গণিত প্রকাশ

দশম শ্রেণি

এই পুস্তকটি পশ্চিমবঙ্গ সরকারের আর্থিক আনুকূল্যে
কেবলমাত্র সরকারি, সরকার পোষিত ও সরকারি অনুদানপ্রাপ্ত
বিদ্যালয়ের ছাত্র-ছাত্রীদের বিনামূল্যে বিতরণের জন্য।

পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা পর্ষদ

প্রথম সংস্করণ: ডিসেম্বর, 2015
দ্বিতীয় সংস্করণ: ডিসেম্বর, 2016
তৃতীয় সংস্করণ: ডিসেম্বর, 2017

প্রকাশক :
অধ্যাপিকা নবনীতা চ্যাটার্জি
সচিব, পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা পর্ষদ
77/2, পার্ক স্ট্রিট, কলকাতা-700 016

মুদ্রক :
ওয়েস্ট বেঙ্গল টেক্সট বুক কর্পোরেশন লিমিটেড
(পশ্চিমবঙ্গ সরকারের উদ্যোগ)
কলকাতা-৭০০ ০৫৬

सत्यमेव जयते

ভারতের সংবিধান

প্রস্তাবনা

আমরা, ভারতের জনগণ, ভারতকে একটি **সার্বভৌম সমাজতান্ত্রিক ধর্মনিরপেক্ষ গণতান্ত্রিক সাধারণতন্ত্র** রূপে গড়ে তুলতে সত্যনিষ্ঠার সঙ্গে শপথ গ্রহণ করছি এবং তার সকল নাগরিক যাতে: সামাজিক, অর্থনৈতিক ও রাজনৈতিক **ন্যায়বিচার**; চিন্তা, মতপ্রকাশ, বিশ্বাস, ধর্ম এবং উপাসনার **স্বাধীনতা**; সামাজিক প্রতিষ্ঠা অর্জন ও সুযোগের **সমতা** প্রতিষ্ঠা করতে পারে এবং তাদের সকলের মধ্যে ব্যক্তি-সম্ভ্রম ও জাতীয় ঐক্য এবং সংহতি সুনিশ্চিত করে **সৌভ্রাতৃত্ব** গড়ে তুলতে; **আমাদের গণপরিষদে**, আজ, 1949 সালের 26 নভেম্বর, **এতদ্দ্বারা এই সংবিধান গ্রহণ করছি, বিধিবদ্ধ করছি** এবং **নিজেদের অর্পণ করছি**।

THE CONSTITUTION OF INDIA

PREAMBLE

WE, THE PEOPLE OF INDIA, having solemnly resolved to constitute India into a SOVEREIGN SOCIALIST SECULAR DEMOCRATIC REPUBLIC and to secure to all its citizens : JUSTICE, social, economic and political; LIBERTY of thought, expression, belief, faith and worship; EQUALITY of status and of opportunity and to promote among them all – FRATERNITY assuring the dignity of the individual and the unity and integrity of the Nation; IN OUR CONSTITUENT ASSEMBLY this twenty-sixth day of November 1949, do HEREBY ADOPT, ENACT AND GIVE TO OURSELVES THIS CONSTITUTION.

ভূমিকা

জাতীয় পাঠক্রমের রূপরেখা ২০০৫ এবং শিক্ষা অধিকার আইন ২০০৯ দলিলদুটিকে গুরুত্ব দিয়ে ২০১১ সালে পশ্চিমবঙ্গ সরকার কর্তৃক গঠিত ‘বিশেষজ্ঞ কমিটি’কে বিদ্যালয়স্তরের পাঠক্রম, পাঠ্যসূচি এবং পাঠ্যপুস্তকগুলির সমীক্ষা ও পুনর্বিবেচনার দায়িত্ব দেওয়া হয়েছিল। এই কমিটির বিষয় বিশেষজ্ঞদের আন্তরিক চেষ্টা ও নিরলস পরিশ্রমের ফসল হলো এই বইটি।

এই গণিত বইটি দশম শ্রেণির পাঠ্যসূচি অনুযায়ী প্রণয়ন করা হয়েছে ও নামকরণ করা হয়েছে ‘গণিত প্রকাশ’। বইটিতে গণিতকে ভাষা হিসাবে চর্চা করার প্রতিষ্ঠিত ধারা অনুসৃত হয়েছে যাতে করে গণিতের ভাষায় ভাষান্তরিত সমস্যাটি দেখে শিক্ষার্থীরা বুঝতে পারে সংশ্লিষ্ট সমস্যায় কোন গাণিতিক প্রক্রিয়া, সূত্র বা পদ্ধতি প্রয়োগের প্রয়োজন।

পাটিগণিত, বীজগণিত, জ্যামিতি, পরিমিতি, ত্রিকোণমিতি ও রাশিবিজ্ঞান বিষয়গুলিকে সুন্দর ও সহজভাষায় এমনভাবে বর্ণনা করা হয়েছে যাতে করে সমস্ত শিক্ষার্থী ভালোভাবে বিষয়টি আয়ত্ত করতে পারে। গণিতকে শিক্ষার্থীর ব্যক্তি জীবন, পরিবার ও সমাজের নানা সমস্যা সমাধানের সফল হাতিয়ার হিসাবে প্রতিষ্ঠিত করার চেষ্টাকে অধিকতর ভালোভাবে প্রসারিত করা হয়েছে।

প্রথিতযশা শিক্ষক, শিক্ষাপ্রেমী শিক্ষাবিদ, বিষয় বিশেষজ্ঞ ও অলংকরণের জন্য বিখ্যাত শিল্পীবৃন্দ — যাঁদের ঐকান্তিক চেষ্টায় ও নিরলস পরিশ্রমের ফলে এই সর্বাঙ্গসুন্দর গুরুত্বপূর্ণ বইটির প্রকাশ সম্ভব হয়েছে তাঁদের সকলকে পর্ষদের পক্ষ থেকে আন্তরিক ধন্যবাদ ও কৃতজ্ঞতা জানাই।

এই প্রকল্পকে কার্যকরী করার জন্য মাননীয় শিক্ষামন্ত্রী ড. পার্থ চ্যাটার্জী, পশ্চিমবঙ্গ সরকার; পশ্চিমবঙ্গ সরকারের বিদ্যালয় শিক্ষাদপ্তর; পশ্চিমবঙ্গ বিদ্যালয় শিক্ষা অধিকার এবং পশ্চিমবঙ্গ সর্বশিক্ষা মিশন সাহায্য করে পর্ষদকে কৃতজ্ঞতাপাশে আবদ্ধ করেছেন।

আশা করি পর্ষদ প্রকাশিত এই ‘গণিত প্রকাশ’ বইটি শিক্ষার্থীদের কাছে গণিতের বিষয়গুলি আকর্ষণীয় করে তুলতে গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করবে এবং মাধ্যমিকস্তরে গণিতচর্চার মান উন্নততর করতে সহায়ক হবে। ছাত্রছাত্রীরাও উদ্বুদ্ধ হবে। এইভাবে সার্থক হবে পর্ষদের সামাজিক দায়বদ্ধতা।

সমস্ত শিক্ষাপ্রেমী, শিক্ষিকা/শিক্ষক ও সংশ্লিষ্ট সকলের কাছে আমার সনির্বন্ধ অনুরোধ তাঁরা যেন বিনা দ্বিধায় বইটির ত্রুটি-বিচ্যুতি পর্ষদের নজরে আনেন যাতে করে পরবর্তী সংস্করণে সংশোধনের সুযোগ পাওয়া যায়। এতে বইটির মান উন্নত হবে এবং ছাত্রসমাজ উপকৃত হবে। ইংরেজিতে একটি আপ্তবাক্য আছে যে, ‘even the best can be bettered’। বইটির উৎকর্ষ বৃদ্ধির জন্য শিক্ষক সমাজের ও বিদ্যোৎসাহী ব্যক্তিদের গঠনমূলক মতামত ও সুপরামর্শ সাদরে গৃহীত হবে।

কল্যাণময় গঙ্গোপাধ্যায়

প্রশাসক

পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা পর্ষদ

ডিসেম্বর, ২০১৭

৭৭/২ পার্ক স্ট্রিট

কলকাতা: ৭০০ ০১৬

প্রাক্‌কথন

পশ্চিমবঙ্গের মাননীয়া মুখ্যমন্ত্রী শ্রীমতী মমতা বন্দ্যোপাধ্যায় ২০১১ সালে বিদ্যালয় শিক্ষার ক্ষেত্রে একটি 'বিশেষজ্ঞ কমিটি' গঠন করেন। এই বিশেষজ্ঞ কমিটির ওপর দায়িত্ব ছিল বিদ্যালয় স্তরের সমস্ত পাঠক্রম, পাঠ্যসূচি এবং পাঠ্যপুস্তকের পর্যালোচনা, পুনর্বিবেচনা এবং পুনর্বিন্যাসের প্রক্রিয়া পরিচালনা করা। সেই কমিটির সুপারিশ অনুযায়ী নতুন পাঠক্রম, পাঠ্যসূচি এবং পাঠ্যপুস্তক নির্মিত হয়। ইতোপূর্বে প্রাক্-প্রাথমিক থেকে অষ্টম শ্রেণি পর্যন্ত সমস্ত পাঠ্যপুস্তক জাতীয় পাঠক্রমের রূপরেখা ২০০৫ এবং শিক্ষার অধিকার আইন ২০০৯ নথিদুটিকে অনুসরণ করে নির্মিত হয়েছে। ২০১৪ সালে নবম শ্রেণির নতুন পাঠক্রম, পাঠ্যসূচি অনুযায়ী পাঠ্যপুস্তকগুলি নির্মিত হয়েছে। ২০১৫ সালে দশম শ্রেণির নতুন পাঠক্রম, পাঠ্যসূচি অনুযায়ী পাঠ্যপুস্তকগুলি নির্মিত হলো।

দশম শ্রেণির গণিত বইয়ের নাম 'গণিত প্রকাশ'। বইটিতে ধাপে ধাপে গাণিতিক সমস্যাবলি সমাধানের পদ্ধতি শেখানো হয়েছে। শিক্ষার্থীর সুবিধার জন্য প্রতিটি ক্ষেত্রেই সযত্নে মৌল ধারণাগুলিকে প্রাঞ্জল ভাষায় এবং হাতেকলমে পদ্ধতিতে উপস্থাপন করা হয়েছে। 'গণিত' বিষয়টিকে বৈচিত্র্যময় এবং আকর্ষণীয় করে তোলার সযত্ন প্রয়াস বইটিতে সহজেই লক্ষ করা যাবে। শিক্ষার্থীর প্রায়োগিক সামর্থ্যবৃদ্ধির দিকেও আমরা তীক্ষ্ণ নজর রেখেছি। আশা করা যায় শিক্ষার্থীমহলে বইটি সমাদৃত হবে।

একথা বলা বিশেষ প্রয়োজন যে, প্রথম শ্রেণি থেকে দশম শ্রেণি পর্যন্ত পরিকল্পিত নতুন পাঠক্রম ও পাঠ্যসূচি অনুযায়ী নির্মিত পাঠ্যপুস্তকে ধারাবাহিকভাবে গণিতের বিভিন্ন ধারণা (Concept) এবং অনুশীলনীগুলি বিন্যস্ত করা হয়েছে। শিক্ষার্থীরা ক্রমোচ্চশ্রেণিতে উত্তীর্ণ হয়ে এই পাঠ্যপুস্তকগুলি অনুসরণ করলে সহজেই গণিতে পারদর্শিতা অর্জন করবে।

নির্বাচিত শিক্ষাবিদ, শিক্ষিকা-শিক্ষক এবং বিষয়-বিশেষজ্ঞবৃন্দ অল্প সময়ের মধ্যে বইটি প্রস্তুত করেছেন। পশ্চিমবঙ্গের মাধ্যমিক শিক্ষার সারস্বত নিয়ামক পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা পর্ষদ পাঠ্যপুস্তকটিকে অনুমোদন করে আমাদের বাধিত করেছেন। বিভিন্ন সময়ে পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা পর্ষদ, পশ্চিমবঙ্গ সরকারের শিক্ষা দপ্তর, পশ্চিমবঙ্গ সর্বশিক্ষা মিশন, পশ্চিমবঙ্গ শিক্ষা অধিকার প্রভূত সহায়তা প্রদান করেছেন। তাঁদের ধন্যবাদ।

পশ্চিমবঙ্গের মাননীয় শিক্ষামন্ত্রী ড. পার্থ চ্যাটার্জী প্রয়োজনীয় মতামত এবং পরামর্শ দিয়ে আমাদের বাধিত করেছেন। তাঁকে আমাদের কৃতজ্ঞতা জানাই।

বইটির উৎকর্ষ বৃদ্ধির জন্য শিক্ষাপ্রেমী মানুষের মতামত, পরামর্শ আমরা সাদরে গ্রহণ করব।

অভীক মজুমদার
চেয়ারম্যান
'বিশেষজ্ঞ কমিটি'
বিদ্যালয় শিক্ষা দপ্তর, পশ্চিমবঙ্গ সরকার

ডিসেম্বর, ২০১৭
নিবেদিতা ভবন, ষষ্ঠতল
বিধাননগর, কলকাতা : ৭০০ ০৯১

বিশেষজ্ঞ কমিটি পরিচালিত পাঠ্যপুস্তক প্রণয়ন পর্ষদ

নির্মাণ ও বিন্যাস

অভীক মজুমদার (চেয়ারম্যান, বিশেষজ্ঞ কমিটি)

রথীন্দ্রনাথ দে (সদস্য সচিব, বিশেষজ্ঞ কমিটি)

শংকরনাথ ভট্টাচার্য
সুমনা সোম
তপসুন্দর বন্দ্যোপাধ্যায়
মলয় কৃষ্ণ মজুমদার
পার্থ দাস

পরামর্শ ও সহায়তা

ড. নূরুল ইসলাম

প্রচ্ছদ ও অলংকরণ

শংকর বসাক

মুদ্রণ সহায়তা

বিপ্লব মণ্ডল

পাঠ্যসূচি

1. একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ

i) একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের ধারণা।

ii) একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং $a\neq0$)-এর ধারণা।

iii) উৎপাদকে বিশ্লেষণের সাহায্যে একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান।

iv) পূর্ণবর্গাকারে প্রকাশের সাহায্যে একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান।

v) শ্রীধর আচার্যের সূত্রের ধারণা।

vi) বীজদ্বয়ের প্রকৃতি সম্বন্ধে ধারণা।

vii) বীজদ্বয় জানা থাকলে একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ গঠনের ধারণা।

viii) বাস্তব সমস্যার সমাধানে একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের প্রয়োগ।

2. সরল সুদকষা

i) আসল, সুদ, শতকরা বার্ষিক সুদের হার, সুদ-আসল, সময় - এদের ধারণা।

ii) $(I=\frac{prt}{100})$ সূত্রের ধারণা।

iii) বিভিন্ন বাস্তব সমস্যা সমাধানের ধারণা।

3. বৃত্ত সম্পর্কিত উপপাদ্য

i) একই বৃত্তে অথবা সমান বৃত্তে সমান সমান জ্যা সমান সমান চাপ ছিন্ন করে এবং কেন্দ্রে সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে। (প্রমাণের প্রয়োজন নেই)

ii) একই বৃত্তে অথবা সমান বৃত্তে যে সকল জ্যা কেন্দ্রে সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে তারা পরস্পর সমান। (প্রমাণের প্রয়োজন নেই)

iii) তিনটি অসমরেখ বিন্দু দিয়ে একটি মাত্র বৃত্ত অঙ্কন করা যায়। (প্রমাণের প্রয়োজন নেই)

iv) ব্যাস নয় এরূপ কোনো জ্যাকে বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে অঙ্কিত কোনো সরলরেখা সমদ্বিখণ্ডিত করলে সরলরেখাটি জ্যা-এর উপর লম্ব হবে — প্রমাণ।

v) ব্যাস নয় এরূপ কোনো জ্যা-এর উপর কেন্দ্র দিয়ে অঙ্কিত কোনো লম্বরেখা জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে — প্রমাণ।

vi) উপরের বিবৃতিগুলির প্রয়োগ।

4. আয়তঘন

i) বাস্তবে দেখা আয়তঘনাকার ও ঘনক আকার বস্তুর ধারণা।

ii) তলসংখ্যা, ধারসংখ্যা, শীর্ষবিন্দুর সংখ্যা এবং কর্ণের সংখ্যার ধারণা।

iii) সমগ্রতলের ক্ষেত্রফলের সূত্র গঠনের ধারণা।

iv) আয়তনের সূত্র গঠনের ধারণা।

v) কর্ণের দৈর্ঘ্যের সূত্র গঠনের ধারণা।

vi) বিভিন্ন বাস্তব সমস্যা সমাধানের ধারণা।

5. অনুপাত ও সমানুপাত

i) বীজগণিতে অনুপাত ও সমানুপাতের ধারণা।

ii) বিভিন্ন ধরনের অনুপাত ও সমানুপাতের ধারণা।

iii) সমানুপাতের বিভিন্ন ধর্ম সমানুপাতের সমস্যায় প্রয়োগের ধারণা।

6. চক্রবৃদ্ধি সুদ (3 বছর পর্যন্ত) ও সমহার বৃদ্ধি বা হ্রাস

i) সরল সুদ ও চক্রবৃদ্ধি সুদের পার্থক্যের ধারণা।

ii) চক্রবৃদ্ধি সুদের হার বার্ষিক, ষাণ্মাসিক এবং ত্রৈমাসিক হলে সমূল চক্রবৃদ্ধির সূত্র গঠনের ধারণা।

iii) বিভিন্ন বাস্তব সমস্যা সমাধানের ধারণা।

iv) সমূল চক্রবৃদ্ধির সূত্র থেকে সমহারে বৃদ্ধি বা হ্রাসের সূত্র গঠনের ধারণা।
v) বিভিন্ন বাস্তব সমস্যা সমাধানের ধারণা।

7. বৃত্তস্থ কোণ সম্পর্কিত উপপাদ্য

i) কেন্দ্রস্থ কোণ ও বৃত্তস্থ কোণের ধারণা।
ii) একই বৃত্তচাপের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ — প্রমাণ।
iii) কোনো বৃত্তের একই বৃত্তাংশস্থ কোণ সকল সমান — প্রমাণ।
iv) অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ — প্রমাণ।
v) একটি সরলরেখাংশের একই পার্শ্বে অবস্থিত দুটি বিন্দুতে সরলরেখাংশটি সমান কোণ উৎপন্ন করলে বিন্দু চারটি সমবৃত্তস্থ। (প্রমাণের প্রয়োজন নেই)
vi) উপরের বিবৃতিগুলির প্রয়োগ।

8. লম্ব বৃত্তাকার চোঙ

i) বাস্তবে দেখা লম্ব বৃত্তাকার চোঙাকৃতি বস্তুর ধারণা।
ii) লম্ব বৃত্তাকার চোঙের বক্রতল ও সমতলের ধারণা।
iii) বক্রতলের ক্ষেত্রফলের সূত্র গঠনের ধারণা।
iv) সমগ্রতলের ক্ষেত্রফলের সূত্র গঠনের ধারণা।
v) আয়তনের সূত্রের ধারণা।
vi) বিভিন্ন বাস্তব সমস্যা সমাধানের ধারণা।

9. দ্বিঘাত করণী

i) অমূলদ সংখ্যার ধারণা।
ii) দ্বিঘাত করণীর ধারণা।
iii) শুদ্ধ, মিশ্র, সদৃশ ও অসদৃশ দ্বিঘাত করণীর ধারণা।
iv) অনুবন্ধী করণীর ধারণা।
v) হরের করণী নিরসক উৎপাদকের ধারণা।
vi) দ্বিঘাত করণীর যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগের ধারণা।
vii) দ্বিঘাত করণীর বিভিন্ন সমস্যা সমাধানের ধারণা।

10. বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ সংক্রান্ত উপপাদ্য

i) বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সম্পূরক - প্রমাণ।
ii) কোনো চতুর্ভুজের বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সম্পূরক হলে চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দু চারটি সমবৃত্তস্থ। (প্রমাণের প্রয়োজন নেই)
iii) উপরের বিবৃতিগুলির প্রয়োগ।

11. সম্পাদ্য : ত্রিভুজের পরিবৃত্ত ও অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন

i) একটি প্রদত্ত ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কন।
ii) একটি প্রদত্ত ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন।
iii) একটি প্রদত্ত ত্রিভুজের বহির্বৃত্ত অঙ্কন। (মূল্যায়নের অন্তর্ভুক্ত নয়)

12. গোলক

i) বাস্তবে দেখা গোলক আকার ও অর্ধগোলক আকার ঘনবস্তুর ধারণা।
ii) গোলকের ও অর্ধগোলকের তলের ধারণা।
iii) গোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফলের ধারণা।
iv) অর্ধগোলকের বক্রতল ও সমগ্রতলের ক্ষেত্রফলের ধারণা।
v) গোলক ও অর্ধগোলকের আয়তনের ধারণা।
vi) বিভিন্ন বাস্তব সমস্যা সমাধানের ধারণা।

13. ভেদ

i) সরল ভেদ, ব্যস্ত ভেদ ও যৌগিক ভেদের ধারণা।

ii) ভেদ সম্পর্কিত বিভিন্ন সমস্যা ও বাস্তব সমস্যা সমাধানের ধারণা।

14. অংশীদারি কারবার

i) অংশীদারি কারবার সম্বন্ধে ধারণা।

ii) সরল ও মিশ্র অংশীদারি কারবার সম্বন্ধে ধারণা।

iii) মূলধন সম্বন্ধে ধারণা।

iv) লভ্যাংশ বণ্টনের ধারণা।

v) অংশীদারি কারবার সংক্রান্ত বিভিন্ন বাস্তব সমস্যায় অনুপাতের প্রয়োগ।

15. বৃত্তের স্পর্শক সংক্রান্ত উপপাদ্য

i) একটি বৃত্তের স্পর্শক ও ছেদকের ধারণা।

ii) একটি বৃত্তের স্পর্শক ও স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ পরস্পর লম্ব — প্রমাণ।

iii) একটি বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু থেকে দুটি স্পর্শক অঙ্কন করা হলে বহিঃস্থ বিন্দু ও স্পর্শবিন্দু সংযোগকারী সরলরেখাংশদ্বয় সমান এবং তারা কেন্দ্রে সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে — প্রমাণ।

iv) সরল সাধারণ স্পর্শক ও তির্যক সাধারণ স্পর্শকের ধারণা।

v) দুটি বৃত্ত পরস্পরকে স্পর্শ করলে বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্রদ্বয় এবং স্পর্শবিন্দু সমরেখ। - প্রমাণ

vi) উপরের বিবৃতিগুলির প্রয়োগ।

16. লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু

i) বাস্তবে দেখা লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতি ঘনবস্তুর ধারণা।

ii) লম্ব বৃত্তকার শঙ্কুর বক্রতল ও সমতলের ধারণা।

iii) লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফলের ধারণা।

iv) লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফলের ধারণা।

v) লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর আয়তনের ধারণা।

vi) বিভিন্ন বাস্তব সমস্যা সমাধানের।

17. সম্পাদ্য : বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন

i) বৃত্তের উপরিস্থিত একটি বিন্দুতে ওই বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কনের ধারণা।

ii) বৃত্তের বহিঃস্থ একটি বিন্দু থেকে ওই বৃত্তে দুটি স্পর্শক অঙ্কনের ধারণা।

18. সদৃশতা

i) সদৃশ জ্যামিতিক চিত্রের ধারণা।

ii) ত্রিভুজের কোনো বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা ত্রিভুজের অপর দুই বাহুকে বা তাদের বর্ধিতাংশকে সমানুপাতে বিভক্ত করে। (প্রমাণের প্রয়োজন নেই)

iii) কোনো সরলরেখা ত্রিভুজের দুই বাহুকে বা তাদের বর্ধিতাংশকে সমানুপাতে বিভক্ত করলে সরলরেখাটি তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল হয়। (প্রমাণের প্রয়োজন নেই)

iv) দুটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে তাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী। (প্রমাণের প্রয়োজন নেই)

v) দুটি ত্রিভুজের বাহুগুলি সমানুপাতী হলে তাদের অনুরূপ কোণগুলি সমান অর্থাৎ তারা পরস্পর সদৃশ। (প্রমাণের প্রয়োজন নেই)

vi) দুটি ত্রিভুজের একটির একটি কোণ অপরটির একটি কোণের সমান এবং কোণগুলির ধারক বাহুগুলি সমানুপাতী হলে ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ। (প্রমাণের প্রয়োজন নেই)

vii) একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌণিক বিন্দু থেকে অতিভুজের উপর লম্ব অঙ্কন করলে যে দুটি ত্রিভুজ পাওয়া যায় তারা মূল ত্রিভুজের সঙ্গে সদৃশ এবং তারা পরস্পর সদৃশ — প্রমাণ।

viii) উপরের বিবৃতিগুলির প্রয়োগ।

19. বিভিন্ন ঘনবস্তু সংক্রান্ত বাস্তব সমস্যা

i) একের অধিক ঘনবস্তুর (আয়তঘন, ঘনক, লম্ব বৃত্তাকার চোঙ, গোলক, অর্ধগোলক, লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু) সম্পর্কযুক্ত বিভিন্ন বাস্তব সমস্যা সমাধান।

20. ত্রিকোণমিতি : কোণ পরিমাপের ধারণা

i) ত্রিকোণমিতির উদ্ভব, বিকাশ ও বাস্তব প্রয়োজনীয়তার ব্যাখ্যা।
ii) ধনাত্মক ও ঋণাত্মক কোণের ধারণা।
iii) কোণ পরিমাপের ধারণা।
iv) ষষ্ঠিক পদ্ধতি ও বৃত্তীয় পদ্ধতির ধারণা, তাদের সম্পর্ক ও বিভিন্ন সমস্যায় প্রয়োগের ধারণা।

21. সম্পাদ্য : মধ্যসমানুপাতী নির্ণয়

i) জ্যামিতিক পদ্ধতিতে দুটি সরলরেখাংশের মধ্যসমানুপাতী নির্ণয়।
ii) আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান বর্গক্ষেত্র অঙ্কন।
iii) ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্র অঙ্কন।

22. পিথাগোরাসের উপপাদ্য

i) পিথাগোরাসের উপপাদ্য — প্রমাণ।
ii) পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য — প্রমাণ।
iii) উপরের বিবৃতিগুলির প্রয়োগ।

23. ত্রিকোণমিতিক অনুপাত এবং ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলি

i) সমকোণী ত্রিভুজের সাপেক্ষে বিভিন্ন ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের ধারণা।
ii) বিভিন্ন ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের পারস্পরিক সম্পর্কের ধারণা।
iii) কয়েকটি আদর্শ কোণের (0°, 30°, 45°, 60°, 90°) ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান নির্ণয় ও বিভিন্ন সমস্যায় প্রয়োগের ধারণা।
iv) বিভিন্ন সমস্যায় ত্রিকোণমিতিক অনুপাত প্রয়োগের ধারণা।
v) ত্রিকোণমিতিক অনুপাত থেকে একটি কোণ (যেমন, θ) অপনয়নের ধারণা।

24. পূরক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

i) পূরক কোণের ধারণা।
ii) একটি কোণের পূরক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের ধারণা এবং বিভিন্ন সমস্যা সমাধানের ধারণা।

25. ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের প্রয়োগ : উচ্চতা ও দূরত্ব

i) উন্নতি কোণ ও অবনতি কোণের ধারণা।
ii) সমকোণী ত্রিভুজ, উন্নতি কোণ এবং অবনতি কোণের সাহায্যে ত্রিকোণমিতিক পদ্ধতিতে বাস্তব সমস্যা সমাধানের ধারণা ।

26. রাশিবিজ্ঞান : গড়, মধ্যমা, ওজাইভ, সংখ্যাগুরুমান

i) মধ্যমগামিতা মাপকসমূহের ধারণা।
ii) গড় বা যৌগিক গড়ের ধারণা।
iii) যৌগিক গড় নির্ণয়ের তিনটি পদ্ধতি : (a) প্রত্যক্ষ পদ্ধতি (b) সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি (c) ক্রম-বিচ্যুতি পদ্ধতি - এর ধারণা।
iv) মধ্যমা নির্ণয়ের প্রয়োজনীয়তার ধারণা।
v) মধ্যমা নির্ণয়ের সূত্রের ধারণা এবং বিভিন্ন বাস্তব সমস্যা সমাধানের ধারণা।
vi) ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বক্ররেখা বা ওজাইভ-এর ধারণা।
vii) ওজাইভ থেকে মধ্যমা নির্ণয়ের ধারণা।
viii) সংখ্যাগুরুমান নির্ণয়ের প্রয়োজনীয়তা।
ix) সংখ্যাগুরুমান নির্ণয়ের সূত্রের ধারণা এবং বিভিন্ন বাস্তব সমস্যা সমাধানের ধারণা।
x) যৌগিক গড়, মধ্যমা এবং সংখ্যাগুরুমানের সম্পর্ক সম্বন্ধে ধারণা।

প্রথম পর্যায়ক্রমিক মূল্যায়নের নম্বর বিভাজন

(Summative-I)

বিষয়	বহু পছন্দভিত্তিক প্রশ্ন	সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন	দীর্ঘ উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন **	মোট নম্বর
পাটিগণিত	2 (1×2)	2 (2×1)	5 (5×1)	9
বীজগণিত	2 (1×2)	2 (2×1)	10 (3+4+3)	14
জ্যামিতি	2 (1×2)	4 (2×2)	5 (5×1)	11
পরিমিতি	-	2 (2×1)	4 (4×1)	6
মোট নম্বর	**6**	**10**	**24**	**40**
	6 + 10 = 16			

অন্তর্বর্তী প্রস্তুতিকালীন মূল্যায়ন - 10 নম্বর

** **দীর্ঘ উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন**

পাটিগণিত	
(i) সরল সুদকষা (ii) চক্রবৃদ্ধি সুদ (iii) সমহার বৃদ্ধি ও হ্রাস	2টি প্রশ্নের মধ্যে 1টি : 5×1 নম্বর = 5 নম্বর
বীজগণিত	
(i) একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান	2টি প্রশ্নের মধ্যে 1টি : 3×1 নম্বর = 3 নম্বর
(ii) বাস্তব সমস্যার সমাধানে দ্বিঘাত সমীকরণের প্রয়োগ [সমীকরণ গঠন ও সমাধান]	2টি প্রশ্নের মধ্যে 1টি : 4×1 নম্বর = 4 নম্বর
(iii) অনুপাত ও সমানুপাত (iv) দ্বিঘাত করণী	2টি প্রশ্নের মধ্যে 1টি : 3×1 নম্বর = 3 নম্বর
জ্যামিতি	
(i) বৃত্ত সম্পর্কিত উপপাদ্য (ii) বৃত্তস্থ কোণ সম্পর্কিত উপপাদ্য (iii) বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ সম্পর্কিত উপপাদ্য — উপপাদ্য	2টি প্রশ্নের মধ্যে 1টি : 5×1 নম্বর = 5 নম্বর
পরিমিতি	
(i) আয়তঘন (ii) লম্ববৃত্তাকার চোঙ	2টি প্রশ্নের মধ্যে 1টি : 4×1 নম্বর = 4 নম্বর

দ্বিতীয় পর্যায়ক্রমিক মূল্যায়নের নম্বর বিভাজন

(Summative-II)

বিষয়	বহু পছন্দভিত্তিক প্রশ্ন	সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন	দীর্ঘ উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন **	মোট নম্বর
পাটিগণিত	1 (1×1)	-	5 (5×1)	6
বীজগণিত	2 (1×2)	2 (2×1)	3 (3×1)	7
জ্যামিতি	2 (1×2)	2 (2×1)	13 (5+5+3)	17
পরিমিতি	2 (1×2)	4 (2×2)	4 (4×1)	10
মোট নম্বর	**7**	**8**	**25**	**40**
	7 + 8 = 15			

অন্তর্বর্তী প্রস্তুতিকালীন মূল্যায়ন - 10 নম্বর

** **দীর্ঘ উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন**

পাটিগণিত		
(i) অংশীদারি কারবার	2টি প্রশ্নের মধ্যে 1টি : 5×1 নম্বর	= 5 নম্বর
বীজগণিত		
(i) ভেদ (ii) একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান	2টি প্রশ্নের মধ্যে 1টি : 3×1 নম্বর	= 3 নম্বর
জ্যামিতি		
(i) বৃত্তের স্পর্শক সংক্রান্ত উপপাদ্য (ii) সদৃশতা সংক্রান্ত উপপাদ্য — উপপাদ্য	2টি প্রশ্নের মধ্যে 1টি : 5×1 নম্বর	= 5 নম্বর
(iii) ত্রিভুজের পরিবৃত্ত ও অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন — সম্পাদ্য	2টি প্রশ্নের মধ্যে 1টি : 5×1 নম্বর	= 5 নম্বর
(iv) উপপাদ্যের প্রয়োগ	1টি প্রশ্ন : 3×1 নম্বর	= 3 নম্বর
পরিমিতি		
(i) গোলক (ii) লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু	2টি প্রশ্নের মধ্যে 1টি : 4×1 নম্বর	= 4 নম্বর

তৃতীয় পর্যায়ক্রমিক মূল্যায়ন/নির্বাচনী পরীক্ষার নম্বর বিভাজন

(Summative-III)

বিষয়	বহু পছন্দভিত্তিক প্রশ্ন (1×6)	অতি সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন: শূন্যস্থান পূরণ 6টির মধ্যে 5টি (1×5)	অতি সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন: সত্য অথবা মিথ্যা 6টির মধ্যে 5টি (1×5)	সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন 12টির মধ্যে 10টি (2×10)	দীর্ঘ উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন **	
পাটিগণিত	1	1	1	4 (2×2)	5 (5×1)	
বীজগণিত	1	1	1	4 (2×2)	9 (3+3+3)	
জ্যামিতি	1	1	1	6 (2×3)	13 (5+3+5)	
ত্রিকোণমিতি	1	1	1	4 (2×2)	11 (3+3+5)	
পরিমিতি	1	1	1	4 (2×2)	8 (4+4)	
রাশিবিজ্ঞান	1	1	1	2 (2×1)	8 (4+4)	
মোট নম্বর	**6**	**5**	**5**	**20**	**54**	**90**
	6 + 5 + 5 + 20 = 36					

অন্তর্বর্তী প্রস্তুতিকালীন মূল্যায়ন : 10 নম্বর

** **দীর্ঘ উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন**

পাটিগণিত

(i) সরল সুদকষা
(ii) চক্রবৃদ্ধি সুদ ও সমহার বৃদ্ধি বা হ্রাস
(iii) অংশীদারি কারবার
— 2টি প্রশ্নের মধ্যে 1টি : 5×1 নম্বর = 5 নম্বর

বীজগণিত

(i) একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ — 2টি প্রশ্নের মধ্যে 1টি : 3×1 নম্বর = 3 নম্বর
(ii) ভেদ
(iii) দ্বিঘাত করণী
— 2টি প্রশ্নের মধ্যে 1টি : 3×1 নম্বর = 3 নম্বর
(iv) অনুপাত ও সমানুপাত — 2টি প্রশ্নের মধ্যে 1টি : 3×1 নম্বর = 3 নম্বর

জ্যামিতি

2টি উপপাদ্যের মধ্যে 1টি : 5×1 নম্বর = 5 নম্বর
উপপাদ্যের প্রয়োগে জ্যামিতিক সমস্যা সমাধান 2টি প্রশ্নের মধ্যে 1টি : 3×1 নম্বর = 3 নম্বর
2টি সম্পাদ্যের মধ্যে 1টি : 5×1 নম্বর = 5 নম্বর

ত্রিকোণমিতি

(i) কোণ পরিমাপের ধারণা
(ii) ত্রিকোণমিতিক অনুপাত এবং ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলি
(iii) পূরক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত
— 3টি প্রশ্নের মধ্যে 2টি : 3×2 নম্বর = 6 নম্বর
(iv) ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের প্রয়োগ : উচ্চতা ও দূরত্ব — 2টি প্রশ্নের মধ্যে 1টি : 5×1 নম্বর = 5 নম্বর

পরিমিতি

(i) আয়তঘন
(ii) লম্ব বৃত্তাকার চোঙ
(iii) গোলক
(iv) লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু
(v) বিভিন্ন ঘনবস্তু সংক্রান্ত সমস্যা
— 3টি প্রশ্নের মধ্যে 2টি : 4×2 নম্বর = 8 নম্বর

রাশিবিজ্ঞান

গড়, মধ্যমা, ওজাইভ, সংখ্যাগুরুমান — 3টি প্রশ্নের মধ্যে 2টি : 4×2 নম্বর = 8 নম্বর

সূচিপত্র

অধ্যায়	বিষয়	পৃষ্ঠা
1	একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ (Quadratic Equations with one variable)	1
2	সরল সুদকষা (Simple Interest)	31
3	বৃত্ত সম্পর্কিত উপপাদ্য (Theorems related to circle)..	49
4	আয়তঘন (Rectangular Parallelopiped or Cuboid)..	67
5	অনুপাত ও সমানুপাত (Ratio and Proportion)	77
6	চক্রবৃদ্ধি সুদ ও সমহার বৃদ্ধি বা হ্রাস (Compound Interest and Uniform Rate of Increase or Decrease)	100
7	বৃত্তস্থ কোণ সম্পর্কিত উপপাদ্য (Theorems related to Angles in a Circle)	120
8	লম্ব বৃত্তাকার চোঙ (Right Circular Cylinder).	140
9	দ্বিঘাত করণী (Quadratic Surd)	149
10	বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ সংক্রান্ত উপপাদ্য (Theorems related to Cyclic Quadrilateral)	163
11	সম্পাদ্য : ত্রিভুজের পরিবৃত্ত ও অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন (Construction : Construction of circumcircle and incircle of a triangle)	172
12	গোলক (Sphere)	179
13	ভেদ (Variation)	186
14	অংশীদারি কারবার (Partnership Business)	198
15	বৃত্তের স্পর্শক সংক্রান্ত উপপাদ্য (Theorems related to Tangent to a Circle)	206
16	লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু (Right Circular Cone)...	221
17	সম্পাদ্য : বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন (Construction : Construction of Tangent to a circle)	229

অধ্যায়	বিষয়	পৃষ্ঠা
18	সদৃশতা (Similarity)	233
19	বিভিন্ন ঘনবস্তু সংক্রান্ত বাস্তব সমস্যা (Real life Problems related to different Solid Objects)..	261
20	ত্রিকোণমিতি : কোণ পরিমাপের ধারণা (Trigonometry : Concept of Measurment of Angle)	268
21	সম্পাদ্য : মধ্যসমানুপাতী নির্ণয় (Construction : Determination of Mean Proportional)	278
22	পিথাগোরাসের উপপাদ্য (Pythagoras Theorem)	284
23	ত্রিকোণমিতিক অনুপাত এবং ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলি (Trigonometric Ratios and Trigonometric Identities)	291
24	পূরক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (Trigonometric Ratios of Complementrary angle)	313
25	ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের প্রয়োগ : উচ্চতা ও দূরত্ব (Application of Trigonometric Ratios : Heights & Distances)	318
26	রাশিবিজ্ঞান : গড়, মধ্যমা, ওজাইভ, সংখ্যাগুরুমান (Statistics : Mean , Median , Ogive , Mode)	329

1 একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ
QUADRATIC EQUATIONS WITH ONE VARIABLE

আজ রবিবার। আমরা আজকে ধ্রুবদের বাগানে খেলা করতে পারব না। আজ ওদের বাগান পরিষ্কার করা হবে এবং বাগানের নারকেল গাছ থেকে নারকেল পেড়ে নেওয়া হবে।

1 ধ্রুবদের বাগানে যতগুলি নারকেল গাছ ছিল প্রতি গাছ থেকে তার থেকে একটি বেশি নারকেল পাড়া হয়েছে। ধ্রুবদের বাগান থেকে মোট 132 টি নারকেল পাড়া হলো। কিন্তু ওদের বাগানে কতগুলি নারকেল গাছ ছিল কীভাবে পাব?

ধরি, ধ্রুবদের বাগানে x টি নারকেল গাছ ছিল।

$\therefore$ প্রতিটি গাছ থেকে নারকেল পাড়া হয়েছে $(x+1)$ টি।

$\therefore$ মোট নারকেলের সংখ্যা $= x(x+1)$ টি

শর্তানুসারে, $x(x+1) = 132$

বা, $x^2 + x = 132$

বা, $x^2 + x - 132 = 0$ ________ (i)

ধ্রুবদের নারকেল গাছের সংখ্যা (i) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করবে।

কিন্তু (i) নং সমীকরণটিকে কী বলা হয়?

(i) নং সমীকরণটি একটি **বাস্তব সহগ যুক্ত একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ** ।

যে সমীকরণকে $ax^2+bx+c = 0$ আকারে লেখা যায়, যেখানে a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং $a \neq 0$, তাকে **একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ** বলা হয়।

2 ধ্রুবদের আয়তাকার বাগানের দৈর্ঘ্য প্রস্থের চেয়ে 5 মিটার বেশি এবং বাগানের ক্ষেত্রফল 204 বর্গ মিটার। বাগানের প্রস্থ কীভাবে পাবো দেখি।

ধরি, ধ্রুবদের আয়তাকার বাগানের প্রস্থ x মিটার।

$\therefore$ বাগানের দৈর্ঘ্য $(x+5)$ মিটার।

সুতরাং, বাগানের ক্ষেত্রফল $= x(x+5)$ বর্গ মিটার।

শর্তানুসারে, $x(x+5) = 204$

বা, $x^2+5x-204 = 0$ ________ (ii)

ধ্রুবদের বাগানের প্রস্থ (ii) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করে এবং (ii) নং একটি $\boxed{}$ [একঘাত/দ্বিঘাত] সমীকরণ।

[নিজে লিখি]

(3) ধ্রুবদের বাগানে যতজন বাগান পরিষ্কার করছিল প্রত্যেককে ততগুণ 30 টাকা দেওয়া হলো। যদি মোট 1080 টাকা দেওয়া হয়ে থাকে, তবে কতজন বাগান পরিষ্কার করছিল সেটি পাবার জন্য একটি সমীকরণ তৈরি করি।

ধরি, ধ্রুবদের বাগান x জন পরিষ্কার করছিল।

$\therefore$ প্রত্যেকে পায় $= x \times 30$ টাকা $= 30x$ টাকা

$\therefore$ মোট দেওয়া হয়েছে $= 30x \times x$ টাকা $= 30x^2$ টাকা

শর্তানুসারে, $30x^2 = 1080$

বা, $x^2 = 36$

বা, $x^2 - 36 = 0$ ________ (iii)

যতজন ধ্রুবদের বাগান পরিষ্কার করেছিল সেই সংখ্যা (iii) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করে এবং (iii) নং একটি ☐ [একঘাত/দ্বিঘাত] সমীকরণ। **[নিজে লিখি]**

প্রয়োগ : 1. আমি নীচের সমীকরণগুলিকে $ax^2+bx+c=0$,যেখানে a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং $a \neq 0$, আকারে লেখা যায় কিনা দেখি।

(i) $(x+1)(x+3)-x(x+2)=15$ (ii) $x^2-3x=5(2-x)$ (iii) $x-1+\frac{1}{x}=6\ (x \neq 0)$

(iv) $(x-2)^2=x^3-4x+4$ (v) $(x-3)^3=2x(x^2-1)$

(i) $(x+1)(x+3)-x(x+2)=15$

বা, $x^2+x+3x+3-x^2-2x=15$

বা, $2x+3-15=0$

বা, $2x-12=0$

বা, $x-6=0$ ________ (i)

(i) নং সমীকরণটির আকার $ax^2+bx+c=0$ [যেখানে, a, b, c বাস্তব সংখ্যা, $a \neq 0$]-এর মতো নয়।

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণটি দ্বিঘাত সমীকরণ নয়।

$\therefore$ কোনো সমীকরণ আপাত দেখে দ্বিঘাত সমীকরণ মনে হলেও সর্বদা দ্বিঘাত সমীকরণ নাও হতে পারে।

(ii) $x^2-3x=5(2-x)$

বা, $x^2-3x=10-5x$

বা, $x^2-3x+5x-10=0$

বা, $x^2+2x-10=0$ ________ (ii)

(ii) নং সমীকরণটির আকার $ax^2+bx+c=0$ [a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং $a \neq 0$]-এর মতো।

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণটি একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

(iii) $x-1+\frac{1}{x}=6$

বা, $\frac{x^2-x+1}{x}=6$

বা, $x^2-x+1=6x$

বা, $x^2-7x+1=0$ ________ (iii)

(iii) নং সমীকরণ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। কারণ নিজে বুঝে লিখি।

(iv) $(x-2)^2 = x^3 - 4x + 4$

বা, $x^2 - 4x + 4 = x^3 - 4x + 4$

বা, $-x^3 + x^2 = 0$ ________ (iv)

(iv) নং সমীকরণটি দ্বিঘাত সমীকরণ কিনা নিজে বুঝে লিখি ও কারণ দেখাই, **[নিজে করি]**

(v) নং সমীকরণটি দ্বিঘাত সমীকরণ কিনা নিজে বুঝে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 2. আমরা নবম ও দশম শ্রেণির শিক্ষার্থীরা মুখ্যমন্ত্রীর ত্রাণ তহবিলে 1824 টাকা জমা দিয়েছি। চাঁদা হিসাবে দশম ও নবম শ্রেণির প্রত্যেক শিক্ষার্থী যথাক্রমে তাদের শ্রেণির শিক্ষার্থীদের সংখ্যার সমান 50 পয়সা এবং 1 টাকা করে দিয়েছি। নবম শ্রেণির শিক্ষার্থীর সংখ্যা যদি দশম শ্রেণির শিক্ষার্থীদের থেকে 8 বেশি হয়, তবে একচল বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণটি নির্ণয় করি।

মনে করি, দশম শ্রেণির শিক্ষার্থীর সংখ্যা = x জন

$\therefore$ নবম শ্রেণির শিক্ষার্থীর সংখ্যা হবে $(x+8)$ জন

নবম শ্রেণির শিক্ষার্থীরা দিয়েছে $(x+8)\times 1\times(x+8)$ টাকা $= (x+8)^2$ টাকা

দশম শ্রেণির শিক্ষার্থীরা দিয়েছে $(x\times 50\times x)$ পয়সা $= x \times \frac{1}{2} \times x$ টাকা $= \frac{x^2}{2}$ টাকা

শর্তানুসারে, $\frac{x^2}{2} + (x+8)^2 = 1824$

বা, $\frac{x^2+2(x+8)^2}{2} = 1824$

বা, $x^2 + 2(x^2 + 16x + 64) = 3648$

বা, $x^2 + 2x^2 + 32x + 128 - 3648 = 0$

বা, $3x^2 + 32x - 3528 = 0$ ________ (i)

$\therefore$ (i) নং সমীকরণটি হলো নির্ণেয় দ্বিঘাত সমীকরণ।

প্রয়োগ : 3. একটি আয়তাকার ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য, প্রস্থের চেয়ে 36 মিটার বেশি। ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল 460 বর্গ মিটার। বিবৃতিটি থেকে একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন করি ও x^2, x ও x^0 -এর সহগ নির্ণয় করি।

ধরি, প্রস্থ = x মিটার

$\therefore$ দৈর্ঘ্য $= (x+36)$ মিটার এবং ক্ষেত্রফল $= x(x+36)$ বর্গ মিটার।

শর্তানুসারে, $x(x+36) = 460$

বা, $x^2 + 36x = 460$

বা, $x^2 + 36x - 460 = 0$ ________ (i)

(i) নং হলো নির্ণেয় একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ, এখানে x^2-এর সহগ 1, x-এর সহগ 36 এবং x^0-এর সহগ -460

অন্যভাবে দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন করি ও কী পাই দেখি।

ধরি, আয়তাকার ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য = x মিটার। $\therefore$ প্রস্থ $= (x-36)$ মিটার

সুতরাং, ক্ষেত্রফল $= x(x-36)$ বর্গ মিটার

প্রশ্নানুসারে, $x(x-36) = 460$

বা, $x^2 - 36x - 460 = 0$ ________ (i)

$\therefore$ (i) নং হলো নির্ণেয় একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ। এখানে x^2-এর সহগ $\boxed{}$, x-এর সহগ $\boxed{}$ এবং x^0-এর সহগ $\boxed{}$। **[নিজে লিখি]**

প্রয়োগ : 4. একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য প্রস্থের চেয়ে 2 মিটার বেশি এবং ক্ষেত্রফল 24 বর্গ মিটার। একচল বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন করি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 5. আমি $x^3-4x^2-x+1 = (x+2)^3$ সমীকরণটিকে সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণের সাধারণ রূপে প্রকাশ করে x^2, x ও x^0-এর সহগ লিখি।

$x^3-4x^2-x+1=(x+2)^3$

বা, $x^3-4x^2-x+1=x^3+6x^2+12x+8$

বা, $-10x^2-13x-7=0$

বা, $10x^2+13x+7=0$

$\therefore$ x^2-এর সহগ 10, x-এর সহগ $\boxed{}$ এবং x^0-এর সহগ $\boxed{}$ (নিজে লিখি)

কষে দেখি 1.1

1. নীচের বহুপদী সংখ্যামালার মধ্যে কোনটি/কোনগুলি দ্বিঘাত বহুপদী সংখ্যামালা বুঝে লিখি।
   (i) x^2-7x+2 (ii) $7x^5-x(x+2)$ (iii) $2x(x+5)+1$ (iv) $2x-1$

2. নীচের সমীকরণগুলির কোনটি $ax^2+bx+c=0$, যেখানে a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং $a \neq 0$, আকারে লেখা যায় তা লিখি।
   (i) $x-1+\frac{1}{x}=6, (x\neq 0)$ (ii) $x+\frac{3}{x}=x^2, (x\neq 0)$ (iii) $x^2-6\sqrt{x}+2=0$ (iv) $(x-2)^2=x^2-4x+4$

3. $x^6-x^3-2=0$ সমীকরণটি চলের কোন ঘাতের সাপেক্ষে একটি দ্বিঘাত সমীকরণ তা নির্ণয় করি।

4. (i) $(a-2)x^2+3x+5=0$ সমীকরণটি a-এর কোন মানের জন্য দ্বিঘাত সমীকরণ হবে না তা নির্ণয় করি।
   (ii) $\frac{x}{4-x}=\frac{1}{3x}$, $(x\neq 0, x\neq 4)$-কে $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ দ্বিঘাত সমীকরণের আকারে প্রকাশ করলে x-এর সহগ কত হবে তা নির্ণয় করি।
   (iii) $3x^2+7x+23=(x+4)(x+3)+2$-কে $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ দ্বিঘাত সমীকরণ আকারে প্রকাশ করি।
   (iv) $(x+2)^3=x(x^2-1)$ সমীকরণটিকে $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ দ্বিঘাত সমীকরণের আকারে প্রকাশ করি এবং x^2, x ও x^0-এর সহগ লিখি।

5. নীচের বিবৃতিগুলি থেকে একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন করি।
   (i) 42-কে এমন দুটি অংশে বিভক্ত করি যাতে এক অংশ অপর অংশের বর্গের সমান হয়।
   (ii) দুটি ক্রমিক ধনাত্মক অযুগ্ম সংখ্যার গুণফল 143
   (iii) দুটি ক্রমিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি 313

6. নীচের বিবৃতিগুলি থেকে একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন করি।
   (i) একটি আয়তাকার ক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য 15 মিটার এবং তার দৈর্ঘ্য প্রস্থ অপেক্ষা 3 মিটার বেশি।
   (ii) এক ব্যক্তি 80 টাকায় কয়েক কিগ্রা. চিনি ক্রয় করলেন। যদি ওই টাকায় তিনি আরও 4 কিগ্রা. চিনি বেশি পেতেন, তবে তার কিগ্রা. প্রতি চিনির দাম 1 টাকা কম হতো।
   (iii) দুটি স্টেশনের মধ্যে দূরত্ব 300 কিমি.। একটি ট্রেন প্রথম স্টেশন থেকে সমবেগে দ্বিতীয় স্টেশনে গেল। ট্রেনটির গতিবেগ ঘণ্টায় 5 কিমি. বেশি হলে ট্রেনটির দ্বিতীয় স্টেশনে যেতে 2 ঘণ্টা কম সময় লাগত।

(iv) একজন ঘড়ি বিক্রেতা একটি ঘড়ি ক্রয় করে 336 টাকায় বিক্রি করলেন। তিনি যত টাকায় ঘড়িটি ক্রয় করেছিলেন শতকরা তত টাকা তাঁর লাভ হলো।

(v) স্রোতের বেগ ঘণ্টায় 2 কিমি. হলে, রতনমাঝির স্রোতের অনুকূলে 21 কিমি. গিয়ে ওই দূরত্ব ফিরে আসতে 10 ঘণ্টা সময় লাগে।

(vi) আমাদের বাড়ির বাগান পরিষ্কার করতে মহিম অপেক্ষা মজিদের 3 ঘণ্টা বেশি সময় লাগে। তারা উভয়ে একসঙ্গে কাজটি 2 ঘণ্টায় শেষ করতে পারে।

(vii) দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্কটি দশক স্থানীয় অঙ্ক অপেক্ষা 6 বেশি এবং অঙ্কদ্বয়ের গুণফল সংখ্যাটির চেয়ে 12 কম।

(viii) 45 মিটার দীর্ঘ ও 40 মিটার প্রশস্ত একটি আয়তক্ষেত্রাকার খেলার মাঠের বাইরের চারিপাশে সমান চওড়া একটি রাস্তা আছে এবং ওই রাস্তার ক্ষেত্রফল 450 বর্গ মিটার।

4 ধ্রুবদের বাগানের নারকেল গাছের সংখ্যা $x^2+x-132=0$ ______ (i) এই দ্বিঘাত সমীকরণকে সিদ্ধ করে। কিন্তু এই নারকেল গাছের সংখ্যা কীভাবে পাব?

$x^2+x-132=0$ —এই দ্বিঘাত সমীকরণের বামপক্ষ $x^2+x-132$ —একটি দ্বিঘাত বহুপদী সংখ্যামালা।

আমি $x^2+x-132$ —দ্বিঘাত বহুপদী সংখ্যামালাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণের চেষ্টা করি।

$$\begin{aligned} x^2+x-132 &= x^2+12x-11x-132 \\ &= x(x+12)-11(x+12) \\ &= (x+12)(x-11) \end{aligned}$$

$\therefore x^2+x-132=0$ দ্বিঘাত সমীকরণকে লিখতে পারি $(x+12)(x-11)=0$

$\therefore (x+12)(x-11)=0$ হলে পাই,

যেহেতু, $pq=0 \;\therefore p=0$ অথবা $q=0$, যেখানে p, q বাস্তব সংখ্যা

হয়, $x+12=0 \quad \therefore x=-12$

অথবা, $x-11=0 \quad \therefore x=11$

$\therefore x=11$, অথবা $x=-12$.

কিন্তু নারকেল গাছের সংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারে না। $\therefore x \neq -12$

$\therefore$ ধ্রুবদের বাগানে নারকেল গাছ আছে 11টি।

5 আমি (i) নং দ্বিঘাত সমীকরণে $x=11$ ও $x=-12$ বসিয়ে কী পাই দেখি।

$x^2+x-132=0$ ______ (i)

(i) নং দ্বিঘাত সমীকরণের বামপক্ষে $x=11$ ও $x=-12$ বসিয়ে দেখছি, $(11)^2+11-132=0$ এবং $(-12)^2+(-12)-132=0$

অর্থাৎ $x=11$ ও $x=-12$ মানগুলি (i) নং দ্বিঘাত সমীকরণকে সিদ্ধ করেছে।

11 ও –12 সংখ্যা দুটিকে (i) নং দ্বিঘাত সমীকরণের কী বলা হয়?

11 এবং –12 (i) নং দ্বিঘাত সমীকরণের দুটি **বীজ (roots)**। এই $x=11$ ও $x=-12$ (i) নং দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান (Solution)।

একটি বাস্তব সংখ্যা α, $ax^2+bx+c=0$ [a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং $a \neq 0$] দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ হবে যদি $a\alpha^2+b\alpha+c=0$ হয়। অর্থাৎ সেক্ষেত্রে $x=\alpha$, $ax^2+bx+c=0$ দ্বিঘাত সমীকরণকে সিদ্ধ করবে।

$\therefore$ ax^2+bx+c [a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং $a \neq 0$] দ্বিঘাত বহুপদী সংখ্যামালার শূন্যগুলোই (Zeroes) $ax^2+bx+c=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ (Roots) হবে।

যেহেতু, দ্বিঘাত সংখ্যামালার শূন্য $\boxed{}$ [1/2] টি, সুতরাং, দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ $\boxed{}$ [1/2] টি।

(6) আমি $x^2+5x-204=0$ ____ (ii) দ্বিঘাত সমীকরণটির বীজ নির্ণয় করে ধ্রুবদের বাগানের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ লিখি।

$x^2+5x-204=0$ ______ (ii)

বা, $x^2+17x-12x-204=0$

বা, $x(x+17)-12(x+17)=0$

বা, $(x+17)(x-12)=0$

হয়, $x+17=0$ $\therefore x=-17$

অথবা, $x-12=0$ $\therefore x=12$

যেহেতু, $x=-17$ ও $x=12$ (ii) নং দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান (Solution),

সুতরাং (ii) নং দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ দুটি -17 ও 12

যেহেতু, বাগানের প্রস্থ ঋণাত্মক হতে পারে না, সুতরাং $x \neq -17$

$\therefore x=12$;

$\therefore$ বাগানের প্রস্থ 12 মিটার এবং বাগানের দৈর্ঘ্য $=(x+5)$ মিটার $=17$ মিটার।

প্রয়োগ : 6. পাশের কোনগুলি $2x^2-5x-3=0$ সমীকরণের বীজ বুঝে লিখি। (i) 5 (ii) 3 (iii) $-\frac{1}{2}$

$2x^2-5x-3=0$ ______ (I)

(i) (I) নং দ্বিঘাত সমীকরণের বামপক্ষে $x=5$ বসিয়ে পাই,

$2.(5)^2-5.5-3=50-25-3=22 \neq 0$

$\therefore x=5$, (I) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করে না। $\therefore$ 5, (I) নং দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ নয়।

(ii) (I) নং দ্বিঘাত সমীকরণের বামপক্ষে $x=3$ বসিয়ে পাই,

$2\times3^2-5.3-3=0$

$\therefore x=3$, (I) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করে। $\therefore$ 3, (I) নং দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ।

(iii) (I) নং দ্বিঘাত সমীকরণে $x=-\frac{1}{2}$ বসিয়ে দেখছি $-\frac{1}{2}$, (I) নং দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 7. k -এর মান কত হলে $kx^2+2x-3=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ 2 হবে হিসাব করে লিখি।

যেহেতু, $kx^2+2x-3=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ 2

সুতরাং, $k\times2^2+2.2-3=0$

বা, $4k+1=0$

বা, $k=-\frac{1}{4}$

$\therefore k=-\frac{1}{4}$ হলে $kx^2+2x-3=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ 2 হবে।

প্রয়োগ : 8. k -এর মান কত হলে $x^2+kx+3=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ 1 হবে হিসাব করে লিখি।
[নিজে করি]

প্রয়োগ : 9. আমি নীচের দ্বিঘাত সমীকরণগুলি উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে সমাধান করার চেষ্টা করি।

(i) $6x^2-x-2=0$ (ii) $25x^2-20x+4=0$ (iii) $x^2+5x=0$ (iv) $4x^2-9=0$ (v) $x^2+(3-\sqrt{5})x-3\sqrt{5}=0$

(i) $6x^2-x-2=0$ ——— (I)

বা, $6x^2-4x+3x-2=0$

বা, $2x(3x-2)+1(3x-2)=0$

বা, $(3x-2)(2x+1)=0$

হয়, $3x-2=0$ বা, $3x=2$ $\therefore x=\frac{2}{3}$ অথবা, $2x+1=0$ বা, $2x=-1$ $\therefore x=-\frac{1}{2}$

অর্থাৎ, $x=\frac{2}{3}$ ও $x=-\frac{1}{2}$ (I) নং দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান। $\therefore$ (I) নং সমীকরণের বীজ দুটি $\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}$

> $ax^2+bx+c=0$ [যেখানে a, b ও c বাস্তব সংখ্যা এবং $a \neq 0$] দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ নির্ণয়ের জন্য ax^2+bx+c দ্বিঘাত সংখ্যামালাকে দুটি রৈখিক উৎপাদকে [Linear factors] বিশ্লেষণ করে প্রতিটি উৎপাদককে শূন্য (0)-এর সঙ্গে সমান করে বীজ দুটি নির্ণয় করা যায়।

(ii) $25x^2-20x+4=0$ ——— (II)

বা, $25x^2-10x-10x+4=0$

বা, $5x(5x-2)-2(5x-2)=0$

বা, $(5x-2)(5x-2)=0$

হয়, $5x-2=0$ $\therefore x=\frac{2}{5}$ অথবা, $5x-2=0$ $\therefore x=\frac{2}{5}$

যেহেতু দুটি উৎপাদক সমান, $\therefore$ (II) নং সমীকরণের সমাধান $x=\frac{2}{5}$ ও $x=\frac{2}{5}$

$\therefore$ বীজদুটি পেলাম $\frac{2}{5}$ ও $\frac{2}{5}$ অর্থাৎ বীজদুটিও সমান। $\therefore$ (II) নং সমীকরণের বীজদ্বয় $\frac{2}{5}$ ও $\frac{2}{5}$

(iii) $x^2+5x=0$ ——— (III)

বা, $x(x+5)=0$

হয়, $x=0$ অথবা, $x+5=0$ $\therefore x=-5$

অর্থাৎ, $x=0$ ও $x=-5$, $x^2+5x=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান।

$\therefore x^2+5x=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় 0 এবং -5

> $ax^2+bx+c=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের $c=0$ হলে একটি বীজ সর্বদা 0 হবে।

(iv) $4x^2-9=0$ ——— (IV)

বা, $(2x+3)(2x-3)=0$

হয়, $2x+3=0$ $\therefore x=-\frac{3}{2}$ অথবা, $2x-3=0$ $\therefore x=\frac{3}{2}$

(IV) নং দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান $x=-\frac{3}{2}$ ও $x=\frac{3}{2}$; (IV) নং সমীকরণের বীজদ্বয় $-\frac{3}{2}$ এবং $\frac{3}{2}$

> অন্যভাবে (IV) নং দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ নির্ণয় করি।

$4x^2-9=0$

বা, $4x^2=9$ বা, $x^2=\frac{9}{4}$ $\therefore x=\pm\frac{3}{2}$ [$x=\pm\frac{3}{2}$ অর্থাৎ $x=+\frac{3}{2}$ ও $x=-\frac{3}{2}$]

$\therefore$ (IV) নং সমীকরণের সমাধান পেলাম, $x=\frac{3}{2}$ এবং $x=-\frac{3}{2}$; $\therefore$(IV) নং সমীকরণের বীজদ্বয় $-\frac{3}{2}$ ও $\frac{3}{2}$

(v) $x^2+(3-\sqrt{5})x-3\sqrt{5}=0$

বা, $x^2+3x-\sqrt{5}x-3\sqrt{5}=0$

বা, $x(x+3)-\sqrt{5}(x+3)=0$

বা, $(x+3)(x-\sqrt{5})=0$

হয়, $x+3=0 \therefore x=-3$ অথবা, $x-\sqrt{5}=0 \therefore x=\sqrt{5}$

$\therefore$ বীজদ্বয় -3 ও $\sqrt{5}$

$\therefore$ বাস্তব সহগযুক্ত একচল বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় সর্বদা মূলদ বা সর্বদা অমূলদ নয়।

প্রয়োগ : 10. সমাধান করি : $(x+4)(2x-3)=6$

$(x+4)(2x-3)=6$

বা, $2x^2+8x-3x-12-6=0$

বা, $2x^2+5x-18=0$

বা, $2x^2+9x-4x-18=0$

বা, $x(2x+9)-2(2x+9)=0$

বা, $(2x+9)(x-2)=0$

হয়, $2x+9=0, \therefore x=-\frac{9}{2}$

অথবা, $x-2=0, \therefore x=2$

$\therefore x=-\frac{9}{2}$ অথবা $x=2$.

অর্থাৎ, $x=-\frac{9}{2}$ ও $x=2$, $(x+4)(2x-3)=6$ দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান (Solution)।

প্রয়োগ : 11. $\frac{x}{3}+\frac{3}{x}=4\frac{1}{4}, (x\neq 0)$ —দ্বিঘাত সমীকরণটি সমাধান করি।

$\frac{x}{3}+\frac{3}{x}=4\frac{1}{4}$

বা, $\frac{x^2+9}{3x}=\frac{17}{4}$

বা, $4x^2+36=51x$

বা, $4x^2-51x+36=0$

বা, $4x^2-48x-3x+36=0$

বা, $4x(x-12)-3(x-12)=0$

বা, $(x-12)(4x-3)=0$

হয়, $x-12=0, \therefore x=12$

অথবা, $4x-3=0, \therefore x=\frac{3}{4}$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণটির সমাধান (Solution), $x=\frac{3}{4}$ ও $x=12$

আমি অন্যভাবে $\frac{x}{3}+\frac{3}{x}=4\frac{1}{4}, (x\neq 0)$ —দ্বিঘাত সমীকরণটি সমাধান করি।

ধরি, $\frac{x}{3}=a$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণটি হবে, $a+\frac{1}{a}=4\frac{1}{4}$

বা, $a+\frac{1}{a}=4+\frac{1}{4}$

বা, $(a-4)+\frac{1}{a}-\frac{1}{4}=0$

বা, $(a-4)-\frac{1}{4a}(a-4)=0$

বা, $(a-4)(1-\frac{1}{4a})=0$

হয়, $a-4=0$ অথবা $1-\frac{1}{4a}=0$

$a-4=0$ হলে $a=4, \therefore \frac{x}{3}=4 \therefore x=12$

আবার, $1-\frac{1}{4a}=0$ হলে $\frac{1}{4a}=1$

বা, $4a=1$ বা, $a=\frac{1}{4} \therefore \frac{x}{3}=\frac{1}{4} \therefore x=\frac{3}{4}$

$\therefore x=\frac{3}{4}$ ও $x=12$ হলো প্রদত্ত সমীকরণটির সমাধান (Solution)।

প্রয়োগ : 12. আমি $\frac{a}{x-b}+\frac{b}{x-a}=2\ (x \neq b, a)$ দ্বিঘাত সমীকরণটি সমাধান করি ও বীজদ্বয় লিখি।

$$\frac{a}{x-b}+\frac{b}{x-a}=2$$

বা, $\frac{a}{x-b}-1+\frac{b}{x-a}-1=0$

বা, $\frac{a-x+b}{x-b}+\frac{b-x+a}{x-a}=0$

বা, $(a+b-x)\left[\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-a}\right]=0$

বা, $(a+b-x)\left[\frac{x-a+x-b}{(x-a)(x-b)}\right]=0$

বা, $(a+b-x)\left[\frac{(2x-a-b)}{(x-a)(x-b)}\right]=0$

হয়, $a+b-x=0$ অথবা, $\frac{2x-a-b}{(x-a)(x-b)}=0$

হয়, $a+b-x=0$, $\therefore x=a+b$

অথবা, $\frac{2x-a-b}{(x-a)(x-b)}=0$, বা, $2x-a-b=0$, $\therefore x=\frac{a+b}{2}$

$\therefore$ $x=a+b$ ও $x=\frac{a+b}{2}$ প্রদত্ত দ্বিঘাত সমীকরণটির সমাধান (Solution)।

এবং বীজদ্বয় $(a+b)$ এবং $\left(\frac{a+b}{2}\right)$

প্রয়োগ : 13. $\frac{a}{ax-1}+\frac{b}{bx-1}=a+b,\ [x \neq \frac{1}{a}, \frac{1}{b}]$ দ্বিঘাত সমীকরণটি সমাধান করি ও বীজদ্বয় লিখি।
[নিজে করি]

প্রয়োগ : 14. আমি $\frac{x-3}{x+3}-\frac{x+3}{x-3}+6\frac{6}{7}=0\ (x \neq -3, 3)$ দ্বিঘাত সমীকরণটি সমাধান করি।

$$\frac{x-3}{x+3}-\frac{x+3}{x-3}+6\frac{6}{7}=0$$

বা, $a-\frac{1}{a}+6\frac{6}{7}=0$ ———— (i) [ধরি, $\frac{x-3}{x+3}=a$]

বা, $\frac{a^2-1}{a}+\frac{48}{7}=0$

বা, $\frac{a^2-1}{a}=-\frac{48}{7}$

বা, $7a^2-7=-48a$

বা, $7a^2+48a-7=0$

বা, $7a^2+49a-a-7=0$

বা, $7a(a+7)-1(a+7)=0$

বা, $(a+7)(7a-1)=0$

$\therefore$ $(a+7)$ ও $(7a-1)$ -এর একটি অবশ্যই শূন্য হবে।

হয়, $a+7=0$, $\therefore a=-7$, অথবা, $7a-1=0$, $\therefore a=\frac{1}{7}$

এবার $a=-7$ থেকে পাই, $\frac{x-3}{x+3}=-7$

বা, $x-3=-7x-21$

বা, $8x=-18$

বা, $x=-\frac{18}{8}$ $\therefore x=-\frac{9}{4}$

আবার, $a=\frac{1}{7}$ থেকে পাই, $\frac{x-3}{x+3}=\frac{1}{7}$

বা, $7x-21=x+3$

বা, $6x=24$ $\therefore x=4$

$\therefore$ $x=-\frac{9}{4}$ ও $x=4$ প্রদত্ত দ্বিঘাত সমীকরণটির সমাধান (Solution)।

$\therefore$ সমীকরণটির বীজদ্বয় $-\frac{9}{4}$ এবং 4.

অন্যভাবে, (i) থেকে পাই $a-\frac{1}{a}+\frac{48}{7}=0$

বা, $a-\frac{1}{a}+7-\frac{1}{7}=0$

বা, $a+7-\frac{1}{a}-\frac{1}{7}=0$

বা, $(a+7)-\frac{1}{7a}(a+7)=0$

বা, $(a+7)\left(1-\frac{1}{7a}\right)=0$

$\therefore$ $(a+7)$ এবং $\left(1-\frac{1}{7a}\right)$ -এর একটি অবশ্যই শূন্য হবে।

হয়, $a+7=0$, $\therefore a=-7$, অথবা, $1-\frac{1}{7a}=0$, $\therefore a=\frac{1}{7}$

এবার , $a=-7$ হলে, $\frac{x-3}{x+3}=-7$ বা, $x-3=-7x-21$

বা, $8x=3-21$

বা, $8x=-18$

$\therefore x=-\frac{9}{4}$

আবাব, $a=\frac{1}{7}$ হলে, $\frac{x-3}{x+3}=\frac{1}{7}$ বা, $7x-21=x+3$

বা, $6x=24$ $\therefore x=4$

অর্থাৎ $x=-\frac{9}{4}$ ও $x=4$ প্রদত্ত দ্বিঘাত সমীকরণটির সমাধান (Solution)। সুতরাং সমীকরণটির বীজদ্বয় $-\frac{9}{4}$ এবং 4

প্রয়োগ : 15. আমি $\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-3}{x+3}=2\frac{1}{2}$ $(x\neq-3, 3)$ দ্বিঘাত সমীকরণটির সমাধান করি। [নিজে করি]

কষে দেখি 1.2

1. নীচের প্রতিক্ষেত্রে প্রদত্ত মানগুলি প্রদত্ত দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ কিনা যাচাই করে লিখি:

   (i) $x^2+x+1=0$, 1 ও -1 (ii) $8x^2+7x=0$, 0 ও -2 (iii) $x+\frac{1}{x}=\frac{13}{6}$, $\frac{5}{6}$ ও $\frac{4}{3}$

   (iv) $x^2-\sqrt{3}\,x-6=0$, $-\sqrt{3}$ ও $2\sqrt{3}$

2. (i) k-এর কোন মানের জন্য $7x^2+kx-3=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ $\frac{2}{3}$ হবে হিসাব করে লিখি।

   (ii) k-এর কোন মানের জন্য $x^2+3ax+k=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ $-a$ হবে হিসাব করে লিখি।

3. যদি $ax^2+7x+b=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের দুটি বীজ $\frac{2}{3}$ এবং -3 হয় তবে a ও b-এর মান নির্ণয় করি।

4. সমাধান করি :

(i) $3y^2-20=160-2y^2$ (ii) $(2x+1)^2+(x+1)^2=6x+47$ (iii) $(x-7)(x-9)=195$

(iv) $3x-\frac{24}{x}=\frac{x}{3}$, $x\neq 0$ (v) $\frac{x}{3}+\frac{3}{x}=\frac{15}{x}$, $x\neq 0$ (vi) $10x-\frac{1}{x}=3$, $x\neq 0$

(vii) $\frac{2}{x^2}-\frac{5}{x}+2=0$, $x\neq 0$ (viii) $\frac{(x-2)}{(x+2)}+6\left(\frac{x-2}{x-6}\right)=1$, $x\neq -2, 6$

(ix) $\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+5}=\frac{1}{6}$, $x\neq 3, -5$ (x) $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}=2\frac{1}{12}$, $x\neq 0, -1$

(xi) $\frac{ax+b}{a+bx}=\frac{cx+d}{c+dx}$ $[a\neq b, c\neq d]$, $x\neq -\frac{a}{b}, \frac{-c}{d}$ (xii) $(2x+1)+\frac{3}{2x+1}=4$, $x\neq -\frac{1}{2}$

(xiii) $\frac{x+1}{2}+\frac{2}{x+1}=\frac{x+1}{3}+\frac{3}{x+1}-\frac{5}{6}$, $x\neq -1$ (xiv) $\frac{12x+17}{3x+1}-\frac{2x+15}{x+7}=3\frac{1}{5}$, $x\neq -\frac{1}{3}, -7$

(xv) $\frac{x+3}{x-3}+6\left(\frac{x-3}{x+3}\right)=5$, $x\neq 3, -3$ (xvi) $\frac{1}{a+b+x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}$, $x\neq 0, -(a+b)$

(xvii) $\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^2-5\left(\frac{x+a}{x-a}\right)+6=0$, $x\neq a$ (xviii) $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+b}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}$, $x\neq 0, -b$

(xix) $\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{1}{(x-2)(x-3)}+\frac{1}{(x-3)(x-4)}=\frac{1}{6}$, $x\neq 1,2,3,4$

(xx) $\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}=\frac{2c}{x-c}$, $x\neq a, b, c$ (xxi) $x^2-(\sqrt{3}+2)x+2\sqrt{3}=0$

প্রয়োগ : 16. আমার মামা সাইকেলে 84 কিমি. পথ ভ্রমণ করে দেখলেন যে তিনি যদি ঘণ্টায় 5 কিমি. অধিক বেগে সাইকেল চালাতেন তাহলে ভ্রমণ শেষ হতে 5 ঘণ্টা সময় কম লাগত। মামা ঘণ্টায় কত কিমি. বেগে ভ্রমণ করেছিলেন হিসাব করে লিখি।

ধরি, মামা ঘণ্টায় x কিমি. বেগে ভ্রমণ করেছিলেন।

শর্তানুসারে, $\frac{84}{x}-\frac{84}{x+5}=5$

বা, $\frac{84(x+5)-84x}{x(x+5)}=5$

বা, $\frac{84x+420-84x}{x^2+5x}=5$

বা, $5(x^2+5x)=420$

বা, $x^2+5x=84$

বা, $x^2+5x-84=0$

বা, $x^2+12x-7x-84=0$

বা, $x(x+12)-7(x+12)=0$

বা, $(x+12)(x-7)=0$

হয়, $x+12=0$, $\therefore x=-12$

অথবা, $x-7=0$, $\therefore x=7$

কিন্তু এখানে $x=-12$ হতে পারে না। কারণ গতিবেগের মান ঋণাত্মক হতে পারে না।

$\therefore x=7$

$\therefore$ মামা ঘণ্টায় 7 কিমি. বেগে ভ্রমণ করেছিলেন।

প্রয়োগ : 17. আমার বন্ধু অজয় তার খাতায় দুই অঙ্কের একটি সংখ্যা লিখেছে যার দশকের ঘরের অঙ্ক এককের ঘরের অঙ্ক অপেক্ষা 4 কম। সংখ্যাটি থেকে তার অঙ্ক দুটির গুণফল বিয়োগ করলে বিয়োগফল সংখ্যাটির অঙ্ক দুটির অন্তরের বর্গের সমান হয়। অজয় তার খাতায় কী সংখ্যা লিখতে পারে হিসাব করে লেখার চেষ্টা করি।

মনে করি অজয়ের লেখা দুই অঙ্কের সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্ক x; $\therefore$ দশক স্থানীয় অঙ্ক $(x-4)$

দশক	একক
$x-4$	x

$\therefore$ সংখ্যাটি $= 10(x-4) + x = 11x-40$

শর্তানুসারে, $(11x-40)-x\times(x-4) = \{x-(x-4)\}^2$

বা, $11x-40-x^2+4x = 16$

বা, $-x^2+15x-56 = 0$

বা, $x^2-15x+56 = 0$

বা, $x^2-7x-8x+56 = 0$

বা, $x(x-7)-8(x-7) = 0$

বা, $(x-7)(x-8) = 0$

হয়, $x-7 = 0$, $\therefore x = 7$ অথবা, $x-8 = 0$, $\therefore x = 8$

$\therefore x = 7$ অথবা, $x = 8$

$x = 7$ হলে, দুই অঙ্কের সংখ্যাটি হবে $= 11\times7-40 = 37$

$x = 8$ হলে, দুই অঙ্কের সংখ্যাটি হবে $= 11\times8-40 = 48$

$\therefore$ নির্ণেয় দুই অঙ্কের সংখ্যা 37 অথবা 48

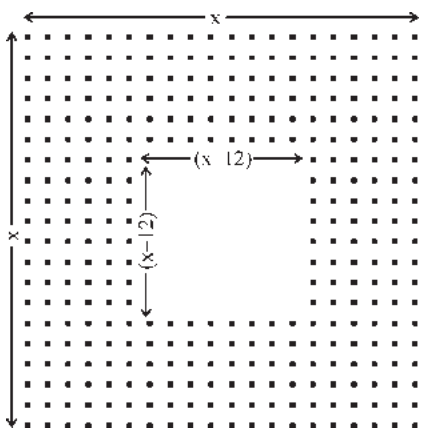
প্রয়োগ : 18. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্কটি দশক স্থানীয় অঙ্ক অপেক্ষা 6 বেশি এবং অঙ্কদ্বয়ের গুণফল সংখ্যাটির চেয়ে 12 কম। দুই অঙ্কের সংখ্যাটির একক স্থানীয় অঙ্ক কী কী হতে পারে হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 19. আব্দুল স্কুলের এক বার্ষিক ক্রীড়া প্রতিযোগিতায় শিক্ষার্থীরা 6 গভীরতাবিশিষ্ট শূন্যগর্ভ বর্গাকারে দাঁড়াল। এরফলে সম্মুখ সারিতে যতজন শিক্ষার্থী দাঁড়াল, শিক্ষার্থীরা যদি নিরেট বর্গাকারে দাঁড়াত সম্মুখ সারিতে 24 জন কম শিক্ষার্থী থাকত। শিক্ষার্থীর সংখ্যা হিসাব করে লিখি।

ধরি শূন্যগর্ভ বর্গাকারে দাঁড়ালে সম্মুখ সারিতে শিক্ষার্থীর সংখ্যা $= x$ জন

$\therefore$ মোট শিক্ষার্থীর সংখ্যা হবে $= x^2 - (x-2\times6)^2 = x^2 - (x-12)^2$

আবার নিরেট বর্গাকারে দাঁড়ালে মোট শিক্ষার্থীর সংখ্যা $(x-24)^2$



শর্তানুসারে, $x^2-(x-12)^2 = (x-24)^2$

বা, $x^2-(x^2+144-24x) = x^2-48x+576$

বা, $-x^2+72x-720 = 0$

বা, $x^2-72x+720 = 0$

বা, $x^2-60x-12x+720 = 0$

বা, $(x-60)(x-12) = 0$

হয়, $x-60 = 0$, $\therefore x = 60$

অথবা, $x-12 = 0$, $\therefore x = 12$

$\therefore x = 60$ এবং $x = 12$

কিন্তু এখানে $x = 12$ হতে পারে না। কারণ 6 গভীরতাবিশিষ্ট শূন্যগর্ভ বর্গের সম্মুখ সারির শিক্ষার্থীর সংখ্যা অবশ্যই 12-এর বেশি হবে। $\therefore x = 60$

$\therefore$ নির্ণেয় শিক্ষার্থীর সংখ্যা $= (x-24)^2$ জন $= (60-24)^2$ জন $= 36^2$ জন $= 1296$ জন

$\therefore$ মোট শিক্ষার্থীর সংখ্যা 1296 জন।

কষে দেখি 1.3

1. দুটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যার অন্তর 3 এবং তাদের বর্গের সমষ্টি 117; সংখ্যা দুটি হিসাব করে লিখি।
2. একটি ত্রিভুজের ভূমি তার উচ্চতার দ্বিগুণ অপেক্ষা 18 মিটার বেশি। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল 360 বর্গ মিটার হলে, তার উচ্চতা নির্ণয় করি।
3. যদি একটি অখণ্ড ধনাত্মক সংখ্যার পাঁচগুণ, তার বর্গের দ্বিগুণ অপেক্ষা 3 কম হয় তবে সংখ্যাটি নির্ণয় করি।
4. দুটি স্থানের মধ্যে দূরত্ব 200 কিমি.; এক স্থান হতে অপর স্থানে মোটর গাড়িতে যেতে যে সময় লাগে জিপগাড়িতে যেতে তার চেয়ে 2 ঘণ্টা সময় কম লাগে। মোটরগাড়ি অপেক্ষা জিপগাড়ির গতিবেগ ঘণ্টায় 5 কিমি. বেশি হলে, মোটর গাড়ির গতিবেগ হিসাব করে লিখি।
5. অমিতাদের আয়তক্ষেত্রাকার জমির ক্ষেত্রফল 2000 বর্গ মিটার এবং পরিসীমা 180 মিটার। অমিতাদের আয়তক্ষেত্রাকার জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ হিসাব করে লিখি।
6. দুই অঙ্কের একটি সংখ্যার দশকের ঘরের অঙ্ক এককের ঘরের অঙ্ক অপেক্ষা 3 কম। সংখ্যাটি থেকে উহার অঙ্ক দুটির গুণফল বিয়োগ করলে বিয়োগফল 15 হয়। সংখ্যাটির একক ঘরের অঙ্ক হিসাব করে লিখি।
7. আমাদের স্কুলের চৌবাচ্চায় দুটি নল আছে। নল দুটি দিয়ে চৌবাচ্চাটি $11\frac{1}{9}$ মিনিটে পূর্ণ হয়। যদি নলদুটি আলাদাভাবে খোলা থাকে তবে চৌবাচ্চাটি ভর্তি করতে একটি নল অপর নলটি থেকে 5 মিনিট বেশি সময় নেয়। প্রত্যেকটি নল পৃথকভাবে চৌবাচ্চাটিকে কত সময়ে পূর্ণ করবে হিসাব করে লিখি।
8. পর্ণা ও পীযূষ কোনো একটি কাজ একত্রে 4 দিনে সম্পন্ন করে। আলাদাভাবে একা কাজ করলে পর্ণার যে সময় লাগবে, পীযূষের তার চেয়ে 6 দিন বেশি সময় লাগবে। পর্ণা একাকী কতদিনে কাজটি সম্পন্ন করতে পারবে হিসাব করে লিখি।
9. কলমের মূল্য প্রতি ডজনে 6 টাকা কমলে 30 টাকায় আরও 3 টি বেশি কলম পাওয়া যাবে। কমার পূর্বে প্রতি ডজন কলমের মূল্য নির্ণয় করি।

10. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.)

(i)	একটি দ্বিঘাত সমীকরণের বীজের সংখ্যা	(a) একটি	(b) দুটি	(c) তিনটি	(d) কোনোটিই নয়
(ii)	$ax^2+bx+c=0$ দ্বিঘাত সমীকরণ হলে	(a) $b\neq 0$	(b) $c\neq 0$	(c) $a\neq 0$	(d) কোনোটিই নয়
(iii)	একটি দ্বিঘাত সমীকরণের চলের সর্বোচ্চ ঘাত	(a) 1	(b) 2	(c) 3	(d) কোনোটিই নয়
(iv)	$4(5x^2-7x+2) = 5(4x^2-6x+3)$ সমীকরণটি	(a) রৈখিক	(b) দ্বিঘাত	(c) ত্রিঘাত	(d) কোনোটিই নয়
(v)	$\frac{x^2}{x} = 6$ সমীকরণটির বীজ/বীজদ্বয়	(a) 0	(b) 6	(c) 0 ও 6	(d) -6

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) $(x-3)^2 = x^2-6x+9$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

(ii) $x^2=25$ সমীকরণটির একটি মাত্র বীজ 5

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি:

(i) যদি $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির $a=0$ এবং $b\neq 0$ হয়, তবে সমীকরণটি একটি ________ সমীকরণ ।

(ii) যদি একটি দ্বিঘাত সমীকরণের দুটি বীজই 1 হয়, তাহলে সমীকরণটি হলো ________

(iii) $x^2=6x$ সমীকরণটির বীজদ্বয় ________ ও ________

11. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)**

(i) $x^2+ax+3=0$ সমীকরণের একটি বীজ 1 হলে, a-এর মান নির্ণয় করি।

(ii) $x^2-(2+b)x+6=0$ সমীকরণের একটি বীজ 2 হলে, অপর বীজটির মান লিখি।

(iii) $2x^2+kx+4=0$ সমীকরণের একটি বীজ 2 হলে, অপর বীজটির মান লিখি।

(iv) একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ ও তার অন্যোন্যকের অন্তর $\frac{9}{20}$; সমীকরণটি লিখি।

(v) $ax^2+bx+35=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় -5 ও -7 হলে, a এবং b-এর মান লিখি।

7 $4x^2 + 9 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের কীরূপ বীজ পাব দেখি।

$4x^2 + 9 = 0$

বা, $4x^2 = -9$

বা, $x^2 = -\frac{9}{4}$

কিন্তু x-এর কোনো বাস্তব মানের জন্য $x^2 = -\frac{9}{4}$ হতে পারে না। কারণ বাস্তব সংখ্যার বর্গ কখনই ঋণাত্মক নয়।

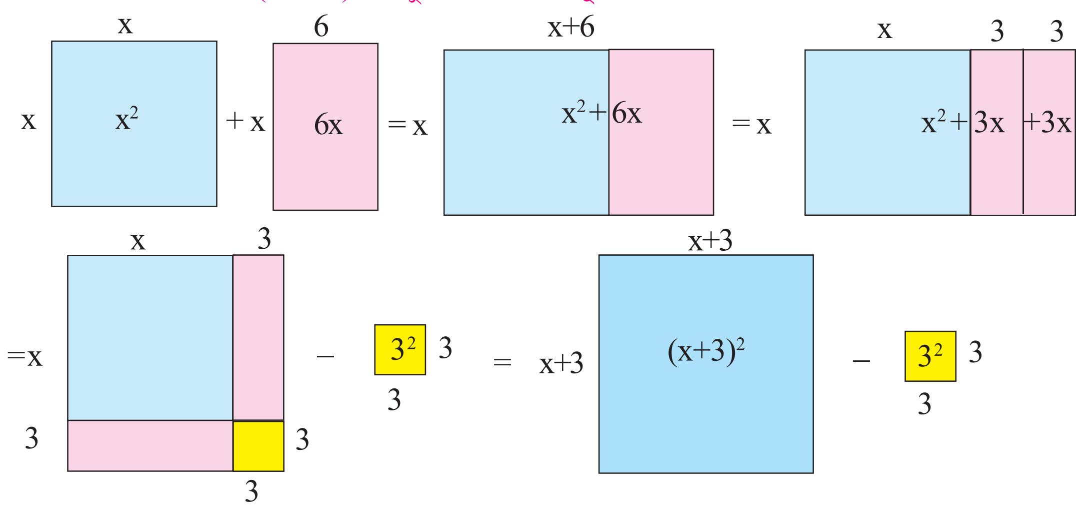
$\therefore$ দেখছি, $4x^2+9 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের কোনো বাস্তব বীজ নেই।

কিন্তু কোনো দ্বিঘাত সমীকরণের কখন বাস্তব বীজ পাব এবং কখন বাস্তব বীজ পাব না কীভাবে জানব?

প্রথমে $ax^2+bx+c = 0$ [যেখানে a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং $a \neq 0$] দ্বিঘাত সমীকরণকে $(x+p)^2-q^2=0$ [যেখানে p, q বাস্তব সংখ্যা]-এই আকারে প্রকাশ করি ও বর্গমূলের সাহায্যে বীজদ্বয়ের প্রকৃতি (Nature) জানার চেষ্টা করি।

আমি $x^2+6x+5 = 0$-এই দ্বিঘাত সমীকরণকে $(x+p)^2-q^2 = 0$ [যেখানে p, q বাস্তব সংখ্যা] আকারে প্রকাশ করি।

আমি প্রথমে হাতেকলমে (x^2+6x)-কে দুটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করি।



হাতেকলমে কী পেলাম লিখি।

$x^2+6x = (x^2+\frac{6x}{2}) + \frac{6x}{2}$

$= x^2+3x+3x = (x+3)\,x+3x = (x+3)x+3x+3\times3-3\times3 = (x+3)x+(x+3)3-3\times3 = (x+3)^2-3^2$

$\therefore x^2+6x+5 = (x+3)^2-9+5 = (x+3)^2 - 2^2$

8 $x^2+6x+5 = 0$ —কে $(x+3)^2-4 = 0$ আকারে লেখার পদ্ধতিকে কী বলা হয়?

একে পূর্ণবর্গাকারে প্রকাশ করার পদ্ধতি বলা হয় [Method of Completing the square].

$x^2+6x+5 = 0$ —দ্বিঘাত সমীকরণকে লেখা যেতে পারে,

$(x+3)^2-9+5 = 0$

বা, $(x+3)^2-4 = 0$

বা, $(x+3)^2 = 4$

বা, $x+3 = \pm2$

হয়, $x+3 = 2$ $\quad\therefore x = -1$

অথবা, $x+3 = -2$ $\quad\therefore x = -5$ $\quad\therefore x^2+6x+5 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় হলো -1 এবং -5.

9 $3x^2+x-10=0$ -এই দ্বিঘাত সমীকরণটির পূর্ণবর্গাকার প্রকাশ পদ্ধতিতে কীভাবে বীজদ্বয় নির্ণয় করব দেখি।

$3x^2+x-10=0$ -এই দ্বিঘাত সমীকরণের x^2-এর সহগ 3 যা পূর্ণবর্গ নয়।

$\therefore$ $3x^2+x-10=0$ সমীকরণটির উভয়পক্ষকে 3 দিয়ে গুণ করে পাই,

$9x^2+3x-30=0$

এখন $9x^2+3x-30 = (3x)^2+2.3x.\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^2-30$

$= (3x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}-30 \quad = (3x+\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{4}+30) \quad = (3x+\frac{1}{2})^2-\frac{121}{4}$

$\therefore$ $9x^2+3x-30=0$-কে লিখতে পারি, $(3x+\frac{1}{2})^2-\frac{121}{4}=0$

বা, $(3x+\frac{1}{2})^2=\frac{121}{4}=(\frac{11}{2})^2$

বা, $3x+\frac{1}{2}=\pm\frac{11}{2}$

হয়, $3x+\frac{1}{2}=\frac{11}{2}$

বা, $3x=\frac{11}{2}-\frac{1}{2}$

বা, $3x=\frac{10}{2}$ $\quad\therefore x=\frac{5}{3}$

অথবা, $3x+\frac{1}{2}=-\frac{11}{2}$

বা, $3x=-\frac{11}{2}-\frac{1}{2}$

বা, $3x=-\frac{12}{2}$ $\quad\therefore x=-2$

$\therefore$ $3x^2+x-10=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় -2 এবং $\frac{5}{3}$

10 আমি অন্যভাবে $3x^2+x-10=0$ সমীকরণের উভয়পক্ষকে 3 দিয়ে ভাগ করে বীজদ্বয় নির্ণয় করি।

$3x^2+x-10=0$

বা, $x^2+\frac{x}{3}-\frac{10}{3}=0$

বা, $x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3})^2-(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3})^2-\frac{10}{3}=0$

বা, $(x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3})^2-(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3})^2-\frac{10}{3}=0$

বা, $(x+\frac{1}{6})^2-(\frac{1}{6})^2-\frac{10}{3}=0$

বা, $(x+\frac{1}{6})^2-\frac{1}{36}-\frac{10}{3}=0$

বা, $(x+\frac{1}{6})^2-[\frac{1+120}{36}]=0$

বা, $(x+\frac{1}{6})^2=\frac{121}{36}$

বা, $(x+\frac{1}{6})^2=(\frac{11}{6})^2$

বা, $x+\frac{1}{6}=\pm\frac{11}{6}$

হয়, $x+\frac{1}{6}=\frac{11}{6}$

বা, $x=\frac{11}{6}-\frac{1}{6}$

$\therefore x=\frac{5}{3}$

অথবা, $x+\frac{1}{6}=-\frac{11}{6}$

বা,$x=-\frac{11}{6}-\frac{1}{6}$

$\therefore x=-2$

$\therefore$ $3x^2+x-10=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় -2 এবং $\frac{5}{3}$

প্রয়োগ : 20. আমি $5x^2+23x+12=0$ দ্বিঘাত সমীকরণটির পূর্ণবর্গাকার প্রকাশ পদ্ধতিতে বীজদ্বয় নির্ণয় করি।

$5x^2+23x+12=0$

বা, $x^2+\frac{23}{5}x+\frac{12}{5}=0$

বা, $\{x+\frac{1}{2}(\frac{23}{5})\}^2-\{\frac{1}{2}(\frac{23}{5})\}^2+\frac{12}{5}=0$

বা, $(x+\frac{23}{10})^2-(\frac{23}{10})^2+\frac{12}{5}=0$

বা, $(x+\frac{23}{10})^2-\frac{529}{100}+\frac{12}{5}=0$

বা, $(x+\frac{23}{10})^2=\frac{529}{100}-\frac{12}{5}=\frac{529-240}{100}=\frac{289}{100}=(\frac{17}{10})^2$

বা, $x+\frac{23}{10}=\pm\frac{17}{10}$

হয়, $x+\frac{23}{10}=\frac{17}{10}$ অথবা, $x+\frac{23}{10}=-\frac{17}{10}$

অর্থাৎ হয়, $x=\boxed{}$ অথবা, $x=\boxed{}$ [নিজে করি]

$\therefore$ $5x^2+23x+12=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় $\boxed{}$ ও $\boxed{}$

প্রয়োগ : 21. আমি অন্যভাবে অর্থাৎ $5x^2+23x+12=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের বামপক্ষ ও ডানপক্ষকে 5 দিয়ে গুণ করে সমীকরণটি পূর্ণবর্গাকার প্রকাশ পদ্ধতিতে বীজদ্বয় নির্ণয় করি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 22. আমি $2x^2-6x+1=0$ দ্বিঘাত সমীকরণটির পূর্ণবর্গাকার প্রকাশ পদ্ধতিতে সমাধান করি।

$2x^2-6x+1=0$ সমীকরণটির উভয়পক্ষকে 2 দিয়ে গুণ করে

পাই, $4x^2-12x+2=0$

বা, $(2x)^2-2\cdot2x\cdot3+3^2-3^2+2=0$

বা, $(2x-3)^2-9+2=0$

বা, $(2x-3)^2=7$

বা, $2x-3=\pm\sqrt{7}$

বা, $2x=3\pm\sqrt{7}$

$\therefore$ $x=\frac{3\pm\sqrt{7}}{2}$

$\therefore$ বীজগুলি পেলাম $\frac{3+\sqrt{7}}{2}$ ও $\frac{3-\sqrt{7}}{2}$

$\therefore$ $x=\frac{3-\sqrt{7}}{2}$ ও $x=\frac{3+\sqrt{7}}{2}$ দ্বিঘাত সমীকরণটির সমাধান (Solution)।

প্রয়োগ : 23. আমি $9x^2+30x+31 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণটির পূর্ণবর্গাকার প্রকাশ পদ্ধতিতে সমাধান করি।

$9x^2+30x+31 = 0$

বা, $(3x)^2+2\cdot3x\cdot5+(5)^2-(5)^2+31 = 0$

বা, $(3x+5)^2-25+31 = 0$

বা, $(3x+5)^2 = -6$

কিন্তু x-এর কোনো বাস্তব মানের জন্য $(3x+5)^2$ ঋণাত্মক হতে পারে না।

$\therefore$ $9x^2-30x+31 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের কোনো বাস্তব বীজ নেই।

দ্বিঘাত সমীকরণগুলির পূর্ণবর্গাকার প্রকাশ পদ্ধতিতে বীজ নির্ণয়ের মাধ্যমে দেখলাম কোনো কোনো দ্বিঘাত সমীকরণের বাস্তব বীজ আছে, আবার কোনো কোনো দ্বিঘাত সমীকরণের বাস্তব বীজ নেই।

11 আমি $ax^2+bx+c = 0$ [a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং $a \neq 0$] দ্বিঘাত সমীকরণের পূর্ণবর্গাকার প্রকাশ পদ্ধতিতে বীজ নির্ণয় করে বীজের প্রকৃতি কখন কী হবে জানার চেষ্টা করি।

$ax^2+bx+c = 0$ [a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং $a \neq 0$]

উভয়পক্ষকে a দিয়ে ভাগ করে পেলাম,

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

বা, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$

বা, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$

বা, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) = 0$

বা, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$

যদি $b^2 - 4ac \geq 0$ হয়, তবে উভয়পক্ষের বর্গমূল নিয়ে পাই,

$$x+\frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

বা, $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$\therefore$ $ax^2+bx+c = 0$ [$a \neq 0$] দ্বিঘাত সমীকরণের দুটি বাস্তব বীজ হলো

$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ এবং $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ যখন $b^2-4ac \geq 0$

কিন্তু $b^2-4ac < 0$ হলে কী হবে?

$b^2-4ac < 0$ হলে $ax^2+bx+c = 0$ [a, b, c বাস্তব এবং $a \neq 0$] দ্বিঘাত সমীকরণের কোনো বাস্তব বীজ পাব না।

এই স্তরে আমরা সেইসব দ্বিঘাত সমীকরণের সমস্যা সমাধান করব যাদের ক্ষেত্রে $b^2-4ac \geq 0$;

পেলাম, $ax^2+bx+c = 0$ [a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং $a \neq 0$] দ্বিঘাত সমীকরণের দুটি বীজ। একটি হলো

$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ এবং অপরটি $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

কিন্তু যে-কোনো একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ নির্ণয়ের এই সাধারণ সূত্রটিকে কী বলা হয়?

যে-কোনো একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ নির্ণয়ের এই সাধারণ সূত্রটিকে **শ্রীধর আচার্য**-এর **সূত্র** বলা হয়।

প্রাচীন ভারতের এক বিখ্যাত গণিতজ্ঞ **শ্রীধর আচার্য** (750 খ্রি. আনু.) এই সূত্রটি অবিষ্কার করেন। তাই আমরা একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ দুটি নির্ণয়ের এই সাধারণ সূত্রটিকে শ্রীধর আচার্য-এর সূত্র বলে থাকি। তিনি পাটিগণিত ও বীজগণিতকে আলাদা বিষয়রূপে গণ্য করে পৃথক পুস্তক রচনা করেন। পাটিগণিতে বর্গমূল ও ঘনমূল নির্ণয়ের পদ্ধতি এবং ত্রৈরাশিক পদ্ধতিতে সমস্যার সমাধান সম্পর্কে তাঁর অবদানের কথা বিভিন্ন পুস্তকাদিতে পাওয়া যায়। দুঃখের বিষয়, তাঁর লেখা মূল পাটিগণিত বই-এর অংশবিশেষ খুঁজে পাওয়া গেলেও বীজগণিত বইটি এখনও উদ্ধার করা সম্ভব হয়নি। বীজগণিতে দ্বিঘাত সমীকরণের তাঁর আবিষ্কৃত এই সূত্রের কথা আমরা জানতে পারি পরবর্তী যুগের আর এক খ্যাতনামা গণিতজ্ঞ **দ্বিতীয় ভাস্করাচার্য** (1150 খ্রি.)-এর বইতে শ্রীধর আচার্যের নামে এই সূত্রের উল্লেখ থেকে।

প্রয়োগ : 24. দাদা তার খাতায় এমন দুটি সংখ্যা লিখেছে যে একটি সংখ্যা অপরটির থেকে 3 ছোটো এবং সংখ্যাদুটির গুণফল 70; আমি একটি একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন করে শ্রীধর আচার্যের সূত্রের সাহায্যে দাদার লেখা সংখ্যা দুটি নির্ণয় করি।

মনে করি, একটি সংখ্যা x

$\therefore$ অন্য সংখ্যাটি $(x-3)$

শর্তানুসারে, $x(x-3) = 70$

বা, $x^2-3x-70 = 0$ ———— (I)

শ্রীধর আচার্যের সূত্র ব্যবহার করার জন্য (I) নং কে $ax^2+bx+c = 0$ $[a\neq0]$-এর সঙ্গে তুলনা করে পাই,

$a = 1$, $b = -3$ এবং $c = -70$

$\therefore$ শ্রীধর আচার্য-এর সূত্র থেকে পাই,

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4.1\times(-70)}}{2.1}$$

$$= \frac{3\pm\sqrt{9+280}}{2} = \frac{3\pm\sqrt{289}}{2} = \frac{3\pm17}{2}$$

হয়, $x = \frac{3+17}{2} = \frac{20}{2} = 10$

অথবা, $x = \frac{3-17}{2} = \frac{-14}{2} = -7$

যখন $x = 10$ তখন অন্য সংখ্যাটি হবে $10-3 = 7$ এবং

যখন $x = -7$ তখন অন্য সংখ্যাটি হবে $-7-3 = -10$

$\therefore$ সংখ্যা দুটি হবে 7 এবং 10 অথবা -10 এবং -7

প্রয়োগ : 25. x-এর প্রাপ্ত মানদুটি অর্থাৎ $x = 10$ এবং $x = -7$ (I) নং দ্বিঘাত সমীকরণটি সিদ্ধ করে কিনা যাচাই করি। [নিজে করি]

x-এর দুটি মান **একচলবিশিষ্ট** দ্বিঘাত সমীকরণকে সিদ্ধ করলে তবেই নিশ্চিতভাবে বলা যায় যে ওই মান দুটিই ওই দ্বিঘাত সমীকরণটির সমাধান বা বীজ।

প্রয়োগ : 26. দুটি ক্রমিক ধনাত্মক অযুগ্ম সংখ্যার গুণফল 143; সমীকরণ গঠন করি এবং শ্রীধর আচার্য-এর সূত্র প্রয়োগ করে অযুগ্ম সংখ্যা দুটি লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 27. কোনো দলের কাছে 195 টাকা জমা ছিল এবং দলে যতজন সদস্য প্রত্যেকে তত টাকা চাঁদা দেওয়ার পর দলের মোট অর্থ দলের সকলের মধ্যে সমানভাগে ভাগ করলে প্রত্যেকে 28 টাকা করে পাবে। শ্রীধর আচার্যের সূত্র প্রয়োগ করে ওই দলের সদস্য সংখ্যা নির্ণয় করি।

ধরি, ওই দলের সদস্য সংখ্যা x জন

$\therefore$ প্রত্যেকে x টাকা করে দিলে মোট অর্থের পরিমাণ $= x \times x$ টাকা $= x^2$ টাকা

আগে জমা ছিল 195 টাকা

$\therefore$ মোট অর্থের পরিমাণ $= (x^2+195)$ টাকা

শর্তানুসারে, $x^2+195 = 28 \times x$

বা, $x^2-28x+195 = 0$ ———— (I)

শ্রীধর আচার্যের সূত্র ব্যবহার করার জন্য (I) নং কে $ax^2+bx+c = 0$-এর সাথে তুলনা করে পাই, $a=1$, $b=-28$ এবং $c=\boxed{}$

$\therefore$ শ্রীধর আচার্যের সূত্র থেকে পাই,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-28) \pm \sqrt{(-28)^2-4.1\times195}}{2\cdot1}$$

$$= \frac{28 \pm \sqrt{\boxed{}-780}}{2}$$ [নিজে করি]

$$= \frac{28 \pm 2}{2}$$

হয়, $x = \frac{28+2}{2} = \boxed{}$ অথবা, $x = \frac{28-2}{2} = \boxed{}$

$\therefore$ সদস্য সংখ্যা 15 হতে পারে আবার 13 হতে পারে।

$x=15$ এবং $x=13$, (I) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করছে কিনা নিজে যাচাই করি [নিজে করি]

প্রয়োগ : 28. শ্রীধর আচার্যের সূত্র প্রয়োগ করে একটি ধনাত্মক সংখ্যা লিখি যা তার বর্গের চেয়ে 30 কম।

উত্তর সংকেত : ধরি সংখ্যাটি $=x$
$\therefore$ শর্তানুসারে $x^2-x = 30$
শ্রীধর আচার্য-এর সূত্রের সাহায্যে পেলাম $x=6$ অথবা -5 [নিজে করি]
যেহেতু সংখ্যাটি ধনাত্মক, তাই -5 মানটি গ্রহণযোগ্য নয়।
$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $=6$

প্রয়োগ : 29. প্রীতম একটি কাজ যতদিনে করতে পারে মেহের তার থেকে 5 দিন কমে কাজটি শেষ করে। প্রীতম ও মেহের একত্রে কাজটি করলে 6 দিনে কাজটি শেষ করে। প্রীতম একা কতদিনে কাজটি শেষ করতে পারবে শ্রীধর আচার্যের সূত্র প্রয়োগ করে নির্ণয় করি।

মনে করি, প্রীতম একা x দিনে কাজটি শেষ করে।

মেহের একা $(x-5)$ দিনে কাজটি শেষ করে।

$\therefore$ প্রীতম 1 দিনে করে কাজটির $\frac{1}{x}$ অংশ

মেহের 1 দিনে করে কাজটির $\frac{1}{x-5}$ অংশ

প্রীতম ও মেহের একত্রে 6 দিনে কাজটি শেষ করে।

$\therefore$ ওরা দুজনে একত্রে 1 দিনে করে $\frac{1}{6}$ অংশ কাজ

শর্তানুসারে, $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-5}=\frac{1}{6}$ ———— (I)

বা, $\frac{x-5+x}{x(x-5)}=\frac{1}{6}$

বা, $\frac{2x-5}{x^2-5x}=\frac{1}{6}$

বা, $x^2-5x=12x-30$

বা, $x^2-17x+30=0$ ———— (II)

(I) নং সমীকরণের সরল রূপ (II) নং দ্বিঘাত সমীকরণ। এই (II) নং সমীকরণটির সমাধান, শ্রীধর আচার্য-এর সূত্র অনুসারে হবে—

$$x=\frac{-(-17)\pm\sqrt{(-17)^2-4.1\times30}}{2\cdot1}=\frac{17\pm\sqrt{289-120}}{2}=\frac{17\pm\boxed{}}{2}$$

হয়, $x=\frac{17+13}{2}=\boxed{}$ অথবা, $x=\frac{17-13}{2}=\boxed{}$

$\therefore x = 15$ অথবা 2

এখানে $x=2$ হলে প্রীতম 2 দিনে কাজটি শেষ করবে। যেহেতু মেহের প্রীতমের থেকে 5 দিন কমে কাজটি শেষ করে, সুতরাং মেহের যতদিনে কাজটি শেষ করবে তা হবে $2-5=-3$। কিন্তু দিন সংখ্যা কোনোভাবেই ঋণাত্মক হয় না। তাই এখানে $x=2$ হবে না।

$\therefore x=15$ অর্থাৎ প্রীতম একা 15 দিনে কাজটি শেষ করতে পারবে।

প্রয়োগ : 30. নীচের দ্বিঘাত সমীকরণগুলির যদি বাস্তব বীজ থাকে তবে শ্রীধর আচার্যের সূত্রের সাহায্যে বীজগুলি নির্ণয় করি।

(i) $x^2-6x+4=0$ (ii) $9x^2+7x-2=0$ (iii) $x^2-6x+9=0$ (iv) $2x^2+x+1=0$
(v) $1-x=2x^2$ (vi) $2x^2-9x+7=0$ (vii) $x^2-(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}=0$

(i) $x^2-6x+4=0$ ———— (I)

(I) নং দ্বিঘাত সমীকরণকে $ax^2+bx+c=0$ $[a\neq0]$ দ্বিঘাত সমীকরণের সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a=1$, $b=-6$ এবং $c=4$

$\therefore b^2-4ac = (-6)^2-4\cdot1\cdot4 = 36-16 = 20>0$

(I) নং দ্বিঘাত সমীকরণের বাস্তব বীজ আছে।

$$\text{বীজগুলি} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}$$

$$= \frac{6\pm\sqrt{36-16}}{2}$$

$$= \frac{6\pm\sqrt{20}}{2} = \frac{6\pm\sqrt{4\times5}}{2} = \frac{6\pm2\sqrt{5}}{2} = \frac{2(3\pm\sqrt{5})}{2} = 3\pm\sqrt{5}$$

$\therefore$ (I) নং সমীকরণের বীজদ্বয় $(3+\sqrt{5})$ এবং $(3-\sqrt{5})$।

(ii) $9x^2+7x-2=0$ ———— (I)

(I) নং দ্বিঘাত সমীকরণকে $ax^2+bx+c=0$ $[a\neq0]$ দ্বিঘাত সমীকরণের সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a=9$, $b=7$ এবং $c=-2$

$\therefore b^2-4ac = \boxed{} > 0$ **[নিজে হিসাব করি]**

(I) নং দ্বিঘাত সমীকরণের বাস্তব বীজ আছে।

$$\text{বীজগুলি} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-7\pm\sqrt{(7)^2-4\cdot9\cdot(-2)}}{2\cdot9} = \frac{-7\pm\sqrt{121}}{18} = \frac{-7\pm11}{18}$$

হয়, $x = \frac{-7+11}{18} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$ অথবা, $x = \frac{-7-11}{18} = -1$

$\therefore$ (I) নং সমীকরণের বীজদ্বয় -1 ও $\frac{2}{9}$

(iii) $x^2-6x+9=0$ ———— (I)

(I) নং দ্বিঘাত সমীকরণকে $ax^2+bx+c=0$ $[a\neq0]$ দ্বিঘাত সমীকরণের সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a=1$, $b=-6$ এবং $c=9$

$\therefore b^2-4ac = (-6)^2-4\cdot1\cdot9 = 36-36 = 0$

$\therefore$ (I) নং দ্বিঘাত সমীকরণের বাস্তব বীজ আছে।

$$\text{বীজগুলি} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-6)\pm\sqrt{0}}{2\cdot1} = \frac{6\pm0}{2}$$

হয়, $x = \frac{6+0}{2} = 3$ অথবা, $x = \frac{6-0}{2} = 3$

$\therefore$ (I) নং সমীকরণের বীজদ্বয় 3 এবং 3

(iv) $2x^2+x+1=0$ ———— (I)

(I) নং দ্বিঘাত সমীকরণকে $ax^2+bx+c=0$ $[a\neq0]$ দ্বিঘাত সমীকরণের সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a=2$, $b=1$ এবং $c=1$

$\therefore b^2-4ac = (1)^2-4\cdot2\cdot1 = -7 < 0$

$\therefore$ (I) নং দ্বিঘাত সমীকরণের কোনো বাস্তব বীজ নেই।

(v), (vi) ও (vii) নিজে বুঝে শ্রীধর আচার্য-এর সূত্র প্রয়োগ করে সমাধান করি এবং বীজগুলি নির্ণয় করি।

কষে দেখি 1.4

1. (i) $4x^2+(2x-1)(2x+1)=4x(2x-1)$ -এই সমীকরণটি সমাধানে শ্রীধর আচার্যের সূত্র প্রয়োগ সম্ভব কিনা বুঝে লিখি।

   (ii) শ্রীধর আচার্যের সূত্রের সাহায্যে আমরা কোন ধরনের সমীকরণের সমাধান করতে পারি বুঝে লিখি।

   (iii) $5x^2+2x-7=0$ এই সমীকরণে শ্রীধর আচার্যের সূত্র প্রয়োগ করে $x=\frac{k\pm12}{10}$ পাওয়া গেলে k-এর মান কী হবে হিসাব করে লিখি।

2. নীচের দ্বিঘাত সমীকরণগুলির বাস্তব বীজ থাকলে শ্রীধর আচার্যের সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় করি।

   (i) $3x^2+11x-4=0$ (ii) $(x-2)(x+4)+9=0$ (iii) $(4x-3)^2-2(x+3)=0$
   (iv) $3x^2+2x-1=0$ (v) $3x^2+2x+1=0$ (vi) $10x^2-x-3=0$
   (vii) $10x^2-x+3=0$ (viii) $25x^2-30x+7=0$ (ix) $(4x-2)^2+6x=25$

3. নিম্নলিখিত গাণিতিক সমস্যাগুলি একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণে প্রকাশ করি এবং শ্রীধর আচার্যের সূত্র প্রয়োগ করে বা উৎপাদকের সাহায্যে সমাধান করি।

(i) সাথি একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন করেছে যার অতিভুজের দৈর্ঘ্য ক্ষুদ্রতম বাহুর দ্বিগুণ অপেক্ষা 6 সেমি. বেশি। যদি তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য অতিভুজের দৈর্ঘ্যের থেকে 2 সেমি. কম হয়, তবে সাথির আঁকা সমকোণী ত্রিভুজের বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

(ii) যদি দুই অঙ্কের একটি ধনাত্মক সংখ্যাকে উহার এককের ঘরের অঙ্ক দিয়ে গুণ করলে গুণফল 189 হয় এবং দশকের ঘরের অঙ্ক এককের ঘরের অঙ্কের দ্বিগুণ হয়, তবে এককের ঘরের অঙ্কটি নির্ণয় করি।

(iii) সালমার গতিবেগ অণিকের গতিবেগের থেকে 1 মি./সেকেন্ড বেশি। 180 মিটার দৌড়াতে গিয়ে সালমা অণিকের থেকে 2 সেকেন্ড আগে পৌঁছায়। অণিকের গতিবেগ প্রতি সেকেন্ডে কত মিটার হিসাব করে লিখি।

(iv) আমাদের পাড়ায় একটি বর্গক্ষেত্রাকার পার্ক আছে। ওই পার্কের একটি বাহুর দৈর্ঘ্যের থেকে 5 মিটার বেশি দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট ও ওই পার্কের বাহুর দৈর্ঘ্য থেকে 3 মি. কম প্রস্থবিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্রাকার পার্কের ক্ষেত্রফল ওই বর্গক্ষেত্রাকার পার্কের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ অপেক্ষা 78 বর্গ মিটার কম হলে বর্গক্ষেত্রাকার পার্কের বাহুর দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

(v) আমাদের গ্রামে প্রলয়বাবু তার আয়তক্ষেত্রাকার জমিতে লাগানোর জন্য মোট 350টি লঙ্কার চারা কিনলেন। সারি ধরে চারাগাছ লাগাতে গিয়ে দেখলেন যে, প্রতিটি সারিতে সারির সংখ্যা থেকে 24টি করে বেশী গাছ লাগালে আরও 10টি গাছ অতিরিক্ত থাকে। সারির সংখ্যা হিসাব করে লিখি।

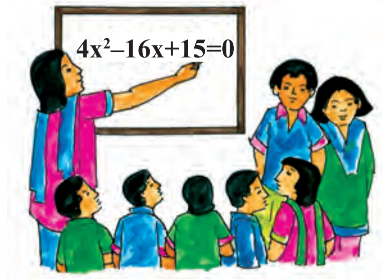
(vi) জোসেফ এবং কুন্তল একটি কারখানায় কাজ করে। জোসেফ একটি জিনিস তৈরি করতে কুন্তলের চেয়ে 5 মিনিট কম সময় নেয়। 6 ঘণ্টা কাজ করে জোসেফ, কুন্তলের চেয়ে 6টি জিনিস বেশি তৈরি করে। কুন্তল ওই সময়ে কয়টি জিনিস তৈরি করে হিসাব করে লিখি।

(vii) স্থিরজলে একটি নৌকার গতিবেগ 8 কিমি/ঘণ্টা। নৌকাটি 5 ঘণ্টায় স্রোতের অনুকূলে 15 কিমি. এবং স্রোতের প্রতিকূলে 22 কিমি. গেলে, স্রোতের বেগ কত ছিল হিসাব করে লিখি।

(viii) একটি সুপারফাস্ট ট্রেন একটি এক্সপ্রেস ট্রেনের থেকে ঘণ্টায় 15 কিমি. বেশি বেগে যায়। একইসঙ্গে একটি স্টেশন থেকে ছেড়ে 180 কিমি. দূরে অন্য একটি স্টেশনে সুপারফাস্ট ট্রেনটি 1 ঘণ্টা আগে পৌঁছাল। সুপারফাস্ট ট্রেনটির গতিবেগ ঘণ্টায় কত কিমি. ছিল নির্ণয় করি।

(ix) রেহানা বাজারে গিয়ে দেখল প্রতি কিগ্রা. মাছের যা দাম, ডালের দাম তা থেকে প্রতি কিগ্রা. 20 টাকা কম এবং চালের দাম প্রতি কিগ্রা. 40 টাকা কম। রেহানা 240 টাকার মাছ ও 240 টাকার ডাল কিনে মোট যে পরিমাণ মাছ ও ডাল পেল তা 280 টাকায় চাল কেনার পরিমাণের সমান। রেহানা প্রতি কিগ্রা. মাছ কী দামে কিনেছিল হিসাব করি।

আজ আমরা স্কুলে একটি মজার খেলা খেলব। আমরা প্রত্যেকে স্কুলের ব্ল্যাকবোর্ডে একটি যে-কোনো দ্বিঘাত সমীকরণ লিখব এবং অন্য বন্ধুরা ওই দ্বিঘাত সমীকরণটির বাস্তব বীজ আছে কিনা পরীক্ষা করে বীজগুলি নির্দিষ্ট সময়ের মধ্যে নির্ণয় করবে ও তাদের জানাবে।



12 প্রথমে আমি বোর্ডে লিখলাম $4x^2-16x+15=0$

$4x^2-16x+15=0$ ________ (I)

(I) নং দ্বিঘাত সমীকরণকে $ax^2+bx+c=0$ $[a\neq0]$ দ্বিঘাত সমীকরণের সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a=4$, $b=-16$ এবং $c=15$

$\therefore b^2-4ac = (-16)^2-4\cdot4\cdot15 = 16>0$

$\therefore$ (I) নং দ্বিঘাত সমীকরণের বাস্তব বীজ আছে।

$\therefore$ (I) নং সমীকরণের বাস্তব বীজদ্বয় $\boxed{}$ ও $\boxed{}$ **[নিজে করি]**

$\therefore$ পেলাম (I) নং সমীকরণের **বীজদ্বয় বাস্তব ও অসমান**।

13 এবার নিবেদিতা বোর্ডে লিখল $4x^2+12x+9=0$

$4x^2+12x+9=0$ ________ (II)

(II) নং দ্বিঘাত সমীকরণ কে $ax^2+bx+c=0$ $[a\neq0]$ দ্বিঘাত সমীকরণের সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a=4$, $b=12$ এবং $c=9$

$\therefore b^2-4ac = (12)^2-4\cdot4\cdot9 = 144-144=0$

$\therefore$ (II) নং দ্বিঘাত সমীকরণের বাস্তব বীজ আছে।

$4x^2+12x+9 = 4x^2+6x+6x+9 = 2x(2x+3)+3(2x+3) = (2x+3)(2x+3)$

$4x^2+12x+9=0$

$\therefore (2x+3)(2x+3)=0$

$\therefore$ বীজদ্বয় $-\frac{3}{2}$ এবং $-\frac{3}{2}$

$\therefore$ পেলাম (II) নং সমীকরণের **বীজদ্বয় বাস্তব ও সমান**।

14 এবার প্রদীপ লিখল $4x^2-16x+21=0$

$4x^2-16x+21=0$ ________ (III)

(III) নং দ্বিঘাত সমীকরণ কে $ax^2+bx+c=0$ $[a\neq0]$ দ্বিঘাত সমীকরণের সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a=4$, $b=-16$ এবং $c=21$

$\therefore b^2-4ac = (-16)^2-4\cdot4\cdot21 = 256-336=-80<0$

$\therefore$ (III) নং দ্বিঘাত সমীকরণের কোনো বাস্তব বীজ পাব না।

15 আমি $ax^2+bx+c=0$ [a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং $a\neq0$] দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় নির্ণয় করি ও বীজের প্রকৃতি জানার চেষ্টা করি।

$ax^2+bx+c=0$ [a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং $a\neq0$]

এই দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ এবং $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

(I) যদি $b^2-4ac=0$ হয়, বীজদ্বয় পাই $\frac{-b}{2a}$ এবং $\frac{-b}{2a}$
অর্থাৎ বীজদ্বয় বাস্তব ও সমান পাই।

(II) যদি $b^2-4ac>0$ হয়, বীজদ্বয় পাই $\left(\frac{-b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$ এবং $\left(\frac{-b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$

অর্থাৎ বীজদ্বয় বাস্তব ও অসমান পাই।

(III) যদি $b^2-4ac<0$ হয়, কোনো বাস্তব বীজ পাব না।

বুঝেছি, $ax^2+bx+c=0$ $[a\neq0]$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজের প্রকৃতি (b^2-4ac) মানের উপর নির্ভর করে।

16 (b^2-4ac)-কে $ax^2+bx+c=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের কী বলা হয়?

b^2-4ac, $ax^2+bx+c=0$ [a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং $a\neq0$] দ্বিঘাত সমীকরণের বীজের প্রকৃতি নিরূপণ করে বলে, b^2-4ac-কে ওই দ্বিঘাত সমীকরণের **নিরূপক (Discriminant)** বলা হয়।

পেলাম, $ax^2+bx+c=0$ $[a\neq0]$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদুটি
(I) বাস্তব ও সমান হবে যখন $b^2-4ac=0$ হয়
(II) বাস্তব ও অসমান হবে যখন $b^2-4ac>0$ হয়
(III) কোনো বাস্তব বীজ পাব না যখন $b^2-4ac<0$ হয়
(I),(II),(III) এর বিপরীত উক্তিগুলিও সত্য।

প্রয়োগ : 31. আমি নীচের দ্বিঘাত সমীকরণগুলির বীজদ্বয়ের প্রকৃতি নির্ণয় করি।

(i) $3x^2+x-1=0$ (ii) $4x^2-4x+1=0$ (iii) $x^2+x+1=0$ (iv) $2x^2+x-2=0$

(i) $3x^2+x-1=0$ দ্বিঘাত সমীকরণকে $ax^2+bx+c=0$ $[a\neq0]$ দ্বিঘাত সমীকরণের সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a=3$, $b=1$ এবং $c=-1$

$\therefore$ নিরূপক $= b^2-4ac = (1)^2-4\cdot3\cdot(-1)$
$= 13 > 0$

$\therefore$ প্রদত্ত দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় বাস্তব ও অসমান।

(ii) $4x^2-4x+1=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের নিরূপক $= b^2-4ac = (4)^2-4\cdot4\cdot1$
$= 16-16$
$= 0$

$\therefore$ প্রদত্ত দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় বাস্তব ও সমান।

(iii) $x^2+x+1=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের নিরূপক $= (1)^2-4\cdot1\cdot1$
$= -3 < 0$

$\therefore$ প্রদত্ত দ্বিঘাত সমীকরণের বাস্তব বীজ পাবো না।

(iv) নং দ্বিঘাত সমীকরণের বীজের প্রকৃতি কী হবে নিজে বুঝে লিখি।

প্রয়োগ : 32. k-এর মান কত হলে $9x^2+3kx+4 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় বাস্তব ও সমান হবে লিখি।

$9x^2+3kx+4 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণকে $ax^2+bx+c=0$ $[a\neq 0]$ দ্বিঘাত সমীকরণের সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a=9$, $b=3k$ এবং $c=4$

যেহেতু বীজদ্বয় বাস্তব ও সমান,

$\therefore$ নিরূপক $= 0$

সুতরাং, $b^2-4ac = 0$

অর্থাৎ, $(3k)^2-4\cdot 9\cdot 4 = 0$

বা, $9k^2 = 4\times 9\times 4$

বা, $k^2 = 4\times 4$ $\qquad\therefore k = \pm 4$

$\therefore k = \pm 4$-এর জন্য প্রদত্ত দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় বাস্তব ও সমান হবে।

প্রয়োগ : 33. k-এর মান কত হলে $2x^2-10x+k = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় বাস্তব ও সমান হবে বুঝে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 34. প্রমাণ করি যে $x^2(a^2+b^2)+2(ac+bd)x+(c^2+d^2) = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের কোনো বাস্তব বীজ নেই, যখন $ad \neq bc$.

$x^2(a^2+b^2)+2(ac+bd)x+(c^2+d^2) = 0$ ——— (I)

(I) নং দ্বিঘাত সমীকরণের নিরূপক $= [2(ac+bd)]^2-4(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

$= 4(ac+bd)^2-4(a^2c^2+b^2c^2+a^2d^2+b^2d^2)$

$= 4[a^2c^2+b^2d^2+2acbd-a^2c^2-b^2c^2-a^2d^2-b^2d^2]$

$= 4[-(b^2c^2-2acbd+a^2d^2)]$

$= -4(bc-ad)^2 < 0$

[যেহেতু $ad \neq bc \Rightarrow bc-ad \neq 0$]

$\therefore$ (I) নং দ্বিঘাত সমীকরণের কোনো বাস্তব বীজ নেই,যখন $ad \neq bc$

প্রয়োগ : 35. $(1+m^2)x^2+2mcx+(c^2-a^2) = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদুটি বাস্তব ও সমান হলে, প্রমাণ করি যে, $c^2 = a^2(1+m^2)$

$(1+m^2)x^2+2mcx+(c^2-a^2) = 0$ ——— (I)

(I) নং দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় সমান। $\therefore$ নিরূপক $= 0$

$\therefore (2mc)^2-4(1+m^2)(c^2-a^2) = 0$

বা, $4m^2c^2-4(c^2+c^2m^2-a^2-a^2m^2) = 0$

বা, $4m^2c^2-4c^2-4c^2m^2+4a^2+4a^2m^2 = 0$

বা, $4c^2 = 4a^2+4a^2m^2$

বা, $c^2 = a^2+a^2m^2$

$\therefore c^2 = a^2(1+m^2)$ **[প্রমাণিত]**

17 আমি $ax^2+bx+c=0$ $[a\neq0]$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় যোগ ও গুণ করে কী পাই দেখি।

$ax^2+bx+c=0$ [a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং $a\neq 0$] ———— (I)

ধরি, (I) নং দ্বিঘাত সমীকরণের দুটি বীজ α ও β

$$\therefore \alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ এবং } \beta = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\therefore \alpha+\beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

বুঝেছি, দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি $= -\dfrac{x\text{-এর সহগ}}{x^2\text{-এর সহগ}}$

$$\alpha\times\beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{(-b)^2-\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

বুঝেছি, দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয়ের গুণফল $= \dfrac{\text{সমীকরণটির ধ্রুবক পদ}}{x^2\text{-এর সহগ}}$

অয়ন ব্ল্যাকবোর্ডে দ্বিঘাত সমীকরণ লিখল $6x^2-19x-7=0$

18 আমি অয়নের লেখা দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় নির্ণয় করি এবং বীজদ্বয় যোগ ও গুণ করে কী পাই দেখি।

$6x^2-19x-7=0$ ———— (IV)

(IV) নং দ্বিঘাত সমীকরণকে $ax^2+bx+c=0$ $[a\neq0]$ দ্বিঘাত সমীকরণের সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a=6$, $b=-19$ এবং $c=-7$

(IV) নং দ্বিঘাত সমীকরণের নিরূপক $b^2-4ac=(-19)^2-4\cdot6\cdot(-7)>0$

(IV) নং দ্বিঘাত সমীকরণের বাস্তব বীজ আছে এবং বীজদ্বয় $\boxed{}$ ও $\boxed{}$ [নিজে হিসাব করে লিখি]

$\therefore$ পেলাম, বীজদ্বয় $\frac{7}{2}$ ও $-\frac{1}{3}$

$\therefore$ বীজদ্বয়ের সমষ্টি $= \frac{7}{2}+(-\frac{1}{3}) = \frac{19}{6} = \frac{-(-19)}{6} = -\dfrac{x\text{-এর সহগ}}{x^2\text{-এর সহগ}}$

বীজদ্বয়ের গুণফল $= \frac{7}{2}\times(-\frac{1}{3}) = \frac{-7}{6} = \dfrac{\text{সমীকরণটির ধ্রুবক পদ}}{x^2\text{-এর সহগ}}$

19 আমি অন্য যে-কোনো দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ নির্ণয় করে বীজদ্বয়ের সমষ্টি ও গুণফল নির্ণয় করে দেখছি,

বীজদ্বয়ের সমষ্টি $= -\dfrac{x\text{-এর সহগ}}{x^2\text{-এর সহগ}}$

বীজদ্বয়ের গুণফল $= \dfrac{\text{সমীকরণটির ধ্রুবক পদ}}{x^2\text{-এর সহগ}}$ [নিজে করি]

প্রয়োগ : 36. আমি নীচের দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি ও গুণফল নির্ণয় করি।

(i) $6x^2-x-2=0$ (ii) $4x^2-9x=100$

(i) $6x^2-x-2=0$ ——— (I)

(I) নং সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি $= -\frac{-1}{6} = \frac{1}{6}$

বীজদ্বয়ের গুণফল $= \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$

(ii) নং দ্বিঘাত সমীকরণটির বীজদ্বয়ের সমষ্টি ও গুণফল নিজে লিখি।

প্রয়োগ : 37. যদি $5x^2+13x+k=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় একটি অপরটির অন্যোন্যক হয়, তবে k-এর মান হিসাব করে লিখি।

$5x^2+13x+k=0$ ——— (I)

ধরি, (I) নং সমীকরণের বীজদ্বয় α ও $\frac{1}{\alpha}$

$\therefore \alpha \times \frac{1}{\alpha} = \frac{k}{5}$

বা, $\frac{k}{5} = 1 \quad \therefore k=5$

প্রয়োগ : 38. যদি $3x^2-10x+3=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের 1টি বীজ $\frac{1}{3}$ হয়, তবে অপর বীজটি নির্ণয় করি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 39. যদি দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+bx+c=0$-এর বীজদ্বয়ের অনুপাত $1:r$ হয়, তবে দেখাই যে, $\frac{(r+1)^2}{r} = \frac{b^2}{ac}$

$ax^2+bx+c=0$ ——— (I)

ধরি, (I) নং সমীকরণের বীজদ্বয়, α ও $r\alpha$

$\therefore \quad \alpha+r\alpha = -\frac{b}{a}$

বা, $\alpha(1+r) = -\frac{b}{a}$

বা, $\alpha^2(1+r)^2 = \frac{b^2}{a^2}$ ——— (II)

আবার, $\alpha \times r\alpha = \frac{c}{a}$

$\alpha^2 r = \frac{c}{a}$ ——— (III)

(II)-কে (III) দিয়ে ভাগ করে পাই, $\frac{\alpha^2(1+r)^2}{\alpha^2 r} = \frac{\frac{b^2}{a^2}}{\frac{c}{a}}$

বা, $\frac{(r+1)^2}{r} = \frac{b^2}{a^2} \times \frac{a}{c} \quad \therefore \frac{(r+1)^2}{r} = \frac{b^2}{ac}$ **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 40. যদি $x^2+px+q=0$ দ্বিঘাত সমীকরণটির বীজদুটি α ও β হয়, তবে $\alpha^3+\beta^3$ এবং $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ -এর মান p ও q-এর মাধ্যমে প্রকাশ করি।

$x^2+px+q=0$ ———— (I)

(I) নং সমীকরণের দুটি বীজ α ও β

$\therefore \alpha+\beta=-p$ এবং $\alpha\beta=q$

$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=(-p)^3-3q(-p)$

$=-p^3+3pq \quad =3pq-p^3$

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{-p}{q}=-\frac{p}{q}$

প্রয়োগ : 41. $ax^2+bx+c=0\ [a\neq0]$ দ্বিঘাত সমীকরণের দুটি বীজ α ও β হলে, $\left(\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}\right)$-এর মান a, b ও c-এর মাধ্যমে প্রকাশ করি। **[নিজে করি]**

আমার বন্ধু শীলা এক মজার কাজ করল।

সে বোর্ডে লিখল— দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ দুটি 3 ও 4 হলে দ্বিঘাত সমীকরণটি কী হবে?

20 কোনো দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় জানা থাকলে, ওই দ্বিঘাত সমীকরণ কীভাবে পাব?

অর্থাৎ একটি দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ α ও β হলে সমীকরণটি নির্ণয় করি।

ধরি, যে দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ α ও β সেই সমীকরণটি হলো

$ax^2+bx+c=0\ [a\neq0]$ ———— (I)

$\therefore\ ax^2+bx+c=0$

বা, $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ [a দিয়ে উভয়পক্ষকে ভাগ করে পাই]

বা, $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ [$\because$ α, β (I) নং সমীকরণের বীজ]

যে দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় α ও β সেই সমীকরণটি,

$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

21 এবার আমি শীলার বোর্ডে লেখা শর্তানুযায়ী দ্বিঘাত সমীকরণ তৈরি করি।

যে দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় 3 ও 4 সেই সমীকরণটি হলো,

$x^2-(3+4)x+3\times4=0 \quad \therefore x^2-7x+12=0$

প্রয়োগ : 42. $x^2-7x+12=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় নির্ণয় করে দেখছি বীজদ্বয় 3 ও 4. **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 43. যদি $ax^2+bx+c=0\ [a\neq0]$ সমীকরণটির বীজ α ও β হয়, তবে যে সমীকরণের বীজ $\frac{\alpha}{\beta}$ ও $\frac{\beta}{\alpha}$ তার সমীকরণ নির্ণয় করি।

$ax^2+bx+c=0$ ———— (I)

α ও β, (I) নং দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ, $\therefore \alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

$$\therefore \frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\times\frac{c}{a}}{\frac{c}{a}}$$

$$=\frac{\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{b^2-2ac}{a^2}\times\frac{a}{c}=\frac{b^2-2ac}{ac}$$

আবার, $\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\beta}{\alpha}=1$ ——— (III)

$\therefore$ যে দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় $\frac{\alpha}{\beta}$ ও $\frac{\beta}{\alpha}$ তার সমীকরণ

$$x^2-\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)x+\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\beta}{\alpha}=0$$

বা, $x^2-\left(\frac{b^2-2ac}{ac}\right)x+1=0$ $\quad\therefore acx^2-(b^2-2ac)x+ac=0$

কষে দেখি 1.5

1. নীচের দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয়ের প্রকৃতি লিখি—
   (i) $2x^2+7x+3=0$ (ii) $3x^2-2\sqrt{6}x+2=0$ (iii) $2x^2-7x+9=0$ (iv) $\frac{2}{5}x^2-\frac{2}{3}x+1=0$
2. k-এর কোন মান/মানগুলির জন্য নীচের প্রতিটি দ্বিঘাত সমীকরণের বাস্তব ও সমান বীজ থাকবে হিসাব করে লিখি—
   (i) $49x^2+kx+1=0$ (ii) $3x^2-5x+2k=0$ (iii) $9x^2-24x+k=0$ (iv) $2x^2+3x+k=0$
   (v) $x^2-2(5+2k)x+3(7+10k)=0$ (vi) $(3k+1)x^2+2(k+1)x+k=0$
3. নীচে প্রদত্ত বীজদ্বয় দ্বারা দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন করি—
   (i) 4, 2 (ii) –4, –3 (iii) –4, 3 (iv) 5, –3
4. m-এর মান কত হলে, $4x^2+4(3m-1)x+(m+7)=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ দুটি পরস্পর অন্যোন্যক হবে।
5. $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হলে, প্রমাণ করি যে, $2b=a+c$
6. $(a^2+b^2)x^2-2(ac+bd)x+(c^2+d^2)=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হলে, প্রমাণ করি যে, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$
7. প্রমাণ করি যে, $2(a^2+b^2)x^2+2(a+b)x+1=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের কোনো বাস্তব বীজ থাকবে না, যদি $a\neq b$ হয়।
8. $5x^2+2x-3=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের দুটি বীজ α ও β হলে,
   (i) $\alpha^2+\beta^2$ (ii) $\alpha^3+\beta^3$ (iii) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ (iv) $\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}$ -এর মান নির্ণয় করি।
9. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির একটি বীজ অপরটির দ্বিগুণ হলে, দেখাই যে, $2b^2=9ac$.
10. যে সমীকরণের বীজগুলি $x^2+px+1=0$ সমীকরণের বীজগুলির অন্যোন্যক, সেই সমীকরণটি গঠন করি।
11. $x^2+x+1=0$ সমীকরণটির বীজগুলির বর্গ যে সমীকরণের বীজ, সেই সমীকরণটি নির্ণয় করি।

12. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :

(i) $x^2-6x+2=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি

(a) 2 (b) –2 (c) 6 (d) –6

(ii) $x^2-3x+k=10$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের গুণফল –2 হলে, k-এর মান

(a) –2 (b) –8 (c) 8 (d) 12

(iii) $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ সমীকরণের বীজদ্বয় বাস্তব এবং অসমান হলে, b^2-4ac হবে

(a) >0 (b) = 0 (c) <0 (d) কোনোটিই নয়

(iv) $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হলে

(a) $c=-\frac{b}{2a}$ (b) $c=\frac{b}{2a}$ (c) $c=\frac{-b^2}{4a}$ (d) $c=\frac{b^2}{4a}$

(v) $3x^2+8x+2=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α এবং β হলে, $\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$ -এর মান

(a) $-\frac{3}{8}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) –4 (d) 4

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি:

(i) $x^2+x+1=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় বাস্তব।

(ii) $x^2-x+2=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় বাস্তব নয়।

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি:

(i) $7x^2-12x+18=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি এবং গুণফলের অনুপাত ________

(ii) $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ সমীকরণের বীজদ্বয় পরস্পর অন্যোন্যক হলে, c = ________

(iii) $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ সমীকরণের বীজদ্বয় পরস্পর অন্যোন্যক এবং বিপরীত (ঋণাত্মক) হলে, a + c = ________

13. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)**

(i) একটি দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি 14 এবং গুণফল 24 হলে, দ্বিঘাত সমীকরণটি লিখি।

(ii) $kx^2+2x+3k=0$ $(k\neq0)$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি এবং গুণফল সমান হলে, k-এর মান লিখি।

(iii) $x^2-22x+105=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α এবং β হলে, $(\alpha-\beta)$-এর মান লিখি।

(iv) $x^2-x=k(2x-1)$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি শূন্য হলে, k-এর মান লিখি।

(v) $x^2+bx+12=0$ এবং $x^2+bx+q=0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি বীজ 2 হলে, q-এর মান লিখি।

2 সরল সুদকষা
SIMPLE INTEREST

আজ আমাদের খুব মজা। আজ স্কুলে আমাদের ক্লাসের সকল ছাত্রছাত্রীরা নিজেদের নামে ব্যাংকের অ্যাকাউন্ট খুলবে। আমাদের প্রত্যেকের নিজস্ব ব্যাংকের পাস বই থাকবে। আমরা ইচ্ছামতো টাকা জমাতে ও তুলতে পারব।

আমার দাদা গত বছরে ওই ব্যাংকে অ্যাকাউন্ট করেছিল। দাদা ব্যাংকে 800 টাকা জমা রেখেছিল।

1 বছর পরে দাদার পাস বই-এ দেখেছি 800 টাকা বেড়ে গিয়ে 832 টাকা হয়েছে। কিন্তু এমন কেন হলো?

দাদার টাকা 1 বছর ব্যবহার করার জন্য ব্যাংক দাদাকে (832–800) টাকা = 32 টাকা অতিরিক্ত দিয়েছে।

(1) এই অতিরিক্ত টাকা বা অর্থমূল্যকে কী বলা হয়?

এই অতিরিক্ত অর্থমূল্যকে **সুদ (Interest)** বলা হয়।

এই ধরনের সুদকে **সরল সুদ (Simple Interest)** বলব।

এখানে সুদ = (832–800) টাকা = 32 টাকা

আসল (Principal) = 800 টাকা, সুদাসল বা সবৃদ্ধিমূল (Amount) = সুদ + আসল = 32 টাকা + 800 টাকা

= 832 টাকা

এবং সময় (Time) = 1 বছর।

আসল বা মূলধন— যত টাকা ধার দেওয়া বা নেওয়া অথবা যত টাকা গচ্ছিত রাখা হয়।

সময়— যত সময়ের জন্য ধার দেওয়া বা নেওয়া হয় বা গচ্ছিত রাখা হয়।

সুদ— উত্তমর্ণের বা পাওনাদারের (Creditor) অর্থ সাময়িকভাবে ব্যবহার করার অধিকারের বদলে শর্ত অনুযায়ী অধমর্ণ বা দেনাদার (Debtor) কিছু অতিরিক্ত অর্থমূল্য তাকে দিয়ে থাকেন। এই অর্থমূল্যই সুদ।

যে ব্যক্তি বা সংগঠন টাকা ধার দেন তাকে **উত্তমর্ণ** এবং যে ব্যক্তি বা সংগঠন টাকা ধার করেন তাকে **অধমর্ণ** বলা হয়। যখন কোনো ব্যক্তি পোস্ট অফিস বা ব্যাংকে টাকা জমা রাখেন তখন তিনি **উত্তমর্ণ** এবং ওই পোস্ট অফিস বা ব্যাংক **অধমর্ণ**; তাই পোস্ট অফিস বা ব্যাংক জমা টাকার উপর সুদ দেয়।

আবার যখন কোনো ব্যক্তি ব্যাংক বা সমবায় সমিতি থেকে টাকা ধার করেন তখন ওই ব্যক্তি হলেন **অধমর্ণ** এবং ব্যাংক বা সমবায় সমিতি হলো **উত্তমর্ণ**; তাই ওই ব্যক্তি ব্যাংক বা সমবায় সমিতিকে সুদ দেন।

আমি ওই ব্যাংকে 500 টাকা রেখেছি। কিন্তু আমার বন্ধু সজল ব্যাংকে 300 টাকা জমা রেখেছে।

1 বছর পরে আমার 500 টাকা বেড়ে গিয়ে হলো 520 টাকা এবং সজলের 300 টাকা বেড়ে গিয়ে হলো 312 টাকা।

∴ 1 বছরে আমি সুদ পেলাম (520 – 500) টাকা = 20 টাকা

কিন্তু 1 বছরে সজল সুদ পেল (312 – 300) টাকা = 12 টাকা

(2) একই সময়ের জন্য ব্যাংকে টাকা জমা রেখে আমরা দুজনে আলাদা আলাদা পরিমাণ সুদ পেলাম কেন?

সময় স্থির রাখলে সুদের পরিমাণ আসলের পরিমাণের উপর নির্ভরশীল। আসল বাড়লে সুদের পরিমাণও বাড়বে।

(3) ওই ব্যাংকে যে-কোনো টাকা জমা রাখলে কত টাকা সুদ পাব? কীভাবে সহজে হিসাব করব?

প্রথমে ওই ব্যাংকের **সুদের হার** নির্ণয় করতে হবে।

সুদের হার কী?

সুদ সাধারণত বছরের হিসাবে কষা হয়ে থাকে। 100 টাকার 1 বছরে যে পরিমাণ সুদ দেওয়া হয় তাই 'বার্ষিক শতকরা সুদের হার'। যেমন, 'বার্ষিক সরল সুদের হার 10%'-এর অর্থ হলো, 100 টাকার 1 বছরের সুদ 10 টাকা। কোনো কোনো ক্ষেত্রে ষাণ্মাসিক, মাসিক, এমনকি দৈনিক হিসাবেও সুদ কষা হয়।

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

আসল (টাকায়)	সময় (বছর)	সুদ (টাকায়)
500	1	20
100	1	?

500 টাকার 1 বছরের সুদ 20 টাকা

1 টাকার 1 বছরের সুদ $\frac{20}{500}$ টাকা

100 টাকার 1 বছরের সুদ $\frac{20}{500} \times 100$ টাকা $= 4$ টাকা

$\therefore$ ওই ব্যাংকে বার্ষিক সরল সুদের হার 4%

প্রয়োগ : 1. আমি বার্ষিক 4% সরল সুদের হারে যদি ওই ব্যাংকে 1200 টাকা জমা রাখি তবে 1 বছর পরে কত টাকা সুদ পাব হিসাব করি।

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

আসল (টাকায়)	সময় (বছর)	সুদ (টাকায়)
100	1	4
1200	1	?

ওই ব্যাংকে বার্ষিক সরল সুদের হার 4%

সুতরাং, 100 টাকার 1 বছরের সুদ 4 টাকা

1 টাকার 1 বছরের সুদ $\frac{4}{100}$ টাকা

1200 টাকার 1 বছরের সুদ $\frac{4 \times 1200}{100}$ টাকা $= \boxed{}$ টাকা

প্রয়োগ : 2. [নিজে করি]

আসল	সময়	বার্ষিক সরল সুদের হার	মোট সুদ
600 টাকা	1 বছর	5%	
1800 টাকা	1 বছর	$4\frac{1}{2}$ %	

প্রয়োগ : 3. শ্রাবণী কিছু টাকা ব্যাংকে 1 বছরের জন্য জমা রেখে 45 টাকা সুদ পেয়েছে। ব্যাংকের বার্ষিক সরল সুদের হার 5% হলে, শ্রাবণী কত টাকা ব্যাংকে জমা রেখেছিল হিসাব করে লিখি।

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

আসল (টাকায়)	সময় (বছর)	সুদ (টাকায়)
100	1	5
?	1	45

ব্যাংকের বার্ষিক সরল সুদের হার 5%

∴ 5 টাকা 1 বছরে সুদ পাবে যখন আসল 100 টাকা

1 টাকা 1 বছরে সুদ পাবে যখন আসল $\frac{100}{5}$ টাকা

45 টাকা 1 বছরে সুদ পাবে যখন আসল $\frac{100\times45}{5}$ টাকা = $\boxed{}$ টাকা

∴ শ্রাবণী 900 টাকা ব্যাংকে জমা রেখেছিল।

প্রয়োগ : 4. ওই ব্যাংকে যদি শ্রাবণী বার্ষিক 5% সরল সুদের হারে 1 বছরে 60 টাকা সুদ পেত, তবে কত টাকা জমা রাখত হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 5.

আসল	সময়	বার্ষিক সরল সুদের হার	মোট সুদ
	1 বছর	6%	90 টাকা
	1 বছর	3.5%	59.50 টাকা

[নিজে করি]

প্রয়োগ : 6. রহমতচাচা গ্রামের সমবায় ব্যাংক থেকে বার্ষিক 10% সরল সুদের হারে 750 টাকা 3 বছরের জন্য ধার নিলেন। তিনি মোট কত সুদ ও সুদ-আসল দেবেন হিসাব করে লিখি।

কিন্তু ‘মোট সুদ’ বলতে কী বোঝায়?

নির্দিষ্ট আসলের উপর নির্দিষ্ট সময়ের জন্য দেয় বা প্রাপ্য সুদকে **“মোট সুদ”** বলা হয়।

সুদাসল বা সবৃদ্ধিমূল = আসল + মোট সুদ

সমবায় ব্যাংকে বার্ষিক সরল সুদের হার 10%

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

আসল (টাকায়)	সময় (বছর)	সুদ (টাকায়)
100	1	10
750	3	?

100 টাকার 1 বছরের সুদ 10 টাকা

1 টাকার 1 বছরের সুদ $\frac{10}{100}$ টাকা

750 টাকার 1 বছরের সুদ $\frac{10\times750}{100}$ টাকা

750 টাকার 3 বছরের সুদ $\frac{10\times750\times3}{100}$ টাকা = $\boxed{}$ টাকা

তিনি মোট সুদ দেবেন $\boxed{}$ টাকা।

∴ এক্ষেত্রে, সুদ-আসল = 750 টাকা + 225 টাকা = $\boxed{}$ টাকা।

4 আমি অন্যভাবে হিসাব করি ও কী পাই দেখি।

ধরি, আসল = p টাকা, সময় = t বছর, বার্ষিক সরল সুদের হার = r% এবং মোট সুদ = I টাকা

অন্যভাবে, 100 টাকার 1 বছরের সুদ r টাকা

1 টাকার 1 বছরের সুদ $\frac{r}{100}$ টাকা

p টাকার 1 বছরের সুদ $\frac{pr}{100}$ টাকা

p টাকার t বছরের সুদ $\frac{prt}{100}$ টাকা $\therefore I = \frac{prt}{100}$ $\therefore$ পেলাম, $I = \frac{prt}{100}$

এখানে, p = 750 টাকা, t = 3 বছর, r = 10 এবং I = ?

উপরের ঐকিক নিয়মে পাওয়া হিসাব থেকে পেলাম, $I = \frac{10 \times 750 \times 3}{100} = 225$

প্রয়োগ : 7. কিন্তু রহমতচাচা যদি ওই একই সরল সুদের হারে অর্থাৎ বার্ষিক 10% সরল সুদের হারে 8 বছরের জন্য 750 টাকা ধার করতেন, তবে তিনি কত টাকা সুদ দিতেন হিসাব করি।

100 টাকার 1 বছরের সুদ 10 টাকা

1 টাকার 1 বছরের সুদ $\frac{10}{100}$ টাকা

750 টাকার 8 বছরের সুদ $\frac{10 \times 750 \times 8}{100}$ টাকা = $\boxed{}$ টাকা

অন্যভাবে, সুদ $(I) = \frac{prt}{100} = \frac{750 \times 10 \times 8}{100}$ টাকা = $\boxed{}$ টাকা

[এখানে, p = 750 টাকা, r = 10 এবং t = 8 বছর]

দেখছি, (i) আসল ও বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার অপরিবর্তিত থাকলে সময় ও মোট সুদ সরল সম্পর্কে আছে অর্থাৎ সময় বাড়লে মোট সুদ $\boxed{}$ (বাড়বে/কমবে) এবং সময় $\boxed{}$ (বাড়লে/কমলে) মোট সুদ কমবে।
আবার, (ii) সময় ও বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার অপরিবর্তিত থাকলে আসল ও মোট সুদ [সরল/ব্যস্ত] সম্পর্কে আছে, অর্থাৎ আসল বাড়লে মোট সুদ বাড়বে আবার আসল কমলে মোট সুদ $\boxed{}$। **[নিজে বুঝে লিখি]**

কিন্তু আসল ও সময় অপরিবর্তিত থাকলে মোট সুদ ও বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার কী সম্পর্কে আছে হিসাব করে দেখি।

প্রয়োগ : 8. প্রশান্তবাবু ব্যাংক ও পোস্ট অফিসের প্রতিটিতে 580 টাকা করে 4 বছরের জন্য জমা রাখলেন। যদি ব্যাংক ও পোস্ট অফিসের বার্ষিক সরল সুদের হার যথাক্রমে 5% ও 6% হয়, তবে প্রতিক্ষেত্রে কত টাকা মোট সুদ পাবেন হিসাব করে লিখি।

ব্যাংকে বার্ষিক সরল সুদের হার 5%

$\therefore$ 4 বছর পরে মোট সুদ পাবেন = $\frac{prt}{100}$ টাকা = $\frac{580 \times 5 \times 4}{100}$ টাকা = $\boxed{}$ টাকা

পোস্ট অফিসে বার্ষিক সরল সুদের হার 6%

$\therefore$ 4 বছর পরে মোট সুদ পাবেন = $\frac{580 \times 6 \times 4}{100}$ টাকা = 139.20 টাকা

দেখছি, (iii) আসল ও সময় অপরিবর্তিত থাকলে মোট সুদ ও বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার $\boxed{}$ (সরল/ব্যস্ত) সম্পর্কে আছে অর্থাৎ বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার বাড়লে মোট সুদ বাড়বে এবং বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার কমলে মোট সুদ $\boxed{}$।

প্রয়োগ : 9. বার্ষিক 5% সরল সুদের হারে 2003 সালের 1 জানুয়ারি থেকে 8 আগস্ট পর্যন্ত 5000 টাকা ধার নিলে, সুদ ও সুদ-আসলের পরিমাণ কত হবে হিসাব করে লিখি।

সময় = জানুয়ারি 31 দিন + ফেব্রুয়ারি 28 দিন + মার্চ 31 দিন + এপ্রিল 30 দিন + মে 31 দিন + জুন 30 দিন + জুলাই 31 দিন + আগস্ট 7 দিন = 219 দিন = $\frac{219}{365}$ বছর = $\frac{3}{5}$ বছর [2003 সাল লিপইয়ার নয়। তাই, ফেব্রুয়ারি মাস 28 দিন]

[মোট সময় বের করার সময় 1 জানুয়ারি থেকে 8 আগস্ট পর্যন্ত হয় জানুয়ারি মাসে 1 দিন নয়তো আগস্ট মাসে 1 দিন কম হবে]

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

আসল (টাকায়)	সময় (বছর)	সুদ (টাকায়)
100	1	5
5000	$\frac{3}{5}$	?

$\therefore$ 100 টাকার 1 বছরের সুদ 5 টাকা

1 টাকার 1 বছরের সুদ $\frac{5}{100}$ টাকা

5000 টাকার $\frac{3}{5}$ বছরের সুদ $\frac{5}{100} \times 5000 \times \frac{3}{5}$ টাকা = $\boxed{}$ টাকা

অন্যভাবে, সুদ (I) = $\frac{prt}{100}$ [যেখানে p (আসল) = 5000 টাকা, r (বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার) = 5 এবং t (সময় বছরে) = $\frac{3}{5}$ বছর]

$$= \frac{5000 \times 5 \times \frac{3}{5}}{100} \text{ টাকা} = 150 \text{ টাকা}$$

সুদ-আসলের পরিমাণ = (500+150) টাকা
= 5150 টাকা

প্রয়োগ : 10. [নিজে করি]

আসল	সময়	বার্ষিক সরল সুদের হার	মোট সুদ	সুদ-আসল
500 টাকা	3 বছর	$6\frac{1}{4}$ %		
146 টাকা	1 দিন	$2\frac{1}{2}$ %		
4565 টাকা	2 বছর 6 মাস	4 %		

প্রয়োগ : 11. আমি বার্ষিক 6% সরল সুদের হারে 500 টাকা 2 বছরের জন্য ব্যাংকে রেখে কিছু টাকা সুদ পেলাম। ওই ব্যাংকে 400 টাকা কত সময়ের জন্য রাখলে একই পরিমাণ সুদ পাব হিসাব করে দেখি।

বার্ষিক 6% সুদের হারে 500 টাকা 2 বছরের জন্য ব্যাংকে রেখে সুদ পেলাম = $\boxed{}$ টাকা **[নিজে করি]**

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

আসল (টাকায়)	সময় (বছর)	বার্ষিক শতকরা সুদের হার	মোট সুদ (টাকায়)
500	2	6	60
400	?	6	60

ধরি, 400 টাকা t বছরের জন্য ব্যাংকে রেখে 60 টাকা সুদ পেলাম।

$\therefore \dfrac{400 \times t \times 6}{100} = 60$

বা, $24t = 60$

বা, $t = \dfrac{60}{24} \quad \therefore t = 2\frac{1}{2}$

$\therefore$ বার্ষিক 6% সরল সুদের হারে 400 টাকার $2\frac{1}{2}$ বছরে মোট সুদ হয় 60 টাকা।

অন্যভাবে, 500 টাকার 60 টাকা মোট সুদ হয় 2 বছরে

1 টাকার 60 টাকা মোট সুদ হয় 2×500 বছরে

400 টাকার 60 টাকা মোট সুদ হয় $\dfrac{2 \times 500}{400}$ বছরে $= 2\frac{1}{2}$ বছরে

$\therefore$ দেখছি, (iv) বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার ও মোট সুদ অপরিবর্তিত থাকলে আসল ও সময় $\boxed{}$ [সরল/ব্যস্ত] সম্পর্কে আছে। অর্থাৎ আসল বাড়লে সময় কমবে এবং আসল কমলে সময় $\boxed{}$।

প্রয়োগ : 12. আশাদেবী বার্ষিক 6% সরল সুদের হারে 4 বছরের জন্য ব্যাংকে কিছু টাকা রেখেছিলেন। ওই সময়ের পরে তিনি মোট 240 টাকা সুদ পেলেন। হিসাব করে দেখি আশাদেবী ব্যাংকে কত টাকা রেখেছিলেন?

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

আসল (টাকায়)	সময় (বছর)	সুদ (টাকায়)
100	1	6
?	4	240

1 বছরে 6 টাকা সুদ হয় যখন আসল 100 টাকা

1 বছরে 1 টাকা সুদ হয় যখন আসল $\dfrac{100}{6}$ টাকা

4 বছরে 1 টাকা সুদ হয় যখন আসল $\dfrac{100}{4 \times 6}$ টাকা

4 বছরে 240 টাকা সুদ হয় যখন আসল $= \dfrac{100 \times 240}{4 \times 6}$ টাকা $= \boxed{}$ টাকা

অন্যভাবে, ধরি p টাকা ব্যাংকে জমা রেখেছিলেন,

$\therefore$ সুদ $= \dfrac{p \times 6 \times 4}{100}$ টাকা

শর্তানুসারে, $\dfrac{p \times 6 \times 4}{100} = 240$

$\therefore p = \dfrac{240 \times 100}{6 \times 4} = 1000$

$\therefore$ আশাদেবী 1000 টাকা ব্যাংকে জমা রেখেছিলেন।

প্রয়োগ : 13. ফাঁকা ঘরে হিসাব করে লিখি [নিজে করি]

আসল	সময়	বার্ষিক সরল সুদের হার	মোট সুদ
	4 বছর	$4\frac{1}{2}$ %	72 টাকা
	1 দিন	5 %	1 টাকা

প্রয়োগ : 14. 700 টাকা নির্দিষ্ট বার্ষিক সরল সুদের হারে নির্দিষ্ট সময়ের জন্যে ব্যাংকে রেখে সুদেমূলে 900 টাকা পেলাম। কত টাকা একই হারে একই সময়ের জন্য রাখলে 1350 টাকা পাব হিসাব করে লিখি।

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

আসল (টাকায়)	সুদ-আসল (টাকায়)
700	900
?	1350

$\therefore$ 900 টাকা সুদ-আসল হলে আসল 700 টাকা

1 টাকা সুদ-আসল হলে আসল $\frac{700}{900}$ টাকা

1350 টাকা সুদ-আসল হলে আসল $\frac{700 \times 1350}{900}$ টাকা $= \boxed{}$ টাকা

প্রয়োগ : 15. কত টাকা বার্ষিক $7\frac{1}{2}\%$ সরল সুদের হারে 8 বছরে সুদে-আসলে 5160 টাকা হবে হিসাব করে লিখি।

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

আসল (টাকায়)	সময় (বছর)	মোট সুদ (টাকায়)
100	1	$7\frac{1}{2}$
100	8	?

100 টাকার 1 বছরের সুদ $7\frac{1}{2}$ টাকা $= \frac{15}{2}$ টাকা

100 টাকার 8 বছরের সুদ $\frac{15}{2} \times 8$ টাকা $= 60$ টাকা

$\therefore$ এক্ষেত্রে সুদাসল = 100 টাকা + 60 টাকা = 160 টাকা

$\therefore$ নতুনভাবে সমস্যাটি হলো,

আসল (টাকায়)	সুদ-আসল (টাকায়)
100	160
?	5160

$\therefore$ 160 টাকা সুদ-আসল হলে আসল 100 টাকা

1 টাকা সুদ-আসল হলে আসল $\frac{100}{160}$ টাকা

5160 টাকা সুদ-আসল হলে আসল $\frac{100 \times 5160}{160}$ টাকা $= \boxed{}$ টাকা

প্রয়োগ : 16. ফাঁকা ঘরে হিসাব করে লিখি [নিজে করি]

আসল	সময়	বার্ষিক সরল সুদের হার	সুদ-আসল
	5 বছর	3 %	966 টাকা
	6 বছর	6 %	13600 টাকা

প্রয়োগ : 17. বার্ষিক 6% সরল সুদের হারে 5000 টাকা একটি ব্যাংকে জমা রেখে 3 বছর পরে 900 টাকা সুদ পেলাম। ওই ব্যাংকের বার্ষিক সুদের হার যদি 7% হতো, তবে কত সময়ে ওই 900 টাকা সুদ পেতাম হিসাব করে লিখি।

মনে করি, বার্ষিক 7% সরল সুদে t বছরে 5000 টাকার সুদ 900 টাকা হবে।

$\therefore$ সুদ (I) $= \frac{prt}{100}$ [এখানে p = 5000 টাকা, r = 7, I = 900 টাকা]

$\therefore\ 900 = \frac{5000 \times 7 \times t}{100}$ $\quad \therefore\ t = \frac{900}{350} = 2\frac{4}{7}$ $\quad \therefore\ 2\frac{4}{7}$ বছরে 900 টাকা সুদ পাব এবং $2\frac{4}{7} < 3$

[দেখছি (v) আসল ও মোট সুদ অপরিবর্তিত থাকলে বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার সময়ের সঙ্গে $\boxed{}$ [সরল/ব্যস্ত] সম্পর্কে আছে অর্থাৎ বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার বৃদ্ধি পেলে সময় হ্রাস পাবে এবং বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার হ্রাস পেলে সময় বৃদ্ধি পাবে।] [নিজে অন্য যে-কোনো উদাহরণ নিয়ে যাচাই করে লিখি]

প্রয়োগ : 18. রামু প্রধান বার্ষিক $5\frac{1}{2}$% সরল সুদের হারে 12500 টাকা কোনো ব্যাংকে রাখলেন। নির্দিষ্ট সময় পরে 2750 টাকা সুদ পেলেন। কত সময়ের জন্য তিনি ওই টাকা ব্যাংকে রেখেছিলেন হিসাব করে লিখি।

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

আসল (টাকায়)	সময় (বছর)	মোট সুদ (টাকায়)
100	1	$5\frac{1}{2} = \frac{11}{2}$
12500	?	2750

100 টাকার $\frac{11}{2}$ টাকা সুদ হয় 1 বছরে

1 টাকার $\frac{11}{2}$ টাকা সুদ হয় 1×100 বছরে

1 টাকার 1 টাকা সুদ হয় $\frac{1 \times 100}{\frac{11}{2}}$ বছরে $= \frac{1 \times 2 \times 100}{11}$ বছরে

12500 টাকার 1 টাকা সুদ হয় $\frac{1 \times 2 \times 100}{11 \times 12500}$ বছরে

12500 টাকার 2750 টাকা সুদ হয় $\frac{1 \times 2 \times 100 \times 2750}{11 \times 12500}$ বছরে $= \boxed{}$ বছরে

$\therefore$ রামু প্রধান 4 বছরের জন্য ব্যাংকে টাকা রেখেছিলেন।

অন্যভাবে, ধরি রামু প্রধান t বছরের জন্য ব্যাংকে টাকা রেখেছিলেন।

$\therefore$ বার্ষিক $5\frac{1}{2}$% সুদের হারে 12500 টাকার t বছরে 2750 টাকা সুদ পান।

$\therefore 2750 = \frac{prt}{100}$ [এখানে, p(আসল) = 12500 টাকা, r = $\frac{11}{2}$ (বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার), I = 2750 টাকা (মোট সুদ)]

বা, $2750 = \frac{12500 \times \frac{11}{2} \times t}{100}$ $\quad$ বা, $t = \frac{2750 \times 100 \times 2}{11 \times 12500} = 4$

$\therefore$ রামু প্রধান 4 বছরের জন্য ব্যাংকে টাকা রেখেছিলেন।

প্রয়োগ : 19.

আসল	সময়	বার্ষিক সরল সুদের হার	মোট সুদ
6400 টাকা		$4\frac{1}{2}$ %	1008 টাকা
500 টাকা		5 %	50 টাকা

[নিজে করি]

প্রয়োগ : 20. সহেলি বার্ষিক 4% সরল সুদের হারে 700 টাকা 5 বছরের জন্য ধার করে যে পরিমাণ মোট সুদ দিল, সে যদি 900 টাকা একই সময়ের জন্য ধার করে একই পরিমাণ মোট সুদ দেয়, তবে বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার কত হবে হিসাব করে লিখি।

বার্ষিক 4% সরল সুদে 700 টাকার 5 বছরের সুদ = $\frac{700 \times 5 \times 4}{100}$ টাকা = 140 টাকা

সহেলি 900 টাকা 5 বছরের জন্য ধার করে মোট সুদ 140 টাকা দিলে বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার নির্ণয় করি।

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

আসল (টাকায়)	সময় (বছর)	মোট সুদ (টাকায়)
900	5	140
100	1	?

900 টাকার 5 বছরের সুদ 140 টাকা

1 টাকার 1 বছরের সুদ $\frac{140}{900 \times 5}$ টাকা

100 টাকার 1 বছরের সুদ $\frac{140 \times 100}{900 \times 5}$ টাকা = $3\frac{1}{9}$ টাকা

$\therefore$ নির্ণেয় বার্ষিক সরল সুদের হার $3\frac{1}{9}$ %

[দেখছি (vi) সময় ও মোট সুদ অপরিবর্তিত থাকলে আসল ও বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হারের মধ্যে $\boxed{}$ [সরল/ব্যস্ত] সম্পর্ক থাকে। অর্থাৎ আসল বাড়লে সুদের হার কমবে এবং আসল কমলে সুদের হার বাড়বে।]

প্রয়োগ : 21. বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার কত হলে 5000 টাকার 8 বছরের মোট সুদ 4800 টাকা হবে হিসাব করে লিখি।

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

আসল (টাকায়)	সময় (বছর)	মোট সুদ (টাকায়)
5000	8	4800
100	1	?

5000 টাকার 8 বছরের সুদ 4800 টাকা

1 টাকার 1 বছরের সুদ $\frac{4800}{5000 \times 8}$ টাকা

100 টাকার 1 বছরের সুদ $\frac{4800 \times 100}{5000 \times 8}$ টাকা = $\boxed{}$ টাকা

$\therefore$ বার্ষিক সরল সুদের হার = $\boxed{}$ %

অন্যভাবে, ধরি, বার্ষিক সরল সুদের হার r%

$\therefore$ বার্ষিক r% সরল সুদের হারে 5000 টাকার 8 বছরের সুদ = $\frac{5000 \times r \times 8}{100}$ টাকা

শর্তানুসারে, $\frac{5000 \times r \times 8}{100} = 4800$

বা, $r = \frac{4800 \times 100}{5000 \times 8}$ $\therefore r = 12$

$\therefore$ নির্ণেয় বার্ষিক সরল সুদের হার 12%.

[$\because I = \frac{prt}{100}$
I = মোট সুদ
p = আসল
r = বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার
t = সময় (বছরে)]

প্রয়োগ : 22. বার্ষিক শতকরা কত হার সরল সুদে 73000 টাকা 1 দিনে সুদে-আসলে 73001 টাকা হয় হিসাব করে লিখি।

মোট সুদ = 73001 টাকা – 73000 টাকা = 1 টাকা

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

আসল (টাকায়)	সময় (দিনে)	মোট সুদ (টাকায়)
73000	1	1
100	365	?

$\therefore$ 73000 টাকার 1 দিনের সুদ 1 টাকা

1 টাকার 1 দিনের সুদ $\frac{1}{73000}$ টাকা

100 টাকার 365 দিনের সুদ $\frac{100 \times 365}{73000}$ টাকা = 0.5 টাকা

$\therefore$ নির্ণেয় বার্ষিক সরল সুদের হার 0.5 %

অন্যভাবে, মোট সুদ (I) = 73001 টাকা – 73000 টাকা = 1 টাকা

আসল (p) = 73000 টাকা, t = 1 দিন $= \frac{1}{365}$ বছর

ধরি, বার্ষিক সরল সুদের হার r%

$I = \frac{prt}{100}$ বা, $1 = \frac{73000 \times r \times 1}{100 \times 365}$ বা, $r = \frac{36500}{73000}$ বা, $r = \frac{5}{10}$ $\therefore r = 0.5$

$\therefore$ বার্ষিক সরল সুদের হার 0.5%

প্রয়োগ : 23. (i) বার্ষিক শতকরা কত হার সরল সুদে 500 টাকার 4 বছরের সুদ 100 টাকা হবে নির্ণয় করি।

(ii) বার্ষিক শতকরা কত হার সরল সুদে 910 টাকার 2 বছর 6 মাসে সুদে-আসলে 955.50 টাকা হবে হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 24. (i) রাবেয়া 750 টাকা বার্ষিক 8% হারে সরল সুদে 6 বছরের জন্য ব্যাংকে জমা রাখলেন। তিনি সুদে-আসলে কত টাকা পেলেন হিসাব করে লিখি।

(ii) কিন্তু বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার কত হলে ওই টাকা থেকে তিনি একই সময়ে সুদেমূলে 1200 টাকা পেতেন নির্ণয় করি।

(iii) যদি প্রথম ক্ষেত্রের বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হারই থাকত, তবে প্রথম ক্ষেত্রের ওই টাকা থেকে তিনি কত বছরে সুদেমূলে 1170 টাকা পেতেন হিসাব করে লিখি।

(i) গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

আসল (টাকায়)	সময় (বছর)	মোট সুদ (টাকায়)
100	1	8
750	6	?

100 টাকার 1 বছরের সুদ 8 টাকা

1 টাকার 1 বছরের সুদ $\frac{8}{100}$ টাকা

750 টাকার 6 বছরের সুদ $\frac{8 \times 750 \times 6}{100}$ টাকা $= \boxed{}$ টাকা

অন্যভাবে, বার্ষিক 6% সুদের হারে 750 টাকার 6 বছরের সুদ $= \frac{750 \times 6 \times 8}{100}$ টাকা = 360 টাকা

[$I = \frac{prt}{100}$ সূত্রের সাহায্যে]

$\therefore$ রাবেয়া সুদে-আসলে মোট 750 টাকা + 360 টাকা = 1110 টাকা পেলেন।

(ii) গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

আসল (টাকায়)	সময় (বছর)	মোট সুদ (টাকায়)
750	6	(1200 – 750) = 450
100	1	?

750 টাকার 6 বছরের সুদ 450 টাকা

1 টাকার 6 বছরের সুদ $\frac{450}{750}$ টাকা

1 টাকার 1 বছরের সুদ $\frac{450}{750\times 6}$ টাকা

100 টাকার 1 বছরের সুদ $\frac{450\times 100}{750\times 6}$ টাকা $= \boxed{}$ টাকা

∴ নির্ণেয় বার্ষিক সরল সুদের হার 10%

অন্যভাবে, ধরি নির্ণেয় বার্ষিক সুদের হার r%

$I = \frac{prt}{100}$ যেখানে, I = মোট সুদ, p = আসল, r = বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার, t = সময় (বছরে)

$\therefore$ সুদ $= \frac{750\times r\times 6}{100}$

শর্তানুসারে, $450 = \frac{750\times r\times 6}{100}$ $\quad \therefore r = \frac{450\times 100}{750\times 6} = 10$

∴ নির্ণেয় বার্ষিক সরল সুদের হার 10% .

(iii) গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

আসল (টাকায়)	সময় (বছর)	মোট সুদ (টাকায়)
100	1	8
750	?	(1170–750) = 420

100 টাকার 8 টাকা সুদ হয় 1 বছরে

1 টাকার 8 টাকা সুদ হয় 1×100 বছরে

1 টাকার 1 টাকা সুদ হয় $\frac{1\times 100}{8}$ বছরে

750 টাকার 1 টাকা সুদ হয় $\frac{1\times 100}{750\times 8}$ বছরে

750 টাকার 420 টাকা সুদ হয় $= \frac{1\times 100\times 420}{750\times 8}$ বছরে = 7 বছরে

অন্যভাবে, ধরি, t বছরে 750 টাকার বার্ষিক 8% সরল সুদে মোট সুদ 420 টাকা হয়।

$I = \frac{prt}{100}$ যেখানে, I = মোট সুদ, p = আসল, r = বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার, t = সময় (বছরে)

$\therefore 420 = \frac{750\times t\times 8}{100}$

$\therefore \quad t = \frac{420\times 100}{750\times 8} = 7$

∴ নির্ণেয় সময় 7 বছর।

প্রয়োগ : 25. কোনো মূলধন বার্ষিক শতকরা একই সরল সুদের হারে 3 বছরে 560 টাকা এবং 5 বছরে 600 টাকা হলে, মূলধনের পরিমাণ এবং বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার নির্ণয় করি।

প্রদত্ত তথ্য বিশ্লেষণ করে পাই,

আসল + 5 বছরের সুদ = 600 টাকা
আসল + 3 বছরের সুদ = 560 টাকা

(বিয়োগ করে পাই), 2 বছরের সুদ = 40 টাকা

2 বছরের সুদ 40 টাকা

1 বছরের সুদ $\frac{40}{2}$ টাকা

3 বছরের সুদ $\frac{40 \times 3}{2}$ টাকা = 60 টাকা

∴ আসল = 560 টাকা – 60 টাকা = 500 টাকা,

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

আসল (টাকায়)	সময় (বছর)	মোট সুদ (টাকায়)
500	3	60
100	1	?

500 টাকার 3 বছরের সুদ 60 টাকা

1 টাকার 3 বছরের সুদ $\frac{60}{500}$ টাকা

1 টাকার 1 বছরের সুদ $\frac{60}{500 \times 3}$ টাকা

100 টাকার 1 বছরের সুদ $\frac{60 \times 100}{500 \times 3}$ টাকা = 4 টাকা

∴ বার্ষিক সরল সুদের হার 4%

সুতরাং, মূলধনের পরিমাণ 500 টাকা এবং বার্ষিক সরল সুদের হার 4%

প্রয়োগ : 26. কিছু পরিমাণ টাকার একই শতকরা বার্ষিক সরল সুদের হারে 3 বছরে সবৃদ্ধিমূল (সুদে-আসলে) 496 টাকা এবং 5 বছরের সবৃদ্ধিমূল 560 টাকা হলে, ওই টাকার পরিমাণ এবং শতকরা বার্ষিক সরল সুদের হার হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 27. সুবীরবাবু চাকুরি থেকে অবসর নেওয়ার সময় প্রভিডেন্ট ফান্ড ও গ্রাচুইটি বাবদ এককালীন 6,00,000 টাকা পেলেন। ওই টাকা তিনি এমনভাবে ভাগ করে পোস্ট অফিস ও ব্যাংকে আমানত করতে চান, যেন প্রতিবছর সুদ বাবদ তিনি 34,000 টাকা পান। যদি পোস্ট অফিস ও ব্যাংকের বার্ষিক সরল সুদের হার যথাক্রমে 6% ও 5% হয়, তবে তিনি কোথায় কত টাকা রাখবেন হিসাব করে লিখি।

সুবীরবাবু যদি তার সমস্ত টাকা বার্ষিক 5% সরল সুদের হারে ব্যাংকে রাখতেন তবে তিনি বছরে সুদ পেতেন $= 600000 \times \frac{5}{100}$ টাকা = 30000 টাকা

কিন্তু তিনি (34000 টাকা – 30000 টাকা) = 4000 টাকা বছরে বেশি পেতে চান।

পোস্ট অফিসে 1 বছরে বেশি সুদ পান (6% – 5%) = 1%

∴ তিনি পোস্ট অফিসে এমন পরিমাণ টাকা রাখবেন যাতে সেখান থেকে বাড়তি 1% সুদ = 4000 টাকা হয়

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,	পোস্ট অফিসে জমা রাখলেন (টাকা)	বাড়তি সুদ পাওয়া যাবে (টাকা)
	100	1
	?	4000

$\therefore$ 1 টাকা বাড়তি সুদ পাওয়া যাবে 100 টাকা জমা রাখলে। সুতরাং 4000 টাকা বাড়তি সুদ পাওয়া যাবে 100 $\times$ 4000 টাকা = 400000 টাকা জমা রাখলে।

$\therefore$ সুবীরবাবু পোস্ট অফিসে 400000 টাকা এবং ব্যাংকে (600000 – 400000) টাকা

= 200000 টাকা রেখেছিলেন।

অন্যভাবে

ধরি, সুবীরবাবু x টাকা ব্যাংকে এবং (600000 – x) টাকা পোষ্ট অফিসে রেখেছিলেন।

$\therefore$ ব্যাংক থেকে সুদ পাবেন, $\frac{x\times5\times1}{100}$ টাকা

পোস্ট অফিস থেকে সুদ পাবেন $\frac{(600000-x)\times6\times1}{100}$ টাকা

শর্তানুসারে, $\frac{5x}{100}+\frac{6\,(600000-x)}{100}=34000$

বা, $5x+3600000-6x=34000\times100$

বা, $-x=3400000-3600000$

বা, $-x=-200000$

$\therefore x=200000$

$\therefore$ সুবীরবাবু ব্যাংকে রেখেছিলেন 200000 টাকা এবং পোস্ট অফিসে রেখেছিলেন (600000 – 200000) টাকা

= 400000 টাকা।

প্রয়োগ : 28. তাঁত শিল্পীদের এক সমবায় সমিতি যন্ত্রচালিত তাঁত ক্রয় করার সময় কেন্দ্রীয় সমবায় ব্যাংক থেকে এই শর্তে কিছু টাকা ধার করেছিলেন যে, প্রতি দুই বছর অন্তর বার্ষিক 9% সরল সুদের হারে সুদ এবং আসলের $\frac{1}{5}$ অংশ পরিশোধ করবে।

দুই বছর বাদে প্রথম কিস্তিবাবদ সমিতি যদি 19000 টাকা শোধ করে থাকে, তবে কত টাকা ধার করেছিলেন হিসাব করে লিখি।

ধরি, সমবায় সমিতি x টাকা ধার করেছিলেন।

$\therefore$ 2 বছরের সুদ = $\frac{x\times2\times9}{100}$ টাকা = $\frac{9x}{50}$ টাকা

শর্তানুসারে, $\frac{9x}{50}+\frac{x}{5}=19000$

বা, $\frac{9x+10x}{50}=19000$

বা, $19x=19000\times50$

বা, $x=\frac{19000\times50}{19}$

$\therefore x=50000$

$\therefore$ সমবায় সমিতি 50000 টাকা ধার করেছিলেন।

প্রয়োগ : 29. আমার কাকিমা তার 13 বছর ও 15 বছর বয়সের দুই পুত্রের নামে 56000 টাকা এমনভাবে উইল করবেন যে, যখন তাদের বয়স 18 বছর হবে তখন বার্ষিক 10% সরল সুদের হারে প্রত্যেকের প্রাপ্ত সুদ-আসল সমান হবে। প্রতি পুত্রের জন্য উইলে বরাদ্দ টাকার পরিমাণ কী হবে নির্ণয় করি।

মনে করি, ছোটো ছেলের জন্য বরাদ্দ টাকা $= x$ এবং বড়ো ছেলের জন্য বরাদ্দ টাকা $= (56000 - x)$

$\therefore$ 18 বছর বয়সে ছোটো ছেলের প্রাপ্য সবৃদ্ধিমূল হবে $\left\{x + \frac{x \times (18-13) \times 10}{100}\right\}$ টাকা $= \frac{3x}{2}$ টাকা

18 বছর বয়সে বড়ো ছেলের প্রাপ্য সবৃদ্ধিমূল হবে $= \left\{(56000-x) + \frac{(56000-x) \times (18-15) \times 10}{100}\right\}$ টাকা

$= \frac{13}{10}(56000 - x)$ টাকা

শর্তানুসারে, $\frac{3x}{2} = \frac{13}{10}(56000 - x)$

বা, $30x = 26(56000 - x)$

বা, $15x = 13(56000 - x)$

বা, $28x = 13 \times 56000 \quad \therefore x = \boxed{}$

$\therefore$ ছোটো ছেলের জন্য বরাদ্দ টাকা 26000

এবং বড়ো ছেলের জন্য বরাদ্দ টাকা $(56000 - 26000) = 30000$

অন্যভাবে, ধরি, ছোটো ছেলের জন্য বরাদ্দ টাকা x

এবং বড়ো ছেলের জন্য বরাদ্দ টাকা y

শর্তানুসারে, $x + y = 56000$ ———— (i)

$\therefore$ 18 বছর বয়সে ছোটো ছেলের প্রাপ্য সবৃদ্ধিমূল হবে $\left\{x + \frac{x \times (18-13) \times 10}{100}\right\}$ টাকা $= \frac{3x}{2}$ টাকা

18 বছর বয়সে বড়ো ছেলের প্রাপ্য সবৃদ্ধিমূল হবে $= \left\{y + \frac{y\,(18-15) \times 10}{100}\right\}$ টাকা $= \left\{y + \frac{3y}{10}\right\}$ টাকা

$= \frac{13y}{10}$ টাকা

শর্তানুসারে, $\frac{3x}{2} = \frac{13y}{10}$ বা, $30x = 26y \quad \therefore x = \frac{13y}{15}$ ———— (ii)

(i) নং সমীকরণ থেকে পাই, $x + y = 56000$

বা, $\frac{13y}{15} + y = 56000$ বা, $\frac{28y}{15} = 56000$ বা, $y = 56000 \times \frac{15}{28}$

$\therefore y = 30000$

$x = 56000 - 30000 = 26000$

$\therefore$ আমার কাকিমা ছোটো ছেলের জন্য 26000 টাকা এবং বড়ো ছেলের জন্য 30000 টাকা বরাদ্দ করবেন।

প্রয়োগ : 30. বিমলকাকু তাঁর 12 বছরের ছেলে এবং 14 বছরের মেয়ের জন্য 187500 টাকা ব্যাংকে বার্ষিক 5% সরল সুদের হারে এমনভাবে জমা রাখলেন যাতে, উভয়ের বয়স যখন 18 বছর হবে তারা প্রত্যেকে সুদে-আসলে সমান টাকা পাবে। তিনি তাঁর ছেলে এবং মেয়ের জন্য ব্যাংকে কত টাকা করে জমা রেখেছিলেন হিসাব করি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 31. ফতিমাবিবি একটি মাসিক সঞ্চয় প্রকল্পে প্রতি মাসের প্রথম দিনে 100 টাকা করে জমা করেন। তিনি এভাবে এক বছর টাকা জমা রাখলেন। যদি বার্ষিক সরল সুদের হার 6% হয়, তাহলে বছরের শেষে তিনি সুদে-আসলে কত টাকা পাবেন হিসাব করি।

ফতিমাবিবি প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়, ..., শেষ মাসের টাকা যথাক্রমে 12 মাস, 11 মাস, 10 মাস, ..., 1 মাসের জন্য জমা করেন।

সুতরাং, 1 বছরের মোট সুদ,

$$= \left(\frac{100\times\frac{12}{12}\times 6}{100} + \frac{100\times\frac{11}{12}\times 6}{100} + \frac{100\times\frac{10}{12}\times 6}{100} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{100\times\frac{1}{12}\times 6}{100} \right) \text{ টাকা}$$

$= \frac{100\times 6}{12\times 100}(12 + 11 + 10 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 1)$ টাকা $= \frac{1}{2}\times 78$ টাকা $= 39$ টাকা

$\therefore$ তিনি 1 বছর পর সুদে-আসলে পাবেন $(100\times12+39)$ টাকা $= 1239$ টাকা।

প্রয়োগ : 32. জয়ন্ত একটি মাসিক সঞ্চয় প্রকল্পে প্রতি মাসের প্রথম দিন 1000 টাকা করে জমা করে। ব্যাংকে বার্ষিক সরল সুদের হার 5% হলে জয়ন্ত 6 মাস শেষে সুদে-আসলে কত টাকা পাবে হিসাব করি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 33. রমেনবাবু মোট 370000 টাকা তিনটি ব্যাংকে জমা রাখেন। তিনটি ব্যাংকের বার্ষিক সরল সুদের হার যথাক্রমে 4%, 5% এবং 6%; 1 বছর পর তাঁর তিনটি ব্যাংকে মোট সুদের পরিমাণ সমান হয়। তিনি তিনটি ব্যাংকে কত টাকা করে জমা রেখেছিলেন হিসাব করি।

ধরি, তিনি প্রথম ব্যাংকে x টাকা, দ্বিতীয় ব্যাংকে y টাকা এবং তৃতীয় ব্যাংকে z টাকা জমা রাখেন,

1 বছর পর প্রথম ব্যাংকের মোট সুদ $= \frac{x\times 4\times 1}{100}$ টাকা $= \frac{4x}{100}$ টাকা

1 বছর পর দ্বিতীয় ব্যাংকের মোট সুদ $= \frac{y\times 5\times 1}{100}$ টাকা $= \frac{5y}{100}$ টাকা

1 বছর পর তৃতীয় ব্যাংকের মোট সুদ $= \frac{z\times 6\times 1}{100}$ টাকা $= \frac{6z}{100}$ টাকা

শর্তানুসারে, $x + y + z = 370000$ .... (i)

$\frac{4x}{100} = \frac{5y}{100} = \frac{6z}{100}$ .... (ii)

সুতরাং, $4x = 5y = 6z = k$ (ধরি), যেখানে $k > 0$

$\therefore x = \frac{k}{4}, y = \frac{k}{5}, z = \frac{k}{6}$

আবার, $x + y + z = 370000$

সুতরাং, $\frac{k}{4} + \frac{k}{5} + \frac{k}{6} = 370000$

বা, $\frac{15k + 12k + 10k}{60} = 370000$

বা, $37k = 370000\times 60$

$\therefore k = 600000$

সুতরাং, $x = \frac{600000}{4} = 150000$, $y = \frac{600000}{5} = 120000$ এবং $z = \frac{600000}{6} = 100000$

$\therefore$ তিনি তিনটি ব্যাংকে যথাক্রমে 150000 টাকা, 120000 টাকা এবং 100000 টাকা জমা রাখেন।

প্রয়োগ : 34. সোমাপিসি 620000 টাকা বার্ষিক 5% সরল সুদের হারে তিনটি ব্যাংকে যথাক্রমে 2 বছর, 3 বছর এবং 5 বছরের জন্য এমনভাবে জমা করেন যাতে তিনটি ব্যাংকের মোট সুদের পরিমাণ সমান হয়। সোমাপিসি কোন ব্যাংকে কত টাকা জমা রেখেছিলেন হিসাব করি। **[নিজে করি]**

কষে দেখি 2

1. দুই বন্ধু একসঙ্গে একটি ছোটো ব্যাবসা চালাবার জন্য বার্ষিক 12% সরল সুদের হারে একটি ব্যাংক থেকে 15000 টাকা ধার নিলেন। 4 বছর পরে ওই টাকার জন্য তাদের কত টাকা সুদ দিতে হবে হিসাব করে লিখি।
2. 2005 সালের 1 জানুয়ারি থেকে 27 মে পর্যন্ত বার্ষিক 6% সরল সুদের হারে 2000 টাকার সুদ কত হবে নির্ণয় করি।
3. বার্ষিক $8\frac{1}{3}$% সরল সুদে 960 টাকার 1 বছর 3 মাসের সবৃদ্ধিমূল কত হবে নির্ণয় করি।
4. উৎপলবাবু তাঁর জমি চাষের জন্য সমবায় ব্যাংক থেকে বার্ষিক 6% সরল সুদের হারে 3200 টাকা 2 বছরের জন্য ধার নিলেন। 2 বছর পরে সুদে-আসলে তাঁকে কত টাকা শোধ করতে হবে হিসাব করে লিখি।
5. বার্ষিক 5.25% সরল সুদের হারে শোভাদেবী একটি ব্যাংকে কিছু টাকা জমা রাখেন। 2 বছর পর তিনি সুদ হিসাবে 840 টাকা পেলেন। তিনি কত টাকা জমা রেখেছিলেন হিসাব করে লিখি।
6. গৌতম একটি মুরগি খামার খোলার জন্য একটি সমবায় ব্যাংক থেকে বার্ষিক 12% সরল সুদের হারে কিছু টাকা ধার নিলেন। প্রত্যেক মাসে তাঁকে 378 টাকা সুদ দিতে হয়। তিনি কত টাকা ধার নিয়েছিলেন নির্ণয় করি।
7. বার্ষিক 6% সরল সুদের হারে কোনো টাকা কত বছরে দ্বিগুণ হবে হিসাব করে লিখি।
8. মান্নান মিঞা কিছু টাকা ধার করার 6 বছর পর দেখলেন দেয় সরল সুদের পরিমাণ আসলের $\frac{3}{8}$ অংশ হয়ে গেছে। বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার কত ছিল নির্ণয় করি।
9. একটি কৃষি সমবায় সমিতি তার সদস্যদের বার্ষিক 4% সরল সুদের হারে কৃষি ঋণ দেয়। কিন্তু ব্যাংক থেকে টাকা ধার করলে বার্ষিক 7.4% হারে সরল সুদ দিতে হয়। একজন কৃষক যদি ব্যাংক থেকে টাকা ধার না করে সমবায় সমিতির সদস্য হয়ে সমিতি থেকে 5000 টাকা কৃষি ঋণ নেন, তবে তাঁর বছরে সুদ বাবদ কত টাকা বাঁচবে হিসাব করে লিখি।
10. যদি 292 টাকার 1 দিনের সুদ 5 পয়সা হয়, তবে বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার হিসাব করে লিখি।
11. বার্ষিক 8% হার সরল সুদে কত বছরে 600 টাকার সুদ 168 টাকা হবে হিসাব করে লিখি।
12. যদি বার্ষিক 10% হার সরল সুদে 800 টাকা ব্যাংকে জমা দিয়ে সুদে আসলে 1200 টাকা ফেরত পাই, তবে ওই টাকা কত সময়ের জন্য ব্যাংকে জমা ছিল হিসাব করে লিখি।
13. কোনো মূলধন একই বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হারে 7 বছরে সুদে-আসলে 7100 টাকা এবং 4 বছরের সুদে-আসলে 6200 টাকা হলে মূলধন ও বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার নির্ণয় করি।
14. একই সময়ে অমল রায় ব্যাংকে এবং পশুপতি ঘোষ পোস্ট অফিসে 2000 টাকা করে জমা রাখেন। 3 বছর পর তারা সুদসহ যথাক্রমে 2360 টাকা ও 2480 টাকা ফেরত পান। ব্যাংক ও পোস্ট অফিসের বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হারের অনুপাত কত হবে হিসাব করে লিখি।

15. একটি তাঁত সমবায় সমিতি যন্ত্রচালিত তাঁত ক্রয় করার সময় 15000 টাকা ধার করে। 5 বছর পর সেই ধার শোধ করতে সমিতিকে 22125 টাকা দিতে হলো। ব্যাংকের বার্ষিক শতকরা সরল সুদের হার নির্ণয় করি।

16. আসলামচাচা কর্মক্ষেত্র থেকে অবসর নেওয়ার সময় 1,00,000 টাকা পেলেন। ওই টাকার কিছুটা ব্যাংকে ও বাকিটা পোস্ট অফিসে জমা রাখেন এবং প্রতি বছর সুদ বাবদ মোট 5400 টাকা পান। ব্যাংকের ও পোস্ট অফিসের বার্ষিক সরল সুদের হার যদি যথাক্রমে 5% ও 6% হয়, তবে তিনি কোথায় কত টাকা জমা রেখেছিলেন হিসাব করে লিখি।

17. রেখাদিদি তার সঞ্চিত অর্থের 10000 টাকা দুটি আলাদা ব্যাংকে ভাগ করে একই সময়ে জমা দিলেন। একটি ব্যাংকের বার্ষিক সরল সুদের হার 6% এবং অন্য ব্যাংকটির বার্ষিক সরল সুদের হার 7%; 2 বছর পর তিনি যদি সুদ বাবদ মোট 1280 টাকা পান, তাহলে তিনি কোন ব্যাংকে কত টাকা জমা দিয়েছিলেন হিসাব করে লিখি।

18. কোনো ব্যাংক বার্ষিক 5% হারে সরল সুদ দেয়। ওই ব্যাংকে দীপুবাবু বছরের প্রথমে 15000 টাকা জমা দেওয়ার 3 মাস পরে 3000 টাকা তুলে নিলেন এবং টাকা তুলে নেওয়ার 3 মাস পরে আবার তিনি 8000 টাকা জমা দিলেন। ওই বছরের শেষে দীপুবাবু সুদে-আসলে কত টাকা পাবেন নির্ণয় করি।

19. রহমতচাচা একটি বাড়ি তৈরি করার জন্য বার্ষিক 12% সরল সুদের হারে 240000 টাকা ব্যাংক থেকে ধার নেন। ধার নেওয়ার এক বছর পর তিনি বাড়িটি প্রতি মাসে 5200 টাকায় ভাড়া দেন। ধার নেওয়ার কত বছর পরে তিনি বাড়িভাড়ার আয় থেকে ব্যাংকের টাকা সুদসহ শোধ করবেন তা হিসাব করি।

20. রথীনবাবু তাঁর দুই মেয়ের প্রত্যেকের জন্য ব্যাংকে এমনভাবে টাকা জমা রাখেন যাতে প্রত্যেক মেয়ের বয়স যখন 18 বছর হবে তখন প্রত্যেক মেয়ে 120000 টাকা করে পাবে। ব্যাংকের বার্ষিক সরল সুদের হার 10% এবং মেয়েদের বর্তমান বয়স যথাক্রমে 13 বছর এবং 8 বছর। তিনি প্রত্যেক মেয়ের জন্য ব্যাংকে কত টাকা জমা রেখেছিলেন হিসাব করি।

21. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q) :

(i) বার্ষিক r% হার সরল সুদে p টাকার t বছরের সুদ I টাকা হলে,

(a) I = prt (b) prtI = 100 (c) prt = 100×I (d) কোনোটিই নয়

(ii) কোনো মূলধন একটি নির্দিষ্ট সরল সুদের হারে 20 বছরে দ্বিগুণ হয়। একই সরল সুদের হারে ওই মূলধন তিনগুণ হবে

(a) 30 বছরে (b) 35 বছরে (c) 40 বছরে (d) 45 বছরে

(iii) কোনো মূলধন 10 বছরে দ্বিগুণ হলে, বার্ষিক সরল সুদের হার

(a) 5% (b) 10% (c) 15% (d) 20%

(iv) x% বার্ষিক সরল সুদের হারে কোনো মূলধনের x বছরে সুদ x টাকা হলে, মূলধনের পরিমাণ

(a) x টাকা (b) 100x টাকা (c) $\frac{100}{x}$ টাকা (d) $\frac{100}{x^2}$ টাকা

(v) বার্ষিক r% সরল সুদের হারে কোনো মূলধনের n বছরে মোট সুদ $\frac{pnr}{25}$ টাকা হলে, মূলধনের পরিমাণ

(a) 2p টাকা (b) 4p টাকা (c) $\frac{p}{2}$ টাকা (d) $\frac{p}{4}$ টাকা

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) যে ব্যক্তি টাকা ধার করেন তাঁকে অধমর্ণ বলে।

(ii) আসল ও শতকরা বার্ষিক সরল সুদের হার একই থাকলে মোট সুদ সময়ের সঙ্গে ব্যস্ত সমানুপাতে থাকে।

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) যে ব্যক্তি টাকা ধার দেন তাঁকে ________ বলে।

(ii) বার্ষিক $\frac{r}{2}\%$ সরল সুদের হারে 2p টাকার t বছরের সুদ-আসল (2p + ________) টাকা।

(iii) 1 বছরে আসল ও সুদ-আসলের অনুপাত 8 : 9 হলে বার্ষিক সরল সুদের হার ________।

22. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)**

(i) কোনো মূলধন বার্ষিক $6\frac{1}{4}\%$ সরল সুদের হারে কত বছরে দ্বিগুণ হবে তা লিখি।

(ii) বার্ষিক সরল সুদের হার 4% থেকে $3\frac{3}{4}\%$ হওয়ায় অমলবাবুর বার্ষিক আয় 60 টাকা কম হয়। অমলবাবুর মূলধন নির্ণয় করি।

(iii) শতকরা বার্ষিক সরল সুদের হার কত হলে কোনো টাকার 4 বছরের সুদ আসলের $\frac{8}{25}$ অংশ হবে তা নির্ণয় করি।

(iv) শতকরা বার্ষিক সরল সুদের হার কত হলে কোনো টাকার 10 বছরের সুদ সুদ-আসলের $\frac{2}{5}$ অংশ হবে তা নির্ণয় করি।

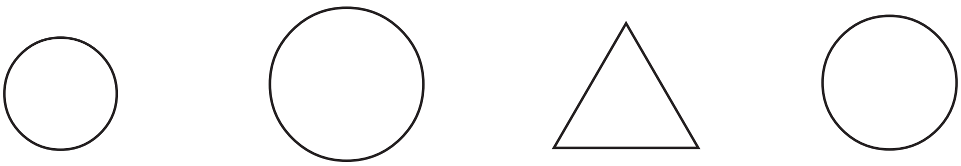
(v) বার্ষিক 5% সরল সুদের হারে কত টাকার মাসিক সুদ 1 টাকা তা নির্ণয় করি।

3 বৃত্ত সম্পর্কিত উপপাদ্য
THEOREMS RELATED TO CIRCLE

প্রতি রবিবার আমরা ভাই বোনেরা বাড়ির কাজে ব্যস্ত থাকি। বেশ কিছুদিন হলো আমরা বাড়ির চাবিগুলি সময়মতো খুঁজে পাচ্ছি না। এদিকে ওদিকে ছড়িয়ে থাকছে।

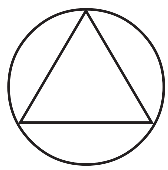
তাই আজ আমরা ঠিক করেছি, চাবিগুলি ঠিকমতো সাজিয়ে আলাদা আলাদা রিং-এ রাখব।

আমার ভাইয়ের অনেকগুলি গোলাকার ও ত্রিভুজাকার চাবির রিং আছে। সেগুলি হলো,



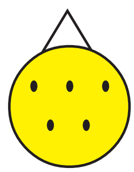
(i) নং (ii) নং (iii) নং (iv) নং

দেখছি, ত্রিভুজাকার রিংটি গোলাকার চাবির রিং-এর মধ্যে পাশের ছবির মতো আটকে গেছে



$\therefore$ গোলাকার রিংটি ত্রিভুজাকার রিং-এর প্রায় $\boxed{}$ **[পরিবৃত্ত/অন্তর্বৃত্ত]**-এর মতো।

এবার আমরা মোটা শক্ত পিচবোর্ডের বৃত্তক্ষেত্রাকার চাকতি তৈরি করলাম ও একটি আংটা লাগিয়ে দেয়ালে টাঙিয়ে দিলাম। এই পিচবোর্ডে পেরেক আটকে চাবির রিংগুলি ঝুলিয়ে রাখব।

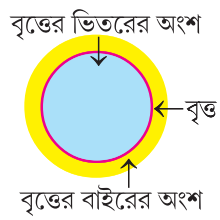


আরও কিছু গোলাকার তামার চাবির রিং তৈরি করলাম।

আমি বৃত্তাকার চাবির রিংগুলি খাতায় আঁকি ও কী পাই দেখি।

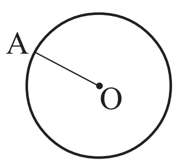
দেখছি, খাতায় আঁকা প্রতিটি বৃত্ত খাতার তলটিকে তিনটি অংশে ভাগ করেছে, (i) বৃত্তের ভিতরের অংশ (ii) বৃত্ত ও (iii) বৃত্তের বাইরের অংশ।

বৃত্ত ও বৃত্তের ভিতরের অংশ মিলে বৃত্তাকার ক্ষেত্র (Circular region) তৈরি করে।



1 আমি আমার খাতায় স্কেল ও পেনসিল কম্পাসের সাহায্যে একটি বৃত্ত আঁকি ও তার সঙ্গে সংযুক্ত কিছু বিষয় জানার চেষ্টা করি।

একটি বৃত্ত এঁকেছি যার কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধ OA.



বৃত্ত অসংখ্য বিন্দু দ্বারা গঠিত।

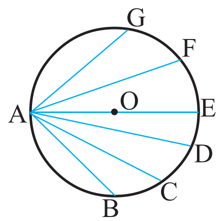
দেখছি, বৃত্তের প্রতিটি বিন্দু কেন্দ্র থেকে $\boxed{}$।

∴ বৃত্ত হলো একটি সমতলে অসংখ্য বিন্দুর সমষ্টি (collection) যারা প্রত্যেকে ওই সমতলের একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে সমদূরবর্তী।

ওই নির্দিষ্ট বিন্দুটি হলো ______ এবং কেন্দ্র থেকে বৃত্তের যে-কোনো বিন্দু পর্যন্ত অঙ্কিত সরলরেখাংশ হলো ______।

2 আমি বৃত্তের উপর যে-কোনো দুটি বিন্দু যোগ করে কীরকম সরলরেখাংশ পাই দেখি।

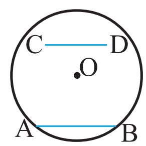
O কেন্দ্রীয় বৃত্তের উপরে A, B, C, D, E, F ও G বিন্দুগুলি নিলাম।



এবার A বিন্দুর সঙ্গে B, C, D, E, F ও G বিন্দুগুলি যোগ করে যথাক্রমে AB, AC, AD, AE, AF ও AG সরলরেখাংশ পেলাম।

3 এই AB, AC, AD, AE, AF ও AG সরলরেখাংশগুলিকে কী বলা হয়?

AB, AC, AD, AE, AF ও AG এই সরলরেখাংশগুলিকে O কেন্দ্রীয় বৃত্তের **জ্যা (Chord)** বলা হয়।
অর্থাৎ বৃত্তের উপরের যে-কোনো দুটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাংশকে ওই **বৃত্তের জ্যা** বলা হয়।
পাশের ছবিতে দেখছি AB সরলরেখাংশটি ______ কিন্তু CD সরলরেখাংশটি ______ নয়।

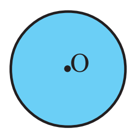


বৃত্তের বৃহত্তম জ্যা ______ [ব্যাস (diameter)/ব্যাসার্ধ (radius)] **[নিজে করি]**

সুতরাং ব্যাস বৃত্তের একটি ______। কিন্তু বৃত্তের যে-কোনো জ্যা-ই ______ নয়।

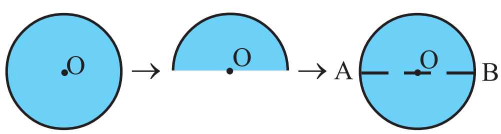
হাতেকলমে

(i) খাতায় একটি বৃত্ত এঁকে ওই বৃত্তাকার ক্ষেত্রটি কেটে নিলাম যার কেন্দ্র O।

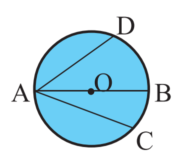


(ii) এবার বৃত্তাকার ক্ষেত্রটি O বিন্দু বরাবর এমনভাবে সমান দু-ভাঁজ করলাম যাতে একটি অংশ অপর অংশের সঙ্গে মিলে যায়।

(iii) এবার ভাঁজ খুলে AB ব্যাস পেলাম যা O বিন্দুগামী।



(iv) বৃত্তের উপর B বিন্দু ছাড়া অপর যে-কোনো দুটি বিন্দু C ও D নিলাম। এবং AC ও AD বরাবর ভাঁজ করে ও খুলে AC ও AD জ্যা পেলাম যা O বিন্দুগামী নয়।



(v) ভাঁজ করে AB ব্যাসের সঙ্গে AC ও AD জ্যা দুটি মিলিয়ে দেখছি,

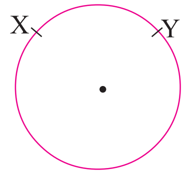
AB ______ AC [>/< বসাই], AB ______ AD [>/< বসাই]

∴ হাতেকলমে পেলাম, বৃত্তের ব্যাস ওই বৃত্তের বৃহত্তম জ্যা।

আমার ছোটো ভাইয়ের বন্ধু রাবেয়া আমাদের সঙ্গে এই মজার কাজে যোগ দিল। সে তার একজোড়া বৃত্তাকার চুড়ির সাহায্যে কতকগুলি বৃত্ত আঁকল। কিন্তু তারি 1 টি চুড়ি ভেঙে 2 টুকরো হয়ে গেল।

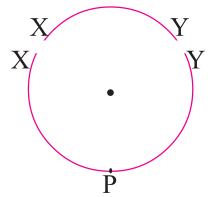
আমি ভাঙা টুকরোদুটি জুড়ে বা পাশাপাশি রেখে আগের বৃত্তাকার চুড়ি পাওয়ার চেষ্টা করি।

চুড়িটি X ও Y বিন্দুতে ভেঙে যাওয়ায় X থেকে Y পর্যন্ত একটি বৃত্তের টুকরো পেয়েছি।



4 বৃত্তের এই টুকরোকে কী বলা হয়?

X থেকে Y পর্যন্ত বৃত্তের টুকরোকে **বৃত্তচাপ (Arc)** বলে এবং লেখা হয় $\overset{\frown}{XY}$। এই ছোটো দৈর্ঘ্যের চাপটি **উপচাপ (Minor Arc)** এবং বড়ো দৈর্ঘ্যের চাপটি **অধিচাপ (Major Arc)**। উপচাপটির নাম $\overset{\frown}{XY}$ এবং অধিচাপটির নাম $\overset{\frown}{XPY}$



যদি দুটি বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য সমান হয়, সেক্ষেত্রে কী পাব?

দুটি বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য সমান হলে X ও Y বিন্দু দুটি বৃত্তের কোনো ব্যাসের প্রান্তবিন্দু হবে এবং সেক্ষেত্রে **অর্ধবৃত্ত (Semi circle)** পাব।

আবার সম্পূর্ণ বৃত্তটির দৈর্ঘ্যই হলো **পরিধি (Circumference)**।

আমার ভাই রাবেয়ার আঁকা বৃত্তে একটি জ্যা AB এঁকেছে যা ওই বৃত্তের ব্যাস নয় এবং এর ফলে বৃত্তাকার ক্ষেত্রটি যে দু-ভাগে বিভক্ত হয়েছে প্রতিটি ভাগে আলাদা রং দিয়েছে।

5 AB জ্যা বৃত্তাকার ক্ষেত্রটিকে যে দুটি ভাগে ভাগ করেছে, প্রতিটি ভাগকে কী বলা হয়?

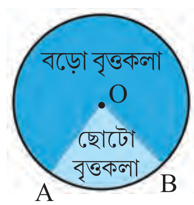
প্রতিটি ভাগকে **বৃত্তাংশ (Segment)** বলা হয়।
অর্থাৎ কোনো বৃত্তের একটি জ্যা ও একটি চাপ দ্বারা গঠিত ক্ষেত্রকে **বৃত্তাংশ (Segment)** বলে।

চিত্রে দেখছি দুই ধরনের বৃত্তাংশ পেয়েছি। একটি বড়ো বৃত্তাংশ ও অপরটি ছোটো বৃত্তাংশ। এই বড়ো বৃত্তাংশটি **অধিবৃত্তাংশ (Major Segment)** এবং ছোটো বৃত্তাংশটি **উপবৃত্তাংশ (Minor Segment)**।

আমি একটি বৃত্ত এঁকেছি যার কেন্দ্র O এবং বৃত্তের উপর যে-কোনো দুটি বিন্দু A ও B-এর সঙ্গে কেন্দ্র O যোগ করে দুটি ব্যাসার্ধ OA এবং ______ পেয়েছি।

6 এই OA ও OB ব্যাসার্ধ এবং বৃত্তচাপ $\overset{\frown}{AB}$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে কী বলা হয়?

O কেন্দ্রীয় বৃত্তের OA ও OB ব্যাসার্ধ এবং $\overset{\frown}{AB}$ বৃত্তচাপ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে **বৃত্তকলা (Sector)** বলা হয়।

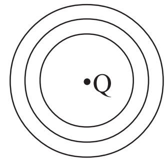


অর্থাৎ যে-কোনো বৃত্তের দুটি ব্যাসার্ধ এবং বৃত্তচাপ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে **বৃত্তকলা (Sector)** বলা হয়। এর ফলে দুটি বৃত্তকলা পাব। একটি বড়ো বৃত্তকলা **(Major Sector)** এবং অপরটি ছোটো বৃত্তকলা **(Minor Sector)**।

যদি দুটি বৃত্তকলা সমান হয় আমরা অর্ধবৃত্তাকার ক্ষেত্র পাব এবং সেক্ষেত্রে বৃত্তকলার ব্যাসার্ধ দুটি এবং বৃত্তচাপ কেমন হবে নিজে এঁকে লিখি।

আমার বন্ধু রুমা বোর্ডে একটি নির্দিষ্ট বিন্দু Q-কে কেন্দ্র করে পাশের ছবির মতো অনেকগুলি বৃত্ত আঁকল।

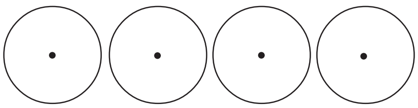
7 একটি নির্দিষ্ট বিন্দুকে কেন্দ্র করে আলাদা আলাদা দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে যে অসংখ্য বৃত্ত অঙ্কন করতে পারব তাদের কী বলে?



এইসব বৃত্তকে **এককেন্দ্রীয় বৃত্ত (Concentric Circles)** বলা হয়।

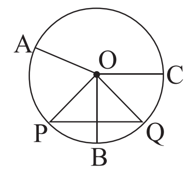
দেখছি, এককেন্দ্রীয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্দিষ্ট নয়।

8 নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে আলাদা আলাদা বিন্দুকে কেন্দ্র করে বৃত্ত আঁকলে কী পাই দেখি।



এদের সমান বা **সর্বসম বৃত্ত (Equal or congruent Circles)** বলা হয়।

কষে দেখি 3.1



1. পাশের O কেন্দ্রীয় বৃত্তের ছবি দেখি এবং কোন কোন ব্যাসার্ধ PAQ বৃত্তাংশে অবস্থিত লিখি।

2. **নীচের ______-এ বুঝে লিখি:**

   (i) একটি বৃত্তে ______ বিন্দু আছে।

   (ii) বৃত্তের বৃহত্তম জ্যা ______।

   (iii) জ্যা বৃত্তাকার ক্ষেত্রকে দুটি ______ বিভক্ত করে।

   (iv) বৃত্তের সকল ব্যাস ______ বিন্দুগামী।

   (v) দুটি বৃত্তাংশ সমান হলে তাদের বৃত্তচাপ দুটির দৈর্ঘ্য ______ হবে।

   (vi) একটি বৃত্তাকার ক্ষেত্রের বৃত্তকলা হলো বৃত্তচাপ এবং দুটি ______ -এর দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চল।

   (vii) বৃত্তের বাইরের কোনো বিন্দু ও কেন্দ্রের সংযোজক রেখাংশের দৈর্ঘ্য ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য অপেক্ষা ______।

3. স্কেল ও পেনসিল কম্পাসের সাহায্যে একটি বৃত্ত এঁকে কেন্দ্র, জ্যা, ব্যাস, ব্যাসার্ধ, উপচাপ, অধিচাপ নির্দেশ করি।

4. **সত্য না মিথ্যা লিখি:**

   (i) বৃত্ত একটি সামতলিক চিত্র।

   (ii) বৃত্তাংশ (Segment) একটি সামতলিক ক্ষেত্র।

   (iii) বৃত্তকলা (Sector) একটি সামতলিক ক্ষেত্র।

   (iv) জ্যা একটি সরলরেখাংশ।

   (v) চাপ একটি সরলরেখাংশ।

   (vi) একটি বৃত্তে সসীম সংখ্যক একই দৈর্ঘ্যের জ্যা আছে।

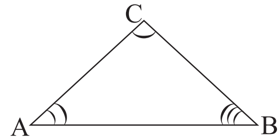
   (vii) একটি নির্দিষ্ট বিন্দুকে কেন্দ্র করে একটিই বৃত্ত আঁকা সম্ভব।

   (viii) দুটি সর্বসম বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য সমান।

বাড়ির চাবিগুলি আলাদা আলাদা চাবির রিং-এ ভরে একটি বড়ো গোলাকার শক্ত পিচবোর্ডে আটকে আমাদের পড়ার ঘরের এককোণে ওরা টাঙিয়ে দিল। কিন্তু অনেকগুলি ছোটো-বড়ো নানান দৈর্ঘ্যের অতিরিক্ত লম্বা শক্ত তামার তার এদিকে ওদিকে ছড়িয়ে ছিটিয়ে পড়ে আছে।

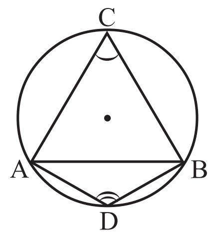
আমার ভাই তীর্থ একটি লম্বা শক্ত তামার তারের সঙ্গে অপর দুটি তামার তার আটকে ABC ত্রিভুজ তৈরি করল।

দেখছি, AB সরলরেখাংশ C বিন্দুতে $\angle ACB$ উৎপন্ন করেছে।
এই কোণটি AB-এর দ্বারা C বিন্দুতে উৎপন্ন সম্মুখ কোণ।



একইভাবে BC সরলরেখাংশ ______ বিন্দুতে ______ উৎপন্ন করেছে। $\angle BAC$, BC-এর দ্বারা ______ বিন্দুতে উৎপন্ন সম্মুখ কোণ এবং CA সরলরেখাংশ ______ বিন্দুতে ______ উৎপন্ন করেছে। $\angle ABC$, AC-এর দ্বারা B বিন্দুতে উৎপন্ন ______ কোণ।

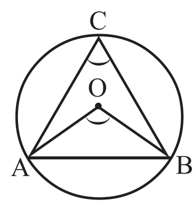
আমার বন্ধু পূজা এক মজার কান্ড করল। সে কতকগুলি কাঠি একটি বৃত্তাকার রিং-এর মধ্যে পাশের চিত্রের মতো আটকে দিল।



দেখছি, বৃত্তকার চাবির রিং-এ AB জ্যা বৃত্তের C বিন্দুতে সম্মুখ কোণ $\angle ACB$ এবং AB জ্যা বৃত্তের D বিন্দুতে সম্মুখ কোণ ______ উৎপন্ন করেছে।

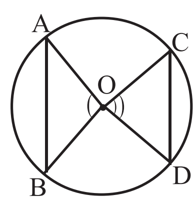
কিন্তু $\angle ACB$ ______ $\angle ADB$ [= / ≠ বসাই]

পাশের ছবির মতো একটি O কেন্দ্রীয় বৃত্ত আঁকি। ওই বৃত্তে ব্যাস ছাড়া যে-কোনো একটি জ্যা AB আঁকি। AB জ্যা বৃত্তের কেন্দ্রে ও বৃত্তের উপরের যে-কোনো বিন্দু C-তে যে দুটি সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করবে তাদের মধ্যে সম্পর্ক চাঁদার সাহায্যে মেপে লিখি। **[নিজে করি]**



আমি একটি বৃত্ত আঁকি এবং ওই বৃত্তে একাধিক জ্যা এঁকে দেখি তারা কেন্দ্রে কীরূপ সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করেছে?

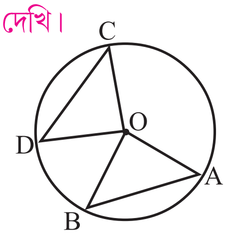
O কেন্দ্রীয় বৃত্তে দুটি জ্যা AB ও CD এঁকেছি। যেখানে AB > CD; জ্যা AB ও জ্যা CD কেন্দ্রে যথাক্রমে $\angle AOB$ ও ______ দুটি সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করেছে, চাঁদা দিয়ে মেপে দেখছি $\angle AOB$ ______ $\angle COD$ [> / < বসাই]



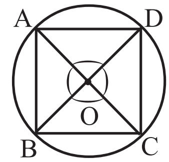
কিন্তু আমি যদি কোনো একটি বৃত্তে সমান সমান দৈর্ঘ্যের কতকগুলি জ্যা আঁকি, তারা কেন্দ্রে সমান সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করবে কিনা তা এঁকে ও চাঁদার সাহায্যে মেপে দেখি।

আমি O কেন্দ্রীয় বৃত্তে দুটি সমান সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা AB ও CD এঁকেছি যারা কেন্দ্রে যথাক্রমে ______ ও ______ সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করেছে।

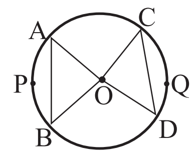
চাঁদা দিয়ে মেপে দেখছি, $\angle AOB$ ______ $\angle COD$ [= / ≠ বসাই]



পাশের ছবিতে ABCD বর্গক্ষেত্রের বাহুগুলি কেন্দ্রে যে যে সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে চাঁদা দিয়ে মেপে তাদের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করি।



হাতেকলমে



(i) আমি একটি যে-কোনো বৃত্ত আঁকলাম যার কেন্দ্র O

(ii) ওই বৃত্তে দুটি সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা AB ও CD আঁকলাম।

(iii) AB ও CD জ্যা দুটি যথাক্রমে $\overset{\frown}{APB}$ ও $\overset{\frown}{CQD}$ চাপ দুটি ছিন্ন করেছে এবং কেন্দ্রে যথাক্রমে $\angle AOB$ ও $\angle COD$ সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করেছে।

(iv) কাঁচি দিয়ে OAPB এবং OCQD বৃত্তকলা দুটি কেটে নিয়ে একটির উপর অপরটি বসিয়ে দেখছি বৃত্তকলা দুটি সম্পূর্ণভাবে মিলে যাচ্ছে।

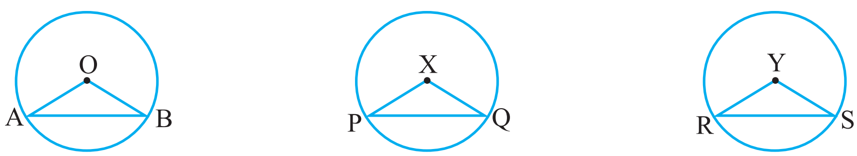
∴ পেলাম : $\overset{\frown}{APB}$ ও $\overset{\frown}{CQD}$ চাপ দুটি সমান।

এবং $\angle AOB = \angle COD$

∴ হাতেকলমে পেলাম, কোনো একটি বৃত্তে সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা সমান দৈর্ঘ্যের চাপ ছিন্ন করে এবং কেন্দ্রে সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে।

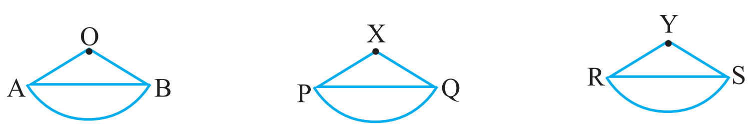
রাবেয়া তার খাতায় অনেকগুলি সর্বসম বৃত্ত এঁকেছে। অর্থাৎ বৃত্তগুলির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য ☐ (সমান / অসমান)

রাবেয়ার আঁকা সমান বৃত্তে সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা এঁকে কী পাই দেখি?



O কেন্দ্রীয়, X কেন্দ্রীয় ও Y কেন্দ্রীয় সর্বসম বৃত্তগুলিতে যথাক্রমে AB, PQ ও RS সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা দ্বারা কেন্দ্রে উৎপন্ন সম্মুখ কোণগুলি মেপে দেখছি, $\angle AOB$ ☐ $\angle PXQ$ ☐ $\angle RYS$ [= / ≠ বসাই]

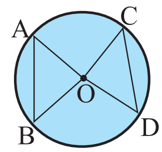
আমি হাতেকলমে সমান দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের একাধিক বৃত্তে সমান দৈর্ঘ্যের জ্যাগুলি আঁকি এবং জ্যাগুলি কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করেছে, সেই কোণগুলি চাপসমেত কেটে নিয়ে একটি অপরগুলির উপর বসিয়ে মিলিয়ে দেখছি,



সমান সমান বৃত্তে সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা সমান দৈর্ঘ্যের চাপ ছিন্ন করে এবং কেন্দ্রে সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে

[হাতেকলমে নিজে করি]

কিন্তু বিপরীতে অর্থাৎ যদি কোনো বৃত্তের একাধিক জ্যা কেন্দ্রে সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে তাহলে জ্যাগুলির মধ্যে কী ধরনের সম্পর্ক হবে হাতেকলমে পরীক্ষা করে দেখি।



আমি একটি বৃত্ত এঁকেছি যার কেন্দ্র O; এই O কেন্দ্রীয় বৃত্তাকার ক্ষেত্রটি কেটে নিয়ে ভাঁজ করে কেন্দ্রে এমন দুটি কোণ $\angle AOB$ ও $\angle COD$ তৈরি করেছি যাতে $\angle AOB = \angle COD$ হয়।

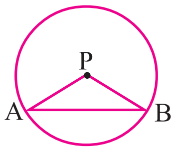
A ও B বিন্দুতে এবং C ও D বিন্দুতে সুতো আটকে বা কাঠি দিয়ে AB ও CD-র দূরত্ব মেপে দেখছি, AB $\boxed{}$ CD [= / ≠ বসাই]

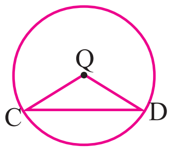
∴ হাতেকলমে দেখছি, বৃত্তের একাধিক জ্যা কেন্দ্রে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করলে জ্যাগুলির দৈর্ঘ্য সমান হয়।

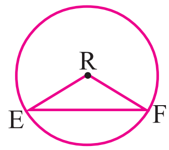
আমি অন্য যে-কোনো ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত আঁকি এবং ওই বৃত্তে এমন একাধিক জ্যা আঁকি যারা কেন্দ্রে সমান কোণ উৎপন্ন করেছে। এবার স্কেলের সাহায্যে মেপে দেখছি জ্যাগুলির দৈর্ঘ্য পরস্পর $\boxed{}$।**[নিজে মেপে লিখি]**

∴ পেলাম, কোনো বৃত্তে যে সকল জ্যা কেন্দ্রে সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে তাদের দৈর্ঘ্য সমান।

তীর্থ তার খাতায় অনেকগুলি সমান বৃত্ত এঁকেছে যাদের কেন্দ্র P, Q ও R; আমি তীর্থের আঁকা বৃত্তে কতকগুলি জ্যা AB, CD ও EF আঁকলাম যারা কেন্দ্রে সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করেছে অর্থাৎ $\angle APB = \angle CQD = \angle ERF$







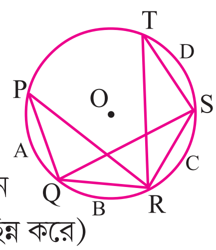
স্কেলের সাহায্যে মেপে দেখছি, AB $\boxed{}$ CD $\boxed{}$ EF [= / ≠ বসাই] **[নিজে এঁকে ও মেপে বসাই]**

∴ পেলাম, সমান বৃত্তের যে সকল জ্যা কেন্দ্রে সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে তাদের দৈর্ঘ্য সমান।

যেহেতু দৈর্ঘ্য সমান সুতরাং তাদের দ্বারা ছিন্ন চাপের দৈর্ঘ্যও $\boxed{}$ (সমান / অসমান)।

একই বৃত্তে দুটি চাপ দ্বারা কেন্দ্রে দুটি সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন হলে চাপ দুটির দৈর্ঘ্য সমান হবে অর্থাৎ জ্যা দুটির দৈর্ঘ্য সমান হবে। **[হাতেকলমে কাগজ কেটে যাচাই করি]**

প্রয়োগ : 1. একটি বৃত্তে PQ, QR, RS এবং ST জ্যা। যদি $PQ = QR = RS = ST$ হয়, তাহলে প্রমাণ করি যে, $PR = QS = RT$



প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তে PQ, QR, RS এবং ST জ্যা এবং $PQ = QR = RS = ST$

প্রমাণ করতে হবে: $PR = QS = RT$

প্রমাণ : $PQ = QR$ সুতরাং, $\overparen{PAQ} = \overparen{QBR}$ .... (i) (যেহেতু, একই বৃত্তে সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা সমান দৈর্ঘ্যের চাপ ছিন্ন করে)

আবার, $QR = RS$ সুতরাং, $\overparen{QBR} = \overparen{RCS}$ .... (ii)

(i) ও (ii) যোগ করে পাই, $\overparen{PAQ} + \overparen{QBR} = \overparen{QBR} + \overparen{RCS}$

সুতরাং $\overparen{PQR} = \overparen{QRS}$ ∴ $PR = QS$ (যেহেতু একই বৃত্তের চাপ দুটি দৈর্ঘ্যে সমান সুতরাং জ্যা দুটির দৈর্ঘ্য সমান)

আবার, $RS = ST$ সুতরাং, $\overparen{RCS} = \overparen{SDT}$ .... (iii)

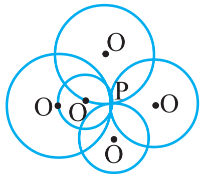
(ii) ও (iii) যোগ করে পাই, $\overparen{QBR} + \overparen{RCS} = \overparen{RCS} + \overparen{SDT}$ সুতরাং, $\overparen{QRS} = \overparen{RST}$ ∴ $QS = RT$

∴ $PR = QS = RT$ (প্রমাণিত)

আজ আমরা কিছু বন্ধু মিলে ঠিক করেছি এক মজার খেলা খেলব। আমাদের কিছু বন্ধু রীতা, মাসুদ, দীপ্তার্ক ও তাপস বোর্ডে কিছু বিন্দু আঁকবে। আমরা সেই বিন্দুগামী বৃত্ত আঁকার চেষ্টা করব ও তাদের প্রকৃতি জানার চেষ্টা করব।

মাসুদ প্রথমে বোর্ডে একটি মাত্র নির্দিষ্ট বিন্দু P আঁকল।

9 নির্দিষ্ট P বিন্দুগামী বৃত্ত আঁকি ও কী পাই দেখি।

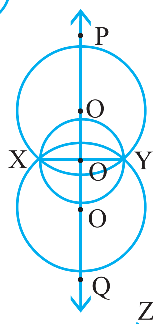


বোর্ডের যে-কোনো বিন্দু O-কে কেন্দ্র করে OP দৈর্ঘ্যের সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত অঙ্কন করলে তা P বিন্দুগামী হবে।

দেখছি, নির্দিষ্ট P বিন্দুগামী ☐ [1টি / 2টি / 3টি / অসংখ্য] বৃত্ত পাচ্ছি।

এবার রীতা বোর্ডে দুটি বিন্দু X ও Y আঁকল।

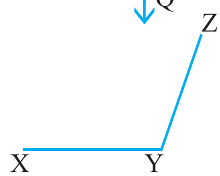
10 X ও Y বিন্দুগামী বৃত্ত আঁকি ও কী পাই দেখি।



X ও Y সংযোজক সরলরেখাংশের লম্বসমদ্বিখণ্ডকের উপরের প্রতিটি বিন্দু X ও Y থেকে সমদূরবর্তী। PQ সরলরেখার ওপর যে-কোনো বিন্দু O-কে কেন্দ্র করে এবং OX বা OY দৈর্ঘ্যের সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত অঙ্কন করলে তা X ও Y বিন্দুগামী হবে। যেখানে O, PQ সরলরেখার উপর যে-কোনো বিন্দু।

∴ X ও Y বিন্দুগামী ☐ বৃত্ত অঙ্কন করতে পারব। **[নিজে আঁকি ও লিখি]**

11 দীপ্তার্ক এবার বোর্ডে তিনটি অসমরেখ বিন্দু X, Y ও Z আঁকল।

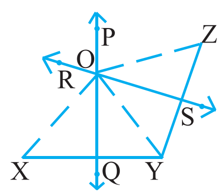


আমি এই তিনটি অসমরেখ বিন্দু X, Y ও Z দিয়ে বৃত্ত আঁকার চেষ্টা করি।

প্রথমে X, Y এবং Y, Z বিন্দুগুলি যোগ করে XY ও YZ সরলরেখাংশ পেলাম।

X, Y ও Z বিন্দুগামী বৃত্ত অঙ্কনের জন্য প্রথমে কেন্দ্র নির্ণয় করি অর্থাৎ এমন একটি বিন্দু নির্ণয় করি যা X, Y ও Z বিন্দুগুলি থেকে সমদূরবর্তী।

12 কিন্তু কীভাবে X, Y ও Z বিন্দুগুলি থেকে সমদূরবর্তী বিন্দু পাব?



XY সরলরেখাংশের লম্বসমদ্বিখণ্ডক PQ আঁকলাম। এই PQ সরলরেখার ওপর প্রতিটি বিন্দু X ও Y বিন্দুদ্বয় থেকে সমদূরবর্তী।

আবার ZY সরলরেখাংশের লম্বসমদ্বিখণ্ডক RS আঁকলাম। এই RS সরলরেখার ওপর প্রতিটি বিন্দু Y ও Z বিন্দুদ্বয় থেকে সমদূরবর্তী।

∴ XY ও YZ সরলরেখাংশদুটির লম্বসমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে PQ ও RS এবং যেহেতু X, Y ও Z অসমরেখ বিন্দু, সুতরাং PQ ও RS সরলরেখা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করল।

∴ O বিন্দুটি X, Y ও Z বিন্দুগুলি থেকে ☐।

∴ O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OX বা OY বা OZ দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করলে তা X, Y ও Z বিন্দুগামী হবে।

13 X, Y ও Z তিনটি অসমরেখ বিন্দু দিয়ে কি একটিই মাত্র বৃত্ত অঙ্কন সম্ভব?

যেহেতু X, Y, Z অসমরেখ বিন্দু তিনটি নির্দিষ্ট, সুতরাং, XY ও YZ সরলরেখাংশ দুটি নির্দিষ্ট এবং PQ ও RS লম্বসমদ্বিখণ্ডক দুটি নির্দিষ্ট। সুতরাং PQ ও RS-এর ছেদবিন্দু O অর্থাৎ কেন্দ্র নির্দিষ্ট এবং OX ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য নির্দিষ্ট। নির্দিষ্ট কেন্দ্র ও নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি মাত্র বৃত্ত অঙ্কন সম্ভব।

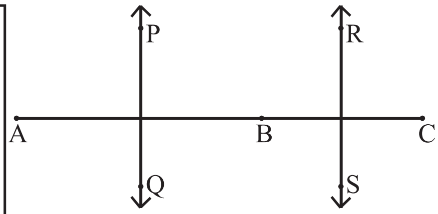
∴ পেলাম X, Y ও Z তিনটি অসমরেখ বিন্দু দিয়ে একটি এবং কেবলমাত্র একটি বৃত্তই অঙ্কন সম্ভব।

আমি অন্য যে-কোনো তিনটি অসমরেখ বিন্দু নিয়ে একইভাবে বৃত্ত এঁকে দেখছি তিনটি অসমরেখ বিন্দু দিয়ে একটি এবং কেবলমাত্র একটিই বৃত্ত অঙ্কন সম্ভব। **[নিজে আঁকি]**

এবার তাপস বোর্ডে তিনটি সমরেখ বিন্দু A, B ও C আঁকল।

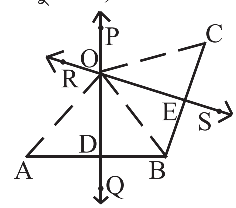
14 A, B ও C তিনটি সমরেখ বিন্দুগামী কোনো বৃত্ত আঁকতে পারব কিনা নিজে এঁকে দেখি।

তিনটি সমরেখ বিন্দু A, B ও C নিলাম। AB-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক PQ এবং BC-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক RS
যেহেতু AB ও BC একই সরলরেখাংশের অংশ, তাই PQ || RS
$\therefore$ PQ ও RS -এর কোনও ছেদবিন্দু পাওয়া যাবে না।
$\therefore$ তিনটি সমরেখ বিন্দু দিয়ে কোনো বৃত্ত আঁকা সম্ভব নয়।



যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য - 31. তিনটি অসমরেখ বিন্দু দিয়ে একটি মাত্র বৃত্ত অঙ্কন সম্ভব। *(প্রমাণ মূল্যায়নের অন্তর্ভুক্ত নয়)*



প্রদত্ত : A, B, C তিনটি অসমরেখ বিন্দু।

প্রমাণ করতে হবে : A, B, C তিনটি অসমরেখ বিন্দু দিয়ে একটি মাত্র বৃত্ত অঙ্কন সম্ভব।

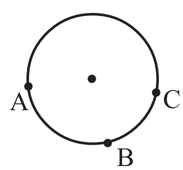
অঙ্কন : A, B বিন্দুদ্বয় ও B, C বিন্দুদ্বয় যুক্ত করি। AB ও BC সরলরেখাংশ দুটির লম্বসমদ্বিখণ্ডক অঙ্কন করি এবং তারা যথাক্রমে PQ ও RS সরলরেখা।

যেহেতু AB ও BC সরলরেখাংশ দুটি সমান্তরাল নয়, সুতরাং তাদের লম্বসমদ্বিখণ্ডক দুটি PQ ও RS সরলরেখা O বিন্দুতে ছেদ করে। PQ এবং RS সরলরেখা AB ও BC সরলরেখাংশদ্বয়কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। O, A বিন্দুদ্বয়; O, B বিন্দুদ্বয় এবং O, C বিন্দুদ্বয় যুক্ত করি।

প্রমাণ : Δ OAD এবং Δ OBD-এর মধ্যে
AD = BD ($\because$ OD, AB সরলরেখাংশের লম্বসমদ্বিখণ্ডক)
$\angle$ODA = $\angle$ODB ($\because$ প্রত্যেকটি কোণ সমকোণ)
OD সাধারণ বাহু $\therefore$ Δ OAD $\cong$ Δ OBD (S – A – S সর্বসমতা অনুসারে)
সুতরাং OA = OB (সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ অংশ)
অনুরূপে, Δ OBE $\cong$ Δ OCE
$\therefore$ OB = OC
সুতরাং OA = OB = OC

$\therefore$ O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OA দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত অঙ্কন করলে বৃত্তটি A, B, C বিন্দুগামী হবে।
সুতরাং তিনটি অসমরেখ বিন্দু দিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন সম্ভব।
A, B, C বিন্দু তিনটি নির্দিষ্ট। অতএব, AB ও BC সরলরেখাংশ দুটি নির্দিষ্ট।
সুতরাং AB ও BC সরলরেখাংশ দুটির লম্বসমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে PQ ও RS সরলরেখা নির্দিষ্ট।
যেহেতু PQ ও RS সরলরেখা নির্দিষ্ট, সুতরাং তাদের ছেদবিন্দু O নির্দিষ্ট।
আবার যেহেতু O এবং A বিন্দুদ্বয় নির্দিষ্ট, সুতরাং OA সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্য নির্দিষ্ট।
অতএব নির্দিষ্ট বিন্দু O-কে কেন্দ্র করে এবং নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি মাত্র বৃত্ত অঙ্কন সম্ভব।
$\therefore$ তিনটি অসমরেখ বিন্দু A, B, C দিয়ে একটি মাত্র বৃত্ত অঙ্কন সম্ভব।

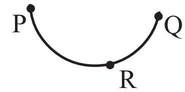
15 আমার বোন তার হাতের বৃত্তাকার বালার সাহায্যে একটি বৃত্ত অঙ্কন করেছে। আমি এই বৃত্তের কেন্দ্র নির্ণয় করি।



বৃত্তের উপর যে-কোনো 3টি বিন্দু A, B ও C নিলাম। এবার AB ও BC সরলরেখাংশের লম্বসমদ্বিখণ্ডকের ছেদবিন্দু নির্ণয় করে বৃত্তের কেন্দ্র নির্ণয় করি। [নিজে করি]

16 যদি কোনো বৃত্তের একটি বৃত্তচাপ আঁকা থাকে তবে কীভাবে বৃত্তটি অঙ্কন করতে পারব দেখি।

$\overset{\frown}{PQ}$ বৃত্তচাপের উপর একটি বিন্দু R নিলাম। এবার আগের মতো P, R ও Q বিন্দুগামী বৃত্তের কেন্দ্র নির্ণয় করে বৃত্তটি অঙ্কন করি। **[নিজে করি]**



দেখছি, তিনটি অসমরেখ বিন্দু দিয়ে একটি এবং কেবলমাত্র একটিই বৃত্ত অঙ্কন সম্ভব। কিন্তু তিন-এর বেশি বিন্দু দিয়ে কি বৃত্ত অঙ্কন সম্ভব?

তিনের বেশি বিন্দু দিয়ে যাচ্ছে এমন বৃত্ত আঁকা সম্ভব নাও হতে পারে। যদি সম্ভব হয় তবে বিন্দুগুলিকে **সমবৃত্তস্থ** (Concyclic) বলা হয়।

17 কোনো চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত হলে ওই চতুর্ভুজকে কী বলা হয়?

যে চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি কোনো একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত সেই চতুর্ভুজকে **বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ** (Cyclic Quadrilateral) বলা হয়।

18 সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়াম কী ?

যে চতুর্ভুজের একজোড়া বিপরীত বাহু সমান্তরাল এবং অপরজোড়া বাহু অসমান্তরাল ও সমান অর্থাৎ তির্যক বাহুদুটি সমান, তাকে সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়াম (Isosceles Trapezium) বলে।

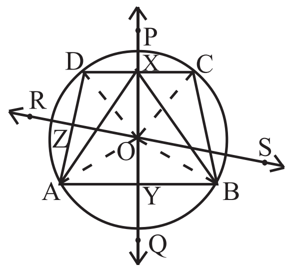
সামান্তরিক একটি ট্রাপিজিয়াম। কিন্তু এটি কি সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ম। **(নিজে লিখি)**

প্রয়োগ - 2. আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, একটি সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ামের শীর্ষবিন্দুগুলি সমবৃত্তস্থ।

প্রদত্ত : ABCD একটি সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়াম। AB || DC এবং AD = BC

প্রমাণ করতে হবে : ABCD ট্রাপিজিয়ামের শীর্ষবিন্দুগুলি সমবৃত্তস্থ।

অঙ্কন : DC বাহুর লম্বসমদ্বিখণ্ডক PQ এবং AD বাহুর লম্বসমদ্বিখণ্ডক RS অঙ্কন করলাম যারা যথাক্রমে DC কে X এবং AD কে Z বিন্দুতে ছেদ করল। PQ, AB কে Y বিন্দুতে ছেদ করল। A, X এবং B, X যুক্ত করলাম। PQ, RS কে O বিন্দুতে ছেদ করে। O বিন্দুর সঙ্গে A, B, C ও D যোগ করলাম।



প্রমাণ : ΔADX এবং ΔBCX -এ DX = CX [$\because$ CD-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক PQ]

$\angle ADX = \angle BCX$ [$\because$ সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদুটির যে-কোনো একটি বাহু সংলগ্ন কোণগুলি সমান]

AD = BC [প্রদত্ত]

$\therefore \Delta ADX \cong \Delta BCX$ [S-A-S সর্বসমতার শর্তানুসারে]

$\therefore$ AX = BX [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ অংশ]

সমকোণী ΔAXY এবং সমকোণী ΔBXY-এ $\angle AYX = \angle BYX$ [$\because AB \parallel CD$ এবং $CD \perp PQ$, $\therefore AB \perp PQ$]

অতিভুজ AX = অতিভুজ BX [আগে **প্রমাণ করা হয়েছে**] এবং XY উভয় ত্রিভুজের সাধারণ বাহু।

$\therefore \Delta AXY \cong \Delta BXY$ [R-H-S সর্বসমতার শর্তানুসারে]

$\therefore$ AY = BY [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ অংশ]

$\therefore$ PQ, AB-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক হবে।

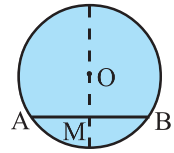
$\because$ DC-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক PQ-এর উপর O বিন্দু অবস্থিত,

$\therefore$ DO = CO; একইভাবে, DO = AO এবং AO = BO

$\therefore$ CO = DO = AO = BO

$\therefore$ O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OC বা OD বা OA বা OB-এর সমান দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত আঁকলে বৃত্তটি A, B, C ও D বিন্দু দিয়ে যাবে। অর্থাৎ সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ামের শীর্ষবিন্দুগুলি সমবৃত্তস্থ। **(প্রমাণিত)**

আমরা অনেকগুলি বৃত্ত এঁকে বৃত্তাকার ক্ষেত্র কেটে নিয়েছি। আমার ভাই রানা কয়েকটি বৃত্তে ব্যাস নয় এরকম জ্যা এঁকেছে।



হাতেকলমে

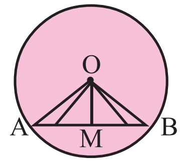
(i) আমি একটি O কেন্দ্রীয় বৃত্তাকার ক্ষেত্র নিলাম যার ব্যাস নয় এরূপ জ্যা AB।

(ii) O কেন্দ্রীয় বৃত্তাকার ক্ষেত্রটি এমনভাবে ভাঁজ করলাম যাতে ভাঁজটি O বিন্দু দিয়ে যায় এবং AB সরলরেখাংশটির একটি অংশ অপর অংশের উপর থাকে। ভাঁজটি AB সরলরেখাংশকে যে বিন্দুতে ছেদ করে সেই বিন্দুটি M; OM যুক্ত করলাম।

(iii) মেপে দেখলাম $\angle OMA = \angle OMB = 1$ সমকোণ এবং $AM = BM$।

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাস নয় এরূপ জ্যা-এর উপর অঙ্কিত লম্ব জ্যাটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

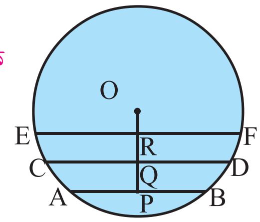
আমি অন্য যে-কোনো একটি বৃত্তাকার ক্ষেত্র কেটে নিয়ে হাতেকলমে কেন্দ্র থেকে ব্যাস নয় এরূপ জ্যা-এর উপর লম্ব টেনে দেখছি লম্বটি জ্যাটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। **[নিজে করি]**



আমরা একটি বৃত্তাকার ক্ষেত্র নিলাম যার কেন্দ্র O এবং জ্যা AB; AB জ্যা-এর উপর অবস্থিত একাধিক বিন্দুর সঙ্গে কেন্দ্র O যোগ করলাম এবং একাধিক নানান দৈর্ঘ্যের সরলরেখাংশ পেলাম।

19 কিন্তু এই একাধিক দূরত্বের মধ্যে কোনটিকে 'কেন্দ্র O থেকে জ্যা AB-এর দূরত্ব' বলব?

এদের মধ্যে যে সরলরেখাংশটি কেন্দ্র O থেকে জ্যা AB-এর উপর লম্ব তার দৈর্ঘ্যকে কেন্দ্র O থেকে জ্যা AB-এর দূরত্ব বা **লম্ব দূরত্ব** (Perpendicular Distance) বলা হয়।



20 আমি একাধিক জ্যা আঁকা অন্য একটি বৃত্তাকার ক্ষেত্র নিয়ে বৃত্তের কেন্দ্র থেকে জ্যাগুলির লম্ব দূরত্ব মাপি ও কী পাই দেখি।

O কেন্দ্রীয় বৃত্তের কেন্দ্র O থেকে জ্যা AB, CD ও EF-এর উপর লম্বদূরত্ব যথাক্রমে OP, OQ ও $\boxed{}$ পেয়েছি। [পাশের ছবি দেখে লিখি]

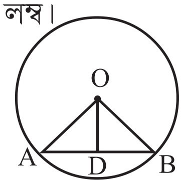
দেখছি, বৃত্তের জ্যা-এর দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি পেলে কেন্দ্র থেকে লম্বদূরত্ব $\boxed{}$ [বৃদ্ধি / হ্রাস] পাবে।

আরও দেখছি, বৃত্তের বৃহত্তম জ্যা অর্থাৎ $\boxed{}$ বৃত্তের কেন্দ্রগামী,

$\therefore$ সেক্ষেত্রে কেন্দ্র থেকে লম্বদূরত্ব শূন্য। সুতরাং, পেলাম, বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাসের লম্বদূরত্ব $\boxed{}$।

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য : 32. ব্যাস নয় এরূপ কোনো জ্যা-এর উপর বৃত্তের কেন্দ্র থেকে লম্ব অঙ্কন করা হলে, ওই লম্ব জ্যাটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।



প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB ব্যাস নয় এরূপ একটি জ্যা এবং OD, AB জ্যা-এর উপর লম্ব।

প্রমাণ করতে হবে : OD, AB জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে অর্থাৎ $AD = DB$

অঙ্কন : O, A এবং O, B যুক্ত করি।

প্রমাণ : OD, AB জ্যা-এর উপর লম্ব।

সুতরাং, ΔODA ও ΔODB সমকোণী।

$\therefore$ সমকোণী ΔODA ও ΔODB তে $\angle ODA = \angle ODB$ (প্রত্যেকটি কোণ সমকোণ)

অতিভুজ OA = অতিভুজ OB [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ],এবং OD সাধারণ বাহু

$\therefore \Delta ODA \cong \Delta ODB$ [R-H-S সর্বসমতার শর্তানুসারে]

$\therefore AD = DB$ [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ অংশ] [প্রমাণিত]

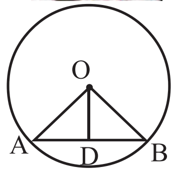
প্রয়োগ : 3. আমি A কেন্দ্রীয় বৃত্তের ব্যাস নয় এরূপ একটি জ্যা PQ আঁকি। A থেকে PQ-এর উপর AM লম্ব আঁকি। যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে PM = MQ **[নিজে এঁকে প্রমাণ করি]**

আমরা প্রমাণ করেছি যে ব্যাস নয় এরূপ কোনো জ্যা-এর উপর বৃত্তের কেন্দ্র থেকে লম্ব অঙ্কন করলে সেই লম্ব জ্যাটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

(21) কিন্তু এই উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য কি সম্ভব? অর্থাৎ কোনো বৃত্তের ব্যাস নয় এরূপ জ্যা-এর মধ্যবিন্দু ও বৃত্তের কেন্দ্রের সংযোজক সরলরেখাংশ কি ওই জ্যা-এর উপর লম্ব হবে?

হাতেকলমে

(i) প্রথমে O কেন্দ্রীয় বৃত্ত এঁকে বৃত্তাকার ক্ষেত্র কেটে নিলাম। ওই বৃত্তের ব্যাস নয় এরূপ একটি জ্যা AB আঁকলাম।



(ii) হাতেকলমে কাগজ ভাঁজ করে AB জ্যা-এর মধ্যবিন্দু নির্ণয়ের জন্য বৃত্তক্ষেত্রাকার কাগজটির AB জ্যা-কে এমনভাবে ভাঁজ করলাম যাতে A বিন্দু B বিন্দুর সঙ্গে মিশে যায়। ভাঁজ খুলে দিলাম এবং ভাঁজটি AB-কে D বিন্দুতে ছেদ করল এবং ভাঁজটি O বিন্দুগামী হল। অর্থাৎ কেন্দ্র O এবং AB জ্যা-এর মধ্যবিন্দু D-এর সংযুক্ত সরলরেখাংশ AB জ্যা-এর উপর লম্ব।

$\therefore$ OD $\perp$ AB

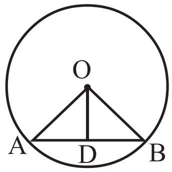
$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, ব্যাস নয় এরূপ কোনো জ্যা-কে যদি বৃত্তের কেন্দ্রবিন্দুগামী কোনো সরলরেখা সমদ্বিখণ্ডিত করে, তাহলে ওই সরলরেখা ওই জ্যা-এর উপর লম্ব হবে।

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য : 33. প্রমাণ করি যে ব্যাস নয় এরূপ কোনো জ্যা-কে যদি বৃত্তের কেন্দ্রবিন্দুগামী কোনো সরলরেখা সমদ্বিখণ্ডিত করে, তাহলে ওই সরলরেখা ওই জ্যা-এর উপর লম্ব হবে।

প্রদত্ত : ধরি, O কেন্দ্রীয় বৃত্তের ব্যাস নয় এরূপ একটি জ্যা AB এবং D, AB-এর মধ্যবিন্দু অর্থাৎ AD=DB

প্রমাণ করতে হবে : OD $\perp$ AB অর্থাৎ OD, AB জ্যা-এর উপর লম্ব।



অঙ্কন : O, A এবং O, B যুক্ত করি।

প্রমাণ : ΔOAD ও ΔOBD তে

OA = OB [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

AD = DB [প্রদত্ত] [D, AB-এর মধ্যবিন্দু]

এবং OD সাধারণ বাহু

$\therefore$ ΔOAD $\cong$ ΔODB [সর্বসমতার বাহু-বাহু-বাহু (S-S-S) শর্তানুসারে]

$\therefore$ $\angle$ODA = $\angle$ODB [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ অংশ]

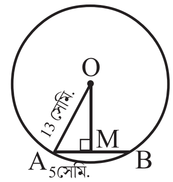
যেহেতু, OD, AB জ্যা-এর উপর দণ্ডায়মান হয়ে সমান কোণ উৎপন্ন করেছে,

সুতরাং, $\angle$ODA = $\angle$ODB = 1 সমকোণ

$\therefore$ OD $\perp$ AB [প্রমাণিত]

প্রয়োগ : 4. আমি সর্বসমতার বাহু-কোণ-বাহু শর্তানুসারে ΔOAD ও ΔOBD সর্বসম প্রমাণ করে উপপাদ্য-33 প্রমাণ করি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 5. নিয়ামত একটি বৃত্ত এঁকেছে যার ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 13 সেমি.। আমি এই বৃত্তে একটি 10 সেমি. দৈর্ঘ্যের জ্যা AB এঁকেছি। বৃত্তের কেন্দ্র থেকে এই AB জ্যা-এর দূরত্ব হিসাব করে লিখি।



ধরি, বৃত্তের কেন্দ্র O; AB জ্যা-এর উপর O থেকে লম্ব OM অঙ্কন করলাম যা AB-কে M বিন্দুতে ছেদ করল।

$\therefore AM = \frac{1}{2} AB = \boxed{}$ সেমি. [$\because$ ব্যাস নয় এরকম কোনো জ্যা-এর উপর বৃত্তের কেন্দ্র থেকে লম্ব অঙ্কন করলে তা ওই জ্যা-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

সমকোণী ত্রিভুজ AMO-তে

$OA^2 = AM^2 + OM^2$ (পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে)

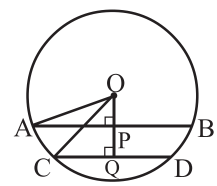
$OM^2 = OA^2 - AM^2 = (13^2 - 5^2)$ বর্গ সেমি. $\boxed{}$ বর্গ সেমি.

$\therefore OM = 12$ সেমি.

$\therefore$ পেলাম, 13 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র থেকে 10 সেমি. জ্যা-এর লম্ব দূরত্ব 12 সেমি.

প্রয়োগ : 6. 17 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের যে জ্যা-এর কেন্দ্র থেকে দূরত্ব 8 সেমি., তার দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 7. 10 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের দুটি সমান্তরাল জ্যা-এর দৈর্ঘ্য 16 সেমি. এবং 12 সেমি.। হিসাব করে দেখি, ওই দুটি জ্যা-এর মধ্যে দূরত্ব কত যদি তারা কেন্দ্রের (i) একই পার্শ্বে থাকে, (ii) বিপরীত পার্শ্বে থাকে।



(i) ধরি, O কেন্দ্রীয় বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 10 সেমি. এবং AB ও CD জ্যা দুটি কেন্দ্রের একই পার্শ্বে অবস্থিত। AB ও CD-এর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 16 সেমি. ও 12 সেমি.। $AB \parallel CD$

O বিন্দু থেকে CD জ্যা-এর উপর OQ লম্ব অঙ্কন করলাম যা AB জ্যা-কে P বিন্দুতে ছেদ করে।

যেহেতু $AB \parallel CD$ এবং $OQ \perp CD$, সুতরাং $OP \perp AB$.

$\angle OPB =$ অনুরূপ $\angle OQD \quad \because \angle OQD = 90^\circ, \ \therefore \angle OPB = 90^\circ$

$\therefore AP = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 16$ সেমি. = 8 সেমি.

আবার OA = 10 সেমি.

$\therefore$ সমকোণী ΔAPO-তে,

$OP^2 = OA^2 - AP^2 = (10^2 - 8^2)$ বর্গ সেমি. = $\boxed{}$ বর্গ সেমি.

$\therefore OP = 6$ সেমি.

$\because \ OQ \perp CD \ \therefore CQ = \boxed{}$ **[নিজে লিখি]**

$\therefore$ সমকোণী ΔOCQ থেকে পেলাম, $OQ = \boxed{}$ [একইভাবে নিজে হিসাব করে লিখি]

$\therefore$ জ্যা AB ও CD-এর মধ্যে দূরত্ব $PQ = OQ - OP$

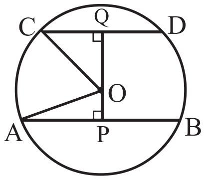
$= (8 - 6)$ সেমি. = 2 সেমি.

(ii) কিন্তু AB ও CD জ্যা দুটি যদি বৃত্তের কেন্দ্রের বিপরীত পার্শ্বে থাকত,

সেক্ষেত্রে AB ও CD জ্যা দুটির দূরত্ব $= PQ$

$= OP + OQ = (6 + 8)$ সেমি.

$= 14$ সেমি.



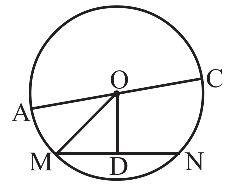
প্রয়োগ : 8. 5 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তে 8 সেমি. ও 6 সেমি. দৈর্ঘ্যের দুটি সমান্তরাল জ্যা বৃত্তের কেন্দ্রের বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত। জ্যা দুটির মধ্যের দূরত্ব হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 9. প্রমাণ করি, ব্যাসই বৃত্তের বৃহত্তম জ্যা।

প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তে MN ব্যাস নয় এমন যে-কোনো একটি জ্যা এবং AC একটি ব্যাস।

প্রমাণ করতে হবে: $AC > MN$ অর্থাৎ ব্যাসই বৃত্তের বৃহত্তম জ্যা।

অঙ্কন : কেন্দ্র O থেকে জ্যা MN-এর উপর OD লম্ব অঙ্কন করি। O, M যুক্ত করি।



প্রমাণ : $OM > MD$ [$\because$ OMD একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং OM অতিভুজ]

বা, $OA > MD$ [$\because OA = OM$ একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

বা, $\frac{1}{2}AC > \frac{1}{2}MN$

বা, $AC > MN$

$\therefore$ ব্যাসই বৃত্তের বৃহত্তম জ্যা। **(প্রমাণিত)**

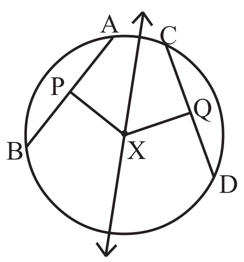
ত্রিভুজের যে-কোনো দুটি বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য অপেক্ষা বৃহত্তর। এই উপপাদ্যের সাহায্যে প্রয়োগ - 9 প্রমাণ করার চেষ্টা করি।

আমার বন্ধু মেরি X কেন্দ্রীয় একটি বৃত্তে দুটি সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা AB ও CD এঁকেছে।

আমি X কেন্দ্র থেকে সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা AB ও CD-এর উপর দুটি লম্ব XP ও XQ অঙ্কন করলাম।

আমি হাতেকলমে কাগজ ভাঁজ করে XP ও XQ-এর মধ্যে সম্পর্ক খুঁজি।

হাতেকলমে



(i) একটি ট্রেসিং-পেপারে উপরের মতো X কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে দুটি সমান জ্যা AB ও CD এঁকে কেন্দ্র X থেকে দুটি লম্ব XP ও XQ টানলাম।

(ii) এবার ট্রেসিং-পেপারের বৃত্তাকার ক্ষেত্রটি কেটে নিয়ে দু-ভাঁজ করলাম যাতে A বিন্দু C বিন্দুর সঙ্গে এবং B বিন্দু D বিন্দুর সঙ্গে মিশে যায়।

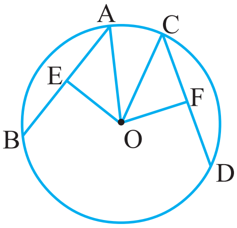
দেখছি, P বিন্দুর সঙ্গে Q বিন্দু মিশে গেছে এবং ভাঁজ খুলে দেখছি ভাঁজটি X বিন্দু দিয়ে গেছে।

$\therefore$ পেলাম $XP = XQ$

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, বৃত্তের সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা দুটি কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী।

প্রয়োগ : 10. যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, কোনো বৃত্তের দুটি সমান জ্যা কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী।

প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB ও CD দুটি সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা। কেন্দ্র O থেকে AB ও CD-এর দূরত্ব যথাক্রমে OE ও OF অর্থাৎ $OE \perp AB$ এবং $OF \perp CD$



প্রমাণ করতে হবে: $OE = OF$

অঙ্কন : O, A ও O, C যুক্ত করলাম।

প্রমাণ : $OE \perp AB$ এবং $OF \perp CD$ [প্রদত্ত]

$\therefore AE = \frac{1}{2} AB$ এবং $CF = \frac{1}{2} CD$ [যেহেতু, বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাস নয় এরূপ কোনো জ্যা-এর উপর লম্ব জ্যাটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।]

আবার, $AB = CD$ [প্রদত্ত]

$\therefore AE = CF$ ..... (i)

$\therefore$ সমকোণী ΔAEO ও সমকোণী ΔOFC -তে $\angle OEA = \angle OFC$ (প্রত্যেকটি সমকোণ)

অতিভুজ OA = অতিভুজ OC [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

$AE = CF$ [(i) থেকে পাই]

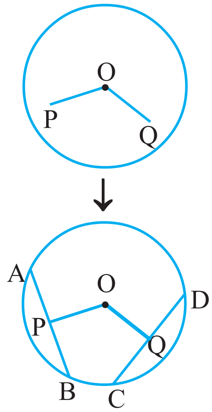
$\Delta AEO \cong \Delta CFO$ [R-H-S সর্বসমতার শর্তানুসারে]

$\therefore OE = OF$ **[প্রমাণিত]**

হাতেকলমে যাচাই করলাম ও যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করলাম যে, বৃত্তের দুটি সমান জ্যা কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী।

কিন্তু এর বিপরীত কি সম্ভব? অর্থাৎ কোনো বৃত্তের দুটি জ্যা কেন্দ্র থেকে সমান দূরত্বে থাকলে জ্যা দুটির দৈর্ঘ্য কি সমান হবে? হাতেকলমে যাচাই করি ও যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি।

হাতেকলমে



(i) একটি ট্রেসিং পেপারে O কেন্দ্রীয় বৃত্তে দুটি সমান রেখাংশ OP এবং OQ আঁকলাম। এবার দুটি জ্যা AB ও CD আঁকলাম যাতে $AB \perp OP$ এবং $CD \perp OQ$ হয়।

(ii) এবার বৃত্তাকার ক্ষেত্রবিশিষ্ট কাগজটি কেটে নিয়ে O বিন্দু বরাবর দু-ভাঁজ করলাম যাতে P বিন্দু Q বিন্দুর উপর সমাপতিত হয়। কিন্তু দেখছি AB জ্যা , CD জ্যা-এর উপর সমাপতিত হয়েছে।

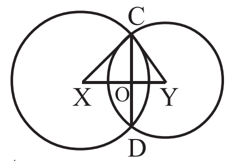
$\therefore$ পেলাম $AB = CD$

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, বৃত্তের দুটি জ্যা-এর কেন্দ্র থেকে দূরত্ব সমান হলে জ্যা দুটির দৈর্ঘ্যও সমান হবে। **(যুক্তি দিয়ে নিজে প্রমাণ করি)**

প্রয়োগ : 11. প্রমাণ করি যে বৃত্তের কোনো জ্যা-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক ওই বৃত্তের কেন্দ্রগামী। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 12. প্রমাণ করি, একটি সরলরেখা একটি বৃত্তকে দুই-এর অধিক বিন্দুতে ছেদ করতে পারে না। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 13. যদি দুটি বৃত্ত পরস্পরকে দুটি বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ করি যে, তাদের কেন্দ্রদুটি তাদের সাধারণ জ্যা-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডকের উপর আছে।



প্রদত্ত : X ও Y কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তদুটি পরস্পরকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করেছে। সুতরাং CD উহাদের সাধারণ জ্যা।

প্রমাণ করতে হবে: X ও Y বিন্দু দুটি সাধারণ জ্যা CD-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডকের উপর আছে।

অঙ্কন : X বিন্দু থেকে CD-এর উপর XO লম্ব অঙ্কন করলাম। O এবং Y বিন্দু দুটি যোগ করলাম।

প্রমাণ : X কেন্দ্রীয় বৃত্তের CD জ্যা এবং $XO \perp CD$

$\therefore$ O, CD-এর মধ্যবিন্দু।

আবার, Y কেন্দ্রীয় বৃত্তের CD জ্যা এবং O, CD-এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore OY \perp CD$

যেহেতু কোনো সরলরেখার উপর অবস্থিত একটি বিন্দুতে একটিমাত্র লম্ব অঙ্কন সম্ভব,

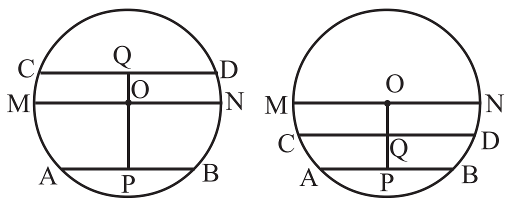
সুতরাং, XO ও OY একই সরলরেখায় অবস্থিত।

সুতরাং, XY সাধারণ জ্যা CD-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক।

$\therefore$ বৃত্ত দুটির কেন্দ্রদ্বয় X ও Y তাদের সাধারণ জ্যা CD-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডকের উপর আছে।

[প্রমাণিত]

প্রয়োগ : 14. আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, কোনো বৃত্তের দুটি সমান্তরাল জ্যা-এর মধ্যবিন্দু দুটির সংযোজক সরলরেখা কেন্দ্রবিন্দুগামী।



প্রদত্ত : ধরি, O কেন্দ্রীয় বৃত্তের দুটি জ্যা AB ও CD পরস্পর সমান্তরাল এবং AB ও CD-এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q

প্রমাণ করতে হবে: PQ, O বিন্দুগামী

অঙ্কন : O, P এবং O, Q যুক্ত করলাম এবং O বিন্দু দিয়ে AB ও CD-এর সমান্তরাল সরলরেখাংশ MN অঙ্কন করলাম।

প্রমাণ : P, AB জ্যা-এর মধ্যবিন্দু। $\therefore OP \perp AB$

আবার $AB \parallel MN$, $\therefore OP \perp MN$

অনুরূপে, $OQ \perp CD$ [$\because$ Q, CD-এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore OQ \perp MN$ [$\because MN \parallel CD$]

$\therefore$ OP ও OQ উভয়েই O বিন্দুতে MN-এর উপর লম্ব।

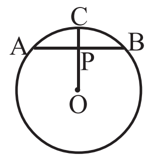
যেহেতু একটি সরলরেখার উপর অবস্থিত একটি বিন্দুতে একটিমাত্র লম্ব অঙ্কন করা যায়,

সুতরাং, P, O ও Q সমরেখ।

$\therefore$ PQ, বৃত্তের কেন্দ্র O বিন্দুগামী। [প্রমাণিত]

কষে দেখি 3.2

1. O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 5 সেমি. এবং AB একটি জ্যা-এর দৈর্ঘ্য 8 সেমি.। O বিন্দু থেকে AB জ্যা-এর দূরত্ব হিসাব করে লিখি।
2. O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্তের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 26 সেমি.। O বিন্দু থেকে PQ জ্যা-এর দূরত্ব 5 সেমি.। PQ জ্যা-এর দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।
3. O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্তের PQ জ্যা-এর দৈর্ঘ্য 4 সেমি. এবং O বিন্দু থেকে PQ-এর দূরত্ব 2.1 সেমি.। বৃত্তের ব্যাসের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।
4. O কেন্দ্রীয় বৃত্তে 6 সেমি. ও 8 সেমি. দৈর্ঘ্যের দুটি জ্যা। যদি ছোটো দৈর্ঘ্যের জ্যাটির বৃত্তের কেন্দ্র থেকে দূরত্ব 4 সেমি. হয়, তাহলে অপর জ্যাটির কেন্দ্র থেকে দূরত্ব কত তা হিসাব করে লিখি।
5. যদি কোনো বৃত্তের একটি জ্যা-এর দৈর্ঘ্য 48 সেমি. এবং কেন্দ্র থেকে ওই জ্যা-এর দূরত্ব 7 সেমি. হয়, তবে ওই বৃত্তের কেন্দ্র থেকে যে জ্যা-এর দূরত্ব 20 সেমি., সেই জ্যা-এর দৈর্ঘ্য কত হবে তা হিসাব করে লিখি।



6. পাশের O কেন্দ্রীয় বৃত্তের ছবিতে $OP \perp AB$; $AB = 6$ সেমি. এবং $PC = 2$ সেমি. হলে, বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।
7. একটি সরলরেখা দুটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তের একটিকে A ও B বিন্দুতে এবং অপরটিকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করেছে। যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে $AC = DB$
8. প্রমাণ করি, কোনো বৃত্তের দুটি পরস্পরছেদি জ্যা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করতে পারে না, যদি না উভয়েই বৃত্তের ব্যাস হয়।
9. X ও Y কেন্দ্রবিশিষ্ট দুটি বৃত্ত পরস্পরকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করেছে। XY-এর মধ্যবিন্দু S-এর সঙ্গে A বিন্দু যুক্ত করলাম এবং A বিন্দু দিয়ে SA-এর উপর লম্ব অঙ্কন করলাম যা বৃত্ত দুটিকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করল। প্রমাণ করি যে $PA = AQ$.
10. O কেন্দ্রীয় বৃত্তের 10 সেমি. ও 24 সেমি. দৈর্ঘ্যের দুটি সমান্তরাল জ্যা AB এবং CD কেন্দ্রের বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত। যদি AB ও CD-জ্যা দুটির মধ্যে দূরত্ব 17 সেমি. হয়, তবে হিসাব করে বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য লিখি।

> উত্তর সংকেত : ধরি, বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r সেমি. এবং বৃত্তের কেন্দ্র থেকে AB জ্যা-এর দূরত্ব x সেমি.। $\therefore$ বৃত্তের কেন্দ্র থেকে CD জ্যা-এর দূরত্ব $(17 - x)$ সেমি.। $\therefore r^2 = x^2 + 5^2$ এবং $r^2 = (17-x)^2 + (12)^2$, সুতরাং, $x^2 + 5^2 = (17 - x)^2 + 12^2$ $\therefore x = 12$

11. দুটি বৃত্তের কেন্দ্র P এবং Q; বৃত্ত দুটি A এবং B বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দু দিয়ে PQ সরলরেখাংশের সমান্তরাল সরলরেখা বৃত্ত দুটিকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, $CD = 2PQ$
12. একটি বৃত্তের AB ও AC জ্যা দুটি সমান। প্রমাণ করি যে, $\angle BAC$-এর সমদ্বিখণ্ডক কেন্দ্রগামী।
13. একটি বৃত্তের দুটি পরস্পরচ্ছেদী জ্যা-এর অন্তর্ভূত কোণের সমদ্বিখণ্ডক যদি কেন্দ্রগামী হয়, তাহলে প্রমাণ করি যে, জ্যা দুটি সমান।
14. প্রমাণ করি, একটি বৃত্তে দুটি জ্যা-এর মধ্যে যে জ্যাটি কেন্দ্রের নিকটবর্তী সেটির দৈর্ঘ্য অপর জ্যা-টির দৈর্ঘ্য অপেক্ষা বৃহত্তর।
15. একটি বৃত্তের ভিতর যে-কোনো বিন্দু দিয়ে ক্ষুদ্রতম জ্যা কোনটি হবে তা প্রমাণ করে লিখি।

16. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :

(i) O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুটির দৈর্ঘ্য সমান। $\angle AOB = 60^\circ$ হলে, $\angle COD$-এর মান
(a) 40° (b) 30° (c) 60° (d) 90°

(ii) একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 13 সেমি. এবং বৃত্তের একটি জ্যা-এর দৈর্ঘ্য 10 সেমি.। বৃত্তের কেন্দ্র থেকে জ্যা-এর দূরত্ব (a) 12.5 সেমি. (b) 12 সেমি. (c) $\sqrt{69}$ সেমি. (d) 24 সেমি.

(iii) O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB ও CD দুটি সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা। O বিন্দু থেকে AB জ্যা-এর দূরত্ব 4 সেমি. হলে, CD জ্যা-এর দূরত্ব (a) 2 সেমি. (b) 4 সেমি. (c) 6 সেমি. (d) 8 সেমি.

(iv) AB ও CD দুটি সমান্তরাল জ্যা-এর প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য 16 সেমি.। বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 10 সেমি. হলে, জ্যা দুটির মধ্যে দূরত্ব (a) 12 সেমি. (b) 16 সেমি. (c) 20 সেমি. (d) 5 সেমি.

(v) দুটি সমকেন্দ্রীয় বৃত্তের কেন্দ্র O; একটি সরলরেখা একটি বৃত্তকে A ও B বিন্দুতে এবং অপর বৃত্তকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে। AC = 5 সেমি. হলে BD-এর দৈর্ঘ্য (a) 2.5 সেমি. (b) 5 সেমি. (c) 10 সেমি. (d) কোনটিই নয়।

(B) সত্য / মিথ্যা লিখি :

(i) তিনটি সমরেখ বিন্দু দিয়ে যায় এরকম একটি বৃত্ত অঙ্কন করা যায়।

(ii) ABCDA ও ABCEA বৃত্ত দুটি একই বৃত্ত।

(iii) O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB এবং AC জ্যা দুটি OA ব্যাসার্ধের বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত হলে, $\angle OAB = \angle OAC$

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) O কেন্দ্রীয় বৃত্তে PQ ও RS জ্যা দুটির দৈর্ঘ্যের অনুপাত 1:1 হলে, $\angle POQ : \angle ROS =$ ______

(ii) বৃত্তের কোনো জ্যা-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক ওই বৃত্তের ______।

17. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.) :**

(i) 10 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের দুটি সমান বৃত্ত পরস্পরকে ছেদ করে এবং তাদের সাধারণ জ্যা-এর দৈর্ঘ্য 12 সেমি.। বৃত্ত দুটির কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় করি।

(ii) 5 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তে AB এবং AC দুটি সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা। বৃত্তের কেন্দ্র ABC ত্রিভুজের বাইরে অবস্থিত। AB = AC = 6 সেমি. হলে, BC জ্যা-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

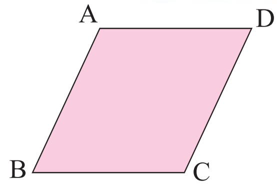
(iii) O কেন্দ্রীয় বৃত্তে AB ও CD জ্যা দুটির দৈর্ঘ্য সমান। $\angle AOB = 60^\circ$ এবং CD = 6 সেমি. হলে, বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য কত তা নির্ণয় করি।

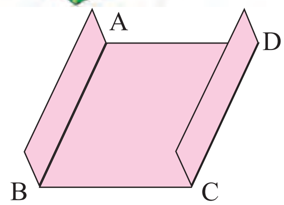
(iv) O কেন্দ্রীয় বৃত্তের ভিতর P যে-কোনো একটি বিন্দু। বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 5 সেমি. এবং OP = 3 সেমি. হলে, P বিন্দুগামী যে জ্যাটির দৈর্ঘ্য ন্যূনতম তা নির্ণয় করি।

(v) P ও Q কেন্দ্রবিশিষ্ট দুটি বৃত্ত A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দু দিয়ে PQ-এর সমান্তরাল সরলরেখা বৃত্তদুটিকে যথাক্রমে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে। PQ = 5 সেমি. হলে, CD-এর দৈর্ঘ্য কত তা নির্ণয় করি।

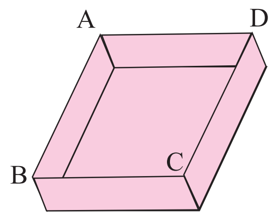
4 আয়তঘন
RECTANGULAR PARALLELOPIPED OR CUBOID

বাড়ির 'First Aid' বাক্সটি নষ্ট হয়ে গেছে। একটি নতুন 'First Aid' বাক্স তৈরি করতে হবে। তাই আজ ছুটির দিনের দুপুরে বাড়ির ছাদে আমরা ভাই বোনেরা সকলে মিলে জড়ো হয়েছি। প্রথমে একটি বাক্স তৈরির চেষ্টা করি।

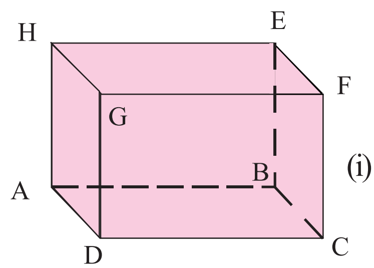




আমরা প্রথমে একটি পিচবোর্ডের আয়তক্ষেত্রাকার টুকরো ABCD কেটে নিলাম। সাথি অন্য দুটি একই মাপের অর্থাৎ AB দৈর্ঘ্য এবং যে-কোন প্রস্থ বিশিষ্ট আয়তক্ষেত্রাকার টুকরো কেটে পাশের ছবির মতো আটকে দিল।



শাকিলও সাথির মতো AD দৈর্ঘ্য ও আগের মাপের প্রস্থ বিশিষ্ট অন্য দুটি আয়তক্ষেত্রাকার টুকরো কেটে পাশের চিত্রের মতো আটকে দিল।



আমি ABCD আয়তক্ষেত্রাকার টুকরোর সমান মাপের অর্থাৎ সমান দৈর্ঘ্য ও প্রস্থবিশিষ্ট আর একটি আয়তক্ষেত্রাকার টুকরো HEFG কেটে ও ABCD তলের বিপরীতে আটকে পাশের ছবির মতো বাক্স তৈরি করলাম।

(1) এইরকম ঘনবস্তু যার তলগুলি আয়তক্ষেত্রাকার এবং বিপরীত তলগুলি সমান মাপের এবং সন্নিহিত তলগুলি পরস্পর লম্ব তাকে কী বলা হয়?

এইরকম ঘনবস্তু যার প্রতিটি তল আয়তক্ষেত্রাকার এবং বিপরীত তলগুলির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ সমান এবং সন্নিহিত তলগুলি পরস্পরের উপর লম্ব তাকে **সমকোণী চৌপল** বা **আয়তঘন** (Rectangular parallelopiped or Cuboid) বলা হয়।

দেখছি, সমকোণী চৌপলটি ABCD আয়তক্ষেত্রাকার তলের উপর দাঁড়িয়ে আছে।

(2) এই অবস্থানে ABCD তলটিকে কী বলা হয়?

এই অবস্থানে ABCD তলটি সমকোণী চৌপলের **ভূমি (base)** এবং আয়তক্ষেত্রাকার ভূমির বাহু দুটির একটি **দৈর্ঘ্য (length)** ও অপরটি **প্রস্থ (breadth)**। বুঝেছি, (i) নং সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য = AB এবং প্রস্থ = BC

(3) কিন্তু (i) নং সমকোণী চৌপলের BE-কে কী বলা হয়?

BE (i) নং সমকোণী চৌপলের **উচ্চতা (height)**।

দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা হলো সমকোণী চৌপলের মাত্রা (dimension)।

সমকোণী চৌপলের $\boxed{}$ [1টি / 2টি / 3টি] মাত্রা।

আবার দেখছি, সমকোণী চৌপলের তল $\boxed{}$ [4টি / 5টি / 6টি]।

$\therefore$ সমকোণী চৌপলের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল (Whole surface area)

= 6 টি তলের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি

$= 2\,(AB\times BC + AB\times BE + BC\times BE)$

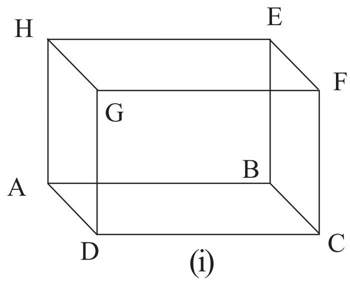
= 2 (দৈর্ঘ্য × প্রস্থ + দৈর্ঘ্য × উচ্চতা + প্রস্থ × উচ্চতা)

4 সমকোণী চৌপলের দুটি তল পরস্পরকে সরলরেখাংশে ছেদ করেছে। এই ছেদ সরলরেখাংশকে কী বলা হয়?

আয়তঘনের দুটি তলের ছেদ সরলরেখাংশকে **ধার বা প্রান্তিকী (edge)** বলা হয়।

দেখছি, আয়তঘনের 12টি **ধার**।

(i) নং আয়তঘনের ধারগুলি ছবি দেখে নিজে লিখি। [নিজে লিখি]



(i)

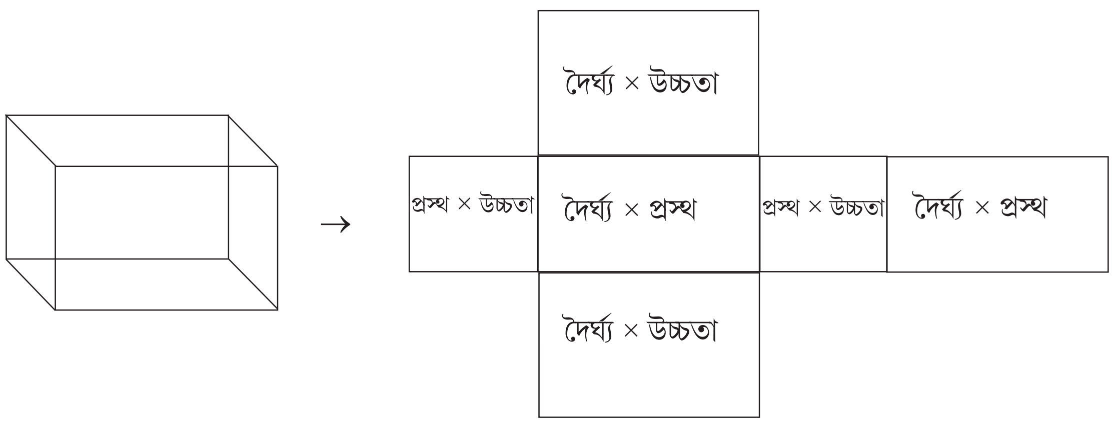
5 আয়তঘনের ধারগুলি যে বিন্দুতে মিলিত হয়েছে তাকে কী বলা হয়?

আয়তঘনের ধারগুলি যে বিন্দুতে মিলিত হয়েছে তাকে **শীর্ষবিন্দু (Vertex)** বলা হয়।

দেখছি, আয়তঘনের $\boxed{}$ [6টি / 7টি / 8টি] শীর্ষবিন্দু।

(i) নং আয়তঘনের শীর্ষবিন্দুগুলি নিজে বুঝে লিখি। [নিজে লিখি]

আমার ভাই এক মজার কাণ্ড করল। সে তার খেলনা রাখার আয়তঘনাকার বাক্সটি নিয়ে এল এবং বাক্সটির তলগুলি (Surfaces) খুলে পেল—



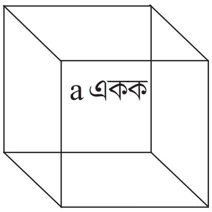
প্রয়োগ : 1. দেখছি, ভাই-এর আনা আয়তঘনাকার বাক্সের দৈর্ঘ্য 40 সেমি., প্রস্থ 25 সেমি. এবং উচ্চতা 15 সেমি.।

$\therefore$ এই আয়তঘনাকার বাক্সের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল

$= 2\,(40\times25 + 40\times15 + 25\times15)$ বর্গ সেমি.

$= \boxed{}$ বর্গ সেমি.

প্রয়োগ : 2. যে আয়তঘনাকার বাক্সের দৈর্ঘ্য 15 সেমি., প্রস্থ 12 সেমি. এবং উচ্চতা 20 সেমি. তার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]



আমার বন্ধু রাজিয়া তার বাড়ি থেকে একটি পিচবোর্ডের বাক্স এনেছে।
দেখছি, রাজিয়ার আনা বাক্সটির প্রতিটি তল বর্গক্ষেত্রাকার অর্থাৎ বাক্সটির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা সমান।

(6) এই ধরনের আয়তঘনকে কী বলা হয়?

যে আয়তঘনের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা সমান তাকে **ঘনক (Cube)** বলা হয়।

ঘনকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2 \times \{a\times a + a\times a + a\times a\}$ বর্গ একক। [যেখানে ঘনকের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য $= a$ একক]
$= 2\times 3a^2$ বর্গ একক
$= 6a^2$ বর্গ একক

প্রয়োগ : 3. মেপে দেখছি, রাজিয়ার আনা ঘনকের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 27 সেমি.।
$\therefore$ ওই ঘনকটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 6.(27)^2$ বর্গ সেমি. $= \boxed{}$ বর্গ সেমি. **[নিজে লিখি]**

প্রয়োগ : 4. যে ঘনকের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 12 সেমি. সেই ঘনকটির চারপাশ রঙিন কাগজ দিয়ে মুড়তে কত বর্গ সেমি. রঙিন কাগজ লাগবে হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

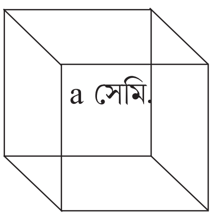
প্রয়োগ : 5. আমরা যে ঘরে বসে কাজ করছি সেই ঘরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 7 মি., 5 মি. ও 4 মি.। ঘরটি $\boxed{}$ [ঘনক আকার / আয়তঘনাকার]

ঘরটির চার দেয়াল রং করতে মোট কতটা ক্ষেত্রফল রং করতে হবে হিসাব করি।
ঘরের চার দেয়াল রং করব অর্থাৎ ঘরের মেঝে ও ছাদ রং করব না।

$\therefore$ রং করতে হবে $= 2 \times$ দৈর্ঘ্য $\times$ উচ্চতা $+ 2 \times$ প্রস্থ $\times$ উচ্চতা
$= 2 \times 7 \times 4$ বর্গ মিটার $+ 2\times 5 \times 4$ বর্গ মিটার
$= \boxed{}$ বর্গ মিটার।

ঘরের চার দেয়ালের ক্ষেত্রফল $= 2 \times$ (দৈর্ঘ্য $+$ প্রস্থ) $\times$ উচ্চতা $=$ ভূমির পরিসীমা $\times$ উচ্চতা।

প্রয়োগ : 6. যদি একটি ঘনকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 150 বর্গ মিটার হয়, তবে ওই ঘনকের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য কত হবে হিসাব করে লিখি।



ধরি, ঘনকের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য a সেমি.
$\therefore$ ঘনকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $6a^2$ বর্গ সেমি.
$\therefore$ শর্তানুসারে, $6a^2 = 150$
বা, $a^2 = \frac{150}{6} = \boxed{}$
$\therefore a = \pm 5$

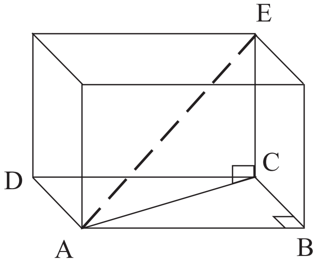
কিন্তু $a \neq -5$, যেহেতু দৈর্ঘ্য সর্বদা ধনাত্মক হয়। $\therefore a = 5$; সুতরাং ঘনকের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 5 সেমি.।

প্রয়োগ : 7. যদি একটি ঘনকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 486 বর্গ মিটার হয়, তবে ওই ঘনকের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য কত হবে হিসাব করি। **[নিজে করি]**

আমরা একটি 'First Aid' বাক্স তৈরি করেছি এবং পিচবোর্ডের আয়তঘনাকার ও ঘনকাকার বাক্সগুলি রঙিন কাগজের মোড়কে মুড়ে সাজিয়ে রেখেছি। আমরা ঠিক করেছি যে এই রঙিন বাক্সে আমাদের প্রয়োজনীয় জিনিসগুলি সাজিয়ে রাখব।

আমার ভাই তার কাঠের স্কেলগুলি একটি সবুজ রঙের আয়তঘনাকার বাক্সে রাখছে।

সবচেয়ে কত লম্বা স্কেল এই বাক্সে রাখতে পারব দেখি।



7 আয়তঘনের কর্ণের দৈর্ঘ্য কীভাবে পাব?

ছবি এঁকে আয়তঘনের কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয়ের চেষ্টা করি।

ধরি, পাশের চিত্রের আয়তঘনের দৈর্ঘ্য = AB একক
প্রস্থ = BC একক
উচ্চতা = CE একক

সমকোণী ত্রিভুজ ABC-এর, $AC^2 = (AB^2 + BC^2)$ বর্গ একক ———— (i)

আবার সমকোণী ত্রিভুজ ACE-এর, $AE^2 = (AC^2 + CE^2)$ বর্গ একক
$= (AB^2 + BC^2 + CE^2)$ বর্গ একক [(i) থেকে পেলাম]

[একটি সরলরেখা কোনো সমতলের উপর লম্ব হলে লম্ব সরলরেখাটি সমতলকে যে বিন্দুতে ছেদ করে সেই ছেদবিন্দুগামী এবং ওই সমতলে অবস্থিত যে-কোনো সরলরেখার উপর পূর্বোক্ত সরলরেখাটি লম্ব হবে। চিত্রে EC সরলরেখাংশটি ABCD সমতলের উপর লম্ব। সুতরাং EC সরলরেখাংশটি CB, CD ও CA সরলরেখাংশ তিনটির উপর C বিন্দুতে লম্ব। তাই, $\angle ACE = 90^\circ$]

$\therefore$ $AE = \sqrt{AB^2+BC^2+CE^2}$ একক

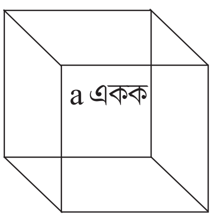
$\therefore$ আয়তঘনের কর্ণের দৈর্ঘ্য = $\sqrt{\text{দৈর্ঘ্য}^2 + \text{প্রস্থ}^2 + \text{উচ্চতা}^2}$

প্রয়োগ : 8. আয়তঘনাকার বাক্সের দৈর্ঘ্য 20 সেমি., প্রস্থ 15 সেমি. এবং উচ্চতা 10 সেমি. হলে তার কর্ণের দৈর্ঘ্য কত হবে ?

কর্ণের দৈর্ঘ্য হবে $= \sqrt{20^2+15^2+10^2}$ সেমি. $= 5\sqrt{29}$ সেমি.।

অর্থাৎ সেক্ষেত্রে সবচেয়ে $5\sqrt{29}$ সেমি. দৈর্ঘ্যের লম্বা স্কেল ওই আয়তঘনাকার বাক্সে রাখতে পারব।

8 কিন্তু ঘনকের কর্ণের দৈর্ঘ্য কী হবে হিসাব করে দেখি।



ধরি, ঘনকের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য a একক।

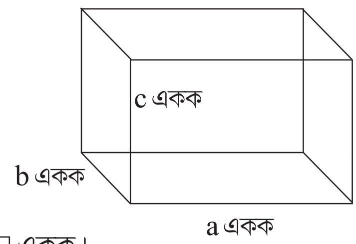
$\therefore$ ঘনকের কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{a^2+a^2+a^2}$ একক $= \sqrt{3}$ a একক

$\therefore$ ঘনকের কর্ণের দৈর্ঘ্য = $\sqrt{3}$ × বাহুর দৈর্ঘ্য।

$\therefore$ 5 সেমি. দৈর্ঘ্যের বাহুবিশিষ্ট ঘনকের কর্ণের দৈর্ঘ্য = $\sqrt{3} \times 5$ সেমি. $= 5\sqrt{3}$ সেমি.।

প্রয়োগ : 9. একটি আয়তঘনাকৃতি ঘরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং উচ্চতা যথাক্রমে a, b এবং c একক এবং $a+b+c = 25$, $ab+bc+ca = 240.5$ হলে, ঘরের মধ্যে যে বৃহত্তম দৈর্ঘ্যের দণ্ডটি রাখা যাবে তার দৈর্ঘ্য কত হবে হিসাব করে লিখি।

ঘরের দৈর্ঘ্য = a একক, প্রস্থ = b একক, উচ্চতা = c একক হলে, ঘরের মধ্যে যে বৃহত্তম দৈর্ঘ্যের দণ্ডটি রাখা যাবে তার দৈর্ঘ্য = ঘরটির কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ একক



$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2 + 2 \times \boxed{}$ [নিজে লিখি]

বা, $25^2 = a^2+b^2+c^2 + 2 \times 240.5$

$\therefore a^2+b^2+c^2 = 625 - 481 = \boxed{}$

$\therefore$ ঘরটির কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ একক $= \sqrt{144}$ একক $= \boxed{}$ একক।

প্রয়োগ : 10. আমি মিতার তৈরি দুটি ঘনক, যাদের প্রত্যেকটির ধার 8 সেমি. দৈর্ঘ্যের, পাশাপাশি যুক্ত করে একটি আয়তঘন তৈরি করলাম। এইভাবে তৈরি আয়তঘনের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও কর্ণের দৈর্ঘ্য হিসাব করি। [নিজে করি]

উত্তর সংকেত : দুটি ঘনক পাশাপাশি যুক্ত করে তৈরি করা আয়তঘনের দৈর্ঘ্য = (8+8) সেমি. = 16 সেমি., প্রস্থ = 8 সেমি., উচ্চতা = 8 সেমি.

আমার বন্ধু তথাগত একটি একমুখ খোলা আয়তঘনাকার টিনের বাক্সের চারধার রং করেছে। সে ঠিক করেছে এই টিনের বাক্সে বালি ভর্তি করে ছাদের এককোণে রেখে দেবে। বাড়ির নানান কাজে বালির প্রয়োজন হয়।

9 কিন্তু এই আয়তঘনাকার বাক্সে কতটা পরিমাণ বালি ধরবে কীভাবে পাব?

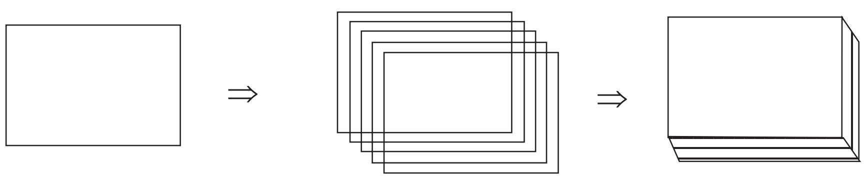
এই আয়তঘনাকার টিনের বাক্সের আয়তন-এর সমান পরিমাণ বালি এই আয়তঘনাকার বাক্সে ধরবে।

10 এই আয়তন (Volume) কী? আয়তঘনের আয়তন কীভাবে পরিমাপ করব?

কোনো ঘনবস্তু যে পরিমাণ জায়গা জুড়ে থাকে তাকে ওই ঘনবস্তুর **আয়তন** বলা হয়।

আয়তঘনের আয়তন = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × উচ্চতা

আমি অনেকগুলি একইমাপের আয়তক্ষেত্রাকার পিচবোর্ডের তল জড়ো করে একটির উপর অপরটি চাপিয়ে আয়তঘনক তৈরির চেষ্টা করলাম এবং দেখলাম, আয়তঘনের যতই উচ্চতা বাড়ছে ততই আয়তঘনের আয়তন $\boxed{}$ [বাড়ছে / কমছে]।



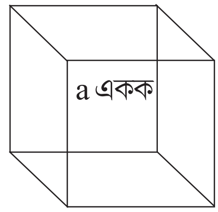
একটি আয়তক্ষেত্রাকার পিচবোর্ডের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ।

$\therefore$ লিখতে পারি আয়তঘনের আয়তন = ভূমির ক্ষেত্রফল (area of the base) × উচ্চতা (height)

প্রয়োগ : 11. মেপে দেখছি ওই আয়তঘনাকার কৌটোর দৈর্ঘ্য 32 সেমি., প্রস্থ 21 সেমি. এবং উচ্চতা 15 সেমি.।

$\therefore$ ওই টিনে বালি ধরবে $= (32\times21\times15)$ ঘন সেমি.$= \boxed{}$ ঘন সেমি.

(11) কিন্তু যদি ওই টিনের কৌটোর প্রতিটি ধার সমান দৈর্ঘ্যের হতো তখন আয়তন কীভাবে পরিমাপ করতাম অর্থাৎ ঘনকের আয়তন কীভাবে পাব হিসাব করে দেখি।



ধরি, ঘনকের একটি ধারের দৈর্ঘ্য a একক।

$\therefore$ ঘনকের আয়তন $= (a\times a\times a)$ ঘন একক $= a^3$ ঘন একক।

$\therefore$ ঘনকের আয়তন $=$ (একটি বাহুর দৈর্ঘ্য)^3

প্রয়োগ : 12. যে ঘনকের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 5 সেমি., তার আয়তন $\boxed{}^3$ ঘন সেমি.$= \boxed{}$ ঘন সেমি. [নিজে করি]

প্রয়োগ : 13. একটি ঘনকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল এবং আয়তনের সাংখ্যমান (numerical value) সমান হলে কর্ণের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

ধরি, ঘনকের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য $=$ a একক।

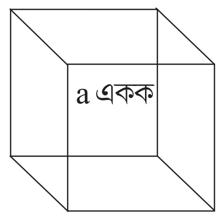
$\therefore$ ঘনকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 6a^2$ বর্গ একক এবং ঘনকের আয়তন $= a^3$ ঘন একক।

শর্তানুসারে, $a^3 = 6a^2$

বা, $a^3 - 6a^2 = 0$

বা, $a^2 (a - 6) = 0$

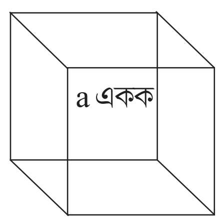
বা, $a - 6 = 0$ $[\because a \neq 0]$ $\therefore a = 6$



$\therefore$ ঘনকের কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{3} \times$ একটি ধারের দৈর্ঘ্য $= 6\sqrt{3}$ একক.

প্রয়োগ : 14. একটি আয়তঘনের মাত্রাগুলি যথাক্রমে 12 সেমি., 6 সেমি. ও 3 সেমি.। ওই আয়তঘনের সমান আয়তনের একটি ঘনকের প্রতিটি ধারের দৈর্ঘ্য কত হবে হিসাব করে লিখি।

আয়তঘনের আয়তন $= (12\times6\times3)$ ঘন সেমি. $= (6\times2\times6\times3)$ ঘন সেমি. $= 6^3$ ঘন সেমি.



ধরি, ঘনকের একটি ধারের দৈর্ঘ্য a সেমি.।

$\therefore$ ঘনকের আয়তন $= a^3$ ঘন সেমি.।

শর্তানুসারে, $a^3 = 6^3$ $\therefore a = 6$

$\therefore$ ঘনকের প্রতিটি ধারের দৈর্ঘ্য 6 সেমি.।

প্রয়োগ : 15. যদি একটি সমকোণী চৌপল আকারের ঘরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও আয়তন যথাক্রমে 8 মি., 6 মি. এবং 192 ঘন মিটার হয়, তবে ঘরের উচ্চতা এবং চার দেয়ালের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

ধরি, ঘরের উচ্চতা $=$ h মিটার

$\therefore$ ঘরের আয়তন $= (8\times6\times h)$ ঘন মি.

শর্তানুসারে, $8\times6\times h = 192$

$\therefore h = \boxed{}$ [নিজে হিসাব করে লিখি]

$\therefore$ ঘরের উচ্চতা 4 মিটার।

$\therefore$ ঘরের চার দেয়ালের ক্ষেত্রফল $= 2 \times$ (দৈর্ঘ্য $+$ প্রস্থ) $\times$ উচ্চতা$= \boxed{}$ [নিজে হিসাব করে লিখি]

প্রয়োগ : 16. যদি কোনো ঘনকের একটি তলের ক্ষেত্রফল, অপর একটি ঘনকের একটি তলের ক্ষেত্রফলের 4 গুণ হয়, তবে প্রথম ঘনকটির ঘনফল দ্বিতীয় ঘনকটির ঘনফলের কতগুণ হবে হিসাব করে লিখি।

মনে করি, প্রথম ঘনকের একটি ধারের দৈর্ঘ্য = x একক এবং দ্বিতীয় ঘনকের একটি ধারের দৈর্ঘ্য = y একক।

$\therefore$ প্রথম ঘনকের 1 টি তলের ক্ষেত্রফল x^2 বর্গ একক এবং দ্বিতীয় ঘনকের 1 টি তলের ক্ষেত্রফল y^2 বর্গ একক।

শর্তানুসারে, $x^2 = 4y^2 \quad \therefore x = 2y \;\; [\because x \neq -2y]$

সুতরাং, $\dfrac{\text{প্রথম ঘনকের ঘনফল}}{\text{দ্বিতীয় ঘনকের ঘনফল}} = \dfrac{x^3}{y^3} = \dfrac{(2y)^3}{y^3} = \dfrac{8y^3}{y^3} = 8 \;\; [\because y \neq 0]$

$\therefore$ প্রথম ঘনকের ঘনফল = 8 × দ্বিতীয় ঘনকের ঘনফল।

সুতরাং, প্রথম ঘনকের ঘনফল দ্বিতীয় ঘনকের ঘনফলের 8 গুণ।

প্রয়োগ : 17. পাশের গ্রামের একটি আয়তাকার জলাধারের জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 18 মিটার ও 11 মিটার। সেই জলাধারে পাশের পুকুর থেকে একটি পাম্প দিয়ে জলসেচ করা হচ্ছে। পাম্পটি যদি ঘণ্টায় 39600 লিটার জলসেচ করতে পারে, তবে পাম্পটি কতক্ষণ চললে জলাধারটিতে 3.5 ডেসিমিটার উচ্চতার জল জমা হবে তা হিসাব করে লিখি। [1 লিটার = 1 ঘন ডেসিমিটার]

আয়তাকার জলাধারে 3.5 ডেসিমিটার গভীর জল জমা হলে সেই জলের আয়তন হবে (180×110×3.5) ঘন ডেসিমিটার [$\because$ 18 মিটার = 180 ডেসিমি., 11 মিটার = 110 ডেসিমি.]

= (180×110×3.5) লিটার [যেহেতু 1 লিটার = 1 ঘন ডেসিমি.]

পাম্পটি ঘণ্টায় 39600 লিটার জল ভর্তি করে।

$\therefore$ পাম্পটি চালাতে হবে $\dfrac{180\times110\times3.5}{39600}$ ঘণ্টা = $\boxed{\quad}$ ঘণ্টা $\boxed{\quad}$ মিনিট।

প্রয়োগ : 18. যদি পাম্পটি ঘণ্টায় 37400 লিটার জলভর্তি করতে পারত, তাহলে 18 মিটার দীর্ঘ ও 11 মিটার প্রস্থবিশিষ্ট আয়তাকার জলাধারে 17 ডেসিমিটার উচ্চতার জল ভরার জন্য পাম্পটিকে কতক্ষণ চালাতে হতো হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 19. 4 মিটার লম্বা, 5 ডেসিমি. চওড়া এবং 3 ডেসিমি. পুরু একটি কাঠের লগ থেকে 2 মিটার লম্বা, 2 ডেসিমি. চওড়া, 40টি তক্তা চেরাই করা হলো। চেরাই-এর ফলে 2% কাঠ নষ্ট হয়েছে। কিন্তু এখনও লগটিতে 108 ঘন ডেসিমি. কাঠ রয়ে গেছে। প্রতিটি তক্তা কতটা পুরু করে চেরাই করা হয়েছিল তা হিসাব করে লিখি।

লগটিতে কাঠ ছিল = ($\boxed{\quad}$ × $\boxed{\quad}$ × $\boxed{\quad}$) ঘন ডেসিমি. = 600 ঘন ডেসিমি.

কাঠ নষ্ট হয়েছে = $600 \times \dfrac{2}{100}$ ঘন ডেসিমি. = 12 ঘন ডেসিমি.

ধরি প্রতিটি তক্তা x ডেসিমি. পুরু।

$\therefore$ 1 টি তক্তায় কাঠ আছে (20×2×x) ঘন ডেসিমি.

$\therefore$ 40 টি তক্তায় কাঠ আছে 40×(20×2×x) ঘন ডেসিমি. = 1600x ঘন ডেসিমি.।

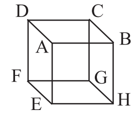
চেরাই করার পরে লগটিতে কাঠ পড়ে রয়েছে 108 ঘন ডেসিমি.।

শর্তানুসারে, $1600x + 108 + 12 = 600$

$\therefore x = \boxed{\quad}$ **[নিজে হিসাব করে লিখি]**

$\therefore$ প্রতিটি তক্তা 0.3 ডেসিমি. বা 3 সেমি. পুরু করে চেরাই করা হয়েছিল।

কষে দেখি 4



1. আমরা পরিবেশের 4 টি আয়তঘনাকার ও 4 টি ঘনক আকার বস্তুর নাম লিখি।
2. পাশের আয়তঘনাকার চিত্রের তলগুলি, ধারগুলি ও শীর্ষবিন্দুগুলির নাম লিখি।
3. একটি সমকোণী চৌপলাকার ঘরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 5 মি., 4 মি. ও 3 মি. হলে, ওই ঘরে সবচেয়ে লম্বা যে দণ্ড রাখা যাবে তার দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।
4. একটি ঘনকের একটি তলের ক্ষেত্রফল 64 বর্গ মিটার হলে, ঘনকটির আয়তন হিসাব করে লিখি।
5. আমাদের বকুলতলা গ্রামে 2 মিটার চওড়া এবং 8 ডেসিমি. গভীর একটি খাল কাটা হয়েছে। যদি মোট 240 ঘন মিটার মাটি কাটা হয়ে থাকে তবে খালটি কত লম্বা হিসাব করে লিখি।
6. একটি ঘনকের কর্ণের দৈর্ঘ্য $4\sqrt{3}$ সেমি. হলে, ঘনকটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।
7. একটি ঘনকের ধারগুলির দৈর্ঘ্যের সমষ্টি 60 সেমি. হলে, ঘনকটির ঘনফল হিসাব করে লিখি।
8. যদি একটি ঘনকের ছয়টি পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি 216 বর্গ সেমি. হয়, তবে ঘনকটির আয়তন কত হবে হিসাব করে লিখি।
9. একটি সমকোণী চৌপলের আয়তন 432 ঘন সেমি.। তাকে সমান আয়তনবিশিষ্ট দুটি ঘনক-এ পরিণত করা হলে, প্রতিটি ঘনকের প্রত্যেক ধারের দৈর্ঘ্য কত হবে হিসাব করে লিখি।
10. একটি ঘনকের প্রতিটি বাহুকে 50% কমানো হলো। মূল ঘনক ও পরিবর্তিত ঘনকের ঘনফলের অনুপাত কী হবে হিসাব করে লিখি।
11. একটি সমকোণী চৌপল আকারের বাক্সের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার অনুপাত 3 : 2 : 1 এবং উহার আয়তন 384 ঘন সেমি. হলে, বাক্সটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল কত হবে হিসাব করে লিখি।
12. একটি চা-এর বাক্সের ভিতরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 7.5 ডেসিমি, 6 ডেসিমি. এবং 5.4 ডেসিমি.। চা ভর্তি বাক্সটির ওজন 52 কিগ্রা. 350 গ্রাম। কিন্তু খালি অবস্থায় বাক্সটির ওজন 3.75 কিগ্রা. হলে, 1 ঘন ডেসিমি. চা-এর ওজন কত হবে তা হিসাব করে লিখি।
13. একটি বর্গাকার ভূমিবিশিষ্ট পিতলের প্লেটের দৈর্ঘ্য x সেমি., বেধ 1 মিলিমি. এবং প্লেটটির ওজন 4725 গ্রাম। যদি 1 ঘন সেমি. পিতলের ওজন 8.4 গ্রাম হয়, তাহলে x-এর মান কত হবে তা হিসাব করে লিখি।
14. চাঁদমারির রাস্তাটি উঁচু করতে হবে। তাই রাস্তার দু-পাশে 30 টি সমান গভীর ও সমান মাপের আয়তঘনাকার গর্ত খুঁড়ে সেই মাটি দিয়ে রাস্তাটি উঁচু করা হয়েছে। যদি প্রতিটি গর্তের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 14 মি. এবং 8 মি. হয় এবং রাস্তাটি তৈরি করতে মোট 2520 ঘন মিটার মাটি লেগে থাকে, তবে প্রতিটি গর্তের গভীরতা হিসাব করে লিখি।
15. ঘনকাকৃতি একটি সম্পূর্ণ জলপূর্ণ চৌবাচ্চা থেকে সমান মাপের 64 বালতি জল তুলে নিলে চৌবাচ্চাটির $\frac{1}{3}$ অংশ জলপূর্ণ থাকে। চৌবাচ্চার একটি ধারের দৈর্ঘ্য 1.2 মিটার হলে, প্রতিটি বালতিতে কত লিটার জল ধরে তা হিসাব করে লিখি।
16. এক গ্রোস দেশলাই বাক্সের একটি প্যাকেটের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 2.8 ডেসিমি., 1.5 ডেসিমি. ও 0.9 ডেসিমি. হলে, একটি দেশলাই বাক্সের আয়তন কত হবে হিসাব করি। [এক গ্রোস = 12 ডজন]
কিন্তু যদি একটি দেশলাই বাক্সের দৈর্ঘ্য 5 সেমি. এবং প্রস্থ 3.5 সেমি. হয়, তবে তার উচ্চতা কত হবে হিসাব করে লিখি।

17. 2.1 মিটার দীর্ঘ, 1.5 মিটার প্রশস্ত একটি আয়তঘনাকার চৌবাচ্চার অর্ধেক জলপূর্ণ আছে। ওই চৌবাচ্চায় আরও 630 লিটার জল ঢাললে জলের গভীরতা কতটা বৃদ্ধি পাবে হিসাব করে লিখি।

18. গ্রামের আয়তক্ষেত্রাকার মাঠের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 20 মিটার এবং 15 মিটার। ওই মাঠের ভিতরে চারটি কোণে পিলার বসানোর জন্য 4 মিটার দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট চারটি ঘনকাকৃতি গর্ত কেটে অপসারিত মাটি অবশিষ্ট জমির উপর ছড়িয়ে দেওয়া হলো। মাঠের তলের উচ্চতা কতটা বৃদ্ধি পেল হিসাব করে লিখি।

19. 48 মিটার লম্বা এবং 31.5 মিটার চওড়া একখণ্ড নীচু জমিকে 6.5 ডেসিমি. উঁচু করার জন্য ঠিক করা হয়েছে পাশের 27 মিটার লম্বা এবং 18.2 মিটার চওড়া একটি জমি গর্ত করে মাটি তোলা হবে। গর্তটি কত মিটার গভীর করতে হবে হিসাব করে লিখি।

20. বাড়ির তিনটি কেরোসিন তেলের ড্রামে যথাক্রমে 800 লিটার, 725 লিটার এবং 575 লিটার তেল ছিল। ওই তিনটি ড্রামের তেল একটি আয়তঘনাকার পাত্রে ঢালা হলো এবং এতে পাত্রে তেলের গভীরতা 7 ডেসিমি. হলো। ওই আয়তঘনাকার পাত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত 4 : 3 হলে, পাত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ হিসাব করে লিখি।

    যদি ওই আয়তঘনাকার পাত্রের গভীরতা 5 ডেসিমিটার হতো, তবে 1620 লিটার তেল ওই পাত্রে রাখা যেত কিনা হিসাব করে দেখি।

21. আমাদের তিনতলা ফ্ল্যাটের তিনটি পরিবারের দৈনিক জলের চাহিদা যথাক্রমে 1200 লিটার, 1050 লিটার এবং 950 লিটার। এই চাহিদা মেটানোর পরও চাহিদার 25% জল মজুত থাকে এমন একটি ট্যাঙ্ক বসানোর জন্য মাত্র 2.5 মি. দীর্ঘ এবং 1.6 মিটার চওড়া একটি জায়গা পাওয়া গেছে। ট্যাঙ্কটি কত মিটার গভীর করতে হবে হিসাব করে লিখি।

    জায়গাটি যদি প্রস্থের দিকে আরও 4 ডেসিমি. বেশি হতো, তবে ট্যাঙ্কটি কতটা গভীর করতে হতো তা হিসাব করে লিখি।

22. 5 সেমি. পুরু কাঠের তক্তায় তৈরি ঢাকনাসহ একটি কাঠের বাক্সের ওজন 115.5 কিগ্রা.। কিন্তু চাল ভর্তি বাক্সটির ওজন 880.5 কিগ্রা.। বাক্সটির ভিতরের দিকের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 12 ডেসিমি. এবং 8.5 ডেসিমি. এবং এক ঘন ডেসিমি. চালের ওজন 1.5 কিগ্রা.। বাক্সটির ভিতরের উচ্চতা কত হিসাব করে লিখি। প্রতি বর্গ ডেসিমি. 1.50 টাকা হিসাবে বাক্সটির বাইরের চারিপাশ রং করতে কত খরচ পড়বে হিসাব করে লিখি।

23. 20 মি. দীর্ঘ এবং 18.5 মি. চওড়া একটি আয়তঘনাকার পুকুরে 3.2 মি. গভীর জল আছে। ঘণ্টায় 160 কিলোলিটার জলসেচ করতে পারে এমন একটি পাম্প দিয়ে কতক্ষণে পুকুরটির সমস্ত জলসেচ করা যাবে হিসাব করে লিখি। ওই জল যদি 59.2 মিটার দীর্ঘ এবং 40 মিটার চওড়া একটি আল দেওয়া ধান ক্ষেতে ফেলা হয়, তবে সেই জমিতে জলের গভীরতা কত হবে হিসাব করে লিখি। [1 ঘন মিটার = 1 কিলোলিটার]

24. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন :**

    (A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.):

    (i) একটি সমকোণী চৌপলাকৃতি বাক্সের ভিতরের আয়তন 440 ঘন সেমি. এবং ভিতরের ভূমিতলের ক্ষেত্রফল 88 বর্গ সেমি.। বাক্সটির ভিতরের উচ্চতা

    (a) 4 সেমি. (b) 5 সেমি. (c) 3 সেমি. (d) 6 সেমি.

(ii) একটি আয়তঘনাকার গর্তের দৈর্ঘ্য 40 মি., প্রস্থ 12 মি. এবং গভীরতা 16 মি.। ওই গর্তের মধ্যে 5 মি. দৈর্ঘ্য, 4 মি. প্রস্থ এবং 2 মি. পুরু তক্তা রাখা যাবে

(a) 190 টি (b) 192 টি (c) 184 টি (d) 180 টি

(iii) একটি ঘনকের পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল 256 বর্গ মিটার। ঘনকটির আয়তন

(a) 64 ঘন মি. (b) 216 ঘন মি. (c) 256 ঘন মি. (d) 512 ঘন মি.

[উত্তর সংকেত : পার্শ্বতলের সংখ্যা 4]

(iv) দুটি ঘনকের আয়তনের অনুপাত 1 : 27 হলে, ঘনক দুটির সমগ্র তলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত

(a) 1 : 3 (b) 1 : 8 (c) 1 : 9 (d) 1 : 18

(v) একটি ঘনকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল s বর্গ একক এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য d একক হলে s এবং d-এর সম্পর্ক

(a) $s = 6d^2$ (b) $3s = 7d$ (c) $s^3 = d^2$ (d) $d^2 = \frac{S}{2}$

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) একটি ঘনকের প্রতিটি ধারের দৈর্ঘ্য দ্বিগুণ হলে, ঘনকটির আয়তন প্রথম ঘনকের 4 গুণ হবে।

(ii) বর্ষার সময় 2 হেক্টর জমিতে বৃষ্টিপাত 5 সেমি. উচ্চতার হলে, বৃষ্টির জলের আয়তন 1000 ঘন মিটার।

[উত্তর সংকেত : 1 আর = 100 বর্গ মি., 1 হেক্টর = 100 আর]

(c) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) একটি সমকোণী চৌপলের কর্ণের সংখ্যা ________ টি।

(ii) একটি ঘনকের একটি তলের কর্ণের দৈর্ঘ্য = ________ × একটি ধারের দৈর্ঘ্য।

(iii) সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা সমান হলে সেই ঘনবস্তুর বিশেষ নাম ________।

25. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.) :**

(i) একটি আয়তঘনের তল সংখ্যা = x, ধার সংখ্যা = y, শীর্ষবিন্দুর সংখ্যা = z এবং কর্ণের সংখ্যা = p হলে, $x - y + z + p$-এর মান কত তা লিখি।

(ii) দুটি আয়তঘনের মাত্রাগুলির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 4, 6, 4 একক এবং 8, $(2h - 1)$, 2 একক। যদি আয়তঘন দুটির ঘনফল সমান হয়, তাহলে h-এর মান কত তা লিখি।

(iii) একটি ঘনকের প্রত্যেকটি ধারের দৈর্ঘ্য 50% বৃদ্ধি পেলে, ঘনকটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি হবে তা হিসাব করে লিখি।

(iv) তিনটি নিরেট ঘনক যাদের প্রত্যেকটি ধারের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3 সেমি., 4 সেমি. এবং 5 সেমি.। ঘনক তিনটিকে গলিয়ে একটি নতুন নিরেট ঘনক তৈরি করা হলো। নতুন ঘনকটির একটি ধারের দৈর্ঘ্য কত হবে তা লিখি।

(v) একটি ঘরের দুটি সংলগ্ন দেয়ালের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 12 মি. এবং 8 মি.। ঘরটির উচ্চতা 4 মি. হলে, ঘরটির মেঝের ক্ষেত্রফল কত তা হিসাব করে লিখি।

5 অনুপাত ও সমানুপাত
RATIO AND PROPORTION

আজ সকাল থেকে তেঁতুলতলা গ্রামের বড়ো মাঠে মহিলাদের ফুটবল ম্যাচ হচ্ছে। প্রথমে ভারতী সংঘের মেয়েদের সঙ্গে নেতাজি সংঘের মেয়েদের ফুটবল ম্যাচ হচ্ছে। গ্রামের বিভিন্ন স্কুলের প্রচুর শিক্ষার্থী এই ম্যাচ দেখতে মাঠে এসেছে।

দেখছি, এই ফুটবল ম্যাচের দর্শকদের মধ্যে 60% ছাত্র এবং 40% ছাত্রী আছে।

আমি ও সুজয় মাঠে উপস্থিত ছাত্র ও ছাত্রীদের সংখ্যার অনুপাত (ratio) গঠন করে সমজাতীয় রাশির তুলনা করি।

ছাত্রদের সংখ্যা : ছাত্রীদের সংখ্যা $= 60\% : 40\% = 3 \times 20 : 2 \times 20 = 3 : 2$

অর্থাৎ, একটি রাশি (quantity) অপর একটি সমজাতীয় রাশির কতগুণ বা কতভাগ তাই হলো অনুপাত।

অনুপাতের পদ দুটিকে শূন্যবাদে একই সংখ্যা দিয়ে গুণ বা ভাগ করলে অনুপাতের কোনো পরিবর্তন হয় না।

বুঝেছি, মাঠে উপস্থিত ছাত্রদের সংখ্যা : ছাত্রীদের সংখ্যা = a : b হলে,

$a:b = \frac{a}{b} = \frac{ak}{bk} = ak:bk\ [k\neq0]$, এবং $a:b = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{k}}{\frac{b}{k}} = \frac{a}{k} : \frac{b}{k}\ [k\neq0]$

a ও b (b≠0) বাস্তব সংখ্যা দুটির অনুপাতের মান a : b বা $\frac{a}{b}$; এই a : b-কে পড়া হয় "a অনুপাত b" (a is to b); a-কে a : b-এর পূর্বপদ (Antecedent) ও b-কে উত্তর পদ (Consequent) বলা হয়।

1 3:2 অনুপাতের 3 ও 2 -কে কী বলা হয়?

3:2-অনুপাতের 3 $\boxed{\text{পূর্বপদ}}$ এবং 2 $\boxed{}$ পদ।

2 কিন্তু যে-কোনো অনুপাতের পূর্বপদ ও উত্তরপদ সমান হলে কী বলা হয়?

a:b অনুপাতের a=b হলে অর্থাৎ পূর্বপদ ও উত্তরপদ সমান হলে সেই অনুপাতকে **সাম্যানুপাত** (ratio of equality) বলা হয় এবং a≠b হলে অর্থাৎ পূর্বপদ ও উত্তরপদ অসমান হলে তাকে **বৈষম্যানুপাত** (ratio of inequality) বলা হয়।

বুঝেছি, 3:2 একটি বৈষম্যানুপাত, কিন্তু 2:2 একটি সাম্যানুপাত।

3 কিন্তু কোনো অনুপাতের মান $\frac{a}{b} > 1$ এবং $\frac{a}{b} < 1$ হলে, সেই অনুপাত দুটিকে কী বলা হয়?

কোনো অনুপাতের মান $\frac{a}{b} > 1$ হলে, ওই অনুপাতটিকে **গুরু অনুপাত** (ratio of greater inequality) এবং $\frac{a}{b} < 1$ হলে, ওই অনুপাতটিকে **লঘু অনুপাত** (ratio of less inequality) বলা হয়।

বুঝেছি, 3 : 2 অনুপাতটি গুরু অনুপাত যেহেতু $\frac{3}{2} > 1$

কিন্তু 2 : 3 অনুপাতটির $\frac{2}{3} < 1$;

∴ 2 : 3 একটি $\boxed{}$ অনুপাত।

(4) কোনো অনুপাতের পূর্বপদ ও উত্তরপদ পরস্পর স্থান পরিবর্তন করলে যে নতুন অনুপাত তৈরি হবে সেই অনুপাতকে পূর্বের অনুপাতের কী বলা হয়?

কোনো অনুপাতের পূর্বপদ ও উত্তরপদ পরস্পর স্থান পরিবর্তন করে যে নতুন অনুপাত তৈরি হয় সেই অনুপাতকে পূর্বের অনুপাতের **ব্যস্ত অনুপাত** বা **বিপরীত অনুপাত** (inverse ratio) বলে।

$a:b$ অনুপাতের ব্যস্ত অনুপাত $b:a$

বুঝেছি, $2:3$ অনুপাতের ব্যস্ত অনুপাত $3:2$

আমার বন্ধু সুজয় এক মজার কাজ করল। সে ওই মাঠে বিভিন্ন সময়ের ফুটবল খেলায় উপস্থিত ছাত্রী ও ছাত্র দর্শকদের সংখ্যার 3 টি অনুপাত তার খাতায় লিখল।

সে লিখল, $5:2$, $4:3$, $1:2$

(5) কিন্তু সুজয়ের লেখা অনুপাতগুলির পূর্বপদগুলির গুণফল পূর্বপদ এবং উত্তরপদগুলির গুণফল উত্তরপদ ধরে যে অনুপাত পাবো সেই অনুপাতকে কী বলা হয়?

দুই বা ততোধিক প্রদত্ত অনুপাতের পূর্বপদগুলির গুণফলকে পূর্বপদ এবং উত্তরপদগুলির গুণফলকে উত্তরপদ ধরে যে অনুপাত পাওয়া যাবে সেই অনুপাতকে প্রদত্ত অনুপাতগুলির **যৌগিক অনুপাত** (Compound ratio) বা **মিশ্র অনুপাত বলা** (Mixed ratio) হয়।

যেমন : $a:b$ এবং $c:d$-এর যৌগিক অনুপাত $ac:bd$

বুঝেছি, $5:2, 4:3$ এবং $1:2$-এর যৌগিক অনুপাত $(5\times4\times1):(2\times3\times2) = 20:12 = 5:3$

প্রয়োগ : 1. আমি নীচের অনুপাতগুলি দেখি এবং ফাঁকা ঘরে বুঝে লিখি।

অনুপাত	সাম্যানুপাত/ বৈষম্যানুপাত	গুরু অনুপাত/ লঘু অনুপাত	ব্যস্ত অনুপাত বা বিপরীত অনুপাত
$7:5$	বৈষম্যানুপাত	গুরু অনুপাত	$5:7$
$6:6$			
$1:4$			
$9:2$			
$7:5, 1:4$ ও $9:2$-এর যৌগিক অনুপাত $\boxed{}$			

প্রয়োগ : 2. $x:y$ অনুপাতটি কোন শর্তে লঘু অনুপাত ও কোন শর্তে গুরু অনুপাত হবে লিখি এবং $x:y$-এর সমতুল্য দুটি অনুপাত লিখি।

$x:y$ অনুপাতটি লঘু অনুপাত হবে যখন $\frac{x}{y}<1$ এবং গুরু অনুপাত হবে যখন $\frac{x}{y}>1$ হবে।

$x:y$-এর সমতুল্য দুটি অনুপাত $xk:yk$ এবং $\frac{x}{k}:\frac{y}{k}$ [যেখানে $k\neq0$]

প্রয়োগ : 3. আমি $pr : qr$-এর লঘিষ্ঠ আকারের ব্যস্ত অনুপাত লিখি।

$pr : qr = \frac{pr}{qr} = \frac{p}{q} = p : q$

$\therefore$ $pr : qr$ -এর লঘিষ্ঠ আকার $= p : q$

$\therefore$ $pr : qr$ -এর লঘিষ্ঠ আকারের ব্যস্ত অনুপাত $= q : p$

প্রয়োগ : 4. $x^2yp : xy^2p$ -এর লঘিষ্ঠ আকারের ব্যস্ত অনুপাত লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 5. যদি দুটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার অনুপাতের লঘিষ্ঠ আকার $p : q$ এবং তাদের গ.সা.গু. r হয়,তবে সংখ্যা দুটি কী কী হবে লিখি।

সংখ্যা দুটি pr এবং qr.

প্রয়োগ : 6. যদি দুটি সংখ্যার অনুপাত $2:3$ এবং তাদের গ.সা.গু. 7 হয়, তবে সংখ্যাদুটি লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 7. আমি নীচের অনুপাতগুলির যৌগিক অনুপাত লিখি—

(i) $a : b$, $p : q$ এবং $x : y$ (ii) $a : bc$, $b : ca$, $c : ab$

(i) $a : b$, $p : q$ এবং $x : y$ -এর যৌগিক বা মিশ্র অনুপাত

$= a \times p \times x : b \times q \times y$

$= apx : bqy$

(ii) $a : bc$, $b : ca$ ও $c : ab$ -এর যৌগিক বা মিশ্র অনুপাত

$= a \times b \times c : bc \times ca \times ab$

$= abc : a^2b^2c^2 \quad = 1 : abc$ [পূর্ব ও উত্তরপদকে abc দিয়ে ভাগ করে পাই]

প্রয়োগ : 8. $pq : r$ ও $r : pq$ -এর যৌগিক অনুপাত নির্ণয় করি ও ওই যৌগিক অনুপাতকে কী বলে লিখি।

$pq : r$ ও $r : pq$ -এর যৌগিক অনুপাত $= pq \times r : r \times pq$

$= pqr : pqr$

$= 1 : 1$ [পূর্ব ও উত্তরপদকে pqr দিয়ে ভাগ করে পেলাম]

$\therefore$ $pq : r$ ও $r : pq$ -এর যৌগিক অনুপাত সাম্যানুপাত।

প্রয়োগ : 9. $p^2q : r$, $q^2r : p$ ও $r^2p : q$ -অনুপাত তিনটির মিশ্র অনুপাতের ব্যস্ত অনুপাত নির্ণয় করি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 10. যদি $A : B = 4 : 5$ এবং $B : C = 6 : 7$ হয়, তবে $A : C$ নির্ণয় করি।

$A : B = 4 : 5$ এবং $B : C = 6 : 7$

$\frac{A}{B} = \frac{4}{5}$ এবং $\frac{B}{C} = \frac{6}{7}$

$\therefore \frac{A}{B} \times \frac{B}{C} = \frac{4}{5} \times \frac{6}{7}$

বা, $\frac{A}{C} = \frac{24}{35}$

$\therefore A : C = 24 : 35$

প্রয়োগ : 11. যদি $A : B = 3 : 7$ এবং $B : C = 8 : 5$ হয়, তবে $A : C$ নির্ণয় করি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 12. যদি A : B = 6 : 7 এবং B : C = 8 : 9 হয়, তবে A : B : C কত হবে হিসাব করে লিখি।

A : B = 6 : 7 এবং B : C = 8 : 9

$B:C = 8:9 = 1:\frac{9}{8} = 7:\frac{63}{8}$ $\therefore A:B:C = 6:7:\frac{63}{8} = 48:56:63$

অন্যভাবে, A : B : C নির্ণয় করার সময়ে প্রথমে উভয় ক্ষেত্রে B-এর মান সমান করে নিই।

B-এর দুটি মান 7 ও 8-এর ল.সা.গু. 56

$A:B = 6:7 = 6\times8:7\times8 = 48:56$

$B:C = 8:9 = 8\times7:9\times7 = 56:63$ $\therefore A:B:C = 48:56:63$

প্রয়োগ : 13. যদি A:B = 5:9 এবং B:C = 4:5 হয়, তবে A:B:C কত হবে হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 14. যদি x : y = 2 : 3 হয়, তবে (4x–y) : (2x+3y) কত হবে হিসাব করে লিখি।

$x:y = 2:3$

ধরি, $x = 2p$ এবং $y = 3p$ [যেখানে, p একটি বাস্তব সংখ্যা এবং $p \neq 0$]

$\therefore (4x-y):(2x+3y) = \frac{4x-y}{2x+3y} = \frac{4\times2p-3p}{2\times2p+3\times3p} = \frac{8p-3p}{4p+9p} = \frac{5p}{13p} = \frac{5}{13} = 5:13$

$\therefore (4x-y):(2x+3y) = 5:13$

বিকল্প পদ্ধতি, $(4x-y):(2x+3y) = \frac{4x-y}{2x+3y} = \frac{\frac{4x-y}{y}}{\frac{2x+3y}{y}}$ [লব ও হরকে y দ্বারা ভাগ করে পাই]

$= \frac{4\frac{x}{y}-1}{2\frac{x}{y}+3} = \frac{4\times\frac{2}{3}-1}{2\times\frac{2}{3}+3}$ $\left[\frac{x}{y} = \frac{2}{3}\right.$ বসিয়ে$\left.\right]$

$= \frac{\frac{8-3}{3}}{\frac{4+9}{3}} = \frac{5}{13} = 5:13$

প্রয়োগ : 15. x : y = 7 : 4 হলে, দেখাই যে (5x–6y) : (3x+11y) = 11 : 65 [নিজে করি]

প্রয়োগ : 16. (3x+5y) : (7x–4y) = 7 : 4 হলে, x : y -এর মান নির্ণয় করি।

$(3x+5y):(7x-4y) = 7:4$

বা, $\frac{3x+5y}{7x-4y} = \frac{7}{4}$

বা, $4(3x+5y) = 7(7x-4y)$

বা, $12x+20y = 49x-28y$

বা, $12x-49x = -28y-20y$

বা, $-37x = -48y$

বা, $\frac{x}{y} = \frac{48}{37}$ $\therefore x:y = 48:37$

প্রয়োগ : 17. যদি $(2x+5y):(5x-7y)=5:3$ হয়, তবে $x:y$ নির্ণয় করি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 18. $(3x-2y):(x+3y)=5:6$ হলে, $(2x-5y):(3x+4y)$ নির্ণয় করি।

$$\frac{3x-2y}{x+3y}=\frac{5}{6}$$

বা, $6(3x-2y)=5(x+3y)$

বা, $18x-12y=5x+15y$

বা, $13x=27y$

বা, $\frac{x}{y}=\frac{27}{13}$ $\quad\therefore\ x:y=27:13$

ধরি, $x=27k$ এবং $y=13k$ [k একটি অশূন্য বাস্তব সংখ্যা]

$$\therefore (2x-5y):(3x+4y)=\frac{2x-5y}{3x+4y}=\frac{2\times27k-5\times13k}{3\times27k+4\times13k}=\frac{54k-65k}{81k+52k}=\frac{-11k}{133k}=\frac{-11}{133}=-11:133$$

$\therefore (2x-5y):(3x+4y)=-11:133$

কিন্তু এখানে দেখছি অনুপাতের একটি পদ ঋণাত্মক। বাস্তবে এরকম উদাহরণ আছে কি?
শ্যামল 100 টাকায় একটি জিনিস কিনে 130 টাকায় বিক্রি করে। সুতরাং,শ্যামলের লাভ হয় 30 টাকা।
রফিকুল 100 টাকায় একটি জিনিস কিনে 80 টাকায় বিক্রি করে। সুতরাং,রফিকুলের ক্ষতি হয় 20 টাকা।
অর্থাৎ, রফিকুলের লাভ হয় – 20 টাকা। শ্যামল ও রফিকুলের লাভের অনুপাত 30 : –20 বা, 3 : –2

প্রয়োগ : 19. $(7x-5y):(3x+4y)=7:11$ হলে, $(5x-3y):(6x+5y)$ নির্ণয় করি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 20. $x:y$ **বৈষম্যানুপাতের** উভয়পদের সঙ্গে কত যোগ করলে $p:q$ **বৈষম্যানুপাতটি** হবে নির্ণয় করি।

ধরি, $x:y$ অনুপাতের উভয়পদের সঙ্গে k যোগ করলে অনুপাতটি $p:q$ হবে।

সুতরাং, $\frac{x+k}{y+k}=\frac{p}{q}$

বা, $q(x+k)=p(y+k)$

বা, $qx+qk=py+pk$

বা, $qk-pk=py-qx$

বা, $k(q-p)=py-qx$

$\therefore k=\frac{py-qx}{q-p}$ $\qquad$ ($\because$ $p:q$ **একটি বৈষম্যানুপাত,** $\therefore p\neq q$; $\therefore q-p\neq 0$)

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $\frac{py-qx}{q-p}$ উভয়পদের সঙ্গে যোগ করতে হবে।

প্রয়োগ : 21. 5:3 অনুপাতের উভয়পদের সঙ্গে কত যোগ করলে অনুপাতটি 7:6 হবে হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 22. $x:y$ **বৈষম্যানুপাতের** উভয়পদ থেকে কত বিয়োগ করলে $p:q$ **বৈষম্যানুপাতটি** হবে হিসাব করে লিখি।

মনে করি, $x:y$ অনুপাতের উভয়পদ থেকে r বিয়োগ করলে অনুপাতটি $p:q$ হবে।

সুতরাং, $\frac{x-r}{y-r}=\frac{p}{q}$

বা, $qx-qr=py-pr$

বা, $pr-qr=py-qx$

বা, $r(p-q)=py-qx$

$\therefore r=\frac{py-qx}{p-q}$ $\qquad$ $\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $\frac{py-qx}{p-q}$ উভয়পদের থেকে বিয়োগ করতে হবে।

কষে দেখি 5.1

1. নীচের রাশিগুলি অনুপাতে প্রকাশ করি ও অনুপাতগুলি সাম্যানুপাত, লঘু অনুপাত না গুরু অনুপাত বুঝে লিখি।

   (i) 4 মাস এবং 1 বছর 6 মাস (ii) 75 পয়সা এবং 1 টাকা 25 পয়সা

   (iii) 60 সেমি. এবং 0.6 মিটার (iv) 1.2 কিগ্রা. এবং 60 গ্রাম

2. (i) p কিগ্রা. ও q গ্রামের অনুপাতটি লিখি।

   (ii) x দিন ও z মাসের মধ্যে অনুপাত নির্ণয় কখন সম্ভব হবে লিখি।

   (iii) একটি অনুপাত ও তার ব্যস্ত অনুপাতের মিশ্র অনুপাত কী ধরনের অনুপাত হবে লিখি।

   (iv) $\frac{a}{b}:c, \frac{b}{c}:a, \frac{c}{a}:b$ -এর মিশ্র অনুপাত নির্ণয় করি।

   (v) $x^2:yz$ এবং কোন অনুপাতের মিশ্র অনুপাত $xy:z^2$ হবে হিসাব করে লিখি।

   (vi) $x^2:\frac{yz}{x}, y^2:\frac{zx}{y}, z^2:\frac{yx}{z}$ অনুপাতগুলির ব্যস্ত অনুপাতগুলির যৌগিক অনুপাত নির্ণয় করি।

3. নিম্নলিখিতগুলির মিশ্র অনুপাত বা যৌগিক অনুপাত নির্ণয় করি :

   (i) $4:5, 5:7$ এবং $9:11$ (ii) $(x+y):(x-y), (x^2+y^2):(x+y)^2$ এবং $(x^2-y^2)^2:(x^4-y^4)$

4. (i) $A:B=6:7$ এবং $B:C=8:7$ হলে, $A:C$ নির্ণয় করি।

   (ii) $A:B=2:3, B:C=4:5$ এবং $C:D=6:7$ হলে, $A:D$ নির্ণয় করি।

   (iii) যদি $A:B=3:4$ এবং $B:C=2:3$ হয়, তাহলে $A:B:C$ নির্ণয় করি।

   (iv) $x:y=2:3$ এবং $y:z=4:7$ হলে, $x:y:z$ নির্ণয় করি।

5. (i) $x:y=3:4$ হলে, $(3y-x):(2x+y)$ কত হবে নির্ণয় করি।

   (ii) $a:b=8:7$ হলে, দেখাই যে $(7a-3b):(11a-9b)=7:5$

   (iii) $p:q=5:7$ এবং $p-q=-4$ হলে, $3p+4q$ -এর মান নির্ণয় করি।

6. (i) $(5x-3y):(2x+4y)=11:12$ হলে, $x:y$ নির্ণয় করি।

   (ii) $(3a+7b):(5a-3b)=5:3$ হলে, $a:b$ নির্ণয় করি।

7. (i) $(7x-5y):(3x+4y)=7:11$ হলে, দেখাই যে $(3x-2y):(3x+4y)=137:473$

   (ii) $(10x+3y):(5x+2y)=9:5$ হলে, দেখাই যে $(2x+y):(x+2y)=11:13$

8. (i) $2:5$ অনুপাতের উভয়পদের সঙ্গে কত যোগ করলে অনুপাতটি $6:11$ হবে নির্ণয় করি।

   (ii) $a:b$ বৈষম্যানুপাতের উভয়পদ থেকে কত বিয়োগ করলে বৈষম্যানুপাতটি $m:n$ হবে নির্ণয় করি।

   (iii) কোন সংখ্যা $4:7$ অনুপাতের পূর্বপদের সঙ্গে যোগ এবং উত্তরপদ থেকে বিয়োগ করলে উৎপন্ন অনুপাতটির মান $2:3$ ও $5:4$ -এর যৌগিক অনুপাত হবে।

পরের মাসে তেঁতুলতলা গ্রামের ওই মাঠে কিশোরদের ফুটবল ম্যাচের আয়োজন করা হচ্ছে। ভারতী সংঘ থেকে ঠিক করা হয়েছে প্রত্যেক কিশোরকে ফুটবল খেলার জার্সি কিনে দেবে।

সৌমেনকাকু 560 টাকায় 7 টি জার্সি কিনে এনেছেন। আমরা শর্মিষ্ঠাদির সঙ্গে গিয়ে একই দামের 15 টি জার্সি 1200 টাকায় কিনে আনলাম।

6 আমি সৌমেনকাকুর কেনা ও আমাদের কেনা জার্সির সংখ্যার ও তাদের দামের আলাদা আলাদা অনুপাত তৈরি করি ও কী পাই দেখি।

সৌমেনকাকুর কেনা জার্সির সংখ্যা : আমাদের কেনা জার্সির সংখ্যা $= 7:15$

সৌমেনকাকুর কেনা জার্সির দাম : আমাদের কেনা জার্সির দাম $= 560:1200 = 7\times80:15\times80 = 7:15$

7 কিন্তু অনুপাত দুটি লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশের পর দেখছি, দুটি অনুপাতই সমান। এই ধরনের সমান অনুপাত তৈরি করার সংখ্যাগুলিকে কী বলা হয়?

যদি চারটি বাস্তব সংখ্যা এমন হয় যে, প্রথম দুটি সংখ্যার অনুপাত ও শেষ দুটি সংখ্যার অনুপাত পরস্পর সমান হয় তা হলে ওই সংখ্যা চারটিকে **সমানুপাতী** বলে অথবা সংখ্যা চারটি **সমানুপাতে** (proportion) আছে বলা হয়।

চারটি বাস্তব সংখ্যা a, b, c, d ($b\neq0$, $d\neq0$) সমানুপাতে থাকলে তাদেরকে $a:b::c:d$-এইভাবে লেখা হয়। a ও d-কে **প্রান্তীয় পদ** (extremes) ও b ও c-কে **মধ্যপদ** (means) বলা হয়।

'd'-কে **চতুর্থপদ** বা **চতুর্থ সমানুপাত** বলা হয়।

বুঝেছি, 7, 15, 560, 1200-এই চারটি সংখ্যা সমানুপাতে আছে। অর্থাৎ $7:15::560:1200$; এখানে 7 ও 1200 প্রান্তীয় পদ এবং 15 ও 560 মধ্যপদ। 1200 চতুর্থপদ বা চতুর্থ সমানুপাত।

8 চারটি সংখ্যা a, b, c ও d সমানুপাতে থাকলে, তাদের মধ্যে সম্পর্ক লেখার চেষ্টা করি।

a, b, c ও d সমানুপাতে আছে,

$\therefore a:b::c:d$

অর্থাৎ, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $\quad \therefore ad = bc$

দেখছি, সমানুপাতী চারটি সংখ্যার ক্ষেত্রে প্রান্তীয় পদ দুটির গুণফল অবশ্যই মধ্যপদ দুটির গুণফলের সমান হবে।

বুঝেছি, $7:15::560:1200$ -এর ক্ষেত্রে,

$7\times1200 = \boxed{} = 15\times560$ **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 23. 2, 3, 4 ও 6 সমানুপাতে আছে কিনা দেখি।

$2\times6 = \boxed{}$ এবং $3\times4 = \boxed{}$ $\quad \therefore 2:3::4:6$

প্রয়োগ : 24. 2.5, –2, –5 ও 4 সমানুপাতে আছে কিনা দেখি।

$2.5\times4 = \boxed{}$ এবং $(-2)\times(-5) = \boxed{}$ $\quad \therefore 2.5:(-2)::(-5):4$

প্রয়োগ : 25. 2, 7, 12 ও 42 সমানুপাতে আছে কিনা দেখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 26. $-\sqrt{2}$, 6, 1 ও $-\sqrt{18}$ সমানুপাতে আছে কিনা দেখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 27. 5pq, 3q -এর সঙ্গে নীচের কোন জোড়া সংখ্যা সমানুপাতে আছে নির্ণয় করি—

(a) 15pt, 3q (b) 15pt, 9t (c) 15pr, 9t

$$5pq:3q = \frac{5pq}{3q} = \frac{5p}{3} = \frac{5p\times3t}{3\times3t} = \frac{15pt}{9t}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয় 15pt ও 9t.

প্রয়োগ : 28. 2a, 3b, 6ac ও 9bc সমানুপাতী কিনা দেখি।

$2a\times9bc = \boxed{}$ এবং $3b\times6ac = \boxed{}$

পেলাম প্রান্তীয় পদদ্বয়ের গুণফল = মধ্যপদদ্বয়ের গুণফল

$\therefore$ 2a, 3b, 6ac ও 9bc সমানুপাতী।

প্রয়োগ : 29. 8x, 5yz, 40qx ও 25qyz সমানুপাতী কিনা দেখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 30. যদি $6:x::2:13$ হয়, তবে x -এর মান হিসাব করে লিখি।

$6:x::2:13$

$\frac{6}{x} = \frac{2}{13}$

বা, $2x = 6\times13$

বা, $x = \frac{78}{2}$ $\therefore x = 39$

প্রয়োগ : 31. যদি $8:y::2:21$ হয়, তবে y -এর মান হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 32. 6, 9, 12 -এর চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয় করি।

মনে করি, চতুর্থ সমানুপাতী x

সুতরাং, $6:9::12:x$

বা, $\frac{6}{9} = \frac{12}{x}$

বা, $6x = 9\times12$ $\therefore x = \boxed{}$

প্রয়োগ : 33. 5, 4, 25 -এর চতুর্থ সমানুপাতী হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

যে-কোনো চারটি সমানুপাতী সংখ্যা দিয়ে কতগুলি স্বতন্ত্র (আলাদা আলাদা) সমানুপাত গঠন করা যায় দেখি।

ধরি, a, b, c ও d চারটি সমানুপাতী সংখ্যা।

সুতরাং, $a:b::c:d$ $\therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

(i) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ বা, $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ $\therefore a:c::b:d$ (ii) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ বা, $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ $\therefore b:a::d:c$

(iii) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ বা, $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$ $\therefore c:a::d:b$

$\therefore$ পেলাম, a, b, c ও d সমানুপাতী হলে, (i) a, c, b, d সমানুপাতী (ii) b, a, d, c সমানুপাতী (iii) c, a, d, b সমানুপাতী

বুঝেছি, 2, 3, 4 ও 6 চারটি সমানুপাতী সংখ্যা দিয়ে যে সকল স্বতন্ত্র সমানুপাত গঠন করা যাবে সেগুলি হলো (i) $2:4::3:6$ (ii) $3:2::6:4$ (iii) $4:2::6:3$

প্রয়োগ : 34. 5, 6, 10 ও 12 চারটি সমানুপাতী সংখ্যা দিয়ে কতগুলি ও কী কী স্বতন্ত্র সমানুপাত গঠন করা যাবে হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 35. 2, 4, 6 ও 10 -এর প্রত্যেকের সঙ্গে কোন সংখ্যা যোগ করলে যোগফলগুলি সমানুপাতী হবে হিসাব করে লিখি।

মনে করি, প্রত্যেকের সঙ্গে x যোগ করতে হবে।

সুতরাং, (2+x), (4+x), (6+x) ও (10+x) সমানুপাতী হবে।

$\therefore (2+x):(4+x)::(6+x):(10+x)$

বা, $\frac{2+x}{4+x}=\frac{6+x}{10+x}$

বা, $(2+x)(10+x)=(6+x)(4+x)$

বা, $20+10x+2x+x^2=24+4x+6x+x^2$

বা, $2x=4 \quad \therefore x=2$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা 2.

প্রয়োগ : 36. 12, 22, 42 ও 72 -এর প্রত্যেকের সঙ্গে কোন সংখ্যা যোগ করলে যোগফলগুলি সমানুপাতী হবে হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 37. a, b, c, d -এর প্রত্যেকটির সঙ্গে কত যোগ করলে যোগফলগুলি সমানুপাতী হবে হিসাব করে লিখি।

ধরি, প্রত্যেকের সঙ্গে x যোগ করলে সংখ্যাগুলি সমানুপাতী হবে।

সুতরাং, $(a+x):(b+x)::(c+x):(d+x)$

$\therefore \frac{a+x}{b+x}=\frac{c+x}{d+x}$

বা, $(a+x)(d+x)=(c+x)(b+x)$

বা, $ad+dx+ax+x^2=cb+bx+cx+x^2$

বা, $x(d+a-b-c)=cb-ad \qquad \therefore x=\frac{cb-ad}{a+d-b-c}$ (যখন $a+d\neq b+c$)

$\therefore$ প্রত্যেকেটির সঙ্গে $\frac{cb-ad}{a+d-b-c}$ যোগ করলে যোগফলগুলি সমানুপাতী হবে।

প্রয়োগ : 38. 3, 6, 7, 10 -এর প্রত্যেকটির সঙ্গে যেকোনো নির্দিষ্ট সংখ্যা যোগ করলে যোগফলগুলি সমানুপাতী হবে কিনা বুঝে লিখি। **[নিজে করি]**

শর্মিষ্ঠাদি ক্লাব ঘরের বোর্ডে তিনটি সংখ্যা লিখলেন।

তিনি বোর্ডে লিখলেন 4, 8 ও 16

4, 8 ও 16 তিনটি সংখ্যাকে সমানুপাতে লেখা যাবে কিনা দেখি।

$4:8=1:2$

এবং $8:16=1:2$

$\therefore$ লিখতে পারি, $4:8::8:16$

(9) কিন্তু তিনটি রাশি এভাবে সমানুপাতে থাকলে, সেই সমানুপাতকে কী বলা হয়?

সমজাতীয় তিনটি রাশির মধ্যে প্রথম ও দ্বিতীয় পদের অনুপাত, দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদের অনুপাতের সমান হলে, ওই সমজাতীয় তিনটি রাশিকে **ক্রমিক সমানুপাতী** বলা হয়।

বুঝেছি, বোর্ডে লেখা 4, 8 ও 16 সংখ্যাগুলি ক্রমিক সমানুপাতী।

10 তিনটি বাস্তব সংখ্যা a, b ও c, $(b\neq0, c\neq0)$ ক্রমিক সমানুপাতে থাকলে তাদের মধ্যে কী সম্পর্ক পাই হিসাব করে দেখি।

a, b ও c ক্রমিক সমানুপাতে আছে।

$\therefore a:b::b:c$

অর্থাৎ, $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$

বা, $b^2=ac$ $\quad\therefore b=\pm\sqrt{ac}$

$\therefore$ পেলাম a, b ও c ক্রমিক সমানুপাতী হলে $b^2=ac$ বা $b=\pm\sqrt{ac}$

> b ধনাত্মক চিহ্নযুক্ত হবে যদি a এবং c উভয়েই ধনাত্মক চিহ্নযুক্ত হয় এবং b ঋণাত্মক চিহ্নযুক্ত হবে যদি a এবং c উভয়েই ঋণাত্মক চিহ্নযুক্ত হয়।
> a এবং c বিপরীত চিহ্নযুক্ত হলে b অসংজ্ঞাত হবে।

11 a, b ও c ক্রমিক সমানুপাতে থাকলে b-কে কী বলা হয়?

a, b ও c ক্রমিক সমানুপাতে থাকলে $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ $\quad\therefore b^2=ac$

এখানে b-কে a ও c -এর **মধ্যসমানুপাতী** (Mean Proportional) এবং c-কে **তৃতীয় সমানুপাতী** (Third Proportional) বলা হয়।

এভাবে a, b, c, d, e ক্রমিক সমানুপাতী হলে, $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{e}$ হবে।

বুঝেছি, 4, 8 ও 16 তিনটি ক্রমিক সমানুপাতী সংখ্যার 8 মধ্যসমানুপাতী এবং 16 তৃতীয় সমানুপাতী।

প্রয়োগ : 39. 9 ও 15-এর তৃতীয় সমানুপাতী নির্ণয় করি।

ধরি, তৃতীয় সমানুপাতী x

$\therefore$ 9, 15 ও x ক্রমিক সমানুপাতী

সুতরাং, $\frac{9}{15}=\frac{15}{x}$

বা, $9x=15\times15$

বা, $x=\frac{15\times15}{9}$ $\quad\therefore x=\boxed{}$

$\therefore$ নির্ণেয় তৃতীয় সমানুপাতী 25

প্রয়োগ : 40. আমি 3 টাকা ও 12 টাকার তৃতীয় সমানুপাতী নির্ণয় করি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 41. আমি $2a^2$ ও 3ab -এর তৃতীয় সমানুপাতী নির্ণয় করি।

মনে করি, তৃতীয় সমানুপাতী x

$\therefore 2a^2$, 3ab ও x ক্রমিক সমানুপাতী

$\therefore \frac{2a^2}{3ab}=\frac{3ab}{x}$

বা, $2a^2x=3ab\times3ab$

বা, $x=\frac{3ab\times3ab}{2a^2}$

$\therefore x=\frac{9b^2}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় তৃতীয় সমানুপাতী $\frac{9b^2}{2}$

প্রয়োগ : 42. $9pq, 12pq^2$ -এর তৃতীয় সমানুপাতী নির্ণয় করি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 43. $\frac{1}{12}$ ও $\frac{1}{75}$ -এর মধ্যসমানুপাতী নির্ণয় করি।

ধরি, $\frac{1}{12}$ ও $\frac{1}{75}$ -এর মধ্যসমানুপাতী x

সুতরাং, $\frac{\frac{1}{12}}{x} = \frac{x}{\frac{1}{75}}$ বা, $x^2 = \frac{1}{12} \times \frac{1}{75}$

বা, $x = \sqrt{\frac{1}{12\times75}}$

$\therefore x = \frac{1}{30}$

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যসমানুপাতী $\frac{1}{30}$

প্রয়োগ : 44. 0.5 ও 4.5 -এর মধ্যসমানুপাতী হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 45. তিনটি ক্রমিক সমানুপাতী ধনাত্মক সংখ্যার প্রান্তীয় পদদুটি $pqr, \frac{pr}{q}$ হলে মধ্যসমানুপাতী হিসাব করে লিখি।

ধরি, মধ্যসমানুপাতী পদটি x

$\therefore pqr, x$ ও $\frac{pr}{q}$ ক্রমিক সমানুপাতী।

সুতরাং, $\frac{pqr}{x} = \frac{x}{\frac{pr}{q}}$

বা, $x^2 = pqr \times \frac{pr}{q} = p^2r^2$

বা, $x = \sqrt{p^2r^2}$

$\therefore x = pr$ ($\because$ প্রান্তীয় পদদুটি ধনাত্মক সংখ্যা)

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যসমানুপাতীটি pr

প্রয়োগ : 46. ধনাত্মক সংখ্যা xy^2 ও xz^2 -এর মধ্যসমানুপাতী নির্ণয় করি। [নিজে করি]

কষে দেখি 5.2

1. নিম্নলিখিত সমানুপাতে x-এর মান নির্ণয় করি।
   (i) $10 : 35 :: x : 42$ (ii) $x : 50 :: 3 : 2$
2. নিম্নলিখিত সংখ্যাগুচ্ছগুলির চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয় করি:
   (i) $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ (ii) 9.6 কিগ্রা., 7.6 কিগ্রা., 28.8 কিগ্রা. (iii) x^2y, y^2z, z^2x
   (iv) $(p-q), (p^2-q^2), p^2-pq+q^2$
3. নিম্নলিখিত সংখ্যাগুচ্ছগুলির তৃতীয় সমানুপাতী নির্ণয় করি :
   (i) 5, 10 (ii) 0.24, 0.6 (iii) p^3q^2, q^2r (iv) $(x-y)^2, (x^2-y^2)^2$

4. নিম্নলিখিত ধনাত্মক সংখ্যাগুচ্ছগুলির মধ্যসমানুপাতী নির্ণয় করি :
   (i) 5 এবং 80   (ii) 8.1 এবং 2.5   (iii) x^3y এবং xy^3 (iv) $(x-y)^2$, $(x+y)^2$
5. যদি $a:b$ এবং $c:d$ এই অনুপাত দুটি পরস্পর বিপরীতমুখী সম্পর্ক প্রকাশ করে, তবে তাদের ব্যস্ত অনুপাতগুলি কী সম্পর্ক প্রকাশ করে লিখি।
6. তিনটি ক্রমিক সমানুপাতী সংখ্যা দিয়ে কটি ক্রমিক সমানুপাত গঠন করা যাবে হিসাব করে লিখি।
7. 5 টি ক্রমিক সমানুপাতী সংখ্যার প্রথমটি 2 এবং দ্বিতীয়টি 6 হলে, পঞ্চমটি নির্ণয় করি।
8. 6, 15, 20 ও 43-এর প্রত্যেকটির সঙ্গে কত যোগ করলে যোগফলগুলি সমানুপাতী হবে হিসাব করে লিখি।
9. 23, 30, 57 এবং 78 -এর প্রত্যেকটি থেকে কত বিয়োগ করলে বিয়োগফলগুলি সমানুপাতী হবে নির্ণয় করি।
10. p, q, r, s-এর প্রত্যেকটির থেকে কত বিয়োগ করলে বিয়োগফলগুলি সমানুপাতী হবে নির্ণয় করি।

শর্মিষ্ঠাদির মতো সাব্বাও ক্লাবঘরের বোর্ডে চারটি সংখ্যা লিখেছে যারা সমানুপাতে আছে।

সাব্বা লিখেছে, 3, 5, 6 ও 10

দেখছি, $3:5::6:10$ অর্থাৎ $3:5=6:10$

আবার, $3:6=1:2=5:10$

অর্থাৎ, $3:6::5:10$

পেলাম, $3:5::6:10$ হলে, $3:6::5:10$

12 আমি যে-কোনো চারটি সমানুপাতী অশূন্য বাস্তব সংখ্যা a, b, c ও d বোর্ডে লিখি ও সমানুপাতের কিছু ধর্ম প্রমাণ করি। যদি a, b, c ও d সমানুপাতী হয় তবে **প্রমাণ করি** a, c, b ও d সমানুপাতী হবে।

প্রমাণ : a, b, c ও d সমানুপাতী অর্থাৎ $a:b::c:d$

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

উভয়পক্ষকে $\frac{b}{c}$ দিয়ে গুণ করে পাই,

$$\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=\frac{c}{d}\times\frac{b}{c}$$

বা, $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

$\therefore a:c=b:d$

পেলাম, $a:b::c:d$ হলে, $a:c::b:d$ হবে।

13 কিন্তু সমানুপাতের এই ধর্মকে কী বলা হয়?

'যে-কোনো সমানুপাতের দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদ পরস্পর স্থান বিনিময় করলেও পদ চারটি সমানুপাতী থাকে'— সমানুপাতের এই ধর্মকে **একান্তর প্রক্রিয়া** (Alternendo) বলা হয়।

বুঝেছি, $2:3::10:15$ হলে, $2:10::3:\boxed{}$ হবে। **[নিজে করি]**

আবার দেখছি, $3:5::6:10$ হলে, $3:6::5:10$

14 আমি a, b, c, d চারটি সংখ্যার ক্ষেত্রে $a:b::c:d$ হলে $b:a::d:c$ হবে কিনা প্রমাণ করি।

প্রমাণ : $a:b::c:d$

অর্থাৎ, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ অর্থাৎ, $ad=bc$

উভয়পক্ষকে ac দিয়ে ভাগ করে পাই,

$ad \div ac = bc \div ac$

বা, $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$

বা, $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

$\therefore b:a::d:c$

$\therefore$ পেলাম, $a:b::c:d$ হলে, $b:a::d:c$ হবে।

15 কিন্তু সমানুপাতের এই ধর্মকে কী বলা হয়?

‘যে-কোনো দুটি অনুপাত সমান হলে তাদের বিপরীত বা ব্যস্ত অনুপাত দুটিও সমান হবে’। সমানুপাতের এই ধর্মকে **বিপরীত বা ব্যস্ত প্রক্রিয়া** (Invertendo) বলা হয়।

বুঝেছি, $6:10::9:15$ হলে $10:6::\boxed{}:\boxed{}$ **[নিজে লিখি]**

আমাদের বন্ধু বিভাস এক মজার কাণ্ড করল। সে সাব্বার লেখা 3, 5, 6 ও 10 এই চারটি সমানুপাতী সংখ্যার সাহায্যে অন্যরকম সমানুপাত তৈরি করল।

সে করল, $(3+5):5=(6+10):10$

16 $a:b::c:d$ হলে $a+b:b::c+d:d$ -হবে কিনা প্রমাণ করি।

প্রমাণ : $a:b::c:d$ অর্থাৎ, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

বা, $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$ [উভয়পক্ষে 1 যোগ করে পাই]

বা, $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

$\therefore (a+b):b::(c+d):d$

পেলাম, a, b, c ও d চারটি সংখ্যার ক্ষেত্রে $a:b::c:d$ হলে, $(a+b):b::(c+d):d$ হবে।

17 সমানুপাতের এই ধর্মকে কী বলা হয়?

সমানুপাতের এই ধর্মকে **যোগ প্রক্রিয়া (Componendo)** বলা হয়।

বুঝেছি, $4:5::8:10$ হলে, সমানুপাতের যোগপ্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই, $(4+5):5=\boxed{}:10$ **[নিজে লিখি]**

18 কিন্তু $a:b::c:d$ হলে $a-b:b$ ও $c-d:d$ সমানুপাত হবে কিনা প্রমাণ করি।

প্রমাণ : $a:b::c:d$ অর্থাৎ, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

বা, $\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$ [উভয়পক্ষ থেকে 1 বিয়োগ করে পাই]

বা, $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

$\therefore (a-b):b::(c-d):d$

$\therefore$ পেলাম, $a:b::c:d$ হলে, $(a-b):b::(c-d):d$ হবে।

(19) সমানুপাতের এই ধর্মকে কী বলা হয়?

a, b, c, d চারটি সংখ্যার ক্ষেত্রে a : b : : c : d হলে, (a–b) : b : : (c–d) : d হবে। সমানুপাতের এই ধর্মকে **ভাগ প্রক্রিয়া** (Dividendo) বলা হয়।

বুঝেছি, 5 : 4 = 10 : 8 হলে সমানুপাতের ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই, (5–4) : 4 = $\boxed{}$: 8 **[নিজে যাচাই করে লিখি]**

প্রয়োগ : 47. আমি সমানুপাতের যোগ প্রক্রিয়া ও ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা প্রমাণ করি যে a : b : : c : d হলে, (a+b) : (a–b) : : (c+d) : (c–d) হবে।

প্রমাণ : a : b : : c : d

অর্থাৎ, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ বা, $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ [যোগ প্রক্রিয়া থেকে পাই]

আবার, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ বা, $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ [ভাগ প্রক্রিয়া থেকে পাই]

সুতরাং, $\frac{a+b}{b}\div\frac{a-b}{b}=\frac{c+d}{d}\div\frac{c-d}{d}$

বা, $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

$\therefore$ (a+b) : (a–b) : : (c+d) : (c–d)

বিকল্প প্রমাণ :

ধরি, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k\ (k\neq 0)$

$\therefore a = bk$ এবং $c = dk$

$\therefore \frac{a+b}{a-b}=\frac{bk+b}{bk-b}=\frac{b(k+1)}{b(k-1)}=\frac{k+1}{k-1}$

আবার, $\frac{c+d}{c-d}=\frac{dk+d}{dk-d}=\frac{d(k+1)}{d(k-1)}=\frac{k+1}{k-1}$

$\therefore$ (a+b) : (a–b) : : (c+d) : (c–d)

$\therefore$ পেলাম, a : b : : c : d হলে, (a+b) : (a–b) : : (c+d) : (c–d) হবে।

(20) কিন্তু সমানুপাতের এই ধর্মকে কী বলা হয়?

'a : b : : c : d হলে, (a+b) : (a–b) : : (c+d) : (c–d) হবে'। সমানুপাতের এই ধর্মকে যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া (Componendo and Dividendo) বলা হয়।

প্রয়োগ : 48. আমি 7:3::14:6 সমানুপাতের সংখ্যাগুলি নিয়ে সমানুপাতের যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া করি।

7 : 3 = 14 : 6 $\therefore$ (7+3) : (7–3) = 10 : 4 = 5 : 2

আবার, (14+6) : (14–6) = 20 : 8 = 5 : 2

$\therefore$ (7+3) : (7–3) : : (14+6) : (14–6)

প্রয়োগ : 49. 5 : 4 : : 10 : 8 হলে সমানুপাতের যোগ-ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই, (5+4) : (5–4) : : (10+8) : $\boxed{}$ **[নিজে লিখি]**

প্রয়োগ : 50. $a:b::c:d$ হলে, প্রমাণ করি যে $(a^2+b^2):(a^2-b^2)::(c^2+d^2):(c^2-d^2)$

$a:b::c:d$ অর্থাৎ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ বা, $\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}$ [বর্গ করে পাই]

বা, $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{c^2+d^2}{c^2-d^2}$ [সমানুপাতের যোগ-ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই]

$\therefore (a^2+b^2):(a^2-b^2)::(c^2+d^2):(c^2-d^2)$

বিকল্প প্রমাণ : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ ধরি, $(k\neq 0)$ $\therefore a=bk$ এবং $c=dk$

বামপক্ষ $=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{(bk)^2+b^2}{(bk)^2-b^2}=\frac{b^2(k^2+1)}{b^2(k^2-1)}=\frac{k^2+1}{k^2-1}$

ডানপক্ষ $=\frac{c^2+d^2}{c^2-d^2}=\frac{(dk)^2+d^2}{(dk)^2-d^2}=\frac{d^2(k^2+1)}{d^2(k^2-1)}=\frac{k^2+1}{k^2-1}$ $\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 51. যদি $a:b::c:d$ হয়, তাহলে প্রমাণ করি যে $(4a+7b):(4a-7b)::(4c+7d):(4c-7d)$ [নিজে করি]

তুষার বোর্ডে অনেকগুলি অনুপাত লিখল।

তুষার লিখল, $2:5, 6:15, 16:40, 24:60$

দেখছি, $\frac{2}{5}=\frac{6}{15}=\frac{16}{40}=\frac{24}{60}$

21 আমি তুষারের লেখা অনুপাতগুলির পূর্ব পদগুলির যোগফলকে পূর্বপদ ও উত্তরপদগুলির যোগফলকে উত্তরপদ ধরে অনুপাত তৈরি করি ও কী পাই দেখি।

$$\frac{2+6+16+24}{5+15+40+60}=\frac{48}{120}=\frac{2}{5}$$

$\therefore$ পেলাম, $\frac{2}{5}=\frac{6}{15}=\frac{16}{40}=\frac{24}{60}=\frac{2+6+16+24}{5+15+40+60}$

22 $a:b=c:d=e:f$ হলে প্রতিটি অনুপাত $(a+c+e):(b+d+f)$-এর সমান হবে কিনা প্রমাণ করে দেখি।

প্রমাণ, $a:b=c:d=e:f$

ধরি, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$ (যেখানে, $k\neq 0$)

$\therefore a=bk, c=dk$ এবং $e=fk$

$\therefore \frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{bk+dk+fk}{b+d+f}=\frac{k(b+d+f)}{b+d+f}=k$

$\therefore$ পেলাম, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}$

$\therefore$ সাধারণভাবে লিখতে পারি, $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n}$

23 কিন্তু সমানুপাতের এই ধর্মকে কী বলা হয়?

$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n}$ —— সমানুপাতের এই ধর্মকে সংযোজন প্রক্রিয়া (Addendo) বলা হয়।

24 $a:b=c:d=e:f$ হলে, প্রতিটি অনুপাত (i) $(a+c-e):(b+d-f)$ (ii) $(a-c+e):(b-d+f)$ (iii) $(a-c-e):(b-d-f)$-এদের প্রত্যেকটির সঙ্গে সমান হবে কিনা দেখি।

(i) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$ (যেখানে, $k\neq0$) $\therefore a=bk, c=dk, e=fk$

$$\frac{a+c-e}{b+d-f}=\frac{bk+dk-fk}{b+d-f}=\frac{k(b+d-f)}{(b+d-f)}=k \quad \therefore a:b=c:d=e:f=(a+c-e):(b+d-f)$$

(ii) $$\frac{a-c+e}{b-d+f}=\frac{bk-dk+fk}{b-d+f}=\frac{k(b-d+f)}{(b-d+f)}=k \quad \therefore a:b=c:d=e:f=(a-c+e):(b-d+f)$$

(iii) $$\frac{a-c-e}{b-d-f}=\frac{bk-dk-fk}{b-d-f}=\frac{k(b-d-f)}{(b-d-f)}=k \quad \therefore a:b=c:d=e:f=(a-c-e):(b-d-f)$$

25 '$a:b=c:d=e:f$ হলে প্রত্যেক অনুপাত $\frac{am+cn+ep}{bm+dn+fp}$ -এর সমান হবে [m, n, p যে-কোনো অশূন্য সংখ্যা]' প্রমাণ করি। [নিজে করি]

প্রয়োগ :52. সমানুপাতের সংযোজন প্রক্রিয়ার সাহায্যে লিখতে পারি, $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}=\frac{8}{12}=\frac{2+6+8}{\square+\square+\square}$ [নিজে করি]

প্রয়োগ : 53. $a:b=c:d$ হলে, প্রমাণ করি যে $(a^2+c^2)(b^2+d^2)=(ab+cd)^2$

$a:b=c:d$ বা, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ বা, $\frac{a^2}{ab}=\frac{c^2}{cd}=\frac{a^2+c^2}{ab+cd}$ [সংযোজন প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই]

আবার, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ বা, $\frac{ab}{b^2}=\frac{cd}{d^2}=\frac{ab+cd}{b^2+d^2}$ [সংযোজন প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই]

সুতরাং, $\frac{a^2+c^2}{ab+cd}=\frac{ab+cd}{b^2+d^2}$

$\therefore (a^2+c^2)(b^2+d^2)=(ab+cd)^2$ [প্রমাণিত]

বিকল্প প্রমাণ

ধরি, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ $(k\neq0)$

$\therefore a=bk, c=dk$

$\therefore$ বামপক্ষ $=(a^2+c^2)(b^2+d^2)=(b^2k^2+d^2k^2)(b^2+d^2)=k^2(b^2+d^2)^2$

ডানপক্ষ $=(ab+cd)^2=(bk\times b+dk\times d)^2=(b^2k+d^2k)^2=k^2(b^2+d^2)^2$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

প্রয়োগ : 54. $x:a=y:b=z:c$ হলে, দেখাই যে, $\frac{x^3}{a^3}+\frac{y^3}{b^3}+\frac{z^3}{c^3}=\frac{3xyz}{abc}$

ধরি, $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$ (যেখানে, $k\neq0$)

$\therefore x=ak, y=bk$ এবং $z=ck$

বামপক্ষ $=\frac{x^3}{a^3}+\frac{y^3}{b^3}+\frac{z^3}{c^3}=\frac{a^3k^3}{a^3}+\frac{b^3k^3}{b^3}+\frac{c^3k^3}{c^3}=k^3+k^3+k^3=3k^3$

ডানপক্ষ $=\frac{3xyz}{abc}=\frac{3\times ak\times bk\times ck}{abc}=3k^3$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ [প্রমাণিত]

প্রয়োগ : 55. $a:b = b:c$ হলে, দেখাই যে, $(a+b+c)(a-b+c) = a^2+b^2+c^2$

ধরি, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$ (যেখানে, $k\neq 0$)

$\therefore a = bk,\ b = ck$

সুতরাং, $a = ck\times k = ck^2$

বামপক্ষ $= (a+b+c)(a-b+c)$
$= (ck^2+ck+c)(ck^2-ck+c)$
$= c(k^2+k+1)\times c(k^2-k+1)$
$= c^2(k^2+k+1)(k^2-k+1)$

ডানপক্ষ $= a^2+b^2+c^2$
$= (ck^2)^2+(ck)^2+c^2$
$= c^2k^4+c^2k^2+c^2$
$= c^2(k^4+k^2+1)$
$= c^2[k^4+2k^2+1-k^2]$
$= c^2[(k^2+1)^2-(k)^2]$
$= c^2(k^2+1+k)(k^2+1-k)$
$= c^2(k^2+k+1)(k^2-k+1)$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ [প্রমাণিত]

প্রয়োগ : 56. a, b, c, d ক্রমিক সমানুপাতী হলে, দেখাই যে $(a^2-b^2)(c^2-d^2) = (b^2-c^2)^2$

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k$ ধরি, (যেখানে, $k\neq 0$)

সুতরাং, $a=bk,\ b=ck,\ c=dk$

$\therefore b=dk\times k = dk^2$ এবং $a=dk^2\times k = dk^3$

বামপক্ষ $= (a^2-b^2)(c^2-d^2)$
$= \{(dk^3)^2-(dk^2)^2\}\{(dk)^2-d^2\}$
$= \{d^2k^6-d^2k^4\}\{d^2k^2-d^2\}$
$= d^2k^4(k^2-1)\times d^2(k^2-1)$
$= d^4k^4(k^2-1)^2$

ডানপক্ষ $= (b^2-c^2)^2$
$= \{(dk^2)^2-(dk)^2\}^2$
$= \{d^2k^4-d^2k^2\}^2$
$= \{d^2k^2(k^2-1)\}^2$
$= d^4k^4(k^2-1)^2$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ [প্রমাণিত]

প্রয়োগ : 57. যদি $\frac{ay-bx}{c} = \frac{cx-az}{b} = \frac{bz-cy}{a}$ হয়, তবে প্রমাণ করি যে $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

$\frac{ay-bx}{c} = \frac{cx-az}{b} = \frac{bz-cy}{a}$

$\therefore \frac{c(ay-bx)}{c^2} = \frac{b(cx-az)}{b^2} = \frac{a(bz-cy)}{a^2}$

$= \frac{c(ay-bx)+b(cx-az)+a(bz-cy)}{c^2+b^2+a^2} = \frac{cay-cbx+bcx-baz+abz-acy}{c^2+b^2+a^2} = 0$ [সংযোজন প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই]

সুতরাং, $\frac{ay-bx}{c} = 0$ বা, $ay-bx = 0$
বা, $ay = bx$ $\therefore \frac{y}{b} = \frac{x}{a}$

আবার, $\frac{cx-az}{b} = 0$ বা, $cx = az$ $\therefore \frac{x}{a} = \frac{z}{c}$

$\therefore \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ [প্রমাণিত]

বিকল্প প্রমাণ

ধরি, $\frac{ay-bx}{c}=\frac{cx-az}{b}=\frac{bz-cy}{a}=k$ [যেখানে $k\neq 0$]

$\because ay-bx=ck, cx-az=bk$ এবং $bz-cy=ak$

$ay-bx=ck$ ______ (i) $\qquad cx-az=bk$ ______ (ii)

(i) নং সমীকরণকে c দ্বারা ও (ii) নং সমীকরণকে b দ্বারা গুণ করি এবং তারপর তাদের যোগ করি।

$$acy-bcx=c^2k$$
$$bcx-abz=b^2k$$
$$a(cy-bz)=k(b^2+c^2)$$

বা, $cy-bz=\frac{k}{a}(b^2+c^2)$

বা, $-ak=\frac{k}{a}(b^2+c^2)$ [$\because bz-cy=ak$]

বা, $-a^2k=kb^2+kc^2$

বা, $k(a^2+b^2+c^2)=0 \quad \therefore k=0$ [$\because a^2+b^2+c^2\neq 0$]

সুতরাং, $\frac{ay-bx}{c}=0$ বা, $ay-bx=0$ বা, $ay=bx$ $\therefore \frac{x}{a}=\frac{y}{b}$

আবার, $\frac{cx-az}{b}=0$ বা, $cx-az=0$ বা, $cx=az$ $\therefore \frac{x}{a}=\frac{z}{c}$ $\qquad \therefore \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 58. যদি $\frac{x}{a+b-c}=\frac{y}{b+c-a}=\frac{z}{c+a-b}$ হয়, তাহলে প্রমাণ করি যে প্রতিটি অনুপাত $=\frac{x+y+z}{a+b+c}$ [নিজে করি]

প্রয়োগ : 59. যদি $\frac{bz+cy}{a}=\frac{cx+az}{b}=\frac{ay+bx}{c}$ হয়, তাহলে প্রমাণ করি যে,

$$\frac{x}{a(b^2+c^2-a^2)}=\frac{y}{b(c^2+a^2-b^2)}=\frac{z}{c(a^2+b^2-c^2)}$$

$$\frac{bz+cy}{a}=\frac{cx+az}{b}=\frac{ay+bx}{c}$$

বা, $\frac{abz+acy}{a^2}=\frac{bcx+baz}{b^2}=\frac{cay+cbx}{c^2}$

$$=\frac{(bcx+baz)+(cay+cbx)-(abz+acy)}{b^2+c^2-a^2}=\frac{2bcx}{b^2+c^2-a^2}$$ [সংযোজন প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই]

আবার একই ভাবে পাই,

প্রতিটি অনুপাত $=\frac{(abz+acy)+(acy+bcx)-(bcx+baz)}{a^2+c^2-b^2}=\frac{2acy}{c^2+a^2-b^2}$

এবং প্রতিটি অনুপাত $=\frac{(abz+acy)+(bcx+abz)-(acy+bcx)}{a^2+b^2-c^2}=\frac{2abz}{a^2+b^2-c^2}$

$\therefore \frac{2bcx}{b^2+c^2-a^2}=\frac{2acy}{c^2+a^2-b^2}=\frac{2abz}{a^2+b^2-c^2}$ বা, $\frac{2abcx}{a(b^2+c^2-a^2)}=\frac{2abcy}{b(c^2+a^2-b^2)}=\frac{2abcz}{c(a^2+b^2-c^2)}$

$\therefore \frac{x}{a(b^2+c^2-a^2)}=\frac{y}{b(c^2+a^2-b^2)}=\frac{z}{c(a^2+b^2-c^2)}$ [প্রত্যেকটিকে 2abc দ্বারা ভাগ করে পাই]

প্রয়োগ : 60. $x=\dfrac{4ab}{a+b}$ হলে, দেখাই যে, $\dfrac{x+2a}{x-2a}+\dfrac{x+2b}{x-2b}=2$ [প্রদত্ত $a\neq0$, $b\neq0$ এবং $a\neq b$]

$x=\dfrac{4ab}{a+b}$ বা, $\dfrac{x}{2a}=\dfrac{2b}{a+b}$ [উভয়পক্ষকে 2a দ্বারা ভাগ করে পাই]

সুতরাং, $\dfrac{x+2a}{x-2a}=\dfrac{2b+a+b}{2b-a-b}$ [যোগ-ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই]

$=\dfrac{a+3b}{b-a}$

আবার, $x=\dfrac{4ab}{a+b}$ বা, $\dfrac{x}{2b}=\dfrac{2a}{a+b}$ [উভয়পক্ষকে 2b দ্বারা ভাগ করে পাই]

সুতরাং, $\dfrac{x+2b}{x-2b}=\dfrac{2a+a+b}{2a-a-b}$ [যোগ-ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই]

$=\dfrac{3a+b}{a-b}$

$\therefore \dfrac{x+2a}{x-2a}+\dfrac{x+2b}{x-2b}=\dfrac{3b+a}{b-a}+\dfrac{3a+b}{a-b}=\dfrac{3b+a}{b-a}-\dfrac{3a+b}{b-a}=\dfrac{3b+a-3a-b}{b-a}=\dfrac{2b-2a}{b-a}=\dfrac{2(b-a)}{b-a}=2$

প্রয়োগ : 61. $\dfrac{a+b-c}{a+b}=\dfrac{b+c-a}{b+c}=\dfrac{c+a-b}{c+a}$ এবং $a+b+c\neq0$ হলে, প্রমাণ করি যে $a=b=c$

$\dfrac{a+b-c}{a+b}=\dfrac{b+c-a}{b+c}=\dfrac{c+a-b}{c+a}$

বা, $1-\dfrac{c}{a+b}=1-\dfrac{a}{b+c}=1-\dfrac{b}{c+a}$

বা, $\dfrac{c}{a+b}=\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{c+a}$ [প্রতিটি সংখ্যামালাকে 1 থেকে বিয়োগ করে পাই]

বা, $\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{a+c}{b}$ [বিপরীত প্রক্রিয়া প্রয়োগ করে পাই]

বা, $\dfrac{a+b+c}{c}=\dfrac{b+c+a}{a}=\dfrac{a+c+b}{b}$ [প্রতিটি অনুপাতে 1 যোগ করে পাই]

বা, $\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}$ [যেহেতু $a+b+c\neq0$, সুতরাং, $a+b+c$ দ্বারা ভাগ করে পাই]

$\therefore a=b=c$ [বিপরীত প্রক্রিয়া প্রয়োগ করে পাই] **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 62. $\dfrac{bz-cy}{b-c}=\dfrac{cx-az}{c-a}$ হলে, দেখাই যে, প্রত্যেকটি অনুপাত $\dfrac{ay-bx}{a-b}$ -এর সমান।

$\dfrac{bz-cy}{b-c}=\dfrac{cx-az}{c-a}$

$\dfrac{ay-bx}{a-b}$ অনুপাতে z না থাকায় z অপসারণের জন্যে প্রথম অনুপাতের উভয় পদকে a এবং দ্বিতীয় অনুপাতের উভয় পদকে b দ্বারা গুণ করে পাই,

$\dfrac{abz-acy}{ab-ac}=\dfrac{bcx-abz}{bc-ba}=\dfrac{abz-acy+bcx-abz}{ab-ac+bc-ba}$ [সংযোজন প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই]

$=\dfrac{-acy+bcx}{-ac+bc}=\dfrac{-c(ay-bx)}{-c(a-b)}=\dfrac{ay-bx}{a-b}$

$\therefore \dfrac{bz-cy}{b-c}=\dfrac{cx-az}{c-a}=\dfrac{ay-bx}{a-b}$ **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 63. যদি $\frac{x}{y+z}=\frac{y}{z+x}=\frac{z}{x+y}$ হয়, তবে প্রমাণ করি যে প্রতিটি অনুপাতের মান $\frac{1}{2}$ অথবা (-1) -এর সমান।

ধরি, $\frac{x}{y+z}=\frac{y}{z+x}=\frac{z}{x+y}=k$ (যেখানে, $k\neq 0$)

সুতরাং, $x=k(y+z)$, $y=k(z+x)$ এবং $z=k(x+y)$

এখন, $x+y+z=k(y+z)+k(z+x)+k(x+y)$

বা, $x+y+z=k(y+z+z+x+x+y)$

বা, $x+y+z=2k(x+y+z)$

বা, $(x+y+z)-2k(x+y+z)=0$

বা, $(x+y+z)(1-2k)=0$

হয়, $x+y+z=0$

অথবা, $1-2k=0$

বা, $-2k=-1$ $\therefore k=\frac{1}{2}$

$\therefore$ প্রত্যেকটি অনুপাত $=\frac{1}{2}$

আবার, $x+y+z=0$ হলে, $y+z=-x$

$\therefore \frac{x}{y+z}=\frac{x}{-x}=-1$

আবার, $z+x=-y$; সুতরাং, $\frac{y}{z+x}=\frac{y}{-y}=-1$ এবং $x+y=-z$; সুতরাং, $\frac{z}{x+y}=\frac{z}{-z}=-1$

$\therefore \frac{x}{y+z}=\frac{y}{z+x}=\frac{z}{x+y}$ হলে প্রতিটি অনুপাতের মান $\frac{1}{2}$ অথবা (-1) -এর সমান।

প্রয়োগ : 64. যদি $\frac{b}{a+b}=\frac{a+c-b}{b+c-a}=\frac{a+b+c}{2a+b+2c}$ হয়, (যেখানে $a+b+c\neq 0$) তবে দেখাই যে, $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}$

$$\frac{b}{a+b}=\frac{a+c-b}{b+c-a}=\frac{a+b+c}{2a+b+2c}$$

বা, $\frac{2b}{2(a+b)}=\frac{a+c-b}{b+c-a}=\frac{2(a+b+c)}{2(2a+b+2c)}=\frac{2b+a+c-b+2a+2b+2c}{2a+2b+b+c-a+4a+2b+4c}$ [সংযোজন প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই]

$=\frac{3(a+b+c)}{5(a+b+c)}=\frac{3}{5}$ ($\because a+b+c\neq 0$)

সুতরাং, $\frac{b}{a+b}=\frac{3}{5}$ বা, $5b=3a+3b$

বা, $2b=3a$ $\therefore \frac{a}{2}=\frac{b}{3}$ ——— (i)

আবার, $\frac{a+c-b}{b+c-a}=\frac{3}{5}$

বা, $5(a+c-b)=3(b+c-a)$

বা, $5a+5c-5b=3b+3c-3a$

বা, $8a-8b=-2c$

বা, $8a-12a=-2c$ [$\because 2b=3a$]

বা, $-4a=-2c$ $\therefore \frac{a}{2}=\frac{c}{4}$ ——— (ii)

(i) ও (ii) থেকে পাই, $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}$ [প্রমাণিত]

প্রয়োগ : 65. যদি $\frac{b+c-a}{y+z-x}=\frac{c+a-b}{z+x-y}=\frac{a+b-c}{x+y-z}$ হয়, তবে প্রমাণ করি যে, $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$

$\frac{b+c-a}{y+z-x}=\frac{c+a-b}{z+x-y}=\frac{a+b-c}{x+y-z}=\frac{b+c-a+c+a-b+a+b-c}{y+z-x+z+x-y+x+y-z}$ [সংযোগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই]

$\therefore$ প্রতিটি অনুপাত $=\frac{a+b+c}{x+y+z}$

সুতরাং, $\frac{b+c-a}{y+z-x}=\frac{a+b+c}{x+y+z}=\frac{(a+b+c)-(b+c-a)}{(x+y+z)-(y+z-x)}$ $\therefore$ প্রতিটি অনুপাত $=\frac{2a}{2x}=\frac{a}{x}$

অনুরূপে, $\frac{c+a-b}{z+x-y}=\frac{a+b+c}{x+y+z}=\frac{(a+b+c)-(c+a-b)}{(x+y+z)-(z+x-y)}$ $\therefore$ প্রতিটি অনুপাত $=\frac{2b}{2y}=\frac{b}{y}$

এবং $\frac{a+b-c}{x+y-z}=\frac{a+b+c}{x+y+z}=\frac{(a+b+c)-(a+b-c)}{(x+y+z)-(x+y-z)}$ $\therefore$ প্রতিটি অনুপাত $=\frac{2c}{2z}=\frac{c}{z}$

$\therefore \frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$ [প্রমাণিত]

প্রয়োগ : 66. যদি $(4a+5b)(4c-5d)=(4a-5b)(4c+5d)$ হয়, প্রমাণ করি যে a, b, c ও d সমানুপাতে আছে। [নিজে করি]

কষে দেখি 5.3

1. $a:b=c:d$ হলে, দেখাই যে,

   (i) $(a^2+b^2):(a^2-b^2)=(ac+bd):(ac-bd)$

   (ii) $(a^2+ab+b^2):(a^2-ab+b^2)=(c^2+cd+d^2):(c^2-cd+d^2)$

   (iii) $\sqrt{a^2+c^2}:\sqrt{b^2+d^2}=(pa+qc):(pb+qd)$

2. $x:a=y:b=z:c$ হলে, প্রমাণ করি যে,

   (i) $\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}+\frac{z^3}{c^2}=\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}$ (ii) $\frac{x^3+y^3+z^3}{a^3+b^3+c^3}=\frac{xyz}{abc}$

   (iii) $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2$

3. $a:b=c:d=e:f$ হলে, প্রমাণ করি যে,

   (i) প্রত্যেকটি অনুপাত $=\frac{5a-7c-13e}{5b-7d-13f}$ (ii) $(a^2+c^2+e^2)(b^2+d^2+f^2)=(ab+cd+ef)^2$

4. যদি $a:b=b:c$ হয়, তবে প্রমাণ করি যে,

   (i) $\left(\frac{a+b}{b+c}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}$ (ii) $a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=a^3+b^3+c^3$ (iii) $\frac{abc(a+b+c)^3}{(ab+bc+ca)^3}=1$

5. a, b, c, d ক্রমিক সমানুপাতী হলে, প্রমাণ করি যে,

   (i) $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$ (ii) $(b-c)^2+(c-a)^2+(b-d)^2=(a-d)^2$

6. (i) যদি $\frac{m}{a}=\frac{n}{b}$ হয়, তবে দেখাই যে, $(m^2+n^2)(a^2+b^2)=(am+bn)^2$

(ii) যদি $\frac{a}{b}=\frac{x}{y}$ হয়, তবে দেখাই যে, $(a+b)(a^2+b^2)x^3=(x+y)(x^2+y^2)a^3$

(iii) যদি $\frac{x}{\ell m-n^2}=\frac{y}{mn-\ell^2}=\frac{z}{n\ell-m^2}$ হয়, তবে দেখাই যে, $\ell x+my+nz=0$

(iv) $\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}$ হলে, দেখাই যে, $(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$

(v) $\frac{x}{y}=\frac{a+2}{a-2}$ হলে, দেখাই যে, $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\frac{4a}{a^2+4}$

(vi) $x=\frac{8ab}{a+b}$ হলে, $\left(\frac{x+4a}{x-4a}+\frac{x+4b}{x-4b}\right)$-এর মান হিসাব করে লিখি।

7. (i) $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{7}$ হলে, দেখাই যে, $\frac{a+b+c}{c}=2$

(ii) $\frac{a}{q-r}=\frac{b}{r-p}=\frac{c}{p-q}$ হলে, দেখাই যে, $a+b+c=0=pa+qb+rc$

(iii) $\frac{ax+by}{a}=\frac{bx-ay}{b}$ হলে, দেখাই যে প্রতিটি অনুপাত x-এর সমান।

8. (i) যদি $\frac{a+b}{b+c}=\frac{c+d}{d+a}$ হয়, তবে প্রমাণ করি যে, $c=a$ অথবা $a+b+c+d=0$

(ii) যদি $\frac{x}{b+c}=\frac{y}{c+a}=\frac{z}{a+b}$ হয়, দেখাই যে, $\frac{a}{y+z-x}=\frac{b}{z+x-y}=\frac{c}{x+y-z}$

(iii) $\frac{x+y}{3a-b}=\frac{y+z}{3b-c}=\frac{z+x}{3c-a}$ হলে, দেখাই যে, $\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{ax+by+cz}{a^2+b^2+c^2}$

(iv) $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ হলে, দেখাই যে, $\frac{x^2-yz}{a^2-bc}=\frac{y^2-zx}{b^2-ca}=\frac{z^2-xy}{c^2-ab}$

9. (i) যদি $\frac{3x+4y}{3u+4v}=\frac{3x-4y}{3u-4v}$ হয়, তবে দেখাই যে $\frac{x}{y}=\frac{u}{v}$

(ii) $(a+b+c+d):(a+b-c-d)=(a-b+c-d):(a-b-c+d)$ হলে, প্রমাণ করি যে, $a:b=c:d$

10. (i) $\frac{a^2}{b+c}=\frac{b^2}{c+a}=\frac{c^2}{a+b}=1$ হলে, দেখাই যে, $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=1$

(ii) $x^2:(by+cz)=y^2:(cz+ax)=z^2:(ax+by)=1$ হলে, দেখাই যে, $\frac{a}{a+x}+\frac{b}{b+y}+\frac{c}{c+z}=1$

11. (i) $\frac{x}{xa+yb+zc}=\frac{y}{ya+zb+xc}=\frac{z}{za+xb+yc}$ এবং $x+y+z\neq 0$ হলে, দেখাই যে, প্রতিটি অনুপাত $\frac{1}{a+b+c}$ -এর সমান।

(ii) $\frac{x^2-yz}{a}=\frac{y^2-zx}{b}=\frac{z^2-xy}{c}$ হলে, প্রমাণ করি যে, $(a+b+c)(x+y+z)=ax+by+cz$

(iii) $\frac{a}{y+z}=\frac{b}{z+x}=\frac{c}{x+y}$ হলে, প্রমাণ করি যে, $\frac{a(b-c)}{y^2-z^2}=\frac{b(c-a)}{z^2-x^2}=\frac{c(a-b)}{x^2-y^2}$

12. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q) :

(i) 3, 4 এবং 6-এর চতুর্থ সমানুপাতী (a) 8 (b) 10 (c) 12 (d) 24

(ii) 8 এবং 12-এর তৃতীয় সমানুপাতী (a) 12 (b) 16 (c) 18 (d) 20

(iii) 16 এবং 25-এর মধ্য সমানুপাতী (a) 400 (b) 100 (c) 20 (d) 40

(iv) a একটি ধনাত্মক সংখ্যা এবং $a:\frac{27}{64}=\frac{3}{4}:a$ হলে, a -এর মান

(a) $\frac{81}{256}$ (b) 9 (c) $\frac{9}{16}$ (d) $\frac{16}{9}$

(v) $2a=3b=4c$ হলে, $a:b:c$ হবে (a) 3:4:6 (b) 4:3:6 (c) 3:6:4 (d) 6:4:3

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) $ab:c^2$, $bc:a^2$ এবং $ca:b^2$ -এর যৌগিক অনুপাত 1 : 1

(ii) x^3y, x^2y^2 এবং xy^3 ক্রমিক সমানুপাতী।

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) তিনটি ক্রমিক সমানুপাতী ধনাত্মক সংখ্যার গুণফল 64 হলে, তাদের মধ্যসমানুপাতী ______

(ii) $a:2=b:5=c:8$ হলে a-এর 50% = b-এর 20% = c-এর ______ %

(iii) (x+2) এবং (x–3) এর মধ্য সমানুপাতী x হলে, x-এর মান ______

13. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)**

(i) $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}=\frac{2a-3b+4c}{p}$ হলে, p-এর মান নির্ণয় করি।

(ii) $\frac{3x-5y}{3x+5y}=\frac{1}{2}$ হলে, $\frac{3x^2-5y^2}{3x^2+5y^2}$ -এর মান নির্ণয় করি।

(iii) $a:b=3:4$ এবং $x:y=5:7$ হলে, $(3ax-by):(4by-7ax)$ কত নির্ণয় করি।

(iv) x, 12, y, 27 ক্রমিক সমানুপাতী হলে, x ও y-এর ধনাত্মক মান নির্ণয় করি।

(v) $a:b=3:2$ এবং $b:c=3:2$ হলে, $a+b:b+c$ কত নির্ণয় করি।