin 4x$

18. $e^{-\frac{x}{2}}\cos^2 x$

19. $3^x\sin^2 x$

20. $e^{2x}\sin 3x\sin x$

*

2.5 આંશિક અપૂર્ણાંકની રીત (Method of Partial Fractions)

હવે આપણે સંમેય બહુપદીનો સંકલિત કેવી રીતે મેળવવો તે શીખીશું. જો $p(x)$ અને $q(x)$ બે બહુપદીઓ હોય તો $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, $q(x) \neq 0$ ને સંમેય બહુપદી અથવા x નું સંમેય વિધેય કહે છે. સંમેય બહુપદીનું સાદું રૂપ કેમ આપવું તે આપણે શીખી ગયા છીએ.

ઉદાહરણ તરીકે, $\dfrac{5}{x-3} + \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{5(x-2)+1(x-3)}{(x-3)(x-2)} = \dfrac{6x-13}{(x-3)(x-2)}$

હવે પ્રશ્ન એ છે કે $\dfrac{6x-13}{(x-3)(x-2)}$ ને $\dfrac{5}{x-3} + \dfrac{1}{x-2}$ સ્વરૂપમાં કેવી રીતે મૂકી શકાય.

આ પ્રમાણે એક સંમેય વિધેયને બે કે તેથી વધુ યોગ્ય પ્રકારનાં સંમેય વિધેયોના સરવાળાના સ્વરૂપમાં મૂકવાની રીત **આંશિક અપૂર્ણાંકની રીત** તરીકે પ્રચલિત છે.

હવે જો, $\frac{6x-13}{(x-3)(x-2)}$ ને $\frac{5}{x-3} + \frac{1}{x-2}$, સ્વરૂપમાં મૂકી શકાય તો તેનું સંકલન કરવું ખૂબ સરળ બને.

હવે આપણે આંશિક અપૂર્ણાંકની રીત અંગે સમજ કેળવીયે :

(1) સંમેય વિધેય $\frac{p(x)}{q(x)}$ માં જો $p(x)$ ની ઘાત $q(x)$ ની ઘાત કરતાં ઓછી હોય, તો $\frac{p(x)}{q(x)}$ ને **ઉચિત સંમેય વિધેય (Proper Rational Function)** કહીશું.

ઉદાહરણ તરીકે, $\frac{5-3x}{x^3+3x+2}$, $\frac{2x^2+3x+7}{x^3-7x+2}$, $\frac{3x+2}{x^3-6x^2+11x-6}$ ઉચિત સંમેય વિધેયો છે.

(2) જો $p(x)$ ની ઘાત $q(x)$ની ઘાત કરતા વધારે કે એટલી જ હોય, તો $\frac{p(x)}{q(x)}$ને **અનુચિત સંમેય વિધેય (Improper Rational Function)** કહીશું.

ઉદાહરણ તરીકે, $\frac{x^3+1}{x^2-2x+1}$, $\frac{x^2+x+1}{x^2+3x+2}$, $\frac{x^3-6x^2+10x-2}{x^2-5x+6}$ અનુચિત સંમેય વિધેયો છે.

$\frac{p(x)}{q(x)}$ અનુચિત સંમેય વિધેય હોય તો $p(x)$ને $q(x)$ વડે ભાગીશું. $p(x) = q(x)\ s(x) + r(x)$ લખી શકાય. જ્યાં $r(x) = 0$ અથવા $r(x)$ની ઘાત એ $q(x)$ ની ઘાત કરતાં ઓછી છે. આમ, આપેલ અનુચિત સંમેય વિધેય $\frac{p(x)}{q(x)}$ ને $s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$ સ્વરૂપમાં મેળવી શકાય, જ્યાં $r(x)$ અને $s(x)$ બહુપદીઓ છે અને બહુપદી $r(x)$ ની ઘાત $q(x)$ ની ઘાત કરતાં ઓછી છે અથવા $r(x) = 0$. તેથી $\frac{r(x)}{q(x)}$ ઉચિત સંમેય વિધેય અથવા 0 થશે. આ સમજવા એક ઉદાહરણ લઈએ. $\frac{4x^3-x^2+1}{x^2-2}$ નો વિચાર કરીએ.

$p(x) = 4x^3 - x^2 + 1$ ને $q(x) = x^2 - 2$ વડે ભાગીશું.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x \quad -1 \\
\hline
x^2-2 & 4x^3 - x^2 + 1 \\
 & 4x^3 - 8x \\
 & - \quad + \\
\hline
 & -x^2 + 8x + 1 \\
 & -x^2 \qquad + 2 \\
 & + \qquad\quad - \\
\hline
 & 8x - 1
\end{array}
$$

$\therefore$ અહીં ભાગફળ $s(x) = 4x - 1$ અને શેષ $r(x) = 8x - 1$

આમ, $\frac{4x^3-x^2+1}{x^2-2} = (4x-1) + \frac{8x-1}{x^2-2}$.

આમ, આપેલ અનુચિત સંમેય વિધેયને વાસ્તવિક બહુપદી $4x - 1$ અને ઉચિત સંમેય વિધેય $\frac{8x-1}{x^2-2}$ ના સરવાળા તરીકે અનન્ય રીતે દર્શાવી શકાય. હવે આપણે ઉચિત સંમેય વિધેયનું સંકલન કેવી રીતે મેળવવું તે માટેની આંશિક અપૂર્ણાંકની રીત શીખીએ.

ધારો કે $\frac{p(x)}{q(x)}$ ઉચિત સંમેય વિધેય છે. આગળ ચર્ચા કર્યા પ્રમાણે $\frac{p(x)}{q(x)}$ ના આંશિક અપૂર્ણાંક કેવી રીતે મેળવવા તે શીખીએ. આ ચર્ચા મુખ્યત્વે $q(x)$ ના અવયવોના પ્રકાર પર આધારિત છે.

વિકલ્પ 1 : વાસ્તવિક, સુરેખ અને અનાવૃત અવયવો :

ધારો કે $q(x)$ ને n વાસ્તવિક, સુરેખ અને અનાવૃત અવયવો $x - \alpha_1$, $x - \alpha_2, \ldots, x - \alpha_n$. છે. એટલે કે,

$q(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n)$. ($i \neq j$ માટે $\alpha_i \neq \alpha_j$)

$\dfrac{p(x)}{q(x)}$ ને નીચેના સ્વરૂપમાં લખી શકાય.

$\dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{A_1}{x-\alpha_1} + \dfrac{A_2}{x-\alpha_2} + \ldots + \dfrac{A_n}{x-\alpha_n}$. આપણે હંમેશા A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ અનન્ય રીતે નક્કી કરી શકીએ અને જમણી બાજુના વિધેયનું સંકલન સરળતાથી કરી શકીએ. આ સમજવા આપણે એક ઉદાહરણ લઈશું

ઉદાહરણ 15 : $\int \dfrac{2x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \dfrac{2x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx$

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે આપેલ વિધેય એ ઉચિત સંમેય વિધેય છે અને છેદમાં વાસ્તવિક, સુરેખ અનાવૃત અવયવો છે.

ધારો કે $\dfrac{2x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{x-3}$, જ્યાં A, B, C અચળ છે. (i)

બંને બાજુ $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ વડે ગુણતાં,

$2x - 3 = A(x - 2)(x - 3) + B(x - 1)(x - 3) + C(x - 1)(x - 2)$ (ii)

હવે A, B અને C અજ્ઞાત શોધવાની ત્રણ જુદી-જુદી રીતો સમજીએ.

પહેલી રીત :

આપેલ સંમેય વિધેયના છેદમાં $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ છે, જેનાં શૂન્યો 1, 2, 3 છે.
હવે પરિણામ (ii)માં વારાફરતી $x = 1, 2, 3$ લેતાં, A, B, C ની કિંમતો મળશે.

$x = 1$ લેતાં $2(1) - 3 = A(-1)(-2)$. આથી $A = -\frac{1}{2}$.

$x = 2$ લેતાં $2(2) - 3 = B(1)(-1)$. આથી $B = -1$.

$x = 3$ લેતાં $2(3) - 3 = C(2)(1)$. આથી $C = \frac{3}{2}$.

બીજી રીત :

$$\frac{2x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

હવે A શોધવા માટે Aના છેદનો અવયવ $x - 1$ ડાબી બાજુના વિધેયના છેદમાંથી દૂર કરતાં $\dfrac{2x-3}{(x-2)(x-3)}$ રહેશે. આમાં $x - 1 = 0$ લો તથા x નું મૂલ્ય મેળવો, એટલે કે $x = 1$. $x = 1$ લેતાં, $A = \dfrac{2(1)-3}{(1-2)(1-3)} = -\frac{1}{2}$. તે જ પ્રમાણે Bના છેદનો અવયવ $x - 2$ ડાબી બાજુના છેદમાંથી દૂર કરતાં $\dfrac{2x-3}{(x-1)(x-3)}$ રહેશે. $x = 2$ લેતાં, $B = \dfrac{2(2)-3}{(2-1)(2-3)} = -1$ મળશે. તે જ રીતે Cના છેદનો અવયવ $x - 3$ ડાબી બાજુના છેદમાંથી દૂર કરતાં $\dfrac{2x-3}{(x-1)(x-2)}$ રહેશે. આમાં, $x = 3$ લેતાં, $C = \dfrac{2(3)-3}{(3-1)(3-2)} = \frac{3}{2}$ મળશે.

આમ, $A = -\frac{1}{2}$, $B = -1$ અને $C = \frac{3}{2}$ મળશે.

ત્રીજી રીત :

સમીકરણ (ii) પ્રમાણે.

$$(2x - 3) = A(x - 2)(x - 3) + B(x - 1)(x - 3) + C(x - 1)(x - 2)$$

$\therefore \quad 2x - 3 = A(x^2 - 5x + 6) + B(x^2 - 4x + 3) + C(x^2 - 3x + 2)$

$\therefore \quad 2x - 3 = (A + B + C)x^2 + (-5A - 4B - 3C)x + (6A + 3B + 2C)$

હવે, બંને બાજુએ x^2 તથા x ના સહગુણક અને અચળ પદ સરખાવતાં,

$A + B + C = 0, -5A - 4B - 3C = 2, 6A + 3B + 2C = -3$

આ સમીકરણો ઉકેલતાં $A = -\frac{1}{2}$, $B = -1$ અને $C = \frac{3}{2}$ મળશે.

આમ, ઉપર દર્શાવેલ ત્રણ જુદી-જુદી રીતમાંથી જે રીત સરળ લાગે તે રીત વાપરી A, B અને C નાં મૂલ્યો મેળવી શકાય. હવે A, B, C નાં મૂલ્યો સમીકરણ (i) માં મૂકતાં,

$$\frac{2x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{-\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-1}{x-2} + \frac{\frac{3}{2}}{x-3}.$$

$$\therefore \int \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x-2}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-3}\,dx.$$

$$= -\frac{1}{2}\log|x-1| - \log|x-2| + \frac{3}{2}\log|x-3| + c$$

વિકલ્પ 2 : વાસ્તવિક સુરેખ આવૃત અને અનાવૃત અવયવો :

જો $q(x) = (x - \alpha)^k (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)...(x - \alpha_n)$, હોય તો,

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} +...+ \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \frac{B_1}{x-\alpha_1} + \frac{B_2}{x-\alpha_2} +...+ \frac{B_n}{(x-\alpha_n)} \text{ લો.}$$

વાસ્તવિક સુરેખ અને અનાવૃત અવયવો માટે આપણે વિકલ્પ (1) પ્રમાણે અજ્ઞાત અચળો લઈશું. $(x - \alpha)^k$, જેવા વાસ્તવિક સુરેખ આવૃત્ત અવયવો માટે આંશિક અપૂર્ણાંક

$\frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \frac{A_3}{(x-\alpha)^3} +...+ \frac{A_k}{(x-\alpha)^k}$ લઈશુ, જ્યાં $A_1, A_2, A_3,..., A_k$ અજ્ઞાત અચળો છે. આ સમજવા એક ઉદાહરણ લઈએ.

ઉદાહરણ 16 : $\int \frac{x}{(x-1)^2(x+2)}\,dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \frac{x}{(x-1)^2(x+2)}\,dx$

$\frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$ લો. (i)

બંને બાજુ $(x - 1)^2(x + 2)$ વડે ગુણતાં,

$$x = A(x - 1)(x + 2) + B(x + 2) + C(x - 1)^2$$

હવે, $x = 1$ લેતાં, $1 = B(3)$. આથી $B = \frac{1}{3}$

$x = -2$ પરથી $-2 = C(9)$. તેથી $C = -\frac{2}{9}$

બંને બાજુ x^2 ના સહગુણકો સરખાવતા. $A + C = 0$. તેથી $A = -C$.

$\therefore \quad A = \frac{2}{9}$

હવે A, B, C નાં મૂલ્યો સમીકરણ (i)માં મૂકતાં,

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{2}{9(x-1)} + \frac{1}{3(x-1)^2} - \frac{2}{9(x+2)}$$

$$\therefore \int \frac{x\,dx}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{2}{9}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx - \frac{2}{9}\int \frac{1}{x+2}\,dx$$

$$= \frac{2}{9}\log|x-1| + \frac{1}{3}\frac{(x-1)^{-1}}{-1} - \frac{2}{9}\log|x+2| + c$$

$$= \frac{2}{9}\log\left|\frac{x-1}{x+2}\right| - \frac{1}{3(x-1)} + c$$

વિકલ્પ 3 : એક વાસ્તવિક દ્વિઘાત અનાવૃત્ત અવયવ અને બીજા વાસ્તવિક સુરેખ અનાવૃત અવયવો :

જો $q(x) = (ax^2 + bx + c)(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\dots(x - \alpha_n)$, હોય તો

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} + \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \dots + \frac{A_n}{x-\alpha_n} \text{ લો}$$

જ્યાં $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ અજ્ઞાત અચળો છે અને તે હંમેશા મેળવી શકાય. આ સમજવા એક ઉદાહરણ લઈશું.

ઉદાહરણ 17 : $\int \frac{x\,dx}{(3x^2+2)(x-2)}$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \frac{x\,dx}{(3x^2+2)(x-2)}$

ધારો કે $\frac{x}{(3x^2+2)(x-2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{3x^2+2}$

બંને બાજુ $(3x^2 + 2)(x - 2)$ વડે ગુણતાં,

$$x = A(3x^2 + 2) + (Bx + C)(x - 2)$$

$$\therefore \quad x = A(3x^2 + 2) + Bx(x - 2) + C(x - 2)$$

$x = 2$ લેતાં $2 = 14A$. આથી $A = \frac{1}{7}$.

x^2ના સહગુણકો સરખાવતાં,

$3A + B = 0$. આથી $B = -3A$

$$\therefore \quad B = -\frac{3}{7}$$

x ના સહગુણકો સરખાવતાં,

$C - 2B = 1$. તેથી $C = 1 + 2B = 1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7}$

$$\therefore \quad C = \frac{1}{7}$$

$$\therefore \int \frac{x\,dx}{(3x^2+2)(x-2)} = \int \frac{\frac{1}{7}\,dx}{x-2} + \int \frac{\left(-\frac{3}{7}x + \frac{1}{7}\right)dx}{3x^2+2}$$

$$= \frac{1}{7}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{7}\int \frac{(3x-1)\,dx}{3x^2+2}$$

$$= \frac{1}{7}\int \frac{1}{x-2}\,dx - \frac{1}{7}\int \frac{3x\,dx}{3x^2+2} + \frac{1}{7}\int \frac{dx}{3x^2+2}$$

$$= \frac{1}{7}\int \frac{1}{x-2}\,dx - \frac{1}{14}\int \frac{6x\,dx}{3x^2+2} + \frac{1}{7}\int \frac{dx}{(\sqrt{3}x^2)+(\sqrt{2})^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{7}\log|x-2| - \frac{1}{14}\log|3x^2+2| + \frac{1}{7\sqrt{6}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}}\right) + c$$

$$= \frac{1}{7}\log|x-2| - \frac{1}{14}\log(3x^2+2) + \frac{1}{7\sqrt{6}}\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}} + c \text{ કારણ કે } x^2 \geq 0$$

ઉદાહરણ 18 : $\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$

જ્યારે સંકલ્યમાં બધાં જ ઘાત યુગ્મ હોય ત્યારે સંકલ્યમાં $x^2 = t$ લઈએ. (આ આદેશ નથી).

$$\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{t}{(t+1)(t+4)}$$

હવે, $\frac{t}{(t+1)(t+4)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+4}$

$\therefore \quad t = A(t+4) + B(t+1)$

$t = -1$ લેતાં $-1 = 3A$. આથી $A = -\frac{1}{3}$.

$t = -4$ લેતાં $-4 = -3B$. આથી $B = \frac{4}{3}$.

A અને B નાં મૂલ્યો સમીકરણ (i)માં મૂકતાં,

$$\frac{t}{(t+1)(t+4)} = \frac{-\frac{1}{3}}{t+1} + \frac{\frac{4}{3}}{t+4}$$

હવે, $t = x^2$ લેતાં, $\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{-\frac{1}{3}}{x^2+1} + \frac{\frac{4}{3}}{x^2+4}$

$$\therefore \quad \int \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{4}{3}\int \frac{dx}{x^2+4}$$

$$= -\frac{1}{3}\tan^{-1}x + \frac{4}{3} \times \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

$$\therefore \quad I = -\frac{1}{3}\tan^{-1}x + \frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

ઉદાહરણ 19 : $\int \frac{x^2}{(x^3+2)(x^3-5)}\,dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \frac{x^2}{(x^3+2)(x^3-5)}\,dx$

આદેશ $x^3 = t$ લેતાં $3x^2\,dx = dt$. આથી $x^2\,dx = \frac{1}{3}\,dt$

$\therefore \quad I = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{(t+2)(t-5)}$.

$\frac{1}{(t+2)(t-5)} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t-5}$ લો

$1 = A(t-5) + B(t+2)$

$t = -2$ લેતાં, $1 = -7A$. આથી $A = -\frac{1}{7}$

$t = 5$ લેતાં, $1 = 7B$. આથી $B = \frac{1}{7}$

$$\therefore \quad \frac{1}{(t+2)(t-5)} = \frac{-\frac{1}{7}}{t+2} + \frac{\frac{1}{7}}{t-5}.$$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{(t+2)(t-5)}$$

$$= -\frac{1}{21}\int \frac{1}{t+2}\, dt + \frac{1}{21}\int \frac{1}{t-5}\, dt$$

$$= -\frac{1}{21} \log |t+2| + \frac{1}{21} \log |t-5| + c$$

$$= \frac{1}{21} \log \left| \frac{t-5}{t+2} \right| + c$$

$$= \frac{1}{21} \log \left| \frac{x^3-5}{x^3+2} \right| + c$$

ઉદાહરણ 20 : $\int \frac{x^2+x+1}{(x-1)^3}\, dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \frac{x^2+x+1}{(x-1)^3}\, dx$

$x - 1 = t$ લેતાં, $dx = dt$

$$I = \int \frac{(t+1)^2+(t+1)+1}{t^3}\, dt$$

$$= \int \frac{t^2+3t+3}{t^3}\, dt$$

$$= \int \left(\frac{1}{t} + \frac{3}{t^2} + \frac{3}{t^3}\right) dt$$

$$= \int \frac{1}{t}\, dt + 3\int t^{-2}\, dt + 3\int t^{-3}\, dt$$

$$= \log|t| + 3\left(\frac{-1}{t}\right) + 3\left(\frac{1}{-2t^2}\right) + c$$

$$= \log|t| - \frac{3}{t} - \frac{3}{2t^2} + c$$

$$= \log|x-1| - \frac{3}{x-1} - \frac{3}{2(x-1)^2} + c$$

નોંધ : આ ઉદાહરણ આંશિક અપૂર્ણાંકની રીતે પણ કરી શકાય.

$\frac{x^2+x+1}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$ લઈને પ્રયત્ન કરો.

ઉદાહરણ 21 : $\int \frac{\tan\theta + \tan^3\theta}{1+\tan^3\theta}\, d\theta$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \frac{\tan\theta + \tan^3\theta}{1+\tan^3\theta}\, d\theta$

$$= \int \frac{\tan\theta\,(1+\tan^2\theta)}{1+\tan^3\theta}\, d\theta$$

$$= \int \frac{\tan\theta \cdot \sec^2\theta}{1+\tan^3\theta}\, d\theta$$

ધારો કે $tan\theta = t$. આથી $sec^2\theta \, d\theta = dt$

$$I = \int \frac{t\,dt}{1+t^3}$$

$$= \int \frac{t\,dt}{(t+1)(t^2-t+1)}$$

ધારો કે $\frac{t}{(t+1)(t^2-t+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2-t+1}$.

$\therefore \quad t = A(t^2 - t + 1) + (Bt + C)(t + 1)$

$\therefore \quad t = A(t^2 - t + 1) + Bt(t + 1) + C(t + 1)$

$t = -1$ લેતાં, $-1 = 3A$. આથી $A = -\frac{1}{3}$

t^2 ના સહગુણકો સરખાવતાં, $A + B = 0$ મળે. આથી $B = -A$.

$\therefore \quad B = \frac{1}{3}$

અચળ પદો સરખાવતાં, $A + C = 0$ મળે. આથી $C = -A$.

$\therefore \quad C = \frac{1}{3}$

$$\therefore \quad \frac{t}{(t+1)(t^2-t+1)} = \frac{-\frac{1}{3}}{t+1} + \frac{\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}}{t^2-t+1}$$

$$\therefore \quad I = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{t+1}\,dt + \frac{1}{3}\int \frac{t+1}{t^2-t+1}\,dt$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{1}{t+1}\,dt + \frac{1}{6}\int \frac{2t+2}{t^2-t+1}\,dt$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{1}{t+1}\,dt + \frac{1}{6}\int \frac{(2t-1)+3}{t^2-t+1}\,dt$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{6}\int \frac{(2t-1)\,dt}{t^2-t+1} + \frac{3}{6}\int \frac{dt}{t^2-t+1}$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{6}\int \frac{(2t-1)\,dt}{t^2-t+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= -\frac{1}{3}\log|t+1| + \frac{1}{6}\log|t^2-t+1| + \frac{1}{2}\times\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}\,tan^{-1}\left(\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + c$$

$$= -\frac{1}{3}\log|t+1| + \frac{1}{6}\log\left(t^2-t+1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,tan^{-1}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

$$\therefore \quad I = -\frac{1}{3}\log|tan\theta+1| + \frac{1}{6}\log\left(tan^2\theta - tan\theta + 1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,tan^{-1}\left(\frac{2tan\theta-1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

સ્વાધ્યાય 2.3

યોગ્ય પ્રદેશ પર વ્યાખ્યાયિત નીચેનાં વિધેયોનાં x વિશે સંકલિતો મેળવો :

1. $\dfrac{x^2+4x-1}{x^3-x}$

2. $\dfrac{3x+2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

3. $\dfrac{x^3-6x^2+10x-2}{x^2-5x+6}$

4. $\dfrac{x^2}{(2x^2+1)(x^2-1)}$

5. $\dfrac{x^2+1}{(x^2+2)(2x^2+1)}$

6. $\dfrac{x^3}{(x^2+2)(x^2+5)}$

7. $\dfrac{x^2+x+1}{(x+1)^2(x+2)}$

8. $\dfrac{5x}{(x+1)(x^2+9)}$

9. $\dfrac{1}{6e^{2x}+5e^x+1}$

10. $\dfrac{sec^2\theta}{tan^2\theta-4tan\,\theta+3}$

11. $\dfrac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}$

12. $\dfrac{x^2}{(x-1)^3(x+1)}$

13. $\dfrac{1}{sin\,x-sin\,2x}$

14. $\dfrac{1}{sin\,x(3+2cosx)}$

*

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ 22 : $\int (x+1)\sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}\,dx,\ x>2$ મેળવો. (જો $x<-2$ તો ?)

ઉકેલ : $I = \int (x+1)\sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}\,dx$

$$= \int (x+1)\sqrt{\frac{x+2}{x-2}\times\frac{x+2}{x+2}}\,dx$$

$$= \int \frac{(x+1)(x+2)}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$$

$$= \int \frac{x^2+3x+2}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$$

$$= \int \frac{(x^2-4)+3x+6}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$$

$$= \int \sqrt{x^2-4}\,dx + 3\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\,dx + 6\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$= \int \sqrt{x^2-4}\,dx + \frac{3}{2}\int (x^2-4)^{-\frac{1}{2}}(2x)\,dx + 6\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-4} - \frac{4}{2}\log|x+\sqrt{x^2-4}| + \frac{3}{2}\frac{(x^2-4)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 6\log|x+\sqrt{x^2-4}| + c$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-4} + 4\log|x + \sqrt{x^2-4}| + 3\sqrt{x^2-4} + c$$

$$= \left(\frac{x}{2} + 3\right)\sqrt{x^2-4} + 4\log|x + \sqrt{x^2-4}| + c$$

ઉદાહરણ 23 : $\int \frac{(1+\sin x)\,dx}{\sin x(1+\cos x)}$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \frac{(1+\sin x)\,dx}{\sin x(1+\cos x)}$

$$I = \int \frac{dx}{\sin x(1+\cos x)} + \int \frac{dx}{1+\cos x}$$

ધારો કે $I = I_1 + I_2$ જ્યાં $I_1 = \int \frac{dx}{\sin x(1+\cos x)}$, $I_2 = \int \frac{dx}{1+\cos x}$

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sin x(1+\cos x)}$$

$$= \int \frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x(1+\cos x)}$$

$$= \int \frac{\sin x\,dx}{(1-\cos x)(1+\cos x)^2}$$

હવે, $\cos x = t$ લેતાં, $\sin x\,dx = -dt$

$$I_1 = \int \frac{-dt}{(1-t)(1+t)^2}$$

ધારો કે $\frac{-1}{(1-t)(1+t)^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} + \frac{C}{(1+t)^2}$

$-1 = A(1+t)^2 + B(1-t)(1+t) + C(1-t)$

$t = 1$ લેતાં, $-1 = A(4)$. આથી $A = -\frac{1}{4}$

$t = -1$ લેતાં, $-1 = C(2)$. આથી $C = -\frac{1}{2}$

$t = 0$ લેતાં, (અથવા t ની કોઈપણ અનુકૂળ કિંમત લઈ શકાય)

$-1 = A + B + C$

$\therefore \quad B = -1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$

$\therefore \quad B = -\frac{1}{4}$

$$\therefore \quad \frac{-1}{(1-t)(1+t)^2} = \frac{-\frac{1}{4}}{1-t} + \frac{-\frac{1}{4}}{1+t} + \frac{-\frac{1}{2}}{(1+t)^2}$$

$$I_1 = -\frac{1}{4}\int \frac{1}{1-t}\,dt - \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+t}\,dt - \frac{1}{2}\int (1+t)^{-2}\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\log|1-t| - \frac{1}{4}\log|1+t| + \frac{1}{2(t+1)}$$

$$= \frac{1}{4}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + \frac{1}{2(t+1)} + c_1$$

$\therefore \quad I_1 = \frac{1}{4}\log\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + \frac{1}{2(\cos x+1)} + c_1$

હવે, $I_2 = \int \frac{1}{1+\cos x}\,dx = \int \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \sec^2\frac{x}{2}\,dx$

$= \frac{1}{2}\,\frac{\tan\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} + c_2$

$\therefore \quad I_2 = \tan\frac{x}{2} + c_2$

$I = I_1 + I_2$

$\therefore \quad I = \frac{1}{4}\log\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + \frac{1}{2(\cos x+1)} + \tan\frac{x}{2} + c \qquad (c_1 + c_2 = c)$

$= \frac{1}{4}\log\left|\tan^2\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{4\cos^2\frac{x}{2}} + \tan\frac{x}{2} + c$

$= \frac{1}{2}\log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{4}\sec^2\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2} + c$

બીજી રીત :

ધારો કે $\tan\frac{x}{2} = t$ તેથી $\sec^2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}dx = dt$

આથી $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ તથા $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ અને $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$I = \int \frac{(1+\sin x)\,dx}{\sin x(1+\cos x)}$$

$$= \int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$= \int \frac{1+t^2+2t}{2t\,(1+t^2+1-t^2)} \cdot 2dt$$

$$= \int \frac{t^2+2t+1}{2t}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t}+2+t\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log|t| + 2t + \frac{t^2}{2}\right] + c$$

$$= \frac{1}{2}\log|t| + t + \frac{1}{4}t^2 + c$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \tan\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2} + c'$$

જુઓ કે : $I = \frac{1}{2}\log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \tan\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\left(\sec^2\frac{x}{2} - 1\right) + c'$

$= \frac{1}{2}\log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \tan\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sec^2\frac{x}{2} - \frac{1}{4} + c'$

$= \frac{1}{2}\log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \tan\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sec^2\frac{x}{2} + c \quad \left(c = c' - \frac{1}{4}\right)$

આમ બંને રીતે મળતા જવાબ એક જ છે.

ઉદાહરણ 24 : $\int \left(\log(\log x) + \frac{1}{(\log x)^2}\right) dx$ મેળવો. $(x > 1)$

ઉકેલ : $I = \int \left(\log(\log x) + \frac{1}{(\log x)^2}\right) dx$

ધારો કે $\log x = t$. તેથી $x = e^t$

$\therefore \quad dx = e^t\, dt$

$$\therefore \quad I = \int \left(\log t + \frac{1}{t^2}\right) e^t\, dt$$

$$= \int \left(\log t + \frac{1}{t} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right) e^t\, dt$$

$$= \int \left[\left(\log t + \frac{1}{t}\right) - \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right)\right] e^t\, dt$$

$$= \int \left(\log t + \frac{1}{t}\right) e^t\, dt - \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right) e^t\, dt$$

$$= e^t \log t - e^t \frac{1}{t} + c$$

$$= x \log(\log x) - \frac{x}{\log x} + c$$

ઉદાહરણ 25 : $\int \frac{\sin^{-1}\sqrt{x} - \cos^{-1}\sqrt{x}}{\sin^{-1}\sqrt{x} + \cos^{-1}\sqrt{x}}\, dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \frac{\sin^{-1}\sqrt{x} - \cos^{-1}\sqrt{x}}{\sin^{-1}\sqrt{x} + \cos^{-1}\sqrt{x}}\, dx$

$$= \int \frac{\sin^{-1}\sqrt{x} - \left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\sqrt{x}\right)}{\frac{\pi}{2}}\, dx \qquad \left(\sin^{-1}\sqrt{x} + \cos^{-1}\sqrt{x} = \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \int \frac{2\sin^{-1}\sqrt{x} - \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}\, dx$$

$$= \frac{4}{\pi} \int \sin^{-1}\sqrt{x}\, dx - \int dx$$

ધારો કે $I_1 = \int \sin^{-1}\sqrt{x}\, dx$

ધારો કે $\sin^{-1}\sqrt{x} = \theta$. તેથી $x = \sin^2\theta$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ $\qquad \left(\sqrt{x} > 0\right.$. તેથી, $\left.0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \quad dx = 2\sin\theta \cdot \cos\theta\, d\theta$

$$\therefore \quad I_1 = \int \theta\, 2\sin\theta\, \cos\theta\, d\theta$$

$$= \int \theta \sin 2\theta\, d\theta$$

$$= -\frac{\theta \cos 2\theta}{2} + \frac{1}{2}\int \cos 2\theta\, d\theta$$

$$= -\frac{\theta}{2}\cos 2\theta + \frac{\sin 2\theta}{4}$$

$$= -\frac{\theta}{2}(1 - 2\sin^2\theta) + \frac{1}{2}\sin\theta \cdot \cos\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\ sin^{-1}\sqrt{x}\ (1 - 2x) + \frac{1}{2}\sqrt{x}\ \sqrt{1-x}$$

$$= -\frac{1}{2}\ sin^{-1}\sqrt{x} + x\,sin^{-1}\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x - x^2}$$

$$\therefore\ \ I = \frac{4}{\pi}\int sin^{-1}\sqrt{x}\,dx - \int dx$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[-\frac{1}{2}\ sin^{-1}\sqrt{x} + x sin^{-1}\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x - x^2}\right] - x + c$$

સ્વાધ્યાય 2

યોગ્ય પ્રદેશ પર વ્યાખ્યાયિત નીચેનાં વિધેયોનાં સંકલિતો મેળવો :

1. $x^2\ sin^{-1}x$

2. $tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

3. $\frac{x - sin\ x}{1 - cos\ x}$

4. $\frac{\sqrt{sin\ x}}{cos\ x}$

5. $\log\ (x + \sqrt{x^2 + a^2})$

6. $sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{x+a}}$

7. $\frac{sin^{-1}\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$

8. $\frac{\sqrt{1 + sin 2x}}{1 + cos 2x}\ e^x$

9. $\frac{\log x - 1}{(\log x)^2}$

10. $\log\ (\log x) + \frac{1}{\log x}$

11. $x\sqrt{2ax - x^2}$

12. $(x - 5)\sqrt{x^2 + x}$

13. $\frac{1}{cos\ x\ cos\ 2x}$

14. $\frac{1}{sin\ x + sin\ 2x}$

15. $\frac{sin\ x}{sin\ 4x}$

16. $cot^{-1}(1 - x + x^2)$ $\quad (0 < x < 1)$

17. $\frac{1}{sin\ x\sqrt{cos^3 x}}$

18. $\frac{sec\ x}{1 + cosec\ x}$

19. $\frac{1 + sin\ x}{sin\ x\ (1 + cos\ x)}$

20. આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અને (d)માંથી સાચો વિકલ્પ પસંદ કરી આપેલ ☐માં લખો :

(1) $\int cos\ (\log x)\ dx = \ ......\ + c$ ☐

(a) $\frac{x}{2}\ [cos\ (\log x) + sin\ (\log x)]$ (b) $\frac{x}{4}\ [cos\ (\log x) + sin\ (\log x)]$

(c) $\frac{x}{2}\ [cos\ (\log x) - sin\ (\log x)]$ (d) $\frac{x}{2}\ [sin\ (\log x) - cos\ (\log x)]$

(2) $\int e^x\ sin\ x\ \ cos\ x\ \ dx = \ ......\ + c$ ☐

(a) $\frac{e^x}{2\sqrt{5}}\ cos\ (2x - tan^{-1}2)$ (b) $\frac{e^x}{2\sqrt{5}}\ sin\ (2x - tan^{-1}2)$

(c) $\frac{e^2}{2\sqrt{5}}\ sin\ (2x + tan^{-1}2)$ (d) $\frac{e^{2x}}{2\sqrt{5}}\ sin\ (2x + \pi - tan^{-1}2)$

(3) $\int e^x \sec x\,(1 + \tan x)\,dx = ... + c$

(a) $e^x \sec x \tan x$ (b) $e^x \tan x$ (c) $e^x \sec x$ (d) $-e^x \sec x$

(4) $\int \frac{(5+\log x)\,dx}{(6+\log x)^2} = ... + c$

(a) $\frac{x}{\log_e x + 6}$ (b) $\frac{1}{5+\log_e x}$ (c) $\frac{x}{\log_e x + 5}$ (d) $\frac{e^x}{\log_e x + 6}$

(5) $\int \frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}(1 + x + x^2)\,dx = ... + c$

(a) $e^{\tan^{-1}x}$ (b) $\frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}$ (c) $x \cdot e^{\tan^{-1}x}$ (d) $\frac{x}{1+x}\, e^{\tan^{-1}x}$

(6) $\int e^x \left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right) dx = ... + c$

(a) $e^x \cot x$ (b) $e^x \cot \frac{x}{2}$ (c) $e^x \tan \frac{x}{2}$ (d) $e^{\frac{x}{2}} \cdot \tan \frac{x}{2}$

(7) $\int e^x \left(\frac{1+x\log x}{x}\right) dx = ... + c$

(a) $e^x \log x$ (b) $x \cdot e^x$ (c) $\frac{1}{x}\log x$ (d) $e^{-x}\log x$

(8) $\int \left(\log x + \frac{1}{x^2}\right) e^x\,dx = ... + c$

(a) $e^x\left(\log x + \frac{1}{x^2}\right)$ (b) $e^x\left(\log x + \frac{1}{x}\right)$ (c) $e^x\left(\log x - \frac{1}{x^2}\right)$ (d) $e^x\left(\log x - \frac{1}{x}\right)$

(9) $\int \left(\frac{x-1}{x^2}\right) e^x\,dx = ... + c$

(a) $\frac{1}{x^2} e^x$ (b) $\frac{1}{x} e^x$ (c) $-\frac{1}{x^2} e^x$ (d) $-\frac{1}{x} e^x$

(10) $\int (x^6 + 7x^5 + 6x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 3x + 1)\,e^x\,dx = ... + c$

(a) $\sum_{i=1}^{7} x^i e^x$ (b) $\sum_{i=1}^{6} x^i e^x$ (c) $\sum_{i=0}^{6} i\, e^x$ (d) $\sum_{i=0}^{6} (xe)^i$

(11) $\int \tan^{-1}x\,dx = ... + c$

(a) $x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\log|1 + x^2|$ (b) $x\tan^{-1}x + \frac{1}{2}\log\frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}$

(c) $x\tan^{-1}x + \frac{1}{2}\log|x^2 + 1|$ (d) $\frac{1}{1+x^2}$

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો

1. ખંડશઃ સંકલનનો નિયમ :

જો (1) વિધેય f અને g એ કોઈ અંતરાલ $I = (a, b)$ પર વિકલનીય હોય,

(2) f' અને g' એ I પર સતત હોય, તો $\int f(x) \cdot g'(x)\ dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\ dx$

આ નિયમમાં $f(x) = u$ અને $g'(x) = v$, લઈએ તો, $f'(x) = \frac{du}{dx}$ અને $g(x) = \int v\ dx$

તેથી તે નવા સ્વરૂપે $\int uv\ dx = u\int v\ dx - \int\left(\frac{du}{dx}\int v\ dx\right) dx$ લખી શકાય છે.

2. સંકલનનાં પ્રમાણિત રૂપો :

(1) $\int \sqrt{x^2-a^2}\ dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\log|x + \sqrt{x^2-a^2}| + c$

(2) $\int \sqrt{x^2+a^2}\ dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\log|x + \sqrt{x^2+a^2}| + c$

(3) $\int \sqrt{a^2-x^2}\ dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + c \qquad (a > 0)$

(4) $\int e^x [f(x) + f'(x)]\ dx = e^x f(x) + c$

(5) $\int e^{ax} \cdot \sin(bx + k)\ dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin(bx + k) - b\cos(bx + k)] + c,\ a \neq 0,\ b \neq 0$

$$= \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(bx + k - \alpha) + c$$

જ્યાં $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.\quad \alpha \in (0, 2\pi)$

(6) $\int e^{ax} \cos(bx + k)\ dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos(bx + k) + b\sin(bx + k)] + c,\ a \neq 0,\ b \neq 0$

$$= \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(bx + k - \alpha) + c$$

જ્યાં $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.\quad \alpha \in (0, 2\pi).$

3. (1) $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\ dx$ (2) $\int (Ax + B)\sqrt{ax^2+bx+c}\ dx$ સ્વરૂપનાં સંકલિતો.

4. આંશિક અપૂર્ણાંકની રીત.

■

નિયત સંકલન 3

Calculus required continuity and continuity was supposed to require the infinitely little; but nobody could discover what the infinitely little might be.

– Bertrand Russell

All great theorems were discovered after midnight.

– Adrian Mathesis

3.1 પ્રાસ્તાવિક

આપણે વિકલનની વ્યસ્ત ક્રિયા તરીકે પ્રતિવિકલન(સંકલન)નો અભ્યાસ કર્યો. ઐતિહાસિક ક્રમ જોતાં, વિકલન કરતાં સંકલનનો ખ્યાલ પહેલાં ઉદ્દભવ્યો છે. વાસ્તવમાં સંકલનનો ખ્યાલ વક્રો વડે સીમિત સમતલીય પ્રદેશોનાં ક્ષેત્રફળ અને પરિક્રમજ ઘન પદાર્થોનાં ઘનફળ શોધવાના પ્રશ્નોમાંથી સ્વતંત્ર રીતે ઉદ્દભવ્યો છે. સૌપ્રથમ અમુક પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ દર્શાવવા સરવાળાના લક્ષ તરીકે નિયત સંકલનની શરૂઆત થઈ. આમ, **સંકલન (Integration)** શબ્દ મૂળ **સરવાળા** અને અંગ્રેજી ક્રિયાપદ **to integrate**માંથી આવ્યો. **'to integrate'** એટલે **'ભેગું કરવું'** કે **'સંકલન કરવું'** એવો અર્થ થાય. પાછળથી **ન્યૂટન** તથા **લિબનીટ્ઝે** 17મી સદીમાં પરસ્પર ભિન્ન દેખાતી સંકલન અને વિકલનની આ બે ક્રિયાઓ વચ્ચે ગાઢ સંબંધ પ્રસ્થાપિત કર્યો. આ સંબંધ સંકલનના મૂળભૂત પ્રમેય તરીકે જાણીતો છે. આપણે આ પ્રકરણમાં તેનો અભ્યાસ કરીશું.

ક્ષેત્રફળ, ઘનફળ વગેરેની ગણતરી નિયત સંકલનથી થાય છે. તેથી નિયત સંકલનનો અભ્યાસ ખૂબ જ જરૂરી બને છે. 19મી સદીમાં **કોશી** અને **રિમાને** નિયત સંકલનની સંકલ્પના આપી.

હવે આપણે આ પ્રકરણમાં નિયત સંકલનની વ્યાખ્યા સરવાળાના લક્ષ તરીકે કેમ આપી શકાય અને તેના ઉપયોગથી ક્ષેત્રફળ મેળવવા ઉપરાંત તેને પ્રતિવિકલન સાથે પણ કેવી રીતે સાંકળી શકાય તેની સમજ મેળવીએ.

3.2 સરવાળાના લક્ષ તરીકે નિયત સંકલન :

તમે ભૌતિક વિજ્ઞાનમાં ધોરણ 11માં શીખી ગયા છો કે સ્પ્રિંગ-દળ પ્રણાલી માટે પ્રણાલી પર લાગતું બળ $F = -kx$ થી મળે છે. જ્યાં k સ્પ્રિંગનો બળ અચળાંક છે. આપણે માત્ર માનાંક (magnitude) ને ધ્યાનમાં લઈએ તો $F = kx$ થાય અને $k = 10$ લઈએ તો $F = 10x$. અહીં x એ બળને લીધે થતું સ્થાનાંતર થાય તો કુલ કાર્ય કેટલું થતું હશે તે શોધીએ. કાર્યની વ્યાખ્યા મુજબ, કોઈ ક્ષણે પ્રણાલી દ્વારા થતું કાર્ય

w = તે ક્ષણે લાગતું બળ $\times$ તે બળ દ્વારા થતું સ્થાનાંતર

હવે $F = 10x$ દર્શાવે છે કે બળ સ્થાનાંતર સાથે બદલાય છે.

તેથી 10 એકમ સ્થાનાંતર કરતી પ્રણાલી દ્વારા સ્થાનાંતર દરમિયાન થતું કુલ કાર્ય શોધવું હોય તો શું કરીશું ?

એક સામાન્ય અંદાજ પ્રમાણે સ્થાનાંતર દરમિયાન થતા કુલ કાર્ય w માટે,

શરૂઆતનું બળ $\times$ સ્થાનાંતર $\leq w \leq$ અંતિમ બળ $\times$ સ્થાનાંતર

સૌ પ્રથમ સ્થાનાંતર [0, 10] અંતરાલમાં થાય છે. આ સંજોગોમાં $x = 10$ માટે મહત્તમ બળ 100 એકમ અને $x = 0$ માટે ન્યૂનતમ બળ શૂન્ય છે. આથી પ્રથમ અંતરાલમાં થતું કાર્ય

$0 \times 0 \leq w \leq 100 \times 10$ **($w \times d = 0 \times 0$ તથા $w \times d = 100 \times 10$)**

$\therefore$ [0, 10] અંતરાલમાં થતા કાર્ય w માટે $0 \leq w \leq 1000$ **(i)**

હવે કાર્ય (w) નો વધુ સારો અંદાજ મેળવવા માટે આપણે [0, 10] અંતરાલને બે એકરૂપ ઉપાંતરાલમાં વિભાજિત કરીએ, [0, 5] અને [5, 10]. જો [0, 5] અંતરાલમાં થતું કાર્ય w_1 હોય તો આ સંજોગોમાં મહત્તમ બળ 50 એકમ અને ન્યૂનતમ બળ 0 એકમ છે. માટે [0, 5] અંતરાલમાં થતા કાર્ય w_1 માટે,

$$0 \le w_1 \le 50 \times 5$$

$$\therefore \quad 0 \le w_1 \le 250$$

તે જ રીતે જો [5, 10] અંતરાલમાં થતું કાર્ય w_2 હોય તો $250 \le w_2 \le 500$

$\therefore$ કુલ કાર્ય $w = w_1 + w_2$ હોય તો,

$$250 \le w_1 + w_2 \le 750$$

$$\therefore \quad 250 \le w \le 750 \qquad \text{(ii)}$$

આમ, જોઈ શકાય છે કે (i) કરતાં (ii) વધુ સારો અંદાજ આપે છે. આ જ પ્રમાણે [0, 10]ને ત્રણ એકરૂપ અંતરાલમાં વિભાજિત કરીએ તો, ઉપાંતરાલો $\left[0, \frac{10}{3}\right], \left[\frac{10}{3}, \frac{20}{3}\right], \left[\frac{20}{3}, 10\right]$ મળે. દરેક ઉપાંતરાલમાં થતું કાર્ય નીચે પ્રમાણે મળશે :

પ્રથમ ઉપાંતરાલમાં $F = 10x$ માં $x = \frac{10}{3}$ લેતાં, મહત્તમ કાર્ય $= \frac{100}{3} \times \frac{10}{3} = \frac{1000}{9}$

$$0 \le w_1 \le \frac{1000}{9}$$

તે જ રીતે $\frac{1000}{9} \le w_2 \le \frac{2000}{9}$

અને $\frac{2000}{9} \le w_3 \le \frac{3000}{9}$

આમ, $w = w_1 + w_2 + w_3$ હોવાથી, $\frac{3000}{9} \le w \le \frac{6000}{9}$

$$\therefore \quad 333\tfrac{1}{3} \le w \le 666\tfrac{2}{3} \qquad \text{(iii)}$$

આમ, (ii) કરતાં (iii) વધુ સારો અંદાજ આપે છે. આમ આપણે વધુને વધુ ભાગ કરતાં જઈએ તો વધુ સારા અંદાજિત પરિણામ તરફ આગળ વધી શકાય. આપણે [0, 10] ને n એકરૂપ અંતરાલોમાં વિભાજિત કરીએ તો તે વિભાજન કરતા અંતરાલો $\left[0, \frac{10}{n}\right], \left[\frac{10}{n}, \frac{20}{n}\right], \left[\frac{20}{n}, \frac{30}{n}\right], \dots, \left[\frac{10(n-1)}{n}, 10\right]$ થાય.

i મો ઉપાંતરાલ $\left[\frac{10(i-1)}{n}, \frac{10i}{n}\right]$ છે.

આ અંતરાલમાં બળ $F = 10x$ ના સૂત્રમાં $x = \frac{10i}{n}$ લેતાં,

મહત્તમ કાર્ય $= 10 \times \frac{10i}{n} \times \frac{10}{n}$

$= \frac{1000i}{n^2}$

આ ઉપાંતરાલમાં થતું કાર્ય w_i હોય તો, $\frac{1000(i-1)}{n^2} \le w_i \le \frac{1000i}{n^2}$ થશે.

$\therefore$ કુલ કાર્ય, $\frac{1000}{n^2} \sum\limits_{i=1}^{n} (i-1) \le w \le \frac{1000}{n^2} \sum\limits_{i=1}^{n} i$ થાય.

અહીં w માટે મહત્તમ અને ન્યૂનતમ મૂલ્ય વચ્ચેનો તફાવત,

$$\frac{1000}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i - \frac{1000}{n^2} \sum_{i=1}^{n} (i-1) = \frac{1000}{n^2} \sum_{i=1}^{n} (1) = \frac{1000}{n^2} \times n = \frac{1000}{n} \text{ થાય.}$$

હવે જેમ આપણે n ની કિંમત વધારતા જઈએ તેમ આ તફાવત ઘટતો જશે અને n અસીમિત વધે (તેને $n \to \infty$ કહેવાય) તેમ તફાવત શૂન્યાભિલક્ષી થાય છે. બીજી રીતે જોતાં,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1000}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i = \lim_{n \to \infty} \frac{1000}{n^2} \sum_{i=1}^{n} (i-1) \text{ થાય.}$$

હવે કાર્ય w તેમની વચ્ચેની કિંમત હોવાથી સેન્ડવીચ પ્રમેયથી આ લક્ષ જ w ની સાચી કિંમત હશે.

$$\therefore \quad w = \lim_{n \to \infty} \frac{1000}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i = \lim_{n \to \infty} \frac{1000}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right).$$

$$= \lim_{n \to \infty} 500 \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 500$$

આમ, $w = 500$ થયેલ કાર્યની સાચી કિંમત છે. અત્રે આપણે બળ F નું $[0, 10]$ અંતરાલ પર x ને સાપેક્ષ સંકલન કર્યું કહેવાય. તેને $\int\limits_0^{10} \text{F}(x)\, dx = \int\limits_0^{10} 10x\, dx$ વડે દર્શાવાય છે.

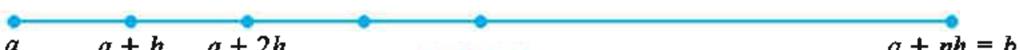
અહીં, આપણે શ્રેણીના લક્ષનો ઉપયોગ કરીએ છીએ. જો (S_n) એ આપેલ શ્રેણી હોય અને જો n અપરિમિત રીતે વધે તો કોઈ ચોક્કસ વાસ્તવિક સંખ્યા l માટે $|\text{S}_n - l|$ નું મૂલ્ય 'ખૂબ જ' નાનું થાય, તો જેમ n અનંતને અનુલક્ષે છે તેમ શ્રેણી (S_n) એ l ને અનુલક્ષે છે અથવા શ્રેણીની S_nનું લક્ષ l છે, તેમ કહેવાય. તેને સંકેતમાં $\lim\limits_{n \to \infty} \text{S}_n = l$ એમ લખાય. આ અંગે સામાન્ય સમજ આપણે સિમેસ્ટર-III માં e ના પરિચયમાં મેળવી હતી. આ અંગેનો ઊંડો અભ્યાસ આપણે અત્યારે કરવાનો નથી.

વ્યાપક રીતે $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ શોધવા માટે $[a, b]$ નું n સમાન ઉપ-અંતરાલોમાં વિભાજન કરીશું. પ્રત્યેક ઉપઅંતરાલની લંબાઈ $h = \left(\frac{b-a}{n}\right)$ થશે. $[a, b]$ નું વિભાજન $[a, a + h]$, $[a + h, a + 2h]$,..., $[a + (n - 1) h, a + nh]$ માં કરીએ. હવે ઉપરનાં દૃષ્ટાંતમાં કર્યું છે તેમ,

$$\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f[a + (i - 1)h] \le \int\limits_a^b f(x)\, dx \le \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(a + ih) \text{ મળે.}$$

અને $\int\limits_a^b f(x)\, dx = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} f(a + ih)$ એવું સૂત્ર લઈ શકાય. હવે આ બધા ખ્યાલો અને સમજ પરથી આપણે એક તારણ ઉપર આવ્યાં આ તારણને આપણે એક વ્યાખ્યા તરીકે લઈએ અને તેને આપણે સરવાળાના લક્ષ તરીકે નિયત સંકલનની વ્યાખ્યા કહીએ.

વ્યાખ્યા : ધારો કે $f : [a, b] \to \text{R}$ સતત વિધેય છે. કોઈ ધનપૂર્ણાંક n માટે $h = \frac{b-a}{n}$ લઈએ, તો $[a, b]$ નું n એકરૂપ ઉપાંતરાલોમાં વિભાજન કરતાં બિંદુઓ $a, a + h, a + 2h, \ldots, a + nh = b$ થશે.



આકૃતિ 3.1

ધારો કે $\text{S}_n = \frac{b-a}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} f(a + ih)$

આમ, f અને $[a, b]$ ના વિભાજન પર આધારિત એક શ્રેણી (S_n) મળે છે. સતત વિધેયનો એ ગુણધર્મ છે કે આ શ્રેણી (S_n)ના લક્ષનું અસ્તિત્વ છે. (S_n)ના લક્ષને f નો $[a, b]$ પર નિયત સંકલિત (Definite integral) કહે છે. તેને સંકેતમાં $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ દ્વારા દર્શાવીએ છીએ. આમ,

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{i=1}^{n} f(a + ih) \qquad \text{(i)}$$

a ને નિયત સંકલનની અધ:સીમા (Lower limit) અને b ને નિયત સંકલનની ઊર્ધ્વસીમા (Upper limit) કહે છે.

વળી, $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{b-a}{n} \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(a + ih)$ પણ $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ થાય તે સિદ્ધ થઈ શકે.

ઉપરની વ્યાખ્યાને **નિયત સંકલિતની સરવાળાના લક્ષ તરીકેની વ્યાખ્યા (Definite Integral as a limit of a sum)** કહે છે. વિધેય f સાથે તેનો નિયત સંકલિત સાંકળવાની ઉપરની ક્રિયાને **નિયત સંકલન (Definite Integration)** કહેવામાં આવે છે.

નોંધ : સતત ન હોય તેવાં કેટલાંક પ્રકારનાં વિધેયો માટે પણ $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ વ્યાખ્યાયિત થઈ શકે. પરંતુ તેની ચર્ચા આપણે અત્રે કરીશું નહી.

સંકેત :

સંકલ્ય

સંકલનની ઉર્ધ્વ સીમા $\to b$

$\int f(x)\,dx \leftarrow$ સૂચવે છે કે સંકલન xને સાપેક્ષ કર્યું છે.

સંકલનની અધઃ સીમા $\to a$

a થી b માં f નો સંકલિત

3.3 કેટલાંક અગત્યનાં પરિણામો

(1) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum\limits_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$

(2) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \sum\limits_{i=1}^{n} i^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

(4) $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1} \qquad (r \neq 1)$

(5) $S_n = sin(a + h) + sin(a + 2h) + \ldots + sin(a + nh)$, જ્યાં $h \neq 2n\pi.\ n \in Z$

આ સરવાળો શોધવા આપણે $2sin\,\frac{h}{2}$ વડે બંને બાજુએ ગુણીએ,

$$2sin\,\frac{h}{2} \cdot S_n = \left[2sin(a+h)\,sin\,\frac{h}{2} + 2sin\,(a+2h)\,sin\,\frac{h}{2} + 2sin\,(a+3h)\,sin\,\frac{h}{2} + \ldots + 2sin(a+nh)\,sin\,\frac{h}{2}\right]$$

$$= \left[cos\left(a+\frac{h}{2}\right) - cos\left(a+\frac{3h}{2}\right)\right] + \left[cos\left(a+\frac{3h}{2}\right) - cos\left(a+\frac{5h}{2}\right)\right] + \left[cos\left(a+\frac{5h}{2}\right) - cos\left(a+\frac{7h}{2}\right)\right] + \ldots + \left[cos\left(a+nh-\frac{h}{2}\right) - cos\left(a+nh+\frac{h}{2}\right)\right]$$

$$2sin\,\frac{h}{2} \cdot S_n = \left[cos\left(a+\frac{h}{2}\right) - cos\left(a+nh+\frac{h}{2}\right)\right]$$

$$\therefore \quad S_n = \frac{cos\left(a+\frac{h}{2}\right) - cos\left(a+nh+\frac{h}{2}\right)}{2sin\,\frac{h}{2}} \qquad \left(sin\,\frac{h}{2} \neq 0\right)$$

જો $h = 2n\pi$ તો $S_n = n\,sin\,a$

(6) $S_n = cos(a + h) + cos(a + 2h) + cos(a + 3h) + \ldots + cos(a + nh)$, જ્યાં $h \neq 2n\pi.\ n \in Z$

આ સરવાળો શોધવા આપણે $2sin\,\frac{h}{2}$ વડે બંને બાજુએ ગુણીએ.

$$2sin\,\frac{h}{2} \cdot S_n = \left[2cos(a+h)\,sin\,\frac{h}{2} + 2cos\,(a+2h)\,sin\,\frac{h}{2} + 2cos\,(a+3h)\,sin\,\frac{h}{2} + \ldots + 2cos(a+nh)\,sin\,\frac{h}{2}\right]$$

$$= \left[\sin\left(a + \frac{3h}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{h}{2}\right)\right] + \left[\sin\left(a + \frac{5h}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{3h}{2}\right)\right] +$$

$$\left[\sin\left(a + \frac{7h}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{5h}{2}\right)\right] + \ldots + \left[\sin\left(a + nh + \frac{h}{2}\right) - \sin\left(a + nh - \frac{h}{2}\right)\right]$$

$$2\sin\frac{h}{2} \cdot S_n = \left[\sin\left(a + nh + \frac{h}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{h}{2}\right)\right]$$

$$\therefore \quad S_n = \frac{\sin\left(a + nh + \frac{h}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{h}{2}\right)}{2\sin\frac{h}{2}} \qquad \left(\sin\frac{h}{2} \neq 0\right)$$

જો $h = 2n\pi$ તો $S_n = n \cos a$

ઉદાહરણ 1 : સરવાળાના લક્ષ તરીકે $\int_1^3 x\,dx$ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, વિધેય $f(x) = x$ એ $[1, 3]$ માં સતત છે. $[1, 3]$નું સમાન લંબાઈના n ઉપાંતરાલોમાં વિભાજન કરતાં, પ્રત્યેક ઉપાંતરાલની લંબાઈ $h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$.

અહીં, $a = 1$, $b = 3$ અને $f(a + ih) = f(1 + ih) = 1 + ih$

હવે વ્યાખ્યા પ્રમાણે,

$$\int_1^3 x\,dx = \lim_{n\to\infty} h \sum_{i=1}^{n} f(a + ih)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} f(1 + ih)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} (1 + ih)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \left[\sum_{i=1}^{n} 1 + h \sum_{i=1}^{n} i\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \left[n + \frac{2}{n} \frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[2 + 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= 2 + 2(1 + 0)$$

$$= 4$$

ઉદાહરણ 2 : સરવાળાના લક્ષ તરીકે $\int_0^2 (3x^2 - 2x + 4)dx$ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, વિધેય $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$ એ $[0, 2]$ માં સતત છે. $[0, 2]$ નું સમાન લંબાઈના n ઉપઅંતરાલમાં વિભાજન કરતાં, પ્રત્યેક ઉપઅંતરાલની લંબાઈ $h = \frac{b-a}{n}$.

$$\therefore \quad h = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

$$\therefore \quad h = \frac{2}{n}$$

અહીં, $a = 0$, $b = 2$, $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$

$f(a + ih) = f(0 + ih)$

$= f(ih)$

$= 3i^2h^2 - 2ih + 4$

વ્યાખ્યા પ્રમાણે,

$$\int_0^2 (3x^2 - 2x + 4)dx = \lim_{n \to \infty} h \sum_{i=1}^{n} f(a + ih)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} (3i^2h^2 - 2ih + 4)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{2}{n} \left[3h^2 \sum_{i=1}^{n} i^2 - 2h \sum_{i=1}^{n} i + 4 \sum_{i=1}^{n} 1\right]$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{2}{n} \left[3 \cdot \frac{4}{n^2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2 \cdot \frac{2}{n} \frac{n(n+1)}{2} + 4n\right]$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[4\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) - 4\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 8\right]$$

$$= 4(1 + 0)(2 + 0) - 4(1 + 0) + 8$$

$$= 8 - 4 + 8$$

$$= 12$$

ઉદાહરણ 3 : સરવાળાના લક્ષ તરીકે $\int_{-1}^{1} a^x dx$ મેળવો. $(a > 0)$

ઉકેલ : અહીં, વિધેય $f(x) = a^x$ એ $[-1, 1]$ માં સતત છે. $[-1, 1]$નું સમાન લંબાઈના n ઉપઅંતરાલોમાં વિભાજન કરતાં, પ્રત્યેક ઉપઅંતરાલની લંબાઈ $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1+1}{n} = \frac{2}{n}$. આથી $nh = 2$.

અહીં, $a = -1$, $b = 1$, $f(x) = a^x$

$f(a + ih) = f(-1 + ih)$

$= a^{-1 + ih}$

$= a^{-1} \cdot a^{ih}$

$\therefore \quad f(a + ih) = \frac{a^{ih}}{a}$

જેમ $n \to \infty$ તેમ $h \to 0$.

હવે, $$\int_{-1}^{1} a^x dx = \lim_{h \to 0} h \sum_{i=1}^{n} f(a + ih)$$

$$= \lim_{h \to 0} h \sum_{i=1}^{n} \frac{a^{ih}}{a}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{a} [a^h + a^{2h} + a^{3h} + \ldots + a^{nh}]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{a} \left[\frac{a^h(a^{nh} - 1)}{a^h - 1}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{a} \frac{a^h(a^2 - 1)}{\left(\frac{a^h - 1}{h}\right)} \qquad \textbf{(nh = 2)}$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{a^0(a^2-1)}{\log_e a}$$

$$= \left(\frac{a^2-1}{a}\right) \log_a e$$

$$= \left(a - \frac{1}{a}\right) \log_a e$$

ઉદાહરણ 4 : સરવાળાના લક્ષ તરીકે $\int_a^b \sin x \, dx$ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં $f(x) = \sin x$ વિધેય એ $[a, b]$ માં સતત છે. $[a, b]$ ને સરખી લંબાઈના n ઉપઅંતરાલોમાં વિભાજીત કરીશું. પ્રત્યેક ઉપઅંતરાલની લંબાઈ $h = \frac{b-a}{n}$ થશે.

$\therefore \quad nh = b - a, \; a + nh = b$

$f(a + ih) = \sin(a + ih)$

જેમ $n \to \infty$ તેમ $h \to 0$.

$$\int_a^b \sin x \, dx = \lim_{h \to 0} h \sum_{i=1}^{n} f(a + ih)$$

$$= \lim_{h \to 0} h \sum_{i=1}^{n} \sin(a + ih)$$

$$= \lim_{h \to 0} h \left[\sin(a + h) + \sin(a + 2h) + \sin(a + 3h) + \ldots + \sin(a + nh)\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} h \left[\frac{\cos\left(a+\frac{h}{2}\right) - \cos\left(a+nh+\frac{h}{2}\right)}{2\sin\frac{h}{2}}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos\left(a+\frac{h}{2}\right) - \cos\left(b+\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)} \qquad (a + nh = b)$$

$$= \frac{\cos a - \cos b}{1} \qquad (\text{cosine સતત છે.})$$

$$= \cos a - \cos b$$

નોંધ : $h \to 0$ હોવાથી આપણે $|h| < 2\pi \le 2|k|\pi$ લઈ શકીએ. $k \in Z - \{0\}$

સ્વાધ્યાય 3.1

નીચે આપેલાં નિયત સંકલિતોને સરવાળાના લક્ષ સ્વરૂપે મેળવો :

1. $\int_0^2 (x + 3)dx$ **2.** $\int_2^4 (2x - 1)dx$ **3.** $\int_1^3 (2x^2 + 7)dx$

4. $\int_1^3 (x^2 + x)dx$ **5.** $\int_{-1}^1 e^x \, dx$ **6.** $\int_0^1 e^{2-3x} \, dx$

7. $\int_1^2 3^x \, dx$ **8.** $\int_{\log_e 2}^{\log_e 5} e^x \, dx$ **9.** $\int_0^2 (e^x - x) \, dx$

10. $\int_{\log_a 2}^{\log_a 4} a^x \, dx$ 11. $\int_0^2 (6x^2 - 2x + 7)\, dx$ 12. $\int_a^b \cos x \, dx$

13. $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$ 14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$ 15. $\int_1^3 x^3 \, dx$

*

3.4 નિયત સંકલનનો મૂળભૂત સિદ્ધાંત :

આપણે નિયત સંકલન સરવાળાના લક્ષ તરીકે કેવી રીતે મેળવાય તે જોયું. તેના આધારે આપણે એટલું કહી શકીએ કે નિયત સંકલન સરવાળાના લક્ષ તરીકે મેળવવું એટલું સરળ નથી, બલ્કે કંટાળાજનક છે. નિયત સંકલનના મૂળભૂત સિદ્ધાંતના ઉપયોગથી આપણે જોઈ શકીશું કે આ કપરુ કામ ખૂબ સરળ બને છે.

નીચેના સિદ્ધાંતને **નિયત સંકલનનો મૂળભૂત સિદ્ધાંત (Fundamental Principle of Definite Integration) કહે છે.**

સિદ્ધાંત : ધારો કે વિધેય f એ $[a, b]$ પર સતત છે તથા F એ (a, b) પર વ્યાખ્યાયિત એવું વિકલનીય વિધેય છે, કે જેથી $\forall x \in (a, b)$, $\frac{d}{dx}[\mathrm{F}(x)] = f(x)$ થાય, તો $\int_a^b f(x)\, dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$

આ સિદ્ધાંતને નિયત સંકલનનો મૂળભૂત સિદ્ધાંત કહે છે. અહીં, $\mathrm{F}(x)$ એ $f(x)$ નો પ્રતિવિકલિત છે. $\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$ ને સંકેત $[\mathrm{F}(x)]_a^b$ દ્વારા દર્શાવીશું.

આમ, આ મૂળભૂત સિદ્ધાંતથી આપણે સંકલન અને વિકલન વચ્ચેનો સંબંધ પ્રસ્થાપિત કરી શકીએ છીએ. ન્યૂટન અને લિબનીટ્ઝે સ્વતંત્ર રીતે સાબિત કરેલા આ પરિણામની મદદથી આપેલ વિધેયનો આપેલ અંતરાલ પરનો નિયત સંકલિત, અંતરાલનાં અંત્યબિંદુઓએ તે વિધેયના પ્રતિવિકલિતનાં મૂલ્યોનો તફાવત લેવાથી મળે છે. આપણે આ ખૂબ જ ઉપયોગી પરિણામ સાબિતી વિના સ્વીકારીશું.

નોંધ : (1) અહીં $\forall x \in (a, b)$, $\frac{d}{dx}[\mathrm{F}(x)] = f(x)$ હોવાથી,

ધારો કે $\int f(x)\, dx = \mathrm{F}(x) + c$, જ્યાં c સ્વૈર અચળ છે.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\, dx &= [\mathrm{F}(x) + c]_a^b \\ &= [\mathrm{F}(b) + c] - [\mathrm{F}(a) + c] \\ &= \mathrm{F}(b) + c - \mathrm{F}(a) - c \\ &= \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) \end{aligned}$$

આમ, નિયત સંકલનમાં સ્વૈર અચળ c નો લોપ થાય છે અને આપણને સંકલિતનું નિશ્ચિત મૂલ્ય મળે છે.

$\therefore$ નિયત સંકલન એક નિશ્ચિત સંખ્યા છે, તેમાં સંકલનનો અચળ નથી. તેથી જ આવું સંકલન મેળવવાની ક્રિયાને નિયત સંકલન કહે છે.

(2) જો $a > b$ તો $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$ તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરીશું.

વળી, આપણે સ્વીકારી લઈશું કે જો $a = b$ તો,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

(3) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$, જ્યાં f એ $[a, b]$ પર સતત છે.

ધારો કે $F(x)$ એ $f(x)$ નું પ્રતિવિકલિત છે. તેથી નિયત સંકલનના મૂળભૂત સિદ્ધાંત મુજબ,

$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ અને

$\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.

આમ, $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$.

તેથી કહી શકાય કે નિયત સંકલનનું મૂલ્ય સ્વતંત્ર ચલ x પર અવલંબિત નથી.

આ પ્રકરણમાં આગળ આપણે નિયત સંકલન સરવાળા લક્ષથી કેવી રીતે મેળવાય તે જોયુ. હવે આપણે આગળનાં ઉદાહરણો 1 થી 4 માં સરવાળાના લક્ષ તરીકે મેળવેલાં નિયત સંકલિતનાં મૂલ્યો નિયત સંકલનના મૂળભૂત સિદ્ધાંતથી કેટલી સરળતાથી મળે છે તે જોઈશું.

(1) $\int_1^3 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \left[\frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right] = \left[\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right] = \frac{8}{2} = 4$

(2) $\int_0^2 (3x^2 - 2x + 4)\,dx = \left[\frac{3x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 4x\right]_0^2 = [8 - 4 + 8] = 12$

(3) $\int_{-1}^1 a^x\,dx = \left[\frac{a^x}{\log_e a}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{\log_e a}\,(a^1 - a^{-1}) = \left(a - \frac{1}{a}\right)\log_a e.$

(4) $\int_a^b \sin x\,dx = [-\cos x]_a^b = -[\cos b - \cos a] = \cos a - \cos b$

3.5 નિયત સંકલનના કાર્યનિયમો

(1) જો વિધેય f અને g એ $[a, b]$ પર સતત હોય, તો

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

સાબિતી : ધારો કે $F(x)$ અને $G(x)$ એ અનુક્રમે $f(x)$ અને $g(x)$ ના $[a, b]$ પરના પ્રતિવિકલિતો છે.

$\therefore$ $F(x) + G(x)$ એ $f(x) + g(x)$ નો પ્રતિવિકલિત થશે.

$\therefore$ નિયત સંકલનના મૂળભૂત સિદ્ધાંત મુજબ,

$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx &= [F(x) + G(x)]_a^b \\ &= [F(b) + G(b)] - [F(a) + G(a)] \\ &= [F(b) - F(a)] + [G(b) - G(a)] \\ &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\end{aligned}$$

(2) જો વિધેય f એ $[a, b]$ પર સતત હોય અને $k \in R$ અચળ હોય, તો $\int_a^b k f(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx.$

સાબિતી : ધારો કે $F(x)$ એ $f(x)$ નો $[a, b]$ પરનો પ્રતિવિકલિત છે અને $k \in R$ કોઈ અચળ છે.

$\therefore$ $kF(x)$ એ વિધેય $kf(x)$ નો પ્રતિવિકલિત છે.

$\therefore$ નિયત સંકલનના મૂળભૂત સિદ્ધાંત મુજબ,

$$\begin{aligned}\int_a^b k f(x)\, dx &= [kF(x)]_a^b \\ &= kF(b) - kF(a) \\ &= k[F(b) - F(a)] \\ &= k \int_a^b f(x)\, dx\end{aligned}$$

(3) જો વિધેય f એ $[a, b]$ પર સતત હોય અને $a < c < b$ હોય, તો

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

સાબિતી : ધારો કે $F(x)$ એ $f(x)$ નો $[a, b]$ પરનો પ્રતિવિકલિત છે.

$\therefore$ નિયત સંકલનના મૂળભૂત સિદ્ધાંત મુજબ,

$$\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^c f(x)\, dx = [F(x)]_a^c = F(c) - F(a)$$

$$\int_c^b f(x)\, dx = [F(x)]_c^b = F(b) - F(c)$$

હવે,
$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx &= F(c) - F(a) + F(b) - F(c) \\ &= F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(x)\, dx\end{aligned}$$

આમ, જો $a < c < b$ હોય, તો $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$

આ પરિણામ, અંતરાલ $[a, b]$ ના બે કરતાં વધુ નિશ્ચિત સંખ્યાના વિભાજન માટે સાચું છે. જો $a < c < d < b$ હોય, તો

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^d f(x)\, dx + \int_d^b f(x)\, dx.$$

હવે જો c એ a અને b ની વચ્ચે ન હોય, તો પણ આ પરિણામ સાચું છે, જ્યાં $a < c$. જો $a < b < c$ હોય અને f એ $[a, c]$માં સતત હોય તો,

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

$$\therefore \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$$

$$\therefore \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

ઉદાહરણ 5 : કિંમત શોધો : (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^3 x \; dx$ (2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 - sin\,2x} \; dx$

ઉકેલ : (1) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^3 x \; dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos3x + 3cos\,x}{4} \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos\,3x + 3cos\,x) \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{sin3x}{3} + 3sin\,x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1}{3}sin\,\frac{3\pi}{2} + 3sin\,\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{1}{3}sin\,0 + 3sin\,0\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[\left(-\frac{1}{3} + 3\right) - (0 + 0)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

(2) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 - sin\,2x} \; dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{sin^2x + cos^2x - 2\,sinx\,cosx} \; dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{(cos\,x - sin\,x)^2} \; dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\,cos\,x - sin\,x\,| \; dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (cos\,x - sin\,x) \; dx$$ $\left(0 < x < \frac{\pi}{4}\right.$ હોવાથી $\left. cos\,x > sin\,x.\right)$

$$= [\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right) - (\sin 0 + \cos 0)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - (0 + 1) = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{2} - 1$$

ઉદાહરણ 6 : કિંમત શોધો : (1) $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,dx$ (2) $\int_0^2 \frac{5x+2}{x^2+4}\,dx$

ઉકેલ : (1) $$I = \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,dx$$

$$= \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}}\,dx$$

$$= \left[\log\left|x + 1 + \sqrt{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}\right|\right]_0^3$$

$$= \left[\log\left(x + 1 + \sqrt{x^2+2x+3}\right)\right]_0^3 \qquad (x \in (0, 3))$$

$$= \log(4 + \sqrt{9+6+3}) - \log(1 + \sqrt{3})$$

$$= \log(4 + 3\sqrt{2}) - \log(\sqrt{3} + 1)$$

$$= \log\left(\frac{4+3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)$$

(2) $$I = \int_0^2 \frac{5x+2}{x^2+4}\,dx$$

$$= \int_0^2 \frac{5x}{x^2+4}\,dx + \int_0^2 \frac{2}{x^2+4}\,dx$$

$$= \frac{5}{2}\int_0^2 \frac{2x}{x^2+4}\,dx + 2\int_0^2 \frac{1}{x^2+2^2}\,dx$$

$$= \frac{5}{2}\left[\log(x^2+4)\right]_0^2 + \frac{2}{2}\left[\tan^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^2$$

$$= \frac{5}{2}[\log 8 - \log 4] + \left[\tan^{-1}1 - \tan^{-1}0\right]$$

$$= \frac{5}{2}\log\left(\frac{8}{4}\right) + \left[\frac{\pi}{4} - 0\right]$$

$$= \left(\frac{5}{2}\log 2 + \frac{\pi}{4}\right)$$

ઉદાહરણ 7 : $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ નું મૂલ્ય મેળવો, જ્યાં $f(x) = \begin{cases} sin\,x & 0 \le x \le \pi \\ 1 + cos\,x & \pi < x \le 2\pi \end{cases}$

ઉકેલ : (1) $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\pi} f(x)\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} f(x)\,dx$

$$= \int_0^{\pi} sin\,x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} (1 + cos\,x)\,dx$$

$$= [-cos\,x]_0^{\pi} + [x + sin\,x]_{\pi}^{2\pi}$$

$$= -[cos\pi - cos\,0] + [(2\pi + sin\,2\pi) - (\pi + sin\,\pi)]$$

$$= -[-1 - 1] + [(2\pi + 0) - (\pi + 0)]$$

$$= 2 + \pi = \pi + 2$$

3.6 નિયત સંકલન માટે આદેશ (ચલપરિવર્તન)ની રીત :

આપણે અનિયત સંકલન માટે આદેશની રીત શીખ્યા. આપણે જોયું કે સંકલ્ય $f(x)$ પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં ન હોય અથવા પ્રમાણિત રૂપમાં મૂકી શકાય તેવું પ્રત્યક્ષ રીતે જણાતું ન હોય, તો સંકલન શોધવા માટે આદેશની રીતે ખૂબ જ ઉપયોગી પૂરવાર થાય છે. હવે આપણે નિયત સંકલનના મૂળભૂત સિદ્ધાંતને ધ્યાનમાં રાખી આદેશની રીતનો નિયત સંકલનમાં પણ ઉપયોગ કરી શકીએ.

નિયત સંકલન માટે આદેશનો નિયમ :

$f : [a, b] \to R$ સતત વિધેય છે અને $g : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ એ વધતું અથવા ઘટતું (એકસૂત્રી Monotonic) વિધેય છે. $x = g(t)$ એ $[\alpha, \beta]$માં સતત અને (α, β) પર વિકલનીય વિધેય છે. $g'(t)$ એ (α, β) માં સતત છે. $g'(t) \ne 0$, $\forall\, t \in (\alpha, \beta)$ તથા $a = g(\alpha)$ અને $b = g(\beta)$.

તો $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))\,g'(t)\,dt$

હવે નિયત સંકલન માટે આદેશના નિયમનો ઉપયોગ કેવી રીતે વાપરી શકાય તે અંગે સમજ કેળવવા કેટલાંક ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 8 : કિંમત મેળવો : (1) $\int_1^9 \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$ (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2cos\,x + 4sin\,x}$ (3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin\,2t}{sin^4 t + cos^4 t}\,dt$

ઉકેલ : (1) $I = \int_1^9 \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$

$t \ge 1$ માટે $x = t^2$ લેતાં, $dx = 2t\,dt$

અહીં, $x = 1$ ત્યારે $t = 1$ અને $x = 9$ ત્યારે $t = 3$ $(x = t^2,\ t \ge 1)$

અહીં $x = g(t) = t^2$ એ $t \ge 1$ માટે વધતું વિધેય છે. વળી તે $[1, 3]$ માં સતત અને $(1, 3)$ માં વિકલનીય છે.

$(1, 3)$ માં $g'(t) = 2t \ne 0$.

$\therefore\ \alpha = 1, \beta = 3$

$$\therefore \quad I = \int_1^9 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$$

$$= \int_1^3 \frac{2t\,dt}{t^2+t} \qquad (\sqrt{x} = t \geq 1 \text{ કારણ કે } t \geq 1)$$

$$= 2\int_1^3 \frac{1}{t+1}\,dt \qquad (t \neq 0)$$

$$= 2[\log(t+1)]_1^3$$

$$= 2[\log 4 - \log 2]$$

$$= 2 \log 2$$

(2) $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos x + 4\sin x}$$

$\tan\frac{x}{2} = t$ લેતાં, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

જ્યારે, $x = 0$ ત્યારે $t = \tan 0 = 0$ અને $x = \frac{\pi}{2}$ તો $t = \tan\frac{\pi}{4} = 1$ $\qquad (\alpha = 0, \beta = 1)$

$$\therefore \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos x + 4\sin x}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) + 4\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$= \int_0^1 \frac{dt}{1-t^2+4t}$$

$$= \int_0^1 \frac{dt}{5-(t^2-4t+4)}$$

$$= \int_0^1 \frac{dt}{(\sqrt{5})^2-(t-2)^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\log\left|\frac{\sqrt{5}+(t-2)}{\sqrt{5}-(t-2)}\right|\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\log\left|\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right| - \log\left|\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}\right|\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5}}\log\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \times \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}\right) \qquad (\sqrt{5} - 2 > 0)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5}} \log\left(\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5}} \log\left(\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} \times \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5}} \log\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \log\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\mathrm{I} = \frac{1}{\sqrt{5}} \log\left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \log\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} \log\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$$ લખી શકાય.

(3) $\mathrm{I} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin\, 2t}{sin^4 t + cos^4 t}\, dt$

$sin^2 t = x$ લેતાં, $2 sin\, t\ cos\, t\ dt = dx$ એટલે કે $sin 2t\ dt = dx$

જ્યારે $t = 0$ ત્યારે $x = 0$ અને જ્યારે $t = \frac{\pi}{2}$ ત્યારે $x = 1$ **($\alpha = 0, \beta = 1$)**

$$\therefore \quad \mathrm{I} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin\, 2t}{sin^4 t + cos^4 t}\, dt$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2 + (1-x)^2}$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{dx}{2x^2 - 2x + 1}$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\ tan^{-1}\left(\frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)\right]_0^1$$

$$= [tan^{-1}(2x - 1)]_0^1$$

$$= tan^{-1}(1) - tan^{-1}(-1)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

3.7 નિયત સંકલન માટે ખંડશઃ સંકલનની રીત :

અનિયત સંકલનમાં આપણે બે વિધેયોના ગુણાકારનું સંકલિત શોધવા માટે ખંડશઃ સંકલનની રીતનો અભ્યાસ કર્યો. હવે આપણે નિયત સંકલનના મૂળભૂત સિદ્ધાંતને લક્ષમાં લઈને ખંડશઃ સંકલનની રીતનો પણ નિયત સંકલનમાં ઉપયોગ કરી શકીએ.

ખંડશઃ સંકલનનો ઉપયોગ નિયત સંકલનમાં નીચેના સૂત્ર દ્વારા કરી શકાય.

$f(x)$, $g(x)$, $f'(x)$, $g'(x)$ બધાં જ $[a, b]$ પર સતત હોય તો

$$\int_a^b f(x)\ g'(x)\,dx = [f(x)\ g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\ g(x)\,dx$$

$$\therefore \int_a^b f(x)\ g'(x)\,dx = [f(b)\ g(b) - f(a)\ g(a)] - \int_a^b f'(x)\ g(x)\,dx$$

હવે આ નિયમનો કેવી રીતે ઉપયોગ કરી શકાય તે સમજવા કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈશું.

ઉદાહરણ 9 : કિંમત શોધો : **(1)** $\int_0^1 x\, tan^{-1}x\ dx$ **(2)** $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{sin^{-1}x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$ **(3)** $\int_0^1 \frac{x\,dx}{(1+x^2)(2+x^2)}$

ઉકેલ : (1) $I = \int_0^1 x\, tan^{-1}x\ dx$

$$= \left[tan^{-1}x \cdot \frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{x^2}{2}\right) dx$$

$$= \left(tan^{-1}(1) \cdot \frac{1}{2} - 0\right) - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\ dx$$

$$= \left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{2} - 0\right) - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2+1)-(1)}{x^2+1}\ dx$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\,[x - tan^{-1}x]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\,[(1 - tan^{-1}1) - (0 - tan^{-1}0)]$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

(2) $I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{sin^{-1}x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$

$sin^{-1}x = t$ લેતાં $x = sin\, t$, $dx = cos\, t\, dt$, $x \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

જ્યારે $x = 0$ ત્યારે $t = sin^{-1}0 = 0$ અને જ્યારે $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ત્યારે $t = sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$ $\left(\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{4}\right)$

$$\therefore \quad I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{sin^{-1}x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{(1-sin^2 t)^{\frac{3}{2}}} \cdot cos t \; dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} t\, sec^2 t\, dt \qquad \left(\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \text{માં } cos\, t > 0\right)$$

$$= [t \cdot tan\, t]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} tan\, t\, dt$$

$$= [t \cdot tan\, t]_0^{\frac{\pi}{4}} + [\log |cos\, t|]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{4} tan \frac{\pi}{4} - 0\right) + \left[\log \left(cos \frac{\pi}{4}\right) - \log (cos\, 0)\right]$$

$$= \frac{\pi}{4} + \log \frac{1}{\sqrt{2}} - \log 1$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2$$

(3) $I = \int_0^1 \frac{x\, dx}{(1+x^2)(2+x^2)}$

$x \geq 0$ માટે $x^2 = t$ લેતાં $2x\, dx = dt$. તેથી $x\, dx = \frac{1}{2} dt$

જ્યારે $x = 0$ ત્યારે $t = 0$ અને જ્યારે $x = 1$ ત્યારે $t = 1$

$$\therefore \quad I = \int_0^1 \frac{x\, dx}{(1+x^2)(2+x^2)} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{(t+1)(t+2)}$$

હવે, ધારો કે $\frac{1}{(t+1)(t+2)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+2}$

$\therefore \quad 1 = A(t+2) + B(t+1)$

જો $t = -2$ તો $1 = -B$. તેથી $B = -1$

જો $t = -1$ તો $1 = A$. તેથી $A = 1$

$\therefore \quad \frac{1}{(t+1)(t+2)} = \frac{1}{t+1} + \frac{-1}{t+2}$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{(t+1)(t+2)} = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{t+1} + \frac{-1}{t+2}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log|t+1| - \log|t+2|\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log\left|\frac{t+1}{t+2}\right|\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log\frac{2}{3} - \log\frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{4}{3}$$

ઉદાહરણ 10 : $\int_0^{2\pi} \sin ax \cdot \sin bx \, dx$, $a, b \in N$ નું મૂલ્ય મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int_0^{2\pi} \sin ax \cdot \sin bx \, dx$

વિકલ્પ 1 : $a \neq b$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 2\sin ax \cdot \sin bx \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\cos(a-b)x - \cos(a+b)x] \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(a-b)x}{a-b} - \frac{\sin(a+b)x}{a+b}\right]_0^{2\pi}$$ ($a \neq b$ અને $a + b \neq 0$ કારણ કે $a, b \in N$)

$$= \frac{1}{2}(0-0)$$ (કેમ ?)

$\therefore \quad I = 0$

વિકલ્પ 2 : $a = b$

$$I = \int_0^{2\pi} \sin^2 ax \, dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1-\cos 2ax}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{sin2ax}{2a}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(2\pi - \frac{sin4\pi a}{2a}\right) - (0 - 0)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(2\pi)$$ (કેમ $sin\ 4\pi a = 0$?)

$\therefore \quad I = \pi$

$$\therefore \int_0^{2\pi} sin\ ax \cdot sin\ bx \ \ dx = \begin{cases} 0 \text{ જ્યાં } a \neq b \\ \pi \text{ જ્યાં } a = b \end{cases}$$

ઉદાહરણ 11 : જો અચળ $\alpha > 0$ માટે $f(x + \alpha) = f(x)$, $\forall x \in R$ એટલે કે વિધેય f નું આવર્તમાન α હોય તો સાબિત કરો કે

$\int_0^{n\alpha} f(x)\,dx = n\int_0^{\alpha} f(x)\,dx$, જ્યાં $n \in N$ અને તે પરથી $\int_0^{10\pi} |sin\ x|\ dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int_0^{n\alpha} f(x)\,dx,\ n \in N$

$$= \int_0^{\alpha} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{2\alpha} f(x)\,dx + \int_{2\alpha}^{3\alpha} f(x)\,dx + ... + \int_{k\alpha}^{(k+1)\alpha} f(x)\,dx + ... + \int_{(n-1)\alpha}^{n\alpha} f(x)\,dx$$

અહીં આપણે સાબિત કરીશું કે ઉપરનાં n સંકલિતો પૈકી પ્રત્યેક સંકલિતનું મૂલ્ય $\int_0^{\alpha} f(x)\,dx$ છે.

$I_k = \int_{k\alpha}^{(k+1)\alpha} f(x)\,dx$ લઈએ. $[k = 1, 2, ..., (n - 1)]$

ધારો કે $x = k\alpha + t$. આથી $dx = dt$

વળી જ્યારે $x = k\alpha$ ત્યારે $t = 0$ અને જ્યારે $x = (k + 1)\alpha$ ત્યારે $t = \alpha$.

$\therefore \quad I_k = \int_0^{\alpha} f(k\alpha + t)\,dt$

હવે જો વિધેય f નું આવર્તમાન α હોય તો α ના પૂર્ણાંક ગુણકો એટલે કે $k\alpha$ પણ f નાં આવર્તમાન થાય. $(k \in N)$

$\therefore \quad f(k\alpha + t) = f(t)$

$\therefore \quad I_k = \int_0^{\alpha} f(t)\,dt = \int_0^{\alpha} f(x)\,dx$

એટલે કે $\int_{k\alpha}^{(k+1)\alpha} f(x)\,dx = \int_0^{\alpha} f(x)\,dx$ $[k = 1, 2, 3, ..., n - 1]$

$\therefore \quad I = \int_0^{\alpha} f(x)\,dx + \int_0^{\alpha} f(x)\,dx + ... + \int_0^{\alpha} f(x)\,dx$ (n વખત)

$$= n\int_0^{\alpha} f(x)\,dx$$

હવે, $I = \int_{0}^{10\pi} |\sin x|\ dx.$

$= 10 \int_{0}^{\pi} |\sin x|\ dx$ ($|\sin x|$ નું આવર્તમાન π છે)

$= 10 \int_{0}^{\pi} \sin x\ dx$ ($0 \le x \le \pi$ માટે $\sin x \ge 0$)

$= 10 [-\cos x]_{0}^{\pi}$

$= -10 [\cos\pi - \cos 0]$

$= -10 (-1 - 1)$

$= -10 (-2)$

$= 20$

ઉદાહરણ 12 : કિંમત મેળવો : $\int_{-1}^{3} |2x - 1|\ dx$

ઉકેલ : $2x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{2}$

$$\therefore \quad |2x - 1| = \begin{cases} 2x-1 & x \ge \frac{1}{2} \\ 1-2x & x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

હવે, $-1 < \frac{1}{2} < 3$

$$\therefore \quad I = \int_{-1}^{3} |2x - 1|\ dx$$

$$= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} |2x - 1|\ dx + \int_{\frac{1}{2}}^{3} |2x - 1|\ dx$$

$$= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (1 - 2x)\ dx + \int_{\frac{1}{2}}^{3} (2x - 1)\ dx$$

$$= [x - x^2]_{-1}^{\frac{1}{2}} + [x^2 - x]_{\frac{1}{2}}^{3}$$

$$= \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) - (-1 - 1)\right] + \left[(9 - 3) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{1}{4} + 2\right) + \left(6 + \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{17}{2}$$

સ્વાધ્યાય 3.2

નીચેનાની કિંમત મેળવો (1 to 35) :

1. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}\,dx$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,dx$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx$

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx$

6. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin 2x}\,dx$

7. $\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}\,dx$

8. $\int_2^5 \frac{2x}{5x^2+1}\,dx$

9. $\int_0^1 \frac{2x+3}{5x^2+1}\,dx$

10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}\,dx$

11. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}\,dx$

12. $\int_0^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

13. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{2-\sin^2 x}}\,dx$

14. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

15. $\int_0^1 \tan^{-1} x\,dx$

16. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{12+4x-x^2}}$

17. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos 2x\,dx$

18. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

19. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\sin x+\cos x}$

20. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{2+3\cos^2 x}$

21. $\int_0^1 \sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$

22. $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$

23. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1+\sin x)(2+\sin x)(3+\sin x)}\,dx$

24. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x+\cos x}{1+\cos 2x}\,dx$

25. $\int_1^2 \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx$

26. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \cdot \log \sin x\,dx$

27. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3+2\cos x}\,dx$

28. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4\sin^2 x+5\cos^2 x}\,dx$

29. $\int_0^{2\pi} |\cos x|\,dx$

30. $\int_1^4 f(x)\,dx$, જ્યાં $f(x) = \begin{cases} 2x+8 & 1 \le x \le 2 \\ 6x & 2 < x \le 4 \end{cases}$

31. $\int_0^9 f(x)\,dx$, જ્યાં $f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 1 & \frac{\pi}{2} < x \le 5 \\ e^{x-5} & 5 < x \le 9 \end{cases}$

32. $\int_0^1 |5x - 3|\,dx$ 33. $\int_0^2 |x^2 + 2x - 3|\,dx$

34. $\int_0^{2\pi} \sin ax \cos bx\,dx \quad \forall a, b \in Z - \{0\}$

35. $\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx\,dx \quad \forall m, n \in N$

36. જો $\int_{\sqrt{2}}^{k} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{\pi}{12}$, તો k શોધો.

37. જો $\int_0^k \frac{dx}{2+8x^2} = \frac{\pi}{16}$, તો k શોધો.

38. જો $\int_0^a \sqrt{x}\,dx = 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx$, તો $\int_a^{a+1} x\,dx$ નું મૂલ્ય શોધો.

*

3.8 નિયત સંકલન માટે કેટલાંક ઉપયોગી પરિણામો

પ્રમેય 3.1 : જો f એ $[0, a]$ માં સતત હોય તો $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$

સાબિતી : ધારો કે $I = \int_0^a f(x)\,dx$

$x = g(t) = a - t$ લેતાં, $dx = -dt$

વળી, $x = g(t)$ એ $[0, a]$ માં એકસૂત્રી ઘટતું તથા સતત વિધેય છે.

$\frac{dx}{dt} = -1$ એ $(0, a)$ માં સતત છે.

અહીં જો $x = 0$ તો $t = a$. જો $x = a$ તો $t = 0$. આમ $\alpha = a$, $\beta = 0$

$$\therefore \quad I = \int_a^0 f(a-t)(-dt)$$

$$= -\int_a^0 f(a-t)\,dt$$

$$= \int_0^a f(a-t)\,dt$$

$$= \int_0^a f(a-x)\,dx$$

$$\therefore \quad \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$$

હવે આ પ્રમેયનો ઉપયોગ સમજવા એક ઉદાહરણ લઈએ.

$\int_0^{2\pi} cos^3x \, sin^5x \; dx$ મેળવો.

$$I = \int_0^{2\pi} cos^3x \, sin^5x \; dx$$

$$= \int_0^{2\pi} cos^3(2\pi - x) \, sin^5(2\pi - x) \; dx$$

$$= \int_0^{2\pi} (cos^3x) \; (-sin^5x) \; dx$$

$$= -\int_0^{2\pi} cos^3x \; sin^5x \; dx = -I$$

$\therefore \quad I = -I$

$\therefore \quad 2I = 0$

$\therefore \quad I = 0$

પ્રમેય 3.2 : જો વિધેય f એ $[a, b]$ માં સતત હોય તો, $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(a + b - x) \, dx$

સાબિતી : ધારો કે $I = \int_a^b f(x) \; dx$

$x = a + b - t$ લો. તેથી $dx = -dt$

$\therefore \quad x = g(t) = a + b - t$ એ $[a, b]$ માં ઘટતું તથા સતત વિધેય છે.

$\frac{dx}{dt} = -1$ એ (a, b) પર સતત છે.

અહીં, જો $x = a$ તો $t = b$ અને જો $x = b$ તો $t = a$. આમ $\alpha = b$ અને $\beta = a$

$$\therefore \quad I = \int_b^a f(a + b - t)(-dt)$$

$$= -\int_b^a f(a + b - t) \; dt$$

$$= \int_a^b f(a + b - t) \; dt$$

$$= \int_a^b f(a + b - x) \; dx$$

$$\therefore \quad \int_a^b f(x) \; dx = \int_a^b f(a + b - x) \; dx$$

(જુઓ કે પ્રમેય 3.2માં $a = 0$ હોય તથા b ના બદલે a સંકેતનો ઉપયોગ કરીએ તો પ્રમેય 3.1 મળે.)

આ પ્રમેયનો ઉપયોગ કેવી રીતે કરવો તે સમજવા એક ઉદાહરણ લઈશું.

$\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3-x}+\sqrt{x}}\,dx$ મેળવો.

$$I = \int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3-x}+\sqrt{x}}\,dx \qquad \text{(i)}$$

$$= \int_1^2 \frac{\sqrt{(1+2)-x}}{\sqrt{3-(1+2-x)}+\sqrt{1+2-x}}\,dx \qquad (a + b = 1 + 2 = 3)$$

$$= \int_1^2 \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{3-x}}\,dx \qquad \text{(ii)}$$

પરિણામ (i) અને (ii), નો સરવાળો કરતાં,

$$2I = \int_1^2 \frac{\sqrt{x}+\sqrt{3-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{3-x}}\,dx$$

$$= \int_1^2 1\,dx = [x]_1^2 = 2 - 1 = 1$$

$\therefore\ 2I = 1$

$\therefore\ I = \frac{1}{2}$

પ્રમેય 3.3 : જો વિધેય f એ $[0, 2a]$ પર સતત હોય તો,

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a - x)\,dx$$

સાબિતી : અહીં $0 < a < 2a$

$$\therefore \int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^{2a} f(x)\,dx \qquad \text{(i)}$$

$I = \int_a^{2a} f(x)\,dx$ લો.

ધારો કે $x = g(t) = 2a - t$. તેથી $dx = -dt$

$x = g(t)$ એ $[a, 2a]$ માં ઘટતું વિધેય છે. $\frac{dx}{dt} = -1$ એ $(a, 2a)$ માં સતત છે.

વળી, જ્યારે $x = a$ ત્યારે $t = a$ અને જ્યારે $x = 2a$ ત્યારે $t = 0$. $(\alpha = a, \beta = 0)$

$$I = \int_a^0 f(2a - t)(-dt)$$

$$= -\int_a^0 f(2a - t)\,dt$$

$$= \int_0^a f(2a - t)\,dt$$

$$I = \int_0^a f(2a - x)\,dx$$

હવે, I ની કિંમત (i) માં મૂકતાં,

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx$$

ઉપપ્રમેય : જો $\forall x \in [0, 2a]$, $f(2a-x) = f(x)$, તો $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

જો $\forall x \in [0, 2a]$, $f(2a-x) = -f(x)$, તો $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 0$

સાબિતી : $\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx$ (i)

હવે, $f(2a-x) = f(x)$ લેતાં (i), પરથી

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

અને જો $f(2a-x) = -f(x)$ હોય તો (i) પરથી

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx = 0$$

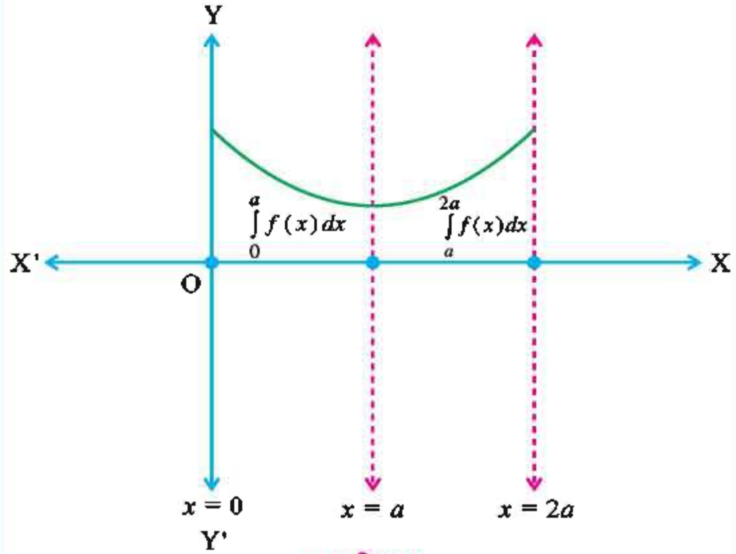
$$\therefore \int_0^{2a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx & \text{જ્યાં } f(2a-x) = f(x) \quad \forall x \in [0, 2a] \\ 0 & \text{જ્યાં } f(2a-x) = -f(x) \quad \forall x \in [0, 2a] \end{cases}$$

નોંધ : (1) આપણે પ્રકરણ 4માં જોઈશું કે $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$ એ વક્ર $y = f(x)$, રેખા $x = a$, રેખા $x = b$ અને X-અક્ષ દ્વારા આવૃત્ત ક્ષેત્રફળ દર્શાવે છે. તે સંદર્ભમાં આપણે ઉપરના ઉપપ્રમેયનું અર્થઘટન કરીએ.

(2) જો $f(2a-x) = f(x)$, તો આલેખ આકૃતિ 3.2માં દર્શાવ્યા મુજબ $x = a$ પ્રત્યે સંમિત હશે.

$$\therefore \int_a^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx$$

$$\therefore \int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$



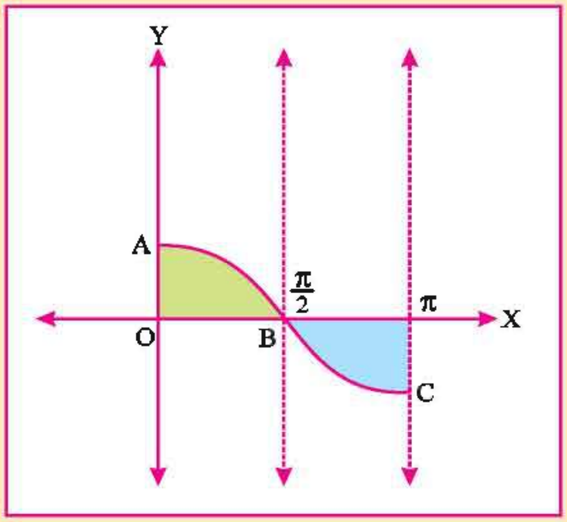
આકૃતિ 3.2

જો $f(2a - x) = -f(x)$, તો $f(x)$ નો આલેખ આકૃતિ 3.3માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે હશે.

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\, dx = 0$$

$$\therefore \int_0^{\pi} f(x)\, dx = 0$$



આકૃતિ 3.3

હવે, આ પ્રમેયનો ઉપયોગ કેવી રીતે કરી શકાય તે સમજવા એક ઉદાહરણ લઈશું.

$\int_0^{2\pi} cos^3x\, dx$ મેળવીએ.

$$I = \int_0^{2\pi} cos^3x\, dx.$$

જો $f(x) = cos^3x$ તો

$$f(2\pi - x) = cos^3(2\pi - x) = cos^3x = f(x)$$

$$\therefore \int_0^{2\pi} cos^3x\, dx = 2\int_0^{\pi} cos^3x\, dx \qquad (a = \pi,\ f(2a - x) = f(x))$$

હવે, $f(\pi - x) = cos^3(\pi - x) = -cos^3x = -f(x)$ $\qquad \left(a = \frac{\pi}{2},\ f(2a - x) = -f(x)\right)$

$$\therefore \int_0^{\pi} cos^3x\, dx = 0$$

આમ, $\int_0^{2\pi} cos^3x\, dx = 2\int_0^{\pi} cos^3x\, dx = 2 \times 0 = 0$

યુગ્મ અને અયુગ્મ વિધેયો વિશે આપણે સમજ મેળવી જ છે તે યાદ કરીએ તો, $f : A \to R$ એ વાસ્તવિક ચલનું વાસ્તવિક વિધેય હોય, તથા $\forall x \in A, -x \in A$,

(i) જો $f(-x) = f(x), \forall x \in A$ થાય તો f ને યુગ્મ વિધેય કહે છે.

(ii) જો $f(-x) = -f(x), \forall x \in A$ થાય તો f ને અયુગ્મ વિધેય કહે છે.

ઉદાહરણ તરીકે, $cosx$, $secx$, x^2 એ યુગ્મ વિધેયો છે અને $sinx$, $tanx$, x^3 એ અયુગ્મ વિધેયો છે.

પ્રમેય 3.4 : જો f એ $[-a, a]$ પર સતત અને યુગ્મ વિધેય હોય તો $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx$

સાબિતી : અહીં $-a < 0 < a$.

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx \qquad \text{(i)}$$

$$I = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx$$

ધારો કે $x = -t$, $dx = -dt$

વળી, જ્યારે $x = -a$ ત્યારે $t = a$ અને જ્યારે $x = 0$ ત્યારે $t = 0$.

અહીં, $\frac{dx}{dt} = -1$ શૂન્યેતર છે અને $\frac{dx}{dt}$ એ $(-a, 0)$ પર સતત છે.

$$\therefore \quad I = \int\limits_{a}^{0} f(-t)(-dt)$$

$$= -\int\limits_{a}^{0} f(-t)\,dt$$

$$= \int\limits_{0}^{a} f(-t)\,dt$$

$$= \int\limits_{0}^{a} f(t)\,dt, \qquad (f \text{ એ યુગ્મ વિધેય છે.})$$

$$\therefore \quad I = \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx$$

I ની કિંમત (i) માં મૂકતાં,

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx$$

હવે આપણે આ અંગેની સમજ કેળવવા એક ઉદાહરણ લઈએ.

$y = cos\,x$ એ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ પર સતત અને યુગ્મ વિધેય છે.

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cosx\,dx = [sin\,x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = sin\,\frac{\pi}{2} - sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 1 = 2$$

$$2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cosx\ dx = 2[sin\,x]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 2\left[sin\,\frac{\pi}{2} - sin\,0\right] = 2(1) = 2$$

આમ, $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cosx\ dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cosx\ dx$

પ્રમેય 3.5 : જો વિધેય f એ $[-a, a]$ પર સતત અને અયુગ્મ વિધેય હોય તો $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

સાબિતી : અહીં $-a < 0 < a$.

$$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \qquad \text{(i)}$$

$$I = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx$$

$x = -t$ લેતાં, $dx = -dt$

વળી જ્યારે $x = -a$ ત્યારે $t = a$ અને જ્યારે $x = 0$ ત્યારે $t = 0$.

અહીં, $\frac{dx}{dt} = -1$ શૂન્યેતર છે અને $\frac{dx}{dt}$ એ $(-a, 0)$ પર સતત છે.

$$\therefore I = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx$$

$$= \int_{a}^{0} f(-t)\,(-dt)$$

$$= -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt$$

$$= \int_{0}^{a} f(-t)\,dt$$

$$= -\int_{0}^{a} f(t)\,dt, \qquad (f \text{ એ અયુગ્મ વિધેય છે.})$$

$$= -\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

I ની કિંમત (i) માં મૂકતાં,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

હવે, આ અંગેની સમજ કેળવવા આપણે એક ઉદાહરણ લઈએ.

$y = sin\,x$ એ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ પર સતત અને અયુગ્મ વિધેય છે.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = [-\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -\left[\cos\frac{\pi}{2} - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = -\left[\cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2}\right] = -(0 - 0) = 0$$

આમ, $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 0$

ઉદાહરણ 13 : કિંમત શોધો : **(i)** $\int_{-1}^{1} \sin^3 x \cos^4 x \, dx$ **(ii)** $\int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \, dx \quad (a > 0)$

ઉકેલ : (i) $I = \int_{-1}^{1} \sin^3 x \cos^4 x \, dx$

અહીં, $f(x) = \sin^3 x \cos^4 x$

$\therefore \quad f(-x) = \sin^3(-x) \cos^4(-x)$

$= -\sin^3 x \cdot \cos^4 x$

$= -f(x)$

$\therefore \quad f(x) = \sin^3 x \cos^4 x$ એ $[-1, 1]$ પર વ્યાખ્યાયિત અયુગ્મ વિધેય છે.

$\therefore \quad \int_{-1}^{1} \sin^3 x \cos^4 x \, dx = 0$

(ii) $I = \int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \, dx$

$= \int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{a-x}{a+x} \times \frac{a-x}{a-x}} \, dx$

$= \int_{-a}^{a} \frac{a-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx$ (અહીં, $x < a$ હોવાથી $\sqrt{(a-x)^2} = |x - a| = a - x$)

$= \int_{-a}^{a} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx - \int_{-a}^{a} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx$

$I = aI_1 - I_2$, જ્યાં $I_1 = \int_{-a}^{a} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx$ અને $I_2 = \int_{-a}^{a} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx$

ધારો કે $f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ અને $g(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

$\therefore \quad f(-x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - (-x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} = f(x)$ અને

$\therefore \quad g(-x) = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - (-x)^2}} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -g(x)$

$\therefore \quad f(x)$ એ યુગ્મ અને $g(x)$ એ અયુગ્મ વિધેય છે.

$\therefore \quad I_1 = 2\int_{0}^{a} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx$ અને $I_2 = 0$

$$\therefore \quad I = 2a \int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx$$

$$= 2a \left[sin^{-1} \frac{x}{a} \right]_0^a$$

$$= 2a \, [sin^{-1}1 - sin^{-1}0]$$

$$= 2a \left[\frac{\pi}{2} \right]$$

$$= a\pi$$

ઉદાહરણ 14 : કિંમત શોધો : **(i)** $\int_0^{\pi} \frac{x\, tan x}{sec x + tan x}\, dx$ **(ii)** $\int_0^1 x^2 (1 - x)^{\frac{1}{2}}\, dx$ **(iii)** $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} sin\, 2x \log tan\, x\, dx$

ઉકેલ : (i) $I = \int_0^{\pi} \frac{x\, tan x}{sec x + tan x}\, dx$

$$= \int_0^{\pi} \frac{x\, sin\, x}{1 + sin x}\, dx \qquad \text{(i)}$$

(i) ના સંકલિતમાં x ના બદલે $\pi - x$ લેતાં,

$$\therefore \quad I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\, sin\, (\pi - x)}{1 + sin(\pi - x)}\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\, sin\, x}{1 + sin\, x}\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\pi\, sin\, x}{1 + sin\, x}\, dx - \int_0^{\pi} \frac{x\, sin x}{1 + sin\, x}\, dx$$

$$\therefore \quad I = \pi \int_0^{\pi} \frac{sin\, x}{1 + sin x}\, dx - I \qquad \text{((i) પરથી)}$$

$$\therefore \quad 2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{sin\, x}{1 + sin\, x}\, dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{1 + sin x - 1}{1 + sin x}\, dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} dx - \pi \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + sin x}$$

$$= \pi [x]_0^{\pi} - \pi \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin x}$$

$$= \pi^2 - \pi \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin x}$$

$I_1 = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin x}$ લો.

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x} \qquad (f(2a - x) = f(\pi - x) = f(x))$$

$[0, \frac{\pi}{2}]$ માં $\tan\frac{x}{2} = t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

જ્યારે $x = \frac{\pi}{2}$ ત્યારે $t = \tan\frac{\pi}{4} = 1$ અને જ્યારે $x = 0$ ત્યારે $t = 0$.

$$\therefore \quad I_1 = 2\int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}}$$

$$= 4\int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^2}$$

$$= 4\left[-\frac{1}{1+t}\right]_0^1$$

$$= 4\left[-\frac{1}{2} + 1\right]$$

$$= 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

$$\therefore \quad 2I = \pi^2 - 2\pi = \pi(\pi - 2)$$

$$\therefore \quad I = \frac{\pi}{2}(\pi - 2)$$

નોંધ : $1 - \sin x$ વડે અંશ અને છેદને ગુણતાં ગણતરી સરળ બનશે એમ લાગશે પરંતુ $x = \frac{\pi}{2}$ આગળ $1 - \sin x = 0$

(ii) $I = \int_0^1 x^2(1-x)^{\frac{1}{2}}\, dx$

$$\therefore \quad I = \int_0^1 (1-x)^2 [1-(1-x)]^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \int_0^1 (1 - 2x + x^2)\cdot x^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}})\, dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5} + \frac{2}{7}\right) = \frac{16}{105}$$

(iii) $I = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} sin\, 2x \log\, tan\, x\, dx$ **(i)**

(i) માં x ને બદલે $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} - x = \frac{\pi}{2} - x$ લેતાં,

$$\therefore \quad I = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} sin\, 2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \log\, tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} sin\, 2x \log\, cot\, x\, dx \quad \text{(ii)}$$

પરિણામ (i) અને (ii) નો સરવાળો કરતાં,

$$2I = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} sin\, 2x [\log\, tan\, x + \log\, cot\, x]\, dx$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} sin\, 2x \log\, (tan\, x \cdot cot\, x)\, dx$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} sin\, 2x \cdot \log 1\, dx$$

$\therefore \quad 2I = 0$

$\therefore \quad I = 0$

સ્વાધ્યાય 3.3

1. કિંમત શોધો :

(1) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \quad (a > 1)$ **(2)** $\int\limits_{-a}^{a} \frac{x}{2 + x^8} dx$ **(3)** $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sqrt{5 + x^4}\, sin^3 x\, dx$

(4) $\int\limits_{-1}^{1} \log\left(\frac{3 - x}{3 + x}\right) dx$ **(5)** $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} sin^2 x\, dx$ **(6)** $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos\, x\, dx$

2. કિંમત શોધો :

(1) $\int_{0}^{\pi} \sin^2 x \cos^3 x \ dx$ (2) $\int_{0}^{2\pi} \sin^3 x \ \cos^2 x \ dx$

સાબિત કરો કે (3 to 15)

3. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx = \frac{\pi}{4}$ **4.** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx = \frac{\pi}{4} \ (n \in N)$ **5.** $\int_{1}^{4} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{5-x} + \sqrt{x}} dx = \frac{3}{2}$

6. $\int_{0}^{1} x(1 - x)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{4}{35}$ **7.** $\int_{0}^{\pi} \frac{e^{\cos x}}{e^{\cos x} + e^{-\cos x}} dx = \frac{\pi}{2}$ **8.** $\int_{0}^{3} x^2(3 - x)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{144\sqrt{3}}{35}$

9. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\sqrt{\cot x}} dx = \frac{\pi}{12}$ **10.** $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \log \left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right) dx = 0$ **11.** $\int_{0}^{\pi} \frac{x \, dx}{1+\sin x} = \pi$

12. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \log (1 + \tan x) \ dx = \frac{\pi}{8} \log 2$ **13.** $\int_{0}^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx = \frac{\pi^2}{4}$

14. $\int_{0}^{\pi} x \sin^3 x \, dx = \frac{2\pi}{3}$ **15.** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \log (\sqrt{2} + 1)$

*

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 15 : સાબિત કરો કે $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \log (\sqrt{2} + 1)$

ઉકેલ : $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\cos x + \sin x} dx$ (i)

$$\therefore \quad I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos x + \sin x} dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2}}{\cos x + \sin x} dx - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\cos x + \sin x} dx$$

$$\therefore \quad I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x + \sin x}\, dx - I$$

$$\therefore \quad 2I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x + \sin x}\, dx$$

$$\therefore \quad I = \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right)}\, dx$$

$$\therefore \quad I = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\left(\cos x \cos\frac{\pi}{4} + \sin x \sin\frac{\pi}{4}\right)}\, dx$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}\, dx$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\, dx$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\left[\log\left|\sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\left[\log\left|\sec\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right| - \log\left|\sec\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|\right]$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\left[\log\left|\sec\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{4}\right| - \log\left|\sec\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{4}\right|\right]$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\left(\log|\sqrt{2} + 1| - \log|\sqrt{2} - 1|\right)$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\log\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}\right) \qquad (\sqrt{2} > 1)$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\log(\sqrt{2} + 1)^2$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\log(\sqrt{2} + 1)$$

ઉદાહરણ 16 : સાબિત કરો કે $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x\, dx = \frac{1}{n-1}$, $n \in N - \{1\}$.

ઉકેલ : $$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^n x + \tan^{n-2} x)\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^{n-2}x\ (tan^2x + 1)\ dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^{n-2}x\ (sec^2x)\ dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (tan\,x)^{n-2}\ \frac{d}{dx}(tan\,x)\ dx$$

$$= \left[\frac{(tan\,x)^{n-1}}{n-1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\left(tan\,\frac{\pi}{4}\right)^{n-1} - (tan\,0)^{n-1}\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}$$

ઉદાહરણ 17 : $\int_0^1 cot^{-1}(1 - x + x^2)\ dx$ કિંમત શોધો.

ઉકેલ : $I = \int_0^1 cot^{-1}(1 - x + x^2)\ dx$

$\therefore\ 0 < x < 1$

$\therefore\ 0 < 1 - x < 1$

$\therefore\ 0 < x(1 - x) < 1$

$\therefore\ 0 < x - x^2 < 1$

$\therefore\ 0 < 1 - x + x^2$

$$\therefore\ I = \int_0^1 tan^{-1}\left(\frac{1}{1 - x + x^2}\right) dx \qquad \left(x > 0 \text{ માટે } cot^{-1}x = tan^{-1}\frac{1}{x}\right)$$

$$= \int_0^1 tan^{-1}\left(\frac{1}{1 - x(1 - x)}\right) dx$$

$$= \int_0^1 tan^{-1}\left(\frac{x + (1 - x)}{1 - x(1 - x)}\right) dx$$

$$= \int_0^1 (tan^{-1}x + tan^{-1}(1 - x))\ dx \qquad (0 < x < 1,\ 0 < 1 - x < 1,\ 0 < x(1 - x) < 1)$$

$$= \int_0^1 tan^{-1}x\ dx + \int_0^1 tan^{-1}(1 - x)\ dx$$

$$= \int_0^1 tan^{-1}x\ dx + \int_0^1 tan^{-1}(1 - (1 - x))\ dx$$

$$= \int_0^1 tan^{-1}x \ dx + \int_0^1 tan^{-1}x \ dx$$

$$= 2\int_0^1 tan^{-1}x \cdot 1 \ dx$$

$$= 2 \ [x \ tan^{-1}x]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \ dx$$

$$= 2 \ [x \ tan^{-1}x]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} \ dx$$

$$= 2 \ [x \ tan^{-1}x]_0^1 - [\log|x^2+1|]_0^1$$

$$= 2 \ [tan^{-1} 1 - 0] - [\log(1+1) - \log(0+1)]$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{4}\right) - (\log 2 - \log 1)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \log 2$$

ઉદાહરણ 18 : $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2x\,(1+sin\ x)}{1+cos^2 x} dx$ નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : $$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2x\,(1+sin\ x)}{1+cos^2 x} dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2x}{1+cos^2 x} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2x\ sin\ x}{1+cos^2 x} dx$$

$\therefore \quad I = I_1 + I_2$ જ્યાં, $I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2x}{1+cos^2 x} dx$ અને $I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2x\ sin\ x}{1+cos^2 x} dx$

$f(x) = \frac{2x}{1+cos^2 x}$ અને $g(x) = \frac{2x\ sin\ x}{1+cos^2 x}$ લેતાં,

$f(-x) = \frac{2\,(-x)}{1+cos^2(-x)} = \frac{-2x}{1+cos^2 x} = -f(x)$ અને

$$g(-x) = \frac{2\,(-x)\ sin\,(-x)}{1+cos^2(-x)} = \frac{2x\ sin\ x}{1+cos^2 x} = g(x)$$

$\therefore \quad f(x)$ એ અયુગ્મ વિધેય છે અને $g(x)$ એ યુગ્મ વિધેય છે.

$\therefore \quad I_1 = 0$ અને $I_2 = 2\int_0^{\pi} \frac{2x\ sin\ x}{1+cos^2 x} dx$

$$\therefore \quad I_2 = 4\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx \qquad \text{(i)}$$

$$= 4\int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin(\pi - x)}{1+\cos^2(\pi - x)}\, dx$$

$$= 4\int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$$

$$I_2 = 4\int_0^{\pi} \frac{\pi \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx - 4\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$$

$$\therefore \quad I_2 = 4\pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx - I_2 \qquad \text{((i))}$$

$$\therefore \quad 2I_2 = 4\pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$$

$\cos x = t$ લેતાં $-\sin x\, dx = dt$, $\sin x\, dx = -dt$. વળી જ્યારે $x = 0$ ત્યારે $t = 1$ અને જ્યારે $x = \pi$ ત્યારે $t = -1$

$$\therefore \quad 2I_2 = 4\pi\int_1^{-1} \frac{-dt}{1+t^2}$$

$$= 4\pi\int_{-1}^{1} \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= 4\pi\left[\tan^{-1} t\right]_{-1}^{1}$$

$$= 4\pi\left[\tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(-1)\right]$$

$$= 4\pi\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore \quad 2I_2 = 2\pi^2$$

$$\therefore \quad I_2 = \pi^2$$

$$I = I_1 + I_2$$

$$\therefore \quad I = 0 + \pi^2$$

$$\therefore \quad I = \pi^2$$

ઉદાહરણ 19 : સાબિત કરો કે $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx = -\frac{\pi}{2}\log 2$.

ઉકેલ : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx \qquad \text{(i)}$

$$\therefore \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$$

$$\therefore \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x \, dx \qquad \text{(ii)}$$

(i) અને (ii) નો સરવાળો કરતાં

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log \sin x + \log \cos x) \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log (\sin x \cdot \cos x) \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \left(\frac{2 \sin x \cos x}{2}\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \left(\frac{\sin 2x}{2}\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin 2x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log 2 \, dx$$

ધારો કે $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin 2x \, dx$

$$\therefore \quad 2I = I_1 - \log 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \qquad \text{(iii)}$$

હવે, $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin 2x \, dx$

ધારો કે, $2x = t$. તેથી $dx = \frac{1}{2} dt$

જ્યારે $x = 0$ ત્યારે $t = 0$ અને જ્યારે $x = \frac{\pi}{2}$ ત્યારે $t = \pi$.

$$\therefore \quad I_1 = \int_0^{\pi} \log \sin t \cdot \frac{1}{2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \log \sin t \, dt$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin t \, dt$$

$\left(\log \sin (\pi - t) = \log \sin t. \text{ તેથી } \int_0^{\pi} \log \sin t \, dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin t \, dt\right)$

$\therefore \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin t \, dt$

$\therefore \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx = I$ (નિયત સંકલિત ચલ પર આધારિત નથી)

હવે, (iii) પરથી

$2I = I - \frac{\pi}{2} \log 2$

$\therefore \quad I = -\frac{\pi}{2} \log 2$

પરીક્ષા માટે નહીં :

હકીકતમાં $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx$ એ નિયત સંકલિત નથી. વિધેય $\log \sin x$ એ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ માં 0 આગળ અસીમિત છે. આ પ્રકારનું સંકલન અનુચિત સંકલિત કહેવાય.

ખરેખર $\lim\limits_{t \to 0+} \int_t^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx.$

આ પ્રથમ પ્રકારનું અનુચિત સંકલન છે. જ્યારે $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ એ બીજા પ્રકારનું અનુચિત સંકલિત છે.

આ બંને પ્રકારના વિધેયો $[a, b]$ માં અસીમિત છે. $a \in R$, $b \in R$ અથવા અસીમિત અંતરાલો $(-\infty, a)$, (a, ∞), $(-\infty, \infty)$ માં વ્યાખ્યાયિત છે. જ્યારે આ પ્રકરણમાં આપણે નિયત સંકલનનો અભ્યાસ કરીએ છીએ.

કોઈક વાર અનુચિત સંકલિતનું નિયત સંકલિત તરીકે સંકલન કરતાં આપણને ખોટું પરિણામ મળે છે, જેમ કે

$$\int_{-2}^{3} \frac{dx}{x} = [\log |x|]_{-2}^{3} = \log 3 - \log 2 = \log \frac{3}{2}$$

પરંતુ હકીકતમાં $\frac{1}{x}$ એ 0 આગળ અસીમિત છે.

$$\therefore \quad \int_{-2}^{3} \frac{dx}{x} = \int_{-2}^{0} \frac{dx}{x} + \int_{0}^{3} \frac{dx}{x}$$

$$= \lim_{t_1 \to 0-} \int_{-2}^{t_1} \frac{dx}{x} + \lim_{t_2 \to 0+} \int_{t_2}^{3} \frac{dx}{x}$$

જેનું અસ્તિત્વ નથી.

$\int_0^{\pi} \sec^2 x \, dx = [\tan x]_0^{\pi} = 0 - 0 = 0$ ખોટું પરિણામ છે.

$\sec$ વિધેય $x = \frac{\pi}{2}$ આગળ અસીમિત છે.

સ્વાધ્યાય 3

1. જો $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^n x \, dx$, તો સાબિત કરો કે $n\,(I_{n-1} + I_{n+1}) = 1$

2. જો $f(x) = f(a + b - x)$, તો સાબિત કરો કે $\int_a^b x\, f(x)\, dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)\, dx$.

3. $\int_0^{\pi} x\, f(sin\, x)\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(sin\ x)\, dx$ સાબિત કરો અને તે પરથી

(i) $\int_0^{\pi} x\ sin^2 x\ dx$ (ii) $\int_0^{\pi} \frac{x}{1 + sinx}\, dx$ મેળવો.

4. સાબિત કરો : $\int_0^n f(x)\, dx = \sum_{r=1}^{n} \int_0^1 f(t + r - 1)\, dt$

5. જો $\int_n^{n+1} f(x)\, dx = n^3$, તો $\int_{-4}^{4} f(x)\, dx$ મેળવો. $n \in Z$

6. સાબિત કરો કે $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log cosx\, dx = -\frac{\pi}{2} \log 2$

7. સાબિત કરો કે $\int_0^a x^2(a - x)^n\, dx = \frac{2a^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

કિંમત શોધો (8 to 17) :

8. $\int_0^{\log 2} xe^{-x}\, dx$

9. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a^2 cos^2 x - b^2 sin^2 x}$ $(a > b > 0)$

10. $\int_1^2 \frac{x^2+1}{x^4+1}\, dx$

11. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi x}{2} - x^2\right) cos2x\ dx$

12. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{sin^2 x}{1 + sinx\, cosx}\, dx$

13. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos\ x}{1 + cosx + sinx}\, dx$

14. $\int_0^1 \frac{\log(1+t)}{1+t^2}\, dt$

15. $\int_1^3 \frac{dx}{x^2(x+1)}$

16. $\int_0^{\pi} \frac{x^2 sinx}{(2x - \pi)(1 + cos^2 x)}\, dx$

17. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\, sinx - cosx\, |\ dx$

18. સરવાળાના લક્ષ તરીકે $\int_1^3 (x^2 + x)\, dx$ મેળવો.

19. સરવાળાના લક્ષ તરીકે $\int_0^4 (x + e^{2x})\, dx$ મેળવો.

20. સાબિત કરો કે $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \tan x\, dx = 0$

21. સાબિત કરો કે $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \log \sin x - \log \sin 2x)\, dx = -\frac{\pi}{2} \log 2$

22. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c), (d)માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :

(1) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}} = ...$. ☐

(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{6}$ (c) $\frac{\pi}{12}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

(2) $\int_1^e \log x\, dx = ...$. ☐

(a) 1 (b) $e + 1$ (c) $e - 1$ (d) 0

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cot x}\, dx = ...$. ☐

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) π

(4) જો $\int_0^a \frac{1}{1+4x^2}\, dx = \frac{\pi}{8}$, તો $a = ...$. ☐

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

(5) $\int_0^3 \frac{3x+1}{x^2+9}\, dx = ...$. ☐

(a) $\frac{\pi}{12} + \log(2\sqrt{2})$ (b) $\frac{\pi}{3} + \log(2\sqrt{2})$ (c) $\frac{\pi}{12} + \log\sqrt{2}$ (d) $\frac{\pi}{6} + \log(2\sqrt{2})$

(6) $\int_{-1}^1 |1 - x|\, dx = ...$. ☐

(a) -2 (b) 2 (c) 0 (d) 4

(7) જો $\int_0^1 (3x^2 + 2x + k)\, dx = 0$, તો $k = ...$. ☐

(a) 1 (b) 2 (c) -2 (d) 4

(8) જો $\int_1^a (3x^2 + 2x + 1)\, dx = 11$, તો $a = ...$. ☐

(a) 2 (b) 3 (c) -3 (d) $\frac{2}{3}$

(9) $\int_{-1}^0 |x|\, dx = ...$. ☐

(a) $-\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) 1 (d) 2

(10) $\int_{-1}^{1} \log\left(\frac{7-x}{7+x}\right) dx = ...$.

(a) 1 (b) 0 (c) 2 (d) -2

(11) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} cotx\ dx = ...$.

(a) $\frac{1}{2}\log\left(\frac{3}{2}\right)$ (b) $\log\left(\frac{3}{2}\right)$ (c) $\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $2\log\frac{3}{2}$

(12) $\int_{1}^{k} f(x)\ dx = 47,\ f(x) = \begin{cases} 2x+8 & 1 \le x \le 2 \\ 6x & 2 < x \le k \end{cases}$, તો k ....

(a) 4 (b) -4 (c) 2 (d) -2

(13) $\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = ...$.

(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{12}$ (c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{2\pi}{3}$

(14) $\int_{1}^{4} \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^{-1} = ...$.

(a) $\log\left(\frac{17}{2}\right)$ (b) $\frac{1}{2}\log\left(\frac{17}{2}\right)$ (c) $2\log(17)$ (d) $\log(17)$

(15) $\int_{0}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}\ dx = ...$.

(a) $-\frac{\pi}{2}$ (b) π (c) 0 (d) $\frac{\pi}{2}$

(16) $\int_{0}^{2a} \frac{f(x)dx}{f(x)+f(2a-x)} = ...$.

(a) $-a$ (b) a (c) $\frac{a}{2}$ (d) $-\frac{a}{2}$

(17) $\int_{0}^{\pi} sin^3x\ cos^3x\ \ dx = ...$.

(a) π (b) $-\pi$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) 0

(18) જો $\int_{2}^{k} (2x+1)\ dx = 6$, તો $k = ...$.

(a) 3 (b) 4 (c) -4 (d) -2

(19) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x+\sqrt{x}} = ...$.

(a) log 2 (b) log 4 (c) log 3 (d) $-$ log 2

(20) જો $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{3+4\sin x}\ dx = k\log\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right)$, તો $k = ...$.

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{8}$

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓની ચર્ચા કરી :

1. $f : [a, b] \to R$ સતત વિધેય છે. કોઈ ધન પૂર્ણાંક n માટે $h = \frac{b-a}{n}$ લઈએ, તો $[a, b]$ નું n એકરૂપ ઉપાંતરાલોમાં વિભાજન કરતાં $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(a + ih)$.

2. **નિયત સંકલનનો મૂળભૂત સિદ્ધાંત :** ધારો કે વિધેય f એ $[a, b]$ પર સતત છે તથા F એ (a, b) પર વ્યાખ્યાયિત એવું વિકલનીય વિધેય હોય, કે જેથી

$\forall x \in (a, b)$, $\frac{d}{dx}[F(x)] = f(x)$, થાય તો $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

3. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$. નિયત સંકલન ચલ પર અવલંબિત નથી.

4. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \ (a > b)$

5. f એ $[a, b]$ પર સતત હોય અને $a < c < b$, તો $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

6. f એ $[a, b]$ પર સતત હોય, તો $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a - x)\,dx$

7. f એ $[a, b]$ પર સતત હોય, તો $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a + b - x)\,dx$

8. f એ $[0, 2a]$ પર સતત હોય તો, $\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a - x)\,dx$

જો $f(2a - x) = f(x)$, $\forall x \in [0, 2a]$, તો $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

જો $f(2a - x) = -f(x)$, $\forall x \in [0, 2a]$, તો $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 0$

9. જો f એ $[-a, a]$ માં સતત યુગ્મ વિધેય હોય તો $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

10. જો f એ $[-a, a]$ માં સતત અયુગ્મ વિધેય હોય તો $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

■

સંકલનનો એક ઉપયોગ

4

Music is the pleasure the human soul experiences from counting without being aware that it is counting.

– Gottfried Wilhelm

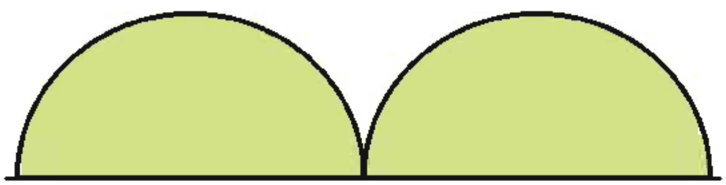
There are no deep theorems - only theorems that we have not understood very well.

– Nicholas Goodman

4.1 પ્રાસ્તાવિક

સંકલન અને વિકલન એ કલનશાસ્ત્રનાં વિજ્ઞાન અને ઈજનેરીશાસ્ત્રમાં જેના સંખ્યાબંધ ઉપયોગો થતા હોય તેવાં પાયાનાં સાધનો છે. ઘણા વ્યાવહારિક ઉપયોગોમાં સંકલન દૃષ્ટિગોચર થાય છે.

જો કોઈ મકાનને ત્રિકોણીય આકારનો અથવા અર્ધવર્તુળાકાર આકારનો અથવા લંબચોરસ આકારનો કમાનવાળો પ્રવેશદ્વાર હોય અને જો આ પ્રવેશદ્વારમાં કાચ બેસાડવાના હોય તો ભૂમિતિના પ્રાથમિક સૂત્રોની મદદથી જરૂરી કાચનું ક્ષેત્રફળ નક્કી કરી શકાય; પરંતુ જો મકાનને ઉપવલયના અંશ જેવા આકારનો કમાનવાળો પ્રવેશદ્વાર હોય તો આપણે સંકલનની મદદથી જરૂરી કાચનું ક્ષેત્રફળ શોધી શકીએ.



આકૃતિ 4.1

આ હેતુ માટે આપણે વક્રથી આવૃત્ત થયેલ પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ જાણવું જરૂરી છે. સંકલનનો વિકાસ થયો તે પહેલા સન્નિકટ ક્ષેત્રફળ શોધી શકાતું હતુ. ગ્રીકવાસીઓ આ પ્રકારની રીત જાણતા હતા. ગ્રીક ગણિતશાસ્ત્રી આર્કિમીડીઝે વર્તુળના ક્ષેત્રફળનું આસન્ન મૂલ્ય શોધી કાઢ્યું હતું. કોઈ પણ પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધવું એ નિયત સંકલનનો એક મૂળભૂત ઉપયોગ છે. સંકલનની વિભાવનાનો વિકાસ ન્યૂટન અને લાઈબ્નીટ્ઝે કર્યો હતો.

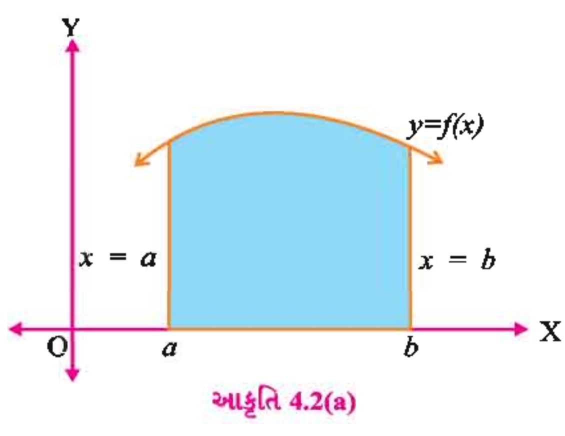
4.2 સાદા વક્રથી આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ

અગાઉના પ્રકરણમાં આપણે સરવાળાના લક્ષ તરીકે નિયત સંકલનની કિંમત કેવી રીતે શોધી શકાય તે શીખી ગયાં. હવે આપણે સાદા વક્રથી આવૃત્ત પ્રદેશ જેમ કે રેખા અને વર્તુળનું ચાપ, પરવલય કે ઉપવલયથી ઘેરાયેલ પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે સંકલનનો કેવી રીતે ઉપયોગ થાય છે તેનો અભ્યાસ કરીએ. આપણે બે વક્રો વડે આવૃત્ત પ્રદેશના ક્ષેત્રફળની પણ ચર્ચા કરીશું.

સંવૃત અંતરાલ ઉપર વ્યાખ્યાયિત થયેલ સતત વિધેયનો એ ગુણધર્મ છે કે તે સંવૃત અંતરાલના કોઈ બિંદુ ઉપર વિધેયનું ન્યૂનતમ મૂલ્ય મળે તથા તે જ અંતરાલના કોઈ બિંદુ ઉપર વિધેયનું મહત્તમ મૂલ્ય મળે. આ હકીકત આપણે અહીં સાબિતી આપ્યા વગર સ્વીકારીશું.

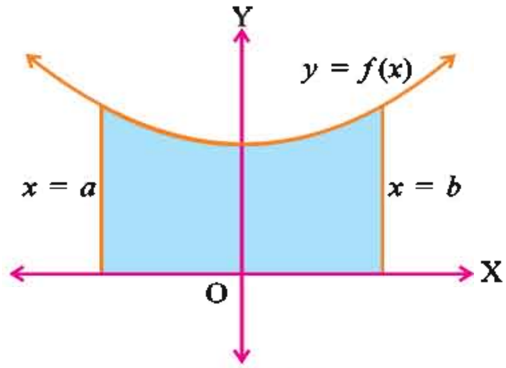
વિકલ્પ 1 : X-અક્ષની ઉપરના અર્ધતલમાં હોય તેવો વક્ર :

ધારો કે વિધેય f એ $[a, b]$ પર વ્યાખ્યાયિત સતત વિધેય છે. ધારો કે $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$. આપણે



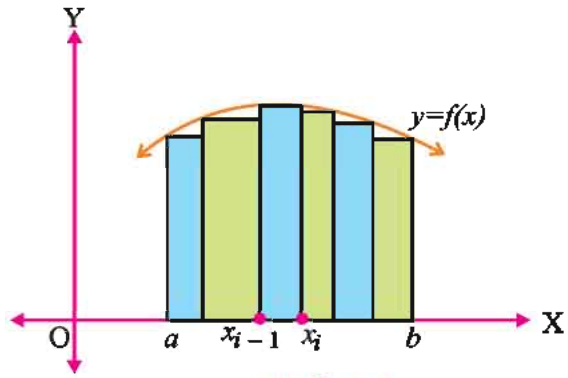
આકૃતિ 4.2(a)

વક્ર $y = f(x)$, રેખાઓ $x = a$, $x = b$ તથા X-અક્ષ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ A શોધવું છે. (આકૃતિ 4.2(a) અને 4.2(b)માં દર્શાવેલ રંગીન પ્રદેશ)



આકૃતિ 4.2(b)

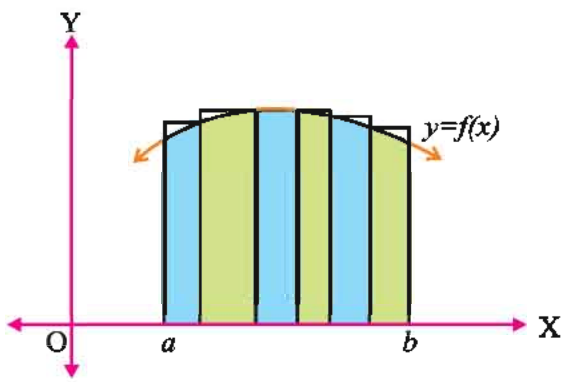
સૌપ્રથમ આપણે બિંદુઓ $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b$ દ્વારા અંતરાલ $[a, b]$ને n ઉપઅંતરાલોમાં વિભાજિત કરીશું. અંતરાલ $[a, b]$ ના સંવૃત ઉપઅંતરાલો $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ... n$ ઉપર વિધેય $f(x)$ સતત છે. તેથી તે દરેક ઉપઅંતરાલમાં આપણને એક બિંદુ x_i' મળશે જેના ઉપર વિધેય $f(x)$ ને ન્યૂનતમ મૂલ્ય હોય તથા એક બિંદુ x_i^* એવું મળશે કે જેના ઉપર વિધેય $f(x)$ ને મહત્તમ મૂલ્ય હોય એટલે કે $f(x_i')$ અંતરાલ $[x_{i-1}, x_i]$ માં ન્યૂનતમ છે તથા $f(x_i^*)$ અંતરાલ $[x_{i-1}, x_i]$ માં મહત્તમ છે.



આકૃતિ 4.3

આકૃતિ 4.3માં $f(x_i')$ લંબાઈ તથા $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ પહોળાઈ ધરાવતા લંબચોરસો ($i = 1, 2, ... n$ માટે) દર્શાવ્યા છે. સ્પષ્ટ છે કે આ તમામ લંબચોરસના ક્ષેત્રફળનો સરવાળો માંગેલ ક્ષેત્રફળ કરતાં ઓછો છે.

એટલે કે $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x'_i)\,\Delta x_i \le A$ (i)



આકૃતિ 4.4

આ સરવાળા $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x'_i)\,\Delta x_i$ ને **અધઃસરવાળો (Lower Sum)** કહે છે.

આકૃતિ 4.4માં $f(x_i^*)$ લંબાઈ તથા $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ પહોળાઈ ધરાવતા લંબચોરસો ($i = 1, 2, ... n$ માટે) દર્શાવ્યા છે. સ્પષ્ટ છે કે આ તમામ લંબચોરસના ક્ષેત્રફળનો સરવાળો માંગેલ ક્ષેત્રફળ કરતાં વધુ છે.

એટલે કે $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x_i \ge A$ (ii)

આ સરવાળા $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x_i$ ને **ઊર્ધ્વસરવાળો (Upper Sum)** કહે છે.

આમ (i) અને (ii) પરથી

$$\sum_{i=1}^{n} f(x'_i)\,\Delta x_i \le A \le \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x_i$$

જો આપણે વિભાજન બિંદુઓ અમર્યાદિત રીતે વધારતા જઈએ અને મહત્તમ $\Delta x_i \to 0$ તથા જો અધઃસરવાળા અને ઊર્ધ્વસરવાળાને સામાન્ય લક્ષ મળે તો માંગેલ ક્ષેત્રફળ એ અધઃસરવાળા કે ઊર્ધ્વસરવાળાનું લક્ષ થશે. તેને નીચે મુજબ લખી શકાય.

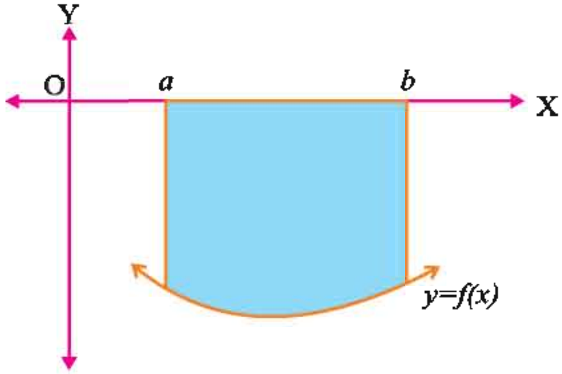
$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x'_i)\,\Delta x_i = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x_i$$

અગાઉના પ્રકરણમાં ચર્ચા કર્યા મુજબ ઉપરનાં બંને પદ $\int_a^b f(x)\,dx$ થશે.

આમ, ક્ષેત્રફળ $A = \int_a^b f(x)\,dx$.

વિકલ્પ 2 : X-અક્ષની નીચેના અર્ધતલમાં આવેલો વક્ર :

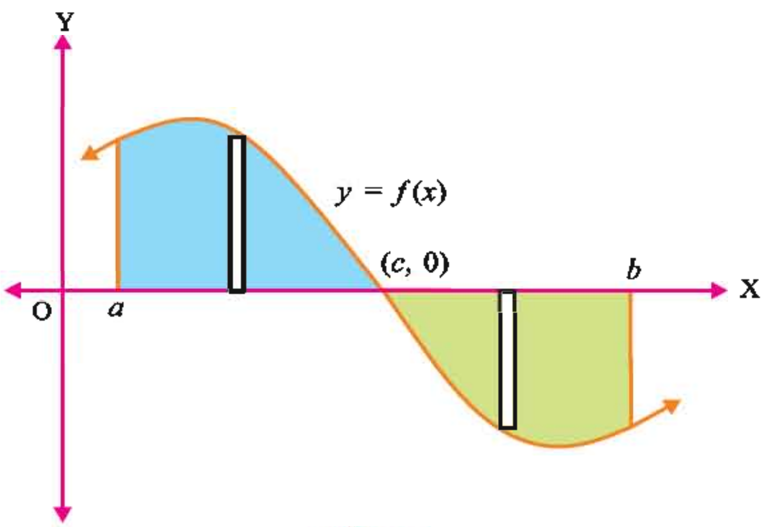
આકૃતિ 4.5 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે જો વિચારણામાં લીધેલ વક્ર X- અક્ષની નીચેના ભાગમાં હોય તો $x = a$ થી $x = b$માં $f(x) < 0$ થાય. આથી (i) અને (ii) દ્વારા વ્યાખ્યાયિત સરવાળો ઋણ થશે; પરંતુ વક્ર $y = f(x)$ રેખાઓ $x = a$, $x = b$ તથા X-અક્ષ વડે આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ ધન હોવાથી આપણે સંકલનથી મળતી કિંમતનો માનાંક લઈશું.એટલે કે, $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$ ને ક્ષેત્રફળ તરીકે લઈશું.



આકૃતિ 4.5

આમ, ક્ષેત્રફળ $A = |I|$ જ્યાં $I = \int_a^b f(x)\,dx$.

વિકલ્પ 3 : વક્ર X-અક્ષને ફક્ત એક જ બિંદુએ છેદતો હોય



આકૃતિ 4.6

ધારો કે વક્ર $y = f(x)$ એ X-અક્ષને ફક્ત $(c, 0)$ બિંદુએ છેદે છે, જ્યાં $a < c < b$. ધારો કે $\forall x \in [a, c]$, $f(x) \geq 0$, અને $\forall x \in [c, b]$, $f(x) \leq 0$. આથી વક્ર $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ અને X-અક્ષ દ્વારા આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ $A = |I_1| + |I_2|$

જ્યાં $I_1 = \int_a^c f(x)\,dx$, $I_2 = \int_c^b f(x)\,dx$.

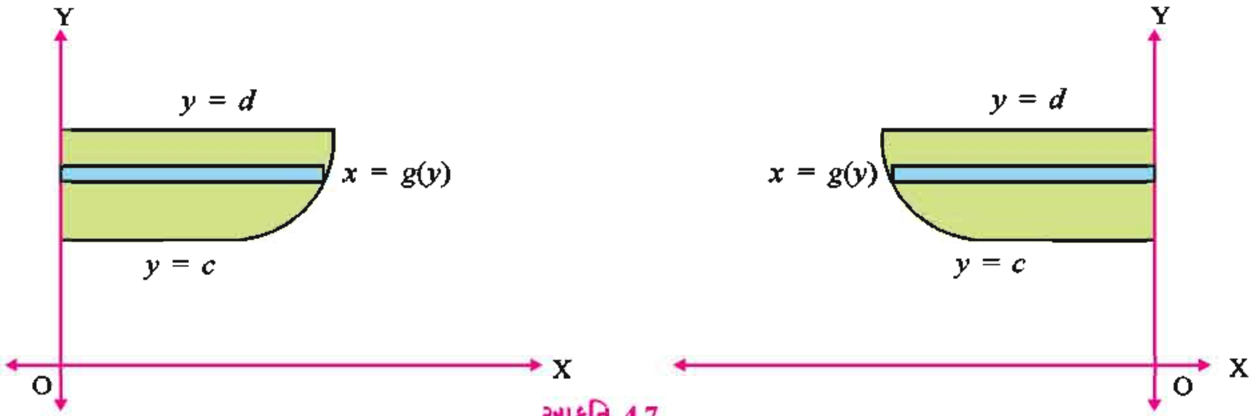
જો વક્ર X-અક્ષને સાંત સંખ્યાનાં બિંદુઓ $c_1, c_2, ..., c_n$ માં છેદતો હોય તો ક્ષેત્રફળ $= \sum_{k=0}^{n} |I_k|$,

જ્યાં $I_k = \int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)dx \quad (c_0 = a, c_{n+1} = b)$

ઉપરની જેમ,

(1) ધારો કે $x = g(y)$ એ $[c, d]$ પર સતત છે અને $g(y) \geq 0$ અથવા $g(y) \leq 0$, $\forall y \in [c, d]$.

વક્ર $x = g(y)$, $y = c$, $y = d$ અને Y-અક્ષ દ્વારા આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ $A = | I |$, જ્યાં $I = \int_c^d x dy = \int_c^d g(y)\, dy$.

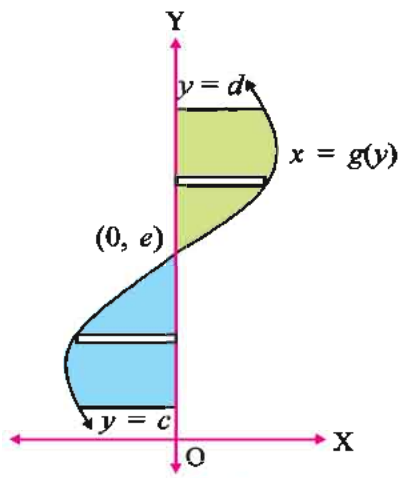


આકૃતિ 4.7

(2) ધારો કે વક્ર $x = g(y)$ એ Y-અક્ષને ફક્ત$(0, e)$ બિંદુએ છેદે છે જ્યાં $c < e < d$. આથી વક્ર $x = g(y)$, $y = c$, $y = d$ અને Y-અક્ષ દ્વારા આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ $A = | I_1 | + | I_2 |$,

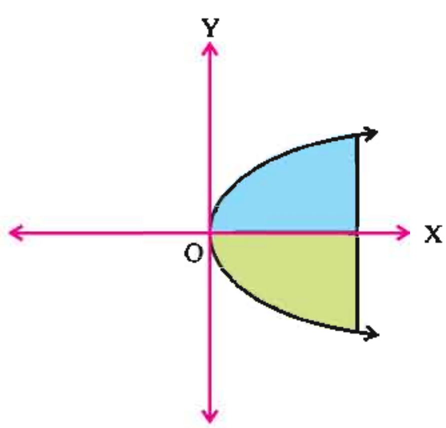
જ્યાં $I_1 = \int_c^e g(y)\, dy$ અને

$I_2 = \int_e^d g(y)\, dy$.



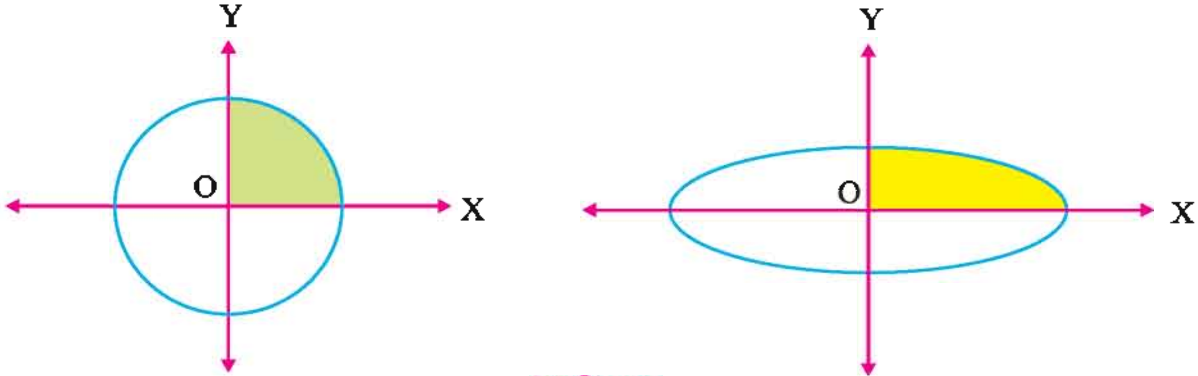
આકૃતિ 4.8

(3) જો વક્ર અને તેનાથી આવૃત્ત પ્રદેશ X-અક્ષ પરત્વે સંમિત હોય તથા એક અર્ધ ખંડ X-અક્ષના ઉપરના અર્ધતલમાં હોય અને બીજો એક અર્ધ ખંડ X-અક્ષની નીચેના અર્ધતલમાં હોય, તો એક અર્ધતલમાંના પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધી તેને બમણું કરવાથી આવા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ મળે. આ જ રીત Y-અક્ષને સાપેક્ષ સંમિત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે પણ વાપરી શકાય.



આકૃતિ 4.9

(4) જો વક્ર અને તેનાથી આવૃત્ત થયેલ પ્રદેશ બંને અક્ષ પરત્વે સંમિત હોય, તો પ્રથમ ચરણમાં રહેલા ખંડનું ક્ષેત્રફળ મેળવી તેને ચારગણું કરવાથી આખા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ મળે.



આકૃતિ 4.10

વર્તુળ અને ઉપવલયથી આવૃત્ત પ્રદેશનાં ક્ષેત્રફળ આ પ્રકારનાં ઉદાહરણો છે.

ઉદાહરણ 1 : સંકલનની મદદથી વક્ર $2y = -x + 8$, X-અક્ષ અને રેખાઓ $x = 2$ અને $x = 4$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : માંગેલ ક્ષેત્રફળ $A = |I|$ જ્યાં,

$$I = \int_2^4 y\,dx$$

$$= \int_2^4 \left(\frac{-x}{2} + 4\right) dx$$

$$= \left[\frac{-x^2}{4} + 4x\right]_2^4$$

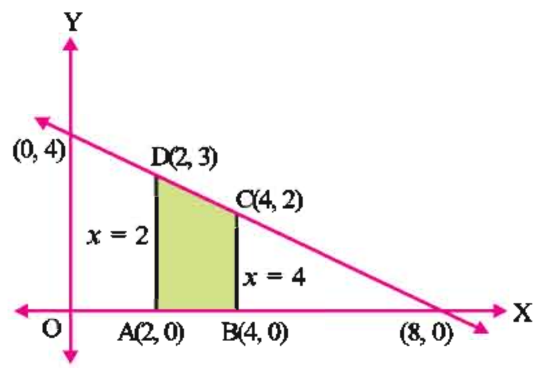
$$= \left[\frac{-(4)^2}{4} + 16\right] - \left[\frac{-(2)^2}{4} + 8\right]$$

$$= (-4 + 16) - (-1 + 8)$$

$$= 12 - 7$$

$$= 5$$

$$\therefore A = 5$$



આકૃતિ 4.11

નોંધ : સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCDનું ક્ષેત્રફળ

$= \frac{1}{2}$ (સમાંતર બાજુઓ વચ્ચેનું લંબઅંતર) (સમાંતર બાજુઓની લંબાઈનો સરવાળો)

$= \frac{1}{2}(4 - 2)(3 + 2) = 5$

ઉદાહરણ 2 : વક્ર $y = 4 - x^2$, X-અક્ષ અને રેખાઓ $x = 0$ તથા $x = 2$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો

ઉકેલ : અહીં $y = 4 - x^2$

$\therefore$ $x^2 = -(y - 4)$ પરવલય દર્શાવે છે.

પરવલયનું શીર્ષ (0, 4) છે અને તે નીચે તરફ ખુલશે.

માંગેલ ક્ષેત્રફળ $A = |I|$, જ્યાં

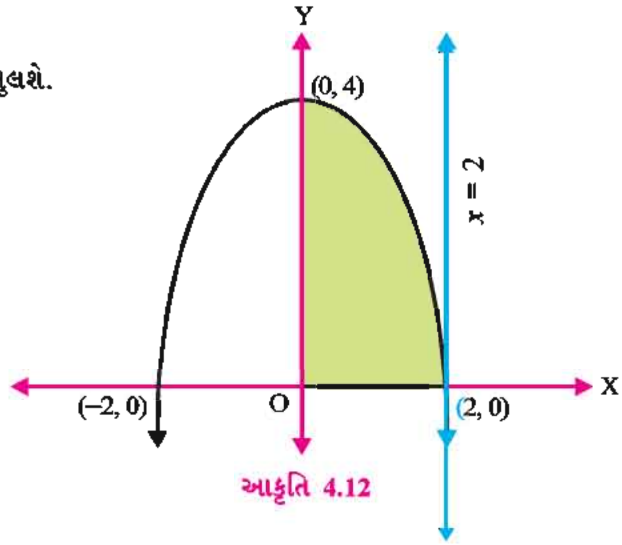
$$I = \int_0^2 y\,dx$$

$$= \int_0^2 (4 - x^2)\,dx$$

$$= \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2$$

$$= 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

$\therefore$ $A = \frac{16}{3}$



આકૃતિ 4.12

ઉદાહરણ 3 : વક્ર $y = x^2 - 1$, X-અક્ષ અને રેખા $y = 8$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : અહીં વક્ર $y = x^2 - 1$ એ Y-અક્ષ પરત્વે સંમિત છે, તેથી પહેલા ચરણમાં આવેલ પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ મેળવી 2 વડે ગુણતાં માંગેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ મેળવી શકાય.

હવે $y = x^2 - 1$. તેથી $x^2 = y - (-1)$ અને

તે પરવલય દર્શાવે છે. તેનું શીર્ષ (0, −1) છે અને તે ઉપરની તરફ ખુલશે. પ્રથમ ચરણમાં વક્ર અને Y-અક્ષથી આવૃત્ત પ્રદેશની સીમાઓ $y = 0$ અને $y = 8$ છે.

$\therefore$ ક્ષેત્રફળ $A = 2|I|$

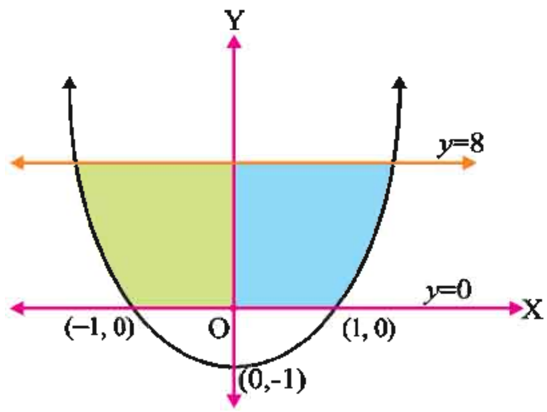
જ્યાં $I = \int_0^8 x\,dy$

$$= \int_0^8 \sqrt{y+1}\,dy$$

$$= \frac{2}{3}\left[(y+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^8$$

$$= \frac{2}{3}\left((9)^{\frac{3}{2}} - 1\right) = \frac{52}{3}$$

$\therefore$ $A = 2|I| = 2\left(\frac{52}{3}\right) = \frac{104}{3}$



આકૃતિ 4.13

(પ્રથમ ચરણમાં $x > 0$)

ઉદાહરણ 4 : ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ થી આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : ઉપવલય એ X-અક્ષ અને Y-અક્ષ પ્રત્યે સંમિત છે.

માંગેલ ક્ષેત્રફળ $A = 4 \times$ પ્રથમ ચરણમાં આવેલ પ્રદેશ OABનું ક્ષેત્રફળ.

$$= 4\,|I|, \text{ જ્યાં } I = \int_0^a y\,dx$$

હવે $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

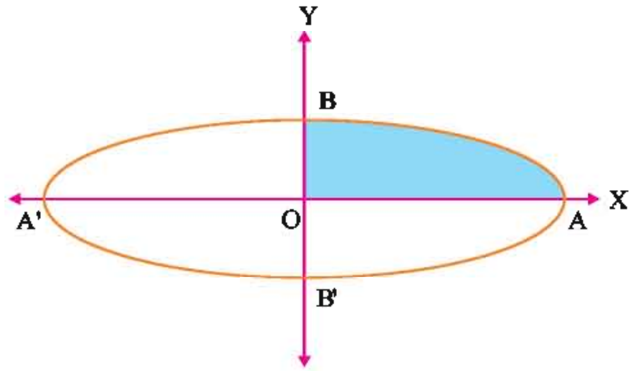
$\therefore \quad \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2}$

$\therefore \quad y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

પ્રથમ ચરણમાં $y > 0$

$\therefore \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

$\therefore \quad I = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$



આકૃતિ 4.14

$$= \frac{b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$$

$$= \frac{b}{a}\left[\left(\frac{a}{2} \times 0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}1\right) - (0 + 0)\right]$$

$$= \frac{b}{a}\left[\frac{a^2}{2}\sin^{-1}1\right] = \frac{b}{a}\left[\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi ab}{4}$$

$\therefore$ માંગેલ ક્ષેત્રફળ $A = 4 \times \frac{\pi ab}{4} = \pi ab$

નોંધ : આ જ પ્રશ્ન આપણે $x^2 + y^2 = r^2$ લઈને ગણીએ તો વર્તુળના ક્ષેત્રફળનું પ્રચલિત સૂત્ર πr^2 મળે.

સ્વાધ્યાય 4.1

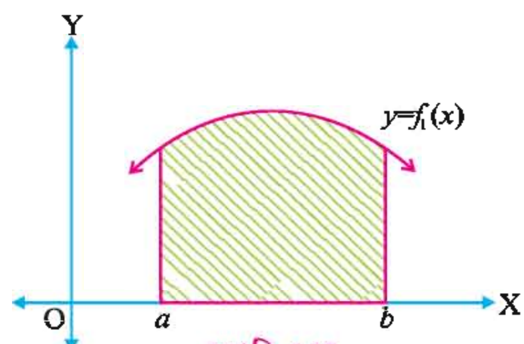
1. વક્ર $y = x^2 + 2$, X-અક્ષ અને રેખાઓ $x = 1$ અને $x = 2$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
2. વક્ર $y = x^2 - 4$, X-અક્ષ અને રેખાઓ $x = -1$ તથા $x = 2$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
3. વક્ર $y = x^2$, $x = -2$ અને $x = 1$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
4. વક્ર $y = \sqrt{x-1}$, Y-અક્ષ અને રેખાઓ $y = 1$ તથા $y = 5$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
5. પરવલય $y = -x^2 + 4$ તથા X-અક્ષ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
6. પરવલય $y = 9 - x^2$ તથા X-અક્ષ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
7. વર્તુળ $x^2 + y^2 = a^2$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
8. પરવલય $y = x^2$ અને રેખા $y = 4$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ મેળવો.

*

4.3 બે વક્રો વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ

આ વિભાગમાં આપણે રેખા અને વર્તુળ, રેખા અને પરવલય, રેખા અને ઉપવલય, વર્તુળ અને પરવલય, બે વર્તુળ વગેરે દ્વારા આવૃત્ત પ્રદેશનાં ક્ષેત્રફળ શોધીશું.

બે છેદતાં વક્રો વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ કેવી રીતે મેળવી શકાય તેનો સાહજિક વિચાર કરીએ. અગાઉ ચર્ચા કર્યા મુજબ વક્ર $y = f_1(x)$, $x = a$, $x = b$ અને X-અક્ષ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ, $A_1 = |I_1|$ જ્યાં $I_1 = \int_a^b f_1(x)\, dx$. અહીં $I_1 \geq 0$ કારણ કે આપણે $f_1(x) \geq 0$ ધારેલ છે. (જુઓ આકૃતિ 4.15)

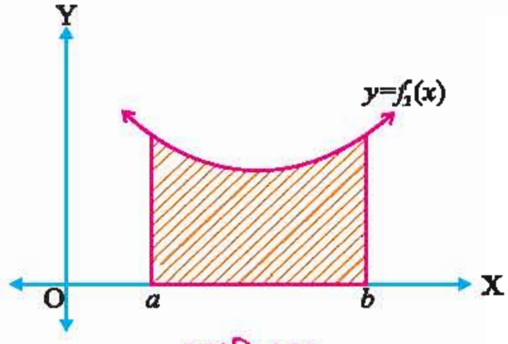


આકૃતિ 4.15

આકૃતિ 4.16 માં દર્શાવ્યા મુજબ વક્ર $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$ અને X-અક્ષ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ,

$A_2 = |I_2|$ જ્યાં $I_2 = \int_a^b f_2(x)\,dx$.

અહીં $f_2(x) \geq 0$ હોવાથી $I_2 \geq 0$ થશે.

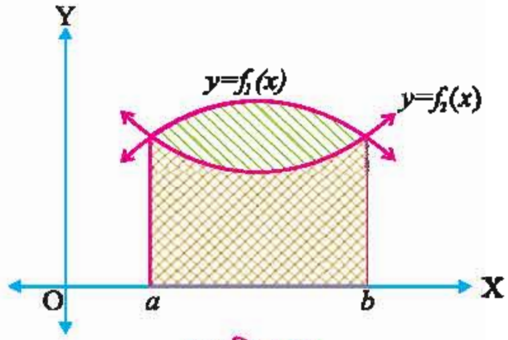


આકૃતિ 4.16

જો બે વક્રો $y = f_1(x)$ અને $y = f_2(x)$ પરસ્પર માત્ર બે બિંદુઓમાં છેદે અને તેમના x યામ a અને b $(a \neq b)$ હોય, તો આ બે વક્રો વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ $A = |I|$

જ્યાં $I = I_1 - I_2 = \int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b f_2(x)\,dx$

$$= \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\,dx$$

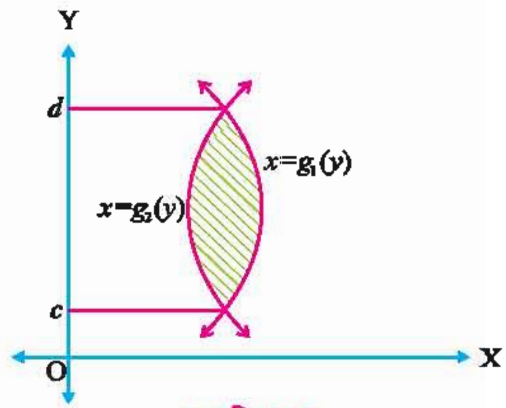


આકૃતિ 4.17

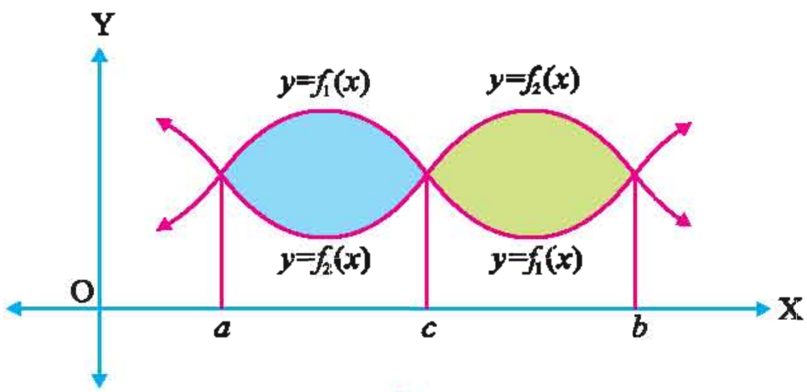
જો બે વક્રો $x = g_1(y)$ અને $x = g_2(y)$ પરસ્પર માત્ર બે બિંદુઓમાં છેદે અને તેમના y યામ c અને d $(c \neq d)$ હોય તો આ બે વક્રો વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ $A = |I|$.

જ્યાં $I = \int_c^d (g_1(y) - g_2(y))\,dy$.

અહીં આપણે ધારી લઈએ છીએ કે $g_1(y) \geq 0$, $g_2(y) \geq 0$.



આકૃતિ 4.18



આકૃતિ 4.19

આપેલ પ્રદેશમાં જો બંને વક્રો એક વખત એકબીજાને ઓળંગી પસાર થતા હોય તો આકૃતિ 4.19માં દર્શાવ્યા મુજબ આપેલ પ્રદેશના બે ભાગ કરવા પડે. ધારો કે $x = a$ અને $x = b$ વચ્ચે આવૃત્ત વક્રો $y = f_1(x)$ અને $y = f_2(x)$ નું ક્ષેત્રફળ શોધવું

છે તથા ધારો કે વક્રો a તથા b વચ્ચે c આગળ એકબીજાને છેદે છે તો ક્ષેત્રફળ $A = |I_1| + |I_2|$.

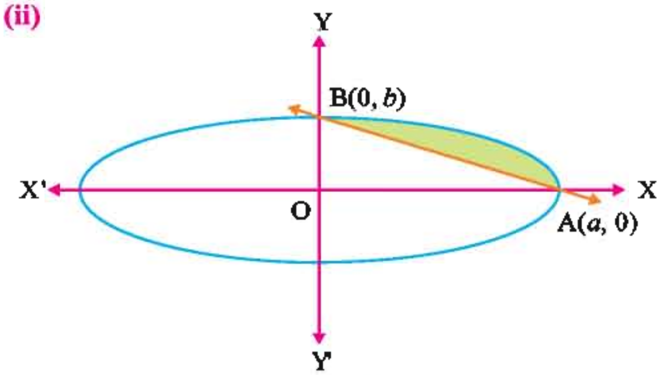
જ્યાં $I_1 = \int_a^c (f_1(x) - f_2(x))\,dx$, $I_2 = \int_c^b (f_1(x) - f_2(x))\,dx$

ઉદાહરણ 5 : ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ અને રેખા $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ વડે આવૃત્ત બે પ્રદેશમાંથી નાના પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : રેખા $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (i)

અને ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ આપેલ છે. (ii)

સ્પષ્ટ છે કે આપેલ રેખા ઉપવલયને A(a, 0) અને B(0, b)માં છેદે છે. માંગેલ પ્રદેશ આકૃતિ 4.20માં રંગીન પ્રદેશ તરીકે દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 4.20

ઉપવલય માટે $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ (પ્રથમ ચરણમાં)

હવે, ΔAOBનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}OA \cdot OB$

$$= \frac{1}{2}ab \qquad \text{(iii)}$$

વળી, પ્રથમ ચરણમાં આવૃત્ત ઉપવલયનું ક્ષેત્રફળ

$$\int_0^a y\,dx = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

$$= \frac{b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$$

$$= \frac{b}{a}\left[\frac{a^2}{2} sin^{-1} 1\right] = \frac{\pi ab}{4} \qquad \text{(iv)}$$

$\therefore$ (iii) અને (iv) પરથી

માંગેલ ક્ષેત્રફળ $= \left|\frac{\pi ab}{4} - \frac{1}{2}ab\right| = \left|\frac{(\pi - 2)ab}{4}\right| = \frac{(\pi - 2)ab}{4}$ કારણ કે $\pi > 2$.

બીજી રીત : માંગેલ ક્ષેત્રફળ $= |I|$

અહીં $I = \int_0^a (f_1(x) - f_2(x))\,dx$, જ્યાં $f_1(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ અને $f_2(x) = b\left(1 - \frac{x}{a}\right)$

$$= \int_0^a \left[\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} - b\left(1 - \frac{x}{a}\right)\right] dx$$

$$= \left[\frac{b}{a}\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} sin^{-1}\frac{x}{a}\right) - b\left(x - \frac{x^2}{2a}\right)\right]_0^a$$

$$= \left[\frac{b}{a}\left(0 + \frac{a^2}{2} sin^{-1} 1\right) - b\left(a - \frac{a}{2}\right)\right] - (0)$$

$$= \frac{\pi ab}{4} - \frac{ab}{2}$$

$= \frac{(\pi - 2)ab}{4}$

$\therefore \quad A = \left| \frac{(\pi - 2)ab}{4} \right| = \frac{(\pi - 2)ab}{4}$ કારણકે $\pi > 2$.

ઉદાહરણ 6 : વર્તુળ $x^2 + y^2 = 4$, રેખા $x - y\sqrt{3} = 0$ અને X-અક્ષ દ્વારા આવૃત્ત પ્રથમ ચરણમાં આવેલ પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો

ઉકેલ : આપેલ વક્રો $x^2 + y^2 = 4$ અને $x - y\sqrt{3} = 0$ છે.

$\therefore \quad x^2 + y^2 = 4$ માં $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ મૂકતાં,

$x^2 + \frac{x^2}{3} = 4$

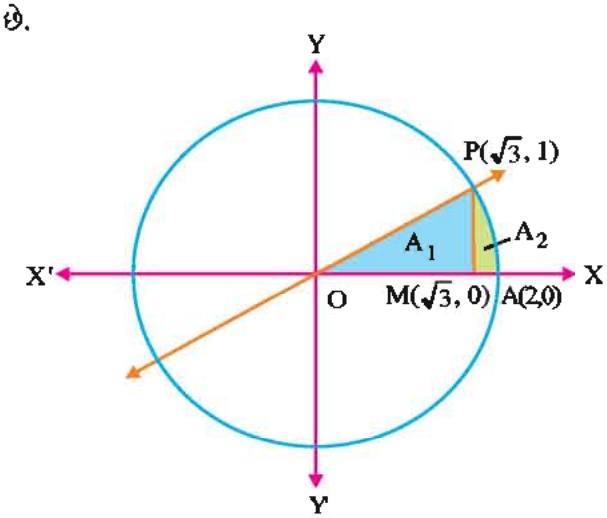
$\therefore \quad 4x^2 = 12$

$\therefore \quad x = \pm\sqrt{3}$

પ્રથમ ચરણમાં $x = \sqrt{3}$ અને તેથી $y = \frac{x}{\sqrt{3}} = 1$.

$\therefore$ વર્તુળ અને રેખાનું પ્રથમ ચરણનું છેદબિંદુ $P(\sqrt{3}, 1)$ મળે.

$\overline{PM} \perp$ X-અક્ષ અને $M(\sqrt{3}, 0)$ એ લંબપાદ છે



આકૃતિ 4.21

માંગેલ વૃત્તાંશ OPAનું ક્ષેત્રફળ

$= \Delta OPM$નું ક્ષેત્રફળ + વર્તુળ $x^2 + y^2 = 4$, X-અક્ષ અને રેખા $x = \sqrt{3}$ અને $x = 2$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ

$\therefore \quad A = A_1 + A_2$

$A_1 = \Delta OPM$નું ક્ષેત્રફળ

$= \frac{1}{2} OM \times PM$

$= \frac{1}{2}\sqrt{3} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **(i)**

$A_2 = |I|$

જ્યાં $I = \int_{\sqrt{3}}^{2} y\,dx = \int_{\sqrt{3}}^{2} \sqrt{4 - x^2}\,dx$ **(પ્રથમ ચરણમાં $y > 0$)**

$= \left[\frac{x}{2}\sqrt{4 - x^2} + \frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_{\sqrt{3}}^{2}$

$= \left(0 + 2\sin^{-1} 1\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \pi - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \quad A_2 = \left| \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ **(ii)**

$\left[\pi > 3 \text{ હોવાથી } \frac{\pi}{3} > 1 \text{ અને } \sqrt{3} < 2 \text{ હોવાથી } \frac{\sqrt{3}}{2} < 1. \text{ આથી, } \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} > 0\right]$

$\therefore$ માંગેલ ક્ષેત્રફળ $A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$

બીજી રીત : માંગેલ ક્ષેત્રફળ A = |I|

જ્યાં $I = \int_0^1 (g_1(y) - g_2(y))\, dy$, જ્યાં $g_1(y) = \sqrt{4-y^2}$ અને $g_2(y) = \sqrt{3}y$

$$= \int_0^1 \left(\sqrt{4-y^2} - \sqrt{3}y\right) dy$$

$$= \left[\frac{y}{2}\sqrt{4-y^2} + \frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{y}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}y^2\right]_0^1$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sin^{-1}\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$\therefore \quad A = \frac{\pi}{3}$

નોંધ : $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ નો અર્થ એ કે $y = mx$, જ્યાં $m = \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ અને $\theta = m\angle POM$

આથી $m\angle POM = \frac{\pi}{6}$.

$\therefore$ વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

આપણને લાગશે કે કલનશાસ્ત્ર કરતાં ભૌમિતિક રીતે ક્ષેત્રફળ શોધવું સહેલું છે. પરંતુ વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ $\frac{1}{2}r^2\theta$ પણ સંકલનના ઉપયોગથી જ મળે છે.

ઉદાહરણ 7 : પરવલય $y = x^2$ અને કિરણો $y = |x|$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : વક્રો $y = x^2$ **(i)**

અને $y = |x|$ આપેલ છે. **(ii)**

આપેલ બંને વક્રો જે બિંદુમાં છેદે ત્યાં $x^2 = |x|$ થાય.

$\therefore \quad |x|^2 - |x| = 0 \qquad (x^2 = |x|^2)$

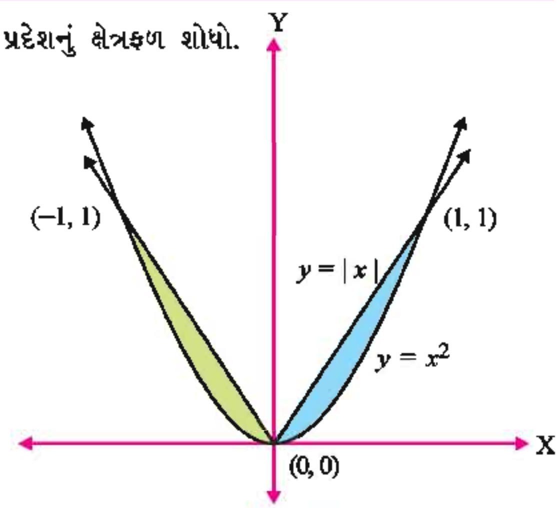
$\therefore \quad |x|(|x| - 1) = 0$

$\therefore \quad x = 0$ or $x = \pm 1$

જો $x = 0$ હોય તો $y = 0$ અને

જો $x = \pm 1$ હોય તો $y = 1$ થાય.

આમ, આપેલ બંને વક્ર બિંદુઓ (−1, 1), (0, 0) અને (1, 1) માં છેદશે.



આકૃતિ 4.22

આપણે આપેલ બંને વક્રો વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધવું છે અને તેને આકૃતિ 4.22માં રંગીન પ્રદેશ વડે દર્શાવેલ છે.

બંને વક્રો Y-અક્ષ પરત્વે સંમિત હોવાથી,

માંગેલ ક્ષેત્રફળ A = 2(પ્રથમ ચરણમાં દર્શાવેલ રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ)

$= 2|I|$ જ્યાં $I = \int_0^1 (f_1(x) - f_2(x))\, dx$, જ્યાં $f_1(x) = |x|$ અને $f_2(x) = x^2$

$$I = \int_0^1 (|x| - x^2)\, dx$$

$$= \int_0^1 (x - x^2)\, dx \qquad ([0, 1]\text{માં } |x| = x)$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] = \frac{1}{6}$$

$\therefore$ માંગેલ ક્ષેત્રફળ $A = 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

ઉદાહરણ 8 : પરવલય $x^2 = 4y$ તથા વર્તુળ $x^2 + y^2 = \frac{9}{4}$ દ્વારા ઘેરાયેલ પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : વર્તુળ $x^2 + y^2 = \frac{9}{4}$. **(i)**

અને પરવલય $x^2 = 4y$ આપેલ છે. **(ii)**

બંને વક્રો જે બિંદુમાં છેદે ત્યાં $4y = \frac{9}{4} - y^2$ (બંનેની કિંમત x^2 છે.)

$\therefore$ $16y = 9 - 4y^2$

$\therefore$ $4y^2 + 16y - 9 = 0$

$\therefore$ $(2y - 1)(2y + 9) = 0$

$\therefore$ $y = \frac{1}{2}$ અથવા $y = -\frac{9}{2}$

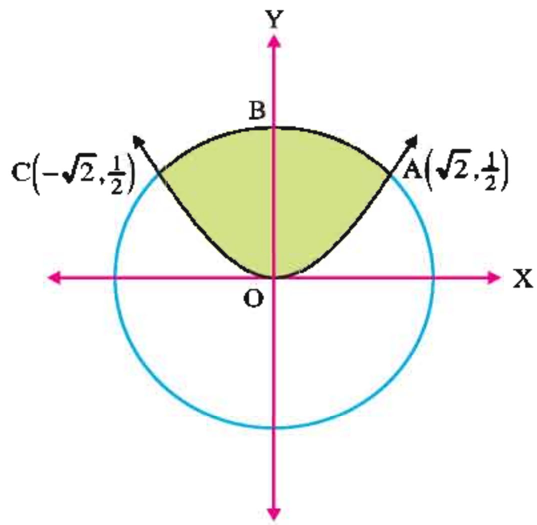
પરંતુ $y \nless 0$, (કેમ ?)

આથી બંને વક્રો જે બિંદુમાં છેદે ત્યાં $y = \frac{1}{2}$.

$\therefore$ $x^2 = 4y = 4 \times \frac{1}{2} = 2$

$\therefore$ $x = \pm\sqrt{2}$

$\therefore$ બંને વક્રો $\left(-\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right)$ અને $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right)$ બિંદુઓમાં છેદશે.



આકૃતિ 4.23

બંને વક્રો Y-અક્ષ પરત્વે સંમિત હોવાથી.

માંગેલ ક્ષેત્રફળ $= 2$(OABO પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ)

$= 2|I|$

જ્યાં $I = \int_0^{\sqrt{2}} (f_1(x) - f_2(x))\, dx$, જ્યાં $f_1(x) = \sqrt{\frac{9}{4} - x^2}$ અને $f_2(x) = \frac{x^2}{4}$.

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{9}{4} - x^2} - \frac{x^2}{4}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x}{2}\sqrt{\frac{9}{4} - x^2} + \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2} \sin^{-1}\frac{x}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{12}\right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$= \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{9}{4} - 2} + \frac{9}{8}\sin^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) - \frac{2\sqrt{2}}{12}\right]$$

$$= \left[\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{9}{8}\sin^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) - \frac{\sqrt{2}}{6}\right]$$

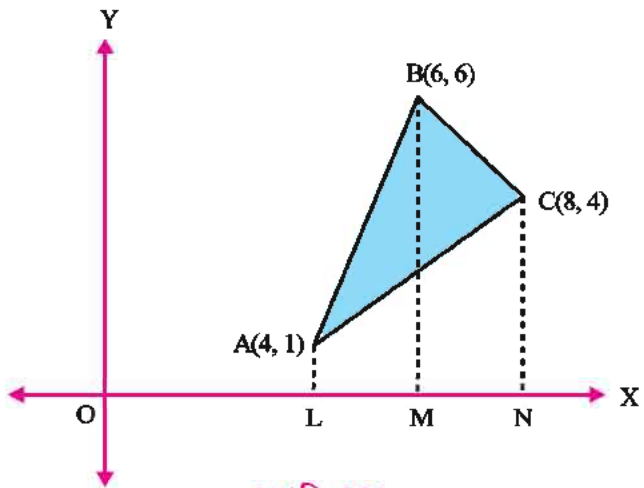
$$= \frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{9}{8}\sin^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

$\therefore$ માંગેલ ક્ષેત્રફળ $= 2\left[\frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{9}{8} sin^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right]$

$$= \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{9}{4} sin^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

ઉદાહરણ 9 : જેનાં શિરોબિંદુઓ (4, 1), (6, 6) અને (8, 4) હોય તેવા ત્રિકોણને સંગત ત્રિકોણીય પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ સંકલનના ઉપયોગથી શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે A(4, 1), B(6, 6) અને C(8, 4) એ ત્રિકોણ ABC નાં શિરોબિંદુઓ છે. (જુઓ આકૃતિ 4.24)



આકૃતિ 4.24

$\overleftrightarrow{AB}$નું સમીકરણ $\frac{y-1}{6-1} = \frac{x-4}{6-4}$ છે.

$\therefore \quad y - 1 = \frac{5}{2}(x - 4)$

$\therefore \quad y - 1 = \frac{5}{2}x - 10$

$\therefore \quad y = \frac{5}{2}x - 9$

તે જ રીતે $\overleftrightarrow{BC}$નું સમીકરણ $y = -x + 12$ તથા $\overleftrightarrow{AC}$નું સમીકરણ $y = \frac{3}{4}x - 2$ થશે.

ધારો કે A, B, C માંથી X-અક્ષ પર દોરેલ લંબના લંબપાદ અનુક્રમે L, M, N છે.

હવે ΔABC નું ક્ષેત્રફળ = પ્રદેશ ALMBનું ક્ષેત્રફળ + પ્રદેશ BMNCનું ક્ષેત્રફળ − પ્રદેશ ALNCનું ક્ષેત્રફળ.

$$= | I_1 | + | I_2 | - | I_3 |$$

$$= \left| \int_4^6 \left(\frac{5}{2}x - 9\right) dx \right| + \left| \int_6^8 (-x + 12)\, dx \right| - \left| \int_4^8 \left(\frac{3}{4}x - 2\right) dx \right|$$

$$= \left| \left[\frac{5x^2}{4} - 9x\right]_4^6 \right| + \left| \left[-\frac{x^2}{2} + 12x\right]_6^8 \right| - \left| \left[\frac{3x^2}{8} - 2x\right]_4^8 \right|$$

$$= \left| \left[\left(\frac{5}{4}(36) - 54\right) - \left(\frac{5}{4}(16) - 36\right)\right] \right| + \left| \left[\left(-\frac{64}{2} + 96\right) - \left(-\frac{36}{2} + 72\right)\right] \right|$$

$$- \left| \left[\left(\frac{3}{8}(64) - 16\right) - \left(\frac{3}{8}(16) - 8\right)\right] \right|$$

$= |(-9 + 16)| + |(64 - 54)| - |(8 + 2)|$

$= 7 + 10 - 10$

$\therefore$ માંગેલ ક્ષેત્રફળ $= 7$

નોંધ : ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ $\Delta = \frac{1}{2}|D|$

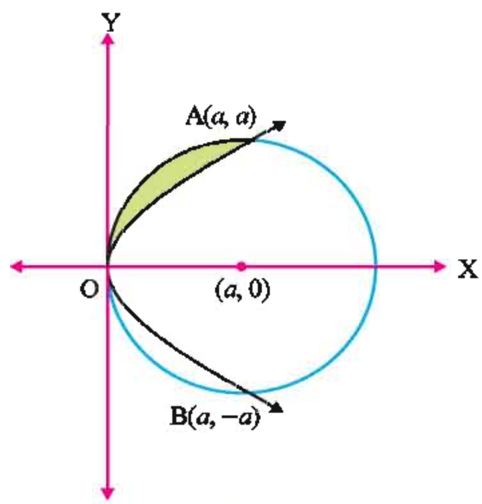
$$\text{જ્યાં } D = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 6 & 6 & 1 \\ 8 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 4(2) - 1(-2) + 1(-24) = -14$$

$$\therefore \quad \Delta = \frac{1}{2}|-14| = 7$$

ઉદાહરણ 10 : વર્તુળ $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ અને પરવલય $y^2 = ax$, $a > 0$ વડે પ્રથમ ચરણમાં આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : સમીકરણ $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ ને $(x - a)^2 + y^2 = a^2$ તરીકે લખી શકાય. આ સમીકરણ $(a, 0)$ કેન્દ્રવાળુ તથા a ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ દર્શાવે છે. વક્ર, $y^2 = ax$ એ પરવલય છે અને તેનું શીર્ષ $(0, 0)$ અને તેનો અક્ષ X-અક્ષ છે.



આકૃતિ 4.25

$x^2 + y^2 - 2ax = 0$ માં $y^2 = ax$ મૂકતાં બંને વક્રોનાં છેદબિંદુ મળે

$x^2 + ax - 2ax = 0$

$\therefore \quad x^2 - ax = 0$

$\therefore \quad x(x - a) = 0$

$\therefore \quad x = 0$ અથવા $x = a$

$y^2 = ax$ હોવાથી

$y = 0$ અથવા $y = \pm a$

$\therefore$ બંને વક્રો $O(0, 0)$, $A(a, a)$ અને $B(a, -a)$ બિંદુઓમાં છેદે છે.

$\therefore \quad x^2 + y^2 = 2ax$ પરથી $y = \sqrt{2ax - x^2}$ અને $y^2 = ax$ પરથી $y = \sqrt{ax}$ $\qquad (y \geq 0)$

માંગેલ ક્ષેત્રફળ $= |I|$

$$I = \int_0^a (f_1(x) - f_2(x))\, dx, \text{ જ્યાં } f_1(x) = \sqrt{2ax - x^2} \text{ તથા } f_2(x) = \sqrt{ax}.$$

$$= \int_0^a \left(\sqrt{2ax - x^2} - \sqrt{ax}\right) dx \qquad \text{(પ્રથમ ચરણમાં)}$$

$$= \int_0^a \left(\sqrt{a^2 - (x-a)^2} - \sqrt{a}\sqrt{x}\right) dx$$

$$= \left[\left(\frac{x-a}{2}\right)\sqrt{a^2 - (x-a)^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) - \sqrt{a}\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^a$$

$$= \left[-\frac{2}{3}\sqrt{a}\cdot a^{\frac{3}{2}} - \frac{a^2}{2}\sin^{-1}(-1)\right]$$

$$I = -\frac{2}{3}a^2 + \frac{a^2\pi}{4} = \left(\frac{3\pi-8}{12}\right)a^2$$

$$\therefore \quad A = \left(\frac{3\pi-8}{12}\right)a^2$$

ઉદાહરણ 11 : પરવલય $y = x^2 + 2$ તથા રેખાઓ $y = x$, $x = 3$ અને $x = 0$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : અહીં $y = x^2 + 2$

$\therefore$ $x^2 = y - 2$, પરવલય છે અને તેનું શીર્ષ $(0, 2)$ છે તથા તે ઉપરની તરફ ખુલે છે.

આપણે પરવલય $y = x^2 + 2$, રેખાઓ $y = x$, $x = 3$ અને $x = 0$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું આલેખન કરીએ.

માંગેલ ક્ષેત્રફળ $A = |I|$ જ્યાં,

$$I = \int_0^3 (f_1(x) - f_2(x))\,dx,$$

અહીં $f_1(x) = x^2 + 2$ તથા $f_2(x) = x$.

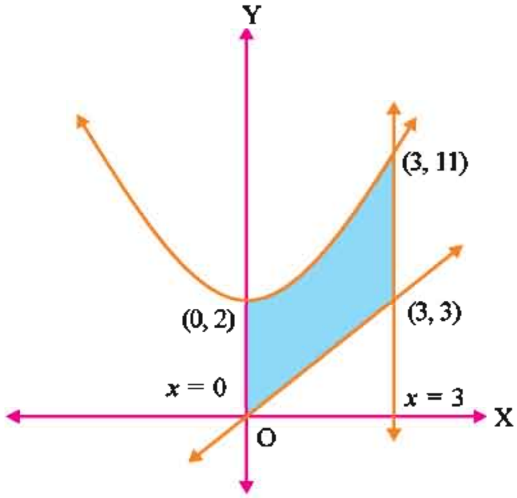
$$= \int_0^3 (x^2 + 2 - x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{x^2}{2}\right]_0^3$$

$$= 9 + 6 - \frac{9}{2}$$

$$= \frac{21}{2}$$

$$\therefore \quad A = \frac{21}{2}$$



આકૃતિ 4.26

ઉદાહરણ 12 : વક્ર $y = 4 - x^2$, $x = 0$, $x = 3$ અને X-અક્ષ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : અહીં $y = 4 - x^2$

આથી, $x^2 = 4 - y$

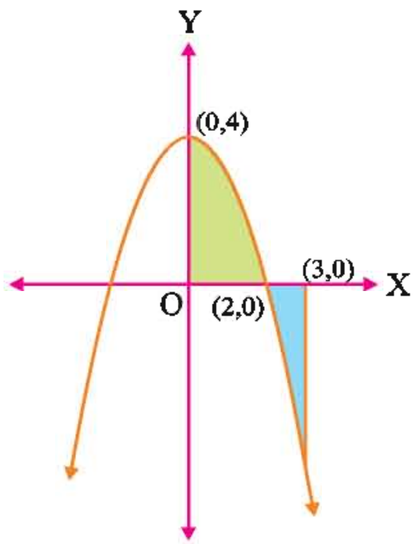
$\therefore$ $x^2 = -(y - 4)$ પરવલય દર્શાવે છે. તેનું શીર્ષ $(0, 4)$ છે અને તે નીચેની તરફ ખુલે છે. તેના X-અક્ષ સાથેનાં છેદબિંદુઓ શોધવા $y = 0$ લેતાં,

$\therefore$ $4 - x^2 = 0$

$\therefore$ $x = \pm 2$

તેથી વક્રનાં X-અક્ષ સાથેનાં છેદબિંદુઓ $(2, 0)$ અને $(-2, 0)$.

અહીં વક્ર અને X-અક્ષથી આવૃત્ત પ્રદેશની સીમાઓ $x = 0$ અને $x = 3$ છે. વક્ર $(0, 0)$ અને $(3, 0)$ વચ્ચેના બિંદુ $(2, 0)$ આગળ X-અક્ષને છેદે છે.



આકૃતિ 4.27

આથી, $A = |I_1| + |I_2|$

જ્યાં $I_1 = \int_0^2 y\,dx, \quad I_2 = \int_2^3 y\,dx$

$$I_1 = \int_0^2 (4 - x^2)\,dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

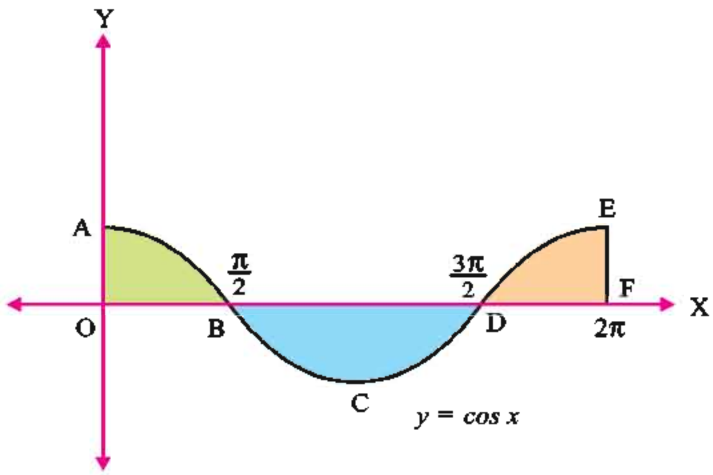
$$I_2 = \int_2^3 (4 - x^2)\,dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_2^3 = (12 - 9) - \left(8 - \frac{8}{3}\right)$$

$$= 3 - \frac{16}{3} = -\frac{7}{3}$$

$\therefore$ માંગેલ ક્ષેત્રફળ $A = \left|\frac{16}{3}\right| + \left|-\frac{7}{3}\right| = \frac{16}{3} + \frac{7}{3} = \frac{23}{3}$

ઉદાહરણ 13 : વક્ર $y = cosx$ ના $x = 0$ અને $x = 2\pi$ વચ્ચે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ :



આકૃતિ 4.28

આકૃતિ 4.28 પરથી માંગેલ ક્ષેત્રફળ = પ્રદેશ OABOનું ક્ષેત્રફળ + પ્રદેશ BCDBનું ક્ષેત્રફળ + પ્રદેશ DEFDનું ક્ષેત્રફળ

$\therefore$ માંગેલ ક્ષેત્રફળ $= \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} cosx\,dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} cosx\,dx\right| + \left|\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} cosx\,dx\right|$

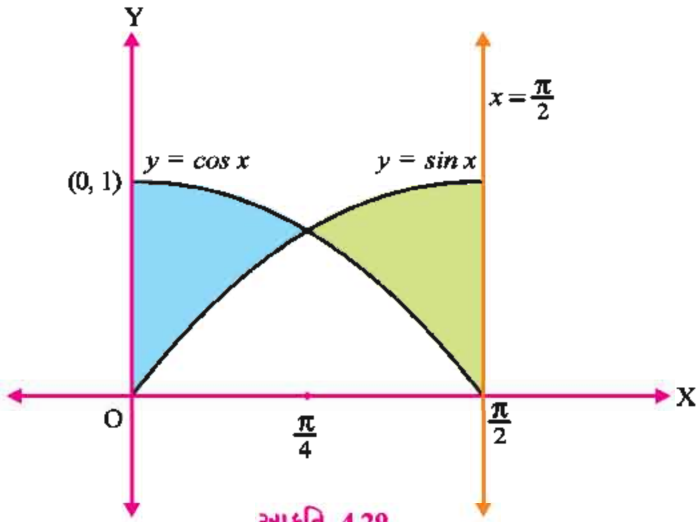
$$= \left|[sin\,x]_0^{\frac{\pi}{2}}\right| + \left|[sin\,x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\right| + \left|[sin\,x]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\right|$$

$$= |(1 - 0)| + |(-1 - 1)| + |(0 + 1)|$$

$$= 1 + 2 + 1 = 4$$

ઉદાહરણ 14 : વક્ર $y = sinx$, $y = cosx$, $x = \frac{\pi}{2}$ અને Y-અક્ષ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : પ્રથમ આપણે માંગેલ પ્રદેશનું આલેખન કરીએ.



આકૃતિ 4.29

હવે, આપણે માંગેલ ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે બે સંકલન કરવા પડશે તેવું આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ જોઈ શકાય છે. બંને વક્રો $y = \sin x$ અને $y = \cos x$ જે બિંદુમાં છેદે ત્યાં $\sin x = \cos x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ અને તેને માટે $x = \frac{\pi}{4}$ છે. (શા માટે ?)

માંગેલ ક્ષેત્રફળ $A = |I_1| + |I_2|$

જ્યાં $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (f_1(x) - f_2(x))\, dx$, જ્યાં $f_1(x) = \cos x$ અને $f_2(x) = \sin x$.

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\, dx$$

$$= [\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - (0 + 1)\right] = \sqrt{2} - 1 \qquad \text{(i)}$$

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (f_1(x) - f_2(x))\, dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x)\, dx$$

$$= [\sin x + \cos x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[(1 + 0) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$= 1 - \sqrt{2} < 0 \qquad \text{(ii)}$$

$$|I_2| = \sqrt{2} - 1$$

(i) અને (ii) પરથી માંગેલ ક્ષેત્રફળ $A = |I_1| + |I_2| = \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2} - 1 = 2(\sqrt{2} - 1)$

સ્વાધ્યાય 4.2

1. પરવલય $4y = 3x^2$ અને રેખા $2y = 3x + 12$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
2. પરવલય $y = 2x - x^2$ અને રેખા $y = -x$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
3. વક્ર $f(x) = cos\pi x$ નું X-અક્ષ સાથે આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો, જ્યાં $x \in [0, 2]$.
4. પરવલય $f(x) = 4 - x^2$ અને $g(x) = x^2 - 4$ વચ્ચે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
5. રેખા $y = x$, $y = 1$ અને પરવલય $y = \frac{x^2}{4}$ દ્વારા પ્રથમ ચરણમાં આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
6. રેખાઓ $x = -2$ અને $x = 0$ વચ્ચે પરવલય $y = x^2 + 5x$ તથા $y = 3 - x^2$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
7. પરવલય $y = x^2$, રેખા $y = 2 - x$ અને રેખા $y = 1$ થી ઉપરના આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
8. પરવલય $y = 2x^2 + 10$ અને રેખા $y = 4x + 16$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
9. સંકલનના ઉપયોગથી નીચે આપેલ બાજુઓનાં સમીકરણથી રચાતા ત્રિકોણીય પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો :
   $y = 2x + 1$, $y = 3x + 1$ અને $x = 4$.
10. સંકલનની મદદથી આપેલ શિરોબિંદુઓથી રચાતા ત્રિકોણના ત્રિકોણીય પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો : $(-1, 1)$, $(0, 5)$ અને $(3, 2)$.
11. વર્તુળ $x^2 + y^2 = 32$, X-અક્ષ અને રેખા $y = x$ દ્વારા પ્રથમ ચરણમાં આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ મેળવો.
12. પરવલય $y = 5 - x^2$, X-અક્ષ અને રેખાઓ $x = 2$ તથા $x = 3$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

*

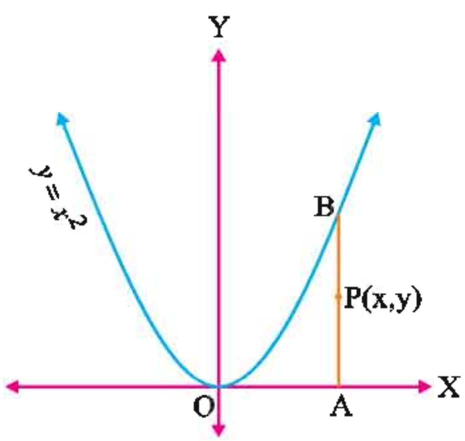
અસમતાઓ દ્વારા રચાતો પ્રદેશ

$\{(x, y) \mid 0 \le y \le x^2\}$ નો વિચાર કરીએ.

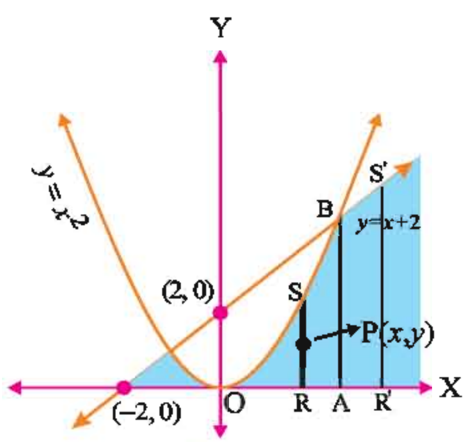
આકૃતિ 4.30માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે જો આપણે $\overline{AB}$ પર કોઈ પણ બિંદુ $P(x, y)$ લઈએ તો $y \ge 0$ અને $y \le x^2$ થાય.

આમ, જો પરવલય પર કોઈ પણ બિંદુ $B(x, x^2)$ અને X-અક્ષ પર કોઈ પણ બિંદુ A એવું હોય જ્યાં $\overline{AB} \perp$ X-અક્ષ તો કોઈ પણ બિંદુ $P(x, y) \in \overline{AB}$ એ $0 \le y \le x^2$નું પાલન કરશે.

હવે, $\{(x, y) \mid 0 \le y \le x^2, 0 \le y \le x + 2, x \ge 0\}$ નો વિચાર કરીએ.



આકૃતિ 4.30



આકૃતિ 4.31

આકૃતિ 4.31માં દર્શાવ્યા મુજબ જો આપણે $\overline{RS}$ પર કોઈ પણ બિંદુ $P(x, y)$ લઈએ તો $y \ge 0$, $y \le x^2$ અને $y \le x + 2$ થશે. તેજ રીતે $\overline{R'S'}$ પરના કોઈપણ બિંદુ માટે પણ મળશે.

આવા દરેક બિંદુ P દ્વારા આપેલ ગણની અસમતાઓનું સમાધાન થાય તેવી આકૃતિ 4.31માં રંગીન પ્રદેશ દ્વારા દર્શાવેલ છે.

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ 15 : $\{(x, y) \mid 0 \le y \le x^2, 0 \le y \le x + 2, 0 \le x \le 3\}$ થી રચાતા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : પ્રથમ આપણે જે પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધવું છે તે પ્રદેશનું આલેખન કરીએ.

અહીં, $0 \le y \le x^2$ (i)

$0 \le y \le x + 2$ (ii)

$0 \le x \le 3$ (iii)

વક્ર $y = x^2$ પરવલય છે અને તેનું શીર્ષ ઊગમબિંદુ છે.

રેખા $y = x + 2$ તથા પરવલય $y = x^2$ જે બિંદુમાં છેદે

ત્યાં $x + 2 = x^2$

$\therefore \quad x^2 - x - 2 = 0$

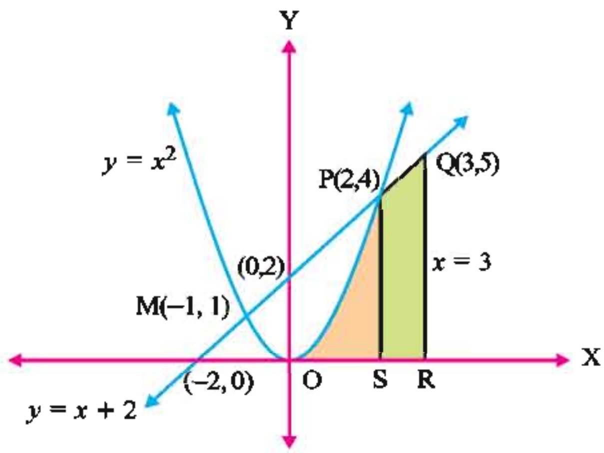
$\therefore \quad (x - 2)(x + 1) = 0$

$\therefore \quad x = 2, -1$

$x = 2$ માટે $y = 4$ અને $x = -1$ માટે $y = 1$

આમ, $y = x^2$ અને $y = x + 2$ નાં છેદબિંદુઓ P(2, 4) અને M(−1, 1) છે.

$0 \le x \le 3$ હોવાથી આકૃતિ 4.32માં માંગેલ પ્રદેશ OPQRSO થશે.



આકૃતિ 4.32

માંગેલ ક્ષેત્રફળ A = પ્રદેશ OPSOનું ક્ષેત્રફળ + પ્રદેશ SPQRSનું ક્ષેત્રફળ

પ્રદેશ OPSO એ વક્ર $y = x^2$, $x = 0$, $x = 2$ અને X-અક્ષ દ્વારા આવૃત્ત છે.

જ્યારે પ્રદેશ SPQRS એ રેખા $y = x + 2$, $x = 2$, $x = 3$ અને X-અક્ષ દ્વારા આવૃત્ત છે.

$$\therefore \quad \text{માંગેલ ક્ષેત્રફળ} = \int_0^2 x^2 dx + \int_2^3 (x + 2)\, dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_2^3$$

$$= \left(\frac{8}{3} - 0\right) + \left(\frac{9}{2} + 6\right) - (2 + 4)$$

$$= \frac{43}{6}$$

ઉદાહરણ 16 : બે વર્તુળો $x^2 + y^2 = 1$ અને $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ વડે આવૃત્ત સામાન્ય પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $x^2 + y^2 = 1$

$\therefore \quad y^2 = 1 - x^2$

$(x - 1)^2 + y^2 = 1$

$\therefore \quad y^2 = 1 - (x - 1)^2$

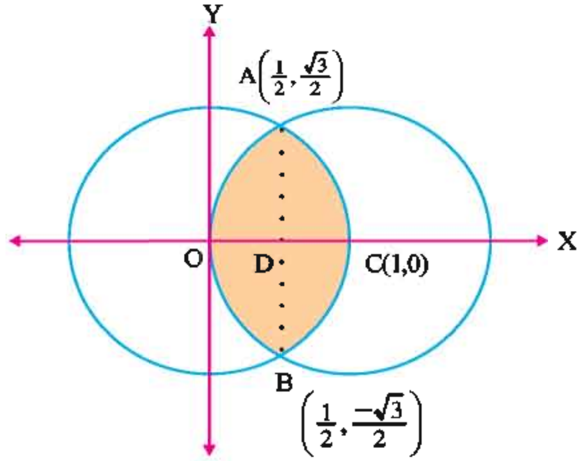
બંને વર્તુળના છેદબિંદુ માટે, $1 - x^2 = 1 - (x - 1)^2$

$\therefore \quad -x^2 = -x^2 + 2x - 1$

$\therefore \quad x = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad y = \pm\sqrt{1 - x^2} = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

આમ, બંને વર્તુળ A $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ તથા, B $\left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ બિંદુમાં છેદે છે.



આકૃતિ 4.33

માંગેલ ક્ષેત્રફળ = પ્રદેશ OACBOનું ક્ષેત્રફળ

બંને વક્ર X-અક્ષ પરત્વે સંમિત હોવાથી ક્ષેત્રફળ

= 2(પ્રદેશ OACDOનું ક્ષેત્રફળ)

= 2(પ્રદેશ OADOનું ક્ષેત્રફળ + પ્રદેશ DACDનું ક્ષેત્રફળ)

પ્રદેશ OADO એ વર્તુળ $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ એટલે કે,

$y = \sqrt{1-(x-1)^2}$ (પ્રથમ ચરણ) તથા રેખાઓ $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ અને X-અક્ષ વડે આવૃત્ત છે. પ્રદેશ DACD એ વર્તુળ $x^2 + y^2 = 1$ એટલે કે $y = \sqrt{1-x^2}$ તથા રેખાઓ $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$ અને X-અક્ષ વડે આવૃત્ત છે.

માંગેલ ક્ષેત્રફળ બે ક્ષેત્રફળના સરવાળાથી મળશે.

માંગેલ ક્ષેત્રફળ $= 2\left[\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-(x-1)^2}\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx\right]$ ($|\,I_1\,| + |\,I_2\,|$ કેમ નહીં ?)

$$= 2\left[\frac{1}{2}(x - 1)\sqrt{1-(x-1)^2} + \frac{1}{2}sin^{-1}(x - 1)\right]_0^{\frac{1}{2}} + 2\left[\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}sin^{-1}x\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= 2\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) - 0 - \frac{1}{2}sin^{-1}(-1)\right] +$$

$$2\left[0 + \frac{1}{2}sin^{-1}1 - \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}sin^{-1}\frac{1}{2}\right]$$

$$= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{12}\right)$$

$$= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = 2\left[\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right]$$

બીજી રીત :

માંગેલ ક્ષેત્રફળ = | I | જ્યાં,

$$I = \int_{\frac{-\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (g_1(y) - g_2(y))\,dy$$

જ્યાં $g_1(y) = \sqrt{1-y^2}$ અને $g_2(y) = 1 - \sqrt{1-y^2}$ (શા માટે ?)

$$I = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left[\sqrt{1-y^2} - \left(1 - \sqrt{1-y^2}\right)\right] dy$$

$$= 2\int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(2\sqrt{1-y^2} - 1\right) dy$$

$$= 4\int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\sqrt{1-y^2} - \frac{1}{2}\right) dy$$

$$= 4\left[\frac{y}{2}\sqrt{1-y^2} + \frac{1}{2}sin^{-1}y - \frac{y}{2}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= 4\left[\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{1-\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right]$$

$$= 4\left[\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right] = 2\left[\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right]$$

$\therefore$ માંગેલ ક્ષેત્રફળ $= 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

નોંધ : આકૃતિ 4.34 પરથી $OM = \frac{1}{2}$, $AM = \frac{\sqrt{3}}{2}$

આથી $m\angle AOM = \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ વૃતાંશ OACનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}(1)^2\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$

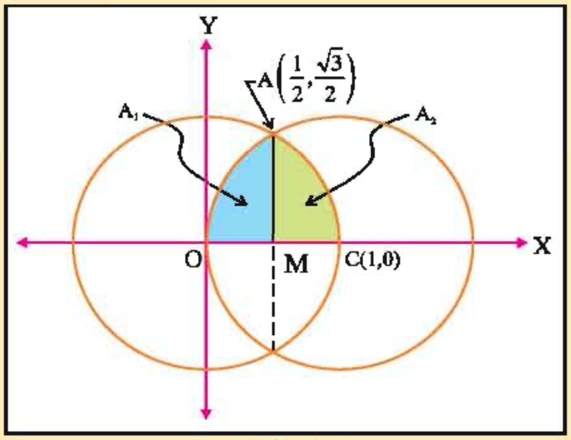
$\therefore$ ΔAOMનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}$

$\therefore$ $A_2 = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$

તે જ રીતે $A_1 = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$

$\therefore$ માંગેલ ક્ષેત્રફળ $= 2\left[\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right) + \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right)\right]$

$= \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$



આકૃતિ 4.34

સ્વાધ્યાય 4

1. વક્ર $y = x^2 - x - 6$ અને X-અક્ષ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

2. વક્ર $y = x^2 + 2$, રેખા $y = 3$ અને Y-અક્ષ વડે પ્રથમ ચરણમાં આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

3. વક્ર $y = (x - 1)(x - 2)$નું X-અક્ષ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

4. વર્તુળ $x^2 + y^2 = 3$, રેખા $x - y\sqrt{3} = 0$ અને X-અક્ષ વડે પ્રથમ ચરણમાં આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

5. વક્રો $y^2 = x + 1$ અને $y^2 = -x + 1$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

6. પરવલય $x^2 = 4y$ અને રેખા $x = 4y - 2$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

7. વર્તુળ $x^2 + y^2 = 8x$, પરવલય $y^2 = 4x$ અને X-અક્ષથી પ્રથમ ચરણમાં આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

8. રેખા $y = 3x + 2$, X-અક્ષ અને રેખાઓ $x = -1$ તથા $x = 1$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

9. સાબિત કરો કે પરવલય $y^2 = 4x$ અને $x^2 = 4y$ એ રેખાઓ $x = 0$, $x = 4$, $y = 4$ અને $y = 0$ થી રચાતા ચોરસનું ત્રણ સમક્ષેત્ર ભાગમાં વિભાજન કરે છે.

10. $\{(x, y) \mid 0 \le y \le x^2 + 1, 0 \le y \le x + 1, 0 \le x \le 2\}$થી રચાતા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

11. વર્તુળો $x^2 + y^2 = 4$ અને $x^2 + y^2 = 4x$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

12. પરવલય $y^2 = 8x$ અને રેખા $x + y = 0$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

13. સંકલનના ઉપયોગથી $|x| + |y| = 1$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

14. સંકલનના ઉપયોગથી $\{(x, y) \mid |x - 1| \le y \le \sqrt{5 - x^2}\}$થી રચાતા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

15. પરવલય $y^2 = x$ અને $x + y = 2$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

16. પરવલય $y = x^2 + 1$, રેખાઓ $y = x$, $x = 0$ અને $y = 2$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

17. **નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c), (d)માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :**

(1) રેખાઓ $y = x$, $y = 1$, $y = 3$ અને Y-અક્ષ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ ...... છે. ☐

(a) 2 (b) $\frac{9}{2}$ (c) 4 (d) $\frac{3}{2}$

(2) વક્ર $y = 2x - x^2$ અને X-અક્ષ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ ...... છે. ☐

(a) $\frac{8}{5}$ (b) 2 (c) 8 (d) $\frac{4}{3}$

(3) વક્ર $y = cosx$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ અને X-અક્ષ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ ...... છે. ☐

(a) 1 (b) 4 (c) 2 (d) π

(4) વક્ર $y = sinx$, $\pi \le x \le 2\pi$ અને X-અક્ષ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ ...... છે. ☐

(a) π (b) 2 (c) -2 (d) 0

(5) પરવલય $y = x^2$, X-અક્ષ અને રેખા $x = 4$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશના ક્ષેત્રફળના રેખા $x = a$ દ્વારા બે સમક્ષેત્ર ભાગ થતા હોય તો a ...... છે. ☐

(a) 2 (b) $2^{\frac{4}{3}}$ (c) $2^{\frac{5}{3}}$ (d) 4

(6) રેખા $x = 2y + 3$ અને રેખાઓ $y = 1$, $y = -1$ તથા Y-અક્ષ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ ...... છે. ☐

(a) 4 (b) $\frac{3}{2}$ (c) 6 (d) 8

(7) પરવલય $y^2 = 4ax$ અને તેના નાભિલંબ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ ...... છે. ☐

(a) $\frac{4}{3}a^2$ (b) $\frac{8}{3}a^2$ (c) $\frac{16}{3}a^2$ (d) $\frac{32}{3}a^2$

(8) પરવલય $y = 2x^2$, X-અક્ષ અને રેખા $x = 1$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ ...... છે.

(a) 2 (b) 1 (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{2}{3}$

(9) વક્ર $y = x|x|$, X-અક્ષ અને રેખાઓ $x = -1$ તથા $x = 1$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ ...... છે.

(a) 0 (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{4}{3}$

(10) વક્ર $y = cosx$, $y = sinx$, Y-અક્ષ અને $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ ...... છે.

(a) $2(\sqrt{2} - 1)$ (b) $\sqrt{2} - 1$ (c) $\sqrt{2} + 1$ (d) $\sqrt{2}$

(11) રેખા $y = 3 - x$ તથા X-અક્ષ વડે અંતરાલ $[0, 3]$માં ઘેરાયેલ પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ ...... છે.

(a) $\frac{9}{2}$ (b) 4 (c) 5 (d) $\frac{11}{2}$

(12) પરવલય $y = x^2$ અને $x = y^2$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ ...... છે.

(a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{12}$ (d) 1

(13) વક્ર $y = sinx$ તથા $x = 0$ અને $x = 2\pi$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ ...... છે.

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

(14) વક્ર $y = 3\,cosx$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, $y = 0$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ ...... છે.

(a) 3 (b) 1 (c) $\frac{3}{2}$ (d) $\frac{1}{2}$

(15) વક્ર $y = cos^2x$ તથા $x = 0$ અને $x = \pi$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ ...... છે.

(a) π (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) 2π (d) 2

(16) વક્ર $y = 2\sqrt{x}$ તથા રેખાઓ $x = 0$ અને $x = 1$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ ...... છે.

(a) $\frac{4}{3}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) 1 (d) $\frac{8}{3}$

(17) વક્ર $y = 2x - x^2$ નું X-અક્ષ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ ...... છે.

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) 1 (d) $\frac{4}{3}$

(18) રેખા $y = 3x$, X-અક્ષ અને રેખાઓ $x = 1$, $x = 3$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ ...... છે.

(a) 3 (b) 6 (c) 12 (d) 36

(19) વક્ર $y = |x - 5|$, X-અક્ષ અને રેખાઓ $x = 0$, $x = 1$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ ...... છે.

(a) $\frac{9}{2}$ (b) $\frac{7}{2}$ (c) 9 (d) 5

(20) પરવલય $y^2 = 4x$ અને રેખા $x = 3$ વચ્ચે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ ...... છે.

(a) $4\sqrt{3}$ (b) $8\sqrt{3}$ (c) $16\sqrt{3}$ (d) $5\sqrt{3}$

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. વક્ર $y = f(x)$, X-અક્ષ અને રેખાઓ $x = a$, $x = b$ વડે આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ $A = |I|$ જ્યાં $I = \int_a^b f(x)\,dx$.

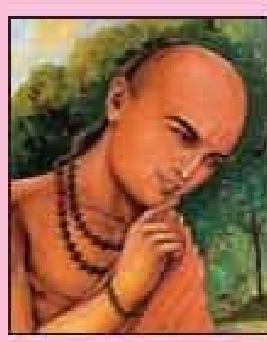
2. વક્ર $x = g(y)$, Y-અક્ષ અને રેખાઓ $y = c$, $y = d$ વડે આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ $A = |I|$ જ્યાં $I = \int_c^d g(y)\,dy$.

3. જો વક્ર $y = f(x)$ એ X-અક્ષને ફક્ત $(c, 0)$ બિંદુએ છેદે, જ્યાં $a < c < b$, તો વક્ર $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ અને X-અક્ષ વડે આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ $A = |I_1| + |I_2|$ જ્યાં $I_1 = \int_a^c f(x)\,dx$, $I_2 = \int_c^b f(x)\,dx$.

4. જો બે વક્ર $y = f_1(x)$ અને $y = f_2(x)$ પરસ્પર માત્ર $x = a$ અને $x = b$ $(a \neq b)$, માટે છેદતાં હોય, તો આ બે વક્રો વડે આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ $A = |I|$ જ્યાં $I = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\,dx$.

5. જો બે વક્રો $x = g_1(y)$ અને $x = g_2(y)$ પરસ્પર માત્ર $y = c$ અને $y = d$ $(c \neq d)$ માટે છેદતાં હોય, તો આ બે વક્રો વડે આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ $A = |I|$, જ્યાં $I = \int_c^d (g_1(y) - g_2(y))\,dy$.

BHASKARACHARYA



He was born in a village of Mysore district.

He was the first to give that any number divided by 0 gives infinity.

He has written a lot about zero, surds, permutation and combination.

He wrote, "The hundredth part of the circumference of a circle seems to be straight. Our earth is a big sphere and that's why it appears to be flat."

He gave the formulae like $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$

વિકલ સમીકરણો

5

Mathematics is the art of giving the same name to different things.

– Jules Henri

5.1 પ્રાસ્તાવિક

જો વિધેય y એ ચલ x નું વિધેય હોય તો તેને $y = f(x)$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે. અહીં x ને **સ્વતંત્ર ચલ (Independent Variable)** અને y ને **અવલંબી ચલ (Dependent Variable)** તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. $\frac{dy}{dx}$ કે $f'(x)$ શોધવાની વિવિધ રીતો આપણે અગાઉ શીખી ગયા. વળી સમીકરણ $f'(x) = g(x)$ એટલે કે $\frac{dy}{dx} = g(x)$ આપેલ હોય તો તે પરથી અનિયત સંકલન દ્વારા વિધેય f શોધવાની રીત પણ આપણે શીખી ગયા.

સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = g(x)$ માં સ્વતંત્ર ચલ x અને y નું x ને સાપેક્ષ વિકલિત આપેલા છે. આવા પ્રકારનાં સમીકરણને વિકલ સમીકરણ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. વિકલ સમીકરણની ગાણિતીક અર્થસભર વ્યાખ્યા હવે પછીથી આપીશું.

વિવિધ ક્ષેત્રોના વિવિધ પ્રકારના પ્રશ્નોના ઉકેલમાં વિકલ સમીકરણનો ઉપયોગ ખૂબ જ અગત્યનો પૂરવાર થયો છે; જેમ કે ભૌતિક શાસ્ત્ર, રસાયણ વિજ્ઞાન, જૈવિકશાસ્ત્ર, ઈજનેરી વિજ્ઞાન વગેરે. આપણે વિકલ સમીકરણની પાયાની સંકલ્પના, વિકલ સમીકરણના ઉકેલ અને પ્રથમ કક્ષાના એક પરિમાણી વિકલ સમીકરણના ઉકેલ તથા ઉપયોગોનો અભ્યાસ કરીશું.

નોંધ : જો વિધેય $y = f(x)$ એ ચલ x નું વિકલનીય વિધેય હોય, તો તેના પ્રથમ કક્ષાના વિકલિત ને $\frac{dy}{dx}$, y_1, y' કે $f'(x)$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે. જો $f'(x)$ પણ ચલ x નું વિકલનીય વિધેય હોય, તો વિધેય $y = f(x)$ ના દ્વિતીય કક્ષાના વિકલિતને $\frac{d^2y}{dx^2}$, y_2, y'' કે $f''(x)$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે. આ જ રીતે તૃતીય કક્ષાનાં, ચતુર્થ કક્ષાનાં વગેરે... વિકલિતો મેળવી શકાય છે. વ્યાપક રીતે વિધેય $y = f(x)$ ના n માં વિકલિતને $\frac{d^ny}{dx^n}$, y_n, $y^{(n)}$ કે $f^{(n)}(x)$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે. અહીં $y_n = \frac{d}{dx}(y_{n-1})$.

5.2 વિકલ સમીકરણ

સ્વતંત્ર ચલ, અવલંબી ચલ અને સ્વતંત્ર ચલને સાપેક્ષ અવલંબી ચલના વિકલિતો ને સમાવતા સમીકરણને વિકલ સમીકરણ (Differential equation) કહે છે.

x સ્વતંત્ર ચલ હોય, x પર અવલંબી ચલ y હોય એટલે કે $y = f(x)$ અથવા $G(x, y) = 0$ અને y ના x પ્રત્યેના વિકલિતો $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots$ હોય તો વિધેયાત્મક સંબંધ $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$ ને વિકલ સમીકરણ કહે છે. (સમીકરણમાં વિકલિતનું અસ્તિત્વ હોવુ જરૂરી છે)

ઉદાહરણ તરીકે (1) $\frac{dy}{dx} + y\ cosx = sinx$ (2) $\frac{d^2y}{dx^2} = 2x$

(3) $\frac{dy}{dx} + y = x^2$ (4) $2y = x\frac{dy}{dx} + \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

(5) $2x^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 5y\frac{dy}{dx} = 2xy$ (6) $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} = 5\frac{d^2y}{dx^2}$

(7) $e^{\frac{dy}{dx}} + \frac{dy}{dx} = ky$ (8) $\log\left|\frac{dy}{dx}\right| = kx$

5.3 વિકલ સમીકરણની કક્ષા અને પરિમાણ

વિકલ સમીકરણની કક્ષા :

વિકલ સમીકરણમાં અવલંબી ચલના સ્વતંત્ર ચલને સાપેક્ષ વિકલિતોમાં ઉચ્ચતમ કક્ષાના વિકલિતની કક્ષાને વિકલ સમીકરણની કક્ષા (Order) કહે છે.

(1) $\frac{dy}{dx} + y\cos x = sinx$

અહીં ઉચ્ચતમ કક્ષાનું વિકલિત પ્રથમ વિકલિત છે. આથી વિકલ સમીકરણની કક્ષા 1 છે.

(2) $2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = e^x$

અહીં ઉચ્ચતમ કક્ષાનું વિકલિત દ્વિતીય વિકલિત છે. આથી વિકલ સમીકરણની કક્ષા 2 છે.

(3) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 6y + x = 0.$

અહીં ઉચ્ચતમ કક્ષાનું વિકલિત પ્રથમ વિકલિત છે. આથી વિકલ સમીકરણની કક્ષા 1 છે.

(4) $\frac{d^4y}{dx^4} - 6\left(\frac{dy}{dx}\right)^6 - 4y = 0.$

અહીં ઉચ્ચતમ કક્ષાનું વિકલિત ચતુર્થ વિકલિત છે. આથી વિકલ સમીકરણની કક્ષા 4 છે.

(5) $\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{\frac{dy}{dx}+5}.$

અહીં ઉચ્ચતમ કક્ષાનું વિકલિત દ્વિતીય વિકલિત છે. આથી વિકલ સમીકરણની કક્ષા 2 છે.

વિકલ સમીકરણનું પરિમાણ :

વિકલ સમીકરણ વિકલિતોની બહુપદી સ્વરૂપે આપેલ હોય, તો વિકલ સમીકરણમાં આવતા ઉચ્ચતમ કક્ષાના વિકલિતના ઉચ્ચતમ ઘાતાંકને વિકલ સમીકરણનું પરિમાણ (Degree) કહે છે.

એટલે કે વિકલ સમીકરણનું પરિમાણ મેળવવા આપણે સમીકરણને મૂળ અને અપૂર્ણાંક ઘાત થી મુક્ત કરવું જોઈએ.

વિકલ સમીકરણનું પરિમાણ હમેશાં ધન પૂર્ણાંક સંખ્યા હોય છે.

(1) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y = sinx.$

આ સમીકરણમાં આવેલા ઉચ્ચતમ કક્ષાના વિકલિત $\frac{dy}{dx}$ નો ઉચ્ચતમ ઘાતાંક 2 છે. તેથી આ વિકલ સમીકરણનું પરિમાણ 2 છે.

(2) $\frac{d^3y}{dx^3} + 7\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 - 4y = 0$

આ સમીકરણમાં ઉચ્ચતમ કક્ષાનું વિકલિત $\frac{d^3y}{dx^3}$ તૃતીય વિકલિત છે. તેનો ઉચ્ચતમ ઘાતાંક 1 છે. તેથી તેનું પરિમાણ 1 છે. (4 કેમ નહિં ?)

(3) $x = y\dfrac{dy}{dx} + \sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$

આ સમીકરણને વિકલિતોની બહુપદી સ્વરૂપમાં ફેરવતાં,

$(y^2 - 1)\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy\dfrac{dy}{dx} + x^2 - 1 = 0$ મળે છે.

અહીં ઉચ્ચતમ કક્ષાના વિકલિત $\dfrac{dy}{dx}$ નો મહત્તમ ઘાતાંક 2 છે. તેથી વિકલ સમીકરણનું પરિમાણ 2 છે.

> **નોંધ :** વિકલ સમીકરણનું પરિમાણ મેળવવા તેને વિકલિતોની બહુપદીના સ્વરૂપમાં ફેરવવામાં આવે છે. જો સમીકરણને વિકલિતોની બહુપદીના સ્વરૂપમાં ન દર્શાવી શકાય તો તેનું પરિમાણ વ્યાખ્યાયિત નથી.

(1) $x\dfrac{dy}{dx} + \sin\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = 0$ એ આપેલ વિકલ સમીકરણ છે. તેની કક્ષા 1 છે. પરિમાણ અવ્યાખ્યાયિત છે કારણ કે સમીકરણ વિકલિત $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ માં બહુપદી નથી.

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \log\left(\dfrac{dy}{dx}\right) + y$, ની કક્ષા 2 છે, જ્યારે પરિમાણ અવ્યાખ્યાયિત છે કારણકે સમીકરણ વિકલિતમાં બહુપદી નથી.

ઉદાહરણ 1 : નીચેનાં વિકલ સમીકરણોની કક્ષા અને પરિમાણ (શક્ય હોય તો) મેળવો.

(1) $\dfrac{d^3y}{dx^3} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + y = x^2$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \sqrt[3]{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$

(3) $xe^{\frac{dy}{dx}} + \dfrac{dy}{dx} + 2 = 0$

(4) $x\dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^4 + xy = 0$

(5) $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^3 = \sin y + 3x$

ઉકેલ : (1) અહીં ઉચ્ચતમ કક્ષાનું વિકલિત $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ છે. તેનો ઘાતાંક 1 છે.

$\therefore$ વિકલ સમીકરણની કક્ષા 3 અને પરિમાણ 1 છે.

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \sqrt[3]{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$

મૂળ દૂર કરવા માટે આપણે બંને બાજુએ ઘન કરીએ.

$\therefore \left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^3 = 1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$

અહીં વિકલ સમીકરણની કક્ષા 2 અને પરિમાણ 3 છે.

(3) અહીં ઉચ્ચતમ કક્ષાનું વિકલિત $\dfrac{dy}{dx}$ છે. તેથી વિકલ સમીકરણની કક્ષા 1 છે. અહીં સમીકરણને વિકલિતોની બહુપદીમાં દર્શાવી શકાય નહીં. તેથી પરિમાણ અવ્યાખ્યાયિત છે.

(4) અહીં ઉચ્ચતમ કક્ષાનું વિકલિત $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ છે. તેથી વિકલ સમીકરણની કક્ષા 2 છે અને તેનું પરિમાણ 1 છે.

(5) અહીં ઉચ્ચતમ કક્ષાનું વિકલિત $\frac{d^2y}{dx^2}$ છે. તેથી વિકલ સમીકરણની કક્ષા 2 છે અને તેનું પરિમાણ 3 છે.

સ્વાધ્યાય 5.1

નીચેના વિકલ સમીકરણોની કક્ષા અને પરિમાણ (શક્ય હોય તો) મેળવો.

1. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 2$

2. $x + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \sqrt{1+y}$

3. $\frac{d^2y}{dx^2} + sin\left(\frac{dy}{dx}\right) + y = 0$

4. $y^{\frac{dy}{dx}} = x$

5. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4 + x\log y = 0$

6. $\sqrt[3]{\frac{d^2y}{dx^2}} = \sqrt{\frac{dy}{dx}}$

7. $\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{x}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} = 0$

8. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 = 0$

9. $\frac{d^2y}{dx^2} = 3sin\,3x$

10. $x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + y\left(\frac{dy}{dx}\right)^5 - 5y = 0$

*

5.4 વિકલ સમીકરણની રચના

હવે આપણે વક્રોની સંહતિની સંકલ્પના સમજીશું. સમીકરણ $x^2 + y^2 = r^2$ નો વિચાર કરીએ. **(i)**

r ની ભિન્ન કિંમતો લેતાં,

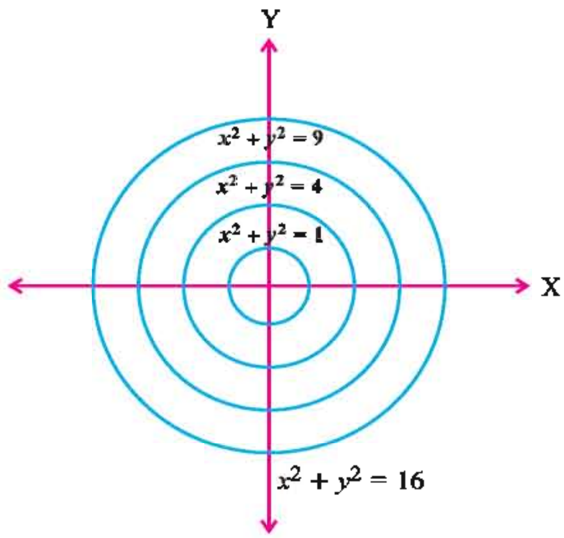
જો $r = 1$ હોય, તો $x^2 + y^2 = 1$

જો $r = 2$ હોય, તો $x^2 + y^2 = 4$

જો $r = 3$ હોય, તો $x^2 + y^2 = 9$

જો $r = 4$ હોય, તો $x^2 + y^2 = 16$

આમ ઉપરોક્ત સમીકરણો જોતાં સ્પષ્ટ છે કે સમીકરણ (i) એ જેનું કેન્દ્ર ઊગમબિંદુ હોય અને ત્રિજ્યાઓ ભિન્ન હોય તેવાં **સમકેન્દ્રી વર્તુળોની સંહતિ (Family of Circles)** દર્શાવે છે.



આકૃતિ 5.1

હવે સંહતિનો દરેક ઘટક જે વિકલ સમીકરણનું સમાધાન કરે તેવું વિકલ સમીકરણ મેળવવું છે. ઉપરોક્ત વિકલ સમીકરણમાં એક જ સ્વૈર અચળ r છે. હવે r થી મુક્ત હોય તેવું સમીકરણ મેળવીએ.

$x^2 + y^2 = r^2$ નું x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0$$

આ સમીકરણ સંહતિ $x^2 + y^2 = r^2$ ના દરેક વક્ર વડે સંતોષાય છે. તેથી વિકલ સમીકરણ આ સમકેન્દ્રી વર્તુળો $x^2 + y^2 = r^2$ ના તમામ ઘટકોની સંહતિ દર્શાવતું વિકલ સમીકરણ છે. તે સ્વૈર અચળાંક r થી મુક્ત છે તેની નોંધ લો.

ઉદાહરણ 2 : જેનું શીર્ષ ઊગમબિંદુ હોય અને Y-અક્ષ પ્રત્યે સંમિત હોય તેવા પ્રમાણિત પરવલયોની સંહતિનું વિકલ સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે શીર્ષ ઊગમબિંદુ હોય અને Y-અક્ષ પ્રત્યે સંમિત હોય તેવા પરવલયોની સંહતિનું પ્રમાણિત સમીકરણ $x^2 = 4by$ છે.

અહીં S(0, b) એ કોઈ એક પરવલયનું નાભિ છે.

b એ સ્વૈર અચળ છે.

હવે સમીકરણ $x^2 = 4by$ નું x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

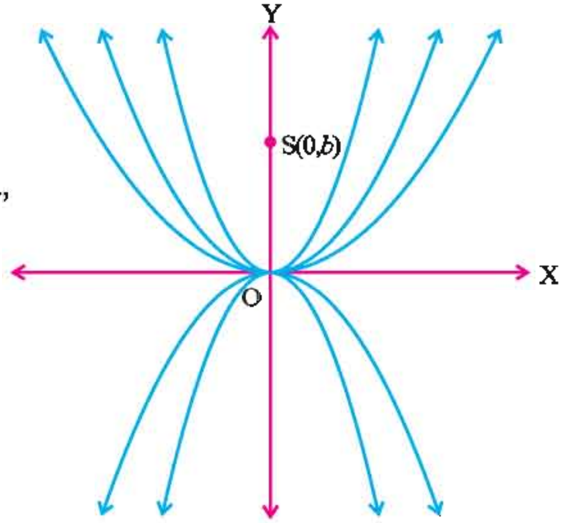
$$2x = 4b\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \quad 2xy = 4by\frac{dy}{dx}$$

પરંતુ $4by = x^2$

$$\therefore \quad x^2\frac{dy}{dx} = 2xy \quad \text{કે} \quad x^2\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$$

$$\therefore \quad x\frac{dy}{dx} = 2y \qquad (x \neq 0)$$



આકૃતિ 5.2

આપેલ પરવલયોની સંહતિ દર્શાવતું વિકલ સમીકરણ છે.

> **નોંધ :** જો $x = 0$, તો $y = 0$, કેમકે $x^2 = 4by$.
>
> $\therefore$ (0, 0) પણ $x\frac{dy}{dx} = y$ નું સમાધાન કરે છે.

ઉદાહરણ 3 : જેનો ઢાળ 2 હોય તેવી તમામ સમાંતર રેખાઓની સંહતિ $y = 2x + c$ નું વિકલ સમીકરણ મેળવો. c એ સ્વૈર અચળ છે.

ઉકેલ : આપેલ રેખાનું સમીકરણ $y = 2x + c$ છે. c એ સ્વૈર અચળ છે.

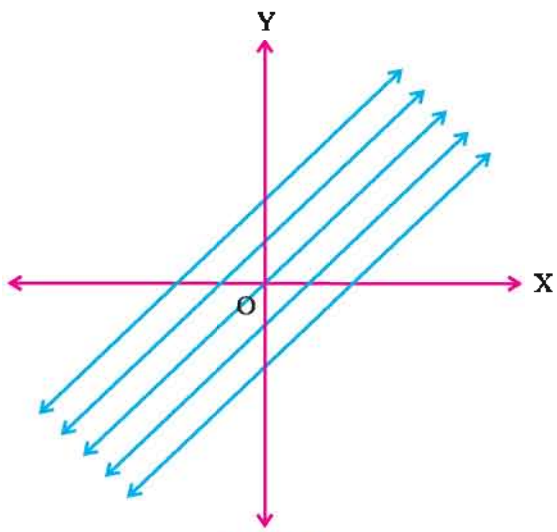
c ની ભિન્ન કિંમતો માટે એકબીજાને સમાંતર હોય તેવી ભિન્ન રેખાઓ મળે.

તેથી $y = 2x + c$ એ જેનો ઢાળ 2 હોય તેવી તમામ સમાંતર રેખાઓની સંહતિ દર્શાવે છે.

હવે આપણે સ્વૈર અચળથી મુક્ત આ તમામ સમાંતર રેખાઓની સંહતિના સભ્યો જેનું સમાધાન કરે છે તેવું સમીકરણ મેળવીશું.

સમીકરણ $y = 2x + c$ નું x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = 2 \text{ મળે.}$$



આકૃતિ 5.3

સ્વૈર અચળથી મુક્ત ઉપરોક્ત સમીકરણ રેખાઓની સંહતિ દર્શાવતું વિકલ સમીકરણ છે.

ઉદાહરણ 4 : વક્રોની સંહતિ $y = a\sin(x + b)$ (જ્યાં a અને b સ્વૈર અચળો છે.) દર્શાવતું વિકલ સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં વક્રોની સંહતિ $y = a\sin(x + b)$ છે.

x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં $\frac{dy}{dx} = a\cos(x + b)$.

ફરીથી x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a\,sin(x + b)$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -y \quad \text{અથવા} \quad \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$ એ આપેલ સંહતિ દર્શાવતું વિકલ સમીકરણ થશે.

અહીં આપેલા ઉદાહરણ 2 અને 3, પરથી જોયું કે એક સ્વૈર અચળવાળા વક્રોની સંહતિ દર્શાવતું વિકલ સમીકરણ એક કક્ષા વાળું છે. ઉદાહરણ 4 પરથી જોયું કે બે સ્વૈર અચળોવાળા વક્રોની સંહતિ દર્શાવતું વિકલ સમીકરણ બે કક્ષાવાળું છે. આ ઉદાહરણો પરથી વિકલ સમીકરણની રચનાની સમજ નીચે પ્રમાણે મેળવીએ.

(a) જો આપેલ વક્રોની સંહતિમાં માત્ર એક જ સ્વૈર અચળ c હોય તો તેને સમીકરણ $f(x, y, c) = 0$ દ્વારા દર્શાવી શકાય. સમીકરણનું x પ્રત્યે વિકલન કરતાં મળતું નવું વિધેય x, y, y' અને c વચ્ચેના સંબંધો દર્શાવતું વિધેય હશે. તેને $g(x, y, y', c) = 0$ કહીએ.

અહીં સમીકરણો $f(x, y, c) = 0$ તથા $g(x, y, y', c) = 0$ માંથી c નો લોપ કરતાં મળતું સમીકરણ $F(x, y, y') = 0$ એ આપેલ સંહતિ $f(x, y, c) = 0$ ને દર્શાવતું વિકલ સમીકરણ થશે.

(b) જો આપેલ વક્રોની સંહતિમાં બે સ્વૈર અચળો c_1 તથા c_2 હોય તો તેને સમીકરણ $f(x, y, c_1, c_2) = 0$ દ્વારા દર્શાવી શકાય.

x પ્રત્યે વિકલન કરતાં x, y, y', c_1 અને c_2 વચ્ચે સંબંધ દર્શાવતું સમીકરણ $g(x, y, y', c_1, c_2) = 0$ મળે. પરંતુ માત્ર આ બે સમીકરણોથી બંને સ્વૈર અચળો c_1 અને c_2 દૂર થઈ શકશે નહિ. આથી સમીકરણ $g(x, y, y', c_1, c_2) = 0$ નું x પ્રત્યે ફરીથી વિકલન કરતાં x, y, y', y'', c_1 અને c_2 વચ્ચે સંબંધો દર્શાવતું સમીકરણ $h(x, y, y', y'', c_1, c_2) = 0$ મેળવીએ.

$f(x, y, c_1, c_2) = 0$, $g(x, y, y', c_1, c_2) = 0$ તથા $h(x, y, y', y''\ c_1, c_2) = 0$ મળે.

અને હવે ઉપરોક્ત સમીકરણોમાંથી સ્વૈર અચળો c_1 અને c_2 લોપ કરતાં સમીકરણ $F(x, y, y', y'') = 0$ મળે.

$F\ (x, y, y', y'') = 0$ આપેલ સંહતિ $f(x, y, c_1, c_2) = 0$ ને દર્શાવતું વિકલ સમીકરણ થશે.

ટૂંકમાં n સ્વૈર અચળોવાળા વિધેયાત્મક સંબંધ $f(x, y, c_1, c_2,..., c_n) = 0$ નું n વખત વિકલન કરતાં આપેલા સંબંધ સહિત કુલ $(n + 1)$ સમીકરણ મળે.

તેમનામાંથી $c_1, c_2,..., c_n$ નો લોપ કરતાં આપેલ સંહતિનું વિકલ સમીકરણ મળે. જુઓ કે સ્વૈર અચળોની સંખ્યા n હોય તો મળતા વિકલ સમીકરણની કક્ષા n હોય.

ઉદાહરણ 5 : જેનું કેન્દ્ર ઊગમબિંદુ હોય અને નાભિઓ X-અક્ષ પર અથવા Y-અક્ષ પર હોય તેવા પ્રમાણિત ઉપવલયોની સંહતિનું વિકલ સમીકરણ મેળવો.

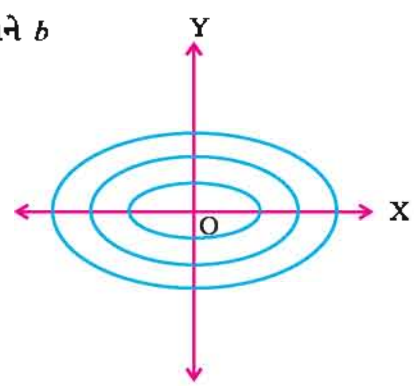
ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે ઉપવલયની સંહતિનું સમીકરણ

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ છે જ્યાં a અને b સ્વૈર અચળ છે. $(a \neq b)$ **(i)**

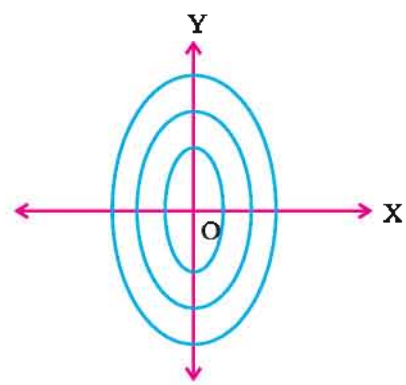
સમીકરણ (i) નું x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0$ મળે.

$\therefore \quad y\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2}x$ **(ii)**



આકૃતિ 5.4 (a)



આકૃતિ 5.4 (b)

ઉપરોક્ત સમીકરણનું x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\,\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2}{a^2} \text{ મળે.}$$

બંને બાજુ x વડે ગુણતાં,

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + xy\,\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2}{a^2}x$$

$$\therefore \quad x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + xy\,\frac{d^2y}{dx^2} = y\,\frac{dy}{dx}$$ ((ii)નો ઉપયોગ કરતાં)

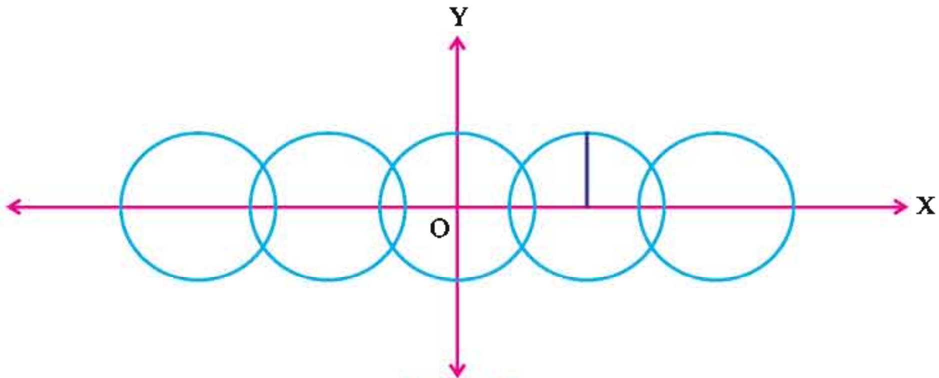
$$\therefore \quad x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + xy\,\frac{d^2y}{dx^2} - y\,\frac{dy}{dx} = 0$$

આપેલ ઉપવલયોની સંહતિનું વિકલ સમીકરણ છે.

નોંધ : અહીં બે સ્વૈર અચળ છે. આથી આપણે બે વખત વિકલન કર્યું છે. વિકલ સમીકરણની કક્ષા 2 છે.

ઉદાહરણ 6 : 1 એકમ ત્રિજ્યા અને X-અક્ષ પર જેનાં કેન્દ્રો હોય તેવાં વર્તુળોની સંહતિ દર્શાવતું વિકલ સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ :



આકૃતિ 5.4

અહીં વર્તુળોની સંહતિમાં આવેલાં વર્તુળોનાં કેન્દ્ર X-અક્ષ પર છે. ધારો કે તે પૈકી કોઈ એક વર્તુળનું કેન્દ્ર $(a, 0)$ છે, જ્યાં $a \in R$ અને તમામ વર્તુળોની ત્રિજ્યા 1 છે.

$\therefore$ આ સંહતિનું સમીકરણ $(x - a)^2 + y^2 = 1$ થાય (i)

x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$$\therefore \quad 2(x - a) + 2y\,\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \quad (x - a) + y\,\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \quad (x - a) = -y\,\frac{dy}{dx} \qquad \text{(ii)}$$

સ્વૈર અચળ a નો લોપ કરવા સમીકરણ (i) માં $(x - a)$ ની કિંમત મુકતાં.

$$\left(-y\,\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 1$$

$\therefore \quad y^2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 - 1 = 0$ આપેલ વર્તુળોની સંહતિનું વિકલ સમીકરણ છે.

નોંધ : અહીં એક જ સ્વૈર અચળાંક છે. તેથી એક જ વખત વિકલન કરતાં આપણને પ્રથમ કક્ષાનું વિકલ સમીકરણ મળે છે.

5.5 વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ

વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ એટલે વિકલિતોથી મુક્ત હોય અને ચલ વચ્ચે સંબંધ દર્શાવતું હોય અને જે તેના વિકલિતો સહિત વિકલ સમીકરણનું સમાધાન કરે તેવું વિધેય $y = f(x)$ અથવા વિધેયાત્મક સંબંધ $f(x, y) = 0$ થી મળતાં વિધેયો.

જો વિધેય $y = f(x)$, કોઈ અંતરાલમાં વ્યાખ્યાયિત હોય તથા તેના n કક્ષા સુધીના વિકલિતો અસ્તિત્વ ધરાવતા હોય અને જો વિધેય f એ તેના તમામ વિકલિતો સાથે આપેલ વિકલ સમીકરણનું સમાધાન કરે તો તેવા વિધેય $y = f(x)$ ને આપેલા વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ (Solution) કહે છે.

કોઈ વિધેય $y = f(x)$ આપેલા વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ બની શકે તે માટે વિધેયના પ્રદેશ અને સાતત્ય અંગેની તથા અન્ય શરતોનું પાલન થવું જરૂરી હોય છે. બીજા શબ્દોમાં આપેલ વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ, જો મળી શકતો હોય તો તેવા અનુકૂળ શરતો સાથેના સંજોગોમાં મેળવવાની ચર્ચા કરવામાં આવતી હોય છે. વિકલ સમીકરણના ઉકેલની પ્રાપ્યતા સંબંધી ચર્ચાનું વિશ્લેષણ અહીં કરીશું નહીં. આપણે તો ઉકેલ મળી શકે તેવા સંજોગોમાં (આ સંજોગો કે તેની શરતોનો ઉલ્લેખ કર્યા સિવાય જ) ઉકેલ મેળવવા માટેની કેટલીક પદ્ધતિઓનો અભ્યાસ કરીશું.

વિકલ સમીકરણોનો ઉકેલ :

વિધેય $y = 2x + c$, $x \in R$ એ વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = 2$ નો ઉકેલ છે. કારણ કે વિધેય $y = 2x + c$ એ વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = 2$નું સમાધાન કરે છે. ચાલો બીજું ઉદાહરણ જોઈએ.

$y = sinx$, $x \in R$ એ વિકલ સમીકરણ $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ નો ઉકેલ છે.

x ને સાપેક્ષ $y = sinx$ નું વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = cosx$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -sinx = -y$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

$y = cosx$, $x \in R$ એ પણ વિકલ સમીકરણ $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ નો ઉકેલ છે.

અહીં $y = cosx$

x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -cosx = -y$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

ઉપર્યુક્ત ઉદાહરણો પરથી એવું કહી શકીએ કે સામાન્ય રીતે વિકલ સમીકરણને એક કરતાં વધુ ઉકેલો હોઈ શકે છે.

વ્યાપક અને વિશિષ્ટ ઉકેલ

વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ અથવા સામાન્ય ઉકેલ (General Solution) એટલે વિકલ સમીકરણની કક્ષા જેટલા સ્વૈર અચળાંકો ધરાવતો ઉકેલ.

વ્યાપક સ્વરૂપે n કક્ષાના વિકલ સમીકરણ

$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ..., \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$ ના ઉકેલમાં n સ્વૈર અચળ હોય છે.

આ ઉકેલને $G(x, y, c_1, c_2, ..., c_n) = 0$ દ્વારા દર્શાવાય છે, જ્યાં $c_1, c_2, ..., c_n$ સ્વૈર અચળો છે.

ચલ x, y તથા વિકલિતો $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ...$ પરની કોઈ નિશ્ચિત શરતો દ્વારા વિકલ સમીકરણના વ્યાપક ઉકેલમાં આવતા સ્વૈર અચળોની નિશ્ચિત કિંમતો મળે તો સ્વૈર અચળોની નિશ્ચિત કિંમત ધરાવતા વિકલ સમીકરણના આ ઉકેલને આપેલ વિકલ સમીકરણનો વિશિષ્ટ ઉકેલ (Particular Solution) કહે છે તથા આપેલી શરતોને પ્રારંભિક શરતો (Initial Conditions) કહે છે.

જો વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ સિવાયનો ઉકેલ એ તેના વ્યાપક ઉકેલમાંથી વિશિષ્ટ ઉકેલ તરીકે ન મળતો હોય તો આવા ઉકેલને વિકલ સમીકરણનો અસામાન્ય ઉકેલ (Singular Solution) કહે છે.

ઉદાહરણ 7 : વિધેય $y = A\cos x + B\sin x$, જ્યાં A અને B સ્વૈર અચળ છે એ વિકલ સમીકરણ $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ નો વ્યાપક ઉકેલ છે કે નહિં તે ચકાસો.

ઉકેલ : અહીં $y = A\cos x + B\sin x$ એ આપેલ વિધેય છે.

બંને બાજુ x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = -A\sin x + B\cos x$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = -A\cos x - B\sin x$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = -(A\cos x + B\sin x)$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = -y$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

તેથી આપેલ વિધેય $y = A\cos x + B\sin x$ એ વિકલ સમીકરણ $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ નો વ્યાપક ઉકેલ છે. કારણ કે દ્વિતિય કક્ષાના વિકલ સમીકરણના આ ઉકેલમાં બે સ્વૈર અચળાંકો છે.

ઉદાહરણ 8 : $y = cx + \frac{1}{c}$ એ વિકલ સમીકરણ $y\frac{dy}{dx} = x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1$, નો ઉકેલ છે તેમ ચકાસો. (c એ સ્વૈર અચળ છે.)

ઉકેલ : અહીં $y = cx + \frac{1}{c}$ (c એ સ્વૈર અચળ)

x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં $\frac{dy}{dx} = c$

$c = \frac{dy}{dx}$ એ સમીકરણ $y = cx + \frac{1}{c}$ માં મૂકતાં,

$$y = \left(\frac{dy}{dx}\right)x + \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$$

$$\therefore y\left(\frac{dy}{dx}\right) = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 x + 1$$

તેથી આપેલ વિધેય $y = cx + \frac{1}{c}$ એ આપેલા વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ છે.

ઉદાહરણ 9 : સમીકરણ $y = cx^4$ જ્યાં c એ સ્વૈર અચળ છે એ વિકલ સમીકરણ $x\frac{dy}{dx} - 4y = 0$ નો ઉકેલ છે કે નહીં તે ચકાસો.

ઉકેલ : અહીં આપેલ સમીકરણ $y = cx^4$ છે **(i)**

સમીકરણ (i) નું x પ્રત્યે વિકલન કરતાં $\frac{dy}{dx} = 4cx^3$ **(ii)**

$\therefore \quad x\frac{dy}{dx} = 4cx^4 = 4y$

$\therefore \quad x\frac{dy}{dx} - 4y = 0$

તેથી $y = cx^4$ આપેલ વિકલ સમીકરણ $x\frac{dy}{dx} - 4y = 0$ નો ઉકેલ છે.

ઉદાહરણ 10 : ચકાસો કે $y = ax + a^2$ (a એ સ્વૈર અચળ છે.) એ વિકલ સમીકરણ $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\left(\frac{dy}{dx}\right) = y$ નો વ્યાપક ઉકેલ છે. $a = 3$ માટે વિશિષ્ટ ઉકેલ મેળવો. વધુમાં બતાવો કે $x^2 + 4y = 0$ એ વિકલ સમીકરણનો અસામાન્ય ઉકેલ છે.

ઉકેલ : અહીં $y = ax + a^2$ (a એ સ્વૈર અચળ)

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = a$

$a = \frac{dy}{dx}$ એ સમીકરણ $y = ax + a^2$ માં મૂકતાં (એટલે કે a નો લોપ કરતાં) આપણને વિકલ સમીકરણ

$$y = x\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\frac{dy}{dx}$$ મળે.

વળી $y = ax + a^2$ માં એક જ સ્વૈર અચળ છે.

તેથી $y = ax + a^2$ એ $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\left(\frac{dy}{dx}\right) = y$ નો વ્યાપક ઉકેલ છે.

હવે વ્યાપક ઉકેલમાં $a = 3$ મૂકતાં, $y = 3x + 9$ વિશિષ્ટ ઉકેલ મળે.

હવે $x^2 + 4y = 0$

$\therefore \quad 4y = -x^2$

$\therefore \quad 4\frac{dy}{dx} = -2x$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2}$

$\frac{dy}{dx}$ ની કિંમત આપેલા વિકલ સમીકરણમાં મૂકતાં.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{x^2}{4} + x\left(-\frac{x}{2}\right) = -\frac{x^2}{4} = y$$

જે દર્શાવે છે કે $x^2 + 4y = 0$ આપેલા વિકલ સમીકરણને સંતોષે છે.

આમ $x^2 + 4y = 0$ એ આપેલ વિકલ સમીકરણનું સમાધાન કરે છે. તેથી તે વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ થાય. પરંતુ આ ઉકેલ તેના વ્યાપક ઉકેલમાં a ની કોઈપણ કિંમત મૂકતાં મળશે નહીં. તેથી આ વિકલ સમીકરણનો અસામાન્ય ઉકેલ છે.

નોંધ : વ્યાપક ઉકેલ એ રેખાઓની સંહતી દર્શાવે છે જ્યારે અસામાન્ય ઉકેલ $x^2 + 4y = 0$ એ પરવલય દર્શાવે છે.

સ્વાધ્યાય 5.2

1. પ્રથમ ચરણમાં આવેલા અને બંને અક્ષોને સ્પર્શતાં વર્તુળોની સંહતિનું વિકલ સમીકરણ મેળવો.
2. રેખાઓની સંહતિ $y = mx + c$ (જ્યાં m અને c સ્વૈર અચળો છે) ને દર્શાવતું વિકલ સમીકરણ મેળવો.
3. સમીકરણ $y^2 = m(a^2 - x^2)$ ને દર્શાવતું વિકલ સમીકરણ મેળવો. (જ્યાં m અને a સ્વૈર અચળો છે.)
4. X-અક્ષ ને ઊગમબિંદુ આગળ સ્પર્શતાં હોય તેવાં તમામ વર્તુળોની સંહતિને દર્શાવતું વિકલ સમીકરણ શોધો.
5. દર્શાવો કે વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x^3$ નો ઉકેલ $y = 2(x^2 - 1) + ce^{-x^2}$ છે. (જ્યાં c એ સ્વૈર અચળ છે.)
6. વિકલ સમીકરણ $y\left[1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = 2x\frac{dy}{dx}$ નો ઉકેલ $y^2 = 4b(x + b)$ છે તેમ ચકાસો. (b સ્વૈર અચળ છે.)
7. બતાવો કે $y = a\,cos(\log x) + b\,sin(\log x)$ એ વિકલ સમીકરણ $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$ નો ઉકેલ છે. (a અને b સ્વૈર અચળો છે.)
8. ચકાસો કે $y = a\,cos^{-1}x + b$ એ વિકલ સમીકરણ $(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0$ નો ઉકેલ છે. (a અને b સ્વૈર અચળો છે.)
9. નીચેના વક્રોની સંહતિ માટે વિકલ સમીકરણ શોધો. (a અને b સ્વૈર અચળો છે.)

   (1) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (3) $(y - b)^2 = 4(x - a)$ (4) $y = \left(ax + \frac{b}{x}\right)$

   (5) $y = ax^3$ (6) $y = e^{2x}(a + bx)$ (7) $y^2 = a(b^2 - x^2)$
10. ચકાસો કે $y = 5sin4x$ એ વિકલ સમીકરણ $\frac{d^2y}{dx^2} + 16y = 0$ નો ઉકેલ છે.
11. બતાવો કે $Ax^2 + By^2 = 1$ એ વિકલ સમીકરણ

    $x\left[y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = y\left(\frac{dy}{dx}\right)$ નો ઉકેલ છે. (A, B સ્વૈર અચળો છે.)
12. બતાવો કે $y = \frac{a}{x} + b$ એ વિકલ સમીકરણ $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} = 0$ નો ઉકેલ છે.

*

5.6 પ્રથમ કક્ષાનાં એક પરિમાણીય વિકલ સમીકરણ :

પ્રથમ કક્ષાનાં એક પરિમાણીય વિકલ સમીકરણને $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$, $x \in I$ (I કોઈ અંતરાલ છે) વડે દર્શાવાય છે.

$F(x, y) = -\frac{f(x, y)}{g(x, y)}$ લેતાં,

$f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0$ એ પ્રથમ કક્ષાના એક પરિમાણીય સમીકરણનું બીજું સ્વરૂપ છે. પ્રથમ કક્ષાના વિકલ સમીકરણ હંમેશા ઉકેલનીય હોય જ એવું નથી, પરંતુ આપણે આ સમીકરણના એવાં કેટલાંક વિશિષ્ટ સ્વરૂપોનો અભ્યાસ કરીશું કે જેમનો વ્યાપક ઉકેલ મળી શકે.

હવે આપણે પ્રથમ કક્ષાના એક પરિમાણીય વિકલ સમીકરણો ને ઉકેલવા માટેની કેટલીક વિવિધ રીતોનો અભ્યાસ કરીશું.

(1) વિયોજનીય ચલની રીત (Method of Variables Separable) : પ્રથમ કક્ષાના એક પરિમાણી વિકલ સમીકરણના વ્યાપક સ્વરૂપ $f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0$ માં જો $f(x, y)$ એ માત્ર ચલ x નું વિધેય $p(x)$ હોય અને $g(x, y)$ એ માત્ર ચલ y નું વિધેય $q(y)$ હોય તો પ્રથમ કક્ષાના એક પરિમાણવાળા વિકલ સમીકરણનું વ્યાપક સ્વરૂપ $p(x)dx + q(y)dy = 0$ પ્રકારનું થાય. આ પ્રકારના વિકલ સમીકરણને વિયોજનીય ચલ પ્રકારનું વિકલ સમીકરણ કહે છે.

$\int p(x)dx + \int q(y)dy = c$ તેનો વ્યાપક ઉકેલ થાય. (c સ્વૈર અચલ છે.)

નોંધ : વિકલ સમીકરણના વ્યાપક ઉકેલમાં સ્વૈર અચળ આપણી અનુકૂળતા પ્રમાણે લઈ શકાય છે.

ઉદાહરણ 11 : વિકલ સમીકરણ $x(1 + y^2)dx - y(1 + x^2)dy = 0$ ઉકેલો.

ઉકેલ : અહીં $x(1 + y^2)dx = y(1 + x^2)dy$

$$\therefore \quad \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{y}{1+y^2}\,dy \qquad \text{(વિયોજનીય ચલ)}$$

$$\therefore \quad \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{2y}{1+y^2}\,dy$$

સંકલન કરતાં,

$$\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{2y}{1+y^2}\,dy$$

$\therefore \quad \log|1 + x^2| = \log|1 + y^2| + \log c$ (અહીં સ્વૈર અચળ c ના સ્થાને $\log c$ લીધેલ છે.)

$$\therefore \quad \log\left(\frac{1+x^2}{1+y^2}\right) = \log c \quad (c > 0) \qquad (1 + x^2 > 0,\ 1 + y^2 > 0)$$

$$\therefore \quad \frac{1+x^2}{1+y^2} = c$$

$$\therefore \quad (1 + x^2) = c(1 + y^2)$$

આ આપેલ વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ છે. અહીં c એ સ્વૈર ધન અચળ છે.

ઉદાહરણ 12 : વિકલ સમીકરણ $(e^x + e^{-x})\frac{dy}{dx} = e^x - e^{-x}$ ઉકેલો.

ઉકેલ : અહીં $(e^x + e^{-x})\frac{dy}{dx} = e^x - e^{-x}$

$$\therefore \quad dy = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx \qquad \text{(વિયોજનીય ચલની રીત)}$$

બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$$\int dy = \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$$

$$y = \log|e^x + e^{-x}| + c$$

આ આપેલ વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ છે.

આ ઉકેલને $y = \log(e^x + e^{-x}) + c$ પણ લખી શકાય કારણ કે $e^x + e^{-x} > 0$.

ઉદાહરણ 13 : વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = y\, tanx$ નો $x = 0$, $y = 1$ માટે વિશિષ્ટ ઉકેલ મેળવો. $(y \neq 0)$

ઉકેલ : $\frac{dy}{dx} = y\, tanx$

$\therefore \quad \frac{1}{y}\, dy = tanx\, dx$ **(i)**

સમીકરણ (i) નું બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$\int \frac{1}{y}\, dy = \int tanx\, dx$

$\therefore \quad \log|y| = \log|secx| + \log|c|$ **($\log|c|$ સ્વૈર અચળ)**

$\therefore \quad \log|y| = \log|c\, sec\, x|$

$\therefore \quad y = c\, sec\, x$ **(ii)**

આપેલ વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ છે.

સમીકરણ (ii) માં $x = 0$ અને $y = 1$ મૂકતાં સ્વૈર અચળ c ની એક કિંમત મળે છે. તે વિકલ સમીકરણનો વિશિષ્ટ ઉકેલ આપે છે.

$1 = sec0 \cdot c$

$1 = 1 \cdot c$

$c = 1$

$\therefore \quad y = sec\, x$ માંગેલ વિશિષ્ટ ઉકેલ છે.

નોંધ : જો y એ x નું વિધેય હોય તો તેને $y = y(x)$ વડે પણ દર્શાવવામાં આવે છે. તેથી $y(x) = x^2$ તો $y(1) = 1$, $y(2) = 4$ વગેરે. $y(2)$ શોધો તેનો અર્થ $x = 2$ હોય ત્યારે $y(x)$ શોધો. ઉપરોક્ત ઉદાહરણમાં $y(0) = 1$ છે.

ઉદાહરણ 14 : વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2 e^{-y}$ ઉકેલો.

ઉકેલ : અહીં $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2 e^{-y}$.

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^y} + \frac{x^2}{e^y}$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{e^x + x^2}{e^y}$

$\therefore \quad e^y\, dy = (e^x + x^2)\, dx$

સંકલન કરતાં,

$\int e^y\, dy = \int (e^x + x^2)\, dx$

$\therefore \quad e^y = e^x + \frac{x^3}{3} + c$ **(c સ્વૈર અચળ)**

આ આપેલ વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ છે.

ઉદાહરણ 15 : ઉકેલો : $\frac{dy}{dx} = (x + y)^2$

ઉકેલ : અહીં આપેલ વિકલ સમીકરણને $p(x)\, dx + q(y)\, dy = 0$ સ્વરૂપે દર્શાવી શકાતું નથી. આથી પ્રથમ દૃષ્ટિએ આ વિકલ સમીકરણ વિયોજનીય ચલ રીતનું નથી, પરંતુ તેને આ પ્રકારના વિકલ સમીકરણમાં રૂપાંતરિત કરી શકાય.

અહીં $\frac{dy}{dx} = (x + y)^2$ માં $x + y = z$ આદેશ લેતાં, **(i)**

$\therefore \quad 1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$

સમીકરણ (i) પરથી,

$\therefore \quad \frac{dz}{dx} - 1 = z^2$

$\therefore \quad \frac{dz}{dx} = 1 + z^2$

$\therefore \quad \frac{dz}{1+z^2} = dx$ (વિયોજનીય ચલ પ્રકાર)

બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \int dx$$

$\therefore \quad tan^{-1}z = x + c$ (c સ્વૈર અચળ)

$\therefore \quad tan^{-1}(x + y) = x + c$ એ વ્યાપક ઉકેલ છે.

ઉદાહરણ 16 : ઉકેલો : $cos(x - y)dy = dx$

ઉકેલ : અહીં $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{cos(x-y)}$ (i)

$x - y = t$ આદેશ લેતાં, (ii)

$1 - \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dt}{dx}$ (iii)

સમીકરણો (i), (ii) અને (iii) પરથી

$1 - \frac{dt}{dx} = \frac{1}{cos\,t}$

$\therefore \quad 1 - \frac{1}{cos\,t} = \frac{dt}{dx}$

$\therefore \quad \frac{cost - 1}{cost} = \frac{dt}{dx}$

$\therefore \quad \frac{-(1 - cost)}{cost} = \frac{dt}{dx}$

$\therefore \quad -dx = \frac{cost}{1 - cost}\, dt$

બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$\therefore \quad -\int dx = \int \frac{cos\,t}{1 - cos\,t} \times \frac{1 + cost}{1 + cost}\, dt$

$\therefore \quad -\int dx = \int \frac{cos\,t + cos^2 t}{sin^2 t}\, dt$

$\therefore \quad -\int dx = \int cosec\,t \cdot cot\,t\, dt + \int cot^2 t\, dt$

$\therefore \quad -\int dx = \int cosec\,t \cdot cot\,t\, dt + \int (cosec^2 t - 1)\, dt$

$\therefore \quad -x + c = -cosec\, t - cot\, t - t$

$\therefore \quad -x + c = -cosec(x - y) - cot(x - y) - (x - y)$

$\therefore \quad cosec(x - y) + cot(x - y) + c = y$

સ્વાધ્યાય 5.3

1. નીચેનાં વિકલ સમીકરણો ઉકેલો. વધુમાં પ્રારંભિક શરતો આપેલ હોય ત્યારે વિશિષ્ટ ઉકેલ મેળવો :

(1) $xy(y + 1)\, dy = (x^2 + 1)\, dx$

(2) $y(1 + e^x)\, dy = (y + 1)\, e^x\, dx$

(3) $\frac{dy}{dx} = -tanx\ tany$

(4) $\frac{dy}{dx} - y\ tanx = -y\ sec^2x$

(5) $(e^y + 1)\, cosx\ dx + e^y\ sin\, x\ dy = 0$

(6) $\frac{dy}{dx} = (1 + x^2)(1 + y^2)$

(7) $y \log y\ dx - x\ dy = 0$

(8) $\frac{dy}{dx} = -4xy^2;\ y(0) = 1$

(9) $x\, dy = (2x^2 + 1)\, dx \quad (x \neq 0);\ y(1) = 1$

(10) $xy\frac{dy}{dx} = y + 2;\quad y(2) = 0$

(11) $\frac{dy}{dx} = 2e^x y^3;\ y(0) = \frac{1}{2}$

(12) $x\frac{dy}{dx} + cot\ y = 0;\quad y(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$

(13) $e^{\frac{dy}{dx}} = x + 1;\quad y(0) = 3,\ x > -1$

(14) $sin\left(\frac{dy}{dx}\right) = a$ જ્યાં $x = 0,\ y = 1,\ (a \in \mathbb{R})$

(15) $\frac{dy}{dx} = y\ tanx,\ y(0) = 1$

(16) $(x + 1)^2\frac{dy}{dx} = xe^x$

2. નીચેનાં વિકલ સમીકરણો ઉકેલો :

(1) $\frac{dy}{dx} = sin(x + y)$

(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{(x - y) + 3}{2(x - y) + 5}$

(3) $(x + y + 1)\frac{dy}{dx} = 1$

(4) $\frac{dy}{dx} = e^{x + y}$

(5) $(x + y)^2\frac{dy}{dx} = a^2$

*

5.7 સમપરિમાણ વિકલ સમીકરણ

ચાલો નીચેના વિધેયનો અભ્યાસ કરીએ

$$f(x,\ y) = 3x^2 + 2xy + y^2$$

$$= x^2\left(3 + 2\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)$$

$$= x^2\ \phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\therefore \quad f(x,\ y) = x^2\ \phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

અહીં આપણે વિધેય $f(x,\ y)$ ને $x^n\ \phi\left(\frac{y}{x}\right)$ સ્વરૂપે દર્શાવ્યુ છે. જો દ્વિચલ વિધેય $f(x,\ y)$ ને $f(x,\ y) = x^n\ \phi\left(\frac{y}{x}\right)$ સ્વરૂપમાં લખી શકાય તો વિધેય $f(x,\ y)$ ને n ઘાતવાળું સમપરિમાણીય વિધેય કહે છે.

હવે ચાલો બીજી રીતે વિચારીએ. x અને y ની જગ્યાએ અનુક્રમે λx અને λy મૂકતાં (λ શૂન્યેતર અચળ)

$$\begin{aligned}f(\lambda x, \lambda y) &= 3(\lambda x)^2 + 2(\lambda x)(\lambda y) + (\lambda y)^2\\ &= 3\lambda^2x^2 + 2\lambda^2 xy + \lambda^2y^2\\ &= \lambda^2(3x^2 + 2xy + y^2)\\ &= \lambda^2 f(x, y)\end{aligned}$$

અહીં આપણે વિધેય ને $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$ સ્વરૂપમાં દર્શાવ્યું છે. તેથી વિધેય $f(x, y)$ ને n ઘાતવાળું સમપરિમાણીય વિધેય કહે છે.

$f(x, y) = tanx + tany$ પ્રકારના વિધેયને $f(x, y) = x^n \phi\left(\frac{y}{x}\right)$ ને સ્વરૂપે લખી ન શકાય. તેથી તેને સમપરિમાણિય વિધેય કહી ન શકાય.

સમપરિમાણ વિકલ સમીકરણ :

જો વિકલ સમીકરણ $f(x, y)\, dx + g(x, y)\, dy = 0$ માં વિધેય $f(x, y)$ અને $g(x, y)$ એ ચલ x અને y માં સમાન ઘાતવાળાં સમપરિમાણ વિધેયો હોય તો તેને સમપરિમાણ વિકલ સમીકરણ કહે છે.

નોંધ : $\phi\left(\frac{y}{x}\right)$ સ્વરૂપનાં વિધેયો હંમેશા સમપરિમાણ વિધેય હોય છે.

સમપરિમાણ વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ :

સમપરિમાણ વિકલ સમીકરણ $f(x, y)\, dx + g(x, y)\, dy = 0$ ને $\frac{dy}{dx} = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$ સ્વરૂપે લખી શકાય.

$\frac{y}{x} = v$ આદેશ લેતાં, $y = vx$

'x' ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$\therefore \quad v + x\frac{dv}{dx} = \phi(v) \qquad \left(\frac{dy}{dx} = \phi\left(\frac{y}{x}\right) = \phi(v)\right)$$

$$\therefore \quad x\frac{dv}{dx} = \phi(v) - v$$

$$\therefore \quad \frac{dv}{\phi(v) - v} = \frac{dx}{x} \qquad \text{(વિયોજનીય ચલ સ્વરૂપ)}$$

બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$$\int\frac{dv}{\phi(v) - v} = \int\frac{1}{x}\, dx$$

$$\therefore \quad \int\frac{dv}{\phi(v) - v} = \log|x| + c$$

આને સમપરિમાણ વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ કહે છે. અહીં c એ સ્વૈર અચળ છે.

ઉદાહરણ 17 : ઉકેલો $\frac{dy}{dx} + \frac{y(x+y)}{x^2} = 0$

ઉકેલ : $\frac{dy}{dx} = -\frac{y(x+y)}{x^2} = -\left[\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right]$ (i)

$\frac{y}{x} = v$ આદેશ લેતાં, $y = vx$ (ii)

તેથી $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ (iii)

$\therefore \quad v + x\frac{dv}{dx} = -v - v^2$ (i), (ii), (iii) પરથી

$\therefore \quad x\frac{dv}{dx} = -(2v + v^2)$

$\therefore \quad \frac{dv}{2v + v^2} = -\frac{dx}{x}$ (વિયોજનીય ચલ સ્વરૂપ)

$\therefore \quad \int \frac{1}{v(v+2)} dv = \int -\frac{1}{x}\, dx$ (બંને બાજુ સંકલન કરતાં)

$\therefore \quad \frac{1}{2}\int \frac{v+2-v}{(v+2)v}\, dv = -\int \frac{1}{x}\, dx$

$\therefore \quad \frac{1}{2}\int \frac{1}{v}\, dv - \frac{1}{2}\int \frac{1}{v+2}\, dv = -\int \frac{1}{x}\, dx$

$\therefore \quad \frac{1}{2}\log|v| - \frac{1}{2}\log|v+2| = -\log|x| + \frac{1}{2}\log|c|$ (c એ સ્વૈર અચળ)

$\therefore \quad \log|v| - \log|v+2| = -2\log|x| + \log|c|$

$\therefore \quad \log\left|\frac{v}{v+2}\right| = \log\left|\frac{c}{x^2}\right|$

$\therefore \quad \log\left|\frac{y}{y+2x}\right| = \log\left|\frac{c}{x^2}\right|$ $\left(v = \frac{y}{x}\right)$

$x^2y = c(2x + y)$ માંગેલ વ્યાપક ઉકેલ છે.

ઉદાહરણ 18 : ઉકેલો : $x^2\frac{dy}{dx} = x^2 + xy + y^2$.

ઉકેલ : $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$ (i)

$\frac{y}{x} = v$ આદેશ લેતાં, $y = vx$ (ii)

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ (iii)

સમીકરણો (i), (ii) અને (iii) પરથી,

$v + x\frac{dv}{dx} = 1 + v + v^2$

$\therefore \quad x\frac{dv}{dx} = 1 + v^2$

$\therefore \quad \dfrac{dv}{1+v^2} = \dfrac{dx}{x}$ **($x \neq 0$)** **(વિયોજનીય ચલ સ્વરૂપ)**

બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$$\int \frac{1}{1+v^2}\, dv = \int \frac{1}{x}\, dx$$

$tan^{-1}\, v = \log |x| + \log |c|$ **(c એ સ્વૈર અચળ)**

$tan^{-1}\, v = \log |xc|$

$tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) = \log |xc|$ એ આપેલ વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ છે.

ઉદાહરણ 19 : ઉકેલો : $x\, sin\left(\dfrac{y}{x}\right) \dfrac{dy}{dx} + x - y\, sin\left(\dfrac{y}{x}\right) = 0$. તથા પ્રારંભિક શરત $y(1) = \dfrac{\pi}{2}$ ને અધિન વિશિષ્ટ ઉકેલ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં $x\, sin\left(\dfrac{y}{x}\right) \dfrac{dy}{dx} + x - y\, sin\left(\dfrac{y}{x}\right) = 0$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y\, sin\left(\frac{y}{x}\right) - x}{x\, sin\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} sin\left(\frac{y}{x}\right) - 1}{sin\left(\frac{y}{x}\right)} \qquad \text{(i)}$$

$\dfrac{y}{x} = v$ લેતાં $y = vx$. **(ii)**

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \qquad \text{(iii)}$$

સમીકરણો (i), (ii) અને (iii) પરથી,

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v sin\, v - 1}{sin\, v}$$

$$\therefore \quad v + x\frac{dv}{dx} = v - \frac{1}{sin\, v}$$

$$\therefore \quad x\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{sin\, v}$$

$$\therefore \quad sin\, v\; dv = -\frac{dx}{x}$$

બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$$\int sin\, v\; dv = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\therefore \quad -cos\, v = -\log |x| - \log |c|$$

$$\therefore \quad cos\left(\frac{y}{x}\right) = \log |x| + \log |c|$$

$$\therefore \quad cos\,\frac{y}{x} = \log |cx| \qquad \text{(iv)}$$

આ વ્યાપક ઉકેલ છે.

હવે $y(1) = \frac{\pi}{2}$ આપેલ છે. એટલે કે $x = 1$ અને $y = \frac{\pi}{2}$.

સમીકરણ (iv) પરથી, $\cos\frac{\pi}{2} = \log|c|$

$\therefore \quad \log|c| = 0$

$\therefore \quad |c| = 1$

$\therefore \quad \cos\left(\frac{y}{x}\right) = \log|x| \ (x \neq 0)$ માંગેલ વિશિષ્ટ ઉકેલ છે.

ઉદાહરણ 20 : $\left[x\sin^2\left(\frac{y}{x}\right) - y\right]dx + x\,dy = 0$ ઉકેલો. પ્રારંભિક શરત $y(1) = \frac{\pi}{4}$ ને અધિન વિશિષ્ટ ઉકેલ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં $\left[x\sin^2\left(\frac{y}{x}\right) - y\right]dx + x\,dy = 0$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \sin^2\frac{y}{x}$ (i)

$\frac{y}{x} = v$ આદેશ લેતાં, $y = vx$ (ii)

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ (iiii)

પરિણામ (i), (ii) અને (iii) પરથી,

$\therefore \quad v + x\frac{dv}{dx} = v - \sin^2 v$

$x\frac{dv}{dx} = -\sin^2 v$

$\therefore \quad \frac{1}{\sin^2 v}\,dv = -\frac{dx}{x}$ (વિયોજનીય ચલ સ્વરૂપ)

બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$\int \operatorname{cosec}^2 v\,dv = -\int\frac{1}{x}\,dx$

$-\cot v = -\log|x| - \log|c|$

$\cot\left(\frac{y}{x}\right) = \log|cx|$ વ્યાપક ઉકેલ છે.

હવે, $y(1) = \frac{\pi}{4}$ આપેલ છે એટલે કે $x = 1, y = \frac{\pi}{4}$

$\cot\frac{\pi}{4} = \log|c|$

$\therefore \quad \log|c| = 1$

$\therefore \quad |c| = e$

$\therefore \quad \cot\frac{y}{x} = \log|ex| = \log|x| + \log e$

$\therefore \quad cot\,\frac{y}{x} = \log|x| + 1$ $\quad (x \neq 0)$

આ માંગેલ વિશિષ્ટ ઉકેલ છે.

ઉદાહરણ 21 : ઉકેલો : $2xy + y^2 - 2x^2\frac{dy}{dx} = 0$. વળી, પ્રારંભિક શરત $y(1) = 2$ પરથી વિશિષ્ટ ઉકેલ શોધો.

ઉકેલ : અહીં $2xy + y^2 - 2x^2\frac{dy}{dx} = 0$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 \qquad \text{(i)}$$

$\frac{y}{x} = v$ આદેશ લેતાં, $y = vx$ $\qquad$ **(ii)**

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \qquad \text{(iii)}$$

સમીકરણો (i), (ii) અને (iii) પરથી,

$$v + x\frac{dv}{dx} = v + \frac{1}{2}v^2$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2}v^2$$

$$\frac{2}{v^2}\,dv = \frac{dx}{x}$$ (વિયોજનીય સ્વરૂપ)

બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$$2\int \frac{1}{v^2}\,dv = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$-\frac{2}{v} = \log|x| + c$$

$-\frac{2x}{y} = \log|x| + c$ વ્યાપક ઉકેલ છે.

અહીં, $y(1) = 2$. તેથી $x = 1$, $y = 2$.

$$\therefore \quad -\frac{2}{2} = \log|1| + c$$

$$\therefore \quad c = -1$$

$$-\frac{2x}{y} = \log|x| - 1$$

$$y = \frac{2x}{1-\log|x|} \quad (x \neq 0,\ x \neq e)$$

સ્વાધ્યાય 5.4

1. **નીચેનાં વિકલ સમીકરણો ઉકેલો :**

(1) $(x^2 + xy)\,dy = (x^2 + y^2)\,dx$

(2) $\left(x\,cos\,\frac{y}{x} + y\,sin\,\frac{y}{x}\right)y = \left(y\,sin\,\frac{y}{x} - x\,cos\,\frac{y}{x}\right)x\frac{dy}{dx}$

(3) $x\dfrac{dy}{dx} - y + x\sin\left(\dfrac{y}{x}\right) = 0$

(4) $y\, e^{\frac{x}{y}}\, dx = (x\, e^{\frac{x}{y}} + y^2)\, dy$

(5) $x\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{dy}{dx} = y\sin\left(\dfrac{y}{x}\right) + x$

(6) $y + 2ye^{\frac{x}{y}}\dfrac{dx}{dy} = 2xe^{\frac{x}{y}}$

(7) $x^2\dfrac{dy}{dx} = x^2 - 2y^2 + xy$

(8) $(1 + e^{\frac{x}{y}})\, dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \dfrac{x}{y}\right) dy = 0$

(9) $x\dfrac{dy}{dx} = x + y$

(10) $y\, dx + x\log\left(\dfrac{y}{x}\right) dy = 2x\, dy$

(11) $(xe^{\frac{y}{x}} + y)\, dx = x\, dy$

(12) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y(x+y)}{x^2} = 0$

(13) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \tan\left(\dfrac{y}{x}\right)$

2. આપેલ પ્રારંભિક શરતોને અધિન નીચેનાં વિકલ સમીકરણોનો વિશિષ્ટ ઉકેલ મેળવો :

(1) $(x^2 + y^2)\, dx + xy\, dy = 0;\ y(1) = 1$

(2) $x\, e^{\frac{y}{x}} - y + x\dfrac{dy}{dx} = 0;\ y(e) = 0$

(3) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} + \operatorname{cosec}\dfrac{y}{x} = 0;\ y(1) = 0$

(4) $(x^2 - 2y^2)\, dx + 2xy\, dy = 0;\ y(1) = 1$

(5) $2xy + y^2 - 2x^2\dfrac{dy}{dx} = 0;\ y(1) = 2$

(6) $(x^2 + 3xy + y^2)\, dx - x^2\, dy = 0;\ y(1) = 0$

*

5.8 સુરેખ વિકલ સમીકરણ :

જો P(x) અને Q(x) ચલ x નાં વિધેયો હોય તો વિકલ સમીકરણ $\dfrac{dy}{dx} + P(x)\, y = Q(x)$ ને પ્રથમ કક્ષાનું સુરેખ વિકલ સમીકરણ (Linear Differential Equation) કહે છે.

ઉદાહરણ તરીકે (1) $\dfrac{dy}{dx} + xy = \cos x$ $\qquad$ $P(x) = x,\ Q(x) = \cos x$

(2) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = e^x$ $\qquad$ $P(x) = -\dfrac{1}{x},\ Q(x) = e^x$

(3) $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = x^3$ $\qquad$ $P(x) = \dfrac{2}{x},\ Q(x) = x^2$

(4) $\dfrac{dy}{dx} + y = x$ $\qquad$ $P(x) = 1,\ Q(x) = x$

સુરેખ વિકલ સમીકરણના ઉકેલની રીત :

ધારો કે વિકલ સમીકરણ $\dfrac{dy}{dx} + P(x)\, y = Q(x)$ આપેલ સુરેખ વિકલ સમીકરણ છે.

બંને બાજુ $e^{\int P(x)\, dx}$ વડે ગુણતાં $\dfrac{dy}{dx} e^{\int P(x)\, dx} + y\, e^{\int P(x)\, dx} \cdot P(x) = Q(x)\, e^{\int P(x)\, dx}$

$\therefore\ \dfrac{d}{dx}\left[y e^{\int P(x)\, dx}\right] = Q(x)\, e^{\int P(x)\, dx}$

બંને બાજુ x ને સાપેક્ષ સંકલન કરતાં,

$$y e^{\int P(x)\, dx} = \int \left[Q(x)\, e^{\int P(x)\, dx}\right] dx$$

નોંધ : અહીં, સુરેખ વિકલ સમીકરણને $e^{\int P(x)\,dx}$ વડે બંને બાજુ ગુણતાં સરળતાથી સંકલન કરી શકાય તેવા સ્વરૂપમાં ફેરવી શકાય છે. તેથી $e^{\int P(x)\,dx}$ ને 'સંકલ્યકારક અવયવ' - (Integrating Factor, I.F) કહે છે.

$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ ને પ્રથમ કક્ષાનું સુરેખ સમીકરણ કહે છે.

x ના વિધેય $h(x)$ વડે બંને બાજુ ગુણતાં,

$$h(x)\frac{dy}{dx} + h(x)\,P(x)y = h(x)Q(x) \qquad \text{(i)}$$

અહીં વિધેય $h(x)$ એવું પસંદ કરો કે જેથી $h(x)Q(x)$ એ $y\,h(x)$ નું વિકલિત બને.

$\therefore \quad h(x)\frac{dy}{dx} + h(x)\,P(x)y = \frac{d}{dx}yh(x)$

$\therefore \quad h(x)\frac{dy}{dx} + h(x)\,P(x)y = h(x)\frac{dy}{dx} + yh'(x)$

$\therefore \quad h(x)\,P(x)y = yh'(x)$

$\therefore \quad h(x)\,P(x) = h'(x)$

$\therefore \quad P(x) = \frac{h'(x)}{h(x)}$

બંને બાજુ x ને સાપેક્ષ સંકલન કરતાં,

$\therefore \quad \int P(x)\,dx = \int \frac{1}{h(x)}\,h'(x)\,dx$

$\therefore \quad \int P(x)\,dx = \log|(h(x))|$

$\therefore \quad h(x) = e^{\int P(x)\,dx}$

સમીકરણ (i) માં $h(x)$ ની કિંમત મૂકતાં,

$\therefore \quad e^{\int P(x)\,dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)\,dx}P(x)y = e^{\int P(x)\,dx}Q(x)$

$\therefore \quad \frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)\,dx}y\right) = e^{\int P(x)\,dx}Q(x)$

$\therefore \quad e^{\int P(x)\,dx}y = \int e^{\int P(x)\,dx}Q(x)\,dx.$

આ રીતે સુરેખ વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ મેળવવામાં આવે છે.

વિધેય $h(x) = e^{\int P(x)\,dx}$ ને સંકલ્યકારક અવયવ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ 22 : ઉકેલો $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2$.

ઉકેલ : આ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$ પ્રકારનું સુરેખ વિકલ સમીકરણ છે.

અહીં, $P(x) = \frac{1}{x}$ અને $Q(x) = x^2$

$$\therefore \quad \text{I.F.} = e^{\int P(x)\,dx}$$

$$= e^{\int \frac{1}{x}dx}$$

$$= e^{\log|x|} = |x|$$

I.F. તરીકે x લઈ શકાય કારણ કે વિકલ સમીકરણની બંને બાજુ x વડે ગુણતાં તેમાં ફેર પડતો નથી. I.F. સંકલ્યકારક અવયવ છે. x વડે ગુણતાં પણ સંકલન શક્ય બને છે.

બંને બાજુ x વડે ગુણતાં,

$$x\frac{dy}{dx} + y = x^3$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(xy) = x^3$$

$$\therefore \quad xy = \int x^3\, dx$$

$$\therefore \quad xy = \frac{x^4}{4} + c$$ (c એ સ્વૈર અચળ)

આ આપેલ વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ છે.

ઉદાહરણ 23 : ઉકેલો $\frac{dy}{dx} + y\sec x = \tan x$.

ઉકેલ : $\frac{dy}{dx} + y\sec x = \tan x$ સુરેખ વિકલ સમીકરણ છે.

અહીં $P(x) = \sec x$, $Q(x) = \tan x$

$$\therefore \quad \text{I.F.} = e^{\int P(x)\,dx}$$

$$= e^{\int \sec x\, dx}$$

$$= e^{\log|\sec x + \tan x|}$$

$$= |\sec x + \tan x|$$

I.F. $= \sec x + \tan x$ લઈ શકાય.

આપેલ સમીકરણની બંને બાજુએ I.F. વડે ગુણતાં,

$$(\sec x + \tan x)\frac{dy}{dx} + \sec x\,(\sec x + \tan x)\,y = \tan x\,(\sec x + \tan x)$$

$$\frac{d}{dx}[y(\sec x + \tan x)] = \tan x\,(\sec x + \tan x)$$

$$\therefore \quad y(\sec x + \tan x) = \int \tan x\,(\sec x + \tan x)\,dx$$

$$\therefore \quad y(\sec x + \tan x) = \int \sec x \tan x\, dx + \int \tan^2 x\, dx$$

$$\therefore \quad y(\sec x + \tan x) = \int \sec x \tan x\, dx + \int (\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$\therefore \quad y(\sec x + \tan x) = \sec x + \tan x - x + c$$ (c એ સ્વૈર અચળ)

આ આપેલ વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ છે.

ઉદાહરણ 24 : $\frac{dy}{dx} = y\tan x + e^x$ ઉકેલો.

ઉકેલ : $\frac{dy}{dx} = y\tan x + e^x$ સમીકરણ એ સુરેખ વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ સ્વરૂપમાં છે.

અહીં $P(x) = -\tan x$ અને $Q(x) = e^x$

હવે, $\text{I.F.} = e^{\int P(x)\,dx}$

$$= e^{\int -\tan x\, dx}$$

$$= e^{-\log|\sec x|}$$

$$= e^{\log|\cos x|}$$

$$= \cos x$$

$\therefore$ I.F. $= \cos x$ લઈ શકાય.

∴ સુરેખ વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ

$$y \cos x = \int e^x \cos x \, dx \qquad \left(ye^{\int P(x)\,dx} = \int Q(x)\, e^{\int P(x)\,dx} dx\right)$$

∴ $y \cos x = \frac{e^x}{2} (\cos x + \sin x) + c$ માંગેલ વ્યાપક ઉકેલ છે. (c સ્વૈર અચળ છે.)

ઉદાહરણ 25 : ઉકેલો $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \log x$

ઉકેલ : આપેલ સમીકરણ એ સુરેખ વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ સ્વરૂપમાં છે.

અહીં $P(x) = \frac{1}{x}$ અને $Q(x) = \log x$

$$\text{I.F.} = e^{\int P(x)\,dx}$$
$$= e^{\int \frac{1}{x}\,dx}$$
$$= e^{\log |x|}$$
$$= |x|$$

I.F. તરીકે x લઈ શકાય.

વ્યાપક ઉકેલની રીતે

$$ye^{\int P(x)\,dx} = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)\,dx} dx$$

$$yx = \int x \log x \, dx$$

∴ $yx = \log x \int x \, dx - \int \left(\frac{d}{dx}(\log x) \int x \, dx\right) dx$

∴ $yx = \log x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{x} \times \frac{x^2}{2} \, dx$

∴ $yx = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{1}{4} x^2 + c$ માંગેલ વ્યાપક ઉકેલ છે. (c એ સ્વૈર અચળ)

સ્વાધ્યાય 5.5

નીચેનાં વિકલ સમીકરણો ઉકેલો :

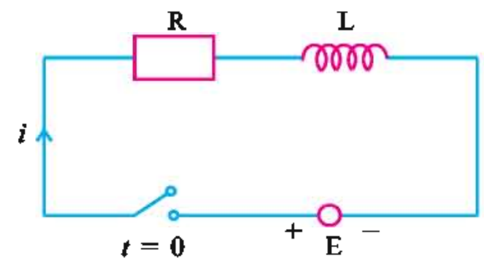
1. $\frac{dy}{dx} + 2y = \sin x$
2. $x\frac{dy}{dx} - y = (1 + x)\,e^{-x}$
3. $x\frac{dy}{dx} = x + y$
4. $\frac{dy}{dx} - \frac{2xy}{1+x^2} = x^2 + 1$
5. $\frac{dy}{dx} = x + y$
6. $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = e^x$
7. $4\frac{dy}{dx} + 8y = 5e^{-3x}$
8. $(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy - 4x^2 = 0$
9. $(1 + y^2)\,dx = (\tan^{-1}y - x)\,dy$
10. $x \log x \frac{dy}{dx} + y = \frac{2}{x} \log x, \ x > 0$
11. $\sin^2 x \frac{dy}{dx} + y = \cot x$
12. $y\,dx - (x + 2y^2)\,dy = 0$

*

5.9 વિકલ સમીકરણના ઉપયોગો :

આપણે જાણીએ છીએ તેમ વિવિધ શાખાઓ ગણિતશાસ્ત્ર, ભૌતિકશાસ્ત્ર, જૈવિકશાસ્ત્ર વગેરેના પાયાના પ્રશ્નોના ઉકેલના ભાગરૂપે વિકલ સમીકરણના અભ્યાસની શરૂઆત થઈ.

(1) ભૌતિકશાસ્ત્ર (R-L પરિપથ) : કોઈ R-L પરિપથ લેતાં, તેમાં અવરોધ (R) (Resistence) અને પ્રેરક (L) (Inductor) આવેલાં થવાથી તેને R-L પરિપથ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. અહીં $t = 0$, સમયે કળ બંધ હોવાથી પરિપથમાંથી વિદ્યુતપ્રવાહ પસાર થતો નથી. જ્યારે કળ ચાલુ કરવામાં આવે છે ત્યારે પરિપથમાંથી વિદ્યુતપ્રવાહ પસાર થાય છે. વિદ્યુતના નિયમ પ્રમાણે R અવરોધવાળા અવરોધક આગળ સ્થિત વૉલ્ટેજ Ri, અને પ્રેરક વૉલ્ટેજ $L\dfrac{di}{dt}$ છે, જ્યાં i એ વિદ્યુતપ્રવાહ છે.



આકૃતિ 5.5

ઉદાહરણ 26 : વિદ્યુત ચાલકબળ દર્શાવતું સમીકરણ $E = Ri + L\dfrac{di}{dt}$ છે, જ્યાં R એ અવરોધ અને L એ આત્મપ્રેરણ અને i એ વિદ્યુતપ્રવાહ છે. તો સમય (t) અને વિદ્યુતપ્રવાહ (i) વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવતું વિધેય મેળવો.

ઉકેલ : આપેલ સમીકરણને $L\dfrac{di}{dt} = E - Ri$ સ્વરૂપે લખી શકાય.

$$\therefore \quad \frac{1}{E - Ri}\, di = \frac{1}{L}\, dt$$

$$\therefore \quad \frac{-R}{E - Ri}\, di = \frac{-R}{L}\, dt$$ (વિયોજનીય ચલ સ્વરૂપ)

બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$$\int \frac{-R}{E - Ri}\, di = \int \frac{-R}{L}\, dt$$

$$\therefore \quad \log(E - Ri) = \frac{-R}{L} t + \log c$$

$$\therefore \quad \log\frac{(E - Ri)}{c} = \frac{-R}{L} t$$

$$\therefore \quad E - Ri = ce^{\frac{-R}{L}t}$$

$$Ri = E - ce^{\frac{-R}{L}t}$$

$$\therefore \quad i = \frac{E}{R} - \frac{ce^{-\frac{R}{L}t}}{R}$$ માંગેલ સંબંધ દર્શાવતું સમીકરણ છે.

બીજી રીત :

આપેલ સમીકરણ $L\dfrac{di}{dt} = E - Ri$ છે.

$$\therefore \quad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{E}{L}$$

આપેલ સમીકરણ સુરેખ વિકલ સમીકરણ છે.

$$\text{I.F.} = e^{\int \frac{R}{L} dt} = e^{\frac{R}{L}t}$$

બંને બાજુ I.F. વડે ગુણતાં, $e^{\frac{R}{L}t}\dfrac{di}{dt} + e^{\frac{R}{L}t}\dfrac{R}{L} i = \dfrac{E}{L} e^{\frac{R}{L}t}$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}\left(e^{\frac{R}{L}t} i\right) = \frac{E}{L} e^{\frac{R}{L}t}$$

બંને બાજુએ t પ્રત્યે સંકલન કરતાં,

$$e^{\frac{R}{L}t} \cdot i = \int \frac{E}{L} e^{\frac{R}{L}t} dt$$

$$\therefore \quad e^{\frac{R}{L}t} \cdot i = \frac{\frac{E}{L} e^{\frac{R}{L}t}}{\frac{R}{L}} - \frac{c}{R} \qquad \text{(સ્વૈર અચળ } -\frac{c}{R} \text{ લીધો છે.)}$$

$$\therefore \quad e^{\frac{R}{L}t} \cdot i = \frac{E}{R} e^{\frac{R}{L}t} - \frac{c}{R}$$

$$\therefore \quad i = \frac{E}{R} - \frac{c}{R} e^{-\frac{R}{L}t} \text{ વ્યાપક ઉકેલ છે.}$$

(2) ભૂમિતિમાં ઉપયોગ :

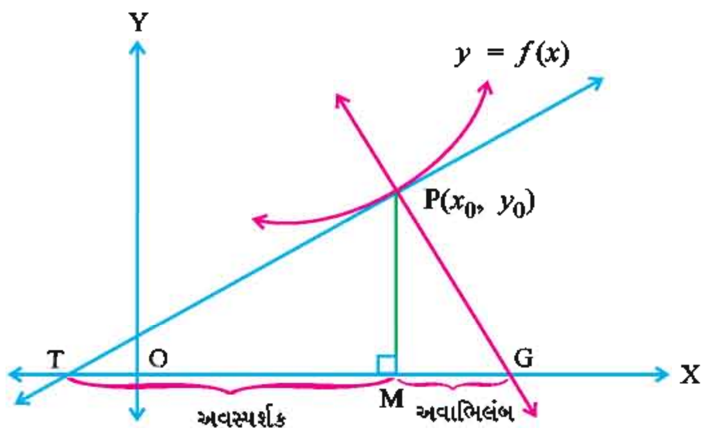
$y = f(x)$ એ આપેલ વક્ર છે.

જો y એ (x_0, y_0) આગળ વિકલનીય હોય તો બિંદુ (x_0, y_0) આગળ વક્રના સ્પર્શકનો ઢાળ $m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_0, y_0)}$ થાય.

(1) બિંદુ (x_0, y_0) આગળ વક્રને દોરેલ સ્પર્શકનું સમીકરણ

$$y - y_0 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_0, y_0)} (x - x_0) \text{ થાય.}$$

(2) બિંદુ (x_0, y_0) આગળ વક્રને દોરેલ અભિલંબનું સમીકરણ



આકૃતિ 5.6

$$y - y_0 = -\left(\frac{dx}{dy}\right)_{(x_0, y_0)} (x - x_0) \text{ થાય.} \qquad \left(\frac{dy}{dx} \neq 0\right)$$

અહીં, $M(x_0, 0)$ એ બિંદુ $P(x_0, y_0)$ માંથી X-અક્ષ પરનો લંબપાદ છે. ધારો કે P આગળનો સ્પર્શક X-અક્ષને T બિંદુમાં છેદે છે. $\overline{TM}$ ને વક્રનો **અવસ્પર્શક (Subtangent)** કહે છે.

$$\text{અવસ્પર્શકની લંબાઈ TM} = \left| \frac{y_0}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_0, y_0)}} \right|$$

ધારો કે P આગળનો અભિલંબ X-અક્ષને G માં છેદે છે. તો $\overline{MG}$ ને **અવાભિલંબ (Subnormal)** કહેવાય છે.

$$\text{અવાભિલંબની લંબાઈ MG} = \left| y_0 \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_0, y_0)} \right|$$

ઉદાહરણ 27 : વક્રના કોઈ પણ બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ, તે બિંદુના y-યામના વ્યસ્ત જેટલો છે. $(y \neq 0)$ વક્ર $(-1, 2)$માંથી પસાર થતો હોય તો આ વક્રનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે $P(x, y)$ એ વક્ર પરનું કોઈપણ બિંદુ છે.

વક્રના P(x, y) બિંદુ આગળ સ્પર્શકનો ઢાળ $\frac{dy}{dx}$ થાય.

પરંતુ P(x, y) બિંદુ આગળ સ્પર્શકનો ઢાળ $\frac{1}{y}$ આપેલ છે.

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}$

$ydy = dx$

બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$\therefore \quad \int y\, dy = \int dx$

$\frac{y^2}{2} = x + \frac{c}{2}$ (c એ સ્વૈર અચળ)

$\therefore \quad y^2 = 2x + c,$

વક્ર $(-1, 2)$ માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore \quad 4 = -2 + c$

$\therefore \quad c = 6$

$\therefore \quad y^2 = 2x + 6$ વક્રનું સમીકરણ છે.

(3) ઘાતાંકીય વૃદ્ધિદર (જેમ કે વસતી વધારો)

ધારો કે $p(t)$ એ સમય t ને સાપેક્ષ વધે છે. ધારો કે $t = 0$ સમયે $p(t) = p_0$

ધારો કે વૃદ્ધિદર એ જથ્થાના સમપ્રમાણમાં છે.

એટલે કે $\frac{d\,p(t)}{dt} \propto p(t)$

$\frac{d\,p(t)}{dt} = kp(t)$ $(k > 0)$

$\frac{1}{p(t)} \frac{d\,p(t)}{dt} = k$

બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$\int \frac{(d\,p(t))}{p(t)} = \int k\,dt$

$\log p(t) = kt + \log c$

$\therefore \quad \log p(t) - \log c = kt$

$\therefore \quad \log \frac{p(t)}{c} = kt$

$\therefore \quad p(t) = ce^{kt}$, જ્યાં c સ્વૈર અચળ છે.

$t = 0$ સમયે $p(t) = p_0$ આપેલ છે.

$\therefore \quad p_0 = ce^0$

$\therefore \quad c = p_0$

$\therefore \quad p(t) = p_0 e^{kt}$

આ ઉકેલ પરથી કોઈ પણ t સમયે જથ્થો $p(t)$ શોધી શકાય છે.

ઉદાહરણ 28 : એક શહેરની વસતીનો વધારો પ્રતિવર્ષે 2 % છે. તો કેટલા સમયમાં વસતી બમણી થશે ?

ઉકેલ : ધારો કે હાલમાં વસતી p_0 છે અને તે t સમયમાં $p(t)$ થશે.

વસતી વધારાનો દર 2 % છે.

તેથી, $\frac{dp}{dt} = \frac{2}{100} p$

$$\int \frac{dp}{p} = \frac{1}{50} \int dt$$

$\therefore \quad \log p = \frac{1}{50} t + \log c$

$\therefore \quad p = ce^{\frac{1}{50} t}$

હવે, $t = 0$, $p = p_0$

તેથી, $p_0 = ce^0$

$\therefore \quad c = p_0$

$\therefore \quad p = p_0 e^{\frac{1}{50} t}$

હવે વસતી બમણી થશે થાય ત્યારે $p = 2p_0$.

$\therefore \quad 2p_0 = p_0 e^{\frac{1}{50} t}$

$\therefore \quad \log_e 2 = \frac{1}{50} t$

$\therefore \quad t = 50 \log_e 2 = 34.65 \simeq 35$ વર્ષ

(4) ઘાતાંકીય ક્ષય :

ધારો કે $m(t)$ એ પદાર્થનો જથ્થો છે. તે સમય t સાથે ઘટે છે.

જો ક્ષયદર એ તેના જથ્થા m ના સમપ્રમાણમાં હોય તો,

$$\frac{dm}{dt} = -km \qquad (k > 0)$$

ઉપરની રીતે આપણે ક્ષય શોધી શકીએ.

ઉદાહરણ 29 : એક કિરણોત્સર્ગી પદાર્થ એ 2000 વર્ષમાં અડધો થાય છે. (આને તે પદાર્થનો અર્ધજીવનકાળ કહે છે.) તો તેના મૂળ જથ્થાનો દશમો ભાગ થતાં કેટલો સમય થશે ?

ઉકેલ : ધારો કે શરૂઆતમાં મૂળ જથ્થો m_0 ગ્રામ છે.

જો t સમયે પદાર્થનો જથ્થો m હોય તો, વિઘટન દર માટે

$$\frac{dm}{dt} = -km \qquad (k > 0)$$

$$\frac{dm}{m} = -k\,dt$$

$\therefore \quad \int \frac{dm}{m} = \int -k\,dt$

$\therefore \quad \log m = -kt + \log c$

$\therefore \quad m = ce^{-kt}$

$t = 0$ સમયે $m = m_0$

$$m_0 = ce^0$$

$$\therefore \quad c = m_0$$

$$\therefore \quad m = m_0 e^{-kt} \qquad \text{(i)}$$

હવે $t = 2000$ વર્ષ હોય ત્યારે $m = \frac{m_0}{2}$

તેથી, $\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-k \cdot 2000}$

$$\therefore \quad \frac{1}{2} = e^{-k \cdot 2000}$$

$$\therefore \quad -k \cdot 2000 = -\log_e 2$$

$$\therefore \quad k = \frac{\log_e 2}{2000}$$

હવે ધારો કે કોઈ t સમયે, m એ $\frac{m_0}{10}$ થશે.

સમીકરણ (i) પરથી

$$\therefore \quad \frac{m_0}{10} = m_0 e^{-kt}$$

$$\therefore \quad -kt = \log_e \frac{1}{10}$$

$$\therefore \quad -kt = -\log_e 10$$

$$\therefore \quad kt = \log_e 10$$

$$\therefore \quad t = \frac{1}{k} \log_e 10 = \frac{2000}{\log_e 2} \cdot \log_e 10 \simeq 6644 \text{ વર્ષ}$$

(5) ન્યૂટનનો શીત નિયમ :

ન્યૂટનના નિયમ મુજબ પદાર્થના ઠંડા પડવાનો દર તે સમયના આસપાસના વાતાવરણના અચળ તાપમાન અને પદાર્થના તાપમાનના તફાવતના સમપ્રમાણમાં હોય છે.

ધારો કે S એ આસપાસના વાતાવરણનું અચળ તાપમાન છે. કોઈ t સમયે પદાર્થનું તાપમાન T છે. તો,

$$\frac{dT}{dt} \propto (T - S)$$

$$\therefore \quad \frac{dT}{dt} = -k(T - S) \qquad (k > 0 \text{ અચળ છે.})$$

$$\therefore \quad \frac{1}{T - S}\, dT = -k\,dt$$

બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$$\log |T - S| = -kt + \log c$$

$$\therefore \quad \log \left| \frac{T - S}{c} \right| = -kt$$

$$T - S = ce^{-kt}$$

ઉદાહરણ 30 : એક ઓરડામાં મૃતદેહનું તાપમાન 80° F છે. પાંચ મિનિટ બાદ મૃતદેહનું તાપમાન 60° F. થાય છે. ત્યાર બાદ બીજી 5 મિનિટ પછી તેનું તાપમાન 50° F થાય છે. તો તેના આસપાસના વાતાવરણનું અચળ તાપમાન શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે કોઈ t સમયે મૃતદેહનું તાપમાન T છે.

જો S એ આસપાસના વાતાવરણનું અચળ તાપમાન હોય (એટલે કે ઓરડાનું તાપમાન)

તો ન્યૂટનના શીતના નિયમ પ્રમાણે.

$$\frac{dT}{dt} \propto (T - S)$$

$$\therefore \quad \frac{dT}{dt} = -k(T - S) \qquad (k > 0 \text{ અચળ છે. તાપમાન એ સમયગાળામાં ઘટે છે.})$$

$$\therefore \quad \frac{dT}{T - S} = -k\, dt$$

$$\therefore \quad \int \frac{dT}{T - S} = \int -k\, dt$$

$$\therefore \quad \log (T - S) = -kt + c \qquad \text{(i)}$$

હવે $t = 0$ ત્યારે $T = 80^\circ$ F

$$\therefore \quad \log (80 - S) = c$$

સમીકરણ (i) પરથી,

$$\log (T - S) = -kt + \log (80 - S)$$

હવે $t = 5$ ત્યારે $T = 60^\circ$ F

$$\therefore \quad \log (60 - S) = -5k + \log (80 - S) \qquad \text{(ii)}$$

વળી $t = 10$ ત્યારે $T = 50^\circ$ F

$$\therefore \quad \log (50 - S) = -10k + \log (80 - S) \qquad \text{(iii)}$$

સમીકરણ (ii) અને (iii) પરથી,

$$\therefore \quad \frac{1}{5} \log \left(\frac{60 - S}{80 - S}\right) = -k = \frac{1}{10} \log \left(\frac{50 - S}{80 - S}\right)$$

$$\therefore \quad 2 \log \left(\frac{60 - S}{80 - S}\right) = \log \left(\frac{50 - S}{80 - S}\right)$$

$$\therefore \quad \left(\frac{60 - S}{80 - S}\right)^2 = \left(\frac{50 - S}{80 - S}\right)$$

$$\therefore \quad (60 - S)^2 = (80 - S)(50 - S)$$

$$\therefore \quad 3600 - 120S + S^2 = 4000 - 130S + S^2$$

$$\therefore \quad 10S = 400$$

$$\therefore \quad S = 40$$

$\therefore$ ઓરડાનું તાપમાન 40° F છે.

ઉદાહરણ 31 : સપ્તેશે ₹ 10,000 બૅન્કમાં નિયત મુદતની થાપણમાં મૂક્યા છે. તેના મુદલમાં થતા વધારાનો દર મુદલના 7 % જેટલો છે. તો તેની મૂળ રકમ કેટલા સમયમાં બમણી થશે ?

ઉકેલ : ધારો કે કોઈ t સમયે મુદલ P છે.

આપેલ માહિતી મુજબ

$$\frac{dP}{dt} = \frac{7P}{100}$$

$$\therefore \quad \frac{dp}{P} = \frac{7}{100}\, dt$$ (વિયોજનીય ચલ સ્વરૂપ)

બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$$\int \frac{dp}{P} = \int \frac{7}{100}\, dt$$

$$\therefore \quad \log P = \frac{7}{100} t + \log c$$

$$\therefore \quad P = ce^{\frac{7t}{100}}$$

હવે $t = 0$ ત્યારે $P =$ ₹ 10,000

$$10000 = ce^0$$

$$\therefore \quad c = 10000$$

$$\therefore \quad P = 10000\, e^{\frac{7t}{100}} \qquad \text{(i)}$$

ધારોકે t સમયમાં રકમ બમણી થાય છે.

t સમય બાદ $\quad P = 2 \times$ મુદ્દલ

$= 2 \times 10,000$

$=$ ₹ 20,000

સમીકરણ (i) પરથી

$$\therefore \quad 20000 = 10000\, e^{\frac{7t}{100}}$$

$$\therefore \quad 2 = e^{\frac{7t}{100}}$$

$$\therefore \quad \log_e 2 = \frac{7}{100} t$$

$\therefore \quad t = \frac{100}{7} \log_e 2$, જે આશરે 9.9 વર્ષ થાય.

સ્વાધ્યાય 5.6

1. વક્રના કોઈ બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો X અંતઃ ખંડ એ તેના સ્પર્શબિંદુના y-યામ થી 4 ગણો છે. તે વક્રનું સમીકરણ શોધો.
2. એક પ્રયોગશાળામાં કરેલ પરીક્ષણ મુજબ બેક્ટેરિયાનો વૃદ્ધિ દર કોઈપણ સમયે હાજર બેક્ટેરિયાની સંખ્યાના પ્રમાણમાં છે. જો એક કલાકમાં બેક્ટેરિયાની સંખ્યા બમણી થાય તો,
   (1) 4 કલાકના અંતે બેક્ટેરિયાની સંખ્યા કેટલી હોય ?
   (2) જો 3 કલાક બાદ બેક્ટેરિયાની સંખ્યા 24,000 હોય, તો શરૂઆતમાં બેક્ટેરિયાની સંખ્યા કેટલી થશે ?
3. કોઈ એક વક્ર બિંદુ $(3, -4)$ માંથી પસાર થાય છે. વક્રના બિંદુ (x, y) આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ $\frac{2y}{x}$ છે. તો વક્રનું સમીકરણ શોધો.
4. બેંકમાં ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજે મુકેલ મુદ્દલમાં થતા વધારાનો દર મુદ્દલ અને વાર્ષિક વ્યાજ દરના ગુણાકાર જેટલો છે.
   (1) જો બેંકનો વાર્ષિક વ્યાજ દર 5 %. હોય તો મુદ્દલ કેટલા સમયમાં બમણું થશે ?
   (2) જો 10 વર્ષમાં મુદ્દલ બમણું થાય તો વ્યાજ દર કયો હશે ?

5. એક કિરણોત્સર્ગી પદાર્થના વિઘટનનો દર તેના તે સમયના જથ્થાના સમપ્રમાણમાં છે. વિઘટન શરૂ થયાના એક વર્ષ બાદ પદાર્થનો જથ્થો 100 ગ્રામ હોય અને બે વર્ષ બાદ આ જથ્થો 80 ગ્રામ હોય, તો શરૂઆતમાં પદાર્થનો મૂળ જથ્થો કેટલો હશે ?

6. અચળ લંબાઈના અવાભિલંબ ધરાવતા તથા ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતા વક્રનું સમીકરણ મેળવો.

7. વક્રના કોઈ બિંદુ (x, y) આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ અને તે બિંદુના y યામનો ગુણાકાર એ બિંદુના x યામ જેટલો હોય તથા વક્ર બિંદુ $(1, 2)$ માંથી પસાર થતો હોય તો આ વક્રનું સમીકરણ મેળવો.

સ્વાધ્યાય 5

1. વિકલ સમીકરણ $y = x\left(\frac{dy}{dx}\right) + a\left(\frac{dx}{dy}\right)$ નો ઉકેલ $y = cx + \frac{a}{c}$ છે તેમ ચકાસો,

(જ્યાં c સ્વૈર અચળ છે.)

2. બતાવો કે વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = 1 + xy^2 + x + y^2$, $y(0) = 0$ નો ઉકેલ,

$y = tan\left(x + \frac{x^2}{2}\right)$ છે.

3. બતાવો કે $y = e^{-x} + ax + b$ એ વિકલ સમીકરણ $e^x\frac{d^2y}{dx^2} - 1 = 0$ નો ઉકેલ છે.

4. વિકલ સમીકરણ $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$ નો ઉકેલ $y = ae^{2x} + be^{-x}$ છે તેમ ચકાસો.

5. વક્રની સંહતિ $y^2 = a(b + x)(b - x)$ દર્શાવતું વિકલ સમીકરણ શોધો.

(a, b સ્વૈર અચળ)

6. ઉકેલો :

(1) $\frac{dy}{dx} = cos\,(x + y) + sin\,(x + y)$

(2) $\frac{dy}{dx} + \frac{4xy}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)^3}$

(3) $2ye^{\frac{x}{y}}\,dx + (y - 2xe^{\frac{x}{y}})\,dy = 0$

(4) $xy\frac{dy}{dx} = x^2 - y^2$

(5) $(x^2 - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0 \quad y(1) = 1$

(6) $cos^2x\frac{dy}{dx} + y = tan\,x$

7. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c), (d)માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :

(1) $y = A sinx + B cosx$ જેનો વ્યાપક ઉકેલ હોય તેવા વિકલ સમીકરણની કક્ષા ......(જ્યાં A, B સ્વૈર અચળ છે.) ☐

(a) 4 (b) 2 (c) 0 (d) 3

(2) $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + y = 0$ ની કક્ષા અને પરિમાણ અનુક્રમે ...... છે

(a) 3, 2 (b) 2, 3 (c) 3, વ્યાખ્યાયિત નથી (d) 2, 3

(3) $y' + y = \frac{5}{y'}$ નું પરિમાણ ...... છે.

(a) 1 (b) 2 (c) વ્યાખ્યાયિત નથી (d) -1

(4) વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = -\frac{x+y}{1+x^2}$ એ ...... વિકલ સમીકરણ છે.

(a) વિયોજનીય ચલનું (b) સમપરિમાણીય

(c) સુરેખ (d) દ્વિતીય કક્ષાનું

(5) સમપરિમાણ વિધેય $f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x + y}$ નું પરિમાણ ...... છે.

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) વ્યાખ્યાયિત નથી

(6) વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y+2}$ નો સંકલ્યકારક અવયવ ...... છે.

(a) e^x (b) e^{x+y+2} (c) e^{-y} (d) $\log|x + y + 2|$

(7) લંબાતિવલય $x^2 - y^2 = a^2$ સમુદાયનું વિકલ સમીકરણ ...... છે.

(a) $y_2 = 0$ (b) $xy + y_2 = 0$ (c) $yy_1 = x$ (d) $xy_1 + y = 0$

(8) વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + x^2\frac{d^2y}{dx^2} + xy = sinx$ ના કક્ષા અને પરિમાણ અનુક્રમે તો, ...

(a) 1, 1 (b) 2, 1 (c) 3, 2 (d) 2, અવ્યાખ્યાયિત

(9) નીચેના પૈકીનું કયું વિધેય સમીકરણ $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x\frac{dy}{dx} + y = 0$ નો ઉકેલ છે ?

(a) $y = 4x$ (b) $y = 4$ (c) $y = 2x^2 + 4$ (d) $y = 2x - 4$

(10) વિકલ સમીકરણ $x\frac{dy}{dx} + y = 0$ નો ઉકેલ ...... છે

(a) $e^{xy} = c$ (b) $y = cx$ (c) $x = cy$ (d) $e^xy = c$

(11) વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = 0$; $y(1) = 1$ નો વિશિષ્ટ ઉકેલ ......

(a) $y = \frac{1}{x}$ (b) $y = \frac{1}{x^2}$ (c) $x = \frac{1}{y^2}$ (d) $x^2 = \frac{1}{y^2}$

(12) દ્વિતીય કક્ષાના વિકલ સમીકરણના વ્યાપક ઉકેલમાં આવતા સ્વૈર અચળોની સંખ્યા ...... છે.

(a) 1 (b) 0 (c) 2 (d) 4

(13) દ્વિતીય કક્ષાના વિકલ સમીકરણના વિશિષ્ટ ઉકેલમાં આવતા સ્વૈર અચળોની સંખ્યા ...... છે.

(a) 4 (b) 2 (c) 1 (d) 0

(14) વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$ નો ઉકેલ ...... છે.

(a) $e^x + e^{-y} = c$ (b) $e^x + e^y = c$ (c) $e^{-x} + e^y = c$ (d) $e^{-x} + e^{-y} = c$

(15) વિકલ સમીકરણ $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right]^{\frac{2}{3}} = x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ નું પરિમાણ ...... છે.

(a) 3 (b) 2 (c) 6 (d) 1

(16) વિકલ સમીકરણ $2x\frac{dy}{dx} - y = 0$; $y(1) = 2$ નો ઉકેલ ...... દર્શાવે છે.

(a) રેખા (b) પરવલય (c) વર્તુળો (d) ઉપવલય

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. સ્વતંત્ર ચલ (x) અવલંબી ચલ (y) અને સ્વતંત્ર ચલને સાપેક્ષ અવલંબી ચલના વિકલિતોને સમાવતા સમીકરણને વિકલ સમીકરણ કહે છે.
2. વિકલ સમીકરણમાં આવતા સ્વતંત્ર ચલને સાપેક્ષ વિકલિતોમાં ઉચ્ચતમ કક્ષાના વિકલિતની કક્ષાને વિકલ સમીકરણની કક્ષા કહે છે.
3. વિકલ સમીકરણ વિકલિતોની બહુપદી સ્વરૂપે આપેલ હોય તો વિકલ સમીકરણમાં આવતા ઉચ્ચતમ કક્ષાના વિકલિતના ઉચ્ચતમ ઘાતાંકને સમીકરણનું પરિમાણ કહે છે.
4. n કક્ષાના વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ એ વિકલ સમીકરણની કક્ષા n જેટલા સ્વૈર અચળો ધરાવતું વિધેય હોય. તેને વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ કહે છે. સ્વૈર અચળથી મુક્ત ઉકેલને વિશિષ્ટ ઉકેલ કહે છે.
5. વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ મેળવવાની વિયોજનીય ચલની રીતમાં ચલોને સંપૂર્ણપણે અલગ કરવામાં આવે છે.
6. જો વિધેય $f(x, y) = x^n \phi\left(\frac{y}{x}\right)$ ના સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય તો તેને n કક્ષાનું સમપરિમાણ વિધેય કહે છે.
7. જો $P(x, y)$ તથા $Q(x, y)$ એક જ પરિમાણનાં સમપરિમાણ વિધેયો હોય, તો $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$ ને સમપરિમાણ વિકલ સમીકરણ કહે છે.
8. જો $P(x)$ અને $Q(x)$ એ ચલ x નાં વિધેય હોય તો વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ ને સુરેખ વિકલ સમીકરણ કહે છે. તેનો ઉકેલ $ye^{\int P\,dx} = \int Qe^{\int P\,dx}\,dx$ છે.
9. વિકલ સમીકરણના ઉપયોગ

સદિશનું બીજગણિત

6

Mathematics knows no races or geographic boundaries;
for mathematics, the cultural world is one country.

– Jules Henri

6.1 પ્રાસ્તાવિક

જ્યારે આપણે દૈનિક સંવાદમાં કોઈ જથ્થા વિશે ચર્ચા કરતા હોઈએ છીએ, ત્યારે મહદંશે, આપણે જેને ફક્ત માન (માપ) હોય છે તેવા અદિશ જથ્થા વિશે ચર્ચા કરતા હોઈએ છીએ. જો આપણે એમ કહીએ કે મેં 50 કિમી ગાડી હંકારી (ચલાવી), તો આપણે મુસાફરી કરેલ અંતર વિશે વાત કરી કહેવાય. અહીં આપણે કઈ દિશામાં મુસાફરી કરી તે વિશે ચિંતા કરતા નથી. 50 કિમી એ એક 'અદિશ' રાશિ છે. હવે, જો આપણે આપણા ઘર તરફ ગાડી હંકારી ગયા હોઈએ, તો ફક્ત 50 કિમી ગાડી હંકારી ગયા એમ કહેવું પૂરતું નથી, પરંતુ આપણે એમ કહેવું જોઈએ કે, આપણે આપણા ઘરે પહોંચવા માટે દક્ષિણ દિશામાં 50 કિમી ગાડી હંકારી. આ હકીકત ફક્ત માન દર્શાવતી નથી પરંતુ આ માપ સાથે દિશા પણ સૂચવે છે. આવી રાશિને 'સદિશ' રાશિ કહે છે.

લેટિન શબ્દ વેક્ટર (Vector) નો અર્થ 'વાહક' (Carries) થાય છે. સદિશ એ બે બિંદુઓ (શરૂઆતનું બિંદુ અને અંતિમ બિંદુ) વચ્ચેના અંતરના માપનું તથા શરૂઆતના બિંદુથી અંતિમ બિંદુ તરફની દિશાનું 'વહન' કરે છે. મોટા ભાગની બૈજિક ક્રિયાઓ જેવી કે સરવાળો, બાદબાકી, ગુણાકાર અને ભાગાકારના નિયમો તથા સદિશ ક્રિયાઓનાં સરવાળા, બાદબાકી, અદિશ વડે ગુણાકારમાં સમાનતા જણાય છે. R પરના બૈજિક ગુણધર્મો જેવા કે, ક્રમ, જૂથના નિયમ પણ સદિશના સરવાળામાં દૃષ્ટિગોચર થાય છે.

ભૌતિકવિજ્ઞાનના અભ્યાસમાં સદિશ અગત્યનો ભાગ ભજવે છે. તેનું ખૂબ જ મહત્ત્વ છે. વેગ, પ્રવેગ, પદાર્થ પર લાગતું બળ જેવાં ઘણાં ભૌતિક પદોની રજૂઆતમાં સદિશની આવશ્યકતા છે. ઘણાં ભૌતિક પદો અંતર દર્શાવતાં નથી, પરંતુ તેઓ સદિશ દ્વારા વ્યક્ત કરવામાં આવે છે અને તેથી જ ભૌતિકવિજ્ઞાનના સિદ્ધાંતો સમજવા માટે સદિશ ખૂબ જ અગત્યનો છે.

ભૌતિકવિજ્ઞાન મુખ્યત્વે ગુરુત્વાકર્ષણ, વિદ્યુતબળ, ચુંબકીયબળ, વિદ્યુતચુંબકીયબળ કે યાંત્રિકબળોનો અભ્યાસ કરે છે. ભૌતિકશાસ્ત્રીઓએ વૈજ્ઞાનિક પ્રયોગોથી એ શોધી કાઢ્યું હતું કે, આ બળો સામાન્ય પરિસ્થિતિમાં રૈખિક (સદિશ) કાર્યરત હોય છે તથા તેમનાં પરિણામી બળો એ પણ સદિશ સરવાળાનું જ પરિણામ છે, ઉદાહરણ તરીકે વિદ્યુતબળનો કુલંબનો નિયમ (Coulomb's law of Electrostatics). તેથી આવાં બળોનો અભ્યાસ કરવા માટે સદિશ અવકાશ, તેની બૈજિકક્રિયા વગેરેનો વિકાસ થયો છે.

આપણે જે અક્ષરનો (ચલ) સદિશ દર્શાવવા ઉપયોગ કર્યો હોય, તેના ઉપરના ભાગમાં (મથાળે) તીર (→) અથવા બાર (–) ચિહ્ન કરીએ છીએ અથવા છાપકામમાં ગાઢા અક્ષરથી પણ સદિશ દર્શાવાય છે. ગણિત, ભૌતિકવિજ્ઞાન અને ઈજનેરી શાખાઓના અભ્યાસમાં લંબાઈ, અંતર, ઝડપ, સમય, દ્રવ્ય વગેરે જેવી અદિશ રાશિ તથા સ્થાનાંતર, વેગ, પ્રવેગ, બળ, વજન જેવી સદિશ રાશિઓનો ડગલે ને પગલે ઉપયોગ થાય છે.

આપણે ધોરણ XI માં સદિશ અવકાશ R^2 તથા R^3 નો તેમજ સદિશ પરની કેટલીક ક્રિયાઓ જેવી કે, સદિશોના સરવાળા, સદિશનો અદિશ વડે ગુણાકાર અને તેમના ગુણધર્મો, સદિશનું માન, એકમ સદિશ વગેરેનો અભ્યાસ કર્યો. આ મુદ્દાઓ હવે પછીના આગળના અભ્યાસમાં ઉપયોગી છે. તેથી આ પ્રકરણમાં આપણે આ મુદ્દાઓનો સારાંશ આપીશું અને કેટલાંક ઉદાહરણો દ્વારા તેનું દૃઢીકરણ કરીશું.

6.2 સદિશ અવકાશના એક ઘટક તરીકે સદિશ :

$R^2 = \{(x, y) \mid x \in R, y \in R\}$

$R^3 = \{(x, y, z) \mid x \in R, y \in R, z \in R\}$

આપણે સમાનતા, સરવાળા તથા અદિશ વડે ગુણાકારના પૃષ્ઠ 192 પર આપેલા નિયમથી મળતા ગણ R^2 અને R^3 ને R પરના સદિશ અવકાશ કહીશું.

સદિશ અવકાશ R^2 અને R^3 ના ઘટકોને $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ વગેરે વડે દર્શાવાય છે. $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ વગેરેને સદિશ કહીશું. Rના ઘટકોને અદિશ કહીશું.

સદિશોની સમાનતા :

$(x_1, y_1, z_1) = (x_2, y_2, z_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2$ અને $z_1 = z_2$.

સદિશનો સરવાળો :

$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

અદિશ વડે ગુણાકાર :

$k(x_1, y_1, z_1) = (kx_1, ky_1, kz_1), \quad k \in R$

R^3 ના ઘટકોના સરવાળા તથા અદિશ વડે ગુણાકારના ગુણધર્મો :

(1) સંવૃત્તતા : $\forall \bar{x}, \bar{y} \in R^3, \bar{x} + \bar{y} \in R^3$

(2) સરવાળા માટે ક્રમનો નિયમ : $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}; \forall \bar{x}, \bar{y} \in R^3$

(3) સરવાળા માટે જૂથનો ગુણધર્મ : $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}); \forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in R^3$

(4) સરવાળા માટે તટસ્થ ઘટકનું અસ્તિત્વ : સદિશ $\bar{0} \in R^3$ એવો મળે કે જેથી $\bar{x} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{x} = \bar{x}$ $\forall \bar{x} \in R^3$. $\bar{0}$ ને શૂન્ય સદિશ કહે છે. $\bar{0} = (0, 0, 0)$

(5) વિરોધી ઘટકનું અસ્તિત્વ : પ્રત્યેક સદિશ $\bar{x} \in R^3$ માટે $-\bar{x} \in R^3$ એવો અસ્તિત્વ ધરાવે કે જેથી $\bar{x} + (-\bar{x}) = (-\bar{x}) + \bar{x} = \bar{0}$. આ સદિશ $-\bar{x}$ ને $\bar{x}$ નો વિરોધી ઘટક (Additive inverse) કહે છે.

(6) $\forall k \in R$ અને $\bar{x} \in R^3$; $k\bar{x} \in R^3$.

(7) $\forall k \in R, k(\bar{x} + \bar{y}) = k\bar{x} + k\bar{y}; \forall \bar{x}, \bar{y} \in R^3$

(8) $\forall k, l \in R, (k + l)\bar{x} = k\bar{x} + l\bar{x}; \forall \bar{x} \in R^3$

(9) $\forall l, k \in R, (kl)\bar{x} = k(l\bar{x}), \forall \bar{x} \in R^3$

(10) $1\bar{x} = \bar{x}, \forall \bar{x} \in R^3$

આવા જ નિયમો R^2 ના ઘટકોને માટે પણ સત્ય છે.

કેટલીક પાયાની સંકલ્પનાઓ :

સદિશનું માન : જો $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$, તો સદિશ $\bar{x}$ નું માન $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ છે. તેને $|\bar{x}|$ વડે દર્શાવાય છે. તે જ રીતે, $\bar{x} = (x_1, x_2)$, તો $|\bar{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

ઉદાહરણ તરીકે, $\bar{x} = (1, 2, -2)$, તો $|\bar{x}| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (-2)^2} = 3$.

નીચેના ગુણધર્મો સ્પષ્ટ છે : ($\bar{x} \in R^2$ અથવા $\bar{x} \in R^3$)

(1) $|\bar{x}| \geq 0$

(2) $|\bar{x}| = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$

(3) $|k\bar{x}| = |k| \, |\bar{x}|, k \in R$

એકમ સદિશ : જો $|\bar{x}| = 1$, થાય, તો $\bar{x}$ ને એકમ સદિશ કહેવાય. $\bar{x}$ ને સંગત એકમ સદિશને $\hat{x}$ વડે દર્શાવાય છે.

ઉદાહરણ તરીકે, જો $\bar{x} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, હોય, તો $|\bar{x}| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$ અને તેથી $\bar{x}$ એકમ સદિશ છે.

$\hat{i} = (1, 0, 0)$, $\hat{j} = (0, 1, 0)$, $\hat{k} = (0, 0, 1)$ એ અનુક્રમે X-અક્ષ, Y-અક્ષ અને Z-અક્ષની ધન દિશાના એકમ સદિશો છે.

6.3 સદિશની દિશા

ધારો કે $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ એ R^2 અથવા R^3 ના શૂન્યેતર સદિશ છે તથા $k \in R$ છે.

જો (i) $\bar{x} = k\bar{y}$; $k > 0$, તો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ ની દિશા સમાન છે.

(ii) $\bar{x} = k\bar{y}$; $k < 0$, તો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ એક બીજાની વિરુદ્ધ દિશાના સદિશો છે.

(iii) કોઈપણ શૂન્યેતર $k \in R$ માટે $\bar{x} \neq k\bar{y}$, તો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ ભિન્ન દિશાના સદિશો છે.

જો શૂન્યેતર સદિશો $\bar{x}$ તથા $\bar{y}$ ની દિશા સમાન હોય અથવા પરસ્પર વિરુદ્ધ હોય તો તેમને સમરેખ સદિશ કહે છે.

$\therefore$ જો $\bar{x} = k\bar{y}$ તો અને તો જ $\bar{x}$ તથા $\bar{y}$ સમરેખ છે. ($\bar{x} \neq \bar{0}, \bar{y} \neq \bar{0}$)

સંકેત : $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ થી નિર્ણિત થતી દિશાને $<x_1, x_2, x_3>$ દ્વારા દર્શાવાય છે. $\overline{x}$ ની દિશાની વિરૂદ્ધ દિશાને $-<x_1, x_2, x_3>$ દ્વારા દર્શાવાય છે.

નીચેનું પરિણામ સ્પષ્ટ છે.

(i) જો $k > 0$ તો $<x_1, x_2, x_3> = <kx_1, kx_2, kx_3>$

(ii) જો $k < 0$ તો $-<x_1, x_2, x_3> = <kx_1, kx_2, kx_3>$

આપણે $\overline{x}$ ની દિશા (kx_1, kx_2, kx_3), $k \in R - \{0\}$ વડે પણ દર્શાવીશું.

આપણે નીચેનાં પ્રમેયો સાબિતી આપ્યા વગર સ્વીકારી લઈશું.

પ્રમેય 6.1 : જો શૂન્યેતર સદિશો $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ સમાન હોય, તો અને તો જ $|\overline{x}| = |\overline{y}|$ તથા $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ સમદિશ છે.

પ્રમેય 6.2 : જો $\overline{x} \neq \overline{0}$ તો $\overline{x}$ થી નિર્ણિત થતી દિશામાં અનન્ય એકમ સદિશ હોય છે.

આપેલ સદિશની દિશામાં એકમ સદિશ : જો $\overline{x}$ એ શૂન્યેતર સદિશ હોય, તો $\frac{1}{|\overline{x}|}\overline{x}$ એ $\overline{x}$ ની દિશામાં એકમ સદિશ છે. તેને $\hat{x}$ વડે દર્શાવાય છે.

$\overline{y} = \frac{k\overline{x}}{|\overline{x}|}$, $k > 0$ એ $\overline{x}$ ની દિશાનો k માનવાળો સદિશ છે.

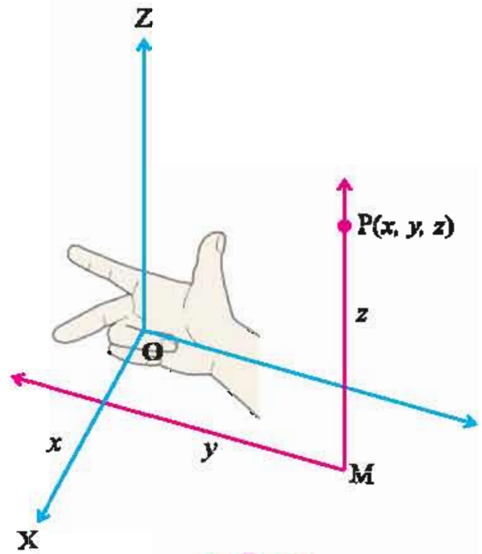
$\overline{y} = -\frac{k\overline{x}}{|\overline{x}|}$, $k > 0$ એ $\overline{x}$ ની વિરૂદ્ધ દિશાનો k માનવાળો સદિશ છે.

ઉદાહરણ 1 : $\overline{x} = (3, 0, -4)$ ની વિરૂદ્ધ દિશામાં 10 માનવાળો સદિશ શોધો.

ઉકેલ : $|\overline{x}| = \sqrt{9+0+16} = 5$

$\therefore$ $\overline{x}$ ની વિરૂદ્ધ દિશામાં 10 માનવાળો સદિશ

$\frac{-10}{|\overline{x}|}\overline{x} = \frac{-10}{5}(3, 0, -4) = (-6, 0, 8)$.



આકૃતિ 6.1

અવકાશના કોઈ બિંદુ O માંથી પસાર થતી ત્રણ પરસ્પર લંબ રેખાઓ લઈએ. તેમને X-અક્ષ, Y-અક્ષ તથા Z-અક્ષ તરીકે લઈશું. સામાન્ય રીતે X-અક્ષ તથા Y-અક્ષથી સમક્ષિતિજ સમતલ બને છે. Z-અક્ષ આ સમતલને લંબ હોય છે. ત્રણે અક્ષની ધન દિશા જમણા હાથના અંગૂઠાના નિયમને અનુસરે છે એટલે કે જો જમણા હાથની મુઠ્ઠીની વળેલી આંગળીઓ ધન X-અક્ષ તરફથી ધન Y-અક્ષ તરફ ઘડિયાળના કાંટાથી ઊલટી દિશામાં $\frac{\pi}{2}$ જેટલું પરિભ્રમણ સૂચવે, તો અંગૂઠો ધન Z-અક્ષની દિશામાં હોય છે.

6.4 સ્થાન સદિશ :

ધારો કે $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$ એ એક સદિશ છે અને અવકાશમાં હોય તેવું બિંદુ $P(x_1, x_2, x_3)$ છે. જેનું આરંભબિંદુ O હોય અને અંત્યબિંદુ P હોય, તેવા દિશાયુક્ત રેખાખંડ $\overline{OP}$ ને બિંદુ P ના સ્થાન સદિશનું ભૌમિતિક નિરૂપણ કહે છે. તેને $\overrightarrow{OP}$ વડે દર્શાવાય છે. આમ P નો સ્થાન સદિશ $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ છે એટલે કે $\overrightarrow{OP} = (x_1, x_2, x_3)$. બિંદુનો સ્થાન સદિશ $\overline{x}$ હોય તો $\overrightarrow{OP} = \overline{x}$ એ સદિશનું ભૌમિતિક નિરૂપણ છે.

જો R^3 નાં બે ભિન્ન બિંદુઓ $A(x_1, x_2, x_3)$ અને $B(y_1, y_2, y_3)$ હોય, તો આરંભબિંદુ A ધરાવતો અને અંત્યબિંદુઓ B ધરાવતો સદિશ એ $\overrightarrow{AB}$ થશે.

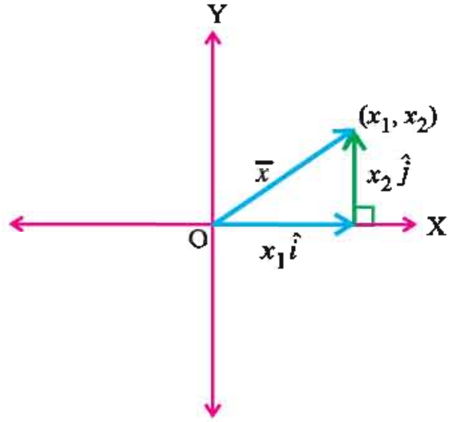
પ્રમેય 6.3 : (1) R^2 ના પ્રત્યેક સદિશને $\hat{i}$ તથા $\hat{j}$ ના સુરેખ સંયોજન તરીકે અનન્ય રીતે દર્શાવી શકાય.

સાબિતી : ધારોકે $\bar{x} = (x_1, x_2) \in R^2$

તેથી $\bar{x} = (x_1, x_2) = (x_1, 0) + (0, x_2)$

$= x_1(1, 0) + x_2(0, 1)$

$= x_1\hat{i} + x_2\hat{j}$



આકૃતિ 6.2

આમ $\bar{x}$ એ $\hat{i}$ તથા $\hat{j}$ નું સુરેખ સંયોજન છે. (Linear Combination) હવે ધારો કે $\bar{x}$ ને $\bar{x} = p\hat{i} + q\hat{j}$ પ્રમાણે $\hat{i}$ તથા $\hat{j}$ ના અન્ય સુરેખ સંયોજન તરીકે દર્શાવીએ તો,

$(x_1, x_2) = \bar{x} = p\hat{i} + q\hat{j}$

$= p(1, 0) + q(0, 1)$

$= (p, 0) + (0, q)$

$= (p, q)$

$\therefore \ x_1 = p$ અને $x_2 = q$

$\therefore \ p\hat{i} + q\hat{j}$ અને $x_1\hat{i} + x_2\hat{j}$ એક જ છે.

આમ $\bar{x} = x_1\hat{i} + x_2\hat{j}$ એ $\bar{x}$ નું $\hat{i}$ અને $\hat{j}$ ના સુરેખ સંયોજન તરીકે અનન્ય નિરૂપણ છે.

(2) R^3 ના પ્રત્યેક સદિશને $\hat{i}$, $\hat{j}$ તથા $\hat{k}$ ના સુરેખ સંયોજન તરીકે અનન્ય રીતે દર્શાવી શકાય.

સાબિતી : ધારોકે $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$.

તેથી $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, 0) + (0, x_2, 0) + (0, 0, x_3)$

$= x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1)$

$= x_1\hat{i} + x_2\hat{j} + x_3\hat{k}$

જો $\bar{x} = p\hat{i} + q\hat{j} + r\hat{k}$, તો (1)ની જેમ જ આપણને $x_1 = p$, $x_2 = q$ અને $x_3 = r$ મળે.

આમ, $\bar{x} = x_1\hat{i} + x_2\hat{j} + x_3\hat{k}$ એ સદિશ $\bar{x}$ નું $\hat{i}$, $\hat{j}$ તથા $\hat{k}$ ના સુરેખ સંયોજન તરીકે અનન્ય નિરૂપણ છે.

ભૌમિતિક નિરૂપણ :

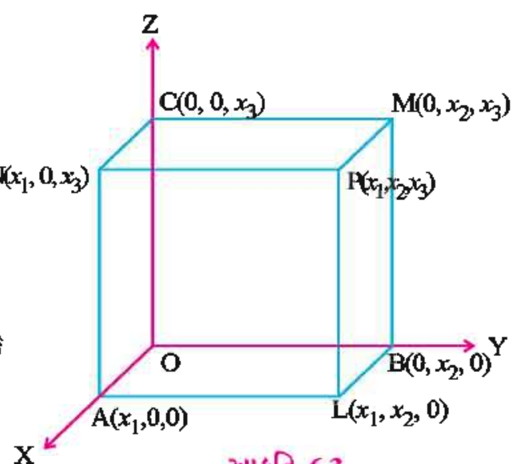
ધારો કે $\overrightarrow{OP} = (x_1, x_2, x_3)$.

બિંદુ P માંથી XY સમતલ પરનો લંબપાદ L છે. તેથી $L(x_1, x_2, 0)$ થશે. (આકૃતિ 6.3).

$\overrightarrow{LP} = \overrightarrow{OC} = x_3\hat{k}$.

તે જ પ્રમાણે P માંથી YZ અને ZX સમતલ પરના લંબપાદ અનુક્રમે M અને N છે. તેથી $M(0, x_2, x_3)$ અને $N(x_1, 0, x_3)$ થશે અને તેથી $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{OA} = x_1\hat{i}$ અને $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{OB} = x_2\hat{j}$

મુક્ત સદિશો $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{NP}$ અને $\overrightarrow{LP}$ ને અનુરૂપ બદ્ધ (Bound) સદિશો અનુક્રમે $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ અને $\overrightarrow{OC}$ છે.



આકૃતિ 6.3

[A, B અને C ના યામ અનુક્રમે $(x_1, 0, 0)$, $(0, x_2, 0)$ અને $(0, 0, x_3)$ છે.]

હવે, $\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = x_1\hat{i} + x_2\hat{j}$ $\quad (\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AL})$

[તેથી L ના યામ $(x_1, x_2, 0)$. તે જ પ્રમાણે M ના યામ $(0, x_2, x_3)$ અને N ના યામ $(x_1, 0, x_3)$ છે.]

તથા $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LP} = x_1\hat{i} + x_2\hat{j} + x_3\hat{k}$.

$\overrightarrow{OP} = x_1\hat{i} + x_2\hat{j} + x_3\hat{k}$ સ્વરૂપને સદિશનું ઘટક **(component)** સ્વરૂપ કહે છે. અહીં x_1, x_2 અને x_3 એ $\overrightarrow{OP}$ ના **અદિશ ઘટકો** છે જ્યારે $x_1\hat{i}$, $x_2\hat{j}$ અને $x_3\hat{k}$ એ $\overrightarrow{OP}$ ના **સદિશ ઘટકો**. છે.

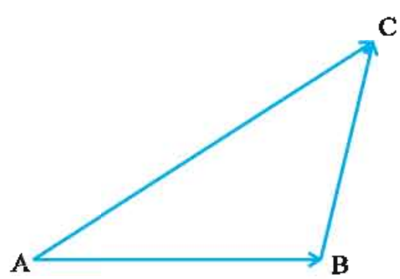
નોંધ : (1) બિંદુ $P(x_1, x_2, x_3)$ નું XY સમતલથી અંતર $PL = |x_3|$. તેજ પ્રમાણે P નું YZ સમતલથી અંતર $= PM = |x_1|$ અને ZX સમતલથી અંતર $= PN = |x_2|$.

(2) $P(x_1, x_2, x_3)$ નું X-અક્ષથી અંતર $AP = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$. તે જ પ્રમાણે Y-અક્ષથી અંતર $= BP = \sqrt{x_3^2 + x_1^2}$ અને Z-અક્ષથી અંતર $= CP = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

(3) $P(x_1, x_2, x_3)$ નું ઊગમબિંદુથી અંતર $OP = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

6.5 સદિશના સરવાળાનો ત્રિકોણનો નિયમ :

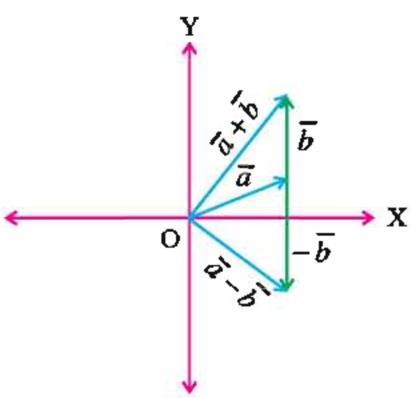
ધારો કે પદાર્થનું સ્થાનાંતર A થી B થાય છે. તેને $\overrightarrow{AB}$ વડે દર્શાવાય છે અને પછી આ પદાર્થનું સ્થાનાંતર B થી C થાય છે. તેને $\overrightarrow{BC}$ થી દર્શાવાય છે. આકૃતિ 6.4. માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે તે પદાર્થના A થી C સુધીના કુલ સ્થાનાંતર ને $\overrightarrow{AC}$ વડે દર્શાવાય છે અને તે $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ દ્વારા મેળવી શકાય છે. આ નિયમને **સદિશના સરવાળાનો ત્રિકોણનો નિયમ (Triangle Law of Vector Addition)** કહે છે.



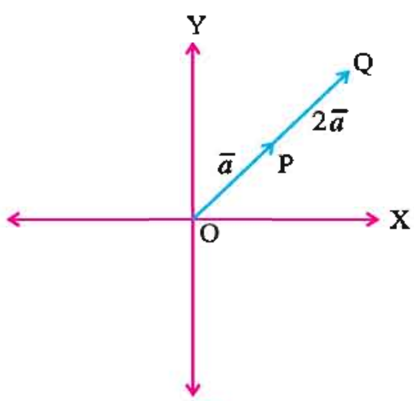
આકૃતિ 6.4

A, B, અને C ના સ્થાન સદિશ અનુક્રમે $\bar{a}$, $\bar{b}$ અને $\bar{c}$ લેતાં,

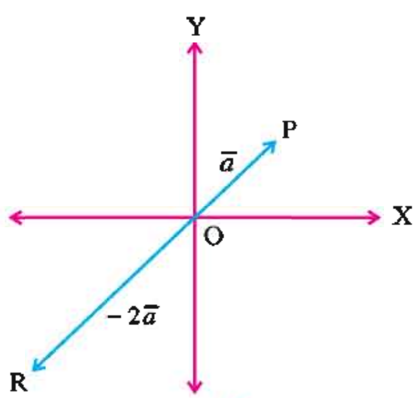
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (\bar{b} - \bar{a}) + (\bar{c} - \bar{b}) = \bar{c} - \bar{a} = \overrightarrow{AC}$$



આકૃતિ 6.5



આકૃતિ 6.6

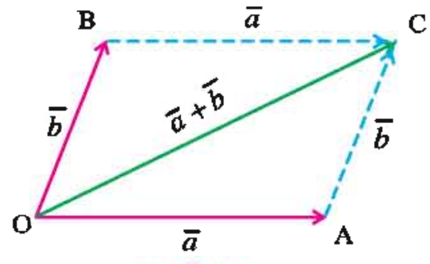


આકૃતિ 6.7

R^2 ના બે શૂન્યેતર સદિશો $\bar{a}$ અને $\bar{b}$ પર સરવાળા તથા તફાવતની સદિશની ક્રિયાઓ આકૃતિ 6.5 માં દર્શાવી છે આકૃતિ 6.6 અને 6.7 એ R^2 ના સદિશનો અદિશ વડે ગુણાકાર દર્શાવે છે. અહીં $\overrightarrow{OP} = \bar{a}$, $\overrightarrow{OQ} = 2\bar{a}$ અને $\overrightarrow{OR} = -2\bar{a}$ છે.

સદિશના સરવાળાનો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો નિયમ :

ધારો કે $\overrightarrow{OA} = \bar{a}$ અને $\overrightarrow{OB} = \bar{b}$ બે ભિન્ન સદિશો છે. આપણે આકૃતિ 6.8 માં બતાવ્યા પ્રમાણે એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ OACB ની રચના કરીએ. બંને સદિશોના સામાન્ય આરંભબિંદુથી શરૂ થતો સદિશ $\overrightarrow{OC}$ એ સદિશો $\bar{a}$ અને $\bar{b}$ નો સરવાળો દર્શાવે છે. આમ, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. આ નિયમને સદિશના સરવાળાનો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો નિયમ કહે છે.



આકૃતિ 6.8

નોંધ :	
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$	$(\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC})$
$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$	

સદિશનાં સરવાળાના ગુણધર્મો (ભૌમિતિક રીતે) :

ગુણધર્મ 1 : કોઈપણ સદિશો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ માટે $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$ **(ક્રમનો નિયમ)**

$\overrightarrow{AB} = \bar{x}$ અને $\overrightarrow{AD} = \bar{y}$ લો. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD પૂર્ણ કરીએ.

$\therefore$ $\overrightarrow{BC} = \bar{y}$ અને $\overrightarrow{DC} = \bar{x}$ (પ્રમેય 6.1)

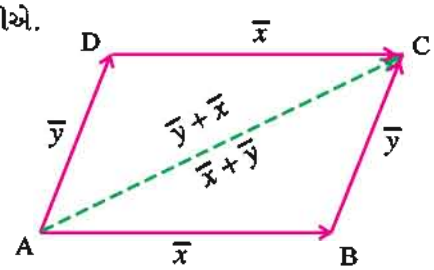
હવે ΔABC માટે સદિશના ત્રિકોણના નિયમના ઉપયોગથી, આપણને

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = \bar{x} + \bar{y}$ મળશે.

તે જ પ્રમાણે, ΔADC પરથી $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$

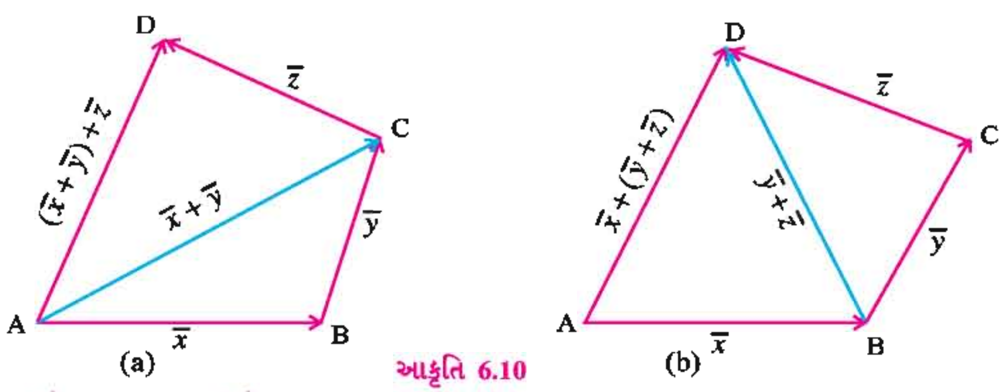
$\therefore \bar{y} + \bar{x} = \overrightarrow{AC}$.

આમ, $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$.



આકૃતિ 6.9

ગુણધર્મ 2 : સદિશો $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, માટે $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$ **(જૂથનો નિયમ)**



આકૃતિ 6.10

$\overrightarrow{AB} = \bar{x}$, $\overrightarrow{BC} = \bar{y}$, અને $\overrightarrow{CD} = \bar{z}$ લો. સદિશોના સરવાળાના નિયમ પરથી.

આકૃતિ 6.10(a) માટે,	આકૃતિ 6.10(b) માટે,
ΔABC પરથી,	ΔBCD પરથી,
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD}$
$\therefore \bar{x} + \bar{y} = \overrightarrow{AC}$.	$\therefore \bar{y} + \bar{z} = \overrightarrow{BD}$.
ΔACD પરથી,	ΔABD પરથી,
$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$
$\therefore (\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \overrightarrow{AD}$.	$\therefore \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}) = \overrightarrow{AD}$.

આમ, $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$.

ઉદાહરણ 2 : આરંભબિંદુ (3, 2, −1) અને અંત્યબિંદુ (4, −2, 0) હોય તેવો સદિશ અને તેનું માન શોધો.

ઉકેલ : A(3, 2, −1) આરંભબિંદુ અને B(4, −2, 0) અંત્યબિંદુ હોય તેવો સદિશ $\overrightarrow{AB}$ છે.

$\therefore \quad \overrightarrow{AB}$ = B નો સ્થાન સદિશ − A નો સ્થાન સદિશ

$= (4, -2, 0) - (3, 2, -1)$

$= (1, -4, 1)$

$\overrightarrow{AB}$ નું માન $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(1)^2 + (-4)^2 + (1)^2}$

$\therefore \quad AB = \sqrt{18}$

$= 3\sqrt{2}$

સ્વાધ્યાય 6.1

1. નીચેના સદિશોનું માન શોધો :
   (1) $(2, 3, \sqrt{3})$ (2) $3\hat{i} - 4\hat{k}$ (3) $\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$
2. $2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ ની દિશામાં એકમ સદિશ શોધો.
3. $2\sqrt{17}$ માનવાળો અને (3, −2, −2) ની દિશાનો સદિશ શોધો.
4. 20 માનવાળો અને $-3\hat{i} + 2\sqrt{3}\hat{j} - 2\hat{k}$ ની દિશાની વિરુદ્ધ દિશાનો સદિશ શોધો.
5. $\bar{x} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ અને $\bar{y} = 2\hat{i} + \hat{j}$, સદિશો માટે $\bar{x} + 2\bar{y}$ ની દિશામાં એકમ સદિશ મેળવો.
6. આરંભબિંદુ (−2, 1, 0) અને અંત્યબિંદુ (1, −5, 7) હોય તેવા સદિશના સદિશ તેમજ અદિશ ઘટકો લખો.
7. બિંદુ P નો સ્થાન સદિશ (4, 5, −3) હોય તો P નું (i) ZX સમતલથી (ii) Y-અક્ષથી (iii) ઊગમબિંદુથી અંતર શોધો.

*

6.6 R^2 અને R^3 માં સદિશોનું અંતઃગુણન

જો $\bar{x} = (x_1, x_2)$ અને $\bar{y} = (y_1, y_2)$ એ R^2 ના સદિશો હોય, તો તેમનું અંતઃ ગુણન $x_1y_1 + x_2y_2$ તરીકે વ્યાખ્યાયિત થાય છે તથા તેને $\bar{x} \cdot \bar{y}$ વડે દર્શાવાય છે. આમ $\bar{x} \cdot \bar{y} = x_1y_1 + x_2y_2$.

તે જ પ્રમાણે જો, $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ અને $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$ એ R^3 ના સદિશો હોય, તો $\bar{x} \cdot \bar{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ થાય.

અહીં $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ બંને સદિશ છે, પરંતુ $\bar{x} \cdot \bar{y}$ એ સદિશ નથી, તે એક વાસ્તવિક સંખ્યા છે. આમ, બે સદિશોનું અંતઃગુણન અદિશ છે. તેથી અંતઃગુણનને **અદિશ ગુણાકાર (Scalar Product)** પણ કહે છે. આ ક્રિયાને **અદિશ ગુણાકારની ક્રિયા (Scalar Multiplication)** કહે છે. અંતઃગુણનના સંકેત માટે બે સદિશ વચ્ચે ટપકું-ડોટ (.) મૂકવામાં આવે છે. તેથી તેને માટે **ડોટ ગુણાકાર (Dot Product)** શબ્દ પણ પ્રયોજવામાં આવે છે.

નોંધ : અદિશ ગુણાકાર અને અદિશ વડે ગુણાકારનો તફાવત

અદિશ ગુણાકાર એ બે સદિશ રાશિ વચ્ચે કરવામાં આવે છે અને તેથી મળતું પરિણામ અદિશ છે, જ્યારે સદિશનો અદિશ વડે ગુણાકાર એ અદિશ અને સદિશ ને સાંકળે છે તથા મળતું પરિણામ સદિશ રાશિ છે.

જો $\bar{x} = (2, 3, -1)$ અને $\bar{y} = (-1, 2, -2)$ હોય, તો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ નો અદિશ ગુણાકાર

$\bar{x} \cdot \bar{y} = 2(-1) + 3 \cdot 2 + (-1)(-2) = -2 + 6 + 2 = 6$ અદિશ રાશિ છે.

જ્યારે $\bar{x} = (2, 3, -1)$ નો અદિશ 2 વડે ગુણાકાર $2\bar{x} = 2(2, 3, -1) = (4, 6, -2)$ મળે છે અને તે સદિશ રાશિ છે.

અંત:ગુણનના ગુણધર્મો :

ધારો કે $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3)$ અને $\overline{z} = (z_1, z_2, z_3)$ એ R^3 ના સદિશો છે અને $k \in R$ છે.

(1) $\overline{x} \cdot \overline{x} \geq 0$ અને $\overline{x} \cdot \overline{x} = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{0}$.

$\overline{x} \cdot \overline{x} = (x_1, x_2, x_3) \cdot (x_1, x_2, x_3)$

$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 0$ (R નો ગુણધર્મ)

$\overline{x} \cdot \overline{x} = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{0}$

(2) $\overline{x} \cdot \overline{x} = |\overline{x}|^2$ કારણકે $\overline{x} \cdot \overline{x} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = |\overline{x}|^2$

(3) $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{y} \cdot \overline{x}$

(4) $\overline{x} \cdot (k\overline{y}) = (k\overline{x}) \cdot \overline{y} = k(\overline{x} \cdot \overline{y})$

(5) $\overline{x} \cdot (\overline{y} + \overline{z}) = \overline{x} \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot \overline{z}$

$\overline{x} \cdot (\overline{y} + \overline{z}) = (x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3)$

$= x_1(y_1 + z_1) + x_2(y_2 + z_2) + x_3(y_3 + z_3)$

$= x_1y_1 + x_1z_1 + x_2y_2 + x_2z_2 + x_3y_3 + x_3z_3$ (R માં વિભાજનનો નિયમ)

$= (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) + (x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3)$

$= \overline{x} \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot \overline{z}$

ઉપરના ગુણધર્મો R^2 ના સદિશો માટે પણ સત્ય છે.

ઉદાહરણ 3 : $\overline{x} = (1, 2, -1)$, $\overline{y} = (-3, 4, -2)$ હોય, તો $\overline{x} \cdot \overline{y}$ શોધો.

ઉકેલ : $\overline{x} \cdot \overline{y} = (1, 2, -1) \cdot (-3, 4, -2)$

$= -3 + 8 + 2$

$= 7$

ઉદાહરણ 4 : જો $\overline{x} = 5\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}$ અને $\overline{y} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$, તો $(\overline{x} + 2\overline{y}) \cdot (2\overline{x} - \overline{y})$ શોધો.

ઉકેલ : $\overline{x} + 2\overline{y} = (5\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}) + 2(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$

$= 5\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k} + 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$

$= 9\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

અથવા $\overline{x} + 2\overline{y} = (5, 4, -3) + 2(2, -1, 2) = (5, 4, -3) + (4, -2, 4) = (9, 2, 1)$

$2\overline{x} - \overline{y} = 2(5\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}) - (2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$

$= 10\hat{i} + 8\hat{j} - 6\hat{k} - 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

$= 8\hat{i} + 9\hat{j} - 8\hat{k}$

અથવા $2\overline{x} - \overline{y} = 2(5, 4, -3) - (2, -1, 2) = (10, 8, -6) + (-2, 1, -2) = (8, 9, -8)$

હવે $(\overline{x} + 2\overline{y}) \cdot (2\overline{x} - \overline{y}) = (9\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) \cdot (8\hat{i} + 9\hat{j} - 8\hat{k})$

$$= (9, 2, 1) \cdot (8, 9, -8)$$
$$= 72 + 18 - 8$$
$$= 82$$

R^3 માં સદિશોનું બહિર્ગુણન :

જો $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ અને $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3)$ એ R^3 ના સદિશો હોય, તો તેમનું બહિર્ગુણન (Outer Product)

$$= \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

એટલે કે $(x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત થાય છે અને તેનો સંકેત $\overline{x} \times \overline{y}$ છે.

$\therefore \ \overline{x} \times \overline{y} = (x_1, x_2, x_3) \times (y_1, y_2, y_3) = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$

અહીં, $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ સદિશો છે. તેમનું બહિર્ગુર્ણન $\overline{x} \times \overline{y}$ પણ સદિશ છે, તેથી બહિર્ગુર્ણનને **સદિશ ગુણાકાર (Vector Product)** કહે છે. બહિર્ગુર્ણનની પ્રક્રિયાને **સદિશ ગુણાકારની પ્રક્રિયા (Vector Multiplication)** કહે છે. બહિર્ગુણન એ બે સદિશો વચ્ચે ક્રોસ (×) વડે દર્શાવાતું હોવાથી બહિર્ગુણનને **ક્રોસ ગુણાકાર (Cross Product)** પણ કહે છે.

બહિર્ગુણનના ગુણધર્મો :

(1) $\overline{x} \times \overline{y} = -\overline{y} \times \overline{x}$ **(નિશ્ચાયકની બે હારની અદલબદલનું પરિણામ)**

(2) $\overline{x} \times \overline{x} = \overline{0}$ **(નિશ્ચાયકની બે હાર સમાન હોવાથી)**

(3) $\overline{x} \times (k\overline{y}) = (k\overline{x}) \times \overline{x} = k(\overline{x} \times \overline{y})$

(4) $\overline{x} \times (\overline{y} + \overline{z}) = \overline{x} \times \overline{y} + \overline{x} \times \overline{z}$

(5) $\overline{x} \times \overline{0} = \overline{0} \times \overline{x} = \overline{0}$

અંતઃગુણન અને બહિર્ગુણન વચ્ચેનો તફાવત :

(1) અંતઃગુણન એ અદિશ રાશિ છે જ્યારે બહિર્ગુણન એ સદિશ રાશિ છે.

(2) અંતઃગુણન એ R^2 તેમજ R^3 માં વ્યાખ્યાયિત છે જ્યારે બહિર્ગુણન એ R^2 માં વ્યાખ્યાયિત નથી.

(3) અંતઃગુણન સમક્રમી છે જ્યારે બહિર્ગુણન ક્રમનો ગુણધર્મ ધરાવતું નથી.

નોંધ : $\overline{x} \cdot \overline{x} = |\overline{x}|^2$, પરંતુ $\overline{x} \times \overline{x} = \overline{0}$.

ઉદાહરણ 5 : (1, 3, –2) અને $\overline{y} = (-2, 1, 5)$ હોય, તો $\overline{x} \times \overline{y}$ શોધો.

ઉકેલ : $\overline{x} \times \overline{y} = \left(\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \right)$

$$= (15 + 2, -(5 - 4), 1 + 6) = (17, -1, 7)$$

ઉદાહરણ 6 : જો $\overline{x} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ અને $\overline{y} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, તો $|\overline{x} \times \overline{y}|$ શોધો.

ઉકેલ : $\overline{x} = (2, 1, -3)$

અને $\overline{y} = (3, -2, 1)$

$$\overline{x} \times \overline{y} = \left(\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (1 - 6, -(2 + 9), -4 - 3) = (-5, -11, -7)$$

$\therefore \ |\overline{x} \times \overline{y}| = \sqrt{25 + 121 + 49} = \sqrt{195}$

સદિશોનું પેટીગુણન તથા ત્રિગુણન :

જો $\bar{x}$, $\bar{y}$ અને $\bar{z}$ એ R^3 ના સદિશો હોય, તો $\bar{x} \cdot (\bar{y} \times \bar{z})$ ને સદિશો $\bar{x}$, $\bar{y}$ અને $\bar{z}$ નું પેટીગુણન (Box Product) કહે છે. તેને સંકેતમાં $[\bar{x} \;\; \bar{y} \;\; \bar{z}]$ વડે દર્શાવાય છે.

$\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$ અને $\bar{z} = (z_1, z_2, z_3)$ લેતાં,

$$\bar{x} \cdot (\bar{y} \times \bar{z}) = (x_1, x_2, x_3) \cdot (y_2z_3 - y_3z_2, -(y_1z_3 - y_3z_1), y_1z_2 - y_2z_1)$$

$$\therefore \;\; [\bar{x} \;\; \bar{y} \;\; \bar{z}] = x_1(y_2z_3 - y_3z_2) - x_2(y_1z_3 - y_3z_1) + x_3(y_1z_2 - y_2z_1)$$

$$\therefore \;\; [\bar{x} \;\; \bar{y} \;\; \bar{z}] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

પેટીગુણનના ગુણધર્મો :

(1) $[\bar{x} \;\; \bar{y} \;\; \bar{z}] = [\bar{y} \;\; \bar{z} \;\; \bar{x}] = [\bar{z} \;\; \bar{x} \;\; \bar{y}]$

સાબિતી : $[\bar{x} \;\; \bar{y} \;\; \bar{z}] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$

$$= -\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \qquad (R_{12})$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} \qquad (R_{23})$$

$$= [\bar{y} \;\; \bar{z} \;\; \bar{x}]$$

તે જ પ્રમાણે $[\bar{x} \;\; \bar{y} \;\; \bar{z}] = [\bar{z} \;\; \bar{x} \;\; \bar{y}]$ સાબિત કરી શકાય.

(2) $[\bar{x} \;\; \bar{x} \;\; \bar{y}] = 0$, $[\bar{x} \;\; \bar{y} \;\; \bar{x}] = 0$, $[\bar{x} \;\; \bar{y} \;\; \bar{y}] = 0$

(3) $[m\bar{x} \;\; \bar{y} \;\; \bar{z}] = m[\bar{x} \;\; \bar{y} \;\; \bar{z}]$; $[\bar{x} \;\; m\bar{y} \;\; \bar{z}] = m[\bar{x} \;\; \bar{y} \;\; \bar{z}]$; $[\bar{x} \;\; \bar{y} \;\; m\bar{z}] = m[\bar{x} \;\; \bar{y} \;\; \bar{z}]$; $m \in R$

(4) $[\bar{x} \;\; \bar{y} \;\; \bar{0}] = 0$

નોંધ : (1) જો સદિશોનો ક્રમ વૃત્તીય રીતે (cyclic) બદલાય તો પેટીગુણન બદલાતું નથી.

(2) જો $[\bar{x} \;\; \bar{y} \;\; \bar{z}]$ માં કોઈપણ બે સદિશની અદલાબદલી કરીએ, તો તેમાં નિશ્ચાયકની બે હારની જ અદલા-બદલી થાય છે અને તેથી પેટીગુણનનું ચિહ્ન બદલાય છે, એટલે કે $[\bar{x} \;\; \bar{y} \;\; \bar{z}] = -[\bar{y} \;\; \bar{x} \;\; \bar{z}]$.

સદિશો $\bar{x}$, $\bar{y}$ અને $\bar{z}$ ના ગુણાકાર $\bar{x} \times (\bar{y} \times \bar{z})$ ને સદિશનું ત્રિગુણન (vector triple product) કહે છે.

$\bar{x} \times (\bar{y} \times \bar{z}) = (\bar{x} \cdot \bar{z})\bar{y} - (\bar{x} \cdot \bar{y})\bar{z}$ છે તેમ સાબિત કરી શકાય.

તે જ પ્રમાણે $(\bar{x} \times \bar{y}) \times \bar{z} = (\bar{z} \cdot \bar{x})\bar{y} - (\bar{z} \cdot \bar{y})\bar{x}$ થાય.

આપણે નીચેનું પરિણામ સાબિત કરીએ.

પરિણામ : $\bar{x} \times (\bar{y} \times \bar{z}) = (\bar{x} \cdot \bar{z})\bar{y} - (\bar{x} \cdot \bar{y})\bar{z}$

સાબિતી : ધારો કે $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$, અને $\bar{z} = (z_1, z_2, z_3)$

હવે, $\bar{x} \times (\bar{y} \times \bar{z}) = (x_1, x_2, x_3) \times (y_2z_3 - y_3z_2, y_3z_1 - y_1z_3, y_1z_2 - y_2z_1)$

$= (p_1, p_2, p_3)$ (ધારો)

હવે $p_1 = x_2(y_1z_2 - y_2z_1) - x_3(y_3z_1 - y_1z_3)$

$= y_1(x_2z_2 + x_3z_3) - z_1(x_2y_2 + x_3y_3)$

$= y_1(x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3) - z_1(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)$ ($x_1y_1z_1$ ઉમેરતાં અને બાદ કરતાં)

$= y_1(\bar{x} \cdot \bar{z}) - z_1(\bar{x} \cdot \bar{y})$

તે જ પ્રમાણે $p_2 = y_2(\bar{x} \cdot \bar{z}) - z_2(\bar{x} \cdot \bar{y})$ અને $p_3 = y_3(\bar{x} \cdot \bar{z}) - z_3(\bar{x} \cdot \bar{y})$

$\therefore \quad \bar{x} \times (\bar{y} \times \bar{z}) = ((\bar{x} \cdot \bar{z})y_1 - (\bar{x} \cdot \bar{y})z_1, (\bar{x} \cdot \bar{z})y_2 - (\bar{x} \cdot \bar{y})z_2, (\bar{x} \cdot \bar{z})y_3 - (\bar{x} \cdot \bar{y})z_3)$

$= (\bar{x} \cdot \bar{z})(y_1, y_2, y_3) - (\bar{x} \cdot \bar{y})(z_1, z_2, z_3)$

$= (\bar{x} \cdot \bar{z})\bar{y} - (\bar{x} \cdot \bar{y})\bar{z}$

ઉદાહરણ 7 : જો $\bar{x} = (1, 2, 0)$, $\bar{y} = (3, -1, 2)$ અને $\bar{z} = (1, 1, 1)$ તો $[\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{z}]$ શોધો.

ઉકેલ : $[\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{z}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 1(-3) - 2(1) + 0$

$= -5$

ઉદાહરણ 8 : જો $\bar{x} = (1, 2, 3)$, $\bar{y} = (2, 3, 5)$, $\bar{z} = (1, -1, -1)$ તો $\bar{x} \times (\bar{y} \times \bar{z})$ મેળવો.

ઉકેલ : રીત 1 : $\bar{x} \cdot \bar{z} = (1, 2, 3) \cdot (1, -1, -1) = 1 - 2 - 3 = -4$

$\bar{x} \cdot \bar{y} = (1, 2, 3) \cdot (2, 3, 5) = 2 + 6 + 15 = 23$

$\bar{x} \times (\bar{y} \times \bar{z}) = (\bar{x} \cdot \bar{z})\bar{y} - (\bar{x} \cdot \bar{y})\bar{z}$

$= -4(2, 3, 5) - 23(1, -1, -1)$

$= (-8, -12, -20) + (-23, 23, 23)$

$= (-31, 11, 3)$

રીત 2 : $\bar{y} = (2, 3, 5)$ અને

$\bar{z} = (1, -1, -1)$

$\therefore \quad \bar{y} \times \bar{z} = (-3 + 5, -(-2 - 5), -2 - 3) = (2, 7, -5)$

$\bar{x} = (1, 2, 3)$

તથા $\bar{y} \times \bar{z} = (2, 7, -5)$

$\therefore \quad \bar{x} \times (\bar{y} \times \bar{z}) = (-10 - 21, -(-5 - 6), 7 - 4) = (-31, 11, 3)$

ઉદાહરણ 9 : $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in R^3$, સાબિત કરો કે, $[(\bar{x} + \bar{y}) \times (\bar{y} + \bar{z})] \cdot (\bar{x} + \bar{z}) = 2[\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{z}]$

ઉકેલ : ડા.બા. $= [(\bar{x} + \bar{y}) \times (\bar{y} + \bar{z})] \cdot (\bar{x} + \bar{z})$

$= [\bar{x} \times \bar{y} + \bar{x} \times \bar{z} + \bar{y} \times \bar{y} + \bar{y} \times \bar{z}] \cdot (\bar{x} + \bar{z})$

$= [\bar{x} \times \bar{y} + \bar{x} \times \bar{z} + \bar{y} \times \bar{z}] \cdot (\bar{x} + \bar{z})$ $(\bar{y} \times \bar{y} = \bar{0})$

$= (\bar{x} \times \bar{y}) \cdot \bar{x} + (\bar{x} \times \bar{y}) \cdot \bar{z} + (\bar{x} \times \bar{z}) \cdot \bar{x} + (\bar{x} \times \bar{z}) \cdot \bar{z} + (\bar{y} \times \bar{z}) \cdot \bar{x} + (\bar{y} \times \bar{z}) \cdot \bar{z}$

$= [\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{x}] + [\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{z}] + [\bar{x} \quad \bar{z} \quad \bar{x}] + [\bar{x} \quad \bar{z} \quad \bar{z}] + [\bar{y} \quad \bar{z} \quad \bar{x}] + [\bar{y} \quad \bar{z} \quad \bar{z}]$

$= 0 + [\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{z}] + 0 + 0 + [\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{z}] + 0$ $([\bar{y} \quad \bar{z} \quad \bar{x}] = [\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{z}])$

$= 2[\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{z}] =$ જ.બા.

સ્વાધ્યાય 6.2

નીચેનામાં સદિશ અથવા અદિશ, જે માગ્યા હોય તે મેળવો :

1. $(2, 3, 1) \cdot (2, -1, 4)$
2. $(1, -1, 2) \times (2, 3, 1)$
3. $(2, -1, -2) \times (4, 1, 8)$
4. $|(2, 1, 3) \times (0, -4, -4)|$
5. $|(3, -4, -1) \cdot (1, 2, -2)|$
6. $(1, 1, 2) \times [(1, 2, 1) \times (2, 1, 1)]$
7. $(1, 0, 1) \cdot [(1, 1, 0) \times (1, 0, -1)]$
8. $(2, 3, 4) \cdot [(1, 1, 1) \times (3, 4, 5)]$
9. $[(1, 5, 1) \times (2, -1, 2)] \times (4, 1, -3)$
10. $|[(2, 3, 4) \cdot (-4, 3, -2)]\ (1, -1, 2)|$

*

6.7 લાગ્રાન્જનો નિત્યસમ

જો $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in R$, તો

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 + (x_1y_3 - x_3y_1)^2 + (x_2y_3 - x_3y_2)^2 =$$
$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \quad \text{(ચકાસો !)}$$

આ નિત્યસમને લાગ્રાન્જનો નિત્યસમ કહે છે.

જો આપણે $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ અને $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$ લઈએ તો, લાગ્રાન્જના નિત્યસમનું સદિશ સ્વરૂપ

$$|\bar{x} \cdot \bar{y}|^2 + |\bar{x} \times \bar{y}|^2 = |\bar{x}|^2\,|\bar{y}|^2 \text{ થાય.}$$

કારણ કે $\bar{x} \cdot \bar{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, $\bar{x} \times \bar{y} = (x_2y_3 - x_3y_2, -(x_1y_3 - x_3y_1), x_1y_2 - x_2y_1)$

$|\bar{x}|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ અને $|\bar{y}|^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.

ઉદાહરણ 10 : જો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ એકમ સદિશો હોય તથા $\bar{x} \cdot \bar{y} = 0$, તો સાબિત કરો કે $\bar{x} \times \bar{y}$ પણ એકમ સદિશ છે.

ઉકેલ : $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ એકમ સદિશો છે.

$\therefore\ |\bar{x}| = 1 = |\bar{y}|$

લાગ્રાન્જના નિત્યસમ

$|\bar{x} \times \bar{y}|^2 + |\bar{x} \cdot \bar{y}|^2 = |\bar{x}|^2\,|\bar{y}|^2$ પરથી,

$\therefore\ |\bar{x} \times \bar{y}|^2 + 0 = (1)(1)$

$\therefore\ |\bar{x} \times \bar{y}| = 1$

$\therefore\ \bar{x} \times \bar{y}$ એકમ સદિશ છે.

કોશી-સ્વાર્ત્ઝની અસમતા :

$\bar{x}$ અને $\bar{y}$ એ R^2 અથવા R^3 ના સદિશો હોય, તો $|\bar{x} \cdot \bar{y}| \le |\bar{x}|\,|\bar{y}|$ ને કોશી-સ્વાર્ત્ઝની અસમતા કહે છે.

R^3 માં લાગ્રાન્જના નિત્યસમ

$|\bar{x} \times \bar{y}|^2 + |\bar{x} \cdot \bar{y}|^2 = |\bar{x}|^2\,|\bar{y}|^2$ પરથી,

$\therefore\ |\bar{x} \cdot \bar{y}|^2 \le |\bar{x}|^2\,|\bar{y}|^2 \qquad (|\bar{x} \times \bar{y}|^2 \ge 0)$

$\therefore\ |\bar{x} \cdot \bar{y}| \le |\bar{x}|\,|\bar{y}|$

R^2 માટે $\bar{x} = (x_1, x_2)$ અને $\bar{y} = (y_1, y_2)$ લેતાં,

$\bar{x} \cdot \bar{y} = x_1y_1 + x_2y_2$

હવે $(x_1y_1 + x_2y_2)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 = (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)$ (ચકાસો !)

$\therefore\ |x_1y_1 + x_2y_2|^2 \le (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) \qquad ((x_1y_2 - x_2y_1)^2 \ge 0)$

$\therefore\ |\bar{x} \cdot \bar{y}|^2 \le |\bar{x}|^2\,|\bar{y}|^2$

$\therefore\ |\bar{x} \cdot \bar{y}| \le |\bar{x}|\,|\bar{y}|$.

બીજી સાબિતી : આ સાબિતી R^2 અને R^3 બંને માટે સત્ય છે.

જો $\bar{x} = \bar{0}$ અથવા $\bar{y} = \bar{0}$, તો $\bar{x} \cdot \bar{y} = 0$ અને $|\bar{x}||\bar{y}| = 0$

તેથી $|\bar{x} \cdot \bar{y}| = |\bar{x}||\bar{y}|$

ધારો કે $\bar{x} \neq \bar{0}$ અને $\bar{y} \neq \bar{0}$ તથા $|\bar{x}| = 1$ અને $|\bar{y}| = 1$

હવે, $(\bar{x} - \bar{y}) \cdot (\bar{x} - \bar{y}) \geq 0$

$\therefore \quad \bar{x} \cdot \bar{x} - 2\bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{y} \cdot \bar{y} \geq 0$

$\therefore \quad |\bar{x}|^2 - 2\bar{x} \cdot \bar{y} + |\bar{y}|^2 \geq 0$

$\therefore \quad 2 - 2\bar{x} \cdot \bar{y} \geq 0$ $\qquad (|\bar{x}| = |\bar{y}| = 1)$

તેથી $\bar{x} \cdot \bar{y} \leq 1$

તે જ પ્રમાણે $(\bar{x} + \bar{y}) \cdot (\bar{x} + \bar{y}) \geq 0$

$\therefore \quad |\bar{x}|^2 + 2\bar{x} \cdot \bar{y} + |\bar{y}|^2 \geq 0$

$\therefore \quad 2 + 2\bar{x} \cdot \bar{y} \geq 0$ $\qquad (|\bar{x}| = |\bar{y}| = 1)$

$\therefore \quad -1 \leq \bar{x} \cdot \bar{y}$

આમ, $-1 \leq \bar{x} \cdot \bar{y} \leq 1$

$\therefore \quad |\bar{x} \cdot \bar{y}| \leq 1$

$\therefore \quad |\bar{x} \cdot \bar{y}| \leq |\bar{x}||\bar{y}|$ $\qquad (|\bar{x}| = 1 = |\bar{y}|)$ (i)

અંતે $\bar{x} \neq \bar{0}$ અને $\bar{y} \neq \bar{0}$ લેતાં, $|\bar{x}| \neq 0$, $|\bar{y}| \neq 0$.

ધારો કે $\bar{u} = \frac{\bar{x}}{|\bar{x}|}$ અને $\bar{v} = \frac{\bar{y}}{|\bar{y}|}$. તેથી $|\bar{u}| = 1 = |\bar{v}|$

(i) પરથી $|\bar{u} \cdot \bar{v}| \leq |\bar{u}||\bar{v}|$

$$\therefore \quad \left|\frac{\bar{x}}{|\bar{x}|} \cdot \frac{\bar{y}}{|\bar{y}|}\right| \leq \left|\frac{\bar{x}}{|\bar{x}|}\right| \left|\frac{\bar{y}}{|\bar{y}|}\right| = \frac{|\bar{x}|}{|\bar{x}|} \frac{|\bar{y}|}{|\bar{y}|} = 1$$

$\therefore \quad |\bar{x} \cdot \bar{y}| \leq |\bar{x}||\bar{y}|$

શૂન્યેતર સદિશો $\bar{x}$, $\bar{y}$ માટે,

જો $\bar{x} \cdot \bar{y} = |\bar{x}||\bar{y}|$ હોય તો,

$$|t\bar{x} - \bar{y}|^2 = (t\bar{x} - \bar{y}) \cdot (t\bar{x} - \bar{y})$$

$$= t^2|\bar{x}|^2 - 2t\bar{x} \cdot \bar{y} + |\bar{y}|^2$$

$$= t^2|\bar{x}|^2 - 2t|\bar{x}||\bar{y}| + |\bar{y}|^2 \qquad (\bar{x} \cdot \bar{y} = |\bar{x}||\bar{y}|)$$

$$= (t|\bar{x}| - |\bar{y}|)^2$$

$t = \frac{|\bar{y}|}{|\bar{x}|}$ લેતાં, $\qquad (|\bar{x}| \neq 0)$

$|t\bar{x} - \bar{y}|^2 = 0$

$\therefore \quad t\bar{x} = \bar{y}$

$\therefore \quad \bar{y} = t\bar{x}$ $\qquad (t > 0)$

$\therefore \quad \bar{x}, \bar{y}$ ની દિશા સમાન છે.

તે જ રીતે જો $\overline{x} \cdot \overline{y} = -|\overline{x}||\overline{y}|$ તો $|t\overline{x} - \overline{y}|^2 = (t|\overline{x}| + |\overline{y}|)^2$

$t = -\frac{|\overline{y}|}{|\overline{x}|}$ લેતાં,

$t\overline{x} - \overline{y} = 0$

$\therefore \quad \overline{y} = t\overline{x}$ $\qquad (t < 0)$

$\therefore$ $\overline{x}$ તથા $\overline{y}$ ની દિશા પરસ્પર વિરુદ્ધ છે.

કોશી-સ્વાર્ત્ઝની અસમતામાં જો $|\overline{x} \cdot \overline{y}| = |\overline{x}||\overline{y}|$ તો $\overline{x}$ તથા $\overline{y}$ ની દિશા સમાન અથવા પરસ્પર વિરુદ્ધ હોય.

ત્રિકોણીય અસમતા :

R^2 તથા R^3 ના સદિશો $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ માટે $|\overline{x} + \overline{y}| \leq |\overline{x}| + |\overline{y}|$.

સાબિતી : $|\overline{x} + \overline{y}|^2 = (\overline{x} + \overline{y}) \cdot (\overline{x} + \overline{y})$

$= \overline{x} \cdot \overline{x} + \overline{x} \cdot \overline{y} + \overline{y} \cdot \overline{x} + \overline{y} \cdot \overline{y}$

$= |\overline{x}|^2 + 2\overline{x} \cdot \overline{y} + |\overline{y}|^2$ $\qquad (\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{y} \cdot \overline{x})$

$\leq |\overline{x}|^2 + 2|\overline{x} \cdot \overline{y}| + |\overline{y}|^2$ $\qquad (\forall a \in R,\ a \leq |a|)$

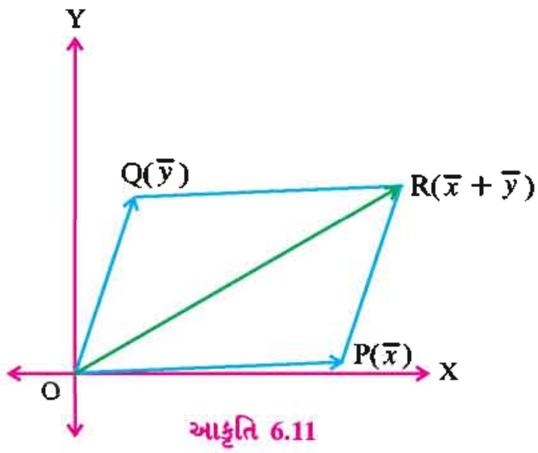
$\leq |\overline{x}|^2 + 2|\overline{x}||\overline{y}| + |\overline{y}|^2$ $\qquad$ (કોશી-સ્વાર્ત્ઝ અસમતા)

$\leq (|\overline{x}| + |\overline{y}|)^2$

$\therefore \quad |\overline{x} + \overline{y}| \leq |\overline{x}| + |\overline{y}|$

ભૌમિતિક અર્થઘટન :

ધારો કે $P(\overline{x})$ અને $Q(\overline{y})$ બે ભિન્ન બિંદુઓ છે તથા O, P તથા Q સમરેખ નથી. આકૃતિ 6.11 માં બતાવ્યા પ્રમાણે □OPRQ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. તેની બાજુઓ $\overline{OP}$ અને $\overline{OQ}$ સદિશ $\overrightarrow{OP}$ અને $\overrightarrow{OQ}$ દર્શાવે છે.



આકૃતિ 6.11

$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR}$

હવે ΔOPR માં OP + PR > OR

$\therefore$ OP + OQ > OR

(સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજુઓ એકરૂપ)

$\therefore \quad |\overline{x}| + |\overline{y}| > |\overline{x} + \overline{y}|$

હવે O, P, Q સમરેખ હોય તથા O–P–Q (આકૃતિ 6.12) અથવા O–Q–P હોય તો

OP + OQ = OR

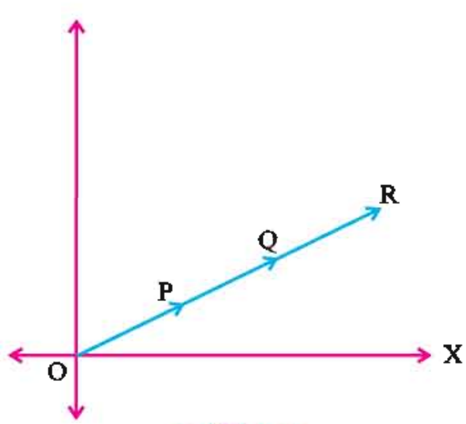
$\therefore \quad |\overline{x}| + |\overline{y}| = |\overline{x} + \overline{y}|$

તથા, જો O–P–Q અથવા O–Q–P ન હોય અને O, P, Q સમરેખ હોય તો OP + OQ > OR.

આમ, $|\overline{x}| + |\overline{y}| > |\overline{x} + \overline{y}|$

$\therefore \quad |\overline{x} + \overline{y}| \leq |\overline{x}| + |\overline{y}|$

તમામ વિકલ્પમાં $|\overline{x} + \overline{y}| \leq |\overline{x}| + |\overline{y}|$.



આકૃતિ 6.12

6.8 સમરેખ તથા સમતલીય સદિશો

આપણે જાણીએ છીએ કે, જો $\overline{x} \neq \overline{0}$, $\overline{y} \neq \overline{0}$ તથા $\overline{x} = k\ \overline{y}$, $k \neq 0$ તો $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ સમદિશ અથવા વિરૂદ્ધ દિશાના સદિશો છે. નિયત સદિશને સમાન તમામ મૂકત સદિશો અથવા નિયત સદિશને શૂન્યેતર સંખ્યા વડે (અદિશ વડે ગુણાકાર) ગુણતાં મળતા સદિશોને સમાન મૂકત સદિશો રૂઢિગત રીતે સમાંતર સદિશો કહેવાય છે. જો નિયત સદિશો સમરેખ ન હોય, તો તેમની દિશા ભિન્ન છે. તેથી બે નિયત સદિશો સમરેખ છે અથવા તેમની દિશા ભિન્ન છે અને તેઓ સમાંતર નથી.

પ્રમેય 6.4 : R^2 ના શૂન્યેતર સદિશો $\overline{x} = (x_1, x_2)$ અને $\overline{y} = (y_1, y_2)$ સમરેખ હોય તો અને તો જ $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$.

સાબિતી : $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ સમરેખ છે $\Rightarrow \overline{x} = k\overline{y}$, $k \in R - \{0\}$, $\overline{x} \neq \overline{0}$, $\overline{y} \neq \overline{0}$

$$\Rightarrow (x_1, x_2) = k(y_1, y_2)$$

$\therefore \quad x_1 = ky_1,\ x_2 = ky_2$

$\therefore \quad x_1y_2 - x_2y_1 = ky_1y_2 - ky_2y_1 = 0$

આથી ઊલટું, ધારો કે $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$

$\therefore \quad x_1y_2 = x_2y_1$

$y_1 \neq 0$, $y_2 \neq 0$ લેતાં,

$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = k$ (ધારો).

જો $k = 0$, તો $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ અને તેથી $\overline{x} = \overline{0}$, પરંતું $\overline{x} \neq \overline{0}$ હોવાથી, $k \neq 0$.

$\therefore \quad \overline{x} = (x_1, x_2) = (ky_1, ky_2) = k(y_1, y_2) = k\overline{y}$, $k \in R - \{0\}$

ધારો કે $y_1 = 0$ અથવા $y_2 = 0$. ($\overline{y} \neq \overline{0}$ હોવાથી બંને સાથે શૂન્ય નથી.)

ચોકસાઈ માટે ધારો કે $y_2 = 0$ અને $y_1 \neq 0$

$\therefore \quad x_1y_2 = 0$

$\therefore \quad x_2y_1 = 0 \qquad (x_1y_2 = x_2y_1)$

$\therefore \quad x_2 = 0$ કારણ કે $y_1 \neq 0$

ધારો કે $\frac{x_1}{y_1} = k$

$$\therefore \quad (x_1, x_2) = (ky_1, 0) = (ky_1, ky_2) = k(y_1, y_2) \qquad (y_2 = 0)$$

વળી $k = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, $x_2 = 0$. તેથી $\overline{x} = \overline{0}$, પરંતુ $\overline{x} \neq \overline{0}$.

$\therefore \quad \overline{x} = k\overline{y}, \quad k \in R - \{0\}$

$\therefore$ જો $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$, તો $k \in R - \{0\}$ માટે $\overline{x} = k\overline{y}$ અને તેથી $\overline{x}$ તથા $\overline{y}$ સમરેખ છે.

નોંધ : **(1)** જો શૂન્યેતર સદિશો $\overline{x}$ તથા $\overline{y}$ માટે $|\overline{x} \cdot \overline{y}| = |\overline{x}||\overline{y}|$, તો અને તો જ કોઈક $k \in R - \{0\}$ માટે $\overline{x} = k\overline{y}$

સાબિતી : ધારો કે $\overline{x} = k\overline{y}$, $k \in R - \{0\}$

$$\therefore \quad |\overline{x} \cdot \overline{y}| = |(k\overline{y}) \cdot \overline{y}| = |k(\overline{y} \cdot \overline{y})| = |k|\ |\overline{y} \cdot \overline{y}|$$

$= |k|\, |\overline{y}|^2$

$= |k|\, |\overline{y}|\, |\overline{y}|$

$= |k\overline{y}|\, |\overline{y}|$

$= |\overline{x}||\overline{y}|$

આથી ઉલટું, ધારો કે $|\overline{x} \cdot \overline{y}| = |\overline{x}||\overline{y}|$.

લાગ્રાન્જનો સદિશ સ્વરૂપે નિત્યસમ

$|\overline{x} \times \overline{y}|^2 + |\overline{x} \cdot \overline{y}|^2 = |\overline{x}|^2 |\overline{y}|^2$

$\therefore\ |\overline{x} \times \overline{y}|^2 = 0$ $\quad (|\overline{x} \cdot \overline{y}| = |\overline{x}||\overline{y}|)$

$\therefore\ \overline{x} \times \overline{y} = \overline{0}$

આગળની જેમ આપણે કોઈક $k \in R - \{0\}$ માટે $\overline{x} = k\overline{y}$ સાબિત કરી શકીએ. (સ્વાધ્યાય 6 જુઓ)

આમ જો $|\overline{x} \cdot \overline{y}| < |\overline{x}||\overline{y}|$ તો અને તો જ કોઈપણ $k \in R - \{0\}$ માટે $\overline{x} \neq k\overline{y}$, $\overline{x} \neq \overline{0}$, $\overline{y} \neq \overline{0}$.

(2) જો શૂન્યેતર સદિશો $\overline{x}$ તથા $\overline{y}$ માટે $|\overline{x} + \overline{y}| = |\overline{x}| + |\overline{y}|$, તો અને તો જ $\overline{x} = k\overline{y}$, $k > 0$, એટલે કે $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ ની દિશા સમાન છે.

સાબિતી : ધારો કે $\overline{x} = k\overline{y}$, $k > 0$.

$\therefore\ |\overline{x} + \overline{y}| = |(k\overline{y}) + \overline{y}| = |(k+1)\overline{y}| = |k+1|\,|\overline{y}|$

$= (k+1)\,|\overline{y}|$ $\quad (k > 0)$

$= k|\overline{y}| + |\overline{y}|$

$= |k||\overline{y}| + |\overline{y}|$ $\quad (k > 0)$

$= |k\overline{y}| + |\overline{y}|$

$= |\overline{x}| + |\overline{y}|$

આથી ઉલટું, ધારો કે શૂન્યેતર સદિશો $\overline{x}$ તથા $\overline{y}$ માટે $|\overline{x} + \overline{y}| = |\overline{x}| + |\overline{y}|$

$|\overline{x} + \overline{y}|^2 = (|\overline{x}| + |\overline{y}|)^2$

$\therefore\ (\overline{x} + \overline{y}) \cdot (\overline{x} + \overline{y}) = |\overline{x}|^2 + 2|\overline{x}||\overline{y}| + |\overline{y}|^2$

$\therefore\ |\overline{x}|^2 + 2\overline{x} \cdot \overline{y} + |\overline{y}|^2 = |\overline{x}|^2 + 2|\overline{x}||\overline{y}| + |\overline{y}|^2$

$\therefore\ \overline{x} \cdot \overline{y} = |\overline{x}||\overline{y}|$

$\therefore$ કોશી સ્વાર્ઝની અસમતામાં મળતી સમતા પરથી $\overline{x} = k\overline{y}$, $k > 0$

$\therefore$ $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ સમદિશ સદિશ છે.

પ્રમેય 6.5 : R^3 ના શૂન્યેતર સદિશો $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ સમરેખ હોય તો અને તો જ $\overline{x} \times \overline{y} = \overline{0}$.

સાબિતી : $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ સમરેખ છે.

$\therefore\ \overline{x} = k\overline{y}$, $k \in R - \{0\}$, $\overline{x} \neq \overline{0}$, $\overline{y} \neq \overline{0}$

$\therefore\ \overline{x} \times \overline{y} = (k\overline{y} \times \overline{y}) = k(\overline{y} \times \overline{y}) = k\overline{0} = \overline{0}$

આથી ઉલટું, ધારો કે $\bar{x} \times \bar{y} = \bar{0}$.

$|\bar{x} \cdot \bar{y}| = |\bar{x}|\,|\bar{y}|$ (લાગ્રાન્જનો નિત્યસમ)

$\therefore$ કોશી-સ્વાર્ઝની અસમતા પરથી $\bar{x} = k\bar{y}$ થશે, જ્યાં $\bar{x} \neq \bar{0}$ હોવાથી $k \in R - \{0\}$.

$\therefore$ $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ સમરેખ છે.

સમતલીય સદિશો : $\bar{x}$, $\bar{y}$ અને $\bar{z}$ એ R^3ના સદિશો છે. જો $\alpha, \beta, \gamma \in R$ પૈકી ઓછામાં ઓછો એક શૂન્યેતર હોય અને $\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} + \gamma\bar{z} = \bar{0}$ થાય, તો $\bar{x}$, $\bar{y}$ અને $\bar{z}$ ને સમતલીય સદિશો (coplanar vectors) કહે છે.

જો $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ સમતલીય ના હોય, તો તેમને અસમતલીય સદિશો અથવા સુરેખ સ્વાયત્ત સદિશો કહે છે. આમ જો, $\bar{x}$, $\bar{y}$ અને $\bar{z}$ અસમતલીય સદિશો હોય, તો $\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} + \gamma\bar{z} = \bar{0} \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 0$ અને $\gamma = 0$.

પ્રમેય 6.6 : R^3 ના ભિન્ન શૂન્યેતર સદિશો $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ સમતલીય હોય તો અને તો જ $[\bar{x} \;\; \bar{y} \;\; \bar{z}] = 0$.

સાબિતી : ધારો કે $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ સમતલીય છે.

$\therefore$ ઓછામાં ઓછો એક શૂન્યેતર હોય તેવા $\alpha, \beta, \gamma \in R$ મળે કે જેથી $\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} + \gamma\bar{z} = \bar{0}$ થાય.

ધારો કે $\gamma \neq 0$

$$\therefore \quad \bar{z} = \left(\frac{-\alpha}{\gamma}\right)\bar{x} + \left(\frac{-\beta}{\gamma}\right)\bar{y}$$

$$\therefore \quad [\bar{x} \;\; \bar{y} \;\; \bar{z}] = (\bar{x} \times \bar{y}) \cdot \bar{z} = (\bar{x} \times \bar{y}) \cdot \left[\left(\frac{-\alpha}{\gamma}\right)\bar{x} + \left(\frac{-\beta}{\gamma}\right)\bar{y}\right]$$

$$= (\bar{x} \times \bar{y}) \cdot \left(\frac{-\alpha}{\gamma}\right)\bar{x} + (\bar{x} \times \bar{y}) \cdot \left(\frac{-\beta}{\gamma}\right)\bar{y}$$

$$= \left(\frac{-\alpha}{\gamma}\right)((\bar{x} \times \bar{y}) \cdot \bar{x}) + \left(\frac{-\beta}{\gamma}\right)((\bar{x} \times \bar{y}) \cdot \bar{y})$$

$$= 0 + 0 = 0$$

$$\therefore \quad [\bar{x} \;\; \bar{y} \;\; \bar{z}] = 0$$

આથી ઉલટું, ધારો કે $[\bar{x} \;\; \bar{y} \;\; \bar{z}] = 0$.

$\therefore$ $\bar{x} \cdot (\bar{y} \times \bar{z}) = 0$

જો $\bar{y} \times \bar{z} = \bar{0}$, તો $\bar{y}$ અને $\bar{z}$ સમરેખ છે.

$\therefore$ $\bar{y} = k\bar{z}$, $k \neq 0$

$\therefore$ $0\bar{x} + 1\bar{y} - k\bar{z} = \bar{0}$

ઉપરના પરિણામને $\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} + \gamma\bar{z} = \bar{0}$ સાથે સરખાવતાં, $\alpha = 0$, $\beta = 1$ અને $\gamma = -k \neq 0$

$\therefore$ $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ સમતલીય છે.

હવે, ધારો કે $\bar{y} \times \bar{z} \neq \bar{0}$.

$\therefore$ સંખ્યાઓ $y_1z_2 - y_2z_1$, $y_2z_3 - y_3z_2$ અને $y_1z_3 - y_3z_1$ પૈકી ઓછામાં ઓછી એક શૂન્યેતર છે.

ધારો કે $y_1z_2 - y_2z_1 \neq 0$

હવે, આપણે કોઈક $\alpha, \beta \in R$ માટે $\bar{x} - \alpha\bar{y} - \beta\bar{z} = \bar{0}$ સાબિત કરીએ, **(i)**

સમીકરણો $\alpha y_1 + \beta z_1 - x_1 = 0$ **(ii)**

$\alpha y_2 + \beta z_2 - x_2 = 0$ **(iii)**

અને $\alpha y_3 + \beta z_3 - x_3 = 0$ નો વિચાર કરીએ **(iv)**

$y_1z_2 - y_2z_1 \neq 0$, હોવાથી સમીકરણ (ii) અને (iii) ને ઉકેલી α અને β ની કિંમત મેળવીએ તો તે સમીકરણ (iv) નું સમાધાન કરશે, કારણ કે $[\overline{x}\ \ \overline{y}\ \ \overline{z}] = 0$.

$\therefore$ આપણને $\alpha\overline{y} + \beta\overline{z} = \overline{x}$ થાય તેવા $\alpha, \beta \in R$ મળે.

અહીં $1\overline{x} - \alpha\overline{y} - \beta\overline{z} = \overline{0}$ થશે.

$\therefore$ $\overline{x} - \alpha\overline{y} - \beta\overline{z} = \overline{0}$ માં ઓછામાં ઓછો એક સહગુણક $1 \neq 0$ મળે છે.

આમ, $\overline{x}$, $\overline{y}$ અને $\overline{z}$ સમતલીય છે.

ઉદાહરણ 11 : સાબિત કરો કે $(-1, 0, -1)$, $(0, -1, 1)$ અને $(-1, 1, 0)$ અસમતલીય છે. તથા પ્રત્યેક $\overline{x} \in R^3$ ને $\overline{x} = \alpha(-1, 0, -1) + \beta(0, -1, 1) + \gamma(-1, 1, 0)$ સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય, જ્યાં α, β અને γ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે.

ઉકેલ : $\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1(-1) + 0 - 1(-1) = 2 \neq 0.$

$\therefore$ $(-1, 0, -1)$, $(0, -1, 1)$ અને $(-1, 1, 0)$ અસમતલીય છે.

ધારો કે $\overline{x} = \alpha(-1, 0, -1) + \beta(0, -1, 1) + \gamma(-1, 1, 0)$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$,

$\therefore$ $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ માટે,

$\therefore$ $(x_1, x_2, x_3) = (-\alpha - \gamma, -\beta + \gamma, -\alpha + \beta)$

$-\alpha - \gamma = x_1, \ \ -\beta + \gamma = x_2, \ \ -\alpha + \beta = x_3$

સમીકરણો ઉકેલતાં,

$$\alpha = -\frac{x_1 + x_2 + x_3}{2}, \ \beta = \frac{x_3 - x_1 - x_2}{2}, \ \gamma = \frac{x_2 + x_3 - x_1}{2}$$

$$\therefore \quad \overline{x} = -\frac{x_1 + x_2 + x_3}{2}(-1, 0, -1) + \frac{x_3 - x_1 - x_2}{2}(0, -1, 1) + \frac{x_2 + x_3 - x_1}{2}(-1, 1, 0).$$

ઉદાહરણ 12 : $|\overline{x} \cdot \overline{y}| < |\overline{x}|\,|\overline{y}|$ થાય તેવા $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ નું એક ઉદાહરણ આપો.

ઉકેલ : ધારો કે $\overline{x} = (1, -1, 2)$ અને $\overline{y} = (2, 1, -2)$ **($\overline{x} \neq k\overline{y}$ તેવા $\overline{x}$ તથા $\overline{y}$ પસંદ કરો)**

$\overline{x} \cdot \overline{y} = 2 - 1 - 4 = -3$

$\therefore$ $|\overline{x} \cdot \overline{y}| = 3$ (i)

$|\overline{x}|\,|\overline{y}| = \sqrt{6} \cdot \sqrt{9}$

$= 3\sqrt{6}$ (ii)

પરિણામ (i) અને (ii), પરથી $3 < 3\sqrt{6}$ હોવાથી $|\overline{x} \cdot \overline{y}| < |\overline{x}|\,|\overline{y}|$.

ઉદાહરણ 13 : $|\overline{x} + \overline{y}| = |\overline{x}| + |\overline{y}|$ ક્યારે થાય ? $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ માટે એક ઉદાહરણ લઈ તમારો જવાબ ચકાસો.

ઉકેલ : જો $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ ની દિશા સમાન હોય તો $|\overline{x} + \overline{y}| = |\overline{x}| + |\overline{y}|$.

$\overline{x} = (1, -1, 1)$ અને $\overline{y} = (2, -2, 2)$ લેતાં,

$\overline{x} = \frac{1}{2}\overline{y}$; $\frac{1}{2} > 0$, હોવાથી $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ ની દિશા સમાન છે.

હવે $\overline{x} + \overline{y} = (3, -3, 3)$

$\therefore$ $|\overline{x} + \overline{y}| = 3\,|(1, -1, 1)| = 3\sqrt{3}$

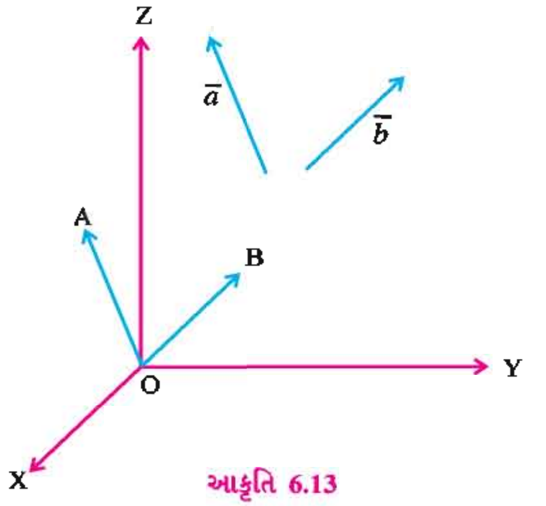
$\therefore$ $|\overline{x} + \overline{y}| = 3\sqrt{3}$ (i)

$|\overline{x}| = \sqrt{3}$, $|\overline{y}| = 2\sqrt{3}$

$\therefore$ $|\overline{x}| + |\overline{y}| = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

આથી $|\overline{x} + \overline{y}| = |\overline{x}| + |\overline{y}|$.

6.9 બે શૂન્યેતર સદિશો વચ્ચેનો ખૂણો



આકૃતિ 6.13

જો R^3 માં બે શૂન્યેતર સદિશો આપેલા હોય તો તેમને સંગત બે નિયત સદિશો વચ્ચેના ખૂણાના માપને આપેલ સદિશો વચ્ચેના ખૂણાનું માપ કહીશું.

$\overline{a}$ તથા $\overline{b}$ ને સંગત નિયત સદિશો અનુક્રમે $\overrightarrow{OA}$ તથા $\overrightarrow{OB}$ છે. આમ $\overline{a}$ તથા $\overline{b}$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ એટલે $\overrightarrow{OA}$ તથા $\overrightarrow{OB}$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ કહેવાય.

ધારો કે $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ બે શૂન્યેતર સદિશો છે.

(1) જો $\overline{x} = k\overline{y}$, $k > 0$, તો $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ ની દિશા સમાન છે. તેથી તેમના વચ્ચેના ખૂણાનું માપ 0 લઈશું.

(2) જો $\overline{x} = k\overline{y}$, $k < 0$, તો $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ વિરુદ્ધ દિશાના સદિશો છે અને તેથી તેમના વચ્ચેના ખૂણાનું માપ π લઈશું.

(3) હવે, ધારો કે $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ ની દિશા ભિન્ન છે. કોશી-સ્વાર્ઝની અસમતા પ્રમાણે,

$|\overline{x} \cdot \overline{y}| < |\overline{x}|\,|\overline{y}|$.

$\therefore\ -|\overline{x}|\,|\overline{y}| < \overline{x} \cdot \overline{y} < |\overline{x}|\,|\overline{y}|$ $\qquad (|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a)$

$\therefore\ -1 < \dfrac{\overline{x} \cdot \overline{y}}{|\overline{x}||\overline{y}|} < 1$

$\therefore$ અનન્ય $\alpha \in (0, \pi)$ મળે કે જેથી,

$cos^{-1} \dfrac{\overline{x} \cdot \overline{y}}{|\overline{x}||\overline{y}|} = \alpha$ થાય.

સંખ્યા α ને સદિશો $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ કહે છે તથા તેને $\alpha = (\overline{x}, \widehat{\ } \overline{y})$ રીતે લખાય છે.

આમ, જો $\overline{x} \neq \overline{0}$, $\overline{y} \neq \overline{0}$ તો $(\overline{x}, \widehat{\ } \overline{y}) = cos^{-1} \dfrac{\overline{x} \cdot \overline{y}}{|\overline{x}||\overline{y}|}$

વળી, જો $|\overline{x} \cdot \overline{y}| = |\overline{x}|\,|\overline{y}|$ તો $\overline{x} \cdot \overline{y} = |\overline{x}|\,|\overline{y}|$ અથવા $\overline{x} \cdot \overline{y} = -|\overline{x}|\,|\overline{y}|$. તેથી $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ ની દિશા અનુક્રમે સમાન અથવા પરસ્પર વિરુદ્ધ હોય તથા $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ અનુક્રમે 0 અથવા π થાય.

ચાલો, આપણે તેની યથાર્થતા ચકાસીએ.

જો $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ ની દિશા સમાન હોય, તો $\overline{x} = k\overline{y}$, $k > 0$.

હવે $\dfrac{\overline{x} \cdot \overline{y}}{|\overline{x}||\overline{y}|} = \dfrac{(k\overline{y}) \cdot \overline{y}}{|k\overline{y}||\overline{y}|} = \dfrac{k(\overline{y} \cdot \overline{y})}{|k|\,|\overline{y}|\,|\overline{y}|} = \dfrac{k|\overline{y}|^2}{k|\overline{y}|^2} = 1$ $\qquad (k > 0)$

$\therefore\ cos^{-1} \dfrac{\overline{x} \cdot \overline{y}}{|\overline{x}||\overline{y}|} = cos^{-1} 1 = 0$

વળી, જો $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશાના સદિશ હોય, તો $\overline{x} = k\overline{y}$, $k < 0$.

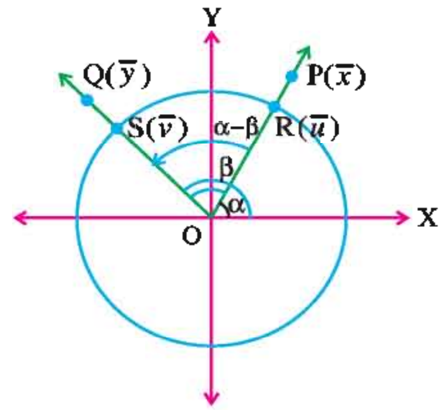
હવે, $\dfrac{\overline{x} \cdot \overline{y}}{|\overline{x}||\overline{y}|} = \dfrac{(k\overline{y}) \cdot \overline{y}}{|k\overline{y}||\overline{y}|} = \dfrac{k(\overline{y} \cdot \overline{y})}{|k|\,|\overline{y}|\,|\overline{y}|} = \dfrac{k|\overline{y}|^2}{-k|\overline{y}|^2} = -1$ $\qquad (k < 0)$

$\therefore\ cos^{-1} \dfrac{\overline{x} \cdot \overline{y}}{|\overline{x}||\overline{y}|} = cos^{-1}(-1) = \pi$

આમ શૂન્યેતર સદિશો $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ માટે $\alpha \in [0, \pi]$ મળે કે જેથી,

$\alpha = (\overline{x}, \widehat{\ } \overline{y}) = cos^{-1} \dfrac{\overline{x} \cdot \overline{y}}{|\overline{x}||\overline{y}|}$ થાય.

R^2 માં ભૌમિતિક અર્થ : બે સદિશો વચ્ચેના ખૂણાની આપણી આ વ્યાખ્યા એ ખૂણાના માપની ભૌમિતિક સમજ સાથે સુસંગત છે. ધારો કે P તથા Q ના સ્થાન સદિશ અનુક્રમે $\bar{x}$ તથા $\bar{y}$ છે અને $\bar{x} \neq \bar{0}$, $\bar{y} \neq \bar{0}$.



આકૃતિ 6.14

ધારો કે $\frac{\bar{x}}{|\bar{x}|} = \bar{u}$ અને $\frac{\bar{y}}{|\bar{y}|} = \bar{v}$ એ અનુક્રમે $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ ની દિશાના એકમ સદિશો છે.

$(\bar{x}, \hat{\ } \bar{y}) = (\bar{u}, \hat{\ } \bar{v})$

ધારો કે R તથા S ના સ્થાન સદિશ અનુક્રમે $\bar{u}$ તથા $\bar{v}$ છે. R તથા S એકમ વર્તુળ પર છે.

$\therefore$ $\bar{u} = (cos\alpha, sin\alpha)$ અને $\bar{v} = (cos\beta, sin\beta)$ લઈ શકાય. જ્યાં $0 \leq \alpha, \beta < 2\pi$.

હવે જો $\overrightarrow{OR}$ તથા $\overrightarrow{OS}$ દ્વારા બનતા ખૂણાનું રેડિયન માપ θ હોય તો,

$\theta = \alpha - \beta$ અથવા $\beta - \alpha$.

$$
\begin{aligned}
\text{હવે, } cos(\bar{x}, \hat{\ } \bar{y}) &= \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{|\bar{x}||\bar{y}|} \\
&= \bar{u} \cdot \bar{v} \\
&= (cos\alpha, \ sin\alpha) \cdot (cos\beta, \ sin\beta) \\
&= cos\alpha \ cos\beta + sin\alpha \ sin\beta \\
&= cos(\alpha - \beta) \ \text{ અથવા } \ cos(\beta - \alpha) \\
&= cos\theta \qquad (0 < \theta < \pi, \ 0 < (\bar{x}, \hat{\ } \bar{y}) < \pi)
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad \theta = (\bar{x}, \hat{\ } \bar{y}) = cos^{-1} \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{|\bar{x}||\bar{y}|}$$

આમ $\overrightarrow{OP}$ તથા $\overrightarrow{OQ}$ દ્વારા બનતા ખૂણાનું માપ θ અને $\bar{x}$ તથા $\bar{y}$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $(\bar{x}, \hat{\ } \bar{y})$ બંને એક જ છે.

લંબ સદિશો : જો $\bar{x} \neq \bar{0}$ તથા $\bar{y} \neq \bar{0}$ અને $(\bar{x}, \hat{\ } \bar{y}) = \frac{\pi}{2}$ હોય, તો $\bar{x}$ તથા $\bar{y}$ ને પરસ્પર લંબ સદિશો કહે છે. $\bar{x}$ તથા $\bar{y}$ પરસ્પર લંબ છે તેને સંકેતમાં $\bar{x} \perp \bar{y}$ વડે દર્શાવાય છે.

બે શૂન્યેતર સદિશો પરસ્પર લંબ હોવા માટેની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત :

ધારો કે $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ બે શૂન્યેતર સદિશો છે.

$$
\begin{aligned}
\bar{x} \perp \bar{y} &\Leftrightarrow (\bar{x}, \hat{\ } \bar{y}) = \frac{\pi}{2} \\
&\Leftrightarrow cos(\bar{x}, \hat{\ } \bar{y}) = cos\frac{\pi}{2} \\
&\Leftrightarrow \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{|\bar{x}||\bar{y}|} = 0 \\
&\Leftrightarrow \bar{x} \cdot \bar{y} = 0
\end{aligned}
$$

આમ, $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ પરસ્પર લંબ હોય તો અને તો જ $\bar{x} \cdot \bar{y} = 0$.

પ્રમેય 6.7 : જો $\bar{x}, \bar{y} \in R^3$, $\bar{x} \neq \bar{0}$, $\bar{y} \neq \bar{0}$ અને $(\bar{x}, \hat{} \bar{y}) = \alpha$ તો,

(1) $\bar{x} \cdot \bar{y} = |\bar{x}||\bar{y}| \cos\alpha$

(2) $|\bar{x} \times \bar{y}| = |\bar{x}||\bar{y}| \sin\alpha$

(3) $\bar{x} \perp (\bar{x} \times \bar{y})$, $\bar{y} \perp (\bar{x} \times \bar{y})$

સાબિતી : (1) બે સદિશો વચ્ચેના ખૂણાના માપની વ્યાખ્યા પરથી $\alpha = \cos^{-1} \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{|\bar{x}||\bar{y}|}$

$\therefore \quad \cos\alpha = \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{|\bar{x}||\bar{y}|}$

$\therefore \quad \bar{x} \cdot \bar{y} = |\bar{x}||\bar{y}| \cos\alpha$

(2) લાગ્રાન્જના નિત્યસમ પરથી,

$|\bar{x} \times \bar{y}|^2 + |\bar{x} \cdot \bar{y}|^2 = |\bar{x}|^2 |\bar{y}|^2$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad |\bar{x} \times \bar{y}|^2 &= |\bar{x}|^2 |\bar{y}|^2 - |\bar{x} \cdot \bar{y}|^2 \\
&= |\bar{x}|^2 |\bar{y}|^2 - |\bar{x}|^2 |\bar{y}|^2 \cos^2\alpha \\
&= |\bar{x}|^2 |\bar{y}|^2 (1 - \cos^2\alpha) \\
&= |\bar{x}|^2 |\bar{y}|^2 \sin^2\alpha
\end{aligned}$$

$\therefore \quad |\bar{x} \times \bar{y}| = |\bar{x}||\bar{y}| \sin\alpha$ ($0 \le \alpha \le \pi$ હોવાથી $\sin\alpha \ge 0$)

(3) ધારો કે $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ અને $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$

હવે, $\bar{x} \cdot (\bar{x} \times \bar{y}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0$

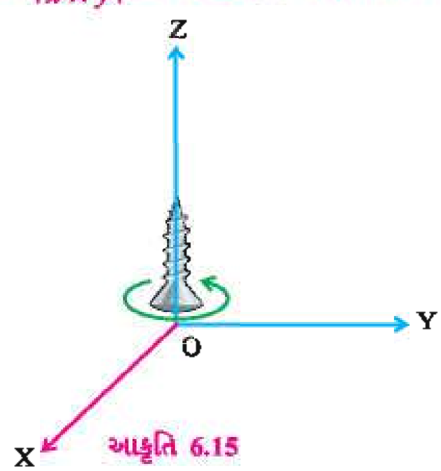
$\therefore \quad \bar{x} \perp (\bar{x} \times \bar{y})$

તે જ પ્રમાણે $\bar{y} \cdot (\bar{x} \times \bar{y}) = 0$. અને તેથી $\bar{y} \perp (\bar{x} \times \bar{y})$.

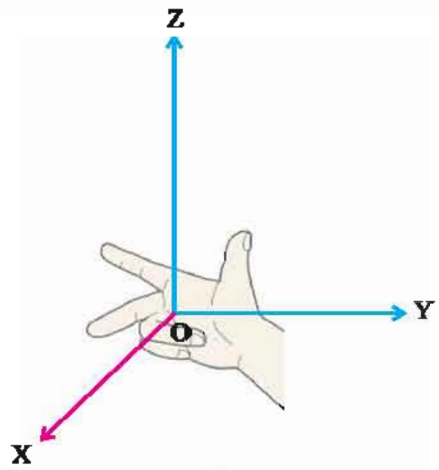
આમ $(\bar{x} \times \bar{y})$ એ $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ બંનેને લંબ સદિશ છે અને તેથી $\pm \frac{\bar{x} \times \bar{y}}{|\bar{x} \times \bar{y}|}$ એ $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ બંનેને લંબ એકમ સદિશો છે.

$\bar{x} \times \bar{y}$ નું ભૌમિતિક અર્થઘટન :

જમણી બાજુના આંટાવાળા સ્ક્રૂને જ્યારે ધન X-અક્ષની દિશા તરફથી ધન Y-અક્ષની દિશા તરફ ઘડિયાળના કાંટાની વિરુદ્ધ દિશામાં ફેરવવામાં આવે ત્યારે આકૃતિ 6.15માં દર્શાવ્યા મુજબ તે ધન Z-અક્ષની દિશામાં આગળ વધે છે.



આકૃતિ 6.15

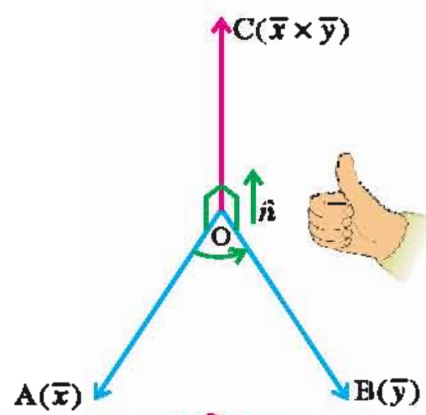


આકૃતિ 6.16

$|\overline{x} \times \overline{y}| = |\overline{x}|\,|\overline{y}|\, sin\theta$, $\theta = (\overline{x}, \hat{\ } \overline{y})$ હોવાથી,

$\overline{x} \times \overline{y} = |\overline{x}|\,|\overline{y}|\, sin\theta\ \hat{n}$, જ્યાં $\hat{n}$ એ $\overline{x} \times \overline{y}$ ની દિશાનો એકમ સદિશ છે.

જમણા હાથના અંગૂઠાના નિયમ પરથી $\overline{x} \times \overline{y}$ ની દિશા મેળવી શકાય. આપણે જમણા હાથની આંગળીઓને $\overline{x}$ ની દિશા તરફથી $\overline{y}$ ની દિશા તરફ વાળીએ તો જમણા હાથનો અંગૂઠો $\overline{x} \times \overline{y}$ ની દિશા સૂચવશે.



આકૃતિ 6.17

ઉદાહરણ 14 : સદિશો (1, –1, 2) અને (2, –1, 1) વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $\overline{x} = (1, -1, 2)$ અને $\overline{y} = (2, -1, 1)$

હવે, $cos(\overline{x}, \hat{\ } \overline{y}) = \dfrac{\overline{x} \cdot \overline{y}}{|\overline{x}|\,|\overline{y}|}$

$$= \frac{(1, -1, 2) \cdot (2, -1, 1)}{\sqrt{1+1+4}\ \sqrt{4+1+1}} = \frac{2+1+2}{\sqrt{6}\sqrt{6}}$$

$$= \frac{5}{6}$$

$\therefore \quad (\overline{x}, \hat{\ } \overline{y}) = cos^{-1} \frac{5}{6}$

ઉદાહરણ 15 : જો સદિશો $\sqrt{3}\,\hat{i} + \hat{j}$ અને $a\hat{i} + \sqrt{3}\,\hat{j}$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\frac{\pi}{3}$, હોય, તો a શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $\overline{x} = \sqrt{3}\,\hat{i} + \hat{j} = (\sqrt{3}, 1)$ અને $\overline{y} = a\hat{i} + \sqrt{3}\,\hat{j} = (a, \sqrt{3})$

હવે, $(\overline{x}, \hat{\ } \overline{y}) = \frac{\pi}{3}$

$\therefore \quad cos(\overline{x}, \hat{\ } \overline{y}) = cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore \quad \frac{\overline{x} \cdot \overline{y}}{|\overline{x}||\overline{y}|} = \frac{1}{2}$ **(i)**

હવે $\overline{x} \cdot \overline{y} = (\sqrt{3}, 1) \cdot (a, \sqrt{3}) = \sqrt{3}a + \sqrt{3}$, $|\overline{x}| = \sqrt{3+1} = 2$, $|\overline{y}| = \sqrt{a^2+3}$

$\therefore \quad \frac{\sqrt{3}a + \sqrt{3}}{2\sqrt{a^2+3}} = \frac{1}{2}$ **((i) પરથી)**

$\therefore \quad \sqrt{3}(a + 1) = \sqrt{a^2+3}$ **(ii)**

$\therefore \quad 3(a^2 + 2a + 1) = a^2 + 3$

$\therefore \quad 2a^2 + 6a = 0$

$\therefore \quad 2a(a + 3) = 0$

$\therefore \quad a = 0$ અથવા $a = -3$

$a = -3$ એ (ii) નું સમાધાન કરશે નહીં કારણ કે $\sqrt{3}(-2) \neq \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$a = 0$ માટે, $\sqrt{3}(a + 1) = \sqrt{3}$, $\sqrt{a^2+3} = \sqrt{3}$. તેથી $a = 0$.

ઉદાહરણ 16 : જો $|\overline{x}| = |\overline{y}| = 1$ અને $(\overline{x}, \hat{\ } \overline{y}) = \theta$ હોય તો સાબિત કરો કે $|\overline{x} - \overline{y}\,cos\theta| = sin\theta$

ઉકેલ : $|\overline{x} - \overline{y}\,cos\theta|^2 = |\overline{x}|^2 - 2\overline{x} \cdot \overline{y}\,cos\theta + |\overline{y}\,cos\theta|^2$

$= 1 - 2\,cos\theta \cdot cos\theta + |\overline{y}|^2\,cos^2\theta$ **($|\overline{x}| = 1$)**

$\left(cos\theta = \frac{\overline{x} \cdot \overline{y}}{|\overline{x}||\overline{y}|} \Rightarrow cos\theta = \frac{\overline{x} \cdot \overline{y}}{1}\right)$

$= 1 - 2\,cos^2\theta + cos^2\theta$ **($|\overline{y}| = 1$)**

$= 1 - cos^2\theta$

$= sin^2\theta$

$\therefore \quad |\overline{x} - \overline{y}\,cos\theta| = sin\theta$ **$(0 \le \theta \le \pi)$**

ઉદાહરણ 17 : જો $\overline{x} = \hat{i} + a\hat{j} + 3\hat{k}$ અને $\overline{y} = 2\hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k}$ પરસ્પર લંબ સદિશો હોય તો a શોધો.

ઉકેલ : અહીં $\overline{x} = (1, a, 3)$, $\overline{y} = (2, -1, 5)$

$\overline{x} \perp \overline{y} \Leftrightarrow \overline{x} \cdot \overline{y} = 0$

$\Leftrightarrow 2 - a + 15 = 0$

$\Leftrightarrow a = 17$

$\therefore a = 17$

ઉદાહરણ 18 : (1, 2, 3) અને (2, −1, 4) બંનેને લંબ એકમ સદિશો શોધો.

ઉકેલ : $\overline{x} = (1, 2, 3)$,

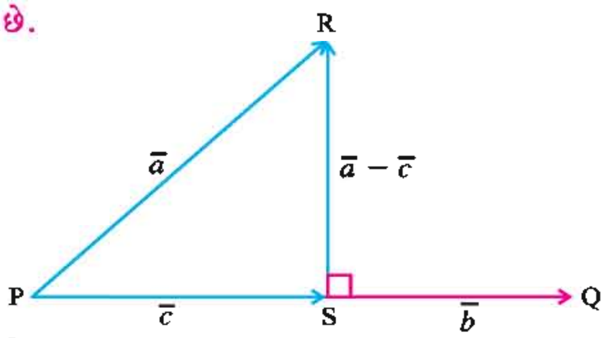
$\overline{y} = (2, -1, 4)$

$\therefore \quad \overline{x} \times \overline{y} = (11, 2, -5)$ અને $|\overline{x} \times \overline{y}| = \sqrt{121+4+25} = \sqrt{150} = 5\sqrt{6}$

$\therefore$ આપેલા સદિશોને લંબ એકમ સદિશો $\pm\frac{\overline{x} \times \overline{y}}{|\overline{x} \times \overline{y}|} = \pm\left(\frac{11}{5\sqrt{6}}, \frac{2}{5\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$ છે.

6.10 સદિશનો પ્રક્ષેપ

જો $\overline{a}$ તથા $\overline{b}$ પરસ્પર લંબ ન હોય તેવા શૂન્યેતર સદિશો હોય, તો $\overline{a}$ નો $\overline{b}$ પરનો પ્રક્ષેપ સદિશ (Projection Vector) $\left(\dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{b}|^2}\right)\overline{b}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત થાય છે. તેનો સંકેત $\text{Proj}_{\overline{b}}\overline{a}$ છે.



આકૃતિ 6.18

સમાન આરંભબિંદુ P હોય તેવા સદિશો $\overrightarrow{PR} = \overline{a}$ અને $\overrightarrow{PQ} = \overline{b}$ છે. S એ બિંદુ R માંથી $\overleftrightarrow{PQ}$ પરનો લંબપાદ છે.

તો $\overrightarrow{PS} = \text{Proj}_{\overline{b}}\overline{a}$ થશે. (આકૃતિ 6.18)

ધારો કે $\overline{c} = \overrightarrow{PS}$, $\overline{c} \neq \overline{0}$ (શા માટે ?)

$\overrightarrow{SR} = \overline{a} - \overline{c}$ કારણ કે $\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SR} = \overrightarrow{PR} = \overline{a}$

$\overline{c}$ અને $\overline{b}$ ની દિશા સમાન અથવા પરસ્પર વિરુદ્ધ હોવાથી,

$\therefore$ કોઈક $k \in R - \{0\}$ માટે $\overline{c} = k\overline{b}$ (i)

$\therefore$ $\overline{c}\cdot\overline{b} = k\overline{b}\cdot\overline{b} = k|\overline{b}|^2$

$\therefore$ $k = \dfrac{\overline{c}\cdot\overline{b}}{|\overline{b}|^2}$

$\overleftrightarrow{RS} \perp \overleftrightarrow{PS}$ હોવાથી, $(\overline{a} - \overline{c}) \perp \overline{b}$

$\therefore$ $(\overline{a} - \overline{c})\cdot\overline{b} = 0$

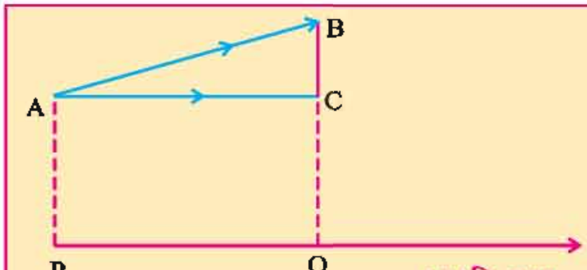
$\therefore$ $\overline{a}\cdot\overline{b} = \overline{c}\cdot\overline{b}$

$\therefore$ $k = \dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{b}|^2}$, કારણ કે $k = \dfrac{\overline{c}\cdot\overline{b}}{|\overline{b}|^2}$

$\therefore$ $\overrightarrow{PS} = \overline{c} = \left(\dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{b}|^2}\right)\overline{b} = \text{Proj}_{\overline{b}}\overline{a}$. ((i) પરથી)

પ્રક્ષેપ સદિશનું માન : $PS = \dfrac{|\overline{a}\cdot\overline{b}|}{|\overline{b}|^2}\,|\overline{b}| = \dfrac{|\overline{a}\cdot\overline{b}|}{|\overline{b}|}$ પ્રક્ષેપ સદિશનું માન છે.

$\dfrac{|\overline{a}\cdot\overline{b}|}{|\overline{b}|}$ ને $\overline{a}$ નો $\overline{b}$ ની દિશામાં ઘટક (Component) કહે છે. તેનો સંકેત $\text{Comp}_{\overline{b}}\overline{a}$ છે.

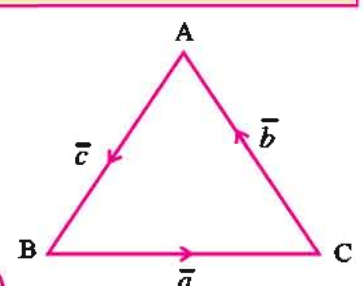


આકૃતિ 6.19

નોંધ : જો R^3 ના બે સદિશો આપેલા હોય તો તેમને સંગત બે નિયત સદિશોનો ઉપર પ્રમાણે વિચાર કરી શકાય.

$\overrightarrow{AB}$ તથા $\overrightarrow{PQ}$ એ R^3 ના સદિશો હોય તો જેનું આરંભબિંદુ A હોય તેવો $\overrightarrow{PQ}$ ને સમાન સદિશ લેવાથી આ જ પરિણામ મળશે. $\overrightarrow{AB}$ નો $\overrightarrow{PQ}$ પરનો પ્રક્ષેપ $\overrightarrow{AC}$ બને.

ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ :



આકૃતિ 6.20

ΔABC માં $\overrightarrow{AB} = \overline{c}$, $\overrightarrow{BC} = \overline{a}$ અને $\overrightarrow{CA} = \overline{b}$.

ΔABC નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}bc\sin A$

$= \frac{1}{2}|\overline{b}|\,|\overline{c}|\sin A$

$= \frac{1}{2}|\overline{b}\times\overline{c}|$

$\left((\overline{b}, \hat{}\ \overline{c}) = \pi - A \text{ અને } \sin(\pi - A) = \sin A\right)$

આમ ΔABC નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}|\overline{b}\times\overline{c}| = \frac{1}{2}|\overline{a}\times\overline{b}| = \frac{1}{2}|\overline{c}\times\overline{a}|$

નોંધ : ઉપરના સૂત્રનો ઉપયોગ R^3 માટે જ શક્ય છે.

વળી, ΔABC નું ક્ષેત્રફળ

$$\Delta = \frac{1}{2} bc \sqrt{1-\cos^2 A}$$

$$= \frac{1}{2} |\bar{b}| \, |\bar{c}| \sqrt{1 - \left(\frac{\bar{b}\cdot\bar{c}}{|\bar{b}||\bar{c}|}\right)^2}$$

$$\therefore \quad \Delta = \frac{1}{2} \sqrt{|\bar{b}|^2|\bar{c}|^2 - |\bar{b}\cdot\bar{c}|^2}$$

નોંધ : ઉપરના સૂત્રનો ઉપયોગ R^2 તેમજ R^3 બંને માટે શક્ય છે.

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ :

$\square$OACB એ $\overrightarrow{OA} = \bar{a}$ અને $\overrightarrow{OB} = \bar{b}$ હોય તેવો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

હવે, $\overline{BM} \perp \overline{OA}$.

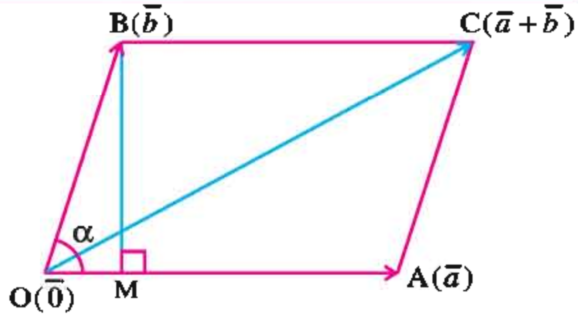
$\therefore$ જો $(\bar{a}, \hat{\ } \bar{b}) = \alpha$ હોય તો,

$BM = OB\sin\alpha = |\bar{b}| \sin\alpha$

$\therefore$ $\square^m$ OACBનું ક્ષેત્રફળ $= OA \cdot BM$

$= |\bar{a}| \, |\bar{b}| \sin\alpha$

$\therefore$ **$\square^m$ OACBનું ક્ષેત્રફળ $= |\bar{a} \times \bar{b}|$**



આકૃતિ 6.21

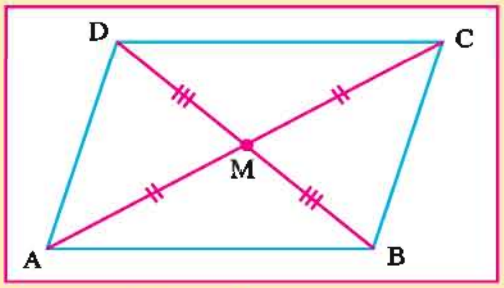
નોંધ : જો $\overrightarrow{AC} = \bar{x}$ અને $\overrightarrow{BD} = \bar{y}$ તથા M એ વિકર્ણોનું છેદબિંદુ હોય,

તો $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\bar{x}$ અને $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\bar{y}$

હવે $\square^m$ABCD નું ક્ષેત્રફળ $= 4(\Delta ABM$ નું ક્ષેત્રફળ$)$

$= 4\left(\frac{1}{2}|\overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{BM}|\right)$

$\therefore$ **$\square^m$ABCD નું ક્ષેત્રફળ $= 2\left|\frac{1}{2}\bar{x} \times \frac{1}{2}\bar{y}\right| = \frac{1}{2}|\bar{x} \times \bar{y}|$**



આકૃતિ 6.22

ઉદાહરણ 19 : સદિશ $2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ નો $-4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ પરનો પ્રક્ષેપ સદિશ, પ્રક્ષેપ સદિશનું માન તથા પ્રક્ષેપ સદિશનો ઘટક શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $\bar{a} = (2, 1, 1)$, $\bar{b} = (-4, -2, 4)$

$\therefore \quad \bar{a}\cdot\bar{b} = -8 - 2 + 4 = -6$ અને $|\bar{b}| = \sqrt{16+4+16} = 6$

$$\therefore \quad \text{Proj}_{\bar{b}}\bar{a} = \left(\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|^2}\right)\bar{b} = \frac{-6}{36}(-4, -2, 4) = \frac{1}{6}(4, 2, -4) = \frac{1}{3}(2, 1, -2)$$

$$\therefore \quad \text{Comp}_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|} = \frac{-6}{6} = -1$$

$\text{Proj}_{\bar{b}}\bar{a}$ નું માન $= \dfrac{|\bar{a}\cdot\bar{b}|}{|\bar{b}|} = \dfrac{|-6|}{6} = 1.$

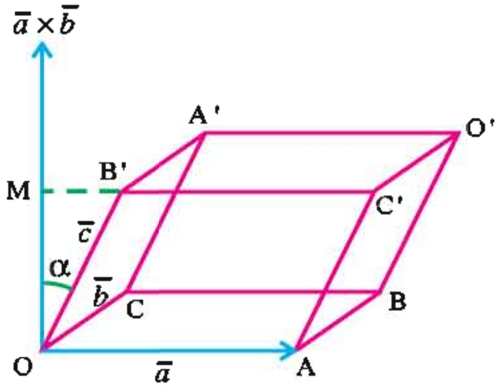
સમાંતર ફલકનું ઘનફળ :

જે ઘન પદાર્થના છ પૃષ્ઠ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોય તેવા ઘન પદાર્થને **સમાંતરફલક (Parallelopiped)** કહે છે.

ધારો કે $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ અસમતલીય સદિશો છે

$\therefore$ $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} \neq 0$

$\overrightarrow{OA} = \bar{a}$ તથા $\overrightarrow{OC} = \bar{b}$ એ અનુક્રમે સદિશ $\bar{a}$ તથા સદિશ $\bar{b}$ ના નિરૂપણ છે તથા O નો સ્થાન સદિશ $\bar{0}$ છે. અહીં, $\square$OABC એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.



આકૃતિ 6.23

$\therefore$ $\square^m$OABC નું ક્ષેત્રફળ $= |\bar{a} \times \bar{b}|$

વળી $\bar{a} \times \bar{b}$ (એટલે કે $\overrightarrow{OM}$) એ $\bar{a}$ તથા $\bar{b}$ બંનેને લંબ સદિશ છે.

$\therefore$ સમાંતરફલક OABC – B'C'O'A' ની ઊંચાઈ $= \bar{c}$ ના $\bar{a} \times \bar{b}$ પરના પ્રક્ષેપ સદિશનું માન (એટલે કે OM)

$$= \frac{|\bar{c} \cdot (\bar{a} \times \bar{b})|}{|\bar{a} \times \bar{b}|}$$

સમાંતરફલકનું ઘનફળ = પાયાનું ક્ષેત્રફળ × ઊંચાઈ

$$= |\bar{a} \times \bar{b}| \frac{|\bar{c} \cdot (\bar{a} \times \bar{b})|}{|\bar{a} \times \bar{b}|}$$

$$= |\bar{c} \cdot (\bar{a} \times \bar{b})|$$

$\therefore$ **સમાંતરફલકનું ઘનફળ** $= |[\bar{c}\ \bar{a}\ \bar{b}]| = |[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]|$

નોંધ : આપણે એ નોંધીએ કે $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ એ સમાંતર ફલકની પાસપાસેની ધારો છે.

ઉદાહરણ 20 : જેની ધારો $\overrightarrow{OA} = (2, 1, 1)$, $\overrightarrow{OB} = (3, -1, 1)$ અને $\overrightarrow{OC} = (-1, 1, -1)$ હોય તેવા સમાંતરફલકનું ઘનફળ શોધો.

ઉકેલ : $\bar{a} = (2, 1, 1)$, $\bar{b} = (3, -1, 1)$, $\bar{c} = (-1, 1, -1)$ લેતાં,

$$[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2(0) - 1(-2) + 1(2) = 4$$

સમાંતરફલકનું ઘનફળ $= |[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]| = |4| = 4$

6.11 સદિશની દિક્કોસાઈન, દિક્ખૂણાઓ અને દિક્ગુણોત્તર

આપણે જાણીએ છીએ કે, $\hat{i} = (1, 0, 0)$, $\hat{j} = (0, 1, 0)$ અને $\hat{k} = (0, 0, 1)$ એ અનુક્રમે X-અક્ષ, Y-અક્ષ અને Z-અક્ષની ધન દિશામાં R^3ના એકમ સદિશો છે. જો શૂન્યેતર સદિશ $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ એ X-અક્ષ, Y-અક્ષ અને Z-અક્ષની ધન દિશા સાથે અનુક્રમે α, β અને γ માપના ખૂણાઓ બનાવે, તો α, β અને γ ને સદિશ $\bar{x}$ ના દિક્ખૂણાઓનાં માપ (Direction Angles) કહે છે. $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ને $\bar{x}$ ની દિક્કોસાઈન (Direction Cosines) કહે છે.

α એ $\bar{x}$ અને $\hat{i}$, વચ્ચેના ખૂણાનું માપ છે. તેથી

$$\cos\alpha = \frac{\bar{x}\cdot\hat{i}}{|\bar{x}||\hat{i}|} = \frac{(x_1, x_2, x_3)\cdot(1,0,0)}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\cdot 1} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}$$

તે જ પ્રમાણે, $\cos\beta = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}$ અને $\cos\gamma = \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}$.

જો આપણે $l = \cos\alpha$, $m = \cos\beta$, $n = \cos\gamma$ લઈએ તો,

$$(l, m, n) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}, \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}\right)$$

$$= \left(\frac{x_1}{|\bar{x}|}, \frac{x_2}{|\bar{x}|}, \frac{x_3}{|\bar{x}|}\right)$$

$$\therefore (l, m, n) = \frac{1}{|\bar{x}|}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\bar{x}}{|\bar{x}|} = \hat{x}$$

હવે, $l^2 + m^2 + n^2 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2} = 1$

વળી $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \frac{\bar{x}}{|\bar{x}|} = \hat{x}$

$\therefore$ $\frac{\bar{x}}{|\bar{x}|} = k\bar{x}$ જ્યાં $k = \frac{1}{|\bar{x}|} > 0$ હોવાથી, $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ એ $\bar{x}$ ની દિશાનો એકમ સદિશ છે.

જો $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\bar{x} \neq \bar{0}$ અને $m \neq 0$ તો $m\bar{x} = (mx_1, mx_2, mx_3)$ થશે. $m\bar{x}$ના ઘટકો mx_1, mx_2 અને mx_3ને સદિશ $\bar{x}$ના દિક્‌ગુણોત્તર (દિક્‌સંખ્યાઓ) કહે છે. mના સ્થાને mk $(m \neq 0, k \neq 0)$ મૂકતાં સદિશ $k\bar{x}$ ના દિક્‌ગુણોત્તર $m(kx_1)$, $m(kx_2)$, $m(kx_3)$ થશે. $m > 0$, માટે $\bar{x}$ અને $m\bar{x}$ ની દિક્‌કોસાઈન સમાન થશે, જ્યારે $m < 0$ માટે $\bar{x}$ અને $m\bar{x}$ ની દિક્‌કોસાઈન એકબીજાની વિરોધી સંખ્યા થશે.

$\bar{x}$ ના દિક્‌ખૂણાના માપ $\alpha = \cos^{-1}\frac{x_1}{|\bar{x}|}$, $\beta = \cos^{-1}\frac{x_2}{|\bar{x}|}$ અને $\gamma = \cos^{-1}\frac{x_3}{|\bar{x}|}$ થશે.

> $\frac{m\bar{x}}{|m\bar{x}|} = \frac{m\bar{x}}{|m||\bar{x}|} = \frac{m\bar{x}}{m|\bar{x}|} = \frac{\bar{x}}{|\bar{x}|}$, $m > 0$
>
> $\therefore$ જો $m > 0$ તો $\bar{x}$ અને $m\bar{x}$ ની દિક્‌કોસાઈન સમાન છે.
>
> તે જ રીતે જો $m < 0$ તો $|m| = -m$. $\bar{x}$ અને $m\bar{x}$ ની દિક્‌કોસાઈન એક બીજાની વિરોધી સંખ્યા છે.

ઉદાહરણ 21 : $\sqrt{2}\,\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ની દિક્‌કોસાઈન અને દિક્‌ખૂણાઓ શોધો.

ઉકેલ : $\bar{x} = (\sqrt{2}, -1, 1)$ લેતાં, $|\bar{x}| = \sqrt{2+1+1} = 2$

જો α, β અને γ એ $\bar{x}$ ના દિક્‌ખૂણાઓ હોય, તો $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\beta = -\frac{1}{2}$, $\cos\gamma = \frac{1}{2}$

$\therefore$ $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \pi - \cos^{-1}\frac{1}{2} = \frac{2\pi}{3}$ અને $\gamma = \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ દિક્‌કોસાઈન $\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ અને દિક્‌ખૂણાઓ $\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}$ અને $\frac{\pi}{3}$ છે.

ઉદાહરણ 22 : સદિશ $\bar{x}$ એ X-અક્ષ અને Y-અક્ષ સાથે અનુક્રમે $\frac{\pi}{3}$ અને $\frac{2\pi}{3}$ માપના ખૂણા બનાવે તો તે Z-અક્ષ સાથે કેટલા માપનો ખૂણો બનાવશે ?

ઉકેલ : જો સદિશ $\bar{x}$ એ X-અક્ષ, Y-અક્ષ અને Z-અક્ષ સાથે અનુક્રમે α, β અને γ માપના ખૂણા બનાવે, તો $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. અહીં, $\alpha = \frac{\pi}{3}$ અને $\beta = \frac{2\pi}{3}$

$\therefore \quad cos^2\frac{\pi}{3} + cos^2\frac{2\pi}{3} + cos^2\gamma = 1$

$\therefore \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + cos^2\gamma = 1$

$\therefore \quad cos^2\gamma = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad cos\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \quad \gamma = \frac{\pi}{4}$ અથવા $\frac{3\pi}{4}$

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 23 : જો $|\overline{x}| = 2$, $|\overline{y}| = 4$, $|\overline{z}| = 1$ અને $\overline{x} + \overline{y} + \overline{z} = \overline{0}$ તો $\overline{x}\cdot\overline{y} + \overline{y}\cdot\overline{z} + \overline{z}\cdot\overline{x}$ શોધો.

ઉકેલ : $|\overline{x} + \overline{y} + \overline{z}|^2 = |\overline{x}|^2 + |\overline{y}|^2 + |\overline{z}|^2 + 2\overline{x}\cdot\overline{y} + 2\overline{y}\cdot\overline{z} + 2\overline{z}\cdot\overline{x}$.

$\therefore \quad 0 = 4 + 16 + 1 + 2(\overline{x}\cdot\overline{y} + \overline{y}\cdot\overline{z} + \overline{z}\cdot\overline{x})$

$\therefore \quad \overline{x}\cdot\overline{y} + \overline{y}\cdot\overline{z} + \overline{z}\cdot\overline{x} = -\frac{21}{2}$.

ઉદાહરણ 24 : A(1, 1, 1), B(0, 2, 5), C(–3, 3, 2) અને D(–1, 1, –6) R^3 નાં બિંદુઓ છે. $\overrightarrow{AB}$ અને $\overrightarrow{CD}$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો. $\overrightarrow{AB}$ અને $\overrightarrow{CD}$ વિશે શું નિર્ણય કરશો ?

ઉકેલ : $\overrightarrow{AB} = (0, 2, 5) - (1, 1, 1) = (-1, 1, 4)$ અને $\overrightarrow{CD} = (-1, 1, -6) - (-3, 3, 2) = (2, -2, -8)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+1+16} = 3\sqrt{2}$ અને $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{4+4+64} = 6\sqrt{2}$

$$cos(\overrightarrow{AB}, \wedge \overrightarrow{CD}) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{CD}|} = \frac{-2-2-32}{3\sqrt{2}\times 6\sqrt{2}} = \frac{-36}{36} = -1$$

$\therefore \quad (\overrightarrow{AB}, \wedge \overrightarrow{CD}) = \pi$

$\overrightarrow{AB}$ અને $\overrightarrow{CD}$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ π હોવાથી $\overrightarrow{AB}$ અને $\overrightarrow{CD}$ એકબીજાની વિરૂદ્ધ દિશાના સદિશો છે.

વળી, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} = \overline{0}$ હોવાથી $\overrightarrow{AB}$ અને $\overrightarrow{CD}$ સમરેખ છે.

નોંધ : $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$. હોવાથી $\overrightarrow{AB}$ અને $\overrightarrow{CD}$ સમરેખ છે.

ઉદાહરણ 25 : સદિશ $\overline{a}$ એ $\overline{y} = 2\hat{i} - \hat{k}$ ને સમાંતર હોય અને $\overline{b}$ એ $\overline{y}$ ને લંબ હોય તેવા બે સદિશો $\overline{a}$ અને $\overline{b}$ ના સરવાળા સ્વરૂપે $\overline{x} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ ને દર્શાવો.

ઉકેલ : $\overline{a}$ એ $\overline{y}$ ને સમાંતર છે.

તેથી, $\overline{a} = m\overline{y}$, $m \in R - \{0\}$

$\therefore \quad \overline{a} = 2m\hat{i} - m\hat{k} = (2m, 0, -m)$

હવે, $\overline{x} = \overline{a} + \overline{b}$

$\therefore \quad \overline{b} = \overline{x} - \overline{a} = (3, -1, 2) - (2m, 0, -m) = (3 - 2m, -1, 2 + m)$

વળી, $\overline{b} \perp \overline{y}$

$\therefore \quad \overline{b}\cdot\overline{y} = 0$

$\therefore \quad (3 - 2m, -1, 2 + m) \cdot (2, 0, -1) = 0$

$\therefore \quad 6 - 4m - 2 - m = 0$

$\therefore \quad m = \frac{4}{5}$

$\therefore \quad \bar{a} = \frac{8}{5}\hat{i} - \frac{4}{5}\hat{k}$ અને $\bar{b} = \left(3 - 2\left(\frac{4}{5}\right)\right)\hat{i} - \hat{j} + \left(2 + \frac{4}{5}\right)\hat{k} = \frac{7}{5}\hat{i} - \hat{j} + \frac{14}{5}\hat{k}$

આ $\bar{a}$ અને $\bar{b}$ માટે $\bar{x} = \bar{a} + \bar{b}$ થાય.

ઉદાહરણ 26 : સાબિત કરો : $\bar{a} \times [\bar{a} \times (\bar{a} \times \bar{b})] = |\bar{a}|^2(\bar{b} \times \bar{a})$

ઉકેલ : $\bar{a} \times [\bar{a} \times (\bar{a} \times \bar{b})] = [\bar{a} \cdot (\bar{a} \times \bar{b})]\bar{a} - (\bar{a} \cdot \bar{a})(\bar{a} \times \bar{b})$

$= [\bar{a}\ \bar{a}\ \bar{b}]\bar{a} - |\bar{a}|^2(-(\bar{b} \times \bar{a}))$

$= \bar{0} + |\bar{a}|^2(\bar{b} \times \bar{a})$

$= |\bar{a}|^2(\bar{b} \times \bar{a})$

ઉદાહરણ 27 : જો શૂન્યેતર સદિશો $\bar{a}$, $\bar{b}$ અને $\bar{c}$ માટે $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{c}$ અને $\bar{b} \times \bar{c} = \bar{a}$ તો સાબિત કરો કે $|\bar{b}| = 1$.

ઉકેલ : $\bar{b} \times \bar{c} = \bar{a}$

$\therefore \quad (\bar{b} \times \bar{c}) \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$

$\therefore \quad [\bar{b}\ \bar{c}\ \bar{b}] = \bar{a} \cdot \bar{b}$

$\therefore \quad \bar{a} \cdot \bar{b} = 0$ **(i)**

હવે, $\bar{b} \times \bar{c} = \bar{a}$

$\therefore \quad \bar{b} \times (\bar{a} \times \bar{b}) = \bar{a}$ $(\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b})$

$\therefore \quad (\bar{b} \cdot \bar{b})\bar{a} - (\bar{b} \cdot \bar{a})\bar{b} = \bar{a}$ **((i) પરથી)**

$\therefore \quad |\bar{b}|^2\bar{a} = \bar{a}$

$\therefore \quad (|\bar{b}|^2 - 1)\bar{a} = \bar{0}$

$\therefore \quad \bar{a} \neq \bar{0}$ હોવાથી $|\bar{b}|^2 = 1$ $(\alpha\bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \alpha = 0$ અથવા $\bar{x} = \bar{0})$

$\therefore \quad |\bar{b}| = 1$

ઉદાહરણ 28 : જો A(1, 1, 2), B(2, 3, 5), C(1, 3, 4) અને D(0, 1, 1) એ સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણ ABCD નાં શિરોબિંદુઓ હોય, તો તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : રીત 1 : $\square^m$ABCD ની પાસપાસેની બાજુઓ

$\overrightarrow{AB} = (2, 3, 5) - (1, 1, 2) = (1, 2, 3)$ અને

$\overrightarrow{BC} = (1, 3, 4) - (2, 3, 5) = (-1, 0, -1)$

$\square^m$ABCD નું ક્ષેત્રફળ $= |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}| = |(-2 - 0, -(-1 + 3), 0 + 2)|$

$= |(-2, -2, 2)|$

$= \sqrt{4 + 4 + 4}$

$= 2\sqrt{3}$

રીત 2 : સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD ના વિકર્ણો $\overline{AC}$ અને $\overline{BD}$ દર્શાવતા સદિશો,

$\overrightarrow{AC} = (0, 2, 2)$ અને $\overrightarrow{BD} = (-2, -2, -4)$ છે.

$\therefore \quad \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD} = (-8 + 4, -(0 + 4), 0 + 4)$

$= (-4, -4, 4)$

$\therefore$ ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} \mid \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD} \mid$

$= \frac{1}{2} \mid (-4, -4, 4) \mid$

$= \frac{1}{2} \sqrt{16+16+16}$

$= 2\sqrt{3}$

ઉદાહરણ 29 : જો α, β, γ એ સદિશ $\overline{x}$ ના દિક્‌ખૂણાઓ હોય, તો સાબિત કરો કે $sin^2\alpha + sin^2\beta + sin^2\gamma = 2$ તથા $cos2\alpha + cos2\beta + cos2\gamma$ નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : α, β, γ એ $\overline{x}$ ના દિક્‌ખૂણાઓ છે.

$\therefore \quad cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$

$\therefore \quad 1 - sin^2\alpha + 1 - sin^2\beta + 1 - sin^2\gamma = 1$

$\therefore \quad sin^2\alpha + sin^2\beta + sin^2\gamma = 2$

વળી, $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$

$\therefore \quad \frac{1+cos\,2\alpha}{2} + \frac{1+cos\,2\beta}{2} + \frac{1+cos\,2\gamma}{2} = 1$

$\therefore \quad 3 + cos2\alpha + cos2\beta + cos2\gamma = 2$

$\therefore \quad cos2\alpha + cos2\beta + cos2\gamma = -1.$

ઉદાહરણ 30 : XY-સમતલમાં સદિશ $4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ને લંબ હોય તેવો એકમ સદિશ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે XY-સમતલનો એકમ સદિશ $(a, b, 0)$ છે તથા તે $(4, -3, 2)$ ને લંબ છે.

$\therefore \quad (a, b, 0) \cdot (4, -3, 2) = 0$

$\therefore \quad 4a - 3b = 0$

$\therefore \quad a = \frac{3b}{4}$

હવે, $(a, b, 0)$ એકમ સદિશ છે.

$\therefore \quad a^2 + b^2 = 1$

$\therefore \quad \frac{9b^2}{16} + b^2 = 1$

$\therefore \quad 25b^2 = 16$

$\therefore \quad b = \pm\frac{4}{5}, a = \pm\frac{3}{5}$

$\therefore$ માંગેલ સદિશ $\pm\frac{1}{5}(3, 4, 0)$ છે.

ઉદાહરણ 31 : $\overline{a}$ એ એકમ સદિશ છે તથા $\overline{b} = (3, 0, -4)$ છે. $\overline{a}$ અને $\overline{b}$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\frac{\pi}{6}$ છે. જો કોઈ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો $(3\overline{a} + \overline{b})$ અને $(\overline{a} + 3\overline{b})$ હોય, તો તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} \mid (3\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{a} + 3\bar{b}) \mid$

$$= \frac{1}{2} \mid 3(\bar{a} \times \bar{a}) + \bar{b} \times \bar{a} + 9(\bar{a} \times \bar{b}) + 3(\bar{b} \times \bar{b}) \mid$$

$$= \frac{1}{2} \mid -(\bar{a} \times \bar{b}) + 9(\bar{a} \times \bar{b}) \mid = 4 \mid \bar{a} \times \bar{b} \mid$$

હવે, $\mid \bar{a} \times \bar{b} \mid = \mid \bar{a} \mid \mid \bar{b} \mid \sin(\bar{a} \wedge \bar{b})$

$$= (1)\left(\sqrt{9+16}\right)\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= (5)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{5}{2}$$

$\therefore$ ક્ષેત્રફળ $= 4 \times \frac{5}{2} = 10$

સ્વાધ્યાય 6

1. જો $\bar{x} = (-1, 2, 3)$, $\bar{y} = (2, -1, 3)$ અને $\bar{z} = (3, 2, 1)$ હોય, તો બતાવો કે $\bar{x} \times (\bar{y} \times \bar{z}) \neq (\bar{x} \times \bar{y}) \times \bar{z}$.
2. સાબિત કરો કે $[\bar{x} + \bar{y} \quad \bar{y} + \bar{z} \quad \bar{z} + \bar{x}] = 2[\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{z}]$.
3. જો $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{x} \cdot \bar{z}$ હોય તો $\bar{y} = \bar{z}$ કહેવાય ? શા માટે ?
4. જો $\bar{x} \times \bar{y} = \bar{x} \times \bar{z}$ હોય તો $\bar{y} = \bar{z}$ કહેવાય ? શા માટે ?
5. જો $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{x} \cdot \bar{z}$ અને $\bar{x} \times \bar{y} = \bar{x} \times \bar{z}$ અને $\bar{x} \neq \bar{0}$ હોય તો સાબિત કરો કે $\bar{y} = \bar{z}$.
6. જો $a(1, 3, 2) + b(1, -5, 6) + c(2, 1, -2) = (4, 10, -8)$ તો a, b, c શોધો.
7. જો $m\bar{a} = n\bar{b}$, $m, n \in N$ તો સાબિત કરો કે $\bar{a} \cdot \bar{b} = \mid \bar{a} \mid \mid \bar{b} \mid$. જો $m, n \in Z - \{0\}$ હોય તો શું કહી શકાય ?
8. સાબિત કરો કે, $\bar{x} \times (\bar{y} \times \bar{z}) + \bar{y} \times (\bar{z} \times \bar{x}) + \bar{z} \times (\bar{x} \times \bar{y}) = \bar{0}$.
9. નીચેનાં સદિશોના દિક્‌ખૂણાઓ અને દિક્‌કોસાઈન શોધો :

   (1) $(1, 0, -1)$ (2) $\hat{j} + \hat{k}$ (3) $5\hat{i} + 12\hat{j} + 84\hat{k}$.
10. જો $(\bar{x} \wedge \bar{y}) = \alpha$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \mid \bar{x} - \bar{y} \mid$, જ્યાં $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ એકમ સદિશો છે.
11. R^2 માં $(5, -12)$ સદિશને લંબ એકમ સદિશ મેળવો.
12. જો $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ અસમતલીય હોય, તો સાબિત કરો કે $\bar{x} + \bar{y}$, $\bar{y} + \bar{z}$ અને $\bar{z} + \bar{x}$ અસમતલીય છે.
13. સાબિત કરો કે, $(\bar{a} - \text{Proj}_{\bar{b}}\bar{a})$ એ $\bar{b}$ ને લંબ છે.
14. સાબિત કરો કે, $(1, 2, 3)$ અને $(2, 1, 3)$ અસમરેખ છે.
15. સાબિત કરો કે, $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 5)$ અને $(5, 8, 13)$ સમતલીય છે.
16. સદિશો $(a, 2)$ અને $(a, -2)$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\frac{\pi}{3}$ હોય, તો a શોધો.
17. સાબિત કરો કે સદિશ $a\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ એ $-a\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ને લંબ નથી.
18. જો $\mid \bar{a} \mid = 4$, $\mid \bar{b} \mid = 5$ અને $(\bar{a} \cdot \bar{b}) = -6$ હોય, તો $\mid \bar{a} \times \bar{b} \mid$ શોધો.
19. જો $(a, 1, 1)$, $(1, b, 1)$ અને $(1, 1, c)$ સમતલીય હોય, તો સાબિત કરો કે $\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} = 1$.

20. $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{a} \times \overline{c}$, તથા $\overline{a} \neq \overline{0}$, $\overline{b} \neq \overline{c}$. સાબિત કરો કે $\overline{b} = \overline{c} + k\overline{a}$, $k \in R$

21. $\overline{a}$ એ $\overline{b}$ અને $\overline{c}$ ને લંબ સદિશ છે. $\overline{a}$, $\overline{b}$ અને $\overline{c}$ એકમ સદિશો છે. જો $(\overline{b}, \widehat{\ } \overline{c}) = \frac{\pi}{6}$, તો સાબિત કરો કે $\overline{a} = \pm 2(\overline{b} \times \overline{c})$.

22. સાબિત કરો $[(\overline{a} \times \overline{b}) \times (\overline{a} \times \overline{c})] \cdot \overline{d} = (\overline{a} \cdot \overline{d})[\overline{a} \ \ \overline{b} \ \ \overline{c}]$.

23. સદિશનો ઉપયોગ કરી $sin(\alpha + \beta) = sin\alpha \ cos\beta + cos\alpha \ sin\beta$ સાબિત કરો.

24. (4, –3, 1), (2, –4, 5) અને (1, –1, 0) શિરોબિંદુવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ મેળવો.

25. $4\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ નો $\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ પરનો પ્રક્ષેપ તથા તેનું માન મેળવો.

26. (a, b, c) નો Y-અક્ષ પરનો પ્રક્ષેપ અને તેનું માન શોધો.

27. જો A(3, 2, –4), B(4, 3, –4), C(3, 3, 3) અને D(4, 2, –3) હોય, તો $\overrightarrow{AD}$ નો $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ પરનો પ્રક્ષેપ શોધો.

28. ΔABC માટે, સદિશના ઉપયોગથી $\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC}$ સાબિત કરો.

29. સદિશના ઉપયોગથી ત્રિકોણ માટેનું *cosine* સૂત્ર મેળવો.

30. $2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ ને એવા બે સદિશના સરવાળા સ્વરૂપે દર્શાવો કે જેથી બે સદિશ પૈકીનો એક સદિશ એ $2\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$ ને લંબ હોય અને બીજો સદિશ એ $2\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$ ને સમાંતર હોય.

31. R^3 માં એવો એકમ સદિશ શોધો, જે $\hat{i}$ સાથે $\frac{\pi}{4}$ માપનો ખૂણો બનાવે અને $\hat{k}$ ને લંબ હોય.

32. જો બે એકમ સદિશોના સરવાળાનો સદિશ પણ એકમ સદિશ હોય, તો બતાવો કે તેમના તફાવત સદિશનું માન $\sqrt{3}$ છે.

33. $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{c}$ અને $\overline{a} \cdot \overline{b} = 3$ થાય તેવો સદિશ $\overline{b}$ શોધો, જ્યાં $\overline{a} = (1, 1, 1)$ અને $\overline{c} = (0, 1, -1)$.

34. જેની ધારો $\overrightarrow{OA} = (3, 1, 4)$, $\overrightarrow{OB} = (1, 2, 3)$ અને $\overrightarrow{OC} = (2, 1, 5)$ હોય, તેવા સમાંતરફલકનું ઘનફળ શોધો.

35. સાબિત કરો કે જો $\overline{x} \times \overline{y} = \overline{0}$ તો $\overline{x} = k\overline{y}$, $k \in R - \{0\}$, $\overline{x} \neq \overline{0}$, $\overline{y} \neq \overline{0}$

36. **નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) (d)માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :**

(1) $\overline{x} = (-2, 1, -2)$ ની દિશામાં એકમ સદિશ ...... છે. ☐

(a) $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ (b) $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ (c) $\left(-\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, -\frac{2}{9}\right)$ (d) $\left(\frac{2}{9}, -\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$

(2) ...... એકમ સદિશ નથી. $(\alpha \neq \frac{n\pi}{2}; n \in Z)$ ☐

(a) $(cos\alpha, sin\alpha)$ (b) $(-cos\alpha, -sin\alpha)$ (c) $(-cos2\alpha, sin2\alpha)$ (d) $(cos2\alpha, sin\alpha)$

(3) $\overline{x} \times \overline{y} = (7, 2, -3)$, તો $\overline{y} \times \overline{x} =$ ...... ☐

(a) (7, 2, –3) (b) (–3, 2, 7) (c) (–7, –2, 3) (d) (3, –2, –7)

(4) $|\overline{x}| = |\overline{y}| = 1$, $\overline{x} \perp \overline{y}$, તો $|\overline{x} + \overline{y}| =$ ...... ☐

(a) $\sqrt{3}$ (b) $\sqrt{2}$ (c) 1 (d) 0

(5) જો $\overline{x} = 3\overline{y}$, તો $\overline{x} \times \overline{y} =$ ...... ☐

(a) $3|\overline{y}|^2$ (b) $3|\overline{x}|^2$ (c) $\overline{0}$ (d) $\frac{1}{3}|\overline{y}|^2$

(6) $\overline{x} = (2, 3)$, $\overline{y} = (5, -2)$ એ ...... સદિશો છે.

(a) સમરેખ (b) અસમરેખ (c) સમદિશ (d) વિરુદ્ધદિશાના

(7) જો $\overline{x} = (a, 4, 2a)$ અને $\overline{y} = (2a, -1, a)$ પરસ્પર લંબ હોય, તો $a =$ ....

(a) 2 (b) 1 (c) 4 (d) કોઈપણ વાસ્તવિક સંખ્યા

(8) $(a, 1, -2)$, $(1, 1, 3)$, $(8, 5, 0)$ સમતલીય હોય તો $a =$ ....

(a) -5 (b) 5 (c) -2 (d) 2

(9) જો $\overline{x} = (3, 1, 0)$, $\overline{y} = (2, 2, 3)$, $\overline{z} = (-1, 2, 1)$ માટે $\overline{x} \perp (\overline{y} + k\overline{z})$ તો $k =$ ......

(a) 8 (b) 4 (c) $\frac{1}{8}$ (d) $\frac{1}{4}$

(10) જો $\overline{x} = (1, 2, 4)$, $\overline{y} = (-1, -2, k)$, $k \neq -4$ તો $|\overline{x} \cdot \overline{y}|$ ...... $|\overline{x}||\overline{y}|$.

(a) $<$ (b) $>$ (c) $=$ (d) $\geq$

(11) $\overline{x} = (-1, 4, -2)$, $\overline{y} = (-4, 16, -8)$ તો $|\overline{x} + \overline{y}|$ ...... $|\overline{x}| + |\overline{y}|$.

(a) $=$ (b) $>$ (c) $\geq$ (d) $\leq$

(12) $(3, 6, -9)$ અને ...... ના દિક્‌ગુણોત્તર સમાન છે.

(a) $(1, 2, 3)$ (b) $(\pi, 2\pi, 3\pi)$ (c) $(-1, -2, 3)$ (d) $(1, 2, 0)$

(13) જો $\overline{a} = (-3, 1, 0)$ અને $\overline{b} = (1, -1, -1)$ તો $\text{Comp}_{\overline{a}}\overline{b} =$ ....

(a) $\frac{4}{\sqrt{10}}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (c) $\frac{-4}{\sqrt{10}}$ (d) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

(14) $\hat{j} + \hat{k}$ અને $\hat{i} + \hat{k}$ વિકર્ણ સદિશવાળા સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ ...... થાય.

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{3}{2}$ (c) 3 (d) $\sqrt{3}$

(15) $(-1, 2, -1)$ ના $\hat{i}$ પરના પ્રક્ષેપનું માન ...... થાય.

(a) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ (b) $-\frac{1}{\sqrt{6}}$ (c) 1 (d) -1

(16) જો $\overline{a}$ શૂન્યેતર સદિશ હોય, તો $\overline{a}$ સાથે સમરેખ થાય તેવા એકમ સદિશોની સંખ્યા .... છે.

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) અનંત

(17) જેની ક્રમિક બાજુઓ $\hat{i} + \hat{k}$ અને $\hat{i} + \hat{j}$ હોય તેવા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ .... છે.

(a) 3 (b) $\sqrt{3}$ (c) $\frac{3}{2}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(18) જો $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ શૂન્યેતર, અસમરેખ સદિશો હોય, તો $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ બંનેને લંબ એકમ ...... સદિશ મળે.

(a) 2 (b) 4 (c) ન મળે (d) અનંત

(19) જો $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ θ હોય તથા $\overline{x} \cdot \overline{y} \geq 0$ તો ......

(a) $0 \leq \theta \leq \pi$ (b) $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ (c) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (d) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

(20) સદિશો (1, 1, 1), (2, −1, −1) અને (0, 2, 6) ના સરવાળા સદિશની દિશામાં એકમ સદિશ ...... છે.

(a) $-\frac{1}{7}(3, 2, 6)$ (b) $\frac{1}{49}(3, 2, 6)$ (c) $\frac{1}{7}(3, -2, 6)$ (d) $\frac{1}{7}(3, 2, 6)$

(21) ...... અર્થ વિહીન છે.

(a) $\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$ (b) $(\bar{a} \cdot \bar{b})\ \bar{c}$ (c) $\bar{a} \times (\bar{b} \cdot \bar{c})$ (d) $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$

(22) જો $\bar{x} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\bar{y} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ અને $\bar{z} = \hat{i} + a\hat{j} + b\hat{k}$ સમતલીય હોય તથા $|\bar{z}| = \sqrt{3}$, તો ......

(a) $a = 1, b = -1$ (b) $a = 1, b = \pm 1$ (c) $a = -1, b = \pm 1$ (d) $a = \pm 1, b = 1$

(23) A(3, −1), B(2, 3) અને C(5, 1) હોય, તો $m\angle A$ = ...

(a) $cos^{-1}\frac{3}{\sqrt{34}}$ (b) $\pi - cos^{-1}\frac{3}{\sqrt{34}}$ (c) $sin^{-1}\frac{5}{\sqrt{34}}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

(24) જો $|\bar{x} \cdot \bar{y}| = cos\alpha$, તો $|\bar{x} \times \bar{y}|$ = ...

(a) $\pm\, sin\alpha$ (b) $sin\alpha$ (c) $-sin\alpha$ (d) $sin^2\alpha$

(25) જો $\bar{x} \cdot \bar{y} = 0$ તો $\bar{x} \times (\bar{x} \times \bar{y})$ = ... જ્યાં $|\bar{x}| = 1$.

(a) $\bar{x} \times \bar{y}$ (b) $\bar{x}$ (c) $-\bar{y}$ (d) $\bar{y} \times \bar{x}$

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. $R^2 = \{(x, y) \mid x \in R, y \in R\}$ અને $R^3 = \{(x, y, z) \mid x \in R, y \in R, z \in R\}$ એ R પરના સદિશ અવકાશ છે.
2. સદિશ અવકાશના ગુણધર્મ
3. જો $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$, તો $\bar{x}$ નું માન $|\bar{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

   $\hat{i} = (1, 0, 0)$, $\hat{j} = (0, 1, 0)$ અને $\hat{k} = (0, 0, 1)$ એ અનુક્રમે X-અક્ષ, Y-અક્ષ અને Z-અક્ષની ધન દિશાના એકમ સદિશો છે. જો $\bar{x} = (x_1, x_2)$ તો $|\bar{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. R^2 માં $\hat{i} = (1, 0)$ તથા $\hat{j} = (0, 1)$
4. **સદિશની દિશા :** $\bar{x} \neq \bar{0}$, $\bar{y} \neq \bar{0}$

   જો (i) $\bar{x} = k\bar{y}$, $k > 0$, તો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ ની દિશા સમાન.

   (ii) $\bar{x} = k\bar{y}$, $k < 0$ તો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ ની દિશા પરસ્પર વિરુદ્ધ.

   (iii) કોઈપણ $k \in R$ માટે $\bar{x} \neq k\bar{y}$ તો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ ભિન્ન દિશાના સદિશ છે.
5. જો શૂન્યેતર સદિશો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ સમાન હોય તો અને તો જ $|\bar{x}| = |\bar{y}|$ અને $\bar{x}$ તથા $\bar{y}$ ની દિશા સમાન છે.

6. જો $\overline{x} \neq \overline{0}$, તો $\frac{1}{|\overline{x}|}\overline{x}$ એ $\overline{x}$ ની દિશામાં એકમ સદિશ છે. તેને $\hat{x}$ વડે દર્શાવાય છે.

7. જો $A(x_1, x_2, x_3)$ અને $B(y_1, y_2, y_3)$ R^3નાં બે ભિન્ન બિંદુઓ હોય, તો

$\overrightarrow{AB} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3)$

8. જો $P(x_1, x_2, x_3) \in R^3$, તો

(i) બિંદુ P નું XY-સમતલથી અંતર $= |x_3|$, YZ-સમતલથી અંતર $= |x_1|$ અને ZX-સમતલથી અંતર $= |x_2|$.

(ii) P નું X-અક્ષથી અંતર $= \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$.

(iii) P નું ઊગમબિંદુથી અંતર $= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

9. **સદિશના સરવાળાનો ત્રિકોણનો નિયમ :** A, B અને C એ અસમરેખ બિંદુ હોય, તો $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

10. **અંતઃગુણન :** જો $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ અને $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3)$ તો $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ નું અંતઃગુણન

$\overline{x} \cdot \overline{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. $\overline{x} = (x_1, x_2)$, $\overline{y} = (y_1, y_2)$, તો $\overline{x} \cdot \overline{y} = x_1y_1 + x_2y_2$.

અંતઃગુણનના ગુણધર્મો.

11. **બહિર્ગુણન :** જો $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ અને $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3)$ તો $\overline{x}$ અને $\overline{y}$નું બહિર્ગુણન

$$\overline{x} \times \overline{y} = \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

બહિર્ગુણનના ગુણધર્મો.

12. **પેટીગુણન :** જો $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3)$ અને $\overline{z} = (z_1, z_2, z_3)$ હોય તો $\overline{x}$, $\overline{y}$ અને $\overline{z}$નું પેટીગુણન

$$\overline{x} \cdot (\overline{y} \times \overline{z}) = [\overline{x} \quad \overline{y} \quad \overline{z}] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

પેટીગુણનના ગુણધર્મો.

13. **સદિશનું ત્રિગુણન :** જો $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in R^3$ તો $\overline{x}$, $\overline{y}$ અને $\overline{z}$નું ત્રિગુણન $\overline{x} \times (\overline{y} \times \overline{z}) = (\overline{x} \cdot \overline{z})\overline{y} - (\overline{x} \cdot \overline{y})\overline{z}$.

14. **લાગ્રાન્જનું નિત્યસમ :** $(\overline{x} \cdot \overline{y})^2 + |\overline{x} \times \overline{y}|^2 = |\overline{x}|^2 |\overline{y}|^2$

15. **કોશી-સ્વાર્ત્ઝની અસમતા** $|\overline{x} \cdot \overline{y}| \leq |\overline{x}| |\overline{y}|$

16. **ત્રિકોણીય અસમતા :** $|\overline{x} + \overline{y}| \leq |\overline{x}| + |\overline{y}|$.

17. **બે શૂન્યેતર સદિશ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ :** $(\overline{x}, \widehat{\ } \overline{y}) = cos^{-1} \frac{\overline{x} \cdot \overline{y}}{|\overline{x}||\overline{y}|}$

18. $\overline{x} \cdot \overline{y} = 0 \Leftrightarrow \overline{x} \perp \overline{y}$

19. **સદિશનો પ્રક્ષેપ :** જો $\overline{a}$ અને $\overline{b}$ શૂન્યેતર સદિશો હોય તથા તેઓ પરસ્પર લંબ ન હોય, તો $\overline{a}$ નો $\overline{b}$ પરનો

પ્રક્ષેપ સદિશ $Proj_{\overline{b}}\overline{a} = \left(\frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{b}|^2} \right) \overline{b}$.

$\overline{a}$ ના $\overline{b}$ પરના પ્રક્ષેપનો ઘટક $Comp_{\overline{b}}\overline{a} = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{b}|}$.

$Proj_{\overline{b}}\overline{a}$નું માન $= \frac{|\overline{a} \cdot \overline{b}|}{|\overline{b}|}$.

20. ΔABC નું ક્ષેત્રફળ : જો $\overline{a} = \overrightarrow{BC}$, $\overline{b} = \overrightarrow{CA}$, અને $\overline{c} = \overrightarrow{AB}$ તો,

$$\Delta ABC \text{ નું ક્ષેત્રફળ } = \frac{1}{2}|\overline{b} \times \overline{c}|$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{|\overline{b}|^2|\overline{c}|^2 - |\overline{b}\cdot\overline{c}|^2}$$

21. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ : $\square^m$ ABCD નું ક્ષેત્રફળ $= |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}|$

$$= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD}|$$

22. સમાંતર ફલકનું ઘનફળ : જો $\overline{a}$, $\overline{b}$ અને $\overline{c}$ એ સમાંતરફલકની ધારો હોય,
તો સમાંતરફલકનું ઘનફળ $= |[\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}]|$.

23. સમરેખ સદિશો : R^2 ના શૂન્યેતર સદિશ $\overline{x} = (x_1, x_2)$ તથા $\overline{y} = (y_1, y_2)$ સમરેખ હોવાની આવશ્યક તથા પર્યાપ્ત શરત છે, $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$.

R^3 ના સદિશો $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ સમરેખ હોય તો અને તો જ $\overline{x} \times \overline{y} = \overline{0}$.

24. સમતલીય સદિશો : જો α, β, γ પૈકી ઓછામાં ઓછો એક શૂન્યેતર હોય અને $\alpha\overline{x} + \beta\overline{y} + \gamma\overline{z} = \overline{0}$ તો $\overline{x}$, $\overline{y}$ અને $\overline{z}$ ને સમતલીય સદિશો કહે છે.

જે સદિશો સમતલીય ન હોય તો તે અસમતલીય છે.

25. R^3 ના ભિન્ન શૂન્યેતર સદિશો $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ સમતલીય હોવા માટેની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત $[\overline{x}\ \ \overline{y}\ \ \overline{z}] = 0$.

26. સદિશની દિક્‌કોસાઈન, દિક્‌ખૂણાઓ અને દિક્‌ગુણોત્તર : જો $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ એ R^3 નું શૂન્યેતર સદિશ હોય અને $\overline{x}$ એ X-અક્ષ, Y-અક્ષ અને Z-અક્ષની ધન દિશા સાથે અનુક્રમે α, β અને γ માપના ખૂણા બનાવે તો α, β અને γ એ $\overline{x}$ ના દિક્‌ખૂણાઓ છે. $cos\alpha$, $cos\beta$, $cos\gamma$ એ $\overline{x}$ની દિક્‌કોસાઈન છે.

અહીં $cos\alpha = \dfrac{\overline{x}\cdot\hat{i}}{|\overline{x}||\hat{i}|} = \dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$, $cos\beta = \dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$ અને $cos\gamma = \dfrac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$.

$m \neq 0$ માટે mx_1, mx_2, mx_3 ને $\overline{x}$ ના દિક્‌ગુણોત્તર કહે છે.

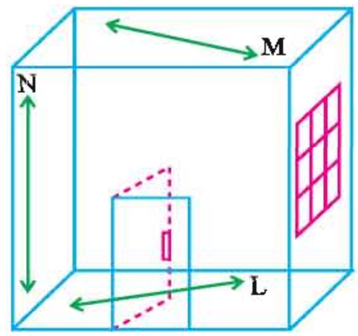
ત્રિપરિમાણીય ભૂમિતિ 7

> **To divide a cube into two other cubes, a fourth power or in general any power whatever into two powers of the same denomination above the second is impossible, and I have assuredly found an admirable proof of this, but the margin is too narrow to contain it.**
>
> **– Pierre de Fermat**

7.1 પ્રાસ્તાવિક

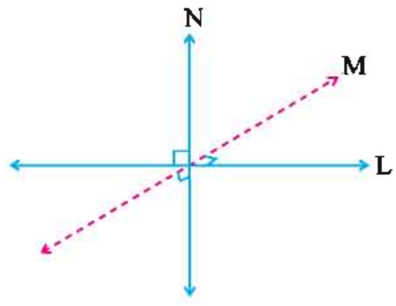
ધોરણ IX અને X માં આપણે સમતલ ભૂમિતિનો અભ્યાસ કર્યો અને તેના સંદર્ભમાં જ ધો XI માં યામ ભૂમિતિની કેટલીક સંકલ્પનાઓનો સવિસ્તાર અભ્યાસ કર્યો. સિમેસ્ટર II માં આપણે સદિશ અવકાશનો અભ્યાસ કર્યો. તેમાં આપણે R^3 માં ત્રિપરિમાણીય યામ-ભૂમિતિની સંકલ્પના સમજ્યા તથા આપણે R^3 માં સદિશનો અભ્યાસ કર્યો. હવે, પ્રશ્ન એ ઉદ્ભવે કે શું આપણે રેખા, સમતલ, ચોરસ, ત્રિકોણ, ગોલક વગેરેનો અભ્યાસ R^3 માં કરી શકીએ? આ પ્રશ્નનો જવાબ છે, હા. ચોક્કસ આવી સંકલ્પનાઓ સદિશની મદદથી ઘણી સહેલાઈથી સમજી શકાય. આ પ્રકરણમાં આપણે ''અવકાશમાં રેખા'' અને ''સમતલ'' વિશેનો અભ્યાસ કરીશું.

''અવકાશમાં રેખા'' નો અભ્યાસ કરતાં પહેલાં સમતલ ભૂમિતિ અને ત્રિપરિમાણીય ભૂમિતિ વચ્ચેનો તફાવત આપણે સ્પષ્ટ કરી લઈએ. સમતલમાં આવેલ બે રેખાઓ માટે ત્રણ શક્યતાઓ હોય છે, જેવી કે (1) બે રેખાઓ સમાંતર હોય (2) બે રેખાઓ સંપાતી હોય અને (3) બે રેખાઓ અનન્ય બિંદુમાં છેદે. આ વસ્તુ આપણે સાદા કાગળ (સમતલ) પર રેખાઓ દોરીને સહેલાઈથી ચકાસી શકીએ. પરંતુ R^3 માં આ જરૂરી નથી. સામાન્ય રીતે બે શક્યતાઓ છે, આ રેખાઓને સમાવતું એક સમતલ મળે અથવા આ બે રેખાઓને સમાવતું કોઈ સમતલ ન હોય. જો તે એક જ સમતલમાં હોય, તો તે સમતલીય છે અને તેમના માટે ઉપર પ્રમાણે ત્રણ શક્યતાઓ છે. જો બે રેખાઓને સમાવતું કોઈ સમતલ ન હોય તો તે વિષમતલીય રેખાઓ કહેવાય છે.



આકૃતિ 7.1

આકૃતિ 7.1માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે બે રેખાઓ L અને M પૈકી રેખા L ઓરડાના ભોંયતળિયાના સમતલમાં અને રેખા M છતના સમતલમાં છે. આ રેખાઓ L અને M એકબીજાને સમાંતર એવા ભિન્ન સમતલોમાં આવેલી છે. તે બંનેને સમાવતું કોઈ એક સમતલ શક્ય નથી. આવી રેખાઓને વિષમતલીય રેખાઓ કહે છે. આવી શક્યતા સમતલ ભૂમિતિમાં જોવા મળતી નથી.



આકૃતિ 7.2

ખૂબ સૂક્ષ્મ અવલોકન કરતાં માલૂમ પડે છે કે, $L \perp N$ અને $M \perp N$ છે. પરંતુ L અને N તથા M અને N એક બીજાને છેદતી નથી. આવું સમતલીય ભૂમિતિમાં જોવા મળતું નથી.

આકૃતિ 7.2 એ ત્રિપરિમાણીય ભૂમિતિમાં (અવકાશમાં) ત્રણ રેખાઓ પરસ્પર લંબ છે તે દર્શાવે છે. આ સંભાવના સમતલ ભૂમિતિમાં શક્ય નથી.

7.2 રેખાની દિશા

આપણે સદિશની રેખા વિશે જાણીએ છીએ. જો R^3ની રેખા L પર બે ભિન્ન બિંદુઓ A અને B હોય તો $\overrightarrow{AB}$ અને $\overrightarrow{BA}$ વિરૂદ્ધ દિશાના સદિશો છે. જો $\overrightarrow{AB}$ની દિશા $\overline{l}$ હોય, તો $\overrightarrow{BA}$ની દિશા $-\overline{l}$ થશે. $\overleftrightarrow{AB}$ (એટલે કે L) ની દિશા $\pm\overline{l}$ લેવામાં આવે છે.

આમ, આપણે રેખા L ની દિશા $\overline{l}$ છે તેમ કહીએ ત્યારે તેનો અર્થ રેખા L પરના કોઈપણ સદિશની દિશા $\overline{l}$ અથવા $-\overline{l}$ છે એમ થશે.

> **નોંધ :** (1) આપણે અવકાશમાં રેખાને L, M, N, ... વડે દર્શાવીશું.
> (2) જો (i) રેખા એક બિંદુમાંથી પસાર થતી હોય અને તેના પરના કોઈપણ સદિશની દિશા એ $\overline{l}$ ની અથવા $-\overline{l}$ ની દિશા હોય તો રેખાની દિશા $\overline{l}$ છે તેમ કહીશું અને
> (ii) અવકાશના બે ભિન્ન બિંદુ અનન્ય રેખા નિશ્ચિત કરે છે.

7.3 બિંદુ A($\overline{a}$) માંથી પસાર થતી તથા શૂન્યેતર સદિશ $\overline{l}$ ની દિશાવાળી રેખાનું સમીકરણ

ધારો કે A($\overline{a}$) માંથી પસાર થતી અને $\overline{l}$ ની દિશાવાળી રેખા L છે.

ધારો કે P($\overline{r}$) એ રેખા L પરનું કોઈપણ બિંદુ છે તથા P $\neq$ A.

$\therefore$ $\overrightarrow{AP}$ ની દિશા એ $\overline{l}$ અથવા $-\overline{l}$ ની દિશા છે.

$\therefore$ $\overrightarrow{AP} = k\overline{l}$, $k \in R - \{0\}$. (P $\neq$ A હોવાથી $k \neq 0$)

$\therefore$ $\overline{r} - \overline{a} = k\overline{l}$

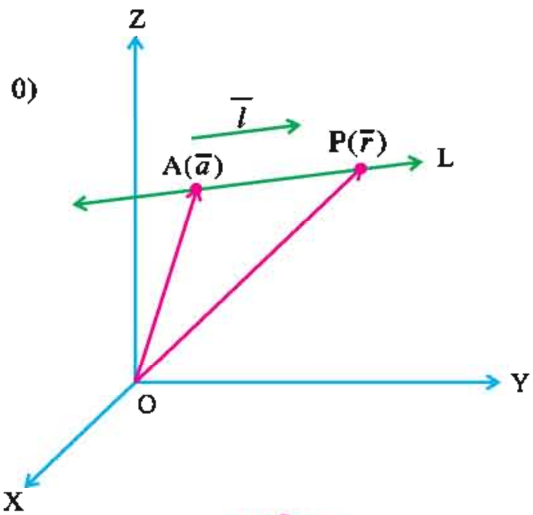
$\therefore$ $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$

જો $k = 0$, તો $\overline{r} = \overline{a}$ એટલે કે P = A

અને A એ રેખા L પરનું બિંદુ છે.

$\therefore$ રેખા L પરના પ્રત્યેક બિંદુ P($\overline{r}$) માટે

$\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$, $k \in R$.



આકૃતિ 7.3

આથી ઉલટું, જો અવકાશમાં કોઈ બિંદુ P($\overline{r}$) એવું હોય કે જેથી કોઈક $k \in R$ માટે $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$

તો (i) જો $k = 0$ તો $\overline{r} = \overline{a}$ અથવા P = A.

(ii) $k \neq 0$, તો $\overline{r} \neq \overline{a}$ અને $\overline{r} - \overline{a} = k\overline{l}$, $(k \neq 0)$

$\therefore$ $\overrightarrow{AP} = k\overline{l}$

$\therefore$ $\overrightarrow{AP}$ ની દિશા એ $\overline{l}$ ની દિશા અથવા $\overline{l}$ ની દિશાની વિરૂદ્ધ દિશા થશે.

પરંતુ A $\in$ L. તેથી P $\in$ L.

આમ, P($\overline{r}$) $\in$ L $\Leftrightarrow$ $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$, $k \in R$

$\therefore$ રેખા L નું **સદિશ સમીકરણ (Vector Equation)** $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$, $k \in R$ છે તેમ કહેવાય.

> રેખાનું સદિશ સમીકરણ એ રેખા પરના કોઈપણ બિંદુનો સ્થાન સદિશ દર્શાવે છે.
> રેખાનું સમીકરણ $\overline{a}$ ની પસંદગી પર આધારિત નથી.
> જો $\overline{b} \in$ L, તો $\overline{b} = \overline{a} + k_1\overline{l}$ લેતાં,
> $$\overline{b} + k\overline{l} = \overline{a} + k_1\overline{l} + k\overline{l}$$
> $$= \overline{a} + (k_1 + k)\overline{l}$$
> $$= \overline{a} + t\overline{l}, \quad t \in R$$
> $\therefore$ $\{\overline{b} + k\overline{l} \mid k \in R\} = \{\overline{a} + k\overline{l} \mid k \in R\}$, જ્યાં $\overline{a}$ અને $\overline{b}$ બંને L પરના બિંદુના સ્થાન સદિશ છે.

રેખાનું પ્રચલ સમીકરણ :

ધારો કે રેખા L ની દિશા $\overline{l} = (l_1, l_2, l_3)$ ની દિશા છે અને તે $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$ માંથી પસાર થાય છે. P($\overline{r}$) $\in$ L છે.

ધારો કે $\overline{r} = (x, y, z)$, $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$ અને $\overline{l} = (l_1, l_2, l_3)$.

$\therefore \quad \overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}, \quad k \in R$

$\therefore \quad (x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + k(l_1, l_2, l_3), \quad k \in R$

$\therefore \quad (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = (kl_1, kl_2, kl_3)$

$\therefore \quad x - x_1 = kl_1, \ \ y - y_1 = kl_2, z - z_1 = kl_3$ **(i)**

$$\therefore \quad \left.\begin{array}{l} x = x_1 + kl_1 \\ y = y_1 + kl_2 \\ z = z_1 + kl_3 \end{array}\right\} \quad k \in R$$

આ સમીકરણોને (x_1, y_1, z_1)માંથી પસાર થતી અને (l_1, l_2, l_3) ની દિશાવાળી રેખા Lનાં પ્રચલ સમીકરણ કહે છે અને k પ્રચલ છે.

કાર્તેઝીય સમીકરણ (સંમિત સ્વરૂપ) (Symmetric Form) :

જો આપણે ઉપરના સમીકરણોમાંથી પ્રચલ k નો લોપ કરીએ અને $l_1 \neq 0, l_2 \neq 0, l_3 \neq 0$ હોય, તો

$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{l_2} = \frac{z-z_1}{l_3}$ $(= k)$ મળે. **((i)પરથી) (ii)**

આ સમીકરણને રેખાના સમીકરણનું સંમિત સ્વરૂપ અથવા કાર્તેઝીય સ્વરૂપ કહે છે.

જો $l_1 = 0$ અને $l_2 \neq 0, l_3 \neq 0$ તો (i) પરથી,

$$x = x_1, \frac{y-y_1}{l_2} = \frac{z-z_1}{l_3}$$

[ખરેખર તો $x - x_1 = kl_1$ અને $l_1 = 0$ હોવાથી $x - x_1 = 0$, એટલે કે $x = x_1$.]

આ સમીકરણને $\frac{x-x_1}{0} = \frac{y-y_1}{l_2} = \frac{z-z_1}{l_3}$ $(= k)$ તરીકે લખી શકાય. (અહીં છેદમાં 0 છે તેનો અર્થ સદિશ $\overline{l}$ નો પ્રથમ ઘટક $l_1 = 0$ છે. છેદનો શૂન્ય માત્ર ઔપચારિક છે.) આ ફક્ત સાંકેતિક સ્વરૂપ છે.

અહીં $x = x_1 + 0k, y = y_1 + kl_2, z = z_1 + kl_3$

$\therefore \quad x = x_1, y = y_1 + kl_2, z = z_1 + kl_3.$

આ જ પ્રમાણે l_1, l_2, l_3માંથી કોઈ પણ શૂન્ય હોય (અલબત્, $l_1 = l_2 = l_3 = 0$ નહીં), તો પણ આપણે સંમિત સ્વરૂપે સમીકરણ લખી શકીએ. જો $l_1 = l_2 = 0$ તો, $x = x_1, y = y_1$ અને z એ સ્વૈર છે.

સંકેતમાં આપણે તેને $\frac{x-x_1}{0} = \frac{y-y_1}{0} = \frac{z-z_1}{l_3} = k$ ($l_3 \neq 0$ કારણ કે $\overline{l} \neq \overline{0}$)

પુનઃ અહીં છેદ શૂન્ય હોવાથી શૂન્ય વડે ભાગાકાર છે તેમ સમજીશું નહીં. સામાન્ય રીતે $x - x_1 = 0$ અથવા $x = x_1$ અને $y - y_1 = 0$ અથવા $y = y_1$ તેવો અર્થ છે.

નોંધ : જો $A(x_1, y_1, z_1)$ માંથી પસાર થતી રેખા Lની દિક્કોસાઈન l_1, l_2, l_3 હોય, તો L નું સમીકરણ $\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{l_2} = \frac{z-z_1}{l_3}$ થશે, જ્યાં $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1$.

ઉદાહરણ 1 : $A(2, 1, -4)$માંથી પસાર થતી અને સદિશ $(1, -1, 2)$ ની દિશાવાળી રેખાનું સદિશ તેમજ સંમિત સ્વરૂપે સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $\overline{a} = (2, 1, -4)$ અને $\overline{l} = (1, -1, 2)$.

$\therefore$ Lનું સદિશ સમીકરણ $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}, \ k \in R$ પ્રમાણે,

$\overline{r} = (2, 1, -4) + k(1, -1, 2),\ k \in R$ થશે.

આ રેખાનું સદિશ સમીકરણ છે.

રેખાના સમીકરણનું સંમિત સ્વરૂપ : રેખાના સમીકરણનું સંમિત સ્વરૂપ $\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{l_2} = \frac{z - z_1}{l_3}$

$\therefore\ \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+4}{2}$ એ રેખાના સમીકરણનું સંમિત સ્વરૂપ છે.

7.4 બે ભિન્ન બિંદુમાંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ

ધારો કે $A(\overline{a})$ તથા $B(\overline{b})$ માંથી પસાર થતી $\overleftrightarrow{AB}$નું સમીકરણ મેળવવું છે. $(A \neq B)$

ધારો કે $P(\overline{r})$ એ $\overleftrightarrow{AB}$ પરનું કોઈપણ બિંદુ છે અને $P \neq A$.

$P(\overline{r}) \in \overleftrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AP}$ અને $\overrightarrow{AB}$ની દિશા સમાન અથવા પરસ્પર વિરુદ્ધ છે.

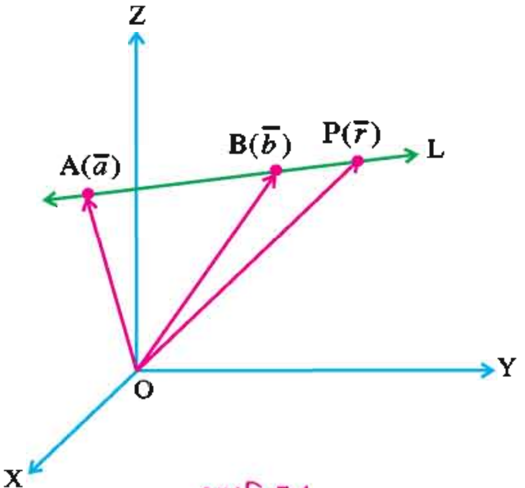
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = k\,\overrightarrow{AB},\ k \in R - \{0\}$

($k \neq 0$ કારણ કે $P \neq A$)

$\Leftrightarrow \overline{r} - \overline{a} = k(\overline{b} - \overline{a})$

$\Leftrightarrow \overline{r} = \overline{a} + k(\overline{b} - \overline{a})$

$\Leftrightarrow \overline{r} = (1 - k)\overline{a} + k\overline{b},\ k \in R - \{0\}$



આકૃતિ 7.4

વળી, $k = 0 \Leftrightarrow \overline{r} = \overline{a}$ અને $A(\overline{a}) \in \overleftrightarrow{AB}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB}$નું સદિશ સમીકરણ $\overline{r} = (1 - k)\overline{a} + k\overline{b},\ k \in R$

અથવા $\overline{r} = \overline{a} + k(\overline{b} - \overline{a}),\ k \in R$ છે.

અથવા $k = 1 - t$ લેતાં $\overline{r} = (1 - (1 - t))\overline{a} + (1 - t)\overline{b},\ t \in R$

$= t\overline{a} + (1 - t)\overline{b} = \overline{b} + t(\overline{a} - \overline{b}).\ t \in R$

[સરખાવો : R^2 માં $x = tx_2 + (1 - t)\,x_1,\ y = ty_2 + (1 - t)\,y_1$]

આમ $\overline{a}$ અને $\overline{b}$ની અદલાબદલી કરી શકાય અથવા L પરનાં કોઈપણ બે ભિન્ન બિંદુઓ લઈ સમીકરણ પ્રાપ્ત કરી શકાય.

પ્રચલ સ્વરૂપ :

ધારો કે $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1),\ \overline{b} = (x_2, y_2, z_2),\ \overline{r} = (x, y, z)$.

$\therefore\ \overline{r} = \overline{a} + k(\overline{b} - \overline{a}),\ k \in R$ પરથી,

$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + k(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),\quad k \in R$

$\therefore\ x - x_1 = k(x_2 - x_1),\ \ y - y_1 = k(y_2 - y_1),\ z - z_1 = k(z_2 - z_1)$ (i)

$$\therefore\ \left.\begin{aligned} x &= x_1 + k(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + k(y_2 - y_1) \\ z &= z_1 + k(z_2 - z_1) \end{aligned}\right\}\ k \in R$$

$\overleftrightarrow{AB}$ નાં પ્રચલ સમીકરણ છે. k પ્રચલ છે.

સંમિત સ્વરૂપ :

ઉપરનાં સમીકરણોમાંથી પ્રચલ k નો લોપ કરતાં,

$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ મળે.

[સરખાવો : R^2 માં $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$]

આ સ્વરૂપ એ $\overleftrightarrow{AB}$ ના સમીકરણનું કાર્તેઝીય અથવા સંમિત સ્વરૂપ છે.

અહીં પણ જો $x_1 = x_2$ તો સમીકરણ

$$\frac{x-x_1}{0} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \text{ થશે.}$$

(જ્યારે છેદ શૂન્ય હોય ત્યારે અંશ શૂન્ય છે તેમ અર્થઘટન કરવું.)

[અહીં $x - x_1$નો છેદ શૂન્ય છે, તેનો અર્થ આપણે $x = x_1$ સમજીશું. આ માત્ર સાંકેતિક સ્વરૂપ છે.]

એટલે કે $x = x_1$, $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ સમીકરણ મળે.

ઉદાહરણ 2 : રેખા $\frac{3-x}{3} = \frac{2y-3}{5} = \frac{z}{2}$ નું સદિશ સ્વરૂપે સમીકરણ લખો.

ઉકેલ : રેખાનું સમીકરણ $\frac{x-3}{-3} = \frac{y-\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{z-0}{2}$ થશે

આથી $\overline{a} = \left(3, \frac{3}{2}, 0\right)$ અને $\overline{l} = \left(-3, \frac{5}{2}, 2\right)$ એટલે કે $\overline{l} = (-6, 5, 4)$ લઈ શકાય.

$\therefore$ રેખાના સમીકરણના સદિશ સ્વરૂપ $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$, $k \in R$ પરથી,

$\overline{r} = \left(3, \frac{3}{2}, 0\right) + k(-6, 5, 4)$, $k \in R$ એ રેખાનું સદિશ સ્વરૂપે સમીકરણ છે.

ઉદાહરણ 3 : સમીકરણ $\overline{r} = (5, -2, 4) + k(0, -4, 3)$, $k \in R$ નું કાર્તેઝીય સ્વરૂપમાં પરિવર્તન કરો.

ઉકેલ : અહીં, $\overline{a} = (5, -2, 4) = (x_1, y_1, z_1)$ અને $\overline{l} = (0, -4, 3) = (l_1, l_2, l_3)$

રેખાના સમીકરણનું કાર્તેઝીય સ્વરૂપ $\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{l_2} = \frac{z-z_1}{l_3}$ છે.

$\therefore$ $x - 5 = 0$, $\frac{y+2}{-4} = \frac{z-4}{3}$ એ રેખાના સમીકરણનું કાર્તેઝીય સ્વરૂપ છે. **($l_1 = 0$)**

ઉદાહરણ 4 : (2, 2, −3) અને (1, 3, 5) માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : $\overline{a}$ અને $\overline{b}$ માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ $\overline{r} = \overline{a} + k(\overline{b} - \overline{a})$, $k \in R$ છે.

અહીં, $\overline{a} = (2, 2, -3)$ અને $\overline{b} = (1, 3, 5)$, $\overline{b} - \overline{a} = (-1, 1, 8)$.

$\therefore$ $\overline{r} = (2, 2, -3) + k(-1, 1, 8)$, $k \in R$ રેખાનું સદિશ સ્વરૂપે સમીકરણ છે.

$\therefore$ રેખાના સમીકરણનું કાર્તેઝીય સ્વરૂપ $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{8}$ છે.

7.5 સમરેખ બિંદુઓ

ધારોકે $A(\overline{a})$, $B(\overline{b})$, $C(\overline{c})$ એ R^3 નાં ભિન્ન બિંદુઓ છે.

A, B, C સમરેખ છે. $\Leftrightarrow C \in \overleftrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow$ કોઈક $k \in R$ માટે $\overline{c} = \overline{a} + k(\overline{b} - \overline{a})$

($\overleftrightarrow{AB}$ નું સમીકરણ $\overline{r} = \overline{a} + k(\overline{b} - \overline{a})$, $k \in R$)

$\Leftrightarrow \overline{c} - \overline{a} = k(\overline{b} - \overline{a})$

$\therefore$ A, B, C સમરેખ છે. $\Leftrightarrow (\overline{c} - \overline{a}) \times (\overline{b} - \overline{a}) = \overline{0}$

આમ, $A(\overline{a})$, $B(\overline{b})$, $C(\overline{c})$ સમરેખ હોવા માટેની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત $(\overline{c} - \overline{a}) \times (\overline{b} - \overline{a}) = \overline{0}$ છે.

બિંદુઓ સમરેખ હોવાની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત દર્શાવતું એક પ્રમેય નીચે પ્રમાણે છે. આપણે આ પ્રમેય સાબિતી આપ્યા વગર સ્વીકારીશું.

પ્રમેય 7.1 : જો $A(\bar{a})$, $B(\bar{b})$, $C(\bar{c})$ અવકાશનાં ભિન્ન બિંદુઓ હોય અને શૂન્યેતર વાસ્તવિક સંખ્યાઓ l, m, n એવી મળે કે જેથી $l + m + n = 0$ અને $l\bar{a} + m\bar{b} + n\bar{c} = \bar{0}$ તો અને તો જ $A(\bar{a})$, $B(\bar{b})$, $C(\bar{c})$ સમરેખ છે.

ત્રણ ભિન્ન બિંદુઓ સમરેખ હોવાની એક આવશ્યક શરત આપણે મેળવીશું.

A, B, C સમરેખ છે $\Rightarrow (\bar{c} - \bar{a}) \times (\bar{b} - \bar{a}) = \bar{0}$

$\Rightarrow (\bar{c} \times \bar{b}) - (\bar{a} \times \bar{b}) - (\bar{c} \times \bar{a}) + (\bar{a} \times \bar{a}) = \bar{0}$

વળી $\bar{a} \times \bar{a} = \bar{0}$ અને $\bar{c} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{c}$

$\Rightarrow (\bar{a} \times \bar{b}) + (\bar{b} \times \bar{c}) + (\bar{c} \times \bar{a}) = \bar{0}$

$\Rightarrow (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} + (\bar{b} \times \bar{c}) \cdot \bar{c} + (\bar{c} \times \bar{a}) \cdot \bar{c} = 0$

$\Rightarrow [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] = 0$

$[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] = 0$ એ $A(\bar{a})$, $B(\bar{b})$, $C(\bar{c})$ સમરેખ હોવા માટેની માત્ર આવશ્યક શરત જ છે, પર્યાપ્ત નથી.

આપણે એ નોંધીએ કે $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] \neq 0 \Rightarrow$ A, B, C અસમરેખ છે, પરંતુ $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] = 0$ થી આપણે કોઈ નિર્ણય લઈ શકીએ નહીં, તે નીચેના ઉદાહરણ પરથી સ્પષ્ટ થશે.

નીચેના ઉદાહરણો આ શરત પર્યાપ્ત નથી તે દર્શાવે છે. :

ઉદાહરણ તરીકે A(1, 2, 0), B(–4, 1, 9) અને C(2, 4, 0) સમરેખ છે કે નહીં તે ચકાસીએ.

ધારો કે $\bar{a} = (1, 2, 0)$, $\bar{b} = (-4, 1, 9)$ અને $\bar{c} = (2, 4, 0)$

માટે $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 1(-36) - 2(-18) + 0 = 0$

હવે, $\bar{c} - \bar{a} = (1, 2, 0)$

$\bar{b} - \bar{a} = (-5, -1, 9)$

$(\bar{c} - \bar{a}) \times (\bar{b} - \bar{a}) = (18, -9, 9) \neq \bar{0}$

$\therefore$ A, B, C અસમરેખ છે.

આમ $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] = 0$ છે, પરંતુ A, B, C અસમરેખ છે.

એક બીજું સરળ ઉદાહરણ લઈએ, $\bar{a} = (0, 0, 0)$, $\bar{b} = (1, 2, 3)$, $\bar{c} = (2, 3, 4)$ લેતાં, $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] = 0$

પરંતુ $(\bar{c} - \bar{a}) \times (\bar{b} - \bar{a}) = \bar{c} \times \bar{b} \neq \bar{0}$

$\therefore$ $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ અસમરેખ છે.

ઉદાહરણ 5 : સાબિત કરો કે (–1, 2, 5), (–2, 4, 2) અને (1, –2, 11) સમરેખ છે.

ઉકેલ : રીત 1 : $\bar{a} = (-1, 2, 5)$, $\bar{b} = (-2, 4, 2)$, $\bar{c} = (1, -2, 11)$

$\therefore$ $\bar{c} - \bar{a} = (2, -4, 6)$ અને

$\bar{b} - \bar{a} = (-1, 2, -3)$

$\therefore$ $(\bar{c} - \bar{a}) \times (\bar{b} - \bar{a}) = (0, 0, 0) = \bar{0}$

$\therefore$ આપેલાં બિંદુઓ સમરેખ છે.

રીત 2 : પ્રથમ આપણે બે બિંદુઓ $A(\overline{a}) = (-1, 2, 5)$ અને $B(\overline{b}) = (-2, 4, 2)$ માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ મેળવીશું.

$\overleftrightarrow{AB}$ નું સમીકરણ $\overline{r} = \overline{a} + k(\overline{b} - \overline{a}),\ k \in R$ છે.

$\therefore\ \overline{r} = (-1, 2, 5) + k(-1, 2, -3),\ k \in R$

હવે આપણે બતાવીશું કે ત્રીજું બિંદુ $C(\overline{c}) = (1, -2, 11)$ આ રેખા પર આવેલું છે.

જો $\overline{c} = (1, -2, 11)$ એ $\overleftrightarrow{AB}$ પર આવેલું હોય તો કોઈક $k \in R$ માટે

$(1, -2, 11) = (-1 - k, 2 + 2k, 5 - 3k)$ થવું જોઈએ.

$\therefore$ કોઈક $k \in R$ માટે $1 = -1 - k,\ -2 = 2 + 2k,\ 11 = 5 - 3k$ થવું જોઈએ.

$k = -2$ બધાં જ સમીકરણનું સમાધાન કરે છે.

$\therefore\ C(\overline{c})$ એ $\overleftrightarrow{AB}$ પર છે.

$\therefore$ A, B, C સમરેખ છે.

7.6 બે રેખા વચ્ચેના ખૂણાનું માપ

ધારો કે અવકાશમાં $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l},\ k \in R$ અને $\overline{r} = \overline{b} + k\overline{m},\ k \in R$ બે ભિન્ન રેખાઓનાં સમીકરણ છે.

(i) જો $\overline{l} = \overline{m}$ અથવા $\overline{l} = -\overline{m}$, તો $\overline{l} \times \overline{m} = \overline{0}$. તેથી બે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શૂન્ય છે. બંને રેખાની દિશા સમાન છે. તેથી તે સંપાતી અથવા સમાંતર રેખાઓ છે.

(ii) જો $\overline{l} \perp \overline{m}$ એટલે કે $\overline{l} \cdot \overline{m} = 0$ તો રેખાઓ એકબીજાને લંબ થશે અને તેથી તેમની વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\frac{\pi}{2}$ લઈશું.

(iii) જો $\overline{l} \neq \pm\overline{m}$ અથવા $\overline{l} \cdot \overline{m} \neq 0$ તો આપેલ રેખાઓ એકબીજાને સમાંતર, સંપાતી અથવા પરસ્પર લંબ નથી. આપણે સદિશો $\overline{l}$ અને $\overline{m}$ વચ્ચેના લઘુકોણ ખૂણાના માપને બે રેખા વચ્ચેના ખૂણાના માપ તરીકે લઈશું.

જો બે રેખા વચ્ચેના ખૂણાનું માપ α હોય, તો

$$\cos\alpha = \frac{|\overline{l} \cdot \overline{m}|}{|\overline{l}||\overline{m}|},\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$\alpha = 0$ તથા $\frac{\pi}{2}$ માટે પણ આ પરિણામ સત્ય છે.

નોંધ : $\alpha = 0$ માટે $|\overline{l} \cdot \overline{m}| = |\overline{l}||\overline{m}|$.

$\therefore\ \overline{l} \times \overline{m} = \overline{0}$

આમ, $\cos\alpha = \frac{|\overline{l} \cdot \overline{m}|}{|\overline{l}||\overline{m}|},\ 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

7.7 બે ભિન્ન રેખાઓ છેદે તે માટેની શરત

પ્રમેય 7.2 : જો બે રેખાઓ $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l},\ k \in R$ અને $\overline{r} = \overline{b} + k\overline{m},\ k \in R$ પરસ્પર છેદે, તો $(\overline{a} - \overline{b}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m}) = 0$.

સાબિતી : ધારો કે બે ભિન્ન રેખાઓ $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l},\ k \in R$ અને $\overline{r} = \overline{b} + k\overline{m},\ k \in R$ એકબીજાને $C(\overline{c})$માં છેદે છે.

તેથી કોઈક $k_1, k_2 \in R$ મળે જેથી $\overline{c} = \overline{a} + k_1\overline{l} = \overline{b} + k_2\overline{m}$.

$\therefore \quad \overline{a} - \overline{b} = k_2\overline{m} - k_1\overline{l}$

$\therefore \quad (\overline{a} - \overline{b})\cdot(\overline{l} \times \overline{m}) = (k_2\overline{m} - k_1\overline{l})\cdot(\overline{l} \times \overline{m}) = k_2\overline{m}\cdot(\overline{l} \times \overline{m}) - k_1\overline{l}\cdot(\overline{l} \times \overline{m})$

$= 0 - 0 = 0$

$\therefore \quad (\overline{a} - \overline{b})\cdot(\overline{l} \times \overline{m}) = 0$

$\therefore$ આપેલ રેખાઓ એકબીજીને છેદે તો $(\overline{a} - \overline{b})\cdot(\overline{l} \times \overline{m}) = 0$

નોંધ : આ શરત આવશ્યક છે પરંતુ પર્યાપ્ત નથી.

જો $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\overline{l} = (l_1, l_2, l_3)$ અને $\overline{m} = (m_1, m_2, m_3)$ લઈએ તો $(\overline{a} - \overline{b})\cdot(\overline{l} \times \overline{m}) = 0$ શરતને

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_2 \end{vmatrix} = 0$$

સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય. આ બે રેખાઓ છેદે તે માટેની કાર્તેઝીય સ્વરૂપમાં શરત છે.

ઉદાહરણ 6 : રેખાઓ $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{1}$ અને $\frac{x+2}{4} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-3}{8}$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.

ઉકેલ : રેખા L નાં સમીકરણ $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{1}$ અને M નાં સમીકરણ $\frac{x+2}{4} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-3}{8}$ છે.

$\therefore \quad \overline{l} = (2, 2, 1)$ અને $\overline{m} = (4, 1, 8)$

જો બે રેખા વચ્ચેના ખૂણાનું માપ α હોય તો, $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$.

$$cos\alpha = \frac{|\overline{l}\cdot\overline{m}|}{|\overline{l}||\overline{m}|} = \frac{8+2+8}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{81}} = \frac{18}{3\cdot 9} = \frac{2}{3}$$

$\therefore \quad \alpha = cos^{-1}\frac{2}{3}$

ઉદાહરણ 7 : રેખાઓ $\frac{x-5}{7} = \frac{y-5}{k} = \frac{z-2}{1}$ અને $\frac{x}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3}$ પરસ્પર લંબ હોય તો k શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $\overline{l} = (7, k, 1)$ અને $\overline{m} = (1, 2, 3)$

રેખાઓ પરસ્પર લંબ હોવાથી $\overline{l}\cdot\overline{m} = 0$

$\therefore \quad 7 + 2k + 3 = 0$

$\therefore \quad 2k = -10$

$\therefore \quad k = -5$

ઉદાહરણ 8 : રેખા $\overline{r} = (-3, 4, 8) + k(3, 5, 6)$, $k \in R$ ને સમાંતર અને $(2, -4, 5)$ માંથી પસાર થતી રેખાનું કાર્તેઝીય સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : રેખાઓ સમાંતર હોવાથી બંને રેખાની દિશા સમાન થશે.

$\therefore$ રેખાની દિશા $\overline{l} = (3, 5, 6) = (l_1, l_2, l_3)$ છે અને તે બિંદુ $(2, -4, 5) = (x_1, y_1, z_1)$માંથી પસાર થાય છે.

$(2, -4, 5)$ એ રેખા $\overline{r} = (-3, 4, 8) + k(3, 5, 6)$, $k \in R$ પર નથી તેમ બતાવીશું.

ધારો કે કોઈક $k \in R$ માટે $(2, -4, 5) = (-3, 4, 8) + k(3, 5, 6)$

$\therefore$ $(5, -8, -3) = k(3, 5, 6)$

પરંતુ કોઈ પણ $k \in R$ માટે $5 = 3k, -8 = 5k, -3 = 6k$ શક્ય નથી.

$\therefore$ આપેલી રેખાને (x_1, y_1, z_1) માંથી પસાર થતી સમાંતર રેખાનું સમીકરણ

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{l_2} = \frac{z - z_1}{l_3}$$

$\therefore$ $\frac{x - 2}{3} = \frac{y + 4}{5} = \frac{z - 5}{6}$ એ $(2, -4, 5)$ માંથી પસાર થતી અને આપેલ રેખાને સમાંતર રેખાનું સમીકરણ છે.

સમતલીય અને વિષમતલીય રેખાઓ માટેની શરત :

પ્રમેય 7.3 : રેખાઓ $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$, $k \in R$ અને $\overline{r} = \overline{b} + k\overline{m}$, $k \in R$. સમતલીય હોવાની આવશ્યક શરત $(\overline{a} - \overline{b}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m}) = 0$ છે.

સાબિતી : જો બે ભિન્ન રેખાઓ L : $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$, $k \in R$ અને M : $\overline{r} = \overline{b} + k\overline{m}$, $k \in R$ સમતલીય હોય તો તે અનન્ય બિંદુમાં છેદે અથવા પરસ્પર સમાંતર હોય.

જો તે અનન્ય બિંદુમાં છેદે તો પ્રમેય 7.2 પ્રમાણે $(\overline{a} - \overline{b}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m}) = 0$.

અને જો તે સમાંતર હોય તો $\overline{l} \times \overline{m} = \overline{0}$.

$\therefore$ બંને વિકલ્પમાં $(\overline{a} - \overline{b}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m}) = 0$ બે રેખાઓ સમતલીય હોવાની આવશ્યક શરત છે.

ઉપરની શરત પર્યાપ્ત છે ?

વિષમતલીય રેખાઓ : જો બે રેખાઓને સમાવતું કોઈ સમતલ ના મળી શકે તો તેમને વિષમતલીય રેખાઓ (Skew lines) કહે છે.

પ્રમેય 7.3 ના વિધાન પરથી એ તો નક્કી થાય છે જ કે

$(\overline{a} - \overline{b}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m}) \neq 0 \Rightarrow$ રેખાઓ $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$ અને $\overline{r} = \overline{b} + k\overline{m}$ વિષમતલીય છે.

ઉદાહરણ 9 : રેખાઓ L : $\frac{x - 3}{4} = \frac{y + 2}{-1} = \frac{z + 1}{-1}$ અને M : $\frac{x}{2} = \frac{z + 3}{3}$, $y = -1$ સમતલીય છે કે નહીં તે ચકાસો.

ઉકેલ : રેખા M ને $\frac{x}{2} = \frac{y + 1}{0} = \frac{z + 3}{3}$ પ્રમાણે લઈ શકાય.

અહીં, $\overline{a} = (3, -2, -1)$, $\overline{l} = (4, -1, -1)$ અને $\overline{b} = (0, -1, -3)$, $\overline{m} = (2, 0, 3)$

$\therefore$ $\overline{a} - \overline{b} = (3, -1, 2)$

$$(\overline{a} - \overline{b}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m}) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-3) + 1(14) + 2(2)$$

$$= -9 + 14 + 4 = 9 \neq 0$$

$\therefore$ L અને M વિષમતલીય રેખાઓ છે.

7.8 બિંદુનું રેખાથી લંબઅંતર :

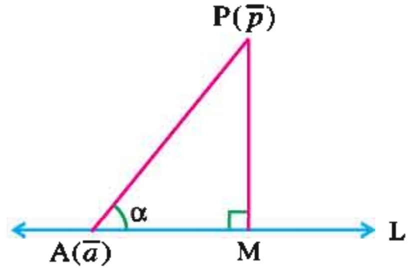
ધારો કે $A(\overline{a})$ માંથી પસાર થતી અને દિશા $\overline{l}$ વાળી રેખા Lનું સમીકરણ $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$, $k \in R$ છે અને $P(\overline{p})$ એ R^3 માં કોઈપણ બિંદુ છે.

જો $P \in L$ તો P અને L વચ્ચેનું લંબઅંતર શૂન્ય થશે.

જો $P \notin L$ તો, P અને L એક અનન્ય સમતલ π નક્કી કરે છે.

ધારો કે P માંથી સમતલ π માં રેખા L પરનો લંબપાદ M છે અને $(\overline{l} \,\hat{,}\, \overrightarrow{AP}) = \alpha$ ધારો કે, $M \neq A$

જ્યાં, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.



આકૃતિ 7.5

$\therefore$ P નું રેખા L થી લંબઅંતર

$= PM$

$= AP \sin\alpha$

$= \frac{|\overrightarrow{AP}||\bar{l}|\sin\alpha}{|\bar{l}|}$ $\quad (\bar{l} \neq \bar{0})$

$= \frac{|\overrightarrow{AP} \times \bar{l}|}{|\bar{l}|}$ $\quad (\alpha = (\overrightarrow{AP}, \hat{\ } \bar{l}))$

$= \frac{|(\bar{p} - \bar{a}) \times \bar{l}|}{|\bar{l}|}$

આમ, $PM = \frac{|(\bar{p} - \bar{a}) \times \bar{l}|}{|\bar{l}|}$ અથવા $|(\bar{p} - \bar{a}) \times \hat{l}|$ $\quad \left(\hat{l} = \frac{\bar{l}}{|\bar{l}|}\right)$

બીજી રીત :

$$AM = |\text{Proj}_{\bar{l}} \overrightarrow{AP}| = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \bar{l}|}{|\bar{l}|}$$

હવે, $PM^2 = AP^2 - AM^2$

$$= AP^2 - \frac{|\overrightarrow{AP} \times \bar{l}|^2}{|\bar{l}|^2}$$

$$= \frac{|\overrightarrow{AP}|^2 |\bar{l}|^2 - |\overrightarrow{AP} \cdot \bar{l}|^2}{|\bar{l}|^2} \quad \text{(લાગ્રાન્જનું નિત્યસમ)}$$

$$PM^2 = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \bar{l}|^2}{|\bar{l}|^2}$$

$$\therefore \quad PM = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \bar{l}|}{|\bar{l}|} = \frac{|(\bar{p} - \bar{a}) \times \bar{l}|}{|\bar{l}|} = |(\bar{p} - \bar{a}) \times \hat{l}|$$

નોંધ : જો A માંથી લંબરેખા પર P હોય તો પણ દેખીતું જ પરિણામ સત્ય છે. $PA = |\bar{p} - \bar{a}|$

ઉદાહરણ 10 : બિંદુ $(1, 2, -4)$ નું રેખા $\frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+5}{6}$ થી લંબઅંતર શોધો.

ઉકેલ : અહીં બિંદુ $P(1, 2, -4)$ અને $A(\bar{a}) = (3, 3, -5)$, $\bar{l} = (2, 3, 6)$ છે.

$\overrightarrow{AP} = (1 - 3, 2 - 3, -4 + 5) = (-2, -1, 1)$ અને

$\bar{l} = (2, 3, 6)$

$\overrightarrow{AP} \times \bar{l} = (-9, 14, -4)$

$|\bar{l}| = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7$

$\therefore$ P નું આપેલી રેખાથી લંબઅંતર $= \frac{|\overrightarrow{AP} \times \bar{l}|}{|\bar{l}|} = \frac{|(-9, 14, -4)|}{7}$

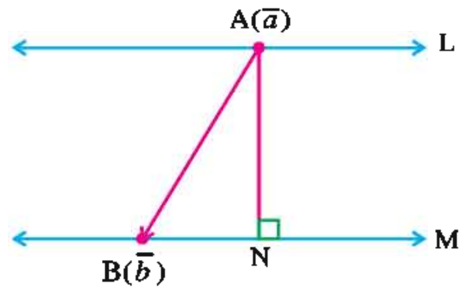
$$= \frac{\sqrt{81 + 196 + 16}}{7} = \frac{\sqrt{293}}{7}$$

બે સમાંતર રેખાઓ વચ્ચેનું લંબઅંતર :

ધારો કે L : $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$, $k \in R$ અને M : $\overline{r} = \overline{b} + k\overline{l}$, $k \in R$ એ R^3 માં બે સમાંતર રેખાઓ છે.

L || M હોવાથી તે એક અનન્ય સમતલ નક્કી કરે છે.

L અને M વચ્ચેનું લંબઅંતર એટલે કે $A(\overline{a})$ નું M થી (અથવા $B(\overline{b})$ નું L થી) લંબઅંતર



આકૃતિ 7.6

$\therefore$ **L અને M વચ્ચેનું અંતર**

$$= \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overline{l}|}{|\overline{l}|} = \frac{|(\overline{b} - \overline{a}) \times \overline{l}|}{|\overline{l}|}$$

ઉદાહરણ 11 : રેખાઓ L : $\frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{6}$ અને

M : $\overline{r} = (2, 3, -1) + k(-3, 2, -6)$, $k \in R$ વચ્ચેનું અંતર શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $\overline{a} = (4, -1, 2)$; $\overline{l} = (3, -2, 6)$, $\overline{b} = (2, 3, -1)$; $\overline{m} = (-3, 2, -6)$

શક્ય હોય તો, ધારો કે $A(\overline{a}) \in M$.

તો કોઈક $k \in R$ માટે $(4, -1, 2) = (2, 3, -1) + k(-3, 2, -6)$

$\therefore$ $(2, -4, 3) = k(-3, 2, -6)$, $k \in R$

$\therefore$ $2 = -3k$, $-4 = 2k$, $3 = -6k$

કોઈપણ $k \in R$ માટે આ શક્ય નથી, કારણ કે પ્રથમ સમીકરણ પરથી $k = -\frac{2}{3}$ મળે જે બાકીનાં બે સમીકરણનું સમાધાન કરશે નહીં.

$\therefore$ $A(\overline{a}) \notin M$

વળી, $\overline{l} = -\overline{m}$

$\therefore$ $\overline{l} \times \overline{m} = -\overline{m} \times \overline{m} = \overline{0}$

$\overline{l} \times \overline{m} = \overline{0}$ અને $A(\overline{a}) \notin M$

$\therefore$ આપેલ રેખાઓ સમાંતર રેખાઓ છે.

$\overline{a} - \overline{b} = (2, -4, 3)$ અને

$\overline{l} = (3, -2, 6)$

$\therefore$ $(\overline{a} - \overline{b}) \times \overline{l} = (-18, -3, 8)$, $|\overline{l}| = \sqrt{9+4+36} = 7$

$\therefore$ L તથા M વચ્ચેનું અંતર $= \frac{|(\overline{a} - \overline{b}) \times \overline{l}|}{|\overline{l}|}$

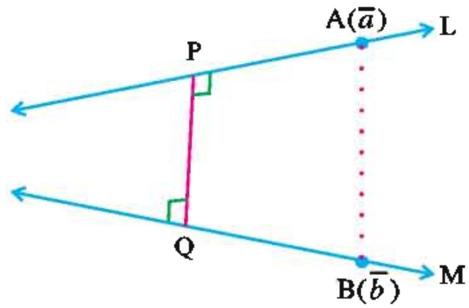
$$= \frac{\sqrt{324+9+64}}{7} = \frac{\sqrt{397}}{7}$$

બે વિષમતલીય રેખાઓ વચ્ચેનું લંબઅંતર :

ધારો કે L : $\bar{r} = \bar{a} + k\bar{l}$, $k \in R$ અને M : $\bar{r} = \bar{b} + k\bar{m}$, $k \in R$ એ R^3 ની વિષમતલીય રેખાઓ છે.

L અને M વિષમતલીય હોવાથી $(\bar{a} - \bar{b}) \cdot (\bar{l} \times \bar{m}) \neq 0$ (પ્રમેય 7.3)

આપણે સ્વીકારી લઈએ છીએ કે, L તથા M વિષમતલીય હોય, તો એક બિંદુ $P \in L$ અને બીજું બિંદુ $Q \in M$ મળે જેથી $\overleftrightarrow{PQ} \perp L$ તથા $\overleftrightarrow{PQ} \perp M$.



આકૃતિ 7.7

$\therefore$ $\overrightarrow{PQ} \cdot \bar{l} = 0$ અને $\overrightarrow{PQ} \cdot \bar{m} = 0$

$\therefore$ $\overrightarrow{PQ}$ ની દિશા $\bar{l} \times \bar{m}$ ની દિશા થશે.

હવે, $\overrightarrow{PQ}$ = $\overrightarrow{AB}$ નો $\overrightarrow{PQ}$ પરનો પ્રક્ષેપ.

$$\therefore \quad \overrightarrow{PQ} = \left[\frac{|(\bar{b} - \bar{a}) \cdot (\bar{l} \times \bar{m})|}{|\bar{l} \times \bar{m}|}\right]\left[\frac{\bar{l} \times \bar{m}}{|\bar{l} \times \bar{m}|}\right]$$

$$\therefore \quad PQ = \frac{|(\bar{b} - \bar{a}) \cdot (\bar{l} \times \bar{m})|}{|\bar{l} \times \bar{m}|}$$

$$PQ = \frac{|\bar{b} - \bar{a}||\bar{l} \times \bar{m}|\cos\alpha}{|\bar{l} \times \bar{m}|}$$ જ્યાં, $\alpha = ((\bar{b} - \bar{a}), \hat{\ } (\bar{l} \times \bar{m}))$

$$= |\bar{b} - \bar{a}|\,|\cos\alpha|$$

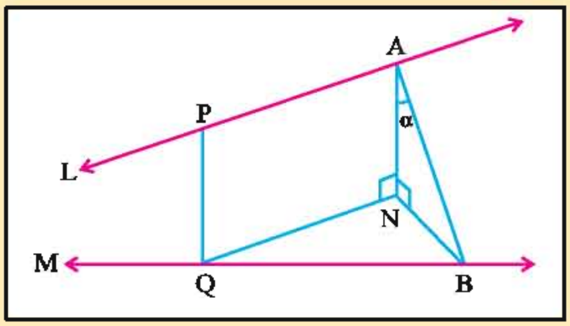
$\therefore$ $PQ \leq |\bar{b} - \bar{a}|$ $(|\cos\alpha| \leq 1)$

$\therefore$ અંતર PQ એ L તથા M પરના કોઈપણ બે બિંદુની જોડ વચ્ચેના અંતર કરતાં ઓછું અથવા તેને સમાન છે.

$\therefore$ PQ ને L તથા M વચ્ચેનું ન્યૂનતમ અંતર કહે છે.

આમ, L અને M વચ્ચેનું લંબઅંતર અથવા ન્યૂનતમ અંતર $PQ = \dfrac{|(\bar{b} - \bar{a}) \cdot (\bar{l} \times \bar{m})|}{|\bar{l} \times \bar{m}|}$.

$\overleftrightarrow{PQ}$ તથા L છેદતી રેખા છે. આથી તેમને સમાવતું સમતલ π છે. આ સમતલમાં □ PANQ લંબચોરસ છે.



AN = PQ

$\overleftrightarrow{AN}$ તથા $\overleftrightarrow{PQ}$ સમાંતર છે.

$\overleftrightarrow{PQ}$ તથા $\overleftrightarrow{AB}$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ α હોય તો $\overleftrightarrow{AB}$ તથા $\overleftrightarrow{AN}$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ α હોય.

હવે $\overleftrightarrow{AN}$ તથા $\overleftrightarrow{AB}$ ને સમાવતા સમતલમાં

$AN = AB \cos\alpha$ કારણ કે ΔANB માં

$m\angle ANB = \frac{\pi}{2}$

($\because$ $\overline{AN} \perp \overline{QN}$ તથા $\overline{AN} \perp \overline{QB}$ હોવાથી $\overline{AN}$ એ $\overline{QN}$ તથા $\overline{QB}$ ને સમાવતા સમતલને લંબ છે.)

$\therefore$ PQ = AN = | AB $\cos \alpha$ |

$$= \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot (\bar{l} \times \bar{m})|}{|\bar{l} \times \bar{m}|} = \frac{|(\bar{b} - \bar{a}) \cdot (\bar{l} \times \bar{m})|}{|\bar{l} \times \bar{m}|}$$

ઉદાહરણ 12 : રેખાઓ $\bar{r} = (1, 1, 0) + k(2, -1, 1), k \in R$ અને $\bar{r} = (2, 1, -1) + k(3, -5, 2), k \in R$ વચ્ચેનું ટૂંકામાં ટૂંકું અંતર શોધો.

ઉકેલ : અહીં $\bar{a} = (1, 1, 0)$; $\bar{l} = (2, -1, 1)$ અને $\bar{b} = (2, 1, -1)$; $\bar{m} = (3, -5, 2)$

$\bar{b} - \bar{a} = (1, 0, -1)$

$$(\bar{b} - \bar{a}) \cdot (\bar{l} \times \bar{m}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1(3) - 1(-7) = 10 \neq 0$$

$\therefore$ આપેલ રેખાઓ વિષમતલીય છે.

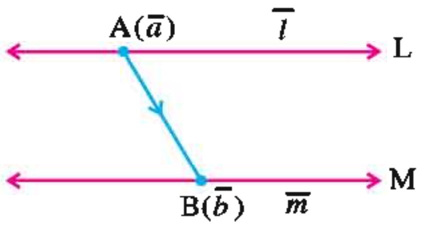
હવે, $\bar{l} = (2, -1, 1)$ અને $\bar{m} = (3, -5, 2)$

$\therefore$ $\bar{l} \times \bar{m} = (3, -1, -7)$

$\therefore$ $|\bar{l} \times \bar{m}| = \sqrt{9+1+49} = \sqrt{59}$, $(\bar{b} - \bar{a}) \cdot (\bar{l} \times \bar{m}) = 3 + 0 + 7 = 10$

$\therefore$ તેમની વચ્ચેનું ટૂંકામાં ટૂંકું અંતર $= \dfrac{|(\bar{b} - \bar{a}) \cdot (\bar{l} \times \bar{m})|}{|\bar{l} \times \bar{m}|} = \dfrac{10}{\sqrt{59}}$

7.9 R^3 ની રેખાઓ વચ્ચેના પરસ્પર સંબંધ



આકૃતિ 7.8

ધારો કે, L : $\bar{r} = \bar{a} + k\bar{l}$, $k \in R$ અને

M : $\bar{r} = \bar{b} + k\bar{m}$, $k \in R$ બે રેખાઓ છે.

જો $\bar{l} \times \bar{m} = \bar{0}$, તો L $\parallel$ M અથવા L અને M સંપાતી છે.

ધારો કે $\overrightarrow{AB}$ અને $\bar{l}$ અસમરેખ સદિશો છે.

$\therefore$ $\overrightarrow{AB} \times \bar{l} = (\bar{b} - \bar{a}) \times \bar{l} \neq \bar{0}$

આથી ઉલટું, જો $\overrightarrow{AB} \times \bar{l} = (\bar{b} - \bar{a}) \times \bar{l} \neq \bar{0}$, તો $\overrightarrow{AB}$ અને $\bar{l}$ અસમરેખ છે.

$\therefore$ L $\parallel$ M કારણ કે L અને M ની દિશા સમાન છે.

આમ જો $(\bar{b} - \bar{a}) \times \bar{l} \neq 0$ તથા $\bar{l} \times \bar{m} = \bar{0}$ તો L $\parallel$ M

પરંતુ જો $(\bar{b} - \bar{a}) \times \bar{l} = \bar{0}$, તો L અને M સમાંતર નથી. તેથી L અને M સંપાતી છે.

તેથી જો $\bar{l} \times \bar{m} = \bar{0}$, $(\bar{b} - \bar{a}) \times \bar{l} = \bar{0}$, તો L અને M સંપાતી રેખાઓ છે.

જો $\bar{l} \times \bar{m} = \bar{0}$, $(\bar{b} - \bar{a}) \times \bar{l} \neq \bar{0}$, તો L અને M સમાંતર રેખાઓ છે.

R^3 ની આપેલી બે રેખાઓ વચ્ચે ક્યા પ્રકારના સંબંધ છે ? તેઓ સમાંતર છે અથવા છેદક રેખાઓ છે અથવા સંપાતી છે અથવા વિષમતલીય છે. આપણે આ પ્રકરણમાં અત્યાર સુધી ચર્ચેલ મુદ્દાઓ પર આધારિત પૃષ્ઠ 240 પર દર્શાવેલ કોષ્ટક પરથી આ બાબત નક્કી કરી શકીશું.

$L : \overline{r} = \overline{a} + k\overline{l},\ k \in R$

$M : \overline{r} = \overline{b} + k\overline{m},\ k \in R$

$\overline{l} \times \overline{m}$ શોધો.

- $\overline{l} \times \overline{m} = \overline{0}$
  - $(\overline{b} - \overline{a}) \times \overline{l} \neq \overline{0}$ — L અને M સમાંતર રેખાઓ છે.
  - $(\overline{b} - \overline{a}) \times \overline{l} = \overline{0}$ — L અને M સંપાતી રેખાઓ છે.
- $\overline{l} \times \overline{m} \neq \overline{0}$
  - $(\overline{b} - \overline{a}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m}) \neq 0$ — L અને M વિષમતલીય રેખાઓ છે.
  - $(\overline{b} - \overline{a}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m}) = 0$ — L અને M છેદક રેખાઓ છે.

ઉદાહરણ 13 : નીચે આપેલી રેખાઓ વચ્ચેના સંબંધ (એટલે કે વિષમતલીય, સમાંતર, સંપાતી અને છેદક) નક્કી કરો.

(1) $\overline{r} = (2, -5, 1) + k(3, 2, 6),\ k \in R$ અને $\frac{x-7}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+6}{2}$

(2) $\frac{2x-4}{1} = \frac{3-y}{3} = \frac{z}{1}$ અને $\overline{r} = (1, 1, -1) + k(1, -6, 2),\ k \in R$

(3) $\overline{r} = (1, -2, -3) + k(-1, 1, -2),\ k \in R$ અને $\overline{r} = (4, -2, -1) + k(1, 2, -2),\ k \in R$

(4) $\overline{r} = (3 + t)\hat{i} + (1 - t)\hat{j} + (-2 - 2t)\hat{k},\ t \in R$ અને $x = 4 + k,\ y = -k,\ z = -4 - 2k,\ k \in R$

ઉકેલ : (1) $\overline{a} = (2, -5, 1),\ \overline{l} = (3, 2, 6)$ અને

$\overline{b} = (7, 0, -6);\ \overline{m} = (1, 2, 2)$

$\overline{b} - \overline{a} = (5, 5, -7)$

$\overline{l} \times \overline{m} = (-8, 0, 4) \neq \overline{0}$ અને $(\overline{b} - \overline{a}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m}) = (5, 5, -7) \cdot (-8, 0, 4)$

$= -40 - 28 = -68 \neq 0$

$\therefore$ આપેલ રેખાઓ વિષમતલીય રેખાઓ છે.

(2) પ્રથમ રેખાનું સમીકરણ $\frac{x-2}{\frac{1}{2}} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z}{1}$ છે.

$\therefore\ \overline{a} = (2, 3, 0);\ \overline{l} = (\frac{1}{2}, -3, 1)$ એટલે કે l ની દિશા $(1, -6, 2)$ ની દિશા છે.

$\overline{b} = (1, 1, -1);\quad \overline{m} = (1, -6, 2)$

$(\overline{b} - \overline{a}) = (-1, -2, -1)$

હવે, $\overline{l} \times \overline{m} = (0, 0, 0) = \overline{0}$ અને $(\overline{b} - \overline{a}) \times \overline{m} = (-1, -2, -1) \times (1, -6, 2) = (-10, 1, 8) \neq \overline{0}$

$\therefore$ આપેલ રેખાઓ સમાંતર છે.

(3) $\overline{a} = (1, -2, -3);\ \overline{l} = (-1, 1, -2)$

$\overline{b} = (4, -2, -1);\ \overline{m} = (1, 2, -2)$

$(\overline{b} - \overline{a}) = (3, 0, 2)$

હવે, $\overline{l} \times \overline{m} = (2, -4, -3) \neq \overline{0}$ અને $(\overline{b} - \overline{a}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m}) = (3, 0, 2) \cdot (2, -4, -3)$

$= 6 + 0 - 6 = 0$

$\therefore$ આપેલ રેખાઓ એ છેદક રેખાઓ છે.

(4) $\overline{a} = (3, 1, -2);\ \overline{l} = (1, -1, -2)$ અને

$\overline{b} = (4, 0, -4);\ \overline{m} = (1, -1, -2)$

$(\overline{b} - \overline{a}) = (1, -1, -2)$

હવે, $\overline{l} \times \overline{m} = (0, 0, 0) = \overline{0}$ અને $(\overline{b} - \overline{a}) \times \overline{l} = (1, -1, -2) \times (1, -1, -2) = \overline{0}$

$\therefore$ આપેલ રેખાઓ સંપાતી રેખાઓ છે.

સ્વાધ્યાય 7.1

1. (2, −1, 3) માંથી પસાર થતી અને $2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ દિશાવાળી રેખાનું સદિશ તેમજ કાર્તેઝીય સમીકરણ મેળવો.

2. (2, 3, −9) અને (4, 3, −5) માંથી પસાર થતી રેખાનું સંમિત સ્વરૂપે અને સદિશ સ્વરૂપે સમીકરણ મેળવો.

3. (0, 1, 1), (0, 4, 4) અને (2, 0, 1) સમરેખ છે ? શા માટે ?

4. રેખા $x = 4z + 3$, $y = 2 - 3z$ની દિક્‌કોસાઇન શોધો.

5. (1, −2, 1) માંથી પસાર થતી અને રેખાઓ $x + 3 = 2y = -12z$ તથા $\frac{x}{2} = \frac{y+6}{2} = \frac{3z-9}{1}$ બંનેને લંબરેખાનું સદિશ તેમજ કાર્તેઝીય સમીકરણ મેળવો.

6. સાબિત કરો કે રેખાઓ L : $\frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{-1}$, $z + 1 = 0$ અને M : $\{(4 + 2k, 0, -1 + 3k) \mid k \in R\}$ એકબીજીને છેદે છે. તેમનું છેદબિંદુ પણ શોધો.

7. રેખાઓ $\overline{r} = (1, 2, 1) + k(2, 3, -1)$, $k \in R$ અને $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{3}$, $z = 3$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.

8. સાબિત કરો કે (2, 1, −1) અને (−2, 3, 4)થી પસાર થતી રેખા એ (9, 7, 8) અને (11, 6, 10) માંથી પસાર થતી રેખાને લંબ છે.

9. નીચેની રેખાઓ સમાંતર, છેદક, વિષમતલીય કે સંપાતી છે તે નક્કી કરો :

   (1) $\overline{r} = (1, 2, -3) + k(3, -2, 1)$, $k \in R$ અને $\frac{x-1}{2} = \frac{3-y}{2} = \frac{z-5}{-1}$.

   (2) $\frac{x-5}{-2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{4}$ અને $\frac{x-2}{1} = \frac{3-y}{-1} = \frac{z+2}{-2}$.

   (3) $x = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{3}$ અને $\{(2, 1 + 3k, 2 + k) \mid k \in R\}$.

   (4) $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-1}{2}$ અને $x = 1 + 2t$, $y = t$, $z = 4 + 5t$, $t \in R$.

   (5) $\frac{x-4}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{3}$ અને $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-2}{-6}$.

10. સાબિત કરો કે રેખાઓ $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{5}$ અને $\frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-2}$ વિષમતલીય છે. તેમના વચ્ચેનું લઘુત્તમ અંતર શોધો.

11. બિંદુ (−5, 3, 4) નું રેખા $\frac{x+2}{-4} = \frac{y-6}{5} = \frac{z-5}{3}$ થી લંબઅંતર શોધો.

12. રેખાઓ $x = 3 - 2k$, $y = k$, $z = 3 - k$, $k \in R$ અને $x = 2k - 3$, $y = 2 - k$, $z = 7 + k$, $k \in R$ વચ્ચેનું લંબઅંતર શોધો.

*

7.10 સમતલ

આપણે આગળના ધોરણોમાં સમતલ વિશેની જે પૂર્વધારણાઓનો અભ્યાસ કરેલો તેમને યાદ કરી લઈએ.

(1) ત્રણ ભિન્ન અસમરેખ બિંદુઓ અનન્ય સમતલ નિશ્ચિત કરે છે.

(2) બે સમાંતર રેખાઓ એક અનન્ય સમતલ નિશ્ચિત કરે છે.

(3) અનન્ય બિંદુમાં છેદતી બે રેખાઓ એક અનન્ય સમતલ નિશ્ચિત કરે છે.

ત્રણ ભિન્ન અસમરેખ બિંદુમાંથી પસાર થતું સમતલ :

ધારોકે $A(\overline{a})$, $B(\overline{b})$, $C(\overline{c})$ એ R^3 નાં ત્રણ ભિન્ન અસમરેખ બિંદુઓ છે.

$\therefore$ A, B, C બિંદુઓ એક અનન્ય સમતલ π નિશ્ચિત કરે છે.

ધારો કે $P(\overline{r})$ સમતલ π પરનું A સિવાયનું કોઈપણ બિંદુ છે.

$\therefore$ $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ સમતલીય છે.

$\therefore$ $\overrightarrow{AP}$ એ $\overrightarrow{AB}$ અને $\overrightarrow{AC}$ નું સુરેખ સંયોજન છે.

$\therefore$ $\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$, જ્યાં $m, n \in R$ તથા $m^2 + n^2 \neq 0$.

$\therefore$ $\overline{r} - \overline{a} = m(\overline{b} - \overline{a}) + n(\overline{c} - \overline{a})$

જો $\overline{r} = \overline{a}$, તો $A(\overline{a}) \in \pi$ તથા $m = n = 0$

$\therefore$ $\overline{r} = \overline{a} + m(\overline{b} - \overline{a}) + n(\overline{c} - \overline{a})$, $m, n \in R$ **(i)**

આથી ઉલટું, જો $P(\overline{r})$ એ

$\overline{r} - \overline{a} = m(\overline{b} - \overline{a}) + n(\overline{c} - \overline{a})$,

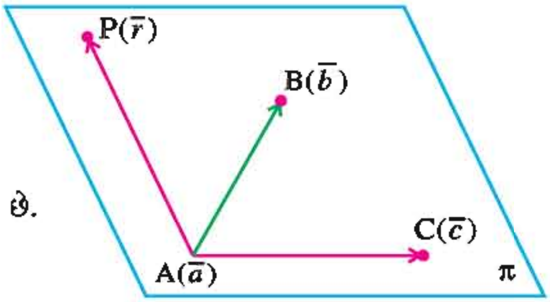
$m, n \in R$, $m^2 + n^2 \neq 0$ નું

સમાધાન કરે, તો $\overrightarrow{AP} = m(\overrightarrow{AB}) + n(\overrightarrow{AC})$

$\overrightarrow{AB}$ અને $\overrightarrow{AC}$ જે સમતલમાં છે, તે સમતલમાં $\overrightarrow{AP}$ આવેલો છે.

A એ સમતલ π માં છે. તેથી $P \in \pi$.

જો $m = n = 0$, તો $\overline{r} = \overline{a}$ એટલે કે $P = A \in \pi$.



આકૃતિ 7.9

આમ જો $P(\overline{r}) \in \pi$ તો અને તો જ $\overline{r}$ એ સમીકરણ (i)નું સમાધાન કરે.

$A(\overline{a})$, $B(\overline{b})$ અને $C(\overline{c})$ થી નિશ્ચિત થતા સમતલ π નું સમીકરણ

$\overline{r} = \overline{a} + m(\overline{b} - \overline{a}) + n(\overline{c} - \overline{a})$ $m, n \in R$ છે.

વળી, જો $P(\overline{r}) \in \pi$ તો $\overline{r} = (1 - m - n)\overline{a} + m\overline{b} + n\overline{c}$.

$1 - m - n = l$ એટલે કે $l + m + n = 1$ લેતાં,

$\therefore$ $\overline{r} = l\overline{a} + m\overline{b} + n\overline{c}$, જ્યાં $l, m, n \in R$ અને $l + m + n = 1$.

એ ભિન્ન અસમરેખ બિંદુઓ $A(\overline{a})$, $B(\overline{b})$ અને $C(\overline{c})$ માંથી પસાર થતા સમતલનું સદિશ સમીકરણ છે.

સમતલનાં પ્રચલ સમીકરણો :

ધારો કે $P(x, y, z)$ ભિન્ન અસમરેખ બિંદુઓ $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ અને $C(x_3, y_3, z_3)$ માંથી પસાર થતા સમતલનું કોઈપણ બિંદુ છે.

$\therefore$ $\overline{r} = l\overline{a} + m\overline{b} + n\overline{c}$ $\quad l, m, n \in R$ અને $l + m + n = 1$.

$\therefore$ $(x, y, z) = l(x_1, y_1, z_1) + m(x_2, y_2, z_2) + n(x_3, y_3, z_3)$

$\therefore$ $x = lx_1 + mx_2 + nx_3$

$y = ly_1 + my_2 + ny_3$

$z = lz_1 + mz_2 + nz_3$ જ્યાં $l, m, n \in R$ તથા $l + m + n = 1$

આ બિંદુઓ A, B, C માંથી પસાર થતા સમતલનાં પ્રચલ સમીકરણો છે. અહીં l, m, n પ્રચલ છે.

સમતલના સમીકરણનાં અન્ય સ્વરૂપ :

ભિન્ન અસમરેખ બિંદુઓ $A(\overline{a})$, $B(\overline{b})$ અને $C(\overline{c})$ એક સમતલ π નક્કી કરે છે.

$P(\overline{r}) \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ સમતલીય છે. **($P \neq A$)**

$\Leftrightarrow (\overline{r} - \overline{a}), (\overline{b} - \overline{a}), (\overline{c} - \overline{a})$ સમતલીય છે. **($P \neq A$)**

$\Leftrightarrow (\overline{r} - \overline{a}) \cdot [(\overline{b} - \overline{a}) \times (\overline{c} - \overline{a})] = 0$ **(ii)**

વળી, જો $\overline{r} = \overline{a}$, તો $\overline{r} - \overline{a} = \overline{0}$.

$\therefore$ $P(\overline{r}) \in \pi \Leftrightarrow (\overline{r} - \overline{a}) \cdot [(\overline{b} - \overline{a}) \times (\overline{c} - \overline{a})] = 0$

આમ, અસમરેખ બિંદુઓ A, B, C માંથી પસાર થતા સમતલનું સદિશ સમીકરણ

$(\overline{r} - \overline{a}) \cdot [(\overline{b} - \overline{a}) \times (\overline{c} - \overline{a})] = 0$ છે.

કાર્તેઝીય સ્વરૂપ (અદિશ સ્વરૂપ) :

$\overline{r} = (x, y, z)$, $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$ અને $\overline{c} = (x_3, y_3, z_3)$ લેતાં,

$\therefore$ **સમીકરણ $(\overline{r} - \overline{a}) \cdot [(\overline{b} - \overline{a}) \times (\overline{c} - \overline{a})] = 0$ નું સ્વરૂપ**

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

આ (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) અને (x_3, y_3, z_3) માંથી પસાર થતા સમતલનું **કાર્તેઝીય અથવા અદિશ સ્વરૂપમાં (Scalar Form)** સમીકરણ છે.

R^3 ના ચાર બિંદુઓ સમતલીય હોવાની શરત :

ધારો કે $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ અને $D(x_4, y_4, z_4)$ એ R^3 નાં બિંદુઓ છે.

A, B, C, D સમતલીય છે $\Leftrightarrow$ D એ A, B, C માંથી પસાર થતા સમતલ પર છે.

$\Leftrightarrow D(x_4, y_4, z_4)$ એ સમીકરણ $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$ નું સમાધાન કરે છે.

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

આમ, $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4, y_4, z_4)$ સમતલીય હોય તો અને તો જ

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

ઉદાહરણ 14 : શક્ય હોય, તો $A(-6, 0, 7)$, $B(1, 2, 2)$ અને $C(3, -5, -4)$માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : સૌપ્રથમ A, B, C સમરેખ છે કે કેમ, તે ચકાસીએ.

$$\begin{vmatrix} -6 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -5 & -4 \end{vmatrix} = -6(2) + 7(-11) = -89 \neq 0$$

$\therefore$ A, B, C અસમરેખ છે.

$\therefore$ જેના સભ્ય A, B, C હોય તેવું અનન્ય સમતલ મળે.

હવે A, B, C માંથી પસાર થતા સમતલનું કાર્તેઝીય સમીકરણ

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} x+6 & y-0 & z-7 \\ 1+6 & 2-0 & 2-7 \\ 3+6 & -5-0 & -4-7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} x+6 & y & z-7 \\ 7 & 2 & -5 \\ 9 & -5 & -11 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore \quad (x + 6)(-47) - y(-32) + (z - 7)(-53) = 0$

$\therefore \quad -47x - 282 + 32y - 53z + 371 = 0$

$\therefore \quad -47x + 32y - 53z + 89 = 0$

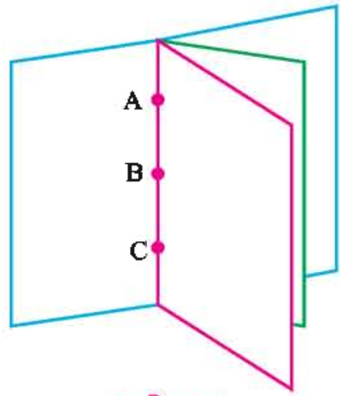
$\therefore \quad 47x - 32y + 53z - 89 = 0$ એ A, B, C માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ છે.

ઉદાહરણ 15 : A(4, −2, −1), B(5, 0, −3) અને C(3, −4, 1) અનન્ય સમતલ પસાર થાય છે ? જો થાય, તો તેનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : ચાલો, આપણે પ્રથમ બિંદુઓની સમરેખતા ચકાસીએ.

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 5 & 0 & -3 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 4(-12) + 2(14) - 1(-20)$$

$$= -48 + 28 + 20 = 0$$



આકૃતિ 7.10

પરંતુ આ શરત સમરેખતા માટે પર્યાપ્ત નથી. તેથી આપણે

$(\bar{c} - \bar{a}) \times (\bar{b} - \bar{a}) = \bar{0}$ શરત ચકાસીએ.

$\therefore \quad \bar{c} - \bar{a} = (-1, -2, 2)$

$\bar{b} - \bar{a} = (1, 2, -2) = -(\bar{c} - \bar{a})$

$\therefore \quad (\bar{c} - \bar{a}) \times (\bar{b} - \bar{a}) = \bar{0}$

$\therefore$ A, B, C સમરેખ છે.

$\therefore$ A, B, C માંથી પસાર થતું અનન્ય સમતલ ન મળે.

ઉદાહરણ 16 : સાબિત કરો કે બિંદુઓ A(1, 0, 2), B(−1, 2, 0), C(2, 3, 11) અને D(1, −3, −4) સમતલીય છે.

ઉકેલ : $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix} = -2(9) - 2(-6) - 2(-3)$

$$= -18 + 12 + 6 = 0$$

$\therefore$ A, B, C, D સમતલીય બિંદુઓ છે.

7.11 સમતલના અંતઃખંડ

જો સમતલ π યામાક્ષોને બિંદુઓ $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ અને $C(0, 0, c)$ માં છેદે, તો a, b, c ને અનુક્રમે સમતલ π ના X-અંતઃખંડ, Y-અંતઃખંડ અને Z-અંતઃખંડ કહે છે.

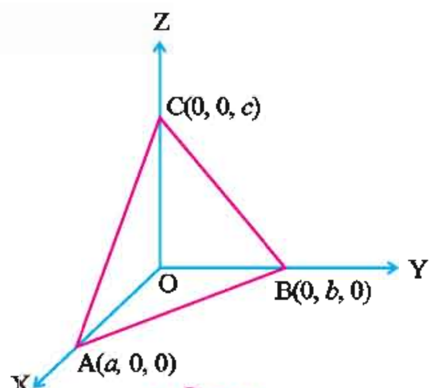
જો સમતલ π એ X-અક્ષને છેદે નહીં તો સમતલ π નો X-અંતઃખંડ વ્યાખ્યાયિત નથી. તે જ પ્રમાણે Y-અક્ષ અને Z-અક્ષ સાથે સમતલના છેદ માટે પણ કહી શકાય.

અક્ષો પર અંતઃખંડ a, b, c બનાવતા સમતલનું સમીકરણ :

ધારો કે સમતલ π, X-અક્ષ સાથે a, Y-અક્ષ સાથે b અને Z-અક્ષ સાથે c અંતઃખંડ બનાવે છે. (જ્યાં $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$).

$\therefore$ $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ અને $C(0, 0, c)$ એ સમતલ π નાં બિંદુઓ છે.

સહજ રીતે કહી શકાય કે, A, B, C અસમરેખ છે. **(શા માટે ?)**



આકૃતિ 7.11

$\therefore$ A, B, C માંથી પસાર થતા સમતલ π નાં પ્રચલ સમીકરણો

$$\left.\begin{aligned} \therefore \quad x &= lx_1 + mx_2 + nx_3 = la \\ y &= ly_1 + my_2 + ny_3 = mb \\ z &= lz_1 + mz_2 + nz_3 = nc \end{aligned}\right\} \quad \text{જ્યાં } l, m, n \in R, l + m + n = 1$$

$\therefore \quad l = \frac{x}{a}, m = \frac{y}{b}, n = \frac{z}{c}$

હવે, $l + m + n = 1$.

$\therefore \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ એ a, b અને c અંતઃખંડોવાળા સમતલનું સમીકરણ છે. $(abc \neq 0)$

બીજી રીત :

$A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ માંથી પસાર થતા સમતલના કાર્તેઝીય સમીકરણનો ઉપયોગ કરતાં,

$\begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ 0-a & b-0 & 0-0 \\ 0-a & 0-0 & c-0 \end{vmatrix} = 0$ એ A, B, C માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ છે.

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore \quad (x - a)bc - y(-ac) + z(ab) = 0$

$\therefore \quad bcx - abc + acy + abz = 0$

$\therefore \quad bcx + acy + abz = abc$

$\therefore \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ એ a, b, c અંતઃખંડોવાળા સમતલનું સમીકરણ છે. $(abc \neq 0)$

ઉદાહરણ 17 : X-અંતઃખંડ 4, Y-અંતઃખંડ -6 અને Z-અંતઃખંડ 3 બનાવતા સમતલનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, $a = 4$, $b = -6$, $c = 3$ આપેલાં છે.

સમતલનું સમીકરણ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ છે.

$\therefore \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{-6} + \frac{z}{3} = 1$

$\therefore \quad 3x - 2y + 4z = 12$ એ જેનો X-અંતઃખંડ 4, Y-અંતઃખંડ -6 અને Z-અંતઃખંડ 3 હોય તેવા સમતલનું સમીકરણ છે.

ઉદાહરણ 18 : સમતલ $2x - 3y + 5z = 15$ ના યામાક્ષો પરના અંતઃખંડ શોધો.

ઉકેલ : સમતલનું સમીકરણ $2x - 3y + 5z = 15$

$\therefore \quad \frac{x}{\frac{15}{2}} + \frac{y}{-5} + \frac{z}{3} = 1$ (બંને બાજુએ 15 વડે ભાગતાં)

$\therefore$ આ સમીકરણને $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, સાથે સરખાવતાં X-અંતઃખંડ $= \frac{15}{2}$, Y-અંતઃખંડ $= -5$, Z-અંતઃખંડ $= 3$.

ઉદાહરણ 19 : સમતલ $3y + 2z = 12$ ના અક્ષો પરના અંતઃખંડ શોધો.

ઉકેલ : સમતલના સમીકરણ $3y + 2z = 12$ ની બંને બાજુને 12 વડે ભાગતાં,

$\frac{y}{4} + \frac{z}{6} = 1$ મળે.

હવે $\frac{y}{4} + \frac{z}{6} = 1$ ને $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ સાથે સરખાવતાં,

X-અંતઃખંડ અવ્યાખ્યાયિત છે, Y-અંતઃખંડ $= 4$ અને Z-અંતઃખંડ $= 6$ છે.

બીજી રીત :

સમતલનું સમીકરણ $3y + 2z = 12$ છે.

તે X-અક્ષને જે બિંદુએ છેદે તે શોધવા માટે $y = 0 = z$.

$\therefore$ પરંતુ $0 + 0 = 12$ સત્ય નથી.

$\therefore$ $3y + 2z = 12$ એ X-અક્ષને છેદશે નહીં.

$\therefore$ X-અંતઃખંડ મળશે નહીં.

Y-અંતઃખંડ શોધવા માટે $x = 0 = z$ લેતાં,

$\therefore$ $3y = 12$

$\therefore$ $y = 4$

$\therefore$ Y-અંતઃખંડ 4 છે.

Z-અંતઃખંડ શોધવા માટે $x = y = 0$ લેતાં,

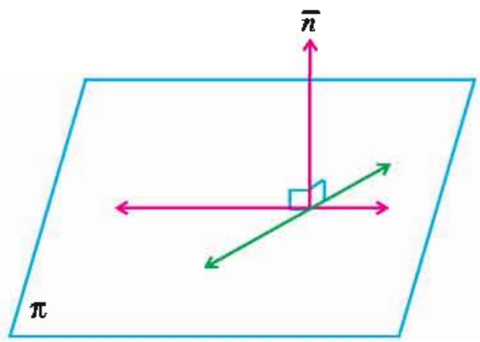
$\therefore$ $2z = 12$

$\therefore$ $z = 6$

$\therefore$ Z-અંતઃખંડ 6 છે.

7.12 સમતલનો અભિલંબ

સમતલ π માં આવેલી પ્રત્યેક રેખાને લંબ હોય તેવી રેખાની દિશામાં આવેલા સદિશને સમતલનો અભિલંબ કહે છે. મહદંશે આપણે સમતલના અભિલંબને $\bar{n}$ વડે અથવા $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3, \ldots$ વડે દર્શાવીશું.



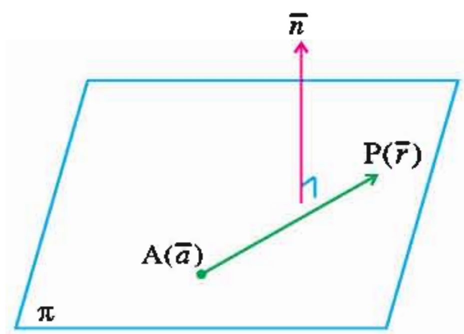
આકૃતિ 7.12

$A(\bar{a})$ માંથી પસાર થતા અને $\bar{n}$ અભિલંબવાળા સમતલનું સદિશ સમીકરણ :

ધારો કે સમતલ π એ $A(\bar{a})$માંથી પસાર થાય છે અને તેનો અભિલંબ $\bar{n}$ છે.

ધારો કે $P(\bar{r})$ એ સમતલનું કોઈપણ બિંદુ છે.

$$\therefore P(\bar{r}) \in \pi, P \neq A \Rightarrow \overrightarrow{AP} \in \pi$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AP} \perp \bar{n}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AP} \cdot \bar{n} = 0$$
$$\Rightarrow (\bar{r} - \bar{a}) \cdot \bar{n} = 0$$



આકૃતિ 7.13

જો $P = A$, તો $\bar{r} = \bar{a}$ અને તેથી $(\bar{r} - \bar{a}) \cdot \bar{n} = 0$

$\therefore$ $\forall P(\bar{r}) \in \pi, (\bar{r} - \bar{a}) \cdot \bar{n} = 0$

આથી ઉલટું, જો $P(\bar{r})$ એ અવકાશનું એવું બિંદુ હોય કે જેથી $(\bar{r} - \bar{a}) \cdot \bar{n} = 0$, તો $\overrightarrow{AP} \perp \bar{n}$.

$A \in \pi$ હોવાથી $P \in \pi$.

$$\text{આમ, } P(\bar{r}) \in \pi \Leftrightarrow (\bar{r} - \bar{a}) \cdot \bar{n} = 0$$
$$\Leftrightarrow \bar{r} \cdot \bar{n} = \bar{a} \cdot \bar{n}$$

$\therefore$ $A(\bar{a})$માંથી પસાર થતા અને $\bar{n}$ અભિલંબવાળા સમતલનું સદિશ સમીકરણ $\bar{r} \cdot \bar{n} = \bar{a} \cdot \bar{n}$ છે.

$\bar{a} \cdot \bar{n} = d$ લેતાં,

$\therefore$ સમીકરણ $\bar{r} \cdot \bar{n} = \bar{a} \cdot \bar{n}$ એ $\bar{r} \cdot \bar{n} = d$ માં પરિવર્તિત થશે.

કાર્તેઝીય સ્વરૂપ :

$\overline{r} = (x, y, z)$, $\overline{n} = (a, b, c)$ અને $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$ લેતાં,

$\therefore$ $\overline{r} \cdot \overline{n} = d$ એ $(x, y, z) \cdot (a, b, c) = d$ બનશે જ્યાં $d = \overline{a} \cdot \overline{n} = ax_1 + by_1 + cz_1$.

$\therefore$ જેનો અભિલંબ $\overline{n} = (a, b, c)$ હોય તેવા સમતલનું કાર્તેઝીય સમીકરણ $ax + by + cz = d$ છે.

$a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, કારણ કે $\overline{n} \neq \overline{0}$.

> **નોંધ :** સમતલના સમીકરણમાં x, y, z ના સહગુણકોથી બનતો ક્રમિક ત્રય એ સમતલનો અભિલંબ $\overline{n}$ દર્શાવે છે.

ઉદાહરણ 20 : $(4, 5, -1)$માંથી પસાર થતા અને $3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ અભિલંબવાળા સમતલનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં $\overline{a} = (4, 5, -1)$, $\overline{n} = (3, -1, 1)$

$\therefore$ સમતલનું સમીકરણ $\overline{r} \cdot \overline{n} = \overline{a} \cdot \overline{n}$ પ્રમાણે $(x, y, z) \cdot (3, -1, 1) = (4, 5, -1) \cdot (3, -1, 1)$

$\therefore$ $3x - y + z = 12 - 5 - 1 = 6$

$\therefore$ $3x - y + z = 6$ એ $(4, 5, -1)$માંથી પસાર થતા અને $3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ અભિલંબવાળા સમતલનું સમીકરણ છે.

ઉદાહરણ 21 : સમતલ $2x - z + 1 = 0$ નો અભિલંબ તથા સમતલનું સદિશ સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : સમતલનું કાર્તેઝીય સમીકરણ $2x - z + 1 = 0$ છે.

$\therefore$ અભિલંબ $\overline{n} = (2, 0, -1)$ (નોંધ જુઓ)

$\therefore$ સમતલનું સદિશ સમીકરણ $\overline{r} \cdot \overline{n} = d$ એટલે $2x - z + 1 = (2, 0, -1) \cdot (x, y, z) + 1 = 0$

$\therefore$ સમતલનું સદિશ સમીકરણ $\overline{r} \cdot (2, 0, -1) + 1 = 0$

7.13 ઊગમબિંદુમાંથી સમતલ પરના લંબના ઉપયોગથી સમતલનું સમીકરણ

ધારો કે ઊગમબિંદુમાંથી સમતલ π પરનો લંબપાદ $N(\overline{n})$ છે.

ધારો કે $ON = p$

$\therefore$ $|\overline{n}| = p$.

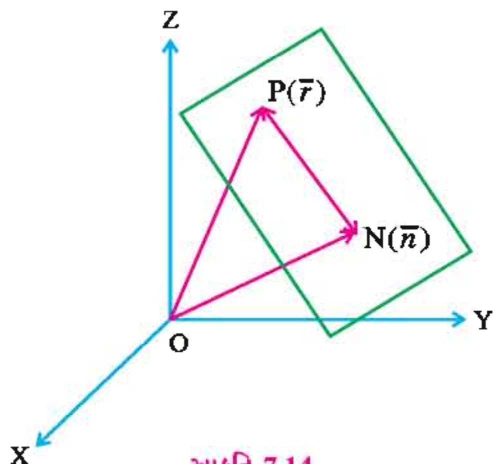
ધારો કે $\overline{n}$ ના દિક્ખૂણાઓ α, β, γ છે.

$\therefore$ $\overline{n}$ ની દિક્કોસાઇન $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ છે.

$\therefore$ $\overline{n}$ ની દિશાનો એકમ સદિશ

$$\hat{n} = \frac{\overline{n}}{|\overline{n}|} = \frac{\overline{n}}{p} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

$\therefore$ $\overline{n} = (p\cos\alpha, p\cos\beta, p\cos\gamma)$



આકૃતિ 7.14

ધારો કે $P(\overline{r})$ એ સમતલ π નું કોઈપણ બિંદુ છે.

વળી સમતલ $N(\overline{n})$માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore$ $\overline{a} = \overline{n} = (p\cos\alpha, p\cos\beta, p\cos\gamma)$

સમતલનું સમીકરણ $\overline{r} \cdot \overline{n} = \overline{a} \cdot \overline{n}$ એ

$(x, y, z) \cdot (p\cos\alpha, p\cos\beta, p\cos\gamma) = p^2$ (અહીં $\overline{a} \cdot \overline{n} = \overline{n} \cdot \overline{n} = |\overline{n}|^2 = p^2$)

$\therefore$ જેના અભિલંબના દિક્ખૂણા α, β, γ હોય તથા અભિલંબની લંબાઈ p હોય તેવા સમતલનું સમીકરણ $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$ છે.

> **નોંધ :** જો સમતલનું સમીકરણ $ax + by + cz = d$ સ્વરૂપમાં હોય અને આ સમીકરણને $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$, સ્વરૂપમાં ફેરવવું હોય, તો આપણે સમીકરણને $|\overline{n}|$ વડે ભાગીશું, જેથી સમીકરણ $\frac{a}{|\overline{n}|}x + \frac{b}{|\overline{n}|}y + \frac{c}{|\overline{n}|}z = \frac{d}{|\overline{n}|}$ થશે.

જો $d > 0$ તો $\overline{n} = (a, b, c)$ લઈએ કે જેથી $\frac{d}{|\overline{n}|} = p$ ધન થાય.

$\therefore \quad \frac{\overline{n}}{|\overline{n}|} = \left(\frac{a}{|\overline{n}|}, \frac{b}{|\overline{n}|}, \frac{c}{|\overline{n}|}\right) = \hat{n} = (cos\alpha, cos\beta, cos\gamma)$ અને $\frac{d}{|\overline{n}|} = p$

જો $d < 0$, તો $\overline{n} = (-a, -b, -c)$ લઈએ કે જેથી $\frac{-d}{|\overline{n}|} = p$ ધન થાય.

$-ax - by - cz = -d$

$\therefore \quad \frac{\overline{n}}{|\overline{n}|} = \left(\frac{-a}{|\overline{n}|}, \frac{-b}{|\overline{n}|}, \frac{-c}{|\overline{n}|}\right) = (cos\alpha, cos\beta, cos\gamma)$ અને $\frac{-d}{|\overline{n}|} = p$.

ઉદાહરણ 22 : ઊગમબિંદુમાંથી સમતલ $2x - 3y + 6z + 14 = 0$ પર દોરેલ લંબની લંબાઈ તથા લંબસદિશની દિક્કોસાઇન શોધો.

ઉકેલ : સમતલ π નું સમીકરણ $2x - 3y + 6z = -14$ છે. **(i)**

આપણે સમીકરણને $\frac{a}{|\overline{n}|}x + \frac{b}{|\overline{n}|}y + \frac{c}{|\overline{n}|}z = \frac{d}{|\overline{n}|}$ સ્વરૂપમાં ફેરવીશું.

અહીં $d = -14 < 0$.

સમીકરણને $-2x + 3y - 6z = 14$ ના સ્વરૂપમાં લખી શકાય કે જેથી $-d > 0$ થાય.

$\overline{n} = (-2, 3, -6)$ લેતાં, $|\overline{n}| = \sqrt{4+9+36} = 7$

$\therefore \quad p = \frac{-d}{|\overline{n}|} = \frac{14}{7} = 2, (cos\alpha, cos\beta, cos\gamma) = \left(\frac{-2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{-6}{7}\right)$

ઊગમબિંદુમાંથી દોરેલ લંબની લંબાઈ 2 અને લંબની દિક્કોસાઇન $\frac{-2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{-6}{7}$ થશે.

રેખા તથા સમતલનો છેદગણ :

ધારો કે સમીકરણ $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$, $k \in R$ રેખા દર્શાવે છે અને સમીકરણ $\overline{r} \cdot \overline{n} = d$ એ એક સમતલ દર્શાવે છે. $(\overline{n} \neq \overline{0})$

રેખા $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$ અને સમતલ $\overline{r} \cdot \overline{n} = d$ $(\overline{l} \neq \overline{0}, \overline{n} \neq \overline{0})$ ના છેદગણનો વિચાર કરીએ.

ધારો કે $\overline{l} = (l_1, l_2, l_3)$, $\overline{n} = (a, b, c)$, $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$

કોઈક $k_1 \in R$ માટે રેખા પરનું બિંદુ $\overline{r_1} = \overline{a} + k_1\overline{l}$ એ સમતલ પર પણ આવેલું હોય તો,

$(\overline{a} + k_1\overline{l}) \cdot \overline{n} = d$.

$\therefore \quad k_1(\overline{l} \cdot \overline{n}) = d - \overline{a} \cdot \overline{n}$ **(i)**

હવે,

(1) જો $\overline{l} \cdot \overline{n} = 0$ તથા $d - \overline{a} \cdot \overline{n} \neq 0$, તો (i) શક્ય નથી.

$\therefore \quad \overline{l} \cdot \overline{n} = 0$ તથા $ax_1 + by_1 + cz_1 \neq d$ તો રેખા તથા સમતલ એકબીજાને છેદશે નહિ તથા રેખા સમતલને સમાંતર છે તેમ કહીશું.

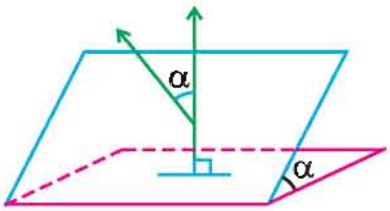
(2) જો $\overline{l} \cdot \overline{n} = 0$ તથા $d - \overline{a} \cdot \overline{n} = 0$ તો પ્રત્યેક $k_1 \in R$ માટે (i)નું સમાધાન થશે.
આ વિકલ્પમાં રેખા પરના બધાં બિંદુઓ સમતલમાં આવેલા છે.
આમ, $ax_1 + by_1 + cz_1 = d$ તથા $\overline{l} \cdot \overline{n} = 0$ તો રેખા સમતલમાં આવેલી છે.

(3) જો $\overline{l} \cdot \overline{n} \neq 0$ તો આપણને k_1 ની અનન્ય કિંમત મળે. $k_1 = \frac{d - \overline{a} \cdot \overline{n}}{\overline{l} \cdot \overline{n}}$ થાય.
આ વિકલ્પમાં રેખા પરનું બરાબર એક જ બિંદુ સમતલમાં હોય. એટલે કે રેખા સમતલને બરાબર એક જ બિંદુમાં છેદે છે.

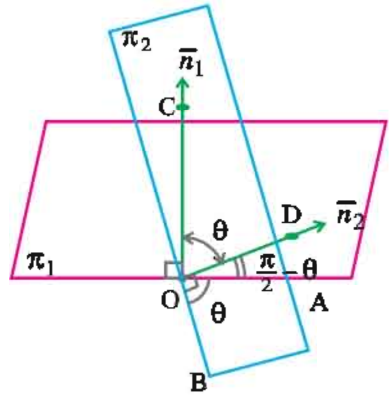
7.14 બે સમતલો વચ્ચેના ખૂણાનું માપ

બે સમતલોના અભિલંબ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ એ જ બે સમતલો વચ્ચેના ખૂણાનું માપ છે.

બે સદિશો વચ્ચેનો ખૂણો લઘુકોણ લઈએ છીએ તેથી બે સમતલ વચ્ચેનો ખૂણો પણ લઘુકોણ જ લઈશું.



આકૃતિ 7.15



આકૃતિ 7.16

આકૃતિ 7.16 એ બે અભિલંબ $\overline{n}_1$ અને $\overline{n}_2$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ θ દર્શાવે છે. એટલે કે $(\overline{n}_1, \widehat{\ } \ \overline{n}_2) = \theta = m\angle COD$

પરંતુ $m\angle COA = \frac{\pi}{2}$. તેથી $m\angle DOA = \frac{\pi}{2} - \theta$ થશે.

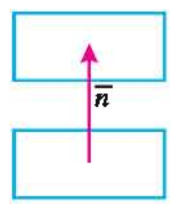
હવે $\overline{n}_2$ એ π_2 નો અભિલંબ છે તેથી $m\angle BOD = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ $m\angle AOB = \theta$, એ બે સમતલો વચ્ચે ખૂણાનું માપ છે.

ધારો કે $\pi_1 : \overline{r} \cdot \overline{n}_1 = d_1$ અને $\pi_2 : \overline{r} \cdot \overline{n}_2 = d_2$ આપેલા સમતલોનાં સમીકરણો છે.

(1) $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \overline{n}_1 \perp \overline{n}_2 \Leftrightarrow \overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2 = 0$

$\therefore$ π_1 અને π_2 વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\frac{\pi}{2}$ છે. $\Leftrightarrow \overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2 = 0$.



આકૃતિ 7.17

(2) જો બે સમતલો એકબીજાને છેદે નહીં તો તેઓ સમાંતર સમતલો કહેવાય. અહીં $\overline{n}_1$ તથા $\overline{n}_2$ ની દિશા સમાન છે.

$\therefore$ $\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \overline{n}_1 \times \overline{n}_2 = \overline{0}$

$\therefore$ π_1 તથા π_2 વચ્ચેના ખૂણાનું માપ 0 છે $\Leftrightarrow \overline{n}_1 \times \overline{n}_2 = \overline{0}$.

(3) ધારો કે સમતલો π_1 અને π_2 વચ્ચેના ખૂણાનું માપ θ છે તથા $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

$\therefore$ $\cos\theta = \dfrac{|\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2|}{|\overline{n}_1||\overline{n}_2|}$

$\therefore$ $\theta = \cos^{-1} \dfrac{|\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2|}{|\overline{n}_1||\overline{n}_2|}$

આ પરિણામ $\theta = 0$ અને $\frac{\pi}{2}$ માટે પણ સત્ય છે. (ચકાસો !)

જો સમતલનાં સમીકરણો $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ અને $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ સ્વરૂપમાં હોય તો $\overline{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ અને $\overline{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$. તેમની વચ્ચેના ખૂણાનું માપ

$$\theta = \cos^{-1} \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

ઉદાહરણ 23 : સમતલો $2x - y + z + 6 = 0$ અને $x + y + 2z - 3 = 0$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.

ઉકેલ : $\pi_1 : 2x - y + z + 6 = 0$. તેથી $\overline{n}_1 = (2, -1, 1)$

$\pi_2 : x + y + 2z - 3 = 0$. તેથી $\overline{n}_2 = (1, 1, 2)$

હવે, $\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2 = 2(1) + (-1)1 + 1(2) = 3$

$$|\overline{n}_1| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}, \quad |\overline{n}_2| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

$$\therefore \quad \theta = cos^{-1} \frac{|\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2|}{|\overline{n}_1||\overline{n}_2|} = cos^{-1} \frac{|3|}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = cos^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$\therefore$ આપેલા સમતલો વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\frac{\pi}{3}$ છે.

7.15 બે સમાંતર રેખાઓમાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ

ધારો કે $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$, $k \in R$ અને $\overline{r} = \overline{b} + k\overline{l}$, $k \in R$

બે સમાંતર રેખાઓનાં સદિશ સમીકરણ છે.

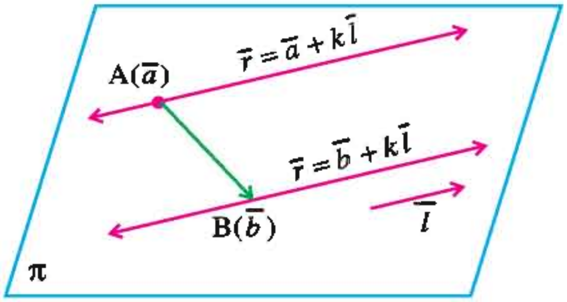
$\therefore$ તેઓ એક અનન્ય સમતલ નિશ્ચિત કરે છે.

વળી, $\overline{b} \notin \{\overline{r} \mid \overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}, k \in R\}$

$\therefore$ કોઈપણ $k \in R$ માટે $\overline{b} \neq \overline{a} + k\overline{l}$

$\therefore$ કોઈપણ $k \in R$ માટે $\overline{b} - \overline{a} \neq k\overline{l}$

$\therefore$ $(\overline{b} - \overline{a}) \times \overline{l} \neq \overline{0}$



આકૃતિ 7.18

તેથી $\overline{n} = (\overline{b} - \overline{a}) \times \overline{l}$ લેતાં $\overline{n} \neq \overline{0}$.

અને માંગેલ સમતલ π નું સમીકરણ $(\overline{r} - \overline{a}) \cdot \overline{n} = 0$

એટલે કે $(\overline{r} - \overline{a}) \cdot [(\overline{b} - \overline{a}) \times \overline{l}] = 0$ છે તેમ સાબિત કરીએ.

આપણે બતાવીશું કે, આપેલ રેખાઓ આ સમતલમાં આવેલી છે.

$\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$ માટે,

$$(\overline{r} - \overline{a}) \cdot [(\overline{b} - \overline{a}) \times \overline{l}] = (k\overline{l}) \cdot [(\overline{b} - \overline{a}) \times \overline{l}] = 0$$

$\therefore$ $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$ પરનાં બધાં જ બિંદુઓ π માં છે.

$\therefore$ રેખા $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$, $k \in R$ સમતલ π માં આવેલી છે.

તે જ પ્રમાણે, $\overline{r} = \overline{b} + k\overline{l}$ માટે,

$$\begin{aligned}(\overline{r} - \overline{a}) \cdot [(\overline{b} - \overline{a}) \times \overline{l}] &= (\overline{b} + k\overline{l} - \overline{a}) \cdot [(\overline{b} - \overline{a}) \times \overline{l}] \\ &= (\overline{b} - \overline{a}) \cdot [(\overline{b} - \overline{a}) \times \overline{l}] + k\overline{l} \cdot [(\overline{b} - \overline{a}) \times \overline{l}] \\ &= 0\end{aligned}$$

$\therefore$ રેખા $\overline{r} = \overline{b} + k\overline{l}$ એ સમતલ$(\overline{r} - \overline{a}) \cdot [(\overline{b} - \overline{a}) \times \overline{l}] = 0$ નો ઉપગણ છે.

તેથી, **$(\overline{r} - \overline{a}) \cdot [(\overline{b} - \overline{a}) \times \overline{l}] = 0$ એ આપેલ બે સમાંતર રેખાઓમાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ છે.**

કાર્તેઝીય સ્વરૂપ :

ધારો કે $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$ અને $\overline{l} = (l_1, l_2, l_3)$.

બે સમાંતર રેખાઓમાંથી પસાર થતા સમતલના સમીકરણનું કાર્તેઝીય સ્વરૂપ

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ છે.}$$

ઉદાહરણ 24 : સાબિત કરો કે રેખાઓ L : $\frac{x-3}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-5}{2}$ અને M : $\frac{x}{6} = \frac{y-5}{-8} = \frac{z-2}{4}$ સમાંતર છે તથા તેમાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, $\overline{l} = (3, -4, 2)$, $\overline{m} = (6, -8, 4)$. તેથી $\overline{l} \times \overline{m} = \overline{0}$.

$\therefore$ L = M અથવા L $\parallel$ M

તથા (3, 3, 5) માટે, $\frac{3}{6} = \frac{3-5}{-8} = \frac{5-2}{4}$ સત્ય નથી. તેથી $(3, 3, 5) \notin$ M.

$\therefore$ $(3, 3, 5) \in$ L અને $(3, 3, 5) \notin$ M

$\therefore$ L $\neq$ M

$\therefore$ L $\parallel$ M

હવે, $\overline{a} = (3, 3, 5)$, $\overline{b} = (0, 5, 2)$ અને $\overline{l} = (3, -4, 2)$.

$\therefore$ L અને M માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ $\begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z-5 \\ 0-3 & 5-3 & 2-5 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0$

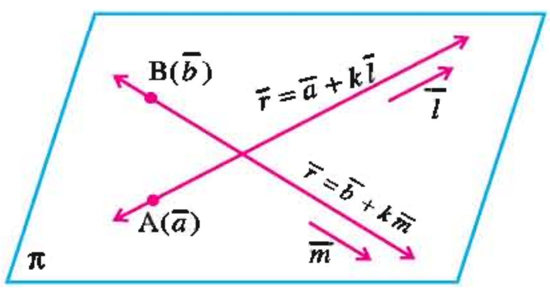
$$\therefore \begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z-5 \\ -3 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore$ $(x-3)(-8) - (y-3)(3) + (z-5)(6) = 0$

$\therefore$ $-8x + 24 - 3y + 9 + 6z - 30 = 0$

$\therefore$ $8x + 3y - 6z = 3$ એ આપેલ સમાંતર રેખાઓમાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ છે.

7.16 બે છેદતી રેખાઓમાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ



આકૃતિ 7.19

ધારો કે બે છેદતી રેખાઓનાં સમીકરણ

$\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$, $k \in$ R અને

$\overline{r} = \overline{b} + k\overline{m}$, $k \in$ R છે.

$\therefore$ તેમનામાંથી એક અનન્ય સમતલ પસાર થશે.

વળી, $\overline{l} \times \overline{m} \neq \overline{0}$ અને $(\overline{a} - \overline{b}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m}) = 0$.

(શા માટે ?)

$\overline{n} = \overline{l} \times \overline{m}$ લેતાં $\overline{n} \neq \overline{0}$ થશે.

સમતલ π નું સમીકરણ $(\overline{r} - \overline{a}) \cdot \overline{n} = 0$ લઈએ.

એટલે કે $(\overline{r} - \overline{a}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m}) = 0$ એ માંગેલ સમતલ π નું સમીકરણ છે તેમ સાબિત કરીશું. $(\overline{n} \neq \overline{0})$

હવે, આપણે આ બંને રેખાઓ સમતલ π માં છે તેમ સાબિત કરીશું.

$\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$ લેતાં,

$$(\overline{r} - \overline{a}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m}) = (k\overline{l}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m}) = 0$$

$\therefore$ રેખા $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$ નાં બધાં જ બિંદુઓ સમતલ $(\overline{r} - \overline{a}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m}) = 0$ માં છે.

એ જ પ્રમાણે, $\overline{r} = \overline{b} + k\overline{m}$ લેતાં,

$$(\overline{r} - \overline{a}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m}) = (\overline{b} + k\overline{m} - \overline{a}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m})$$

$$= (\overline{b} - \overline{a}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m}) + (k\overline{m}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m})$$

$$= 0 \qquad ((\overline{b} - \overline{a}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m}) = 0)$$

$\therefore$ રેખા $\overline{r} = \overline{b} + k\overline{m}$ ના બધાં જ બિંદુઓ સમતલ $(\overline{r} - \overline{a}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m}) = 0$ માં છે.

$\therefore$ આપેલ બે છેદતી રેખાઓમાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ $(\overline{r} - \overline{a}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m}) = 0$ છે.

કાર્તેઝીય સ્વરૂપ :

$\overline{r} = (x, y, z)$, $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{l} = (l_1, l_2, l_3)$ અને $\overline{m} = (m_1, m_2, m_3)$ લેતાં,

બે છેદતી રેખાઓમાંથી પસાર થતા સમતલના સમીકરણનું કાર્તેઝીય સ્વરૂપ

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ છે.}$$

નોંધ : (1) બે છેદતી રેખાઓમાંથી પસાર થતા સમતલના સમીકરણ $(\overline{r} - \overline{a}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m}) = 0$ માં $\overline{a}$ને બદલે $\overline{b}$ નો પણ ઉપયોગ કરી શકાય, એટલે કે $(\overline{r} - \overline{b}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m}) = 0$ પણ બે છેદતી રેખાઓમાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ છે.

(2) સમતલનું સમીકરણ મેળવવા માટે આપણને ત્રણ ભિન્ન અસમરેખ બિંદુઓની જરૂર પડે છે. અહીં $A(\overline{a})$ અને $B(\overline{b})$ બે બિંદુઓ તો આપેલાં છે જ, ત્રીજું બિંદુ C એ આપેલ રેખાઓ પરનું કોઈપણ બિંદુ મેળવી શકાય. (આ બિંદુ કોઈ પણ રેખાના સમીકરણમાં $k \in R - \{0\}$ લેવાથી મળી શકે છે.)

ઉદાહરણ 25 : સાબિત કરો કે રેખાઓ L : $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ અને M : $\frac{x-4}{5} = \frac{y-1}{2} = z$ સમતલીય છે તથા તેમનામાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, $\overline{a} = (1, 2, 3)$, $\overline{l} = (2, 3, 4)$ અને

$\overline{b} = (4, 1, 0)$, $\overline{m} = (5, 2, 1)$.

$\overline{l} \times \overline{m} = (-5, 18, -11) \neq \overline{0}$ અને $\overline{b} - \overline{a} = (3, -1, -3)$

$(\overline{b} - \overline{a}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m}) = (3, -1, -3) \cdot (-5, 18, -11) = -15 - 18 + 33 = 0$

$\therefore$ રેખાઓ L અને M એકબીજાને અનન્ય બિંદુમાં છેદતી રેખાઓ છે અને તેથી તેઓ સમતલીય છે.

$\therefore$ L અને M માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ,

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z - 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore$ $(x - 1)(-5) - (y - 2)(-18) + (z - 3)(-11) = 0$

$\therefore$ $-5x + 5 + 18y - 36 - 11z + 33 = 0$

$\therefore$ $5x - 18y + 11z - 2 = 0$ એ માંગેલ સમતલનું સમીકરણ છે.

બીજી રીત : A(1, 2, 3), B(4, 1, 0) આપેલી રેખાઓ પરનાં બિંદુઓ છે.

રેખાના સમીકરણ $\bar{r} = (1, 2, 3) + k(2, 3, 4)$, $k \in R$ માં $k = 1$ લેતાં રેખા L પરનું અન્ય બિંદુ C(3, 5, 7) મળે.

સ્પષ્ટ છે કે A, B, C અસમરેખ છે. કારણ કે $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 56 + 51 \neq 0.$

$\therefore$ A, B, C માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 4-1 & 1-2 & 0-3 \\ 3-1 & 5-2 & 7-3 \end{vmatrix} = 0$ છે.

$$\therefore \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore$ $(x - 1)(5) - (y - 2)(18) + (z - 3)(11) = 0$

$\therefore$ $5x - 5 - 18y + 36 + 11z - 33 = 0$

$\therefore$ $5x - 18y + 11z - 2 = 0$ એ માંગેલ સમતલનું સમીકરણ છે.

નોંધ : બે સમાંતર રેખાઓમાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ મેળવવા માટે ઉપર દર્શાવેલ બીજી રીતનો ઉપયોગ કરી શકાય.

7.17 સમતલમાં ન હોય તેવા બિંદુનું સમતલથી લંબઅંતર

ધારો કે $\pi : \bar{r} \cdot \bar{n} = d$ આપેલ સમતલનું સમીકરણ છે અને $P(\bar{p})$ છે, જ્યાં $P \notin \pi$.

જો $M(\bar{m})$ એ બિંદુ $P(\bar{p})$ માંથી સમતલ π પરનો લંબપાદ હોય, તો આપણે અંતર PM શોધીશું.

$\therefore$ $\overrightarrow{MP}$ ની દિશા એ $\bar{n}$ ની દિશા થશે.

$\therefore$ $\overleftrightarrow{MP}$ નું સમીકરણ $\bar{r} = \bar{p} + k\bar{n}$, $k \in R$ છે.

વળી, $M(\bar{m}) \in \overleftrightarrow{MP}$ તેથી કોઈક $k_1 \in R$ માટે $\bar{m} = \bar{p} + k_1\bar{n}$.

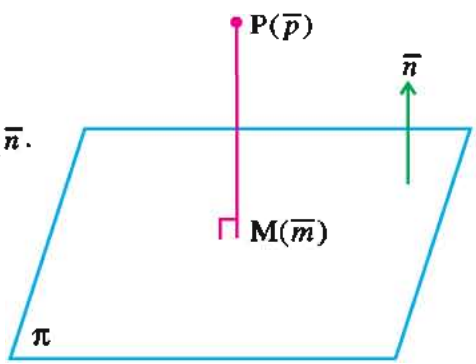
$M(\bar{m}) \in \pi$.

તેથી $\bar{m} \cdot \bar{n} = d$

$\therefore$ $(\bar{p} + k_1\bar{n}) \cdot \bar{n} = d$

$\therefore$ $k_1 |\bar{n}|^2 = d - \bar{p} \cdot \bar{n}$

$\therefore$ $k_1 = \dfrac{d - \bar{p} \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|^2}$ $\quad (\bar{n} \neq \bar{0})$ (i)



આકૃતિ 7.20

હવે, $PM = |\overrightarrow{PM}| = |\bar{m} - \bar{p}|$

$= |k_1\bar{n}|$ $\quad (\bar{m} = \bar{p} + k_1\bar{n})$

$= |k_1| \, |\bar{n}|$

$$\therefore PM = \frac{|d - \bar{p} \cdot \bar{n}|}{|\bar{n}|^2} \times |\bar{n}| = \frac{|\bar{p} \cdot \bar{n} - d|}{|\bar{n}|}$$

કાર્તેઝીય સ્વરૂપ :

ધારો કે $P(x_1, y_1, z_1)$ આપેલ બિંદુ છે અને સમતલનું સમીકરણ $ax + by + cz = d$ છે.

$\therefore$ $\bar{p} = (x_1, y_1, z_1)$, $\bar{n} = (a, b, c)$

$\therefore$ P થી સમતલ π નું લંબઅંતર $= \dfrac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

અને જો સમતલનું સમીકરણ $ax + by + cz + d = 0$ સ્વરૂપમાં હોય તો લંબઅંતર

$$= \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$ ($\overline{r} \cdot \overline{n} = d$ માં d ના સ્થાને $-d$ લેતાં)

નોંધ : (1) બિંદુ $P(\overline{p})$ થી સમતલ $\overline{r} \cdot \overline{n} = d$ પરનો લંબપાદ $M(\overline{m})$ હોય તો $\overline{m} = \overline{p} + k_1\overline{n}$

જ્યાં $k_1 = \dfrac{d - \overline{p} \cdot \overline{n}}{|\overline{n}|^2}$.

(2) બિંદુ (x_1, y_1)થી રેખા $ax + by + c = 0$ ના લંબઅંતર $\dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ સાથે સરખાવો.

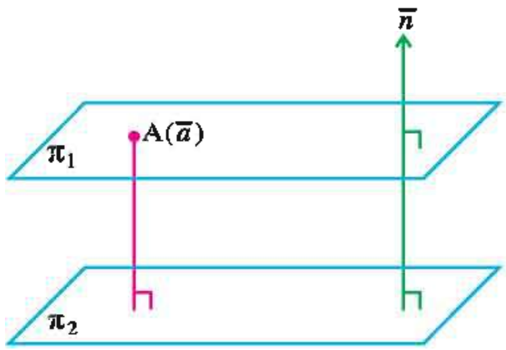
ઉદાહરણ 26 : બિંદુ $(-1, 2, -2)$ નું સમતલ $3x - 4y + 2z + 44 = 0$ થી લંબઅંતર મેળવો.

ઉકેલ : $\overline{p} = (-1, 2, -2)$ અને $\pi : 3x - 4y + 2z = -44$ છે. તેથી $d = -44$.

$$\therefore \text{ લંબઅંતર } = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$= \frac{|3(-1) - 4(2) + 2(-2) + 44|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 2^2}} = \frac{29}{\sqrt{29}} = \sqrt{29}$$

બે સમાંતર સમતલો વચ્ચેનું લંબઅંતર :



આકૃતિ 7.21

ધારો કે $\pi_1 : \overline{r} \cdot \overline{n} = d_1$ અને $\pi_2 : \overline{r} \cdot \overline{n} = d_2$ બે સમાંતર સમતલોનાં સમીકરણ છે.

સમતલ π_1 પરના કોઈ પણ બિંદુ $A(\overline{a})$ નું સમતલ π_2થી લંબઅંતર એ બે સમાંતર સમતલો વચ્ચેનું લંબઅંતર છે.

$A(\overline{a}) \in \pi_1$ તેથી $\overline{a} \cdot \overline{n} = d_1$

$\therefore$ $A(\overline{a})$ થી સમતલ $\overline{r} \cdot \overline{n} = d_2$ નું લંબઅંતર

$\dfrac{|\overline{a} \cdot \overline{n} - d_2|}{|\overline{n}|} = \dfrac{|d_1 - d_2|}{|\overline{n}|}$ થાય.

ઉદાહરણ 27 : સમતલો $2x - 2y - z + 4 = 0$ અને $4y + 2z - 4x + 1 = 0$ વચ્ચેનું અંતર શોધો.

ઉકેલ :
$$\left.\begin{aligned} \pi_1 &: 2x - 2y - z + 4 = 0 \\ \pi_2 &: 4y + 2z - 4x + 1 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \pi_1 &: 4x - 4y - 2z = -8 \\ \pi_2 &: 4x - 4y - 2z = 1 \end{aligned}$$

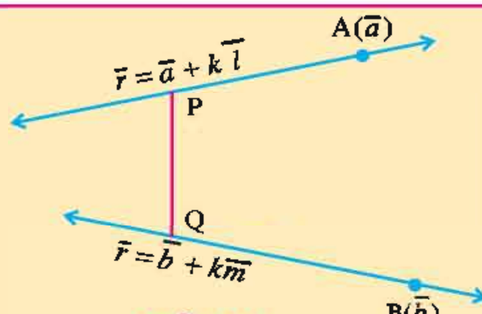
$\therefore$ $\overline{n} = (4, -4, -2)$, $d_1 = -8$, $d_2 = 1$

$$\therefore \text{ લંબઅંતર} = \frac{|d_1 - d_2|}{|\overline{n}|}$$

$$= \frac{|-8 - 1|}{\sqrt{4^2 + (-4)^2 + (-2)^2}}$$

$$= \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

આ સૂત્રના ઉપયોગથી પણ બે વિષમતલીય રેખાઓ વચ્ચેના અંતરનું સૂત્ર મળી શકે.



આકૃતિ 7.22

ધારો કે $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$, $k \in R$ તથા $\overline{r} = \overline{b} + k\overline{m}$, $k \in R$ બે વિષમતલીય રેખાઓ છે. આથી $(\overline{a} - \overline{b}) . (\overline{l} \times \overline{m}) \neq 0$

સૌપ્રથમ ધારો કે કોઈક $k_2 \in R$ માટે $P(\overline{a} + k_2\overline{l})$

એ L પર તથા કોઈક $k_1 \in R$ માટે $Q(\overline{b} + k_1\overline{m})$ એ M પર કોઈક બિંદુ છે.

$\therefore \quad \overrightarrow{PQ} = \bar{b} - \bar{a} + k_1\overline{m} - k_2\bar{l}$

હવે જો $\overleftrightarrow{PQ}$ એ L તથા M બંનેને લંબ હોય તો,

$(\bar{b} - \bar{a} + k_1\overline{m} - k_2\bar{l}) \cdot \bar{l} = 0$

તથા $(\bar{b} - \bar{a} + k_1\overline{m} - k_2\bar{l}) \cdot \overline{m} = 0$

$\therefore \quad (\bar{l}\cdot\overline{m})\ k_1 - |\bar{l}|^2\ k_2 = (\bar{a} - \bar{b})\cdot\bar{l}$

$|\overline{m}|^2\ k_1 - (\bar{l}\cdot\overline{m})\ k_2 = (\bar{a} - \bar{b})\cdot\overline{m}$

વળી $(\bar{l}\cdot\overline{m})\ (l\cdot m) - |\bar{l}|^2|\overline{m}|^2 = (\bar{l}\cdot\overline{m})^2 - |\bar{l}|^2|\overline{m}|^2 = -|\bar{l}\times\overline{m}|^2 \neq 0$
કારણ કે રેખાઓ વિષમતલીય છે.

$\therefore$ અનન્ય $k_1 \in R$ તથા $k_2 \in R$ મળે જેથી $\overleftrightarrow{PQ} \perp L$ તથા $\overleftrightarrow{PQ} \perp M$

પરંતુ L તથા M ની દિશાઓ અનુક્રમે $\bar{l}$ તથા $\overline{m}$ છે

$\therefore \quad \overleftrightarrow{PQ}$ ની દિશા $\bar{l}\times\overline{m}$ છે.

સમતલ $(\bar{r} - \bar{a})\cdot(\bar{l}\times\overline{m}) = 0$ રેખા L માંથી પસાર થાય છે.

કારણ કે $(\bar{a} + k\bar{l} - \bar{a})\cdot(\bar{l}\times\overline{m}) = 0$

તે જ રીતે $(\bar{r} - \bar{b})\cdot(\bar{l}\times\overline{m}) = 0$ રેખા M માંથી પસાર થાય છે.

વળી $\overleftrightarrow{PQ}$ ની દિશા $\bar{l}\times\overline{m}$ હોવાથી તે આ બંને સમાંતર સમતલોને લંબ છે.

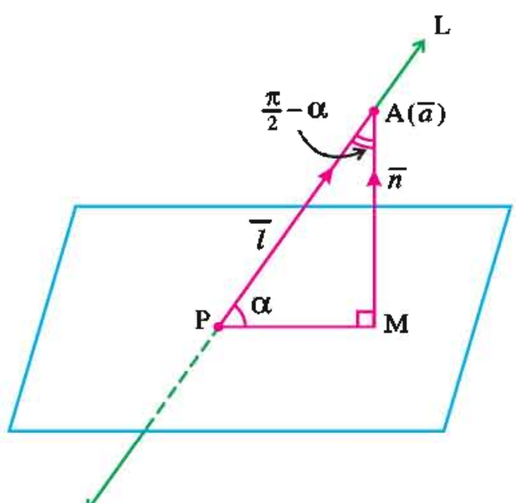
$$\therefore \quad PQ = \frac{|d_1 - d_2|}{|\bar{l}\times\overline{m}|}$$

$$= \frac{|\bar{a}\cdot(\bar{l}\times\overline{m}) - \bar{b}\cdot(\bar{l}\times\overline{m})|}{|\bar{l}\times\overline{m}|}$$

$$= \frac{|(\bar{a} - \bar{b})\cdot(\bar{l}\times\overline{m})|}{|\bar{l}\times\overline{m}|}$$

7.18 રેખા અને સમતલ વચ્ચેનો ખૂણો

ધારો કે $\bar{r} = \bar{a} + k\bar{l}$ એક રેખાનું સમીકરણ છે તથા $\bar{r}\cdot\bar{n} = d$ એક સમતલનું સમીકરણ છે. ધારો કે રેખા સમતલને બિંદુ P માં છેદે છે તથા M એ $A(\bar{a})$માંથી સમતલ પરનો લંબપાદ છે. આપેલી રેખા અને સમતલ વચ્ચેનો ખૂણો $\angle APM$ છે.



આકૃતિ 7.23

ધારો કે $m\angle APM = \alpha,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\therefore \quad \frac{\pi}{2} - \alpha = (\bar{l}, \hat{\ } \bar{n})$

$$\therefore \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{|\bar{l}\cdot\bar{n}|}{|\bar{l}||\bar{n}|}$$

$$\therefore \quad \sin\alpha = \frac{|\bar{l}\cdot\bar{n}|}{|\bar{l}||\bar{n}|}$$

$\therefore \quad \alpha = \sin^{-1}\dfrac{|\bar{l}\cdot\bar{n}|}{|\bar{l}||\bar{n}|}$ એ રેખા અને સમતલ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ છે.

ઉદાહરણ 28 : રેખા $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{1}$ અને સમતલ $\bar{r} \cdot (-2, 2, -1) = 1$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $\bar{l} = (2, 2, 1), \bar{n} = (-2, 2, -1)$

$\bar{l} \cdot \bar{n} = 2(-2) + 2(2) + 1(-1) = -1$

$|\bar{l}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3,$

$|\bar{n}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3$

$\therefore$ આપેલ રેખા અને સમતલ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $= sin^{-1} \frac{|\bar{l} \cdot \bar{n}|}{|\bar{l}||\bar{n}|}$

$= sin^{-1} \frac{|-1|}{3(3)} = sin^{-1} \frac{1}{9}$

7.19 બે સમતલોનો છેદ

ધારો કે એકબીજાને છેદતાં બે સમતલોનાં સમીકરણ $\pi_1 : \bar{r} \cdot \bar{n}_1 = d_1$ અને $\pi_2 : \bar{r} \cdot \bar{n}_2 = d_2$ છે.

$\therefore \quad \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 \neq \bar{0}$

ધારો કે $\bar{n} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2$.

ધારો કે $A(\bar{a})$ એ સમતલ π_1 અને π_2 એક છેદબિંદુ છે.

$\therefore \quad A(\bar{a}) \in \pi_1$ અને $A(\bar{a}) \in \pi_2$

$\therefore \quad \bar{a} \cdot \bar{n}_1 = d_1$ અને $\bar{a} \cdot \bar{n}_2 = d_2$

$\therefore \quad \pi_1$ અને π_2 નાં સમીકરણ

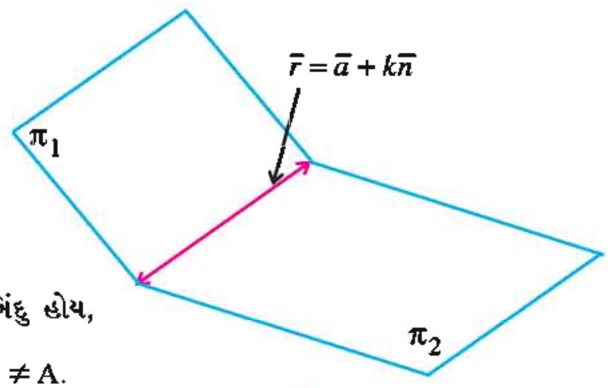
$\bar{r} \cdot \bar{n}_1 = d_1 = \bar{a} \cdot \bar{n}_1$ એટલેકે

$\therefore \quad (\bar{r} - \bar{a}) \cdot \bar{n}_1 = 0$ તથા

તે જ પ્રમાણે $(\bar{r} - \bar{a}) \cdot \bar{n}_2 = 0$ છે.

$\therefore$ જો $P(\bar{r})$ એ બંને સમતલો π_1 અને π_2 નું છેદબિંદુ હોય,

તો $(\bar{r} - \bar{a}) \perp \bar{n}_1$ અને $(\bar{r} - \bar{a}) \perp \bar{n}_2$, $P \neq A$.



આકૃતિ 7.24

$\therefore \quad \bar{r} - \bar{a} = k(\bar{n}_1 \times \bar{n}_2), k \in R - \{0\}$

$\therefore \quad \bar{r} - \bar{a} = k\bar{n}, k \in R - \{0\}$ $\qquad (\bar{n} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2)$

જો $k = 0$ તો $P = A$ અને તેથી $\bar{r} = \bar{a} + k\bar{n}, k \in R$.

આમ, $P(\bar{r}) \in \pi_1 \cap \pi_2$ તો $\bar{r} = \bar{a} + k\bar{n}, k \in R$ જે એક રેખાનું સમીકરણ છે.

$\therefore \quad \pi_1 \cap \pi_2$ પરનું દરેક બિંદુ રેખા $\bar{r} = \bar{a} + k\bar{n}, k \in R$ પર આવેલું છે.

આથી ઊલટું, જો $P(\bar{r})$ એ રેખા $\bar{r} = \bar{a} + k\bar{n}, k \in R$ નું બિંદુ હોય, તો

$(\bar{r} - \bar{a}) \cdot \bar{n}_1 = k\bar{n} \cdot \bar{n}_1 = k(\bar{n}_1 \times \bar{n}_2) \cdot \bar{n}_1 = 0$ અને

$(\bar{r} - \bar{a}) \cdot \bar{n}_2 = k\bar{n} \cdot \bar{n}_2 = k(\bar{n}_1 \times \bar{n}_2) \cdot \bar{n}_2 = 0$

આમ, $P(\bar{r}) \in \pi_1 \cap \pi_2$.

માટે $\pi_1 \cap \pi_2$ એ રેખા $\bar{r} = \bar{a} + k\bar{n}$, $k \in R$ છે, જ્યાં $\bar{n} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2$.

જો $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2 \neq \bar{0}$ હોય, તો બે સમતલો $\bar{r} \cdot \bar{n}_1 = d_1$ અને $\bar{r} \cdot \bar{n}_2 = d_2$ એક રેખા $\bar{r} = \bar{a} + k(\bar{n}_1 \times \bar{n}_2)$, $k \in R$ માં છેદે છે.

બે સમતલના છેદમાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ :

ધારો કે $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ અને $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ બે છેદતાં સમતલોનાં સમીકરણ છે. તેમની છેદરેખામાંથી પસાર થતા કોઈપણ સમતલનું સમીકરણ

$$l(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + m(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0, \ l^2 + m^2 \neq 0 \text{ છે.}$$

આથી ઉલટું, કોઈપણ સમતલનું સમીકરણ

$$l(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + m(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0, \ l^2 + m^2 \neq 0$$

સ્વરૂપનું હોય, તો તે આપેલાં બે સમતલોની છેદરેખાને સમાવતું સમતલ છે.

આપણે આ બંને વિધાનો સાબિતી વગર સ્વીકારીશું.

અહીં $l^2 + m^2 \neq 0$ નો અર્થ l અને m પૈકી ઓછામાં ઓછી એક સંખ્યા શૂન્ય નથી.

જો $l = 0$ તો $m \neq 0$ અને તેથી માંગેલા સમતલનું સમીકરણ $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ થશે.

જો $l \neq 0$ તો માંગેલા સમતલનું સમીકરણ $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ નથી.

$\therefore \ l(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + m(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$ એ

$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + \frac{m}{l}(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$ થશે.

ધારો કે $\frac{m}{l} = \lambda$

જો $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ એ માંગેલ સમતલનું સમીકરણ ન હોય, તો સમતલનું સમીકરણ

$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + \lambda(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$, $\lambda \in R$ લઈ શકાય.

ઉદાહરણ 29 : સમતલો $2x + 3y + z - 1 = 0$ અને $x + y - z - 7 = 0$ ની છેદરેખા અને $(1, 2, 3)$ માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ શોધો તથા તેમની છેદરેખાનું સમીકરણ પણ મેળવો.

ઉકેલ : $(1, 2, 3)$ બિંદુના યામ સમતલના સમીકરણ $x + y - z - 7 = 0$ માં મૂકતાં $1 + 2 - 3 - 7 = -7 \neq 0$

$\therefore$ બિંદુ $(1, 2, 3)$ એ સમતલ $x + y - z - 7 = 0$ નથી.

$\therefore$ $x + y - z - 7 = 0$ એ માંગેલા સમતલનું સમીકરણ નથી.

ધારો કે તે સમતલનું સમીકરણ $2x + 3y + z - 1 + \lambda(x + y - z - 7) = 0$ છે. **(i)**

તે $(1, 2, 3)$માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore$ $2 + 6 + 3 - 1 + \lambda(1 + 2 - 3 - 7) = 0$

$\therefore$ $-7\lambda = -10$

$\therefore$ $\lambda = \frac{10}{7}$

$\therefore$ (i)માં $\lambda = \frac{10}{7}$ મૂકતાં,

$2x + 3y + z - 1 + \frac{10}{7}(x + y - z - 7) = 0$

$\therefore$ $14x + 21y + 7z - 7 + 10x + 10y - 10z - 70 = 0$

$\therefore$ $24x + 31y - 3z - 77 = 0$

હવે, છેદરેખાની દિશા $\bar{n} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = (2, 3, 1) \times (1, 1, -1) = (-4, 3, -1)$.

ચાલો આપણે બંને સમતલનાં સમીકરણમાં $z = 0$ મૂકીએ.

$\therefore$ આપણને સમીકરણો $2x + 3y = 1$ અને $x + y = 7$ મળશે.

આ સમીકરણોને ઉકેલતાં $x = 20$, $y = -13$ મળશે.

$\therefore$ એક સામાન્ય બિંદુ $A(20, -13, 0)$ થશે.

$\therefore$ છેદરેખાનું સમીકરણ $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{n}$, $k \in R$ પ્રમાણે,

$\overline{r} = (20, -13, 0) + k(-4, 3, -1)$, $k \in R$ થશે.

નોંધ : બે સમતલોનું સામાન્ય છેદબિંદુ મેળવવા માટે આપણે x, y, z પૈકી કોઈ એક માટે જાણીતી સંખ્યા લેવાથી, બાકીના બે ચલની અનન્ય કિંમત મેળવી શકાય.

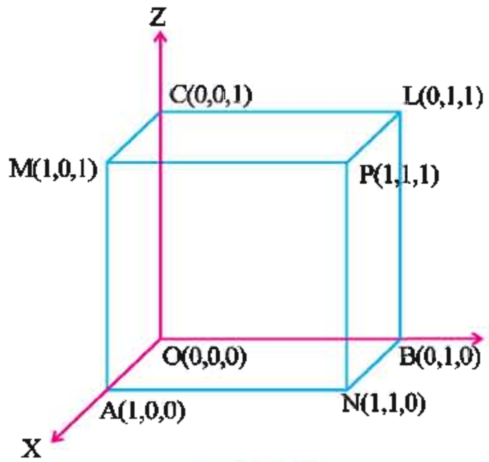
સ્વાધ્યાય 7.2

1. સમતલ $4x - 2y + z - 7 = 0$ નો એકમ અભિલંબ શોધો.
2. $(1, 1, -1)$, $(2, -1, -3)$ અને $(3, 0, 1)$માંથી પસાર થતા સમતલનું સદિશ તેમજ કાર્તેઝીય સમીકરણ શક્ય હોય, તો મેળવો.
3. $2x - 3y - 5z + 1 = 0$ ને સમાંતર અને $(1, 2, -3)$ માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ મેળવો.
4. $(-2, 1, 1)$ અને $(0, 5, 1)$ માંથી પસાર થતી રેખાને લંબ અને $(5, -1, 2)$ માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ મેળવો. આ સમતલના અક્ષો પરના અંતઃખંડ પણ શોધો.
5. રેખા $\overline{r} = (1, 4, -1) + k(2, -3, 3)$, $k \in R$માંથી પસાર થતા તથા $(2, 0, 1)$ માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ શોધો.
6. બતાવો કે બિંદુઓ $(2, 7, 3)$, $(-10, -10, 2)$, $(-3, 3, 2)$ અને $(0, -2, 4)$ સમતલીય છે. આ બિંદુઓમાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ પણ મેળવો.
7. $(3, 4, -5)$ અને $(1, 2, 3)$ માંથી પસાર થતા Z-અક્ષને સમાંતર સમતલનું સમીકરણ મેળવો.
8. સમતલો $2x + y - z - 1 = 0$ અને $x - y - 2z + 7 = 0$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.
9. રેખા $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{2}$ અને સમતલ $2x + y - 3z + 4 = 0$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.
10. બિંદુ $(5, 3, 4)$થી સમતલ $3x + 2y - 5z - 13 = 0$ નું લંબઅંતર શોધો.
11. સમતલો $12x - 6y + 4z - 21 = 0$ અને $6x - 3y + 2z - 1 = 0$ વચ્ચેનું લંબઅંતર શોધો.
12. $A(1, 3, 5)$ માંથી પસાર થતા તથા $\overline{AP}$ ને લંબ સમતલનું સમીકરણ મેળવો, જ્યાં $P(3, -2, 1)$ છે.
13. રેખા $\overline{r} = (2, -4, -6) + k(1, 8, -3)$, $k \in R$. સમાવતા અને $(1, 1, -1)$ માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ મેળવો.
14. બે છેદક રેખાઓ $\frac{x+1}{1} = \frac{3-y}{1} = \frac{z+5}{2}$ અને $\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{2}$ માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ શોધો.

*

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 30 : જો કોઈ રેખા સમઘનના ચાર વિકર્ણો સાથે $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ માપના ખૂણા બનાવે તો સાબિત કરો કે $cos2\alpha + cos2\beta + cos2\gamma + cos2\delta = -\frac{4}{3}$.



આકૃતિ 7.25

ઉકેલ : ધારો કે સમઘનની બાજુની લંબાઈ એક એકમ છે. શિરોબિંદુઓ આકૃતિ 7.25 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે લઈ શકાય.

સમઘનના ચાર વિકર્ણો $\overrightarrow{OP} = (1, 1, 1)$,

$\overrightarrow{AL} = (-1, 1, 1)$, $\overrightarrow{BM} = (1, -1, 1)$, $\overrightarrow{CN} = (1, 1, -1)$ છે.

ધારો કે રેખાની દિક્કોસાઇન l, m, n છે. $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

રેખાએ વિકર્ણો $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{AL}$, $\overrightarrow{BM}$ અને $\overrightarrow{CN}$ સાથે બનાવેલા ખૂણાનાં માપ અનુક્રમે α, β, γ અને δ છે.

$$cos\alpha = \frac{|l+m+n|}{\sqrt{3}},\ cos\beta = \frac{|-l+m+n|}{\sqrt{3}},\ cos\gamma = \frac{|l-m+n|}{\sqrt{3}} \text{ અને } cos\delta = \frac{|l+m-n|}{\sqrt{3}}.$$

હવે, $cos2\alpha + cos2\beta + cos2\gamma + cos2\delta$

$$\begin{aligned}
&= 2cos^2\alpha - 1 + 2cos^2\beta - 1 + 2cos^2\gamma - 1 + 2cos^2\delta - 1 \\
&= 2(cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma + cos^2\delta) - 4 \\
&= \frac{2}{3}[(l+m+n)^2 + (-l+m+n)^2 + \\
&\qquad (l-m+n)^2 + (l+m-n)^2] - 4 \\
&= \frac{2}{3}[4(l^2+m^2+n^2)] - 4 \\
&= \frac{8}{3} - 4 \qquad\qquad (l^2 + m^2 + n^2 = 1) \\
&= -\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

આપેલા બિંદુનું રેખા (સમતલ)માં પ્રતિબિંબ : જો બિંદુ A માંથી રેખા (સમતલ) પરનો લંબપાદ M હોય અને બિંદુ B એવું મળે કે જેથી M એ $\overline{AB}$નું મધ્યબિંદુ થાય, તો B ને A નું રેખા (સમતલ)માં પ્રતિબિંબ કહે છે.

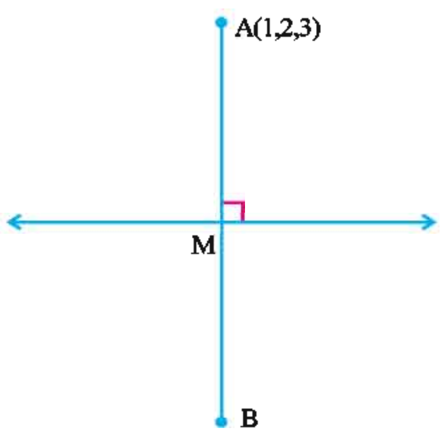
ઉદાહરણ 31 : રેખા L : $\frac{x-6}{3} = \frac{y-7}{2} = \frac{7-z}{2}$ને સાપેક્ષ A(1, 2, 3)નું પ્રતિબિંબ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $\frac{x-6}{3} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-7}{-2}$ રેખાનું સમીકરણ છે.

ધારો કે A(1, 2, 3) માંથી રેખા પરનો લંબપાદ M છે.

$M \in L$ તેથી કોઈક $k \in R$ માટે

M $(6 + 3k, 7 + 2k, 7 - 2k)$ થશે.



આકૃતિ 7.26

$\overrightarrow{AM} = (6 + 3k, 7 + 2k, 7 - 2k) - (1, 2, 3)$

$= (5 + 3k, 5 + 2k, 4 - 2k)$

$\overrightarrow{AM} \perp L$

$\therefore \overrightarrow{AM} \cdot \overline{l} = 0$

$\therefore (5 + 3k, 5 + 2k, 4 - 2k) \cdot (3, 2, -2) = 0$

$\therefore 15 + 9k + 10 + 4k - 8 + 4k = 0$

$\therefore \quad 17k + 17 = 0$

$\therefore \quad k = -1$

$\therefore$ લંબપાદ $M(6 + 3k, 7 + 2k, 7 - 2k) = M(3, 5, 9)$.

જો $B(x, y, z)$ એ રેખાને સાપેક્ષ A નું પ્રતિબિંબ હોય, તો M એ $\overline{AB}$નું મધ્યબિંદુ થશે.

$\therefore \quad (3, 5, 9) = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+2}{2}, \frac{z+3}{2}\right)$

$\therefore \quad x = 5, y = 8, z = 15$

$\therefore$ A ના પ્રતિબિંબ B ના યામ $(5, 8, 15)$ થશે.

ઉદાહરણ 32 : જો l, m, n એ બે રેખાઓની દિક્‌સંખ્યાઓ હોય અને $l + m + n = 0$ તથા $l^2 - m^2 + n^2 = 0$ હોય તો તેમની વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $l + m + n = 0$

$\therefore \quad m = -l - n$

$l^2 - m^2 + n^2 = 0$

$\therefore \quad l^2 - (-l - n)^2 + n^2 = 0$

$\therefore \quad l^2 - l^2 - 2ln - n^2 + n^2 = 0$

$\therefore \quad ln = 0$

$\therefore \quad l = 0$ અથવા $n = 0$

જો $l = 0$ તો $m = -n$ $\qquad (l + m + n = 0)$

l, m, n એ દિક્‌સંખ્યાઓ હોવાથી $(l, m, n) \neq (0, 0, 0)$

$l = 0$	$n = 0$
$n = -m$	$l = -m$
દિક્‌સંખ્યા $(0, m, -m)$	દિક્‌સંખ્યા $(-m, m, 0)$ બને.

બે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ α હોય તો, $\cos\alpha = \dfrac{|(0, m, -m) \cdot (-m, m, 0)|}{\sqrt{2m^2} \cdot \sqrt{2m^2}}$

$$= \frac{|m^2|}{2|m|^2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$\therefore \alpha = \dfrac{\pi}{3}$

ઉદાહરણ 33 : રેખા $\dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z-3}{1}$ અને સમતલ $x + y + z - 2 = 0$ નું છેદબિંદુ શોધો. આ છેદબિંદુ અને $Q(8, 9, 5)$ વચ્ચેનું અંતર પણ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, $\bar{a} = (4, 5, 3)$ અને $\bar{l} = (2, 2, 1)$.

ધારો કે તેમનું છેદબિંદુ P છે. તેથી P એ આપેલી રેખા પર છે.

$\therefore$ કોઈક $k \in R$ માટે P ના યામ $(4 + 2k, 5 + 2k, 3 + k)$ થશે.

P એ સમતલ $x + y + z - 2 = 0$ પર છે.

$\therefore \quad 4 + 2k + 5 + 2k + 3 + k - 2 = 0$

$\therefore \quad 5k = -10$

$\therefore \quad k = -2$

$\therefore$ માંગેલ છેદબિંદુ P $(4 + 2(-2), 5 + 2(-2), 3 + (-2)) = (0, 1, 1)$ છે.

બિંદુઓ P(0, 1, 1) અને Q(8, 9, 5) વચ્ચેનું અંતર

$$PQ = \sqrt{(8-0)^2 + (9-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{64+64+16} = \sqrt{144} = 12$$

ઉદાહરણ 34 : (2, 2, –2) અને (–2, –2, 2) માંથી પસાર થતા તથા સમતલ $2x - 3y + z - 7 = 0$ ને લંબ સમતલનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે માંગેલ સમતલનું સમીકરણ $ax + by + cz + d = 0$ છે.

જો $\overline{n}$ આ સમતલનો અભિલંબ હોય, તો $\overline{n} = (a, b, c)$.

આ સમતલ એ સમતલ $2x - 3y + z - 7 = 0$ ને લંબ છે.

$\therefore \quad \overline{n} \cdot (2, -3, 1) = 0$ **(i)**

વળી, A(2, 2, –2) અને B(–2, –2, 2) એ સમતલનાં બિંદુઓ છે.

$\therefore \quad \overrightarrow{AB}$ સમતલમાં છે.

$\overrightarrow{AB} = (-4, -4, 4)$

$\therefore \quad \overline{n} \cdot (-4, -4, 4) = 0$

$\therefore \quad \overline{n} \cdot (-1, -1, 1) = 0$ **(ii)**

(i) અને (ii) પરથી $\overline{n} = (2, -3, 1) \times (-1, -1, 1)$

$\therefore \quad \overline{n} = (-2, -3, -5)$ અથવા $\overline{n} = (2, 3, 5)$

સમતલ (2, 2, –2) માંથી પસાર થાય છે. તેથી સમતલનું સમીકરણ $\overline{r} \cdot \overline{n} = \overline{a} \cdot \overline{n}$.

$\therefore \quad \overline{r} \cdot (2, 3\ 5) = (2, 2, -2) \cdot (2, 3\ 5)$

$\therefore \quad 2x + 3y + 5z = 4 + 6 - 10 = 0$

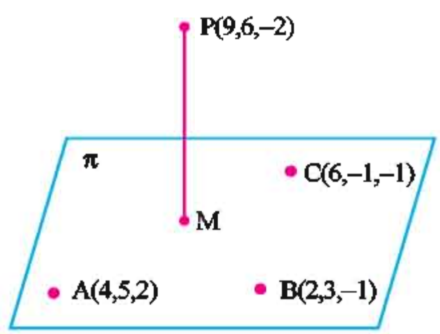
$\therefore$ માંગેલ સમતલનું સમીકરણ $2x + 3y + 5z = 0$ છે.

ઉદાહરણ 35 : A(4, 5, 2), B(2, 3, –1) અને C(6, –1, –1) માંથી પસાર થતા સમતલ પરનો બિંદુ P(9, 6, –2) માંથી લંબપાદ શોધો. P થી આ સમતલનું લંબઅંતર પણ શોધો.

ઉકેલ : સમતલનું સમીકરણ

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-5 & z-2 \\ 2-4 & 3-5 & -1-2 \\ 6-4 & -1-5 & -1-2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} x-4 & y-5 & z-2 \\ -2 & -2 & -3 \\ 2 & -6 & -3 \end{vmatrix} = 0$$



આકૃતિ 7.27

$\therefore \quad (x - 4)(-12) - (y - 5)(12) + (z - 2)(16) = 0$

$\therefore \quad 3(x - 4) + 3(y - 5) - 4(z - 2) = 0$

$\therefore$ $3x + 3y - 4z - 19 = 0$ એ A, B, C માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ છે.

ધારો કે $P(\overline{p})$માંથી સમતલ $\pi : 3x + 3y - 4z - 19 = 0$ પરનો લંબપાદ M છે.

અહીં, $\overline{n} = (3, 3, -4)$

$\overleftrightarrow{PM}$ નું સમીકરણ $\overline{r} = \overline{p} + k\overline{n}, k \in R$ છે.

$\therefore$ $\overline{r} = (9, 6, -2) + k(3, 3, -4), k \in R$

$\therefore$ કોઈક $k \in R$ માટે $M\ (9 + 3k, 6 + 3k, -2 - 4k)$

હવે, $M \in \pi$

$\therefore$ $3(9 + 3k) + 3(6 + 3k), -4(-2 - 4k) - 19 = 0$

$\therefore$ $27 + 9k + 18 + 9k + 8 + 16k - 19 = 0$

$\therefore$ $34k = -34$

$\therefore$ $k = -1$

$\therefore$ લંબપાદ $M(9 + 3(-1), 6 + 3(-1), -2 - 4(-1))$

$\therefore$ લંબપાદ $M\ (6, 3, 2)$ છે

$\therefore$ લંબઅંતર $PM = \sqrt{(9-6)^2 + (6-3)^2 + (-2-2)^2}$

$= \sqrt{9+9+16}$

$= \sqrt{34}$

ઉદાહરણ 36 : સાબિત કરો કે (i) રેખા $\overline{r} = (1, 2, -3) + k(4, -3, 2), k \in R$ અને સમતલ $3x + 2y - 3z = 5$ એકબીજાને સમાંતર છે. (ii) રેખા $\overline{r} = (1, -2, -2) + k(1, 2, 1), k \in R$ એ સમતલ $2x - 3y + 4z = 0$ માં આવેલી છે.

ઉકેલ : (i) રેખા L નું સમીકરણ $\overline{r} = (1, 2, -3) + k(4, -3, 2), k \in R$ અને સમતલ π નું સમીકરણ $3x + 2y - 3z = 5$ છે.

$\therefore$ $A(\overline{a}) = (1, 2, -3), \overline{l} = (4, -3, 2)$ અને $\overline{n} = (3, 2, -3)$

હવે, $\overline{l} \cdot \overline{n} = 4(3) - 3(2) + 2(-3) = 12 - 6 - 6 = 0$

$\therefore$ $\overline{l} \perp \overline{n}$. તેથી $L \parallel \pi$ અથવા L એ π માં આવેલી છે.

વળી, $\overline{a} \cdot \overline{n} = (1, 2, -3) \cdot (3, 2, -3) = 3 + 4 + 9 = 16 \neq 0$

$\therefore$ રેખા L એ સમતલ π ને સમાંતર છે.

(ii) રેખા L નું સમીકરણ $\overline{r} = (1, -2, -2) + k(1, 2, 1), k \in R$ અને સમતલ π નું સમીકરણ $2x - 3y + 4z = 0$ છે.

$\therefore$ $A(\overline{a}) = (1, -2, -2), \overline{l} = (1, 2, 1)$ અને $\overline{n} = (2, -3, 4)$

હવે, $\overline{l} \cdot \overline{n} = 1(2) + 2(-3) + 1(4) = 2 - 6 + 4 = 0$

$\therefore$ $\overline{l} \perp \overline{n}$. તેથી $L \parallel \pi$ અથવા L એ π માં આવેલી છે.

$\overline{a} \cdot \overline{n} = (1, -2, -2) \cdot (2, -3, 4) = 2 + 6 - 8 = 0$

$\therefore$ રેખા L સમતલ π માં આવેલી છે.

સ્વાધ્યાય 7

1. P(1, 0, 3) થી A(4, 7, 1) અને B(5, 9, −1) માંથી પસાર થતી રેખા $\overleftrightarrow{AB}$ પરનો લંબપાદ, લંબરેખાનું સમીકરણ અને લંબની લંબાઈ શોધો.

2. $l + m + n = 0$ અને $m^2 + n^2 = l^2$ તથા l, m, n બે રેખાઓની દિક્સંખ્યાઓ હોય, તો તેમની વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.

3. સાબિત કરો કે રેખાઓ $x = 2, \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{1}$ અને $x = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{3}$ વિષમતલીય છે. તેમની વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર શોધો.

4. રેખાઓ $\frac{x+3}{2} = \frac{5-y}{1} = \frac{1-z}{1}$ અને $\frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-1}{1}$ નું છેદબિંદુ શોધો તથા તેમની વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.

5. (1, 2, 3) માંથી પસાર થતી તથા રેખાઓ $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}$ અને $\frac{x-5}{-3} = \frac{y+8}{1} = \frac{z-5}{5}$ બંનેને લંબ હોય તેવી રેખાનું સમીકરણ મેળવો.

6. (3, −2, −4) માંથી પસાર થતી અને યામાક્ષો સાથે સમાન માપના ખૂણા બનાવતી રેખાનું સમીકરણ શોધો.

7. રેખા $\frac{x-1}{2} = \frac{2-y}{3} = \frac{z+3}{4}$ અને સમતલ $2x + 4y - z = 1$ નું છેદબિંદુ શોધો. તે બે વચ્ચેના ખૂણાનું માપ પણ શોધો.

8. X-અક્ષને સમાંતર, Y-અક્ષ અને Z-અક્ષ પર અનુક્રમે 2 અને 3 અંતઃખંડ કાપતા સમતલનું સમીકરણ મેળવો.

9. બિંદુ (1, 5, 1) નું સમતલ $x - 2y + z + 5 = 0$ ને સાપેક્ષ પ્રતિબિંબ શોધો.

10. (0, 2, −2) થી સમતલ $2x - 3y + 4z - 44 = 0$ પરનો લંબપાદ શોધો તથા આ બિંદુમાંથી પસાર થતી સમતલને લંબરેખાનું સમીકરણ અને લંબની લંબાઈ શોધો.

11. સમતલો $2x + 3y - z - 4 = 0$ અને $x + y + z - 2 = 0$ ની છેદરેખામાંથી તથા (1, 2, 2)માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ મેળવો તથા આ સમતલોની છેદરેખાનું સમીકરણ પણ મેળવો.

12. જો કોઈ સમતલના અક્ષોને છેદવાથી બનતા ત્રિકોણનું મધ્યકેન્દ્ર (2, 1, −1) હોય, તો તે સમતલનું સમીકરણ મેળવો.

13. સાબિત કરો કે રેખાઓ $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+4}{4}$ અને $\frac{x-7}{5} = \frac{y+6}{1} = \frac{z+8}{2}$ એક બીજાને છેદે છે. આ રેખાઓમાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ મેળવો.

14. સમતલ $3x + 4y - 6z = 12$ ના અક્ષો પરના અંતઃખંડોથી અડધી લંબાઈના અંતઃખંડોવાળા સમતલનું સમીકરણ શોધો.

15. (1, 2, −3) અને (−3, 6, 4) ને જોડતા રેખાખંડના લંબદ્વિભાજક સમતલનું સમીકરણ મેળવો.

16. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c), (d)માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :

(1) ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી અને $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ માપના દિક્ખૂણાઓવાળી રેખાનું સમીકરણ ...... થાય. ☐

(a) $x = \frac{y}{-\sqrt{2}} = z$ (b) $\frac{x}{-1} = \frac{y}{-\sqrt{2}} = z$ (c) $x = \frac{y}{-\sqrt{2}} = -z$ (d) $x = \frac{y}{\sqrt{2}} = z$

(2) (3, 4, 5) અને (4, 5, 6)માંથી પસાર થતી રેખાની દિક્કોસાઈન ...... છે. ☐

(a) 1, 1, 1 (b) $\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) 7, 9, 11

(3) $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{3}$ અને $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{3-z}{-3}$ એ ...... રેખાઓ છે. ☐

(a) સમાંતર (b) પરસ્પર લંબ

(c) સંપાતી (d) લઘુકોણમાં છેદતી

(4) ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી અને Y-અક્ષને સમાંતર રેખાનું સમીકરણ ...... છે. ☐

(a) $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}$ (b) $\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$ (c) $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$ (d) $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$

(5) $x = k + 1, y = 2k - 1, z = 2k + 3$ અને $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-2}$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ ...... છે. ☐

(a) $sin^{-1} \frac{4}{3}$ (b) $cos^{-1} \frac{4}{9}$ (c) $sin^{-1} \frac{\sqrt{5}}{3}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

(6) સમતલ $x = 2$ નો અભિલંબ ...... છે. ☐

(a) (0, 1, 1) (b) (2, 0, 2) (c) (1, 0, 0) (d) (0, 1, 0)

(7) સમતલ $3x - 4y + 7z = 2$ ને લંબ ...... અને (−1, 2, 4) માંથી પસાર થતી રેખાની દિશા ...... છે. ☐

(a) (3, 4, 7) (b) (4, −6, 3) (c) (−3, 4, −7) (d) (−1, 2, 4)

(8) સમતલ $\overline{r} \cdot (12, -4, 3) = 65$ નું ઊગમબિંદુથી લંબઅંતર ...... થાય. ☐

(a) 65 (b) 5 (c) −5 (d) $\frac{5}{13}$

(9) સમતલ $2x + 3y + 6z - 15 = 0$ એ X-અક્ષ સાથે ...... માપનો ખૂણો બનાવે છે. ☐

(a) $cos^{-1} \frac{3\sqrt{5}}{7}$ (b) $sin^{-1} \frac{3}{7}$ (c) $sin^{-1} \frac{2}{\sqrt{7}}$ (d) $tan^{-1} \frac{2}{7}$

(10) સમતલો $2x - y + 2z = 1$ અને $4x - 2y + 4z = 1$ વચ્ચેનું લંબઅંતર ...... છે. ☐

(a) $\frac{1}{3}$ (b) 3 (c) $\frac{1}{6}$ (d) 6

(11) (1, 1, 1), (1, −1, 1) અને (−1, 3, −5) માંથી પસાર થતું સમતલ જો (2, k , 4) માંથી પસાર થાય તો, k = ... ☐

(a) ન મળે (b) બે કિંમત મળે

(c) બધી જ વાસ્તવિક સંખ્યા (d) અનન્ય કિંમત મળે

(12) ઊગમબિંદુમાંથી સમતલ પરનો લંબપાદ (a, b, c) હોય, તો સમતલનું સમીકરણ ...... થાય.

(a) $ax + by + cz = a + b + c$ (b) $ax + by + cz = abc$

(c) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ (d) $ax + by + cz = a^2 + b^2 + c^2$

(13) A(−2, 2, 3)માંથી પસાર થતી રેખા L એ $\overleftrightarrow{AB}$ ને લંબ હોય તો Lનું સમીકરણ ...... થાય.

જ્યાં B (13, −3, 13).

(a) $\frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{13} = \frac{z+3}{2}$ (b) $\frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{13} = \frac{z-3}{2}$

(c) $\frac{x+2}{15} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z-3}{10}$ (d) $\frac{x-2}{15} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z+3}{10}$

(14) જો રેખા $\frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-k}{2}$ એ સમતલ $2x - 4y + z = 7$ માં આવેલી હોય તો $k =$ ......

(a) 7 (b) 6 (c) −7 (d) કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા

(15) બિંદુ (2, −3, 6) નું સમતલ $3x - 6y + 2z + 10 = 0$ થી લંબઅંતર = ...

(a) $\frac{13}{7}$ (b) $\frac{46}{7}$ (c) 7 (d) $\frac{10}{7}$

(16) (2, −3, 1) અને (3, −4, −5)માંથી પસાર થતી રેખા ZX-સમતલને ......માં છેદે છે.

(a) (−1, 0, 13) (b) (−1, 0, 19) (c) $\left(\frac{13}{6}, 0, \frac{-19}{6}\right)$ (d) (0, −1, 13)

(17) જો રેખાઓ $\bar{r} = (2, -3, 7) + k(2, a, 5), k \in R$ અને $\bar{r} = (1, 2, 3) + k(3, -a, a), k \in R$ પરસ્પર લંબ હોય, તો $a =$ ......

(a) 2 (b) −6 (c) 1 (d) −1

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓ શીખ્યા :

1. $A(\bar{a})$ માંથી પસાર થતી અને શૂન્યેતર સદિશ $\bar{l}$ ની દિશાવાળી રેખાનું સદિશ સમીકરણ $\bar{r} = \bar{a} + k\bar{l}$, $k \in R$

પ્રચલ સમીકરણો :

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + kl_1 \\ y &= y_1 + kl_2 \\ z &= z_1 + kl_3 \end{aligned}\right\} \quad k \in R$$

સંમિત સ્વરૂપ (કાર્તેઝીય સમીકરણો) : $\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{l_2} = \frac{z-z_1}{l_3}$

જો $l_1 = 0$ અને $l_2 \neq 0, l_3 \neq 0$ તો સમીકરણો $x = x_1, \frac{y-y_1}{l_2} = \frac{z-z_1}{l_3}$

અથવા $\frac{x-x_1}{0} = \frac{y-y_1}{l_2} = \frac{z-z_1}{l_3}$ થશે.

2. **$A(\overline{a})$ અને $B(\overline{b})$ માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ :**

સદિશ સમીકરણ : $\overline{r} = \overline{a} + k(\overline{b} - \overline{a}),\ k \in R$

પ્રચલ સમીકરણો :

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + k(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + k(y_2 - y_1) \\ z &= z_1 + k(z_2 - z_1) \end{aligned}\right\}\ k \in R$$

સંમિત સ્વરૂપ :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

3. **સમરેખ બિંદુઓ :** $A(\overline{a})$, $B(\overline{b})$ અને $C(\overline{c})$ સમરેખ હોય તો અને તો જ $(\overline{c} - \overline{a}) \times (\overline{b} - \overline{a}) = \overline{0}$.

4. જો $A(\overline{a})$, $B(\overline{b})$, $C(\overline{c})$ સમરેખ હોય, તો $[\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}] = 0$, પરંતુ $[\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}] = 0$ હોય તો ચોક્કસપણે A, B, C સમરેખ છે તેમ નક્કી કરી શકાય નહીં.

5. **બે રેખા વચ્ચેના ખૂણાનું માપ :** $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l},\ k \in R$ અને $\overline{r} = \overline{b} + k\overline{m},\ k \in R$ બે ભિન્ન રેખાઓ છે, જો α એ આ બે રેખા વચ્ચેના ખૂણાનું માપ હોય, તો

$cos\alpha = \frac{|\overline{l} \cdot \overline{m}|}{|\overline{l}||\overline{m}|};\ 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

બે રેખાઓ લંબ હોય તો અને તો જ $\overline{l} \cdot \overline{m} = 0$.

6. જો બે ભિન્ન રેખાઓ $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l},\ k \in R$ અને $\overline{r} = \overline{b} + k\overline{m},\ k \in R$ એકબીજીને અનન્ય બિંદુમાં છેદે, તો $(\overline{a} - \overline{b}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m}) = 0,\ \overline{l} \times \overline{m} \ne \overline{0}$.

$\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\overline{l} = (l_1, l_2, l_3)$ અને $\overline{m} = (m_1, m_2, m_3)$ લેતાં,

આ શરતને $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0$ પ્રમાણે પણ દર્શાવી શકાય.

7. **વિષમતલીય રેખાઓ :** બે ભિન્ન રેખાઓ $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l},\ k \in R$ અને $\overline{r} = \overline{b} + k\overline{m},\ k \in R$ માટે જો $(\overline{a} - \overline{b}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m}) \ne 0$ તો તેઓ વિષમતલીય રેખાઓ છે.

8. બિંદુ $P(\overline{p})$ નું રેખા $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l},\ k \in R$ થી લંબઅંતર $\frac{|(\overline{p} - \overline{a}) \times \overline{l}|}{|\overline{l}|}$ છે.

9. બે સમાંતર રેખાઓ $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l},\ k \in R$ અને $\overline{r} = \overline{b} + k\overline{l},\ k \in R$ વચ્ચેનું લંબઅંતર $\frac{|(\overline{b} - \overline{a}) \times \overline{l}|}{|\overline{l}|}$ છે.

10. બે વિષમતલીય રેખાઓ $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l},\ k \in R$ અને $\overline{r} = \overline{b} + k\overline{m},\ k \in R$ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર $\frac{|(\overline{b} - \overline{a}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m})|}{|\overline{l} \times \overline{m}|}$ છે.

11. અસમરેખ બિંદુઓ $A(\overline{a})$, $B(\overline{b})$ અને $C(\overline{c})$ માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ $\overline{r} = l\overline{a} + m\overline{b} + n\overline{c}$, જ્યાં $l, m, n \in R$ અને $l + m + n = 1$.

પ્રચલ સમીકરણો :

$x = lx_1 + mx_2 + nx_3$

$y = ly_1 + my_2 + ny_3$

$z = lz_1 + mz_2 + nz_3$ જ્યાં $l, m, n \in R$ અને $l + m + n = 1$ અને

બિંદુઓ $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ અને $C(x_3, y_3, z_3)$.

કાર્તેઝીય સ્વરૂપ : $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$

12. ચાર ભિન્ન બિંદુઓ $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ અને $C(x_4, y_4, z_4)$ સમતલીય હોય, તો અને

તો જ $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix} = 0.$

13. X-અક્ષ પર a, Y-અક્ષ પર b, Z-અક્ષ પર c અંતઃખંડ બનાવતા સમતલનું સમીકરણ

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ $(abc \neq 0)$.

14. $A(\overline{a})$ માંથી પસાર થતા અને $\overline{n}$ અભિલંબવાળા સમતલનું સમીકરણ

સદિશ સમીકરણ $\overline{r} \cdot \overline{n} = \overline{a} \cdot \overline{n}$

કાર્તેઝીય સ્વરૂપ : જો $\overline{r} = (x, y, z)$, $\overline{n} = (a, b, c)$, તો $ax + by + cz = d$, $(d = \overline{a} \cdot \overline{n})$

15. ઊગમબિંદુમાંથી સમતલ પરના અભિલંબવાળા સમતલનું સમીકરણ : $N(\overline{n})$ એ ઊગમબિંદુથી સમતલ પરનો લંબપાદ છે અને $|\overline{n}| = p$ હોય તેવા સમતલનું સમીકરણ $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$ જ્યાં, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ એ $\overline{n}$ ની દિક્કોસાઇન છે.

16. સમતલો વચ્ચેના ખૂણાનું માપ : જો θ એ સમતલો $\overline{r} \cdot \overline{n}_1 = d_1$ અને $\overline{r} \cdot \overline{n}_2 = d_2$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ હોય,

તો $\cos\theta = \frac{|\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2|}{|\overline{n}_1||\overline{n}_2|}$; $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

સમતલો પરસ્પર લંબ હોય, તો અને તો જ $\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2 = 0$.

17. બે સમાંતર રેખાઓમાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ : $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$, $k \in R$ અને $\overline{r} = \overline{b} + k\overline{l}$, $k \in R$ માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ $(\overline{r} - \overline{a}) \cdot [(\overline{b} - \overline{a}) \times \overline{l}] = 0$.

કાર્તેઝીય સ્વરૂપ :

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{vmatrix} = 0$$

જ્યાં, $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$ અને $\overline{l} = (l_1, l_2, l_3)$.

18. બે છેદતી રેખાઓ $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$, $k \in R$ અને $\overline{r} = \overline{b} + k\overline{m}$, $k \in R$ માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ $(\overline{r} - \overline{a}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m}) = 0$.

કાર્તેઝીય સ્વરૂપ :

$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0$, જ્યાં $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{l} = (l_1, l_2, l_3)$ અને $\overline{m} = (m_1, m_2, m_3)$.

19. બિંદુ $P(\overline{p})$ નું સમતલ $\overline{r} \cdot \overline{n} = d$ થી લંબઅંતર $\dfrac{|\overline{p} \cdot \overline{n} - d|}{|\overline{n}|}$.

કાર્તેઝીય સ્વરૂપ :

$$\frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

જ્યાં સમતલનું સમીકરણ $ax + by + cz = d$ અને બિંદુ P એ (x_1, y_1, z_1) છે.

20. બે સમાંતર સમતલો $\pi_1 : \overline{r} \cdot \overline{n} = d_1$ અને $\pi_2 : \overline{r} \cdot \overline{n} = d_2$ વચ્ચેનું લંબઅંતર $= \dfrac{|d_1 - d_2|}{|\overline{n}|}$.

21. જો રેખા $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$, $k \in R$ અને સમતલ $\overline{r} \cdot \overline{n} = d$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ α હોય, તો

$\alpha = sin^{-1} \dfrac{|\overline{l} \cdot \overline{n}|}{|\overline{l}||\overline{n}|}$; $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

22. બે સમતલો $\pi_1 : \overline{r} \cdot \overline{n}_1 = d_1$ અને $\pi_2 : \overline{r} \cdot \overline{n}_2 = d_2$ નો છેદ એક રેખા દર્શાવે છે. તેનું સમીકરણ

$\overline{r} = \overline{a} + k\overline{n}$, $k \in R$ છે, જ્યાં $\overline{n} = \overline{n}_1 \times \overline{n}_2$.

23. બે સમતલો $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ અને $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ ના છેદમાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + \lambda (a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$ છે.

■

Mahavira

Mahavira was a 9th-century Indian mathematician from Gulbarga who asserted that the square root of a negative number did not exist. He gave the sum of a series whose terms are squares of an arithmetical progression and empirical rules for area and perimeter of an ellipse. He was patronised by the great Rashtrakuta king Amoghavarsha. Mahavira was the author of Ganit Saar Sangraha. He separated Astrology from Mathematics. He expounded on the same subjects on which Aryabhata and Brahmagupta contended, but he expressed them more clearly. He is highly respected among Indian Mathematicians, because of his establishment of terminology for concepts such as equilateral, and isosceles triangle; rhombus; circle and semicircle. Mahavira's eminence spread in all South India and his books proved inspirational to other Mathematicians in Southern India.

જવાબો

સ્વાધ્યાય 1.1

1. 15 સેમી^{3}/સે **2.** $\frac{2}{3}\pi rh$ **3.** $\frac{\pi(2r^2+h^2)}{\sqrt{r^2+h^2}}$ **4.** 4 સેમી^{2}/સે **5.** 3 સેમી^{2}/સે

6. (1) 27π સેમી^{3}/સે (2) 36π સેમી^{2}/સે **7.** 80π સેમી^{2}/સે

8. (1) 1 સેમી^{2}/સે (2) 1 સેમી/સે (3) 0.5 સેમી/સે **9.** 4 સેમી/સે **10.** $\frac{1}{8\pi}$ સેમી/સે **11.** ₹ 21.42

12. ₹ 615 **13.** 2 મી/મીનીટ **14.** 0.1 સેમી/સે **15.** 0.25 મી^{2}/સે **16.** $\frac{3}{20}\sqrt{\frac{3}{7}}$ મી/સે

17. 12π સેમી^{2}/સે **18.** -36 એકમ/સે **19.** $(1, 1), (-1, -1)$ **20.** $(1, 2)$

સ્વાધ્યાય 1.2

7. (1) R પર વધતું (2) R પર ઘટતું (3) $(1, \infty)$ પર વધતું, $(-\infty, 1)$ પર ઘટતું

(4) $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ પર વધતું, $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$ પર ઘટતું (5) R પર વધતું

(6) $(-\infty, -1)$ અને $(0, 2)$ પર ઘટતું, $(-1, 0)$ અને $(2, \infty)$ પર વધતું

(7) $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ પર વધતું અને $\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$ પર ઘટતું

(8) $(-\infty, -2)$ અને $(-1, \infty)$ પર ઘટતું, $(-2, -1)$ પર વધતું

(9) $(1, 3), (3, \infty)$ પર ચુસ્ત વધતું; $(-\infty, -1), (-1, 1)$ પર ચુસ્ત ઘટતું

(10) ઘટતું (11) વધતું (12) ઘટતું

11. $(-\infty, -2)$ અને $(1, 3)$ પર ઘટતું; $(-2, 1)$ અને $(3, \infty)$ પર વધતું

12. $\left(2k\pi, (4k+1)\frac{\pi}{2}\right)$ પર અને $\left((4k+3)\frac{\pi}{2}, (2k+2)\pi\right)$ પર વધતું, $k \in Z$

$\left((4k+1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\pi\right)$ પર અને $\left((2k+1)\pi, (4k+3)\frac{\pi}{2}\right)$ પર ઘટતું, $k \in Z$

14. $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ પર ઘટતું, $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ પર વધતું

15. $a < -2$ **16.** $a \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$

21. (1) $(-\infty, -2)$ અને $(6, \infty)$ પર વધતું; $(-2, 6)$ પર ઘટતું

(2) $(1, \infty)$ પર વધતું, $(-\infty, 1)$ પર ઘટતું

(3) $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$ અને $(2, \infty)$ પર વધતું, $\left(\frac{4}{3}, 2\right)$ પર ઘટતું

(4) $(-\infty, 1)$ અને $(3, \infty)$ પર વધતું, $(1, 3)$ પર ઘટતું

(5) R^+ પર વધતું (6) R^+ પર વધતું

(7) $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ પર વધતું, $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ અને $\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ પર ઘટતું

(8) $((2k-1)\pi, 2k\pi)$ પર વધતું, $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ પર ઘટતું, $k \in Z$

(9) $(0, \infty)$ પર વધતું, $(-\infty, 0)$ પર ઘટતું

(10) $(-\infty, -2)$ પર ઘટતું, $(-2, \infty)$ પર વધતું

(11) $(-1, \infty)$ પર વધતું અને $(-\infty, -1)$ પર ઘટતું

(12) $(-\infty, -2)$ અને $(0, \infty)$ પર વધતું, $(-2, 0)$ પર ઘટતું

(13) $(0, e^2)$ પર વધતું, (e^2, ∞) પર ઘટતું

(14) $\left(\frac{1}{e}, \infty\right)$ પર વધતું, $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ પર ઘટતું

સ્વાધ્યાય 1.3

1. $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$ **2.** $yy_1 = 2a(x + x_1)$ **3.** 17 **4.** -1 **5.** $y = 4x + 1$ **6.** $2x + 4y = 9$

11. (1) $y = 1$ (2) $\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}, 1\right), n \in Z - \{0\}$ **12.** $x + y = \sqrt{2}$

13. (1) $(0, 0)$ આગળ $y = 0$ (2) $(1, 2)$ અને $(-1, -2)$ આગળ $y = 2x$ **14.** $a = 2, b = -7$

15. $a = 5, b = -4$ **16.** $x\cos\frac{\theta}{2} - y\sin\frac{\theta}{2} = a\,\theta\cos\frac{\theta}{2} - 2a\sin\frac{\theta}{2}$ **18.** $(-1, -2)$

19. $a = 2, b = -1$

20. $x + y = 6$, $(0, 0)$ તથા $\left(2^{\frac{4}{3}}, 2^{\frac{5}{3}}\right)$ આગળ સમક્ષિતિજ અને $(0, 0)$ તથા $\left(2^{\frac{5}{3}}, 2^{\frac{4}{3}}\right)$ આગળ શિરોલંબ

22. (1) $5x + 4y + 16 = 0$ (2) $x - \sqrt{2}y + 9 = 0$ (3) $x - y = 0$

(4) $9x - 2y - 5 = 0$ (5) $9x + 13y - 40 = 0$

23. $(1, 1), (-1, -1)$ **24.** (1) $\tan^{-1}\frac{4}{3}$ (2) $(2, 1)$ અને $(2, -1)$ આગળ $\tan^{-1} 2$

25. $x + 2y = (4k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$ **26.** $x + y = 3, x + y + 1 = 0$ **28.** $a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{3}{4}, c = 3$

સ્વાધ્યાય 1.4

1. $\frac{73}{120}$ અથવા 0.6083 **2.** 0.9999 **3.** $\frac{323}{108}$ અથવા 2.9907 **4.** $\frac{1023}{256}$ અથવા 3.9961 **5.** 19.975

6. 2.00125 **7.** $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{360}$ **8.** $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{360}$ **9.** $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{135}$ **10.** 4.6062

11. 1.0004343 **12.** 2.003125 **13.** $\frac{\pi}{2}$સેમી^{3} **14.** $4\pi r^2 \Delta r$ **15.** 0.5 %

16. $\frac{\sqrt{3}\pi x}{6}$ % **17.** 1.12 **18.** 4.05 **19.** 60 સેમી^{3} **20.** 5.184π સેમી^{2} **21.** $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{72}$

સ્વાધ્યાય 1.5

1. $x = \frac{1}{3}$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ, $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{122}{27}$; $x = 3$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ, $f(3) = 14$

2. $x = -\sqrt{3}$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ, $f(\sqrt{3}) = f(-\sqrt{3}) = -9$

$x = \sqrt{3}$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ

$x = 0$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ, $f(0) = 0$

3. આત્યંતિક મૂલ્ય નથી. f એ R^+ પર વધતું વિધેય છે.

4. $x = (2n + 1)\pi$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ, $f((2n + 1)\pi) = -2$

$x = 2n\pi$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ, $f(2n\pi) = 2$

5. $x = 0$ આગળ સ્થાનીય અને વૈશ્વિક ન્યૂનતમ, $f(0) = 0$

6. $x = 1$ આગળ સ્થાનીય અને વૈશ્વિક મહત્તમ, $f(1) = \frac{1}{e}$

$x = 0$ માટે વૈશ્વિક ન્યૂનતમ, $f(0) = 0$

7. $x = e$ આગળ સ્થાનીય અને વૈશ્વિક મહત્તમ, $f(e) = \frac{1}{e}$

$x = 1$ માટે વૈશ્વિક ન્યૂનતમ, $f(1) = 0$

8. $x = 0$ આગળ સ્થાનીય અને વૈશ્વિક મહત્તમ, $f(0) = 4$

$x = \pm 4$ આગળ વૈશ્વિક ન્યૂનતમ, $f(\pm 4) = 0$

9. વૈશ્વિક ન્યૂનતમ $f(1) = \frac{1}{2}$; વૈશ્વિક મહત્તમ $f(2) = \frac{2}{3}$; f વધતું વિધેય $\uparrow$. સ્થાનીય ન્યૂનતમ કે સ્થાનીય મહત્તમ ન મળે.

10. $x = \frac{\pi}{4}$ આગળ સ્થાનીય તથા વૈશ્વિક મહત્તમ, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

$x = \frac{5\pi}{4}$ આગળ સ્થાનીય તથા વૈશ્વિક ન્યૂનતમ, $f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$

11. $x = \frac{11\pi}{6}$ આગળ સ્થાનીય તથા વૈશ્વિક મહત્તમ, $f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$x = \frac{7\pi}{6}$ આગળ સ્થાનીય તથા વૈશ્વિક ન્યૂનતમ, $f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

12. $x = \frac{2}{3}$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ, $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3^{\frac{3}{2}}}$

13. $x = 2$ આગળ સ્થાનીય તથા વૈશ્વિક ન્યૂનતમ, $f(2) = 61$

$x = 0$ આગળ વૈશ્વિક મહત્તમ, $f(0) = 125$

14. $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ આગળ સ્થાનીય તથા વૈશ્વિક મહત્તમ, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 1$

$x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ આગળ સ્થાનીય તથા વૈશ્વિક ન્યૂનતમ, $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -1$

15. $x = 2$ આગળ સ્થાનીય તથા વૈશ્વિક ન્યૂનતમ, $f(2) = 75$

$x = 3$ માટે વૈશ્વિક મહત્તમ, $f(3) = 89$

16. લંબાઈ $(l) = \frac{20}{\pi + 4}$ મી, પહોળાઈ $(b) = \frac{10}{\pi + 4}$ મી   18. 8, 8   19. $x = 10, y = 25$

22. P(4, 3) માટે ન્યૂનતમ અંતર 10 અને Q(−4, −3) માટે મહત્તમ અંતર 20

24. લંબાઈ = પહોળાઈ = 2 મી, ઊંચાઈ = 1 મી, ન્યૂનતમ સપાટી = 12 મી^{2}

25. $a = 0, b = -1, c = 2$ 26. 25 સેમી^{2}

સ્વાધ્યાય 1

1. $\frac{5}{2\sqrt{3\pi}}$ સેમી/સે   2. 15 મી/સે   3. −3 સેમી/મીનીટ

4. $(-\infty, -2)$ અને $(3, \infty)$ માં વધતું, $(-2, 3)$ માં ઘટતું

5. (1) $(1, 3), (3, \infty)$ (2) $(-\infty, -1), (-1, 1)$ 7. $(-2, \infty)$ માં વધતું, $(-\infty, -2)$ માં ઘટતું

8. $(-\infty, 0)$ અને $(2, \infty)$ માં ઘટતું, $(0, 2)$ માં વધતું

10. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 11. (0, 0) આગળ $\frac{\pi}{2}$, $(4a, 4a)$ આગળ $tan^{-1}\frac{3}{4}$ 13. $(-1, 2), (1, -2)$

14. $x = \frac{\pi}{3}$ આગળ સ્થાનીય તથા વૈશ્વિક ન્યૂનતમ, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$

$x = \frac{5\pi}{3}$ આગળ સ્થાનીય તથા વૈશ્વિક મહત્તમ, $f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3}$

15. $x = 0$ માટે વૈશ્વિક ન્યૂનતમ, $f(0) = 0$

16. $x = 1$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ, $f(1) = 3$

17. $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ માં વધતું, $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ અને $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right)$ માં ઘટતું

સ્થાનીય ન્યૂનતમ $f\left(\frac{-\pi}{3}\right) = \frac{-4\pi}{3} + \sqrt{3}$, સ્થાનીય મહત્તમ $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$

18. $\left(0, \frac{3}{4}\right)$ માં વધતું, $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$ માં ઘટતું

$x = \frac{3}{4}$ માટે સ્થાનીય મહત્તમ, $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4}$

19. નિર્ણાયક સંખ્યાઓ 0, 4 અને 6 તથા (0, 4) માં વધતું અને (4, 6) માં ઘટતું

$x = 4$ આગળ સ્થાનીય અને વૈશ્વિક મહત્તમ, $f(4) = 2^{\frac{5}{3}}$, $x = 0$ તથા 6 આગળ વૈશ્વિક ન્યૂનતમ $f(0) = f(6) = 0$

20. $x = \frac{\pi}{4}$ આગળ સ્થાનીય તથા વૈશ્વિક ન્યૂનતમ, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

$x = 0$ તથા $\frac{\pi}{2}$ આગળ વૈશ્વિક મહત્તમ, $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

27. (1) $tan^{-1}\frac{3}{11}$ (2) $tan^{-1}\frac{9}{2}$ (3) $tan^{-1}\frac{1}{2}$

(4) $(4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}, 4a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}})$ આગળ $tan^{-1}\left(\frac{3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{2(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})}\right)$ અને (0, 0) આગળ $\frac{\pi}{2}$

(5) $tan^{-1}\frac{9}{13}$ અને (0, 0) આગળ $\frac{\pi}{2}$ (6) (1, 1) અને (1, −1) આગળ $tan^{-1}\frac{1}{2}$, (0, 0) આગળ એકબીજાને સ્પર્શે છે.

29. (1) (b) (2) (d) (3) (a) (4) (b) (5) (d) (6) (a) (7) (c) (8) (b) (9) (d) (10) (b)
(11) (a) (12) (c) (13) (b) (14) (d) (15) (d) (16) (b) (17) (b) (18) (a) (19) (c) (20) (d)
(21) (d) (22) (c) (23) (a) (24) (c) (25) (d) (26) (a) (27) (c) (28) (a) (29) (b) (30) (c)
(31) (b) (32) (b) (33) (b) (34) (d) (35) (d) (36) (c) (37) (a) (38) (a) (39) (b) (40) (c)
(41) (d) (42) (b) (43) (b) (44) (a) (45) (a) (46) (a) (47) (a) (48) (b) (49) (a) (50) (b)
(51) (b) (52) (a) (53) (b) (54) (a) (55) (b)

સ્વાધ્યાય 2.1

1. $\frac{x^3}{3}\log x - \frac{1}{9}x^3 + c$

2. $\left(\frac{3+5x}{7}\right) sin\ 7x + \frac{5}{49} cos7x + c$

3. $x\, cos^{-1}x - \sqrt{1-x^2} + c$

4. $e^{3x}\left[\frac{x^2}{3} - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27}\right] + c$

5. $\frac{x^3}{3} tan^{-1}x - \frac{1}{6}[x^2 - \log(1 + x^2)] + c$

6. $x\, cosec^{-1}\, x + \log\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + c$

7. $\frac{x}{2}[sin\,(\log x) - cos\,(\log x)] + c$

8. $\frac{1}{2}\left[secx\ tanx + \log\left|tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|\right] + c$

9. $-x\, cot\,\frac{x}{2} + 2\log\left|sin\,\frac{x}{2}\right| + c$

10. $-\frac{x^2}{2} cos\, x^2 + \frac{1}{2} sinx^2 + c$

11. $2x\, tan^{-1}x - \log(1 + x^2) + c$

12. $-\frac{1}{2}(x\, cosec^2x + cotx) + c$

13. $\frac{3}{4}(x \sin x + \cos x) + \frac{1}{12}\left(x \sin 3x + \frac{1}{3}\cos 3x\right) + c$

14. $\frac{1}{n}(x^n \sin x^n + \cos x^n) + c$

15. $\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\log x - x + \frac{x^3}{9} + c$

16. $-\frac{\log x}{x+1} + \log\left(\frac{x}{x+1}\right) + c$

17. $-\frac{\sin^{-1}x}{x} + \log\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + c$

18. $2(\sqrt{x} - \sqrt{1-x}\, \sin^{-1}\sqrt{x}) + c$

સ્વાધ્યાય 2.2

1. $\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + \frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3} + c$

2. $\sqrt{2}\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2+5} + \frac{5}{2}\log\left|x + \sqrt{x^2+5}\right|\right] + c$

3. $\frac{x}{2}\sqrt{5x^2-3} - \frac{3}{2\sqrt{5}}\log\left|\sqrt{5}x + \sqrt{5x^2-3}\right| + c$

4. $\frac{4x+3}{8}\sqrt{4-3x-2x^2} + \frac{41}{16\sqrt{2}}\sin^{-1}\left(\frac{4x+3}{\sqrt{41}}\right) + c$

5. $\frac{1}{2}\left[\frac{2x+1}{2}\sqrt{4x^2+4x-15} - 8\log\left|2x + 1 + \sqrt{4x^2+4x-15}\right|\right] + c$

6. $\frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{2}\sqrt{8-x^6} + 4\sin^{-1}\frac{x^3}{2\sqrt{2}}\right] + c$

7. $\frac{\sin x}{2}\sqrt{4-\sin^2 x} + 2\sin^{-1}\left(\frac{\sin x}{2}\right) + c$

8. $e^x \log \sin x + c$

9. $-e^x \cot\frac{x}{2} + c$

10. $\frac{e^{2x}}{2}\tan x + c$

11. $e^x\left(\frac{x-2}{x+2}\right) + c$

12. $\frac{e^x}{\sqrt{x^2+1}} + c$

13. $\frac{e^x}{1+x^2} + c$

14. $-\frac{1}{3}(1 + x - x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8}(2x-1)\sqrt{1+x-x^2} + \frac{5}{16}\sin^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right) + c$

15. $(x^2 + x + 1)^{\frac{3}{2}} - \frac{7(2x+1)}{8}\sqrt{x^2+x+1} - \frac{21}{16}\log\left|x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1}\right| + c$

16. $-\frac{2}{3}(2 + 3x - x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2x-3}{2}\sqrt{2+3x-x^2} - \frac{17}{4}\sin^{-1}\left(\frac{2x-3}{\sqrt{17}}\right) + c$

17. $\frac{e^{2x}}{10}(\sin 4x - 2\cos 4x) + c$

18. $-e^{-\frac{x}{2}} + \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{17}(-\cos 2x + 4\sin 2x) + c$

19. $\frac{3^x}{2\log 3} - \frac{3^x}{2(4+(\log 3)^2)}(\log 3 \times \cos 2x + 2\sin 2x) + c$

20. $\frac{e^{2x}}{8}(\sin 2x + \cos 2x) - \frac{e^{2x}}{20}(\cos 4x + 2\sin 4x) + c$

સ્વાધ્યાય 2.3

1. $\log\left|\frac{x(x-1)^2}{(x+1)^2}\right| + c$

2. $\frac{5}{2}\log|x-1| - 8\log|x-2| + \frac{11}{2}\log|x-3| + c$

3. $\frac{x^2}{2} - x - 2\log|x-2| + \log|x-3| + c$

4. $\frac{1}{3\sqrt{2}}\tan^{-1}(\sqrt{2}x) + \frac{1}{6}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c$

5. $\frac{1}{3\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{3\sqrt{2}}\tan^{-1}(\sqrt{2}x) + c$

6. $\frac{5}{6}\log(x^2+5) - \frac{1}{3}\log(x^2+2) + c$

7. $-2\log|x+1| - \frac{1}{x+1} + 3\log|x+2| + c$

8. $-\frac{1}{2}\log|x+1| + \frac{1}{4}\log(x^2+9) + \frac{3}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + c$

9. $x + 2\log|2e^x+1| - 3\log|3e^x+1| + c$

10. $\frac{1}{2}\log\left|\frac{\tan\theta-3}{\tan\theta-1}\right| + c$

11. $\frac{1}{2}\log|x+1| - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{4}\log(x^2+1) + c$

12. $-\frac{1}{8}\log|x+1| + \frac{1}{8}\log|x-1| - \frac{3}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x-1)^2} + c$

13. $-\frac{1}{2}\log|1-\cos x| - \frac{1}{6}\log|1+\cos x| + \frac{2}{3}\log|1-2\cos x| + c$

14. $\frac{1}{10}\log|1-\cos x| - \frac{1}{2}\log|1+\cos x| + \frac{2}{5}\log|3+2\cos x| + c$

સ્વાધ્યાય 2

1. $\frac{x^3}{3}\sin^{-1}x + \frac{1}{3}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{9}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + c$

2. $\frac{x}{2}\cos^{-1}x - \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} + c$

3. $-x\cot\frac{x}{2} + c$

4. $\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}}\right| - \tan^{-1}(\sqrt{\sin x}) + c$

5. $x\log|x+\sqrt{x^2+a^2}| - \sqrt{x^2+a^2} + c$

6. $(x+a)\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{ax} + c$

7. $2\sqrt{x} - 2\sqrt{1-x}\sin^{-1}\sqrt{x} + c$

8. $\frac{1}{2}e^x\sec x + c$

9. $\frac{x}{\log x} + c$

10. $x\log(\log x) + c$

11. $-\frac{1}{3}(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{a(x-a)}{2}\sqrt{2ax-x^2} + \frac{a^3}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + c$

12. $\frac{1}{3}(x^2+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{11}{8}(2x+1)\sqrt{x^2+x} + \frac{11}{16}\log\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right| + c$

13. $\frac{1}{2}\log\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right| - \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\frac{\sqrt{2}\sin x-1}{\sqrt{2}\sin x+1}\right| + c$

14. $\frac{1}{6}\log|1-\cos x| + \frac{1}{2}\log|1+\cos x| - \frac{2}{3}\log|2\cos x+1| + c$

15. $\frac{1}{8}\log\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right| - \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\left|\frac{\sqrt{2}\sin x-1}{\sqrt{2}\sin x+1}\right| + c$

16. $x\tan^{-1}x + x\tan^{-1}(1-x) + \frac{1}{2}\log|x^2-2x+2| + \tan^{-1}(x-1) - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + c$

17. $\frac{2}{\sqrt{\cos x}} - \frac{1}{2}\log\left|\frac{\sqrt{\cos x}+1}{\sqrt{\cos x}-1}\right| + \tan^{-1}(\sqrt{\cos x}) + c$

18. $\frac{1}{4}\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + \frac{1}{2(1+\sin x)} + c$

19. $\frac{1}{2}\log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{4}\sec^2\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2} + c$

20. (1) (a) (2) (b) (3) (c) (4) (a) (5) (c) (6) (c) (7) (a) (8) (d) (9) (b) (10) (b) (11) (a)

સ્વાધ્યાય 3.1

1. 8
2. 10
3. $\frac{94}{3}$
4. $\frac{38}{3}$
5. $e - e^{-1}$
6. $\frac{1}{3}(e^2 - e^{-1})$
7. $6\log_3 e$
8. 3
9. $e^2 - 3$
10. $2\log_a e$
11. 26
12. $\sin b - \sin a$
13. 2
14. 1
15. 20

સ્વાધ્યાય 3.2

1. $\frac{1}{3}\cdot 2^{\frac{5}{2}}$
2. $\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$
3. $\frac{\pi}{4}$
4. $\frac{1}{2}\log 2$
5. $\sqrt{2}$
6. $\sqrt{2} - 1$
7. $\frac{\pi}{2}$
8. $\frac{1}{5}\log 6$
9. $\frac{1}{5}\log 6 + \frac{3}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\sqrt{5}$
10. $2 - \frac{\pi}{2}$
11. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$
12. $6 - 4\log 2$
13. $\frac{\pi}{6}$
14. $\tan^{-1}e - \frac{\pi}{4}$
15. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2$
16. $\frac{\pi}{3}$
17. $-\frac{\pi}{4}$
18. $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\pi}{12}$
19. $\tan^{-1}\frac{1}{3}$
20. $\frac{1}{\sqrt{10}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{2}{5}}$
21. $\frac{\pi}{2} - 1$
22. $\frac{\pi}{2} - 1$
23. $\frac{1}{2}\log\left(\frac{32}{27}\right)$
24. $\frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1) + \frac{1}{2}\log(\sqrt{2} + 1)$
25. $\frac{1}{2}\log\frac{8}{5}$
26. $\frac{1}{4}\log 2 - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$
27. $\frac{2}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$
28. $\frac{1}{2\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$
29. 4
30. 47
31. $e^4 + 5 - \frac{\pi}{2}$
32. $\frac{13}{10}$
33. 4
34. 0
35. 0
36. 2
37. $\frac{1}{2}$
38. $\frac{9}{2}$

સ્વાધ્યાય 3.3

1. (1) 0 (2) 0 (3) 0 (4) 0 (5) $\frac{\pi}{2}$ (6) 2
2. (1) 0 (2) 0

સ્વાધ્યાય 3

3. (1) $\frac{\pi^2}{4}$ (2) π 5. -64 8. $\frac{1}{2}(1 - \log 2)$ 9. $\frac{1}{2ab}\log\left|\frac{a+b}{a-b}\right|$

10. $\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{3}{2\sqrt{2}}$ 11. 0 12. $\frac{\pi}{6\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\log\frac{3}{2}$ 13. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2$ 14. $\frac{\pi}{8}\log 2$ 15. $\frac{2}{3} + \log\left(\frac{2}{3}\right)$

16. $\frac{\pi^2}{4}$ 17. $2(\sqrt{2} - 1)$ 18. $\frac{38}{3}$ 19. $\frac{15 + e^8}{2}$

22. (1) (c) (2) (a) (3) (a) (4) (c) (5) (a) (6) (b) (7) (c) (8) (a) (9) (b) (10) (b)
(11) (a) (12) (a) (13) (b) (14) (b) (15) (d) (16) (b) (17) (d) (18) (a) (19) (b) (20) (c)

સ્વાધ્યાય 4.1

1. $\frac{13}{3}$ 2. 9 3. 3 4. $\frac{136}{3}$ 5. $\frac{32}{3}$ 6. 36 7. πa^2 8. $\frac{32}{3}$

સ્વાધ્યાય 4.2

1. 27 2. $\frac{9}{2}$ 3. $\frac{4}{\pi}$ 4. $\frac{64}{3}$ 5. $\frac{5}{6}$ 6. $\frac{32}{3}$ 7. $\frac{19}{6}$ 8. $\frac{64}{3}$ 9. 8 10. $\frac{15}{2}$

11. 4π 12. $\frac{20}{3}(\sqrt{5} - 2)$

સ્વાધ્યાય 4

1. $\frac{125}{6}$ 2. $\frac{2}{3}$ 3. $\frac{1}{6}$ 4. $\frac{\pi}{4}$ 5. $\frac{8}{3}$ 6. $\frac{9}{8}$ 7. $\frac{4}{3}(8 + 3\pi)$ 8. $\frac{13}{3}$ 10. $\frac{23}{6}$

11. $\frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}$ 12. $\frac{32}{3}$ 13. 2 14. $\frac{5\pi}{4} - \frac{1}{2}$ 15. $\frac{9}{2}$ 16. $\frac{4}{3}$

17. (1) (c) (2) (d) (3) (c) (4) (b) (5) (c) (6) (c) (7) (b) (8) (d) (9) (c) (10) (b)
(11) (a) (12) (b) (13) (d) (14) (a) (15) (b) (16) (d) (17) (d) (18) (c) (19) (a) (20) (b)

સ્વાધ્યાય 5.1

1.

ક્રમાંક	કક્ષા	પરિમાણ
1	2	1
2	1	4
3	2	અવ્યાખ્યાયિત
4	1	1
5	3	2
6	2	2
7	1	2
8	3	2
9	2	1
10	2	3

સ્વાધ્યાય 5.2

1. $(x-y)^2\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1\right]=\left(x+y\frac{dy}{dx}\right)^2$ **2.** $\frac{d^2y}{dx^2}=0$

3. $xy\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y\frac{dy}{dx}=0$ **4.** $(x^2-y^2)\frac{dy}{dx}=2xy$

9. (1) $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ (2) $x\left(y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)=y\frac{dy}{dx}$ (3) $2\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3=0$

(4) $x^2y_2+xy_1-y=0$ (5) $x\frac{dy}{dx}=3y$ (6) $y_2=4(y_1-y)$ (7) $xy\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=y\frac{dy}{dx}$

સ્વાધ્યાય 5.3

1. (1) $2y^3+3y^2=3x^2+6\log|x|+c$ (2) $e^y=(y+1)(e^x+1)c$

(3) $\sin y=c\cos x$ (4) $\log|y|=\log|\sec x|-\tan x+c$

(5) $(e^y+1)\sin x=c$ (6) $\tan^{-1}y=x+\frac{x^3}{3}+c$

(7) $x=c\log y$ (8) $\frac{1}{y}=2x^2+1$

(9) $y=x^2+\log x$ (10) $8e^y=x(y+2)^2$

(11) $4e^x+\frac{1}{y^2}=8$ (12) $x\sec y=2$

(13) $y=(x+1)\log(x+1)-x+3$ (14) $y=\sin^{-1}a\cdot x+1$

(15) $y=\sec x$ (16) $y=\frac{e^x}{x+1}+c$

2. (1) $\tan(x+y)-\sec(x+y)=x+c$ (2) $c(x-y+2)=e^{2y-x}$

(3) $(x+y+2)c=e^{y+1}$ (4) $c(e^{x+y}+1)=e^y$

(5) $y-a\tan^{-1}\left(\frac{x+y}{a}\right)=c$

સ્વાધ્યાય 5.4

1. (1) $(x-y)^2=cxe^{-\frac{y}{x}}$ (2) $\sec\frac{y}{x}=xyc$ (3) $x\tan\frac{y}{2x}=c$

(4) $e^{\frac{x}{y}}=y+c$ (5) $-\cos\frac{y}{x}=\log x+c$ (6) $2e^{\frac{x}{y}}=\log\frac{c}{y}$

(7) $\frac{\sqrt{2}y+x}{\sqrt{2}y-x}=cx^{2\sqrt{2}}$ (8) $ye^{\frac{x}{y}}+x=c$ (9) $e^{\frac{y}{x}}=xc$

(10) $y\left(\log\frac{y}{x}-1\right)=c$ (11) $-e^{-\frac{y}{x}}=\log xc$ (12) $yx^2=c(y+2x)$

(13) $\sin\frac{y}{x}=xc$

2. (1) $x^2(x^2 + 2y^2) = 3$ (2) $e^{-\frac{y}{x}} = \log x$ (3) $e^{\cos\frac{y}{x} - 1} = x$

(4) $xe^{\frac{y^2}{x^2}} = e$ (5) $(y + 4x) = 3x^2y$ (6) $e^{\frac{y}{x+y}} = x$

સ્વાધ્યાય 5.5

1. $y = \frac{1}{5}[2\sin x - \cos x] + ce^{-2x}$
2. $y = -e^{-x} + cx$
3. $\frac{y}{x} = \log x + c$
4. $\frac{y}{1+x^2} = x + c$
5. $y + x + 1 = ce^x$
6. $yx^2 = e^x(x^2 - 2x + 2) + c$
7. $y = -\frac{5}{4}e^{-3x} + ce^{-2x}$
8. $(1 + x^2)y = \frac{4x^3}{3} + c$
9. $xe^{\tan^{-1}y} = e^{\tan^{-1}y}(\tan^{-1}y - 1) + c$
10. $y\log x = -\frac{2}{x}(1 + \log x) + c$
11. $y = (\cot x + 1) + ce^{\cot x}$
12. $\frac{x}{y} = 2y + c$

સ્વાધ્યાય 5.6

1. $y = ce^{-\frac{x}{4y}}$
2. 16 ગણું, 3000
3. $x^2 = -\frac{9}{4}y$
4. 14 વર્ષ, 6.9 %
5. $m_0 = 125$ ગ્રા
6. $y^2 = 2kx$ (k સ્વૈર અચળ)
7. $y^2 - x^2 = 3$

સ્વાધ્યાય 5

5. $xy\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y\frac{dy}{dx}$

6. (1) $1 + \tan\left(\frac{x+y}{2}\right) = ce^x$ (2) $y(x^2 + 1)^2 = \tan^{-1}x + c$

(3) $2e^{\frac{x}{y}} = \log\left|\frac{c}{y}\right|, y \neq 0$ (4) $x^2(x^2 - 2y^2) = c$

(5) $x^2 + y^2 = 2x$ (6) $y = \tan x - 1 + ce^{-\tan x}$

7. (1) (b) (2) (a) (3) (b) (4) (c) (5) (b) (6) (c) (7) (c) (8) (b) (9) (d) (10) (a) (11) (b) (12) (c) (13) (d) (14) (a) (15) (a) (16) (b)

સ્વાધ્યાય 6.1

1. (1) 4 (2) 5 (3) $3\sqrt{2}$
2. $\frac{2}{3}\hat{i} - \frac{2}{3}\hat{j} + \frac{1}{3}\hat{k}$
3. (6, –4, –4)
4. $12\hat{i} - 8\sqrt{3}\hat{j} + 8\hat{k}$

5. $\frac{7}{\sqrt{110}}\hat{i} + \frac{6}{\sqrt{110}}\hat{j} - \frac{5}{\sqrt{110}}\hat{k}$

6. અદિશ ઘટકો 3, −6, 7; સદિશ ઘટકો $3\hat{i}, -6\hat{j}, 7\hat{k}$

7. (i) 5 (ii) 5 (iii) $5\sqrt{2}$

સ્વાધ્યાય 6.2

1. 5 2. (−7, 3, 5) 3. (−6, −24, 6) 4. $8\sqrt{3}$ 5. 3

6. (−5, 5, 0) 7. −2 8. 0 9. (11, −11, 11) 10. $7\sqrt{6}$

સ્વાધ્યાય 6

6. $a = 1, b = -1, c = 2$

9. (1) $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}; \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}$ (2) $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}; 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$

(3) $cos^{-1}\frac{1}{17}; cos^{-1}\frac{12}{85}; cos^{-1}\frac{84}{85}; \frac{1}{17}, \frac{12}{85}; \frac{84}{85}$

11. $\left(\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)$ અથવા $\left(-\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right)$ 16. $\pm 2\sqrt{3}$ 18. $2\sqrt{91}$ 24. $\frac{7\sqrt{6}}{2}$

25. (2, −2, 2), $2\sqrt{3}$ 26. $b\hat{j}; |b|$ 27. $\left(\frac{56}{99}, \frac{-56}{99}, \frac{8}{99}\right)$

30. $\left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right) + \left(\frac{-2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{-1}{3}\right) = (2, 3, 1)$ 31. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ 33. $\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 34. 10

36. (1) (b) (2) (d) (3) (c) (4) (b) (5) (c) (6) (b) (7) (b) (8) (d) (9) (a) (10) (a)
(11) (a) (12) (c) (13) (c) (14) (a) (15) (c) (16) (b) (17) (b) (18) (a) (19) (c) (20) (d)
(21) (c) (22) (d) (23) (a) (24) (b) (25) (c)

સ્વાધ્યાય 7.1

1. $\bar{r} = (2, -1, 3) + k(2, -3, 4), k \in R$; $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-3}{4}$

2. $\frac{x-2}{2} = \frac{z+9}{4}, y - 3 = 0$; $\bar{r} = (2, 3, -9) + k(2, 0, 4), k \in R$

3. અસમરેખ 4. $\frac{4}{\sqrt{26}}, \frac{-3}{\sqrt{26}}, \frac{1}{\sqrt{26}}$

5. $\bar{r} = (1, -2, 1) + k\left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{2}, 1\right), k \in R$; $\frac{3(x-1)}{1} = \frac{2(y+2)}{-1} = \frac{z-1}{1}$

6. (4, 0, −1) 7. $cos^{-1}\frac{17}{5\sqrt{14}}$ 9. (1) વિષમતલીય (2) સમાંતર (3) વિષમતલીય (4) છેદક (5) સમાંતર

10. $\frac{107}{\sqrt{1038}}$ 11. $\frac{\sqrt{457}}{5}$ 12. $\sqrt{\frac{118}{3}}$

સ્વાધ્યાય 7.2

1. $\frac{1}{\sqrt{21}}(4, -2, 1)$ **2.** $\bar{r} \cdot (2, 2, -1) = 5$; $2x + 2y - z = 5$ **3.** $2x - 3y - 5z = 11$

4. $x + 2y - 3 = 0$; $3, \frac{3}{2}$, વ્યાખ્યાયિત નથી **5.** $6x - y - 5z = 7$ **6.** $13x - 7y - 37z + 134 = 0$

7. $x - y + 1 = 0$ **8.** $\frac{\pi}{3}$ **9.** $sin^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{238}}\right)$ **10.** $\frac{12}{\sqrt{38}}$ **11.** $\frac{19}{14}$

12. $2x - 5y - 4z + 33 = 0$ **13.** $55x - 2y + 13z = 40$ **14.** $x - y - z - 1 = 0$

સ્વાધ્યાય 7

1. $\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{17}{3}\right)$, $\bar{r} = (1, 0, 3) + k(2, 7, 8)$, $k \in R$; $\sqrt{13}$ **2.** $\frac{\pi}{3}$ **3.** $\frac{7}{\sqrt{74}}$ **4.** $(-3, 5, 1)$, $\frac{\pi}{2}$

5. $\frac{x-1}{11} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{7}$ **6.** $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+4}{1}$ **7.** $(3, -1, 1)$; $sin^{-1}\frac{12}{\sqrt{609}}$

8. $\frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$ **9.** $(2, 3, 2)$ **10.** $(4, -4, 6)$; $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+2}{4}$; $2\sqrt{29}$

11. $4x + 7y - 5z - 8 = 0$; $\frac{x-2}{4} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{-1}$ **12.** $x + 2y - 2z = 6$ **13.** $2x + 16y - 13z - 22 = 0$

14. $3x + 4y - 6z = 6$ **15.** $8x - 8y - 14z = -47$

16. (1) (c) (2) (c) (3) (a) (4) (b) (5) (d) (6) (c) (7) (c) (8) (b) (9) (a) (10) (c) (11) (c) (12) (d) (13) (b) (14) (a) (15) (b) (16) (b) (17) (d)

પારિભાષિક શબ્દો

અવલંબી ચલ	Dependent Variable
અવાભિલંબ	Subnormal
અવસ્પર્શક	Subtangent
અસામાન્ય ઉકેલ	Singular Solution
અભિલંબ	Normal
અધ:સીમા	Lower Limit
અનુચિત સંમેય વિધેય	Improper Rational Function
આસન્ન મૂલ્ય	Approximate Value
એકસૂત્રી	Monotonic
ઉચિત સંમેય વિધેય	Proper Rational Function
ઉર્ધ્વસીમા	Upper Limit
કક્ષા	Order
ખંડશઃ સંકલન	Integration by Parts
ઘટક	Component
ચુસ્ત વધતું વિધેય	Strictly Increasing Function
ચુસ્ત ઘટતું વિધેય	Strictly Decreasing Function
ત્રુટિ	Error
દર	Rate
દિક્ગુણોત્તર (દિક્ સંખ્યાઓ)	Direction Ratios
દિક્ખૂણા	Direction Angles
દિક્કોસાઇન	Direction Cosines
નિયત સંકલન	Definite Integration
પરિમાણ	Degree
પેટીગુણન	Box Product
પ્રારંભિક શરત	Initial Condition
પ્રક્ષેપ સદિશ	Projection Vector
વિકલ	Differential
વિષમતલીય રેખાઓ	Skew Lines
વિશિષ્ટ ઉકેલ	Particular Solution

વિરુદ્ધ દિશા	Opposite Direction
વિયોજનીય ચલ	Separable Variables
વૈશ્વિક	Global
સંકલ્યકારક અવયવ	Integrating Factor(I.F.)
સુરેખ સંયોજન	Linear Combination
સદિશ ગુણાકાર	Vector Product
સદિશનું ત્રિગુણન	Vector Triple Product
સદિશોનું બર્હિગુણન	Outer Product of Vectors
સદિશોનો અદિશ ગુણાકાર	Scalar Product of Vectors
સદિશોનુંઅંતઃ ગુણન	Inner Product of Vectors
સમદિશ	Having same Direction
સમપરિમાણ	Homogeneous
સ્વતંત્ર ચલ	Independent Variable
સ્પર્શક	Tangent

• • •