गणित

कक्षा 6

राजकीय विद्यालयों में निःशुल्क वितरण हेतु

राजस्थान राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण संस्थान, उदयपुर

प्रकाशक

राजस्थान राज्य पाठ्यपुस्तक मण्डल, जयपुर

संस्करण : 2016

मूल्य :

पेपर उपयोग : **आर. एस. टी. बी. वाटरमार्क 80 जी. एस. एम. पेपर पर मुद्रित**

प्रकाशक : **राजस्थान राज्य पाठ्यपुस्तक मण्डल 2–2 ए, झालाना डूंगरी, जयपुर**

मुद्रक :

मुद्रण संख्या :

पाठ्यपुस्तक निर्माण वित्तीय सहयोगः
यूनिसेफ राजस्थान, जयपुर

प्राक्कथन

बदलती हुई परिस्थितियों के अनुरूप शिक्षा में परिवर्तन होना जरूरी है, तभी विकास की गति तेज होती है। विकास में सहायक कई तत्वों के अलावा शिक्षा भी एक प्रमुख तत्त्व है। विद्यालयी शिक्षा को प्रभावशाली बनाने के लिए पाठ्यचर्या को समय–समय पर बदलना एक आवश्यक कदम है। वर्तमान में राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2005 तथा निःशुल्क एवं अनिवार्य बाल शिक्षा अधिकार अधिनियम 2009 के द्वारा यह स्पष्ट है कि समस्त शिक्षण क्रियाओं में 'बालक' केन्द्र के रूप में हैं। हमारी सिखाने की प्रक्रिया इस प्रकार हो कि बालक स्वयं अपने अनुभवों के आधार पर समझ कर ज्ञान का निर्माण करें। उसके सीखने की प्रक्रिया को ज्यादा से ज्यादा स्वतंत्रता दी जाए, इसके लिए शिक्षक एक सहयोगी के रूप में कार्य करें। पाठ्यचर्या को सही रूप में पहुँचाने के लिए पाठ्यपुस्तक महत्त्वपूर्ण साधन है। अतः बदलती पाठ्यचर्या के अनुरूप ही पाठ्यपुस्तकों में परिवर्तन कर राज्य सरकार द्वारा नवीन पाठ्यपुस्तक तैयार कराई गई है।

पाठ्यपुस्तक तैयार करने में यह ध्यान रखा गया है कि पाठ्यपुस्तक सरल, सुगम, सुरुचिपूर्ण, सुग्राह्य एवं आकर्षक हो, जिससे बालक सरल भाषा, चित्रों एवं विभिन्न गतिविधियों के माध्यम से इनमें उपलब्ध ज्ञान को आत्मसात् कर सके। साथ ही वह अपने सामाजिक एवं स्थानीय परिवेश से जुड़े तथा ऐतिहासिक एवं सांस्कृतिक गौरव, संवैधानिक मूल्यों के प्रति समझ एवं निष्ठा बनाते हुए एक अच्छे नागरिक के रूप में अपने आप को स्थापित कर सके।

शिक्षकों से मेरा विशेष आग्रह है कि इस पुस्तक को पूर्ण कराने तक ही सीमित नहीं रखें, अपितु पाठ्यक्रम एवं अपने अनुभव को आधार बना कर इस प्रकार प्रस्तुत करें कि बालक को सीखने के पर्याप्त अवसर मिले एवं विषय शिक्षण के उद्देश्यों की प्राप्ति की जा सके।

राजस्थान राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण संस्थान (एस.आई.ई.आर.टी.) उदयपुर पाठ्यपुस्तक विकास में सहयोग के लिए उन समस्त राजकीय एवं निजी संस्थानों, संगठनों यथा एन.सी.ई.आर.टी., नई दिल्ली, राज्य सरकार, भारतीय जनगणना विभाग, आहड़ संग्रहालय उदयपुर, जनसंपर्क निदेशालय जयपुर, राजस्थान राज्य पाठ्यपुस्तक मण्डल जयपुर, विद्या भारती, विद्या भवन संदर्भ केन्द्र पुस्तकालय, उदयपुर एवं लेखकों,समाचार पत्र–पत्रिकाओं, प्रकाशकों तथा विभिन्न वेबसाइट्स के प्रति आभार व्यक्त करता है जिन्होंने पाठ्यपुस्तक निर्माण में सामग्री उपलब्ध कराने एवं चयन में सहयोग दिया। हमारे प्रयासों के बावजूद किसी लेखक, प्रकाशक, संस्था, संगठन और वेबसाइट का नाम छूट गया हो तो हम उनके आभारी रहते हुए क्षमा प्रार्थी हैं। इस संबंध में जानकारी प्राप्त होने पर आगामी संस्करणों में उनका नाम शामिल कर लिया जाएगा।

पाठ्यपुस्तकों की गुणवत्ता बढ़ाने हेतु श्री कुंजीलाल मीणा, शासन सचिव, प्रारंभिक शिक्षा, श्री नरेशपाल गंगवार, शासन सचिव, माध्यमिक शिक्षा एवं आयुक्त राष्ट्रीय माध्यमिक शिक्षा परिषद्, श्री बाबूलाल मीणा, निदेशक प्रारंभिक शिक्षा एवं श्री सुवालाल, निदेशक माध्यमिक शिक्षा, श्री बी. एल. जाटावत, आयुक्त, राजस्थान प्रारम्भिक शिक्षा परिषद्, जयपुर, राजस्थान सरकार का सतत् मार्गदर्शन एवं अमूल्य सुझाव संस्थान को प्राप्त होते रहे हैं। अतः संस्थान हृदय से आभार व्यक्त करता है।

इस पाठ्यपुस्तक का निर्माण यूनिसेफ के वित्तीय एवं तकनीकी सहयोग से किया गया है। इसमें सेम्युअल एम., चीफ यूनिसेफ राजस्थान जयपुर, सुलग्ना रॉय शिक्षा विशेषज्ञ एवं यूनिसेफ से संबंधित अन्य सभी अधिकारियों के सहयोग के लिए संस्थान आभारी है। संस्थान उन सभी अधिकारियों एवं कार्मिकों का, जिनका प्रत्यक्ष एवं अप्रत्यक्ष रूप से इस कार्य संपादन में सहयोग रहा है, उनकी प्रशंसा करता है।

मुझे इस पुस्तक को प्रस्तुत करते हुए प्रसन्नता हो रही है, साथ ही यह विश्वास है कि यह पाठ्यपुस्तक विद्यार्थियों एवं शिक्षकों के लिए उपयोगी सिद्ध होगी और अध्ययन–अध्यापन एवं विद्यार्थी के व्यक्तित्व विकास की एक प्रभावशाली कड़ी के रूप में कार्य करेगी।

विचारों एवं सुझावों को महत्त्व देना लोकतंत्र का गुण है अतः राजस्थान राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण संस्थान उदयपुर सदैव इस पुस्तक को और श्रेष्ठ एवं गुणवत्तापूर्ण बनाने के लिए आपके बहुमूल्य सुझावों का स्वागत करेगा।

निदेशक
राजस्थान राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं
प्रशिक्षण संस्थान, उदयपुर

पाठ्यपुस्तक निर्माण समिति

संरक्षक : विनीता बोहरा, निदेशक, राजस्थान राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण संस्थान (एस.आई.ई.आर.टी.,) उदयपुर

मुख्य समन्वयक: नारायण लाल प्रजापत, उपनिदेशक, एस.आई.ई.आर.टी., उदयपुर

समन्वयक: डॉ. ममता बोल्या, अनुसंधान सहायक, एस.आई.ई.आर.टी., उदयपुर

संयोजक: उमंग पण्ड्या, वरिष्ठ अध्यापक, रा.मा.वि. वाका, बाँसवाड़ा

लेखकगण: रूपेन्द्र मोहन शर्मा, जिला सचिव, विद्या भारती, बा.उ.मा. आदर्श विद्या मंदिर, दौसा

ओंकार दास वैष्णव, से.नि. प्रधानाचार्य, चित्तौड़गढ़

रणवीर सिंह, उपप्रधानाचार्य, डाइट, कोटा

लालाराम सेन, वरि. व्या., डाइट, जालोर

सुशीला मेनारिया, व्या., डाइट, उदयपुर

डॉ. रेखा शर्मा, व्या., रा.बा.उ.मा.वि. झाड़ोल, फलासिया

संजय बोल्या, व.अ.,रा.उ.मा.वि. छाली, गोगुन्दा, उदयपुर

कमलकान्त स्वामी, व.अ.,रा.उ.मा.वि. सर्वोदय बस्ती, बीकानेर

कौशल डी. पण्ड्या, कार्यक्रम अधिकारी, रमसा, बाँसवाड़ा

जनक जोशी, ब्लॉक संदर्भ्य व्यक्ति, एस.एस.ए.,घाटोल, बाँसवाड़ा

महेन्द्र सोनी, व.अ.,रा.मा.वि. बुद्धनगर, जोधपुर

कमल अरोड़ा, व.अ.,रा.मा.वि. झाड़ोली, गोगुन्दा, उदयपुर

यशवन्त दवे, व.अ.,रा.उ.मा.वि. बम्बोरा, उदयपुर

दुर्गेश कुमार जोशी, अध्या., रा.उ.प्रा.वि. उदलियास (माफी), भीलवाडा

शहनाज, अध्या.,रा.उ.प्रा.वि. गाडरियावास, भीण्डर

कपिल पुरोहित, अध्या.,रा.उ.प्रा.वि. सिवड़िया, गोगुन्दा, उदयपुर

इन्दर मोहन सिंह छाबड़ा, अध्या.,रा.उ.प्रा.वि. मेवाड़ों का मठ, कोटड़ा

अरविन्द शर्मा, अध्या.,रा.उ.प्रा.वि. साकरिया, प्रतापगढ़

आवरण एवं सज्जा: डॉ. जगदीश कुमावत, प्राध्यापक, एस.आई.ई.आर.टी., उदयपुर

चित्रांकन: शाहिद मोहम्मद, अजमेर

तकनीकी सहयोग: हेमन्त आमेटा, व्याख्याता, एस.आई.ई.आर.टी. उदयपुर

कम्प्यूटर ग्राफिक्स: अनुभव ग्राफिक, अजमेर

शिक्षकों के लिए

वर्तमान वैश्विक परिदृश्य में बदलते परिवेश के साथ गणित शिक्षण का सामन्जस्य बिठाने एवं राज्य के विद्यार्थियों को अधिगम के उन स्तरों तक दक्षता प्रदान करने के लिए नवीन पाठ्यक्रम एवं पाठ्यपुस्तकों का निर्माण किया गया हैं।

बालक की शैक्षिक जगत के प्रति समझ विकसित करने के साथ–साथ बालक की अन्तर्निहित क्षमताओं को विकसित करने, उच्च मानवीय मूल्यों व नैतिक गुणों का विकास करने, राष्ट्र के लिए भविष्य में निष्ठावान, देशभक्त एवं संवेदनशील नागरिक तैयार करने के उद्‌देश्य से इस पाठ्‌यक्रम का सृजन किया गया हैं।
राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रुपरेखा–2005 के मुख्य मार्ग–दर्शक सिद्धान्तों को शिक्षक आत्मसात कर उनकी मूल भावना के अनुरुप पाठ्‌यपुस्तक की विषयवस्तु को बालकों तक पहुँचाए, शिक्षक से यह अपेक्षा की गई है।

इस पाठ्‌यपुस्तक की प्रमुख विशेषताएँ निम्नलिखित है– विद्यार्थियों को विषय से परिचय उनके आसपास से संबंधित उदाहरणों से कराया गया हैं। इसमें यह भी ध्यान रखा गया है कि अधिगम हेतु आवश्यक सामग्री कम लागत या आसपास के परिवेश से उपलब्ध हो सके ताकि कक्षा शिक्षण में अध्यापक उन सामग्रियों का उपयोग कर, गतिविधि के माध्यम से बालकों की सहभागिता के साथ अधिगम को प्रभावी बना सके।

बालक को केंद्र बिन्दु मानकर सीखने की प्रक्रिया में बालक का भागीदारी सुनिश्चित कर उन्हें स्वयं करके देखने अपनी गलतियों को स्वयं ठीक करने के लिए समुचित अवसर उपलब्धा करवाने एवं उनमें समझ विकसित करने के लिए कार्य किया जाए।

निःशुल्क एवं अनिवार्य बाल शिक्षा अधिकार अधिनियम–2009 के प्रावधानानुसार सतत् एंव व्यापक मूल्यांकन के अनुसार विषयवस्तु निर्मित की गई है। अतः बालकों को स्तरानुसार समूह में बाँटकर समूह शिक्षण पर बल देकर बालकों में दक्षताएँ विकसित की जाए।

पाठ्‌यपुस्तक में अवधारणाओं का विस्तारपूर्वक वर्णन किया गया है तथा अधिक संख्या में चित्रों के माध्यम से समझाया गया है। उदाहरण और अभ्यास सम्मिलित किए गए हैं, ताकि विद्यार्थियों में अवधारणाओं को अपने स्तर पर समझ कर प्रश्नों को बेहतर ढ़ंग से हल करने की दक्षता में वृद्धि हो सके तथा समस्याओं को हल करने में उनकी भागीदारी बढ़ सके।

बालकों में गणितीय सोच विकसित करने, गणितीय तथ्यों की पुनः खोज करने, आरेखण एवं मापन के लिए उपयुक्त दक्षता के विकास हेतु अनेक गतिविधियाँ दी गई हैं जिन्हें '**करो और सीखो**' का नाम दिया गया है। बालकों को यह गतिविधियाँ इसी भावना जिम्मेदारी, सहिष्णुता एवं सहयोग के अनुरुप करवाया जाना अपेक्षित है।

पाठ्यपुस्तक में राष्ट्रीय सरोकार यथा पर्यावरण संरक्षण, सड़क सुरक्षा, जेण्डर संवेदनशीलता, बेटी बचाओ बेटी पढ़ाओ, सामाजिक अवरोधों की समाप्ति की आवश्यकता एवं जागरूकता आदि का ध्यान में रखा गया है। अध्यापकों को इन तथ्यों के प्रति सचेत रहना चाहिए। उन्हें विद्यार्थियों के मस्तिष्क में उक्त प्रमुख संदेशों को गणितीय समस्याओं की शब्दावली के माध्यम से पहुँचाने चाहिए। बालकों को इन राष्ट्रीय सरोकारों के साथ जोड़ने एवं इनके प्रति उनमें समझ बनाने का प्रयास किया जाना अपेक्षित है।

अध्यापक अपनी सुविधानुसार कक्षा के बालकों को छोटे – छोटे समूह एवं उपसमूह बनाकर उन्हें गतिविधि करने का मौका दें ताकि स्व–अध्ययन कि प्रवृत्ति को बढ़ाकर एक सहयोगी के रूप में अपनी जिम्मेदारी तय कर सके। पाठ्यपुस्तक में विद्यार्थियों के अवबोधन एवं परिपक्वता के स्तर के अनुरूप शब्दावली एवं पारिभाषिक शब्दों का प्रयोग किया गया है। प्रत्येक अध्याय के अंत में महत्त्वपूर्ण संकल्पनाओं एवं परिणामों को ''**हमने सीखा**'' के रूप में स्थान दिया गया है।

भारतीय गणितज्ञों का जीवन परिचय एवं उनका गणित में योगदान का भी उल्लेख किया गया है ताकि बालक भारत की समृद्ध परम्पराओं और भारतीयों द्वारा गणित में किये गए योगदान के प्रति अपनी समझ बना सकें।

पाठ्यपुस्तक एवं पाठ्यक्रम को तैयार करने में बालक को केंद्र में मानकर शिक्षक पर सर्वाधिक विश्वास इस भावना के साथ किया गया है कि शिक्षक इन संप्रयत्नों की पूर्ति हेतु पूर्ण निष्ठा लगन एवं ईमानदारी के साथ बालक के साथ कार्य करेगा। लेखक समूह शिक्षक पर भरोसा कर यह पाठ्यपुस्तक राज्य के शिक्षकों एवं बालकों को समर्पित करता है।

भारत में गणित की समृद्ध परम्परा रही है। आदिकाल से ही भारतीय मनीषियों एवं गणितज्ञों ने इस क्षेत्र में श्रेष्ठ कार्य किया है। पुरातन ज्ञान का उपयोग आधुनिक गणित में किया जा सके एवं प्राचीन उपलब्धियों का तारतम्य आधुनिक गणित को उन्नत बनाने के लिए किया जा सके, इसी उद्देश्य से पाठ्यपुस्तक में भारतीय अंक प्रणाली (देवनागरी) एवं वैदिक गणित का समावेश किया गया है। वैदिक गणित के द्वारा गणनाओं को सरल करने का प्रयास किया गया है।

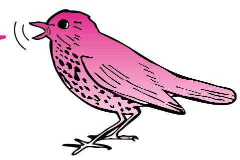
अनुक्रमणिका

अध्याय 1

संख्याओं की समझ

1.1 हम अपनी आवश्यकता के अनुसार वस्तुओं को गिनते हैं। जैसे विद्यालय में बच्चों की संख्या, गाँव में रहने वाले लोगों की संख्या, पुस्तकालय में रखी पुस्तकों की संख्या, फर्श पर लगी टाइलों की संख्या आदि। हम इन संख्याओं को उचित संख्यांकों द्वारा निरूपित कर सकते हैं। अब सोच कर बताओ कि आप आस–पास की कितनी वस्तुओं को गिन सकते हो?

कई हजार वर्ष पहले, लोग केवल छोटी संख्याओं के बारे में ही जानते थे। धीरे–धीरे उन्होंने अपनी आवश्यकतानुसार बड़ी संख्याओं के साथ कार्य करना सीखा और इन संख्याओं को संकेतों के रूप में व्यक्त करना भी सीखा। संख्याएँ यह बताने में हमारी सहायता करती हैं कि वस्तुओं का कौनसा समूह (संग्रह) बड़ा अथवा छोटा है? संख्याओं की सहायता से हम वस्तुओं को निश्चित क्रम में व्यवस्थित भी कर सकते हैं।



हम पिछली कक्षा में चार अंकों तक की संख्याओं के साथ खेल चुके हैं। इस अध्याय में पिछले अनुभवों का दोहरान करते हुए आगे की संख्याओं के बारे में अपनी समझ बनाएँगे।

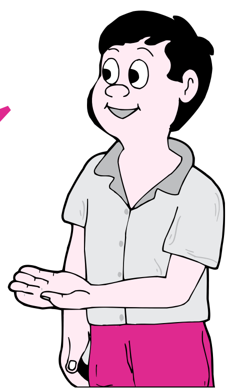
1.1.1 संख्या बनाना

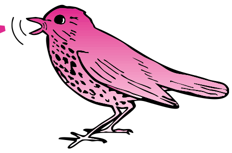
रमेश और अफसाना चार अंकों की संख्याएँ बना रहे हैं। रमेश ने 3, 5, 7 और 8 इन चार अंकों से एक संख्या बनाई –

5378

अफसाना ने इन्हीं चार अंकों से एक और संख्या बनाई

8753





आप भी इन्हीं अंकों का प्रयोग कर चार अंकों की और संख्याएँ बनाइए। अपने मित्रों से चर्चा कर उन्हें आरोही एवं अवरोही क्रम में भी जमाइए।

आपके द्वारा बनी संख्याओं में सबसे छोटी संख्या कौनसी है?

1.1.2 संख्याओं की तुलना

देविका एक खेल खेलती है। वह साथियों को 2, 0, 1 अंक दे कर संख्या बनाने को कहती है। रोहित ने 210, ममता ने 21 बनाया। तब देविका कहती है किसकी संख्या बड़ी है ? रोहित कहता है मेरी, क्योंकि मेरी संख्या में अंक ममता की तुलना में ज्यादा है। अब देविका ने कहा 4, 5, 2, 6 और 3 से पाँच अंकों की संख्या बना कर देखते हैं। आप भी और संख्याएँ बना कर नीचे तालिका में लिखिए –

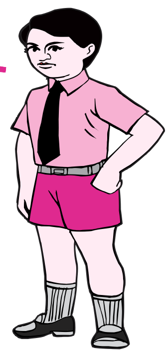
52643	बावन हजार छः सौ तैंतालीस
65234	पैंसठ हजार दो सौ चौंतीस
64532	---
23456	---
65432	---
64352	---
-----------	---
------------	---
------------	---

रोहित संख्याएँ देख कर बोला इनमें से सबसे बड़ी संख्या 65432 है एवं सबसे छोटी संख्या 23456 है।

संख्या 64532 और 64352 में 64352 बड़ी है।

कैसे, बताओ?

नहीं, इनमें तो 64532 बड़ी है।



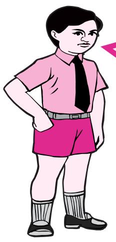
रोहित ने संख्याओं की तुलना इस तरह की

6 4 5 3 2

10000 10000 10000 10000 10000 10000	60000
1000 1000 1000 1000	4000
100 100 100 100 100	500
10 10 10	30
1 1	2

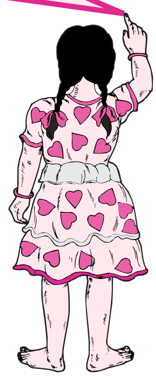
6 4 3 5 2

10000 10000 10000 10000 10000 10000	60000
1000 1000 1000 1000	4000
100 100 100	300
10 10 10 10 10	50
1 1	2



क्या मैं दो संख्याओं की तुलना संख्याओं के प्रत्येक अंक का स्थानीयमान निकाले बिना भी कर सकता हूँ?

दोनों संख्याओं में दस हजार और हजार के स्थान के अंक समान हैं। 64532 में सैंकड़े के स्थान पर 5 है जबकि 64352 में सैंकड़े के स्थान पर 3 है और 532 तो 352 से बड़ी है इसलिए 64532 बड़ी है।



हम संख्याओं की तुलना इस प्रकार भी कर सकते हैं।

64532		64352
60000	=	60000
4000	=	4000
500	>	300

संख्या 64532, संख्या 64352 से बड़ी है। 64532 > 64352

संख्या 56432 व 56342 में तुलना –

अब आप दोनों संख्याओं 56432 और 56342 में बाएँ से दाएँ की ओर के अंकों की तुलना करें जो अंक बड़ा होगा वह संख्या बड़ी होगी।

56432		56342
	=	
	=	
	>	

क्या आप पता लगा पाए कि कौनसी संख्या बड़ी है?

करो और सीखो

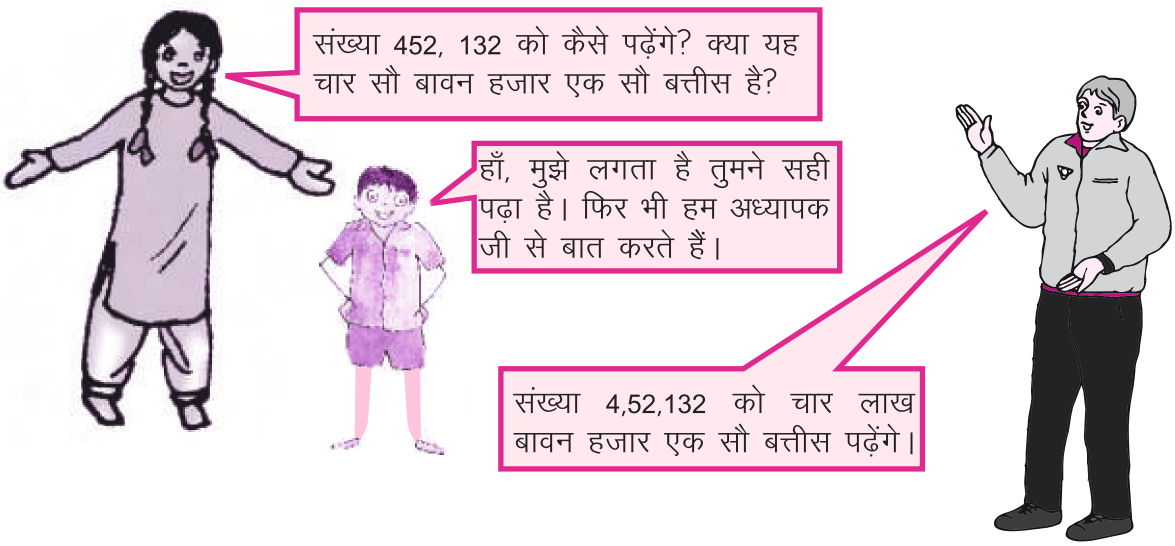
1. निम्नलिखित संख्या समूह में सबसे बड़ी संख्या पर गोल घेरा (o) एवं सबसे छोटी संख्या पर क्रॉस (x) का चिह्न लगाइए।
   (i) 4536, 4892, 4370, 4452
   (ii) 15623, 15073, 15189, 15800
   (iii) 25286, 25245, 25270, 25210
   (iv) 6895, 23787, 24569, 24659
   (v) 4685, 4444, 3847, 9071

2. नीचे दी गई तालिका को पूरा कीजिए।

52,132	5 दस हजार, 2 हजार, 1 सैंकड़ा, 3 दहाई, 2 इकाई 50,000 + 2,000 + 100 + 30 + 2	बावन हजार एक सौ बत्तीस
45,471		
98,453		
67,309		
70,058		
12,345		
29,761		
33,333		
81,427		

ऊपर दी गई तालिका में सबसे बड़ी संख्या पर o (गोल घेरा) एवं सबसे छोटी संख्या पर ▭ बनाइए।

1.1.3 संख्याओं को पढ़ना

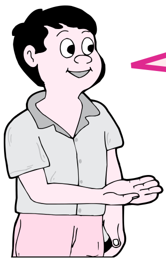


आप भी अपनी पसंद के छः अंक लेकर उनसे संख्याएँ बनाकर अपने साथियों से पढ़वाएँ और संख्याओं की तुलना करें।

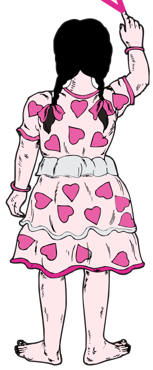
नीचे दी गई तालिका को पूरा कीजिए।

संख्या (अंकों में)	लाख	दस हजार	हजार	सैंकड़ा	दहाई	इकाई	संख्या (शब्दों में)
3,52,027	3	5	2	0	2	7	तीन लाख बावन हजार सत्ताईस
2,43,596							
7,00,295							
9,99,999							
1,00,000							
5,67,890							
6,04,307							
....							

अपने साथियों से चर्चा कर तालिका में दी गई संख्याओं को आरोही क्रम में जमाइए।



क्या आप बता सकते हैं कि छः अंकों की सबसे बड़ी संख्या में 1 जोड़ने पर कौनसी संख्या प्राप्त होगी?



मैं जानती हूँ कि छः अंकों की सबसे बड़ी संख्या तो 9,99,999 है। यदि इसमें 1 जोड़ती हूँ तो मुझे 10,00,000 मिलता है यह सात अंकों की सबसे छोटी संख्या है। इसे कैसे पढ़ेंगे?

शायद इसे दस लाख पढ़ेंगे। चलो अध्यापक जी से बात करते हैं।

हाँ, इसे दस लाख ही पढ़ेंगे। अच्छा बताओ संख्या 15,40,400 को कैसे पढ़ेंगे?

करो और सीखो

1. निम्नलिखित संख्या नामों की संख्या लिखिए।
   (i) पाँच हजार पाँच – ....5005..........
   (ii) पाँच हजार चार सौ अड़तीस – ....
   (iii) अड़तीस हजार चार सौ – ....
   (iv) पैंसठ हजार सात सौ चालीस – ....
   (v) नवासी हजार तीन सौ चौबीस – ....
   (vi) बाईस लाख पाँच हजार दो – ....
   (vii) पचासी लाख आठ सौ एक – ....
   (viii) सात लाख सात हजार सात – ....

2. अंक 6 का स्थान वही रखते हुए 6350947 के अंकों को पुनः किसी भी क्रम में रखने पर बनने वाली सबसे छोटी संख्या होगी–
   (i) 6975430 (ii) 6043579 (iii) 6034579 (iv) 6034759 ( )

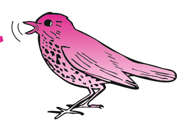
3. 7, 8 एवं 9 के प्रयोग से बनी पाँच अंकों की सबसे बड़ी संख्या होगी–
   (i) 98978 (ii) 99897 (iii) 99987 (iv) 98799 ( )

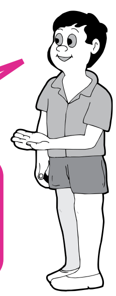
4. नीचे दी गई तालिका को पूरा कीजिए।

संख्या (अंकों में)	दस लाख	लाख	दस हजार	हजार	सैंकड़ा	दहाई	इकाई	संख्या (शब्दों में)
57,68,423	5	7	6	8	4	2	3	सत्तावन लाख अड़सठ हजार चार सौ तेईस
99,99,999								
40,50,607								
32,05,004								
10,00,000								
98,76,543								

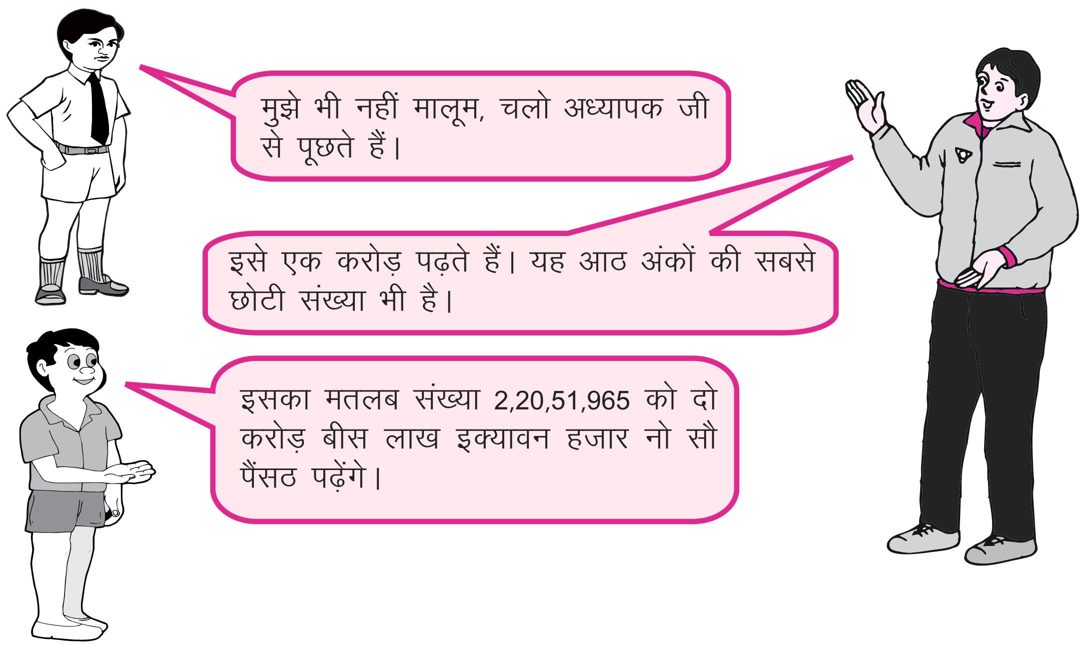
अपने साथियों से चर्चा कर तालिका में दी गई संख्याओं को अवरोही क्रम में लिखिए।

क्या आप बता सकते हैं कि सात अंकों की सबसे बड़ी संख्या में 1 जोड़ने पर कौनसी संख्या बनेगी?





क्यों नहीं, सात अंकों की सबसे बड़ी संख्या 99,99,999 में 1 जोड़ता हूँ तो 1,00,00,000 संख्या मिलती है, इसको कैसे पढ़ेंगे?



करो और सीखो

नीचे दी गई तालिका को पूरा कीजिए।

संख्या (अंकों में)	करोड़	दस लाख	लाख	दस हजार	हजार	सैंकड़ा	दहाई	इकाई	संख्या (शब्दों में)
4,53,10,670	4	5	3	1	0	6	7	0	चार करोड़ तिरपन लाख दस हजार छह सौ सत्तर
4,35,01,076									
7,65,43,201									
1,00,00,000									
9,09,09,009									
6,50,41,300									

अपने साथियों से चर्चा कर तालिका में दी गई संख्याओं को आरोही एवं अवरोही क्रम में लिखिए।

प्रश्नावली 1.1

1. निम्नलिखित संख्याओं को शब्दों में लिखिए।

(i) 5782 (ii) 75,879 (iii) 3,89,087

(iv) 21,32,452 (v) 7,68,92,479 (vi) 50,60,798

2. निम्नलिखित को संख्यांकों के रूप में लिखिए।
   (i) अड़सठ हजार पाँच सौ उनतीस
   (ii) नवासी हजार उनासी
   (iii) पाँच लाख बहत्तर हजार सत्तावन
   (iv) नब्बे लाख नब्बे हजार नौ सौ नब्बे
   (v) एक करोड़ इक्कीस लाख इकत्तीस हजार इकतालीस

3. आपके पास 5, 7, 0, 6, 1, 3 और 4 के अंक हैं। इनका प्रयोग करते हुए सात अंकों की पाँच संख्याएँ बनाइए।

4. निम्नलिखित संख्याओं की तुलना बॉक्स में $<$, $>$ और $=$ का चिह्न लगाकर कीजिए–

(i)	1403789		140378	
(ii)	560325		560326	
(iii)	732108		732208	
(iv)	32872015		32852017	
(v)	612345		611345	

5. निम्नलिखित संख्याओं को आरोही क्रम में लिखिए।
   (i) 8435, 4835, 13584, 5348, 25843
   (ii) 1100, 1001, 1011, 1010
   (iii) 50500, 50050, 55555, 50505
   (iv) 58695376, 58685376, 58695306, 58685378

6. निम्नलिखित संख्याओं को अवरोही क्रम में लिखिए।
   (i) 847, 9754, 8320, 571
   (ii) 4060, 6040, 4600, 4646
   (iii) 9801, 25751, 36501, 38802
   (iv) 10001, 11001, 10101, 10011

1.2 संख्यांकन पद्धति

1.2.1 भारतीय संख्यांकन पद्धति

संख्यांकन की भारतीय पद्धति में हम इकाई, दहाई, सैंकड़ा, हजार का प्रयोग करते हैं तथा आगे लाख और करोड़ का प्रयोग करते हैं। हजार, लाख और करोड़ वाली संख्या को प्रदर्शित करने के लिए उनके बीच अल्पविरामों का प्रयोग किया जाता है। पहला अल्पविराम सौ के स्थान (दाएँ से बाएँ चलते हुए तीसरे अंक) के बाद आता है और हजार को प्रदर्शित करता है। दूसरा अल्पविराम अगले दो अंकों (दाएँ से पाँचवें अंक) के बाद आता है और लाख को प्रदर्शित करता है। तीसरा अल्प विराम अगले दो अंकों (दाएँ से सातवें अंक) के बाद आता है और करोड़ को प्रदर्शित करता है।

1 दहाई = 10 इकाईयाँ
1 सैंकड़ा = 10 दहाईयाँ
= 100 इकाईयाँ
1 हजार = 10 सैंकड़ा
= 100 दहाईयाँ
1 लाख = 100 हजार
= 1000 सैंकड़ा
1 करोड़ = 100 लाख
= 10,000 हजार

1.2.2 अंतर्राष्ट्रीय संख्यांकन पद्धति

संख्यांकन की अंतर्राष्ट्रीय पद्धति में इकाई, दहाई, सैंकड़ा , हजार और आगे मिलियन का प्रयोग किया जाता है। हजार और आगे मिलियन को प्रदर्शित करने के लिए अल्पविरामों का प्रयोग किया जाता है। अल्पविराम दाएँ से बाएँ प्रत्येक तीसरे अंक के बाद आता है। पहला अल्पविराम हजार को प्रदर्शित करता है और दूसरा अल्पविराम मिलियन को प्रदर्शित करता है।

उदाहरणार्थ संख्या 22,051,965 को अंतर्राष्ट्रीय पद्धति में बाईस मिलियन इक्यावन हजार नौ सौ पैंसठ पढ़ा जाता है।

सोचें! – कितने लाख से एक मिलियन बनता है?

कितने मिलियन से एक करोड़ बनता है?

पाँच बड़ी संख्याओं को लीजिए। इन्हें भारतीय और अंतर्राष्ट्रीय दोनों संख्यांकन पद्धतियों में व्यक्त कीजिए।

1.3 अलग–अलग लिपि में संख्याएँ

हिन्दू अरेबिक अंक	देवनागरी अंक	रोमन अंक
1	१	I
2	२	II
3	३	III
4	४	IV
5	५	V
6	६	VI
7	७	VII
8	८	VIII
9	९	IX
10	१०	X
11	११	XI
12	१२	XII
13	१३	XIII
14	१४	XIV
15	१५	XV

रोमन पद्धति में बड़ी संख्याओं को इस प्रकार व्यक्त करते हैं:

संख्याएँ	20	30	50	100	500	1000
रोमन पद्धति में	XX	XXX	L	C	D	M

(i) किसी भी संकेत की पुनरावृत्ति होने पर वह जितनी बार आता है उसका मान उतनी ही बार जोड़ दिया जाता है।

(ii) किसी भी संकेत की पुनरावृत्ति तीन से अधिक बार नहीं की जाती है। संकेत V, L व D की कभी पुनरावृत्ति नहीं होती है।

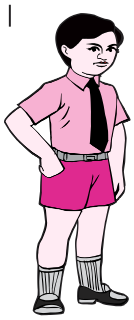
(iii) यदि छोटे मान वाला कोई संकेत एक बड़े मान वाले संकेत के दाईं ओर लग जाता है तो बड़े मान में छोटे मान को जोड़ दिया जाता है।

(iv) यदि छोटे मान वाला कोई संकेत एक बड़े मान वाले संकेत के बाईं ओर लग जाता है तो बड़े मान में से छोटे मान को घटा दिया जाता है।

(v) संकेत V, L और D के मानों को कभी भी घटाया नहीं जाता है। संकेत I को केवल V और X में से घटाया जा सकता है। संकेत X को केवल L, M, व C में से ही घटाया जा सकता है।

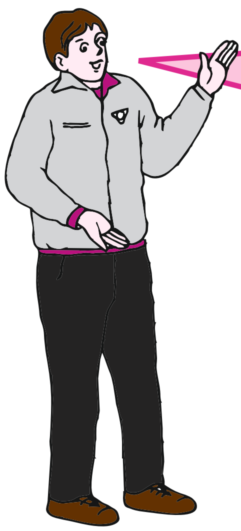
1.4 इकाईयों की समझ

हमने पिछली कक्षा में लम्बाई के इकाई के रूप में सेमी, मीटर और किलोमीटर का प्रयोग किया था।

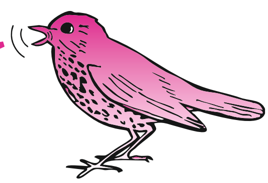


जब मैं अपनी नई पेंसिल को नापता हूँ तो उसकी लम्बाई 17 सेमी से अधिक एवं 18 सेमी से कम प्राप्त होती है। इसका सही नाप कितना है?

मुझे भी नहीं मालूम



देखिए 17 सेमी और 18 सेमी के बीच समान दूरी पर दस निशान बने हैं। प्रत्येक निशान मिलिमीटर को बताता है। तुम्हारी पेंसिल की लम्बाई 17 सेमी के आगे 8 निशान तक है तो इसकी नाप 17 सेमी 8 मिलिमीटर है इसे 17.8 सेमी (सत्रह दशमलव आठ सेंटीमीटर) भी कह सकते हैं।

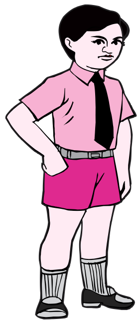


आइए, लम्बाई की इकाइयों के बीच के संबंध को जानते हैं।

10 मिलीमीटर = 1 सेंटीमीटर (1 सेमी)

100 सेंटीमीटर = 1 मीटर (1 मी)

1000 मीटर = 1 किलोमीटर (1 किमी)



क्या तुम बता सकते हो कि 1 किलोमीटर में कितने संटीमीटर होते हैं?

क्यों नहीं देखो ऐसे

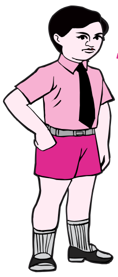
1 किमी = 1000 मीटर

= 1000 x 100 सेमी.

= 1,00,000 सेमी.

हमने पिछली कक्षा में वजन तोलने के लिए किलोग्राम और ग्राम के बाटों का प्रयोग किया था।

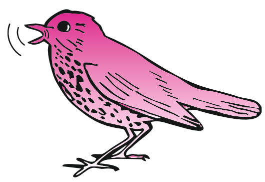
क्या तुम बता सकते हो कि 1 किलोग्राम में कितने ग्राम होते है?



क्यों नहीं
1 किग्रा में 1000 ग्राम होते हैं।

1 किग्रा = 1000 ग्राम

आपने सुनार की दुकान पर बाट देखे होंगे। वहाँ ग्राम से भी छोटे वजन को तोलने के बाट होते हैं ये मिलीग्राम (मिग्रा) के बाट होते हैं।



1 ग्राम = 1000 मिलीग्राम

हमने पिछली कक्षा में तरल पदार्थों को लीटर और मिलीलीटर में मापा था एवं लीटर और मिलीलीटर के बीच के संबंध को भी जाना था।

1 लीटर = 1000 मिलीलीटर

ध्यान दीजिए कि इन सभी मात्रकों में हमने मिली, सेंटी, किलो शब्दों का प्रयोग किया है। किलो का अर्थ है हजार और यह सबसे बड़ा है। सेंटी, सोवाँ भाग दर्शाता है और मिली का अर्थ है हजारवाँ भाग और यह सबसे छोटा है।

1.5 व्यावहारिक प्रयोग में बड़ी संख्याएँ

खिचड़ी किराणा स्टोर से एक माह की खरीद का विवरण इस प्रकार है–

किराणा स्टोर
भाव सूची

शक्कर	–	35 रु. प्रति किग्रा
गुड़	–	40 रु. प्रति किग्रा
नमक	–	7 रु. प्रति किग्रा
शुद्ध घी	–	395 रु. प्रति किग्रा
चाय पत्ती	–	175 रु. प्रति किग्रा
मिर्च पाउडर	–	180 रु. प्रति किग्रा
धनिया पाउडर	–	170 रु. प्रति किग्रा
हल्दी पाउडर	–	170 रु. प्रति किग्रा
सींग दाना	–	90 रु. प्रति किग्रा
तेल	–	85 रु. प्रति लीटर
चना दाल	–	65 रु. प्रति किग्रा
तुअर दाल	–	115 रु. प्रति किग्रा
चावल बासमती	–	65 रु. प्रति किग्रा
बेसन	–	70 रु. प्रति किग्रा
मूंग	–	60 रु. प्रति किग्रा
साबुन टिकिया (75 ग्राम)	–	13 रु. प्रति नग

खरीद का विवरण

गुड	325	किग्रा
शक्कर	3837	किग्रा
चावल बासमती	906	किग्रा
सींगदाना	164	किग्रा
शुद्ध घी	500	किग्रा
तुअर दाल	1369	किग्रा
चाय पत्ती	188	किग्रा
नमक	234	किग्रा
मिर्च पाउडर	93	किग्रा
धनिया पाउडर	147	किग्रा
हल्दी पाउडर	189	किग्रा
चना दाल	3273	किग्रा
साबुन टिकिया (75 ग्राम)	13048	नग

1. क्या खिचड़ी किराणा स्टोर द्वारा पिछले माह बेची गई सामग्री का कुल भार बता सकते हैं। (साबुन टिकिया के भार को जोड़े बिना)
2. पिछले माह बेची गई साबुन टिकिया का कुल भार किलोग्राम में कितना होगा?
3. किराणा स्टोर को शक्कर व चाय की बिक्री से कितनी राशि प्राप्त हुई?
4. किराणा स्टोर द्वारा नमक व मिर्च बेचने से कितनी राशि प्राप्त हुई ?

उदाहरण 1 वर्ष 2001 में तलवाड़ा नगर की जनसंख्या 3,38,401 थी। वर्ष 2011 तक जनसंख्या में 88,765 की वृद्धि हो गई। वर्ष 2011 में इस नगर की जनसंख्या क्या थी?

हल 2011 में तलवाड़ा नगर की जनसंख्या = 2001 में जनसंख्या + जनसंख्या में वृद्धि

= 3,38,401 + 88,765

= 4,27,166

3,38,401
+ 88,765
4,27,166

उदाहरण 2 एक समाचार पत्र में 18 पृष्ठ हैं। प्रतिदिन 10,03,912 प्रतियाँ छपती हैं। बताओ प्रतिदिन कितने पृष्ठ (पेज) छपते हैं?

हल प्रतिदिन छपने वाली प्रतियों की संख्या = 10,03,912

अतः 10,03,912 प्रतियों में (10,03,912 x 18) पृष्ठ होंगे

अतः प्रतिदिन 1,80,70,416 पृष्ठ छपते हैं।

10,03,912
x 18
8031296
1003912X
18070416

उदाहरण 3 राज्य में सत्र 2014–15 में 12,38,792 विद्यार्थियों को छात्रवृत्ति प्रदान की गई। सत्र 2015–16 में 17,92,304 विद्यार्थियों को छात्रवृत्ति प्रदान की गई। बताओ किस वर्ष में अधिक छात्रवृत्तियाँ प्रदान की गई और कितनी अधिक?

हल सत्र 2015–16 में अधिक छात्रवृत्तियाँ प्रदान की गई

(संख्या 17,92,304 , संख्या 12,38,792 से बड़ी है।)

सत्र 2015–16 में छात्रवृत्तियों में वृद्धि

= (सत्र 2015–16 में प्रदान की गई छात्रवृत्तियाँ) - (सत्र 2014–15 में प्रदान की गई छात्रवृत्तियाँ)

= 17,92,304 – 12,38,792

= 5,53,512

17,92,304
–12,38,792
5,53,512

अतः सत्र 2015–16 में छात्रवृत्ति प्राप्त करने वाले छात्रों में 5,53,512 की वृद्धि हुई।

उदाहरण 4 दियासलाई (माचिस तीली) बनाने वाली कम्पनी में प्रतिदिन 15,07,150 दियासलाई (माचिस तीली) बनाई जाती है। यदि एक माचिस की डिब्बी में 50 तीलियाँ रखी जाती हैं तो बताइए 15,07,150 तीलियों को रखने के लिए कितनी डिब्बियों की आवश्यकता पड़ेगी?

हल एक माचिस के डिब्बे में 50 तीलियाँ रखी जाती हैं।

अतः 15,07,150 तीलियाँ रखने के लिए डिब्बियों की आवश्यकता होगी

= 15,07,150 ÷ 50

= 30143

```
        30143
50 ) 1507150
    -150
     00071
      -50
       215
      -200
       0150
       -150
        000
```

अतः 15,07,150 माचिस की तीलियाँ रखने के लिए 30143 डिब्बियों की आवश्यकता पड़ेगी।

प्रश्नावली 1.2

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

(i) 1 हजार =................ दहाईयाँ

(ii) 100 लाख=................ करोड़

(iii) 1 किग्रा = ... ग्राम

(iv) 100 सेमी =................ मीटर

(v) 1 किमी =................ मीटर

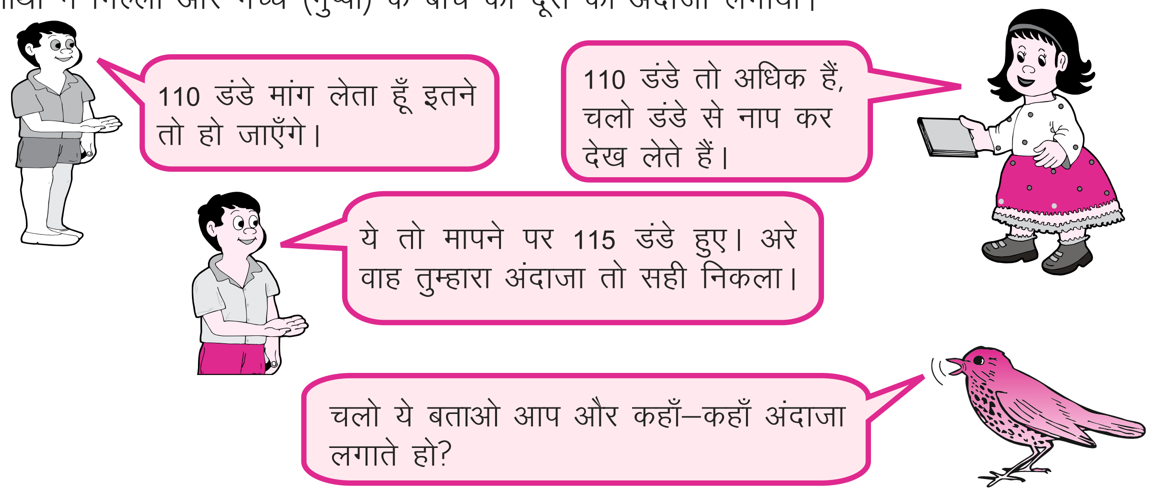
(vi) 1 लीटर=................ मिलीलीटर

2. लोकसभा चुनाव में विजयी प्रत्याशी को 6,42,312 वोट मिले। उसने अपने निकटतम प्रतिद्वंद्वी को 65,318 वोटों से हराया। बताइए निकटतम प्रतिद्वंद्वी को कितने वोट मिले?
3. दशहरे मेले को प्रथम 4 दिनों में क्रमशः 3079, 5768, 9014 व 12,306 लोगों ने देखा। बताइए इन चार दिनों में मेला देखने कुल कितने लोग आए?
4. एक क्रिकेट खिलाड़ी ने टेस्ट क्रिकेट में 15030 रन बनाए एवं एक दिवसीय क्रिकेट में 18999 रन बनाए। बताइए दोनों खेलों में कुल कितने रन बनाए?
5. अंकों 5, 3, 9, 7 और 4 में से प्रत्येक का केवल एक बार प्रयोग करते हुए बनाई जा सकने वाली सबसे बड़ी व सबसे छोटी संख्याओं का अंतर ज्ञात कीजिए?
6. स्वरोजगार समूह के सदस्य प्रतिदिन 1385 पापड़ बनाते हैं। बताइए अगस्त माह में कुल कितने पापड़ बनेंगे?
7. एक घंटे में एक हवाई जहाज 685 किलोमीटर की दूरी तय करता है तो बताइए 36 घंटों में वह कितनी दूरी तय करेगा?
8. एक व्यापारी ने 150 टेलीविजन सेट खरीदने के लिए 18,57,750 रुपये का भुगतान किया। बताइए एक टेलीविजन सेट का मूल्य कितना है ?
9. एक विद्यार्थी ने 5068 को 63 के स्थान पर 36 से गुणा कर दिया। बताइए उसका उत्तर सही उत्तर से कितना कम था?
10. अभ्यास पुस्तिकाएँ बनाने के लिए कागज की 75000 शीट उपलब्ध हैं। प्रत्येक शीट से अभ्यास पुस्तिका के 8 पृष्ठ बनते हैं। प्रत्येक अभ्यास पुस्तिका में 200 पृष्ठ हैं। उपलब्ध कागज की शीट से कितनी अभ्यास पुस्तिकाएँ बनाई जा सकती हैं?

11. एक होटल में 15 लीटर दूध उपलब्ध है। यदि 25 मिली दूध से एक कप चाय बनती है, तो बताइए 15 लीटर दूध से कितने कप चाय बनेगी ?

1.6 अनुमान

मितेश, मनाली, देवांश और चार्वी गिल्ली डंडा का खेल खेल रहे हैं। मितेश और मनाली एक टीम में हैं तथा देवांश और चार्वी दूसरी टीम में हैं। मितेश ने डंडे से गिल्ली को मारा। मितेश और उसके साथी ने गिल्ली और गच्च (गुप्पी) के बीच की दूरी का अंदाजा लगाया।



करो और सीखो

अपनी मुट्ठी में अलग–अलग चीजें (गेहूं, मक्का, सोयाबीन, कंकड़ आदि) लेकर अपने साथी से उसकी संख्या का अंदाजा लगवाएँ। इसे गिनकर देखिए।

कक्षा के बच्चों से चार–चार का समूह बनवाइए और उनके वजन का अनुमान दी गई तालिका में भरवाइए।

क्र.सं.	छात्र/छात्रा का नाम	अनुमानित वजन	वास्तविक वजन
1			
2			
3			
4			

वजन नापने वाली मशीन से बच्चों का वजन कीजिए और बताइए कि

- आप में से कितने बच्चों ने सही–सही वजन बताया?
- कितने बच्चों का अनुमान वास्तविक वजन के करीब है?
- कितने बच्चों का अनुमान वास्तविक वजन से ज्यादा दूर है?

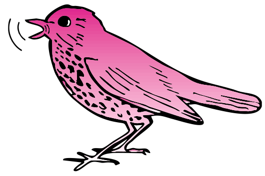
इसी प्रकार अपने साथियों से चर्चा कर अनुमान लगाइए कि

- तुम्हारे घर से विद्यालय की अनुमानित दूरी .... मीटर/किमी है।
- कक्षा कक्ष की अनुमानित लम्बाई .... फीट, चौड़ाई .... फीट है।
- पुस्तकालय में पुस्तकों की अनुमानित संख्या .... है।

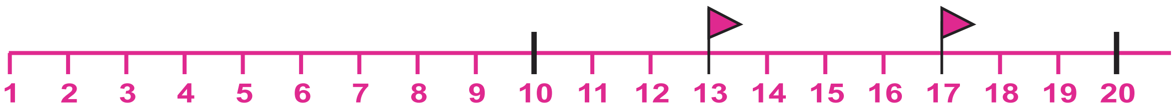
1.7 सन्निकटन

आप अपने घर पर बड़े भाई या बहिन की शादी के कार्यक्रम की कल्पना कीजिए। हम सबसे पहले यह पता लगाएँगे कि हमारे घर पर कितने मेहमान आ सकते हैं। आने वाले मेहमानों की संख्या का पता क्या हम ठीक (Exact) लगा सकते हैं? व्यवहारिक रूप से सम्भव नहीं है।

उन स्थितियों के बारे में सोचिए, जहाँ हम केवल एक सन्निकट आकलित संख्या से काम चलाते हैं और जहाँ हमें ठीक–ठीक संख्या की आवश्यकता पड़ती है।



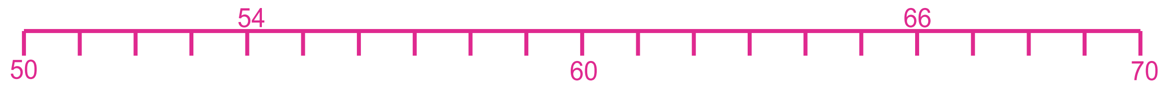
1.7.1 सन्निकटन द्वारा निकटतम दहाई तक आकलन

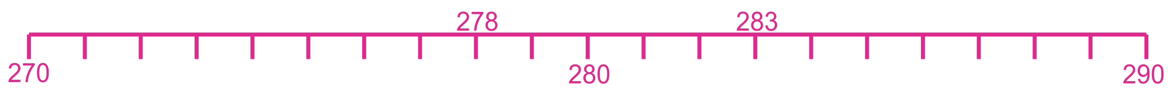


- कौनसा झंडा 10 के नजदीक है ?
- कौनसा झंडा 20 के नजदीक है ?
- संख्या 13 संख्या 10 और 20 के बीच में है परंतु 13 संख्या 10 के अधिक पास है। इसलिए हम 13 को निकटतम दहाई तक 10 के रूप में सन्निकटन करते हैं।
- सन्निकटन करते हुए हम देखते हैं कि संख्या 1, 2, 3, 4 संख्या 10 की तुलना में संख्या 0 के अधिक पास में है। इसलिए हम इन्हें 0 के रूप में सन्निकटन करते हैं और संख्या 6, 7, 8, 9 संख्या 10 के अधिक पास है इसलिए हम इनका 10 के रूप में सन्निकटन करते हैं।

  संख्या 5 संख्या 0 और 10 से बराबर दूरी पर है। सामान्य रूप में संख्या 5 को संख्या 10 के रूप में सन्निकटन करते हैं।

संख्या रेखा पर लिखी संख्या का सन्निकटन कैसे करेंगे?

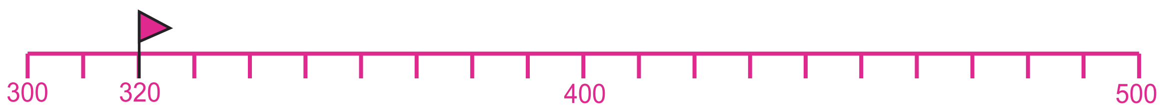




- क्या 278 और 283 दोनों का सन्निकटन 280 होगा। क्यों?

1.7.2 निकटतम सैंकड़े तक सन्निकटन

संख्या रेखा पर झंडे वाली संख्या 320 के बारे में सोचिए। यह किसके नजदीक है ?



संख्या 320 संख्या 300 के नजदीक है। इसलिए संख्या 320 का सैंकड़े तक सन्निकटन 300 के रूप में किया जाता है।

संख्या 5437 का सन्निकटन दहाई तक करने के लिए हम इसके इकाई वाले स्थान के अंक पर ध्यान देंगे। वह 5 से बड़ा है इसलिए 5437 का दहाई तक सन्निकटन 5440 के रूप में किया जाता है। साथ ही 5437 का सैंकड़े तक सन्निकटन करने के लिए दहाई का अंक देखना होगा। दहाई पर 3 अंक 5 से छोटा है। इसलिए वह 400 के नजदीक है और संख्या 5437 का सन्निकटन 5400 के रूप में किया जाता है।

इन्हें समझें

48 का दहाई तक – 50
682 का सैंकड़े तक – 700
335 का सैंकड़े तक – 300
2907 का सैंकड़े तक – 2900

1.8 कोष्ठक की समझ

जागृति बाज़ार से 5 कॉपियाँ खरीद कर लाई जिसका मूल्य प्रतिकॉपी 10 रुपये था और उसकी सहेली हिमानी उतने ही मूल्य वाली 9 कॉपियाँ लाई। दोनों ने मिलकर कितने रुपये चुकाए ?

जागृति ने बताया = 5 x 10 + 9 x 10
= 50 + 90
= 140 रूपये

हिमानी ने बताया = 5 + 9 x 10
= 5 + 90
= 95 रूपये

बताइए किसका हिसाब गलत है ?

अध्यापिका ऐसी उलझन दूर करने के लिए कोष्ठक का प्रयोग किया जाता है।
हिमानी ने जो हल किया है उसमें 5 तथा 9 को कोष्ठक में लिख कर एक संख्या बना लेते हैं और फिर बाहर दी गई संक्रियाएँ करते हैं। जैसे–
(5 + 9) = 14
14 x 10 = 140

कोष्ठकों का प्रयोग यह स्पष्ट रूप से बताता है कि पहले कोष्ठक ( ) के अंदर दी गई संख्याओं को हल करते हैं और फिर बाहर वाली संक्रिया करते हैं।

जैसे (5 + 9) x 10
= 14 x 10
= 140

याद रखने योग्य

9 + 1 = 10	10 X 10 = 100
99 + 1 = 100	100 X 10 = 1000
999 + 1 = ...	1000 X 10 = 10,000
9999 + 1 = ...	10,000 X 10 = 1,00,000
99999 + 1 = ...	1,00,000 X 10 = 10,00,000
999999 + 1 = ...	10,00,000 X 10 = 1,00,00,000
9999999 + 1 = 1,00,00,000	

पैटर्न पहचानो

0 X 9 + 1 = 1	9 X 9 + 7 = 88
1 X 9 + 2 = 11	98 X 9 + 6 = 888
12 X 9 + 3 = 111	987 X 9 + 5 = 8888
123 X 9 + 4 = 1111	9876 X 9 + 4 = 88888
1234 X 9 + 5 = ...	98765 X 9 + .. = ...
....	....
....	....

प्रश्नावली 1.3

1. निम्नलिखित संख्याओं में प्रत्येक संख्या का सैंकड़े तक सन्निकटन करके हल का सन्निकटित मान बताइए।
   (i) 247 + 691 (ii) 4316 + 1567
   (iii) 7122 – 3565 (iv) 4543 – 2036
2. निम्नलिखित संख्याओं का दहाई तक सन्निकटन करके गुणनफल ज्ञात कीजिए।
   (i) 34 x 57 (ii) 294 x 72 (iii) 869 x 675
3. विद्यालय के पुस्तकालय में 2541 कहानियों की, 1017 विषयों की और 857 अन्य पुस्तकें हैं। विद्यालय में लगभग कितनी पुस्तकें हैं। (सैंकड़े तक सन्निकट मान बताइए)
4. एक गाँव में 8596 गायें और 7015 भैंसें हैं तो इस गाँव में कौनसे पशु अधिक हैं और लगभग कितने अधिक हैं? (सैंकड़े तक सन्निकट मान बताइए।)
5. एक कार एक लीटर पेट्रोल में 15 किलोमीटर दूरी तय करती है तो 100 किलोमीटर जाने में लगभग कितना पेट्रोल चाहिए। (सैंकड़े तक सन्निकट मान बताइए।)

हमने सीखा

1. दो संख्याओं में वही संख्या बड़ी होती है जिसमें अंकों की संख्या अधिक होती है। यदि अंकों की संख्या समान है तब हम उनके सबसे बाएँ स्थित अंकों की तुलना करते हैं और जिस संख्या में यह अंक बड़ा होगा वही संख्या बड़ी होगी। अगर यह अंक भी समान है, तब हम इसी प्रकार बाईं से दाईं तरफ अंकों की तुलना करते जाते हैं।
2. अंकों से संख्या बनाते समय सबसे बड़ी संख्या के लिए बाएँ से बड़े से छोटे एवं सबसे छोटी संख्या के लिए अंक बाएँ से छोटे से बड़े क्रम में लिखते हैं ।
3. चार अंकों की सबसे बड़ी संख्या 9999 हैं एवं पाँच अंकों की सबसे छोटी संख्या 10000 होती है।
4. संख्याओं को लिखने तथा पढ़ने में अल्पविरामों का प्रयोग सहायता करता है। भारतीय संख्यांकन पद्धति में पहला अल्पविराम दाईं ओर से प्रारम्भ कर तीन अंकों बाद व उसके बाद दो–दो अंकों बाद लगाए जाते हैं। अन्तर्राष्ट्रीय संख्यांकन पद्धति में अल्पविराम दाईं ओर से प्रारम्भ कर तीन–तीन अंकों बाद लगाए जाते हैं।
5. अनेक स्थितियों में हमें सही–सही संख्याओं की आवश्यकता नहीं होती है बल्कि एक उपयुक्त आकलन से ही काम चल सकता है।
6. अनेक स्थितियों में हमें संख्याओं पर संक्रियाओं के फलस्वरूप प्राप्त परिणामों का भी आकलन उपयोगी सिद्ध होता है ऐसे आकलनों में हम पहले प्रयोग होने वाली संख्याओं को सन्निकटित कर शीघ्रता से परिणाम प्राप्त कर लेते हैं।

अध्याय 2

रिश्ते संख्याओं के

2.1 रिमझिम और मुकुल पिछली कक्षाओं में सीखे गुणनखंड का अभ्यास कर रहे हैं। रिमझिम ने 16 के गुणनखंड 2, 4, 6 व 8 बताए।

मुकुल – रिमझिम तुम 6 को 16 का गुणनखंड कैसे कह रही हो?
क्या तुम 16 को 6–6 के समूह में बाँट सकती हो?

रिमझिम– मैं करके देखती हूँ।

* * * * * *
* * * * * *
* * * *

अरे, दो बार तो 6–6 का समूह बन गया पर तीसरी बार में 2 कम रह गए।

मुकुल – इसका अर्थ हुआ कि 6, 16 का गुणनखण्ड नहीं है। क्योंकि 16 को 6–6 के समूह में पूरा नहीं बाँटा जा सकता है।

रिमझिम– बराबर–बराबर बाँटने का मतलब तो भाग करना भी होता है, तो क्या हम कह सकते हैं कि वे सभी संख्याएँ जिनका पूरा–पूरा भाग 16 में जाए वे 16 का गुणनखंड होंगी ?

2.2 गुणनखण्ड एवं गुणज

रिमझिम वे संख्याएँ ज्ञात करना चाहती है जो 8 को पूरा–पूरा विभाजित करती है। वह 8 को 8 व उससे छोटी संख्याओं से इस प्रकार विभाजित करती हैं

1) 8 (8	2) 8 (4	3) 8 (2	4) 8 (2
- 8	- 8	- 6	- 8
0	0	2	0
भागफल 8 है	भागफल 4 है	भागफल 2 है	भागफल 2 है
शेषफल 0 है।	शेषफल 0 है।	शेषफल 2 है।	शेषफल 0 है।

5) 8 (1	6) 8 (1	7) 8 (1	8) 8 (1
- 5	- 6	- 7	- 8
3	2	1	0
भागफल 1 है	भागफल 1 है	भागफल 1 है	भागफल 1 है
शेषफल 3 है।	शेषफल 2 है।	शेषफल 1 है।	शेषफल 0 है।

रिमझिम – 1, 2, 4 व 8 ऐसी संख्याएँ हैं जिनका पूरा–पूरा भाग 8 में जाता है। अतः 1, 2, 4 व 8 संख्या 8 के गुणनखण्ड हैं। अतः 8 को 1 x 8, 2 x 4 के रूप में लिख सकते हैं **गुणनखंड को हम अपवर्तक भी कहते हैं।**

मुकुल – रिमझिम इसे हम इस प्रकार भी कह सकते हैं कि 1, 2, 4 व 8 का एक गुणज 8 है (अतः 1, 2, 4 व 8 के पहाड़ों में 8 आता है।)

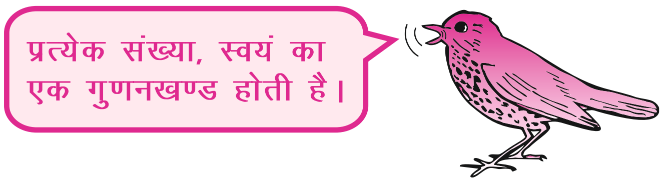
करो और सीखो

नीचे दी गई तालिका में संख्याओं के सामने इनके गुणनखंड लिखिए।

संख्या	गुणनखंड
12	1, 2, 3, 4, 6, 12
24	....
27	....
17	....
15	....
7	....

ऊपर दी गई तालिका से क्या आप कह सकते हैं कि 1 प्रत्येक संख्या का गुणनखण्ड होता है?

....



2.3 भाज्य और अभाज्य संख्याएँ

नीचे दी गई संख्याओं के गुणनखण्डों को देखिए।

संख्या	गुणनखण्ड	गुणनखण्डों की संख्या
1	1	1
2	1,2	2
3	1,3	2
4	1,2,4	3
5	1,5	2
6	1,2,3,6	4
7	1,7	2
8	1,2,4,8	4

तालिका 2.1

तालिका में 1 ही केवल ऐसी संख्या है जिसके गुणनखण्डों की संख्या 1 है, इसलिए ये न तो भाज्य है न ही अभाज्य।

तालिका को देखकर बताइए , वे कौन–कौन सी संख्याएँ हैं जिनके केवल दो गुणनखण्ड हैं ? ....

ऐसी संख्याएँ जिनके दो ही गुणनखण्ड होते हैं (1 तथा स्वयं वह संख्या) उन्हें **अभाज्य संख्या** कहते हैं, जैसे 2, 3, 5, 7 आदि।

दो से अधिक गुणनखण्डों वाली संख्याएँ **भाज्य अथवा संयुक्त संख्याएँ** कहलाती हैं, जैसे 4, 6, 8, 9, 10 आदि।

संख्या खेल– आओ हम एक ऐसा खेल खेलते हैं जिसकी सहायता से हम बिना गुणनखण्ड किए भी बता सकते हैं कि संख्या भाज्य या अभाज्य है। सबसे पहले 1 से 100 तक की संख्याओं को नीचे दर्शाए अनुसार लिखिए –

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

चरण 1 संख्या 1 पर सबसे पहले बॉक्स ☐ बनाएँ क्योंकि यह ना तो भाज्य संख्या है और ना ही अभाज्य संख्या है।

चरण 2 संख्या 2 पर घेरा लगाइए और 2 के अतिरिक्त उसके सभी गुणजों जैसे 4, 6 व 8 इत्यादि को काट दीजिए।

चरण 3 अगली बिना कटी संख्या 3 है। 3 पर घेरा लगाइए और 3 के शेष सभी गुणजों को काट दीजिए।

चरण 4 इस प्रक्रिया को तब तक जारी रखिए जब तक की दी गई सभी संख्याओं पर या तो घेरा ना लग जाए या वे कट ना जाएँ। घेरा लगी सभी संख्याएँ अभाज्य संख्याएँ हैं।

इस खेल के बाद बताइए कि 1 से 100 के बीच आपको कितनी अभाज्य संख्याएँ प्राप्त होती हैं? इन अभाज्य संख्याओं को क्रमबद्ध लिखिए और अपने दोस्तों से इनका मिलान भी कीजिए।

2.4 सम–विषम संख्याएँ

कनक और प्रीतम कंचे से खेल रहे थे।

कनक– देखो प्रीतम, मैं तुम्हें एक खेल सिखाती हूँ। कुछ कंचे मुट्ठी में लेकर आपस में मिलाकर एक मुट्ठी में जितने चाहो उतने ले कर अपनी मुट्ठी बंद कर लो। अब मुझे बताना है कि तुम्हारी मुट्ठी में कंचे जोड़ों में हैं या नहीं। इस खेल को एकी या बेकी भी कहते हैं।

एकी मतलब जितने, कंचे मुट्ठी में हैं उनके दो–दो के समूह बनाना और यदि कोई कंचा अकेला बच जाए तो हुआ एकी और यदि सभी कंचों के दो–दो के जोड़े बन जाए तो वह हुआ बेकी। कनक व प्रीतम ने इस खेल को खेला और इसे तालिका में लिखा।

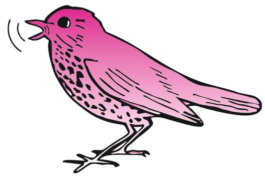
आप भी यह खेल अपने दोस्तों के साथ खेलिए और तय कीजिए कि किन–किन संख्याओं को एकी कहा जाए और किन संख्याओं को बेकी कहा जाए ?

क्या आप कोई नियम बना पाए ? इकाई के स्थान पर 2, 4, 6, 8, 0 होने पर संख्याएँ सम संख्याएँ कहलाती हैं। 1, 3, 5, 7, 9 इकाई स्थान पर हो तो वे संख्याएँ विषम संख्याएँ कहलाती हैं।

स्कोर कार्ड			
कनक		प्रीतम	
15	कंचे	बेकी	गलत
19	कंचे	एकी	सही
24	कंचे	बेकी	सही
....		....	....

तालिका 2.2

ऐसी सभी संख्याएँ जिनमें 2 का पूरा–पूरा भाग जाए या वे 2 का गुणज हो सम संख्याएँ कहलाती हैं।



करो और सीखो

सम व विषम संख्याओं को अलग–अलग लिखिए।

(i) 357 (ii) 436 (iii) 77 (iv) 1900 (v) 5001

सम संख्याएँ................................विषम संख्याएँ................................

प्रश्नावली 2.1

1. निम्नलिखित संख्याओं के सभी गुणनखण्ड लिखिए।
   (i) 48 (ii) 36 (iii) 28 (iv) 100 (v) 125
2. निम्नलिखित संख्याओं के प्रथम पाँच गुणज लिखिए।
   (i) 7 (ii) 12 (iii) 17 (iv) 15 (v) 18
3. 10 से 30 के बीच की सभी अभाज्य संख्याओं को लिखिए।
4. सबसे छोटी अभाज्य संख्या लिखिए।
5. निम्नलिखित में से कौनसी संख्याओं का 6 एक गुणनखण्ड है?
   6, 10, 12, 15, 18, 25, 30, 38, 46
6. ऐसी तीन संख्याएँ लिखिए जो 4 व 6 दोनों की गुणज हो।
7. सत्य या असत्य बताइए।
   (i) 108, 9 का एक गुणज है।
   (ii) 7, 27 का एक गुणनखण्ड है।
   (iii) दो अभाज्य संख्याओं का योग एक सम संख्या होता है।
   (iv) प्रत्येक अभाज्य संख्या विषम होती है।
   (v) 1 प्रत्येक संख्या का गुणनखण्ड होता है।
   (vi) प्रत्येक संख्या का गुणज उससे छोटा होता है।
   (vii) प्रत्येक संख्या का गुणनखण्ड उससे छोटा होता है।

2.5 विभाज्यता के नियम

2.5.1 इकाई स्थान के अंक के आधार पर

(i) 2 से विभाज्यता

हमने अभी सम एवं विषम संख्याओं के बारे में सीखा है अब आप बताइए क्या हम कह सकते हैं कि सभी सम संख्याएँ 2 से विभाजित होती हैं? कुछ सम व विषम संख्याएँ लीजिए जैसे 24, 15, 48, 26, 13, 11 और उनके गुणनखण्ड कीजिए।

24 के गुणनखण्ड 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

15 के गुणनखण्ड 1, 3, 5, 15

इसी प्रकार आप संख्याओं 26, 48, 13, 11 के गुणनखण्ड कीजिए।

2 जिन संख्याओं का एक गुणनखण्ड है उनके इकाई स्थान पर कौनसा अंक है ? लिखिए ....

संख्याएँ		संख्याएँ	
सम	2 से भाज्य	विषम	2 से भाज्य
22	हाँ	11	नहीं
28		51	
50		57	
36		23	
——		——	
——		——	

तालिका 2.3

अतः हम कह सकते हैं कि वे सभी संख्याएँ जिनके इकाई स्थान पर 0, 2, 4, 6, 8 आता है वे संख्याएँ 2 से विभाज्य होती हैं और 2 उनका एक गुणनखण्ड भी होता है।

(ii) 10 से विभाज्यता

संख्याएँ	10 से भाज्य हाँ/नहीं
20	
22	
120	
50	
17	
19	

तालिका 2.4

तालिका में आप कुछ और संख्याएँ भरिए। 10 से भाज्य संख्याओं के इकाई स्थान वाले अंक को देखने पर क्या आपको कोई पैटर्न मिलता है?

वे सभी संख्याएँ जिनके इकाई के स्थान पर शून्य आता है या जिनका एक गुणनखण्ड 10 होता है वे 10 से पूर्णतः विभाजित होती हैं।

(iii) 5 से विभाज्यता

दी गई संख्याओं के सभी गुणनखण्ड लिखिए।

संख्याएँ	गुणनखण्ड
45	1,3,5,9,45
40	1,2,4,5,8,10,20,40
32	....
18	....
25	....

अब उन सभी संख्याओं के इकाई अंकों को देखिए जिनका एक गुणनखण्ड 5 है।

अतः हम कह सकते हैं कि वे सभी संख्याएँ जिनके इकाई के स्थान पर 0 अथवा 5 आता है वे संख्याएँ 5 से विभाज्य होती हैं।

करो और सीखो

1. क्या जिन संख्याओं में इकाई का अंक 5 या 0 होता है, उन सभी संख्याओं का एक गुणनखण्ड 5 होगा?
2. क्या वे सभी संख्याएँ 5 से विभाज्य होंगी?
3. क्या ऐसी कोई संख्या जिसका इकाई का अंक 5 या 0 ना हो, उसका एक गुणनखण्ड 5 हो सकता है?

2.5.2 अंकों के योग के आधार पर

(i) 3 की विभाज्यता का नियम

कक्षा में शिक्षक एक खेल खिलाएगा ।

1. कोई एक संख्या सोचिए।
2. उस संख्या के अंकों का योग कीजिए।
3. अंकों के योग में 3 का भाग दीजिए।
4. क्या भाग पूरी–पूरी बार गया?
5. मूल संख्या में 3 का भाग दीजिए।
6. क्या भाग पूरी–पूरी बार गया?

विद्यार्थियों से प्राप्त परिणामों को शिक्षक श्यामपट्ट पर समेकित करेंगे।

संख्याएँ	अंकों का योग	3 से विभाज्य
39	3 + 9 = 12 ; 1 + 2 = 3	हाँ
109	1 + 0 + 9 = 10 ; 1 + 0 = 1	नहीं
507		
1008		
....		

तालिका 2.5

ऊपर दी गई तालिका को पूरा कीजिए–

रीना ने 321 में इस नियम से 3 की विभाज्यता को जाँचा

321 में संख्यांकों का योग = 3 + 2 + 1 = 6

6, 3 से विभाजित है।

3) 321 (107
 - 3
 021
 - 21
 00

अतः हम कह सकते हैं कि यदि किसी संख्या के सभी अंकों का योगफल 3 से विभाजित होता है तो वह संख्या भी 3 से भाज्य होगी।

(ii) 9 की विभाज्यता का नियम

संख्या	अंकों का योग	संख्या 9 से भाज्य
1827	1 + 8 + 2 + 7 = 18	हाँ
1227		
3395		
145		
....		

तालिका 2.6

तालिका को पूरा कीजिए, क्या आप इससे 9 की विभाज्यता के लिए कोई पैटर्न बता सकते हैं?

यदि किसी संख्या के अंकों का योग 9 से विभाज्य है तो वह संख्या भी 9 से भाज्य होगी।

करो और सीखो

3672 में अंकों का योग 3 + 6 + 7 + 2 = 18

क्या यह 9 से भाज्य है ? 3672 ÷ 9 करके देखिए।

(iii) 6 की विभाज्यता का नियम

संख्या 216 पर 2 व 3 की विभाज्यता को जाँचिए।

संख्या	2 से भाज्य	3 से भाज्य	6 से भाज्य
216	हाँ	हाँ	हाँ
58	हाँ	नहीं	नहीं
108			
103			
....			

तालिका 2.7

आप कुछ और संख्याएँ तालिका में लिखिए और तालिका को पूरा कीजिए। क्या आपको 6 से विभाज्यता के लिए कोई पैटर्न दिखाई देता है?

यदि कोई संख्या 2 तथा 3 से अलग–अलग विभाजित होती है तो वह 6 से भी विभाज्य होगी।

करो और सीखो

दी गई संख्याओं 336, 123, 1002, 4236 की 6 से विभाज्यता की जाँच कीजिए।

(iv) 4 से विभाज्यता का नियम

जब किसी संख्या के दहाई एवं इकाई के अंकों से बनी संख्या 4 से विभाज्य होती है अथवा उस संख्या में दहाई व इकाई के स्थान पर 0 हो तो वह संख्या 4 से विभाजित होती है।

आप कुछ संख्याएँ लेकर इस पैटर्न को जाँचिए।

मीना ने एक संख्या 9212 ली तब इसके दहाई व इकाई स्थान के अंकों से बनी संख्या 12 है जो 4 से भाज्य है। आप इसे भाग करके देखिए।

(v) 8 की विभाज्यता का नियम

यदि किसी संख्या के सैंकड़ा, दहाई, इकाई वाले तीन अंकों की संख्या 8 से विभाजित हो या सैंकड़ा दहाई व इकाई के स्थान पर शून्य हो तो वह संख्या 8 से विभाजित होगी।

इस पैटर्न को तालिका में जाँचिए।

संख्याएँ	सैंकड़ा, दहाई व इकाई अंक से बनी संख्या	8 से भाज्य हाँ/नहीं
1. 30480	480 ÷ 8 = 60	हाँ
2. 42108	108 ÷ 8 = ...	....
3. 1324	324 ÷ 8 = ...	....
4.	.... = ...	....
5	.... = ...	....

तालिका 2.8

(vi) 11 की विभाज्यता का नियम

क्या संख्या 72325, 11 से विभाज्य है? 72325 में विषम स्थान के अंक 7, 3, 5 है।

इन अंकों का योग = 7 + 3 + 5 = 15

इसी प्रकार सम स्थान के अंकों का योग = 2 + 2 = 4

(विषम स्थान के अंकों का योग) - (सम स्थान के अंको का योग) = 15 - 4 = 11, जो 11 से विभाज्य है।

अत: संख्या 72325 भी 11 से भाज्य है।

इसी प्रकार आप भी तालिका को भरिए और पता लगाइए कौन–कौन सी संख्याएँ 11 से विभाज्य है?

```
11) 72325 ( 6575
   - 66
     63
   - 55
      82
    - 77
       55
     - 55
        0
```

क्र.सं.	संख्याएँ	सम स्थान के अंकों का योग	विषम स्थान के अंकों का योग	अन्तर 11 से भाज्य है/नहीं
1	3333			
2	15708			
3	12345			
4	130303			

तालिका 2.9

क्या ऊपर दी गई तालिका से आप 11 की विभाज्यता के लिए कोई नियम बना सकते हैं ?

वे सभी संख्याएँ जिनके सम तथा विषम स्थानों के अंकों के योग का अंतर 0 या 11 के गुणज हो, 11 से विभाज्य होती है।

2.6 सार्व गुणज एवं अभाज्य गुणनखण्ड

सार्वगुणज

3 व 4 के गुणज क्या हैं?

3 के गुणज = 3, 6, 9, $\boxed{12,}$ 15, 18, 21, 24---- (कुछ और गुणज लिखिए)

4 के गुणज = 4, 8, $\boxed{12,}$ 16, 20, 24, 28, 32, 36..... (कुछ और गुणज लिखिए)

अब 3 व 4 के समान गुणजों पर गोला बनाइए।

12, 24, 36....ऐसी संख्याएँ हैं जो 3 व 4 दोनों की गुणज हैं, इन्हें हम 3 व 4 का सार्व गुणज कहते हैं।

अभाज्य गुणनखण्ड

हम संख्याओं के गुणनखण्ड करना सीख चुके हैं। यहाँ हम संख्या 18 के गुणनखण्ड पर विचार करते है–

18 = 2 x 9   18 = 3 x 6

= 2 x 3 x 3   = 3 x 2 x 3

हमे देखते हैं कि संख्या 18 के उपर्युक्त दोनों प्रकार से किए गुणनखण्डों के अंत में प्राप्त गुणनखण्ड अभाज्य संख्याएँ हैं। किसी संख्या के इस प्रकार के गुणनखण्ड अभाज्य गुणनखण्ड कहलाते हैं।

किसी संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड निम्न प्रकार भी ज्ञात किए जा सकते हैं।

$$\begin{array}{r|l} 2 & 24 \\ \hline 2 & 12 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline & 1 \end{array}$$

प्रश्नावली 2.2

1. निम्न संख्याओं के अभाज्य गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।
   (i) 28 (ii) 54 (iii) 96 (iv) 148 (v) 156
2. 4 अंकों की सबसे छोटी संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड लिखिए।
3. निम्न के सार्व गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।
   (i) 24, 36 (ii) 35, 40 (iii) 12,18, 30 (iv) 14, 25, 35
4. निम्न के प्रथम तीन सार्वगुणज ज्ञात कीजिए।
   (i) 4 और 5 (ii) 8 व 12 (iii) 2, 4,10 (iv) 3, 9,15
5. 50 से छोटी ऐसी सभी संख्याएँ लिखिए जो 2 व 3 की सार्वगुणज है।

2.7 महत्तम समापवर्तक
2.7.1 अभाज्य गुणनखण्ड विधि से

हमने गुणनखण्ड के बारे में सीखा है चलो गुणनखण्डों की विशेषताओं के बारे में जानकारी करते हैं।

30, 36 व 42 के सर्वसंभव गुणनखण्ड होंगे।

30 =	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	5	$\boxed{6}$	10	15	30	
36 =	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	4	$\boxed{6}$	9	12	18	36
42 =	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{6}$	7	14	21	42	

अतः हम देखते हैं 1, 2 ,3 व 6 संख्या 30, 36 व 42 के समान गुणनखण्ड हैं। इनमें भी 6 वह सबसे बड़ी संख्या है जिससे संख्याएँ 30, 36, 42 तीनों विभाज्य है। ऐसी संख्या को महत्तम समापवर्तक कहते हैं। आओ इसके दैनिक जीवन में उपयोग के उदाहरणों को समझते हैं।

उदाहरण 1 आशा, निशा और श्याम के पास क्रमशः 14 मी., 35 मी. व 21 मी. लम्बे रिबन के रोल हैं तीनों रिबन को बड़े से बड़े समान टुकड़ों में इस प्रकार काटना चाहते हैं कि काटने के पश्चात् रिबन शेष न रहे। तो वह समान रूप से कितने–कितने मीटर के टुकड़े काटेंगे?

हल आशा, निशा व श्याम क्रमशः रिबन के निम्न मापों के टुकड़े काट सकते हैं।

14	=	1	2	7	14
35	=	1	5	7	35
21	=	1	3	7	21

14, 35 व 21 का सबसे बड़ा उभयनिष्ठ (समान) गुणनखण्ड 7 है अतः 7 मी. वह बड़ी से बड़ी माप है जिसमें हम 14 मी., 35 मी. व 21 मी. के बराबर माप के रिबन काट सकते हैं। यह महत्तम समापवर्तक भी है।

उदाहरण 2 संख्या 24, 36 व 60 का महत्तम समापवर्तक अभाज्य गुणनखण्ड विधि से ज्ञात कीजिए।

हल 24, 36 और 60 का म.स. इन संख्याओं के अभाज्य गुणनखण्ड द्वारा निम्न प्रकार से ज्ञात किया जा सकता है –

2	24
2	12
2	6
3	3
	1

2	36
2	18
3	9
3	3
	1

2	60
2	30
3	15
5	5
	1

$$24 = \boxed{2} \times \boxed{2} \times 2 \times \boxed{3}$$
$$36 = \boxed{2} \times \boxed{2} \times \boxed{3} \times 3$$
$$60 = \boxed{2} \times \boxed{2} \times \boxed{3} \times 5$$

24, 36 व 60 के उभयनिष्ठ गुणनखण्ड = 2 x 2 x 3

अतः 24, 36 और 60 का म.स. 2 x 2 x 3 = 12

करो और सीखो

राजू की गाय 15 लीटर तथा भैंस 20 लीटर दूध देती है उस बर्तन का अधिकतम माप क्या होगा जो गाय व भैंस के दूध को पूरा–पूरा माप सके?

2.7.2 वैदिक विधि से

वैदिक गणित में सूत्र (संकलन– व्यवकलन) से भी म.स. ज्ञात किया जा सकता है, आओ प्रयास करें।

उदाहरण 3 संख्या 24 व 36 का म.स. ज्ञात कीजिए।

हल संख्याओं का प्रथम अंतर = 36 - 24 = 12

अतः संभावित म.स. = 12

दूसरा अंतर 24 - 12 = 12, प्रथम अंतर = दूसरा अंतर है। अतः 24 व 36 का म.स. = 12

उदाहरण 4 संख्या 145 व 232 का म.स. ज्ञात कीजिए।

हल प्रथम अंतर 232 - 145 = 87 अतः संभावित म.स. 87

दूसरा अंतर 145 - 87 = 58 अतः संभावित म.स 58

तीसरा अंतर 87 - 58 = 29 अतः संभावित म.स 29

चौथा अंतर 58 - 29 = 29 अतः म.स. 29

145 व 232 का म.स. = 29

उदाहरण 5 संख्या 18, 54, 81 का म.स. ज्ञात कीजिए।

हल दो संख्या का संकलन 18 + 81 = 99

प्रथम अंतर 18 + 81 - 54 = 45 अतः संभावित म.स. 45

दूसरा अंतर 54 - 45 = 9 अतः संभावित म.स. 9

संभावित म.स. 9, 45 का गुणज है।

अतः 18, 54, 81 का म.स. = 9

करो और सीखो

वैदिक विधि से म.स. ज्ञात कीजिए।

(i) 8,12 (ii) 38, 57 (iii) 117, 195 (iv) 99, 165, 231

प्रश्नावली 2.3

1. निम्न संख्याओं का महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए।
   (i) 36, 84 (ii) 28, 42 (iii) 13, 26, 52
   (iv) 15, 35, 40 (v) 23, 31, 93
2. निम्न का म.स. क्या है ?
   (i) दो क्रमागत संख्याएँ (ii) दो क्रमागत सम संख्याएँ (iii) दो क्रमागत विषम संख्याएँ

3. एक फर्श की चौड़ाई 25 मी. और लम्बाई 30 मी. है। ऐसी सबसे लम्बी रस्सी की लम्बाई ज्ञात कीजिए जो कमरे की लम्बाई और चौड़ाई को पूरा–पूरा नाप ले।

4. तीन टैंकरों में क्रमश : 96 ली, 100 ली और 144 ली तेल आता है उस बर्तन का अधिकतम माप क्यो होगा जो तीनों टैंकरों के तेल को पूरा–पूरा माप देगा ?

5. 36 मीटर, 54 मीटर और 90 मीटर की दूरियों को नापने के लिए बड़ी से बड़ी किस लम्बाई की रस्सी की आवश्यकता होगी ?

2.8 लघुत्तम समापवर्त्य

अध्यापक कक्षा में बच्चों से एक पहेली पूछते हैं।

''चार–चार या पाँच–पाँच की बनाऊँ ढ़ेरियाँ।
दोनों बार पूरी–पूरी बँटे कम से कम कितनी बेरियाँ।''

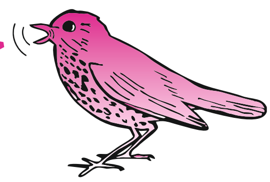
लीला – इसका मतलब ये हुआ कि हर ढ़ेरी में बेर समान हो तथा दोनों ढ़ेरियाँ पूरी–पूरी बँटनी चाहिए न बचे न घटे।

अध्यापक – हाँ, अब ये बताओ कि हर ढ़ेरी में कम से कम कितने बेर होंगे ?

कमल – अगर बेर 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40 आदि संख्याओं में हो तो उन्हें चार–चार की ढ़ेरियों में बाँटा जा सकता हैं।

लीला – अगर बेर 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 45 आदि संख्याओं में हो तो पाँच–पाँच की ढ़ेरियों में पूरा–पूरा बाँट सकते है।

वह छोटी से छोटी संख्या जो दो या दो से अधिक संख्याओं से पूरी–पूरी विभाजित हो जाती है उन संख्याओं का लघुत्तम समापवर्त्य कहलाती है।



करो और सीखो

दो घंटियाँ एक साथ बजना प्रारंभ करती है। पहली घंटी हर 3 मिनिट बाद तथा दूसरी घंटी हर 5 मिनिट बाद पुनः बजती है तो दोनों घंटियाँ कितने समय पश्चात् फिर से एक साथ बजेगी?

2.8.1 लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात करने की विधियाँ

1. अभाज्य गुणनखण्ड विधि

48 और 30 का ल.स. अभाज्य गुणनखण्ड विधि से ज्ञात करते हैं।

चरण 1 : प्रत्येक संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

48 = 2x2x2x2x3

30 = 2x3x5

2	48
2	24
2	12
2	6
3	3
	1

2	30
3	15
5	5
	1

चरण 2 : इन अभाज्य गुणनखण्ड़ों में, अभाज्य गुणनखण्ड 2 अधिकतम 4 बार आता है। (यह 48 में है) और 3 तथा 5 अधिकतम 1–1 बार ही आते है।

अतः अभीष्ट ल.स. = 2x2x2x2x3x5 = 240 होगा।

2. भाग विधि

18, 24 और 30 का ल.स. भाग विधि से ज्ञात करते हैं।

चरण 1 : संख्याओं को नीचे दर्शाए अनुसार पंक्ति में लिखते हैं।

2	18, 24, 30
2	9, 12, 15
2	9, 6, 15
3	9, 3, 15
3	3, 1, 5
5	1, 1, 5
	1, 1, 1

चरण 2 : छोटी से छोटी संख्याओं से भाग देते हैं। जो संख्याएँ विभाजित नहीं होती हैं उन्हें अगली पंक्ति में वैसा का वैसा ही लिखते हैं।

चरण 3 : इसे तब तक जारी रखते हैं, जब तक संख्या विभाजित होती रहे। फिर अगली अभाज्य संख्या से विभाजन की प्रक्रिया दोहराते हैं, जब तक सभी संख्याएँ पूरी तरह से विभाजित ना हो जाए।

चरण 4 : हर पंक्ति की भाजक संख्याओं का गुणा ल.स. होता है।

अतः 18, 24, 30 का ल.स. 2 x 2 x 2 x 3 x 3 x 5 = 360

3. वैदिक विधि

संख्या 12 व 16 का ल.स. वैदिक विधि से ज्ञात करते हैं।

चरण 1 : 12 व 16 को भिन्न रूप में $\frac{12}{16}$ लिखते हैं। (सूत्र आनुरूप्येण)

चरण 2 : 12 व 16 के अभाज्य गुणनखण्ड करते हैं। $\frac{12}{16} = \frac{2 \times 2 \times 3}{2 \times 2 \times 2 \times 2}$

चरण 3 : जो संख्या अंश व हर में उभयनिष्ठ है उन्हें हटा देते हैं। $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

चरण 4 : उर्ध्वतिर्यक गुणा विधि से 12 x 4 = 16 x 3 = 48 प्राप्त हुआ।

अतः 12 व 16 का ल.स. 48 है।

करो और सीखो

1. संख्या 48, 64 व 80 का लघुत्तम समापवर्त्य भाग विधि से ज्ञात कीजिए।
2. संख्या 24, 30 का लघुत्तम समापवर्त्य वैदिक विधि से ज्ञात कीजिए।

प्रश्नावली 2.4

1. निम्नलिखित का ल.स. ज्ञात कीजिए।
   (i) 10, 15
   (ii) 14, 28
   (iii) 12, 18 और 27
   (iv) 48, 56 और 72
2. न्यूनतम कितने आमों को 5-5 और 6-6 के समूहों में पूरा–पूरा बाँटा जा सकता है ?
3. स्नेहा और वंश क्रमशः प्रत्येक तीसरे व पाँचवे दिन बाजार जाते हैं। आज दोनों बाजार गए थे। कितने दिन बाद वे फिर से एक साथ बाजार जाएँगे?
4. हरीश, सलीम और राकेश किसी मैदान का पूरा चक्कर लगाने में क्रमश : 6, 8 और 12 मिनट लगाते है। तीनों 6 बजे साथ दौड़ना आरंभ करे तो कितने समय बाद तीनों एक साथ होंगे?
5. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जो 16, 20 व 24 से पूरी–पूरी विभाजित हो।
6. एक नीला बल्ब प्रत्येक 60 सेकण्ड में जलता व बुझता है तथा एक लाल बल्ब प्रत्येक 90 सेकण्ड में जलता व बुझता है। यदि दोनों बल्ब 5 बजे एक साथ जलते हैं तो कितनी बजे पुनः एक साथ जलेंगे?

हमने सीखा

1. (i) एक संख्या का गुणनखण्ड उस संख्या का पूर्ण विभाजक होता है।
   (ii) प्रत्येक संख्या स्वयं का एक गुणनखण्ड होती है। 1 प्रत्येक संख्या का गुणनखण्ड होता है।
   (iii) दी हुई संख्या का प्रत्येक गुणनखण्ड उस संख्या से छोटा या बराबर होता है।
   (iv) प्रत्येक संख्या अपने प्रत्येक गुणनखण्डों का एक गुणज होती है।
   (v) दी हुई संख्या का प्रत्येक गुणज उस संख्या से बड़ा या उसके बराबर होता है।
   (vi) प्रत्येक संख्या स्वयं का एक गुणज है।
2. (i) वह संख्या जिसके दो ही गुणनखण्ड होते हैं (संख्या स्वयं और 1) अभाज्य संख्या कहलाती है। जिन संख्याओं के दो से अधिक गुणनखण्ड होते है, वे संख्याएँ भाज्य संख्याएँ कहलाती हैं।

(ii) संख्या 2 सबसे छोटी अभाज्य संख्या है जो एक सम संख्या भी है। अन्य सभी अभाज्य संख्याएँ विषम होती हैं।

3. संख्याओं को बिना भाग की क्रिया किए उनकी संख्या 2, 3,4, 5, 8, 9, 10 और 11 से विभाज्यता की जाँच कर सकते है। हमने संख्या के अंकों का विभिन्न संख्याओं से विभाज्यता के संबंधों का अध्ययन किया है।
   (i) 2, 5 और 10 से विभाज्यता केवल इकाई के अंक को देखकर बताई जा सकती है।
   (ii) 3 और 9 से विभाज्यता संख्या के अंकों के योग द्वारा बताई जा सकती है।
   (iii) 4 से विभाज्यता इकाई और दहाई तथा 8 से विभाज्यता इकाई, दहाई व सैंकड़े से बनने वाली संख्या द्वारा जाँची जा सकती है।
   (iv) 11 से विभाज्यता दाईं ओर से सम स्थानों के अंकों के योग और विषम स्थानों के अंकों के योग के अंतर द्वारा जाँची जा सकती है।
4. यदि दो संख्याएँ एक संख्या से विभाजित होती है तो उन दोनों का योग तथा अंतर भी उस संख्या से विभाजित होता है।
5. दो या अधिक संख्याओं का म.स. (HCF) उसके सार्वगुणनखंडों में से सबसे बड़ा होगा।
6. दो या अधिक संख्याओं का ल.स. (LCM) उसके सार्वगुणजों में से सबसे छोटा होगा। वैदिक गणित के माध्यम से भी संख्याओं का ल.स. (LCM) एवं म.स. (HCF) ज्ञात किया जा सकता है।

अध्याय 3

पूर्ण संख्याएँ

3.1 हम दैनिक जीवन में रोज कई वस्तुओं को गिनते हैं जैसे आपके 3 दोस्त हैं, खेत में 6 गायें चर रही है आपकी कक्षा में 25 बच्चे हैं आदि।

मनुष्य ने गणना का कार्य हजारों वर्ष पूर्व ही करना प्रारम्भ कर दिया था। हम गणना सदैव संख्या 1 से शुरू करते हैं। अधिक से अधिक हम कहाँ तक गिन सकते हैं?

रमेश ने कहा 100 तक।

सीमा : क्यों 100 के बाद 101 भी तो होता है।

(रमेश ने मन ही मन आगे गिनना शुरू किया तब उसे महसूस हुआ कि 100 के बाद 200, 300 .... आएँगे)

तब उसने कहा 1000 तक।

सीमा : परन्तु उसके आगे 2000, 3000, 4000 ..... आते हैं।

(रमेश फिर आगे गिनना प्रारम्भ कर सबसे बड़ी संख्या सोचता है परन्तु उत्तर ना पाकर परेशान हो जाता है)

रमेश : अब तुम ही बता दो कहाँ तक गिन सकते हैं?

सीमाः मैं भी सोच रही हूँ परन्तु अन्तिम संख्या क्या होगी यह तो मुझे भी नहीं पता।

हम संख्या 1 से गिनना प्रारम्भ करते हैं। इस प्रकार 1 प्रथम प्राकृत संख्या है अगली प्राकृत संख्या 2 है जो प्रथम संख्या में 1 जोड़ने पर प्राप्त होती है। 2 में 1 जोड़ने पर 3, अर्थात् तीसरी प्राकृत संख्या प्राप्त होती है। वस्तुतः किसी भी प्राकृत संख्या में 1 जोड़ने पर अगली प्राकृत संख्या प्राप्त होती है जिसे हम उस संख्या की उत्तरवर्ती या परवर्ती संख्या कह सकते हैं। इस प्रकार 99 + 1 = 100 जो कि 99 की उत्तरवर्ती या परवर्ती संख्या है। यानि प्राकृत संख्याओं का समूह ऐसी संख्याओं का समूह है जो क्रम से एक–एक करके बढ़ता जाता है।

यदि आपसे यह पूछा जाए कि प्राकृत संख्याएँ कितनी है तो आप सोच में पड़ जाएँगे। क्या आप प्राकृत संख्याओं को गिनकर बता सकते हैं कि ये कितनी हैं? शायद नहीं।

यदि हम 1, 2, 3 ......100, 101 ..... 999... 1001 गिनना प्रारंभ करें और गिनते चले जाएँ तो क्या इसका कहीं अन्त होगा? नहीं प्राकृत संख्याएँ अनन्त हैं। जिसे संख्याओं के आगे तीन बिन्दु लगाकर प्रदर्शित करते हैं 1, 2, 3... प्राकृत संख्याओं के समूह को N से प्रदर्शित करते हैं।

अतः $N = \{1, 2, 3, ...\}$

3.1.1 प्राकृत संख्याओं के गुण

1. सबसे छोटी प्राकृत संख्या 1 है।
2. प्राकृत संख्या में 1 जोड़ने पर अगली प्राकृत संख्या प्राप्त होती है जैसे 18 + 1 = 19
3. 1 को छोड़कर प्रत्येक प्राकृत संख्या में से यदि 1 घटाएँ तो पिछली संख्या (पूर्ववर्ती) प्राप्त होती है, जैसे 18 – 1 = 17
4. प्राकृत संख्याएँ अनन्त हैं, अतः सबसे बड़ी प्राकृत संख्या नहीं लिखी जा सकती।

5. सबसे छोटी प्राकृत संख्या 1 में से 1 घटाने पर प्राकृत संख्या प्राप्त नहीं होती अर्थात् शून्य (0) प्राकृत संख्या नहीं है।

3.2 पूर्ण संख्याएँ

निम्न सारणी में खाली स्थान में उपयुक्त संख्या भरिए।

पूर्ववर्ती प्राकृत संख्या	प्राकृत संख्या	अग्र (परवर्ती प्राकृत संख्या)
13–1 = 12	13	13 + 1 = 14
	55	—
99	100	101
—	200	—
—	10	11
—	1	

तालिका 3.1

कौन सी संख्या की कोई प्राकृत पूर्ववर्ती संख्या नहीं है?

संख्या 1 की कोई प्राकृत पूर्ववर्ती नहीं है। हम 1 की पूर्ववर्ती संख्या के रूप में शून्य (0) को लेते हैं इसे प्राकृत संख्या के समूह में जोड़ लेते हैं तो यह नया समूह बनता है

(0,1,2,3,...)

इसे पूर्ण संख्याओं का समूह कहते हैं इसे **W** से व्यक्त किया जाता है अतः

W = {0,1,2,3,...}

आपके पिताजी 6 केले लेकर आए। आपके घर में 6 सदस्य हैं। सभी ने एक–एक केला खा लिया अब आपके पास कितने केले बचे ?

आप कहेंगे– कुछ नहीं।

पाँच चिड़िया पेड़ पर बैठी थी। एक–एक करके सब उड़ गई, तो बताओ कितनी बची ? आप कहेंगे– कुछ नहीं।

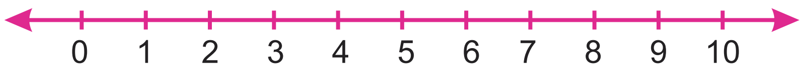
विचार कीजिए और बताइए

6–6 = –– या 5–5=–– या 10–10=––

क्या होगा ?

3.2.1 पूर्ण संख्याओं को संख्या रेखा पर दर्शाना

पूर्ण संख्याओं को एक संख्या रेखा पर दिखाने के लिए अपनी उत्तर पुस्तिका में एक सरल रेखा खींचिए जिसमें समान दूरी पर कई चिह्न लगे हों।



इसमें प्रारंभिक बिन्दु को शून्य (0) से दिखाएँ। शून्य के दाईं ओर के बिन्दुओं पर क्रमशः 1,2,3, इत्यादि संख्याएँ लिखें। क्या संख्या रेखा को देखकर आप बता सकते हैं कि कौन सी संख्या बड़ी है? इसके लिए सोचिए कि किसी संख्या के बाईं ओर की संख्या इस संख्या से बड़ी होगी या छोटी?

3.2.2 पूर्ण संख्याओं के गुण

1. प्राकृत संख्याओं के सभी गुण पूर्ण संख्याओं के लिए भी सही है।
2. सबसे छोटी पूर्ण संख्या शून्य (0) है।
3. संख्या रेखा पर 0 से दाहिनी ओर क्रमशः पूर्ण संख्या बढ़ते क्रम में दिखाई गई है अर्थात्

$0 + 1 = 1$, $1 + 1 = 2$... $101 + 1 = 102$, $102 + 1 = 103$, $103 + 1 = 104$... इत्यादि।

निम्नलिखित तालिका को देखकर सही या गलत बताइए।

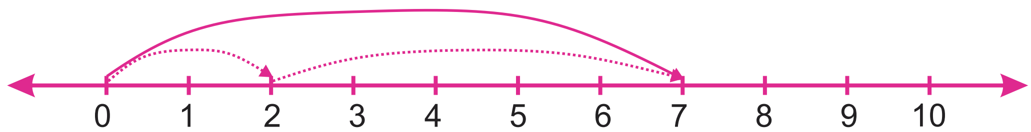
क्र.सं.	संख्याएँ	संख्या रेखा पर स्थिति	संख्याओं में संबंध	सही / गलत
1.	12, 8	8 के दाहिने ओर 12	$12 > 8$	
2.	3, 10	10 के बाईं ओर 3	$10 < 3$	
3.	66, 45	45 के दाहिनी ओर 66	$66 > 45$	
4.	236, 190	236 के बाईं ओर 190	$190 < 236$	
5.	1001, 1010	1001 के दाहिनी ओर 1010	$1010 > 1001$	

तालिका 3.2

3.2.3 संख्या रेखा पर पूर्ण संख्याओं की संक्रियाएँ

पूर्ण संख्याओं पर साधारण जोड़, घटाव, गुणा और भाग की संक्रियाओं को संख्या रेखा पर करने का अभ्यास करें।

संख्या रेखा पर जोड़ना – आइए 2 और 5 का जोड़ करें –

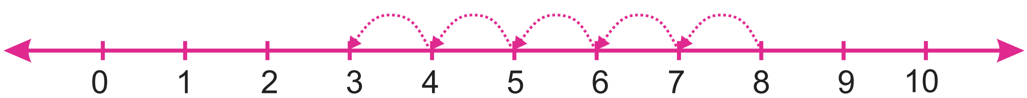


संख्या रेखा पर 2 से शुरू करके हम 2 से 5 इकाई दाईं ओर बढ़ते हैं और 7 पर पहुँचते हैं अतः $2+5=7$ (अलग–अलग संख्याएँ लेकर अभ्यास करें)

संख्या रेखा पर जब दो संख्याओं को जोड़ते हैं तो पहले एक संख्या से आरंभ करते हुए दूसरी संख्या की इकाईयों तक पहुँचते हैं। हमें अभीष्ट योग प्राप्त होता है।

संख्या रेखा पर घटाना –

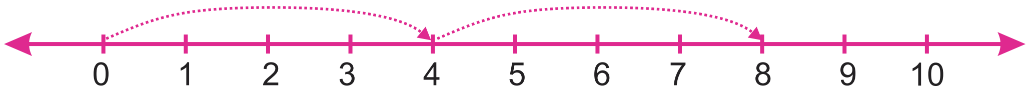
यह संक्रिया योग की संक्रिया की विपरीत दिशा में होगी। यदि 8 में से 5 को घटाना है तो –



$8 - 5 = 3$ आप भी अलग–अलग संख्याएँ लेकर अभ्यास कीजिए।

संख्या रेखा पर गुणनफल

अब संख्या रेखा पर पूर्ण संख्याओं का गुणनफल करेंगे।
2 x 4 का मान ज्ञात करेंगे। इसे हम (2 बार 4) के रूप में लिख सकते हैं।



संख्या रेखा पर 0 से आरंभ करते हुए एक बार में 4 तक पहुँचेंगे। पुनः चार कदम आगे बढ़ते हुए दूसरी बार में 8 तक पहुँचते हैं अर्थात् 2 x 4 = 8 हुआ।

प्रश्नावली 3.1

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।
   (i) 55 की पूर्ववर्ती संख्या ... होगी।
   (ii) 100 की पूर्ववर्ती संख्या ... होगी।
   (iii) 305 की पूर्ववर्ती संख्या ... और परवर्ती संख्या ... होगी।
   (iv) प्राकृत संख्याओं में ... को शामिल करने से पूर्ण संख्याएँ बनती हैं।
   (v) 1 की पूर्ववर्ती संख्या ... होगी।

2. निम्नलिखित संख्याओं की पूर्ववर्ती संख्याएँ लिखिए।
   (i) 1203 (ii) 2406 (iii) 3555 (iv) 4444

3. निम्नलिखित संख्याओं की उत्तरवर्ती संख्याएँ लिखिए।
   (i) 2304 (ii) 3611 (iii) 4000 (iv) 5060

4. निम्न संख्याओं की पूर्ववर्ती एवं उत्तरवर्ती दोनों संख्याएँ लिखिए।
   (i) 189 (ii) 199 (iii) 209 (iv) 300

5. सबसे छोटी पूर्ण संख्या कौन सी है?

6. निम्न कथनों में से सत्य के आगे (✔) एवं असत्य के आगे (✘) का चिन्ह लगाइए–
   (i) समस्त प्राकृत संख्याएँ पूर्ण संख्याएँ हैं।
   (ii) संख्या 1 सबसे छोटी पूर्ण संख्या है।
   (iii) दो पूर्ण संख्याओं का योगफल सदैव पूर्ण संख्या होता है।

(iv) $245 + 450 = 450 + 245$

(v) $1124 + 0 = 0$

(vi) घटाने की संक्रिया योग संक्रिया की प्रतिलोम है।

(vii) $4 - 4 = 0$ (एक पूर्ण संख्या है)

(viii) $7 - 7 \neq 0$

(ix) किन्हीं दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल पूर्ण संख्या होती है।

(x) किसी पूर्ण संख्या को शून्य से गुणा करने पर वही संख्या प्राप्त होती है।

(xi) किसी पूर्ण संख्या को 1 से गुणा करने पर वही संख्या प्राप्त होती है।

3.3 पूर्ण संख्याओं के गुण धर्म

3.3.1 संवृत गुण

नीचे दी गई संख्याओं को ध्यान से देखिए और विचार कीजिए।

$6 + 2 = 8$, एक पूर्ण संख्या

$2 + 8 = 10$, एक पूर्ण संख्या

$0 + 5 = 05$, एक पूर्ण संख्या

$12 + 0 = 12$, एक पूर्ण संख्या

$7 + 6 = 13$, एक पूर्ण संख्या

उक्त उदाहरणों में हमने देखा कि दो पूर्ण संख्याओं का योगफल एक पूर्ण संख्या प्राप्त होती है। ऐसी कुछ और पूर्ण संख्याओं के जोड़े लीजिए। क्या उनका योग भी पूर्ण संख्या आता है?

क्या आप ऐसा कोई जोड़ा ढूँढ पाए जिनका योग पूर्ण संख्या ना हो? आप पाएँगें कि पूर्ण संख्याओं का योग सदैव एक पूर्ण संख्या आता है।

इसलिए पूर्ण संख्याएँ योग के अन्तर्गत संवृत हैं।

क्या पूर्ण संख्याएँ घटाव के लिए भी संवृत है ?

निम्न पर विचार करें

$8 - 5 = 3$ एक पूर्ण संख्या, $10 - 9 = 1$ एक पूर्ण संख्या,

$0 - 5 = (-5)$ एक पूर्ण संख्या नहीं, $6 - 0 = 6$ एक पूर्ण संख्या,

$13 - 17 = (-4)$ एक पूर्ण संख्या नहीं

दो पूर्ण संख्याओं का व्यवकलन (घटाव) एक पूर्ण संख्या हो भी सकती है और नहीं भी।

अतः पूर्ण संख्याएँ व्यवकलन (घटाव) के अन्तर्गत संवृत नहीं होती हैं।

आइए इन्हें भी देखिए व सोचिए।

$6 \times 2 = 12$ एक पूर्ण संख्या

$4 \times 5 = 20$ एक पूर्ण संख्या

$10 \times 0 = 0$ एक पूर्ण संख्या

0 x 8 = 0 एक पूर्ण संख्या

हम देखते हैं कि दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल भी एक पूर्ण संख्या प्राप्त होती है।

अतः हम कहेंगे कि पूर्ण संख्याएँ गुणन के अन्तर्गत संवृत होती है।

भाग (विभाजन) की संक्रिया पर भी विचार करें

$12 \div 4 = 3$ एक पूर्ण संख्या

$7 \div 8 = \frac{7}{8}$ एक पूर्ण संख्या नहीं

$0 \div 5 = 0$ एक पूर्ण संख्या

$20 \div 25 = \frac{4}{5}$ एक पूर्ण संख्या नहीं

दो पूर्ण संख्याओं का भागफल एक पूर्ण संख्या हो भी सकती है और नहीं भी।

अतः पूर्ण संख्याएँ भागफल के अन्तर्गत संवृत्त नहीं होती हैं।

करो और सीखो

संवृत गुण (ClosureProperty)

पूर्ण संख्याएँ	संक्रियाएँ	परिणाम	निष्कर्ष
6 और 2	योग		
0 और 5	योग		
8 और 5	घटाव		
13 और 17	घटाव		
6 और 2	गुणा		
0 और 8	गुणा		
8 और 2	भाग		
7 और 9	भाग		

तालिका 3.3

3.3.2 शून्य द्वारा विभाजन

एक संख्या को किसी संख्या द्वारा विभाजित करने का अर्थ है उस संख्या को पहली संख्या में से बार–बार घटाना

$15 \div 5$ पर विचार कीजिए।

संख्या 15 में से 5 को तीन बार घटाने पर 0 मिलेगा।

अतः $15 \div 5 = 3$

आइए $4 \div 0$ का हल ज्ञात करने का प्रयत्न करते हैं।

(i) प्रत्येक बार घटाने पर हमें 4 पुनः प्राप्त होता है।

(ii) क्या यह प्रक्रिया कभी समाप्त होगी या नहीं?

अतः $4 \div 0$ को गणितीय भाषा में समझाना संभव नहीं है अतः हम कहेंगे यह अपरिभाषित है।

निष्कर्ष : पूर्ण संख्याओं का शून्य से विभाजन परिभाषित नहीं है।

3.3.3 क्रमविनिमेयता का गुण

आइए अब निम्न पर विचार करते हैं।

$8 + 7 = 15,$

$7 + 8 = 15$

इसी तरह

$19 + 15 = 34,$

$15 + 19 = 34$

अतः दो संख्याओं को किसी भी क्रम में जोड़ने पर वही संख्या प्राप्त होती है।

आप 5 संख्या युग्म और लीजिए तथा तथ्य की जाँच कीजिए।

क्या किसी संख्या युग्म का योग क्रम बदलने से परिवर्तित होता है ? नहीं होता है।

अतः हम यह कह सकते हैं पूर्ण संख्याएँ योग संक्रिया के लिए क्रम विनिमेय गुणधर्म का पालन करती है।

$8 \times 5 = 40$

$5 \times 8 = 40$

$25 \times 10 = 250$

$10 \times 25 = 250$

अतः दो संख्याओं को बदलकर पुनः गुणा करने पर वही संख्या प्राप्त होती है।

यह भी करें

$8 - 3 = 5$ $\quad$ $10 - 7 = 3$

$3 - 8 = ?$ $\quad$ $7 - 10 = ...?$

व्यवकलन की संख्याओं का क्रम बदलने पर वही उत्तर प्राप्त नहीं होता है।

इसी प्रकार

$8 \div 2 = 4$ $\quad$ $25 \div 5 = 5$

$2 \div 8 = ..?$ $\quad$ $5 \div 25 = ...?$

भाग की संख्याओं का क्रम बदलने पर भी वहीं संख्या प्राप्त नहीं होती है।

निष्कर्ष अतः हम कह सकते हैं कि

पूर्ण संख्याओं के लिए योग और गुणन दोनों के लिए क्रमविनिमेयता का गुण है।

पूर्ण संख्याओं के लिए व्यवकलन और भाग दोनों में ही क्रमविनिमेयता नहीं है।

पूर्ण संख्याएँ	संक्रियाएँ	परिणाम	निष्कर्ष
7 और 8	7 + 8 = 15	संख्याओं का क्रम बदलने पर योग वही प्राप्त होता है।	क्रम विनिमेयता है।
8 और 7	8 + 7 = 15		
9 और 6	9 - 6 = 3	संख्याओं का क्रम बदलने पर वही संख्या प्राप्त नहीं होती है।	क्रम विनिमेयता नहीं है।
6 और 9	6 - 9 = ?		
5 और 4	5 x 4 = 20	संख्याओं का क्रम बदलने पर गुणनफल वही प्राप्त होता है।	क्रम विनिमेयता है।
4 और 5	4 x 5 = 20		
10 और 2	10 ÷ 2 = 5	संख्याओं का क्रम बदलने पर वही संख्या प्राप्त नहीं होती है।	क्रम विनिमेयता नहीं है।
2 और 10	2 ÷ 10 = ?		

3.3.4 सहचारिता का गुण

$(5 + 2) + 4 = 7 + 4 = 11$

$5 + (2 + 4) = 5 + 6 = 11$

$(7 + 9) + 1 = 16 + 1 = 17$

$7 + (9 + 1) = 7 + 10 = 17$

$(5 + 8) + 7 = 13 + 7 = 20$

$5 + (8 + 7) = 5 + 15 = 20$

योग की उपर्युक्त संक्रियाओं को ध्यान से देखें पूर्ण संख्याओं में पाए जाने वाले इस गुण को सहचारिता कहते हैं।

क्या व्यवकलन के लिए साहचर्यता का गुण लागू होगा? सोचिए।

एक अन्य उदाहरण देखिए

$(6 \times 3) \times 2 = 18 \times 2 = 36$

$6 \times (3 \times 2) = 6 \times 6 = 36$

अतः गुणन की क्रिया में भी पहली दो संख्याओं को गुणा कर तीसरी संख्या से गुणा करें तो कोई अन्तर नहीं आता है। आइए सहचारिता के नियम को विभाजन की संक्रिया में देखिए।

$(24 \div 6) \div 2 = 2$

$24 \div (6 \div 2) = 8$

अतः तीन पूर्णांकों में आपस में विभाजन करने पर परिणाम अलग–अलग प्राप्त होता है।

निष्कर्ष : **(i) योग एवं गुणन की संक्रियाओं में सहचारिता का गुण पाया जाता है।**

(ii) व्यवकलन एवं विभाजन की संक्रियाओं में सहचारिता का गुण नहीं पाया जाता।

करो और सीखो

अब आप कोई भी तीन–तीन संख्याओं के जोड़े लेकर क्रमशः योग एवं गुणन संक्रिया के लिए साहचर्य गुणधर्म की जाँच कीजिए।

3.3.5 योग पर गुणन का वितरण

4 x 6 = 24 को हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं

4 x (4 + 2) = 24

(4 x 4) + (4 x 2) = 24 या 4 x (4 + 2) = 24

इसी प्रकार आप इन संख्याओं को भी ध्यान से देखिए।

8 x (3 + 9) = (8 x 3) + (8 x 9)

इसे योग पर गुणन का वितरण या बंटन गुण (Distributive property) कहते हैं।

3.3.6 तत्समक अवयव

योग एवं गुणन के लिए

निम्नलिखित सारणी पर विचार कीजिए।

8	+	0	=	8
4	+	0	=	4
0	+	5	=	5
0	+	24	=	24
0	+	....	=	...

उपर्युक्त सारणी से यह स्पष्ट है कि जब हम किसी संख्या में शून्य (0) को जोड़ते हैं तो वही पूर्ण संख्या प्राप्त होती है। इसी कारण शून्य को पूर्ण संख्याओं के योग के लिए तत्समक अवयव या तत्समक (Identity element) कहते हैं। शून्य को पूर्ण संख्याओं का योज्य तत्समक (additive Identity) कहते हैं।

7	x	1	=	7
8	x	1	=	8
15	x	1	=	15
18	x	1	=	18
.....	x	1	=	....

उपर्युक्त सारणी से स्पष्ट है कि जब हम किसी संख्या को 1 से गुणा करते हैं तो स्वयं वही पूर्ण संख्या प्राप्त होती है। इसी कारण 1 को पूर्ण संख्याओं के गुणन के लिए तत्समक अवयव या

तत्समक कहते हैं। 1 को पूर्ण संख्याओं के लिए गुणात्मक तत्समक (Multiplicative Identity) कहते हैं।

प्रश्नावली 3.2

1. उपयुक्त क्रम में लगाकर योग ज्ञात कीजिए।

   (i) 85 + 186 + 15 (ii) 175 + 96 + 25

   (iii) 65 + 75 + 35 (iv) 55 + 86 + 45

2. उपयुक्त क्रम (नियम) लगाकर गुणनफल ज्ञात कीजिए।

   (i) 4 x 1225 x 25 (ii) 4 x 158 x 125

   (iii) 4 x 85 x 25 (iv) 8 x 20 x 125

3. निम्नलिखित में प्रत्येक का मान वितरण नियम द्वारा ज्ञात कीजिए।

   (i) 185 x 25 + 185 x 75 (ii) 4 x 18 + 4 x 12

   (iii) 54279 x 92 + 8 x 54279 (iv) 12 x 8 + 12 x 2

4. उपयुक्त गुणों का प्रयोग करके गुणनफल ज्ञात कीजिए।

   (i) 185 x 106 (ii) 208 x 185

   (iii) 54 x 102 (iv) 158 x 1008

5. मिलान कीजिए।

(i) 2 + 8 = 8 + 2	(a) गुणन की क्रम विनिमेयता
(ii) 8 x 90 = 90 x 8	(b) जोड़ की क्रम विनिमेयता
(iii) 885 x (100 + 45) = 885 x 100 + 885 x 45)	(c) गुणा का साहचर्य नियम
(iv) 5 x (4 x 28) = (5 x 4) x 28	(d) योग पर गुणन का वितरण नियम

6. यदि दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल शून्य है तो क्या हम कह सकते हैं कि इनमें से एक या दोनों ही शून्य होने चाहिए? उदाहरण देकर अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।
7. यदि दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल 1 है तो क्या हम कह सकते हैं कि इनमें से एक या दोनों ही 1 के बराबर होनी चाहिए? उदाहरण देकर अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।
8. वितरण विधि से ज्ञात कीजिए।

   (i) 138 x 101 (ii) 125 x 400 (iii) 608 x 35

9. निम्नलिखित में से किसमें शून्य निरूपित नहीं होगा।

   (i) 1 + 0 (ii) 0 x 0 (iii) $\frac{0}{2}$ (iv) $10 - \frac{10}{2}$

10. सही उत्तर का क्रमाक्षर दिए गए कोष्ठक में लिखिए।

(i) निम्नलिखित में जोड़ का क्रम विनिमेय नियम किसमें है?

(a) 5 x 8 = 8 x 5 (b) (2 x 3) x 5 = 2 x (3 x 5)

(c) (12 + 8) + 10= (2 + 8) +10 (d) 15 + 8 = 8 + 15 ( )

(ii) निम्नलिखित में से गुणन की क्रमविनिमेयता नियम किसमें है?

(a) 10 x 20 = 20 x 10 (b) 10 x 10 = 20 x 20

(c) (10 x 20) = 10 x 1 (d) 10 + 20 = 10 x 20 ( )

हमने सीखा

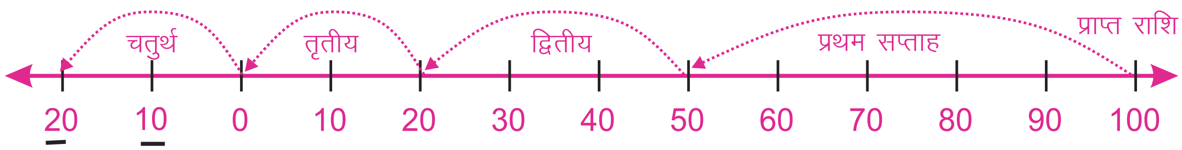
1. प्राकृत संख्याएँ वे संख्याएँ है जिनका प्रयोग गिनने के लिए करते है, जैसे 1, 2, 3.......
2. यदि प्राकृत संख्या में 1 जोड़ते है तो इसका परवर्ती मिलता है। किसी प्राकृत संख्या में से 1 घटाते हैं तो इसका पूर्ववर्ती प्राप्त होता है।
3. प्रत्येक प्राकृत संख्या का एक परवर्ती होता है।
4. 1 को छोड़कर प्रत्येक प्राकृत संख्या का एक पूर्ववर्ती प्राकृत संख्याओं में ही होता है।
5. यदि प्राकृत संख्याओं के संग्रह 1, 2, 3.... में संख्या 0 को मिला दिया जाए तो हमें पूर्ण संख्याओं का संग्रह 0, 1, 2, 3.... प्राप्त होता है।
6. प्रत्येक पूर्ण संख्या का एक परवर्ती होता है। 0 को छोड़कर प्रत्येक पूर्ण संख्या का पूर्ववर्ती होता है।
7. सभी पूर्ण संख्याएँ प्राकृत संख्याएँ नहीं होती लेकिन सभी प्राकृत संख्याएँ पूर्ण संख्याएँ है।
8. एक रेखा लेते हैं जिस पर एक बिन्दु 0 अंकित करते है। 0 के दाईं ओर समान अन्तराल (दूरी) पर बिन्दु अंकित कर क्रमशः 1, 2, 3... नामांकित करते हैं जिसे संख्या रेखा कहते हैं। संख्या रेखा पर आसानी से जोड़, व्यवकलन और गुणा जैसी संक्रियाएँ कर सकते हैं।
9. संख्या रेखा पर दाईं ओर चलने पर संगत योग प्राप्त होता है जबकि बाईं ओर चलने पर संगत व्यवकलन प्राप्त होता है। शून्य (0) से प्रारम्भ करके समान दूरी के कदम से गुणा प्राप्त होता है।
10. पूर्ण संख्याएँ योग और गुणनफल के अंतर्गत संवृत नहीं हैं।
11. शून्य से भाग परिभाषित नहीं हैं।
12. पूर्ण संख्याओं के योग के लिए तत्समक अवयव या तत्समक शून्य होता है तथा पूर्ण संख्या 1 को पूर्ण संख्याओं के गुणन के लिए तत्समक कहते है।
13. पूर्ण संख्याओं के लिए योग और गुणन क्रम विनिमेय हैं।
14. पूर्ण संख्याओं के लिए योग और गुणन साहचर्य हैं।

अध्याय 4

ऋणात्मक संख्याएँ एवं पूर्णांक

4.1 महेश एक जनजाति छात्रावास में रहकर पढ़ाई कर रहा है। उसके पिता उसे हर माह 100 रुपये जेब खर्च के लिए देते हैं वह उसे अपने वार्डन के पास जमा करवा देता है। जरूरत के अनुसार थोड़े–थोड़े पैसों का लेनदेन कर लेता है जिसे छात्रावास के वार्डन पेपर पर अंकित कर लेते हैं।

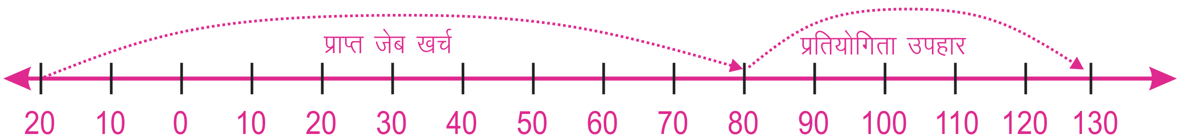
महेश ने प्रथम सप्ताह में 50 रुपये लिए, दूसरे सप्ताह 30 रुपये लिए तथा तीसरे सप्ताह में 20 रुपये लिए, चौथे सप्ताह में वह 20 रुपये और माँगता है। इस पर वार्डन कहते हैं कि मैंने आपकी पूरी राशि लौटा दी है, रमेश कहता है, आप इसे अगले महीने में काट लीजिएगा। वार्डन उसे 20 रुपये दे देते हैं तथा इसे संख्या रेखा पर निम्नानुसार अंकित करते हैं



राशि का विवरण

दूसरे माह के पहले दिन महेश को जेब खर्च के 100 रुपये मिले। जिसे उसने अपने वार्डन के पास जमा करवाए। क्या आप बता सकते हैं कि महेश के वार्डन के पास अब उसके कितने रुपये जमा हैं?

उसी दिन उसे निबंध लेखन के ईनाम में 50 रुपये और मिले अब महेश के कुल कितने रुपये वार्डन के पास जमा हो गए हैं ?



संख्या रेखा का अध्ययन कर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

1. महेश ने प्रथम माह में कुल कितने रुपये खर्च किए।
2. चौथे सप्ताह में वार्डन ने उसे कितने रुपये दिए?
3. उक्त राशि को वार्डन ने संख्या रेखा पर किस ओर दर्शाया है।
4. शून्य के दाईं ओर लिखे 20 रुपये व बाईं ओर लिखे 20 रुपये में क्या अन्तर है?
5. दूसरे माह में प्राप्त 100 रुपये व 50 रुपये को संख्या रेखा में किस ओर अंकित किया गया है?
6. दूसरे माह में यदि महेश को बीमारी के कारण 200 रुपये खर्च करने पड़े तो वार्डन के पास कितना धन जमा रहेगा तथा उसे संख्या रेखा पर किस ओर अंकित किया जाएगा?

चलो ऐसा ही एक खेल खेलें। एक संख्या पट्टी बनाओ जैसी चित्र में दिखाई है –

14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

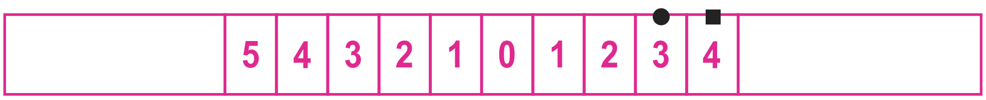
सामग्री : लाल व नीले रंग का पासा, एक कपड़े का थैला, सभी खिलाड़ियों के लिए अलग–अलग रंग की गोटीयाँ।

खेल के नियम

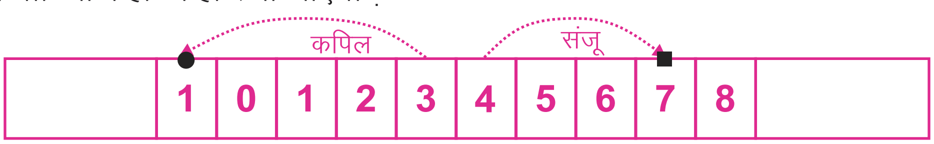
1. थैले में दोनों पासे रखे जाएँगे।
2. खिलाडी को एक पासा थैले से बिना देखे चयन करना है।
3. यदि लाल रंग का पासा चलेगा तो संख्या रेखा पर दाईं ओर चलेगा।
4. नीला पासा चलने पर बाईं ओर चलेगा।
5. जो पहले 25 पर पहुँचेगा वह जीतेगा।

संजू और कपिल भी यही खेल खेल रहे हैं।

संजू के लाल पासे पर 4 आता है वह गोटी को दाईं और 4 खाने पर रखता है। कपिल के भी लाल पासे पर 3 आता है वह अपनी गोटी को दाईं ओर 3 पर रखता है।



दूसरी बार में संजू को लाल पासे से 3 और कपिल को नीले पासे पर 4 आता है। क्या आप बता सकते हैं कि दोनों गोटियाँ कहाँ–कहाँ रखी जाएगी ?



कपिल अपनी गोटी बाईं ओर 1 पर रखता है तथा संजू 7 पर पहुँच जाता है इसी प्रकार खेल जारी रहता है। कपिल बाईं ओर 25 तक पहुँच जाता है तथा संजू दाईं ओर 10 तक पहुँचता है। कपिल कहता है कि वह जीत गया है परन्तु संजू का कहना है कि वह उससे आगे चल रहा है। इतने में गणित शिक्षिका वहाँ आती है वह उन्हें समझाती है–

शिक्षिका : "कपिल तुम नहीं जीते हो और नियम के अनुसार संजू को भी जीतने के लिए 15 अंक शेष हैं। तुम्हें खेल जारी रखना होगा।

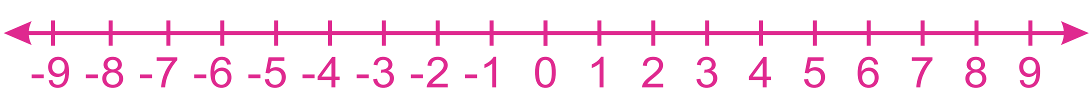
कपिल : दीदी मैं तो 25 पर पहुँच चुका हूँ।

शिक्षिका : ध्यान से देखो दाईं ओर के 25 व बाईं ओर के 25 अलग–अलग संख्याओं को दर्शाते हैं जिस प्रकार 10, 5 के दाईं ओर है तो वह 5 से बड़ा है। इसी प्रकार प्रत्येक संख्या अपनी दाईं ओर की संख्या से छोटी होती है।

संजू : इसलिए तेरे 25 बाईं ओर होने के कारण मेरे 10 से छोटे हुए।

शिक्षिका : संख्या रेखा पर संख्याएँ दाईं ओर बढ़ती है। प्रत्येक संख्या अपनी बाईं ओर की संख्या से बड़ी तथा दाईं ओर की संख्या से छोटी होती है। शून्य के बाईं ओर की संख्याओं को ऋणात्मक संख्याएँ कहते हैं तथा इन्हें दाईं ओर की संख्याओं से पृथक दर्शाने के लिए –1, –2, –3... से प्रदर्शित करते हैं।

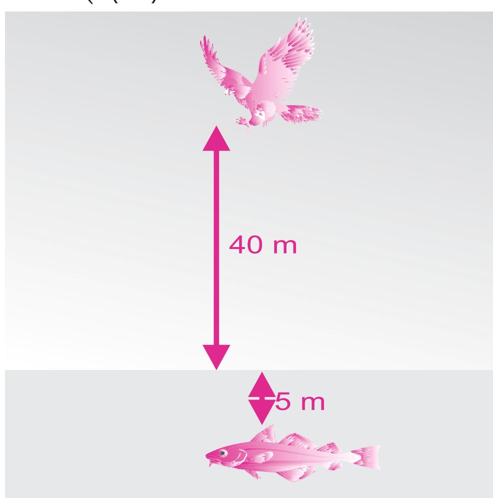
प्रत्येक संख्या के बाद वाली संख्या उसकी परवर्ती संख्या कहलाती है तथा उसके पहले आने वाली संख्या पूर्ववर्ती संख्या कहलाती है। नीचे दी गई तालिका में संख्याओं के परवर्ती व पूर्ववर्ती लिखिए।



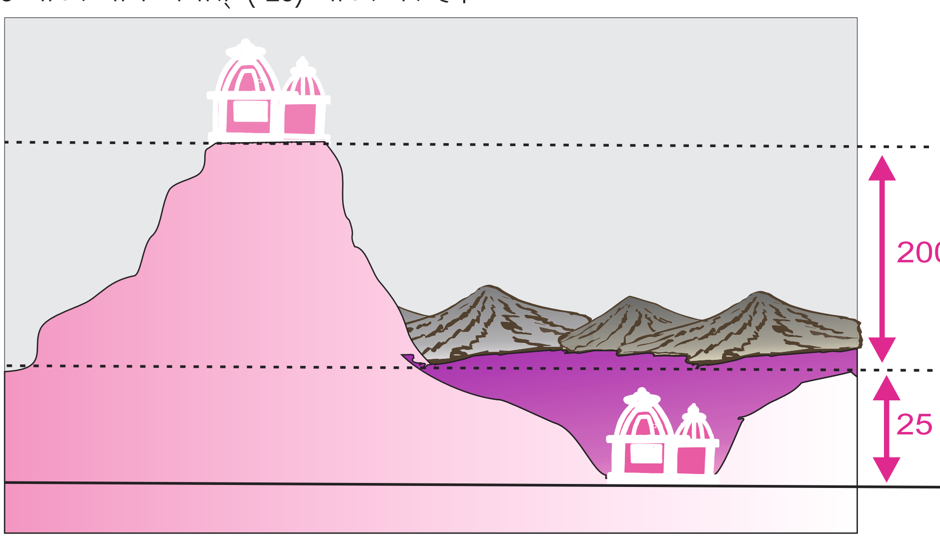
संख्या	परवर्ती	पूर्ववर्ती
−5		
6		
0		
25		
−10		

4.2 ऋणात्मक संख्याओं का उपयोग

1. एक बाज समुद्र तल से 40 मीटर की ऊँचाई पर उड़ रहा है उसके ठीक नीचे एक मछली समुद्र तल से 5 मीटर नीच अर्थात् (−5) मीटर पर तैर रही है।



2. पहाड़ी पर एक मंदिर पृथ्वी तल से 200 मीटर ऊँचाई पर है वहीं खाई में एक और मंदिर पृथ्वी तल से 25 मीटर नीचे अर्थात् (-25) मीटर पर है।



करो और सीखो

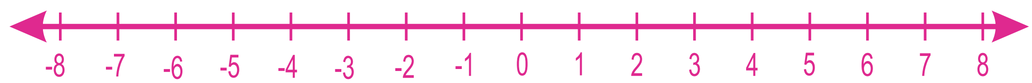
उचित चिह्नों का प्रयोग करते हुए लिखिए।

1. 0 से छोटी कोई 2 संख्याएँ
2. समुद्रतल से 50 मीटर नीचे
3. $0^{\circ}C$ से $10^{\circ}C$ नीचे तापमान
4. $0^{\circ}C$ से $15^{\circ}C$ ऊपर तापमान

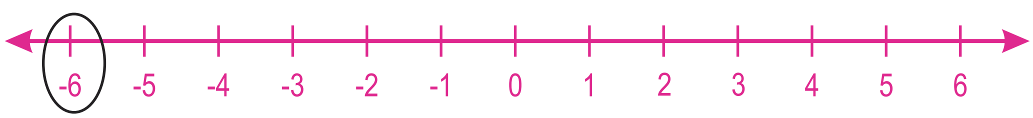
4.3 पूर्णांक

सबसे पहले ज्ञात की गई प्राकृत संख्याएँ 1, 2, 3... इसके पश्चात् संख्याओं के समूह में 0 को सम्मिलित करने पर वे पूर्ण संख्याएँ कहलाती है 0, 1, 2, 3...। अब हमें ज्ञात हो चुका है कि संख्याएँ ऋणात्मक भी होती है जैसे –1, –2, –3...। यदि हम पूर्ण संख्याओं के समूह में ऋणात्मक संख्याओं को शामिल कर लें तो बनने वाली नयी संख्याओं का समूह पूर्णांक कहलाता है। इस समूह को I से प्रदर्शित करते हैं।

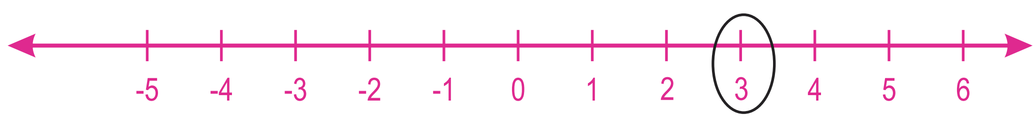
संख्या रेखा पर पूर्णांकों का निरूपण



संख्या रेखा पर पूर्णांकों का निरूपण ठीक उसी प्रकार करते हैं जैसा कि हमने पूर्ण व प्राकृत संख्याओं में किया। फर्क सिर्फ इतना है कि पूर्णांकों में ऋणात्मक संख्याएँ भी होती है जिन्हें संख्या रेखा पर 0 के बाईं ओर बराबर दूरी पर बिंदु बनाकर अंकित करेंगे जैसे यदि हम संख्या रेखा पर –6 को प्रदर्शित करना चाहते हैं तो इसे 0 से बाईं ओर 6 बिन्दु चल कर अंकित करेंगे।



और यदि हमें संख्या रेखा पर +3 प्रदर्शित करना है तो इसे 0 से दाईं ओर 3 बिंदु पर अंकित करेंगे।

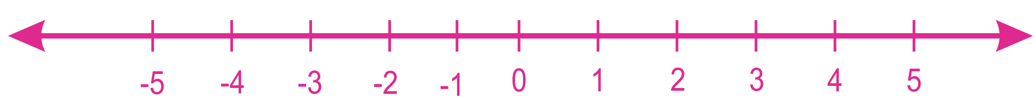


करो और सीखो

संख्या रेखा पर –3, 5, –1, 0, –5, 6 को अंकित कीजिए।

4.4 पूर्णांकों में क्रमबद्धता

हम जानते हैं कि 5 > 3 होता है तथा संख्या रेखा से हम देखते हैं कि संख्या 5 संख्या 3 के दाईं ओर स्थित है।



इसी प्रकार 3 > 0 संख्या 3, संख्या 0 के दाईं ओर स्थित है। अब चूंकि संख्या 0, संख्या

−3 के दाईं ओर स्थित है अतः 0>−3 है।पुनः संख्या −3,संख्या −8 के दाईं ओर स्थित है इसलिए − 3>−8 है।

इस प्रकार हम देखते हैं संख्या रेखा पर जब हम दाईं ओर चलते हैं तो संख्या का मान बढ़ता है और बाईं ओर चलने पर संख्या का मान घटता है।

प्रश्नावली 4.1

1. दी गई परिस्थितियों हेतु उपयुक्त पूर्णांक लिखिए।
   (i) पानी 45°C गर्म है।
   (ii) एक द्रव्य शून्य से नीचे 10°C पर जमता है।
   (iii) रीना को पुस्तक बेचने पर रु. 300 का लाभ हुआ।
   (iv) बैंक के खाते से 500 रुपये निकालना।
2. निम्नलिखित संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित कीजिए।
   (i) + 5 (ii) − 4 (iii) 0 (iv) − 2
3. चिह्न > , < तथा = का प्रयोग कर छोटी एवं बड़ी संख्या बताइए।
   (i) 3 ☐ − 5 (ii) −2 ☐ − 4
   (iii) 7 ☐ − 7 (iv) 0 ☐ − 3
   (v) 0 ☐ 3 (vi) 1 ☐ − 50
4. निम्न कथनों के लिए सत्य अथवा असत्य लिखिए।
   (i) −4 संख्या रेखा पर −3 के दाईं ओर स्थित है। ( )
   (ii) शून्य एक ऋणात्मक संख्या है। ( )
   (iii) सबसे छोटा ऋणात्मक पूर्णांक −1 है। ( )
   (iv) 0 संख्या रेखा पर −1 व 1 के मध्य स्थित है। ( )
5. नीचे दिए गए युग्मों के पूर्णांकों के बीच सभी पूर्णांक बढ़ते क्रम में लिखिए।
   (i) 0 व − 4 (ii) −3 व −5
   (iii) −2 व 2 (iv) −10 व −6
6. निम्न पूर्णांकों को आरोही व अवरोही क्रम में लिखिए।
   (i) −7, 5, −3, 3 (ii) −1, 3, 0, −2
   (iii) 1, 3, −6 (iv) −5, 4, −1, 2

4.5 पूर्णांकों में जोड़

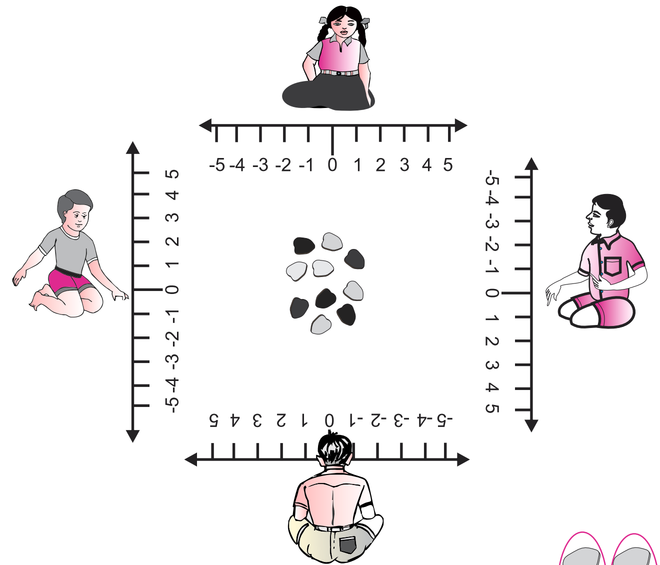
इमली के बीज का खेल

सामग्री : इमली के बीज (10) बीच में से फोड़े हुए, प्रत्येक खिलाड़ी के लिए एक संख्या रेखा, पोटली/कटोरी प्रत्येक खिलाडी के लिए एक गोटी।

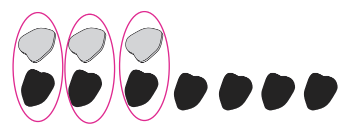
खेल के नियम

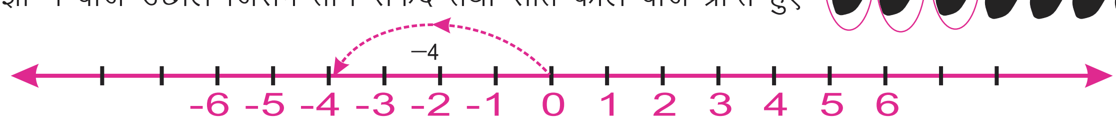
1. प्रत्येक बीज का सफेद भाग +1 तथा काला भाग − 1 को प्रदर्शित करेगा।
2. बारी बारी से सभी खिलाड़ी बीज उछालेंगे। उछलकर जमीन पर गिरे बीजों से 1 सफेद 1 काला आपस में निरस्त होकर पोटली में जाएँगे। शेष बीजों की स्थिति के अनुसार खिलाड़ी अपनी संख्या रेखा पर गोटी रखेगा। इसी प्रकार खेल जारी रहेगा।

3. जो खिलाड़ी सबसे पहले 10 पर पहुँचेगा विजयी होगा। प्रज्ञा व धीरज यही खेल खेल रहे हैं।



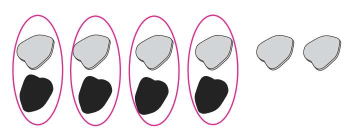
प्रज्ञा ने बीज उछाले जिसमें तीन सफेद तथा सात काले बीज प्राप्त हुए



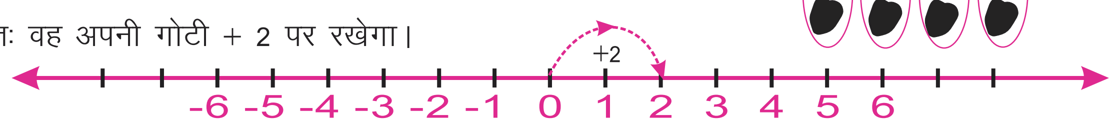


अत: निरस्त होने के बाद चार काले बीज प्राप्त होते हैं, वह अपनी गोटी (−4) पर रखती है।

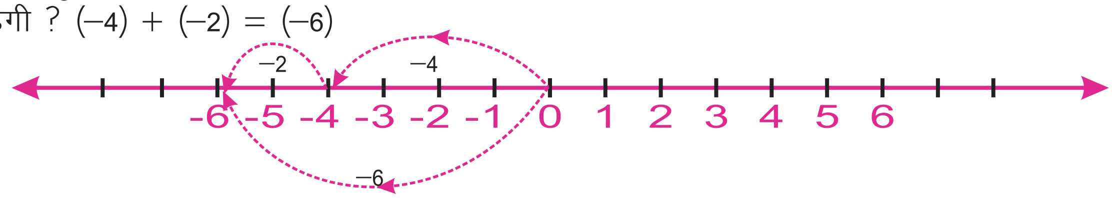
अब धीरज ने बीज उछाले, उसे चार काले और छः सफेद प्राप्त हुए।



अत: वह अपनी गोटी + 2 पर रखेगा।



पुन: प्रज्ञा को अगली बारी में दो काले बीज प्राप्त होते हैं अब उसकी गोटी किस दिशा में आगे बढ़ेगी ? (−4) + (−2) = (−6)



दो धन पूर्णांकों का योग इस तरह करते हैं

(+ 4) + (+ 2) = (+ 6)

दो ऋणात्मक पूर्णांकों का योग इस तरह करते हैं

(−3) + (−2) = (−5)

करो और सीखो निम्न को हल कीजिए –

(i) (−7) + (+8) (ii) −3 + (5)

(iii) (−3) + (−2) (iv) (+7) + (−2)

ध्यान रहे यहाँ पर हम धन एवं ऋण चिह्नों का प्रयोग जोड़ घटाव के सन्दर्भ के साथ पूर्णांकों की दिशा बताने के लिए भी कर रहे हैं। अतः 7 – 3 और (+ 7) + (–3) सर्वथा भिन्न है यह बात और है कि दोनों का परिणाम समान है।

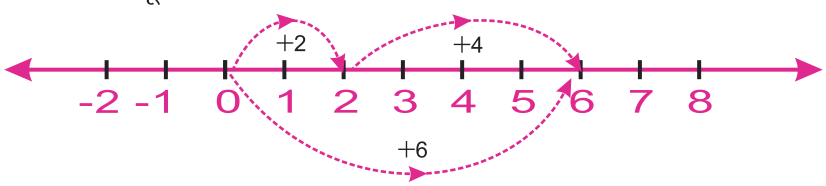
7 – 3 दो पूर्ण संख्याओं 7 तथा 3 का अन्तर है जबकि (+ 7) + (– 3) दो पूर्णांकों का योग है इसी क्रम में (+7) – (+ 3) दो पूर्णांकों का घटाव है।

4.5.1 संख्या रेखा पर पूर्णांकों का योग

सदैव इस तरह बीजों के सफेद व काले भागों से पूर्णांकों को जोड़ना संभव नहीं होता। आइए संख्या रेखा की सहायता से पूर्णांकों का योग करना सीखे।

(i) (+ 2) + (+ 4)

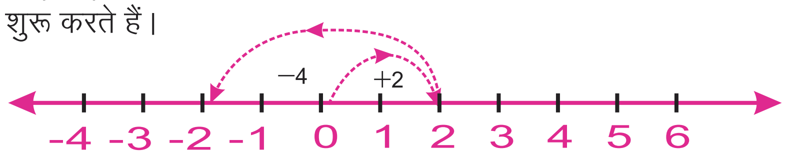
संख्या रेखा पर हम शून्य से प्रारम्भ करते हैं।



तथा (+ 2) अर्थात् 2 कदम दाईं और चलते हैं। तत्पश्चात (+ 4) का अर्थ है 4 कदम दाईं ओर दोनों के योग का अर्थ है 2 कदम दाईं ओर चलने के बाद 4 कदम दाईं ओर और चलना जिससे हम कुल 6 कदम दाईं ओर बढ़ते हैं। अतः उत्तर के रूप में + 6 प्राप्त होता है।

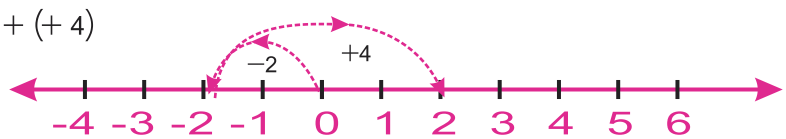
(ii) (+ 2) + (– 4)

संख्या रेखा पर शून्य से शुरू करते हैं।



(+ 2) अर्थात् 2 कदम दाईं ओर चलते हैं। तत्पश्चात् (–4) का अर्थ 4 कदम बाईं ओर चलते हैं, बीच में लगा धन चिह्न जोड़ की संक्रिया के लिए है जो यह बताता है कि ''और चलो'' इस प्रकार हम 1, 0, –1 होते हुए –2 पर पहुँचते हैं अतः (+ 2) + (- 4)= –2

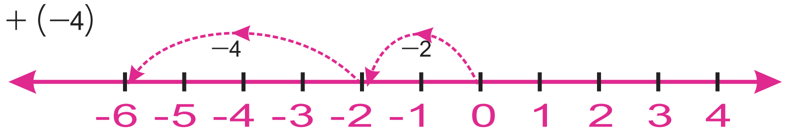
(iii) (–2) + (+ 4)



पूर्व की भांति शून्य से शुरू कर दो कदम बाईं ओर (–2) के लिए चलने के बाद (+ 4) के लिए 4 कदम दाईं ओर चलेंगे। जिससे हम –1, 0, 1 होते हुए (+2) पर पहुँच जाएँगे।

अतः (–2) + (+4) = 2

(iv) (–2) + (–4)



इसी प्रकार शून्य से प्रारम्भ करते हुए (-2) के लिए 2 कदम बाईं ओर तथा (-4) के लिए और 4 कदम बाईं ओर चलेंगे। परिणामस्वरूप -3, -4, -5 होते हुए -6 पर पहुँच जाएँगे।

अतः $(-2) + (-4) = -6$

हमने देखा कि जब धनात्मक पूर्णांकों को जोड़ते हैं तो हम दोनों बार दाईं ओर चलते हैं। फलतः दाईं ओर ही पहुँचते हैं और परिणाम धनात्मक प्राप्त होता है।

दो से अधिक धनात्मक पूर्णांकों का योग क्या होगा ? धनात्मक / ऋणात्मक / शून्य

इसी प्रकार दो ऋणात्मक पूर्णांकों के योग में दोनों बार बाईं ओर ही चलते हैं फलस्वरूप बाईं ओर ही पहुँचते हैं तथा परिणाम भी ऋणात्मक ही प्राप्त होता है।

दो से अधिक ऋणात्मक पूर्णांक होने पर परिणाम कैसा प्राप्त होगा ? धनात्मक / ऋणात्मक / शून्य

परन्तु एक धनात्मक एवं एक ऋणात्मक पूर्णांक का योग करने पर दाईं एवं बाईं दोनों ओर चलना पड़ेगा। तब परिणाम इस बात पर निर्भर करता है कि किस ओर ज्यादा चलना है अर्थात् धनात्मक पूर्णांक बड़ा है अथवा ऋणात्मक।

करो और सीखो

निम्न तालिका को भरिए।

क्र.सं.	योग	परिणाम धनात्मक / ऋणात्मक	योगफल
1.	$(-6) + (+7)$		
2.	$(-9) + (-1)$		
3.	$(+3) + (+5)$		
4.	$(+12) + (-7)$		

उदाहरण 1 योग $(-8) + (+4) + (-5) + (+2)$ ज्ञात कीजिए।

हल धनात्मक एवं ऋणात्मक पूर्णांकों को पुनर्व्यवस्थित करने पर

$= (-8) + (-5) + (+4) + (+2)$

$= (-13) + (+6)$

$= (-7)$

उदाहरण 2 $(+30) + (-20)+(-70)+(+65)$ को हल कीजिए।

हल $(+30) + (-20) + (-70) + (+65)$

$= (+30) + (65) + (-20) + (-70)$

$= (+95) + (-90)$

$= 5$ उत्तर

प्रश्नावली 4.2

1. संख्या रेखा का प्रयोग करते हुए, वह पूर्णांक ज्ञात कीजिए जो –
   (i) 5 से 4 अधिक है (ii) -4 से $+4$ अधिक है
   (iii) 3 से 5 कम है (iv) -1 से $+4$ कम है
2. संख्या रेखा का प्रयोग करते हुए निम्न का मान ज्ञात कीजिए।
   (i) $9 + (-3)$ (ii) $(-4) + (-3)$
   (iii) $(-2) +5$ (iv) $(-1) +3 + (-2)$

3. संख्या रेखा का प्रयोग किए बिना निम्नलिखित का योग ज्ञात कीजिए।

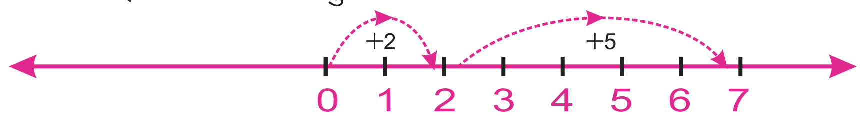
(i) 11 + (–2) (ii) (–4) + (–6)
(iii) (–250) +150 (iv) (–380) + (–270)
(v) (–14) + 4 (vi) (–180) + (–80)

4. निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए।

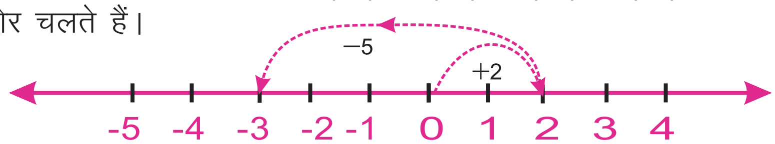
(i) 137 + (–354) +125 (ii) (–312) + 39 + 192
(iii) 37 + (–3) +24 + (–8) (iv) 102 + (–24) + (24) + (–11)

4.6 संख्या रेखा की सहायता से पूर्णांकों का घटाव

हम संख्या रेखा पर दो धनात्मक पूर्णांकों को जोड़ चुके हैं (+2) + (+5) पर विचार कीजिए। (+2) अर्थात् शून्य से प्रारम्भ कर 2 कदम दाईं तरफ चलकर +2 पर पहुँचते हैं इसमें (+5) जोड़ने का अर्थ 5 कदम दाईं तरफ चलना है और इस प्रकार 7 तक पहुँचते हैं।



हमने यह भी देखा कि संख्या रेखा पर (+2) + (–5) में (+2) में (–5) जोड़ने के लिए (+2) से 5 कदम बाईं ओर चलते हैं।

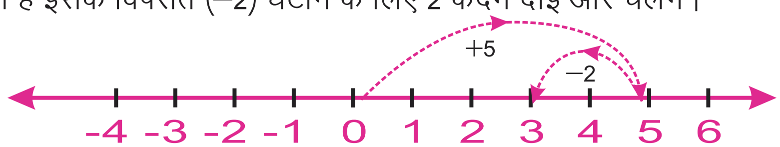


इस प्रकार हम पाते हैं कि धनात्मक पूर्णांक जोड़ने के लिए दाईं ओर तथा ऋणात्मक पूर्णांक जोड़ने के लिए बाईं ओर चलेंगे क्या घटाव के लिए भी ऐसे ही चलना होगा ? आइए 5–2 पर विचार करें।

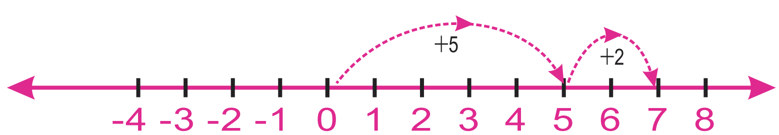
$$5 - 2 = (+5) - (+2)$$

चूँकि घटाव योग की विपरीत संक्रिया है अतः +2 घटाने के लिए हमें 5 से 2 कदम बाईं ओर चलना पड़ेगा। (जबकि योग में दाईं ओर चलते हैं)

इसी प्रकार (+5) – (–2) में क्या करेंगे? दाईं ओर चलेंगे अथवा बाईं ओर –2 जोड़ने के लिए हम बाईं ओर चलते हैं इसके विपरीत (–2) घटाने के लिए 2 कदम दाईं ओर चलेंगे।



(+ 5) + (- 2)



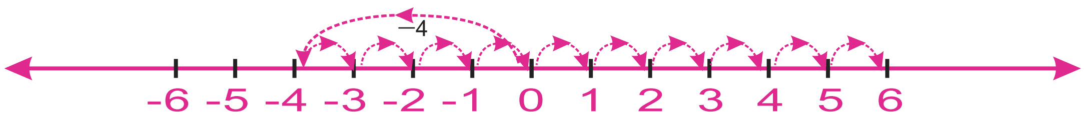
(+5) - (-2)

करो और सीखो

निम्न का घटाव संख्या रेखा की सहायता से कीजिए।

(i) (+7) – (+3) (ii) (+3) – (+7)
(iii) (+7) – (–3) (iv) (–7) – (–3)

उदाहरण 3 संख्या रेखा की सहायता से (–4) – (–10) का मान ज्ञात कीजिए।



$(-4) - (-10) = +6$

4.7 योज्य तत्समक

आप जानते हैं कि 5+0=5, –8+0=–8

अर्थात् योग संक्रिया में 0 ऐसी संख्या है जो उसी के समान परिणाम देती है।

यहाँ **शून्य योज्य तत्समक** कहलाता है।

हमने पूर्ण संख्याओं में भी योज्य तत्समक पढ़ा है।

4.8 योज्य प्रतिलोम

किसी संख्या का योज्य प्रतिलोम वह संख्या है जिसे जोड़ने पर हमें शून्य (योज्य तत्समक) प्राप्त होता है।

जैसे 5 में क्या जोड़ें कि शून्य प्राप्त हो। स्पष्टतः –5

(5) + (–5) = 0 इसी प्रकार – 5 का योज्य प्रतिलोम +5

इसी प्रकार 8 का योज्य प्रतिलोम –8 और –13 का योज्य प्रतिलोम +13 है क्योंकि (–13) + (+13) = 0, 8 + (–8) = 0

पहली संख्या से दूसरी संख्या घटाने का अर्थ है पहली संख्या में दूसरी संख्या के योज्य प्रतिलोम को जोड़ा। क्या आपको यह बात ठीक लगती है?

जैसे (+12) – (+5) = 12 + (+5 का योज्य प्रतिलोम)

= 12 + (–5) = 12 – 5 =7

इसी प्रकार 12 – (–5) = 12 + (–5 का योज्य प्रतिलोम)

= 12 + (+5), = 12 + 5 = 17

अतः हमने देखा कि धनात्मक पूर्णांक घटाने से संख्या का मान कम होता है। जबकि ऋणात्मक पूर्णांक घटाने से संख्या का मान बढ़ जाता है।

4.9 पूर्णांकों का निरपेक्ष मान

एक संख्या रेखा पर पूर्णांकों को प्रदर्शित कीजिए। देखकर बताइए +5 शून्य से कितनी दूरी पर है तथा -5 शून्य से कितनी दूरी पर है ? इन दोनों दूरियों में क्या संबंध है ?

दोनों दूरियों का परिमाण 5 है, इस प्रकार 5 को +5 और -5 का निरपेक्ष मान कहते हैं।

-5 के निरपेक्ष मान को $|-5|$ और +5 के निरपेक्ष मान को $|+5|$ लिखते हैं। इस प्रकार

$|-5| = 5 = |+5|$ $|-7| = 7 = |+7|$ $|0| = 0$

प्रश्नावली 4.3

1. निम्न को घटाइए।

(i) $+32 - (+12)$ (ii) $+7 - (+15)$

(iii) $(-14) - (-20)$ (iv) $(-30) - (-15)$

(v) $23 - (-10)$ (vi) $(-27) - 22$

2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

(i) -5 +..........= 0 (ii) 7 +..........= 0

(iii) 11 +(−11) = ... (iv) (−3) +..........= −7

(v) 14−.............= 16 (vi) (−4) +..........= −8

3. रिक्त स्थानों की पूर्ति >, < अथवा = का चिह्न लगाकर कीजिए।

(i) (−2) + (−9) .... (−2) + (−4)

(ii) (−21) + (−10) .... (−10) + (−21)

(iii) 45 − (−12) .... (−12) + 45

(iv) (−14) + (14) .... (−7) + (1)

4. निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए।

(i) $(-7) + (-4) + 11$ (ii) $(-12) + (-3) - (-4)$

(iii) $14 - 8 - (-2)$ (iv) $(-24) + (-12) - (-8)$

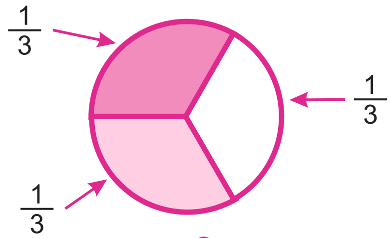
हमने सीखा

1. हमें दैनिक जीवन में कई बार ऋणात्मक चिह्नों वाली संख्याओं की आवश्यकता पड़ती है। तब हमें संख्या रेखा पर शून्य से नीचे की ओर जाना पड़ता है। ये ऋणात्मक संख्याएँ कहलाती है।
2. ..., −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, ... जैसे संख्याओं के समूह पूर्णांक कहलाते है जिनमें ..., −4, −3, −2, −1 संख्याएँ ऋणात्मक पूर्णांक एवं 1, 2, 3, 4, ... धनात्मक पूर्णांक कहलाती है।
3. किसी संख्या की पूर्ववर्ती एवं परवर्ती (उत्तरवर्ती) संख्या 1 घटाने एवं 1 जोड़ने से प्राप्त होती है।
4. (i) जब समान चिह्न हो तो जोड़िए और वही चिह्न लगाइए।
   (ii) जब हमारे पास अलग–अलग चिह्न वाली संख्याएँ हो तो उन्हें घटाकर बड़ी संख्या का चिह्न लगा देते हैं।
5. हमने संख्या रेखा पर पूर्णांकों का योग एवं घटाव करना भी सीखा।
6. शून्य योज्य तत्समक कहलाता है।
7. किसी संख्या का योज्य प्रतिलोम वह संख्या है, जिसे उसी संख्या में जोड़ने पर शून्य प्राप्त होता है।

अध्याय 5

भिन्न

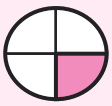
5.1 हमने बराबर–बराबर बाँटने के रूप में भिन्न को प्राथमिक कक्षाओं में पढा है। चलो उसका दोहरान करते हैं। जब एक रोटी को 3 बच्चों में बराबर–बराबर बाँटेंगे तो प्रत्येक बच्चे को मिलने वाला भाग एक बटा तीन $\frac{1}{3}$ या एक तिहाई कहलाता है।

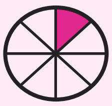


आकृति 5.1

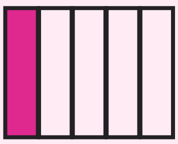
करो और सीखो

नीचे दिए गए चित्रों (रंगे गए भागों) का भिन्न से मिलान कीजिए।

(i)  $\frac{1}{5}$

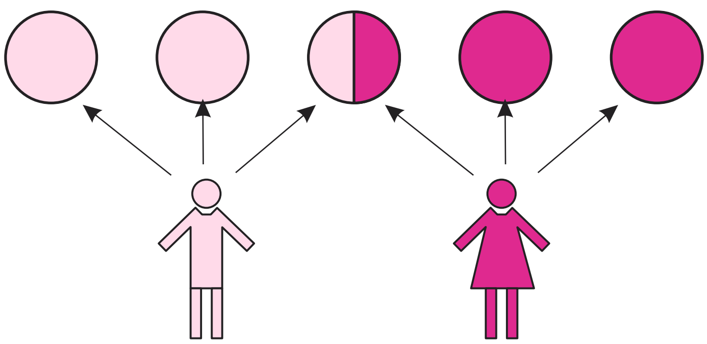
(ii)  $\frac{1}{4}$

(iii)  $\frac{1}{8}$

(iv)  $1+\frac{1}{2}$

(इन भिन्नों को पढ़ने की कोशिश कीजिए)

इसी प्रकार जब हम पाँच रोटियों को 2 बच्चों में बराबर–बराबर बाँटते हैं तो इसे इस प्रकार लिखते व पढ़ते हैं।



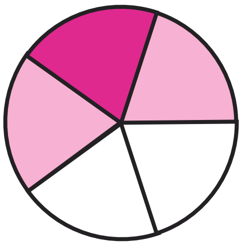
$2+\frac{1}{2}$ (दो और एक बटा दो)

इसे भी समझो

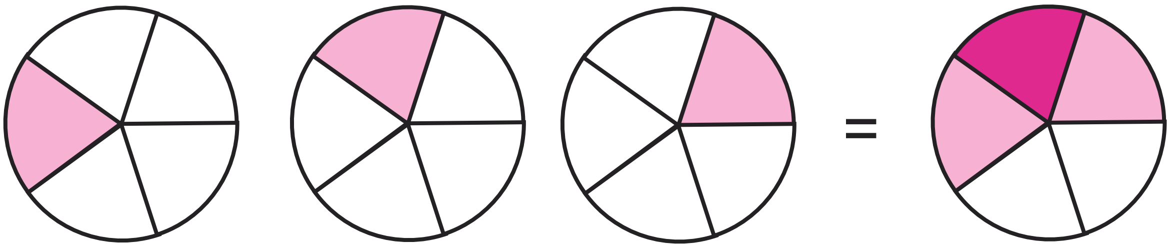
अभी हमने $\frac{3}{5}$ को एक रोटी में इस प्रकार दर्शाया।

सोचो अगर हमारे पास तीन रोटी होती और हम प्रत्येक के पाँच–पाँच हिस्से कर, उसमें से एक हिस्सा लेते, तब रंगे गए हिस्से कितनी रोटी को दर्शाते हैं ?

अतः यह तीनों $\frac{1}{5}$ मिलकर एक रोटी के $\frac{3}{5}$ हिस्से को दर्शाते हैं।



आकृति 5.2



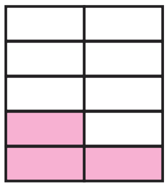
$\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}$ = $\frac{3}{5}$

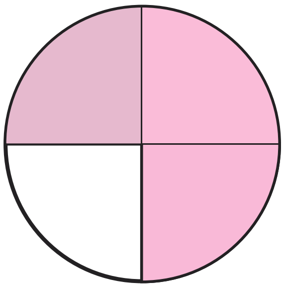
आकृति 5.3

परन्तु ध्यान रहे अगर तीन रोटी में से हिस्से पूछे जाए तो रंगे गए हिस्से कुल 3 रोटी के $\frac{1}{5}$ हिस्से को दर्शा रहे हैं।

अभी तक हमने बराबर–बराबर बाँटने के रूप में भिन्न को दर्शाना व पढ़ना सीखा है। अब हम इकाई के हिस्सों के रूप में भिन्न को समझने का प्रयास करेंगे।

लाली के पास एक बड़ी टॉफी थी जिसमें दस बराबर भागों पर निशान बने थे। आधी छुट्टी होने पर लाली ने टॉफी के तीन बराबर हिस्से अलग कर खा लिए।





सोचो लाली ने टॉफी का कितना हिस्सा खाया ?

टॉफी के खाए गए हिस्से = 3

टॉफी के कुल किए गए बराबर हिस्से = 10

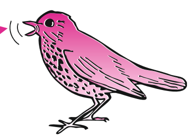
लाली द्वारा खाई गई टॉफी = $\frac{3}{10}$ (तीन बटा दस)

इसी प्रकार विक्रम ने विद्यालय में पोषाहार में मिली रोटी के चार बराबर हिस्से कर उसमें से तीन हिस्से खाए। तब विक्रम द्वारा रोटी खाई गई

$$= \frac{\text{रोटी के लिए गए या दर्शाए गए हिस्से}}{\text{रोटी के किए गए कुल समान हिस्से}}$$

$$= \frac{3}{4}$$

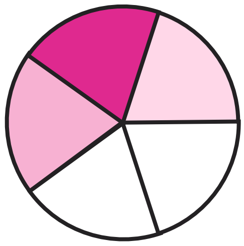
एक इकाई के किए गए कुल टुकडे हर और उसमें से लिए गए टुकड़ों की संख्या को अंश कहते हैं।



इसे तीन बटा चार या तीन चौथाई पढ़ते हैं।

एक इकाई के किए गए कुल टुकड़े हर, और उनमें से लिए गए टुकड़ों की संख्या को अंश कहते हैं। इस प्रकार तुम सोचकर बताओ कि एक रोटी के पाँच बराबर हिस्सों में तीन हिस्से लेने पर वह इकाई के कितने भाग को दर्शाता है ?

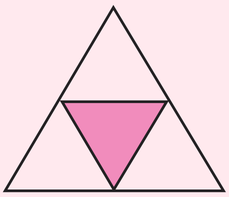
तुमने ठीक सोचा $= \frac{3}{5} \frac{\text{अंश}}{\text{हर}}$

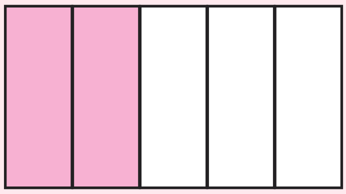


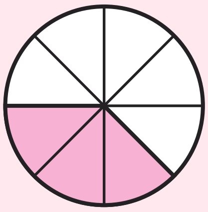
इसे तीन बटा पाँच पढ़ते हैं यहाँ 3 अंश व 5 हर को व्यक्त करता है।

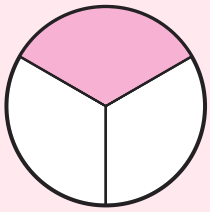
करो और सीखो

निम्नांकित आकृतियों के छायांकित भाग को भिन्न के रूप में लिखिए।









5.2 भिन्नों को चित्रों द्वारा समझाना

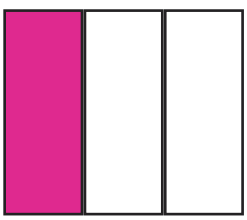
अब तक हमने भिन्न को बराबर–बराबर बाँटने व इकाई को हिस्सों के रूप में दर्शाना सीख लिया है। अब हम दी गई भिन्न को चित्र द्वारा दर्शाना सीखेंगे।

$\frac{1}{3}$ **को चित्र द्वारा दर्शाना-** $\frac{1}{3}$ में अंश 1 व हर 3 है, हर बताता है कि हमें इकाई के कितने बराबर हिस्से करने हैं। यहाँ हर तीन है अतः हम इकाई के तीन समान हिस्से करेंगे।

सीमा ने आयत का चित्र बनाकर तीन समान हिस्से किए।

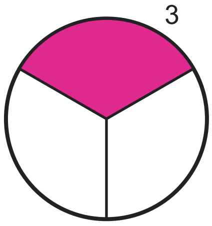
जॉन ने वृत बनाया तीन समान हिस्से किए।

फज़लू ने स्केल से 1 इंच की रेखा बना कर उसके तीन समान हिस्से किए।



$\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}$

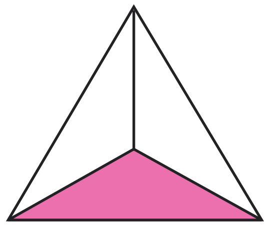


$\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}$ में अंश 1 रंगे अथवा लिए गए हिस्सों को दर्शाता है।

तुम कोई भी चित्र बनाकर उसमें भिन्न $\frac{1}{3}$ को दर्शा सकते हो, पर शर्त यह है कि तीनों टुकड़े बराबर होने चाहिए।

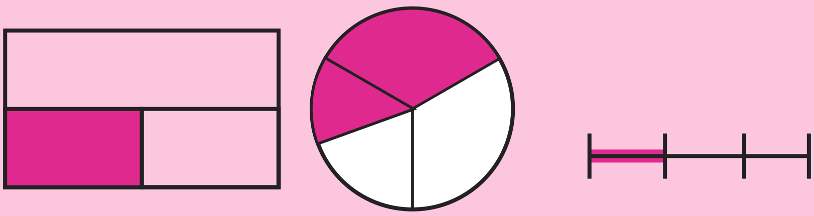
यह देखो चंदा ने त्रिभुज में $\frac{1}{3}$ को दर्शाया



यहाँ सीमा, जॉन व फज़लू ने $\frac{1}{3}$ को अलग–अलग चित्रों के द्वारा दर्शाया परंतु एक चीज़ समान है, वह यह है कि इन सभी चित्रों में इकाई के तीन समान टुकड़े कर उसका एक हिस्सा छायांकित किया गया है।

करो और सीखो

1. नीचे दिए गए चित्र में से $\frac{1}{3}$ के लिए कौन से चित्र ठीक हैं और कौन से नहीं ? कारण भी बताइए।



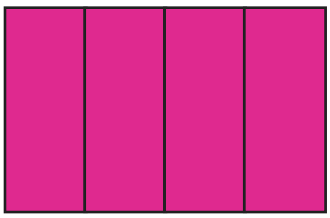
2. नीचे दिए गए भिन्नों को उचित चित्रों द्वारा दर्शाइए।

(i) $\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{3}{4}$ (iii) $\frac{1}{5}$

5.3 उचित, अनुचित एवं मिश्रित भिन्न

अभी हमने भिन्नों को चित्रों द्वारा दर्शाना सीखा है। अब क्या आप $\frac{5}{4}$ को चित्र द्वारा दर्शा सकते हो?

$\frac{5}{4}$ में 5 अंश है, व 4 हर है।



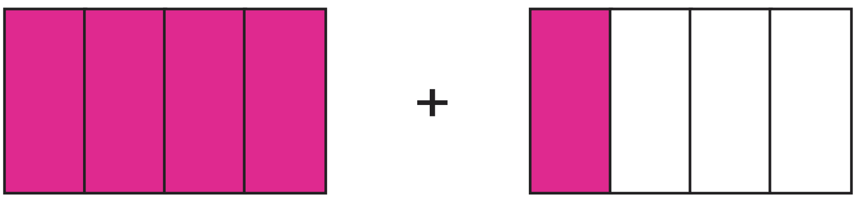
हम जानते हैं कि हर, इकाई के किए जाने वाले कुल बराबर हिस्सों को दर्शाता है। अतः हमने आयत बना कर उसके 4 हिस्से किए।

अब $\frac{5}{4}$ में 5 अंश है जो बताता है कि हमें कितने हिस्से लेने हैं। पर क्या हम कुल 4 हिस्सों में से 5 हिस्से ले सकते हैं?

नहीं अतः हम एक और इकाई बना कर उसके भी 4 समान हिस्से करते हैं।

अब पहली इकाई के चार पूरे हिस्से व दूसरी इकाई से एक हिस्सा अतः कुल पाँच हिस्से रंगे हुए लेते हैं यह $\frac{5}{4}$ को दर्शाता है। $\frac{5}{4}$ को अनुचित भिन्न भी कहते हैं।

ऐसी भिन्न जिसमें अंश, हर से बड़ा या बराबर होता है, अनुचित भिन्न कहलाती है।



$\frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$

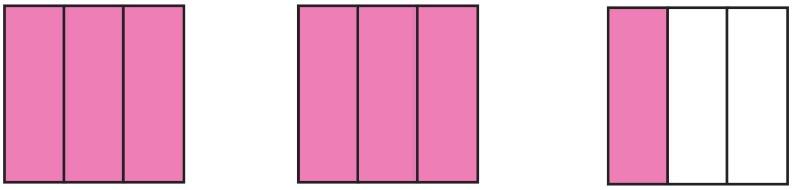
उचित भिन्न इकाई के टुकडे को दर्शाती है क्या आप उचित भिन्न को परिभाषित कर सकते हैं ? तो अपने साथियों के साथ इस पर चर्चा कीजिए।

5.3.1 अनुचित भिन्न को मिश्रित भिन्न के रूप में दर्शाना

अनुचित भिन्न को पूर्ण इकाई व उचित भिन्न (इकाई के हिस्से) के योग के रूप में भी दर्शाया जा सकता है, यह मिश्रित भिन्न कहलाती है। जैसे $\frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$ या $1\frac{1}{4}$ (इसे एक सही एक बटा चार पढ़ते हैं)

उदाहरण 1 अनुचित भिन्न $\frac{7}{3}$ को चित्र द्वारा दर्शाइए व मिश्रित भिन्न के रूप में भी लिखिए।

हल भिन्न $\frac{7}{3}$ को अंश/हर के रूप में देखने पर, हर 3 है अतः हमें एक इकाई के तीन बराबर टुकड़े करने है। अंश 7 है अतः 7 टुकड़े रंगने हैं इसके लिए हमें तीन इकाईयाँ लेकर उनमें 7 हिस्से रंगने होंगे।



$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$$

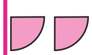
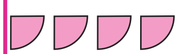
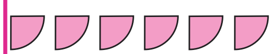
अतः अनुचित भिन्न $\frac{7}{3}$ का मिश्रित रूप हुआ

$$\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$$

इसे सात बटा तीन व दो सही एक बटा तीन पढ़ते हैं।

> **अनुचित से मिश्र भिन्न में बदलाव**
>
> 3) 7(2
> -6
> 1
>
> $= 2\frac{1}{3}$
>
> = भागफल $\frac{\text{शेषफल}}{\text{भाजक}}$

रश्मि ने खाखरे के कुछ टुकड़े रखे हैं, इन्हें देखकर भिन्न रूप में लिखिए तथा बताइए कौनसे उचित भिन्न के रूप में तथा कौनसे अनुचित भिन्न के रूप में है।

	$\frac{1}{4}$	उचित
		
		
		
		
		
		

उदाहरण 2 निम्नलिखित को मिश्रित भिन्न के रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) $\frac{19}{4}$ (ii) $\frac{23}{6}$

हल (i) $\frac{19}{4}$

4)19(4
-16
3

भाजक = 4
भागफल = 4
शेषफल = 3

अतः $\frac{19}{4}$ = 4 पूर्ण इकाई व $\frac{3}{4}$ या $4\frac{3}{4}$

हल (ii) $\frac{23}{6}$

6)23(3
-18
5

भाजक = 6
भागफल = 3
शेषफल = 5

अतः $\frac{23}{6}$ = 3 पूर्ण इकाई व $\frac{5}{6}$ या $3\frac{5}{6}$

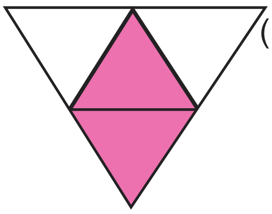
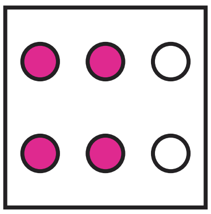
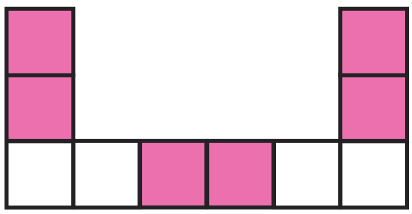
करो और सीखो

निम्न मिश्रित भिन्नों को अनुचित भिन्नों के रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) $3\frac{2}{3}$ (ii) $7\frac{1}{9}$

प्रश्नावली 5.1

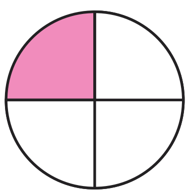
1. छायांकित भाग को दर्शाने वाली भिन्न लिखिए

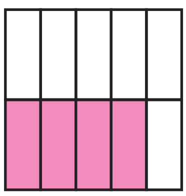
(i)

(ii)

(iii)


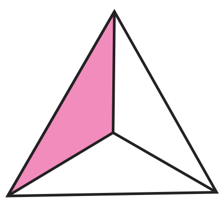
2. दी गई भिन्नों को चित्र द्वारा दर्शाइए।

(i) $\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{5}{4}$ (iii) $\frac{3}{6}$ (iv) $2\frac{2}{5}$

3. 35 मिनट एक घंटे की कौनसी भिन्न है ?
4. 1 से 15 तक की सम संख्याएँ इसकी कितनी भिन्न को बताती है।
5. नीचे दी गई आकृतियों में बिना रंगा भाग कितनी भिन्न को दर्शाता है।

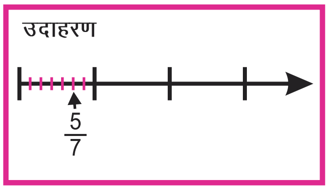

(i)


(ii)


(iii)

6. संख्या रेखा पर निम्न भिन्नों को दर्शाइए।

(i) $\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{3}{7}$ (iii) $\frac{8}{3}$



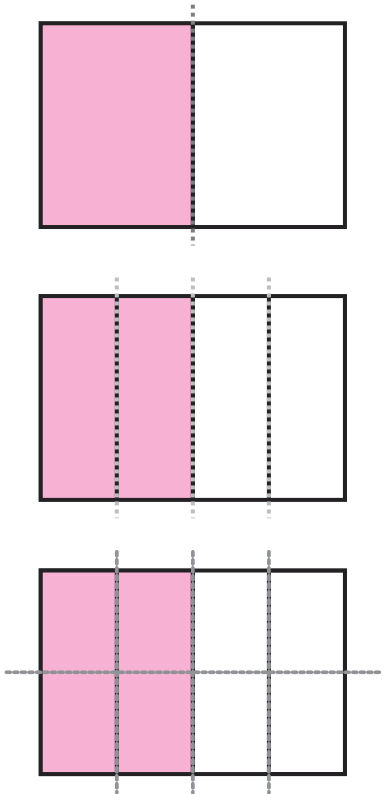
7. निम्नलिखित को मिश्रित भिन्न के रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) $\frac{20}{3}$ (ii) $\frac{11}{5}$ (iii) $\frac{19}{6}$

8. निम्नलिखित को अनुचित (विषम) भिन्न के रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) $7\frac{2}{3}$ (ii) $5\frac{3}{4}$ (iii) $4\frac{1}{2}$

5.4 समान या तुल्य भिन्न



जानवी और देवांश ने भिन्नों को चित्रों से दर्शाना सीख लिया है। तब उनकी शिक्षिका ने एक कागज लेकर उसे आधा मोड़ा और पूछा –

शिक्षिका – इसका एक हिस्सा कितनी भिन्न को दर्शाता है?

जानवी – $\frac{1}{2}$ (एक बटा दो)

शिक्षिका – चलो हम इसके एक हिस्से को रंग देते हैं। अब इसे दो बार मोड़कर, खोलते हैं। अब रंगा हुआ हिस्सा कितनी भिन्न को दर्शा रहा है।

देवांश – कागज के 4 समान हिस्से हुए ओर 2 रंगे हुए हैं, तो यह $\frac{2}{4}$ को दर्शाता है।

जानवी – यहाँ $\frac{1}{2}$ और $\frac{2}{4}$ तो कागज के समान रंगे हिस्सो को ही दर्शा रहे हैं।

शिक्षिका – जानवी तुमने ठीक कहा, ऐसी भिन्न जो समान हिस्सों को दर्शाती है, समान या तुल्य भिन्न कहलाती है। इन्हें इस प्रकार लिखते है।

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$$

इस कागज को तीन बार मोड़ने पर रंगा हुआ हिस्सा $\frac{4}{8}$ दर्शाता है।

गतिविधि – तुम भी अपने साथी के साथ एक कागज लेकर उसे आधा रंगो और अलग–अलग तरीकों से मोड़कर रंगे हुए भाग द्वारा दर्शाती भिन्न बनाओ। पर ध्यान रहे, मोड़ते समय सब हिस्से समान होने चाहिए।

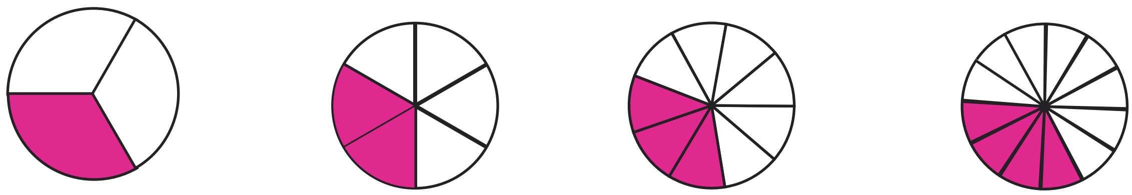
देवांश – मैं बिना कागज को मोड़े भी तुल्य भिन्न बता सकता हूँ।

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{2} = \frac{2}{4}\ ,\ \frac{1}{2} \times \frac{3}{3} = \frac{3}{6}\ ,\ \frac{1}{2} \times \frac{4}{4} = \frac{4}{8}$$

शिक्षिका – देवांश तुमने ठीक पैटर्न पकड़ा, किसी भी भिन्न के अंश व हर को समान संख्या से गुणा या भाग कर हम **तुल्य भिन्न** बना सकते हैं। कुछ भिन्नों जैसे $\frac{12}{16}$ की तुल्य भिन्न भाग से भी निकाली जा सकती है।

इन चित्रों से भी तुल्य भिन्नों को समझो।

क्या सभी चित्रों में इकाई के रंगे गए भाग समान हैं ? तो यह भी तुल्य भिन्न हुई।



$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{3}{9}$ $\frac{4}{12}$

उदाहरण 3 भिन्न $\frac{1}{4}$ की तुल्य भिन्न बताइए।

हल $\frac{1}{4} \times \frac{2}{2} = \frac{2}{8}$, $\frac{1}{4} \times \frac{3}{3} = \frac{3}{12}$

अर्थात् भिन्न $\frac{1}{4}$ की तुल्य भिन्न –

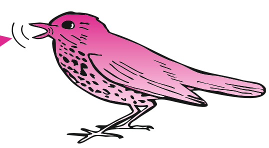
$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12}$

उदाहरण 4 $\frac{3}{6}$ की तीन तुल्य भिन्न बनाइए।

हल $\frac{3 \div 3}{6 \div 3} = \frac{1}{2}$, $\frac{3 \times 2}{6 \times 2} = \frac{6}{12}$, $\frac{3 \times 3}{6 \times 3} = \frac{9}{18}$

हम $\frac{3}{6}$ की तुल्य भिन्न $\frac{1}{2}$ से भी $\frac{3}{6}$ की तुल्य भिन्न बना सकते हैं।

तुल्य भिन्नों के सरल रूप वह है जिसमें अंश व हर आपस में सहअभाज्य हो जैसे $\frac{8}{14}$ का सरल रूप $\frac{4}{7}$ जहाँ 4 व 7 आपस में सहअभाज्य है।



उदाहरण 5 क्या $\frac{3}{4}$ और $\frac{6}{9}$ तुल्य भिन्न है जाँचिए।

हल तरीका 1 $\frac{3}{4}$ भिन्न का सरल रूप है चूंकि 3 व 4 में 1 के अलावा किसी संख्या का भाग नहीं जाता है। $\frac{6}{9}$ का सरल रूप $\frac{2}{3}$ (3 से अंश व हर में भाग देने पर) $\frac{3}{4}$ व $\frac{2}{3}$ समान सरल भिन्न नहीं हैं।

अतः $\frac{3}{4}$ व $\frac{6}{9}$ तुल्य भिन्न नहीं हैं।

तरीका 2 –

$\frac{3}{4} \times \frac{2}{2} = \frac{6}{8}$

$\frac{3}{4} \times \frac{3}{3} = \frac{9}{12}$

अतः $\frac{3}{4}$ की कोई तुल्य भिन्न $\frac{6}{9}$ नहीं होती अतः $\frac{3}{4}$ व $\frac{6}{9}$ तुल्य भिन्न नहीं है।

करो और सीखो

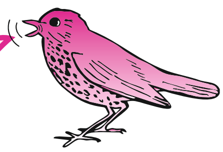
1. दी गई भिन्नों की तीन–तीन तुल्य भिन्न बनाइए।

   (i) $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{1}{3}$ (iii) $\frac{2}{7}$

2. जाँच कीजिए इनमें से कौन–कौन से तुल्य भिन्न हैं ?

   (i) $\frac{5}{10}$ व $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{3}{7}$ व $\frac{11}{13}$

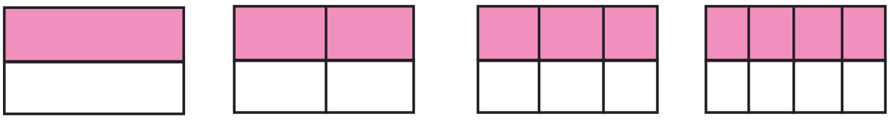
ऐसी सभी भिन्नें जिनके अंश चाहे जो भी हो, पर हर समान होते हैं उन्हें समान भिन्न कहते हैं जैसे $\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{6}{5}$ आदि। याद रहे कोई समान भिन्न तुल्य नहीं होती सोचिए! क्यों?



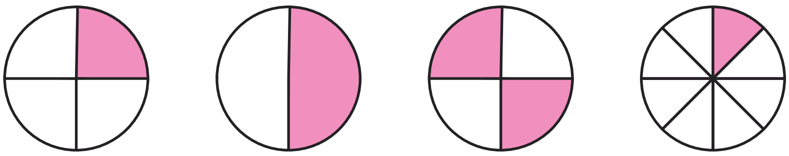
प्रश्नावली 5.2

1. प्रत्येक चित्र में छायांकित भागों के लिए भिन्न लिखिए क्या ये सभी तुल्य भिन्न हैं ?

(i)



(ii)



2. निम्नलिखित में से प्रत्येक खाली बॉक्स को सही संख्या से प्रतिस्थापित कीजिए।

   (i) $\frac{3}{7} = \frac{6}{\square}$ (ii) $\frac{8}{6} = \frac{4}{\square}$ (iii) $\frac{3}{5} = \frac{\square}{20}$ (iv) $\frac{100}{10} = \frac{10}{\square}$ (v) $\frac{18}{24} = \frac{\square}{4}$

3. $\frac{3}{4}$ के तुल्य वह भिन्न ज्ञात कीजिए जिसका –

   (i) हर 24 (ii) अंश 15 (iii) हर 32 (iv) अंश 9

4. निम्न भिन्नों को सरलतम रूप में बदलिए।

   (i) $\frac{15}{27}$ (ii) $\frac{84}{98}$ (iii) $\frac{21}{49}$ (iv) $\frac{6}{72}$

5. तुल्य भिन्नों का मिलान कीजिए।

(i)	$\frac{25}{40}$	(a)	$\frac{30}{36}$
(ii)	$\frac{250}{100}$	(b)	$\frac{8}{7}$
(iii)	$\frac{180}{200}$	(c)	$\frac{25}{5}$
(iv)	$\frac{2}{3}$	(d)	$\frac{5}{8}$
(v)	$\frac{9}{13}$	(e)	$\frac{27}{39}$
(vi)	$\frac{500}{100}$	(f)	$\frac{5}{2}$
(vii)	$\frac{3}{4}$	(g)	$\frac{100}{150}$
(viii)	$\frac{16}{14}$	(h)	$\frac{9}{10}$
(ix)	$\frac{1}{2}$	(i)	$\frac{600}{800}$
(x)	$\frac{5}{6}$	(j)	$\frac{3}{6}$

5.5 भिन्नों की तुलना

क्या भिन्नों की तुलना आप सामान्य संख्याओं 18, 81, 28 की तरह कर सकते हैं ?

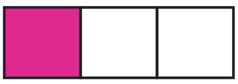
आपने संख्याओं की तुलना में बाएँ से दाएँ अंकों की तुलना कर छोटी–बड़ी संख्याओं का पता लगाया है जैसे 526, 702 से छोटी है। भिन्नों की तुलना के लिए क्या ऐसे नियम बनाए जा सकते हैं? चलिए देखते हैं।

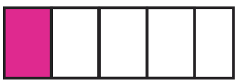
5.5.1 समान अंश वाली भिन्न संख्याओं की तुलना

निम्नलिखित भिन्नों पर विचार कीजिए।

$$\frac{1}{3},\quad \frac{4}{5},\quad \frac{7}{3},\quad \frac{8}{5},\ 2\frac{1}{4},\ 3\frac{3}{4},\quad \frac{1}{5}$$

इन भिन्नों में से $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ को इकाई भिन्न कहते हैं, क्योंकि यह इकाई के कुल हिस्सों में से एक हिस्से को दर्शाती है।

$\frac{1}{3}$ 

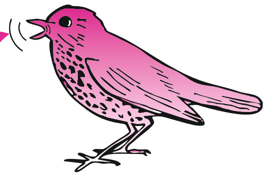
$\frac{1}{5}$ 

चित्र देखकर बताओ $\frac{1}{3}$ व $\frac{1}{5}$ में कौनसी भिन्न छोटी है ?

इसी प्रकार इकाई भिन्न $\frac{1}{4}$ व $\frac{1}{7}$ में से बड़ी भिन्न कौनसी हैं ?

$\frac{1}{4}$ अर्थात् 1 इकाई के 4 हिस्सों में से एक हिस्सा
$\frac{1}{7}$ अर्थात् 1 इकाई के 7 हिस्सों में से एक हिस्सा। अतः भिन्न $\frac{1}{7}$ छोटी है $\frac{1}{4}$ से
क्या आप इकाई भिन्नों की तुलना के लिए कोई नियम बना सकते हैं?

दो भिन्नों के अंश समान हो तो दोनों भिन्नों में छोटे हर वाली भिन्न बड़ी होती है।



उदाहरण 6 $\frac{3}{5}$ व $\frac{3}{7}$ में कौनसी भिन्न बड़ी है?

हल यहाँ $\frac{3}{5}$ की इकाई भिन्न $= \frac{1}{5}$

तथा $\frac{1}{7}$, $\frac{3}{7}$ की इकाई भिन्न है।

हम जानते हैं कि $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$ से बड़ी भिन्न है।

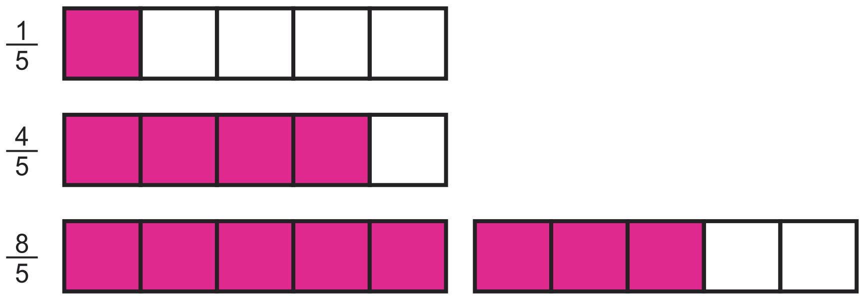
अतः $\frac{3}{5} > \frac{3}{7}$

करो और सीखो

1. एक केक का $\frac{1}{5}$ वाँ हिस्सा डोली व $\frac{1}{7}$ वाँ हिस्सा टीनू को मिलता है। तो किसको ज्यादा केक मिला?
2. कौनसी भिन्न बड़ी है?
   (i) $\frac{1}{3}$ व $\frac{1}{5}$ में से (ii) $\frac{2}{5}$ व $\frac{2}{7}$ में से

5.5.2 समान हर वाली भिन्न संख्याओं की तुलना

$\frac{1}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{8}{5}$ समान हर वाली भिन्न संख्याएँ हैं। इन भिन्नों का सबसे छोटा हिस्सा समान है।



ऊपर बने चित्रों से हम कह सकते हैं कि समान हर वाली भिन्नों में जिस भिन्न का अंश बड़ा हो वह भिन्न बड़ी होती है।

अतः $\frac{8}{5}$ बड़ी है $\frac{4}{5}$ व $\frac{1}{5}$ से ठीक इसी प्रकार $\frac{4}{5}$ बड़ी है $\frac{1}{5}$ से।

बड़े से छोटे क्रम में रखने पर $\frac{8}{5} > \frac{4}{5} > \frac{1}{5}$ इसे अवरोही क्रम कहते हैं।

छोटे से बड़े क्रम में रखने पर $\frac{1}{5} < \frac{4}{5} < \frac{8}{5}$ इसे आरोही क्रम कहते हैं।

करो और सीखो

1. निम्नलिखित भिन्नों को आरोही व अवरोही क्रम में लिखिए।

(i) $\frac{3}{7}, \frac{1}{7}, \frac{4}{7}, \frac{8}{7}, \frac{6}{7}$

(ii) $\frac{4}{13}, \frac{12}{13}, \frac{8}{13}$

5.5.3 ऐसी भिन्नों की तुलना जिनके अंश व हर दोनों अलग–अलग हों

मान लीजिए आप $\frac{2}{3}$ व $\frac{3}{4}$ की तुलना करना चाहते हैं तो हम पहले इनकी तुल्य भिन्न बनाते हैं –

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15} \quad \text{तथा} \quad \frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16}$$

$\frac{2}{3}$ व $\frac{3}{4}$ में समान हर 12 वाली तुल्य भिन्न क्रमशः $\frac{8}{12}$ व $\frac{9}{12}$ है

अतः $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ व $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ में $\frac{8}{12} < \frac{9}{12}$ या $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$

उदाहरण 7 $\frac{3}{4}$ व $\frac{5}{8}$ में बड़ी भिन्न कौनसी है।

हल ये असमान अंश व हर वाली भिन्न संख्याएँ है। आइए इनकी तुल्य भिन्न निकालते हैं।

समान हर वाली तुल्य भिन्न है।

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{12}{20} = \frac{15}{25} = \frac{18}{30} = \frac{21}{35} = \frac{24}{40} = \frac{27}{45}$$

$$\text{तथा} \quad \frac{5}{8} = \frac{10}{16} = \frac{15}{24} = \frac{20}{32} = \frac{25}{40} = \frac{30}{48} = \frac{35}{56}$$

समान हर वाली तुल्य भिन्न है

$$\frac{3}{5} = \frac{24}{40} \quad \text{तथा} \quad \frac{5}{8} = \frac{25}{40}$$

चूकि $\frac{25}{40} > \frac{24}{40}$ है अतः $\frac{5}{8} > \frac{3}{5}$ है।

सोचो अगर बड़ी असमान भिन्नों की तुलना करनी हो तो तुल्य भिन्न द्वारा हल करना कठिन पड़ेगा इन स्थितियों में सार्व गुणज द्वारा तुल्य भिन्न सीधे निकालकर, तुलना की जाती है।

उदाहरण 8 $\frac{7}{8}$ और $\frac{7}{10}$ की तुलना कीजिए।

हल ये असमान हर वाली भिन्न है। $\frac{7}{8}$ व $\frac{7}{10}$ में हर

8 के गुणज 8,16, ...

इस प्रकार 10 के गुणज 10, 20......... इस प्रकार 8 व 10 के पहाड़े में 40 सार्व गुणज है।

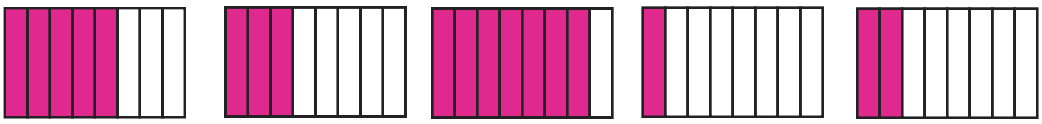
$\frac{7}{8} \times \frac{5}{5} = \frac{35}{40}$; $\frac{7}{10} \times \frac{4}{4} = \frac{28}{40}$

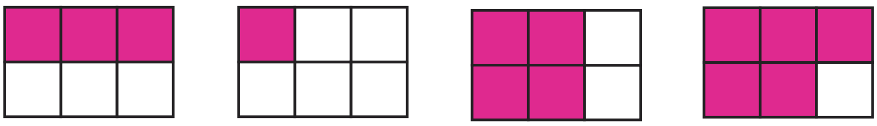
अतः $\frac{7}{8} = \frac{35}{40}$ व $\frac{7}{10} = \frac{28}{40}$ है

चूकि $\frac{35}{40} > \frac{28}{40}$ है, इसलिए $\frac{7}{8} > \frac{7}{10}$ है।

प्रश्नावली 5.3

1. प्रत्येक चित्र के लिए भिन्नों को लिखिए और फिर उन्हें अवरोही व आरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए।

(i) 

(ii) 

2. भिन्नों की तुलना कीजिए और उचित चिह्न (<, >, =)लगाइए।

(i) $\frac{5}{6} \square \frac{9}{11}$ (ii) $\frac{3}{4} \square \frac{1}{5}$ (iii) $\frac{3}{5} \square \frac{3}{7}$

3. निम्नलिखित भिन्न तीन अलग–अलग संख्याएँ निरूपित करती है इन्हें सरलतम रूप में बदलकर उन तीन भिन्नों के समूह में लिखिए।

(i) $\frac{2}{12}$ (ii) $\frac{3}{15}$ (iii) $\frac{8}{50}$ (iv) $\frac{16}{100}$

(v) $\frac{10}{60}$ (vi) $\frac{15}{75}$ (vii) $\frac{18}{90}$ (viii) $\frac{16}{96}$

(ix) $\frac{12}{75}$ (x) $\frac{12}{72}$ (xi) $\frac{10}{50}$ (xii) $\frac{4}{25}$

4. निम्नलिखित के उत्तर लिखिए और दर्शाइए कि आपने इन्हें कैसे हल किया ?

(i) क्या $\frac{12}{15}$, $\frac{15}{30}$ के बराबर है ? (iii) क्या $\frac{3}{5}$, $\frac{9}{15}$ के बराबर है ?

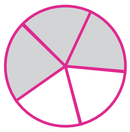
(ii) क्या $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$ के बराबर है ? (iv) क्या $\frac{9}{16}$, $\frac{5}{9}$ के बराबर है ?

5. 25 विद्यार्थियों की एक कक्षा A में 20 विद्यार्थी प्रथम श्रेणी में पास हुए और 30 विद्यार्थियों की एक कक्षा B में 24 विद्यार्थी प्रथम श्रेणी में पास हुए। किस कक्षा में विद्यार्थियों का अधिक भाग प्रथम श्रेणी में पास हुआ?

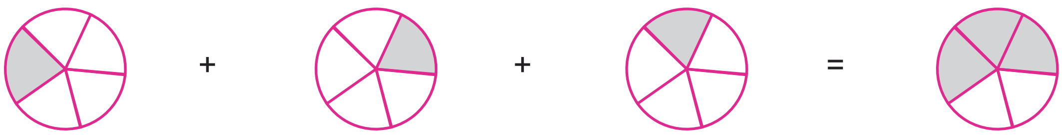
6. रोहित कुल 8 रोटियों में से 4 रोटियाँ खाता है। रोहिणी कुल 8 रोटियों का $\frac{1}{4}$ भाग खाती है। बताइए किसने कम खाया?

5.6 भिन्नों की जोड़

हमने भिन्नों को प्रदर्शित करते समय सीखा है कि $\frac{3}{5}$ को हम दो तरह से प्रदर्शित कर सकते हैं।



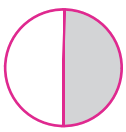
इकाई में $\frac{3}{5}$



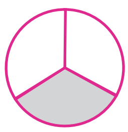
$\frac{1}{5}$ + $\frac{1}{5}$ + $\frac{1}{5}$ = $\frac{3}{5}$

अलग–अलग इकाईयों को जोड़ के रूप में $\frac{3}{5}$

क्या हम $\frac{1}{2}$ व $\frac{1}{3}$ को भी इसी प्रकार से जोड़ सकते हैं ?



$\frac{1}{2}$



$\frac{1}{3}$

जिस प्रकार हमने संख्याओं के जोड़ में देखा है। उदाहरण – 333 + 40 = 373 होता है, 333 में (एक) सबसे छोटी इकाई है व 40 भी 1 को 40 बार जोड़ने पर आता है अतः ऐसी सभी संख्याएँ जिनकी सबसे छोटी इकाई समान हो उन्हें हम आपस में जोड़ सकते हैं।

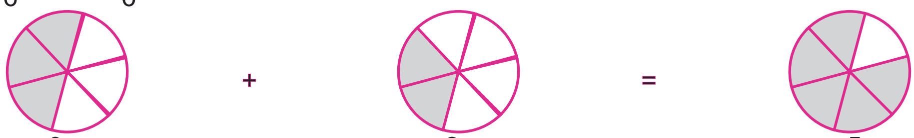
$\frac{1}{2}$ व $\frac{1}{3}$ में इकाइयाँ असमान है। इन भिन्नों की तुल्य भिन्न बनाने पर

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} \quad \text{तथा} \quad \frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\text{अतः} \quad \frac{1}{2} = \frac{3}{6} \quad \text{व} \quad \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

समान इकाइयों वाली भिन्नों को दर्शाती है जहाँ $\frac{1}{6}$ समान व सबसे छोटी इकाई है।

$\frac{3}{6}$ व $\frac{2}{6}$ को चित्र द्वारा दर्शाने पर



$\frac{3}{6}$ + $\frac{2}{6}$ = $\frac{5}{6}$

असमान हर वाली भिन्नों को जोड़ने का एक और तरीका (ल.स.प. विधि)

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$\frac{(1x3) \quad + \quad (1x2)}{6}$$

$$= \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$$

चरण 1. हर 2 व 3 का लघुत्तम समापवर्त्य (L.C.M.) लेते हैं जो कि 6 है।

चरण 2. भिन्न $\frac{1}{2}$ में हर 2 का भाग लघुत्तम 6 में लगाने पर प्राप्त भागफल 3 का गुणा अंश 1 में करते हैं। ठीक इसी प्रकार भिन्न $\frac{1}{3}$ में हर 3 का भाग लघुत्तम 6 में लगाने पर प्राप्त भागफल 2 का गुणा अंश 1 में करते हैं।

चरण 3. प्राप्त गुणनफलों को जोड़ देते हैं।

करो और सीखो

निम्नलिखित को हल कीजिए।

(i) $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$ (ii) $\frac{3}{5} + \frac{2}{7}$ (iii) $\frac{4}{5} + \frac{7}{15}$

5.6.1 मिश्रित भिन्नों को जोड़ना

मिश्रित भिन्नों को दो प्रकार से जोडा जा सकता है।

1. मिश्रित भिन्नों के पूर्ण भागों और अनुचित भागों को अलग–अलग जोड़ा जाए।
2. मिश्रित भिन्नों को अनुचित भिन्न में बदल कर जोड़ा जाए।

$$2\frac{3}{4} + 5\frac{4}{5}$$

$$2 + 5 + \frac{3}{4} + \frac{4}{5}$$

$$7 + \frac{3}{4} + \frac{4}{5}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{4}{5} = \frac{3x5}{4x5} + \frac{4x4}{5x4} \quad (4 \text{ व } 5 \text{ का ल.स.} = 20)$$

$$= \frac{15}{20} + \frac{16}{20} = \frac{31}{20}$$

$$= 1 + \frac{11}{20} \quad \left(\frac{31}{20} \text{ को मिश्रित भिन्न में बदलना}\right)$$

पुनः $7 + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} = 7 + 1 + \frac{11}{20}$

$$= 8 + \frac{11}{20} = 8\frac{11}{20}$$

$$\therefore \quad 2\frac{3}{4} + 5\frac{4}{5} = 8\frac{11}{20}$$

मिश्रित भिन्नों को अनुचित भिन्न में बदलकर जोड़ना

$$2\frac{3}{4} + 5\frac{4}{5}$$

$$= \frac{11}{4} + \frac{29}{5}$$

$$= \frac{11 \times 5}{4 \times 5} + \frac{29 \times 4}{5 \times 4}$$

$$= \frac{55}{20} + \frac{116}{20} = \frac{171}{20} = 8\frac{11}{20}$$

प्रश्नावली 5.4

1. हल कीजिए।

(i) $\frac{5}{19} + \frac{2}{19}$ (ii) $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$ (iii) $\frac{12}{23} + \frac{27}{23} + \frac{10}{23}$

(iv) $\frac{4}{7} + \frac{3}{14}$ (v) $\frac{2}{5} + \frac{3}{4} + \frac{5}{3}$ (vi) $\frac{17}{6} + \frac{18}{5}$

(vii) $4\frac{1}{3} + 3\frac{1}{3}$ (viii) $5\frac{3}{5} + 3\frac{5}{7}$

2. एक आम का $\frac{1}{4}$ भाग सुनीता को तथा $\frac{1}{4}$ भाग मेरी को मिलता है। दोनों को मिलाकर आम का कितना भाग प्राप्त होता हैं?

3. रेशमा ने $\frac{1}{3}$ मी. और जया ने $\frac{3}{5}$ मी. रिबन खरीदा दोनों ने कुल कितना रिबन खरीदा?

4. रमेश ने अपने घर से स्कूल पहुँचने के लिए $4\frac{1}{4}$ किमी. दूरी बस से तय की तथा $\frac{3}{4}$ किमी. दूरी पैदल तय की उसने घर से स्कूल पहुँचने के लिए कुल कितनी दूरी तय की?

5. अमित पहले दिन $\frac{1}{2}$ ली. दूसरे दिन $\frac{3}{4}$ ली. और तीसरे दिन $1\frac{1}{4}$ ली. दूध लेता है। बताइए तीनों दिन मिलाकर उसने कितना दूध लिया?

6. देवांश ने अपने कमरे की दीवार के $\frac{2}{3}$ भाग पर पेंट किया, उसकी बहन जानवी ने उसकी सहायता की और उस दीवार के $\frac{1}{3}$ भाग पर पेंट किया, बताइए उन दोनों ने मिलकर कितना पेंट किया ?

5.7 भिन्नों को घटाना

भिन्नों को घटाने के लिए भी उन्हीं तरीकों का प्रयोग करेंगे जो हमने भिन्नों को जोड़ने के लिए प्रयोग में लिए हैं।

(i) $\frac{7}{8}$ में से $\frac{5}{8}$ घटाइए।

यहाँ $\frac{7}{8}$ व $\frac{5}{8}$ के हर समान है अतः अंशों को घटाकर हर को वहीं रखेंगे।

अतः $\frac{7}{8} - \frac{5}{8} = \frac{7-5}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

(ii) $\frac{8}{6}$ में से $\frac{2}{5}$ घटाइए।

अब $\frac{8}{6}$ व $\frac{2}{5}$ के हर असमान है अतः इन भिन्नों की समान हर वाली तुल्य भिन्न ज्ञात करेंगे।

$\frac{8}{6} = \frac{8 \times 5}{6 \times 5} = \frac{40}{30}$, $\frac{2}{5} = \frac{2 \times 6}{5 \times 6} = \frac{12}{30}$

$\frac{40}{30} - \frac{12}{30} = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}$

अतः $\frac{8}{6} - \frac{2}{5} = \frac{14}{15}$

ल.स. विधि

$\frac{8}{6} - \frac{2}{5}$ **हर 6 व 5 का** L.C.M. 30 **है।**

$= \frac{(8 \times 5) - (2 \times 6)}{30}$

$= \frac{40 - 12}{30} = \frac{28}{30}$

$\frac{28}{30}$ **का सरलरूप** $\frac{14}{15}$

(iii) $7\frac{1}{6} - 5\frac{2}{5}$ को हल कीजिए।

मिश्रित भिन्नों को अनुचित भिन्न में बदल कर घटाना आसान होता है अतः हम यहाँ केवल इसी प्रकार के घटाने का अध्ययन करेंगे।

$$7\frac{1}{6} = \frac{43}{6}, \quad 5\frac{1}{4} = \frac{21}{4}$$

$$\frac{43}{6} - \frac{21}{4}$$

अब हम दोनों भिन्नों की समान हर वाली तुल्य भिन्न ज्ञात करें उन्हे घटाएँ ?

$$\frac{43 \times 2}{6 \times 2} - \frac{21 \times 3}{4 \times 3}$$

$$\frac{86}{12} - \frac{63}{12}$$

$$= \frac{86 - 63}{12} = \frac{23}{12} = 1\frac{11}{12}$$

अतः $7\frac{1}{6} - 5\frac{1}{4} = 1\frac{11}{12}$

सबसे पहले हम मिश्रित भिन्न को अनुचित भिन्न में बदलेंगे।
अब हम दोनों भिन्नों की समान हर वाली तुल्य भिन्न ज्ञात कर उन्हें घटाएँगे।

प्रश्नावली 5.5

1. हल कीजिए

(i) $\frac{6}{5} - \frac{2}{5}$ (ii) $\frac{4}{5} - \frac{3}{7}$

(iii) $4\frac{3}{2} - 2\frac{1}{5}$ (iv) $8\frac{1}{4} - 2\frac{5}{6}$

(v) $\frac{17}{6} - \frac{9}{4}$ (vi) $\frac{3}{4} - \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{4}\right)$

2. हीरा ने $\frac{3}{7}$ ली. दूध में से $\frac{1}{4}$ ली. दूध भावना को दिया। उसके पास कितने लीटर दूध शेष रहा ?
3. एक लकड़ी के टुकड़े की लम्बाई $\frac{9}{10}$ मी. है इसमें से $\frac{2}{5}$ मी. लम्बाई का टुकड़ा काट लिया है। बचे टुकड़े की लम्बाई क्या है ?
4. अंशुल 1 गिलास पानी में से $\frac{2}{3}$ भाग पानी पी जाता है, तो बताइए गिलास में कितना पानी शेष बचता है ?
5. सुनील $5\frac{1}{2}$ किग्रा. आम तथा विजय $3\frac{4}{5}$ किग्रा. आम खरीदता है। बताइए सुनील ने कितने किग्रा. आम अधिक खरीदे।

6. नेहा ने एक दौड़ $3\frac{1}{2}$ मिनट में पूरी की तथा गीता ने $\frac{13}{4}$ मिनट में। बताइए किसने कम समय में दौड़ पूरी की और उसे कितना समय कम लगा ?

7. निम्नलिखित योग व्यवकलन तालिका पूरी कीजिए।

(i) $\oplus$ →, $\ominus$ ↓

$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$	
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	

(ii) $\oplus$ →, $\ominus$ ↓

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	

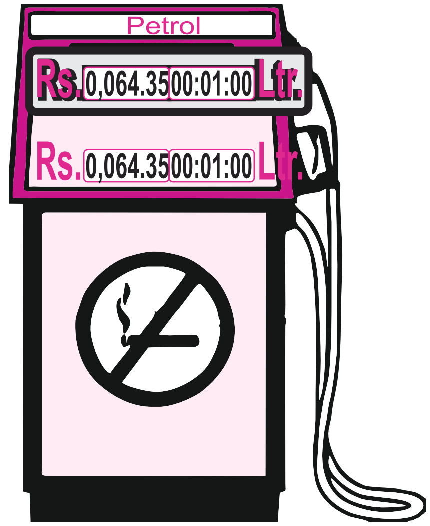
हमने सीखा

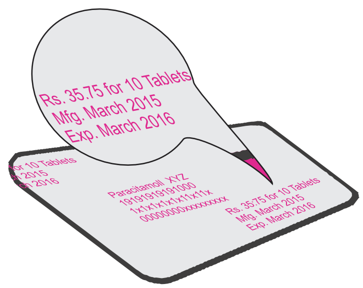
1. भिन्न एक ऐसी संख्या है जो एक पूर्ण के एक भाग को निरूपित करती है या संख्या रेखा पर संक्रियाओं को निरूपित करती है। पूर्ण एक अकेली वस्तु भी हो सकती है और वस्तुओं का समूह भी। किसी स्थिति में गिने हुए भागों को भिन्न में व्यक्त करने के लिए यह आवश्यक है कि उसके सभी भाग बराबर हो।
2. भिन्न $\frac{5}{7}$ में 5 अंश तथा 7 भिन्न का हर कहलाता है।
3. भिन्नों को संख्या रेखा पर भी दर्शाया जा सकता है। प्रत्येक भिन्न के लिए संख्या रेखा का एक निश्चित बिंदु होता है।
4. एक उचित भिन्न में अंश, हर से छोटा होता है और अनुचित भिन्न में अंश हमेशा हर से बड़ा होता है। अनुचित भिन्न को एक पूर्ण और एक भाग के रूप में भी लिखा जा सकता है। इस स्थिति में यह भिन्न मिश्रित में बदल जाती है।
5. दो भिन्न तुल्य भिन्न कहलाती है यदि वे समान मात्रा को निरूपित करती हों। प्रत्येक उचित या अनुचित भिन्न की अनेक तुल्य भिन्न होती है। एक दी हुई भिन्न की तुल्य भिन्न निकालने के लिए हम भिन्न के अंश तथा हर दोनों को समान शून्येतर संख्या से गुणा या भाग कर सकते हैं।
6. एक भिन्न अपने सरलतम रूप (न्यूनतम) में होती है। उसके अंश तथा हर में 1 के अलावा कोई दूसरा उभयनिष्ठ गुणनखण्ड न हो।

अध्याय 6

दशमलव संख्याएँ

6.1 आपने दवाई, पेट्रोल, रसोई गैस की कीमत पर ध्यान दिया होगा। दिए गए चित्र में दवाई की कीमत 35.75 रूपये हैं जिसका अर्थ 35 रू 75 पैसे होता है। इसी प्रकार पैट्रोल की कीमत 64.35 रूपये है जिसका अर्थ 64 रूपये 35 पैसे है। 35.75 रू व 64.35 रूपये में बिंदु दशमलव को दर्शाता है, यहाँ हम दशमलव के बारे में विस्तार से चर्चा करेंगे।

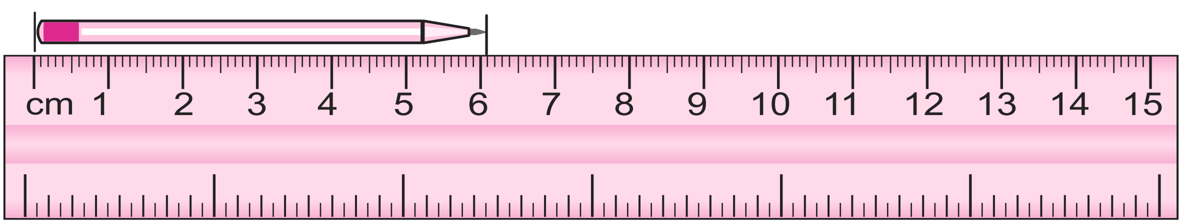




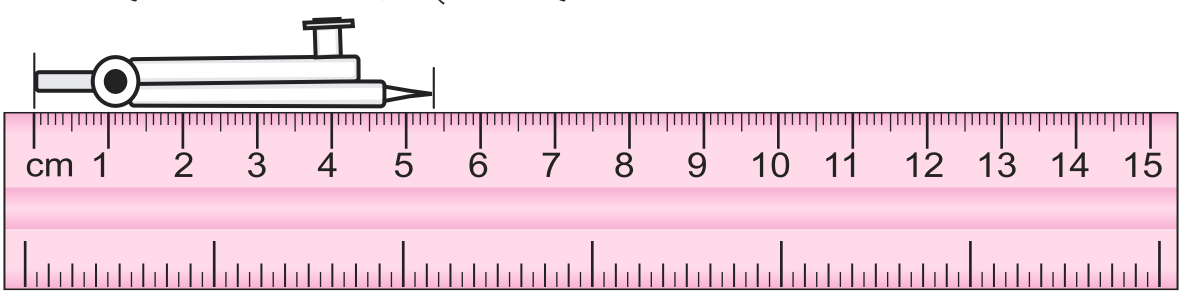
6.1.1 दशमलव संख्याएँ

बताओ राम की पेंसिल की लम्बाई कितनी हैं?

...... सेमी.



रहमान के परकार की लम्बाई कितनी है?



इस चित्र में परकार की लम्बाई 5 सेमी. से कुछ अधिक किंतु 6 सेमी. से कम है। आप इस परकार की लम्बाई कैसे मालूम करोगे?

करो और सीखो

आप भी अपने बैग में से पेंसिल, रबड़ व अन्य वस्तुओं को स्केल से नापिए और सारणी को भरिए।

क्र.सं.	वस्तुएँ	लम्बाई
1		
2		
3		
4		
5		
6		

आपने परकार को मापते समय देखा है कि उसकी लम्बाई 5 सेमी से कुछ अधिक है तब हमने 1 सेमी. को 10 बराबर भागों में बाँटा और उसका एक भाग 1 मिमी है, अब यदि मिमी को सेमी में दर्शाना हो तो उसे दशमलव के दाईं और लिखते हैं।

दशमलव बिंदु के दाईं ओर के प्रथम स्थान का मूल्य 1 का दसवाँ भाग यानी $\frac{1}{10}$ होता है इसे दशांश भी कहते है। परकार को मापते समय दशांश के 3 समान भाग हो रहे है। अतः इसे हम 5.3 सेमी लिखेंगे।

6.2 दशमलव में स्थानीय मान

किसी भी संख्या में अंकों का मान उसके स्थानीय मान पर निर्भर करता है।

325 में 3, सैंकडे वाले स्थान पर अतः 3 X 100 = 300

2 दहाई वाले स्थान पर अतः 2 X 10 = 20

तथा 5 इकाई वाले स्थान पर है अतः 5 X 1 = 5

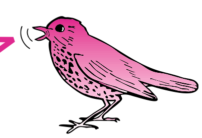
इसी प्रकार 523 में अंकों के स्थान परिवर्तन से संख्या का मान हमें अलग प्राप्त होता है।

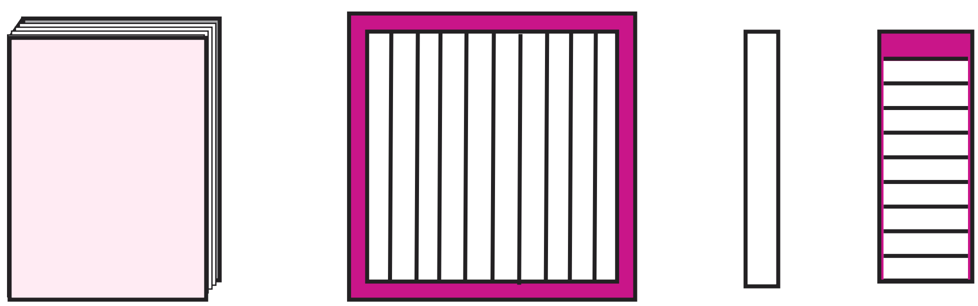
यहाँ 5 का स्थानीयमान है = ...

2 का स्थानीयमान है = ...

3 का स्थानीयमान है = ...

संख्याओं में बाईं और से दाईं और जाने पर स्थानीय मान $\frac{1}{10}$ भाग होता जाता है।





100 (सैंकड़ा) 10 (दहाई) 1 (इकाई) $\frac{1}{10}$ (दशांश)

अब हम कुछ दशमलव संख्याओं के अंकों का स्थानीय मान लिखते हैं।

दशमलव संख्या	सैंकड़ा	दहाई	इकाई	दशांश
124.5	1	2	4	5
315.5	....	....	....	....
402.1	....	....	....	....

करो और सीखो

दी गई संख्याओं में अंकों का स्थानीय मान लिखिए।

(i) 123.4 (ii) 111

6.3 दशमलव संख्याओं का विस्तार रूप

$$325.4 = 300 + 20 + 5 + \frac{4}{10}$$

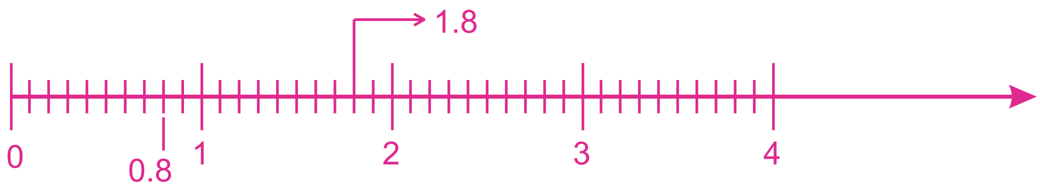
$$34.7 = 30 + 4 + \frac{7}{10}$$

दशमलव संख्याओं में दशमलव बिन्दु हमेशा इकाई और दशांश के बीच लगाया जाता है।

6.4 संख्या रेखा पर निरूपण

हमने भिन्नों का संख्या रेखा पर निरूपण सीखा है। अब हम दशमलव को संख्या रेखा पर निरूपित करना सीखेंगे। 0.8 का अर्थ 1 का 8 दशांश या $\frac{8}{10}$ है।

अतः यह 0 व 1 के बीच होगा, हम यह भी जानते हैं कि दशमलव के दाएँ और का भाग दशांश $\frac{1}{10}$ स्थान दर्शाता है। अतः हम 0 से 1 तक संख्या रेखा को 10 हिस्सों में विभाजित करेंगे।



करो और सीखो

दशमलव संख्या 0.6, 1.3 व 2.5 को संख्या रेखा पर दर्शाइए।

उदाहरण 1 दशमलव रूप में लिखिए।

(i) 5 इकाई और 2 दशांश

(ii) 5 दहाई, 3 इकाई और 4 दशांश

दशांश का अर्थ दसवाँ हिस्सा होता है।

अतः 1 दशांश $= \frac{1}{10}$

2 दशांश $= \frac{2}{10}$

हल

(i) 5 इकाई और 2 दशांश अतः $5 + \frac{2}{10} = 5.2$

(ii) 5 दहाई 3 इकाई और 4 दशांश,

यानि $50 + 3 + \frac{4}{10} = 53.4$

उदाहरण 2 दशमलव रूप में लिखिए।

(i) $40 + \frac{3}{10}$ (ii) $500 + 70 + 4 + \frac{7}{10}$

हल (i) $40 + \frac{3}{10} = 40.3$

(ii) $500 + 70 + 4 + \frac{7}{10} = 574.7$

इसे ऐसे भी समझ सकते हैं

$$\frac{40}{1} + \frac{3}{10} = \frac{40 \times 10 + 3 \times 1}{10}$$

$$\frac{400 + 3}{10} = \frac{403}{10} = 40.3$$

भिन्न जिसका हर 10 हो, को दशमलव रूप में आसानी से लिखा जा सकता है।

6.5 दशमलव संख्याओं को भिन्न में बदलना

उदाहरण 3 दशमलव संख्याओं को भिन्न में बदल कर सरल रूप में लिखिए।

(i) 24.4 (ii) 10.5

हल (i) $\frac{24.4}{10}$

$= \frac{\cancel{2} \times 122}{\cancel{2} \times 5}$

$= \frac{122}{5}$ सरलतम रूप

24.4 को हम $24 + \frac{4}{10}$ या $\frac{244}{10}$ लिख सकते हैं।

अतः संख्या को दशमलव रूप से भिन्न रूप में बदलने के लिए दशमलव को हटा कर हर में उसके स्थान पर एक व दशमलव के आगे जितने अंक हो उतने शून्य लगाते हैं।

हमने भिन्न संख्याओं में सीखा है कि वह भिन्न संख्याएँ जिनमें अंश व हर सह अभाज्य हैं वह का सरल रूप होता है।

(ii) $10.5 = \frac{105}{10} = \frac{21}{2}$ सरलतम रूप

6.6 भिन्नों को दशमलव में बदलना

भिन्नों को दशमलव रूप में लिखने का प्रयास करें जिनका हर 10 से अलग हो–

उदाहरण 4 नीचे दिए गए भिन्नों को दशमलव में बदलिए।

(i) $\frac{9}{5}$ (ii) $\frac{1}{2}$

ऐसी भिन्नों में हम हर को 10 या 10 के गुणज में बदलने के लिए तुल्य भिन्न बनाते हैं। फिर पहले की तरह हर में यदि 10 है तो अंश में दाईं ओर से एक अंक छोड़कर दशमलव और यदि 100 है तो अंश में दाईं और से दो अंक छोड़कर दशमलव लगाते हैं।

(i) $\frac{9}{5}$ का तुल्य भिन्न $= \frac{9}{5} \times \frac{2}{2} = \frac{18}{10} = 1.8$

(ii) $\frac{1}{2}$ का तुल्य भिन्न $= \frac{1}{2} \times \frac{5}{5} = \frac{5}{10} = 0.5$

प्रश्नावली 6.1

1. निम्न के लिए दी गई सारणी में संख्याएँ लिखिए।

(i) 1 दहाई 2 इकाई 3 दशांश

(ii) 1 सैंकड़ा 3 दहाई 7 दशांश

(iii) 2 सैंकड़ा 5 दहाई 1 इकाई 2 दशांश

सैंकड़ा (100)	दहाई (10)	इकाई (1)	दशांश (1/10)	बनने वाली संख्या

2. निम्न दशमलव संख्याओं का स्थानीय मान सारणी में लिखिए।

(i) 19.4 (ii) 0.5 (iii) 10.9 (iv) 205.9

3. निम्न में से प्रत्येक को दशमलव रूप में लिखिए।

(i) 7 दशांश (ii) 2 दहाई 4 दशांश

(iii) चौदह दशमलव नौ (iv) छः सौ दशमलव तीन

4. निम्न को दशमलव भिन्न के रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) $\frac{3}{10}$ (ii) $4+\frac{8}{10}$ (iii) $300 + 50 + 8 + \frac{1}{10}$

(iv) $90+\frac{3}{10}$ (v) $\frac{3}{2}$ (vi) $\frac{2}{5}$ (vii) $4\frac{1}{2}$ (viii) $3\frac{3}{5}$

5. निम्न दशमलव संख्याओं को भिन्न के रूप में लिखकर सरलतम रूप में बदलिए।

(i) 0.6 (ii) 2.5 (iii) 2.8

(iv) 13.7 (v) 21.2 (vi) 1.0 (vii) 6.4

6. सेमी. का प्रयोग कर निम्न को दशमलव रूप में बदलिए।

(i) 2 मिमी (ii) 30 मिमी (iii) 116 मिमी

(iv) 5 सेमी 2 मिमी (v) 95 मिमी (vi) 19 सेमी 1 मिमी

7. संख्या रेखा पर किन दो पूर्ण संख्याओं के बीच निम्न संख्याएँ स्थित हैं ? इनमें से कौनसी पूर्ण संख्या दशमलव संख्या के अधिक निकट है ?

(i) 0.5 (ii) 5.3 (iii) 9.0 (iv) 4.9 (v) 3.8

8. निम्न को संख्या रेखा पर दर्शाइए।

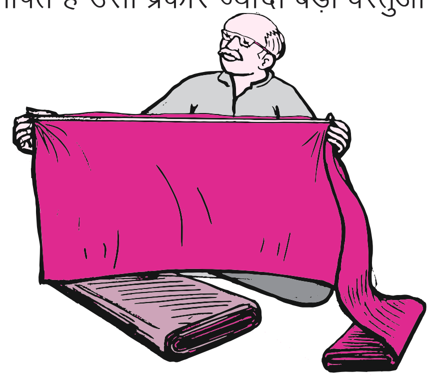
(i) 0.3 (ii) 1.7 (iii) 3.4 (iv) 2.5

9. तुलसी के हाथ के बालिश्त की लम्बाई 95 मिमी है उसके बालिश्त की लम्बाई सेमी में व्यक्त कीजिए।

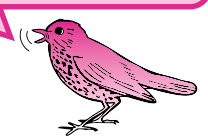
10. दीपू का स्केल 6 सेमी का है खेल–खेल में वह 4.4 सेमी से टूट गया, बाकी बचे टुकड़े की लम्बाई ज्ञात कीजिए ।

6.7 शतांश

जिस प्रकार हम छोटी वस्तुओं और दूरी को सेमी व मिमी में मापते है उसी प्रकार ज्यादा बड़ी वस्तुओं को मीटर, सेमी में मापते हैं। आपने छोटी कक्षाओं में मीटर स्केल के बारे में पढ़ा है। 1 मीटर में 100 सेमी होते है। अतः 1 सेमी मीटर का सौंवा भाग होता है। 0 से 1 मीटर के बीच में 100 बराबर दूरी पर निशान होते हैं और प्रत्येक भाग की दूरी 1 सेमी या मीटर का 100 भाग यानी शतांश कहलाती है। (अगर आपको कहीं मीटर स्केल मिले तो उसे देखकर जाँचना) नीलू ने कक्षा की दीवार पर बने बोर्ड को मीटर स्केल से नापा तो पाया कि यह 2 पूरे मीटर और उससे आगे 15 छोटे भाग यानी 15 सेमी है तो हुए 2 मीटर 15 सेमी या 2 मीटर $\frac{15}{100}$ मी इसे दशमलव के रूप में 2.15 मीटर भी लिखते हैं। अतः बोर्ड की लम्बाई हुई 2 मी 15 सेमी या 2.15 मी. इसी प्रकार 5 सेमी को मीटर में दर्शाना हो तो $\frac{5}{100}$ मी या 0.05 मी।



1 सेमी= 1/100 मी. या एक मीटर का शतांश भाग



6.8 सहस्रांश

जिस प्रकार दशमलव के दाईं और दूसरा स्थान शतांश होता है उससे आगे शतांश का भी दसवाँ भाग $\left(\frac{1}{10}\right)$ होता है। शतांश का दसवाँ भाग सहस्रांश (हजारवाँ भाग) कहलाता है।

जैसे – 43.125 यहाँ तैतालिस दशमलव एक दो पाँच में 5 शतांश के दसवें भाग को दर्शाता है।

अर्थात् $\frac{1}{100} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{1000}$ (हजारवाँ भाग)

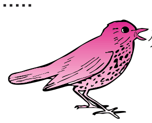
6.9 दशमलव संख्याओं को पढ़ना

दवाई, पैट्रोल, डॉलर का भाव रूपयों में और ऐसी ही कई अन्य वस्तुओं और परिस्थितियों में आपने दशमलव का प्रयोग होते देखा है, क्या आपको पता है इसे कैसे पढ़ा जाता हैं?

हम 34.25 रू को पढ़ेंगे चौतीस दशमलव दो पाँच रूपये, इसी प्रकार 1 डॉलर का भारतीय मूल्य 64.025 रू है और इसे चौसठ दशमलव शून्य दो पाँच रूपये पढ़ेंगे।

आप भी नीचे दशमलव में लिखी संख्याओं को शब्दों में लिखिए।

1. 45.36 सेमी = ...
2. 325.25 रु. = ...



दशमलव के दाईं ओर की संख्याओं को कभी इकट्ठे नहीं पढ़ा जाता है जैसे 35.75 को पैंतीस दशमलव पचहत्तर नहीं पढ़कर इसे पैंतीस दशमलव सात पाँच पढ़ा जाता है।

उदाहरण 5 दशमलव रूप में लिखिए।

(i) $\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{3}{4}$ (iii) $\frac{1}{25}$ (iv) $\frac{8}{1000}$

हल (i) हम जानते हैं कि दशमलव के बाईं और इकाई (1) व दाईं और क्रमशः $(\frac{1}{10})$ दशांश व $(\frac{1}{100})$ शतांश का स्थान होता है। अतः $\frac{3}{5}$ को दशमलव में बदलने के लिए इसके हर को हमें 10 या 100 वाली तुल्य भिन्न में बदलना होगा। अतः

$$\frac{3}{5} = \frac{3x2}{5x2} = \frac{6}{10} = 0.6$$

इसी प्रकार

(ii) $\frac{3}{4} = \frac{3x25}{4x25} = \frac{75}{100} = 0.75$

(iii) $\frac{1}{25} = \frac{1x4}{25x4} = \frac{4}{100} = 0.04$

(iv) $\frac{8}{1000}$ यहाँ दशांश और शतांश का स्थान शून्य है अतः $\frac{8}{1000}$ को 0.008 लिखते हैं।

यहाँ हर में एक के आगे तीन शून्य हैं अतः भिन्न को दशमलव संख्या में बदलने पर दशमलव के दाईं और तीन अंक आने चाहिए।

उदाहरण 6 दशमलव संख्याओं को भिन्न रूप में लिखिए।

(i) 0.07 (ii) 12.34 (iii) 0.407

हल (i) $0.07 = \frac{7}{100}$

(ii) $12.34 = 12 + \frac{34}{100}$ यहाँ भिन्न $\frac{34}{100}$ का सरल रूप $\frac{17}{50}$ है अतः $12\frac{17}{50}$

(iii) $0.407 = \frac{407}{1000}$

उदाहरण 7 दशमलव रूप में लिखिए।

(i) $500 + 5 + \frac{2}{10} + \frac{9}{100}$ (ii) $7 + \frac{4}{10} + \frac{6}{1000}$

हल (i) $500 + 5 + \frac{2}{10} + \frac{9}{100}$

$500 + 5 + \frac{29}{100}$

$= 505.29$

हर समान कर जोड़ने पर

$\frac{20}{10} x \frac{10}{10} = \frac{20}{100}$

$\frac{20}{100} + \frac{9}{100} = \frac{29}{100}$

(ii) $7 + \frac{4}{10} + \frac{6}{1000}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{4}{10} \times \frac{100}{100} = \frac{400}{1000} \\ \frac{400}{1000} + \frac{6}{1000} = \frac{406}{1000} \end{array} \right.$$

$7 + \frac{406}{1000}$ (यहाँ शतांश के स्थान पर 0 है)

= 7.406

6.10 दशमलवों की तुलना

कौनसी संख्या बड़ी है 2.5 या 2.09 ? यहाँ हम देखते हैं कि दोनों संख्याओं के इकाई वाले स्थान समान है। अतः हम दशमलव के दाएँ स्थानों से संख्याओं की तुलना करते हैं।

2.5 में दशांश स्थान पर 5 है अतः $\frac{5}{10}$ जबकि 2.09 में दशांश स्थान पर 0 व शतांश स्थान पर 9 है अतः $\frac{9}{100}$

पहला तरीका :– तुलना के लिए भिन्न समान करते हैं।

$$\frac{5}{10} = \frac{5 \times 10}{10 \times 10} = \frac{50}{100}$$

अब $\frac{50}{100}$ और $\frac{9}{100}$ में $\frac{50}{100}$ बड़ी भिन्न है। अतः 2.5 > 2.09

दूसरा तरीका :– जिस प्रकार संख्याओं की तुलना में हम बाईं ओर से अंकों की तुलना करना शुरू करते हैं। इसी तरह हम दशमलव संख्याओं में पहले दशांश फिर शतांश अंक की तुलना करते हैं।

2.5 व 2.09 में दशांश के स्थान पर 2.5 में 5 दशांश व 2.09 में 0 दशांश है। दशांश 5 > 0 अतः 2.5 > 2.09 से।

उदाहरण 8 कौनसी संख्या बड़ी है ?

(i) 1 या 0.99

1 > 0.99 $\because$ इकाई के स्थान पर 1 है जबकि 0.99 में 0 है।

(ii) 3.090 या 3.93

$$3.090 = 3 + \frac{0}{10} + \frac{9}{100} + \frac{0}{1000}$$

$$3.093 = 3 + \frac{0}{10} + \frac{9}{100} + \frac{3}{1000}$$

दोनों संख्याएँ 3.09 व 3.093 शतांश स्थान तक समान है पर 3.093 में 3 सहस्त्रांश है जिसके कारण 3.093 > 3.090

करो और सीखो

निम्न संख्याओं में से बताइए कौनसी संख्या बड़ी है ?

(i) 3.07 और 3.89 (ii) 0.57 व 0.05 (iii) 147.8 व 147.08 (iv) 9.5 व 5.92

6.11 दशमलव के अनुप्रयोग

उदाहरण 9 महेश के पास 500 ग्राम आलू, 500 ग्राम टमाटर, 250 ग्राम शिमला मिर्च,100 ग्राम अदरक तो उसकी सब्जियाँ कितने किलो ग्राम वजन में हैं?

हल हम जानते हैं कि 1000 ग्राम = 1 किलोग्राम

अतः 500 ग्राम आलू + टमाटर 500 ग्राम + शिमला मिर्च 250 ग्राम + अदरक 100 ग्राम = 1350 ग्राम

इसे किलोग्राम में बदलना है 1000 ग्राम + 350 ग्राम

$= \frac{1000}{1000}$ किग्रा + $\frac{350}{1000}$ किग्रा

अर्थात् 1350 ग्राम = 1 किलो 350 ग्राम = 1.350 किग्रा

उदाहरण 10 0.38 और 0.45 को जोड़िए।

हल

	इकाई		दशांश	शतांश
	0	.	3	8
+	0	.	4	5
	0	.	8	3

शतांश $\frac{8}{100} + \frac{5}{100}$ =13 शतांश

$\frac{13}{100} = \frac{10+3}{100} = \frac{10}{100} + \frac{3}{100} = \frac{1}{10} + \frac{3}{100}$

= 1 दशांश + 3 शतांश

अतः दशांश $= \frac{1}{10} + \frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{8}{10}$ = 8 दशांश

करो और सीखो

निम्न को जोड़िए

(i) 1.54 + 1.80 (ii) 2.75 + .08

उदाहरण 11 (i) 4.34 में से 1.78 घटाइए। (ii) 2 में से 0.78 घटाइए।

हल

इकाई		दशांश	शतांश
4	.	3	4
1	.	7	8
2	.	5	6

इकाई		दशांश	शतांश
2	.	0	0
0	.	7	8
1	.	2	2

पूर्ण संख्या में से दशमलव संख्या को जोड़ने अथवा घटाने के लिए पूर्ण संख्या के बाद दशमलव लगाकर उतने ही शून्य लगाए जाते हैं, जितने दूसरी संख्या में दशमलव के बाद अंक हो। ध्यान रहे दशमलव के बाद कितने भी शून्य लगाने पर संख्या के मान मे कोई परिवर्तन नही होता।

करो और सीखो

(i) 5.47 में से 1.65 घटाइए। (ii) 8.90 में से 4.07 घटाइए।

उदाहरण 12 पप्पू के घर से स्कूल की दूरी 8 किमी 850 मीटर है वह बस से 6 किमी 500 मी. दूरी तय करता है और शेष पैदल चलता है। वह पैदल कितनी दूरी तय करता है।

हल घर से स्कूल की दूरी = 8.850 किमी

बस द्वारा तय की गई दूरी = 6.500 किमी

अतःपप्पू द्वारा पैदल तय की गई दूरी = 8.850 − 6.500 = 2.350 किमी = 2 किमी 350 मी

प्रश्नावली 6.2

1. स्थानीय मान सारणी को देख कर दशमलव रूप में लिखिए।

क्र.सं.	सैंकड़ा 100	दहाई 10	इकाई 1	दशांश $\frac{1}{10}$	शतांश $\frac{1}{100}$	सहस्रांश $\frac{1}{1000}$
(i)	2	3	0	0	5	7
(ii)	0	0	1	3	0	5
(iii)	2	5	3	5	0	5
(iv)	3	4	0	1	2	0
(v)	0	1	3	0	3	0

2. निम्न में से प्रत्येक को दशमलव रूप में लिखिए।

(i) $23 + \frac{3}{10} + \frac{6}{1000}$ (ii) $\frac{7}{10} + \frac{3}{100} + \frac{6}{1000}$

(iii) $137 + \frac{6}{100}$ (iv) $700 + 3 + \frac{5}{100} + \frac{3}{1000}$

(v) $\frac{3}{10} + \frac{7}{1000}$ (vi) $\frac{1}{10} + \frac{9}{100}$

3. निम्न दशमलव संख्याओं को शब्दों में लिखिए।

(i) 1.20 (ii) 108.56 (iii) 10.756 (iv) 6.01

4. भिन्न बनाकर सरल रूप में लिखिए।

(i) 0.18 (ii) 0.25 (iii) 0.066 (iv) 0.40

5. कौनसी बड़ी है? कारण भी लिखिए।

(i) 0.4 या 0.04 (ii) 3 या 0.7 (iii) 0.999 या 0.19 (iv) 5.64 या 5.603

6. दशमलव का प्रयोग कर रूपयों में बदलिए।

(i) 5 पैसे (ii) 75 पैसे (iii) 80 पैसे (iv) 50 पैसे

7. दशमलव का प्रयोग कर किमी में लिखिए।

(i) 70 किमी 5 मी (ii) 88 मी (iii) 800 मी

8. निम्न को हल कीजिए ।

(i) 0.007 + 8.5 + .008 (ii) 280.69+25.8+8.80

(iii) 0.75 + 10.425+2 (iv) 32.52 + 36.60

(v) 8.28 − 5.25 (vi) 2.29 − 0.95

9. रवि ने 15 किग्रा 400 ग्राम चावल, 2 किग्रा 20 ग्राम चीनी, 100 किग्रा 850 ग्राम आटा तौला, कुल कितना भार तौला गया ?

10. लिली सायंकाल सैर करने जाती है सोमवार को वह 2 किमी. 100 मी, मंगलवार को 3 किमी. 500 मी. व बुधवार को 2 किमी. 700 मी. चली तो 3 दिन में लिली द्वारा कुल कितनी सैर की गई ?

11. टीना के पास 20 मी 50 सेमी लम्बा कपड़ा है इसमें से उसने 4 मी. 25 सेमी कपड़ा काट लिया। टीना के पास अब कितना कपड़ा शेष बचा ?

12. आकाश 12 किग्रा सब्जी खरीदता है जिसमें से 4 किग्रा 150 ग्राम टमाटर, 5 किग्रा 750 ग्राम प्याज व शेष आलू हैं। आलू का वजन कितना है, बताइए ?

हमने सीखा

1. एक पूरी इकाई के भागों को जानने के लिए हम एक इकाई को खंडों में दर्शाएँगे। एक खण्ड के 10 बराबर भाग करने पर प्रत्येक भाग इस इकाई का $\frac{1}{10}$ (एक दशांश) होगा। इसे हम 0.1 के रुप में लिख सकते हैं, जो कि दशमलव निरुपण है। इस बिन्दु (.) को हम दशमलव कहते है, जो कि इकाई और दशांश स्थान के अंकों के बीच लगाया जाता है।
2. प्रत्येक भिन्न को दशमलव रुप में लिखा जा सकता है और इसके विपरीत प्रत्येक दशमलव संख्या को भी भिन्न रुप में लिखा जा सकता है।
3. एक खण्ड को 100 समान भागों में बाँटने पर प्रत्येक भाग इस इकाई का $\frac{1}{100}$ (एक शतांश) भाग है। दशमलव रुप में इसे हम 0.01 लिख सकते हैं।
4. स्थानीय मान सारणी में जैसे–जैसे हम बाएँ से दाएँ की ओर जाते हैं, संख्याओं का स्थानीय मान $\frac{1}{10}$ भाग होता जाता है।
5. दशमलव संख्याओं को संख्या रेखा पर भी दर्शाया जा सकता है।
6. दो दशमलव संख्याओं की आपस में तुलना की जा सकती है। तुलना संख्या के पूर्ण भाग (जो कि दशमलव बिन्दु की बाईं ओर के अंक होते हैं) से शुरु की जाती है। यदि पूर्ण भाग समान है जो दशांश स्थान के अंकों की तुलना की जाती है और यदि ये भी समान हो तो अगले अंक (शतांश) को देखें। यह क्रम आगे बढ़ता रहता है।

अध्याय 7

वैदिक गणित

7.1 अभी तक हमने वैदिक गणित के अन्तर्गत जोड़, बाकी, गुणा के सरल तरीकों को सीखा है। इस अध्याय में हम इन्हीं पदों का विस्तृत अध्ययन करेंगे। जिसमें एकाधिकेन, एक न्यूनेन, पूर्वेण, विचलन, परममित्र अंक, विनकूलम संख्याएँ, विनकूलम संख्याओं का योग, व्यवकलन, गुणा इत्यादि, सूत्र निखिलम् का आधार 10 व 100 का उपयोग करते हुए गुणा व भाग का अध्ययन करेंगे।

7.2 एकाधिकेन

चन्द्रशेखर के पास एक ऐसा जादुई बॉक्स है जिसको सामने वाला साथी यदि कोई संख्या बोलता है तो वह बॉक्स उस बोली गई संख्या से एक अधिक को दर्शाता है।

आनन्द ने जब संख्या 8 बोली तब उस बॉक्स ने 9 बताई।

करण ने जब संख्या 6 बोली तो उस बॉक्स ने संख्या 7 बताई। इस प्रकार एक अंकों की संख्या बोलने पर बॉक्स अगली संख्या बता रहा था लेकिन जब लीलावती ने संख्या 15 बोली तो उस बॉक्स ने संख्या 25 बताई।

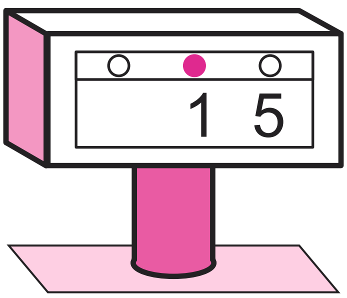
सभी बालक यहाँ विचार करने लगे कि बॉक्स ने 25 क्यों बताया, जबकि 15 से तो एक अधिक 16 होता है।

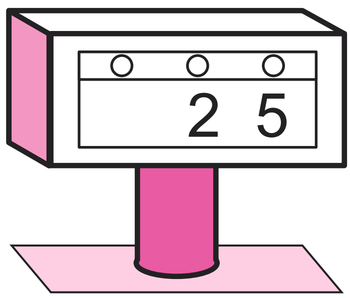
इस तरह से दो अंकों की और भी कई संख्याएँ बोली तो बॉक्स दहाई अंक को एक अधिक बताता था।

बालकों द्वारा इस बॉक्स को ध्यान से देखने पर उन्हें ज्ञात हुआ कि संख्या बोलने पर, उसके ऊपर लगे बिन्दु जिस अंक पर गहरा होता है वह अंक एक अधिक से बनी संख्या बताता है।

अर्थात् गहरे बिन्दु की संख्या को एक अधिक बताता है।

एकाधिक से तात्पर्य एक से अधिक से है जिस अंक को एकाधिक दिखाना है उसे एक गहरे बिन्दु से दर्शाते हैं।





यदि गहरा बिन्दु बॉक्स में लिखी संख्या 15 के अंक 5 पर होता तो बॉक्स संख्या 16 दर्शाता लेकिन अंक 1 पर है अतः 25 दर्शाया गया। इस प्रकार के कुछ अभ्यास दिये गए हैं। जिन्हें आप भी बॉक्स में रख कर देखें और रिक्त स्थानों की पूर्ति करें।

एकाधिक = एक अधिक करना

3 का एकाधिक = $\dot{3}$ = 4

7 का एकाधिक = $\dot{7}$ = 8

9 का एकाधिक = $\dot{9}$ = 10

12 का एकाधिक = $1\dot{2}$ = 13

28 का एकाधिक = $2\dot{8}$ = 29

32 का एकाधिक = $3\dot{2}$ = 33 (इकाई के अंक 2 का एक अधिक)

14 में अंक 1 का एकाधिक = $\dot{1}4$ = 24 (दहाई के अंक 1 का एक अधिक = 2)

25 में अंक 2 का एकाधिक = $\dot{2}5$ = 35

98 में अंक 9 का एकाधिक = $\dot{9}8$ = 108 (9 का एकाधिक = $\dot{9}$ = 10)

संख्या	एकाधिकसंकेत	नवीनसंख्या
4	$\dot{4}$	5
6	.....	......
11	$1\dot{1}$	12
18	....	....
96	....	....
125 में अंक 2 का	$1\dot{2}5$	135
354 में अंक 3 का	.....	....
648 में अंक 8 का	.....	.....
985 में अंक 9 का	....	....
1459 में अंक 1 का	....	....

7.2.1 पूर्वेण

वैदिक गणित में एकाधिक के साथ–साथ एकाधिकेन पूर्वेण शब्द भी उपयोग में होता है अर्थात् पूर्वेण का तात्पर्य 'से पहले' यानि 'से पहले अंक'

13 में 3 का पूर्वेण अंक = 1 3 से पहले का अंक (दहाई स्थान वाला)–1

59 में 9 का पूर्वेण अंक = 5 9 से पहले का अंक (दहाई स्थान वाला)–5

286 में 8 का पूर्वेण अंक = 2 8 से पहले का अंक (सैंकड़े के स्थान वाला)–2

435 में 4 का पूर्वेण अंक = 0 4 से पहले का अंक (हजार स्थान वाला)–0

अतः संख्या में जिस अंक का पूर्वण पूछा जाए उसके पहले वाला जैसे 6 का एकाधिक पूर्वण $\dot{0}6$ एवं नवीन संख्या 16 होगी। अंक 6 का पूर्वण अंक 0 होगा। **(जिस अंक का कोई पूर्वण नहीं है तब शून्य लेवें)**

संख्या	एकाधिकपूर्वण	नवीन संख्या
7	$\dot{0}7$	17
9	....	
16 में अंक 6 का	$\dot{1}6$	26
42 में अंक 2 का	....	....
96 में अंक 9 का	$\dot{0}96$	196
87 में अंक 8 का	....	....
134 में अंक 3 का	$\dot{1}34$	....
273 में अंक 7 का	....	....
819 में अंक 1 का	....	....
897 में अंक 8 का	....	....

7.3 एकाधिकेन पूर्वण से योग

एकाधिकेन पूर्वण से योगफल ज्ञात करना सीखेंगे

उदाहरण 1

$$\begin{array}{r} 78 \\ \dot{0}\dot{6}5 \\ \hline 143 \\ \hline \end{array}$$

संकेत

(1) इकाई के अंकों का योग 8+5 = 13 अतः 5 के पूर्वण अंक 6 पर एकाधिक चिह्न लगाएँगे।

(2) जबकि शेष 3 को योगफल के नीचे लगाएँगे। (इकाई के स्थान पर)

(3) दहाई के अंकों का योग में 7+$\dot{6}$ = 14 (जहाँ $\dot{6}$ = 7 है)

(4) अतः 6 के पूर्वण अंक 0 पर एकाधिक चिह्न लगावें (जिस संख्या के पूर्वण अंक नहीं लिखा होता है उसके पूर्व में शून्य लगा दिया जाता है)

(5) शेषफल 4 लिखे योग के स्थान पर (दहाई के स्थान)

(6) $\dot{0}$ = 1 सैंकड़े के स्थान पर लिखेंगे।

उदाहरण 2

98
$\dot{0}\dot{6}9$
$\dot{0}\dot{8}5$
252

संकेत

(1) इकाई के अंकों का योग 8+9 = 17 अतः 9 के पूर्वण अंक 6 पर एकाधिक चिह्न

(2) शेष 7+5 = 12 अतः 5 के पूर्वण अंक 8 पर एकाधिक चिह्न

(3) शेष 2 को योग के स्थान पर (इकाई में)

(4) दहाई के अंकों के योग में $9+\dot{6}$ = 16 अतः 6 के पूर्वण 0 (शून्य) पर एकाधिक चिह्न

(5) शेषफल $6+\dot{8}$ = 15 अतः 8 के पूर्वण अंक 0 (शून्य) पर एकाधिक चिह्न लगाएँ एवं शेष 5 को योग के स्थान पर

(6) अंत में $\dot{0}+\dot{0}$ = 2 सैंकड़े के स्थान पर

उदाहरण 3

रुपये	पैसे
7	60
$\dot{1}\dot{3}$	45
38	50
59	55

संकेत

(1) 0+5 = 5 इकाई में नीचे लिखा।

(2) 6+4 = 10 अतः 4 के पूर्वण अंक 3 पर एकाधिक चिह्न लगाया।

(3) शेषफल 0+5 = 5 को लिखा योग में दहाई के स्थान पर

(4) $7+\dot{3}$ = 11 अतः $\dot{3}$ के पूर्वण अंक 1 पर एकाधिक चिह्न

(5) शेषफल 1+8 =9 नीचे लिखा योग में सैंकड़े के स्थान पर

(6) $\dot{1}+3$ = 5 नीचे लिखा योग के स्थान पर

उदाहरण 4

किमी	मीटर
26	386
$\dot{0}\dot{9}\dot{7}$	$\dot{8}\dot{6}5$
124	251

संकेत

(1) 6+5 = 11 अतः 5 के पूर्वण अंक 6 पर एकाधिक चिह्न शेषफल 1 को योग के स्थान मीटर में इकाई पर

(2) $8+\dot{6}$ = 15 अतः $\dot{6}$ के पूर्वण अंक 8 पर एकाधिक चिह्न शेषफल 5 को योग के स्थान दहाई के मीटर पर

(3) $3+\dot{8}$ = 12 अतः $\dot{8}$ के पूर्वण 7 पर एकाधिक चिह्न शेषफल 2 को योग के स्थान पर सैंकड़े के मीटर पर

(4) $6+\dot{7}$ = 14 अतः $\dot{7}$ के पूर्वण अंक 9 पर एकाधिक चिह्न

(5) शेषफल 4 को योग के स्थान पर किमी में

(6) $2+\dot{9}$ = 12 अतः $\dot{9}$ के पूर्वण अंक 0 पर एकाधिक चिह्न

(7) $\dot{0}$ = 1 योग के स्थान पर

प्रश्नावली 7.1

1. सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण से योगफल ज्ञात कीजिए –

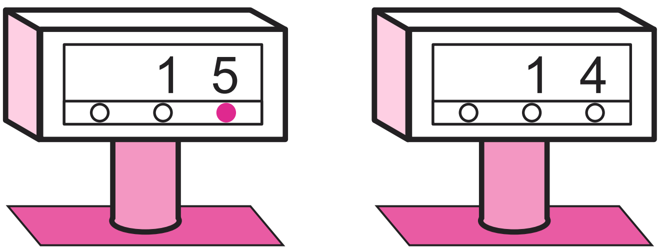
(i)	(ii)	(iii)
96	98	327
+ 68	49	496
	+ 35	+ 528

(iv) रुपये	पैसे	(v) किमी	मीटर	(vi) किग्रा	ग्राम
418	75	86	786	139	65
+ 395	36	+ 75	345	+ 87	83

7.4 एकन्यूनेन (पूर्व से एक कम)

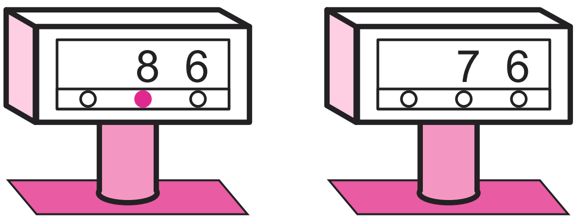
दीदी यदि एक अधिक करके बॉक्स पर लिखी संख्या को ज्ञात कर रहे थे तो क्यों नहीं हम एक ऐसा बॉक्स बनाए जहाँ एक कम वाली संख्या वह बता सके। आओ उस बॉक्स पर एक कम करके देखते हैं।

बॉक्स पर 15 बोले तो वह बॉक्स एक कम करके 14 बताए।



एक न्यूनेन का अर्थ एक **(कम)** से है एक कम दर्शाने हेतु संख्या के नीचे बिन्दु (•) लगाते हैं।

इसी प्रकार पुष्कर ने संख्या 86 बोली तो बॉक्स ने एक कम करके 76 बताई।



अर्थात् नीचे की ओर गहरे बिन्दु की संख्या को एक कम बताती है। दूसरे बॉक्स में गहरा बिंदु 86 के अंक 8 के नीचे है अतः बॉक्स संख्या 76 दर्शाती है। एक न्यूनेन पूर्वेण–एक न्यूनेन पूर्वेण में पूर्व से एक कम से है अर्थात 19 में 19 का एक न्यूनेन पूर्वेण चिह्न 19 अर्थात 09 होगा।

इस प्रकार के कुछ अभ्यास दिए गए हैं जिन्हें आप भी बॉक्स में रखकर देखें और रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए ।

करो और सीखो

संख्या	एक न्यून पूर्वेण चिह्न	नवीन संख्या
15 में अंक 5 का	$\underset{\cdot}{1}5$	05
23 में अंक 9 का	....	....
47 में अंक 4 का	....	....
159 में अंक 9 का	$1\underset{\cdot}{5}9$	149
351 में अंक 1 का	....	....
524 में अंक 2 का	....	....
1675 में अंक 6 का	....	....
8963 में अंक 9 का	....	....

7.5 परममित्र अंक

सुलोचना दीदी कक्षा में एक डिब्बा लेकर आती हैं। इस डिब्बे में 10 गोलियाँ रखी हुई हैं। दीदी एक बालक को कहती हैं कि इस डिब्बे में से गोली निकालो तो तेज सिंह नौ गोली निकालता है। तब दीदी पूछती हैं डिब्बे में शेष कितनी गोलियाँ रही हैं। उत्तर प्राप्त हुआ 1।

इसी प्रकार अन्य बालक भी डिब्बे में से गोलियाँ निकालते हैं। एक बालक 6 गोलियाँ निकालता है तो डिब्बे में शेष कितनी गोलियाँ रही। उत्तर प्राप्त हुआ 4 गोलियाँ। इस प्रकार निकाली गई एवं शेष बची गोलियों का योग 10 है अतः शेष बची गोलियाँ 10 गोलियों में से निकाली गोलियाँ घटाने पर प्राप्त होती हैं इस प्रकार यदि संख्या 10 आधार की हो एवं एक संख्या दी हो तो शेष संख्या उस संख्या का परम मित्र अंक है। जैसे–

1 का परममित्र अंक (मित्र अंक) = 9 (10–1 = 9)

2 का परममित्र अंक = 8 (10–2 = 8)

3 का परममित्र अंक = 7

4 का परममित्र अंक = 6

5 का परममित्र अंक = 5

$\dot{9}$ का परममित्र अंक = 0

($\dot{9}$ = 9 एकाधिक)

अर्थात् दोनों संख्याओं का योग 10 है।

सूत्र एक न्यूनेनपूर्वेण + परममित्र अंक से व्यवकलन करते हैं।

उदाहरण 5 52 – 27 को हल कीजिए।

$$\begin{array}{r} 5\underset{\cdot}{2} \\ -\ 27 \\ \hline 25 \\ \hline \end{array}$$

संकेत

(i) 2 में से 7 नहीं घटता, अतः 7 का परममित्र अंक 3 को 2 में जोड़ा 2+3= 5 योग के नीचे लिखिए।

(ii) 2 के पूर्वेण अंक 5 पर एक न्यून चिह्न लगाएँ जैसे– $\underset{\cdot}{5}$ = 4

(iii) $\underset{\cdot}{5}$ में से 2 (4–2 = 2) घटाने पर शेष 2 को नीचे लिखिए।

इस प्रकार 52 – 27 का अभीष्ट हल 25 है।

उदाहरण 6 643 में से 359 घटाइए।

$$\begin{array}{r} \underset{\cdot}{6}\underset{\cdot}{4}3 \\ -\ 359 \\ \hline 284 \\ \hline \end{array}$$

संकेत

(i) 3 में से 9 नहीं घटता, अतः 9 का परममित्र 1 अंक अतः में 1 जोड़ा तो योगफल 3+1 = 4

(ii) 3 के पूर्वेण अंक 4 पर एक न्यून चिह्न लगाया जैसे $\underset{\cdot}{4}$

(iii) $\underset{\cdot}{4}$ = 3 में से 5 नहीं घटता अतः 5 का परममित्र 5 अंक 3 में जोड़ा, योगफल 3+5 = 8 लिखिए।

(iv) $\underset{\cdot}{4}$ के पूर्वेण अंक 6 पर एक न्यून चिह्न लगाया जैसे $\underset{\cdot}{6}$

(v) $\underset{\cdot}{6}$ = 5, 5 में से 3 घटाने पर 5 – 3 = 2

इस प्रकार 643 – 359 का अभीष्ट हल 284 है।

उदाहरण 7 घटाइए।

रुपये	पैसे
$\underset{\cdot}{8}\underset{\cdot}{1}$	$\underset{\cdot}{8}5$
– 24	96
56	89

संकेत

(i) 5 में से 6 नहीं घटता, अतः 6 का परममित्र 4 अंक 5 में जोड़ा तो योगफल 5 + 4 = 9 लिखिए।

(ii) 5 के पूर्वेण अंक 8 पर एक न्यून चिह्न लगाया जैसे $\underset{\cdot}{8}$

(iii) $\underset{\cdot}{8}$ = 7 में से 9 नहीं घटता अतः 9 का परममित्र 1 अंक जोड़ा, योगफल $\underset{\cdot}{8}$ + 1 = 8 लिखिए।

(iv) $\underset{\cdot}{8}$ के पूर्वेण अंक 1 पर एक न्यून चिह्न लगाना जैसे $\underset{\cdot}{1}$

(v) $\underset{\cdot}{1}$ = 0 में से 4 नहीं घटता अतः 4 का परममित्र अंक 6, अंक $\underset{\cdot}{1}$ में जोड़ा, योग $\underset{\cdot}{1}$ + 6 = 6 लिखिए।

(vi) $\underset{\cdot}{1}$ के पूर्वेण अंक 8 पर एक न्यून चिह्न लगाया जैसे $\underset{\cdot}{8}$

(vii) $\underset{\cdot}{8}$ = 7 में से 2 घटाया तो $\underset{\cdot}{8}$ – 2 = 5 लिखिए।

इस प्रकार 81 रु 25 पैसे में से 24 रु 96 पैसे का घटाने का अभीष्ट हल 96 रु 89 पैसे

उदाहरण 8 हल कीजिए।

किमी	मीटर
3̣7̣	6̣70
28	890
08	780

संकेत

(i) 0 में से 0 घटाने पर = 0

(ii) 7 में से 9 नहीं घटता, 9 का परममित्र 1, अंक 7 में जोड़ा अतः 7+1=8 लिखिए।

(iii) 7 के पूर्वेण अंक 6 पर एक न्यून चिह्न लगाया जैसे 6̣

(iv) 6̣ = 5 में से 8 नहीं घटता, 8 का परममित्र 2, अंक 6̣ में जोड़ा जैसे 6̣ + 2 = 7 लिखिए।

(v) 6̣ के पूर्वेण अंक 7 पर एक न्यून चिह्न लगाया जैसे 7̣

(vi) 7̣ = 6 में से 8 नहीं घटता, 8 का परममित्र अंक 2, 7̣ में 2 जोड़ा अतः 7̣ + 2 = 8 लिखिए।

(vii) 7̣ के पूर्वेण अंक 3 पर एक न्यून चिह्न लगाया जैसे 3̣

(viii) 3̣ = 2 अंक में से 2 घटाने पर 2 – 2 = 0 लिखिए।

प्रश्नावली 7.2

1. सूत्र एक न्यूनेन पूर्वेण के परम मित्र अंक की सहायता से व्यवकलन कीजिए।

(i)
$$\begin{array}{r} 75 \\ -\ 27 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

(ii)
$$\begin{array}{r} 84 \\ -\ 56 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

(iii)
$$\begin{array}{r} 435 \\ -\ 146 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

(iv)
$$\begin{array}{r} 840 \\ -\ 573 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

(v)

रुपये	पैसे
75	40
– 56	73

(vi)

मीटर	सेमी
134	40
– 65	85

(vii)

किग्रा	ग्राम
235	125
– 79	238

7.6 विचलन

चेतन दुकान पर एक माचिस का पूड़ा (पैकेट) लेने गया, दुकानदार ने उसका मूल्य 7 रुपये बताया, चेतन 10 रुपये देता है तो दुकानदार उसे 3 रुपये वापस लौटाता है। शिवा दुकान पर पहुँचता है एक नमक की थैली लेता है जिसकी कीमत 15 रुपये बताता है शिवा दुकानदार को 10 रुपये के साथ 5 रुपये का एक नोट देता है।

उक्त दोनों उदाहरण में हमने 10 के आधार पर लेन–देन हुआ।

कपिल ने दुकान से 200 मिलीलीटर दूध की थैली 8 रुपये में, दुर्गा ने एक श्रीफल/नारियल 12 रुपये में खरीदा। अतः कपिल को दुकानदार ने 2 रुपये लौटाए एवं दुर्गा ने 10 रुपये के साथ 2 रुपये अधिक दिए। यदि कपिल दोनों वस्तुएँ एक साथ खरीदता तो दुकानदार को कितने रुपये देता ? दुकानदार को 20 रुपये देता। वैदिक गणित में गणनाओं को सरल करने के लिए सामान्यतः 10 या 10 के गुणक अथवा 10 की घात को संख्या आधार मानकर गणनाएँ सरलता से की जाती हैं।

अतः आधार से कम या ज्यादा मान को ही विचलन कहा जाता है आधार से कम मान को ऋणात्मक विचलन व अधिक मान को धनात्मक विचलन कहते हैं।

करो और सीखो

संख्या 9	10 से कितना कम .... –1
संख्या 6	10 से विचलन..
संख्या 14	10 से कितना अधिक ....
संख्या 85	100 से कितना कम ....
संख्या 89	100 से कितना कम ....
संख्या 94	100 से विचलन ....
संख्या 102	100 से कितना अधिक .... +02
संख्या 105	100 से कितना अधिक ....
संख्या 113	100 से विचलन ....

7.7 विनकूलम

पूर्व में परममित्र अंकों का अध्ययन किया जिसमें दो अंकों का योग 10 के बराबर होता है तो अंक एक दूसरे के परममित्र अंक हैं। संख्या आधार 10 से कितना कम है। उसे ऋणात्मक रूप में दिखाने हेतु अंक के ऊपर रेखा बंधनी लगाते हैं जिन्हें विनकूलम कहते हैं। यहाँ पर 5 से बड़े अंक को छोटे अंकों में बदलने से गणनाएँ छोटी सरल और आसान हो जाती है। जैसे 8, अंक 10 से 2 कम है अतः

$8 = 10 - 2$

$= 10 + \bar{2}$ (-2 को विनकूलम में लिखते हैं $\bar{2}$)

$= 1\bar{2}$

उदाहरण 9 7 को विनकूलम संख्या में बदलिए।

$$7$$
$$= \dot{0}\bar{3}$$
$$= 1\bar{3}$$

संकेत

(i) 7 का परममित्र अंक 3 पर विनकूलम रेखा
(ii) 7 के पूर्वण अंक 0 पर एकाधिक चिह्न
(iii) $\dot{0} = 1$ लिखिए

उदाहरण 10 9 को विनकूलम संख्या में बदलिए।

$$9$$
$$= \dot{0}\bar{1}$$
$$= 1\bar{1}$$

संकेत

(i) 9 का परममित्र अंक 1 पर विनकूलम रेखा
(ii) 9 के पूर्वण अंक 0 पर एकाधिक चिह्न
(iii) $\dot{0} = 1$ लिखिए

उदाहरण 11 64 को विनकूलम संख्या में बदलिए।

$$6\ 4$$
$$= \dot{0}\ \bar{4}\ 4$$
$$= 1\bar{4}\ 4$$

संकेत

(i) अंक 4 को यथावत रखेंगे तथा 6 का परममित्र अंक 4 पर विनकूलम रेखा
(ii) 4 पूर्वण अंक 0 पर एकाधिक चिह्न
(iii) $\dot{0} = 1$ लिखिए

उदाहरण 12 079 को विनकूलम संख्या में बदलिए।

$$079$$
$$= \dot{7}\bar{1}$$
$$= 8\bar{1}$$
$$= \dot{0}\bar{2}\bar{1}$$
$$= 1\bar{2}\bar{1}$$

संकेत

(i) 9 के परममित्र अंक 1 विनकूलम रेखा
(ii) 9 के पूर्वण अंक 7 पर एकाधिक चिह्न = $\dot{7}$
(iii) $\dot{7} = 8$ अतः 8 का परममित्र अंक 2 पर विनकूलम रेखा तथा
(iv) 8 के पूर्वण अंक 0 पर एकाधिक चिह्न
(v) $\dot{0} = 1$ लिखिए

प्रश्नावली 7.3

1. सामान्य संख्या को विनकूलम संख्या में बदलिए।

(i) 8 (ii) 27

(iii) 82 (iv) 78 (v) 96

7.7.1 विनकूलम संख्या को सामान्य संख्या में बदलना

(i) विनकूलम को सामान्य संख्या में बदलने के लिए विनकूलम अंक को धनात्मक मान लीजिए।

(ii) इस अंक (माने गए) का परम मित्र अंक लिखिए।

(iii) विनकूलम अंक के पूर्वेण अंक पर एक न्यून चिह्न लगाइए।

(iv) यदि विनकूलम संख्या में तीन अंक हैं तो दहाई अंक को सामान्य में बदलने के बाद इकाई अंक को बदलेंगे।

उदाहरण 13 $2\bar{4}$ को सामान्य संख्या में बदलिए।

$2\bar{4}$

$\underset{\cdot}{2}6$

16

संकेत

(i) $\bar{4}$ के धनात्मक मान 4 का परम मित्र अंक 6 लिखिए।

(ii) $\bar{4}$ के पूर्वेण अंक 2 पर एक न्यून चिह्न लगाइए जैसे $\underset{\cdot}{2}$

(iii) $\underset{\cdot}{2} = 1$ लिखिए

उदाहरण 14 $5\,\bar{3}\,\bar{2}$ को सामान्य संख्या में बदलिए।

$5\ \bar{3}\ \bar{2}$

$= \underset{\cdot}{5}\ 7\ \bar{2}$

$= 4\ 7\ \bar{2}$

$= 4\ \underset{\cdot}{7}\ 8$

$= 4\ 6\ 8$

संकेत

(i) दहाई स्थान के $\bar{3}$ के धनात्मक मान 3 का परम मित्र अंक 7 लिखिए।

(ii) $\bar{3}$ के पूर्वेण अंक 5 पर एक न्यून चिह्न लगाइए जैसे $\underset{\cdot}{5} = 4$

(iii) इकाई के स्थान पर $\bar{2}$ के धनात्मक मान 2 का परम मित्र अंक 8 लिखिए।

(iv) $\bar{2}$ के पूर्वेण अंक 7 पर एक न्यून चिह्न $\underset{\cdot}{7}$ लगाइए।

(v) $\underset{\cdot}{7} = 6$ लिखिए।

प्रश्नावली 7.4

1. विनकूलम संख्या को सामान्य संख्या में बदलिए।

(i) $3\,\bar{5}$ (ii) $5\,\bar{4}$ (iii) $13\bar{2}$ (iv) $5\,\bar{4}\,\bar{2}$ (v) $6\,\bar{2}\,3$

7.7.2 विनकूलम प्रयोग से योग संक्रिया

विनकूलम संख्याओं के योग से भी सामान्य संख्याओं की भांति ही योग किया जाता है। इकाई स्थान वाले अंकों का योग इकाई स्थान पर तथा दहाई स्थान वाले अंकों का योग दहाई स्थान पर लिखा जाता है।

निम्नांकित योग को कर के देखते हैं।

(i) $\bar{2} + \bar{3} = \bar{5}$

(ii) $\bar{1}\,\bar{3} + \bar{2}\,\bar{4} = \bar{3}\,\bar{7}$

(iii) $2 + \bar{2} = 0$

(iv) $8 + \bar{3} = 5 + 3 + \bar{3} = 5$ ($8 = 5 + 3$ लिखा एवं $3 + \bar{3} = 0$ होता है।)

(v) $\bar{6} + 2 = \bar{4} + \bar{2} + 2 = \bar{4}$

उपर्युक्त उदाहरण में हम देखते हैं कि विनकूलम अंकों का योग विनकूलम अंक होता है

संख्या और उसकी विनकूलम संख्या का योग शून्य प्राप्त हुआ। सामान्य संख्या या विनकूलम में से जो संख्या बड़ी है, योग उसी संख्या का प्राप्त हुआ।

उदाहरण 15 विनकूलम से योग कीजिए

$$\begin{array}{r} \bar{1}2 \\ 1\bar{2} \\ \hline 00 \\ \hline \end{array}$$

संकेत

(i) इकाई के अंक में $2 + \bar{2} = 0$

(ii) दहाई के अंक में $\bar{1} + 1 = 0$

उदाहरण 16 विनकूलम से योग कीजिए

$$\begin{array}{rr} & 6\bar{4} \\ & \bar{3}\bar{2} \\ \hline & 3\bar{6} \\ \hline = & \underset{\cdot}{3}4 \\ = & 24 \end{array}$$

संकेत

(i) इकाई के अंक में $\bar{4} + \bar{2} = \bar{6}$

(ii) दहाई के अंक में $6 + \bar{3} = 3$

(iii) $3\bar{6}$ को सामान्य संख्या में बदलना

(iv) $\bar{6}$ का परममित्र 4 एवं अंक 3 पर एक न्यून चिह्न है जैस $\underset{\cdot}{3}$

(v) $\underset{\cdot}{3} = 2$ लिखिए

प्रश्नावली 7.5

1. विनकूलम संख्या का योगफल ज्ञात कीजिए।

(i) $\begin{array}{r} 6\,\bar{3} \\ \bar{4}\,\bar{3} \\ \hline \\ \hline \end{array}$ (ii) $\begin{array}{r} 7\,3 \\ \bar{4}\,\bar{2} \\ \hline \\ \hline \end{array}$ (iii) $\begin{array}{r} 8\,\bar{2} \\ \bar{5}\,\bar{5} \\ \hline \\ \hline \end{array}$ (iv) $\begin{array}{r} 8\,\bar{9} \\ \bar{7}\,8 \\ \hline \\ \hline \end{array}$ (v) $\begin{array}{r} 5\,\bar{3} \\ \bar{2}\,1 \\ \hline \\ \hline \end{array}$

7.7.3 विनकूलम प्रयोग से व्यवकलन संक्रिया

विनकूलम संख्याओं के प्रयोग से सामान्य संख्याओं की भांति ही व्यवकलन किया जाता है इकाई स्थान वाले अंकों का व्यवकलन इकाई स्थान पर तथा दहाई स्थान वाले अंकों का व्यवकलन दहाई स्थान पर लिखा जाता है। साथ ही जो संख्या घटती है उसके प्रत्येक अंक पर विनकूलम चिहृन लगा कर उसे ऊपर की संख्या में जोड़ देते हैं।

निम्नांकित व्यवकलनों को कर के देखते हैं।

(i) $\bar{2} - 3 = \bar{2} + \bar{3} = \bar{5}$

(ii) $\bar{1}\,\bar{3} - 2\,4 = \bar{1}\,\bar{3} + \bar{2}\,\bar{4} = \bar{3}\,\bar{7}$

उपर्युक्त उदाहरण में हम देखते हैं कि विनकूलम अंकों का व्यवकलन विनकूलम अंक होता है।

उदाहरण 17 83 में से 45 घटाइए।

$$\begin{array}{r} 83 \\ -\ 45 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 83 \\ +\ \bar{4}\bar{5} \\ \hline 4\bar{2} \\ \hline \end{array}$$

$= \underset{\cdot}{4}\,8$

$= 38$

संकेत

(i) – 45 का + चिहृन में बदलने पर 4 व 5 के ऊपर विनकूलम रेखा खींचिए।

(ii) इकाई में $3 + \bar{5} = \bar{2}$ लिखिए

(iii) दहाई स्थान पर $8 + \bar{4} = 4$ लिखिए

(iv) योगफल $4\bar{2}$ को सामान्य संख्या में बदलिए।

उदाहरण 18 793 – 426 घटाइए।

$$\begin{array}{r} 793 \\ -\ 426 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7\,9\,3 \\ +\,\bar{4}\,\bar{2}\,\bar{6} \\ \hline 3\,7\,\bar{3} \\ \hline \end{array}$$

$= 3\underset{\cdot}{7}7$

$= 367$

संकेत

(i) – 426 को + चिहृन में बदलने पर अंक 4, 2 व 6 पर विनकूलम रेखा खींचिए।

(ii) इकाई में $3 + \bar{6} = \bar{3}$ लिखिए

(iii) दहाई के स्थान पर $9 + \bar{2} = \underset{\cdot}{7}$ लिखिए।

(iv) सैंकड़े के स्थान पर $7 + \bar{4} = 3$ लिखिए।

(v) $37\bar{3}$ को सामान्य संख्या में बदलिए।

प्रश्नावली 7.6

1. विनकूलम प्रयोग से व्यवकलन ज्ञात कीजिए।

(i) $\begin{array}{r} 96 \\ -\ 49 \\ \hline \\ \hline \end{array}$ (ii) $\begin{array}{r} 932 \\ -\ 245 \\ \hline \\ \hline \end{array}$ (iii) $\begin{array}{r} 952 \\ -788 \\ \hline \\ \hline \end{array}$

(iv) $\begin{array}{r} 834 \\ -\ 547 \\ \hline \\ \hline \end{array}$

7.8 पहाड़े लिखने की वैदिक गणित पद्धति (विनकूलम से)

विधि : – (i) जिस संख्या का पहाड़ा लिखना है उसे विनकूलम में बदलिए।
(ii) विनकूलम संख्या के दहाई व इकाई अंकों को पहचानिए।
(iii) निर्देशानुसार विनकूलम अंकों में क्रमशः जोड़ते जाइए।

उदाहरण 19 9 का पहाड़ा लिखिए।
09 को विनकूलम $9 = 10 - 1 = 1\bar{1}$
यहाँ $1\bar{1}$ में इकाई का अंक $\bar{1}$ यानि एक कम होता है एवं दहाई का अंक एक अधिक होता है।

$$\begin{array}{ccc}
 & 09 & \\
 & 1\bar{1} & \\
\hline
 & 09 & \\
(0+1) \rightarrow & 18 & \leftarrow (9-1) \\
(1+1) \rightarrow & 27 & \leftarrow (8-1) \\
(2+1) \rightarrow & 36 & \leftarrow (7-1) \\
(3+1) \rightarrow & 45 & \leftarrow (6-1) \\
 & 54 & \\
 & 63 & \\
 & 72 & \\
 & 81 & \\
 & 90 & \\
\end{array}$$

ऐसा करते जाएँगे

उदाहरण 20 8 का पहाड़ा बनाइए।

08 का विनकूलम 1 $\bar{2}$ होता है अतः यहाँ इकाई का अंक 2 कम होता जाएगा एवं दहाई का अंक 1 अधिक होता जाएगा।

$$\begin{array}{lcl}
 & 08 & \\
 & 1\bar{2} & \\
\hline
 & 08 & \\
(0+1) \rightarrow & 16 & \leftarrow (8-2) \\
(1+1) \rightarrow & 24 & \leftarrow (6-2) \\
(2+1) \rightarrow & 32 & \leftarrow (4-2) \\
(3+1) \rightarrow & 40 & \leftarrow (2-2) \\
(4+1) \rightarrow & 5\bar{2} = 48 & (0-2=\bar{2}) \\
(4+1) \rightarrow & 56 & \leftarrow (8-2=6) \\
 & 64 & \\
 & 72 & \\
 & 80 &
\end{array}$$

5 $\bar{2}$ का सामान्य रूप 4 8 होता है।

इसी तरह आगे भी

अब हम इस तरह कई संख्याओं के पहाड़े बना सकते हैं।

करो और सीखो

निम्नलिखित संख्याओं के पहाड़े बनाइए।

(i) 99 (ii) 98 (iii) 89 (vi) 999

7.9 गुणन संक्रिया (सूत्र निखिलम् द्वारा) जब आधार 10 व 100 हो–

पूर्व में हमने विचलन को समझा था जो कि आधार 10 या 10 की घात के रूप में लिया गया यदि संख्या में से आधार को घटाने पर विचलन ज्ञात किया, वह विचलन धनात्मक व ऋणात्मक प्राप्त होता है।

आओ अब सूत्र निखिलम् से गुणन संक्रिया की विधि को समझते हैं–

1. जिन दो संख्याओं का गुणन करना है उन संख्याओं का निकटतम आधार 10 या 100 लेवें।
2. आधार के सापेक्ष विचलनों को संख्याओं के सामने लिखिए।
3. तिरछी रेखा से गुणनफल स्थान के दो भाग कीजिए।
4. दाहिने पक्ष में विचलनों का गुणनफल कीजिए।
5. बाएँ पक्ष में कोई एक संख्या + ली गई संख्या के अतिरिक्त दूसरी संख्या का विचलन लीजिए।
6. दाहिने पक्ष में विचलनों के गुणनफल में–

   (i) यदि आधार 10 है तो दाहिने पक्ष में एक अंक रहेगा। यदि दो अंक हैं तो दहाई का अंक बाएँ पक्ष में जोड़िए।

(ii) आधार 100 है तो गुणनफल में दो अंक रहेंगे। यदि एक अंक हो तो उससे पूर्व में 0 और लिखो।

7. यदि विचलनों का गुणनफल ऋणात्मक हो तो बाए पक्ष से एक अंक (जो कि आधार होगा) ले कर इसे धनात्मक रूप में बदलिए।

आओ निखिलम् सूत्र से गुणन संक्रिया करें–

उदाहरण 21

13 x 12

संख्या	विचलन
13	+ 3
x 12	+ 2
= (13 +2) या (12 + 3)	(+3 x +2)

= 15 / 6

= 156

संकेत

1. गुणन संख्या 13 = 10 + 3 व जो कि 10 से 3 अधिक व 12 = 10 + 2 जो कि 10 से 2 अधिक है जिसे विचलन के रूप में +2 व +3 लिखते हैं।
2. संख्या को ऊपर–नीचे एवं उनके विचलन उनके सामने लिखिए।
3. विचलनों का गुणनफल +3 x +2 = + 6 को तिरछी रेखा के दाहिनी ओर लिखेंगे।
4. बाएँ पक्ष में लिखिए 13 +2 या 12 + 3 = 15
5. तिरछी रेखा को हटाने पर गुणनफल 156

उदाहरण 22

15 x 17

संख्या	विचलन
15	+ 5
x 17	+ 7
= (15 + 7) या (17 + 5)	(+ 5 x + 7)

= 22 / 35

= 22 / 5 3

= 25 / 5

= 255

संकेत

1. गुणन संख्या 15 = 10 + 5 व जो कि 10 से 5 अधिक व 17 = 10 + 7 जो कि 10 से 7 अधिक है जिसे विचलन के रूप में + 5 व + 7 लिखते हैं।
2. संख्या को ऊपर–नीचे एवं उनके विचलन उनके सामने लिखिए।
3. विचलनों का गुणनफल +5 x +7 = +35 को तिरछी रेखा के दाहिनी ओर लिखेंगे।
4. बाएँ पक्ष में लिखिए 15 + 7 या 17 + 5 = 22
5. दाहिने पक्ष में एक अंक रहेगा क्योंकि आधार 10 में एक शून्य है।
6. विचलन का गुणनफल 35 में इकाई का अंक 5 दाहिने पक्ष में 3 बाएँ पक्ष में (आधार 10 के रूप में) जोड़िए।
7. बाएँ पक्ष में 22 + 3 = 25 होगा।
8. तिरछी रेखा को हटाने पर गुणनफल 255

उदाहरण 23

8 X 7

संख्या	विचलन
8	– 2
x 7	– 3
= (8 – 3) या (7 – 2) /	(–2 X – 3)

= 5 / 6

= 56

संकेत

1. गुणन संख्या 8 = 10 – 2 व जो कि 10 से 2 कम व 7 = 10 – 3 जो कि 10 से 3 कम है जिसे विचलन के रूप में – 2 व – 3 लिखते हैं।
2. संख्या को ऊपर–नीचे एवं उनके विचलन उनके सामने लिखिए।
3. विचलनों का गुणनफल –2 X – 3 = + 6 को तिरछी रेखा के दाहिनी ओर लिखेंगे।
4. बाएँ पक्ष में लिखिए 8 – 3 या 7 –2 = 5
5. तिरछी रेखा को हटाने पर गुणनफल 56

उदाहरण 24

6 X 9

संख्या	विचलन
6	– 4
x 9	– 1
= (6 – 1) या (9 – 4) /	(–4 X – 1)

= 5 / 4

= 54

संकेत

1. गुणन संख्या 6 = 10 – 4 व जो कि 10 से 4 कम व 9 = 10 – 1 जो कि 10 से 1 कम है जिसे विचलन के रूप में – 4 व – 1 लिखते हैं।
2. संख्या को ऊपर–नीचे एवं उनके विचलन उनके सामने लिखिए ।
3. विचलनों का गुणनफल – 4 X – 1 = + 4 को तिरछी रेखा के दाहिनी ओर लिखेंगे।
4. बाएँ पक्ष में लिखिए 6 – 1 या 9 –4 = 5
5. तिरछी रेखा को हटाने पर गुणनफल 54

उदाहरण 25

6 X 7

संख्या	विचलन
6	– 4
x 7	– 3
= (6 – 3) या (7 – 4) /	(–4 X – 3)

= 3 / 12

= 3 / $\overset{1}{\not{1}}$ 2

= 4 / 2

= 42

संकेत

1. गुणन संख्या 6 = 10 – 4 व जो कि 10 से 4 कम व 7 = 10 – 3 जो कि 10 से 3 कम है जिसे विचलन के रूप में – 4 व – 3 लिखते हैं।
2. संख्या को ऊपर–नीचे एवं उनके विचलन उनके सामने लिखिए।
3. विचलनों का गुणनफल– 4 X – 3 = + 12 को तिरछी रेखा के दाहिनी ओर लिखेंगे।
4. बाएँ पक्ष में 6 – 1 या 9 –4 = 5 लिखिए
5. दाहिने पक्ष में एक अंक रहेगा क्योंकि आधार 10 में एक शून्य है।
6. विचलन का गुणनफल 12 में इकाई का अंक 2 दाहिने पक्ष में 1 बाए पक्ष में (आधार 10 के रूप में) जोड़िए।
7. बाएँ पक्ष में 3 जो कि 30 दहाई में एक दहाई जोड़ने पर।
8. बाएँ पक्ष में 3 + 1 = 4 होगा।
9. तिरछी रेखा को हटाने पर गुणनफल 42

उदाहरण 26

8 X 13

संख्या	विचलन
8	– 2
x 13	+ 3
= (8 + 3) या (13 – 2) /	(–2 X +3)

= 11 / – 6

= 10 / $\overset{}{1}$ –6

= 10 / 10 – 6

= 10 / 4

= 104

संकेत

1. गुणन संख्या 8 = 10 – 2 व जो कि 10 से 2 कम व 13 = 13 – 10 जो कि 10 से 3 अधिक है जिसे विचलन के रूप में – 2 व + 3 लिखते हैं।
2. संख्या को ऊपर–नीचे एवं उनके विचलन उनके सामने लिखिए।
3. विचलनों का गुणनफल – 2 X + 3 = – 6 को तिरछी रेखा के दाहिनी ओर लिखेंगे।
4. बाएँ पक्ष में 8 + 3 या 13 –2 = 11 लिखिए।
5. दाहिने पक्ष में विचलन का गुणनफल ऋणात्मक है इसे धनात्मक में बदलने के लिए बाएँ पक्ष से 1 को 1X10 = 10 के रूप में दाहिने पक्ष में ले जाइए।
6. बाएँ पक्ष में 11 – 1 = 10 शेष बचेंगे।
7. दाहिने पक्ष में 10 – 6 = 4
8. तिरछी रेखा को हटाने पर गुणनफल 104

उदाहरण 27

7 X 16

संख्या	विचलन
7	− 3
x 16	+ 6
= (7 + 6) या (16 − 3) /	(−3 X +6)

= 13 /− 18

= 11 /$\cancel{1}$ 2 −18

= 11 / 20 − 18

= 11 / 2

= 112

संकेत

1. गुणन संख्या 7 = 10 − 3 व जो कि 10 से 3 कम व 16 = 16 − 10 जो कि 10 से 6 अधिक है जिसे विचलन के रूप में − 3 व + 6 लिखते हैं।
2. संख्या को ऊपर–नीचे एवं उनके विचलन उनके सामने लिखिए।
3. विचलनों का गुणनफल (− 3) X + (6) = − 18 को तिरछी रेखा के दाहिनी ओर लिखें।
4. बाएँ पक्ष में 7 + 6 या 16 −3 = 13 लिखिए
5. दाहिने पक्ष में विचलन का गुणनफल ऋणात्मक है इसे धनात्मक में बदलने के लिए बाएँ पक्ष से 2 को 2X 10 = 20 के रूप में दाहिने पक्ष में ले जाइए।
6. बाएँ पक्ष में 13 − 2 = 11 शेष बचेंगे।
7. दाहिने पक्ष में 20 − 18 = 2 (आधार 10 में एक शून्य है अतः एक अंक)
8. तिरछी रेखा को हटाने पर गुणनफल 112

उदाहरण 28

जब आधार 100 हो तब निखिलम् से गुणन संक्रिया

103 X 104

संख्या	विचलन
103	+03
x 104	+04
= (103 + 04) या (104 +03) /	(+03 X +04)

= 107 / 12

= 10712

संकेत

1. गुणन संख्या 103 = 103 − 100 व जो कि 100 से 3 अधिक व 104 = 104 − 100 जो कि 100 से 4 अधिक है जिसे विचलन के रूप में +03 व + 04 लिखते हैं।
2. संख्या को ऊपर–नीचे एवं उनके विचलन उनके सामने लिखिए।
3. विचलनों का गुणनफल +03 X + 04 = +12 को तिरछी रेखा के दाहिनी ओर लिखें।
4. बाएँ पक्ष में 103 + 04 या 104 +03 = 107 लिखिए।
5. दाहिने पक्ष में विचलन का गुणनफल +12 है आधार 100 में दो शून्य हैं अतः दाहिने पक्ष में दो अंक रहेंगे।
6. तिरछी रेखा को हटाने पर गुणनफल 10712

उदाहरण 29

101 X 108

संख्या	विचलन
101	+01
x 108	+08

= (101 + 08) या (108 +01) / (+01 X +08)

= 109 / 08

= 10908

संकेत

1. गुणन संख्या 101 = 101 – 100 व जो कि 100 से 1 अधिक व 108 = 108 – 100 जो कि 100 से 8 अधिक है जिसे विचलन के रूप में +01 व + 08 लिखते हैं।
2. संख्या को ऊपर–नीचे एवं उनके विचलन उनके सामने लिखिए।
3. विचलनों का गुणनफल +01 X + 08 = +8 को तिरछी रेखा के दाहिनी ओर लिखिए।
4. बाएँ पक्ष में 101 + 08 या 108 +01 = 109 लिखिए
5. दाहिने पक्ष में विचलन का गुणनफल +8 है (आधार 100 में दो शून्य हैं अतः दाहिने पक्ष में दो अंक रहेंगे।) अतः +8 की जगह 08 लिखिए।
6. तिरछी रेखा को हटाने पर गुणनफल 10908

उदाहरण 30

92 X 87

संख्या	विचलन
92	–08
x 87	–13

= (92 – 13) या (87 – 08) / (– 08 X –13)

= 79 / 104

= 79 / $\overset{1}{0}$4

= 80 / 04

= 8004

संकेत

1. गुणन संख्या 92 = 100 – 92 व जो कि 100 से 8 कम व 87 = 100 – 87 जो कि 100 से 13 कम है जिसे विचलन के रूप में –08 व –13 लिखते हैं।
2. संख्या को ऊपर–नीचे एवं उनके विचलन उनके सामने लिखिए।
3. विचलनों का गुणनफल –08 X –13 = +104 को तिरछी रेखा के दाहिनी ओर लिखिए।
4. बाएँ पक्ष में लिखिए 92 – 13 या 87 – 08 = 79
5. दाहिने पक्ष में विचलन का गुणनफल 104 है (आधार 100 में दो शून्य हैं अतः दाहिने पक्ष में दो अंक रहेंगे।) अतः 04 रहेगा। 1 को बाएँ पक्ष में जोड़ेंगे।
6. अब बाएँ पक्ष में 79 + 1 = 80
7. तिरछी रेखा को हटाने पर गुणनफल 8004

प्रश्नावली 7.7

1. गुणा कीजिए (सूत्र निखिलम् से)।

(i) 12 x 13
(ii) 11 x 19
(iii) 13 x 15
(iv) 8 x 7
(v) 6 x 9
(vi) 8 x 12
(vii) 102 x 104
(viii) 106 x 107
(ix) 112 x 109
(x) 91 x 98
(xi) 96 x 94
(xii) 98 x 104
(xiii) 85 x 93

7.10 निखिलम् विधि से भाग संक्रिया

पूर्व में हमने निखिलम् से गुणा किया जो सामान्य विधि से सरल है। इसी प्रकार निखिलम् विधि से भाग संक्रिया भी बड़ी सरल है।

बार–बार घटाने की विधि जब तक दोहराया जाता है कि जब तक घटना बंद ना हो जाए अथवा शून्य ना आ जाए। यह प्रक्रिया कितनी बार की गई? प्रक्रिया लम्बी हो जाती है। सामान्यतः आज केवल पहाड़े याद करवा करके एक निश्चित विधि से भाग के प्रश्न हल किए जाते हैं। परंतु वैदिक गणित में गुणन संक्रिया की तरह भाग संक्रिया में भी 10 व 100 को आधार मान कर बड़ी सरलता से दिया जा सकता है।

विधि

1. भाजकता का निकटतम आधार निश्चित कर उसकी पूरक संख्या (परममित्र) ज्ञात करेंगे।
2. भाग संक्रिया में निर्धारित स्थान पर दो खड़ी रेखा द्वारा तीन खंडों में बाँटिए।
3. बाईं ओर के प्रथम खंड में भाजक व उसके नीचे उसकी पूरक संख्या लिखिए।
4. आधार में जितने शून्य हैं , भाज्य के उतने ही अन्तिम अंक तीसरे खंड में लिखिए।
5. भाज्य के शेष अंक मध्य खंड में लिखेंगे।

उदाहरण 31

$124 \div 9$

यहाँ भाजक = 9 का निकटतम आधार = 10

पूरक संख्या = 1

आधार 10 में एक शून्य अतः तीसरे खंड में भाजक के अंक 4 को लिखेंगे।

मध्य खंड में भाज्य का अंक 1 2

प्रथम खंड		मध्य खंड		तृतीय खंड
संख्या	9	1	2	4
पूरक अंक	1		1	–
				3
	योग	1	3	7

संकेत

1. मध्य खंड का 1 नीचे योग के स्थान पर लिखते हैं।
2. यह अंक 1 X पूरक संख्या 1 = 1 लिखें 2 के नीचे व तृतीय खण्ड में – लिखते हैं।
3. योग 2 + 1 = 3 नीचे लिखे योग के स्थान पर
4. पुनः गुणनफल 3 X पूरक संख्या 1 = 3
5. गुणनफल 3 लिखें तृतीय खण्ड में 4 के नीचे, योग 4 + 3 = 7 लिखें ।
6. अतः भाजक = 9 भागफल = 13 शेषफल = 7

इसी प्रकार **आधार 100** की संख्या लेकर आओ अभ्यास करें।

उदाहरण 32 $123 \div 98$

भाजक = 98 पूरक अंक = 100 – 98

= 02

पुनः तीन खण्डों में बाँटिए

प्रथम खंड			मध्य खंड	तृतीय खंड	
संख्या	9	8	1	2	3
पूरक अंक	0	2			

आधार संख्या में दो शून्य हैं अतः शेष भी अधिकतम दो अंकों का होगा। इसलिए दाईं ओर से 2 अंक छोड़ कर एक सीधी रेखा खींच ली।

बाईं ओर भी एक सीधी रेखा खींची। इस रेखा की बाईं ओर भाजक 98 लिखकर उसके नीचे पूरक संख्या (अंक) 02 लिखी अब आगे क्रिया इस प्रकार है।

प्रथम खंड			मध्य खंड	तृतीय खंड	
संख्या	9	8	1	2	3
पूरक अंक	0	2	↓	0	2
			1	2	5

सबसे पहले भाज्य को मध्य खण्ड का अंक 1 नीचे लिखते हैं इसके पश्चात इस अंक को पूरक संख्या से गुणा करके भाजक के अगले अंकों के नीचे लिखते हैं। अब दाहिनी ओर के अंकों को जोड़ देते हैं।

रेखा के मध्य खण्ड भागफल है और तृतीय खण्ड शेषफल है। यह प्रक्रिया तब तक दोहराते हैं जब तक कि तृतीय खण्ड में भाज्य से छोटी संख्या न आ जाए।

विशेषः इस विधि की विशेषता है कि इसमें घटाना नहीं पड़ता है। जोड़ कर ही उत्तर निकालते हैं।

उदाहरण 33 $1004 \div 87$

प्रथम खंड			मध्य खंड		तृतीय खंड	
संख्या	8	7	1	0	0	4
पूरक अंक	1	3	↓	1	3	—
				↓	1	3
			1	1	4	7

संकेत

1. आधार 100 हैं अतः दाईं ओर दो अंक लिखे गए हैं।
2. आधार पर 87 की पूरक संख्या 13 है।
3. नीचे 1 लिखा और 1 का गुणा पूरक संख्या करके लिखा ।
4. योग क्रिया पुनः नीचे 1 प्राप्त हुआ अतः 1 का पुनः पूरक संख्या से गुण्य करके लिखा।
5. योग क्रिया तो भागफल 11 और शेषफल 47 प्राप्त हुआ।

उदाहरण 34 199 ÷ 97

प्रथम खंड			मध्य खंड	तृतीय खंड	
संख्या	9	7	1	9	9
पूरक अंक	0	3	↓	0	3
			1	10	2
				0	2
				1	
			1	0	3
			2	0	5

संकेत

1. आधार 100 हैं अतः दाईं ओर दो अंक लिखे गए हैं।
2. आधार पर 97 की पूरक संख्या 02 है।
3. नीचे 1 लिखा और 1 का गुणा पूरक संख्या करके लिखा ।
4. शेषफल 102 आया परन्तु तृतीय खण्ड में दो अंक रहेंगे (क्योंकि आधार = 100) अतः 102 में 02 तृतीय खण्ड में 1 को मध्यखण्ड में जोड़ेंगे तथा 1 को पूरक संख्या से गुणा करके तृतीय खण्ड में लिखेंगे और मध्यखण्ड, तृतीय खण्ड का योग करके लिखेंगे।
5. अतः भागफल 2 व शेषफल 5 प्राप्त हुआ।

उदाहरण 35 2345 ÷ 78

प्रथम खंड			मध्य खंड			तृतीय खंड	
संख्या	7	8	2	3		4	5
पूरक अंक	2	2		4		4	–
			↓	↓	1	5	4
			2	7		3	9
					2		
				2		4	4
			2	9		8	3
				+1		−7	8
			3	0		0	5

संकेत

1. आधार 100 पर 78 की पूरक संख्या 22 है।
2. नीचे 2 लिखा उसका गुणा पूरक संख्या से किया और जोड़ने पर
3. नीचे 7 प्राप्त हुआ 7 का गुण्य पूरक संख्या से किया एवं जोड़ने पर, शेषफल में 239 प्राप्त हुआ।
4. 2 को भाग संख्या के नीचे लिखा जोड़ने पर भागफल 29 शेषफल 83 प्राप्त हुआ।
5. शेषफल 83 जो कि भाजक 78 से अधिक है अतः भागफल $= 29 + 1 = 30$

   शेषफल $= 83 - 78 = 5$ प्राप्त हुआ

प्रश्नावली 7.8

1. सूत्र निखिलम् से भाग कीजिए।

   (i) $124 \div 89$

   (ii) $406 \div 9$

   (iii) $298 \div 96$

   (iv) $1358 \div 113$

   (v) $1234 \div 112$

   (vi) $306 \div 8$

हमने सीखा

1. एकाधिकेन से तात्पर्य एक अधिक।
2. एक न्यूनेन से तात्पर्य एक कम।
3. एकाधिकेन पूर्वेण से तात्पर्य पूर्व से एक अधिक।
4. एक न्यूनेन पूर्वेण से तात्पर्य पूर्व से एक कम।
5. परममित्र अंक– जिन दो अंकों का योग 10 होता है वे अंक एक दूसरे के परम मित्र हैं।
6. विचलन = संख्या – आधार
7. विनकूलम – ऋणात्मक संख्याओं को धनात्मक रूप में लिखना।
8. संख्या और उसकी विनकूलम संख्या का योग शून्य प्राप्त होता।
9. दो विनकूलम अंकों का योग विनकूलम होता है।
10. विनकूलम प्रयोग से व्यवकलन करना सरलतम है।
11. विनकूलम प्रयोग से सहायता से पहाड़े लिखना।
12. सूत्र निखिलम द्वारा गुणन तथा भाग संक्रिया करना।