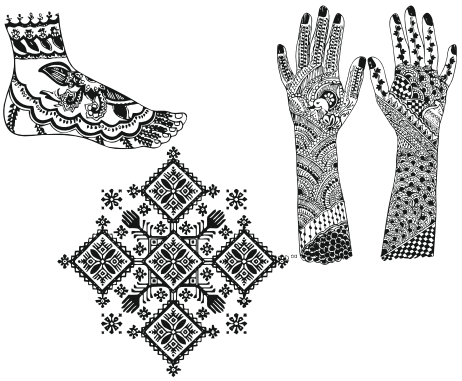
अध्याय 8

आधारभूत ज्यामितीय अवधारणाएँ एवं रचनाएँ

8.1 हम अपने चारों ओर कई प्रकार की वस्तुएँ देखते हैं जैसे इमारतें, बर्तन, फर्नीचर, चित्र आदि। आपने रंगोली एवं मेहंदी के डिजाइन देखे होंगे, इनमें गोल, चोकोर, त्रिकोण, रेखाएँ आदि आकृतियाँ देखी होंगी। यह आकृतियाँ ज्यामितीय आकृतियाँ कहलाती हैं।

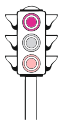
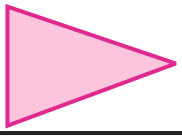
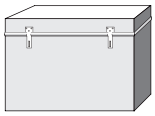
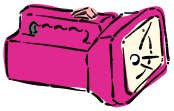
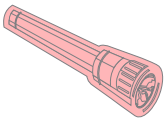
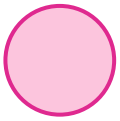
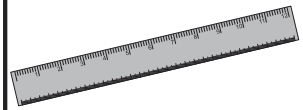
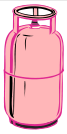
अब आप अपने पास वस्तुओं में इस प्रकार की ज्यामितिय आकृतियों को ढूँढने का प्रयत्न कीजिए।

वैदिक काल से ही भारत में विभिन्न वस्तुओं के निर्माण में ज्यामिति का प्रयोग होता आया है चाहे हवन कुंड हो, मंडप हो अथवा मंदिर। घरों, महलों व अन्य इमारतों में भी ज्यामिति आकृतियों का प्रयोग किया जाता है। मूलतः ज्यामिति शब्द "ज्या" तथा "मिति" से मिल कर बना है। ज्या का अर्थ भूमि और मिति का अर्थ मापन से है।



8.2 आधारभूत ज्यामितीय आकृतियाँ

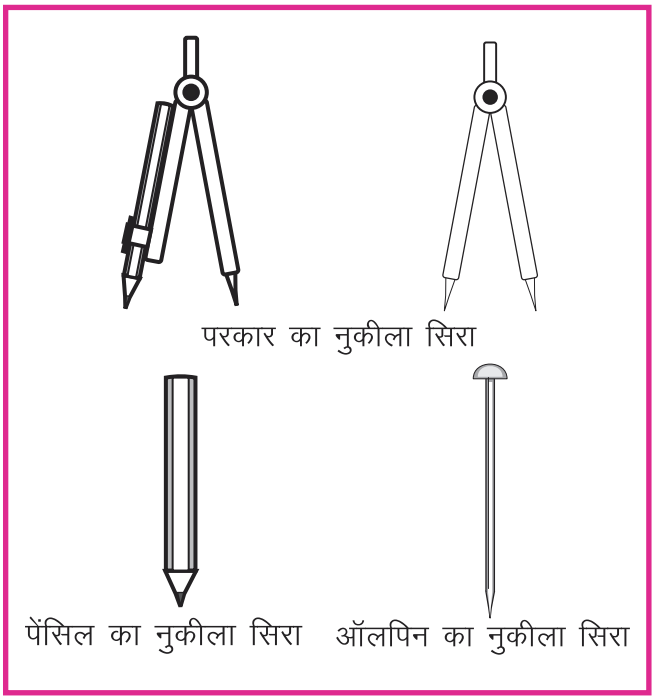
इस अध्याय में हम ज्यामितीय आकृतियों के बारे में अध्ययन करेंगे। नीचे कुछ वस्तुओं के चित्र दिए गए हैं तथा उनके सामने ज्यामितीय आकृतियाँ दी गई हैं। बताइए किस वस्तु की सतह में वह आकृति दिखाई देती है।

1				
2				
3				
4				
5				

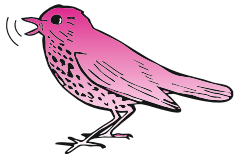
8.2.1 बिन्दु

कागज पर एक पेंसिल के नुकीले सिरे से एक चिह्न अंकित कीजिए।

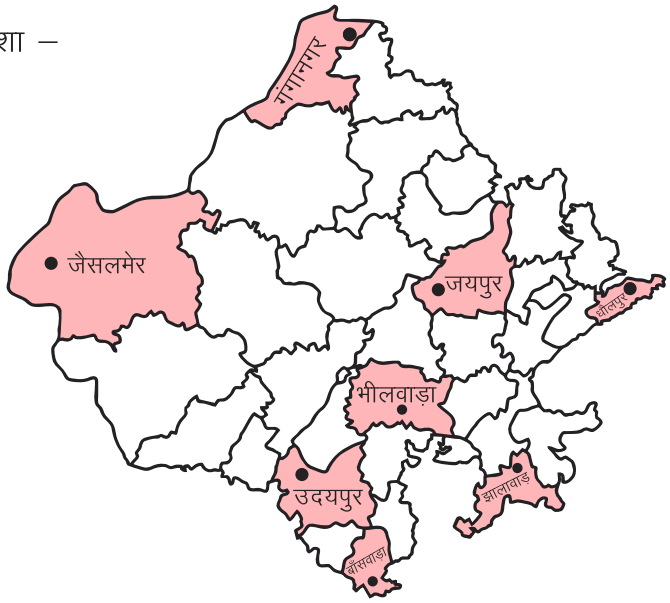




सिरा जितना नुकीला होगा चिह्न उतना ही सूक्ष्म (छोटा) होगा। लगभग एक बिना दिखाई देने वाला सूक्ष्म चिह्न आपको एक बिन्दु का आभास कराएगा। बिन्दु एक स्थिति निर्धारित करता है।

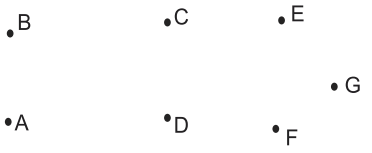


राजस्थान का नक्शा –

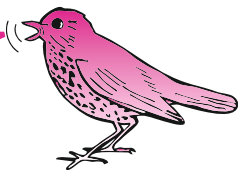


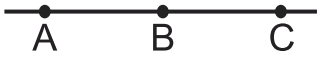
नक्शे में बिन्दू (•) राजस्थान के कुछ शहरों की स्थिति को दर्शा रहे हैं। (नक्शा पैमाने पर आधारित नहीं है।)

यदि आप किसी कागज पर कुछ बिन्दु अंकित करें तो आपको इनमें भेद बताने की आवश्यकता पड़ेगी। इसके लिए इन्हें अंग्रेजी के बड़े अक्षर A,B,C इत्यादि से व्यक्त किया जाता है।



यदि तीन या अधिक बिन्दु एक ही रेखा पर स्थित हों तो संरेख बिन्दु कहलाते हैं।





करो और सीखो

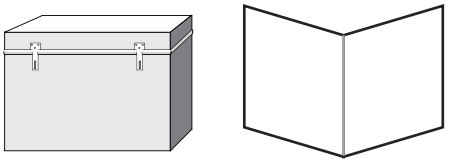
आप अपने दैनिक जीवन में बिन्दु के आभास की कुछ स्थितियाँ चुन कर लिखिए।

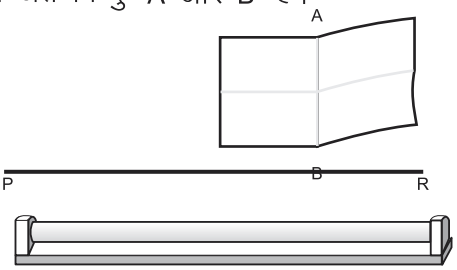
8.2.2 रेखाखंड

एक कागज लीजिए तथा इसे चित्रानुसार मोड़िए और फिर खोल दीजिए।

क्या मोड़ का कोई निशान दिखाई देता है? कागज के टुकड़े पर जो निशान दिखाई देता है वह आपको रेखाखंड का अहसास कराता है। इसके दो अंत बिन्दु A और B हैं।

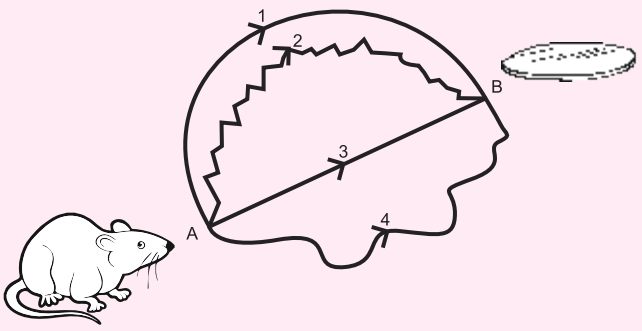
रेखा खंड के कुछ उदाहरण निम्न हैं।





करो और सीखो

1. आप अपने आस–पास से रेखाखण्ड़ों के कुछ उदाहरण ढुँढिए तथा उनके नाम लिखिए।
   जैसे दीवार के कोने .....
2. चित्र को ध्यान से देखिए बिन्दु A पर एक चूहा है तथा बिन्दु B पर रोटी का एक टुकड़ा आपको यह बताना है कि चूहा किस रास्ते से सबसे पहले रोटी तक पहुँचेगा और क्यों ?



8.2.3 रेखा

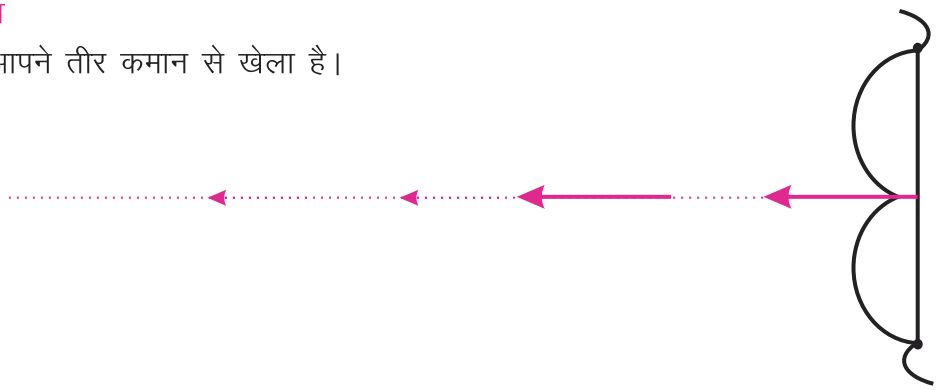
कल्पना कीजिए जब रेखाखण्ड AB को B से आगे और A से आगे की ओर उसी दिशा में लगातार बढ़ाते जाएँ तो क्या होगा ?



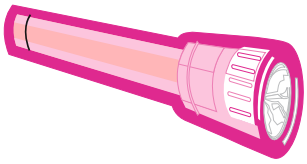
ऐसा करने पर हमें एक रेखा का प्रतिरूप प्राप्त होता है क्योंकि हम अनन्त लम्बाई की रेखा को कागज पर नहीं बना सकते है, अतः इसे प्रदर्शित करने के लिए उसके दोनों सिरों पर तीर के निशान बना देते है। जैसे कि ऊपर चित्र में दिखाया गया है। इसे $\overleftrightarrow{AB}$ से प्रदर्शित किया जाता है।

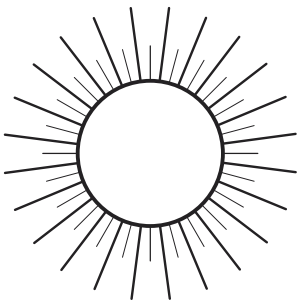
8.2.4 किरण

क्या आपने तीर कमान से खेला है।



आप जिन तीरों से खेलते हैं वह कुछ दूरी तक जा कर गिर जाता है। यदि एक ऐसे तीर की कल्पना की जाए जो छोड़ी गई दिशा में अनन्त दूरी तक जाए तो उससे बनने वाला पथ किरण का निर्माण करता है अर्थात् किरण एक बिन्दु से प्रारम्भ होती है तथा उसी दिशा में अनन्त दूरी तक जाती है। दैनिक जीवन में कुछ अन्य किरणों के उदाहरण हैं –



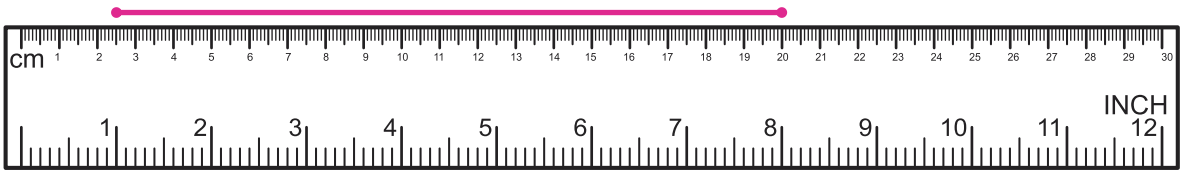


जिस बिन्दु से किरण प्रारम्भ होती हैं वह प्रारम्भिक बिन्दु कहलाता है।



दिए गए किरण के चित्र में A किरण का प्रारम्भिक बिन्दु है तथा P किरण का एक अन्य बिन्दु है। इसे $\overrightarrow{AP}$ से व्यक्त करते हैं।

8.3 स्केल (पटरी का परिचय)



कक्षा 5 में आपने मीटर स्केल से वस्तुओं व छात्रों की लम्बाई नापना सीखा है। ऊपर स्केल (पटरी) का चित्र दिया गया है। आप दी गई पटरी के चित्र को देख कर अथवा उपलब्ध स्केल को देख कर निम्न प्रश्नों का उत्तर दें –

1. इसमें नीचे की ओर कितनी संख्या तक अंकित हैं ?

   .....

2. ऊपर की ओर कितनी संख्या तक अंकित हैं ?

   .....

3. दो लगातार संख्याओं के मध्य कितने छोटे चिह्न बने हैं ?

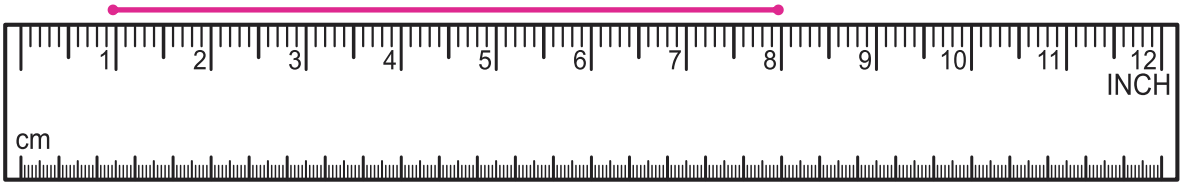
   .....

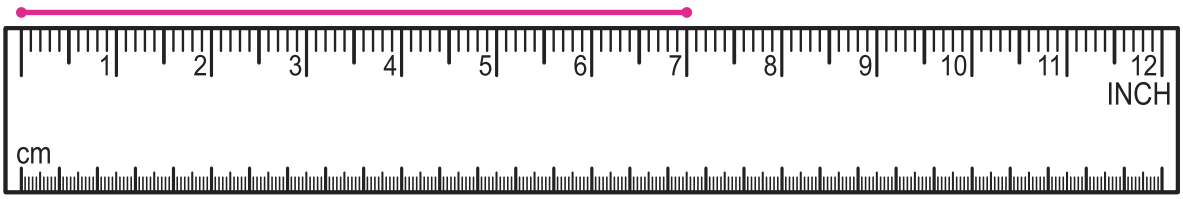
ऊपर की ओर 30 तक बने चिह्न सेंटीमीटर को प्रदर्शित करते हैं तथा उनके बीच बने प्रत्येक 10 छोटे बराबर भाग 1 मिमी (मिलीमीटर) को प्रदर्शित करते हैं। अतः 1 सेमी = 10 मिमी होता है।

1 मिमी = ... सेमी।

नीचे की ओर अंकित 12 संख्याएँ प्रत्येक 1 इंच को प्रदर्शित करती हैं, सामान्यतः ज्यामिति में स्केल का उपयोग हम रेखा, रेखाखंड, किरण आदि को बनाने में करते हैं।

अजय व विजय ने रेखाखंड को मापने के लिए 12 इंच वाले स्केल का उपयोग किया

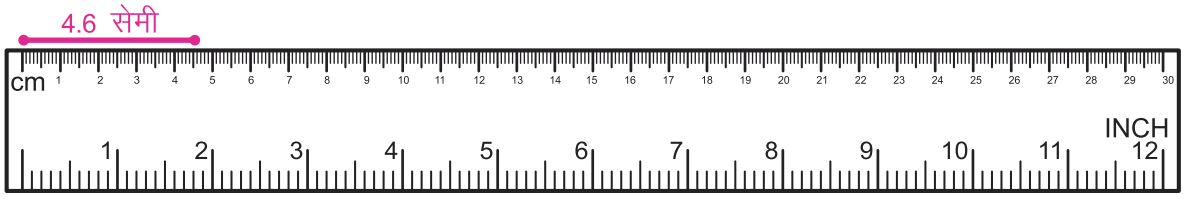




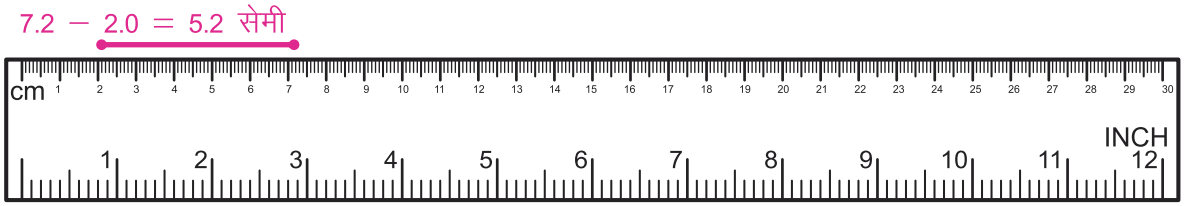
अजय तथा विजय ने एक ही रेखा खंड को चित्रानुसार मापा। क्या आप बता सकते हैं कि किसका उत्तर सही है? क्या किसी भी रेखाखंड को मापते समय पटरी पर अंकित शून्य को रेखाखंड के प्रारंभिक बिन्दु पर रख कर मापना चाहिए?



चित्र में कुछ माप के रेखाखंड दिए हैं।



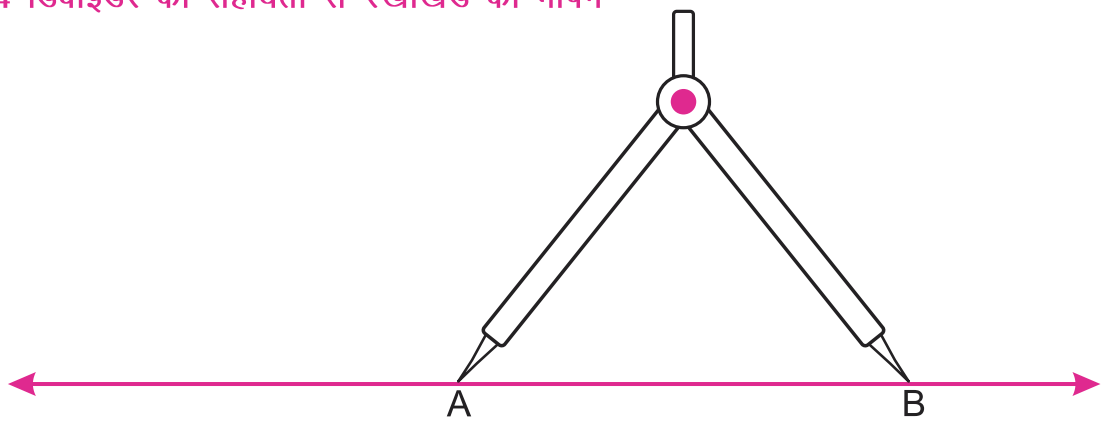
4.6 सेमी अर्थात् 4 सेमी व 6 मिमी



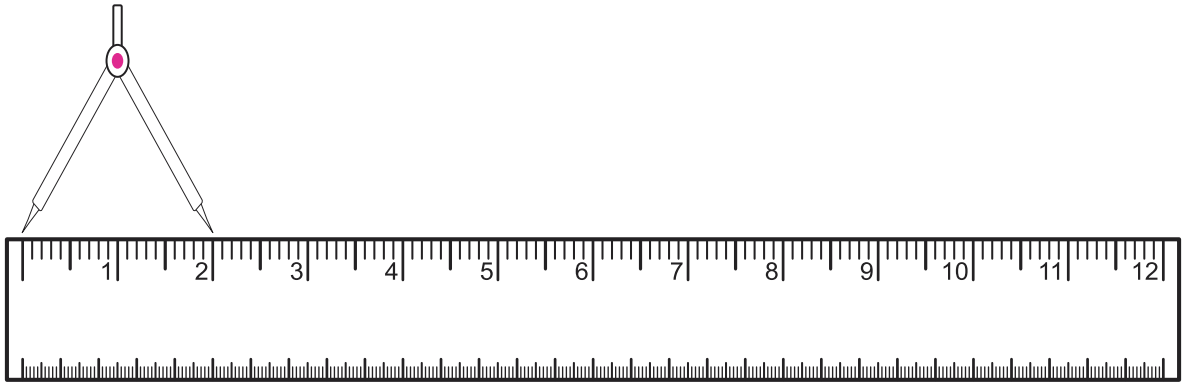
5.2 सेमी अर्थात् 5 सेमी व 2 मिमी

आप अलग–अलग लम्बाई के रेखाखण्ड खींचिए तथा उनको मापिए।

8.4 डिवाइडर की सहायता से रेखाखंड का मापन



डिवाइडर की सहायता से रेखाखंड को मापने के लिए डिवाइडर को खोल कर चित्रानुसार इसकी एक भुजा की नोक को रेखाखंड के प्रारम्भिक बिन्दु A पर तथा दूसरी भुजा की नोक को रेखा खंड के अंतिम बिन्दु B पर रखें इस प्रकार खुले डिवाइडर को पटरी पर इस प्रकार रखें कि इसकी एक नोक पटरी के शून्य पर रहे और दूसरी नोक पटरी के जिस भाग पर रहेगी वह भाग उस रेखाखंड की लम्बाई दर्शाता है।

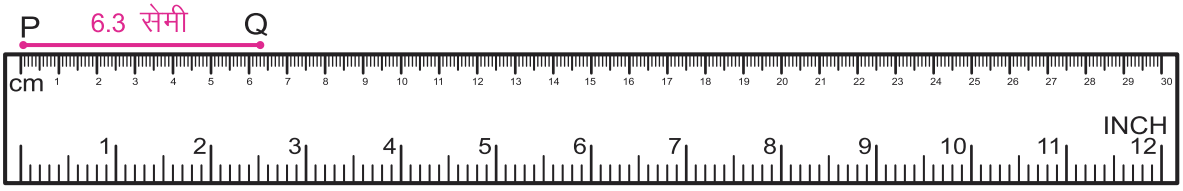




करो और सीखो ◆ कंकू कहती है डिवाइडर से रेखाखंड मापना अधिक सटीक है बजाय स्केल के। आप कंकू की बात से सहमत हैं या नहीं अपने उत्तर के पक्ष में तर्क दीजिए। (विद्यालय में उपलब्ध गणित किट का उपयोग कीजिए।)

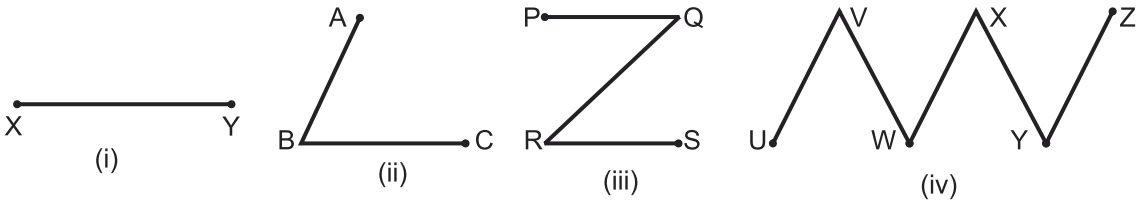
8.5 रेखाखंड की रचना

दिए गए माप का रेखाखंड स्केल की सहायता से बनाते हैं। इसके लिए दिए गए चित्रानुसार स्केल के 0 (शून्य) सेमी वाले भाग का पहला बिन्दु अंकित करते हैं तथा जिस नाप का रेखाखंड खींचना होता है स्केल के उस नाप पर दूसरा बिन्दु अंकित करते हैं। दोनों बिन्दुओं को स्केल के सहारे मिला कर उस नाप का रेखाखंड बना लेते हैं। चित्र में 6.3 सेमी नाप का रेखाखंड PQ बनाया गया है।



प्रश्नावली 8.1

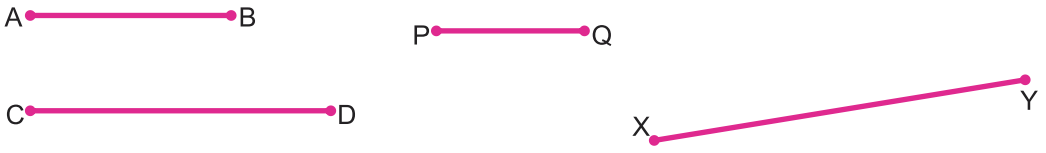
1. दिए गए चित्रों में रेखाखंडों के नाम लिखिए।



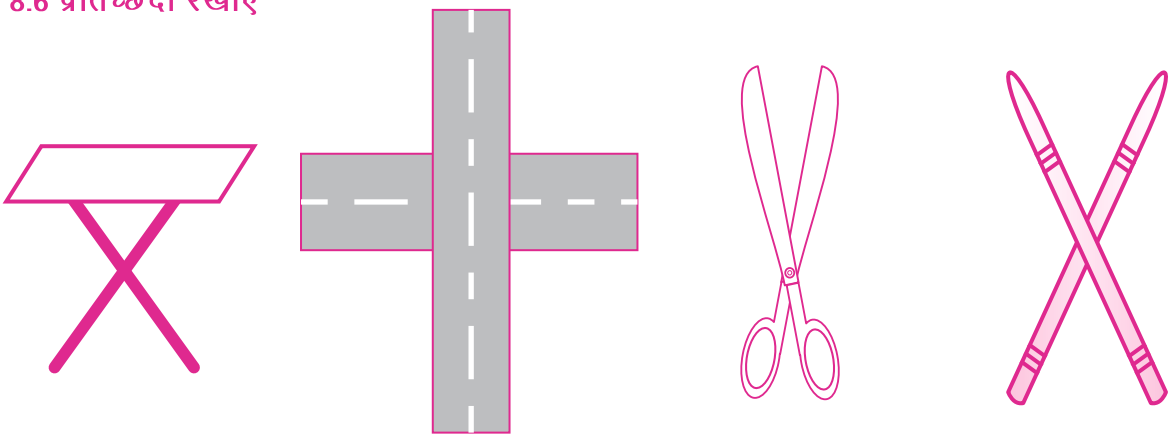
2. स्केल का प्रयोग करके दी गई लम्बाई का रेखाखंड खींचिए।

(i) 4.0 सेमी (ii) 3.7 सेमी (iii) 7.5 सेमी (iv) 5.1 सेमी

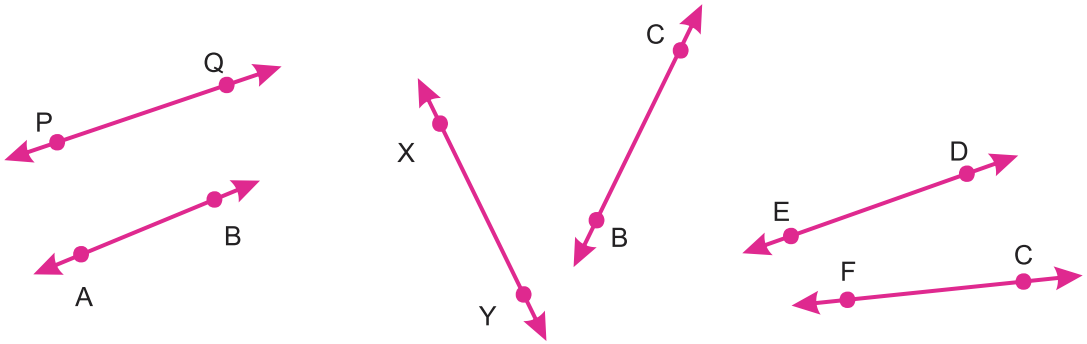
3. अपने पेन के नाप का रेखाखंड खींचिए उसे स्केल से नाप कर सही लम्बाई लिखिए।
4. स्केल की सहायता से 3.2 सेमी का एक रेखाखंड खींचिए एक अन्य रेखाखंड खींचिए जो दिए गए रेखाखंड का दुगना हो।
5. कोई रेखाखंड AB खींचिए बिना मापे हुए AB के बराबर एक रेखा खंड की रचना कीजिए। (संकेत–डिवाइडर की सहायता से)
6. दिए गए रेखाखंडों को डिवाइडर से नाप कर स्केल पर नापिए और नाप लिखिए।



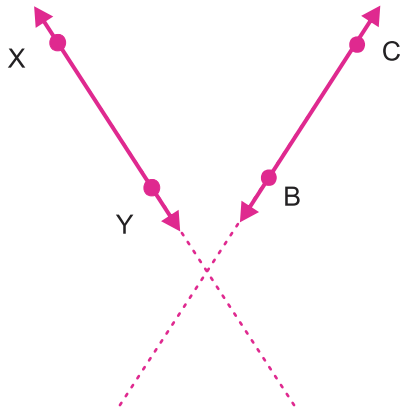
8.6 प्रतिच्छेदी रेखाएँ



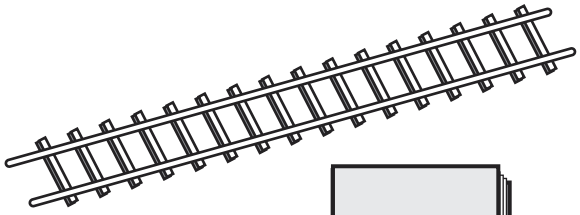
ऊपर दिए गए चित्रों को ध्यान पूर्वक देखिए। हम देखते हैं कि सड़कें और डांडिया को एक रेखा द्वारा प्रदर्शित किए जा सकता है और चित्र में प्रदर्शित रेखाएँ परस्पर एक दूसरे को प्रतिच्छेद कर रही हैं। अतः ऐसी रेखाएँ जो किसी एक बिन्दु पर एक दूसरे को काटती हैं अर्थात प्रतिच्छेद करती हैं वे रेखाएँ **प्रतिच्छेदी रेखाएँ** कहलाती हैं। तथा जिस बिंदु पर काटती हैं वह बिन्दु **प्रतिच्छेद बिन्दु** कहलाता है।

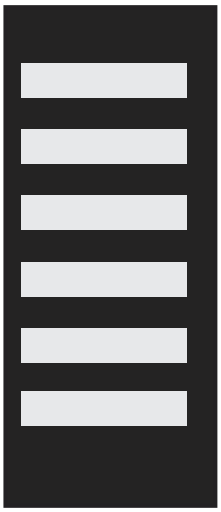


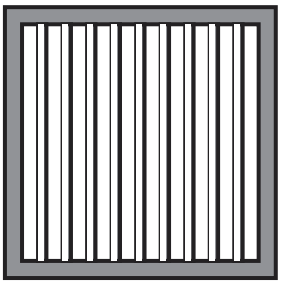
दिए गए चित्रों में क्या रेखाओं के युग्म प्रतिच्छेदी हैं? यद्यपि ये रेखा युग्म प्रतिच्छेद करते हुए नहीं दिखाई दे रहे परन्तु चूंकि रेखाओं को आगे बढ़ाया जा सकता है तो आगे बढ़ाने पर ये रेखाएँ प्रतिच्छेद करेंगी।

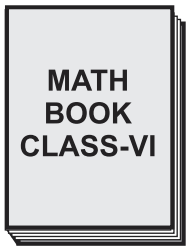


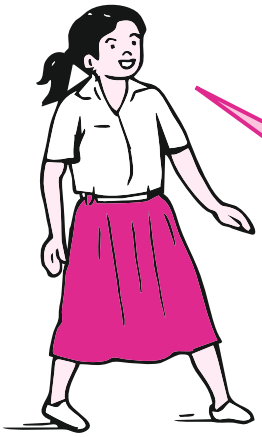
8.7 समान्तर रेखाएँ









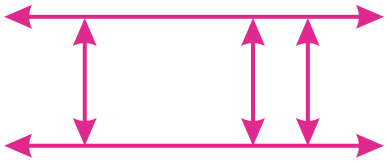


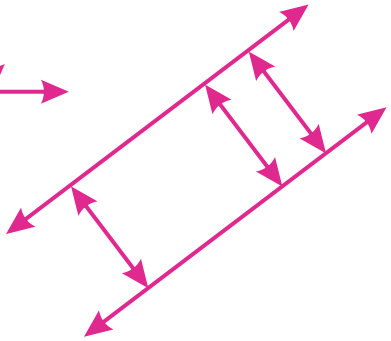
रमन देखो रेल की पटरी, खिड़की की सभी ग्रिल या जेब्रा रेखाओं के बीच की दूरी सभी समान दिखाई दे रही हैं।

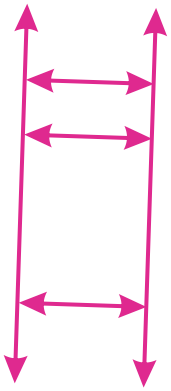


इसलिए इनके दोनों सिरे आपस में कभी नहीं मिलते हैं।

अतः वे रेखाएँ जिनके बीच की लम्बवत दूरी सदैव समान रहती है वे रेखाएँ समान्तर रेखाएँ कहलाती हैं।







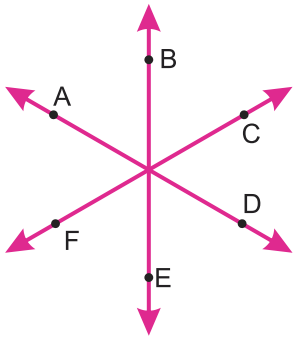
करो और सीखो

अपने दैनिक जीवन में ऐसे और भी उदाहरण ढूँढिए, जहाँ समान्तर रेखाएँ नजर आती हैं तथा उन्हें लिखिए।

8.8 संगामी रेखाएँ

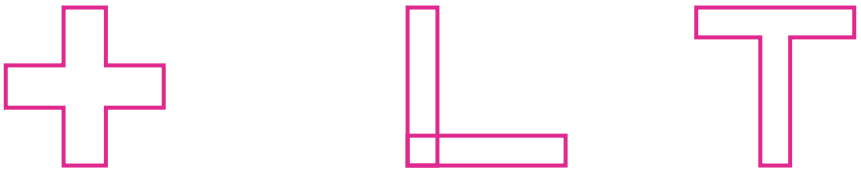
दो या दो से अधिक रेखाएँ जब एक ही बिन्दु से गुजरती हैं तो वे संगामी होती हैं। प्रत्येक प्रतिच्छेदी रेखा संगामी होती है।

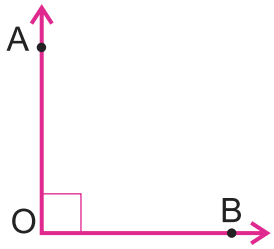
AD, BE व CF संगामी रेखाएँ हैं।



8.9 लम्बवत् रेखाएँ

नीचे दिए गए चित्रों को ध्यान से देखिए –



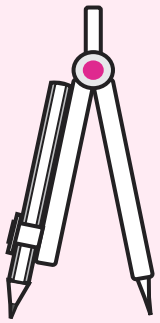


चित्र में बनी रेखाओं का अवलोकन कीजिए। क्या कोई समकोण बन रहा है? क्या वे प्रतिच्छेदी हैं?

जब दो रेखाएँ एक दूसरे से समकोण पर मिलती है तो हम कहेंगे दोनों रेखाएँ लम्बवत रेखाएँ हैं। जैसे दिए गए चित्र में OA तथा OB परस्पर लम्बवत हैं तथा इसे $OA \perp OB$ से प्रदर्शित करते हैं।

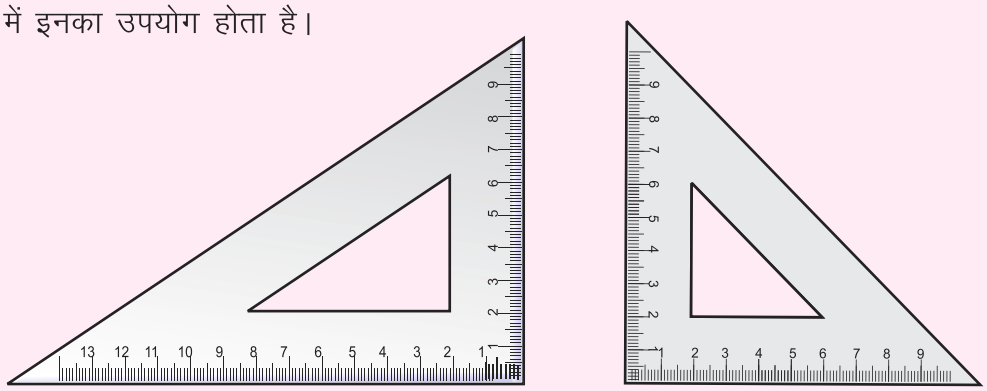
करो और सीखो

1. यदि रेखा $L \perp M$ तो क्या $M \perp L$ होगा?
2. किसी रेखा के लम्बवत कितनी रेखाएँ हो सकती हैं?
3. अंग्रेजी वर्णमाला के अक्षर L,N,X,Y,T पर गौर कीजिए व बताइए इनमें से कौन–कौनसे लम्बवत रेखाओं के उदाहरण हो सकते हैं?



परकार : परकार में दो सिरे होते हैं। एक सिरा नुकीला और दूसरे सिरे में पेंसिल लगाने का स्थान होता है। इसका उपयोग वृत्त खींचने एवं चाप काटने में होता है। बराबर लम्बाइयाँ अंकित करने में भी इसका उपयोग होता है।

सैटस्क्वेयरः दो त्रिभुजाकार आकृति के उपकरण हैं एक में शीर्षों पर कोण 45°, 45° तथा 90° है और दूसरे में यह कोण 30°, 60°, 90° होते हैं। लम्ब रेखाओं और समान्तर रेखाओं को बनाने में इनका उपयोग होता है।



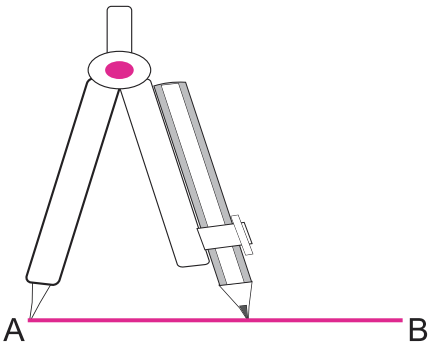
8.10 रेखाखंड का लम्बसमद्विभाजन

AB एक रेखाखंड है परकार एवं पटरी की सहायता से AB रेखा का समद्विभाजन (दो बराबर भागों में बाँटना) करने के लिए निम्नानुसार क्रिया करेंगे।

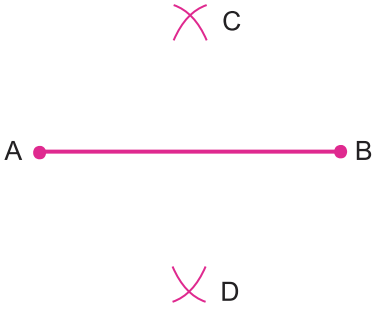
चरण 1 रेखाखंड AB बनाइए



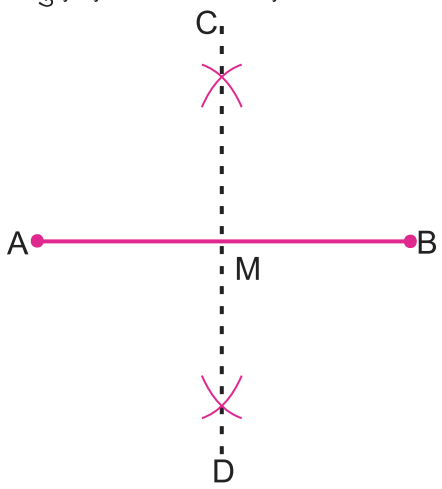
चरण 2 AB के A बिन्दु पर परकार का नुकीला सिरा रख कर रेखाखंड के आधे से अधिक परकार को खोल कर चित्रानुसार दोनों तरफ चाप काटिए।



चरण 3 अब परकार को उतना ही खुला रखकर B सिरे पर नुकीला सिरा रख कर पुनः दोनों तरफ चाप काटें जो कि पूर्व में काटे गए चाप को काटेंगे। कटान बिन्दु को C व D से अंकित कीजिए।



चरण 4 बिन्दु C और D को मिलाते हुए एक रेखा खींचिए जो AB को M बिन्दु पर काटें।



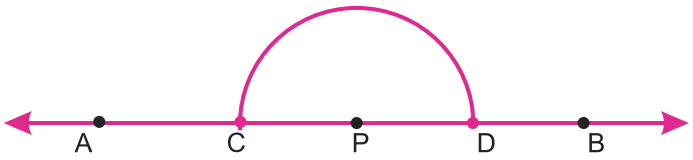
इस प्रकार CD, AB का लम्बसमद्विभाजक है M, AB का मध्य बिन्दु है।

8.10.1 रेखा पर दिए गए बिन्दु पर लम्ब खींचना

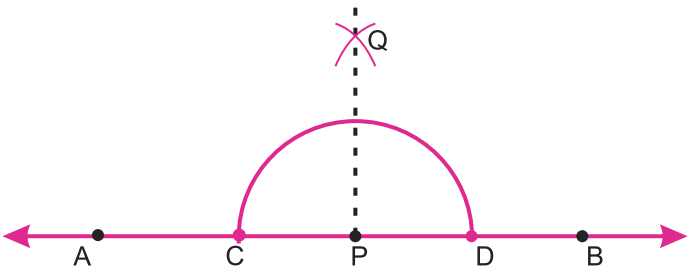
चरण 1 रेखा AB पर बिन्दु P दिया है।



चरण 2 P को केन्द्र मान कर सुविधाजनक त्रिज्या ले कर एक चाप बनाएँ जो रेखा AB को C व D पर प्रतिच्छेद करेंगे।



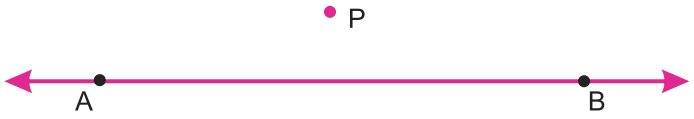
चरण 3 परकार की नोक C पर रख कर ऊपर की ओर एक चाप काटेंगे। फिर उसी त्रिज्या के माप का चाप D पर नोक रखकर पूर्व चाप को काटने पर बिन्दु Q प्राप्त होगा। Q व P को मिलाएँगे।



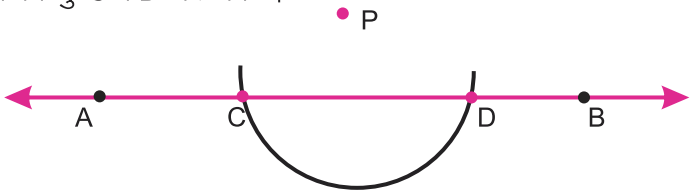
चरण 4 इस प्रकार QP , AB पर लम्ब है।

8.10.2 दिए गए बिन्दु से रेखा पर लम्ब डालना

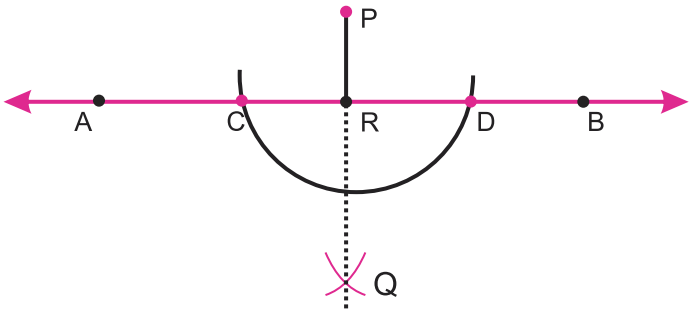
चरण 1 रेखा AB के बाहर एक बिन्दु P स्थित है।



चरण 2 बिन्दु P से परकार की सहायता से सुविधाजनक त्रिज्या लेकर एक चाप लगाएँ जो रेखा AB को दो बिन्दु C व D पर काटे।

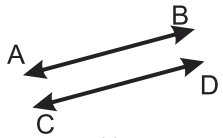


चरण 3 परकार की नोक C पर रखकर नीचे की ओर एक चाप काटेंगे। फिर उसी त्रिज्या के चाप वाले परकार की नोक D पर रख कर पूर्व चाप को काटेंगे। इससे बिन्दु Q प्राप्त होगा P को Q से मिलाने पर PR बिन्दु P से रेखा AB पर लम्ब होगा।

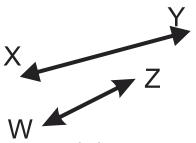


प्रश्नावली 8.2

1. निम्न चित्रों में समान्तर व प्रतिच्छेदी रेखाओं के नाम लिखिए।



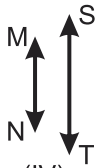
(I)



(II)



(III)



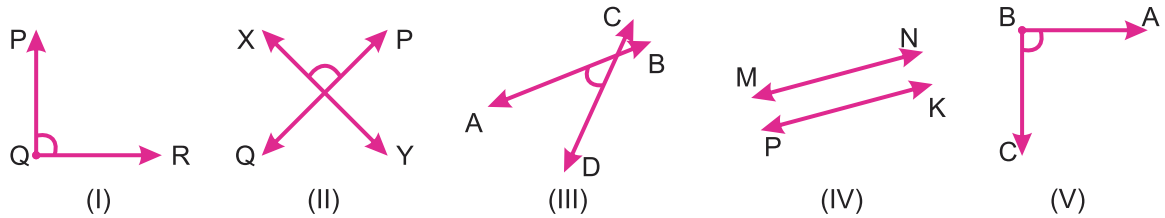
(IV)

2. यदि 5 असमान लम्बाई की रेखाएँ एक बिन्दु से हो कर गुजरें तो बनने वाली आकृति में रेखाएँ कौनसी रेखाएँ कहलाती हैं ?

3. निम्नलिखित माप के रेखाखंडों के लम्ब समद्विभाजन कीजिए और प्रत्येक भाग को नाप कर लिखिए।

(i) 8 सेमी (ii) 7.6 सेमी (iii) 5.8 सेमी (iv) 6.4 सेम

4. निम्न चित्रों में लम्बवत रेखाओं को पहचान कर उनके नाम लिखिए।



5. एक रेखा खंड $\overline{MN}$ खींचिए उस पर कोई बिन्दु L अंकित कीजिए। L से हो कर रेखा MN पर एक लम्ब रूलर व परकार की सहायता से खींचिए।

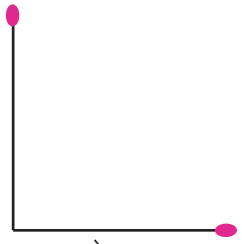
6. एक रेखाखंड AB खींचिए कोई बिन्दु R लीजिए जो AB पर ना हो, बिन्दु R से AB पर एक लम्ब खींचिए।

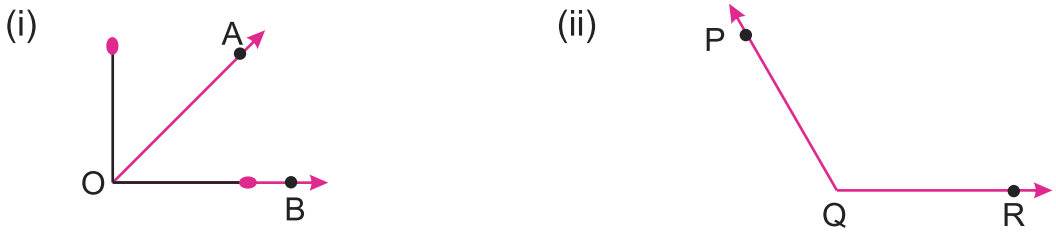
8.11 कोण

आपने कक्षा 5 में कोणों के बारे में पढ़ा है जैसे न्यून कोण, समकोण और अधिक कोण।

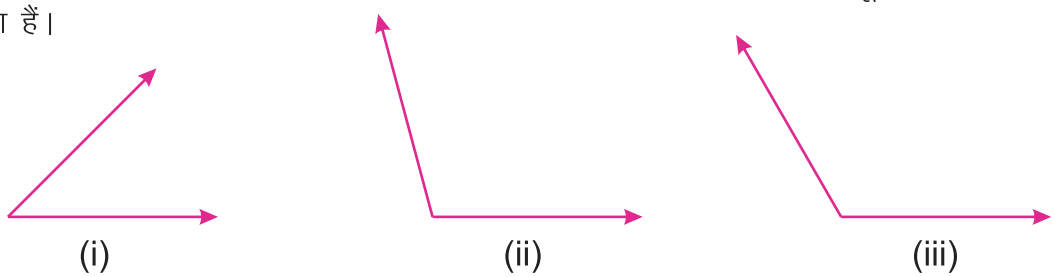
क्रियाकलाप : 1

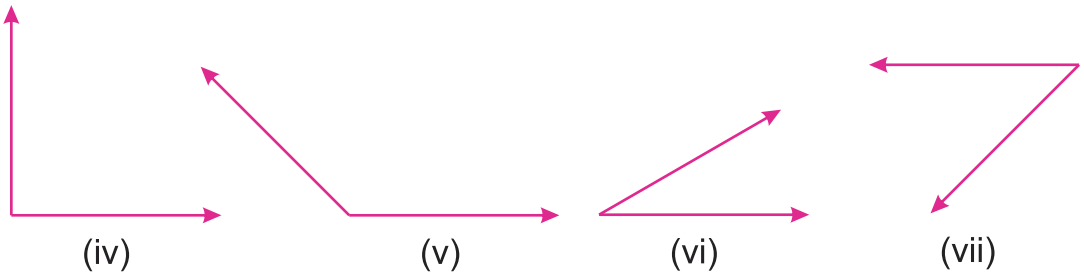
दो माचिस की तीलियाँ लीजिए इन्हें एक दूसरे के छोर पर मिला कर L आकृति बनाइए। यह समकोण के बराबर होगा। इसे हम टेस्टर की तरह काम में लेंगे। चित्र 5.7 में दर्शाए अनुसार टेस्टर को कोण ∠AOB की भुजा AB पर रखते हैं। चूंकि कोण ∠AOB समकोण से छोटा है अतः न्यून कोण होगा। पुनः टेस्टर को कोण ∠PQR की भुजा QR पर इस प्रकार रखें कि टेस्टर का कोना Q पर ठीक से आए। चूंकि ∠PQR समकोण से बड़ा है अतः यह अधिक कोण होगा।





नीचे दिए गए कोणों को समकोण टेस्टर से माप कर बताइए कि ये कोण न्यून, अधिक या समकोण हैं।





कक्षा के छात्र इन कोणों को देखते हैं और चर्चा करते हैं।

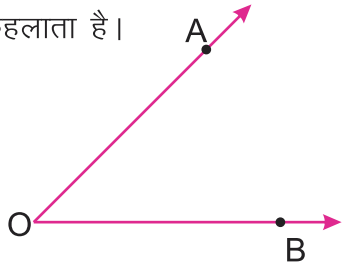
आयुषः प्रत्येक कोण की कितनी किरणें हैं?

रमेशः सभी कोणों की दो–दो किरणें हैं।

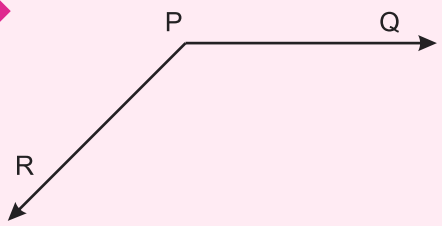
आयुषः परन्तु इसका प्रारम्भिक बिन्दु तो एक ही है।

अध्यापिकाः हाँ बच्चों, यदि एक ही प्रारम्भिक बिन्दु से दो किरणें निकलती हैं तो कोण की आकृति बनती है तथा वह बिन्दु **कोण का शीर्ष** कहलाता है।

चित्र में भुजाएँ OA व OB है तथा शीर्ष 'O' है।

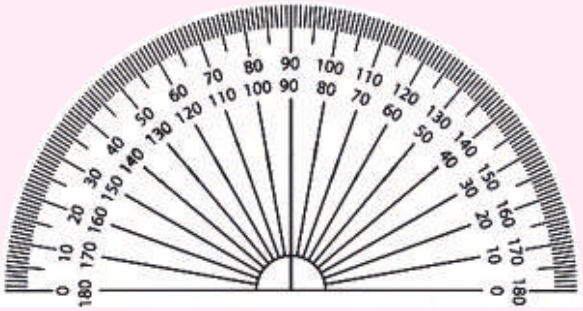


करो और सीखो

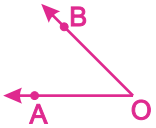
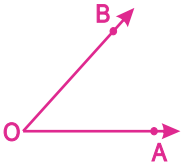
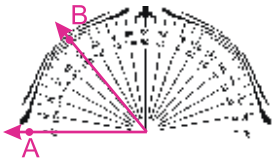
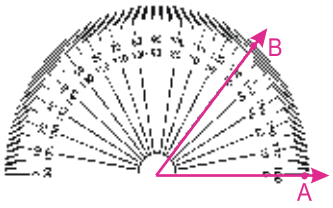
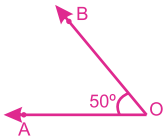
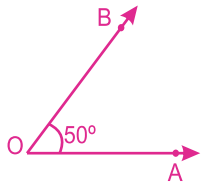


चित्र में
भुजाएँ .....
शीर्ष .....

चाँदे का परिचय



कोणों की सही तुलना एवं मापन के लिए एक उपकरण की आवश्यकता होती है जिसे चाँदा (D) कहते हैं। अपने ज्यामिति बॉक्स में आप इसे देख सकते हैं। चित्र में दिए गए चाँदे को ध्यान से देखिए इसमें आपको दो मापन मिलेंगे। भीतरी मापक एवं बाहरी मापक। समकोण को दर्शाने वाली रेखा पर 90° अंकित है। इसके दोनों ओर दो प्रकार के कोण होते हैं घड़ी की दिशा में तथा विपरीत दिशा में बनने वाले कोण। दोनों दिशाओं में 0 से 180° तक अंकित होता है प्रत्येक भाग को एक डिग्री कहते हैं। अब हम चाँदे के प्रयोग से कोण को मापना सीखेंगे।

घड़ी की दिशा में कोण	चरण	घड़ी की विपरित दिशा में कोण
	1. कोण को पहचानिए न्यून कोण है अथवा अधिक कोण है।	
	2. चाँदे का केन्द्र बिंदु कोण के शीर्ष पर रखिए।	
	3. शीर्ष को केन्द्र बिंदु से हटाए बिना चाँदे को व्यवस्थित कीजिए, जिससे कि उसकी एक भुजा आधार रेखा के साथ हो। 4. मापन रेखा को देखिए जहाँ आधार रेखा 0° दर्शाती है। 5. इस कोण को पढ़िए इसका दूसरा सिरा मापन रेखा को पार करके AOB=50° बनाता है।	

8.11.1 कोणों का माप के आधार पर वर्गीकरण

प्रयास कीजिए।

आपने क्रियाकलाप 1 में कोणों को समकोण टेस्टर की सहायता से मापा तथा उन्हें न्यून कोण, अधिक कोण व समकोण में बाँटा पुनः उन्हें चाँदे की सहायता से माप कर सारणी में लिखिए।

न्यून कोणों के माप					
अधिक कोणों के माप					
समकोण का माप					

इस गतिविधि के आधार पर हमने पाया कि सभी न्यून कोण 90° से कम माप के एवं अधिक कोण 90° से अधिक व 180° से कम माप के हैं।

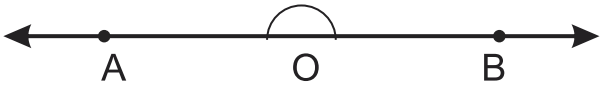
आयुष – अर्थात् 0° से 90° के मध्य के कोण **न्यून कोण** कहलाते हैं।

मनन – और 90° का कोण **समकोण** कहलाता है।

अध्यापिका – हाँ, तथा 90° से 180° के मध्य के कोण **अधिक कोण** कहलाते हैं।

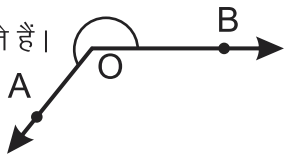
आयुष – 180° का कोण क्या कहलाता है?

अध्यापिका – 180° के कोण को **सरल कोण** कहते हैं



आयुष – यह तो सरल कोण से भी बड़ा है।

अध्यापिका– 180° से बड़े कोण को **वृहत या प्रतिवर्ती कोण** कहते हैं।



8.11.2 कोणों की रचना

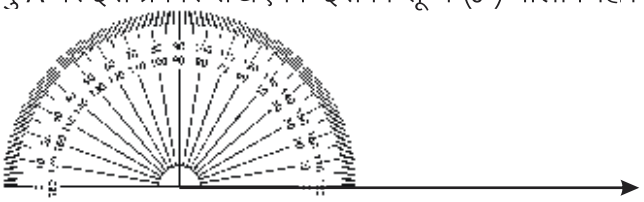
(i) चाँदे की सहायता से दिए गए माप का कोण बनाना।

70° के कोण को बनाने के लिए

चरण 1 सबसे पहले एक किरण AB खींचिए।

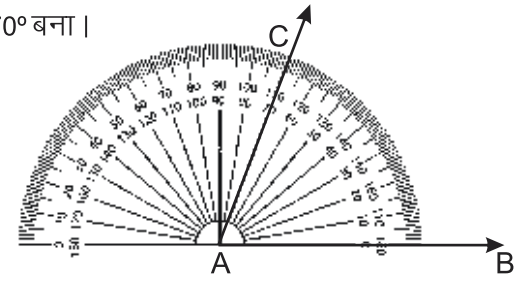


चरण 2 चाँदे को आधार रेखा के मध्य बिंदु A पर इस प्रकार रखिए कि इसका शून्य (0°) वाला चिह्न किरण AB के अनुदिश रहे।



चरण 3. बिंदु B के पास के शुन्य से प्रारंभ करते हुए 70° के चिह्न के सामने बिंदु C अंकित कीजिए।

चरण 4. बिंदु A को C से मिलाइएँ। इस प्रकार $\angle CAB = 70°$ बना।



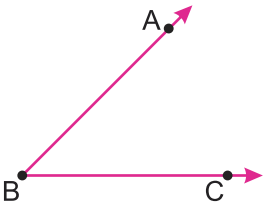
करो और सीखो

अब आप भी नीचे दिए गए माप के कोण बनाकर देखिए।

(i) $\angle ABC = 110°$

(i) $\angle PQR = 40°$

(ii) परकार की सहायता से दिए गए कोण के बराबर कोण बनाना

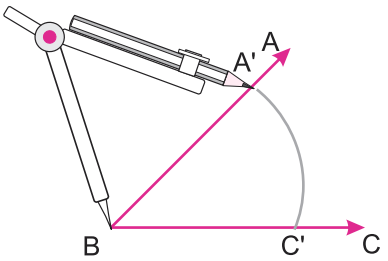


कोण $\angle$ ABC दिया है जिसका माप ज्ञात नहीं है।

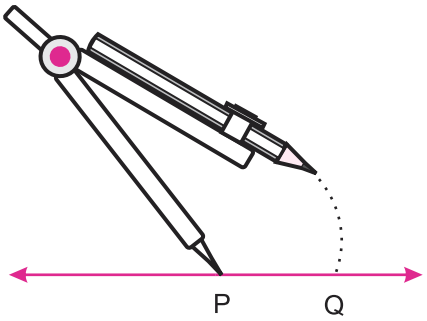
चरण 1 एक रेखा ℓ खींचिए उस पर एक बिंदु P अंकित करें।



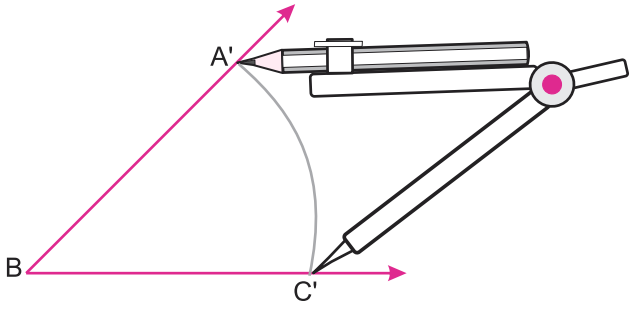
चरण 2 परकार के नुकीले सिरे को कोण ∠ ABC के शीर्ष B पर रखकर एक चाप खींचिए जो ∠ ABC की भुजाओं को जिन बिंदुओं पर काटता है उसे बिंदु A' व C' नाम दीजिए।



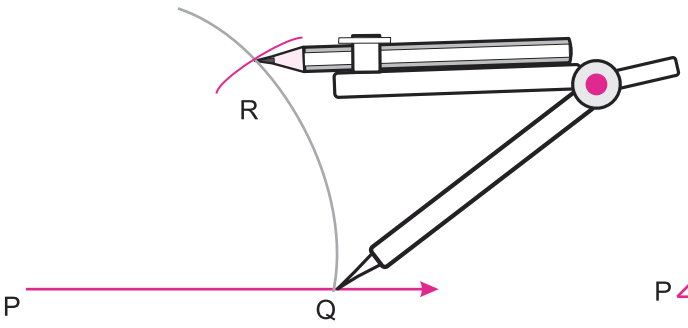
चरण 3 परकार के इस फैलाव के साथ उसके नुकीले सिरे को P पर रखकर एक चाप बनाइए जो रेखा को बिंदु Q पर काटता है।

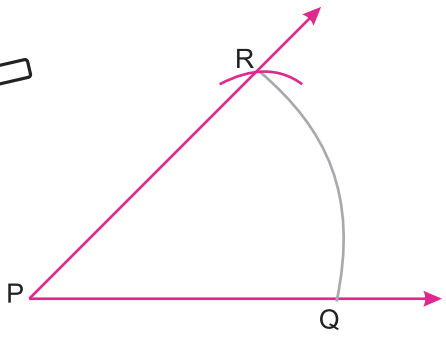


चरण 4 परकार को कोण ∠ABC, में A'C' के बराबर लम्बाई में खोले।



चरण 5 Q को केन्द्र मानकर परकार के नुकीले सिरे को बिंदु Q पर रखकर एक चाप लगाएँ जो पूर्व में लगाए चाप को बिंदु R पर काटता है। बिन्दु P तथा R को मिलाने पर अभीष्ट कोण ∠PQR प्राप्त होता है।



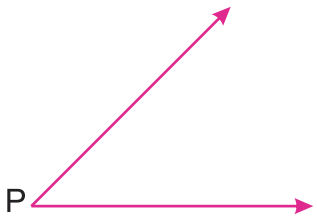


अतः ∠ABC तथा ∠PQR अभीष्ट कोण हैं।

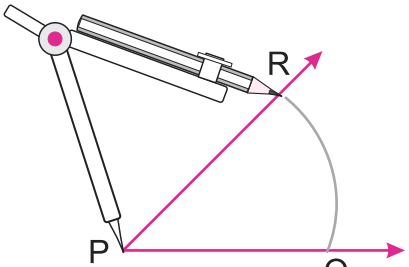
8.11.3 परकार की सहायता से दिए गए कोण का समद्विभाजन

चित्र (i) में ∠P दिया है।

चरण 1 बिंदु P को केन्द्र मानकर परकार की सहायता से एक चाप लगाए जो कोण P की भुजाओं को Q व R पर काटे। चित्र (ii)



चित्र (i)

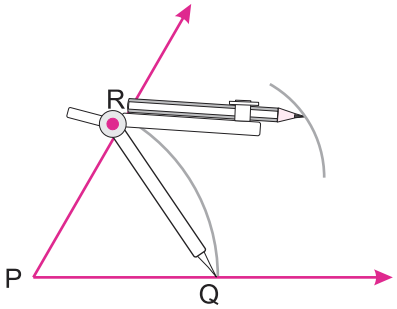


चित्र (ii)

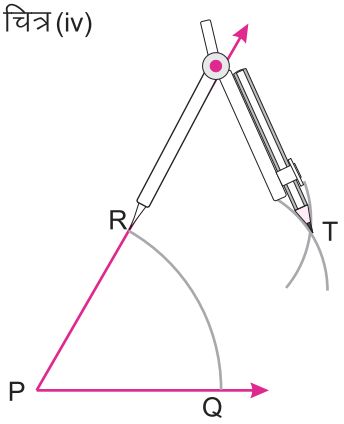
चरण 2 Q को केन्द्र मानकर परकार के उसी फैलाव की त्रिज्या लेकर एक चाप कोण P के फैलाव क्षेत्र (अभ्यन्तर) में लगाएँ। चित्र (iii)

चरण 3 इसी प्रकार R को केन्द्र मानकर परकार के उसी फैलाव की त्रिज्या लेकर एक चाप लगाए जो पूर्व में लगाए चाप को काटे।

दोनों चाप के प्रतिच्छेद बिंदु को T से प्रदर्शित करें। चित्र (iv)

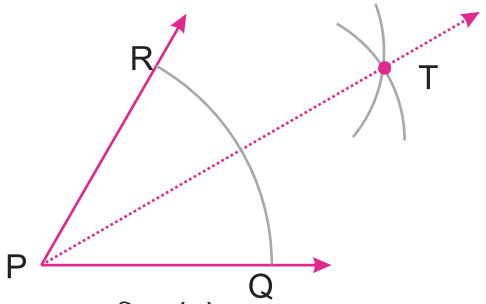


चित्र (iii)



चित्र (iv)

चरण 4 T व P को मिलाने पर कोण P का समद्विभाजक TP प्राप्त होता है। चित्र (v)



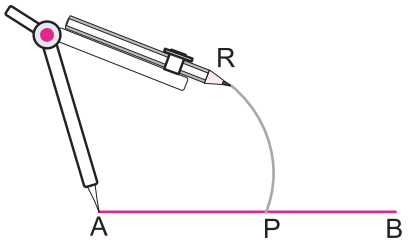
चित्र (v)

8.11.4 परकार की सहायता से कोणों की रचना

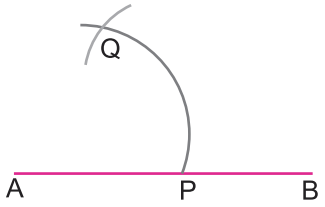
8.11.4 (i) 60°, 120°, व 180° की रचना करना

(A) 60° के कोण की रचना

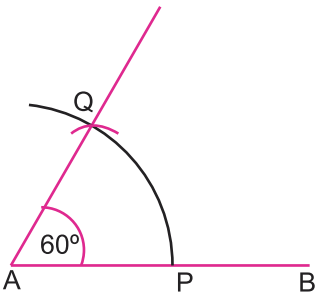
चरण 1 एक रेखाखण्ड AB खींचिए उपयुक्त त्रिज्या का नाप लेकर परकार के नुकीले सिरे को बिंदु A पर रखकर एक चाप खींचिए जो रेखाखण्ड AB को बिंदु P पर काटता है।



चरण 2 बिंदु P पर नुकीले सिरे को रखकर उसी त्रिज्या के माप का चाप पूर्व चाप पर बनाए। दोनों चापों के प्रतिच्छेद बिंदु को Q अंकित करें।

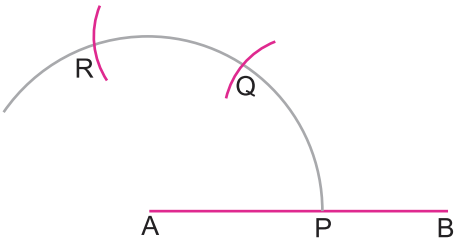


चरण 3 AQ को मिलाने पर ∠QAB = 60° बनता है।

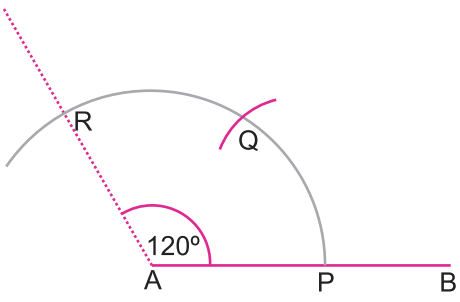


(B) 120° के कोण की रचना

चरण 1 ऊपर के चित्र पर आगे की क्रिया करते हुए उसी त्रिज्या का चाप लेकर परकार के नुकीले सिरे को Q पर रखकर एक ओर चाप काटे जो पूर्व में लगाए चाप को बिंदु R पर काटता है।



चरण 2 AR को मिलाने पर ∠RAB = 120° प्राप्त होता है।

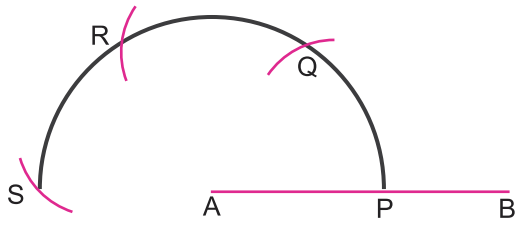




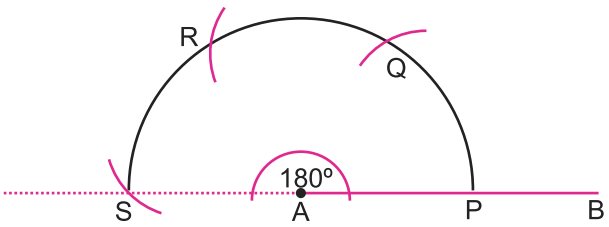
(C) 180° के कोण की रचना

ऊपर के चित्र में ओर आगे की क्रिया करते हुए

चरण 1 उसी त्रिज्या के माप का चाप लेकर परकार के नुकीले सिरे को बिंदु R पर रखकर एक चाप और काटे जो पूर्व में बनाए चाप को S पर काटता है।



चरण 2 SA को मिलाने पर ∠SAB =180° प्राप्त होता है

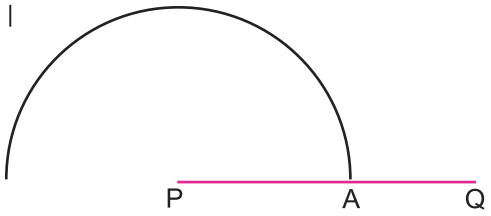


8.11.4 (ii) 30°, 45°, 90°, के कोण की रचना

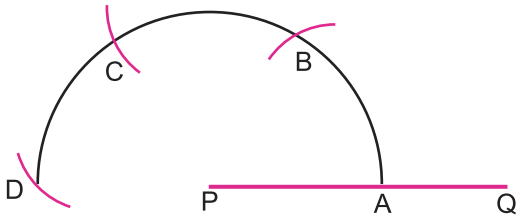
ऊपर 60°, 120°, 180°, के कोणों की रचना के आधार पर आप 60° के समद्विभाजन से 30°, 60° और 120° के बीच के कोण का समद्विभाजन से 90°, तथा 30° और 60° के बीच कोण का समद्विभाजन करने से 45° के कोण की रचना की जा सकती है।

(A) 30° के कोण की रचना

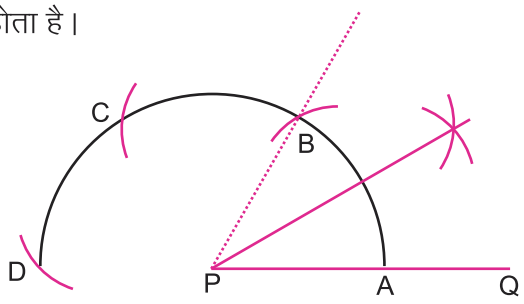
चरण 1 रेखाखण्ड PQ खींचिए उपयुक्त त्रिज्या का चाप लेकर परकार के नुकीले सिरे को P पर रखकर एक चाप खींचिए।



चरण 2 उसी त्रिज्या का चाप लेकर परकार के नुकीले सिरे को बिंदु A, B और C पर रखकर चाप काटिए जो पूर्व में बनाए चाप को बिंदु B, C, D पर काटता हो।



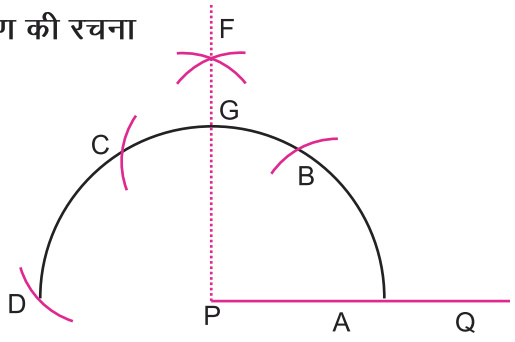
चरण 3 PB को मिलाने पर ∠BPA = 60° प्राप्त होता है इसका समद्विभाजन करने पर 30° का कोण प्राप्त होता है।



180° का अर्द्धक करने पर भी 90° प्राप्त कर सकते है।

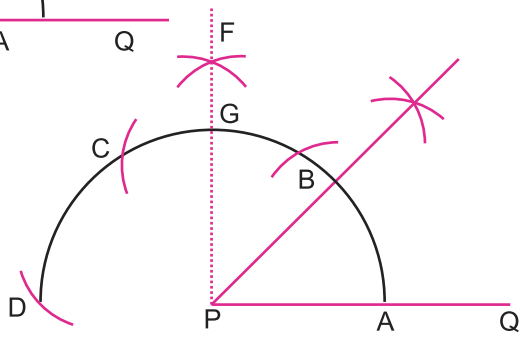
इसी प्रकार कोण ∠ BPC का समद्विभाजन करने पर 90° का कोण प्राप्त होता है कोण ∠FPQ = 90°।

(B) 90° के कोण की रचना



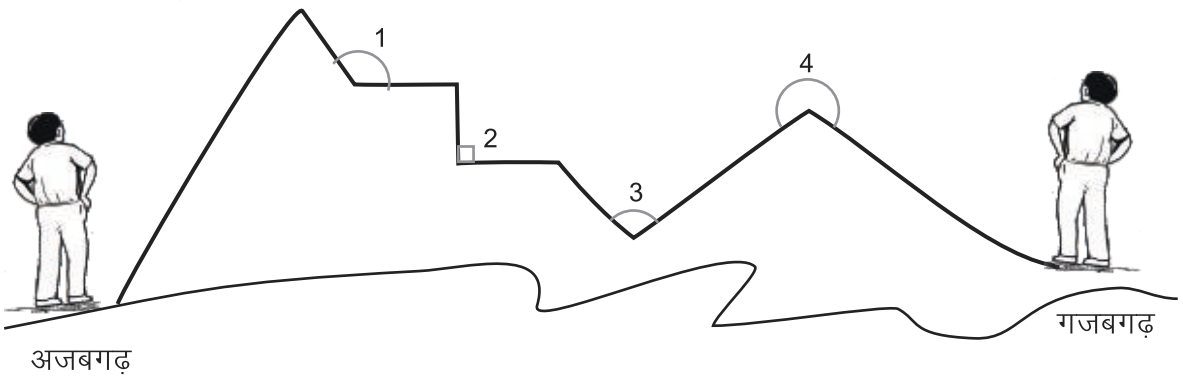
(c) 45° के कोण की रचना

90° के कोण के समद्विभाजन द्वारा 45° के कोण की रचना करते है।



प्रश्नावली 8.3

1. गाँव अजबगढ़ से गजबगढ़ के बीच का रास्ता निम्न रूप से बना है। बनने वाले कोण ∠1,2,3,4 का नाम लिखिए।



2. अपनी स्वेच्छा से निम्न प्रकार के कोण अपनी कॉपी में बनाइए और उन्हें चाँदे से नापकर लिखिए।

(i) अधिक कोण (ii) सरल कोण

(iii) न्यून कोण (iv) समकोण

3. चाँदे की सहायता से निम्नलिखित नाप के कोण बनाइए।

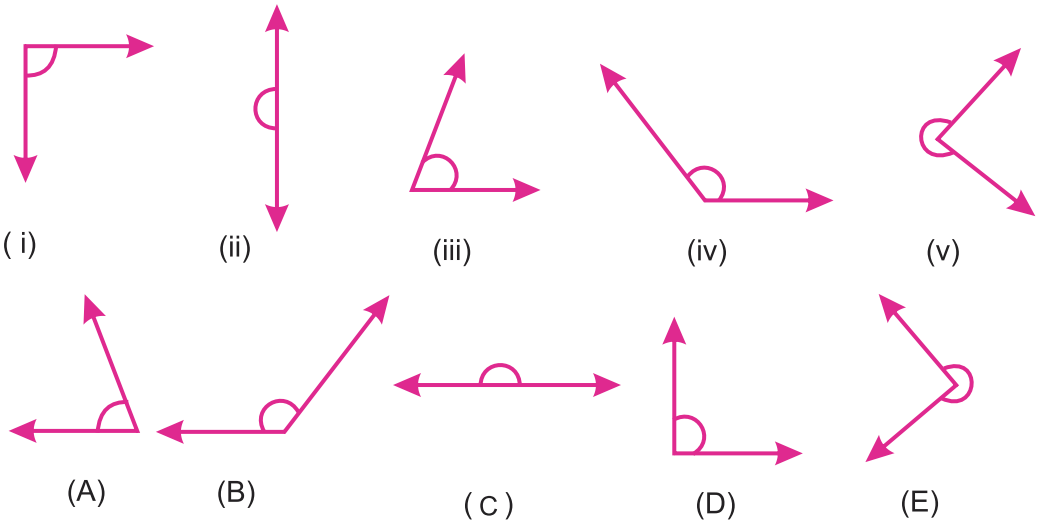
(i) 45^0 (ii) 90^0 (iii) 72^0 (iv) 105^0

(v) 134^0 (vi) 180^0 (vii) 20^0 (viii) 21^0

4. परकार व रूलर की सहायता से निम्न कोण बनाइए।

(i) 60^0 (ii) 120^0 (iii) 180^0 (iv) 90^0 (v) 45^0

5. अवलोकन द्वारा बताइए कि निम्न चित्रों में कौन–कौन से जोड़े समान है।



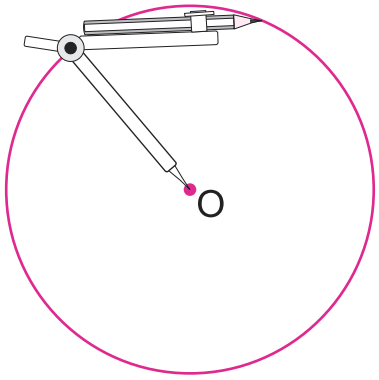
8.12 वृत्त

आपने अपने घर एवं परिवेश में बहुत सी आकृतियाँ देखी होगी जिनमें कुछ आकृतियाँ जैसे चूड़ी, पहिया, टायर, थाली, चकला, तथा परात इत्यादि जैसी आकृतियाँ वृत्ताकार होती है।

अब एक चुड़ी लेकर अपनी कॉपी के पृष्ठ पर रखकर उसके चारों ओर पेंसिल घुमाकर आकृति बनाइए तथा देखिए ये आकृति कैसी है?

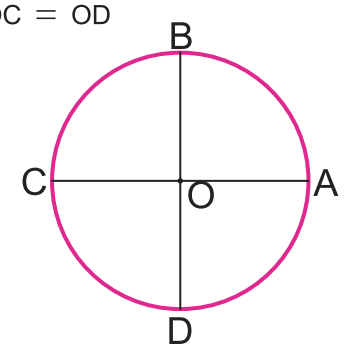
8.12.1 वृत्त की रचना

परकार की उपयुक्त लम्बाई खोलकर उसके नुकीले सिरे को अपनी कॉपी में रखकर पेंसिल वाले सिरे को एक चक्कर घुमाएँ।

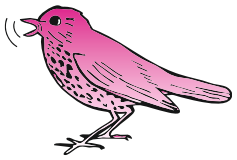


इस प्रकार से बनी आकृति वृत्त होती है।
जहाँ नुकीला सिरा रखकर एक चक्कर घुमाया उसे O से प्रदर्शित करें तो घेरे पर स्थित किसी भी बिंदु की O से दूरी सदैव समान रहती है।

OA = OB = OC = OD



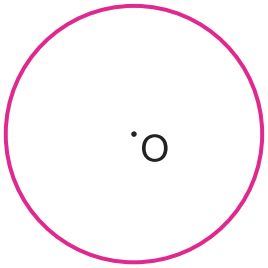
वृत्त वह आकृति है जिस पर स्थित प्रत्येक बिंदु उस तल में लिए गए एक निश्चित बिंदु से सदैव समान दूरी पर होता है।



8.12.2 वृत्त के भाग

वृत्त का केन्द्र, त्रिज्या व व्यास

(i) केन्द्र परकार से बनाए गए वृत्त के चित्र में जिस बिंदु पर परकार के नुकीले सिरे को रखा वह वृत्त का केन्द्र होता है।
चित्र में बिंदु O वृत्त का केन्द्र है।

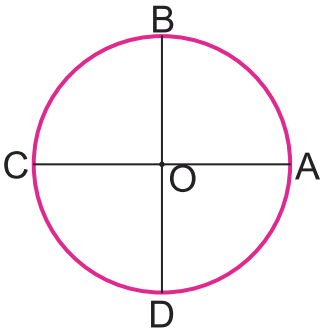


किसी तल में लिया गया वह निश्चित बिंदु जिसके चारों और वृत्त खींचा गया हो, उस **वृत्त का केन्द्र** कहलाता है।

(ii) त्रिज्या परकार से बनाए गए चित्र में परकार की नोक के स्थान पर O तथा पेंसिल की नोक, रखने वाले स्थान पर A लिखिए और OA को मिलाइए। OA वृत्त की त्रिज्या है। वृत्त पर अन्य बिंदु B, C, D लेकर OB, OC, OD को मिलाकर इन्हें मापकर देखिए।

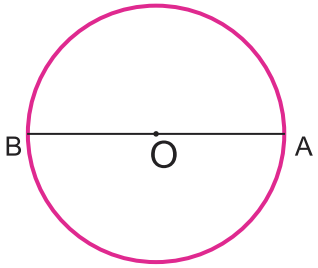
यहाँ OA = OB = OC = OD

इस प्रकार वृत्त के केन्द्र से वृत्त के किसी भी बिंदु को मिलाने पर प्राप्त दूरी सदैव समान रहती है।



वृत्त के केंद्र को वृत्त पर स्थित किसी भी बिंदु से मिलाने वाले रेखाखंड की लम्बाई को **वृत्त की त्रिज्या** कहते हैं।

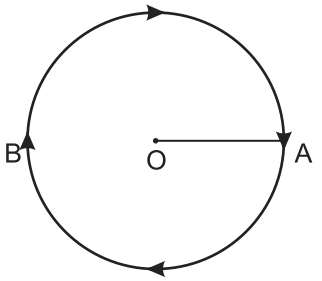
(iii) व्यास त्रिज्या OA को O से B तक बढ़ाने पर व्यास AB प्राप्त होता है। व्यास त्रिज्या का दुगुना होता है



वह रेखाखण्ड जो वृत्त के केन्द्र से होकर गुजरता है तथा उस वृत्त की परिधि को दोनो ओर के दो बिंदुओं पर काटता है। **वृत्त का व्यास** कहलाता है।

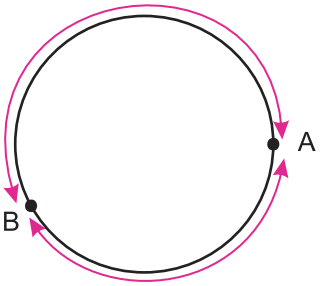
(iv) वृत्त की परिधि

वृत्त बनाने के लिए पेंसिल को A से चारों ओर घुमाते हुए पुनः A पर लाने पर तय की गई दूरी वृत्त की परिधि कहलाती है। इस प्रकार परिधि वृत्त का पूरे एक चक्कर की दूरी होती है।

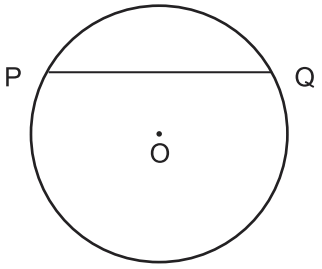


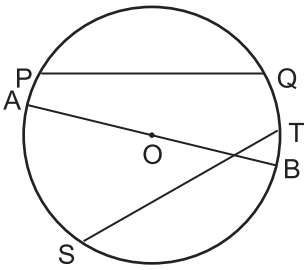
(v) वृत्त चाप

दिए गए वृत्त में परिधि पर स्थित दो बिंदु A व B है। A तथा B वृत्त की परिधि को दो भागों में बाँटते है ये दोनों भाग वृत्त चाप कहलाते हैं।



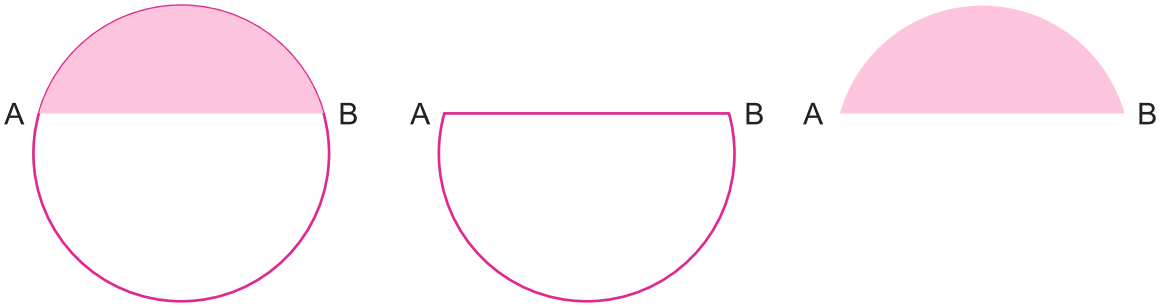
(vi) जीवा वृत्त की परिधि पर दो बिंदु P व Q लेकर इन्हें मिलाइए इनसे बनने वाला रेखाखण्ड PQ वृत्त को दो भागों में विभाजित करता है। इस रेखाखंड PQ को **वृत्त की जीवा** कहते है। किसी वृत्त में अनेक जीवाएँ खींची जा सकती हैं। जैसे – AB, ST आदि।



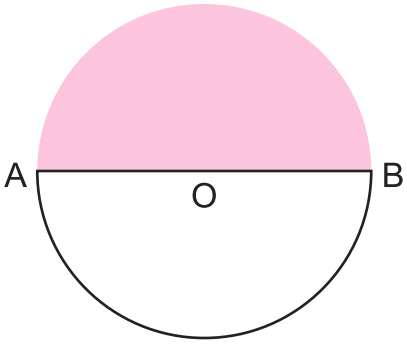


किसी वृत्त का व्यास, उस वृत्त की सबसे लम्बी जीवा होती है।

(vii) वृत्तखण्ड

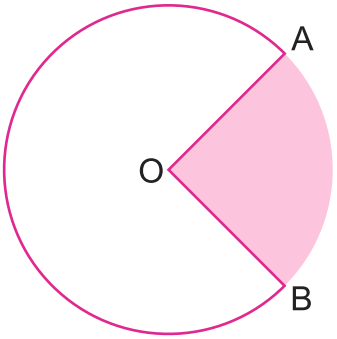


दिए गए वृत्त में AB एक जीवा है जो वृत्त को दो भागों में बाँटती है। इन दो भागों को अलग–अलग दिखाया गया है जो वृत्त के वृत्तखण्ड कहलाते है। छोटे भाग (छायांकित) को **लघुवृत्तखण्ड** व बड़े भाग को **दीर्घवृत्त खण्ड** कहते हैं। वृत्त का व्यास भी वृत्त को दो खण्डों में बांटता है ये दोनों वृत्तखण्ड बराबर होते है। अतः व्यास द्वारा बना वृत्तखण्ड वृत्त का आधा भाग होता है इनमें से प्रत्येक वृत्तखण्ड को **अर्द्धवृत्त** कहते हैं।



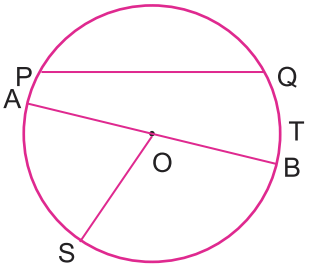
(viii) त्रिज्यखंड

दिये चित्र में OB व OA वृत्त की दो त्रिज्याएँ है। इन त्रिज्याओं से वृत्त के दो खंड बनते है। एक छायांकित व दूसरा अछायांकित है जिन्हें AOB के नाम से दर्शाया गया है। इन्हें वृत्त के त्रिज्यखंड कहते हैं। छायांकित भाग **लघुत्रिज्यखंड** तथा अछायांकित भाग **दीर्घ त्रिज्यखंड** कहलाता है।



प्रश्नावली 8.4

1. वृत्त के चित्र को देखकर निम्न नाम लिखिए।



त्रिज्या = ----------

व्यास = ----------

जीवा = ----------

केन्द्र = ----------

2. सत्य / असत्य कथन बताइए

(i) वृत्त का प्रत्येक व्यास उसकी एक जीवा भी होती है।

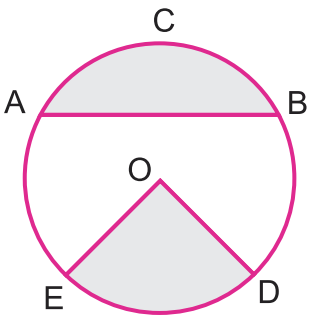
(ii) वृत्त की प्रत्येक जीवा उसका एक व्यास भी होती है।

(iii) वृत्त के दो व्यास अवश्य प्रतिच्छेद करेंगे।

(iv) वृत्त का केन्द्र सदैव उसकी परिधि पर स्थित किसी भी बिन्दु से समान दूरी पर होता है।

(v) प्रत्येक वृत्त का व्यास उसकी त्रिज्या का आधा होता है।

3. चित्र देखकर छायांकित भागों के नाम लिखिए।



छायांकित ACB = ...

छायांकित EOD = ...

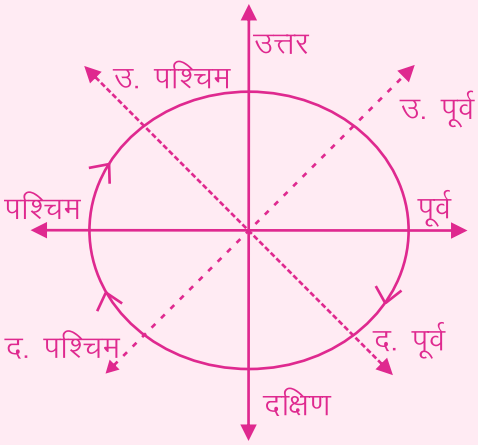
4. कोई वृत्त बनाइए और अंकित कीजिए।

(i) केन्द्र (ii) त्रिज्या (iii) व्यास

(iv) एक चाप (v) एक त्रिज्यखण्ड (vi) एक वृतखण्ड

करो और सीखो

1. चित्र में घड़ी की दिशानुसार चलने पर बताइए।
   (i) पूर्व से दक्षिण पूर्व तक बनने वाले कोण का मान।
   (ii) पूर्व से दक्षिण पश्चिम तक बनने वाले कोण का मान।
   (iii) पूर्व से पश्चिम तक पहुँचने में कितने समकोण बनते है ?
   (iv) दक्षिण के बाद तीन समकोण घूमने पर किस दिशा पर पहुँचते है?



हमने सीखा

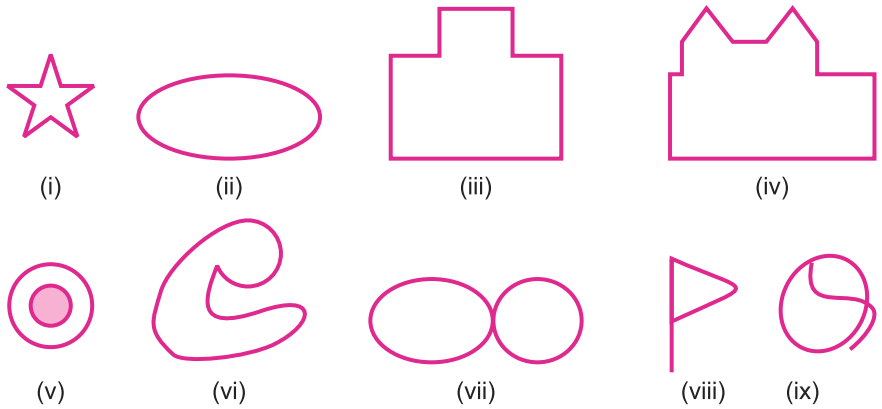
1. बिंदु एक स्थिति निर्धारित करता है। उसे सामान्यतः अंग्रेजी के बड़े अक्षर से व्यक्त किया जाता है।
2. दो बिंदुओं को जोड़ने वाला सबसे छोटा रास्ता एक रेखाखंड दर्शाता हैं। बिंदु A और B को मिलाने वाले रेखाखंड को AB से दर्शाते हैं। AB और BA दोनों एक ही रेखाखंड को दर्शाते हैं।
3. जब एक रेखाखंड जैसे AB को दोनों तरफ बिना किसी अंत के विस्तृत किया जाता है तो हमें एक रेखा प्राप्त होती है। इसे AB से व्यक्त किया जाता है। इसे कभी–कभी l जैसे अक्षर से भी व्यक्त किया जाता है।
4. दो विभिन्न रेखाएँ जब एक दूसरे को किसी एक बिंदु पर मिलती या काटती है तो वे प्रतिच्छेदी रेखाएँ कहलाती है।
5. दो रेखाएँ जब एक दूसरे को प्रतिच्छेद नहीं करती अर्थात नहीं काटती है, तो वे समान्तर रेखाएँ कहलाती है।
6. दो या दो से अधिक रेखाएँ जब एक ही बिंदु से गुजरती है तो वे संगामी होती है।
7. उभयनिष्ठ प्रारंभिक बिंदु वाली दो किरणों से एक कोण बनता है। दो किरणें OA और OB कोण AOB बनाती हैं (इसे ∠BOA भी लिख सकते हैं।)
8. वृत्त वह आकृति है जिस पर स्थित प्रत्येक बिंदु उस तल में लिए गए एक निश्चित बिंदु से सदैव समान दूरी पर होता है। निश्चित बिंदु वृत्त का केंद्र कहलाता है, वृत्त के केंद्र को वृत्त पर स्थित किसी भी बिंदु से मिलाने वाले रेखाखंड की लम्बाई को वृत्त की त्रिज्या कहते है।
9. वह रेखाखण्ड जो वृत्त के केन्द्र से होकर गुजरता है तथा उस वृत्त को दोनों ओर के दो बिंदुओं पर काटता है, वृत्त का व्यास कहलाता है।
10. वृत्त के चारों ओर चली गयी दूरी उसकी परिधि कहलाती है।

अध्याय 9

सरल द्विविमीय आकृतियाँ

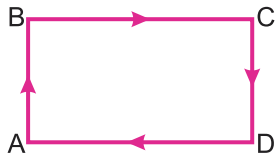
9.1 हम अपने चारों ओर कई वस्तुएँ देखते हैं। उनमें से कुछ वस्तुओं के पृष्ठ समतल जबकि कुछ के असमतल होते हैं।

नीचे कुछ समतलीय आकृतियों के चित्र दिए गए हैं उन्हें ध्यान से देखिए।



आकृति 9.1

ऐसी आकृति जिसमें पेन्सिल एक बिन्दु से चलना प्रारम्भ कर बिना उसे काटे और बिना पेन्सिल उठाए पूरी आकृति पर चलाई जा सके वह आकृति सरल आकृति कहलाती है। जैसे



आकृति 9.2

दी गई आकृति में बिन्दू A से चलकर बिना पेन्सिल उठाए और रेखाओं को काटे बिना क्रमशः B, C व D होते हुए पूरी आकृति बनाई जा सकती है। अतः आकृति सरल आकृति है वहीं आकृति (v) में आकृति बिना पेन्सिल उठाए नहीं बनाई जा सकती और आकृति (i) में इसे रेखाओं को काटे बिना बनाना संभव नहीं है। अतः ये जटिल आकृतियाँ हैं।

क्या ऐसी और जटिल आकृतियाँ आकृति 9.1 में हैं ?

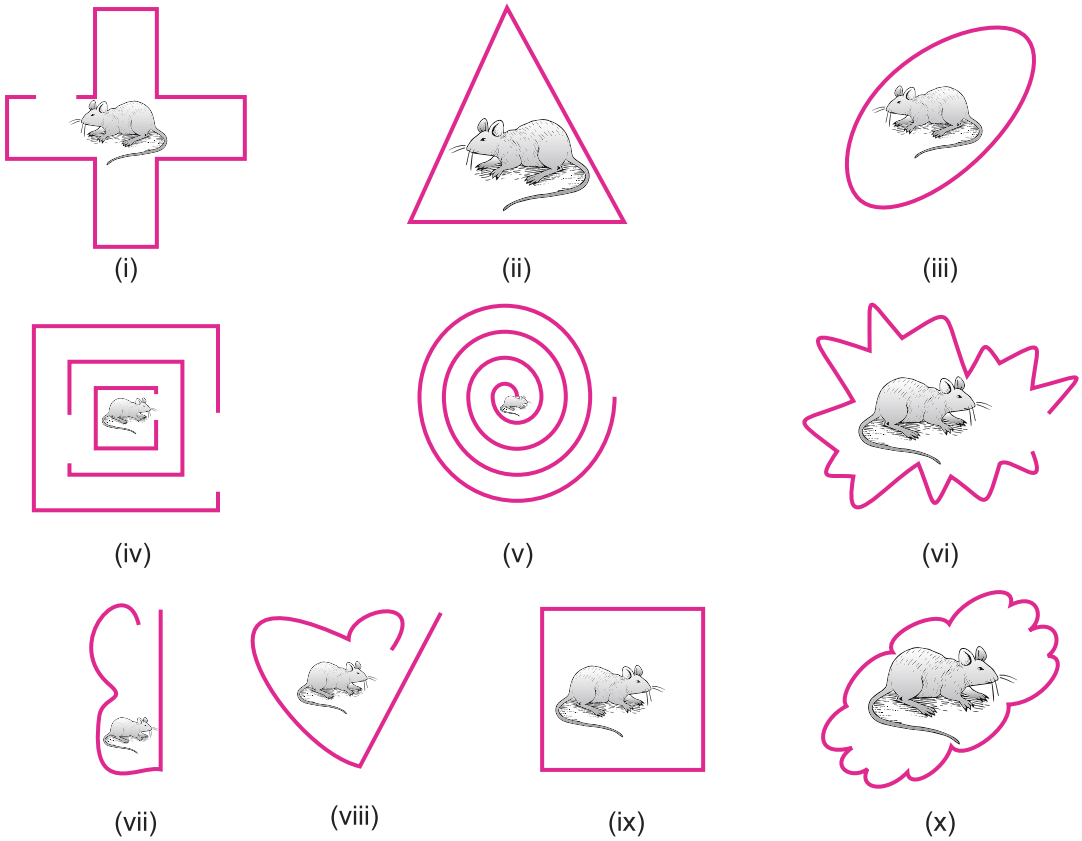
9.2 खुली एवं बन्द आकृतियाँ

विद्यालय में बच्चे शेर और मेमना का खेल, खेल रहे थे। बच्चों ने एक दूसरे का हाथ पकड़ कर एक बड़ा सा गोला बना लिया था। यह गोला एक पिंजरा था। एक बच्चा शेर बनकर इस गोले (पिंजरा) के इर्द गिर्द दौड़ रहा था और एक नन्हा बच्चा मेमना बना था वह पिंजरे के अन्दर सुरक्षित था। शेर अन्दर घुसने का रास्ता देख रहा था लेकिन घुस नहीं पा रहा था। आप बताइए ऐसा क्यों हो रहा था?



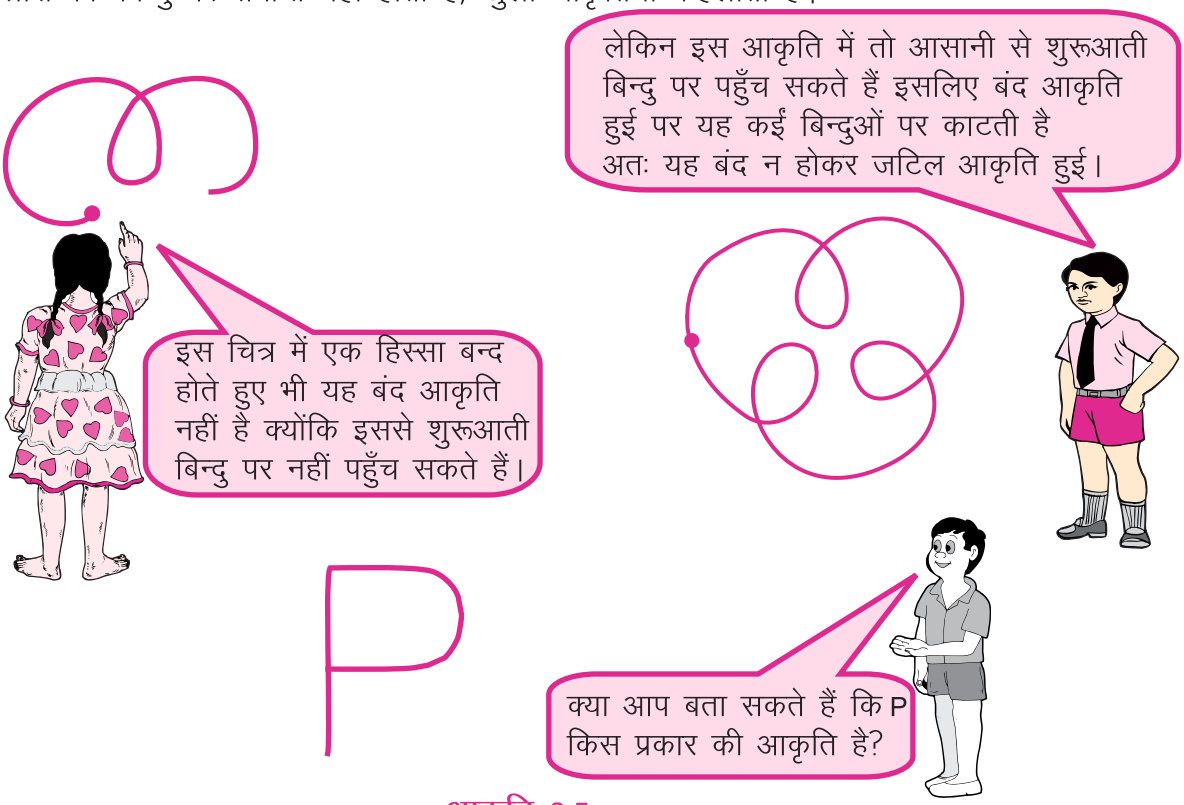
आकृति 9.3

नीचे प्रत्येक आकृति में चूहा है आप पता लगाओ कि चूहा किन–किन आकृतियों से बाहर निकल जाएगा–



आकृति 9.4

आकृति (ii), (iii), (ix) तथा (x) से चूहा बाहर नहीं निकल पा रहा है अतः ये बंद आकृतियाँ हैं। वे आकृतियाँ जो अपने प्रारम्भिक बिन्दु पर समाप्त होती है, बंद आकृतियाँ कहलाती हैं एवं वे जो अपने प्रारम्भिक बिन्दु पर समाप्त नहीं होती हैं, खुली आकृतियाँ कहलाती हैं।

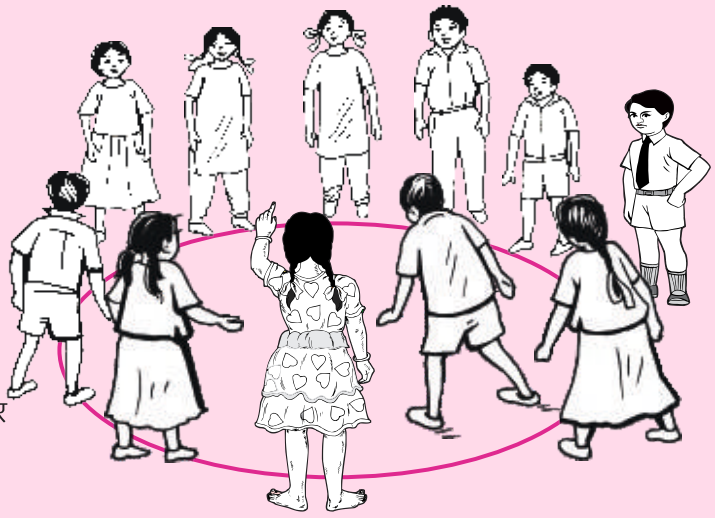


आकृति 9.5

नीर और तीर का खेल

नियम :

1. फर्श पर चॉक से एक गोल घेरा बनाइए।
2. नीर कहने पर घेरे के अन्दर कूदना है।
3. तीर कहने पर घेरे से बाहर कूदना है।
4. निर्देशों के अनुसार न करने पर खिलाड़ी आउट हो जाता है।

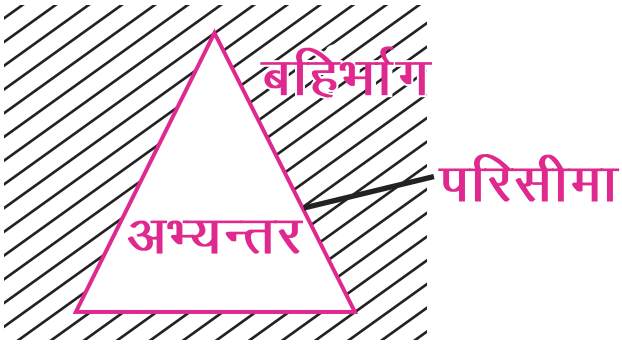


आकृति 9.6

उपर्युक्त आकृति में घेरे के अन्दर खड़े बच्चे घेरे के अभ्यन्तर भाग में, घेरे के बाहर खड़े बच्चे घेरे के बहिर्भाग में हैं व घेरे पर खड़े बच्चे घेरे की परिसीमा पर खड़े कहलाते हैं।

एक बंद आकृति से सम्बन्धित तीन भाग होते हैं–

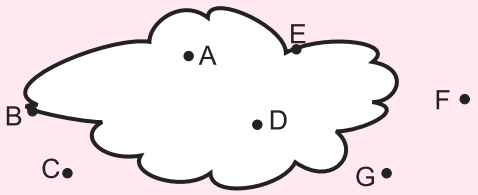
1. अभ्यन्तर (अन्दर का भाग)
2. बहिर्भाग (बाहरी भाग)
3. परिसीमा



आकृति 9.7

करो और सीखो

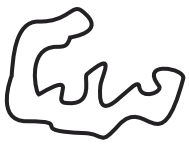
1. तीन बन्द एवं तीन खुली आकृतियों के चित्र बनाइए।
2. दिए गए चित्र में कौन–कौन से बिन्दु बन्द आकृति के अभ्यन्तर, बहिर्भाग एवं परिसीमा पर स्थित है।

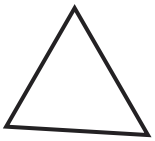


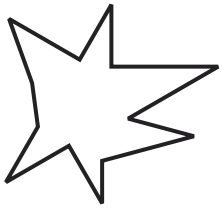
प्रश्नावली 9.1

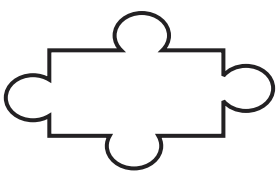
1. नीचे दी गई आकृतियों में खुली व बंद आकृतियाँ छाँटिए।

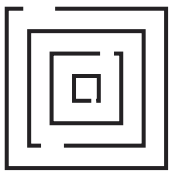

(i)


(ii)


(iii)

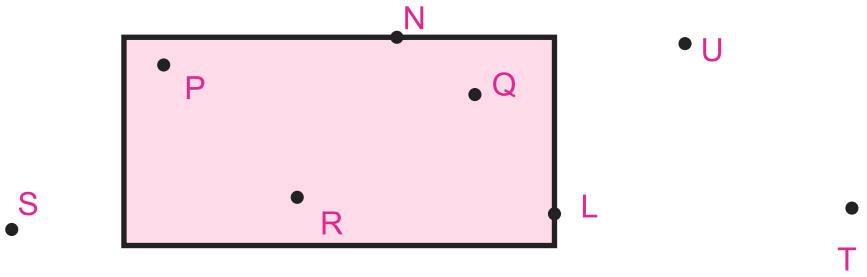

(iv)


(v)


(vi)

2. अंग्रेजी वर्णमाला के अक्षरों A से Z के मध्य की बंद आकृतियाँ बताइए।

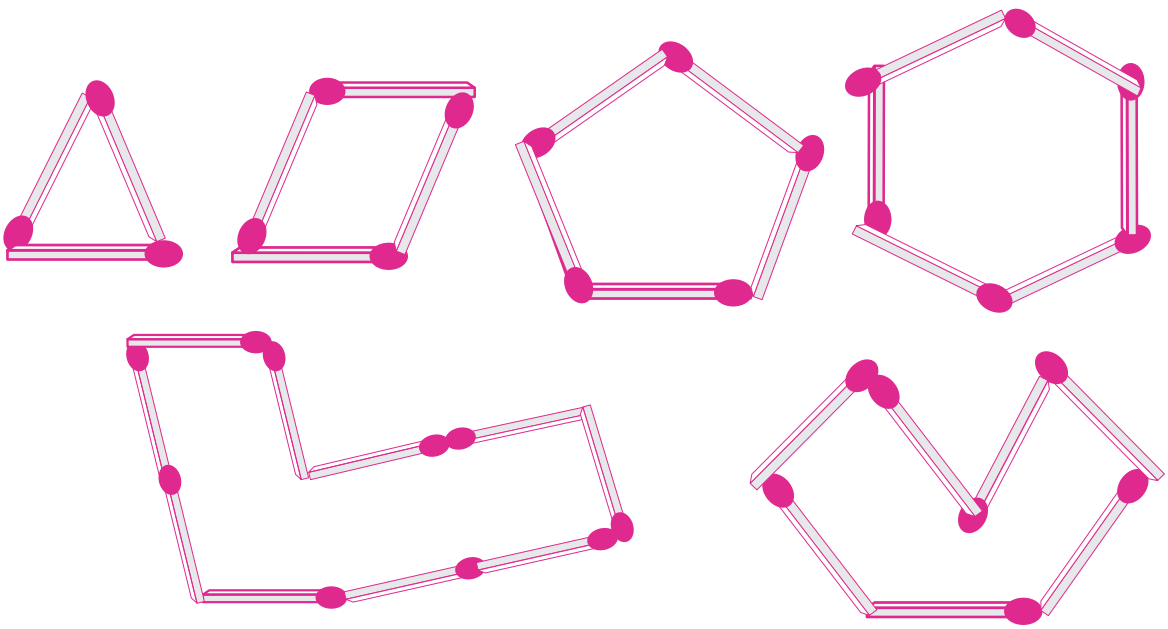
3. (i) आयत के अभ्यन्तर भाग में बने बिन्दु बताइए।
   (ii) ऐसे बिन्दु लिखिए जो आयत के बहिर्भाग में हैं।
   (iii) क्या N तथा L आयत की परिसीमा पर है?



4. निम्न आकृतियाँ संभव हो तो बनाइए।
   (i) एक बंद आकृति जो बहुभुज नहीं है।
   (ii) केवल रेखाखण्डों से बनी हुई खुली आकृति।
   (iii) दो भुजाओं वाला एक बहुभुज।
   (iv) चार भुजाओं वाला एक बहुभुज।
5. पाँच बिदुओं A, B, C, D, E को एक बहुभुज में इस प्रकार जमाइए कि –
   (i) बिन्दु A व C अभ्यन्तर में हो।
   (ii) बिन्दु B व D बहिर्भाग में हो।
   (iii) बिन्दु E परिसीमा पर हो।

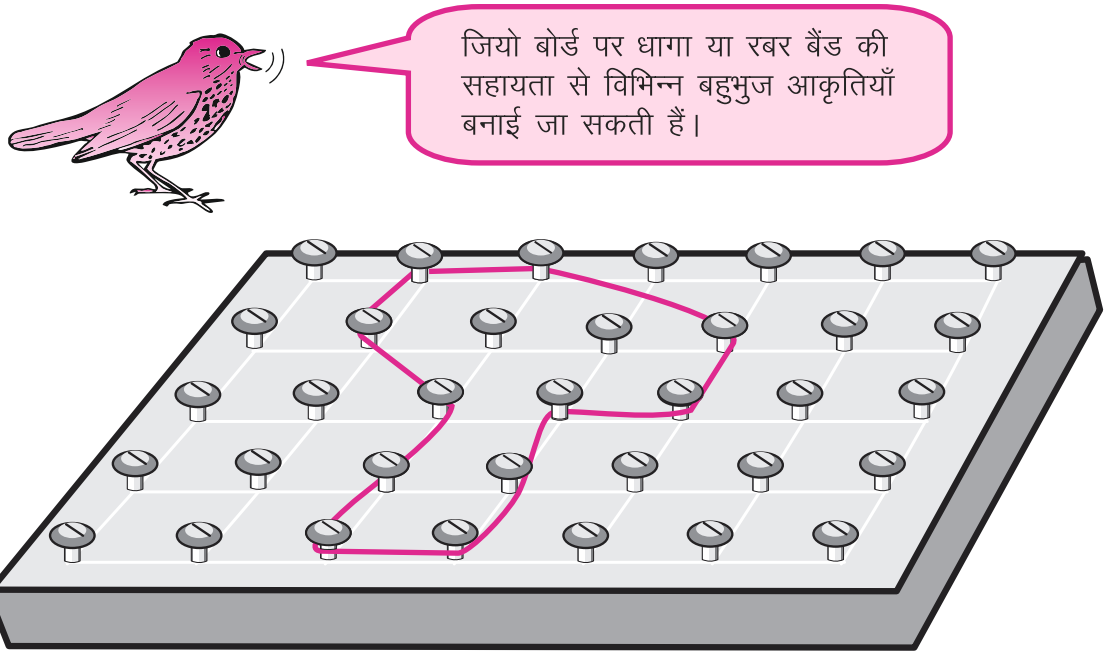
9.3 बहुभुज

माचिस की तीलियों को कार्डशीट पर चिपकाकर कुछ आकृतियाँ निम्न प्रकार बनाइए।





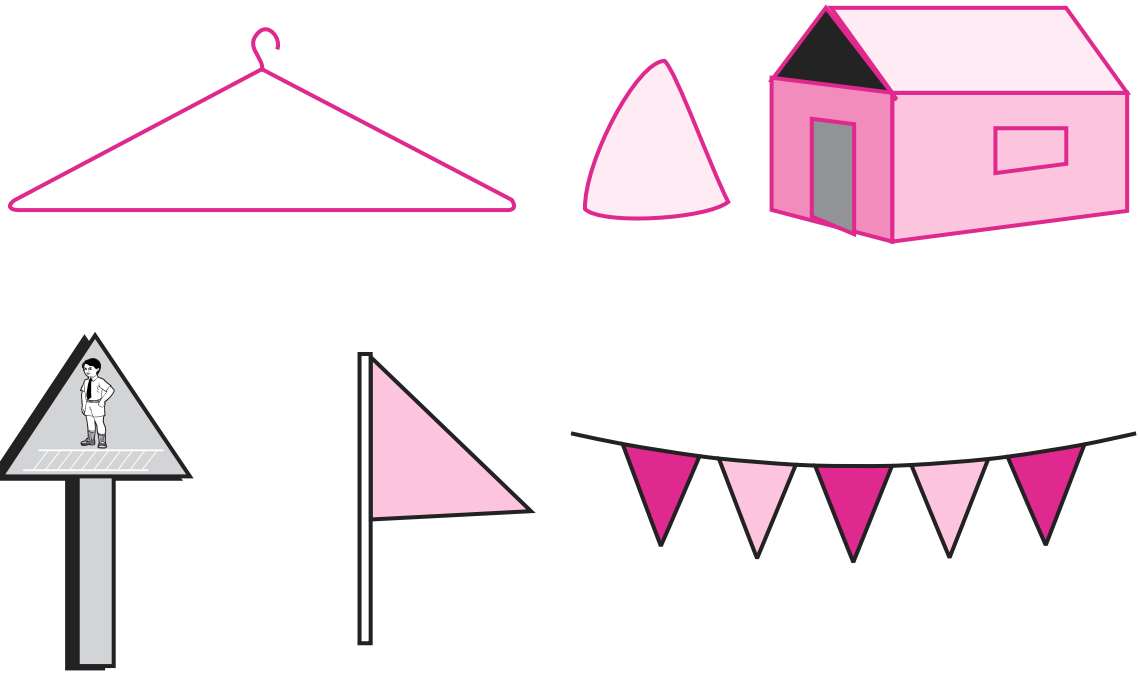
इस प्रकार की बंद आकृतियाँ जो तीन या तीन से अधिक भुजाओं द्वारा निर्मित हो उन्हें बहुभुज कहते हैं। बहुभुज जियो बोर्ड पर भी बनाए जा सकते हैं।



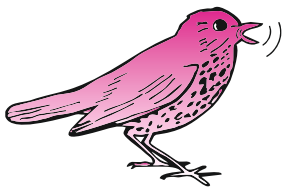
(जियो बोर्ड लकड़ी के तख्ते पर बराबर दूरी पर कीलें गाड़ कर बनाया जाता है) जियो बोर्ड पर बने बहुभुज को देखो इसमें कितनी भुजाएँ है? आप ऐसे और अलग–अलग भुजाओं के बहुभुज बनाइए।

9.4 त्रिभुज

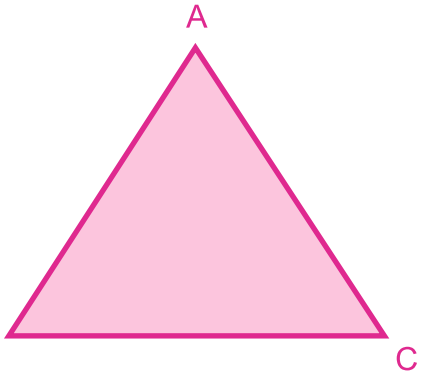
हमने माचिस की तीलियों से विभिन्न प्रकार के बहुभुजों का निर्माण किया था उनमें तीन तीलियों से जो बहुभुज बना था। इसे ध्यान से देखिए इसे त्रिभुज कहते हैं। नीचे दिए गए चित्रों में आपको त्रिभुज कहाँ–कहाँ दिखाई देता है?



ऐसी आकृतियाँ जिनमें तीन भुजाएँ होती है एवं तीन कोण (तीन कोने) होते हैं, उन्हें त्रिभुज कहते हैं।

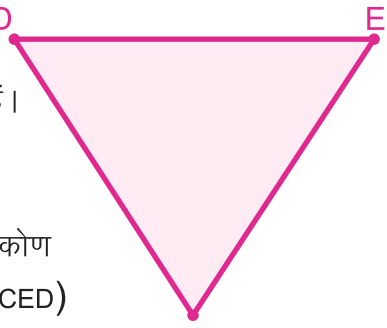


त्रिभुज सबसे कम भुजाओं वाला बहुभुज है।



9.4.1 त्रिभुज के अवयव

राधा जब विद्यालय, दुकान एवं चौराहे से होकर निकली एवं वापस विद्यालय पहुँची तो इस प्रकार की आकृति प्राप्त हुई।



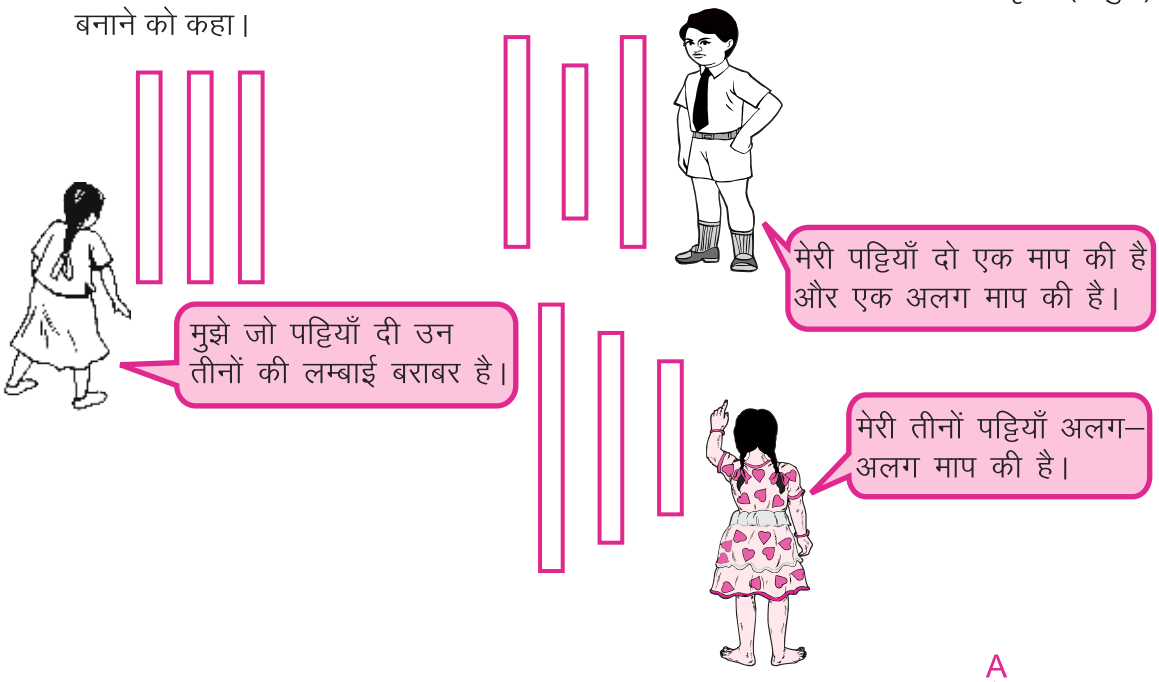
इस त्रिभुजाकार आकृति में बिन्दु C, D, E त्रिभुज के शीर्ष हैं। C से D की दूरी भुजा CD, D से E की दूरी भुजा DE व E से C की दूरी भुजा EC कहलाती है। एवं शीर्ष C पर बनने वाला कोण $\angle C$ ($\angle DCE$) शीर्ष D पर बनने वाला कोण $\angle D$ ($\angle CDE$) एवं शीर्ष E पर बनने वाला कोण $\angle E$ ($\angle CED$) कहलाता है।

हम जानते हैं कि शीर्ष D पर बनने वाले कोण को हम ∠CDE या ∠EDC दोनों ही तरह से दर्शा सकते हैं।

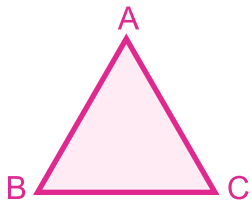
9.5 त्रिभुजों के प्रकार

9.5.1 भुजाओं के आधार पर

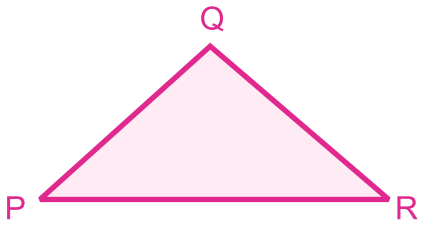
शिक्षक ने तीनों बच्चों को विभिन्न मापों की तीन–तीन बाँस की पट्टियाँ दी और बन्द आकृति (त्रिभुज) बनाने को कहा।



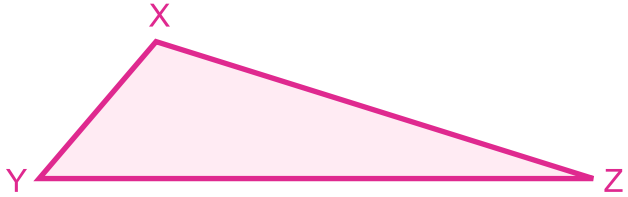
जिस त्रिभुज की तीनों भुजाएँ बराबर हो उसे **समबाहु त्रिभुज** कहते हैं।
आकृति में AB = BC = CA



जिस त्रिभुज की दो भुजाएँ समान हो व एक भुजा अलग हो उसे **समद्विबाहु त्रिभुज** कहते हैं इस त्रिभुज में PQ = QR ≠ PR



जिस त्रिभुज की तीनों भुजाएँ असमान हो उसे विषमबाहु त्रिभुज कहते हैं। इस आकृति में
XY ≠ YZ ≠ ZX

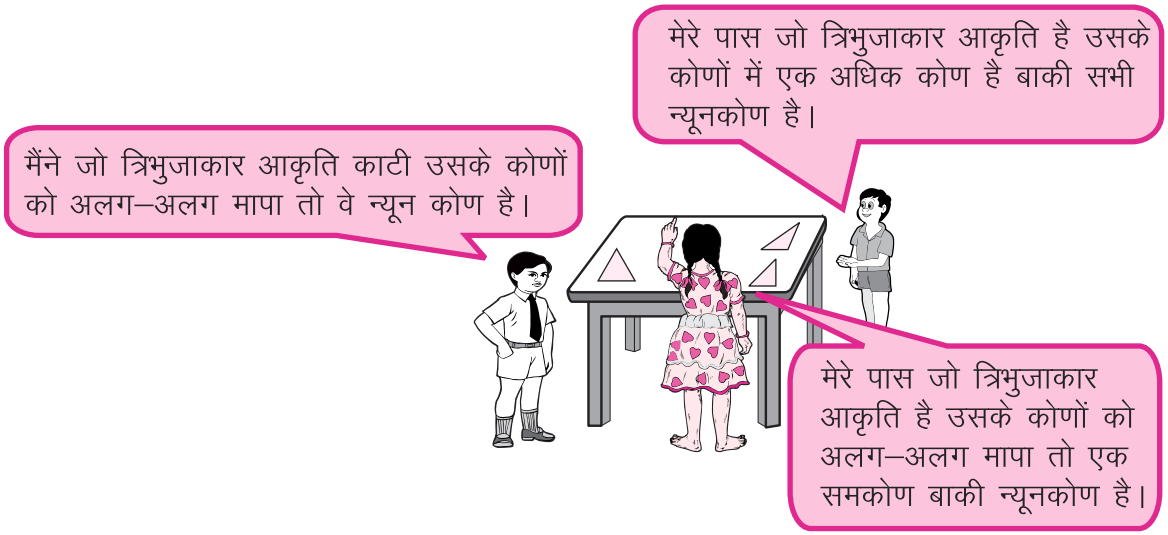


करो और सीखो

एक कार्ड शीट पर केवल माचिस की तीलियों को चिपका कर समबाहु, समद्विबाहु व विषमबाहु त्रिभुज बनाइए।

9.5.2 कोणों के आधार पर

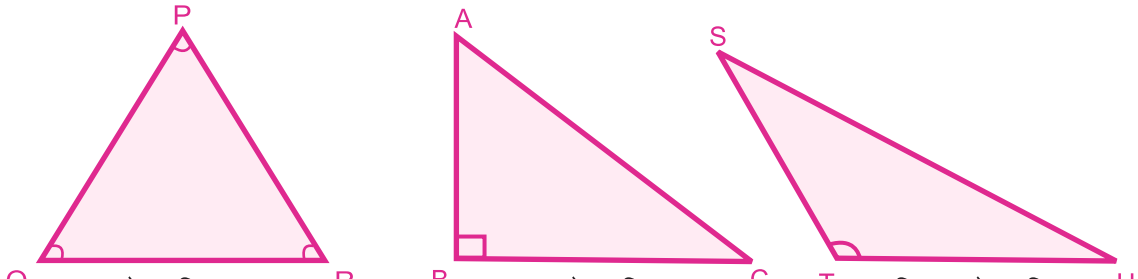
कक्षा में विद्यार्थियों ने आज कागज से अलग–अलग प्रकार की त्रिभुजाकार आकृतियाँ बनाई।



(i) वह त्रिभुज जिसके तीनों कोण न्यूनकोण हो वह **न्यूनकोण त्रिभुज** कहलाता है।

(ii) वह त्रिभुज जिसमें एक कोण समकोण हो वह **समकोण त्रिभुज** कहलाता है।

(iii) वह त्रिभुज जिसमें एक कोण अधिक कोण हो वह **अधिक कोण त्रिभुज** कहलाता है।

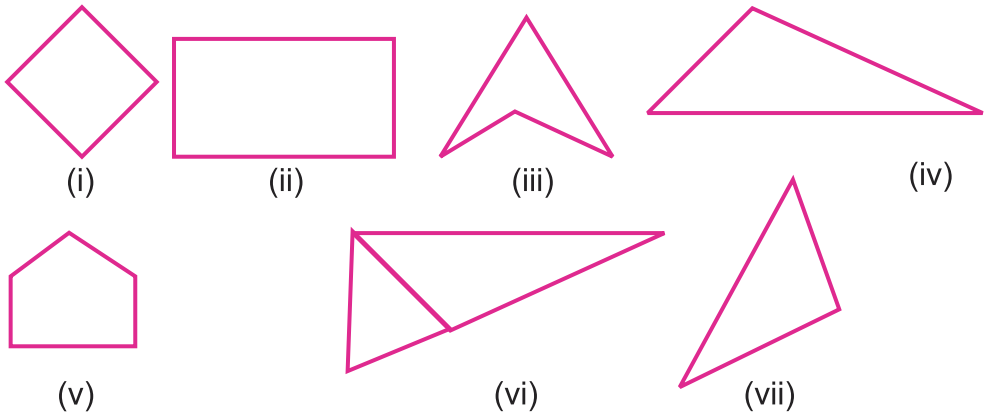


करो और सीखो

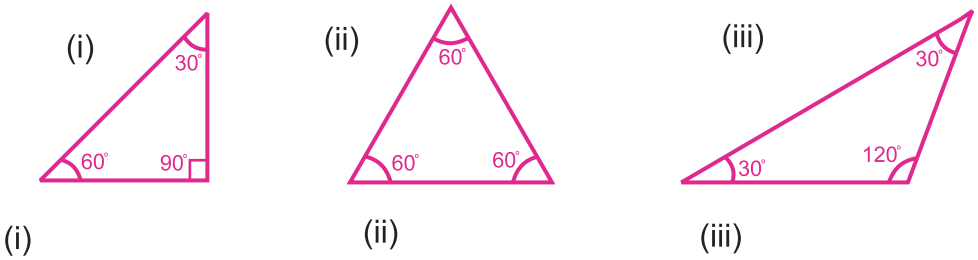
1. किसी त्रिभुज की तीनों भुजाएँ समान है तो क्या सभी कोण न्यूनकोण होंगे?
2. विषमबाहु त्रिभुज का चित्र बनाकर उसके कोणों का माप लिखिए?
3. क्या ऐसा त्रिभुज बनाया जा सकता है जिसमें दो समकोण हो? यदि हाँ तो बनाइए। यदि नहीं तो कारण बताएँ।

प्रश्नावली 9.2

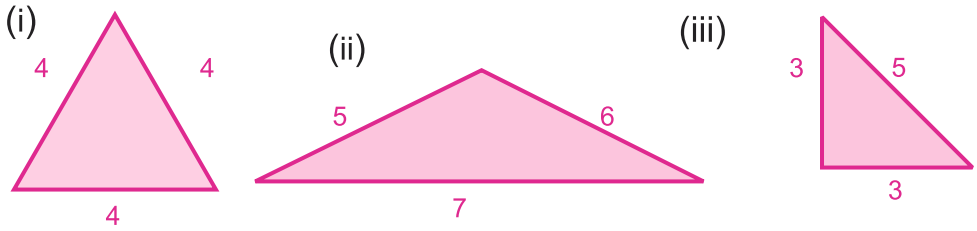
1. नीचे दी गई आकृतियों में से त्रिभुज छाँटिए।



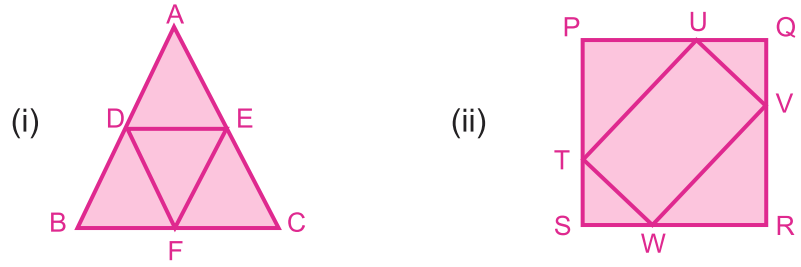
2. निम्न आकृतियों में त्रिभुजों के नाम कोणों के आधार पर लिखिए।



3. भुजाओं के आधार पर निम्न त्रिभुजों के प्रकार लिखिए।



4. निम्नांकित आकृतियों में बने सभी त्रिभुजों के नाम लिखिए।



5. दिए गए कोणों के आधार पर त्रिभुजों के प्रकार लिखिए।

(i) $105^0, 46^0, 29^0$ (ii) $60^0, 60^0, 60^0$ (iii) $57^0, 33^0, 90^0$

6. दी गई भुजाओं के आधार पर त्रिभुजों के प्रकार लिखिए।

(i) 3.5 सेमी, 3 सेमी, 1.8 सेमी (ii) 2.8 सेमी, 2 सेमी, 2 सेमी (iii) 5.2 सेमी, 5.2 सेमी, 5.2 सेमी

7. कोष्ठक में सही व गलत लिखिए।

(i) किसी त्रिभुज में तीन कोण, तीन भुजा व तीन शीर्ष होते हैं । ( )

(ii) किसी त्रिभुज के तीनों कोण समकोण से कम हैं तो वह समकोण त्रिभुज कहलाता है। ( )

(iii) किसी त्रिभुज की तीनों भुजाएँ असमान हैं तो वह समबाहु त्रिभुज कहलाता है। ( )

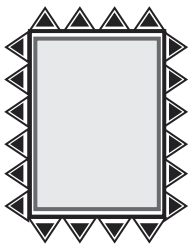
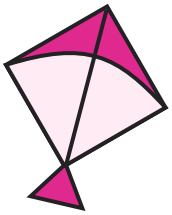
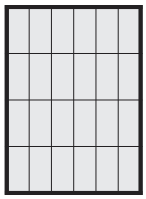
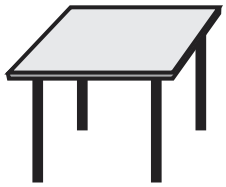
(iv) किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ समान हैं तो वह समद्विबाहु त्रिभुज कहलाता है। ( )

(v) किसी त्रिभुज में दो कोण न्यून कोण व एक कोण अधिक कोण है तो वह अधिक कोण त्रिभुज कहलाता है। ( )

9.6 चतुर्भुज

आपने अपनी कक्षा में श्यामपट्ट देखा है उस श्याम पट्ट के कितने किनारे (भुजाएँ) हैं? ऐसी चार किनारों (भुजाओं) वाली और कौनसी आकृतियाँ आपने देखी है ? इस प्रकार टेबल, सौ रूपये के नोट, बिस्किट के पैकेट की सतह आदि चार भुजाओं से बनी होती हैं। ऐसी सभी बहुभुज आकृतियाँ जिनमें चार भुजाएँ होती है, चतुर्भुज कहलाते हैं।

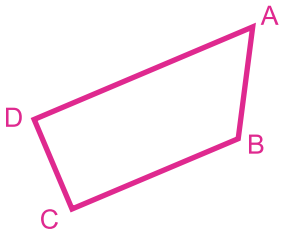
नीचे बने चित्रों में आपको कहाँ–कहाँ चतुर्भुज दिखाई दे रहे हैं?

इसका मतलब मेरे गाँव में ऐसी चार भुजाओं वाले खेत भी चतुर्भुज आकृति के हैं।



9.6.1 चतुर्भुज के अवयव : दिए गए चतुर्भुज के चित्र को देखकर बताइए इसमें



1. कितनी भुजाएँ हैं? .....
2. कितने शीर्ष हैं? .....
3. कितने कोण हैं? .....

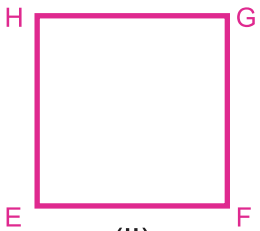
हम देखते हैं कि चतुर्भुज में क्रमशः AB, BC, CD, DA चार भुजाएँ हैं तथा इसके शीर्ष A, B, C व D हैं। चार कोण हैं जिनके नाम क्रमशः ∠A, ∠B, ∠C तथा ∠D हैं। AB के सामने भुजा DC एवं BC के सामने की भुजा AD है। ये भुजाएँ सम्मुख भुजाएँ कहलाती है। इसी प्रकार AB की आसन्न भुजाएँ (AB से जुडी हुई) AD व BC है इसी प्रकार चारों भुजाओं की आसन्न भुजाएँ लिखी जा सकती है। कोण ∠A का सम्मुख कोण ∠C व ∠B का सम्मुख कोण ∠D है एवं ∠A का आसन्न कोण (समीप कोण) ∠B व ∠D है इसी प्रकार सभी शीर्षों के आसन्न कोणों का पता कीजिए।

सलमा और प्रीतम ने चतुर्भुजों की भुजाओं को समान करके दो प्रकार के चतुर्भुज बनाए।





(i)

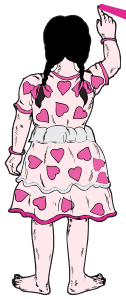


(ii)



जब मैंने इस आकृति में भुजाओं के कोणों को मापा तो आमने सामने की भुजाएँ बराबर व सभी कोण समान हैं।

इस आकृति में जब मैंने भुजाओं व कोणों को मापा तो भुजाएँ भी एक माप की व कोण भी समान हैं।



हाँ ये दोनों भी चतुर्भुज हैं क्योंकि इनमें भी चार भुजाएँ व चार कोण हैं। लेकिन ये विशेष प्रकार के चतुर्भुज हैं।

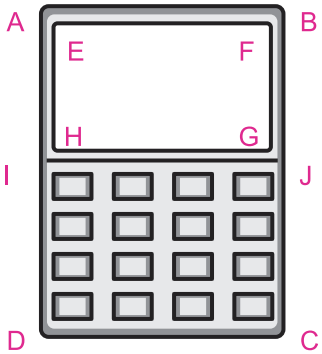
चूँकि आकृति (i) में भुजा PQ व भुजा SR एवं भुजा SP व भुजा RQ समान एवं ∠P, ∠Q, ∠R व ∠S समकोण हैं। ऐसा चतुर्भुज जिसमें आमने सामने की भुजाएँ बराबर हो व प्रत्येक कोण समकोण हो **आयत** कहलाता है।

आकृति (ii) में भुजा EF, भुजा FG, भुजा GH व भुजा HE सभी समान व ∠E, ∠F, ∠G व ∠H समकोण हैं। ऐसा चतुर्भुज जिसमें सभी भुजाएँ समान हो व प्रत्येक कोण समकोण हो, **वर्ग** कहलाता है।

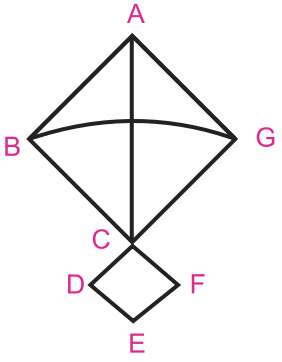
प्रश्नावली 9.3

1. निम्न चित्रों में बनने वाले चतुर्भुजों के नाम लिखिए।

(i)

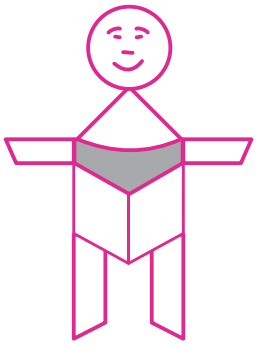


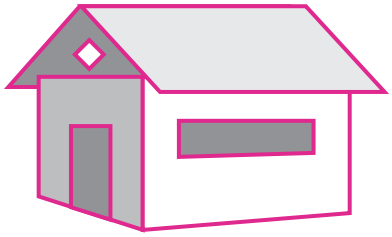
(ii)





2. निम्न आकृतियों में बनने वाले कुल चतुर्भुजों की संख्या लिखिए।

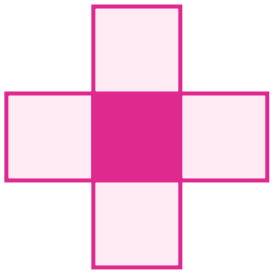
(i) 

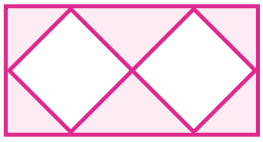
(ii) 

3. चतुर्भुज KLMN बनाइए और बताइए।

(i) सम्मुख भुजाओं के दो युग्म
(ii) आसन्न भुजाओं के दो युग्म
(iii) आसन्न कोणों के दो युग्म
(iv) सम्मुख कोणों के दो युग्म

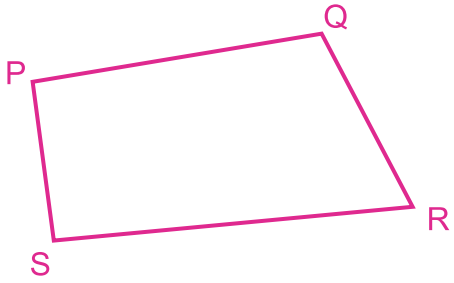
4. निम्नांकित आकृतियों में आयत एवं वर्गों की संख्या लिखिए ।

(i) 

(ii) 

5. दिए गए चतुर्भुज में बताइए।

(i) ∠P का सम्मुख कोण
(ii) ∠R के आसन्न कोण
(iii) भुजा QR की सम्मुख भुजा
(iv) भुजा PS की आसन्न भुजाएँ
(v) चारों कोणों के नाम



6. कोष्ठक में सही गलत लिखिए।

(i) वह चतुर्भुज जिसकी प्रत्येक भुजा समान हो उसे आयत कहते हैं। ( )
(ii) एक वर्ग में प्रत्येक कोण समकोण होता है। ( )
(iii) आयत में आमने सामने की भुजाएँ समान नहीं होती है। ( )
(iv) वह चतुर्भुज जिसमें सम्मुख भुजाएँ समान हो आयत कहते हैं। ( )

हमने सीखा

1. बंद आकृतियों का क्षेत्रफल एवं परिमाप ज्ञात किया जा सकता है।

2. बंद आकृति के अन्दर के भाग को अभ्यन्तर, किनारे पर स्थित भाग को परिसीमा तथा बाह्य भाग को बहिर्भाग कहते हैं।

3. तीन अथवा तीन से अधिक भुजाओं से घिरी आकृति को बहुभुज कहते हैं। तीन भुजाओं वाला बहुभुज त्रिभुज, चार भुजाओं वाला बहुभुज चतुर्भुज व इसी तरह अन्य बहुभुजों का नामकरण किया जाता है।

4. भुजाओं के आधार पर त्रिभुजों का वर्गीकरण क्रमशः विषमबाहु, समद्विबाहु व समबाहु है।

5. कोणों के आधार पर त्रिभुजों का वर्गीकरण न्यूनकोण, समकोण एवं अधिक कोण त्रिभुज है।

6. जिस चतुर्भुज के आमने सामने की भुजाएँ बराबर हो व प्रत्येक कोण समकोण हो वह आयत कहलाता है।

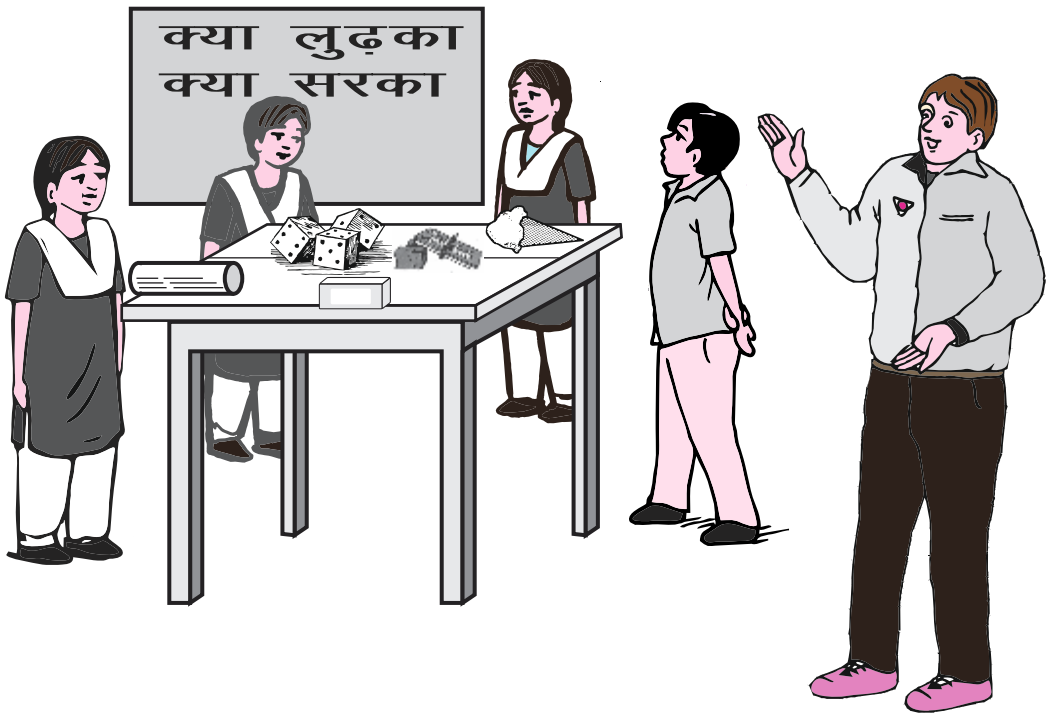
7. जिस चतुर्भुज की चारों भुजाएँ बराबर एवं प्रत्येक कोण समकोण हो वर्ग कहलाता है।

अध्याय 10

त्रिविमीय आकारों की समझ

10.1 नीचे दिए गए चित्रों को ध्यान से देखिए।

कक्षा में बच्चे टेबल पर ज्यामिति बॉक्स की फिसल पट्टी बनाकर खेल रहे हैं। वह ज्यामिति बॉक्स पर माचिस, पासा, कंचे, गेंद, लकड़ी का बेलनाकार टुकड़ा, रबर, जोकर की टोपी आदि लुढ़काकर/खिसकाकर देख रहे हैं।



विभिन्न वस्तुओं के साथ यह खेल आप भी खेल कर देखिए कौन–कौनसी वस्तुएँ लुढ़कती है ?

शंकर – कंचे, गेंद जैसी गोल वस्तुएँ लुढ़कती हैं।

वर्षा – हाँ! परन्तु माचिस, पासा, रबर आदि तो सरकते हैं।

ताहिर – जोकर की टोपी तो सरकती भी है और लुढ़कती भी है।

शिक्षक – बिल्कुल ठीक! ठोसों की ऐसी सतहें जिससे वह सरकती है वे सपाट सतह कहलाती है तथा जिससे लुढ़कती है वह सतह वक्र सतह कहलाती है। जैसे गेंद पूरी तरह वक्राकार है जबकि लकड़ी का बेलनाकार टुकड़ा ऊपर तथा नीचे से सपाट सतह वाला है तथा मध्य सतह से वक्राकार है।

करो और सीखो

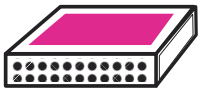
अपने चारों ओर की कम से कम 20 वस्तुओं की सूची बनाएँ एवं उनकी सतह का अवलोकन करें। उन्हें निम्नलिखित सारणी के आधार पर वर्गीकृत कीजिए।

केवल वक्र सतह वाली वस्तुएँ	केवल सपाट सतह वाली वस्तुएँ	दोनों प्रकार की सतह वाली वस्तुएँ
नारंगी	बॉक्स	सेल

10.2 त्रिविमीय आकार अध्याय 8 में हमने वृत्त, वर्ग, त्रिभुज, आयत आदि आकृतियों के बारे में पढ़ा है। इन सभी में केवल लम्बाई एवं चौड़ाई ही होती है। इन्हें द्विविमीय (2 D) आकृतियाँ कहते हैं। इसी अध्याय में हमने रेखा के बारे में पढ़ा है। इसकी केवल लम्बाई होती है। अतः रेखा एक विमा वाली आकृति है। ऊपर दिए गए ठोस तथा अन्य सभी ठोसों में लम्बाई तथा चौड़ाई के साथ–साथ ऊँचाई अथवा गहराई भी होती है। अतः इन्हें त्रिविमीय (3 D) आकृतियाँ कहते हैं।

10.2.1 घनाभ

केवल सपाट सतह वाले ठोस आकारों जैसे संदूक, टूथपेस्ट का डिब्बा, ईंट, चाय पत्ती का पैकेट, तेल का पीपा (टिन) आदि घनाभ के उदाहरण हैं। ऐसा ही एक घनाभ माचिस की बंद डिब्बी है। इसकी प्रत्येक सतह को देखिए और निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।



घनाभ में कितनी सतहें हैं ? . .....

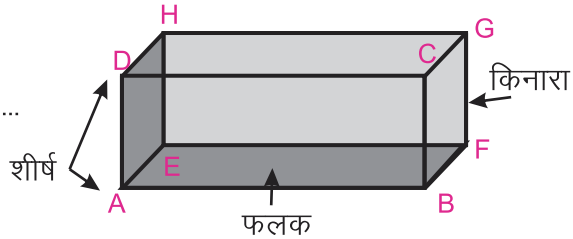
प्रत्येक सतह का आकार कैसा है ? .....

जहाँ दो सतहें मिलती है उन्हें किनारा कहते हैं।

बताइए माचिस में कितने किनारे हैं ? .....

तीन किनारे एक शीर्ष पर आकर मिलते हैं।

बताइए घनाभ में कितने शीर्ष होते हैं ? .....



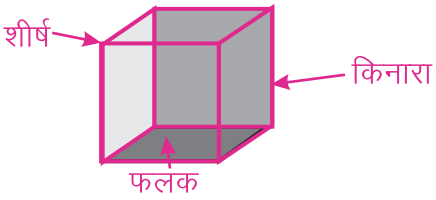
घनाभ का प्रत्येक सपाट पृष्ठ आयताकार होता है। यह पृष्ठ इसका फलक कहलाता है। घनाभ के 6 फलक होते हैं। इसके दो फलक एक रेखाखण्ड से मिलते हैं जो घनाभ का एक किनारा कहलाता है। घनाभ में 12 किनारे तथा 8 शीर्ष होते हैं।

उपर्युक्त चित्र में घनाभ के 6 आयताकार फलक क्रमशः A B C D, E F G H, B F G C, A E H D, A B F E तथा C G H D है। इसी प्रकार 12 किनारे (कोर) क्रमशः AB, CD, EF, GH, BC, FG, AD, EH, BF, CG, AE तथा DH है। घनाभ के 8 शीर्ष (कोने) क्रमशः A, B, C, D, E, F, G, तथा H है।

10.2.2 घन

चॉक का डिब्बा, पासा आदि घनाभों के सभी फलक वर्गाकार होते हैं, अर्थात इनकी लम्बाई, चौड़ाई व ऊँचाई पूर्णतः समान होती है। ऐसी आकृतियाँ घन कहलाती हैं।

घनाभ के समान घन के भी 6 फलक, 8 शीर्ष तथा 12 किनारे होते हैं।





10.2.3 बेलन

लकड़ी का गट्टा जैसी आकृतियाँ जिनकी दो सतहें वृत्ताकार व एक सतह वक्राकार हो बेलन कहलाती हैं।

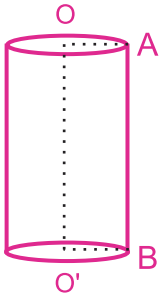
आपने लोहे का पानी का पाईप, अनाज रखने का ड्रम आदि को देखा है। यह भी बेलन के उदाहरण हैं।





करो और सीखो

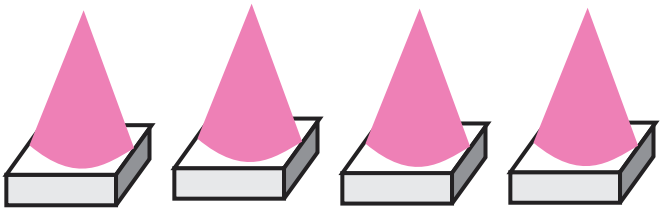
क्या आप रसोईघर के बेलन को भी बेलन कहेंगे। तर्क द्वारा अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।



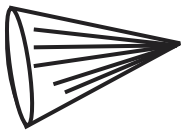
दिए गए बेलन के चित्र में दो पृष्ठ वृत्ताकार है तथा मध्य का पृष्ठ वक्राकार है। और OA व $O'B$ वृत्ताकार पृष्ठों की त्रिज्या एवं OO' बेलन की ऊँचाई है।

10.2.4 शंकु

हमने सड़क पर मरम्मत कार्य करते समय निम्न आकृतियों को रखा हुआ देखा है।



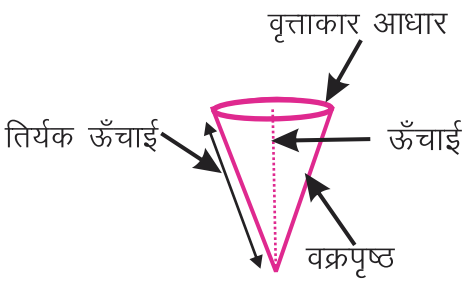
इनके अलावा जोकर की टोपी, आइसक्रीम कोन जैसी आकृतियों में एक वक्रपृष्ठ तथा एक वृत्ताकार पृष्ठ होता है।







अतः ऐसी आकृतियाँ जिसका एक सिरा वृत्ताकार तथा एक वक्राकार पृष्ठ हो शंकु कहलाती हैं।

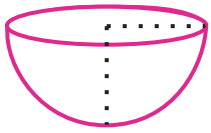


10.2.5 गोला

गेंद, कंचे, फुटबॉल सभी की आकृतियाँ समान होती हैं। इनकी सम्पूर्ण सतह वक्राकार होती हैं। ये सभी आकृतियाँ गोलाकार हैं। क्या आप सिक्के को गोला कह सकते हैं ? क्या यह अपनी सभी सतहों पर लुढ़कते है ? क्या चूड़ी में भी यह संभव है ?

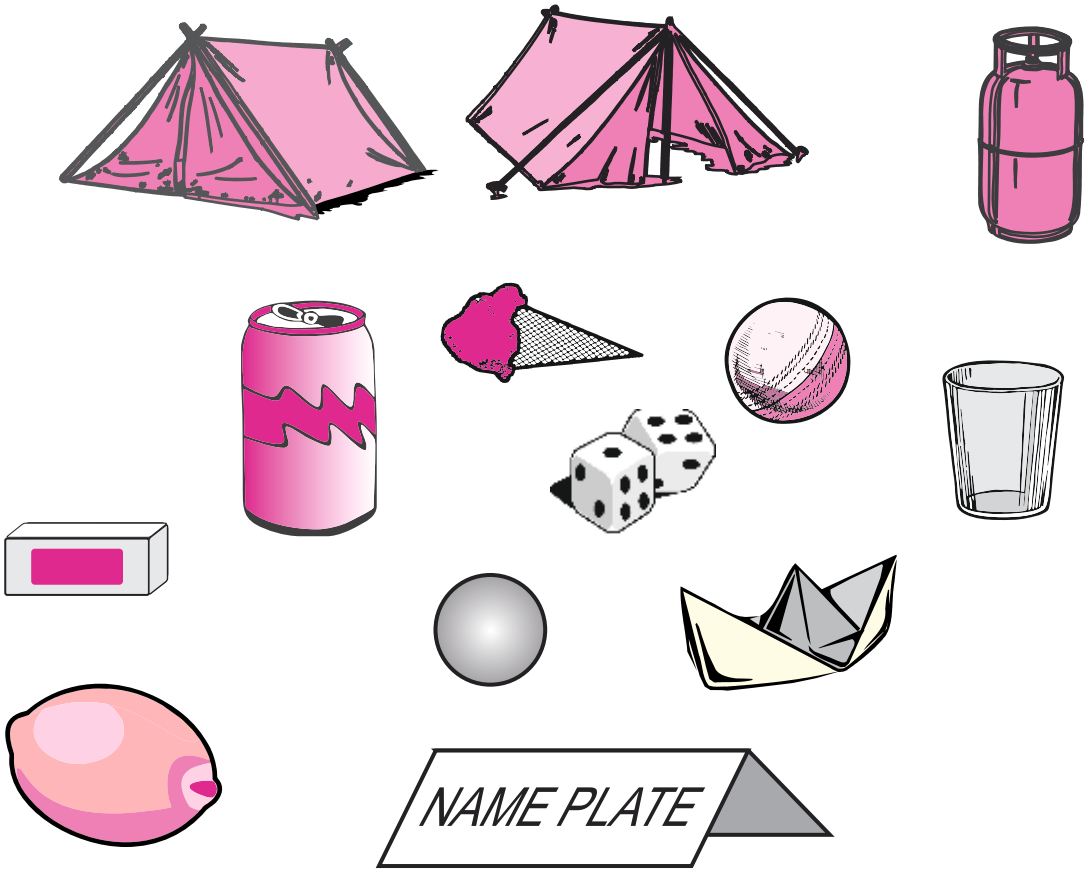
आपने अपने दैनिक जीवन में नींबू अवश्य देखा होगा। इसे बीच में से काटने पर यह अर्द्धगोला दिखाई देता है।





सोचिए और चर्चा कीजिए : वृत्त, गोला तथा बेलन में क्या–क्या अन्तर है ?

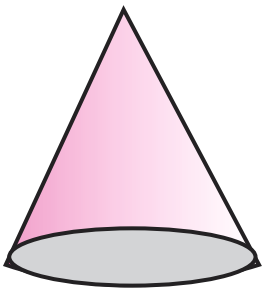
10.2.6 बहुफलक नीचे दिए चित्रों को ध्यान से देखिए, इनमें कौन–कौन से चित्र की सतह सपाट है?



ऐसी आकृतियाँ जिनकी सभी सतहें सपाट होती हैं तथा प्रत्येक सतह एक बहुभुज (त्रिभुज, चतुर्भुज ...) होती है बहुफलक कहलाती हैं।

प्रश्नावली 10

1. निम्नांकित चित्रों को पहचानिए तथा प्रत्येक आकृति का नाम लिखिए।

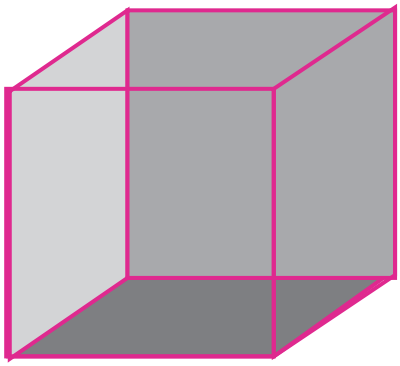
(i) 

(ii) 

(iii)



(iv)



(v)



2. सोचकर लिखिए।

(i) किन्हीं दो गोलाकार फलों के नाम।

(ii) ताजा मूली से बनने वाली दो ठोस आकृतियों के नाम।

(iii) रसोई घर में उपयोग की जाने वाली दो बेलनाकार आकृतियों के नाम लिखिए।

(iv) आपके स्कूल बेग में उपलब्ध दो घनाभाकार वस्तुओं के नाम।

3. सही / गलत लिखिए।

(i) घनाभ तथा घन दोनों के छः फलक होते हैं। ( )

(ii) घनाभ के सभी किनारे समान होते हैं। ( )

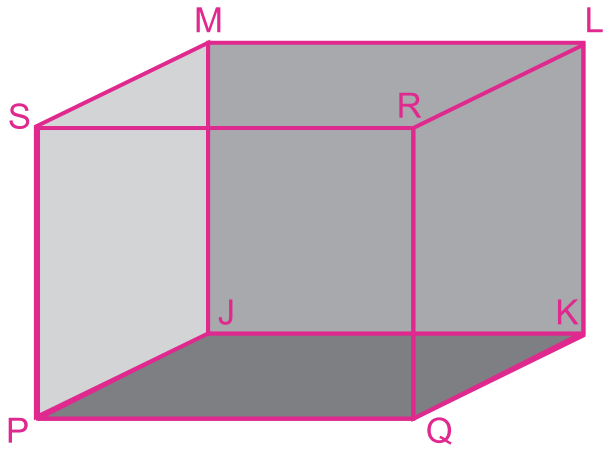
(iii) एक बेलनाकार डिब्बे का ढ़क्कन हटा दिया जाए तो एक वृत्ताकार तथा एक वक्राकार पृष्ठ शेष रहते हैं। ( )

(iv) शंकु के दोनों सिरे वृत्ताकार होते हैं।

(v) घनाभ के किनारों को काटकर घन बनाया जा सकता है।

(vi) चूड़ी का आकार गोल होता है।

4. चित्रानुसार घनाभ के शीर्षों, किनारों तथा फलकों के नाम लिखिए।



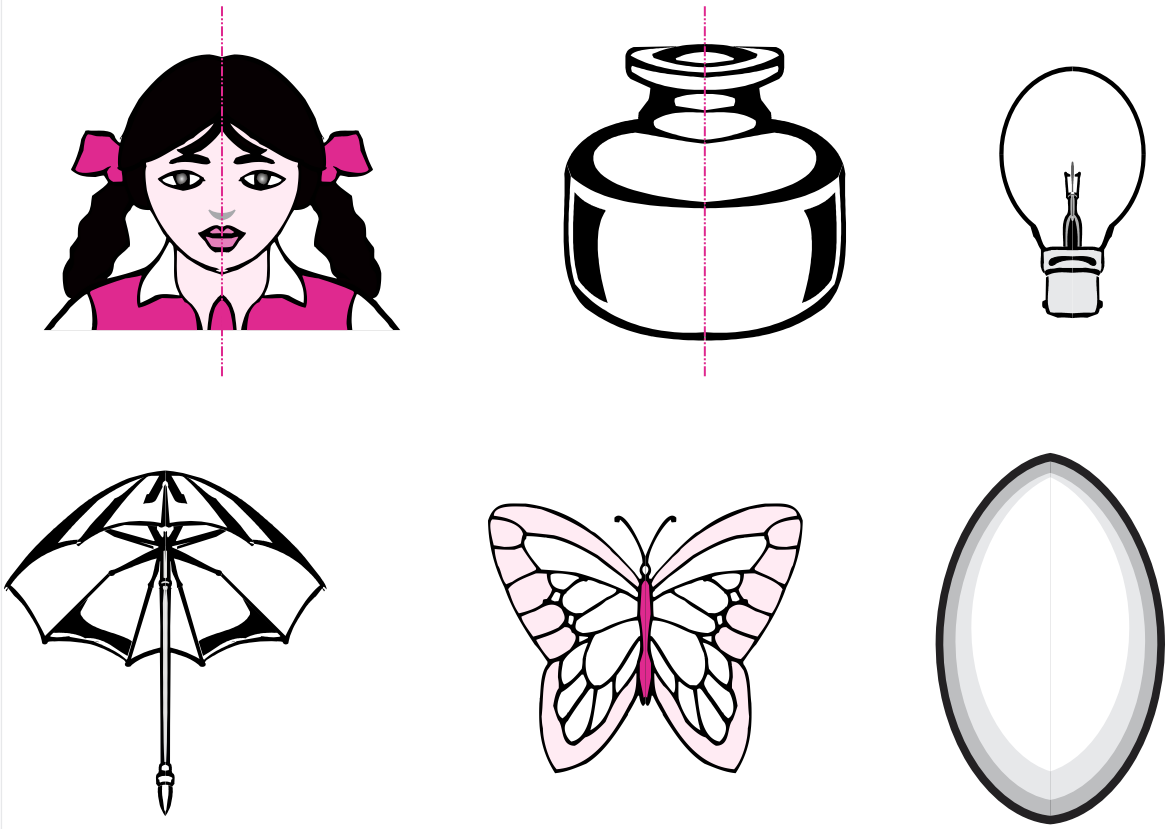
हमने सीखा

1. ठोसों की ऐसी सतहें जिनसे वह सरकती है वे सपाट सतह तथा जिनसे लुढ़कती है वह वक्र सतह कहलाती है।
2. ऐसे ठोस जिनमें लम्बाई तथा चौड़ाई के साथ–साथ ऊँचाई अथवा गहराई भी होती है इन्हें त्रिविमीय (3D) आकृतियाँ कहते हैं।
3. घनाभ का प्रत्येक सपाट पृष्ठ आयताकार होता है, घनाभ में 6 फलक, 8 शीर्ष व 12 किनारे होते हैं।
4. घन का प्रत्येक फलक वर्गाकार होता है, घन में भी 6 फलक, 8 शीर्ष व 12 किनारे होते हैं।
5. ऐसी आकृतियाँ जिनकी दो सतहें वृत्ताकार व एक सतह वक्राकार हो बेलन कहते हैं।
6. ऐसी आकृतियाँ जिसका एक पृष्ठ वत्ताकार तथा एक वक्राकार पृष्ठ हो, शंकु कहलाती हैं।
7. ऐसी आकृतियाँ जिनकी सम्पूर्ण सतह वक्राकार होती है। जैसे गेंद, कंचे, फुटबॉल। ये सभी आकृतियाँ गोलाकार हैं।
8. ऐसी आकृतियाँ जिनकी सभी सतहें सपाट होती है तथा प्रत्येक सतह एक बहुभुज (त्रिभुज, चतुर्भुज) होती है, बहुफलक कहलाती हैं।

अध्याय 11

सममिति

11.1 नीचे दिए गए चित्रों को ध्यान से देखिए।



आकृति 11.1

निम्न प्रश्नों के उत्तर अपने साथियों से चर्चा करके दीजिए।

(i) दो चित्रों में बिंदु रेखा खींची गई है यह चित्र को कितने भागों में बाँटती है?

(ii) क्या ये भाग एक समान हैं?

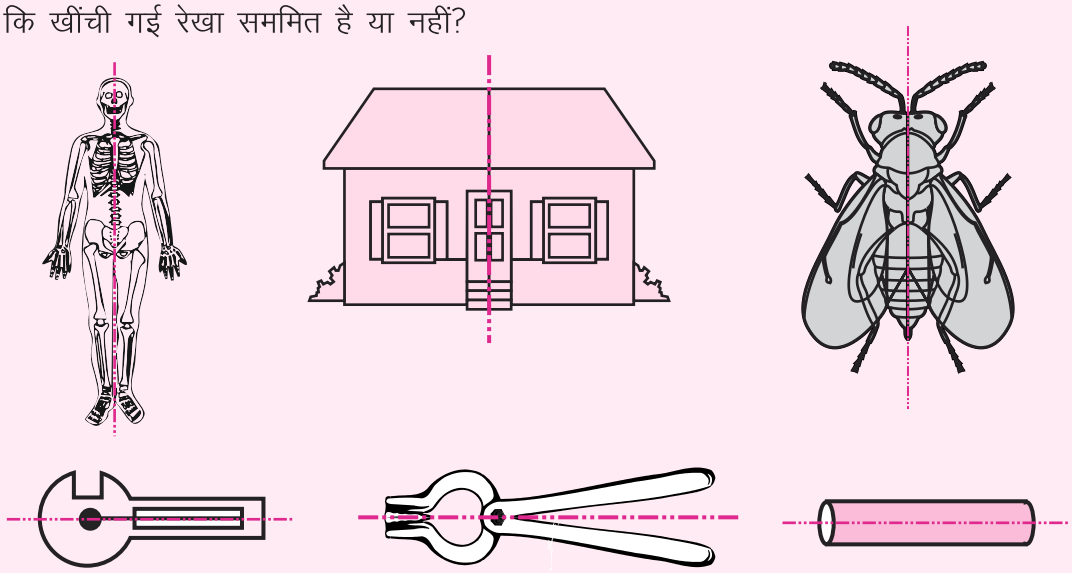
(iii) क्या चित्र में ऐसी और रेखाएँ खींची जा सकती हैं?

(iv) क्या सभी चित्रों में ऐसी रेखाएँ खींची जा सकती हैं? रेखाएँ खींचकर देखिए।

आप पाएँगे कि बिंदु रेखा चित्र को ठीक दो बराबर भागों में बाँटती है। ऐसी रेखाएँ सममित रेखाएँ कहलाती है तथा ऐसे चित्र सममित चित्र कहलाते हैं।

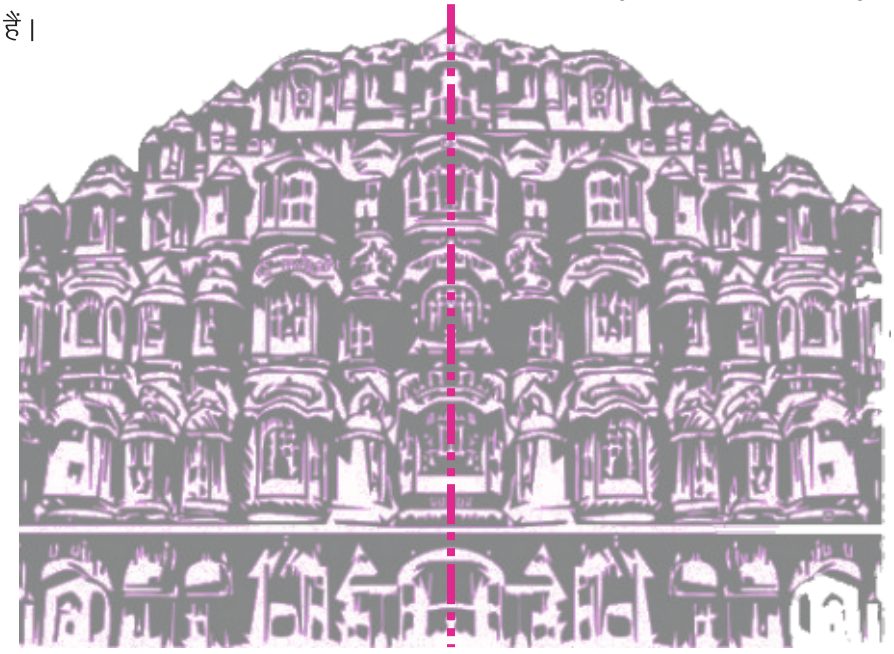
करो और सीखो

नीचे कुछ चित्र दिए गए हैं तथा उनमें एक रेखा खींची गई है। प्रत्येक के लिए बताइए कि खींची गई रेखा सममित है या नहीं?



आकृति 11.2

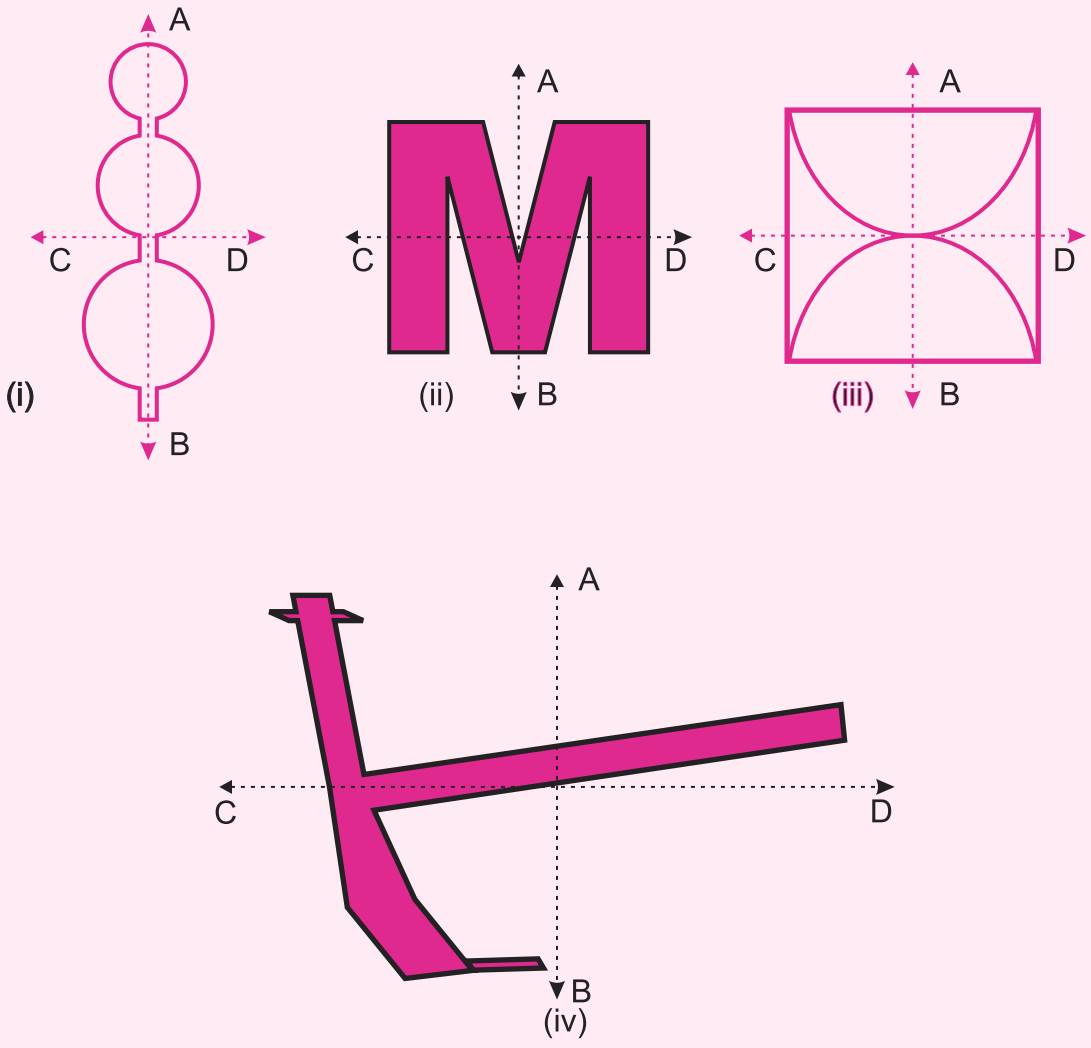
सममित रेखा चित्र को दो एक जैसे भागों में बाँटती है। यह खड़ी, आड़ी अथवा तिरछी भी हो सकती है। सममित रेखा से मोड़ने पर आकृति का एक भाग दूसरे भाग को पूर्णतः ढ़क लेता है। कई बार यह रेखा काल्पनिक तथा कई बार प्रत्यक्ष होती है। सामान्यतया सममित आकृतियाँ असममित आकृतियों से सुन्दर दिखाई देती हैं।



आकृति 11.3

विश्व प्रसिद्ध हवामहल भी कई कारणों के साथ–साथ सममिति की वजह से अत्यधिक सुन्दर दिखाई देता है।

करो और सीखो



आकृति 11.4

(i) प्रत्येक चित्र में सममित रेखाएँ बताइए।

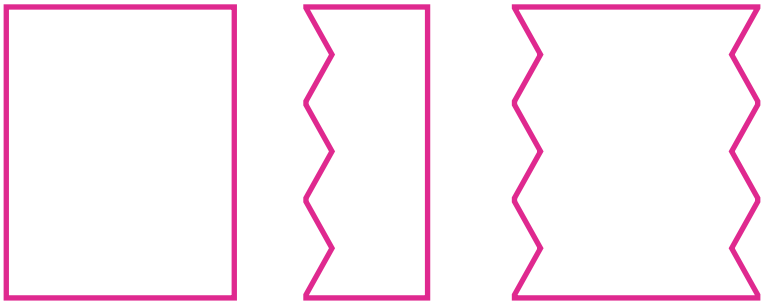
(ii) क्या कोई चित्र ऐसा है जिसमें दोनों रेखाएँ सममित रेखाएँ हैं?

(iii) क्या सभी चित्रों में AB (खड़ी रेखा) सममित रेखा है?

(iv) क्या ऐसा कोई चित्र है जिसमें एक भी सममित रेखा नहीं है?

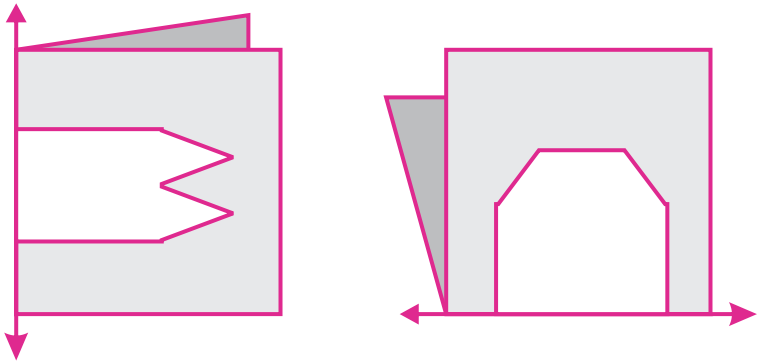
11.2 सममिति देखना

एक रंगीन कागज लेकर बीच से मोड़िए। चित्र में दिखाए अनुसार कैंची से कोई आकृति किनारे से काटिए। कागज को खोलिए और देखिए।



यही काम कागज को एक से अधिक बार मोड़ कर कीजिए। आपको मजेदार आकृतियाँ मिलेंगी।

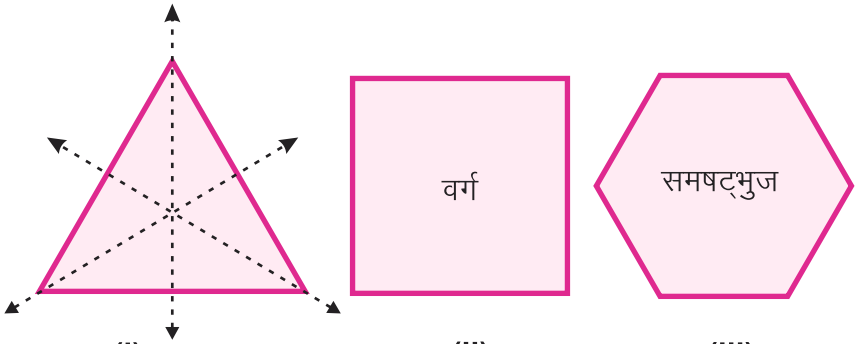
यहाँ पर मुड़ी हुई शीट की कुछ आकृतियाँ दी गई हैं जिनकी तह पर आकृतियाँ बनाई गई हैं। प्रत्येक में पूर्ण आकृति की रूपरेखा खींचिए जो डिजाइन काटने के बाद दिखाई देगी।



11.3 एक से अधिक सममित रेखाएँ

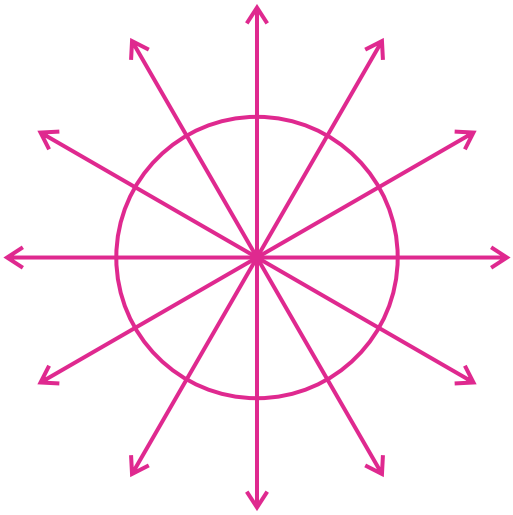
ऊपर दिए उदाहरण से हमने पाया कि सममित रेखा उर्ध्वाधर, क्षैतिज अथवा तिरछी भी हो सकती है। कई चित्रों में सममित रेखा एक से अधिक भी हो सकती है।

नीचे दिए गए चित्रों में कितनी सममित रेखाएँ बनाई जा सकती है?



आकृति 11.5

उक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि किसी चित्र में एक से अधिक सममित रेखाएँ हो सकती हैं यह रोचक बात है कि समबाहु त्रिभुज में तीन, वर्ग में चार तथा समपंचभुज में पाँच सममित रेखाएँ बनती हैं। इसी प्रकार सम बहुभुज में सममित रेखाओं की संख्या सम बहुभुज की भुजाओं की संख्या के साथ बढ़ती जाएगी। अब बताइए 12 भुजा वाले सम बहुभुज में कितनी सममित रेखाएँ होगी? **इसी प्रकार वृत्त अनंत भुजाओं वाला बहुभुज है अतः इसकी अनंत सममित रेखाएँ हो सकती हैं।**



आकृति : 11.6

प्रश्नावली 11

1 (a) नीचे दिए गए चित्रों में सममित आकृतियाँ छाँटिए।



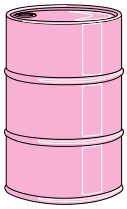
(i)



(ii)



(iii)



(iv)



(v)



(vi)



(vii)

(b) वे आकृतियाँ बताइए जिनमें एक से अधिक सममित रेखाएँ हैं।

2. नीचे अंग्रेजी वर्ण माला के कुछ अक्षर दिए गए हैं प्रत्येक के लिए सममिति की जाँच कीजिए।

A B C E O G H K N W I Z

(i) कौनसे वर्णाक्षर सममित नहीं हैं?

(ii) कौनसे वर्णाक्षर सममित हैं?

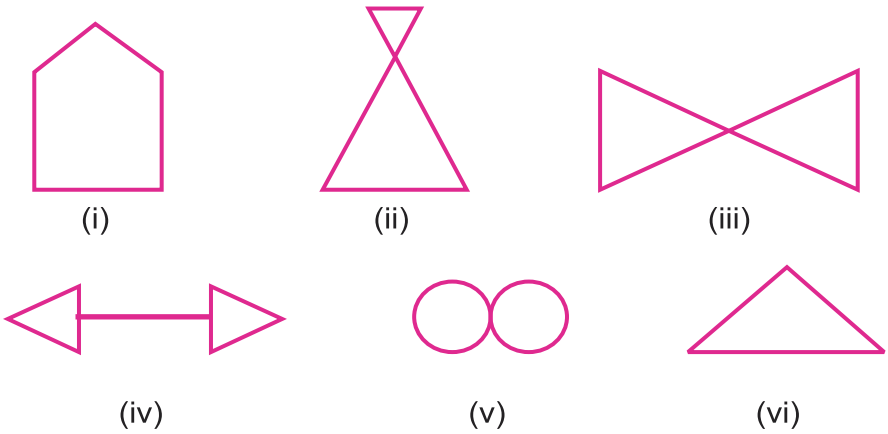
(iii) किन वर्णाक्षरों में उर्ध्वाधर सममित रेखा है?

(iv) किन वर्णाक्षरों में क्षैतिज सममित रेखा है?

(v) किन वर्णाक्षरों में उर्ध्वाधर एवं क्षैतिज दोनों सममित रेखाएँ हैं?

(vi) किन वर्णाक्षरों में दो से अधिक सममित रेखाएँ हैं?

3. नीचे दी गई आकृतियों में सममित रेखाओं की संख्या बताइए।



(i) (ii) (iii)

(iv) (v) (vi)

4. दो सममित रेखाओं वाली अलग–अलग आकृतियाँ बनाइए।

5. अपने घर एवं विद्यालय में उपलब्ध 10 वस्तुओं की सूची बनाकर इनके चित्र अपनी कॉपी में बनाइए तथा बताइए इनमें से कौन–कौनसी सममित हैं? इनकी सममित रेखा भी बनाइए।

हमने सीखा

1. एक आकृति में सममित रेखा होती है यदि वह रेखा आकृति को दो एक–समान भागों में विभक्त करे अर्थात् उस रेखा के अनुदिश उस आकृति को मोड़ने पर उसके दोनों भाग परस्पर संपाती हो जाएँ।

2. किसी समबहुभुज में उतनी ही सममित रेखाएँ होगी जितनी उसमें भुजाओं की संख्या होगी।

समबहुभुज	सममित रेखाओं की संख्या
समबाहु त्रिभुज	3
वर्ग	4
समपंचभुज	5
समषट्भुज	6

अध्याय 12

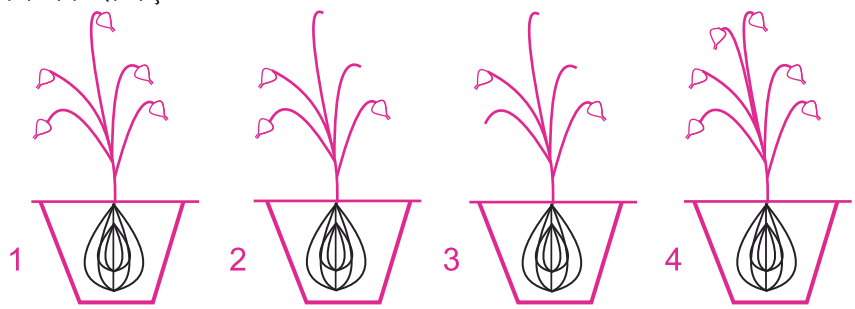
बीजगणित

12.1 पूर्व में हमने अंक गणित में 0,1,2,3,.....8,9 अंको के द्वारा बनी विभिन्न संख्याएँ और उन पर विभिन्न संक्रियाओं का अध्ययन किया है। अपने दैनिक जीवन की अधिकांश समस्याओं को हल करने में संख्याओं का उपयोग हम देख चुके हैं। संख्याओं से संबंधित जटिल समस्याओं का हल कई बार अंकगणितीय विधियों से नहीं हो पाता अथवा समस्याओं के हल को प्रभावशाली ढंग से प्रस्तुत करने हेतु अन्य तरीकों की आवश्यकता होती है।

अतः अंकगणित के व्यापकीकरण के लिए बीजीय राशियों का प्रयोग किया जाता है। यहाँ हम इन संख्याओं को अलग तरीके से लिखने के बारे में अध्ययन करेंगे, जिसमें संख्याओं को दर्शाने के लिए हिन्दी अक्षरों जैसे –(क, ख, ग, घ, य, र, ल,...) अथवा अंग्रेजी अक्षरों (a, b, c, x, y, z...) आदि का उपयोग करते है। इन्हें **बीज या बीजांक** कहते है।

12.2 चर की अवधारणा

निम्न चित्र को देखिए–



चित्र में कुछ बीजों को रोपा गया है। हर बीज से प्राप्त फलों की संख्या निम्न प्रकार है –

बीज 1	फल संख्या = 5
बीज 2	फल संख्या = 3
बीज 3	फल संख्या = 2
बीज 4	फल संख्या = 6

यदि हम प्राप्त फलों की संख्या को अंग्रेजी के वर्णाक्षर x से प्रदर्शित करें तो–

बीज 1 के लिए	$x = 5$
बीज 2 के लिए	$x = 3$
बीज 3 के लिए	$x = 2$
बीज 4 के लिए	$x = 6$

इस प्रकार x का मान (फलों की संख्या) विभिन्न बीजों के लिए भिन्न–भिन्न प्राप्त होता है। जिसे चर (परिवर्तनशील) राशि कहते हैं।

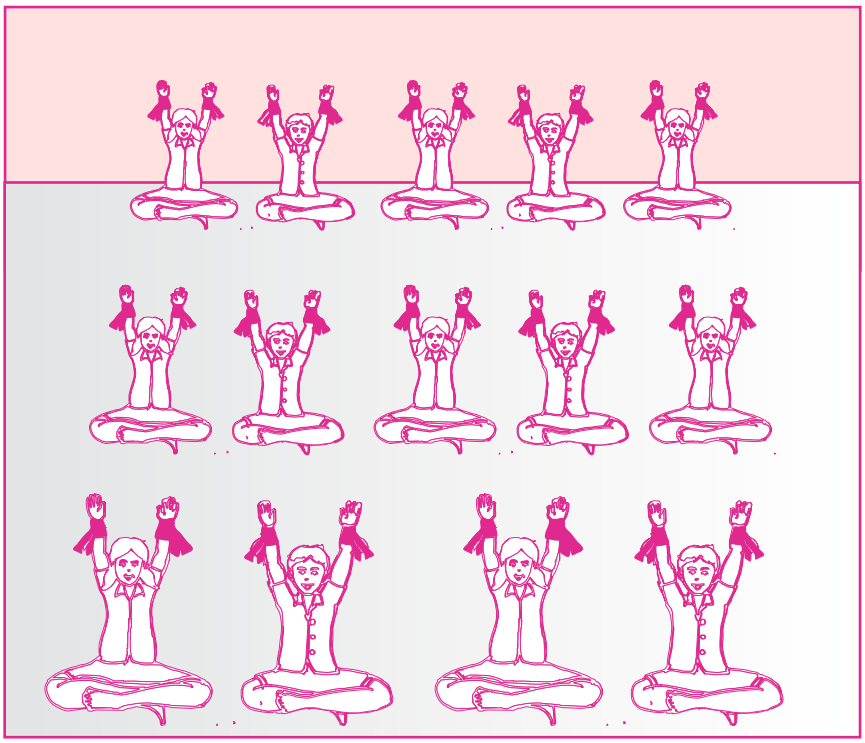
इस प्रकार अलग–अलग परिस्थितियों में जिसका मान बदलता हैं उसे **चर राशि** तथा अंकगणितीय संख्याओं (जिनका मान स्थिर होता है) को **अचर राशि** कहा जाता है।

करो और सीखो

1. यदि उम्र को हम y वर्षों में व्यक्त करें तो अपने 10 साथियों की उम्र के लिए y का मान लिखिए।

12.2.1 योग की कक्षा

आप के विद्यालय में योग का कालांश हो रहा है। सभी बच्चों के हाथ में एक–एक रिबन बंधा है तथा सभी बच्चे हाथ ऊपर करके योग कर रहे हैं। एक विद्यार्थी के दोनों हाथों में 2 रिबन है। अतः चित्र की सहायता से तालिका में भरिए।



बच्चों की संख्या	1	2	3	4	5						
रिबन की संख्या	2	4	6	8	10						

तालिका 12.1

10 बच्चों के पास कितने रिबन होंगे?

सारणी के अनुसार 2 x 10 होंगे।

अतः रिबन की संख्या = 2 x बच्चों की संख्या

यदि बच्चों की संख्या n हो तो

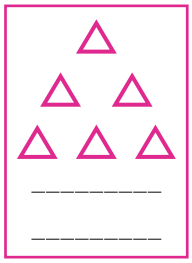
रिबनों की संख्या 2 x n

n =1, 2, 3, 4, ----------

सारणी के अनुसार जैसे–जैसे n का मान बढ़ता है, रिबन की संख्या भी बढ़ती जाती है।

12.2.2 पैटर्न में सामान्यीकरण के रूप में

माचिस की तीलियों का खेल पिछली कक्षा में हमने कुछ प्रतिरूप देखे थे और चीनू और छोटू माचिस की तीलियों के प्रतिरूप बना रहे हैं। उन्होंने त्रिभुज की आकृतियाँ बनाने का निर्णय लिया। उन्होंने दो त्रिभुज बनाए उनको देख वहाँ रामू आया और तीसरा त्रिभुज बनाया। उसने चीनू से कहा कि आगे के त्रिभुजों के लिए कितनी तीलियों की आवश्यकता पड़ेगी ? आगे एक सारणी बनाते हैं–



आकृति 12.1

त्रिभुजों की संख्या	1	2	3	4	5	6
तीलियों की संख्या	3	6	9	12	15	18

तालिका 12.2

इसी प्रकार 8 त्रिभुज का प्रतिरूप बनाने के लिए कितनी तीलियों की आवश्यकता होगी?

अर्थात् तीलियों की संख्या = 3 x त्रिभुजों की संख्या

यदि त्रिभुजों की संख्या T हो तो

तीलियों की संख्या = 3 x T

यहाँ T चर राशि का एक उदाहरण है जिसका मान स्थिर नहीं है।

T = 1, 2, 3, 4 ...

12.3 बीजीय व्यंजक

तीलियों का खेल– राजू ने टेबल पर एक तीली लगाई। पप्पू ने दो तीली और लगाकर एक खुला डिब्बा बनाया। कविता ने भी पप्पू की तरह दो और तीली लगाई और दूसरा खुला डिब्बा साथ में बनाया। इसी प्रकार संजू ने भी कविता की तरह दो तीली लगाई। तीसरा खुला डिब्बा बन गया। इसी तरह 8 डिब्बे बनाने में कितनी तीलियाँ चाहिए आओ सारणी बनाते हैं

डिब्बों की संख्या	1	2	3	4	--	n
तिलियों की संख्या	3	5	7	---	--	---

तालिका 12.3

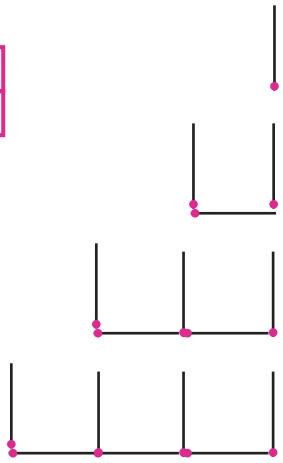
इस प्रकार हमें प्रत्येक नये डिब्बे के लिये 2 तीलियाँ जोड़नी पड़ी जैसे–

पहला डिब्बा = 1 + 2 x 1

दूसरा डिब्बा = 1 + 2 x 2

तीसरा डिब्बा = 1 + 2 x 3

n डिब्बों के लिए = 1 + 2 x n = 1 + 2 n यहाँ n चर राशि है।



आकृति 12.2

(1+2n) एक बीजीय व्यंजक का उदाहरण है जब बीजांकों की जोड़, घटा, गुणा व भाग किया जाता है जैसे (1+2n) व्यंजक में n का 2 से गुणा कर 1 जोड़ा गया है, तो बीजीय व्यंजक बनता है। कोई चर या अचर संख्या या समूह मौलिक गणितीय संक्रियाओं के चिह्नों से युक्त होने पर वह कथन बीजीय व्यंजक कहलाता है। ये एक पदीय, द्विपदीय आदि बहुपदीय होते हैं।

नीचे आने वाली कुछ पंक्तियों में हम देखेंगे कि कैसे व्यंजक बनाए जाते हैं?

	व्यंजक	कैसे बनाया गया
(i)	2 + 7	2 में 7 जोड़ने पर
(ii)	x + 9	x में 9 जोड़ने पर
(iii)	P + q	P में q जोड़ने पर
(iv)	a - 3	a में 3 घटाने पर
(v)	3 - b	3 में b घटाने पर
(vi)	x - y	x में y घटाने पर
(vii)	3 x x	3 में x का गुणा करने पर
(viii)	$\frac{13}{a}$	13 में a का भाग देने पर
(ix)	$\frac{x}{y}$	x में y का भाग देने पर

इसी प्रकार के दस अन्य सरल व्यंजक लिखिए और बताइए कि वे किस प्रकार बनाए गए हैं ?

करो और सीखो

1. बीजीय व्यंजक के रूप में लिखिए।
   (i) 5 और किसी संख्या का योग _____
   (ii) किसी संख्या और 7 का अंतर _____
   (iii) किसी संख्या का 3 गुना _____
   (iv) किसी संख्या के 6 गुने में से 12 कम _____
   (v) किसी संख्या का आधा _____
   (vi) किसी संख्या के एक तिहाई में से 200 कम _____
2. श्वेता के गणित में 75 अंक हैं विज्ञान के अंक पता नहीं है उन्हे x मानकर कुल अंक बताइए .....
3. साक्षी के पास कुछ टॉफियाँ है और आशु के पास उससे चार गुनी टॉफियाँ है तो दोनों के पास कुल कितनी टॉफियाँ हैं? .....

कथन दिए जाने पर व्यंजक बनाना–

	कथन	व्यंजक
(i)	z में से 7 घटाने पर	z - 7
(ii)	p में 4 घटाने पर	p - 4
(iii)	a में 16 घटाने पर	a - 16
(iv)	y में 3 का भाग देने पर	$\frac{y}{3}$

	कथन	व्यंजक
(v)	m में 7 का गुणा करने पर	7 m
(vi)	x में 3 का गुणा करने पर	$3x$
(vii)	5 में x का गुणा करने पर	$5x$

करो और सीखो

नीचे कुछ बीजीय व्यंजक एवं उनके सामने उनकी परिस्थितियाँ दी गई है प्रत्येक बीजीय व्यंजक के लिए उपर्युक्त परिस्थितियों से मिलान किजिए।

(i) $x+4$ (A) प्रशान्त के पास कमली से 4 गुना धन है।

(ii) $x-4$ (B) मालती के पास सीमा से 4 रू. अधिक है।

(iii) $4-x$ (C) मेरा भार नन्हे के भार से चार किग्रा कम है।

(iv) $4y$ (D) मेरे पास 4 रूपये थे उसमें से कुछ रूपये खर्च हो गए तो मेरे पास धन शेष बचा।

(v) $\frac{y}{4}$ (E) बंशी के पास कुछ कंचे थे उन्हें उसने 4 दोस्तों में बराबर बाँट दिए तो प्रत्येक को मिले कंचों की संख्या।

प्रश्नावली 12.1

1. नीचे दिए गए वर्णों के प्रतिरूप तीलियों की सहायता से बनाइए। प्रतिरूप के चित्र अपनी कॉपी में बनाइए। प्रत्येक प्रतिरुप में तीलियों की संख्या ज्ञात करने के लिए नियम बनाइए (आप नियम बनाने के लिए बीजांकों का उपयोग कर सकते हैं यथा a, b, x, y आदि)

   (i) T का प्रतिरूप T, TT, ...

   (ii) N का प्रतिरुप N, NN, ...

   (iii) W का प्रतिरूप W, WW, ...

2. वृक्षारोपण कार्यक्रम में विद्यालय में पौधे लगाए जाने हैं। प्रत्येक पंक्ति में चार पौधे लगते हैं तो पौधों की संख्या को पंक्तियों के पदों में लिखिए।

3. रानू, लीला से 5 वर्ष छोटी है।

   (i) लीला की आयु x लेकर रानू की आयु x के पदों में लिखिए।

   (ii) रानू की आयु P लेते हुए लीला की आयु P के पदों में लिखिए।

4. एक पेन का मूल्य 5 रु. है, मदन के पास कुछ धन हैं वह उस समस्त धन से पेन खरीदता है। पेनों की संख्या को धन के पदों में व्यक्त कीजिए।

5. निम्न तालिका को पूर्ण कीजिए।

x	1	2	3	4	5	---	---
$2x+3$	5	7	---	---	--	15	---

12.4 बीजीय व्यंजकों के नियम

12.4.1 क्रम विनिमेयता

(i) योग में :– हम जानते हैं किन्हीं भी दो पूर्ण संख्याओं का योगफल क्रम बदलने से नहीं बदलता है।

$$2 + 5 = 5 + 2$$

संख्याओं का यह गुण योग की क्रम विनिमेयता कहलाता है अर्थात् संख्याओं का क्रम बदलने से उनका योगफल वही रहता है इसी प्रकार यदि x तथा y दो चर संख्याएँ हैं तो

$$\boxed{x + y = y + x}$$

(ii) गुणन में :– इसी प्रकार दो संख्याओं के गुणन के लिए

$$5 \times 2 = 2 \times 5 = 10$$

अर्थात् दो संख्याओं के गुणा में संख्याओं का क्रम बदलने से गुणनफल पर कोई फर्क नहीं पड़ता यह गुणन की क्रम विनिमेयता कहलाती है।

$$\boxed{x \times y = y \times x}$$

12.4.2 वितरणता– मान लीजिए हमें 8 x 35 को ज्ञात करना है और हमें 35 का पहाड़ा नहीं आता है, तो इसकी गणना निम्न प्रकार कर सकते है –

$$\begin{aligned} 8 \times 35 &= 8 \times (30 + 5) \\ &= 8 \times 30 + 8 \times 5 \\ &= 240 + 40 \\ &= 280 \end{aligned}$$

इसी प्रकार व्यापक रूप में चरों x, y व z के लिए

$$\boxed{x \times (y + z) = x \times y + x \times z}$$

यह नियम संख्याओं के योग पर गुणन की वितरणता कहलाती है।

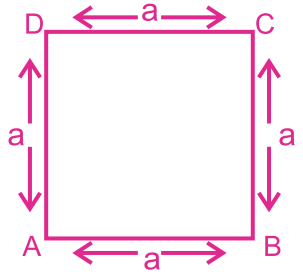
12.4.3 ज्यामिति के नियम (बीजीय रूप में)

हम क्षेत्रमिति में वर्ग एवं आयत के परिमाप भी बीजीय व्यंजक के रूप में लिख सकते हैं। हम जानते हैं कि किसी भी बहुभुज का परिमाप उसकी सभी भुजाओं का योग होता है।

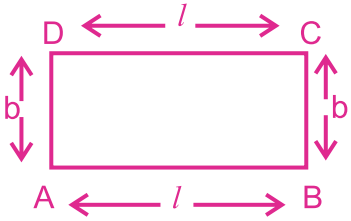
(i) वर्ग का परिमाप

वर्ग ABCD का परिमाप

$$\begin{aligned} &= AB + BC + CD + DA \\ &= a + a + a + a \\ &= 4a \\ &= 4 \times \text{भुजा} \end{aligned}$$



(ii) आयत का परिमाप :– आयत में आमने सामने की भुजाएँ बराबर होती हैं। AB व CD को हम लम्बाई l तथा BC व DA को चौड़ाई b ले तो



अतः आयत का परिमाप

= AB की लम्बाई +BC की लम्बाई

+CD की लम्बाई +AD की लम्बाई

अतः आयत का परिमाप $p = l + b + l + b$

$= 2l + 2b$

$= 2(l + b)$

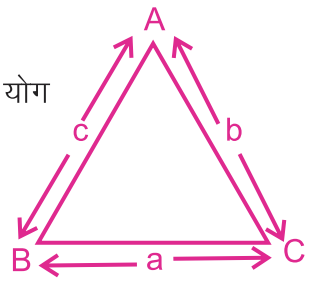
जहाँ l व b चर है जिनका मान अलग–अलग आयत में अलग–अलग होता है

(iii) त्रिभुज का परिमाप

त्रिभुज का परिमाप = तीनों भुजाओं की लम्बाईयों का योग

= BC + AC + AB

= a + b + c



प्रश्नावली 12.2

1 संख्या 3, 7 और 4 से संख्यात्मक व्यंजक बनाइए।

(i) केवल जोड़ एवं घटाव के चिह्नों का प्रयोग करते हुए

(ii) केवल गुणा व जोड़ का प्रयोग करते हुए

2. नीचे दिए व्यंजकों में से प्रत्येक के लिए बताइए कि वे बीजीय व्यंजक हैं या संख्यात्मक व्यंजक।

(i) $3x + 5$ (ii) $5 \times 4 + 7$ (iii) $3 + 4 \times 3 + 5$ (iv) $2x + 1$ (v) $\frac{x}{2} + 5 - x$ (vi) $3x$

3. निम्न व्यंजकों को ध्यान में से देखिए तथा बताइए प्रत्येक को बनाने में जोड़, घटा, गुणा और भाग में से किन–किन संक्रियाओं का प्रयोग हुआ है। सम्बन्धित संक्रिया वाले स्तम्भ में सही/गलत का निशान लगाइए।

क्र.स.	व्यंजक	जोड़	घटाव	गुणा	भाग
1	$x + 5$				
2	$7m + 3$				
3	$y - 3x$				
4	$x - y - z$				
5	$3x - 10 - \frac{z}{5}$				
6	$\frac{y}{17}$				

4. निम्नलिखित स्थितियों के लिए बीजीय व्यंजक लिखिए।

(i) a में 7 जोड़ना (ii) b में से 10 घटाना (iii) x का 4 से गुणा

(iv) x में 4 से भाग (v) 7 में से x घटाना (vi) 10 में q का भाग

5. निम्नलिखित स्थितियों के लिए व्यंजक लिखिए।

(i) 2n में 15 जोड़ना (ii) $2x$ में 15 घटाना

(iii) p के दुगुने में 3 जोड़ना (iv) q के दुगुने में 3 घटाना

(v) y को 5 से गुणा कर उसमें से 11 घटाना

(vi) z को -3 से गुणा कर उसमें 11 जोड़ना

6. q, 5 व -3 का प्रयोग करते हुए बीजीय व्यंजक लिखिए।

7. यदि नाथू के पास x रुपये हैं, तो बताइए –

(i) बीना के पास नाथू के धन से दुगना धन है तो उसके पास कितना धन है ?

(ii) नाथू ने 150 रुपयों की पुस्तकें खरीदी उसके पास कितना धन बचा ?

(iii) नाथू के प्रारम्भिक धन का आधा सीमा के पास है सीमा के पास कितने रुपये हैं ?

(iv) मिली के पास नाथू के धन से 3 गुना धन है।

8. एक त्रिभुज की ऊँचाई उसके आधार के दुगुने से 5 अधिक है। उसकी ऊँचाई क्या होगी यदि आधार b है।

9. यदि विमल की वर्तमान आयु p वर्ष है, तो बताइए –

(i) आज से 10 वर्ष पूर्व उसकी उम्र क्या थी ?

(ii) 5 वर्ष पश्चात् विमल की आयु क्या होगी ?

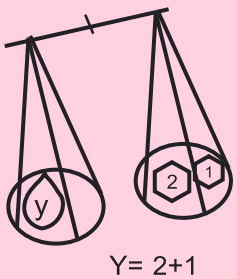
(iii) विमल की चाची उससे 3 गुना उम्र की है। चाची की उम्र क्या होगी ?

(iv) विमल की आयु के दुगुने से 5 कम करने पर विमल की माँ की आयु प्राप्तहोती है। माँ की आयु क्या होगी?

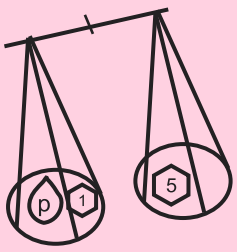
12.5 समीकरण से परिचय

सीमा ने एक पपीता खरीदा जिसे फल बेचने वाले ने तराजू के एक पलड़े में रखा और दूसरे पलडे में 2 किग्रा का बाट रखने पर तुला संतुलित हुई तो उसने पपीते का तौल 2 किग्रा बताया। उस पपीते का तौल चर राशि x मानकर हम इसे एक गणितीय वाक्य $x = 2$ के रूप में लिख सकते हैं।

निम्न स्थितियों में गणितीय वाक्य देखिए।



Y= 2+1



P+1=5

ये गणितीय वाक्य समीकरण कहलाते हैं।

12.5.1 कथन से समीकरण

निम्नलिखित कथनों से बने समीकरण देखिए।

किसी संख्या का दुगुना 10 है	$2n = 10$
किसी संख्या के तीन गुने से पाँच अधिक, 17 है।	$3n + 5 = 17$
किसी संख्या के आधे से 3 कम 6 है।	$\frac{x}{2} - 3 = 6$
किसी संख्या के दुगने में 15 जोड़ने पर 51 हो जाता है।	----------

12.5.2 समीकरण से कथन

$3x = 21$	किसी संख्या का तीन गुना 21 है।
$2x - 7 = 19$	किसी संख्या के दुगुने से 7 कम 19 होता है।
$23 = 4x + 3$	23 किसी संख्या के चार गुने से 3 अधिक है।
$3x - 7 = 11$	.....

अतः चर एवं अचरों में सम्बन्ध जिसमें गणितीय संक्रियाओं के साथ–साथ **"="** का प्रयोग किया जाता है **समीकरण** कहलाता है। समीकरण में दो पक्ष **बायाँ पक्ष** एवं **दायाँ पक्ष** होते हैं जिनको समता के चिह्न से पृथक किया जाता है।

12.5.3 समीकरण का हल

निम्नलिखित समीकरण में x के स्थान पर क्या मान रखें कि समीकरण संतुलित हो जाए। आओ करके देखें।

बायाँ पक्ष $x + 1 = 5$ दायाँ पक्ष

x का मान	बायाँ पक्ष	दायाँ पक्ष	निष्कर्ष
0	0 + 1 = 1	5	बराबर नहीं
1	1 + 1 = 2	5	बराबर नहीं
2	2 + 1 = 3	5	बराबर नहीं
3	3 + 1 = 4	5	बराबर नहीं
4	4 + 1 = 5	5	बराबर

अतः x का मान 4 रखने पर बायाँ पक्ष और दायाँ पक्ष बराबर हो जाता है अतः x का मान 4 रखने पर समीकरण संतुष्ट हो जाता है।

एक और समीकरण $3x-2=2x+1$ पर विचार करते हैं

x का मान	बायाँ पक्ष	दायाँ पक्ष	निष्कर्ष
0	$3\times0-2=-2$	$2\times0+1=1$	बराबर नहीं
1	$3\times1-2=3-2=1$	$2\times1+1=2+1=3$	बराबर नहीं
2	$3\times2-2=6-2=4$	$2\times2+1=4+1=5$	बराबर नहीं
3	$3\times3-2=9-2=7$	$2\times3+1=6+1=7$	बराबर

अतः समीकरण में चर के संभावित मान रखने पर जो मान उसको संतुष्ट करता है वह समीकरण का हल कहलाता है। इस विधि को हम प्रयत्न एवं भूल विधि कहते हैं।

प्रश्नावली 12.3

1. नीचे कुछ गणितीय कथन लिखे गए हैं। बताइए इनमें से कौन–कौन समीकरण हैं। यह भी बताइए कि जो समीकरण हैं उनमें चर क्या है?

(i) $5x=0$ (ii) $t-7>5$ (iii) $4\div2=2$

(iv) $2x-1<5$ (v) $7=14\times2+q$ (vi) $15000=2t+3500$

2. समीकरण $10y=50$ में चर के मान $y=10, y=8$ तथा $y=5$ रख कर देखिए किस मान से समीकरण सन्तुष्ट होता हैं।

3. नीचे समीकरण के संभावित हल दिए गए हैं समीकरण में मान रखकर देखिए क्या यह दिए गए चर के मान के लिए सन्तुष्ट है ?

(i) $3x-7=5$ $x=5$ (ii) $3p+2=8$ $p=2$

4. दिए गए समीकरण के लिए सारणी को पूरा कीजिए व समीकरण का हल ज्ञात कीजिए।

(i) $3x=15$

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$3x$	0	3						

(ii) $\frac{P}{3}=4$

P	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{P}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$									

(iii) $x - 3 = 5$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$x-3$	-2	-1	0								

हमने सीखा

1. हमने तीलियों की सहायता से प्रतिरूप बनाना सीखा। हमने किसी आकार को कई बार बनाने के लिए आवश्यक तीलियों की संख्या के व्यापक नियम बनाए।
2. चर राशियाँ कई मान ग्रहण करती हैं। इनका मान स्थिर नहीं रहता है जैसे वृत्त की त्रिज्या कुछ भी ले सकते हैं परन्तु एक चतुर्भुज के चारों कोणों का योग एक अचर राशि है यह परिवर्तित नहीं होता है।
3. चर राशियों को हम x, y, z, p, q आदि द्वारा प्रदर्शित करते हैं।
4. हमने चर राशियों एवं अचर राशियों में संक्रियाओं का उपयोग कर व्यंजक बनाए।
   जैसे $x+4$, $x-3$, $3p$, $4q$ आदि।
5. चर राशियों में क्रमविनिमेयता योग एवं गुणन में लागू होती है।
   $a+b=b+a$ एवं $a \times b = b \times a$
6. समीकरण चर पर एक प्रतिबन्ध होता है इसे एक चर वाला व्यंजक बराबर एक स्थिर संख्या के रूप में भी ले सकते हैं।
   जैस $x+4=8$ है।
7. एक चर वाले समीकरणों को प्रयत्न एवं भूल विधि द्वारा हल करना सीखा।
   इसमें हम चर को विभिन्न मान तब तक देते हैं जब तक वह सही मान प्राप्त न कर लें जो समीकरण को संतुष्ट करता है।

अध्याय 13

अनुपात व समानुपात

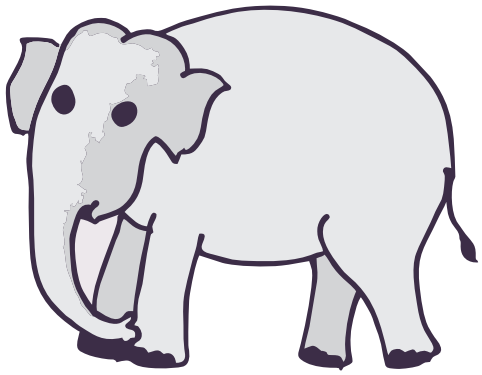
13.1 दलजीत तथा कान्हा दो पशुपालक हैं। दलजीत के पास 50 गायें तथा कान्हा के पास 200 गायें हैं। दलजीत तथा कान्हा की गायों की संख्या में अन्तर द्वारा तुलना करने पर हम पाते हैं कि कान्हा के पास दलजीत से 200–50 =150 गायें अधिक हैं। इसी प्रकार दैनिक जीवन में हमें कई परिस्थितियों में तुलना करने की आवश्यकता होती है।

हम जानते है कि एक वयस्क हाथी का भार सामान्यतः 2000 किग्रा से 5000 किग्रा के बीच होता है। वहीं एक सामान्य वयस्क मनुष्य का भार 50 से 100 किग्रा के बीच होता है।

यदि दिए गए चित्र में आदमी का वजन 75 किग्रा और हाथी का वजन 2550 किग्रा हो तो इनके वजन की तुलना अन्तर के माध्यम से करने पर

2550 किग्रा – 75 किग्रा = 2475 किग्रा





यहाँ हम देखते है कि दोनों के वजन में अन्तर अधिक है। ऐसी परिस्थिति में अन्तर विधि द्वारा तुलना करना उचित नहीं होता है। यह तुलना हम निम्न प्रकार करके देखते हैं –

$$\frac{\text{हाथी का भार}}{\text{मनुष्य का भार}} = \frac{2550}{75} = \frac{34}{1}$$

अतः दिए गए हाथी का भार मनुष्य के भार का 34 गुना है।

अतः हम कह सकते है कि जब दो वस्तुओं की तुलना करते समय यदि उनमें गुणात्मक अन्तर अधिक हो तो भाग द्वारा तुलना करना अन्तर द्वारा तुलना करने से ज्यादा सार्थक है।

भाग द्वारा की गई तुलना को अनुपात कहा जाता है।

13.2 अनुपात की अवधारणा

यदि हकीम खां का वजन 25 किलो ग्राम और उसके पिता का वजन 75 किलो ग्राम है, तो पिता का वजन पुत्र के वजन से कितना गुना है?

$\frac{75 \text{ किग्रा}}{25 \text{ किग्रा}} = \frac{3}{1}$ अर्थात् यह तीन गुना हैं।

इस उदाहरण में हमने दो राशियों की तुलना ''कितने गुनी'' के रूप में की है यह तुलना अनुपात कहलाती है। तथा इसे '' : '' चिह्न द्वारा दर्शाते हैं।

करो और सीखो

1. एक पेन का मूल्य 10 रू है और पेंसिल का मूल्य 2 रू है। पेन के मूल्य का पेंसिल के मूल्य से अनुपात क्या होगा ?
2. रवि एक घंटे में 6 कि.मी. चलता है जबकि सूरज एक घंटे में 4 कि.मी. चलता है। रवि द्वारा तय की गई दूरी से सूरज द्वारा तय की गई दूरी का अनुपात बताइए ?

मीना के पास 15 रू है और शहनाज के पास 30 रू है तो

1. मीना के रूपये शहनाज के रूपये से कितने गुना है ?

$$\frac{\text{मीना के रूपये}}{\text{शहनाज के रूपये}} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2} \text{ (आधा)}$$

या 1 : 2

अतः मीना के पास शहनाज से आधे रूपये है।

2. शहनाज के रूपये मीना के रूपये से कितने गुना है ?

$$\frac{\text{शहनाज के रूपये}}{\text{मीना के रूपये}} = \frac{30}{15} = \frac{2}{1} \text{ (दो गुना)}$$

या 2 : 1

अतः शहनाज के पास मीना से दुगने रूपये है। इसका मतलब 1 : 2 व 2 : 1 दोनों अनुपात एक दूसरे से अलग हैं।

अतः भाग द्वारा तुलना करते समय किसकी तुलना किससे की जाती है यह ध्यान रखना भी जरूरी है।

निम्न उदाहरण को ध्यान में रखकर रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए –

पहली संख्या	दूसरी संख्या	दूसरी संख्या पहली संख्या से कितनी गुना है	अनुपात	पहली संख्या दूसरी संख्या से कितनी गुना है	अनुपात
2 सेब	6 सेब	3 गुना है	3 : 1	एक तिहाई है	1 : 3
500 ग्राम गुड़	1000 ग्राम गुड़	.....	.....	.....	.....
टी शर्ट 200 रू	कोट 1000 रू	.....	.....	.....	.....

हामिद के पास 5 बकरियाँ है, तथा कालू के पास 8 साईकिलें हैं। क्या इनको अनुपात के रूप में दर्शाया जा सकता है? सोचिए।

बकरियों की संख्या तथा साइकिलों की संख्या क्या सजातीय राशियाँ हैं? नहीं।

दोनों सजातीय राशियाँ नहीं है, अतः इनमें सम्बन्ध स्थापित नहीं होता है या तुलना नहीं की जा सकती अतः इनमें अनुपात नहीं बताया जा सकता है।

दो राशियों में सम्बन्ध, तुलना या अनुपात दर्शाने के लिए वे सजातीय तथा मापन की एक ही इकाई में होना आवश्यक है।



उदाहरण 1 सौरभ घर से स्कूल पहुँचने में 15 मिनट लेता है और सचिन एक घंटा लेता है। सौरभ द्वारा लिए गए समय और सचिन द्वारा लिए गए समय का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल दोनों की इकाईयाँ समान नहीं है अतः उन्हें समान इकाई में बदलने पर सौरभ को घर से स्कूल पहुँचने में लगा समय 15 मिनट।

सचिन को घर से स्कूल पहुँचने में लगा समय 60 मिनट।

अतः वांछित अनुपात है

$$15 \text{ मिनट} : 60 \text{ मिनट} = \frac{15}{60} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

अतः सौरभ द्वारा व सचिन द्वारा लिए गए समय का अनुपात 1 : 4 है।

उदाहरण 2 कक्षा 6 में कुल 45 बच्चे पढ़ते हैं जिसमें से 25 लड़कियाँ हैं और शेष लडके हैं। निम्न के अनुपात ज्ञात कीजिए।

(i) लड़कियों की संख्या का लड़कों की संख्या से

(ii) लड़कों की संख्या का लडकियों की संख्या से

हल लड़कियों की संख्या 25

लड़कों की संख्या $45 - 25 = 20$

अतः लड़कियों की संख्या का लड़कों की संख्या से अनुपात $= 25 : 20 = 5 : 4$

और लड़कों की संख्या का लड़कियों की संख्या के साथ अनुपात $20 : 25 = 4 : 5$

ध्यान दें कि 5 : 4 और 4 : 5 में अंतर है।

करो और सीखो

सुबह 9 बजे से 10 बजे के बीच सड़क पर गुजरने वाले वाहनों को तालिका में दिया गया है।

वाहन	संख्या
दुपहिया	24
कार	60
ट्रक	40

1. दुपहिया वाहन एवं कार की संख्या में अनुपात बताइए।
2. कुल वाहनों की संख्या व ट्रकों की संख्या में अनुपात बताइए।
3. एक कार का वजन 3300 पाउण्ड है व एक साईकिल का वजन 22 पाउण्ड है साईकिल व कार के वजनों का अनुपात क्या है ?

13.2.1 विभिन्न परिस्थितियों में अनुपात

राहुल और खुशी ने एक व्यापार शुरू किया और 4 : 5 में धन लगाया। एक वर्ष बाद कुल लाभ 54,000 रु. था।

लाभ को बाँटते वक्त राहुल ने कहा कि हम लाभ को बराबर बाँट लेते हैं। खुशी ने उत्तर दिया, ''मुझे ज्यादा मिलना चाहिए क्योंकि मैंने ज़्यादा निवेश किया है। तब दोनों द्वारा यह निर्णय लिया गया कि निवेश के अनुपात में ही लाभ को बाँटा जाएगा।

यहाँ 4 : 5 में 4 और 5 दो ही राशियाँ है इन राशियों का योग 4 + 5 = 9

इसका क्या अर्थ है?

इसका अर्थ कि यदि 9 रु. लाभ है तो राहुल को 4 रुपये और खुशी को 5 रुपये मिलेंगे।

और हम कह सकते हैं कि जो भी लाभ होगा उसके 9 हिस्सों में से 4 हिस्से राहुल को और 5 हिस्से खुशी को मिलेंगे। यदि कुल लाभ 54,000 रुपये हो तो प्रत्येक का हिस्सा कितना होगा ?

यहाँ कुल लाभ 54000 रू. है जिसके 9 हिस्से हुए = $\frac{54000}{9}$

राहुल का हिस्सा = $\frac{54000}{9}$ x 4 = 24000 रूपये

खुशी का हिस्सा = $\frac{54000}{9}$ x 5 = 30000 रूपये

सोचिए 4:5 या $\frac{4}{5}$

और 24000 : 30000 या $\frac{24000}{30000}$

= $\frac{4}{5}$? (क्यों)

उदाहरण 3 रिया और कंचन के बीच 45 रुपये को 1 : 2 में बाँटिए।

हल अनुपात के दो हिस्से 1 और 2 है

अतः दोनों हिस्सों का योग 1 + 2 = 3

इसका अर्थ है कि यदि 3 रुपये है तो रिया को 1 रुपये और कंचन को 2 रुपये मिलेंगे। यानि कि 3 में से रिया को एक हिस्सा और कंचन को 2 हिस्से मिलेंगे।

अतः रिया का हिस्सा = $\frac{1}{3}$ x 45 = 15 रुपये।

और कंचन का हिस्सा = $\frac{2}{3}$ x 45 = 30 रुपये।

करो और सीखो

(1) अपनी कक्षा के दरवाजे की संख्या का खिड़कियों की संख्या से अनुपात निकालिए।

(2) एक आयत बनाइए। उसकी लम्बाई और चौड़ाई का अनुपात निकालिए।

13.2.2 तुल्य अनुपात

निम्न को देखिए–

1. एक कमरे की लम्बाई 30 मीटर और चौड़ाई 20 मीटर है। अतः कमरे की लम्बाई और चौडाई में क्या अनुपात होगा ?
2. गौरव के विद्यालय में लगे बोर्ड की लम्बाई 360 सेमी और चौड़ाई 240 सेमी है तो बोर्ड की लम्बाई व चौड़ाई का अनुपात क्या होगा?

दोनों ही उदाहरणों में अनुपात 3 : 2 है

सरल रूप में 30 : 20 और 360 : 240 अनुपात 3 : 2 के बराबर है, ये तुल्य अनुपात कहलाते हैं।

सरलतम अनुपात 3 : 2 के लिए आप और तुल्य अनुपात लिखिए।

आपने भिन्नों के अध्याय में तुल्य भिन्न को पढ़ा होगा।

आओ तुल्य अनुपात पर आधारित उदाहरण को समझते हैं।

उदाहरण 4 अनुपात 3 : 2 के दो तुल्य अनुपात लिखिए।

हल अनुपात $3 : 2 = \frac{3}{2} = \frac{3x2}{2x2} = \frac{6}{4}$

अतः 3 : 2 का तुल्य अनुपात 6 : 4 है।

इसी प्रकार $9 : 6 = \frac{9\div3}{6\div3} = \frac{3}{2}$

अतः 9 : 6 एक अन्य तुल्य अनुपात है।

इस प्रकार हम किसी भी अनुपात का तुल्य अनुपात अंश और हर में एक समान संख्या से गुणा या भाग द्वारा प्राप्त कर सकते हैं।

उदाहरण 5 रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

$$\frac{12}{18} = \frac{\square}{3} = \frac{6}{\square}$$

हल पहला रिक्त स्थान भरने के लिए हम 18 = 3 x 6 तथ्य का प्रयोग करेंगे। अर्थात् 18 को 6 से भाग देने पर 3 प्राप्त होता है। यह दर्शाता है कि दूसरे अनुपात का रिक्त स्थान प्राप्त करने के लिए 12 को 6 से भाग करना पड़ेगा।

भाग करने पर $12 \div 6 = 2$

अतः दूसरा अनुपात $\frac{2}{3}$ है।

इसी प्रकार तीसरे अनुपात के लिए दूसरे अनुपात की दोनों राशियों को 3 से गुणा करना पड़ेगा (क्यों)

अतः तीसरा अनुपात $\frac{6}{9}$ है।

इस प्रकार $\frac{12}{18} = \frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ ये सभी तुल्य अनुपात हैं।

करो और सीखो

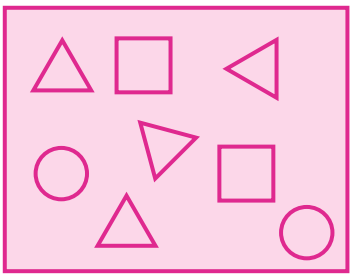
1. एक स्ट्रा (पाइप) की लम्बाई 12 सेमी है और इसका व्यास 6 मिमी है। स्ट्रा के व्यास का उसकी लम्बाई के साथ अनुपात क्या होगा?
2. आनन्द घर से स्कूल पहुँचने में 25 मिनट लेता है और अंशुल एक घण्टा लेता है तो आनन्द द्वारा लिए गए समय और अंशुल द्वारा लिए गए समय का अनुपात ज्ञात कीजिए।

प्रश्नावली 13.1

1. एक कस्बे में ग्रीष्मकालीन अवकाश में लगने वाले अभिरूचि शिविर में 25 लड़कियाँ और 15 लड़कों ने परिंडे बाँधे, अनुपात ज्ञात कीजिए।
   (i) लड़कियों की संख्या का लड़कों की संख्या से,
   (ii) लड़कियों की संख्या का कुल विद्यार्थियों की संख्या से।

2. वृक्षारोपण पखवाड़े में एक कक्षा 6 के विद्यार्थियों ने 40 पौधे लगाए जिसमें 8 नीम के, 13 आम के, 19 करंजी के थे ।
   (i) नीम के पौधों व आम के पौधों की संख्या में अनुपात।
   (ii) कुल पौधों में से नीम के पौधों का अनुपात।

3. आकृति को देखकर अनुपात बताइए।



   (i) सभी त्रिभुजों की संख्या का वृत्तों की संख्या से।
   (ii) सभी वर्गों की संख्या का कुल आकृतियों से।
   (iii) सभी त्रिभुजों की संख्या का कुल आकृतियों से।

4. रिक्त स्थानों को भरिए ?

$$\frac{15}{21} = \frac{5}{\square} = \frac{\square}{14} = \frac{25}{\square}$$

5. निम्न में से प्रत्येक का अनुपात ज्ञात कीजिए।
   (i) 25 का 150 से
   (ii) 72 का 36 से
   (iii) 55 किमी का 121 किमी से
   (iv) 35 मिनट का 55 मिनट से

6. निम्न में से प्रत्येक का अनुपात ज्ञात कीजिए।
   (i) 60 पैसे तथा 3 रुपये
   (ii) 800 ग्राम तथा 5 किग्रा
   (iii) 15 मिनट तथा 1 घण्टा
   (iv) 1 लीटर तथा 750 मिली

7. एक गौशाला में वर्ष भर में 325000 रुपये की राशि प्राप्त हुई और वर्ष भर गौ सेवा हेतु 3,00000 रु. की राशि खर्च हुई। वर्ष भर की आय का वर्ष भर में खर्च की गई राशि से अनुपात ज्ञात कीजिए।

8. महेश प्रतिदिन 4 घण्टे स्वाध्याय करता है और लक्ष्मी प्रतिदिन 180 मिनिट स्वाध्याय करती है। बताइए कि महेश और लक्ष्मी द्वारा किए गए स्वाध्याय में लगाए समय का अनुपात क्या होगा ? (1 घण्टा = 60 मिनट)

9. एक विद्यालय में कुल 720 विद्यार्थी अध्ययन करते हैं जिसमें 360 विद्यार्थी छात्रावास में रहते हैं तो छात्रावास में रहने वाले विद्यार्थियों का कुल विद्यार्थियों के साथ अनुपात ज्ञात कीजिए।

10. तलिस्मा व गुरूमित ने पापड़ उद्योग के लिए 2 : 5 में पूँजी लगाई। वर्ष के अन्त में 35,000 रुपये का मुनाफा हुआ तो प्रत्येक का हिस्सा ज्ञात कीजिए।

11. कथन को देखें– एक हॉल की चौड़ाई और लम्बाई का अनुपात 3 : 4 है। निम्न सारणी को पूरा कीजिए जो कि हॉल की कुछ संभव चौड़ाई और लम्बाई को दिखाती है।

हॉल की चौड़ाई (मीटर में)	6	.....	24	.....
हॉल की लम्बाई (मीटर में)	8	16	.....	.....

12. पिता की वर्तमान आयु 45 वर्ष और उसके पुत्र की 15 वर्ष है। अनुपात ज्ञात कीजिए–
(i) पिता की वर्तमान आयु और पुत्र की वर्तमान आयु का।
(ii) पिता की आयु का पुत्र की आयु से जब पुत्र 10 वर्ष का था।
(iii) 5 वर्ष बाद की पिता की आयु का 5 वर्ष बाद की पुत्र की आयु से।
(iv) पिता की आयु का पुत्र की आयु से जब पिता 60 वर्ष के होंगे।

13.3 समानुपात

डिन्की और प्रीति हेयर क्लिप खरीदने बाजार गई उन्होंने 30 रू में 20 हेयर क्लिप खरीदे। डिन्की ने 18 रू और प्रीति ने 12 रू दिए। अब सोचो डिन्की व प्रीति हेयर क्लिप का बँटवारा कैसे करेंगे? क्या दोनों आपस में 10–10 हेयर क्लिप बाँट ले तो बँटवारा ठीक हुआ ? तब तय हुआ कि बँटवारा दिए गए धन के अनुपात में होना चाहिए।

18 : 12 = 3 : 2 अतः क्लिप भी 3 : 2 में बँटनी चाहिए। अतः हर 5 क्लिप में 3 डिन्की और 2 प्रीति की। 20 क्लिप में से 12 डिन्की की और 8 प्रीति की।

अतः जब दो अनुपात एक समान हो तो वे समानुपात में कहलाते हैं जैसे ऊपर के उदाहरण में धन का अनुपात 18 : 12 एवं प्रत्येक को मिलने वाली हेयर क्लिप का अनुपात 12 : 8 समानुपात में हैं इन्हें आपस में (::) या (=) चिह्न का प्रयोग कर दर्शाते हैं।

18 : 12 :: 12 : 8 या 18 : 12 = 12 : 8

एक समान अनुपात में होने का अर्थ

(i) दिवाकर ने 15 रू के 3 पेन खरीदे और अनु ने 50 रू के 10 पेन खरीदे। किसके पेन महंगे थे ?

दिवाकर और अनु द्वारा खरीदे गए पेनों की संख्या का अनुपात = 3 : 10

उनके मूल्यों का अनुपात 15 : 50 = 3 : 10 अतः दोनों के पेनों का मूल्य समान है।

(ii) एक व्यक्ति 2 घंटे में 35 किमी चलता है। एक अन्य व्यक्ति 4 घंटे में 70 किमी चलता है तब क्या उनकी चाल समानुपातिक है ?

दोनों द्वारा चली गई दूरियों का अनुपात 35 : 70 = 1 : 2

दोनों द्वारा लिए गए समय का अनुपात 2 : 4 = 1 : 2

अतः दोनों अनुपात समान है।

अर्थात् 35 : 70 :: 2 : 4

या 35 : 70 = 2 : 4

इसे 35 अनुपात 70 बराबर 2 अनुपात 4 पढ़ते हैं।

अब एक अन्य उदाहरण लें।

(iii) 3 किग्रा सेब का मूल्य 360 रू है और 15 किग्रा तरबूज का मूल्य 90 रू है

दोनों के वजनों का अनुपात 3 : 15 = 1 : 5 है।

दोनों के मूल्यों का अनुपात 360 : 90 = 4 : 1 है।

अतः 3 : 15 और 360 : 90 समान नहीं है।

अर्थात् 3 : 15 ≠ 360 : 90

इस प्रकार चारों राशियाँ 3, 15, 360 और 90 समानुपात में नहीं है।

करो और सीखो

जाँच कीजिए निम्न राशियाँ समानुपाती हैं अथवा नहीं ?

(i) 3 : 5 और 1 : 15 (ii) 4 : 12 और 9 : 27

(iii) 10 रू का 15 रू और 4 का 6 से

उदाहरण 6 क्या अनुपात 30 सेमी : 36 सेमी और 10 मीटर : 12 मीटर समानुपात में है?

हल 30 सेमी : 36 सेमी .....

10 मीटर : 12 मीटर ....

इसलिए 30 : 36 = 10 : 12

अतः अनुपात 30 सेमी : 36 सेमी और 10 मीटर : 12 मीटर समानुपात में है

अर्थात् 30 : 36 :: 10 : 12

इसमें 30, 12 बाह्यपद है और 36, 10 मध्यपद है।

बाह्यपद

$30:36::10:12$

मध्यपद

$30 \times 12 = 36 \times 10$

$360 = 360$ अतः राशियाँ समानुपात में है।

यदि चार राशियाँ समानुपात में हैं तो
बाह्य पदों का गुणनफल = मध्य पदों का गुणनफल

उदाहरण 7 क्या 15 सेमी का 3 मीटर और 10 सेकण्ड का 2 मिनिट से अनुपात, एक समानुपात बनाते हैं?

हल 15 सेमी का 3 मीटर से अनुपात

$= 15 : 3 \times 100$ (1 मीटर = 100 सेमी)

$= 1 : 20$

10 सेकण्ड का 2 मिनिट से अनुपात

$= 10 : 2 \times 60$ (1 मिनिट = 60 सेकण्ड)

$= 1 : 12$

क्योंकि $1 : 20$, $1 : 12$ के बराबर नहीं है। अतः दिए हुए अनुपात समानुपात में नहीं हैं।

प्रश्नावली 13.2

1. निम्न में से कौनसी राशियाँ समानुपात में हैं, बताइए ?

(i) 8, 6, 48, 36 (ii) 12, 18, 20, 30

(iii) 14, 20, 26, 32 (iv) 26, 65, 32, 60

2. निम्नलिखित में से प्रत्येक कथन के आगे सत्य या असत्य लिखिए।

(i) $20 : 60 :: 15 : 45$ (ii) $20 : 22 :: 32 : 42$

(iii) $0.9 : 0.36 :: 10 : 4$ (iv) $5.2 : 26 :: 1.8 : 0.9$

3. क्या निम्न कथन सही है ?

(i) 30 सेकण्ड : 1 मिनिट : : 16 मी. : 32 मी.

(ii) 2.5 ली. : 5 ली. : : 25मी : 50 मी

(iii) 44 रू : 20 रू : : 66 ली. : 30 ली.

(iv) 12 मी : 15 मी : : 48 किग्रा : 64 किग्रा

4. जाँचिए कि क्या निम्न अनुपात समान अनुपात बनाते हैं यदि समानुपात बनता है तो मध्यपद और बाह्यपद भी लिखिए।

(i) 200 सेमी : 2.5 मी और 40 रूपये : 5 रूपये

(ii) 1 किग्रा : 250 ग्राम और 40 रूपये : 10 रूपये

(iii) 4 किग्रा : 16 किग्रा और 20 ग्राम : 400 ग्राम

(iv) 39 व्यक्ति : 65 व्यक्ति और 9 ली. : 15 ली.

13.4 ऐकिक नियम

दो सहेलियाँ नीलम और पूनम सब्जी मण्डी से सब्जी खरीदने जाती है।

नीलम ने 30 रु. में 2 किग्रा आलू खरीदे। एक किग्रा आलू का मूल्य ज्ञात कीजिए।

मोहन 4 घण्टे में 40 किमी की दूरी तय करता है। उसी समान चाल से 5 घण्टे में कितनी दूरी तय करेगा ?

ये उदाहरण हमारी दैनिक जीवन की समस्याओं पर आधारित हैं। अब इन्हें कैसे हल करेंगे?

पहले उदाहरण से

2 किग्रा आलू का मूल्य = 30 रुपये

अतः 1 किग्रा आलू का मूल्य $\frac{30}{2}$ =15 रुपये

यदि आपको 5 किग्रा आलू का मूल्य ज्ञात करने के लिए कहा जाए तो यह इस प्रकार होगा = 15 x 5

= 75 रूपये

दूसरे उदाहरण से

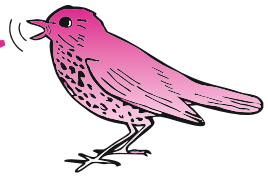
अब हम जानना चाहते हैं कि मोहन 1 घण्टे में कितनी दूरी तय करेगा?

∵ 4 घण्टे चलने में दूरी तय करता है = 40 किमी

∴ 1 घण्टा चलने में दूरी तय करता है = $\frac{40}{4}$ किमी = 10 किमी

∴ 5 घण्टे चलने में दूरी तय करेगा = 10 X 5 किमी = 50 किमी

वह विधि जिसमें हम पहले एक इकाई का मान निकालते हैं और फिर जितनी इकाइयों का मान निकालने को कहा जाए, निकालते हैं, यह ऐकिक नियम कहलाता है।



करो और सीखो

निम्न सारणी को पढ़कर पूरा कीजिए।

पुस्तकें	रेशमा द्वारा दिया गया मूल्य	सीमा द्वारा दिया गया मूल्य
2 पुस्तकें	50 रुपये	70 रुपये
1 पुस्तक	25 रुपये	
5 पुस्तकें		

उदाहरण 8 यदि 1 माला का मूल्य 7 रुपये है, तो 8 मालाओं का मूल्य कितना होगा?

हल ∵ 1 माला का मूल्य = 7 रुपये

∴ 8 मालाओं का मूल्य = 7 x 8 रूपये

इस प्रकार 8 मालाओं का मूल्य = 56 रुपये होगा।

उदाहरण 9 एक कार से 60 किमी दूरी तय करने पर 3 लीटर पेट्रोल लगता है तो 1 लीटर पेट्रोल में कितनी दूरी तय की जाएगी?

हल ∵ 3 लीटर में कार द्वारा तय की गई दूरी = 60 किमी.

∴ 1 लीटर में कार द्वारा तय की गई दूरी = $\frac{60}{3}$ किमी. = 20 किमी.

∴ अतः 1 लीटर पेट्रोल में 20 किमी की दूरी तय की जा सकती है।

उदाहरण 10 एक दर्जन साबुन की टिकियों का मूल्य 174 रुपये है। 8 साबुन की टिकियों का मूल्य ज्ञात कीजिए। (1 दर्जन =12)

हल ∵ 12 साबुन की टिकियों का मूल्य = 174 रुपये

∴ 1 साबुन की टिकियों का मूल्य = $\frac{174}{12}$ रूपये = 14.50 रूपये

∴ 8 साबुन की टिकियों का मूल्य = 14.50 x 8 = 116 रूपये

इस प्रकार 8 साबुन की टिकियों का मूल्य 116 रुपये।

उदाहरण 11 यदि 10 स्काउट बैजों का मूल्य 50 रुपये हो तो 32 स्काउट बैजों का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल ∵ 10 स्काउट बैजों का मूल्य = 50 रू.

∴ 1 स्काउट बैंज का मूल्य = $\frac{50}{10}$ रू. = 5 रू.

∴ 32 स्काउट बैंजों का मूल्य = 5 रू. x 32 = 160 रु

इस प्रकार 32 स्काउट बैजों का मूल्य 160 रुपये है।

उदाहरण 12 2.5 लीटर दूध का मूल्य 100 रुपये है।

(i) उसी भाव से 10 रुपये में कितना दूध आएगा?

(ii) उसी भाव से 2 लीटर दूध का मूल्य कितना होगा?

हल (i) पहली स्थिति में दूध की मात्रा अज्ञात है? मूल्य ज्ञात है। अतः इस तरह करेंगे

∵ 100 रुपये में दूध आता है = 2500 मिली

∴ 1 रुपये में दूध आता है $\frac{2500}{100}$ मिली

∴ 10 रुपये में दूध आएगा $\frac{2500}{100}$ x 10 = 250 मिली

इस प्रकार 10 रुपये में दूध आएगा 250 मिली।

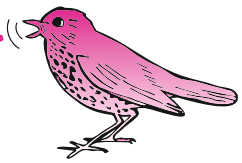
(ii) दूध का मूल्य अज्ञात है और मात्रा ज्ञात है। अतः इस प्रकार आगे बढ़ेंगे।

∵ 2.5 लीटर दूध का मूल्य = 100 रूपये

∴ 1 लीटर दूध का मूल्य होगा 100 ÷ 2.5 रूपये = 40 रूपये।

∴ 2 लीटर दूध का मूल्य होगा $40 \times 2 = 80$ रुपये।

कम होय तो भाग जाय, अधिक होय तो गुणा खाय। पूछा जाय तो अन्त में लिखा जाय।



प्रश्नावली 13.3

1. एक क्विंटल शक्कर का मूल्य 2700 रुपये है तो एक किग्रा शक्कर का मूल्य ज्ञात कीजिए।

2. बस से यात्रा करने पर 200 किमी की दूरी का किराया 150 रुपये है तो 500 किमी. की यात्रा करने पर क्या किराया देना होगा?

3. यदि 700 रुपये का कुछ समय का ब्याज 168 रुपये हो तो उसी ब्याज दर एवं उतने ही समय में 1500 रुपये का ब्याज कितना होगा?

4. एक दिन में 6 बालिकाओं द्वारा 18 पौधों के चारों तरफ बाड लगाई गई तो 15 बालिकाओं द्वारा एक दिन में कितने पौधों की बाड़ लगाई जाएँगी।

5. यदि 5 व्यक्तियों के फव्वारे से नहाने के बजाय बाल्टी से नहाने पर 15 लीटर पानी की बचत होती है तो 25 व्यक्तियों द्वारा कितने लीटर पानी की बचत हो सकती है?

6. एक मोटरसाईकिल 2 लीटर में 120 किमी दूरी तय करती है। बताइए 300 किमी दूरी तय करने में कितने लीटर पेट्रोल की आवश्यकता होगी?

7. एक रेलगाड़ी 130 किमी की दूरी 2 घण्टे में तय करती है। 520 किमी की दूरी तय करने में उसे कितना समय लगेगा? यदि उसकी औसत चाल समान रहे।

8. यदि 4 कुर्सियों का मूल्य 900 रुपये है तो 33750 रुपये में कितनी ऐसी ही कुर्सियाँ खरीदी जा सकती है?

9. गीता 3 महीने का मकान किराया 10500 रुपये देती है। उसे पूरे वर्ष भर का किराया कितना देना होगा? (वर्ष भर किराया समान हो)

10. रहीम ने 8 ओवर में 48 रन बनाए और कबीर ने 6 ओवर में 54 रन बनाए। बताइए कि एक ओवर में किसने

औसतन अधिक रन बनाए?

11. यदि 3 किग्रा बाजरे का मूल्य 49.50 रूपये है।

(i) 7 किग्रा बाजरे का मूल्य क्या होगा?

(ii) 165 रूपये में कितना बाजरा खरीदा जा सकता है?

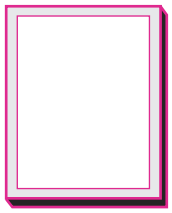
हमने सीखा

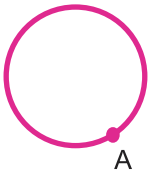
1. एक जैसी राशियों की तुलना करने के लिए सामान्यतया हम राशियों के अन्तर द्वारा तुलना विधि का प्रयोग करते हैं।
2. अधिकतर परिस्थितियों में भाग द्वारा तुलना अधिक अच्छी होती है अर्थात् एक राशि दूसरी राशि से कितने गुना है। इस विधि को भाग द्वारा तुलना कहते हैं।
3. अनुपात द्वारा तुलना में, दोनों राशियों की इकाइयाँ समान होनी चाहिए। यदि वे समान नहीं है तो अनुपात लेने से पहले उन्हें समान बना लेना चाहिए।
4. अलग–अलग परिस्थितियों में अनुपात समान हो सकता है।
5. अनुपात 3 : 5 और 5 : 3 एक दूसरे से भिन्न है। इस प्रकार जिस क्रम में राशियाँ ली गई है, वह महत्वपूर्ण है।
6. अनुपात को भिन्न के रुप में भी लिखा जा सकता है, जैसे $1 : 2 = \frac{1}{2}$ है।
7. दो अनुपात तुल्य होंगे, यदि उनकी संगत भिन्न भी तुल्य हो।
8. एक अनुपात को सरलतम रुप में बदला जा सकता है।
9. चार राशियाँ समानुपात में कहलाएगी, यदि पहली और दूसरी राशि में अनुपात, तीसरी और चौथी राशि में अनुपात के बराबर हो।
10. समानुपात में क्रम महत्वपूर्ण है। 3, 10, 12 और 40 समानुपात में हैं लेकिन 3, 10, 40 और 12 नहीं हैं।
11. वह विधि जिसमें हम पहले एक इकाई का मान निकालते है और फिर एक से अधिक इकाइयों का मान निकालते हैं, एकिक विधि कहलाती है।

अध्याय 14

परिमाप एवं क्षेत्रफल

14.1 निम्न स्थितियों के बारे में सोचिए।

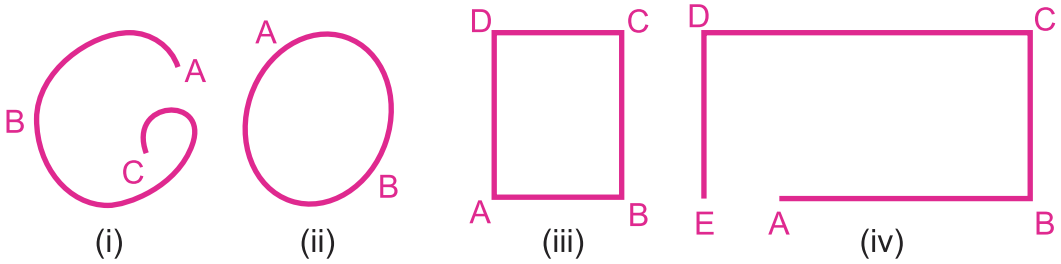




1. नीता को एक चित्र के चारों और रंगीन चमकीली फर्री लगानी है, तो उसे कितनी लम्बी फर्री चाहिए?
2. एक धावक वृत्ताकार मार्ग पर दौड़ रहा है। वह बिन्दु A से प्रारम्भ कर बिन्दु A पर ही आकर रुकता है, तब धावक द्वारा तय की गई दूरी कितनी होगी?
3. एक किसान अपने खेत के चारों और बाड़ लगाना चाहता है उसे कितने मीटर तार की आवश्यकता होगी?

ऐसी ही अनेक स्थितियों में हमें किसी वस्तु एवं जगहों के चारों ओर की माप जानने की जरुरत पड़ती है। ऊपर दी गई स्थितियों में बंद आकृतियों के चारों ओर की माप **परिमाप** है।
इस अध्याय में हम **परिमाप एवं क्षेत्रफल** और इनसे जुड़ी अवधारणाओं के बारे में समझेंगे।

14.2 परिमाप



आकृति 14.1

माधव तथा ईशान ने कुछ आकृतियाँ बनाई जिन्हें उपर्युक्त आकृति (i), (ii), (iii) तथा (iv) में दर्शाया गया है। माधव तथा ईशान ने देखा कि आकृति (i) एवं (iv) खुली आकृति है, जबकि (ii) तथा (iii) बंद आकृतियाँ हैं। खुली आकृतियों का परिमाप ज्ञात नहीं किया जा सकता है। अतः किसी बंद आकृति के चारों तरफ अथवा किनारे–किनारे का एक पूरा चक्कर उस आकृति का परिमाप कहलाता है।





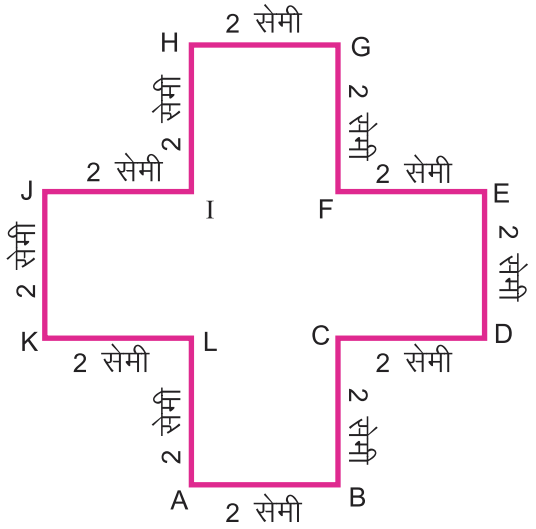
14.2.1 परिमाप मापन की इकाई

आओ नीचे दी गई समस्या को हल करने का प्रयास करते हैं–

1. अपनी–अपनी नोटबुक के पृष्ठ की लम्बाई तथा चौड़ाई को सेमी में नाप कर लिखिए। तथा चारों भुजाओं की लम्बाईयों का योगफल ज्ञात कीजिए।
2. रश्मि 120 मीटर लम्बाई तथा 80 मीटर चौड़ाई वाले बाग का पूरा चक्कर लगाने में कितनी दूरी तय कर लेगी?
3. नीचे दी गई आकृति 14.2 में रेखा खण्डों द्वारा निर्मित बंद आकृति की मापों का योगफल कर आकृति का परिमाप ज्ञात कीजिए।

परिमाप = AB + BC + CD + DE + EF + FG + GH + HI + IJ + JK + KL + LA

= .....सेमी

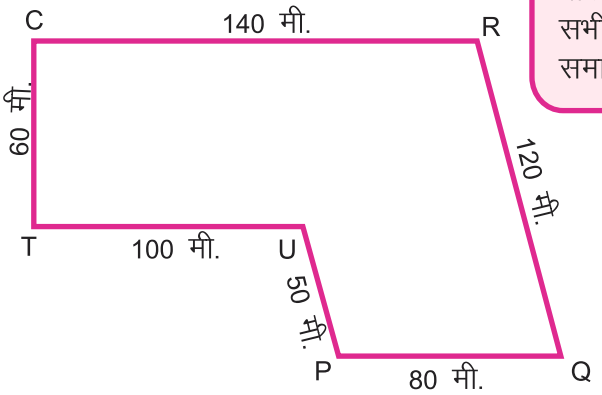


आकृति 14.2

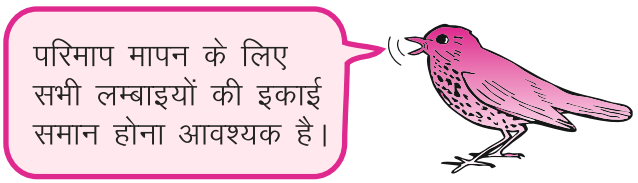
4. नीचे दी गई आकृति चित्र 14.3 का परिमाप ज्ञात कीजिए।

परिमाप = PQ + QR + RS + ST + TU + UP

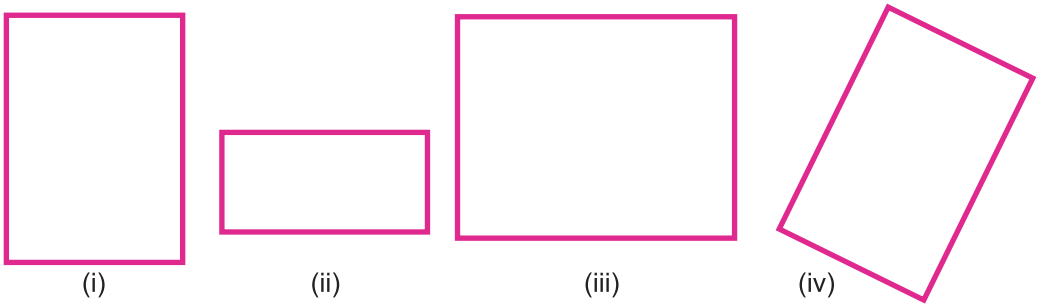
= .....मीटर



आकृति 14.3



14.2.2 नीचे बने आयतों में से किसका परिमाप सबसे अधिक है ? नापिए और पता लगाइए।



आकृति 14.4

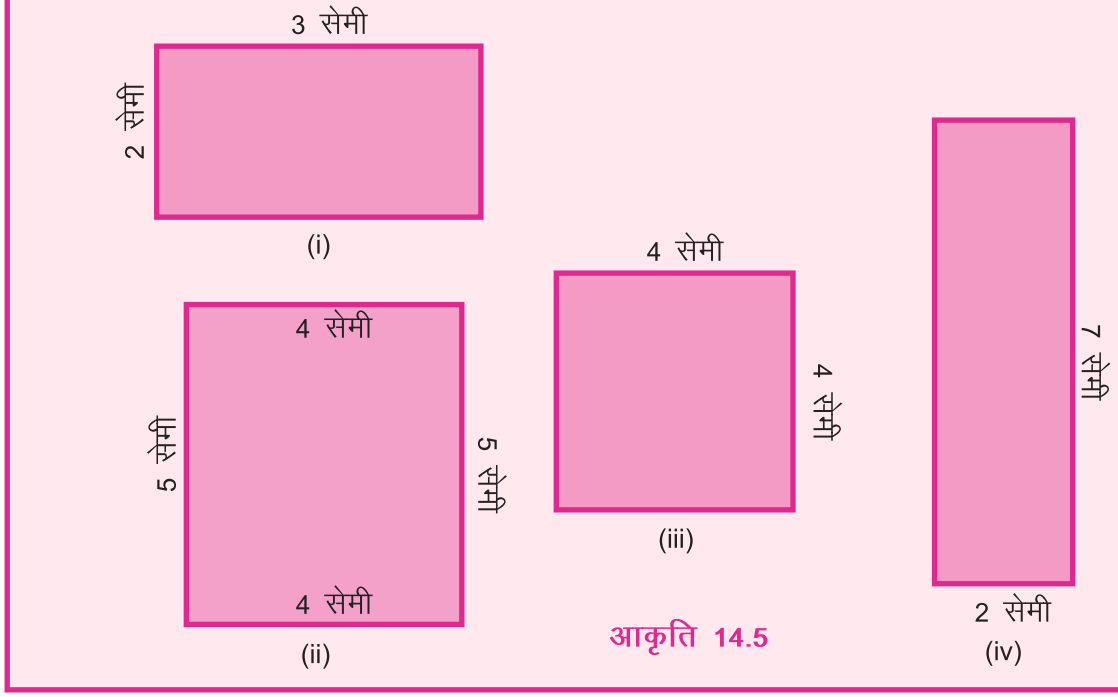
आपको पता है कि आयत के आमने–सामने की भुजाओं की लम्बाई बराबर होती है। आयत का परिमाप ज्ञात करने के लिए हम लम्बाई + चौड़ाई + लम्बाई + चौड़ाई करते हैं।

लम्बाई को कितनी बार जोड़ा जाता है? .....2 बार.....
चौड़ाई को कितनी बार जोड़ा जाता है? .....2 बार.....
अतः आयत का परिमाप = लम्बाई .....2..... बार + चौड़ाई .....2..... बार
= .....2..... x लम्बाई + ...2..... x चौड़ाई
= 2 (लम्बाई + चौड़ाई)

आयत का परिमाप = 2 x (लम्बाई + चौड़ाई)

करो और सीखो

नीचे बने आयतों का परिमाप ज्ञात कीजिए।



आकृति 14.5

उदाहरण 1 एक आयताकार दर्पण जिसकी लम्बाई 25 सेमी. तथा चौड़ाई 14 सेमी. है, का परिमाप ज्ञात कीजिए।

हल आयताकार दर्पण की लम्बाई = 25 सेमी.

आयताकार दर्पण की चौड़ाई = 14 सेमी.

आयताकार दर्पण का परिमाप = 2 x (लम्बाई + चौड़ाई)

= 2 x (25 सेमी.+ 14 सेमी.)

= 2 x (39 सेमी.)

= 78 सेमी.

उदाहरण 2 एक आयत का परिमाप ज्ञात कीजिए जिसकी लम्बाई तथा चौड़ाई क्रमशः 250 सेमी. तथा 1 मीटर है।

हल आयत की लम्बाई = 250 सेमी.

आयत की चौड़ाई = 1 मीटर

= 100 सेमी. (1 मीटर = 100 सेमी.)

आयत का परिमाप = 2 x (लम्बाई + चौड़ाई)

= 2 x (250 सेमी. + 100 सेमी.)

= 2 x (350 सेमी.)

= 700 सेमी. = 7 मीटर



उदाहरण 3 एक आयताकार खेत की लम्बाई 415 मीटर तथा चौड़ाई 280 मीटर है इस खेत के चारों ओर बाड़ लगाने का व्यय ज्ञात कीजिए यदि प्रति मीटर बाड़ लगाने का खर्चा 10 रुपये हो।

हल आयताकार खेत की लम्बाई = 415 मी.

आयताकार खेत की चौड़ाई = 280 मी.

बाड़ लगाने का व्यय ज्ञात करने के लिए हमें खेत का परिमाप ज्ञात करना होगा।

खेत का परिमाप = 2 x (लम्बाई + चौड़ाई)

= 2 x (415 मी. + 280 मी.)

= 2 x (695 मी.)

= 1390 मीटर

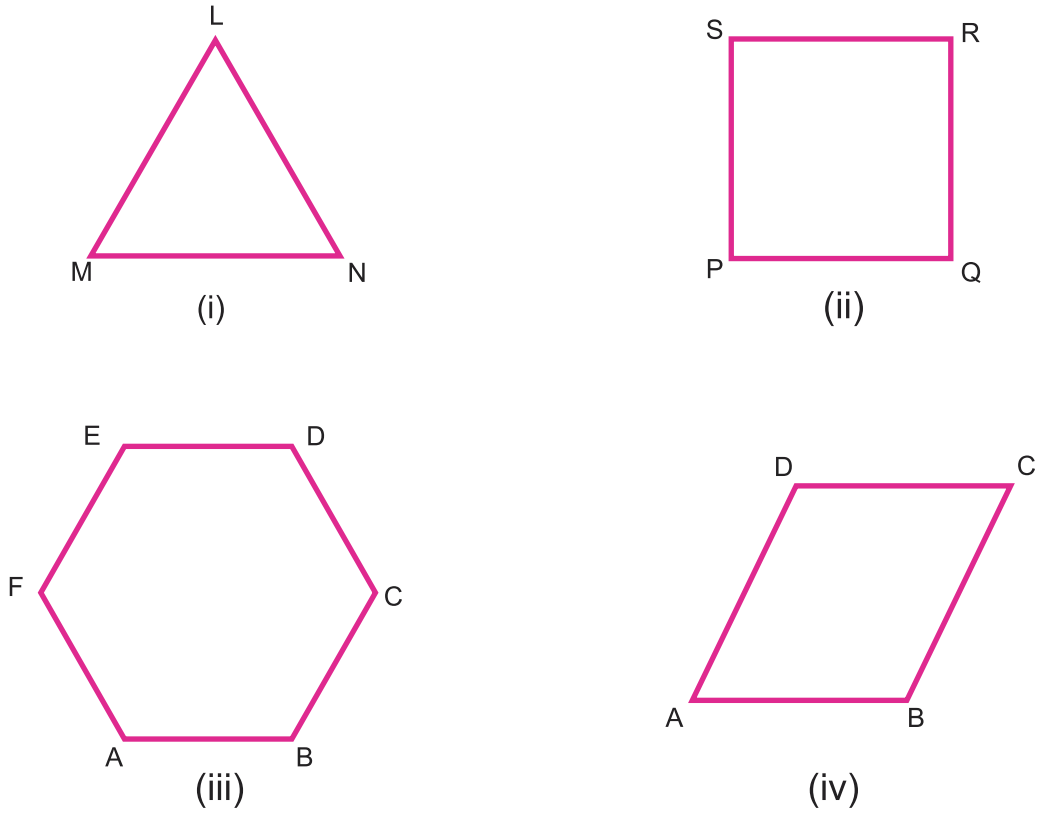
1 मीटर बाड़ लगाने का व्यय = 10 रु.

इसलिए 1390 मी बाड़ लगाने का व्यय = 10 x 1390 रुपये

= 13900 रुपये

14.2.3 समबहुभुजों का परिमाप

माधव और ईशान कुछ स्ट्रॉ लेकर अलग–अलग आकृतियाँ बना रहे हैं, इन्होंने कुछ इस प्रकार की आकृतियाँ बनाई।



आकृति 14.6

आप इन आकृतियों के बाह्य मापों को नाप कर दी गई तालिका में भरिए –

आकृति संख्या	भुजाओं की संख्या	एक भुजा की लम्बाई	सभी भुजाओं की लम्बाईयों का योग	भुजाओं की संख्या एक भुजा की लम्बाई
(i)				
(ii)				
(iii)				
(iv)				

तालिका 14.1

तालिका 14.1 में आप देखेंगे कि प्रत्येक आकृति में भुजाओं की लम्बाइयों का योग उस आकृति में भुजाओं की संख्या तथा एक भुजा की नाप के गुणनफल के बराबर होता है।

अतः समबहुभुज का परिमाप = भुजाओं की संख्या x एक भुजा की लम्बाई

चूँकि वर्ग भी एक समबहुभुज है अतः

वर्ग का परिमाप = 4 x भुजा

उदाहरण 4 ज्योति 90 मीटर भुजा वाले वर्गाकार बाग के चारों तरफ 2 चक्कर लगाती है। ज्योति द्वारा तय की गई दूरी बताइए।

हल वर्गाकार बगीचे का परिमाप = 4 x भुजा की लम्बाई

= 4 x 90 मीटर

= 360 मीटर

ज्योति द्वारा 2 चक्कर में तय की गई दूरी = 2 x 360 मीटर

= 720 मीटर

उदाहरण 5 एक वर्ग का परिमाप 18 सेमी है तो उस वर्ग की भुजा ज्ञात कीजिए।

हल वर्ग का परिमाप = 18 सेमी.

हम जानते हैं कि वर्ग का परिमाप = 4 x भुजा

अतः 18 सेमी = 4 x भुजा

$$\text{इसलिए भुजा} = \frac{18 \text{ सेमी.}}{4}$$

= 4.5 सेमी.

उदाहरण 6 एक समबाहु त्रिभुज का परिमाप ज्ञात कीजिए जिसकी प्रत्येक भुजा की लम्बाई 8.5 सेमी है।

हल चूंकि समबाहु त्रिभुज में 3 समान भुजाएँ होती हैं इसलिए

समबाहु त्रिभुज का परिमाप = भुजाओं की संख्या x एक भुजा की माप

= 3 x 8.5 सेमी.

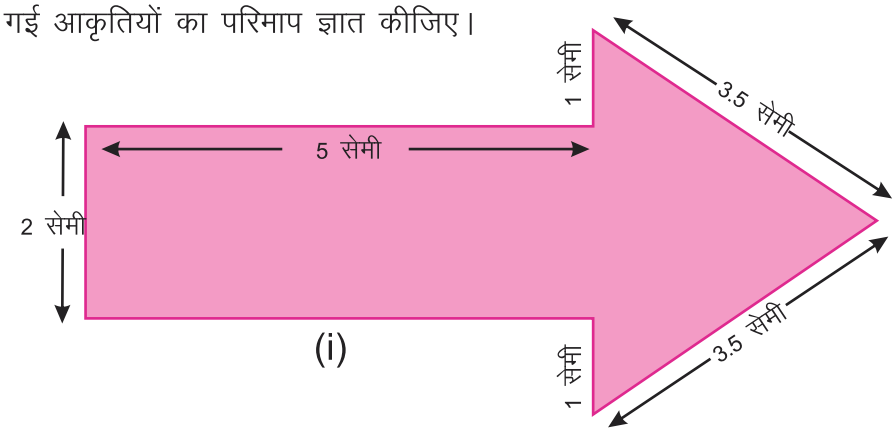
= 25.5 सेमी.

करो और सीखो

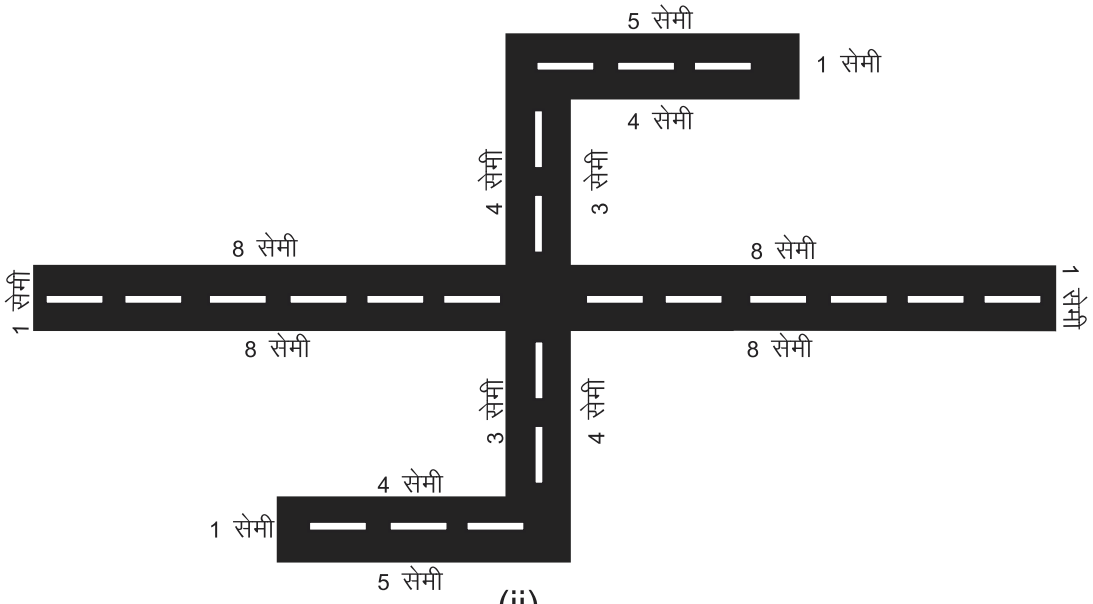
1. एक सम बहुभुज में प्रत्येक भुजा की लम्बाई 3.5 सेमी तथा भुजाओं की संख्या तीन है, बहुभुज का परिमाप बताइए।
2. एक सम बहुभुज का परिमाप 28 सेमी, प्रत्येक भुजा की नाप 7 सेमी हो तो सम बहुभुज की भुजाओं की संख्या ज्ञात कीजिए?
3. एक वर्ग की प्रत्येक भुजा 4.5 सेमी है, तो उसका परिमाप ज्ञात कीजिए।

प्रश्नावली 14.1

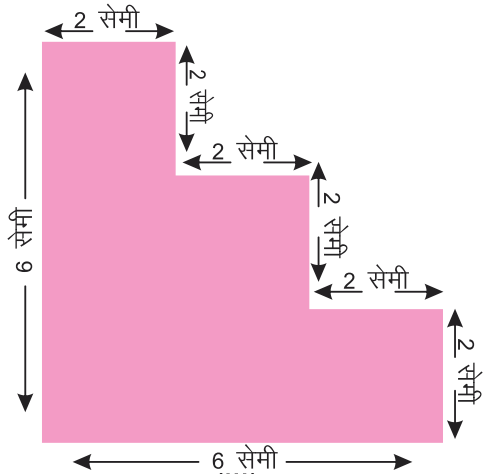
1. नीचे दी गई आकृतियों का परिमाप ज्ञात कीजिए।



(i)



(ii)



(iii)

2. एक समपंचभुज का परिमाप ज्ञात कीजिए जिसकी प्रत्येक भुजा की लम्बाई 4 सेमी है?

3. एक धागे का टुकड़ा 36 सेमी लम्बाई का है। प्रत्येक भुजा की लम्बाई क्या होगी, यदि धागे से बनाया जाता है।

(i) एक वर्ग (ii) एक समबाहु त्रिभुज (iii) एक समषट्भुज

4. गीता 50 मीटर भुजा वाले वर्गाकार खेत के चारों और दौड़ती है और पूजा 65 मीटर लम्बाई और 25 मीटर चौड़ाई वाले आयताकार खेत के चारों और दौड़ती है। इनमें से कौन कम दूरी तय करती है?

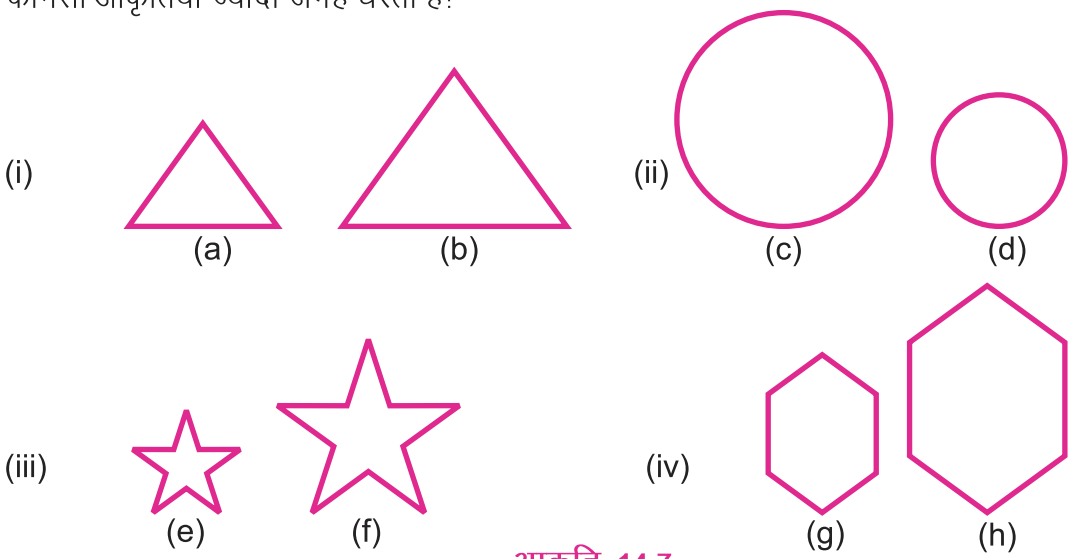
5. एक समपंचभुज का परिमाप 30 सेमी है, इसकी एक भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए?

6. माधू के खेत की लम्बाई 23.5 मीटर और चौड़ाई 15.5 मीटर है। खेत के चारों तरफ तारबंदी के लिए कितने लम्बे तार की आवश्यकता होगी? ज्ञात कीजिए।

7. फुटबॉल के मैदान का परिमाप 270 मीटर है। यदि इस मैदान की लम्बाई 90 मीटर है तो मैदान की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

14.3 क्षेत्रफल

नीचे दी गई सभी बंद आकृतियाँ तल में कुछ क्षेत्र को घेरती हैं। क्या आप बता सकते हैं कि इनमें से कौनसी आकृतियाँ ज्यादा जगह घेरती हैं?

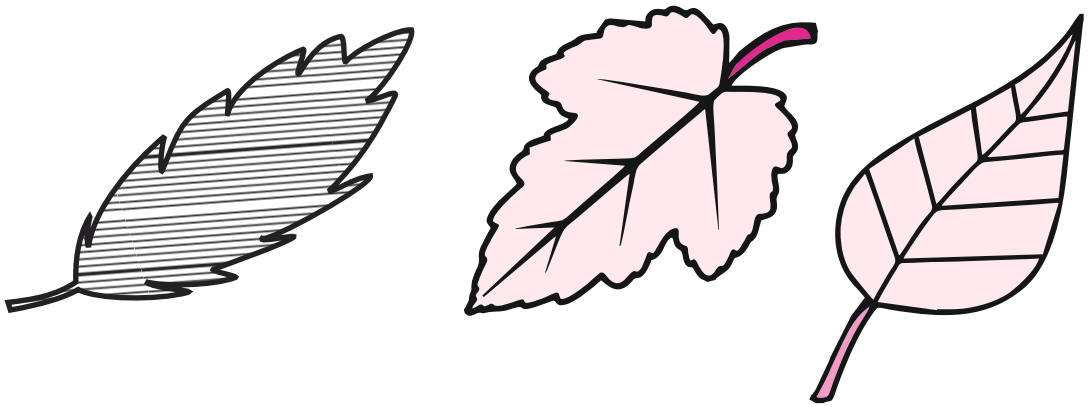


आकृति 14.7

कुसुम – जो आकृति छोटी हैं वह कम जगह घेरती है तथा बड़ी आकार वाली आकृति ज्यादा जगह घेरती है।

बंद आकृतियों द्वारा घेरा गया क्षेत्र, क्षेत्रफल कहलाता है।

शिक्षक– क्या नीचे दी गई आकृतियों को देखने से पता लगता है कि इनमें से किस आकृति का क्षेत्रफल अधिक है?

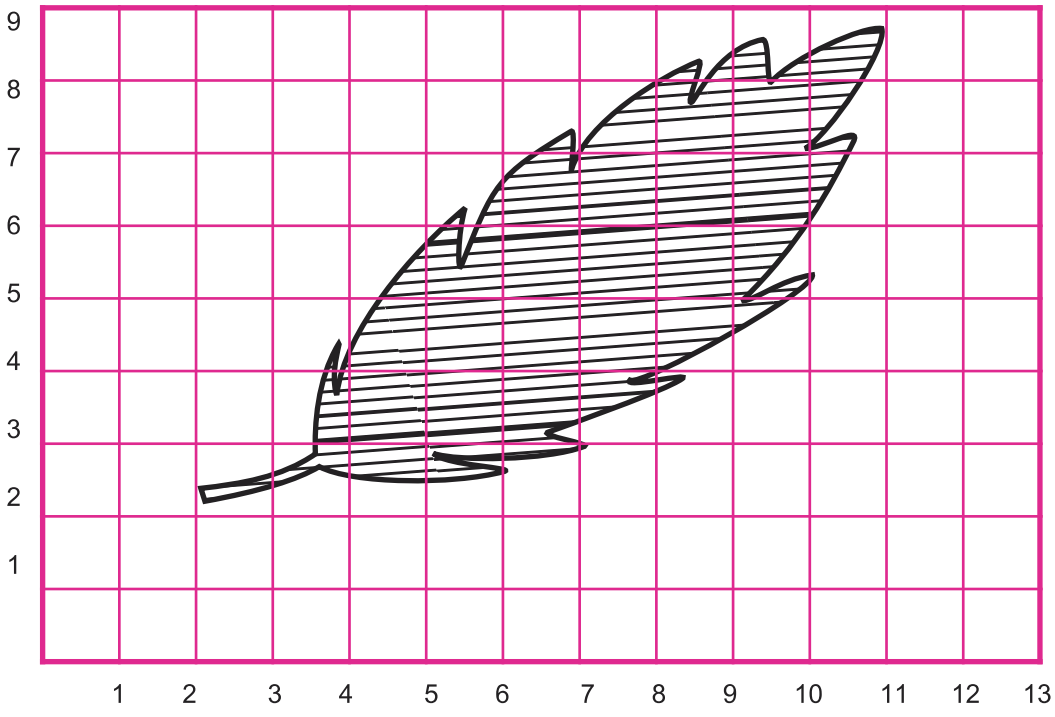


आकृति 14.8

सभी बच्चे चुप रहते हैं।

नरेश– ये देखने मात्र से बता पाना सम्भव नहीं हो रहा।

शिक्षक– आओ इस पत्ती को हम गणित की कॉपी के चौखाने वाले पेज के ऊपर रख कर इसका अनुमानित क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं।



आकृति 14.9

चौखाने को वर्ग भी कहते हैं। हम आधे से अधिक घेरे गए वर्ग को पूरा वर्ग गिनते है तथा आधे से कम घेरे गए वर्गों को छोड़ देते हैं। वर्ग का आधा घेरा गया भाग आधा वर्ग इकाई गिना जाता है।



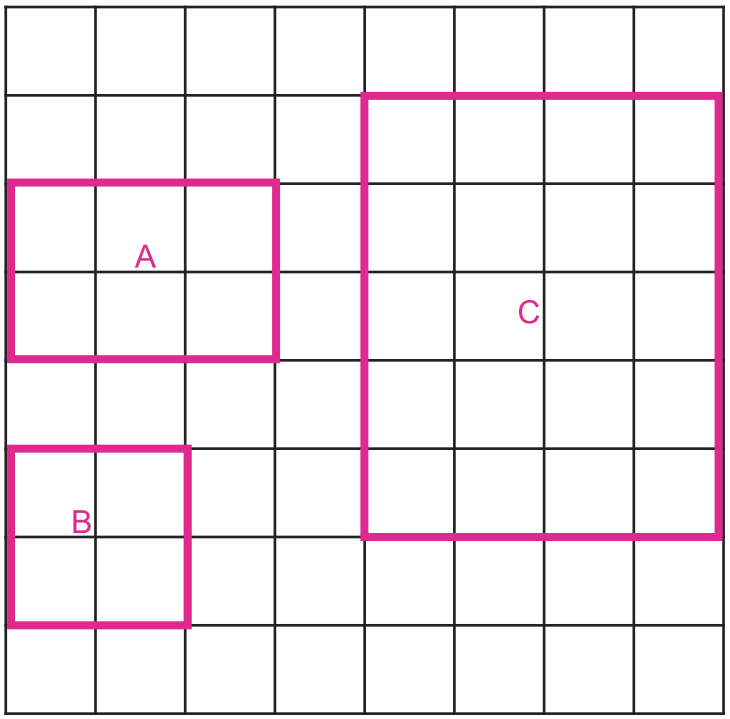
पूरे घेरे गए वर्गों की संख्या = 10
आधे से ज्यादा घेरे गए वर्गों की संख्या = 14
आधे से कम घेरे गए वर्गों की संख्या = 06
यदि आधे से कम जगह घेरे गए वर्गों की संख्या को छोड़ दें तथा आधे से ज्यादा जगह घेरे गए वर्गों की संख्या को पूर्ण मान लें तो इस पत्ती का
अनुमानित (लगभग) क्षेत्रफल = 10+14
= 24 वर्ग

करो और सीखो

गुड़हल के पत्ते को एवं पीपल के पत्ते को ग्रिड पेपर पर रख कर दोनों का क्षेत्रफल ज्ञात करके तुलना करो और बताओ किसका क्षेत्रफल ज्यादा है?

14.4 आयत का क्षेत्रफल

एक ग्रिड पेपर जिसका प्रत्येक वर्गाकार खाना 1 सेमी X 1 सेमी है। इनमें तीन आयत A, B व C बने हैं। इनके आकृति को देख कर नीचे दी गई तालिका को भरिए।



आकृति 14.10

आप और भी आयत ग्रिड पेपर पर बना कर तालिका में भरिए।

आयत	लम्बाई	चौड़ाई	आयतों द्वारा घेरे गए इकाई वर्गों की संख्या	लम्बाई x चौड़ाई
A	..... सेमी	..... सेमी	.....	.....
B	..... सेमी	..... सेमी	.....	.....
C	..... सेमी	..... सेमी	.....	.....
D	..... सेमी	..... सेमी	.....	.....

तालिका 14.2

तालिका 14. 2 में आप देखेंगे कि आयतों द्वारा घेरे गए वर्गों की संख्या उन आयतों की लम्बाई और चौड़ाई के गुणनफल के बराबर है।

अतः आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई x चौड़ाई

14.5 वर्ग का क्षेत्रफल

हम जानते हैं कि किसी आयत की लम्बाई एवं चौड़ाई समान होने पर वह वर्ग बन जाता है। आप सोचिए वर्ग का क्षेत्रफल क्या होगा?

वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा x भुजा

14.6 क्षेत्रफल की इकाई

क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए दो समान इकाइयों का गुणा किया जाता है तथा इसकी इकाई वर्ग इकाई के रूप में लिखी जाती है।

जैसे :– सेमी x सेमी = वर्ग सेमी (सेमी ^{2})

मीटर x मीटर = वर्गमीटर (मी ^{2})

उदाहरण 7 एक आयताकार मोबाइल की सतह का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी लम्बाई 14 सेमी तथा चौड़ाई 7 सेमी है।

हल

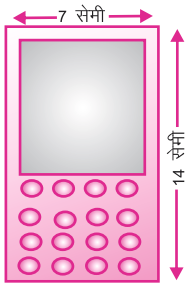
मोबाइल की लम्बाई = 14 सेमी

मोबाइल की चौड़ाई = 7 सेमी

मोबाइल का क्षेत्रफल = लम्बाई x चौड़ाई

= 14सेमी x 7 सेमी

= 98 वर्ग सेमी



उदाहरण 8 एक वर्गाकार मैदान का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी एक भुजा की लम्बाई 15 मीटर है।

हल वर्गाकार मैदान की एक भुजा की लम्बाई = 15 मी.

मैदान का क्षेत्रफल = भुजा x भुजा

= 15 मी. x 15 मी.

= 225 वर्ग मीटर

उदाहरण 9 2.50 वर्गमीटर क्षेत्रफल वाले एक आयताकार गत्ते की लम्बाई 2 मीटर है, इसकी चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

हल आयताकार गत्ते का क्षेत्रफल = 2.50 वर्गमीटर

गत्ते की लम्बाई = 2 मीटर

हम जानते हैं कि आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई x चौड़ाई

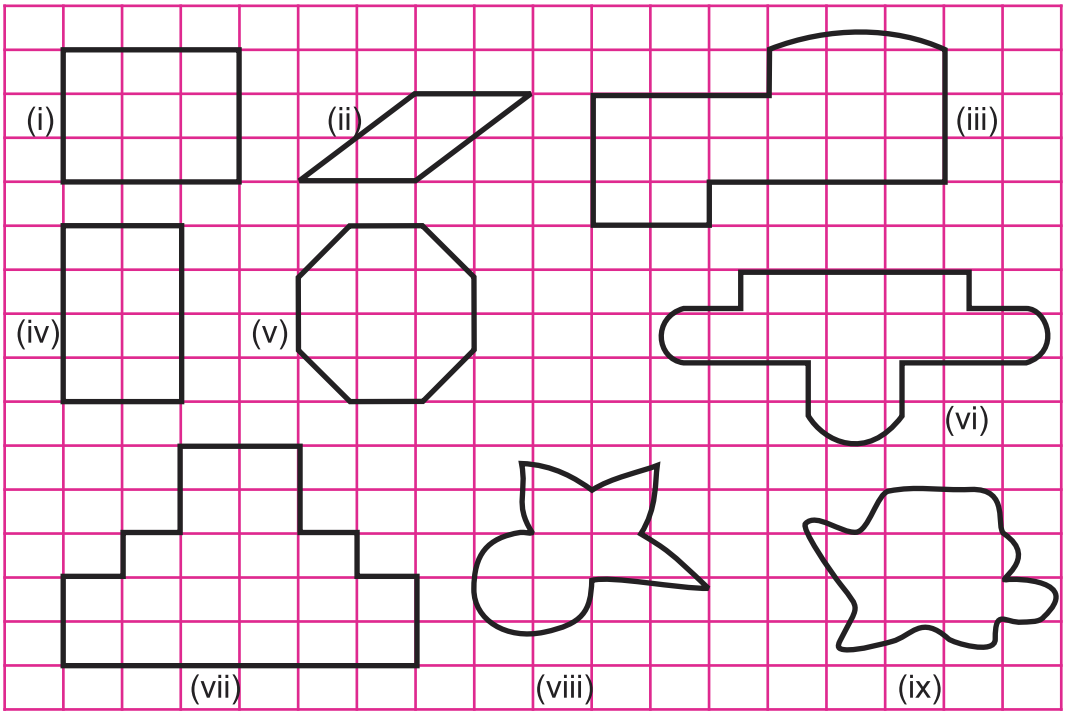
$$\text{गत्ते की चौड़ाई} = \frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{लम्बाई}} = \frac{2.50 \text{ वर्ग मीटर}}{2 \text{ मीटर}}$$

= 1.25 मीटर

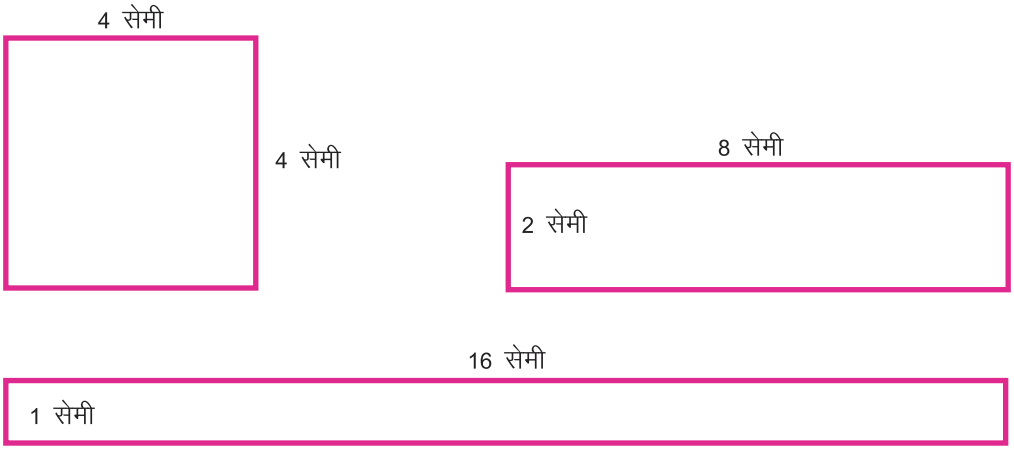
प्रश्नावली 14.2

1. निम्नांकित आकृतियों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

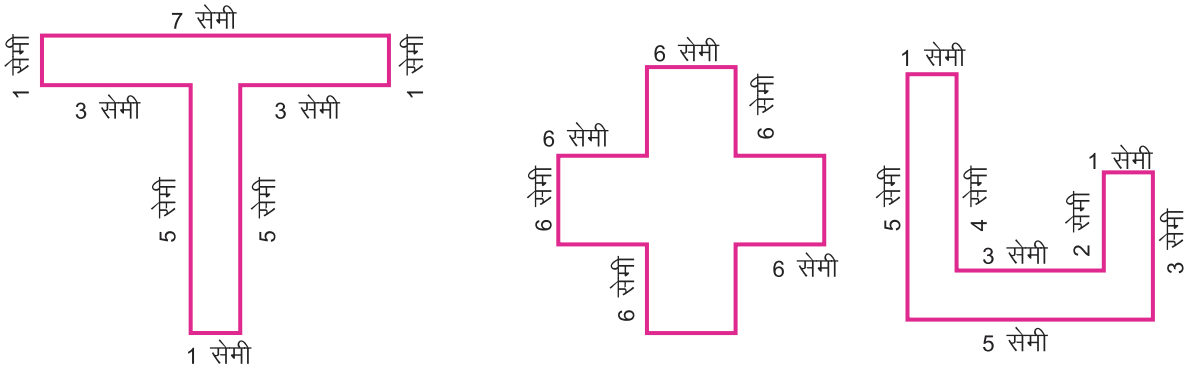
एक वर्गाकार खाना = 1 सेमी. x 1 सेमी.



2. प्रत्येक आकृति का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। आप उत्तर से क्या निष्कर्ष निकाल सकते है ?



3. निम्नांकित आकृतियों को आयतों में बदलते हुए प्रत्येक का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



4. एक कमरे की लम्बाई और चौड़ाई क्रमशः 10 मीटर व 8 मीटर है। उसके फर्श को ढकने के लिए कितने वर्ग मीटर कालीन की आवश्यकता होगी ? ज्ञात कीजिए।

5. एक वर्गाकार फ्रेम का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी एक भुजा की लम्बाई 9 सेमी है।

6. दिए गए आयतों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए एवं बताइए इनमें से किसका क्षेत्रफल सबसे अधिक तथा किसका सबसे कम है?

(i) ल. = 2 मीटर, चौ. = 80 सेमी

(ii) ल. = 180 सेमी, चौ. = 70 सेमी

(iii) ल. = 200 सेमी, चौ. = 1 मीटर

(iv) ल. = 190 सेमी, चौ. = 1 मीटर

7. 50 मीटर लम्बाई वाले एक आयताकार बगीचे का क्षेत्रफल 300 वर्गमीटर है, तो बगीचे की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

8. एक खेत की लम्बाई 8 मी तथा चौड़ाई 6 मी है। इसमें 1 मीटर भुजा वाली 6 वर्गाकार क्यारियाँ बनी है। खेत की शेषभूमि का क्षेत्रफल क्या होगा ?

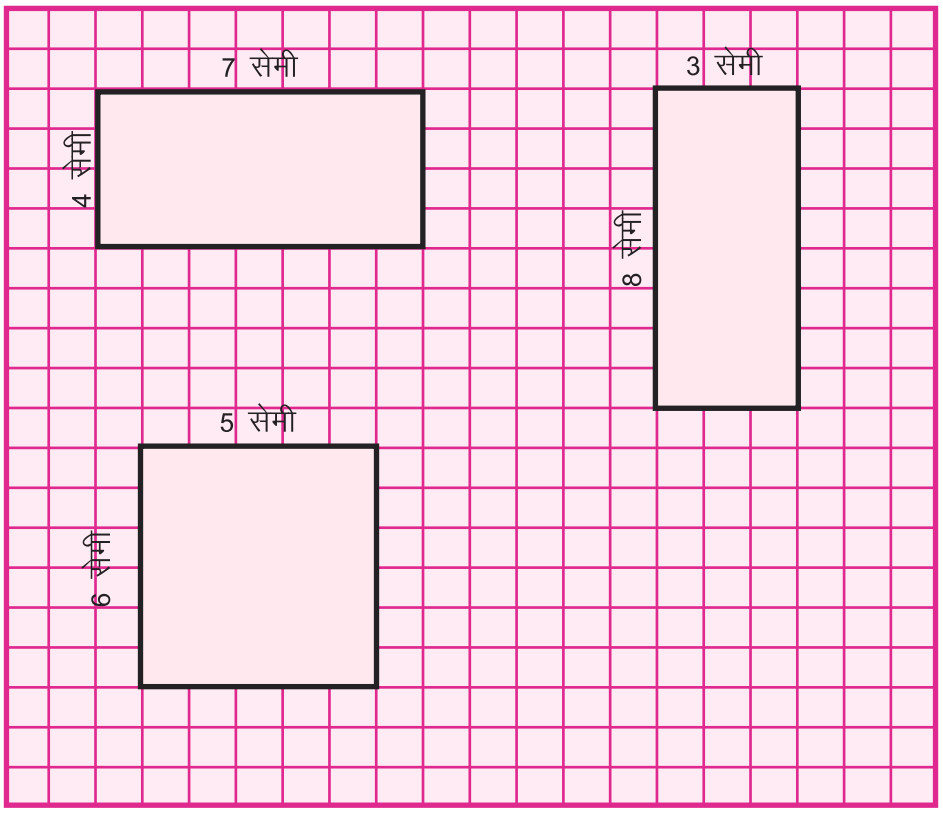
9. आयत के क्षेत्रफल में क्या परिवर्तन होगा यदि –
   (i) उसकी लम्बाई और चौड़ाई को दो गुना कर दिया जाए?
   (ii) उसकी लम्बाई को तिगुनी और चौड़ाई को चौगुना कर दिया जाए?

10. एक वर्ग के क्षेत्रफल में क्या परिवर्तन होगा यदि उसकी भुजा को–
   (i) आधी कर दें?
   (ii) दुगुनी कर दें?

14.7 आयत के परिमाप एवं क्षेत्रफल में सम्बन्ध

1. परिमाप समान होने पर

एक ग्रिड पेपर लीजिए जिसका प्रत्येक वर्गाकार खाना 1 सेमी X 1 सेमी का हो 1 सेमी माप के 22 पतले तार के टुकड़े लीजिए जिनसे अलग–अलग नाप के आयत बनाने का प्रयास कीजिए जिनका परिमाप 22 सेमी हो।



आकृति 14.11

निम्नलिखित तालिका को भरिए तथा प्रत्येक आकृति में बनने वाले कुल वर्गाकार खाने गिन कर तालिका में भरिए।

लम्बाई	चौड़ाई	लम्बाई x चौड़ाई	क्षेत्रफल (वर्ग इकाई)
..... सेमी	..... सेमी	.....	.....
..... सेमी	..... सेमी	.....	.....
..... सेमी	..... सेमी	.....	.....
..... सेमी	..... सेमी	.....	.....

तालिका 14.3

इसी परिमाप के अन्य आयत ग्रिड पेपर पर बना कर तालिका में भरिए। तालिका 14.3 से आप क्या निष्कर्ष निकालते हैं?

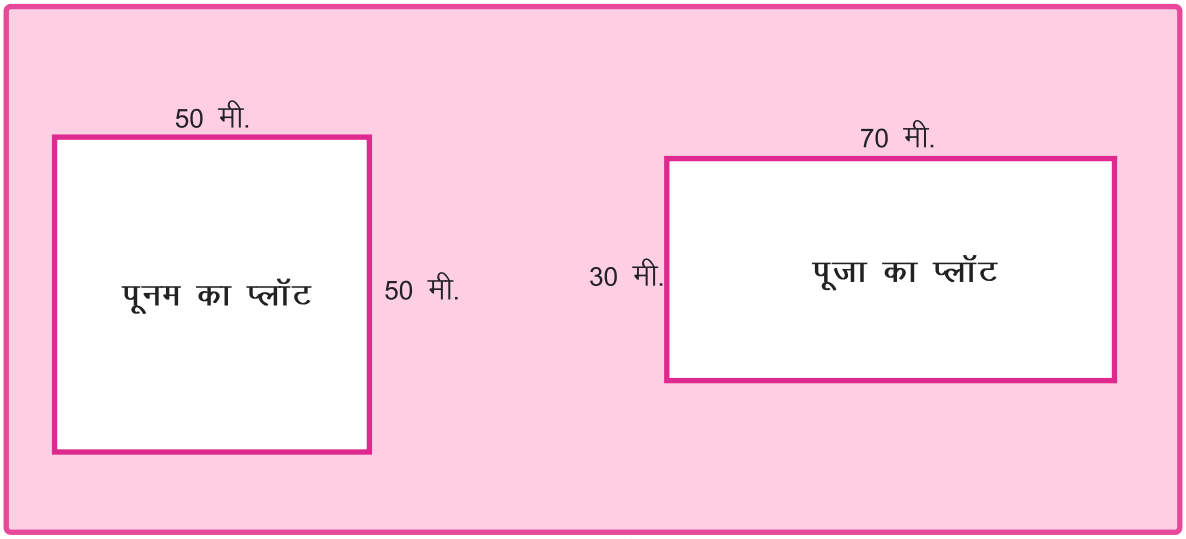
1. समान परिमाप वाले आयतों का क्षेत्रफल सदैव समान नहीं होता है।
2. समान परिमाप होने पर उस आयत का क्षेत्रफल सर्वाधिक होता है जिसकी लम्बाई व चौड़ाई में अंतर न्यूनतम हो।

2. क्षेत्रफल समान होने पर

24 खानों वाले अलग–अलग आयत बना कर तालिका 14.3 की तरह लम्बाई व चौड़ाई के मान को भर कर तालिका के आधार पर अन्य निष्कर्ष निकालिए।

14.8 समान परिमाप के वर्ग एवं आयत के क्षेत्रफल की तुलना

नीचे पूनम तथा पूजा के प्लॉट के चित्र दिए हैं बताइए किसके प्लॉट का क्षेत्रफल अधिक है?



आकृति 14.12

पूनम के प्लॉट का क्षेत्रफल = ... वर्ग मीटर
पूजा के प्लॉट का क्षेत्रफल = ... वर्ग मीटर

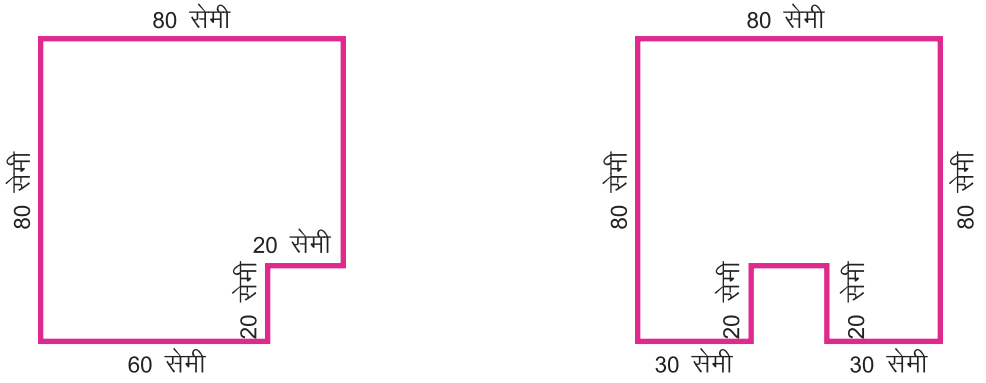
समान परिमाप के वर्ग एवं आयत में वर्गाकार आकृति का क्षेत्रफल अधिक होता है।

14.9 आकृति का भाग कम करने से परिमाप में बदलाव

80 सेमी X 80 सेमी नाप के वर्गाकार कपड़े में से एक 20 सेमी X 20 सेमी नाप का वर्गाकार रुमाल काटकर अलग किया गया वर्गाकार कपड़े के परिमाप में क्या बदलाव आएगा?

(i) जब रुमाल किसी एक कोने से लिया जाए– चित्र (i)

(ii) जब रुमाल किसी एक भुजा (किनारे) के मध्य से लिया जाए– चित्र (ii)



आकृति 14.13

- किसी आकृति में से समान क्षेत्रफल वाला भाग हटाने पर उस आकृति के परिमाप में बदलाव सदैव समान नहीं रहता है।

प्रश्नावली 14.3

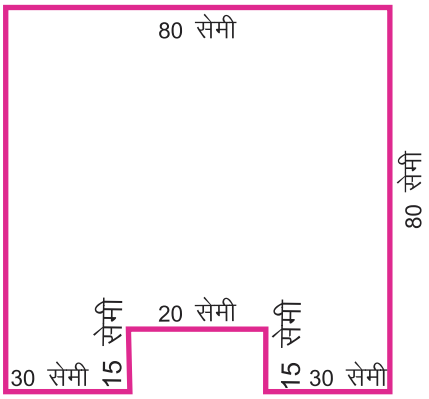
1. निम्नांकित आयताकार क्षेत्रों में बताइए किन आकृतियों का परिमाप समान तथा क्षेत्रफल भिन्न है?



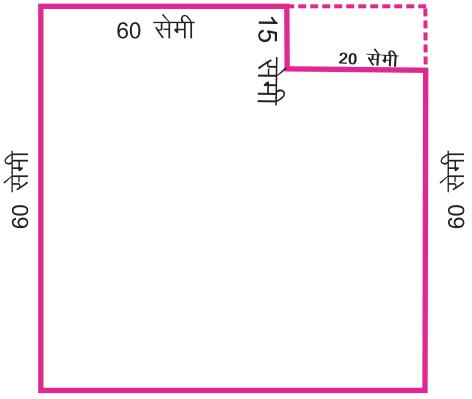
2. गोपी का खेत वर्गाकार है जिसकी भुजा 75 मीटर है। नारायण का खेत आयताकार है जिसकी लम्बाई 85 मीटर है। किसके खेत का क्षेत्रफल अधिक होगा एवं कितना? ज्ञात कीजिए। जबकि दोनों के खेत का परिमाप समान है।

3. एक वर्ग का क्षेत्रफल 64 वर्ग सेमी है। एक आयत का परिमाप इस वर्ग के परिमाप के समान है। अगर आयत की चौड़ाई 6.5 सेमी हो तो लम्बाई कितनी होगी? ज्ञात कीजिए किसका क्षेत्रफल अधिक है?

4. एक 20 सेमी x 15 सेमी माप वाला आयताकार टुकड़ा आकृति के अनुसार अलग–अलग स्थानों से काट कर वर्ग के परिमाप में आए बदलाव को बताइए।



(i)



(ii)

5. 1 सेमी X 1 सेमी खानों वाले वर्गाकार पेपर पर कितने आयत अलग–अलग लम्बाई तथा चौड़ाई के बना सकते हैं जिससे कि प्रत्येक आयत का क्षेत्रफल 64 वर्ग सेमी हो जाए। (केवल पूर्ण संख्या की नापों पर विचार करते हुए बनाइए)
   (i) किस आयत का परिमाप सबसे अधिक है? (ii) किस आयत का परिमाप सबसे कम है?
   (iii) यहाँ जैसे–जैसे परिमाप घटता है, आयत की चौड़ाई बढ़ती है अथवा घटती है?
6. 1 सेमी X 1 सेमी खानों वाले वर्गाकार पेपर पर कितने अलग–अलग लम्बाई तथा चौड़ाई के आयत बना सकते हैं जिससे कि प्रत्येक आयत का परिमाप 16 वर्ग सेमी हो जाए। (केवल पूर्ण संख्या की नापों पर ही विचार करते हुए बनाइए)
   (i) किस आयत का क्षेत्रफल सबसे अधिक है? (ii) किस आयत का क्षेत्रफल सबसे कम है?
   (iii) यहाँ जैसे–जैसे क्षेत्रफल बढ़ता है, आयत की लम्बाई बढ़ती है अथवा घटती है?

हमने सीखा

1. परिमाप एक ऐसी दूरी है जो रेखा खंडों के साथ–साथ चलते हुए एक बंद आकृति के चारों ओर एक पूरा चक्कर लगाने में तय होती है।
2. (i) आयत का परिमाप = 2 x (लम्बाई + चौड़ाई) (ii) वर्ग का परिमाप = 4 x भुजा की लम्बाई
   (iii) समबाहु त्रिभुज का परिमाप = 3 x भुजा की लम्बाई
   (iv) समबहुभुज का परिमाप = भुजाओं की संख्या x भुजा की लम्बाई
3. बंद आकृतियों द्वारा घेरे गए तल को उसका क्षेत्रफल कहते हैं।
4. वर्गाकार पेपर का प्रयोग करके किसी आकृति का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित परिपाटी को अपनाया जाता है–
   (i) जिन वर्गों का आधे से कम भाग आकृति से घिरा है, उन्हें छोड़ देते है।
   (ii) यदि किसी वर्ग का आधे से अधिक भाग आकृति से घिरा है, तो ऐसे वर्गों को हम एक पूरा वर्ग ही गिनते हैं।
   (iii) यदि किसी वर्ग का आधा भाग आकृति से घिरा हो तो उसके क्षेत्रफल को आधा वर्ग इकाई लेते हैं।
5. (i) आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई x चौड़ाई (ii) वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा x भुजा

अध्याय 15

आँकड़ों का प्रबंधन

15.1 आँकड़ों का खेल अध्याय को आपने कक्षा पाँच में पढ़ा था। जिसमें आँकड़ों के गणना चिह्न, चित्रों द्वारा प्रदर्शन एवं दंड आलेख का अध्ययन भी किया था। इस अध्याय में हम इनके बारे में कुछ और अधिक जानने का प्रयास करेंगे।

आप एक सिक्का लें उसे 20 बार उछालें एवं उस से प्राप्त चित व पट को अपनी कॉपी में लिखें। किशन अपनी कॉपी में इस प्रकार लिखता हैं।

T T H H T T T H T H H T T H T H H H T T

ये सभी आँकड़े हैं जो किशन के 20 बार सिक्के को उछालने पर प्राप्त हुए हैं।

आपकी कक्षा के दोस्तों की उम्र का पता कर लिखिए।

.....

क्या ये भी आँकड़े हैं?

जानकी की पसंद की मिठाई जलेबी है।

क्या यह भी आँकड़े हैं?

नहीं, यह आँकड़े नहीं हैं क्योंकि यहाँ केवल जानकी की पसंद को ही पूछा गया था।

यदि किसी समूह की पसंदीदा मिठाई के बारे में पूछा जाता तो क्या वह आँकड़े होते?

निम्नलिखित में बताइए कौन–कौन से आँकड़े हैं एवं कौन–कौन से आँकड़े नहीं हैं ?

क्र.सं.	कथन	आँकड़े हैं / नहीं हैं
1.	आपकी कक्षा के विद्यार्थियों की संख्या	आँकड़े नहीं हैं
2.	कक्षा 6 से 12 तक के पैदल आने वाले विद्यार्थियों की कक्षावार संख्या	
3.	आपके गाँव में विद्यालयों की संख्या	
4.	आपके घर पर पशुओं की संख्या	
5.	आपके परिवार के सदस्यों का वजन	
6.	आपके गाँव में पक्के व कच्चे मकानों की संख्या	
7.	आपके कक्षाध्यापक की आयु	

ऐसे और भी कथन बनाएँ तथा खुद तय करें कि ये आँकड़े हैं या नहीं।

(इस अध्याय में दिए गए उदाहरण एवं सवाल अध्यापक एवं विद्यार्थियों के लिए आधार मात्र है। कक्षा को जीवंत बनाने के लिए उदाहरण एवं सवाल स्थानीय परिस्थिति के लिए बनाइए।)

15.2 आँकड़ों के प्रकार

शबनम और सुशील क्रमशः छात्र पंचायत के अध्यक्ष व प्रधानमंत्री हैं। छात्र पंचायत की योजना बनाते समय उन्हें आज कक्षावार उपस्थित विद्यार्थियों की संख्या की जरूरत थी। शबनम हर कक्षा में उपस्थित विद्यार्थियों की संख्या लेने गई, कुछ समय बाद सुशील को अचानक ध्यान आया कि यह जानकारी तो प्रधानाचार्य कक्ष में से ली जा सकती है। वह भी वहाँ से ले आया, दोनों द्वारा लाए गए आँकड़े समान थे। यहाँ शबनम ने उपस्थित विद्यार्थियों की संख्या स्वयं एकत्रित की थी। अतः ये शबनम के लिए प्राथमिक आँकड़े कहलाएँगे। जबकि सुशील ने ये जानकारी प्रधानाचार्य कक्ष से ली थी उनके लिए आँकड़े द्वितीयक आँकड़े कहलाएँगे। सरकार द्वारा निर्धारित सरकारी प्रतिनिधि घर–घर जाकर जनसंख्या के आँकड़ों को इकट्ठा (एकत्रित) करते हैं, सरकार के लिए यह प्राथमिक आँकड़े हैं जबकि जनसंख्या के उन्हीं आँकड़ों का उपयोग अन्य संस्थाएँ करती हैं तो उनके लिए यह द्वितीयक आँकड़े हैं।

आप अपने विद्यालय के समस्त अध्यापकों के निम्नलिखित आँकड़े एकत्रित कीजिए–

. अध्यापक का नाम : .....
पद : .....
शैक्षिक योग्यता : .....
विषय जो पढ़ाते हैं : .....
अध्यापन का अनुभव : .....
उम्र : .....

इस गतिविधि में जो जानकारी आप द्वारा एकत्रित की जा रही है प्राथमिक आँकड़े हैं।
क्या आप इन्हें सारणीबद्ध कर सकते हैं?
कक्षा छठी के छात्र उपस्थिति रजिस्टर के छात्र विवरण पृष्ठ से छात्रों की जो जानकारी उपलब्ध होती है वह आप विद्यार्थियों के लिए द्वितीयक आँकड़े कहलाते हैं।

15.3 आँकड़ों को व्यवस्थित करना

15.3.1

वार्षिकोत्सव पर विद्यालय के विद्यार्थियों को पसंद की मिठाई वितरित करनी थी। पसंदीदा मिठाई के बारे में जानकारी ली गई।

जलेबी को J, लड्डू को L, बरफी को B, और गुलाबजामुन को G से दिखाया गया तो वह इस प्रकार है–

G, J, J, L, J, G, B, B, J, L, J, B, B, L, J, B, J, G, G, B

शशि का तरीका इस प्रकार था–

J - 7 L - 3 B - 6 G - 4

विकास का तरीका इस प्रकार था–

मिठाई का नाम		पसंद करने वालों की संख्या
जलेबी	(J)	✓✓✓✓✓✓✓
लड्डू	(L)	✓✓✓
बरफी	(B)	✓✓✓✓✓✓
गुलाबजामुन	(G)	✓✓✓✓

रोहित ने इस प्रकार किया–

मिठाई का नाम		मिलान चिह्न	पंसद करने वालों की संख्या
जलेबी	(J)	|| || || |	7
लड्डू	(L)	|| |	3
बरफी	(B)	|| || ||	6
गुलाबजामुन	(G)	|| ||	4

राजुल का तरीका इस प्रकार था–

मिठाई का नाम		मिलान चिन्ह	पंसद करने वालों की संख्या
जलेबी	(J)	𝍸 ||	7
लड्डू	(L)	|||	3
बरफी	(B)	𝍸 |	6
गुलाबजामुन	(G)	||||	4

यहाँ हमने चार तरीकों से देखा और उसमें यह तय किया गया कि राजुल का तरीका ठीक है क्योंकि राजुल ने गणना चिह्न को पाँच के बंडल के रूप में लिखा था जो गिनने में भी आसान था।

15.3.2 करीना ने पासा लेकर उसे 30 बार उछाला और नीचे दिखाए अनुसार अपने आँकड़े लिखे।

3, 6, 5, 4, 4, 3, 6, 5, 3, 6, 2, 3, 1, 6, 4, 1, 3, 6,
1, 1, 2, 4, 4, 3, 3, 4, 2, 1, 2, 1

करीना निम्नलिखित सूचना जानना चाहती थी

1. पासे की उछाल पर सबसे अधिक बार आने वाला अंक
2. पासे की उछाल पर सबसे कम बार आने वाला अंक
3. पासे की उछाल पर सम अंक और विषम अंक आने की बारम्बारताओं में अन्तर

करीना ने मिलान चिह्न का प्रयोग करते हुए सारणी तैयार की–

पासे के अंक	मिलान चिह्न	बारम्बारता
1	𝍸 I	6
2	IIII	4
3	𝍸 II	7
4	𝍸 I	6
5	II	2
6	𝍸	5

अब पूछे गए प्रश्नों का उत्तर सरलता से दिया जा सकता है। इस प्रकार के क्रियाकलाप आप अपनी कक्षा में भी कीजिए।

15.4 चित्रालेख

कक्षा की पाँच पंक्तियों में विद्यार्थी इस प्रकार बैठे थे–

	☺ = 1 विद्यार्थी
पंक्ति 1	☺ ☺ ☺ ☺
पंक्ति 2	☺ ☺ ☺ ☺ ☺
पंक्ति 3	☺ ☺ ☺
पंक्ति 4	☺ ☺ ☺ ☺
पंक्ति 5	☺ ☺

(i) किस पंक्ति में विद्यार्थियों की संख्या सबसे अधिक है?

(ii) किस पंक्ति में विद्यार्थियों की संख्या सबसे कम है?

(iii) किन–किन पंक्तियों में विद्यार्थियों की संख्या समान है?

आप उपर्युक्त आलेख को देख कर ही इन प्रश्नों के उत्तर दे सकते हैं। इनमें प्रयुक्त चित्र आँकड़ों को समझने में आपकी सहायता करते हैं। इन्हें **चित्रालेख** कहते हैं। एक चित्रालेख आँकड़ों को चित्रों, वस्तुओं या वस्तुओं के भागों के रूप में निरूपित करता है। इसको केवल देख कर ही आँकड़ों से संबंधित प्रश्नों के उत्तर दिए जा सकते हैं।

आइए, एक और उदाहरण देखें –

कक्षा 6 के 40 विद्यार्थियों से उनके पसंद के खेलों के बारे में जाना गया जिन्हें चित्रालेख द्वारा दिखाया गया है–

पसंदीदा खेल	चित्रालेख की संख्या ☺ = 1 खिलाड़ी
खो–खो	☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺
फुटबाल	☺ ☺ ☺ ☺ ☺
वॉलीबाल	☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺
बैडमिंटन	☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺
हॉकी	☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

इस चित्रालेख से आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

(i) खो–खो खेलने वाले विद्यार्थियों की संख्या 8 है।

(ii) विद्यार्थियों द्वारा सबसे अधिक पसंद किया जाने वाला खेल बैडमिंटन है। 11 बालक / बालिका द्वारा यह खेल खेला जाता है।

(iii) फुटबाल को सबसे कम विद्यार्थी पसंद करते हैं।

विद्यालय के खेल मैदान में लगाए गए पेड़ों की संख्या इस प्रकार है: उनके आधार पर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

	= 5 पेड़
अमरूद	
केले	
पपीते	
संतरे	

(i) अमरूद के पेड़ों की संख्या।

(ii) संतरे के पेड़ों की संख्या।

(iii) 15 पेड़ किस फल के लगाए गए हैं?

(iv) केले के पेड़ से पपीते के पेड़ कितने अधिक हैं?

करो और सीखो

आप अपनी कक्षा के साथियों के साथ छोटे–छोटे समूह में बैठ जाएँ एवं उस समूह में आपका एक साथी चित्रालेख का सवाल बनाए, जिसे आता है उसके जवाब दें, उसके सभी जवाब आ जाएँ तो सवाल बनाने का मौका अन्य साथियों को दें। बारी–बारी से आप भी सवाल बनाने के अवसर का इंतजार करें।

किसी सर्वेक्षण से यह पता चला कि एक बड़े अस्पताल में वाहन दुर्घटनाओं के कारण भर्ती मरीजों की संख्या इस प्रकार थी।

वाहन दुर्घटनाओं के प्रकार	मरीजों की संख्या  = 100 मरीज
दो वाहनों के टकराने से	
टायर के फट जाने से	
दुपहिया वाहनों के फिसलने से	
गलत दिशा में चलते समय	
सडक पार करते समय	

(i) किस दुर्घटना के मरीज सबसे अधिक थे?

(ii) किस दुर्घटना के मरीज सबसे कम थे?

(iii) दुर्घटनाओं से मरीजों की कुल संख्या कितनी थी?

उपर्युक्त चित्रालेख के आधार पर सारणी पूरी कीजिए

वाहन दुर्घटनाओं के प्रकार	मरीजों की संख्या
दो वाहनों के टकराने से	
टायर के फट जाने से	100 से अधिक 200 से कम
दुपहिया वाहनों के फिसलने से	
गलत दिशा में चलते समय	100
सडक पार करते समय	

करो और सीखो

आप अपने गाँव के 200 व्यक्तियों के आँकड़े इकट्ठे कर पता कीजिए कि उनकी आय के स्त्रोत क्या (खेती, मजदूरी, नौकरी व व्यापार) हैं? तथा इसे चित्रालेख में दिखाइए।

प्रश्नावली 15.1

1. निम्नांकित में से प्राथमिक एवं द्वितीयक आँकड़ों को पहचानिए।
   (i) प्रार्थना सभा में कक्षावार उपस्थिति की गणना।
   (ii) छात्र उपस्थिति रजिस्टर से कक्षा 6 के विद्यार्थियों की जातिवार संख्या।
   (iii) किसी सड़क से प्रातः 9:00 से 11:00 बजे तक गुजरने वाले वाहनों की संख्या।
   (iv) जयपुर से राजस्थान के प्रमुख नगरों की दूरी मानचित्र में देखकर बताना।

2. एक कक्षा के 30 विद्यार्थियों की आयु (पूर्ण वर्षों में) निम्नानुसार पाई गई मिलान चिह्न सारणी बनाइए।

   11, 12, 11, 13, 14, 11, 12, 13, 15, 13, 13, 16, 14, 13, 14,
   13,12 ,14, 13, 12, 14, 13, 13, 12, 14, 14, 13, 12, 13, 14

   (i) ज्ञात कीजिए कितने विद्यार्थियों की आयु 13 वर्ष या उससे अधिक है ?
   (ii) किस आयु के विद्यार्थी सर्वाधिक हैं और कितने हैं ?
   (iii) 14 वर्ष से कम आयु वाले विद्यार्थियों की संख्या बताइए ?

3. 'स्वच्छ भारत–स्वस्थ भारत' विषय पर हुई एक निबंध प्रतियोगिता में 25 विद्यार्थियों ने 10 में से निम्नांकित अंक प्राप्त किए–

   6, 7, 7, 5, 8, 9, 8, 6, 7, 5, 8, 6, 6, 5, 4, 7, 6, 8, 8, 9, 7, 5, 9, 8, 10

   इन अंकों को मिलान चिह्नों का प्रयोग करके व्यवस्थित कीजिए तथा बताइए।
   (i) 6 तथा 6 से कम अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या।
   (ii) 6 से अधिक अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या।
   (iii) 8 अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या।

4. दिया गया चित्रालेख 5 परिवारों में सदस्यों की संख्या को दर्शाता है।

	संकेत ☺ = 1 सदस्य
परिवार A	☺ ☺ ☺ ☺ ☺
परिवार B	☺ ☺ ☺ ☺
परिवार C	☺ ☺
परिवार D	☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺
परिवार E	☺ ☺ ☺ ☺

चित्रालेख को देखिए और निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(i) किस परिवार में सदस्य संख्या अधिकतम है ?

(ii) किस परिवार में सदस्य संख्या न्यूनतम है ?

(iii) परिवार D एवं C के मध्य सदस्यों की संख्या का अंतर कितना है ?

(iv) पाँचों परिवारों में कुल मिलाकर कितने सदस्य हैं ?

5. किसी सप्ताह के विभिन्न दिनों में एक पोस्ट ऑफिस से बिकने वाले लिफाफों की संख्या नीचे दर्शाई गई है।

	संकेत ✉ = 5 लिफाफे
सोमवार	✉ ✉ ✉ ✉ ✉ ✉ ✉
मंगलवार	✉ ✉ ✉ ✉
बुधवार	✉ ✉ ✉ ✉ ✉
गुरुवार	✉ ✉ ✉ ✉ ✉ ✉
शुक्रवार	✉ ✉ ✉
शनिवार	✉ ✉

चित्रालेख को देख कर निम्नांकित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(i) बुधवार को कितने लिफाफे बेचे गए ?

(ii) किस दिन बेचे गए लिफाफों की संख्या अधिकतम थी ?

(iii) यदि एक लिफाफे का मूल्य 5 रुपये हो तो सोमवार को बेचे गए लिफाफों का मूल्य क्या होगा ?

(iv) पूरे सप्ताह में कितने लिफाफे बेचे गए और उनका मूल्य कितना था ?

6 एक कक्षा के 30 विद्यार्थी विभिन्न खेल खेलते हैं। निम्न सारणी में उनके द्वारा खेले जाने वाले खेलों को दर्शाया गया है।

खेल	छात्रों की संख्या 🧍 = 1 छात्र
फुटबाल	🧍 🧍 🧍 🧍 🧍 🧍
खो–खो	🧍 🧍 🧍 🧍 🧍 🧍 🧍 🧍
वालीबाल	🧍 🧍 🧍 🧍 🧍
क्रिकेट	🧍 🧍 🧍 🧍 🧍 🧍 🧍 🧍 🧍 🧍 🧍

बताइए–

(i) कितने विद्यार्थियों द्वारा खो–खो खेला जाता है ?

(ii) कौनसा खेल सबसे अधिक विद्यार्थियों द्वारा खेला जाता है ?

(iii) कितने विद्यार्थी कोई खेल नहीं खेलते ?

5.4.1 चित्रालेखों को बनाना

यह एक रोचक क्रिया है आइए देखते हैं। पीने योग्य पानी की मात्रा प्रतिदिन घटती जा रही है। जलदाय विभाग एवं चिकित्सा विभाग इस बारे में गहन मंथन कर रहा है। इस हेतु उन्होंने अपनी बैठक में तय किया कि पानी के स्रोत जो किसी कारण से दूषित हो रहे हैं उनका पता लगाया जाए एवं जिस कारण से स्रोत दूषित हो रहा है उसको रोका जाए। इस हेतु एक जिले के आँकड़े इस प्रकार थे।

स्त्रोत	संख्या
कुएँ	8
तालाब	4
हैंडपम्प	5
बाँध	3
नलकूप	6

संकेत  = 1 स्त्रोत लेकर चित्रालेख निरूपित कीजिए।

हल

स्त्रोत	संख्या	संकेत  = 1 स्त्रोत
कुएँ		

हैंडपम्प		

(i) राधिका ने चित्रालेख अधूरा छोड़ दिया इसे आप पूरा कर सकते हैं ?

(ii) यदि संकेत  =10 स्त्रोत होता तो उस जिले के आँकड़े क्या होते ? सारणी में दिखाइए।

किसी सप्ताह एक कक्षा के 40 विद्यार्थियों में से मध्यान्ह भोजन करने वाले विद्यार्थियों की संख्या निम्नानुसार है। इसे एक चित्रालेख द्वारा निरूपित कीजिए।

दिन	भोजन करने वाले विद्यार्थियों की संख्या
सोमवार	35
मंगलवार	31
बुधवार	37
गुरूवार	33
शुक्रवार	34
शनिवार	36

हल यदि हम 5 विद्यार्थियों को संकेत ❀ द्वारा दर्शाएँ तो

4 विद्यार्थियों के लिए संकेत होगा ❀

3 विद्यार्थियों के लिए संकेत होगा ❀

2 विद्यार्थियों के लिए संकेत होगा ❀

1 विद्यार्थी के लिए संकेत होगा ❀

इसका चित्रालेख निम्न प्रकार होगा–

दिन	भोजन करने वाले विद्यार्थियों की संख्या
सोमवार	❀ ❀ ❀ ❀ ❀ ❀ ❀
मंगलवार	❀ ❀ ❀ ❀ ❀ ❀ ❀
बुधवार	❀ ❀ ❀ ❀ ❀ ❀ ❀ ❀
गुरूवार	❀ ❀ ❀ ❀ ❀ ❀ ❀
शुक्रवार	❀ ❀ ❀ ❀ ❀ ❀ ❀
शनिवार	❀ ❀ ❀ ❀ ❀ ❀ ❀ ❀

किसी वर्ष के प्रथम आठ महीनों में आंगनवाड़ी के लिए खरीदे गए फोर्टीफाइड आटे के बेग की संख्या निम्नलिखित है–

महीना	बेग
मार्च	200
अप्रेल	250
मई	250
जून	210
जुलाई	300
अगस्त	345
सितम्बर	205
अक्टूबर	340

उपर्युक्त को चित्रालेख द्वारा निरूपित कीजिए।

संकेत 🎁 = 100 बेग

महीना	बेग
मार्च	🎁 🎁
अप्रेल	🎁 🎁 🎁
मई	🎁 🎁 🎁
जून	🎁 🎁
जुलाई	🎁 🎁 🎁
अगस्त	🎁 🎁 🎁 🎁
सितम्बर	🎁 🎁
अक्टूबर	🎁 🎁 🎁 🎁

यहाँ मार्च, अप्रेल, मई और जुलाई के लिए चित्र बनाना कठिन नहीं है परन्तु 210, 340, 345 एवं 205 को चित्रों द्वारा निरूपित करना सरल नहीं है। हम निकटतम 10 और 5 को 00 व 45 को 50 के निकटतम मान में ले सकते हैं।

प्रश्नावली 15.2

1. एक प्राथमिक स्वास्थ्य केन्द्र में एक सप्ताह में बुखार की दवा पैरासिटामोल लेने वाले मरीजों की संख्या नीचे तालिका में दी गई है। एक टैबलेट = 5 मरीज चिह्न का पैमाना लेकर एक चित्रालेख बनाइए।

सोमवार	मंगलवार	बुधवार	गुरूवार	शुक्रवार	शनिवार	रविवार
25	30	15	30	25	20	25

2. एक कक्षा के 25 विद्यार्थियों द्वारा पसंद किए गए विषय नीचे दिए गए हैं।
हिन्दी, गणित, अंग्रेजी, विज्ञान, अंग्रेजी, हिन्दी, संस्कृत, गणित, कम्प्यूटर शिक्षा, सा. विज्ञान, विज्ञान, गणित, हिन्दी, गणित, विज्ञान, गणित, अंग्रेजी, हिन्दी, अंग्रेजी, हिन्दी, गणित, विज्ञान, गणित, कम्प्यूटर शिक्षा और गणित।

उपर्युक्त आँकड़ों को मिलान चिह्नों द्वारा बारम्बारता सारणी में व्यवस्थित करें तथा बताएँ कि सबसे अधिक पसंद किया जाने वाला विषय कौनसा है तथा सबसे कम पसंद किया जाने वाला विषय कौनसा है?

3. सरपंच चुनाव में विभिन्न चुनाव चिह्नों के प्रत्याशियों को निम्न प्रकार से वोट प्राप्त हुए।

चुनाव चिह्न	साइकिल	टीवी	गेंद	पंखा
प्राप्त वोट	250	300	350	250

उपर्युक्त तालिका में दर्शाए तथ्यों को एक उचित पैमाना लेकर चित्रालेख द्वारा प्रदर्शित कीजिए एवं बताइए।

(i) किस चुनाव चिह्न का प्रत्याशी चुनाव जीता ?

(ii) विजेता एवं उप विजेता प्रत्याशी के मध्य वोटों का अन्तर कितना रहा ?

4. एक कक्षा के छात्रों की ऊँचाई सेमी में निम्नानुसार पाई गई–

148, 150, 152, 149, 151, 154, 153, 152, 150, 149, 148, 152, 153, 154, 152, 151, 152, 153, 152, 152, 153, 151, 152, 152, 153

(i) उपर्युक्त ऊँचाई की मिलान चिह्न की सहायता से बारंबारता सारणी बनाइए।

(ii) उचित पैमाना लेकर चित्रालेख का निर्माण कीजिए।

(iii) सबसे लम्बे विद्यार्थी की ऊँचाई बताइए।

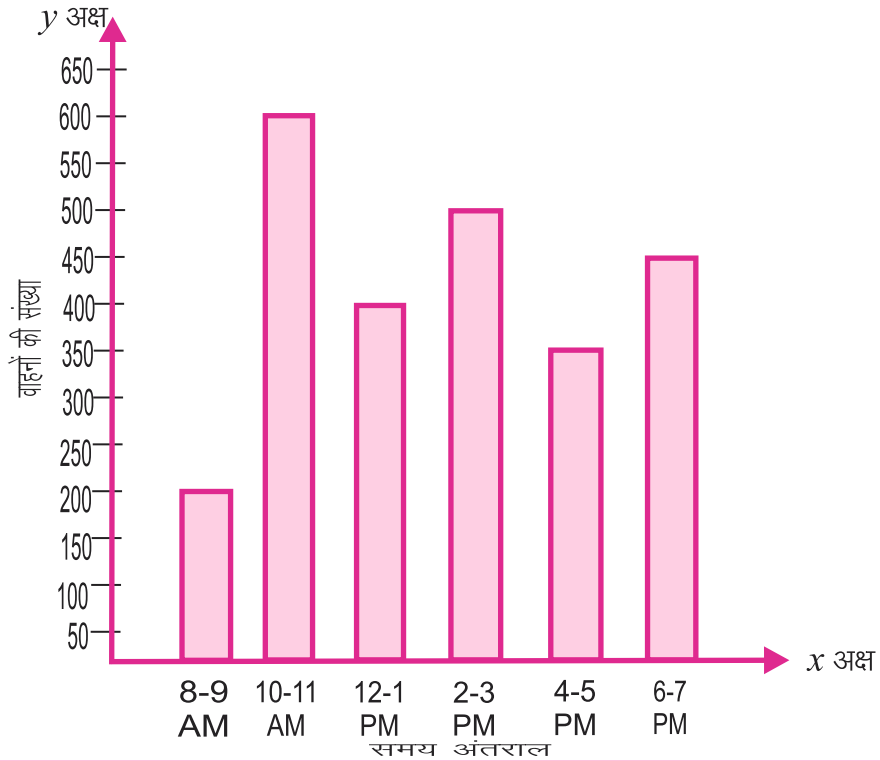
(iv) सबसे लम्बे और सबसे छोटे विद्यार्थियों की ऊँचाई में अन्तर बताइए।

15.5 दंड आलेख

आँकड़ों को चित्रालेख द्वारा निरूपित करने में समय अधिक लगता है और उसे बनाने में कठिनाई भी होती है। अतः आँकड़ों को निरूपित करने की अन्य विधि है दंड आलेख। दंड आलेख समान चौड़ाई के दंड हैं। किन्हीं दो दंडों के बीच की दूरी भी समान होती है। इस प्रकार खींचे गए प्रत्येक दंड की लंबाई दी हुई संख्या को दिखाती है। ये दंड क्षैतिज या उर्ध्वाधर खींचे जा सकते हैं। आँकड़ों को प्रस्तुत करने का यह निरूपण **दंड आरेख या दंड आलेख** कहलाता है।

15.5.1 दंड आलेख पढ़ना

राजस्थान पुलिस द्वारा जयपुर के एक भीड़ वाले व्यस्त चौराहे के अंतर्गत अलग–अलग समय में वाहनों की संख्या नीचे दंडालेख में दिखाई गई है। समय के अंतराल को x अक्ष पर एवं वाहनों की संख्या को y अक्ष पर लेते हैं। साथ ही पैमाना एक इकाई बराबर 50 वाहन लेते हैं।



निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए

1. यह कौनसा दंड कहलाएगा? (क्षैतिज/उर्ध्वाधर दंड)
2. वह समय अंतराल बताइए जब यातायात सबसे कम होता है ?
3. वह समय अंतराल बताइए जब यातायात सबसे अधिक होता है ?
4. किसी एक समय अन्तराल में सड़क पर पाए जाने वाले यातायात के साधन अधिकतम कितने हैं ?
5. किसी एक समय अन्तराल में सड़क पर पाए जाने वाले यातायात के साधन न्यूनतम कितने हैं ?
6. वह समयांतराल बताइए जब यातायात के साधन समान हों ?

हल

1. हम देख सकते हैं कि यह दण्डालेख उर्ध्वाधर दण्डालेख कहलाता है।
2. इन दण्डों का अध्ययन करने पर सबसे कम यातायात प्रातः 8 से 9 बजे होता है।
3. सबसे अधिक यातायात प्रातः 10 से 11 बजे होता है।
4. किसी एक समय अन्तराल में सड़क पर पाए जाने वाले यातायात के साधन अधिकतम 600 हैं।
5. किसी एक समय अन्तराल में सड़क पर पाए जाने वाले यातायात के साधन न्यूनतम 200 हैं।
6. दोपहर 12 से 1 एवं सायं 6 से 7 के बीच यातायात के साधन समान हैं।

करो और सीखो

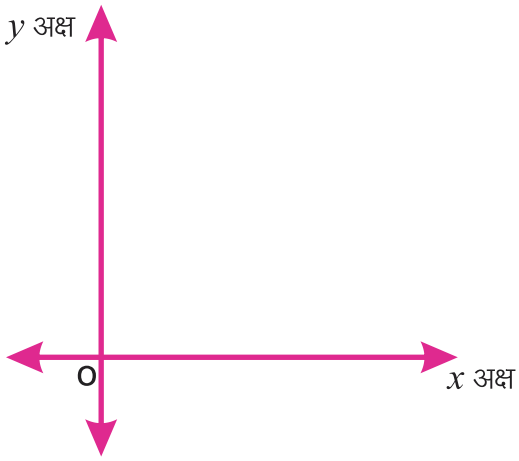
1. ऊपर दिए गए दण्ड आलेख को चित्रालेख द्वारा दर्शाइए।
2. यदि समय अन्तराल को y अक्ष पर तथा वाहनों की संख्या x अक्ष पर लेते हैं तब कैसा दण्डालेख बनेगा, बनाकर दर्शाइए।

किसी आदर्श विद्यालय में विभिन्न मदों पर होने वाली आय जो विद्यालय समय पश्चात ग्रामवासियों को दी जाने वाली सशुल्क सुविधा से होती हैं। इसे विद्यालय प्रबन्ध समिति के समक्ष रखा गया जो इस प्रकार है–

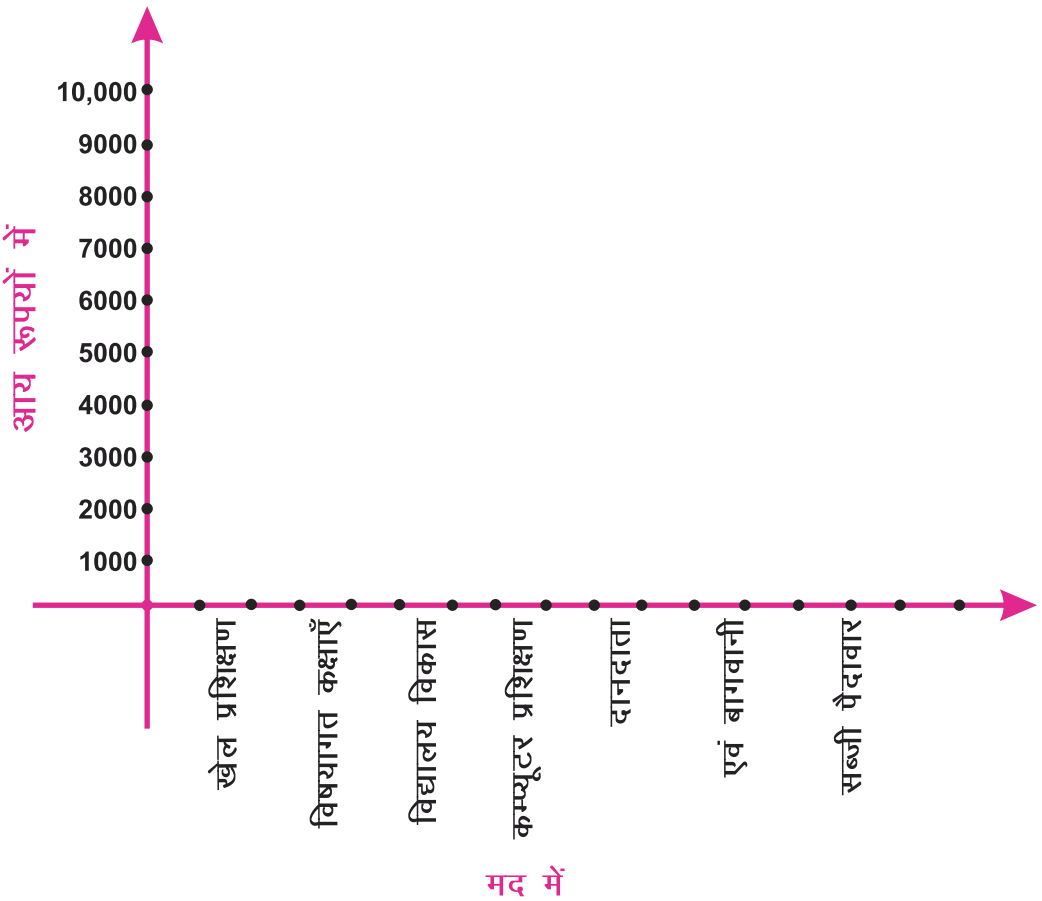
मद	आय (रु. में)
खेल प्रशिक्षण	4,000
विषयगत कक्षाएँ	10,000
विद्यालय विकास	3,000
कम्प्यूटर प्रशिक्षण	6,000
दान दाता द्वारा	8,000
सब्जी पैदावार एवं बागवानी	7,000

विद्यालय प्रबंध समिति द्वारा इस आय को सराहा गया है एवं दंडालेख में दिखा कर प्रधानाचार्य कक्ष में लगवाने का प्रस्ताव पास किया गया है। अध्यापक द्वारा दंडालेख में निरूपित करने के चरण इस प्रकार थे–

1. परस्पर दो लम्ब रेखाएँ एक उर्ध्वाधर एवं एक क्षैतिज रेखा खींची गई।



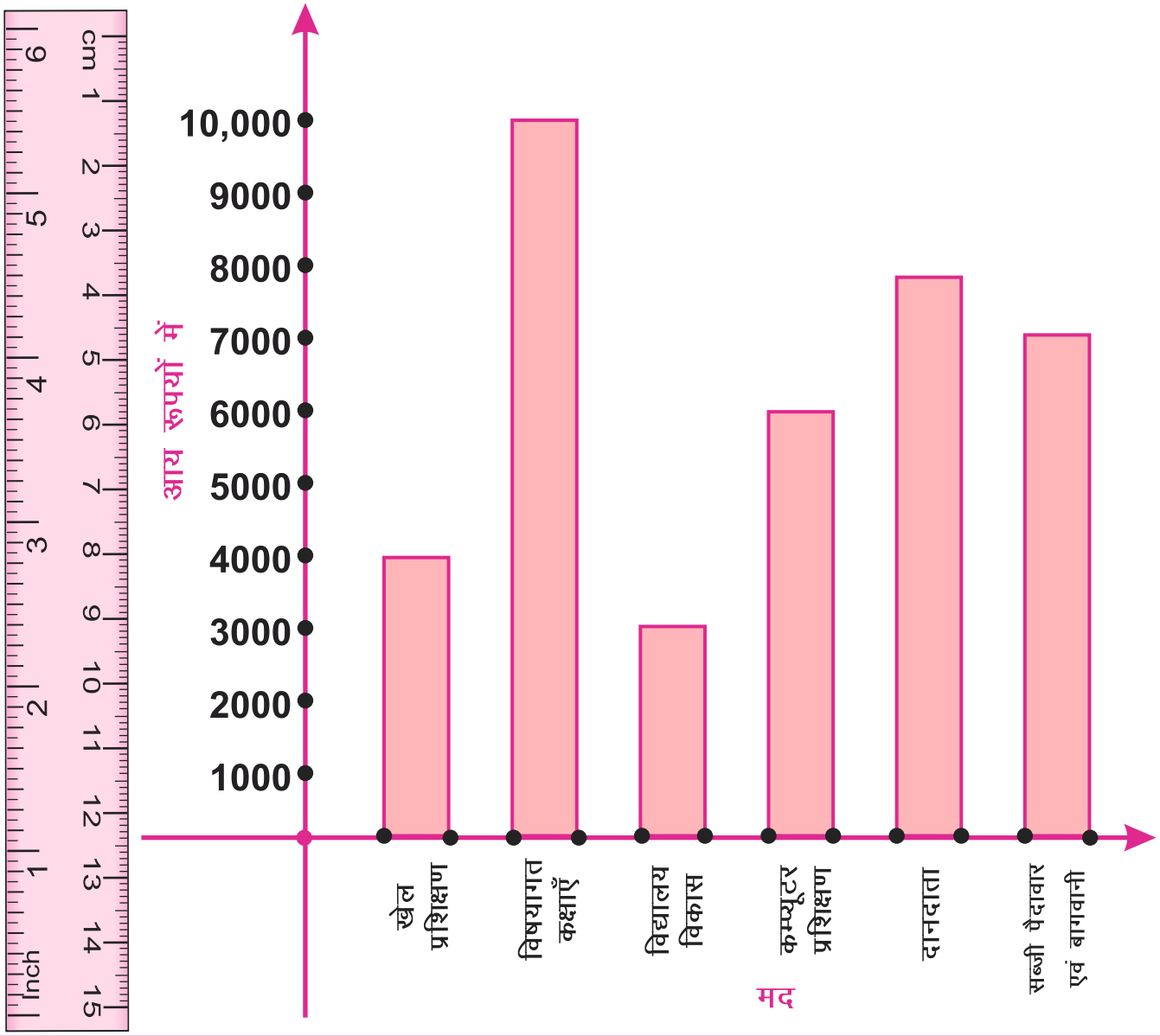
2. क्षैतिज रेखा के अनुदिश मद अंकित किया गया एवं उर्ध्वाधर रेखा के अनुदिश आय को अंकित किया गया। मद अंकित करते समय यह ध्यान रखा गया कि दंड के बीच दूरी व दंड की चौड़ाई समान हो।



3. उर्ध्वाधर रेखा के अनुदिश एक सुविधाजनक पैमाना लिया गया। यहाँ पर सुविधाजनक पैमाना
1 इकाई = 1000 रुपये और इसके अनुसार संगत मान अंकित किया गया है।

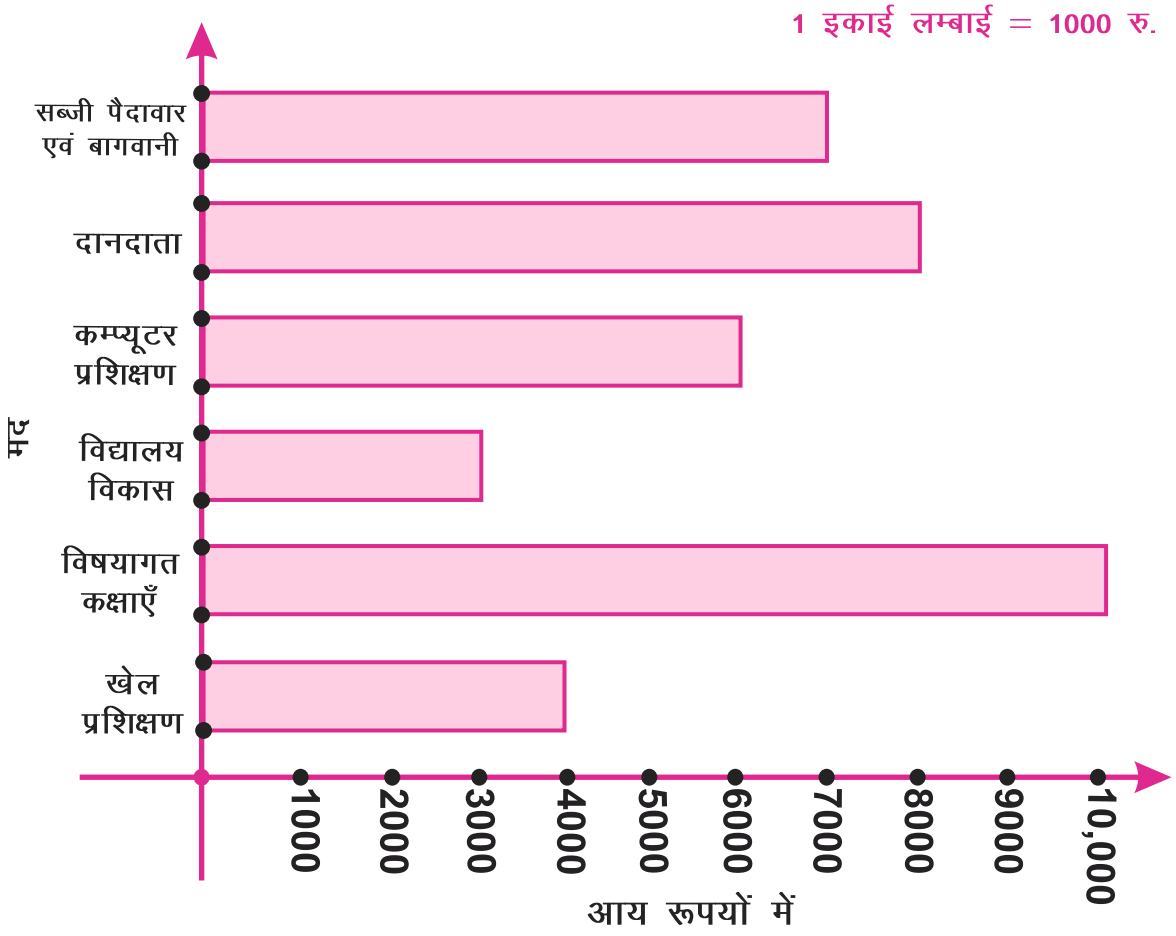
विभिन्न मदों के लिए दण्डों की लम्बाई परिकलित की गई जो इस प्रकार है–

खेल	:	4000 ÷ 1000	= 4 इकाई
विषयगत कक्षाएँ	:	10000 ÷ 1000	= 10 इकाई
विद्यालय विकास	:	3000 ÷ 1000	= 3 इकाई
कम्प्यूटर प्रशिक्षण	:	6000÷1000	= 6 इकाई
दानदाता	:	8000÷1000	= 8 इकाई
सब्जी पैदावार एवं बागवानी	:	7000÷1000	= 7 इकाई



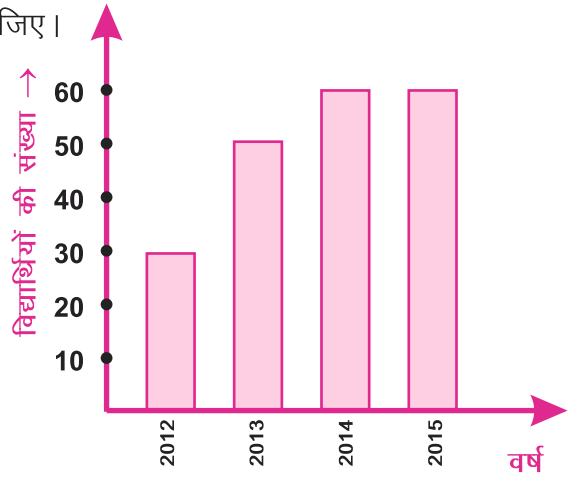
इस दण्डालेख को देख कर प्रधानाचार्य जी ने निर्देश दिए कि इन्हीं आँकड़ों का मद उर्ध्वाधर अक्ष की ओर व आय क्षैतिज अक्ष पर रख कर दंडालेख बनाएँ। तब इस प्रकार बनाया गया–

1 इकाई लम्बाई = 1000 रु.



प्रश्नावली 15.3

1. किसी स्कूल में छात्रवृत्ति पाने वाले विद्यार्थियों को निम्नलिखित दण्डालेख में दर्शाया गया है। इस दण्डालेख को पढिए और निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए।



(i) इस आलेख का पैमाना क्या है?

(ii) वर्ष 2014 में कितने विद्यार्थियों को छात्रवृत्ति मिली?

(iii) सबसे कम छात्रवृत्ति किस वर्ष मिली?

2. नीचे कुछ जानवरों के औसत जीवनकाल दिए गए हैं।

हाथी	70 वर्ष,
बकरी	15 वर्ष,
घोड़ा	50 वर्ष,
गाय	22 वर्ष,
हिरण	40 वर्ष,
बैल	28 वर्ष

उपर्युक्त तथ्यों को दण्ड आलेख द्वारा दर्शाइए एवं निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(i) सबसे अधिक औसत उम्र वाले जानवर का नाम बताइए?

(ii) सबसे कम औसत उम्र वाला जानवर कौनसा है?

(iii) गाय और बैल के औसत जीवन काल में अन्तर बताइए?

3. एक कॉलोनी में विभिन्न व्यवसायों से जुड़े लोगों की संख्या निम्न तालिका में दी गई है।

व्यवसाय	अध्यापक	डॉक्टर	दुकानदार	मजदूर	वकील
व्यक्तियों की संख्या	22	8	19	26	10

उपर्युक्त तालिका के आधार पर उचित पैमाना लेकर

(i) उर्ध्वाधर दण्ड आलेख

(ii) क्षैतिज दण्ड आलेख का निर्माण कीजिए।

4. हरखू के खेत में इस वर्ष तालिका में दर्शाए अनुसार पैदावार हुई।

धान का नाम	मक्का	बाजरा	मोठ	ग्वार	सोयाबीन
मात्रा (किग्रा में)	12500	20600	13000	24000	18500

उचित पैमाना लेते हुए उपर्युक्त सूचना के आधार पर एक क्षैतिज दण्ड आलेख खींचिए एवं निम्नांकित प्रश्नों के उत्तर दीजिए

(i) किस धान की पैदावार सर्वाधिक हुई है व कितनी?

(ii) कुल पैदावार कितनी है?

(ii) किस धान की पैदावार 20600 कि.ग्रा. है?

5. जीवन कौशल बालविकास मेले की विभिन्न प्रतियोगिताओं में भाग लेने वाले बालकों की संख्या निम्न तालिका में दर्शाई गई है।

प्रतियोगिता	भाग लेने वालों की संख्या
चित्र बनाएँ	34
आओ गीत गाएँ	12
वादविवाद	18
क्विज प्रतियोगिता	36

उचित पैमाना लेकर उर्ध्वाधर तथा क्षैतिज दण्ड आलेख बनाइए।

6. गणित क्विज प्रतियोगिता के अन्तर्गत 40 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों को निम्न तालिका में दर्शाया गया है।

अंक समूह	विद्यार्थियों की संख्या
0 – 20	3
20 – 40	6
40 – 60	12
60 – 80	14
80 – 100	5

बताइए–

(i) 40 – 60 अंक पाने वाले विद्यार्थियों की संख्या?

(ii) किस अंक समूह में विद्यार्थियों की संख्या सर्वाधिक है?

(iii) 60 से अधिक अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या?

हमने सीखा

1. सूचना देने के लिए एकत्रित की गई संख्याओं के संग्रह को आँकड़े कहते हैं।
2. आँकड़े दो प्रकार के होते हैं (i) प्राथमिक आँकड़े (ii) द्वितीयक आँकड़े।
3. दिए हुए आँकड़ों से विशेष सूचना प्राप्त करने के लिए उन्हें मिलान चिह्नों के प्रयोग से सारणी बद्ध किया जा सकता है।
4. चित्रालेख आँकड़ों को चित्रों, वस्तुओं या वस्तुओं के भागों के रूप में निरूपित करता है। हमनें चित्र लेखों की व्याख्या करना भी सीखा और उससे सम्बंधित प्रश्नों के उत्तर देना भी सीखा। हमने कुछ वस्तुओं को संकेतों से निरूपित करके चित्रालेखों को खींचना भी सीखा है। उदाहरणार्थ ✱ = 5 विद्यार्थी लेकर।
5. आँकड़ों को एक दण्ड आलेख द्वारा कैसे निरूपित किया जा सकता है। एक दण्ड आलेख में समान दूरी पर समान चौड़ाई के दण्ड क्षैतिज या उर्ध्वाधर रूप में खींचे जाते हैं। प्रत्येक दण्ड की लम्बाई वांछित सूचना दर्शाती है।
6. ऐसा करने के लिए हमने एक पैमाना तय करने की प्रक्रिया पर भी चर्चा की। उदाहरणार्थ एक इकाई बराबर 100 बैग। हमने दण्ड आलेखों का अभ्यास भी किया। हमने इसकी व्याख्या करना भी सीखा।

उत्तरमाला

प्रश्नावली 1.1

1. (i) पाँच हजार सात सौ बयासी (ii) पचहत्तर हज़ार आठ सौ उनासी
   (iii) तीन लाख नवासी हज़ार सतासी (iv) इक्कीस लाख बत्तीस हज़ार चार सौ बावन
   (v) सात करोड़ अड़सठ लाख बानवे हज़ार चार सौ उनासी
   (vi) पचास लाख साठ हज़ार सात सौ अठानवे
2. (i) 68,529 (ii) 89,079 (iii) 5,72,057 (iv) 90,90,990 (v) 1,21,31,041
3. स्वयं कीजिए।
4. (i) > (ii) < (iii) < (iv) > (v) >
5. (i) 4835 < 5348 < 8435 < 13584 < 25843 (ii) 1001 < 1010 < 1011 < 1100
   (iii) 50,050 < 50,500 < 50,505 < 55,555
   (iv) 5,86,85,376 < 5,86,85,378 < 5,86,95,306 < 5,86,95,376
6. (i) 9,754 > 8,320 > 847 > 571 (ii) 6,040 > 4,646 > 4,600 > 4,060
   (iii) 38,802 > 36,501 > 25,751 > 9,801 (iv) 11,001 > 10,101 > 10,011 > 10,001

प्रश्नावली 1.2

1. (i) 100 (ii) 1 (iii) 1000
   (iv) 1 (v) 1000 मीटर (vi) 1000
2. 5,76,994 3. 30,167 4. 34,029 5. 62,964
6. 42,935 7. 24,660 8. 12,385 9. 1,36,836
10. 3,000 11. 600

प्रश्नावली 1.3

1. (i) 900 (ii) 5,900 (iii) 3,500 (iv) 2,500
2. (i) 1800 (ii) 20,300 (iii) 5,91,600
3. 4,400 4. 1600 गायें 5. 7 लीटर

प्रश्नावली 2.1

1. (i) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48 (ii) 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12,18, 36
   (iii) 1, 2, 4, 7, 14, 28 (iv) 1, 2, 4, 5,10, 20, 25, 50, 100
   (v) 1, 5, 25, 125
2. (i) 7, 14, 21, 28, 35 (ii) 12, 24, 36, 48, 60
   (iii) 17, 34, 51, 68, 85 (iv) 15, 30, 45, 60, 75
   (v) 18, 36, 54, 72, 90

3. 11, 13, 17, 19, 23, 29 4. 2 5. 6, 12, 18, 30 6. 12, 24, 36
7. (i) सत्य (ii) असत्य (iii) असत्य (iv) असत्य (v) सत्य (vi) असत्य (vii) सत्य

प्रश्नावली 2.2

1. (i) 2 x 2 x 7 (ii) 2 x 3 x 3 x 3 (iii) 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 3 (iv) 2 x 2 x 37
   (v) 2 x 2 x 3 x 13
2. 2 x 2 x 2 x 5 x 5 x 5
3. (i) 1, 2, 3, 4, 6, 12 (ii) 1, 5 (iii) 1, 2, 3, 6 (iv) 1
4. (i) 20, 40, 60 (ii) 24, 48, 72 (iii) 20, 40, 60 (iv) 45, 90, 135
5. 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48

प्रश्नावली 2.3

1. (i) 12 (ii) 14 (iii) 13 (iv) 5 (v) 1
2. (i) 1 (ii) 2 (iii) 1
3. 5 मीटर 4. 4 लीटर 5. 18 मीटर

प्रश्नावली 2.4

1. (i) 30 (ii) 28 (iii) 108 (iv) 1008
2. 30 3. 15 4. 6 बजकर 24 मिनट 5. 240
6. 5 बजकर 3 मिनट

प्रश्नावली 3.1

1. (i) 56 (ii) 99 (iii) 304, 306 (iv) 0 (v) 0
2. (i) 1,202 (ii) 2,405 (iii) 3,554 (iv) 4,443
3. (i) 2,305 (ii) 3,612 (iii) 4,001 (iv) 5,061
4. (i) 188,190 (ii) 198, 200 (iii) 208, 210 (iv) 299, 301 5. 0
6. (i) सत्य (ii) असत्य (iii) सत्य (iv) सत्य (v) असत्य
   (vi) असत्य (vii) सत्य (viii) असत्य (ix) सत्य (x) असत्य
   (xi) सत्य

प्रश्नावली 3.2

1. (i) 286 (ii) 296 (iii) 175 (iv) 186
2. (i) 1,22,500 (ii) 79,000 (iii) 8,500 (iv) 20,000
3. (i) 18,500 (ii) 120 (iii) 54,27,900 (iv) 120
4. (i) 19,610 (ii) 38,480 (iii) 5,508 (iv) 1,59,264
5. (i) (b) (ii) (a) (iii) (d) (iv) (c)
8. (i) 13,938 (ii) 50,000 (iii) 21,280
9. (i), (iv) 10. (i) d (ii) a

प्रश्नावली 4.1

1. (i) $+45^0$ c (ii) -10^0 c (iii) +300 रूपये (iv) -500 रूपये
3. (i) > (ii) > (iii) > (iv) > (v) < (vi) >
4. (i) असत्य (ii) असत्य (iii) असत्य (iv) सत्य
5. (i) - 4, -3, -2, -1, 0 (ii) -5, -4, -3
   (iii) - 2, -1, 0, 1, 2 (iv) -10, -9, -8, -7, -6
6. (i) आरोही = -7, -3, 3, 5 (ii) आरोही = - 2, - 1, 0, 3
   अवरोही = 5, 3, -3, -7 अवरोही = 3, 0, -1, -2
   (i) आरोही = - 6, 1, 3 (iv) आरोही = -5, -1, 2, 4
   अवरोही = 3, 1, - 6 अवरोही = 4, 2, -1, -5

प्रश्नावली 4.2

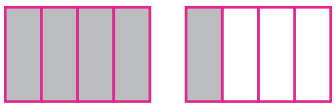
1. (i) 9 (ii) 0 (iii) -2 (iv) -5
2. (i) 6 (ii) -7 (iii) +3 (iv) 0
3. (i) 9 (ii) -10 (iii) -100 (iv) -650 (v) -10 (vi) -260
4. (i) -92 (ii) -81 (iii) 50 (iv) 91

प्रश्नावली 4.3

1. (i) 20 (ii) -8 (iii) 6 (iv) -15 (v) 33 (vi) -49
2. (i) 5 (ii) (-7) (iii) 0 (iv) (-4) (v) (-2) (vi) -4
3. (i) < (ii) = (iii) > (iv) >
4. (i) 0 (ii) -11 (iii) 8 (iv) -28

प्रश्नावली 5.1

1. (i) $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ (ii) $\frac{2}{3}$ (iii) $\frac{3}{5}$

2. (i)  (ii)  (iii) 

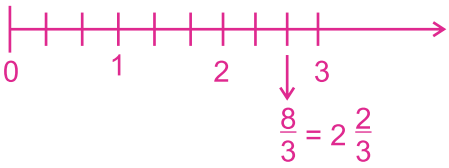
   (iv) 

   (अलग–अलग तरह से चित्रों द्वारा भी भिन्नों को प्रदर्शित किया जा सकता है)

3. $\frac{7}{12}$ घंटे 4. $\frac{7}{15}$ 5. (i) $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ (iii) $\frac{2}{3}$

6. (i) 

(ii) 

(iii) 

7. (i) $6\frac{2}{3}$ (ii) $2\frac{1}{3}$ (iii) $3\frac{1}{6}$

8. (i) $\frac{23}{3}$ (ii) $\frac{23}{4}$ (iii) $\frac{9}{2}$

प्रश्नावली 5.2

1. (i) हाँ (ii) नहीं 2. (i) 14 (ii) 3 (iii) 12 (iv) 1 (v) 3

3. (i) $\frac{18}{24}$ (ii) $\frac{15}{20}$ (iii) $\frac{24}{32}$ (iv) $\frac{9}{12}$

4. (i) $\frac{5}{9}$ (ii) $\frac{6}{7}$ (iii) $\frac{3}{7}$ (iv) $\frac{1}{12}$

5. (i) d (ii) f (iii) h (iv) g (v) e (vi) c (vii) i
(viii) b (ix) j (x) a

प्रश्नावली 5.3

1. (i) अवरोही क्रम – $\frac{7}{8}>\frac{5}{8}>\frac{3}{8}>\frac{2}{8}>\frac{1}{8}$ आरोही क्रम – $\frac{1}{8}<\frac{2}{8}<\frac{3}{8}<\frac{5}{8}<\frac{7}{8}$

(ii) अवरोही क्रम – $\frac{5}{6}>\frac{4}{6}>\frac{3}{6}>\frac{1}{6}$ आरोही क्रम – $\frac{1}{6}<\frac{3}{6}<\frac{4}{6}<\frac{5}{6}$

2. (i) $\frac{5}{6} > \frac{9}{11}$ (ii) $\frac{3}{4} > \frac{1}{5}$ (iii) $\frac{3}{5} > \frac{3}{7}$

3. समूह 1 $\frac{2}{12}=\frac{10}{60}=\frac{12}{72}=\frac{16}{96}$ समूह 2 $\frac{3}{15}=\frac{10}{50}=\frac{15}{75}=\frac{18}{90}$ समूह 3 $\frac{8}{50}=\frac{16}{100}=\frac{12}{75}=\frac{4}{25}$

4. (i) नहीं (ii) नहीं (iii) हाँ (iv) नहीं

5. दोनों कक्षाओं में बराबर विद्यार्थी प्रथम श्रेणी में पास हुए।

6. रोहिणी ने।

प्रश्नावली 5.4

1. (i) $\frac{7}{19}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{49}{23}$ (iv) $\frac{11}{14}$ (v) $\frac{169}{60}$ (vi) $\frac{193}{30}$ (vii) $\frac{23}{3}$ (viii) $\frac{326}{35}$

2. $\frac{1}{2}$ 3. $\frac{14}{15}$ 4. 5 किमी 5. $\frac{5}{2}$ लीटर या $2\frac{1}{2}$ लीटर 6. पूरी 1 दीवार पर

प्रश्नावली 5.5

1. (i) $\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{13}{35}$ (iii) $\frac{33}{10}$ (iv) $\frac{65}{12}$ (v) $\frac{7}{12}$ (vi) $\frac{1}{10}$

2. $\frac{5}{28}$ लीटर 3. $\frac{1}{2}$ मी. 4. $\frac{1}{3}$ भाग 5. $\frac{17}{10}$ किग्रा. 6. गीता, $\frac{1}{4}$ मिनट

7.(i)

⊖ \ ⊕ →			
	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{6}{5}$
	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$
	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

(ii)

⊖ \ ⊕ →			
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{15}$
	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{11}{30}$
	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{6}$

प्रश्नावली 6.1

1. (i) 12.3

   (ii) 13.7

   (iii) 251.2

2.

	सैंकड़ा	दहाई	इकाई	दशांश
(i)		1	9	4
(ii)			0	5
(iii)		1	0	9
(iv)	2	0	5	9

3. (i) 0.7 (ii) 20.4 (iii) 14.9 (iv) 600.3

4. (i) 0.3 (ii) 4.8 (iii) 358.1 (iv) 90.3 (v) 1.5 (vi) 0.4 (vii) 4·5 (viii) 3.6

5. (i) $\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{5}{2}$ (iii) $\frac{14}{5}$ (iv) $\frac{137}{10}$ (v) $\frac{106}{5}$ (vi) 1 (vii) $\frac{32}{5}$

6. (i) 0.2 सेमी (ii) 3 सेमी (iii) 11.6 सेमी (iv) 5.2 सेमी (v) 9.5 सेमी (vi) 19.1 सेमी

7. (i) 0 तथा 1 के बीच, 1 (ii) 5 व 6 के बीच, 5 (iii) 9 पर (iv) 4 व 5 के बीच, 5

(v) 3 व 4 के बीच, 4

8. 

9. 9.5 सेमी 10. 1.6 सेमी

प्रश्नावली 6.2

1. (i) 230.057 (ii) 1.305 (iii) 253.505 (iv) 340.120 (v)13.030

2. (i) 23.306 (ii) 0.736 (iii) 137.06 (iv) 703.053 (v) 0.307 (vi) 0.19

3. (i) एक दशमलव दो शून्य (ii) एक सौ आठ दशमलव पाँच छः

(iii) दस दशमलव सात पाँच छः (iv) छः दशमलव शून्य एक

4. (i) $\frac{9}{50}$ (ii) $\frac{1}{4}$ (iii) $\frac{33}{500}$ (iv) $\frac{2}{5}$

5. (i) 0.4 > 0.04 (ii) 3 > 0.7 (iii) 0.999 > 0.19 (iv) 5.64 > 5.603

6. (i) 0.05 रु. (ii) 0.75 रु. (iii) 0.80 रुपये (iv) 0.50 रु.

7. (i) 70.005 किमी (ii) 0.088 किमी (iii) 0.8 किमी

8. (i) 8.515 (ii) 315.29 (iii) 13.175 (iv) 69.12 (v) 3.03 (vi) 1.34

9. 118.270 किग्रा
10. 8.300 किमी
11. 16.25 मी
12. 2 किग्रा. 100 ग्राम

प्रश्नावली 7.1

1. (i) 164 (ii) 182 (iii) 1351
(iv) 814 रूपये 11 पैसे (v) 162 किमी 131 मीटर (vi) 227 किग्रा 48 ग्राम

प्रश्नावली 7.2

1. (i) 48 (ii) 28 (iii) 289
(iv) 267 (v) 18 रूपये 67 पैसे (vi) 68 मीटर 55 सेमी
(vii) 155 किग्रा. 887 ग्राम

प्रश्नावली 7.3

1. (i) $1\bar{2}$ (ii) $3\bar{3}$ (iii) 122 (iv) $1\bar{2}\bar{2}$ (v) $10\bar{4}$

प्रश्नावली 7.4

1. (i) 25 (ii) 46 (iii) 128 (iv) 458 (v) 577

प्रश्नावली 7.5

1. (i) 14 (ii) 31 (iii) 23 (iv) 09 (v) 28

प्रश्नावली 7.6

1. (i) 47 (ii) 687 (iii) 164 (iv) 287

प्रश्नावली 7.7

1. (i) 156 (ii) 209 (iii) 195 (iv) 56 (v) 54 (vi) 96
(vii) 10608 (viii) 11342 (ix) 12208 (x) 8918 (xi) 9024
(xii) 10192 (xiii) 7905

प्रश्नावली 7.8

1. (i) भागफल = 1, शेषफल = 35 (ii) भागफल = 45, शेषफल = 01
(iii) भागफल = 3, शेषफल = 10 (iv) भागफल = 12, शेषफल = 02
(v) भागफल = 11, शेषफल = 02 (vi) भागफल = 38, शेषफल = 02

प्रश्नावली 8.1

1. (i) XY (ii) AC , AB, BC (iii) PQ , QR, RS

(iv) UV, VW, WX, XY, YZ

प्रश्नावली 8.2

1. समान्तर रेखाएँ ; = AB, CD , तथा MN, SN

प्रतिच्छेदी रेखाएँ ; = XY, WZ तथा PQ, RS

2. संगामी रेखाएँ 3. स्वयं कीजिए

4. PQ ⊥ QR , XY ⊥ PQ , AB ⊥ BC

प्रश्नावली 8.3

1.(i) ∠1 = अधिक कोण (ii) ∠2 = समकोण

(iii) ∠3 = न्यून कोण (iv) ∠4 = प्रतिवर्ती कोण

2. (i) d (ii) c (iii) (iv) b (v) e

प्रश्नावली 8.4

1. त्रिज्या = OS
   व्यास = AB
   जीवा = PR
   केन्द्र = 0

2. (i) सत्य (ii) असत्य
   (iii) सत्य (iv) सत्य
   (v) असत्य

3. छायांकित ACB = वृत्तखण्ड
   छायांकित EOD = त्रिज्यखण्ड

प्रश्नावली 9.1

1. खुली आकृतियाँ (i), (vi) बंद आकृतियाँ (ii), (iii), (iv), (v)
2. O 3. (i) PQR (ii) S,L,U,T (iii) हाँ

प्रश्नावली 9.2

1. स्वयं कीजिए 2. (i) समकोण त्रिभुज (ii) न्यून कोण त्रिभुज (iii) अधिक कोण त्रिभुज
3. (i) समबाहु त्रिभुज (ii) विषमबाहु त्रिभुज (iii) समद्विबाहु त्रिभुज
4. (i) 5 त्रिभुज (नाम स्वयं लिखे) (ii) 4 त्रिभुज (नाम स्वयं लिखे)
5. (i) अधिक कोण त्रिभुज (ii) न्यून कोण त्रिभुज (iii) समकोण त्रिभुज
6. (i) विषमबाहु (ii) समद्विबाहु (iii) समबाहु
7. (i) सही (ii) गलत (iii) गलत (iv) सही (v) सही

प्रश्नावली 9.3

1. (i) चार चतुर्भुज (नाम स्वयं लिखिए) (ii) दो चतुर्भुज (नाम स्वयं लिखिए)
2. (i) 6 (ii) 5 3. स्वयं कीजिए।
4. (i) वर्ग–5, आयत–6 (ii) वर्ग–2, आयत–1
5. (i) $\angle R$ (ii) $\angle Q$ या $\angle S$ (iii) PS (iv) QP या RS (v) $\angle P$, $\angle Q$, $\angle R$, $\angle S$
6. (i) गलत (ii) सही (iii) गलत (iv) सही

प्रश्नावली 10

1. शंकु, गोला, बेलन, घन, घनाभ। 2. स्वयं कीजिए।
3. (i) सत्य (ii) असत्य (iii) सत्य (iv) असत्य (v) सत्य (vi) असत्य
4. घनाभ के शीर्ष = P, Q, R, S, J, K, L, M
   घनाभ के किनारे = PQ, QR, RS, SP, JK, KL, LM, MJ, PJ, QK, RL, SM
   घनाभ के फलक = PQRS, JKLM, PQKJ, SRLM, PJMS, QKLR

प्रश्नावली 11

1. (a) (i), (ii), (iv), (v) (b) (iv)
2. (i) तीन वर्णाक्षर (ii) नौ वर्णाक्षर (iii) पाँच वर्णाक्षर
   (iv) सात वर्णाक्षर (v) तीन वर्णाक्षर (vi) एक वर्णाक्षर (स्वयं बताइए)
3. (i) 1 (ii) 1 (iii) 2
   (iv) 2 (v) 2 (vi) 3

प्रश्नावली 12.1

1. (i) 2a (ii) 3a (iii) 4a 2. $4x$

3. (i) (x-5) वर्ष (ii) (P+5) वर्ष 4. $\frac{x}{5}$ या $x \div 5$

5.

x	1	2	3	4	5	6	7
$2x$+3	5	7	9	11	13	15	17

प्रश्नावली 12.2

1. (i) 3 - 7 + 4, 3 + 7 - 4 (ii) 3 x 7 + 4, 3 + 7 x 4

2. (i) बीजीय (ii) संख्यात्मक (iii) संख्यात्मक
(iv) बीजीय (v) बीजीय (vi) बीजीय

3.

क्र.सं.	व्यंजक	जोड़	घटाव	गुणा	भाग
1.	x+5	✓	-	-	-
2.	7m+3	✓	-	✓	-
3.	y-3x	-	✓	✓	-
4.	x-y-z	-	✓	-	-
5.	$3x$-10-$\frac{z}{5}$	-	✓	✓	✓
6.	$\frac{y}{17}$	-	-	-	✓

4. (i) a+7 (ii) b-10 (iii) $4x$ (iv) $\frac{x}{4}$ (v) 7-x (vi) 10 ÷ q या $\frac{10}{q}$

5. (i) 2n+15 (ii) $2x$ -15 (iii) 2P+3 (iv) 2q-3 (v) 5y -11 (vi) -3z+11

6. उदाहरणार्थ 5q - 3 (स्वयं बनाइए)

प्रश्नावली 12.3

1. (i) हाँ चर x (ii) नहीं (iii) नहीं (iv) नहीं (v) हाँ, चर q (vi) हाँ, चर t

2. y = 5 से

3. (i) नही (ii) हाँ

4. (i) x = 5
(ii) P = 12
(iii) x = 8

प्रश्नावली 13.1

1. (i) 5 : 3 (ii) 5 : 8 2. (i) 8 : 13 (ii) 5 : 1
3. (i) 2 : 1 (ii) 1 : 4 (iii) 1 : 2 4. 7,10,35, हाँ
5. (i) 1 : 6 (ii) 2 : 1 (iii) 5 : 11 (iv) 7 : 11
6. (i) 1 : 5 (ii) 4 : 25 (iii) 1 : 4 (iv) 4 : 3
7. 13 : 12 8. 4 : 3 9. 1 : 2
10. तलिस्मा 10,000 रु, गुरुमित 25,000 रु 11. स्वयं कीजिए।
12. (i) 3 : 1 (ii) 4 : 1 (iii) 5 : 2 (iv) 2 : 1

प्रश्नावली 13.2

1. (i) हाँ (ii) हाँ (iii) नहीं (iv) नहीं
2. (i) सत्य (ii) असत्य (iii) सत्य (iv) असत्य
3. (i) सही (ii) सही (iii) सही (iv) गलत
4. (i) समानुपाती नहीं है। (ii) समानुपाती है। मध्य पद – 250, 40 बाह्य पद – 1000,10
(iii) समानुपाती नहीं है। (iv) समानुपाती है। मध्य पद – 65, 9 बाह्य पद – 39, 15

प्रश्नावली 13.3

1. 27 रुपये 2. 375 रुपये 3. 360 रुपये 4. 45 पौधों के
5. 75 लीटर 6. 5 लीटर 7. 8 घण्टे 8.150 कुर्सियाँ
9. 42,000 रुपये 10. कबीर, 9 रन प्रति ओवर
11. (i) 115.50 रुपये (ii) 10 किग्रा

प्रश्नावली 14.1

1. (i) 21 सेमी (ii) 68 सेमी (iii) 24 सेमी

2. 20 सेमी

3. (i) 9 सेमी (ii) 12 सेमी (iii) 6 सेमी

4. पूजा कम दौड़ी, 20 मीटर

5. 6 सेमी 6. 78 मीटर 7. 45 मीटर

प्रश्नावली 14.2

1. (i) 9 वर्ग सेमी (ii) 4 वर्ग सेमी (iii) 17 वर्ग सेमी
   (iv) 8 वर्ग सेमी (v) 10 वर्ग सेमी (vi) 13 वर्ग सेमी
   (vii) 20 वर्ग सेमी (viii) 7 वर्ग सेमी (ix) 9 वर्ग सेमी
2. 16 वर्ग सेमी , 16 वर्ग सेमी , 16 वर्ग सेमी
3. (i) 12 वर्ग सेमी (ii) 180 वर्ग सेमी (iii) 11 वर्ग सेमी
4. 80 वर्ग मी.
5. 81 वर्ग सेमी
6. (i) 16,000 वर्ग सेमी (ii) 12,600 वर्ग सेमी (iii) 20,000 वर्ग सेमी
   (iv) 19,000 वर्ग सेमी
7. 6 मीटर
8. 42 वर्ग मीटर
9. (i) चार गुना (ii) 12 गुना
10. (i) एक चौथाई (ii) चार गुना

प्रश्नावली 14.3

1. (iii) व (iv) में परिमाप समान व क्षेत्रफल भिन्न
2. गोपी के खेत का, 100 वर्ग मीटर
3. लम्बाई = 9.5 सेमी , वर्ग का क्षेत्रफल 2.25 वर्ग सेमी अधिक
4. (i) परिमाप में 30 सेमी वृद्धि
   (ii) परिमाप में 15 सेमी की वृद्धि
5. (i) 130 सेमी
   (ii) 32 सेमी
   (iii) बढ़ती है।
6. (i) 16 वर्ग सेमी
   (ii) 7 वर्ग सेमी
   (iii) घटती है।



प्रश्नावली 15.1

1. (i) प्राथमिक (ii) द्वितीयक (iii) प्राथमिक (iv) द्वितीयक

2.

आयु	मिलान चिह्न	विद्यार्थियों की संख्या
11	III	3
12	𝍸 I	6
13	𝍸 𝍸 I	11
14	𝍸 III	8
15	I	1
16	I	1
योग		30

3. (i) 21 विद्यार्थी (ii) 13 वर्ष के 11 विद्यार्थी (iii) 20 विद्यार्थी

अंक	मिलान चिह्न	विद्यार्थियों की संख्या
4	I	1
5	IIII	4
6	𝍸	5
7	𝍸	5
8	𝍸 I	6
9	III	3

(i) 10 अंक (ii) 15 विद्यार्थी (iii) 6 विद्यार्थी

4. (i) परिवार D (ii) परिवार C (iii) अन्तर =6-2=4 सदस्य (iv) 21 सदस्य

5. (i) 25 लिफाफे (ii) सोमवार (iii) 175 रु

(iv) बेचे गए लिफाफे = 135 और मूल्य 675 रु.

6. (i) 8 (ii) क्रिकेट (iii) 0

प्रश्नावली 15.2

1

वार	संकेत ⊘ = 5 मरीज
सोमवार	⊘ ⊘ ⊘ ⊘ ⊘
मगंलवार	⊘ ⊘ ⊘ ⊘ ⊘ ⊘
बुधवार	⊘ ⊘ ⊘
गुरूवार	⊘ ⊘ ⊘ ⊘ ⊘ ⊘
शुक्रवार	⊘ ⊘ ⊘ ⊘ ⊘
शनिवार	⊘ ⊘ ⊘ ⊘
रविवार	⊘ ⊘ ⊘ ⊘ ⊘

2.

विषय	मिलान चिह्न	विद्यार्थियों की संख्या
हिन्दी	𝍸	5
गणित	𝍸 |||	8
अंग्रेजी	||||	4
विज्ञान	||||	4
संस्कृत			1
कम्प्यूटर शिक्षा	||	2
सा. विज्ञान			1

सबसे अधिक पसंद किया जाने वाला विषय गणित।

सबसे कम पसंद किया जाने वाला विषय संस्कृत व सा. विज्ञान।

3

	संकेत 🧍 = 5 मतदाता
साईकिल	🧍 🧍 🧍 🧍 🧍
टीवी	🧍 🧍 🧍 🧍 🧍 🧍
गेंद	🧍 🧍 🧍 🧍 🧍 🧍 🧍
पंखा	🧍 🧍 🧍 🧍 🧍

(i) गेंद (ii) 350-300=50 वोट

4 (i)

छात्रों की ऊँचाई (सेमी)	मिलान चिह्न	छात्रों की संख्या
148	||	2
149	||	2
150	||	2
151	|||	3
152	𝍸 ||||	9
153	𝍸	5
154	||	2

(ii)

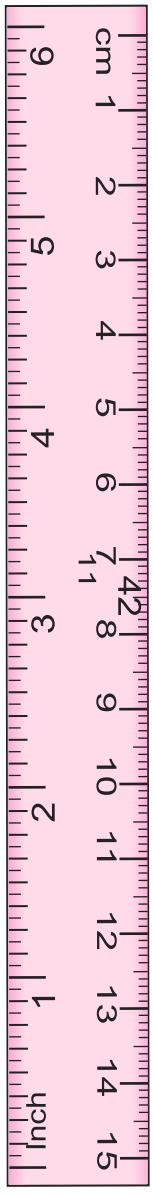
ऊँचाई (सेमी)	संकेत ☺ = 1 छात्र
148	☺☺
149	☺☺
150	☺☺
151	☺☺☺
152	☺☺☺☺☺☺☺☺☺
153	☺☺☺☺☺
154	☺☺

(iii) 154 सेमी

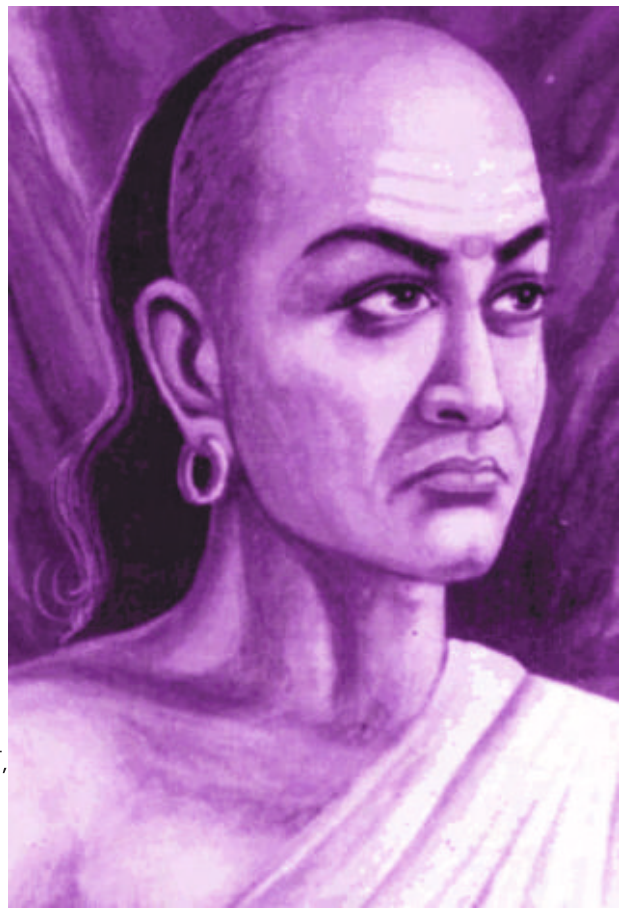
(iv) 6 सेमी

प्रश्नावली 15.3

1. (i) 1 सेमी = 10 विद्यार्थी (ii) 60 विद्यार्थी (iii) 2012 में
2. (i) हाथी (ii) बकरी (iii) 28 वर्ष-22 वर्ष= 6 वर्ष
4. (i) ग्वार, 24,000 किग्रा (ii) 88600 किग्रा (iii) बाजरा
6. (i) 12 (ii) 60–80 (iii) 19


cm
inch

महान गणितज्ञ आर्यभट्ट



आर्यभट्ट का जन्म 476 ई. में कुसुमपुर में हुआ था। कुसुमपुर को बाद में पाटलीपुत्र कहा गया है। और वर्तमान में यह बिहार की राजधानी पटना है। आर्यभट्ट ने 23 वर्ष की आयु में सन् 499 ई. में आर्यभट्टीय नामक ग्रंथ की रचना की। इस ग्रन्थ के चार प्रमुख भाग हैं।

1. गीतिका पाद
2. गणित पाद
3. काल क्रिया पाद
4. गोल पाद।

आर्यभट्टीय के गणित पाद में संख्या स्थान निरुपण, वर्ग और घन परिकर्म, वर्गमूल, घनमूल, त्रिभुज, वृत्त और समलम्ब चतुर्भुज के क्षेत्रफल तथा गोल और पिरामिड का आयतन तथा π का मान है।

आर्यभट्टीय पर भास्कर प्रथम (629 ई.) में भाष्य लिखा है। यह भाष्य बहुत प्रसिद्व है। आर्यभट्ट पहले गणितज्ञ है जिन्होंने परिधि और व्यास के अनुपात अर्थात (π) पाई का लगभग परिमित मान ज्ञात किया था। पृथ्वी गोल है ऐसा कहने वाले प्रथम खगोलशास्त्री है। सूर्य स्थिर है तथा पृथ्वी आदि ग्रह सूर्य की परिक्रमा करते हैं यह आर्यभट्ट ने सर्वप्रथम बताया।

भारत ने 19 अप्रेल 1975 को अन्तरिक्ष में अपना पहला उपग्रह छोड़ा उसका नाम आर्यभट्ट रखकर उनके योगदान के प्रति सम्मान प्रकट किया है।