ગુજરાત રાજ્યના શિક્ષણવિભાગના પત્ર-ક્રમાંક
મશબ / 1211 / 414 / છ, તા. 11-4-2011 - થી મંજૂર

ભૌતિકવિજ્ઞાન

ધોરણ 12

(સિમેસ્ટર III)

પ્રતિજ્ઞાપત્ર

ભારત મારો દેશ છે.
બધાં ભારતીયો મારાં ભાઈબહેન છે.
હું મારા દેશને ચાહું છું અને તેના સમૃદ્ધ અને
વૈવિધ્યપૂર્ણ વારસાનો મને ગર્વ છે.
હું સદાય તેને લાયક બનવા પ્રયત્ન કરીશ.
હું મારાં માતાપિતા, શિક્ષકો અને વડીલો પ્રત્યે આદર રાખીશ
અને દરેક જણ સાથે સભ્યતાથી વર્તીશ.
હું મારા દેશ અને દેશબાંધવોને મારી નિષ્ઠા અર્પું છું.
તેમનાં કલ્યાણ અને સમૃદ્ધિમાં જ મારું સુખ રહ્યું છે.

રાજ્ય સરકારની વિનામૂલ્યે યોજના હેઠળનું પુસ્તક

તમસોમા જ્યોતિર્ગમય
ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ
'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર-382010

લેખન
ડૉ. પી. એન. ગજ્જર (કન્વીનર)
ડૉ. વી. પી. પટેલ
પ્રૉ. એમ. એસ. રામી
ડૉ. અરુણ પી. પટેલ
ડૉ. દીપક એચ. ગદાણી
ડૉ. નિસર્ગ ભટ્ટ
પ્રૉ. મહેશભાઈ સી. પટેલ

અનુવાદ
ડૉ. પી. એન. ગજ્જર
ડૉ. એમ. એસ. રામી
ડૉ. અરુણ પી. પટેલ
ડૉ. વી. પી. પટેલ
ડૉ. દીપક એચ. ગદાણી
ડૉ. નિસર્ગ ભટ્ટ
શ્રી મહેશભાઈ સી. પટેલ

પરામર્શક
શ્રી જે. પી. જોષી
શ્રી દિનેશ વી. સુથાર
શ્રી જે. એમ. પટેલ
શ્રી સુરેશ જી. પટેલ
શ્રી મૂકેશ એસ. ભટ્ટ
શ્રી મયૂર એમ. રાવલ
શ્રી વાસુદેવ વી. રાવલ
શ્રી કલ્પેશ ડી. પટેલ
શ્રી શાન્તિલાલ એસ. પટેલ

ભાષાશુદ્ધિ
શ્રી ઓ. બી. દવે

ચિત્રાંકન
શ્રી જી. વી. મેવાડા

સંયોજન
શ્રી ચિરાગ એચ. પટેલ
(વિષય-સંયોજક : ભૌતિકવિજ્ઞાન)

નિર્માણ-આયોજન
શ્રી હરેશ એસ. લીમ્બાચીયા
(નાયબ નિયામક : શૈક્ષણિક)

મુદ્રણ-આયોજન
શ્રી હરેશ એસ. લીમ્બાચીયા
(નાયબ નિયામક : ઉત્પાદન)

પ્રસ્તાવના

કોર-કરિક્યુલમ અને એન. સી. ઈ. આર. ટી. દ્વારા એન. સી. એફ. 2005 મુજબ તૈયાર કરવામાં આવેલા નવા રાષ્ટ્રીય અભ્યાસક્રમોના અનુસંધાનમાં ગુજરાત રાજ્ય માધ્યમિક અને ઉચ્ચતર માધ્યમિક શિક્ષણ બોર્ડે નવા અભ્યાસક્રમો તૈયાર કર્યા છે. આ અભ્યાસક્રમો ગુજરાત સરકાર દ્વારા મંજૂર કરવામાં આવે છે.

ગુજરાત સરકાર દ્વારા મંજૂર થયેલા **ધોરણ 12**ના **સિમેસ્ટર III**ના **ભૌતિકવિજ્ઞાન** વિષયના નવા અભ્યાસક્રમ અનુસાર તૈયાર કરવામાં આવેલું આ પાઠ્યપુસ્તક વિદ્યાર્થીઓ સમક્ષ મૂકતાં મંડળ આનંદ અનુભવે છે.

આ પાઠ્યપુસ્તક પ્રસિદ્ધ કરતાં પહેલાં એની હસ્તપ્રતની આ સ્તરે શિક્ષણકાર્ય કરતા શિક્ષકો અને તજ્જ્ઞો દ્વારા સર્વાંગી સમીક્ષા કરાવવામાં આવી છે. શિક્ષકો તથા તજ્જ્ઞોનાં સૂચનો અનુસાર હસ્તપ્રતમાં યોગ્ય સુધારાવધારા કર્યા પછી આ પાઠ્યપુસ્તક પ્રસિદ્ધ કરવામાં આવ્યું છે.

આ મૂળ અંગ્રેજીમાં લખાયેલ પાઠ્યપુસ્તકનો ગુજરાતી અનુવાદ છે. ગુજરાતી અનુવાદની વિષય અને ભાષાના નિષ્ણાતો દ્વારા સમીક્ષા કરવામાં આવી છે.

પ્રસ્તુત પાઠ્યપુસ્તકને રસપ્રદ, ઉપયોગી અને ક્ષતિરહિત બનાવવા માટે મંડળે પૂરતી કાળજી લીધી છે; તેમ છતાં શિક્ષણમાં રસ ધરાવનાર વ્યક્તિઓ પાસેથી પુસ્તકની ગુણવત્તા વધારે તેવાં સૂચનો આવકાર્ય છે.

ડૉ. ભરત પંડિત
નિયામક
તા.3-3-2015

ડૉ. નીતિન પેથાણી
કાર્યવાહક પ્રમુખ
ગાંધીનગર

પ્રથમ આવૃત્તિ : 2012, પુનઃમુદ્રણ : 2012, 2013, 2014
પ્રકાશક : ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, 'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર વતી ડૉ. ભરત પંડિત, નિયામક
મુદ્રક :

મૂળભૂત ફરજો

ભારતના દરેક નાગરિકની ફરજ નીચે પ્રમાણે રહેશે :*

(ક) સંવિધાનને વફાદાર રહેવાની અને તેના આદર્શો અને સંસ્થાઓનો, રાષ્ટ્રધ્વજનો અને રાષ્ટ્રગીતનો આદર કરવાની;

(ખ) આઝાદી માટેની આપણી રાષ્ટ્રીય લડતને પ્રેરણા આપનારા ઉમદા આદર્શોને હૃદયમાં પ્રતિષ્ઠિત કરવાની અને અનુસરવાની;

(ગ) ભારતનાં સાર્વભૌમત્વ, એકતા અને અખંડિતતાનું સમર્થન કરવાની અને તેમનું રક્ષણ કરવાની;

(ઘ) દેશનું રક્ષણ કરવાની અને રાષ્ટ્રીય સેવા બજાવવાની હાકલ થતાં, તેમ કરવાની;

(ચ) ધાર્મિક, ભાષાકીય, પ્રાદેશિક અથવા સાંપ્રદાયિક ભેદોથી પર રહીને, ભારતના તમામ લોકોમાં સુમેળ અને સમાન બંધુત્વની ભાવનાની વૃદ્ધિ કરવાની, સ્ત્રીઓના ગૌરવને અપમાનિત કરે તેવા વ્યવહારો ત્યજી દેવાની;

(છ) આપણી સમન્વિત સંસ્કૃતિના સમૃદ્ધ વારસાનું મૂલ્ય સમજી તે જાળવી રાખવાની;

(જ) જંગલો, તળાવો, નદીઓ અને વન્ય પશુપક્ષીઓ સહિત કુદરતી પર્યાવરણનું જતન કરવાની અને તેની સુધારણા કરવાની અને જીવો પ્રત્યે અનુકંપા રાખવાની;

(ઝ) વૈજ્ઞાનિક માનસ, માનવતાવાદ અને જિજ્ઞાસા તથા સુધારણાની ભાવના કેળવવાની;

(ટ) જાહેર મિલકતનું રક્ષણ કરવાની અને હિંસાનો ત્યાગ કરવાની;

(ઠ) રાષ્ટ્ર પુરુષાર્થ અને સિદ્ધિનાં વધુ ને વધુ ઉન્નત સોપાનો ભણી સતત પ્રગતિ કરતું રહે એ માટે વૈયક્તિક અને સામૂહિક પ્રવૃત્તિનાં તમામ ક્ષેત્રે શ્રેષ્ઠતા હાંસલ કરવાનો પ્રયત્ન કરવાની;

(ડ) માતા-પિતાએ અથવા વાલીએ 6 વર્ષથી 14 વર્ષ સુધીની વયના પોતાના બાળક અથવા પાલ્યને શિક્ષણની તકો પૂરી પાડવી.

* ભારતનું સંવિધાન : કલમ 51-क

અનુક્રમણિકા

આ પાઠ્યપુસ્તક વિશે...

National Curriculum Framwork (NCF), Core-Curriculum અને National Council of Educational Research and Training (NCERT)ના અભ્યાસક્રમોને ધ્યાનમાં રાખી રાષ્ટ્રીય શિક્ષણનીતિના ઉપલક્ષ્યમાં રાજ્ય સરકાર તરફથી મંજૂર કરવામાં આવેલ ધોરણ 12ના ભૌતિક વિજ્ઞાન વિષયના અભ્યાસક્રમ અનુસાર તૈયાર કરવામાં આવેલું આ પાઠ્યપુસ્તક આપની સમક્ષ રજૂ કરતાં અમે આનંદ અનુભવીએ છીએ.

રાજ્ય સરકારે વિજ્ઞાનપ્રવાહમાં સિમેસ્ટર પદ્ધતિનો અમલ કર્યો છે. સિમેસ્ટર પદ્ધતિ વિદ્યાર્થીઓના ભણતરનો ભાર ઘટાડનાર થશે તથા અભ્યાસ પ્રત્યે રુચિ વધારનાર થશે.

ધોરણ-12ના ભૌતિક વિજ્ઞાનના આ પાઠ્યપુસ્તકમાં, સાત પ્રકરણોનો સમાવેશ વિષયવસ્તુની ગહનતા, વર્ગખંડમાં અભ્યાસ માટે મળવાપાત્ર સમય વગેરેને ધ્યાનમાં રાખીને કરવામાં આવ્યો છે.

ભૌતિક વિજ્ઞાનના કોઈ પણ વાદ (Theory)ની સ્પષ્ટ સમજણ તો જ પ્રાપ્ત થાય જો તેની સાથે-સાથે તેના આનુષંગિક કોયડાનો ઉકેલ મેળવતાં વિદ્યાર્થી શીખે. આથી જ દરેક પ્રકરણમાં કોઈ પણ નવા વાદને અનુરૂપ કોયડા ગણીને આપેલ છે. પ્રસ્તુત પાઠ્યપુસ્તકનું એક જમા પાસું એ પણ છે કે, દરેક પ્રકરણના અંતે સવિસ્તૃત સારાંશ આપવામાં આવેલ છે, જેના પરથી સમગ્ર પ્રકરણના વિષયવસ્તુ પર ઝડપથી એક નજર કરી શકાય.

સમગ્ર દેશમાં લેવામાં આવતી વિવિધ પ્રવેશ પરીક્ષાના પરિરૂપને ધ્યાનમાં રાખી આ પુસ્તકમાં MCQs, Short questions, Objective questions અને Problemsનો સમાવેશ કરેલ છે. Problemsના ઉકેલ માટે પુસ્તકના અંતે Hints પણ આપવામાં આવેલ છે કે જેથી વિદ્યાર્થીઓ સ્વ-પ્રયત્ને આ કોયડા ઉકેલી શકે.

આ પુસ્તક એક નવા જ પરિરૂપ તથા ચાર કલરના પ્રિન્ટિંગમાં પ્રસિદ્ધ કરવામાં આવ્યું છે, તેથી તેમાં રહેલી આકૃતિઓ વધુ સ્પષ્ટ બની રહે છે. સામાન્ય રીતે વિદ્યાર્થીઓ એક ધોરણ પૂરું કરીને આગળના ધોરણમાં જાય ત્યારે જૂનાં પાઠ્યપુસ્તકો જાળવી રાખતાં ન હોવાનું વલણ નોંધાયેલું છે. પરંતુ સિમેસ્ટર પદ્ધતિમાં દરેક સિમેસ્ટરનું મહત્ત્વ હોવાથી તથા પાઠ્યપુસ્તકનું સ્વરૂપ જ અતિસુંદર હોવાથી તે દરેક વિદ્યાર્થીઓને સાચવી રાખવું ગમશે અને તે સંદર્ભ પુસ્તક તરીકે ઉપયોગી બનશે.

આ અગાઉના પાઠ્યપુસ્તકને વિદ્યાર્થીઓ, શિક્ષકો તથા તજ્જ્ઞો દ્વારા ખૂબ જ સારો પ્રતિભાવ મળ્યો હતો. આથી તે પુસ્તકમાંની ઘણા વિષયવસ્તુને આ પુસ્તકમાં મૂળ સ્વરૂપે કે થોડાક ફેરફાર સાથે લેવામાં આવેલ છે. અત્રે અગાઉના લેખકોની ટીમનો અમે ઋણ સ્વીકાર કરીએ છીએ. Review workshopમાં ઉપસ્થિત રહીને જે શિક્ષકમિત્રોએ આ પુસ્તકને ક્ષતિરહિત બનાવવા સૂચનો કર્યાં છે તે બદલ તેમનો પણ આભાર.

પુસ્તક તૈયાર કરતી વખતે તે ક્ષતિરહિત બને તેમજ હકીકતદોષ ન રહી જાય તેની જરૂરી કાળજી વિષય-સલાહકારો, લેખકો અને પરામર્શકો દ્વારા લેવામાં આવી છે. છતાં પણ કોઈ ક્ષતિ રહી ગઈ હોય તો, તે માટે ધ્યાન દોરવા આગ્રહ છે.

લેખકો/સંપાદકો

1

વિદ્યુતભાર અને વિદ્યુતક્ષેત્ર

1.1 પ્રસ્તાવના

આધુનિક યુગમાં માનવજાત જે ભૌતિક સુખ-સગવડો ભોગવી રહ્યો છે, તેમાં ટેક્નોલૉજીના વિકાસનો મહત્ત્વનો ફાળો છે. માનવજાતની સુખાકારી માટે ઊર્જાનાં જુદાં-જુદાં સ્વરૂપો પૈકી વિદ્યુત-ઊર્જા અગત્યનું સ્થાન ધરાવે છે. વિદ્યુત-ઊર્જાને સહેલાઈથી સંગ્રહી શકાય છે તેમજ તેનું બીજા પ્રકારની ઊર્જામાં રૂપાંતર પણ કરી શકાય છે. વિદ્યુત એ ટેક્નોલૉજીની માતા છે, તેવું કહેવું અતિશયોક્તિ નહિ ગણાય. આવી વિદ્યુતના પાયાના પથ્થરો એટલે વિદ્યુતભારો.

પ્રસ્તુત પ્રકરણમાં આપણે સ્થિર વિદ્યુતભારો, તેમના ગુણધર્મો અને તેમની વચ્ચે થતી આંતરક્રિયાઓ વિશે અભ્યાસ કરીશું, જેને સ્થિત-વિદ્યુતશાસ્ત્ર (Static electricity) કહે છે. આવા સ્થિત-વિદ્યુતશાસ્ત્રનો ઉપયોગ copier મશીન, લેસર પ્રિન્ટર, ટેલિવિઝન વિગેરે જેવાં ઉપકરણોમાં થાય છે. આકાશમાં થતી વીજળીના ચમકારા જેવી કુદરતી ઘટનાઓ પણ સ્થિત-વિદ્યુતશાસ્ત્રથી સમજી શકાય છે. પ્રસ્તુત પ્રકરણમાં આપણે જુદા-જુદા પ્રકારનાં વિદ્યુતભારતંત્રોથી ઉત્પન્ન થતાં વિદ્યુતક્ષેત્ર તેમજ તેની લાક્ષણિકતાઓ જોઈશું.

1.2 વિદ્યુતભાર (Electric Charge)

કોઈ પણ દ્રવ્ય અમુક મૂળભૂત કણોનું બનેલું હોય છે. મૂળભૂત કણો 100 કરતાં વધુ છે, પરંતુ તે પૈકી ત્રણ કણો ઇલેક્ટ્રૉન, પ્રોટોન અને ન્યુટ્રૉન વ્યાવહારિક રીતે અગત્યના છે. આ કણો પોતાના દળના કારણે એકબીજા પર ગુરુત્વાકર્ષી બળ લગાડે છે. દા.ત., એકબીજાથી 1 cm અંતરે રહેલા બે ઇલેક્ટ્રૉન વચ્ચે 5.5×10^{-67} N જેટલું ગુરુત્વાકર્ષી બળ લાગે, જે આકર્ષી પ્રકારનું છે. પરંતુ વ્યવહારમાં આટલા જ અંતરે રહેલા બે ઇલેક્ટ્રૉન વચ્ચે 2.3×10^{-24} N જેટલું અપાકર્ષી બળ લાગે છે. ગુરુત્વાકર્ષણ ઉપરાંત આ વધારાનું બળ તે વિદ્યુતબળ છે. **જે મૂળભૂત આંતરિક (intrinsic) ગુણધર્મને કારણે આવું બળ લાગે છે, તેને કણ પરનો વિદ્યુતભાર (electric charge) કહે છે.**

જે રીતે બે કણો વચ્ચે ગુરુત્વાકર્ષી બળ ઉદ્‌ભવવાનું કારણ તેમનાં દળ છે, તે જ રીતે તેમની વચ્ચે વિદ્યુતબળ ઉદ્‌ભવવાનું કારણ તેમના પર રહેલા વિદ્યુતભાર છે.

જો બે પ્રોટોનને 1 cm જેટલા અંતરે મૂકીએ, તો તેમની વચ્ચે પણ 2.3×10^{-24} N જેટલું અપાકર્ષી બળ લાગે છે, જે દર્શાવે છે કે પ્રોટોનને પણ વિદ્યુતભાર છે અને તેનું મૂલ્ય ઇલેક્ટ્રૉન પરના વિદ્યુતભાર જેટલું છે. હવે ઇલેક્ટ્રૉન અને પ્રોટોનને આટલા જ અંતરે મૂકતાં તેમની વચ્ચે 2.3×10^{-24} N જેટલું જ બળ લાગે છે, પરંતુ તે આકર્ષી પ્રકારનું હોય છે.

આ પરથી આપણે તારણ કાઢી શકીએ કે ઇલેક્ટ્રૉન અને પ્રોટોન પરના વિદ્યુતભારનું મૂલ્ય સમાન છે, પરંતુ તેઓ વિરુદ્ધ પ્રકારના છે.

વિદ્યુતભાર બે પ્રકારના છે. ધન વિદ્યુતભાર અને ઋણ વિદ્યુતભાર. પ્રણાલિકાગત રીતે પ્રોટોનના વિદ્યુતભારને ધન અને ઇલેક્ટ્રૉનના વિદ્યુતભારને ઋણ ગણવામાં આવે છે. પરંતુ જો આના કરતાં ઊલટી સંજ્ઞા સ્વીકારવામાં આવે તો ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં કોઈ ફેર ના પડે.

બે સમાન (like) વિદ્યુતભારો વચ્ચે અપાકર્ષણ અને અસમાન (unlike) વિદ્યુતભારો વચ્ચે આકર્ષણ ઉદ્ભવે છે.

સામાન્ય સ્થિતિમાં દરેક પદાર્થમાં ઇલેક્ટ્રૉનની સંખ્યા અને પ્રોટોનની સંખ્યા સમાન હોય છે. આથી તેઓ વિદ્યુતની દૃષ્ટિએ તટસ્થ હોય છે. પદાર્થમાં ઇલેક્ટ્રૉન એ ન્યુક્લિયસમાંના પ્રોટોનની સરખામણીમાં ઓછા બળથી જકડાયેલા હોય છે. પરિણામે બે પદાર્થો વચ્ચેની યોગ્ય પ્રક્રિયા (દા.ત., ઘર્ષણની પ્રક્રિયા)ને કારણે ફક્ત ઇલેક્ટ્રૉન્સ જ એક પદાર્થ પરથી બીજા પદાર્થ પર જાય છે, જે પદાર્થ આ વધારાના ઇલેક્ટ્રૉન્સ મેળવે છે, તે ઋણ વિદ્યુતભારિત થાય છે. જે પદાર્થ ઇલેક્ટ્રૉન્સ ગુમાવે છે તે ધન વિદ્યુતભારિત થાય છે. કારણ કે તેમાં પ્રોટોનની સંખ્યા ઇલેક્ટ્રૉન્સની સંખ્યા કરતાં વધુ હોય છે. આથી જ્યારે કાચના સળિયાને રેશમના કપડાં સાથે ઘસવામાં આવે છે, ત્યારે કાચ પરના કેટલાક ઇલેક્ટ્રૉન્સ રેશમના કપડા પર જાય છે અને કાચનો સળિયો ધન વિદ્યુતભારિત થાય છે. રેશમનું કપડું વધારાના ઇલેક્ટ્રૉન્સ મેળવતું હોવાથી તે ઋણ વિદ્યુતભારિત થાય છે. પદાર્થ પરના વિદ્યુતભારને પારખવા માટે વપરાતાં સાદા ઉપકરણને ઇલેક્ટ્રૉસ્કોપ (Electroscope) કહે છે.

વિદ્યુતભાર પણ દળ જેવો જ એક મૂળભૂત ગુણધર્મ છે. તેની વ્યાખ્યા આપવી મુશ્કેલ છે. વિદ્યુતભારના જથ્થાનો SI એકમ કુલંબ (coulomb) છે. તેની સંજ્ઞા C છે.

એક ઍમ્પિયર વિદ્યુતપ્રવાહનું વહન કરતા વાહક તારના કોઈ પણ આડછેદમાંથી એક સેકન્ડમાં પસાર થતા વિદ્યુતભારના જથ્થાને 1 coulomb કહે છે. પ્રોટોન પરનો વિદ્યુતભાર $e = +1.6 \times 10^{-19}$ C છે. ઇલેક્ટ્રૉન પરનો વિદ્યુતભાર $e = -1.6 \times 10^{-19}$ C છે.

વિદ્યુતભારનું ક્વૉન્ટમીકરણ (Quantization of Electric Charge)

અત્યાર સુધી થયેલા બધા જ પ્રયોગો દર્શાવે છે કે કુદરતમાં મળી આવતા બધા જ વિદ્યુતભારોનાં મૂલ્યો મૂળભૂત વિદ્યુતભારના મૂલ્યના પૂર્ણ ગુણાંકમાં જ હોય છે.

$Q = ne$

આ હકીકતને વિદ્યુતભારોનું ક્વૉન્ટમીકરણ કહે છે. આ મૂળભૂત વિદ્યુતભાર એટલે ઇલેક્ટ્રૉન અથવા પ્રોટોનનો વિદ્યુતભાર, જેને e વડે દર્શાવવામાં આવે છે. eને વિદ્યુતભારનો પ્રાથમિક એકમ કહે છે.

દ્રવ્યના બંધારણના પાયામાં રહેલા હોવાનું કહેવાતા 'પ્રાથમિક કણો'માંના બધા જ વિદ્યુતભારિત કણોના વિદ્યુતભારો e જેટલા જ મળ્યા છે. દા. ત., પ્રોટોન અને પૉઝિટ્રૉન (positron = positive electron) પરનો વિદ્યુતભાર $+e$ છે. જ્યારે ઇલેક્ટ્રૉન પરનો વિદ્યુતભાર $-e$ છે. આથી, કોઈ પણ પદાર્થ પરનો વિદ્યુતભાર eના પદમાં જ વધારી અથવા ઘટાડી શકાય. વિદ્યુતભારોનું ક્વૉન્ટમીકરણ સૌપ્રથમ અંગ્રેજ વૈજ્ઞાનિક ફેરેડે દ્વારા સૂચવવામાં આવ્યું હતું, જેનું પ્રાયોગિક નિર્દેશન મિલિકને 1912 કર્યું હતું.

હજુ સુધી કોઈ વાદ વિદ્યુતભારનું ક્વૉન્ટમીકરણ સંતોષજનક રીતે સમજાવી શક્યો નથી.

આધુનિક સંશોધન અનુસાર પ્રોટોન અને ન્યુટ્રૉન પણ ક્વાર્ક્સ quarks તરીકે ઓળખાતા મૂળભૂત કણોના બનેલા છે. પ્રોટોન અને ન્યુટ્રૉન દરેક ત્રણ ક્વાર્ક્સ ધરાવે છે. આ ક્વાર્ક્સના બે પ્રકાર છે :

$+\frac{2}{3}e$ વિદ્યુતભાર ધરાવતા ક્વાર્ક્સને up quark (u) અને $-\frac{1}{3}e$ વિદ્યુતભાર ધરાવતા ક્વાર્ક્સને down quark (d) કહે છે. (પ્રોટોનનું બંધારણ uud અને ન્યુટ્રૉન બંધારણ udd વડે દર્શાવાય છે.) આમ, આવા ક્વાર્ક્સ અને ઇલેક્ટ્રૉન્સ દ્રવ્યની રચના કરે છે. જોકે ક્વાર્ક્સનું સ્વતંત્ર અસ્તિત્વ હજુ સુધી મળી શક્યું નથી.

વિદ્યુતભારનું સંરક્ષણ (Conservation of Electric Charge)

'વિદ્યુતની દૃષ્ટિએ અલગ કરેલ તંત્રમાં ગમે તે પ્રક્રિયા થાય તોપણ તંત્રમાંના વિદ્યુતભારોનો બૈજિક સરવાળો અચળ રહે છે.' આ વિધાનને વિદ્યુતભારના સંરક્ષણનો નિયમ કહે છે.

વિદ્યુતની દૃષ્ટિએ અલગ કરેલ તંત્રમાં બહારથી કોઈ વિદ્યુતભાર તંત્રમાં પ્રવેશતો નથી કે અંદરથી કોઈ વિદ્યુતભાર બહાર જતો નથી. કોઈ પણ વિદ્યુતભારવિહીન વસ્તુ તંત્રની અંદર-બહાર આવ-જા કરી શકે છે.

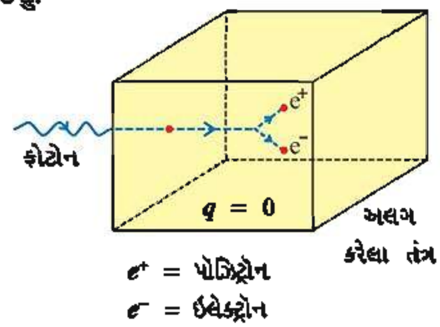
કાચના સળિયા સાથે રેશમી કપડું ઘસવાના પ્રયોગમાં ઘસવાની ક્રિયા પહેલાં કાચના સળિયા તેમજ રેશમી કપડા પરનો ચોખ્ખો વિદ્યુતભાર શૂન્ય છે. ઘસવાની ક્રિયા બાદ કાચનો સળિયો જેટલો ધન વિદ્યુતભારિત થાય છે, તેટલો જ

ઋણ વિદ્યુતભાર રેશમી કપડા પર ઉદ્‌ભવે છે. આથી ઘર્ષણની ક્રિયા બાદ (કાચનો સળિયો + રેશમી કપડા) પરનો કુલ ચોખ્ખો વિદ્યુતભાર પણ શૂન્ય રહે છે.

હવે આપણે વિદ્યુતભારનું સંરક્ષણ સમજવા માટે બીજું ઉદાહરણ જોઈશું.

આકૃતિ 1.1માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે પાતળી દીવાલવાળી પેટીમાં પ્રારંભમાં વિદ્યુતભાર શૂન્ય છે. આ અલગ કરેલા તંત્રમાં શક્તિશાળી ફોટોન પ્રવેશે છે. ફોટોન એ વિદ્યુતભાર ધરાવતો નથી. ફોટોન પેટીમાં દાખલ થતાં ઇલેક્ટ્રૉન અને પૉઝિટ્રૉનનું જોડકું (pair production) ઉત્પન્ન થાય છે. ઇલેક્ટ્રૉન અને પૉઝિટ્રૉનના વિદ્યુતભારો વિજાતીય પ્રકારના અને સમાન મૂલ્યના હોવાથી તંત્રનો કુલ વિદ્યુતભાર શૂન્ય જ રહે છે. જે પ્રારંભમાં પણ શૂન્ય હતો. આમ, આ ઘટનામાં વિદ્યુતભારનું સંરક્ષણ થાય છે.

બીજી રીતે કહીએ તો વિદ્યુતની દૃષ્ટિએ અલગ કરેલા તંત્રમાં વિદ્યુતભાર સાથે સંકળાયેલી એવી જ પ્રક્રિયાઓ થઈ શકે કે જેમાં સમાન મૂલ્યના વિજાતીય વિદ્યુતભારો કાં તો ઉત્પન્ન થાય અથવા તો નાશ પામે.



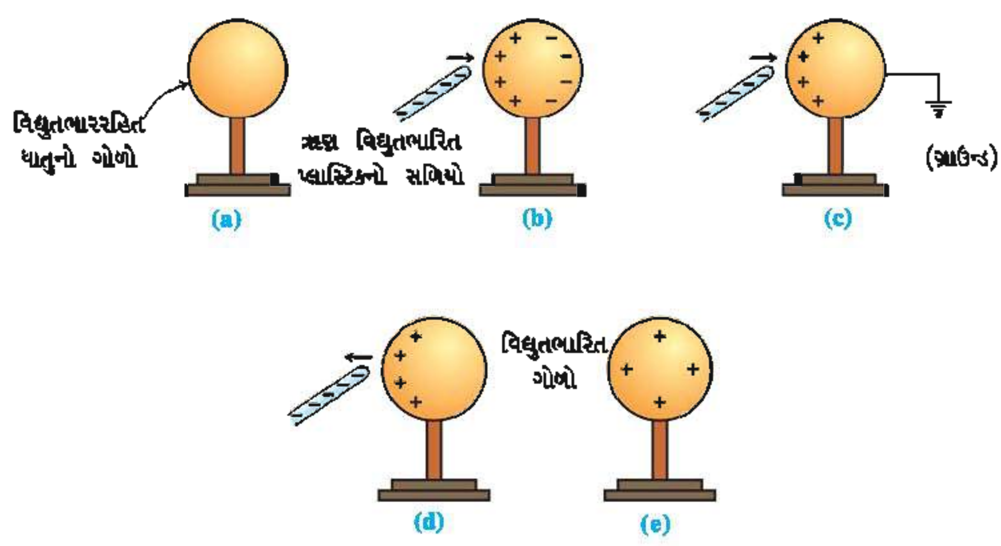
આકૃતિ 1.1 વિદ્યુતભારનું સંરક્ષણ

વિદ્યુતભારનું પ્રેરણ (Charging by Induction)

અવાહક સ્ટૅન્ડ પર મૂકેલા ધાતુના બે સમાન (identical) ગોળાઓમાંના એક ગોળા પર ધારો કે +Q જેટલો ચોખ્ખો (net) વિદ્યુતભાર છે. એટલે કે તે ધન વિદ્યુતભારિત છે અને બીજો ગોળો વિદ્યુતભારવિહીન છે. આ બે ગોળાઓને એકબીજા સાથે સંપર્કમાં લાવવામાં આવે અથવા વાહકતાર વડે સંપર્કમાં લાવતાં વિદ્યુતભારવિહીન ગોળા પરથી કેટલાક ઇલેક્ટ્રૉન ધન વિદ્યુતભારિત ગોળા પર જાય છે. પરિણામે ધન વિદ્યુતભારિત ગોળા પરનો ધન વિદ્યુતભાર ઓછો થાય છે અને વિદ્યુતભારવિહીન ગોળો ઇલેક્ટ્રૉન ગુમાવવાને કારણે ધન વિદ્યુતભારિત થાય છે. હવે બંને ગોળા સમાન હોવાથી સંપર્ક બાદ બંને ગોળા પર $+\frac{Q}{2}$ જેટલો સમાન વિદ્યુતભાર હશે. આમ, સંપર્ક દ્વારા બીજા ગોળા પર $\frac{Q}{2}$ જેટલો વિદ્યુતભાર પ્રસ્થાપિત કર્યો તેમ કહેવાય અથવા તે બીજા ગોળાનું ચાર્જિંગ કર્યું કહેવાય.

વસ્તુને ચાર્જિંગ કરવાની બીજી પણ રીત છે, તે રીતમાં વિદ્યુતભારિત પદાર્થ પોતાનો વિદ્યુતભાર ગુમાવ્યા વગર તેમજ બીજી વસ્તુના ભૌતિક સંપર્કમાં આવ્યા વગર તે વિરુદ્ધ પ્રકારનો વિદ્યુતભાર બીજી વસ્તુ પર પ્રેરિત કરે છે, તેને **વિદ્યુતભારનું પ્રેરણ** કહે છે.

આકૃતિ 1.2(a)માં ધાતુનો એક અલગ કરેલો ગોળો દર્શાવ્યો છે. આ ગોળા પર net વિદ્યુતભાર શૂન્ય છે. આકૃતિ 1.2(b)માં દર્શાવ્યા મુજબ ઋણ વિદ્યુતભારિત પ્લાસ્ટિકના સળિયાને ગોળાની નજીક લાવતાં ગોળામાંના મુક્ત ઇલેક્ટ્રૉન અપાકર્ષણને પરિણામે ગોળા પર સળિયાથી દૂરના ભાગમાં જતા રહે છે અને સળિયાની નજીકના ભાગ પર (ઇલેક્ટ્રૉનની ઊણપને કારણે) ધન વિદ્યુતભાર ખુલ્લો થાય છે.



આકૃતિ 1.2 વિદ્યુતભારનું પ્રેરણ

આકૃતિ 1.2(c)માં દર્શાવ્યા મુજબ જ્યારે આ ગોળાને પૃથ્વી સાથે સુવાહક તાર વડે જોડવામાં આવે છે, ત્યારે ગોળા પરના કેટલાક ઇલેક્ટ્રૉન જમીનમાં જતા રહે છે. (પૃથ્વી એ સુવાહક છે અને તે અસંખ્ય (વ્યાવહારિક રીતે અનંત) ઇલેક્ટ્રૉનના સ્રોત તરીકે વર્તી શકે છે તેમજ તે અસંખ્ય ઇલેક્ટ્રૉનને શોષી શકે છે.)

હવે આકૃતિ 1.2(d)માં દર્શાવ્યા મુજબ ગોળાનું પૃથ્વી સાથેનું જોડાણ દૂર કરવામાં આવે તોપણ ગોળા પરનો ધન વિદ્યુતભાર તેની તે જ પરિસ્થિતિમાં રહે છે. જ્યારે પ્લાસ્ટિકના સળિયાને ગોળાથી દૂર લઈ જવામાં આવે ત્યારે ગોળામાંના બાકી રહેલા ઇલેક્ટ્રૉન ગોળા પર એવી રીતે પુનઃવિતરિત થાય છે. જેથી સમગ્ર ગોળા પર પહેલા જે ધન વિદ્યુતભાર હતો તેટલો જ ધન વિદ્યુતભાર વિતરિત થયેલો જણાય છે. જુઓ આકૃતિ 1.2(e).

1.3 કુલંબનો નિયમ (Coulomb's Law)

ફ્રેંચ વૈજ્ઞાનિક ચાર્લ્સ કુલંબે (1736-1806) પ્રયોગો દ્વારા બે વિદ્યુતભારો વચ્ચે થતા આકર્ષણ અને અપાકર્ષણને માત્રાત્મક રૂપે માપીને તેમની વચ્ચે પ્રવર્તતા બળનો નિયમ તારવ્યો, જે કુલંબના નિયમ તરીકે ઓળખાય છે. આ નિયમ નીચે મુજબ છે :

'બે બિંદુવત્ સ્થિર વિદ્યુતભારો વચ્ચે પ્રવર્તતું વિદ્યુતબળ (કુલંબીય બળ) તે વિદ્યુતભારોનાં મૂલ્યોના ગુણાકારના સમપ્રમાણમાં અને તેમની વચ્ચેના અંતરના વર્ગના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં હોય છે.' આ બળ બે વિદ્યુતભારોને જોડતી રેખા પર હોય છે. કુલંબના નિયમ અનુસાર, r અંતરે રહેલા બે બિંદુવત્ વિદ્યુતભારો q_1 અને q_2 વચ્ચે પ્રવર્તતું બળ,

$$F \propto \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

$$\therefore F = k\frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{1.3.1}$$

જ્યાં, k એ કુલંબ અચળાંક છે. જેનું મૂલ્ય q_1, q_2 અને rના એકમ પર આધાર રાખે છે. SI એકમ પદ્ધતિમાં, શૂન્યાવકાશ માટે પ્રાયોગિક રીતે kનું મૂલ્ય 8.9875×10^9 Nm^2C^{-2} જેટલું મળે છે. વ્યાવહારિક હેતુ માટે $k = 9 \times 10^9$ Nm^2C^{-2} લેવામાં આવે છે. (CGS પદ્ધતિમાં kનું મૂલ્ય 1 જેટલું છે.).

વિદ્યુતને લગતાં ઘણાં સૂત્રોને સરળ બનાવવા માટે SI પદ્ધતિમાં kને બદલે $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ લેવામાં આવે છે.

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

જ્યાં, ε_0 એ શૂન્યાવકાશની પરમિટિવિટી (પરાવૈદ્યુતાંક) છે. ઉપર્યુક્ત સમીકરણ પરથી શૂન્યાવકાશની પરમિટિવિટી,

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = \frac{1}{4\pi \times 8.9875 \times 10^9} \approx 8.854 \times 10^{-12}\ C^2N^{-1}m^{-2}$$

આમ, $$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{1.3.2}$$

જો વિદ્યુતભારો શૂન્યાવકાશને બદલે બીજા કોઈ અવાહક માધ્યમમાં r જેટલા અંતરે હોય, તો સમીકરણ (1.3.2)માં શૂન્યાવકાશની પરમિટિવિટી ε_0ના સ્થાને તે માધ્યમની પરમિટિવિટી ε મૂકવી જોઈએ. તે માધ્યમમાં વિદ્યુતીય બળ,

$$F_m = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\ \frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{1.3.3}$$

આમ, બે બિંદુવત્ વિદ્યુતભારો વચ્ચે લાગતું કુલંબીય બળ તે વિદ્યુતભારો કયા માધ્યમમાં આવેલા છે, તેના પર પણ આધાર રાખે છે. સમીકરણ (1.3.2) અને (1.3.3)નો ગુણોત્તર લેતાં,

$$\frac{F}{F_m} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \varepsilon_r = K$$

$$\therefore F_m = \frac{F}{K} \tag{1.3.4}$$

જ્યાં, ε_rને માધ્યમની સાપેક્ષ પરમિટિવિટી અથવા ડાઇઇલેક્ટ્રિક અચળાંક (K) કહે છે. આ વિશે વિગતે અભ્યાસ આપણે પ્રકરણ 2માં કરીશું. સમીકરણ (1.3.4) પરથી સ્પષ્ટ છે કે અવાહક માધ્યમમાં મૂકેલા વિદ્યુતભારો વચ્ચે લાગતું બળ, તેટલા જ અંતરે શૂન્યાવકાશમાં આવેલા વિદ્યુતભારો વચ્ચે લાગતાં બળ કરતાં $\frac{1}{K}$ ગણું જેટલું *એટલે કે (K મા ભાગ)* હોય છે.

યાદ રાખો કે, કુલંબનો નિયમ એ બિંદુવત્ એવા સ્થિર વિદ્યુતભારો માટે જ છે. વ્યવહારમાં વિદ્યુતભારિત વસ્તુઓનાં કદ તેમની વચ્ચેના અંતરની સરખામણીમાં અત્યંત નાનાં હોય ત્યારે પણ આ નિયમ લાગુ પાડી શકાય.

કુલંબનો નિયમ એ ગુરુત્વાકર્ષણના વ્યસ્ત વર્ગના નિયમને મળતો આવે છે. કુલંબના નિયમમાં q એ mનો ભાગ ભજવે છે. ગુરુત્વીય બળો હંમેશાં આકર્ષી હોય છે, પરંતુ કુલંબીય બળ આકર્ષી અથવા અપાકર્ષી હોઈ શકે છે. કારણ કે વિદ્યુતભારો બે પ્રકારના છે.

ઉદાહરણ 1 : સમાન દળ અને સમાન વિદ્યુતભાર ધરાવતા બે કણો જ્યારે એકબીજાથી અમુક અંતરે રહેલા હોય ત્યારે તેમની વચ્ચે લાગતું અપાકર્ષી વિદ્યુતબળ તેમનામાંથી એકના વજન જેટલું હોય, તો તેમની વચ્ચેનું અંતર શોધો. કણનું દળ = 1.6×10^{-27} kg, વિદ્યુતભાર = 1.6×10^{-19} C, $k = 9 \times 10^9$ MKS અને $g = 10\ ms^{-2}$ લો.

ઉકેલ : અત્રે,

બે કણો વચ્ચે લાગતું અપાકર્ષી બળ = એક કણનું વજનબળ

$$\therefore\ k\frac{q_1 q_2}{r^2} = mg$$

$$\therefore\ r^2 = \frac{k\,q_1 q_2}{mg} = \frac{9\times10^9\times(1.6\times10^{-19})^2}{(1.6\times10^{-27})(10)} = 1.44 \times 10^{-2}$$

$$\therefore\ r = 0.12\ m$$

ઉદાહરણ 2 : તાંબાના દરેક 1 g દળના બે ગોળાઓ એકબીજાથી 1 mના અંતરે રાખેલા છે. જો તેમાં પ્રોટોનની સંખ્યા કરતાં ઇલેક્ટ્રૉનની સંખ્યા 1% જેટલી ઓછી હોય, તો તેમની વચ્ચે લાગતું વિદ્યુતબળ શોધો. તાંબાનો પરમાણુભાર 63.54 g/mol, પરમાણુક્રમાંક 29, એવોગ્રેડ્રો-અંક $N_A = 6.023 \times 10^{23}$ mol^{-1} અને $k = 9 \times 10^9$ SI.

ઉકેલ : તાંબાના તટસ્થ પરમાણુમાં 29 પ્રોટોન અને 29 ઇલેક્ટ્રૉન હોય છે. અત્રે, દરેક પરમાણુમાં પ્રોટોનની સંખ્યાના 1% જેટલા ઇલેક્ટ્રૉન ઓછા છે.

$$\therefore\ \text{એક પરમાણુ પરનો ચોખ્ખો વિદ્યુતભાર } q' = \begin{pmatrix}\text{પ્રોટોન પરનો કુલ}\\ \text{વિદ્યુતભાર}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{ઇલેક્ટ્રૉન પરનો કુલ}\\ \text{વિદ્યુતભાર}\end{pmatrix}$$

$$= +29e + (-29e) - (-0.29e)$$

$$= +\ 0.29e$$

$$\therefore\ 1\ g \text{ તાંબામાં કુલ ધન વિદ્યુતભાર, } q = \begin{pmatrix}\text{1 g તાંબામાં રહેલા}\\ \text{પરમાણુની સંખ્યા}\end{pmatrix} \times 0.29e = \frac{6.023\times10^{23}}{63.54} \times 0.29e$$

$\therefore$ તાંબાના બે ગોળાઓ વચ્ચે લાગતું વિદ્યુતીય બળ

$$F = k\frac{qq}{r^2} = k\frac{q^2}{r^2} = \frac{9\times10^9}{1^2} \times \left(\frac{6.023\times10^{23}\times0.29\times1.6\times10^{-19}}{63.54}\right)^2$$

$$= 1.74 \times 10^{15}N$$

આ ઉદાહરણ પરથી સ્પષ્ટ છે કે કોઈ પણ દ્રવ્યમાં ધન વિદ્યુતભારો અને ઋણ વિદ્યુતભારો વચ્ચે ફક્ત 1% જેટલી અસમાનતા હોય તોપણ મોટા પ્રમાણમાં વિદ્યુતીય બળ ઉદ્ભવે છે. મોટા ભાગનાં દ્રવ્યો વિદ્યુતની દૃષ્ટિએ તટસ્થ હોવાથી તેમના પર અત્યંત નબળા એવા ગુરુત્વાકર્ષણ બળનું પ્રભુત્વ હોય છે.

ઉદાહરણ 3 : એક પદાર્થ પર Q જેટલો વિદ્યુતભાર પથરાયેલો છે. આ પદાર્થના બે ટુકડા કેવી રીતે કરવા જોઈએ કે જેથી તેમના પર રહેલ વિદ્યુતભારો વચ્ચે આપેલા અંતર માટે લાગતું બળ મહત્તમ હોય.

ઉકેલ : ધારો કે Q વિદ્યુતભારિત પદાર્થના બે ટુકડા એવી રીતે કરવામાં આવે છે કે જેથી એક પર q અને બીજા પર $Q - q$ જેટલો વિદ્યુતભાર હોય. આ બંને વચ્ચે કોઈ પણ અંતર r માટે લાગતું બળ,

$$F = k\frac{q(Q-q)}{r^2}$$

આ બળ મહત્તમ થવા માટે,

$y = q(Q - q) = Qq - q^2$ મહત્તમ થવું જોઈએ. આ માટેની શરત એ છે કે $\frac{dy}{dq}$ શૂન્ય થવું જોઈએ.

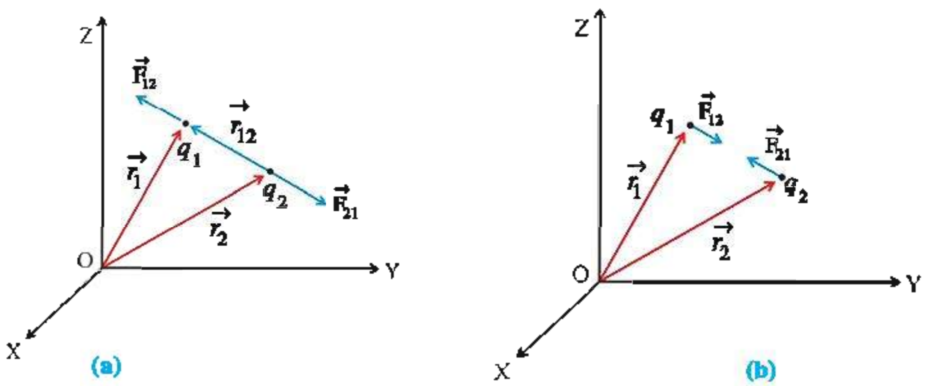
$$\therefore \frac{dy}{dq} = Q - 2q = 0$$

$$\therefore q = \frac{Q}{2}$$

આમ, પદાર્થના બે ભાગ એવી રીતે કરવા જોઈએ, જેથી બંને ટુકડા પર સમાન વિદ્યુતભાર હોય.

કુલંબનો નિયમ સદિશ સ્વરૂપે (Coulomb's law in vector form)

બળ એ સદિશ રાશિ હોવાથી કુલંબના નિયમને સદિશ સ્વરૂપે નીચે મુજબ રજૂ કરી શકાય :



આકૃતિ 1.3 કુલંબનો નિયમ સદિશ સ્વરૂપે

આકૃતિ 1.3(a)માં દર્શાવ્યા મુજબ, બે સમાન પ્રકારના વિદ્યુતભારો q_1 અને q_2ના સ્થાનસદિશો અનુક્રમે $\vec{r}_1$ અને $\vec{r}_2$ છે. વિદ્યુતભાર q_2થી q_1 તરફના સદિશને $\vec{r}_{12}$ વડે દર્શાવતાં,

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2.$$

કુલંબના નિયમ અનુસાર q_2 વિદ્યુતભાર વડે q_1 વિદ્યુતભાર પર લાગતું વિદ્યુતીય બળ,

$$\vec{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12} \qquad (1.3.5)$$

જ્યાં, $r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ એ બે વિદ્યુતભારો વચ્ચેનું અંતર છે અને $\hat{r}_{12}$ એ q_2થી q_1ની દિશામાં $\vec{r}_{12}$ સદિશનો એકમસદિશ છે.

$$\hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

$$\therefore \vec{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \cdot \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

$$\vec{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1-\vec{r}_2) \tag{1.3.6}$$

ઉપર્યુક્ત સમીકરણ એ કોઈ પણ પ્રકારના વિદ્યુતભારો માટે સત્ય છે. જો વિદ્યુતભારો q_1 અને q_2 બંને સમાન પ્રકારના (બંને ધન અથવા બંને ઋણ વિદ્યુતભાર) હશે, તો $\vec{F}_{12}$ એ $\hat{r}_{12}$ની દિશામાં મળશે, જે દર્શાવે છે કે આ બળ અપાકર્ષી પ્રકારનું છે. જો વિદ્યુતભારો વિરુદ્ધ પ્રકારના (એક ધન અને બીજો ઋણ વિદ્યુતભાર) હશે, તો $\vec{F}_{21}$ની દિશા એ $-\hat{r}_{12}$ની દિશામાં મળશે. જે દર્શાવે છે કે વિદ્યુતભારો વચ્ચે આકર્ષી બળ લાગે છે. (જુઓ આકૃતિ 1.3(b)).

આ જ રીતે, q_1 વિદ્યુતભાર વડે q_2 વિદ્યુતભાર પર લાગતું કુલંબીય બળ,

$$\vec{F}_{21} = k\frac{q_1 q_2}{r_{21}^2}\hat{r}_{21} \tag{1.3.7}$$

$$= k\frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \tag{1.3.8}$$

જ્યાં, $\vec{r}_{21}$ એ q_1થી q_2ની દિશાનો એકમસદિશ છે. અત્રે સ્પષ્ટ છે કે,

અહીં, $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = -(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$

આથી, સમીકરણ (1.3.6) પરથી

$$\vec{F}_{21} = -k\frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\vec{F}_{12}$$

આમ, કુલંબનો નિયમ એ ન્યૂટનના ત્રીજા નિયમનું પણ સમર્થન કરે છે.

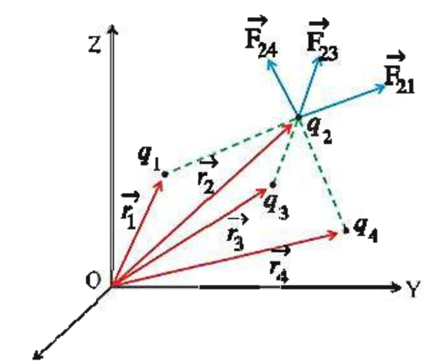
1.4 બે કરતાં વધારે વિદ્યુતભારો વચ્ચે લાગતાં બળો : સંપાતપણાનો સિદ્ધાંત : (Forces between more than Two Charges : The Superposition Principle)

બે વિદ્યુતભારો વચ્ચે લાગતું બળ શોધવા માટે કુલંબનો નિયમ વાપરી શકાય છે. પરંતુ જ્યારે બે કરતાં વધુ વિદ્યુતભારો (ધારો કે q_1, q_2, ..., q_n) હાજર હોય, તો તેમાંના કોઈ એક વિદ્યુતભાર પર બાકીના વિદ્યુતભારો વડે લાગતું બળ શોધવા માટે કુલંબના નિયમ ઉપરાંત સંપાતપણાનો સિદ્ધાંત જરૂરી છે.

સંપાતપણાનો સિદ્ધાંત : જ્યારે કોઈ વિદ્યુતભાર પર એક કરતાં વધારે કુલંબ બળો લાગતાં હોય ત્યારે પરિણામી કુલંબ બળ દરેક સ્વતંત્ર કુલંબ બળના સદિશ સરવાળા જેટલું હોય છે.

આમ, બે વિદ્યુતભારો વચ્ચે ઉદ્‌ભવતા કુલંબીય બળ પર ત્રીજાં કોઈ વિદ્યુતભારની હાજરીની અસર થતી નથી. આથી કુલંબ બળને Two Body Force કહે છે..

આકૃતિ 1.4માં દર્શાવ્યા અનુસાર q_1, q_2, q_3 અને q_4 એમ ચાર વિદ્યુતભારોના તંત્રનો વિચાર કરો. આપેલ યામ પદ્ધતિમાં આ વિદ્યુતભારોના સ્થાનસદિશો અનુક્રમે $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ અને $\vec{r}_4$ છે. અહીં આપણે q_2 વિદ્યુતભાર પર બાકીના વિદ્યુતભારને લીધે લાગતું કુલ બળ $\vec{F}_2$ શોધીશું.



આકૃતિ 1.4 સંપાતપણાનો સિદ્ધાંત

q_2 વિદ્યુતભાર પર q_1 વડે લાગતું બળ, $\vec{F}_{21} = k\frac{q_1 q_2}{r_{21}^2}\hat{r}_{21}$

q_2 વિદ્યુતભાર પર q_3 વડે લાગતું બળ, $\vec{F}_{23} = k\frac{q_2 q_3}{r_{23}^2}\hat{r}_{23}$

q_2 વિદ્યુતભાર પર q_4 વડે લાગતું બળ, $\vec{F}_{24} = k\frac{q_2 q_4}{r_{24}^2}\hat{r}_{24}$

હવે, સંપાતપણાના સિદ્ધાંત અનુસાર,

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{24} = k\frac{q_1 q_2}{r_{21}^2}\hat{r}_{21} + k\frac{q_2 q_3}{r_{23}^2}\hat{r}_{23} + k\frac{q_2 q_4}{r_{24}^2}\hat{r}_{24}$$

$$= kq_2\left[\frac{q_1}{r_{21}^2}\hat{r}_{21} + \frac{q_3}{r_{23}^2}\hat{r}_{23} + \frac{q_4}{r_{24}^2}\hat{r}_{24}\right]$$

$$= kq_2\sum_{\substack{j=1\\j\neq 2}}^{4}\frac{q_j}{r_{2j}^2}\hat{r}_{2j} \qquad (1.4.1)$$

અથવા

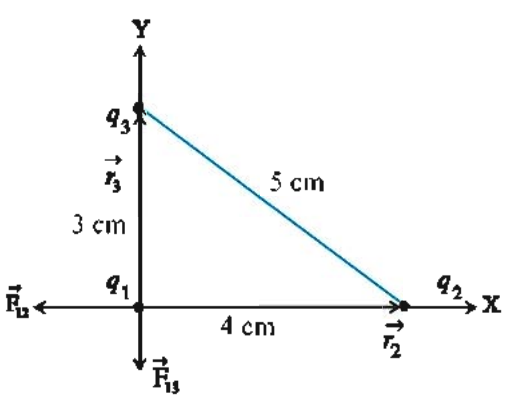
$$\vec{F}_2 = kq_2\sum_{\substack{j=1\\j\neq 2}}^{4}\frac{q_j}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_j|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_j) \qquad (1.4.2)$$

વ્યાપક રીતે n વિદ્યુતભારોના તંત્ર માટે q_i વિદ્યુતભાર લાગતું કુલ બળ,

$$\vec{F}_i = kq_i\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{q_j}{r_{ij}^2}\hat{r}_{ij}$$

$$\vec{F}_i = kq_i\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \qquad (1.4.3)$$

ઉદાહરણ 4 : 2 μC જેટલો સમાન વિદ્યુતભાર ધરાવતાં ત્રણ કણોને એક કાટકોણ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ પર મૂકેલ છે. કાટકોણ ત્રિકોણની બાજુઓની લંબાઈ 3cm, 4cm અને 5cm છે. આ ત્રિકોણના કાટકોણ (Right Angled Corner) પર મૂકેલા વિદ્યુતભાર પર લાગતું કુલ બળ શોધો. $k = 9.0 \times 10^9$ SI.



ઉકેલ : આકૃતિમાં આપેલ પરિસ્થિતિ દર્શાવેલ છે.

$q_1 = q_2 = q_3 = q = 2 \times 10^{-6}$C

q_1, q_2 અને q_3ના સ્થાનસદિશો અનુક્રમે,

$\vec{r}_1 = (0, 0)$

$\vec{r}_2 = (4, 0)\text{cm} = (0.04, 0)\text{m}$

$\vec{r}_3 = (0, 3)\text{cm} = (0, 0.03)\text{m}$.

આપેલ કાટકોણ ત્રિકોણના કાટખૂણા પર q_1 વિદ્યુતભાર છે. q_1 પર લાગતું કુલ બળ,

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}$$

$$= k\frac{q_1 q_2}{{r_{12}}^2}\hat{r}_{12} + k\frac{q_1 q_3}{{r_{13}}^2}\hat{r}_{13} = kq^2\left[\frac{\hat{r}_{12}}{{r_{12}}^2}+\frac{\hat{r}_{13}}{{r_{13}}^2}\right] (\because\ q_1 = q_2 = q) \qquad (1)$$

હવે, $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (0,\ 0) - (0.04,\ 0) = (-0.04,\ 0)\text{m}$

$\therefore\ r_{12} = \sqrt{(-0.04)^2 + (0)^2} = 0.04\text{m}$

$$\hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_{12}|} = \frac{(-0.04, 0)}{0.04} = (-1,\ 0)\text{m}$$

$\vec{r}_{13} = \vec{r}_1 - \vec{r}_3 = (0,\ 0) - (0,\ 0.03) = (0,\ -0.03)\text{m}$

$r_{13} = \sqrt{(0)^2 + (-0.03)^2} = 0.03\text{m}$

$$\hat{r}_{13} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_{13}|} = \frac{(0, -0.03)}{0.03} = (0,\ -1)\text{m}$$

આ બધાં જ મૂલ્યો સમીકરણ (1)માં મૂકતાં,

$$\vec{F}_1 = (9 \times 10^9)\ (2 \times 10^{-6})^2 \left[\frac{(-1, 0)}{(0.04)^2} + \frac{(0, -1)}{(0.03)^2}\right]$$

$$= 36 \times 10^{-3}[625\ (-1,\ 0) + 1111.1\ (0,\ -1)]$$
$$= (-22.5,\ -40)\text{N}$$

આ બળનું મૂલ્ય

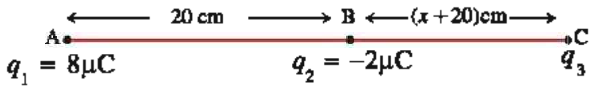
$\therefore\ |\vec{F}_1| = \sqrt{(-22.5)^2 + (-40)^2} = 45.88\text{N}$

આ બળની દિશા,

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{Fy}{Fx}\right) = tan^{-1}\left(\frac{-40}{-22.5}\right) = tan^{-1}(1.777)$$
$$= 60.6^{\circ}$$

જે ત્રણ X-અક્ષ સાથેનો ખૂણો દર્શાવે છે.

ઉદાહરણ 5 : 8.0μC અને −2.0μC જેટલો વિદ્યુતભાર ધરાવતા બે કણો વચ્ચેનું અંતર 20cm છે. કોઈ ત્રીજા વિદ્યુતભારને ક્યા બિંદુ પર મૂકીએ તો તેના પર લાગતું પરિણામી બળ શૂન્ય થાય ?



ઉકેલ : આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ ધારો કે $q_1 = 8\mu C$ અને $q_2 = -2\mu C$ વિદ્યુતભારને અનુક્રમે A અને B પર મૂકેલા છે. આ બે વિદ્યુતભારો વડે ત્રીજા વિદ્યુતભાર (ધારો કે q_3) પર લાગતાં બળોનું પરિણામી બળ તો જ શૂન્ય થાય, જો આ બળોનાં મૂલ્યો સમાન અને દિશા પરસ્પર વિરુદ્ધ હોય. આ ત્યારે જ શક્ય બને જ્યારે આ

ત્રીજા વિદ્યુતભારને આ બે વિદ્યુતભારોને જોડતી રેખા પર કોઈક બિંદુએ મૂકવામાં આવે. q_1 અને q_2 બંને વિરુદ્ધ પ્રકારના હોવાથી આ બિંદુ A અને Bની વચ્ચે તો સંભવી શકે જ નહિ. A પરના વિદ્યુતભારનું મૂલ્ય વધુ હોઈને એ પણ સ્પષ્ટ છે કે ત્રીજો વિદ્યુતભાર A કરતાં Bની વધુ નજીક હોવો જોઈએ.

આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ ધારો કે ત્રીજો વિદ્યુતભાર q_3 બિંદુ C પર મૂકેલ છે. BC = x cm છે.

સંપાતપણાના સિદ્ધાંત અનુસાર q_3 પર લાગતું કુલ બળ,

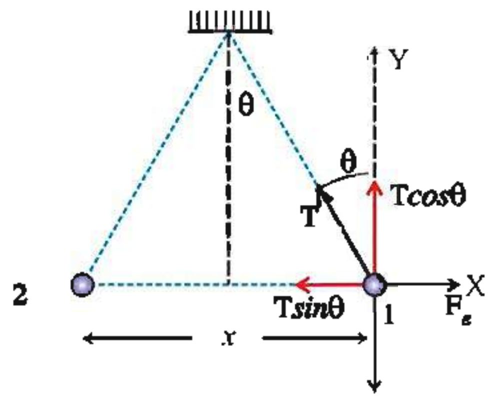
$$F_3 = F_{31} + F_{32}$$

$$0 = k\frac{q_1 q_3}{(r+x)^2} + k\frac{q_2 q_3}{x^2} = \frac{q_1}{(r+x)^2} + \frac{q_2}{x^2} = \frac{8\times10^{-16}}{(20+x)^2} - \frac{2\times10^{-16}}{x^2}$$

$$\therefore \frac{20+x}{x} = 2 \qquad \therefore x = 20\text{cm}$$

ઉદાહરણ 6 : સમાન ત્રિજ્યા અને સમાન દળ ધરાવતા બે ગોળાઓને સમાન લંબાઈની દોરીઓ વડે એવી રીતે લટકાવવામાં આવ્યા છે કે જેથી તેમની સપાટીઓ એકબીજાને સ્પર્શે. આ ગોળાઓને 4×10^{-7}C જેટલો વિદ્યુતભાર આપતાં તેઓ એકબીજાને અપાકર્ષે છે અને પરિણામસ્વરૂપ દોરીઓ એકબીજા સાથે 60°નો કોણ બનાવે છે. જો આધારબિંદુથી ગોળાના કેન્દ્ર સુધીનું અંતર 20cm હોય, તો ગોળાનું દળ શોધો. $k = 9 \times 10^9$ SI લો તથા $g = 10\text{ms}^{-2}$ લો.

ઉકેલ : બંને ગોળાઓ બધી રીતે સમાન હોઈને, 4×10^{-7}Cનો વિદ્યુતભાર તેમના પર સમાન રીતે વહેંચાશે. એટલે કે દરેક ગોળા પર 2×10^{-7}C વિદ્યુતભાર છે. ગોળા 1નું સમતોલન વિચારતાં, તેના પર લાગતાં બળો :



(1) વજન, mg અધોદિશામાં

(2) બે ગોળા વચ્ચે ઉદ્ભવતું વિદ્યુત અપાકર્ષણ બળ F_e

(3) દોરીમાં ઉદ્ભવતો તણાવ T

આ બળોના, આકૃતિમાં દર્શાવેલ યામાક્ષ પદ્ધતિમાં X અને Y ઘટકો લઈ સમતોલન વિચારતાં,

$$F_e = T\sin\theta$$

$$\therefore k\frac{q^2}{x^2} = T\sin\theta \qquad ...(1)$$

$$\text{અને } mg = T\cos\theta \qquad ...(2)$$

સમીકરણ (1) અને (2) પરથી,

$$\frac{kq^2}{x^2 mg} = \tan\theta \Rightarrow m = \frac{kq^2}{x^2 g\tan\theta}$$

વળી, આકૃતિ પરથી, $\sin\theta = \frac{\frac{x}{2}}{l} = \frac{x}{2l}$

$$\therefore x = 2l\sin\theta$$

$$\therefore m = \frac{kq^2}{g.4l^2\sin^2\theta\tan\theta}$$

$$\therefore m = \frac{(9\times10^9)(2\times10^{-7})^2}{10\times4(20\times10^{-2})^2\times(\sin30^\circ)^2\times(\tan30^\circ)} = 1.56 \times 10^{-3}\text{kg}$$

1.5 વિદ્યુતક્ષેત્ર (Electric Field)

અવકાશમાં આપેલા કોઈ વિદ્યુતભાર qની આસપાસના વિસ્તારમાં કોઈ બિંદુ P પાસે બીજો વિદ્યુતભાર q_0 મૂકતાં, વિદ્યુતભાર q વડે તેના પર વિદ્યુતીય બળ લાગે છે. હવે જો વિદ્યુતભાર q_0ને દૂર કરવામાં આવે, તો આપેલા વિસ્તારમાં

શું રહેશે ? કંઈ જ નહિ ? જો આ વિસ્તારમાં કશું જ ના હોય તો વિદ્યુતભાર q_0 પર બળ લાગ્યું કઈ રીતે ? આ પ્રશ્નનો ઉત્તર મેળવવા માટે વિદ્યુતક્ષેત્રની સંકલ્પના ખૂબ જ ઉપયોગી છે

વિદ્યુતભારની આસપાસ રહેલા અવકાશમાં વિદ્યુતભારને લીધે એક જાતની અસર ઉત્પન્ન થાય છે. વિદ્યુતભારની આજુબાજુ જેટલા વિસ્તારમાં તેની અસર પ્રવર્તમાન હોય તે વિસ્તારને વિદ્યુતક્ષેત્ર કહે છે. આ વિદ્યુતક્ષેત્ર તેમાં મૂકેલા બીજા કોઈ વિદ્યુતભાર q_0 પર પ્રક્રિયા કરી શકે છે અને તેની પર બળ $\vec{F}$ લગાડે છે. (જેના દ્વારા વિદ્યુતક્ષેત્ર ઉત્પન્ન થાય છે, તે વિદ્યુતભાર પર આ વિદ્યુતક્ષેત્ર બળ લગાડતું નથી.) આમ, વિદ્યુતક્ષેત્ર એ q અને q_0 વચ્ચે મધ્યસ્થી તરીકે કાર્ય કરે છે.

ધારો કે કોઈ એક વિદ્યુતભાર Qને યામપદ્ધતિના ઊગમબિંદુ પર મૂકેલો છે. તેના વિદ્યુતક્ષેત્રમાં કોઈ એક બિંદુએ q_0 વિદ્યુતભારને એવી રીતે મૂકવામાં (લાવવામાં) આવે છે, જેથી Qનું સ્થાન બદલાય નહિ. જો આ બિંદુનો સ્થાન સદિશ $\vec{r}$ હોય, તો તે બિંદુ આગળ વિદ્યુતક્ષેત્ર નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q_0} \tag{1.5.1}$$

અહીં, $\vec{E}$ ને આપેલા વિદ્યુતભાર Qનું $\vec{r}$ સ્થાન આગળનું વિદ્યુતક્ષેત્ર અથવા વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા કહે છે. આ રીતે મળતી રાશિ q_0થી સ્વતંત્ર છે. તે વિદ્યુતતંત્રના વિદ્યુતભારોના મૂલ્ય પર, તેમની ગોઠવણી પર અને q_0ના સ્થાનસદિશ $\vec{r}$ પર આધારિત છે.

વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતાનું મૂલ્ય નક્કી કરવા માટે વપરાતા વિદ્યુતભાર q_0ને પરીક્ષણ વિદ્યુતભાર (Test Charge) અને વિદ્યુતક્ષેત્ર ઉત્પન્ન કરતાં વિદ્યુતભારને વિદ્યુતક્ષેત્રનાં પ્રાપ્તિસ્થાનો (Sources) કહે છે.

SI પદ્ધતિમાં વિદ્યુતક્ષેત્રનો એકમ NC^{-1} અથવા Vm^{-1} છે.

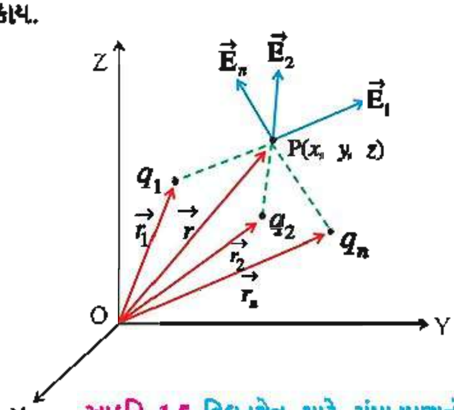
સમીકરણ (1.5.1)માં જો $q_0 = 1C$ હોય, તો $\vec{E} = \vec{F}$ થાય. આ પરથી વિદ્યુતક્ષેત્રની વ્યાખ્યા નીચે મુજબ આપી શકાય.

'કોઈ પણ વિદ્યુતભાર તંત્રની આસપાસના વિસ્તારમાં કોઈ બિંદુ પાસે એકમ ધન વિદ્યુતભાર પર લાગતા વિદ્યુતબળને તે વિદ્યુતતંત્રનું વિદ્યુતક્ષેત્ર અથવા વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા $\vec{E}$ કહે છે.'

વિદ્યુતક્ષેત્ર એ સદિશ રાશિ છે અને તે પરીક્ષણ વિદ્યુતભાર પર લાગતા વિદ્યુતીય બળની દિશામાં હોય છે.

જો વિદ્યુભારનું તંત્ર એક કરતાં વધુ વિદ્યુતભારોનું બનેલું હોય તો તેના કારણે ઉત્પન્ન થતાં વિદ્યુતક્ષેત્રમાં કોઈ બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા એ કુલંબના નિયમ અને સંપાતપણાના સિદ્ધાંતની મદદથી મેળવી શકાય છે.

હવે, q_1, q_2, ..., q_n વિદ્યુતભારોથી બનેલા તંત્રને ધ્યાનમાં લો. તેમના સ્થાનસદિશો ઊગમબિંદુની સાપેક્ષે અનુક્રમે $\vec{r_1}$, $\vec{r_2}$, ..., $\vec{r_n}$ છે. આ તંત્રની આસપાસના વિસ્તારમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર ઉત્પન્ન થાય છે. આ વિસ્તારમાં સ્થાનસદિશ $\vec{r}$ ધરાવતા બિંદુ P(x, y, z) પાસે વિદ્યુતક્ષેત્ર શોધવું છે. આ માટે અતિ સૂક્ષ્મ એવા પરીક્ષણ વિદ્યુતભાર q_0ને મૂકીને સંપાતપણાના સિદ્ધાંતથી તે બિંદુ આગળ વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા મેળવી શકાય.



આકૃતિ 1.5 વિદ્યુતક્ષેત્ર માટે સંપાતપણાનો સિદ્ધાંત

q_1 વિદ્યુતભારને લીધે બિંદુ P આગળ વિદ્યુતક્ષેત્ર,

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{F}_1}{q_0} = k\frac{q_1}{|\vec{r}-\vec{r_1}|^3}(\vec{r}-\vec{r_1})$$

q_2 વિદ્યુતભારને લીધે બિંદુ P આગળ વિદ્યુતક્ષેત્ર,

$$\vec{E}_2 = \frac{\vec{F}_2}{q_0} = k\frac{q_2}{|\vec{r}-\vec{r_2}|^3}(\vec{r}-\vec{r_2})$$

આ જ રીતે q_n વિદ્યુતભારને લીધે P બિંદુ આગળ વિદ્યુતક્ષેત્ર,

$$\vec{E}_n = \frac{\vec{F}_n}{q_0} = k\frac{q_n}{|\vec{r}-\vec{r}_n|^3}(\vec{r}-\vec{r}_n)$$

સંપાતપણાના સિદ્ધાંત અનુસાર બિંદુ P પરિણામી વિદ્યુતક્ષેત્ર,

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + ... + \vec{E}_n$$

$$= k\frac{q_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3}(\vec{r}-\vec{r}_1) + k\frac{q_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3}(\vec{r}-\vec{r}_2) + ... + k\frac{q_n}{|\vec{r}-\vec{r}_n|^3}(\vec{r}-\vec{r}_n)$$

$$\vec{E} = k\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j}{|\vec{r}-\vec{r}_j|^3}(\vec{r}-\vec{r}_j) \qquad (1.5.2)$$

અહીં, q_1, q_2, ..., q_n એ પ્રાપ્તિસ્થાનો છે.

વિદ્યુતક્ષેત્ર અંગે નીચેના મુદ્દાઓ ઉલ્લેખનીય છે :

(1) વિદ્યુતક્ષેત્ર નક્કી કરતી વખતે જુદાં-જુદાં બિંદુ પાસે મૂકવામાં આવતા પરીક્ષણ વિદ્યુતભાર(q_0)ની અસરના કારણે મૂળ વિદ્યુતભાર તંત્રમાં કોઈ ફેરફાર થવો જોઈએ નહિ. આ માટે પરીક્ષણ વિદ્યુતભાર શક્ય તેટલો નાનો હોવો જોઈએ. વિદ્યુતક્ષેત્ર વધુ ચોકસાઈથી વ્યાખ્યાયિત કરવા માટે $q_0 \to 0$ હોવો જોઈએ. પરંતુ, q_0નું લઘુતમ મૂલ્ય 1.6×10^{-19}C છે.

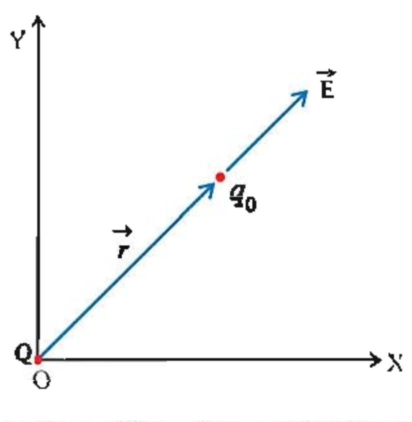
(2) સમીકરણ 1.5.2 એ કોઈ પણ બિંદુ $\vec{r}(x, y, z)$ પર મૂકેલ એકમ ધન વિદ્યુતભાર પરનું બળ દર્શાવે છે. એક વખત $\vec{E}(\vec{r})$ નક્કી થઈ જાય પછી તે ક્ષેત્ર શાને લીધે ઉદ્‌ભવે છે, તેની ચિંતા કરવાની રહેતી નથી. આ અર્થમાં ક્ષેત્ર પોતે જ, જ્યાં સુધી બીજા વિદ્યુતભારો પરની અસરને લાગેવળગે છે, ત્યાં સુધી ક્ષેત્ર ઉત્પન્ન કરતા વિદ્યુતભાર તંત્રની વિશિષ્ટ રજૂઆત છે. આવી રજૂઆત કરી લીધા પછી આપેલા બિંદુએ q વિદ્યુતભાર મૂકતાં તેના પર લાગતું બળ નીચેના સૂત્ર પરથી મેળવી શકાય.

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}) \qquad (1.5.3)$$

(3) વિદ્યુતક્ષેત્રમાં કોઈ પણ બિંદુ પાસે મૂકેલ એકમ ધન વિદ્યુતભાર પર લાગતા બળની દિશાને તે બિંદુ પાસે વિદ્યુતક્ષેત્રની દિશા ગણવામાં આવે છે.

(4) વિદ્યુતક્ષેત્રનો ખ્યાલ સૌપ્રથમ ફેરેડેએ આપ્યો હતો. વિદ્યુતક્ષેત્ર એ માત્ર ખ્યાલ જ નથી પણ ભૌતિક વાસ્તવિકતા છે.

1.6 બિંદુવત્ વિદ્યુતભારનું વિદ્યુતક્ષેત્ર (Electric Field Due to a Point Charge)



આકૃતિ 1.6 બિંદુવત્ વિદ્યુતભારથી ઉદ્‌ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર

આકૃતિ 1.6માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે બિંદુવત્ વિદ્યુતભાર Q વડે ઉદ્‌ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર શોધવા માટે Qને કાર્તેઝિયન યામપદ્ધતિના ઊગમબિંદુ પર લો.

આ વિદ્યુતભારથી r અંતરે વિદ્યુતક્ષેત્ર શોધવા માટે પરીક્ષણ વિદ્યુતભાર q_0ને ત્યાં મૂકો. Q વિદ્યુતભારને લીધે q_0 પર લાગતું બળ,

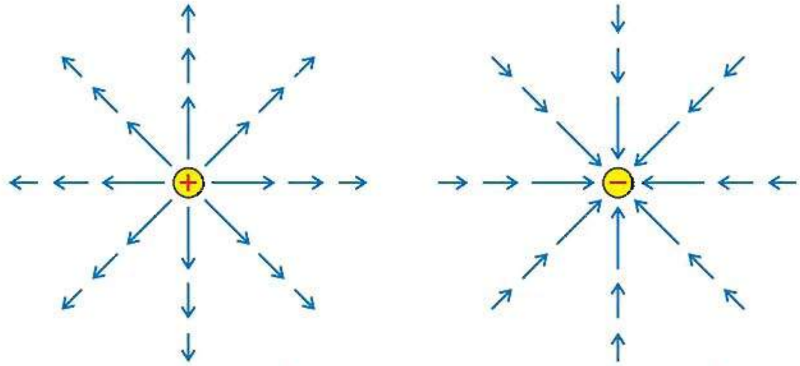
$$\vec{F} = k\frac{Qq_0}{r^2}\hat{r}$$

r અંતરે વિદ્યુતભાર Qના વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા,

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = k\frac{Q}{r^2}\hat{r} \qquad (1.6.1)$$

આકૃતિ 1.7માં દ્વિ-પરિમાણમાં કોઈ બિંદુવત્ વિદ્યુતભારના વિદ્યુતક્ષેત્રને ક્ષેત્ર-સદિશો વડે રજૂ કર્યું છે.

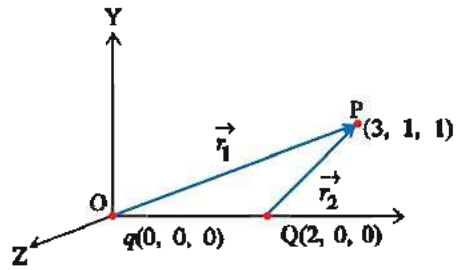
આકૃતિ 1.7 પરથી સ્પષ્ટ છે કે ધન વિદ્યુતભાર ($Q > 0$) માટે તેના ક્ષેત્રસદિશોની દિશા બહાર તરફ જતી છે અને ઋણ વિદ્યુતભાર ($Q < 0$) માટે ક્ષેત્રસદિશો અંદર તરફથી દિશામાં છે. વિદ્યુતભારથી દૂર જતા તીરની લંબાઈ ઘટતી જાય છે, જે વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતાના ઘટાડાનું સૂચન કરે છે.



આકૃતિ 1.7 બિંદુવત્ વિદ્યુતભારથી ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર

ઉદાહરણ 7 : કાર્તેઝિયન યામપદ્ધતિના ઊગમબિંદુ પર $+10^{-9}$C જેટલો વિદ્યુતભાર મૂકેલો છે. બીજો વિદ્યુતભાર Q એ (2, 0, 0)m યામ પર છે. જો (3, 1, 1)m યામ સ્થાને વિદ્યુતક્ષેત્રનો x-ઘટક શૂન્ય હોય તો Qનું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ,



$q = 10^{-9}$Cનો સ્થાનસદિશ (0, 0, 0)m અને Qનો સ્થાનસદિશ (2, 0, 0)m છે.

બિંદુ Pના યામ (3, 1, 1)m છે.

$$\therefore \vec{r}_1 = (3, 1, 1) - (0, 0, 0) = (3, 1, 1)$$

$$= 3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$

$$|\vec{r}_1| = \sqrt{(3)^2+(1)^2+(1)^2} = \sqrt{11}\text{ m.}$$

$$\vec{r}_2 = (3, 1, 1) - (2, 0, 0) = (1, 1, 1)\text{m}$$

$$= \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$

$$|\vec{r}_2| = \sqrt{(1)^2+(1)^2+(1)^2} = \sqrt{3}\text{ m.}$$

બિંદુ P આગળ કુલ વિદ્યુતક્ષેત્ર, $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

$$= k\frac{q}{r_1^3}\vec{r}_1 + k\frac{Q}{r_2^3}\vec{r}_2 = k\left[\frac{10^{-9}(3\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})}{(\sqrt{11})^3} + \frac{Q(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})}{(\sqrt{3})^3}\right]$$

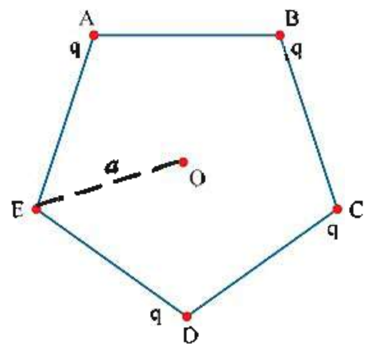
વિદ્યુતક્ષેત્રનો x ઘટક શૂન્ય હોવાથી,

$$\therefore E_x = k\left[\frac{10^{-9}\times 3}{(11)^{\frac{3}{2}}} + \frac{Q}{(3)^{\frac{3}{2}}}\right] = 0$$

$$\therefore Q = -\left(\frac{3}{11}\right)^{\frac{3}{2}} \times 3 \times 10^{-9} = -0.43 \times 10^{-9}\text{ C}$$

ઉદાહરણ 8 : q વિદ્યુતભાર ધરાવતા ચાર કણોને નિયમિત પંચકોણનાં ચાર શિરોબિંદુઓ પર મૂકેલા છે. પંચકોણના કેન્દ્રથી તેના દરેક શિરોબિંદુ વચ્ચેનું અંતર a છે. આ કેન્દ્ર પર વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે પંચકોણનાં ચાર શિરોબિંદુઓ A, B, C અને D પર q જેટલો વિદ્યુભાર છે. હવે જો શિરોબિંદુ E પર q જેટલો વિદ્યુતભાર મૂકવામાં આવે, તો આકૃતિની સંમિતિ પરથી કહી શકાય કે તેના કેન્દ્ર O પર વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય હશે.



આમ, $\vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C + \vec{E}_D + \vec{E}_E = 0$

$\therefore \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C + \vec{E}_D = -\vec{E}_E$

એટલે કે, A, B, C અને D પર મૂકેલા વિદ્યુતભારથી કેન્દ્ર પર ઉદ્‌ભવતું પરિણામી વિદ્યુતક્ષેત્ર એ E પર મૂકેલા વિદ્યુતભારથી ઉદ્‌ભવતા વિદ્યુતક્ષેત્ર જેટલું જ પરંતુ વિરુદ્ધ દિશામાં હશે.

હવે, E પર મૂકેલા વિદ્યુભાર qથી કેન્દ્ર પર ઉદ્‌ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર,

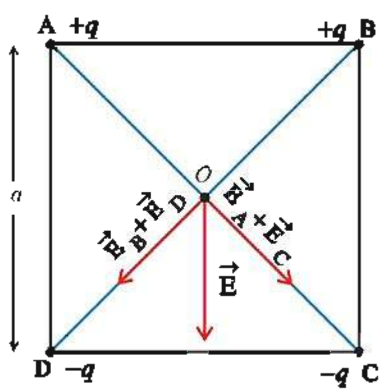
$\vec{E}_E = k\frac{q}{a^2}$ (EO દિશામાં)

આથી, A, B, C અને D પર મૂકેલા વિદ્યુતભારોથી કેન્દ્ર પર ઉદ્‌ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર,

$\vec{E} = k\frac{q}{a^2}$ (OE દિશામાં)

ઉદાહરણ 9 : ચાર વિદ્યુતભારો $+q$, $+q$, $-q$ અને $-q$ને અનુક્રમે એક ચોરસનાં શિરોબિંદુઓ A, B, C અને D પર મૂકેલ છે. ચોરસની બાજુની લંબાઈ a છે, તો ચોરસના કેન્દ્ર પર પરિણામી વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા ગણો.

ઉકેલ : દરેક વિદ્યુતભાર ચોરસના કેન્દ્ર Oથી સમાન અંતરે હોઈને, બિંદુ O પર બધાનાં વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતાનું મૂલ્ય સમાન હશે. આમ, જો શિરોબિંદુઓમાંથી કેન્દ્રનું અંતર r હોય, તો



$E_A = E_B = E_C = E_D = \frac{kq}{r^2}$

આ વિદ્યુતક્ષેત્રોની દિશાઓ આકૃતિમાં દર્શાવેલ છે.

જો E_A અને E_Cનું પરિણામી ક્ષેત્ર E' હોય તો,

$$E' = E_A + E_C = 2\frac{kq}{r^2} \quad (1)$$

આ જ રીતે E_B અને E_Dનું પરિણામી ક્ષેત્ર E'' હોય, તો

$$E'' = E_B + E_D = 2\frac{kq}{r^2} \quad (2)$$

પરિણામી વિદ્યુતક્ષેત્ર, $\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}''$

$\therefore E = \sqrt{(E')^2 + (E'')^2}$ ($\because$ આકૃતિ પરથી $\vec{E}'$ અને $\vec{E}''$ વચ્ચેનો ખૂણો 90° છે.)

$= \sqrt{\left(2\frac{kq}{r^2}\right)^2 + \left(2\frac{kq}{r^2}\right)^2}$ (સમીકરણ (1) અને (2) પરથી)

$$= \sqrt{\left(\frac{8k^2q^2}{r^4}\right)} = \left(\frac{2\sqrt{2}kq}{r^2}\right) \quad (3)$$

આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે, $(2r)^2 = a^2 + a^2$

$\therefore\ 2r = \sqrt{2a^2} \quad \therefore\ r = \frac{a}{\sqrt{2}}$

rનું મૂલ્ય ઉપરના સમીકરણ (3)માં મૂકતાં,

$$E = \frac{2\sqrt{2}kq}{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} = 4\sqrt{2}\frac{kq}{a^2}$$

(Eની દિશા AD (અથવા BC)ને સમાંતર છે.)

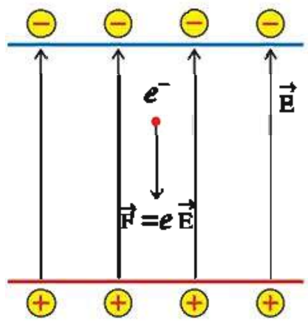
ઉદાહરણ 10 : એક ઇલેક્ટ્રોન 2.0×10^4 N C^{-1} જેટલી તીવ્રતાવાળા સમાન વિદ્યુતક્ષેત્રમાં 1.5 cm જેટલું ગુરુત્વમુક્ત અવકાશમાં પતન કરે છે આકૃતિ (a). ત્યાર બાદ આ વિદ્યુતક્ષેત્રનું મૂલ્ય તેટલું જ રાખી તેની દિશા ઊલટાવવામાં આવે છે અને તેમાં એક પ્રોટોન પણ આટલું જ પતન કરે છે આકૃતિ (b). તો આ માટે બંનેએ લીધેલ સમય ગણો.

$m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg, $m_p = 1.7 \times 10^{-27}$ kg અને $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C લો.

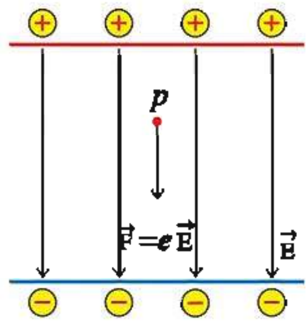
ઉકેલ : ધારો કે આકૃતિ (a)માં દર્શાવ્યા અનુસાર વિદ્યુતક્ષેત્ર ઊર્ધ્વ દિશામાં છે અને તેથી તેમાં ઇલેક્ટ્રૉન પર eE જેટલું બળ અધોદિશામાં લાગશે.

ઇલેક્ટ્રૉનનો પ્રવેગ,

$$a_e = \frac{eE}{m_e}$$



આકૃતિ (a)



આકૃતિ (b)

ગતિના સમીકરણ $d = v_0t + \frac{1}{2}at^2$ પરથી ($v_0 = 0$ હોઈને) h જેટલું અંતર કાપતાં ઇલેક્ટ્રૉનને લાગતો સમય

$$t_e = \sqrt{\frac{2h}{a_e}} = \sqrt{\frac{2hm_e}{eE}}$$

આપેલ કિંમતો અવેજ કરતાં $t_e = 2.9 \times 10^{-9}$s = 2.9 ns (નેનો-સેકન્ડ)

આકૃતિ (b)માં દર્શાવ્યા અનુસાર વિદ્યુતક્ષેત્ર અધોદિશામાં છે અને તેથી તેમાં પ્રોટોન પર eE જેટલું બળ અધોદિશામાં લાગશે.

પ્રોટોનનો પ્રવેગ $a_p = \frac{eE}{m_p}$.

h જેટલું અંતર કાપતાં પ્રોટોનનો લાગતો સમય $t_p = \sqrt{\frac{2hm_p}{eE}}$

આપેલ કિંમતો અવેજ કરતાં $t_p = 1.3 \times 10^{-7}$s = 0.13μs (માઇક્રોસેકન્ડ)

આમ, જોઈ શકાય છે કે સમાન તીવ્રતાવાળા વિદ્યુતક્ષેત્રમાં સમાન અંતર કાપવા માટે સમાન વિદ્યુતભારવાળા કણો પૈકી વધુ દળવાળા કણ(પ્રોટોન)ને વધુ સમય લાગે છે.

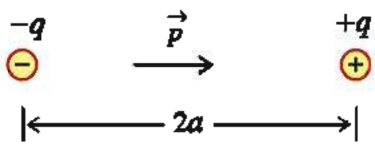
(આથી ઊલટું આપણે ધોરણ 11માં ભણી ગયાં કે ગુરુત્વીય ક્ષેત્રમાં મુક્ત પતન કરતા પદાર્થને લાગતો સમય પદાર્થના દળ પર આધારિત નથી.

1.7 વિદ્યુત-ડાઈપોલ (Electric Dipole)

એકબીજાથી પરિમિત (finite) અંતરે રહેલા બે વિજાતીય અને સમાન વિદ્યુતભારોના તંત્રને વિદ્યુત-ડાઈપોલ (દ્વિધ્રુવી) કહે છે.

આકૃતિ 1.8માં દર્શાવ્યા અનુસાર વિદ્યુત-ડાઈપોલના વિદ્યુતભારો $+q$ અને $-q$ છે અને તેમની વચ્ચેનું અંતર $2a$ છે. આ તંત્રની ડાઇપોલ-મોમેન્ટ ($\vec{p}$) નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

$$\vec{p} = q(2\vec{a}) \qquad (1.7.1)$$



આકૃતિ 1.8 વિદ્યુત-ડાઈપોલ

ડાઈપોલ-મોમેન્ટ $\vec{p}$નો એકમ (coulomb-meter) (Cm) છે. વિદ્યુત-ડાઈપોલ મોમેન્ટ એ સદિશ રાશિ છે અને તેની દિશા ઋણ વિદ્યુતભાર ($-q$)થી ધન વિદ્યુતભાર ($+q$) તરફની લેવામાં આવે છે.

વિદ્યુત-ડાઈપોલ પરનો કુલ વિદ્યુતભાર શૂન્ય ($-q + q = 0$) હોય છે. પરંતુ તેનું વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય હોતું નથી. કારણ કે બંને વિદ્યુતભારોનાં સ્થાન અલગ-અલગ છે.

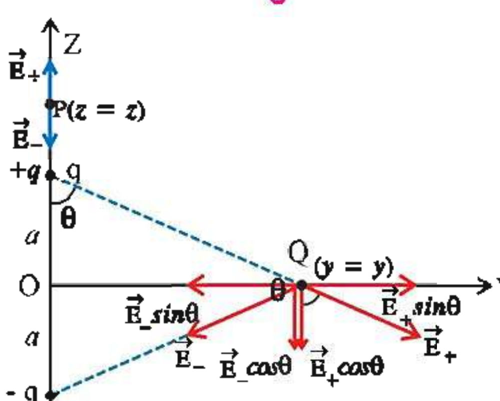
$\vec{p} = 2\vec{a}\,q$માં $\lim 2a \to 0$ અને $q \to \infty$ લક્ષમાં મળતી ડાઈપોલને બિંદુ ડાઈપોલ (Point Dipole) કહે છે.

વિદ્યુત-ડાઈપોલનું વિદ્યુતક્ષેત્ર (Electric Field of a Dipole)

વિદ્યુત-ડાઈપોલનું વિદ્યુતક્ષેત્ર શોધવા માટે આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ કાર્તેઝિયન યામપદ્ધતિને એવી રીતે ગોઠવો કે જેથી તેની Z-અક્ષ ડાઈપોલ પર સંપાત થાય અને ડાઈપોલના મધ્યબિંદુ પર ઊગમબિંદુ સંપાત થાય. ડાઈપોલ તંત્રના વિદ્યુતભારો $+q$ અને $-q$ વચ્ચેનું અંતર $2a$ છે.

અહીં આપણે ડાઈપોલની અક્ષ પરના કોઈ બિંદુ પાસે અને ડાઈપોલની વિષુવરેખા પરના કોઈ બિંદુ પાસે વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા મેળવીશું.

ડાઈપોલની અક્ષ પર વિદ્યુતક્ષેત્ર



આકૃતિ 1.9 ડાઈપોલની અક્ષ પર વિદ્યુતક્ષેત્ર

આકૃતિ 1.9માં દર્શાવ્યા અનુસાર ડાઈપોલની અક્ષ પરના બિંદુ P પાસે વિદ્યુતક્ષેત્ર શોધવું છે. બિંદુ P એ ઊગમબિંદુથી z જેટલા અંતરે આવેલું છે. આથી આ બિંદુનું $+q$થી અંતર $z - a$ અને $-q$થી અંતર $z + a$ થશે.

$+q$ વિદ્યુતભાર વડે બિંદુ P આગળ વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા

$$\vec{E}_+ = k\frac{q}{(z-a)^2}\,\hat{p} \qquad (1.7.2)$$

જ્યાં, $\hat{p}$ એ ડાઈપોલની અક્ષ પર $-q$ થી $+q$ની દિશાનો એકમ-સદિશ છે.

હવે, $-q$ વિદ્યુતભાર વડે બિંદુ P આગળ વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા, $\vec{E}_- = -k\frac{q}{(z+a)^2}\,\hat{p}$ (1.7.3)

સંપાતપણાના સિદ્ધાંત અનુસાર બિંદુ P આગળ પરિણામી વિદ્યુતક્ષેત્ર,

$$\vec{E}(z) = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = kq\left[\frac{1}{(z-a)^2} - \frac{1}{(z+a)^2}\right]\hat{p} = kq\frac{4za}{(z^2-a^2)^2}\,\hat{p}$$

$$\therefore \ \vec{E}(z) = \frac{2kpz}{(z^2-a^2)^2}\hat{p} \quad (\because \ 2aq = p) \tag{1.7.4}$$

If $z >> a$, હોય તો z^2ની સરખામણીમાં a^2 અવગણતાં,

$$\vec{E}(z) = \frac{2kp}{z^3}\hat{p} \qquad (z >> a) \tag{1.7.5}$$

આ પરિણામી વિદ્યુતક્ષેત્ર એ Oથી P તરફની દિશામાં છે.

ડાઈપોલની વિષુવરેખા પર વિદ્યુતક્ષેત્ર

ડાઈપોલના વિદ્યુતભારોને જોડતી રેખાના લંબદ્વિભાજકને ડાઈપોલની વિષુવરેખા કહે છે. આ વિષુવરેખા પરના બિંદુ Q પાસે વિદ્યુતક્ષેત્ર શોધવું છે. બિંદુ Q એ ડાઈપોલના કેન્દ્રથી y જેટલા અંતરે છે. તેમજ બિંદુ Q એ $+q$ અને $-q$ બંને વિદ્યુતભારોથી સમાન અંતરે આવેલ હોવાથી તેમના દ્વારા Q આગળ ઉદ્ભવતા વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતાનું મૂલ્ય સમાન હશે.

$+q$ વિદ્યુતભારથી ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્રનું મૂલ્ય,

$$E_+ = k\frac{q}{(y^2+a^2)} \tag{1.7.6}$$

$-q$ વિદ્યુતભારથી ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્રનું મૂલ્ય,

$$E_- = k\frac{q}{(y^2+a^2)} \tag{1.7.7}$$

Q આગળ $\vec{E}_+$ અને $\vec{E}_-$ની દિશા આકૃતિ 1.9માં દર્શાવી છે.

$\vec{E}_+$ અને $\vec{E}_-$ના ડાઈપોલની અક્ષને લંબદિશામાં ઘટકો લેતાં અનુક્રમે $E_+ sin\theta$ અને $E_- sin\theta$ મળશે, જે સમાન મૂલ્યના અને પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશાના હોવાથી તેઓ એકબીજાની અસર નાબૂદ કરશે.

હવે, $\vec{E}_+$ અને $\vec{E}_-$ના ડાઈપોલની અક્ષને સમાંતર એવા ઘટકો અનુક્રમે $E_+ cos\theta$ અને $E_- cos\theta$ છે, જેઓ સમાન દિશામાં હોવાથી તેઓનો સરવાળો થશે.

બિંદુ Q આગળનું પરિણામી વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{p}$ની વિરુદ્ધ દિશામાં હોવાથી,

$$\vec{E}(y) = -(E_+ + E_-)cos\theta\,\hat{p}$$

$$= -\left(\frac{kq}{(y^2+a^2)}+\frac{kq}{(y^2+a^2)}\right)\left(\frac{a}{(y^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\hat{p} = -k\frac{(2aq)}{(y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{p}$$

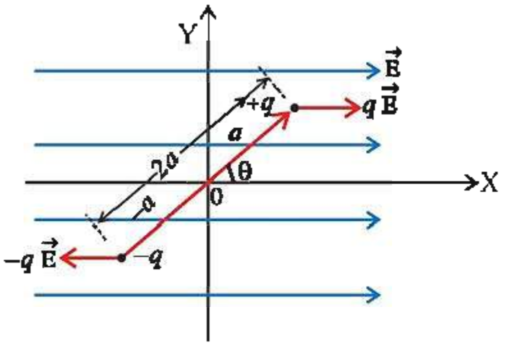
$$\therefore \ \vec{E}(y) = -\frac{kp}{(y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{p} \tag{1.7.8}$$

જો $y >> a$ હોય, તો

$$\vec{E}(y) = -\frac{kp}{y^3}\hat{p} \qquad (y >> a) \tag{1.7.9}$$

સમીકરણ (1.7.5) અને (1.7.9) પરથી સ્પષ્ટ છે કે ડાઈપોલથી દૂરનાં અંતરોએ તેનું વિદ્યુતક્ષેત્ર $\frac{1}{r^2}$ અનુસાર ઘટવાને બદલે $\frac{1}{r^3}$ અનુસાર ઘટે છે.

સમાન વિદ્યુતક્ષેત્રમાં વિદ્યુત-ડાઈપોલની વર્તણૂક (Behaviour of an Electric Dipole in a Uniform Electricfield)



આકૃતિ 1.10 સમાન વિદ્યુતક્ષેત્રમાં વિદ્યુત-ડાઈપોલ

આકૃતિ 1.10માં દર્શાવ્યા અનુસાર સમાન તીવ્રતાવાળા વિદ્યુતક્ષેત્રમાં એક વિદ્યુત-ડાઈપોલ $|\vec{p}| = q|2\vec{a}|$ મૂકેલ છે. કાર્તેઝિયન યામપદ્ધતિનું ઊગમબિંદુ ડાઈપોલના કેન્દ્ર O પર સંપાત થાય છે અને વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$ એ ધન X-દિશામાં છે. ધારો કે, કોઈ એક ક્ષણે $\vec{p}$ અને $\vec{E}$ વચ્ચેનો કોણ θ છે.

ડાઈપોલના $+q$ અને $-q$ વિદ્યુતભારો પર અનુક્રમે $q\vec{E}$ અને $-q\vec{E}$ બળો લાગે છે. આ બળો સમાન મૂલ્યના અને પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં હોવાથી તેમનું પરિણામી બળ શૂન્ય થાય છે. આથી, ડાઈપોલ રેખીય સંતુલનમાં રહે છે.

પરંતુ, આ બળોની કાર્યરેખાઓ જુદી-જુદી હોવાથી ડાઈપોલ પર ટૉર્ક લાગશે. $+q$ વિદ્યુતભાર પર લાગતા બળ $q\vec{E}$ને કારણે O બિંદુને અનુલક્ષીને લાગતું ટૉર્ક,

$$\vec{\tau}_1 = (\vec{a} \times q\vec{E}) \tag{1.7.10}$$

આ જ રીતે, $-q$ વિદ્યુતભાર પર લાગતા બળ $-q\vec{E}$ને કારણે O બિંદુને અનુલક્ષીને લાગતું ટૉર્ક,

$$\vec{\tau}_2 = (-\vec{a}) \times (-q\vec{E}) = (\vec{a} \times q\vec{E}) \tag{1.7.11}$$

અહીં, $\vec{a}$ અને $-\vec{a}$ એ અનુક્રમે $+q$ અને $-q$ના સ્થાનસદિશો છે.

સમીકરણ (1.7.10) અને (1.7.11) પરથી ડાઈપોલ પર લાગતું પરિણામી ટૉર્ક,

$$\vec{\tau} = (\vec{a} \times q\vec{E}) + (\vec{a} \times q\vec{E}) = 2\vec{a} \times q\vec{E} = 2\vec{a}q \times \vec{E}$$

$$\therefore \vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} \tag{1.7.12}$$

ટૉર્કનું મૂલ્ય, $|\vec{\tau}| = pE\sin\theta$ (1.7.13)

ડાઈપોલ પર લાગતું $\vec{\tau}$ એ સમતલને (પુસ્તકના પાનને) લંબ અને સમતલમાં અંદર તરફ જતી દિશામાં છે.

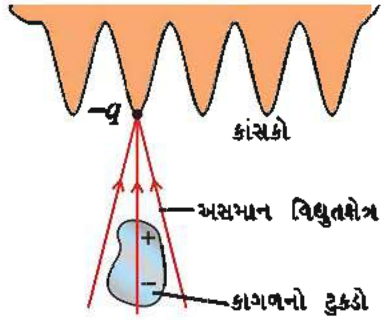
આ ટૉર્કને લીધે ડાઈપોલ એ રીતે ભ્રમણ કરશે, જેથી ખૂણો θ ઘટે. (આપેલ કિસ્સામાં તે સમઘડી દિશામાં ભ્રમણ કરશે.) જ્યારે ($\theta = 0$) એટલે કે ડાઈપોલ વિદ્યુતક્ષેત્રની દિશામાં ગોઠવાય ત્યારે ટૉર્ક શૂન્ય થાય છે. વિદ્યુતક્ષેત્રમાં ડાઈપોલની આ સંતુલિત સ્થિતિ છે. આ સ્થિતિમાંથી જો તેને ક્ષેત્ર સાથે θ કોણે ગોઠવવી હોય તો ટૉર્ક વિરુદ્ધ કાર્ય કરવું પડે છે. આ કાર્ય ડાઈપોલની સ્થિતિ-ઊર્જાના ફેરફાર જેટલું હોય છે.

અસમાન વિદ્યુતક્ષેત્રમાં ડાઈપોલની વર્તણૂક

જો વિદ્યુતક્ષેત્ર અસમાન હોય એટલે કે જુદાં-જુદાં બિંદુઓ પાસે વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા જુદી-જુદી હોય, તો વિદ્યુત-ડાઈપોલના ધન અને ઋણ વિદ્યુતભારો પર લાગતાં બળો અસમાન હોય છે. આ સંજોગોમાં ડાઈપોલ પર પરિણામી બળ અને ટૉર્ક બંને લાગે છે. આથી ડાઈપોલના પરિભ્રમણની સાથે તેનું રેખીય સ્થાનાંતર પણ થાય છે. ડાઈપોલ ભ્રમણ કરતા-કરતા જ્યારે વિદ્યુતક્ષેત્રને સમાંતર ગોઠવાઈ જશે પછી તેનું ભ્રમણ બંધ થશે. પરંતુ તે તેની રેખીય ગતિ ચાલુ રાખશે.

આપણો સામાન્ય અનુભવ છે કે સૂકા વાળમાં ફેરવેલ કાંસકા વડે કાગળના નાના ટુકડાઓ આકર્ષાય છે. કાંસકાને વાળમાં ફેરવતાં ઘર્ષણના લીધે કાંસકો ઋણ વિદ્યુતભારિત થાય છે. પરંતુ કાગળ તો વિદ્યુતભારરહિત છે, છતાં તે કાંસકા તરફ કેમ આકર્ષાય છે ?

કાંસકા પર રહેલા વિદ્યુતભારને લીધે અસમાન વિદ્યુતક્ષેત્ર ઉત્પન્ન થાય છે. આવો વિદ્યુતભારિત કાંસકો કાગળના ટુકડાઓ નજીક લાવતાં ટુકડાઓમાં કાંસકાના અસમાન વિદ્યુતક્ષેત્રની દિશામાં પ્રેરિત વિદ્યુત ડાઈપોલ ઉદ્‌ભવે છે. આથી ટુકડાઓ પર પરિણામી બળ લાગે છે. આથી તેઓ કાંસકા તરફ ગતિ કરે છે.



આકૃતિ 1.11 કાંસકાનું વિદ્યુતક્ષેત્ર

ઉદાહરણ 11 : 4×10^{-9} Cm જેટલી ડાઈપોલ-મોમેન્ટ ધરાવતા એક વિદ્યુત-ડાઈપોલ 5×10^4 NC^{-1}ના સમાન વિદ્યુતક્ષેત્રમાં ક્ષેત્ર સાથે 30°ના કોણ બનાવતી દિશામાં ગોઠવાય ત્યારે તેના પર લાગતા ટૉર્કનું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : $p = 4 \times 10^{-9}$ Cm, $E = 5 \times 10^4$ NC^{-1}, $\theta = 30^\circ$, $\tau = ?$

$\tau = pE\sin\theta = (4 \times 10^{-9})(5 \times 10^4)\sin 30^\circ = 10^{-4}$ Nm.

1.8 વિદ્યુતભારોનું સતત વિતરણ (Continuous Distribution of Charges)

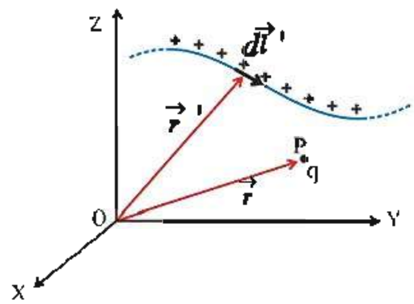
અવકાશમાં રહેલા અસતત (છૂટા-છૂટા) બિંદુવત્ વિદ્યુતભારો માટે તેમના દ્વારા બીજા બિંદુવત્ વિદ્યુતભાર પર લાગતું બળ કુલંબના નિયમ અને સંપાતપણાના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરી મેળવી શકાય છે. પરંતુ વ્યવહારમાં આપણને સતત વિદ્યુતભારોની ગોઠવણી જોવા મળે છે. દા.ત., પૃષ્ઠ પર સતત વિતરિત થયેલા વિદ્યુતભારો. આ સ્થિતિમાં તેમની અસર સંપાતપણાના સિદ્ધાંતથી શોધવી મુશ્કેલ પડે છે. આથી સતત રીતે વહેંચાયેલા વિદ્યુતભારના તંત્રને વર્ણવવા માટે વિદ્યુતભાર ઘનતાનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. આ ઘનતાનું મૂલ્ય સમગ્ર તંત્રમાં અચળ ન પણ હોય.

વિદ્યુતભારોનું સતત વિતરણ ત્રણ પ્રકારનું હોઈ શકે છે :

(1) રેખીય વિતરણ (2) પૃષ્ઠ-વિતરણ અને (3) કદ-વિતરણ

(1) રેખીય વિતરણ (Line Distribution) : આકૃતિ 1.12માં દર્શાવ્યા મુજબ કોઈ રેખા પર સતત રીતે પથરાયેલ વિદ્યુતભાર વિતરણ ધ્યાનમાં લો. આ વિદ્યુતભાર વડે P સ્થાને આવેલ q વિદ્યુતભાર પર લાગતું બળ શોધવું છે.

ધારો કે આ રેખા પર એકમલંબાઈ દીઠ વિદ્યુતભાર λ છે. તેને વિદ્યુતભારની રેખીય ઘનતા કહે છે.



આકૃતિ 1.12 વિદ્યુતભારનું રેખીય વિતરણ

$$\lambda = \frac{\text{રેખા પરનો કુલ વિદ્યુતભાર}}{\text{રેખાની લંબાઈ}} = \frac{Q}{l}$$, λનો એકમ Cm^{-1} છે.

જો વિતરણ નિયમિત ન હોય તો, રેખા પરનાં જુદાં-જુદાં બિંદુઓ પાસે λનું મૂલ્ય જુદું-જુદું હોય, તેવા સંજોગોમાં રેખા પરના $\vec{r}\,'$ સ્થાનસદિશ ધરાવતા બિંદુ પાસે રેખીય વિદ્યુતભારઘનતા $\lambda(\vec{r}\,')$ વડે દર્શાવી શકાય.

આ રેખાને dl' જેટલી સૂક્ષ્મ લંબાઈ ધરાવતા અનેક રેખાખંડોમાં વિભાગેલો કલ્પો. આકૃતિ 1.12માં દર્શાવ્યા મુજબ ઊગમબિંદુ Oને અનુલક્ષીને આ રેખાખંડ $\vec{dl}\,'$નો સ્થાનસદિશ $\vec{r}\,'$ છે. આથી, $\vec{dl}\,'$ રેખાખંડ પરનો વિદ્યુતભાર

$$dq = \lambda(\vec{r}\,')\,|\vec{dl}\,'| \qquad (1.8.1)$$

આ વિદ્યુતભારને લીધે q વિદ્યુતભાર પર લાગતું બળ,

$$d\vec{F} = k\frac{(q)(dq)}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}') \qquad (1.8.2)$$

$d\vec{l}'$ જેવા અનેક સૂક્ષ્મ ખંડોને કારણે q પર ઉદ્ભવતું કુલ બળ શોધવા માટે જુદા-જુદા રેખાખંડોને અનુરૂપ મળતાં $d\vec{F}$ જેવાં પદોનો સમગ્ર રેખા પર સરવાળો કરવો જોઈએ. અહીં રેખાખંડો સતત હોવાથી આવો સરવાળો નીચે મુજબ રેખીય સંકલનમાં પરિણમે છે.

આથી કુલ બળ,

$$\vec{F} = \int_l d\vec{F} = \int_l \frac{k(q)(dq)}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}')$$

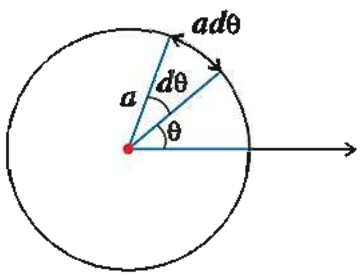
$$\therefore \ \vec{F} = kq\int_l \frac{\lambda(\vec{r}')|d\vec{l}'|}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}') \qquad \text{(સમીકરણ 1.8.2 પરથી)} \qquad (1.8.3)$$

જો P સ્થાને મૂકેલ વિદ્યુતભાર અતિ સૂક્ષ્મ ($q \rightarrow 0$) હોય, તો વિદ્યુતભારના રેખીય વિતરણને લીધે P આગળ વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = k\int_l \frac{\lambda(\vec{r}')|d\vec{l}'|}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}') \qquad (1.8.4)$$

ઉદાહરણ 12 : a ત્રિજ્યાના વર્તુળના પરિઘ પર વિદ્યુતભારની રેખીય ઘનતા $\lambda = \lambda_0 cos^2\theta$ છે, તો તેના (પરિઘ) પર રહેલ કુલ વિદ્યુતભાર શોધો. [**Hint :** $\int_0^{2\pi} cos^2\theta \, d\theta = \pi$]

ઉકેલ : આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ વર્તુળ પરના સૂક્ષ્મ રેખાખંડની લંબાઈ $ad\theta$ હોઈને તેટલા ખંડ પર રહેલા વિદ્યુતભાર $dq = \lambda ad\theta = \lambda_0 cos^2\theta \ ad\theta$ હશે. આ રીતે પરિઘ પરના બધા રેખાખંડ પર રહેલા વિદ્યુતભારોનું સમગ્ર પરિઘ પર સંકલન કરીને તેના પર રહેલ કુલ વિદ્યુતભાર Q મેળવી શકાય છે.



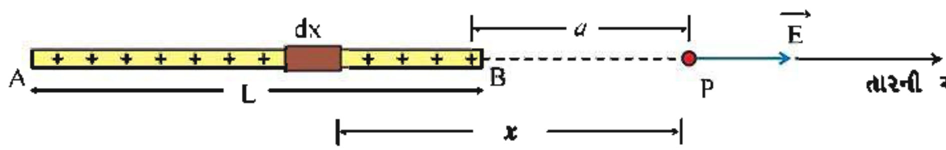
$$\therefore \ Q = \oint dq$$

અહીં સંકેત $\oint$ એ સમગ્ર બંધમાર્ગ (અત્રે પરિઘ) પરનું સંકલન સૂચવે છે.

$$\therefore \ Q = \int_0^{2\pi} \lambda_0 cos^2\theta \, ad\theta = a\lambda_0 \int_0^{2\pi} cos^2\theta d\theta = \pi a\lambda_0$$

ઉદાહરણ 13 : એક સુરેખ વાહક તારની લંબાઈ L છે. તેના પર q જેટલો વિદ્યુતભાર સમાન રીતે વિતરિત થયેલો છે. તારની અક્ષ પર તારના કોઈ એક છેડાથી a જેટલા અંતરે આવેલા બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્ર શોધો. (તારની જાડાઈ અવગણો.)

ઉકેલ : આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ બિંદુ P થી x અંતરે આવેલ તાર AB પરનો સૂક્ષ્મખંડ dx વિચારો. P એ તારની અક્ષ પરનું બિંદુ છે, જ્યાં વિદ્યુતક્ષેત્ર શોધવું છે.



આ dx ખંડમાં સમાયેલ વિદ્યુતભાર,

$$dq = \frac{q}{L}dx$$

આ વિદ્યુતભારથી બિંદુ P આગળ વિદ્યુતક્ષેત્ર,

$$dE = k\frac{dq}{x^2} = k\frac{q}{L}\frac{dx}{x^2}$$

આથી, સમગ્ર તારથી ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર,

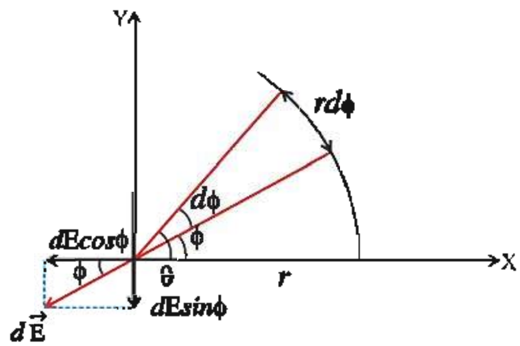
$$E = \int_a^{L+a} dE = \frac{kq}{L}\int_a^{L+a}\frac{dx}{x^2} = \frac{kq}{L}\left[-\frac{1}{x}\right]_a^{L+a} = \frac{kq}{L}\left[-\frac{1}{L+a}+\frac{1}{a}\right] = k\frac{q}{a(L+a)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a(L+a)}$$

નોંધ : જો $L << a$ હશે, તો $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^2}$, જે બિંદુવત્ વિદ્યુતભારથી ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર છે. જો સળિયા પરનો વિદ્યુતભાર q ધન હશે, તો વિદ્યુતક્ષેત્ર AP દિશામાં હશે.

ઉદાહરણ 14 : યામપદ્ધતિના ઊગમબિંદુ પાસે, X-અક્ષની સાથે θ કોણ બનાવતી r ત્રિજ્યાના વર્તુળાકાર ચાપ પર λ જેટલી નિયમિત રેખીય વિદ્યુતભારઘનતા ધરાવતો વિદ્યુતભાર રહેલો છે, તો ઊગમબિંદુ પર આ વિદ્યુતભારના કારણે ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર શોધો.

ઉકેલ : $d\phi$ ખૂણા વડે આંતરાતા ચાપ પરનો વિદ્યુતભાર, $dq = \lambda r d\phi$. આ વિદ્યુતભારના કારણે ઊગમબિંદુ પર ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર,

$$dE = \frac{k\lambda r d\phi}{r^2}$$



આ ક્ષેત્રનો સદિશ $d\vec{E}$ આકૃતિમાં દર્શાવેલ છે.

$d\vec{E}$ ના બે ઘટકો લેતાં,

$$d\vec{E}_x = -\frac{k\lambda r d\phi}{r^2}\cos\phi\,\hat{i} \text{ અને}$$

$$d\vec{E}_y = -\frac{k\lambda r d\phi}{r^2}\sin\phi\,\hat{j}$$

હવે, $\vec{E}_x = \int_0^{\theta} dE_x = -\frac{k\lambda}{r}\int_0^{\theta}\cos\phi\, d\phi\,\hat{i} = -\frac{k\lambda}{r}[\sin\phi]_0^{\theta}\,\hat{i}$

$$\therefore\ \vec{E}_x = -\frac{k\lambda}{r}\sin\theta\,\hat{i} \qquad (1)$$

હવે, $\vec{E}_y = -\frac{k\lambda}{r}\int_0^{\theta}\sin\phi\, d\phi\,\hat{j} = -\frac{k\lambda}{r}[-\cos\phi]_0^{\theta}\,\hat{j}$

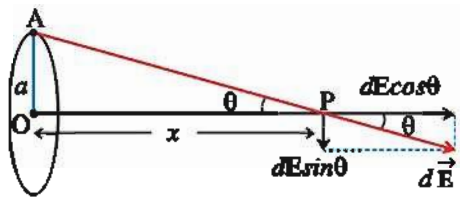
$$\therefore\ \vec{E}_y = \frac{k\lambda}{r}[\cos\theta - 1]\,\hat{j} \qquad (2)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y = -\frac{k\lambda}{r}\sin\theta\,\hat{i} + \frac{k\lambda}{r}(\cos\theta - 1)\,\hat{j}$$ (સમીકરણ (1) અને (2) પરથી)

$$\therefore\ \vec{E} = \frac{k\lambda}{r}[(-\sin\theta)\,\hat{i} + (\cos\theta - 1)\,\hat{j}]$$

ઉદાહરણ 15 : a જેટલી ત્રિજ્યાની એક વીંટીના પરિઘ Q જેટલો વિદ્યુતભાર સમાન રીતે વિતરિત થયેલો છે. આ વીંટીની અક્ષ પર, તેના કેન્દ્રથી x અંતરે આવેલા બિંદુ પાસે ઉદ્‌ભવતા વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા ગણો.

ઉકેલ : આકૃતિમાં આ પરિસ્થિતિ દર્શાવી છે. આ વીંટી પર બિંદુ A પાસે પરિઘ પર એક સૂક્ષ્મ રેખાખંડ કલ્પો. આ ખંડમાંના વિદ્યુતભાર dqને લીધે વીંટીની અક્ષ પર, તેના કેન્દ્ર x જેટલા અંતરે, આવેલ બિંદુ P પર વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા $d\vec{E}$ નું મૂલ્ય-



$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{AP^2} = k\frac{dq}{(a^2+x^2)} \qquad (1)$$

તેની દિશા Aથી P તરફ છે.

હવે આ તીવ્રતા $d\vec{E}$ના બે ઘટકો : (i) વીંટીની અક્ષને લંબ $dE\sin\theta$, અને (ii) આ અક્ષને સમાંતર $dE\cos\theta$ વિચારો.

અહીં સ્પષ્ટ છે કે જ્યારે સમગ્ર વીંટી પરના બધા જ ખંડો વડે મળતી તીવ્રતાઓના સદિશોનો સરવાળો કરવામાં આવશે, ત્યારે સામસામેના (વ્યાસાંત) ખંડો વડે મળતી તીવ્રતાઓના $dE\sin\theta$ જેવા ઘટકો પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં હોઈ એકબીજાની અસરો નાબૂદ કરશે.

આથી સરવાળો (કે સંકલન) કરવા માટે માત્ર $dE\cos\theta$ ઘટકો જ ધ્યાનમાં લેવા પડશે.

$\therefore$ બિંદુ P પાસે કુલ વિદ્યુતક્ષેત્ર,

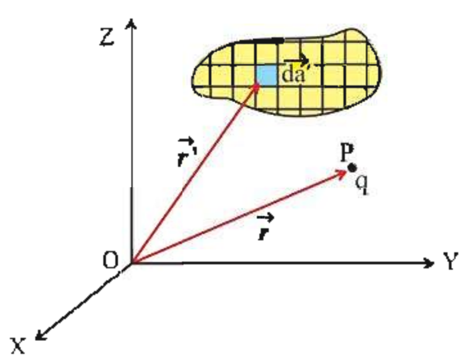
$$E = \int dE\cos\theta = \int k\frac{dq}{(a^2+x^2)}\frac{OP}{AP} \qquad \left(\because \cos\theta = \frac{OP}{AP}\right)$$

$$E = k\int\frac{dq}{(a^2+x^2)}\frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{(સમીકરણ (1) પરથી)}$$

$$\therefore E = k\frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\int_{\text{પરિઘ}} dq = \frac{kxQ}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{xQ}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(2) પૃષ્ઠ-વિતરણ (Surface Distribution) : આકૃતિ 1.13માં દર્શાવ્યા મુજબ કોઈ પૃષ્ઠ પર વિદ્યુતભાર સતત રીતે પથરાયેલો છે. આ વિદ્યુતભારને લીધે $\vec{r}$ સ્થાનસદિશ ધરાવતા બિંદુ P પર મૂકેલા q વિદ્યુતભાર પર લાગતું બળ શોધવું છે. અહીં, પૃષ્ઠ પર સતત વિતરિત થયેલા વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠઘનતા $\sigma(\vec{r}\,')$ છે.

વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠઘનતા એટલે એકમ ક્ષેત્રફળ દીઠ વિદ્યુતભાર



આકૃતિ 1.13 વિદ્યુતભારનું પૃષ્ઠ-વિતરણ

$$\sigma = \frac{\text{પૃષ્ઠ પરનો કુલ વિદ્યુતભાર}}{\text{પૃષ્ઠનું ક્ષેત્રફળ}} = \frac{Q}{A},\ \sigma \text{ એકમ } Cm^{-2} \text{ છે.}$$

હવે, સમગ્ર પૃષ્ઠને $\vec{da}'$ જેવા અનેક સૂક્ષ્મ ખંડોમાં વિભાગેલો કલ્પો. આ સૂક્ષ્મ ખંડમાં સમાયેલ વિદ્યુતભાર,

$$dq = \sigma(\vec{r}\,')\,|\vec{da}'| \qquad (1.8.5)$$

આ વિદ્યુતભારને લીધે q વિદ્યુતભાર પર લાગતું બળ,

$$d\vec{F} = k\frac{(q)(dq)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}(\vec{r}-\vec{r}\,') \qquad (1.8.6)$$

સમગ્ર સપાટી પરના વિદ્યુતભારને લીધે q વિદ્યુતભાર પર લાગતું કુલ બળ એ ઉપર્યુક્ત સમીકરણનું પૃષ્ઠ-સંકલન લઈ શોધી શકાય. સમીકરણ (1.8.5) અને (1.8.6) પરથી,

$$\vec{F} = \int_s d\vec{F} = kq\int_s \frac{\sigma(\vec{r}\,')|d\vec{a}'|}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}(\vec{r}-\vec{r}\,') \quad (1.8.7)$$

જો બિંદુ P આગળ આવેલ વિદ્યુતભાર અતિ સૂક્ષ્મ હોય, તો તે બિંદુ આગળ વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા,

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = k\int_s \frac{\sigma(\vec{r}\,')|d\vec{a}'|}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}(\vec{r}-\vec{r}\,') \quad (1.8.8)$$

ઉદાહરણ 16 : આકૃતિમાં દર્શાવેલ a લંબાઈના ચોરસ પર વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠઘનતા $\sigma = \sigma_0 xy$ છે, તો આ ચોરસ પર કુલ વિદ્યુતભાર શોધો. યામાક્ષ પદ્ધતિ આકૃતિમાં દર્શાવી છે.

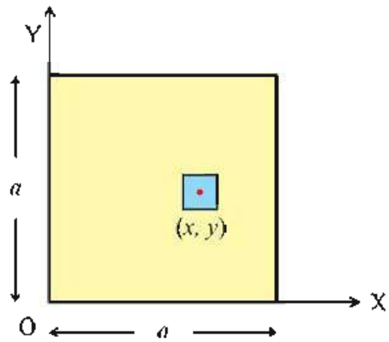
ઉકેલ : આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે બિંદુ (x, y) પાસે પૃષ્ઠખંડ $dxdy$ ધ્યાનમાં લો.

આ પૃષ્ઠખંડ પર વિદ્યુતભાર, $dq = \sigma_0\, xy\, dx\, dy$

$\therefore$ સમગ્ર પૃષ્ઠ પર કુલ વિદ્યુતભાર,

$$Q = \sigma_0 \int_0^a x\,dx \cdot \int_0^a y\,dy = \sigma_0\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^a = \sigma_0\left(\frac{a^2}{2}\right)\left(\frac{a^2}{2}\right)$$

$$\therefore Q = \frac{\sigma_0 a^4}{4}$$



(3) કદ-વિતરણ (Volume Distribution) : આકૃતિ 1.14માં દર્શાવ્યા મુજબ ધારો કે વિદ્યુતભાર કોઈ કદ (ઘનફળ)માં સતત રીતે વિતરિત થયેલો છે. આ વિદ્યુતભારની કદઘનતા $\rho(\vec{r}\,')$ છે.

એકમકદ દીઠ વિદ્યુતભારને વિદ્યુતભારની કદઘનતા કહે છે.

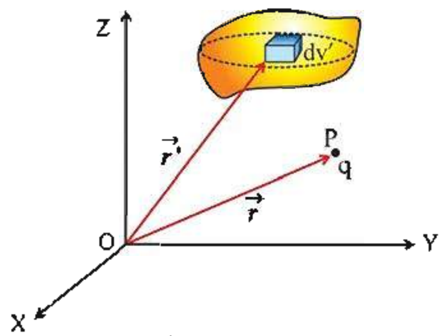
$$\rho = \frac{\text{કુલ વિદ્યુતભાર}}{\text{કુલ કદ}} = \frac{Q}{V},$$ ρનો એકમ Cm^{-3} છે.

આપેલ કદને dV' જેવા સૂક્ષ્મ ખંડોમાં વિભાગેલો કલ્પો. આ કદ ખંડમાં રહેલો વિદ્યુતભાર,

$$dq = \rho(\vec{r}\,')dV'$$

આ વિદ્યુતભારથી, $\vec{r}$ સ્થાનસદિશ ધરાવતા બિંદુ P પરના q વિદ્યુતભાર પર લાગતું બળ,

$$d\vec{F} = \frac{k(q)(dq)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}(\vec{r} - \vec{r}\,')$$



આકૃતિ 1.14 વિદ્યુતભારનું કદ-વિતરણ

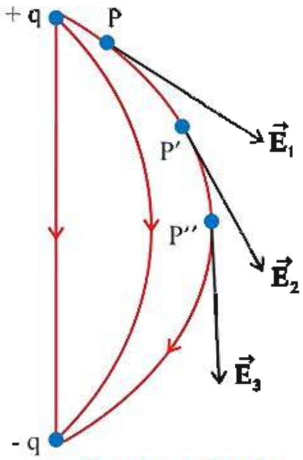
ઉપર સમજાવ્યા મુજબ સમગ્ર કદમાં સમાયેલ વિદ્યુતભારથી q પર લાગતું કુલ બળ એ કદ-સંકલન (volume integration) લઈ મેળવી શકાય.

$$\vec{F} = \int_V d\vec{F} = kq\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')dV'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

આગળ સમજાવ્યા મુજબ વિદ્યુતભાર q અતિ સૂક્ષ્મ હોય, તો બિંદુ P આગળ વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા,

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = k\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')dV'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}(\vec{r} - \vec{r}\,')$$

1.9 વિદ્યુતક્ષેત્રરેખાઓ (Electricfield Lines)



આકૃતિ 1.15 ડાઈપોલની વિદ્યુતક્ષેત્રરેખા દોરવી

વિદ્યુતભારથી ઉદ્‌ભવતા વિદ્યુતક્ષેત્રનું ચિત્રાત્મક સ્વરૂપ એટલે વિદ્યુતક્ષેત્ર-રેખાઓ. માઈકલ ફેરેડે નામના વિજ્ઞાનીએ વિદ્યુતક્ષેત્રરેખાઓની કલ્પના કરીને વિદ્યુતને લગતાં અગત્યનાં પરિણામો મેળવ્યા હતાં. (ફેરેડેએ વિદ્યુતરેખાઓને બળરેખાઓ એવું નામ આપેલું હતું.)

વિદ્યુતક્ષેત્રરેખા એ વિદ્યુતક્ષેત્રમાં એવી રીતે દોરેલ વક્ર છે કે તેના કોઈ બિંદુએ દોરેલ સ્પર્શક તે બિંદુ પાસે પરિણામી વિદ્યુતક્ષેત્રની દિશામાં હોય.

હકીકતમાં, મુક્ત રીતે ગતિ કરી શકે તેવા એકમ ધન વિદ્યુતભારને ક્ષેત્રમાં મૂકતાં તે જે પથ પર ગતિ કરે છે, તે પથ વિદ્યુતક્ષેત્રરેખા દર્શાવે છે.

કોઈ વિદ્યુતક્ષેત્રની ક્ષેત્રરેખાઓ કેવી રીતે દોરવી તે સમજવા વિદ્યુતડાઈપોલના ક્ષેત્રનું ઉદાહરણ લઈશું.

વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતાના સમીકરણનો ઉપયોગ કરીને કોઈ પણ બિંદુ આગળ વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા શોધી શકાય. આકૃતિ 1.15માં દર્શાવ્યા મુજબ P બિંદુએ જે તીવ્રતા હોય તેટલી તીવ્રતાનો ($\vec{E}_1$ જેટલો) સદિશ (મૂલ્ય અને દિશા સહિત) દોરો.

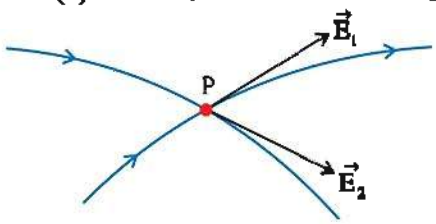
હવે Pની તદ્દન નજીક બીજું બિંદુ P' લો. P' આગળ તીવ્રતા શોધો. તેને $\vec{E}_2$ સદિશ વડે દર્શાવો. આ જ પ્રમાણે P'ની તદ્દન નજીક P'' બિંદુ આગળ સદિશ $\vec{E}_3$ દોરો. આ રીતે બીજા સદિશો દોરી શકાય.

P, P', P'' બિંદુઓ અત્યંત નજીક હોવાથી સદિશોના પુચ્છમાંથી એક સતત વક્ર દોરો. આ વક્રને ક્ષેત્રરેખા કહે છે. આમ, અત્યંત નજીક એવાં બિંદુઓ (P, P', P'' જેવાં) પાસે દોરેલા ક્ષેત્રસદિશો, જેનાં જે-તે બિંદુઓ પાસે સ્પર્શક બને તેવા વક્રને ક્ષેત્રરેખા કહે છે.

વિદ્યુતક્ષેત્રની લાક્ષણિકતાઓ

(1) વિદ્યુતક્ષેત્રરેખાઓ ધન વિદ્યુતભારમાંથી ઉદ્‌ભવે છે અને નજીકના ઋણ વિદ્યુતભાર પર અંત પામે છે.

(2) આપેલ ક્ષેત્રરેખા પરના કોઈ પણ બિંદુ પાસે, ક્ષેત્રરેખાને દોરેલ સ્પર્શક, તે બિંદુ પાસે ક્ષેત્રની દિશા દર્શાવે છે.

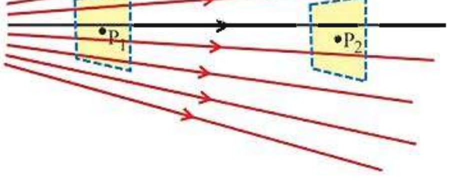


આકૃતિ 1.16

(3) બે ક્ષેત્રરેખાઓ એકબીજાને છેદતી નથી. જો કોઈ બિંદુ પાસે બે ક્ષેત્રરેખાઓ એકબીજાને છેદે, તો છેદનબિંદુ પાસે બંને રેખાઓને દોરેલ સ્પર્શક તે જ બિંદુ પાસે વિદ્યુતક્ષેત્રને બે દિશા હોવાનું સૂચન કરે છે, જે શક્ય નથી. (જુઓ આકૃતિ 1.16)

(4) સ્થિર વિદ્યુતભાર તંત્રની વિદ્યુતક્ષેત્રરેખાઓ ક્યારેય બંધ ગાળા રચતી નથી.

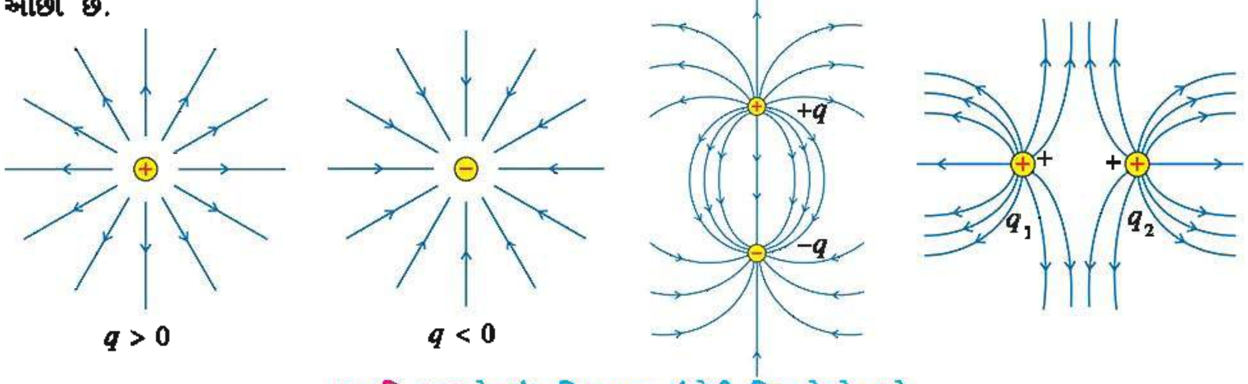
(5) ક્ષેત્રના કોઈ વિસ્તારમાં ક્ષેત્રરેખાઓનું યોગ્ય રીતે કરેલું વિસ્તરણ તે વિસ્તારમાં ક્ષેત્રની તીવ્રતાનો ખ્યાલ આપે છે.



આકૃતિ 1.17 વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા

સામાન્ય રીતે કોઈ પણ વિસ્તારમાંથી પસાર થતી ક્ષેત્રરેખાઓની સંખ્યા એવી રીતે નિશ્ચિત કરવામાં આવે છે, જેથી તે વિસ્તારના કોઈ બિંદુ પાસે ક્ષેત્રરેખાને લંબરૂપે કલ્પેલી એકમક્ષેત્રફળવાળી સમતલ સપાટીમાંથી પસાર થતી ક્ષેત્રરેખાઓની સંખ્યા તે બિંદુ પાસેના ક્ષેત્રની તીવ્રતાને સમપ્રમાણ થાય. આથી, જે વિસ્તારમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર તીવ્ર હશે, તે વિસ્તારમાં ક્ષેત્રરેખાઓ ગીચોગીચ (પાસપાસે) હશે અને જે વિસ્તારમાં તીવ્રતા ઓછી હશે, તે વિસ્તારમાં ક્ષેત્રરેખાઓ પ્રમાણમાં એકબીજાથી દૂર હશે.

આકૃતિ 1.17 પરથી સ્પષ્ટ છે કે બિંદુ P_1 આગળ વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા વધુ છે, જ્યારે P_2 આગળ ક્ષેત્રની તીવ્રતા ઓછી છે.



આકૃતિ 1.18 કેટલાંક વિદ્યુતભાર તંત્રોની વિદ્યુતક્ષેત્રરેખાઓ

(6) સમાન વિદ્યુતક્ષેત્ર દર્શાવતી ક્ષેત્રરેખાઓ એકબીજાને સમાંતર અને એકબીજાથી સમાન અંતરે હોય છે.

નોંધ : ક્ષેત્રરેખાઓ વાસ્તવિક નથી પરંતુ ક્ષેત્ર વાસ્તવિક છે. ક્ષેત્રરેખાઓ એ ક્ષેત્રને રજૂ કરવા માટેની ભૌમિતીય રચના છે.

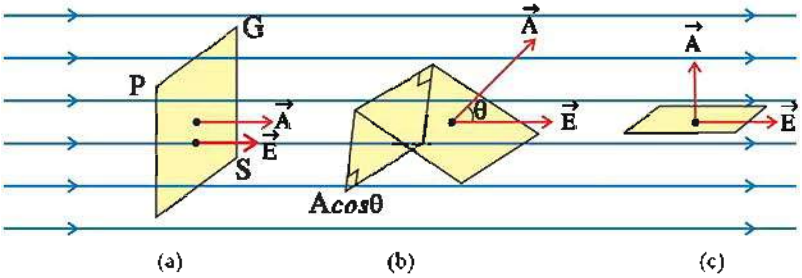
આકૃતિ 1.18માં કેટલાક વિદ્યુતભારોનાં તંત્ર માટે વિદ્યુતક્ષેત્રરેખાઓ દર્શાવી છે.

(આકૃતિમાં દર્શાવેલ ક્ષેત્રરેખાઓ સમતલમાં દોરેલી છે, પરંતુ તે અવકાશ (ત્રિ-પરિમાણ)માં હોય છે.)

1.10 વિદ્યુત-ફ્લક્સ (Electric Flux)

કુલંબનો નિયમ એ સ્થિરવિદ્યુતનો મૂળભૂત નિયમ છે. તેની મદદથી કોઈ પણ બિંદુ આગળનું વિદ્યુતક્ષેત્ર જાણી શકાય છે. કુલંબના નિયમને સમતુલ્ય એવો બીજો ગોસનો નિયમ છે. આ નિયમની મદદથી સંમિતિ ધરાવતા વિદ્યુતભાર તંત્રથી કોઈ બિંદુ આગળ ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર સરળતાથી મેળવી શકાય છે. આપણે ગોસના નિયમની ચર્ચા કરીએ તે પહેલાં વિદ્યુત-ફ્લક્સની સંકલ્પના જોઈશું.

ફ્લક્સની વિચારધારા વડે વિદ્યુતક્ષેત્રને તેનાં પ્રાપ્તિસ્થાનો સાથે સાંકળી શકાય છે. ફ્લક્સ એ ગાણિતીય સંકલ્પના છે અને તેનું ભૌતિક અર્થઘટન કરી શકાય છે. ફ્લક્સ એ બધાં જ સદિશ ક્ષેત્રોનો એક ગુણધર્મ છે.



$\theta = 0,\ \phi = EA \qquad \phi = EA\cos\theta \qquad \theta = 90°,\ \phi = 0$

આકૃતિ 1.19 સમાન વિદ્યુતક્ષેત્રમાં વિદ્યુત-ફ્લક્સ

વિદ્યુત-ફ્લક્સ એ વિદ્યુતક્ષેત્રમાં મૂકેલા પૃષ્ઠમાંથી પસાર થતી વિદ્યુતક્ષેત્રરેખાઓને સમપ્રમાણમાં હોય છે. (અહીં આપણે 'સમપ્રમાણ' શબ્દપ્રયોગ એટલે કર્યો છે, કારણકે ક્ષેત્રરેખાઓની સંખ્યા આપણે યાદચ્છિક રીતે નક્કી કરી શકીએ છીએ.) આકૃતિ 1.19માં દર્શાવ્યા મુજબ સમાન વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$માં ક્ષેત્રરેખાઓને લંબ એવું પૃષ્ઠ વિચારો. ધારો કે પૃષ્ઠનું ક્ષેત્રફળ $\vec{A}$ છે. ક્ષેત્રફળ $\vec{A}$ સદિશ રાશિ છે અને તે પૃષ્ઠને લંબ બહાર તરફની દિશામાં હોય છે. અહીં ક્ષેત્રફળનો સદિશ $\vec{A}$ અને $\vec{E}$ એક જ દિશામાં છે.

વિદ્યુતક્ષેત્રની વ્યાખ્યા વિદ્યુતક્ષેત્રરેખાઓના સંદર્ભમાં પણ આપી શકાય છે. કોઈ પણ બિંદુ આગળનું વિદ્યુતક્ષેત્ર એટલે તે બિંદુ આગળ વિદ્યુતક્ષેત્રને લંબરૂપે મૂકેલા એકમક્ષેત્રફળવાળા પૃષ્ઠમાંથી પસાર થતી વિદ્યુતક્ષેત્રરેખાઓની સંખ્યા. આથી, A ક્ષેત્રફળવાળા પૃષ્ઠમાંથી પસાર થતી ક્ષેત્રરેખાઓની સંખ્યા EA થશે. જેને આપેલ પૃષ્ઠ સાથે

સંકળાયેલ વિદ્યુત-ફ્લક્સ ϕ કહે છે. આમ, વિદ્યુત-ફ્લક્સ એ વિદ્યુતક્ષેત્રમાં મૂકેલા પૃષ્ઠમાંથી પસાર થતી અથવા પૃષ્ઠ સાથે સંકળાયેલ વિદ્યુતક્ષેત્રરેખાઓની સંખ્યા છે, જેને ϕ વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

$$\therefore \phi = EA \qquad (1.10.1)$$

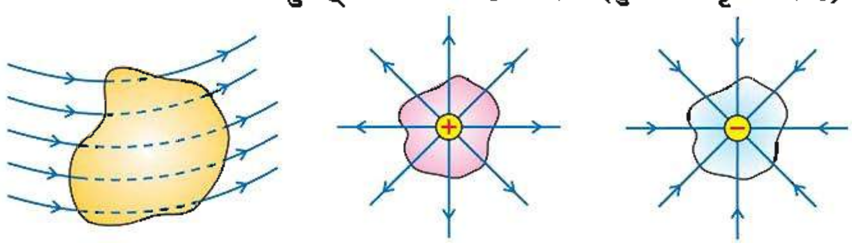
હવે, જો આપેલ પૃષ્ઠ એ વિદ્યુતક્ષેત્રને લંબ ના હોય તો તેમાંથી પસાર થતી ક્ષેત્રરેખાઓની સંખ્યા ઘટશે. આકૃતિ 1.19(b)માં દર્શાવ્યા મુજબ આપેલ પૃષ્ઠ વિદ્યુતક્ષેત્ર સાથે ϕ કોણ બનાવતું હોય તો આ પૃષ્ઠ સાથે સંકળાયેલ વિદ્યુત-ફ્લક્સ શોધવા માટે પૃષ્ઠના ક્ષેત્રફળના સદિશ $\vec{A}$નો વિદ્યુતક્ષેત્રને સમાંતર (કે પ્રતિસમાંતર) દિશાને ઘટક $A\cos\theta$ ગણતરીમાં લેવો પડે. આથી પૃષ્ઠ $\vec{E}$ સાથે સંકળાયેલ વિદ્યુત-ફ્લક્સ,

$$\phi = EA\cos\theta \qquad (1.10.2)$$

ઉપર્યુક્ત સમીકરણને સદિશ સ્વરૂપે દર્શાવતાં,

$$\phi = \vec{E} \cdot \vec{A} \qquad (1.10.3)$$

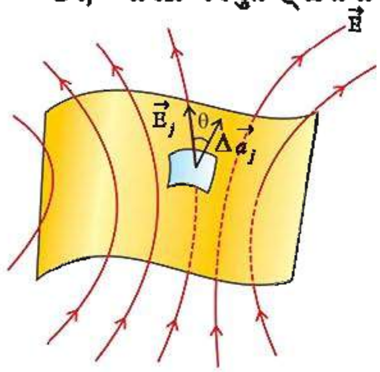
વિદ્યુત-ફ્લક્સ એ અદિશ રાશિ છે. તેનો SI પદ્ધતિમાં એકમ $Nm^2\ C^{-1}$ અથવા Vm છે. સમીકરણ (1.10.2) પરથી સ્પષ્ટ છે કે વિદ્યુત-ફ્લક્સ ધન, ઋણ કે શૂન્ય હોઈ શકે છે. જો પૃષ્ઠ વિદ્યુતક્ષેત્રને સમાંતર હશે, તો $\vec{A} \perp \vec{E}$ થશે. આથી, પૃષ્ઠ સાથે સંકળાયેલ ફ્લક્સ $\phi = EA\cos 90^\circ = 0$ થશે. $\theta < 90^\circ$ માટે, ϕ ધન મળે છે, જ્યારે $\theta > 90^\circ$ માટે ϕ ઋણ મળે છે. બંધ વક્ર-સપાટીઓમાં પ્રવેશતી ક્ષેત્રરેખાઓથી રચાતું ફ્લક્સ ઋણ ગણાય છે, જ્યારે નિર્ગમન પામતી રેખાઓથી રચાતું ફ્લક્સ ધન ગણાય છે. (જુઓ આકૃતિ 1.20).



$\phi = 0$ $\quad$ $\phi > 0$ (ધન ફ્લક્સ) $\quad$ $\phi < 0$ (ઋણ ફ્લક્સ)

આકૃતિ 1.20 વિદ્યુત-ફ્લક્સ

હવે, આપણે વિદ્યુત-ફ્લક્સની વ્યાપક વ્યાખ્યા વિચારીશું.



આકૃતિ 1.21 અસમાન વિદ્યુતક્ષેત્રમાં પૃષ્ઠ સાથે સંકળાયેલ વિદ્યુત-ફ્લક્સ

આકૃતિ 1.21માં દર્શાવ્યા મુજબ અસમાન (non-uniform) વિદ્યુતક્ષેત્રમાં એક યાદચ્છિક પૃષ્ઠ કલ્પો. સમગ્ર પૃષ્ઠને અનેક સૂક્ષ્મ ખંડોમાં વિભાગેલું કલ્પો. જો પૃષ્ઠખંડો ખૂબ જ સૂક્ષ્મ હોય અને કથિત પૃષ્ઠ ખૂબ ખાંચાઓવાળું ન હોય, તો દરેક પૃષ્ઠખંડને એક સમતલ ગણી શકાય અને આવા નાના ખંડ પર વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$ અચળ ગણી શકાય. આવા દરેક પૃષ્ઠખંડને તેના ક્ષેત્રફળના સદિશ વડે દર્શાવી શકાય. કોઈ પણ પૃષ્ઠખંડને દર્શાવતો સદિશ પૃષ્ઠખંડના ક્ષેત્રફળ જેટલા મૂલ્યનો અને પૃષ્ઠખંડને લંબરૂપે લેવામાં આવે છે. જો પૃષ્ઠ બંધ હોય, એટલે કે પૃષ્ઠ ઘનફળ ઘેરતું હોય તો આવા સદિશો બંધ પૃષ્ઠમાંથી બહાર આવતી દિશામાં દોરવામાં આવે છે.

ધારો કે jમાં પૃષ્ઠખંડનો ક્ષેત્રફળનો સદિશ $\Delta\vec{a}_j$ અને આ પૃષ્ઠખંડ પરનું વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}_j$ છે. અહીં પૃષ્ઠખંડ અતિ સૂક્ષ્મ હોવાથી પૃષ્ઠખંડ પરનાં બધાં જ બિંદુઓએ $\vec{E}_j$ ખાસ બદલાતો નથી. આથી, jમાં પૃષ્ઠખંડ સાથે સંકળાયેલ વિદ્યુત-ફ્લક્સ,

$$\phi_j = \vec{E}_j \cdot \Delta\vec{a}_j \qquad (1.10.4)$$

આ જ રીતે દરેક પૃષ્ઠખંડ સાથે સંકળાયેલ ફ્લક્સનો સરવાળો કરી સમગ્ર પૃષ્ઠમાંથી પસાર થતું કુલ વિદ્યુત-ફ્લક્સ ϕ શોધી શકાય.

$$\phi = \sum_j \vec{E}_j \cdot \Delta\vec{a}_j \tag{1.10.5}$$

$\lim_{|\Delta\vec{a}_j| \to 0}$, લેતાં એટલે કે દરેક પૃષ્ઠખંડને શૂન્યવત્ નાનો લેતાં સમીકરણ (1.10.5)ને માં રહેલા સરવાળાને સંકલનના રૂપમાં લખી શકાય.

$$\phi = \lim_{|\Delta\vec{a}_j| \to 0} \sum_j \vec{E}_j \cdot \Delta\vec{a}_j$$

$$\phi = \int_{\text{પૃષ્ઠ}} \vec{E} \cdot d\vec{a} \tag{1.10.6}$$

સમીકરણ (1.10.6)ને વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$નું પૃષ્ઠ a પરનું પૃષ્ઠ-સંકલન (surface integration) કહે છે.

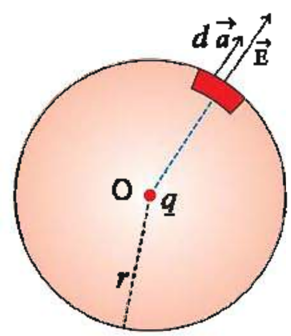
આમ, વ્યાપક વ્યાખ્યા નીચે મુજબ આપી શકાય :

"કોઈ પણ પૃષ્ઠ સાથે સંકળાયેલ ફ્લક્સ એટલે (સદિશ) ક્ષેત્રનું તે પૃષ્ઠ પરનું પૃષ્ઠ-સંકલન."

1.11 ગાઉસનો નિયમ (Gauss's Law)

વિદ્યુતભાર જેનાથી ઘેરાયેલો છે એવા બંધ પૃષ્ઠ પર વિદ્યુતક્ષેત્રનું પૃષ્ઠસંકલન ગાઉસના નિયમ તરફ દોરી જાય છે. ગાઉસનો નિયમ એ કુદરતના મૂળભૂત નિયમોમાંનો એક છે. આ નિયમ સમજવા માટે આપણે નીચેનું ઉદાહરણ સમજીશું :

જેના કેન્દ્ર O પર $+q$ વિદ્યુતભાર આપેલો છે, તેવો r ત્રિજ્યાનો પોલો ગોળો (sphere) વિચારો (જુઓ આકૃતિ 1.22). આપણે આ ગોળાની સપાટી સાથે સંકળાયેલ કુલ ફ્લક્સ ગણીશું.



આકૃતિ 1.22 ગોળા સાથે સંકળાયેલ ફ્લક્સ

ફ્લક્સની વ્યાખ્યા અનુસાર, ગોળાકાર સપાટી સાથે સંકળાયેલું કુલ ફ્લક્સ,

$$\phi = \int_s \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_s E\, da \cos\theta \tag{1.11.1}$$

સપાટી પરનાં દરેક બિંદુઓ કેન્દ્રથી સરખા અંતરે આવેલાં હોવાથી દરેક બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$નું મૂલ્ય સરખું હશે. બિંદુવત્ વિદ્યુતભારથી ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$ ત્રિજ્યાવર્તી છે. આથી ગોળાની સપાટી પરના દરેક ખંડના ક્ષેત્રફળનો સદિશ $d\vec{a}$ એ $\vec{E}$ની દિશામાં જ હશે. આથી, $(\theta = 0)$ થશે. સમીકરણ (1.11.1) પરથી,

$$\phi = \int_s E\, da \quad (\because \cos\theta = 1)$$

$$= E\int da = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \times 4\pi r^2 \qquad (4\pi r^2 \text{ એ ગોળાની સપાટીનું ક્ષેત્રફળ છે.})$$

$$\phi = \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{1.11.2}$$

અહીં, ફ્લક્સ એ ગોળાની ત્રિજ્યા પર આધારિત નથી, આથી તે ગમે તે આકારના બંધ પૃષ્ઠ માટે સત્ય છે. સમીકરણ (1.11.2) એ ગાઉસના નિયમનું વ્યાપક પરિણામ છે. ગાઉસના નિયમનું કથન નીચે મુજબ છે, જેને આપણે સાબિતી વગર સ્વીકારી લઈશું :

ગાઉસનો નિયમ : કોઈ બંધ પૃષ્ઠ સાથે સંકળાયેલ વિદ્યુત-ફ્લક્સ, પૃષ્ઠ વડે ઘેરાતા કુલ વિદ્યુતભાર અને ε_0ના ગુણોત્તર જેટલું હોય છે.

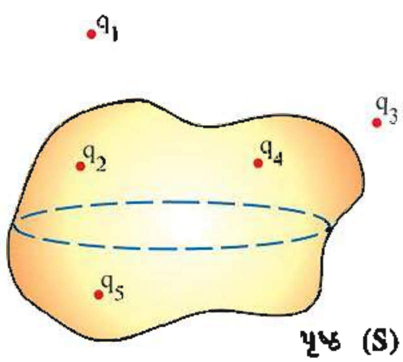
કોઈ બંધ પૃષ્ઠ સાથે સંકળાયેલ ફ્લક્સ $\phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \dfrac{\Sigma q}{\varepsilon_0}$ (1.11.3)

આ નિયમ દર્શાવે છે કે બંધ પૃષ્ઠ દ્વારા ઘેરાતો કુલ (ચોખ્ખો) વિદ્યુતભાર શૂન્ય હોય, તો બંધ પૃષ્ઠ સાથે સંકળાયેલ કુલ ફ્લક્સ પણ શૂન્ય હોય છે.

ગાઉસના નિયમ માટે આપણે કેટલાક મુદ્દાઓ નોંધી લઈએ :

(1) ગાઉસનો નિયમ એ બંધ પૃષ્ઠના કોઈ પણ પ્રકારના આકાર અને સાઈઝ (size) માટે સત્ય છે.

(2) સમીકરણ (1.11.3)માં દર્શાવેલ જમણી બાજુનો વિદ્યુતભાર એ બંધ પૃષ્ઠ વડે ઘેરાતા વિદ્યુતભારોનો પરિણામી વિદ્યુતભાર છે. આ વિદ્યુતભારો બંધ પૃષ્ઠમાં ગમે તે સ્થાને હોઈ શકે છે.



આકૃતિ 1.23

(3) સમીકરણ (1.11.3)માં ડાબી બાજુ આવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$ એ વિદ્યુતભાર તંત્રના વિદ્યુતભારો વડે ઉદ્ભવતું પરિણામી વિદ્યુતક્ષેત્ર છે, પછી તે વિદ્યુતભારો સપાટીની અંદર હોય કે બહાર.

ઉદાહરણ તરીકે આકૃતિ 1.23માં q_1, q_2, q_3, q_4 અને q_5 વિદ્યુતભારો દર્શાવ્યા છે. પૃષ્ઠ Sમાંથી પસાર થતું વિદ્યુત-ફ્લક્સ શોધવા માટે બધા જ વિદ્યુતભારો વડે ઉત્પન્ન થતાં વિદ્યુતક્ષેત્રોનો સદિશ સરવાળો કરી પરિણામી વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$ શોધવામાં આવે છે, જે સમીકરણ 1.11.3ની ડાબી બાજુએ વાપરવાનું છે, પરંતુ જમણી બાજુએ આવતો કુલ વિદ્યુતભાર Σq ગણવા માટે ફક્ત q_2, q_4 અને q_5નો પરિણામી વિદ્યુતભાર જ ગણવાનો.

પૃષ્ઠ S સાથે સંકળાયેલ કુલ ફ્લક્સ,

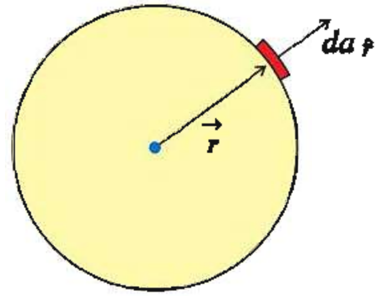
$$\phi = \frac{q_2 + q_4 + q_5}{\varepsilon_0}$$

(4) ગાઉસના નિયમ માટે નક્કી કરવામાં આવેલ બંધ સપાટીને ગાઉસિયન પૃષ્ઠ કહે છે.

(5) ગાઉસના નિયમનો ઉપયોગ કરીને સંમિત વિદ્યુતભાર વિતરણો વડે ઉદ્ભવતાં વિદ્યુતક્ષેત્રો સહેલાઈથી શોધી શકાય છે.

ઉદાહરણ 17 : કોઈ વિસ્તારમાં પ્રવર્તમાન વિદ્યુતક્ષેત્ર ફક્ત x અને y-યામો પર, સૂત્ર $\vec{E} = b\dfrac{x\hat{i} + y\hat{j}}{x^2 + y^2}$ મુજબ, આધારિત છે. અહીં b અચળાંક છે. યામાક્ષોના ઊગમબિંદુ પર જેનું કેન્દ્ર હોય તેવા r ત્રિજ્યાના ગોળાના પૃષ્ઠ સાથે સંકળાતું વિદ્યુત-ફ્લક્સ શોધો.

ઉકેલ : આકૃતિમાં દર્શાવેલ $\vec{r}$ની દિશામાં એકમ સદિશ



$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}}{r} \text{ હવે, } \vec{E} = b\frac{x\hat{i}+y\hat{j}}{x^2+y^2}$$

$$\therefore\ \vec{E}.d\vec{a} = b\left(\frac{x\hat{i}+y\hat{j}}{x^2+y^2}\right).\frac{x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}}{r}da = \frac{b\,da}{r}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = \frac{b}{r}da$$

$$\therefore\ \int\vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{b}{r}\int da = \frac{b}{r}.4\pi r^2 = 4\pi br$$

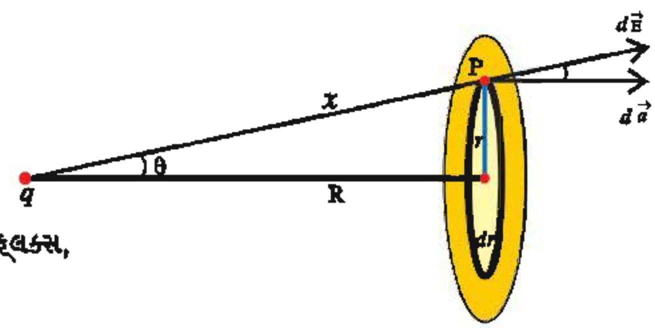
$$\therefore\ \phi = 4\pi br$$

ઉદાહરણ 18 : આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે q જેટલા બિંદુવત્ વિદ્યુતભારથી R અંતરે રહેલી a ત્રિજ્યાની વર્તુળાકાર તકતી સાથે 'q'ના કારણે સંકળાયેલ વિદ્યુત-ફ્લક્સ શોધો.

[**Hint :** $\int\frac{rdr}{(R^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{(R^2+r^2)}}$]

ઉકેલ : આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે તકતીમાં r ત્રિજ્યાની અને dr પહોળાઈની એક રિંગ વિચારો. આ રિંગનાં P જેવાં બિંદુઓ પાસે વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા,

$$|d\vec{E}| = \frac{kq}{x^2}$$



હવે, આ રિંગનું ક્ષેત્રફળ, $|d\vec{a}| = 2\pi rdr$.

$d\vec{a}$ રિંગના સમતલને લંબરૂપે છે અને $d\vec{E}$ સાથે θ કોણ બનાવે છે. હવે આ રિંગમાં પસાર થતું ફ્લક્સ,

$$d\phi = |d\vec{E}|\ |d\vec{a}|\cos\theta$$

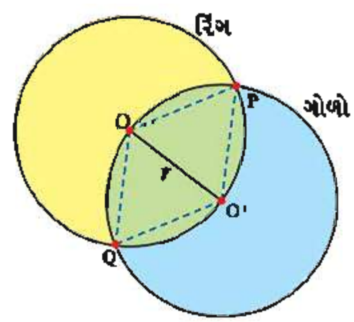
$$= \frac{kq}{x^2} \times 2\pi rdr \times \frac{R}{x} = 2\pi kqR \times \frac{rdr}{x^3} = 2\pi kqR \times \frac{rdr}{(R^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (\because\ x^2 = R^2 + r^2)$$

$$\therefore \text{ કુલ ફ્લક્સ } \phi = 2\pi kqR\int_0^a\frac{rdr}{(R^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\pi kqR\left[-\frac{1}{\sqrt{(R^2+r^2)}}\right]_0^a = 2\pi kqR\left[\frac{1}{R}-\frac{1}{\sqrt{(R^2+a^2)}}\right]$$

ઉદાહરણ 19 : r ત્રિજ્યાની એક રિંગ પર Q જેટલો વિદ્યુતભાર સમાન રીતે વહેંચાયેલો છે. હવે r ત્રિજ્યાનો ગોળો એવી રીતે દોરવામાં આવે છે કે જેથી આ ગોળાનું કેન્દ્ર રિંગના પરિઘ પર હોય, તો આ ગોળાના પૃષ્ઠ સાથે સંકળાયેલ વિદ્યુત-ફ્લક્સ શોધો.

ઉકેલ : આકૃતિની ભૂમિતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે OP = OO' અને O'P = O'O. માટે, ΔOPO' એ સમબાજુ ત્રિકોણ થશે.

$\therefore\ \angle POO' = 60^\circ$ or $\angle POQ = 120^\circ$



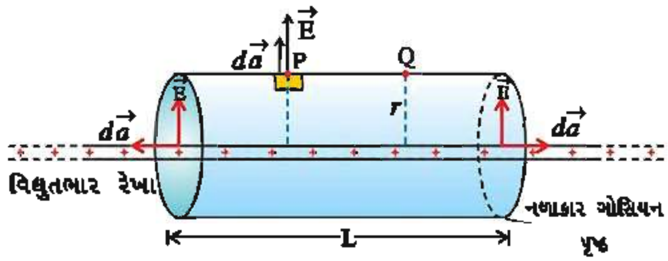
આમ, રિંગના ચાપ PO'Q તેના કેન્દ્ર પર 120°નો ખૂણો આંતરે છે. માટે સ્પષ્ટ છે કે ચાપ PO'Qની લંબાઈ એ રિંગના પરિઘ કરતાં ત્રીજા ભાગની થશે અને માટે આટલા ચાપ (કે જો ગોળાના પૃષ્ઠ વડે ઘેરાય છે.) પર $\frac{Q}{3}$ જેટલો વિદ્યુતભાર હશે.

ગાઉસના નિયમ પરથી, ગોળાના પૃષ્ઠમાંથી પસાર થતું ફ્લક્સ = $\frac{Q}{3\epsilon_0}$.

1.12 ગાઉસના નિયમના ઉપયોગો (Application's of Gauss's Law)

ગાઉસના નિયમનો ઉપયોગ કરી સંમિત વિદ્યુતભાર વિતરણો વડે ઉદ્‌ભવતાં વિદ્યુતક્ષેત્રો સહેલાઈથી શોધી શકાય છે. તેનાં કેટલાંક ઉદાહરણો આપણે જઈશું.

(1) અનંત લંબાઈના વિદ્યુતભારિત સુરેખ તાર (સુરેખીય નિયમિત વિદ્યુતભાર વિતરણ) વડે ઉદ્‌ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર(Electric Field Due to an Infinitely Long Straight Uniformly Charged Wire)



આકૃતિ 1.24 રેખીય વિદ્યુતભાર વિતરણવાળો અનંત લંબાઈનો તાર

ધારો કે આકૃતિ 1.24માં દર્શાવ્યા મુજબના અનંત લંબાઈના, λ જેટલી સમાન (નિયમિત) રેખીય વિદ્યુતભારઘનતા ધરાવતા સુરેખીય વિદ્યુતભાર વિતરણને લીધે r અંતરે આવેલા બિંદુ P પાસે વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા શોધવી છે.

તારની લંબાઈ અનંત હોવાથી P, Q, ... જેવાં બિંદુઓ સમતુલ્ય બિંદુઓ જ ગણાય. તારથી સમાન લંબ અંતરે રહેલાં આવાં બિંદુઓએ વિદ્યુતક્ષેત્ર સમાન જ હોય અને તે ત્રિજ્યાની દિશામાં હશે.

હવે વિદ્યુતભાર રેખાને અક્ષ તરીકે લઈ r ત્રિજ્યાનું અને L લંબાઈનું બંધ નળાકારીય ગાઉસિયન પૃષ્ઠ વિચારો (જુઓ આકૃતિ 1.24). આ નળાકારના વક્રપૃષ્ઠ પર દરેક બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્ર સમાન અને ત્રિજ્યાની દિશામાં હોય છે. આ નળાકારની વક્રસપાટીના પૃષ્ઠનું ક્ષેત્રફળ $2\pi r$L અને આડછેદની સપાટીનું ક્ષેત્રફળ πr^2 છે. L લંબાઈના નળાકારની અંદર ઘેરાયેલો વિદ્યુતભાર $q = \lambda$L થશે.

આકૃતિમાં દર્શાવેલ r ત્રિજ્યાના અને L લંબાઈના નળાકાર પૃષ્ઠ સાથે સંકળાયેલ ફ્લક્સ,

$$\phi_1 = \int \vec{E}\cdot d\vec{a} = \int E\, da \cos 0 = E\int da$$

$$\therefore \phi_1 = E(2\pi r L) \tag{1.12.1}$$

હવે અક્ષને લંબ એવા નળાકારના બે છેડા પરની સપાટીઓ સાથે સંકળાયેલ ફ્લક્સ

$$\phi_2 = \int \vec{E}\cdot d\vec{a} = \int E\, da \cos 90^\circ = 0$$

$\therefore$ કુલ ફ્લક્સ $\phi = \phi_1 + \phi_2 = (2\pi r L)E$

ગાઉસના નિયમ અનુસાર

$$\phi = (2\pi r L)E = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow (2\pi r L)E = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

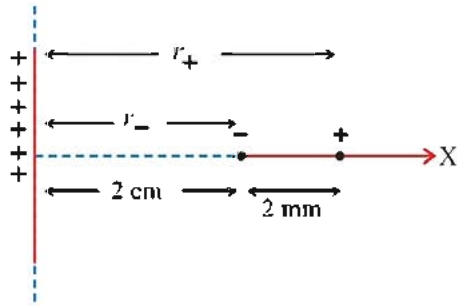
$$\therefore E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} \tag{1.12.3}$$

વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$ ત્રિજ્યાની દિશામાં છે, આથી ત્રિજ્યાની દિશામાં એકમસદિશ $\hat{r}$ લેતાં,

$$\therefore \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\hat{r} \tag{1.12.4}$$

ઉદાહરણ 20 : 2×10^{-8}Cના વિદ્યુતભારોને એકબીજાથી 2 mm દૂર મૂકીને એક વિદ્યુત-ડાઇપોલ રચવામાં આવે છે. 4×10^{-4}C/m જેટલી રેખીય વિદ્યુતભારઘનતા ધરાવતા ખૂબ જ લાંબા તારની પાસે આ ડાઇપોલને, આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ, એવી રીતે મૂકેલ છે કે જેથી ડાઇપોલનો ઋણ વિદ્યુતભાર તારથી 2 cmના અંતરે રહે, તો આ ડાઇપોલ પર લાગતું બળ શોધો. $k = 9 \times 10^9$ Nm^{2}C^{-2} લો.

ઉકેલ : અનંત લંબાઈના, λ જેટલી સમાન રેખીય વિદ્યુતભાર-ઘનતા ધરાવતા, સુરેખીય વિદ્યુતભાર વિતરણને લીધે, રેખાથી લંબરૂપે r અંતરે આવેલા બિંદુ પાસે વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતાના સૂત્ર



$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} = \frac{2k\lambda}{r} \text{ પરથી, } \vec{F}_- = \frac{-2k\lambda q}{r_-}\hat{i} \text{ અને } \vec{F}_+ = \frac{2k\lambda q}{r_+}\hat{i}$$

$$\therefore \text{ પરિણામી બળ, } \vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = 2k\lambda q\left[\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right]\hat{i}$$

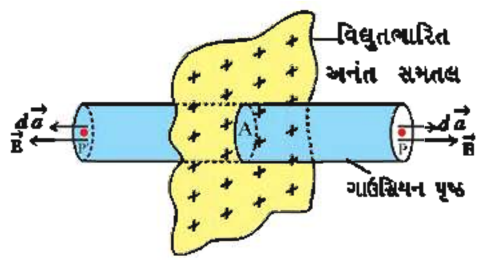
$$= 2 \times 9\times 10^9 \times 4 \times 10^{-4} \times 2 \times 10^{-8}\left[\frac{1}{2.2\times10^{-2}} - \frac{1}{2.0\times10^{-2}}\right]\hat{i}$$

$$= -0.65\hat{i}\ \text{N}$$

(2) અનંત વિસ્તારના સમતલીય સમાન વિદ્યુતભાર વિતરણ વડે ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર (Electric Field Due to a Uniformly Charged Infinite Plane Sheet or Sheet of Charge) :

ધારો કે, આકૃતિ 1.25માં દર્શાવ્યા મુજબના અનંત વિસ્તારના σ જેટલી સમાન પૃષ્ઠ વિદ્યુતભારઘનતા ધરાવતા એક અવાહક સમતલને લીધે સમતલથી લંબરૂપે r અંતરે આવેલા P પાસે વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા શોધવી છે. (આકૃતિમાં આવા સમતલનો થોડોક જ ભાગ દર્શાવ્યો છે.)

સંમિતિ પરથી કહી શકાય કે સમતલની બંને બાજુએ સમતલથી એકસરખા અંતરે આવેલાં P અને P' જેવાં બિંદુઓ માટે વિદ્યુતક્ષેત્રો સમાન મૂલ્યનાં હોય છે, પરંતુ તેમની દિશા સમતલને લંબરૂપે એકબીજાથી વિરુદ્ધ હોય છે. (જો સમતલ પરનો વિદ્યુતભાર ધન હોય, તો સમતલથી દૂર જતી દિશામાં અને વિદ્યુતભાર ઋણ હશે, તો સમતલ તરફની દિશામાં $\vec{E}$ હોય છે.)



આકૃતિ 1.25 અનંત વિસ્તારના સમતલીય સમાન વિદ્યુતભાર વિતરણ વડે ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર

આકૃતિ 1.25માં દર્શાવ્યા મુજબ સમતલની બંને બાજુએ સરખી લંબાઈનું અને A અને આડછેદના ક્ષેત્રફળવાળું બંધ નળાકારીય ગાઉસિયન પૃષ્ઠ વિચારો. સમતલ પરની પૃષ્ઠ વિદ્યુતભારઘનતા σ હોવાથી બંધ નળાકાર દ્વારા ઘેરાતો વિદ્યુતભાર $q = \sigma A$ થશે.

નળાકારની વક્રસપાટી સાથે સંકળાયેલું ફ્લક્સ,

$$\phi_1 = \int\vec{E}\cdot d\vec{a} = \int E\, da \cos 90^\circ = 0 \qquad (1.12.5)$$

કારણ કે વક્રસપાટી માટે $\vec{E}$ અને $\vec{da}$ પરસ્પર લંબ છે. નળાકારના છેડે આવેલા બિંદુ P આગળની A ક્ષેત્રફળવાળી સપાટી સાથે સંકળાયેલ ફ્લક્સ,

$$\phi_p = \int\vec{E}\cdot d\vec{a} = \int E\, da \cos 0 = \int E\, da = EA \qquad (1.12.6)$$

આ જ રીતે બિંદુ P' આગળની સપાટી A ક્ષેત્રફળવાળી સપાટી સાથે સંકળાયેલ ફ્લક્સ.

$$\phi_{p'} = EA \qquad (1.12.7)$$

આમ, કુલ ફ્લક્સ, $\phi = \phi_1 + \phi_p + \phi_{p'} = 0 + E_A + E_A = 2E_A$

આથી, ગાઉસના નિયમ અનુસાર, $\phi = 2EA = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow 2EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$ ($\because q = \sigma A$)

$$\therefore E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad (1.12.8)$$

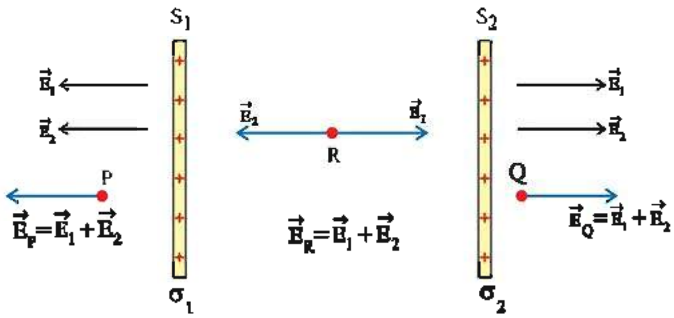
આ સૂત્ર દર્શાવે છે કે પ્રસ્તુત કિસ્સામાં કોઈ પણ બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા સમતલથી તે બિંદુના અંતર પર આધારિત નથી.

વિદ્યુતક્ષેત્રને સદિશ સ્વરૂપે દર્શાવતાં,

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}, \tag{1.12.9}$$

જ્યાં, $\hat{n}$ એ સમતલને લંબરૂપે સમતલથી દૂર તરફ જતી દિશાનો એકમસદિશ છે. જો સમતલ પરનો વિદ્યુતભાર ઋણ હશે, તો $\vec{E}$ સમતલને લંબ અને સમતલ તરફની દિશામાં હશે.

સમીકરણ (1.12.8)ની મદદથી σ_1 અને σ_2 પૃષ્ઠ ઘનતાવાળા બે સમાંતર વિદ્યુતભારિત સમતલો વડે ઉદ્ભવતાં ક્ષેત્રનાં મૂલ્યો અને દિશા જાણી શકાય છે.



આકૃતિ 1.26

આકૃતિ 1.26માં σ_1 અને σ_2 પૃષ્ઠ ઘનતા ધરાવતાં સમતલો S_1 અને S_2 પરસ્પર સમાંતર છે. S_1થી ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}_1$ અને S_2થી ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર E_2 છે. આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે, બિંદુ P આગળ વિદ્યુતક્ષેત્ર

$$\vec{E}_P = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\varepsilon_0} \quad (S_2 S_1 \textit{ દિશામાં})$$

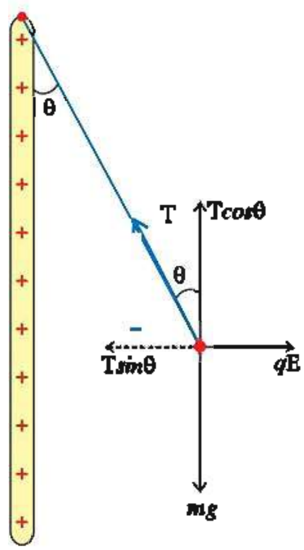
બિંદુ Q આગળ વિદ્યુતક્ષેત્ર,

$$\vec{E}_Q = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\varepsilon_0} \quad (S_1S_2 \textit{ દિશામાં})$$

બિંદુ R આગળ વિદ્યુતક્ષેત્ર *નું મૂલ્ય*, (જો $\sigma_1 > \sigma_2$ હોય, તો)

$$\vec{E}_R = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2\varepsilon_0} \quad (\textit{દિશા } S_1 \textit{ થી } S_2 \textit{ તરફ}) \tag{1.12.10}$$

ઉદાહરણ 21 : m દળ અને $+q$ વિદ્યુતભાર ધરાવતા કણને દોરીના એક છેડે બાંધેલ છે. દોરીનો બીજો છેડો ઊર્ધ્વ દિશામાં ગોઠવેલ ધન વિદ્યુતભારિત મોટા સમતલ સાથે બાંધેલો છે. આ સમતલની નિયમિત પૃષ્ઠ વિદ્યુતભારઘનતા σ છે, તો સંતુલિત સ્થિતિમાં દોરી આ ઊર્ધ્વ સમતલ સાથે કેટલો કોણ બનાવશે ?



ઉકેલ : ધન વિદ્યુતભારિત સમતલથી ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર,

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

વિદ્યુતભાર પર લાગતાં બળો અને દોરીમાં ઉદ્ભવતા તણાવબળ (T) ના ઘટકો આકૃતિમાં દર્શાવ્યા છે. સંતુલિત સ્થિતિમાં,

$T \cos\theta = mg$ અને $T \sin\theta = qE$

$$\therefore \tan\theta = \frac{qE}{mg} = \frac{q\sigma}{2mg\varepsilon_0}$$

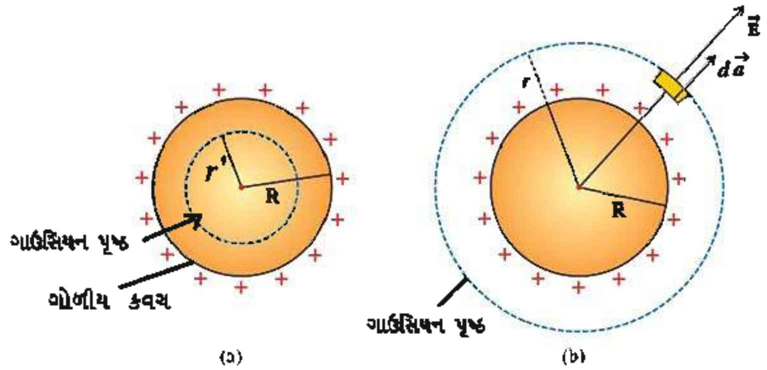
$$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{q\sigma}{2mg\varepsilon_0}\right)$$

(3) વિદ્યુતભારિત પાતળી ગોળીય કવચ વડે ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર (Electric Field Due to a Uniformly Charged Thin Spherical Shell)

ધારો કે આકૃતિ 1.27માં દર્શાવેલ R ત્રિજ્યાના વિદ્યુતભાર કવચ (shell) પરની વિદ્યુતભાર પૃષ્ઠઘનતા σ છે, આથી કવચ પરનો કુલ વિદ્યુતભાર,

$$q = \sigma A = \sigma(4\pi R^2) \tag{1.12.11}$$

કવચ પરના આ વિદ્યુતભારથી ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર ત્રિજ્યાવર્તી હોય છે. આવા વિદ્યુતતંત્ર વડે કવચની અંદર અને બહારનાં બિંદુઓએ વિદ્યુતક્ષેત્ર શોધવું છે.



આકૃતિ 1.27 ગોળાકાર કવચનું વિદ્યુતક્ષેત્ર

(1) કવચની અંદરના બિંદુ માટે : કવચની અંદરના બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્ર શોધવા માટે કવચની અંદર, કવચના કેન્દ્ર પર જેનું કેન્દ્ર સંપાત થાય તેવું r'(જ્યાં $r' < R$), ત્રિજ્યાનું ગોળાકાર ગાઉસિયન પૃષ્ઠ વિચારો. (જુઓ આકૃતિ 1.43)

આ પૃષ્ઠ વડે ઘેરાતો વિદ્યુતભાર ($q = 0$) હોવાથી ગાઉસના પ્રમેય અનુસાર,

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q}{\varepsilon_0} = 0 \qquad (\because q = 0)$$

$$\therefore \vec{E} = 0 \tag{1.12.12}$$

આમ, વિદ્યુતભારિત ગોળીય કવચના અંદરના વિસ્તારમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય હોય છે.

(2) કવચની બહારના બિંદુ માટે : કવચની બહાર E શોધવા માટે r ત્રિજ્યાવાળું $r(r > R)$ ગાઉસિયન ગોળાકાર પૃષ્ઠ વિચારો. (જુઓ આકૃતિ 1.27 (b)) આ ગાઉસિયન પૃષ્ઠથી ઘેરાતો વિદ્યુતભાર q થશે.

ગાઉસના નિયમ અનુસાર, આ પૃષ્ઠ સાથે સંકળાયેલ ફ્લક્સ.

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\int E\, da \cos 0 = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad (\because \vec{E} \text{ અને } d\vec{a} \text{ એક જ દિશામાં છે.})$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \tag{1.12.3}$$

કવચની સપાટી પરના વિદ્યુતક્ષેત્ર માટે $r = R$ મૂકતાં,

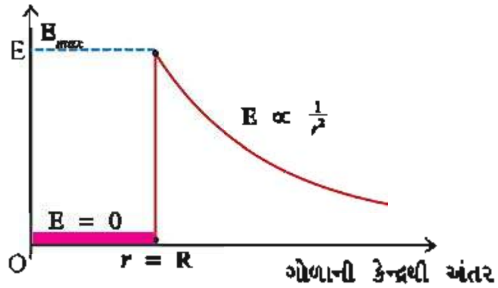
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2} \tag{1.12.4}$$

સમીકરણ (1.12.3) અને (1.12.4) પરથી સ્પષ્ટ છે કે કવચ પર રહેલ વિદ્યુતભાર, જ્યાં સુધી કવચ બહારના અને કવચની સપાટી પરના ક્ષેત્રને લાગેવળગે છે, ત્યાં સુધી કેન્દ્ર પર જાણે કે સંકેન્દ્રિત થયો હોય તેમ ગણી શકાય.

સમીકરણ (1.12.4)માં $q = (4\pi R^2)\sigma$ મૂકતાં

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(4\pi R^2)\sigma}{r^2}$$

$$\therefore\ E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{r^2} \qquad (1.12.5)$$



આકૃતિ 1.28 ગોળીય કવચનું વિદ્યુતક્ષેત્ર

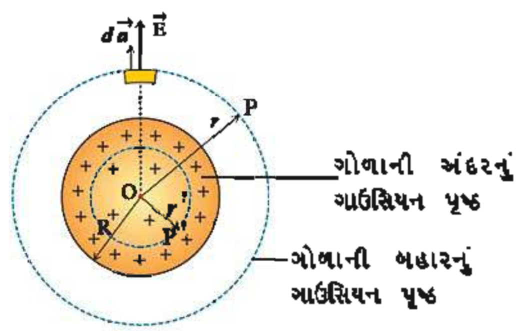
આકૃતિ 1.28માં દર્શાવેલ આલેખમાં ગોળીય કવચ પરના વિદ્યુતભારથી ગોળાના કેન્દ્ર Oથી લઈ કવચની બહારના વિસ્તારમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર કેવી રીતે બદલાય છે તે દર્શાવ્યું છે. આલેખ પરથી સ્પષ્ટ છે કે ગોળાના કવચની અંદરના વિસ્તારમાં $\vec{E} = 0$ છે. કવચની સપાટી પર (r = R) મહત્તમ છે, જ્યારે કવચની બહારના વિસ્તારમાં તે $\frac{1}{r^2}$ અનુસાર ઘટે છે.

(4) સમાન વિદ્યુતભારઘનતાવાળા ગોળા વડે ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર (Electric Field Intensity Due to Uniformly Charged Sphere) :

ધારો કે આકૃતિ 1.29માં દર્શાવેલ R ત્રિજ્યાના વિદ્યુતભારિત ગોળા (sphere)ની વિદ્યુતભાર કદ ઘનતા ρ છે. આ ગોળામાં સમાયેલો વિદ્યુતભાર

$$q = \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)\rho. \qquad (1.12.6)$$

આવા ગોળાને લીધે ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર ત્રિજ્યાવર્તી હોય છે. આવા વિદ્યુતતંત્ર વડે ગોળાની અંદર અને બહારનાં બિંદુઓએ વિદ્યુતક્ષેત્ર શોધવું છે.



આકૃતિ 1.29 સમાન વિદ્યુતભારઘનતાવાળા ગોળા વડે ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર

(1) ગોળાની અંદરના બિંદુ માટે : ગોળાની અંદર કેન્દ્રથી r' અંતરે આવેલા P' બિંદુએ તીવ્રતા શોધવા આ ગોળાના કેન્દ્ર પર જેનું કેન્દ્ર સંપાત થાય તેવું $r'(r' < R)$ ત્રિજ્યાનું ગોળાકાર ગાઉસિયન પૃષ્ઠ વિચારો. આ ગાઉસિયન પૃષ્ઠ વડે ઘેરાતો વિદ્યુતભાર,

$$q' = \left(\frac{4}{3}\pi r'^3\right)\rho \qquad (1.12.7)$$

$$= \frac{4}{3}\pi r'^3 \times \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \qquad \text{(સમીકરણ (1.12.6) પરથી)}$$

$$\therefore\ q' = q\frac{r'^3}{R^3} \qquad (1.12.8)$$

આ ગાઉસિયન પૃષ્ઠ સાથે સંકળાયેલ ફ્લક્સ

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{q'}{\varepsilon_0}$$

$$E(4\pi r'^2) = \frac{qr'^3}{\varepsilon_0 R^3} \qquad \text{(સમીકરણ 1.12.8 પરથી)}$$

$$\therefore \ E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r'}{R^3} \quad (r' \le R \text{ માટે}) \qquad (1.12.9)$$

એટલે કે ગોળાના અંદરના વિસ્તારમાં $E \propto r'$

સમીકરણ (1.12.6) પરથી qનું મૂલ્ય મૂકતાં વિદ્યુતક્ષેત્રને વિદ્યુતભાર ઘનતાના સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય.

$$E = \frac{\rho r'}{3\varepsilon_0} \quad (r' \le R \text{ માટે}) \qquad (1.12.10)$$

(2) ગોળાની બહારના બિંદુ માટે : આ માટે આકૃતિમાં દર્શાવ્યા અનુસાર r (જ્યાં $r > R$) ત્રિજ્યાનું ગોળાકાર ગાઉસિયન પૃષ્ઠ વિચારો. આ પૃષ્ઠથી ઘેરાતો વિદ્યુતભાર q છે. આથી ગાઉસના નિયમ અનુસાર,

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore \int E\,da = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

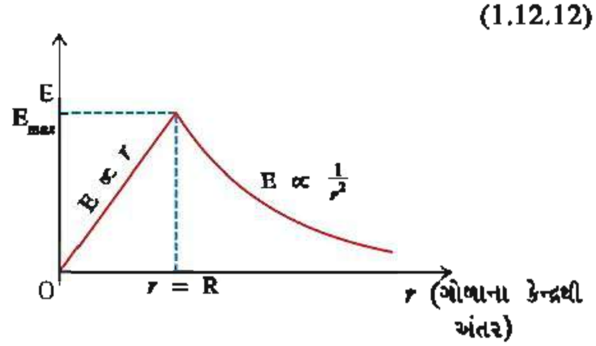
$$\therefore \ E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \quad (r \ge R \text{ માટે}) \qquad (1.12.11)$$

આ દર્શાવે છે કે ગોળાની બહારના બિંદુ માટે ગોળાનો સમગ્ર વિદ્યુતભાર ગોળાના કેન્દ્ર પર કેન્દ્રિત થયેલો ગણી શકાય છે. ગોળાની બહારના વિસ્તાર માટે, $E \propto \frac{1}{r^2}$.

ઉપર્યુક્ત સમીકરણમાં $q = (\frac{4}{3}\pi R^3)\rho$ મૂકતાં, Eને ρના સ્વરૂપમાં લખી શકાય.

$$E = \frac{R^3\rho}{3r^2\varepsilon_0} \qquad (1.12.12)$$

આકૃતિ 1.30માં દર્શાવેલ આલેખ એ વિદ્યુતભાર ઘનતાવાળા ગોળાથી ગોળાના કેન્દ્ર Oથી લઈ ગોળાના બહારના વિસ્તારમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર કેવી રીતે બદલાય છે તે દર્શાવેલ છે. અહીં નોંધો કે ગોળાની સપાટી પર વિદ્યુતક્ષેત્ર $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}$ જેટલું મહત્તમ છે.



આકૃતિ 1.30 વિદ્યુતભારઘનતાવાળા ગોળાનું વિદ્યુતક્ષેત્ર

સારાંશ

1. **વિદ્યુતભાર :** જે રીતે બે કણો વચ્ચે ગુરુત્વાકર્ષણ બળ ઉદ્ભવવાનું કારણ તેમના દળ છે તે જ રીતે તેમની વચ્ચે વિદ્યુતબળ ઉદ્ભવવાનું કારણ તેમના પર રહેલ વિદ્યુતભાર છે. વિદ્યુતભાર એ કણનો આંતરિક ગુણધર્મ છે. વિદ્યુતભાર બે પ્રકારના છે : (1) ધન વિદ્યુતભાર (2) ઋણ વિદ્યુતભાર
   બે સમાન વિદ્યુતભારો વચ્ચે અપાકર્ષણ અને અસમાન વિદ્યુતભારો વચ્ચે આકર્ષણબળ લાગે છે. વિદ્યુતભારના જથ્થાનો SI એકમ coulomb (C) છે.

2. **વિદ્યુતભારનું ક્વૉન્ટમીકરણ :** કુદરતમાં મળી આવતા બધા જ વિદ્યુતભારોનાં મૂલ્યો એક મૂળભૂત વિદ્યુતભારના મૂલ્યના પૂર્ણ ગુણાંકમાં જ હોય છે. $Q = ne$. જ્યાં, eને વિદ્યુતભારનો પ્રાથમિક એકમ કહે છે.

3. **વિદ્યુતભારના સંરક્ષણનો નિયમ :** વિદ્યુતની દૃષ્ટિએ અલગ કરેલા તંત્રમાં ગમે તે પ્રક્રિયા થાય તોપણ તંત્રમાંના વિદ્યુતભારોનો બૈજિક સરવાળો અચળ રહે છે.

4. **કુલંબનો નિયમ :** બે બિંદુવત્ સ્થિર વિદ્યુતભારો વચ્ચે પ્રવર્તતું વિદ્યુતબળ તે વિદ્યુતભારોના મૂલ્યના ગુણાકારના સમપ્રમાણમાં અને તેમની વચ્ચેના અંતરના વર્ગના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં હોય છે.

$$F = k\frac{q_1q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}$$

જો $q_1q_2 > 0$ હોય તો વિદ્યુતભારો વચ્ચે અપાકર્ષણ થાય છે અને $q_2q_2 < 0$ હોય, તો વિદ્યુતભારો વચ્ચે આકર્ષણ થાય છે.

5. **વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા :** કોઈ પણ વિદ્યુતભાર તંત્રની આસપાસના વિસ્તારમાં કોઈ બિંદુ પાસે એકમ ધન વિદ્યુતભાર પર લાગતા વિદ્યુતબળને તે વિદ્યુતતંત્રનું વિદ્યુતક્ષેત્ર અથવા વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા ($\vec{E}$) કહે છે.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

$\vec{E}$નો SI એકમ NC^{-1} અથવા Vm^{-1} છે.

$q_1, q_2, ..., q_n$ વિદ્યુતભારોના સ્થાનસદિશ અનુક્રમે $\vec{r_1}, \vec{r_2}, ... \vec{r_n}$ હોય, તો $\vec{r}$ સ્થાને ઉદ્ભવતું પરિણામી વિદ્યુતક્ષેત્ર,

$$\vec{E} = k\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j}{|\vec{r}-\vec{r_n}|^3}(\vec{r} - \vec{r_j})$$

6. **વિદ્યુત-ડાઈપોલ :** એકબીજાથી પરિમિત અંતરે રહેલા બે વિજાતીય અને સમાન મૂલ્યના વિદ્યુતભારોના તંત્રને વિદ્યુત-ડાઈપોલ કહે છે.

વિદ્યુત-ડાઈપોલની ડાઈપોલ-મોમેન્ટ $\vec{p} = (2\vec{a})q$

$\vec{p}$ એ ઋણ વિદ્યુતભારથી ધન વિદ્યુતભારની દિશામાં હોય છે.

7. ડાઈપોલની અક્ષ પરના $z = z$ બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્ર,

$$\vec{E}(z) = \frac{2kp}{z^3}\hat{p} \quad (z >> a \text{ માટે})$$

ડાઈપોલની વિદ્યુતરેખા પરના $y = y$ બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્ર,

$$\vec{E}(y) = -\frac{kp}{y^3}\hat{p} \quad (y >> a \text{ માટે})$$

8. સમાન વિદ્યુતક્ષેત્ર ($\vec{E}$)માં θ કોણે મૂકેલા ડાઈપોલ પર લાગતું ટૉર્ક,

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}, |\vec{\tau}| = pE\sin\theta$$

9. **વિદ્યુત-ફ્લક્સ :** સમાન વિદ્યુતક્ષેત્રમાં મૂકેલા પૃષ્ઠનો ક્ષેત્રફળ સદિશ $\vec{A}$ હોય, તો પૃષ્ઠ સાથે સંકળાયેલ વિદ્યુત-ફ્લક્સ,

$\phi = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA\cos\theta$

જ્યાં θ = $\vec{E}$ અને $\vec{A}$ વચ્ચેનો કોણ.

તેનો SI એકમ Nm^2C^{-1} અથવા Vm છે.

10. **ગાઉસનો નિયમ :** કોઈ પણ બંધ પૃષ્ઠ સાથે સંકળાયેલ કુલ વિદ્યુત-ફ્લક્સ,

$$\phi = \int_s \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{\Sigma q}{\varepsilon_0}$$

જ્યાં Σq એ બંધ પૃષ્ઠ દ્વારા ઘેરાતો ચોખ્ખો (net) વિદ્યુતભાર છે.

11. અનંત લંબાઈના વિદ્યુતભારિત સુરેખ તાર વડે ઉદ્‌ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર,

$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\hat{r}$, જ્યાં r એ વિદ્યુતભારિત તારથી લંબઅંતર છે.

12. અનંત વિસ્તારના સમાન વિદ્યુતભાર વિતરણ વડે ઉદ્‌ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર, $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

13. વિદ્યુતભારિત ગોળીય કવચ વડે ઉદ્‌ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર

(1) કવચના અંદરના વિસ્તારમાં $\vec{E} = 0$.

(2) કવચની બહાર કેન્દ્રથી r અંતરે વિદ્યુતક્ષેત્ર, $E = k\frac{q}{r^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{r^2}$

જ્યાં, R = ગોળીય કવચની ત્રિજ્યા છે.

14. R ત્રિજ્યાના સમાન વિદ્યુતભાર ઘનતાવાળા ગોળા વડે ઉદ્‌ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર :

(1) ગોળાની અંદરના વિસ્તારમાં :

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

(2) ગોળાની બહારના બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્ર

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} = \frac{R^3\rho}{3r^2\varepsilon_0}$$

જ્યાં, Q = ગોળામાંનો કુલ વિદ્યુતભાર.

સ્વાધ્યાય

નીચે વિધાનો માટે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

1. બે બિંદુવત્ વિદ્યુતભારોને એકબીજાથી અમુક અંતરે ગોઠવતાં તેમની વચ્ચે લાગતું વિદ્યુતબળ ϕ છે. હવે આ વિદ્યુતભારોનાં મૂલ્યો બમણાં કરી તેમની વચ્ચેનું અંતર અડધું કરવામાં આવે, તો તેમની વચ્ચે લાગતું વિદ્યુતબળ .... હશે. .

(A) ϕ (B) 4ϕ (C) 8ϕ (D) 16ϕ

2. એક વિદ્યુત-ડાઈપોલને સમાન વિદ્યુતક્ષેત્રમાં મૂકતાં તેના પર લાગતું પરિણામી બળ ....

(A) હંમેશાં શૂન્ય હોય છે.

(B) વિદ્યુત-ડાઈપોલની ક્ષેત્રની સાપેક્ષ ગોઠવણ પર આધારિત છે.

(C) કદી પણ શૂન્ય હોઈ શકે નહિ

(D) વિદ્યુત-ડાઈપોલ-મોમેન્ટ પર આધારિત છે.

3. એક વિદ્યુત-ડાઈપોલને કોઈ બિંદુવત્ વિદ્યુતભારના ક્ષેત્રમાં મૂકેલ હોય તો.........
(A) તે ડાઇપોલ પર લાગતું પરિણામી વિદ્યુતબળ શૂન્ય જ હોય.
(B) તે ડાઇપોલ પર લાગતું પરિણામી વિદ્યુતબળ શૂન્ય હોઈ શકે.
(C) તે ડાઇપોલ પર લાગતું ટૉર્ક શૂન્ય હોઈ શકે.
(D) તે ડાઇપોલ પર લાગતું ટૉર્ક શૂન્ય જ હોય.

4. એક ઇલેક્ટ્રૉન અને એક પ્રોટોનને સમાન વિદ્યુતક્ષેત્રમાં મૂકતાં ....
(A) તે બંને પર લાગતાં બળોનાં મૂલ્ય અને દિશા સમાન હોય.
(B) તે બંને પર લાગતાં બળોનાં મૂલ્યો સમાન હોય.
(C) તે બંનેમાં ઉદ્ભવતા પ્રવેગ સમાન હોય.
(D) તે બંનેમાં ઉદ્ભવતા પ્રવેગનાં મૂલ્યો સમાન હોય.

5. શૂન્યાવકાશમાં એકબીજાથી અમુક અંતરે મૂકેલા બે બિંદુવત્ વિદ્યુતભારો વચ્ચે ઉદ્ભવતું વિદ્યુતબળ α છે. જો આ જ બે વિદ્યુતભારોને આટલાં જ અંતરે પરંતુ K જેટલો ડાઈઇલેક્ટ્રિક અચળાંક ધરાવતા માધ્યમમાં મૂકવામાં આવે, તો તેમની વચ્ચે લાગતું વિદ્યુતબળ .... જેટલું હશે.
(A) α (B) $K\alpha$ (C) $K^2\alpha$ (D) α/K

6. બે બિંદુવત્ વિદ્યુતભારો $4q$ અને $-q$ વચ્ચેનું અંતર r છે. આ બંને વિદ્યુતભારોની બરાબર વચ્ચે એક ત્રીજો વિદ્યુતભાર Q મૂકવામાં આવે છે. જો વિદ્યુતભાર $-q$ પર લાગતું પરિણામી બળ શૂન્ય હોય, તો Q .... હશે.
(A) $-q$ (B) q (C) $-4q$ (D) $4q$

7. a ત્રિજ્યાના વર્તુળના પરિઘ પર રેખીય વિદ્યુતભારઘનતા $\lambda = \lambda_0 cos\theta$ છે તો તેના પરનો કુલ વિદ્યુતભાર .... હશે.
(A) શૂન્ય (B) અનંત (C) $\pi a\lambda_0$ (D) $2\pi a$

8. ધાતુના બે સમાન (indentical) ગોળાઓ A અને B પર સમાન વિદ્યુતભાર q છે. જ્યારે આ બે ગોળાઓને એકબીજાથી r જેટલા અંતરે રાખવામાં આવે, ત્યારે તેમની વચ્ચે લાગતું બળ F છે. હવે આ ગોળાઓ જેવા જ એક ત્રીજા વિદ્યુતભારરહિત ગોળા Cનો A સાથે સ્પર્શ કરાવી છૂટો પાડવામાં આવે છે. ત્યાર બાદ ગોળા Cને B સાથે સ્પર્શ કરાવી છૂટો પાડવામાં આવે છે, તો હવે A અને B વચ્ચે .... બળ લાગશે. (બંને ગોળાઓ વચ્ચેનું અંતર બદલાતું નથી.)
(A) F (B) 2F (C) $\frac{3F}{8}$ (D) $\frac{F}{4}$

9. બે બિંદુવત્ વિદ્યુતભારો q અને $4q$ને એકબીજાથી 30 cmના અંતરે મૂકેલા છે, તો તેમને જોડતી રેખા પર .... રહેલા બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા શૂન્ય હશે.
(A) $4q$ વિદ્યુતભારની 20 cm દૂર (B) q વિદ્યુતભારની 7.5 cm દૂર
(C) $4q$ વિદ્યુતભારની 15 cm દૂર (D) q વિદ્યુતભારની 5 cm દૂર

10. પરમિટિવિટી $[\varepsilon_0]$નાં પરિમાણ .... છે. અહીં, વિદ્યુતભારનું પરિમાણસૂત્ર Q લો.
(A) $M^1L^{-2}T^{-2}Q^{-2}$ (B) $M^{-1}L^2T^{-3}Q^{-1}$ (C) $M^{-1}L^{-3}T^2Q^2$ (D) $M^{-1}L^3T^{-2}Q^{-2}$

11. HCL અણુની વિદ્યુત-ડાઇપોલ-મોમેન્ટ 3.4×10^{-30} Cm છે. આ અણુના બંને પરમાણુ પર સમાન મૂલ્યના વિજાતીય વિદ્યુતભારો છે, તેમ કલ્પીએ, તો આ વિદ્યુતભારનું મૂલ્ય .... હશે. આ બે પરમાણુઓ વચ્ચેનું અંતર 1 $\overset{o}{A}$ છે.
(A) 1.7×10^{-20}C (B) 3.4×10^{-20}C (C) 6.8×10^{-20}C (D) 3.4×10^{-10}C

12. 100 N/Cનું વિદ્યુતક્ષેત્ર Z-દિશામાં અસ્તિત્વમાં છે, તો આ વિદ્યુતક્ષેત્રનું XY સમતલમાં મૂકેલા 10 cmની બાજુવાળા ચોરસમાંથી પસાર થતું ફ્લક્સ .... હશે.
(A) 1.0 Nm^2/C (B) 2.0 Vm (C) 10 Vm (D) 4.0 Nm^2/C

13. એક (સુવાહક) ગોળીય કવચની ત્રિજ્યા 10 mm છે અને તેના પર 100 μCનો વિદ્યુતભાર મૂકેલ છે. આ કવચના કેન્દ્ર પર 10 μC જેટલો વિદ્યુતભાર મૂકવામાં આવે, તો તેના પર લાગતું વિદ્યુતબળ .... હશે. $k = 9 \times 10^9$ MKS લો.

(A) 10^3N (B) 10^2N (C) શૂન્ય (D) 10^5N

14. કોઈ બંધ પૃષ્ઠ વડે ઘેરાતો વિદ્યુતભાર 10 μC હોય, ત્યારે તે પૃષ્ઠ સાથે સંકળાયેલ ફ્લક્સનું મૂલ્ય ϕ છે. હવે આ જ પૃષ્ઠની અંદર બીજો એક વિદ્યુતભાર -10 μC દાખલ કરવામાં આવે, તો હવે આ પૃષ્ઠ સાથે સંકળાયેલ ફ્લક્સ .... થશે.

(A) 2ϕ (B) ϕ (C) 4ϕ (D) શૂન્ય

15. કોઈ એક ગોળાના કેન્દ્ર પર એક વિદ્યુત-ડાઇપોલ મૂકવામાં આવે, તો ગોળાના પૃષ્ઠ સાથે સંકળાતું વિદ્યુત-ફ્લક્સ .... હશે.

(A) અનંત (B) શૂન્ય (C) કંઈ કહી શકાય નહિ (D) $\frac{2q}{\varepsilon_0}$

16. q જેટલો વિદ્યુતભાર ધરાવતા બે ભારે ગોળાઓને 1m લંબાઈની દોરીઓ વડે એક જ આધારબિંદુ પરથી ગુરુત્વમુક્ત અવકાશમાં લટકાવેલ છે. આ બે ગોળા વચ્ચેનું અંતર .... m.

(A) 0 (B) 0.5 (C) 2 m (D) કશું કહી શકાય નહિ.

17. એક બિંદુવત્ વિદ્યુતભાર Q કોઈ એક બિંદુ P પાસે મૂક્યો છે. P બિંદુ નજીક એક બંધ પૃષ્ઠ મૂક્યું છે. આ પૃષ્ઠમાંથી પસાર થતું વિદ્યુત-ફ્લક્સ.

(A) $Q\ \varepsilon_0$ (B) $\frac{\varepsilon_0}{Q}$ (C) $\frac{Q}{\varepsilon_0}$ (D) શૂન્ય

18. n બાજુવાળા એક નિયમિત બહુકોણના $(n - 1)$ શિરોબિંદુ પર, દરેક પર Q જેટલો વિદ્યુતભાર મૂકેલ છે. બહુકોણના કેન્દ્રથી દરેક શિરોબિંદુનું અંતર r છે, તો કેન્દ્ર પર વિદ્યુતક્ષેત્ર.

(A) $k\frac{Q}{r^2}$ (B) $(n - 1)\ k\frac{Q}{r^2}$ (C) $\frac{n}{n-1}k\frac{Q}{r^2}$ (D) $\frac{n-1}{n}k\frac{Q}{r^2}$

19. 2Q અને $-$Q વિદ્યુતભાર ધરાવતા ધાતુના બે સમાન ગોળાઓને એકબીજાથી અમુક અંતરે મૂકતાં તેમની વચ્ચે F બળ લાગે છે. હવે તેમને વાહક તારથી જોડી અને છૂટા પાડી પછી એટલા જ અંતરે મૂકવામાં આવે છે. તો તેમની વચ્ચે લાગતું બળ ....

(A) F (B) $\frac{F}{2}$ (C) $\frac{F}{4}$ (D) $\frac{F}{8}$

20. 1C વિદ્યુતભારમાંથી બહાર નીકળતી વિદ્યુતભારની વિદ્યુતક્ષેત્રરેખાઓની સંખ્યા ....

$(\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ MKS)

(A) 9×10^9 (B) 8.85×10^2 (C) 1.13×10^{11} (D) અનંત

21. કોઈ એક પ્રક્રિયા દ્વારા ધાતુની તટસ્થ પ્લેટમાંથી 10^{19} ઇલેક્ટ્રૉનને દૂર કરવામાં આવે, તો ધાતુની પ્લેટ પરનો વિદ્યુતભાર ....

(A) -1.6 C (B) $+ 1.6$ C (D) 10^9 C (D) 10^{-19} C

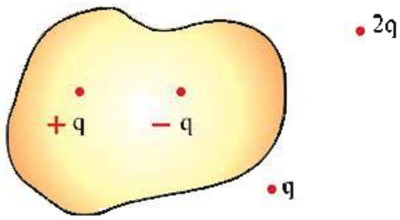
22. સમઘનના કેન્દ્ર પર વિદ્યુતભાર Q મૂકેલો છે. સમઘનના કોઈ એક પૃષ્ઠ સાથે સંકળાયેલું વિદ્યુત-ફ્લક્સ ....

(A) $\frac{Q}{\varepsilon_0}$ (B) $\frac{Q}{2\varepsilon_0}$ (C) $\frac{Q}{4\varepsilon_0}$ (D) $\frac{Q}{6\varepsilon_0}$

23. m દળના પ્રવાહીના બુંદ પર વિદ્યુતભાર q છે. આ બુંદને સંતુલિત કરવા માટે વિદ્યુતક્ષેત્ર Eનું મૂલ્ય કેટલું હોવું જોઈએ ?

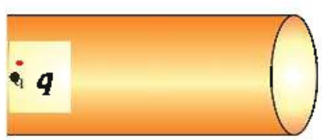
(A) $\frac{mg}{q}$ (B) $\frac{E}{m}$ (C) mgq (D) $\frac{mq}{g}$

24. આકૃતિમાં દર્શાવેલ બંધ પૃષ્ઠ સાથે સંકળાયેલું વિદ્યુત-ફ્લક્સ ....



(A) $\frac{3q}{\varepsilon_0}$ (B) $\frac{2q}{\varepsilon_0}$ (C) $\frac{q}{\varepsilon_0}$ (D) શૂન્ય

25. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ એક છેડેથી ખુલ્લા નળાકારના ખુલ્લા છેડે કેન્દ્ર પર q વિદ્યુતભાર મૂકેલો છે. આ નળાકારના પૃષ્ઠમાંથી પસાર થતું કુલ ફ્લક્સ ....



(A) $\frac{q}{\varepsilon_0}$ (B) $\frac{2q}{\varepsilon_0}$ (C) $\frac{q}{2\varepsilon_0}$ (D) શૂન્ય

જવાબો

1. (D)	2. (A)	3. (C)	4. (B)	5. (D)	6. (A)
7. (A)	8. (C)	9. (A)	10. (C)	11. (B)	12. (A)
13. (C)	14. (D)	15. (B)	16. (C)	17. (D)	18. (A)
19. (D)	20. (C)	21. (B)	22. (D)	23. (A)	24. (D)
25. (C)					

નીચે આપેલ પ્રશ્નોના જવાબ ટૂંકમાં આપો :

1. 1 μC વિદ્યુતભાર કેટલા પ્રોટોનને સમતુલ્ય છે ?
2. સમાન ત્રિજ્યાવાળા બે સુવાહક ગોળાઓ પૈકી એક ગોળા પર 1000 ઇલેક્ટ્રૉન જેટલો વિદ્યુતભાર અને બીજા ગોળા પર 600 પ્રોટોન જેટલો વિદ્યુતભાર છે. બંને ગોળાને તાંબાના તાર વડે સંપર્કમાં લાવ્યા બાદ દરેક ગોળા પર કેટલો વિદ્યુતભાર હશે ?
3. જો $q_1 q_2 > 0$ હોય, તો બંને વિદ્યુતભારો વચ્ચે કેવા પ્રકારનું બળ લાગશે ?
4. પરીક્ષણ વિદ્યુતભાર કોને કહે છે ? તેનું મૂલ્ય કેટલું હોવું જોઈએ ?
5. વિદ્યુત-ડાઇપોલ-મોમેન્ટ વ્યાખ્યાયિત કરો અને તેનો SI એકમ જણાવો.
6. વિદ્યુત-ડાઇપોલને વિદ્યુતક્ષેત્રને સમાંતર મૂકવામાં આવે, તો તેના કેટલું ટૉર્ક લાગશે ?
7. અસમાન વિદ્યુતક્ષેત્રમાં મૂકેલા ડાઇપોલની વર્તણૂક જણાવો.
8. ગાઉસના પ્રમેયનું કથન આપો.
9. શા માટે બે વિદ્યુતક્ષેત્રરેખાઓ એકબીજાને છેદતી નથી ?
10. વિદ્યુત-ડાઇપોલની વિદ્યુતક્ષેત્રરેખાઓ દોરો.
11. એક ગોળાકાર ગાઉસિયન પૃષ્ઠ દ્વારા ઘેરાતો વિદ્યુતભાર 8.85×10^{-8}C છે, તો આ પૃષ્ઠ સાથે સંકળાયેલ વિદ્યુત-ફ્લક્સ કેટલું હશે ? જો ગોળાકારની ત્રિજ્યા બમણી કરવામાં આવે, તો વિદ્યુત-ફ્લક્સ કેટલું થશે ?

12. વિદ્યુતભારના સંરક્ષણનો નિયમ લખો.

13. એક વિદ્યુત-ડાઇપોલને સમઘનના કેન્દ્ર પર મૂકેલો છે. આ સમઘનનાં પૃષ્ઠો સાથે સંકળાયેલ કુલ વિદ્યુત-ફ્લક્સ કેટલું હશે ?

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. કુલંબનો નિયમ લખો અને બે વિદ્યુતભારો વચ્ચે લાગતાં બળોને સદિશના રૂપમાં રજૂ કરો.
2. વિદ્યુતભારની રેખીય ઘનતા, પૃષ્ઠઘનતા અને કદઘનતા સમજાવો અને તેમના એકમો જણાવો.
3. વિદ્યુતક્ષેત્ર એટલે શું ? સમજાવો અને તેની વિશેષતાઓ જણાવો.
4. વિદ્યુત-ડાઇપોલની અક્ષ પરના કોઈ બિંદુએ ઉદ્‌ભવતા વિદ્યુતક્ષેત્રનું સૂત્ર મેળવો.
5. સમાન વિદ્યુતક્ષેત્રમાં મૂકેલા વિદ્યુત-ડાઇપોલ પર લાગતા ટૉર્કનું સૂત્ર મેળવો.
6. વિદ્યુતક્ષેત્રરેખાઓની લાક્ષણિકતાઓ જણાવો.
7. ગાઉસના પ્રમેયનું વિધાન આપો અને સમજાવો.
8. સુરેખીય નિયમિત વિદ્યુતભાર વિતરણ ધરાવતાં અનંત લંબાઈના તારથી તારને લંબદિશામાં ઉદ્‌ભવતા વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતાનું સૂત્ર મેળવો.
9. અનંત વિસ્તારના વિદ્યુતભારિત સમતલથી ઉદ્‌ભવતા વિદ્યુતક્ષેત્રનું સૂત્ર તારવો.
10. ગાઉસના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી નિયમિત વિદ્યુતકદ ઘનતાવાળા ગોળા વડે ગોળાની અંદર તેમજ ગોળાની બહાર ઉદ્‌ભવતા વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા શોધો.

નીચેના દાખલા ગણો :

1. ધાતુના એક વિદ્યુતભારિત ગોળા Aને નાઇલોનના દોરા વડે લટકાવેલ છે. ધાતુના બીજા વિદ્યુતભારિત ધાતુના બીજા સમાન ગોળા Bને ગોળા Aની નજીક d અંતરે લાવતાં તેમની વચ્ચે F જેટલું અપાકર્ષણ બળ લાગે છે. ત્યાર બાદ ગોળા Aને ધાતુના બીજા સમાન પણ વિદ્યુતભારરહિત ગોળા C સાથે અને ગોળા Bને બીજા સમાન પણ વિદ્યુતભારરહિત ગોળા D સાથે સંપર્કમાં લાવીને પછી અલગ કરવામાં આવે છે. હવે ગોળા Bને ગોળા Aની નજીક $\frac{d}{2}$ જેટલા અંતરે લાવતાં તેમની વચ્ચે કેટલું બળ લાગશે ? [જવાબ : F]

2. સમાન વિદ્યુતભાર ધરાવતા બે સમાન ગોળાઓને આધારબિંદુથી સરખી લંબાઈની અવાહક દોરી વડે લટકાવેલ છે. જ્યારે તેમને કેરોસીનમાં ડુબાડવામાં આવે છે, ત્યારે બે દોરી વચ્ચેનો કોણ જ્યારે ગોળાઓ હવામાં હતાં, ત્યારે હતો તેટલો જ રહે છે, તો ગોળાઓના દ્રવ્યની ઘનતા શોધો. કેરોસીનનો ડાઇઇલેક્ટ્રિક અચળાંક 2 અને ઘનતા 800 $kg\ m^{-3}$ છે. [જવાબ : 1600 $kg\ m^{-3}$]

3. 0.5 μC, −0.25 μC અને 0.1 μC જેટલો વિદ્યુતભાર ધરાવતા ત્રણ કણોને એક સમબાજુ ત્રિકોણ ABCનાં શિરોબિંદુઓ અનુક્રમે A, B અને C પર મૂકેલ છે. ત્રિકોણની બાજુની લંબાઈ 5.0 cm છે, તો C પર રહેલ વિદ્યુતભાર પર લાગતું પરિણામી બળ શોધો.

   $k = 9 \times 10^9$ MKS. [જવાબ : $\vec{F}_3 = 0.045\ (3,\ \sqrt{3})$N]

4. સમબાજુ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ પર સમાન વિદ્યુતભાર q ધરાવતા ત્રણ કણો રહેલા છે. આ ત્રિકોણના મધ્યકેન્દ્ર પર $2q$ જેટલો વિદ્યુભાર મૂકવામાં આવે, તો તેના પર લાગતું પરિણામી વિદ્યુતબળ ગણો. (મધ્યકેન્દ્રથી શિરોબિંદુ વચ્ચેનું અંતર 1 m છે.).

   [જવાબ : શૂન્ય]

5. એક વિદ્યુત-ડાઇપોલ $\vec{p}$ને સમાન વિદ્યુતક્ષેત્રમાં મૂકી છે. હવે તેને તેની સમતોલન સ્થિતિમાંથી θ જેટલા સૂક્ષ્મ કોણે ભ્રમણ આપી છોડી દેવામાં આવે છે, તો સાબિત કરો કે આ ડાઇપોલ $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{pE}{I}}$ આવૃત્તિ સાથે સરળ આવર્તગતિ કરે છે. અત્રે, I એ ડાઇપોલની જડત્વની ચાકમાત્રા છે.

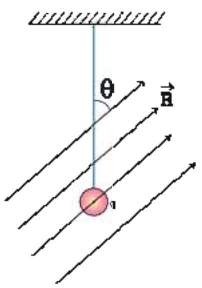
6. એક ખૂબ જ મોટા પૃષ્ઠ પર વિદ્યુતભાર પૃષ્ઠઘનતા $-3.0 \times 10^{-6}Cm^{-2}$ છે. હવે 150 eV ઊર્જાવાળા ઇલેક્ટ્રૉનને કેટલા અંતરેથી પૃષ્ઠ તરફ ફેંકવો જોઈએ કે જેથી તેનો વેગ પૃષ્ઠ પર પહોંચતા શૂન્ય થઈ જાય ? ઇલેક્ટ્રૉનનો વિદ્યુતભાર = 1.6×10^{-19}C. 1 eV = 1.6×10^{-19}J, $\varepsilon_0 = 9 \times 10^{-12}$ SI

[જવાબ : 9×10^{-4}m]

7. એક ધન વિદ્યુતભારિત અને બીજો ઋણ વિદ્યુતભારિત સમાન ગોળાઓને એકબીજાથી 0.5m અંતરે રાખતાં તેમની વચ્ચે 0.108N જેટલું આકર્ષણબળ ઉદ્ભવે છે. બંને ગોળાઓને સંપર્કમાં લાવી છુટા પાડી 0.5m અંતરે રાખતાં તેમની વચ્ચે 0.036N જેટલું અપાકર્ષણ બળ ઉદ્ભવે છે. આ ગોળાઓ પર પ્રારંભમાં વિદ્યુતભાર કેટલો હશે ?

[જવાબ : $q_1 = \pm 3.0 \times 10^{-6}$C, $q_2 = \mp 1.0 \times 10^{-6}$C]

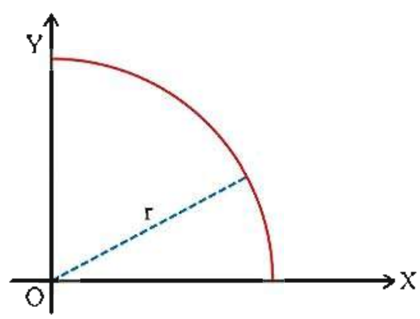
8. m અને 2m દળ ધરાવતાં બે વિદ્યુતભારિત કણ પરનો વિદ્યુતભાર અનુક્રમે $+2q$ અને $+q$ છે. બંને કણો સમાન વિદ્યુતક્ષેત્રમાં એકબીજાથી દૂરના અંતરે મૂકેલા છે. હવે, બંને કણોને t સમય માટે ગતિ કરવા માટે મુક્ત કરતાં તેમની ગતિ-ઊર્જાનો ગુણોત્તર શોધો. [જવાબ : 8 : 1]

9. 

એક સાદું લોલક આકૃતિમાં દર્શાવેલ સમાન વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$ માં રાખેલ છે. જો લોલકની લંબાઈ l હોય, તો આ લોલકનો આવર્તકાળ કેટલો હશે ? લોલકના ગોળા પરનો વિદ્યુભાર q અને ગોળાનું દળ m છે.

[જવાબ : $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{l}{\left(g^2 + \dfrac{q^2E^2}{m^2} - \dfrac{2gqE}{m}\cos\theta\right)^{\frac{1}{2}}}}$]

10. 1 cm ત્રિજ્યાવાળા એક ગોળા પર 4×10^{-8}C જેટલો વિદ્યુતભાર સમાન રીતે વિતરિત થયેલ છે. આ ગોળાની સાથે સમકેન્દ્રિય હોય તેવો 5 cm ત્રિજ્યાનો એક પોલો, વાહક ગોળો રાખેલ છે, તો ગોળાના કેન્દ્રથી 2 cm દૂર આવેલ બિંદુ પાસે વિદ્યુતક્ષેત્ર શોધો.
$k = 9 \times 10^9$ SI લો. [જવાબ : 9×10^5 NC^{-1}]

11. 

આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે પ્રથમ ચરણમાં રહેલી r ત્રિજ્યાની ચાપ પરના, λ જેટલી નિયમિત રેખીય ઘનતા ધરાવતા વિદ્યુતભારને કારણે ઊગમબિંદુ પર વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતાનાં મૂલ્ય અને દિશા શોધો.

[જવાબ : $E = \dfrac{\sqrt{2}k\lambda}{r}$, ઋણ X-અક્ષ સાથે તૃતીય ચરણમાં 45°]

12. 5×10^{-9}kg દળના એક કણને ખૂબ મોટા વિસ્તારમાં ફેલાયેલા એક વિદ્યુતભારિત સમક્ષિતિજ સમતલથી અમુક અંતરે ઉપર પકડી રાખેલ છે. આ સમતલ પર વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠઘનતા 4×10^{-6}C/m^2 જેટલી છે. આ કણને જેટલો વિદ્યુતભાર આપવો જોઈએ કે જેથી તેને મુક્ત કરતાં તે સ્થિર રહે ? $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}C^{-2}N^{-1}m^{-2}$. $g = 9.8$ ms^{-2} [જવાબ : $q = 2.17 \times 10^{-13}$ C]

13. હાઇડ્રોજન પરમાણુમાં પ્રોટોનની આજુબાજુ ભ્રમણ કરતાં ઇલેક્ટ્રૉનના ભ્રમણકક્ષાની ત્રિજ્યા 0.53 Å છે. તો ઇલેક્ટ્રૉનનો ત્રિજ્યાવર્તી પ્રવેગ અને તેનો કોણીય વેગ શોધો.

[જવાબ : $a_r = 9.01 \times 10^{22}$ m/s^2, $\omega = 3.9 \times 10^{16}$ rad/s)

•

2

સ્થિત-વિદ્યુતસ્થિતિમાન અને કૅપેસિટન્સ

2.1 પ્રસ્તાવના (Introduction)

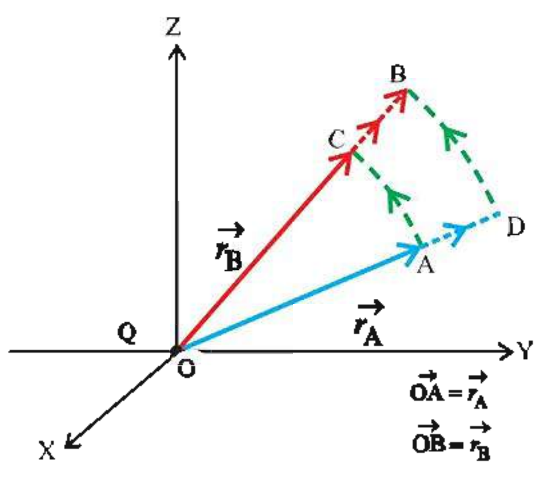
પ્રકરણ 1માં આપણે વિદ્યુતભારના પ્રકાર, વિદ્યુતભારો વચ્ચે લાગતાં બળ, બિંદુવત્ વિદ્યુતભારથી અને જુદાં-જુદાં વિદ્યુતભાર-વિતરણથી ઉદ્ભવતાં વિદ્યુતક્ષેત્ર અને ગૉસના પ્રમેય વિષે ભણી ગયા. વિદ્યુતક્ષેત્રની માહિતી પરથી કોઈ આપેલા વિદ્યુતભાર q પર લાગતું બળ શોધી શકાય છે. જો આ બળને લીધે વિદ્યુતભાર ગતિ કરી શકે તેમ હોય, તો તે ગતિ કરવા લાગશે અને આવી ગતિમાં કાર્ય થશે. તેથી હવે આપણે વિદ્યુતભાર પર થતા કાર્ય અંગે માહિતી આપતી ભૌતિક રાશિઓ–વિદ્યુત સ્થિતિ–ઊર્જા, વિદ્યુતસ્થિતિમાન–અંગે આ પ્રકરણમાં વિગતવાર અભ્યાસ કરીશું. વળી, વિદ્યુતસ્થિતિમાન અને વિદ્યુતક્ષેત્ર એ બંને રાશિઓ એકબીજા પરથી મેળવી શકાય છે. આપણે તેમની વચ્ચેનો સંબંધ પણ જાણીશું.

વિદ્યુતભાર અને વિદ્યુત-ઊર્જાનો સંગ્રહ કરતી એક સાદી રચના એ કૅપેસિટર છે. આ કૅપેસિટરનું કૅપેસિટન્સ, કૅપેસિટરોનાં શ્રેણી અને સમાંતર પ્રકારનાં જોડાણો, તેમાં સંગ્રહ પામેલી વિદ્યુત-ઊર્જા વગેરેનો અભ્યાસ પણ કરીશું. આવાં કૅપેસિટર વિવિધ ઇલેક્ટ્રિકલ અને ઇલેક્ટ્રૉનિક સાધનોમાં વપરાય છે. દા.ત., ઇલેક્ટ્રિક મોટર, કૅમેરાની flashgun, pulsed lasers, રેડિયો, ટી.વી....વગેરે. પ્રકરણના અંતમાં આપણે વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો બહુ મોટો તફાવત મેળવી શકાય તેવી રચના - વાન્ દ ગ્રાફ જનરેટર-વિષે જોઈશું.

2.2 વિદ્યુતક્ષેત્રમાં વિદ્યુતભારની ગતિ દરમિયાન થતું કાર્ય (Work Done During the Motion of an Electric Charge in the Electric Field)

આપણે પ્રકરણ-1 માં જોયું કે કોઈ વિદ્યુતભાર qને વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$ ધરાવતા બિંદુએ મૂકીએ તો તેના પર $\vec{F} = q\vec{E}$ બળ લાગે છે. જો આ વિદ્યુતભાર ગતિ કરવા માટે મુક્ત હોય તો તે ગતિ કરશે. આવી ગતિમાં થતા કાર્યની ચર્ચા કરવામાં આપણે શરૂઆતમાં એકમ ધન વિદ્યુતભારનો વિચાર કરીશું.

આકૃતિ 2.1માં દર્શાવ્યા મુજબ બિંદુવત્ વિદ્યુતભાર (Q)થી ઉદ્ભવતા વિદ્યુતક્ષેત્રમાં એકમ ધન વિદ્યુતભાર (q = +1 C વિદ્યુતભાર)ને આપણે Aથી B બિંદુએ લઈ જવા માંગીએ છીએ અને આ ગતિ દરમિયાન વિદ્યુતક્ષેત્ર વડે થતું કાર્ય શોધવું છે. Aથી B સુધી જવાના અનેક માર્ગો વિચારી શકાય. આકૃતિ 2.1માં નમૂના રૂપે ACB અને ADB માર્ગો દર્શાવ્યા છે.



આકૃતિ 2.1 વિદ્યુતભારની ગતિ દરમિયાન કાર્ય

વ્યાખ્યા મુજબ આપેલા બિંદુએ એકમ ધન વિદ્યુતભાર પર લાગતું બળ તે બિંદુ આગળનું વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$ છે અને $E = \frac{kQ(1)}{r^2}$ સૂત્ર મુજબ આ બળ અંતર સાથે સતત બદલાય છે. તેથી વિદ્યુતક્ષેત્ર વડે એકમ ધન વિદ્યુતભાર પર થતું કાર્ય, સૂક્ષ્મ સ્થાનાંતરમાં $dW = \vec{E} \cdot d\vec{r}$ સૂત્ર પરથી અને Aથી B સુધીમાં

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} \tag{2.2.1}$$

સૂત્ર પરથી મળી શકશે. અહીં $\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$ ને A અને B બિંદુઓ વચ્ચેનું **વિદ્યુતક્ષેત્રનું રેખા-સંકલન (line-integral)** કહે છે.

(1) ACB માર્ગ : પ્રથમ આપણે OA ત્રિજ્યાના વર્તુળાકાર ચાપ AC પર Aથી C જઈશું અને પછી $\vec{OC}$ દિશામાં Cથી B જઈશું.

ચાપ AC પર દરેક બિંદુએ Qથી ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર ચાપને લંબરૂપે છે. ($\vec{E}$ અને $d\vec{r}$ વચ્ચેનો કોણ 90°). તેથી $W_{AC} = \int_A^C \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$ થશે. હવે CB માર્ગે વિદ્યુતક્ષેત્ર વડે થતું કાર્ય,

$$W_{CB} = \int_C^B \vec{E} \cdot d\vec{r} \tag{2.2.2}$$

$$= \int_C^B \frac{kQ}{r^2} \hat{r}_B \cdot dr \hat{r}_B = kQ \int_C^B \frac{1}{r^2} dr = kQ \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_C}^{r_B}$$

$$W_{CB} = kQ \left[\frac{1}{r_C} - \frac{1}{r_B} \right] \tag{2.2.3}$$

આમ, ACB માર્ગે વિદ્યુતક્ષેત્ર વડે થતું કાર્ય,

$$W_{ACB} = W_{AC} + W_{CB} = kQ \left[\frac{1}{r_C} - \frac{1}{r_B} \right] \tag{2.2.4}$$

અહીં $r_C < r_B$ હોવાથી આ કાર્ય ધન છે, તે સ્વયંસ્પષ્ટ છે.

(2) ADB માર્ગ : Aથી D સુધીના માર્ગ પર વિદ્યુતક્ષેત્ર વડે થતું કાર્ય ઉપર ગણ્યું તે જ રીતે $W_{AD} = kQ \left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_D} \right]$ જેટલું મળે. વળી, ચાપ DB પર વિદ્યુતક્ષેત્ર ચાપને લંબ હોવાથી તે ગતિમાં થતું કાર્ય $W_{DB} = 0$.

આથી ADB માર્ગે વિદ્યુતક્ષેત્ર વડે થતું કાર્ય,

$$W_{ADB} = W_{AD} + W_{DB} = kQ \left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_D} \right] \tag{2.2.5}$$

હવે $|\vec{r}_D| = |\vec{r}_B|$ અને $|\vec{r}_A| = |\vec{r}_C|$ હોવાથી,

સમીકરણ (2.2.4) અને (2.2.5) પરથી, $W_{ACB} = W_{ADB} = W_{AB} = kQ \left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right]$ (2.2.6)

આમ, વિદ્યુતક્ષેત્રમાં એકમ ધન વિદ્યુતભારને એક બિંદુથી બીજા બિંદુ સુધી લઈ જવામાં **વિદ્યુતક્ષેત્ર વડે થતું કાર્ય, તે બે બિંદુઓના માત્ર સ્થાન પર જ આધારિત છે અને તેમને જોડતા માર્ગ પર આધારિત નથી.**

હવે જો એકમ ધન વિદ્યુતભારને Bથી A બિંદુ પર ગમે તે માર્ગે લઈ જઈએ, તો વિદ્યુતક્ષેત્ર વડે થતું કાર્ય, સમીકરણ (2.2.6) પરથી

$$W_{BA} = kQ \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right] \tag{2.2.7}$$

મુજબ મળશે.

જો એકમ ધન વિદ્યુતભારને A બિંદુથી ગમે તે માર્ગે B પર લઈ જઈ, અને ગમે તે માર્ગે A બિંદુ પર પાછો લાવીએ તો એક બંધ ગાળો રચાય. (દા.ત., ACBDA અથવા ADBCA) અને આ બંધ ગાળા પર વિદ્યુતક્ષેત્ર વડે થતું કુલ કાર્ય ($\oint \vec{E} \cdot d\vec{r}$); $W_{AB} + W_{BA} = 0$ થશે. (સમીકરણો (2.2.6) અને (2.2.7) પરથી). આવો ગુણધર્મ ધરાવતા ક્ષેત્રને સંરક્ષી ક્ષેત્ર કહે છે તે તમે જાણો જ છો. આમ, વિદ્યુતક્ષેત્ર પણ સંરક્ષી ક્ષેત્ર છે. [ધોરણ 11માં તમે જોઈ ગયા છો કે ગુરુત્વક્ષેત્ર પણ સંરક્ષી ક્ષેત્ર છે.]

અત્રે, આપણે એકમ ધન વિદ્યુતભાર પર થતા કાર્યની વાત કરી હોવા છતાં એ બધી બાબતો કોઈ પણ વિદ્યુતભાર q પર થતાં કાર્યને પણ લાગુ પડે જ છે, પણ તે માટે કાર્ય માટેના ઉપરના દરેક સમીકરણની જમણી બાજુને q વડે ગુણવી પડે. દા. ત., A થી B સુધીમાં થતું કાર્ય $W_{AB} = \int_A^B q\vec{E} \cdot d\vec{r}$.

વળી, આપણે વિદ્યુક્ષેત્ર વડે થતું કાર્ય શોધવાને બદલે જો વિદ્યુતક્ષેત્રની વિરુદ્ધમાં બાહ્ય બળ વડે કરવું પડતું (પ્રવેગ રહિત ગતિ માટેનું) કાર્ય શોધવું હોય, તો ઉપરના કાર્યના સમીકરણ (2.2.1)ની જમણી બાજુએ ઋણ ચિહ્ન મૂકવું પડશે, એ તો તમે સમજી શકશો. આથી એકમ ધન વિદ્યુતભાર માટે આવું કાર્ય $W'_{AB} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$ પરથી મળશે, જે સમીકરણ (2.2.1) પરથી મળતા કાર્ય Wના મૂલ્ય જેટલું જ છે પણ તેનાથી વિરુદ્ધ ચિહ્ન ધરાવે છે. વળી, q વિદ્યુતભાર માટે આવું કાર્ય $W''_{AB} = -\int_A^B q\vec{E} \cdot d\vec{r}$ પરથી મળે છે.

આ ચર્ચા પરથી આપણે ખાસ યાદ રાખીશું કે $\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$, એટલે કે Aથી B વચ્ચેનું વિદ્યુતક્ષેત્રનું રેખા-સંકલન-એકમ ધન વિદ્યુતભારને Aથી B લઈ જવા દરમિયાન વિદ્યુતક્ષેત્ર વડે થતું કાર્ય છે અને તે માર્ગ પર આધારિત નથી તેમજ $\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$. થાય છે. વળી, $\vec{E} \cdot d\vec{r}$ ને ઘણી વખત $\vec{E} \cdot d\vec{l}$ તરીકે પણ લખાય છે, જ્યાં $d\vec{l}$ પણ સૂક્ષ્મ સ્થાનાંતર સદિશ જ છે.

2.3 સ્થિત-વિદ્યુતસ્થિતિમાન (Electrostatic Potential)

આપણે જાણીએ છીએ કે વિદ્યુતક્ષેત્રમાં એક બિંદુથી બીજા બિંદુ સુધી એકમ ધન (+1 C) વિદ્યુતભારને લઈ જવામાં વિદ્યુતક્ષેત્ર વડે થતું કાર્ય, માત્ર તે બે બિંદુઓનાં સ્થાન પર જ આધારિત છે. તેમને જોડતા માર્ગ પર નહિ.

જો આપણે કોઈ એક બિંદુ Aને સંદર્ભબિંદુ તરીકે લઈને એકમ ધન વિદ્યુતભારને વિદ્યુતક્ષેત્રમાંના Aથી B, Aથી C, Aથી D... વગેરે બિંદુએ લઈ જઈએ, તો વિદ્યુતક્ષેત્ર વડે થતું કાર્ય અનુક્રમે $W_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$, $W_{AC} = \int_A^C \vec{E} \cdot d\vec{r}$, $W_{AD} = \int_A^D \vec{E} \cdot d\vec{r}$,.... સૂત્રો પરથી મળે. વળી, સંદર્ભબિંદુ A તો નિશ્ચિત કરી દીધેલું છે, તેથી ઉપર્યુક્ત કાર્ય પેલાં બીજાં બિંદુઓ (B, C, D, ...) ના સ્થાન પર જ આધારિત બને છે. રૈવાજિક રીતે સંદર્ભબિંદુ તરીકે વિદ્યુતક્ષેત્રના ઉદ્‌ગમથી અનંત અંતરનું બિંદુ લેવામાં આવે છે. તે બિંદુથી એકમ ધન વિદ્યુતભારને ક્ષેત્રમાંના કોઈ P બિંદુ સુધી લાવતાં વિદ્યુતક્ષેત્ર વડે થતું કાર્ય $W_{\infty P} = \int_{\infty}^{P} \vec{E} \cdot d\vec{r}$ સૂત્ર પરથી મળે, અને તે માત્ર P બિંદુનું સ્થાનવિધેય બને. પરંતુ આવી ગતિ પ્રવેગરહિત ગતિ બને

તે માટે વિદ્યુતક્ષેત્રની વિરુદ્ધમાં એટલે કે બાહ્ય બળ વડે કરવું પડતું કાર્ય શોધવું હોય તો તે માટે $W'_{\infty P} = -\int_{\infty}^{P} \vec{E} \cdot d\vec{r}$ સૂત્રનો ઉપયોગ કરવો પડે.

વિદ્યુતક્ષેત્રની એક અગત્યની લાક્ષણિકતા કે જેને વિદ્યુતસ્થિતિમાન કહે છે, તેને એકમ ધન વિદ્યુતભાર પર થતા કાર્યના સંદર્ભમાં નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે :

એકમ ધન વિદ્યુતભારને અનંત અંતરેથી વિદ્યુતક્ષેત્રમાંના આપેલા બિંદુએ લાવતાં વિદ્યુતક્ષેત્રની વિરુદ્ધ કરવા પડતા કાર્યને તે બિંદુ પાસેનું સ્થિત-વિદ્યુતસ્થિતિમાન (V) કહે છે. અહીં વિદ્યુતક્ષેત્રની વિરુદ્ધ એટલે ખરેખર તો વિદ્યુતક્ષેત્ર વડે લાગતા બળની વિરુદ્ધ. સ્થિત-વિદ્યુતસ્થિતિમાનને આપણે ટૂંકમાં વિદ્યુતસ્થિતિમાન કહીશું.

આ વ્યાખ્યા મુજબ વિદ્યુતક્ષેત્રમાંના કોઈ P બિંદુએ વિદ્યુતસ્થિતિમાન

$$V_P = -\int_{\infty}^{P} \vec{E} \cdot d\vec{r} \tag{2.3.1}$$

સૂત્ર પરથી મળે. બીજા શબ્દોમાં આ સૂત્ર વિદ્યુતસ્થિતિમાનની વ્યાખ્યાને જ રજૂ કરે છે.

આ સૂત્ર પરથી Q અને P બિંદુઓ વચ્ચેનો વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત

$$V_Q - V_P = \left(-\int_{\infty}^{Q} \vec{E} \cdot d\vec{r}\right) - \left(-\int_{\infty}^{P} \vec{E} \cdot d\vec{r}\right) \tag{2.3.2}$$

$$= \int_{Q}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_{\infty}^{P} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{Q}^{P} \vec{E} \cdot d\vec{r} \tag{2.3.3}$$

$$V_Q - V_P = -\int_{P}^{Q} \vec{E} \cdot d\vec{r} \tag{2.3.4}$$

પરથી મળે. વળી, **તે એકમ ધન વિદ્યુતભારને Pથી Q સુધી લઈ જતાં વિદ્યુતક્ષેત્રની વિરુદ્ધ કરવું પડતું કાર્ય દર્શાવે છે.** તેથી તે એક રીતે Pની સાપેક્ષમાં Qનું સ્થિતિમાન પણ દર્શાવે છે.

આ વિદ્યુતસ્થિતિમાનના તફાવત potential differenceને ઘણીવાર ટૂંકમાં p.d. તરીકે પણ લખાય છે. વિદ્યુતસ્થિતિમાન અને તેથી વિદ્યુતસ્થિતિમાનના તફાવતનો પણ એકમ joule / coulomb છે. તેને વિજ્ઞાની વોલ્ટાની યાદમાં volt (સંજ્ઞા V) કહે છે.

અત્રે, volt = $\frac{\text{joule}}{\text{coulomb}}$ અથવા V = $\frac{J}{C}$. તેનું પારિમાણિક સૂત્ર $M^1L^2T^{-3}A^{-1}$.

વિદ્યુતસ્થિતિમાન અદિશ રાશિ છે. વળી, આપણે સદિશ રાશિ - વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$ પરથી વિદ્યુતસ્થિતિમાન મેળવ્યું છે. (જુઓ સમીકરણ 2.3.1). આગળ ઉપર આપણે વિદ્યુતસ્થિતિમાન પરથી વિદ્યુતક્ષેત્ર પણ મેળવીશું. વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$ સાથેની ગણતરીઓમાં તેના ત્રણ ઘટકો E_x, E_y, E_z ધ્યાનમાં લેવા પડે છે અને ગણતરીઓ લાંબી થાય છે. જ્યારે વિદ્યુતસ્થિતિમાન સાથેની ગણતરીમાં એક જ અદિશ આવે છે, તેથી ગણતરીઓ ટૂંકી અને સહેલી બને છે. આથી વિદ્યુતસ્થિતિમાનની સંકલ્પનાનો વ્યાપકપણે ઉપયોગ થાય છે.

વિદ્યુતસ્થિતિમાનના નિરપેક્ષ મૂલ્યનું કંઈ મહત્ત્વ નથી. માત્ર વિદ્યુતસ્થિતિમાનના તફાવતનું જ મહત્ત્વ છે.

[**માત્ર જાણકારી માટે :** ગેલ્વેની (1737–1798) નામના વિજ્ઞાનીએ દેડકાની સ્નાયુપેશીઓમાં બે અસમાન ધાતુઓના ઈલેક્ટ્રોડ ગોઠવીને વિદ્યુત મેળવેલ અને આ વિદ્યુતને તેણે પ્રાણી જ વિદ્યુત (animal electricity) એવું નામ આપેલ. વોલ્ટાએ દર્શાવ્યું કે આ કોઈ પ્રાણીની સ્નાયુપેશીઓનો વિશિષ્ટ ગુણધર્મ નથી, પરંતુ કોઈ પણ ભીના પદાર્થ (Wet body)ની

આસપાસ બે અસમાન ધાતુઓના ઇલેક્ટ્રોડ મૂકીને વિદ્યુત મેળવી શકાય છે. આ પરથી તેણે જે વિદ્યુત-રાસાયણિક કોષ બનાવ્યો, તેને આપણે અગાઉ વોલ્ટાના કોષ તરીકે ભણી ગયાં છીએ.

જેવું મહત્ત્વ hydrostaticsમાં તરલના સ્તરની ઊંચાઈનું અને થરમોડાઇનેમિક્સમાં તાપમાનનું છે, તેવું જ મહત્ત્વ સ્થિત-વિદ્યુતશાસ્ત્રમાં વિદ્યુતસ્થિતિમાનનું છે. જે રીતે પ્રવાહી વધુ ઊંચાઈવાળા ભાગ તરફથી ઓછી ઊંચાઈવાળા ભાગ (અથવા વધુ દબાણવાળા ભાગ તરફથી ઓછા દબાણવાળા ભાગ તરફ વહે છે, ઉષ્મા-ઊર્જા વધુ તાપમાનવાળા ભાગ તરફથી ઓછા તાપમાનવાળા ભાગ તરફ વહે છે, તે જ રીતે વિદ્યુતનું વહન ધન વિદ્યુત ભારનું વહન એટલે કે વિદ્યુતપ્રવાહ) પણ ઊંચા વિદ્યુતસ્થિતિમાનવાળા વિદ્યુતભારિત પદાર્થથી નીચા વિદ્યુતસ્થિતિમાનવાળા વિદ્યુતભારિત પદાર્થ તરફ થાય છે. આમ, બે વિદ્યુતભારિત પદાર્થો વચ્ચે વિદ્યુતપ્રવાહ કઈ દિશામાં વહેશે તે તેમનાં વિદ્યુતસ્થિતિમાનો પરથી નક્કી થાય છે.]

ઉદાહરણ 1 : ધારો કે કોઈ સ્થિર વિદ્યુતભાર વિતરણને લીધે ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E} = ky\hat{i} + kx\hat{j}$ છે, જ્યાં k અચળાંક છે. (a) આકૃતિમાં ઊગમબિંદુ Oને P(2, 8), બિંદુ સાથે જોડતા સુરેખ માર્ગ પર વિદ્યુતક્ષેત્રનું રેખા-સંકલન શોધો. (b) OP રેખા પરના કોઈ પણ બિંદુ પાસે (0, 0)ની સાપેક્ષે વિદ્યુતસ્થિતિમાનનું સૂત્ર મેળવો.

ઉકેલ : (a) OP સુરેખા પર સ્થાનાંતર સદિશ $\vec{dr} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$

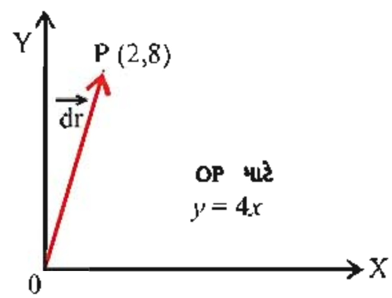
$$\therefore \vec{E}\cdot d\vec{r} = (ky\hat{i} + kx\hat{j})\cdot(dx\hat{i} + dy\hat{j})$$

$$= kydx + kxdy = k(ydx + xdy)$$

વળી, સમગ્ર OP રેખા પર $y = 4x$ ($\because$ સુરેખાનો ઢાળ અચળ હોય છે.)

$\therefore dy = 4dx$

$\therefore$ O થી P સુધી વિદ્યુતક્ષેત્રનું રેખા-સંકલન



$$\int_0^P \vec{E}\cdot d\vec{r} = k\int_0^P (ydx + xdy) = k\int_{(0,0)}^{(2,8)} [4xdx + x(4dx)] = k\int_0^2 8x\,dx \quad .....(A)$$

$$= 8k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 16k$$

(b) OP રેખા પરના કોઈ પણ બિંદુ Q(x, y) પાસે (0, 0)ની સાપેક્ષે વિદ્યુતસ્થિતિમાન મેળવવા માટે આપણે $V(Q) = -\int_0^Q \vec{E}\cdot d\vec{l}$ નો ઉપયોગ કરી શકીએ.

$$\therefore V(Q) = -\int_{(0)}^{(x)} 8kx\,dx \quad ... \text{[સમીકરણ (A) પરથી]}$$

$$= -8k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^x = -4kx^2$$

ઉદાહરણ 2 : λ જેટલી રેખીય વિદ્યુતભારઘનતા ધરાવતા અનંતલંબાઈના તારથી તારની લંબાઈને લંબરૂપે r અંતરે વિદ્યુતક્ષેત્ર $E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$, તારને લંબ દિશામાં છે, તો તારથી a અંતરે આવેલા બિંદુની સાપેક્ષે, તારથી b અંતરે આવેલા બિંદુનું સ્થિતિમાન શોધો. ($a > b$). [**Hint :** $\int \frac{1}{r}dr = \ln r$].

ઉકેલ : $V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r}$

$$= -\int_a^b \frac{\lambda}{2\pi\in_0 r} dr \quad (\because \vec{E} \parallel \vec{dr})$$

$$= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \int_a^b \frac{1}{r} dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} [\ln r]_a^b = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} [\ln b - \ln a]$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} [\ln a - \ln b]$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \left(\frac{a}{b}\right)$$

સંદર્ભબિંદુ a માટે $V_a = 0$ લેવાથી,

$$\therefore V_b = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \left(\frac{a}{b}\right)$$

ઉદાહરણ 3 : એક વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E} = Ax\hat{i}$ વડે રજૂ થાય છે, જ્યાં $A = 10 \frac{V}{m^2}$ છે. આ ક્ષેત્રમાં (10, 20)m બિંદુની સાપેક્ષે ઊગમબિંદુનું સ્થિતિમાન શોધો.

ઉકેલ : $\vec{E} = Ax\hat{i} = 10x\hat{i}$

$$V(0,\ 0) - V(10,\ 20) = -\int_{(10,\ 20)}^{(0,\ 0)} \vec{E} \cdot \vec{dr}$$

$$= -\int_{(10,\ 20)}^{(0,\ 0)} (10x\hat{i}) \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j}) = -\int_{10}^{0} 10x\, dx$$

$$= -10\left[\frac{x^2}{2}\right]_{10}^{0} = [0 - (-500)] = 500 \text{ volt}$$

$V(10,\ 20) = 0$ લેવાનું હોવાથી $V(0,\ 0) = 500$ volt

2.4 વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જા

અગાઉના પરિચ્છેદ (2.2)માં આપણે એકમ ધન વિદ્યુતભાર પર અને પછી q વિદ્યુતભાર પર પણ વિદ્યુતક્ષેત્રમાંની ગતિ દરમિયાન વિદ્યુતક્ષેત્ર વડે થતા કાર્યની ચર્ચા કરી. વળી, આપણે વિદ્યુતક્ષેત્રની વિરુદ્ધમાં બાહ્ય બળ વડે કરવા પડતા કાર્યની વાત પણ કરી, જેમાં આપણે, વિદ્યુતભારની **માત્ર પ્રવેગરહિત ગતિનો જ વિચાર કરવાનો છે.** આથી તેનો વેગ અચળ રહે છે અને વિદ્યુતભારની ગતિ-ઊર્જામાં કંઈ ફેરફાર થતો નથી. પરંતુ આ બાહ્ય બળ વડે કરવું પડતું કાર્ય તે વિદ્યુતભારની સ્થિતિ-ઊર્જા રૂપે સંગ્રહ પામે છે. આ પરથી વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જાની વ્યાખ્યા નીચે મુજબ અપાય છે :

"આપેલ વિદ્યુતભાર (q)ને અનંત અંતરેથી, વિદ્યુતક્ષેત્રમાંના આપેલા બિંદુએ લાવતાં વિદ્યુતક્ષેત્ર વિરુદ્ધ કરવા પડતા કાર્યને તે બિંદુ આગળ તે વિદ્યુતભારની વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જા કહે છે." અહીં **"કરવા પડતા કાર્ય"**ના ઉલ્લેખમાં **"પ્રવેગરહિત ગતિ"**નો સમાવેશ થઈ જાય છે.

વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જા અને વિદ્યુતસ્થિતિમાનની વ્યાખ્યા પરથી, P બિંદુએ q વિદ્યુતભારની વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જા માટે,

$$U_P = -\int_{\infty}^{P} q\vec{E}\cdot\vec{dr} \;=\; -q\int_{\infty}^{P}\vec{E}\cdot\vec{dr} \tag{2.4.1}$$

$$= qV_P \tag{2.4.2}$$

સૂત્રો લખી શકીએ. વળી, P બિંદુ આગળના વિદ્યુતસ્થિતિમાનને આપણે એકમ ધન વિદ્યુતભાર ($q = +1$ C)ની વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જા પણ કહી શકીએ, એટલે કે

$$\begin{Bmatrix}\text{આપેલા બિંદુએ} \\ \text{વિદ્યુતસ્થિતિમાન}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\text{તે બિંદુએ એકમ ધન} \\ \text{વિદ્યુતભારની વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જા}\end{Bmatrix}$$

આ ચર્ચામાં વધુ સ્પષ્ટતા માટે આપણે કેટલાક મહત્ત્વના મુદ્દાઓની નીચે મુજબ નોંધ લઈશું :

(1) q વિદ્યુતભારને (કે એકમ ધન વિદ્યુતભારને) અનંત અંતરેથી કોઈ આપેલા બિંદુએ લાવીએ કે ક્ષેત્રમાં જ એક બિંદુથી બીજા બિંદુએ લાવીએ, ત્યારે ક્ષેત્રને ઉત્પન્ન કરતા પદાર્થો (વિદ્યુતભારો)ના સ્થાનમાં કંઈ ફેરફાર થતો નથી. (કોઈ અદૃશ્ય બળ દ્વારા આપણે આ પદાર્થોને તેમનાં સ્થાનો પર સ્થિર જકડેલા કલ્પીશું !!)

(2) વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જાના નિરપેક્ષ મૂલ્યનું કંઈ જ મહત્ત્વ નથી. માત્ર તેના મૂલ્યમાં થતા ફેરફારનું જ મહત્ત્વ છે. અત્રે, q વિદ્યુતભારને Pથી Q બિંદુએ પ્રવેગરહિત ગતિથી લઈ જતાં બાહ્ય બળ વડે કરવું પડતું કાર્ય તે બે બિંદુઓ આગળની વિદ્યુતભાર qની વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જાનો તફાવત ($U_Q - U_P$) દર્શાવે છે.

$$\therefore\; U_Q - U_P = -q\int_{P}^{Q}\vec{E}\cdot\vec{dr} \tag{2.4.3}$$

(3) અહીં વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જા એ ક્ષેત્રને ઉત્પન્ન કરનાર વિદ્યુતભારો અને જેને આપણે ગતિ કરાવી છે તે વિદ્યુતભાર q વડે બનતા તંત્રની કોઈ એક સંરચના (configuration) માટે તે સમગ્ર તંત્રની વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જા છે અને સંરચના બદલાય એટલે તે તંત્રની વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જામાં પણ ફેરફાર થાય છે. દા.ત., તેમની વચ્ચે અમુક અંતર r હોય તેવી એક સંરચના કહેવાય અને અંતર r બદલાય તો સંરચના બદલાઈ એમ કહેવાય અને તેથી તે તંત્રની વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જા પણ બદલાઈ એમ કહેવાય. પરંતુ ક્ષેત્રને ઉત્પન્ન કરનાર પદાર્થોની પરિસ્થિતિમાં કંઈ જ ફેરફાર થતો ન હોવાથી વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જાનો સમગ્ર ફેરફાર આ વિદ્યુતભાર (કે જેને આપણે ગતિ કરાવી તે) q જ અનુભવે છે, તેથી $U_Q - U_P$ને માત્ર આ વિદ્યુતભાર qની વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જાના તફાવત તરીકે પણ લખી શકીએ છીએ. આ જ કારણસર આપણે સમીકરણ (2.4.1) માટે P બિંદુએ "q વિદ્યુતભારની સ્થિતિ-ઊર્જા" અને તે પછીની ચર્ચામાં "એકમ ધન વિદ્યુતભારની સ્થિતિ-ઊર્જા" એવો ઉલ્લેખ કરેલો છે.

2.5 બિંદુવત્ વિદ્યુતભારને કારણે વિદ્યુતસ્થિતિમાન (Electric Potential Due to a Point Charge)

બિંદુવત્ વિદ્યુતભાર qને લીધે, તેનાથી r અંતરે આવેલા કોઈ P બિંદુએ આપણે વિદ્યુતસ્થિતિમાન V(P) શોધવું છે.

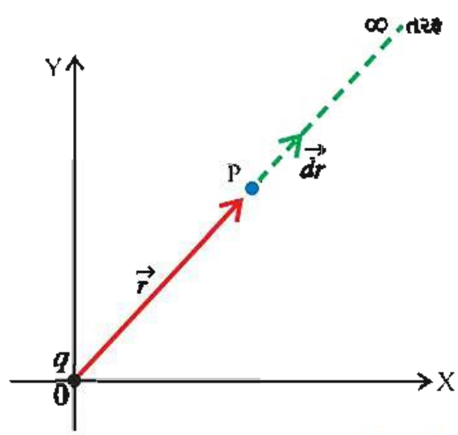
આ માટે યામાક્ષોનું ઊગમબિંદુ O, તે વિદ્યુતભારના સ્થાન પર મૂકીશું. જુઓ આકૃતિ 2.2. અત્રે $\vec{OP} = \vec{r}$. આપણે વિદ્યુતસ્થિતિમાનની વ્યાખ્યા મુજબ સમીકરણ

$$V(P) = -\int_{\infty}^{P}\vec{E}\cdot d\vec{r} \tag{2.5.1}$$

નો ઉપયોગ કરી શકીએ. વળી, આ સમીકરણને બીજા સ્વરૂપમાં આપણે

$$V(P) = \int_{P}^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r} \tag{2.5.2}$$

તરીકે પણ લખી શકીએ. (કારણ કે $\int_{\infty}^{P}\vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_{P}^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}$)



આકૃતિ 2.2 બિંદુવત્ વિદ્યુતભારને કારણે વિદ્યુતસ્થિતિમાન

આ P બિંદુએ $\vec{E} = \frac{kq}{r^2}\hat{r}$ છે. (2.5.3)

$\therefore$ સમીકરણ 2.5.2 પરથી,

$$V(P) = \int_{P}^{\infty} \frac{kq}{r^2} \hat{r} \cdot dr\hat{r} = \int_{r}^{\infty} \frac{kq}{r^2} dr \quad (2.5.4)$$

$$= kq \int_{r}^{\infty} \frac{1}{r^2} dr = kq \left[-\frac{1}{r}\right]_{r}^{\infty} \quad (2.5.5)$$

$$\therefore \ V(P) = \frac{kq}{r} \quad (2.5.6)$$

$$\text{અથવા } V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r} \quad (2.5.7)$$

આ સમીકરણ ધન કે ઋણ કોઈ પણ વિદ્યુતભાર માટે સાચું છે. ધન વિદ્યુતભારથી ઉદ્ભવતું સ્થિતિમાન ધન મળે છે અને ઋણ વિદ્યુતભારથી ઉદ્ભવતું સ્થિતિમાન (ઉપરનાં સમીકરણમાં qને ઋણ ચિહ્ન સાથે મૂકવાનું હોવાથી) ઋણ મળે છે.

અંતર r વધતાં વિદ્યુતસ્થિતિમાન $\frac{1}{r}$ મુજબ ઘટે છે, તે સમીકરણ 2.5.6 પરથી સ્વયં સ્પષ્ટ છે. વિદ્યુતસ્થિતિમાનની બાબતમાં પણ સંપાતપણાનો સિદ્ધાંત લાગુ પડે છે. એટલે એક કરતાં વધુ બિંદુવત્ વિદ્યુતભારોથી આપેલા બિંદુએ વિદ્યુતસ્થિતિમાન શોધવા માટે દરેક વિદ્યુતભારથી ઉદ્ભવતું સ્થિતિમાન સમીકરણ (2.5.7) મુજબ શોધીને તેમનો બૈજિક સરવાળો કરવો જોઈએ.

ઉદાહરણ 4 : એક બિંદુ P 2 μC વિદ્યુતભારથી 20 m દૂર છે અને 4 μC વિદ્યુતભારથી 40 m દૂર છે. P આગળનું વિદ્યુતસ્થિતિમાન શોધો.

(1) 0.2 C વિદ્યુતભારને અનંત અંતરેથી P બિંદુએ લાવવા માટે કરવું પડતું કાર્ય શોધો.

(2) −0.4 C વિદ્યુતભારને અનંત અંતરેથી P બિંદુએ લાવવા માટે કરવું પડતું કાર્ય શોધો.

$[k = 9 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}]$

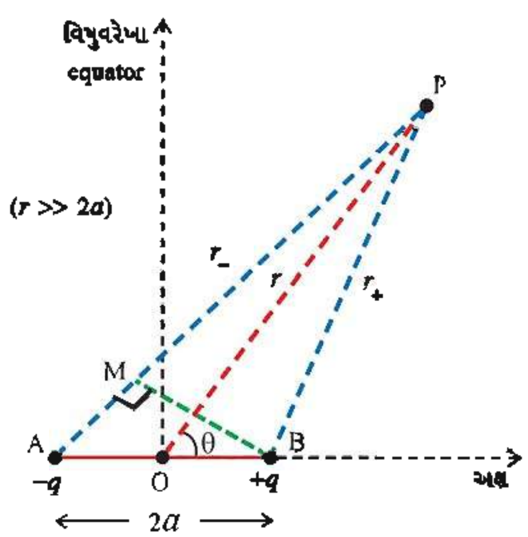
ઉકેલ : $V_P = \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2} = k\left[\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}\right]$

$$= 9 \times 10^9 \left[\frac{2 \times 10^{-6}}{20} + \frac{4 \times 10^{-6}}{40}\right] = 1800 \text{ volt}$$

(1) $W_1 = V_P q_1' = (1800)(0.2) = 360$ J

(2) $W_2 = V_P q_2' = (1800)(-0.4) = -720$ J

2.6 વિદ્યુત-ડાઈપોલથી ઉદ્ભવતું વિદ્યુતસ્થિતિમાન (Electric Potential due to an Electric Dipole)



આકૃતિ 2.4 વિદ્યુત-ડાઈપોલને લીધે સ્થિતિમાન

પ્રકરણ 1માં આપણે જોયું છે કે એકબીજાથી પરિમિત (= $2a$) અંતરે રહેલા બે સમાન મૂલ્યના પરંતુ વિરુદ્ધ પ્રકારના વિદ્યુતભારો ($+q$ અને $-q$)થી બનતી રચનાને વિદ્યુત-ડાઈપોલ કહે છે. આકૃતિ 2.4માં આવી એક ડાઈપોલ દર્શાવી છે, જેમાં યામતંત્રનું ઊગમબિંદુ O, તેના મધ્યબિંદુ પર મૂકેલ છે. આ ડાઈપોલની ડાઈપોલ-મોમેન્ટ (ચાકમાત્રા)નું મૂલ્ય $p = q(2a)$ છે અને તેની દિશા ઋણથી ધન વિદ્યુતભાર તરફ - એટલે કે AB દિશામાં છે.

ડાઈપોલના મધ્યબિંદુ Oથી ઘણે દૂર આવેલા અને ડાઈપોલની અક્ષ સાથે θ કોણ બનાવતી દિશામાંના P બિંદુએ આપણે વિદ્યુતસ્થિતિમાન શોધવું છે. ધારો કે OP = r, AP = r_- અને BP = r_+.

P બિંદુએ વિદ્યુતસ્થિતિમાન, દરેક વિદ્યુતભારથી ઉદ્ભવતાં વિદ્યુતસ્થિતિમાનના સરવાળા જેટલું છે.

$$\therefore\ V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_+} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-q)}{r_-} \qquad (2.6.1)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{r_- - r_+}{r_- r_+}\right] \qquad (2.6.2)$$

P બિંદુ ઘણે દૂરનું બિંદુ હોવાથી $r >> 2a$ હોય અને આ સંજોગોમાં AP || OP || BP લઈ શકાય. આ સંજોગોમાં

$$\left.\begin{aligned} &\text{આકૃતિ 2.3 પરથી સમીકરણ (2.6.2)ના અંશ માટે } r_- - r_+ = AM = 2a\cos\theta \\ &\text{અને છેદ માટે } r_- \approx r_+ \approx r \end{aligned}\right\} \qquad (2.6.3)$$

આપણે ડાઈપોલની લંબાઈ ($2a$) કરતાં ઘણાં મોટા અંતરના બિંદુનો વિચાર કર્યો છે. અણુકીય ડાઈપોલ્સ ખૂબ નાની હોવાથી આવી સંનિકટતા (approximation) તેમને ઘણી સારી રીતે લાગુ પડે છે. સમીકરણો (2.6.2) અને (2.6.3) પરથી,

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2a\cos\theta}{r^2}\right) \qquad (2.6.4)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} \qquad (2.6.5)$$

$\overrightarrow{OP}$ દિશામાંના એકમસદિશને $\hat{r}$ તરીકે લખતાં, $\vec{p}\cdot\hat{r} = p\cos\theta$

$$\therefore\ V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2}\ (r >> 2a \text{ માટે}) \qquad (2.6.6)$$

નોંધ : $q \rightarrow \infty$ અને $a \rightarrow 0$ લક્ષમાં મળતી ડાઈપોલને બિંદુ ડાઈપોલ (point dipole) કહે છે. આવી બિંદુ ડાઈપોલ માટે ઉપરનું સમીકરણ વધારે સચોટ છે, જ્યારે વાસ્તવમાં મળતી એટલે કે physical-dipole માટે આ સમીકરણ વિદ્યુતસ્થિતિમાનનું સંનિકટ (approximate) મૂલ્ય આપે છે.

સમીકરણ (2.6.4) પરથી ફલિત થતા મુદ્દાઓની નીચે મુજબ નોંધ લઈએ :

(1) **અક્ષ પરનું સ્થિતિમાન :** ડાઈપોલની અક્ષ પરના બિંદુ માટે $\theta = 0$ અથવા π. $\therefore\ V = \pm\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^2}$

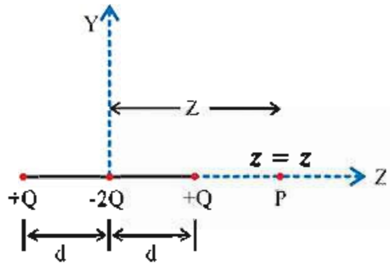
આપેલા બિંદુથી જો **નજીકનો વિદ્યુતભાર** $+q$ હોય તો V ધન અને નજીકનો વિદ્યુતભાર $-q$, હોય તો V ઋણ મળશે.

(2) **વિષુવરેખા પરનું સ્થિતિમાન :** વિષુવરેખા પરના બિંદુ માટે $\theta = \frac{\pi}{2}$ $\therefore\ V = 0$

(3) કોઈ બિંદુએ સ્થિતિમાન તેના સ્થાનસદિશ $\vec{r}$ અને $\vec{p}$ વચ્ચેના ખૂણા પર આધારિત છે.

(4) ડાઈપોલથી ઉદ્ભવતું સ્થિતિમાન અંતર સાથે $\frac{1}{r^2}$ મુજબ ઘટે છે. (જ્યારે બિંદુવત્ વિદ્યુતભારથી ઉદ્ભવતું સ્થિતિમાન અંતર સાથે $\frac{1}{r}$ મુજબ ઘટે છે.) (ડાઈપોલથી ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર $\frac{1}{r^3}$ મુજબ ઘટે છે, તે આપણે પ્રકરણ 1માં જોયું છે.)

ઉદાહરણ 5 : આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે બે ડાઈપોલ્સને એક રેખા પર પરસ્પર વિરુદ્ધ ગોઠવતાં મળતાં તંત્રને રેખીય quadrupole (ચતુર્ધ્રુવી) કહે છે. (1) $z > d$ સંતોષતા, quadrupoleની અક્ષ પરના $z = z$ બિંદુએ વિદ્યુતસ્થિતિમાન શોધો અને (2) જો $z >> d$, હોય તો દર્શાવો કે,



$$V(z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2d^2}{z^3}$$

નોંધ : $2|Q|d^2$ ને quadrupole મોમેન્ટ કહે છે.

ઉકેલ : (1) ધારો કે બિંદુ P નો z-યામ z છે. ઊગમબિંદુથી ડાબી બાજુના + Q વિદ્યુતભારને કારણે P પાસે સ્થિતિમાન

$$V_1 = \frac{kQ}{z+d} \quad (1)$$

જમણી બાજુના + Q વિદ્યુભારને લીધે P પાસે સ્થિતિમાન,

$$V_2 = \frac{kQ}{z-d} \quad (2)$$

ઊગમબિંદુ પરના –2Q વિદ્યુતભારને લીધે P પાસે સ્થિતિમાન,

$$V_3 = -\frac{k(2Q)}{z} \quad (3)$$

$\therefore$ P પાસેનું કુલ સ્થિતિમાન,

$$V(z) = V_1 + V_2 + V_3 = kQ\left[\frac{1}{z+d}+\frac{1}{z-d}-\frac{2}{z}\right]$$

$$= kQ\left[\frac{2z}{z^2-d^2}-\frac{2}{z}\right] = kQ\left[\frac{2d^2}{z(z^2-d^2)}\right]$$

(2) જો $z >> d$ હોય તો, ઉપરના સમીકરણની જમણી બાજુના છેદમાં z^2 ની સરખામણીમાં d^2ને અવગણી શકાય છે. $\therefore V(z) = \frac{kQ(2d^2)}{z^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2d^2}{z^3}$

ઉદાહરણ 6 : R ત્રિજ્યાના અવાહક ગોળામાં વિદ્યુતભાર Q નિયમિત રીતે વિતરિત કરેલો છે, તો ગોળાના કેન્દ્રથી $r(<R)$ અંતરે વિદ્યુતસ્થિતિમાન શોધો. ગોળાના કેન્દ્રથી $r(r < R)$ અંતરે વિદ્યુતક્ષેત્ર $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}\, r\hat{r}$ લો. ગોળાના કેન્દ્ર પર પણ વિદ્યુતસ્થિતિમાન શોધો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, આવા ગોળાના પૃષ્ઠ પર વિદ્યુતસ્થિતિમાન

$V(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$ હોય છે.

આથી, આપણે $V(r) - V(R) = -\int_R^r \vec{E}\cdot\vec{dr}$ નો ઉપયોગ કરી શકીએ.

$$\therefore V(r) - V(R) = -\int_R^r \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}\, r dr\ \hat{r}\cdot\hat{r} \qquad (\because \vec{dr} = dr\hat{r})$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\int_R^r r dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left[\frac{r^2}{2}\right]_R^r$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left[\frac{r^2}{2}-\frac{R^2}{2}\right]$$

$$\therefore\ V(r) = V(R) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left[\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right]$$

$$\therefore\ V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} + \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\ (R^2 - r^2)$$

$$\therefore\ V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) \qquad r < R$$

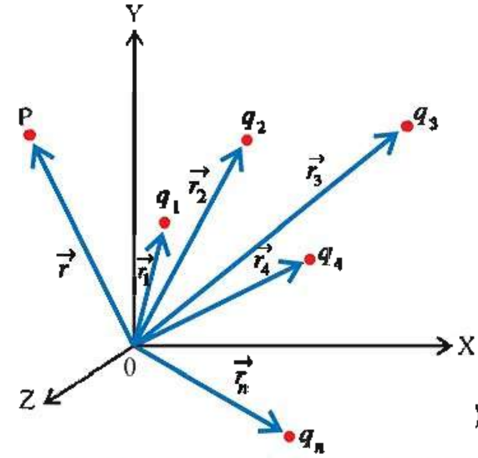
ગોળાના કેન્દ્ર પર $r = 0$, $\therefore$ V (કેન્દ્ર) $= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3Q}{2R}\right)$.

2.7 વિદ્યુતભારોના તંત્ર વડે ઉદ્‌ભવતું વિદ્યુતસ્થિતિમાન (Electrical Potential due to a System of Charges)

વિદ્યુતભારોના કોઈક તંત્રમાં બિંદુવત્ વિદ્યુતભારો અસતત રીતે (એટલે કે છૂટા-છૂટા) વિતરિત થયેલા (વહેંચાયેલા) હોઈ શકે છે, તો કોઈક તંત્રમાં તેઓ એકબીજાની સાથે, સાથે સતત રીતે વિતરિત થયેલા પણ હોઈ શકે છે. વળી, કોઈક તંત્રમાં આ બંને પ્રકારનાં વિતરણોનું ગમે તે પ્રકારનું મિશ્રણ પણ હોઈ શકે છે.

(a) વિદ્યુતભારોનું અસતત વિતરણ (Descrete Distribution of Charges) :

આકૃતિ 2.4માં બિંદુવત્ વિદ્યુતભારો q_1, q_2, q_3 …… q_n નું અસતત વિતરણ થયેલું દર્શાવ્યું છે. યામાક્ષોના ઊગમબિંદુને અનુલક્ષીને આ વિદ્યુતભારોના સ્થાનસદિશો અનુક્રમે $\vec{r_1}$, $\vec{r_2}$ … $\vec{r_n}$ છે. આ તંત્રને લીધે સ્થાનસદિશ $\vec{r}$ ધરાવતા P બિંદુએ વિદ્યુતસ્થિતિમાન શોધવું છે. આ માટે દરેક બિંદુવત્ વિદ્યુતભારથી ઉદ્‌ભવતું વિદ્યુતસ્થિતિમાન શોધીશું અને તેનો કુલ સરવાળો કરીશું.



આકૃતિ 2.4 અસતત વિદ્યુતભારોથી સ્થિતિમાન

એટલે કે, $V = V_1 + V_2 + ... + V_n$ (2.7.1)

$$\therefore\ V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{1p}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_{2p}} + \ldots\ldots + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_n}{r_{np}}$$)

જ્યાં, $r_{1p} = q_1$થી P નું અંતર $= |\vec{r} - \vec{r_1}|$

તે જ રીતે r_{2p}, ..., r_{np} એ અનુરૂપ અંતરો છે.

$$\therefore\ V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r_1}|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{|\vec{r} - \vec{r_2}|} + \ldots\ldots + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_n}{|\vec{r} - \vec{r_n}|} \qquad (2.7.3)$$

$$\therefore\ V = \sum_{i=1}^{n}\frac{kq_i}{|\vec{r} - \vec{r_i}|} \qquad (2.7.4)$$

(b) સતત વિદ્યુતભાર-વિતરણથી ઉદ્‌ભવતું વિદ્યુતસ્થિતિમાન (Electric Potential due to a Continuous Distribution of Charges) :

ધારો કે કોઈ વિસ્તારમાં વિદ્યુતભાર સતત રીતે વિતરિત થયેલો છે. આ વિતરણના વિસ્તારને દરેક અત્યંત સૂક્ષ્મ કદ ધરાવતા ખૂબ મોટી સંખ્યાના કદ-ખંડોમાં વિભાગેલો કલ્પો. $\vec{r}$ સ્થાનસદિશ ધરાવતા આવા ખંડનું કદ $d\tau'$ અને તે સ્થાને વિદ્યુતભારની કદ-ઘનતા $\rho(\vec{r}\,')$, હોય તો તે ખંડમાંનો વિદ્યુતભાર $\rho(\vec{r}\,')d\tau'$ થશે અને તેને બિંદુવત્ ગણી શકાશે. આ સૂક્ષ્મ કદ-ખંડને લીધે $\vec{r}$ સ્થાનસદિશ ધરાવતા P બિંદુએ વિદ્યુતસ્થિતિમાન

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}\,')d\tau'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \tag{2.7.5}$$

વિદ્યુતભાર-વિતરણના સમગ્ર કદ પર આ સમીકરણનું સંકલન કરતાં P આગળનું કુલ સ્થિતિમાન મળે છે, જે નીચે મુજબ લખી શકાય છે :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\text{all}} \frac{\rho(\vec{r}\,')d\tau'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \tag{2.7.6}$$

જો વિદ્યુતભાર-વિતરણ નિયમિત હોય તો $\rho(\vec{r}\,')$ને અચળ $(= \rho)$ ગણી શકાય છે.

(c) સમાન વિદ્યુતભાર-વિતરણ ધરાવતું ગોળીય કવચ (Spherical Shell with Uniform Charge Distribution)

પ્રકરણ 1માં આપણે જોયું કે નિયમિત (સમાન) વિદ્યુતભાર-વિતરણ ધરાવતા ગોળીય કવચની બહારના બિંદુએ તેમજ સપાટી પરના બિંદુએ મળતું વિદ્યુતક્ષેત્ર એ જાણે કે કવચ પરનો સમગ્ર વિદ્યુતભાર કવચના કેન્દ્ર પર કેન્દ્રિત થયેલો છે, તેમ ગણીને મળતા વિદ્યુતક્ષેત્ર જેટલું હોય છે. આપણે વિદ્યુતસ્થિતિમાન પણ વિદ્યુતક્ષેત્ર પરથી $(V = -\int_{\infty}^{r} \vec{E} \cdot \vec{dr})$ મેળવેલ છે. વિદ્યુતસ્થિતિમાન માટે પણ બધો વિદ્યુતભાર કવચના કેન્દ્ર પર કેન્દ્રિત થયેલો ગણી શકાય છે. આથી q વિદ્યુતભાર અને R ત્રિજ્યા ધરાવતી આવી કવચની બહારના બિંદુએ તેમજ પૃષ્ઠ પરના બિંદુએ સ્થિતિમાન

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r} \qquad (r \geq R \text{ માટે}) \tag{2.7.7}$$

જ્યાં, $r =$ કવચના કેન્દ્રથી આપેલ બિંદુનું અંતર

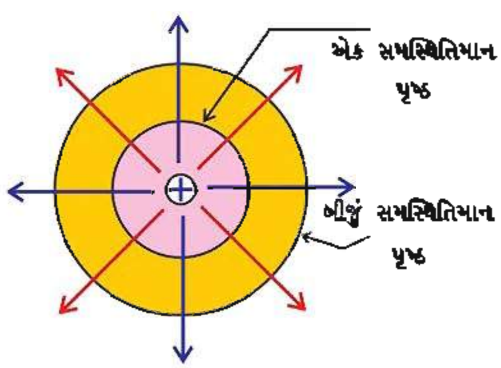
વળી, આપણે એ પણ જાણીએ છીએ કે કવચની અંદર તો વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય હોય છે. આથી કવચની અંદર એકમ ધન વિદ્યુતભારની ગતિ દરમિયાન કંઈ કાર્ય કરવું પડતું નથી. આથી કવચની અંદરનાં બધાં બિંદુઓએ વિદ્યુતસ્થિતિમાન એકસમાન હોય છે, અને તે કવચની સપાટી પરના સ્થિતિમાનના મૂલ્ય જેટલું હોય છે. એટલે કે

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R} \quad (r \leq R \text{ માટે}) \tag{2.7.8}$$

(અહીં એકમ ધન વિદ્યુતભારને માત્ર ∞ થી કવચની સપાટી સુધી જે ગતિ કરાવીએ તેમાંનું કાર્ય જ ગણતરીમાં આવેલ છે તે નોંધો.)

2.8 સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠો (Equipotential Surfaces)

જે પૃષ્ઠ (સપાટી) પરનાં બધાં બિંદુએ વિદ્યુતસ્થિતિમાન એકસમાન હોય તે પૃષ્ઠને સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠ કહે છે.



આકૃતિ 2.5 સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠો

બિંદુવત્ વિદ્યુતભારથી ઉદ્ભવતું વિદ્યુતસ્થિતિમાન $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}$ સૂત્ર પરથી મળે છે. આથી જો r અચળ હોય તો V પણ અચળ થાય. આ પરથી કહી શકીએ કે એકલ બિંદુવત્ વિદ્યુતભાર (Single Point Charge) q માટે સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠો, આ વિદ્યુતભારને કેન્દ્ર તરીકે લઈને દોરેલા ગોળાઓની સપાટીઓ છે. (જુઓ આકૃતિ 2.5) આવી બે જુદી-જુદી સપાટીઓ પર સ્થિતિમાન જુદાં-જુદાં પણ એક જ સપાટી પરનાં બધાં બિંદુઓ માટે એકસમાન છે. બિંદુવત્ વિદ્યુતભારથી ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર તેમાંથી દોરેલી ત્રિજ્યાવર્તી રેખાઓ (દિશાઓ) પર હોય છે.

[$+q$ માટે તેનામાંથી બહાર જતી અને $-q$ માટે તેનામાં અંદર આવતી ત્રિજ્યાવર્તી દિશામાં હોય છે.] આ ત્રિજ્યાવર્તી રેખાઓ પેલી સમસ્થિતિમાન સપાટીઓને દરેક બિંદુએ લંબ હોય છે. તેથી આપેલા બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્રની દિશા તે બિંદુમાંથી પસાર થતા સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠને લંબરૂપે હોય છે. આ બાબત માત્ર બિંદુવત્ વિદ્યુતભાર માટે જ નહિ પણ કોઈ પણ વિદ્યુતભાર સંરચના (Charge Configuration) માટે વ્યાપકપણે સાચી છે, તેમ હવે આપણે સાબિત કરીશું.

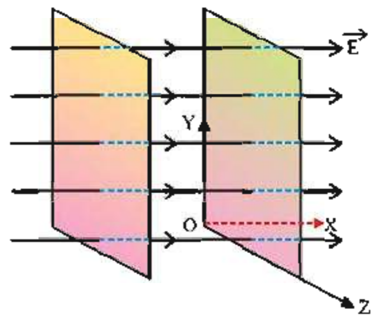
ધારો કે કોઈ સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠ પર (પૃષ્ઠને સમાંતર) એકમ ધન વિદ્યુતભારને એક બિંદુથી $d\vec{l}$ જેટલું સૂક્ષ્મ સ્થાનાંતર કરાવીએ છીએ. આ ક્રિયામાં વિદ્યુતક્ષેત્રની વિરુદ્ધમાં (બાહ્ય બળ વડે) કરવું પડતું કાર્ય $dW = -\vec{E}\cdot d\vec{l}$ = તે બે બિંદુઓ વચ્ચેનો વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત.

પરંતુ સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠ પર વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત $= 0$.

$$\therefore\ \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow E\,dl\,cos\theta = 0$$

જ્યાં, θ = $\vec{E}$ અને $d\vec{l}$ વચ્ચેનો કોણ. પણ $E \neq 0$ અને $dl \neq 0$

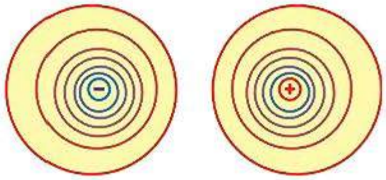
$$\therefore cos\theta = 0 \therefore \theta = \frac{\pi}{2} \therefore \vec{E} \perp d\vec{l}.$$

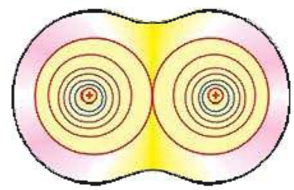


આકૃતિ 2.6 સમાન વિદ્યુતક્ષેત્ર માટે સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠ

પણ $d\vec{l}$ તો પૃષ્ઠ પર (પૃષ્ઠને સમાંતર) છે. આથી વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$, તે બિંદુએ સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠને લંબ છે. વિદ્યુતક્ષેત્રને દર્શાવવા માટે જે રીતે ક્ષેત્ર રેખાઓની સંકલ્પના ઉપયોગી થાય છે, તે જ રીતે સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠો એ પણ વિદ્યુતક્ષેત્રના નિરૂપણ માટેની એક ઉપયોગી સંકલ્પના છે.

X દિશામાં પ્રવર્તતા સમાન વિદ્યુતક્ષેત્ર માટે ક્ષેત્ર રેખાઓ X-અક્ષને સમાંતર અને સમાન રીતે વહેંચાયેલી-equispaced-હોય છે, જ્યારે સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠો એ X-અક્ષને લંબ (એટલે કે YZ સમતલને સમાંતર) હોય છે (જુઓ આકૃતિ 2.8).


ડાયપોલનાં સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠો
(a) (માત્ર જાણકારી માટે)


બે સમાન મૂલ્યનાં ધન વિદ્યુભારોના તંત્ર માટે સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠો
(b) (માત્ર જાણકારી માટે)

આકૃતિ 2.7

વિદ્યુત-ડાઈપોલનાં સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠો આકૃતિ 2.7(a)માં દર્શાવ્યાં છે.

બે સમાન મૂલ્યના ધન વિદ્યુતભારોથી બનેલા તંત્ર માટે સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠો આકૃતિ 2.7(b)માં દર્શાવ્યાં છે.

2.9 વિદ્યુતક્ષેત્ર અને વિદ્યુતસ્થિતિમાન વચ્ચેનો સંબંધ

આપણે પરિચ્છેદ 2.3માં વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$ પરથી વિદ્યુતસ્થિતિમાન V $(= -\int_{\infty}^{P}\vec{E}\cdot d\vec{r})$ મેળવ્યું. હવે જો આપણે કોઈ વિસ્તારમાં વિદ્યુતસ્થિતિમાન વિશે જાણતા હોઈએ, તો તે પરથી વિદ્યુતક્ષેત્ર પણ મેળવી શકીએ છીએ.

આપણે પરિચ્છેદ 2.3માં જોયું છે કે P અને Q બિંદુઓ વચ્ચેના વિદ્યુતક્ષેત્રના રેખા-સંકલનની મદદથી તે બે બિંદુઓ વચ્ચેનો વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત મળી શકે છે (સમીકરણ 2.3.4), જે નીચે મુજબ છે :

$$V_Q - V_P = \Delta V = -\int_P^Q \vec{E}\cdot\vec{dl} \qquad (2.9.1)$$

હવે જો આ P અને Q બિંદુઓ એકબીજાની અત્યંત નજીક હોય તો તેવા સૂક્ષ્મ સ્થાનાંતર $d\vec{l}$ માટે સંકલન કરવાની જરૂર ન પડે અને માત્ર એક જ પદ $\vec{E}\cdot d\vec{l}$ રાખી શકાય.

$$\therefore\ dV = -\vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad (2.9.2)$$

જો $d\vec{l}$ એ વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$ ની દિશામાં હોય તો, $\vec{E}\cdot d\vec{l} = E\ dl\ cos0^\circ = E\ dl$

$\therefore\ dV = -E\ dl$

$$\therefore\ E = \frac{-dV}{dl} \qquad (2.9.3)$$

આ સમીકરણ સ્થાનાંતર $d\vec{l}$ ની દિશામાંના વિદ્યુતક્ષેત્રનું માન આપે છે.

અત્રે, $\frac{dV}{dl}$ = એકમ અંતર દીઠ વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત. તેને **વિદ્યુતસ્થિતિમાન પ્રચલન** (Potential gradient) કહે છે. તેનો એકમ $\frac{V}{m}$ સમીકરણ (2.9.3) પરથી વિદ્યુતક્ષેત્રનો એકમ પણ $\frac{V}{m}$ તરીકે લખી શકાય છે, જે $\frac{N}{C}$ ને સમતુલ્ય છે.

જો આપણે સ્થાનાંતર $d\vec{l}$ વિદ્યુતક્ષેત્રની દિશામાં **ન લીધું** હોત પણ બીજી કોઈ દિશામાં લીધું હોત, તો $\frac{-dV}{dl}$ વડે આપણને **વિદ્યુતક્ષેત્રનો તે સ્થાનાંતરની દિશામાંનો ઘટક મળત.** દા.ત., જો વિદ્યુતક્ષેત્ર X દિશામાં જ હોય અને સ્થાનાંતર ગમે તે દિશામાં (ત્રિપરિમાણમાં) કરીએ તો,

$\vec{E} = E_x\hat{i}$ અને $d\vec{l} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$

$$\therefore\ dV = -(E_x\hat{i})\ .\ (dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k})$$

$$= -E_x\ dx \qquad (2.9.4)$$

$$\therefore\ E_x = \frac{-dV}{dx} \qquad (2.9.5)$$

આ જ રીતે જો વિદ્યુતક્ષેત્ર અનુક્રમે માત્ર Y અને માત્ર Z દિશામાં હોત તો,

$$E_y = \frac{-dV}{dy} \qquad (2.9.6)$$

$$E_z = \frac{-dV}{dz} \qquad (2.9.7)$$

હવે જો વિદ્યુતક્ષેત્ર પણ ($x-$, $y-$, $z-$) ત્રણેય ઘટકો ધરાવતું હોય, તો સમીકરણ (2.9.5) (2.9.6) અને (2.9.7) પરથી વ્યાપક રૂપેનીચે મુજબ લખી શકાય.

$$E_x = \frac{-\partial V}{\partial x},\ E_y = \frac{-\partial V}{\partial y},\ E_z = \frac{-\partial V}{\partial z} \qquad (2.9.8)$$

અને $$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right) \qquad (2.9.9)$$

અહીં $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ એ $V(x, y, z)$નાં અનુક્રમે x, y, z સાપેક્ષે આંશિક વિકલન (Partial Differentiation) દર્શાવે છે. વળી, $V(x, y, z)$નું x સાપેક્ષે આંશિક વિકલન એટલે $V(x, y, z)$ના સૂત્રમાં y અને zને અચળ ગણીને માત્ર xની સાપેક્ષે મળતું Vનું વિકલન $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)$.

સમીકરણ (2.9.1)માં P અને Q વચ્ચેનાં બધાં બિંદુ આગળના $\vec{E}$ નાં મૂલ્યો ગણતરીમાં આવે છે. જ્યારે સમીકરણ (2.9.3) અને (2.9.8) માત્ર આપેલા બિંદુ આગળના સ્થિતિમાનના ફેરફાર અને તે બિંદુ આગળના વિદ્યુતક્ષેત્ર વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવે છે.

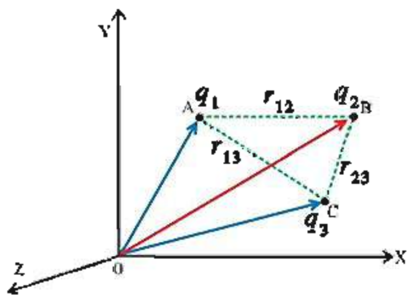
વિદ્યુતક્ષેત્રની દિશા, જે દિશામાં વિદ્યુતસ્થિતિમાનના ઘટાડાનો અંતર સાથેનો દર $\left(\frac{-dV}{dr}\right)$ મહત્તમ હોય તે દિશામાં હોય છે અને આવી દિશા સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠને હંમેશાં લંબરૂપે જ હોય છે.

આ સમગ્ર ચર્ચા વિદ્યુતક્ષેત્ર સંરક્ષી ક્ષેત્ર છે એ ગુણધર્મ પર આધારિત છે.

2.10 બિંદુવત્ વિદ્યુતભારોના તંત્રની સ્થિતિ-ઊર્જા

આકૃતિ 2.8માં દર્શાવ્યા મુજબ વિદ્યુતભારોના એક તંત્રમાં ત્રણ બિંદુવત્ વિદ્યુતભારો q_1, q_2 અને q_3 અનુક્રમે A, B અને C બિંદુ પર સ્થિર ગોઠવાયેલા છે. કોઈ યામતંત્રના ઊગમબિંદુથી તેમના સ્થાનસદિશો અનુક્રમે $\vec{r_1}$, $\vec{r_2}$ અને $\vec{r_3}$ છે. આપણે આ તંત્રની વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જા શોધવા માંગીએ છીએ.

$\vec{OA} = \vec{r_1}$, $\vec{OB} = \vec{r_2}$, $\vec{OC} = \vec{r_3}$



આકૃતિ 2.8 બિંદુવત્ વિદ્યુતભારોનું તંત્ર

પ્રારંભમાં આપણે આ બધા વિદ્યુતભારોને ઊગમબિંદુથી અનંત અંતરે અને એકબીજાથી પણ અનંત અંતરે રહેલા છે તેમ કલ્પીશું. આ સ્થિતિમાં તેમની વચ્ચે લાગતું વિદ્યુતબળ શૂન્ય છે અને તેમની વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જા પણ શૂન્ય છે.

વળી, A, B અને C આગળ વિદ્યુતક્ષેત્ર પણ શૂન્ય છે. આવી સ્થિતિમાંથી ઉપર દર્શાવેલી સ્થિતિમાં વિદ્યુતભારોને ગોઠવવામાં બાહ્ય બળો વડે (વિદ્યુતક્ષેત્રો વિરુદ્ધ) જે કુલ કાર્ય કરવું પડે તે આ તંત્રની સ્થિતિ-ઊર્જા રૂપે સંગ્રહ પામે છે.

સૌપ્રથમ આપણે વિદ્યુતભાર q_1ને અનંત અંતરેથી A બિંદુ પર લાવીએ. આ ક્રિયામાં કોઈ વિદ્યુતક્ષેત્ર હાજર ન હોવાથી વિદ્યુતક્ષેત્રની વિરુદ્ધમાં બાહ્ય બળ વડે કરવું પડતું કાર્ય W_1 = શૂન્ય છે. (આમાં આ વિદ્યુતભારનું પોતાનું ક્ષેત્ર તો ગણવાનું છે જ નહિ એ તમે જાણો જ છો.)

હવે A બિંદુ પર સ્થાપિત થયેલો q_1 વિદ્યુતભાર પોતાની આસપાસ વિદ્યુતક્ષેત્ર અને વિદ્યુતસ્થિતિમાન ઉત્પન્ન કરે છે. આ q_1ને લીધે તેનાથી r_{12} અંતરે રહેલા B બિંદુએ વિદ્યુતસ્થિતિમાન (સમીકરણ 2.5.7 પરથી)

$$V_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{12}} \tag{2.10.1}$$

જ્યાં, $r_{12} = |\vec{r_2} - \vec{r_1}|$

આથી હવે q_2 વિદ્યુતભારને અનંત અંતરેથી B બિંદુએ લાવવા માટે બાહ્ય બળ વડે કરવું પડતું કાર્ય

$$W_2 = (V_B)q_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}} \tag{2.10.2}$$

(સમીકરણ 2.4.2 પરથી)

(જો આપણે આ બે જ વિદ્યુતભારોના તંત્રનો વિચાર કરવો હોય, તો આ કુલ કાર્ય $W_1 + W_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$ એ આ તંત્રની વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જા U થાય.)

હવે q_1 અને q_2 બંને વિદ્યુતભારો પોતાની આસપાસ વિદ્યુતક્ષેત્ર અને વિદ્યુતસ્થિતિમાન ઉત્પન્ન કરશે. તેમના વડે C બિંદુએ ઉદ્ભવતું વિદ્યુતસ્થિતિમાન

$$V_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_{23}} \qquad (2.10.3)$$

આથી, હવે q_3 વિદ્યુતભારને અનંત અંતરેથી C બિંદુએ લાવવા માટે કરવું પડતું કાર્ય

$$W_3 = (V_C)q_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2q_3}{r_{23}} \qquad (2.10.4)$$

આથી આ ત્રણ વિદ્યુતભારોના તંત્રની આ મુજબની ગોઠવણીમાં કરવું પડતું કુલ કાર્ય ($= W_1 + W_2 + W_3$) આ તંત્રની વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જા U છે.

$$\therefore U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{12}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2q_3}{r_{23}} \qquad (2.10.5)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1q_2}{r_{12}} + \frac{q_1q_3}{r_{13}} + \frac{q_2q_3}{r_{23}}\right] \qquad (2.10.6)$$

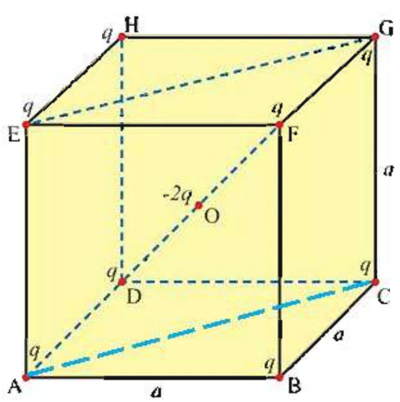
$$= k\left[\frac{q_1q_2}{r_{12}} + \frac{q_1q_3}{r_{13}} + \frac{q_2q_3}{r_{23}}\right] \qquad (2.10.7)$$

આ પરથી વ્યાપક રૂપે n-વિદ્યુતભારોથી બનતાં તંત્ર માટે વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જા

$$U = \sum_{\substack{i=1 \\ i<j}}^{n} \frac{kq_iq_j}{r_{ij}} \qquad (2.10.8)$$

તરીકે લખી શકાય.

વિદ્યુતક્ષેત્ર સંરક્ષી હોવાથી તંત્રમાં ગમે તે વિદ્યુતભારને પ્રથમ લાવીએ કે પછીથી લાવીએ તો પણ વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જામાં કંઈ ફેર પડતો નથી. (એટલે કે સમીકરણ 2.10.8) વડે જ અપાય છે.



ઉદાહરણ 7 : આકૃતિમાં દર્શાવેલ વિદ્યુતભાર તંત્રની સ્થિતિ-ઊર્જા ગણો.

ઉકેલ : આકૃતિમાં દર્શાવેલ તંત્રની સ્થિતિ-ઊર્જા = વિદ્યુતભારોની બધી જ જોડ (pairs)ની સ્થિતિ-ઊર્જાનો સરવાળો. અહીં,

(1) AB જેવી 12 જોડ છે. આવી દરેક જોડના વિદ્યુતભારો વચ્ચેનું અંતર = a

આવી જોડની સ્થિતિ-ઊર્જા,

$$U_1 = \frac{kq^2}{a} \times 12 \qquad (1)$$

(2) AC જેવી પણ 12 જોડ છે. આવી દરેક જોડના વિદ્યુતભારો વચ્ચેનું અંતર $a\sqrt{2}$ છે.

$(\because AC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2})$

તેમની સ્થિતિ-ઊર્જા $U_2 = \frac{kq^2}{a\sqrt{2}} \times 12 \qquad (2)$

(3) AG જેવી 4 જોડ છે. દરેક જોડમાં વિદ્યુતભારો વચ્ચેનું અંતર $a\sqrt{3}$ છે.

($\because$ $AG = \sqrt{AC^2+CG^2} = \sqrt{2a^2+a^2} = \sqrt{3}\,a^2 = a\sqrt{3}$)

તેમની સ્થિતિ-ઊર્જા $U_3 = \frac{kq^2}{a\sqrt{3}} \times 4$ (3)

(4) AO જેવી 8 જોડ, દરેક જોડના વિદ્યુતભારો વચ્ચેનું અંતર $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ છે. ($AO = \frac{AG}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$)

તેમની સ્થિતિ-ઊર્જા $U_4 = -\frac{kq\,2q}{\left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \times 8$ (4)

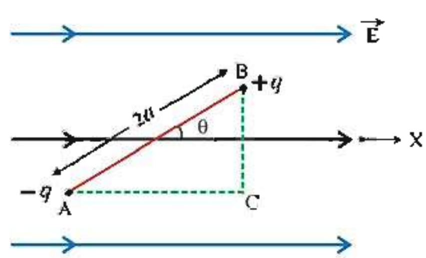
$\therefore$ કુલ સ્થિતિ-ઊર્જા $U = U_1 + U_2 + U_3 + U_4$

$$\therefore U = \frac{12kq^2}{a} + \frac{12kq^2}{a\sqrt{2}} + \frac{4kq^2}{a\sqrt{3}} - \frac{32kq^2}{a\sqrt{3}}$$

$$= \frac{kq^2}{a}\left[12+\frac{12}{\sqrt{2}}+\frac{4}{\sqrt{3}}-\frac{32}{\sqrt{3}}\right] = \frac{kq^2}{a}\left[12(1+\frac{1}{\sqrt{2}})-\frac{28}{\sqrt{3}}\right]$$

2.11 બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્રમાં વિદ્યુત-ડાઈપોલની સ્થિતિ-ઊર્જા

આકૃતિ 2.9માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે એક વિદ્યુત-ડાઈપોલ ABને X દિશામાંના સમાન વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$માં એવી રીતે મૂકેલ છે કે ડાઈપોલની અક્ષ ક્ષેત્ર $\vec{E}$ સાથે θ કોણ બનાવે છે. તેની ડાઈપોલ-મોમેન્ટ $p = q(2a)$; AB દિશામાં છે. આ વિદ્યુત-ડાઈપોલની વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જા એટલે તેના બંને વિદ્યુતભારોની ($+q$ અને $-q$ની) વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જાનો બૈજિક સરવાળો. આપણે યાદચ્છિક રીતે $-q$ વિદ્યુતભાર પાસે વિદ્યુતસ્થિતિમાન શૂન્ય લઈશું. આથી તેની સ્થિતિ-ઊર્જા શૂન્ય થશે. હવે તેની સાપેક્ષે $+q$ની સ્થિતિ-ઊર્જા શોધીએ, તો તે સમગ્ર ડાઈપોલની સ્થિતિ-ઊર્જા થશે.



આકૃતિ 2.9 ડાયપોલની સ્થિતિ-ઊર્જા

અત્રે વિદ્યુતક્ષેત્ર X દિશામાં જ હોવાથી

$$E = \frac{-\Delta V}{\Delta x} = \frac{-(V_B - V_A)}{AC}$$

$$= \frac{-V_B}{2a\cos\theta} \quad (\because V_A = 0) \tag{2.11.1}$$

$$\therefore V_B = -E\,(2a\cos\theta) \tag{2.11.2}$$

$\therefore$ B આગળ $+q$ વિદ્યુતભારની સ્થિતિ-ઊર્જા,

$$U = qV_B = q[-E\ 2a\ \cos\theta] \tag{2.11.3}$$

$$= -E(q\ 2a\ \cos\theta)$$

$$= -E\ p\ \cos\theta\ [\because q(2a) = p]$$

$$= -\vec{E}\cdot\vec{p} \tag{2.11.4}$$

$\therefore$ સમગ્ર ડાઈપોલની વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જા U

$$= -\vec{E}\cdot\vec{p} = -\vec{p}\cdot\vec{E} \tag{2.11.5}$$

કેટલાક મુદ્દા નોંધી લઈએ :

(1) જો ડાઈપોલની અક્ષ ક્ષેત્રને લંબ હોય, તો $\theta = \frac{\pi}{2}$ અને

$$U = Ep\ cos\frac{\pi}{2} = 0$$

(2) જો ડાઈપોલની અક્ષ ક્ષેત્રને સમાંતર હોય (($\vec{AB} \parallel \vec{E}$ હોય)

તો $\theta = 0$ $\therefore$ $U = -pE$. સ્થિતિ-ઊર્જાનું આ **લઘુતમ મૂલ્ય** છે. (કોઈ પણ તંત્ર તેની સ્થિતિ-ઊર્જા લઘુતમ બને તેવી સ્થિતિમાં રહેવાનો પ્રયત્ન કરે છે.)

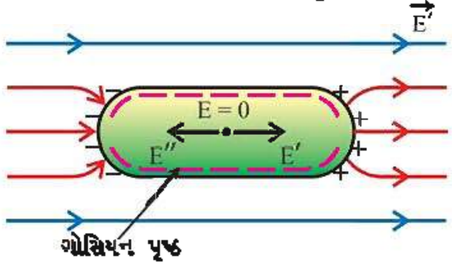
તેથી અહીં, ડાઈપોલ તેની અક્ષ, વિદ્યુતક્ષેત્રને સમાંતર ગોઠવવાનો પ્રયત્ન કરે છે, જેથી $\vec{p}$, $\vec{E}$ને સમાંતર બને. આ સ્થિતિમાં ડાઈપોલ સ્થિર સમતુલનમાં રહે છે. ($\theta = \pi$ માટે ડાઈપોલ અસ્થિર સંતુલનમાં હોય છે.)

2.12 સુવાહકોનું સ્થિત-વિદ્યુતશાસ્ત્ર (Electrostatics of Conductors)

ધાત્વિક સુવાહકોને વિદ્યુતક્ષેત્રમાં મૂકવામાં આવે અથવા આવા સુવાહકો પર વિદ્યુતભાર મૂકવામાં આવે ત્યારે તેમાં કેવી અસરો થાય છે તે જાણવું રસપ્રદ છે.

(a) સુવાહકો પર બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્રની અસર

ધાત્વિક સુવાહકોમાં લેટિસ બિંદુઓ પર ગોઠવાયેલાં ધન આયનો અને આવાં આયનો વચ્ચેના અવકાશમાં અસ્તવ્યસ્ત ગતિ કરતા મુક્ત ઈલેક્ટ્રૉન હોય છે. તેઓ ધાતુમાં ગતિ કરવા માટે મુક્ત છે, પણ ધાતુમાંથી બહારનીકળી જવા માટે મુક્ત નથી. આવા વાહકને બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$ માં મૂકીએ ત્યારે મુક્ત ઈલેક્ટ્રૉન્સ ક્ષેત્રની વિરુદ્ધ દિશામાં લાગતા બળની અસર હેઠળ ગતિ કરીને વાહકના એક છેડાની સપાટી પર જમા થાય છે અને તેટલા જ પ્રમાણમાં બીજા છેડા પર **ધન વિદ્યુતભાર** 'જમા' થયેલો ગણી શકાય છે. આમ, વિદ્યુતભારો **પ્રેરિત** થાય છે. આ પ્રેરિત વિદ્યુતભારો, વાહકના અંદરના વિસ્તારમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}''$ ઉત્પન્ન કરે છે, જે બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્રની **વિરુદ્ધ** દિશામાં હોય છે. આ બન્ને વિદ્યુતક્ષેત્રો સમાન મૂલ્યનાં થાય ત્યારે વાહકના અંદરના વિસ્તારમાં પરિણામી (net) વિદ્યુતક્ષેત્ર ($\vec{E}$) શૂન્ય થાય છે. (જુઓ આકૃતિ 2.10). હવે વાહકમાં વિદ્યુતભારોની ગતિ અટકી જાય છે અને વિદ્યુતભારો છેડાના પૃષ્ઠ પર સ્થિર થઈ જાય છે.



આકૃતિ 2.10 વિદ્યુતક્ષેત્રમાં સુવાહક

હવે આકૃતિ 2.10માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે સપાટીની નજીક જ અંદરના વિસ્તારમાં ત્રુટક રેખા વડે દર્શાવેલા પૃષ્ઠ જેવું એક ગોસિયન પૃષ્ઠ વિચારીએ. આ પૃષ્ઠ પરનું દરેક બિંદુ વાહકની અંદરનું બિંદુ હોવાથી સમગ્ર પૃષ્ઠ પર વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$ શૂન્ય છે. આથી તેના વડે ઘેરાતો વિદ્યુતભાર પણ શૂન્ય છે. ($\because \int \vec{E}\cdot\vec{ds} = \frac{q}{\varepsilon_0}$).

આમ બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્રમાં મૂકેલ ધાત્વિક સુવાહકોના કિસ્સામાં,

(1) વાહકના પૃષ્ઠ પર સ્થિર વિદ્યુતભાર વિતરણ પ્રેરિત થાય છે.

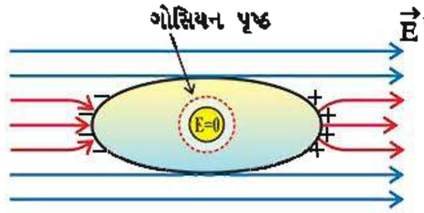
(2) વાહકના અંદરના વિસ્તારમાં પરિણામી (net) વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય હોય છે.

(3) વાહકના અંદરના વિસ્તારમાં ચોખ્ખો (net) વિદ્યુતભાર શૂન્ય હોય છે.

(4) વાહકની બહારના પૃષ્ઠ પરના દરેક બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્ર સ્થાનિક રીતે પૃષ્ઠને લંબરૂપે હોય છે. જો વિદ્યુતક્ષેત્ર લંબરૂપે ન હોત તો, વિદ્યુતક્ષેત્રનો પૃષ્ઠને સમાંતર કંઈક ઘટક મળત અને તેને લીધે વિદ્યુતભાર સપાટી પર ગતિ કરત. પણ હવે તો ગતિ અટકી ગઈ છે અને વિદ્યુતભારો સ્થિર થઈ ગયા છે. આમ વિદ્યુતક્ષેત્રનો પૃષ્ઠને સમાંતર ઘટક શૂન્ય હશે, તેથી વિદ્યુતક્ષેત્ર પૃષ્ઠને લંબરૂપે હશે.

(5) સુવાહકની અંદર બધે $\vec{E} = 0$ હોવાથી સુવાહકના સમગ્ર કદના વિસ્તારમાં (એટલે કે અંદર) વિદ્યુતસ્થિતિમાન અચળ હોય છે અને સપાટી પરના સ્થિતિમાનના મૂલ્ય જેટલું હોય છે.

(6) વાહકની અંદર કોઈ બખોલ (cavity) હોય તો વાહકને બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્ર ($\vec{E}'$) માં મૂકવા છતાં વાહકની અંદર તેમજ બખોલની અંદર પણ પરિણામી વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય જ થાય છે. આકૃતિ 2.11માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે બખોલની ફરતે એક ગૉસિયન પૃષ્ઠ વિચારો. આ પૃષ્ઠ પરનું દરેક બિંદુ વાહકની અંદરનું બિંદુ હોવાથી આ સમગ્ર પૃષ્ઠ પર વિદ્યુતક્ષેત્ર ($\vec{E}$) શૂન્ય છે. આથી બખોલની સપાટી પરનો કુલ વિદ્યુતભાર શૂન્ય છે, ($\int \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{q}{\varepsilon_0}$) અને બખોલની અંદર પણ વિદ્યુતભાર ન હોવાથી બખોલની અંદર બધે વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય છે.



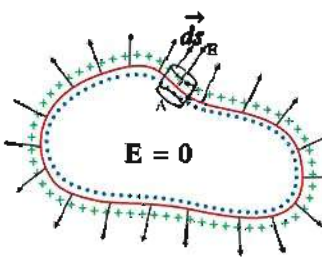
આકૃતિ 2.11 સુવાહકમાં બખોલ

આ હકીકતને ઇલેક્ટ્રોસ્ટેટિક શિલ્ડિંગ (electrostatic shielding) કહે છે. આપણે કારમાં બેઠા હોઈએ અને બહાર વીજળીના કડાકા-ભડાકા થતા હોય તો વીજળીથી બચવા માટે કારનાં બારી-બારણાં (કારને સમગ્રપણે ધાતુની જ ધારી લઈએ !) બંધ કરી દેવાં જોઈએ. આમ કરવાથી આપણે 'કારની બખોલ'માં આવી જઈએ છીએ અને ઇલેક્ટ્રોસ્ટેટિક શિલ્ડિંગ થતાં આપણને વીજળીથી રક્ષણ મળે છે.

(b) સુવાહક પર વિદ્યુતભાર મૂકતાં થતી અસરો : ઉપરની ચર્ચામાં આપણે ધાત્ત્વિક વાહકને બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્રમાં મૂકતાં કેવી અસરો થાય છે, તેનો વિચાર કર્યો. હવે બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્રની ગેરહાજરીમાં ધાતુ પદાર્થ પર વિદ્યુતભાર મૂકીએ તો ઉદ્ભવતી અસરોની નોંધ કરીશું :

(1) ધાત્ત્વિક વાહકને બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્રમાં મૂકેલ હોય કે ન હોય તથા તેના પર વિદ્યુતભાર પણ મૂકેલ હોય કે ન હોય તેવી બધી (પણ સ્થાયી) પરિસ્થિતિમાં વાહકની અંદરના ભાગમાં તો બધે વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય જ હોય છે. આ એક અત્યંત મહત્ત્વની અને વ્યાપક હકીકત છે. (સુવાહકને વ્યાખ્યાયિત કરવાના ગુણધર્મ તરીકે આ બાબતને લઈ શકાય છે.)

(2) ધાતુ પદાર્થ પર મૂકેલો વિદ્યુતભાર તે વાહકના બાહ્ય પૃષ્ઠ પર જ વિતરિત થાય છે. ધાતુના અંદરના વિસ્તારમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય હોય છે તે બાબત પરથી આપણે આ બાબત સમજી શકીએ છીએ. સુવાહકના પૃષ્ઠની અંદર તદ્દન નજીક, બિંદુઓ વડે દર્શાવેલા ગાઉસિયન પૃષ્ઠનો વિચાર કરો (આકૃતિ 2.12). તેના પરનું દરેક બિંદુ વાહકના પૃષ્ઠ પર નહિ પણ પૃષ્ઠની અંદર આવેલું છે, તેથી દરેક બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય છે. આથી ગૉસના પ્રમેય પરથી તે પૃષ્ઠ વડે ઘેરાયેલા વિદ્યુતભાર પણ શૂન્ય હોય છે.



આકૃતિ 2.12

(3) સ્થાયી પરિસ્થિતિમાં આ વિદ્યુતભારો પૃષ્ઠ પર સ્થિર હોય છે. આ પરથી કહી શકાય કે વિદ્યુતક્ષેત્ર સ્થાનિક રીતે પૃષ્ઠને લંબ હોય છે, જુઓ આકૃતિ (2.12).

(4) વિદ્યુતભારિત વાહકના પૃષ્ઠ પરના કોઈ પણ બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$ જેટલું હોય છે, જ્યાં $\hat{n}$ = પૃષ્ઠમાંથી બહાર આવતા લંબની દિશામાંનો એકમસદિશ.

આ બાબતને સાબિત કરવા માટે આપણે આકૃતિ (2.12)માં દર્શાવેલ એક સૂક્ષ્મ લંબાઈ અને સૂક્ષ્મ આડછેદ ધરાવતી પિલ-બૉક્સ (નળાકાર) જેવી ગૉસિયન સપાટીનો વિચાર કરીશું. તેનો થોડો ભાગ પૃષ્ઠની અંદર અને થોડો ભાગ પૃષ્ઠની બહાર છે. આ પિલ-બૉક્સની બંધ સપાટી વડે ઘેરાયેલો વિદ્યુતભાર $q = \sigma ds$; જ્યાં σ = સુવાહક પર વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠઘનતા. વાહકના પૃષ્ઠના દરેક બિંદુએ $\vec{E}$, પૃષ્ઠ-ખંડને લંબ છે, તેથી પૃષ્ઠ સદિશને સમાંતર ($\vec{E} \parallel \vec{ds}$) થશે.

પરંતુ પૃષ્ઠની અંદર $\vec{E} = 0$ છે. તેથી પૃષ્ઠની અંદરના પિલ-બૉક્સના આડછેદમાંથી બહાર આવતું ફ્લક્સ $= 0$. તેની બાજુ માટે દરેક બિંદુ આગળ ક્ષેત્રફળ સદિશ $\vec{E}$ ને લંબ છે. તેથી તેમાંથી ફ્લક્સ $= 0$. પૃષ્ઠની બહારના પિલ-બૉક્સના આડછેદમાંથી બહાર આવતું ફ્લક્સ $\vec{E} \cdot \vec{ds} = Eds$

$\therefore$ કુલ ફ્લક્સ $= E\, ds$

$$\therefore \text{ગૉસના પ્રમેય અનુસાર } E\, ds = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma\, ds}{\varepsilon_0} \qquad (2.12.1)$$

$$\therefore E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad (2.12.2)$$

$$\text{સદિશ સ્વરૂપમાં } \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n} \qquad (2.12.3)$$

જો σ ધન હોય તો $\vec{E}$ પૃષ્ઠમાંથી બહારની તરફના લંબની દિશામાં છે. જો σ ઋણ હોય તો, $\vec{E}$ પૃષ્ઠની અંદર તરફના લંબની દિશામાં છે.

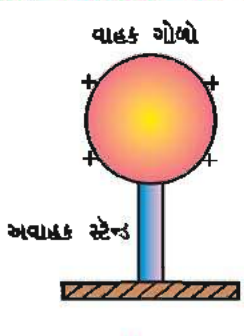
(5) જો કોઈ વાહકની બખોલમાં વિદ્યુતભાર મૂકવામાં આવે તો, આ વિદ્યુતભારને કારણે બખોલની સપાટી અને વાહકની બાહ્ય સપાટી પર વિદ્યુતભારો એવી રીતે પ્રેરિત થશે કે વાહકના અંદરના પણ બખોલની બહાર હોય તેવા વિસ્તારમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય જ થાય છે. બખોલની અંદર વિદ્યુતક્ષેત્ર અશૂન્ય હોય છે. તેમજ વાહકની બહારના ભાગમાં પણ તે વિદ્યુતભારને લીધે વિદ્યુતક્ષેત્ર અશૂન્ય હોય છે.

નોંધ (માત્ર જાણકારી પૂરતી) : ઉપરની સમગ્ર ચર્ચામાં વાહકોને અલગ કરેલા (insulated) કલ્પેલ છે. વાહકના અણીવાળા ભાગના પૃષ્ઠ પર પૃષ્ઠ વિદ્યુતઘનતા ઘણી મોટી હોય છે. પરિણામે આવા ભાગ પાસેના વિસ્તારમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર પ્રબળ હોય છે. હવે જો આ વિદ્યુતક્ષેત્ર પૂરતું પ્રબળ બની જાય તો પૃષ્ઠ પરના ઈલેક્ટ્રૉન તેમને ધાતુ સાથે જકડી રાખતાં બળોનો સામનો કરી પૃષ્ઠ પરથી છટકી જાય. આ ઘટનાને કોરોના ડિસ્ચાર્જ કહે છે. (વ્યાપક રીતે આ ઘટનાને ડાઈઈલેક્ટ્રિક બ્રેકડાઉન કહે છે.)

પૃષ્ઠમાંથી છટકી ગયેલ ઈલેક્ટ્રૉન વિદ્યુતક્ષેત્રમાં પ્રવેગિત ગતિ કરે છે અને માર્ગમાં આવતા હવાના કણો સાથે અથડાય છે. પરિણામે, ઉત્તેજિત થયેલ કણો વિકિરણનું ઉત્સર્જન કરે છે અને લીલાશ પડતો ગ્લો ઉત્પન્ન થાય છે. વળી, અથડામણ દરમિયાન હવાના અણુઓનું આયનીકરણ પણ થાય છે.

જૂના જમાનામાં ખલાસીઓને પોતાના વહાણના શઢના અણીવાળા ભાગો પાસે આવા ગ્લો દેખાતા હોય, ત્યારે તેઓ તેમને Elmo's fire એવું નામ આપતા.

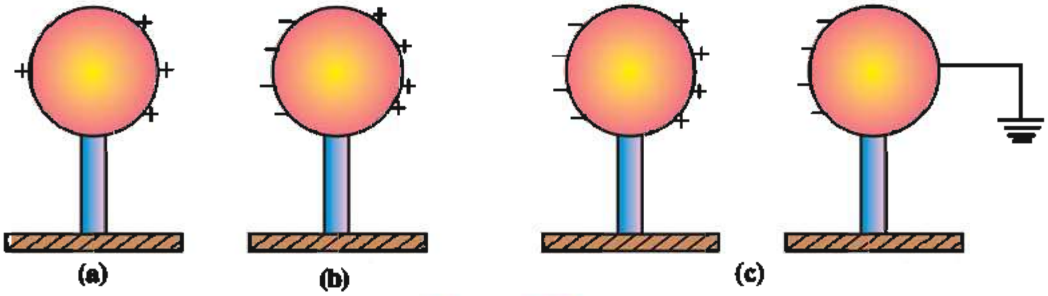
2.13 કેપેસિટર્સ અને કેપેસિટન્સ (Capacitors and Capacitance)



આકૃતિ 2.13

આકૃતિ 2.13માં દર્શાવેલ એક અલગ કરેલા વાહક ગોળાને ધ્યાનમાં લો. ધારો કે આ ગોળા પર ક્રમશઃ ધન વિદ્યુતભાર મૂકવામાં આવે છે. જેમજેમ ગોળા પર ધન વિદ્યુતભાર (Q) વધતો જાય તેમતેમ ગોળાની સપાટી પરનું સ્થિતિમાન (V) અને ગોળાની આસપાસના વિસ્તારમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર ($\vec{E}$) પણ ક્રમશઃ વધતાં જાય છે. આમ કરતાં કોઈ એક તબક્કે વિદ્યુતક્ષેત્ર ગોળાની આસપાસની હવાના કણોનું આયનીકરણ કરવા જેટલું પ્રબળ બની જાય છે. આથી ગોળા પરનો વિદ્યુતભાર હવામાંથી વહન પામે છે, એટલે હવે હવાનો અવાહકતાનો ગુણધર્મ ભાંગી પડે છે. (જળવાતો નથી)

આ અસરને ડાઈઈલેક્ટ્રિક બ્રેકડાઉન કહે છે. આમ, ગોળા પરનો વિદ્યુતભાર leak થવા લાગે છે અને હવે ગોળો કોઈ વધારાના વિદ્યુતભારનો સંગ્રહ કરી શકતો નથી. આ સમગ્ર પ્રક્રિયા દરમિયાન ગોળા પરના વિદ્યુતભાર (Q) અને ગોળા પરના સ્થિતિમાન (V)નો ગુણોત્તર અચળ હોય છે. આ ગુણોત્તરને ગોળાનું કૅપેસિટન્સ (C) કહે છે. [$C = \frac{Q}{V}$]



આકૃતિ 2.14 કૅપેસિટર

કોઈ અવાહક માધ્યમ જે મહત્તમ વિદ્યુતક્ષેત્ર સુધી પોતાનો અવાહકતાનો ગુણધર્મ જાળવી શકે છે, તેને તે માધ્યમની ડાઈઈલેક્ટ્રિક સ્ટ્રેન્થ (dielectric strength) કહે છે. (અથવા જે લઘુતમ વિદ્યુતક્ષેત્ર વડે આપેલા અવાહક માધ્યમમાં આયનીકરણ શરૂ થાય તેને પણ તે માધ્યમની ડાઈઈલેક્ટ્રિક સ્ટ્રેન્થ કહે છે.) હવા માટે ડાઈઈલેક્ટ્રિક સ્ટ્રેન્થનું મૂલ્ય લગભગ $3000 \frac{V}{mm}$ છે.

હવે, જો ઉપર ચર્ચેલ ગોળાની વિદ્યુતભાર સંગ્રહ કરવાની ક્ષમતા (કૅપેસિટન્સ C) વધારવી હોય તો બીજા એક અલગ કરેલા વાહક ગોળાને પ્રથમ ગોળાની નજીક લાવીને મૂકો. આમ કરવાથી બીજા ગોળામાં વિદ્યુતભાર પ્રેરિત થશે. જુઓ આકૃતિ 2.14(b) જો બીજા ગોળાનું આકૃતિ 2.14(c) મુજબ અર્થિંગ કરવામાં આવે તો પૃથ્વીમાંથી ઇલેક્ટ્રૉન્સ ગોળા પર જઈ ગોળા પરના ધન વિદ્યુતભારને તટસ્થ કરી દે છે. હવે બીજા ગોળા પરના ઋણ વિદ્યુતભારને લીધે પ્રથમ ગોળાની સપાટી પરના સ્થિતિમાનમાં અને તેની નજીકના વિદ્યુતક્ષેત્રમાં પણ ઘટાડો થાય છે. પ્રથમ ગોળા પર હવે અગાઉ કરતાં વિદ્યુતભાર સંગ્રહ કરવાની ક્ષમતા વધે છે. આ સ્થિતિમાં પણ દરેક તબક્કે ગોળા પરના વિદ્યુતભાર Q અને બંને ગોળા વચ્ચેના p.d. (V) નો ગુણોત્તર અચળ માલૂમ પડે છે. આ ગુણોત્તરને આ બે ગોળાના તંત્રનું કૅપેસિટન્સ (C) કહે છે. આ કૅપેસિટન્સનું મૂલ્ય ગોળાઓનાં પરિમાણ, તેમની સાપેક્ષ ગોઠવણી અને તેમની વચ્ચેના માધ્યમ પર આધાર રાખે છે.

"એકબીજાથી અલગ કરેલા બે સુવાહકથી બનતી રચનાને કૅપેસિટર કહે છે." આવા સુવાહકોને કૅપેસિટરની પ્લેટો કહે છે. ધન વિદ્યુતભાર ધરાવતા સુવાહકને ધન પ્લેટ અને ઋણ વિદ્યુતભાર ધરાવતા સુવાહકને ઋણ પ્લેટ કહે છે. ધન પ્લેટ પરના વિદ્યુતભારને કૅપેસિટર પરનો વિદ્યુતભાર અને બંને વાહકો વચ્ચેના વિદ્યુતસ્થિતિમાનના તફાવત (V)ને કૅપેસિટરની બે પ્લેટો વચ્ચેનો વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત (p.d.) કહે છે. અહીં કૅપેસિટરનું કૅપેસિટન્સ $C = \frac{Q}{V}$.

કૅપેસિટન્સનો SI એકમ coulomb / volt છે અને તે મહાન વિજ્ઞાની માઈકલ ફેરેડેની સ્મૃતિમાં Farad તરીકે ઓળખાય છે. તેની સંજ્ઞા F છે. Farad એ વ્યાવહારિક હેતુઓ માટે મોટો એકમ છે અને તેથી વ્યવહારમાં નાના એકમો microfarad ($1\ \mu F = 10^{-6} F$), nenofarad ($1\ nF = 10^{-9} F$) અને picofarad ($1\ pF = 10^{-12} F$) વપરાય છે.

નિશ્ચિત કૅપેસિટન્સ ધરાવતા કૅપેસિટરને ⊣⊢ સંજ્ઞા દ્વારા અને ચલ કૅપેસિટન્સ ધરાવતા કૅપેસિટરને  સંજ્ઞા દ્વારા દર્શાવવામાં આવે છે.

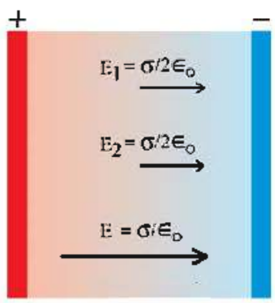
વળી, Q વિદ્યુતભાર ધરાવતા R ત્રિજ્યાના એક જ વાહક ગોળાને પણ કૅપેસિટર કહી શકાય, કારણ કે તેની પણ વિદ્યુતભાર સંગ્રહ કરવાની 'કંઈક' ક્ષમતા તો છે જ. આવા કૅપેસિટર માટે બીજો વાહક (–Q વિદ્યુતભારવાળો) અનંત અંતરે હોય તેમ ગણવામાં આવે છે. ગોળાથી અનંત અંતરે સ્થિતિમાન શૂન્ય ગણતાં આ ગોળાની સપાટી પરનું સ્થિતિમાન $V = \frac{kQ}{R}$, આથી આ ગોળા અને અનંત અંતરે કલ્પિત ગોળા વચ્ચેનો વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત પણ આ $V = \frac{kQ}{R}$ જેટલો થાય.

$\therefore$ આ ગોળાનું કૅપેસિટન્સ $C = \frac{Q}{V} = \frac{QR}{kQ} = \frac{R}{k} = 4\pi\varepsilon_0 R$ ($\because k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$). પૃથ્વીને પણ કૅપેસિટર ગણી શકાય, તમે તેનું કૅપેસિટન્સ ગણી જુઓ.

2.14 સમાંતર પ્લેટ કૅપેસિટર (Parallel Plate Capacitor)

આવા કૅપેસિટરમાં સમાન ક્ષેત્રફળ (A) ધરાવતી એકબીજાથી અલગ કરેલી બે વાહક પ્લેટોને એકબીજાથી અમુક (d) અંતરે એકબીજાને સમાંતર રાખેલી હોય છે. (જુઓ આકૃતિ 2.15) તેમની વચ્ચેના અવાહક માધ્યમ તરીકે શૂન્યાવકાશ (કે હવા) છે તેમ ધારીને આપણે તેના કૅપેસિટન્સનું સૂત્ર મેળવીશું.

ધારો કે આ કૅપેસિટર પરનો વિદ્યુતભાર Q છે, તેથી તેની પ્લેટો પર વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠઘનતાનું મૂલ્ય $\sigma = \frac{Q}{A}$ અહીં dનું મૂલ્ય દરેક પ્લેટના પરિમાણની સરખામણીએ ઘણું નાનું રાખવામાં આવે છે. આમ કરવાથી પ્લેટના છેડા નજીકના વિસ્તારમાં વિદ્યુતક્ષેત્રની અનિયમિતતા અવગણી શકાય છે અને પ્લેટો વચ્ચેના સમગ્ર વિસ્તારમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$ સમાન ગણી શકાય છે.



આકૃતિ 2.15 સમાંતર પ્લેટ કૅપેસિટર

ધન પ્લેટને લીધે બે પ્લેટ વચ્ચેના વિસ્તારમાં ઉદ્‌ભવતું સમાન વિદ્યુતક્ષેત્ર

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \text{ (ધનથી ઋણ પ્લેટની દિશામાં)} \tag{2.14.1}$$

તે જ પ્રમાણે ઋણ પ્લેટને લીધે તે જ વિસ્તારમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર

$$E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{2.14.2}$$

(તે પણ ધનથી ઋણ પ્લેટ તરફ)

આ બન્ને વિદ્યુતક્ષેત્રો એક જ દિશામાં હોવાથી, પરિણામી સમાન વિદ્યુતક્ષેત્ર...

$$E = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{2.14.3}$$

તે ધન પ્લેટથી ઋણ પ્લેટની દિશામાં મળે છે.

$$\therefore E = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \tag{2.14.4}$$

વળી, બન્ને પ્લેટોની બીજી તરફના વિસ્તારમાં E_1 અને E_2 સમાન મૂલ્યના અને પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં હોવાથી ત્યાં પરિણામી વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય થાય છે.

જો આ બન્ને પ્લેટો વચ્ચેનો વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત (p.d) V હોય, તો $V = Ed$. (2.14.5)

$\therefore$ સમીકરણ (2.14.4) અને (2.14.5) પરથી,

$$V = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} d \tag{2.14.6}$$

આથી સમાંતર પ્લેટ કૅપેસિટરનું કૅપેસિટન્સ $C = \frac{Q}{V}$; સૂત્ર પરથી

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \tag{2.14.7}$$

સમીકરણ (2.14.7) પરથી સ્પષ્ટ છે કે જો દરેક 1 m × 1 mની હોય તેવી બે પ્લેટો વચ્ચેનું અંતર 1 mm હોય, તો તેનું કૅપેસિટન્સ $C = \frac{(8.85 \times 10^{-12})(1)}{10^{-3}} = 8.85 \times 10^{-9}$F થશે, અને જો 1 F જેટલું કૅપેસિટન્સ જોઈએ, તો 1 mm અંતરે રાખેલી બન્ને પ્લેટમાંની દરેકનું ક્ષેત્રફળ

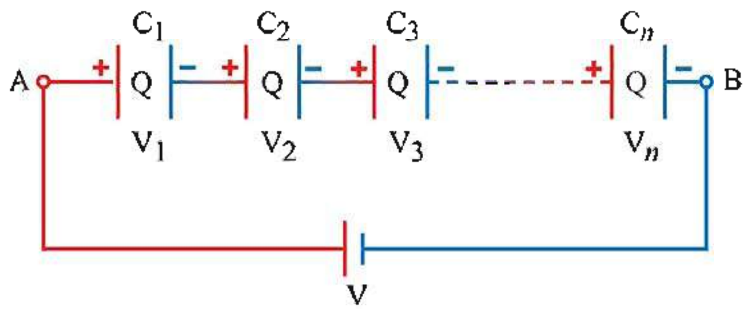
$A = \frac{Cd}{\varepsilon_0} = \frac{(1 \times 10^{-3})}{8.85 \times 10^{-12}} = 1.13 \times 10^{8}\ m^2$ હોવું જોઈએ, એટલે કે દરેક પ્લેટની લંબાઈ અને પહોળાઈ દરેક લગભગ 1×10^4 m = 10 km હોવી જોઈએ.

2.15 કૅપેસિટરોનાં જોડાણ (Combinations of Capacitors)

C_1, C_2, ..., C_n કૅપેસિટન્સ ધરાવતાં કૅપેસિટરોનું જોડાણ કરવાથી બનતા તંત્રનું કંઈક સમતુલ્ય (અસરકારક) કૅપેસિટન્સ C હોય છે. આપણે આવા બે પ્રકારનાં જોડાણોની ચર્ચા કરીશું.

(a) કૅપેસિટરોનું શ્રેણીજોડાણ (Series Combination of Capacitors)

C_1, C_2, C_3, ..., C_n જેટલાં કૅપેસિટન્સ ધરાવતા કૅપેસિટરોને આકૃતિ 2.16માં દર્શાવ્યા અનુસાર વાહક તાર વડે જોડતાં બનતી ગોઠવણને કૅપેસિટરોનું શ્રેણીજોડાણ કહે છે.



આકૃતિ 2.16 કૅપેસિટરોનું શ્રેણી જોડાણ

આવી સ્થિતિમાં દરેક કૅપેસિટર પર સમાન મૂલ્યનો વિદ્યુતભાર Q હોય છે, બૅટરી વડે એક પ્લેટ પર (–Q) વિદ્યુતભાર જમા થાય એટલે તેના વડે બીજી પ્લેટ પર +Q વિદ્યુતભાર પ્રેરિત થાય છે. આ માટે તે બીજી પ્લેટ પરથી – Q વિદ્યુતભાર નજીકના કૅપેસિટરની એક પ્લેટ પર જમા થાય છે અને તેના વડે તેની બીજી પ્લેટ પર + Q વિદ્યુતભાર પ્રેરિત થાય છે. આવું આગળ ચાલે છે. આમ, આવા જોડાણમાં બધાં કૅપેસિટર પરનો વિદ્યુતભાર સમાન હોય છે, પરંતુ બે પ્લેટો વચ્ચેનો વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત (p. d.) જુદાંજુદાં કૅપેસિટરો માટે જુદો-જુદો હોય છે. આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે ,

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n \tag{2.15.1}$$

$$= \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} + ... + \frac{Q}{C_n} \tag{2.15.2}$$

($\because$ $C_1 = \frac{Q}{V_1}$, ... વગેરે.)

$$\therefore \frac{V}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + ... + \frac{1}{C_n} \tag{2.15.3}$$

જો આ શ્રેણી જોડાણનું અસરકારક કૅપેસિટન્સ C હોય તો,

$$\frac{V}{Q} = \frac{1}{C} \tag{2.15.4}$$

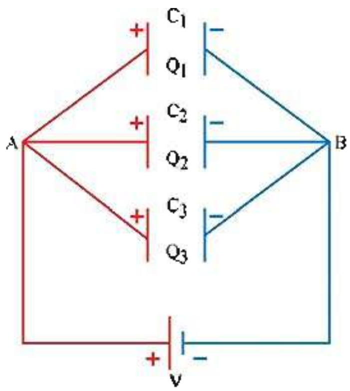
$$\therefore \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + ... + \frac{1}{C_n} \tag{2.15.5}$$

આમ, અસરકારક કૅપેસિટન્સ Cનું મૂલ્ય જોડાણમાંના કૅપેસિટન્સના સૌથી નાના મૂલ્ય કરતાં પણ ઓછું છે.

(અવરોધોના સમાંતર જોડાણમાં અસરકારક (સમતુલ્ય) અવરોધનું જે સૂત્ર મળતું હતું તેના જેવું સૂત્ર અહીં શ્રેણી-જોડાણમાં મળે છે, તે નોંધો.)

(b) કૅપેસિટરોનું સમાંતર જોડાણ (Parallel Combination of Capacitors)

C_1, C_2, C_3 કૅપેસિટન્સ ધરાવતાં કૅપેસિટરોને આકૃતિ 2.17 મુજબ વાહક તારો વડે જોડતાં બનતી ગોઠવણને કૅપેસિટરોનું સમાંતર જોડાણ કહે છે.



આકૃતિ 2.17 કૅપેસિટરોનું સમાંતર જોડાણ

આવા જોડાણમાં દરેક કૅપેસિટરની બે પ્લેટો વચ્ચેનો વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત (V) સમાન હોય છે અને તે તેમનાં બે સામાન્ય બિંદુઓ A અને B વચ્ચેના વિદ્યુતસ્થિતિમાનના તફાવત જેટલો હોય છે, પરંતુ દરેક કૅપેસિટર પર વિદ્યુતભાર Q જુદા-જુદા મૂલ્યનો હોય છે.

અત્રે, $Q_1 = C_1V$

$Q_2 = C_2V$

$$Q_3 = C_3V \tag{2.15.6}$$

અને કુલ વિદ્યુતભાર

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$
$$= C_1V + C_2V + C_3V$$
$$= (C_1 + C_2 + C_3)V \tag{2.15.7}$$

હવે જો આ સમાંતર જોડાણનું અસરકારક કૅપેસિટન્સ C હોય તો,

$$C = \frac{Q}{V}$$
$$= C_1 + C_2 + C_3 \tag{2.15.8}$$

જો આવાં n કૅપેસિટરોનું સમાંતર જોડાણ કરેલું હોય, તો અસરકારક કૅપેસિટન્સ

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots\ldots + C_n \tag{2.15.9}$$

અત્રે કૅપેસિટન્સનું મૂલ્ય, જોડાણમાંના કૅપેસિટન્સના સૌથી મોટા મૂલ્ય કરતાં પણ વધુ હોય છે.

(અવરોધોના શ્રેણીજોડાણમાં સમતુલ્ય (અસરકારક) અવરોધનું જે સૂત્ર મળતું હતું, તેના જેવું સૂત્ર અહીં સમાંતર જોડાણમાં મળે છે તે નોંધો.)

ઉદાહરણ 8 : સમાંતર પ્લેટ કૅપેસિટરમાં એક પ્લેટ પર બીજી પ્લેટને લીધે લાગતું બળ $F = \frac{1}{2}\frac{CV^2}{d}$. હોય છે, તેમ સાબિત કરો.

ઉકેલ : અત્રે, એક પ્લેટ વડે ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર, $E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ (1)

આ ક્ષેત્રમાં σA વિદ્યુતભાર ધરાવતી બીજી પ્લેટ રહેલી છે.

$\therefore$ બીજી પ્લેટ પર લાગતું બળ $F = (\sigma A)E_1$

સમીકરણ (1)માંથી E_1નું મૂલ્ય મૂકતાં,

$$F = \frac{\sigma^2 A}{2\varepsilon_0}$$

પણ $\sigma = \frac{Q}{A}$

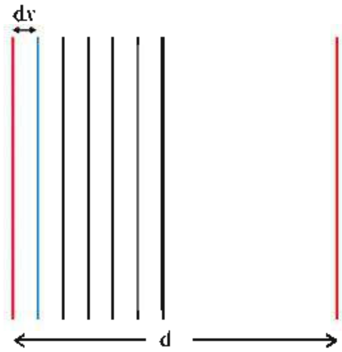
$$\therefore F = \frac{\frac{Q^2}{A^2}.A}{2\varepsilon_0} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A} = \frac{Q^2/d}{2\varepsilon_0 A/d} = \frac{Q^2}{2dC} \qquad \left(\because \frac{\varepsilon_0 A}{d} = C\right)$$

$$\therefore F = \frac{1}{2}\frac{CV^2}{d} \qquad (\because Q = CV)$$

ઉદાહરણ 9 : આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે d અંતરમાં ક્રમિક પ્લેટો વચ્ચે dx જેટલું સૂક્ષ્મ અંતર રહે તેમ સૂક્ષ્મ જાડાઈ ધરાવતી અસંખ્ય સમાન પ્લેટ મૂકી એક કૅપેસિટર તૈયાર કરવામાં આવ્યું છે, તો આ રીતે બનતા કૅપેસિટરનું કૅપેસિટન્સ ગણો.

ઉકેલ : સંયોજનમાં રહેલા દરેક કૅપેસિટરનું કૅપેસિટન્સ,

$dC = \frac{\varepsilon_0 A}{dx}$



આ બધાં કૅપેસિટર એકબીજાં સાથે શ્રેણીજોડાણમાં છે.

$\therefore$ કુલ કૅપેસિટન્સ C માટે, $\frac{1}{C} = \frac{1}{dC} + \frac{1}{dC} + ...$

$= \frac{dx}{\varepsilon_0 A} + \frac{dx}{\varepsilon_0 A} + ... = \frac{1}{\varepsilon_0 A}(dx + dx + ... + dx)$

$\therefore \frac{1}{C} = \frac{d}{\varepsilon_0 A}$

$\therefore C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$

આ મૂલ્ય પ્રથમ અને છેલ્લી પ્લેટ વડે બનતા કૅપેસિટરના કૅપેસિટન્સ જેટલું છે.

2.16 વિદ્યુતભારિત કૅપેસિટરમાં સંગ્રહિત ઊર્જા (Energy Stored in a Charged Capacitor)

કૅપેસિટર પર વિદ્યુતભાર પ્રસ્થાપિત કરવા માટે વિદ્યુતભાર પર કાર્ય કરવું પડે છે. આ કાર્ય પ્રસ્થાપિત થયેલ વિદ્યુતભારની સ્થિતિ-ઊર્જાના સ્વરૂપમાં સંગ્રહ પામે છે. આવી સ્થિતિ-ઊર્જાને કૅપેસિટરની ઊર્જા કહે છે.

ધારો કે, એક સમાંતર પ્લેટ કૅપેસિટર પર Q જેટલો વિદ્યુતભાર છે. આ સ્થિતિમાં કૅપેસિટરની દરેક પ્લેટ બીજી પ્લેટના વિદ્યુતક્ષેત્રમાં રહેલી છે તેમ કહેવાય.

કૅપેસિટરની એક પ્લેટ વડે ઉદ્‌ભવતા સમાન વિદ્યુતક્ષેત્રનું મૂલ્ય $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ (2.16.1)

જ્યાં, $\sigma = \frac{Q}{A}$ અને A = દરેક પ્લેટનું ક્ષેત્રફળ.

આથી આ પ્લેટ પરનું સ્થિતિમાન યાદચ્છિક રીતે શૂન્ય લેતાં તેનાથી d અંતરે રહેલી બીજી પ્લેટ પરનું સ્થિતિમાન $= \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)d$ થાય. (2.16.2)

આ પરથી પ્રથમ પ્લેટની સ્થિતિ-ઊર્જા શૂન્ય થશે અને બીજી પ્લેટની

સ્થિતિ-ઊર્જા = (સ્થિતિમાન) × (તેના પરનો વિદ્યુતભાર Q) = $\left(\frac{\sigma d}{2\varepsilon_0}\right)Q$ (2.16.3)

$\therefore$ કૅપેસિટરમાં સંગ્રહિત ઊર્જા

$$U_E = \frac{\sigma d Q}{2\varepsilon_0} \tag{2.16.4}$$

$$= \left(\frac{Q}{A}\right)\frac{dQ}{2\varepsilon_0} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A/d}$$

$$= \frac{Q^2}{2C} \tag{2.16.5}$$

જ્યાં $C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$ = કૅપેસિટરનું કૅપેસિટન્સ

વળી, $C = \frac{Q}{V}$ હોવાથી તથા સમીકરણ (2.16.5) પરથી

આપણે $U_E = \frac{VQ}{2}$ (2.16.6)

અને $U_E = \frac{1}{2}CV^2$ પણ લખી શકીએ. (2.16.7)

આપણે આ પરિણામો (2.16.5), (2.16.6) અને (2.16.7) સમાંતર પ્લેટ કૅપેસિટર માટે મેળવ્યાં છે, પરંતુ તે વ્યાપકપણે બધા પ્રકારના કૅપેસિટર માટે પણ સાચાં છે.

કૅપેસિટરમાં સંગ્રહિત ઊર્જાને ઊર્જા-ઘનતાના સ્વરૂપમાં દર્શાવવી :

કૅપેસિટરમાં સંગ્રહિત ઊર્જા $U_E = \frac{1}{2}CV^2$ છે. આ ઊર્જા કૅપેસિટરોની બે પ્લેટોની વચ્ચેના વિસ્તારમાં એટલે કે Ad કદમાં સંગ્રહ પામેલી છે, જ્યાં A = દરેક પ્લેટનું ક્ષેત્રફળ અને d = બે પ્લેટ વચ્ચેનું અંતર, આથી કૅપેસિટરની પ્લેટો વચ્ચેના વિસ્તારમાં **એકમકદ દીઠ ઊર્જા** - એટલે કે ઊર્જાઘનતા ρ_E તરીકે લખીએ તો,

$$\rho_E = \frac{U_E}{\text{કદ}} = \frac{\frac{1}{2}CV^2}{Ad} \qquad (2.16.8)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_0 A}{d}\right)\frac{V^2}{Ad} \qquad (2.16.9)$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{V}{d}\right)\left(\frac{V}{d}\right) \qquad (2.16.10)$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \qquad (2.16.11)$$

જ્યાં $\frac{V}{d} = E$ બે પ્લેટો વચ્ચેનું વિદ્યુતક્ષેત્ર

આમ, કૅપેસિટરમાં સંગ્રહિત ઊર્જા તેની પ્લેટો વચ્ચેના વિદ્યુતક્ષેત્રમાં સંગ્રહિત ઊર્જારૂપે ગણી શકાય છે.

આ સૂત્ર આપણે સમાંતર પ્લેટ કૅપેસિટર માટે મેળવ્યું છે, પરંતુ તે એક વ્યાપક પરિણામ છે અને કોઈ પણ પ્રકારના વિદ્યુતભાર-વિતરણના વિદ્યુતક્ષેત્ર માટે પણ વાપરી શકાય છે.

ઉદાહરણ 10 : 4 μFના એક કૅપેસિટરને 50 V સુધી ચાર્જ કરેલ છે. હવે, તેને 2 μFના એકબીજા કૅપેસિટર સાથે **સમાંતર**માં જોડવામાં આવે છે. આ સંયોજનની કુલ ઊર્જા ગણો. બીજું કૅપેસિટર પ્રારંભમાં ચાર્જ કરેલું નથી. આ પ્રક્રિયામાં ગુમાવાતી ઊર્જા અવગણો.

ઉકેલ : પ્રારંભિક ઊર્જા (એક કૅપેસિટરની)

$$W_1 = \frac{1}{2}C_1V^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times (50)^2 = 2 \times 2500 = 5000 \ \mu J$$

હવે બંને કૅપેસિટરો સમાંતરમાં જોડાય છે. ધારો કે જોડાણ બાદ C_1 અને C_2 પરના વિદ્યુતભારો અનુક્રમે q_1 અને q_2 છે. વળી, જો તેમનો સામાન્ય સ્થિતિમાનનો તફાવત V' હોય, તો ($(V' = \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2})$ પરથી)

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

$$\therefore \frac{q_1+q_2}{q_2} = \frac{C_1+C_2}{C_2} \qquad (1)$$

પણ વિદ્યુતભારના સંરક્ષણ અનુસાર

$$q_1 + q_2 = Q \qquad (2)$$

જ્યાં Q એ પ્રારંભિક વિદ્યુતભાર છે.

હવે, $Q = C_1V = (4)(50)$

$= 200 \ \mu C$

સમીકરણ (1)માં સમીકરણ (2) વાપરી, તેમાં Qનું મૂલ્ય મૂકતાં,

$$\frac{200}{q_2} = \frac{(4+2)}{2}$$

$$\therefore\ q_2 = \frac{200 \times 2}{6} = \frac{200}{3}\ \mu C$$

હવે સમીકરણ (2) પરથી

$$q_1 = 200 - \frac{200}{3}$$

$$= \frac{400}{3}\ \mu C$$

ઊર્જા માટે : પ્રથમ કૅપેસિટરની ઊર્જા $\frac{q_1^2}{2C_1} = \left(\frac{400}{3}\right)^2 \times \frac{1}{2 \times 4} = 2222\ \mu J$

બીજા કૅપેસિટરની ઊર્જા, $\frac{q_2^2}{2C_2} = \left(\frac{200}{3}\right)^2 \times \frac{1}{2 \times 2} = 1111\ \mu J$

જોડાણ બાદની કુલ ઊર્જા = 2222 + 1111 = 3333 = μJ

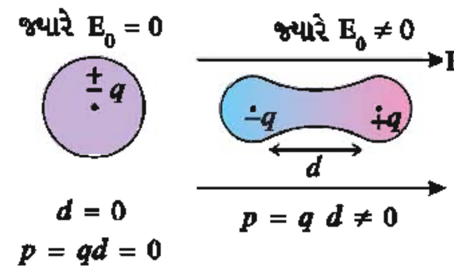
આમ, ઊર્જામાં 5000 − 3333 = 1667 μJ. નો ઘટાડો થયો. આટલી ઊર્જા ઉષ્મા રૂપે વિખેરાયેલ છે.

2.17 ડાઇઇલેક્ટ્રિક પદાર્થો અને તેમનું પોલરાઇઝેશન (ધ્રુવીભવન) (Dielectric Substances and their Polarisation)

અવાહક પદાર્થોને **ડાઇઇલેક્ટ્રિક** કહે છે. ફેરેડે નામના વિજ્ઞાનીએ એમ શોધ્યું કે કૅપેસિટરની પ્લેટો વચ્ચે અવાહક પદાર્થ મૂકવામાં આવે તો કૅપેસિટરના કૅપેસિટન્સમાં વધારો થાય છે. આવું કેવી રીતે થાય છે તે જાણવા, ડાઇઇલેક્ટ્રિકને વિદ્યુતક્ષેત્રમાં મૂકતાં તેનામાં ઉત્પન્ન થતી અસરો વિશે જાણવું જોઈએ. ડાઇઇલેક્ટ્રિક બે પ્રકારનાં હોય છે : (1) ધ્રુવીય (polar) અને (2) અધ્રુવીય (non-polar.)

જે ડાઇઇલેક્ટ્રિકના અણુઓ (કે પરમાણુઓ) કાયમી વિદ્યુત-ડાઇપોલ ચાકમાત્રા (ડાયપોલ-મોમેન્ટ) ધરાવે છે. તેમને ધ્રુવીય ડાઇઇલેક્ટ્રિક કહે છે. દા. ત., HC*l*, H_2O, ... વગેરે. જે ડાઇઇલેક્ટ્રિકના અણુઓ કાયમી વિદ્યુત-ડાઇપોલ ચાકમાત્રા ધરાવતા નથી તેમને અધ્રુવીય ડાઇઇલેક્ટ્રિક કહે છે. દા. ત., H_2, O_2, CO_2, ...વગેરે.

(a) અધ્રુવીય અણુ : તેમાં સંમિતિને કારણે ધન વિદ્યુતભારનું કેન્દ્ર અને ઋણ વિદ્યુતભારનું કેન્દ્ર એકબીજા પર સંપાત થયેલાં હોય છે. તેથી તેઓ કાયમી વિદ્યુત-ડાઇપોલ ચાકમાત્રા ધરાવતા નથી. હવે તેને સમાન વિદ્યુતક્ષેત્ર ($\vec{E}_0$)માં મૂકવામાં આવે ત્યારે આ કેન્દ્રો એકબીજાથી વિરુદ્ધ દિશાઓમાં સ્થાનાંતરિત થાય છે. આથી હવે તે $p = qd$ જેટલી ડાઇપોલ ચાકમાત્રા (મોમેન્ટ) ધરાવતો થાય છે; જ્યાં d = સ્થાનાંતરિત થયા બાદ આ કેન્દ્રો વચ્ચેનું અંતર, q = ધન અથવા ઋણ વિદ્યુતભારનું મૂલ્ય. જુઓ આકૃતિ 2.18.



આકૃતિ 2.18 અધ્રુવીય અણુનું પોલરાઇઝેશન

આમ, તેનામાં વિદ્યુત-ડાઇપોલ પ્રેરિત થાય છે. બીજા શબ્દોમાં બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્રને લીધે આવા અણુઓથી બનેલા ડાઇઇલેક્ટ્રિકનું પોલરાઇઝેશન (polarisation) થયું એમ કહેવાય છે. જો બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્ર ($\vec{E}_0$) બહુ પ્રબળ ન હોય, તો એવું જણાય છે કે અણુની ડાઇપોલ ચાકમાત્રા $\vec{p}$, $\vec{E}_0$ના સમપ્રમાણમાં હોય છે.

$$\therefore\ \vec{p} = \alpha \vec{E}_0 \qquad (2.17.1)$$

જ્યાં αને અણુની ધ્રુવીયતા (polarisability) કહે છે.

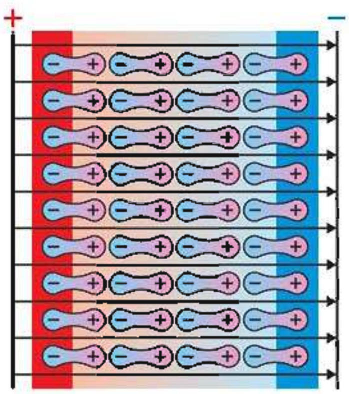
$\vec{p}$ અને $\vec{E}_0$ના એકમો પરથી αનો એકમ $C^2\ m\ N^{-1}$ મળે છે.

(b) ધ્રુવીય અણુ : ધ્રુવીય અણુને કાયમી ડાઈપોલ ચાકમાત્રા (મોમેન્ટ) $\vec{p}$ હોય છે, પણ બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્રની ગેરહાજરીમાં પદાર્થના જુદા-જુદા અણુઓની ડાઈપોલ ચાકમાત્રાઓ બધી દિશાઓમાં અસ્તવ્યસ્ત ગોઠવાયેલી હોવાથી પદાર્થની પરિણામી ડાઈપોલ ચાકમાત્રા શૂન્ય બને છે.

હવે બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્ર લગાડતાં દરેક અણુકીય ડાઈપોલ પર ટૉર્ક લાગે છે. તેથી તે ભ્રમણ કરે છે અને વિદ્યુતક્ષેત્રને સમાંતર બનવાનો પ્રયત્ન કરે છે. આમ કુલ પરિણામી ડાઈપોલ ચાકમાત્રા ઉત્પન્ન થાય છે. આ રીતે આવા અણુઓથી બનેલા ડાઇઇલેક્ટ્રિકનું પોલરાઇઝેશન થયું એમ કહેવાય છે. વળી, ઉષ્મીય દોલનોને લીધે ડાઈપોલ ચાકમાત્રા વિદ્યુતક્ષેત્રને સમાંતર સ્થિતિમાંથી ચલાયમાન પણ થાય છે. જો તાપમાન T હોય તો અણુ દીઠ સરેરાશ ઉષ્મીય ઊર્જા ($\frac{3}{2}k_BT$), ડાઈપોલની વિદ્યુતક્ષેત્રમાંની સ્થિતિ-ઊર્જાને ($U = -\vec{p}\cdot\vec{E}_0$)ને સમતોલે તેવી સ્થિતિમાં
ડાઈપોલ્સ ગોઠવાય છે. 0 K તાપમાને જોકે ઉષ્મીય ઊર્જા શૂન્ય હોવાથી ડાઈપોલ્સ વિદ્યુતક્ષેત્રને સમાંતર ગોઠવાય છે. આપણે માત્ર આ આદર્શ પરિસ્થિતિની ચર્ચા કરીશું.

(c) વિદ્યુતભારિત કેપેસિટરની બે પ્લેટો વચ્ચે હવા (અથવા શૂન્યાવકાશ) હોય ત્યારે વિદ્યુતક્ષેત્ર

$$E_0 = \frac{\sigma_f}{\epsilon_0} \tag{2.17.2}$$



આકૃતિ 2.19 ડાઇઇલેક્ટ્રિકમાં ધ્રુવીભવન

જ્યાં, σ_f = દરેક પ્લેટ પરની પૃષ્ઠ વિદ્યુતભાર ઘનતાનું મૂલ્ય. આ પ્લેટો પરનો વિદ્યુતભાર મુક્ત (free) વિદ્યુતભાર કહેવાય છે. કારણ કે આ વિદ્યુતભારનું મૂલ્ય આપણી ઇચ્છા મુજબનું (યોગ્ય બૅટરી જોડીને) રાખી શકીએ છીએ. દરેક પ્લેટનું ક્ષેત્રફળ = A છે.

હવે પ્લેટો વચ્ચેના વિસ્તારમાં (ધ્રુવીય કે અધ્રુવીય) ડાઇઇલેક્ટ્રિકનું એક ચોસલું (slab) મૂકતાં તેનામાં આ વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}_0$ વડે ઉદ્ભવતું ધ્રુવીભવન બાજુની આકૃતિ 2.19માં દર્શાવ્યું છે. આપણે ડાઇઇલેક્ટ્રિકમાંનું વિદ્યુતક્ષેત્ર શોધવા માંગીએ છીએ.

આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે ચોસલાના અંદરના ભાગમાં અનુક્રમે આવતી ડાઈપોલ્સના પરસ્પર વિરુદ્ધ પ્રકારના વિદ્યુતભારો અત્યંત નજીક હોવાથી એકબીજાની અસરો નાબૂદ કરે છે અને માત્ર પ્લેટો નજીકની ચોસલાની બાજુઓ પર ચોખ્ખો (net) વિદ્યુતભાર રહે છે. આવા વિદ્યુતભારોને **પ્રેરિત વિદ્યુતભારો** અથવા **બદ્ધ વિદ્યુતભારો (bound charges)** અથવા **પોલરાઇઝેશન વિદ્યુતભારો (polarisation charges)** કહે છે. ધન પ્લેટની નજીકની ચોસલાની સપાટી પર ($-\sigma_bA$) જેટલો ઋણ વિદ્યુતભાર અને ઋણ પ્લેટની નજીકની સપાટી પર $+\sigma_bA$ જેટલો ધન વિદ્યુતભાર પ્રેરિત થાય છે, જ્યાં $-\sigma_b$ અને $+\sigma_b$ અનુરૂપ સપાટી પરની **બદ્ધ વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠઘનતા** છે. પ્રેરિત થયેલા આ વિદ્યુતભાર વડે ડાઈપોલ રચાય છે. તેની ડાઈપોલ ચાકમાત્રાનું મૂલ્ય $P_{total} = (\sigma_bA)d$ (2.17.3)

જ્યાં, d = ચોસલાની જાડાઈ = બે પ્લેટ વચ્ચેનું અંતર (જો ચોસલાની બાજુઓ પ્લેટોના સંપર્કમાં હોય)

અહીં, Ad = ચોસલાનું કદ = V (2.17.4)

એકમકદ દીઠ ઉદ્ભવતી ડાઈપોલ ચાકમાત્રાને **પોલરાઈઝેશન તીવ્રતા** અથવા ટૂંકમાં **પોલરાઈઝેશન (P)** કહે છે.

$$\therefore\ P = \frac{P_{total}}{V} = \frac{(\sigma_bA)d}{Ad} = \sigma_b \tag{2.17.5}$$

આમ ડાઇઇલેક્ટ્રિકમાં પોલરાઇઝેશન (P)નું મૂલ્ય તેની સપાટી પર પ્રેરિત થયેલી **બદ્ધ વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠઘનતા (σ_b)** જેટલું હોય છે. આ પ્રેરિત વિદ્યુતભારોથી ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}_0$ની વિરુદ્ધ દિશામાં છે.

હવે ડાઇઇલેક્ટ્રિકમાંનું પરિણામી વિદ્યુતક્ષેત્ર E, આ ($\sigma_f - \sigma_b$)ને લીધે ઉદ્ભવેલું છે.

$$\therefore\ E = \frac{\sigma_f - \sigma_b}{\varepsilon_0} \tag{2.17.6}$$

આમ ડાઇઇલેક્ટ્રિકની અંદરનું પરિણામી વિદ્યુતક્ષેત્ર, લાગુ પાડેલા બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્ર કરતાં ઓછું હોય છે. (પરંતુ યાદ કરો, સુવાહકમાં તો પરિણામી વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય જ હતું.)

વળી, એવું જણાયું છે કે જો બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્ર (E_0) બહુ પ્રબળ ન હોય તો પોલરાઇઝેશન (P), ડાઇઇલેક્ટ્રિકની અંદરના પરિણામી વિદ્યુતક્ષેત્ર (E)ને સમપ્રમાણમાં હોય છે, એટલે કે $P \propto E$

$$\therefore\ P = \varepsilon_0 x_e E \tag{2.17.7}$$

જ્યાં x_e = અચળાંક જેને, ડાઇઇલેક્ટ્રિક માધ્યમની ઇલેક્ટ્રિક સસેપ્ટિબિલિટી કહે છે. તે ડાઇઇલેક્ટ્રિક માધ્યમની જાત અને તાપમાન પર આધારિત છે. $P \propto E$નું પાલન કરતા ડાઇઇલેક્ટ્રિકને રેખીય (linear) ડાઇઇલેક્ટ્રિક કહે છે.

સમીકરણ (2.17.7) પરથી $x_e = \dfrac{P}{\varepsilon_0 E}$ (2.17.8)

સમીકરણ 2.17.6માં $E_0 = \dfrac{\sigma_f}{\varepsilon_0}$ અને $P = \sigma_b$નો ઉપયોગ કરતાં

$$E = \frac{\varepsilon_0 E_0 - P}{\varepsilon_0} \tag{2.17.9}$$

$\therefore\ \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 E_0 - \varepsilon_0 x_e E$ ($\because$ સમીકરણ 2.17.8 પરથી $P = \varepsilon_0 x_e E$) (2.17.10)

$$\therefore\ \varepsilon_0 E + \varepsilon_0 x_e E = \varepsilon_0 E_0 \tag{2.17.11}$$

$$E\varepsilon_0(1 + x_e) = E_0\varepsilon_0 \tag{2.17.12}$$

અહીં $\varepsilon_0(1 + x_e)$ને તે ડાઇઇલેક્ટ્રિક માધ્યમની પરમિટિવિટી ε કહે છે.

એટલે કે $\varepsilon = \varepsilon_0(1 + x_e)$ (2.17.13)

$$\therefore\ E\varepsilon = E_0\varepsilon_0 \tag{2.17.14}$$

$$\therefore\ E = \frac{E_0}{\varepsilon / \varepsilon_0} \tag{2.17.15}$$

$\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ને તે માધ્યમની સાપેક્ષ પરમિટિવિટી ε_r કહે છે. અને તેને ડાઇઇલેક્ટ્રિક અચળાંક K પણ કહે છે. Kનું મૂલ્ય હંમેશાં 1 કરતાં મોટું હોય છે.

આમ, $\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \varepsilon_r = K$ (2.17.16)

સમીકરણ (2.17.13) અને (2.17.16) પરથી

$$\frac{\varepsilon_0(1 + x_e)}{\varepsilon_0} = K$$

$$\therefore\ K = 1 + x_e \tag{2.17.17}$$

આ સમીકરણ ડાઇઇલેક્ટ્રિકના બે ગુણધર્મો x_e અને K વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવે છે.

સમીકરણ (2.17.15) પરથી

$$E = \frac{E_0}{K} \tag{2.17.18}$$

આમ, મુક્ત અવકાશમાંના કોઈ વિસ્તારમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર E_0 હોય, તો તે જ વિસ્તારમાં ડાઇઇલેક્ટ્રિક મૂકવાથી, ડાઇઇલેક્ટ્રિકમાંનું વિદ્યુતક્ષેત્ર, મુક્ત અવકાશમાંના મૂલ્ય કરતાં Kમા ભાગનું (એટલે કે $\frac{1}{K}$ ગણું) થાય છે.

વિદ્યુતસ્થાનાંતર : ડાઇઇલેક્ટ્રિકને કેપેસિટરની બે પ્લેટો વચ્ચે મૂકતાં ડાઇઇલેક્ટ્રિકની અંદર ઉદ્ભવતું પરિણામી વિદ્યુતક્ષેત્ર $E = \frac{\sigma_f - \sigma_b}{\varepsilon_0}$ સૂત્ર પરથી મળે છે.

જ્યાં σ_f = દરેક પ્લેટ પરની મુક્ત વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠઘનતાનું મૂલ્ય, σ_b = ડાઇઇલેક્ટ્રિકની બંને સપાટી પરની બદ્ધ વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠઘનતાનું મૂલ્ય

σ_b = પોલરાઇઝેશન P હોવાથી,

$$E = \frac{\sigma_f - P}{\varepsilon_0} \tag{2.17.19}$$

$$\therefore \varepsilon_0 E + P = \sigma_f \tag{2.17.20}$$

અત્રે $\vec{E}$ની દિશા અને $\vec{P}$ની દિશા એક જ હોય છે અને $\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ને વિદ્યુતસ્થાનાંતર $\vec{D}$ કહે છે.

$$\therefore \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \tag{2.17.21}$$

તે સદિશ ક્ષેત્ર છે. $\vec{D}$નો ઉપયોગ કરવાથી વિદ્યુતક્ષેત્રને લગતાં ઘણાં સમીકરણો સરળ સ્વરૂપનાં બને છે. ડાઇઇલેક્ટ્રિકની હાજરીમાં ગૉસનો નિયમ

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = q \tag{2.17.22}$$

તરીકે લખાય છે, જ્યાં q એ માત્ર મુક્ત વિદ્યુતભાર છે. (તેમાં બદ્ધ વિદ્યુતભારોનો સમાવેશ થતો નથી.) આમ, ડાઇઇલેક્ટ્રિકમાં મુક્ત વિદ્યુતભારો સાથે સંબંધિત ક્ષેત્ર $\vec{E}$ નથી પણ $\vec{D}$ છે, એટલે કે $\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ છે.

2.18 ડાઇઇલેક્ટ્રિક ધરાવતું કેપેસિટર (Capacitor with a Dielectric)

જ્યારે સમાંતર પ્લેટ કેપેસિટરની પ્લેટો વચ્ચે હવા (કે શૂન્યાવકાશ) હોય ત્યારે તેના કેપેસિટન્સનું સૂત્ર

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \tag{2.18.1}$$

છે. જ્યાં ε_0 = શૂન્યાવકાશની પરમિટિવિટી, A = દરેક પ્લેટનું ક્ષેત્રફળ, d = બે પ્લેટ વચ્ચેનું અંતર. હવે જો આ પ્લેટો વચ્ચેના સમગ્ર વિસ્તારમાં ε જેટલી પરમિટિવિટી ધરાવતું ડાઇઇલેક્ટ્રિક માધ્યમ મૂકવામાં આવે, તો તેના કેપેસિટન્સ C'નું સૂત્ર મેળવવા માટે ઉપરના સમીકરણમાં ε_0ને બદલે ε મૂકવું જોઈએ.

$$\therefore C' = \frac{\varepsilon A}{d} \tag{2.18.2}$$

$$\therefore \frac{C'}{C} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = K \tag{2.18.3}$$

જ્યાં K = તે માધ્યમનો ડાઇઇલેક્ટ્રિક અચળાંક

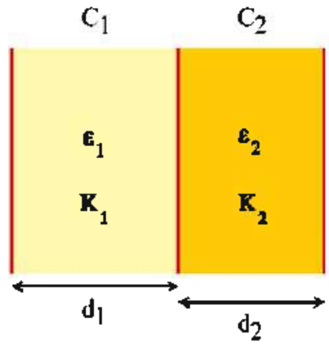
$$\therefore C' = KC \tag{2.18.4}$$

આમ કેપેસિટરની બે પ્લેટ વચ્ચે K જેટલા ડાઇઇલેક્ટ્રિક અચળાંક ધરાવતા માધ્યમને મૂકવાથી કેપેસિટરનું કેપેસિટન્સ K ગણું થઈ જાય છે અને કેપેસિટરની વિદ્યુતભારનો સંગ્રહ કરવાની ક્ષમતા પણ K ગણી થઈ જાય છે.

ઉદાહરણ 11 : સમાન ક્ષેત્રફળ A ધરાવતી ત્રણ સમાંતર પ્લેટોનું એક કેપેસિટર છે. તેમની વચ્ચેનાં અંતરો d_1 અને d_2 છે. તેમની વચ્ચેના અવકાશમાં ε_1 અને ε_2 પરમિટિવિટીવાળાં ડાઇઇલેક્ટ્રિક દ્રવ્યો ભર્યાં છે, તો (i) આ તંત્રનું કેપેસિટન્સ શોધો. (ii) આ કેપેસિટન્સનું મૂલ્ય K_1 અને K_2ના પદમાં દર્શાવો.

ઉકેલ : આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે અત્રે રચાતાં બે કેપેસિટરો એકબીજાં સાથે શ્રેણીમાં છે. જો કુલ કેપેસિટન્સ C હોય તો,

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \text{ પણ } C_1 = \frac{\varepsilon_1 A}{d_1} \text{ અને } C_2 = \frac{\varepsilon_2 A}{d_2}$$



$$\frac{1}{C} = \frac{d_1}{\varepsilon_1 A} + \frac{d_2}{\varepsilon_2 A}$$

$$= \frac{d_1\varepsilon_2 A + \varepsilon_1 A d_2}{\varepsilon_1\varepsilon_2 A^2} = \frac{d_1\varepsilon_2 + d_2\varepsilon_1}{\varepsilon_1\varepsilon_2 A}$$

$$\therefore C = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 A}{d_1\varepsilon_2 + d_2\varepsilon_1} \text{ અથવા } C = \frac{A}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}}$$

$K_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}$; પરથી $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 K_1$.

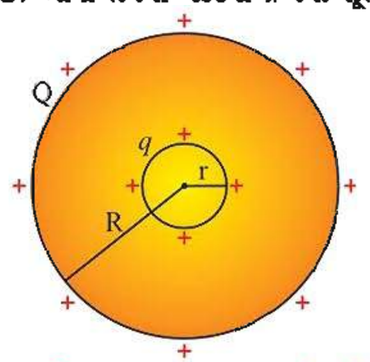
તે જ રીતે $\varepsilon_2 = \varepsilon_0 K_2$; જ્યાં ε_0 = એ શૂન્યાવકાશની પરમિટિવિટી છે.

$$\therefore C = \frac{A}{\frac{d_1}{\varepsilon_0 K_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_0 K_2}} = \frac{A\varepsilon_0}{\frac{d_1}{K_1} + \frac{d_2}{K_2}}$$

2.19 વાન્-દ્-ગ્રાફ જનરેટર (Van-de-Graaff Generator)

આ યંત્ર વડે અમુક મિલિયન (મિલિયન = 10^6 = દસ લાખ) વૉલ્ટનો p.d પ્રસ્થાપિત કરી શકાય છે. આવા ઊંચા p.*d*.માંથી વિદ્યુતભારિત કણને યોગ્ય રીતે પસાર કરવાથી તે પ્રવેગિત થઈ (અત્યંત ઊંચો વેગ અને તેથી) અત્યંત ઊંચી ઊર્જા ($\frac{1}{2}mv^2$) પ્રાપ્ત કરે છે. આવી ઊર્જાને લીધે તેઓ દ્રવ્યમાં વધારે ઊંડે સુધી જઈ શકે છે. આથી તેમની મદદથી દ્રવ્યના સૂક્ષ્મ બંધારણનો અભ્યાસ કરી શકાય છે. આ યંત્રનો સિદ્ધાંતનીચે મુજબ છે :

આકૃતિ 2.20માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે એક અલગ કરેલી R ત્રિજ્યાની વાહક ગોળાકાર કવચ (spherical shell) પર ધારો કે Q જેટલો વિદ્યુતભાર છે અને આ કવચના કેન્દ્ર પર r ત્રિજ્યા ($r < R$) નો અને q વિદ્યુતભાર ધરાવતો વાહક ગોળો છે.



આકૃતિ 2.20 વાન્-દ્-ગ્રાફ જનરેટરનો સિદ્ધાંત

અત્રે, R ત્રિજ્યાની કવચના પૃષ્ઠ પર વિદ્યુતસ્થિતિમાન,

$$V_R = \frac{kQ}{R} + \frac{kq}{R} \quad (2.19.1)$$

અને r ત્રિજ્યાના ગોળાના પૃષ્ઠ પર વિદ્યુતસ્થિતિમાન

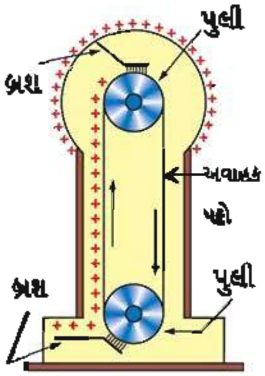
$$V_r = \frac{kQ}{R} + \frac{kq}{r} \quad (2.19.2)$$

આ બંને સમીકરણો પરથી સ્પષ્ટ છે કે નાના ગોળા પર સ્થિતિમાન વધારે છે અને તેમની વચ્ચેનો વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત (p.d.)

$$V_r - V_R = \left(\frac{kQ}{R}+\frac{kq}{r}\right) - \left(\frac{kQ}{R}+\frac{kq}{R}\right)$$

$$= kq\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right] \qquad (2.19.3)$$

આથી જો નાના ગોળાનો મોટા ગોળા સાથે વિદ્યુતસંપર્ક કરવામાં આવે, તો વિદ્યુતભાર નાના પરથી મોટા ગોળા પર જાય છે. વળી, જો નાના ગોળા પર કોઈક રીતે સતત વિદ્યુતભાર વધાર્યા કરીએ, તો સતત આ વિદ્યુતભાર મોટા ગોળા પર જાય છે. આમ, મોટા ગોળા પર ખૂબ જ મોટા પ્રમાણમાં વિદ્યુતભાર એકઠો કરી તેનું સ્થિતિમાન ખૂબ જ વધારી શકાય છે.



આકૃતિ 2.21
વાન્-દ્-ગ્રાફ જનરેટર

આ સિદ્ધાંત પર આધારિત વાન્-દ્-ગ્રાફે બનાવેલ યંત્રને વાન-દ્-ગ્રાફ જનરેટર કહે છે.

આકૃતિ 2.21માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે જમીનથી કેટલાક મીટરની ઊંચાઈએ થોડા મીટરની ત્રિજ્યાવાળો ગોળાકાર કવચ અવાહક પદાર્થ પર ટેકવેલ છે.

એક પુલી (ગરગડી) ઉપરના મોટા ગોળાના કેન્દ્ર પર અને બીજી પુલીનીચે જમીન પર રાખેલ છે. તેમના પર ઇલેક્ટ્રિક મોટર વડે એક અવાહક પટ્ટો (belt) ફરતો રહે તેવી ગોઠવણ કરવામાં આવે છે. ડિસ્ચાર્જ-ટ્યૂબની મદદથી ધન વિદ્યુતભારો મેળવવામાં આવે છે અને (તીક્ષ્ણ ધારવાળા) ધાતુના બ્રશ મારફતે નીચેની પુલી પાસેના પટ્ટા પર તેમનો સતત સ્પ્રે કરવામાં આવે છે.

આ ધન વિદ્યુતભાર પટ્ટા મારફતે ઉપરની પુલી તરફ જાય છે. ત્યાં બીજા બ્રશ વડે પટ્ટા પરથી દૂર થઈ કવચ પર જમા થાય છે. (કારણ કે ઉપરની પુલી પરના પટ્ટા કરતાં કવચ પરનું સ્થિતિમાન ઓછું છે.) આ રીતે મોટી ગોળાકાર કવચ પર મોટા પ્રમાણમાં (લગભગ 6થી 8 મિલિયન વોલ્ટનો) વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત મેળવી શકાય છે.

ઉદાહરણ 12 : R_1 ત્રિજ્યાના એક વાહક ગોળા પર Q જેટલો વિદ્યુતભાર છે. હવે, આ ગોળાને R_2 ત્રિજ્યાના ગોળા સાથે એક વાહક તાર વડે જોડવામાં આવે છે, તો દરેક ગોળા પર વિદ્યુતભાર શોધો. આ બંને ગોળાઓ એકબીજાથી ઘણા દૂર છે.

ઉકેલ : ધારો કે, બંને ગોળાઓને વાહક તાર વડે જોડ્યા બાદ તેમના પરના વિદ્યુતભારો અનુક્રમે q_1 અને q_2 છે.

$$\therefore Q = q_1 + q_2 \qquad (1)$$

હવે, બંને ગોળાઓ વાહક તાર વડે જોડ્યા હોવાથી, તેમનાં સ્થિતિમાનો સમાન હોવાં જોઈએ.

$$\therefore \frac{kq_1}{R_1} = \frac{kq_2}{R_2} \quad \therefore \frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1}{R_2} \qquad (2)$$

$$\therefore \frac{q_2+q_1}{q_2} = \frac{R_1+R_2}{R_2}$$

$$\therefore \frac{Q}{q_2} = \frac{R_1+R_2}{R_2}$$

$$\therefore q_2 = \frac{R_2}{R_1+R_2}Q \qquad (3)$$

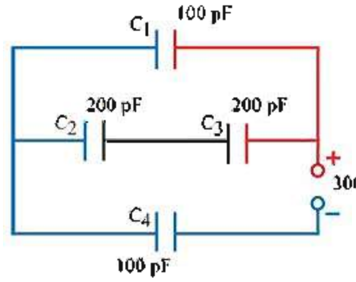
q_2 નું મૂલ્ય સમીકરણ (1)માં મૂકતાં,

$$Q = q_1 + \frac{R_2}{R_1+R_2}Q$$

આ પરથી, $q_1 = \dfrac{R_1}{R_1+R_2}Q$

ઉદાહરણ 13 : આકૃતિમાં દર્શાવેલ નેટવર્કનું અસરકારક કૅપેસિટન્સ નક્કી કરો અને દરેક કૅપેસિટર પર વિદ્યુતભાર શોધો.

ઉકેલ : અત્રે C_2 અને C_3 શ્રેણીમાં છે. તેમનું સમતુલ્ય (અસરકારક) કૅપેસિટન્સ C' હોય તો, $C' = \frac{C_2C_3}{C_2+C_3} = \frac{200\times200}{200+200} = 100pF$.



આ C' અને C_1 સમાંતરમાં છે, તેથી તેમનું સમતુલ્ય કૅપેસિટન્સ C'' હોય,

તો $C'' = C' + C_1 = 100 + 100 = 200$ pF.

આ C'' અને C_4 શ્રેણીમાં છે તેથી તેમનું અસરકારક કૅપેસિટન્સ C''' હોય,

તો $C''' = \frac{C''C_4}{C''+C_4} = \frac{200\times100}{200+100} = \frac{200}{3}$ pF.

હવે બૅટરીએ પૂરો પાડેલો વિદ્યુતભાર $Q = C'''V = \left(\frac{200\times10^{-12}}{3}\right)(300) = 2 \times 10^{-8}C$.

હવે, C_4 અને C'' પરના વિદ્યુતભાર સમાન હોય અને દરેક $2 \times 10^{-8}C$ હોય.

$\therefore$ C_4 પરનો વિદ્યુતભાર $Q_4 = 2 \times 10^{-8}C = Q''$ (C'' પર)

$\therefore$ C'' પરનો વિદ્યુતભાર C' અને C_1 પર વહેંચાયેલો છે. C' અને C_1 સમાન મૂલ્યના હોવાથી સમાન પ્રમાણમાં વહેંચાયેલા છે.

$\therefore$ C_1 પરનો વિદ્યુતભાર

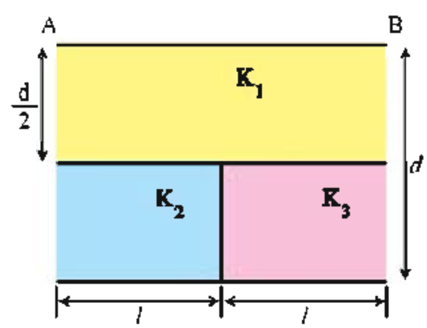
$Q_1 = \frac{1}{2}Q_1 = 1 \times 10^{-8}$ $C = Q'$ (C' પર)

$\therefore$ C' પરનો વિદ્યુતભાર C_2 અને C_3 પરના સમાન વિદ્યુતભાર જેટલો છે.

$\therefore$ $Q_2 = Q_3 = 1 \times 10^{-8}C$.

ઉદાહરણ 14 : આકૃતિમાં દર્શાવેલ કૅપેસિટરનું કૅપેસિટન્સ શોધો. પ્લેટ ABનું ક્ષેત્રફળ A છે. K_1, K_2, K_3 તે દ્રવ્યોના ડાઇઇલેક્ટ્રિક અચળાંકો છે.

ઉકેલ : આપણે $C = \frac{\varepsilon A}{d} = \frac{K\varepsilon_0 A}{d}$ સૂત્રનો ઉપયોગ કરીશું અને કૅપેસિટરોના શ્રેણી અને સમાંતર જોડાણનાં સૂત્રો વાપરીશું. K_2 અને K_3થી બનતા કૅપેસિટરો સમાંતરમાં હોવાથી તેમનું સમતુલ્ય (અસરકારક) કૅપેસિટન્સ C_{23} હોય તો,



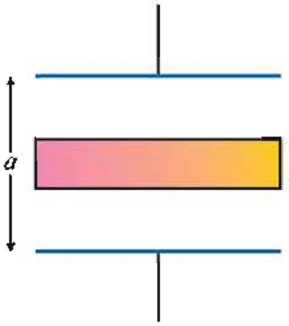
$$C_{23} = C_2 + C_3 = \frac{K_2\varepsilon_0(A/2)}{(d/2)} + \frac{K_3\varepsilon_0(A/2)}{(d/2)}$$

$$= \frac{\varepsilon_0 A}{d}(K_2 + K_3)$$

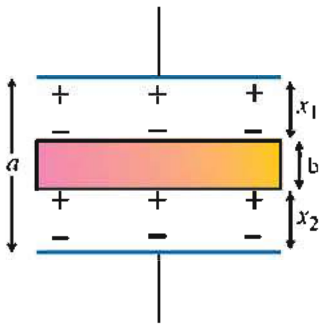
K_1થી બનતું કૅપેસિટર આ C_{23} સાથે શ્રેણીમાં ગણાય. $\therefore$ સમગ્ર તંત્રનું સમતુલ્ય કૅપેસિટન્સ C હોય તો,

$$C = \frac{C_1C_{23}}{C_1+C_{23}} = \frac{\left(\frac{K_1\varepsilon_0 A}{d/2}\right)\left[\frac{\varepsilon_0 A}{d}(K_2+K_3)\right]}{\left(\frac{K_1\varepsilon_0 A}{d/2}\right)+\left[\frac{\varepsilon_0 A}{d}(K_2+K_3)\right]} = \frac{2\varepsilon_0 A}{d}\cdot\frac{K_1(K_2+K_3)}{(2K_1+K_2+K_3)}$$

ઉદાહરણ 15 : એક કેપેસિટરની બે પ્લેટ વચ્ચે હવા છે અને તેમની વચ્ચેનું અંતર a છે. હવે આકૃતિ મુજબ તેમની વચ્ચે b જાડાઈનો ધાતુનો ટુકડો મૂકતાં કેપેસિટન્સનું મૂલ્ય $C = \frac{\varepsilon_0 A}{a-b}$ છે તેમ દર્શાવો. આ કેપેસિટન્સનું મૂલ્ય બે પ્લેટ વચ્ચે ધાતુના ટુકડાના સ્થાન પર આધારિત હશે ?



ઉકેલ : ઉપરના x_1 જાડાઈના ભાગમાં એક કેપેસિટર રચાય છે, જેનું કેપેસિટન્સ C_1 (ધારો કે) અનેનીચેના x_2 જાડાઈના ભાગમાં બીજું કેપેસિટર રચાય છે. તેનું કેપેસિટન્સ C_2 છે. b જાડાઈમાં ધાતુનો ટુકડો હોવાથી કંઈ કેપેસિટર રચાતું નથી. (કારણ કે તેની બે સપાટીઓ એકબીજાથી અલગ કરેલી ગણી શકાય નહિ.) અત્રે C_1 અને C_2 શ્રેણીમાં છે. આથી અસરકારક કેપેસિટન્સ C હોય તો,



$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{x_1}{\varepsilon_0 A} + \frac{x_2}{\varepsilon_0 A} = \frac{x_1 + x_2}{\varepsilon_0 A} \quad \therefore C = \frac{\varepsilon_0 A}{x_1 + x_2}.$$

પરંતુ આકૃતિ પરથી $x_1 + x_2 = a - b$

$$\therefore C = \frac{\varepsilon_0 A}{a-b}.$$

આ કેપેસિટન્સનું મૂલ્ય ધાતુના ટુકડાના સ્થાન પર આધારિત નથી. તેને ગમે ત્યાં મૂકો પણ $(x_1 + x_2)$ અચળ રહે અને આટલા અંતરમાં જ કેપેસિટર રચાય છે.

ઉદાહરણ 16 : એક સમાંતર પ્લેટ કેપેસિટરની દરેક પ્લેટનું ક્ષેત્રફળ 100 cm^2 અને તેમની વચ્ચેનું અંતર 1.0 cm છે. તેમની વચ્ચે હવા હોય ત્યારે કેપેસિટરને 100 Vની બૅટરી દ્વારા વિદ્યુતભારિત (charged) કરવામાં આવે છે. હવે બૅટરીને દૂર કરી તેમની વચ્ચે એક 0.4 cm જાડાઈનું ડાઇઇલેક્ટ્રિક ચોસલું મૂકવામાં આવે છે કે જેનો ડાઇઇલેક્ટ્રિક અચળાંક 4.0 છે. (a) ડાઇઇલેક્ટ્રિક દાખલ કર્યા અગાઉ કેપેસિટન્સ C_0 શોધો. (b) પ્લેટ પરનો મુક્ત વિદ્યુતભાર અને તેની પૃષ્ઠ ઘનતા શોધો. (c) પ્લેટ અને ડાઇઇલેક્ટ્રિકની વચ્ચેના વિસ્તારમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર E_0 કેટલું હશે ? (d) ડાઇઇલેક્ટ્રિકની અંદર વિદ્યુતક્ષેત્ર કેટલું હશે ? (e) ડાઇઇલેક્ટ્રિકને દાખલ કર્યા બાદ બે પ્લેટો વચ્ચેનો વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત કેટલો હશે ?

ઉકેલ : $A = 100 \times 10^{-4} m^2$; $d = 1 \times 10^{-2} m$, $V_0 = 100$ V

$d' = 0.4 \times 10^{-2} m$, $k = 4.0$

(a) પ્લેટો વચ્ચે હવા હોય ત્યારે કેપેસિટન્સ

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \frac{(8.85 \times 10^{-12})(100 \times 10^{-4})}{1 \times 10^{-2}} = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F} = 8.85 \ pF$$

(b) $q_0 = C_0 V_0 = (8.85 \times 10^{-12})(100) = 8.85 \times 10^{-10}$ C

આ મુક્ત વિદ્યુતભાર છે. વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠઘનતા

$$\sigma = \frac{q_0}{A} = \frac{8.85 \times 10^{-10}}{100 \times 10^{-4}} = 8.85 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2$$

(c) પ્લેટ અને ડાઇઇલેક્ટ્રિકની વચ્ચેના વિસ્તારમાંનું વિદ્યુતક્ષેત્ર E_0 પ્લેટ પરના એટલે કે મુક્ત વિદ્યુતભાર વડે રચાયેલ છે.

$$\therefore E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{8.85 \times 10^{-8}}{8.85 \times 10^{-12}} = 10000 \text{ V/m}$$

(d) ડાઈઈલેક્ટ્રિકની ગેરહાજરીમાં તે સ્થાને વિદ્યુતક્ષેત્ર E_0 જેટલું હોત

$\therefore$ ડાઈઈલેક્ટ્રિકમાંનું વિદ્યુતક્ષેત્ર $E = \frac{E_0}{K} = \frac{10000}{4} = 2500 \frac{V}{m}$.

(e) હવે, બે પ્લેટો વચ્ચેનો વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત ($V = Ed$ પરથી)

$$V' = E_0(1 - 0.4)\ 10^{-2} + E(0.4 \times 10^{-2})$$

$$= 10000\ (0.6 \times 10^{-2}) + 2500 \times 0.4 \times 10^{-2}$$

$$= 60 + 10 = 70\ V$$

ઉદાહરણ 17 : એક પદાર્થનો ડાઈઈલેક્ટ્રિક અચળાંક 2.0 અને ડાઈઈલેક્ટ્રિક સ્ટ્રેન્થ 20×10^6 V/m છે. તેને સમાંતર પ્લેટ કૅપેસિટરમાં ડાઈઈલેક્ટ્રિક દ્રવ્ય તરીકે લેવામાં આવેલ છે. કૅપેસિટન્સનું મૂલ્ય 8.85×10^{-2} μF બને અને તે પ્લેટો વચ્ચેના 2000 Vના વિદ્યુતસ્થિતિમાનના તફાવતને પણ ખમી શકે તે માટે તે દરેક પ્લેટનું ક્ષેત્રફળ ઓછામાં ઓછું કેટલું હોવું જોઈએ ?

ઉકેલ : $K = 2$, $E = 20 \times 10^6$ V/m, $C = (8.85 \times 10^{-2}) \times 10^{-6}$ F

$V = 2000$ V, $A = ?$

કૅપેસિટર પરનો વિદ્યુતભાર $Q = CV = (8.85 \times 10^{-8})\ (2000) = 17.7 \times 10^{-5}$ C

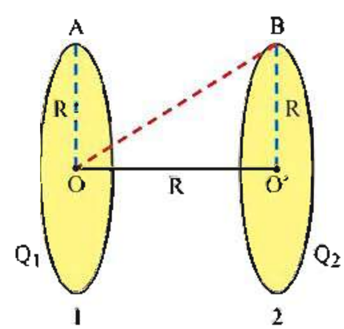
પ્લેટ પર વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠઘનતા $\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{17.7 \times 10^{-5}}{A}$ C/m².

બે પ્લેટો વચ્ચે હવા હોત, તો વિદ્યુતક્ષેત્ર $E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, હોત, પરંતુ અત્રે ડાઈઈલેક્ટ્રિક મૂકેલ હોવાથી વિદ્યુતક્ષેત્ર

$$E = \frac{E_0}{K} = \frac{\sigma}{K\varepsilon_0};\ \therefore\ 20 \times 10^6 = \frac{17.7 \times 10^{-5}}{(A)(2)(8.85 \times 10^{-12})} \Rightarrow A = 0.5\ m^2$$

જો Aનું મૂલ્ય આનાથી નાનું હોય તો Eનું મૂલ્ય 20×10^6 કરતાં વધી જાય અને ડાઈઈલેક્ટ્રિક બ્રેકડાઉન થાય.

ઉદાહરણ 18 : દરેક R m ત્રિજ્યાની બે સમાન રિંગ એક જ અક્ષ પર એકબીજાથી R m અંતરે રાખેલી છે. જો તેમના પરના વિદ્યુતભાર અનુક્રમે Q_1 C અને Q_2 C હોય, તો એક રિંગના કેન્દ્રથી q C વિદ્યુતભારને બીજી રિંગના કેન્દ્ર સુધી લઈ જવામાં થતું કાર્ય શોધો.



ઉકેલ : આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે $AO' = BO = \sqrt{R^2+R^2} = (\sqrt{2})R$ દરેક રિંગનું કેન્દ્ર બીજી રિંગના પરિઘથી $(\sqrt{2})R$ જેટલા સમાન અંતરે આવેલું છે.

$\therefore$ O આગળનું સ્થિતિમાન $V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{R} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{R\sqrt{2}}$

અને O' આગળનું સ્થિતિમાન $V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{R\sqrt{2}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{R}$

$\therefore$ વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત $\Delta V = V_1 - V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}(Q_1 - Q_2) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R\sqrt{2}}[Q_2 - Q_1]$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}(Q_1 - Q_2) - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R\sqrt{2}}[Q_1 - Q_2]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}(Q_1 - Q_2)\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}(Q_1 - Q_2)\left[\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right] \text{ V}$$

$\therefore$ કાર્ય $W = q(\Delta V) = \frac{q(Q_1 - Q_2)}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right]$ J

સારાંશ

1. વિદ્યુતક્ષેત્રમાં વિદ્યુતભારને એક બિંદુથી બીજા બિંદુએ લઈ જતાં થતા કાર્યની માહિતી વિદ્યુતસ્થિતિમાન, વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જા નામની રાશિઓ પરથી મળે છે.

2. $\int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dr}$ એ A અને B બિંદુ વચ્ચેનું વિદ્યુતક્ષેત્રનું રેખા-સંકલન છે અને તે એકમ ધન વિદ્યુતભારને A થી B સુધી લઈ જવા દરમિયાન વિદ્યુતક્ષેત્ર વડે થતું કાર્ય દર્શાવે છે. વળી, તે માર્ગ પર આધારિત નથી, તેમજ $\oint \vec{E}\cdot\vec{dr} = 0$.

3. "એકમ ધન વિદ્યુતભારને અનંત અંતરેથી વિદ્યુતક્ષેત્રમાંના આપેલા બિંદુએ લાવતાં વિદ્યુતક્ષેત્રની વિરુદ્ધ કરવા પડતા કાર્યને તે બિંદુ પાસેનું સ્થિત વિદ્યુતસ્થિતિમાન (V) કહે છે."

   P બિંદુનું વિદ્યુતસ્થિતિમાન $V_p = -\int_\infty^P \vec{E}\cdot\vec{dr}$

   તેનો એકમ $\frac{\text{joule}}{\text{coulomb}}$ = volt છે. સંજ્ઞામાં $V = \frac{J}{C}$.

   તેનું પારિમાણિક સૂત્ર $M^1L^2T^{-3}A^{-1}$ છે.

   સ્થિતિમાનના નિરપેક્ષ મૂલ્યનું કોઈ મહત્ત્વ નથી, માત્ર તેનામાં થતા ફેરફારનું જ મહત્ત્વ છે.

4. "આપેલ વિદ્યુતભાર (q)ને અનંત અંતરેથી વિદ્યુતક્ષેત્રમાંના આપેલા બિંદુએ લાવતાં વિદ્યુતક્ષેત્ર વિરુદ્ધ કરવા પડતા કાર્યને તે બિંદુ આગળ તે વિદ્યુતભારની વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જા કહે છે."

   $U_p = -q\int_\infty^P \vec{E}\cdot\vec{dr} = qV_p$

   વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જાના નિરપેક્ષ મૂલ્યનું કંઈ મહત્ત્વ નથી. માત્ર તેનામાં થતા ફેરફારનું જ મહત્ત્વ છે.

5. બિંદુવત્ વિદ્યુતભાર q વડે તેનાથી r અંતરે આવેલા P બિંદુએ વિદ્યુતસ્થિતિમાન $V_p = \frac{kq}{r}$.

6. વિદ્યુત-ડાઇપોલથી r અંતરે આવેલા બિંદુએ વિદ્યુતસ્થિતિમાન $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2}$ ($r >> 2a$ માટે)

   તેની અક્ષ પરનું સ્થિતિમાન $V = \pm\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^2}$. તેની વિષુવરેખા પરનું સ્થિતિમાન $V = 0$

7. બિંદુવત્ વિદ્યુતભારો q_1, q_2, ... q_n અનુક્રમે r_1, r_1, ... r_n સ્થાનો પર રહેલા હોય તેવા તંત્ર વડે $\vec{r}$ બિંદુએ વિદ્યુતસ્થિતિમાન $V = \sum_{i=1}^{n} \frac{kq_i}{|\vec{r} - \vec{r_i}|}$.

સતત વિદ્યુતભાર વિતરણને લીધે $\vec{r}$ બિંદુએ વિદ્યુત સ્થિતિમાન $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{volume} \frac{\rho(\vec{r'})d\tau'}{|\vec{r} - \vec{r'}|}$

ગોળીય કવચ વડે ઉદ્ભવતું વિદ્યુતસ્થિતિમાન

$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}$ ... ($r \geq$ R માટે) અને $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R}$ ... ($r \geq$ R માટે)

8. જે પૃષ્ઠ (સપાટી) પરનાં બધાં બિંદુએ વિદ્યુતસ્થિતિમાન એક સમાન હોય તે પૃષ્ઠને સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠ કહે છે. વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$ની દિશા સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠને લંબરૂપે હોય છે.

9. $E = \frac{-dV}{dl}$ એ $\vec{dl}$ની દિશામાંના વિદ્યુતક્ષેત્રનું માન આપે છે. V પરથી $\vec{E}$ શોધવા માટે વ્યાપક રૂપે

$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right)$ સૂત્રનો ઉપયોગ કરી શકાય.

વિદ્યુતક્ષેત્રની દિશા, જે દિશામાં વિદ્યુતસ્થિતિમાનના ઘટાડાનો અંતર સાથેનો દર $\left(\frac{-dV}{dl}\right)$ મહત્તમ હોય, તે દિશામાં હોય છે અને આવી દિશા સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠને લંબરૂપે જ હોય છે.

10. બિંદુવત્ વિદ્યુતભારો q_1, q_2, ... q_n અનુક્રમે r_1, r_2, ... r_n સ્થાનો પર રહેલા હોય તેવા તંત્રની વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જા

$U = \sum_{\substack{i=1 \\ i<j}}^{n} \frac{kq_iq_j}{r_{ij}}$, જ્યાં $r_{ij} = |\vec{r_j} - \vec{r_i}|$

11. બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$માં ડાઇપોલની સ્થિતિ-ઊર્જા $U = -\vec{E} \cdot \vec{p} = -E\,p\,cos\theta$.

12. ધાત્વિક સુવાહકને બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્રમાં મૂકતાં

(1) વાહકના પૃષ્ઠ પર સ્થિર વિદ્યુતભાર-વિતરણ પ્રેરિત થાય છે.

(2) વાહકના અંદરના વિસ્તારમાં પરિણામી વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય હોય છે.

(3) વાહકના અંદરના વિસ્તારમાં ચોખ્ખો વિદ્યુતભાર શૂન્ય હોય છે.

(4) વાહકની બહારના પૃષ્ઠ પરના દરેક બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્ર સ્થાનિક રીતે પૃષ્ઠને લંબરૂપે હોય છે.

(5) વાહકની અંદરના વિસ્તારમાં બધે વિદ્યુતસ્થિતિમાન એકસમાન અચળ હોય છે.

(6) વાહકની અંદર કોઈ બખોલ હોય, તો વાહકને બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્રમાં મૂકવા છતાં વાહકની અંદર તેમજ બખોલની અંદર પણ પરિણામી વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય જ હોય છે. આ બાબતને ઇલેક્ટ્રોસ્ટેટિક શિલ્ડિંગ કહે છે.

ધાત્વિક સુવાહક પર વિદ્યુતભાર મૂકવામાં આવે ત્યારે,

(1) વાહકની અંદરના ભાગમાં બધે વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય જ હોય છે.

(2) તે વિદ્યુતભારવાહકના બાહ્ય પૃષ્ઠ પર જ વિતરિત થાય છે.

(3) તેની સપાટી પર વિદ્યુતક્ષેત્ર સ્થાનિક રીતે પૃષ્ઠને લંબ હોય છે અને $\vec{E} = \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)\hat{n}$ જેટલું હોય છે.

(4) જો વાહકની બખોલમાં વિદ્યુતભાર મૂકવામાં આવે તોપણ બખોલની બહાર હોય તેવા વાહકના અંદરના વિસ્તારમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય જ રહે છે.

13. "એકબીજાથી અલગ કરેલા બે સુવાહકથી બનતી રચનાને કૅપેસિટર કહે છે." તેનું કૅપેસિટન્સ

$C = \frac{Q}{V}$ = અચળ. Cનો એકમ coulomb/volt છે. તેને **farad** પણ કહે છે.

$1\ \mu F = 10^{-6}$ F;$1\ nF = 10^{-9}$ F; $1\ pF = 10^{-12}$ F

14. સમાંતર પ્લેટ કૅપેસિટરનું કૅપેસિટન્સ $C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$.

15. કૅપેસિટરોનાં શ્રેણી જોડાણમાં અસરકારક કૅપેસિટન્સ C હોય તો

$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + ...$

કૅપેસિટરોનાં સમાંતર જોડાણમાં અસરકારક કૅપેસિટન્સ C હોય, તો

$C = C_1 + C_2 + C_3 + ...$

16. કૅપેસિટરમાં સંગ્રહિત ઊર્જા $U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{VQ}{2}$ અને ઊર્જાઘનતા = એકમ કદમાં સંગૃહિત ઊર્જા

$\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$; જ્યાં, E = વિદ્યુતક્ષેત્ર.

17. ડાઇઇલેક્ટ્રિકને બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્ર E_0માં મૂકતાં વિદ્યુતપ્રેરણ થવાથી ડાઇઇલેક્ટ્રિકનું પોલરાઇઝેશન થાય છે. આ પ્રેરિત વિદ્યુતભારો વડે ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્રની વિરુદ્ધ દિશામાં હોય છે. આથી ડાઇઇલેક્ટ્રિકની અંદરનું પરિણામી વિદ્યુતક્ષેત્ર E બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્ર E_0 કરતાં ઓછું હોય છે.

એકમકદ દીઠ ઉદ્ભવતી ડાઇપોલ ચાકમાત્રાને પોલરાઇઝેશન તીવ્રતા અથવા ટૂંકમાં પોલરાઇઝેશન (P) કહે છે.

$P = \sigma_b$.

$P \propto E$, હોવાથી $P = \varepsilon_0 x_e E$. x_eને ડાઇઇલેક્ટ્રિક માધ્યમની ઇલેક્ટ્રિક સસેપ્ટિબિલિટી કહે છે.

$\varepsilon_0(1 + x_e)$ને ડાઇઇલેક્ટ્રિક માધ્યમની પરમિટિવિટી ε કહે છે. $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ને તે માધ્યમની સાપેક્ષ પરમિટિવિટી ε_r કહે છે. અને તેને ડાઇઇલેક્ટ્રિક અચળાંક K પણ કહે છે. $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \varepsilon_r = K; K = 1 + x_e$

$E = \frac{E_0}{K}$; આમ, ડાઇઇલેક્ટ્રિકમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર Kમાં ભાગનું થઈ જાય છે. $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ને વિદ્યુત સ્થાનાંતર કહે છે. ડાઇઇલેક્ટ્રિકની હાજરીમાં ગૉસનો નિયમ $\oint \vec{D} \cdot \vec{ds} = q$ તરીકે લખાય છે, જ્યાં q એ માત્ર ચોખ્ખો મુક્ત વિદ્યુતભાર છે.

18. સમાંતર પ્લેટ કૅપેસિટરની પ્લેટો વચ્ચે હવા (કે શૂન્યાવકાશ) હોય ત્યારે કૅપેસિટન્સ $C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$. આ પ્લેટો વચ્ચેના વિસ્તારમાં K ડાઇઇલેક્ટ્રિક અચળાંક ધરાવતું માધ્યમ મૂકતાં કૅપેસિટન્સ C' = KC આમ ડાઇઇલેક્ટ્રિકની હાજરીથી કૅપેસિટન્સ K ગણું બની જાય છે.

19. વાન્-દ્-ગ્રાફ જનરેટર વડે અમુક મિલિયન વૉલ્ટનો વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત પ્રસ્થાપિત કરી શકાય છે.

સ્વાધ્યાય

નીચે વિધાનો માટે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

1. $\vec{E} = E_0(\hat{i})$ જેટલા સમાન વિદ્યુતક્ષેત્ર માટે જો $x = 0$ પાસે વિદ્યુતસ્થિતિમાન શૂન્ય હોય, તો $x = +x$ પાસે સ્થિતિમાનનું મૂલ્ય .... હશે.

(A) xE_0 (B) $-xE_0$ (C) x^2E_0 (D) $-x^2E_0$

2. એક બિંદુવત્ વિદ્યુતભાર Qના વિદ્યુતક્ષેત્રમાં Qને કેન્દ્ર તરીકે લઈ દોરેલા r ત્રિજ્યાના વર્તુળના પરિઘ પર વિદ્યુતક્ષેત્રનું રેખા-સંકલન .... હોય.

(A) $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$ (B) $\frac{Q}{2\varepsilon_0 r}$ (C) શૂન્ય (D) $2\pi Qr$

3. 10^{-8} C વિદ્યુતભાર ધરાવતો 1 g દળવાળો એક નાનો ગોળો એક વિદ્યુતક્ષેત્રમાં 600 Vના સ્થિતિમાન ધરાવતા બિંદુ Aથી શૂન્ય સ્થિતિમાન ધરાવતા B બિંદુ સુધી ગતિ કરે છે, તો તેની ગતિ-ઊર્જામાં થતો ફેરફાર કેટલો હશે ?

(A) -6×10^{-6} erg (B) -6×10^{-6} J

(C) 6×10^{-6} J (D) 6×10^{-6} erg

4. આકૃતિમાં દર્શાવેલ દરેક પ્લેટનું ક્ષેત્રફળ A અને પાસપાસેની પ્લેટો વચ્ચેનું અંતર d છે, તો a અને b બિંદુઓ વચ્ચે કેપેસિટન્સ કેટલું હશે ?

(A) $\varepsilon_0 A/d$ (B) $2\varepsilon_0 A/d$

(C) $3\varepsilon_0 A/d$ (D) $4\varepsilon_0 A/d$

5. એક m દળ અને q વિદ્યુતભાર ધરાવતા સ્થિર કણ પર સમાન વિદ્યુતક્ષેત્ર E લગાડતાં તે ગતિમાં આવે છે. આ કણ જ્યારે બળની દિશામાં y અંતર કાપે, ત્યારે તેની ગતિ-ઊર્જા કેટલી હશે ?

(A) qE^2y (B) qEy^2 (C) qEy (D) q^2Ey

6. એક સમાંતર પ્લેટ કેપેસિટરને વિદ્યુતભારિત કરીને અલગ કરેલ છે. હવે તેમાં એક ડાઈઈલેક્ટ્રિક સ્લેબ દાખલ કરવામાં આવે છે, તો નીચેનામાંથી કઈ રાશિ અચળ રહે છે ?

(A) વિદ્યુતભાર Q (B) સ્થિતિમાનનો તફાવત V

(C) કેપેસિટન્સ C (D) ઊર્જા U

7. એક ગતિમાન ઇલેક્ટ્રૉન બીજા ઇલેક્ટ્રૉન તરફ આવે છે, તો તંત્રની સ્થિતિ-ઊર્જાનું શું થશે ?

(A) અચળ રહેશે (B) વધશે

(C) ઘટશે (D) વધારો કે ઘટાડો ગમે તે થઈ શકે.

8. એક વિદ્યુતભારિત કેપેસિટરની ઊર્જા U છે. હવે બૅટરી દૂર કરી તેને તેના જેવા જ બીજા એક વિદ્યુતભારરહિત કેપેસિટર સાથે સમાંતરમાં જોડવામાં આવે છે. હવે દરેક કેપેસિટરની ઊર્જા કેટલી થશે ?

(A) $\frac{3U}{2}$ (B) U (C) $\frac{U}{4}$ (D) $\frac{U}{2}$

9. એક વિસ્તારમાં નિયમિત વિદ્યુતક્ષેત્ર Y દિશામાં પ્રવર્તે છે. A, B અને C બિંદુના યામ અનુક્રમે (0, 0), (2, 0) અને (0, 2) છે, તો આ બિંદુઓ પાસેનાં સ્થિતિમાનો માટે નીચેનામાંથી કયો વિકલ્પ સાચો છે ?

(A) $V_A = V_B$, $V_A > V_C$ (B) $V_A > V_B$, $V_A = V_C$

(C) $V_A < V_C$, $V_B = V_C$ (D) $V_A = V_B$, $V_A < V_C$

10. 4.0 cm વ્યાસ ધરાવતી વર્તુળાકાર પ્લેટોમાંથી બનાવેલા સમાંતર પ્લેટ કૅપેસિટરનું કૅપેસિટન્સ 200 cm વ્યાસના ગોળાના કૅપેસિટન્સ જેટલું છે, તો બે પ્લેટ વચ્ચેનું અંતર શોધો.

(A) 2×10^{-4} m (B) 1×10^{-4} m (C) 3×10^{-4} m (D) 4×10^{-4} m

11. 100 Vની બૅટરી સાથે જોડેલ એક ચલ (variable) કૅપેસિટરનું કૅપેસિટન્સ 2 μFથી 10 μF કરવામાં આવે છે. તેનામાં સંગૃહિત ઊર્જાનો ફેરફાર કેટલો હશે ?

(A) 2×10^{-2} J (B) 2.5×10^{-2} J (C) 6.5×10^{-2} J (D) 4×10^{-2} J

12. એક સમાંતર પ્લેટ કૅપેસિટરને બૅટરી વડે વિદ્યુતભારિત કરીને બૅટરીથી અલગ કરેલું છે. હવે તેની બે પ્લેટ વચ્ચેનું અંતર વધારતાં અનુક્રમે વિદ્યુતભાર, સ્થિતિમાનનો તફાવત અને કૅપેસિટન્સમાં કેવા ફેરફારો થશે ?

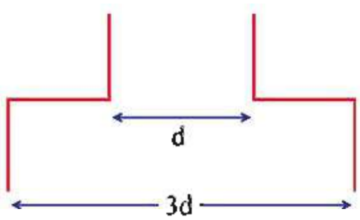
(A) અચળ રહે, ઘટે છે, ઘટે છે. (B) વધે છે, ઘટે છે, ઘટે છે.

(C) અચળ રહે છે, ઘટે છે, વધે છે. (D) અચળ રહે છે, વધે છે, ઘટે છે.

13. 6 સમાન કૅપેસિટરોને સમાંતરમાં જોડી 10 Vની બૅટરી વડે વિદ્યુતભારિત કર્યા છે. હવે તેમને બૅટરીથી અલગ કરીને એકબીજાં સાથે શ્રેણીમાં જોડવામાં આવે છે. આ સ્થિતિમાં જોડાણમાંની મુક્ત પ્લેટો વચ્ચેનો સ્થિતિમાનનો તફાવત કેટલો હશે ?

(A) 10 V (B) 30 V (C) 60 V (D) $\frac{10}{6}$ V

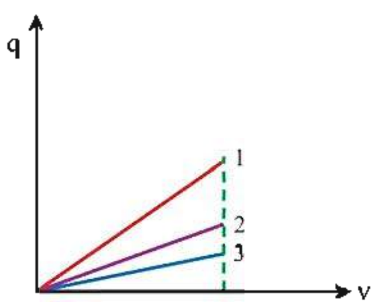
14. ધાતુની એક સમાન 6 ચોરસ પ્લેટોને આકૃતિ મુજબ ગોઠવેલ છે. દરેક પ્લેટની લંબાઈ l છે. આ ગોઠવણનું કૅપેસિટન્સ .... થશે.



(A) $\frac{3\varepsilon_0 l^2}{d}$ (B) $\frac{4}{3}\frac{\varepsilon_0 l^2}{d}$

(C) $\frac{3}{2}\frac{\varepsilon_0 l^2}{d}$ (D) $\frac{4\varepsilon_0 l^2}{d}$

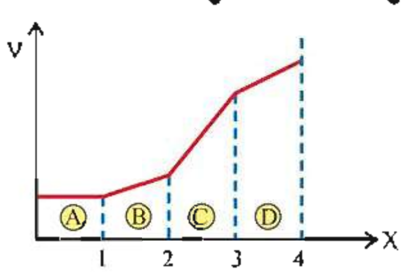
15. નીચે ટેબલમાં ત્રણ કૅપેસિટર્સ માટે પ્લેટનાં ક્ષેત્રફળો અને પ્લેટો વચ્ચેનાં અંતરો આપેલાં છે. તેની બાજુની આકૃતિમાં તેમને માટે $q - V$ આલેખ દર્શાવેલા છે. ક્યો આલેખ ક્યા કૅપેસિટર માટે છે, તે નક્કી કરો.



કૅપેસિટર	ક્ષેત્રફળ	અંતર
C_1	A	d
C_2	2A	d
C_3	A	$2d$

(A) $1 \rightarrow C_2$	$2 \rightarrow C_3$	$3 \rightarrow C_1$
(B) $1 \rightarrow C_1$	$2 \rightarrow C_2$	$3 \rightarrow C_3$
(C) $1 \rightarrow C_2$	$2 \rightarrow C_1$	$3 \rightarrow C_3$
(D) $1 \rightarrow C_3$	$2 \rightarrow C_1$	$3 \rightarrow C_2$

16. X-અક્ષ પર પ્રવર્તતા એક વિદ્યુતક્ષેત્ર માટે $V - x$ આલેખ આકૃતિમાં દર્શાવેલ છે. A, B, C, D વિસ્તારોમાંથી ક્યા વિસ્તારમાં વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતાનું માન મહત્તમ હશે ?



(A) A (B) B

(C) C (D) D

17. Q C અને 9Q C વિદ્યુતભારો વચ્ચેનું અંતર 4 m છે. તેમને જોડતી રેખા પરનાં જે બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા શૂન્ય હોય તે બિંદુએ વિદ્યુતસ્થિતિમાન કેટલું હશે ?

(A) 4 kQ V (B) 10 kQ V (C) 2 kQ V (D) 2.5 kQ V

18. 600 μF કૅપેસિટન્સ ધરાવતા એક કૅપેસિટરને 50 μC/s ના સમાન દરથી ચાર્જિંગ કરવામાં આવતું હોય, તો તેનું સ્થિતિમાન 10 વોલ્ટ વધારવા માટે કેટલો સમય લાગશે ?

(A) 500 s (B) 6000 s (C) 12 s (D) 120 s

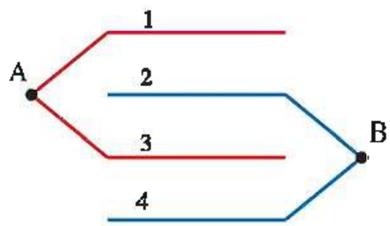
19. R_1 અને R_2 ત્રિજ્યા ધરાવતા ધાતુના બે ગોળાઓને વિદ્યુતભારિત કરવામાં આવે છે. હવે તેમને વાહક તારથી એકબીજાનો સંપર્ક કરાવીને પછી અલગ કરવામાં આવે છે. તેમની સપાટી પરનાં વિદ્યુતક્ષેત્રો અનુક્રમે E_1 અને E_2 હોય, તો E_1 / E_2 = ...

(A) R_2 / R_1 (B) R_1 / R_2 (C) R_2^2 / R_1^2 (D) R_1^2 / R_2^2

20. એક કૅપેસિટરની બે પ્લેટ વચ્ચેનું અંતર $5x$ અને તેમની વચ્ચેનું વિદ્યુતક્ષેત્ર E_0 છે. હવે તેમની વચ્ચે x જાડાઈનું અને ડાઇઇલેક્ટ્રિક અચળાંક 3 ધરાવતું એક ચોસલું એક પ્લેટને અડકીને મૂકવામાં આવે છે. આ સ્થિતિમાં બે પ્લેટ વચ્ચેનો p.d. કેટલો હશે ?

(A) $\frac{13E_0x}{3}$ (B) 15 E_0x (C) 7 E_0x (D) $\frac{9E_0x}{2}$

21. આકૃતિમાં દરેક પ્લેટનું ક્ષેત્રફળ A અને ક્રમિક પ્લેટો વચ્ચેનું અંતર d છે તો A અને B બિંદુઓ વચ્ચેનું અસરકારક કૅપેસિટન્સ કેટલું હશે ?



(A) ε_0A/d (B) $2\varepsilon_0A/d$

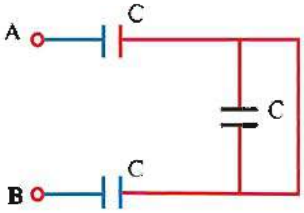
(C) $3\varepsilon_0A/d$ (D) $4\varepsilon_0A/d$

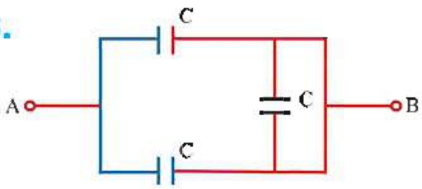
જવાબો

1. (B) 2. (C) 3. (C) 4. (B) 5. (C) 6. (A)
7. (B) 8. (C) 9. (A) 10. (B) 11. (D) 12. (D)
13. (C) 14. (B) 15. (C) 16. (C) 17. (A) 18. (D)
19. (A) 20. (A) 21. (C)

નીચે આપેલ પ્રશ્નોના જવાબ ટૂંકમાં આપો :

1. વિદ્યુતક્ષેત્રનું રેખા-સંકલન એટલે શું ? તે શું દર્શાવે છે ?
2. જો P બિંદુએ વિદ્યુતસ્થિતિમાન V_P હોય, તો આ બિંદુ પાસે q વિદ્યુતભારની વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જા કેટલી હશે ?
3. વિદ્યુત-ડાઇપોલની વિષુવરેખા પરના બિંદુએ વિદ્યુતસ્થિતિમાન કેટલું હશે ?
4. વિદ્યુતસ્થિતિમાન પ્રચલન એટલે શું ? તેનો એકમ આપો.
5. વિદ્યુતક્ષેત્ર હંમેશાં સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠને .... રૂપે અને જે દિશામાં સ્થિતિમાનના ઘટાડાનો દર .... હોય તે દિશામાં જ હોય છે.
6. કૅપેસિટરોનાં શ્રેણી અને સમાંતર જોડાણમાં સમતુલ્ય (અસરકારક) કૅપેસિટન્સનાં સૂત્રો આપો.
7. વિદ્યુતક્ષેત્ર સાથે સંકળાયેલ ઊર્જાઘનતા વિદ્યુતક્ષેત્રના મૂલ્ય પર કેવી રીતે આધારિત છે ?
8. અધ્રુવીય અણુ એટલે શું ?

9. પોલરાઇઝેશન તીવ્રતા (અથવા ટૂંકમાં પોલરાઇઝેશન) Pને વ્યાખ્યાયિત કરો.
10. x_e અને Pનો સંબંધ દર્શાવતું સૂત્ર લખો.
11. મુક્ત અવકાશમાં એક બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્ર 100 N/C છે. તે સ્થાને ડાઇઇલેક્ટ્રિક અચળાંક 5 ધરાવતું માધ્યમ મૂકવામાં આવે, તો તેમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર કેટલું હશે ?
12. ડાઇઇલેક્ટ્રિક માધ્યમની સાપેક્ષ પરમિટિવિટી ε_r એટલે શું ?
13. વાન્-દ્-ગ્રાફ જનરેટરનો ઉપયોગ જણાવો.
14. 

આકૃતિમાં A અને B બિંદુઓ વચ્ચેનું સમતુલ્ય કેપેસિટન્સ કેટલું હશે ? [જવાબ : C/2]
[Hint : જમણી બાજુનો છેલ્લો કેપેસીટર શોર્ટસર્કિટ થયો હોવાથી અસરકારક નથી.]
15. 

આકૃતિમાં દર્શાવેલ A અને B બિંદુઓ વચ્ચેનું સમતુલ્ય કેપેસિટન્સ કેટલું હશે ? [જવાબ : 2C]
[Hint : જમણી બાજુનો છેલ્લો કેપેસીટર શોર્ટસર્કિટ થયેલ હોવાથી અસરકારક નથી.]

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. એકમ ધન વિદ્યુતભારને વિદ્યુતક્ષેત્રમાં એક બિંદુથી બીજા બિંદુએ લઈ જવામાં વિદ્યુતક્ષેત્ર વડે થયેલું કાર્ય તે બે બિંદુઓનાં સ્થાન પર જ આધારિત છે અને તેમને જોડતા માર્ગ પર આધારિત નથી, તેમ દર્શાવો.
2. વિદ્યુતસ્થિતિમાનની વ્યાખ્યા અને તેને અનુરૂપ સૂત્ર આપો. તેનાં એકમ અને પરિમાણ લખો.
3. વિદ્યુતસ્થિતિમાનની વ્યાખ્યા આપો અને બિંદુવત્ વિદ્યુતભારથી ઉદ્ભવતા વિદ્યુતસ્થિતિમાનનું સૂત્ર મેળવો.
4. વિદ્યુત-ડાઇપોલને લીધે તેનાથી દૂરના બિંદુએ સ્થિતિમાનનું સૂત્ર મેળવો.
5. સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠ એટલે શું ? આપેલા બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્રની દિશા તે બિંદુમાંથી, પસાર થતા સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠને લંબરૂપે હોય છે, તેમ સાબિત કરો.
6. વિદ્યુતસ્થિતિમાન પરથી વિદ્યુતક્ષેત્ર મેળવી શકાય તે માટેનું જરૂરી સૂત્ર તારવો.
7. સમાન વિદ્યુતક્ષેત્રમાં વિદ્યુત-ડાઇપોલની સ્થિતિ-ઊર્જાનું સૂત્ર મેળવો.
8. બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્રમાં મૂકેલા ધાત્વિક સુવાહકમાં ઉદ્ભવતી અસરોની ટૂંકમાં સમજૂતી આપો.
9. કેપેસિટર એટલે શું ? કેપેસિટન્સની વ્યાખ્યા અને એકમો આપો. કેપેસિટન્સનું મૂલ્ય શાના પર આધારિત છે તે જણાવો. કેપેસિટરની સંજ્ઞા આપો.
10. કેપેસિટરોનાં શ્રેણી / સમાંતર જોડાણમાં સમતુલ્ય (અસરકારક) કેપેસિટન્સનું સૂત્ર મેળવો.
11. સમાંતર પ્લેટ કેપેસિટરના કેપેસિટન્સનું સૂત્ર મેળવો.
12. કેપેસિટરમાં સંગૃહીત ઊર્જાનું અને ઊર્જા ઘનતાનું સૂત્ર મેળવો.
13. ડાઇઇલેક્ટ્રિકને સમાંતર પ્લેટ કેપેસિટરની બે પ્લેટો વચ્ચે મૂકતાં થતું પોલરાઇઝેશન સમજાવો અને $P = \sigma_b$ સૂત્ર મેળવો.
14. કેપેસિટરની બે પ્લેટો વચ્ચે મૂકેલા ડાઇઇલેક્ટ્રિકની અંદરનું પરિણામી વિદ્યુતક્ષેત્ર $E = \frac{\sigma_f - \sigma_b}{\varepsilon_0}$ છે. તે પરથી $E = \frac{E_0}{K}$ સૂત્ર મેળવો, જ્યાં E_0 = ડાઇઇલેક્ટ્રિક પરનું બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્ર.
15. $E = \frac{\sigma_f - \sigma_b}{\varepsilon_0}$નો ઉપયોગ કરી વિદ્યુત સ્થાનાંતર $\vec{D}$નું સૂત્ર મેળવો અને $\vec{D}$નું મહત્ત્વ જણાવો.
16. વાન્-દ્-ગ્રાફ જનરેટરનો સિદ્ધાંત દર્શાવતું સૂત્ર મેળવો.
17. માત્ર આકૃતિ દોરી વાન્-દ્-ગ્રાફ જનરેટરની કાર્યપદ્ધતિ સમજાવો.

નીચેના દાખલા ગણો :

1. $q_1 = 2C$ અને $q_2 = -3C$ વિદ્યુતભાર કાર્તેઝિયન યામપદ્ધતિના (0, 0) અને (100, 0)m બિંદુએ મૂકેલા છે, તો X-અક્ષ પર કયાં બિંદુએ (કે બિંદુઓએ) વિદ્યુતસ્થિતિમાન શૂન્ય હશે ?

[જવાબ : 40m, −200 m]

2. a અને b ત્રિજ્યાઓ ધરાવતા ધાતુના બે ગોળાઓને એકબીજાથી ઘણે દૂર મૂકીને તેમને વાહક તારથી જોડેલ છે. તેમના પરનો કુલ વિદ્યુતભાર Q છે. (i) દરેક ગોળા પરનો વિદ્યુતભાર અને દરેક ગોળાનું સ્થિતિમાન શોધો.

[જવાબ : $Q_a = \frac{aQ}{a+b}$, $Q_b = \frac{bQ}{a+b}$, $V_a = V_b = \frac{kQ}{a+b}$]

3. કોઈ એક વિસ્તારમાં વિદ્યુતસ્થિતિમાન $V(x, y, z) = 2x^2y + 3y^3z - 4z^4x$ સૂત્ર પરથી મળે છે. તેમાંના બિંદુ (1, 1, 1) પાસે વિદ્યુતક્ષેત્રના ઘટકો અને વિદ્યુતક્ષેત્ર સદિશ શોધો.

[જવાબ : $E_x = 0$, $E_y = -11$ એકમ, $E_z = 13$ એકમ, $\vec{E} = -11\hat{j} + 13\hat{k}$ એકમ]

4. પાણીનું એક ગોળાકાર બુંદ 3×10^{-10} C વિદ્યુતભાર ધરાવે છે. તેની સપાટી પરનું વિદ્યુતસ્થિતિમાન 500 V છે. આ બુંદની ત્રિજ્યા શોધો. હવે આવાં આઠ સમાન બુંદો (સમાન વિદ્યુતભાર અને સમાન ત્રિજ્યા) એકબીજામાં ભળી જઈને એક નવું બુંદ બનાવે, તો આ નવા બુંદની સપાટી પર સ્થિતિમાન કેટલું થશે. $k = 9 \times 10^9$ SI

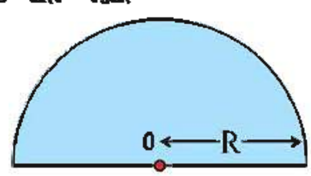
[જવાબ : પ્રથમ બુંદની ત્રિજ્યા = 0.54 cm, નવું સ્થિતિમાન = 2000 V]

5. R.ત્રિજ્યાના એક ગોળાની સપાટી પર Q જેટલો વિદ્યુતભાર છે, તો આ વિદ્યુતભાર તંત્રની સ્થિતિ-ઊર્જા શોધો.

[જવાબ : $\frac{1}{2}\frac{kQ^2}{R}$]

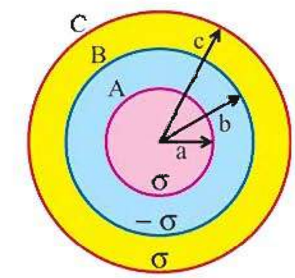
નોંધ : આ દાખલો ત્રણ રીતે ગણી શકાય : (1) પ્રારંભિક અને અંતિમ સ્થિતિમાનની સરેરાશ લઈને તેને વિદ્યુતભાર વડે ગુણીને, (2) આ ગોળાને એક કેપેસિટર ગણી, કેપેસિટરની ઊર્જાનું સૂત્ર વાપરીને અને (3) કોઈ ક્ષણે વિદ્યુતભાર q લઈ તેમાં dqનો વધારો કરવા થતું કાર્ય લઈ તેનું સંકલન કરવાથી. ગમે તે એક રીતે ગણો.

6. જો R ત્રિજ્યાના અર્ધગોળાની સપાટી પર નિયમિત વિદ્યુતભાર-ઘનતા σ હોય, તો આકૃતિમાં કેન્દ્ર પરના વિદ્યુતસ્થિતિમાનનું સૂત્ર મેળવો.



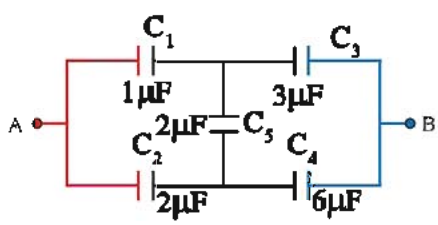
[જવાબ : $\frac{R\sigma}{2\varepsilon_0}$]

7. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે A, B અને C ત્રણ સમકેન્દ્રીય ધાતુની કવચો (shells). છે. તેમની ત્રિજ્યાઓ અનુક્રમે a, b અને c છે. ($a < b < c$) તેમની પૃષ્ઠ-વિદ્યુતભારઘનતાઓ અનુક્રમે σ, −σ અને σ છે, તો કવચ Aની સપાટી પરનું સ્થિતિમાન શોધો.



[જવાબ. : $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}[a - b + c]$]

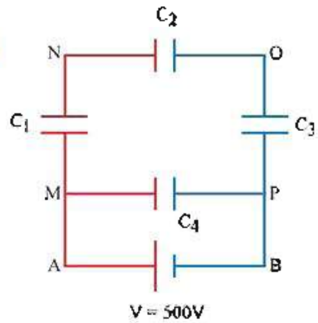
8. આકૃતિમાં દર્શાવેલ કેપેસિટર્સના જોડાણનું A અને B વચ્ચે સમતુલ્ય કેપેસિટન્સ શોધો.



[જવાબ : $\frac{9}{4}$ μF]

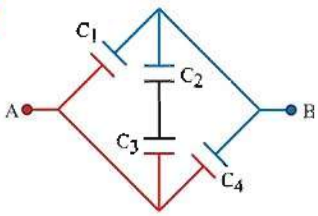
9. (1) 900 pFનું એક કેપેસિટર 100 Vની બૅટરી વડે ચાર્જ કર્યું છે. આ કેપેસિટરની વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જા શોધો. (2) હવે આ કેપેસિટરને બૅટરીથી છૂટું કરી, બીજા એક સમાન (identical) વિદ્યુતભારરહિત કેપેસિટર સાથે સમાંતર જોડવામાં આવે છે, તો હવે તંત્રની કુલ ઊર્જા કેટલી હશે ?

[જવાબ : (1) 4.5×10^{-6} J (2) 2.25×10^{-6} J]

10. 

આકૃતિમાં દર્શાવેલ કેપેસિટરોનાં જોડાણ માટે સમતુલ્ય કેપેસિટન્સ અને દરેક કેપેસિટર પર વિદ્યુતભારનું મૂલ્ય શોધો. દરેક કેપેસિટન્સ 10 μFનો છે.

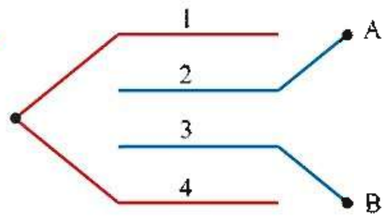
[**જવાબ :** સમતુલ્ય કેપેસિટન્સ = 13.3 μF $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 1.7 \times 10^{-3}$ C, $Q_4 = 5.0 \times 10^{-3}$ C]

11. 

આકૃતિમાં દર્શાવેલ પરિપથમાં A અને B વચ્ચે સમતુલ્ય કેપેસિટન્સ શોધો.

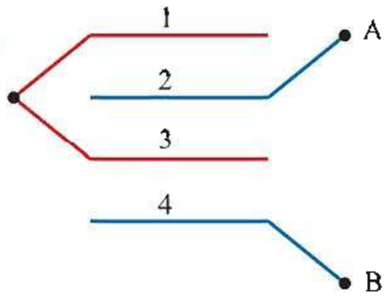
$C_1 = C_4 = 1\mu F$; $C_2 = C_3 = 2\ \mu F$.

[**જવાબ :** 3 μF]

12. 

આકૃતિમાં દર્શાવેલ દરેક પ્લેટનું ક્ષેત્રફળ A અને ક્રમિક પ્લેટો વચ્ચેનું અંતર d છે, તો A અને B બિંદુઓ વચ્ચેનું સમતુલ્ય કેપેસિટન્સ કેટલું હશે ?

[**જવાબ :** $\frac{3}{2}\frac{\epsilon_0 A}{d}$]

13. 

આકૃતિમાં દર્શાવેલ દરેક પ્લેટનું ક્ષેત્રફળ A અને ક્રમિક પ્લેટો વચ્ચેનું અંતર d છે, તો A અને B બિંદુઓ વચ્ચેનું સમતુલ્ય કેપેસિટન્સ કેટલું હશે ?

[**જવાબ :** $\frac{2}{3}\frac{\epsilon_0 A}{d}$]

•

3

પ્રવાહવિદ્યુત

3.1 પ્રસ્તાવના (Introduction)

આગળનાં બંને પ્રકરણમાં બધા જ વિદ્યુતભારો (મુક્ત અથવા બંધિત) સ્થિર હતા અને મહદ્અંશે તેમની વચ્ચેની આંતરક્રિયાઓ ભણ્યા હતા. આવા અભ્યાસને સ્થિત-વિદ્યુતશાસ્ત્ર (electrostatics) કહે છે.

પ્રસ્તુત પ્રકરણમાં આપણે વિદ્યુતભારોને ઊર્જા આપીને ગતિ કરતા (દોડતા) કરીશું. આવા ગતિ કરતા વિદ્યુતભારો, વિદ્યુતપ્રવાહ (current)નું નિર્માણ કરે છે.

કુદરતમાં ઘણી પરિસ્થિતિઓમાં આવા વિદ્યુતભારો અસ્તિત્વ ધરાવે છે. આકાશમાં વીજળી થાય ત્યારે વાદળાંઓમાંથી વાતાવરણ દ્વારા પૃથ્વી તરફ વિદ્યુતભારોનું વહન થાય છે. વિદ્યુતભારોનું આ વહન ક્ષણિક હોય છે, જેના કારણે ક્ષણિક પ્રવાહ (transient current) રચાય છે. વીજળીમાં થતું વિદ્યુતભારોનું વહન સ્થાયી હોતું નથી.

રોજિંદા જીવનમાં આપણે ઘણી બધી ઘટનાઓ જોઈએ છીએ, જેમાં વિદ્યુતભારોનું વહન નદીના સ્થાયી પ્રવાહની જેમ સ્થાયીપણે થાય છે. સેલ(બૅટરી)થી ચાલતું ઘડિયાળ, ટૉર્ચ, ટ્રાન્ઝિસ્ટર રેડિયો આનાં ઉદાહરણો છે.

પ્રસ્તુત પ્રકરણમાં આપણે સ્થિર વિદ્યુતપ્રવાહને લગતા કેટલાક પ્રાથમિક નિયમો અને વિદ્યુતવહન સાથે સંકલિત રાશિઓ જેવી કે, વિદ્યુતપ્રવાહઘનતા, ડ્રિફ્ટવેગ, મોબિલિટી વગેરેનો અભ્યાસ કરીશું. આ ઉપરાંત અવરોધો, વિદ્યુતકોષો અને તેમનાં વિવિધ જોડાણો, નેટવર્કનાં વિશ્લેષણ માટે કિર્ચોફના નિયમો અને વાહકમાં વિદ્યુતવહન દરમિયાન વિદ્યુત-ઊર્જાના ઉષ્મા-ઊર્જામાં થતાં રૂપાંતરણનો અભ્યાસ કરીશું. વળી, વિદ્યુતકોષના emfના માપન માટે પોટેન્શિયોમીટર તેમજ અવરોધના માપન માટે વપરાતા વ્હીસ્ટનબ્રિજ વિશે પણ માહિતી મેળવીશું.

આવા અભ્યાસને **પ્રવાહવિદ્યુતશાસ્ત્ર (current electricity)** કહે છે.

3.2 વિદ્યુતપ્રવાહ (Electric Current)

વિદ્યુતપ્રવાહનું નિર્માણ વિદ્યુતભારની ગતિને લીધે થાય છે. વાહકના કોઈ આડછેદમાંથી, t સમયમાં પસાર થતો ચોખ્ખો (net) વિદ્યુતભાર Q હોય, તો વિદ્યુતભારના સ્થાયી વહન માટે, $I = \frac{Q}{t}$ (3.2.1)

ને કોઈ આડછેદમાંથી પસાર થતા પ્રવાહ તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

વિદ્યુતભારોની ગતિની દિશાને લંબ એવા વાહકના કોઈ આડછેદમાંથી એકમસમયમાં પસાર થતા વિદ્યુતભારના જથ્થાને વિદ્યુતપ્રવાહ (I) કહે છે.

SI પદ્ધતિમાં વિદ્યુતપ્રવાહ (I)નો સમાવેશ મૂળભૂત રાશિ તરીકે કરવામાં આવ્યો છે. વિદ્યુતપ્રવાહનો SI એકમ ઍમ્પિયર (A) છે, જે $\frac{\text{coulomb}}{\text{second}}$ બરાબર છે.

ઉપરના સમીકરણ (3.2.1)માં

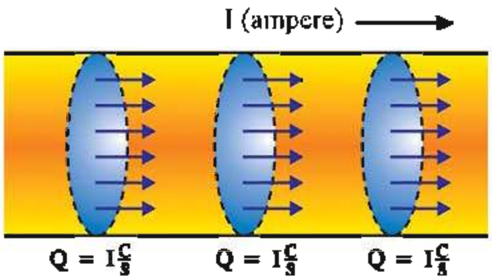
t = 1 second, Q = 1 coulomb લઈએ તો,

I = 1 ampere.

જો વાહકના કોઈ આડછેદમાંથી લંબરૂપે 1 second *દીઠ* પસાર થતો વિદ્યુતભારનો જથ્થો 1 coulomb હોય, તો તેમાંથી પસાર થતો વિદ્યુતપ્રવાહ 1 ampere છે તેમ કહેવાય.

નાના વિદ્યુતપ્રવાહો માટે milliampere (mA = 10^{-3}A) અને microampere (μA = 10^{-6}A) એકમો વપરાય છે.

ધાત્ત્વિક વાહકોમાં વિદ્યુતવહન ઋણ વિદ્યુતભારી ઇલેક્ટ્રૉનની ગતિને લીધે થાય છે. વિદ્યુતવિભાજ્ય દ્રાવણો (electrolytes)માં ધન અને ઋણ આયનોની પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાંની ગતિને લીધે વિદ્યુતવહન થાય છે. જ્યારે સેમીકન્ડક્ટર્સ (અર્ધવાહકો)માં વિદ્યુતવહન આંશિક રીતે ઇલેક્ટ્રૉન દ્વારા અને આંશિકરીતે હોલ (હોલ એટલે સહસંયોજક બંધમાં ઇલેક્ટ્રૉનની ઊણપ)ના કારણે થતું હોય છે.



આકૃતિ 3.1 વિદ્યુતભારનું સંરક્ષણ

આકૃતિ 3.1માં દર્શાવેલ વાહકમાંથી ધારો કે I ampere પ્રવાહ વહે છે. આથી, વાહકના દરેક આડછેદમાંથી 1 secondમાં I coulomb વિદ્યુતભાર પસાર થાય છે. વિદ્યુતભાર

બીજા શબ્દોમાં, વાહકના કોઈ એક આડછેદમાં *એક બાજુએથી* જેટલો વિદ્યુતભાર જેટલા સમયમાં દાખલ થાય છે, તેટલા સમયમાં તેટલો જ વિદ્યુતભાર *બીજી બાજુએથી* બહાર આવે છે. આમ, **વાહકના કોઈ પણ બિંદુ પાસે વિદ્યુતભાર સંગ્રહ પામતો નથી કે સ્વયં ઉદ્ભવતો નથી કે નાશ પામતો નથી, એટલે કે વિદ્યુતભારનું સંરક્ષણ થાય છે.**

રૈવાજિક રીતે, વિદ્યુતપ્રવાહની દિશા ધન વિદ્યુતભારની ગતિની દિશામાં લેવામાં આવે છે. તેને રૈવાજિક વિદ્યુતપ્રવાહ (conventional current) કહેવાય છે. પરંતુ વાહકોમાં ઋણ વિદ્યુતભારી ઇલેક્ટ્રૉનની ગતિને કારણે પ્રવાહ સર્જાતો હોવાથી વિદ્યુતપ્રવાહની દિશા ઇલેક્ટ્રૉનપ્રવાહની વિરુદ્ધ દિશામાં હોય છે.

કેટલાક કિસ્સાઓમાં વિદ્યુતપ્રવાહ (વિદ્યુતભાર વહનનો દર) સમય સાથે બદલાતો હોય છે. એટલે કે વિદ્યુતવહન સ્થાયી હોતું નથા. આવા સંજોગોમાં જો t અને $t + \Delta t$ સમયો વચ્ચેના Δt જેટલા સમયગાળામાં વાહકના કોઈ પણ આડછેદમાંથી પસાર થતો વિદ્યુતભારનો જથ્થો ΔQ હોય તો,

Δt સમયગાળા દરમિયાન વાહકમાં વહેતો સરેરાશ વિદ્યુતપ્રવાહ,

$$\langle I \rangle = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

તેથી t સમયે વિદ્યુતપ્રવાહ,

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \qquad (3.2.2)$$

ઉદાહરણ 1 : એક તારમાંથી વહેતો વિદ્યુતપ્રવાહ સમય સાથે $I = I_0 + \alpha t$ સૂત્ર મુજબ બદલાય છે. જ્યાં, $I_0 = 10$ A અને $\alpha = 4$ As^{-1}, તો તારના કોઈ આડછેદમાંથી પ્રથમ 10 sમાં પસાર થતો વિદ્યુતભાર શોધો.

ઉકેલ : વિદ્યુતપ્રવાહ $I = \frac{dq}{dt} = I_0 + \alpha t$

$\therefore\ dq = (I_0 + \alpha t)dt$

બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$$\int dq = \int_{t=0}^{t=10} (I_0 + \alpha t)dt$$

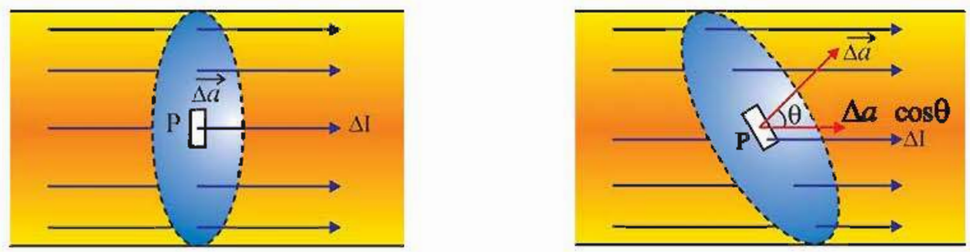
$$\therefore\ q = \left[I_0 t + \frac{\alpha t^2}{2} \right]_{t=0}^{t=10} = 10\ I_0 + 50\ \alpha$$

$I_0 = 10$ અને $\alpha = 4$ મૂકતાં,

$$q = 10(10) + 50(4) = 300\ C$$

3.3 વિદ્યુતપ્રવાહઘનતા (Electric Current Density)

આપણે ધ્યાનમાં લીધેલ વાહકના આડછેદના બધાં બિંદુઓ પર વિદ્યુતભારના વહનનો દર સમાન ન હોય વળી, આડછેદ પણ વિદ્યુતપ્રવાહને લંબ ન હોય તેવી સ્થિતિમાં વાહકના આડછેદના આપેલ કોઈ ચોક્કસ બિંદુ પાસે વિદ્યુતભારના વહનનો દર જાણવા માટે વિદ્યુતપ્રવાહઘનતા $\vec{J}$ નામની સદિશ રાશિ વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે. આકૃતિ 3.2(a)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે વાહકના P બિંદુ પાસે વિદ્યુતપ્રવાહઘનતા વ્યાખ્યાયિત કરવા માટે વિદ્યુતભારની ગતિની દિશાને લંબ Δa જેટલું ક્ષેત્રફળ ધરાવતો નાનો આડછેદ કલ્પો.



આકૃતિ 3.2 વિદ્યુતપ્રવાહધારિત વાહકના આડછેદ

જો Δa ક્ષેત્રફળ ધરાવતા આડછેદમાંથી પસાર થતો પ્રવાહ ΔI હોય, તો સરેરાશ પ્રવાહઘનતા,

$$\langle J \rangle = \frac{\Delta I}{\Delta a}$$

P બિંદુ પાસે પ્રવાહઘનતા,

$$J = \lim_{\Delta a \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta a} = \frac{dI}{da} \tag{3.3.1}$$

વિદ્યુતપ્રવાહઘનતા (J)ની દિશા વિદ્યુતપ્રવાહ(I)ની દિશામાં હોય છે.

જો વિદ્યુતપ્રવાહ I, વાહકના A ક્ષેત્રફળમાં સમાન રીતે વિતરીત થયેલો હોય અને આડછેદને લંબ હોય તો,

$$J = \frac{I}{A} \tag{3.3.2}$$

આમ, વાહકના કોઈ પણ બિંદુ પાસે પ્રવાહઘનતા એટલે તે બિંદુ પાસે પ્રવાહની દિશાને લંબ એવા એકમ આડછેદમાંથી પસાર થતો વિદ્યુતપ્રવાહ (એકમસમયમાં પસાર થતો વિદ્યુતભારનો જથ્થો)

પ્રવાહઘનતાનો SI એકમ Am^{-2} છે.

હવે, આપણે ધ્યાનમાં લીધેલ આડછેદ Δa વિદ્યુતપ્રવાહને લંબ ના હોય તો, આડછેદનો વિદ્યુતપ્રવાહની દિશામાંનો ઘટક $\Delta a \cos\theta$ ધ્યાનમાં લેવો જોઈએ. (આકૃતિ 3.2 (b))

P પાસે સરેરાશ પ્રવાહઘનતા,

$$\langle J \rangle = \frac{\Delta I}{\Delta a \cos\theta} \tag{3.3.3}$$

જ્યાં ΔI = P બિંદુ પાસેના આડછેદ Δaમાંથી પસાર થતો પ્રવાહ

અને θ = આડછેદને દોરેલા લંબસદિશે વિદ્યુતપ્રવાહની દિશા સાથે બનાવેલ કોણ.

જો આડછેદ $\overrightarrow{\Delta a}$ અતિ સૂક્ષ્મ લઈએ તો,

પ્રવાહઘનતા $J = \lim_{\Delta a \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta a \cos\theta} = \frac{dI}{da\cos\theta}$

$$\therefore \; dI = J da \cos\theta \tag{3.3.4}$$

$$\therefore \; dI = \vec{J} \cdot \vec{da} \tag{3.3.5}$$

સમીકરણ (3.3.5)નું સમગ્ર આડછેદ પર સંકલન લેતાં,

$$\int dI = \int \vec{J} \cdot \vec{da}$$

$$I = \int_a \vec{J} \cdot \vec{da} \tag{3.3.6}$$

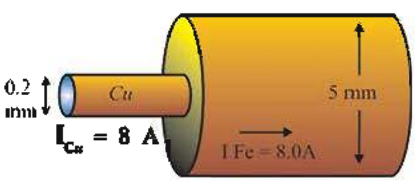
જો કોઈ આડછેદ સમગ્રતયા વિદ્યુતપ્રવાહને લંબ હોય અને જો સમગ્ર આડછેદ પર J સમાન હોય તો,

$$I = \int \vec{J} \cdot \vec{da} = J \int da$$

$$\therefore \; I = JA \tag{3.3.7}$$

વિદ્યુતપ્રવાહઘનતા એ વિદ્યુતભારવહનના વ્યાપક કિસ્સાઓ ચર્ચવા માટે ઉપયોગી રાશિ છે.

ઉદાહરણ 2 : આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે 0.2 mm વ્યાસના તાંબાના તારને 5.0 mm વ્યાસના લોખંડના તાર સાથે જોડવામાં આવ્યો છે. તે બંનેમાંથી પ્રવાહ પસાર થાય છે. જો તાંબાના તારમાં પ્રવાહનું મૂલ્ય 8.0 A હોય તો,



(1) લોખંડના તારમાં પ્રવાહ અને પ્રવાહઘનતા શોધો.

(2) તાંબાના તારમાં પ્રવાહઘનતા શોધો.

ઉકેલ : વિદ્યુતભારના સંરક્ષણના નિયમ અનુસાર જેટલા સમયમાં જેટલો વિદ્યુતભાર તાંબાના તારમાંથી પસાર થાય છે, તેટલા જ સમયમાં તેટલો જ વિદ્યુતભાર લોખંડના તારમાંથી પસાર થાય છે.

(1) $\therefore \; I_{Cu} = 8.0 = I_{Fe}$

હવે ધારો કે લોખંડના તારના આડછેદનું ક્ષેત્રફળ A_{Fe} અને વ્યાસ તથા ત્રિજ્યા અનુક્રમે d_{Fe} અને r_{Fe} છે.

$$\therefore \; J_{Fe} = \frac{I_{Fe}}{A_{Fe}} = \frac{8.0}{\pi r^2_{Fe}} = \frac{8.0}{\pi\left(\frac{d_{Fe}}{2} \times 10^{-3}\right)^2} = \frac{8.0 \times 4}{(3.14)(5 \times 10^{-3})^2}$$

$$\therefore \; J_{Fe} = 407 \; kA/m^2$$

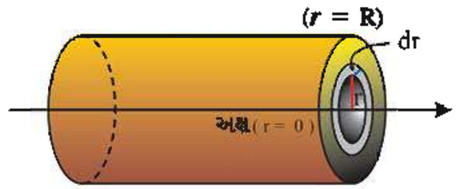
(2) તાંબાના તારમાં પ્રવાહઘનતા $= \frac{8.0}{(3.14)(0.1 \times 10^{-3})^2}$

$$\therefore \; J_{Cu} = 2.5 \times 10^8 \; A/m^2$$

ઉદાહરણ 3 : R ત્રિજ્યાના નળાકાર વાહકની અક્ષને સમાંતર પ્રવાહઘનતા $J = J_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$ વડે આપેલ છે, તો વાહકની લંબાઈની દિશામાં પ્રવાહ શોધો. અહીં r એ અક્ષથી અંતર છે.

ઉકેલ : નળાકારની અક્ષને લંબ એવા આડછેદ પર અક્ષથી r જેટલા અંતરે dr જાડાઈની રિંગ વિચારો.

આ રિંગમાંથી પસાર થતો પ્રવાહ,



$$dI = \vec{J}\cdot\vec{da} = Jda \ (\because \cos\theta = 1)$$

$$\therefore \ dI = J_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)(2\pi r dr)$$

નળાકાર વાહકની અક્ષને સમાંતર વાહકની લંબાઈની દિશામાં પસાર થતો પ્રવાહ,

$$I = \int dI = \int_{r=0}^{r=R} J_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)(2\pi r dr) = 2\pi J_0 \int_{r=0}^{r=R}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)(r)\ dr$$

$$I = 2\pi J_0 \int_0^R \left(r-\frac{r^3}{R^2}\right)dr = 2\pi J_0 \left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4R^2}\right]_0^R = 2\pi J_0\left[\frac{R^2}{2}-\frac{R^4}{4R^2}\right] = 2\pi J_0\left[\frac{R^2}{4}\right]$$

$$I = \frac{\pi J_0 R^2}{2}$$

3.4 ઓહ્મનો નિયમ (Ohm's Law)

6Vના સપ્લાયને અડકતાં શોક(shock) લાગતો નથી, જ્યારે 230 Vના સપ્લાયને અડકતાં જીવલેણ શોક (fatal shock) લાગે છે. આવું શા માટે થતું હશે ?

આનું કારણ એ છે કે જુદા-જુદા વૉલ્ટેજ માટે, આપણા શરીરમાંથી પસાર થતો પ્રવાહ જુદો-જુદો હોય છે.

ઈ. સ. 1828માં જર્મન ભૌતિકશાસ્ત્રી અને ગણિતશાસ્ત્રી જ્યૉર્જ સાઈમન ઓહ્મે સૌપ્રથમ વિદ્યુતપ્રવાહ અને વૉલ્ટેજ વચ્ચેનો ગાણિતીય સંબંધ મેળવ્યો. ઓહ્મે પ્રાયોગિક રીતે શોધી કાઢ્યું કે, **"નિશ્ચિત ભૌતિક પરિસ્થિતિમાં (દા.ત., અચળ તાપમાને) રાખેલા કોઈ વાહક પદાર્થમાંથી વહેતો પ્રવાહ (I), તે વાહકના બે છેડા વચ્ચે લગાડેલ વિદ્યુતસ્થિતિમાનના તફાવત (V)ના સમપ્રમાણમાં હોય છે."** આ વિધાનને ઓહ્મનો નિયમ કહે છે.

ઓહ્મના નિયમ મુજબ, $I \propto V$

$$\therefore \frac{V}{I} = \text{અચળ}$$

આ અચળ ગુણોત્તર $\frac{V}{I}$ને વાહકનો અવરોધ (R) કહે છે.

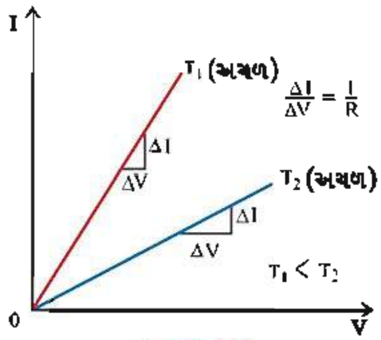
$$\therefore \frac{V}{I} = R \qquad (3.4.1)$$

અથવા $V = IR$ (3.4.2)

SI પદ્ધતિમાં અવરોધનો એકમ $\frac{\text{volt}}{\text{ampere}}$ છે, જેને ohm કહે છે. તેની સંજ્ઞા Ω છે.

આપેલ તાપમાને, વાહકનો અવરોધ R વાહકની જાત ઉપરાંત વાહકના પરિમાણ (dimension) પર પણ આધાર રાખે છે.

અવરોધના વ્યસ્ત એટલે કે $\frac{1}{R}$ ને આપેલ વાહકના દ્રવ્યનું કન્ડક્ટન્સ કહે છે. તેનો એકમ Ω^{-1} અથવા mho છે. mhoનો સંકેત ℧ છે.



આકૃતિ 3.3

વાહક માટે I – V લાક્ષણિકતા

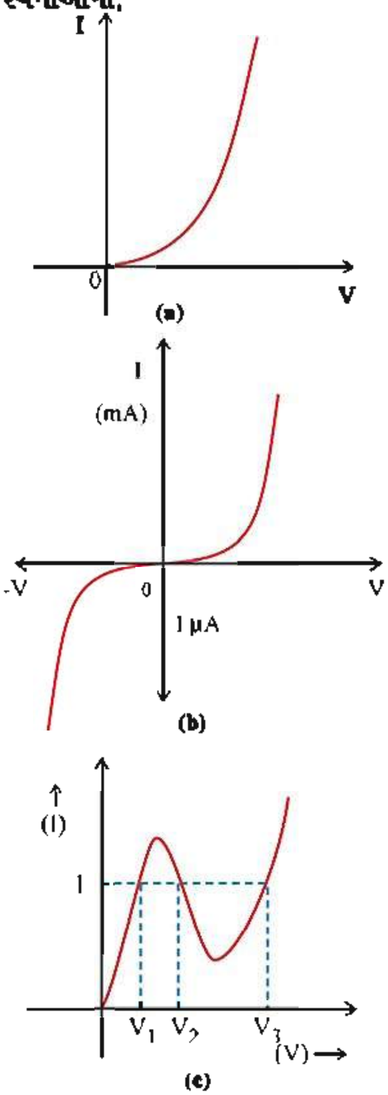
ઓહ્મનો નિયમ એ ગુરુત્વાકર્ષણ માટેના ન્યૂટનના સાર્વત્રિક નિયમ કે સ્થિર વિદ્યુતભારો માટેના કુલંબના નિયમ જેવો કુદરતનો કોઈ મૂળભૂત નિયમ નથી. ઓહ્મનો નિયમ તો માત્ર ચોક્કસ ભૌતિક પરિસ્થિતિમાં રાખેલ વાહક માટે વિદ્યુતસ્થિતિમાનના તફાવત અને પ્રવાહ વચ્ચેનો પ્રાયોગિક સંબંધ છે.

બધી જ ધાતુઓ, કેટલીક અધાતુઓ અને કેટલીક વિદ્યુતરચનાઓ ઓહ્મના નિયમનું પાલન કરે છે. આવી રચનાઓને ઓહ્મિક રચનાઓ (Ohmic devices) કહે છે.

ઓહ્મનો નિયમ પળાતો હોય તેવા કિસ્સામાં અચળ તાપમાને, આપેલ વાહક માટે I વિરુદ્ધ V (I – V) આલેખ સુરેખા મળે છે. એટલે કે આવો સંબંધ રેખીય (linear) છે (જુઓ આકૃતિ 3.3).

3.4.1 ઓહ્મના નિયમની મર્યાદાઓ (Limitations of Ohm's Law)

કેટલાંક દ્રવ્યો અને વિદ્યુતપરિપથમાં વપરાતી રચનાઓમાં V અને I એકબીજાના સમપ્રમાણમાં હોતા નથી. આવી રચનાઓમાં,



(1) V – I સંબંધો અરેખીય (non-linear) હોય છે. દા. ત., સેમીકન્ડક્ટર રચનાઓ જેવી કે ડાયોડ, ટ્રાન્ઝિસ્ટર (જુઓ આકૃતિ 3.4(a)).

(2) V અને I વચ્ચેનો સંબંધ, Vની સંજ્ઞા પર આધારિત હોય છે. બીજા શબ્દોમાં, કોઈ ચોક્કસ વોલ્ટેજ V માટે પ્રવાહ I હોય તો, Vનું મૂલ્ય અચળ રાખી તેની દિશા ઊલટાવવામાં આવે તો તે જ મૂલ્યનો પ્રવાહ વિરુદ્ધ દિશામાં મળતો નથી. આવું સેમીકન્ડક્ટર ડાયોડમાં થાય છે. તેવું આપણે આગળ ઉપર ભણીશું. (જુઓ આકૃતિ 3.4(b))

(3) V-I સંબંધો જુદાં-જુદાં (એટલે કે non-unique) હોય છે. અર્થાત્ પ્રવાહ (I)ના આપેલ એક જ મૂલ્ય માટે Vની એક કરતાં વધુ કિંમતો મળે છે. આવી વર્તણૂક ધરાવતી રચના (દા.ત., ટનલ ડાયોડ)નો આલેખ આકૃતિ 3.4(c)માં દર્શાવ્યો છે.

આકૃતિ 3.4

જુદી-જુદી રચનાઓમાં I-V લાક્ષણિકતા

ઓહ્મનો નિયમનું પાલન ન કરતાં કેટલાંક દ્રવ્યો અને રચનાઓને નોન-ઓહ્મિક (non-ohmic) રચનાઓ કહે છે. આવી રચનાઓનો વ્યાપકપણે ઇલેક્ટ્રોનિક પરિપથોમાં ઉપયોગ થાય છે.

3.5 વિદ્યુત-અવરોધકતા અને વાહકતા (Electrical Resistivity and Conductivity)

વાહકનો અવરોધ (R), વાહકના પરિમાણ (એટલે કે ભૌમિતિક પ્રાચલો) પર કેવી રીતે આધાર રાખે છે તે સમજવા માટે A આડછેદવાળો અને l લંબાઈનો એક વાહકતાર ધ્યાનમાં લો. હવે પ્રયોગો દ્વારા જાણી શકાયું છે કે આપેલા તાપમાને, વાહકનો અવરોધ (R) વાહકની લંબાઈ (l)ના સમપ્રમાણમાં અને આડછેદના ક્ષેત્રફળ (A)ના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં ચલે છે.

$R \propto l$ અને $R \propto \frac{1}{A}$

$$\therefore R \propto \frac{l}{A}$$

$$\therefore R = \rho . \frac{l}{A} \quad (3.5.1)$$

અહીં અચળાંક ρને વાહકના દ્રવ્યની અવરોધકતા (resistivity) કહે છે. તે વાહકના દ્રવ્યની જાત, વાહકના તાપમાન અને વાહક પરના દબાણ પર આધાર રાખે છે પણ વાહકના પરિમાણ (dimension) પર આધારિત નથી.

અવરોધકતા ρનો એકમ ohm meter (Ωm) છે.

(**નોંધ :** ખૂબ ઊંચાં દબાણોએ અમુક દ્રવ્યના સ્ફટિકોનું બંધારણ બદલાતાં તેમની અવરોધકતામાં મોટા ફેરફારો જોવા મળે છે.)

સમીકરણ (3.5.1)નો ઉપયોગ કરતાં, ઓહ્મનો નિયમ નીચે મુજબ લખી શકાય :

$$V = IR$$

$$V = \frac{I\rho l}{A} \quad (3.5.2)$$

$$V = J\rho l \quad (3.5.3)$$

જ્યાં, $\frac{I}{A} = J$ પ્રવાહઘનતા છે.

જો, l લંબાઈના વાહકમાં વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા E હોય, તો વાહકના બે છેડા વચ્ચેનો p.d. $V = El$

$$\therefore El = J\rho l$$

$$\therefore E = J\rho \quad (3.5.4)$$

વિદ્યુતપ્રવાહઘનતા $\vec{J}$ સદિશ રાશિ છે અને તેની દિશા Eની દિશામાં હોય છે. તેથી ઉપરના સમીકરણને સદિશ સ્વરૂપમાં નીચે મુજબ લખી શકાય :

$$\vec{E} = \vec{J}\rho$$

અથવા $\vec{J} = \frac{\vec{E}}{\rho} = \sigma\vec{E} \quad (3.5.5)$

જ્યાં, $\sigma = \frac{1}{\rho}$ (અવરોધકતાના વ્યસ્ત)ને તે પદાર્થના દ્રવ્યની વાહકતા (conductivity) કહે છે.

વાહકતા σનો એકમ $(\Omega\ m)^{-1}$ અથવા mho m^{-1} ($℧\ m^{-1}$) અથવા siemen m^{-1} (Sm^{-1}) છે.

અહીં નોંધો કે સમીકરણ (3.5.5) એ ઓહ્મના નિયમ $V = IR$નું સદિશ સ્વરૂપ છે.

3.6 ડ્રિફ્ટવેગ, મોબિલિટી (ચાલકત્વ) અને તેમનો વિદ્યુતપ્રવાહ સાથે સંબંધ (Drift Velocity, Mobility and its Relations with Current)

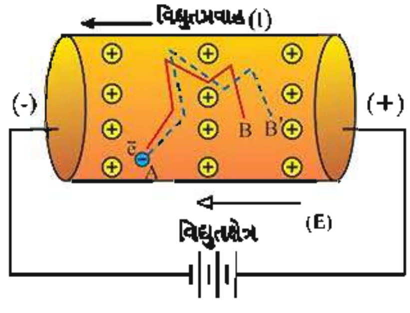
આપણે જાણીએ છીએ કે અણુઓ અને પરમાણુઓમાં ઋણ વિદ્યુતભારી ઇલેક્ટ્રૉન્સ અને ધન વિદ્યુતભારી ન્યુક્લિયસ વિદ્યુતીય કુલંબબળથી એકબીજા સાથે જકડાયેલા (bound) હોય છે. ઘન દ્રવ્ય (bulk matter) ઘણા બધા અણુઓનું બનેલું હોય છે.

આપણી ચર્ચામાં આપણે ઘન વાહકો (solid conductors) જેમાં વિદ્યુતવહન ઋણ વિદ્યુતભારી મુક્ત ઇલેક્ટ્રૉન્સને લીધે થાય છે તેના પર ધ્યાન કેન્દ્રિત કરીશું.

ધાત્વિક વાહકોમાં બહારની કક્ષામાંના ઇલેક્ટ્રૉન ન્યુક્લિયસ સાથે ઓછા બળથી જકડાયેલા હોય છે. ઓરડાના તાપમાને ઉષ્મીય ઊર્જા ને કારણે આવા વેલેન્સ ઇલેક્ટ્રૉન દ્રવ્યની અંદર પિતૃપરમાણુઓમાંથી છૂટા પડી જાય છે અને ધન આયનો ચોક્કસ ભૌમિતિક માળખું રચાય તે રીતે લેટિસ બિંદુઓ પર ગોઠવાય છે. આ છૂટા પડેલા ઇલેક્ટ્રૉન્સને મુક્ત ઇલેક્ટ્રૉન્સ કહે છે અને આયનો પોતાના મધ્યમાનસ્થાનની આસપાસ દોલનો કરતા હોય છે.

બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્રની ગેરહાજરીમાં, વાહકોમાં ઇલેક્ટ્રૉન વાયુના અણુઓની જેમ ઉષ્મીય ગતિ કરતા હોય છે અને ગતિ દરમિયાન તેઓ આયનો સાથે અથડામણ અનુભવે છે. અથડામણ પછી ઇલેક્ટ્રૉન્સના વેગની દિશા સંપૂર્ણપણે અસ્તવ્યસ્ત હોય છે એટલે કે આપેલ સમયે, ઇલેક્ટ્રૉનના વેગની કોઈ ચોક્કસ દિશા હોતી નથી. કોઈ એક ઇલેક્ટ્રૉનની આવી અસ્તવ્યસ્ત ગતિ આકૃતિ 3.5માં સળંગ રેખા AB વડે દર્શાવેલ છે.

આમ, બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્રની ગેરહાજરીમાં સરેરાશ રીતે, કોઈ દિશામાં ગતિ કરતા ઇલેક્ટ્રૉન્સની સંખ્યા અને તે દિશાની વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરતા ઇલેક્ટ્રૉન્સની સંખ્યા સમાન હોવાથી વાહકના કોઈ પણ આડછેદમાંથી પસાર થતો ચોખ્ખો વિદ્યુતભાર શૂન્ય હોય છે અને તેથી વાહકમાં વિદ્યુતપ્રવાહનું વહન થતું નથી.



આકૃતિ 3.5 ડ્રિફ્ટવેગ

હવે, જ્યારે વાહકના બે છેડા વચ્ચે બેટરી જોડી આકૃતિ 3.5માં દર્શાવ્યા અનુસાર વિદ્યુતક્ષેત્ર (E) લાગુ પાડવામાં આવે છે, ત્યારે ઇલેક્ટ્રૉન પર વાહકમાં ઉત્પન્ન થતા વિદ્યુતક્ષેત્રની વિરુદ્ધ દિશામાં (બેટરીના ધન ધ્રુવ તરફ) બળ $F = Ee$ લાગતાં ઇલેક્ટ્રૉનનો ગતિમાર્ગ ત્રુટક રેખાથી દર્શાવેલ AB' બને છે. આમ થવાનું કારણ એ છે કે ઇલેક્ટ્રૉન દોલન કરતાં આયનોના સતત બદલાતા જતાં વિદ્યુતક્ષેત્રમાં ગતિ કરતા કરતા સતત પ્રકીર્ણન અનુભવતા હોય છે. વાહકમાં અવરોધ ઉદ્‌ભવવાનું કારણ આવી અથડામણો છે.

આમ, બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્રની હાજરીમાં ઇલેક્ટ્રૉનનો, વિદ્યુતક્ષેત્રની વિરુદ્ધ દિશામાંનો, પ્રવેગ $a = \frac{F}{m} = \frac{E \cdot e}{m}$ જેટલો હોય છે, પરંતુ આ પ્રવેગ ક્ષણ પૂરતો (momentary) હોય છે, કારણ કે ઇલેક્ટ્રૉન આયનો સાથે સતત અથડાતા-અથડાતા, (વાસ્તવમાં બદલાતા જતા ક્ષેત્રમાં ફંટાતા) ક્ષેત્રની વિરુદ્ધ દિશામાં ધસડાતા હોય છે. આવી દરેક અથડામણ દરમિયાન ઇલેક્ટ્રૉને પ્રાપ્ત કરેલ વેગ શૂન્ય થઈ જાય છે અને દરેક અથડામણ પછી વિદ્યુતક્ષેત્રને કારણે ઇલેક્ટ્રૉન પાછા નવેસરથી પ્રવેગિત થાય છે અને પાછા અથડાય છે અને પાછા આમ ને આમ સતત ચાલ્યા કરે છે.

આથી, હવે કોઈ ઇલેક્ટ્રૉન વિદ્યુતક્ષેત્રની ગેરહાજરીમાં Aથી B સુધી ગતિ કરતો હતો, તેને બદલે તેની ગતિ ક્ષેત્રની હાજરીમાં Aથી B' સુધી થાય છે. આવી સ્થિતિમાં તેણે ધસડાઈને કરેલું અસરકારક સ્થાનાંતર BB' બને છે. આ સ્થાનાંતરને અનુરૂપ ઇલેક્ટ્રૉનના વેગને ડ્રિફ્ટવેગ (v_d) કહે છે.

આ સ્થિતિમાં વાહકના કોઈ પણ આડછેદમાંથી પસાર થતા ઇલેક્ટ્રૉનની સરેરાશ સંખ્યા શૂન્ય રહેતી નથી અને વાહકના આડછેદમાંથી પરિણામી વિદ્યુતભાર અને તેથી વિદ્યુતપ્રવાહ પસાર થાય છે તેમ કહેવાય.

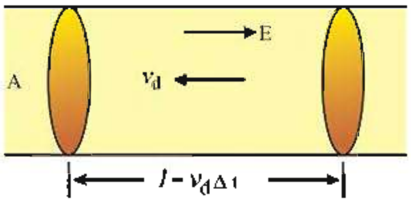
વાહકમાં ઇલેક્ટ્રૉનની આયનો સાથેની બે ક્રમિક અથડામણો વચ્ચેના સરેરાશ સમયગાળાને રિલેક્સેશન-સમય (τ). કહે છે.

રિલેક્સેશન-સમય (τ) જેટલા સમયગાળામાં ઇલેક્ટ્રૉનને પ્રાપ્ત કરેલ ડ્રિફ્ટવેગ,

$$v_d = a\tau$$

$$v_d = \left(\frac{E \cdot e}{m}\right)\tau \tag{3.6.1}$$

ડ્રિફ્ટવેગ અને વિદ્યુતપ્રવાહઘનતા વચ્ચેનો સંબંધ મેળવવા આકૃતિ 3.6માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે આડછેદનું સમાન ક્ષેત્રફળ A ધરાવતો નળાકારવાહક ધ્યાનમાં લો. આ વાહકના બે છેડા વચ્ચે બૅટરી જોડતાં તેમાં E જેટલું વિદ્યુતક્ષેત્ર ઉત્પન્ન થાય છે.



આકૃતિ 3.9 ડ્રિફ્ટવેગ અને વિદ્યુતપ્રવાહઘનતા વચ્ચેનો સંબંધ

જો ઇલેક્ટ્રૉનનો ડ્રિફ્ટવેગ v_d હોય તો, Δt સમયમાં ઇલેક્ટ્રૉને કાપેલું અંતર $l = v_d \Delta t$.

વાહકના $v_d \Delta t$ જેટલી લંબાઈ ધરાવતા ભાગનું કદ $= Al = Av_d \Delta t$.

જો વાહકના એકમકદ દીઠ મુક્ત ઇલેક્ટ્રૉનની સંખ્યા (સંખ્યાઘનતા) n હોય તો વાહકના $Av_d \Delta t$ કદમાં સમાયેલા ઇલેક્ટ્રૉનની સંખ્યા $= nAv_d \Delta t$.

આ બધા ઇલેક્ટ્રૉન Δt સમયમાં વાહકના A ક્ષેત્રફળવાળા આડછેદમાંથી પસાર થાય છે.

આમ, Δt સમયમાં આડછેદમાંથી પસાર થતો વિદ્યુતભાર,

$$\Delta Q = nAv_d \Delta te \tag{3.6.2}$$

$$\therefore \text{ વિદ્યુતપ્રવાહ } I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = nAv_d e \tag{3.6.3}$$

$$\text{અને વિદ્યુતપ્રવાહઘનતા } J = \frac{I}{A} = nev_d \tag{3.6.4}$$

સમીકરણ (3.6.4)ને વ્યાપક રૂપે સદિશ સ્વરૂપમાં $\vec{J} = nq\vec{v}_d$ મુજબ લખી શકાય.

ઋણ વિદ્યુતભાર q માટે $\vec{J}$ અને $\vec{v}_d$ ની દિશા પરસ્પર વિરુદ્ધ હોય છે.

વિદ્યુતપ્રવાહઘનતા (J)નાં બે સૂત્રો (3.5.5) અને (3.6.4) સરખાવતાં,

$$\sigma E = nev_d$$

સમીકરણ (3.6.1)માંથી v_d નું મૂલ્ય આ સમીકરણમાં મૂકતાં,

$$\sigma E = ne\left(\frac{Ee}{m}\tau\right)$$

$$\therefore \sigma = \frac{ne^2\tau}{m} \tag{3.6.5}$$

પરંતુ, $\sigma = \frac{1}{\rho}$ હોવાથી,

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

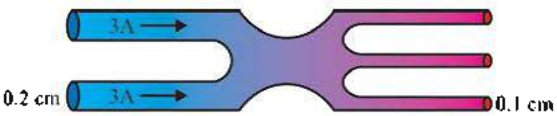
$$\therefore \rho = \frac{m}{ne^2\tau} \tag{3.6.6}$$

ધાતુ પદાર્થોમાં, સંખ્યાઘનતા n તાપમાન પર ખાસ આધાર રાખતી નથી, તેથી તાપમાન વધતાં આયનોનાં દોલનો ઝડપી, વધારે અસ્તવ્યસ્ત અને મોટા કંપવિસ્તારવાળાં બને છે. પરિણામે, બે ક્રમિક અથડામણો વચ્ચેનો રિલેક્સેશન-સમય (τ) ઘટે છે. તેથી ઉપરના સૂત્ર મુજબ તાપમાન સાથે ધાતુની અવરોધકતામાં વધારો થાય છે.

અવાહકો અને સેમીકન્ડક્ટર્સમાં રિલેક્સેશન-સમય τની સાથે મહદ્અંશે મુક્ત વિદ્યુતભારવાહકોની સંખ્યાઘનતા nમાં પણ તાપમાન સાથે ફેરફાર થાય છે.

સેમીકન્ડક્ટર્સમાં જેમ તાપમાન T વધે છે, તેમ વિદ્યુતભારવાહકોની સંખ્યાઘનતા (n)માં પણ વધારો થાય છે. આથી, તાપમાન વધતાં સેમીકન્ડક્ટર્સની વાહકતામાં વધારો થાય છે, અર્થાત્ તેમની અવરોધકતા (ρ)માં ઘટાડો થાય છે.

ઉદાહરણ 4 : આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે 0.2 cm વ્યાસવાળા એક બાજુ રહેલા બે તારોમાંથી 3Aનો સમાન પ્રવાહ વહી રહ્યો છે. હવે, આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે, આ તારોના 0.1 cm વ્યાસવાળા ત્રણ સમાન ભાગ કરવામાં આવ્યા છે, તો જાડા અને પાતળા તારોમાં ડ્રિફ્ટવેગ શોધો.



ઇલેક્ટ્રૉન સંખ્યાઘનતા $= 7 \times 10^{28}\ m^{-3}$. બધા તારોનું દ્રવ્ય સમાન છે. ઇલેક્ટ્રૉનનો વિદ્યુતભાર $= 1.6 \times 10^{-19}$ C.

ઉકેલ : જાડા તારમાં પ્રવાહઘનતા $J = \frac{I}{A} = \frac{3}{\pi r^2} = \frac{3}{\pi(0.1\times10^{-2})^2}$

હવે, પ્રવાહઘનતા $J = nev_d$

$$\therefore\ v_d = \frac{J}{ne} = \frac{3}{\pi(0.1\times10^{-2})^2\times7\times10^{28}\times1.6\times10^{-19}}$$

$\therefore\ v_d = 8.5 \times 10^{-5}\ m\ s^{-1}$

હવે, ત્રણ સમાન તારોમાંથી કુલ 6A પ્રવાહ પસાર થાય છે. (કિર્ચોફના પ્રથમ નિયમ અનુસાર).

= દરેક તારમાંથી વહેતો પ્રવાહ = 2A

$$\therefore\ v_d' = \frac{J'}{ne} = \frac{2}{\pi(\frac{0.1}{2}\times10^{-2})^2\times7\times10^{28}\times1.6\times10^{-19}}$$

$$= 2.3 \times 10^{-4}\ m\ s^{-1}$$

ઉદાહરણ 5 : એક તાંબાના તારને ખેંચીને તેની લંબાઈ 0.1% વધારવામાં આવે, તો તેના અવરોધમાં થતો પ્રતિશત ફેરફાર ગણો. [તારનું કદ અચળ રહે છે તેમ ધારો.]

ઉકેલ : ધારો કે તારની લંબાઈ l અને આડછેદનું ક્ષેત્રફળ A છે.

તારનો અવરોધ $R = \rho.\frac{l}{A}$

$$\therefore\ R = \frac{\rho l^2}{Al} = \frac{\rho l^2}{V} \quad (1)$$

$$\frac{dR}{dl} = \frac{\rho}{V}.2l$$

$$\therefore\ dR = \frac{\rho}{V}2l\cdot dl \quad (2)$$

સમીકરણ (2) અને (1)નો ગુણોત્તર લેતાં,

$$\frac{dR}{R} = \frac{\frac{\rho}{V}.2ldl}{\frac{\rho}{V}.l^2}$$

$$\therefore\ \frac{dR}{R} = 2\cdot\frac{dl}{l}$$

પ્રતિશત ફેરફાર $\frac{dR}{R} \times 100\% = 2\left(\frac{dl}{l}\right) \times 100\% = 2\ (0.1\%)$

$= 0.2\ \%$

તેથી, તારના અવરોધમાં 0.2%નો ફેરફાર થશે.

નોંધ : જો તારની લંબાઈમાં થતો ફેરફાર સૂક્ષ્મ (અતિ નાનો) હોય, તો ઉપર મુજબની વિકલનની રીતનો ઉપયોગ કરી અવરોધમાં થતો ફેરફાર ગણી શકાય, પણ જો લંબાઈમાં થતો ફેરફાર મોટો હોય, તો લંબાઈમાં થતા ફેરફાર અનુસાર તારના અવરોધમાં થતો ફેરફાર લઈ ગણતરી કરવી.

3.6.1 મોબિલિટી (Mobility)

કોઈ પણ પદાર્થની વાહકતા તેમાં રહેલ મોબાઇલ (ગતિશીલ) વિદ્યુતભારવાહકો (charge carriers)ને કારણે ઉદ્ભવે છે. ધાતુ પદાર્થોમાં મોબાઇલ વિદ્યુતભારવાહકો તરીકે મુક્ત ઈલેક્ટ્રૉન, આયનીકરણ પામેલ વાયુમાં ઈલેક્ટ્રૉન અને ધન આયનો, વિદ્યુતવિભાજ્ય દ્રાવણો (electrolytes)માં ધન અને ઋણ એમ બંને પ્રકારનાં આયનો મોબાઇલ વિદ્યુતભાર વાહકો તરીકે હોય છે. વળી, સેમીકન્ડક્ટર્સ (અર્ધવાહકો)માં વિદ્યુતવહન આંશિક રીતે ઈલેક્ટ્રૉન દ્વારા અને આંશિક રીતે હોલના કારણે થતું હોય છે. (સેમીકન્ડક્ટર્સ અને હોલ વિષે આપણે આગળ ઉપર અભ્યાસ કરવાના છીએ. હાલ પૂરતું એટલું નોંધો કે હોલ તેના પર જાણે કે ધન વિદ્યુતભાર હોય તેમ વર્તે છે.)

વિદ્યુતપ્રવાહઘનતાનાં બે સૂત્રો (3.6.4) અને (3.5.5)ને સરખાવતાં,

$$nev_d = \sigma E$$

$$\therefore \frac{V_d}{E} = \frac{\sigma}{ne}$$

$\frac{V_d}{E}$ એટલે એકમ વિદ્યુતક્ષેત્ર દીઠ વિદ્યુતભારવાહકનો ડ્રિફ્ટવેગ આ રાશિને વિદ્યુતભાર વાહકની મોબિલિટી (μ) કહે છે.

$$\therefore \text{ મોબિલિટી } \mu = \frac{V_d}{E} = \frac{\sigma}{ne} \tag{3.6.7}$$

મોબિલિટીનો SI એકમ $m^2V^{-1}s^{-1}$ છે.

સમીકરણ (3.6.7) પરથી,

$$\text{વાહકતા } \sigma = ne\mu \tag{3.6.8}$$

જો ઈલેક્ટ્રૉન વિદ્યુતભારવાહક હોય તો,

$$\sigma_e = n_e e\mu_e \tag{3.6.9}$$

અને વિદ્યુતભારવાહકો હોલ હોય તો, $\sigma_h = n_h e\mu_h$ (3.6.10)

સેમીકન્ડક્ટર્સમાં, ઈલેક્ટ્રૉન અને હોલ બંનેને કારણે સમાન દિશામાં પ્રવાહ રચાતો હોવાથી, કુલ વાહકતા,

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_h$$

$$\sigma = n_e e\mu_e + n_h e\mu_h \tag{3.6.11}$$

3.7 અવરોધકતાનું તાપીય અવલંબન (Temperature Dependence of Resistivity)

દ્રવ્યોની અવરોધકતા તાપમાન પર આધાર રાખતી જોવા મળે છે. જુદાં-જુદાં દ્રવ્યો માટે તાપીય અવલંબન એકસમાન હોતું નથી. તાપમાનના અમુક મર્યાદિત ગાળા માટે ધાત્ત્વિક પદાર્થોની અવરોધકતા અને તાપમાન વચ્ચેનો સંબંધ નીચેના આનુભાવિક (empirical) સૂત્ર વડે આપી શકાય છે.

$$\rho_\theta = \rho_{\theta_0}[1 + \alpha(\theta - \theta_0)] \tag{3.7.1}$$

અહીં, $\rho_\theta = \theta$ તાપમાને અવરોધકતા

ρ_{θ_0} = કોઈ યોગ્ય સંદર્ભ-તાપમાન θ_0 એ અવરોધકતા

અને αને અવરોધકતાનો તાપમાન-ગુણાંક કહે છે અને તેનો એકમ $(°C)^{-1}$ અથવા K^{-1} છે.

આ સમીકરણ અવરોધના સ્વરૂપમાં નીચે મુજબ લખી શકાય :

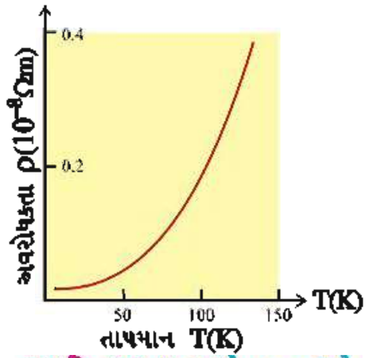
$$R_\theta = R_{\theta_0} [1 + \alpha (\theta - \theta_0)] \tag{3.7.2}$$

નીચેના ટેબલ 3.1માં કેટલાંક દ્રવ્યો માટે અવરોધકતા (ρ) અને તાપમાન-ગુણાંક (α)નાં મૂલ્યો આપેલ છે :

ટેબલ 3.1 : કેટલાંક દ્રવ્યો માટે અવરોધકતા (ρ) અને તાપમાન-ગુણાંક (α)નાં મૂલ્યો (માત્ર જાણકારી માટે)

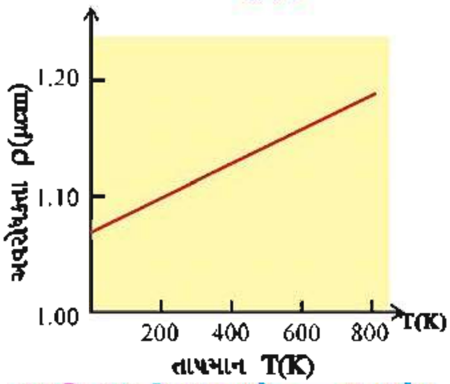
દ્રવ્ય	0°C તાપમાને અવરોધકતા (Ω m)	અવરોધકતાનો તાપમાન-ગુણાંક $(\alpha)(°C)^{-1}$
(A) વાહકો		
ચાંદી	1.6×10^{-8}	0.0041
કૉપર	1.7×10^{-8}	0.0068
ઍલ્યુમિનિયમ	2.7×10^{-8}	0.0043
ટંગસ્ટન	5.6×10^{-8}	0.0045
લોખંડ	10×10^{-8}	0.0065
પ્લેટિનમ	11×10^{-8}	0.0039
પારો	98×10^{-8}	0.0009
નાઇક્રોમ	$\sim 100 \times 10^{-8}$	0.0004
(B) સેમીકન્ડક્ટર્સ		
કાર્બન (ગ્રેફાઇટ)	3.5×10^{-5}	− 0.0005
જર્મેનિયમ	0.46	− 0.05
સિલિકોન	2300	−0.07
(C) અવાહકો		
શુદ્ધ પાણી	2.5×10^{5}	
કાચ	$10^{10} - 10^{14}$	
સખત રબર	$10^{13} - 10^{16}$	
NaCl	$\sim 10^{14}$	
Fused ક્વાર્ટ્ઝ	$\sim 10^{16}$	

આ ટેબલ પરથી એ નોંધો કે ધાતુ તત્ત્વો માટે α ધન છે, તેથી ધાતુતત્ત્વોની અવરોધકતામાં તાપમાન સાથે વધારો થાય છે.



આકૃતિ 3.7 ધાતુ માટે $\rho \rightarrow T$નો આલેખ

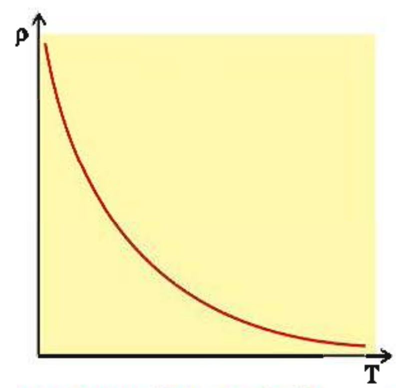
આવા ધાત્ત્વિક વાહકો માટે પ્રમાણમાં નીચા તાપમાને (< 50 K) અવરોધકતા (ρ)નો તાપમાન સાથેનો સંબંધ અરેખીય છે. ઓરડાના તાપમાનની આસપાસ આ સંબંધ રેખીય હોય છે અને ખૂબ ઊંચાં તાપમાનોએ તે પાછો અરેખીય હોય છે (આકૃતિ 3.7).



આકૃતિ 3.8 મિશ્રધાતુ માટે $\rho \rightarrow T$ આલેખ

નાઇક્રોમ (જે નિકલ લોખંડ અને ક્રોમિયમની મિશ્રધાતુ છે.) જેવા બીજા ધાત્ત્વિક પદાર્થોમાં અવરોધકતાનું મૂલ્ય વધુ હોય છે, પરંતુ તેનો તાપમાન પરનો આધાર પ્રમાણમાં ઓછો છે. જુઓ આકૃતિ 3.8. આ જ રીતે, મૅંગેનીન (તાંબું, મૅંગેનીઝ અને નિકલ) નામની મિશ્રધાતુની અવરોધકતા તાપમાનથી લગભગ સ્વતંત્ર છે.

નાઇક્રોમ (મિશ્રધાતુ)ની અવરોધકતા નિરપેક્ષ શૂન્ય તાપમાને (T = 0 K) પણ શૂન્ય હોતી નથી, જ્યારે શુદ્ધ ધાતુની અવરોધકતા નિરપેક્ષ શૂન્ય તાપમાને લગભગ શૂન્ય હોય છે. આ હકીકતના આધારે ધાતુની શુદ્ધતા ચકાસી શકાય છે.



આકૃતિ 3.9 સેમીકન્ડક્ટર્સ માટે $\rho \rightarrow T$ આલેખ

ટેબલ 3.1માં કાર્બન, જર્મેનિયમ, સિલિકોન જેવા સેમીકન્ડક્ટર્સ માટે તાપમાન-ગુણાંક α ઋણ છે જે દર્શાવે છે કે આવા પદાર્થોની અવરોધકતામાં તાપમાન સાથે ઘટાડો થાય છે (જુઓ આકૃતિ 3.9).

3.7.1 અવરોધકતાના સંદર્ભમાં દ્રવ્યોનું વર્ગીકરણ (Classification of materials on the basis of resistivity)

દ્રવ્યોનું સુવાહકો, અર્ધવાહકો (સેમીકન્ડક્ટર્સ) અને અવાહકો એમ ત્રણ પ્રકારમાં વર્ગીકરણ કરવામાં આવે છે.

સંપૂર્ણ (આદર્શ) વાહક દ્રવ્યની અવરોધકતાનું મૂલ્ય શૂન્ય અર્થાત્ વાહકતા અનંત હોય છે, જ્યારે સંપૂર્ણ અવાહક દ્રવ્યની અવરોધકતાનું મૂલ્ય અનંત (એટલે કે વાહકતા શૂન્ય) હોય છે, પરંતુ આ આદર્શ કિસ્સા છે.

ધાતુ પદાર્થોની અવરોધકતાનાં મૂલ્યો પ્રમાણમાં ઓછાં એટલે કે $10^{-8}\Omega m$થી $10^{-6}\ \Omega m$ના ગાળામાંનાં હોય છે જ્યારે કાચ, રબર અને પ્લાસ્ટિક જેવા અવાહક પદાર્થોની અવરોધકતાનાં મૂલ્યો ધાતુઓ કરતાં 10^{18} ગણાં કે તેથી પણ વધુ હોય છે.

આ બંનેની વચ્ચે સેમીકન્ડક્ટર્સ આવે છે, તેમની અવરોધકતા તાપમાનના વધારા સાથે લાક્ષણિક રીતે ઘટે છે. સેમીકન્ડક્ટર્સની અવરોધકતામાં અશુદ્ધિ (impurities)ને કારણે પણ ફેરફાર થાય છે.

સામાન્ય રીતે એવું જોવા મળે છે કે વિદ્યુતના સુવાહકો (દા.ત. ધાતુઓ) એ ઉષ્માના પણ સુવાહકો હોય છે. (આમાં સુપર કન્ડક્ટર્સ અપવાદ છે.), જ્યારે સિરેમિક, પ્લાસ્ટિક જેવા વિદ્યુતના અવાહકો એ ઉષ્માના પણ અવાહકો તરીકે વર્તે છે.

પ્રયોગશાળામાં વપરાતા અવરોધો મુખ્યત્વે બે પ્રકારના હોય છે.

(1) વાયર વાઉંડ અવરોધો (Wire Wound Resistors) : Wire wound અવરોધો યોગ્ય આધાર (base) પર મૅંગેનીન, કોન્સ્ટન્ટન, નાઈક્રોમ જેવી મિશ્રધાતુઓના તાર વીંટાળીને બનાવવામાં આવે છે. આવા દ્રવ્યોની અવરોધકતા તાપમાનના ફેરફાર સાથે ખાસ બદલાતી નથી.

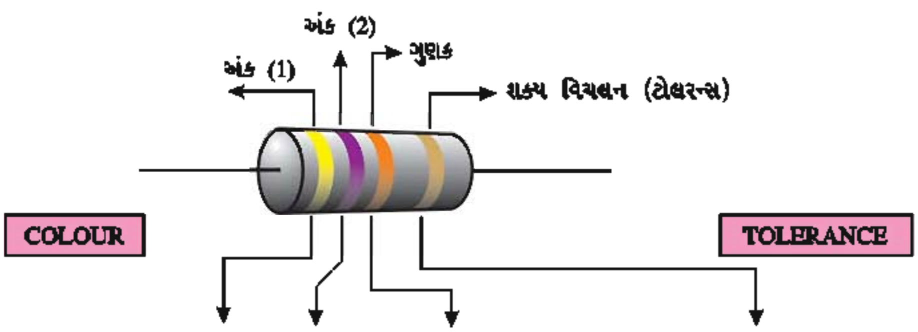
(2) કાર્બન-અવરોધો (Carbon Resistors) : કાર્બન અવરોધોનો બહોળા પ્રમાણમાં ઇલેક્ટ્રૉનિક પરિપથો (જેવી કે રેડિયો, ટેલિવિઝન, ઍમ્પ્લિફાયર વગેરે)માં ઉપયોગ થાય છે. કાર્બન અવરોધોનો મુખ્ય ફાયદો તેમનું નાનું કદ અને ઓછી કિંમત છે. (જોકે ઇલેક્ટ્રૉનિક પરિપથોમાં હવે બહોળા પ્રમાણમાં thin film અવરોધો પણ વપરાય છે.)

કાર્બન અવરોધ બનાવવા માટે, શુદ્ધ ગ્રેફાઇટનું રેઝિન જેવા પદાર્થ સાથે મિશ્રણ કરી તેને ઊંચા તાપમાન અને દબાણે નળાકારમાં ઢાળવામાં (mould કરવામાં) આવે છે. આ નળાકારના બે છેડે તારના જોડાણ-અગ્ર આપવામાં આવે છે અને આ સમગ્ર રચના પર અવાહક દ્રવ્ય (સિરામિક અથવા પ્લાસ્ટિક)નું આવરણ લગાડવામાં આવે છે. વ્યવહારમાં કાર્બન-અવરોધો 1 Ωથી 100 MΩના ગાળામાં ઉપલબ્ધ છે.

કાર્બન-અવરોધ માટે વર્ણસંકેત (Colour Code for Carbon Resistors) :

કાર્બન-અવરોધનું મૂલ્ય તેના પર દોરવામાં આવેલા વિવિધ રંગના પટ્ટાઓના રંગો પરથી જાણી શકાય છે. આ હકીકત સમજવા આકૃતિ 3.10માં દર્શાવેલ અવરોધ અને વર્ણસંકેત (colour code) ધ્યાનમાં લો.

કાર્બન-અવરોધો માટેનો કલરકોડ (વર્ણસંકેત) (ohm)



COLOUR			
BLACK	0	0	$\times 10^0 \Omega$
BROWN	1	1	$\times 10^1$
RED	2	2	$\times 10^2$
ORENGE	3	3	**$\times 10^3$**
YELLOW	**4**	4	$\times 10^4$
GREEN	5	5	$\times 10^5$
BLUE	6	6	$\times 10^6$
VIOLET	7	**7**	$\times 10^7$
GRAY	8	8	$\times 10^8$
WHITE	9	9	$\times 10^9$
GOLD			$\times 10^{-1}$
SILVER			$\times 10^{-2}$

R	TOLERANCE	
	BROWN	$\pm$ 1%
	RED	$\pm$ 2%
	ORENGE	$\pm$ 3%
	YELLOW	$\pm$ 4%
	GOLD	$\pm$ 5%
	SILVER	$\pm$ 10%
	NO COLOUR	$\pm$ 20%

આકૃતિ 3.10 કાર્બન-અવરોધો માટેનો કલરકોડ (વર્ણસંકેત)

અહીં, પ્રથમ પટ્ટાનો રંગ એ અવરોધના મૂલ્યનો દશકનો આંકડો અને બીજા પટ્ટાનો રંગ અવરોધના મૂલ્યનો એકમનો આંકડો રજૂ કરે છે. જુદા-જુદા રંગ માટે આ આંકડાઓ વર્ણસંકેતમાં (આકૃતિ 3.10) દર્શાવ્યા છે.

હવે ત્રીજા પટ્ટાનો રંગ દર્શાવે છે કે ઉપર્યુક્ત આંકડાઓથી બનતી સંખ્યાને 10^n વડે ગુણવાની છે. અહીં વર્ણસંકેતમાં જુદા-જુદા રંગો માટે ગુણક 10^n પણ દર્શાવ્યા છે. ચોથા પટ્ટાનો રંગ અવરોધના મૂલ્યમાં શક્ય વિચલન (tolerance) દર્શાવે છે.

ઉદાહરણ તરીકે, આકૃતિ 3.10માં દર્શાવેલ અવરોધ પર પ્રથમ પટ્ટો પીળો (yellow) છે અને આ રંગ માટેનો અંક 4 છે. આથી દશકનો આંકડો 4 થયો. હવે બીજો પટ્ટો જાંબલી (violet) રંગનો છે અને તેને અનુરૂપ અંક 7 છે, તેથી એકમનો આંકડો 7 થયો. આ બંને અંકને ભેગા કરતાં સંખ્યા થઈ 47.

હવે ત્રીજો પટ્ટો કેસરી (orange) છે, જે ગુણક 10^3. દર્શાવે છે. માટે ઉપરની સંખ્યા 47ને 10^3. વડે ગુણવી જોઈએ. આમ કરતાં અવરોધનું મૂલ્ય થયું $= 47 \times 10^3 = 47\ K\Omega$ આ અવરોધ પર છેલ્લા પટ્ટાનો રંગ ગોલ્ડન છે, જે દર્શાવે છે કે આ અવરોધના મૂલ્યમાં 5%નું વિચલન શક્ય છે. આમ, આ અવરોધનું મૂલ્ય ($47\ K\Omega \pm 5\%$) છે.

વિદ્યાર્થીમિત્રો, હવે તમે $1K\Omega \pm 10\%$ અવરોધ માટેનો વર્ણસંકેત શું થાય તે આકૃતિ 3.10માં આપેલ વર્ણસંકેત પરથી નક્કી કરો.

3.7.2 સુપર કન્ડક્ટિવિટી (Super Conductivity)

Kamerlingh Onnes નામના વિજ્ઞાનીએ ઈ.સ. 1911માં પ્રયોગો કરતાં જોયું કે પારા (Hg)નું તાપમાન જ્યારે 4.2 K કરતાં ઓછું કરવામાં આવે છે, ત્યારે તેનો અવરોધ ઝડપથી લગભગ શૂન્યવત્ થઈ જાય છે. તેના અવલોકન મુજબ 4.3 K તાપમાને પારાનો અવરોધ 0.084Ω છે અને 3 K તાપમાને તે $3 \times 10^{-6}\Omega$ (કે જે તેના $0^\circ C$ તાપમાને મૂલ્ય કરતાં લાખમા ભાગનો છે.) થઈ જાય છે. આ પરથી એવું ફલિત થયું કે,

"અમુક પદાર્થોનું તાપમાન અમુક નિશ્ચિત મૂલ્ય (કે જેને ક્રિટિકલ તાપમાન T_C કહે છે) કરતાં ઓછું કરવામાં આવે છે, ત્યારે તેમનો અવરોધ લગભગ શૂન્ય થઈ જાય છે. આ સ્થિતિમાં રહેલા પદાર્થને સુપર કન્ડક્ટર કહે છે અને આ ઘટનાને સુપર કન્ડક્ટિવિટી કહે છે." એ નોંધો કે સુપર કન્ડક્ટિવિટી એ પદાર્થની ચોક્કસ અવસ્થા (state) છે.

ઘણી બધી ધાતુઓ અને મિશ્રધાતુઓ સુપર કન્ડક્ટિવિટીની સ્થિતિ ધારણ કરે છે. Si, Se, Ge અને Te જેવા સેમીકન્ડક્ટરો ખૂબ ઊંચા દબાણે અને નીચા તાપમાને સુપર કન્ડક્ટિવિટી દર્શાવે છે.

સુપર કન્ડક્ટરમાંથી પસાર કરેલ વિદ્યુતપ્રવાહ ખૂબ જ લાંબા સમય સુધી જળવાઈ રહેતો હોય છે. આનું કારણ એવું છે કે સામાન્ય વાહકોમાંથી વિદ્યુતપ્રવાહ પસાર કરતાં અવરોધને લીધે વિદ્યુત-ઊર્જાનું ઉષ્મા-ઊર્જા સ્વરૂપે વિખેરણ થઈ જાય છે, જ્યારે સુપરકન્ડક્ટરનો અવરોધ (લગભગ) શૂન્ય હોવાના કારણે વિદ્યુત-ઊર્જા આવી રીતે વેડફાતી હોતી નથી અને પરિણામસ્વરૂપે પ્રવાહ ખૂબ લાંબા સમય સુધી જળવાઈ રહે છે.

આટલી વાત વાંચ્યા પછી તો તમારા મોઢામાં પાણી આવી જાય તેમ છે અને તમને એવું ભાસવા લાગે કે (વિદ્યુત) ઊર્જાના ટ્રાન્સમિશનને લગતા પ્રશ્નનો ઉકેલ મળી ગયો છે. પરંતુ એક હકીકત તમે નજરઅંદાજ કરી છે અને તે એ કે પદાર્થ સુપર કન્ડક્ટર તરીકે વર્તે તે માટે તેને તેના ક્રિટિકલ તાપમાન કરતાં નીચા તાપમાને રાખવો પડે. પદાર્થને T_C કરતાં નીચા તાપમાને લઈ જવા પ્રવાહી હિલિયમ અને પ્રવાહી નાઇટ્રોજનની જરૂર પડે અને આવું કરતાં તો સોના કરતાં ઘડામણ મોંઘું થાય તેવી પરિસ્થિતિ ઉદ્ભવે છે.

અહીં નોંધો કે વિદ્યુતની સુવાહક એવી કેટલીક ધાતુઓનાં ક્રિટિકલ તાપમાન (T_C) કરતાં ઑક્સાઇડ સંયોજનો ધરાવતા સિરામિકનાં ક્રિટિકલ તાપમાન પ્રમાણમાં ઊંચાં હોય છે. (પરંતુ ઓરડાના તાપમાન કરતાં તો ઘણાં નીચાં હોય છે.) જે દર્શાવે છે કે સામાન્ય વાહકો કરતાં, સિરામિક જેવા અવાહકો સુપર કન્ડક્ટિવિટીની અવસ્થા સહેલાઈથી ધારણ કરી શકે છે. આમ, સુપર કન્ડક્ટિવિટી એ પદાર્થની ચોક્કસ અવસ્થા છે.

હાલમાં થયેલ સંશોધન અનુસાર Hg–Ba–Ca–Cu–O સંયોજનનું ક્રિટિકલ તાપમાન (T_C) 164 K સુધી ઊંચું લઈ જઈ શકાયું છે. આવા સુપર કન્ડક્ટર્સને high temperature superconductors (HTS) કહે છે. HTSના ઉપયોગોમાં જોઈએ, તો thin fild devices, લાંબાં અંતરોએ વિદ્યુતનું ટ્રાન્સમિશન, ખૂબ જ તીવ્ર ગતિએ (550 km/h) એ દોડતી levitating trains (maglev trains) (મૅગ્લેવ ટ્રેન) વગેરેને મૂકી શકાય.

ઉદાહરણ 6 : પ્લેટિનમ રેઝિસ્ટન્સ થરમૉમીટરમાં, પ્લેટિનમ તારનો બરફના તાપમાને અવરોધ 5Ω અને વરાળના તાપમાને અવરોધ 5.23Ω છે. જ્યારે થરમૉમીટરને હીટબાથમાં દાખલ કરવામાં આવે છે. ત્યારે પ્લેટિનમ તારનો અવરોધ 5.795Ω મળે છે, તો હીટબાથનું તાપમાન ગણો.

ઉકેલ : અહીં, $R_0 = 5\Omega$, $R_{100} = 5.23\Omega$ અને $R_\theta = 5.795\Omega$

$R_\theta = R_{\theta_0} [1 + \alpha (\theta - \theta_0)]$ પરથી,

$R_\theta = R_0[1 + \alpha\theta]$ ($\because \theta_0 = 0$)

$\therefore R_\theta - R_0 = R_0\alpha\theta$

વરાળ માટે, $R_{100} - R_0 = R_0\alpha (100)$ (1)

હીટબાથ માટે, $R_\theta - R_0 = R_0 \alpha \theta$ (2)

સમીકરણ (2)ને સમીકરણ (1) વડે ભાગતાં,

$$\frac{R_\theta - R_0}{R_{100} - R_0} = \frac{\theta}{100}$$

$$\therefore \theta = \frac{R_\theta - R_0}{R_{100} - R_0} \times 100 = \frac{5.795 - 5}{5.23 - 5} \times 100$$

$$\therefore \theta = 345.65 \text{ °C}$$

ઉદાહરણ 7 : બે દ્રવ્યોનાં α_1 અને α_2 અનુક્રમે $6 \times 10^{-4}(°C)^{-1}$ અને $-5 \times 10^{-4}(°C)^{-1}$ છે. પ્રથમ દ્રવ્ય માટે અવરોધકતા $\rho_{20} = 2 \times 10^{-8}\Omega m$ છે. આ બે દ્રવ્યોના મિશ્રણથી જો એવું દ્રવ્ય બનાવવું હોય કે જેની અવરોધકતા-તાપમાન સાથે બદલાતી ના હોય તો બીજા દ્રવ્ય માટે અવરોધકતા ρ_{20} કેટલી હોવી જોઈએ ? સંદર્ભ-તાપમાન 20 °C લો. મિશ્રણની અવરોધકતા એ બંને ઘટકોની અવરોધકતાનો સરવાળો થાય તેમ ધારો.

ઉકેલ : સંદર્ભ-તાપમાન 20 °C આપેલ હોવાથી, θ તાપમાને દ્રવ્યની અવરોધકતા,

$$\rho_\theta = \rho_{20} [1 + \alpha (\theta - 20)]$$

$$\therefore \frac{d\rho_\theta}{d\theta} = \rho_{20}\alpha$$

પ્રથમ દ્રવ્ય માટે, $\left(\frac{d\rho_\theta}{d\theta}\right)_1 = (\rho_{20})_1 \alpha_1$

બીજા દ્રવ્ય માટે, $\left(\frac{d\rho_\theta}{d\theta}\right)_2 = (\rho_{20})_2 \alpha_2$

હવે, મિશ્રણની અવરોધકતા $\rho_\theta = (\rho_\theta)_1 + (\rho_\theta)_2$ તાપમાન

સાથે બદલાતી ન હોવાથી $\left(\frac{d\rho_\theta}{d\theta}\right) = \left(\frac{d\rho_\theta}{d\theta}\right)_1 + \left(\frac{d\rho_\theta}{d\theta}\right)_2 = 0$ થવું જોઈએ.

$$\therefore \left(\frac{d\rho_\theta}{d\theta}\right)_1 = -\left(\frac{d\rho_\theta}{d\theta}\right)_2$$

$$\therefore (\rho_{20})_1 \alpha_1 = -(\rho_{20})_2 \alpha_2$$

$$\therefore (\rho_{20})_2 = -\frac{(\rho_{20})_1\alpha_1}{\alpha_2}$$

$$= -\frac{-(2.10^{-8})(6\times10^{-4})}{-(5\times10^{-4})}$$

$$\therefore (\rho_{20})_2 = 2.4 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$$

ઉદાહરણ 8 : એક બલ્બના ટંગસ્ટન તારનો 20 °C તાપમાને અવરોધ 18 Ω છે. આ બલ્બને 30.0 Vના વૉલ્ટેજ પ્રાપ્તિસ્થાન સાથે જોડતાં તેમાંથી 0.185 A સ્થિર પ્રવાહ પસાર થાય છે. જો ટંગસ્ટનનો $\alpha = 4.5 \times 10^{-3}\ K^{-1}$ હોય, તો બલ્બના ફિલામેન્ટનું તાપમાન શોધો. ઓહ્મનો નિયમ જળવાય છે તેમ ધારો.

ઉકેલ : ઓહ્મના નિયમ અનુસાર

$$I = \frac{V}{R},\ R = \frac{V}{I} = \frac{30.0}{0.185} = 162\ \Omega$$

આમ, બલ્બ જ્યારે ON (ચાલુ) છે, ત્યારે તેના ફિલામેન્ટનો અવરોધ 162 Ω છે.

હવે, $R_\theta = R_{\theta_0}\ [1 + \alpha\ (\theta - \theta_0)]$

$\therefore\ 162 = 18[1 + 4.5 \times 10^{-3}\ (\theta - 293)]$

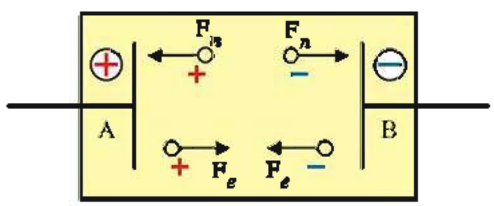
$$\therefore\ \frac{9-1}{4.5\times10^{-3}} = \theta - 293$$

$\therefore\ \theta = 2070.7\ K$

3.8 કોષનું વિદ્યુતચાલકબળ અને ટર્મિનલ વૉલ્ટેજ (Electromotive Force and Terminal Voltage of a Cell)

આપણે જોયું કે વિદ્યુતભારિત કણોની ગતિને કારણે વિદ્યુતપ્રવાહનું નિર્માણ થાય છે. વિદ્યુતભારીત કણોને ગતિ કરાવવા માટે તેમના પર કંઈક બળ લગાડવું પડે અથવા તો બીજા શબ્દોમાં ઊર્જા આપવી પડે. જે સંરચના (device) દ્વારા આ હેતુ સિદ્ધ કરવામાં આવે છે. તેને વ્યાપક રીતે "emf" (electromotive force-વિદ્યુતચાલક બળ)નું પ્રાપ્તિસ્થાન (source) કહે છે. વિદ્યુતભારિત કણો પર ઘણી રીતે બળ લગાડી શકાય. ઉદાહરણ તરીકે વિદ્યુતકોષમાં થતી રાસાયણિક પ્રક્રિયાના પરિણામસ્વરૂપ લાગતું બળ, સમય સાથે બદલાતા જતા ચુંબકીય ક્ષેત્રને લીધે લાગતું બળ અથવા તાપમાનના તફાવતને લીધે લાગતું બળ, આવી રચનાઓને emfનાં પ્રાપ્તિસ્થાનો કહેવાય. આમ, વિદ્યુતકોષ (કે બૅટરી)ને પણ આપણે emfનું પ્રાપ્તિસ્થાન ગણીશું, પણ આ emf એટલે શું ? આ સમજવા માટે આપણે વિદ્યુતકોષનું ઉદાહરણ ધ્યાનમાં લઈશું.

આકૃતિ 3.11માં બૅટરીની રેખાકૃતિ દર્શાવી છે. બૅટરીમાં ભરેલ રાસાયણિક દ્રવ્યમાં ધન અને ઋણ વિદ્યુતભારો હોય છે. બૅટરીમાં થતી રાસાયણિક પ્રક્રિયાઓને પરિણામે ઉપર્યુક્ત વિદ્યુતભારો પર બળ લાગે છે. આ બળનું મૂળ રાસાયણિક પ્રક્રિયામાં હોવાથી આપણે તેને **રાસાયણિક બળ** અથવા **અવિદ્યુતીય** (non-electrical force) બળ F_n કહીશું. આવું બળ (F_n) ધન વિદ્યુતભારોને એક ધ્રુવ (ધન ધ્રુવ) A તરફ અને ઋણ વિદ્યુતભારોને બીજા ધ્રુવ (ઋણ ધ્રુવ) B તરફ ધકેલે છે. પરિણામે તેઓ આ ધ્રુવો પર એકઠા થાય છે.

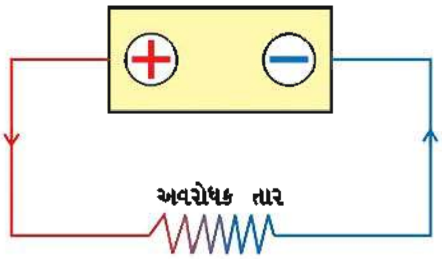


આકૃતિ 3.11 બૅટરીની રેખાકૃતિ

હવે, જેમજેમ ધન અને ઋણ વિદ્યુતભારો અનુક્રમે ધન અને ઋણ ધ્રુવ પર જમા થતા જાય છે, તેમતેમ બે ધ્રુવો વચ્ચે વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત (અથવા વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$) પ્રસ્થાપિત થતો જાય છે અને તેના મૂલ્યમાં ક્રમશઃ વધારો થતો જાય છે. આના પરિણામસ્વરૂપ વિદ્યુતભારો પર અવિદ્યુતીય બળો (F_n)ની વિરુદ્ધ દિશામાં વિદ્યુતીય બળ $\vec{F_e} = q\vec{E}$ પણ વધતું જાય છે. હવે એક સ્થિતિ એવી આવે છે કે $F_n = F_e$ થાય છે. આ સ્થિતિમાં હવે કોઈ વધારાના વિદ્યુતભારો ધ્રુવો પર જમા થતા નથી.

હવે, એકમ ધન વિદ્યુતભારને ઋણધ્રુવથી ધનધ્રુવ સુધી લઈ જવા અવિદ્યુતીય બળોએ કરેલું કાર્ય, $W = \int_{\text{રેખા}} \vec{F_n}\cdot d\vec{l}$, જ્યાં રેખા-સંકલન ઋણધ્રુવથી ધનધ્રુવ સુધીનું છે. emfની વ્યાખ્યા અનુસાર આ કાર્ય એટલે જ emf એમ કહી શકાય. પણ, આ કાર્ય જેટલી ઊર્જા, એકમ ધન વિદ્યુતભારને ઋણ ધ્રુવથી ધનધ્રુવ પર પહોંચતાં મળે છે. આથી, emfની વ્યાખ્યા નીચે પ્રમાણે આપવામાં આવે છે.

જ્યારે એકમ ધન વિદ્યુતભાર અવિદ્યુતીય બળને લીધે ઋણધ્રુવથી ધનધ્રુવ પર પહોંચે છે, ત્યારે તેને મળતી ઊર્જાને બૅટરીનું emf કહે છે. તેનો એકમ $\frac{\text{joule}}{\text{coulomb}}$ = volt છે (મહાન વિજ્ઞાની વૉલ્ટાની યાદમાં). યાદ રાખો કે emf એ બળ નથી, પરંતુ એકમ વિદ્યુતભાર દીઠ ઊર્જા છે.



આકૃતિ 3.12 બૅટરીનો ટર્મિનલ વૉલ્ટેજ

બૅટરીની આપણે જે અંતિમ સ્થિતિ ($F_n = F_e$ હોય ત્યારે) વર્ણવી તેમાં બૅટરીમાં કોઈ વિદ્યુતભાર ગતિ કરતો નથી, એટલે કે બૅટરીમાંથી વિદ્યુતપ્રવાહ વહેતો નથી (I = 0). આ સ્થિતિમાં બૅટરી open circuit conditionમાં છે તેમ કહેવાય.

હવે આકૃતિ 3.12માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ધારો કે બૅટરીના બે ધ્રુવો વચ્ચે એક અવરોધક તાર જોડેલ છે. આવી સ્થિતિમાં તારમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર પ્રસ્થાપિત થાય છે. રૈવાજિક રીતે વિચારીએ તો ધન વિદ્યુતભાર, વધારે સ્થિતિમાને રહેલા બૅટરીના ધનધ્રુવથી ઋણધ્રુવ તરફ તાર મારફતે ગતિ કરવા લાગે છે અને વિદ્યુતપ્રવાહનું નિર્માણ થાય છે. તમને પ્રશ્ન થશે કે ધનધ્રુવ પરનો વિદ્યુતભાર બૅટરીમાં જ ગતિ કરીને ઋણધ્રુવ પર કેમ ન ગયો ? અને તારમાં થઈને લાંબા માર્ગે ઋણધ્રુવ પર કેમ ગયો ? આનું કારણ અવિદ્યુતીય બળો છે જે ધન વિદ્યુતભાર બૅટરીમાં જ ઋણધ્રુવ પર જવાનો પ્રયત્ન કરે, તો તેનો વિરોધ કરે છે.

હવે ધન વિદ્યુતભાર અવરોધક તારમાંથી પસાર થાય છે ત્યારે તેની ઊર્જા, અવરોધનો સામનો કરવામાં વપરાઈ જાય છે અને જ્યારે તે બૅટરીના ઋણધ્રુવ પર પહોંચે છે, ત્યારે તેની ઊર્જા શૂન્ય થઈ જાય છે. આવું ગતિના દરેક પરિભ્રમણ દરમ્યાન થાય છે.

હવે, વિદ્યુતપ્રવાહ વહેતો હોય તે દરમિયાન પણ બૅટરીમાં અવિદ્યુતીય બળોને કારણે ધન વિદ્યુતભાર ઋણધ્રુવથી ધનધ્રુવ તરફ જતો હોય છે. આ વિદ્યુતભાર જ્યારે ગતિ કરતો હોય તે દરમિયાન તેણે બૅટરીમાં ભરેલાં રાસાયણિક દ્રવ્યોમાંથી પસાર થવાનું હોવાથી તેને અવરોધનો સામનો કરવો પડે છે. આવા અવરોધને બૅટરીનો આંતરિક અવરોધ (r) કહે છે.

આ આંતરિક અવરોધ (r)ને કારણે, પ્રવાહ વહેતો હોય ત્યારે, એકમ ધન વિદ્યુતભાર જ્યારે ધન ધ્રુવ પર પહોંચે, ત્યારે તેને અવિદ્યુતીય બળો દ્વારા થયેલા કાર્યથી મળતી ઊર્જામાંનો અમુક ભાગ આંતરિક અવરોધમાં વપરાઈ જાય છે. જો બૅટરીમાંથી મળતો પ્રવાહ I હોય તો બૅટરીના આંતરિક અવરોધ વિરુદ્ધ એકમ વિદ્યુતભાર દીઠ વપરાતી ઊર્જા = Ir.

આથી બૅટરીના ધનધ્રુવ પર એકમ ધન વિદ્યુતભારની ઊર્જા, open circuit conditionમાં જે હતી (ε જેટલી) તેના કરતાં Ir જેટલી ઓછી હોય છે. અર્થાત્ open circuit condition કરતાં, જ્યારે પ્રવાહ વહેતો હોય ત્યારે બૅટરી વડે બહારના પરિપથમાં મળતી ચોખ્ખી ઊર્જા, એકમ વિદ્યુતભાર દીઠ ($\varepsilon - Ir$) જેટલી હોય છે. આમ, બૅટરીમાંથી પ્રવાહ વહેતો હોય ત્યારે આ ઊર્જાને બૅટરીના બે ધ્રુવો વચ્ચેનો વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત અથવા બૅટરીનો ટર્મિનલ વૉલ્ટેજ (V) કહે છે.

$\therefore V = \varepsilon - Ir$

3.8.1 ગૌણ કોષ : લેડસંગ્રાહક (Secondary Cell : Lead Accumulator) :

વિદ્યુતરાસાયણિક કોષ (Electrochemical cells) બે પ્રકારના હોય છે.

(1) પ્રાથમિક કોષ (Primary Cell) : જે સેલ ફક્ત ડિસ્ચાર્જ થતા હોય તેમને પ્રાઈમરી સેલ કહે છે. દા.ત., વૉલ્ટાનો સેલ. પ્રાથમિક કોષોને રિચાર્જ કરી શકાતા નથી.

(2) ગૌણ કોષ (Secondary Cell) : જે સેલમાં રાસાયણિક પ્રક્રિયાઓને ઉલટાવીને (એટલે કે રિચાર્જ કરીને) સેલને મૂળ સ્થિતિમાં પાછા લાવી શકાય છે, તેવા સેલને ગૌણ (સેકન્ડરી) સેલ કહે છે.

સેકન્ડરી સેલમાંથી વિદ્યુતપ્રવાહ બંને દિશામાં પસાર કરી શકાય છે.

(i) જો (રૈવાજિક) વિદ્યુતપ્રવાહ સેલના ધન ધ્રુવથી બહાર નીકળીને ઋણધ્રુવ વાટે સેલમાં દાખલ થતો હોય તો સેલ ડિસ્ચાર્જ થઈ રહ્યો છે તેમ કહેવાય. સેલનું આ સામાન્ય કાર્ય છે અને તે વખતે રાસાયણિક ઊર્જાનું વિદ્યુત-ઊર્જામાં રૂપાંતર થતું હોય છે.

(ii) પરંતુ જો સેલને તેના emf કરતાં મોટા emfવાળા પ્રાપ્તિસ્થાન સાથે એવી રીતે જોડવામાં આવે કે જેથી સેલના ધનધ્રુવમાંથી વિદ્યુતપ્રવાહ સેલમાં દાખલ થઈ સેલના ઋણધ્રુવ વાટે બહાર નીકળે તો સેલ ચાર્જ થઈ રહ્યો છે, તેમ કહેવાય અને તેવા સંજોગોમાં સેલમાં વિદ્યુત-ઊર્જાનું રાસાયણિક ઊર્જામાં રૂપાંતર થતું હોય છે.

વ્યવહારમાં સૌથી વધુ વપરાતો સેકન્ડરી સેલ એ લેડસંગ્રાહક સેલ છે.

લેડસંગ્રાહક : લેડસંગ્રાહકમાં તેની પૂર્ણ ચાર્જ સ્થિતિમાં PbO_2માંથી બનાવેલો ઇલેક્ટ્રૉડ ધન ધ્રુવ તરીકે, જ્યારે Pbમાંથી બનાવેલો ઇલેક્ટ્રૉડ ઋણધ્રુવ તરીકે હોય છે. આ સેલમાં ઇલેક્ટ્રોલાઇટ તરીકે H_2SO_4નું મંદ દ્રાવણ હોય છે.

જ્યારે આ સેલ વપરાશમાં હોય છે, (એટલે કે ડિસ્ચાર્જ થતો હોય છે.) ત્યારે SO_4^{-2} આયનો Pbના ઇલેક્ટ્રૉડ તરફ ગતિ કરીને ત્યાં $PbSO_4$નું નિર્માણ કરે છે અને H^+ આયનો PbO_2ના ઇલેક્ટ્રૉડ તરફ ગતિ કરીને PbO_2નું PbOમાં રૂપાંતર કરે છે.

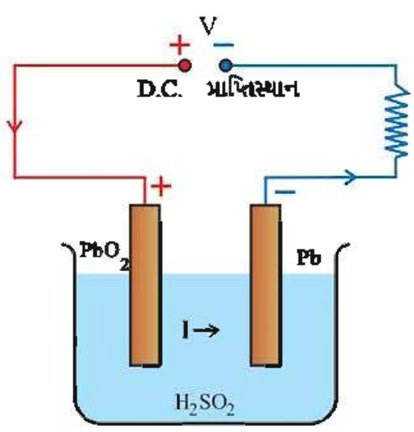
આ રીતે બનેલ PbO, H_2SO_4 સાથે પ્રક્રિયા કરી $PbSO_4$ અને પાણીનું નિર્માણ કરે છે.

આમ, સેલના બંને ઇલેક્ટ્રૉડ પર, રાસાયણિક પ્રક્રિયાને પરિણામે $PbSO_4$નું નિર્માણ થાય છે અને ઇલેક્ટ્રોલાઇટ વધારે મંદ પડતું જાય છે.

હાઇડ્રોમીટર નામના સાધન વડે ઇલેક્ટ્રોલાઇટની વિશિષ્ટ ઘનતા માપીને સેલની સ્થિતિ જાણી શકાય છે, જ્યારે લેડ સંગ્રાહક સેલ સંપૂર્ણ ચાર્જ હોય છે, ત્યારે તેના વોલ્ટેજ 2.1 volt અને ઇલેક્ટ્રોલાઇટની વિશિષ્ટ ઘનતા 1.285 હોય છે. જ્યારે આ સેલ સંપૂર્ણ ડિસ્ચાર્જ થઈ જાય છે, ત્યારે ઇલેક્ટ્રોલાઇટની વિશિષ્ટ ઘનતા ઘટીને 1.15 જેટલી થઈ જાય છે, ત્યારે emf ઘટીને 1.8 V જેટલું થાય છે.

ચાર્જિંગ (Charging) : ε જેટલા emfવાળા લેડસંગ્રાહક સેલને ચાર્જ કરવા માટે તેમાંથી d.c. પ્રવાહ વહેવડાવવામાં આવે છે (જુઓ આકૃતિ 3.13). ચાર્જિંગ કરતી વખતે સેલના ધન ધ્રુવને V વોલ્ટના d.c. પ્રાપ્તિસ્થાનના ધન છેડા સાથે અને ઋણ ધ્રુવને d.c. પ્રાપ્તિસ્થાનના ઋણ છેડા સાથે (એટલે કે વિરોધક સ્થિતિમાં) જોડવામાં આવે છે. (અહીં V > ε)

ચાર્જિંગ-પ્રક્રિયામાં થતી રાસાયણિક પ્રક્રિયાઓને પરિણામે બંને ઇલેક્ટ્રૉડ પર જમા થયેલ $PbSO_4$ દ્રાવ્ય થઈ જાય છે. સેલના ઋણધ્રુવ પર Pb અને ધનધ્રુવ પર PbO_2 જમા થાય છે અને સાથેસાથે H_2SO_4નું પણ નિર્માણ થાય છે. આમ, સેલ ચાર્જ થઈ ફરી વાર કાર્ય કરવા (વિદ્યુતપ્રવાહ આપવા) તૈયાર થઈ જાય છે.



આકૃતિ 3.13 ગૌણકોષનું ચાર્જિંગ

અહીં, *d.c.* પ્રાપ્તિસ્થાન વડે વપરાતી વિદ્યુત-ઊર્જા V*It* સેલને ચાર્જ કરવામાં વપરાતી ઊર્જા ε*It* તેમજ બાહ્ય (શ્રેણી) અવરોધ Rમાં વેડફાતી ઊર્જા I^2Rt અને સેલના આંતરિક અવરોધ *r*માં વેડફાતી ઊર્જા I^2rt પૂરી પાડે છે.

$$\therefore\ VIt = \varepsilon It + I^2Rt + I^2rt \tag{3.8.2}$$

$$\therefore\ V = \varepsilon + I(R + r)$$

$$\therefore\ I = \frac{V-\varepsilon}{R+r} \tag{3.8.3}$$

ઉપર્યુક્ત સમીકરણ ચાર્જિંગપ્રવાહ દર્શાવે છે. અહીં અવરોધ R ચાર્જિંગપ્રવાહ નિયંત્રિત કરવા માટે જોડવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ 9 : 2.0 Vનો એક એવા 6 કોષો સહાયક સ્થિતિમાં શ્રેણીમાં જોડેલ છે. તે દરેકનો આંતરિક અવરોધ 0.50 Ω છે. તેમને 110 V D.C. પ્રાપ્તિસ્થાન વડે ચાર્જ કરવામાં આવે છે. ચાર્જિંગપ્રવાહ નિયંત્રિત કરવા માટે બેટરીઓની શ્રેણીમાં 46 Ωનો અવરોધ જોડ્યો છે, તો (1) પ્રાપ્તિસ્થાનમાંથી મળતો પાવર અને ઉષ્મારૂપે વિખેરણ પામતો પાવર શોધો. આ બંને પાવરના તફાવતનું શું થાય છે ?

ઉકેલ : $V = \varepsilon + Ir + IR$ પરથી

$$V = 6\varepsilon + 6\ Ir + IR$$

$V = 110\ V \qquad \varepsilon = 2.0\ V \qquad r = 0.50\ \Omega \qquad R = 46\ \Omega$

હવે, $I = \frac{V - 6\varepsilon}{6r + R} = \frac{110 - 12}{6 \times 0.50 + 46} = \frac{98}{49}$

$\therefore I = 2\ A$

પ્રાપ્તિસ્થાનમાંથી મળતો પાવર,

$W = V \times I = 110 \times 2 = 220\ W$

ઉષ્મા રૂપે વપરાતો પાવર $= 6I^2r + I^2R$

$= I^2(6r + R)$

$= 4 \times (6 \times 0.50 + 46)$

$= 4 \times (3 + 46)$

$= 196\ W$

$\therefore$ તફાવત $= (220 - 196)\ W$

$= 24\ W$

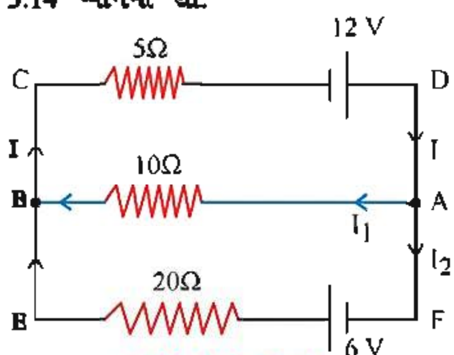
આ પાવર બેટરી(કોષો)ને ચાર્જ કરવામાં વપરાય છે.

3.9 કિર્ચોફના નિયમો (Kirchoff's Rules)

વ્યવહારમાં જુદા-જુદા હેતુઓ માટે વપરાતા વિદ્યુતપરિપથોમાં અવરોધો, કેપેસિટરો, ઇન્ડક્ટરો અને બેટરીઓ જેવા પરિપથ ઘટકો એકબીજા સાથે જટિલ રીતે જોડાયેલા હોય છે. આવા પરિપથોને સાદા શ્રેણી કે સમાંતર જોડાણના નિયમો લાગુ પાડી શકાય નહીં. વ્યાપક રીતે આવા પરિપથોને નેટવર્ક કહે છે.

નેટવર્કના વિશ્લેષણ માટે ઓહ્મનો નિયમ એકલો જ પૂરો પડતો નથી. વ્યવહારમાં નેટવર્કનું વિશ્લેષણ કરવા માટેના કેટલાક નિયમો છે. કિર્ચોફના નિયમો આ નિયમો પૈકીના બે નિયમો છે.

આ નિયમોની ચર્ચા કરીએ તે પહેલાં પરિપથોને લગતાં બે પદોની સમજૂતી મેળવવી જરૂરી છે. આ માટે આકૃતિ 3.14 ધ્યાનમાં લો.



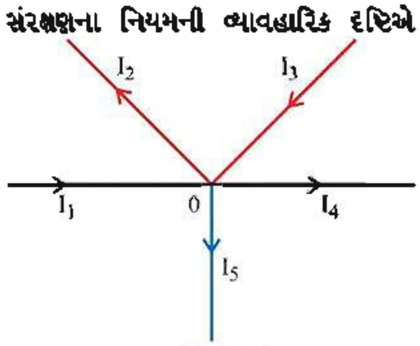
આકૃતિ 3.14 નેટવર્ક

જંકશન અથવા બ્રાન્ચ-પૉઇન્ટ : નેટવર્કમાં જે બિંદુ પાસે બેથી વધારે (એટલે કે ઓછામાં ઓછા ત્રણ) વાહકો ભેગાં થતા હોય તેવા બિંદુને જંકશન અથવા બ્રાન્ચ-પૉઇન્ટ કહે છે. (કોઈ રેલવે-સ્ટેશન પાસે કેટલીક રેલવેલાઇન ભેગી મળે તો જંકશન કહેવાય તે તમને ખબર હશે.) આકૃતિ 3.14માં A અને B બિંદુ પાસે ત્રણ-ત્રણ વાહકો ભેગા મળે છે. તેથી A અને B બિંદુને જંકશન અથવા બ્રાન્ચ-પૉઇન્ટ કહેવાય.

લૂપ : વાહકોથી બનતા બંધ પરિપથને લૂપ કહે છે. આકૃતિમાં CDABC, AFEBA અને CDAFEBC એ વાહકોથી બનતા બંધ પરિપથો છે તે દરેકને લૂપ કહેવાય.

નેટવર્કના પૃથક્કરણમાં, આપેલ પરિપથમાં રહેલી અજ્ઞાત રાશિઓ જેવી કે, V, I, R, ... વગેરેને પરિપથમાં આપેલા જ્ઞાત (જાણીતી) રાશિઓ પરથી શોધી શકાય છે.

કિર્ચોફના નિયમો (Kirchoff's Rules) : કિર્ચોફનો પ્રથમ નિયમ : કિર્ચોફનો પ્રથમ નિયમ એ વિદ્યુતભારના સંરક્ષણના નિયમની વ્યાવહારિક દૃષ્ટિએ ઉપયોગી એવી એક રજૂઆત છે.



આકૃતિ 3.15

આકૃતિ 3.15માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે કોઈ નેટવર્કનું જંકશન O ધ્યાનમાં લો. સમગ્ર નેટવર્કનો Oને સમાવતો ભાગ જ આકૃતિમાં દર્શાવ્યો છે. જંકશન પાસે ભેગા મળતા વિદ્યુતપ્રવાહો અનુક્રમે I_1, I_2, ..., I_5 છે. તેમની દિશાઓ આકૃતિમાં તીરથી દર્શાવી છે.

ધારો કે t સમયમાં સંબંધિત વાહકોના આડછેદમાંથી અનુક્રમે Q_1, Q_2, ..., Q_5 વિદ્યુતભારો પસાર થઈને I_1, I_2, ..., I_5 પ્રવાહોનું નિર્માણ કરે છે.

આથી, $I_1 = \frac{Q_1}{t} \Rightarrow Q_1 = I_1 t$

$I_2 = \frac{Q_2}{t} \Rightarrow Q_2 = I_2 t$, ...,

$I_5 = \frac{Q_5}{t} \Rightarrow Q_5 = I_5 t$

પ્રવાહોની દિશાઓ પરથી જોઈ શકાય છે કે,

t સમયમાં જંક્શનની અંદર જતો કુલ વિદ્યુતભાર $Q_1 + Q_3$ છે, જ્યારે તેટલા જ સમયમાં જંક્શનથી દૂર જતો કુલ વિદ્યુતભાર $Q_2 + Q_4 + Q_5$ છે.

હવે, વિદ્યુતભારના સંરક્ષણના નિયમ મુજબ,

$$Q_1 + Q_3 = Q_2 + Q_4 + Q_5 \tag{3.9.1}$$

$\therefore I_1 t + I_3 t = I_2 t + I_4 t + I_5 t$

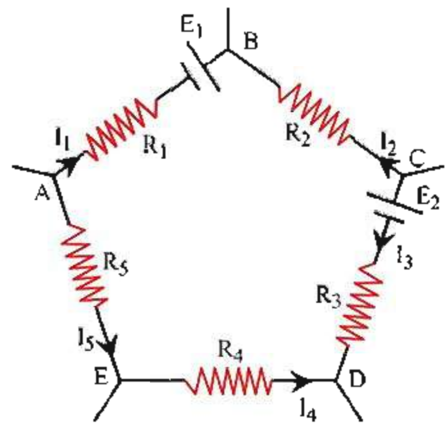
$$\therefore I_1 + I_3 + (-I_2) + (-I_4) + (-I_5) = 0 \tag{3.9.2}$$

$\therefore$ જંક્શન પાસે, $\Sigma I = 0$ (3.9.3)

આમ, **"જંક્શન પાસે ભેગા મળતા વિદ્યુતપ્રવાહોનો બૈજિક સરવાળો શૂન્ય હોય છે."** આ વિધાનને કિર્ચોફનો પ્રથમ નિયમ કહે છે.

અહીં, સરવાળામાં I_1 અને I_3 પ્રવાહો ધન છે, જ્યારે I_2, I_4 અને I_5 ઋણ છે, આમ, બૈજિક સરવાળો લેવા માટે જંક્શન તરફ આવતા પ્રવાહો ધન અને જંક્શનથી દૂર જતા પ્રવાહોને ઋણ ગણવામાં આવે છે. આના કરતાં વિરુદ્ધ સંજ્ઞાઓ પણ ચાલી શકે, કારણ કે તેમ કરવાથી સમીકરણ (3.9.2)માં બધાં જ પદોની સંજ્ઞા ઊલટાઈ જાય છે.

કિર્ચોફનો બીજો નિયમ : ઊર્જા-સંરક્ષણના નિયમ અને વિદ્યુતસ્થિતિમાનની વિભાવનાનો ઉપયોગ કરીને કોઈ બંધ પરિપથનો અભ્યાસ કરી શકાય છે. કિર્ચોફનો બીજો નિયમ આવી ચર્ચાનો નિચોડ છે. આ માટે આકૃતિ 3.16માં દર્શાવેલ બંધ પરિપથ ABCDEA ધ્યાનમાં લો.



આકૃતિ 3.16

અહીં R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 અવરોધો અને ε_1 તથા ε_2 વિદ્યુતચાલકબળ (emf)વાળા વિદ્યુતકોષો વડે બંધ પરિપથ ABCDEA રચાય છે. સરળતા ખાતર જો વિદ્યુતકોષોનો આંતરિક અવરોધ અવગણીએ તો તેના ઋણ ધ્રુવથી ધન ધ્રુવ પર જતાં વિદ્યુત-સ્થિતિમાનમાં થતો વધારો વિદ્યુતકોષના emf (ε) જેટલો હોય છે. વળી, અવરોધ Rના બે છેડા વચ્ચેનો p.d. તે અવરોધ અને તેમાંથી વહેતા વિદ્યુતપ્રવાહના ગુણાકાર (IR) જેટલો હોય છે.

વળી, **સ્થિર પરિપથમાં દરેક બિંદુએ દરેક વખતે વિદ્યુતસ્થિતિમાન એકમૂલ્ય હોય છે.** ધારો કે, બંધ પરિપથના A બિંદુએ વિદ્યુતસ્થિતિમાન યાદચ્છિક રીતે V_A છે. જો A બિંદુએથી શરૂ કરી સમગ્ર બંધ પરિપથ પર કોઈ એક દિશા (સમઘડી કે વિષમઘડી)માં 'મુસાફરી' કરીએ અને વિદ્યુતસ્થિતિમાનમાં થતા ફેરફારો નોંધતા જઈ તેમનો બૈજિક સરવાળો કરતા જઈએ, તો A બિંદુએ પાછા આવીએ, ત્યારે વિદ્યુતસ્થિતિમાન V_A જ મળવું જોઈએ. આ થયો વિદ્યુતસ્થિતિમાનની એકમૂલ્યતાનો અર્થ હકીકતમાં વિદ્યુતસ્થિતિમાનના એક મૂલ્યતા ઊર્જાસંરક્ષણના નિયમને જ રજૂ કરે છે.

A બિંદુથી સમઘડી દિશામાં આગળ વધતાં અવરોધ R_1માંથી પસાર થતાં વિદ્યુતસ્થિતિમાનમાં I_1R_1 જેટલો ઘટાડો થયો છે. પ્રવાહની દિશા યાદચ્છિક રીતે Aથી B તરફ ધારેલ હોવાથી અવરોધ R_1માંથી વિદ્યુતપ્રવાહ વધારે વિદ્યુતસ્થિતિમાનવાળા બિંદુ Aથી ઓછા વિદ્યુતસ્થિતિમાનવાળા બિંદુ તરફ જતો હોય છે. એટલે અવરોધ R_1માં થઈને Aથી B તરફ જતાં વિદ્યુતસ્થિતિમાનમાં I_1R_1 જેટલો ઘટાડો થાય છે. બૅટરી E_1ના ઋણ ધ્રુવથી ધન ધ્રુવ તરફ જતાં વિદ્યુતસ્થિતિમાનમાં ε_1 જેટલો વધારો થાય છે. R_2 અવરોધમાં થઈને Bથી C સુધી જતાં વિદ્યુતસ્થિતિમાનમાં I_2R_2 જેટલો વધારો થાય છે. અત્રે પ્રવાહની દિશા Cથી B તરફ ધારેલ છે. એટલે C પાસેનું વિદ્યુતસ્થિતિમાન B પાસેના વિદ્યુતસ્થિતિમાન કરતાં વધારે છે અને તેથી Bથી C જતાં વિદ્યુતસ્થિતિમાનમાં I_2R_2 જેટલો વધારો થાય છે.

તે જ પ્રમાણે ε_2ના ધનધ્રુવથી ઋણધ્રુવ પર જતાં વિદ્યુતસ્થિતિમાનમાં ε_2 જેટલો ઘટાડો થાય છે. R_3 અવરોધમાંથી

જતા વિદ્યુતસ્થિતિમાનમાં I_3R_3નો ઘટાડો, R_4માંથી જતાં I_4R_4નો વધારો અને R_5માંથી જતાં I_5R_5નો વધારો થાય છે.

આ બધાનો બૈજિક સરવાળો લેતાં A પાસે ફરી V_A જેટલું વિદ્યુતસ્થિતિમાન મળવું જોઈએ.

$$\therefore\ V_A - I_1R_1 + \varepsilon_1 + I_2R_2 - \varepsilon_2 - I_3R_3 + I_4R_4 + I_5R_5 = V_A$$

$$- I_1R_1 + \varepsilon_1 + I_2R_2 - \varepsilon_2 - I_3R_3 + I_4R_4 + I_5R_5 = 0 \qquad (3.9.4)$$

આમ, સમગ્ર બંધ પરિપથ પર બધા જ વિદ્યુતસ્થિતિમાનના ફેરફારોનો બૈજિક સરવાળો શૂન્ય હોય છે.

હવે, $(-I_1R_1) + I_2R_2 + (-I_3R_3) + I_4R_4 + I_5R_5 = (-\varepsilon_1) + \varepsilon_2 \qquad (3.9.5)$

$$\therefore\ \Sigma IR = \Sigma \varepsilon \qquad (3.9.6)$$

આ સમીકરણ દર્શાવે છે કે **"કોઈ બંધ પરિપથમાંના અવરોધો અને તેમનામાંથી વહેતા આનુષંગિક વિદ્યુતપ્રવાહોના ગુણાકારોનો સમગ્ર બંધમાર્ગ પરનો બૈજિક સરવાળો તે બંધમાર્ગમાં લાગુ પાડેલા emfના બૈજિક સરવાળા બરાબર હોય છે."** આ વિધાનને કિર્ચોફનો બીજો નિયમ કહે છે.

કિર્ચોફના નિયમો વાપરવા માટેની સંજ્ઞાપ્રણાલી (Sign convention for applying Kirchoff's rules)

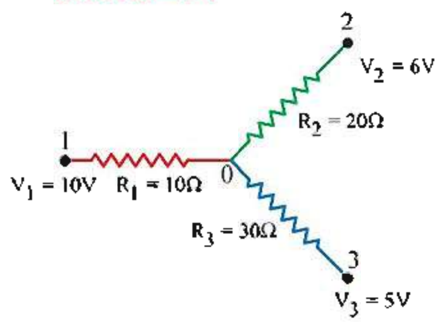
સમીકરણ (3.9.5) વાપરવા માટે સંજ્ઞાઓ નીચે મુજબ લેવી જોઈએ :

(1) જો કોઈ અવરોધમાંની આપણી મુસાફરી વિદ્યુતપ્રવાહની ધારેલી દિશામાં હોય, તો IR ઋણ લેવો જોઈએ અને જો મુસાફરીની દિશા અને પ્રવાહની દિશા પરસ્પર વિરુદ્ધ હોય, તો IR ધન લેવો જોઈએ.

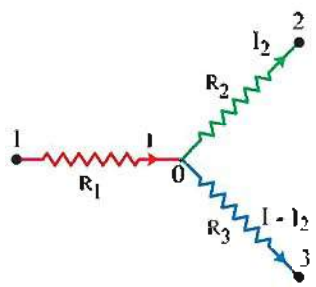
(2) જો બેટરીમાં મુસાફરીની દિશા ઋણધ્રુવથી ધનધ્રુવ તરફ હોય તો તો તેનું emf (જમણી બાજુએ લખતી વખતે) ઋણ લેવું જોઈએ. પણ જો બેટરીમાંથી 'આપણી મુસાફરી' ધનધ્રુવથી ઋણધ્રુવ તરફની હોય, તો તે બેટરીનું emf ધન ગણવું જોઈએ.

કિર્ચોફના નિયમો વાપરતી વખતે પરિપથમાં વિદ્યુતપ્રવાહની દિશા યાદચ્છિક રીતે (મન પડે તેમ) લઈ શકાય છે. જો કોઈ પ્રવાહની ખરેખર દિશા આપણે ધારેલ દિશા કરતાં ઊલટી હશે, તો તેવા સંજોગોમાં પ્રવાહનું મૂલ્ય ઋણ મળે અને તે સૂચવે છે કે આપણે લીધેલ દિશા કરતાં પ્રવાહ વિરુદ્ધ દિશામાં વહે છે.

ઉદાહરણ 10 : અહીં આપેલ પરિપથમાં અવરોધ R_1માંથી વહેતો પ્રવાહ શોધો. $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$ અને $R_3 = 30\ \Omega$. બિંદુઓ 1, 2 અને 3નાં સ્થિતિમાનો અનુક્રમે, $V_1 = 10$ V, $V_2 = 6$ V અને $V_3 = 5$ V છે. જંક્શન પાસેનું સ્થિતિમાન પણ ગણો.



ઉકેલ : પરિપથમાં O જંક્શન-બિંદુ છે. બિંદુ 1 પાસેનું સ્થિતિમાન બિંદુઓ 2 અને 3 પાસેના સ્થિતિમાનો કરતાં ઊંચું છે. આથી વિદ્યુતપ્રવાહોની દિશા 1થી O, અને Oથી 2 તથા Oથી 3 તરફ લઈ શકાય. આકૃતિમાં વિદ્યુતપ્રવાહો અને તેમની દિશાઓ દર્શાવી છે.



હવે 1O2 માર્ગે ગતિ કરતાં,

$$V_1 - IR_1 - I_2R_2 = V_2$$

$$\therefore\ 10 - 10I - 20I_2 = 6$$

$$\therefore\ 10I + 20I_2 = 4 \qquad (1)$$

તેવી જ રીતે 1O3 માર્ગે ગતિ કરતાં

$$10I + 30\ (I - I_2) = 5$$

$$\therefore\ 40I - 30I_2 = 5 \qquad (2)$$

સમીકરણો (1) અને (2) ઉકેલતાં

$I = 0.2$A

હવે, જો જંક્શન O પાસે સ્થિતિમાન V_O હોય તો,

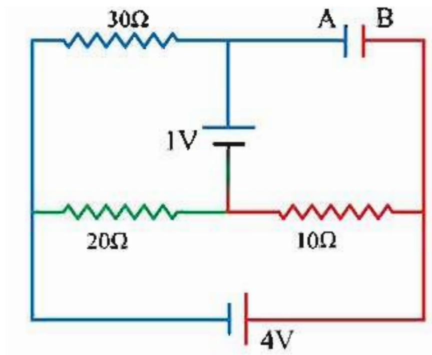
$$10 - V_O = IR_1$$

$$\therefore\ 10 - V_O = 2$$

$$\therefore\ V_O = 8\ \text{V}$$

ઉદાહરણ 11 : અહીં આપેલા પરિપથમાં કૅપેસિટરની પ્લેટો A અને B વચ્ચે વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત શોધો.

ઉકેલ : આકૃતિમાં વિદ્યુતપ્રવાહનું વિતરણ દર્શાવ્યું છે.



abcdea બંધ ગાળા માટે કિર્ચોફનો બીજો નિયમ વાપરતાં,

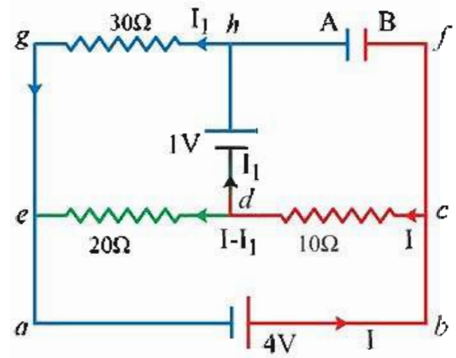
$- 10\ I - 20\ (I - I_1) + 4 = 0$

$\therefore\ 30\ I - 20\ I_1 = 4$ (1)

edhge ગાળા માટે,

$20(I - I_1) + 1 - 30I_1 = 0$

$\therefore\ 20I - 50I_1 = -1$ (2)



સમીકરણ (1) અને (2) ઉકેલતાં,

$I_1 = 0.1$ A અને $I = 0.2$ A.

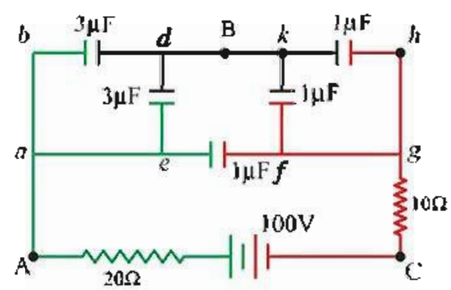
હવે કૅપેસિટરના બે છેડા વચ્ચે વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત એટલે *c* અને *h* વચ્ચે વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત. આ માટે ધારો કે *c* પાસે સ્થિતિમાન V_c છે અને *h* અને V_h છે. cdh માર્ગે જતાં,

$\therefore\ V_c - 10 \times 0.2 + 1 = V_h$

$\therefore\ V_c - V_h = 2 - 1 = 1$

$\therefore$ કૅપેસિટરના બે છેડા વચ્ચે વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત = 1 V

ઉદાહરણ 12 : આકૃતિમાં દર્શાવેલ પરિપથમાં A અને B તેમજ C અને B બિંદુઓ વચ્ચે સ્થિર સ્થિતિમાં વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત શોધો.



ઉકેલ : આકૃતિમાં 3 μFના બે કૅપેસિટરોના કૉમન છેડાઓ *e* (અથવા *a* અથવા *b*) અને *d* છે. તે જ પ્રમાણે 1 μFનાં બે કૅપેસિટરોના કૉમન છેડાઓ *k* અને *g* (અથવા *h* અથવા *f*) છે.

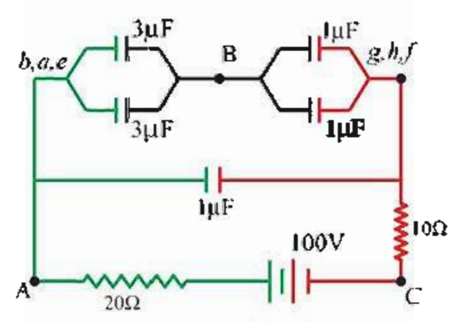
આ રીતે ઉપરના પરિપથનો સમતુલ્ય પરિપથ નીચે પ્રમાણે મળે :

3 μFના બે કૅપેસિટર્સમાં સમાંતરમાં છે.

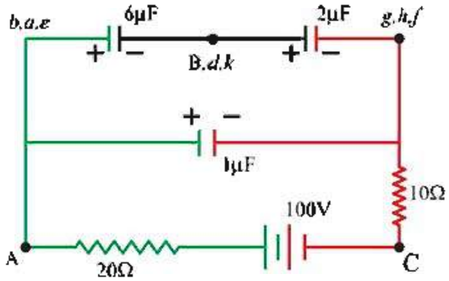
$\therefore$ તેમનો સમતુલ્ય કૅપેસિટન્સ = 6 μF

તે જ રીતે 1 μFના બે કૅપેસિટર્સનો સમતુલ્ય કૅપેસિટન્સ = 2 μF.

આ સ્થિતિ નીચેની આકૃતિમાં દર્શાવી છે :



હવે પરિપથ સ્થાયી સ્થિતિમાં હોવાથી 20 Ω અને 10 Ωના અવરોધોમાં કોઈ પ્રવાહ વહેતો નથી. આથી, આ અવરોધો જાણે કે પરિપથમાં છે જ નહિ તેમ ગણી શકાય. આ સ્થિતિમાં બૅટરીના 100Vનો વૉલ્ટેજ *b* અને *h* બિંદુઓ વચ્ચે લાગે છે. હવે, 6 μF અને 2 μFના કૅપેસિટરો બૅટરીના બે છેડાઓ વચ્ચે શ્રેણીમાં જોડાયેલાં છે.



જો 6 μF અને 2 μFનાં કેપેસિટર્સ પર વિદ્યુતભાર q હોય તો,

$$V_1 + V_1 = V$$

$$\frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} = V, \quad \frac{q}{6} + \frac{q}{2} = 100$$

$$\therefore \ q = \frac{100 \times 12}{8} = 150 \ \mu C$$

હવે, A અને B વચ્ચેનો વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત એટલે 6 μFના કેપેસિટર પરનો વોલ્ટેજ.

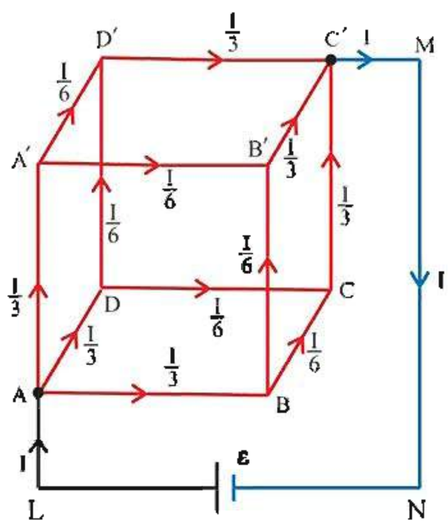
$$\therefore \ V_{AB} = \frac{150}{6} = 25 \ V$$

હવે B અને C વચ્ચેનો વોલ્ટેજ,

$$V_{BC} = 100 - 25 = 75 \ V$$

ઉદાહરણ 13 : સમાન અવરોધ R ધરાવતા 12 તારને જોડીને એક સમઘન બનાવ્યો છે. આ ઘનના કોઈ એક વિકર્ણનાં અંતિમ બિંદુઓ વચ્ચે સમતુલ્ય અવરોધ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે બેટરીમાંથી નીકળતો પ્રવાહ I છે.



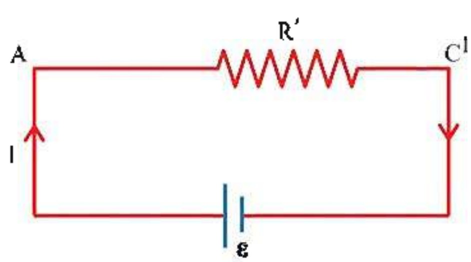
આપેલ નેટવર્કમાં માર્ગો AB, AD અને AA' (અવરોધોની દૃષ્ટિએ) સંમિત (symmetrical) હોવાથી આ ત્રણેય માર્ગોમાંથી વહેતા પ્રવાહો સમાન ($\frac{I}{3}$ જેટલા) હશે. વળી, જંકશન B, D અને A' પાસે આવતા આ પ્રવાહો બે-બે શાખાઓમાં સમાન રીતે વહેંચાશે. જંકશન C, B' અને D' પાસે આ પ્રવાહો ભેગા થાય છે તેથી CC', B'C' અને D'C' શાખાઓમાં $\frac{I}{3}$ જેટલા સમાન પ્રવાહો વહે છે. આ ત્રણેય પ્રવાહો જંકશન C' આગળ ભેગા થતા કુલ I પ્રવાહ પાછો મળે છે.

બંધ પરિપથ AA'D'C'MNLA માટે, કિર્ચોફનો બીજો નિયમ લાગુ પાડતાં,

$$-\frac{I}{3} \cdot R - \frac{I}{6}R - \frac{I}{3}R = -\varepsilon$$

$$\therefore \ \varepsilon = \frac{5}{6}IR \qquad (1)$$

ધારો કે, સમઘનના વિકર્ણ AC'નાં અંતિમ બિંદુઓ A અને C' વચ્ચે નેટવર્કનો સમતુલ્ય અવરોધ R' છે. આનો અર્થ એવો થાય કે R'ની સાથે આ જ બેટરી (ε emfવાળી) જોડીએ, તો તેમાંથી I જેટલો જ પ્રવાહ પસાર થાય.



આકૃતિમાં દર્શાવેલ પરિપથ પરથી,

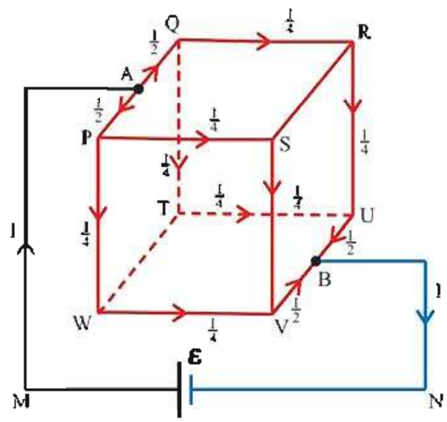
$$\varepsilon = IR' \qquad (2)$$

સમીકરણ (1) અને (2) સરખાવતાં,

$$\frac{5}{6}IR = IR'$$

$$\therefore \ R' = \frac{5}{6}R$$

ઉદાહરણ 14 : સમાન-અવરોધ ધરાવતા 12 તાર જોડીને આકૃતિમાં દર્શાવ્યા અનુસાર એક સમઘન બનાવવામાં આવ્યો છે, તો આકૃતિમાંનાં A અને B બિંદુઓ વચ્ચે સમતુલ્ય અવરોધ શોધો. દરેક તારનો અવરોધ r છે. A અને B અનુક્રમે PQ અને VU બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓ છે.



ઉકેલ : આકૃતિમાં ABને જોડતી રેખાને અનુલક્ષીને AP અને UB, AQ અને VB, PW અને RU, QT અને SV, WV અને QR શાખાઓ સંમિતિ છે. આ દરેક સંમિતિ જોડકામાંથી એકસરખો વિદ્યુતપ્રવાહ પસાર થતો હોય છે. ઉદાહરણ તરીકે જો PWમાંથી પસાર થતો પ્રવાહ $\frac{I}{4}$ હોય, તો RUમાંથી પસાર થતો પ્રવાહ પણ $\frac{I}{4}$ હોય. આ પ્રમાણે સંમિતિ શાખાઓ ધ્યાનમાં લેતાં જુદી-જુદી શાખાઓમાંથી આકૃતિમાં દર્શાવ્યા અનુસાર વિદ્યુતપ્રવાહો મળે.

આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે, WT અને SR શાખામાંથી વિદ્યુતપ્રવાહ પસાર થાય નહિ.

APWVBNMA બંધ ગાળાને કિર્ચોફનો બીજો નિયમ લગાડતાં (દરેક તારનો અવરોધ r ગણતાં)

$$-\frac{I}{2}\left(\frac{r}{2}\right) - \frac{I}{4}r - \frac{I}{4}r - \frac{I}{2}\left(\frac{r}{2}\right) = -\varepsilon$$

$$\therefore\ Ir = \varepsilon \qquad (1)$$

જો માંગેલ સમતુલ્ય અવરોધ r' હોય, તો

$$Ir' = \varepsilon \qquad (2)$$

સમીકરણ (1) અને (2)ને સરખાવતાં,

$$r' = r$$

3.10 અવરોધોનું શ્રેણી અને સમાંતર જોડાણ (Series and Parallel Connections of Resistors)

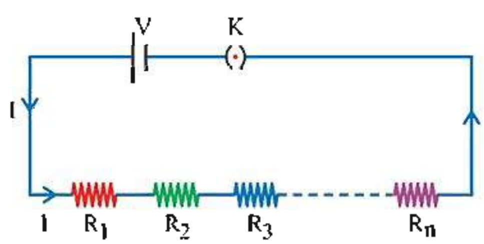
એક કરતાં વધુ અવરોધોને કોઈ બે બિંદુઓ વચ્ચે શ્રેણીમાં, સમાંતરમાં કે મિશ્ર પ્રકારે જોડી શકાય છે. અવરોધોનાં શ્રેણી અને સમાંતર જોડાણનો અભ્યાસ તમે ધોરણ 10માં કર્યો છે, તેથી અહીં આપણે તેમનાં પરિણામો નોંધીશું.

અવરોધોનું શ્રેણીજોડાણ :

બે બિંદુઓ વચ્ચે એક કરતાં વધુ અવરોધોને એક પછી એક એવી રીતે જોડવામાં આવે કે જેથી દરેક અવરોધમાંથી પસાર થતો વિદ્યુતપ્રવાહ (I) સમાન હોય અને વિદ્યુતપ્રવાહને વહેવા માટે ફક્ત એક જ માર્ગ ઉપલબ્ધ હોય, તો તે અવરોધો તે બે બિંદુઓ વચ્ચે શ્રેણીમાં જોડેલા છે તેમ કહેવાય.

આકૃતિ 3.17માં બે બિંદુઓ A અને B વચ્ચે n અવરોધો R_1, R_2, R_3, ..., R_nનું શ્રેણીજોડાણ દર્શાવ્યું છે.

જો આ શ્રેણીજોડાણનો સમતુલ્ય અવરોધ Rs હોય તો,



આકૃતિ 3.17 અવરોધોનું શ્રેણીજોડાણ

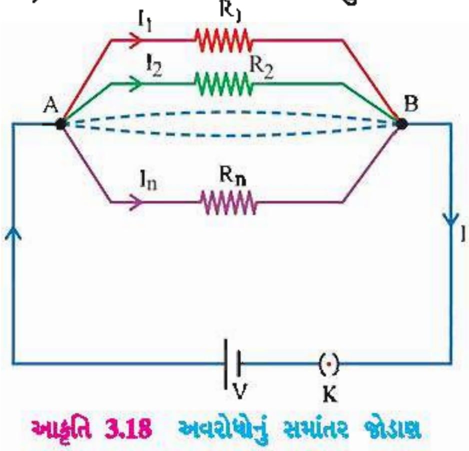
$$R_s = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots + R_n = \sum_{i=1}^{n} R_i \qquad (3.10.1)$$

આમ, શ્રેણી જોડાણનો સમતુલ્ય અવરોધ, શ્રેણીમાંના અવરોધોમાંના મોટામાં મોટા મૂલ્ય કરતાં વધુ હોય છે.

જો એક સમાન અવરોધ R ધરાવતા n અવરોધોને શ્રેણીમાં જોડવામાં આવે, તો સમતુલ્ય અવરોધ,

$$R_s = R + R + R + \ldots\ n \text{ વખત} = nR \qquad (3.10.2)$$

અવરોધોનું સમાંતર જોડાણ : બે બિંદુઓ વચ્ચે એક કરતાં વધુ અવરોધોને એવી રીતે જોડવામાં આવે કે જેથી વિદ્યુતપ્રવાહને વહેવા માટે એક કરતાં વધુ માર્ગો ઉપલબ્ધ હોય અને દરેક અવરોધના બે છેડા વચ્ચેનો p.d. (V) સમાન હોય, તો તે અવરોધો તે બે બિંદુઓ વચ્ચે સમાંતરમાં જોડેલા છે તેમ કહેવાય.



આકૃતિ 3.18 અવરોધોનું સમાંતર જોડાણ

આકૃતિ 3.18માં n અવરોધો R_1, R_2, R_3, ..., R_nને બે બિંદુઓ A અને B વચ્ચે સમાંતરમાં જોડેલા દર્શાવ્યા છે.

આ સમાંતર જોડાણનો સમતુલ્ય અવરોધ R_p હોય તો,

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + ...+ \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R_i} \quad (3.10.3)$$

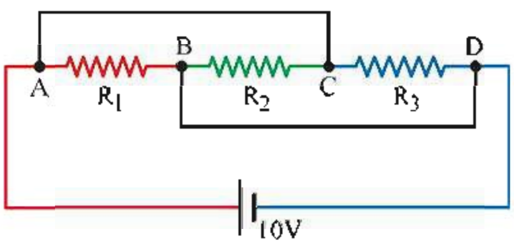
આમ, સમાંતર જોડાણમાં સમતુલ્ય અવરોધ, સમાંતરમાં જોડેલા અવરોધોમાંના નાનામાં નાના મૂલ્ય કરતાં ઓછો હોય છે.

જો એકસમાન અવરોધ R ધરાવતા n અવરોધોને સમાંતરમાં જોડવામાં આવે તો સમતુલ્ય અવરોધ,

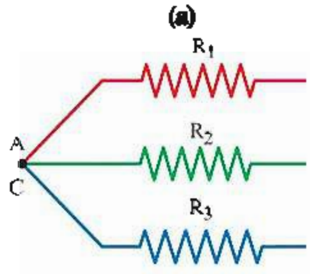
$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + ... n \text{ વખત} = \frac{n}{R}$$

$$\therefore R_p = \frac{R}{n} \quad (3.10.4)$$

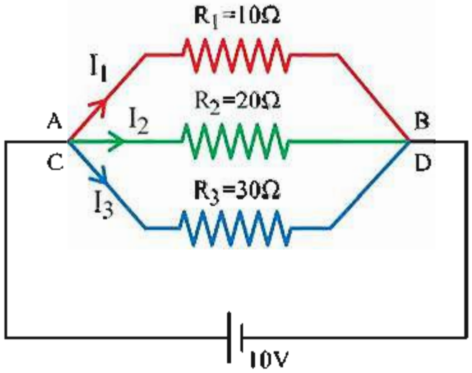
ઉદાહરણ 15 : આકૃતિમાં (a)માં દર્શાવેલ અવરોધ R_1, R_2 અને R_3માંથી પસાર થતા પ્રવાહો શોધો. $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$ અને $R_3 = 30\ \Omega$ અને બેટરીનો વૉલ્ટેજ 10 V.



(a)



(b)



(c)

ઉકેલ : આ પરિપથનો સમતુલ્ય પરિપથ મેળવવા બિંદુ Aથી શરૂ કરો. અહીં R_1 અવરોધનો એક છેડો A અને R_2નો C છેડો તેમજ R_3નો C છેડો એમ ત્રણ છેડાઓ A પાસે કૉમન છે.

∴ આંશિક રીતે પરિપથ આકૃતિ (b) પ્રમાણે થાય :

આ જ રીતે R_1નો B છેડો, R_2નો B છેડો અને R_3નો D છેડો એમ ત્રણ છેડાઓ B પાસે કૉમન છે.

∴ સંપૂર્ણ પરિપથ હવે આકૃતિ (c) પ્રમાણે થશે.

આમ ત્રણ અવરોધો એકબીજા સાથે સમાંતરમાં છે.

∴ તે દરેકના બે છેડા વચ્ચે વૉલ્ટેજ 10 V છે.

∴ R_1માંથી પસાર થતો પ્રવાહ, $I_1 = \frac{V}{R_1} = \frac{10}{10} = 1A$ તે જ પ્રમાણે R_2માંથી પસાર થતો પ્રવાહ, $I_2 = \frac{V}{R_2} = \frac{10}{20} = 0.5A$

અને R_3માંથી પસાર થતો પ્રવાહ $I_3 = \frac{V}{R_3} = \frac{10}{30} = 0.33$ A.

ઉદાહરણ 16 : 5A જેટલો વિદ્યુતપ્રવાહ એકબીજાને સમાંતર જોડેલી ત્રણ શાખાઓમાં વહેંચાય છે. ત્રણ શાખાઓમાં જોડેલા તારની લંબાઈઓનો ગુણોત્તર 2 : 3 : 4 હોય અને તેમની ત્રિજ્યાઓનો ગુણોત્તર 3 : 4 : 5 છે. જો ત્રણેય શાખામાં જોડેલા તાર એક જ દ્રવ્યના હોય, તો દરેક શાખામાં પ્રવાહનું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : ત્રણેય શાખાઓમાં જોડેલા તારની લંબાઈઓ અનુક્રમે $2l$, $3l$ અને $4l$ અને તેમની ત્રિજ્યાઓ અનુક્રમે $3r$, $4r$ અને $5r$ લો.

તેમના અવરોધો અનુક્રમે,

$$R_1 = \rho.\frac{2l}{\pi(3r)^2}$$

$$R_2 = \rho.\frac{3l}{\pi(4r)^2}$$

અને $R_3 = \rho.\frac{4l}{\pi(5r)^2}$ થશે.

અથવા $R_1 : R_2 : R_3 = \frac{2}{9} : \frac{3}{16} : \frac{4}{25}$

પ્રવાહો અવરોધના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં હોવાથી,

$$\therefore I_1 : I_2 : I_3 = \frac{9}{2} : \frac{16}{3} : \frac{25}{4}$$

$$= 54 : 64 : 75$$

$\therefore$ પ્રથમ શાખામાં પ્રવાહ $I_1 = \frac{54 \times 5}{193} = 1.40$ A

બીજી શાખામાં પ્રવાહ $I_2 = \frac{64 \times 5}{193} = 1.66$ A

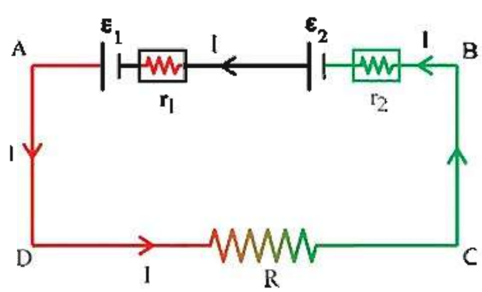
ત્રીજી શાખામાં, $I_3 = \frac{75 \times 5}{193} = 1.94$ A

3.11 કોષોનાં શ્રેણી અને સમાંતર જોડાણો (Series and Parallel Connections of Cells)

અવરોધોની જેમ કોષોને પણ કોઈ બે બિંદુઓ વચ્ચે શ્રેણીમાં સમાંતરમાં કે મિશ્ર પ્રકારે જોડી શકાય છે.

કોષોનું શ્રેણીજોડાણ :

આકૃતિ 3.19માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ε_1 અને ε_2 emfવાળા તથા r_1 અને r_2 આંતરિક અવરોધવાળા બે કોષોને A અને B બિંદુઓ વચ્ચે શ્રેણીમાં જોડેલા છે. આ જોડાણ સાથે એક બાહ્ય અવરોધ R પણ જોડેલો છે.



આકૃતિ 3.19 કોષોનું શ્રેણીજોડાણ

ABCDA બંધગાળાને કિર્ચોફનો બીજો નિયમ લાગુ પાડતાં,

$$-\varepsilon_1 + Ir_1 - \varepsilon_2 + Ir_2 + IR = 0$$

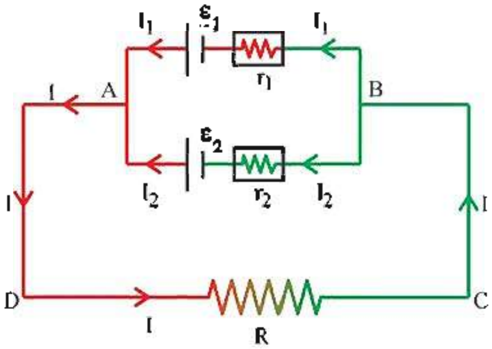
$$\therefore Ir_1 + Ir_2 + IR = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$\therefore I[R + (r_1 + r_2)] = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$\therefore I = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{R + (r_1 + r_2)} = \frac{\varepsilon_{eq}}{R + r_{eq}} \qquad (3.11.1)$$

જ્યાં, I અવરોધ Rમાંથી પસાર થતો પ્રવાહ છે.

આમ, બે કોષોનું શ્રેણીજોડાણ, જેનું emf $\varepsilon_{eq} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ હોય અને આંતરિક અવરોધ $r_{eq} = r_1 + r_2$ હોય તેવા એક કોષની જેમ વર્તે છે. આ અર્થમાં ε_{eq} એ કોષોના શ્રેણીજોડાણનું સમતુલ્ય emf અને r_{eq} કોષોના આંતરિક અવરોધોનો સમતુલ્ય આંતરિક અવરોધ છે.



આકૃતિ 3.20 કોષોનું સમાંતર જોડાણ

જો ગમે તે એક કોષના ધ્રુવો ઉલટાવવામાં આવે તો સમતુલ્ય emfનું મૂલ્ય $|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|$ થશે, પરંતુ સમતુલ્ય આંતરિક અવરોધ $r_{eq} = r_1 + r_2$ જ રહેશે.

કોષોનું સમાંતર જોડાણ :

આકૃતિ 3.20માં A અને B બિંદુઓ વચ્ચે ε_1 અને ε_2 emf વાળા તથા r_1 અને r_2 આંતરિક અવરોધ ધરાવતા બે કોષોનું સમાંતર જોડાણ દર્શાવ્યું છે. આકૃતિમાં વિદ્યુતપ્રવાહની દિશાઓ પણ દર્શાવે છે.

આપણને આવા જોડાણમાં બાહ્ય અવરોધ Rમાંથી પસાર થતો પ્રવાહ શોધવામાં રસ છે.

જંક્શન A પાસે, કિર્ચોફના પ્રથમ નિયમ અનુસાર,

$$I = I_1 + I_2 \tag{3.11.2}$$

હવે, બંધ ગાળા ADRCBε_1A માટે કિર્ચોફનો બીજો નિયમ વાપરતાં,

$$-IR - I_1 r_1 + \varepsilon_1 = 0$$

$$\therefore IR + I_1 r_1 = \varepsilon_1$$

$$\therefore I_1 = \frac{\varepsilon_1 - IR}{r_1} \tag{3.11.3}$$

તેવી જ રીતે બંધ ગાળા ADRCBε_2A પરથી,

$$I_2 = \frac{\varepsilon_2 - IR}{r_2} \tag{3.11.4}$$

સમીકરણ (3.11.3) અને (3.11.4)માંથી I_1 અને I_2નાં મૂલ્યો સમીકરણ (3.11.2)માં મૂકતાં,

$$I = \left(\frac{\varepsilon_1 - IR}{r_1}\right) + \left(\frac{\varepsilon_2 - IR}{r_2}\right)$$

$$\therefore I = \frac{\varepsilon_1}{r_1} + \frac{\varepsilon_2}{r_2} - IR\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

$$\therefore I + IR\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = \frac{\varepsilon_1}{r_1} + \frac{\varepsilon_2}{r_2}$$

$$\therefore I\left(1 + \frac{R}{r_1} + \frac{R}{r_2}\right) = \frac{\varepsilon_1}{r_1} + \frac{\varepsilon_2}{r_2}$$

$$\therefore I = \frac{\frac{\varepsilon_1}{r_1} + \frac{\varepsilon_2}{r_2}}{1 + \frac{R}{r_1} + \frac{R}{r_2}} \tag{3.11.5}$$

અથવા $$I = \frac{\varepsilon_1 r_2 + \varepsilon_2 r_1}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2} \tag{3.11.6}$$

સમીકરણ (3.11.6)માં અંશ અને છેદને $(r_1 + r_2)$ વડે ભાગતાં,

$$I = \frac{\frac{(\varepsilon_1 r_2 + \varepsilon_2 r_1)}{(r_1 + r_2)}}{R + \frac{r_1 r_2}{(r_1 + r_2)}} = \frac{\varepsilon_{eq}}{R + r_{eq}} \qquad (3.11.7)$$

આમ, કોષોનું સમાંતર જોડાણ,

$$\text{જેનું emf } \varepsilon_{eq} = \frac{\varepsilon_1 r_2 + \varepsilon_2 r_1}{r_1 + r_2} \qquad (3.11.8)$$

$$\text{અને આંતરિક અવરોધ } r_{eq} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \qquad (3.11.9)$$

હોય તેવા એક કોષની જેમ વર્તે છે.

$$\frac{1}{r_{eq}} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \quad \text{(સમીકરણ 3.11.9 પરથી)} \qquad (3.11.10)$$

સમીકરણ (3.11.8) અને (3.11.9)નો ગુણોત્તર લેતાં,

$$\frac{\varepsilon_{eq}}{r_{eq}} = \frac{\varepsilon_1}{r_1} + \frac{\varepsilon_2}{r_2} \qquad (3.11.11)$$

જો બે કોષના emf $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ હોય અને આંતરિક અવરોધ $r_1 = r_2 = r$ હોય તો, $\varepsilon_{eq} = \varepsilon$ અને $r_{eq} = \frac{r}{2}$.

આકૃતિ 3.20માં આપણે બંને બૅટરીના ધનધ્રુવોને એક સામાન્ય બિંદુ A સાથે અને ઋણધ્રુવોને બીજા એક સામાન્ય બિંદુ B સાથે જોડેલા છે, જેથી પ્રવાહો I_1 અને I_2 ધન ધ્રુવમાંથી બહાર નીકળે છે. પણ જો ε_2 બૅટરીના ઋણધ્રુવને ε_1 બૅટરીના ધનધ્રુવ સાથે જોડવામાં આવે તો સમીકરણમાં ε_2ને બદલે $-\varepsilon_2$ મૂકવું જોઈએ.

વ્યાપકપણે, જો $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ જેટલા emfવાળા અને $r_1, r_2, ..., r_n$ આંતરિક અવરોધવાળા n કોષોને સમાંતરમાં જોડવામાં આવે તો,

$$\frac{1}{r_{eq}} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + ... + \frac{1}{r_n} \qquad (3.11.12)$$

$$\frac{\varepsilon_{eq}}{r_{eq}} = \frac{\varepsilon_1}{r_1} + \frac{\varepsilon_2}{r_2} + ... + \frac{\varepsilon_n}{r_n} \qquad (3.11.13)$$

$$I = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{r_i}}{1 + R\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i}} \qquad (3.11.14)$$

જો $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ જેટલા emfવાળા અને $r_1, r_2, ..., r_n$ આંતરિક અવરોધવાળા n કોષોની બનેલી એક એવી m હારોને સમાંતરમાં જોડી મિશ્રજોડાણ (Mixed Connection) તૈયાર કરવામાં આવે તો, આવા મિશ્ર જોડાણમાં મળતો પ્રવાહ નીચેના સૂત્ર વડે મળે છે :

$$I = \frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i}{R + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} r_i} \qquad (3.11.15)$$

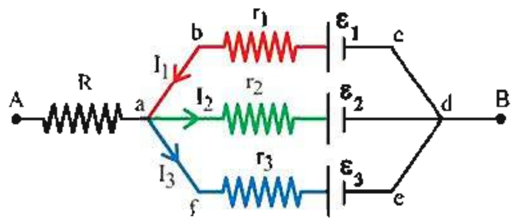
R = મિશ્રજોડાણના પરિપથમાં જોડેલો બાહ્ય અવરોધ

m = હારોની સંખ્યા

n = એક હારમાં જોડેલા કોષોની સંખ્યા

ઉદાહરણ 17 : આકૃતિમાં આપેલ પરિપથમાં $\varepsilon_1 = 3V$, $\varepsilon_2 = 2V$, $\varepsilon_3 = 1V$ અને $R = r_1 = r_2 = r_3 = 1\Omega$ છે. તો દરેક શાખામાં વહેતો પ્રવાહ શોધો તેમજ A અને B બિંદુઓ વચ્ચે p.d. શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે r_1, r_2 અને r_3 અવરોધોમાંથી વહેતા પ્રવાહો અનુક્રમે I_1, I_2 અને I_3 છે, જે આકૃતિમાં દર્શાવ્યા છે. બંધ ગાળાઓ abcda અને abcdefaને કિર્ચોફનો બીજો નિયમ લાગુ પાડતાં,



$$+I_1r_1 - \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + I_2r_2 = 0 \qquad .....(1)$$

અને $I_1r_1 - \varepsilon_1 + \varepsilon_3 + I_3r_3 = 0$ .....(2)

સમીકરણ (1) અને (2) પરથી,

$$\varepsilon_1 - I_1r_1 = \varepsilon_2 + I_2r_2 = \varepsilon_3 + I_3r_3 \qquad .....(3)$$

જંકશન a પાસે કિર્ચોફનો પ્રથમ નિયમ લાગુ પાડતાં,

$$I_1 = I_2 + I_3 \qquad .....(4)$$

સમીકરણ (4)નો ઉપયોગ સમીકરણ (3)માં કરતાં,

$\varepsilon_1 - (I_2 + I_3)r_1 = \varepsilon_3 + I_3r_3$

અથવા $2I_3 + I_2 = 2$ .....(5)

તથા $\varepsilon_2 + I_2r_2 = \varepsilon_3 + I_3r_3$

અથવા $I_3 - I_2 = 1$ .....(6)

સમીકરણ (4), (5) અને (6) પરથી,

$I_1 = 1A$, $I_2 = 0A$ અને $I_3 = 1A$

A અને B બિંદુઓ વચ્ચેનો p.d.

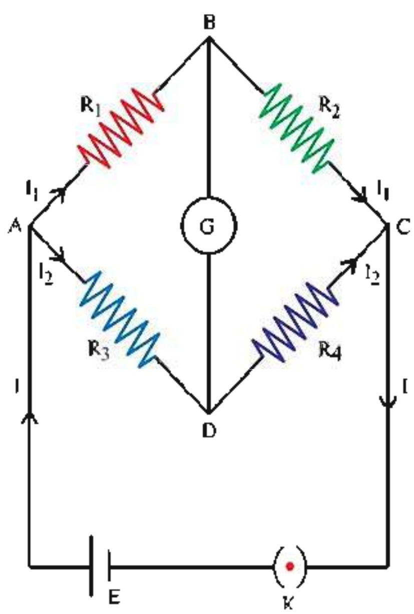
$= a$ અને d વચ્ચેનો p.d.

$= \varepsilon_1 - I_1r_1$

$= 3 - 1 \times 1$

$= 2V$

3.12 વ્હીસ્ટનબ્રિજ (Wheatstone Bridge)



આકૃતિ 3.21 વ્હીસ્ટનબ્રિજ

અજ્ઞાત અવરોધનું મૂલ્ય, પ્રમાણભૂત અવરોધની સાપેક્ષમાં ચોકસાઈપૂર્વક માપવા માટે ઈ. સ. 1843માં ચાર્લ્સ વ્હીસ્ટને જે પરિપથ વિકસાવ્યો, તેને વ્હીસ્ટનબ્રિજ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. આકૃતિ 3.21માં વ્હીસ્ટનબ્રિજ પરિપથ દર્શાવેલ છે. તેમાં અવરોધો R_1, R_2, R_3 અને R_4 વડે રચાતી ચાર અવરોધ-ભુજાઓ બંધ ગાળો રચે તેમ જોડેલી હોય છે. R_1 અને R_3ના સામાન્ય બિંદુ A તથા R_2 અને R_4ના સામાન્ય બિંદુ C વચ્ચે emfનું ઉદ્‌ગમ (બૅટરી) જોડવામાં આવે છે. તેમજ R_1 અને R_2ના સામાન્ય બિંદુ B તથા R_3 અને R_4ના સામાન્ય બિંદુ D વચ્ચે સંવેદી ગૅલ્વેનોમીટર જોડવામાં આવે છે.

આ ચાર અવરોધોમાંથી ત્રણ અવરોધો જ્ઞાત હોય છે અને ચોથો અજ્ઞાત હોય છે. આ ત્રણ જ્ઞાત અવરોધોનાં મૂલ્યો એવાં પસંદ કરવામાં આવે છે કે જેથી ગૅલ્વેનોમીટર શૂન્ય આવર્તન દર્શાવે. આ સ્થિતિમાં B અને D બિંદુનાં વિદ્યુતસ્થિતિમાન સમાન હોય છે. આથી ગૅલ્વેનોમીટરમાંથી પસાર થતો વિદ્યુતપ્રવાહ શૂન્ય થાય છે. આ સ્થિતિમાં વ્હીસ્ટનબ્રિજ સંતુલિત સ્થિતિ (Balanced Condition)માં છે, તેમ કહેવાય.

બ્રિજની સંતુલિત સ્થિતિમાં લૂપ ABDAને કિર્ચોફનો બીજો નિયમ લગાડતાં,

$-I_1R_1 + I_2R_3 = 0$

$$\therefore I_1R_1 = I_2R_3 \tag{3.12.1}$$

આ જ રીતે લૂપ BCDBને કિર્ચોફનો બીજો નિયમ લગાડતાં,

$-I_1R_2 + I_2R_4 = 0$

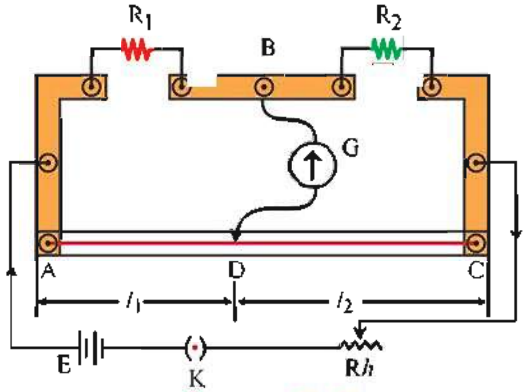
$$\therefore I_1R_2 = I_2R_4 \tag{3.12.2}$$

સમીકરણ (3.12.1)ને સમીકરણ (3.12.2) વડે ભાગતાં,

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \tag{3.12.3}$$

આમ, આ ચાર અવરોધોમાંથી કોઈ પણ ત્રણનાં મૂલ્ય જ્ઞાત હોય, તો ચોથા અવરોધનું મૂલ્ય શોધી શકાય છે.

મીટરબ્રિજ : મીટરબ્રિજ એ વ્હીસ્ટનબ્રિજના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરીને બનાવેલી પ્રાયોગિક રચના છે, જેની મદદથી અજ્ઞાત અવરોધનું મૂલ્ય પ્રાયોગિક રીતે શોધી શકાય છે. આકૃતિ 3.22માં પ્રયોગશાળામાં વ્હીસ્ટનબ્રિજ તરીકે વપરાતા મીટરબ્રિજની રચના દર્શાવી છે.



આકૃતિ 3.22 મીટરબ્રિજ

મીટરબ્રિજમાં R_3 અને R_4 અવરોધોને સ્થાને સમાન આડછેદવાળા 1 m લંબાઈના કોન્સ્ટન્ટનના અવરોધક તારને લાકડાના એક પાટિયા પર જડેલી મીટરપટ્ટી પર જડવામાં આવે છે. તારના બે છેડાઓ A અને C સાથે કાટખૂણે વાળેલી તાંબાની જાડી પટ્ટીઓ જડેલી હોય છે. આ પટ્ટીઓ પર જોડાણ-અગ્રો આપવામાં આવે છે. જેથી તારના બે છેડાઓ વચ્ચે બૅટરીનું જોડાણ થઈ શકે. કાટખૂણે વાળેલી બે જાડી પટ્ટીઓની વચ્ચે બીજી એક તાંબાની પટ્ટી એવી રીતે રાખવામાં આવે છે કે જેથી તેની બંને બાજુ એક-એક ગેપ રહે. બે ગેપના છેડાઓ પર જોડાણઅગ્ર લગાડવામાં આવ્યા હોય છે, જ્યાં અવરોધનું જોડાણ કરવામાં આવે છે. બે ગેપની વચ્ચે રહેલી પટ્ટીની મધ્યમાં પણ એક જોડાણ-અગ્ર B હોય છે, જેની સાથે સંવેદી ગૅલ્વેનોમીટરનો એક છેડો જોડવામાં આવે છે. ગૅલ્વેનોમીટરના બીજા છેડાને જોકી D સાથે જોડી જોકીને તાર પર સરકાવી સંપર્ક કરાવી શકાય છે.

આકૃતિ 3.22માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે અજ્ઞાત અવરોધ R_1ને બ્રિજની એક ગેપમાં અને પ્રમાણભૂત જ્ઞાત અવરોધ R_2ને બ્રિજની બીજી ગેપમાં જોડવામાં આવે છે. જ્ઞાત અવરોધ R_2ના કોઈ એક મૂલ્ય માટે જોકીને તાર પર સરકાવી એવા સ્થાન D પર મૂકવામાં આવે છે કે જેથી ગૅલ્વેનોમીટરનું આવર્તન શૂન્ય થાય. બિંદુ Dને તટસ્થબિંદુ કહે છે.

તારના A છેડાથી જોકી સુધીના તારની લંબાઈ AD = l_1 અને DC તારની લંબાઈ l_2 હોય, તો સમીકરણ (3.12.3) પરથી,

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\text{AD તારનો અવરોધ}}{\text{DC તારનો અવરોધ}}$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{l_1\rho}{l_2\rho} = \frac{l_1}{l_2} \tag{3.12.4}$$

જ્યાં, ρ = તારની એકમલંબાઈ દીઠ અવરોધ

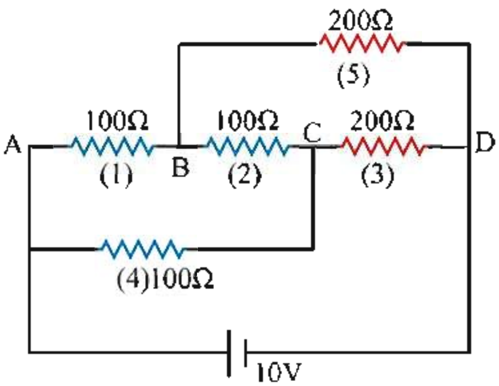
$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{l_1}{(100-l_1)}$$

$$\therefore R_1 = R_2\frac{l_1}{(100-l_1)} \tag{3.12.5}$$

જ્ઞાત અવરોધ R_2નાં જુદાં-જુદાં મૂલ્યો લઈ દરેક વખતે $\frac{l_1}{l_2}$નું મૂલ્ય શોધી અજ્ઞાત અવરોધ R_1નું સરેરાશ મૂલ્ય શોધવામાં આવે છે. આ રીતે મેળવેલ R_1નું મૂલ્ય ઘણું ચોક્કસ હોય છે. જોકે લઘુ અવરોધના માપન માટે આ રીત બહુ ઉપયોગી નથી.

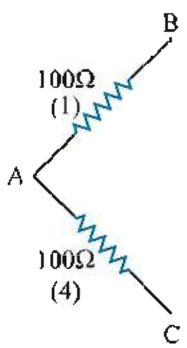
વ્યવહારમાં મીટરબ્રિજના તારની થોડીક લંબાઈ, બંને છેડે તાંબાની જાડી પટ્ટી નીચે રહેલી હોય છે, જેના માટે અંત્યસુધારો કરવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ 18 : અહીં આપેલા પરિપથ (a)માં BC તારમાંથી વહેતો પ્રવાહ શોધો.

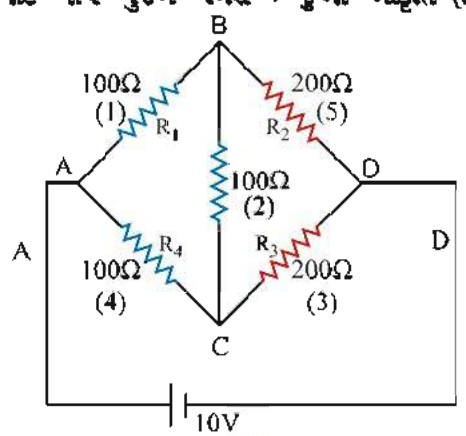


(a)

ઉકેલ : આ ઉદાહરણનો કિર્ચોફના નિયમો વાપરીને ઉકેલ મેળવી શકાય. આપણે અહીં આપેલા પરિપથને જુદી રીતે દોરીને સહેલાઈથી જવાબ મેળવીશું. પ્રશ્નમાં આપેલી આકૃતિમાં ચાર બિંદુઓ ABCD જુદા-જુદા બે અવરોધ વચ્ચે કૉમન છે. આપણે બિંદુ Aથી શરૂઆત કરીએ. A પાસે 100 Ωના અવરોધ (1) અને (4)ના એક એક છેડા કૉમન છે. આથી આકૃતિ (b) પ્રમાણે તેઓને જોડેલા ગણી શકાય. હવે ABC એમ ત્રણ બિંદુઓ આવી ગયાં. હવે BC વચ્ચે 100 Ωનો અવરોધ (2) છે અને CD વચ્ચે 200 Ωનો અવરોધ (3) છે. માટે પરિપથ માટે નીચે મુજબ મળશે : જુઓ આકૃતિ (c).



(b)



(c)

આ પરિપથમાં આપણે A અને D વચ્ચે 10Vની બૅટરી મૂકી છે. અહીં રકમની આકૃતિને આ રીતે પણ જોવાય :

Aથી B જઈએ, Bથી D જઈએ, Dથી C જઈએ અને Cથી A પર આવીએ, તો આમાં આવતા અવરોધો એક બંધ ગાળો રચે છે અને BC વચ્ચે 100 Ωનો અવરોધ (2) તથા AD વચ્ચે બૅટરી છે, તેથી પણ પરિપથ આકૃતિ 3.38(b)માં દર્શાવ્યા અનુસારનો મળી જાય.

આ વ્હીસ્ટનબ્રિજ (સમતોલનમાં)નો પરિપથ છે, કારણ કે $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_4}{R_3}$ શરત પળાય છે.

$\therefore$ B અને C વચ્ચેના અવરોધમાંથી કોઈ પ્રવાહ વહેતો નથી. $\therefore I_{BC} = 0$

ઉદાહરણ 19 : એક મીટરબ્રિજની એક ગેપમાં 200 Ω અવરોધ મૂકેલો છે અને બીજી ગેપમાં અજ્ઞાત અવરોધ X Ω અને 50 Ωનો અવરોધ શ્રેણીમાં જોડેલા છે. અત્રે અજ્ઞાત અવરોધ X Ω અમુક તાપમાન ધરાવતા હીટબાથમાં રાખેલ છે. જો તટસ્થબિંદુ 50 cm અંતરે મળતું હોય, તો અજ્ઞાત અવરોધનું મૂલ્ય અને તાપમાન શોધો. મીટરબ્રિજના તારની કુલ લંબાઈ 1 meter છે. અજ્ઞાત અવરોધનું 0°C તાપમાને મૂલ્ય 100 Ω છે. Xના દ્રવ્યનો $\alpha = 5 \times 10^{-3}\ ^{\circ}C^{-1}$.

ઉકેલ : અહીં $\frac{R_1}{R_2} = \frac{l_1}{l_2}$

$\therefore \frac{200}{X+50} = \frac{50}{50}$ $\quad\quad R_1 = 200\ \Omega$

$\therefore X = 150\ \Omega$ $\quad\quad R_2 = (X + 50)\Omega$

હવે, $X = X_0[1 + \alpha(\theta - 0)]$ $\quad\quad l_1 = 50$ cm

$\therefore 150 = 100[1 + 5 \times 10^{-3}\theta]$ $\quad\quad l_2 = 100 - 50 = 50$ cm

$\therefore 1.5 = 1 + 5 \times 10^{-3}\theta$

$\therefore \theta = 100\ ^{\circ}C$

નોંધ : આ ઉદાહરણ પરથી તમેસમજી શકશો કે જુદાં-જુદાં તાપમાનોએ વ્હીસ્ટનબ્રિજની મદદથી અવરોધ માપીને તાપમાનો નક્કી કરી શકાય છે.

અવરોધમાં તાપમાન સાથે થતા ફેરફારોની ઘટનાનો ઉપયોગ કરીને થરમૉમીટર્સ તૈયાર કરવામાં આવે છે, જેને **રેઝિસ્ટન્સ થરમૉમીટર્સ** કહે છે. આ થરમૉમીટરના ઉત્પાદકો થર્મોમીટર સાથે $R \rightarrow T$ના આલેખો પણ આપે છે. હાલમાં ડિજિટલ ડિસ્પ્લેવાળા થર્મોમીટર્સ પણ બને છે. રેઝિસ્ટન્સ થરમૉમીટર એ ટ્રાન્સડ્યુસરનું એક ઉદાહરણ છે, જેમાં સામાન્ય રીતે કોઈ ભૌતિક રાશિને વિદ્યુતરાશિમાં કે તેનાથી ઊલટું રૂપાંતરણ કરવામાં આવતું હોય છે.

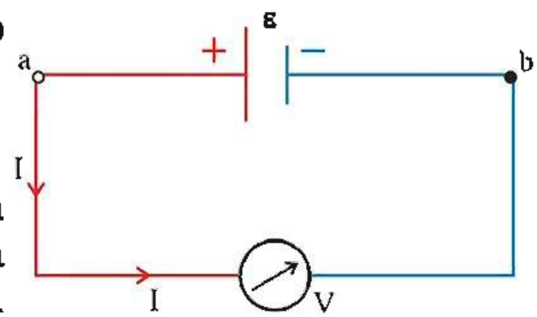
3.13 પોટેન્શિયોમીટર (Potentiometer)

(A) પોટેન્શિયોમીટરની જરૂરિયાત : આપણે જોઈ ગયા કે બૅટરીનો ટર્મિનલ વૉલ્ટેજ,

$$V = \varepsilon - Ir \quad (3.13.1)$$

જ્યાં, ε = બૅટરીનું વિદ્યુતચાલક બળ (emf)

અને r = બૅટરીનો આંતરિક અવરોધ છે.



આકૃતિ 3.23

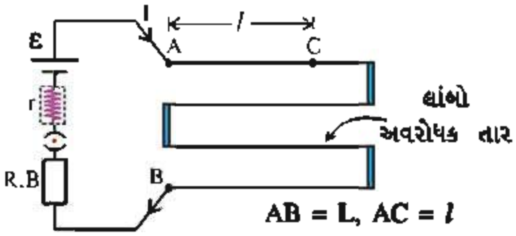
આકૃતિ 3.23માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે જો બૅટરીના બે ધ્રુવો વચ્ચે (a અને b બિંદુઓ વચ્ચે) પ્રયોગશાળામાં વપરાતા વૉલ્ટમીટર (ટેબલ વૉલ્ટમીટર)ને જોડવામાં આવે તો તે બૅટરીના બે ધ્રુવો વચ્ચેનો p.d. એટલે કે બૅટરીનો ટર્મિનલ વૉલ્ટેજ (V) જ માપે છે.

જો બૅટરીનો આંતરિક અવરોધ શૂન્ય ($r = 0$) હોય અથવા વૉલ્ટેજમાપન દરમિયાન બૅટરીમાંથી પસાર થતો પ્રવાહ શૂન્ય ($I = 0$) હોય, તો સમીકરણ (3.13.1) અનુસાર $V = \varepsilon$ થાય, અને બૅટરીનો ટર્મિનલ વૉલ્ટેજ પોતાના emf જેટલો થાય. પણ બૅટરીનો આંતરિક અવરોધ (r) તો કાંઈ શૂન્ય હોતો નથી. પરિણામે વૉલ્ટમીટરને જોડ્યા બાદ જો બૅટરીમાંથી વિદ્યુતપ્રવાહ પસાર ન થાય એટલે કે $I = 0$ થાય. (open circuit conditionમાં) તો જ વૉલ્ટમીટર વડે બૅટરીના emfનું માપ મળે.

સાદા વૉલ્ટમીટરનો અવરોધ આશરે 5000 Ωથી 6000 Ω જેટલો હોય છે, એટલે કે તેને બૅટરી સાથે જોડતાં થોડોક પ્રવાહ તો પસાર થાય જ છે. (એટલે કે $I \neq 0$). **પરિણામે વૉલ્ટમીટર એ બૅટરીનું emf (ε) નહીં, પરંતુ ટર્મિનલ વૉલ્ટેજ (V)નું જ માપન કરે છે.**

આથી, બૅટરીનું emf માપવા માટે કોઈ એવી રચના (device) તૈયાર કરવી જોઈએ કે જેથી માપન દરમિયાન બૅટરીમાંથી પસાર થતો વિદ્યુતપ્રવાહ $I = 0$ હોય. આવી પરિસ્થિતિ પોટેન્શિયોમીટરની રચના દ્વારા સાકાર કરી શકાય છે.

પોટેન્શિયોમીટર એક એવી રચના છે કે જેમાં સતત બદલી શકાય તેવો અને સાથે સાથે માપી શકાય તેવો p.d. મેળવી શકાય છે. આ હકીકત નીચે વર્ણવેલ 'પોટેન્શિયોમીટરના સિદ્ધાંત'ની મદદથી સમજી શકાય છે.



આકૃતિ 3.24 પોટેન્શિયોમીટરનો સિદ્ધાંત

(B) પોટેન્શિયોમીટરનો સિદ્ધાંત (Principle of Potentiometer) : આકૃતિ 3.24માં દર્શાવેલ પરિપથ ધ્યાનમાં લો. અહીં ε જેટલું emf અને r જેટલો આંતરિક અવરોધ ધરાવતી બૅટરી સાથે અવરોધપેટી R અને સમાન આડછેદવાળો (દરેક એકમલંબાઈ દીઠ સમાન અવરોધ ધરાવતો) એક લાંબો અવરોધક તાર શ્રેણીમાં જોડ્યો છે. અવરોધપેટી Rની હંમેશાં જરૂર હોતી નથી.

(**નોંધ** : પોટેન્શિયોમીટરમાં કેટલાક મીટર લંબાઈના સમાન આડછેદવાળા લાંબા અવરોધક તારને લાકડાના પાટિયા પર જડેલી મીટરપટ્ટી પર જડવામાં આવે છે.)

ધારો કે, અવરોધક તાર ABની કુલ લંબાઈ L અને એકમલંબાઈ દીઠ તારનો અવરોધક ρ હોય, તો AB તારનો અવરોધ = Lρ. જો અવરોધપેટીમાંથી વપરાતો અવરોધ R હોય, તો તાર ABમાંથી વહેતો પ્રવાહ, ઓહ્મના નિયમ અનુસાર,

$$I = \frac{\varepsilon}{R + L\rho + r} \tag{3.13.2}$$

જો Aથી C સુધી તારની લંબાઈ l = હોય તો, તારના AC ભાગનો અવરોધ = $l\rho$

તેથી તારનાં A અને C બિંદુઓ વચ્ચે p.d. = $Il\rho$ થશે.

સ્થિતિમાનના આ તફાવતને V_l વડે દર્શાવતાં,

$$V_l = Il\rho \tag{3.13.3}$$

સમીકરણ (3.13.2)માંથી Iનું મૂલ્ય સમીકરણ (3.13.3)માં મૂકતાં,

$$V_l = \left(\frac{\varepsilon}{R + L\rho + r}\right) l\rho$$

$$\therefore \ V_l = \left(\frac{\varepsilon . \rho}{R + L\rho + r}\right) l \tag{3.13.4}$$

$$\therefore \ V_l \ \alpha \ l \tag{3.13.5}$$

સિદ્ધાંત : પોટેન્શિયોમીટર તાર (અવરોધક તાર)ના કોઈ પણ બે બિંદુઓ વચ્ચેનો p.d. તે બે બિંદુઓ વચ્ચેના અંતરના સમપ્રમાણમાં હોય છે. આમ, અવરોધક તાર પર lનાં જુદાં-જુદાં મૂલ્યો લેવાથી p.d.નાં જુદાં-જુદાં મૂલ્યો મેળવી શકાય છે. આ સ્થિતિમાં તારનાં A અને C બિંદુઓ જાણે કે કોઈ બૅટરીના અનુક્રમે ધન અને ઋણ ધ્રુવો હોય તેમ વર્તે છે. બિંદુ Cનું સ્થાન (જોકી ક્લની મદદથી) બદલીને આવી 'બૅટરી'નું emf સતત બદલી શકાય છે.

સમીકરણ (3.13.4) પરથી,

$$\sigma = \frac{V_l}{l} = \frac{\varepsilon . \rho}{R + L\rho + r} \tag{3.13.6}$$

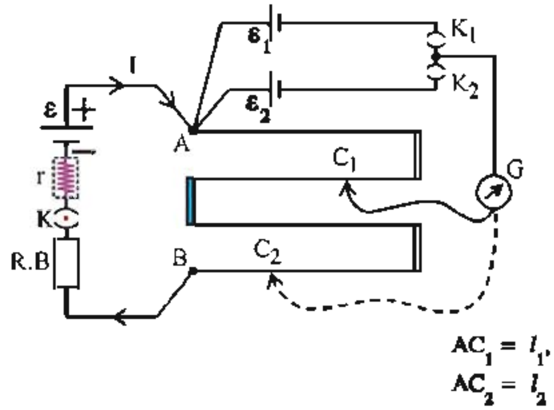
અહીં, **તારની એકમલંબાઈ દીઠ મળતા p.d. $\frac{V_l}{l}$ એટલે કે σને વિદ્યુતસ્થિતિમાન પ્રચલન કહે છે.** તેનો એકમ Vm^{-1} છે.

પોટેન્શિયોમીટરની સંવેદિતા, તાર પર મળતા વિદ્યુતસ્થિતિમાન પ્રચલન પર આધાર રાખે છે. પોટેન્શિયોમીટરના તાર પર જેમ વિદ્યુતસ્થિતિમાન પ્રચલનનું મૂલ્ય ઓછું તેમ પોટેન્શિયોમીટરની સંવેદિતા વધુ. આપેલ V_{AB} માટે જો પોટેન્શિયોમીટર તારની લંબાઈ વધારવામાં આવે, તો વિદ્યુતસ્થિતિમાન પ્રચલન ઘટે એટલે કે પોટેન્શિયોમીટરની સંવેદિતા વધે.

(C) પોટેન્શિયોમીટરના ઉપયોગો :

(i) બે વિદ્યુતકોષોના emfની સરખામણી કરવા (Comparision of emf's of Two Cells) : ધારો કે પોટેન્શિયોમીટરની મદદથી આપેલ બે બૅટરીઓનાં emf જે અનુક્રમે ε_1 અને ε_2 છે, તેની સરખામણી કરવી છે. આ માટે, પોટેન્શિયોમીટર પરિપથની મુખ્ય બૅટરી (ε) વડે તારના બે છેડા વચ્ચે મળતો p.d. (V_{AB}), ε_1 અને ε_2 કરતાં વધુ હોવો જોઈએ.

આકૃતિ 3.25માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે પ્રથમ ε_1 emfવાળી બૅટરીના ધન ધ્રુવને પોટેન્શિયોમીટર તારના A બિંદુ સાથે અને તેના ઋણ ધ્રુવને સંવેદનશીલ ગૅલ્વેનોમીટર મારફતે જોકી (સ્પર્શક કળ) સાથે જોડવામાં આવે છે. આ જોડાણ માટે કળ k_1નો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.



આકૃતિ 3.25 બે કોષોના emfની સરખામણી

જોકીને તાર પર સરકાવી એવા સ્થાન C_1 પર લાવવામાં આવે છે કે જેથી ગૅલ્વેનોમીટરનું આવર્તન શૂન્ય થાય. આ સ્થિતિમાં ε_1 બૅટરીમાંથી કોઈ પ્રવાહ વહેતો નથી, તેથી તેનો ટર્મિનલ વૉલ્ટેજ તેના emf (ε_1) જેટલો થાય છે. તાર પર મળતા આવા બિંદુને **તટસ્થબિંદુ (Null-Point)** કહે છે. ધારો કે, તટસ્થબિંદુ C_1, તારના A બિંદુથી l_1 અંતરે મળે છે. આ સ્થિતિમાં તારના A અને C_1 વચ્ચેનો p.d. બૅટરીના emf ε_1 જેટલો હોવો જોઈએ.

આથી સમીકરણ (3.13.4) અનુસાર,

$$V_{AC_1} = \varepsilon_1 = \sigma l_1 \tag{3.13.7}$$

જ્યાં, $\sigma = \left(\dfrac{\varepsilon.\rho}{R+L\rho+r}\right)$ વિદ્યુતસ્થિતિમાન પ્રચલન દર્શાવે છે.

હવે K_2 કળનો ઉપયોગ કરી સર્કિટમાં ε_1 બૅટરીને સ્થાને ε_2 emfવાળી બૅટરી જોડી, જોકીને તાર પર સરકાવી ગૅલ્વેનોમીટરમાં શૂન્ય આવર્તન (તટસ્થબિંદુ) મેળવવામાં આવે છે. ધારો કે આ વખતે તટસ્થબિંદુનું સ્થાન C_2 હોય અને $AC_2 = l_2$ હોય તો,

$$V_{AC_2} = \varepsilon_2 = \sigma l_2 \tag{3.13.8}$$

સમીકરણ (3.13.7) અને સમીકરણ (3.13.8)નો ગુણોત્તર લેતાં,

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{l_1}{l_2} \tag{3.13.9}$$

આ સૂત્ર પરથી આપેલી બે બૅટરીના emfની સરખામણી કરી શકાય છે.

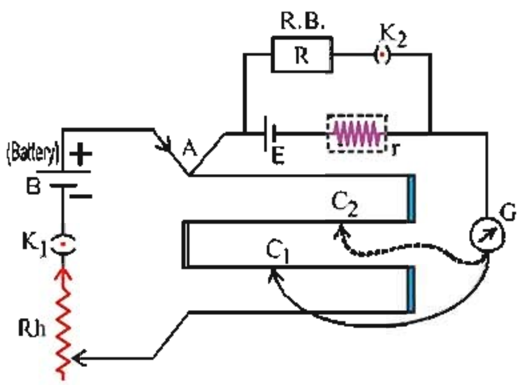
વ્યવહારમાં આપેલ બૅટરીનું emf શોધવા માટે તેના emfની સરખામણી એક બીજી પ્રમાણભૂત બૅટરીના emf સાથે કરવામાં આવે છે અને સમીકરણ (3.13.9)નો ઉપયોગ કરી આપેલ બૅટરીનું emf શોધી શકાય છે.

અવરોધપેટીમાં Rના મૂલ્યમાં યોગ્ય ફેરફાર કરી તારનાં કોઈ પણ બે બિંદુઓ વચ્ચે ઇચ્છિત ક્રમનો p.d. મેળવી શકાય છે. Rના યોગ્ય મૂલ્ય સાથે આ તફાવત 10^{-6}V (=1 μV)ના ક્રમનો કે 10^{-3}V(= 1mV)ના ક્રમનો પણ મેળવી શકાય છે. આમ, પોટેન્શિયોમીટર સૂક્ષ્મ emf માપવા માટે પણ ઉપયોગી છે.

નોંધ : પોટેન્શિયોમીટરમાં ε_1 અને ε_2 emf ધરાવતી બે બૅટરીઓને વારાફરતી એકબીજા સાથે પ્રથમ સહાયક સ્થિતિમાં અને ત્યાર બાદ વિરોધક સ્થિતિમાં જોડીને મેળવવામાં આવતાં તટસ્થબિંદુઓની લંબાઈ અનુક્રમે l_3 અને l_4 હોય તો,

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{l_3+l_4}{l_3-l_4} \tag{3.13.10}$$

(ii) વિદ્યુતકોષનો આંતરિક અવરોધ શોધવા (To Determine the Internal Resistance of a Cell)



આકૃતિ 3.26 વિદ્યુતકોષનો આંતરિક અવરોધ

બૅટરીનો આંતરિક અવરોધ (r) શોધવા માટે પણ પોટૅન્શિયોમીટરનો ઉપયોગ કરી શકાય છે. આ માટે આકૃતિ 3.26માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે જેનો આંતરિક અવરોધ (r) શોધવાનો હોય તેવી બૅટરી (emf ε) સાથે સમાંતરમાં નાની અવરોધપેટી R અને કળ K_2 જોડવામાં આવે છે.

જ્યારે કળ K_2 ખુલ્લી હોય (અર્થાત્ અવરોધપેટી જોડાતી ન હોય) ત્યારે પોટૅન્શિયોમીટર તાર પર તટસ્થબિંદુ C_1 શોધવામાં આવે છે. આ સ્થિતિમાં બૅટરી (ε)માંથી પ્રવાહ પસાર થતો ન હોવાથી તે open circuit conditionમાં આવે છે. જો તટસ્થબિંદુ C_1 તારના A છેડાથી l_1 અંતરે મળતું હોય તો,

$$V_{AC_1} = \varepsilon = \sigma l_1 \tag{3.13.11}$$

હવે, કળ K_2 બંધ કરતાં અવરોધપેટી જોડાય છે. અવરોધપેટીમાં Rના કોઈ એક મૂલ્ય માટે તાર પર તટસ્થબિંદુ C_2 મેળવવામાં આવે છે. આ સ્થિતિમાં બૅટરી વડે અવરોધ Rમાંથી I પ્રવાહ વહે છે. જો બૅટરીનો ટર્મિનલ વૉલ્ટેજ V હોય અને તટસ્થબિંદુ $AC_2 = l_2$ લંબાઈએ મળતું હોય તો,

$$V_{AC_2} = V = \sigma l_2 \tag{3.13.12}$$

$$\therefore \ \frac{\varepsilon}{V} = \frac{l_1}{l_2} \tag{3.13.13}$$

ઓહ્‌મના નિયમ પરથી, $\varepsilon = I(R + r)$

અને $V = IR$

આ પરથી, $$\frac{\varepsilon}{V} = \frac{R+r}{R} \tag{3.13.14}$$

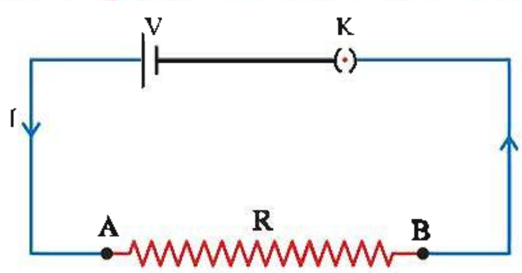
આ સમીકરણ (3.13.14)નો ઉપયોગ સમીકરણ (3.13.13)માં કરતાં,

$$\frac{R+r}{R} = \frac{l_1}{l_2}$$

$$\therefore \ r = R\left(\frac{l_1}{l_2} - 1\right) \tag{3.13.15}$$

સમીકરણ (3.13.15)નો ઉપયોગ કરીને આપેલી બૅટરીનો આંતરિક અવરોધ શોધી શકાય છે.

3.14 વિદ્યુત-ઊર્જા અને પાવર : જૂલનો નિયમ (Electrical Energy, Power : Joule's Law)



આકૃતિ 3.27

આકૃતિ 3.27માં V volt જેટલા ટર્મિનલ વૉલ્ટેજ ધરાવતી એક બૅટરીને અવરોધ R સાથે જોડીને સર્કિટ પૂરી કરેલ છે અને પરિણામે તેમાંથી વહેતો (રૈવાજિક) વિદ્યુતપ્રવાહ I છે. આગળ સમજાવ્યા અનુસાર, અવરોધના છેડા A પાસે 1 C ધન વિદ્યુતભાર દીઠ V Joule ઊર્જા હોય છે. આ ઊર્જા એટલે જ A પાસેનું વિદ્યુતસ્થિતિમાન અથવા એકમ ધન વિદ્યુતભાર દીઠ વિદ્યુત-ઊર્જા.

હવે, જો વિદ્યુતપ્રવાહ ઇલેક્ટ્રૉનની ગતિના કારણે રચાતો લઈએ (જે વાસ્તવિકતા છે), તો છેડા B પાસે એકમ ઋણ વિદ્યુતભાર V Joule જેટલી ઊર્જા ધરાવે છે તેમ કહેવાય.

આપણે આગળ નોંધી ગયાં છીએ કે, આવાં ઇલેક્ટ્રૉન જ્યારે વાહકમાંથી પસાર થાય છે, ત્યારે વાહકમાંના દોલન કરતા ધન આયનો સાથે 'અથડામણો' અનુભવે છે. આવી 'અથડામણો' દરમિયાન ઇલેક્ટ્રૉનની ઊર્જાનો અમુક ભાગ દોલન કરતાં આયનોને મળે છે. પરિણામે આયનોનાં દોલનો વધારે ઝડપી અને વધારે અસ્તવ્યસ્ત બને છે. ધોરણ 11માં આપણે ભણી ગયાં છીએ કે, કોઈ પદાર્થનાં ઘટકકણોની અસ્તવ્યસ્ત ગતિ સાથે સંકળાયેલ ગતિ-ઊર્જા એટલે જ પદાર્થમાં રહેલ ઉષ્મા-ઊર્જા માટે અહીં કહી શકાય કે, ઇલેક્ટ્રૉનની અથડામણ દરમિયાન આયનોને મળતી આ ઊર્જા, ઉષ્મા-ઊર્જાના સ્વરૂપમાં પ્રાદુર્ભાવ પામે છે.

વાહકમાં વિદ્યુતપ્રવાહ વહેવડાવતાં અવરોધને કારણે મળતી ઉષ્મા-ઊર્જાને જૂલઉષ્મા કહે છે અને આ ઘટનાને જૂલ અસર કહે છે.

ધારો કે, વાહક્ના બે છેડા વચ્ચેનો p.d. V volt છે. આનો અર્થ એવો થયો કે એકમ વિદ્યુતભાર વાહકમાંથી પસાર થાય છે, ત્યારે તેની V joule જેટલી વિદ્યુત-ઊર્જા તેમાં વપરાય છે.

જો t સમયમાં વાહકમાંથી પસાર થતો વિદ્યુતભાર Q coulomb હોય, તો આ વિદ્યુતભારે t second સમયમાં ગુમાવેલી વિદ્યુત-ઊર્જા,

$$W = V\,Q \tag{3.14.1}$$

જે t સમયમાં ઉદ્‌ભવતી ઉષ્મા-ઊર્જા

જો આ વિદ્યુતભારને કારણે I ampere (સ્થિર) વિદ્યુતપ્રવાહનું નિર્માણ થતું હોય તો,

$$I = \frac{Q}{t}$$

$$\therefore\ Q = It$$

$$\therefore\ W = V\,I\,t \tag{3.14.2}$$

પણ, ઓહ્મના નિયમ અનુસાર, $V = IR$

$$\therefore\ W = I^2Rt \tag{3.14.3}$$

$\therefore$ એકમસમયમાં વપરાતી વિદ્યુત-ઊર્જા (એટલે કે ઇલેક્ટ્રિક પાવર) અથવા ઉદ્‌ભવતી ઉષ્મા-ઊર્જા

$$P = I^2R \tag{3.14.4}$$

અહીં, R એ વાહકનો ઓહ્મિક અવરોધ છે અને તેનું મૂલ્ય V અને I પર આધાર રાખતું નથી. આથી આપેલ તાપમાને Rને અચળ ગણતાં, એકમસમયમાં ઉદ્‌ભવતી ઉષ્મા-ઊર્જા (પાવર)

$$P \propto I^2 \tag{3.14.5}$$

આ સમીકરણને જૂલનો નિયમ કહે છે.

જૂલનો નિયમ : "આપેલા તાપમાને અવરોધમાં સ્થિર વિદ્યુતપ્રવાહ વહેતાં, તેમાં એકમસમયમાં ઉદ્‌ભવતી ઉષ્મા-ઊર્જા, પસાર થતા વિદ્યુતપ્રવાહના વર્ગના સમપ્રમાણમાં હોય છે."

આ સમગ્ર ચર્ચામાં ઉષ્મા-ઊર્જા joule એકમમાં છે, તે ભૂલશો નહિ.

જો ઉષ્મા-ઊર્જાને ઉષ્માના એકમ calorieમાં મેળવવી હોય તો joule અને calorie વચ્ચેનો સંબંધ જાણવો જોઈએ. આવો સંબંધ પણ વિજ્ઞાની જૂલે (James Prescott Joule, 1818–1889) જ આપ્યો છે. તે અનુસાર W (joule) = JH (cal), જ્યાં Jને જૂલનો અચળાંક અથવા ઉષ્માનો યાંત્રિક તુલ્યાંક કહે છે અને તેનું મૂલ્ય $J = 4.2\ J\ cal^{-1}$ છે.

$$\therefore\ H = \frac{I^2Rt(\text{joule})}{J(\text{joule/cal})} = \frac{I^2Rt}{J}\ \text{cal} \tag{3.14.6}$$

3.15 જૂલ-ઉષ્માના વ્યાવહારિક ઉપયોગ (Practical Applications of Joule Heating)

વાહકમાં વિદ્યુતપ્રવાહ વહેતાં ઉદ્‌ભવતી ઉષ્મા એ અનિવાર્ય ઘટના છે. મોટા ભાગના કિસ્સામાં તે અનિચ્છનીય છે, કારણે કે વિદ્યુતભારોએ પ્રાપ્ત કરેલ વિદ્યુત-ઊર્જા, ઉષ્મા-ઊર્જા સ્વરૂપે વેડફાઈ જાય છે. આને **'ઓહ્મિક વ્યય'-'Ohmic dissipation'** અથવા તો **'ઓહ્મિક લૉસ'-'Ohmic loss'** કહે છે. ઉદાહરણ તરીકે આપણા ઘરમાં ઉપરની ટાંકીમાં પાણી ચડાવવા માટે મોટર ચાલુ કરીએ, ત્યારે વપરાતા વિદ્યુતપાવરમાંથી અમુક ભાગ (વ્યવહારમાં તો ઘણો

મોટો અંશ) ઉષ્મા-ઊર્જા સ્વરૂપે વેડફાઈ જાય છે. વળી, કોઈ સર્કિટમાં રહેલ ઘટકમાંથી વિદ્યુતપ્રવાહ પસાર થતાં તે ઘટકનું તાપમાન વધવાને પરિણામે તેના ગુણધર્મોમાં પણ ફેરફાર નોંધાય છે. મોટા અંતરે વિદ્યુતનું ટ્રાન્સમિશન ખૂબ ઊંચા વૉલ્ટેજે કરવાનું કારણ પણ આ ઓહ્‌મિક વ્યય ઘટાડવાનું જ છે.

જેમ દરેક સિક્કાને બે બાજુ હોય છે, તેમ અહીં પણ જૂલ-ઉષ્માની વ્યવહારમાં ઉપયોગિતા છે. ઇલેક્ટ્રિક ઇસ્ત્રી, ઇલેક્ટ્રિક ટોસ્ટર, ઇલેક્ટ્રિક અવન (oven), ઇલેક્ટ્રિક કીટલી, રૂમ-હીટર વગેરેનો વિચાર કરતાં જૂલ ઉષ્માની ઉપયોગિતા આપમેળે સમજાઈ જશે. વળી, ઇલેક્ટ્રિક બલ્બમાં પ્રકાશ મેળવવામાં પણ જૂલ-ઉષ્માનો જ ઉપયોગ થાય છે ને બલ્બના ફિલામેન્ટમાંથી વિદ્યુતપ્રવાહ પસાર કરતાં જે ઉષ્મા ઉત્પન્ન થાય, તેના પરિણામે ફિલામેન્ટના તાપમાનમાં ખૂબ વધારો થતાં તે પ્રકાશનું ઉત્સર્જન કરે છે. આ માટે જે ધાતુનું ગલનબિંદુ ખૂબ ઊંચું હોય (જેમકે ટંગસ્ટન કે જેનું ગલનબિંદુ 3380° C છે), તેવી ધાતુનો ફિલામેન્ટ બનાવવું જોઈએ. વળી, ફિલામેન્ટને તેના પરિસરથી શક્ય તેટલો ઉષ્મીય રીતે અલગ પણ કરવો જોઈએ. એ નોંધો કે ફિલામેન્ટ વડે વપરાતા મોટા ભાગના વિદ્યુતપાવરનું ઉષ્મામાં રૂપાંતર થાય છે અને બહુ નાના અંશનું જ પ્રકાશમાં રૂપાંતર થાય છે. સામાન્ય રીતે આવા બલ્બ 1 W વિદ્યુતપાવર દીઠ આશરે 1 Candela જેટલી પ્રકાશ-ઊર્જા આપતાં હોય છે.

જૂલ-ઉષ્માની એક સર્વસામાન્ય ઉપયોગિતા એ સર્કિટમાં (અને ઘરમાં) વપરાતા ફ્યુઝ (fuse) છે. કોઈ પણ વિદ્યુતીય રચનાની સાથે શ્રેણીમાં ફ્યુઝ (એટલે કે યોગ્ય ગલનબિંદુ ધરાવતી ધાતુ, જેવી કે ઍલ્યુમિનિયમ, લોખંડ, સીસું વગેરેના તારનો ટુકડો) જોડવામાં આવે છે. જો તે રચનામાંથી અમુક પૂર્વનિશ્ચિત વિદ્યુતપ્રવાહ કરતાં વધુ મોટા મૂલ્યનો પ્રવાહ પસાર થાય, તો આ તાર પીગળી જતાં સર્કિટમાં ભંગાણ પડે છે અને તે રચના સુરક્ષિત રહે છે.

ઉદાહરણ 20 : એકબીજાને સમાંતર જોડેલા અવરોધો વચ્ચે પ્રવાહનું વિભાજન એવી જ રીતે થાય છે કે જેથી ઉત્પન્ન થતી જૂલ-ઉષ્મા ન્યૂનતમ બને. આ હકીકતનો ઉપયોગ કરી પ્રવાહના વિભાજનનું સૂત્ર તારવો.

ઉકેલ : ધારો કે I જેટલો કુલ પ્રવાહ એકબીજાને સમાંતર જોડેલા બે અવરોધો R_1 અને R_2 વચ્ચે વિભાજિત થાય છે. વળી, ધારો કે R_1માંથી વહેતો પ્રવાહ I_1 છે. તેથી R_2માંથી વહેતો પ્રવાહ $I_2 = I - I_1$ થશે. આ સ્થિતિમાં એકમસમયમાં ઉત્પન્ન થતી જૂલ-ઉષ્મા,

$$H = I_1^2R_1 + (I - I_1)^2R_2$$

આ ઉષ્મા ન્યૂનતમ થવા માટે $\frac{dH}{dI_1} = 0$ થવું જોઈએ.

$$\therefore \frac{dH}{dI_1} = 2I_1R_1 + 2(I - I_1)(-1)R_2 = 0$$

સાદું રૂપ આપતાં,

$$I_1 = \frac{IR_2}{R_1+R_2},$$

જે જરૂરી સૂત્ર છે. $I_2 = I - I_1 = I - \frac{IR_2}{R_1+R_2}$

$$\therefore I_2 = \frac{IR_1}{R_1+R_2}$$

નોંધ : વિદ્યુતપ્રવાહને એવી ખબર કેવી રીતે પડતી હશે કે અમુક અવરોધ ઓછો છે, માટે તેમાં થઈને વધારે પ્રમાણમાં પસાર થઈએ !!! અહીં કુદરતનો (મિકેનિક્સમાં આવતો) એક મૂળભૂત સિદ્ધાંત કામ કરે છે, જે તમે ભવિષ્યમાં ભણશો. આ દાખલામાં આ સિદ્ધાંતનું પ્રતિબિંબ પડે છે.

ઉદાહરણ 21 : જ્યારે બે અવરોધોને વૉલ્ટેજ, V સાથે એક પછી એક જોડવામાં આવે છે, ત્યારે પાવર અનુક્રમે P_1 અને P_2 મળે છે. તો,

(i) જ્યારે તેઓ શ્રેણીમાં જોડવામાં આવે,

(ii) જ્યારે તેઓ એકબીજાને સમાંતર જોડવામાં આવે,

ત્યારે સાબિત કરો કે (i) અને (ii)માં મળતાં પાવરનો ગુણાકાર P_1P_2 હોય છે.

ઉકેલ : અહીં R_1 અને R_2 ધારો કે આપેલા અવરોધો છે. જ્યારે બંને અવરોધોને છૂટા-છૂટા જોડવામાં આવે છે, ત્યારે,

$$P_1 = \frac{V^2}{R_1} \text{ અને } P_2 = \frac{V^2}{R_2} \tag{1}$$

$$\therefore R_1 = \frac{V^2}{P_1} \text{ અને } R_2 = \frac{V^2}{P_2} \tag{2}$$

હવે તેઓને શ્રેણીમાં જોડતાં તેઓનો સંયુક્ત અવરોધ $R_1 + R_2$ થાય,
આ સંયુક્ત અવરોધને વૉલ્ટેજ V સાથે જોડવામાં આવે છે.

$\therefore$ આ શ્રેણીજોડાણ માટે પાવર, $P_s = \frac{V^2}{R_1+R_2}$.

આ સૂત્રમાં સમીકરણ (2)માંથી R_1 અને R_2નાં મૂલ્યો મૂકતાં

$$P_s = \frac{V^2}{\frac{V^2}{P_1}+\frac{V^2}{P_2}} = \frac{P_1P_2}{P_1+P_2} \tag{3}$$

જ્યારે બંને અવરોધો એકબીજા સાથે સમાંતર જોડવામાં આવે છે, ત્યારે તેમનો સંયુક્ત અવરોધ $= \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$

$\therefore$ આ જોડાણનો પાવર $P_p = \frac{V^2}{\left(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\right)} = \frac{V^2}{R_1R_2}(R_1 + R_2)$

આ સૂત્રમાં R_1 અને R_2નાં મૂલ્યો સમીકરણ(2)માંથી મૂલ્યો મૂકતાં,

$$P_p = \frac{V^2\left(\frac{V^2}{P_1}+\frac{V^2}{P_2}\right)}{V^4\left(\frac{1}{P_1}\times\frac{1}{P_2}\right)}$$

$$\therefore P_p = \frac{P_1P_2\times(P_1+P_2)}{P_1P_2}$$

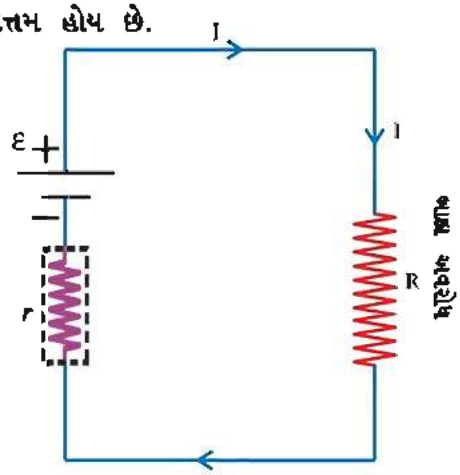
$$\therefore P_p = P_1 + P_2 \tag{4}$$

નોંધ : સમાંતર જોડાણમાં બંને અવરોધોને એકસરખો વૉલ્ટેજ મળતો હોવાથી આપણે P_pનું મૂલ્ય સીધેસીધું સમીકરણ (4) મુજબ મૂકી શક્યા હોત !

હવે, સમીકરણ (3) અને (4) પરથી,

$P_s \times P_p = P_1 \times P_2$

ઉદાહરણ 22 : ε જેટલું emf અને r આંતરિક અવરોધ ધરાવતી એક બૅટરીને એક અવરોધ R સાથે જોડવામાં આવે છે. દર્શાવો કે $R = r$ હોય ત્યારે બાહ્ય અવરોધમાં પાવર મહત્તમ હોય છે.



ઉકેલ : બાહ્ય અવરોધમાં પાવર $P = I^2R$

$$\therefore P = \left(\frac{\varepsilon}{R+r}\right)^2 R$$

$\therefore \frac{dP}{dR} = -\frac{2\varepsilon^2R}{(R+r)^3} + \frac{\varepsilon^2}{(R+r)^2} = 0$ થવું જોઈએ.

(મહત્તમ કે ન્યૂનતમ માટે)

$\therefore R = r$

(હવે Pનું Rની સાપેક્ષે દ્વિતીય વિકલન કરી તેમાં $r = R$ મૂકતાં, દ્વિતીય વિકલન ઋણ માલૂમ પડે છે, જે દર્શાવે છે કે $r = R$ શરત મહત્તમ પાવર માટેની છે.)

સારાંશ

1. **વિદ્યુતપ્રવાહ :** વિદ્યુતપ્રવાહનું નિર્માણ વિદ્યુતભારોની ગતિને લીધે થાય છે. વિદ્યુતભારોની ગતિની દિશાને લંબ એવા વાહકના કોઈ આડછેદમાંથી એકમસમયમાં પસાર થતા વિદ્યુતભારના જથ્થાને વિદ્યુતપ્રવાહ (I) કહે છે. વિદ્યુતભારના સ્થાયી વહન માટે, $I = \frac{Q}{t}$, જો વિદ્યુતભારના વહનનો દર સમય સાથે બદલાતો હોય તો, $I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$.

2. **વિદ્યુતપ્રવાહઘનતા :** વાહકના કોઈ પણ બિંદુ પાસે પ્રવાહઘનતા એટલે કે બિંદુ પાસે પ્રવાહની દિશાને લંબ એવા એકમ આડછેદમાંથી પસાર થતો વિદ્યુતપ્રવાહ. આડછેદ વિદ્યુતપ્રવાહને લંબ ના હોય તો, કોઈ બિંદુ પાસે પ્રવાહઘનતા $J = \frac{dI}{da\cos\theta}$

   $\therefore dI = Jda\ cos\theta = \vec{J}.d\vec{a}$

   જો કોઈ આડછેદ સમગ્રતયા વિદ્યુતપ્રવાહને લંબ હોય અને જો સમગ્ર આડછેદ પર J સમાન હોય તો,

   $I = \int_a \vec{J}\cdot d\vec{a} = J\int da$

   $\therefore I = JA$

   $\therefore J = \frac{I}{A}$

3. **ઓહ્મનો નિયમ :** નિશ્ચિત ભૌતિક પરિસ્થિતિમાં (દા.ત., અચળ તાપમાને) રાખેલા કોઈ વાહક પદાર્થમાંથી વહેતો પ્રવાહ (I), તે વાહકના બે છેડા વચ્ચે લગાડેલ વિદ્યુતસ્થિતિમાનના તફાવત (V)ના સમપ્રમાણમાં હોય છે. આ પરથી $\frac{V}{I} = R$ અથવા $V = IR$

   અવરોધ Rના વ્યસ્ત $\frac{1}{R}$ને પદાર્થનું કન્ડક્ટન્સ કહે છે.

4. **અવરોધકતા :** વાહકનો અવરોધ $R = \rho.\frac{l}{A}$

   $\therefore$ અવરોધકતા $\rho = \frac{RA}{l}$

   અવરોધકતાના વ્યસ્ત $\frac{1}{\rho}$ને દ્રવ્યની વાહકતા કહે છે.

   $\therefore$ વાહકતા $\sigma = \frac{1}{\rho}$

5. **ડ્રિફ્ટવેગ અને રિલેક્સેશન-સમય :** વિદ્યુતક્ષેત્રની હાજરીમાં ઇલેક્ટ્રૉને 'ઘસડાઈને' કરેલા અસરકારક સ્થાનાંતરને અનુરૂપ તેના વેગને ડ્રિફ્ટવેગ કહે છે.

   રિલેક્સેશન સમય : વાહકમાં ઇલેક્ટ્રૉનની આયનો સાથેની બે ક્રમિક અથડામણો વચ્ચેના સરેરાશ સમયગાળાને રિલેક્સેશન-સમય કહે છે.

   રિલેક્સેશન-સમય (τ) જેટલા સમયગાળામાં ઇલેક્ટ્રૉને પ્રાપ્ત કરેલ ડ્રિફ્ટવેગ,

   $v_d = a\tau = \left(\frac{E\cdot e}{m}\right)\tau$

વિદ્યુતપ્રવાહ અને ડ્રિફ્ટવેગ વચ્ચેનો સંબંધ $I = nAv_d e$.

ડ્રિફ્ટવેગ અને વિદ્યુતપ્રવાહઘનતા વચ્ચેનો સંબંધ $J = \frac{I}{A} = nev_d$

6. વાહકતા (σ) અને અવરોધકતા (ρ)નો રિલેક્સેશન-સમય સાથેનો સંબંધ :

$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}$ અને $\rho = \frac{m}{ne^2\tau}$

7. મોબિલિટી : એકમ વિદ્યુતક્ષેત્ર દીઠ વિદ્યુતભારવાહકના ડ્રિફ્ટવેગને મોબિલિટી કહે છે.

$\mu = \frac{v_d}{E} = \frac{\sigma}{ne}$

$\therefore \sigma = ne\mu$

સેમીકન્ડક્ટર માટે વાહકતા

$\sigma = n_e e\mu_e + n_h e\mu_h$

8. અવરોધકતાનું તાપીય અવલંબન :

ધાત્વિક પદાર્થોની અવરોધકતા અને તાપમાન વચ્ચેનો સંબંધ નીચેના આનુભાવિક (empirical) સૂત્ર વડે આપી શકાય છે.

$\rho_\theta = \rho_{\theta_0}[1 + \alpha(\theta - \theta_0)]$

જ્યાં, θ_0 = સંદર્ભ-તાપમાન

અવરોધ માટે, $R_\theta = R_{\theta_0}[1 + \alpha(\theta - \theta_0)]$

α = અવરોધકતાનો તાપમાન-ગુણાંક

ધાતુતત્ત્વો માટે α ધન છે, તેથી તેની અવરોધકતામાં તાપમાન સાથે વધારો થાય છે.

સેમીકન્ડક્ટર્સ માટે α ઋણ હોવાથી તેમની અવરોધકતા તાપમાન સાથે ઘટે છે.

9. સુપર કન્ડક્ટિવિટી : અમુક પદાર્થોનું તાપમાન અમુક નિશ્ચિત મૂલ્ય (કે જેને ક્રિટિકલ તાપમાન T_C કહે છે.) કરતાં ઓછું કરવામાં આવે છે, ત્યારે તેમનો અવરોધ લગભગ શૂન્ય થઈ જાય છે. આ સ્થિતિમાં રહેલા પદાર્થને સુપર કન્ડક્ટર કહે છે અને આ ઘટનાને સુપરકન્ડક્ટિવિટી કહે છે. સુપર કન્ડક્ટિવિટી એ પદાર્થની ચોક્કસ અવસ્થા છે.

10. કોષનું વિદ્યુતચાલકબળ (emf) અને ટર્મિનલ વૉલ્ટેજ : જ્યારે એકમ ધન વિદ્યુતભાર અવિદ્યુતીય બળને લીધે ઋણ ધ્રુવથી ધનધ્રુવ પર પહોંચે છે, ત્યારે તેને મળતી ઊર્જાને બૅટરીનું emf (ε) કહે છે.

બૅટરીના બે ધ્રુવો વચ્ચેના વિદ્યુતસ્થિતિમાનના તફાવતને બૅટરીનો ટર્મિનલ વૉલ્ટેજ (V) કહે છે.

બૅટરીનો ટર્મિનલ વૉલ્ટેજ $V = \varepsilon - Ir$

11. સેકન્ડરી સેલ (ગૌણ કોષ) : જે સેલમાં રાસાયણિક પ્રક્રિયાઓને ઉલટાવીને (એટલે કે રિચાર્જ કરીને) સેલને મૂળ સ્થિતિમાં પાછા લાવી શકાય છે, તેવા સેલને ગૌણ (સેકન્ડરી) સેલ કહે છે. દા.ત., લેડસંગ્રાહક સેલ.

12. ચાર્જિંગ : જો સેકન્ડરી સેલને તેના emf કરતાં મોટા emfવાળા પ્રાપ્તિસ્થાન સાથે એવી રીતે જોડવામાં આવે કે જેથી સેલના ધન ધ્રુવમાંથી વિદ્યુતપ્રવાહ સેલમાં દાખલ થઈ સેલના ઋણધ્રુવ વાટે બહાર નીકળે તો સેલ ચાર્જ થઈ રહ્યો છે, તેમ કહેવાય અને તેવા સંજોગોમાં સેલમાં વિદ્યુત-ઊર્જાનું રાસાયણિક-ઊર્જામાં રૂપાંતર થતું હોય છે.

લેડસંગ્રાહક (એક્યુમ્યુલેટર) સેલના ચાર્જિંગ માટે,

$VIt = \varepsilon It + I^2Rt + I^2rt$

13. જંકશન અથવા બ્રાન્ચ-પૉઇન્ટ : નેટવર્કમાં જે બિંદુ પાસે બેથી વધારે (એટલે કે ઓછામાં ઓછા ત્રણ) વાહકો ભેગાં થતાં હોય તેવા બિંદુને જંકશન અથવા બ્રાન્ચ-પૉઇન્ટ કહે છે.

14. લૂપ : વાહકોથી બનતા બંધ પરિપથને લૂપ કહે છે.

15. કિર્ચોફના નિયમો :

પ્રથમ નિયમ : "જંકશન પાસે ભેગા મળતા વિદ્યુતપ્રવાહોનો બૈજિક સરવાળો શૂન્ય હોય છે."

$\therefore \ \Sigma I = 0$

બીજો નિયમ : "કોઈ બંધ પરિપથમાંના અવરોધો અને તેમનામાંથી વહેતા આનુષંગિક વિદ્યુતપ્રવાહોના ગુણાકારોનો સમગ્ર બંધ માર્ગ પરનો બૈજિક સરવાળો તે બંધ માર્ગમાં લાગુ પાડેલા emfના બૈજિક સરવાળા બરાબર હોય છે."

$\therefore \ \Sigma IR = \Sigma \varepsilon$

16. અવરોધોનાં જોડાણ : શ્રેણીજોડાણ :

$R_s = R_1 + R_2 + R_3 + ... + R_n$

જ્યાં, R_s = શ્રેણીમાં જોડેલા અવરોધોનો સમતુલ્ય અવરોધ

સમાંતર જોડાણ :

$$\frac{1}{R_P} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + ... + \frac{1}{R_n}$$

જ્યાં, R_P = સમાંતરમાં જોડેલા અવરોધોનો સમતુલ્ય અવરોધ

17. કોષોનું શ્રેણીજોડાણ : ε_1 અને ε_2 emfવાળા તથા r_1 અને r_2 આંતરિક અવરોધ ધરાવતા બે કોષોને શ્રેણીમાં જોડતાં,

$$I = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{R + (r_1 + r_2)} = \frac{\varepsilon_{eq}}{R + r_{eq}}$$

જ્યાં, I = શ્રેણીજોડાણમાં રહેલા બાહ્ય અવરોધ Rમાંથી પસાર થતો પ્રવાહ

સમતુલ્ય emf $\varepsilon_{eq} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

સમતુલ્ય આંતરિક અવરોધ $r_{eq} = r_1 + r_2$

18. કોષોનું સમાંતર જોડાણ : ε_1 and ε_2 emf તથા r_1 અને r_2 આંતરિક અવરોધ ધરાવતાં બે કોષોને સમાંતરમાં જોડતાં,

$$I = \frac{\frac{\varepsilon_1}{r_1} + \frac{\varepsilon_2}{r_2}}{1 + \frac{R}{r_1} + \frac{R}{r_2}} = \frac{\varepsilon_1 r_2 + \varepsilon_2 r_1}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2}$$

$$\therefore \ I = \frac{\frac{\varepsilon_1 r_2 + \varepsilon_2 r_1}{(r_1 + r_2)}}{R + \frac{r_1 r_2}{(r_1 + r_2)}} = \frac{\varepsilon_{eq}}{R + r_{eq}}$$

સમતુલ્ય emf $\varepsilon_{eq} = \dfrac{\varepsilon_1 r_2 + \varepsilon_2 r_1}{r_1 + r_2}$

સમતુલ્ય આંતરિક અવરોધ $r_{eq} = \dfrac{r_1 r_1}{r_1 + r_2}$

19. **વ્હીસ્ટનબ્રિજ :** વ્હીસ્ટનબ્રિજની સંતુલિત સ્થિતિમાં,

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$$

20. **પોટૅન્શિયોમીટર :** પોટૅન્શિયોમીટર એક એવી રચના છે કે જેમાં સતત બદલી શકાય અને સાથે સાથે માપી શકાય તેવો p.d. મેળવી શકાય છે.

સિદ્ધાંત : પોટૅન્શિયોમીટર તાર (અવરોધક તાર)નાં કોઈ પણ બે બિંદુઓ વચ્ચેનો p. d. તે બે બિંદુઓ વચ્ચેના અંતરના સમપ્રમાણમાં હોય છે.

$\therefore V_l \propto l$

$$V_l = \left(\frac{\varepsilon.\rho}{R+L\rho+r}\right) \cdot l$$

જ્યાં, $\sigma = \frac{Vl}{l} = \left(\frac{\varepsilon.\rho}{R+L\rho+r}\right)$ = વિદ્યુતસ્થિતિમાન પ્રચલન

21. **જૂલ અસર :** "વાહકમાં વિદ્યુતપ્રવાહ વહેવડાવતાં અવરોધને કારણે મળતી ઉષ્મા-ઊર્જાને જૂલ ઉષ્મા કહે છે અને આ ઘટનાને 'જૂલ અસર' કહે છે."

જૂલ ઉષ્મા $W = I^2Rt$ (joule)

$$H = \frac{I^2Rt}{J} \text{ (cal)}$$

એકમસમયમાં વપરાતી વિદ્યુત-ઊર્જા (એટલે કે ઇલેક્ટ્રિક પાવર) અથવા ઉદ્ભવતી ઉષ્મા-ઊર્જા

$P = I^2R$

$P \propto I^2$

જૂલનો નિયમ : "આપેલા તાપમાને અવરોધમાં સ્થિર વિદ્યુતપ્રવાહ વહેતાં, તેમાં એકમસમયમાં ઉદ્ભવતી ઉષ્મા-ઊર્જા, તેમાંથી પસાર થતા વિદ્યુતપ્રવાહના વર્ગના સમપ્રમાણમાં હોય છે."

22. **ઓહ્મિક લૉસ (વ્યય) :** "વાહકમાં વિદ્યુતપ્રવાહ વહેતાં, વિદ્યુતભારોએ પ્રાપ્ત કરેલી વિદ્યુત-ઊર્જા, ઉષ્મા-ઊર્જા સ્વરૂપે વેડફાઈ જાય છે. આને 'ઓહ્મિક લૉસ' (વ્યય) કહે છે."

સ્વાધ્યાય

નીચે વિધાનો માટે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

1. હાઇડ્રોજન પરમાણુમાં ઇલેક્ટ્રૉન 5.3×10^{-11}m ત્રિજ્યાની વર્તુળાકાર કક્ષામાં અચળ ઝડપ 2.2×10^6 ms^{-1}થી ગતિ કરે છે, તો તેના વડે રચાતો પ્રવાહ ....

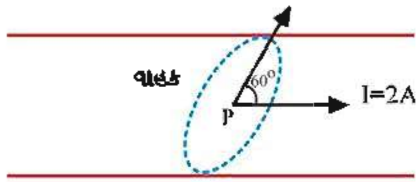
   (A) 1.12 A (B) 1.06 mA (C) 1.06 A (D) 1.12 mA

2. પોતાના પરિઘ પર λ જેટલી રેખીય વિદ્યુતભારઘનતા ધરાવતી R ત્રિજ્યાની એક રિંગ તેના સમતલને લંબ એવી અક્ષને અનુલક્ષીને ω જેટલી કોણીય ઝડપથી ભ્રમણ કરતી હોય, તો આ રીતે કેટલા વિદ્યુતપ્રવાહનું નિર્માણ થાય ?

   (A) $R\omega\lambda$ (B) $R^2\omega\lambda$ (C) $R\omega^2\lambda$ (D) $R\omega\lambda^2$

3. એક બૅટરી સાથે જ્યારે 2 Ω અવરોધ જોડવામાં આવે છે, ત્યારે મળતો પ્રવાહ 0.9 A છે અને 7 Ωનો અવરોધ જોડવામાં આવે, ત્યારે મળતો પ્રવાહ 0.3 A થાય છે, તો બૅટરીનો આંતરિક અવરોધ = ...

   (A) 0.5 Ω (B) 1.0 Ω (C) 1.2 Ω (D) 2.0 Ω

4. 

આકૃતિમાં દર્શાવેલ વાહકના સમતલનું ક્ષેત્રફળ 1 cm^2 છે. જો વાહકમાંથી 2 A પ્રવાહ પસાર થતો હોય તો, વાહકના P બિંદુ પર વિદ્યુતપ્રવાહઘનતા .... હશે.

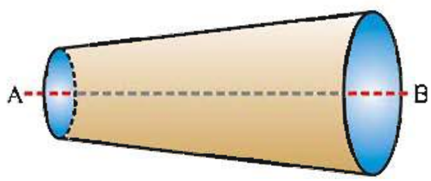
(A) $\frac{4}{\sqrt{3}} \times 10^4 Am^{-2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2} \times 10^4 Am^{-2}$

(C) $\frac{\sqrt{3}}{2} \times 10^{-4} Am^{-2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 10^{-4} Am^{-2}$

5. એક વાહક તારને વિદ્યુતક્ષેત્ર $5 \times 10^{-8} Vm^{-1}$ લાગુ પાડતાં પ્રવાહઘનતા 2.5 Am^{-2} માલૂમ પડે છે, તો વાહકની અવરોધકતા ....

(A) 1×10^{-8} Ωm (B) 2×10^{-8} Ωm

(C) 0.5×10^{-8} Ωm (D) 12.5×10^{-8} Ωm

6. 

અસમાન આડછેદ ધરાવતો એક તાર આકૃતિમાં દર્શાવેલ છે. જો તારમાંથી સ્થિર વિદ્યુતપ્રવાહ વહેતો હોય, તો A થી B તરફ જતાં ઇલેક્ટ્રૉનનો ડ્રિફ્ટવેગ..........

(A) અચળ રહેશે. (B) ઘટશે.

(C) વધશે. (D) ગમે તે રીતે (randomly) બદલાશે.

7. એક અવરોધક તારને ખેંચીને તેની લંબાઈમાં 100 %નો વધારો કરવામાં આવે છે, પરિણામે તારના વ્યાસમાં ઘટાડો થાય છે. ખેંચેલા તારના અવરોધમાં થતો ફેરફાર .... હશે.

(A) 300 % (B) 200 % (C) 100 % (D) 50 %

8. ક્યા તાપમાને તાંબાના વાહકનો અવરોધ તેના 0°C તાપમાનના અવરોધ કરતાં બમણો થશે ? તાંબા માટે $\alpha = 3.9 \times 10^{-3}\ °C^{-1}$

(A) 256.4°C (B) 512.8°C (C) 100°C (D) 256.4 K

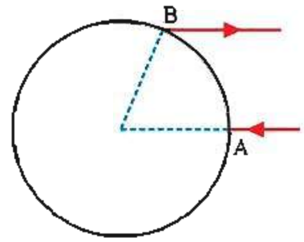
9. તમને n અવરોધો આપેલા છે. દરેક અવરોધનું મૂલ્ય r Ω છે. પ્રથમ તેમને શક્ય લઘુતમ અવરોધ મેળવવા માટે જોડવામાં આવે છે અને ત્યાર બાદ તેમને શક્ય મહત્તમ અવરોધ મેળવવા માટે જોડવામાં આવે છે. આ રીતે મેળવેલ લઘુતમ અને મહત્તમ અવરોધોનો ગુણોત્તર .... છે.

(A) $\frac{1}{n}$ (B) n (C) n^2 (D) $\frac{1}{n^2}$

10. સમાન આડછેદ ધરાવતી વર્તુળાકાર રિંગનો અવરોધ R છે. રિંગનું કેન્દ્ર O છે અને રિંગ પર બે બિંદુઓ P અને Q આવેલ છે. જો $\angle POQ = \theta$ હોય તો, બિંદુઓ P અને Q વચ્ચેનો સમતુલ્ય અવરોધ ....
[રિંગની ત્રિજ્યા = r અને એકમલંબાઈ દીઠ રિંગનો અવરોધ = ρ]

(A) $\frac{R\theta}{4\pi^2}(2\pi - \theta)$ (B) $R\left(1-\frac{\theta}{2\pi}\right)$ (C) $\frac{R\theta}{2\pi}$ (D) $R\left(\frac{2\pi-\theta}{4\pi}\right)$

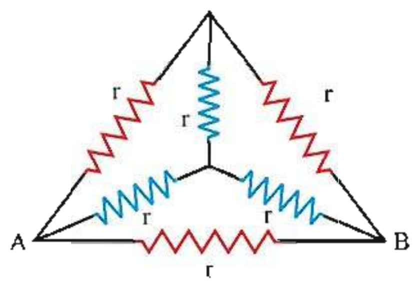
11. 10 Ω અવરોધવાળો એક તાર આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે વર્તુળ આકારમાં વાળેલો છે. તારનો 1 m લંબાઈ દીઠ અવરોધ 1 Ω છે. જો A અને B વચ્ચે સમતુલ્ય અવરોધ 2.4 Ω હોય, તો નાના ચાપની લંબાઈ .... m હશે.



(A) 2.4 (B) 4

(C) 4.8 (D) 6

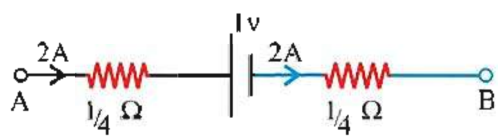
12. આકૃતિમાં દર્શાવેલ પરિપથમાં A અને B વચ્ચેનો અસરકારક અવરોધ કેટલો થાય ?



(A) r (B) $\frac{r}{2}$

(C) $\frac{r}{3}$ (D) $2r$

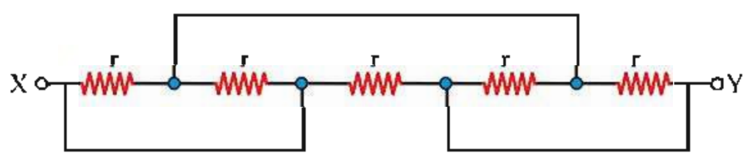
13. નીચેની આકૃતિ બંધ પરિપથનો એક ભાગ દર્શાવે છે. તેમાંથી 2A પ્રવાહ વહેતો હોય, તો A અને B બિંદુઓ વચ્ચેનો p. d. કેટલો હશે ?



(A) +2 V (B) +1 V

(C) −2 V (D) −1 V

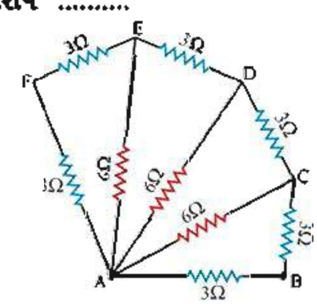
14. આકૃતિમાં દર્શાવેલ નેટવર્કમાં X અને Y બિંદુઓ વચ્ચેનો સમતુલ્ય અવરોધ ....



(A) r (B) $\frac{r}{2}$

(C) $2r$ (D) $\frac{r}{3}$

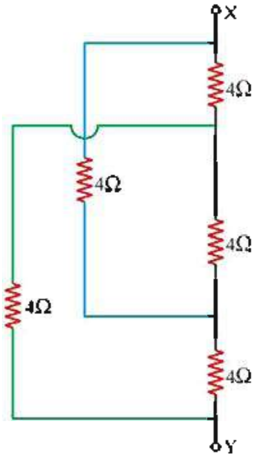
15. બાજુની આકૃતિમાં દર્શાવેલ નેટવર્કમાં A અને B બિંદુઓ વચ્ચે અસરકારક અવરોધ ....



(A) 2 Ω (B) 3 Ω

(C) 6 Ω (D) 12 Ω

16. બાજુની આકૃતિમાં X અને Y બિંદુઓ વચ્ચેનો સમતુલ્ય અવરોધ .... છે..



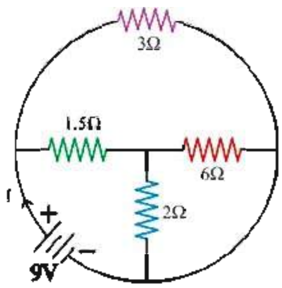
(A) 4 Ω

(B) 2 Ω

(C) 1 Ω

(D) 3 Ω.

17. આપેલ પરિપથને બૅટરીમાંથી મળતો કુલ પ્રવાહ કેટલો હશે ?



(A) 2 A

(B) 4 A

(C) 6 A

(D) 9 A

18. સમાન આડછેદ ધરાવતા R અવરોધવાળા એક વાહક તારને 20 સરખા ભાગમાં કાપવામાં આવે છે. આમાંના અડધાને શ્રેણીમાં અને બાકીના અડધાને સમાંતરમાં જોડવામાં આવે છે. જો આ બે સંયોજનને શ્રેણીમાં જોડવામાં આવે તો, આ બધા ટુકડાઓનો અસરકારક અવરોધ કેટલો હશે ?

(A) R (B) $\frac{R}{2}$ (C) $\frac{101R}{200}$ (D) $\frac{201R}{200}$

19. 3 A પ્રવાહનું વહન કરતા 3 *m* લાંબા તાંબાના વાહકમાં એક ઇલેક્ટ્રૉનને ડ્રિફ્ટવેગથી એક છેડાથી બીજા છેડા પર જતાં કેટલો સમય લાગશે ?

[વાહકના આડછેદનું ક્ષેત્રફળ $= 2 \times 10^{-6}$ m^2 અને તાંબામાં ઇલેક્ટ્રૉન સંખ્યાઘનતા $n = 8.5 \times 10^{28}$ m^{-3} છે.]

(A) 2.72×10^3s (B) 2.72×10^4s (C) 2.72s (D) 2.72×10^{-4}s

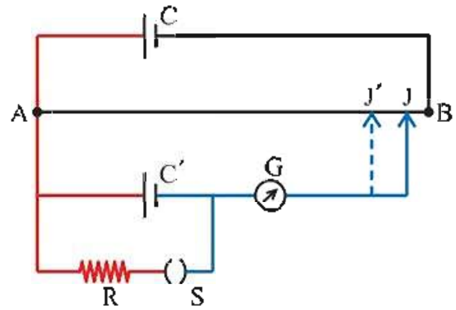
20. ત્રણ તાંબાના તારનાં દળોનો ગુણોત્તર 5 : 3 : 1 અને તેમની લંબાઈઓનો ગુણોત્તર 1 : 3 : 5 છે, તો તેમના વિદ્યુત-અવરોધોનો ગુણોત્તર ....

(A) 5 : 3 : 1 (B) $\sqrt{125}$: 15 : 1 (C) 1 : 15 : 125 (D) 1 : 3 : 5

21. 10 m લાંબા પોટેન્શિયોમીટર તારનો અવરોધ 20 Ω છે. તેને 3 Vની બૅટરી અને 10 Ωના અવરોધ સાથે શ્રેણીમાં જોડવામાં આવે છે, તો તાર પર એકબીજાથી 30 cm અંતરે રહેલાં બિંદુઓ વચ્ચે વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત .... હશે.

(A) 0.02 V (B) 0.06 V (C) 0.1 V (D) 1.2 V

22. આકૃતિમાં કોષનો આંતરિક અવરોધ માપવા માટે વપરાતી પોટેન્શિયોમીટરની સર્કિટ દર્શાવેલ છે. જ્યારે કળ S ખુલ્લી હોય ત્યારે તટસ્થબિંદુ AJ = 60 cm અંતરે મળે છે, જ્યારે કળ S બંધ કરવામાં આવે છે અને Rનું મૂલ્ય 5 Ω હોય, ત્યારે તટસ્થબિંદુ AJ' = 50 cm અંતરે મળે છે, તો કોષ C'નો આંતરિક અવરોધ કેટલો હશે ?



(A) 0.5 Ω (B) 1 Ω

(C) 1.5 Ω (D) 0.1 Ω

23. સમાન emf ε અને સમાન આંતરિક અવરોધ r ધરાવતા n વિદ્યુતકોષોને અવરોધ R સાથે સમાંતરમાં જોડવામાં આવે, તો Rમાંથી વહેતો પ્રવાહ I = ... હોય છે.

(A) $\frac{n\varepsilon}{R+nr}$ (B) $\frac{n\varepsilon}{nR+r}$ (C) $\frac{\varepsilon}{R+r}$ (D) $\frac{\varepsilon}{nR+r}$

24. એક તારને નિયમિત રીતે ખેંચીને તેના આડછેદનું ક્ષેત્રફળ $\frac{1}{n}$ ગણું ($n > 0$) કરવામાં આવે, તો નવો અવરોધ કેટલો થાય ?

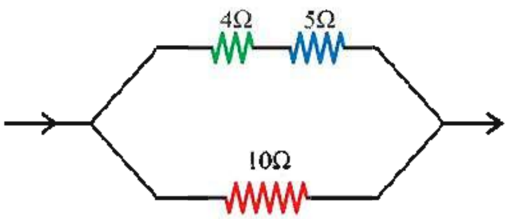
(A) $\frac{1}{n^2}$ ગણો (B) n^2 ગણો (C) $\frac{1}{n}$ ગણો (D) n ગણો

25. જો વિદ્યુતબલ્બમાંથી વહેતો પ્રવાહ 1 % વધારવામાં આવે, તો બલ્બના પાવરમાં શું ફેરફાર થશે ? [બલ્બના ફિલામેન્ટનો અવરોધ અચળ ધારો]

(A) 1 % જેટલો વધારો (B) 1 % જેટલો ઘટાડો

(C) 2 % જેટલો વધારો (D) 2 % જેટલો ઘટાડો

26. આકૃતિમાં દર્શાવેલ પરિપથમાં 10 Ωના અવરોધમાંથી પસાર થતા પ્રવાહને કારણે એક સેકન્ડમાં 10 cal ઉષ્મા ઉત્પન્ન થાય છે, તો 4 Ω અવરોધમાં પ્રતિ સેકન્ડે આશરે .... cal ઉષ્મા ઉત્પન્ન થતી હશે.



(A) 4 (B) 5

(C) 10 (D) 20

27. 220 V અને 100 Wના બે બલ્બ પ્રથમ શ્રેણીમાં અને પછી સમાંતરમાં જોડવામાં આવે છે. આ દરેક સંયોજનને 220 Vના સપ્લાય સાથે જોડવામાં આવે છે, તો દરેક કિસ્સામાં અનુક્રમે મળતો કુલ પાવર .... હશે.

(A) 50 W, 100 W (B) 100 W, 50 W

(C) 200 W, 150 W (D) 50 W, 200 W

જવાબો

1. (B)	2. (A)	3. (A)	4. (A)	5. (B)	6. (B)
7. (A)	8. (A)	9. (D)	10. (A)	11. (B)	12. (B)
13. (A)	14. (B)	15. (A)	16. (A)	17. (C)	18. (C)
19. (B)	20. (C)	21. (B)	22. (B)	23. (B)	24. (B)
25. (C)	26. (B)	27. (D)			

નીચે આપેલ પ્રશ્નોના જવાબ ટૂંકમાં આપો :

1. વિદ્યુતપ્રવાહઘનતા શા માટે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે ?
2. 1 નેનો કુલંબ (1 *nc*) વિદ્યુતભારમાં ઇલેક્ટ્રૉનની સંખ્યા કેટલી હોય છે ?
3. 2 V ટર્મિનલ વૉલ્ટેજ ધરાવતી બૅટરીનો આંતરિક અવરોધ 0.2 Ω હોય અને તેમાંથી 0.5 A વિદ્યુતપ્રવાહ વહેતો હોય, તો બૅટરીનું emf કેટલું હશે ?
4. વિદ્યુતભાર વાહકની મોબિલિટી વ્યાખ્યાયિત કરો.
5. વાહકમાંથી વહેતા વિદ્યુતપ્રવાહ અને ડ્રિફ્ટવેગ વચ્ચેનો સંબધ દર્શાવો.
6. r ત્રિજ્યાવાળા વાહકમાંથી I પ્રવાહ પસાર કરતાં ઇલેક્ટ્રૉનનો ડ્રિફ્ટવેગ v મળે છે, તો 2 r ત્રિજ્યાવાળા આવા જ વાહકમાંથી I પ્રવાહ પસાર કરતાં ડ્રિફ્ટવેગ કેટલો મળે ?
7. ધાત્વિક વાહકો માટે અવરોધકતા અને તાપમાન વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવતું આનુભવિક (empirical) સૂત્ર આપો.
8. 10 Ω અવરોધ ધરાવતા તારની લંબાઈ કેટલા ગણી વધારવી જોઈએ કે જેથી તેનો અવરોધ 1000 Ω થાય ?
9. વિદ્યુતભારના સંરક્ષણનો નિયમ આપો.
10. કિર્ચોફના બીજા નિયમનું મૂળ શેમાં છે ?
11. સુપરકન્ડક્ટરમાં વિદ્યુતપ્રવાહ ખૂબ લાંબા સમય સુધી કેમ જળવાઈ રહે છે ?
12. સાદા વૉલ્ટમીટર વડે બૅટરીનું emf (ε) કેમ માપી શકાતું નથી ?
13. પોટૅન્શિયોમીટરનો સિદ્ધાંત જણાવો.
14. જૂલનો નિયમ લખો.
15. ઓહ્મિક લૉસનાં ઉદાહરણ આપો.
16. સેમીકન્ડક્ટર્સની વાહકતા ઘટાડવી હોય તો તેના તાપમાનમાં શું ફેરફાર કરવો જોઈએ ?

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. વિદ્યુતપ્રવાહઘનતા વ્યાખ્યાયિત કરો. વિદ્યુતપ્રવાહ અને વિદ્યુતપ્રવાહઘનતા વચ્ચેનો ભેદ સ્પષ્ટ કરો.
2. બૅટરીના emfની સમજૂતી આપો. બૅટરી 'open circuit condition'માં છે તેમ ક્યારે કહેવાય ?
3. ઓહ્મનો નિયમ લખો. ઓહ્મના નિયમનું પાલન કરતા વાહક માટે I–V લાક્ષણિકતાઓ કેવી હોય તે સમજાવો.
4. બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્રની હાજરીમાં વાહકમાં ઇલેક્ટ્રૉનનો ડ્રિફ્ટવેગ જરૂરી આકૃતિ દોરી સમજાવો.
5. વિદ્યુતભારવાહકની મોબિલિટી સમજાવી સેમીકન્ડક્ટર્સની વાહકતા માટેનું સૂત્ર મેળવો.
6. ડ્રિફ્ટવેગ અને વિદ્યુતપ્રવાહઘનતા વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવતું સૂત્ર મેળવો.
7. કોઈ એક બંધ પરિપથ માટે વિદ્યુતસ્થિતિમાનની એકમૂલ્યતા સ્વીકારી જરૂરી પરિપથ દોરી કિર્ચોફનો બીજો નિયમ તારવો.
8. પોટૅન્શિયોમીટરનો સિદ્ધાંત જરૂરી પરિપથ સહિત સમજાવો.
9. પોટૅન્શિયોમીટરની મદદથી વિદ્યુતકોષનો આંતરિક અવરોધ શોધવાની રીત સમજાવો.
10. લેડસંગ્રાહક સેલ (એક્યુમ્યુલેટર)નું ચાર્જિંગ કરવા માટેનો પરિપથ દોરી સમજાવો. ચાર્જિંગપ્રવાહનું સૂત્ર મેળવો.
11. વ્હીસ્ટનબ્રિજની સંતુલન સ્થિતિમાં અજ્ઞાત અવરોધ શોધવા માટેનું સૂત્ર મેળવો.
12. બે વિદ્યુતકોષોનાં સમાંતર જોડાણમાં સમતુલ્ય emf અને સમતુલ્ય આંતરિક અવરોધનાં સૂત્રો મેળવો.
13. ઓહ્મના નિયમની મર્યાદાઓ જણાવો.
14. સુપરકન્ડક્ટિવિટી પર નોંધ લખો.
15. જૂલ અસર અને જૂલ ઉષ્મા એટલે શું ? જૂલ ઉષ્માનું સૂત્ર મેળવી, જૂલનો નિયમ લખો.

નીચેના દાખલા ગણો :

1. એક ટી.વી. સેટમાં ઇલેક્ટ્રૉન્સનું કિરણ જૂથ ઇલેક્ટ્રૉન-ગનથી પડદા તરફ ગતિ કરે છે, આથી રચાતો વિદ્યુતપ્રવાહ 10 μ A છે, તો દર સેકન્ડે ટી.વી.ના સ્ક્રીન પર અથડાતા ઇલેક્ટ્રૉનની સંખ્યા શોધો. વળી એક મિનિટમાં ટી.વી.ના સ્ક્રીન પર કેટલો વિદ્યુતભાર અથડાશે ?

[જવાબ : $n = 6.25 \times 10^{13}$ electrons/sec., Q = − 600 μC]

2. હાઇડ્રોજનના પરમાણુમાં એક ઇલેક્ટ્રૉન, ન્યુક્લિયસની આસપાસ $\frac{\hbar^2}{me^2}$ ત્રિજ્યાની વર્તુળાકાર કક્ષામાં $\frac{e^2}{\hbar}$ જેટલી ઝડપથી ભ્રમણ કરે છે, તો રચાતા વિદ્યુતપ્રવાહનું સૂત્ર મેળવો. m = ઇલેક્ટ્રૉનનું દળ, e = ઇલેક્ટ્રૉનનો વિદ્યુતભાર. (**Hint :** $\hbar = \frac{h}{2\pi}$)

[જવાબ : $I = \frac{4\pi^2 me^5}{h^3}$]

3. 1.0 A વિદ્યુતપ્રવાહનું વહન કરતા તાંબાના એક તારની લંબાઈ 0.1 m અને આડછેદનું ક્ષેત્રફળ 1.0×10^{-6} m² છે.

(i) જો તાંબાની અવરોધકતા $1.7 \times 10^{-8}\ \Omega$ m હોય, તો તારના બે છેડા વચ્ચેનો વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત (p.d.) શોધો.

(ii) તારમાં ઇલેક્ટ્રૉનનો ડ્રિફ્ટવેગ શોધો.

[તાંબાની ઘનતા = 8.9×10^3 kgm^{-3}, તાંબાની સંયોજકતા = 1, તાંબાનો પરમાણુભાર = 63.5 g mol^{-1}, એવોગ્રેડ્રો-અંક = 6.02×10^{23} mol^{-1}]

[જવાબ : V = 1.7×10^{-3} V અને $v_d = 7.4 \times 10^{-5}$ ms^{-1}]

4. 4×10^{-3} m પહોળાઈ, 25×10^{-5} m જાડાઈ અને 6×10^{-2} m લંબાઈ ધરાવતા એક n પ્રકારના સેમીકન્ડક્ટરમાંથી 4.8 mA પ્રવાહ પસાર થઈ રહ્યો છે. અહીં વૉલ્ટેજ લંબાઈને સમાંતર લગાડ્યો છે, તો પ્રવાહઘનતા કેટલી હશે ? જો સેમ્પલમાં મુક્ત ઇલેક્ટ્રૉન સંખ્યાઘનતા 10^{22} m^{-3} હોય, તો ઇલેક્ટ્રૉનને આ સેમ્પલમાંથી લંબાઈ પર, પસાર થતાં કેટલો સમય લાગશે ?

[જવાબ : 4.8×10^3 Am^{-2}, 2×10^{-2} s]

5. એક નળાકાર વાહક તારને ખેંચીને તેની લંબાઈ 10% વધારવામાં આવે, તો તેના અવરોધમાં થતો પ્રતિશત ફેરફાર ગણો.

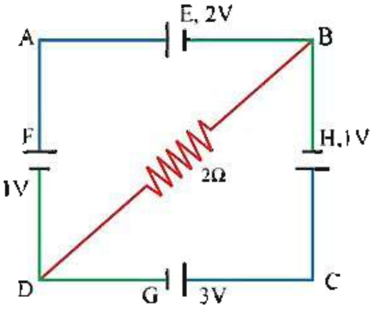
[જવાબ : 21%]

6. 1 m લાંબા વાહક તારના બે અસમાન તારો P અને Q એમ બે ટુકડા કરવામાં આવે છે. હવે P તારને નિયમિત રીતે ખેંચીને તેની લંબાઈ બમણી કરી R તાર તૈયાર કરવામાં આવે છે. જો R તાર અને Q તારના અવરોધો સમાન હોય, તો P અને Q તારોની લંબાઈઓ શોધો.

[જવાબ : Pની લંબાઈ $\frac{1}{5}$ m, Qની લંબાઈ $\frac{4}{5}$ m]

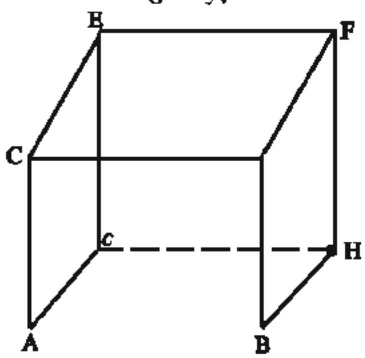
7. એક સમાન લંબાઈ ધરાવતા એક ઍલ્યુમિનિયમ અને એક તાંબાના તારના અવરોધો સમાન છે, તો આ બે તારમાંથી કયો તાર હલકો હશે ? $\rho_{Al} = 2.63 \times 10^{-8}\ \Omega$m, $\rho_{Cu} = 1.72 \times 10^{-8}\ \Omega$ m, ઍલ્યુમિનિયમની ઘનતા 2.7×10^3 kg m^{-3} તથા તાંબાની ઘનતા 8.9×10^3 kg m^{-3}.

[જવાબ : ઍલ્યુમિનિયમ]

8. 

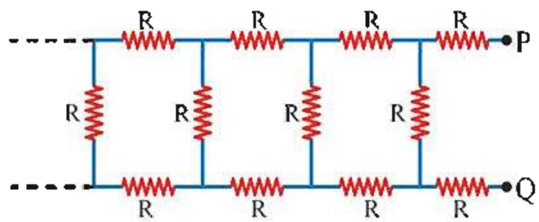
આકૃતિમાં દર્શાવેલ નેટવર્કમાં E, F, G અને H વિદ્યુતકોષોના emf અનુક્રમે 2V, 1V, 3V અને 1V છે. તેમના આંતરિક અવરોધો અનુક્રમે 2 Ω, 1 Ω, 3 Ω અને 1 Ω છે, તો B અને D વચ્ચેનો p.d. શોધો.

[જવાબ : $\frac{2}{13}$ V]

9. 

બાજુની આકૃતિમાં દર્શાવેલ નેટવર્કમાં A અને B વચ્ચે અસરકારક અવરોધ શોધો. નેટવર્કમાં દરેક તારનો અવરોધ 'r' ઓહ્મ છે.

[જવાબ : $\frac{7r}{5}$ ઓહ્મ]

10. 

એક અનંત નેટવર્કમાં આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે R મૂલ્યના અવરોધો જોડ્યા છે, તો P અને Q બિંદુઓ વચ્ચે સમતુલ્ય અવરોધ શોધો.

[જવાબ : $R(1 + \sqrt{3})$]

11. એક પોટેન્શિયોમીટર તારની લંબાઈ 200 cm છે. એક વિદ્યુતકોષને સમતોલવા માટે 80 cm લંબાઈના તારની જરૂર પડે છે. જો પોટેન્શિયોમીટર તારની લંબાઈ 300 cm કરવામાં આવે, તો આ વિદ્યુતકોષને સમતોલવા માટે કેટલી લંબાઈના તારની જરૂર પડશે ? [જવાબ : 120 cm]

12. 12 volt emfવાળી અને 2 Ω આંતરિક અવરોધ ધરાવતી એક બૅટરીને 18 volt emf અને 2 Ω આંતરિક અવરોધવાળી બીજી બૅટરી સાથે વિરોધક સ્થિતિમાં જોડી પરિપથ પૂર્ણ કરવામાં આવેલ છે. આ સ્થિતિમાં નીચે માંગેલી રાશિઓ શોધો :

(1) પરિપથમાં વહેતો પ્રવાહ
(2) બંને બૅટરીમાં વિદ્યુત-પાવર
(3) બંને બૅટરીઓનાં ટર્મિનલ વૉલ્ટેજ
(4) બંને બૅટરીઓમાં વ્યય થતો વિદ્યુત-પાવર

[જવાબ : (1) 1.5 A (2) 18 W, 27 W (3) 15 V, 15 V (4) 4.5 W, 4.5 W]

13. એક ઈલેક્ટ્રિક કીટલીમાં બે હીટિંગ કોઈલ (ગૂંચળાં) છે. જ્યારે એક કોઈલ ચાલુ કરવામાં આવે છે ત્યારે કીટલીમાંનું આપેલ જથ્થાનું પાણી 6 minમાં ઊકળવા લાગે છે અને જ્યારે માત્ર બીજી કોઈલ ચાલુ કરવામાં આવે છે, ત્યારે આટલું જ પાણી 8 minમાં ઊકળવા લાગે છે. જો બંને કોઈલ એકબીજાને સમાંતર જોડી ચાલુ કરવામાં આવે, તો આ પાણી કેટલા વખતમાં ઊકળવા લાગશે ? દરેક વખતે એક સરખો વૉલ્ટેજ વાપરવામાં આવે છે. [જવાબ : 3.43 min]

14. l_1 અને l_2 લંબાઈના તેમજ સમાન આડછેદનું ક્ષેત્રફળ A ધરાવતા એક જ દ્રવ્યના બે તાર ફ્યુઝ તરીકે વાપરવાના છે. સાબિત કરો કે, જ્યારે તેમનામાંથી સમાન પ્રવાહ વહેતો હશે, ત્યારે તેઓ એકસરખા સમયમાં પીગળવા લાગશે.

15. A અને B વિદ્યુતગોળાઓના રેટિંગ અનુક્રમે 40 W, 110 V અને 100 W અને 110 V છે. તો તેમનાં ફિલામેન્ટના અવરોધો શોધો. જો આ વિદ્યુતગોળાઓને 220 V ના સપ્લાય સાથે શ્રેણીમાં જોડવામાં આવે, તો કયો ગોળો ઊડી જશે ?

[જવાબ : $R_A = 302.5\ \Omega$, $R_B = 121\ \Omega$, ગોળો A]

•

4

વિદ્યુતપ્રવાહની ચુંબકીય અસરો

4.1 પ્રસ્તાવના (Introduction)

વિદ્યુત અને ચુંબકત્વની શાખાઓ લગભગ 2000 વર્ષથી જાણીતી છે. 1819માં ડેનીશ ભૌતિકવિજ્ઞાની ઓર્સ્ટેડે કરેલા અવલોકન તથા રાઉલૅન્ડ ફેરેડે, મેક્સવેલ અને લૉરેન્ટ્ઝ જેવા વિજ્ઞાનીઓએ ભૌતિકવિજ્ઞાનના વિકાસમાં આપેલા ફાળાને લીધે પ્રારંભમાં સ્વતંત્ર રીતે વિકસેલી વિદ્યુત અને ચુંબકત્વની શાખાઓ આજે એક બની ગઈ છે.

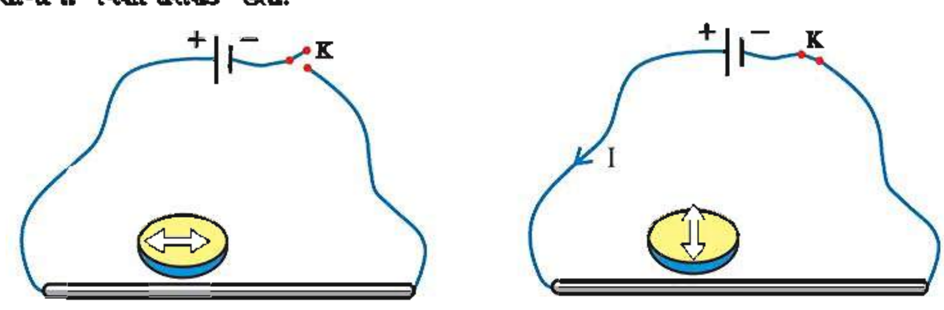
વિદ્યુત અને ચુંબકત્વ પરથી મળેલા પ્રાયોગિક નિયમોને ગણિતના માળખામાં સાંકળવામાં આવ્યા, ત્યારે એક નવી વિચારધારા ઊભી થઈ અને બંને શાખાઓ વચ્ચે મૂળભૂત ઐક્ય સધાયું અને પ્રકાશનું સ્વરૂપ સમજી શકાયું. વિદ્યુતચુંબકીય વિકિરણનું 'ઉત્પાદન' અને 'પ્રસરણ' શક્ય બન્યા, જેના પરિણામસ્વરૂપે સંદેશા વ્યવહારમાં ક્રાંતિ આવી.

વિદ્યુત અને ચુંબકત્વના સર્વગ્રાહી અભ્યાસને આવરી લેતી ભૌતિકવિજ્ઞાનની આ શાખાને ઇલેક્ટ્રોડાઇનેમિક્સ કહે છે. પ્લાઝ્મા ભૌતિકવિજ્ઞાન, મૅગ્નેટોહાઇડ્રોડાઇનેમિક્સ અને સંદેશાવ્યવહારની આધુનિક ટેક્નોલૉજીમાં ઇલેક્ટ્રોડાઇનેમિક્સનું ઘણું મહત્ત્વ છે.

પ્રસ્તુત પ્રકરણમાં આપણે વિદ્યુતપ્રવાહને લીધે ઉદ્ભવતું ચુંબકીય ક્ષેત્ર, ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં ગતિ કરતા વિદ્યુતભાર પર લાગતું બળ, વિદ્યુતપ્રવાહધારિત તારને ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં મૂકતાં તેના પર લાગતું બળ, સાઇક્લોટ્રોન, ગૅલ્વેનોમીટર વગેરેનો અભ્યાસ કરીશું.

4.2 ઓર્સ્ટેડનું અવલોકન (Oersted's Observation)

વિદ્યુત અને ચુંબકત્વના અભ્યાસની વિકાસ-પ્રક્રિયા સાથે કેટલાંક પ્રાયોગિક અવલોકનો સંકળાયેલાં છે. આમાંનું એક પ્રાયોગિક અવલોકન ડેનિશ ભૌતિકવિજ્ઞાની ઓર્સ્ટેડે (Hans Christian Oersted 1771-1851) ઈ. સ. 1819માં કર્યું હતું. તે ડેન્માર્કની શાળાનો વિજ્ઞાનશિક્ષક હતો.



આકૃતિ 4.1 ઓર્સ્ટેડનું અવલોકન

આકૃતિ 4.1(a)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ચુંબકીય સોયને સમાંતર સોયની નીચે વાહક તાર રહે તેમ ગોઠવો. હવે આકૃતિ 4.1(a)માં દર્શાવેલ વિદ્યુતપરિપથને પૂર્ણ કરતાં વાહક તારમાંથી વિદ્યુતપ્રવાહ પસાર થાય છે, ત્યારે ચુંબકીય સોય કોણાવર્તન અનુભવી વાહક તારને લંબરૂપે ગોઠવાય છે (જુઓ આકૃતિ 4.1(b)).

આમ, આ પ્રયોગના અવલોકનમાં ઑર્સ્ટેડે નોંધ્યું કે જ્યારે વાહક તારમાંથી વિદ્યુતપ્રવાહ પસાર થાય છે ત્યારે તેની આસપાસ ચુંબકીય ક્ષેત્ર ઉત્પન્ન થાય છે.

ઑર્સ્ટેડના આ સંશોધનને એરગો નામના વૈજ્ઞાનિકે ઈ. સ. 1820ની 11 સપ્ટેમ્બરે ફ્રેન્ચ એકેડેમી સમક્ષ રજૂ કર્યું હતું.

4.3 બાયો-સાવરનો નિયમ (Biot–Savart's Law)

પૅરિસમાં ઑર્સ્ટેડના ઉપર્યુક્ત સંશોધનના સમાચાર જાણ્યા બાદ માત્ર બે માસના ટૂંકા સમયગાળામાં બાયો અને સાવર નામના બે વિજ્ઞાનીઓએ પ્રાયોગિક પરિણામોના વિશ્લેષણના આધારે વિદ્યુતપ્રવાહ-ખંડને લીધે મળતા ચુંબકીય ક્ષેત્ર અંગેનો નિયમ સૂત્રના સ્વરૂપમાં નીચે મુજબ રજૂ કર્યો :

"$Id\vec{l}$ જેટલા વિદ્યુતપ્રવાહ-ખંડને લીધે, ખંડની સાપેક્ષે $\vec{r}$ સ્થાનસદિશ ધરાવતા બિંદુએ ચુંબકીય ક્ષેત્ર

$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} = \frac{Id\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}$ સૂત્ર વડે આપવામાં આવે છે." (4.3.1)

અત્રે $Id\vec{l}$ = વિદ્યુતપ્રવાહ-ખંડ. એટલે કે વાહકની સૂક્ષ્મ સદિશ-લંબાઈ $d\vec{l}$ અને તેમાંથી પસાર થતા વિદ્યુતપ્રવાહ Iનો ગુણાકાર

μ_0 = શૂન્યાવકાશની પરમીએબિલિટી

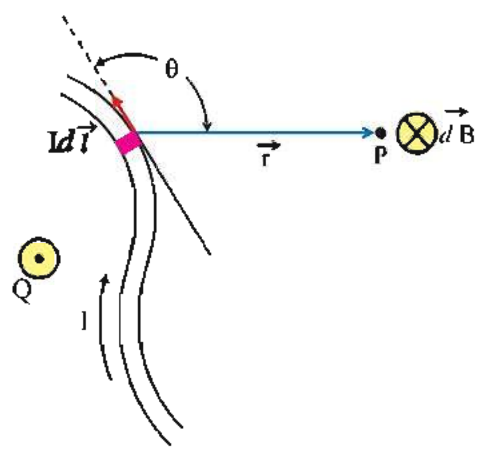
$= 4\pi \times 10^{-7}$ tesla meter ampere^{-1} (TmA^{-1})

$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ વિદ્યુતપ્રવાહ-ખંડથી બિંદુ તરફ જતી દિશામાંનો એકમસદિશ. સમીકરણ (4.3.1)ને સદિશ $\vec{r}$ના સ્વરૂપમાં નીચે પ્રમાણે લખી શકાય.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3} \qquad (4.3.2)$$

સમીકરણ (4.3.1) પરથી $|d\vec{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\theta}{r^2}$ (4.3.3.)

જ્યાં θ એ $d\vec{l}$ અને $\vec{r}$ વચ્ચેનો ખૂણો છે.



આકૃતિ 4.2 બાયો-સાવરનો નિયમ

સમજૂતિ : આકૃતિ 4.2માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે I વિદ્યુતપ્રવાહ ધરાવતા કોઈ યાદચ્છિક આકાર ધરાવતા વાહક તારને ધ્યાનમાં લો. આ વિદ્યુતપ્રવાહધારિત તારના કારણે ધારો કે કોઈ બિંદુ P પાસે ઉદ્ભવતું ક્ષેત્ર શોધવું છે.

આ વાહક તારને dl_1, dl_2 ..... dl_n જેટલી સૂક્ષ્મ લંબાઈ ધરાવતા ખંડોના બનેલા કલ્પો. અત્રે આ ખંડોની લંબાઈ એટલી સૂક્ષ્મ છે કે દરેક ખંડને પ્રવાહની દિશામાં સુરેખ ગણી શકાય. આવો એક સુરેખ ખંડ $d\vec{l}$ આકૃતિ 4.2માં દર્શાવેલ છે. $Id\vec{l}$ પ્રવાહ-ખંડની સાપેક્ષે બિંદુ Pનો સ્થાનસદિશ $\vec{r}$ પણ આકૃતિમાં દર્શાવ્યો છે. આ પ્રવાહ-ખંડને લીધે બિંદુ P પાસે ચુંબકીય ક્ષેત્ર $d\vec{B}$ સમીકરણ (4.3.1)નો ઉપયોગ કરીને ગણી શકાય. $d\vec{B}$ની દિશા, $d\vec{l}$ અને $\vec{r}$ના સદિશ ગુણાકાર રૂપે, $d\vec{l}$ અને $\vec{r}$થી બનતા સમતલને લંબરૂપે જમણા હાથના સ્ક્રૂના નિયમ મુજબની હોય છે. આકૃતિ 4.2માં $d\vec{l}$ અને $\vec{r}$ પુસ્તકના પાનમાં લીધા હોવાથી

$\vec{dB}$ની દિશા પુસ્તકના પાનને લંબરૂપે P બિંદુએ અંદર જતી દિશામાં છે. જે સંજ્ઞા ⊗ વડે દર્શાવી છે. (આકૃતિમાં Q બિંદુએ ચુંબકીય ક્ષેત્ર પુસ્તકના પાનને લંબરૂપે નિરિક્ષક તરફની દિશામાં છે. એને ⊙ સંજ્ઞા વડે દર્શાવાય છે.)

જો બિંદુ P પાસે સમગ્ર તારને લીધે ઉદ્દ્ભવતું ચુંબકીય ક્ષેત્ર શોધવું હોય તો, જુદા-જુદા પ્રવાહ-ખંડો વડે ઉદ્દ્ભવતાં ક્ષેત્રો સમીકરણ (4.3.1) પ્રમાણે મેળવી તેમનો સદિશ સરવાળો કરવો જોઈએ.

સૂક્ષ્મ ખંડો સતત રીતે પથરાયેલા હોવાથી તેનો સદિશ સરવાળો નીચે દર્શાવેલા રેખા-સંકલનના સ્વરૂપમાં લખી શકાય છે.

$$\vec{B} = \int \vec{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\vec{dl} \times \hat{r}}{r^2} \tag{4.3.4}$$

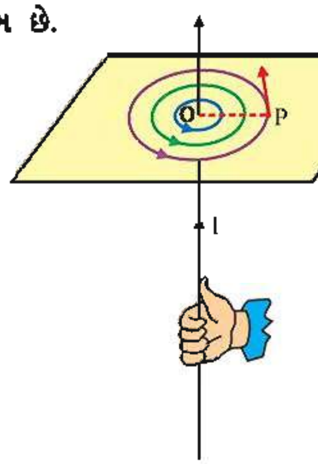
અથવા

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\vec{dl} \times \vec{r}}{r^3} \tag{4.3.4a}$$

અહીં રેખાસંકલન તારથી બનતા સમગ્ર પરિપથ પર છે. અત્રે નોંધો કે બાયો-સાવરનો નિયમ પણ કુલંબના નિયમ એને ન્યૂટનના ગુરુત્વાકર્ષણના સાર્વત્રિક નિયમની જેમ જ વ્યસ્ત વર્ગનો નિયમ છે.

બૈજિક ગણતરીઓ માટે વિદ્યુતપ્રવાહધારિત તાર સાદા આકારનો પરિપથ રચતો હોય ત્યારે બાયો-સાવરના નિયમનો ઉપયોગ કરવાનું સહેલું બને છે.

અત્રે એક વાત તો સ્પષ્ટ જ છે કે કોઈ સમતલને લંબરૂપે રાખેલ સુરેખ વાહક તારમાંથી વિદ્યુતપ્રવાહ પસાર કરતાં આ સમતલમાં તારથી સમાન લંબ અંતરે આવેલાં બિંદુઓએ ચુંબકીય પ્રેરણ સમાન હશે. એટલે કે આકૃતિ 4.3માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે તારથી OP ત્રિજ્યાના વર્તુળ પરના દરેક બિંદુએ ચુંબકીય પ્રેરણનું મૂલ્ય સમાન હશે તથા તેની દિશા વર્તુળને દોરેલા સ્પર્શકની દિશામાં હશે. આ દિશા શોધવા માટે જમણા હાથના અંગૂઠાનો નિયમ નીચે મુજબ છે :

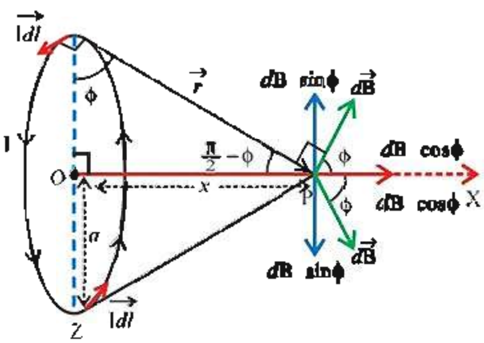


આકૃતિ 4.3
જમણા હાથનો અંગૂઠાનો નિયમ

તારને જમણા હાથમાં એવી રીતે પકડીએ કે અંગૂઠો વિદ્યુતપ્રવાહની દિશામાં રહે અને આંગળીઓ તાર પર વીંટળાય, તો તે આંગળીઓ ચુંબકીય ક્ષેત્રરેખાઓની દિશા દર્શાવે છે તથા ચુંબકીય પ્રેરણની દિશા આપેલા બિંદુએ ક્ષેત્રરેખાને દોરેલા સ્પર્શકની દિશામાં હોય છે. (જુઓ આકૃતિ 4.3)

4.4 વિદ્યુતપ્રવાહધારિત વર્તુળાકાર રિંગની અક્ષ પરના બિંદુએ ચુંબકીય ક્ષેત્રની તીવ્રતા

ધારો કે આકૃતિ 4.4માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે પાતળા તારમાંથી બનાવેલી વર્તુળાકાર રિંગની ત્રિજ્યા a છે તથા તેમાંથી I જેટલો વિદ્યુતપ્રવાહ પસાર થાય છે. રિંગની અક્ષ X-અક્ષ સાથે સંપાત થાય છે. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ ધારો કે P બિંદુ રિંગના કેન્દ્રથી તેની અક્ષ ઉપર x જેટલા અંતરે આવેલ છે તથા $I\vec{dl}$ પ્રવાહખંડની સાપેક્ષે તેનો સ્થાનસદિશ $\vec{r}$ છે. $I\vec{dl}$ પ્રવાહ ખંડને લીધે P બિંદુ પાસે ઉદ્દ્ભવતા ચુંબકીય ક્ષેત્રની તીવ્રતા $\vec{dB}$ છે તથા તેની દિશા આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ $\vec{dl}$ અને $\vec{r}$ વડે રચાતા સમતલને લંબ છે.



આકૃતિ 4.4 વર્તુળાકાર રિંગથી ઉદ્દ્ભવતું ચુંબકીય ક્ષેત્ર

$\vec{dB}$ ના બે ઘટકો (1) X-અક્ષને સમાંતર $dB\cos\phi$ અને (2) X-અક્ષને લંબ $dB\sin\phi$ થશે. આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે જ્યારે સમગ્ર રિંગ પરના બધા જ ખંડો વડે મળતી ચુંબકીય તીવ્રતાઓના સદિશોનો સરવાળો કરવામાં આવશે ત્યારે રિંગના વ્યાસ પરના સામસામેના ખંડો વડે મળતી તીવ્રતાઓના $dB\sin\phi$ ઘટકો પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં હોઈ એકબીજાની અસરો નાબૂદ કરશે અને બધા $dB\cos\phi$ ઘટકો એક જ દિશામાં હોવાથી તેમનો સરવાળો થશે.

બાયો-સાવરના નિયમનો ઉપયોગ કરતાં,

$$|d\vec{B}| = \left|\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\vec{dl}\times\vec{r}}{r^3}\right| = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\ r sin\theta}{r^3} = \frac{\mu_0 Idl\ sin\theta}{r^2},$$

જ્યાં θ એ $\vec{dl}$ અને $\vec{r}$ વચ્ચેનો કોણ છે.

વળી, $\vec{dl} \perp \vec{r}$ છે, તેથી $sin\theta = sin\frac{\pi}{2} = 1$

$$\therefore |d\vec{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl}{r^2} \qquad (4.4.1)$$

P બિંદુ રિંગના કેન્દ્રથી x અંતરે હોવાથી $d\vec{B}$ના આ ઘટકનું મૂલ્ય $dB(x)$ વડે દર્શાવતાં,

$$dB(x) = |d\vec{B}| cos\phi \qquad (4.4.2)$$

સમીકરણ (4.4.1)માંથી કિંમત સમીકરણ (4.4.2)માં મૂકતાં,

$$dB(x) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{r^2}cos\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\frac{a}{r}dl \quad (\because \text{ આકૃતિ પરથી } cos\phi = \frac{a}{r})$$

P બિંદુએ પરિણામી ચુંબકીય ક્ષેત્ર $B(x) = \oint dB(x)$

$$= \frac{\mu_0 Ia}{4\pi r^3}\oint dl$$

અત્રે $\oint dl$ એ સમગ્ર રિંગ પરનું રેખા-સંકલન છે. $\therefore \oint dl = 2\pi a$.

$$\therefore B(x) = \frac{\mu_0 Ia}{4\pi r^3}.2\pi a$$

વળી, આકૃતિની ભૂમિતિ પરથી $r^2 = a^2 + x^2 \Rightarrow r^3 = (a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}$

$$B(x) = \frac{\mu_0 Ia^2}{2(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

આ ચુંબકીય ક્ષેત્રની દિશા X-અક્ષને સમાંતર છે, જે રિંગની અક્ષ પર છે (જુઓ આકૃતિ 4.4). જો રિંગ, ખૂબ જ પાસપાસે રહેલા N આંટાની બનેલી હોય તો,

$$B(x) = \frac{\mu_0 NIa^2}{2(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad (4.4.3)$$

રિંગના કેન્દ્ર પર રહેલા બિંદુ માટે $x = 0$ થાય, તેથી રિંગના કેન્દ્ર પર ચુંબકીય તીવ્રતા શોધવા માટે સમીકરણ (4.4.3)માં $x = 0$ મૂકતાં, રિંગના કેન્દ્ર પર ચુંબકીય ક્ષેત્રની તીવ્રતા B (કેન્દ્ર) $= \frac{\mu_0 NI}{2a}$. (4.4.4)

ઉપર્યુક્ત રિંગના કેન્દ્રથી અક્ષ પર અતિ દૂર રહેલા બિંદુ માટે $x >> a$ થાય, તેથી x^2ની સાપેક્ષે a^2ને અવગણતાં સમીકરણ (4.4.3)

$$B(x) = \frac{\mu_0 N I a^2}{2(x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 N I a^2}{2x^3} \quad (\text{જ્યાં, } x >> a) \tag{4.4.5}$$

ઉદાહરણ 1 : હાઇડ્રોજન પરમાણુમાં પ્રોટોનની ફરતે ઇલેક્ટ્રૉન 2×10^6 m s^{-1}ની ઝડપથી 5.2×10^{-11}m ત્રિજ્યાની વર્તુળાકાર કક્ષામાં ભ્રમણ કરે છે, તો કક્ષાના કેન્દ્ર પર ઉદ્ભવતું ચુંબકીય ક્ષેત્ર શોધો.

ઉકેલ : અત્રે $v = 2 \times 10^6$ ms^{-1}

$r = 5.2 \times 10^{-11}$ m

$e = 1.6 \times 10^{-19}$ C

કક્ષામાં ઇલેક્ટ્રૉનની આવૃત્તિ f (એક સેકન્ડમાં પૂર્ણ કરેલા ભ્રમણ) $= \frac{v}{2\pi r}$

વિદ્યુતપ્રવાહ I $= f.e$

$$= \frac{v}{2\pi r} \times e$$

$$= \frac{2\times10^6}{2\times3.14\times5.2\times10^{-11}} \times 1.6 \times 10^{-19} = 9.8 \times 10^{-4}\text{A}$$

વર્તુળાકાર કક્ષાના કેન્દ્ર પર ઉદ્ભવતું ચુંબકીય ક્ષેત્ર

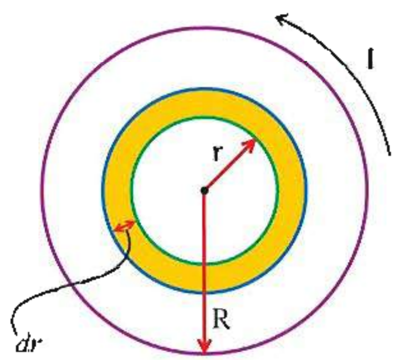
$$B = \frac{\mu_0 I}{2r}$$

$$= \frac{4\times3.14\times10^{-7}\times9.8\times10^{-4}}{2\times5.2\times10^{-11}}$$

$= 11.8$ T

ઉદાહરણ 2 : એક અવાહક દ્રવ્યની બનેલી R ત્રિજ્યાની એક તકતી પર Q જેટલો વિદ્યુતભાર સમાન રીતે પથરાયેલો છે. હવે આ તકતીને તેની ભૌમિતિક અક્ષ ફરતે f આવૃત્તિથી ભ્રમણ કરાવવામાં આવે, તો તકતીના કેન્દ્ર પર ઉદ્ભવતું ચુંબકીય પ્રેરણ શોધો.

ઉકેલ : આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ધારો કે R ત્રિજ્યાવાળી તકતીને સમકેન્દ્રિત જુદી-જુદી ત્રિજ્યાવાળી રિંગોની શ્રેણીમાં વિભાજિત કરી શકાય. આમાંની કોઈ એક રિંગની ત્રિજ્યા r તથા જાડાઈ (પહોળાઈ) dr છે. તકતી પરનો કુલ વિદ્યુતભાર Q છે, તેથી એકમક્ષેત્રફળ દીઠ વિદ્યુતભાર $= \frac{Q}{\pi R^2}$



તેથી r ત્રિજ્યાવાળી ઘટક રિંગ પર વિદ્યુતભાર = (રિંગનું ક્ષેત્રફળ) × (એકમ ક્ષેત્રફળ પર રહેલો વિદ્યુતભાર) $= (2\pi r dr)\left(\frac{Q}{\pi R^2}\right)$

જો આ તકતી f આવૃત્તિથી ભ્રમણ કરતી હોય તો રિંગ પરના વિદ્યુતભારને લીધે ઉદ્ભવતો પ્રવાહ

$I = \frac{Q}{\pi R^2} 2\pi r dr f$ થાય. આ પ્રવાહને લીધે ઉદ્ભવતું ચુંબકીય ક્ષેત્ર,

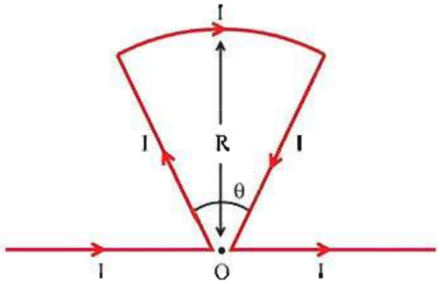
$$dB = \frac{\mu_0 I}{2r} = \frac{\mu_0 Q 2\pi}{\pi R^2} \frac{r dr}{2r} f = \frac{\mu_0 Q f}{R^2} dr$$

$\therefore$ સમગ્ર તકતીને લીધે ઉદ્ભવતું ચુંબકીય ક્ષેત્ર B.

$$B = \int dB = \int_0^R \frac{\mu_0 Qf}{R^2} dr = \frac{\mu_0 Qf}{R^2} \int_0^R dr$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 Qf}{R}$$

ઉદાહરણ 3 : આકૃતિમાં દર્શાવેલ બિંદુ O પાસે ચુંબકીય ક્ષેત્ર શોધો. O બિંદુ પાસે તાર એકબીજાને મળતા નથી. બિંદુ O તારના નીચેના ખાંચાઓથી અત્યંત નજીક છે.



ઉકેલ : અહીં, બિંદુ O એ સમક્ષિતિજ પ્રવાહોની દિશા પર જ છે. પરિણામે તેમને કારણે O પાસે ચુંબકીય ક્ષેત્ર ઉદ્ભવતું નથી. વળી, O બિંદુ ત્રિજ્યાવર્તી પ્રવાહોની દિશાઓ પર પણ આવે છે. આથી તેમને કારણે પણ O પાસે કોઈ ચુંબકીય ક્ષેત્ર ઉદ્ભવે નહિ. હવે વાત રહી ચાપની.

આ માટે આપણે R ત્રિજ્યાની n આંટાવાળી, વિદ્યુતવહન કરતી રિંગના કેન્દ્ર પર ઉદ્ભવતા ચુંબકીય ક્ષેત્ર માટેનું સૂત્ર વાપરી શકીએ. આ સૂત્ર અનુસાર,

$$B = \frac{\mu_0 nI}{2R} \text{ (પુસ્તકના પાનમાં અંદર જતી દિશામાં)} \tag{1}$$

પ્રસ્તુત ઉદાહરણમાં ચાપની લંબાઈ = R θ

હવે, જો ચાપની લંબાઈ $2\pi R$ હોય, તો એક આંટો કહેવાય, તો ચાપની લંબાઈ $R\theta$ હોય, તો કેટલા આંટા કહેવાય ?

$2\pi R$: 1 આંટો

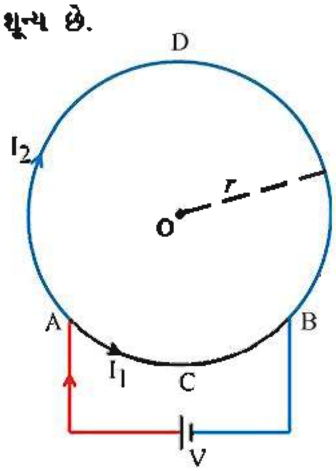
$R\theta$: ? $\Rightarrow$ આંટાની સંખ્યા, $n = \dfrac{R\theta}{2\pi R} = \dfrac{\theta}{2\pi}$

સૂત્ર (1)માં nનું આ મૂલ્ય મૂકતાં,

$$B = \frac{\mu_0 I\theta}{2R \times 2\pi}$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 I\theta}{4\pi R} \text{ (પુસ્તકના પાનમાં અંદર જતી દિશામાં)}$$

ઉદાહરણ 4 : એક નિયમિત આડછેદવાળા તાર વડે એક વર્તુળ બનાવવામાં આવેલ છે. આ વર્તુળના પરિઘ પરનાં કોઈ પણ બે બિંદુઓ વચ્ચે બેટરી જોડવામાં આવી છે, તો સાબિત કરો કે આ વર્તુળના કેન્દ્ર પર ચુંબકીય પ્રેરણ (B) શૂન્ય છે.



ઉકેલ : આકૃતિમાં બતાવ્યા મુજબ A અને B બિંદુઓ વચ્ચે બેટરી જોડેલ છે. તારનો આડછેદ નિયમિત હોવાથી, તારના કોઈ ભાગનો અવરોધ તે ભાગની લંબાઈના સમપ્રમાણમાં હોય છે. ($\because R = \rho \frac{l}{A}$).

ધારો કે એકમલંબાઈના તારનો અવરોધ R' છે.

તાર ACBની લંબાઈ = l_1

તાર ADBની લંબાઈ = l_2

$\therefore$ તાર ACBનો અવરોધ = $R_1 = R' l_1$

તાર ADBમાં અવરોધ = $R_2 = R' l_2$

તાર ACBમાં વિદ્યુતપ્રવાહ = I_1

તાર ADBમાં વિદ્યુતપ્રવાહ = I_2

આ બે ભાગ ACB અને ADB એ A અને B બિંદુઓ વચ્ચે સમાંતર જોડાયેલા છે.

$V = I_1R_1 = I_2R_2$

$= I_1(R'l_1) = I_2(R'l_2)$

$\therefore I_1l_1 = I_2l_2$

તારનો દરેક સૂક્ષ્મ પ્રવાહ-ખંડ, O બિંદુના સ્થાનસદિશને લંબ છે.

$\therefore$ બાયો-સાવરના નિયમ પરથી O બિંદુએ ACBને લીધે મળતું ચુંબકીય ક્ષેત્ર

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1l_1 sin90^\circ}{r^2}$$

અને ADBને લીધે મળતું ચુંબકીય ક્ષેત્ર

$$B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_2l_2 sin90^\circ}{r^2}$$

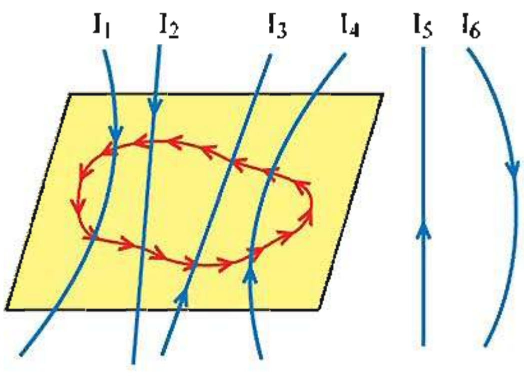
$I_1l_1 = I_2l_2$ હોવાથી

$B_1 = B_2$ મળે.

જમણા હાથના અંગૂઠાના નિયમ મુજબ B_1 અને B_2ની દિશાઓ પરસ્પરવિરોધી છે, આથી O આગળનું પરિણામી ચુંબકીય ક્ષેત્ર શૂન્ય થશે.

4.5 ઍમ્પિયરનો સર્કિટલ નિયમ (Ampere's Circuital Law)

આપણે વિદ્યુતક્ષેત્રમાં રેખા-સંકલન મેળવ્યું હતું, તેવું ચુંબકીય ક્ષેત્ર માટે પણ કરી શકીએ. આકૃતિમાં દર્શાવેલ વિદ્યુતપ્રવાહો I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 તથા I_6 ધ્યાનમાં લો, જે ચુંબકીય ક્ષેત્ર ઉત્પન્ન કરે છે. આ ચુંબકીય ક્ષેત્ર તેમની આસપાસના વિસ્તારમાં હોય છે. આકૃતિ 4.5માં એક સમતલ (જે સમક્ષિતિજ હોવું જરૂરી નથી.) દર્શાવ્યું છે અને તેના પર એક યાદચ્છિક આકારનો બંધ વક્ર પણ દર્શાવ્યો છે. હવે, આ બંધ વક્ર (બંધગાળો) પર આપણે ચુંબકીય ક્ષેત્રનું રેખા-સંકલન લઈ શકીએ.



આકૃતિ 4.5 ઍમ્પિયરનો સર્કિટલ નિયમ

તમને એ પણ યાદ હશે કે વિદ્યુતક્ષેત્રમાં ગાઉસના નિયમ પ્રમાણે પૃષ્ઠ-સંકલન લેતા હતા, ત્યારે બંધ પૃષ્ઠથી ઘેરાયેલા વિદ્યુતભારો તેમની સંજ્ઞા (±) સાથે લેતા હતા. આજ પ્રમાણે બંધ પૃષ્ઠથી ઘેરાયેલા વિદ્યુતપ્રવાહો, જેઓ સમતલમાંથી પસાર થતાં હોય તેમના માટે સંજ્ઞા-પ્રણાલી નક્કી કરવી પડે. આ માટેની એક વ્યાવહારિક રીત નીચે મુજબ છે.

રેખા-સંકલન માટે દોરેલા વક્રથી રચાતા સમતલને લંબરૂપે જમણા હાથનો સ્ક્રૂ ગોઠવી, તેને રેખાસંકલન માટે દોરેલા સદિશ રેખાખંડોની દિશામાં ઘુમાવો. આમ કરતાં સ્ક્રૂ જે દિશામાં આગળ વધે તે દિશામાંના વિદ્યુતપ્રવાહોને ધન અને તેની વિરુદ્ધ દિશામાંના વિદ્યુતપ્રવાહોને ઋણ ગણો.

આકૃતિ 4.5માં દર્શાવેલા વિદ્યુતપ્રવાહો માટે આપણે સ્વીકારેલી સંજ્ઞા પદ્ધતિ અનુસાર, વિદ્યુતપ્રવાહો I_1 અને I_2 ઋણ થશે અને I_3 અને I_4 ધન થશે, તેથી તેમનો બૈજિક સરવાળો

$I_3 + I_4 - I_1 - I_2 = \Sigma I$ થશે.

અહીં જે પ્રવાહો બંધ વક્ર દ્વારા ઘેરાતા નથી, તેમની આપણે કોઈ ચિંતા કરવાની નથી. (જુઓ આકૃતિ 4.5) હવે ઍમ્પિયરના સર્કિટલ નિયમનું કથન નીચે પ્રમાણે છે :

"ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં કોઈ બંધ વક્ર પરનું ચુંબકીય પ્રેરણનું રેખા-સંકલન, તે બંધ વક્ર દ્વારા ઘેરાતા વિદ્યુતપ્રવાહોના બૈજિક સરવાળા (ΣI) અને શૂન્યાવકાશની પરમીએબિલિટીના (μ_0) ગુણાકાર બરાબર હોય છે."

સમીકરણના રૂપમાં આ નિયમ નીચે મુજબ લખાય :

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \Sigma I \tag{4.5.1}$$

અત્રે નોંધો કે સંકલનમાં જે ચુંબકીય પ્રેરણ આવે છે તે બધા જ પ્રવાહોને કારણે (આપણા કિસ્સામાં I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6) ઉત્પન્ન થતું ચુંબકીય પ્રેરણ છે. જ્યારે સમીકરણની જમણી બાજુએ માત્ર જે પ્રવાહો બંધ વક્ર વડે ઘેરાય છે, તેમનો જ બૈજિક સરવાળો છે. અત્રે એ પણ નોંધવું જરૂરી છે કે ઍમ્પિયરનો નિયમ માત્ર સ્થાયી પ્રવાહો (Steady Currents) માટે જ સાચો છે.

જેવી રીતે સ્થિતવિદ્યુતના કિસ્સામાં ગાઉસના નિયમનો ઉપયોગ કરી, સંમિત વિદ્યુતભારવિતરણનું વિદ્યુતક્ષેત્ર શોધી શકાય છે, તેવી જ રીતે ઍમ્પિયરના નિયમનો ઉપયોગ કરીને સંમિત વિદ્યુતપ્રવાહવિતરણ વડે ઉદ્ભવતું ચુંબકીય ક્ષેત્ર શોધી શકાય છે.

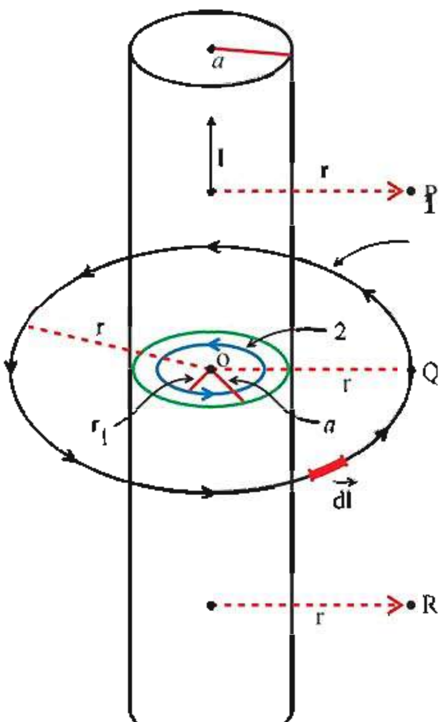
વિદ્યુતક્ષેત્ર માટે ગાઉસનો નિયમ અને ચુંબકીય ક્ષેત્ર માટે ઍમ્પિયરનો નિયમ ભૌતિકશાસ્ત્રમાં આગવું મહત્ત્વ ધરાવે છે.

મેક્સવેલના વિદ્યુતચુંબકીય વાદના આધારસ્તંભ તરીકે કુલ ચાર સમીકરણો છે. તેમાં ઍમ્પિયરનો નિયમ અને ગાઉસનો નિયમ બે આધારસ્તંભો છે. વળી, ચુંબકીય ક્ષેત્રરેખાઓ બંધ ગાળા રચે છે. તે ત્રીજો આધાર સ્તંભ અને ચોથો આધારસ્તંભ વિદ્યુત-સ્થાનાંતર વિભાવના છે.

અત્રે નોંધો કે ઍમ્પિયરનો નિયમ એ બાયો-સાવરના નિયમની અને વિદ્યુતક્ષેત્ર માટેનો ગાઉસનો નિયમ એ કુલંબના નિયમની સંકલનના સ્વરૂપમાં માત્ર રજૂઆતો છે. આ રજૂઆતો ભૌતિકશાસ્ત્રમાં ઘણી ફળદાયી નીવડી છે.

4.5.1 ઍમ્પિયર સર્કિટલ નિયમના ઉપયોગો (Uses of Ampere's Circuital Law)

(1) ઍમ્પિયરના નિયમનો ઉપયોગ કરી અતિ લાંબા વિદ્યુતપ્રવાહધારિત તાર વડે ઉદ્ભવતું ચુંબકીય ક્ષેત્ર શોધવું



આકૃતિ 4.6 વિદ્યુતપ્રવાહધારિત સુરેખ તારથી ઉદ્ભવતું ચુંબકીય ક્ષેત્ર

આપણે જોયું કે, સંમિત વિદ્યુતપ્રવાહવિતરણને લીધે ઉદ્ભવતું ચુંબકીય ક્ષેત્ર સહેલાઈથી શોધી શકાય છે. આકૃતિ 4.6માં દર્શાવેલ અતિ લાંબો (સૈદ્ધાંતિક રીતે અનંત લંબાઈનો) a ત્રિજ્યાવાળો, I જેટલા પ્રવાહનું વહન કરતો સુરેખ તાર ધ્યાનમાં લો.

આમાં સંમિતિ કઈ ? આની સમજ નીચે મુજબ મેળવી શકાય છે. પ્રથમ જુઓ કે સમગ્ર તારમાંથી સમાન વિદ્યુતપ્રવાહ I પસાર થઈ રહ્યો છે. હવે તારને તમારા હાથની બે હથેળી વચ્ચે રાખી વલોણીની જેમ ઘુમાવો. આમ કરવાથી તારમાંથી પસાર થતા વિદ્યુતપ્રવાહ I વડે ઉત્પન્ન થતા ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં કોઈ ફેરફાર થતો નથી.

હવે તારથી r જેટલા સમાન લંબ અંતરે રહેલા P, Q અને R જેવાં બિંદુઓ વિચારો. તારના બંને છેડાઓ અનંત અંતરે છે. જ્યાં સુધી તારના છેડાઓ અનંત અંતરે છે, ત્યાં સુધી આ બિંદુઓ, P, Q અને Rના અંતરો તારના છેડાઓથી સમાન જ કહેવાય અને એ અર્થમાં આવાં બિંદુઓ સમતુલ્ય કહેવાય.

સંમિતિની ઉપર્યુક્ત ચર્ચા દર્શાવે છે કે P, Q અને R જેવાં બિંદુઓએ ચુંબકીય ક્ષેત્ર સમાન હોય, વળી, તારને વલોણીની જેમ ફેરવવાની વાત દર્શાવે છે કે Oને કેન્દ્ર તરીકે લઈ તારને ભ્રમણ આપતાં OQ = r ત્રિજ્યાનું જે વર્તુળ રચાય છે. તેના પરિઘ પરનાં બધાં જ બિંદુઓ પર ચુંબકીય ક્ષેત્ર સમાન હોય છે.

આ કિસ્સામાં આપણે ઍમ્પિરિયના નિયમનો ઉપયોગ કરી ધારો કે Q બિંદુએ ચુંબકીય ક્ષેત્ર શોધવું છે. આ માટે આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ ત્રિજ્યા OQ = r તથા તારને લંબ હોય તેવો વર્તુળાકાર બંધ વક્ર (ઍમ્પિરિયન લૂપ 1)

વિચારો રેખાખંડો $\vec{dl}$ આ વર્તુળના પરિઘ પર રહેલા છે. ધારો કે આ દરેક રેખાખંડ પાસે સમાન ચુંબકીય ક્ષેત્ર $\vec{B}$ છે.

ઍમ્પિયરના નિયમ $\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 \Sigma I$માં ઉપર્યુક્ત હકીકતોનો ઉપયોગ કરતાં,

$$\oint B dl \, cos\theta = \mu_0 I$$

અત્રે દરેક રેખાખંડ પાસે $\vec{B}$ અને $\vec{dl}$ એક જ દિશામાં હોવાથી $cos\theta = cos0 = 1$

$\therefore \; B\oint dl = \mu_0 I$ $\quad$ ($\because$ B અચળ છે.)

અત્રે $\oint dl = r$ ત્રિજ્યા ધરાવતા વર્તુળનો પરિઘ $= 2\pi r$

$$\therefore \; B(2\pi r) = \mu_0 I$$

$$\therefore \; B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r} \qquad (4.5.2)$$

અત્રે આપણે નક્કી કરેલ સંજ્ઞા પ્રમાણે I ધન છે. સમીકરણ (4.5.2) પરથી,

$B \; \alpha \; \frac{1}{r}$ (તારની બહારના વિસ્તારમાં)

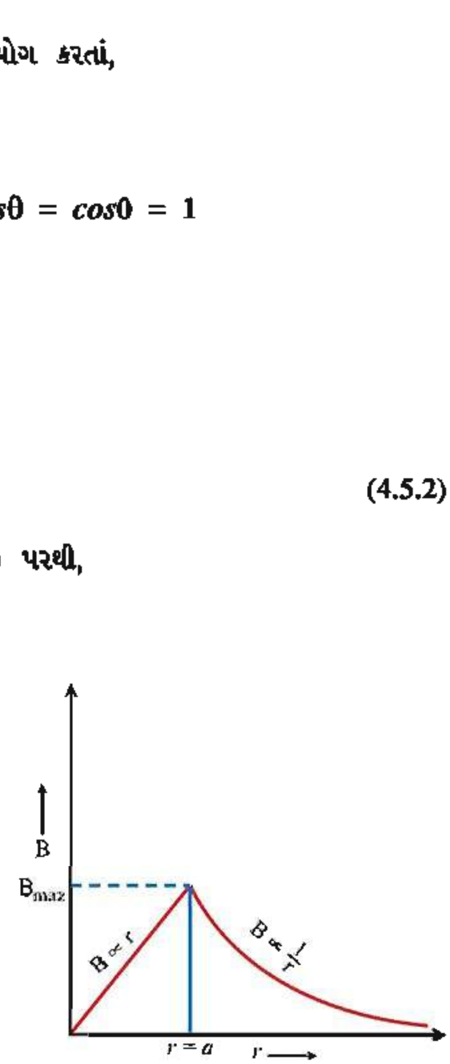
તારની અંદરના વિસ્તારમાં ચુંબકીય ક્ષેત્ર : હવે આકૃતિ 4.6માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે તારની ત્રિજ્યા a છે અને તેના કેન્દ્રથી તારમાં r_1 અંતરે ચુંબકીય ક્ષેત્ર શોધવું છે. એટલે કે $r_1 < a$. r_1 ત્રિજ્યાવાળું ઍમ્પિયરિયન લૂપ 2 ધ્યાનમાં લો. (જે તારની અંદર તારની અક્ષને ફરતે છે.) આ લૂપ વડે ઘેરાતો વિદ્યુતપ્રવાહ I_e હોય તો,

$$I_e = \left(\frac{I}{\pi a^2}\right)\pi r_1^{\,2} = I\frac{r_1^2}{a^2}$$

ઍમ્પિયરના નિયમનો ઉપયોગ કરતાં,

$$B(2\pi r_1) = \mu_0 I\frac{r_1^2}{a^2}$$

$$\therefore \; B = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi a^2}\right) r_1 \qquad (4.5.3)$$



આકૃતિ 4.7 તારના કેન્દ્રથી r અંતરે ચુંબકીય ક્ષેત્ર B

$\therefore \; B \; \alpha \; r$

r_1ને r વડે દર્શાવતા એટલે કે $r < a$ માટે $B \; \alpha \; r$

તેથી સામાન્ય સંકેત rમાં ઉપર્યુક્ત હકીકતો નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય :

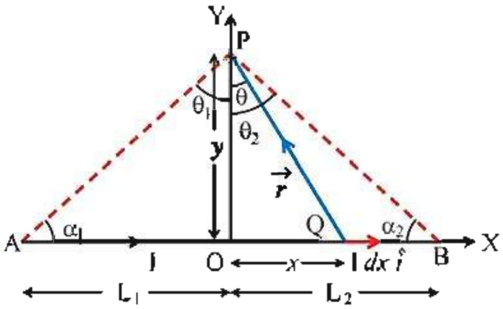
(i) $r > a$ હોય, તો $B \; \alpha \; \frac{1}{r}$

(ii) $r < a$ પાસે $B \; \alpha \; r$

(iii) $r = a$ પાસે Bનું મૂલ્ય મહત્તમ હશે.

$B \rightarrow r$નો આલેખ આ હકીકત દર્શાવે છે. (જુઓ આકૃતિ 4.7)

પરિમિત લંબાઈના તાર માટે : હવે જો અનંતલંબાઈના તારને બદલે પરિમિત લંબાઈ ધરાવતા તાર માટે તેમાંથી પસાર થતા પ્રવાહને લીધે આપેલા બિંદુએ ઉદ્ભવતું ચુંબકીય ક્ષેત્ર $\vec{B}$ શોધવા માટે આકૃતિમાં 4.8 ધ્યાનમાં લો.



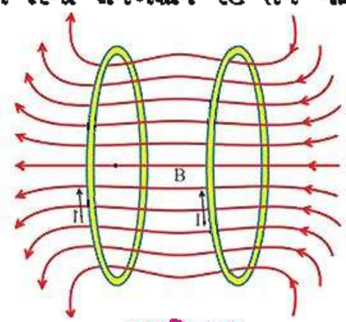
આકૃતિ 4.8 પરિમિત લંબાઈના પ્રવાહધારિત તાર વડે મળતું ચુંબકીય ક્ષેત્ર

આ કિસ્સામાં $\vec{B}$ માટે નીચે પ્રમાણેના બાયો-સાવરના નિયમનો ઉપયોગ કરી મેળવી શકાય છે.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{y}\left[\sin\theta_1 + \sin\theta_2\right]\hat{k} \qquad (4.5.4)$$

જ્યાં, y એ તારથી આપેલા P બિંદુનું લંબઅંતર, θ_1 અને θ_2 એ આપેલા બિંદુથી તાર પર દોરેલા લંબ સાથે, તારના છેડાઓથી આપેલા બિંદુને જોડતી રેખાઓ વડે રચાતા કોણ છે (જુઓ આકૃતિ 4.8).

(2) સૉલેનોઈડ : આકૃતિ 4.9માં દર્શાવ્યા મુજબ એકબીજાની નજીક એક જ દિશામાં વિદ્યુતપ્રવાહનું વહન કરતી બે રિંગો સમઅક્ષીય રહે તેમ ગોઠવેલી છે.



આકૃતિ 4.9

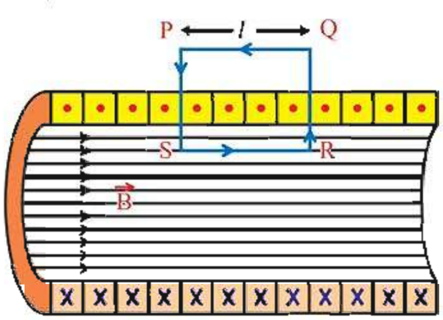
અત્રે દર્શાવેલ ક્ષેત્રરેખાઓ પરથી જોઈ શકાય છે કે તેમની સમાન અક્ષ પરના, બંને રિંગોના કારણે ઉદ્ભવતાં ચુંબકીય ક્ષેત્રો એક જ દિશામાં છે. વળી, અક્ષની નજીકની ક્ષેત્રરેખાઓ પણ લગભગ સમાંતર અને એક જ તરફની દિશામાં છે. આમ, જો અલગ કરેલી (Insulated) ઘણી બધી રિંગોને (સૈદ્ધાંતિક રીતે અનંત સંખ્યાની) એકબીજાને તદ્દન નજીક મૂકીને (સમઅક્ષીય રહે તેમ) તેમાંથી સમાન વિદ્યુતપ્રવાહ પસાર કરવામાં આવે, તો આ રિંગોથી ઘેરાતા અવકાશમાં ચુંબકીય ક્ષેત્ર સમાન હોય છે તથા ચુંબકીય ક્ષેત્રરેખાઓ એકબીજાથી સમાન અંતરે રિંગોની અક્ષને સમાંતર હોય છે. પરંતુ ક્રમશઃ આવતી જતી રિંગો, બહારના વિસ્તારમાં એકબીજાની અસર નાબૂદ કરતી હોવાથી આ વિસ્તારમાં ચુંબકીય ક્ષેત્ર શૂન્ય હોય છે. આ પરિસ્થિતિને સાકાર કરતું ઉપકરણ એટલે જ સૉલેનોઈડ.

પાસપાસે વીંટેલા અલગ કરેલા વાહક તારના હેલીકલ (Helical) ગૂંચળાને સૉલેનોઈડ કહે છે.

વ્યવહારમાં લાંબા અને ટૂંકા એમ બંને પ્રકારના સૉલેનોઈડ વપરાય છે.

અતિ લાંબા સૉલેનોઈડનો અર્થ એ કે તેની ત્રિજ્યાની સરખામણીમાં લંબાઈ ઘણી જ મોટી હોય છે.

ઍમ્પિયરના સર્કિટલના નિયમનો ઉપયોગ કરી અતિલાંબા સૉલેનોઈડની અંદરના વિસ્તારમાં ઉદ્ભવતું ચુંબકીય ક્ષેત્ર શોધવું :



આકૃતિ 4.10 સૉલેનોઈડ

આકૃતિ 4.10માં એક અતિ લાંબા સૉલેનોઈડનો તેની લંબાઈને સમાંતર પુસ્તકના પાન સાથેનો આડછેદ દર્શાવ્યો છે. (X) વડે દર્શાવેલ સંકેતો આકૃતિના સમતલમાં અંદર જતા વિદ્યુતપ્રવાહની દિશા અને (·) વડે દર્શાવેલ સંકેતો આકૃતિના સમતલમાંથી બહાર આવતા વિદ્યુતપ્રવાહની દિશા દર્શાવે છે.

ધારો કે આ સૉલેનોઈડની અંદર આવેલા બિંદુ S પાસે ચુંબકીય ક્ષેત્ર શોધવું છે. આકૃતિ 4.10માં દર્શાવેલ એક લંબાઈના લંબચોરસ PQRSને ઍમ્પિયર લૂપ તરીકે લઈ આ લૂપ પર રેખા-સંકલન લેતાં,

$$\therefore \oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \int_P^S \vec{B}\cdot\vec{dl} + \int_S^R \vec{B}\cdot\vec{dl} + \int_R^Q \vec{B}\cdot\vec{dl} + \int_Q^P \vec{B}\cdot\vec{dl}$$

આકૃતિ 4.10 પરથી સ્પષ્ટ છે કે બંધ વક્રનો PQ ભાગ સોલેનોઇડની બહાર હોઈને ત્યાં ચુંબકીય ક્ષેત્ર શૂન્ય હશે અને માટે $\int_{Q}^{P} \vec{B} \cdot \vec{dl} = 0$.

ઉપરાંત બાજુઓ QR અને SPનો અમુક ભાગ ચુંબકીય ક્ષેત્રની બહાર છે અને જે ભાગ ક્ષેત્રમાં છે, તે ક્ષેત્રને લંબ હોઈને $\int_{R}^{Q} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \int_{P}^{S} \vec{B} \cdot \vec{dl} = 0$ થશે.

$$\therefore \oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \int_{S}^{R} B\,dl \cos 0^\circ = B \int_{S}^{R} dl = Bl \tag{4.5.5}$$

ધારો કે સોલેનોઇડની એકમ લંબાઈ દીઠ n આંટા છે. માટે ધ્યાનમાં લીધેલ ઍમ્પિયર લૂપ (લંબચોરસ PQRS)માંથી સોલેનોઇડના nl આંટા પસાર થાય છે. દરેક આંટામાંથી I વિદ્યુતપ્રવાહ વહે છે, તેથી લૂપમાંથી પસાર થતો કુલ વિદ્યુતપ્રવાહ $\Sigma I = nlI$ થશે.

ઍમ્પિયરના સર્કિટલ નિયમ પરથી,

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 nlI$$

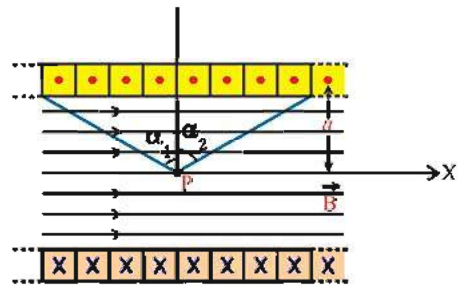
$$\therefore Bl = \mu_0 nlI \quad \text{(સમીકરણ 4.5.5 પરથી)}$$

$$\therefore B = \mu_0 nI \tag{4.5.6}$$

આ રીત અતિ લાંબા સોલેનોઇડ માટે જ વાપરી શકાય. કારણ કે અતિ લાંબા સોલેનોઇડ માટે જ અંદરના બધાં બિંદુઓનાં સ્થાન સમતુલ્ય ગણી શકાય તથા સોલેનોઇડની અંદરના વિસ્તારમાં બધાં બિંદુઓએ ચુંબકીય ક્ષેત્ર સમાન હોય છે. સોલેનોઇડના બહારના વિસ્તારમાં ચુંબકીય ક્ષેત્ર લગભગ શૂન્ય હોય છે. પરિમિત સોલેનોઇડ માટે આ રીત ન વાપરવી જોઈએ.

પરિમિત લંબાઈના સોલેનોઇડ માટે : પરિમિત લંબાઈના સોલેનોઇડ માટે બાયો-સાવરના નિયમનો ઉપયોગ કરી તેની અંદરના બિંદુએ ચુંબકીય ક્ષેત્રનું સૂત્ર મેળવી શકાય છે, જે નીચે મુજબ છે. આ માટે નીચેના આકૃતિ 4.11 ધ્યાનમાં લો.

$$B = \frac{\mu_0 nI}{2}(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2) \tag{4.5.7}$$



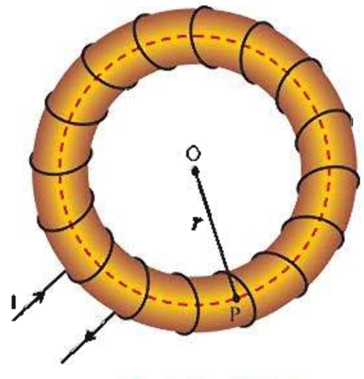
આકૃતિ 4.11 પરિમિત લંબાઈનો સોલેનોઇડ

અત્રે α_1 અને α_2 એ આકૃતિ 4.11માં દર્શાવ્યા અનુસાર સોલેનોઇડના બે છેડાઓને અનુલક્ષીને P પાસે લંબ સાથે બનતા કોણ છે.

ટોરોઇડ (Toroid) : જો સોલેનોઇડને વર્તુળાકારમાં વાળી તેના છેડા જોડી દેવામાં આવે, તો બનતી રચનાને ટોરોઇડ કહે છે. અથવા તો અલગ કરેલા વાહક તારને અવાહક પોલીરિંગ પર ખૂબ જ પાસપાસે વીંટાળીને બનાવેલ રચનાને ટોરોઇડ કહે છે.

આકૃતિ 4.12માં આવું એક ટોરોઇડ દર્શાવેલ છે. (ટૂંકમાં ટોરોઇડનો આકાર હવા ભરેલી ટાયરની ટ્યૂબ જેવો હોય છે. અંગ્રેજીમાં તેને Doughnut Shape કહે છે. વિદ્યુતપ્રવાહધારિત ટોરોઇડની (કોઇલની) અંદરના ભાગમાં ઉદ્ભવતું ચુંબકીય ક્ષેત્ર ઍમ્પિયરના સર્કિટલ નિયમની મદદથી મેળવી શકાય છે.

ધારો કે ટોરોઇડની અંદરના ભાગમાં ટોરોઇડના કેન્દ્ર O થી r અંતરે આવેલ P બિંદુ પાસે (જુઓ આકૃતિ) ચુંબકીય ક્ષેત્ર શોધવું છે. આ માટે ટોરોઇડના કેન્દ્ર Oને કેન્દ્ર તરીકે લઈ r ત્રિજ્યાના વર્તુળને ઍમ્પિરિયન લૂપ તરીકે લઈએ તો સંમિતિના આધારે કહી શકાય કે આ લૂપ પરના દરેક બિંદુએ ચુંબકીય ક્ષેત્રનું મૂલ્ય સમાન હશે અને ક્ષેત્રની દિશા તે બિંદુએ વર્તુળને દોરેલા સ્પર્શકની દિશામાં હશે. માટે



આકૃતિ 4.12 ટોરોઇડ

$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \oint B dl$ ($\because$ $\vec{B}$ અને $\vec{dl}$ એક જ દિશામાં છે.)

$$= B \oint dl = B(2\pi r) \quad (4.5.8)$$

જો ટોરોઈડના આંટાની કુલ સંખ્યા N હોય અને તેમાંથી પસાર થતો વિદ્યુતપ્રવાહ I હોય તો ઍમ્પિરિયન લૂપ વડે ઘેરાતા ક્ષેત્રફળમાંથી પસાર થતો કુલ વિદ્યુતપ્રવાહ $\Sigma I = NI$ થશે. માટે ઍમ્પિયરના સર્કિટલના નિયમ પરથી

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 NI \quad (4.5.9)$$

સમીકરણ (4.5.8) અને (4.5.9) પરથી

$$B(2\pi r) = \mu_0 NI$$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} = \mu_0 nI \quad (4.5.10)$$

જ્યાં, $n = \frac{N}{2\pi r}$ ટોરોઈડના પરિઘ પર એકમ લંબાઈ દીઠ આંટાઓની સંખ્યા.

ટોરોઈડની અંદરના ભાગમાં (બહારના ભાગમાં નહિ) ઉદ્‌ભવતા ચુંબકીય ક્ષેત્ર માટેનું આ સૂત્ર છે. આ ચુંબકીય ક્ષેત્રનું મૂલ્ય ટોરોઈડના અંદરના દરેક બિંદુએ સમાન હોય છે.

આદર્શ ટોરોઈડમાં આંટાઓ સંપૂર્ણ રીતે વર્તુળાકાર હોવાથી તેના વચ્ચેના તેમજ બહારના વિસ્તારમાં ચુંબકીય ક્ષેત્ર શૂન્ય હોય છે. વ્યવહારમાં વપરાતા ટોરોઈડની કોઈલ (Helical) હોવાથી તેના (ટોરોઈડના) બહારના ભાગમાં પણ થોડુંક ચુંબકીય ક્ષેત્ર હોય છે. ન્યુક્લિયર સંલયન (nuclear fusion)ની ઘટનામાં પ્લાઝ્માના (confinement) માટે વપરાતી (Tokamak) નામની રચનામાં ટોરોઈડ ખૂબ જ ઉપયોગી રચના છે.

4.6 ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં મૂકેલા વિદ્યુતપ્રવાહધારિત તાર પર લાગતું બળ (Force on a Current Carrying Wire Placed in a Magnetic Field)

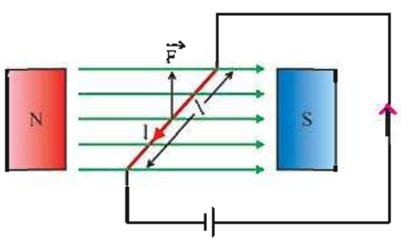
ઑર્સ્ટેડના અવલોકનની પ્રસિદ્ધિના એક અઠવાડિયાના સમયગાળામાં વિજ્ઞાની ઍમ્પિયરે એક બીજું અવલોકન કર્યું. આ અવલોકનમાં તેણે જોયું કે એકબીજાને સમાંતર ગોઠવેલા બે વિદ્યુતપ્રવાહધારિત તારોમાંથી પસાર થતા વિદ્યુતપ્રવાહો જો એકસમાન દિશામાં હોય તો, તેમની વચ્ચે આકર્ષણ ઉદ્‌ભવે છે અને જો પ્રવાહો વિરુદ્ધ દિશામાં હોય તો, તેમની વચ્ચે અપાકર્ષણ ઉદ્‌ભવે છે.

આપણે જોયું કે કોઈ તારમાંથી વિદ્યુતપ્રવાહ પસાર થાય છે, ત્યારે તેની આસપાસ ચુંબકીય ક્ષેત્ર ઉત્પન્ન થાય છે. હવે આ તારની પાસે એક બીજો વિદ્યુતપ્રવાહધારિત તાર મૂકીએ (એટલે કે પ્રથમ તારમાં વહેતા વિદ્યુતપ્રવાહને લીધે ઉદ્‌ભવતા ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં બીજો વિદ્યુતપ્રવાહધારિત તાર મૂકીએ.) તો તેના પર પ્રથમ તારથી ઉદ્‌ભવેલ ચુંબકીય ક્ષેત્રને કારણે બળ લાગે છે. આ જ પ્રમાણે બીજા તારમાંથી વહેતા વિદ્યુતપ્રવાહને લીધે ઉદ્‌ભવતા ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં પ્રથમ તાર રહેલો છે, તેથી બીજા તારમાંથી વહેતા વિદ્યુતપ્રવાહને લીધે ઉદ્‌ભવેલા ચુંબકીય ક્ષેત્રને કારણે પ્રથમ તાર પર બળ લાગે છે.

બળ લાગવાની આ પ્રક્રિયા સંજ્ઞાત્મક રીતે નીચે મુજબ રજૂ કરી શકાય :

$$\left.\begin{matrix}\text{પ્રથમ તારમાં}\\ \text{વિદ્યુતપ્રવાહ}\end{matrix}\right\} \begin{matrix}\rightarrow\\ \leftarrow\end{matrix} \text{ ચુંબકીય ક્ષેત્ર } \left\{\begin{matrix}\text{બીજા તારમાં}\\ \text{વિદ્યુતપ્રવાહ}\end{matrix}\right.$$

બીજા શબ્દોમાં બંને તાર વચ્ચે ચુંબકીય ક્ષેત્ર દ્વારા પરસ્પર બળ લાગે છે. બે વિદ્યુતપ્રવાહધારિત તાર વચ્ચેનું ચુંબકીય બળ જાણવા માટે વિદ્યુતપ્રવાહધારિત તારને ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં મૂકતાં તેના પર લાગતું બળ જાણવું જોઈએ. આવા બળ માટેનો નિયમ ઍમ્પિયરે પ્રાયોગિક પરિણામો પરથી મેળવ્યો છે, જે નીચે મુજબ છે :



આકૃતિ 4.13

$\vec{B}$ જેટલા ચુંબકીય પ્રેરણને લીધે $I\vec{dl}$ પ્રવાહખંડ પર લાગતું બળ

$$\vec{dF} = I\vec{dl} \times \vec{B} \quad (4.6.1)$$

વડે અપાય છે.

જો વિદ્યુતપ્રવાહધારિત તારની લંબાઈ l હોય અને તેને સમાન ચુંબકીય ક્ષેત્ર $\vec{B}$માં મૂક્યો હોય, તો તેના પર લાગતું બળ

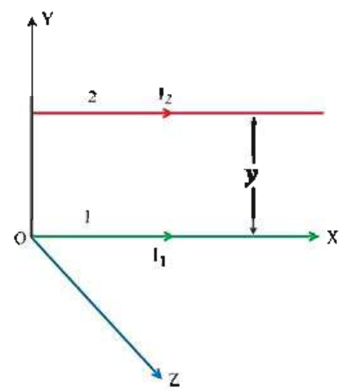
$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B} \tag{4.6.2}$$

આવી એક ગોઠવણ આકૃતિ 4.13માં દર્શાવી છે.

અત્રે બળ $\vec{F}$ની દિશા સદિશ ગુણાકાર માટેના જમણા હાથના સ્ક્રૂના નિયમની મદદથી નક્કી કરી શકાય છે.

4.6.1 બે સમાંતર વિદ્યુતપ્રવાહધારિત તાર વચ્ચે લાગતું બળ (The Force between Two parallel Current Carrying Wires)

આકૃતિ 4.14માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે એકબીજાથી y અંતરે મુકેલા અને એક જ દિશામાં I_1 અને I_2 પ્રવાહોનું વહન કરતા બે અતિ લાંબા સમાંતર તારોને ધ્યાનમાં લો. અત્રે બંને તારો X-અક્ષને સમાંતર મૂકેલા છે.



આકૃતિ 4.14

હવે I_1 પ્રવાહધારિત પ્રથમ તાર 1થી y અંતરે ચુંબકીય ક્ષેત્ર (સમીકરણ (4.5.2) અનુસાર)

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{y}\hat{k} \tag{4.6.3}$$

આ ચુંબકીય ક્ષેત્ર બીજા તારનાં બધાં જ બિંદુઓએ સમાન છે અને તે Z દિશામાં છે. બીજા તારની l લંબાઈ દીઠ લાગતું ચુંબકીય બળ,

$$\vec{F}_2 = I_2\vec{l} \times \vec{B}_1 \quad \text{(સમીકરણ 4.6.2 અનુસાર)}$$

B_1નું મૂલ્ય સમીકરણ (4.4.3)માંથી ઉપર્યુક્ત સમીકરણમાં મૂકતાં,

$$\vec{F}_2 = I_1 I_2 \frac{\mu_0}{2\pi y} l\hat{i} \times \hat{k} \quad (\because \text{ પ્રવાહ } I_2 \text{ X દિશામાં છે.})$$

$$\therefore \vec{F}_2 = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2 l}{y}\hat{j} \tag{4.6.4}$$

ઉપર્યુક્ત સમીકરણ દર્શાવે છે કે બળ $\vec{F}_2$ ૠણ Y દિશામાં છે.

બીજા પ્રવાહધારિત તારને લીધે પ્રથમ તાર પર લાગતું બળ આ જ રીતે નીચે મુજબ છે :

$$\vec{F}_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2 l}{y}\hat{j} \tag{4.6.5}$$

ઉપર્યુક્ત સમીકરણ દર્શાવે છે કે આ બળ F_1 એટલે કે (I_1) તાર પર લાગતું બળ ધન Y દિશામાં છે.

$$\text{આમ, } \vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \tag{4.6.6}$$

બન્ને તારો વચ્ચે લાગતાં બળ બંને તારો વચ્ચે આકર્ષણ થતું હોવાનું સૂચવે છે.

જો બંને તારોમાંથી વહેતા વિદ્યુતપ્રવાહો પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં હોય, તો તેમની વચ્ચે અપાકર્ષણ ઉદ્‌ભવે છે.

સમીકરણ (4.6.6) પરથી સ્પષ્ટ છે કે અહીં પણ ન્યૂટનનો ગતિનો ત્રીજો નિયમ પળાય છે.

ઍમ્પિયરની વ્યાખ્યા :

સમીકરણ (4.6.4)માં જો

$I_1 = I_2 = 1A$, $y = 1$ m અને $l = 1$m લેવામાં આવે, તો

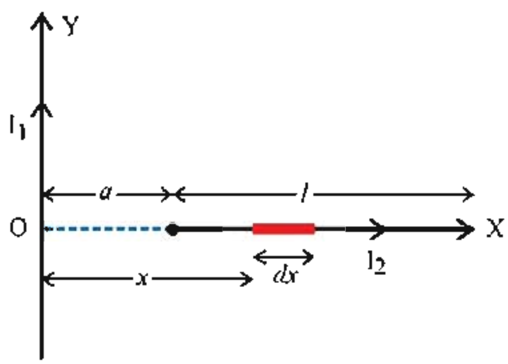
$$|\vec{F}_2| = \frac{\mu_0}{2\pi} = \frac{4\pi\times10^{-7}}{2\pi} = 2 \times 10^{-7} \text{ N} \tag{4.6.7}$$

આ હકીકતનો ઉપયોગ કરીને વિદ્યુતપ્રવાહના SI એકમ 'ઍમ્પિયર'ની વ્યાખ્યા નીચે મુજબ આપવામાં આવે છે :

"એકબીજાથી 1 m અંતરે શૂન્યાવકાશમાં રહેલા અતિ લાંબા, અવગણ્ય આડછેદવાળા બે સમાંતર સુરેખ તારમાંથી જે સમાન વિદ્યુતપ્રવાહને પ્રત્યેક તારમાંથી પસાર કરતાં, તારો વચ્ચે 1 m લંબાઈ દીઠ ઉદ્ભવતું ચુંબકીય બળ 2×10^{-7} N હોય તો, તે વિદ્યુતપ્રવાહને 1 ampere કહેવાય છે."

ઉદાહરણ 5 : આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે Y દિશામાં ગોઠવેલા એક અતિ લાંબા વાહક તારમાંથી વિદ્યુતપ્રવાહ I_1 પસાર થઈ રહ્યો છે. આ તારમાંથી જેનો એક છેડો a અંતરે છે, તેવો I_2 જેટલા વિદ્યુતપ્રવાહનું વહન કરતો l લંબાઈનો બીજો વાહક તાર X-અક્ષ પર ગોઠવ્યો છે, તો આ તાર પર Oના સંદર્ભમાં લાગતું ટૉર્ક શોધો.

ઉકેલ : Oથી x અંતરે વિદ્યુતપ્રવાહ-ખંડ $I_2 dx$ ધ્યાનમાં લો. આ ખંડ પર લાગતું બળ,



$$d\vec{F} = I_2 dx\hat{i} \times \vec{B}$$

જ્યાં, $\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}(-\hat{k})$

(અતિ લાંબા તાર વડે ઉદ્ભવતું ક્ષેત્ર)

$$\therefore d\vec{F} = I_2 dx\hat{i} \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}(-\hat{k})$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2 dx}{2\pi x}\hat{j}$$

$\therefore$ O ના સંદર્ભમાં આ ખંડ પર લાગતું ટૉર્ક,

$$d\vec{\tau} = x\hat{i} \times d\vec{F} = x\hat{i} \times \frac{\mu_0 I_1 I_2 dx}{2\pi x}\hat{j} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} dx\hat{k}$$

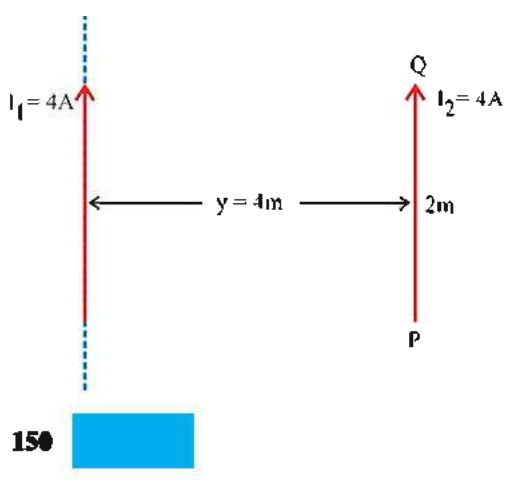
સમગ્ર તાર પર લાગતું ટૉર્ક, આ સમીકરણનું $x = a$ થી $x = a + l$ સુધી સંકલન લેવાથી મળે છે.

$$\therefore \vec{\tau} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\int_a^{a+l} dx\hat{k} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}[x]_a^{a+l}\hat{k} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}[a + l - a]\hat{k}$$

$$\therefore \vec{\tau} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi}\hat{k}$$

ઉદાહરણ 6 : આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે 2 m લંબાઈનો 4A વિદ્યુતપ્રવાહ ધરાવતો એક સુરેખ તાર PQ એક અતિ લાંબા તારને સમાંતર 4 m અંતરે મૂક્યો છે. જો અતિ લાંબા તારમાંથી પસાર થતો પ્રવાહ પણ 4A હોય, તો PQ તાર પર અતિ લાંબા તાર વડે લાગતું બળ શોધો.

ઉકેલ : અતિ લાંબો તાર, નાના તાર પર જે બળ લગાડે છે, તેટલું જ બળ ન્યૂટનના ગતિના ત્રીજા નિયમ અનુસાર નાનો તાર, અતિ લાંબા તાર પર લગાડે છે. એટલે આપણે અતિ લાંબા તાર વડે નાના તાર પર લાગતું બળ શોધીશું.



ધારો કે અતિ લાંબા તાર વડે નાના તાર પાસે ઉદ્ભવતું ક્ષેત્ર $\vec{B}$ છે.

$$\therefore \vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi y}\hat{n} \qquad (1)$$

જ્યાં $\hat{n}$ એ $\vec{B}$ની દિશામાં એકમસદિશ છે.

આ ક્ષેત્ર, નાના તાર પર, પુસ્તકના પાનાની અંદર જતી દિશામાં છે.

હવે, બળ, $\vec{F} = I_2\vec{l} \times \vec{B}$

$\therefore\ |\vec{F}| = I_2 l B\ (\because\ \vec{l}\ \perp\ \vec{B})$

આ સમીકરણમાં સમીકરણ (1)નો ઉપયોગ કરતાં,

$$\therefore\ |\vec{F}| = \frac{I_2 l \mu_0 I_1}{2\pi y}$$

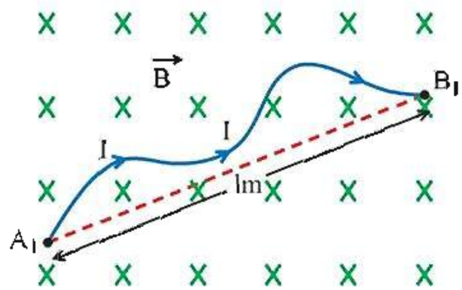
$$= \frac{4\times2\times4\times3.14\times10^{-7}\times4}{2\times3.14\times4}$$

$\therefore\ |\vec{F}| = 16 \times 10^{-7}$ N

આ બળ બંને તાર વચ્ચે આકર્ષણ થાય તેમ ઉદ્ભવે છે.

ઉદાહરણ 7 : આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે I જેટલા વિદ્યુતપ્રવાહનું વહન કરતો એક તાર, પુસ્તકના પાનમાં મૂક્યો છે. $\vec{B}$ જેટલા પ્રેરણવાળું નિયમિત ચુંબકીય ક્ષેત્ર પુસ્તકના પાનને લંબ છે અને તેની દિશા પુસ્તકના પાનમાં અંદર જતી દિશામાં છે, તો વાહક તાર પર લાગતું બળ શોધો.

બિંદુ A_1 અને B_1ને જોડતી રેખા (જે તારનો ભાગ નથી) આકૃતિમાં દર્શાવ્યા અનુસાર 1 m લંબાઈની છે.



ઉકેલ : $I\vec{dl}$ જેટલા વિદ્યુતપ્રવાહ-ખંડ પર, $\vec{B}$ જેટલું પ્રેરણ ધરાવતા ચુંબકીય ક્ષેત્રને કારણે લાગતું બળ,

$$\vec{dF} = I\vec{dl} \times \vec{B}$$

$\therefore$ સમગ્ર તાર પર લાગતું બળ,

$\vec{F} = \int I\cdot\vec{dl} \times \vec{B}$ (અહીં સંકલન સમગ્ર તાર પર છે.)

અત્રે, $\vec{B}$ અચળ હોવાથી તથા I પણ અચળ હોવાથી, તેમને સંકલનની બહાર નીચે દર્શાવ્યા અનુસાર લઈ શકાય :

$$\therefore\ \vec{F} = I[\int_{\text{આખા તાર પર}} \vec{dl}\,] \times \vec{B}$$

પણ, $\int\vec{dl} = \vec{A_1B_1} = 1\hat{n}\ (\because\ A_1B_1 = 1\text{m})$

જ્યાં, $\hat{n} = \vec{A_1B_1}$ દિશામાં એકમસદિશ

$\therefore\ \vec{F} = I\hat{n} \times \vec{B} \Rightarrow |\vec{F}| = IB$

4.7 ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં ગતિ કરતા વિદ્યુતભાર પર લાગતું બળ અને લૉરેન્ટ્ઝ બળ (Force Acting on an Electric Charge Moving in a Magnetic Field and Lorentz Force)

પ્રકરણ 3માં આપણે જોયું કે વાહકના A ક્ષેત્રફળવાળા આડછેદમાંથી પસાર થતો વિદ્યુતપ્રવાહ

$I = nAv_d q$

અહીં, q = ધન વિદ્યુતભારિત કણ પરનો વિદ્યુતભાર

n = વાહકના એકમ કદ દીઠ વિદ્યુતભારિત કણોની સંખ્યા

v_d = ડ્રિફ્ટવેગ

$\therefore\ I\vec{dl} = qnAv_d\vec{dl} = qnA\vec{v_d}\,dl\ (\because\ v_d$ અને dl એક જ દિશામાં છે.)

જો $I\vec{dl}$ પ્રવાહ-ખંડને $\vec{B}$ જેટલા પ્રેરણવાળા સમાન (નિયમિત) ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં મૂકવામાં આવે, તો તેના પર લાગતું બળ સમીકરણ (4.6.1) પરથી.

$$\vec{dF} = I\vec{dl} \times \vec{B}$$

$$\therefore \vec{dF} = qnAdl(\vec{v_d} \times \vec{B}) \qquad (4.7.1)$$

પરંતુ $nAdl$ = તારના આ ખંડમાં રહેલા વિદ્યુતભારિત કણોની સંખ્યા

$\therefore$ q જેટલો વિદ્યુતભાર ધરાવતા એક કણ પર લાગતું ચુંબકીય બળ (magnetic force),

$$\vec{F}_m = \frac{\vec{dF}}{nAdl} = \frac{qnAdl(\vec{v_d} \times \vec{B})}{nAdl}$$

$$\therefore \vec{F}_m = q(\vec{v_d} \times \vec{B}) \qquad (4.7.2)$$

$$\therefore |\vec{F}_m| = Bqv_d\sin\theta$$

હવે જો આ વિદ્યુતભાર ચુંબકીય ક્ષેત્ર, $\vec{B}$ ઉપરાંત $\vec{E}$ જેટલી તીવ્રતાવાળા વિદ્યુતક્ષેત્રમાંથી પણ પસાર થતો હોય તો, તેના પર વિદ્યુતબળ ($\vec{F}_e = q\vec{E}$) પણ લાગશે. આ સંજોગોમાં વિદ્યુતભાર પર લાગતું કુલ બળ,

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m$$

$$\therefore \vec{F} = q[\vec{E} + (\vec{v_d} \times \vec{B})] \qquad (4.7.3)$$

આ સમીકરણ વડે મળતા બળને લૉરેન્ટ્ઝ બળ કહે છે.

ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં ગતિ કરતા વિદ્યુતભારિત કણ પર લાગતું ચુંબકીય બળ, વેગને લંબ હોવાથી કાર્ય શૂન્ય હોય છે અને તેથી કણની ગતિ-ઊર્જા અચળ રહે છે, પરંત વેગની માત્ર દિશા જ બદલાય છે.

ચુંબકીય બળનું મૂલ્ય, કણના વેગ પર આધારિત છે. આવા બળને વેગ-આધારિત (velocity dependent) બળ કહે છે.

ઉદાહરણ 8 : $4\hat{k}$ T જેટલા સમાન ચુંબકીય ક્ષેત્ર તેમજ અમુક મૂલ્યના સમાન વિદ્યુતક્ષેત્રની સંયુક્ત અસર ધરાવતા વિસ્તારમાંથી 2 C વિદ્યુતભાર ધરાવતો કણ $25\hat{j}$ m s^{-1}ના વેગથી પસાર થાય છે. જો આ કણ પર લાગતું લૉરેન્ટ્ઝ બળ $400\hat{i}$ N હોય, તો આ વિસ્તારમાં પ્રવર્તતું વિદ્યુતક્ષેત્ર શોધો.

ઉકેલ : લૉરેન્ટ્ઝ બળ

$$\vec{F} = q[\vec{E} + (\vec{v_d} \times \vec{B})]$$

અહીં, $q = 2$ C, $\vec{v} = 25\hat{j}$ m s^{-1}, $B = 4\hat{k}$ T, $\vec{F} = 400\hat{i}$

$$\therefore 400\hat{i} = 2[\vec{E} + (25)(4)(\hat{j} \times \hat{k})]$$

$$= 2\vec{E} + 200\hat{i}$$

$$\therefore 2\vec{E} = 200\hat{i}$$

$$\therefore \vec{E} = 100\hat{i} \text{ V m}^{-1}$$

ઉદાહરણ 9 : તાંબામાં એક ઘનમીટર દીઠ 8×10^{28} વાહક ઇલેક્ટ્રૉન હોય છે. 4.0×10^{-3}T ના ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં લંબરૂપે 1 m લંબાઈવાળા અને 8×10^{-6} m^2 આડછેદનું ક્ષેત્રફળ ધરાવતા વિદ્યુતપ્રવાહધારિત તાંબાના તાર પર 8.0×10^{-2} Nનું બળ લાગે છે, તો આ તારમાં મુક્ત ઇલેક્ટ્રૉનનો ડ્રિફ્ટવેગ ગણો.

ઉકેલ : તાર પર લાગતું ચુંબકીય બળ નીચેના સૂત્રથી આપી શકાય :

$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$. અત્રે તાર ચુંબકીય ક્ષેત્રને લંબરૂપે હોવાથી

$|\vec{F}| = IlB$, જ્યાં $F = 8.0 \times 10^{-2}$ N

$B = 4.0 \times 10^{-3}$T અને

$l = 1$ m

$$\therefore I = \frac{F}{Bl} = \frac{8\times10^{-2}}{4\times10^{-3}\times1} = 20 \text{ A}$$

હવે, $I = Av_d n.e$

n = એકમકદમાં રહેલા ઇલેક્ટ્રૉનની સંખ્યા $= 8 \times 10^{28}$

$A = 8 \times 10^{-6}$ m^2 અને $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C

$$\therefore v_d = \frac{I}{nAe}$$

$$= \frac{20}{8\times10^{28}\times8\times10^{-6}\times1.6\times10^{-19}} = 1.953 \times 10^{-4}$$

$$\approx 2 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}$$

ઉદાહરણ 10 : ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં ગતિ કરતા વિદ્યુતભાર પર લાગતા બળનું સૂત્ર લખો. તે પરથી ન્યૂટનનું ગતિનું સમીકરણ મેળવી સાબિત કરો કે કણની ગતિ-ઊર્જા સમય સાથે અફર રહે છે.

ઉકેલ : $\vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B})$

$$\therefore m\frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

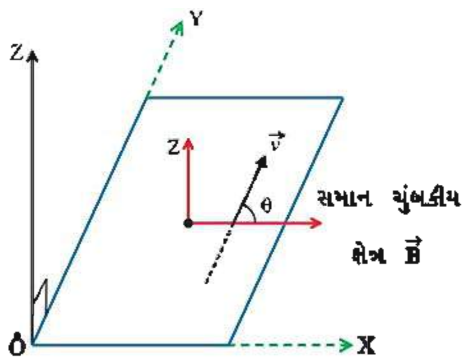
બંને બાજુ $\vec{v}$ વડે અદિશ ગુણાકાર કરતાં,

$$m\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v}\cdot(\vec{v} \times \vec{B})$$

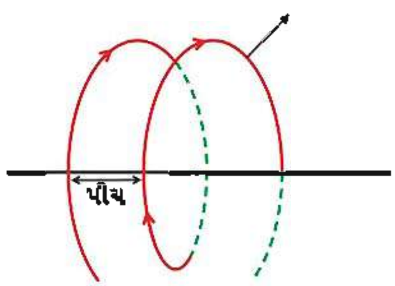
$\therefore m\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v}) = 0$ ($\because$ $\vec{v}$ અને $\vec{v} \times \vec{B}$ પરસ્પર લંબ છે.)

$\therefore \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2$ = અચળ

ઉદાહરણ 11 : ધારો કે આકૃતિ (a)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે q વિદ્યુતભાર ધરાવતો m દળનો એક કણ X દિશામાં પ્રસ્થાપિત કરેલા નિયમિત ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં ક્ષેત્ર સાથે θ કોણે XZ સમતલમાં v વેગથી આપાત થાય છે. આ કણનો ગતિપથ હેલિકલ (સર્પિલ) છે, તેમ દર્શાવો અને આ પથની pitch (પેચ) શોધો.



(a)



(b)

ઉકેલ : વેગ vના XZ સમતલમાં બે ઘટકો લેતાં,

$v_z = v\ sin\theta$ અને $v_x = v\ cos\theta$

હવે, v_x ઘટક ચુંબકીય ક્ષેત્રની દિશામાં જ હોવાથી $qv_x\hat{i} \times B\hat{i} = 0$ મુજબ આ દિશામાં કણ પર કોઈ જ બળ નહિ લાગે. આથી, $v_x = v\ cos\theta$ જેટલા અચળ વેગથી X દિશામાં ગતિ ચાલુ રાખશે.

હવે, v_z ઘટકને લીધે લાગતું બળ $= qv_z\hat{k} \times B\hat{i} = qv_zB\,\hat{j}$. આ બળ સતત v_z ને લંબરૂપે લાગશે. પરિણામે v_z જેટલા રેખીય વેગથી YZ સમતલમાં કણ વર્તુળમય ગતિ કરશે.

વર્તુળગતિ માટે કેન્દ્રગામી બળ, $\frac{mv_z^2}{r} = qv_zB$

$\therefore\ r = \frac{mv_z}{qB} = \frac{mv\ sin\theta}{qB}$

આમ, વર્તુળની ત્રિજ્યા આ સૂત્ર પ્રમાણે શોધી શકાય :

આવર્તકાળ, $T = \frac{2\pi r}{v_z}$

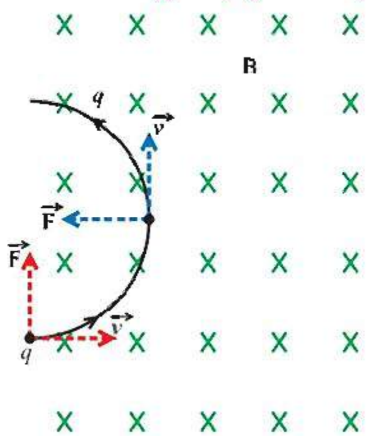
$\therefore\ T = \frac{2\pi r}{v\ sin\theta} = \frac{2\pi m}{qB}$

આ આવર્તકાળ જેટલા સમયગાળામાં કણ X દિશામાં v_xT અંતર કાપે છે.

$\therefore$ X દિશામાં કાપેલું અંતર$= \frac{2\pi m v_x}{qB} = \frac{2\pi mv\ cos\theta}{qB}$

ઉપર્યુક્ત ચર્ચા પરથી સ્પષ્ટ છે કે, કણ જેની અક્ષ X દિશામાં હોય તેવા helical (સર્પિલ) પથ પર ગતિ કરે છે. અહીં v_xT અંતરને helixની pitch કહે છે. (જુઓ આકૃતિ (b)).

4.8 સાઈક્લોટ્રૉન (Cyclotron)



આકૃતિ 4.15 ચુંબકીય ક્ષેત્રને લંબરૂપે પ્રવેશતા વિદ્યુતભારની ગતિ

ન્યુક્લિયસના બંધારણના અભ્યાસમાં ખૂબ જ (ઊંચી) વધારે ગતિ-ઊર્જા ધરાવતા કણોનું ન્યુક્લિયસ પર પ્રતાડન કરવું પડતું હોય છે. આવા અભ્યાસો માટે વિદ્યુતભારિત કણોને પ્રવેગિત કરવા પડે છે. આ માટે, ઈ. સ. 1934માં E.O. Lawrence અને M. S. Livigston વૈજ્ઞાનિકોએ સૌપ્રથમ સાઈક્લોટ્રૉન બનાવ્યું હતું.

આ ઉપકરણમાં ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં લંબરૂપે ગતિ કરતા વિદ્યુતભારિત કણ પર લાગતા બળનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. તેથી તેની કાર્યપદ્ધતિ સમજવા માટે ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં લંબરૂપે ગતિ કરતા કણની ગતિનો અભ્યાસ જરૂરી બને છે.

આકૃતિ 4.15માં $\vec{B}$ પ્રેરણવાળા ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં $\vec{v}$ વેગથી ગતિ કરતા q વિદ્યુતભાર ધરાવતા કણ ધ્યાનમાં લો. અત્રે ચુંબકીય ક્ષેત્ર $\vec{B}$ પુસ્તકના પાનને લંબરૂપે અંદર જતી દિશામાં છે. તથા કણ પુસ્તકના પાનના સમતલમાં ગતિ કરે છે.

આ કણ પર લાગતું ચુંબકીય બળ સમીકરણ (4.7.2) મુજબ $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$ થાય.

આ બળનું મૂલ્ય $qvBsin\theta$ જેટલું હોય છે અને તેની દિશા $\vec{v}$ અને $\vec{B}$થી બનતા સમતલને લંબ હોય છે. અત્રે કણ ચુંબકીય ક્ષેત્રને લંબરૂપે ગતિ કરતું હોવાથી આ બળનું મૂલ્ય qvB જેટલું છે. અત્રે સ્પષ્ટ છે કે આ સંજોગોમાં કણનો ગતિપથ વર્તુળાકાર બનશે. વળી, આ બળ દરેક ક્ષણે વેગને લંબદિશામાં લાગતું હોવાથી તેના મૂલ્યમાં કોઈ ફેરફાર થશે નહિ. માત્ર તેની દિશા સતત બદલાયા કરશે અને પરિણામે આ કણ નિયમિત વર્તુળાકાર ગતિ કરશે. આ ગતિ માટે જરૂરી કેન્દ્રગામી બળ એ ચુંબકીય બળ qvB છે. આમ,

$$\therefore \ qvB = \frac{mv^2}{r}$$

જ્યાં, m કણનું દળ તથા r વર્તુળાકાર માર્ગની ત્રિજ્યા છે.

$$\therefore \ r = \frac{mv}{qB} = \frac{p}{qB} \qquad (4.8.1)$$

સમીકરણ (4.8.1) દર્શાવે છે કે કણના વર્તુળ માર્ગની ત્રિજ્યા કણના વેગમાન $p = mv$ને સમપ્રમાણ છે. જો કણનું વેગમાન વધે તો કણના ગતિ માર્ગની ત્રિજ્યા પણ વધે.

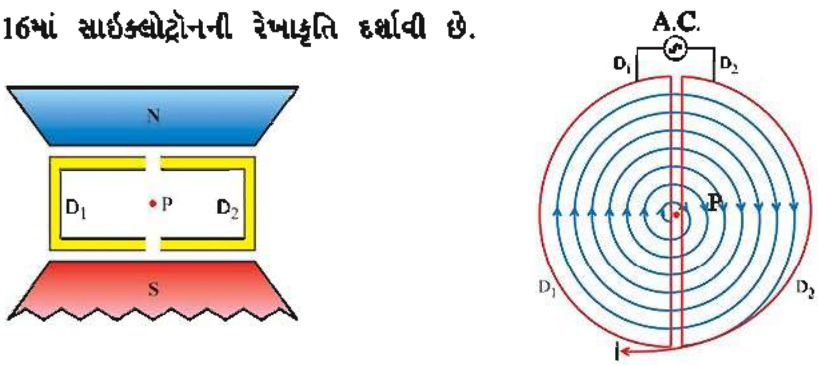
અત્રે વર્તુળાકાર ગતિ થતી હોવાથી $v = r\omega_C$ લખી શકાય. ω_Cએ કણની કોણીય આવૃત્તિ છે જેને સાઇક્લોટ્રૉનની કોણીય આવૃત્તિ કહેવામાં આવે છે. આ મૂલ્ય સમીકરણ (4.8.1)માં મૂકતાં,

$$r = \frac{m(\omega_C r)}{qB}$$

$$\therefore \ \omega_C = \frac{qB}{m} \qquad (4.8.2)$$

અત્રે સ્પષ્ટ છે કે કણની કોણીય આવૃત્તિ ω_C વેગમાન પર આધારિત નથી. તેથી કણનું રેખીય વેગમાન વધારતાં તેના વર્તુળ ગતિમાર્ગની ત્રિજ્યા જરૂર વધે પણ આવૃત્તિ ω_Cમાં કોઈ જ ફેરફાર થાય નહિ. આ હકીકતનો ઉપયોગ સાઇક્લોટ્રૉનની રચનામાં કરવામાં આવે છે.

આકૃતિ 4.16માં સાઇક્લોટ્રૉનની રેખાકૃતિ દર્શાવી છે.



આકૃતિ 4.16 સાઇક્લોટ્રૉનની રેખાકૃતિ

રચના : સાઇક્લોટ્રૉનમાં આકૃતિમાં દર્શાવ્યા અનુસાર અર્ધવર્તુળાકાર, અંગ્રેજી અક્ષર D આકારનાં બે પોલા બૉક્સ તેમના વ્યાસ એકબીજાની સામસામે આવે અને તેમની વચ્ચે થોડી જગ્યા રહે તેમ ગોઠવવામાં આવે છે.

વળી, આકૃતિ 4.16માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે પ્રબળ વિદ્યુતચુંબકો એવી રીતે ગોઠવવામાં આવે છે કે આ બંને બૉક્સ વડે ઘેરાતા અવકાશમાં નિયમિત ચુંબકીય ક્ષેત્ર ઉત્પન્ન થાય. આ બૉક્સના આકાર D જેવા હોવાથી તેમને Dees કહે છે. બંને Dees વચ્ચે ઉચ્ચ આવૃત્તિવાળો A.C. વૉલ્ટેજ લગાડવામાં આવે છે. સમગ્ર રચનાને એક શૂન્યાવકાશિત ચેમ્બરમાં મૂકવામાં આવે છે, જેથી વિદ્યુતભારની ગતિ દરમિયાન તેની હવાના કણો સાથેની સંભવિત અથડામણો નિવારી શકાય.

કાર્ય : ધારો કે $t = 0$ સમયે બે P વચ્ચેના ગેપના મધ્યબિંદુ P પાસેથી વિદ્યુતભારિત કણને મુક્ત કરવામાં આવે છે. બરાબર આ સમયે ધારો કે કોઈ એક Dee ઋણ વિદ્યુતસ્થિતિમાને છે. મુક્ત થયેલ કણ જો ધન વીજભારિત હોય તો તે આ Dee તરફ આકર્ષાય છે. વળી, Dee વચ્ચેના અવકાશમાં ચુંબકીય ક્ષેત્ર હોવાથી આ કણ, ગેપમાં વર્તુળમાર્ગે ગતિ કરી Deeમાં ચુંબકીય ક્ષેત્રને લંબરૂપે અમુક વેગમાન સાથે દાખલ થાય છે. હવે Deeમાં તો વિદ્યુતક્ષેત્ર નથી, તેથી આ કણ પોતાના વેગમાન અનુસાર અમુક ત્રિજ્યાનો વર્તુળાકાર માર્ગ રચી ગતિ કરતો આગળ વધી, અર્ધવર્તુળ પૂરું કરી Deeમાંથી બહાર આવે છે.

હવે, આ કણ Deeમાંથી જે ક્ષણે બહાર આવે બરાબર તે જ ક્ષણે સામેનો Dee ઋણ સ્થિતિમાને આવી જાય, તો કણ બીજી Deeમાં પ્રવેશે તે પહેલાં, ગેપમાંથી પસાર થતી વખતે વિદ્યુતક્ષેત્રને લીધે વેગમાન મેળવતો જાય છે. હવે તે બીજી Deeમાં વધારે વેગમાન સાથે દાખલ થતો હોવાથી વધેલી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળમાર્ગ પર ગતિ કરે છે. હવે જ્યારે

આ કણ બીજી Deeમાંથી બહાર નીકળે, ત્યારે તેની સામેની Dee પર ઋણ સ્થિતિમાન પ્રસ્થાપિત થાય, તો હવે તે આના કરતાં પણ વધારે ત્રિજ્યાના માર્ગ પર આ Deeમાં ગતિ કરે છે.

જો આ પ્રક્રિયાનું નિયમિત રીતે પુનરાવર્તન થયા કરે તો કણ ક્રમશઃ વધતી જતી ત્રિજ્યાઓના માર્ગ પર ગતિ કરતો જાય. પરંતુ, આ દરેક પરિભ્રમણ માટે આવૃત્તિ ω_cનું મૂલ્ય તો અચળ જ રહે છે. આ પરિસ્થિતિ સાકાર કરી શકાય તે માટે AC વૉલ્ટેજની આવૃત્તિ (f_{AC}) કણની પરિભ્રમણની આવૃત્તિ (f_C) જેટલી રાખવી જોઈએ. (અત્રે $\omega_C = 2\pi f_C$). આ તો થયો અનુનાદ. ($f_{AC} = f_C$)

દરેક પરિભ્રમણ વખતે કણ A.C. વૉલ્ટેજના કારણે ઊર્જા મેળવતો જાય છે અને જ્યારે તે Deeના પરિઘ નજીક પહોંચે છે, ત્યારે તેણે મહત્તમ ગતિ-ઊર્જા પ્રાપ્ત કરી હોય છે.

હવે આ કણોને કોઈ ટાર્ગેટ (Target) પર અથડાવવા હોય, તો તેમને Deeમાંથી બહાર કાઢવા માટે આ માટે આકૃતિ 4.16 (b)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે કણ જ્યારે Deeના પરિઘ પર આવે છે ત્યારે, એક વધારાના ચુંબકીય ક્ષેત્ર વડે તેને વિચલિત કરી Deeમાંથી બહાર ખેંચી લેવામાં આવે છે અને યોગ્ય રીતે ગોઠવેલા Target પર પ્રતાડન કરીને તે Target પરના ન્યુક્લિયસ પર અથડામણ ઊપજાવી શકાય છે.

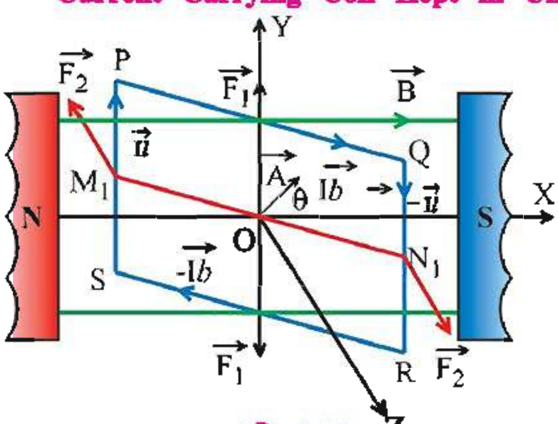
ઉપર્યુક્ત ચર્ચામાં આપણે ધન વીજભારિત કણ (દા.ત., પ્રોટોન, ધન આયનો)ની વાત કરી. ન્યુક્લિયર પ્રક્રિયાઓનો અભ્યાસ કરવા માટે, કૃત્રિમ રેડિયો ઍક્ટીવ તત્ત્વો તૈયાર કરવા માટે, કેન્સર જેવાં દર્દોની સારવાર માટે અને ઘન પદાર્થોમાં આયન ઇમ્પ્લાન્ટેશન કરવા માટે આવા પ્રવેગિત કણો ઉપયોગમાં લઈ શકાય છે.

મર્યાદા : જો કણોનો વેગ ક્રમશઃ વધી પ્રકાશના વેગની નજીક જતો જાય, તો સાપેક્ષવાદ અનુસાર કણનું દળ અચળ રહેવાને બદલે વધે છે. આ સ્થિતિમાં અનુનાદની શરત ($f_{AC} = f_C$) જળવાતી નથી.

ઇલેક્ટ્રૉન જેવા હલકા કણોને પ્રવેગિત કરવા માટે AC વૉલ્ટેજની આવૃત્તિ ખૂબ મોટી (GHzના ક્રમની) રાખવી પડે છે.

વળી Deeનું કદ પણ મોટું હોવાથી, મોટા વિસ્તારમાં ચુંબકીયક્ષેત્રને નિયમિત અને અચળ રાખવું મુશ્કેલ પડે છે. આથી સિન્ક્રોટ્રોન (Synctrotron) જેવાં પ્રવેગક સાધનો વિકસાવવામાં આવ્યાં છે.

4.9 નિયમિત ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં રાખેલ વિદ્યુતપ્રવાહધારિત ગૂંચળા પર લાગતું ટૉર્ક (Torque Acting on a Current Carrying Coil Kept in Uniform Magnetic Field)



આકૃતિ 4.17

આકૃતિ 4.17માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ચુંબકના બે ધ્રુવો N અને S વચ્ચે સમાન ચુંબકીય ક્ષેત્ર $\vec{B}$માં I જેટલો વિદ્યુતપ્રવાહ ધરાવતા, l અને b લંબાઈની બાજુઓવાળા લંબચોરસ ગૂંચળાને રાખેલ છે. અહીં PQ = b અને QR = l છે. અત્રે ચુંબકીય ક્ષેત્ર $\vec{B}$, X દિશામાં છે.

$\therefore \vec{B} = B\hat{i}$

હવે PQ બાજુ વડે રચાતો વિદ્યુતપ્રવાહ-ખંડ = $I\vec{b}$ થશે.

આ પ્રવાહ-ખંડ પર લાગતું બળ, $\vec{F_1} = I\vec{b} \times \vec{B}$. (ધન Y દિશામાં) છે. તે જ પ્રમાણે RS વડે રચાતા પ્રવાહ-ખંડ પર લાગતું બળ, $\vec{F_1}' = I\vec{b} \times \vec{B}$ (ઋણ Y દિશામાં) છે.

અત્રે $\vec{F_1}$ અને $\vec{F_1}'$ સમાન મૂલ્ય અને પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં એકરેખસ્થ હોવાથી એકબીજાની અસર નાબૂદ કરે છે.

હવે, QR બાજુ વડે રચાતો વિદ્યુતપ્રવાહ-ખંડ = $-Il\hat{j}$ ધ્યાનમાં લો. તેના પર લાગતું બળ,

$$\vec{F_2} = -Il\hat{j} \times \vec{B}\hat{i} = -IlB(\hat{j} \times \hat{i}) = IlB\hat{k} \tag{4.9.1}$$

આ બળ ધન Z-દિશામાં છે.

આ જ પ્રમાણે SP બાજુ વડે રચાતા વિદ્યુતપ્રવાહ-ખંડ = $Il\hat{j}$ અને તેના પર લાગતું બળ

$$\vec{F_2} = Il\hat{j} \times \vec{B}\hat{i} = -IlB\hat{k} \tag{4.9.2}$$

આ બળ ઋણ Z દિશામાં છે.

સમીકરણ (4.9.1) અને (4.9.2) પરથી $|\vec{F_2}| = |\vec{F_2}'|$

આકૃતિ 4.17 પરથી સ્પષ્ટ છે કે આ બળો પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં છે. પરંતુ એકરેખસ્થ નથી, આથી આ બળોનું જોડકું બળયુગ્મ (couple or couple of force) રચે છે.

ઋણ Y દિશામાં દૃષ્ટિ રાખી ગૂંચળાને ઉપરથી જોતાં $\vec{F_2}$, $\vec{F_2}'$, $\vec{A}$ અને X-અક્ષની સ્થિતિ આકૃતિ 4.18માં દર્શાવ્યા મુજબ હોય છે. અત્રે $\vec{A}$ ગૂંચળાના સમતલના ક્ષેત્રફળને રજૂ કરતો સદિશ છે, જે $\vec{B}$ સાથે θ કોણ બનાવે છે.

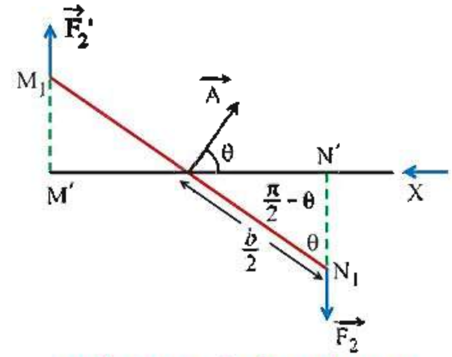
આથી ગૂંચળા પર લાગતું,

ટૉર્ક (બળયુગ્મની ચાકમાત્રા) = (એક બળનું માન) (બંને બળો વચ્ચેનું લંબઅંતર)

અત્રે બંને બળો વચ્ચેનું લંબઅંતર (આકૃતિ 4.18 પરથી)

$$M'N' = 2\frac{b}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = b\ \sin\theta \qquad (4.9.3)$$

$$\therefore \text{ ટૉર્ક } |\vec{\tau}| = |\vec{F_2}|\,(M'N') = (IlB)(b\ \sin\theta) \qquad (4.9.4)$$



આકૃતિ 4.18 લંબચોરસ ગૂંચળા પર લાગતું ટૉર્ક

$$\therefore |\vec{\tau}| = IAB\ \sin\theta$$

જ્યાં lb = A ગૂંચળાનું ક્ષેત્રફળ છે.

N આંટાવાળા ગૂંચળા માટે

$$|\vec{\tau}| = NIAB\ \sin\theta \qquad (4.9.5)$$

જો ગૂંચળાના ક્ષેત્રફળ Aને સદિશ વડે દર્શાવીએ તો સમીકરણ (4.9.5) સદિશસ્વરૂપે નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

$$\vec{\tau} = NI\vec{A} \times \vec{B} \qquad (4.9.6)$$

આ ટૉર્ક ઋણ Y દિશામાં છે.

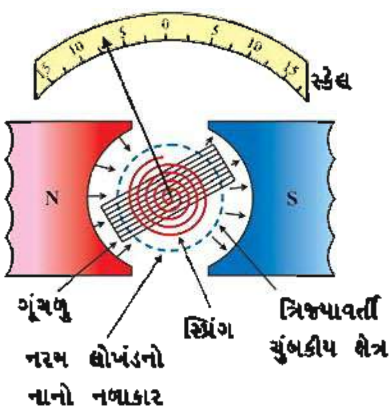
$NI\vec{A}$ને ગૂંચળા સાથે સંકળાયેલ ચુંબકીય ડાઇપોલ-મોમેન્ટ (Magnetic Dispolemoment) $\vec{\mu}$ કહે છે.

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \qquad (4.9.7)$$

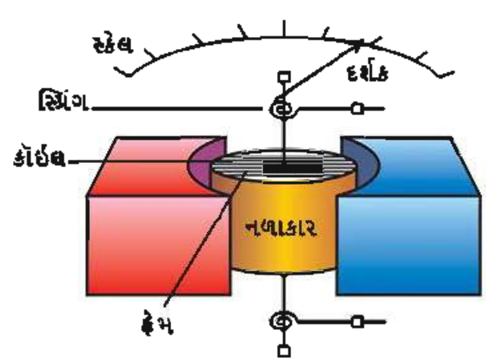
$\vec{\mu}$ની દિશા જમણા હાથના સ્ક્રૂના નિયમ પરથી શોધી શકાય. એટલે કે જમણા હાથના સ્ક્રૂને ગૂંચળાના સમતલને લંબરૂપે મૂકી તેને વિદ્યુતપ્રવાહની દિશામાં ફેરવતાં જે દિશામાં તે ખસે તે દિશામાં $\vec{\mu}$ હોય છે. સમીકરણ (4.9.7) ગમે તે આકારના ગૂંચળા માટે સાચું છે.

4.10 ગૅલ્વેનોમીટર (Galvanometer)

સૂક્ષ્મ વિદ્યુતપ્રવાહના માપન અને તેની હાજરીની નોંધ લેવા માટે ગૅલ્વેનોમીટરનો ઉપયોગ થાય છે.



(a)



(b)

(માત્ર જાણકારી માટે)

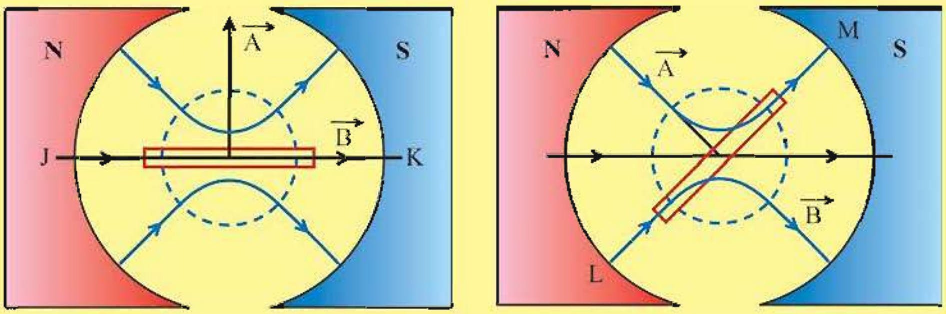
આકૃતિ 4.19 ગૅલ્વેનોમીટરની રચના

આકૃતિ 4.19માં ચલિત (Moving) અને કિલકિત (Pivoted) ગૂંચળાવાળા ગૅલ્વેનોમીટરને દર્શાવ્યું છે. ગૅલ્વેનોમીટરમાં સ્થાયી લોહચુંબકના બે નળાકાર ધ્રુવો વચ્ચે હલકી (બિનચુંબકીય) લંબચોરસ ફ્રેમ પર તાંબાના પાતળા (અલગ કરેલા) તાર વીંટાળીને બનાવેલું ગૂંચળું ઘર્ષણરહિત આધારો પર ભ્રમણ કરી શકે તેમ ગોઠવવામાં આવે છે. કેન્દ્રવર્તી સમાન ચુંબકીય ક્ષેત્ર ઉત્પન્ન કરવા માટે ગૂંચળાની અક્ષ પર, ગૂંચળાને અડકે નહિ તે રીતે, નરમ લોખંડનો નાનો નળાકાર રાખવામાં આવે છે. ગૂંચળામાંથી વિદ્યુતપ્રવાહ પસાર કરતાં ચુંબકીય ક્ષેત્રને કારણે તેના (ગૂંચળા) પર ટૉર્ક લાગે છે અને ગૂંચળું સ્થિર કોણાવર્તન દર્શાવે છે. ગૂંચળાનું સ્થિર કોણાવર્તન ગૂંચળા સાથે જોડેલા દર્શકની (Pointer) મદદથી શોધી શકાય છે. અત્રે દર્શક યોગ્ય સ્કેલ પર ફરી શકે તેવી ગોઠવણ કરેલી હોય છે. દર્શકના સ્કેલ પરના સ્થાન પરથી ગૂંચળામાંથી પસાર થતા વિદ્યુતપ્રવાહના માપની જાણકારી મેળવી શકાય છે.

સિદ્ધાંત અને કાર્ય : જો ગૂંચળાના ક્ષેત્રફળ રજૂ કરતો સદિશ ચુંબકીય ક્ષેત્ર સાથે θ કોણ રચતો હોય તો ગૂંચળા પર લાગતું ટૉર્ક $\tau = NIAB\sin\theta$ (4.10.1)

(જ્યાં, N = ગૂંચળાના આંટાઓની સંખ્યા)

(**માત્ર જાણકારી માટે :** પ્રસ્તુત કિસ્સામાં ચુંબકીય ક્ષેત્ર ત્રિજ્યાવર્તી છે.)



સ્થિતિ (1) આકૃતિ 4.20 સ્થિતિ (2)

આકૃતિ 4.20માં નરમ લોખંડના નળાકારની હાજરીમાં મળતું ત્રિજ્યાવર્તી ચુંબકીય ક્ષેત્ર દર્શાવ્યું છે. અહીં સરળતા માટે થોડીક જ ક્ષેત્રરેખાઓ દર્શાવી છે. હવે ગૂંચળું જ્યારે સ્થિતિ (1)માં હોય ત્યારે માત્ર JK ક્ષેત્રરેખા અસરકારક હોય છે. આ સ્થિતિમાં ગૂંચળાના ક્ષેત્રફળ $\vec{A}$ ચુંબકીય ક્ષેત્રરેખા $\vec{B}$ વચ્ચેનો કોણ 90°.

તેવી જ રીતે જ્યારે ગૂંચળું સ્થિતિ (2)માં હોય ત્યારે LM ક્ષેત્રરેખા અસરકારક બને છે અને તે સ્થિતિમાં પણ $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ વચ્ચેનો કોણ 90°નો છે. આમ, ગૂંચળાના કોઈ પણ કોણાવર્તન માટે $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ વચ્ચેનો કોણ 90° રહે છે.

ગૂંચળાની કોઈ પણ કોણીય સ્થિતિમાં, ત્રિજ્યાવર્તી ચુંબકીય ક્ષેત્રને કારણે $\vec{A}$ અને $\vec{B}$ વચ્ચેનો કોણ 90°નો રહે છે.

$\therefore \tau = NIAB,$ (4.10.2)

જેને આવર્તક ટૉર્ક (જેના લીધે ગૂંચળું આવર્તન પામે છે) કહે છે.

ગૂંચળાના કોણાવર્તનને લીધે તેના છેડા પર રહેલી સ્પ્રિંગોમાં પુનઃસ્થાપક ટૉર્ક ઉદ્ભવે છે, જેનું મૂલ્ય ગૂંચળાના કોણાવર્તન (ધારો કે ϕ)ના સમપ્રમાણમાં હોય છે.

$\therefore \tau$ (પુનઃસ્થાપક ટૉર્ક) $= k\phi$ (4.10.3)

અત્રે k એ સ્પ્રિંગોનો અસરકારક વળ-અચળાંક છે.

જો ગૂંચળું ϕ જેટલું કોણાવર્તન કરી સ્થિર થતું હોય, તો આવર્તક ટૉર્ક = પુનઃસ્થાપક ટૉર્ક થાય.

$NIAB = k\phi$

$$\therefore I = \left[\frac{k}{NAB}\right]\phi \qquad (4.10.4)$$

$$\therefore I \propto \phi \qquad (4.10.5)$$

ગૅલ્વેનોમીટરના સ્કેલનું યોગ્ય અંકન કરી ϕ જાણવાથી I શોધી શકાય છે.

સમીકરણ (4.10.5) પરથી,

$$\frac{\phi}{I} = \frac{NAB}{k} \qquad (4.10.6)$$

જ્યાં, $\frac{\phi}{I}$ને ગૅલ્વેનોમીટરની પ્રવાહ-સંવેદિતા (S) કહે છે. આમ, એકમપ્રવાહ દીઠ મળતા આવર્તનને ગૅલ્વેનોમીટરની પ્રવાહ-સંવેદિતા કહે છે. પ્રવાહ-સંવેદિતા વધારવા માટેના એક ઉપાય તરીકે વધુ પ્રબળ ચુંબકીય ક્ષેત્ર $\vec{B}$નો ઉપયોગ કરવો જોઈએ.

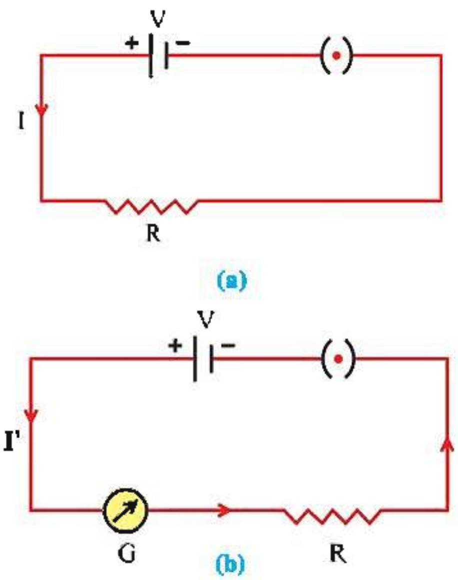
અતિ સૂક્ષ્મ વિદ્યુપ્રવાહ (10^{-11} Aના ક્રમના) વિદ્યુતપ્રવાહો માપવા માટે સ્થિતિસ્થાપક તાર વડે લટકાવેલા ગૂંચળાવાળા ગૅલ્વેનોમીટર વપરાય છે.

4.10.1 વિદ્યુતપ્રવાહ અને વિદ્યુતસ્થિતિમાનના તફાવતનું માપન (Measurement of Electric Current અને Potential Difference)

કોઈ પણ વિદ્યુતપરિપથ (સર્કિટ)માંના ઘટક સાથે સંકળાયેલા પ્રાચલો જેવા કે તેમાંથી પસાર થતો વિદ્યુતપ્રવાહ તેમજ તેના બે છેડા વચ્ચેનો વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત (વૉલ્ટેજ) માપવાની જરૂરિયાત ઊભી થતી હોય છે. આ રાશિઓ માપવા માટેનાં ઉપકરણોને અનુક્રમે ઍમીટર અને વૉલ્ટમીટર તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. વિદ્યુતપ્રવાહ કે વૉલ્ટેજ માપવા માટે પાયાનું ઉપકરણ તે ગૅલ્વેનોમીટર છે.

4.10.1 (a) ઍમીટર (Ammeter)

વિદ્યુતપ્રવાહ માપવા માટે જે ઘટકમાંથી વહેતો વિદ્યુતપ્રવાહ માપવો હોય તેની સાથે ગૅલ્વેનોમીટરને શ્રેણીમાં જોડવું પડે છે તેમજ ઘટકને બે છેડા વચ્ચેનો વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત માપવો હોય તો આ બે છેડા વચ્ચે ઘટકને સમાંતર ગૅલ્વેનોમીટરને જોડવું પડે છે.



આકૃતિ 4.21

ગૅલ્વેનોમીટરને વ્યવહારમાં સીધેસીધું ઍમીટર (પ્રવાહમાપક) તરીકે વાપરવામાં બે મુશ્કેલીઓ ઉદ્ભવે છે.

(1) સર્કિટના કોઈ ઘટકમાંથી વહેતો વિદ્યુતપ્રવાહ માપવા માટે પ્રવાહમાપકને તે ઘટક સાથે શ્રેણીમાં જોડવું પડે. ઉદાહરણ તરીકે આકૃતિ 4.21(a)માં દર્શાવેલ પરિપથમાં આવેલ અવરોધ Rમાંથી વહેતો વિદ્યુતપ્રવાહ માપવો છે. આ માટે પ્રવાહમાપકને આકૃતિ 4.21(b)માં દર્શાવ્યા મુજબ અવરોધ R સાથે શ્રેણીમાં જોડેલું છે. આ રીતે જોડાણ કરતાં ગૅલ્વેનોમીટરનો અવરોધ પરિપથમાં ઉમેરાય છે અને પરિપથનો કુલ અવરોધ બદલાતાં, જે પ્રવાહ માપવો છે. તેનું મૂલ્ય જ બદલાઈ જાય છે. પરિણામે પ્રવાહનું સાચું મૂલ્ય મળતું નથી. આ હકીકત દર્શાવે છે કે પ્રવાહમાપકનો અવરોધ શક્ય તેટલો નાનો (સૈદ્ધાંતિક રીતે શૂન્ય) હોવો જોઈએ.

(2) આ ઉપરાંત ચલિત ગૂંચળાવાળા ગૅલ્વેનોમીટર અત્યંત સંવેદનશીલ હોય છે. એક ઍમ્પિયરના ખૂબ જ નાના અંશ (10^{-6} Aના ક્રમનો) જેટલો પ્રવાહ તેમાંથી પસાર કરતાં તેમનું પૂર્ણ સ્કેલ આવર્તન થઈ જાય છે.

જે પ્રવાહ માટે ગૅલ્વેનોમીટર પૂર્ણસ્કેલ આવર્તન દર્શાવે તેને ગૅલ્વેનોમીટરની પ્રવાહક્ષમતા (I_G) કહે છે. આથી ગૅલ્વેનોમીટરનો ઉપયોગ તેની પ્રવાહક્ષમતા I_G કરતાં વધારે પ્રવાહના માપન માટે કરવાથી તેને નુકસાન થવાની શક્યતા રહે છે.

ઉપરાંત તેની કોઇલના તાંબાના પાતળા તારમાં વધુ પડતો વિદ્યુતપ્રવાહ પસાર થવાથી I^2Rt મુજબ ઉષ્મા ઉત્પન્ન થવાથી તે બળી જવાની સંભાવના રહે છે.

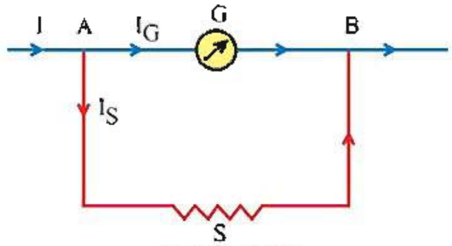
ઉપર્યુક્ત મુશ્કેલીઓનું નિવારણ કરવા ગૅલ્વેનોમીટરના ગૂંચળાને સમાંતર યોગ્ય મૂલ્યનો લઘુ અવરોધ જોડવામાં આવે છે. આ અવરોધને **શંટ (Shunt)** કહે છે. શંટનું મૂલ્ય ગૅલ્વેનોમીટરના અવરોધ (G) કરતાં ઘણું નાનું હોવાથી મોટા ભાગનો પ્રવાહ શંટમાંથી પસાર થાય છે અને ગૅલ્વેનોમીટરને નુકસાન થતું નથી.

વળી, શંટ અને ગૅલ્વેનોમીટરના અવરોધો પરસ્પર સમાંતર હોવાથી તેમનો સમતુલ્ય અવરોધ શંટના મૂલ્ય કરતાં પણ ઓછો થઈ જાય છે. આમ શંટ જોડ્યા પછી બનતા પ્રવાહમાપકનો અવરોધ ઘણો નાનો થઈ જાય છે. પરિણામે ઉપર્યુક્ત બંને મુશ્કેલીઓનું નિવારણ થાય છે.

યોગ્ય શંટ જોડ્યા પછી બનતા સાધનમાંથી જ્ઞાત વિદ્યુતપ્રવાહો પસાર કરી તેના સ્કેલનું ઍમ્પિયર, મિલિઍમ્પિયર કે માઇક્રોઍમ્પિયરમાં અંકન calibration કરવામાં આવે છે. આ રીતે તૈયાર થતું પ્રવાહમાપક અનુક્રમે ઍમીટર, (મિલિ ઍમીટર કે માઇક્રોઍમીટર) કહેવાય છે. આ માટે શંટના મૂલ્ય માટેનું સૂત્ર નીચે મુજબ મળી શકે છે :

શંટનું સૂત્ર : ધારો કે, G અવરોધવાળા અને I_G પ્રવાહક્ષમતા ધરાવતા ગૅલ્વેનોમીટરનું I જેટલા મહત્તમ વિદ્યુતપ્રવાહ મળી શકે તેવા ઍમીટરમાં રૂપાંતર કરવું છે. આ માટે ધારો કે જરૂરી શંટનું મૂલ્ય S છે. અહીં શંટ એવો પસંદ કરવો જોઈએ કે I જેટલા પ્રવાહમાંથી I_G જેટલો પ્રવાહ ગૅલ્વેનોમીટરમાંથી અને $I_S = I - I_G$ જેટલો પ્રવાહ શંટમાંથી પસાર થાય. આકૃતિ 4.22 માં આ સ્થિતિ દર્શાવી છે.

જંક્શન A પાસે કિર્ચોફનો પ્રથમ નિયમ વાપરતાં,



આકૃતિ 4.22

$$I = I_G + I_S \tag{4.10.7}$$

ASBGA માર્ગ પર કિર્ચોફના બીજા નિયમ અનુસાર,

$$-I_G G + I_S S = 0$$

$$\therefore\ S = \frac{GI_G}{I_S}$$

સમીકરણ 4.10.7 પરથી, $I_S = I - I_G$

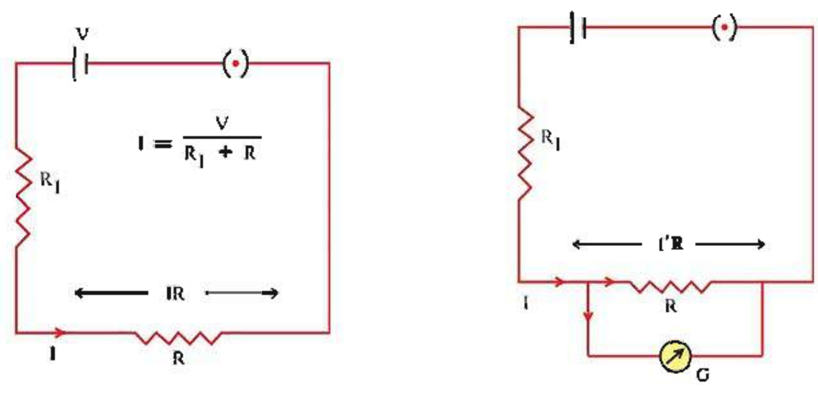
$$\therefore\ S = \frac{GI_G}{I - I_G} \tag{4.10.8}$$

જે શંટનું જરૂરી સૂત્ર છે. જે પરથી સ્પષ્ટ છે કે ઍમીટરની રેન્જ (પ્રવાહક્ષમતા) વધુ ને વધુ મોટી કરવા માટે જરૂરી શંટનું મૂલ્ય નાનું ને નાનું કરવું પડે. ઍમીટરની પ્રવાહક્ષમતા *n* ગણી કરવા માટે જરૂરી શંટ $S = \frac{G}{n-1}$, થશે તે ચકાસી જુઓ.

4.10.1 (b) વૉલ્ટમીટર (Voltmeter) : સર્કિટના કોઈ ઘટકના બે છેડા વચ્ચેના વિદ્યુતસ્થિતિમાનના તફાવત (વૉલ્ટેજ)ને માપવા માટેના ઉપકરણને વૉલ્ટમીટર કહે છે. આ માટે વૉલ્ટમીટરને આ ઘટકની સાથે સમાંતરે જોડવામાં આવે છે. ધારો કે આકૃતિ 4.23 (a) માં દર્શાવેલ અવરોધ Rના બે છેડા વચ્ચેનો વૉલ્ટેજ માપવો છે. આ માટે વૉલ્ટમીટર તરીકે G અવરોધ અને I_G પ્રવાહ ક્ષમતાવાળું ગૅલ્વેનોમીટર વાપરવામાં આવે, તો તેમાં મુશ્કેલીઓ પડે છે. આકૃતિ 4.23(b) મુજબ ગૅલ્વેનોમીટરને સર્કિટમાં આ રીતે જોડતાં સર્કિટનો કુલ અવરોધ,

$$R' = R_1 + \frac{RG}{R+G} \tag{4.10.9}$$

થાય છે.



(a) (b)

આકૃતિ 4.23

પરિણામસ્વરૂપ ગૅલ્વેનોમીટરને જોડ્યા બાદ સર્કિટનો અવરોધ બદલાઈ જતાં Rમાંથી પસાર થતો વિદ્યુતપ્રવાહ પણ બદલાઈ જાય છે. આમ, અવરોધ Rના બે છેડા વચ્ચે વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત = IR (કે જે માપવાનો છે)નું મૂલ્ય બદલાઈ જાય છે.

જો Gનું મૂલ્ય ખૂબ મોટું હોય તો R + Gમાં Gની સરખામણીમાં Rને અવગણતાં

$$R' = R_1 + \frac{RG}{R+G} = R_1 + R \tag{4.10.10}$$

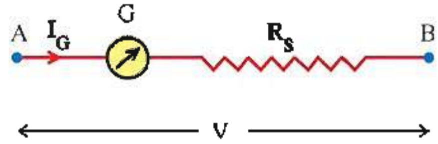
આ સ્થિતિમાં પરિપથનો અવરોધ ખાસ બદલાતો નથી, ત્યાં Gનું મૂલ્ય મોટું હોવાથી મોટા ભાગનો પ્રવાહ R માંથી પસાર થતાં IRનું મૂલ્ય જળવાઈ રહે છે.

ઉપર્યુક્ત ચર્ચા દર્શાવે છે કે વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત માપન કરતાં ઉપકરણનો અવરોધ શક્ય તેટલો મોટો (સૈદ્ધાંતિક રીતે અનંત) હોવો જોઈએ. આમ, ગૅલ્વેનોમીટર સાથે શ્રેણીમાં યોગ્ય મોટો અવરોધ જોડી વૉલ્ટમીટરમાં રૂપાંતર કરી શકાય. અહીં, અવરોધ મોટો હોવાથી ગૅલ્વેનોમીટરમાંથી પસાર થતો વિદ્યુતપ્રવાહ ખૂબ જ ઓછો હોય છે અને તેને નુકસાન થવાનો ભય રહેતો નથી.

ગૅલ્વેનોમીટર વડે માપી શકાતા મહત્તમ વૉલ્ટેજને ગૅલ્વેનોમીટરની વૉલ્ટેજક્ષમતા (I_GG) કહે છે.

શ્રેણી અવરોધનું સૂત્ર : ધારો કે ગૅલ્વેનોમીટરનો અવરોધ G અને તેની પ્રવાહક્ષમતા I_G છે, તેથી તેની વૉલ્ટેજક્ષમતા I_GG થશે. આ ગૅલ્વેનોમીટરને V વૉલ્ટ જેટલો મહત્તમ વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત માપી શકે તેવા વૉલ્ટમીટરમાં ફેરવવું છે. આ માટે જરૂરી શ્રેણી અવરોધનું મૂલ્ય ધારો કે R_S છે. આકૃતિ 4.24 માં જો A અને B વચ્ચે વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત = V હોય તો તેમની વચ્ચે (તેમને સમાંતરે) ગૅલ્વેનોમીટર અને R_S શ્રેણીમાં જોડતાં ગૅલ્વેનોમીટરનું પૂર્ણસ્કેલ આવર્તન થશે. એટલે કે તેમાંથી I_G જેટલો વિદ્યુતપ્રવાહ પસાર થશે. આકૃતિ પરથી,

$$I_GG + I_GR_S = V$$



આકૃતિ 4.24

$$\therefore R_S = \frac{V}{I_G} - G \qquad (4.10.11)$$

આ સૂત્ર વડે મળતો અવરોધ આપેલા ગૅલ્વેનોમીટર સાથે શ્રેણીમાં જોડી ગૅલ્વેનોમીટરના સ્કેલનું યોગ્ય અંકન કરવાથી વૉલ્ટમીટર તૈયાર કરી શકાય છે. સમીકરણ (4.10.11) પરથી સ્પષ્ટ છે કે વૉલ્ટમીટરની રેન્જ વધુ ને વધુ મોટી કરવા માટે શ્રેણી-અવરોધ (R_S) નું મૂલ્ય વધુ ને વધુ મોટું લેવું પડે. વૉલ્ટમીટરની વૉલ્ટેજક્ષમતા n ગણી કરવા માટે જરૂરી શ્રેણી-અવરોધ $R_S = (n - 1)G$ થશે, તેમ જાતે ચકાસી જુઓ.

સમીકરણ 4.10.6ને બંને બાજુ વૉલ્ટમીટરના અવરોધ R વડે ભાગતાં,

$$\frac{\phi}{IR} = \frac{NAB}{k}\frac{1}{R}$$

$$\therefore \frac{\phi}{V} = \frac{NAB}{kR} \qquad (4.10.12)$$

અહીં, $\frac{\phi}{V}$ ને વૉલ્ટમીટરની સંવેદિતા (S_V) કહે છે.

ઉદાહરણ 12 : એક ગૅલ્વેનોમીટરના ડાયલ પર 21 કાપાઓ (શૂન્યથી 20) એટલે કે 20 વિભાગો (divisions) છે. તેમાં 10 μA પ્રવાહ પસાર કરતાં તેનું 1 division જેટલું આવર્તન થાય છે. તેનો અવરોધ 20 Ω છે, તો તેને (a) 1 A પ્રવાહ માપી શકે તેવા ઍમીટરમાં કેવી રીતે ફેરવશો ? (b) હવે મૂળ ગૅલ્વેનોમીટરને 1 V વીજસ્થિતિમાનનો તફાવત માપે તેવા વૉલ્ટમીટરમાં કેવી રીતે ફેરવશો ? તથા ઉપર્યુક્ત બંને મીટરનો અસરકારક અવરોધ શોધો.

ઉકેલ : (a) જ્યારે ગૅલ્વેનોમીટરમાંથી 10 μA પ્રવાહ પસાર થાય છે, ત્યારે તેના દર્શકનું 1 division જેટલું કોણાવર્તન થાય છે. આ ગૅલ્વેનોમીટરમાં 20 divisions છે.

$\therefore$ તેના વડે મપાતો મહત્તમ પ્રવાહ (પ્રવાહક્ષમતા) $I_G = 10 \times 10^{-6} \times 20 = 200 \times 10^{-6}$A.

ઍમીટર માટે ગૅલ્વેનોમીટરને સમાંતરે જરૂરી શંટનું સૂત્ર

$S = \frac{GI_G}{I - I_G}$ $\quad\quad$ $I_G = 200 \times 10^{-6}A = 2 \times 10^{-4}A$

$= \frac{20 \times 200 \times 10^{-6}}{10000 \times 10^{-4} - 2 \times 10^{-4}}$ $\quad\quad$ $G = 20\ \Omega$

$= \frac{20 \times 2 \times 10^{-4}}{10000 \times 10^{-4} - 2 \times 10^{-4}}$ $\quad\quad$ $I = 1\ A = 10000 \times 10^{-4}A$

$= \frac{40}{9998} \approx 0.004\ \Omega$

1 A પ્રવાહ માપી શકે તેવા ઍમીટરમાં ફેરવવા માટે 0.004 Ω જો શંટ જોડવો જોઈએ.

આ ઍમીટરનો અસરકારક અવરોધ $G' = \frac{G \times S}{G + S}$ (G અને S સમાંતરે છે.)

$G' = \frac{20 \times 0.004}{20 + 0.004} \approx 0.004\ \Omega$

(b) વૉલ્ટમીટર માટે : ગૅલ્વેનોમીટરને વૉલ્ટમીટરમાં રૂપાંતરિત કરવા જરૂરી શ્રેણી-અવરોધનું સૂત્ર

અત્રે, V = 1 volt

$R_S = \frac{V}{I_G} - G$ $\quad\quad$ $I_G = 2 \times 10^{-4}A$

$G = 20\ \Omega$

$= \frac{1}{2 \times 10^{-4}} - 20$

$= 0.5 \times 10^4 - 20$

$= 5000 - 20$

$= 4980\ \Omega$

આ ગૅલ્વેનોમીટરને 1 વૉલ્ટ માપી શકે તેવા વૉલ્ટમીટરમાં ફેરવવા માટે તેની સાથે શ્રેણીમાં 4920 Ωનો અવરોધ જોડવો જોઈએ.

આ વૉલ્ટમીટરનો અસરકારક અવરોધ $R'_S = R_S + G$

$\therefore R'_S = 4980 + 20 = 5000\ \Omega$

($\because$ R_S અને G શ્રેણીમાં છે.)

સારાંશ

1. **ઑર્સ્ટેડનું અવલોકન :** "ચુંબકીય સોયને સમાંતર સોયની નીચે રાખેલા વાહક તારમાંથી વિદ્યુતપ્રવાહ પસાર કરતાં ચુંબકીય સોય કોણાવર્તન પામે છે."

2. **બાયો-સાવરનો નિયમ :** $I\vec{dl}$ જેટલા વિદ્યુતપ્રવાહ-ખંડને લીધે ખંડની સાપેક્ષે $\vec{r}$ સ્થાનસદિશ ધરાવતા બિંદુએ ચુંબકીય ક્ષેત્ર

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\vec{dl} \times \hat{r}}{r^2}$$

સમગ્ર તારમાં આવા ખંડો સતત રીતે પથરાયેલા હોવાથી આવા તારને લીધે મળતું ચુંબકીય ક્ષેત્ર $\vec{B}$ રેખા-સંકલનના સ્વરૂપમાં લખી શકાય.

$$\vec{B} = \int \vec{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\vec{dl} \times \hat{r}}{r^2}$$

અથવા $$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\vec{dl} \times \vec{r}}{r^3}$$

અત્રે રેખા-સંકલન વાહક તારથી બનતા સમગ્ર પરિપથ પર છે.

3. a ત્રિજ્યાવાળા N આંટાવાળા I પ્રવાહક્ષમતા ધરાવતા વર્તુળાકાર ગૂંચળાની (રિંગ) ભૌમિતિક અક્ષ પર કેન્દ્રથી x અંતરે આવેલા કોઈ બિંદુ પાસે ચુંબકીય તીવ્રતાનું

$$B(x) = \frac{\mu_0 NIa^2}{2(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ગૂંચળાના કેન્દ્ર પર ચુંબકીય ક્ષેત્ર માટે $x = 0$ લેતાં

$$B(\text{કેન્દ્ર}) = \frac{\mu_0 NI}{2a}$$

તથા કેન્દ્રથી અતિ દૂર આવેલા બિંદુ માટે
$x >> a$ લેતાં

$$B(x) = \frac{\mu_0 NIa^2}{2x^2}$$

4. **એમ્પિયરનો સર્કિટલનો નિયમ :** "ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં કોઈ બંધ વક્ર પરનું ચુંબકીય ક્ષેત્રનું રેખા-સંકલન, તે બંધ વક્ર દ્વારા ઘેરાતા વિદ્યુતપ્રવાહોના બૈજિક સરવાળા અને શૂન્યાવકાશની પરમીએબિલિટીના ગુણાકાર બરાબર હોય છે."
સમીકરણસ્વરૂપે આ નિયમ નીચે મુજબ લખી શકાય :

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \Sigma I.$$

5. અતિ લાંબા પ્રવાહધારિત સુરેખ તારમાંથી I પ્રવાહ પસાર થતો હોય, તો તારથી r જેટલા લંબઅંતરે આવેલા બિંદુએ ચુંબકીય ક્ષેત્રનું સૂત્ર,

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

6. અતિ લાંબા પ્રવાહધારિત સૉલેનોઇડની અક્ષ પરના બિંદુએ ચુંબકીય ક્ષેત્રનું મૂલ્ય
$B = \mu_0 nI$
જ્યાં n = સૉલેનોઇડની એકમ લંબાઈ દીઠ આંટાઓની સંખ્યા છે.

7. ચુંબકીય ક્ષેત્ર $\vec{B}$ માં l લંબાઈનો (I) પ્રવાહધારિત તાર મૂકવામાં આવે, તો તેના પર લાગતું બળ

$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$ થાય આ બળની દિશા સદિશ
ગુણાકાર માટેના જમણા હાથના સ્ક્રૂની મદદથી નક્કી કરી શકાય છે.

8. બે અતિ લાંબા પ્રવાહધારિત તાર પર લાગતા બળનું મૂલ્ય,

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2 l}{y},$$

જ્યાં l તારની લંબાઈ અને y બે તાર વચ્ચેનું લંબઅંતર છે.
જો તારમાં એક બીજાથી વિરુદ્ધ દિશામાં પ્રવાહ વહેતો હોય, તો તેમની વચ્ચે અપાકર્ષણ બળ ઉદ્ભવે છે અને એક જ દિશામાં પ્રવાહ વહેતો હોય, તો આકર્ષણબળ ઉદ્ભવે છે.

9. ચુંબકીય ક્ષેત્ર $\vec{B}$ માં $\vec{v}$ વેગથી ગતિ કરતા q વિદ્યુતભાર s પર લાગતું ચુંબકીય બળ,

$$\vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$ માં q વિદ્યુતભાર પર લાગતું બળ $\vec{F}_e = q\vec{E}$

આથી, બંને ક્ષેત્રોની હાજરીમાં વિદ્યુતભાર પર લાગતું કુલ બળ,

$\vec{F} = q[\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B})]$, જેને લૉરેન્ટ્ઝ બળ કહે છે.

10. સાઇક્લોટ્રૉન વિદ્યુતભારિત કણોને પ્રવેગિત કરવા માટેનું યંત્ર છે. તેમાં ગતિ કરતા વિદ્યુતભારિત કણના વર્તુળ પથની ત્રિજ્યા, $r = \frac{mv}{Bq}$, જે વેગમાન આધારિત છે.

આ કણની કોણીય આવૃત્તિ ωને સાઇક્લોટ્રૉન-આવૃત્તિ (ω_C) કહે છે.

$\omega_C = \frac{qB}{m}$ અથવા $f_C = \frac{qB}{2\pi m}$ $\quad (\because \omega_C = 2\pi f_C)$

11. સમાન ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં લટકાવેલ પ્રવાહધારિત ગૂંચળા પર લાગતું ટૉર્ક,

$\vec{\tau} = NI\vec{A} \times \vec{B}$

$\vec{\mu} = NI\vec{A}$ ને ચુંબકીય ડાઇપોલ-મોમેન્ટ કહે છે.

$\therefore \vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$

12. સૂક્ષ્મ વિદ્યુતપ્રવાહના માપન માટે ગૅલ્વેનોમીટર વાપરવામાં આવે છે. ચલિત (moving) અને કિલકિત (pivoted) ગૅલ્વેનોમીટરમાં, $\tau = NIAB$, જેને લીધે ગૂંચળું કોણાવર્તન અનુભવે છે અને તેની સાથે જોડેલી સ્પ્રિંગોમાં વળ ચડે છે અને પુનઃસ્થાપક ટૉર્ક ઉત્પન્ન થાય છે.

$\therefore$ પુનઃસ્થાપક ટૉર્ક $\tau = k\phi$.

સમતોલનમાં $k\phi = NIBA$

$\therefore I = \frac{k}{NBA}\phi$

$\therefore I \propto \phi$

13. ગૅલ્વેનોમીટરને ઍમીટરમાં ફેરવવા માટે તેને સમાંતરે જોડવામાં આવતા લઘુ-અવરોધને શંટ કહે છે. તેનું સૂત્ર $S = \frac{GI_G}{I - I_G}$ છે.

ગૅલ્વેનોમીટરને વૉલ્ટમીટરમાં ફેરવવા માટે તેની સાથે શ્રેણીમાં મોટા મૂલ્યનો અવરોધ જોડવામાં આવે છે. આ શ્રેણી-અવરોધ (Rs) શોધવાનું સૂત્ર $R_S = \frac{V}{I_G} - G$ છે.

સ્વાધ્યાય

નીચે વિધાનો માટે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

1. બે સમકેન્દ્રીય રિંગો એક જ સમતલમાં રહે તેમ ગોઠવેલ છે. બંને રિંગમાં આંટાઓની સંખ્યા 20 છે. તેમની ત્રિજ્યાઓ 40 cm અને 80 cm છે તથા તેમાંથી અનુક્રમે 0.4 A અને 0.6 A વિદ્યુતપ્રવાહ પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં વહે છે, તો કેન્દ્ર પાસે ઉદ્ભવતા ચુંબકીય ક્ષેત્રનું મૂલ્ય ...... T થશે.

   (A) $4\mu_0$ (B) $2\mu_0$ (C) $\frac{10}{4}\mu_0$ (D) $\frac{5}{4}\mu_0$

2. m દળવાળો એક કણ q વિદ્યુતભાર ધરાવે છે. આ કણને V જેટલા વિદ્યુતસ્થિતિમાનના તફાવત હેઠળ પ્રવેગિત કરી સમાન ચુંબકીય ક્ષેત્ર Bમાં ક્ષેત્રને લંબરૂપે દાખલ કરતાં તે R ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળાકાર માર્ગે ગતિ કરે છે, તો આ કણના વિદ્યુતભાર અને દળનો ગુણોત્તર $\left(\frac{q}{m}\right)$ = ... છે.

   [$\left(\frac{q}{m}\right)$ને ઘણીવાર વિશિષ્ટ વિદ્યુતભાર (Specific Charge) પણ કહે છે.]

   (A) $\frac{2V}{B^2R^2}$ (B) $\frac{V}{2BR}$ (C) $\frac{VB}{2R}$ (D) $\frac{mV}{BR}$

3. સમાન ચુંબકીય ક્ષેત્ર Bને લંબરૂપે પ્રોટોન, ડ્યુટેરોન આયન અને α-પાર્ટિકલ સમાન ગતિ-ઊર્જા સાથે વર્તુળાકાર માર્ગ પર ગતિ કરે છે. અનુક્રમે તેમના ગતિપથની ત્રિજ્યાઓ r_p, r_d અને r_α વડે દર્શાવીએ તો [અહીં, $q_d = q_p$, $m_d = 2m_p$]

(A) $r_\alpha = r_p < r_d$ (B) $r_\alpha = r_d > r_p$

(C) $r_\alpha > r_d > r_p$ (D) $r_\alpha = r_d = r_p$

4. એક ઇલેક્ટ્રૉન ચુંબકીય ક્ષેત્ર Bને લંબરૂપે r ત્રિજ્યાના વર્તુળાકાર પથ પર ગતિ કરે છે. આ ઇલેક્ટ્રૉનને અડધા પરિભ્રમણ દરમિયાન પ્રાપ્ત કરેલી ગતિ-ઊર્જા ....

(A) $\frac{1}{2}mv^2$ (B) $\frac{1}{4}mv^2$ (C) શૂન્ય (D) $\pi rBev$

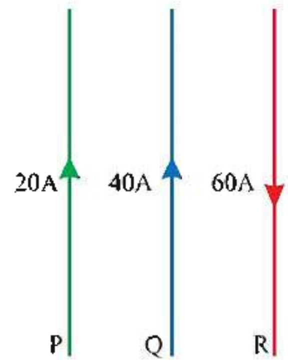
5. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે બે અતિ લાંબા સુરેખ તાર એકબીજાને સમાંતરે રાખી બંનેમાંથી 2 A જેટલો વિદ્યુતપ્રવાહ પસાર કરવામાં આવે છે. આ વખતે તેમની વચ્ચે લાગતું બળ F છે. હવે તારમાં પ્રવાહ 1 A જેટલો કરવામાં અને પ્રવાહની દિશા (બંનેમાં) ઊલટાવી નાંખતાં તેમની વચ્ચે લાગતું બળ ....

(a) પ્રથમ (b) પછીથી

(A) $\frac{F}{4}$ થશે અને આકર્ષણ પ્રકારનું હશે (B) $\frac{F}{2}$ થશે અને અપાકર્ષણ પ્રકારનું હશે.

(C) $\frac{F}{2}$ થશે અને આકર્ષણ પ્રકારનું હશે (D) $\frac{F}{4}$ થશે અને અપાકર્ષણ પ્રકારનું હશે.

6. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે P, Q અને R અતિ લાંબા સુરેખ તારમાંથી અનુક્રમે 20A, 40A અને 60A જેટલો વિદ્યુતપ્રવાહ તીર વડે દર્શાવેલ દિશાઓમાં વહે છે. આ સ્થિતિમાં તાર Q પર લાગતા પરિણામી બળની દિશા તાર Qની .... હશે.



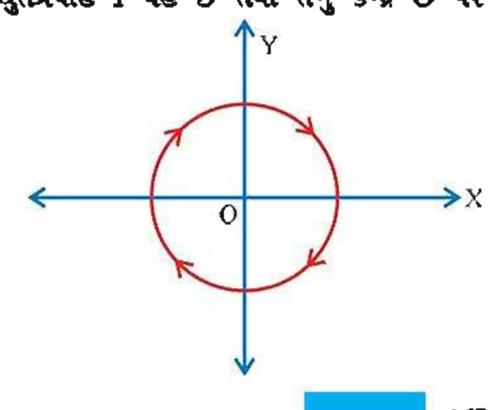
(A) ડાબી તરફ

(B) જમણી તરફ

(C) પુસ્તકના પૃષ્ઠને લંબરૂપે

(D) Qમાંથી વહેતા પ્રવાહની દિશામાં હશે.

7. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે એક વર્તુળાકાર વાહક તારમાંથી વિદ્યુતપ્રવાહ I વહે છે તથા તેનું કેન્દ્ર O પર રહે તેમ XY–સમતલમાં રાખેલ છે.



આ વર્તુળાકાર લૂપનું વલણ

(A) સંકોચાવાનું

(B) પ્રસરવાનું

(C) ધન X દિશામાં ખસવાનું

(D) ઋણ X દિશામાં ખસવાનું હશે.

8. સમાન વિદ્યુતક્ષેત્ર અને સમાન ચુંબકીય ક્ષેત્ર અધોદિશામાં છે. એક ઇલેક્ટ્રૉન અધોદિશામાં ગતિ કરે છે, આથી આ ઇલેક્ટ્રૉન ....

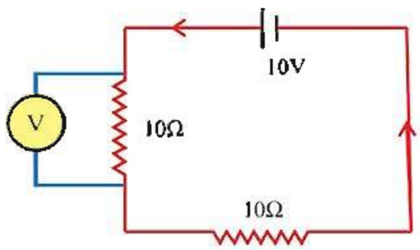
(A) ડાબી તરફ વળે છે. (B) જમણી તરફ વળે છે.

(C) ના વેગમાં વધારો થાય છે. (D) ના વેગમાં ઘટાડો થાય છે.

9. એકબીજાથી r જેટલા અંતરે રાખેલ બે સમાંતર પાતળા લાંબા તારમાં દરેકમાં I વિદ્યુતપ્રવાહ વહે છે. આથી કોઈ એક તારની એકમલંબાઈ દીઠ બીજા તાર વડે લાગતા બળનું માન .... છે.

(A) $\frac{\mu_0 I^2}{r^2}$ (B) $\frac{\mu_0 I^2}{2\pi r}$ (C) $\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ (D) $\frac{\mu_0 I}{2\pi r^2}$

10. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે વૉલ્ટમીટરને પરિપથમાં જોડેલ છે. વૉલ્ટમીટરનો અવરોધ ખૂબ જ મોટો છે, તો આ વૉલ્ટમીટર વડે દર્શાવાતા વૉલ્ટેજ .... હશે.



(A) 5 V (B) 10 V

(C) 2.5 V (D) 7.5 V

11. B માન ધરાવતા સમાન ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં ક્ષેત્રને લંબરૂપે q વિદ્યુતભાર ધરાવતો m દળવાળો કણ r ત્રિજ્યાના વર્તુળમાર્ગ પર ગતિ કરે છે, આથી આ કણને એક ભ્રમણ કરતાં લાગતો સમય .... છે.

(A) $\frac{2\pi mq}{B}$ (B) $\frac{2\pi q^2 B}{m}$ (C) $\frac{2\pi qB}{m}$ (D) $\frac{2\pi m}{Bq}$

12. એક લાંબા તારમાંથી સ્થાયી વિદ્યુતપ્રવાહ વહે છે. તેને એક વર્તુળાકાર વાળતાં બનતા લૂપના કેન્દ્ર પર મળતું ચુંબકીય ક્ષેત્ર B છે. હવે ધારો કે આ જ તારને વર્તુળાકાર n આંટાવાળા વર્તુળાકાર લૂપમાં વાળવામાં આવે છે, તો તેના કેન્દ્ર પર મળતું ચુંબકીય ક્ષેત્ર .... થશે.

(A) nB (B) n^2B (C) $2n$B (D) $2n^2$B

13. 1m લંબાઈના વાહક તારને એક વર્તુળાકાર લૂપમાં ફેરવવામાં આવે છે. જો તેમાંથી 1 ઍમ્પિયરનો વિદ્યુતપ્રવાહ વહેતો હોય, તો તેની ચુંબકીય મોમેન્ટ .... Am^2 થશે.

(A) 2π (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{1}{4\pi}$

14. જ્યારે વિદ્યુતભારિત કણ ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં ગતિ કરે છે, ત્યારે તેની ગતિ-ઊર્જા ....

(A) અચળ રહે છે. (B) વધે છે. (C) ઘટે છે. (D) શૂન્ય થાય છે.

15. m દળવાળા અને q વિદ્યુતભારવાળા બે કણોને $2r$ લંબાઈના એક સળિયાના છેડાઓ પર (દરેક છેડા પર એક) એમ ચોંટાડેલા છે. આ સળિયાને ω જેટલી કોણીય ઝડપથી તેના કેન્દ્રને અનુલક્ષીને ભ્રમણ આપતાં ઉદ્‌ભવતી ચુંબકીય ડાઇપોલ-મોમેન્ટ અને આ કણોના કુલ કોણીય વેગમાનનો ગુણોત્તર .... છે.

(A) $\frac{q}{2m}$ (B) $\frac{q}{m}$ (C) $\frac{2q}{m}$ (D) $\frac{q}{\pi m}$

16. એક અતિલાંબા સોલેનોઇડમાં 1 cm દીઠ 100 આંટાઓ છે. તેમાંથી 5A પ્રવાહ પસાર થાય છે, તો તેની અક્ષ ઉપર કેન્દ્ર પાસે ચુંબકીય ક્ષેત્ર .... T છે.

(A) 3.14×10^{-2} (B) 6.28×10^{-2} (C) 9.42×10^{-2} (D) 12.56×10^{-2}

17. બે અતિ લાંબા વિદ્યુતવાહક તારોને એકબીજાને સમાંતર d અંતરે રાખી તેમાંથી પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં સમાન વિદ્યુતપ્રવાહો પસાર કરવામાં આવે છે. હવે, આ બંને તારોની વચ્ચે $\frac{d}{2}$ અંતરે આવેલા બિંદુ પાસેથી q જેટલો વિદ્યુતભારિત કણ, બંને તારોથી રચાતા સમતલને લંબરૂપે v વેગથી પસાર થાય છે, તો આ કણ પર લાગતું ચુંબકીય બળ .... હશે.

(A) $\frac{\mu_0 Iqv}{2\pi d}$ (B) $\frac{\mu_0 Iqv}{\pi d}$ (C) $\frac{2\mu_0 Iqv}{\pi d}$ (D) શૂન્ય

18. L લંબાઈનો એક અતિ લાંબો સૉલેનોઇડ n સ્તરો ધરાવે છે. દરેક સ્તરમાં N આંટાઓ છે. સૉલેનોઇડનો વ્યાસ D છે અને તેમાંથી I જેટલો પ્રવાહ પસાર થઈ રહ્યો છે, તો સૉલેનોઇડના કેન્દ્ર પર ચુંબકીય ક્ષેત્ર .... છે.

(A) Dને સમપ્રમાણ (B) Dને વ્યસ્ત પ્રમાણ

(C) Dથી સ્વતંત્ર (D) Lને સમપ્રમાણ

19. સાઇક્લોટ્રૉનમાં વિદ્યુતભારિત કણની કોણીય ઝડપ ....થી સ્વતંત્ર છે.

(A) કણનું દળ (B) કણની રેખીય ઝડપ

(C) કણનો વિદ્યુતભાર (D) ચુંબકીય ક્ષેત્ર

20. ગતિમાન વિદ્યુતભાર ....ના કારણે ઊર્જા મેળવે છે.

(A) વિદ્યુતક્ષેત્ર (B) ચુંબકીય ક્ષેત્ર

(C) આ બંને ક્ષેત્રો (D) ઉપરનામાંથી કોઈ પણ ક્ષેત્ર નહિ.

21. એક વિદ્યુતભારિત કણ $\vec{B}$ જેટલા ચુંબકીય ક્ષેત્રમાંથી $\vec{v}$ વેગથી પસાર થઈ રહ્યો છે. તેના પર લાગતું ચુંબકીય બળ .... સ્થિતિમાં મહત્તમ હશે.

(A) $\vec{v}$ અને $\vec{B}$ સમાન દિશામાં હોય તે (B) $\vec{v}$ અને $\vec{B}$ વિરુદ્ધ દિશામાં હોય તે

(C) $\vec{v}$ અને $\vec{B}$ પરસ્પર લંબ હોય તે (D) $\vec{v}$ અને $\vec{B}$ એકબીજા સાથે 45°નો કોણ બનાવે તે

22. બે અતિ લાંબા સમાંતર તારોમાંથી પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં સમાન વિદ્યુતપ્રવાહો પસાર થઈ રહ્યા છે, તો ....

(A) તેઓ એકબીજાને અપાકર્ષે છે (B) તેઓ એકબીજાને આકર્ષે છે

(C) તેઓ એકબીજા તરફ નમી જાય છે (D) આકર્ષણ કે અપાકર્ષણ કંઈ જ ઉદ્ભવતું નથી

23. એક વિદ્યુતભારિત કણ નિયમિત ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં ગતિ કરે છે, તો ....

(A) તેનું વેગમાન બદલાય છે, પણ ગતિ-ઊર્જામાં ફેરફાર થતો નથી.

(B) વેગમાન અને ગતિ-ઊર્જા બંનેમાં ફેરફાર થાય છે.

(C) વેગમાન અને ગતિ-ઊર્જા કોઈમાં ફેરફાર થતો નથી.

(D) ગતિ-ઊર્જા બદલાય છે, પણ વેગમાન બદલાતું નથી.

24. ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં ગતિ કરતા વિદ્યુતભારિત કણની ઝડપ વધારવામાં આવે છે, તો તેના ગતિપથની ત્રિજ્યા ....

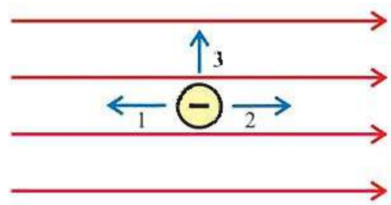
(A) ઘટશે (B) વધશે (C) બદલાશે નહિ (D) અડધી થશે

ઉત્તરો

1. (C)	2. (A)	3. (A)	4. (C)	5. (A)	6. (A)
7. (B)	8. (D)	9. (B)	10. (A)	11. (D)	12. (B)
13. (D)	14. (A)	15. (A)	16. (B)	17. (D)	18. (C)
19. (B)	20. (A)	21. (C)	22. (A)	23. (A)	24. (B)

નીચે આપેલ પ્રશ્નોના જવાબ ટૂંકમાં આપો :

1. ઑર્સ્ટેડનું અવલોકન જણાવો.
2. બાયો-સાવરના નિયમનું વિધાન લખો.
3. ઍમ્પિયરનો સર્કિટલ નિયમ સૂત્ર સ્વરૂપે લખો.
4. પ્રવાહધારિત સુરેખ તારથી ઉદ્ભવતા ચુંબકીય ક્ષેત્રની દિશા જાણવા માટેનો નિયમ જણાવો.
5. સૉલેનોઇડની બહારના વિસ્તારમાં ચુંબકીય ક્ષેત્રનું મૂલ્ય કેટલું હોય છે ?
6. ટૉરોઇડમાં ચુંબકીય ક્ષેત્રની દિશા જણાવો.
7. ઑર્સ્ટેડે કરેલા અવલોકન બાદ ઍમ્પિયરે કરેલું અવલોકન જણાવો.
8. સાઇક્લોટ્રોનમાં કોણીય આવૃત્તિ શું વેગમાન પર આધારિત છે ? 'હા' કે 'ના'માં જવાબ આપો.
9. સાઇક્લોટ્રોન દ્વારા ન્યુટ્રોનને પ્રવેગિત કરી શકાય ? કેમ ?
10. સાઇક્લોટ્રોનમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર અને ચુંબકીય ક્ષેત્રનાં કાર્ય જણાવો.
11. સાઇક્લોટ્રોનની બે મર્યાદાઓ જણાવો.
12. આદર્શ ઍમીટર અને આદર્શ વૉલ્ટમીટરના અવરોધ નાં મૂલ્ય કેવાં હોવા જોઈએ ?
13. ગૅલ્વેનોમીટરની પ્રવાહ-સંવેદિતા એટલે શું ?
14. વૉલ્ટમીટરની વૉલ્ટેજક્ષમતા વધારવા શું કરવામાં આવે છે ?
15. વર્તુળાકાર રિંગમાં પ્રવાહનું મૂલ્ય તેમજ તેની ત્રિજ્યા બમણી કરવામાં આવે, તો તેના કેન્દ્ર પરના ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં શું ફેરફાર થશે ?
16. આકૃતિમાં દર્શાવેલ ઇલેક્ટ્રૉનની ગતિ માટેના ત્રણ કિસ્સાઓમાં તેના પર લાગતા ચુંબકીય બળનું મૂલ્ય જણાવો.



નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. બાયો-સાવરનો નિયમ લખો અને તેની સમજૂતી આપો.
2. વિદ્યુતપ્રવાહધારિત વર્તુળાકાર વાહકની અક્ષ પરના કોઈ બિંદુએ મળતા ચુંબકીય ક્ષેત્રની તીવ્રતાનું સૂત્ર લખો અને આ ચુંબકીય ક્ષેત્રની દિશા શોધવા માટેનો જમણા હાથના અંગૂઠાનો નિયમ યોગ્ય આકૃતિ દોરી સમજાવો.
3. ઍમ્પિયરનો સર્કિટલનો નિયમ લખો અને સમજાવો.
4. અતિ લાંબા સુરેખ તારમાંથી I જેટલો વિદ્યુતપ્રવાહ વહેતો હોય તો ઍમ્પિયરના સર્કિટલના નિયમ પરથી તારથી r જેટલા લંબઅંતરે આવેલ બિંદુએ ચુંબકીય ક્ષેત્રનું મૂલ્ય મેળવો.
5. ટૉરોઇડમાં ઉદ્ભવતા ચુંબકીય ક્ષેત્રનું મૂલ્ય ઍમ્પિયરના સર્કિટલના નિયમનો ઉપયોગ કરી મેળવો.
6. બે એકબીજાને સમાંતરે રાખેલ તારમાંથી એક જ દિશામાં પ્રવાહ પસાર કરતાં તેમની વચ્ચે ઉદ્ભવતા આકર્ષણબળનું સૂત્ર મેળવો.
7. સમાન વિદ્યુતક્ષેત્ર અને સમાન ચુંબકીયક્ષેત્રમાં ગતિ કરતા વિદ્યુતભાર પર લાગતા લૉરેન્ટ્ઝ બળનું સૂત્ર મેળવો.
8. સાઇક્લોટ્રોનની કાર્યપદ્ધતિ સમજાવી સાઇક્લોટ્રોન આવૃત્તિ ω_cનું સૂત્ર મેળવો.
9. યોગ્ય આકૃતિ દોરી ગૅલ્વેનોમીટરની રચના સમજાવો.
10. ગૅલ્વેનોમીટરને ઍમીટરમાં ફેરવવા શું કરવું જોઈએ તથા શંટનું સૂત્ર મેળવો.
11. વિદ્યુતપ્રવાહધારિત વર્તુળાકાર વાહકની ભૌમિતિક અક્ષ પરના કોઈ પણ બિંદુ પાસે ચુંબકીય ક્ષેત્રનું સૂત્ર બાયો-સાવરના નિયમનો ઉપયોગ કરીને તારવો.
12. ઍમ્પિયરના સર્કિટલના નિયમનો ઉપયોગ કરી વિદ્યુતપ્રવાહધારિત અતિ લાંબા સૉલેનોઇડની અંદરના ભાગમાં ઉદ્ભવતા ચુંબકીય ક્ષેત્ર માટેનું સૂત્ર મેળવો.
13. સમાન ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં લટકાવેલ વિદ્યુતપ્રવાહધારિત લંબચોરસ ગૂંચળા પર લાગતા ટૉર્કનું સૂત્ર મેળવો.

નીચેના દાખલા ગણો :

1. અતિ લાંબા બે સમાંતર તારો વચ્ચેનું લંબઅંતર 0.2 m છે. પ્રથમ તારમાંથી 4 A અને બીજા તારમાંથી 6A વિદ્યુતપ્રવાહ એક જ દિશામાં વહે છે. આ બંને તારોને લંબરૂપે જોડતી રેખા પર કયા બિંદુએ ચુંબકીય ક્ષેત્રની તીવ્રતા શૂન્ય થશે ? [જવાબ : 4A પ્રવાહ ધરાવતા તારથી 80 mm દૂર બંને તારની વચ્ચે]

2. એક અતિ લાંબા તારને પૃથ્વીના ચુંબકીય ક્ષેત્રની ક્ષૈતિજ તીવ્રતાને લંબરૂપે ઊર્ધ્વ ગોઠવ્યો છે. આ તારમાંથી કેટલો વિદ્યુતપ્રવાહ પસાર કરીએ કે જેથી તારથી 10 cm લંબઅંતરે આવેલા એક બિંદુએ ચુંબકીય પ્રેરણ શૂન્ય થાય. આ બિંદુની સામેની બાજુએ તારથી 10 cm અંતરે પરિણામી ચુંબકીય પ્રેરણ કેટલું હશે ? પૃથ્વીના ચુંબકીય પ્રેરણનો સમક્ષિતિજ ઘટક $H = 0.36 \times 10^{-4}$T તથા $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$T m/A.

[જવાબ : 18 A, 0.72×10^{-4} T]

3. શંટ જોડેલા એક ગૅલ્વેનોમીટરને વિદ્યુતપરિપથમાં જોડતાં કુલ વિદ્યુતપ્રવાહનો 2% વિદ્યુતપ્રવાહ ગૅલ્વેનોમીટરમાંથી પસાર થતો હોય તથા ગૅલ્વેનોમીટરનો અવરોધ G હોય, તો શંટનું મૂલ્ય શોધો. [જવાબ : $\frac{G}{49}$]

4. M_1 અને M_2 દળવાળા સમાન વિદ્યુતભાર ધરાવતા બે કણો સમાન વીજસ્થિતિમાનના તફાવત વડે પ્રવેગિત થયા બાદ સમાન ચુંબકીય ક્ષેત્રને લંબરૂપે ગતિ કરે છે. તેમના વર્તુળમયગતિપથની ત્રિજ્યાઓ અનુક્રમે R_1 અને R_2 હોય, તો તેમનાં દળોનો ગુણોત્તર શોધો. [જવાબ : $\frac{M_1}{M_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2$]

5. L m લંબાઈના તારમાંથી N આંટાવાળું વર્તુળાકાર ગૂંચળું બનાવવામાં આવ્યું છે. જો ગૂંચળામાંથી I A જેટલો વિદ્યુતપ્રવાહ પસાર કરવામાં આવતો હોય અને તેને B T જેટલા સમાન ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં લટકાવેલ હોય, તો ગૂંચળા પર લાગતું મહત્તમ ટૉર્ક શોધો. [જવાબ : $\frac{IL^2B}{4\pi N}$N m]

6. સમાન ગતિ-ઊર્જા ધરાવતું એક પ્રોટોન અને એક ડ્યુટેરોન આયન, એકસાથે સમાન ચુંબકીય ક્ષેત્રે લંબરૂપે ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં દાખલ થાય છે. જો ડ્યુટેરોનનું દળ, પ્રોટોનના દળ કરતાં બમણું હોય, તો તેમના વર્તુળમય ગતિપથની ત્રિજ્યાઓનો ગુણોત્તર શોધો. [જવાબ : $\frac{r_d}{r_p} = \sqrt{2}$]

7. 120 આંટાવાળું અને 10×10^{-4} m^2 ક્ષેત્રફળ વાળું એક લંબચોરસ ગૂંચળું 45×10^{-4} Tના ત્રિજ્યાવર્તી ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં કિલકિત કરેલું છે. જો ગૂંચળામાથી 0.2 mA પ્રવાહને લીધે ગૂંચળાનું કોણાવર્તન 36° થતું હોય, તો ગૂંચળા સાથે જોડેલી સ્પ્રિંગોનો અસરકારક વળ-અચળાંક શોધો.

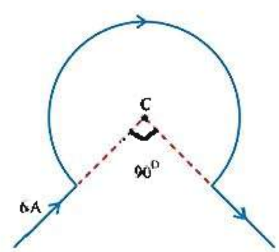
[જવાબ : 17.2×10^{-8} N m/rad]

8. X અને Y વલયોની ભૌમિતિક અક્ષ અનુક્રમે X અને Y અક્ષો પર સંપાત થાય તે રીતે ગોઠવેલ છે. વલય X અને Yની સમાન ત્રિજ્યાનું મૂલ્ય 3.14 cm છે. જો X અને Y વલયોમાંથી વહેતા વીજપ્રવાહો અનુક્રમે 0.6 A અને 0.8 A હોય, તો ઊગમબિંદુ પર સમાસ ચુંબકીય ક્ષેત્રનું મૂલ્ય શોધો.
$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$SI એકમ. [જવાબ : 2×10^{-5}T]

9. 20 A અને 30 A વિદ્યુતપ્રવાહનું વહન કરતા બે અતિ લાંબા સુરેખ સમાંતર તારો વચ્ચેનું અંતર 3 m છે. જો વિદ્યુતપ્રવાહો એક જ દિશામાં વહેતા હોય, તો તેમની એકમલંબાઈ દીઠ તેમના પર લાગતું આકર્ષણબળ શોધો. $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$SI એકમ. [જવાબ : 4×10^{-5}N m^{-1}]

10. એક અતિ લાંબા સુરેખ તારમાંથી 5 Aનો વિદ્યુતપ્રવાહ વહે છે. એક ઇલેક્ટ્રૉન આ તારને સમાંતર રહી 10 cm દૂર 10^6 m s^{-1}ના વેગથી વિદ્યુતપ્રવાહની દિશાથી વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરતો હોય તો ઇલેક્ટ્રૉન પર લાગતા બળનું મૂલ્ય શોધો. (અત્રે ઇલેક્ટ્રૉનનું દળ અચળ સ્વીકારેલ છે.)
$e = -1.6 \times 10^{-19}$C, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$SI. [જવાબ : 16×10^{-19}N]

11. આકૃતિમાં દર્શાવેલ તારમાંથી 6Aનો વિદ્યુતપ્રવાહ પસાર થાય છે. C બિંદુએ ચુંબકીય ક્ષેત્રનું માન નક્કી કરો. ત્રિજ્યા 0.02 m છે.
$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$T m A^{-1}. [જવાબ : 1.41×10^{-4}T]



5

ચુંબકત્વ અને દ્રવ્ય

5.1 પ્રસ્તાવના (Introduction)

ચુંબક (magnet) શબ્દ ગ્રીસમાં આવેલા મૅગ્નેશિયા નામના દ્વીપ (ટાપુ) પરથી આવ્યો છે, જ્યાં ચુંબકીય ખનિજો ઈ. સ. 800 પહેલાં મળી આવી હતી. આ ટાપુ પર રહેતા ભરવાડોએ ફરિયાદ કરી હતી કે તેમના શૂઝ (પગરખાં)ની ખીલીઓ જમીન પર ચોંટી જતી હતી. આ ઉપરાંત જ્યારે તેઓ ઢોર ચરાવવા જાય ત્યારે, તેમની ડાંગ (લાકડીઓ)ની આગળના લોખંડના ડટ્ટા પણ ચુંબકીય પહાડની ટોચ પર ચોંટી જતા હતા. ગ્રીક લોકોએ અનુભવ્યું કે ચુંબકીય પથ્થર (Fe_3O_4) લોખંડના ટુકડાઓને આકર્ષે છે.

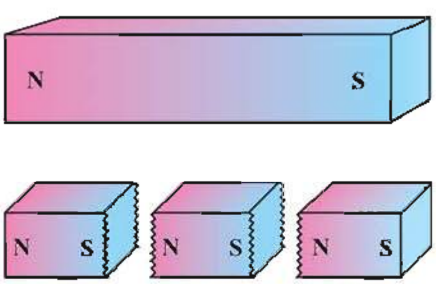
ચાઈનીઝ લોકોએ પહેલી વખત ચુંબકીય સોયનો ઉપયોગ દરિયાઈ મુસાફરી દરમ્યાન દિશાઓ શોધવા માટે કર્યો હતો. ગેબીના રણને ઓળંગવા માટે કાફલાઓ (caravans) પણ ચુંબકીય સોયનો ઉપયોગ કરતા હતા. ચુંબકત્વ, પૃથ્વી પર જીવોની ઉત્પત્તિ અને ઉત્ક્રાંતિઓ બાદ માનવજાતની ઉત્પત્તિ થઈ તેના કરતાં પણ પુરાણું છે. તે સમગ્ર બ્રહ્માંડમાં વ્યાપ્ત છે.

ફ્રાન્સના પિઅરે-ડ-મેરીકોર્ટે 1269માં ગોળાકાર કુદરતી ચુંબકની સપાટી પર ચુંબકીય સોયની મદદથી ચુંબકીય ક્ષેત્રરેખાઓની દિશા માપી હતી. તેણે અનુભવ્યું હતું કે ચુંબકીય ક્ષેત્રરેખાઓની દિશા ગોળાના વ્યાસ પરના સામસામેનાં બે બિંદુઓમાંથી પસાર થાય છે, જેમને તેણે ચુંબકના ધ્રુવો (poles) કહ્યા. ત્યાર બાદ બીજા પ્રયોગો પરથી એ પણ જાણવા મળ્યું કે, કોઈ પણ ચુંબકનો આકાર અને કદ ગમે તેવાં હોય, પરંતુ તેને બે ધ્રુવો હોય છે, જેમને ઉત્તર અને દક્ષિણ ધ્રુવો કહે છે. ચુંબકત્વ (magnetism) વિશે જાણીતા કેટલાક ખ્યાલો નીચે મુજબ છે :

(1) પૃથ્વી ચુંબક તરીકે વર્તે છે, જેનું ચુંબકીય ક્ષેત્ર (magnetic field) લગભગ ભૌગોલિક (geographic) દક્ષિણથી ઉત્તર તરફ હોય છે.

(2) જ્યારે ગજિયા ચુંબકને તેના મધ્યબિંદુથી એવી રીતે લટકાવવામાં આવે કે જેથી તે મુક્ત રીતે સમક્ષિતિજ સમતલમાં ભ્રમણ કરી શકે, તો તે ત્યાં સુધી ભ્રમણ (આંદોલન) કર્યા કરે છે કે જ્યાં સુધી તે ઉત્તર-દક્ષિણ દિશામાં ન ગોઠવાય. ગજિયા ચુંબકનો જે છેડો ઉત્તર તરફ રહે, તેને ચુંબકનો ઉત્તર ધ્રુવ કહે છે અને જે છેડો દક્ષિણ તરફ રહે, તેને ચુંબકનો દક્ષિણ ધ્રુવ કહે છે.

(3) સમાન (સજાતીય) ચુંબકીય ધ્રુવો એકબીજાને અપાકર્ષે છે, અને અસમાન (વિજાતીય) ધ્રુવો એકબીજાને આકર્ષે છે.



આકૃતિ 5.1 ગજિયો ચુંબક અને સ્વતંત્ર ચુંબક તરીકે વર્તતા તેના ટુકડાઓ

(4) વિદ્યુત-ડાઈપોલના ધન અને ઋણ વિદ્યુતભારોને અલગ કરી શકાય છે અને તેઓ સ્વતંત્ર અસ્તિત્વ પણ ધરાવી શકે છે, જેમને વિદ્યુતીય એકાકી ધ્રુવો (monopoles) કહે છે. ચુંબકના પણ બે ધ્રુવો હોવાથી તેને ચુંબકીય ડાઈપોલ ગણી શકાય. પરંતુ આ ચુંબકીય ધ્રુવો હંમેશાં જોડમાં જ હોય છે. ચુંબકના બે ભાગ કરીને તેના ઉત્તર અને દક્ષિણ ચુંબકીય ધ્રુવોને જુદા કરી શકાતા નથી. જો કોઈ ગજિયા ચુંબકના બે કે વધારે ટુકડા કરવામાં આવે, તો દરેક ટુકડા સ્વતંત્ર ચુંબક તરીકે વર્તે છે, જેનું ચુંબકીય ક્ષેત્ર મૂળ ચુંબક કરતાં થોડું નબળું હોય, પરંતુ ઉત્તર અને દક્ષિણ ધ્રુવો તો હોય જ (જુઓ આકૃતિ 5.1). આમ, એકાકી ચુંબકીય ધ્રુવો અસ્તિત્વ ધરાવતા નથી. એકાકી ચુંબકીય ધ્રુવોનું અસ્તિત્વ જાણવા માટેના પ્રયત્નો થઈ રહ્યા છે.

(5) લોખંડ (iron) અને તેની મિશ્ર ધાતુઓ (alloys)માંથી ચુંબકો તૈયાર કરી શકાય છે.

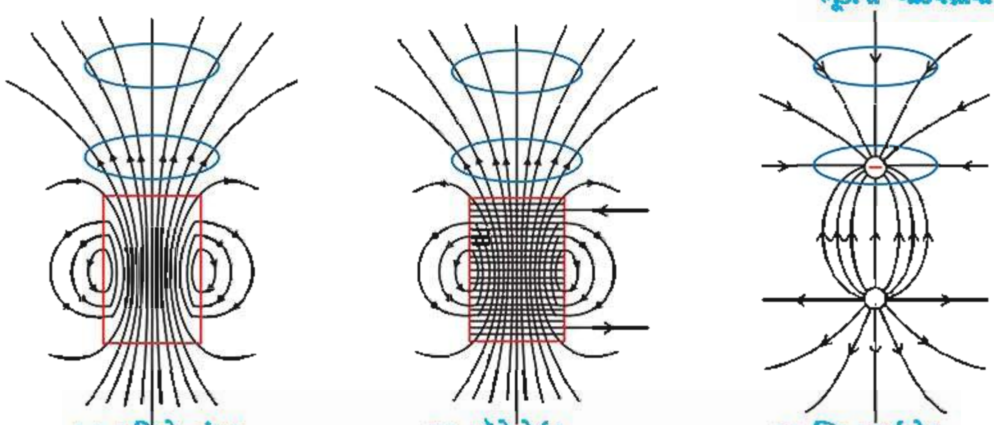
આ પ્રકરણમાં આપણે ગજિયા ચુંબક અને સૉલેનોઇડના ચુંબકીય ક્ષેત્રની સમાનતા, વિદ્યુતપ્રવાહધારિત ગૂંચળા (loop)ની ચુંબકીય ડાઇપોલ-મોમેન્ટ અને અણુની કક્ષામાં ગતિ કરતા ઇલેક્ટ્રૉનની કક્ષીય (orbital) ડાઇપોલ-મોમેન્ટનો અભ્યાસ કરીશું. મૅગ્નેટિક ડાઇપોલની અક્ષ પરના કોઈ બિંદુએ અને તેની વિષુવરેખા પરના કોઈ બિંદુએ ચુંબકીય ક્ષેત્રની તીવ્રતા કેટલી હોય તે અહીં ગણીશું. પૃથ્વીનું ચુંબકીય ક્ષેત્ર, ભૂ-ચુંબકીય તત્ત્વો, તેમજ પેરા, ડાયા અને ફેરો મૅગ્નેટિક પદાર્થો અને તેમનાં ઉદાહરણોની પણ આ પ્રકરણમાં ચર્ચા કરીશું. આ પ્રકરણના અંતમાં કાયમી ચુંબકો અને વિદ્યુત ચુંબકો (ઇલેક્ટ્રૉમૅગ્નેટ્સ)ના ઉપયોગો પણ સમજાવવામાં આવ્યા છે.

5.2 ગજિયો ચુંબક (Bar Magnet)

મહાન વિજ્ઞાની આઇન્સ્ટાઇનને તેમના કોઈ સંબંધીએ, તેમના બાળપણમાં એક ચુંબક ભેટ તરીકે આપેલું. બાળક આઇન્સ્ટાઇન આ ચુંબકથી ખૂબ જ રોમાંચિત (fascinated) થયા હતા અને તેની સાથે અનેક ‘રમતો’ કરતા હતા. જ્યારે આ ચુંબક લોખંડની ખીલીઓ, ટાંકણીઓ જેવી વસ્તુને આકર્ષતું હતું, ત્યારે તેમને એ વાતનું આશ્ચર્ય થતું કે ચુંબક આ વસ્તુઓ પર કોઈ પણ પ્રકારના સંપર્ક વગર બળ કેવી રીતે લગાડતું હશે ?

આકૃતિ 5.2માં ગજિયા ચુંબક પર મૂકેલા કાગળ પર લોખંડનો ઝીણો ભૂકો ભભરાવતા (છાંટતા) મળતી ગોઠવણી દર્શાવી છે. જ્યારે કાગળને બે કે ત્રણ વખત જરાક ઠપકારવામાં આવે ત્યારે લોખંડનો ઝીણો ભૂકો એક ચોક્કસ ભાત રચીને ગોઠવાય છે, જે ચુંબકીય ક્ષેત્રરેખાઓ દર્શાવે છે. જો ગજિયા ચુંબકની જગ્યાએ નાનો સૉલેનોઇડ મૂકી તેમાંથી dc પ્રવાહ પસાર કરવામાં આવે તોપણ આ જ પ્રકારની ભાત રચાય છે.

આકૃતિ 5.2 ગજિયા ચુંબકની ચુંબકીય ક્ષેત્રરેખાઓ દર્શાવતી લોખંડના ઝીણા ભૂકાની ગોઠવણીથી રચાતી ભાત



(a) ગજિયો ચુંબક (b) સૉલેનોઇડ (c) વિદ્યુત-ડાઇપોલ

આકૃતિ 5.3 ચુંબકીય અને વિદ્યુતીય ક્ષેત્રરેખાઓ (માત્ર જાણકારી માટે)

આકૃતિ 5.3માં ગજિયા ચુંબક અને નાના સૉલેનોઇડ વડે રચાતી ચુંબકીય ક્ષેત્રરેખાઓ દર્શાવી છે. વિદ્યુત-ડાઇપોલ વડે રચાતી વિદ્યુતક્ષેત્રરેખાઓ પણ સરખામણી માટે દર્શાવી છે.

આકૃતિ 5.3નો અભ્યાસ કરતાં નીચેનાં તારણો મેળવી શકાય :

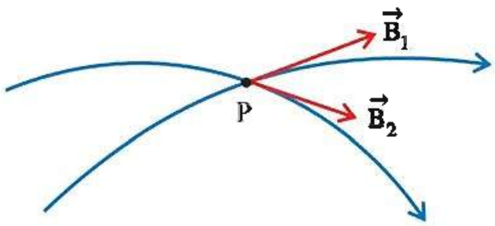
(1) ગજિયા ચુંબક કે ટૂંકા સૉલેનોઇડ વડે મળતી ચુંબકીય ક્ષેત્રરેખાઓ બંધ ગાળાઓ રચે છે. ચુંબકીય ક્ષેત્રરેખાઓ ચુંબકના ઉત્તર ધ્રુવ પાસેથી બહાર નીકળી દક્ષિણ ધ્રુવ પાસે પહોંચી અને ત્યાંથી ચુંબકમાંથી પસાર થઈને પાછી ઉત્તર ધ્રુવ પાસે પહોંચીને બંધ ગાળાઓ રચે છે. વિદ્યુત-ડાઇપોલમાં વિદ્યુતક્ષેત્રરેખાઓ ધન વિદ્યુતભારમાંથી બહાર નીકળીને ઋણ વિદ્યુતભારમાં દાખલ થાય છે અથવા અનંત સુધી વિસ્તરે છે.

વિદ્યુતભારોની એવી કોઈ સ્થિર ગોઠવણી શક્ય નથી, કે જેના દ્વારા ઉત્પન્ન થતી વિદ્યુતક્ષેત્રરેખાઓ બંધ ગાળાઓ રચે. સ્થિર વિદ્યુતક્ષેત્રનો આ એક આગવો ગુણધર્મ છે.

(2) ચુંબકીય ક્ષેત્રરેખાને કોઈ એક બિંદુએ દોરેલ સ્પર્શક તે બિંદુ પાસે ચુંબકીય ક્ષેત્ર $\vec{B}$ ની દિશા દર્શાવે છે.

દાખલા તરીકે, ચુંબકીય સોય (magnetic needle)ને ગજિયા ચુંબકની આજુબાજુના વિસ્તારમાં જુદાં-જુદાં બિંદુઓએ મૂકીને તેની ચુંબકીય ક્ષેત્રરેખાઓ દોરી શકાય.

(3) ચુંબકની આસપાસના કોઈ વિસ્તારમાં ચુંબકીય ક્ષેત્રની પ્રબળતાનું મૂલ્ય તે વિસ્તારમાં ચુંબકીય ક્ષેત્રરેખાઓને લંબ એવા એકમ ક્ષેત્રફળમાંથી પસાર થતી ક્ષેત્રરેખાઓની સંખ્યા વડે દર્શાવી શકાય. આકૃતિ 5.3(a) અને 5.3(b)માં દર્શાવ્યા મુજબ વિસ્તાર (ii) કરતાં વિસ્તાર (i) સાથે સંકળાયેલું ચુંબકીય ક્ષેત્ર B વધુ છે.

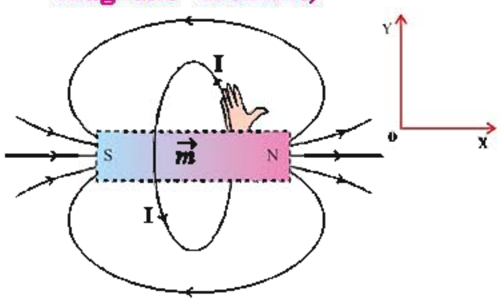


આકૃતિ 5.3 (d)

(4) **ચુંબકીય ક્ષેત્રરેખાઓ એકબીજીને છેદતી નથી.** જો તેઓ કોઈ બિંદુ પાસે એકબીજીને છેદે તો છેદનબિંદુ પાસે ક્ષેત્રરેખાઓ સાથેના સ્પર્શકો તે બિંદુએ ચુંબકીય ક્ષેત્ર માટે બે જુદી-જુદી દિશા દર્શાવે, જે શક્ય નથી (જુઓ આકૃતિ 5.3(d)).

જો ચુંબકીય ક્ષેત્રરેખાઓ એકબીજીને P બિંદુએ છેદે, તો P બિંદુ આગળ ચુંબકીય ક્ષેત્ર, $\vec{B}_1$ અને $\vec{B}_2$ વડે દર્શાવેલ બે જુદી-જુદી દિશાઓ દર્શાવે.

5.3 ચુંબક તરીકે પ્રવાહગૂંચળુ (લૂપ) અને તેની ડાઈપોલ-મોમેન્ટ (Current Loop as a Magnet and its Magnetic Moment)



આકૃતિ 5.4 $\vec{m}$ ડાઈપોલ-મોમેન્ટવાળા ગજિયા ચુંબકની જેમ પ્રવાહગૂંચળા વડે ઉદ્ભવતું ચુંબકીય ક્ષેત્ર

પ્રકરણ 4 માં તમે ભણ્યા કે વિદ્યુતપ્રવાહ I ધરાવતું, A ક્ષેત્રફળનું પ્રવાહ-ગૂંચળું, ચુંબકીય ડાઇપોલ તરીકે વર્તે છે, જેની ચુંબકીય ડાઇપોલ-મોમેન્ટ

$$m = IA \qquad (5.3.1)$$

ચુંબકીય ડાઇપોલ-મોમેન્ટ $\vec{m}$ની દિશા જમણા હાથના નિયમ પરથી જાણી શકાય, જે આકૃતિ 5.4માં દર્શાવેલ છે.

$$\text{આમ, } \vec{m} = I\vec{A} \qquad (5.3.2)$$

જો ગૂંચળામાં N આંટા હોય તો,

$$\vec{m} = NI\vec{A} \qquad (5.3.3)$$

a ત્રિજ્યાના ગૂંચળાની અક્ષ પર તેના કેન્દ્રથી મોટા અંતરે ($x >> a$) આવેલા બિંદુ પાસે ચુંબકીય ક્ષેત્ર (પ્રકરણ 4)

$$B(x) = \frac{\mu_0 I a^2}{2x^3} \qquad (5.3.4)$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I\pi a^2}{x^3} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{IA}{x^3}, \qquad (A = \pi a^2 = \text{ગૂંચળાનું ક્ષેત્રફળ})$$

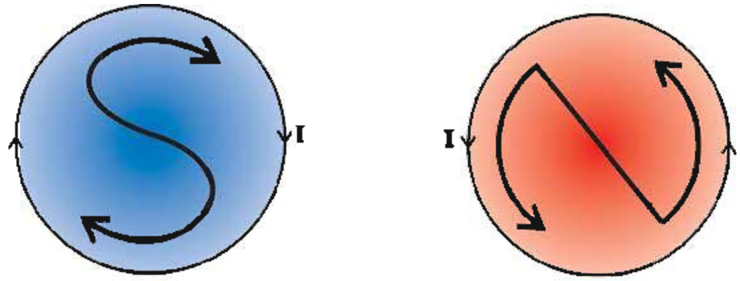
$$\therefore B(x) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{m}{x^3} \qquad (5.3.5)$$

B(x) અને m ની દિશા એક જ હોવાથી

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\vec{m}}{x^3}, \qquad (5.3.6)$$

જે મોટા અંતર $x >> a$ માટે ગૂંચળાની ડાઈપોલ-મોમેન્ટ $\vec{m}$ના સંદર્ભમાં ગૂંચળાનું અક્ષીય ચુંબકીય ક્ષેત્ર દર્શાવે છે. સમીકરણ (5.3.6)ને તેટલી જ ચુંબકીય ડાઇપોલ-મોમેન્ટ $\vec{m}$ ધરાવતા (નાના) ગજિયા ચુંબક માટે પણ બરોબર તે જ રીતે લાગુ પાડી શકાય.

5.3.1 પ્રવાહધારિત ગૂંચળા માટે ચુંબકીય ધ્રુવની દિશા (Direction of Magnetic Pole in a Current Carrying Loop)



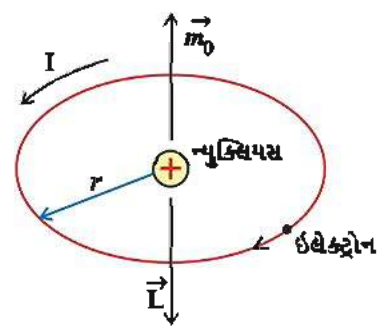
(a) ચુંબકીય દક્ષિણ ધ્રુવ (b) ચુંબકીય ઉત્તર ધ્રુવ

આકૃતિ 5.5

આકૃતિ 5.5(a)માં દર્શાવ્યા મુજબ પુસ્તકના પાનની સપાટીમાં રહેલા વર્તુળાકાર ગૂંચળામાં વહેતો પ્રવાહ I ઘડિયાળના કાંટાની (ગતિની) દિશામાં છે. જમણા હાથના નિયમ મુજબ જણાય છે કે ગૂંચળાની આપણા તરફની બાજુ ચુંબકીય દક્ષિણ ધ્રુવ તરીકે વર્તે છે તથા તેની વિરુદ્ધ બાજુ (પાછળની બાજુ) ચુંબકીય ઉત્તર ધ્રુવ તરીકે વર્તે છે. સંજ્ઞા S એ આપણા તરફનો ચુંબકીય દક્ષિણ ધ્રુવ દર્શાવે છે. તે જ રીતે, જો ગૂંચળામાં પ્રવાહ વિષમઘડી દિશામાં વહેતો હોય, તો ગૂંચળાની આપણા તરફની બાજુ ચુંબકીય ઉત્તર ધ્રુવ તરીકે વર્તે છે, જ્યારે વિરુદ્ધ બાજુ ચુંબકીય દક્ષિણ ધ્રુવ તરીકે વર્તે છે (જુઓ આકૃતિ 5.5(b)). આકૃતિમાં આપણી તરફનો ચુંબકીય ઉત્તર ધ્રુવ સંજ્ઞા N વડે દર્શાવેલ છે.

5.4 ન્યુક્લિયસની આસપાસ ભ્રમણ કરતા ઇલેક્ટ્રૉનની મૅગ્નેટિક મોમેન્ટ (Magnetic Moment of an Electron Rotating Around the Nucleus of an Atom)

મિત્રો, હવે તમે જાણો છો કે ગતિ કરતા વિદ્યુતભારો અથવા વિદ્યુતપ્રવાહ વડે ચુંબકીય ક્ષેત્ર ઉત્પન્ન થાય છે. કોઈ પણ પદાર્થ અણુઓનો બનેલો હોય છે અને આ અણુઓ પરમાણુઓના બનેલા છે, જેમાં ચોક્કસ સંખ્યાના ઇલેક્ટ્રૉન (તે તત્ત્વની પ્રકૃતિને અનુલક્ષીને) જુદી-જુદી શક્ય કક્ષાઓમાં ભ્રમણ કરતા હોય છે. ઇલેક્ટ્રૉન્સની આવી કક્ષીય ગતિને બંધ ગાળામાં વહેતો વિદ્યુતપ્રવાહ ગણી શકાય, જેની મૅગ્નેટિક મોમેન્ટ IA હોય (અહીંયાં I = વિદ્યુતપ્રવાહ, અને A = કક્ષા વડે ઘેરાયેલું ક્ષેત્રફળ). કોઈ પણ તત્ત્વના પરમાણુની ચુંબકીય ડાઇપોલ-મોમેન્ટ, જુદી-જુદી કક્ષાઓમાં રહેલા ઇલેક્ટ્રૉન્સ અને તેમના સ્થાન પર આધાર રાખે છે.



આકૃતિ 5.6 ઇલેક્ટ્રૉનની કક્ષીય ચુંબકીય ડાઇપોલ-મોમેન્ટ

આકૃતિ 5.6માં દર્શાવ્યા મુજબ, ધારો કે એક ઇલેક્ટ્રૉન ન્યુક્લિઅસની આજુબાજુ અચળ ઝડપ v સાથે, r ત્રિજ્યાની વર્તુળાકાર કક્ષામાં ગતિ કરે છે. જો ઇલેક્ટ્રૉન $2\pi r$ (વર્તુળના પરિઘ) જેટલું અંતર T સમયમાં કાપતો હોય, તો તેની કક્ષીય ઝડપ $v = \frac{2\pi r}{T}$. આમ, કક્ષામાં ભ્રમણ કરતા e વિદ્યુતભારિત ઇલેક્ટ્રૉન સાથે સંકળાયેલ વિદ્યુતપ્રવાહ $I = \frac{e}{T}$. અહીંયાં, $T = \frac{2\pi}{\omega}$, અને $\omega = \frac{v}{r}$

$$\therefore \ I = \frac{e\omega}{2\pi} = \frac{ev}{2\pi r}$$

આ કક્ષીય પ્રવાહ-ગૂંચળા (લૂપ) સાથે સંકળાયેલ કક્ષીય ચુંબકીય ડાઇપોલ-મોમેન્ટ

$$m_0 = IA = \frac{ev}{2\pi r} \times \pi r^2 = \frac{1}{2}evr \qquad (5.4.1)$$

આ ઇલેક્ટ્રૉન માટે કક્ષીય કોણીય વેગમાન $L = m_e vr$. આથી, ઇલેક્ટ્રૉનની કક્ષીય ચુંબકીય ડાઇપોલ-મોમેન્ટ

$$m_0 = \left(\frac{e}{2m_e}\right)(m_e vr) = \left(\frac{e}{2m_e}\right)L \qquad (5.4.2)$$

સમીકરણ (5.4.2) દર્શાવે છે કે ઇલેક્ટ્રૉનની ચુંબકીય ડાઇપોલ-મોમેન્ટ તેના કક્ષીય કોણીય વેગમાનના

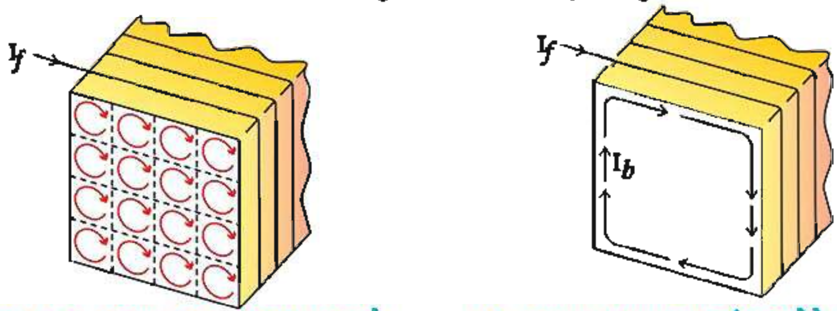
સમપ્રમાણમાં છે, પરંતુ ઇલેક્ટ્રૉનનો વિદ્યુતભાર ઋણ હોવાથી, $\vec{m_0}$ અને $\vec{L}$ કક્ષાના સમતલને લંબ પરંતુ એકબીજાની વિરુદ્ધ દિશામાં હોય છે.

$$\therefore \ \vec{m_0} = -\left(\frac{e}{2m_e}\right) \vec{L} \qquad (5.4.3)$$

$\frac{e}{2m_e}$ ગુણોત્તર અચળ હોય છે, જેને ગાયરોમૅગ્નેટિક રેશિયો કહે છે, અને તેનું મૂલ્ય 8.8×10^{10}C kg^{-1} જેટલું હોય છે.

5.5 પદાર્થનું ચુંબકત્વ (Magnetism in Matter)

સામાન્ય રીતે ચુંબકો લોખંડ (*Fe*) કે તેની મિશ્રધાતુમાંથી તૈયાર કરવામાં આવે છે. લોખંડના અણુઓ સામાન્ય રીતે ચુંબકીય ડાઇપોલ-મોમેન્ટ ધરાવતા હોય છે, પરંતુ લોખંડનો કોઈ ટુકડો ચુંબક તરીકે (સામાન્ય સંજોગોમાં) વર્તતો નથી.



(a) પ્રવાહ I_fના કારણે વહેતા આણ્વિક પ્રવાહો (ચુંબકિત લોખંડ)

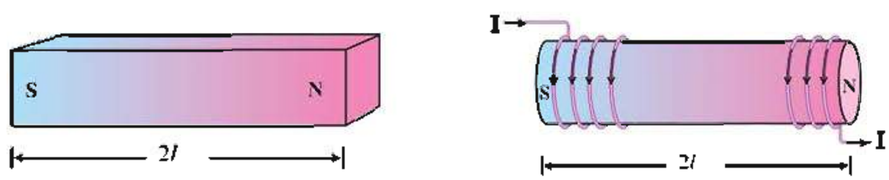
(b) ભાગ (a)ના પ્રવાહ-ગૂંચળાઓને સમતુલ્ય બદ્ધ પ્રવાહ-ગૂંચળું

આકૃતિ 5.7

આ જ લોખંડના ટુકડાને થોડા સમય માટે તીવ્ર ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં મૂકીને ત્યાર બાદ લગાડેલ ચુંબકીય ક્ષેત્ર લઈ લેવામાં આવે, તો તે ટુકડો ચુંબકમાં ફેરવાઈ (ચુંબકિત થઈ) જાય છે. આકૃતિ (5.7.(a))માં દર્શાવ્યા મુજબ, લોખંડના એક ટુકડા પર તાર વીંટાળવામાં આવ્યો છે. જો $I_f = 0$, હોય ત્યારે દરેક અણુઓની ચુંબકીય ડાઇપોલ-મોમેન્ટ જુદી-જુદી દિશાઓમાં અસ્તવ્યસ્ત ગોઠવાયેલી હોય છે કે જેથી લોખંડના ટુકડાની પરિણામી ચુંબકીય ડાઇપોલ-મોમેન્ટ શૂન્ય થાય, અને તેથી લોખંડનો ટુકડો ચુંબક તરીકે વર્તતો નથી.

જ્યારે વાયરમાંથી પૂરતો પ્રવાહ I_f પસાર થાય છે, ત્યારે લોખંડના ટુકડામાં તીવ્ર ચુંબકીય ક્ષેત્ર ઉત્પન્ન થાય છે, જેના કારણે લોખંડના ટુકડામાં દરેક અણુના પ્રવાહ-ગૂંચળાંઓનું (લૂપનું) વિતરણ બદલાય છે અને તેના પરિણામસ્વરૂપે લોખંડના ટુકડાની સપાટી પર વહેતો પરિણામી બદ્ધ પ્રવાહ I_b દર્શાવ્યો છે. (જુઓ આકૃતિ 5.7 b). આવાં જ કારણોસર ગજિયો ચુંબક પણ ચુંબકીય ક્ષેત્ર ઉત્પન્ન કરે છે તેમ ગણી શકાય. જ્યારે પ્રવાહ I_f ને ઘટાડીને શૂન્ય કરવામાં આવે ત્યારે તે પ્રવાહ I_f થી ઉદ્ભવતું ચુંબકીય ક્ષેત્ર શૂન્ય થઈ જતું હોવા છતાં આ આણ્વિક પ્રવાહગાળાઓ પોતાની મૂળ અસ્તવ્યસ્ત સ્થિતિમાં પાછા ફરતા નથી, પરંતુ કંઈક અંશે આકૃતિ (5.7 b) જેવી સ્થિતિ જાળવી રાખે છે. આ રીતે આ લોખંડનો ટુકડો તેનું પોતાનું ચુંબકીય ક્ષેત્ર અને ચુંબકત્વ જાળવી રાખે છે.

5.6 ગજિયા ચુંબક અને સૉલેનોઇડ વચ્ચેની સામ્યતા (Equivalence between a Bar-Magnet and a Solenoid)



આકૃતિ 5.8 ગજિયો ચુંબક અને સૉલેનોઇડ

આકૃતિ 5.8માં ગજિયો ચુંબક અને સૉલેનોઇડ દર્શાવ્યા છે. જો ગજિયા ચુંબકના દરેક ધ્રુવનું ધ્રુવમાન (pole strength) p_b હોય. (આવા સ્વતંત્ર ધ્રુવ ખરેખર હોતા નથી) અને બન્ને ધ્રુવ વચ્ચેનું અંતર $2l$ હોય તો વ્યાખ્યા મુજબ, ગજિયા ચુંબકની ચુંબકીય ડાઇપોલ-મોમેન્ટ.

$$m_b = 2lp_b \tag{5.6.1}$$

$$\therefore\ p_b = \frac{m_b}{2l} \tag{5.6.2}$$

અહીંયાં suffix b દર્શાવે છે કે ચુંબકીય ડાઈપોલ-મોમેન્ટ ગજિયા ચુંબકના કારણે છે.

નોંધ (માત્ર જાણકારી માટે) : ગજિયા ચુંબકના ધ્રુવો (p_b) ચુંબકના બંન્ને છેડાની સપાટી પર હોતા નથી, પરંતુ અંદરની તરફ હોય છે. તેથી બન્ને ધ્રુવ વચ્ચેનું અંતર (ચુંબકીય લંબાઈ) $2l_m$ એ ચુંબકની ભૌમિતિક લંબાઈ $2l$ કરતાં જરાક ઓછું હોય છે. આ પુસ્તકમાં વ્યાવહારીક સરળતા ખાતર ચુંબકીય લંબાઈ $2l_m = \frac{5}{6} \times 2l$, ને ચુંબકની ભૌમિતિક લંબાઈ જેટલી ગણવામાં આવેલ છે.

આડછેદનું ક્ષેત્રફળ A હોય તેવા વિદ્યુતપ્રવાહ I, ધારિત સૉલેનોઇડના દરેક આંટાને પ્રવાહ-ગૂંચળા તરીકે સમજી શકાય, અને તેથી દરેક આંટા સાથે ચુંબકીય ડાઈપોલ-મોમેન્ટ IA સંકળાયેલી છે તેમ ગણી શકાય. દરેક આંટાની ચુંબકીય ડાઈપોલ-મોમેન્ટ એક જ દિશામાં હોવાથી, સૉલેનોઇડની ચુંબકીય ચાકમાત્રા એ દરેક આંટાઓની ચુંબકીય ચાકમાત્રાઓના સદિશ સરવાળા જેટલી હોય છે. જો સૉલેનોઇડની $2l$ લંબાઈમાં N આંટા હોય, તો તેની ચુંબકીય ડાઈપોલ-મોમેન્ટ

$$m_s = NIA \tag{5.6.3}$$

સમીકરણ (5.6.1) અને (5.6.3) પરથી આપણે સૉલેનોઇડનું ધ્રુવમાન વ્યાખ્યાયીત કરી શકીએ,

$$p_S = \frac{m_s}{2l} = \frac{NIA}{2l} = nIA \tag{5.6.4}$$

જ્યાં $n = \frac{N}{2l}$ = સૉલેનોઇડની એકમલંબાઈ દીઠ આંટાઓની સંખ્યા

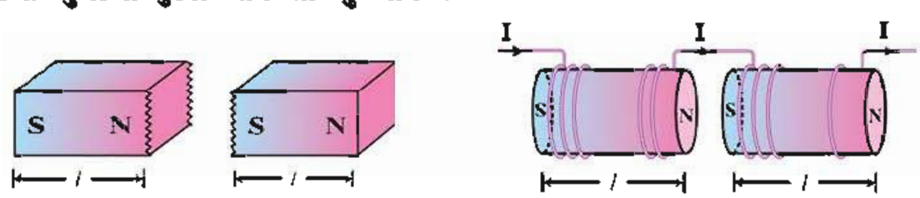
સમીકરણ (5.6.4) પરથી ધ્રુવમાનનો એકમ A m છે.

પરિચ્છેદ (5.3) માં દર્શાવ્યા મુજબ, ચુંબકીય ડાઈપોલ-મોમેન્ટ $\vec{m}$ની અક્ષ પર ચુંબકીય ક્ષેત્ર

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\vec{m}}{x^3} \tag{5.6.5}$$

આથી, ગજિયા ચુંબક અથવા સૉલેનોઇડ વડે ઉદ્‌ભવતું અક્ષીય ચુંબકીય ક્ષેત્ર, સમીકરણ (5.6.5)માં $\vec{m}$ની જગ્યાએ અનુક્રમે $\vec{m}_b$ અથવા $\vec{m}_s$ મૂકીને ગણી શકાય.

જો ગજિયા ચુંબકના ટુકડા થાય તો શું થાય ?



(a) (b)

આકૃતિ 5.9 ગજિયા ચુંબકના અને સૉલેનોઇડના ટુકડા

જો આકૃતિ 5.8માં દર્શાવેલ સૉલેનોઇડના બે સરખા ટુકડા આકૃતિ 5.9.(b)માં દર્શાવ્યા મુજબ કરવામાં આવે, તો દરેક ટુકડાનું ધ્રુવમાન nIA જેટલું સમાન (અચળ) જ રહે છે, કારણ કે એકમલંબાઈ દીઠ આંટાની સંખ્યા (n) સમાન જ રહે છે. આ સામ્યતા પરથી આપણે કહી શકીએ કે ગજિયા ચુંબકના દરેક ટુકડાઓનું ધ્રુવમાન પણ સમાન જ રહે છે.

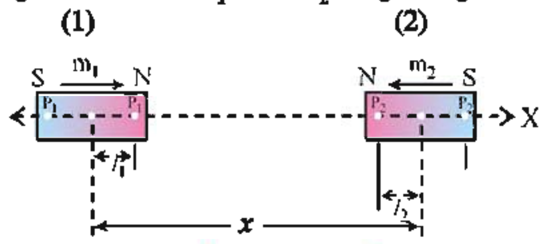
બન્ને કિસ્સાઓમાં, ચુંબકીય લંબાઈ મૂળ લંબાઈ કરતાં અડધી થાય છે. આથી, ચુંબકીય ડાઈપોલ-મોમેન્ટ પણ અડધી થાય છે.

5.6.1 સ્થિતવિદ્યુત સાથે સામ્યતા (The Electrostatic Analogue) : સમીકરણો (5.6.1) અને (5.6.5)ને વિદ્યુતભાર માટેનાં તેવાં જ સમીકરણો (પ્રકરણ 1) સાથે સરખાવો. અહીં જોઈ શકાય છે કે ચુંબકીય ડાઈપોલ-મોમેન્ટ $\vec{m}$ વાળા ગજિયા ચુંબક અથવા પ્રવાહ-ગૂંચળાથી મોટા અંતર માટે ચુંબકીય ક્ષેત્રનું મૂલ્ય, ડાઈપોલ-મોમેન્ટ $p = 2aq$ ધરાવતા વિદ્યુત-ડાઈપોલ વડે ઉદ્‌ભવતા વિદ્યુતક્ષેત્રનાં સમીકરણોમાં $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$, $\vec{p} \rightarrow \vec{m}$, $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \rightarrow \frac{\mu_0}{4\pi}$ મૂકીને મેળવી શકાય.

ટેબલ 5.1 : વિદ્યુત અને ચુંબકીય ડાઈપોલ વચ્ચેની સામ્યતાનો સારાંશ

રાશિ	સ્થિત-વિદ્યુતશાસ્ત્ર	ચુંબકત્વ
અચળાંક	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$	$\frac{\mu_0}{4\pi}$
ક્ષેત્ર -	$\vec{E}$ q (વિદ્યુતભાર)	$\vec{B}$ p (ધ્રુવમાન)
બળ ડાઈપોલ-મોમેન્ટ	$q\vec{E}$ $\vec{p} = q(2\vec{a})$	$p\vec{B}$ $\vec{m} = p(2\vec{l})$
વિષુવવૃત્તીય ક્ષેત્ર $y >> a$ $y >> l$	$\vec{E}(y) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}}{(y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$ $= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}}{y^3}$	$\vec{B}(y) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}}{(y^2+l^2)^{\frac{3}{2}}}$ $= -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}}{y^3}$
અક્ષીય ક્ષેત્ર $z >> a$ $z >> l$	$\vec{E}(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\vec{p}z}{(z^2-a^2)^2}$ $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\vec{p}}{z^3}$	$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\vec{m}z}{(z^2-l^2)^2}$ $= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\vec{m}}{z^3}$
બાહ્ય ક્ષેત્રમાં ટૉર્ક	$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$	$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$
બાહ્ય ક્ષેત્રમાં સ્થિતિ-ઊર્જા	$U = -\vec{p}\cdot\vec{E}$	$U = -\vec{m}\cdot\vec{B}$

ઉદાહરણ 1 : આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ એક અક્ષ પર રહેલા, $\vec{m}_1$ અને $\vec{m}_2$ ડાઈપોલ-મોમેન્ટવાળા બે નાના ગજિયા ચુંબકો વચ્ચે લાગતું બળ શોધો. (p_1 અને p_2 અનુક્રમે ચુંબકો (1) અને (2)ના ધ્રુવમાન છે.)



$x >> l_1$, $x >> l_2$

ઉકેલ : ચુંબક (1) વડે ચુંબક (2) પર લાગતું બળ શોધવા માટે, ચુંબક (1) વડે ચુંબક (2)ના ધ્રુવો પાસે ઉદ્ભવતું ચુંબકીય ક્ષેત્ર શોધો. ચુંબક (1)ની ચુંબકીય ડાઇપોલ-મોમેન્ટ m_1 વડે ચુંબક (2)ના ઉત્તર ધ્રુવ પાસે ઉદ્ભવતું અક્ષીય ચુંબકીય ક્ષેત્ર (આકૃતિ પરથી)

$$B_N = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m_1}{(x-l_2)^3} \tag{1}$$

તે જ રીતે ચુંબક (2) ના દક્ષિણ ધ્રુવ પાસે ઉદ્ભવતું અક્ષીય ચુંબકીય ક્ષેત્ર

$$B_S = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m_1}{(x+l_2)^3} \tag{2}$$

આથી, ચુંબક (2)ના p_2 ધ્રુવમાનવાળા ઉત્તર ધ્રુવ પર લાગતું અપાકર્ષી બળ F_N (સ્થિતવિદ્યુતના સૂત્ર $F = qE$ મુજબ)

$$F_N = p_2 B_N = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2p_2 m_1}{(x-l_2)^3} \tag{3}$$

જે ચુંબક (1)થી દૂરની તરફ લાગે છે.

તે જ રીતે ચુંબક (2)ના દક્ષિણ ધ્રુવ પર લાગતું આકર્ષી બળ

$$F_S = p_2 B_S = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2p_2 m_1}{(x+l_2)^3} \tag{4}$$

જે ચુંબક (1) તરફ લાગે છે.

આથી, ચુંબક (2) પર લાગતું પરિણામી બળ

$$F = F_N - F_S$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot 2p_2 m_1 \left[\frac{1}{(x-l_2)^3} - \frac{1}{(x+l_2)^3}\right] = \frac{\mu_0}{2\pi} \; p_2 m_1 \left[\frac{(x+l_2)^3 - (x-l_2)^3}{\{(x-l_2)(x+l_2)\}^3}\right]$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} \; p_2 m_1 \left[\frac{6x^2 l_2}{(x^2 - l_2^2)^3}\right]$$ [કારણ કે $(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b)$ અને અંશમાં $l_2^3 << x^2 l_2$]

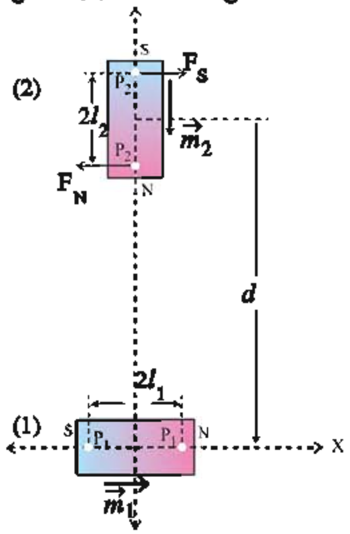
$$\therefore F = \frac{\mu_0 m_1}{2\pi} \cdot \frac{2l_2 p_2 \cdot 3x^2}{x^6}$$ ($\because$ $l_2^2 << x^2$, હોવાથી l_2^2ને અવગણી શકાય.)

$$\therefore F = \frac{3\mu_0 m_1 m_2}{2\pi x^4} \tag{5}$$

જ્યાં $m_2 = 2l_2 p_2$ = ચુંબક (2)ની ડાઇપોલ-મોમેન્ટ આ પરિણામી બળ ચુંબકોની આપેલ ગોઠવણી માટે અપાકર્ષી છે અને તે ચુંબક (2) પર ચુંબક (1)થી દૂર તરફ લાગે છે.

[જો બે માંથી કોઈ એક ચુંબકની દિશા ઉલટાવી નાખવામાં આવે, તો પરિણામી બળ કેવું હશે ? વિચારો !]

ઉદાહરણ 2 : આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ એકબીજાને લંબરૂપે મૂકેલા બે નાના ગજિયા ચુંબકો માટે ચુંબક (1) વડે ચુંબક (2) પર લાગતું ટોર્ક શોધો. ($l_1 << d, l_2 << d$)



ઉકેલ : આકૃતિ પરથી જોઈ શકાય છે કે ચુંબક (2) ના બન્ને ધ્રુવો ચુંબક (1)ની વિષુવરેખા પર આવેલા છે.

નાના ગજિયા ચુંબક (1) વડે તેના વિષુવવૃત્તીય સમતલમાં રહેલા ચુંબક (2)ના ઉત્તર ધ્રુવ પર $(d - l_2)$ અંતરે ઉદ્‌ભવતું ચુંબકીય ક્ષેત્ર

$$B_N = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_1}{(d-l_2)^3} \tag{1}$$

તે જ રીતે ચુંબક (1) વડે તેના વિષુવવૃત્તીય સમતલમાં રહેલા ચુંબક (2) ના દક્ષિણ ધ્રુવ પર $(d + l_2)$ અંતરે ઉદ્‌ભવતું ચુંબકીય ક્ષેત્ર

$$B_S = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_1}{(d+l_2)^3} \tag{2}$$

આથી, ચુંબક (2)ના p_2 ધ્રુવમાનવાળા ઉત્તર અને દક્ષિણ ધ્રુવો પર લાગતાં બળો F_N અને F_Sનાં મૂલ્યો

$$F_N = p_2 B_N = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{m_1 p_2}{(d-l_2)^3} \tag{3}$$

$$F_S = p_2 B_S = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_1 p_2}{(d+l_2)^3} \tag{4}$$

પરંતુ $l_1 << d$ અને $l_2 << d$ હોવાથી, l_1 અને l_2ને સમીકરણો (3) અને (4)માં dની સાપેક્ષે અવગણી શકાય.

$$\therefore \; F_S = F_N = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_1 p_2}{d^3} \tag{5}$$

અહીં ચુંબક (2) પર લાગતાં બળો F_S અને F_N વિરુદ્ધ દિશામાં લાગે છે, પરંતુ એકરેખસ્થ નથી, તેથી તે બળયુગ્મ રચે છે. આમ, આ બળોના કારણે લાગતું ટોર્ક

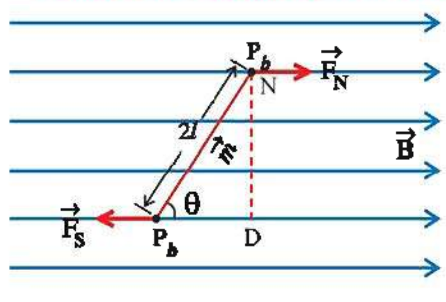
$$\vec{\tau} = \left(2\vec{l_2}\right) \times \vec{F_N} = \left(2\vec{l_2}\right) \times \vec{F_S} \qquad \left(\because \; \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}\right)$$

પરંતુ $\vec{F_N} \perp \vec{l_2}$ અને $\vec{F_S} \perp \vec{l_2}$ હોવાથી ચુંબક (2)ના કેન્દ્રની સાપેક્ષે ટોર્કનું મૂલ્ય

$$\tau = 2F_N l_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_1 2 l_2 p_2}{d^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_1 m_2}{d^3} \tag{6}$$

જ્યાં $2l_2 p_2 = m_2$ = ચુંબક (2)ની ચુંબકીય ડાઇપોલ-મોમેન્ટ.

5.7 ચુંબકીય ડાઇપોલ (ગજિયા ચુંબક) પર નિયમિત ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં લાગતું ટોર્ક (Torque Acting on a Magnetic Dipole (Bar Magnet) in a Uniform Magnetic Field)



આકૃતિ 5.10 નિયમિત ચુંબકીય ક્ષેત્ર $\vec{B}$ માં મૅગ્નેટિક મોમેન્ટ $\vec{m}$ વાળા ચુંબકીય ડાઇપોલ પર લાગતું ટોર્ક

પ્રકરણ 4માં તમે શીખી ગયા કે ચુંબકીય ડાઇપોલ-મોમેન્ટ $\vec{m}$ ધરાવતા લંબચોરસ ગૂંચળાને નિયમિત ચુંબકીય ક્ષેત્ર $\vec{B}$ માં મૂકતાં તેના પર લાગતું ટોર્ક

$$\left.\begin{aligned} \vec{\tau} &= \vec{m} \times \vec{B} \\ \therefore \; \tau &= mB\sin\theta \end{aligned}\right\} \tag{5.7.1}$$

જ્યાં θ એ $\vec{m}$ અને $\vec{B}$ વચ્ચેનો ખૂણો છે (ક્યારેક ચુંબકીય ડાઇપોલ-મોમેન્ટને સંજ્ઞા $\vec{\mu}$ વડે પણ દર્શાવવામાં આવે છે.)

$\vec{m}$ ડાઇપોલ-મોમેન્ટવાળા ગજિયા ચુંબક અથવા ચુંબકીય સોયને નિયમિત ચુંબકીય ક્ષેત્ર $\vec{B}$માં મૂકીને આ હકીકત સમજી શકાય છે (જુઓ આકૃતિ 5.10). ચુંબકીય ધ્રુવમાનના સંદર્ભમાં ચુંબકીય ક્ષેત્ર $\vec{B}$નું મૂલ્ય એકમ ધ્રુવમાન પર લાગતા બળના મૂલ્ય તરીકે ગણી શકાય.

ચુંબકીય ક્ષેત્ર, ઉત્તર અને દક્ષિણ ધ્રુવો પર સમાન પરંતુ વિરુદ્ધ દિશામાંનાં બળો $\vec{F}_N$ અને $\vec{F}_S$ લગાડે છે. આ બળો એકરેખસ્થ ન હોવાથી તેઓ બળયુગ્મ રચે છે. આ બળો વચ્ચેનું લંબઅંતર ND છે. આ બળયુગ્મની અસર હેઠળ ચુંબકીય ડાઇપોલ ભ્રમણ કરીને નવા સ્થાને ગોઠવાય છે, જે ચુંબકીય ક્ષેત્ર $\vec{B}$ સાથે θ ખૂણો બનાવે છે.

સમીકરણ (5.7.1)માં જો ખૂણો θ (રેડિયનમાં) નાનો હોય તો $\sin\theta \approx \theta$.

$$\therefore \ \tau = m\mathrm{B}\theta \tag{5.7.2}$$

આકૃતિમાં આ ટૉર્ક, ડાઇપોલને ઘડિયાળની દિશામાં ભ્રમણ કરાવવા પ્રયત્ન કરે છે. જો આપણે ડાઇપોલને આ સમતુલિત સ્થિતિમાંથી વિષમઘડી દિશામાં θ ખૂણે ભ્રમણ કરાવવા પ્રયત્ન કરીએ, તો સમીકરણ (5.7.2) વડે દર્શાવેલ ટૉર્ક વિરુદ્ધ દિશામાં લાગશે. આથી આપણે આ પુનઃસ્થાપક ટૉર્કને ઋણ ચિહ્ન સાથે લખી શકીએ.

$$\therefore \ \tau = -m\mathrm{B}\theta \tag{5.7.3}$$

ન્યૂટનના બીજા નિયમ મુજબ (ચાકગતિ માટે)

$$\mathrm{I_m}\frac{d^2\theta}{dt^2} = -m\mathrm{B}\theta \tag{5.7.4}$$

અહીં $\mathrm{I_m}$ એ આકૃતિને લંબ એવી ચુંબકીય ડાઇપોલના મધ્યબિંદુમાંથી પસાર થતી અક્ષને અનુલક્ષીને ડાઇપોલની જડત્વની ચાકમાત્રા છે.

$$\therefore \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{m\mathrm{B}}{\mathrm{I_m}}\theta = -\omega^2\theta \tag{5.7.5}$$

સમીકરણ (5.7.5) એ કોણીય સરળ આવર્તગતિના સમીકરણ જેવું સમીકરણ છે, આથી કોણીય આવૃત્તિ

$$\omega = \sqrt{\frac{m\mathrm{B}}{\mathrm{I_m}}} \tag{5.7.6}$$

$$\therefore \ \mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{I_m}}{\mathrm{mB}}}, \tag{5.7.7}$$

જેના પરથી $$\mathrm{B} = \frac{4\pi^2\mathrm{I_m}}{\mathrm{mT^2}} \tag{5.7.8}$$

બાહ્ય ક્ષેત્ર $\vec{B}$માં મુકેલા ચુંબકીય ડાઇપોલની સ્થિતિ-ઊર્જા

$$\mathrm{U_B} = \int \tau d\theta = \int m\mathrm{B}\sin\theta d\theta = m\mathrm{B}\int \sin\theta d\theta$$

$$\therefore \ \mathrm{U_B} = -m\mathrm{B}cos\theta = -\vec{m}\cdot\vec{\mathrm{B}} \tag{5.7.9}$$

જ્યારે ચુંબકીય ડાઇપોલ, ક્ષેત્ર $\vec{B}$ને લંબરૂપે હોય, એટલે કે $\theta = 90°$ હોય, ત્યારે તેની સ્થિતિ-ઊર્જા શૂન્ય છે તેમ ગણીને સમીકરણ (5.7.9)માં આપણે સંકલનના અચળાંકને શૂન્ય લીધો છે.

$\theta = 0°$ માટે $\mathrm{U_B} = -m\mathrm{B}\cos0° = -m\mathrm{B}$

જે ચુંબકીય ડાઇપોલની મહત્તમ સ્થાયી અવસ્થા દર્શાવતી લઘુતમ સ્થિતિ-ઊર્જા દર્શાવે છે.

$\theta = 180°$ માટે $\mathrm{U_B} = -m\mathrm{B}\cos180° = m\mathrm{B}$

જે ચુંબકીય ડાઇપોલની મહત્તમ અસ્થાયી અવસ્થા દર્શાવતી મહત્તમ સ્થિતિ-ઊર્જા છે.

ઉદાહરણ 3 : નિયમિત ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં મૂકેલી ચુંબકીય સોયની ડાઇપોલ-મોમેન્ટ 6.7×10^{-2} A m^2 અને જડત્વની ચાકમાત્રા 15×10^{-6} kg m^2 છે. તે 6.70 sમાં 10 આંદોલન પૂરાં કરે છે, તો ચુંબકીય ક્ષેત્રનું મૂલ્ય કેટલું હશે ?

ઉકેલ : આંદોલનનો આવર્તકાળ $T = \frac{6.70}{10} = 0.67$ s, અને

$$B = \frac{4\pi^2 I_m}{mT^2} = \frac{4\times(3.14)^2\times15\times10^{-6}}{6.7\times10^{-2}\times(0.67)^2} = 0.02 \text{ T}$$

ઉદાહરણ 4 : 600 G જેટલા બાહ્ય ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં એક નાનો ગજિયો ચુંબક રાખેલો છે, જ્યારે તેની અક્ષ, બાહ્ય ચુંબકીય ક્ષેત્ર સાથે 30° ખૂણો બનાવે, ત્યારે તે 0.012 N *m* જેટલું ટૉર્ક અનુભવે છે.

(a) ચુંબકની ડાઇપોલ-મોમેન્ટ કેટલી હશે ?

(b) તેને મહત્તમ સ્થાયી અવસ્થામાંથી મહત્તમ અસ્થાયી અવસ્થામાં લઈ જતાં કેટલું કાર્ય થયું હશે ?

(c) ગજિયા ચુંબકની જગ્યાએ તેટલી જ ચુંબકીય ડાઇપોલ-મોમેન્ટ ધરાવતો સૉલેનોઇડ રાખવામાં આવે છે, જેના આડછેદનું ક્ષેત્રફળ 2×10^{-4} m^2 અને આંટાની સંખ્યા 1000 છે. સૉલેનોઇડમાંથી પસાર થતા વિદ્યુતપ્રવાહનું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : $B = 600 \text{ G} = 600 \times 10^{-4}$ T, $\theta = 30°$, $\tau = 0.012$ N *m*, N = 1000, $A = 2 \times 10^{-4} m^2$

(a) સમીકરણ (5.7.1) પરથી

$\tau = mB\sin\theta$

$\therefore 0.012 = m \times 600 \times 10^{-4} \times \sin30°$

$\therefore m = 0.40$ A m^2 (કારણ કે $\sin30° = \frac{1}{2}$)

(b) સમીકરણ (5.7.9) પરથી, મહત્તમ સ્થાયી અવસ્થા $\theta = 0°$ અને મહત્તમ અસ્થાયી અવસ્થા $\theta = 180°$ એ છે. આથી, થતું કાર્ય

$W = U_B(\theta = 180°) - U_B(\theta = 0°) = mB - (-mB) = 2mB$

$= 2 \times 0.40 \times 600 \times 10^{-4} = 0.048$ J

(c) સમીકરણ (5.6.3) પરથી

$m_s = NIA$

પરંતુ $m_s = m = 0.40$ A m^2, ભાગ (a) પરથી,

$\therefore 0.40 = 1000 \times I \times 2 \times 10^{-4}$

$\therefore I = 2$ A

5.8. ચુંબકત્વ માટે ગાઉસનો નિયમ (Gauss's Law for Magnetic Field)

આકૃતિઓ (5.3-*a*) અને (5.3-*b*) પરથી આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, કોઈ પણ બંધ પૃષ્ઠ, જેવા કે (i) અથવા (ii) માટે પૃષ્ઠમાં દાખલ થતી ક્ષેત્રરેખાઓ અને પૃષ્ઠમાંથી બહાર નીકળતી ક્ષેત્રરેખાઓ એકસરખી જ છે. ચુંબકીય ક્ષેત્રરેખાઓ હંમેશાં બંધ ગાળાઓ રચતી હોવાથી, કોઈ પણ બંધ પૃષ્ઠ સાથે સંકળાયેલ ચુંબકીય ફ્લક્સ હંમેશાં શૂન્ય હોય છે.

$$\therefore \oint_{\text{બંધ પૃષ્ઠ}} \vec{B}\cdot\vec{da} = 0 \qquad (5.8.1)$$

જ્યાં $\vec{B}$ ચુંબકીય ક્ષેત્ર છે અને $\vec{da}$ એ બંધ પૃષ્ઠનો એક સૂક્ષ્મ પૃષ્ઠ (ક્ષેત્રફળ) સદિશ છે. "કોઈ પણ બંધ પૃષ્ઠમાંથી પસાર થતું ચોખ્ખું (કુલ અથવા net) ચુંબકીય ફલક્સ શૂન્ય હોય છે." આ વિધાનને ચુંબકીય ક્ષેત્ર માટેનો ગાઉસનો નિયમ કહે છે.

વિદ્યુતક્ષેત્ર માટેના ગાઉસના નિયમ મુજબ,

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{da} = 0 = \frac{\sum q}{\epsilon_0} \tag{5.8.2}$$

સમીકરણ (5.8.2)માં જો $\sum q = 0$ હોય, તો

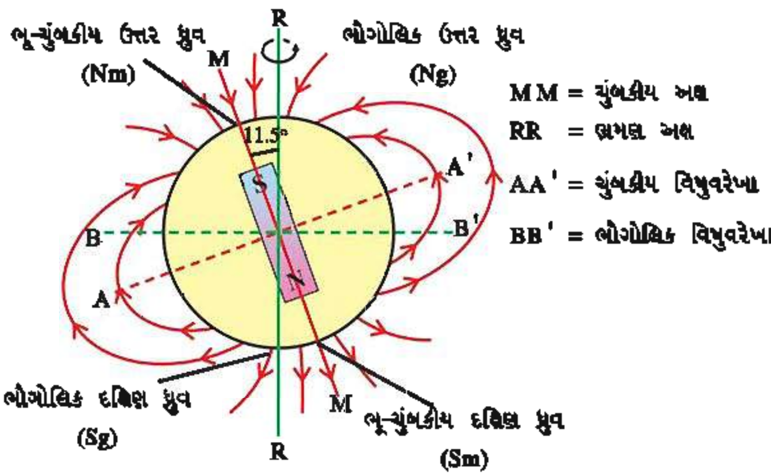
$$\oint \vec{E} \cdot \vec{da} = 0 \tag{5.8.3}$$

આ સમીકરણને સમીકરણ (5.8.1) સાથે સરખાવતાં, આપણે લખી શકીએ કે ચુંબકીય ક્ષેત્ર માટેનો ગાઉસનો નિયમ દર્શાવે છે કે કોઈ પણ ચોખ્ખો ચુંબકીય એકાકી ધ્રુવ (ચુંબકીયભાર ?) બંધ પૃષ્ઠ વડે ઘેરાયેલો હોતો નથી. ચુંબકીય ફ્લક્સનો એકમ વેબર (Wb) છે.

$1 \text{ Wb} = 1 \text{ T m}^2 = 1 \text{ N m A}^{-1}$

5.9. પૃથ્વીનું ચુંબકત્વ અને ચુંબકીય તત્ત્વો (The Magnetism of Earth અને Magnetic Elements)

હવે આપણે જાણીએ છીએ કે પૃથ્વીને પોતાનું ચુંબકીય ક્ષેત્ર છે. પૃથ્વીની સપાટી પર આ ચુંબકીય ક્ષેત્ર 10^{-5} T (T = ટેસ્લા)ના ક્રમનું છે. પૃથ્વીનું ચુંબકીય ક્ષેત્ર, આકૃતિ 5.11માં દર્શાવ્યા મુજબ (કાલ્પનિક) ચુંબકીય ડાઇપોલના ચુંબકીય ક્ષેત્રને મળતું આવે છે.

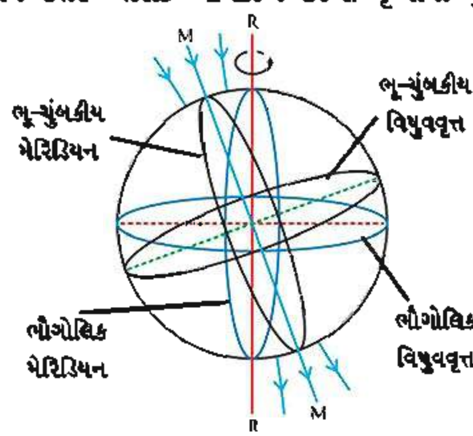


આકૃતિ 5.11 પૃથ્વીનું ચુંબકીય ક્ષેત્ર

આ (કાલ્પનિક) ચુંબકની ડાઇપોલ-મોમેન્ટ $\vec{m}$, 8.0×10^{22} J T^{-1}ના ક્રમની છે. આ ચુંબકીય ડાઇપોલ-મોમેન્ટ $\vec{m}$ની અક્ષ MM, પૃથ્વીની ભ્રમણઅક્ષ RR પર આવેલ નથી, પરંતુ તે લગભગ 11.5° ઢળતી (કોણ બનાવે) છે. ચુંબકીય ડાઇપોલની અક્ષ MM પૃથ્વીના ભૌગોલિક ઉત્તર ધ્રુવને ઉત્તર કેનેડામાં કોઈ જગ્યાએ અને ભૌગોલિક દક્ષિણ ધ્રુવને એન્ટાર્કટિકામાં છેદે છે. ચુંબકીય ક્ષેત્રરેખાઓ દક્ષિણ ગોળાર્ધમાંથી નીકળે છે અને ઉત્તર ગોળાર્ધમાં પ્રવેશે છે. સમક્ષિતિજ સમતલમાં મુક્ત રીતે ભ્રમણ કરી શકે તેવી ચુંબકીય સોયનો ઉત્તર ધ્રુવ જે દિશામાં સ્થિર થાય છે તે દિશામાં પૃથ્વીના ડાઇપોલનો દક્ષિણ ધ્રુવ રહેલો છે. આપણે સામાન્ય રીતે પૃથ્વી પરની આ દિશાને "પૃથ્વીના ચુંબકીય ઉત્તર" તરીકે ઓળખીએ છીએ. પૃથ્વીના ચુંબકીય ધ્રુવો તેના ભૌગોલિક ધ્રુવોથી આશરે 2000 km દૂર આવેલા છે.

ભૌગોલિક અને ભૂ-ચુંબકીય વિષુવરેખાઓ એકબીજાને 6° પશ્ચિમ અને 174° પૂર્વરેખાંશ પર છેદે છે. ભારતમાં ત્રિવેન્દ્રમ પાસેનું થુમ્બા, ચુંબકીય વિષુવવૃત્ત પર હોવાથી, તેને રૉકેટ-પ્રક્ષેપણ કેન્દ્ર તરીકે પસંદ કરવામાં આવ્યું છે.

પૃથ્વી પરના દરેક સ્થળને કોઈક અક્ષાંશ અને રેખાંશ હોય છે, જે કોઈ પણ સારા પંચાંગના પુસ્તકમાંથી મળી શકે. પૃથ્વી પરના કોઈ પણ સ્થળેથી પસાર થતું રેખાંશવૃત્ત તે સ્થળે ભૌગોલિક ઉત્તર-દક્ષિણ દિશા નક્કી કરે છે. પૃથ્વીની સપાટી પર કોઈ પણ સ્થળે રેખાંશવૃત્ત અને ભૌગોલિક ભ્રમણઅક્ષમાંથી પસાર થતા કાલ્પનિક સમતલને **ભૌગોલિક મેરિડિયન** કહેવાય (જુઓ આકૃતિ 5.12) છે.



આકૃતિ 5.12 પૃથ્વીના ભૌગોલિક અને ભૂ-ચુંબકીય, વિષુવવૃત્ત અને મેરિડિયન

આ ઉપરાંત પૃથ્વીના દરેક સ્થળેથી ભૂચુંબકીય ડાઇપોલની ચુંબકીય ક્ષેત્રરેખાઓ પણ પસાર થતી હોય છે. આથી, **પૃથ્વીની સપાટી પર કોઈ સ્થળે ચુંબકીય ક્ષેત્રરેખા સમાવતા અને ચુંબકીય અક્ષમાંથી પસાર થતા કાલ્પનિક સમતલને ચુંબકીય મેરિડિયન કહે છે.**

ઉદાહરણ 5 : પૃથ્વીના ચુંબકીય વિષુવવૃત્ત પર કોઈ સ્થળે ચુંબકીય ક્ષેત્ર 0.4 G છે. પૃથ્વીની ચુંબકીય ડાઇપોલ-મોમેન્ટ શોધો. આ સ્થળે પૃથ્વીની ત્રિજ્યા 6.4×10^6 m ધારો. ($\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$, અને $1\ G = 10^{-4}\ T$)

ઉકેલ : સમીકરણ (5.6.6) પરથી વિષુવરેખા પરનું ચુંબકીય ક્ષેત્ર

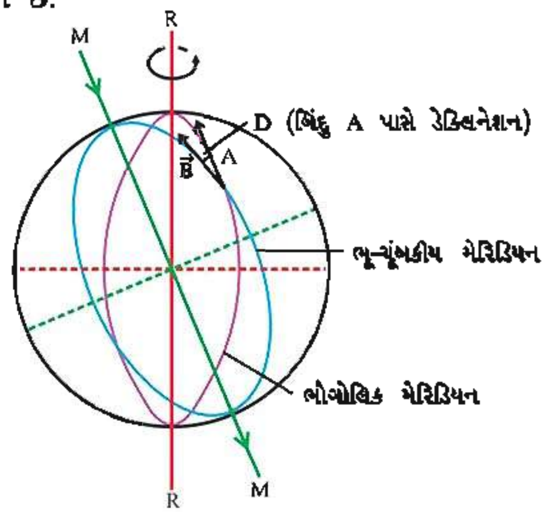
$$B_E = \frac{\mu_0 m}{4\pi y^3}$$

પરંતુ $B_E = 0.4\ G = 4 \times 10^{-5}\ T$

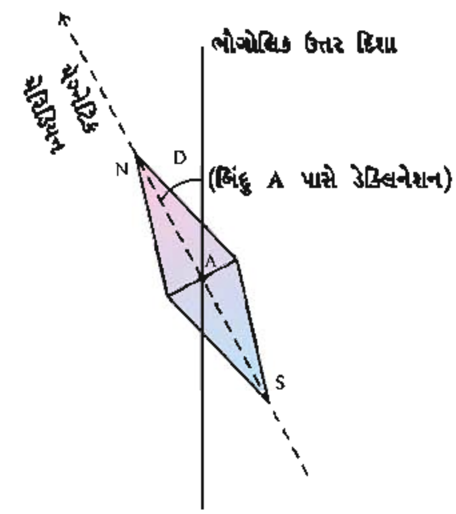
$$\therefore\ m = \frac{4\pi y^3 B_E}{\mu_0} = \frac{B_E y^3}{\left(\mu_0/4\pi\right)} = \frac{4\times10^{-5}\times(6.4\times10^6)^3}{10^{-7}} = 1.05 \times 10^{23}\ Am^2$$

5.9.1. ભૂ-ચુંબકીય તત્ત્વો (Geomagnetic Elements) : પૃથ્વીના ચુંબકીય ક્ષેત્રનું વૈજ્ઞાનિક ઢબે વર્ણન કરવા માટે કેટલાંક ચુંબકીય પ્રાચલો (parameters) વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવ્યાં છે, જેમને ભૂ-ચુંબકીય તત્ત્વો કહે છે.

મૅગ્નેટિક ડેક્લિનેશન (Magnetic Declination) : કોઈ પણ સ્થળે મૅગ્નેટિક મેરિડિયન અને ભૌગોલિક મેરિડિયન વચ્ચેના ખૂણાને તે સ્થળનું મૅગ્નેટિક ડેક્લિનેશન કહે છે. બીજા શબ્દોમાં પૃથ્વીની સપાટી પર કોઈ પણ સ્થળે સાચા ભૌગોલિક ઉત્તર અને ભૂ-ચુંબકીય ઉત્તર વચ્ચેનો ખૂણો એટલે તે સ્થળ પાસેનું મૅગ્નેટિક ડેક્લિનેશન (D) અથવા ફક્ત ડેક્લિનેશન છે.



(a) પૃથ્વીની સપાટી પર A બિંદુએ ડેક્લિનેશન



(b) બિંદુ A પાસે સમતલ સપાટીમાં રાખેલી ચુંબકીય સોય

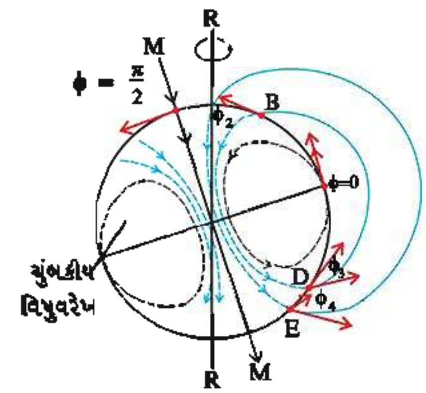
આકૃતિ 5.13

આકૃતિ 5.13 (a)માં પૃથ્વીની સપાટી પરનું બિંદુ A દર્શાવ્યું છે. આ બિંદુએ સાચી ભૌગોલિક ઉત્તર દિશા, તે બિંદુ પાસેથી પસાર થતાં ભૌગોલિક મેરિડિયનના રેખાંશવૃત્ત (ને A બિંદુએ દોરેલ સ્પર્શક)ની દિશા પરથી મળી શકે. જો કોઈ ચુંબકીય સોયને, તે સમતલ સપાટીમાં મુક્ત ભ્રમણ કરી શકે તેમ રાખી હોય, તો તે A બિંદુએ ચુંબકીય મેરિડિયનની દિશામાં ગોઠવાય છે. ચુંબકીય સોયનો ઉત્તર ધ્રુવ, ભૂ-ચુંબકીય ઉત્તર ચુંબકીય મેરિડિયનને A બિંદુએ દોરેલ સ્પર્શકની દિશા દર્શાવે છે. બિંદુ A પાસે ભૌગોલિક મેરિડિયન અને ચુંબકીય મેરિડિયન વચ્ચેનો ખૂણો A બિંદુ પાસેનું મૅગ્નેટિક ડેક્લિનેશન દર્શાવે છે.

મોટા અક્ષાંશ માટે ડેક્લિનેશન વધારે હોય છે, જ્યારે વિષુવવૃત્ત પાસે તે ઓછું હોય છે. ભારતમાં ડેક્લિનેશન નાનું છે, જેનું મૂલ્ય મુંબઈ માટે 0°58′ પશ્ચિમ છે, જ્યારે દિલ્હી માટે 0°41′ પૂર્વ છે. આમ, આ બન્ને સ્થળે ચુંબકીય સોય લગભગ સાચી ઉત્તર દિશા જ દર્શાવે છે.

5.9.2 મૅગ્નેટિક ડિપ ઍન્ગલ (નમનકોણ) (Magnetic dip angle or inclination) : આપેલા સ્થળે મૅગ્નેટિક ડિપ અથવા inclination (ϕ) એ મૅગ્નેટિક મેરિડિયનમાં સમક્ષિતિજ સપાટી સાથે પૃથ્વીના ચુંબકીય ક્ષેત્ર વડે (ઉપર અથવા નીચે તરફ) બનતો ખૂણો છે.

ચુંબકીય ક્ષેત્રરેખાઓ પૃથ્વીની સપાટી પર દરેક જગ્યાએ સમક્ષિતિજ હોતી નથી, કેનેડા પાસેના કોઈ સ્થળે ચુંબકીય ક્ષેત્રરેખાઓ લંબરૂપે નીચે તરફ હોય છે, જ્યારે ચુંબકીય વિષુવવૃત્ત પરના કોઈ પણ સ્થળે ક્ષેત્રરેખાઓ સમક્ષિતિજ હોય છે, આમ, ચુંબકીય વિષુવવૃત્ત પર ડિપ એન્ગલ શૂન્ય હોય છે. જેમ આપણે ચુંબકીય ધ્રુવો તરફ જઈએ તેમ ડિપ એન્ગલ વધે છે અને ચુંબકીય ધ્રુવો પર તે 90° થઈ જાય છે.

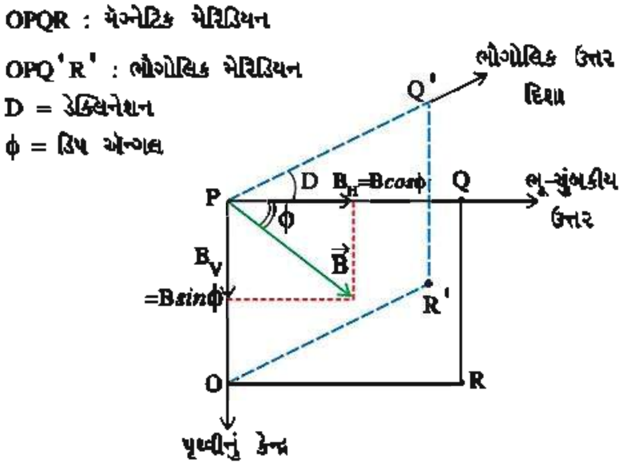


આકૃતિ 5.14 મૅગ્નેટિક મેરિડિયનમાં પૃથ્વીની સપાટી પર જુદાં-જુદાં સ્થળે મૅગ્નેટિક ડિપ એન્ગલ [માત્ર જાણ સારું]

પૃથ્વીના ચુંબકીય ક્ષેત્રનો સમક્ષિતિજ ઘટક અને ઊર્ધ્વ ઘટક (Horizontal Component and Veritical Component of Earth's Magnetic Field)

આકૃતિ 5.15માં કોઈ સ્થળ (P) પાસે પૃથ્વીનું ચુંબકીય ક્ષેત્ર ($\vec{B}$) ડેક્લિનેશન એન્ગલ (D) અને ડિપ એન્ગલ (ϕ) દર્શાવ્યા છે.

P બિંદુ પાસે ચુંબકીય ક્ષેત્ર $\vec{B}$ને ભૂ-ચુંબકીય ઉત્તર ધ્રુવની દિશામાંના સમક્ષિતિજ ઘટક $\vec{B}_H$ અને પૃથ્વીના કેન્દ્ર તરફના ઊર્ધ્વ ઘટક $\vec{B}_V$માં અલગ ઘટકો વડે દર્શાવ્યું છે. ભૌગોલિક મેરિડિયન સાથે $\vec{B}_H$ વડે બનતો કોણ ડેક્લિનેશન એન્ગલ (D) છે, જ્યારે મૅગ્નેટિક મેરિડિયનમાં $\vec{B}_H$ અને $\vec{B}$ વચ્ચેનો કોણ એ ડિપ એન્ગલ અથવા inclination (ϕ) છે.



આકૃતિ 5.15 પૃથ્વીના ચુંબકીય ક્ષેત્ર $\vec{B}$ના ઘટકો

ડેક્લિનેશન D, ડિપ એન્ગલ ϕ, અને પૃથ્વીના ચુંબકીય ક્ષેત્રના સમક્ષિતિજ ઘટક $\vec{B}_H$ને ભૂ-ચુંબકીય ઘટકો અથવા પૃથ્વીના ચુંબકીય ક્ષેત્રના ઘટકો કહે છે. આકૃતિ (5.15) માં દર્શાવેલ મૅગ્નેટિક મેરિડિયન OPQR માટે,

$$B_V = B\sin\phi \tag{5.9.1}$$

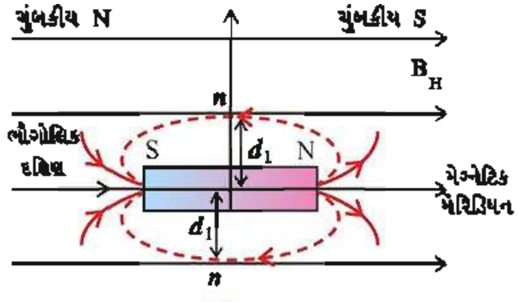
$$B_H = B\cos\phi \tag{5.9.2}$$

$$\therefore \tan\phi = \frac{B_V}{B_H} \tag{5.9.3}$$

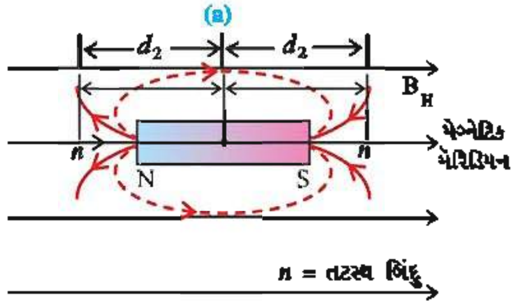
$$\text{અને } B = \sqrt{{B_V}^2 + {B_H}^2} \tag{5.9.4}$$

ઉદાહરણ 6 : એક ટૂંકા બાર મૅગ્નેટની ચુંબકીય ડાઈપોલ-મોમેન્ટ 1.6 A m^2 છે. તેને મૅગ્નેટિક મેરિડિયનમાં એવી રીતે મૂક્યો છે કે જેથી તેનો ઉત્તર ધ્રુવ ઉત્તર દિશામાં રહે. આ સ્થિતિમાં તટસ્થબિંદુ મૅગ્નેટના કેન્દ્રથી 20 cmના અંતરે મળે છે, તો પૃથ્વીના ચુંબકીય ક્ષેત્રનો સમક્ષિતિજ ઘટક શોધો.

હવે જો મૅગ્નેટને તેનો ઉત્તર ધ્રુવ દક્ષિણ દિશામાં રહે તેમ મૂકીએ તો તટસ્થબિંદુ ક્યાં મળશે ?



(a)



(b)

ઉકેલ : આકૃતિ પરથી જોઈ શકાય છે કે મૅગ્નેટની વિષુવરેખા પર પૃથ્વીના સમક્ષિતિજ ચુંબકીય ક્ષેત્રની ક્ષેત્રરેખા અને ચુંબકની ક્ષેત્રરેખા એકબીજાની વિરુદ્ધ છે. આથી, આ કિસ્સામાં ચુંબકની વિષુવરેખા પર બે બિંદુઓ, ઉપર અને નીચે સમાન અંતરે, એવી રીતે મળે કે જેથી ઉપર્યુક્ત ક્ષેત્રો સમાન મૂલ્યનાં અને પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં હોય. આવાં બિંદુઓ પાસે પરિણામી ચુંબકીય ક્ષેત્ર શૂન્ય બને. આવાં બિંદુઓને તટસ્થબિંદુઓ **(null-points)** કહે છે.

અહીં, $m = 1.6 \text{ A } m^2$

તટસ્થ બિંદુનું, ચુંબકના કેન્દ્રથી અંતર, ધારો કે d_1 છે.

$\therefore d_1 = 20 \text{ cm} = 0.2 \ m$

હવે, વિષુવરેખા પર d_1 અંતરે નાના ગજિયા ચુંબક વડે મળતું ક્ષેત્ર,

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{m}{d_1^3} = B_H \text{ થવું જોઈએ.}$$

$$\therefore B_H = \frac{4\pi \times 10^{-7}}{4\pi} \frac{1.6}{(0.2)^3} = 2 \times 10^{-5} \text{ T}$$

હવે, જો ચુંબકને (b)માં દર્શાવેલ સ્થિતિમાં મૂકવામાં આવે તો, આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે ચુંબકની અક્ષ પર B_H અને ચુંબકનાં ક્ષેત્રો પરસ્પર વિરુદ્ધ છે. તેથી હવે, તટસ્થબિંદુઓ અક્ષ પર મળશે.

ધારો કે ચુંબકના કેન્દ્રથી તટસ્થબિંદુઓનું અંતર d_2 છે.

$$\therefore \quad B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2m}{d_2^3} = B_H$$

$$\therefore d_2^3 = \frac{10^{-7} \cdot 2m}{B_H} = \frac{10^{-7} \times 2 \times 1.6}{2 \times 10^{-5}} = 16 \times 10^{-3}$$

$$\therefore d_2 = 2.52 \times 10^{-1} = m = 25.2 \text{ cm}$$

ઉદાહરણ 7 : એક ચુંબકને એક સ્થળે વળ વગરના તારથી મૅગ્નેટિક મેરિડિયનમાં સમક્ષિતિજ લટકાવ્યું છે. હવે, આધાર તારના ઉપરના છેડેથી 180°નો વળ ચઢાવવામાં આવે છે. આથી, ચુંબકનું 30° જેટલું આવર્તન થાય છે. હવે, આ ચુંબકના બદલે બીજું ચુંબક લઈ તારના ઉપરના છેડે 270°નો વળ ચઢાવતાં તેનું પણ 30° જેટલું આવર્તન થતું હોય, તો આ બંને ચુંબકોની ડાઇપોલ-મોમેન્ટ સરખાવો.

ઉકેલ : જો તારમાં ચઢતો (પરિણામી) વળ δ હોય તો,

$$\delta_1 = 180° - 30° = 150° = 150 \times \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

$$\text{અને } \delta_2 = 270° - 30° = 240° = 240 \times \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

જો તારનો વળ-અચળાંક k હોય તો, પુનઃસ્થાપક ટૉર્ક $\tau_1 = k\delta_1$ અને $\tau_2 = k\delta_2$

હવે, પ્રથમ ચુંબક જો મૅગ્નેટિક મેરિડિયન સાથે α કોણ બનાવતું હોય, તો તેના પર પૃથ્વીના ચુંબકીય ક્ષેત્રના કારણે લાગતું ટૉર્ક

$$\tau_1' = m_1 B_H \sin\alpha$$

બીજા ચુંબકનું આવર્તન પણ આટલું જ થતું હોવાથી,

$\tau_2' = m_2 B_H \sin\alpha$

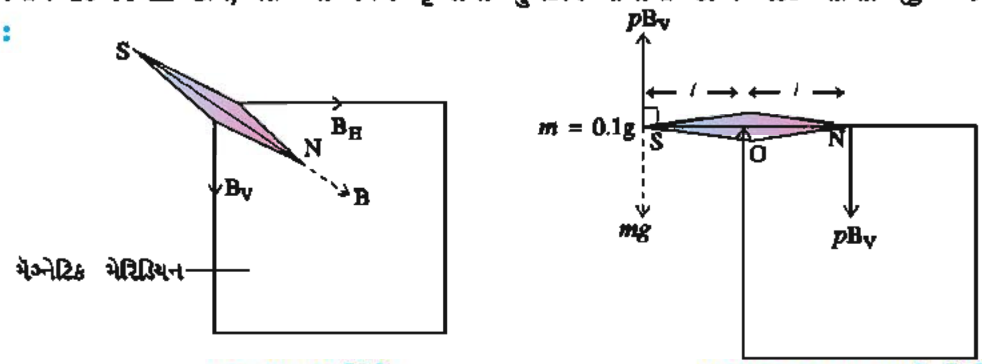
સમતોલન સ્થિતિમાં, $\tau_1 = \tau_1'$ અને τ_2, τ_2'

$$\frac{\tau_1'}{\tau_2'} = \frac{\tau_1}{\tau_2}$$

$$\therefore \frac{m_1}{m_2} = \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{150}{240} = \frac{5}{8}$$

ઉદાહરણ 8 : એક વળ વગરની દોરી વડે એક ચુંબકીય સોયને મૅગ્નેટિક મેરિડિયનમાં ભ્રમણ કરી શકે તેમ લટકાવવામાં આવી છે. તે સમક્ષિતિજ રહી શકે તે માટે તેના એક છેડા પર 0.1 g વજન મૂકવું પડે છે. જો આ સોયનું ચુંબકીય ધ્રુવમાન 10 A m હોય, તો આ સ્થળે પૃથ્વીનાં ચુંબકીય ક્ષેત્રોનો ઊર્ધ્વ ઘટક શોધો. ($g = 9.8\ m\ s^{-2}$)

ઉકેલ :



(a) સામાન્ય સ્થિતિ (b) વજન મૂક્યા બાદની સ્થિતિ

આકૃતિ (a)માં જ્યારે કોઈ વજન મૂકેલ નથી તે વખતની ચુંબકીય સોયની મૅગ્નેટિક મેરિડિયનમાં સ્થિતિ દર્શાવી છે.

આકૃતિ (b)માં સોયના S ધ્રુવ પર m જેટલું દળ મુકેલ છે.

સોય સમક્ષિતિજ રહે તે માટે આકૃતિ (b) માં દર્શાવેલ બધાં બળોના ટૉર્કનો સદિશ સરવાળો શૂન્ય થવો જોઈએ.

$\therefore -pB_V(l) - pB_V(l) + m.g(l) = 0$

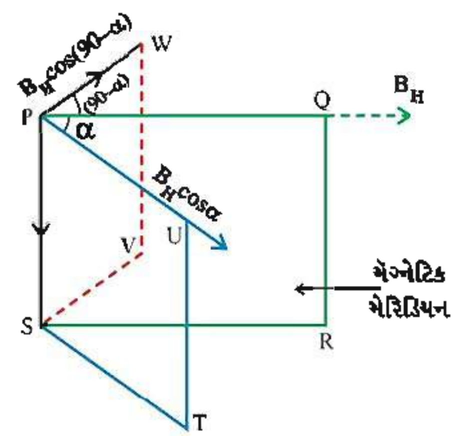
[અત્રે સમઘડી દિશામાં ભ્રમણ આપતા ટૉર્કને ઋણ ગણેલ છે.]

$\therefore 2pB_V = mg$

$\therefore B_V = \frac{mg}{2p} = \frac{10^{-4} \times 9.8}{2 \times 10}$ | $m = 0.1g = 10^{-4}\ kg,$

$\therefore B_V = 4.9 \times 10^{-5}\ T$ | $p = 10\ A\ m$

ઉદાહરણ 9 : આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે મૅગ્નેટિક મેરિડિયન સાથે સમતલ PSTU એ α કોણ બનાવે છે અને સમતલ PSVW $(90° - \alpha)$ કોણ બનાવે છે. α કોણ બનાવતા PSTU મૅગ્નેટિક ડિપ ઍન્ગલનું મૂલ્ય માપતા તે ϕ_1 છે અને સમતલ PSVWમાં તેનું મૂલ્ય ϕ_2 છે. જો આ સ્થળે સાચો ડિપ ઍન્ગલ ϕ હોય, તો સાબિત કરો કે, $\cot^2\phi = \cot^2\phi_1 + \cot^2\phi_2$.



ઉકેલ : $\tan\phi = \frac{B_V}{B_H}$ (1)

હવે સમતલ PSTUમાં સમક્ષિતિજ ઘટક $B_H \cos\alpha$ બને છે.

$\therefore \tan\phi_1 = \frac{B_V}{B_H \cos\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\tan\phi}{\tan\phi_1} = \tan\phi\ \cot\phi_1$

(સમીકરણ (1) પરથી) (2)

તેવી જ રીતે સમતલ PSVW માટે

$\sin\alpha = \tan\phi \cdot \cot\phi_2$ (3)

સમીકરણ (2) અને (3)નો વર્ગ કરી સરવાળો કરતાં,

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 = \tan^2\phi\ (\cot^2\phi_1 + \cot^2\phi_2)$

$\therefore \cot^2\phi = \cot^2\phi_1 + \cot^2\phi_2$

5.10 મૅગ્નેટાઈઝેશન અને મૅગ્નેટિક તીવ્રતા (Magnetization અને Magnetic Intensity)

ધારો કે N આંટાવાળા એક સૉલેનોઇડની લંબાઈ l છે. જો તેમાંથી I_f પ્રવાહ પસાર કરવામાં આવે, તો સૉલેનોઇડમાં ઉત્પન્ન થયેલું ચુંબકીય ક્ષેત્ર (શૂન્યાવકાશ કે હવામાં),

$$B_0 = \mu_0 n I_f \tag{5.10.1}$$

જ્યાં $n = \frac{N}{l}$ = સૉલેનોઇડની એકમલંબાઈ દીઠ આંટાઓની સંખ્યા

આ પ્રવાહ I_fને મુક્ત પ્રવાહ (free current) કહે છે. જો આપણે એકમલંબાઈ દીઠ મુક્ત પ્રવાહને i_f વડે દર્શાવીએ, તો

$$i_f = nI_f \tag{5.10.2}$$

$$\therefore B_0 = \mu_0 i_f \tag{5.10.3}$$

જે પદાર્થ (દ્રવ્ય)ના ચુંબકીય ગુણધર્મોનો અભ્યાસ કરવાનો હોય તેને આ સૉલેનોઇડમાં મૂકવામાં આવે છે. ધારો કે પદાર્થની લંબાઈ l છે અને તેના આડછેદનું ક્ષેત્રફળ A છે. મૅગ્નેટાઈઝિંગ પ્રવાહ I_fના કારણે સૉલેનોઇડમાં ઉત્પન્ન થયેલું ચુંબકીય ક્ષેત્ર B_0, આ પદાર્થને મૅગ્નેટાઇઝ કરે છે કે જેથી તેમાં ચુંબકીય ડાઇપોલ-મોમેન્ટ, ધારો કે $\vec{m}$ ઉત્પન્ન થાય છે. પદાર્થની આ ચુંબકીય ચાકમાત્રા ($\vec{m}$) તેની સપાટી પર ઉદ્‌ભવેલા (પ્રેરિત) સમતુલ્ય પ્રવાહ લૂપમાં વહેતા પ્રવાહ I_bના કારણે છે, તેમ ગણી શકાય. આ પ્રવાહને બદ્ધ પ્રવાહ કહે છે. આ પ્રવાહ લૂપની ડાઇપોલ-મોમેન્ટ

$$\vec{m} = I_b \vec{A} \tag{5.10.4}$$

જ્યાં A = પદાર્થના આડછેદનું ક્ષેત્રફળ = પ્રવાહ લૂપનું ક્ષેત્રફળ

પદાર્થના એકમકદ દીઠ ઉદ્‌ભવેલી (પ્રેરિત) કુલ (net) ડાઇપોલ-મોમેન્ટને પદાર્થનું મૅગ્નેટાઈઝેશન M કહે છે. આમ,

$$M = \frac{m}{V} = \frac{I_b A}{lA} = \frac{I_b}{l} = i_b \tag{5.10.5}$$

અહીં $i_b = \frac{I_b}{l}$ = પદાર્થની એકમલંબાઈ દીઠ બદ્ધ પ્રવાહ

M નો એકમ A m^2 m^{-3} = A m^{-1} છે.

અહીં M એ સદિશ રાશી છે. જેની દિશા $\vec{m}$ની દિશામાં હોય છે.

આમ, સૉલેનોઇડમાં મૂકેલા મૅગ્નેટિક કોર પદાર્થમાં કુલ ચુંબકીય ક્ષેત્ર બન્ને પ્રવાહો i_f અને i_bના કારણે છે.

$$\therefore B = \mu_0 (i_f + i_b) \tag{5.10.6}$$

સમીકરણ (5.10.5)નો ઉપયોગ સમીકરણ (5.10.6)માં કરતાં

$$B = \mu_0 (i_f + M) \tag{5.10.7}$$

$$\therefore \frac{B}{\mu_0} - M = i_f \tag{5.10.8}$$

અહીં $\frac{B}{\mu_0}$ – Mને ચુંબકીય તીવ્રતા H તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે અને તેનું મૂલ્ય મૅગ્નેટાઈઝિંગ પ્રવાહ i_f જેટલું હોય છે. એટલે કે,

$$\frac{B}{\mu_0} - M = H = i_f \tag{5.10.9}$$

$$B = \mu_0 (H + M) \tag{5.10.10}$$

આમ, પદાર્થની અંદર ઉદ્ભવતું ચુંબકીય ક્ષેત્ર B, H અને M પર આધારિત છે. વળી, એવું જણાય છે કે, જો H બહુ પ્રબળ ન હોય તો પદાર્થમાં ઉદ્ભવતું મૅગ્નેટાઇઝેશન M, ચુંબકીય તીવ્રતા Hના સમપ્રમાણમાં હોય છે.

$\therefore$ $M = \chi_m H$ (5.10.11)

જ્યાં χ_m એ અચળાંક છે, જેને તે પદાર્થના દ્રવ્યની મૅગ્નેટિક સસેપ્ટિબિલિટી કહે છે. તે પરિમાણરહીત રાશિ છે. તેનું મૂલ્ય પદાર્થના દ્રવ્યની જાત અને તાપમાન પર આધારિત છે. તેના વડે પદાર્થ ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં કેવા પ્રકારની વર્તણૂક ધરાવતો હશે, તેની માહિતી મળે છે. કેટલાક પદાર્થોની મૅગ્નેટિક સસેપ્ટિબિલિટી ટેબલ (5.2)માં માત્ર જાણકારી માટે સારું આપી છે.

ટેબલ 5.2 300 K તાપમાને કેટલાક પદાર્થોની મૅગ્નેટિક સસેપ્ટિબિલિટી
(માત્ર જાણ સારું)

ડાયામૅગ્નેટિક પદાર્થ	χ_m	પેરામૅગ્નેટિક પદાર્થ	χ_m
બિસ્મથ	-1.66×10^{-5}	ઍલ્યુમિનિયમ	2.3×10^{-5}
તાંબું	-9.8×10^{-6}	કેલ્શિયમ	1.9×10^{-5}
હીરો	-2.2×10^{-5}	ક્રોમિયમ	2.7×10^{-4}
સોનું	-3.6×10^{-5}	લિથિયમ	2.1×10^{-5}
સીસું	-1.7×10^{-5}	મૅગ્નેશિયમ	1.2×10^{-5}
પારો	-2.9×10^{-5}	નિઓલિયમ	2.6×10^{-5}
નાઇટ્રોજન (STP)	-5.0×10^{-9}	ઑક્સિજન (STP)	2.1×10^{-6}
ચાંદી	-2.6×10^{-5}	પ્લેટિનમ	2.9×10^{-4}
સિલિકોન	-4.2×10^{-6}	ટંગસ્ટન	6.8×10^{-5}

સમીકરણ (5.10.6)નું અર્થઘટન કરતાં જણાય છે કે સૉલેનોઇડમાં મૅગ્નેટિક પદાર્થ મૂક્યા વગર જો સૉલેનોઇડમાં તેટલું જ ચુંબકીય ક્ષેત્ર $[B = \mu_0 (i_f + i_b)]$ ઉત્પન્ન કરવું હોય તો સોલેનોઇડમાંથી I_f ઉપરાંત વધારાનો પ્રવાહ I_m પસાર કરવો પડે કે જેથી એકમ લંબાઈ દીઠ વધારાનો મૅગ્નેટાઇઝિંગ પ્રવાહ $nI_m = i_b$ મળે.

જે પદાર્થો માટે χ_m ધન હોય તેમને પેરામૅગ્નેટિક પદાર્થો કહે છે, જેમના માટે $\vec{M}$ અને $\vec{H}$ બન્ને એક દિશામાં હોય છે. જે પદાર્થો માટે χ_m ઋણ હોય તેમને ડાયામૅગ્નેટિક પદાર્થો કહે છે, જેમના માટે $\vec{M}$ અને $\vec{H}$ એકબીજાની વિરુદ્ધ દિશામાં હોય છે.

સમીકરણ (5.10.11) સમીકરણ (5.10.10)માં મૂકતાં,

$B = \mu_0 [H + \chi_m H] = \mu_0 (1 + \chi_m) H = \mu H$ (5.10.12)

જ્યાં $\mu = \mu_0 (1 + \chi_m)$ને પદાર્થની પરમીએબિલિટી (મૅગ્નેટિક પરમીએબિલિટી) કહે છે.

$\frac{\mu}{\mu_0}$ ને પદાર્થની સાપેક્ષ પરમીએબિલિટી કહે છે, જેને μ_r વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

$\therefore$ $\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_m$ (5.10.13)

જે પરથી,

$$\vec{B} = \mu_0\mu_r\vec{H} \tag{5.10.14}$$

નોંધ : શૂન્યાવકાશનું મૅગ્નેટાઈઝેશન થઈ શકતું નથી. આથી શૂન્યાવકાશ માટે M = 0 હોય છે. આથી શૂન્યાવકાશ માટે, સમીકરણ (5.10.10) પરથી $B = \mu_0 H$.

ઉદાહરણ 10 : એક સૉલેનોઇડમાં મૂકેલા દ્રવ્યની સાપેક્ષ પરમીએબિલિટી 400 છે. સૉલેનોઇડના તારમાંથી વહેતો પ્રવાહ 2A છે. જો એક સેન્ટિમીટર લંબાઈ દીઠ આંટાઓની સંખ્યા 10 હોય, તો

(a) H, (b) B, (c) χ_m (d) M અને (e) વધારાના મૅગ્નેટાઈઝિંગ (મૅગ્નેટાઈઝેશન) પ્રવાહ I_mનું મૂલ્ય શોધો. ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ T m A^{-1} લો).

ઉકેલ : અહીંયાં, $\mu_r = 400$, $I = 2A$, $n = 10 \frac{\text{આંટા}}{\text{cm}} = 1000 \frac{\text{આંટા}}{\text{m}}$

(a) ચુંબકીય તીવ્રતા $H = i_f = nI = 1000 \times 2 = 2000$ A m^{-1}

(b) ચુંબકીય ક્ષેત્ર $B = \mu_0\mu_r H = 4\pi \times 10^{-7} \times 400 \times 2000 = 1.0$ T

(c) સૉલેનોઇડના કોરમાં રહેલા દ્રવ્યની મૅગ્નેટિક સસેપ્ટિબિલિટી

$\chi_m = \mu_r - 1 = 400 - 1 = 399$

(d) મૅગ્નેટાઈઝેશન

$M = \chi_m H = 399 \times 2000 = 7.98 \times 10^5 \approx 8 \times 10^5$ A m^{-1}

(e) વધારાનો મૅગ્નેટાઈઝિંગ (મૅગ્નેટાઈઝેશન) પ્રવાહ I_m સમીકરણ $M = nI_m = i_b$ પરથી

$$I_m = \frac{M}{n} = \frac{8 \times 10^5}{1000} = 800 \text{ A}$$

ઉદાહરણ 11 : વિદ્યુતપ્રવાહનું વહન કરતા એક ટૉરોઇડના વાઇન્ડિંગ વચ્ચેનો અવકાશ 6.8×10^{-5} સસેપ્ટિબિલિટીવાળા ટંગસ્ટન વડે ભરેલો છે, તો પદાર્થમાંનું ચુંબકીય ક્ષેત્ર, ટંગસ્ટનની ગેરહાજરીમાં જે ચુંબકીય ક્ષેત્ર હોય તેના કરતાં કેટલા ટકા વધ્યું હશે ?

ઉકેલ : ટંગસ્ટનની ગેરહાજરીમાં, પ્રવાહધારિત ટોરોઇડમાં ચુંબકીય ક્ષેત્ર

$B_0 = \mu_0 H$

આ પ્રવાહધારિત ટોરોઇડમાં ટંગસ્ટન ભર્યા બાદ ચુંબકીય ક્ષેત્ર

$B = \mu H$

$$\therefore \frac{B - B_0}{B_0} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}$$

પરંતુ $\mu = \mu_0 (1 + \chi_m) \Rightarrow \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_m \Rightarrow \frac{\mu}{\mu_0} - 1 = \chi_m \Rightarrow \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} = \chi_m$

આથી $\frac{B - B_0}{B_0} = \chi_m$

$\therefore$ ટંગસ્ટન ભર્યા બાદ પ્રવાહધારિત ટોરોઇડના ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં થતો વધારો ટકાવારીમાં

$$\frac{B - B_0}{B_0} \times 100 = (6.8 \times 10^{-5}) \times 100 = 6.8 \times 10^{-3} \ \%$$

5.11 દ્રવ્ય (પદાર્થ)ના ચુંબકીય ગુણધર્મો : ડાયા, પેરા અને ફેરો મૅગ્નેટિઝમ (Magnetic Properties of Materials : Dia, Para and Ferro Magnetism)

આપણે જાણીએ છીએ કે અણુમાં રહેલા દરેક ઇલેક્ટ્રૉનની મૅગ્નેટિક ડાઇપોલ-મોમેન્ટ, તેની કક્ષીય મૅગ્નેટિક ડાઇપોલ-મોમેન્ટ અને સ્પિન ડાઇપોલ-મોમેન્ટના સદિશ સરવાળા જેટલી હોય છે. અણુમાં આ રીતે દરેક ઇલેક્ટ્રૉનની પરિણામી મૅગ્નેટિક મોમેન્ટ સદિશ સરવાળા રૂપે ગણી શકાય. જો આવી દરેક મૅગ્નેટિક મોમેન્ટની પરિણામી મૅગ્નેટિક મોમેન્ટ ચુંબકીય ક્ષેત્ર ઉત્પન્ન કરતી હોય, તો તે પદાર્થ (દ્રવ્ય) મૅગ્નેટિક પદાર્થ કહેવાય.

બાહ્ય ચુંબકીય ક્ષેત્રની અસર હેઠળ પદાર્થની વર્તણૂકના આધારે તેનું વર્ગીકરણ ડાયામૅગ્નેટિક, પેરામૅગ્નેટિક અથવા ફેરો મૅગ્નેટિક પદાર્થ તરીકે કરવામાં આવે છે. ડાયા, પેરા અને ફેરોમૅગ્નેટિક પદાર્થોનું વર્ગીકરણ તેમની મૅગ્નેટિક સસેપ્ટિબિલિટી, સાપેક્ષ પરમીએબિલિટી અને પેરામૅગ્નેટિક પદાર્થનું માત્રાત્મક વર્ગીકરણ કરવા માટેનો નાનો અંક εના સંદર્ભમાં ટેબલ 5.3માં ટૂંકમાં દર્શાવેલ છે. (આ εને માધ્યમની પર્મિટિવીટી ગણવાની નથી.)

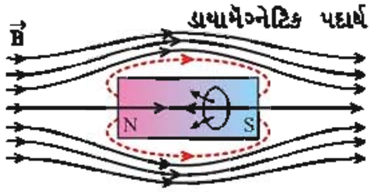
ટેબલ 5.3

ડાયામૅગ્નેટિક	પેરામૅગ્નેટિક	ફેરોમૅગ્નેટિક
$-1 < \chi_m < 0$	$0 < \chi_m < \varepsilon$	$\chi_m >> 1$
$0 \le \mu_r < 1$	$1 < \mu_r < 1 + \varepsilon$	$\mu_r >> 1$
$\mu < \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$\mu >> \mu_0$

5.11.1 ડાયામૅગ્નેટિક પદાર્થો : સોનું, ચાંદી, તાંબું, સિલિકોન, પાણી અને બિસ્મથ જેવા પદાર્થોના અણુ-પરમાણુઓ કાયમી ચુંબકીય ડાઇપોલ-મોમેન્ટ ધરાવતા નથી. ઇલેક્ટ્રૉન્સની કક્ષીય ગતિ અને તેમના સ્પિન એ પ્રકારના હોય છે કે જેથી તેમની કુલ ચુંબકીય ડાઇપોલ-મોમેન્ટ શૂન્ય થાય. આવા પદાર્થો ડાયામૅગ્નેટિક પદાર્થો કહેવાય છે.

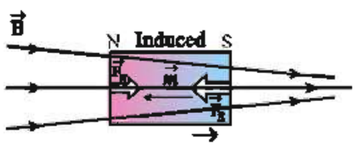
જ્યારે ડાયામૅગ્નેટિક પદાર્થને બાહ્ય ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં મૂકવામાં આવે, ત્યારે દરેક અણુમાં પરિણામી (net) મૅગ્નેટિક મોમેન્ટ પ્રેરિત થાય છે જે બાહ્ય ચુંબકીય ક્ષેત્રની વિરુદ્ધ દિશામાં હોય છે. આ કારણથી ડાયામૅગ્નેટિક પદાર્થનો દરેક અણુ અપાકર્ષણ અનુભવે છે.

આકૃતિ 5.16માં દર્શાવ્યા મુજબ ડાયામૅગ્નેટિક પદાર્થના ટુકડાને બાહ્ય ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં મૂકેલ છે. $\vec{B}$ની ક્ષેત્રરેખાઓ પદાર્થમાં પ્રેરિત (નબળા) ચુંબકીય ક્ષેત્ર વડે અપાકર્ષણ અનુભવે છે અને તેથી પદાર્થમાં કુલ ચુંબકીય ક્ષેત્ર ઘટે છે.



આકૃતિ 5.16 બાહ્ય ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં ડાયામૅગ્નેટિક પદાર્થ

જ્યારે ડાયામૅગ્નેટિક પદાર્થના ટુકડાને અનિયમિત ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં મૂકવામાં આવે છે, ત્યારે પ્રેરિત ચુંબકીય દક્ષિણ ધ્રુવ વધારે તીવ્ર ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં હોય છે, જ્યારે પ્રેરિત ઉત્તર ધ્રુવ ઓછા તીવ્ર ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં હોય છે. આથી પ્રેરિત S-ધ્રુવ પર લાગતું ચુંબકીય બળ ($\vec{F}_S$ ડાબી તરફ) પ્રેરિત N-ધ્રુવ પર લાગતા બળ ($\vec{F}_N$ જમણી તરફ) કરતાં વધારે હોય છે. આ કારણે ડાયામૅગ્નેટિક પદાર્થનો ટુકડો નબળા ચુંબકીય ક્ષેત્ર તરફ પરિણામી બળ અનુભવે છે. ડાયામૅગ્નેટિક પદાર્થોની મૅગ્નેટિક સસેપ્ટિબિલિટી χ_m ઋણ હોય છે. સુપર કંડક્ટર્સ માટે $\chi_m = -1$ અને $\mu_r = 0$.

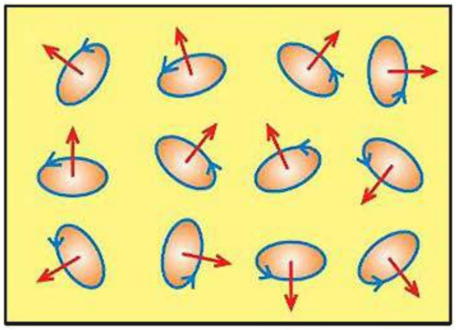


$\vec{F} = \vec{F}_S - \vec{F}_N$ (ડાબી તરફ)

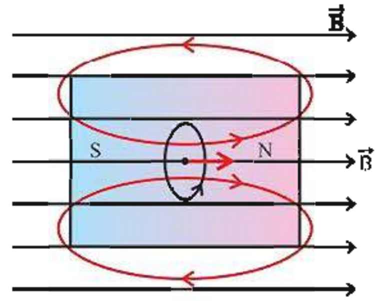
આકૃતિ 5.17 અનિયમિત ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં મૂકેલા ડાયામૅગ્નેટિક પદાર્થ પર લાગતું બળ

જ્યારે સુપર કંડક્ટર્સને બાહ્ય ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં મૂકવામાં આવે ત્યારે ક્ષેત્રરેખાઓ સંપૂર્ણપણે બહાર ધકેલાય છે. સુપર કંડક્ટર્સમાં જોવા મળતું સંપૂર્ણ ડાયામૅગ્નેટિઝમ તેના શોધકના નામ પરથી મિઝનર (Meissner) અસર કહેવાય છે. સુપર કંડક્ટિંગ ચુંબકોનો ઉપયોગ ચુંબકત્વથી ઊંચકાતી ઝડપી ટ્રેઇન્સમાં કરી શકાય.

5.11.2 પેરામૅગ્નેટિઝમ : પેરામૅગ્નેટિક પદાર્થમાં અણુઓ/પરમાણુઓ કાયમી ચુંબકીય ડાઇપોલ-મોમેન્ટ ધરાવતા હોય છે. સામાન્ય રીતે આ અણુઓ એવી રીતે ગોઠવાયેલા હોય છે કે જેથી તેમની મૅગ્નેટિક ડાઇપોલ-મોમેન્ટ અસ્તવ્યસ્ત રીતે ગોઠવાયેલી હોય છે. આથી, આવા પદાર્થની પરિણામી મૅગ્નેટિક ડાઇપોલ-મોમેન્ટ શૂન્ય હોય છે (જુઓ આકૃતિ 5.18).

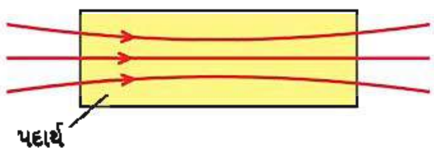


આકૃતિ 5.18 સામાન્ય સંજોગોમાં પેરામૅગ્નેટિક ડાઇપોલ્સ

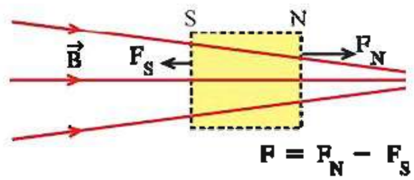


આકૃતિ 5.19 $\vec{B}$ ને સમાંતર ગોઠવાયેલા એક મૅગ્નેટિક ડાઇપોલની મૅગ્નેટિક મોમેન્ટ

જ્યારે પેરામૅગ્નેટિક પદાર્થને બાહ્ય ચુંબકીય ક્ષેત્ર $\vec{B}$ માં મૂકવામાં આવે, ત્યારે આ સૂક્ષ્મ ડાઇપોલ્સ ક્ષેત્ર $\vec{B}$ ની દિશામાં ગોઠવાય છે. જોકે, ઉષ્મીય ગતિના કારણે બધા જ ડાઇપોલ્સની ગોઠવણ બાહ્યક્ષેત્ર સાથે 100 % સમાંતર થતી નથી. (આકૃતિ 5.19)માં $\vec{B}$ ને સમાંતર ગોઠવાયેલા મૅગ્નેટિક ડાઇપોલનું ચુંબકીય ક્ષેત્ર દર્શાવ્યું છે.



આકૃતિ 5.20 પેરામૅગ્નેટિક પદાર્થમાં ક્ષેત્રરેખાઓ



આકૃતિ 5.21 અનિયમિત ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં પેરામૅગ્નેટિક પદાર્થ

અહીં સૂક્ષ્મ ચુંબકો બાહ્ય ચુંબકીય ક્ષેત્રને સમાંતર એવી રીતે ગોઠવાય છે કે જેથી અનુક્રમે આવતા બે સૂક્ષ્મ ચુંબકોના ઉત્તર અને દક્ષિણ ધ્રુવો પરસ્પર સામસામે આવી એકબીજાની અસર નાબૂદ કરે છે. પરંતુ, પૃષ્ઠ પર બન્ને છેડે આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ પરિણામી ઉત્તર અને દક્ષિણ ધ્રુવ રચાય છે. આમ, અહીં પદાર્થનું મૅગ્નેટાઇઝેશન થાય છે. પદાર્થની અંદર મૅગ્નેટાઇઝેશનના કારણે ઉદ્‌ભવતી ક્ષેત્રરેખાઓ બાહ્ય ક્ષેત્રરેખાઓની દિશામાં હોય છે. આથી પદાર્થમાં ક્ષેત્રનું મૂલ્ય અને પરિણામે ક્ષેત્રરેખા ઘનતા વધી જાય છે (જુઓ આકૃતિ 5.20).

જ્યારે પેરામૅગ્નેટિક પદાર્થને અનિયમિત ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં મૂકવામાં આવે છે (આકૃતિ 5.21) ત્યારે મૅગ્નેટાઇઝ્ડ પદાર્થનો પરિણામી ઉત્તર ધ્રુવ વધારે પ્રબળ ક્ષેત્ર અનુભવે છે, જ્યારે દક્ષિણધ્રુવ સરખામણીમાં નબળું ચુંબકીય ક્ષેત્ર અનુભવે છે. આથી, પેરામૅગ્નેટિક પદાર્થ પર પરિણામી બળ (F_N − F_S) પ્રબળ ચુંબકીય ક્ષેત્ર તરફ (જમણી તરફ) લાગે છે. વ્યવહારમાં આ બળ ઘણું નબળું હોય છે.

ઍલ્યુમિનિયમ, સોડિયમ, કૅલ્શિયમ, STPએ ઑક્સિજન અને કૉપર ક્લોરાઇડ એ પેરામૅગ્નેટિક પદાર્થનાં કેટલાંક ઉદાહરણો છે. પેરામૅગ્નેટિક પદાર્થોની મૅગ્નેટિક સસેપ્ટિબિલિટી χ_m ધન હોય છે.

ક્યુરિનો નિયમ : પિઅરે ક્યુરિએ 1895માં અનુભવ્યું કે પેરામૅગ્નેટિક પદાર્થનું મૅગ્નેટાઇઝેશન M બાહ્ય ચુંબકીય ક્ષેત્ર $\vec{B}$ ના સમપ્રમાણમાં અને તેના નિરપેક્ષ તાપમાન Tના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં હોય છે, જે ક્યુરિના નિયમ કહેવાય છે. જે મુજબ

$$M = C\frac{B}{T} \tag{5.11.1}$$

જ્યાં C = ક્યુરિનો અચળાંક

સમીકરણ (5.11.1) પરથી

$$M = C\frac{B}{\mu_0}\frac{\mu_0}{T} = CH\frac{\mu_0}{T}$$

$$\therefore \frac{M}{H} = \chi_m = C\frac{\mu_0}{T} \tag{5.11.2}$$

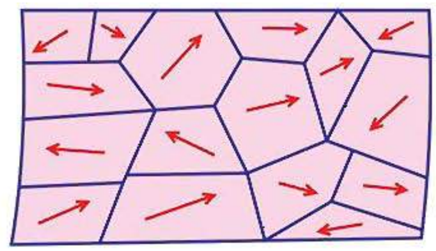
$$\therefore\ \mu_r - 1 = C\frac{\mu_0}{T} \tag{5.11.3}$$

આપણે જેમ બાહ્ય ચુંબકીય ક્ષેત્ર વધારીએ અથવા પેરામૅગ્નેટિક પદાર્થનું તાપમાન ઘટાડીએ, અથવા બન્ને કાર્ય સાથે કરીએ, તેમ અણુઓની ક્ષેત્રને સમાંતર મૅગ્નેટિક મોમેન્ટ વધતી જાય છે. આથી મૅગ્નેટાઇઝેશન M વધે છે. જ્યારે બધા જ અણુઓની મૅગ્નેટિક મોમેન્ટ બાહ્યક્ષેત્રને સમાંતર ગોઠવાઈ જાય ત્યારે M, μ_r અને χ_m મહત્તમ થાય છે. આ ઘટનાને **સંતૃપ્ત (satuaration) મૅગ્નેટાઇઝેશન** કહે છે. આ સ્થિતિ પછી ક્યુરીનો નિયમ જળવાતો નથી.

જો પદાર્થના V કદમાં N અણુઓ આવેલા હોય, અને દરેકની મૅગ્નેટિક મોમેન્ટ $\vec{m}$ હોય, તો સેચ્યુરાઇઝેશન મૅગ્નેટાઇઝેશન

$$\vec{M}_{max} = \frac{N\vec{m}}{V} \tag{5.11.4}$$

5.11.3 ફેરોમૅગ્નેટિઝમ : લોખંડ, કોબાલ્ટ, નિકલ તેમજ તેમની મિશ્ર ધાતુઓના અણુઓ તેમની બાહ્ય કક્ષામાં રહેલા ઇલેક્ટ્રૉનના સ્પિનના કારણે કાયમી ચુંબકીય મોમેન્ટ ધરાવતા હોય છે. આ પદાર્થોના અણુઓ એવી રીતે ગોઠવાયેલા હોય છે કે જેથી અમુક ચોક્કસ વિસ્તાર, (જેને **ડોમેઈન (domain)** કહે છે) પૂરતી તેમની મૅગ્નેટિક મોમેન્ટ એક જ દિશામાં ગોઠવાયેલી હોય છે. આવા પદાર્થને મૅગ્નેટાઇઝ ન કર્યો હોય ત્યારે આ પરિણામી મૅગ્નેટાઇઝેશન ધરાવતા ડોમેઈન્સ અસ્તવ્યસ્ત એ રીતે ગોઠવાયેલા હોય છે, કે જેથી તે બધાની પરિણામી ચુંબકીય મોમેન્ટ શૂન્ય થાય (જુઓ આકૃતિ 5.22). આવા ડોમેઈનની રચના સમજવા માટે ક્વૉન્ટમ મિકેનિક્સ સમજવું પડે, જે આ પુસ્તકની મર્યાદા બહાર છે.



આકૃતિ 5.22
ડોમેઈન્સની અસ્તવ્યસ્ત ગોઠવણી

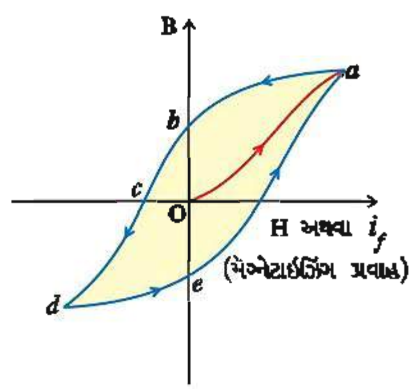
સામાન્ય રીતે ડોમેઈનની સાઈઝ 1 mmના ક્રમની હોય છે અને એક ડોમેઈનમાં આશરે 10^{11} અણુઓ હોય છે. જુદી-જુદી દિશામાં મૅગ્નેટિક મોમેન્ટ ધરાવતા બાજુબાજુના ડોમેઈન્સની કિનારીઓને **ડોમેઈન વૉલ્સ (ડોમેઈનની દીવાલો)** કહે છે.

હિસ્ટરીસિસ (Hysteresis) : ફેરોમૅગ્નેટિક પદાર્થ પર બાહ્ય ચુંબકીય ક્ષેત્રની અસર રસપ્રદ છે. આ અસર સમજવા માટે, ધારો કે એક ચુંબકિત ન હોય તેવા ફેરોમૅગ્નેટિક પદાર્થનું પ્રારંભિક ચુંબકીય ક્ષેત્ર B = 0 છે. ધારો કે આ પદાર્થને એક સૉલેનોઇડમાં મૂકવામાં આવે છે, જેમાં એકમલંબાઈ દીઠ n આંટા છે.

આકૃતિ 5.8(b)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે એક નાના સૉલેનોઇડમાં, જેની ચુંબકીય વર્તણૂકનો અભ્યાસ કરવો છે, તે ફેરોમૅગ્નેટિક પદાર્થનો સળિયો મૂકી શકીએ. સૉલેનોઇડમાંથી વિદ્યુતપ્રવાહ પસાર કરતાં ઉત્પન્ન થતાં ચુંબકીય ક્ષેત્રને લીધે આ સળિયામાં ચુંબકીય મોમેન્ટ પ્રેરિત થાય છે. આપણે સળિયાનું કદ જાણીએ છીએ. એટલે એકમલંબાઈ દીઠ ચુંબકીય મોમેન્ટ, M પણ ગણી શકીએ. આપણે અગાઉ ભણી ગયાં છીએ કે,

$$\frac{B}{\mu_0} - M = i_f = H \text{ (જુઓ સમીકરણ (5.10.9))}$$

જ્યાં, i_f = સૉલેનોઇડ માટે એકમલંબાઈ દીઠ પ્રવાહ. H અને Mનાં પ્રાયોગિક મૂલ્યો પરથી B ગણી શકાય અને i_fનાં મૂલ્યો (એટલે કે Hનાં મૂલ્યો) બદલીને Bનાં અનુરૂપ મૂલ્યો શોધી શકાય, અને આવાં અવલોકનો પરથી B વિરુદ્ધ Hનો આલેખ દોરી શકાય આકૃતિ 5.23માં દર્શાવ્યો છે.



આકૃતિ 5.23 હિસ્ટરીસિસ લૂપ

ગ્રાફમાં બિંદુ 0 પાસે પદાર્થ સામાન્ય સ્થિતિમાં તેની (પદાર્થની) અંદરના ભાગમાં પરિણામી ચુંબકીય ક્ષેત્ર નથી. હવે H (કે i_f)માં વધારો કરતાં Bના મૂલ્યમાં વધારો થતો જાય છે, પણ આ વધારો રેખીય નથી. બિંદુ a પાસે B મહત્તમ બની જાય છે, એટલે કે સળિયો સંતૃપ્ત મૅગ્નેટાઇઝેશન સ્થિતિમાં આવે છે.

વક્ર Oa આ મુજબ સમજી શકાય : વક્ર Oથી શરૂ કરી પ્રારંભમાં, જ્યાં સુધી Hનું મૂલ્ય નાનું હોય છે, ત્યારે મોટા ભાગના પરમાણુઓ પોતપોતાના પડોશી પરમાણુઓ સાથે ગાઢ બંધનમાં હોવાથી ચુંબકીય ક્ષેત્રને ખાસ મચક આપતા નથી, પણ જે પરમાણુઓ ડોમેઇન્સની બાઉન્ડરી પાસે હોય છે, તેમની દશા કફોડી હોય છે અર્થાત્ હવે ડોમેઇન્સની સીમાઓ તીક્ષ્ણ ન રહેતાં ખસવા લાગે છે. આવી સ્થિતિમાં બે પડોશી ડોમેઇનમાંનો એક ડોમેઇન મોટો બને છે અને બીજો ડોમેઇન નાનો બને છે. હજુ, જો Hનું મૂલ્ય વધારતા જઈએ તો છેવટે સમગ્ર નમૂનામાં માત્ર એક જ ડોમેઇન રહે છે અને બિંદુ a પાસે **સંતૃપ્ત મૅગ્નેટાઇઝેશન** મળે છે.

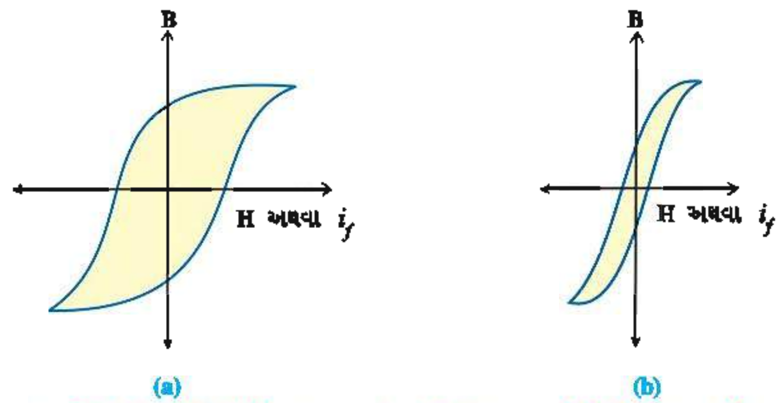
આ ઘટના પ્રતિવર્તી નથી. હવે, જો સોલેનોઇડમાંથી પસાર થતા પ્રવાહમાં ઘટાડો કરતા જઈએ, તો પુનઃ પ્રથમ જેવું જ ડોમેઇન બંધારણ મળતું નથી અને $H = 0$ કરીએ ત્યારે B શૂન્ય થતો નથી, અર્થાત્ $H = 0$ કરીએ ત્યારે નમૂનામાં કંઈક ચુંબકીય મોમેન્ટ રહી જાય છે. આથી, H ઘટાડતાં મળતો વક્ર ab જેવો હોય છે.

$H = 0$ હોય ત્યારે મળતા Bના મૂલ્યને **રિટેન્ટિવિટી (retentivity કે remanence)** કહે છે. હવે, સોલેનોઇડમાં વિદ્યુતપ્રવાહની દિશા ઉલટાવી, પ્રવાહના મૂલ્યમાં વધારો કરવામાં આવે, તો આલેખ પર c વડે દર્શાવેલ Hના મૂલ્ય માટે $B = 0$ મળે છે. c પાસે Hના મૂલ્યને **કોઅર્સિવિટી (coercivity)** કહે છે. આ બિંદુ પાસે પાછા ડોમેઇન્સ (કોઈ બીજા બંધારણ પ્રમાણે) સંપૂર્ણ અસ્તવ્યસ્ત થઈ ગયાં હોય છે.

હજુ, ઊલટી દિશામાં પ્રવાહ વધારતાં B પણ ઊલટી દિશામાં વધતો જાય છે અને d પાસે ઊલટી દિશામાં સંતૃપ્ત મૅગ્નેટાઇઝેશન મળે છે. d પાસે પહોંચીને પ્રવાહ ઘટાડતા જઈએ, તો de વક્ર મળે છે અને પ્રવાહને પાછો ઊલટાવી, વધારતાં વક્ર ea મળે છે. આ થઈ હિસ્ટરીસિસ સાઇકલ B-H વક્ર વડે ઘેરાતું ક્ષેત્રફળ, નમૂનામાં એકમ કદ દીઠ દરેક સાઇકલમાં જૂલ-ઉષ્મા રૂપે વ્યય પામતી ઊર્જા દર્શાવે છે.

હાર્ડ ફેરોમૅગ્નેટિક પદાર્થો : જે પદાર્થોની રિટેન્ટિવિટી વધારે હોય છે, તેમને હાર્ડ ફેરોમૅગ્નેટિક પદાર્થો કહે છે. તેનો ઉપયોગ કાયમી ચુંબકો બનાવવામાં થાય છે. તેમની હિસ્ટરીસિસ સાઇકલ, દેખીતી રીતે જ પહોળી હોય છે એલ્નિકા (લોખંડની એક મિશ્રધાતુ જે Al, Ni, Co અને Cu ની બનેલી છે) હાર્ડ ફેરોમૅગ્નેટિક પદાર્થ છે, એટલે તેમાંથી કાયમી ચુંબકો બનાવાય છે.

સૉફ્ટ ફેરોમૅગ્નેટિક પદાર્થો : જે પદાર્થોની રિટેન્ટિવિટી ઓછી હોય છે અર્થાત્ જેમની હિસ્ટરીસિસ સાઇકલ સાંકડી હોય છે (જુઓ આકૃતિ 5.24 (b)) તેવા પદાર્થોને **સૉફ્ટ ફેરોમૅગ્નેટિક** પદાર્થ કહે છે. દા.ત., નરમ લોખંડ. આ પદાર્થોનો ઉપયોગ ઇલેક્ટ્રોમૅગ્નેટ બનાવવામાં થાય છે.



આકૃતિ 5.24 હિસ્ટરીસીસ લૂપ : (a) હાર્ડ, (b) નરમ, ફેરોમૅગ્નેટિક પદાર્થો

તાપમાનની અસર : ફેરોમૅગ્નેટિક પદાર્થનું તાપમાન જેમજેમ વધારતા જઈએ, તેમતેમ ડોમેઇન બંધારણ વિકૃત થતાં આપેલા પદાર્થ માટે અમુક ચોક્કસ તાપમાને તે બંધારણ સંપૂર્ણ તૂટી પડે છે. દરેક પરમાણુની ચુંબકીય મોમેન્ટ એકબીજાથી સ્વતંત્ર થઈ જાય છે અને પદાર્થ પેરામૅગ્નેટિક પદાર્થમાં ફેરવાઈ જાય છે.

જે તાપમાને આપેલો ફેરોમૅગ્નેટિક પદાર્થ પેરામૅગ્નેટિક પદાર્થમાં ફેરવાઈ જાય છે, તેને આપેલા **પદાર્થનું ક્યુરિ તાપમાન T_C** કહે છે. આમ, મળેલી પેરામૅગ્નેટિક અવસ્થામાં પદાર્થની મૅગ્નેટિક સસેપ્ટિબિલિટી અને તાપમાન (T) વચ્ચેનો સંબંધ નીચે પ્રમાણે છે :

$$\chi_m = \frac{C_1}{T - T_C}, \ (T > T_C) \qquad (5.11.1)$$

જ્યાં, C_1 = અચળાંક

હવે છેલ્લે એક વાત નોંધી લઈએ કે, જ્યારે ફેરોમૅગ્નેટિક પદાર્થને અનિયમિત ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં મૂકવામાં આવે છે, ત્યારે તે પ્રબળ ક્ષેત્ર તરફની દિશામાં આકર્ષાય છે.

હિસ્ટરીસિસ લૂપ દર્શાવે છે કે ફેરોમૅગ્નેટિક પદાર્થનું મૅગ્નેટાઈઝેશન તેના પૂર્વ-અવસ્થા પર તેમજ તેના પર લગાડવામાં આવેલ ક્ષેત્ર H પર આધાર રાખે છે. હિસ્ટરીસિસ લૂપનો આકાર અને કદ, ફેરોમૅગ્નેટિક પદાર્થના ગુણધર્મો પર તેમજ તેના પર લગાડવામાં આવેલ મહત્તમ ચુંબકીય ક્ષેત્ર H પર આધાર રાખે છે.

5.12 કાયમી ચુંબકો અને વિદ્યુતચુંબકો (Permanent Magnets અને Electromagnets)

જે ફેરોમૅગ્નેટિક પદાર્થો ઓરડાના તાપમાને લાંબા સમય સુધી ચુંબકત્વ (મૅગ્નેટિઝમ) જાળવી રાખે, તેમને કાયમી ચુંબકો કહે છે. આવા પદાર્થોની રિટેન્ટિવિટી વધુ હોય છે. 400 વર્ષ પહેલાં, લોખંડના સળિયાઓને ઉત્તર-દક્ષિણ દિશામાં જડીને (ફિક્સ કરીને) સતત ઠપકારી તેમાંથી ચુંબકો તૈયાર કરવામાં આવતા હતા. આ ઉપરાંત, જો કોઈ ચુંબકનો એક છેડો જડેલા લોખંડના સળિયા પર એક જ દિશામાં સતત ઘસવામાં આવે, તો તે સળિયો કાયમી ચુંબકત્વ ધારણ કરે છે. જ્યારે લોખંડનો સળિયો ધરાવતા સૉલેનોઇડમાંથી પ્રવાહ પસાર કરવામાં આવે, ત્યારે સળિયો ચુંબકત્વ પ્રાપ્ત કરે છે. હિસ્ટરીસિસના કારણે, પ્રવાહ બંધ કરવા છતાં સળિયો ચુંબકત્વ ધારણ કરી રાખે છે.

લોખંડ, હાર્ડ મિશ્રધાતુઓ અને એલ્નિકો જેવા પદાર્થો વધુ રિટેન્ટિવિટી અને વધુ કોઅર્સિવિટી ધરાવે છે અને તેથી તે કાયમી ચુંબકો બનાવવામાં વપરાય છે.

નરમ લોખંડની પરમીએબિલિટી વધુ અને રિટેન્ટિવિટી ઓછી હોય છે, તેથી તે વિદ્યુતચુંબકો બનાવવામાં વપરાય છે. આ માટે, નરમ લોખંડના સળિયાને આકૃતિ 5.7(b)માં દર્શાવ્યા મુજબ કોર તરીકે સૉલેનોઇડમાં મૂકવામાં આવે છે. સૉલેનોઇડમાંથી પસાર થતો પ્રવાહ બંધ કરવામાં આવે, ત્યારે તેની સાથે સંકળાયેલું ચુંબકીય ક્ષેત્ર લગભગ શૂન્ય થાય છે.

ઇલેક્ટ્રિક બેલ અને લાઉડસ્પિકરમાં વિદ્યુત ચુંબકોનો ઉપયોગ થાય છે. મોટા ઇલેક્ટ્રોમૅગ્નેટ્સનો ઉપયોગ ક્રેઇન્સમાં લોખંડના બનેલા ભારે પદાર્થો ઊંચકવામાં થાય છે.

કેટલીક વખત, ફેરોમૅગ્નેટિક પદાર્થ ધરાવતા સૉલેનોઇડમાંથી AC પ્રવાહ પસાર કરવામાં આવે છે, જેમકે ટ્રાન્સફૉર્મર અને ટેલિફોનમાં. આવા પદાર્થોનું હિસ્ટરીસિસ લૂપ સાંકડું હોવું જોઈએ કે જેથી ઉષ્માના રૂપમાં ઊર્જાનો વ્યય ઘટાડી શકાય.

ઉદાહરણ 12 : એક મૅગ્નેટની કોઅર્સિવિટી 3×10^3 A m^{-1} છે. તેને ડિમૅગ્નેટાઇઝ કરવા, 10 cm લાંબા અને 50 આંટાવાળા એક સૉલેનોઇડમાં રાખ્યો છે, તો સૉલેનોઇડમાંથી કેટલો પ્રવાહ પસાર કરવો પડે ?

ઉકેલ : Hના જે મૂલ્ય માટે મૅગ્નેટનું મૅગ્નેટાઇઝેશન શૂન્ય બને તેને કોઅર્સિવિટી કહે છે.

સૉલેનોઇડ માટે, $H = nI$

અહીં, $H = 3 \times 10^3$, $n = \frac{N}{l} = \frac{50}{0.1} = 500$

$$\therefore \ I = \frac{H}{n} = \frac{3 \times 10^3}{5 \times 10^2} = 6 \ A$$

ઉદાહરણ 13 : એક પેરામૅગ્નેટિક ક્ષાર (salt)માં 2.0×10^{24} પરમાણુ ડાઇપોલ્સ છે. આ દરેકની ડાઇપોલ-મોમેન્ટ 1.5×10^{-23} A m^2 (અથવા J T^{-1}) છે. આ ક્ષારના નમૂનાને 0.84 T વાળા નિયમિત ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં મૂકી તેને 4.2 K તાપમાન સુધી ઠંડો કરવામાં આવે છે. આ સ્થિતિમાં સંતૃપ્ત મૅગ્નેટાઇઝેશન 15% મળે છે, તો આ નમૂનાની, 0.98 T વાળા ક્ષેત્રમાં, 2.8 K તાપમાને ડાઇપોલ-મોમેન્ટ કેટલી હશે ? (ક્યુરિનો નિયમ લાગુ પડે છે, તેમ ધારો.)

ઉકેલ : દરેક પરમાણુ ડાઇપોલની ડાઇપોલ-મોમેન્ટ = 1.5×10^{-23} A m^2

આપેલ નમૂનામાં 2.0×10^{24} ડાઇપોલ્સ છે.

$\therefore$ મહત્તમ (સંતૃપ્ત) મૅગ્નેટાઇઝેશન $= 1.5 \times 10^{-23} \times 2.0 \times 10^{24} = 30$ A m^2

પણ 4.2 K તાપમાને 15 % મૅગ્નેટાઇઝેશન મળે છે.

$m_1 = 30 \times 0.15 = 4.5$ A m^2

હવે ક્યુરિના નિયમ મુજબ T_1 તાપમાને જો ઉદ્‌ભવતી ડાઇપોલ-મોમેન્ટ m_1 હોય અને T_2 તાપમાને ઉદ્‌ભવતી ડાઇપોલ-મોમેન્ટ m_2 હોય, તો

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{B_1}{T_1} \times \frac{T_2}{B_2} \quad (m \propto \frac{B}{T} \text{ પરથી})$$

અહીં B_1 અને B_2 લાગુ પાડેલ ચુંબકીય ક્ષેત્રો છે.

$$\therefore m_2 = m_1 \times \frac{T_1}{T_2} \times \frac{B_2}{B_1}$$

અહીં, $m_1 = 4.5$ A m^2, $T_1 = 4.2$ K, $T_2 = 2.8$ K, $B_1 = 0.84$ T અને $B_2 = 0.98$ T

$$\therefore m_2 = \frac{4.5 \times 4.2 \times 0.98}{2.8 \times 0.84} = 7.87 \text{ A m}^2$$

સારાંશ

1. ચુંબકના બે કે વધુ ટુકડા કરીને તેના ઉત્તર અને દક્ષિણ ચુંબકીય ધ્રુવો જુદા પાડી શકાતા નથી. સ્વતંત્ર ચુંબકીય ધ્રુવો અસ્તિત્વ ધરાવતા નથી.
2. ચુંબકીય ક્ષેત્રરેખાઓ કોઈ પણ એક બિંદુએ છેદતી નથી.
3. ચુંબકની ચુંબકીય ક્ષેત્રરેખાઓ સળંગ બંધ ગાળાઓ રચે છે. ચુંબકીય ક્ષેત્રરેખાઓ ચુંબકના ઉત્તર ધ્રુવ પાસેથી બહાર નીકળી દક્ષિણ ધ્રુવ પાસે પહોંચી અને ત્યાંથી ચુંબકમાં થઈને પાછી ઉત્તર ધ્રુવ પાસે પહોંચીને બંધ ગાળાઓ રચે છે.
4. પ્રવાહ I ધરાવતા, A ક્ષેત્રફળના પ્રવાહ-લૂપની ચુંબકીય ડાઇપોલ-મોમેન્ટ, $m = IA$. જો લૂપને N આંટા હોય, તો $m = NIA$.
5. પ્રવાહ-લૂપ (ગૂંચળા)નું અક્ષીય ચુંબકીય ક્ષેત્ર $\vec{B}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\vec{m}}{x^3}$.
6. અણુમાં ભ્રમણ કરતા ઇલેક્ટ્રૉનની કક્ષીય ચુંબકીય મોમેન્ટ $m_0 = \frac{1}{2}evr$.
7. જ્યારે ગજિયા ચુંબકના બે ભાગ કરવામાં આવે, ત્યારે દરેક ટુકડાનું ધ્રુવમાન p_b તે જ (અચળ) રહે છે, પરંતુ દરેક ટુકડાની મૅગ્નેટિક મોમેન્ટ પહેલાં કરતાં અડધી થઈ જાય છે.
8. જ્યારે $\vec{m}$ મૅગ્નેટિક મોમેન્ટ ધરાવતા ચુંબકને બાહ્ય ચુંબકીય ક્ષેત્ર $\vec{B}$ માં મૂકવામાં આવે, ત્યારે તેના પર લાગતું ટૉર્ક $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$ અથવા $\tau = mB\sin\theta$ અને તેની સ્થિતિ-ઊર્જા $U_B = -\vec{m}\cdot\vec{B}$.
9. ચુંબકીય ક્ષેત્ર માટે ગાઉસનો નિયમ $\oint_{\text{બંધ પૃષ્ઠ}} \vec{B}\cdot\vec{da} = 0$.

   જે દર્શાવે છે કે "કોઈ પણ બંધ પૃષ્ઠમાંથી પસાર થતું ચોખ્ખું (net) ફ્લક્સ શૂન્ય હોય છે."
10. **મૅગ્નેટિક મેરિડિયન :** પૃથ્વી પર કોઈ પણ સ્થળે ચુંબકીય ક્ષેત્રરેખા સમાવતા અને ચુંબકીય અક્ષમાંથી પસાર થતા કાલ્પનિક સમતલને મૅગ્નેટિક મેરિડિયન કહે છે.

11. પૃથ્વી પરના કોઈ પણ સ્થળે મૅગ્નેટિક મેરિડિયન અને ભૌગોલિક મેરિડિયન વચ્ચેના ખૂણાને તે સ્થળ પાસેનું મૅગ્નેટિક ડેક્લિનેશન (D) કહે છે.

12. **મૅગ્નેટિક ડિપ અથવા ઈન્ક્લાઈનેશન (ϕ) :** મૅગ્નેટિક ડિપ અથવા ઈન્ક્લાઈનેશન ϕ એ મૅગ્નેટિક મેરિડિયનમાં સમક્ષિતિજ સપાટી સાથે પૃથ્વીના ચુંબકીય ક્ષેત્ર વડે (ઉપર અથવા નીચે તરફ) બનતો ખૂણો છે.
$\phi = 0^\circ$ ચુંબકીય વિષુવવૃત્ત પર
$\phi = 90^\circ$ ચુંબકીય ધ્રુવો પર

13. પદાર્થના એકમ કદ દીઠ ઉદ્‌ભવેલી (પ્રેરિત) કુલ net મૅગ્નેટિક મોમેન્ટને તે પદાર્થનું મૅગ્નેટાઇઝેશન કહે છે. આમ, $\vec{M} = \frac{\vec{m}}{V}$.

14. પદાર્થની મૅગ્નેટિક સસેપ્ટિબિલિટી χ_m, તે પદાર્થની ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં કેવા પ્રકારની વર્તણૂક હશે તે દર્શાવે છે. તે પરિણામરહિત રાશિ છે.

15. જ્યારે ડાયામૅગ્નેટિક પદાર્થને અનિયમિત ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં મૂકવામાં આવે ત્યારે તે નબળા ચુંબકીય ક્ષેત્ર તરફ પરિણામી બળ અનુભવે છે. ડાયમૅગ્નેટિક પદાર્થની મૅગ્નેટિક સસેપ્ટિબિલિટી χ_m ઋણ હોય છે.

16. જ્યારે પેરામૅગ્નેટિક પદાર્થને અનિયમિત ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં મૂકવામાં આવે ત્યારે તે પ્રબળ ચુંબકીય ક્ષેત્ર તરફ (નબળું) પરિણામી બળ અનુભવે છે. પેરામૅગ્નેટિક પદાર્થની મૅગ્નેટિક સસેપ્ટિબિલિટી χ_m ધન હોય છે.

17. ક્યુરીના નિયમ મુજબ, પેરામૅગ્નેટિક પદાર્થનું મૅગ્નેટાઇઝેશન $M = C\frac{B}{T}$.
જ્યારે બધા જ અણુઓની મૅગ્નેટિક મોમેન્ટ બાહ્ય ચુંબકીય ક્ષેત્રને સમાંતર ગોઠવાઈ જાય ત્યારે M, χ_m અને μ_r મહત્તમ બને છે, તથા તેને સેચ્યુરેશન મૅગ્નેટાઇઝેશન કહે છે. સેચ્યુરેશન મૅગ્નેટાઇઝેશન બાદ ક્યુરિનો નિયમ પળાતો નથી.

18. ફેરો મૅગ્નેટિક પદાર્થોના અણુઓ તેમની બાહ્ય કક્ષામાં રહેલા ઇલેક્ટ્રૉનના સ્પિનના કારણે કાયમી મૅગ્નેટિક મોમેન્ટ ધરાવતા હોય છે. આ અણુઓની ડાઈપોલ-મોમેન્ટ અમુક ચોક્કસ વિસ્તાર (ડોમેઇન) પૂરતી એક જ દિશામાં હોય છે. જ્યારે આ પદાર્થને મૅગ્નેટાઇઝ ન કર્યો હોય ત્યારે પરિણામી મૅગ્નેટાઇઝેશન ધરાવતા આ ડોમેઇન્સ એ રીતે અસ્તવ્યસ્ત ગોઠવાયેલા હોય છે કે જેથી તેમની પરિણામી મૅગ્નેટિક મોમેન્ટ શૂન્ય થાય છે.

19. જે તાપમાને આપેલો ફેરોમૅગ્નેટિક પદાર્થ પેરામૅગ્નેટિક પદાર્થમાં ફેરવાઈ જાય છે, તેને આપેલા પદાર્થનું ક્યુરી તાપમાન T_C કહે છે. આમ, મળેલી પેરામૅગ્નેટિક અવસ્થામાં પદાર્થની મૅગ્નેટિક સસેપ્ટિબિલિટી અને તાપમાન (T) વચ્ચેનો સંબંધ આ મુજબ છે.
$\chi_m = \frac{C_1}{T-T_C}$, $(T > T_C)$ જ્યાં C_1 = અચળાંક

20. કાયમી ચુંબકોની રિન્ટેટિવિટી અને કોઅર્સિવિટી બંને વધુ હોય છે.

21. વિદ્યુતચુંબકો બનાવવા માટે વપરાતા નરમ લોખંડની પરમીએબિલિટી વધુ અને રિન્ટેટિવિટી ઓછી હોય છે.

સ્વાધ્યાય

નીચે વિધાનો માટે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

1. 5.0 A m^2 જેટલી મૅગ્નેટિક મોમેન્ટ ધરાવતું એક ચુંબક, 7×10^{-4} Tના નિયમિત ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં એવી રીતે રહેલું છે કે જેથી તેની મૅગ્નેટિક મોમેન્ટનો સદિશ, ક્ષેત્ર સાથે 30°નો કોણ બનાવે. આ કોણ 30°થી વધારીને 45° કરવા માટે કરવું પડતું કાર્ય આશરે .... J હોય.
(A) 5.56×10^{-4} (B) 24.74×10^{-4} (C) 30.3×10^{-4} (D) 5.50×10^{-3}

2. એક ગજિયો ચુંબક પૃથ્વીના ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં T આવર્તકાળથી આંદોલન કરે છે. તેટલું જ દળ અને પરિમાણ ધરાવતા તેવા જ બીજા ચુંબકની મૅગ્નેટિક મોમેન્ટ, આ ચુંબક કરતાં 4 ગણી હોય, તો તેનો આવર્તકાળ .... હશે.
(A) $\frac{T}{2}$ (B) 2T (C) T (D) 4T

3. પ્રવાહ I ધારિત એક ગોળાકાર લૂપની જગ્યાએ તેટલી જ મૅગ્નેટિક ડાઇપોલ-મોમેન્ટ ધરાવતો ગજિયો ચુંબક મૂકવામાં આવે છે, તો આ ગોળાકાર લૂપ પર આવેલું કોઈ પણ બિંદુ .... પર આવેલું હશે.

(A) ગજિયા ચુંબકના વિષુવવૃત્તીય સમતલ

(B) ગજિયા ચુંબકની અક્ષ

(C) A અને B બંને

(D) સિવાય કે, ગજિયા ચુંબકના વિષુવવૃત્તીય સમતલ અથવા ચુંબકની અક્ષ.

4. જ્યારે પ્રવાહધારિત ગૂંચળાની જગ્યાએ તેનો સમતુલ્ય મૅગ્નેટિક ડાઇપોલ મૂકવામાં આવે ત્યારે,

(A) તેના ધ્રુવો વચ્ચેનું અંતર l અચળ હોય છે.

(B) તેના દરેક ધ્રુવનું ધ્રુવમાન p અચળ હોય છે.

(C) તેની ડાઇપોલ-મોમેન્ટ ઉલટાઈ જાય છે.

(D) pl ગુણાકાર અચળ રહે છે.

5. ધારો કે એક ગજિયા ચુંબકના કેન્દ્રથી r અંતરે, તેની અક્ષ પર એક બિંદુ આવેલું છે. આ r અંતરે ચુંબકીય ક્ષેત્ર હંમેશા ....ના સમપ્રમાણમાં હોય છે.

(A) $\frac{1}{r^2}$ (B) $\frac{1}{r^3}$

(C) $\frac{1}{r}$ (D) દરેક બિંદુએ $\frac{1}{r^3}$ પ્રમાણે જરૂરી નથી.

6. મૅગ્નેટિક મેરિડિયનનું સમતલ.......... .

(A) પૃથ્વીની ચુંબકીય અક્ષને લંબ હોય છે.

(B) પૃથ્વીની ભૌગોલિક (Geographic) અક્ષને લંબ હોય છે.

(C) પૃથ્વીની ચુંબકીય અક્ષમાંથી પસાર થતું હોય છે.

(D) પૃથ્વીની ભૌગોલિક અક્ષમાંથી પસાર થતું હોય છે.

7. ભૂ-ચુંબકીય ધ્રુવ પાસે, સમક્ષિતિજ સપાટી પર મુક્ત ભ્રમણ કરી શકે તેમ રાખેલી ચુંબકીય સોય

(A) ફક્ત ઉત્તર-દક્ષિણ દિશામાં જ રહેશે. (B) કોઈ પણ દિશામાં રહેશે.

(C) ફક્ત પૂર્વ-પશ્ચિમ દિશામાં રહેશે. (D) કોઈ પણ હલનચલન વગર જડ બની જશે.

8. પૃથ્વીની સપાટી પર કોઈ સ્થળે પૃથ્વીના ચુંબકીય ક્ષેત્રના સમક્ષિતિજ અને ઊર્ધ્વ ઘટક એકસરખા છે. આ સ્થળે મૅગ્નેટિક ડિપ ઍન્ગલ .... હશે.

(A) 30° (B) 45° (C) 0° (D) 90°

9. ગજિયા ચુંબકની અંદર, ચુંબકીય ક્ષેત્રરેખાઓ

(A) હાજર નથી હોતી.

(B) ચુંબકના આડછેદના ક્ષેત્રફળને સમાંતર હોય છે.

(C) N-ધ્રુવથી S-ધ્રુવ તરફ હોય છે.

(D) S-ધ્રુવથી N-ધ્રુવ તરફ હોય છે.

10. અનિયમિત ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં, ડાયામૅગ્નેટિક પદાર્થ પર લાગતું પરિણામી બળ .... હોય છે.

(A) પ્રબળ ચુંબકીય ક્ષેત્રથી નબળા ચુંબકીય ક્ષેત્ર તરફ

(B) ચુંબકીય ક્ષેત્રને લંબ દિશામાં

(C) નબળા ચુંબકીય ક્ષેત્રથી પ્રબળ ચુંબકીય ક્ષેત્ર તરફ

(D) શૂન્ય

11. l જેટલી લંબાઈ ધરાવતા સ્ટીલના એક સુરેખ તારની ચુંબકીય ડાઈપોલ-મોમેન્ટ m છે. જો આ તારને અર્ધવર્તુળાકાર ચાપના રૂપમાં વાળવામાં આવે, તો તેની નવી ચુંબકીય ડાઈપોલ-મોમેન્ટ કેટલી હશે ?

(A) m (B) $\frac{2m}{\pi}$ (C) $\frac{m}{2}$ (D) $\frac{m}{\pi}$

12. કોઈ એક સ્થાન પર પૃથ્વીના ચુંબકીય ક્ષેત્રનો સમક્ષિતિજ ઘટક તેના ઊર્ધ્વ ઘટક કરતાં $\sqrt{3}$ ગણો છે. આ સ્થાન પર angle of dip .... છે.

(A) 0 (B) $\frac{\pi}{2}$ rad (C) $\frac{\pi}{3}$ rad (D) $\frac{\pi}{6}$ rad

13. પૃથ્વી પર જે સ્થાને પૃથ્વીના ચુંબકીય ક્ષેત્રનો શિરોલંબ ઘટક શૂન્ય હોય તે સ્થાને ઍન્ગલ ઑફ ડિપ .... હોય.

(A) 0° (B) 45° (C) 60° (D) 90°

14. પૃથ્વી પર જે સ્થાને પૃથ્વીના ચુંબકીય ક્ષેત્રનો સમક્ષિતિજ ઘટક શૂન્ય હોય તે સ્થળ .... પર હોય.

(A) ભૌગોલિક વિષુવવૃત્ત (B) ભૂ-ચુંબકીય વિષુવવૃત્ત

(C) કોઈ એક ભૌગોલિક ધ્રુવ (D) કોઈ એક ભૂ-ચુંબકીય ધ્રુવ

15. જ્યારે પેરામૅગ્નેટિક પદાર્થને ગજિયા ચુંબકના ઉત્તર અથવા દક્ષિણ ધ્રુવ પાસે લાવવામાં આવે છે, ત્યારે તે,

(A) અપાકર્ષણ અનુભવે છે. (B) આકર્ષણ અનુભવે છે.

(C) આકર્ષણ કે અપાકર્ષણ કશું અનુભવતો નથી.

(D) કયા ધ્રુવ પાસે લાવીએ છીએ, તો અનુસાર આકર્ષણ કે અપાકર્ષણ અનુભવે છે.

16. સમક્ષિતિજ સમતલમાં રાખેલી એક ચુંબકીય સોય પૃથ્વીના ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં આંદોલન કરે છે. જો આ સોયનું તાપમાન વધારીને સોયના દ્રવ્યના ક્યુરિ તાપમાન કરતાં પણ ઊંચું લઈ જવામાં આવે તો,

(A) આંદોલનનો આવર્તકાળ ઘટશે.

(B) આંદોલનનો આવર્તકાળ વધશે.

(C) આંદોલનનો આવર્તકાળ તેટલો જ રહેશે.

(D) સોય આંદોલન કરતી બંધ થઈ જશે.

17. p ધ્રુવમાન અને $\vec{m}$ મૅગ્નેટિક મોમેન્ટ ધરાવતા l લંબાઈના એક ગજિયા ચુંબકના $\frac{l}{2}$ લંબાઈના બે સરખા ભાગ કરવામાં આવે છે. દરેક ટુકડાની મૅગ્નેટિક મોમેન્ટ અને ધ્રુવમાન અનુક્રમે .... અને .... હશે.

(A) $\vec{m}$, $\frac{p}{2}$ (B) $\frac{\vec{m}}{2}$, p (C) $\frac{\vec{m}}{2}$, $\frac{p}{2}$ (D) $\vec{m}$, p

18. શૂન્યાવકાશ માટે મૅગ્નેટાઈઝેશન .... હોય છે.

(A) ઋણ (B) ધન (C) અનંત (D) શૂન્ય

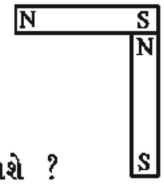
19. મૅગ્નેટિક મોમેન્ટ $\vec{m}$ ધરાવતા એક ગજિયા ચુંબકને નિયમિત ચુંબકીય ક્ષેત્ર $\vec{B}$ માં એવી રીતે મૂકવામાં આવે છે કે જેથી $\vec{m} \parallel \vec{B}$ થાય. આ પરિસ્થિતિમાં તેના પર લાગતાં ટૉર્ક અને બળ અનુક્રમે .... અને .... હોય.

(A) 0, 0 (B) $\vec{m} \times \vec{B}$, mB (C) $\vec{m} . \vec{B}$, mB (D) $\vec{m} . \vec{B}$, $\vec{m} \times \vec{B}$

20. એક પદાર્થની સાપેક્ષ પરમિએબિલિટી 0.075 છે. તેની ચુંબકીય સસેપ્ટિબિલિટી .... હોય.

(A) 0.925 (B) –0.925 (C) 1.075 (D) –1.075

21. *ડાઈપોલ મોમેન્ટ* m *ધરાવતા* બે એક સરખા ચુંબકો આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ ગોઠવાયેલ છે. આ સંયોજનની મૅગ્નેટિક ડાઈપોલ-મોમેન્ટ *નું મૂલ્ય*......... હોય.



(A) $2m$ (B) $\sqrt{2}\, m$ (C) $\frac{m}{\sqrt{2}}$ (D) $\frac{m}{2}$

22. અનિયમિત ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં મૂકેલી ચુંબકીય સોય ક્ષેત્રને સમાંતર ન હોય ત્યારે શું અનુભવશે ?

(A) બળ, પણ ટૉર્ક નહીં. (B) ટૉર્ક, પણ બળ નહીં.

(C) બળ અને ટૉર્ક બંને. (D) બળ અથવા ટૉર્ક એક પણ નહીં.

23. એક સ્ટીમરને પશ્ચિમ સાથે, દક્ષિણ તરફ 10°નો કોણ બનાવતી દિશામાં જવું છે. તે સ્થળે મૅગ્નેટિક ડેક્લિનેશન ઉત્તરથી પશ્ચિમ તરફ 17° છે, તો સ્ટીમરે .... દિશામાં જવું જોઈએ.

(A) ભૂ-ચુંબકીય ઉત્તર ધ્રુવ સાથે પશ્ચિમ તરફ 83° કોણ બનાવતી

(B) ભૂ-ચુંબકીય ઉત્તર ધ્રુવ સાથે પૂર્વ તરફ 83° કોણ બનાવતી

(C) ભૂ-ચુંબકીય દક્ષિણ ધ્રુવ સાથે પશ્ચિમ તરફ 27° કોણ બનાવતી

(D) ભૂ-ચુંબકીય દક્ષિણ ધ્રુવ સાથે પૂર્વ તરફ 27° કોણ બનાવતી

24. 100 આંટા/m ધરાવતા એક ટોરોઇડમાંથી 3 A પ્રવાહ વહે છે. ટોરોઇડનું કોર, લોખંડનું બનેલું છે, જેની સાપેક્ષ મૅગ્નેટિક પરમીએબિલિટી આપેલ પરિસ્થિતિમાં $\mu_r = 5000$ છે. લોખંડની અંદર ચુંબકીય ક્ષેત્ર .... હોય. ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ T m A^{-1} લો.)

(A) 0.15 T (B) 0.47 T (C) 1.5×10^{-2} T (D) 1.88 T

ઉત્તરો

1. (A)	**2.** (A)	**3.** (A)	**4.** (D)	**5.** (D)	**6.** (C)
7. (B)	**8.** (B)	**9.** (D)	**10.** (A)	**11.** (B)	**12.** (D)
13. (A)	**14.** (D)	**15.** (B)	**16.** (D)	**17.** (B)	**18.** (D)
19. (A)	**20.** (B)	**21.** (B)	**22.** (C)	**23.** (A)	**24.** (D)

નીચે આપેલ પ્રશ્નોના જવાબ ટૂંકમાં આપો :

1. કોઈ ગજિયા ચુંબકના બે ટુકડા તેની લંબાઈને લંબરૂપે/લંબાઈની દિશામાં કરવામાં આવે તો શું થાય ?
2. શું પ્રવાહધારિત ટોરોઇડને ઉત્તર ધ્રુવ અને દક્ષિણ ધ્રુવ હોય ?
3. દ્રવ્યના કયાં સ્વરૂપ/સ્વરૂપો ફેરોમૅગ્નેટિક ગુણધર્મ ન ધરાવતા હોય ?
4. કયા ચુંબકીય પદાર્થોના ચુંબકીય ગુણધર્મો પર તાપમાનની અસર થાય છે ?
5. કાયમી ચુંબકની રિટેન્ટિવિટી અને કોઅર્સિવિટી કેવી હોવી જોઈએ ?
6. જો ફેરોમૅગ્નેટિક પદાર્થનું તાપમાન તેના ક્યુરિ તાપમાન કરતાં વધુ થાય તો શું થાય ?
7. ચુંબકીય તીવ્રતાનો એકમ શું છે ?
8. હિસ્ટરીસિસ લૂપ શું દર્શાવે છે ?

9. વિદ્યુતચુંબકોના ઉપયોગ ક્યાં થાય છે ?

10. જો p ધ્રુવમાનવાળો કોઈ સ્વતંત્ર ચુંબકીય ધ્રુવ કોઈ પૃષ્ઠ વડે ઘેરાયેલો હોય, તો ગાઉસના ચુંબકીય ક્ષેત્ર માટેના નિયમનું સૂત્ર શું હોય ?

11. જો કોઈ ડાયામૅગ્નેટિક પદાર્થને અનિયમિત ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં મૂકવામાં આવે તો શું થાય ?

12. મૅગ્નેટિક સસેપ્ટિબિલિટીનો એકમ શું છે ?

13. દિલ્હી માટે ડેક્લિનેશન કેટલું છે ?

14. ડાયામૅગ્નેટિક પદાર્થોનાં નામ લખો.

15. નરમ લોખંડનો કયો ગુણધર્મ તેને વિદ્યુતચુંબક બનાવવા માટે ઉપયોગી થાય છે ?

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. પ્રવાહ-ગૂંચળાના અક્ષીય ચુંબકીય ક્ષેત્રનું સમીકરણ તેની મૅગ્નેટિક મોમેન્ટના સંદર્ભમાં મેળવો.
2. પ્રવાહ-ગૂંચળાના ચુંબકીય ક્ષેત્રના ઉત્તર અને દક્ષિણ ધ્રુવ દર્શાવતી સંજ્ઞા સમજાવો.
3. અણુના ન્યુક્લિયસની આજુબાજુ ભ્રમણ કરતા ઇલેક્ટ્રૉનની કક્ષીય મૅગ્નેટિક મોમેન્ટનું સમીકરણ મેળવો.
4. ચુંબકીય ક્ષેત્ર માટેનો ગાઉસનો નિયમ ટૂંકમાં સમજાવો.
5. ભૌગોલિક મેરિડિયન અને ભૂ-ચુંબકીય મેરિડિયન શું છે ? તેમની વચ્ચેનો ખૂણો શું દર્શાવે છે ?
6. મૅગ્નેટિક ડેક્લિનેશનની વ્યાખ્યા આપો. અક્ષાંશ સાથે ડેક્લિનેશન કેવી રીતે બદલાય છે ? તે લઘુતમ ક્યાં હોય છે ?
7. મૅગ્નેટિક ડિપની વ્યાખ્યા આપો. મૅગ્નેટિક વિષુવવૃત્ત પર ડિપ ઍન્ગલ કેટલો હોય છે ? જો આપણે ચુંબકીય ધ્રુવથી મૅગ્નેટિક વિષુવવૃત્ત તરફ જઈએ તો ડિપ એન્ગલ કેવી રીતે બદલાય ?
8. જ્યારે ડાયામૅગ્નેટિક પદાર્થને અનિયમિત ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં મૂકવામાં આવે ત્યારે શું થાય ? જરૂરી આકૃતિ દોરીને સમજાવો.
9. પેરામૅગ્નેટિક પદાર્થો માટે ક્યુરિનો નિયમ સમજાવો.
10. વિદ્યુતચુંબકો બનાવવા માટે નરમ લોખંડ કેમ ઉપયોગી છે તે સમજાવો.

નીચેના દાખલા ગણો :

1. 3000 આંટાવાળા એક ટોરોઇડના કોર (Core)ની અંદર અને બહારની ત્રિજ્યાઓ અનુક્રમે 11 cm અને 12 cm છે. જ્યારે 0.70 A પ્રવાહ પસાર કરવામાં આવે છે, ત્યારે કોરમાં ઉદ્‌ભવતું ચુંબકીય ક્ષેત્ર 2.5 T છે. કોરની સાપેક્ષ પરમીએબિલિટી શોધો. ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ T m A^{-1}) [જવાબ : 685]

2. એક પેરામૅગ્નેટિક વાયુ 1.5×10^{-23} A m^2 ડાઇપોલ-મોમેન્ટ ધરાવતા 2.0×10^{26} m^{-3} પરમાણુઓનો બનેલો છે. વાયુનું તાપમાન 27° C છે. (i) આ નમૂનાની મહત્તમ મૅગ્નેટાઇઝેશન તીવ્રતા શોધો. (ii) જો વાયુ પર 3.0 Tનું નિયમિત ચુંબકીય ક્ષેત્ર લાગુ પાડવામાં આવે, તો સંપૂર્ણ મૅગ્નેટાઇઝેશન મેળવી શકાશે ? શા માટે ?

   [**Hint :** વાયુના એક પરમાણુની ઉષ્મીય ઊર્જા $\frac{3}{2}k_B$T, અને ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં મહત્તમ સ્થિતિ-ઊર્જા = mB. ઉષ્મીય ઊર્જા અને મહત્તમ સ્થિતિ-ઊર્જાનો ગુણોત્તર શોધો, અને તમારો જવાબ આપો.]($k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J K^{-1})

   [જવાબ : (i) 3.0×10^3 A m^{-1}, (ii) ના]

3. બે નાના સમાન ગજિયા ચુંબકોની મૅગ્નેટિક ડાઇપોલ-મોમેન્ટ 1.0 A m^2 છે. તેમને એક સમતલમાં એ રીતે મૂકવામાં આવે છે કે જેથી તેમની અક્ષ એકબીજાને લંબરૂપે રહે. એક ચુંબકની અક્ષમાંથી પસાર થતી આ રેખા બીજા ચુંબકના કેન્દ્રમાંથી પસાર થાય છે. જો બંને ચુંબકોનાં કેન્દ્ર વચ્ચેનું અંતર 2 m હોય, તો તેમનાં કેન્દ્રોને જોડતી રેખાના મધ્યબિંદુ પર ચુંબકીય ક્ષેત્ર *નું મૂલ્ય* શોધો. [જવાબ : $\sqrt{5} \times 10^{-7}$ T]

4. 100 A m ધ્રુવમાનવાળો એક ચુંબકીય ધ્રુવ એક ગજિયા ચુંબકથી 20 cm દૂર રહેલો છે. ગજિયો ચુંબક 200 A m ધ્રુવમાન ધરાવે છે અને તેની લંબાઈ 5 cm છે. જો આ ચુંબકીય ધ્રુવ ગજિયા ચુંબકની અક્ષ પર હોત, તો ચુંબકીય ધ્રુવ પર લાગતું બળ શોધો. [જવાબ : 2.5×10^{-2} N]

5. m જેટલી ચુંબકીય ડાઇપોલ-મોમેન્ટ ધરાવતા એક ચુંબકને મેગ્નેટિક મેરિડિયનમાંથી 90°નું ભ્રમણ આપતાં થતું કાર્ય, તેને 60°નું ભ્રમણ આપતા થતા કાર્ય કરતાં n ગણું છે. n નું મૂલ્ય શોધો. [જવાબ : 2]

6. મેગ્નેટિક મેરિડિયન સાથે 30°નો કોણ બનાવતા સમતલમાં લટકાવેલ મેગ્નેટ, સમક્ષિતિજ સાથે 45°નો કોણ બનાવે છે. આ જગ્યાએ એન્ગલ ઑફ ડિપનું સાચું મૂલ્ય શોધો. [જવાબ : tan^{-1} (0.866)]

7. એક અણુમાં ન્યુક્લિઅસની આસપાસ 5.3×10^{-11} m ત્રિજ્યાની કક્ષામાં ભ્રમણ કરતા ઇલેક્ટ્રૉનની ઝડપ 2×10^{6} m s^{-1} છે. આ ઇલેક્ટ્રૉનની કક્ષીય મેગ્નેટિક મોમેન્ટ અને કોણીય વેગમાન શોધો.

ઇલેક્ટ્રૉનનો વિદ્યુતભાર = 1.6×10^{-19} C, ઇલેક્ટ્રૉનનું દળ = 9.1×10^{-31} kg લો.

[જવાબ : 8.48×10^{-24} A m^2 અને 9.65×10^{-35} N m s]

8. 1 cm વ્યાસવાળા, પ્રવાહધારિત ગૂંચળાના કેન્દ્રથી તેની અક્ષ પર 10 cm અંતરે ચુંબકીય ક્ષેત્ર 10^{-4} T છે.

(a) આ ગૂંચળાની મેગ્નેટિક મોમેન્ટ શોધો.

(b) આ ગૂંચળાના વિષુવવૃત્તીય સમતલમાં તેના કેન્દ્રથી 10 cm અંતરે ચુંબકીય ક્ષેત્ર શોધો.

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ T m A^{-1} લો. [જવાબ : (a) 0.5 A m^2, (b) 5×10^{-5} T]

9. નળાકાર સળિયાના રૂપમાં રહેલા એક ચુંબકની લંબાઈ 5 cm અને વ્યાસ 2 cm છે. તેનું નિયમિત મેગ્નેટાઇઝેશન 5×10^{3} A m^{-1} હોય, તો તેની net (કુલ) મેગ્નેટિક ડાઇપોલ-મોમેન્ટ શોધો.

[જવાબ : 7.85×10^{-2} J T^{-1}]

10. આયનીકરણ પામેલો એક વાયુ 5×10^{21} m^{-3} ઇલેક્ટ્રૉન અને તેટલા જ m^{-3} આયનો ધરાવે છે. જો ઇલેક્ટ્રૉનની સરેરાશ ગતિ-ઊર્જા 6×10^{-20} J, અને આયનોની સરેરાશ ગતિ-ઊર્જા 8×10^{-21} J હોય, તો વાયુ પર 1.0 Tનું ચુંબકીય ક્ષેત્ર લગાડતાં તેનું મેગ્નેટાઇઝેશન શોધો. [જવાબ : 340 J T^{-1} m^{-3}]

11. એકદમ નજીક આંટાવાળા 6 cm લંબાઈના એક સૉલેનોઇડમાં 10 આંટા/cm છે, તેના આડછેદનું ક્ષેત્રફળ 3×10^{-4} m^2 અને તેમાંથી પસાર થતો પ્રવાહ 1.0 A છે. સૉલેનોઇડની મેગ્નેટિક મોમેન્ટ અને ધ્રુવમાન શોધો.

[જવાબ : સૉલેનોઇડની અક્ષ પર તેની મેગ્નેટિક મોમેન્ટ = 1.8×10^{-2} A m^2, સૉલેનોઇડનું ધ્રુવમાન = 0.3 A m]

•

6

કિરણ-પ્રકાશશાસ્ત્ર

6.1 પ્રસ્તાવના (Introduction)

પ્રકાશ દ્વારા જ આપણી નજરશક્તિ અથવા દૃષ્ટિ ઉદ્દીપ્ત (ઉત્તેજિત) થાય છે. પ્રકાશને લગતા બધા જ કુતૂહલપ્રેરક પ્રશ્નો, તેના ગુણધર્મો, તેનો ઉદ્‌ભવ, દ્રવ્ય સાથેની પારસ્પરિક આંતરક્રિયા, તેની ઝડપ અને માધ્યમમાં પ્રસરણ, વગેરેનું વર્ણન અને સમજૂતી ભૌતિકશાસ્ત્રની 'પ્રકાશશાસ્ત્ર' (optics) નામની શાખામાં થાય છે. પ્રકાશશાસ્ત્રનો વિકાસ નીચે મુજબની ત્રણ શાખામાં કરી શકાય :

(1) કિરણ (ભૌમિતિક)-પ્રકાશશાસ્ત્ર (Ray (Geometric) Optics) (2) તરંગ-પ્રકાશશાસ્ત્ર (Wave Optics) અને (3) ક્વૉન્ટમ પ્રકાશશાસ્ત્ર (Quantum Optics)

આપણી આસપાસના રોજિંદા પદાર્થોની સરખામણીમાં દૃશ્ય વિદ્યુતચુંબકીય પ્રકાશની તરંગલંબાઈ (400 nmથી 800 nm) ખૂબ જ નાની હોવાથી પ્રકાશની એક બિંદુથી બીજા સુધીની મુસાફરી સુરેખ પથ પર છે તેમ ગણી શકાય. આને પ્રકાશનું 'સુરેખ' (Rectilinear) પ્રસરણ કહે છે. પ્રકાશના આ સુરેખ-પથ પ્રસરણને 'કિરણ' (Ray) કહે છે કે જે કદાપિ કેન્દ્રિત (Converging) કે અપકેન્દ્રિત (Diverging) થાય નહીં. આવા કિરણોનાં બંડલને 'કિરણ-પુંજ' (beam) કહે છે.

પરાવર્તન, વક્રીભવન અને વિભાજન જેવી પ્રકાશીય ઘટનાઓ કિરણ-પ્રકાશશાસ્ત્ર દ્વારા સમજાવી શકાય છે. કિરણ-પ્રકાશશાસ્ત્ર નીચેની મુખ્ય ત્રણ પૂર્વધારણાઓ પર આધારિત છે :

(1) પ્રકાશનું સુરેખ-પથ પ્રસરણ.

(2) કિરણોનું સ્વતંત્રતા પણું (એટલે કે, કિરણો જ્યારે એકબીજાંને છેદે તોપણ એકબીજાને ખલેલ પહોંચાડતાં નથી.)

(3) ગતિપથની પ્રતિવર્તિતા (Reversibility) (એટલે કે, પ્રકાશકિરણનો ગતિપથ ઉલટાવતાં તે મૂળ પથ પર જ પાછો પ્રસરણ પામે છે.)

પ્રસ્તુત પ્રકરણમાં આપણે પરાવર્તન, વક્રીભવન અને વિભાજન જેવી ઘટનાઓનો અભ્યાસ કિરણ-પ્રકાશશાસ્ત્રની મદદથી કરીશું. સૂક્ષ્મદર્શક (Microscope) અને ટેલિસ્કોપ (Telescope) જેવાં પ્રકાશીય ઉપકરણોનો અભ્યાસ પણ પ્રકરણના અંતે કરીશું.

6.2 ગોળીય અરીસા વડે થતું પ્રકાશનું પરાવર્તન (Reflection by Spherical Mirrors)

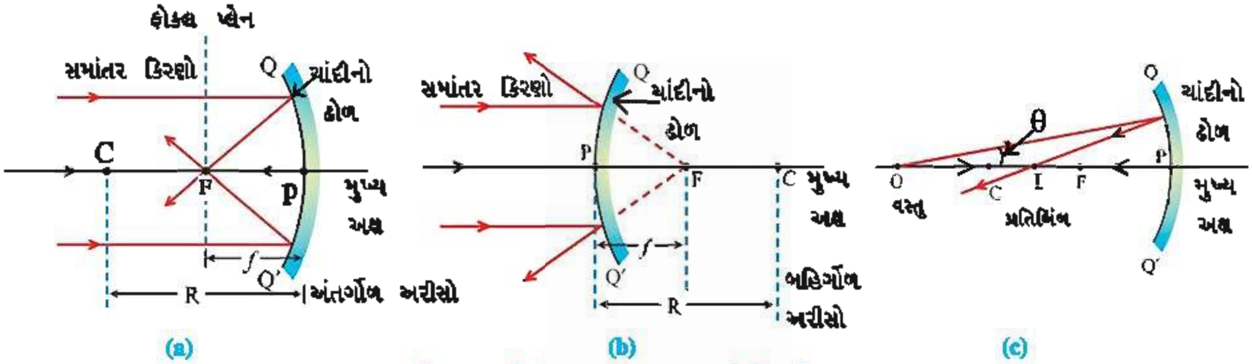
ગોળીય અરીસા વડે થતા પ્રકાશનું પરાવર્તનના અભ્યાસ માટે નીચેના મુદ્દાઓને તાજા કરીશું :

પરાવર્તનના નિયમો

(1) પ્રકાશના પરાવર્તનના કિસ્સામાં, આપાતકોણ અને પરાવર્તનકોણ સમાન હોય છે.

(2) આપાતકિરણ, આપાતબિંદુએ અરીસાની સપાટી દોરેલ લંબ તથા પરાવર્તિત કિરણ એક જ સમતલમાં હોય છે; જ્યારે આપાતકિરણ અને પરાવર્તિત કિરણ લંબની સામસામેની બાજુએ હોય છે.

સમતલ કે વક્ર, કોઈ પણ પ્રકારની પરાવર્તિત સપાટીના દરેક બિંદુ આગળ આ નિયમો લાગુ પાડી શકાય છે.



આકૃતિ 6.1 ગોળીય અરીસા દ્વારા પ્રતિબિંબની રચના

ગોળીય અરીસા પરથી પરાવર્તન સમજવા જરૂરી કેટલીક વ્યાખ્યાઓ નીચે મુજબ છે :

ધ્રુવ (Pole) : અરીસાની સપાટીના મધ્યબિંદુને અરીસાનો ધ્રુવ (P) કહે છે.

મુખ્ય અક્ષ (Principal Axis) : ધ્રુવ અને વક્રતાકેન્દ્રમાંથી પસાર થતી કાલ્પનિક રેખા $\overleftrightarrow{CP}$ને અરીસાની મુખ્ય અક્ષ કહે છે.

વક્રતાકેન્દ્ર (Centre of Curvature) : જે ગોળામાંથી અરીસો બનાવવામાં આવ્યો હોય, તે ગોળાના કેન્દ્રને તે અરીસાનું વક્રતાકેન્દ્ર (C) કહે છે.

વક્રતાત્રિજ્યા (Radius of Curvature) : જે ગોળામાંથી અરીસો બનાવવામાં આવ્યો હોય, તે ગોળાની ત્રિજ્યાને તે અરીસાની વક્રતાત્રિજ્યા (R) કહે છે. એટલે કે C અને P વચ્ચેનું અંતર છે.

દર્પણમુખ (Aperture) : અરીસાની વર્તુળાકાર ધારના વ્યાસ (QQ') ને અરીસાનું દર્પણમુખ કહે છે.

મુખ્ય કેન્દ્ર (Principal Focus) : મુખ્ય અક્ષને સમાંતર કિરણો પરાવર્તન પામીને જે બિંદુએ કેન્દ્રિત થતાં હોય (અંતર્ગોળ અરીસો) કે જે બિંદુએથી અપકેન્દ્રિત થતા હોવાનો આભાસ થતો હોય (બહિર્ગોળ અરીસો) તે બિંદુને અરીસાનું મુખ્ય કેન્દ્ર કહે છે.

ફોકલ પ્લેન (Focal Plane) : મુખ્ય કેન્દ્રમાંથી પસાર થતા અને મુખ્ય અક્ષને લંબ હોય તેવા સમતલને ફોકલ પ્લેન કહે છે.

કેન્દ્રલંબાઈ (Focal Length) : અરીસાના ધ્રુવ અને મુખ્ય કેન્દ્ર વચ્ચેના અંતરને અરીસાની કેન્દ્રલંબાઈ (f) કહે છે.

પેરેક્સિઅલ કિરણો (Paraxial Rays) : અરીસાની અક્ષની નજીકનાં કિરણોને પેરેક્સિઅલ કિરણો કહે છે. પેરેક્સિઅલ કિરણોના સંદર્ભમાં જ આપણે અરીસા અને લેન્સનો અભ્યાસ કરીશું.

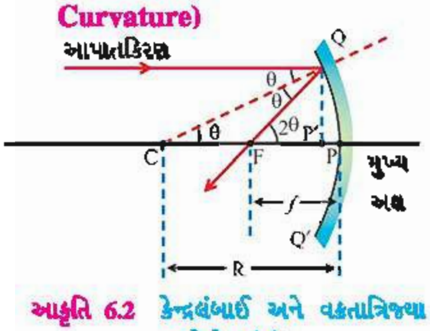
સંજ્ઞાપદ્ધતિ (Sign Convention) : વસ્તુ અને તેના પ્રતિબિંબનાં સ્થાન નક્કી કરવા આપણે સંદર્ભબિંદુ અને સંજ્ઞાપદ્ધતિની જરૂર પડશે. આપણે કાર્તેઝિયન સંજ્ઞા પદ્ધતિ સ્વીકારીશું

(1) બધાં અંતરો ધ્રુવની સાપેક્ષે મુખ્ય અક્ષ પર માપવાં.

(2) આપાતકિરણની દિશામાં મપાયેલાં અંતરો ધન ગણવાં અને આપાતકિરણની વિરુદ્ધ દિશામાં મપાયેલાં અંતરો ઋણ ગણવાં.

(3) મુખ્ય અક્ષની ઉપર તરફની ઊંચાઈઓ ધન અને નીચે તરફની ઊંચાઈઓ ઋણ લેવામાં આવે છે.

6.3 કેન્દ્રલંબાઈ અને વક્રતાત્રિજ્યા વચ્ચેનો સંબંધ (Relation between Focal Length અને Radius of Curvature)



આકૃતિ 6.2 કેન્દ્રલંબાઈ અને વક્રતાત્રિજ્યા વચ્ચેનો સંબંધ

આકૃતિ 6.2માં મુખ્ય અક્ષને સમાંતર અને પેરેક્સિઅલ કિરણ નાના દર્પણમુખ ધરાવતા અંતર્ગોળ અરીસાના Q બિંદુ પર આપાત થાય છે. પરાવર્તિત કિરણ અરીસાના મુખ્ય કેન્દ્રમાંથી પસાર થાય છે. સપાટી પરના બિંદુ Q આગળ દોરેલ લંબ તેના વક્રતાકેન્દ્રમાંથી પસાર થાય. $\therefore$ CQ = CP થશે. જો આપાતકોણ θ જેટલો હોય, તો પરાવર્તન કોણ $\angle CQF = \theta = \angle QCF$.

આકૃતિની ભૂમિતિ પરથી, બહિષ્કોણ

$$\angle QFP = \theta + \theta = 2\theta$$

આપાતકિરણ પેરેક્સિઅલ હોવાથી અને અરીસાનું દર્પણમુખ નાનું હોવાથી બિંદુઓ P અને P' એકબીજાંથી ઘણી નજીક આવેલાં હશે. એટલે કે, $CP' \approx CP = R$

અને $FP' \approx FP = f$

ΔFQPમાં $\sin 2\theta \approx 2\theta = \frac{QP'}{FP'} = \frac{QP}{FP}$

$$\therefore\ 2\theta = \frac{QP}{f} \Rightarrow \theta = \frac{QP}{2f} \qquad (6.3.1)$$

તે જ રીતે, $\Delta CQP'$ પરથી $\sin\theta \approx \theta = \frac{QP'}{CP'} \approx \frac{QP}{CP}$

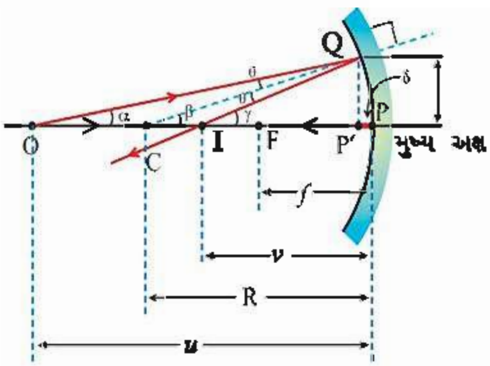
$$\therefore\ \theta = \frac{QP}{R} \qquad (6.3.2)$$

સમીકરણ (6.2.1) અને (6.3.2) પરથી, $R = 2f$ અથવા $f = \frac{R}{2}$ (6.3.3)

સમીકરણ (6.3.3) એ બહિર્ગોળ અરીસા માટે પણ સાચું છે. સમતલ અરીસાના કિસ્સામાં R અનંત હોવાથી તેની કેન્દ્રલંબાઈ પણ અનંત થશે.

6.4 ગોળીય અરીસાનું સૂત્ર (Spherical Mirror Formula)

હવે આપણે અંતર્ગોળ અરીસા માટે વસ્તુ-અંતર (u) પ્રતિબિંબ-અંતર (v) અને કેન્દ્રલંબાઈ (f) વચ્ચેનો સંબંધ તારવીશું. આકૃતિ 6.3માં દર્શાવ્યા મુજબ અરીસાના ધ્રુવથી u અંતરે રહેલ બિંદુવત્ વસ્તુ Oને ધ્યાનમાં લો. ધારો કે અરીસાનું દર્પણમુખ નાનું છે. ધારો કે આપાતકિરણ OQ મુખ્ય અક્ષ સાથે નાનો કોણ (α) બનાવે છે અને બિંદુ Qમાંથી પરાવર્તિત કિરણ QI રચે છે. વસ્તુ O માંથી દોરેલ બીજું કિરણ મુખ્ય અક્ષ તરફ બિંદુ P આગળ આપાત થઈ PC દિશામાં પરાવર્તન પામે છે. આ બંને પરાવર્તિત કિરણો બિંદુ Iમાં મળી પ્રતિબિંબ રચે છે.



આકૃતિ 6.3 અંતર્ગોળ અરીસા વડે બિંદુવત્ વસ્તુનું પ્રતિબિંબ

અરીસાનું દર્પણમુખ નાનું હોવાથી, અંતર $PP' = \delta$ અત્યંત નાનું થશે અને તેથી તેને અવગણી શકાશે. તેથી OPQ અને IQP વિસ્તારને અનુક્રમે $\Delta OQP'$ અને $\Delta IQP'$ તરીકે વિચારી શકાય.

પરાવર્તનના નિયમાનુસાર, આપાતકોણ $\angle OQC$ = પરાવર્તિત કોણ, $\angle CQI = \theta$.

ધારો કે CQ અને IQ મુખ્ય અક્ષ સાથે અનુક્રમે β અને γ કોણ બનાવે છે.

ΔOCQમાં બહિષ્કોણ $\beta = \alpha + \theta$

ΔCQIમાં બહિષ્કોણ $\gamma = \beta + \theta$

બંને સમીકરણોમાંથી θનો લોપ કરતાં,

$$\alpha + \gamma = 2\beta \qquad (6.4.1)$$

આકૃતિ પરથી,

$$\alpha \text{ (rad)} = \frac{\text{ચાપ QP}}{\text{OP}},$$

$$\beta \text{ (rad)} = \frac{\text{ચાપ QP}}{\text{CP}} \text{ અને}$$

$$\gamma \text{ (rad)} = \frac{\text{ચાપ QP}}{\text{IP}}$$

સમીકરણ (6.4.1)માં આ કિંમતો મૂકતાં,

$$\frac{\text{ચાપ QP}}{\text{OP}} + \frac{\text{ચાપ QP}}{\text{IP}} = 2\frac{\text{ચાપ QP}}{\text{CP}}$$

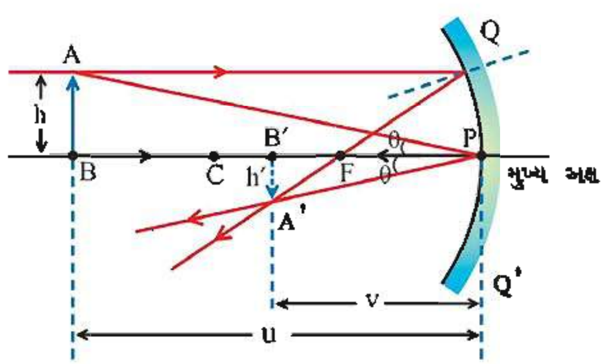
$$\frac{1}{\text{OP}} + \frac{1}{\text{IP}} = \frac{2}{\text{CP}}$$

$$\therefore \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{2}{R} \text{ અથવા } \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f} \qquad (6.4.2)$$

સમીકરણ (6.4.2) એ વસ્તુ-અંતર, પ્રતિબિંબ-અંતર અને કેન્દ્રલંબાઈ (અથવા વક્રતાત્રિજ્યા) વચ્ચેનો ગાણિતીય સંબંધ દર્શાવે છે. ઉપર્યુક્ત પૈકીની કોઈપણ ભૌતિક રાશિ ગણતી વખતે સંજ્ઞા પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરવો પડશે. પ્રસ્તુત કિસ્સામાં, $u \rightarrow -u$, $v \rightarrow -v$ અને f (અથવા R) $\rightarrow -f$ (અથવા $-$R)

સમીકરણ (6.4.2)ને ગાઉસનું સમીકરણ કહે છે. આ સમીકરણ બહિર્ગોળ અરીસા માટે પણ સાચું છે.

6.5 લેટરલ મોટવણી (Lateral Magnification)



આકૃતિ 6.4 રેખીય વસ્તુનું પ્રતિબિંબ

પ્રતિબિંબની ઊંચાઈ (h') અને વસ્તુની ઊંચાઈ(h)ના ગુણોત્તરને લેટરલ મોટવણી (Lateral Magnification) કે ટ્રાન્સવર્ઝ મોટવણી (Transverse Magnification) કહે છે.

એટલે કે, લેટરલ મોટવણી $m = \frac{h'}{h}$ (6.5.1)

કાટકોણ ત્રિકોણ ABP અને A′B′P માટે,

$$\tan\theta = \frac{AB}{BP} = \frac{A'B'}{B'P} \qquad (6.5.2)$$

પણ AB = h, A′B′ = $-h'$, PB = $-u$ અને B′P = $-v$ (સંજ્ઞાપદ્ધતિનો ઉપયોગ કરતાં)

∴ સમીકરણ (6.5.2) પરથી,

$$\frac{h}{-u} = \frac{-h'}{-v}$$

$$\therefore \frac{h'}{h} = \frac{-v}{u} \tag{6.5.3}$$

સમીકરણ (6.5.1) અને (6.5.3) પરથી,

$$m = \frac{-v}{u} \tag{6.5.4}$$

સમીકરણ (6.5.4) બહિર્ગોળ અરીસા માટે પણ સાચું છે.

ઉદાહરણ 1 : 160 cm જેટલી વક્રતાત્રિજ્યા ધરાવતા અંતર્ગોળ અરીસાની મુખ્ય અક્ષ પર એક વસ્તુ મૂકેલ છે. તેનું ચત્તુ પ્રતિબિંબ અરીસાથી 70 cm અંતરે મળે છે. પ્રકાશ-ઉદ્‌ગમનું સ્થાન અને પ્રતિબિંબની મોટવણી શોધો.

ઉકેલ : અરીસાના સૂત્ર,

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}$$

$$\therefore \frac{1}{u} = \frac{2}{R} - \frac{1}{v} = \frac{2}{-160} - \frac{1}{70} \qquad \text{(સંજ્ઞાપદ્ધતિ વાપરતાં)}$$

$$= \frac{-15}{560}$$

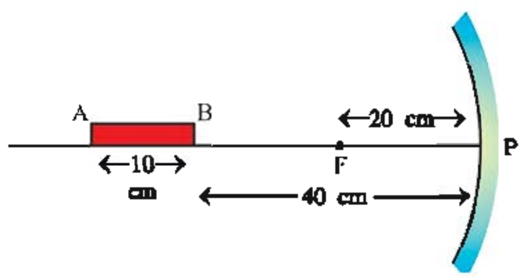
$$\therefore u = -37 \text{ cm}$$

એટલે કે, પ્રકાશ-ઉદ્‌ગમ 37 cm જેટલા અંતરે અરીસાની આગળ હશે.

લેટરલ મેગ્નિફિકેશન $m = -\frac{v}{u} = -\frac{70}{-37} = 1.89$

ઉદાહરણ 2 : આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે 10 cm લંબાઈના, પાતળા AB સળિયાને અંતગોળ અરીસાની મુખ્ય અક્ષ પર એવી રીતે મૂકવામાં આવ્યો છે કે, જેથી અરીસાના ધ્રુવથી છેડા Bનું અંતર 40 cm થાય છે. જો અરીસાની કેન્દ્રલંબાઈ 20 cm હોય, તો સળિયાના પ્રતિબિંબની લંબાઈ શોધો.

ઉકેલ : અરીસાની કેન્દ્રલંબાઈ f = 20 cm છે અને છેડો B ધ્રુવથી 40 cm = $2f$ = R અંતરે છે. પરિણામે B છેડાનું પ્રતિબિંબ Bના સ્થાને જ રચાય છે.



હવે A છેડા માટે,

u = −50 cm, f = − 20 cm, v = ?

$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$માં મૂલ્યો મૂકતાં,

$$-\frac{1}{50} + \frac{1}{v} = -\frac{1}{20}$$

$$\therefore \frac{1}{v} = \frac{1}{50} - \frac{1}{20} = \frac{20-50}{20 \times 50} = -\frac{30}{1000}$$

$$\therefore v = -\frac{100}{3} = -33.3 \text{ cm}$$

આ પ્રતિબિંબ વસ્તુ તરફ છે.

હવે પ્રતિબિંબની લંબાઈ = A અને B છેડાનાં પ્રતિબિંબો વચ્ચેનું અંતર

= 40 − 33.3 = 6.70 cm

ઉદાહરણ 3 : ગોળીય અરીસા માટે લેટરલ મેગ્નિફિકેશનનું સૂત્ર, $m = \frac{f}{f-u}$ મેળવો, જ્યાં f = કેન્દ્રલંબાઈ અને u = વસ્તુ-અંતર છે.

ઉકેલ : $\frac{1}{f} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v} \Rightarrow \frac{1}{v} = \frac{1}{f} - \frac{1}{u} = \frac{u-f}{uf}$

$$\therefore v = \frac{fu}{u-f} \Rightarrow \frac{v}{u} = \frac{f}{u-f}$$

હવે, $m = -\frac{v}{u} = \frac{f}{f-u}$

નોંધ : સમતલ અરીસા માટે $f \rightarrow \infty$ હોવાથી આ સૂત્ર પરથી $m = 1$ (મૂલ્યમાં)

6.6 પ્રકાશનું વક્રીભવન (Refraction of Light)

જ્યારે પ્રકાશકિરણ એક પારદર્શક માધ્યમમાંથી લંબ સિવાયના કોણે બીજા પારદર્શક માધ્યમમાં દાખલ થાય છે, ત્યારે બે માધ્યમોને છૂટી પાડતી સપાટી આગળ તેની દિશા બદલાય છે. આ ઘટનાને વક્રીભવન કહે છે.

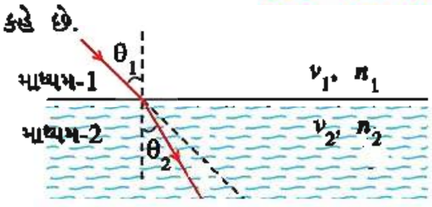
માત્ર જાણકારી માટે :

- જે માધ્યમના ગુણધર્મો બધાં જ બિંદુઓ આગળ સમાન હોય, તો તેને સમાંગી (Homogeneous) માધ્યમ કહે છે. જે માધ્યમના ગુણધર્મો બધી જ દિશામાં સમાન હોય, તો તેને સમદિગ્ધર્મી (Isotropic) કહે છે.
- જો માધ્યમ સમાંગ ન હોય, તો પ્રકાશકિરણનું સતત વક્રીભવન થતું રહે છે. પરિણામે તેનો ગતિમાર્ગ વક્ર હોય છે.
- જો માધ્યમ સમદિગ્ધર્મી ના હોય તો પ્રકાશકિરણ જુદી-જુદી દિશાઓમાં જુદા-જુદા પ્રમાણમાં વક્રીભૂત થાય છે.

વક્રીભવનના નિયમો (Law of Refraction) :

(1) આપાતકિરણ, વક્રીભૂત કિરણ અને આપાતબિંદુમાંથી સપાટી પર દોરેલ લંબ એક જ સમતલમાં હોય છે.

(2) "આપેલાં બે માધ્યમો માટે આપાતકોણ અને વક્રીભૂત કોણના sineનો ગુણોત્તર અચળ રહે છે." આ અચળાંકને તે બે માધ્યમો માટેનો સાપેક્ષ વક્રીભવનાંક (Relative Refractive Index) કહે છે. આ વિધાનને સ્નેલનો નિયમ કહે છે.



આકૃતિ 6.4 (a)

જો θ_1 એ આપાતકોણ (માધ્યમ–1માં) અને θ_2 એ વક્રીભૂત કોણ (માધ્યમ-2માં) હોય તો,

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = n_{21} \qquad (6.6.1)$$

જ્યાં, n_{21}ને માધ્યમ-2નો માધ્યમ-1ની સાપેક્ષ વક્રીભવનાંક કહે છે. n_{21}નું મૂલ્ય માધ્યમોની જાત, તાપમાન અને પ્રકાશની તરંગલંબાઈ ઉપર આધાર રાખે છે.

સાપેક્ષ વક્રીભવનાંક એ માધ્યમોમાં પ્રકાશની ઝડપના પદમાં પણ આપી શકાય છે.

$$n_{21} = \frac{v_1}{v_2}, \qquad (6.6.2)$$

જ્યાં, v_1 = પ્રકાશની માધ્યમ-1માં ઝડપ અને

v_2 = પ્રકાશની માધ્યમ-2માં ઝડપ

તે જ રીતે, માધ્યમનો શૂન્યાવકાશ (અથવા વ્યવહારમાં હવા)ની સાપેક્ષ વક્રીભવનાંક

$$n = \frac{c}{v}. \qquad (6.6.3)$$

અત્રે, nને નિરપેક્ષ વક્રીભવનાંક (Absolute Refractive Index) કહે છે. હવે,

$$n_{21} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{c}{v_2} \times \frac{v_1}{c} = \frac{n_2}{n_1} \qquad (6.6.4)$$

$\therefore$ સમીકરણ 6.6.1 પરથી,

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$$

અથવા $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$ $\qquad$ (6.6.5)

આ સમીકરણ (6.6.5)ને સ્નેલના નિયમનું વ્યાપક સ્વરૂપ કહે છે.

આપેલાં માધ્યમો માટે જો $n_2 > n_1 \Rightarrow \sin\theta_1 > \sin\theta_2$ થશે.

$\therefore \theta_1 > \theta_2$

આમ, જ્યારે પ્રકાશ-કિરણ પ્રકાશીય પાતળા માધ્યમમાંથી ઘટ્ટ માધ્યમમાં પ્રવેશે છે, ત્યારે વક્રીભૂત કોણ આપાતકોણ કરતા નાનો હોય છે, અને વક્રીભૂત કિરણ લંબ તરફ વળે છે.

જો $n_2 < n_1 \Rightarrow \sin\theta_1 < \sin\theta_2$ થશે.

$\therefore \theta_1 < \theta_2$

આમ, જ્યારે પ્રકાશ-કિરણ પ્રકાશીય ઘટ્ટ માધ્યમમાંથી પાતળા માધ્યમમાં પ્રવેશે છે, ત્યારે વક્રીભૂત કોણ આપાતકોણ કરતાં મોટો હોય છે, અને વક્રીભૂત કિરણ લંબથી દૂર વળે છે.

મોટો વક્રીભવનાંક ધરાવતા માધ્યમને **પ્રકાશીય ઘટ્ટ** માધ્યમ કહે છે અને નાનો વક્રીભવનાંક ધરાવતા માધ્યમને **પ્રકાશીય પાતળું** માધ્યમ કહે છે. આ પ્રકાશીય ઘનતા એ દ્રવ્યઘનતા (દળ-ઘનતા) કરતાં જુદી છે.

સંયુક્ત ચોસલા દ્વારા થતું વક્રીભવન :

આકૃતિ 6.5માં દર્શાવ્યા મુજબ, જો પ્રકાશ-કિરણ સંયુક્ત ચોસલા (Compound slab)માંથી પસાર થાય ત્યારે માધ્યમ-3નો માધ્યમ-1ની સાપેક્ષ વક્રીભવનાંક,

$$n_{31} = \frac{v_1}{v_3}$$

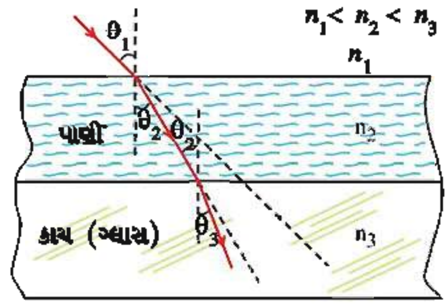
$$= \frac{v_2}{v_3} \times \frac{v_1}{v_2} = n_{32} \times n_{21} \qquad (6.6.6)$$

વળી,

$$n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2 = n_3\sin\theta_3 \qquad (6.6.7)$$

અને $$n_{21} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{\left(\frac{v_2}{v_1}\right)} = \frac{1}{n_{12}}$$

$$\therefore n_{21} \times n_{12} = 1 \qquad (6.6.8)$$



આકૃતિ 6.5 સંયુક્ત ચોસલા દ્વારા થતું વક્રીભવન

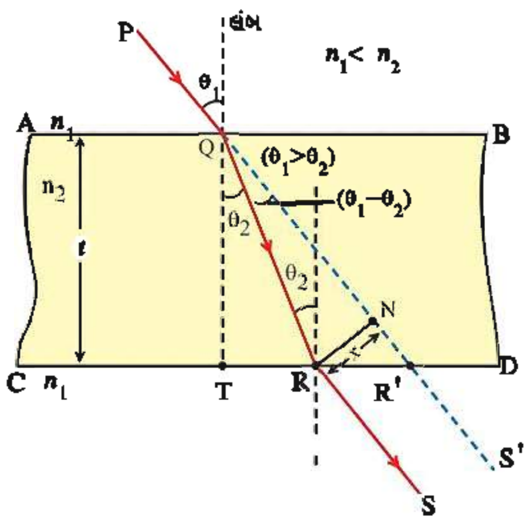
માત્ર જાણકારી માટે : પારદર્શક માધ્યમની દૃશ્યતા (Visibility) એ તે માધ્યમના અને આસપાસના માધ્યમની વક્રીભવનાંકના તફાવતને કારણે છે.

6.6.1 લેટરલ શિફ્ટ (Lateral Shift) :

આકૃતિ 6.6માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે પ્રકાશકિરણનું ઉપરની સપાટી (AB) અને નીચેની સપાટી (CD) એમ બે વખત આપેલ સમાંગી માધ્યમ દ્વારા વક્રીભવન થાય છે. નિર્ગમિત કિરણ RS એ PQR'S' કિરણને સમાંતર છે. અત્રે PQR'S' એ બીજા માધ્યમની ગેરહાજરીમાં પ્રકાશકિરણનો ગતિપથ છે.

અત્રે નિર્ગમિત કિરણ એ આપાતકિરણને સમાંતર છે. પરંતુ RN જેટલું પ્રાચિક સ્થાનાંતર થયેલ છે. આ અંતર RNને **લેટરલ શિફ્ટ** (x) કહે છે. હવે આપણે લેટરલ શિફ્ટ (x) નીચે મુજબ ગણીશું.

ધારો કે, n_1 અને n_2 એ અનુક્રમે પ્રકાશીય પાતળા અને પ્રકાશીય ઘટ્ટ માધ્યમોમાં વક્રીભવનાંક છે. વળી, $n_1 < n_2$ છે. આકૃતિ પરથી $\angle RQN = \theta_1 - \theta_2$ અને $RN = x$ છે.



આકૃતિ 6.6 લંબઘન ચોસલાને કારણે લેટરલ શિફ્ટ

ΔQRN પરથી, $\sin(\theta_1 - \theta_2) = \frac{RN}{QR} = \frac{x}{QR}$ (6.6.9)

ΔQTRમાં, $\cos\theta_2 = \frac{QT}{QR}$

$\therefore QR = \frac{QT}{\cos\theta_1} = \frac{t}{\cos\theta_2}$

$\therefore$ સમીકરણ (6.6.9) પરથી, $\sin(\theta_1 - \theta_2) = \frac{x}{\left(\frac{t}{\cos\theta_2}\right)}$

$$\therefore x = \frac{t\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\cos\theta_2} \quad (6.6.10)$$

પણ આપાતકોણ θ_1 અત્યંત નાનો હોવાથી, θ_2 પણ નાનો થશે.

$\therefore \sin(\theta_1 - \theta_2) \approx (\theta_1 - \theta_2)$ અને $\cos\theta_2 \approx 1$

$\therefore x = \frac{t(\theta_1 - \theta_2)}{1}$

$$x = t\,\theta_1\left(1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}\right) \quad (6.6.11)$$

પરંતુ સ્નેલના નિયમાનુસાર, $\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} \approx \frac{\theta_1}{\theta_2}$

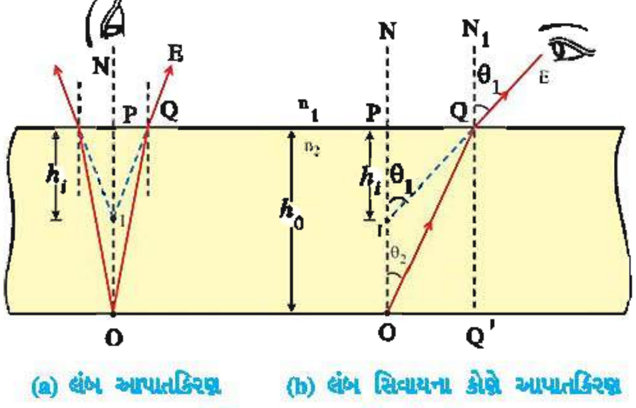
$\therefore$ સમીકરણ (6.6.11),

$$x = t\,\theta_1\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)$$

6.6.2 સાચી ઊંડાઈ અને આભાસી ઊંડાઈ (Real Depth અને Virtual Depth) : આકૃતિ 6.7માં દર્શાવ્યા મુજબ ધારો કે વસ્તુ Oને n_2 વક્રીભવનાંક ધરાવતા ઘટ્ટ માધ્યમ (દા.ત., પાણી)માં h_0 જેટલી ઊંડાઈએ મૂકેલ છે. આકૃતિ 6.7(a) પરથી, કિરણ OQ વક્રીભવન પામી સપાટી આગળથી QE દિશામાં આગળ વધે છે. જો EQને ઘટ્ટ માધ્યમમાં પાછું લંબાવવામાં આવે, તો લંબ PNને બિંદુ Iમાં મળશે.

આમ, Oનું પ્રતિબિંબ I સ્થાને દેખાશે. અત્રે, $PO = h_0$ = વસ્તુની સાચી ઊંડાઈ

$PI = h_i$ = વસ્તુની આભાસી ઊંડાઈ છે.



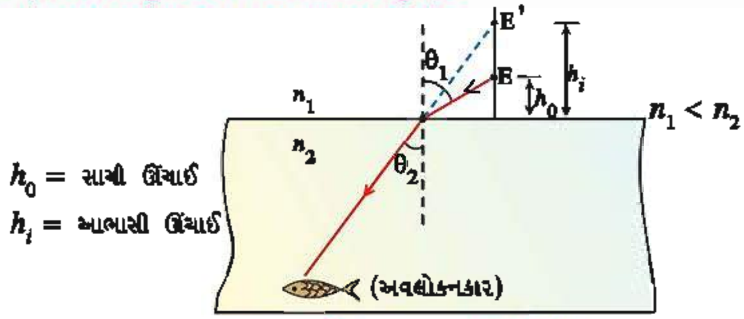
(a) લંબ આપાતકિરણ (b) લંબ સિવાયના કોણે આપાતકિરણ

આકૃતિ 6.7 આભાસી ઊંચાઈ

વળી, આકૃતિ 6.7(a) પરથી જોઈ શકાય છે કે, લંબ આપાતકિરણ માટે, $\theta_1 = 0$ હોવા છતાં $h_0 \neq h_i$ (આ કિસ્સો સમીકરણ (6.8.10)માં ખાસ કિસ્સા તરીકે જોઈશું.). પરંતુ જેમજેમ θ_1 વધતો જાય છે તેમતેમ h_iનું મૂલ્ય h_0 કરતાં ઘટતું જાય છે. વળી, જ્યારે વસ્તુને લંબ સિવાયની દિશાથી વક્રીભવનકારક માધ્યમમાંથી જોવામાં આવે છે, ત્યારે તે વક્ર દેખાય છે.

6.6.3 સાચી ઊંચાઈ અને આભાસી ઊંચાઈ (Real Height અને Virtual Height) :

ધારો કે અવલોકનકાર (દા.ત., માછલી) એ ઘટ્ટ માધ્યમ (દા.ત., પાણી)માં છે. તે માણસની આંખ (E)ને E' સ્થાને જુએ છે. એટલે કે ઘટ્ટ માધ્યમમાં રહેલ અવલોકનકાર માટે વસ્તુ ઉપર ઊંચકાયેલી દેખાય છે. (જુઓ આકૃતિ 6.8)



આકૃતિ 6.8 આભાસી ઊંચાઈ

ઉદાહરણ 4 : લગભગ શિરોલંબ દિશામાં અવલોકન માટે, વક્રીભવનની ઘટનામાં સાચી ઊંડાઈ, આભાસી ઊંડાઈ અને વક્રીભવનાંક વચ્ચેનો સંબંધ મેળવો.

ઉકેલ : આકૃતિ 6.7 ઘટ માધ્યમનો વક્રીભવનાંક = n_2 અને પાતળા માધ્યમનો વક્રીભવનાંક = n_1

વસ્તુ Oની સાચી ઊંડાઈ, PO = h_O

પ્રતિબિંબની ઊંડાઈ એટલે કે વસ્તુની આભાસી ઊંડાઈ = PI = h_i

બિંદુ Q પાસે સ્નેલનો નિયમ વાપરતાં,

$n_2 \sin\theta_2 = n_1 \sin\theta_1$

પણ અવલોકન લગભગ શિરોલંબ દિશામાં કરવામાં આવે, તો θ_1 અને θ_2નાં મૂલ્યો નાનાં થશે. હવે નાના θ માટે, $\sin\theta \approx \theta \approx \tan\theta$ હોવાથી,

$n_2 \tan\theta_2 = n_1 \tan\theta_1$

પણ, $\tan\theta_2 = \frac{PQ}{PO} = \frac{PQ}{h_O}$ અને $\tan\theta_1 = \frac{PQ}{PI} = \frac{PQ}{h_i}$

આ પરિણામો સમીકરણ (1)માં વાપરતાં, $n_2\left(\frac{PQ}{h_O}\right) = n_1\left(\frac{PQ}{h_i}\right)$

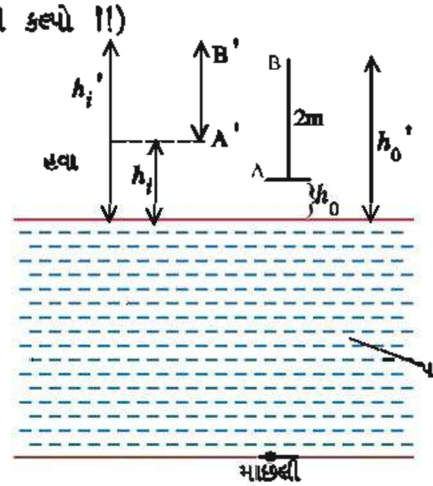
$$\therefore \frac{n_2}{n_1} = \frac{h_O}{h_i} \Rightarrow \frac{h_i}{h_O} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{n(\text{પાતળું})}{n(\text{ઘટ્ટ})}$$

નોંધ : એવું સાબિત કરી શકાય છે કે, પાતળા માધ્યમમાં, માધ્યમોને છૂટી પાડતી સપાટીથી વસ્તુની ઊંચાઈ h_O હોય અને આ વસ્તુને ઘટ્ટ માધ્યમમાંથી શિરોલંબ જોતાં તેની આભાસી ઊંચાઈ $h_i (h_i > h_O)$ હોય, તો

$$\frac{h_i}{h_O} = \frac{n(\text{ઘટ્ટ})}{n(\text{પાતળું})}$$

ઉદાહરણ 5 : એક તરવૈયો (Swimmer) એક સ્વિમિંગ પૂલમાં, શિરોલંબ દિશામાં 2 m s^{-1}ના વેગથી ડાઈવ મારી રહ્યો છે, તો આ શિરોલંબની નીચે પુલના તળિયે રહેલ એક સ્થિર માછલી તરવૈયાને કેટલા વેગથી પડતો જોશે ? પાણીનો વક્રીભવનાંક 1.33 લો. (માછલીને, તે વેગ માપી શકે તેટલી બુદ્ધિશાળી કલ્પો !!)

ઉકેલ : આકૃતિમાં 2 mનું શિરોલંબ અંતર AB વડે દર્શાવ્યું છે. પાણીની સપાટીથી છેડા Aની ઊંચાઈ h_O છે. ધારો કે તેની આભાસી ઊંચાઈ $h_i (h_i > h_O)$ છે.



$$\therefore \frac{h_i}{h_O} = \frac{n(\text{પાણી})}{n(\text{હવા})}$$

$$\therefore h_i = h_O \times 1.33 \qquad (1)$$

હવે B છેડાની સાચી ઊંચાઈ $h_O' = (h_O + 2)$ મીટર છે. તેની આભાસી ઊંચાઈ h'_i વડે દર્શાવીએ તો,

$$\frac{h_i'}{h_O'} = \frac{n(\text{પાણી})}{n(\text{હવા})} = 1.33$$

$\therefore h'_i = h'_0 \times 1.33$

$= (h_0 + 2) \times 1.33 \qquad (2)$

સમીકરણ (1) અને (2) પરથી, માછલીને દેખાતું આભાસી અંતર

$= h_i - h_i = (h_0 + 2) \times 1.33 - h_0 \times 1.33$

$= 2 \times 1.33 = 2.66$ m

આમ, માછલીને તરવૈયો 2.66 m s^{-1}ના વેગથી પડતો જણાશે.

6.7 પૂર્ણઆંતરિક પરાવર્તન (Total Internal Reflection)

જ્યારે પ્રકાશકિરણ એક પારદર્શક માધ્યમમાંથી બીજા માધ્યમમાં દાખલ થાય છે, ત્યારે બે માધ્યમોને છૂટી પાડતી સપાટી આગળ તેનું આંશિક પરાવર્તન અને આંશિક પારગમન થાય છે. જ્યારે પ્રકાશ સપાટી પર લંબરૂપે આપાત થાય તોપણ આ સાચું છે. આ કિસ્સામાં પરાવર્તિત પ્રકાશની તીવ્રતા નીચેના સૂત્ર મુજબ આપી શકાય છે :

$$I_r = I_0\left(\frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2}\right)^2 \qquad (6.7.1)$$

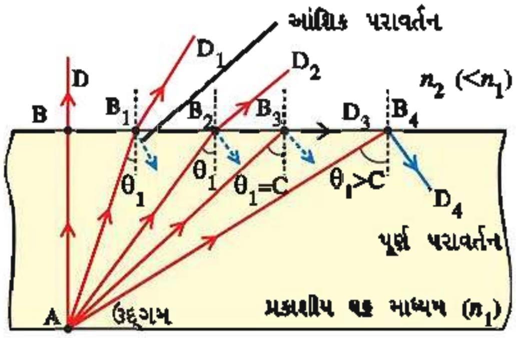
જ્યાં, I_0 = આપાત પ્રકાશની તીવ્રતા

I_r = પરાવર્તિત પ્રકાશની તીવ્રતા

n_1 = માધ્યમ-1નો વક્રીભવનાંક

n_2 = માધ્યમ-2નો વક્રીભવનાંક

હવા (n_2 = 1.0) અને ગ્લાસ (n_1 = 1.5)ના કિસ્સા માટે I_r એ આપાત પ્રકાશની તીવ્રતા કરતાં 4% જેટલી હોય છે. એ નોંધવું જોઈએ કે સમીકરણ (6.7.1) એ ફક્ત લંબરૂપે આપાત પ્રકાશના કિસ્સા માટે જ સાચું છે. બીજા કિસ્સાઓ માટે I_rનું મૂલ્ય આપાતકોણ પર પણ આધારિત હોય છે.



આકૃતિ 6.9 પૂર્ણઆંતરિક પરાવર્તન

અહીં, આકૃતિ 6.9માં A બિંદુવત્ વસ્તુ (અથવા પ્રકાશ ઉદ્ગમ) એ ઘટ્ટ માધ્યમમાં છે. કિરણો AB, AB_1, AB_2, ... બે માધ્યમોને છૂટી પાડતી સપાટી આગળ B, B_1, B_2, ... બિંદુઓ પાસેથી આંશિક પરાવર્તન અને આંશિક પારગમન અનુભવે છે. જેમજેમ આપાતકોણનું મૂલ્ય વધતું જાય (બિંદુ B → B_1 → B_2 → .... તરફ જતાં) તેમતેમ પરાવર્તિત કોણનું મૂલ્ય પણ વધતું જાય છે. કોઈ એક ચોક્કસ આપાતકોણના મૂલ્ય માટે વક્રીભૂત કિરણ બે માધ્યમોને છૂટી પાડતી સપાટીને સમાંતર બને છે. આ ખાસ કિસ્સા માટે, વક્રીભૂત કોણ 90°નો બનશે.

આપાતકોણના જે મૂલ્ય માટે વક્રીભૂત કોણ 90°નો બને તેને આપેલા ઘટ્ટ માધ્યમનો આપેલા પાતળા માધ્યમની સાપેક્ષે ક્રાંતિકોણ (Critical Angle) (C) કહે છે.

આ પરિસ્થિતિમાં બંને માધ્યમોને છૂટી પાડતી સપાટી પ્રકાશિત દેખાય છે. ક્રાંતિકોણની સ્થિતિ માટે સ્નેલનો નિયમ લગાવતાં,

$n_1.\sin\theta_1 = n_2.\sin\theta_2$

જ્યારે, $\theta_1 = C$, $\theta_2 = 90°$

$\therefore n_1.\sin C = n_2$

$\therefore \sin C = \frac{n_2}{n_1}$

હવે જો પાતળા માધ્યમ તરીકે હવા હોય, તો $n_2 = 1.0$

$\therefore \sin C = \frac{1}{n_1} = \frac{1}{n}$ (ધારો કે, $n_1 = n$)

$$\text{અથવા } C = \sin^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (6.7.2)$$

ક્રાંતિકોણની સ્થિતિમાં મળતાં પરાવર્તિત કિરણને ક્રાંતિકિરણ (Critical Ray) કહે છે.

હવે જ્યારે આપાતકોણનું મૂલ્ય ક્રાંતિકોણ કરતા થોડુંક જ વધારવામાં આવે તો પરાવર્તિત પ્રકાશની તીવ્રતા તરત જ ખૂબ જ વધી જાય છે, અને આપાતકિરણ સંપૂર્ણ (100%) પણે ઘટ્ટ માધ્યમમાં પરાવર્તિત થાય છે. આ ઘટનાને પૂર્ણ આંતરિક પરાવર્તન કહે છે. આ સ્થિતિ ક્રાંતિકોણ કરતા કોઈ પણ મોટા આપાતકોણ માટે સાચી છે. આ પરિસ્થિતિમાં, બે માધ્યમોને છૂટી પાડતી સપાટી સંપૂર્ણ અરીસા તરીકે વર્તે છે. પૂર્ણઆંતરિક પરાવર્તન પણ પરાવર્તનના નિયમોનું પાલન કરે છે.

માત્ર જાણકારી માટે :

આ ઘટનાનો અભ્યાસ વિદ્યુતચુંબકીય તરંગોના સંદર્ભમાં કરવામાં આવે છે, ત્યારે માલૂમ પડે છે કે આપાત પ્રકાશનો બહુ જ નાનો અંશ માત્ર થોડીક તરંગલંબાઈઓ જેટલા અંતર સુધી પાતળા માધ્યમમાં પ્રવેશે છે અને આટલા સૂક્ષ્મ અંતરમાં તેની તીવ્રતા ઝડપથી ઘટી શૂન્ય થઈ જાય છે. ક્વૉન્ટમ મિકેનિક્સમાં આવી ઘટનાને ટનલિંગ (Tunneling) કહે છે.

ઉદાહરણ 6 : આકૃતિમાં દર્શાવ્યાં અનુસાર એક કિરણ માધ્યમ પર $y = 0$ આગળ 30° ખૂણે આપાત થાય છે અને માધ્યમમાં આગળ વધે છે. આ માધ્યમનો વક્રીભવનાંક, અંતર y સાથે નીચેના સૂત્ર અનુસાર બદલાય છે.

$n(y) = 1.6 + \dfrac{0.2}{(y+1)^2}$ જ્યાં, y cmમાં છે. તો ખૂબ મોટી ઊંડાઈએ કિરણ શિરોલંબ સાથે કેટલો ખૂણો બનાવતું હશે ?

ઉકેલ : આકૃતિમાં y ઊંડાઈએ સ્થાનિક આપાતકોણ θ છે.

આ બિંદુએ સ્નેલના નિયમ વાપરતાં,

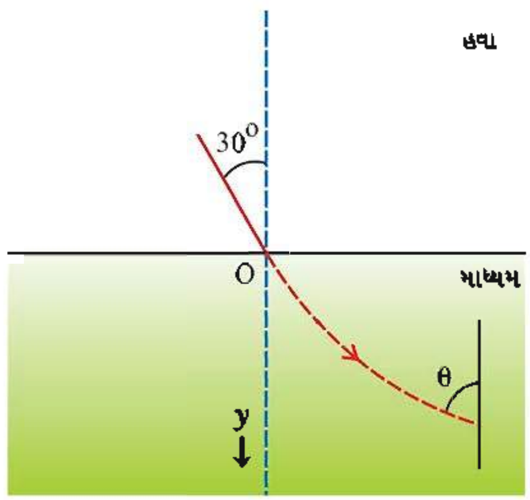
$n(y)\sin\theta = C$, જ્યાં C = અચળ (1)

આ સૂત્ર બધાં જ બિંદુઓ માટે સાચું છે.

આ સૂત્રને O બિંદુ પાસે વાપરતાં,

$n(0)\sin 30^\circ = C$

પણ, $n(0) = 1.6 + \dfrac{0.2}{(0+1)^2} = 1.8$



$\therefore 1.8 \times \dfrac{1}{2} = C \Rightarrow C = 0.9$

હવે Cનું મૂલ્ય (1)માં મૂકતાં, $n(y)\sin\theta = 0.9$

$$\therefore \left\{1.6 + \frac{0.2}{(y+1)^2}\right\}\sin\theta = 0.9 \Rightarrow \sin\theta = \frac{0.9}{1.6 + \frac{0.2}{(y+1)^2}}$$

જ્યારે y ખૂબ મોટો હોય ત્યારે $y \to \infty$ લેતાં, $\sin\theta = \dfrac{0.9}{1.6}$

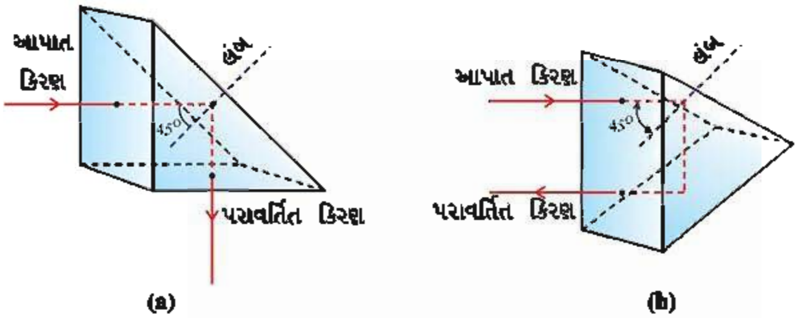
$\therefore \theta = 34^\circ\ 14'$

6.7.1 પૂર્ણઆંતરિક પરાવર્તનના ઉપયોગો (Uses of Total Internal Reflection) :

(1) હીરાનો વક્રીભવનાંક 2.42 હોવાથી ક્રાંતિકોણ 24.41° મળે છે. આમ, હીરાની સપાટીને યોગ્ય રીતે કાપી તેના પર કોઈ પણ આપાતકોણે પ્રકાશ અંદર દાખલ કરતાં તેનું વારંવાર પૂર્ણઆંતરિક પરાવર્તન થાય છે. તેથી તે અંદરથી ચળકતો દેખાય છે અને તેથી આપણને તે ઝગમગતો દેખાય છે.

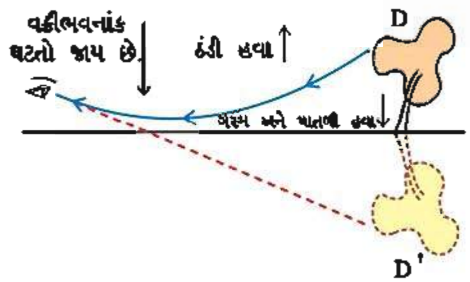
(2) સાદા કાચ (ગ્લાસ) માટે વક્રીભવનાંકનું મૂલ્ય 1.50 જેટલું હોવાથી હવા-કાચ સપાટી માટે ક્રાંતિકોણનું મૂલ્ય $C = \sin^{-1}\left(\dfrac{1}{1.50}\right) \approx 42^\circ$

આ ખૂણો 45° કરતાં સહેજ નાનો હોવાથી, 45°–45°–90°ના ખૂણા ધરાવતા પ્રિઝમો વડે પૂર્ણ પરાવર્તિત સપાટી રચી શકાય છે. (આકૃતિ 6.10 જુઓ)



આકૃતિ 6.10 પૂર્ણ પરાવર્તક પ્રિઝમો

પૂર્ણ પરાવર્તક પ્રિઝમોનો ધાત્વિય પરાવર્તકો કરતાં, પહેલો ફાયદો વધારે પ્રમાણમાં પરાવર્તન અને બીજો ફાયદો કાયમી પરાવર્તકનો ગુણધર્મ અને ઘસારાની અસર નહીં તે છે.

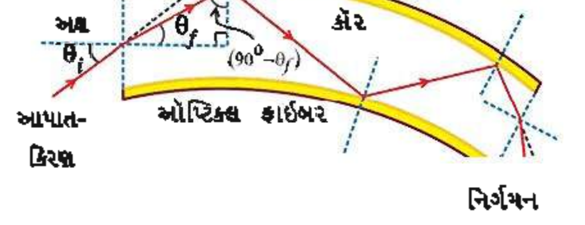


આકૃતિ 6.11 મરીચિકા

(3) મરીચિકા (Mirage) : ઉનાળામાં ગરમીમાં જમીનના સંપર્કમાં રહેલ હવા ગરમ થાય છે, જ્યારે જમીનથી ઊંચે આવેલી હવા પ્રમાણમાં ઠંડી હોય છે. તેથી જમીનનાં સંપર્કમાં રહેલી હવા પાતળી, જ્યારે ઉપર તરફની હવા ઘટ્ટ હોય છે. આમ, ઉપર તરફ જતાં હવાનો વક્રીભવનાંક વધતો જાય છે. આકૃતિ 6.11માં દર્શાવ્યા અનુસાર વૃક્ષની ટોચ (D) પરથી આવતું કિરણ સતત રીતે પ્રકાશીય ઘટ્ટ માધ્યમમાંથી પ્રકાશીય પાતળા માધ્યમમાં ગતિ કરે છે. આ કિરણ જેમજેમ જમીનની નજીક આવતું જાય છે. તેમતેમ તેનો વક્રીભૂત કોણ વધતો જાય છે અને છેવટે પૂર્ણઆંતરિક પરાવર્તન અનુભવી અવલોકનકારની આંખમાં પ્રવેશે છે. આમ, અવલોકનકારને Dનું પ્રતિબિંબ D' સ્થાને દેખાય છે, તેથી અવલોકનકારને પાણીની સપાટી પર પ્રતિબિંબ રચાયું હોય તેમ દેખાય છે. આ ઘટનાને મરીચિકા અથવા મૃગજળ કહે છે.

(4) ઑપ્ટિકલ ફાઈબર્સ (Optical Fibres) : પૂર્ણઆંતરિક પરાવર્તનની ઘટનાનો ઉપયોગ ઑપ્ટિકલ ફાઈબર્સમાં થાય છે. ગ્લાસ કે ફ્યુઝ્ડ ક્વાર્ટ્ઝમાંથી આશરે 10 to 100 μm વ્યાસવાળા પાતળા અને લાંબા ફાઈબર્સ બનાવવામાં આવે છે. દરેક ફાઈબર્સની બહારની બાજુએ ફાઈબરની કોરના વક્રીભવનાંક (n_2) કરતાં ઓછા વક્રીભવનાંકવાળા (n_1) દ્રવ્યનું આવરણ (Cladding) રાખવામાં આવે છે. અત્રે, $n_2 > n_1$.

ક્લેડિંગની ગેરહાજરીમાં ફાઈબરની સપાટી પરના ધૂળના કણો કે ઓઈલ કે બીજી અશુદ્ધિઓના કારણે થોડોક પ્રકાશ લીક (Leak) થઈ જાત. હવે 1 મીટર અંતરમાં તો પ્રકાશનું હજારો વાર પરાવર્તન થતું હોય છે. આ સ્થિતિમાં આવું લીકેજ થાય તો પ્રકાશ લાંબા અંતરે પહોંચાડી શકાય નહીં. ક્લેડિંગ કરવાથી આવું લીકેજ અટકાવી શકાય છે.



આકૃતિ 6.12 ઑપ્ટિકલ ફાઈબરની રેખાકૃતિ

આકૃતિ 6.12માં દર્શાવ્યા મુજબ એક કિરણ હવામાંથી ફાઈબરની અક્ષ સાથે θ_i કોણ બનાવતી દિશામાં આપાત થાય છે. θ_f એ વક્રીભૂત કોણ છે. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ, આ કિરણ ફાઈબરની દીવાલ ઉપર $(90^\circ - \theta_f)$ કોણે આપાત થાય છે. સ્પષ્ટ જ છે કે જો $(90^\circ - \theta_f)$નું મૂલ્ય ફાઈબર-હવા (અથવા ક્લેડિંગ) આંતરપૃષ્ઠ માટેના ક્રાંતિકોણ કરતાં મોટું હોય, તો જ પૂર્ણઆંતરિક પરાવર્તન

શક્ય બનશે. ટૂંકમાં, $(90^\circ - \theta_r)$નું મૂલ્ય જેટલું વધુ તેટલું પૂર્ણઆંતરિક પરાવર્તન થવાની શક્યતા વધારે. અર્થાત્ θ_r નું નાનું મૂલ્ય ઇચ્છવાયોગ્ય છે. આ હકીકત દર્શાવે છે કે θ_i જેટલો નાનો તેટલી પૂર્ણઆંતરિક પરાવર્તન થવાની શક્યતા વધારે. આમ, આપેલા ફાઇબર માટે θ_iનું મૂલ્ય અમુક કરતાં વધારે ન હોવું જોઈએ. પૂર્ણઆંતરિક પરાવર્તન થવા માટેની ઉપર્યુક્ત શરત, ફાઇબરના દ્રવ્યના વક્રીભવનાંકના સંદર્ભમાં પણ આપી શકાય છે.

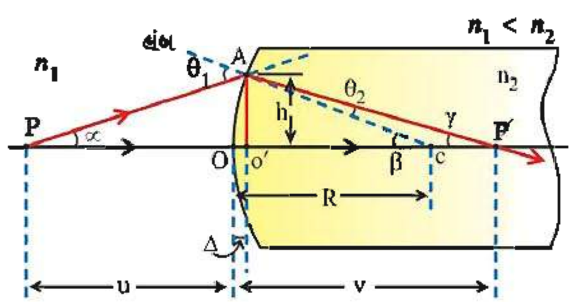
આપણે જોયું કે $(90^\circ - \theta_r)$નું મૂલ્ય ક્રાંતિકોણ કરતાં મોટું હોવું જોઈએ. આ દૃષ્ટિએ વિચારીએ, તો ક્રાંતિકોણનું મૂલ્ય જેટલું નાનું તેટલી પૂર્ણઆંતરિક પરાવર્તન થવાની શક્યતા વધારે.

હવે, $\sin C = \frac{1}{n}$ સૂત્ર દર્શાવે છે કે C નાનો જોઈતો હોય, તો nનું મૂલ્ય મોટું હોવું જોઈએ. આમ, ઑપ્ટિકલ ફાઇબર બનાવવા માટે વપરાતાં દ્રવ્યો માટે nનું મૂલ્ય કંઈક ઓછામાં ઓછા મૂલ્ય કરતાં વધારે હોવું જોઈએ. ઉપર્યુક્ત ચર્ચામાં ફાઇબરની બહારનું માધ્યમ હવા છે તેમ ધારેલ છે.

6.8 ગોળીય વક્રસપાટી પાસે થતું વક્રીભવન (Refraction at a Spherically Curved Surface)

પરાવર્તન અને વક્રીભવન એમ બંને દ્વારા પ્રતિબિંબો રચી શકાય છે. આપણે અહીં ગોળીય વક્રસપાટી (એટલે કે જુદા-જુદા વક્રીભવનાંક ધરાવતાં બે પારદર્શક માધ્યમો વચ્ચેના વક્ર-આંતરપૃષ્ઠ) દ્વારા વક્રીભવનનો અભ્યાસ કરીશું.

હવેની ચર્ચામાં આપણે માત્ર પેરેક્ઝિઅલ કિરણો દ્વારા જ વક્ર સપાટી પાસે થતા વક્રીભવનનો વિચાર કરીશું. તેના પરથી લેન્સ દ્વારા થતા પ્રતિબિંબની રચના સમજી શકાશે. અલબત્ત, લેન્સને બે વક્ર સપાટીઓ હોય છે. આપણે કાર્તેઝિયન સંજ્ઞા પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરીશું અને વક્રસપાટી એ મોટા ગોળાનો ભાગ છે તેમ વિચારીશું.



આકૃતિ 6.13 બહિર્ગોળ સપાટી દ્વારા વક્રીભવન

આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે O એ વક્રસપાટીનું મધ્યબિંદુ, C વક્રસપાટીનું વક્રતાકેન્દ્ર, OC એ વક્રતાત્રિજ્યા છે. બિંદુવત્ વસ્તુ P એ અક્ષ પર u જેટલા અંતરે મૂકેલ છે.

વસ્તુનું પ્રતિબિંબ રચવા માટે બે કિરણો PO અને PAને ધ્યાનમાં લો.

કિરણ PO માટે આપાતકોણ શૂન્ય હોવાથી, સ્નેલના નિયમાનુસાર તે વળ્યા વગર OCP' માર્ગે આગળ વધશે.

કિરણ PA એ સપાટી પર A બિંદુ આગળ સંપાત થાય છે. AC એ A બિંદુ આગળ દોરેલ લંબ છે. θ_1 એ આપાતકોણ છે. ધારો કે માધ્યમ-1નો વક્રીભવનાંક (n_1) એ માધ્યમ-2ના વક્રીભવનાંક (n_2) કરતાં ઓછો છે. પરિણામે, વક્રીભૂત કિરણ લંબ તરફ વાંકું વળી AP' માર્ગે આગળ વધશે. α, β અને γ અનુક્રમે આપાતકિરણ, વક્રીભૂત કિરણ અને આપાતબિંદુએ દોરેલા લંબ અને મુખ્ય અક્ષ સાથે રચાતા ખૂણાઓ છે.

બંને વક્રીભૂત કિરણો OP' અને AP' બિંદુ P' આગળ મળશે અને વસ્તુ Pનું બિંદુવત્ પ્રતિબિંબ રચશે. અહીં, θ_2 એ વક્રીભૂત કોણ છે.

બિંદુ A આગળ સ્નેલનો નિયમ લગાવતાં,

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \qquad (6.8.1)$$

અત્રે આપણે પેરેક્ઝિઅલ કિરણો વિચારેલ હોવાથી, θ_1 અને θ_2 (રેડિયનમાં) અત્યંત નાના થશે.

$$\therefore\ n_1\theta_1 = n_2\theta_2 \qquad (6.8.2)$$

આકૃતિ પરથી, θ_1 એ ΔPAC માટે બહિષ્કોણ થશે.

$$\therefore\ \theta_1 = \alpha + \beta \qquad (6.8.3)$$

તે જ રીતે, β એ $\Delta CP'A$ માટે બહિષ્કોણ હોવાથી,

$\therefore \ \beta = \theta_2 + \gamma$

$\therefore \ \theta_2 = \beta - \gamma$ (6.8.4)

સમીકરણ (6.8.3) અને (6.8.4)નો ઉપયોગ સમીકરણ (6.8.2)માં કરતાં,

$n_1(\alpha + \beta) = n_2(\beta - \gamma)$

$n_1\alpha + n_2\gamma = (n_2 - n_1)\beta$ (6.8.5)

કાટકોણ $\Delta O'P'A$ પરથી, $\tan\gamma \approx \gamma = \frac{h}{v-\Delta}$ (6.8.6)

જ્યાં, v = પ્રતિબિંબ-અંતર

કાટકોણ ત્રિકોણ $\Delta O'CA$ પરથી, $\tan\beta \approx \beta = \frac{h}{R-\Delta}$ (6.8.7)

અને $\Delta PAO'$ પરથી, $\tan\alpha \approx \alpha = \frac{h}{-u+\Delta}$ (6.8.8)

જ્યાં $u \rightarrow -u$, વસ્તુ-અંતર (સંજ્ઞાપદ્ધતિ પ્રમાણે)

અત્રે વિચારેલ વક્રસપાટી એ કોઈ ગોળામાંથી કાપેલો નાનો ભાગ છે, તેથી Δનું મૂલ્ય R, u અને vની સરખામણીમાં અવગણી શકાય તેટલું હશે.

$\therefore \ \gamma \approx \frac{h}{v}$, $\beta = \frac{h}{R}$ અને $\alpha = \frac{h}{-u}$ (6.8.9)

સમીકરણો (6.8.5) અને (6.8.9) પરથી, $n_1\left(\frac{h}{-u}\right) + n_2\left(\frac{h}{v}\right) = (n_2 - n_1).\frac{h}{R}$

$\therefore \ \frac{-n_1}{u} + \frac{n_2}{v} = \frac{(n_2-n_1)}{R}$ (6.8.10)

સમીકરણ (6.8.10) એ અંતર્ગોળ સપાટી માટે પણ સાચું છે. સમીકરણ (6.8.10) એ વસ્તુ-અંતર, પ્રતિબિંબ અંતર અને વક્રસપાટીની વક્રતાત્રિજ્યાને સાંકળતું વ્યાપક સમીકરણ છે. આ સમીકરણ પાતળા માધ્યમ (n_1 વક્રીભવનાંક ધરાવતા)માં પ્રસરીને ઘટ્ટ માધ્યમ (n_2 વક્રીભવનાંક ધરાવતા)માં વક્રીભૂત થતા કિરણ માટે મેળવેલું છે. આ જ રીતે જ્યારે કિરણ ઘટ્ટ માધ્યમ (n_2 વક્રીભવનાંક ધરાવતા)માંથી પાતળા માધ્યમ (n_1 વક્રીભવનાંક ધરાવતા)માં પ્રસરતું હોય તો સ્નેલના નિયમનો ઉપયોગ કરી નીચે મુજબનું સમીકરણ મેળવી શકાય છે.

$\frac{-n_2}{u} + \frac{n_1}{v} = \frac{(n_1-n_2)}{R}$ (6.8.11)

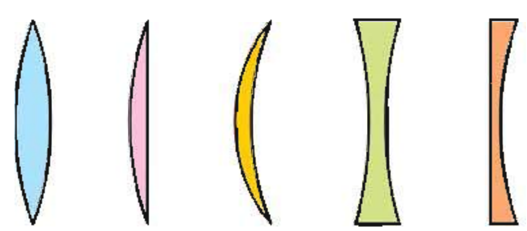
કિસ્સો : જો સપાટી સમતલ હોય, તો (સમતલ કાચનું ચોસલું) એટલે કે, $R = \infty$ માટે સમીકરણ (6.8.10) પરથી,

$\frac{+n_1}{u} = \frac{n_2}{v}$ અથવા $\frac{v}{u} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{h'}{h}$ (મોટવણી માટેનો મુદ્દો જુઓ).

પ્રતિબિંબ સાચું કે આભાસી મળશે તે સંજ્ઞાપ્રણાલી દ્વારા નક્કી થઈ શકે છે. જો પ્રતિબિંબ-અંતર ધન હોય, એટલે કે પ્રતિબિંબ એ બિંદુ Oની જમણી બાજુ પર હોય, તો તે સાચું પ્રતિબિંબ હશે અથવા તેનાથી ઊલટું.

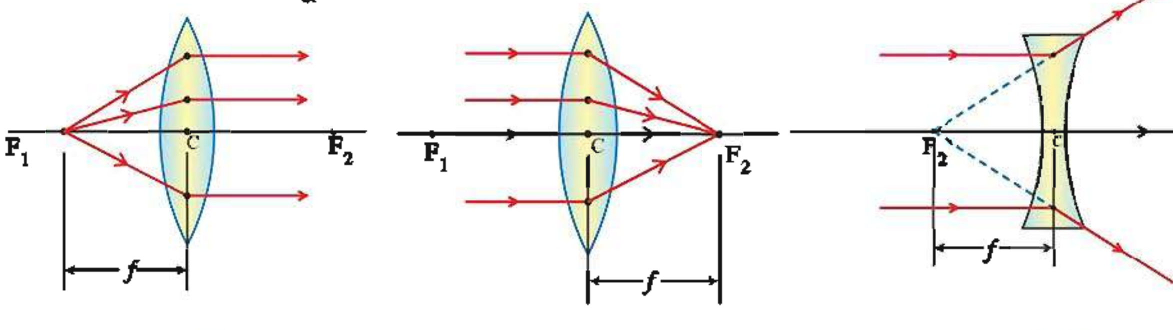
6.9 ગોળીય (વક્ર) લેન્સ (Spherical Lenses)

સામાન્ય રીતે બે વક્રીભવનકારક સપાટીઓ ઘેરાતા અને પ્રતિબિંબ રચી શકે તેવા ઉપકરણને લેન્સ કહે છે. આ બે સપાટીઓ પૈકીની એક સપાટી તો વક્ર હોવી જ જોઈએ. દા.ત., નીચેની આકૃતિમાં જુદા-જુદા પ્રકારના લેન્સ દર્શાવ્યા છે :



આકૃતિ 6.14 જુદા જુદા પ્રકારના લેન્સ

ગોળીય સપાટીની રચના સહેલાઈથી થઈ શકતી હોવાથી, આપણે સૌ પ્રથમ ગોળીય લેન્સ અથવા ક્રિસ્ટલ બોલથી રચાતા પ્રતિબિંબની રચનાને વ્યૂહાત્મક ઉદાહરણ તરીકે વિચારીએ.



(a) (b) (c)

આકૃતિ 6.15 પાતળા લેન્સનું મુખ્ય કેન્દ્ર

બિંદુવત્ વસ્તુને બહિર્ગોળ લેન્સની મુખ્ય અક્ષ પર મૂકતાં, જો વક્રીભૂત કિરણો મુખ્ય અક્ષને સમાંતર બને આકૃતિ (a), તો વસ્તુના આ સ્થાનને લેન્સનું **પ્રથમ મુખ્ય કેન્દ્ર** (F_1) **(First Principal Focus)** કહે છે.

જો વસ્તુ અનંત અંતરે ($u = \infty$) (આકૃતિ (b) અને (c)) હોય તો, વક્રીભૂત કિરણો બહિર્ગોળ (અથવા અંતર્ગોળ લેન્સ) માટે જ્યાં મળે (અથવા મળતાં હોય તેવો ભાસ થાય) તો તે બિંદુને **દ્વિતીય મુખ્ય કેન્દ્ર** (F_2) **(Second Principal Focus)** કહે છે.

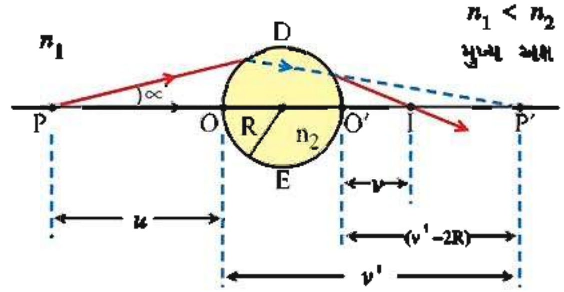
લેન્સના ભૌમિતિક કેન્દ્રને લેન્સનું **ઑપ્ટિલ કેન્દ્ર (Optical Centre)** (C) કહે છે.

લેન્સના ઑપ્ટિકલ કેન્દ્ર (c) અને મુખ્ય કેન્દ્ર વચ્ચેના અંતરને કેન્દ્રલંબાઈ (f) કહે છે.

સંજ્ઞા પ્રણાલી મુજબ બહિર્ગોળ લેન્સ માટે f ધન અને અંતર્ગોળ લેન્સ માટે ઋણ બને છે.

ઉદાહરણ 8 : ક્રિસ્ટલ બૉલ (ગોળીય લેન્સ)ના કિસ્સામાં પ્રતિબિંબ-અંતરને વક્રતાત્રિજ્યાના પદમાં મેળવો.

ઉકેલ : અત્રે, બિંદુવત્ વસ્તુ Pમાંથી આવતાં કિરણોનાં સપાટી DOE અને DO'E એમ બે વાર અનુક્રમે વક્રીભવન થાય છે, અને ત્યાર બાદ અંતિમ પ્રતિબિંબ રચાય છે, પરંતુ સમજવા ખાતર, આપણે બંને સપાટી પરથી થતા વક્રીભવનાંકનો અલગ-અલગ વિચાર કરી શકીએ. વક્રસપાટી પરથી થતા વક્રીભવનાંકના સૂત્ર (સમીકરણ 6.8.10)નો બંને સપાટી માટે ઉપયોગ કરી (અંતિમ) પ્રતિબિંબનું સ્થાન નક્કી કરી શકીએ.



સપાટી DOE માટે,

$$\frac{-n_1}{(-u)} + \frac{n_2}{v'} = \frac{(n_2 - n_1)}{R}. \qquad (1)$$

(અહીં આપણે કાર્તેઝિયન સંજ્ઞાપદ્ધતિ વાપરીશું.)

ધારો કે, $u > R$. આ કિસ્સામાં v' એ મોટા મૂલ્યનું અને ધન હશે. એટલે કે બિંદુવત્ વસ્તુ Pનું સપાટી DOE દ્વારા મળતું પ્રતિબિંબ ગોળાની જમણી બાજુ P' સ્થાને મળશે.

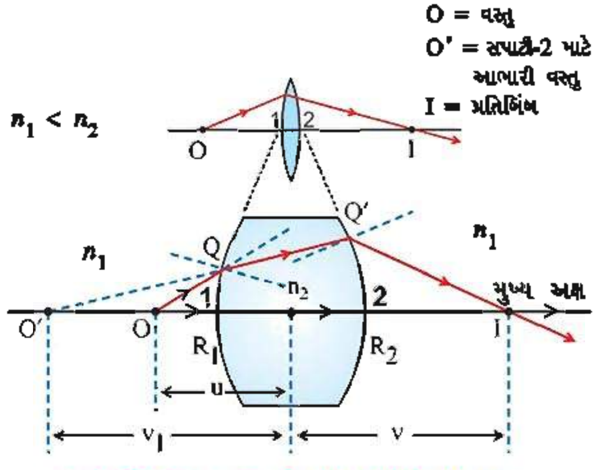
હવે, સપાટી DO'E માટે, આ પ્રતિબિંબ P' એ આભાસી વસ્તુ તરીકે વર્તે છે. તેથી, સપાટી DO'E માટે,

$$\frac{-n_2}{(v' - 2R)} + \frac{n_1}{v} = \left(\frac{n_1 - n_2}{R}\right) \qquad (2)$$

પરંતુ, v' ઘણું મોટું હોવાથી, $(v' - 2R)$ એ ધન બનશે, તેથી v પણ ધન મળશે. એટલે કે અંતિમ પ્રતિબિંબ સપાટી DO'Eની જમણી બાજુ રચાશે.

6.9.1 પાતળો લેન્સ (Thin Lens) : એવો લેન્સ કે જેના કિસ્સામાં વસ્તુ-અંતર, પ્રતિબિંબ-અંતર અને

વક્રતાત્રિજ્યાની સરખામણીમાં બે વક્રસપાટીઓ વચ્ચેનું અંતર અવગણી શકાય તેટલું નાનું હોય તેને પાતળો લેન્સ કહે છે. વ્યાપક સ્વરૂપે, બંને વક્રસપાટીઓ માટે વક્રતાત્રિજ્યાનું મૂલ્ય સમાન હોય તેવું જરૂરી નથી. લેન્સ પાતળો હોવાથી બધાં જ અંતરો લેન્સની કોઈ પણ સપાટીથી કે કેન્દ્રથી માપી શકાય છે.



આકૃતિ 6.17 પાતળા લેન્સથી પ્રતિબિંબની રચના

પાતળા લેન્સ માટે વસ્તુ-અંતર, પ્રતિબિંબ-અંતર અને વક્રતાત્રિજ્યાઓ વચ્ચેનો સંબંધ મેળવવા માટે નીચેની આકૃતિ 6.17ને લો.

પાતળા લેન્સથી અંતિમ પ્રતિબિંબ કેવી રીતે રચાય છે તે સમજવા માટે બંને વક્રીભવનકારક સપાટીઓને એકબીજાથી દૂર ખસેલી વિચારો. આમ, અંતિમ પ્રતિબિંબ એ પહેલા સપાટી-1 અને ત્યાર બાદ સપાટી-2 દ્વારા થતા વક્રીભવનને કારણે છે, તેમ ગણી શકાય.

અત્રે વસ્તુ O, n_1 વક્રીભવનાંક ધરાવતા માધ્યમમાં છે. આપાત કિરણ OQ, સપાટી-1 પરથી n_2 વક્રીભવનાંક ધરાવતાં ઘટ્ટ માધ્યમમાં વક્રીભૂત થાય છે (અહીં $n_2 > n_1$) અને પ્રતિબિંબ O' આગળ રચાય છે.

સપાટી-1 આગળના વક્રીભવન માટે સમીકરણ (6.8.10)નો ઉપયોગ કરતાં,

$$\frac{-n_1}{u} + \frac{n_2}{v_1} = \frac{(n_2 - n_1)}{R_1} \qquad (6.9.1)$$

જ્યાં, u = વસ્તુ અંતર અને v_1 = પ્રતિબિંબ અંતર.

આ પ્રતિબિંબ O' એ સપાટી-2 માટે આભાસી વસ્તુ તરીકે વર્તે છે. સપાટી-2 માટે QQ' કિરણ ઘટ્ટ માધ્યમમાંથી પ્રસરીને પાતળા માધ્યમમાં વક્રીભૂત થાય છે અને O માંથી અક્ષ પર આવતા કિરણને I પર મળે છે. આમ I એ અંતિમ પ્રતિબિંબ છે.

સપાટી-2 આગળના વક્રીભવન માટે સમીકરણ (6.8.11)નો ઉપયોગ કરતાં,

$$\frac{-n_2}{v_1} + \frac{n_1}{v} = \frac{(n_1 - n_2)}{R_2} = \frac{(n_2 - n_1)}{-R_2} \qquad (6.9.2)$$

અહીં, v_1 = સપાટી-2 માટેનું વસ્તુ અંતર અને v = પ્રતિબિંબ અંતર.

સમીકરણો (6.9.1) અને (6.9.2)નો સરવાળો કરતાં,

$$\frac{-n_1}{u} + \frac{n_1}{v} = (n_2 - n_1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\therefore \frac{-1}{u} + \frac{1}{v} = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_1}\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \qquad (6.9.3)$$

સમીકરણ (6.9.3) એ જોઈતું સમીકરણ છે. વ્યવહારમાં તેનો ઉપયોગ કરતી વખતે યોગ્ય સંજ્ઞા પ્રણાલી વાપરવી પડશે.

6.9.2 લેન્સ-મેકર્સ સૂત્ર (Lens-Maker's Formula) :

જો લેન્સની બંને બાજુનાં માધ્યમો એક જ હોય અને ધારો કે વસ્તુ અનંત અંતરે હોય તો, સમીકરણ (6.9.3) પરથી, (અર્થાત્ $u = \infty$) તો, $v = f$.

$$\frac{1}{-\infty} + \frac{1}{f} = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_1}\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\therefore \frac{1}{f} = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_1}\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \qquad (6.9.4)$$

સમીકરણ (6.9.4)ને લેન્સ-મેકર્સનું સૂત્ર કહે છે. તે લેન્સની કેન્દ્રલંબાઈ અને વક્રતાત્રિજ્યાઓ વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવે છે, તેથી તેને લેન્સ-મેકર્સનું સૂત્ર કહે છે.

સમીકરણો (6.9.3) અને (6.9.4)ને સરખાવતાં, $\dfrac{-1}{u} + \dfrac{1}{v} = \dfrac{1}{f}$ (6.9.5)

આ સમીકરણને લેન્સ માટે ગાઉસનું સૂત્ર કહે છે.

સમીકરણ (6.9.4) પરથી જોઈ શકાય છે કે જો પાતળા લેન્સની બાજુઓ ઉલટાવી દેવામાં આવે, એટલે કે, R_1 અને R_2 અદલ-બદલ કરવામાં આવે, તોપણ યોગ્ય સંજ્ઞાપ્રણાલી દ્વારા fનું મૂલ્ય સમાન જ મળે છે. આમ, પાતળા લેન્સ માટે કેન્દ્રલંબાઈનું મૂલ્ય સપાટીના ક્રમ પર આધારિત નથી. જો માધ્યમ-1 એ હવા (એટલે કે, $n_1 = 1$) અને ધારો કે માધ્યમ-2નો વક્રીભવનાંક n_2 હોય, તો (6.9.4) સમીકરણ,

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \qquad (6.9.6)$$

માત્ર જાણકારી માટે : લેન્સ-મેકર્સ સૂત્રનું સૌથી વ્યાપક સ્વરૂપ નીચે મુજબ છે.

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{n-1}{n}\frac{t}{R_1 \cdot R_2};$$

જ્યાં, t એ લેન્સની જાડાઈ છે. પાતળા લેન્સ માટે t અવગણી શકાય તેવો હોય છે, તેથી સમીકરણ (6.9.6) મળી જાય. ઉપર્યુક્ત સમીકરણ એ પણ સૂચવે છે કે જાડા લેન્સ માટે, એટલે કે મોટા t માટે અને નાના R_1 અને R_2 માટે, બીજું પદ અવગણી શકાશે નહીં. આમ, જાડા લેન્સ માટે f નાની થશે, એટલે કે જાડા લેન્સ એ આપાતકિરણને પ્રબળતાથી કેન્દ્રિત કે વિકેન્દ્રિત કરશે.

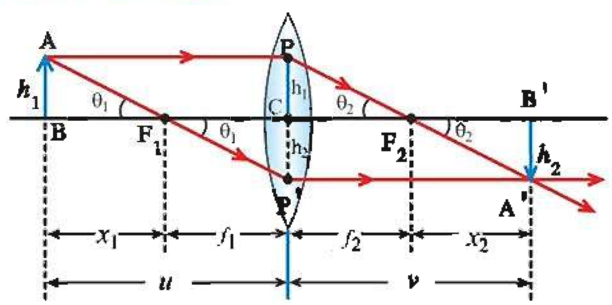
6.9.3 ન્યૂટનનું સૂત્ર (Newton's Formula) : આપણે ઉપર જોયું કે લેન્સ-મેકર્સનું સૂત્ર એ લેન્સની વક્રતાત્રિજ્યાઓ અને વક્રીભવનાંકને કેન્દ્રલંબાઈ સાથે સાંકળે છે. આપણે કેન્દ્રલંબાઈ માટે વસ્તુ-અંતર અને પ્રતિબિંબ-અંતરને સાંકળતું સૂત્ર પણ તારવી શકીએ, જેને આપણે લેન્સ ઉપભોક્તા સૂત્ર (Lens User's Formula) અથવા ન્યૂટનનું સૂત્ર કહીશું.

લેન્સની ડાબી બાજુ પરથી, ΔABF_1 અને $\Delta CF_1P'$ સમરૂપ ત્રિકોણો છે, તેથી

$$\frac{h_1}{x_1} = \frac{h_2}{f_1} \text{ (ફક્ત મૂલ્યો લખતાં)} \qquad (6.9.7)$$

તે જ રીતે, લેન્સની જમણી બાજુ માટે,

$$\frac{h_1}{f_2} = \frac{h_2}{x_2} \qquad (6.9.8)$$



આકૃતિ 6.18 બહિર્ગોળ લેન્સ માટે એક્સ્ટ્રા ફોકલ અંતરો

બંને સમીકરણોને $\dfrac{h_1}{h_2}$ માટે સંયુક્ત રીતે લખતાં,

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{x_1}{f_1} = \frac{f_2}{x_2} \qquad (6.9.9)$$

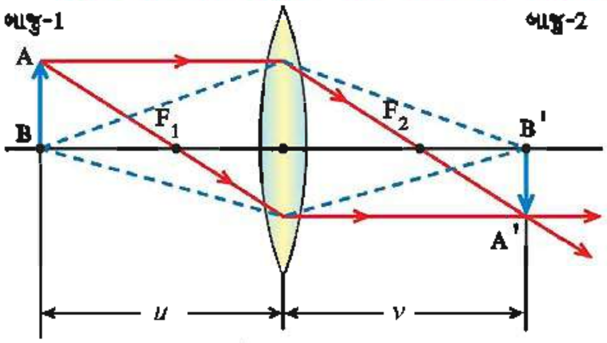
$$\therefore\ x_1 x_2 = f_1 f_2 \qquad (6.9.10)$$

સમીકરણ (6.9.10)ને ન્યૂટનનું સૂત્ર કહે છે. અત્રે x_1 અને x_2ને અનુક્રમે એક્સ્ટ્રા ફોકલ વસ્તુ-અંતર (Extra Focal Object Distance) અને એક્સ્ટ્રા ફોકલ પ્રતિબિંબ-અંતર (Extra Focal Image Distance) કહે છે. આ અંતરો લેન્સને બદલે તેના મુખ્ય કેન્દ્રથી મળતાં હોવાથી ન્યૂટનનું સૂત્ર જાડા અને પાતળા એમ બંને લેન્સ માટે સમાન રીતે વાપરી શકાય છે.

જ્યારે, $f_1 = f_2 = f$ (ધારો કે) હોય ત્યારે સમીકરણ (6.9.10) પરથી,

$$x_1 x_2 = f^2 \qquad (6.9.11)$$

6.9.4 સંલગ્નિત બિંદુઓ અને સંલગ્નિત અંતરો (Conjugate Points and Conjugate Distances)



આકૃતિ 6.19 કૉન્જ્યુગેટ બિંદુઓ અને અંતરો

આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે બિંદુઓ A અને Bમાંથી નીકળતાં બધાં જ કિરણો અનુક્રમે બિંદુઓ A' અને B' પર કેન્દ્રિત કરવામાં આવે છે. આમ, A'B' એ વસ્તુ ABનું પ્રતિબિંબ છે. કિરણોની પ્રતિવર્તતા (Reversibilty)નો ગુણધર્મ વસ્તુ અને તેના પ્રતિબિંબનાં સ્થાનની અદલાબદલી કરવાની છૂટ આપે છે. અર્થાત્, જો A'B' વસ્તુ હોય, તો AB પ્રતિબિંબ બનત. આમ, વસ્તુ અને પ્રતિબિંબ એકબીજાના સંલગ્નિત (Conjugate) થાય. બિંદુઓ A અને A' તથા B અને B'ને સંલગ્નિત બિંદુઓ (Conjugate Points) કહે છે.

હવે, પ્રતિબિંબ-અંતરને વસ્તુ-અંતર જેટલું રાખતા પ્રતિબિંબ એ વસ્તુ-અંતરે રચાય છે. અર્થાત્, વસ્તુ-અંતર અને પ્રતિબિંબ-અંતરો એકબીજાંનાં સંલગ્નિત અંતરો (Conjugate Distances) થશે.

6.10 મોટવણી (Magnification)

વસ્તુનું મોટું પ્રતિબિંબ મેળવા માટે બહિર્ગોળ લેન્સનો ઉપયોગ કરવા માટે આવે છે.

$$\text{મોટવણી, } m = \frac{\text{પ્રતિબિંબનું કદ}}{\text{વસ્તુનું કદ}} \qquad (6.10.1)$$

ત્રિપારિમાણિક વસ્તુ માટે પ્રતિબિંબ પણ ત્રિપારિમાણીય હોય છે, તેથી મોટવણી પણ ત્રણ પ્રકારની હોય છે : લેટરલ મૅગ્નિફિકેશન, લૉન્જિટ્યુડ્નલ મૅગ્નિફિકેશન અને કોણીય (Angular) મૅગ્નિફિકેશન. આપણે ફક્ત લેટરલ મૅગ્નિફિકેશનની ચર્ચા કરીશું.

લેટરલ મૅગ્નિફિકેશન : લેટરલ મૅગ્નિફિકેશનને ટ્રાન્સવર્ઝ મૅગ્નિફિકેશન પણ કહેવામાં આવે છે. તેને પ્રતિબિંબની ઊંચાઈ (h_2) અને વસ્તુની ઊંચાઈ (h_1)ના ગુણોત્તરથી વ્યાખ્યાયીત કરવામાં આવે છે. આકૃતિ 6.18 પરથી,

$$|m| = \frac{h_2}{h_1} \qquad (6.10.2)$$

કાર્તેઝિયન સંજ્ઞાપ્રણાલી પ્રમાણે મુખ્ય અક્ષની ઉપર તરફની ઊંચાઈ ધન જ્યારે નીચે તરફની ઊંચાઈઓ ઋણ ગણવામાં આવે છે. તેથી સીધા પ્રતિબિંબ માટે લેટરલ મોટવણીનું મૂલ્ય ધન જ્યારે ઉલટાયેલા પ્રતિબિંબ માટે તે ઋણ હોય છે. વળી, આકૃતિ 6.18 પરથી,

$$\frac{h_1}{u} = \frac{h_2}{v} \quad \text{(ફક્ત મૂલ્યો લખતાં)}$$

$$\therefore m = \frac{h_2}{h_1} = \frac{v}{u} \qquad (6.10.3)$$

સમીકરણ (6.9.10) પરથી,

$$m = \frac{h_2}{h_1} = \frac{f_1}{x_1} = \frac{x_2}{f_2} \qquad (6.10.4)$$

6.11 લેન્સનો પાવર (Power of a Lens)

લેન્સની કેન્દ્રિત કે વિકેન્દ્રિત કરવાની ક્ષમતાને લેન્સનો પાવર કહે છે. લેન્સ-મેકર્સનું વ્યાપક સ્વરૂપ સૂચવે છે કે જાડા લેન્સ માટે કેન્દ્રલંબાઈ નાની અને તેથી તેની કેન્દ્રિત અથવા વિકેન્દ્રિત કરવાની ક્ષમતા વધારે. આમ, કેન્દ્રિત કે વિકેન્દ્રિત કરવાની ક્ષમતા એ લેન્સની કેન્દ્રલંબાઈના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં હોય છે.

$$\therefore \text{લેન્સનો પાવર, } P = \frac{1}{f} \qquad (6.11.1)$$

બહિર્ગોળ લેન્સ માટે પાવરનું મૂલ્ય ધન, જ્યારે અંતર્ગોળ લેન્સ માટે તે ઋણ હોય છે.

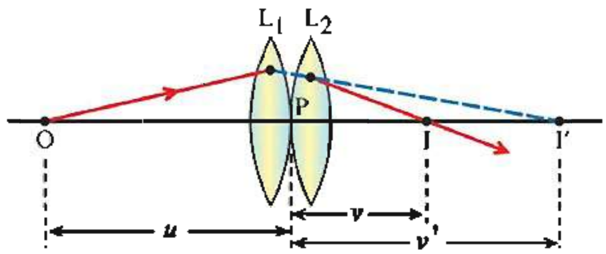
તેનો SI એકમ m^{-1} અથવા Diopter (D) છે.

એટલે કે, 1D = 1 m^{-1}

જ્યારે Optician + 2.0 Dના લેન્સનું Prescription આપે, ત્યારે તેનો અર્થ એ થયો કે $\frac{1}{2}$ = 0.5 m કેન્દ્રલંબાઈ ધરાવતો બહિર્ગોળ લેન્સ.

6.12 સંપર્કમાં રહેલા પાતળા લેન્સનું સંયોજન (Combination of Thin Lenses in Contact)

સંપર્કમાં રહેલા બે પાતળા લેન્સ L_1 અને L_2થી બનતું એક સરળ પ્રકાશીય તંત્ર વિચારો. ધારો કે લેન્સની કેન્દ્રલંબાઈ અનુક્રમે f_1 અને f_2 છે. આવા પ્રકાશીય તંત્ર માટે, પ્રથમ લેન્સને કારણે મળતું પ્રતિબિંબ બીજા લેન્સ માટે વસ્તુ તરીકે વર્તે છે, અને છેવટે આપણને સંયુક્ત તંત્ર દ્વારા પ્રતિબિંબ મળે છે. હવે, આપણે બન્ને લેન્સની સમતુલ્ય કેન્દ્રલંબાઈ માટેનું સૂત્ર તારવીશું.



આકૃતિ 6.20 પાતળા લેન્સનું સંયોજન

આકૃતિ 6.20ને અનુસરતા, બિંદુવત્ વસ્તુનું સંપર્કમાં રહેલા બે પાતળા લેન્સથી અંતિમ પ્રતિબિંબ (I) રચાય છે તેમ વિચારો.

લેન્સ L_1 માટે ઓસનું સૂત્ર વાપરતાં, $-\frac{1}{u} + \frac{1}{v'} = \frac{1}{f_1}$ (6.12.1)

લેન્સ L_2 માટે, $-\frac{1}{v'} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f_2}$ (6.12.2)

બંને સમીકરણોનો સરવાળો કરતાં, $-\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$ (6.12.3)

જો આપણે એવું ધારીએ કે પરિણામી પ્રતિબિંબ એ કોઈ એક સમતુલ્ય લેન્સને કારણે છે, તો તેની કેન્દ્રલંબાઈ f નીચેના સૂત્ર વડે અપાય :

$$\frac{1}{f} = \frac{-1}{u} + \frac{1}{v} \quad (6.12.4)$$

$$\therefore \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f} \quad (6.12.5)$$

$$\text{અથવા } f = \frac{f_1 f_2}{(f_1 + f_2)} \quad (6.12.6)$$

સમીકરણ (6.12.5) અથવા (6.12.6) એ f_1, f_2 અને f વચ્ચેનો ગાણિતિક સંબંધ આપે છે. જુદા-જુદા લેન્સનાં સંયોજન માટેની કેન્દ્રલંબાઈ શોધવા માટે યોગ્ય સંજ્ઞાપ્રણાલીનો ઉપયોગ કરવો પડશે.

જો તંત્ર n લેન્સનું સંપર્કથી બનેલું હોય, તો સમતુલ્ય કેન્દ્રલંબાઈ,

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \dots + \frac{1}{f_n} \quad (6.12.7)$$

અલગ રહેલા લેન્સ : જો બે પાતળા લેન્સ સંપર્કમાં ના હોય, અને તેમની વચ્ચે d જેટલું અંતર હોય તો, તેમના સંયોજનની સમતુલ્ય કેન્દ્રલંબાઈ નીચેના સૂત્ર વડે આપી શકાય :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 \cdot f_2} \quad (6.12.8)$$

વળી, $d - (f_1 + f_2)$ને બે લેન્સ વચ્ચેનો પ્રકાશીય અંતરાલ (optical interval) કહે છે.

પાવર :

$\frac{1}{f_1} = P_1 =$ લેન્સ L_1નો પાવર

$\frac{1}{f_2} = P_2 =$ લેન્સ L_2નો પાવર

આમ, સમીકરણ (6.12.8) પરથી, સંયોજનનો સમતુલ્ય પાવર,

$$P = P_1 + P_2 + ... + P_n \tag{6.12.9}$$

લેટરલ મૅગ્નિફિકેશન :

લેન્સ L_1 માટે લેટરલ મૅગ્નિફિકેશન, $m_1 = \frac{v'}{u}$.

લેન્સ L_2 માટે, $m_2 = \frac{v}{v'}$

હવે, જો સમતુલ્ય મોટવણી m હોય તો,

$$m = \frac{v}{u} = \frac{v'}{u} \times \frac{v}{v'}$$

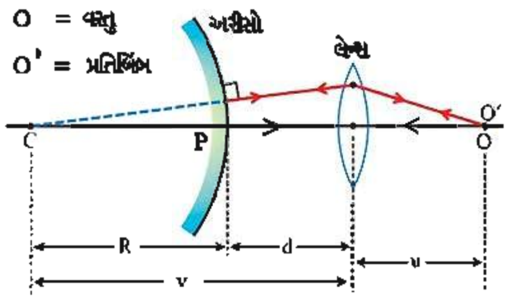
$$m = m_1 \times m_2$$

n - લેન્સના સંયોજન માટે, $m = m_1 \times m_2 \times .... \times m_n$ (6.12.10)

સમીકરણ (6.12.10) સૂચવે છે કે મોટવણી વધારવા લેન્સોનું સંયોજન કરવામાં આવે છે. (દા.ત., સંયુક્ત માઇક્રોસ્કોપ)

6.13 લેન્સ અને અરીસાનું સંયોજન (Combination of Lens and Mirror)

લેન્સનાં સંયોજનો, યોગ્ય મોટવણી, પ્રતિબિંબને યોગ્ય બિંદુ આગળ કેન્દ્રિત કરવા, વગેરે માટે અગત્યનાં છે. તે જ રીતે લેન્સ અને અરીસાનાં સંયોજન પણ ઉપયોગી છે. આપણે આવું એક બહિર્ગોળ લેન્સ અને બહિર્ગોળ અરીસાનું સંયોજન વિચારીશું.



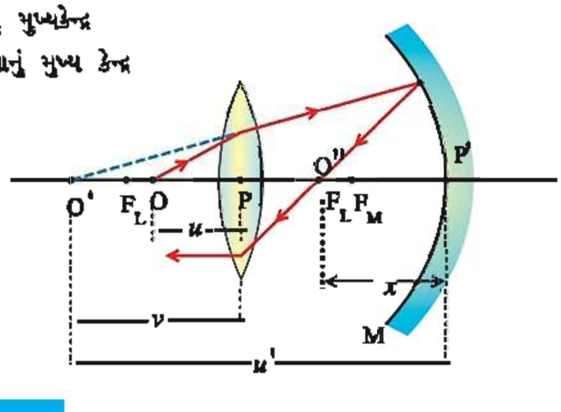
આકૃતિ 6.21 બહિર્ગોળ લેન્સની મદદથી બહિર્ગોળ અરીસાની કેન્દ્રલંબાઈ

આકૃતિ 6.21 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે, પ્રતિબિંબ O' એ વસ્તુ તરફની જ બાજુએ રચાય છે. આપેલ વસ્તુ-અંતર (u) માટે અરીસાનું લેન્સથી અંતર (d) એવી રીતે ગોઠવવામાં આવે કે જેથી વસ્તુનું પ્રતિબિંબ વસ્તુના જ સ્થાન આગળ રચાય (અર્થાત્ વસ્તુ અને તેના પ્રતિબિંબ વચ્ચે દૃષ્ટિસ્થાનભેદ (parallex) દૂર થાય). આ કિસ્સામાં, અરીસા પર આપાત કિરણો તેને લંબ હશે. જો અરીસો ના હોત તો પ્રતિબિંબ બિંદુ C આગળ મળત, જેનું લેન્સથી અંતર v હશે. હવે અરીસા પર આપાત કિરણો અરીસાને લંબ હોવાથી, બિંદુ C એ અરીસાનું વક્રતાકેન્દ્ર હશે.

આમ, v અને dનાં મૂલ્યો માપીને, અરીસાની કેન્દ્રલંબાઈ નીચે મુજબ શોધી શકાય છે :

$$f = \frac{R}{2} = \frac{1}{2}(v - d)$$

ઉદાહરણ 9 : મુખ્ય અક્ષ સંપાત થાય તે રીતે 15 cm કેન્દ્રલંબાઈ ધરાવતો બહિર્ગોળ લેન્સ અને 20 cm કેન્દ્રલંબાઈ ધરાવતો અંતર્ગોળ અરીસો મૂકેલો છે. લેન્સથી 12 cm અંતરે બિંદુવત્ વસ્તુ રાખેલ છે. લેન્સથી વક્રીભૂત કિરણ અરીસા દ્વારા પરાવર્તન પામી વળી પાછું લેન્સ દ્વારા વક્રીભવન અનુભવે છે. જો લેન્સમાંથી છેલ્લું વક્રીભૂત કિરણ એ મુખ્ય અક્ષને સમાંતર હોય, તો અરીસા અને લેન્સ વચ્ચેનું અંતર શોધો.



ઉકેલ : લેન્સને ગૉસનું સૂત્ર લગાવતાં,

$$-\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$$

$$\therefore \frac{1}{v} = \frac{1}{f} + \frac{1}{u}$$

$$\therefore v = \frac{u \cdot f}{u + f} = \frac{(-12)\times(15)}{-12+15}$$

(કાર્તેઝિયન સંજ્ઞાપ્રણાલી પ્રમાણે)

$$= -60 \text{ cm}$$

અત્રે, ઋણ ચિહ્‌ન સૂચવે છે કે પ્રતિબિંબ O' આભાસી હશે. આ પ્રતિબિંબ અરીસા માટે વસ્તુ તરીકે વર્તે છે.

અરીસા માટે વસ્તુ-અંતર

$u' = O'O'' + O''P' = (PO' + PO'') + O'P'$

$= (60 + 15) + x = (75 + x)$ cm (અરીસા માટે, PO' = xને ધન લેતાં)

અરીસા દ્વારા મળતું પ્રતિબિંબ O'' આગળ મળતું હોવાથી અરીસા માટે પ્રતિબિંબ-અંતર x થશે.

અરીસા માટે ગૉસનું સૂત્ર લગાડતાં,

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$$

$$\therefore \frac{1}{-(75+x)} + \frac{1}{-x} = \frac{1}{-f}$$

સાદું રૂપ આપતાં, $\frac{(75+2x)}{(75+x)\cdot x} = \frac{1}{20}$

$\therefore x^2 + 35\cdot x - 1500 = 0$

$\therefore x = 25$ cm અથવા $x = -60$ cm.

પણ ભૌતિક રીતે સ્વીકાર્ય ઉકેલ $x = 25$ cm થશે. તેથી, અરીસા અને લેન્સ વચ્ચેનું અંતર = 25 + 15 = 40 cm થશે.

ઉદાહરણ 10 : એક વસ્તુ અને પડદા વચ્ચેનું અંતર d છે. સાબિત કરો કે પાતળા બહિર્ગોળ લેન્સની એવી બે સ્થિતિઓ શક્ય છે કે જેથી વસ્તુનું પ્રતિબિંબ બંને વખત પડદા પર જ મળે. આ માટેની શરત તારવો. પ્રતિબિંબ ક્યારે નહિ મળે ?

ઉકેલ : ધારો કે વસ્તુ-અંતર u છે.

$$\therefore \frac{1}{v} - \frac{1}{u} = \frac{1}{f}$$

બહિર્ગોળ લેન્સ માટે u ઋણ હોવાથી,

$$\frac{1}{v} + \frac{1}{u} = \frac{1}{f}$$

પણ, $u + v = d$ (આપેલ છે.)

$\therefore v = d - u$

$$\therefore \frac{1}{d-u} + \frac{1}{u} = \frac{1}{f}$$

$$\therefore \frac{u+d-u}{u(d-u)} = \frac{1}{f}$$

$\therefore u^2 - ud + fd = 0$

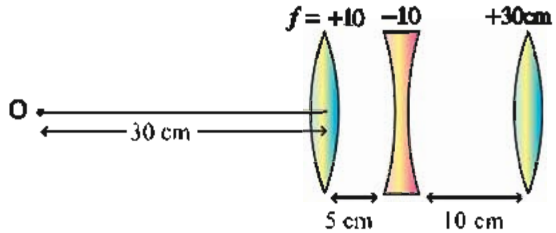
આ સમીકરણ uમાં દ્વિઘાત સમીકરણ છે. તેનાં બીજ નીચે પ્રમાણે છે :

$$u = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - 4fd}}{2}$$

આમ, જો $d > 4f$ હોય તો u નાં બે મૂલ્યો મળે છે. જો $d < 4f$ તો, u સંકર સંખ્યા થશે અને પ્રતિબિંબ મળશે નહિ.

ઉદાહરણ 11 : આકૃતિમાં આપેલ લેન્સના સંયોજન વડે રચાતા પ્રતિબિંબનું સ્થાન નક્કી કરો.

ઉકેલ : પ્રથમ લેન્સથી મળતા પ્રતિબિંબ માટે



$$\frac{1}{v_1} - \frac{1}{u_1} = \frac{1}{f}$$

$$\therefore \frac{1}{v_1} - \frac{1}{-30} = \frac{1}{10}$$

$$\therefore v_1 = 15 \text{ cm}$$

આમ, પ્રથમ લેન્સથી પ્રતિબિંબ જમણી બાજુ 15 cm અંતરે રચાય છે. આ પ્રતિબિંબ દ્વિતીય લેન્સથી જમણી બાજુ $15 - 5 = 10$ cm અંતરે છે અને તે બીજા લેન્સ માટે આભાસી વસ્તુ તરીકે વર્તે છે.

હવે, બીજા લેન્સ માટે,

$$\frac{1}{v_2} - \frac{1}{u_2} = \frac{1}{f_2}$$

$$\therefore \frac{1}{v_2} - \frac{1}{10} = -\frac{1}{10}$$

$$\therefore v_2 = \infty$$

આ v_2 અંતર $(= \infty)$ ત્રીજા લેન્સ માટે વસ્તુ-અંતર બને છે, તેથી તેમને લીધે મળતું પ્રતિબિંબ ત્રીજા લેન્સના મુખ્ય કેન્દ્ર પર હોવું જોઈએ. હવે, ત્રીજા લેન્સની કેન્દ્રલંબાઈ 30 cm અંતરે મળે.

ઉદાહરણ 12 : પાતળા બહિર્ગોળ લેન્સ માટે સાબિત કરો કે, જ્યારે વસ્તુ અને પ્રતિબિંબની ઊંચાઈઓ સમાન હોય છે, ત્યારે વસ્તુ-અંતર અને પ્રતિબિંબ-અંતર બંને $2f$ જેટલા મૂલ્યનાં હોય છે.

ઉકેલ : અહીં, $|h| = |h'|$

$\therefore |v| = |u|$

લેન્સનું સમીકરણ

$\frac{1}{v} - \frac{1}{u} = \frac{1}{f}$ વાપરતાં,

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{-u} = \frac{1}{f}$$

$$\therefore \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$$

$$\therefore \frac{2}{v} = \frac{1}{f}$$

$$\therefore v = 2f$$

$$\therefore u = v = 2f$$

અત્રે, લેન્સથી બંને બાજુના $2f$ અંતરે રહેલાં બિંદુઓ **conjugate focii (અનુબદ્ધ કેન્દ્રો)** કહેવાય છે.

ઉદાહરણ 13 : 5D અને 4D પાવર ધરાવતા બે બહિર્ગોળ લેન્સને એકબીજાથી 5 cm અંતરે રાખેલા છે, તો આ સંયોજનની કેન્દ્રલંબાઈ અને પાવર શોધો.

ઉકેલ : પ્રથમ લેન્સ માટે કેન્દ્રલંબાઈ, $f_1 = \frac{1}{5} = 0.2 \text{ m} = 20 \text{ cm}$

બીજા લેન્સ માટે કેન્દ્રલંબાઈ, $f_2 = \frac{1}{4} = 0.25$ m = 25 cm

બે લેન્સ વચ્ચેનું અંતર, $d = 5$ cm

આ સંયોજનની સમતુલ્ય કેન્દ્રલંબાઈ,

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 \cdot f_2} \text{ પરથી}$$

$$f = \frac{f_1 f_2}{(f_1 + f_2) - d} = \frac{20 \times 25}{(20+25) - 5} = 12.5 \text{ cm}$$

અને સમતુલ્ય પાવર,

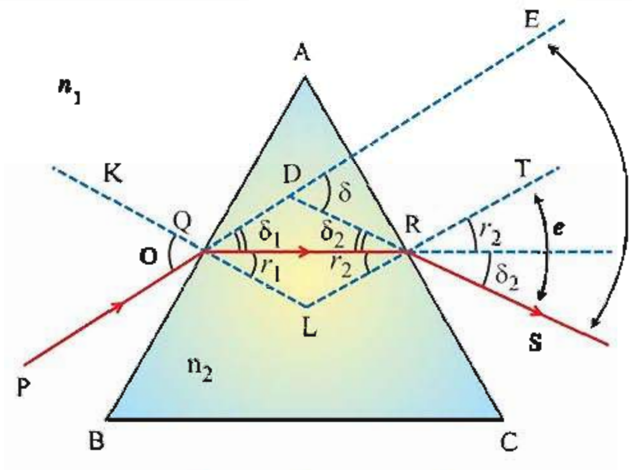
$P = (P_1 + P_2) - d.P_1P_2$

$= (5 + 4) - (0.05) \times (5)(4)$ (d SI એકમમાં લેતાં)

$\therefore$ P = 8 D અથવા $P = \frac{1}{f} = \frac{1}{0.125} = 8$D

6.14 પ્રિઝમ દ્વારા પ્રકાશનું વક્રીભવન અને વિભાજન (Refraction અને Dispersion of Light due to a Prism)

આકૃતિ 6.22માં દર્શાવ્યા અનુસાર, પ્રિઝમનો તેની લંબચોરસ સપાટીઓને લંબ એવો આડછેદ દર્શાવેલ છે. પ્રિઝમની સપાટી AB પર Q બિંદુએ એકરંગી પ્રકાશનું કિરણ PQ આપાત કરવામાં આવે છે. સ્નેલના નિયમાનુસાર તે વક્રીભવન પામી QR માર્ગે જાય છે. આમ, તે આપાતકિરણ કરતાં δ_1 જેટલું વિચલન પામે છે. આ કિરણ QR સપાટી AC પર R બિંદુએ આપાત થઈ કિરણ RS તરીકે નિર્ગમન પામે છે. તે δ_2 જેટલું વિચલન અનુભવે છે. આપાતકિરણ PQને લંબાવતા PQE આપાતકિરણ અને નિર્ગમિત કિરણ વચ્ચેનું કુલ વિચલન શોધી શકાય છે. નિર્ગમિત કિરણ RSને પાછળ લંબાવતાં PEને બિંદુ Dમાં મળે છે. આપાતકિરણ અને નિર્ગમન કિરણ વચ્ચેના કોણને **વિચલન કોણ, δ** કહે છે.



આકૃતિ 6.22 પ્રિઝમ દ્વારા વક્રીભવન

આકૃતિ 6.22માં □AQLR માટે, ∠AQL અને ∠ARL કાટકોણ છે.

$\therefore m\angle A + m\angle QLR = 180°$ (6.14.1)

અને ΔQLR માટે $r_1 + r_2 + m\angle QLR = 180°$ (6.14.2)

ઉપરોક્ત સમીકરણો સરખાવતાં,

$r_1 + r_2 + m\angle QLR = m\angle A + m\angle QLR$

$\therefore r_1 + r_2 = A$ (6.14.3)

ΔDQR માટે, ∠EDR = ∠EDS = δ એ બહિષ્કોણ છે.

તેથી, δ = ∠DQE + ∠DRQ

$\therefore \delta = \delta_1 + \delta_2$ (6.14.4)

પણ, $\delta_1 + r_1 = i$ ($\because$ અભિકોણ)

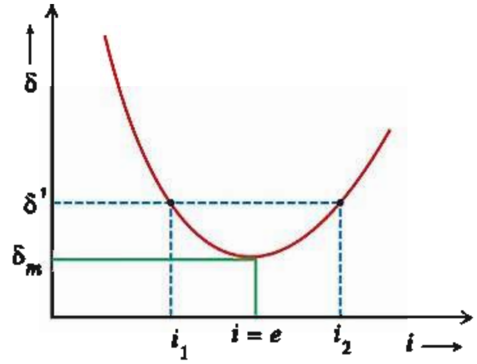
$\therefore \delta_1 = i - r_1$ (6.14.5)

તે જ રીતે, $\delta_2 = e - r_2$ (6.14.6)

$\therefore \delta = (i - r_1) + (e - r_2) = (i + e) - (r_1 + r_2)$

સમીકરણ (6.14.3)નો ઉપયોગ કરતાં,

$\delta = i + e - A$ અથવા $i + e = A + \delta$ (6.14.7)



આકૃતિ 6.23 વિચલન કોણનો આપાતકોણ સાપેક્ષ ફેરફાર

સમીકરણ (6.14.7) એ વિચલનકોણ, આપાતકોણ અને નિર્ગમન કોણ વચ્ચેનો સંબંધ આપે છે. તેને **પ્રિઝમ સમીકરણ** કહે છે.

ઉપર્યુક્ત સમીકરણ પરથી સ્પષ્ટ જ છે કે આપેલા પ્રિઝમ માટે વિચલનકોણનું મૂલ્ય આપાતકોણ iના મૂલ્ય પર આધાર રાખે છે. ફક્ત સમજવા ખાતર, સમબાજુ પ્રિઝમ માટે આપાતકોણને અનુરૂપ માપેલા વિચલનકોણનો આલેખ આકૃતિ 6.23માં દર્શાવેલ છે.

આલેખ પરથી જોઈ શકાય છે કે આપાતકોણનાં કોઈ બે મૂલ્યો (i_1 અને i_2) માટે એકસમાન વિચલનકોણ δ' મળે છે. આ હકીકત પ્રકાશ-કિરણની પ્રતિવર્તતા પરથી સમજી શકાય છે.

ધારો કે આપાતકિરણ PQને બદલે SR હોય તો, વક્રીભૂતકિરણ એ તદ્દન ઊલટો પથ, SRQPને અનુસરતાં નિર્ગમન કિરણ PQ થાય. આ કિસ્સામાં પણ વિચલન કોણ તો સમાન જ રહેશે. પરંતુ કોઈ એક ચોક્કસ વિચલન કોણના મૂલ્યને અનુરૂપ એક જ આપાતકોણ મળે છે. વળી, પ્રાયોગિક રીતે એવું જોવા મળે છે કે આ વિચલનકોણ લઘુતમ (δ_m) હોય છે. આપાત કિરણની લઘુતમ વિચલનની સ્થિતિમાં મળતા વિચલન કોણને લઘુતમ વિચલન કોણ કહે છે. આ પરિસ્થિતિમાં, $i = e$ થાય છે.

સમીકરણ (6.14.7) પરથી,

$$\delta_m = i + i - A = 2i - A$$

$$i = \frac{A+\delta_m}{2} \tag{6.14.8}$$

બિન્દુ Q આગળ સ્નેલનો નિયમ લાગુ પાડતાં, $n_1 \sin i = n_2 \sin r_1$ (6.14.9)

બિન્દુ R પાસે, SRને આપાતકિરણ તરીકે સ્વીકારી, $n_1 \sin e = n_2 \sin r_2$

$i = e$ હોવાથી,

$$\therefore n_1 \sin i = n_2 \sin r_2 \tag{6.14.10}$$

સમીકરણો (6.14.9) અને (6.14.10) પરથી

$$\therefore r_1 = r_2 \tag{6.14.11}$$

સમીકરણ (6.14.3) પરથી, અને ધારો કે $r_1 = r_2 = r$

$$r + r = A$$

$$\therefore r = \frac{A}{2} \tag{6.14.12}$$

સમીકરણ (6.14.8) અને (6.14.12)ની કિંમતો સમીકરણ (6.14.9) અથવા (6.14.10)માં મૂકતાં,

$$\text{તેથી, } \therefore n_1 \sin\left(\frac{A+\delta_m}{2}\right) = n_2 \sin\left(\frac{A}{2}\right) \tag{6.14.13}$$

$$\text{અથવા } \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin\left(\frac{A+\delta_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)} \tag{6.14.14}$$

જો પ્રિઝમ હવામાં મૂકવામાં આવે તો, અર્થાત્ $n_1 = 1$ અને $n_2 = n$,

$$\therefore n = \frac{\sin\left(\frac{A+\delta_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)} \tag{6.14.15}$$

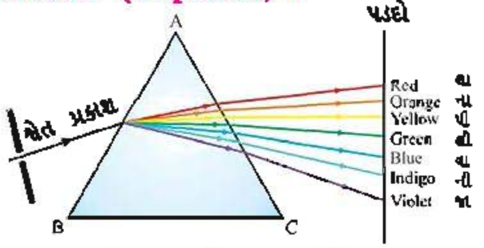
સમીકરણ (6.14.15) દર્શાવે છે કે δ_mનું મૂલ્ય પ્રિઝમ કોણ, પ્રિઝમના માધ્યમનો વક્રીભવનાંક અને પ્રિઝમ જે માધ્યમમાં મૂકેલો હોય તેની જાત પર આધાર રાખે છે.

સમકોણ પ્રિઝમ માટે જ્યારે δ લઘુતમ હોય છે ત્યારે પ્રિઝમમાં વક્રીભૂત કિરણ (QR) એ આધાર BCને સમાંતર બને છે. સમીકરણ (6.14.15) એ પ્રાયોગિક રીતે પ્રિઝમના દ્રવ્યનો વક્રીભવનાંક માપવા માટે ઉપયોગી છે.

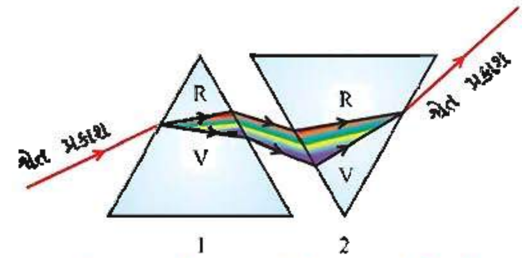
કિસ્સો : નાના પ્રિઝમ કોણ ધરાવતા પ્રિઝમને **પાતળો પ્રિઝમ** કહે છે. આવા પ્રિઝમ માટે, વિચલનકોણ પણ નાનો હોય છે. આ કિસ્સામાં સમીકરણ (6.14.15) પરથી,

$$\delta_m = A(n - 1) \tag{6.14.16}$$

વિભાજન (Dispersion) :



આકૃતિ 6.24 શ્વેત પ્રકાશનું વિભાજન



આકૃતિ 6.25 શ્વેત પ્રકાશનું વિભાજન અને સંયોજન

આકૃતિ 6.24માં દર્શાવ્યા અનુસાર, શ્વેત પ્રકાશને અથવા સૂર્યપ્રકાશના કિરણપુંજને પ્રિઝમમાંથી પસાર કરી નિર્ગમન પ્રકાશને જોવામાં આવે ત્યારે તે જુદા-જુદા રંગોનો બનેલો દેખાય છે. આ ઘટનાને સમજવા માટે ન્યૂટને આકૃતિ 6.25 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે બે સમાન પ્રિઝમોને ગોઠવ્યા હતા. શ્વેત પ્રકાશકિરણને જ્યારે પ્રિઝમ-1 પર આપાત કરાવીને નિર્ગમન કિરણને પ્રિઝમ-2માંથી પસાર કરાવી તેનું અવલોકન કરવામાં આવે છે ત્યારે એવું માલૂમ પડે છે કે પ્રિઝમ-2માંથી બહાર નીકળતું કિરણ પણ સફેદ છે. આમ, આ પ્રયોગ દર્શાવે છે કે પ્રથમ પ્રિઝમ એ શ્વેત પ્રકાશનું જુદા-જુદા રંગોમાં વિભાજન કરે છે, જ્યારે પ્રિઝમ-2 તેમનું સંયોજન કરે છે.

શ્વેત પ્રકાશનું તેના ઘટકરંગોમાં છૂટા પાડવાની ઘટનાને **પ્રકાશનું વિભાજન** કહે છે.

એવું જોવા મળે છે કે વિદ્યુતચુંબકીય તરંગોનાં દૃશ્યપ્રકાશ માટે જાંબલી (વાયોલેટ) રંગનો વક્રીભવનાંક સૌથી વધારે, જ્યારે લાલ રંગનો વક્રીભવનાંક સૌથી ઓછો હોય છે. સમીકરણ (6.14.16) પરથી, તેમને અનુરૂપ વિચલન કોણ

$\delta_v = A(n_v - 1)$

અને $\delta_r = A(n_r - 1)$

હવે એ સ્પષ્ટ છે કે જેમ $n_v > n_r$, $\delta_v > \delta_r$.

આમ, વાયોલેટ રંગનું વક્રીભવન લાલ રંગની સરખામણીમાં વધારે થશે.

કુલ કોણ કે જેની વચ્ચે વર્ણપટ ફેલાયેલો હોય તેને **કોણીય વિભાજન (angular dispersion)** કહે છે. તે નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય.

$$\theta = \delta_v - \delta_r = (n_v - n_r)A \tag{6.14.17}$$

દા. ત., સામાન્ય ક્રાઉન કાચ કરતાં ફ્લિન્ટ કાચથી બનેલા પ્રિઝમ માટે મળતો વર્ણપટ વધારે ફેલાયેલો, વધારે વિભાજિત અને વધારે સૂક્ષ્મ બંધારણ ધરાવે છે.

ઉદાહરણ 14 : એક 60°ના કોણવાળા કાચના પ્રિઝમના દ્રવ્યનો વક્રીભવનાંક 1.5 છે, તો (1) લઘુતમ વિચલન માટે આપાતકોણ અને (2) મહત્તમ વિચલન વખતે નિર્ગમનકોણ શોધો.

ઉકેલ : (1) લઘુતમ વિચલન માટે.

$r_1 = r_2$ અને $A = r_1 + r_2$

$\therefore\ A = 2r_1$

અથવા $r_1 = \frac{A}{2} = \frac{60}{2} = 30°$

હવે $n = 1.5$ અને

$$n = \frac{\sin i}{\sin r_1}$$

$\therefore\ n \sin r_1 = \sin i$

$\therefore\ 1.5 \times \sin 30° = \sin i$

$\therefore\ 1.5 \times 0.5 = \sin i$

$\therefore\ i = 48°\ 35'$

(2) મહત્તમ વિચલન માટે, $i = 90°$

$\therefore\ 1.5 = \frac{\sin 90°}{\sin r_1}\quad \therefore\ r_1 = 41°\ 48'$

$\therefore\ r_2 = A - r_1 = 60 - 41°\ 48' = 18°\ 12'$ ($\because\ r_1 + r_2 = A$, સમીકરણ (6.9.3))

$1.5 \sin r_2 = \sin e$ ($\because\ n \sin r_2 = \sin e$)

$\therefore\ 1.5 \times \sin 18°\ 12' = \sin e$

$\therefore\ \sin e = 0.4685$

$\therefore\ e = 27°\ 56'$

ઉદાહરણ 15 : એક સમબાજુ પ્રિઝમ જ્યારે હવામાં મૂકવામાં આવે છે, ત્યારે એક કિરણ માટે લઘુતમ વિચલન કોણ 38°નો છે. જો આ પ્રિઝમને પાણીમાં ડુબાડી પ્રયોગ કરવામાં આવે, તો લઘુતમ વિચલન કોણ કેટલો થશે ? પાણીનો વક્રીભવનાંક = 1.33.

ઉકેલ : $\frac{n_g}{n_a} = \frac{\sin\left(\frac{60+38}{2}\right)^\circ}{\sin 30^\circ}$

$n_a = 1$ લેતાં, $n_g = \frac{\sin 49^\circ}{\sin 30^\circ} = 1.509$

હવે પ્રિઝમને પાણીમાં ડુબાડવામાં આવે ત્યારે, $\frac{n_g}{n_\omega} = \frac{\sin\left(\frac{60+\delta_m}{2}\right)^\circ}{\sin 30^\circ}$

પણ $n_\omega = 1.33$

$$\therefore\ \frac{1.509}{1.33} = \frac{\sin\left(\frac{60+\delta_m}{2}\right)^\circ}{0.5}$$

$$\therefore\ \sin\left(\frac{60+\delta_m}{2}\right)^\circ = \frac{0.5\times1509}{1.33} = 0.5673$$

$$\therefore\ \frac{60+\delta_m}{2} = 34°36'$$

$\therefore\ \delta_m = 9°\ 12'$

6.15 પ્રકાશનું પ્રકીર્ણન (Scattering of Light)

રોજિંદા જીવનમાં જોવા મળતી વસ્તુઓ માટે બે મુખ્ય ભૌતિક પ્રક્રિયા પૈકી એક એ પ્રકાશનું પ્રકીર્ણન છે અને બીજી શોષણની પ્રક્રિયા છે. મુખ્યત્વે પ્રકીર્ણનને બે ભાગમાં વર્ગીકૃત કરી શકાય છેઃ સ્થિતિસ્થાપક અને અસ્થિતિસ્થાપક. કુદરતી ઘટનાઓ જેવી કે સૂર્યોદય અને સૂર્યાસ્ત સમયે જોવા મળતો આકાશનો રંગ, દિવસ દરમિયાન આકાશનો રંગ, વાદળોના રંગ, વગેરે પ્રકાશની વાતાવરણના અણુઓ, પરમાણુઓ, પાણીનાં બિંદુઓ, વગેરે સાથેની સ્થિતિસ્થાપક અથડામણ દ્વારા સમજી શકાય છે. જ્યારે પ્રકાશ આવા કણો પર સંપાત થાય છે, ત્યારે તેનું પ્રથમ શોષણ અને તરત જ આ કણો પ્રકાશનું વિવિધ દિશામાં જુદા-જુદા પ્રમાણમાં વિખેરણ કરે છે. આમ, પ્રકાશની તીવ્રતા એ જુદી-જુદી દિશામાં જુદા-જુદા પ્રમાણમાં વહેંચાઈ જાય છે.

એવું જાણવા મળે છે કે વિખેરિત પ્રકાશની તીવ્રતા એ કણોના પરિમાણ (અર્થાત્ ગોળાકાર કણો માટે તેમના વ્યાસ) અને પ્રકાશની તરંગલંબાઈનો ગુણોત્તર (α) પર આધાર રાખે છે.

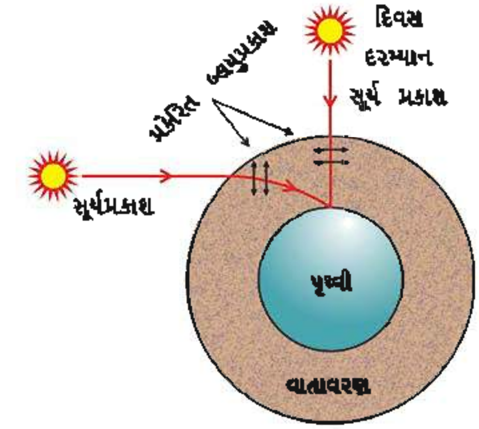
જો $\alpha << 1$: પ્રકીર્ણનને રેલે-પ્રકીર્ણન (Rayleigh Scattering) કહે છે.

$\therefore$ $\alpha \approx 1$: પ્રકીર્ણન મી-પ્રકીર્ણન (Mie-Scattering)થી ઓળખાય છે.

$\therefore$ $\alpha >> 1$: ભૌમિતિક પ્રકીર્ણન (Geometric Scattering).

6.15.1 રેલે-પ્રકીર્ણન (Rayleigh Scattering) : જો પ્રકિર્ણન કરતા કણોનું પરિમાણ, આપાત પ્રકાશની તરંગલંબાઈ કરતાં નાનું હોય તો ઉદ્ભવતા પ્રકીર્ણનને રેલે-પ્રકીર્ણન કહે છે. લોર્ડ રેલે સૈદ્ધાંતિક રીતે દર્શાવ્યું છે કે પ્રકેરિત પ્રકાશની તીવ્રતા પ્રકાશની તરંગલંબાઈના ચતુર્ઘાતના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં હોય છે. દશ્યપ્રકાશમાં બ્લ્યુ પ્રકાશની તરંગલંબાઈ લાલ પ્રકાશની તરંગલંબાઈ કરતાં લગભગ 1.7 ગણી ઓછી હોવાથી પ્રકેરિત બ્લ્યુ પ્રકાશની તીવ્રતા લાલ રંગના પ્રકાશની તીવ્રતા કરતાં લગભગ 8થી 9 ગણી વધારે હોય છે. આમ, બ્લ્યુ પ્રકાશના તીવ્ર પ્રકીર્ણનને કારણે આકાશ ભૂરું દેખાય છે. સૂર્યોદય કે સૂર્યાસ્ત વખતે સૂર્યનું રાતાપણું પણ રેલે-પ્રકીર્ણનનું જ ઉદાહરણ છે.

આકૃતિ 6.26માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે, સૂર્યોદય અને સૂર્યાસ્ત સમયે સૂર્યપ્રકાશને અવલોકનકાર સુધી પહોંચતાં બપોર કરતાં વાતાવરણમાં વધારે અંતર કાપવું પડે છે. વાતાવરણમાં ગતિ દરમિયાન દશ્ય પ્રકાશની નાની તરંગલંબાઈ ધરાવતા પ્રકાશનું પ્રકીર્ણન વધારે થાય છે અને તેથી ફક્ત મોટી તરંગલંબાઈ ધરાવતા રાતા અથવા રતુંબડા (reddish અથવા yellowish-red) રંગની તીવ્રતા જ અવલોકનકાર સુધી પહોંચે છે. આમ, સૂર્ય રાતાશ પડતો દેખાય છે. છતાં, ઉપર તરફ જોતાં આકાશ તો બ્લ્યુ જ દેખાય છે. આ અસર આપાતકિરણથી લંબ દિશામાં મહત્તમ અનુભવાય છે. આ જ કારણ છે કે પૂર્ણિમાનો ઊગતો કે આથમતો ચંદ્ર પણ રતાશ પડતો દેખાય છે.



આકૃતિ 6.26 વાતાવરણ દ્વારા સૂર્યપ્રકાશનું પ્રકીર્ણન

એવું જાણવા મળે છે કે રેલે-પ્રકીર્ણનની તીવ્રતા જેમ ગુણોત્તર α વધે તેમ ઝડપથી વધે છે. વધારામાં રેલે-પ્રકેરિત પ્રકાશની તીવ્રતા આગળ અને પાછળ એમ બધી જ દિશામાં સમાન હોય છે.

6.15.2 મી-પ્રકીર્ણન (Mie-Scattering) : જો પ્રકેરિત કરતા કણોનું પરિમાણ પ્રકાશની તરંગલંબાઈ કરતાં થોડું વધારે હોય, તો તેવા પ્રકીર્ણનને મી-પ્રકીર્ણન કહે છે. તેનો અભ્યાસ ઈ. સ. 1908માં ગુસ્તાવ મી (Gustav Mie)એ કર્યો હતો. એવું સાબિત કરી શકાય કે જેમ કણોનું પરિમાણ વધતું જાય તેમ પ્રસારિત પ્રકિર્ણન (diffused scattering)નું પ્રમાણ પણ વધતું જાય છે. વાદળમાં રહેલા પાણીના બુંદનું પરિમાણ દશ્યપ્રકાશની તરંગલંબાઈ જેટલું હોવાથી વાદળમાંથી થતા સૂર્યપ્રકાશનું પ્રકીર્ણન ડિફ્યુઝ પ્રકીર્ણન હોય છે. તે પ્રકાશની તરંગલંબાઈથી સ્વતંત્ર હોય છે. આમ, દરેક તરંગલંબાઈના પ્રકાશનું પ્રકીર્ણન સરખા પ્રમાણમાં થાય છે અને તેથી વાદળ સફેદ દેખાય છે. રેલે-પ્રકીર્ણનથી વિરુદ્ધ, મી-પ્રકીર્ણન એ આગળની દિશામાં (forward direction) પાછળની દિશા (reverse direction) કરતાં વધારે જોવા મળે છે. કણનું પરિમાણ વધતાં પ્રકાશનું આગળની દિશામાં પ્રકીર્ણન પણ વધે છે.

માત્ર જાણકારી માટે : મી-પ્રકીર્ણનનો અભ્યાસ દર્શાવે છે કે જો પ્રકીર્ણન કરતા કણોનાં પરિમાણ કોઈ બે તરંગલંબાઈઓની વચ્ચે હોય, તો વધારે તરંગલંબાઈવાળા પ્રકાશનું ઓછી તરંગલંબાઈવાળા પ્રકાશ કરતાં વધારે પ્રકીર્ણન થાય છે. જો ધૂળનાં વાદળોનાં કણો આ શરતનું પાલન કરતા હોય તો ઊગતો કે આથમતો સૂર્ય કે ચંદ્ર બ્લ્યુ કે ગ્રીન રંગનો દેખાત !

આવી સ્થિતિ ભાગ્યે જ જોવા મળે છે. 19મી સદીમાં ઇન્ડોનેશિયામાં કાકાટોઆ (Krakotoa)નો જ્વાળામુખી ફાટ્યો ત્યારે, અને 1950 પૂર્વ કેનેડા અને ઉત્તર-પૂર્વ યુ.એસ.એ.માં આવા સંજોગો ઊભા થયા હતા.

જો પૃથ્વીને વાતાવરણ જ ન હોત, તો આકાશ કાળું દેખાત અને ધોળે દિવસે પણ તારા દેખાત ! આપણે જો વાતાવરણમાં 20 km કે તેથી ઉપર જઈએ, તો આ પરિસ્થિતિ જોવા મળે છે.

વધારે પ્રદૂષણ ધરાવતા વાતાવરણનાં સ્થળોએ આકાશ ચોખ્ખું દેખાવાને બદલે ભૂખરી છાંટ (greyish) સાથે ધૂંધળું (hazy) દેખાય છે.

6.15.3 રામન પ્રકીર્ણન (Raman Scattering) : રામન-અસરને સૌપ્રથમ રજૂ કરનાર ભારતના નૉબેલ પારિતોષિક વિજેતા C. V. Raman હતા. આ અસ્થિતિસ્થાપક પ્રકીર્ણનની માહિતી Adolf Smekal એ પણ ઈ. સ. 1923 માં આપી હતી. અને તેથી આ અસરને Smekal-Raman અસર પણ કહેવામાં આવે છે.

જ્યારે શક્તિશાળી દૃશ્ય કે પારજાંબલી પ્રકાશને વાયુ, પ્રવાહી કે પારદર્શક ઘન પદાર્થ પર આપાત કરવામાં આવે છે, ત્યારે પ્રકાશનો થોડોક ભાગ બધી જ દિશામાં પ્રકેરિત થાય છે. એવું જોવા મળે છે કે આ પ્રકેરિત પ્રકાશનો વર્ણપટ (spectrum) એ આપાતપ્રકાશની બનેલી રેખાઓ (Rayleigh lines) અને વધારાની નબળી અને બદલાયેલી તરંગલંબાઈ ધરાવતી રેખાઓનો બનેલો હોય છે. આ અસ્થિતિસ્થાપક પ્રકીર્ણનને કારણે મળતી વધારાની રેખાઓને **Raman lines** કહે છે. રામન-રેખાઓ કેન્દ્રમાં રહેલ રેલે-રેખાની બંને બાજુ સંમિત રીતે આવેલી હોય છે. ઓછી આવૃત્તિ (અથવા ઊંચી તરંગલંબાઈ) ધરાવતી રામન-રેખાઓને **સ્ટોક્સ રેખાઓ (Stokes lines)**, અને વધારે આવૃત્તિ ધરાવતી (અથવા નીચી તરંગલંબાઈ) રેખાઓને **પ્રતિસ્ટોક્સ** (Antistokes lines) કહે છે.

રામન-રેખા એ પદાર્થની લાક્ષણિકતા દર્શાવે છે.

પદાર્થોના ગુણધર્મો ચકાસવા, પદાર્થોમાં જુદાં-જુદાં ઉત્તેજનોનાં અભ્યાસ કરવા, ઑપ્ટિકલ ઍમ્પ્લિફાયરમાં, જૈવિક, પ્રક્રિયા અને મનુષ્યના તંતુઓનો અભ્યાસ કરવા માટે રામન-પ્રકીર્ણન પદ્ધતિ એ ખૂબ જ ઉપયોગી છે.

6.16 પ્રકાશીય ઉપકરણો (Optical Instruments) : મોટા ભાગનાં પ્રકાશીય ઉપકરણોનો હેતુ આપણને વસ્તુને સારી રીતે જોઈ શકાય તે માટે હોય છે. તેઓ વક્રીભવનકારક અને/અથવા પરાવર્તનકારક ઉપકરણો જેવાં કે લેન્સ, અરીસા એ પ્રિઝમના સંયોજનનાં બનેલાં હોય છે. તેઓને બે સમૂહમાં વહેંચી શકાય છે : જેઓ વસ્તુનું સાચું પ્રતિબિંબ આપે (દા.ત., પ્રોજેક્ટર (projectors)) અને જે આભાસી પ્રતિબિંબ આપે (દા.ત. માઇક્રોસ્કોપ અને ટેલિસ્કોપ) તેવાં ઉપકરણો.

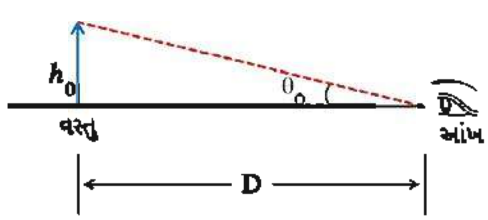
6.16.1 સાદું માઇક્રોસ્કોપ (Simple Microscope) : સૌપ્રથમ આપણે સાદા માઇક્રોસ્કોપનો અભ્યાસ કરીશું.

ધારો કે આપણને સૂક્ષ્મ વસ્તુને સ્પષ્ટ અને વિવર્ધિત કરીને જોવી છે.

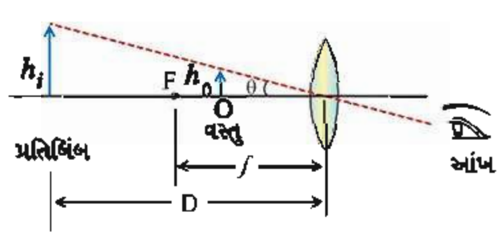
ઓછામાં ઓછા જે અંતરે વસ્તુને આરામદાયક રીતે સ્પષ્ટ જોઈ શકાય તે અંતરને **નજીકબિંદુ (near point)** અથવા **distance of most distinct vision** (D) કહે છે.

સામાન્ય દૃષ્ટિ ધરાવતા મનુષ્ય માટે તે અંતર 25 cm જેટલું હોય છે.

ધારો કે h_0 જેટલી ઊંચાઈ ધરાવતી રેખીય વસ્તુ આંખથી near point (એટલે કે, u = D = 25 cm) જેટલા અંતરે મૂકેલ છે. ધારો કે તે આંખ સાથે θ_0 જેટલો ખૂણો બનાવે છે (જુઓ આકૃતિ 6.27 (a)).



(a)



(b)

આકૃતિ 6.27 સાદો મૅગ્નિફાયર

હવે, ધારો કે વસ્તુને બહિર્ગોળ લેન્સની કેન્દ્રલંબાઈ કરતાં ઓછા અંતરે એવી રીતે મૂકવામાં આવે કે જેથી વસ્તુનું આભાસી, ચત્તુ અને મોટું પ્રતિબિંબ near point આગળ મળે. અત્રે લેન્સ આંખથી ઘણો નજીક હોવાથી, આંખ સાથે વસ્તુએ અને પ્રતિબિંબે આંતરેલ કોણ (θ) લગભગ સમાન બનશે. કોણીય મૅગ્નિફિકેશન (angular magnification)ની વ્યાખ્યા મુજબ,

$$m' = \frac{\tan\theta}{\tan\theta_0} \approx \frac{\theta}{\theta_0} \text{ (નાના } \theta \text{ અને } \theta_0 \text{ માટે)} \tag{6.16.1}$$

વળી, આકૃતિ 6.27 (a) અને (b) પરથી,

$$\tan\theta_0 \approx \theta_0 = \frac{h_0}{D}$$

$$\text{અને } \tan\theta \approx \theta_0 = \frac{h_i}{D}$$

$$\therefore\ m' = \frac{h_i}{h_0} \tag{6.16.2}$$

પણ બહિર્ગોળ લેન્સ માટે લેટરલ મૅગ્નિફિકેશન,

$$|\,m\,| = \frac{v}{u}$$

$$|\,m\,| = \frac{D}{u} \tag{6.16.3}$$

ગૉસનું સૂત્ર વાપરતાં,

$$\frac{1}{(-u)} + \frac{1}{(-D)} = \frac{1}{f} \quad \text{(અત્રે પ્રતિબિંબ માટે } v = D \text{ ઋણ છે.)}$$

$$\therefore\ \frac{1}{u} = \frac{1}{D} + \frac{1}{f} = \frac{D+f}{D\cdot f}$$

$$\therefore\ u = \frac{Df}{D+f} \tag{6.16.4}$$

સમીકરણ (6.16.3)નો ઉપયોગ સમીકરણ (6.16.4)માં કરતાં,

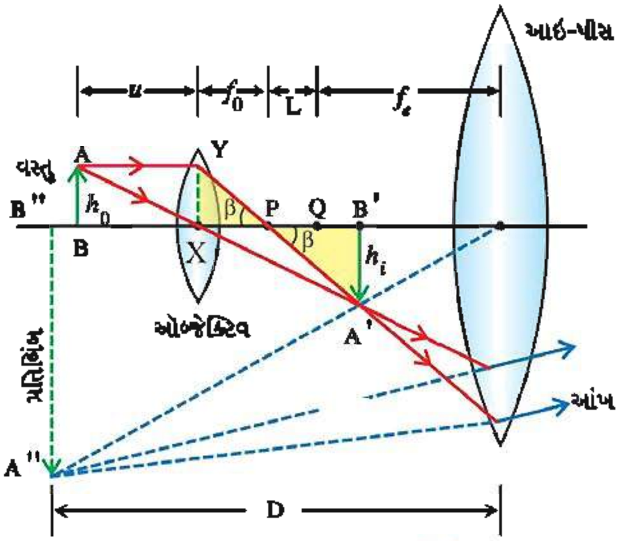
$$|\,m\,| = 1 + \frac{D}{f} \tag{6.16.5}$$

જ્યારે પ્રતિબિંબ ખૂબ જ દૂર મળે ત્યારે,

$$|\,m\,| \approx \frac{D}{f} \tag{6.16.6}$$

સમીકરણો (6.16.5) અને (6.16.6)ને સંયુક્ત રીતે વિચારતાં, mનું મૂલ્ય $\frac{D}{f}$ અને $1 + \frac{D}{f}$ની વચ્ચે આપે છે.

6.16.2 સંયુક્ત માઈક્રોસ્કોપ (Compound Microscope) : આપણે સાદા માઈક્રોસ્કોપમાં જોયું કે તેની મોટવણી $\frac{D}{f}$ પર આધાર રાખે છે. આમ, આપણે નાની કેન્દ્રલંબાઈ ધરાવતો બહિર્ગોળ લેન્સ લેવા પ્રેરાઈએ છીએ. પરંતુ તેવું જોવા મળ્યું કે કેન્દ્ર લંબાઈનું મૂલ્ય ઘટાડતાં પ્રતિબિંબ વિકૃત થતું જાય છે. આમ, ખૂબ મોટું અને સ્પષ્ટ પ્રતિબિંબ સાદા માઈક્રોસ્કોપથી મળી શકે નહીં, પરંતુ જો કોઈ એક સાદા માઈક્રોસ્કોપથી મળેલું મોટું પ્રતિબિંબ બીજા સાદા માઈક્રોસ્કોપ માટે વસ્તુ તરીકે વર્તે, તો પરિણામે આપણને ઘણું મોટું પ્રતિબિંબ મળી શકે. અને આ જ સંયુક્ત માઈક્રોસ્કોપનો મૂળભૂત સિદ્ધાંત છે.



આકૃતિ 6.28 સંયુક્ત માઇક્રોસ્કોપ

વસ્તુની નજીક ગોઠવેલા લેન્સને **ઓબ્જેક્ટિવ** અને જે આંખની નજીક છે તેને **આઇ-પીસ** કહે છે. ઓબ્જેક્ટિવનાં દ્વિતીય મુખ્ય કેન્દ્ર (P) અને આઈ-પીસના પ્રથમ મુખ્ય કેન્દ્ર (Q) વચ્ચેના અંતરને માઇક્રોસ્કોપની **ટ્યૂબ-લંબાઈ** (L) કહે છે.

આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે ઓબ્જેક્ટિવ દ્વારા મળતું પ્રતિબિંબ વાસ્તવિક, ઊલટું અને મોટું હશે. આ પ્રતિબિંબ આઇ-પીસ માટે વસ્તુ તરીકે વર્તે છે. આઇ-પીસ એક સાદા માઇક્રોસ્કોપની જેમ વર્તે છે અને ખૂબ મોટું અને આભાસી અંતિમ પ્રતિબિંબ (A''B'') આપે છે. ઓબ્જેક્ટિવથી મળતું પ્રતિબિંબ આઇ-પીસના મુખ્ય કેન્દ્રની બહુ જ નજીક રચાય છે. પરિણામે, અંતિમ પ્રતિબિંબ ખૂબ જ મોટા અંતરે મળે છે.

મોટવણી : ઓબ્જેક્ટિવની મોટવણી,

$$m_0 = \frac{h_i}{h_0} \qquad (6.16.7)$$

ΔXYP અને $\Delta PA'B'$ પરથી,

$$\tan\beta = \frac{XY}{PX} = \frac{h_0}{f_0} \Rightarrow h_0 = f_0 \cdot \tan\beta$$

અને $\tan\beta = \frac{A'B'}{PB'} \approx \frac{h_i}{PQ}$ ($\because$ Q અને B' ખૂબ જ નજીક આવેલા હોય છે.)

$$\therefore\ h_i = PQ\tan\beta = L\tan\beta$$

$$m_0 = \frac{L}{f_0}. \qquad (6.16.8)$$

આઇ-પીસની મોટવણી,

$$m_e = \left(1 + \frac{D}{f_e}\right) \text{ (જુઓ સમીકરણ (6.16.5))} \qquad (6.16.9)$$

સંયુક્ત માઇક્રોસ્કોપની પરિણામી મોટવણી (સમીકરણ (6.12.10)),

$$m = m_0 \times m_e$$

$$= \frac{L}{f_0} \times \left(1 + \frac{D}{f_e}\right) \qquad (6.16.10)$$

વ્યવહારમાં, આઈ-પીસને એવી રીતે ગોઠવવામાં આવે છે કે પ્રતિબિંબ A'B' એ તેના મુખ્યકેન્દ્ર Q ની ખૂબ જ નજીક મળે, આમ, આઇ-પીસ દ્વારા મળતું પ્રતિબિંબ ખૂબ જ મોટા અંતર (D) આગળ મળે છે. આમ, સમીકરણને નીચે મુજબ લખી શકાય :

$$m \approx \frac{L}{f_0} \times \frac{D}{f_e} \qquad (6.16.11)$$

આમ, ખૂબ જ મોટી મોટવણી મેળવવા માટે લંબાઈ (L) બને તેટલી મોટી રાખવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ 16 : સંયુક્ત માઇક્રોસ્કોપના ઓબ્જેક્ટિવથી વસ્તુ 10 mm અંતરે રહેલ છે. બન્ને લેન્સ 30 cm અંતરે રહેલા છે. ઓબ્જેક્ટિવ દ્વારા મળતું પ્રતિબિંબ આઇ-પીસથી 50 mm અંતરે મળે છે, તો સાધન દ્વારા મળતી સમગ્ર મોટવણી કેટલી હશે ?

ઉકેલ : આકૃતિ 6.28 પરથી, ઓબ્જેક્ટિવને ગૉસનું સૂત્ર લગાવતાં,

$$\frac{1}{-u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f_0} \quad (1)$$

જ્યાં, v = ઑબ્જેક્ટિવ દ્વારા મળતા પ્રતિબિંબનું અંતર $\approx f_0 + L$ (Q અને B' ખૂબ જ નજીક આવેલા હોવાથી).

હવે, ઑબ્જેક્ટિવથી મળેલ પ્રતિબિંબ આઈ-પીસથી 50 mm અંતરે અને બન્ને લેન્સો વચ્ચેનું અંતર 30 cm = 300 mm હોવાથી, ઑબ્જેક્ટિવથી પ્રતિબિંબ-અંતર,

$v = 300 - 50 = 250$ mm

સમીકરણ (1) પરથી,

$$\frac{-1}{-10} + \frac{1}{250} = \frac{1}{f_0} \quad \text{(સંજ્ઞાપ્રણાલી વાપરતાં)}$$

$$\therefore f_0 = \frac{250 \times 10}{(250+10)} = 9.62 \text{ mm} \approx 10 \text{ mm}$$

હવે, $v \simeq f_0 + L \Rightarrow L = 250 - 10 = 240$ mm

અંતિમ પ્રતિબિંબ વસ્તુની ખૂબ જ નજીક હોવાથી,

D $\approx$ (ઑબ્જેક્ટિવ માટે વસ્તુ-અંતર) + (બન્ને લેન્સો વચ્ચેનું અંતર)

$= 10 + 300 = 310$ mm

આઈ-પીસને ગૉસનું સૂત્ર લગાવતાં,

$$\frac{1}{-u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f_e}$$

$$\therefore \frac{1}{f_e} = \frac{-1}{-50} + \frac{1}{-310} \quad \text{(આભાસી પ્રતિબિંબ માટે } v = -D)$$

$$= \frac{-310+50}{(50 \times 310)}$$

$\therefore |f_e| = 59.6 \approx 60$ mm

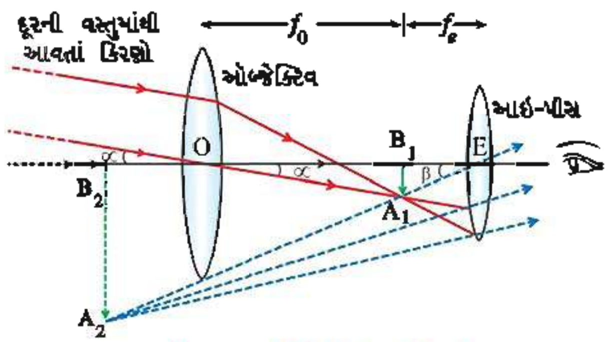
આમ, અંતિમ મૅગ્નિફિકેશન,

$$m = \frac{L}{f_0} \times \frac{D}{f_e} = \frac{240}{10} \times \frac{310}{60} = 124$$

નોંધ : અંતિમ પ્રતિબિંબ આઈ-પીસથી 31 cm જેટલા અંતરે મળતું હોવાથી તે near point કરતાં વધારે છે, તેથી પ્રતિબિંબ આરામદાયક (comfortably) રીતે જોઈ શકાશે.

6.16.3 ઍસ્ટ્રોનોમિકલ ટેલિસ્કોપ (Astronomical Telescope) : માઇક્રોસ્કોપ વડે સૂક્ષ્મ વસ્તુઓનું નિરીક્ષણ કર્યા પછી હવે વારો આવે છે કરોડો કિલોમીટર દૂર રહેલી મોટી વસ્તુઓનું નિરીક્ષણ કરવાનો. આવી વસ્તુઓ ખૂબ મોટી અને એકબીજાથી દૂર હોવા છતાં તેઓ નરી આંખે એકબીજાની અત્યંત નજીક અને નાની દેખાય છે (દા.ત., તારાઓ). આવી વસ્તુઓનું નિરીક્ષણ કરવા ઍસ્ટ્રોનોમિકલ ટેલિસ્કોપનો ઉપયોગ થાય છે. આવા ટેલિસ્કોપની રચના અને કાર્ય આકૃતિ 6.29માં દર્શાવેલ છે.

આ ટેલિસ્કોપમાં એક જ મુખ્ય અક્ષ બને તે રીતે બે બહિર્ગોળ લેન્સ મૂકેલા હોય છે. દૂરની વસ્તુ સામે આવતાં બહિર્ગોળ લેન્સને ઑબ્જેક્ટિવ અને આંખની પાસે આવતા બહિર્ગોળ લેન્સને આઈ-પીસ કહે છે. ટેલિસ્કોપમાં ઑબ્જેક્ટિવનો વ્યાસ અને કેન્દ્રલંબાઈ મોટી રાખવામાં આવે છે, જ્યારે આઈ-પીસનો વ્યાસ અને કેન્દ્રલંબાઈ નાના રાખવામાં આવે છે. આઈ-પીસ ટેલિસ્કોપની નળી (tube)માં આગળ-પાછળ સરકાવી શકાય છે.



આકૃતિ 6.29 ઍસ્ટ્રોનોમિકલ ટેલિસ્કોપ

જ્યારે ટેલિસ્કોપને દૂરની વસ્તુ સામે ગોઠવવામાં આવે છે, ત્યારે દૂરની વસ્તુમાંથી આવતાં સમાંતર કિરણો ઑબ્જેક્ટિવના દ્વિતીય મુખ્ય કેન્દ્ર પર સાચું અને ઊલટું પ્રતિબિંબ A_1B_1 રચે છે. આ પ્રતિબિંબ આઇ-પીસ માટે વસ્તુ તરીકે કાર્ય કરે છે. આઇ-પીસને આગળ-પાછળ સરકાવી એવી ગોઠવણી કરવામાં આવે છે કે જેથી મૂળ વસ્તુનું ઊલટું પ્રતિબિંબ A_2B_2 મોટા પરિમિત અંતરે રચાય.

હવે ટેલિસ્કોપના મૅગ્નિફાઇંગ પાવર માટેનું સૂત્ર મેળવીએ.

$$\text{ટેલિસ્કોપનું મૅગ્નિફિકેશન } m = \frac{\text{અંતિમ પ્રતિબિંબે આંખ સાથે આંતરેલ કોણ}}{\text{વસ્તુએ ઑબ્જેક્ટિવ (અથવા આંખ) સાથે આંતરેલ કોણ}} = \frac{\beta}{\alpha}$$

આકૃતિ 6.29 પરથી,

$$\text{મૅગ્નિફિકેશન } m = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$= \frac{A_1B_1}{f_e} \times \frac{f_0}{A_1B_1}$$

$$\therefore m = \frac{f_0}{f_e}$$

આ સમીકરણ દર્શાવે છે કે ટેલિસ્કોપનું મૅગ્નિફિકેશન વધારવા માટે objectiveની કેન્દ્રલંબાઈ વધારવી જોઈએ અને eye-pieceની કેન્દ્રલંબાઈ ઘટાડવી જોઈએ. $f_0 + f_e$ એ ટેલિસ્કોપની **ઑપ્ટિકલ લંબાઈ** છે. નળીની લંબાઈ $L \geq f_0 + f_e$ રાખવી જોઈએ.

જો આઇ-પીસની કેન્દ્રલંબાઈ 1.0 cm હોય અને ઑબ્જેક્ટિવની કેન્દ્રલંબાઈ 200 cm હોય, તો આવા ટેલિસ્કોપનું મૅગ્નિફિકેશન 200 થાય. જો આવા ટેલિસ્કોપ વડે $1'$ જેટલું કોણીય અંતર ધરાવતા બે તારાઓનું નિરીક્ષણ કરવામાં આવે, તો બંને તારાઓ એકબીજાથી $200 \times 1' = 200' = 3.33^\circ$ જેટલા કોણીય અંતરે હોય તેમ જણાશે.

ટેલિસ્કોપ માટે તેના ઑબ્જેક્ટિવની **પ્રકાશ સમાવેશ-ક્ષમતા (Light Gathering Power)** અને **વિભેદનશક્તિ** (એટલે કે બે ખૂબ નજીકની વસ્તુઓને જુદી-જુદી બતાવવાની ક્ષમતા) એ બે મહત્ત્વની બાબતો છે.

ટેલિસ્કોપના ઑબ્જેક્ટિવમાં દાખલ થતો પ્રકાશનો જથ્થો ઑબ્જેક્ટિવના વ્યાસના વર્ગના સમપ્રમાણમાં હોય છે. વળી, ઑબ્જેક્ટિવના લેન્સનો વ્યાસ વધે તેમ વિભેદનશક્તિ પણ વધે છે.

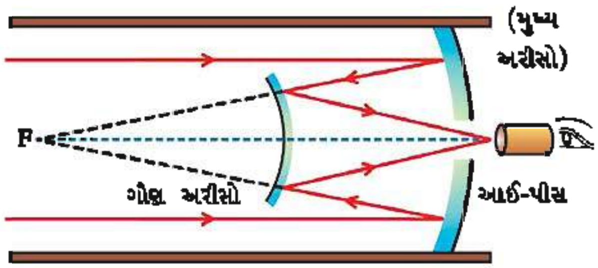
(આપણે જે ટેલિસ્કોપની ચર્ચા કરી છે, તેમાં વસ્તુમાંથી આવતા પ્રકાશનાં કિરણો ઑબ્જેક્ટિવમાંથી પસાર થઈ વક્રીભવન પામીને પ્રતિબિંબ રચે છે. આવા ટેલિસ્કોપને **રિફ્રેક્ટિંગ** પ્રકારના ટેલિસ્કોપ કહે છે.

આ પ્રકારના ટેલિસ્કોપમાં રચાતું પ્રતિબિંબ ઊલટું હોય છે. તમે આ ટેલિસ્કોપથી પૃથ્વી પરની દૂર રહેલી વસ્તુઓનું નિરીક્ષણ કરો, તો દૃશ્ય ઊલટાઈ ગયેલું દેખાય છે. સ્પેક્ટ્રોમિટરના ટેલિસ્કોપથી ક્રિકેટમૅચનું નિરીક્ષણ કરો. બધા ખેલાડીઓ કેવા દેખાય છે ? આ મુશ્કેલી નિવારવા **ટેરેસ્ટ્રિયલ ટેલિસ્કોપ (Terrestrial Telescope)**માં ઇન્વર્ટિંગ લેન્સની એક વધારાની જોડ હોય છે, જેથી દૂરની વસ્તુઓનું પ્રતિબિંબ સૂલટું (સીધું) પડે. આ પ્રકારના ટેલિસ્કોપને Terrestrial Telescope કહે છે. જોકે ગેલિલિયોએ આવા ટેલિસ્કોપમાં બહિર્ગોળ લેન્સ અને અંતર્ગોળ લેન્સનો ઉપયોગ કર્યો હતો.

ઊંચી વિભેદનશક્તિ તથા વધુ મોટા મૅગ્નિફાઇંગ પાવરવાળા ટેલિસ્કોપને બનાવવા માટેની વ્યવહારિક મુશ્કેલીઓને કારણે આધુનિક ટેલિસ્કોપમાં લેન્સના બદલે અરીસાનો ઉપયોગ થાય છે. આવા ટેલિસ્કોપ **પરાવર્તક** (Reflecting) પ્રકારના ટેલિસ્કોપ કહેવાય છે. આ પ્રકારના ટેલિસ્કોપમાં **વર્ણવિપથન (Chromatic Aberration)** (સફેદ વસ્તુનું રંગોવાળું પ્રતિબિંબ મળે તે), અને જો પેરેબોલિક અરીસો વાપરવામાં આવે, તો **ગોળીય વિપથન (Spherical Aberration)** (બિંદુવત્ વસ્તુનું ફેલાઈ ગયેલ પ્રતિબિંબ)ની ક્ષતિ નાબૂદ થાય છે.

કેસેગ્રેઈને બનાવેલ **પરાવર્તક ટેલિસ્કોપ**ની રચના આકૃતિ 6.30માં દર્શાવેલ છે.

આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે દૂરની વસ્તુમાંથી આવતાં સમાંતર કિરણો મુખ્ય (કે પ્રાથમિક) અરીસાની અંદરની પરાવર્તક સપાટી પર આપાત થાય છે. આ અરીસાની પરાવર્તક સપાટી parabolic હોય છે. આ સપાટી પરથી કિરણો પરાવર્તન પામી આ અરીસાના મુખ્ય કેન્દ્ર Fમાં કેન્દ્રિત થાય છે. (F પાસે આઈ-પીસ રાખવામાં આવે, તો વસ્તુનું પ્રતિબિંબ જોઈ શકાય, પરંતુ નળીની અંદરના ભાગમાં આવી ગોઠવણી કરવાનું મુશ્કેલ છે.) કેસેગ્રેઇને Fમાં કેન્દ્રિત થતાં કિરણોના માર્ગમાં બીજો બહિર્ગોળ અરીસા ગોઠવ્યો તેને **ગૌણ અરીસો (Secondary Mirror)** કહે છે. બહિર્ગોળ અરીસા પરથી પરાવર્તિત કિરણો અરીસાના ધ્રુવ પર રાખેલ વર્તુળાકાર છિદ્ર (Hole)માંથી પસાર થઈને આઈ-પીસ પર કેન્દ્રિત થાય છે. આ પ્રકારના ટેલિસ્કોપમાં મુખ્ય અરીસાની કેન્દ્રલંબાઈ મોટી હોય છે. તેમજ તેનો વ્યાસ પણ મોટો હોય છે.



આકૃતિ 6.30 પરાવર્તક ટેલિસ્કોપ

આપણે મૅચ જોતી વખતે કે bird watching કરતી વખતે જે **બાયનોક્યુલર (binoculars)** વાપરીએ છીએ તે એક ડબલ-ટેલિસ્કોપ છે. આ ટેલિસ્કોપમાં અંતિમ પ્રતિબિંબ ચત્તું હોય છે. બાયનોક્યુલરમાં બે પ્રિઝમોની રચના વડે ઑબ્જેક્ટિવ અને આઇ-પીસ વચ્ચેનું અંતર ઓછું રાખી શકાય છે. આપણે બાયનોક્યુલરમાં બંને આંખથી નિરીક્ષણ કરતા હોવાથી તેને binocular કહે છે.

6.16.4 માનવઆંખ (Human Eye) : કુદરતમાં જો કોઈ શ્રેષ્ઠ પ્રકાશીય ઉપકરણ હોય, તો તે છે માનવ-આંખ (જુઓ આકૃતિ 6.31).

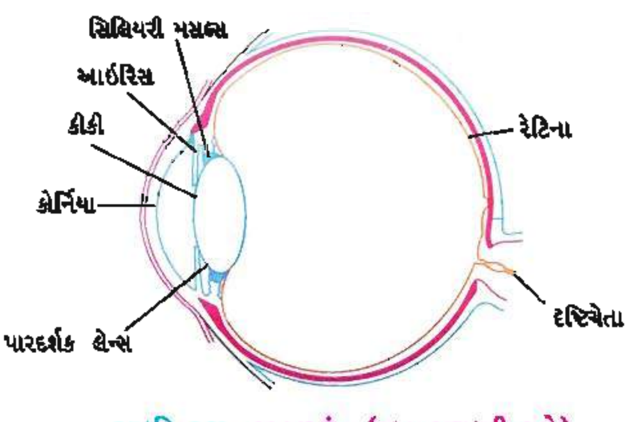
આંખમાં પ્રવેશતું પ્રકાશનું કિરણ સૌપ્રથમ કોર્નિયા (cornea)માં વક્રીભૂત થાય છે. આમ છતાં આંખનો લેન્સ એ મુખ્ય વક્રીભવનકારક તરીકે જવાબદાર છે તેમ ગણી શકાય. લેન્સ વડે રેટિના (ratina) પર ઊંધું અને વાસ્તવિક પ્રતિબિંબ રચાય છે. આ પ્રતિબિંબનું માનવ મગજમાં પ્રોસેસિંગ થઈને અંતે પ્રતિબિંબ ચત્તું દેખાય છે.

રેટિનામાં બે પ્રકારના કોષો (cells) હોય છે :

(1) Rods : આ કોષો દ્વારા પ્રકાશની ઓછી તીવ્રતાની સંવેદના મેળવી શકાય છે.

(2) Cones : આ કોષ દ્વારા રંગની તેમજ તીવ્ર પ્રકાશની સંવેદના મેળવી શકાય છે.

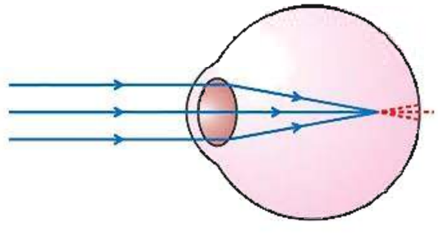
આંખના કિસ્સામાં એક વસ્તુ ખાસ છે : આંખના લેન્સ અને રેટિના વચ્ચેનું અંતર *નિશ્ચિત છે*. આથી જ તો આપણે જુદાં-જુદાં અંતરોએ રહેલી વસ્તુઓને જોઈએ છીએ, ત્યારે આંખના લેન્સની કેન્દ્રલંબાઈમાં એવો ફેરફાર થાય છે કે જેથી પ્રતિબિંબ રેટિના પર જ મળે. (આંખનો લેન્સ smart લેન્સ કહેવાય, બરાબર ને !) આ કાર્ય (કેન્દ્રલંબાઈમાં ફેરફાર કરવાનું) આંખમાં રહેલા સિલિયરી મસલ્સ (Ciliary Muscles) દ્વારા થાય છે. આ સ્નાયુઓ આંખના લેન્સને જાડો-પાતળો કરી પ્રતિબિંબને રેટિના પર ફોકસ કરી આપે છે.



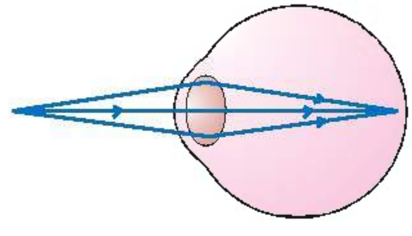
આકૃતિ 6.31 માનવઆંખ (ફક્ત જાણકારી માટે)

આઇરિસ (Iris) વડે આંખમાં પ્રવેશતા પ્રકાશના જથ્થા પર નિયંત્રણ લાવી શકાય છે. તે માટે આંખના દર્પણમુખ (Pupil - કીકી)ને નાનીમોટી (જરૂર મુજબ) કરવાનું કામ આઇરિસ કરે છે. આપણે જ્યારે સાઇડની વસ્તુઓને જોઈએ છીએ, ત્યારે આંખનો લેન્સ ભ્રમણ કરી, પ્રતિબિંબને રેટિનાના કેન્દ્રીય વિસ્તાર (fovea) પર લાવે છે.

દૃષ્ટિક્ષતિઓ (Defects of Vision) : જો આંખનો લેન્સ જરૂરિયાત પ્રમાણે પાતળો ન થઈ શકે, પરંતુ જાડો જ રહે, તો દૂરની વસ્તુમાંથી આવતા પ્રકાશનાં સમાંતર કિરણો લેન્સથી વધુ પડતું વક્રીભવન પામીને આકૃતિ 6.32માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે રેટિનાની આગળ કેન્દ્રિત થાય છે અને દૂરની વસ્તુ અસ્પષ્ટ બને છે. પરંતુ નજીકની વસ્તુઓનું સ્પષ્ટ પ્રતિબિંબ રેટિના પર રચાય છે. (જુઓ આકૃતિ 6.33) આ પ્રકારની ખામીને **લઘુદૃષ્ટિ (Near sightedness કે Myopia)** કહે છે.

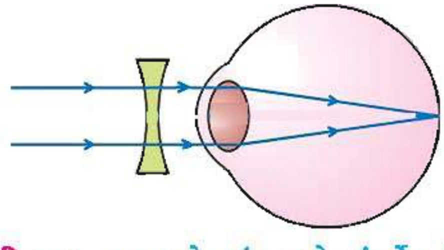


આકૃતિ 6.32 દૂરની વસ્તુનું પ્રતિબિંબ રેટિનાથી આગળ રચાય છે.



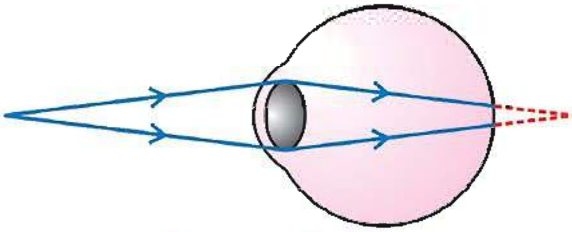
આકૃતિ 6.33 નજીકની વસ્તુનું પ્રતિબિંબ રેટિના પર રચાય છે.

આ ખામી પ્રકાશના વધુ પડતા અભિસરણથી ઉદ્ભવે છે, તેથી તેને સુધારવા માટે યોગ્ય કેન્દ્રલંબાઈવાળા અંતર્ગોળ લેન્સનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે (જુઓ આકૃતિ 6.34).

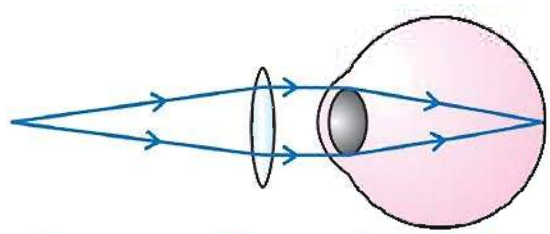


આકૃતિ 6.34 વસ્તુ અને આંખ વચ્ચે અંતર્ગોળ લેન્સ

જો આંખનો લેન્સ પાતળો જ રહે અને જરૂરિયાત પ્રમાણે જાડો ન થઈ શકે, તો નજીકની વસ્તુઓમાંથી આવતાં પ્રકાશનાં કિરણો લેન્સથી ઓછું વક્રીભવન પામીને આકૃતિ 6.35માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે રેટિનાની પાછળ કેન્દ્રિત થાય છે. આથી રેટિના પર નજીકની વસ્તુનું અસ્પષ્ટ પ્રતિબિંબ રચાય છે, પરંતુ દૂરની વસ્તુઓનું સ્પષ્ટ પ્રતિબિંબ રેટિના પર રચાય છે. આવી વ્યક્તિઓ દૂરની વસ્તુઓ સ્પષ્ટ જોઈ શકે છે, પરંતુ નજીકની વસ્તુઓ સ્પષ્ટ જોઈ શકતી નથી. આંખની આ પ્રકારની ખામીને ગુરુદૃષ્ટિ **(Farsightedness કે Hypermetropia)** કહે છે. આ પ્રકારની ખામી પ્રકાશના પ્રમાણમાં ઓછા અભિસરણથી ઉદ્ભવે છે, તેથી તેને સુધારવા માટે આકૃતિ 6.36માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે યોગ્ય કેન્દ્રલંબાઈવાળો બહિર્ગોળ લેન્સ વાપરવામાં આવે છે.



આકૃતિ 6.35 હાઈપરમેટ્રોપિયા



આકૃતિ 6.36 વસ્તુ અને આંખ વચ્ચે બહિર્ગોળ લેન્સ

કેટલીક વ્યક્તિઓને આડા-ઊભા તારવાળી જાળી દેખાડતાં તેમને બંને તાર સ્પષ્ટ ન દેખાતાં આડા કે ઊભા તારમાંથી કોઈ એક જ દિશાના તાર વધુ સ્પષ્ટ દેખાય છે. આંખની આ પ્રકારની ખામીને **એસ્ટિગ્મેટિઝમ (Astigmatism)** કહે છે. લેન્સ અને કોર્નિયાની વક્રતા (Curvature) સરખી ન હોય, તો આ ખામી ઉદ્ભવે છે. ઉદાહરણરૂપે ધારો કે કોઈ વ્યક્તિને આડા તાર સ્પષ્ટ દેખાય છે, પરંતુ ઊભા તાર સ્પષ્ટ દેખાતાં નથી. આ પરિસ્થિતિમાં આંખના લેન્સ અને કોર્નિયાની વક્રતા સમક્ષિતિજ સમતલમાં સમાન હોય છે. પરંતુ શિરોલંબ સમતલમાં અસમાન હોય છે. આથી સમક્ષિતિજ સમતલમાં કિરણોનું વક્રીભવન સમાનપણે થાય છે, પરંતુ શિરોલંબ સમતલમાં કિરણોનું વક્રીભવન જુદું-જુદું થાય છે. પરિણામે આડા તાર સ્પષ્ટ દેખાય છે અને ઊભા તાર સ્પષ્ટ દેખાતા નથી. આ પ્રકારની ખામી નિવારવા માટે **નળાકાર (Cylindrical) લેન્સ**નો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. ઉપર્યુક્ત કિસ્સામાં સમક્ષિતિજ દિશામાં અક્ષ ધરાવતા યોગ્ય વક્રતાવાળા નળાકાર લેન્સ વાપરીને આ ક્ષતિ સુધારી શકાય છે.

સારાંશ

1. અરીસા માટે ગૉસનું સૂત્ર $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{2}{R} = \frac{1}{f}$; જ્યાં, u = વસ્તુ-અંતર, v = પ્રતિબિંબ-અંતર, R = વક્રતાત્રિજ્યા અને f = કેન્દ્રલંબાઈ
2. અરીસા માટે લેટરલ મૅગ્નિફિકેશ, $m = \frac{h'}{h} = -\frac{v}{u}$
3. જુદાં-જુદાં પારદર્શક માધ્યમોના બનેલાં સંયુક્ત ચોસલાં (slab) માટે સ્નેલના નિયમનું વ્યાપક સ્વરૂપ નીચે મુજબ લખી શકાય. $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 = n_3 \sin\theta_3 = ...$
4. પૂર્ણઆંતરિક પરાવર્તનની ઘટના પરાવર્તક તરીકે ઉપયોગી છે. દા.ત., ફ્લિન્ટ ગ્લાસ પ્રિઝમનો ઉપયોગ ઊંચી ગુણવત્તાવાળા પરાવર્તક તરીકે વપરાય છે, હવા-ગ્લાસ (કાચ) આંતરપૃષ્ઠ માટે, ક્રાંતિકોણ (C)નું મૂલ્ય, $C = sin^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$; પરથી શોધી શકાય છે. જ્યાં, n = કાચનો વક્રીભવનાંક
5. પૂર્ણઆંતરિક પરાવર્તનની ઘટનાનો ઉપયોગ ઑપ્ટિકલ ફાઈબરમાં પણ થાય છે.
6. પાતળા લેન્સ માટે : $\frac{-1}{u} + \frac{1}{v} = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_1}\right) \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$ અને $\frac{1}{f} = \frac{-1}{u} + \frac{1}{v}$
7. પ્રતિવર્તતાનો સિદ્ધાંત સૂચવે છે કે વસ્તુ અને તેનું પ્રતિબિંબ એકબીજાને સંલગ્ન (Conjugate) હોવાથી, વસ્તુનું સ્થાન અદલ-બદલ કરવાથી પ્રતિબિંબ-અંતર શોધી શકાય છે.
8. સંપર્કમાં રહેલા લેન્સ માટે પાવર, $P = P_1 + P_2 + ...$.
9. સંપર્કમાં રહેલા લેન્સ માટે મોટવણી, $m = m_1 \times m_2 \times ....$.
10. સંપર્કમાં રહેલા લેન્સ માટે કેન્દ્રલંબાઈ $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + ...$.
11. પ્રિઝમ સમીકરણ $\delta = i + e - A$ છે. લઘુતમ વિચલનકોણની સ્થિતિમાં, $\delta_m = 2i - A$ થશે. પાતળા પ્રિઝમ માટે (A < <), $\delta_m = A(n - 1)$; જ્યાં, n = પ્રિઝમના દ્રવ્યનો વક્રીભવનાંક
12. પ્રકીર્ણનને બે પાત્રમાં વર્ગીકૃત કરી શકાય : સ્થિતિસ્થાપક પ્રકીર્ણન (રેલે-પ્રકીર્ણન અને મી-પ્રકીર્ણન) અને અસ્થિતિસ્થાપક પ્રકીર્ણન (દા.ત., રામન પ્રકીર્ણન). જો પ્રકાશને પ્રકેરિત કરતા કણોનું પરિમાણ આપાત પ્રકાશની તરંગલંબાઈ કરતાં ઓછું હોય તો તેવા પ્રકીર્ણનને રેલે-પ્રકીર્ણન અને જો તેનાથી ઊલટું હોય તો તેને મી-પ્રકીર્ણન કહે છે.
13. સંયુક્ત માઇક્રોસ્કોપ બે શ્રેણીમાં જોડેલા સાદા માઇક્રોસ્કોપ તરીકે વિચારી શકાય, જેમાં પ્રથમ સાદા માઇક્રોસ્કોપ દ્વારા મળતા મોટું પ્રતિબિંબ બીજા માટે વસ્તુ તરીકે વર્તે છે.
14. વધારે વિભેદન (Resolution) અને મોટવણી (Magnification) મેળવવા માટે આધુનિક ટેલિસ્કોપમાં અરીસાનો ઉપયોગ થાય છે.
15. રેટિનામાં બે પ્રકારના કોષો હોય છે : Rods કે જે ઓછા પ્રકાશની સંવેદના આપે છે અને Cones કે જે રંગ અને તીવ્ર પ્રકાશની સંવેદના આપે છે.
16. દૃષ્ટિની ખામીઓ યોગ્ય પ્રકારના લેન્સની મદદથી દૂર કરી શકાય છે.

સ્વાધ્યાય

નીચે વિધાનો માટે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

1. અંતર્ગોળ અરીસાની અક્ષ પર 25 cm અંતરે એક વસ્તુ રાખેલ છે. અરીસાની કેન્દ્રલંબાઈ 20 cm હોય, તો મળતું લેટરલ મૅગ્નિફિકેશન કેટલું થશે ?

   (A) 2 (B) 4 (C) –4 (D) –2

2. તળાવમાં એક માછલી તળાવના કિનારેથી 6.3 m સમક્ષિતિજ અંતરે રહેલ છે. હવે જો તે કિનારા પરના એક ઝાડને just જોઈ શકતી હોય, તો તેની તળાવમાં ઊંડાઈ .... m હશે. પાણીનો વક્રીભવનાંક 1.33 લો.

   (A) 6.30 (B) 5.52 (C) 7.5 (D) 1.55

3. બહિર્ગોળ લેન્સ માટે, જ્યારે વસ્તુની ઊંચાઈ પ્રતિબિંબની ઊંચાઈ કરતાં બે ગણી હોય, તો વસ્તુ-અંતર .... જેટલું થશે. લેન્સની કેન્દ્રલંબાઈ f છે.

(A) f (B) $2f$ (C) $3f$ (D) $4f$

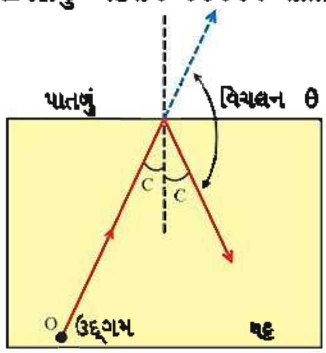
4. એક ટાંકીમાં n વક્રીભવનાંક ધરાવતું પ્રવાહી ભરવામાં આવે છે. એક સમતલ અરીસો ટાંકીના તળિયે મૂકેલ છે. પ્રવાહીની સપાટી પર એક બિંદુવત્ વસ્તુ (P) અરીસાથી h ઊંચાઈએ રાખેલ છે, એક અવલોકનકાર આ વસ્તુનું અને તેના પ્રતિબિંબનું ઉપરથી નીચે લંબ તરફ અવલોકન કરે છે, તો વસ્તુ અને તેના પ્રતિબિંબ વચ્ચેનું અંતર કેટલું હશે ?

(A) $2n \cdot h$ (B) $\frac{2h}{n}$ (C) $\frac{2h}{(n-1)}$ (D) $h \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)$

5. એક કૂવાની ઊંડાઈ 5.5 m છે. જો કૂવો પાણીથી સંપૂર્ણ ભરેલો હોય અને પાણીનો વક્રીભવનાંક 1.33 હોય, તો ઉપરથી શિરોલંબ જોતાં કૂવાનું તળિયું કેટલું ઊંચું આવેલું જણાશે ?

(A) 5.5 m (B) 2.75 M (C) 4.13 m (D) 1.37 m

6. એક પ્રકાશકિરણ ઘટ્ટ માધ્યમમાંથી પાતળા માધ્યમમાં ગતિ કરે છે. આ માધ્યમો માટેનો ક્રાંતિકોણ C છે, તો કિરણનું મહત્તમ વિચલન .... જેટલું થશે.

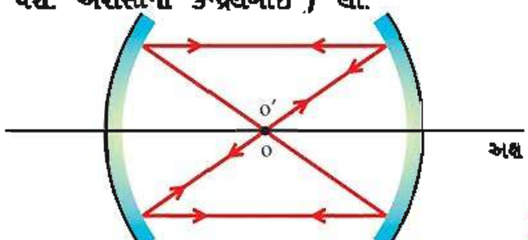


(A) $\pi - 2$ (B) $\pi - 2c$

(C) 2C (D) $\frac{\pi}{2}$ + C

Hint : પૂર્ણ આંતરિક પરાવર્તન વખતની સ્થિતિ આકૃતિમાં દર્શાવેલ છે.

7. સમાન કેન્દ્રલંબાઈ ધરાવતા બે અંતર્ગોળ અરીસાની સમાન અક્ષ પર, અરીસાની વચ્ચે મધ્યમાં બિંદુવત્ વસ્તુ O મૂકેલી છે. જો અંતિમ પ્રતિબિંબ વસ્તુના સ્થાન આગળ જ રચાતું હોય, તો બે અરીસા વચ્ચેનું અંતર .... થશે. અરીસાની કેન્દ્રલંબાઈ f લો.



(A) f (B) $2f$

(C) $\frac{3}{2}f$ (D) $\frac{1}{2}f$

Hint : આ પરિસ્થિતિ આકૃતિમાં દર્શાવેલ છે.

નોંધ : બીજી એક શક્ય પરિસ્થિતિ કે જેમાં પણ વસ્તુ અને તેનું પ્રતિબિંબ એકબીજા પર સંપાત થાય ત્યારે બે અરીસાઓ વચ્ચેનું અંતર $4f$ હશે.

8. 1.5 જેટલો વક્રીભવનાંક ધરાવતા પાતળા લેન્સની કેન્દ્રલંબાઈ 20 cm છે. જ્યારે તેને 1.33 જેટલો વક્રીભવનાંક ધરાવતા પ્રવાહી ઉપર મૂકવામાં આવે, ત્યારે તેની કેન્દ્રલંબાઈ .... cm થશે.

(A) 80.81 (B) 45.48 (C) 60.25 (D) 78.23

9. એક ટાંકીમાં 30 cm ઊંચાઈ સુધી પાણી અને તેની ઉપર બીજા 30 cm સુધી તેલ ભરેલું છે. ઉપરથી શિરોલંબ દિશામાં ટાંકીનું તળિયું જોતાં તે .... cm ઉપર ખસેલું દેખાશે. પાણી અને તેલનો વક્રીભવનાંક અનુક્રમે 1.33 અને 1.28 લો.

(A) 7.44 (B) 6.46 (C) 14.02 (D) 6.95

Hint : $\frac{h'}{h} = \frac{n_1}{n_2}$ પરથી, $\frac{h'-h}{h} = \frac{-\Delta h}{h} = \frac{n_1 - n_2}{n_2}$

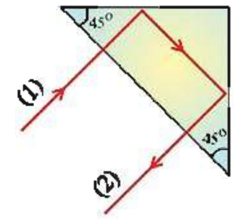
$\therefore -\frac{\Delta h}{h} = \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)$ (Δh ઋણ મૂકેલ છે, કારણ કે શિફ્ટ $\Delta h = h - h'$ છે.)

$\therefore \Delta h = h \times \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right) = h \times \left(1 - \frac{1}{n_{21}}\right)$

10. એક પાતળા કાચના સમતલ બહિર્ગોળ લેન્સ માટે વક્રતાત્રિજ્યા 20 cm હોય, તો તેની કેન્દ્રલંબાઈ .... cm થશે. લેન્સના દ્રવ્યનો વક્રીભવનાંક (n) 1.5 છે અને તેને હવામાં રાખવામાં આવેલ છે.
(A) 20 (B) 40 (C) 60 (D) 80

Hint : હવા-કાચના લેન્સ માટે, $\frac{-1}{u} + \frac{n}{v} = \frac{1}{f} = \frac{(n-1)}{R}$

11. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે કાટકોણ પ્રિઝમ માટે કિરણ-1 એ આપાતકિરણ છે, જ્યારે કિરણ-2 નિર્ગમનકિરણ છે, તો પ્રિઝમના દ્રવ્યનો વક્રીભવનાંક .... થશે.



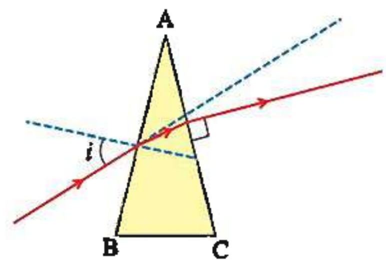
(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(C) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (D) $\sqrt{2}$

12. 1.5 વક્રીભવનાંક ધરાવતા સમબાજુ પ્રિઝમની બાજુ પર લંબરૂપે કિરણ આપાત થાય છે. તો વિચલન કોણ .... થશે.
(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 75°

Hint : $\sin C = \frac{1}{n}$ નો આ ઘટના સમજવા ઉપયોગ કરો.

13. ખૂબ નાના પ્રિઝમકોણ A ધરાવતા પ્રિઝમની સપાટી પર કિરણ i જેટલા કોણે આપાત કરવામાં આવે ત્યારે નિર્ગમનકિરણ વિરુદ્ધ સપાટી પરથી લંબરૂપે નિર્ગમન પામે છે. જો પ્રિઝમના દ્રવ્યનો વક્રીભવનાંક μ હોય, તો આપાતકોણ iનું મૂલ્ય ....ની નજીકનું હશે.



(A) $\frac{A}{\mu}$ (B) $\frac{\mu A}{2}$

(C) $\frac{A}{2\mu}$ (D) μA

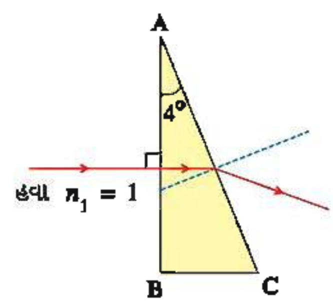
Hint : બાજુની આકૃતિનો ઉપયોગ કરો.

14. એક અંતર્ગોળ અરીસાની અક્ષ પર b લંબાઈની રેખીય વસ્તુ મૂકેલી છે. વસ્તુનો અરીસા તરફનો છેડો અરીસાથી u અંતરે છે. જો અરીસાની કેન્દ્રલંબાઈ f હોય, તો પ્રતિબિંબની લંબાઈ .... લગભગ હશે.

(A) $b\left(\frac{u-f}{f}\right)^2$ (B) $b\left(\frac{f}{u-f}\right)$ (C) $\left(\frac{u-f}{f}\right)$ (D) $b\left(\frac{f}{u-f}\right)^2$

[**Hint :** જરૂર જણાય ત્યાં b અવગણો.]

15. 4°નો પ્રિઝમકોણ ધરાવતા કાટકોણ પ્રિઝમ પર સમક્ષિતિજ કિરણ આપાત થાય છે. જો પ્રિઝમના માધ્યમનો વક્રીભવનાંક 1.5 હોય, તો નિર્ગમન કોણ .... થશે. બાજુની આકૃતિનો ઉપયોગ કરો.



(A) 4° (B) 6°

(D) 10° (D) 0°

16. નીચેનામાંથી કયું કારણ હીરાના ચળકાટ માટે જવાબદાર છે ?
(A) વ્યતિકરણ (B) વિવર્તન (C) પૂર્ણઆંતરિક પરાવર્તન (D) વક્રીભવન

17. બહિર્ગોળ લેન્સની બંને બાજુની વક્રતાત્રિજ્યા 15 cm અને માધ્યમનો વક્રીભવનાંક 1.5 હોય તો, લેન્સની હવાની સાપેક્ષ કેન્દ્રલંબાઈ .... cm થશે.
(A) 10 (B) 15 (C) 20 (D) 30

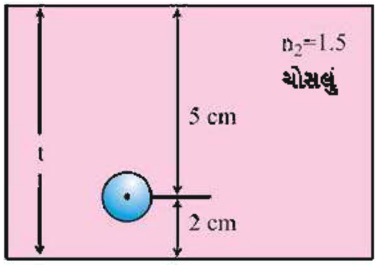
18. એક બહિર્ગોળ અરીસા વડે મળતું વસ્તુનું પ્રતિબિંબ વસ્તુ કરતાં n ગણું નાનું છે. જો અરીસાની કેન્દ્રલંબાઈ f હોય, તો વસ્તુ-અંતર .... હશે.

(A) $\frac{f}{n}$ (B) $\frac{f}{(n-1)}$ (C) $(n - 1)f$ (D) nf

19. 4 mm જાડાઈના ચોસલામાંથી સૂર્યપ્રકાશને પસાર થતાં લાગતો સમય .... sec હશે. ચોસલાના દ્રવ્યનો વક્રીભવનાંક 1.5 છે.

(A) 2×10^{-8} (B) 2×10^{8} (C) 2×10^{-11} (D) 2×10^{11}

20. 1.5 વક્રીભવનાંક ધરાવતા કાચનાં ચોસલામાં રહેલ હવાના પરપોટાની ઊંડાઈ એક બાજુથી જોતાં 5 cm અને બીજી બાજુથી જોતાં 2 cm છે, તો ચોસલાની જાડાઈ .... cm હશે.



(A) 10.5 (B) 7

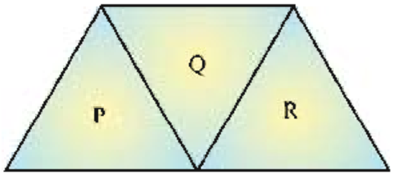
(C) 105 (D) 70

Hint : $\frac{h'}{h} = \frac{n_2}{n_1}$ નો ઉપયોગ કરો.

21. બંને બાજુ સમાન વક્રતાત્રિજ્યા ધરાવતા બહિર્ગોળ લેન્સની કેન્દ્રલંબાઈ તેની કોઈ એક બાજુની વક્રતાત્રિજ્યા જેટલી છે, તો લેન્સના દ્રવ્યનો વક્રીભવનાંક .... હશે.

(A) $\frac{4}{3}$ (B) 1.5 (C) 2.5 (D) 0.8

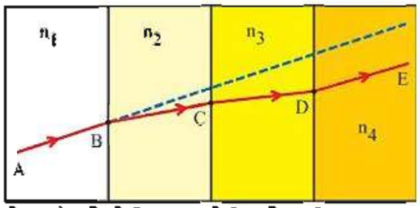
22. એક પ્રકાશકિરણ સમબાજુ પ્રિઝમ Pથી લઘુતમ વિચલનકોણની સ્થિતિમાં છે. હવે પ્રિઝમ Pના જ દ્રવ્યથી બનેલા અને પ્રિઝમ P જેવા જ બીજા બે પ્રિઝમો Q અને Rને આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ ગોઠવો. આ સંજોગોમાં હવે પ્રકાશકિરણ .... અનુભવશે. (P, Q અને Rનાં પરિમાણ સમાન છે.)



(A) વધારે વિચલન (B) વિચલન નહીં

(C) P જેટલું જ વિચલન (D) પૂર્ણઆંતરિક પરાવર્તન

23. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ચાર માધ્યમોના વક્રીભવનાંક અનુક્રમે n_1, n_2, n_3 અને n_4 છે. AB આપાતકિરણ છે. નિર્ગમનકિરણ DE જો આપાતકિરણ ABને સમાંતર હોય તો.........



(A) $n_1 = n_2$ (B) $n_2 = n_3$

(C) $n_3 = n_4$ (D) $n_4 = n_1$

24. જો એસ્ટ્રોનોમિકલ ટેલિસ્કોપની ટ્યૂબ-લંબાઈ 105 cm અને સામાન્ય સ્થિતિમાં મોટવશક્તિ 20 હોય, તો ઓબ્જેક્ટિવની કેન્દ્રલંબાઈ .... cm હશે.

(A) 10 (B) 20 (C) 25 (D) 100

[**Hint :** ટેલિસ્કોપની ઑપ્ટિકલ લંબાઈ, $L \geq f_0 + f_e$ સૂત્ર વડે અપાય છે.]

25. સવારના સમયે ઊર્ધ્વ દિશામાંનું આકાશ બ્લ્યુ રંગનું દેખાય છે. કારણ કે ....

(A) લાલ રંગનું શોષણ થઈ જાય છે.

(B) બ્લ્યુ પ્રકાશનું સૌથી વધારે પ્રમાણમાં પ્રકીર્ણન થાય છે.

(C) સવારના સમયે સૂર્ય ફક્ત બ્લ્યુ પ્રકાશનું ઉત્સર્જન કરે છે.

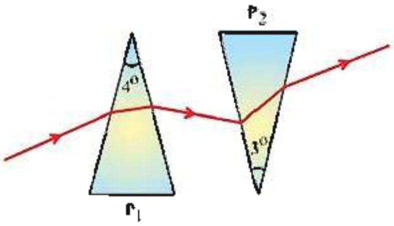
(D) બ્લ્યુ પ્રકાશનું આકાશ દ્વારા શોષણ થાય છે.

26. આંખની ખામી કે જેમાં એક સમતલમાં રહેલ વસ્તુને સ્પષ્ટ રીતે જોઈ શકાય છે, પરંતુ બીજા સમતલમાં રહેલી વસ્તુને નહીં, તેને .... કહે છે.
(A) એસ્ટિગ્મેટિઝ્મ (B) વિકૃતિ (C) લઘુદૃષ્ટિ (માયોપિયા) (D) ગુરુદૃષ્ટિ (હાઇપરમાયોપિયા)

27. રામન પ્રકિર્ણનમાં જોવા મળતી સ્ટોક્સ અને એન્ટીસ્ટોક્સ વર્ણપટરેખાઓ પ્રકાશના ....ને આભારી છે.
(A) પરાવર્તન (B) સ્થિતિસ્થાપક પ્રકીર્ણન
(C) અસ્થિતિસ્થાપક પ્રકીર્ણન (D) વિભાજન

28. 10 cm કેન્દ્રલંબાઈ ધરાવતો બહિર્ગોળ લેન્સનો સાદા માઇક્રોસ્કોપ તરીકે ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. જ્યારે વસ્તુનું પ્રતિબિંબ અનંત અંતરે મળે, ત્યારે મોટવણી .... થશે. સામાન્ય દૃષ્ટિ માટે Near point અંતર 25 cm લો.
(A) 1.0 (B) 2.5 (C) 0.4 (D) 25

29. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે બે પ્રિઝમો P_1 અને P_2નો સંયુક્ત રીતે વિચલન વગર વિભાજન કરવા માટે ઉપયોગ લેવામાં આવે છે. પ્રિઝમ P_1 માટે, પ્રિઝમકોણ 4° અને વક્રીભવનાંક 1.54 છે. પ્રિઝમ P_2 માટે પ્રિઝમકોણ 3° હોય, તો તેનો વક્રીભવનાંક .... થશે.



(A) 1.72 (B) 1.5
(C) 2.4 (D) 0.58

Hint : પાતળા પ્રિઝમ માટે $\delta = A(n - 1)$

30. એક ગોળાકાર બહિર્ગોળ સપાટી વસ્તુ અને પ્રતિબિંબ વચ્ચેના અંતરને અલગ પાડે છે. તેઓનો અનુક્રમે વક્રીભવનાંક 1.0 અને 1.5 છે. બહિર્ગોળ સપાટીની વક્રતાત્રિજ્યા 25 cm હોય, તો તેનો પાવર .... D થશે.
(A) 13 (B) 33 (C) 3.3 (D) 1.3

[**Hint :** $\frac{-n_1}{u} + \frac{n_2}{v} = \frac{n_2 - n_1}{R}$ અને $P = \frac{1}{f}$]

31. 3 cm જાડા અને $n = 2$ જેટલો વક્રીભવનાંક ધરાવતા સમતલ ચોસલા પર લંબ સાથે 30°નો ખૂણો બનાવે તે રીતે પ્રકાશકિરણ આપાત થાય છે. આ કિસ્સામાં લેટરલ શિફ્ટ .... cm થશે.
(A) 0.835 (B) 8.35 (C) 1.5 (D) 1.197

Hint : અત્રે આપાતકોણ θ_1 નાનો ના હોવાથી, લેટરલ શિફ્ટ નીચેના સૂત્રની મદદથી ગણાશે.

$$x = \frac{t\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\cos\theta_2}$$

જવાબો

1. (C)	2. (B)	3. (C)	4. (B)	5. (D)	6. (B)
7. (B)	8. (D)	9. (C)	10. (B)	11. (D)	12. (C)
13. (D)	14. (D)	15. (B)	16. (C)	17. (B)	18. (C)
19. (C)	20. (A)	21. (B)	22. (C)	23. (D)	24. (D)
25. (B)	26. (A)	27. (C)	28. (B)	29. (A)	30. (D)
31. (A)					

નીચે આપેલ પ્રશ્નોના જવાબ ટૂંકમાં આપો :

1. પેરેક્સિઅલ કિરણો એટલે શું ?
2. સ્નેલનો નિયમ લખો.
3. પૂર્ણ આંતરિક પરાવર્તન એટલે શું ?
4. 1.67 જેટલો વક્રીભવનાંક ધરાવતા કાચના ચોસલા પર લંબરૂપે પ્રકાશ આપાત કરવામાં આવે છે. આપાત પ્રકાશની સરખામણીમાં પરાવર્તન પામતા પ્રકાશની પ્રતિશત તીવ્રતા શોધો.
5. ઑપ્ટિકલ ફાઇબરમાં ક્લેડિંગનો ઉપયોગ લખો.

6. ઑપ્ટિકલ કેન્દ્રની વ્યાખ્યા આપો.
7. લેન્સ-મેકર્સના સૂત્ર કરતા ન્યૂટનમાં સૂત્રના ઉપયોગનો એક ફાયદો જણાવો.
8. પ્રારંભમાં બે લેન્સોને એકબીજાના સંપર્કમાં રાખવામાં આવે છે. હવે, જો તેમને d જેટલા અંતરે અલગ કરવામાં આવે, તો આ સંયુક્ત તંત્રની કેન્દ્રલંબાઈમાં શું ફેરફાર થશે ?
9. અનુબદ્ધ કેન્દ્રો (Conjugate Foci) એટલે શું ?
10. નજીકબિંદુ (Near Point) અથવા Distance of Most Distinct Vision વ્યાખ્યાયિત કરો.
11. Rods કોષોનું રેટિનામાં કાર્ય જણાવો.

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. બહિર્ગોળ અરીસા માટે કેન્દ્રલંબાઈ અને વક્રતાત્રિજ્યા વચ્ચેનો સંબંધ તારવો.
2. અંતર્ગોળ અરીસા માટે અરીસાનું સૂત્ર તારવો.
3. અરીસા માટે લેટરલ મૅગ્નિફિકેશનની વ્યાખ્યા આપો. કાર્તેઝિયન સંજ્ઞાપ્રણાલીનો ઉપયોગ કરી વસ્તુ-અંતર અને પ્રતિબિંબ વચ્ચેનો સંબંધ તારવો.
4. લંબચોરસ ચોસલા માટે લેટરલ શિફ્ટ માટેનું સૂત્ર તારવો.
5. સાચી ઊંડાઈ અને આભાસી ઊંડાઈ વચ્ચેનો સંબંધ સમજાવો.
6. પૂર્ણઆંતરિક પરાવર્તનની વ્યાખ્યા આપો અને સમજાવો.
7. કેવી રીતે કાટકોણ પ્રિઝમો પૂર્ણપરાવર્તક તરીકે ઉપયોગી છે ?
8. ઑપ્ટિકલ ફાઇબરમાં પૂર્ણઆંતરિક પરાવર્તનની ઉપયોગિતા સમજાવો.
9. ગોળીય વક્રસપાટી માટે $\frac{-n_1}{u} + \frac{n_2}{v} = \frac{(n_2 - n_1)}{R}$ સૂત્ર તારવો.
10. પાતળા લેન્સ દ્વારા પ્રતિબિંબની રચના કેવી રીતે થાય છે તે સમજાવો અને $\frac{-1}{u} + \frac{1}{v} = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_1}\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$ સૂત્ર તારવો.
11. પાતળા લેન્સ માટે લેન્સ-મેકર્સનું સૂત્ર તારવો.
12. પાતળા લેન્સ માટે ન્યૂટનનું સૂત્ર તારવો.
13. સંલગ્નિત બિંદુઓ અને સંલગ્નિત અંતરો પર સમજાવો લખો.
14. લેન્સ માટે લેટરલ મૅગ્નિફિકેશનની વ્યાખ્યા આપો. તેનો એક્સ્ટ્રા ફોકલ-અંતરો સાથેનો સંબંધ મેળવો.
15. સંપર્કમાં રહેલા બે પાતળા લેન્સના સંયોજન માટે અસરકારક કેન્દ્રલંબાઈ માટેનું સૂત્ર તારવો.
16. બહિર્ગોળ અરીસાની કેન્દ્રલંબાઈ માટેનું $f = \frac{1}{2}(v - d)$ સૂત્ર બહિર્ગોળ અરીસા અને બહિર્ગોળ લેન્સના સંયોજન પરથી તારવો.
17. સમબાજુ ત્રિકોણ માટે $\delta = i + e - A$ સૂત્ર તારવો.
18. સમબાજુ ત્રિકોણ માટેના $\delta = i + e - A$ સૂત્રનો ઉપયોગ કરી પ્રિઝમના દ્રવ્યના વક્રીભવનાંક માટેનું સૂત્ર તારવો.
19. રેલે-પ્રકીર્ણન પર નોંધ લખો.
20. પ્રકીર્ણન એટલે શું ? રામન પ્રકીર્ણન સમજાવો.
21. સાદા માઇક્રોસ્કોપ માટે મોટવણીનું સૂત્ર તારવો.
22. સંયુક્ત માઇક્રોસ્કોપ માટે યોગ્ય આકૃતિની મદદથી મોટવણીનું સૂત્ર મેળવો.
23. વક્રીભવન પ્રકારના ટેલિસ્કોપ પર નોંધ લખો.
24. પરાવર્તક ટેલિસ્કોપ એટલે શું ? વક્રીભવન પ્રકારના ટેલિસ્કોપ કરતાં પરાવર્તક ટેલિસ્કોપના ફાયદાઓ લખો.
25. માનવઆંખની એસ્ટિગ્મેટિઝમ ખામીની ચર્ચા કરો.

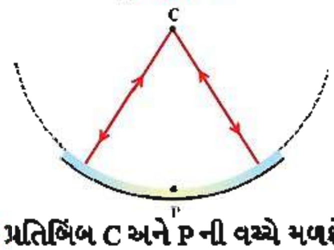
નીચેના દાખલા ગણો :

1. અંતર્ગોળ અરીસાની મુખ્ય અક્ષ પર રહેલી એક વસ્તુ v_0 જેટલા નિયમિત વેગથી અંતર્ગોળ અરીસા તરફ જઈ રહેલ છે, તો વસ્તુ જ્યારે અરીસાથી u અંતરે હોય ત્યારે તેના પ્રતિબિંબનો વેગ $v_i = \left(\frac{R}{2u-R}\right)^2 v_0$; છે, તેમ સાબિત કરો. જ્યાં, R અરીસાની વક્રતાત્રિજ્યા છે.

2. 10 cm કેન્દ્રલંબાઈવાળા બહિર્ગોળ અરીસા વડે એકરેખીય વસ્તુનું પ્રતિબિંબ, વસ્તુની લંબાઈ કરતાં ચોથા ભાગનું મળે છે, તો વસ્તુ અને પ્રતિબિંબ વચ્ચેનું અંતર શોધો. રેખીય વસ્તુ અક્ષ પર અક્ષને લંબરૂપે મૂકેલ છે.

[જવાબ : 37.5 cm]

3. એક અંતર્ગોળ અરીસો એક ટેબલ પર એવી રીતે મૂક્યો છે કે જેથી તેની અક્ષ શિરોલંબ ઉપર તરફ રહે. P અને C અનુક્રમે અરીસાનાં ધ્રુવ અને વક્રતાકેન્દ્ર છે. એક બિંદુવત્ વસ્તુને C પર મૂકતાં તેનું સાચું પ્રતિબિંબ C પાસે રચાય છે. હવે જો અરીસામાં પાણી ભરવામાં આવે, તો હવે પ્રતિબિંબના સ્થાન અંગે શું કહી શકાય ?

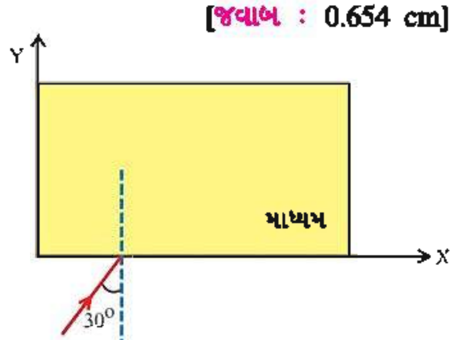


[જવાબ : પ્રતિબિંબ C અને P ની વચ્ચે મળશે]

4. એક અંતર્ગોળ અરીસાના ધ્રુવ પાસે સૂર્યનો વ્યાસ 0.5°નો કોણ આંતરે છે. અરીસાની વક્રતાત્રિજ્યા 1.5 m છે, તો અરીસાથી મળતા સૂર્યના પ્રતિબિંબનો વ્યાસ શોધો. સૂર્યનું અરીસાથી અંતર અનંત ગણો.

[જવાબ : 0.654 cm]

5. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે એક કિરણ 30° જેટલા આપાતકોણે આપાત થઈ માધ્યમમાં આગળ વધે છે. માધ્યમનો વક્રીભવનાંક $n(y) = 1.5 - ky$ વડે આપવામાં આવે છે, તો yના કયા મૂલ્ય માટે કિરણ સમક્ષિતિજ બની જશે ? અહીં y મીટરમાં છે અને $k = 0.25 m^{-1}$ એક અચળાંક છે. [જવાબ : y = 3 m]



6. એક પાતળું પ્રકાશ-કિરણપુંજ 1.6 વક્રીભવનાંક ધરાવતી કાચની તકતી સપાટીના લંબ સાથે 53°નો કોણ બનાવે છે, તો તેના નિર્ગમનબિંદુ આગળ લેટરલ શિફ્ટ માપો, જ્યાં તકતીની જાડાઈ 20 mm છે. sin 53° = 0.8 લો.

[જવાબ : 9 mm]

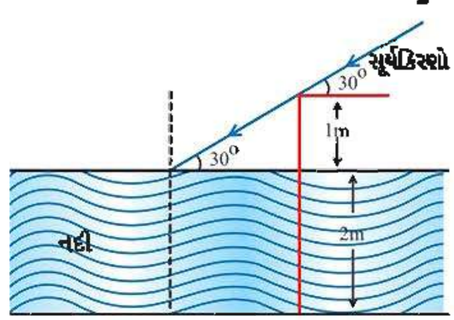
7. અંતર્ગોળ અરીસા દ્વારા મળતું પ્રતિબિંબ વસ્તુ કરતાં 4 ગણું મોટું છે. હવે જો વસ્તુને અરીસાથી 3 cm દૂર ખસેડવામાં આવે, તો પ્રતિબિંબ વસ્તુ કરતાં 3 ગણું મોટું બને છે, તો અરીસાની કેન્દ્રલંબાઈ શોધો.

[જવાબ : 36 cm]

8. એક ખાસ ઑપ્ટિકલ ફાઇબરના દ્રવ્યનો વક્રીભવનાંક 1.75 છે. આ ફાઇબરમાં પૂર્ણઆંતરિક પરાવર્તન મેળવવા માટે વધારેમાં વધારે કેટલા ખૂણે કિરણને આપાત કરી શકાય ? ફાઇબરની બહારનું માધ્યમ હવા લો. હવા માટે વક્રીભવનાંક 1.0 છે.

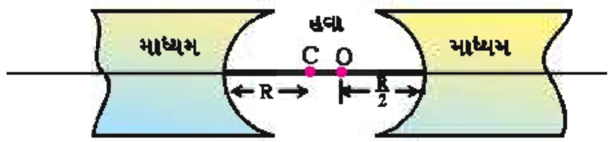
[જવાબ : $\frac{\pi}{2}$]

9. 2 m ઊંડાઈની એક નદીના પાણીમાં લેવલ માપવા માટેનો સળિયો (લેવલ મેઝરિંગ પોસ્ટ) નદીમાં શિરોલંબ એવી રીતે રાખ્યો છે કે જેથી તેનો 1 m જેટલો ભાગ પાણીની બહાર રહે. આ વખતે સૂર્ય ક્ષિતિજ સાથે 30°નો કોણ બનાવતી દિશામાં છે, તો નદીના તળિયે આ સળિયાના પડછાયાની લંબાઈ કેટલી હશે ? પાણીનો વક્રીભવનાંક $\frac{4}{3}$ છે. (આકૃતિ જુઓ.) [જવાબ : 3.44 m]



10. $\frac{5}{3}$ જેટલો વક્રીભવનાંક ધરાવતા એક પ્રવાહીને એક વાસણમાં ભરેલું છે. આ વાસણના તળિયે એક બિંદુવત્ પ્રકાશ-ઉદ્ગમ મૂકેલ છે. એક અવલોકનકાર આ પ્રકાશ-ઉદ્ગમને શિરોલંબ દિશામાંથી જુએ છે. પ્રવાહીની સપાટીથી ઉદ્ગમની શિરોલંબ દિશામાં એક અપારદર્શક તકતી એવી રીતે મૂકી છે કે જેથી તેનું કેન્દ્ર પ્રકાશ ઉદ્ગમની બરાબર ઉપર તરફ આવે. હવે, આ પ્રવાહીને ધીમે-ધીમે વાસણના તળિયેથી બહાર કાઢવામાં આવે છે, તો બહારથી જોતાં ઉદ્ગમ ન જોઈ શકાય તે માટે પ્રવાહીની વધારેમાં વધારે ઊંચાઈ કેટલી રાખવી જોઈએ ? તકતીની ત્રિજ્યા 1 cm છે. [જવાબ : 1.33 cm]

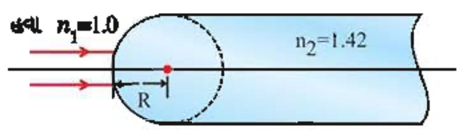
11. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે સમાન વક્રીભવનાંક (1.5) અને સમાન વક્રતાત્રિજ્યાઓ (R) ધરાવતી બે અંતર્ગોળ વક્રીભવનકારક સપાટીઓને એકબીજાની સામે હવામાં (n = 1.0) મૂકેલ છે.



એક બિંદુવત્ વસ્તુ (O)ને કોઈ એક વક્રસપાટીના શિરોબિંદુ અને કેન્દ્રની બરાબર વચ્ચે મૂકવામાં આવે છે, તો આ જ વસ્તુનું કોઈ એક સપાટી વડે રચાતું પ્રતિબિંબ O' અને બીજી સપાટી વડે રચાતા પ્રતિબિંબ O" વચ્ચેનું અંતર Rના પદમાં શોધો. [Hint : $\frac{-n_1}{u} + \frac{n_2}{v} = (n_2 - n_1)\frac{1}{R}$ નો ઉપયોગ બંને વક્રીભવનકારક સપાટીઓ માટે કરો.] [જવાબ : 0.114 R]

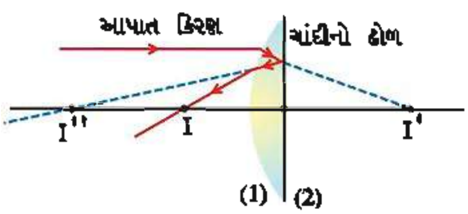
12. (1) જો $f = +\ 0.5m$ હોય, તો લેન્સનો પાવર કેટલો હશે ?
(2) એક બહિર્ગોળ લેન્સની ગોળીય સપાટીઓની ત્રિજ્યાઓ 10 cm અને 15 cm હોય અને તેની કેન્દ્રલંબાઈ 12 cm હોય, તો લેન્સના દ્રવ્યનો વક્રીભવનાંક કેટલો હશે ?
(3) એક બહિર્ગોળ લેન્સની હવામાં કેન્દ્રલંબાઈ 20 cm છે, તો પાણીમાં તેની કેન્દ્રલંબાઈ કેટલી હશે ? પાણીનો વક્રીભવનાંક 1.33 અને લેન્સના દ્રવ્યનો વક્રીભવનાંક 1.5 લો.
[જવાબ : (1) 2 D (2) 1.5 (3) 78.2 cm]

13. 1.42 વક્રીભવનાંક ધરાવતા દ્રવ્યમાંથી બનાવેલ એક નળાકારીય સળિયાનો એક છેડો અર્ધગોળાકાર છે. એક સાંકડું



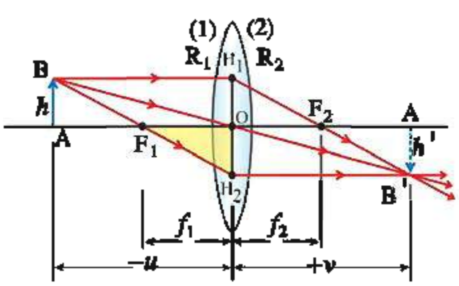
સમાંતર કિરણજૂથ આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે આપાત કરવામાં આવે, તો આ કિરણજૂથ અર્ધગોળીય સપાટીથી કેટલા અંતરે કેન્દ્રિત થશે ? [જવાબ : 3.38 R]

14. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે 20 cmની કેન્દ્રલંબાઈ ધરાવતા અને સમતલ બહિર્ગોળ (Plano Convex) લેન્સની



સમતલ સપાટી પર ચાંદીનો ઢોળ ચઢાવીને પરાવર્તક બનાવવામાં આવી છે, તો આ તંત્ર માટેની નવી કેન્દ્રલંબાઈ શોધો.
[જવાબ : 10 cm]

15. પાતળા લેન્સ માટે કે જેની પ્રથમ મુખ્ય કેન્દ્રલંબાઈ (f_1) અને દ્વિતીય મુખ્ય કેન્દ્રલંબાઈ (f_2) હોય તેવો કિસ્સો



વિચારો. મોટવણી માટેનું f_1 અને f_2નાં પદમાં, સૂત્ર $\left(\frac{v - f_2}{f_1}\right)$ મેળવો. વળી, ખાસ કિસ્સા $f_1 = f_2 = f$ માટે, ગૉસનું સમીકરણ મોટવણીના સમીકરણ પરથી તારવો. કાર્તેઝિયન સંજ્ઞાપ્રણાલીનો ઉપયોગ કરો.

[Hint : આકૃતિમાં ΔBH_1H_2 અને ΔF_1OH_2 સમરૂપ છે અને $\Delta B'H_2H_2$ અને ΔF_2OH_1 સમરૂપ છે.]

•

7

વિકિરણ અને દ્રવ્યનો દ્વૈત-સ્વભાવ

7.1 પ્રસ્તાવના (Introduction)

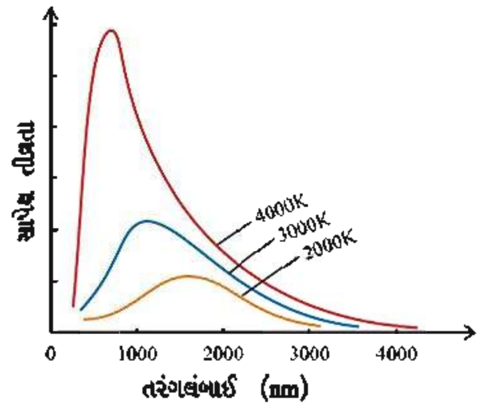
ઓગણીસમી સદીના અંતે બધા જ ભૌતિકશાસ્ત્રીઓ માનતા હતા કે દ્રવ્યના કણોની ગતિ માટેના ન્યૂટનના નિયમો, થરમૉડાઇનેમિક્સ અને વિદ્યુતચુંબકીય તરંગો માટેનો મેક્સવેલનો વાદ ભૌતિકશાસ્ત્રમાં પૂર્ણ અને મૂળભૂત નિયમો છે. આ બધા ભેગા મળીને 'પ્રચલિત યંત્રશાસ્ત્ર' (Classical Mechanics) રચે છે. પ્રચલિત યંત્રશાસ્ત્ર મુખ્યત્વે સ્થૂળ (macroscopic) ઘટનાઓ માટે વપરાય છે. આ પ્રચલિત વાદને લાગતી વળગતી મોટા ભાગની ઘટનાઓનું કાં તો પ્રત્યક્ષ રીતે અવલોકન કરી શકાય છે અથવા તો પ્રમાણમાં સરળ એવાં સાધનો દ્વારા તેમનું અવલોકન શક્ય છે. આમ, પ્રચલિત ભૌતિકશાસ્ત્રની દુનિયા અને આપણી સમજણશક્તિ વચ્ચે નજીકનો સંબંધ છે. લગભગ બધા જ સ્થૂળ કોયડાઓને પ્રચલિત યંત્રશાસ્ત્રના નિયમોની મદદથી સંતોષકારક રીતે ઉકેલી શકાય છે, અને તેથી જ વૈજ્ઞાનિકોએ તેમનું ધ્યાન પરમાણુ અને તેથી પણ નાના કણોના (એટલે કે, સૂક્ષ્મ અને અતિ સૂક્ષ્મ) તંત્રના અભ્યાસ તરફ વાળ્યું. સ્થૂળ તંત્રોથી વિરુદ્ધ, આ સૂક્ષ્મ તંત્રોનું પ્રત્યક્ષ અવલોકન શક્ય ના હોવાથી, એવા પ્રયોગોનો ઉલ્લેખ અત્રે જરૂરી છે કે જેના કારણે સૂક્ષ્મ કણોને લાગતા કોયડાઓમાં રસ અને કુતૂહલ પેદા થયાં.

કૅથોડ કિરણો પર વિદ્યુતક્ષેત્રની અસરનો Jean Perin (1895)નો અભ્યાસ, અને ઋણ વિદ્યુતભારિત કણોના પ્રાયોગિક અવલોકને ઇલેક્ટ્રૉનની શોધ કરી. થોડા જ સમયબાદ, જે. જે. થોમસને ઇલેક્ટ્રૉન માટે વિદ્યુતભાર અને દળનો ગુણોત્તર ($\frac{e}{m} = 1.756 \times 10^{11}$ C/kg) શોધ્યો, જ્યારે મિલિકાને (1909) ઇલેક્ટ્રૉન પરનો વિદ્યુતભાર ($e = 1.602 \times 10^{-19}$ C) નક્કી કર્યો. એવું પણ પ્રસ્થાપિત થયું કે દ્રવ્યનો નાનામાં નાનો મૂળભૂત ઘટક પરમાણુ છે, અને તે વિદ્યુતકીય તટસ્થ છે. વિલિયમ રૉન્જને (1856) અકસ્માતે ક્ષ-કિરણો (X-rays)ની શોધ કરી અને થોડા જ વર્ષો બાદ હેન્રી બેક્વેરેલ (1896) અને મેડમ ક્યુરિ (1898)એ જુદાં-જુદાં સંયોજનો પરથી રેડિયો-ઍક્ટિવિટીની શોધ કરી.

આવા કેટલાક પ્રયોગોએ બીજા શ્રેણીબદ્ધ પ્રયોગો, કે જેમનાં પરિણામો પ્રચલિત યંત્રશાસ્ત્રના નિયમો દ્વારા સમજાવી શકાયા નહોતાં, તેમને સમજાવવા માટેનો પાયો નાંખ્યો. ઘન પદાર્થોની અને દ્વિ-પારમાણ્વિક વાયુઓની અતિ નીચા તાપમાને વિશિષ્ટ ઉષ્મા (specific heats) અને ઘન-ધાતુ પદાર્થોની ઊંચી વિદ્યુતવાહકતા (conductivities), પરમાણુનું બંધારણ અને જુદાં-જુદાં તત્ત્વોની ઉત્સર્જન અને શોષણની લાક્ષણિક તરંગલંબાઈઓ, ફોટો-ઇલેક્ટ્રિક અસર અને કાળા પદાર્થના વિકિરણ જેવા મુખ્ય કોયડાઓ પ્રચલિત યંત્રશાસ્ત્રની મદદથી સમજી શકાયા નહીં.

ઉપર્યુક્ત અવલોકનો અને બીજાં કેટલાંક પ્રયોગિક સત્યોમાં જોવા મળતા આ દેખીતા વિરોધાભાસનું નિરાકરણ કરવા દ્રવ્ય અને વિકિરણ માટે આપણી સામાન્ય સૂઝ અને કલ્પનાથી તદ્દન જુદો જ વિચાર જરૂરી હતો.

ઐતિહાસિક રીતે, કેવી રીતે આવો નવો વિચાર (કલ્પના) ઉદ્ભવ્યો, તેને સમજવા માટે આપણે કાળા પદાર્થના વિકિરણને રજૂ કરવા નડતી મુશ્કેલીઓનો અભ્યાસ કરીશું.



આકૃતિ 7.1 તરંગલંબાઈના વિધેય તરીકે સાપેક્ષ તીવ્રતા

કાળા પદાર્થનું વિકિરણ : ઈ. સ. 1897માં લ્યુમર અને પ્રિંગશેમે સંપૂર્ણ કાળા પદાર્થ અથવા કેવિટી વિકિરણમાં જુદી-જુદી તરંગલંબાઈઓને અનુરૂપ તીવ્રતાઓ (અર્થાત્ તીવ્રતાની વહેંચણી) માપી, જે આકૃતિ 7.1માં દર્શાવી છે.

તે સમયે વૈજ્ઞાનિકો વિદ્યુતચુંબકીય વાદ અને થરમોડાઇનેમિક્સના નિયમોની મદદથી ઉપર્યુક્ત આલેખોનું વર્ણન કરવા મથતા હતા.

વીને થરમોડાઇનેમિક્સના નિયમો અને વિદ્યુતચુંબકીય વાદનો ઉપયોગ કરીને ઊર્જાઘનતાનું સૂત્ર નીચે મુજબ આપ્યું :

$u_\lambda = \frac{1}{\lambda^5} \cdot exp\left(-\frac{b}{\lambda \cdot T}\right)$; જ્યાં b એ અચળાંક અને T નિરપેક્ષ તાપમાન છે. આ સૂત્ર નાની તરંગલંબાઈ માટેનાં પ્રાયોગિક પરિણામો સમજાવી શકે છે, પરંતુ મોટી તરંગલંબાઈ માટેનાં ઊર્જા-વિતરણને સમજાવી શકતું નથી.

રેલે અને જીન્સે વિકિરણને વિદ્યુતચુંબકીય તરંગો તરીકે લઈ તરંગલંબાઈના નાના ગાળાઓમાં સ્થિત તરંગોની સંખ્યા (normal modes of vibration) નક્કી કરી. દરેક નૉર્મલ મોડ એ એક હાર્મોનિક દોલકને અનુરૂપ હોય છે. હાર્મોનિક દોલક માટે બે મુક્તતાનાં અંશો (degrees of freedom) હોવાથી, તેની ઊર્જા $k_B T$ થશે. અત્રે, k_B એ બોલ્ટ્ઝમન્ અચળાંક છે. ઉપર્યુક્ત તર્ક પરથી તેમણે ઊર્જાઘનતાનું નીચે મુજબનું સૂત્ર મેળવ્યું

$$u_\lambda = \frac{8\pi k_B T}{\lambda^4} \tag{7.1.1}$$

આ સૂત્ર ફક્ત ઊર્જા-વિતરણના મોટી તરંગલંબાઈવાળા ભાગને જ સમજાવી શકે છે. વળી, શક્ય હોય તેવી દરેક આવૃત્તિને સમાવતી કુલ ઊર્જાઘનતા (u_{tot})નું સૂત્ર સ્ટીફન-બોલ્ટ્ઝમનના સૂત્ર ($u_{tot} = \sigma T^4$; જ્યાં σ = સ્ટીફન-બોલ્ટ્ઝમનનો અચળાંક)ને અનુસરતું હોવું જોઈએ. પરંતુ સમીકરણ (7.1.1)નો ઉપયોગ કરીને જ્યારે કુલ ઊર્જાઘનતા ગણવામાં આવે, અર્થાત્ $u_{tot} = \int_0^\infty \frac{8\pi k_B T}{\lambda^4} d\lambda$, તો તે અનંત ($\infty$) જવાબ આપે છે ! આ હકીકતને ultraviolet catastrophe કહે છે. આનાથી ઊલટું, વીનના નિયમ મુજબ (λ_{max}). T = *અચળાંક (b)*થાય. (7.1.2)

અત્રે, λ_{max} એ ઊર્જા-વિતરણમાં જે-તે તાપમાને મહત્તમ તીવ્રતાને અનુરૂપ તરંગલંબાઈ છે.

આમ, થરમોડાઇનેમિક્સ અને વિદ્યુતચુંબકીય વાદ પર આધારિત તમામ પ્રયત્નો કાળા પદાર્થના વિકિરણ માટેના સમગ્ર ઊર્જા-વિતરણ વક્રોને સમજાવવામાં નિષ્ફળ નીવડ્યા.

7.2 વિકિરણ અંગે પ્લાન્કનું અનુમાન

ઈ. સ. 1900માં મેક્સ પ્લાન્કે (Max Planck) બર્લિન એકેડમી ઑફ સાયન્સ સમક્ષ, કાળા પદાર્થ અથવા કેવિટી વિકિરણ માટેના ઊર્જા-વિતરણવક્રોની સમજૂતી આપી.

તેમણે સૂચવ્યું કે **"વિકિરણનું ઉત્સર્જન કરતી કેવિટીની દીવાલો વિદ્યુત-ડાઈપોલ દોલકોની બનેલી છે. આ જુદાં-જુદાં દોલકો તેમના તાપમાન અનુસાર જુદી-જુદી આવૃત્તિથી દોલનો કરે છે અને પોતાનાં દોલનોની આવૃત્તિ જેટલી જ આવૃત્તિવાળા વિકિરણનું ઉત્સર્જન કરે છે."**

હવે, પ્રચલિત ભૌતિકશાસ્ત્ર અનુસાર કોઈ પણ દોલક ગમે તેટલી ઊર્જા ધરાવી શકે છે. અર્થાત્ દોલક સતત રીતે બદલાઈ શકે તેવી ગમે તે (શૂન્યથી માંડીને મહત્તમ શક્ય હોય તેવી બધી જ) ઊર્જા ધારણ કરી શકે છે.

અહીં પ્લાન્કે એવું ક્રાંતિકારી સૂચન કર્યું કે **આ સૂક્ષ્મ દોલકો, પ્રચલિત યંત્રશાસ્ત્ર દ્વારા માન્ય ગમે તે ઊર્જા ધરાવી શકે નહીં.** જો આવા દોલકોના દોલનની આવૃત્તિ f હોય, તો તે

$$E_n = nhf \tag{7.2.1}$$

જેટલી ઊર્જાઓ ધરાવી શકે છે. જ્યાં $n = 1, 2, 3$ .... અને h ને પ્લાન્કનો વિશ્વ-નિયતાંક (universal constant) કહે છે. આમ, પ્લાન્કના મત અનુસાર, આવા સૂક્ષ્મ દોલકની ઊર્જા તેમના દોલનની આવૃત્તિ પર આધાર રાખે છે. આ પ્રચલિત દોલક કરતાં તદ્દન વિરોધાભાસ છે કે જેની ઊર્જા, જાણીતા સમીકરણ $\frac{1}{2}kA^2$ અનુસાર, તેના કંપવિસ્તાર ઉપર આધાર રાખે છે. અહીં, k એ બળઅચળાંક અને A કંપવિસ્તાર છે.

સમીકરણ (7.2.1) એ પણ સૂચવે છે કે f આવૃત્તિ ધરાવતા દોલકની ઊર્જા hf, $2hf$, $3hf$, ..., વગેરે હોઈ શકે છે. પરંતુ તે $0.1\ hf$, $\frac{1}{2}hf$, $0.06hf$ જેવી અપૂર્ણાંક ઊર્જાઓ ધારણ કરી શકે નહીં. આમ, સૂક્ષ્મ દોલકની ઊર્જા hf ના પૂર્ણ ગુણાંકમાં જ હોઈ શકે. બીજા શબ્દોમાં, f આવૃત્તિ ધરાવતા દોલકની ઊર્જાનો નાનામાં નાનો જથ્થો (quantum) 'hf' થશે. આ નાનામાં નાના ઊર્જાના 'બંડલ' અથવા 'પૅકેટ' અથવા 'જથ્થા'ને **ફોટોન (photon)** કહે છે, જ્યારે દોલક f આવૃત્તિવાળા વિકિરણનું ઉત્સર્જન કરે છે, ત્યારે તેની ઊર્જામાં hfના ગુણાંકમાં જ ઘટાડો થાય છે અને hfના જથ્થામાં જ ઊર્જા ઉત્સર્જાય છે. અર્થાત્ દોલકમાંથી ઊર્જાનું સતત ઉત્સર્જન થતું નથી. આ ઘટનાને ઊર્જાનું **ક્વૉન્ટમીકરણ (quantization)** કહે છે. (તમે વિદ્યુતભારના ક્વૉન્ટમીકરણ વિષે જાણી ગયા છો.) ધારો કે કોઈ દોલક $5\ hf$ ઊર્જા ધરાવતો હોય તેનો અર્થ એવો થાય કે તે hf જથ્થાનાં 5 quanta (ફોટોન) ધરાવે છે.

પ્લાન્કે પોતાની વિચારધારા પરથી કાળા પદાર્થના વિકિરણની સ્પેક્ટ્રલ ઉત્સર્જનશક્તિ માટેનું સૂત્ર પણ નીચે મુજબ મેળવ્યું.

$$W_f = \frac{2\pi f^2}{c^2} \times \frac{hf}{\left[e^{\left(\frac{hf}{k_B T}\right)} - 1\right]}$$

અહીં c = શૂન્યાવકાશમાં પ્રકાશની ઝડપ, T = કાળા પદાર્થનું નિરપેક્ષ તાપમાન, k_B = બોલ્ટ્ઝમનનો અચળાંક છે. (ઉપર્યુક્ત સૂત્ર ફક્ત જાણકારી માટે જ છે.)

ઉપર્યુક્ત સમીકરણ પરથી વીનના નિયમ માટે મળતી (λ_{max}) તરંગલંબાઈ માટે મહત્તમ ઊર્જા ઘનતા મળે છે. વળી, સ્ટીફન બોલ્ટ્ઝમન-અચળાંક σ, વીન-અચળાંક b (સમીકરણ (7.1.2.) જુઓ) અને બોલ્ટ્ઝમન અચળાંક k_Bના પ્રાયોગિક મૂલ્યની મદદથી પ્લાન્ક-અચળાંક (h)નું મૂલ્ય શોધી શકાય છે.

$h = 6.625 \times 10^{-34}$ J.s

એવું સાબિત કરી શકાય કે $hf \rightarrow 0$ ના લક્ષ માટે ઉપર્યુક્ત સમીકરણ, ઊર્જા-સમવિભાજનના નિયમ (law of equipartition of energy) અનુસાર મળતી ઊર્જાનું $k_B T$ જેટલું મૂલ્ય આપે છે. તેથી એવું કહી શકાય કે 'h'નું નાનું પણ અશૂન્ય મૂલ્ય એ પ્રચલિત યંત્રશાસ્ત્રની મર્યાદાનું માપ સૂચવે છે.

ફક્ત જાણકારી માટે : ક્વૉન્ટમ-અસર અનુભવવા માટે આવૃત્તિ એટલી ઊંચી રાખવી જોઈએ કે જેથી $\frac{hf}{k_B T}$ પદ લગભગ 1 જેટલું થાય. દા. ત., ઓરડાના તાપમાને (T $\approx$ 300 K), $f = 10^{12}$ Hz માટે $\frac{hf}{k_B T} \approx \frac{1}{6}$ જેટલું થાય છે. આ દર્શાવે છે કે ઓરડાના તાપમાને ક્વૉન્ટમ અસર નોંધવા માટે દોલક આટલી અથવા તેથી વધારે આવૃત્તિથી દોલન કરતા હોવા જોઈએ.

7.3 ફોટો-ઈલેક્ટ્રિક અસર

7.3.1 ઈલેક્ટ્રૉનનું ઉત્સર્જન : આપણે જાણીએ છીએ કે ધાતુઓમાં મુક્ત ઈલેક્ટ્રૉન્સ હોય છે. અલબત્ત તેઓ ધાતુની સપાટીમાંથી સામાન્ય સ્થિતિમાં બહાર છટકી શકતા નથી. તેનું કારણ એ છે કે ધાતુની સપાટી પર રહેલા ઈલેક્ટ્રૉન્સ ધાતુઓના ધન આયનને કારણે અંદર તરફ પ્રબળ આકર્ષણબળ અનુભવે છે, જ્યારે બહાર તરફ નહીંવત્ આકર્ષણબળ લાગે છે. બીજા શબ્દોમાં, સપાટીની નજીક, અંતર સાથે ઈલેક્ટ્રૉન્સની સ્થિતિ-ઊર્જા અંદરના ઈલેક્ટ્રૉન્સની સરખામણીમાં વધે છે. અર્થાત્ સપાટી પર સ્થિતિમાન બેરીયર (potential-barrier) ઉદ્‌ભવે છે. આમ, ઈલેક્ટ્રૉનને સપાટીની બહાર

લાવવા માટે, અમુક લઘુતમ ઊર્જા પૂરી પાડવી પડશે. ઇલેક્ટ્રૉનના ઉત્સર્જન માટે આપવી પડતી આ જરૂરી ઊર્જાને તે ધાતુનું વર્ક-ફંક્શન (ϕ_0) કહે છે.

ધાતુનું વર્ક-ફંક્શન ધાતુના પ્રકાર, સપાટીના ગુણધર્મ અને તેના તાપમાન ઉપર આધાર રાખે છે.

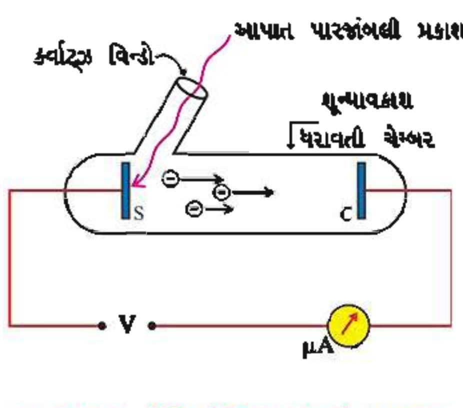
ધાતુમાંથી ઇલેક્ટ્રૉન્સને બહાર કાઢવા માટે નીચેનામાંથી કોઈ પણ એક રીતે જરૂરી ઊર્જા પૂરી પાડી શકાય છે.

ઉષ્માજનિત ઉત્સર્જન (Thermionic Emission) : આ રીતમાં ધાતુના ફિલામેન્ટમાંથી વિદ્યુતપ્રવાહ પસાર કરી તેને પૂરતો ગરમ (સામાન્ય રીતે 2500–3000 K) કરવામાં આવે છે. તેથી, તેમાંના મુક્ત ઇલેક્ટ્રૉન્સ પૂરતી ઊર્જા મેળવી અને ધાતુમાંથી ઉત્સર્જિત થાય છે. આ પ્રકારનું ઇલેક્ટ્રૉન્સનું ઉત્સર્જન ડાયોડ (diode), ટ્રાયોડ (triode), તેમજ T.V. tube-કેથોડ-રે ટ્યૂબ (cathode ray tube) જેવા ઉપકરણમાં કરવામાં આવે છે.

ફિલ્ડ ઉત્સર્જન અથવા કોલ્ડ ઉત્સર્જન (Field Emission or Cold Emission) : ધાતુ પર આશરે $10^8 \frac{V}{m}$ના ક્રમનું પ્રબળ વિદ્યુતક્ષેત્ર લગાડવામાં આવે, તો આ ક્ષેત્રની અસર હેઠળ ઇલેક્ટ્રૉન ધાતુમાંથી બહાર ખેંચાઈ આવે છે.

ફોટો-ઇલેક્ટ્રિક ઉત્સર્જન (Photoelectric Emission) : જ્યારે ધાતુની સ્વચ્છ કરેલી સપાટી પર પૂરતી ઊંચી આવૃત્તિવાળું વિદ્યુતચુંબકીય વિકિરણ આપાત કરવામાં આવે છે ત્યારે સપાટીમાંથી ઇલેક્ટ્રૉન્સનું ઉત્સર્જન થાય છે. આ ઘટનાને ફોટો-ઇલેક્ટ્રિક અસર કહે છે. આપેલી ધાતુમાંથી ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉન્સનું ઉત્સર્જન કરવા માટે આપાત પ્રકાશની આવૃત્તિનું મૂલ્ય અમુક લઘુતમ કે તેના કરતાં વધારે હોવું જરૂરી છે. આ લઘુતમ આવૃત્તિને આપેલી ધાતુની થ્રેશોલ્ડ-આવૃત્તિ (f_0) કહે છે. તે ધાતુની જાત પર આધાર રાખે છે. મોટા ભાગની ધાતુઓ માટે થ્રેશોલ્ડ-આવૃત્તિનાં મૂલ્યો વિદ્યુતચુંબકીય વર્ણપટના પારજાંબલી વિભાગમાં પડે છે, ઉદાહરણ રૂપે Zn, Cd, Mg, પરંતુ આલ્કલી ધાતુઓ (Li, Na, K, Rb અને Cs) માટે થ્રેશોલ્ડ આવૃતિના મૂલ્યો દૃશ્ય વિભાગમાં પડે છે.

7.3.2 હર્ટ્ઝનો પ્રયોગ (Hertz's Experiment) : ફોટો-ઇલેક્ટ્રિક અસરની શોધ, ઈ. સ. 1887માં હર્ટ્ઝએઅકસ્માતે કરી હતી. તે બે ઇલેક્ટ્રોડ્સ વચ્ચે સ્પાર્ક ડિસ્ચાર્જની ઘટના વડે વિદ્યુતચુંબકીય તરંગોના ઉત્સર્જનની ઘટનાનો અભ્યાસ કરતો હતો. તેના પ્રયોગમાં, ટ્રાન્સમીટર (એન્ટીના)માંથી ઉત્સર્જિત વિદ્યુતચુંબકીય તરંગો સ્પાર્ક-ગેપને બે છેડે વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત જન્માવે છે તેમ સ્પાર્ક (તણખા)ને આધારે જાણી શકાયું. હર્ટ્ઝે નોંધ્યું કે જ્યારે કેથોડને પારજાંબલી પ્રકાશથી પ્રકાશિત કરવામાં આવે છે ત્યારે ગેપમાંથી સ્પાર્ક સહેલાઈથી પસાર થઈ જાય છે. જે સૂચવે છે કે પ્રકાશની હાજરી કેથોડ પરથી વિદ્યુતભારને સ્પાર્ક-ગેપ દ્વારા છટકી જવામાં મદદ કરે છે, વળી, હોલવાસે આ પ્રયોગને ઝીંક માટે આગળ ધપાવ્યો. તેણે ઋણ વિદ્યુતભારિત ઝિંક પ્લેટને ઇલેક્ટ્રોસ્કોપ સાથે જોડીને જ્યારે આ પ્લેટને પારજાંબલી પ્રકાશથી વિકેરિત કરી ત્યારે તેણે નોંધ્યું કે પ્લેટ પરનો ઋણ વિદ્યુતભાર ઘટે છે. આટલું જ નહીં, જ્યારે તટસ્થ ધાતુની પ્લેટ પર પારજાંબલી પ્રકાશ વિકેરીત કરતાં તે ઋણ વીજભારિત બની જાય છે, જ્યારે ધન વિદ્યુતભારિત પ્લેટ વધારે ધન વિદ્યુતભારિત બને છે. હોલવાસ (Hallwachs) એવા નિર્ણય પર આવ્યો કે પારજાંબલી વિકિરણની અસર હેઠળ ઝિંક પ્લેટમાંથી ઋણ વિદ્યુતભારિત ઇલેક્ટ્રૉન્સનું ઉત્સર્જન થાય છે. આ ઇલેક્ટ્રૉન્સને ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉન્સ કહે છે.



આકૃતિ 7.2 ફોટો-ઇલેક્ટ્રિક અસરનો અભ્યાસ કરવા માટેની પ્રાયોગિક ગોઠવણ

7.3.3 લિનાર્ડનો પ્રયોગ (Lenard's experiment) : હર્ટ્ઝના એક વિદ્યાર્થી, પી. લિનાર્ડે (P. Lenard) ફોટો-ઇલેક્ટ્રિક અસરનો ઊંડાણપૂર્વક અભ્યાસ કર્યો. ફોટો-ઇલેક્ટ્રિક અસરનો પ્રાયોગિક અભ્યાસ કરવા માટે જરૂરી ગોઠવણ આકૃતિ 7.2માં દર્શાવેલ છે.

ક્વાર્ટ્ઝ વિન્ડોમાંથી સ્વચ્છ કરેલી પ્રકાશ-સંવેદી સપાટી S પર પારજાંબલી પ્રકાશ આપાત કરવામાં આવે છે. અત્રે C એ કલેક્ટર જ્યારે S એ કેથોડ છે. Sની સરખામણીમાં Cને ધન કે ઋણ વિદ્યુતવિભવે રાખી શકાય છે.

ફોટો-ઇલેક્ટ્રિક અસરની લાક્ષણિકતાનો અભ્યાસ આપાત પ્રકાશની આવૃત્તિ તેમજ તીવ્રતા અને ઉત્સર્જાતા ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉન્સની સંખ્યા તથા તેમની મહત્તમ ગતિ-ઊર્જાના સંદર્ભમાં કરી શકાય છે.

કલેક્ટર Cને S સાપેક્ષ ધન વિભવે રાખતાં ઉત્સર્જાતા ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉન્સ તેની તરફ આકર્ષાય છે અને માઇક્રોએમીટર પ્રવાહ નોંધે છે. માઇક્રોએમીટરમાંથી વહેતો પ્રવાહ ઉત્સર્જાતા ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉનની સંખ્યાનો ખ્યાલ આપે છે. એક ચોક્કસ મૂલ્યના ધન વિભવે કે જ્યારે ઉત્સર્જાતા બધા જ ઇલેક્ટ્રૉન્સ કલેક્ટર પર પહોંચે છે, તે પછી ધન વિદ્યુતવિભવ વધારવા છતાં રચાતા પ્રવાહ પર તેની અસર થતી નથી.

હવે જ્યારે કલેક્ટરને S સાપેક્ષ ઋણ વિભવે રાખતા ઉત્સર્જાતા ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉન્સ અપાકર્ષણ અનુભવે છે અને જે ઇલેક્ટ્રૉન્સ પાસે આ અપાકર્ષણને ઉપરવટ જવાની ગતિ-ઊર્જા (kinetic energy) હોય તેવા જ કલેક્ટર સુધી પહોંચી પ્રવાહનું નિર્માણ કરે છે. તેથી એમીટરમાં પ્રવાહ ઘટે છે. કલેક્ટર પરનો ઋણ વોલ્ટેજ વધારતા કલેક્ટર પર પહોંચતા ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉન્સની સંખ્યામાં હજુ પણ ઘટાડો થાય છે. કલેક્ટર પરના અમુક લઘુતમ મૂલ્યના ઋણ વિભવે કે જ્યારે મહત્તમ ઊર્જા ધરાવતા ઇલેક્ટ્રૉન્સ પણ કલેક્ટર સુધી પહોંચી શકતા નથી ત્યારે ફોટો ઇલેક્ટ્રિક પ્રવાહનું મૂલ્ય શૂન્ય થાય છે. આ લઘુતમ ઋણ વિભવ કરતાં પણ વધુ ઋણ મૂલ્ય માટે પણ પ્રવાહ શૂન્ય રહે છે. ઉત્સર્જકની સાપેક્ષે કલેક્ટર પરના આ લઘુતમ ઋણ વિભવને **સ્ટૉપિંગ-પોટેન્શિયલ (stopping potential) V_0** કહે છે. આમ, તે ઉત્સર્જાતા ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉન્સની મહત્તમ ગતિ-ઊર્જા ($\frac{1}{2}mv^2_{max}$) નો ખ્યાલ આપે છે. જો ઇલેક્ટ્રૉન પરનો વિદ્યુતભાર અને તેનું દળ અનુક્રમે e અને m હોય તો,

$$\frac{1}{2}mv^2_{max} = eV_0 \tag{7.3.1}$$

વધારામાં, લિનાર્ડે આપાત પ્રકાશની તીવ્રતા (તેજસ્વિતા) બદલીને મહત્તમ ગતિ-ઊર્જા અને ઉત્સર્જાતા ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉન્સની સંખ્યા મળતા ફોટો-ઇલેક્ટ્રિક પ્રવાહની મદદથી માપી. તેણે જોયું કે આપાત પ્રકાશની તીવ્રતા વધારતા ફોટો-ઇલેક્ટ્રિકપ્રવાહ (અર્થાત્, ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉન્સની સંખ્યા) વધે છે. પણ ઉત્સર્જાતા ઇલેક્ટ્રૉન્સની ગતિ-ઊર્જા બદલાતી નથી. તેનાથી વિરુદ્ધ, થ્રેસોલ્ડ-આવૃત્તિથી વધારે તેવી જુદી-જુદી આવૃત્તિવાળા પ્રકાશથી પ્રયોગ કરતાં, સ્ટૉપિંગ પોટેન્શિયલ અને તેથી ઉત્સર્જાતા ઇલેક્ટ્રૉન્સની ગતિ-ઊર્જા બદલાય છે, જ્યારે ફોટો-ઇલેક્ટ્રિક પ્રવાહ અચળ રહે છે. એવું જોવા મળે છે કે આવૃત્તિ વધારતાં (V_0) અને તેથી ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉન્સની મહત્તમ ગતિ-ઊર્જાનું મૂલ્ય વધે છે, અથવા તેથી ઊલટું. એવું પણ જોવા મળ્યું કે ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉન્સના ઉત્સર્જનની ઘટના પ્રકાશ આપાત કરતાં 10^{-9} s જેટલાં સમયગાળામાં જ જોવા મળે છે.

ટૂંકમાં,

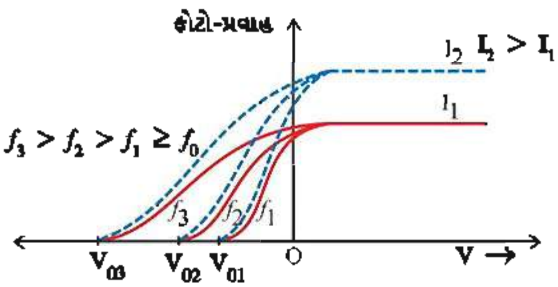
(1) ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉન્સની મહત્તમ ગતિ-ઊર્જા આપાત પ્રકાશની આવૃત્તિ પર આધાર રાખે છે નહીં કે તેની તીવ્રતા પર.

(2) ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉન્સની સંખ્યા એ આપાતપ્રકાશની તીવ્રતાના સમપ્રમાણમાં હોય છે.

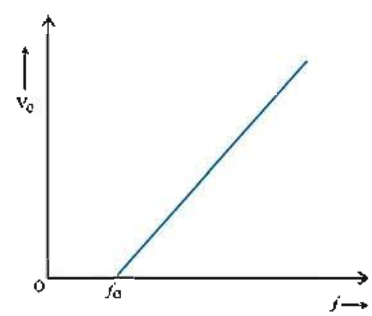
(3) તીવ્રતાથી સ્વતંત્ર જ્યારે આપાતપ્રકાશની આવૃત્તિ આપેલ સપાટીની થ્રેશોલ્ડ-આવૃત્તિ જેટલી કે તેનાથી વધારે હોય તો હંમેશાં ફોટો-ઇલેક્ટ્રિક અસર જોવા મળે છે.

(4) ફોટો-ઇલેક્ટ્રિક અસર તાત્ક્ષણિક (લગભગ 10^{-9} s) છે.

ઉપર્યુક્ત તારણો નીચેના ગ્રાફમાં દર્શાવ્યાં છે (આકૃતિ 7.3 અને 7.4) :



આકૃતિ 7.3 ફોટો ઇલેક્ટ્રિક પ્રવાહનો ફેરફાર



આકૃતિ 7.3 આપાતપ્રકાશની આવૃત્તિને અનુરૂપ સ્ટૉપિંગ-પોટેન્શિયલમાં થતો ફેરફાર

7.3.4 પ્રકાશના તરંગવાદને આધારે વર્ણન : ઉપર્યુક્ત પ્રાયોગિક અવલોકનો પ્રકાશના તરંગવાદને આધારે સમજી શકાતા નથી.

(1) તરંગવાદ અનુસાર પ્રકાશની તીવ્રતા અને ઊર્જા બન્ને તરંગના કંપવિસ્તાર પર આધાર રાખે છે. આમ, વધારે તીવ્રતાવાળો પ્રકાશ વધારે શક્તિશાળી થાય, અને તીવ્રતા વધારતા ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉન્સની ઊર્જા પણ વધવી જોઈએ. તેનાથી વિરુદ્ધ, પ્રાયોગિક પરિણામો દર્શાવે છે કે ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉન્સની ઊર્જા આપાત પ્રકાશની તીવ્રતા પર આધારિત નથી.

તરંગવાદ અનુસાર, પ્રકાશની ઊર્જાને આવૃત્તિ સાથે કશો જ સબંધ નથી. આમ, આવૃત્તિ સાથે ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉન્સની ઊર્જાનો ફેરફાર સમજી શકાતો નથી.

(2) ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉન્સનું ઉત્સર્જન, પ્રકાશ આપાત થતાંની સાથે જ તત્કાળ (10^{-9} s સમયગાળામાં) થતું હોય છે. ધાતુમાં મુક્ત ઇલેક્ટ્રૉન્સ અમુક ચોક્કસ બળોથી જકડાયેલા હોવાથી, તેમને ધાતુમાંથી બહાર કાઢવા ઊર્જા આપવી પડે.

હવે, જો આપાત ઊર્જા તરંગ-સ્વભાવ ધરાવતી હોય તો ધાતુમાંના મુક્ત ઇલેક્ટ્રૉન્સ આ ઊર્જા સતત રીતે ધીરે-ધીરે મેળવતા જાય છે, અને જ્યારે તેઓ ઓછામાં ઓછી ધાતુના વર્ક-ફંક્શન જેટલી ઊર્જા પ્રાપ્ત કરે ત્યાર બાદ જ તેઓ ધાતુમાંથી છટકી શકે. આમ, ઇલેક્ટ્રૉન પ્રકાશ આપાત કર્યા બાદ થોડા સમય બાદ જ ઉત્સર્જન પામી શકે.

(3) તરંગવાદ અનુસાર ઝાંખો પ્રકાશ તો નબળો ગણાય. આવા ઝાંખા પ્રકાશથી ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉનનું ઉત્સર્જન મેળવવા ઇલેક્ટ્રૉન પૂરતી ઊર્જા મેળવી લે ત્યાં સુધી ઘણી રાહ જોવી પડે. તેનાથી વિરુદ્ધ, પ્રયોગ દર્શાવે છે કે અલબત્ત, પૂરતી ઊંચી આવૃત્તિ ધરાવતો ગમે તેટલો ઝાંખો પ્રકાશ તત્કાળ ઇલેક્ટ્રૉનનું ઉત્સર્જન કરે છે.

આમ, ફોટો-ઇલેક્ટ્રિક ઘટનાને સમજાવવા માટે તરંગવાદ નિષ્ફળ નીવડ્યો.

7.3.5 આઇન્સ્ટાઇનની સમજૂતી : ફોટો-ઇલેક્ટ્રિક અસરની સમજૂતી આઇન્સ્ટાઇને 1905માં આપી કે જેના માટે તેમને 1921 માં નૉબેલ પારિતોષિક આપવામાં આવ્યું.

પ્લાન્કે ધારેલું કે વિકિરણ-ઊર્જાનું ઉત્સર્જન ફોટોનના સ્વરૂપમાં થાય છે. પરંતુ ઉત્સર્જન પામ્યા પછી તેનું વહન તરંગ સ્વરૂપમાં થાય છે. આનાથી એક ડગલું આગળ વિચારીને આઇન્સ્ટાઇને ધાર્યું કે વિકિરણનું માત્ર ઉત્સર્જન જ નહીં, પરંતુ શોષણ પણ ફોટોન સ્વરૂપે જ થાય છે.

માત્ર જાણકારી માટે : તરંગ-સ્વભાવમાં, ઊર્જા સમગ્ર તરંગ-અગ્રો પર સમાંગ રીતે પથરાયેલી હોવાનું ધારવામાં આવે છે. આઇન્સ્ટાઇને સૂચવ્યું કે પ્રકાશ-ઊર્જા તરંગ-અગ્રો પર પથરાયેલી હોવાને બદલે નાના-પડીકા સ્વરૂપે કેન્દ્રિત થયેલી હોય છે કે જેને ફોટોન કહીશું. તેણે લખ્યું : "અહીં વિચારેલ ધારણા મુજબ, પ્રકાશકિરણ જ્યારે એક બિંદુથી વહન કરે છે, તેના પર રહેલી ઊર્જા સતત વધતા કદમાં સતત રીતે વહેંચાયેલી હોતી નથી, પરંતુ તે નિયત સંખ્યાના ઊર્જાના પડીકા (quanta) તરીકે હોય છે. આ ક્વૉન્ટા વિખેરીત થયા વગર ગતિ કરે છે કે જેનું સમગ્રતયા શોષણ કે ઉત્સર્જન થાય છે."

ધારો કે આપાત પ્રકાશની આવૃત્તિ f હોય, તો તેને અનુરૂપ ફોટોનની ઊર્જા 'hf' જેટલી થશે. આ ફોટોન જ્યારે ધાતુ પર આપાત કરવામાં આવે છે, ત્યારે તેની ઇલેક્ટ્રૉન સાથેની આંતરક્રિયા વખતે, જો તેની આવૃત્તિ (અને તેથી તેની ઊર્જા) થ્રેશોલ્ડ-આવૃત્તિ કરતાં વધારે હોય તો તેનું સમગ્રતયા શોષણ થાય છે. અથવા તો તે સહેજ પણ ઊર્જા ગુમાવતું નથી.

પરંતુ પ્રચલિત યંત્રશાસ્ત્ર (ન્યૂટોનિયન યંત્રશાસ્ત્ર અને વિદ્યુતચુંબકીય તરંગોનો મેક્સવેલનો વાદ) અનુસાર, આવા ફોટોન-ઇલેક્ટ્રૉન વચ્ચેની આંતરક્રિયા કેમ આપાત પ્રકાશની આવૃત્તિ પર આધારિત હોઈ શકે તે સમજાવી શકાતું નથી. (જો ભવિષ્યમાં ભૌતિકશાસ્ત્રને તમારી કારકિર્દીનો વિષય બનાવશો, તો આ પ્રશ્નનો જવાબ તમને મળશે.)

હવે જો f_0 એ થ્રેશોલ્ડ-આવૃત્તિ હોય તો તેને અનુરૂપ ઊર્જા hf_0 એ વર્ક-ફંક્શન ϕ_0ને સમતુલ્ય થશે, અને આ આવૃત્તિ માટે ઉત્સર્જાતા ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉન્સની ગતિ-ઊર્જા શૂન્ય હશે. જો આપાત પ્રકાશની આવૃત્તિ $f > f_0$ હોય તો, ઉત્સર્જાતા ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉન્સની મહત્તમ ગતિ-ઊર્જા નીચે મુજબ થશે :

$$\frac{1}{2}mv^2_{max} = hf - \phi_0$$

સમીકરણ (7.3.1) પરથી,

$$eV_0 = hf - hf_0$$

$$\therefore V_0 = \frac{h}{e} f - \left(\frac{hf_0}{e}\right) \tag{7.3.2}$$

આ સમીકરણ મુજબ, V_0 વિરુદ્ધ fનો આલેખ સુરેખ હશે કે જેનો ઢાળ $\frac{h}{e}$ અને X-અક્ષ પરનો અંતઃછેદ (Intercept) f_0 થશે. આ પરિણામ પ્રાયોગિક અવલોકન સાથે સંપૂર્ણ બંધબેસતું આવે છે, જે આકૃતિ 7.4માં દર્શાવેલ છે.

સપાટી પર આપાત પ્રકાશની તીવ્રતા એટલે જ એકમક્ષેત્રફળ દીઠ, એકમસમયમાં લંબરૂપે આપાત પ્રકાશ-ઊર્જા. પ્રકાશના ફોટોનવાદ (કણ-સ્વરૂપ) અનુસાર, જો એકમસમયમાં એકમક્ષેત્રફળ ધરાવતી સપાટી પર આપાત ફોટોનની સંખ્યા n હોય તો, પ્રકાશની તીવ્રતા $I = nhf$ થશે, જ્યાં hf એ f આવૃત્તિ ધરાવતા ફોટોનની ઊર્જા છે. આમ, ફોટોન વાદ અનુસાર, પ્રકાશની તીવ્રતા જેમ વધારે તેમ એકમસમય દીઠ આપાત ફોટોનની સંખ્યા વધારે, અને તેથી જ ફોટો-ઇલેક્ટ્રિક પ્રવાહનું મૂલ્ય વધારે. ફરીવાર આ પરિણામ પણ પ્રાયોગિક અવલોકન સાથે સુસંગત છે.

વળી, ફોટોન અને ઇલેક્ટ્રૉન વચ્ચેની આંતરક્રિયા ફોટોનના કાં તો સંપૂર્ણ શોષણ અથવા સહેજ પણ નહીં સ્વરૂપમાં થતી હોવાથી, ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉનના શોષણની ઘટના તાત્ક્ષણિક થશે. તરંગ-સ્વભાવથી વિરુદ્ધ કે જેમાં ઇલેક્ટ્રૉને છટકવા માટે પૂરતી ઊર્જા ભેગી થાય ત્યાં સુધી રાહ જોવી પડે છે.

આમ, ફોટો-ઇલેક્ટ્રિક અસરને લગતાં પ્રાયોગિક અવલોકનો પ્રકાશના કણ-સ્વરૂપ (ફોટોન)ની મદદથી સમજી શકાય છે.

નીચે દર્શાવેલ ટેબલ કેટલીક ધાતુઓ માટે વર્ક-ફંક્શન અને તેને અનુરૂપ થ્રેશોલ્ડ-આવૃત્તિનાં મૂલ્યો દર્શાવે છે.

ટેબલ 7.1

વર્કફંક્શન અને થ્રેશોલ્ડ-આવૃત્તિ (માત્ર જાણકારી માટે)

ધાતુ	ϕ_0 (in eV)	f_0 ($\times 10^{14}$ Hz)	ધાતુ	ϕ_0 (in eV)	f_0 ($\times 10^{14}$ Hz)
Cs	1.9	4.60	Fe	4.5	10.89
K	2.2	5.32	Ag	4.7	11.37
Ca	3.2	7.74	Au	4.9	11.86
Cd	4.1	9.92	Ni	5.0	12.10
Al	4.2	10.16	Pt	6.4	15.49

ઉદાહરણ 1 : ધાતુમાંથી 'ફક્ત' બહાર આવવા માટે ધારો કે ઇલેક્ટ્રૉનને 5×10^{-19} J જેટલી ઊર્જાની જરૂર પડે છે. જો ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉન 10^{-9} s ને અંતે ઉત્સર્જન પામતો હોય, તો શોષણ-ઊર્જાનો દર શોધો. જો આ ઘટના પ્રચલિત યંત્ર અનુસાર ધારવામાં આવે, જેમાં પ્રકાશ-ઊર્જા તરંગ-અગ્ર પર સમગ્ર રીતે સમાન રીતે વહેંચાયેલી ધારવામાં આવે છે. પણ ઇલેક્ટ્રૉન તરંગઅગ્રના ફક્ત નાના વિસ્તાર, ધારો કે 10^{-19} m² જેટલામાંથી ઊર્જાનું શોષણ કરે, તો આ ફોટો-ઇલેક્ટ્રિક અસર નોંધવા માટે આપાત પ્રકાશ-તીવ્રતા ગણો.

ઉકેલ : શોષણ-ઊર્જા દર (પાવર),

$$P = \frac{E}{t} = \frac{5 \times 10^{-19}}{10^{-9}} = 5 \times 10^{-10} \frac{J}{s}$$

પ્રકાશ-તીવ્રતાની વ્યાખ્યા પરથી તીવ્રતા,

$$I = \frac{\text{ઊર્જા}}{\text{સમય} \times \text{ક્ષેત્રફળ}} = \frac{5 \times 10^{-10}}{10^{-19}} = 5 \times 10^{9} \frac{J}{s.m^2} \text{ (અર્થાત્, 500 કરોડ } \frac{\text{Watt}}{m^2}\text{)}$$

પરંતુ, વાસ્તવમાં આટલી ઊંચી ઊર્જા મેળવવી અશક્ય હોવાથી કહી શકાય કે ફોટો-ઇલેક્ટ્રિક અસરને પ્રચલિત યંત્રશાસ્ત્ર દ્વારા સમજાવી શકાય નહીં.

ઉદાહરણ 2 : એક ધાતુનું વર્ક-ફંક્શન 2 eV છે. આ ધાતુની 2 cm^2 સપાટી પર 10^{-5} Wm^{-2} તીવ્રતાવાળો પ્રકાશ આપાત થાય છે. ધારો કે આ ધાતુના 10^{17} ઈલેક્ટ્રૉન આ પ્રકાશનું શોષણ કરે છે, તો ફોટો-ઈલેક્ટ્રિક અસર શરૂ થતાં (અથવા ઈલેક્ટ્રૉનનું ઉત્સર્જન શરૂ થતાં) કેટલો સમય લાગશે ? આપાત પ્રકાશને તરંગસ્વરૂપમાં લો.

ઉકેલ : આપાત પ્રકાશની તીવ્રતા 10^{-5} W m^{-2} છે.

$\therefore$ 1 m^2 સપાટી પર 1 sમાં 10^{-5} J પ્રકાશ-ઊર્જા આપાત થાય છે.

$\therefore$ 1 sમાં 2 cm^2 = 2×10^{-4} m^2 સપાટી પર આપાત થતા પ્રકાશની ઊર્જા,

$$= 2 \times 10^{-4} \times 10^{-5} = 2 \times 10^{-9} \text{ J}$$

આટલી પ્રકાશ ઊર્જા 10^{17} ઈલેક્ટ્રૉન દ્વારા શોષણ છે.

$\therefore$ સરેરાશ 1 ઈલેક્ટ્રૉનને શોષેલી ઊર્જા $= \dfrac{2\times10^{-9}\text{J}}{10^{17}} = 2 \times 10^{-26}$ J

1 ઈલેક્ટ્રૉન (સરેરાશ રીતે) આટલી ઊર્જા એટલે કે 2×10^{-26} J ઊર્જા 1 sમાં શોષે છે.

હવે, જ્યારે ઈલેક્ટ્રૉન ઓછામાં ઓછી વર્ક-ફંક્શન જેટલી ઊર્જા શોષે ત્યારે તેનું ઉત્સર્જન થાય. પ્રસ્તુત કિસ્સામાં વર્ક-ફંક્શન 2 eV = $2 \times 1.6 \times 10^{-19}$ J છે. એટલે કે ઈલેક્ટ્રૉનનું ઉત્સર્જન મેળવવા માટે $2 \times 1.6 \times 10^{-19}$ J ઊર્જાની જરૂર છે. આમ, 2×10^{-26} J ઊર્જા શોષવા માટે 1 s, તો $2 \times 1.6 \times 10^{-19}$ J માટે કેટલો સમય ?

$$t_e = \frac{2\times1.6\times10^{-19}}{2\times10^{-26}} = 1.6 \times 10^7 \text{ s}$$

નોંધ : આમ જો પ્રકાશને તરંગસ્વરૂપે ધારીએ તો ઈલેક્ટ્રૉનનું (પ્રયોગમાં મળે છે તેમ) તાત્ક્ષણિક ઉત્સર્જન થતું નથી.

7.4 પ્રકાશનું કણસ્વરૂપ (Particle Nature of Light)

ફોટોન એ અસતત ઊર્જાના પડીકા (packets) છે કે જેમાં સૌથી નાના પેકેટની ઊર્જા hf જેટલી હોય છે. આમ, સ્વભાવગત રીતે જ ફોટોન વિકિરણના વિચાર સાથે સંકળાયેલ છે. તેથી, શું આપણે ફોટોનને વાસ્તવિક કણ કહી શકીએ ? કૉમ્પ્ટન-અસર (Compton Effect) કે જેમાં X-કિરણોનું મુક્ત ઈલેક્ટ્રૉન્સ દ્વારા પ્રકીર્ણન થાય છે, દ્વારા આ સવાલનો જવાબ મળી શકે છે. કૉમ્પ્ટન અસરની સમજૂતી ફોટોનને દ્રવ્યકણની માફક વાસ્તવિક કણ ગણી આપી શકાય છે. જેમ ઈલેક્ટ્રૉન બીજા દ્રવ્યકણો સાથે અથડામણ કરે છે તે જ રીતે ફોટોન સાથે પણ અથડામણ અનુભવે છે. વળી, આ અથડાણ વેગમાન અને ઊર્જા-સંરક્ષણના નિયમોનું પણ પાલન કરે છે. આમ, ફોટો-ઈલેક્ટ્રિક અસર અને કૉમ્પ્ટન-અસરના પરિણામસ્વરૂપે, ફોટોનને નીચે મુજબના ગુણધર્મો છે તેમ પ્રસ્થાપિત થયું.

(1) ફોટોન એ દ્રવ્યકણની જેમ જ વાસ્તવિક કણ છે.

(2) f આવૃત્તિવાળા ફોટોનની ઊર્જા hf છે.

(3) f આવૃત્તિવાળા ફોટોનનું વેગમાન $\dfrac{hf}{c}$ વડે આપી શકાય છે.

આઈન્સ્ટાઈનના વિશિષ્ટ સાપેક્ષવાદ અનુસાર, કણની ઊર્જા (E) અને તેના વેગમાન (p) વચ્ચેનો સંબંધ નીચે મુજબ આપી શકાય :

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2 \cdot c^4} \tag{7.4.1}$$

જ્યાં, c = પ્રકાશના શૂન્યાવકાશમાં ઝડપ અને m_0 = સ્થિર દળ (rest mass) છે.

v વેગથી ગતિ કરતા કણનું દળ, સમીકરણ (7.4.1) પરથી નીચેના સૂત્ર વડે આપી શકાય છે.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{7.4.2}$$

પણ શૂન્યાવકાશમાં ફોટોનની ઝડપ પ્રકાશની ઝડપ જેટલી જ હોવાથી, તેનું સ્થિર દળ,

$$m_0 = m \times \sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}} = 0$$

સમીકરણ (7.4.1) પરથી,

$$\text{E} = p.c. \tag{7.4.3}$$

અથવા $p = \frac{\text{E}}{c} = \frac{hf}{c}$ (7.4.4)

(4) ફોટોનનું દળ, $m = \frac{\text{E}}{c^2}$ ($\because$ E $= mc^2$); જ્યાં, m એ સમીકરણ (7.4.2) દ્વારા આપી શકાય છે.

(5) ફોટોન વાસ્તવિક કણની જેમ બીજા કણો સાથે ઊર્જા-સંરક્ષણ અને વેગમાન-સંરક્ષણના નિયમોનું પાલન થાય તેમ આંતરક્રિયા કરી શકે છે.

ફક્ત જાણકારી માટે : વિકિરણ એ વિદ્યુતચુંબકીય તરંગો છે અને સાથે-સાથે જ્યારે કોઈ દ્રવ્ય સાથે આંતરક્રિયા કરે છે, ત્યારે ફોટોનના સ્વરૂપમાં ઊર્જા અને વેગમાનની આપ-લે કરે છે. આ વાત સહેલાઈથી ગળે ઊતરે એવી લાગતી નથી.

આ સંજોગોમાં આપણે એક વાતનું સ્મરણ રાખીએ કે જ્યારે પ્રકાશ કોઈ દ્રવ્ય સાથે આંતરક્રિયા કરે છે ત્યારે તેનું ફોટોન સ્વરૂપ વિચારવું પડે છે. ઉદાહરણ તરીકે પ્રકાશ જ્યારે ઉદ્ગમમાંથી ઉત્સર્જાય છે તે ક્ષણે ફોટોનના સ્વરૂપમાં અને જ્યારે પડદા પર આપાત થાય છે, ત્યારે પણ તે ફોટોનના સ્વરૂપમાં જ પડદાના દ્રવ્ય સાથે આંતરક્રિયા કરી નાશ પામે છે. આ બંને વચ્ચેના વિસ્તારમાં આપણે એવી પરિકલ્પના કરીએ છીએ કે પ્રકાશ વિદ્યુતચુંબકીય (સંભાવના) તરંગ તરીકે પ્રસરણ પામે છે. જો આમ વિચારીએ તો બે સ્લિટ વડે, ઉદ્ગમ ગમે તેટલું નબળું હોય તોપણ, આવા તરંગો વિવર્તન પામી, વિવર્તનને કારણે મળતા sub-wavesના સંપાતીકરણ વડે વ્યતિકરણભાત ઉપજાવી શકાય.

કારણ કે આ બાબતો કોઈ પણ રીતે પ્રચલિત ભૌતિકશાસ્ત્ર (Classical Physics) વડે સમજી શકાય તેમ નથી. આવા પ્રયોગોનાં પરિણામોનાં અર્થઘટનો તો જ આપી શકાય, જો આપણે ધારીએ કે :

(1) પ્રકાશ, ઉદ્ગમમાંથી ફોટોન તરીકે ઉત્પન્ન થાય છે.

(2) પ્રકાશ, ડિટેક્ટરમાં ફોટોન તરીકે નોંધાય છે.

(3) પ્રકાશ, ઉદ્ગમ અને ડિટેક્ટર વચ્ચે સંભાવના-તરંગોના રૂપમાં પ્રસરણ પામે છે.

(4) આ સંભાવના તરંગો (વિદ્યુતચુંબકીય તરંગો)ના માર્ગમાં કોઈ બિંદુ પાસે 'ફોટોન-ડિટેક્ટર' મૂકીએ તો તેના વડે એકમસમયમાં, તેની આસપાસના સૂક્ષ્મ વિસ્તારમાં નોંધાતા ફોટોનની સંખ્યા વિદ્યુત-ચુંબકીય તરંગોના કંપવિસ્તારના વર્ગના સમપ્રમાણમાં હોય છે. અહીં ડિટેક્ટર જ્યારે ફોટોનને ડિટેક્ટ કરે છે, ત્યારે પ્રકાશ અને ડિટેક્ટર વચ્ચે આંતરક્રિયા થાય છે અને તેથી પ્રકાશનું ફોટોન સ્વરૂપ મળે છે.

ઉદાહરણ 3 : જો 1 Wના બલ્બની કાર્યક્ષમતા (efficiency) 10% હોય, તો તે એક સેકન્ડમાં કેટલા ફોટોનનું ઉત્સર્જન કરતો હશે ? ઉત્સર્જાતા ફોટોનને અનુરૂપ વિકિરણની તરંગલંબાઈ 500 nm છે. $h = 6.625 \times 10^{-34}$ J s

ઉકેલ : અત્રે 1 Wનો બલ્બ છે. જો તેની કાર્યક્ષમતા 100 % હોય, તો તે 1 sમાં 1 J વિકિરણ-ઊર્જાનું ઉત્સર્જન કરી શકે. પણ આપેલ બલ્બની કાર્યક્ષમતા 10% આપેલી છે, તેથી આ બલ્બ એક સેકન્ડમાં $\frac{1}{10}$ J $= 10^{-1}$ J વિકિરણ-ઊર્જાનું ઉત્સર્જન કરી શકે છે.

નોંધ : અહીં બલ્બની કાર્યક્ષમતાનો અર્થ એ છે કે, તે 1 sમાં જે વિદ્યુત-ઊર્જા વાપરે છે અને તેના 10% વિકિરણ-ઊર્જા રૂપે આપે છે, બાકીની 90 % ઉષ્મા-ઊર્જા (ફિલામેન્ટના અવરોધને કારણે) રૂપે વ્યય પામે છે.

$\therefore$ બલ્બમાંથી 1 sમાં મળતી વિકિરણ-ઊર્જા $= 10^{-1}$ J

આ વિકિરણ-ઊર્જા n ફોટોનની બનેલી હોય, તો

$$nhf = 10^{-1} \text{ J}$$

$$\therefore n = \frac{10^{-1}}{hf} = \frac{0.1}{6.625 \times 10^{-34} \times \frac{c}{\lambda}} = \frac{\lambda \times 10^{-1}}{6.625 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^{8}} \qquad \left(\because f = \frac{c}{\lambda}\right)$$

$\therefore\ n = \dfrac{0.1\times500\times10^{-9}}{6.6\times10^{-34}\times3\times10^{8}}$ (∵ પ્રકાશનો વેગ, $c = 3 \times 10^8$ m s^{-1} 1 nm $= 10^{-9}$ m)

$\therefore\ n = 2.53 \times 10^{17}$ ફોટોન્સ

ઉદાહરણ 4 : એક સપાટી પર 10sમાં 11×10^{11} ફોટોન આપાત થાય છે. આ બધા ફોટોન 10 Å તરંગલંબાઈના વિકિરણને અનુરૂપ છે. જો સપાટીનું ક્ષેત્રફળ 0.01 m^2 હોય, તો આપાત વિકિરણની તીવ્રતા શોધો. પ્રકાશનો વેગ 3×10^8 m s^{-1} છે. $h = 6.625 \times 10^{-34}$ J s.

ઉકેલ : 10sમાં આપાત થતા ફોટોનની સંખ્યા $= 11 \times 10^{11}$

$\therefore$ 1sમાં આપાત થતા ફોટોનની સંખ્યા $= 11 \times 10^{10}$

હવે, આટલા ફોટોન, 0.01 m^2 ક્ષેત્રફળ પર આપાત થાય છે.

1 sમાં 1 m^2 ક્ષેત્રફળ પર આપાત થતા ફોટોનની સંખ્યા,

$$n = \frac{11\times10^{10}}{0.01} = \frac{11\times10^{10}}{10^{-2}} = 11 \times 10^{12}$$

આ ફોટોન્સ સાથે સંકળાયેલી વિકિરણ-ઊર્જા,

$$= nhf = \frac{nhc}{\lambda} = \frac{11\times10^{10}\times6.6\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{10\times10^{-10}} = 2.18 \times 10^{-3}$$

$\therefore$ આપાત વિકિરણની તીવ્રતા $= 2.18 \times 10^{-3}$ W m^{-2}

ઉદાહરણ 5 : 2.5 W m^{-2} તીવ્રતા ધરાવતું, 10.6 eV ઊર્જા ધરાવતા ફોટોન્સનું એક કિરણજૂથ (beam) 1.0×10^{-4} m^2 ક્ષેત્રફળ અને 5.2 eV વર્ક-ફંક્શન ધરાવતી સપાટી પર આપાત થાય છે. આપાત ફોટોન્સમાંથી 0.5 % ફોટોન્સ ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉન્સ ઉત્સર્જે છે. તો 1 sમાં ઉત્સર્જાતા ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉન્સની સંખ્યા શોધો. આ ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉન્સની ન્યૂનતમ અને મહત્તમ ઊર્જાઓ શોધો. 1 eV $= 1.6 \times 10^{-19}$ J

ઉકેલ : અહીં, આપાત વિકિરણની તીવ્રતા 2.5 W m^{-2} છે.

$\therefore$ 1 m^2 ક્ષેત્રફળ પર 1 sમાં આપાત થતી ઊર્જા $= 2.5$ J

$\therefore$ 1.0×10^{-4} m^2 ક્ષેત્રફળ પર 1 sમાં આપાત થતી વિકિરણ-ઊર્જા

$= 2.5 \times 1.0 \times 10^{-4} = 2.5 \times 10^{-4}$ J

ધારો કે આટલી વિકિરણ-ઊર્જામાં n ફોટોન્સ છે.

$\therefore\ nhf = 2.5 \times 10^{-4}$ (1)

પણ hf = ફોટોનની ઊર્જા $= 10.6\ eV = 10.6 \times 1.6 \times 10^{-19}$ J (∵ 1 eV $= 1.6 \times 10^{-19}$ J)

આ પરિણામ, સમીકરણ (1)માં મૂકી, nને સૂત્રનો કર્તા બનાવતાં,

$$n = \frac{2.5\times10^{-4}}{hf} = \frac{2.5\times10^{-4}}{10.6\times1.6\times10^{-19}}$$

આમાંના 0.5 % ફોટોન ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉનનું ઉત્સર્જન કરે છે.

$$\begin{bmatrix} 100 : 0.5 \\ n : ? \end{bmatrix}$$

$\therefore$ ઉત્સર્જાતા ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉનની સંખ્યા,

$$N = \frac{0.50\times n}{100} = \frac{0.5\times2.5\times10^{-4}}{100\times10.6\times1.6\times10^{-19}} = 7.37 \times 10^{11}\ s^{-1}$$

ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉન્સની ન્યૂનતમ ઊર્જા = 0 J. આવા ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉન્સ, ઉત્સર્જનની પ્રક્રિયામાં, ફોટોન તરફથી પોતાને મળેલી બધી જ ઊર્જા બંધન-ઊર્જા 'સામે' વાપરી નાખે છે.

ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉન્સની મહત્તમ ઊર્જા :

$E = hf - \phi_0 = 10.6\ eV - 5.2\ eV \quad (\because\ hf = 10.6\ eV$ અને $\phi_0 = 5.2\ eV)$

$= 5.4\ eV$

ઉદાહરણ 6 : 5000 Å તરંગલંબાઈવાળા વિકિરણને એક બીમ (beam, કિરણજૂથ)ની ત્રિજ્યા 10^{-3} m છે. આ બીમનો પાવર 10^{-3} W છે. આ બીમ, 1.9 eV વર્ક-ફંક્શન ધરાવતી ધાતુની સપાટી પર લંબરૂપે આપાત થાય છે, તો ધાતુની સપાટીમાંથી એકમક્ષેત્રફળ દીઠ એક સેકન્ડમાં કેટલો વિદ્યુતભાર બહાર આવશે ? અત્રે આપાત થયેલ દરેક ફોટોન એક ઇલેક્ટ્રૉનનું ઉત્સર્જન કરે છે તેવું ધારો.

$h = 6.625 \times 10^{-34}$ J s

ઉકેલ : પ્રકાશબીમનો પાવર $= 10^{-3}$ W

$\therefore$ 1 સેકન્ડમાં આપાત થતી પ્રકાશ-ઊર્જા $= 10^{-3}$ J

જો આટલી ઊર્જાને અનુરૂપ ફોટોનની સંખ્યા n હોય, તો

$$nhf = nh\frac{c}{\lambda} = 10^{-3} \Rightarrow n = \frac{10^{-3}\times\lambda}{hc}$$

$$\therefore\ n = \frac{10^{-3}\times5000\times10^{-10}}{6.625\times10^{-34}\times3\times10^{8}} \qquad (\because\ \lambda = 5000\ Å = 5000\times10^{-10}\ m)$$

આટલી સંખ્યામાં ફોટોન્સ 10^{-3} m ત્રિજ્યાની સપાટી પર એક સેકન્ડમાં આપાત થાય છે.

$\therefore$ એકમક્ષેત્રફળ પર એક સેકન્ડમાં આપાત થતા ફોટોન્સની સંખ્યા,

$$n_1 = \frac{10^{-3}\times5000\times10^{-10}}{6.625\times10^{-34}\times3\times10^{8}\times\pi\times(10^{-3})^2}$$

આ દરેક ફોટોન, એક ઇલેક્ટ્રૉન ઉત્સર્જે છે અને દરેક ઇલેક્ટ્રૉનનો વિદ્યુતભાર $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C છે.

$\therefore$ એકમક્ષેત્રફળ દીઠ, એક સેકન્ડમાં બહાર આવતો વિદ્યુતભાર

$$Q = n_1 e = \frac{10^{-3}\times5000\times10^{-10}\times1.6\times10^{-19}}{6.625\times10^{-34}\times3\times10^{8}\times3.14\times10^{-6}} = 128.6\ C$$

ઉદાહરણ 7 : કેટલીક ધાતુઓના વર્ક-ફંક્શન આ પ્રમાણે છે : Na : 1.92 eV, K : 2.2 eV, Cd : 4.1 eV, Ni : 5 eV. આ ધાતુઓ પર 3300 Å તરંગલંબાઈનું વિકિરણ He-Cd લેસરમાંથી આપાત કરવામાં આવે છે. લેસરને પ્રથમ 1 m દૂર મૂકેલ છે અને પછી 10 cm દૂર મૂકેલ છે, તો કઈ ધાતુઓમાં ફોટો-ઇલેક્ટ્રિક અસર જોવા મળશે ? જ્યારે લેસરને 10 cm અંતરે લાવીશું, ત્યારે પરિસ્થિતિમાં શો ફેર પડશે ?

$h = 6.625 \times 10^{-34}$ J s. $c = 3 \times 108$ m s^{-1}, 1 $eV = 1.6 \times 10^{-19}$ J.

ઉકેલ : ફોટો-ઇલેક્ટ્રિક અસર ઉદ્ભવી શકે તે માટે આપાત પ્રકાશ ફોટોનની ઊર્જા ઓછામાં ઓછી આપેલ ધાતુના વર્ક-ફંક્શન જેટલી હોવી જોઈએ.

$$\therefore\ hf = h\frac{c}{\lambda} \geq \text{વર્ક-ફંક્શન } \phi_0$$

આપાત વિકિરણનો ફોટોનની ઊર્જા $= \dfrac{6.625\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{3300\times10^{-10}}\,J = \dfrac{6.625\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{3300\times10^{-10}\times1.6\times10^{-19}}\,eV$

$(\because\ 1\ eV = 1.6 \times 10^{-19}\ J)$

આપાત વિકિરણનો ફોટોનની ઊર્જા $= 3.76\ eV$

આ પરિણામ દર્શાવે છે કે ધાતુનું વર્ક-ફંક્શન 3.76 eV કે તેનાથી ઓછું હશે તે ધાતુમાં અત્રે આપાત થયેલ પ્રકાશ ફોટો-ઇલેક્ટ્રિક અસર ઉત્પન્ન કરશે. ઉપરના લિસ્ટમાં જોતાં, Na અને Kમાં ફોટો-ઇલેક્ટ્રિક અસર જોવા મળશે, જ્યારે Cd અને Niમાં આ અસર જોવા મળશે નહિ.

જ્યારે લેસરને 1 m અંતરેથી 10 cm અંતરે લાવવામાં આવશે, ત્યારે આપાત પ્રકાશની તીવ્રતા જરૂર વધશે, પણ તેની આવૃત્તિમાં કંઈ ફેરફાર થશે નહિ. આમ, Na અને Kમાંથી વધારે સંખ્યામાં ઇલેક્ટ્રૉન્સનું ઉત્સર્જન થઈ ફોટો-ઇલેક્ટ્રિક પ્રવાહમાં વધારો નોંધાશે. આમ છતાં, Cd અને Niમાં તો હજુ ફોટો-ઇલેક્ટ્રિક અસર જોવા મળશે નહિ, કારણ કે પ્રકાશ ઉદ્‌ગમને નજીક લાવવાથી પ્રકાશની આવૃત્તિમાં કંઈ ફેરફાર થતો નથી અને ફોટો-ઇલેક્ટ્રિક અસર ઉત્પન્ન કરવામાં જે લઘુતમ ઊર્જા અથવા hf પરથી લઘુતમ આવૃત્તિ (થ્રેશોલ્ડ-આવૃત્તિ)ની જરૂર છે તે હજુ મળતી નથી.

ઉદાહરણ 8 : 200 nmની તરંગલંબાઈ ધરાવતો અલ્ટ્રાવાયોલેટ પ્રકાશ Fe (આયર્ન-લોખંડ)ની તાજી પૉલિશ કરેલી સપાટી પર આપાત થાય છે. સપાટીનું વર્ક-ફંક્શન 4.5 eV છે, તો (1) સ્ટૉપિંગ પોટેન્શિયલ (2) ઉત્સર્જાતા ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉન્સની મહત્તમ ગતિ-ઊર્જા (3) ઉત્સર્જાતા ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉન્સની મહત્તમ ઝડપ શોધો.

$h = 6.625 \times 10^{-34}$ J s, $c = 3 \times 10^8$ m s^{-1}, 1 $eV = 1.6 \times 10^{-19}$ J.

$m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg

ઉકેલ : $eV_0 = \frac{1}{2} mv^2_{max} = hf - \phi_0 = \frac{hc}{\lambda} - \phi_0$

આ સૂત્રનો ઉપયોગ કરી, V_0 શોધવા માટે પ્રથમ $\frac{hc}{\lambda}$ શોધીએ.

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{6.625 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{200 \times 10^{-9}} = 9.94 \times 10^{-19} \text{ J} = 6.21 \ eV$$

હવે, $eV_0 = \frac{hc}{\lambda} - \phi_0 = 6.21 - 4.5 \ (\because \phi_0 = 4.5 \ eV) = 1.71 \ eV$

$\therefore V_0 = 1.71$ V

હવે,

$$\therefore \frac{1}{2}mv^2_{max} = eV_0 = 1.71 \ eV = (1.71)(1.6 \times 10^{-19}) \text{ J} = 2.74 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$\therefore v^2_{max} = \left(\frac{2.74 \times 10^{-19} \times 2}{9.11 \times 10^{-31}}\right) = 6.0 \times 10^{11}$$

$$\therefore v_{max} = 7.75 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$$

ઉદાહરણ 9 : એક Cu-સ્ફટિક 8.3×10^{10} $\frac{\text{ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉનનું}}{m^2 s}$નું ઉત્સર્જન કરે છે. Cuનો પરમાણુભાર 64 g mol^{-1} અને ઘનતા 8900 kg m^{-3} છે. હવે એવું ધારો કે Cuની સપાટી પાસેના પ્રથમ 5 પરમાણુ-સ્તરોમાંથી ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉનનું ઉત્સર્જન થાય છે, તો કેટલા પરમાણુ દીઠ 1 ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉન (સરેરાશ રીતે) ઉત્સર્જાશે ? પરમાણુઓ સાદો ઘન લેટિસ રચે છે તેમ ધારો.

ઉકેલ : અહીં ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉન/m^{2}s આપેલ હોવાથી ઘન સ્ફટિકની દરેક ધાર 1 m લંબાઈની લઈશું. આવા સ્ફટિકનું કદ = $1 \times 1 \times 1 = 1$ m^3 થશે. હવે, ઘનતા 8900 kg m^{-3} છે. તેથી આ સ્ફટિકનું દળ 8900 kg થશે. વળી, પરમાણુભાર 64 g mol^{-1} = 64×10^{-3} kg mol^{-1} છે અને તેથી 64×10^{-3} kg Cuમાં પરમાણુઓની સંખ્યા એવોગ્રેડો-અંક જેટલી હોય.

64×10^{-3} kg : 6.02×10^{23}

$\therefore$ 8900 kg : પરમાણુઓની સંખ્યા (?)

$\therefore$ 8900 kg Cuમાં પરમાણુઓની સંખ્યા, $N = \frac{6.02\times10^{23}\times8900}{64\times10^{-3}}$ (1)

આ પરમાણુઓ સાદા ઘનની ગોઠવણી કરે છે.

જો એક હારમાં n પરમાણુઓ હોય, તો એક સમતલમાં n^2 પરમાણુઓ થશે.

અને 5 સમતલોમાં $5n^2$ પરમાણુઓ થશે.

નોંધો કે આખા ઘનમાં n^3 પરમાણુઓ હોય.

$\therefore N = n^3$

$\therefore$ સમીકરણ (1) પરથી,

$$n^3 = \frac{6.02\times10^{23}\times8900}{64\times10^{-3}}$$

$$\therefore n = \left(\frac{6.02\times10^{23}\times8900}{64\times10^{-3}}\right)^{\frac{1}{3}} = 4.37 \times 10^9$$

$\therefore 5n^2 = 5 \times (4.37 \times 10^9)^2 = 9.55 \times 10^{19}$

$\therefore$ આટલા પરમાણુઓમાંથી દર સેકન્ડે 8.3×10^{10} ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉન્સ નીકળે છે.

8.3×10^{10} ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉન માટે $5n^2$ પરમાણુ જોઈતા હોય, તો એક ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉન માટે કેટલા પરમાણુઓની જરૂર પડે ?

8.3×10^{10} : $5n^2$

1 : ? (પરમાણુઓની સંખ્યા)

$$\therefore \frac{5n^2}{8.3\times10^{10}} = \frac{9.55\times10^{19}}{8.3\times10^{10}}$$

$\therefore$ એક ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉન દીઠ જરૂરી પરમાણુઓની સંખ્યા $= 1.15 \times 10^9$

ઉદાહરણ 10 : 4560 Å તરંગલંબાઈવાળો 1 mWનો પ્રકાશ સીસિયમ (Cs, Cesium)ની ફોટો-સંવેદી સપાટી પર આપાત થાય છે. જો આ સપાટીની ક્વૉન્ટમ કાર્યક્ષમતા 0.5 % હોય, તો ઉદ્‌ભવતા ફોટો-ઇલેક્ટ્રિક પ્રવાહનું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : 1 mW પ્રકાશનો અર્થ એવો થાય કે દર સેકન્ડે 1 mJ $= 10^{-3}$ J પ્રકાશ-ઊર્જા સપાટી પર આપાત થાય છે. આ ઊર્જા hf ઊર્જાવાળા ફોટોનના સ્વરૂપમાં આપાત થાય છે. ધારો કે 10^{-3} J પ્રકાશમાં n ફોટોન છે.

$nhf = 10^{-3}$ (1)

આમ, અહીં સમીકરણ (1) વડે મળતા n ફોટોન આપાત થાય છે, પરંતુ તેમાંથી 0.5% ફોટોન, ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉનનું ઉત્સર્જન કરે છે, કારણ કે સપાટીની ક્વૉન્ટમ કાર્યક્ષમતા 0.5% છે.

હવે, nના 0.5% એટલે

$$\begin{bmatrix}100 : 0.5\\ n : ?\end{bmatrix}$$

$\therefore$ ઉત્સર્જાતા ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉનની સંખ્યા $= \frac{n\times0.5}{100}$

આટલા ઇલેક્ટ્રૉન 1 sમાં ઉત્સર્જાઈને ફોટો-ઇલેક્ટ્રિક પ્રવાહનું નિર્માણ કરે છે.

ફોટો-ઇલેક્ટ્રિક પ્રવાહ, I = એક સેકન્ડમાં ઉત્સર્જાતા ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉન × ઇલેક્ટ્રૉનનો વિદ્યુતભાર

$$\therefore\ I = \frac{n \times 0.5}{100} \times 1.6 \times 10^{-19}\ A \qquad (2)$$

પણ, સમીકરણ (1) પરથી,

$$n = \frac{10^{-3}}{hf} = \frac{10^{-3}}{6.625 \times 10^{-34} \times \frac{c}{\lambda}} \qquad (\because f = \frac{c}{\lambda})$$

$$\therefore\ n = \frac{10^{-3} \times 4560 \times 10^{-10}}{6.625 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^{8}} = 2.303 \times 10^{15}$$

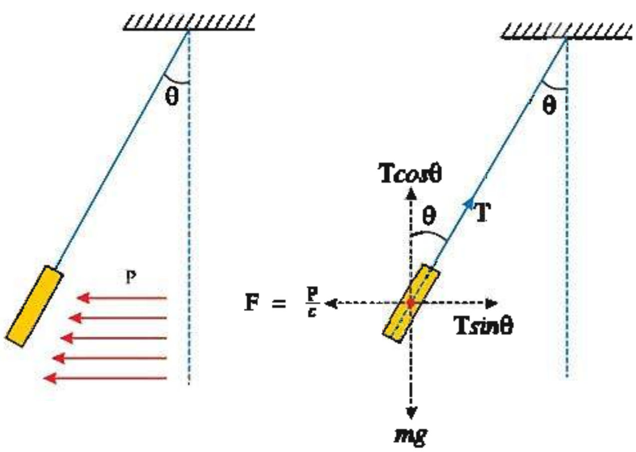
nનું આ મૂલ્ય સમીકરણ (2)માં મૂકતાં,

$$I = \frac{2.303 \times 10^{15} \times 0.5 \times 1.6 \times 10^{-19}}{100}$$

$$\therefore\ I = 1.84 \times 10^{-6}\ A = 1.84\ \mu A$$

ઉદાહરણ 11 (a) : આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે હલકી દોરી વડે લટકાવેલી, એક નાની સમતલ પટ્ટી પર 1 sમાં P જેટલી વિકિરણ-ઊર્જા (જૂલ) આપાત થાય છે અને શોષાઈ જાય છે. વિકિરણને કારણે બળ લાગતાં આ પટ્ટી શિરોલંબ સાથે θ કોણ બનાવી સમતોલનમાં રહે છે. જો દોરીની લંબાઈ l હોય, તો આકૃતિમાં દર્શાવેલ ખૂણો θ શોધો. વિકિરણ એકરંગી લો. પટ્ટીનું દળ m છે.

ઉકેલ : વિદ્યુતચુંબકીય વિકિરણ જ્યારે કોઈ સપાટી પર આપાત થાય છે, ત્યારે દબાણ અને પરિણામે બળ ઉત્પન્ન કરે છે. અહીં, એક સેકન્ડમાં P જૂલ ઊર્જા આપાત થાય છે. આ વિકિરણ-ઊર્જા ફોટોનની બનેલી ગણીએ અને એક સેકન્ડમાં જો n ફોટોન આપાત થતા હોય, તો



$$nhf = P \qquad (1)$$

હવે, દરેક ફોટોનનું વેગમાન, $p = \frac{hf}{c}$ (2)

સમીકરણ (1)માંથી hfનું મૂલ્ય સમીકરણ (2)માં મૂકતાં,

$$p = \frac{P}{nc}$$

$\therefore$ n ફોટોનનું વેગમાન $= np = \frac{P}{c}$

પટ્ટીને દરેક સેકન્ડે આટલું વેગમાન મળે છે.

$\therefore$ પટ્ટીના વેગમાનના ફેરફારનો દર $= \frac{P}{c}$ = બળ

$$\therefore\ F = \frac{P}{c} \qquad (3)$$

આ બળ આકૃતિમાં દર્શાવ્યું છે.

હવે, પટ્ટી સમતોલનમાં હોવાથી, તેના પર લાગતાં બળોના શિરોલંબ અને સમક્ષિતિજ ઘટકોને સમતોલતાં,

$$\left.\begin{aligned} T\cos\theta &= mg \\ \text{અને } T\sin\theta &= \frac{P}{c} \end{aligned}\right\} \therefore\ \tan\theta = \frac{P}{cmg} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{P}{cmg}\right)$$

ઉદાહરણ 11 (b) : ઉપરના ઉદાહરણમાં જો પક્ષીને તેના સમતોલન સ્થાનમાંથી સહેજ ચલિત કરીને છોડી દેવામાં આવે, તો પક્ષીનાં સરળ આવર્ત-દોલનોનો આવર્તકાળ શોધો.

ઉકેલ : અહીં અસરકારક 'ગુરુત્વપ્રવેગ' = $\vec{g_e} = \frac{\vec{P}}{mc} + \vec{g}$

$$\therefore |\vec{g_e}| = \sqrt{\left(\frac{P}{mc}\right)^2 + g^2}$$

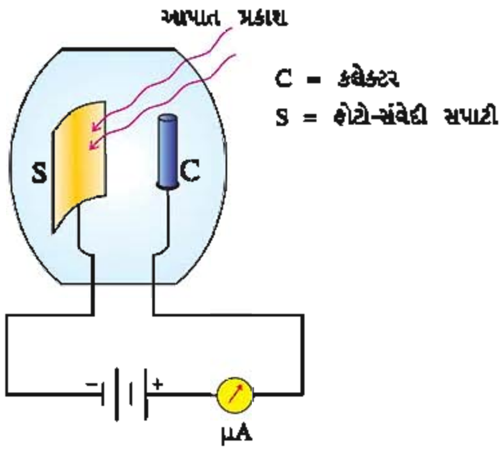
$$\text{હવે, } T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_e}} = \sqrt{\frac{l}{\sqrt{\left(\frac{P}{mc}\right)^2 + g^2}}}$$

$$\therefore T = 2\pi\left[\frac{l}{\left\{\left(\frac{P}{mc}\right)^2 + g^2\right\}^{\frac{1}{2}}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

7.5 ફોટોસેલ (Photocell)

ફોટો-ઈલેક્ટ્રિક અસરની વ્યાવહારિક ઉપયોગિતા માટે ફોટોસેલ (જેને ઈલેક્ટ્રિક-આંખ પણ કહેવામાં આવે છે.) તૈયાર કરવામાં આવે છે. કેટલાક ફોટોસેલમાં જુદી-જુદી ફોટો-સંવેદી સપાટીને બદલે એક જ ફોટો સંવેદી સ્તર (Layer) વાપરવામાં આવે છે. આ એક ફોટોસેલની રેખાકૃતિ નીચેની આકૃતિ 7.5માં દર્શાવેલ છે.

ફોટોસેલ બલ્બની દીવાલ કાચની અથવા ક્વાર્ટ્ઝની બનેલી હોય છે. જ્યારે (યોગ્ય આવૃત્તિવાળો) પ્રકાશ ફોટો-સંવેદી સપાટી પર આપાત કરવામાં આવે છે, ત્યારે સામાન્ય રીતે થોડાક માઇક્રોએમ્પિયરના ક્રમનો પ્રવાહ ઉત્પન્ન થાય છે. જ્યારે આપાતપ્રકાશની તીવ્રતા બદલાય છે, ત્યારે ફોટો-ઈલેક્ટ્રિક પ્રવાહ પણ બદલાય છે. ફોટોસેલના આ ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરીને નિયંત્રક તંત્રો (Control Systems) કાર્ય કરે છે અને તે પરથી આપાતપ્રકાશની તીવ્રતા માપી શકાય છે.



આકૃતિ 7.5 ફોટોસેલ

તેઓનો ઉપયોગ પ્રકાશમીટરમાં ફોટોગ્રાફિક કૅમેરામાં, ઇલેક્ટ્રિક બેલમાં, બર્ગલર એલાર્મમાં અને ફાયર એલાર્મમાં થાય છે. અવકાશ-સંશોધનમાં તારાઓનાં તાપમાન અને તેમના વર્ણપટોના અભ્યાસમાં પણ ફોટોસેલનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

7.6 દ્રવ્યતરંગો કણોનો તરંગ-સ્વભાવ (Matter Waves-Wave Nature of Particles)

ફોટો-ઈલેક્ટ્રિક અને કૉમ્પ્ટન-અસરો દ્વારા પ્રકાશ કણસ્વરૂપ ધરાવે છે અને નહીં કે તરંગસ્વરૂપ તેમ સાબિત થાય છે. વળી, આપણે જાણીએ છીએ કે પ્રકાશને લગતી વ્યતિકરણ, વિવર્તન, ધ્રુવીભવન જેવી ઘટનાઓની સમજૂતી પ્રકાશને તરંગ-સ્વરૂપે સ્વીકારીએ તો જ આપી શકાય છે. આ એક વિરોધાભાસ (Paradox) છે કે જેમાં એક જ ભૌતિક રાશિ (અત્રે, પ્રકાશ)નું તદ્દન ભિન્ન એવાં બે સ્વરૂપો (તરંગ અને કણ)નું અસ્તિત્વ સાબિત કરે છે. એક શક્યતા પ્રમાણે એવું ધારી શકાય કે પ્રકાશ જ્યારે ગતિ કરતો હોય, ત્યારે તરંગ-સ્વરૂપે પરંતુ શોષણ કે ઉત્સર્જન વખતે (એટલે કે દ્રવ્ય સાથેની આંતરક્રિયા વખતે) કણસ્વરૂપ ધારણ કરતો હોવો જોઈએ. આ વર્ણન સૂચવે છે કે વિકિરણ દ્વૈત-સ્વભાવ ધરાવે છે : (સતત) તરંગ-જેવું વિસ્તરેલ અને આપેલ પરિસ્થિતિ અનુસાર(અસતત) સંકેન્દ્રિત કણસ્વરૂપ.

સાપેક્ષતાવાદ અનુસાર, નિર્દેશફ્રેમ (Frame of Reference))ની અદલા-બદલી માટેનું લોરેન્ટ્ઝ રૂપાંતરણ, જેમ E અને f વચ્ચેનો સંબંધ સૂચવે છે, તેમ વેગમાન (p) અને તરંગ-સદિશ (k) વચ્ચે પણ કોઈ સંબંધ હોવો જોઈએ તેવી જરૂરિયાતનો નિર્દેશ કરે છે. ફોટોનનું સ્થિર દળ (m_0) શૂન્ય હોવાથી, તેનું વેગમાન નીચેના સૂત્ર પ્રમાણે આપી શકાય. (જુઓ સમીકરણ 7.4.4),

$$p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (\because\ c = f\lambda) \tag{7.6.1}$$

અથવા $$\lambda = \frac{h}{p} \tag{7.6.2}$$

લૉરેન્ટ્ઝ રૂપાંતરણની આ જરૂરિયાતને ધ્યાનમાં લઈને, 1924માં, લૂઈસ દ બ્રોગ્લી (Louis de Broglie)એ એવો તર્ક આપ્યો કે જો પ્રકાશ (કે જે પ્રચલિત યંત્રશાસ્ત્ર પ્રમાણે તરંગસ્વરૂપ ધરાવે છે) જો અમુક સંજોગોમાં કણસ્વરૂપે વર્તતો હોય તો તે શક્ય છે કે દ્રવ્ય (કે જે પ્રચલિત યંત્રશાસ્ત્ર અનુસાર કણોનો બનેલો છે) અનુકૂળ સંજોગોમાં તરંગ-સ્વરૂપ ધરાવી શકે. **"વિકિરણ અને દ્રવ્યને અનુલક્ષીને કુદરત સંમિતિ ધરાવતી હોવી જોઈએ."** વિકિરણ અને કણનો દ્વૈત-સ્વભાવ કુદરતના કોઈ વ્યાપક નિયમનો એક ભાગ હોવો જોઈએ. અર્થાત્, વિકિરણ અને દ્રવ્ય એમ બંને દ્વૈત-સ્વભાવ ધરાવતા હોવા જોઈએ : કણ અને તરંગ-સ્વરૂપ.

આમ, બ્રૉગ્લી અનુસાર, સમીકરણ (7.6.2) એ દ્રવ્યકણો માટે પણ સાચું હોવું જોઈએ. m દળ ધરાવતા અને v જેટલી ઝડપથી ગતિ કરતું કણ (એટલે કે, તેનું વેગમાન $p = mv$ થશે) જ્યારે તરંગ-સ્વભાવ દર્શાવે ત્યારે તેને અનુરૂપ તરંગલંબાઈ સમીકરણ (7.6.2) પરથી શોધી શકાય.

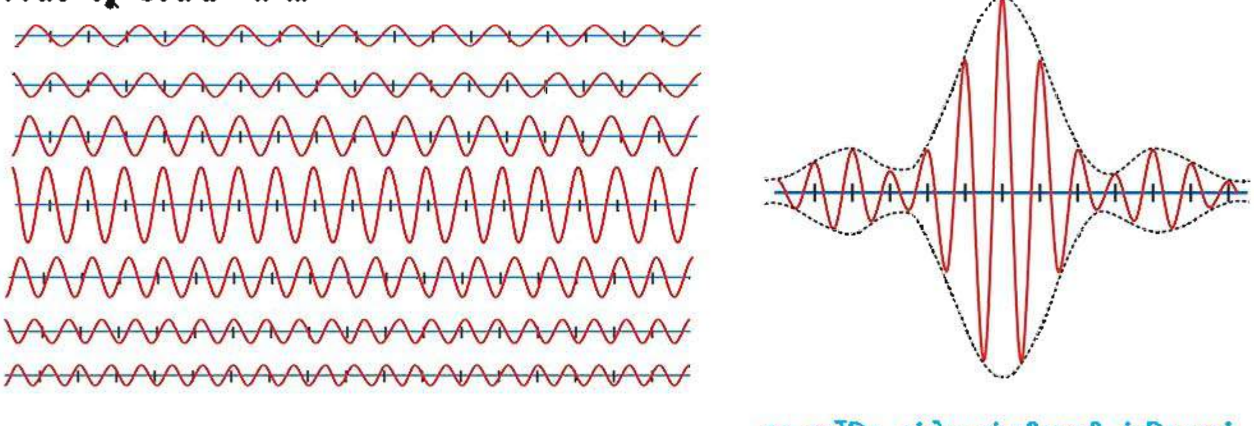
$$\lambda = \frac{h}{mv} \tag{7.6.3}$$

આ તરંગલંબાઈને કણની દ બ્રૉગ્લી તરંગલંબાઈ કહે છે. આપણે યાદ રાખવું જોઈએ કે દ્રવ્યકણની સાથે કોઈ તરંગ જોડાયેલું હોતું નથી. તેનો મતલબ કે અમુક સંજોગોમાં કણની વર્તણૂક તેના તરંગ સ્વરૂપની મદદથી સમજી શકાય છે.

હકીકતમાં, દ્રવ્ય કણનો તરંગ-સ્વભાવનો વિચાર Erwin Schroedinger (ઇરવીન શ્રોડિન્જર) (1926) એ તેના વિકસિત તરંગ-સમીકરણની મદદથી પણ દર્શાવ્યો. તેણે દર્શાવ્યું કે આ તરંગ-સમીકરણ (દ્રવ્યકણો સાથે સંકળાયેલા તરંગો માટે) અને અમુક ભૌતિક સ્થિતિ અનુસાર જરૂરી શરતો દ્વારા જુદી-જુદી ભૌતિક રાશિઓનો ક્વૉન્ટાઇઝ્ડ (અસતત) સ્વભાવ મેળવી શકાય છે કે જે કણોના તરંગ-સ્વભાવની પુષ્ટિ કરે છે. જ્યારે તેની પ્રાયોગિક સાબિત આપતા પ્રયોગો, દા.ત., ડેવિસન-ગર્મરનો પ્રયોગ (કે જેનો અભ્યાસ આપણે આ પછીના વિભાગમાં કરીશું) કિકુચી (Kikuchi)નો વિવર્તનનો પ્રયોગ, ઇલેક્ટ્રૉન સાથે સંકળાયેલ દ બ્રૉગ્લી તરંગલંબાઈ દર્શાવતો થોમસનનો પ્રયોગ પણ કરવામાં આવ્યા.

અલબત્ત, દ્રવ્યના તરંગ-સ્વભાવે સૌથી ગંભીર કોયડો એ 'કણ'ની મૂળભૂત વ્યાખ્યા સામે કર્યો. પ્રચલિત રીતે, કણ એટલે ચોક્કસ સ્થાન અને વેગમાન ધરાવતો બિંદુવત્ પદાર્થ. દ બ્રૉગ્લીના વાદ અનુસાર કે જે કણનો તરંગ-સ્વભાવ (અર્થાત્ અવકાશમાં વિસ્તરેલ)ની પુષ્ટિ કરે છે, પ્રશ્ન હવે એ હતો કે હવે કેવી રીતે ચોકસાઈથી દ્રવ્યકણનું સ્થાન અને વેગમાન માપવું ?

એક અવકાશમાં પથરાયેલ હાર્મોનિક તરંગ સ્વાભાવિક છે કે આવા બિંદુવત્ કણને દર્શાવી શકે નહીં. આ સૂચવે છે કે કણને રજૂ કરતા તરંગની તરંગપ્રક્રિયા પણ અવકાશના મર્યાદિત ભાગમાં જ (અથવા નજીકના વિસ્તારમાં જ) સીમિત હોવી જોઈએ. આ કારણથી તરંગ-પૅકેટ (Wave-Packet) (અર્થાત્, ખૂબ જ નાના વિસ્તારમાં મર્યાદિત તરંગ)નો વિચાર રજૂ કરવામાં આવ્યો.



(a) થોડી જુદી પડતી તરંગલંબાઈવાળા હાર્મોનિક તરંગો

(b) હાર્મોનિક તરંગોના સંપાતીકરણથી કંપવિસ્તારમાં ફેરફાર

આકૃતિ 7.6 તરંગ-પૅકેટની રચના

આપણે જાણીએ છીએ કે જેમની તરંગલંબાઈઓ સતત રીતે બદલાતી જતી હોય તેવા ઘણા હાર્મોનિક તરંગોને જ્યારે એકબીજા પર સંપાત કરવામાં આવે છે (સંપાતીકરણનો સિદ્ધાંત ભૂલી નથી ગયાંને ?) ત્યારે પરિણામી તરંગનું સ્થાનાંતર અવકાશનાં ખૂબ જ મર્યાદિત ભાગમાં જ જોવા મળે છે (આકૃતિ 7.6 જુઓ). આ સંદર્ભમાં એવું વિચારવું વ્યાજબી ઠરશે કે કણ એ આવા તરંગ પૅકેટના વિસ્તારમાં હશે. વળી, જે વિસ્તારમાં પરિણામી તરંગનું સ્થાનાંતર વધારે હશે તે વિસ્તારમાં કણને શોધવાની સંભાવના પણ વધારે હશે. હવે જો આપણે એક જ હાર્મોનિક તરંગનો વિચાર કરીએ તો કણને અવકાશમાં $-\infty$ થી $+\infty$ સુધી બધે જ શોધવાની સંભાવના સમાન થશે. (કારણ કે, હાર્મોનિક તરંગનો કંપવિસ્તાર અવકાશમાં બધે જ સરખો હોય છે.) બીજા શબ્દોમાં, કણનું સ્થાન સંપૂર્ણપણે અચોક્કસ બની જાય છે. પરંતુ હાર્મોનિક તરંગને ચોક્કસ એક જ તરંગલંબાઈ હોવાથી સમીકરણ (7.6.3) અનુસાર, તેનું વેગમાન એક જ ચોક્કસ મૂલ્યનું થશે.

હવે જો તરંગ-પૅકેટ (જુદી-જુદી તરંગલંબાઈ ધરાવતા અને એકબીજા પર સંપાત થયેલા તરંગોનો સમૂહ)ની મદદથી કણને રજૂ કરીએ તો, કણનું સ્થાન વધુ ચોકસાઈથી માપી શકાશે, અને તે તરંગ-પૅકેટના કદના સમપ્રમાણમાં હશે. પરંતુ, હવે ઘણી જુદી-જુદી તરંગલંબાઈઓવાળા તરંગોનો ઉપયોગ કણને રજૂ કરવા માટે થતો હોવાથી તેનું વેગમાન એક જ મૂલ્યનું અને ચોક્કસ રહેશે નહીં.

આમ, આ વિકિરણ અને કણનો મૂળભૂત દ્વૈત-સ્વભાવ ભૌતિક રાશિઓના એકસાથેના માપનમાં અનિશ્ચિતતા (Uncertainty) પેદા કરે છે.

હાઈઝનબર્ગનો અનિશ્ચિતતાનો સિદ્ધાંત (Heisenberg's Uncertainty Principle) : હાઈઝનબર્ગના અનિશ્ચિતતાના સિદ્ધાંત અનુસાર, જો કણના x-યામની અનિશ્ચિતતા Δx હોય અને તેના વેગમાનના x-ઘટકની અનિશ્ચિતતા Δp હોય, (એટલે કે એક પરિમાણમાં), તો

$\therefore \ \Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{2\pi} \geq \hbar$ ($\hbar$ ક્રૂટ અથવા h ક્રૉસ એમ વાંચો.) (7.6.4)

હવે, જો $\Delta x \to 0$ તો $\Delta p \to \infty$

અને $\Delta p \to 0$ તો $\Delta x \to \infty$ થાય.

તે જ રીતે, કણની ઊર્જા અને સમયના માપનમાં રહેલી અનિશ્ચિતતા માટે, અનિશ્ચિતતા નિયમાનુસાર,

$\therefore \ \Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$ (7.6.5)

ફક્ત જાણકારી માટે : ઉપર પ્રમાણે કણને અમુક બિંદુ પાસે હોવાથી સંભાવનાની વાત કરી. હકીકતમાં કણને રજૂ કરતાં તરંગ-વિધેયો (Wave Functions) ગાણિતીય રીતે ખાસ પ્રકારના વિકલ સમીકરણ (શ્રોડિંજર સમીકરણ-Schroedinger's equation)ના ઉકેલ સ્વરૂપે મેળવી શકાય છે. આ તરંગ-વિધેયો પરિસ્થિતિ અનુસાર વાસ્તવિક અથવા સંકર (Complex) વિધેયો હોય છે. મેક્સ બોર્ન નામના વિજ્ઞાનીના મત અનુસાર અવકાશમાં કોઈ પણ બિંદુએ એકમ પરિમાણમાં કણને શોધવાની સંભાવના આવા તરંગ-વિધેયના માનાંકના વર્ગ ($|\psi|^2 = \psi^* \psi$)ના સમપ્રમાણમાં હોય છે. આ ચર્ચા દર્શાવે છે કે, સૂક્ષ્મ કણોની ચર્ચાઓના પાયામાં આવી સંભાવનાઓથી જ કામ લેવું પડે છે. ભૌતિક વિજ્ઞાનની આ શાખાને તરંગ મિકેનિક્સ (Wave Mechanics) કહે છે.

ઉપર્યુક્ત ચર્ચા પરથી તમે નોંધી શક્યા હશો કે, ક્વૉન્ટમ મિકેનિક્સ પર આધારિત ભૌતિકવિજ્ઞાનનો અભિગમ પ્રચલિત ભૌતિકવિજ્ઞાન (Classical Physics)ની જેમ deterministic નથી.

ઉપર્યુક્ત ચર્ચાના સંદર્ભમાં આપેલો સૂક્ષ્મ કણ, દા.ત., ઇલેક્ટ્રૉન, કણ છે કે તરંગ તેવો પ્રશ્ન અર્થહીન છે. હકીકતમાં તો તેને તરંગ કે કણ કશું જ ન કહેવાય. તે તો કોઈ વધારે મૂળભૂત ભૌતિક વાસ્તવિકતા છે જેની વર્તણૂક અમુક સંજોગોમાં કણના-મિકેનિક્સ વડે, તો અમુક સંજોગોમાં તરંગ-મિકેનિક્સ (Wave Mechanics) વડે સમજી શકાય છે. તરંગ અને કણસ્વરૂપના સંદર્ભમાં વિકસેલ ગાણિતિક અભ્યાસો તો માત્ર કુદરતને સમજવામાંના બે અભિગમો છે.

'તરંગ કે કણ ?'- એવા પ્રશ્નને વિખ્યાત લેખક Margenau (માર્ગેનુ) 'હાથીના ઈંડાનો રંગ કેવો હોય ?' - તેવા પ્રશ્ન સાથે સરખાવે છે. હાથીના ઈંડાનું અસ્તિત્વ હોય તો જ આ પ્રશ્નનો અર્થ રહે ને ?!

ઉદાહરણ 12 : સમાન 500 m/sની ઝડપથી કે જે 0.01 % ચોકસાઈથી માપી શકાય છે તેવા (1) 25 g દળ ધરાવતી બુલેટ અને (2) ઇલેક્ટ્રૉન હોય ત્યારે તેમના સ્થાનના માપનમાં મળતી ચોકસતા શોધો. વળી, તમારા જવાબ પરથી મળતા તારણો લખો. ઇલેક્ટ્રૉનનું દળ 9.1×10^{-31} kg લો.

ઉકેલ : (1) બુલેટના વેગમાનમાં મળતી અનિશ્ચિતતા 0.01 હોવાથી, $\Delta p = mv$ના 0.01% થશે.

$$= \left(\frac{0.01}{100}\right) \times (25 \times 10^{-3}) \times (500)$$
$$= 1.25 \times 10^{-3} \text{ kg m s}^{-1}$$

તેથી, તેને અનુરૂપ તેના સ્થાનમાં ઉદ્ભવતી અનિશ્ચિતતા,

$$\therefore \Delta x = \frac{\hbar}{\Delta p} \quad \text{(સમીકરણ 7.5.4 પરથી)}$$

$$= \frac{6.625 \times 10^{-34}}{2 \times 3.14 \times (1.25) \times 10^{-3}} \times 10^{-3} \qquad \left(\because \hbar = \frac{h}{2\pi}\right)$$

$$= 8.44 \times 10^{-32} \ m.$$

તારણ : બુલેટના પરિમાણની સરખામણીમાં Δxનું મૂલ્ય અત્યંત નાનું હોવાથી તેને અવગણી શકાય. અર્થાત્ બુલેટનું સ્થાન ચોકસાઈથી માપી શકાય.

(2) ઇલેક્ટ્રૉનના વેગમાનમાં અનિશ્ચિતતા,

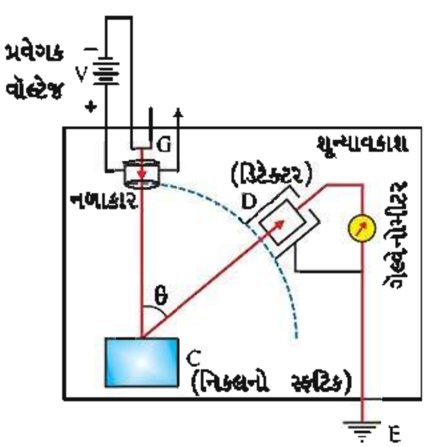
$$\therefore \Delta p = \left(\frac{0.01}{100}\right) \times (9.1 \times 10^{-31}) \times (500) = 4.55 \times 10^{-32} \text{ kg.m. s}^{-1}$$

તેને અનુરૂપ સ્થાનમાં અનિશ્ચિતતા,

$$\Delta x = \frac{6.625 \times 10^{-34}}{2 \times 3.14 \times 4.55 \times 10^{-32}} = 0.23 \times 10^{-2} \text{ m} = 2.3 \text{ mm}$$

તારણ : ઇલેક્ટ્રૉનને જો કણસ્વરૂપે ધારીએ, તો તેના પરિમાણની સરખામણીમાં તેના સ્થાનની અનિશ્ચિતતા (2.3 mm) અત્યંત મોટી છે. પરિણામસ્વરૂપ, ઇલેક્ટ્રૉન એ અત્યંત સૂક્ષ્મ કણ છે તેમ વિચારી શકાય નહીં.

7.7 ડેવિસન-ગર્મરનો પ્રયોગ (Davisson-Germer Experiment)



આકૃતિ 7.7 ડેવિસન-ગર્મરના પ્રયોગની ગોઠવણી

ઈ.સ. 1927 સુધી દ બ્રૉગ્લીની પરિકલ્પનાને પ્રાયોગિક અનુમોદન મળ્યું નહિ. આવી પરિસ્થિતિમાં ઈ. સ. 1927માં ડેવિસન અને ગર્મર નામના બે વિજ્ઞાનીઓ બેલ ટેલિફોન લૅબોરેટરીમાં શૂન્યાવકાશમાં રાખેલા નિકલ ધાતુના ટુકડાથી થતા ઇલેક્ટ્રૉનના પ્રકીર્ણન (Scattering)નો અભ્યાસ કરવા શ્રેણીબદ્ધ પ્રયોગો કરી રહ્યા હતા.

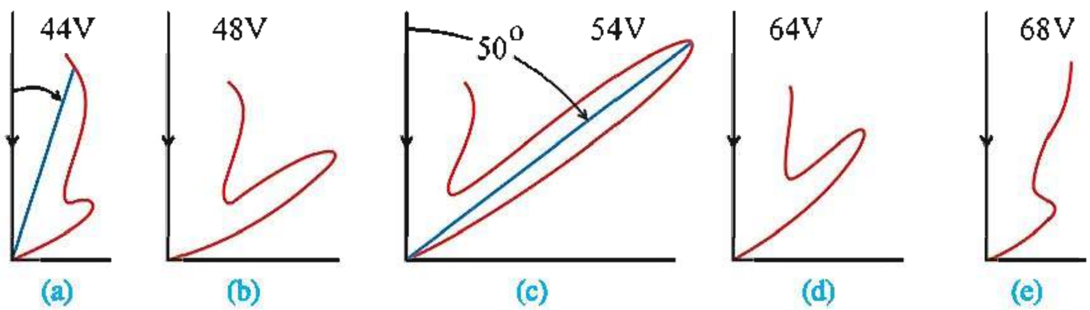
તેમનું પ્રયોગસાધન આકૃતિ 7.7માં દર્શાવ્યું છે.

અહીં, G એ ઇલેક્ટ્રૉન ગન દર્શાવે છે. તેનું ફિલામેન્ટ ટંગસ્ટનનો બનેલો હોય છે. આ ફિલામેન્ટ પર બેરિયમ ઑક્સાઇડનું પાતળું સ્તર ચઢાવેલ હોય છે. ફિલામેન્ટને L. T. (Low Tension = ઓછો p.d.). વડે ગરમ કરવામાં આવે છે. આથી, તેમાંથી ઇલેક્ટ્રૉનનું ઉત્સર્જન થાય છે. હવે, H. T. (High Tension) વડે ઉદ્ભવતા વિદ્યુતક્ષેત્રની યોગ્ય ગોઠવણી કરી ઇલેક્ટ્રૉનને જરૂરી વેગ આપી શકાય છે. આ ઇલેક્ટ્રૉન કાણાવાળા નળાકારમાંથી પસાર થઈ સાંકડો કિરણદંડ (beam) રચી નિકલના ટુકડા પર આપાત થાય છે અને તેના વડે (વાસ્તવમાં ટુકડાના પરમાણુઓ) વડે તેમનું પ્રકીર્ણન થાય છે. જુદી-જુદી દિશાઓમાં પ્રકીર્ણન પામતાં ઇલેક્ટ્રૉન્સની નોંધ લેવા માટે આકૃતિ 7.7માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે વર્તુળાકાર સ્કેલ પર ફરી શકે તેવું ડિટેક્ટર D રાખવામાં આવે છે. આ ડિટેક્ટરનો આઉટપુટ પ્રવાહ ગેલ્વેનોમીટરમાંથી પસાર થાય છે, જેનું માપ જે-તે દિશામાં પ્રકીર્ણિત થયેલા ઇલેક્ટ્રૉન્સની સંખ્યાનો ખ્યાલ આપે છે.

પ્રચલિત ભૌતિકશાસ્ત્ર (Classical Physics) અનુસાર જુદી-જુદી દિશામાં પ્રકીર્ણન પામતા ઇલેક્ટ્રૉન્સની સંખ્યા પ્રકીર્ણન કોણ (Angle of Scattering) પર ખાસ આધાર રાખતી હોવી જોઈએ નહિ. વળી, આ સંખ્યા આપાત ઇલેક્ટ્રૉનની ઊર્જા પર તો બહુ જ ઓછો આધાર રાખતી હોવી જોઈએ. ડેવિસન અને ગર્મરે પ્રચલિત ભૌતિકશાસ્ત્રની આ આગાહીઓ નિકલનો ટુકડો પ્રેરક (Scatterer) તરીકે વાપરીને ચકાસી જોઈ.

તેઓના એક પ્રયોગ દરમિયાન પ્રવાહી હવાનો બાટલો ફાટતાં અકસ્માત થયો. પરિણામે, નિકલના ટુકડાની સપાટી બગડી ગઈ. આ સપાટી સરખી કરવા તેમણે નિકલના ટુકડાને ઊંચા તાપમાન સુધી ગરમ કરી પછી ઠંડો કર્યો. ફરીથી પ્રયોગ કરતાં જણાયું કે, હવે તો કંઈક 'નવું જ' જોવા મળે છે. તેમણે જોયું કે સ્ફટિક વડે X-raysનું વિવર્તન થતાં જેવાં પરિણામો મળે છે, તેવાં જ પરિણામો ઇલેક્ટ્રૉનનું નિકલ વડે વિવર્તન થતાં પણ મળે છે. આ સંજોગોમાં ઇલેક્ટ્રૉન તરંગ તરીકે વર્તતા હોય, તો જ આમ બની શકે. આમ થવાનું કારણ હતું કે, નિકલના ટુકડાને ઊંચા તાપમાને ગરમ કરીને ઠંડો પાડતા તે એક જ સ્ફટિક (Single Crystal)ના રૂપમાં આવી ગયો હતો.

પ્રસ્તુત પ્રયોગમાં પ્રકીર્ણન પામતા ઇલેક્ટ્રૉન બીમની તીવ્રતા આપેલા પ્રવેગક વૉલ્ટેજ માટે જુદા-જુદા પ્રકીર્ણન કોણ (θ) એ માપી શકાય છે. પ્રકીર્ણન કોણ એટલે આપાત ઇલેક્ટ્રૉન બીમ અને પ્રકીર્ણિત બીમની દિશા વચ્ચેનો કોણ. આકૃતિ 7.8માં ડેવિસન અને ગર્મરે લીધેલા 44 V થી 68 V વચ્ચેના પ્રવેગક વૉલ્ટેજો માટેના તીવ્રતા $\rightarrow$ θના આલેખો ગુણાત્મક રીતે દર્શાવ્યા છે.



આકૃતિ 7.8 ડેવિસન-ગર્મરનાં પ્રાયોગિક પરિણામો

આલેખો દર્શાવે છે કે, આપેલા પ્રવેગક વૉલ્ટેજ માટે કોઈ એક પ્રકીર્ણન કોણે પ્રકીર્ણન પામતાં ઇલેક્ટ્રૉનની સંખ્યા મહત્તમ છે. 54 V પ્રવેગક વૉલ્ટેજવાળો આલેખ ધ્યાનપૂર્વક જુઓ. અહીં, 50°ના કોણે પ્રકીર્ણન પામતાં ઇલેક્ટ્રૉન્સની સંખ્યા સ્પષ્ટ રીતે ખૂબ મોટી હોવાનું જોઈ શકાય છે. ઉપર્યુક્ત પ્રાયોગિક પરિણામો, જો ઇલેક્ટ્રૉનને દ-બ્રૉગ્લી તરંગલંબાઈ ધરાવતાં કણો તરીકે લઈએ અને જેમ X-raysનું સ્ફટિકો દ્વારા પ્રકીર્ણન થાય છે, તેમ ઇલેક્ટ્રૉનનું પણ પ્રકીર્ણન થાય છે, તેવું સ્વીકારીએ તો જ સમજી શકાય છે. નિકલ સ્ફટિકનું આંતર-પરમાણુ અંતર જાણીતું છે. આ જ્ઞાત માહિતીનો ઉપયોગ કરીને પ્રકીર્ણનનું સૂત્ર વાપરી પ્રસ્તુત કિસ્સામાં પ્રાયોગિક રીતે ઇલેક્ટ્રૉનની તરંગલંબાઈ શોધી શકાય છે.

જો પ્રવેગક વૉલ્ટેજ V હોય અને ઇલેક્ટ્રૉનનો વિદ્યુતભાર e હોય, તો ઇલેક્ટ્રૉનની ઊર્જા,

$$\therefore \ \frac{1}{2}mv^2 = eV$$

$$\therefore \ m^2v^2 = 2meV$$

$$\therefore \ mv = \sqrt{2meV}$$

પણ તરંગલંબાઈ, $\lambda = \frac{h}{mv}$

$$\therefore \ \lambda = \frac{h}{\sqrt{2meV}} \tag{7.7.1}$$

ઉપર્યુક્ત સૂત્રમાં V = 54 V સાથે $h = 6.625 \times 10^{-34}$ Js, $m = 9.1 \times 10^{-31}$ kg અને $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C, મૂકતાં, $\lambda = 1.66 \times 10^{-10}$ m મળે છે. જ્યારે પ્રયોગમાં મળતું λનું મૂલ્ય 1.65×10^{-10} m હતું. આમ, આકસ્મિક રીતે જ સાબિત થયું કે, ઇલેક્ટ્રૉન તરંગ તરીકે પણ વર્તે છે.

ફક્ત જાણકારી માટે : તરંગ મિકેનિક્સ (wave mechanics) પછીનો ક્વૉન્ટમ્ ફિઝિક્સનો વિકાસ અત્યંત રોચક છે. કુદરતને સમજવા મથતા માનવીનું આ ભવ્ય જ્ઞાન છે એટલું જ નહિ, પરંતુ તે વિજ્ઞાન, ગણિત અને તત્ત્વજ્ઞાનનો ત્રિવેણી સંગમ છે, જેમાં નહાવાથી 'કુદરતની-ઈશ્વરની લીલા' કેવી ભવ્ય છે, જેનો ખ્યાલ આવે છે.

ઉદાહરણ 13 : તમે સ્કૂલે જવા મોડા પડ્યા છો અને 3.0 m s^{-1}ના વેગથી સ્કૂલ તરફ જઈ રહ્યા છો. તમારું દળ 60 kg હોય, તો તમે 'કણ' છો, તેમ ધારીને તમારી દ બ્રૉગ્લી તરંગલંબાઈ શોધો.

$h = 6.625 \times 10^{-34}$ J S.

ઉકેલ : $p = mv = 60 \times 3.0 = 1.8 \times 10^2$ kg m s^{-1}

હવે, $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6.625 \times 10^{-34}}{1.8 \times 10^2} = 3.68 \times 10^{-36}$ m

નોંધ : આ મૂલ્ય પરમાણુના ન્યુક્લિયસની ત્રિજ્યા ($\sim 10^{-15}$ m) કરતાં પણ 10^{-21} ગણું ઓછું છે. જો તમારા તરંગ ગુણધર્મો 'કાયદેસર' બનાવવા હોય, તો તમારું દળ અકલ્પ્ય રીતે ઓછું કરવું પડે !!

ઉદાહરણ 14 : એક પ્રોટોન પૃથ્વીના ગુરુત્વક્ષેત્રમાં મુક્ત પતન શરૂ કરે છે, તો તેની ગતિની શરૂઆત બાદ 10 s પછી તેને અનુરૂપ દ બ્રૉગ્લી તરંગલંબાઈ કેટલી હશે ? પ્રોટોન પર ગુરુત્વાકર્ષી બળ સિવાય બળો અવગણો.

$g = 10$ m s^{-2}, $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg, $h = 6.625 \times 10^{-34}$ J s

ઉકેલ : $v = v_0 + gt$ પરથી,

$v = gt$

$\therefore$ વેગમાન, $p = m_p v = m_p gt$

$$\therefore \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_p gt}$$

$$\therefore \lambda = \frac{6.625 \times 10^{-34}}{1.67 \times 10^{-27} \times 10 \times 10}$$

$\therefore \lambda = 3.96 \times 10^{-9}$ m $= 39.6$ Å

ઉદાહરણ 15 : એક ઇલેક્ટ્રૉન 10 C જેટલા બિંદુવત્ વિદ્યુતભારથી 10 m અંતરે છે. તેની કુલ ઊર્જા 15.6×10^{-10} J છે, તો આ ઇલેક્ટ્રૉનની આ સ્થાને દ બ્રૉગ્લી તરંગલંબાઈ શોધો.

$h = 6.625 \times 10^{-34}$ J s; $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg; $k = 9 \times 10^9$ SI,

$e = 1.6 \times 10^{-19}$ C

ઉકેલ : ઇલેક્ટ્રૉનની સ્થિતિ-ઊર્જા $U = -k\frac{(q)(e)}{r}$

$$\therefore U = -\frac{9 \times 10^9 \times 10 \times 1.6 \times 10^{-19}}{10}$$

$\therefore U = -14.4 \times 10^{-10}$ J (1)

હવે, કુલ ઊર્જા E = ગતિ-ઊર્જા K + સ્થિતિ-ઊર્જા U

$\therefore K = E - U$

$= 15.6 \times 10^{-10} + 14.4 \times 10^{-10}$

$\therefore\ K = 30 \times 10^{-10}$ J

પણ, $K = \frac{p^2}{2m_e}$

$\therefore\ p = \sqrt{2Km_e}$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2Km_e}} = \frac{6.625\times10^{-34}}{\sqrt{2\times30\times10^{-10}\times9.1\times10^{-31}}}$$

$\therefore\ \lambda = 8.97 \times 10^{-15}$ m

ઉદાહરણ 16 : 1 Å તરંગલંબાઈવાળા X-raysના એક ફોટોનની ઊર્જાની તેટલી જ દ બ્રોગ્લી તરંગલંબાઈ ધરાવતા ઇલેક્ટ્રૉનની ઊર્જા સાથે સરખામણી કરો. $h = 6.625 \times 10^{-34}$ J s; $c = 3 \times 10^8$ m s^{-1}; $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg

ઉકેલ : ફોટોન માટે,

ઊર્જા, $E_p = hf = \frac{hc}{\lambda}$ $\qquad \lambda = 1$ Å $= 10^{-10}$ m

$$\therefore\ E_p = \frac{6.625\times10^{-34}\times3\times10^8}{10^{-10}} = 19.87 \times 10^{-16}\ \text{J}$$

ઇલેક્ટ્રૉન માટે,

ઊર્જા, $E_e = \frac{p^2}{2m}$

પરંતુ, દ બ્રોગ્લી સંબંધ અનુસાર, $p = \frac{h}{\lambda}$

$$\therefore\ E_e = \frac{h^2}{\lambda^2(2m)} = \frac{(6.625\times10^{-34})^2}{(10^{-10})^2\times2\times9.1\times10^{-31}} = 2.41 \times 10^{-17}\ \text{J}$$

$$\therefore\ \frac{E_p}{E_e} = \frac{19.87\times10^{-16}}{2.41\times10^{-17}}$$

$$\therefore\ \frac{E_p}{E_e} = 82.4$$

આમ, ફોટોનની ઊર્જા તેટલી જ તરંગલંબાઈવાળા ઇલેક્ટ્રૉનની ઊર્જા કરતાં આશરે 82.4 ગણી છે.

ઉદાહરણ 17 : E ઊર્જાવાળા મુક્ત ઇલેક્ટ્રૉનની તરંગલંબાઈ $\lambda_0 = \frac{h}{\sqrt{2mE}}$ છે, જ્યાં m એ ઇલેક્ટ્રૉનનું દળ છે. હવે, આ ઇલેક્ટ્રૉન X-દિશામાં $V(x)$ સ્થિતિમાન ધરાવતા વિસ્તારમાં દાખલ થાય છે, તો આ વિસ્તારમાં ઇલેક્ટ્રૉનની તરંગલંબાઈ કેટલી હશે ? જો એમ સ્વીકારીએ કે સ્થિતિમાનની હાજરીના કારણે જાણે કે ઇલેક્ટ્રૉન એક માધ્યમમાંથી બીજા માધ્યમમાં જાય છે, તો આ 'માધ્યમ'નો વક્રીભવનાંક શોધો.

ઉકેલ : સ્થિતિમાનવાળા વિસ્તારમાં ઇલેક્ટ્રૉનની ઊર્જા,

E = (ગતિ-ઊર્જા)K + (સ્થિતિ-ઊર્જા)U

$$\therefore\ E = \frac{p^2}{2m} - eV(x)$$

$$\therefore\ p = [2m(\mathrm{E}+e\mathrm{V}(x)]^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore\ \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{[2m(\mathrm{E}+e\mathrm{V}(x)]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\text{હવે, વક્રીભવનાંક} = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{[2m(\mathrm{E}+e\mathrm{V}(x)]^{\frac{1}{2}}}{(2m\mathrm{E})^{\frac{1}{2}}} \quad \left(\because\ \lambda_0 = \frac{h}{\sqrt{2m\mathrm{E}}}\right)$$

$$\therefore\ \text{વક્રીભવનાંક} = \left[\frac{\mathrm{E}+e\mathrm{V}(x)}{\mathrm{E}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

ઉદાહરણ 18 : ન્યુક્લિયસની ત્રિજ્યા 10^{-15} m લો. આ ન્યુક્લિયસમાં જો ઇલેક્ટ્રૉન હોવાની ધારણા કરીએ, તો ઇલેક્ટ્રૉનની ઊર્જા કેટલા MeV થાય ?

ઇલેક્ટ્રૉનનું દળ = 9.1×10^{-31} kg; $h = 6.625 \times 10^{-34}$ J s

ઉકેલ : ઇલેક્ટ્રૉન આ સંજોગોમાં તરંગ તરીકે વર્તતું હોવાથી ઇલેક્ટ્રૉનના સ્થાનની મહત્તમ અનિશ્ચિતતા,

$\therefore\ \Delta x = 2r = 2 \times 10^{-15}$ m   જ્યાં r = ન્યુક્લિયસની ત્રિજ્યા $= 10^{-15}$ m

હવે, હાઇઝનબર્ગના અનિશ્ચિતતાના સિદ્ધાંત અનુસાર,

$$\therefore\ \Delta x \cdot \Delta p \approx \frac{h}{2\pi}$$

$$\therefore\ \Delta p \approx \frac{h}{2\pi\Delta x} = \frac{6.625\times10^{-34}}{2\times3.14\times2\times10^{-15}} = 0.5274 \times 10^{-19}$$

હવે, આ અનિશ્ચિતતાને જ (આશરે) ઇલેક્ટ્રૉનનું વેગમાન લઈએ ($p \approx \Delta p$), તો ઇલેક્ટ્રૉનની ઊર્જા,

$$\mathrm{E} = \frac{p^2}{2m}$$

$$= \frac{(0.5274\times10^{-19})^2}{2\times9.1\times10^{-31}}\ \mathrm{J} = \frac{(0.5274\times10^{-19})^2}{2\times9.1\times10^{-31}\times1.6\times10^{-19}}\ e\mathrm{V} = 9.55 \times 10^3\ \mathrm{MeV}$$

હવે, ન્યુક્લિયસોની ન્યુક્લિઓન દીઠ બંધન-ઊર્જા થોડાંક MeV જેટલી જ હોય છે. તેના કરતાં આપણે મેળવેલું મૂલ્ય ઘણું મોટું છે, તેથી જ તો ઇલેક્ટ્રૉન ન્યુક્લિયસમાં રહેતા નથી.

ઉદાહરણ 19 : સમીકરણ $y_1 = \mathrm{A}\ sin(\omega t - kx)$ and $y_2 = \mathrm{A}\ sin[(\omega + d\omega)t - (k + dk)x]$થી રજૂ થતાં બે હાર્મોનિક તરંગોના સંપાતીકરણના પરિણામે રચાતું તરંગ-પૅકેટ શોધો.

ઉકેલ : સંપાતપણાના સિદ્ધાંત અનુસાર,

$$y = y_1 + y_2$$
$$= \mathrm{A}\ sin(\omega t - kx) + \mathrm{A}\ sin[(\omega + d\omega)t - (k + dk)x]$$

$sin\ \mathrm{A} + sin\ \mathrm{B} = 2\ sin\left(\frac{\mathrm{A+B}}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{\mathrm{A-B}}{2}\right)$નો ઉપયોગ કરતાં,

$$y = 2\mathrm{A}\ cos\left(\frac{xdk - td\omega}{2}\right) \cdot sin\left[(\omega t - kx) + \left(\frac{td\omega - xdk}{2}\right)\right]$$

આ તરંગ-પૅકેટનો કંપવિસ્તાર = $2\mathrm{A}\ cos\left(\frac{xdk - td\omega}{2}\right)$ હોવાથી તે (કંપવિસ્તાર) સમય (t) અને સ્થાન (x) બંને પર આધાર રાખે છે.

સારાંશ

1. કાળા પદાર્થના વિકિરણમાં ઊર્જા-વિતરણ, વિદ્યુતકીય તટસ્થ પરમાણુની સ્થિરતા અને તેના વર્ણપટ, દ્વિ-પરમાણુક અણુઓની અને ઘન પદાર્થોની નીચા તાપમાને વિશિષ્ટ ઉષ્મા જેવાં કેટલાંક પ્રાયોગિક પરિણામોને સમજાવવાની પ્રચલિત યંત્રશાસ્ત્રની મુશ્કેલીઓને કારણે વૈજ્ઞાનિકોને તદ્દન જુદી રીતે વિચારવા મજબૂર કર્યા.
2. પ્લાન્કે તેના ક્રાંતિકારી વિચારમાં એવું સૂચવ્યું કે, સૂક્ષ્મ વિદ્યુત-ડાઇપોલના દોલનોની ઊર્જાનું ક્વૉન્ટમીકરણ થાય છે અને તે hf જેટલી હોય છે, જ્યારે તેની કુલ ઊર્જા એ આ ઊર્જાના નાનામાં નાના જથ્થા hf, ફોટોનના, પૂર્ણગુણાંકમાં જ હોય છે. અત્રે, hને પ્લાન્કનો વિશ્વનિયતાંક કહે છે. આ ફોટોન વાસ્તવિક કણના બધા જ ગુણધર્મો ધરાવે છે.
3. પ્લાન્કના વાદ દ્વારા કાળા પદાર્થના વિકિરણનો કોયડો સફળતાથી ઉકેલી શકાયો.
4. ધાતુમાંથી ઇલેક્ટ્રૉનને બહાર લાવવા માટે ઇલેક્ટ્રૉનને લઘુતમ જરૂરી ઊર્જા પૂરી પાડવી પડે છે, જેને તે ધાતુનું વર્ક-ફંક્શન કહે છે. વર્ક-ફંક્શન ધાતુના પ્રકાર, તેની સપાટીના પ્રકાર અને તાપમાન પર આધાર રાખે છે.
5. વર્ક-ફંક્શનને અનુરૂપ વિકિરણની જે લઘુતમ આવૃત્તિ જોઈએ, તેને થ્રેશોલ્ડ-આવૃત્તિ કહે છે.
6. પ્રકાશના તરંગવાદ અનુસાર, ફોટો-ઇલેક્ટ્રિક પ્રવાહનો આપાત પ્રકાશની તીવ્રતા પરનો આધાર, આપાતપ્રકાશની આવૃત્તિ પર ઉત્સર્જાતા ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉન્સની મહત્તમ ઊર્જાના આધાર અને નહીં કે તેની તીવ્રતા પર આધાર, ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉન્સનું તાત્ક્ષણિક (10^{-9} s સમયગાળામાં) ઉત્સર્જન, વગેરે સમજી શકાતા નથી.
7. પ્રકાશને કણ સ્વરૂપે ધારી, આઇન્સ્ટાઇને ફોટો-ઇલેક્ટ્રિક અસરનો કોયડો ઉકેલ્યો હતો. તેણે ફોટો-ઇલેક્ટ્રિક સમીકરણ $\frac{1}{2}mv^2_{max} = eV_0 = hf - \phi_0$ આપ્યું કે જે ઊર્જા-સંરક્ષણના નિયમને અનુસરે છે.
8. ફોટો-ઇલેક્ટ્રિક અને કૉમ્પ્ટન-અસર દ્વારા વિકિરણનો દ્વૈતસ્વભાવ સાબિત થયો.
9. કુદરતમાં સંમિતિના તર્કને આધારે, દ બ્રૉગ્લીએ વધારામાં સૂચવ્યું કે કણ પણ દ્વૈત-સ્વભાવ ધરાવે છે, જેની પ્રાયોગિક (દા.ત., ડેવિસન-ગર્મરનો પ્રયોગ) તથા સૈદ્ધાંતિક (દા. ત., શ્રોડિન્જરનું તરંગ-સમીકરણ) સાબિતી પ્રસ્થાપિત થઈ.
10. આ સૂચવે છે કે બંને વિકિરણ અને દ્રવ્યકણો દ્વૈત-સ્વભાવ (કણ અને તરંગ) ધરાવે છે.
11. પ્લાન્કના વિશ્વનિયતાંક (h)નું અશૂન્ય મૂલ્ય અને હાઇઝનબર્ગનો અનિશ્ચિતતાનો સિદ્ધાંત પ્રચલિત યંત્રશાસ્ત્રની મર્યાદાઓનું માપ છે.

સ્વાધ્યાય

નીચે વિધાનો માટે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

1. કૅથોડ કિરણો ....
   (A) કૅથોડ તરફ ગતિ કરતાં પરમાણુઓ છે.
   (B) વિદ્યુતચુંબકીય તરંગો છે.
   (C) કૅથોડથી એનોડ તરફ ગતિ કરતાં આયનો છે.
   (D) કૅથોડમાંથી ઉત્સર્જાઈને એનોડ તરફ ગતિ કરતાં ઇલેક્ટ્રૉન્સ છે.
2. ફોટોન માટે નીચેનામાંથી કયું વિધાન સાચું નથી ?
   (A) ફોટોન દબાણ ઉત્પન્ન કરતાં નથી. (B) ફોટોનની ઊર્જા hf છે.
   (C) ફોટોનનું વેગમાન $\frac{hf}{c}$ છે. (D) ફોટોનનું સ્થિર દળ (Rest mass) શૂન્ય છે.
3. ફોટો-ઇલેક્ટ્રિક અસરમાં ઉત્સર્જાયેલા ઇલેક્ટ્રૉનનો વેગ ફોટોસંવેદી સપાટીના ગુણધર્મો અને .... પર આધાર રાખે છે.
   (A) આપાત પ્રકાશની આવૃત્તિ
   (B) આપાત પ્રકાશના ધ્રુવીભવનની સ્થિતિ
   (C) આપાત પ્રકાશ કેટલો સમય આપાત થાય છે તે
   (D) આપાત પ્રકાશની તીવ્રતા
4. ફોટો-ઇલેક્ટ્રિક અસર દર્શાવે છે કે,
   (A) ઇલેક્ટ્રૉન તરંગ-સ્વરૂપ ધરાવે છે. (B) પ્રકાશ કણ સ્વરૂપ ધરાવે છે.
   (C) (1) અને (2) બંને. (D) ઉપરનામાંથી એક પણ નહિ.

5. 2.25×10^8 m s^{-1} જેટલા વેગથી ગતિ કરતાં એક કણની દ બ્રૉગ્લી તરંગલંબાઈ એક ફોટોનની તરંગલંબાઈ જેટલી છે, તો કણની ગતિ-ઊર્જા અને ફોટોનની ઊર્જાનો ગુણોત્તર .... છે.
પ્રકાશનો વેગ = 3×10^8 m s^{-1}

(A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{5}{8}$ (D) $\frac{7}{8}$

6. ફોટોનની ઊર્જા $E = hf$ છે અને ફોટોનનું વેગમાન $p = \frac{h}{\lambda}$ લઈએ કે જ્યાં λ એ ફોટોનની તરંગલંબાઈ છે, તો આવી ધારણા સાથે પ્રકાશ-તરંગની ઝડપ .... છે.

(A) $\frac{p}{E}$ (B) $\frac{E}{p}$ (C) Ep (D) $\left(\frac{E}{p}\right)^2$

7. બે એકસમાન ધાતુની પ્લેટો પર ફોટો-ઇલેક્ટ્રિક ઘટના મેળવવામાં આવે છે. આમાંની A પ્લેટ પર λ_A તરંગલંબાઈ અને B પ્લેટ પર λ_B તરંગલંબાઈનો પ્રકાશ આપાત થાય છે, જ્યાં $\lambda_A = 2\lambda_B$, તો તેમની મહત્તમ ગતિ-ઊર્જા K_A અને K_B વચ્ચે .... સંબંધ હોય.

(A) $2K_A = K_B$ (B) $K_A < \frac{K_B}{2}$ (C) $K_A = 2K_B$ (D) $K_A > \frac{K_B}{2}$

8. પૂર્વથી પશ્ચિમમાં ગતિ કરતાં કૅથોડ કિરણો એક વિદ્યુતક્ષેત્રમાં દાખલ થાય છે. જો આ વિદ્યુતક્ષેત્ર ઉત્તરથી દક્ષિણ દિશામાં હોય, તો કૅથોડ કિરણો .... દિશામાં વિચલિત થાય છે.

(A) પૂર્વ (B) પશ્ચિમ (C) દક્ષિણ (D) ઉત્તર

9. જો અલ્ટ્રાવાયોલેટ વિકિરણોથી ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉન્સનું ઉત્સર્જન ન થતું હોય, તો .... વડે ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉન્સનું ઉત્સર્જન શક્ય હોય.

(A) ઇન્ફ્રારેડ તરંગો (B) રેડિયો-તરંગો (C) X-rays (D) દૃશ્ય પ્રકાશ

10. એક ધાતુ પર 1 eV અને 2.5 eV ગતિ ઊર્જા ધરાવતા ફોટોન્સને વારાફરતી આપાત કરવામાં આવે છે. જેનું વર્ક-ફંક્શન 0.5 eV. તો આ ધાતુમાંથી ઉત્તેજિત થતા ઇલેક્ટ્રૉનની મહત્તમ ઝડપનો ગુણોત્તર .... થશે.

(A) 1 : 2 (B) 2 : 1 (C) 3 : 1 (D) 1 : 3

11. બે સમાન ફોટોસંવેદી સપાટીઓ પર f_1 અને f_2 આવૃત્તિઓવાળા પ્રકાશ આપાત થાય છે, તો m દળવાળા ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉન્સના મહત્તમ વેગ જો v_1 અને v_2 હોય, તો ....

(A) $v_1^2 - v_2^2 = \frac{2h}{m}(f_1 - f_2)$ (B) $v_1 + v_2 = \left[\frac{2h}{m}(f_1 + f_2)\right]^{\frac{1}{2}}$

(C) $v_1^2 + v_2^2 = \frac{2h}{m}(f_1 + f_2)$ (D) $v_1 - v_2 = \left[\frac{2h}{m}(f_1 + f_2)\right]^{\frac{1}{2}}$

12. એક પ્રોટોન અને એક α-કણ એક સમાન p.d.માંથી પસાર કરવામાં આવે છે. તેમની પ્રારંભિક ઝડપ શૂન્ય છે, તો પ્રવેગિત થયા પછી તેમની દ બ્રૉગ્લી તરંગલંબાઈઓનો ગુણોત્તર .... છે.

(A) 1 : 1 (B) 1 : 2 (C) 2 : 1 (D) $2\sqrt{2}$: 1

13. ગતિમાન ફોટોનનું દળ .... છે.

(A) $\frac{c}{hf}$ (B) $\frac{h}{\lambda}$ (C) hf (D) $\frac{hf}{c^2}$

14. 10 KeV ઊર્જાના ઇલેક્ટ્રૉનની તરંગલંબાઈ .... Å છે.

(A) 0.12 (B) 1.2 (C) 12 (D) 120

15. જો ઇલેક્ટ્રૉનનું વેગમાન 5200 Å તરંગલંબાઈને અનુરૂપ ફોટોનના વેગમાન જેટલું જોઈતું હોય, તો ઇલેક્ટ્રૉનનો વેગ .... m s^{-1} રાખવો પડે.

(A) 10^3 (B) 1.2×10^3 (C) 1.4×10^3 (D) 2.8×10^3

16. એક કણના સ્થાનની અનિશ્ચિતતા તેની દ બ્રૉગ્લી તરંગલંબાઈ જેટલી છે, તો તેના વેગમાનની અનિશ્ચિતતા .... હશે.

(A) $\frac{\hbar}{\lambda}$ (B) $\frac{2\hbar}{3\lambda}$ (C) $\frac{\lambda}{\hbar}$ (D) $\frac{3\lambda}{2\hbar}$

17. એક પ્રોટોન અને એક ઇલેક્ટ્રોનને એક અભેદ્ય એક પારિમાણિક ડબામાં પૂર્યા છે, તો તેમના વેગની અનિશ્ચિતતાઓનો ગુણોત્તર .... છે. [m_e = ઇલેક્ટ્રોનનું દળ અને m_p = પ્રોટોનનું દળ.]

(A) $\frac{m_e}{m_p}$ (B) $m_e \cdot m_p$ (C) $\sqrt{m_e \cdot m_p}$ (D) $\sqrt{\frac{m_e}{m_p}}$

18. α-કણોને V જેટલા p.d.થી પ્રવેગિત કરતાં તેમની દ બ્રોગ્લી તરંગલંબાઈ .... Å છે.
(α-કણનું દળ 6.4×10^{-27} kg, α-કણનો વિદ્યુતભાર 3.2×10^{-19} C)

(A) $\frac{0.287}{\sqrt{V}}$ (B) $\frac{12.27}{\sqrt{V}}$ (C) $\frac{0.103}{\sqrt{V}}$ (D) $\frac{1.22}{\sqrt{V}}$

19. એક પ્રોટોન અને એક α-કણની દ બ્રોગ્લી તરંગલંબાઈઓ સમાન છે, તો .... રાશિ તેમના માટે સમાન હશે.

(A) વેગ (B) ઊર્જા (C) આવૃત્તિ (D) વેગમાન

20. ઇલેક્ટ્રોનની દ બ્રોગ્લી તરંગલંબાઈ 10^{-10} mથી ઘટાડી 0.5×10^{-10} m કરવા માટે તેની ઊર્જા .... કરવી પડે.

(A) પ્રારંભિક ઊર્જા કરતાં 4 ગણી (B) પ્રારંભિક ઊર્જા કરતાં 2 ગણી
(C) પ્રારંભિક ઊર્જા કરતાં અડધી (D) પ્રારંભિક ઊર્જા કરતાં ચોથા ભાગની

21. પ્રોટોન અને α–કણ માટેની દ બ્રોગ્લી તરંગલંબાઈ સમાન છે. તો તેમના વેગોનો ગુણોત્તર .... થશે
[α–કણએ He-ન્યુક્લિયસ છે, કે જે બે પ્રોટોન અને બે ન્યુટ્રોનનું બનેલું છે. આમ, તેનું દળ $m_\alpha \approx 4m_p$; જ્યાં m_p એ પ્રોટોનનું દળ છે.]

(A) 1 : 4 (B) 1 : 2 (C) 2 : 1 (D) 4 : 1

22. m_0 જેટલું સ્થિર-દળ ધરાવતા અને શૂન્યાવકાશમાં પ્રકાશની ઝડપ જેટલા વેગથી ગતિ કરતા કણ માટે દ બ્રોગ્લી તરંગલંબાઈ .... હશે.

(A) $\frac{h}{m_0 c}$ (B) 0 (C) ∞ (D) $\frac{m_0 c}{h}$

23. ધાતુની સપાટીવાળા ફોટો-ઇલેક્ટ્રિક સેલ પર 40 cm કેન્દ્રલંબાઈ ધરાવતા બહિર્ગોળ લેન્સ વડે સૂર્યનું પ્રતિબિંબ પાડતા, I જેટલો ફોટો-ઇલેક્ટ્રિક પ્રવાહ મળે છે. હવે જો બીજા અડધી કેન્દ્રલંબાઈ પરંતુ સમાન વ્યાસ ધરાવતા લેન્સની મદદથી સૂર્યનું પ્રતિબિંબ ફોટો-ઇલેક્ટ્રિક સેલ પર કેન્દ્રિત કરવામાં આવે, તો મળતો ફોટોઇલેક્ટ્રિક પ્રવાહ .... થશે.

(A) $\frac{I}{4}$ (B) 2 I (C) I (D) $\frac{I}{2}$

24. ક્વૉન્ટમ યંત્રશાસ્ત્રમાં, કણ ....

(A) ને હાર્મોનિક તરંગોના સમૂહ તરીકે રજૂ કરી શકાય.
(B) ને કોઈ ચોક્કસ તરંગલંબાઈ ધરાવતા એક તરંગ તરીકે રજૂ કરી શકાય.
(C) ને ફક્ત જોડીમાં બે હાર્મોનિક તરંગો તરીકે રજૂ કરી શકાય.
(D) ને દળ ધરાવતા બિંદુવત્ પદાર્થ તરીકે ગણી શકાય.

25. નીચે આપેલી કઈ ભૌતિક રાશિને પ્લાન્ક-અચળાંકનું જ પરિમાણ છે ?

(A) બળ (B) કોણીય વેગમાન
(C) ઊર્જા (D) કાર્યત્વરા

જવાબો

1. (D)	2. (A)	3. (A)	4. (B)	5. (B)	6. (B)
7. (B)	8. (D)	9. (C)	10. (A)	11. (A)	12. (D)
13. (D)	14. (A)	15. (C)	16. (A)	17. (A)	18. (C)
19. (D)	20. (A)	21. (D)	22. (B)	23. (C)	24. (A)
25. (B)					

નીચે આપેલ પ્રશ્નોના જવાબ ટૂંકમાં આપો :

1. ફોટોન એટલે શું ?
2. પારજાંબલી આફત કોને કહે છે ?
3. કેવિટી વિકિરણ માટે ઊર્જા-વિતરણની સમજૂતી આપવા માટે પ્લાંકની વિચારધારા જણાવો.
4. કેવિટી વિકિરણ માટે ઊર્જા-વિતરણની સમજૂતી માટે પ્લાંકનું ક્રાંતિકારી સૂચન જણાવો.
5. ધાતુનું વર્ક-ફંકશન (ϕ) વ્યાખ્યાયિત કરો.
6. ધાતુનું વર્ક-ફંકશન શેના પર આધારિત છે ?
7. ઉષ્માજનિત ઉત્સર્જન કોને કહે છે ?
8. ફિલ્ડ-ઉત્સર્જનની વ્યાખ્યા આપો.
9. ફોટો-ઇલેક્ટ્રિક ઉત્સર્જન વ્યાખ્યાયિત કરો.
10. થ્રેસોલ્ડ-આવૃત્તિ f_0 કોને કહે છે ? થ્રેસોલ્ડ-આવૃત્તિ f_0 શેના પર આધારિત છે ?
11. સ્ટૉપિંગ-પોટેન્શિયલ (V_0) કોને કહે છે ?
12. સ્ટૉપિંગ-પોટેન્શિયલ શેનું માપ આપે છે ?
13. સ્ટૉપિંગ-પોટેન્શિયલ શેના પર આધારિત છે ?
14. દ બ્રૉગ્લીની પરિકલ્પના જણાવો.
15. તરંગ-પૅકેટની વ્યાખ્યા આપો.
16. હાઇઝનબર્ગની અનિશ્ચિતતાનો સિદ્ધાંત જણાવો.
17. ડેવીસન-ગર્મરના પ્રયોગનું તારણ જણાવો.
18. સોડિયમ ધાતુની થ્રેસોલ્ડ તરંગલંબાઈ (λ_0) 6800 $\mathring{A}$ છે, તો તેનું વર્ક-ફંકશન ϕ eVમાં શોધો.
19. 5000 $\mathring{A}$ તરંગલંબાઈ ધરાવતા વિકિરણના ફોટોનની ઊર્જા eVમાં ગણો.

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. ફોટો-ઇલેક્ટ્રિક ઉત્સર્જનની લાક્ષણિકતાઓ જણાવો.
2. ફોટો-ઇલેક્ટ્રિક અસરમાં મળતાં પરિણામો સમજાવવામાં તરંગવાદની નિષ્ફળતા જણાવો.
3. ફોટો ઇલેક્ટ્રિક અસર માટે આઇન્સ્ટાઇનની સમજૂતી આપો.
4. ફોટોનના ગુણધર્મો જણાવો.
5. ફોટોસેલ વિશે નોંધ લખો.
6. ડેવિસન-ગર્મરના પ્રયોગની પ્રાયોગિક રચના સમજાવો.
7. ડેવિસન-ગર્મરના પ્રયોગથી મળતા તારણની સમજૂતી આપો.
8. 2 eV વર્ક-ફંકશન ધરાવતી ધાતુની સપાટી પર 4000 $\mathring{A}$ તરંગલંબાઈવાળી વિકિરણને આપાત કરતાં ઉત્તેજિત થતા ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉનની મહત્તમ K.E. eVમાં ગણો.
9. 6000 $\mathring{A}$ તરંગલંબાઈવાળા પ્રકાશકિરણની તીવ્રતા 39.6 w/m^2 ધરાવતા તે ધાતુની સપાટી પર આપાત કરવામાં આવે છે. આપાત ફોટોનના માત્ર 1 % ફોટોન જ ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉન ઉત્સર્જિત કરતાં હોય તો 1 secondમાં ઉત્સર્જિત થતા ઇલેક્ટ્રૉનની સંખ્યા ગણો. ($n = 1.2 \times 10^{18}$)

નીચેના દાખલા ગણો :

1. Cs ધાતુનો એક નાનો ટુકડો (વર્ક-ફંક્શન = 1.9 eV) એક ખૂબ મોટી ધાતુની પ્લેટથી 22 cm અંતરે મૂક્યો છે. ધાતુની પ્લેટ પર 1.2×10^{-9} C m^{-2} જેટલી પૃષ્ઠ વિદ્યુતઘનતા છે. હવે, Cs નાટુકડા પર 460 nm તરંગલંબાઈનો પ્રકાશ આપાત કરવામાં આવે છે, તો પ્લેટ પર પહોંચતા ફોટો-ઇલેક્ટ્રૉન્સની મહત્તમ અને ન્યૂનતમ ઊર્જાઓ ગણો. Csના ટુકડાના કારણે પ્લેટથી ઉત્પન્ન થતાં વિદ્યુતક્ષેત્રમાં કોઈ ફેરફાર થતો નથી તેમ ધારો.

   [જવાબ : ન્યૂનતમ ઊર્જા = 29.83 eV, મહત્તમ ઊર્જા = 30.63 eV]

2. ટંગસ્ટનની થ્રેશોલ્ડ તરંગલંબાઈ 2.73×10^{-5} cm છે. તેના પર 1.80×10^{-5} cm તરંગલંબાઈવાળું અલ્ટ્રાવાયોલેટ વિકિરણ આપાત થાય છે, તો (1) થ્રેશોલ્ડ આવૃત્તિ (2) વર્ક-ફંક્શન (3) ઉત્સર્જાતા ઇલેક્ટ્રૉનની મહત્તમ ગતિ-ઊર્જા (જૂલ અને ઇલેક્ટ્રૉન-વૉલ્ટ એકમોમાં) (4) સ્ટૉપિંગ-પોટેન્શિયલ અને (5) ઇલેક્ટ્રૉનનો મહત્તમ અને ન્યૂનતમ વેગ શોધો.

   [જવાબ : (1) $f_0 = 1.098 \times 10^{15}$ Hz $\approx 1.1 \times 10^{15}$ Hz, (2) $\phi = 4.54$ eV, (3) $K_{max} = 3.76 \times 10^{-19}$ J = 2.35 eV, (4) $V_0 = 2.35$ V, (5) $v_{max} = 9.09 \times 10^5$ m s^{-1} $\approx 9.1 \times 10^5$ m s^{-1}, $V_{min} = 0$ m s^{-1}]

3. એક ફોટોસંવેદી સપાટી પર આપાત વિકિરણની તરંગલંબાઈ 3500 Å થી ઘટાડીને 290 nm કરવામાં આવે, તો સ્ટૉપિંગ-પોટેન્શિયલમાં થતો ફેરફાર શોધો. $h = 6.625 \times 10^{-24}$ J s.

   [જવાબ : 73.42×10^{-2} V]

4. 100 Wનો એક બલ્બ તેને મળતી વિદ્યુત-ઊર્જામાંથી 3 % ઊર્જાનું પ્રકાશ-ઊર્જાનું રૂપાંતર કરે છે. જો આ બલ્બ વડે ઉત્સર્જાતા પ્રકાશની તરંગલંબાઈ 6625 Å હોય, તો 1 sમાં તેમાંથી ઉત્સર્જાતા ફોટોનની સંખ્યા ગણો. $h = 6.625 \times 10^{-34}$ J s. [જવાબ : 10^{19}]

5. જ્યારે એક ધાતુ પર 3000 Å તરંગલંબાઈનું વિકિરણ આપાત કરવામાં આવે છે, ત્યારે સ્ટૉપિંગ-પોટેન્શિયલ 1.85 V મળે છે અને જ્યારે 4000 Åનું વિકિરણ આપાત કરવામાં આવે છે ત્યારે સ્ટૉપિંગ પોટેન્શિયલ 0.82 V મળે છે. તો (1) પ્લાન્કનો અચળાંક (2) આ ધાતનું વર્ક-ફંક્શન (3) આ ધાતુની થ્રેશોલ્ડ તરંગલંબાઈ શોધો. [જવાબ : (1) $h = 6.59 \times 10^{-34}$ J s (2) $\phi_0 = 2.268$ eV (3) $\lambda_0 = 5440$ Å.]

6. Znનું વર્ક-ફંક્શન 3.74 eV છે. હવે, Znના એક ગોળાને બધી બાજુથી 12 Å તરંગલંબાઈવાળા X-raysથી 'પ્રકાશિત' કરવામાં આવે છે, તો આ ગોળા પર ઉદ્‌ભવતું વિદ્યુતસ્થિતિમાન શોધો. $h = 6.625 \times 10^{-34}$ J s. [જવાબ : 1031.4 V]

7. નીચેના દરેક કિસ્સામાં ફોટોનની ઊર્જા ગણો :

   (1) 1.5 cm તરંગલંબાઈવાળા માઇક્રોવેવ્ઝ (2) 660 nm તરંગલંબાઈવાળો રાતો પ્રકાશ

   (3) 96 MHz આવૃત્તિવાળા રેડિયો-તરંગો (4) 0.17 nm તરંગલંબાઈવાળા nmX–rays

   [જવાબ : (1) 8.3×10^{-5} eV (2) 1.9 eV (3) 4×10^{-7} eV (4) 7.3 keV]

8. માનવઆંખ 1 સેકન્ડમાં ઓછામાં ઓછા 19 ફોટોનની સંવેદના અનુભવી શકે છે. આ માટે 560 nm તરંગલંબાઈનો પ્રકાશ જરૂરી છે, તો આંખની દૃષ્ટિચેતના (Optic Nerves)ને ઉત્તેજિત કરવા ઓછામાં ઓછો કેટલો પાવર જોઈએ ? [જવાબ : 67.4×10^{-19} W]

9. એક તારા દ્વારા 4×10^{28} W પાવર ઉદ્ભવે છે. ઉત્સર્જાતું બધું વિકિરણ સરેરાશ રીતે 4500 Å નું ગણીએ, તો 1 sમાં ઉત્સર્જાતા ફોટોનની સંખ્યા ગણો. [જવાબ : 9.054×10^{46} ફોટોન્સ]

10. 300 K અને 1000 K તાપમાને રહેલા નાઇટ્રોજન વાયુના અણુની દ બ્રૉગ્લી તરંગલંબાઈઓનો ગુણોત્તર શોધો. નાઇટ્રોજનના અણુનું દળ 4.7×10^{-26} kg છે અને વાયુ 1 atm દબાણે છે. નાઇટ્રોજનને આદર્શ વાયુ ગણો.

[જવાબ : 1.826]

11. 3000 Å તરંગલંબાઈવાળો એકરંગી પ્રકાશ 4 cm^2 ક્ષેત્રફળ ધરાવતી સપાટી પર લંબરૂપે આપાત થાય છે. જો પ્રકાશની તીવ્રતા 150 $\frac{mW}{m^2}$ હોય, તો એક સેકન્ડમાં આ સપાટી પર અથડાતા ફોટોનની સંખ્યા શોધો.

[જવાબ : 9.05×10^{13} s^{-1}]

12. નરી આંખે જોઈ શકાતો એક સામાન્ય પ્રકાશિત તારો (Star) જે વિકિરણ ઉત્સર્જિત કરે છે, તેની પૃથ્વી પર તીવ્રતા 1.6×10^{-9} Wm^{-2} હોય છે. આ તીવ્રતા, 560 nm તરંગલંબાઈને અનુરૂપ હોય અને આપણી આંખની કીકીની ત્રિજ્યા 2.5×10^{-3} m હોય, તો આપણી આંખમાં 1 sમાં પ્રવેશતા ફોટોનની સંખ્યા શોધો.

[જવાબ : 9×10^4 ફોટોન્સ]

13. પોતાના સ્થિર દળ, $m_p = 1.6 \times 10^{-27}$ kg કરતાં 1.1 ગણું થાય તે માટેનો પ્રોટોનનો વેગ શોધો. વળી, તેને અનુરૂપ તાપમાન પણ ગણો. સરળતા ખાતર, પ્રોટોનને 1 atm દબાણે કોઈની સાથે આંતરક્રિયા ન કરતા આદર્શ-વાયુ કણ તરીકે વિચારો.

$1\ eV = 1.6 \times 10^{-19}$ J, $h = 6.63 \times 10^{-34}$ J s, $c = 3.0 \times 10^8$ m s^{-1}

[જવાબ : $v = 0.42$ C, 6.75×10^{11} K]

14. એક ઓછી શક્તિવાળા He-Ne લેસરનો પાવર આઉટપુટ 1.00 nW છે. તેમાંથી મળતા એકરંગી પ્રકાશની તરંગલંબાઈ 632.8 nm છે, તો આ લેસરમાંથી દર સેકન્ડે કેટલા ફોટોન ઉત્સર્જાતા હશે ?

$h = 6.625 \times 10^{-34}$ J s. [જવાબ : 3.18×10^{15} s^{-1}]

• • •

ઉકેલો

પ્રકરણ 1

1. ધારો કે ગોળા A પરનો વિદ્યુતભાર q_1 અને ગોળા B પરનો વિદ્યુતભાર q_2 છે. પ્રથમ કિસ્સામાં બંને ગોળા વચ્ચે લાગતું બળ $F = \frac{q_1 q_2}{d^2}$, ગોળા Aને ગોળા C સાથે સંપર્કમાં લાવતાં $q_A = \frac{q_1}{2}$, ગોળા A ને ગોળા B સાથે સંપર્કમાં લાવતાં $q_B = \frac{q_2}{2}$.

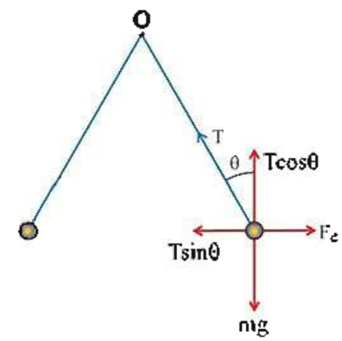
હવે, ગોળા A અને ગોળા Bને $\frac{d}{2}$ અંતરે મૂકતાં તેમની વચ્ચે લાગતું બળ,

$$F' = k\frac{(q_1/2)(q_2/2)}{(d/2)^2} = \frac{q_1 q_2}{d^2} = F$$

2. ધારો કે ગોળાના દ્રવ્યની ઘનતા = ρ અને

કેરોસીનની ઘનતા = ρ'

બે ગોળા હવામાં લટકાવેલ હશે, ત્યારે તેમના પર લાગતાં બળો આકૃતિમાં દર્શાવ્યાં છે. ગોળા સંતુલનમાં હોવાથી, $F_e = T\sin\theta$ અને $mg = T\cos\theta$.



આ પરથી, $\tan\theta = \frac{F_e}{mg}$ (1)

હવે ગોળાને કેરોસીનમાં ડુબાડતા તેમના પર ઉત્પ્લાવકબળ લાગતાં વજન mgને બદલે $(m - m')g$ થશે અને વિદ્યુતીય બળ $F_e = \frac{F_e}{2}$.

કારણ કે કેરોસીનનો ડાઇઇલેક્ટ્રિક અચળાંક $k = 2$ છે.

$$\therefore \tan\theta = \frac{F_e/2}{(m-m')g} \quad (2)$$

સમીકરણ (1) અને (2) સાથે સરખાવતાં, $m = 2m'$

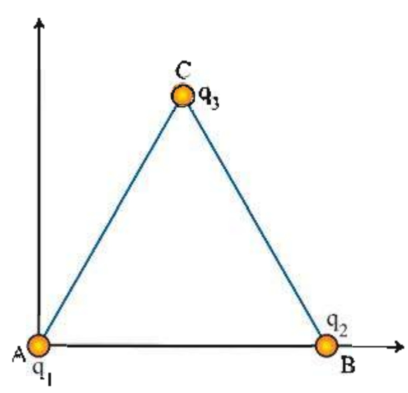
અથવા $\rho V = 2(\rho' V)$

$\therefore \rho = 2\rho' = 2 \times 800 = 1600 \ kgm^{-3}$

3. ધારો કે $q_1 = 0.5 \times 10^{-6}C$

$q_2 = -0.25 \times 10^{-6}C$, $q_3 = 0.1 \times 10^{-6}C$

આકૃતિ પરથી,



q_1નો સ્થાનસદિશ $\vec{r_1} = (0, 0)m$

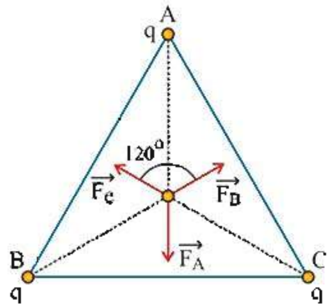
q_2નો સ્થાનસદિશ $\vec{r_2} = (5 \times 10^{-2}, 0)m$

q_3નો સ્થાનસદિશ $\vec{r_3} = (2.5 \times 10^{-2}, 2.5 \times 10^{-2}\sqrt{3})m$

હવે q_3 પર લાગતું બળ $\vec{F_3} = \vec{F_{31}} + \vec{F_{32}}$

$$= kq_3\left[\frac{q_1(\vec{r_3}-\vec{r_1})}{|\vec{r_3}-\vec{r_1}|^3} + \frac{q_2(\vec{r_3}-\vec{r_2})}{|\vec{r_3}-\vec{r_2}|^3}\right]$$

ઉપર્યુક્ત સમીકરણમાં કિંમતો મૂકી $\vec{F_3}$ની ગણતરી કરો.

4. 

આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ $2q$ પર લાગતું પરિણામી બળ $\vec{F} = \vec{F_A} + \vec{F_B} + \vec{F_C}$ સમબાજુ ત્રિકોણ હોવાથી $|\vec{F_A}| = |\vec{F_B}| = |\vec{F_C}|$ તેમની આ ત્રણેય બળો એકબીજાંથી 120°ના ખૂણે આવેલાં છે. આથી $\vec{F_A}$, $\vec{F_B}$ અને $\vec{F_C}$ નો સદિશ સરવાળો ત્રિકોણની રીતે કરતાં તેઓ બંધ ગાળો રચે છે. આથી તેમનું પરિણામી બળ શૂન્ય થશે.

5. ડાઇપોલ પર લાગતું ટોર્ક $\tau = PE\sin\theta = PE\theta$ ($\because$ θ નાનો છે.)
ટોર્ક સમઘડી દિશામાં ભ્રમણ કરતું હોવાથી $\tau = -PE\theta$
હવે, $\tau = I\alpha$ અને $\alpha = -\omega^2\theta$

$\omega = \sqrt{\frac{PE}{I}}$ $\therefore f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{PE}{I}}$

6. ધારો કે ઇલેક્ટ્રૉનને પૃષ્ઠથી r જેટલા અંતરેથી 150 eV ઊર્જા સાથે ફેંકવામાં આવે છે. ઇલેક્ટ્રૉન પર લાગતા બળની વિરુદ્ધ થતું કાર્ય, $W = \vec{F} \cdot \vec{r} = (-eE)(r) = \left(\frac{-e\sigma}{2\varepsilon_0}\right)(r)$

આ સૂત્રમાં કિંમતો મૂકી rનું મૂલ્ય શોધો.

7. ધારો કે બે ગોળાઓ પરનો વિદ્યુતભાર અનુક્રમે q_1, અને q_2 છે.
આથી કુલંબના નિયમ પરથી પ્રથમ કિસ્સા માટે,

$0.108 = 9 \times 10^9 \frac{q_1 q_2}{(0.5)^2}$

$\therefore q_1 q_2 = 3 \times 10^{-6}$ (1)

બંને ગોળાઓ સંપર્કમાં આવતા દરેક ગોળા પર $\frac{q_1 - q_2}{2}$ જેટલો વિદ્યુતભાર હશે. આ કિસ્સામાં બંને ગોળા વચ્ચે લાગતું બળ, $0.036 = \frac{9\times10^9\left(\frac{q_1 - q_2}{2}\right)^2}{(0.5)^2}$

$\therefore q_1 - q_2 = 2 \times 10^{-6}$ (2)

સમીકરણ (1) અને (2)ને ઉકેલતાં,

$q_1 = 3 \times 10^{-6}$C અને $q_2 = 1 \times 10^{-6}$C

8. $2q$ વિદ્યુતભારનો પ્રવેગ $a_1 = \frac{F_1}{m} = \frac{2qE}{m}$

t સમય બાદ તેનો વેગ $v_1 = a_1 t = \frac{2qE}{m}t$

આથી, ગતિ-ઊર્જા $K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{2q^2E^2}{m}t^2$ (1)

આ જ રીતે q વિદ્યુતભારની ગતિ-ઊર્જા ગણતાં $K_2 = \frac{q^2E^2}{4m}t^2$ (2)

સમીકરણ (1) અને (2) પરથી, $\frac{K_1}{K_2} = \frac{8}{1}$

9. લોલકના ગોળા પર બે પ્રકારનાં બળ લાગે છે : (1) વિદ્યુતીય બળ $q\vec{E}$ (2) વજનબળ $m\vec{g}$.

પરિણામી બળ, $\vec{F} = m\vec{g} + q\vec{E}$

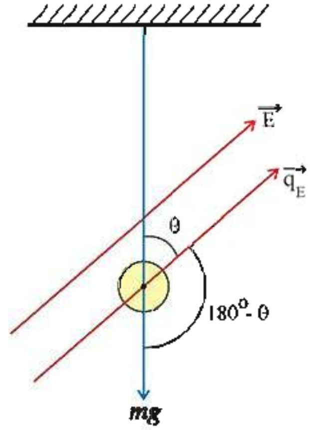
$\therefore \ |\vec{F}| = \sqrt{(mg)^2+(qE)^2+2(mg)(qE)cos(180^0-\theta)}$

ગોળાનો અસરકારક પ્રવેગ g_e લેતાં,

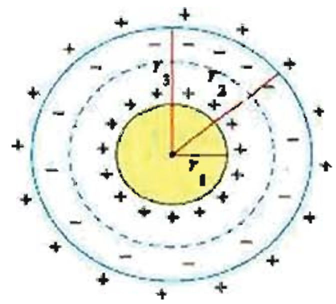
$$mg_e = \sqrt{(mg)^2+(qE)^2-2(mg)(qE)cos\theta}$$

$$\therefore \ g_e = \left(g^2+\frac{q^2E^2}{m^2}-\frac{2gqE}{m}cos\theta\right)^{\frac{1}{2}}$$

લોલકનો આવર્તકાળ $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_e}}$ માં g_eનું મૂલ્ય મૂકો.



10. $r_1 = 1$ cm ત્રિજ્યાના ગોળા પરના વિદ્યુતભાર qને કારણે $r_3 = 5$ cm ત્રિજ્યાના બહારના વિસ્તારમાં $+q$ અને અંદરના વિસ્તારમાં $-q$ વિદ્યુતભાર પ્રેરિત થાય છે. હવે $r_2 = 2$ cmનું ગોળાકાર ગાઉસિયન પૃષ્ઠ દોરી ગાઉસનો નિયમ લગાવતાં,



$$\int_s \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{\Sigma q}{\varepsilon_0}$$

$$E(4\pi r_2^2) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore \ E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}$$

આપેલ સૂત્રમાં કિંમતો મૂકી Eનું મૂલ્ય શોધો.

11. ઉદાહરણ 15ના ઉકેલ મુજબ કરો.

12. આપેલ કણને q જેટલો વિદ્યુતભાર આપવામાં આવે અને જો ઊર્ધ્વ દિશામાં લાગતું વિદ્યુતબળ qE અને તેનું વજન mg સમાન થાય તો કણ સ્થિર રહે.

$qE = mg$

$$\therefore \ q = \frac{mg}{E} = \frac{mg}{\sigma/\varepsilon_0}$$

ઉપર્યુક્ત સમીકરણમાં કિંમતો મૂકી qનું મૂલ્ય શોધો.

13. ઇલેક્ટ્રૉન અને પ્રોટોન વચ્ચે લાગતું બળ

$$F = k\frac{q_1q_2}{r^2} = \frac{9\times10^9(1.6\times10^{-19})^2}{(0.53\times10^{-10})^2} = 8.2 \times 10^{-8}N$$

ભ્રમણ કરતા ઇલેક્ટ્રૉન પરનું કેન્દ્રગામી બળ એ F જેટલું હોય છે.

$\frac{mv^2}{r} = F$. હવે $v = r\omega$ મૂકતાં,

$mr\omega^2 = F$

$\therefore$ ત્રિજ્યાવર્તી પ્રવેગ $r\omega^2 = \frac{F}{m} = \frac{8.2\times10^{-8}}{9.1\times10^{-31}} = 9 \times 10^{22}$ m/s^2

$$\therefore \ \omega = \sqrt{\frac{8.2\times10^{22}}{0.53\times10^{-10}}} = 3.9 \times 10^{16} \text{ rad/s.}$$

પ્રકરણ 2

1. Figure

$q_1 = 2$ C $\qquad q_2 = -3$ C

(i) $V = \frac{kq_1}{x_1} + \frac{kq_2}{(100-x_1)} = 0$ $\qquad$ (ii) $V = \frac{kq_1}{x_2} + \frac{kq_2}{(100+x_2)} = 0$

પરથી x_1 શોધો. $\qquad$ પરથી x_2 શોધો.

($q_1 = 2$ C અને $q_2 = -3$ C લો)

2. બંને ગોળાઓને વાહક તારથી જોડતાં તેમનાં સ્થિતિમાન સમાન થાય તે રીતે વિદ્યુતભારો વહેંચાઈ જાય છે.

$\therefore \frac{kQ_a}{a} = \frac{kQ_b}{a}$. પરંતુ $Q_b = Q - Q_a$

આ પરથી Q_a તે જ રીતે Q_b શોધો.

3. $E_x = \frac{-\partial V}{\partial x} = -(4xy - 4z^4)$, $E_y = \frac{-\partial V}{\partial y} = -(2x^2 + 9y^2z)$, $E_z = \frac{-\partial V}{\partial z} = -(3y^3 - 16z^3x)$

(1, 1, 1) બિંદુ માટે $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ મૂકી E_x, E_y, E_z શોધો. તે પરથી $\vec{E}$ શોધો.

4. $V = \frac{kq}{r}$ પરથી r શોધો.

મોટા ટીપાની ત્રિજ્યા r' હોય તો $\frac{4}{3}\pi r'^3 = (8)(\frac{4}{3}\pi r^3)$ $\therefore r' = 2r$

હવે, $V' = \frac{kq'}{r'}$ શોધો, $q' = 8q$.

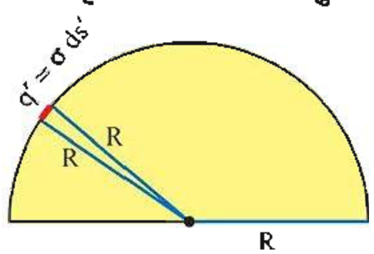
5. $Q = 0$; હોય ત્યારે સ્થિતિમાન = 0,

$Q = Q$; હોય ત્યારે સ્થિતિમાન = $V = \frac{KQ}{R}$.

$\therefore$ સરેરાશ સ્થિતિમાન $= \frac{0+V}{2} = \frac{V}{2}$.

સ્થિતિ-ઊર્જા = (સરેરાશ સ્થિતિમાન) (વિદ્યુતભાર)નો ઉપયોગ કરો.

6. નાના પૃષ્ઠખંડ ds'માંનો વિદ્યુતભાર = $\sigma ds'$. તેને લીધે 0 આગળ સ્થિતિમાન $dV' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma ds'}{R}$.



$\therefore$ કુલ સ્થિતિમાન $V = \int dV' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma}{R}\int ds'$

$\int_{\text{અર્ધગોળા પર}} ds' = 2\pi R^2$. આ પરથી V શોધો.

7. ગોળા પર સ્થિતિમાન $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma(4\pi R^2)}{R} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$

આ પરથી V_A, V_B, V_C શોધી અને $V = V_A + V_B + V_C$ મેળવો.

8. $\frac{C_1}{C_2} = \frac{C_3}{C_4}$ $\therefore C_5$ માટે વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત = 0

$\therefore$ તે કાર્યશીલ નથી (અસરકારક નથી)

$\therefore \frac{1}{C'} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ પરથી C' શોધો.

$\frac{1}{C''} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{8}{12}$ પરથી C''શોધો.

$C = C' + C''$શોધો.

9. પ્રારંભમાં કેપેસિટર પરનો વિદ્યુતભાર = Q છે.

પ્રારંભમાં ઊર્જા $U = \frac{1}{2}CV^2$ શોધો. જેને $= \frac{Q^2}{2C}$ તરીકે પણ લખાય.

બીજા કેપેસિટર સાથે જોડતાં દરેક પર વિદ્યુતભાર $= Q' = \frac{Q}{2}$

હવે દરેકની ઊર્જા $U' = \frac{Q'^2}{2C}$ મેળવો

તંત્રની કુલ ઊર્જા $= U' + U' = 2U'$ મેળવો.

10. MNOP પથનો કેપેસિટન્સ C' હોય તો,

$\frac{1}{C'} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10}$ પરથી, $C' = \frac{10}{3} pF$.

C' અને C_4 સમાંતરમાં હોવાથી તેમનું સમતુલ્ય $C'' = \frac{10}{3} + 10 = \frac{40}{3} pF$.

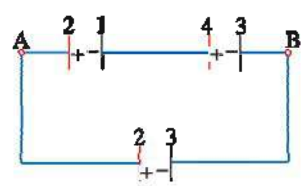
બેટરીમાંથી નીકળતો વિદ્યુતભાર $Q'' = C''V$ શોધો.

$Q_4 = C_4V$. શોધો.

C_1, C_2, C_3 પરનો સમાન વિદ્યુતભાર $= Q'' - Q_4$ શોધો.

11. B C_2 C_3 D, પથ પરનો કેપેસિટન્સ C' હોય, તો $\frac{1}{C'} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$ પરથી C' શોધો. હવે A અને C, વચ્ચે C_1, C' અને C_4 સમાંતર જોડાયેલા છે. $\therefore C' = C_1 + C' + C_4$ શોધો.

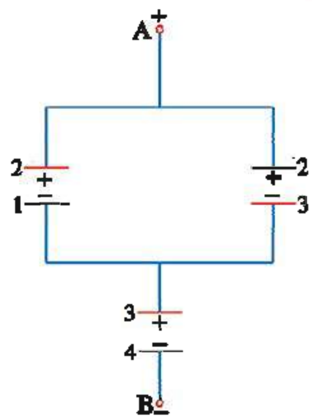
12. સમતુલ્ય જોડાણો નીચે મુજબ છે :



C_{21} અને C_{43} શ્રેણીમાં છે, તેમનું સમતુલ્ય $C'' = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_0 A}{d}\right)$

આ સંયોજન સાથે C_{23} સમાંતરમાં છે, તેથી

C_{AB} શોધવા. $C_{AB} = C' + C_{23}$નો ઉપયોગ કરો.



13. C_{21} અને C_{23} સમાંતર હોવાથી તેમનું સમતુલ્ય

$C' = 2\left(\frac{\varepsilon_0 A}{d}\right)$

C' અને C_{34} શ્રેણીમાં છે.

$\therefore C_{AB}$ને

$\frac{1}{C_{AB}} = \frac{1}{C'} + \frac{1}{C_{34}}$ પરથી શોધો.

પ્રકરણ 3

1. દર સેકન્ડે ટી.વી.ના સ્ક્રીન પર અથડાતા ઇલેક્ટ્રૉનની સંખ્યા = n હોય તો, વિદ્યુતપ્રવાહ $I = \frac{Q}{t} = \frac{ne}{t}$નો ઉપયોગ કરી n ગણો. t = 1 મિનિટ = 60 સેકન્ડમાં ટી.વી.ના સ્ક્રીન પર અથડાતો વિદ્યુતભાર $Q = It$ પરથી ગણો.

2. વર્તુળાકાર કક્ષામાં ઇલેક્ટ્રૉનની ઝડપ $v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi rf$

v અને r નાં આપેલ મૂલ્યો મૂકી f ગણો.

હવે, $I = ef$ સૂત્રનો ઉપયોગ કરો.

3. (i) તારના બે છેડા વચ્ચેનો p. d. $V = IR = I\left(\rho\frac{l}{A}\right)$ પરથી શોધો.

(ii) $I = Av_dne$ પરથી, ડ્રિફ્ટવેગ $v_d = \frac{I}{Ane}$જ્યાં ઇલેક્ટ્રૉનની સંખ્યા ઘનતા $n = \frac{dN_A}{M}$

4. સેમીકન્ડક્ટરના આડછેદનું ક્ષેત્રફળ

$A = bh$

$A = (4 \times 10^{-3})(25 \times 10^{-5}) = 10^{-6} m^2$

પ્રવાહઘનતા $J = \frac{I}{A}$ પરથી ગણો.

હવે, $J = nev_d$ અને $v_d = \frac{l}{t}$ સૂત્રનો ઉપયોગ કરી સમય (t) ગણો.

5. તારની નવી લંબાઈ $l' = l + 10\ \%$ of l

$$l' = l + 0.1\ l = 1.1\ l$$

$$\frac{l'}{l} = 1.1$$

પ્રારંભમાં, $R = \rho\frac{l}{A}$

ખેંચ્યા પછી, $R' = \rho\frac{l'}{A'}$

તારનું કદ અચળ હોવાથી,

$\therefore Al = A'l' = \frac{A}{A'} = \frac{l'}{l} = 1.1$

હવે, $\frac{R'}{R} = \frac{l'}{l}\cdot\frac{A}{A'} = \left(\frac{l'}{l}\right)^2 = 1.21$

અવરોધમાં પ્રતિશત વધારો $= \frac{R'-R}{R} \times 100 = (1.21 - 1) \times 100 = 21\%$

6. ધારો કે તારના P ટુકડાની લંબાઈ = l,

અને Q ટુકડાની લંબાઈ = $(1 - l)$

તારના P, Q અને R ટુકડાઓના અવરોધો અનુક્રમે R_P, P_Q અને R_R હોય તો,

$R_P = \rho\cdot\frac{l}{A}$, $R_R = \frac{\rho(2l)}{A/2} = 4\frac{\rho l}{A} = 4R_P$

અને $R_Q = \frac{\rho(1-l)}{A}$

હવે, $R_R = R_Q$ આપેલ હોવાથી,

$$4\frac{\rho l}{A} = \frac{\rho(1-l)}{A}$$

$$\Rightarrow l = \frac{1}{5}\ m$$

7. $R_{Al} = R_{CU}$ આપેલ હોવાથી,

$$\rho_1 \cdot \frac{l_1}{A_1} = \rho_2 \cdot \frac{l_2}{A_2}$$

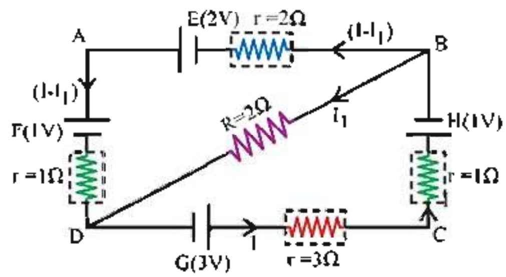
$$\Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{A_2}{A_1}$$

હવે, એલ્યુમિનિયમના તારનું દળ $m_{Al} = A_1 l_1 d_1$ તાંબાના તારનું દળ $m_{Cu} = A_2 l_2 d_2$
ગુણોત્તર લેતાં, $m_{Cu} = 2.15\ m_{Al}$
$\therefore m_{Al} < m_{Cu}$

8. (i) બંધ પરિપથ BADBને કિર્ચોફનો બીજો નિયમ લાગુ પાડતાં, $-3I + 5I_1 + 1 = 0$ (1)

(ii) બંધ પરિપથ DCBD માટે,

$-2I - I_1 + 1 = 0$ (2)

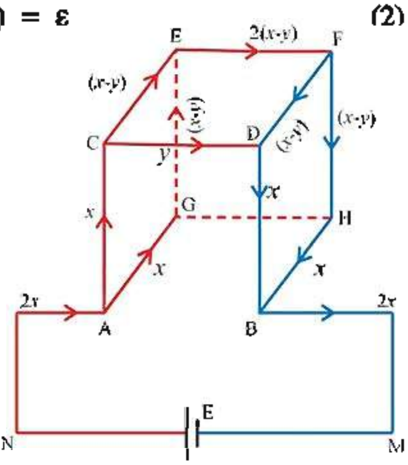


સમીકરણ (1) અને (2)ને ઉકેલતાં, $I_1 = \frac{1}{13}A$

$$V_{BD} = I_1 R = \left(\frac{1}{13}\right)(2) = \frac{2}{13}V$$

9. (i) બંધ પરિપથ ACDBMNAને કિર્ચોફનો બીજો નિયમ લાગુ પાડતાં, $r(2x + y) = \varepsilon$ (1)

(ii) તેવી જ રીતે બંધ પરિપથ ACEFDBMNA માટે, $2r(3x - 2y) = \varepsilon$ (2)



સમીકરણ (1) અને (2), પરથી, $y = \frac{4}{5}x$

સમીકરણ (1) અને (3), પરથી, $\varepsilon = \left(\frac{14}{5}x\right)r$

જો A અને B વચ્ચેનો અસરકારક અવરોધ r' હોય તો,

$\varepsilon = 2xr'$

સમીકરણ (4) અને (5) સરખાવતાં,

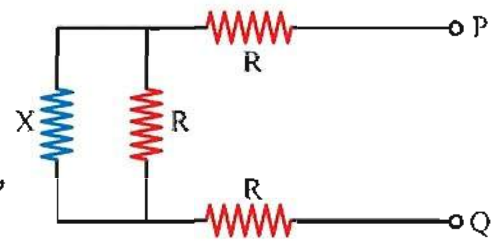
$$r' = \frac{7}{5}r$$

10. ધારો કે P અને Q બિંદુઓ વચ્ચે અનંત નેટવર્કનો સમતુલ્ય અવરોધ = X હોય, તો આવી સ્થિતિમાં એક વધારાનો તબક્કો ઉમેરતાં સમતુલ્ય અવરોધમાં કોઈ જ ફેરફાર થવો જોઈએ નહીં.

ઉપરના પરિપથનો સમતુલ્ય અવરોધ,

$\frac{XR}{X+R} + 2R = X$ થવો જોઈએ

$\therefore X^2 - 2RX - 2R^2 = 0$



આ સમીકરણને દ્વિઘાત સમીકરણની રીતથી ઉકેલીને X શોધતાં,

$X = R(1 + \sqrt{3})$ મળે છે.

11. પોટેન્શિયોમીટર તારની લંબાઈ $L_1 = 200$ cm હોય, ત્યારે $l_1 = 80$ cm

$$\varepsilon = \sigma\, l_1 = \left(\frac{IR}{L_1}\right) l_1 \qquad (1)$$

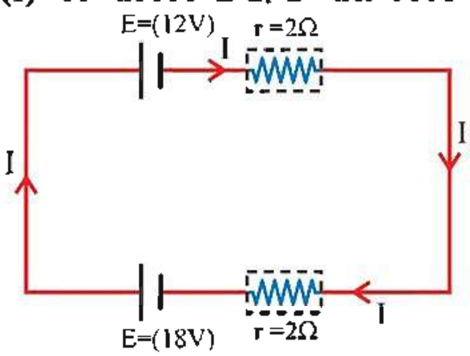
તારની લંબાઈ $L_2 = 300$ cm કરતાં $l_2 = ?$

$$\varepsilon = \sigma l_2 = \left(\frac{IR}{L_2}\right) l_2 \qquad (2)$$

સમીકરણ (1) અને (2) ને સરખાવતાં,

$l_2 = 120$ cm

12. (1) બંધ પરિપથને કિર્ચોફનો બીજો નિયમ લાગુ પાડતાં, $-2I - 2I = -18 + 12 \Rightarrow I = 1.5A$



(2) બેટરીમાં વિદ્યુતપાવર $P = \varepsilon I$ પરથી ગણો

(3) 18 V ની બેટરીનો ટર્મિનલ વોલ્ટેજ

$V = \varepsilon - Ir$ પરથી $V = 15$ V મળશે.

12 V ની બેટરીનો ટર્મિનલ વોલ્ટેજ

$V = \varepsilon + Ir$ પરથી ગણો ($\because$ 12 Vની બેટરીનું ચાર્જિંગ થઈ રહ્યું છે.)

(4) વ્યય થતો વિદ્યુતપાવર I^2r પરથી શોધો.

13. બંને કોઇલો માટે, વોલ્ટેજ (V) અને ઉત્પન્ન થતી ઉષ્મા (H) સમાન હોવાથી,

પ્રથમ કોઇલ માટે, $H = \dfrac{I_1^2 R_1 t_1}{J} = \left(\dfrac{V^2}{R_1^2}\right)\dfrac{R_1 t_1}{J} = \dfrac{V^2 t_1}{R_1 J}$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_1} = \frac{JH}{V^2 t_1} \qquad (1)$$

તે જ પ્રમાણે બીજી કોઇલ માટે, $\dfrac{1}{R_2} = \dfrac{JH}{V^2 t_2}$ (2)

બંને કોઇલને સમાંતરમાં જોડતાં,

$$\frac{1}{R} = \frac{JH}{V^2 t} \qquad (3)$$

જ્યાં R = સમાંતર જોડાણનો સમતુલ્ય અવરોધ છે.

સમીકરણ (1), (2) અને (3) પરથી,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{JH}{V^2 t} = \frac{JH}{V^2 t_1} + \frac{JH}{V^2 t_2}$$

$\therefore \dfrac{I}{t} = \dfrac{I}{t_1} + \dfrac{I}{t_2} \Rightarrow t = 3.43$ મિનિટ

14. ધારો કે દરેક ફ્યુઝ વાયરને પીગળવા માટે જરૂરી તાપમાનનો વધારો $\Delta\theta$ હોય, તો આ માટે જરૂરી ઉષ્મા

$= mc\Delta\theta$

$= (Ald)\, c\Delta\theta$ (1)

જ્યાં, d = ફ્યુઝના દ્રવ્યની ઘનતા

c = ફ્યુઝના દ્રવ્યની વિશિષ્ટ ઉષ્મા

$m = Ald$ = ફ્યુઝવાયરનું દળ

જો આટલી ઉષ્મા t સમયમાં ઉદ્ભવતી હોય તો,

$$\frac{I^2Rt}{J} = AldC\Delta\theta$$

$$I^2\left(\rho\frac{l}{A}\right)\frac{t}{J} = AldC\Delta\theta$$

$$\therefore \ I^2\rho t = JA^2dC\Delta\theta \quad (2)$$

$$\therefore \ t = \frac{JA^2dC\Delta\theta}{I^2\rho} \quad (3)$$

સમીકરણ (2) પરથી બંને ફ્યુઝવાયરમાંથી વહેતો પ્રવાહ સમાન હોય, તો (બાકીનાં પદો અચળ હોવાથી) તેઓ એકસરખા સમયમાં પીગળશે.

15. $P = \frac{V^2}{R}$નો ઉપયોગ કરતાં, $R_A = 302.5\ \Omega$ અને $R_B = 121\ \Omega$

તે જ પ્રમાણે, $P = VI$ પરથી,

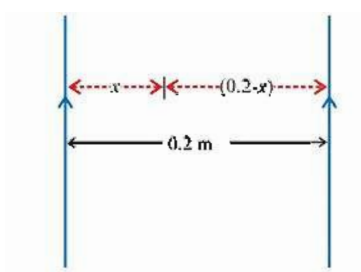
$I_A = 0.3636$ A અને $I_B = 0.9091$ A

બંને બલ્બને 220 Vના સપ્લાય સાથે શ્રેણીમાં જોડતાં દરેક બલ્બમાંથી સમાન પ્રવાહ વહેશે.

$$\therefore \ I = \frac{V}{R_A + R_B} = \frac{220}{302.5+121} = 0.519 \text{ A}$$

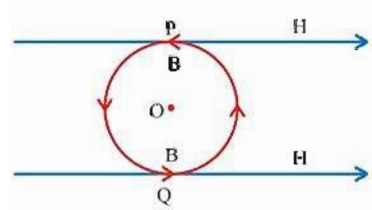
અહીં $I > I_A$, હોવાથી બલ્બ A ઊડી જશે.

પ્રકરણ 4



1. અત્રે $\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(0.2-x)}$ (વિરુદ્ધ દિશામાં) પરથી x શોધો.

2. P બિંદુએ B = H (વિરુદ્ધ દિશામાં) થાય. $\frac{\mu_0 I}{2\pi y} = H$.



આ પરથી I શોધો.

Q બિંદુએ B = H (એક જ દિશામાં)

$\therefore$ કુલ ચુંબકીય ક્ષેત્ર = H + H = 2B = 2H

3. $S = \frac{GI_G}{I-I_G}$, I = 100 એકમ અને I_G = 2 એકમ હવે S શોધો.

4. $\frac{1}{2}Mv^2 = q.V$ પરથી ..... V = Voltage, V શોધો.

આ મૂલ્ય $\frac{2Mv^2}{R} = qvB$માં મૂકતાં, $R = \left(\frac{2MV}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{B}$. અત્રે બંને કણ માટે v, q, B સમાન છે.

$\therefore \frac{M_1}{M_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2$

5. ગમે તે આકારના A ક્ષેત્રફળવાળું સમતલીય I વિદ્યુતપ્રવાહધારિત ગૂંચળું B સમાન ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં મૂકતાં લાગતું ટોર્ક $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = NI\vec{A} \times \vec{B}$ પરથી મહત્તમ ટોર્ક $\tau_{max} = NIAB$

ગૂંચળાના તારની લંબાઈ L છે. તેમાંથી R ત્રિજ્યાવાળા N આંટા છે.

$\therefore L = 2\pi RN \therefore R = \frac{L}{2\pi N}$, $A = \pi R^2 = \frac{\pi L^2}{4\pi N^2}$

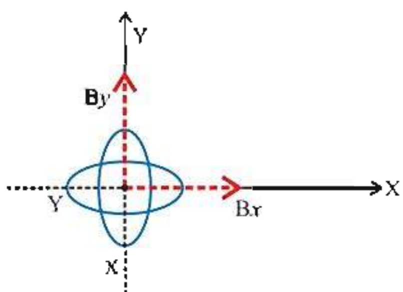
હવે મહત્તમ ટોર્ક = NIABમાં મૂલ્યો મૂકો.

6. $\frac{mv^2}{r} = Bqv$ પરથી $r = \frac{mv}{Bq} = \frac{p}{Bq} = \frac{\sqrt{2mE}}{qB}$ ($\because$ ગતિ-ઊર્જા $E = \frac{p^2}{2m} \therefore p = \sqrt{2mE}$)

$\frac{r_d}{r_p} = \frac{p_d}{Bq_d}\frac{Bq_d}{p_d}$ .... $q_p = q_d$

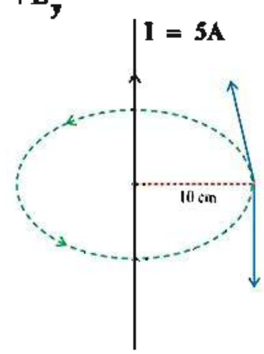
$\frac{r_d}{r_p} = \frac{p_d}{p_p} = \sqrt{\frac{2m_dE}{2m_pE}}$ (પરંતુ $m_d = 2m_p$, E સમાન છે.) $\therefore \frac{r_d}{r_p} = \sqrt{2}$

7. $k\phi = NABI \therefore k = \frac{BIN}{\phi}$માં $\phi = \left(36\times\frac{\pi}{180}\right)$rad મૂકી k શોધો.

8. 

$B_x = \frac{\mu_0 I_x}{2a}$ અને $B_y = \frac{\mu_0 I_y}{2a}$ શોધો.

પરિણામી ચુંબકીય ક્ષેત્ર $B' = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$



9. $F = \frac{\mu_0}{2\pi y}I_1I_2$માં મૂલ્યો મૂકો.

10. $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi y}$. ઇલેક્ટ્રોનનો વેગ આ Bને લંબ છે.

$F = Bqv\sin\theta = eBv$નો ઉપયોગ કરો.

11. ઉદાહરણ-1 મેળવેલ સૂત્ર $B = \frac{\mu_0 I\theta}{4\pi R}$માં θનું મૂલ્ય (રેડિયનમાં) $= 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi$ મૂકતાં તથા I = 6A અને R = 0.02. B શોધો.

•

પ્રકરણ 5

1. સરેરાશ ત્રિજ્યા $r = \frac{r_1+r_2}{2}$, $n = \frac{N}{2\pi r}$

હવે, $H = nI_p$ આથી $\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H}$નો ઉપયોગ કરો.

2. $m_{\text{અણુ}} = 1.5 \times 10^{-23}$ A m^2

$\therefore$ $m_{net} = m_{\text{અણુ}} \times$ એકમકદમાં રહેલા અણુઓની સંખ્યા

આથી, $M_{max} = \dfrac{m_{net}}{V}$ (1)

દરેક અણુની ઉષ્મીય ઊર્જા $= \dfrac{3}{2}kT$ (2)

ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં દરેક અણુની મહત્તમ સ્થિતિ-ઊર્જા $= m_{net}$ B (3)

$\left(\dfrac{\frac{3}{2}kT}{m_{net}B}\right)$ ગુણોત્તર શોધો અને જવાબ લખો.

3. ચુંબક (1) માટે બિંદુ A પાસે (તેના કેન્દ્રથી 1 m અંતરે) વિષુવવૃતીય

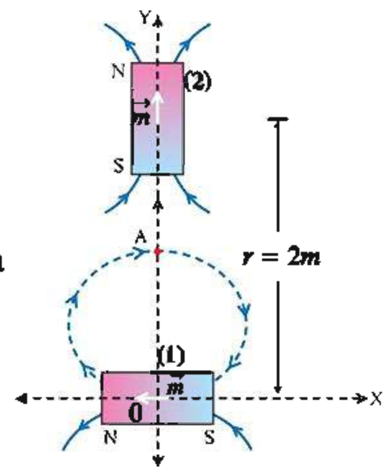
ચુંબકીય ક્ષેત્ર, $B_1 = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{m}{r^3}\hat{i}$

ચુંબક (2) માટે બિંદુ A પાસે (તેના કેન્દ્રથી 1 m અંતરે) અક્ષીય ચુંબકીય

ક્ષેત્ર, $B_2 = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{2m}{r^3}\hat{j}$

આથી, બિંદુ A પાસે પરિણામી ચુંબકીય ક્ષેત્ર

$B = \sqrt{B_1^{\,2}+B_2^{\,2}}$



4. ચુંબકનું અક્ષીય ચુંબકીય ક્ષેત્ર

$$B(z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2m}{z^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2(l\,p_b)}{z^3}$$

l = ચુંબકની લંબાઈ, p_b = ચુંબકનું ધ્રુવમાન

આથી ચુંબકીય ધ્રુવ પર લાગતું બળ $F = p_b\,B(z)$

5. મૅગ્નેટિક ડાઈપોલ-મોમેન્ટ mવાળા ચુંબકને θ કોણે ભ્રમણ કરાવતા થતું કાર્ય,

$$W(\theta) = \int_0^{\theta} mB\sin\theta\, d\theta = \left[-mB\cos\theta\right]_0^{\theta}$$

હવે, $W(90^\circ) = nW(60^\circ) \Rightarrow n = \dfrac{W(90^\circ)}{W(60^\circ)}$

6. ચુંબકની મૅગ્નેટિક મોમેન્ટ $\vec{PM}$ PQTV સમતલમાં 45° કોણ બનાવે છે. PQTV સમતલ મૅગ્નેટિક મેરિડિયન દર્શાવતા સમતલ PQRS સાથે 30° કોણ બનાવે છે.

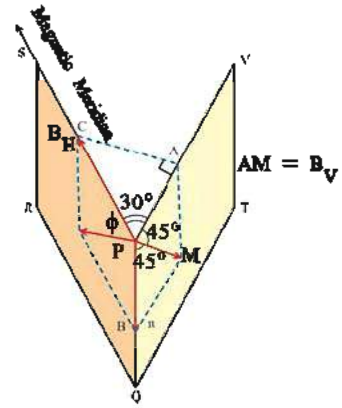
કાટકોણ ત્રિકોણ PAC માટે, $PA = B_H\cos30^\circ$.

આથી, PQTV સમતલમાં, કાટકોણ ત્રિકોણ PAM માટે

$\tan45^\circ = \dfrac{AM}{PA}$

હવે B_Hનો ઉપયોગ કરી B_V શોધો.

PQRS સમતલમાં $\tan\phi = \dfrac{B_V}{B_H}$



7. $m = \frac{1}{2}evr$ અને $L = m_e vr$ નો ઉપયોગ કરો.

8. (a) $B(x) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2m}{x^3}$ પરથી m શોધો.

(b) mની કિંમત (a) પરથી મૂકી $B(y) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m}{y^3}$ મેળવો.

9. નળાકાર સળિયાનું કદ $V = \pi r^2 l$
આથી $m_{net} = M \times V$નો ઉપયોગ કરો.

10. ઇલેક્ટ્રૉનની સંખ્યા (n_e) = આયનોની સંખ્યા (n_i)
ઇલેક્ટ્રૉનની સરેરાશ ગતિ-ઊર્જા = k_e
આયનોની સરેરાશ ગતિ-ઊર્જા = k_i
આથી વાયુની કુલ ગતિ-ઊર્જા $k = (n_e \times k_e) + (n_i \times k_i)$
જ્યારે વાયુ સંપૂર્ણપણે મૅગ્નેટાઇઝ્ડ થઈ જાય છે, ત્યારે તેની પરિણામી ચુંબકીય ડાઇપોલ-મોમેન્ટ તેના મૅગ્નેટાઇઝેશન M અથવા M_{max} જેટલી થાય છે.
જ્યારે, $U = \vec{M} \cdot \vec{B} = K$, $(\vec{M} = n_e\vec{m} + n_i\vec{m} = 2n_e\vec{m})$
$\therefore K = MB\cos\theta$, આથી $\theta = 0^{\circ}$ માટે Mની ગણતરી કરો.

11. સોલેનોઇડની લંબાઈ = l, એકમ લંબાઈ દીઠ આંટાની સંખ્યા = n
આથી, સોલેનોઇડની મૅગ્નેટિક મોમેન્ટ $m = NIA = nlIA$
આ ઉપરાંત સોલેનોઇડનું ધ્રુવમાન $p_S = \frac{m}{l}$

•

પ્રકરણ 6

1. અરીસા માટે ગૉસનું સૂત્ર $\frac{2}{R} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}$ પરથી $v = \frac{u \cdot R}{2u - R}$ મેળવો.

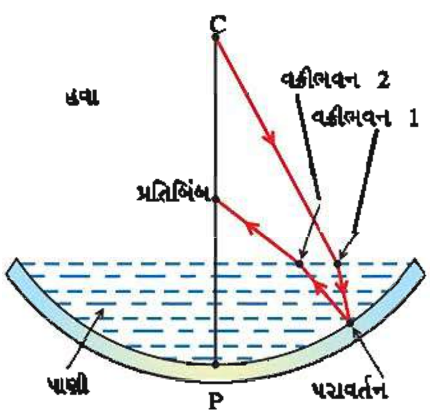
tની સાપેક્ષે વિકલન કરો, અર્થાત્ $\frac{dv}{dt}$ મેળવો અને તેનું સાદું રૂપ આપો.

ધારો કે, $\frac{dv}{dt} = v_i$ = પ્રતિબિંબનો વેગ

અને $\frac{du}{dt} = v_0$ = વસ્તુનો વેગ

2. $m = \frac{-v}{u} = \frac{h'}{h}$ અને $\frac{1}{f} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}$નો ઉપયોગ યોગ્ય સંજ્ઞાપ્રણાલી સાથે કરો. [જવાબ : 37.5 cm]

3. આ એક પાણીથી બનેલ સમતલ બહિર્ગોળ લેન્સ અને અંતર્ગોળ અરીસાનું સંયોજન છે. લેન્સની કેન્દ્રલંબાઈ,



$$\frac{1}{f_1} = (n - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \text{ છે.}$$

સમતલ બહિર્ગોળ લેન્સ માટે, $R_1 = \infty$, $R_2 = -R$ (ધારો કે) લેતાં, અને લેન્સ બનાવનાર, અત્રે પાણીનો વક્રીભવનાંક n છે.

$$\therefore f_1 = \frac{R}{(n-1)} \qquad (1)$$

હવે, જો અરીસાની કેન્દ્રલંબાઈ f_2 હોય, તો આ સંયોજનની પરિણામી કેન્દ્રલંબાઈ,

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3}$$

જ્યાં, એ નિર્ગમન પામતા કિરણને અનુરૂપ કેન્દ્રલંબાઈ થશે. અત્રે નિર્ગમનકિરણ ઘટ્ટ (પાણી) માધ્યમમાંથી પાતળા (હવા) માધ્યમમાં ગતિ કરે છે. f_2 એ અરીસાની કેન્દ્રલંબાઈ છે.

અહીં, $f_2 \rightarrow -f_2$ અને $f_3 \rightarrow f_1$ થશે.

$$\therefore \frac{1}{f'} = \frac{2}{f_1} - \frac{1}{f_2}$$

$$= \frac{2}{\left(\frac{R}{(n-1)}\right)} - \frac{1}{\left(\frac{2}{R}\right)}$$ ($\because f = \frac{2}{R}$ અરીસા માટે અને સમીકરણ (1)નો ઉપયોગ કરતાં)

$$\therefore f' = \frac{R}{2(n-2)}$$

$\therefore$ પરિણામી વક્રતાત્રિજ્યા,

$$R' = 2f' = \frac{R}{(n-2)}$$

પણ, $n = 1.33$ હોવાથી $|R'| > |R|$

અર્થાત્, પ્રતિબિંબ C' અને ધ્રુવની વચ્ચે રચાશે.

5. સ્નેલનો નિયમ દરેક બિંદુએ લાગુ પાડી શકાતો હોવાથી સૌપ્રથમ આપાતબિંદુએ લગાડતાં,
એટલે કે, $n_1 sin\theta_1$ = const, A (ધારો કે)
ધારો કે, કિરણ માધ્યમમાં y જેટલું અંતર કાપીને સમક્ષિતિજ બને છે. (એટલે કે, $\theta_2 = 90°$). તો ફરી વાર સ્નેલનો નિયમ આ બિંદુએ લગાવતાં,
$n_2 sin\theta_2 = A$;
જ્યાં, $n_2 = (1.5 - 0.25y)$. આ સૂત્ર પરથી yની કિંમત શોધી શકાશે. [જવાબ : $y = 3$m]

6. મોટા આપાતકોણ માટે, લેટરલ શિફ્ટ,

$$x = \frac{t \cdot sin(\theta_1 - \theta_2)}{cos\,\theta_2};$$ જ્યાં, $\theta_1 = 53°$

સ્નેલનો નિયમ વાપરી θ_2 શોધી શકાય અને t આપેલ છે. [જવાબ : $x = 9$ mm]

7. $\frac{1}{f} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}$નો ઉપયોગ કરી $m = \frac{f}{u-f}$ સૂત્ર મેળવો.

(1) જ્યારે $m = 4$ હોય, ત્યારે વસ્તુ-અંતર $u_1 = \frac{3}{4}f$ જેટલું મેળવો.

(2) હવે વસ્તુને અરીસાથી 3 cm અંતરે દૂર ખસેડતાં,
$u_2 = u_1 + 3$ (cm)
હવે f ગણો. [જવાબ : $|f| = 36$ cm]

8. ઑપ્ટિકલ ફાઇબર માટે, પૂર્ણઆંતરિક પરાવર્તન થવાની શરત, $(90° - \theta_f) > C$ છે.

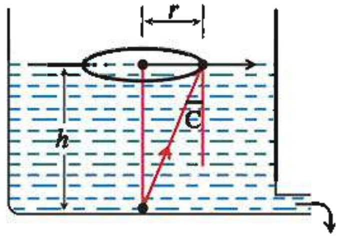
$\therefore sin(90° - \theta_f) > sinC$

$\therefore cos\theta_f > \frac{1}{n}$ ($\because$ હવા-માધ્યમ આંતરપૃષ્ઠ માટે $sinC = \frac{1}{n}$)

હવે, સ્નેલનો નિયમ લગાવી મહત્તમ આપાતકોણ શોધી શકાય. [જવાબ : $\frac{\pi}{2}$]

9. નદી પરના આપાતબિંદુ આગળ સ્નેલનો નિયમ લાગુ પાડો. ત્યાર બાદ સાદું ત્રિકોણમિતિ વાપરો..
[જવાબ : પડછાયાની લંબાઈ = 3.44 m]

10. $sin C = \frac{1}{n}$ Cનું મૂલ્ય આપશે. આકૃતિ પરથી, $tan C = \frac{r}{h}$, h શોધો.



[જવાબ : 1.33 cm]

11. જમણી બાજુની સપાટી પરથી મળતા પ્રતિબિંબ માટે,

$$\frac{-n_1}{u} + \frac{n_2}{v} = (n_1 - n_1) \times \frac{1}{R_1} \qquad (1)$$

જ્યાં, $n_1 = 1$, $n_2 = 1.5$, $R_1 = -R$, $u = -\frac{R}{2}$

$$\therefore\ v = \frac{-3R}{5} \qquad (2)$$

આ સપાટીથી મળેલ પ્રતિબિંબ બીજી સપાટી માટે વસ્તુ થશે. ડાબી બાજુની સપાટી માટે,

$n_1 = 1$, $n_2 = 1.5$ $R_2 = +R$.

સમીકરણ (2) પરથી સ્પષ્ટ છે કે જમણી બાજુની સપાટીથી મળેલ પ્રતિબિંબ જમણી સપાટી તરફ કેન્દ્રથી $\left(R - \frac{3}{5}R\right)$ જેટલા અંતરે હશે. તેથી ડાબી સપાટી માટે uનું મૂલ્ય $\frac{3}{2}R$ જેટલું થશે. સમીકરણ (1)નો ઉપયોગ કરતાં, ડાબી સપાટીથી મળતા પ્રતિબિંબનું કેન્દ્રથી અંતર $\frac{2R}{7}$ જેટલું થશે.

$\therefore$ બંને સપાટીઓ દ્વારા મળતાં બે પ્રતિબિંબો વચ્ચેનું અંતર $\frac{2}{5}R - \frac{2}{7}R = 0.114R$

14. સમતલ બહિર્ગોળ લેન્સ માટે,

$$-\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f} = (n - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{\infty}\right)$$

$\therefore$ $R_1 = 10$ cm, $f = 20$ cm, $n = 1.5$

આ લેન્સ દ્વારા I' બિંદુ આગળ પ્રતિબિંબ રચાયું હોત. પરંતુ પાછળની સમતલ પરાવર્તક સપાટીને કારણે પ્રતિબિંબ I'' બિંદુ આગળ મળે છે. I'' પ્રતિબિંબ એ વક્રસપાટી માટેની આભાસી વસ્તુ થશે.

$\frac{-n_1}{u} + \frac{n_2}{v} = \left(\frac{n_2 - n_1}{R}\right)$ સૂત્ર પરથી, આપાતકિરણ માટે,

$u \to -\infty$, $v' = ?$, $n_2 = 1.5$, $n_1 = 1$.

$\therefore$ $v' = 30$ cm

નિર્ગમનકિરણ માટે (બીજી વખતનું વક્રીભવન)

$n_1 = 1.5$, $n_2 = 1$, $R = -10$ cm, $u = +30$ cm, $v = ?$

$v = 10$ cm

વસ્તુ અનંત અંતરે હોવાથી, અંતિમ પ્રતિબિંબનું અંતર (v) એ આ તંત્રની કેન્દ્રલંબાઈ આપશે.

15. ΔBH_1H_2 અને ΔF_1OH_2ની સમરૂપતા પરથી,

$$\frac{OF_1}{OA} = \frac{OH_2}{H_1H_2}$$

$$\therefore \frac{-f_1}{-u} = \frac{-h'}{(-h'+h)} \quad \text{(સંજ્ઞાપ્રણાલી)}$$

તે જ રીતે, $\Delta B'H_1H_2$ અને ΔF_2OH_1 માટે,

$$\frac{f_2}{v} = \frac{h}{(-h'+h)}$$

ઉપર્યુક્ત સમીકરણોનો સરવાળો કરતાં,

$$\frac{f_1}{u} + \frac{f_2}{v} = \frac{-h'+h}{(-h'+h)} = 1 \qquad (1)$$

$$\therefore |m| = \frac{v}{u} = \frac{(v-f_2)}{f_1}$$

સમીકરણ પરથી ખાસ કિસ્સા $f_2 = -f_1 = f$ માટે,

$$\frac{-f}{u} + \frac{f}{v} = 1$$

$\therefore \frac{-1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$. આ ગૉસનું સૂત્ર છે.

•

પ્રકરણ 7

1. લઘુતમ ઊર્જા $W = Fd = (eE)(d)$

$$= e\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)d$$

$$= 29.83 \; eV$$

મહત્તમ ઊર્જા $= \frac{1}{2}mV^2 + W$

$$= (hf - \phi_0) + W$$

$$= \frac{hc}{\lambda} - \phi_0 + W$$

$$= 30.63 \; eV$$

2. (1) થ્રેસોલ્ડ આવૃત્તિ $f_0 = \frac{c}{\lambda_0} = 1.098 \times 10^{15}\text{Hz} \approx 1.1 \times 10^{15}$ Hz

(2) કાર્યવિધેય $\phi_0 = hf_0 = 4.54 \; eV$

(3) *max* K.E., $\frac{1}{2}mV^2_{max} = hf - hf_0 = hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)$

$$= 2.35 \; eV$$

(4) સ્ટોપિંગ પોટેન્શિયલ $V_0 = (\frac{1}{2}mV^2_{max})$

$= 2.35\ eV$

(5) $\frac{1}{2}mV_{max}^2 = eV_0$

$\therefore V_{max} = \sqrt{\frac{2eV_0}{m}}$ અને $V_{min} = 0$ m/s

3. ફોટો-ઇલેક્ટ્રિક અસરમાં $eV_0 = \frac{hc}{\lambda} - \phi_0$

$\therefore eV_0 = \frac{hc}{\lambda_1} - \phi_0$ (1) અને $\frac{hc}{\lambda_2} - \phi_0$ (2)

$\therefore$ સમીકરણ (1)થી (2)માં

$\therefore V_{0_2} - V_{0_1} = \frac{hc}{e}\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)$

4. $p = \frac{3}{100} \times = 100 = 3$ J/s

$p = \frac{E}{t} = \frac{nhf}{t}$ દર સેકન્ડે ઉત્સર્જિત થતા ફોટોનની સંખ્યા $\Rightarrow n = \frac{p\lambda t}{hc}$

5. ફોટો-ઇલેક્ટ્રિક અસરમાં $eV_0 = \frac{hc}{\lambda} - \phi_0$

$\therefore eV_{0_1} = \frac{hc}{\lambda_1} - \phi_0$ (1) અને $eV_{0_2} = \frac{hc}{\lambda_2} - \phi_0$ (2) (1)માંથી (2) બાદ કરતાં,

$\therefore (V_{0_1} - V_{0_2})e = hc\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)$

આ પરથી h મળે.

સમીકરણ (1) પરથી

$\phi_0 = \frac{hc}{\lambda_1} - V_{0_1}e = \text{..........}$

$\phi_0 = \frac{hc}{\lambda_0} \Rightarrow \lambda_0 = \frac{hc}{\phi_0} = \text{..........}$

6. ફોટો-ઇલેક્ટ્રિક અસરમાં $Ve = \frac{hc}{\lambda} - \phi_0$

$\therefore V = \frac{hc}{\lambda e} - \frac{\phi_0}{e} = \text{..........}$

7. (1) અને (2) માટે ફોટોનની ઊર્જા $E = \frac{hc}{\lambda}$

(3) અને (4) $E = hf$

8. $p = \frac{E}{t} = \frac{nhf}{t} = \frac{nhc}{t\lambda} =$ ....

9. $p = \frac{E}{t} = \frac{nhf}{t} = \frac{nhc}{t \cdot \lambda}$ તારામાંથી દર સેકન્ડે ઉત્સર્જિત થતા ફોટોનની સંખ્યા $n = \frac{p\lambda t}{hc} =$ ....

10. $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_B T$

$\therefore\ m^2v^2 = 3k_B Tm$

$\therefore\ p = \sqrt{3k_B Tm}$

$\lambda = \frac{h}{p}$

$\therefore\ \lambda\ \alpha\ \frac{1}{\sqrt{T}} \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} =$ ....

11. $I = \frac{E}{At} = \frac{nhf}{At} = \frac{nhc}{At\lambda}$

$\Rightarrow n = \frac{IAT\lambda}{hc} =$ ....

12. $I \quad \frac{E}{At} = \frac{nhf}{At} = \frac{nhc}{At\lambda}$

$\Rightarrow n = \frac{I\lambda At}{hc}$

13. $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ અને $m = 1.1\ m_0$. v શોધો.

$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_B T \Rightarrow T = \frac{mv^2}{3k_B} =$ ....

14. પાવર $p = \frac{E}{t} = \frac{nhf}{t} = \frac{nhc}{\lambda t}$ આપેલ લેસરમાંથી દર સેકન્ડે ઉત્સર્જિત ફોટોનની સંખ્યા $n = \frac{p\lambda t}{hc} =$ ....

સંદર્ભ ગ્રંથો (REFERENCE BOOKS)

1. PHYSICS, Part 1 and 2, Std. XI, GSBST
2. PHYSICS, Part 1 and 2, Std. XI, NCERT
3. Fundamentals of PHYSICS by Halliday, Resnick and Walker
4. Universty Physics by Young, Zemansky and sears
5. CONCEPTS OF PHYSICS by H. C. Verma
6. Advanced PHYSICS by Tom Duncan
7. Advanced LEVEL PHYSICS by Nelkon and Parker
8. FUNDAMENTAL UNIVERSITY PHYSICS by Alonso and Finn
9. COLLEGE PHYSICS by Weber, Manning, White and Weygand
10. PHYSICS FOR SCIENTIST AND ENGINEERS by Fishbane, Gasiorowicz, Thornton
11. PHYSICS by Cutnell and Johnson
12. COLLEGE PHYSICS by Serway and Faughn
13. UNIVERSITY PHYSICS by Ronald Reese
14. CONCEPTUAL PHYSICS by Hewitt
15. PHYSICS FOR SCIENTIST AND ENGINEERS by Giancoli
16. Heat Transfer by Holman

•

પારિભાષિક શબ્દો

પ્રકરણ 1 : વિદ્યુતભાર અને વિદ્યુતક્ષેત્ર

વિદ્યુતભાર	Electric charge	(ઇલેક્ટ્રિક ચાર્જ)
ધન વિદ્યુતભાર	Positive electric charge	(પૉઝિટિવ ઇલેક્ટ્રિક ચાર્જ)
ઋણ વિદ્યુતભાર	Negative electric charge	(નૅગેટિવ ઇલેક્ટ્રિક ચાર્જ)
વિજાતીય વિદ્યુતભારો	Unlike electric charges	(અનલાઇક ઇલેક્ટ્રિક ચાર્જિસ)
આકર્ષણ	Attraction	(એટ્રેક્શન)
અપાકર્ષણ	Repulsion	(રિપલ્ઝન)
ક્વૉન્ટમીકરણ	Quantisation	(ક્વૉન્ટાઇઝેશન)
બંધારણ	Structure	(સ્ટ્રક્ચર)
મૂળભૂત કણો	Fundamental particles	(ફન્ડામેન્ટલ પાર્ટિકલ્સ)
અલગ કરેલા	Isolated	(આઇસોલેટેડ)
પ્રેરણ	Induction	(ઇન્ડક્શન)
સમાન	Identical	(આઇડેન્ટિકલ)
ચોખ્ખો	Net	(નેટ)
વિદ્યુતબળ	Electric force	(ઇલેક્ટ્રિક ફોર્સ)
સંપાતપણાનો સિદ્ધાંત	The superposition principal	(ધી સુપરપોઝિશન પ્રિન્સિપલ)
યામપદ્ધતિ	Co-ordinste system	(કૉ-ઑર્ડિનેટ સિસ્ટમ)
સતત વિતરણ	Continuous distribution	(કન્ટિન્યુઅસ ડિસ્ટ્રિબ્યુશન)
રેખીય વિતરણ	Line distribution	(લાઇન ડિસ્ટ્રિબ્યુશન)
પૃષ્ઠ-વિતરણ	Surface distribution	(સરફેસ ડિસ્ટ્રિબ્યુશન)
કદ-વિતરણ	Volume distribution	(વૉલ્યુમ ડિસ્ટ્રિબ્યુશન)
રેખાખંડો	Line-segments	(લાઇન-સેગ્મેન્ટ્સ)
વિદ્યુતક્ષેત્ર	Electric field	(ઇલેક્ટ્રિક ફિલ્ડ)
વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા	Electric field intensity	(ઇલેક્ટ્રિક ફિલ્ડ ઇન્ટેન્સિટી)
પરીક્ષણ વિદ્યુતભાર	Test charge	(ટેસ્ટચાર્જ)
સોર્સ વિદ્યુતભાર	Source charge	(સોર્સચાર્જ)

બિંદુવત્ વિદ્યુતભાર	Point charge	(પૉઇન્ટ ચાર્જ)
વિદ્યુત-ડાઇપોલ	Electric dipole	(ઇલેક્ટ્રિક ડાઇપોલ)
અસમાન	Non-uniform	(નોન-યુનિફૉર્મ)
વિદ્યુત ક્ષેત્રરેખાઓ	Electric field lines	(ઇલેક્ટ્રિક ફિલ્ડ લાઇન્સ)
વિદ્યુત-ફ્લક્સ	Electric flux	(ઇલેક્ટ્રિક ફ્લક્સ)
ગોળીય કવચ	Spherical shell	(સ્ફેરિકલ શેલ)

પ્રકરણ 2 સ્થિત-વિદ્યુત સ્થિતિમાન અને કેપેસિટન્સ

સ્થિત વિદ્યુતસ્થિતિમાન	Electrostatic potential	(ઇલેક્ટ્રોસ્ટેટિક પોટેન્શિયલ)
કેપેસિટન્સ	Capacitance	(કેપેસિટન્સ)
રેખા-સંકલન	Line integral	(લાઇન ઇન્ટિગ્રલ)
સંમિત	Symmetricity	(સિમેટ્રિસિટી)
ગુરુત્વીય સ્થિતિમાન	Gravitational potential	(ગ્રેવિટેશનલ પૉટેન્શિયલ)
વિદ્યુતશાસ્ત્ર	Electro-statics	(ઇલેક્ટ્રો-સ્ટેટિક્સ)
વિદ્યુતસ્થિતિ ઊર્જા	Electric potential energy	(ઇલેક્ટ્રિક પૉટેન્શિયલ એનર્જી)
બંધગાળા	Closed loop	(ક્લૉઝ્ડ લુપ)
કાર્ય	Work	(વર્ક)
વ્યૂહાત્મક ઉદાહરણ	Stratagic example	(સ્ટ્રેટેજિક એક્ઝામ્પલ)
સંરક્ષી ક્ષેત્ર	Conservatie field	(કન્ઝરવેટિવ ફિલ્ડ)
સંદર્ભબિંદુ	Reference point	(રેફરન્સ પૉઇન્ટ)
એકમ ધનવિદ્યુતભાર	Unit positive charge	(યુનિટ પૉઝિટિવ ચાર્જ)
પ્રવાહી	Liquid	(લિક્વિડ)
ઉષ્મા-ઊર્જા	Thermal energy	(થર્મલ એનર્જી)
પ્રાણિજ વિદ્યુત	Animal electricity	(એનિમલ ઇલેક્ટ્રિસિટી)
તરલસ્થિતિવિજ્ઞાન	Hydrostatics	(હાઇડ્રોસ્ટેટિક્સ)
વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત	Potential difference	(પૉટેન્શિયલ ડિફરન્સ)
ગતિ-ઊર્જા	Kinetic energy	(કાઇનેટિક એનર્જી)
સંન્નિકટ	Approximate	(એપ્રોક્સિમેટ)
અસતત વિતરણ	Discrete distribution	(ડિસ્ક્રિટ ડિસ્ટ્રિબ્યુશન)
સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠો	Equipotential surfaces	(ઇક્વિપૉટેન્શિયલ સરફેસીસ)
ખંડશઃ વિકલન	Partial differentiation	(પાર્શિયલ ડિફરેન્શિએશન)
વિધેય	Function	(ફંકશન)
વિદ્યુતભારોના તંત્ર	System of charges	(સિસ્ટમ ઑફ ચાર્જિસ)
સુવાહક	Conductor	(કન્ડક્ટર)
ઇલેક્ટ્રોસ્ટેટિક શિલ્ડિંગ	Electrostatic shielding	(ઇલેક્ટ્રોસ્ટેટિક શિલ્ડિંગ)
કેપેસિટર્સ	Capacitors	(કેપેસિટર્સ)
યાદચ્છિક	Arbitrary	(આર્બિટ્રરી)
સમાંતર જોડાણ	Parallel combination	(પેરેલલ કૉમ્બિનેશન)
શ્રેણી-જોડાણ	Series combination	(સીરિઝ કૉમ્બિનેશન)

નળાકારીય	Cylinderical	(સિલિન્ડ્રિકલ)
ઊર્જા ઘનતા	Energy density	(એનર્જી ડેન્સિટી)
ધ્રુવીભવન	Polarisation	(પોલરાઇઝેશન)
ધ્રુવીય	Polar	(પોલર)
અધ્રુવીય	Non-polar	(નોન-પોલર)
વિદ્યુત-ડાઇપોલ ચાકમાત્રા	Electric dipole moment	(ઇલેક્ટ્રિક ડાઇપોલ-મોમેન્ટ)
બદ્ધ	Bound	(બાઉન્ડ)
વિદ્યુતભારઘનતા	Charge density	(ચાર્જ-ડેન્સિટી)
કોયડા	Problems	(પ્રોબ્લેમ્સ)

પ્રકરણ 3 પ્રવાહવિદ્યુત

પ્રવાહવિદ્યુત	Current electricity	(કરન્ટ ઇલેક્ટ્રિસિટી)
વિદ્યુતપ્રવાહ	Electric current	(ઇલેક્ટ્રિક કરન્ટ)
આંતરક્રિયા	Interaction	(ઇન્ટરેક્શન)
રૈવાજિક વિદ્યુતપ્રવાહ	Conventional current	(કન્વેન્શનલ કરન્ટ)
વિદ્યુતપ્રવાહ ઘનતા	Current density	(કરન્ટ ડેન્સિટી)
આડછેદ	Cross-section	(ક્રૉસ-સેક્શન)
વિદ્યુતચાલકબળ	Electromotive force	(ઇલેક્ટ્રોમોટિવ ફોર્સ)
ટર્મિનલ વૉલ્ટેજ	Terminal voltage	(ટર્મિનલ વૉલ્ટેજ)
સંરચના	Device	(ડિવાઇસ)
વિદ્યુતકોષ	Battery, Electric cell	(બેટરી, ઇલેક્ટ્રિક સેલ)
અવિદ્યુતીય બળ	Non-electric force	(નોન-ઇલેક્ટ્રિક ફોર્સ)
ધનધ્રુવ	Positive pole	(પૉઝિટિવ પોલ)
ઋણધ્રુવ	Negative pole	(નૅગેટિવ પોલ)
ગુણોત્તર	Ratio	(રેશિયો)
કન્ડક્ટન્સ	Conductance	(કન્ડક્ટન્સ)
સાર્વત્રિક નિયમ	Universal law	(યુનિવર્સલ લૉ)
અવરોધકતા	Resistivity	(રેઝિસ્ટિવિટી)
વાહકતા	Conductivity	(કન્ડક્ટિવિટી)
વર્ણસંકેત	Colour code	(કલર કોડ)
શક્ય વિચલન	Possible variation	(પોસિબલ વેરિયેશન)
સહનશીલતા	Tolerance	(ટૉલરન્સ)
ઉદ્‌ગમ	Origin	(ઓરિજિન)
પ્રવેગિત	Accelerated	(એક્સલરેટેડ)
ક્ષણપૂરતો	Momentary	(મોમેન્ટરી)
વેગ	Velocity	(વેલોસિટી)
દોલનો	Oscillations	(ઓસ્સિલેસન્સ)
કંપવિસ્તાર	Amplitude	(એમ્પ્લિટ્યૂડ)
અથડામણો	Collisions	(કોલિઝન્સ)

મોબિલિટી	Mobility	(મોબિલિટી)
વિદ્યુતવિભાજ્ય દ્રાવણો	Electrolytes	(ઇલેક્ટ્રોલાઇટ્સ)
તાપમાન-ગુણાંક	Temperature co-efficient	(ટેમ્પરેચર કૉ-અફિસિયન્ટ)
અરેખીય	Non-linear	(નોન-લિનયર)
ધાતુતત્ત્વો	Elemental Metals	(એલિમેન્ટલ મેટલ્સ)
મિશ્રધાતુઓ	Alloys	(એલોયસ)
મર્યાદાઓ	Limitations	(લિમિટેશન્સ)
ઊર્જાનો તફાવત	Energy gap	(ઍનર્જી ગેપ)
સુપર કન્ડક્ટિવિટી	Super conductivity	(સુપર કન્ડક્ટિવિટી)
ચુંબકીય-ક્ષેત્ર	Magnetic field	(મૅગ્નેટિક ફિલ્ડ)
વિદ્યુત-પરિપથો	Electric circuits	(ઇલેક્ટ્રિક સર્કિટ્સ)
બૈજિક સરવાળો	Algebric sum	(એલ્જિબ્રિક સમ)
વિશ્લેષણ	Analysis	(એનાલિસિસ)
સંજ્ઞાપ્રણાલી	Sign convention	(સાઇન કન્વેન્શન)
અવરોધો	Resistors	(રેસિસ્ટરસ)
માપન	Measurment	(મેઝરમેન્ટ)
અંકન	Calibration	(કેલિબ્રેશન)
વિભાગો	Divisions	(ડિવિઝન્સ)
સંવેદિતા	Sensitivity	(સેન્સિટિવિટી)
સંતુલન	Equilibrium	(ઇક્વિલિબ્રિયમ)
જોડાણ-અગ્રો	Terminals	(ટર્મિનલ્સ)
અંત્યસુધારો	End corrections	(એન્ડ કરેક્શન્સ)
સ્થિતિમાન વિભાજક	Polential divider	(પોટેન્શિયલ ડિવાઇડર)
મિશ્ર જોડાણ	Mixed connection	(મિક્સ્ડ કનેક્શન)
પ્રમાણિત સેલ	Standard cell	(સ્ટાન્ડર્ડ સેલ)
સંયોજકતા	Valancy	(વેલેન્સી)
આંતરિક અવરોધ	Internal resistance	(ઇન્ટર્નલ રેસિસ્ટન્સ)
ઉષ્મીય અસર	Thermal or heating effect	(થર્મલ ઓર હિટિંગ ઇફેક્ટ)
પ્રાથમિક	Primary	(પ્રાઇમરી)
ગૌણ	Secondary	(સેકન્ડરી)
અથડામણો	Collisions	(કોલિઝન્સ)
અસ્તવ્યસ્ત ગતિ	Random motion	(રેન્ડમ મોશન)
વ્યાવહારિક ઉપયોગ	Practical applications	(પ્રૅક્ટિકલ એપ્લિકેસન્સ)
વ્યય	Dissipation or loss	(ડિસિપેસન ઓર લોસ)
ગલનબિંદુ	Melting point	(મેલ્ટિંગ પૉઇન્ટ)
વિદ્યુતીય રચના	Electrical device	(ઇલેક્ટ્રિકલ ડિવાઇસ)
વિદ્યુતદ્રાવણ	Electrolyte	(ઇલેક્ટ્રોલાઇટ)
વિદ્યુતવિભાજ્ય કોષ	Electrolytic cell	(ઇલેક્ટ્રોલાઇટિક સેલ)
છૂટા પાડવા	Dissociation	(ડિસોસિયેશન)
કેથોડ	Cathode	(કેથોડ)

એનોડ	Anode	(એનોડ)
વિદ્યુતરાસાયણિક કોષ	Electro chemical cell	(ઇલેક્ટ્રો કેમિકલ સેલ)
કપોટી	Thin film	(થિન ફિલ્મ)
પરમાણુભાર	Atomic weight	(એટોમિક વેઇટ)

પ્રકરણ 4 : વિદ્યુતપ્રવાહની ચુંબકીય અસરો

રાસાયણિક અસર	Chemical effect	(કેમિકલ ઇફેક્ટ)
પાવર	Power	(પાવર)
વ્યાવહારિક ઉપયોગ	Practical applications	(પ્રેક્ટિકલ એપ્લિકેશન્સ)
વ્યય	Dissipation or loss	(ડિસિપેશન ઓર લૉસ)
ગલનબિંદુ	Melting point	(મેલ્ટિંગ પૉઇન્ટ)
વિદ્યુતીય રચના	Electrical device	(ઇલેક્ટ્રિકલ ડિવાઇસ)
ગુણાકાર	Product	(પ્રોડક્ટ)
ચુંબકીય ક્ષેત્ર	Magnetic field	(મેગ્નેટિક ફિલ્ડ)
વિદ્યુતદ્રાવણ	Electrolyte	(ઇલેક્ટ્રોલાઇટ)
વિદ્યુતવિભાજ્ય કોષ	Electrolytic cell	(ઇલેક્ટ્રોલાઇટિક સેલ)
છૂટા પાડવા	Dissociation	(ડિસોસિયેશન)
ધ્રુવીય અણુઓ	Polarized molecules	(પોલરાઇઝ્ડ મોલેક્યુલસ)
વિદ્યુત ધ્રુવીભૂત	Electrically polarized	(ઇલેક્ટ્રિકલી પોલરાઇઝ્ડ)
વિદ્યુત-પૃથક્કરણ	Electrolysis	(ઇલેક્ટ્રોલિસિસ)
કેથોડ	Cathode	(કેથોડ)
એનોડ	Anode	(એનોડ)
ઇલેક્ટ્રોપ્લેટિંગ	Electroplating	(ઇલેક્ટ્રોપ્લેટિંગ)
ઇલેક્ટ્રોડિપોઝિશન	Electrodeposition	(ઇલેક્ટ્રોડિપોઝિશન)
પ્રક્રિયા	Reaction	(રિએક્શન)
દળ	Mass	(માસ)
વિદ્યુતરાસાયણિક તુલ્યાંક	Electro chemical equivalent	(ઇલેક્ટ્રો કેમિકલ ઇક્વિવેલન્ટ)
રાસાયણિક તુલ્યાંક (ગ્રામ-તુલ્યભાર)	Chemical equivalent	(કેમિકલ ઇક્વિવેલન્ટ)
પરમાણુભાર	Atomic weight	(એટોમિક વેઇટ)
સંયોજકતા	Valency	(વેલેન્સી)
આવર્તકોષ્ટક	Periodic table	(પિરિયોડિક ટેબલ)
વિદ્યુતરાસાયણિક કોષો	Electro chemical cells	(ઇલેક્ટ્રોકેમિકલ સેલ્સ)
આંતરિક અવરોધ	Internal resistance	(ઇન્ટર્નલ રેસિસ્ટન્ટ)
તૂટક-તૂટક	Intermittent	(ઇન્ટર્મિટન્ટ)
સૂકો કોષ	Dry cell	(ડ્રાય સેલ)
પ્રમાણિત સેલ	Standard cell	(સ્ટાન્ડર્ડ સેલ)
ખવાણ	Corrosion	(કોરોઝન)
નાના કરવા	Miniaturisation	(મિનિએચરાઇઝેશન)

થરમોઈલેક્ટ્રિસિટી	Thermoelectricity	(થરમોઇલેક્ટ્રિસિટી)
તટસ્થ તાપમાન	Neutral temperature	(ન્યૂટ્રલ ટેમ્પરેચર)
પ્રતિ તાપમાન	Inversion temperature	(ઇન્વર્ઝન ટેમ્પરેચર)
પ્રતિ અસર	Reverse effect	(રિવર્સ ઇફેક્ટ)
ગુણક	Co-efficient	(કો-એફિસિયન્ટ)
ગતિવર્તી	Reversible	(રિવર્સિબલ)

પ્રકરણ 5 : ચુંબકત્વ અને દ્રવ્ય

ચુંબકત્વ	Magnetism	(મેગ્નેટિઝમ)
દ્રવ્ય	Matter	(મેટર)
પ્રાથમિક કણો	Fandamental particles	(ફન્ડામેન્ટલ પાર્ટિકલ્સ)
દ્વીપ	Island	(આઇલેન્ડ)
સમક્ષિતિજ	Horizontal	(હોરિઝોન્ટલ)
ઉત્તરધ્રુવ	North pole	(નોર્થપોલ)
દક્ષિણધ્રુવ	South pole	(સાઉથપોલ)
અપાકર્ષણ	Repulsion	(રિપલ્ઝન)
આકર્ષણ	Attraction	(એટ્રેક્શન)
અસમાન ધ્રુવો	Unlike poles	(અનલાઇક પોલ્સ)
સમાન ધ્રુવો	Like poles	(લાઇક પોલ્સ)
ગજિયા ચુંબક	Bar magnet	(બારમેગ્નેટ)
મિશ્રધાતુઓ	Alloys	(અલોયઝ)
ચુંબકીય ક્ષેત્રરેખાઓ	Magnetic field lines	(મેગ્નેટિક ફિલ્ડ લાઇન્સ)
લોખંડનો ઝીણો ભૂકો	Iron filings	(આયર્ન ફિલિંગ્સ)
ભાત	Pattern	(પેટર્ન)
કક્ષાઓ	Orbits	(ઓર્બિટ્સ)
તત્ત્વ	Element	(એલિમેન્ટ)
ચુંબકીય ચાકમાત્રા	Magnetic moment	(મેગ્નેટિક મોમેન્ટ)
સપાટી	Surface	(સરફેસ)
ચુંબકીય ડાઇપોલ	Magnetic dipole	(મેગ્નેટિક ડાઇપોલ)
ધ્રુવમાન	Pole strength	(પોલસ્ટ્રેન્થ)
આડછેદનું ક્ષેત્રફળ	Area of crosssection	(એરિયા ઑફ ક્રૉસ સેક્શન)
નિયમિત	Uniform	(યુનિફોર્મ)
સ્થિતિ-ઊર્જા	Potential energy	(પોટેન્શિયલ એનર્જી)
ભૂચુંબકત્વ	Geomagnetism	(જીઓમેગ્નેટિઝમ)
અક્ષાંશ	Latitude	(લેટિટ્યૂડ)
રેખાંશ	Meridian	(મેરિડિયન)
વિષુવરેખા	Equator	(ઇક્વેટર)
ભૂચુંબકીય તત્ત્વો	Geomagnetic elements	(જીઓમેગ્નેટિક એલિમેન્ટ્સ)
ચુંબકીય પ્રાચલો	Magnetic Parameters	(મેગ્નેટિક પેરામિટર્સ)

મૅગ્નેટિક ડેક્લિનેશન	Magnetic declination	(મૅગ્નેટિક ડેક્લિનેશન)
ભૌગોલિક રેખાંશ	Geographic meridian	(જીઓગ્રાફિક મેરિડિયન)
ઊર્ધ્વ સમતલ	Vertical plane	(વર્ટિકલ પ્લેન)
ઘટક	Component	(કૉમ્પોનન્ટ)
અધોગામી	Vertically downward	(વર્ટિકલી ડાઉનવર્ડ)
સમય સાથેના ફેરફારો	Temporal variation	(ટેમ્પરલ વેરિયેશન)
રગડા	Basalt	(બેસાલ્ટ)
મૅગ્નેટિક તીવ્રતા	Magnetic intensity	(મૅગ્નેટિક ઇન્ટેન્સિટી)
બદ્ધપ્રવાહ	Bound current	(બાઉન્ડ કરન્ટ)
વિવર્ધિત	Magnified	(મૅગ્નિફાઇડ)
ગાઢબંધ	Strong bounding	(સ્ટ્રૉન્ગ બાઉન્ડિંગ)
હિસ્ટરિસિસ	Hysteresis	(હિસ્ટરિસિસ)

પ્રકરણ 6 : કિરણ-પ્રકાશશાસ્ત્ર

પ્રસરણ	Propagation	(પ્રોપગેશન)
આંતરક્રિયા	Interaction	(ઇન્ટરેક્શન)
તરંગલંબાઈ	Wavelength	(વેવલેન્થ)
પરાવર્તન	Reflaction	(રિફ્લેક્શન)
વક્રીભવન	Refraction	(રિફ્રેક્શન)
વિભાજન	Dispersion	(ડીસપરશન)
વિકેન્દ્રિત	Diverging	(ડાવર્જિંગ)
કેન્દ્રિત	Converging	(કન્વર્જિંગ)
પ્રતિવર્તતા	Reversibility	(રિવર્સિબિલિટી)
સંજ્ઞાપ્રણાલી	Sign convention	(સાઇન કન્વેન્શન)
ભૂમિતિ	Geometry	(જ્યોમેટ્રી)
બહિષ્કોણ	Exterior angle	(એક્સટેરીઅર ઍંગલ)
મોટવણી	Magnification	(મૅગ્નિફિકેશન)
પૂર્ણઆંતરિક પરાવર્તન	Total internal reflection	(ટોટલ ઇન્ટરનલ રિફ્લેક્શન)
મરીચિકા અથવા મૃગજળ	Mirrage	(મીરેજ)
ક્રાંતિકોણ	Critical angle	(ક્રિટીકલ ઍંગલ)
સંલગ્નિત	Conjugate	(કૉન્જ્યુગેટ)
દૃષ્ટિસ્થાનભેદ	Parallex	(પેરેલેક્ષ)
કોણીય વિભાજન	Angular Dispersion	(ઍંગ્યુલર ડીસપરશન)
પ્રકીર્ણન	Scattering	(પ્રકીર્ણન)

સ્થિતિસ્થાપક	Elastic	(ઇલાસ્ટિક)
અસ્થિતિસ્થાપક	Inelastic	(ઇનઇલાસ્ટિક)
નજીક-બિંદુ	Near-point	(નિયર-પોઇન્ટ)

પ્રકરણ 7 : વિકિરણ અને દ્રવ્યનો દ્વૈત-સ્વભાવ

પ્રચલિત યંત્રશાસ્ત્ર	Classical mechanics	(ક્લાસિકલ મિકેનિક્સ)
સ્થૂલ પદાર્થ	Macroscopic object	(માઇક્રોસ્કોપિક ઑબ્જેક્ટ)
ઉષ્માધારિતા	Heat capacity	(હીટ કેપેસિટી)
વિશિષ્ટ ઉષ્મા	Specific heat	(સ્પેસીફિક હીટ)
વિદ્યુતવાહકતા	Electric conductivity	(ઇલેક્ટ્રિક કન્ડક્ટિવિટી)
પરમાણુનું બંધારણ	Structure of an atom	(સ્ટ્રક્ટર ઑફ એન એટમ)
વિકિરણ	Radiation	(રેડીએશન)
મુક્તતાના અંશો	Degrees of freedom	(ડિગ્રી ઑફ ફ્રિડમ)
ક્વૉન્ટમીકરણ	Quantization	(ક્વૉન્ટાઇઝેશન)
ઊર્જા (શક્તિ) સમવિભાજનનો નિયમ	Law of equipartition of energy	(લૉ ઑફ ઇક્વિપાર્શિન ઑફ ઍનર્જી)
સ્થિતિમાન	Potential barrier	(પોટેન્શિયલ બેરિયર)
ઉષ્માજનિત ઉત્સર્જન	Thermionic emission	(થર્મિઓનીક ઍમીશન)
આંતરક્રિયા	Interaction	(ઇન્ટરેક્શન)
વિરોધાભાસ	Paradox	(પેરાડોક્ષ)
તરંગ-પેકેટ	Wave packet	(વેવ-પેકેટ)
પ્રકેરક	Scatterer	(સ્કેટરર)

•

LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Difference								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5566	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6345	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Difference								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7769	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9843	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Antilogarithms

											Mean Difference								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.20	1585	1289	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
.40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
.43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Antilogarithms

											Mean Difference								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6715	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	12	14	16
90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

NATURAL SINES

Degree	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	Mean Deifferences				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1'	2'	3'	4'	5'
0	.0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	3	6	9	12	15
1	.0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	3	6	9	12	15
2	.0349	0366	0384	0401	0419	0436	0454	0471	0488	0506	3	6	9	12	15
3	.0523	0541	0558	0576	0593	0610	0628	0645	0663	0680	3	6	9	12	15
4	.0698	0715	0732	0750	0767	0785	0802	0819	0837	0854	3	6	9	12	14
5	.0872	0889	0906	0924	0941	0958	0976	0993	1011	1028	3	6	9	12	14
6	.1045	1063	1080	1197	1115	1132	1149	1167	1184	1201	3	6	9	12	14
7	.1219	1236	1253	1271	1288	1305	1323	1340	1357	1374	3	6	9	12	14
8	.1392	1409	1426	1444	1461	1478	1495	1513	1530	1547	3	6	9	12	14
9	.1564	1582	1599	1616	1633	1650	1668	1685	1702	1719	3	6	9	12	14
10	.1736	1754	1771	1788	1805	1822	1840	1857	1874	1891	3	6	9	11	14
11	.1908	1925	1942	1959	1977	1994	2011	2028	2045	2062	3	6	9	11	14
12	.2079	2096	2113	2130	2147	2164	2181	2198	2215	2233	3	6	9	11	14
13	.2250	2267	2284	2300	2317	2334	2351	2368	2385	2402	3	6	8	11	14
14	.2419	2436	2453	2470	2487	2504	2521	2538	2554	2571	3	6	8	11	14
15	.2588	2605	2622	2639	2656	2672	2689	2706	2723	2740	3	6	8	11	14
16	.2756	2773	2790	2807	2823	2840	2857	2874	2890	2907	3	6	8	11	14
17	.2924	2940	2957	2974	2990	3007	3024	3040	3057	3074	3	6	8	11	14
18	.3090	3107	3123	3140	3156	3173	3190	3206	3223	3239	3	6	8	11	14
19	.3256	3272	3289	3305	3322	3338	3355	3371	3387	3404	3	5	8	11	14
20	.3420	3437	3453	3469	3486	3502	3518	3535	3551	3567	3	5	8	11	14
21	.3584	3600	3616	3633	3649	3665	3681	3697	3714	3730	3	5	8	11	14
22	.3746	3762	3778	3795	3811	3827	3843	3859	3875	3891	3	5	8	11	14
23	.3907	3923	3939	3955	3971	3987	4003	4019	4035	4051	3	5	8	11	14
24	.4067	4083	4099	4115	4131	4147	4163	4179	4195	4210	3	5	8	11	13
25	.4226	4242	4258	4274	4289	4305	4321	4337	4352	4368	3	5	8	11	13
26	.4384	4399	4415	4431	4446	4462	4478	4493	4509	4524	3	5	8	10	13
27	.4540	4555	4571	4586	4602	4617	4633	4648	4664	4679	3	5	8	10	13
28	.4695	4710	4726	4741	4756	4772	4787	4802	4818	4833	3	5	8	10	13
29	.4848	4863	4879	4894	4909	4924	4939	4955	4970	4985	3	5	8	10	13
30	.5000	5015	5030	5045	5060	5075	5090	5105	5120	5135	3	5	8	10	13
31	.5150	5165	5180	5195	5210	5225	5240	5255	5270	5284	2	5	7	10	12
32	.5299	5314	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432	2	5	7	10	12
33	.5446	5461	5476	5490	5505	5519	5534	5548	5563	5577	2	5	7	10	12
34	.5592	5606	5621	5635	5650	5664	5678	5693	5707	5721	2	5	7	10	12
35	.5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864	2	5	7	9	12
36	.5878	5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004	2	5	7	9	12
37	.6018	6032	6046	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143	2	5	7	9	12
38	.6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280	2	5	7	9	11
39	.6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414	2	4	7	9	11
40	.6428	6441	6455	6468	6481	6494	6508	6521	6534	6547	2	4	7	9	11
41	.6561	6574	6587	6600	6613	6626	6639	6652	6665	6678	2	4	7	9	11
42	.6691	6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	6794	6807	2	4	6	9	11
43	.6820	6833	6845	6858	6871	6884	6896	6909	6921	6934	2	4	6	8	11
44	.6947	6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	7046	7059	2	4	6	8	10

NATURAL SINES

Degree	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	Mean Deifferences				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1'	2'	3'	4'	5'
45	.7071	7083	7096	7108	7120	7133	7145	7157	7169	7181	2	4	6	8	10
46	.7193	7206	7218	7230	7242	7254	7266	7278	7290	7302	2	4	6	8	10
47	.7314	7325	7337	7349	7361	7373	7385	7396	7408	7420	2	4	6	8	10
48	.7431	7443	7455	7466	7478	7490	7501	7513	7524	7536	2	4	6	8	10
49	.7547	7559	7570	7581	7593	7604	7615	7627	7638	7649	2	4	6	8	9
50	.7660	7672	7683	7694	7705	7716	7727	7738	7749	7760	2	4	6	7	9
51	.7771	7782	7793	7804	7815	7826	7837	7848	7859	7869	2	4	5	7	9
52	.7880	7891	7902	7912	7923	7934	7944	7955	7965	7976	2	4	5	7	9
53	.7986	7997	8007	8018	8028	8039	8049	8059	8070	8080	2	3	5	7	9
54	.8090	8100	8111	8121	8131	8141	8151	8161	8171	8181	2	3	5	7	8
55	.8192	8202	8211	8221	8231	8241	8251	8261	8271	8281	2	3	5	7	8
56	.8290	8300	8310	8320	8329	8339	8348	8358	8368	8377	2	3	5	6	8
57	.8387	8396	8406	8415	8425	8434	8443	8453	8462	8471	2	3	5	6	8
58	.8480	8490	8499	8508	8517	8526	8536	8545	8554	8563	2	3	5	6	8
59	.8572	8581	8590	8599	8607	8616	8625	8634	8643	8652	1	3	4	6	7
60	.8660	8669	8678	8686	8695	8704	8712	8721	8729	8738	1	3	4	6	7
61	.8746	8755	8763	8771	8780	8788	8796	8805	8813	8821	1	3	4	6	7
62	.8829	8838	8846	8854	8862	8870	8878	8886	8894	8902	1	3	4	5	7
63	.8910	8918	8926	8934	8942	8949	8957	8965	8973	8980	1	3	4	5	6
64	.8988	8996	9003	9011	9018	9026	9033	9041	9048	9056	1	3	4	5	6
65	.9063	9070	9078	9085	9092	9100	9107	9114	9121	9128	1	2	4	5	6
66	.9135	9143	9150	9157	9164	9171	9178	9184	9191	9198	1	2	3	5	6
67	.9205	9212	9219	9225	9232	9239	9245	9252	9259	9265	1	2	3	4	6
68	.9272	9278	9285	9291	9298	9304	9311	9317	9323	9330	1	2	3	4	5
69	.9336	9342	9348	9354	9361	9367	9373	9379	9385	9391	1	2	3	4	5
70	.9397	9403	9409	9415	9421	9426	9432	9438	9444	9449	1	2	3	4	5
71	.9455	9461	9466	9472	9478	9483	9489	9494	9500	9505	1	2	3	4	5
72	.9511	9516	9521	9527	9532	9537	9542	9548	9553	9558	1	2	3	3	4
73	.9563	9568	9573	9578	9583	9588	9593	9598	9603	9608	1	2	2	3	4
74	.9613	9617	9622	9627	9632	9636	9641	9646	9650	9655	1	2	2	3	4
75	.9659	9664	9668	9673	9677	9681	9686	9690	9694	9699	1	1	2	3	4
76	.9703	9707	9711	9715	9720	9724	9728	9732	9736	9740	1	1	2	3	3
77	.9744	9748	9751	9755	9759	9763	9767	9770	9774	9778	1	1	2	3	3
78	.9781	9785	9789	9792	9796	9799	9803	9806	9810	9813	1	1	2	2	3
79	.9816	9820	9823	9826	9829	9833	9836	9839	9842	9845	1	1	2	2	3
80	.9848	9851	9854	9857	9860	9863	9866	9869	9871	9874	0	1	1	2	2
81	.9877	9880	9882	9885	9888	9890	9893	9895	9898	9900	0	1	1	2	2
82	.9903	9905	9907	9910	9912	9914	9917	9919	9921	9923	0	1	1	2	2
83	.9925	9928	9930	9932	9934	9936	9938	9940	9942	9943	0	1	1	1	2
84	.9945	9947	9949	9951	9952	9954	9956	9957	9959	9960	0	1	1	1	2
85	.9962	9963	9965	9966	9968	9969	9971	9972	9973	9974	0	0	1	1	1
86	.9976	9977	9978	9979	9980	9981	9982	9983	9984	9985	0	0	1	1	1
87	.9986	9987	9988	9989	9990	9990	9991	9992	9993	9993	0	0	0	1	1
88	.9994	9995	9995	9996	9996	9997	9997	9997	9998	9998	0	0	0	0	0
89	.9998	9999	9999	9999	9999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0	0	0	0	0

NATURAL TANGENTS

Degree	0 (0.0°)	6 (0.1°)	12 (0.2°)	18 (0.3°)	24 (0.4°)	30 (0.5°)	36 (0.6°)	42 (0.7°)	48 (0.8°)	54 (0.9°)	Main Deifferences 1	2	3	4	5
0	.0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	3	6	9	12	15
1	.0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	3	6	9	12	15
2	.0349	0367	0384	0402	0419	0437	0454	0472	0489	0507	3	6	9	12	15
3	.0524	0542	0559	0577	0594	0612	0629	0647	0664	0682	3	6	9	12	15
4	.0699	0717	0734	0752	0769	0787	0805	0822	0840	0857	3	6	9	12	15
5	.0875	0892	0910	0928	0945	0963	0981	0998	1016	1033	3	6	9	12	15
6	.1051	1069	1086	1104	1122	1139	1157	1175	1192	1210	3	6	9	12	15
7	.1228	1246	1263	1281	1299	1317	1334	1352	1370	1388	3	6	9	12	15
8	.1405	1423	1441	1459	1477	1495	1512	1530	1548	1566	3	6	9	12	15
9	.1584	1602	1620	1638	1655	1673	1691	1709	1727	1745	3	6	9	12	15
10	.1763	1781	1799	1817	1835	1853	1871	1890	1908	1926	3	6	9	12	15
11	.1944	1962	1980	1998	2016	2035	2053	2071	2089	2107	3	6	9	12	15
12	.2126	2144	2162	2180	2199	2217	2235	2254	2272	2290	3	6	9	12	15
13	.2309	2327	2345	2364	2382	2401	2419	2438	2456	2475	3	6	9	12	15
14	.2493	2512	2530	2549	2568	2686	2605	2623	2642	2661	3	6	9	12	16
15	.2679	2698	2717	2736	2754	2773	2792	2811	2830	2849	3	6	9	13	16
16	.2867	2886	2905	2924	2943	2962	2981	3000	3019	3038	3	6	9	13	16
17	.3057	3076	3096	3115	3134	3153	3172	3191	3211	3230	3	6	10	13	16
18	.3249	3269	3288	3307	3327	3346	3365	3385	3404	3424	3	6	10	13	16
19	.3443	3463	3482	3502	3522	3541	3561	3581	3600	3620	3	7	10	13	16
20	.3640	3659	3679	3699	3719	3739	3759	3779	3799	3819	3	7	10	13	17
21	.3839	3859	3879	3899	3919	3939	3959	3979	4000	4020	3	7	10	13	17
22	.4040	4061	4081	4101	4122	4142	4163	4183	4204	4224	3	7	10	14	17
23	.4245	4265	8286	4307	4327	4748	4369	4390	4411	4431	3	7	10	14	17
24	.4452	4473	4494	4515	4536	4557	4578	4599	4621	4642	4	7	11	14	18
25	.4663	4684	4706	4727	4748	4770	4791	4813	4834	4856	4	7	11	14	18
26	.4877	4899	4921	4942	4964	4986	5008	5029	5051	5073	4	7	11	15	18
27	.5095	5117	5139	5161	5184	5206	5228	5250	5272	5295	4	7	11	15	18
28	.5317	5340	5362	5384	5407	5430	5452	5475	5498	5520	4	8	11	15	19
29	.5543	5566	5589	5612	5635	5658	5681	5704	5727	5750	4	8	12	15	19
30	.5774	5797	5820	5844	5867	5890	5914	5938	5961	5985	4	8	12	16	20
31	.6009	6032	6056	6080	6104	6128	6152	6176	6200	6224	4	8	12	16	20
32	.6249	6273	6297	6322	6346	6371	6395	6420	6445	6469	4	8	12	16	20
33	.6494	6519	6544	6569	6594	6619	6644	6669	6694	6720	4	8	13	17	21
34	.6745	6771	6796	6822	6847	6873	6899	6924	6950	6976	4	9	13	17	21
35	.7002	7028	7054	7080	7107	7133	7159	7186	7212	7239	4	9	13	18	22
36	.7265	7292	7319	7346	7373	7400	7427	7454	7481	7508	5	9	14	18	23
37	.7536	7563	7590	7618	7646	7673	7701	7729	7757	7785	5	9	14	18	23
38	.7813	7841	7869	7898	7926	7954	7983	8012	8040	8069	5	9	14	19	24
39	.8098	8127	8156	8185	8214	8243	8273	8302	8332	8361	5	10	15	20	24
40	.8391	8421	8451	8481	8511	8541	8571	8601	8632	8662	5	10	15	20	25
41	.8693	8724	8754	8785	8816	8847	8878	8910	8941	8972	5	10	16	21	26
42	.9004	9036	9067	9099	9131	9163	9195	9228	9260	9293	5	11	16	21	27
43	.9325	9358	9391	9424	9457	9490	9523	9556	9590	9623	6	11	17	22	28
44	.9657	9691	9725	9759	9793	9827	9861	9896	9930	9965	6	11	17	23	29

NATURAL TANGENTS

Degree	0 (0.0°)	6 (0.1°)	12 (0.2°)	18 (0.3°)	24 (0.4°)	30 (0.5°)	36 (0.6°)	42 (0.7°)	48 (0.8°)	54 (0.9°)	Main Deifferences 1	2	3	4	5
45	1.0000	0035	0070	0105	0141	0176	0212	0247	0283	0319	6	12	18	24	30
46	1.0355	0392	0428	0464	0501	0538	0575	0612	0649	0686	6	12	18	25	31
47	1.0724	0761	0799	0837	0875	0913	0951	0990	1028	1067	6	13	19	25	32
48	1.1106	1145	1184	1224	1263	1303	1343	1383	1423	1463	7	13	20	27	33
49	1.1504	1544	1585	1626	1667	1708	1750	1792	1833	1875	7	14	21	28	34
50	1.1918	1960	2002	2045	2088	2131	2174	2218	2261	2305	7	14	22	29	36
51	1.2349	2393	2437	2482	2527	2572	2617	2662	2708	2753	8	15	23	30	38
52	1.2799	2846	2892	2938	2985	3032	3079	3127	3175	3222	8	16	24	31	39
53	1.3270	3319	3367	3416	3465	3514	3564	3613	3663	3713	8	16	25	33	41
54	1.3764	3814	3865	3916	3968	4019	4071	4124	4176	4229	9	17	26	34	43
55	1.4281	4335	4388	4442	4496	4550	4605	4659	4715	4770	9	18	27	36	45
56	1.4826	4882	4938	4994	5051	5108	5166	5224	5282	5340	10	19	29	38	48
57	1.5399	5458	5517	5577	5637	5697	5757	5818	5880	5941	10	20	30	40	50
58	1.6003	6066	6128	6191	6255	6319	6383	6447	6512	6577	11	21	32	43	53
59	1.6643	6709	6775	6842	6909	6977	7045	7113	7182	7251	11	23	34	45	56
60	1.7321	7391	7461	7532	7603	7675	7747	7820	7893	7966	12	24	36	48	60
61	1.8040	8115	8190	8265	8341	8418	8495	8572	8650	8728	13	26	38	51	64
62	1.8807	8887	8967	9047	9128	9210	9292	9375	9458	9542	14	27	41	55	68
63	1.9626	9711	9797	9883	9970	2.0057	2.0145	2.0233	2.0323	2.413	15	29	44	58	73
64	2.0503	0594	0686	0778	0872	0965	1060	1155	1251	1348	16	31	47	63	78
65	2.1445	1543	1642	1742	1842	1943	2045	2148	2251	2355	17	34	51	68	85
66	2.2460	2566	2673	2781	2889	2998	3109	3220	3332	3445	18	37	55	73	92
67	2.3559	3673	3789	3906	4023	4142	4262	4383	4504	4627	20	40	60	79	99
68	2.4751	4876	5002	5129	5257	5386	5517	5649	5782	5916	22	43	65	87	108
69	2.6051	6187	6325	6464	6605	6746	6889	7034	7179	7326	24	47	71	95	119
70	2.7475	7625	7776	7929	8083	8239	8397	8556	8716	8878	26	52	78	104	131
71	2.9042	9208	9375	9544	9714	9887	3.0061	3.0237	3.0415	3.0595	29	58	87	116	145
72	3.0777	0961	1146	1334	1524	1716	1910	2106	2305	2506	32	64	96	129	161
73	3.2709	2914	3122	3332	3544	3759	3977	4197	4420	4646	36	72	108	144	180
74	3.4824	5105	5339	5576	5816	6059	6305	6554	6806	7062	41	81	122	163	204
75	3.7321	7583	7848	8118	8391	8667	8947	9232	9520	9812	46	93	139	186	232
76	4.0108	0408	0713	1022	1335	1653	1976	2303	2635	2972	53	107	160	213	267
77	4.3315	3662	4015	4374	4737	5107	5483	5864	6252	6646	Mean Differences no longer sufficiently accurate				
78	4.7046	7453	7867	8288	8716	9152	9594	5.0045	5.0504	5.0970					
79	5.1446	1929	2422	2924	3465	3955	4486	5026	5578	6140					
80	5.6713	7297	7894	8502	9124	9758	6.0405	6.1066	6.1742	6.2432					
81	6.3138	3859	4596	5350	6122	6912	7720	8548	9395	7.0264					
82	7.1154	2066	3002	3962	4997	5958	6996	8062	9158	8.0285					
83	8.1443	2636	3863	5126	6427	7769	9152	9.0579	9.2052	9.3572					
84	9.514	9.677	9.845	10.02	10.20	10.39	10.58	10.78	10.99	11.20					
85	11.43	11.66	11.91	12.16	12.43	12.71	13.00	13.30	13.62	13.95					
86	14.30	14.67	15.06	15.46	15.89	16.35	16.83	17.34	17.89	18.46					
87	19.08	19.74	20.45	21.20	22.02	22.90	23.86	24.90	26.03	27.27					
88	28.64	30.14	31.82	33.69	35.80	38.19	40.92	44.07	47.74	52.08					
89	57.29	63.66	71.62	81.85	95.49	114.6	143.2	191.0	286.5	573.0					