

# 11

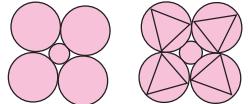
## সম্পাদ্য : ত্রিভুজের পরিবৃত্ত ও অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন CONSTRUCTION OF CIRCUMCIRCLE AND INCIRCLE OF A TRIANGLE

এবছরে আমাদের স্কুলে ঠিক হয়েছে হাতের কাজের জন্য প্রত্যেকে নিজের পছন্দ অনুযায়ী জিনিস তৈরি করবে। আমি ঠিক করেছি আমাদের টেবিলের একটি নতুন কাপড়ের ঢাকনার উপর সুতোর কাজ করব।

তাই আমি পেনসিল দিয়ে টেবিলের ঢাকনার উপর পাশের চিত্রের মতো একটি নকশা আঁকলাম।

আমার ভাই এক মজার কাজ করল। সে আমার আঁকা নকশায় কতকগুলি বৃত্তের মধ্যে পাশের চিত্রের মতো কতকগুলি জ্যা আঁকল।

দেখছি, নকশায় বৃত্তের জ্যাগুলি বৃত্তের মধ্যে ত্রিভুজ তৈরি করেছে।



১) এভাবে আঁকা একটি বৃত্ত ও বৃত্তের মধ্যে অবস্থিত ত্রিভুজ (যার শীর্ষবিন্দুগুলি বৃত্তে আছে) কী সম্পর্কে আছে?

বৃত্তটি বৃত্তের মধ্যে অবস্থিত ত্রিভুজকে পরিবৃত্ত করে আছে। তাই বৃত্তটি ত্রিভুজটির পরিবৃত্ত।

যে-কোনো বৃত্তের উপর যে-কোনো তিনটি বিন্দু যোগ করে যে ত্রিভুজ পাব, বৃত্তটি ওই ত্রিভুজের পরিবৃত্ত।

কিন্তু যদি একটি যে-কোনো ত্রিভুজ দেওয়া থাকে তবে ওই ত্রিভুজের পরিবৃত্ত কীভাবে আঁকব?

একটি যে-কোনো ত্রিভুজ আঁকি ও ওই ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কনের চেষ্টা করি।

**সম্পাদ্য :** কোনো ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কন।



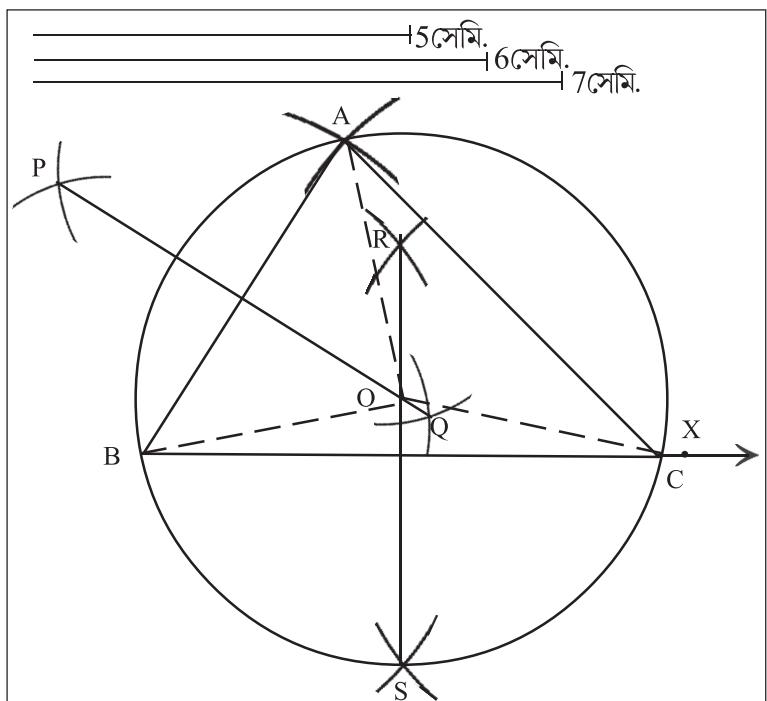
৫সেমি., ৬সেমি., ৭সেমি. বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করে ত্রিভুজটির পরিবৃত্ত অঙ্কন করি।

অঙ্কন প্রণালী :

(i) প্রথমে ৫সেমি., ৬সেমি. ও ৭সেমি. বাহুবিশিষ্ট  $\triangle ABC$  অঙ্কন করি।

(ii) [ $\triangle ABC$ -এর পরিবৃত্ত অঙ্কনের জন্য প্রথমেই পরিবৃত্তের কেন্দ্র নির্ণয় করব। তাই  $\triangle ABC$ -এর যে-কোনো দুটি বাহুর লম্বসমন্বিত অঙ্কন করব।]

$\triangle ABC$ -এর AB ও BC বাহুর দুটি লম্ব সমন্বিত যথাক্রমে PQ ও RS অঙ্কন করলাম যারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করল।



(iii) O বিন্দুটি AB ও BC-এর লম্বসমান্তিখণ্ডকের ছেদবিন্দু।

$\therefore$  O বিন্দুটি A, B ও C থেকে সমদূরবর্তী।

O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OA অথবা OB অথবা OC দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করলাম যা  $\triangle ABC$ -এর পরিবৃত্ত।

প্রমাণ : O, A; O, B; O, C যোগ করলাম।

O, AB-এর লম্বসমান্তিখণ্ডকের উপর একটি বিন্দু।

$\therefore$  O থেকে A ও B বিন্দুয়ের সমদূরবর্তী অর্থাৎ  $OA = OB$

অনুবৃত্তে প্রমাণ করা যায় যে,  $OB = OC$

$\therefore OA = OB = OC$ .

O-কে কেন্দ্র করে OA দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে যে বৃত্ত অঙ্কন করব সেই বৃত্ত B ও C বিন্দুগামী হবে অর্থাৎ বৃত্তটি  $\triangle ABC$ -এর তিনটি শীর্ষবিন্দু A, B ও C দিয়ে যাবে।



$\therefore$  ওই বৃত্তটি  $\triangle ABC$ -এর পরিবৃত্ত।

৪সেমি. বাহুবিশিষ্ট একটি সমাবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন করে তার পরিবৃত্ত অঙ্কন করি। [নিজে করি]

২) ত্রিভুজের পরিবৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধকে কী বলা হয়?

ত্রিভুজের পরিবৃত্তের কেন্দ্রকে পরিকেন্দ্র (Circumcentre) এবং ব্যাসার্ধকে পরিব্যাসার্ধ (Circumradius) বলা হয়।

**নিজে করি 11**

- কোনো ত্রিভুজের পরিবৃত্তের সাপেক্ষে ত্রিভুজের বাহুগুলি বৃত্তের  [ব্যাসার্ধ / জ্যা]
- কোনো বৃত্তের দুটি জ্যা-এর লম্বসমান্তিখণ্ডকের ছেদবিন্দুই বৃত্তের
- ত্রিভুজের বাহুগুলির লম্বসমান্তিখণ্ডকগুলি যে বিন্দুতে ছেদ করে সেই বিন্দু থেকে শীর্ষবিন্দুগুলির দূরত্ব
- ত্রিভুজের বাহুগুলির লম্বসমান্তিখণ্ডকগুলির ছেদবিন্দু থেকে যে-কোনো শীর্ষবিন্দু পর্যন্ত দূরত্বই ওই ত্রিভুজের পরিবৃত্তের  [ব্যাস / ব্যাসার্ধ]-এর দৈর্ঘ্য।

আমার বন্ধু জাহির ঠিক করেছে আমার মতো একটি বুমালে সুতোর কাজ করবে। তাই সে তার খাতায় নানান ধরনের ত্রিভুজ এঁকে পরিবৃত্ত আঁকার চেষ্টা করছে। জাহির তার খাতায়

(i) ABC ত্রিভুজ এঁকেছে যার  $BC = 4$ সেমি.  $\angle ABC = 60^\circ$ ,  $\angle ACB = 70^\circ$

(ii) PQR ত্রিভুজ এঁকেছে যার  $QR = 3.5$ সেমি.,  $\angle PQR = 90^\circ$  এবং  $PR = 4.5$ সেমি.

(iii) XYZ ত্রিভুজ এঁকেছে যার  $\angle XYZ = 120^\circ$ ,  $\angle YZX = 30^\circ$  এবং  $YZ = 3$ সেমি।



দেখছি (i) নং ত্রিভুজটি  
সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ।

(i) নং ত্রিভুজ অর্থাৎ  
সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ ABC-এর  
পরিবৃত্ত আঁকলাম।

দেখছি, ABC সূক্ষ্মকোণী  
ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র  
ত্রিভুজকার ক্ষেত্রটি  [ভিতরে / বাহিরে] আছে।

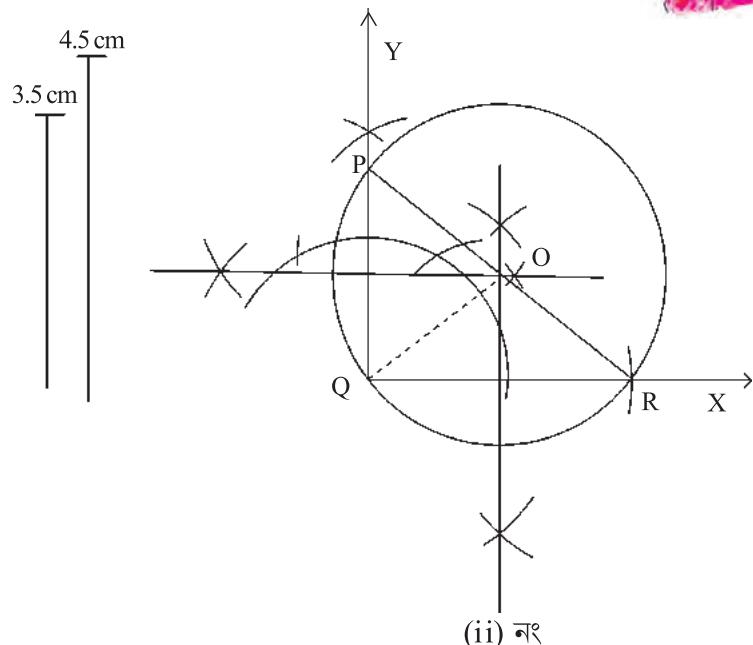
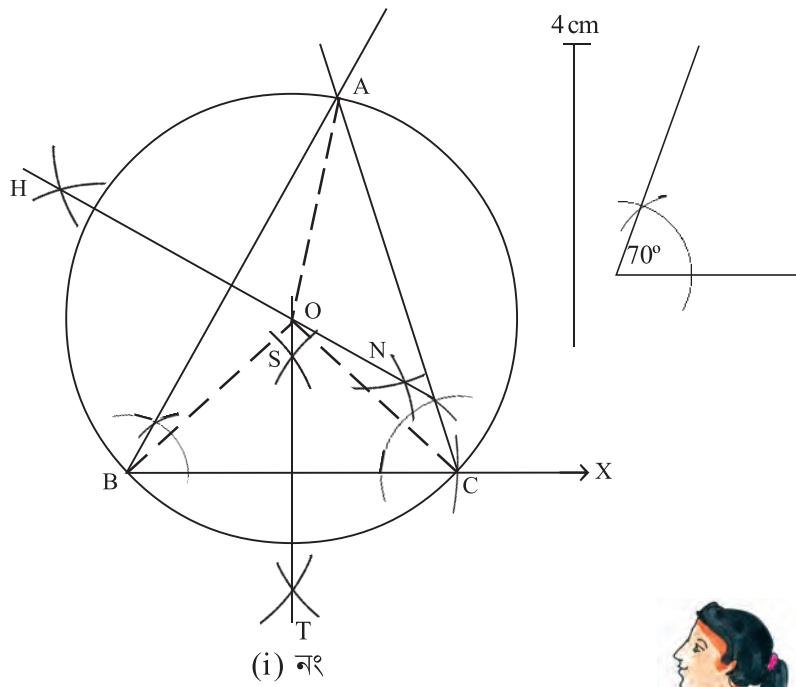
অন্য যে-কোনো সূক্ষ্মকোণী  
ত্রিভুজের পরিবৃত্ত এঁকে দেখছি  
পরিকেন্দ্রটি ত্রিভুজকার  
ক্ষেত্রটির ভিতরে আছে।

### [নিজে করি]

জাহিরের আঁকা (ii) নং  
ত্রিভুজটি  কোণী  
ত্রিভুজ।

আমি (ii) নং ত্রিভুজ অর্থাৎ  
PQR সমকোণী ত্রিভুজের  
পরিবৃত্ত আঁকলাম।

দেখছি, PQR সমকোণী  
ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O  
অতিভুজের উপরে আছে  
এবং অতিভুজের   
বিন্দুতে আছে কারণ  $PO =$   
 $OR$  [যেখানে O,  
 $\triangle PQR$ -এর পরিকেন্দ্র]



তাহলে কি সমকোণী ত্রিভুজের

পরিকেন্দ্র বের করার জন্য দুটো বাহুর লম্বসমদ্বিখণ্ডক আঁকতে হবে।

যেহেতু সমকোণী ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র অতিভুজের মধ্যবিন্দু তাই অতিভুজকে সমদ্বিখণ্ডিত করলেই পরিকেন্দ্র পাব। যেমন PQR সমকোণী ত্রিভুজটির PR বাহুর লম্বসমদ্বিখণ্ডক আঁকলে পরিকেন্দ্র O পাব।

অন্য যে-কোনো সমকোণী ত্রিভুজের পরিবৃত্ত এঁকে দেখছি পরিকেন্দ্রটি ত্রিভুজের অতিভুজের  
মধ্যবিন্দু। [নিজে করি]

জাহিরের আঁকা (iii) নং ত্রিভুজটি

কোণী ত্রিভুজ।

আমি (iii) নং ত্রিভুজ অর্থাৎ  $XYZ$  স্থূলকোণী ত্রিভুজের পরিবৃত্ত আঁকলাম।

দেখছি,  $XYZ$  স্থূলকোণী ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র  $O$  ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রটির  [ভিতরে / বাহিরে] আছে।

অন্য যে-কোনো স্থূলকোণী ত্রিভুজের পরিবৃত্ত এঁকে দেখছি পরিকেন্দ্রটি ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রটির বাহিরে আছে। [নিজে করি]

$\therefore$  পেলাম, (i) কোনো ত্রিভুজ সূক্ষ্মকোণী, সমকোণী বা স্থূলকোণী হলে পরিকেন্দ্র যথাক্রমে ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রটির , অতিভুজের উপরে বা ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রটির  অবস্থিত হবে।

(ii) সমকোণী ত্রিভুজে অতিভুজের মধ্যবিন্দুই পরিকেন্দ্র।

আমি একটি ত্রিভুজ  $ABC$  অঙ্কন করেছি যার  $AB = 3.5$  সেমি.,  $\angle BAC = 60^\circ$  এবং  $\angle ABC = 75^\circ$

আমার বন্ধু সাহানা আমার আঁকা  $ABC$  ত্রিভুজে  $\Delta ABD$  অঙ্কন করল যার  $\angle BAD = 90^\circ$ ,  $\angle ABD = 45^\circ$  এবং  $AB$  বাহুর যে পার্শ্বে  $C$  বিন্দু আছে  $D$  বিন্দুও সেই পার্শ্বেই আছে।

আমি সমকোণী ত্রিভুজ  $ABD$ -এর পরিবৃত্ত অঙ্কন করে দেখি  $C$  বিন্দু দিয়ে যায় কিনা। [নিজে করি]

**উত্তর সংকেত :**  $DB$  অতিভুজের মধ্যবিন্দু  $O$  নির্ণয় করি ও  $O$ -কে কেন্দ্র করে  $DO$  রেখাখণ্ডের দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্দের বৃত্ত অঙ্কন করে  $\Delta ABD$ -এর পরিবৃত্ত অঙ্কন করি।

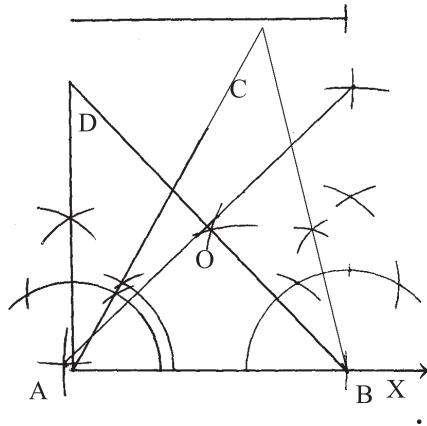
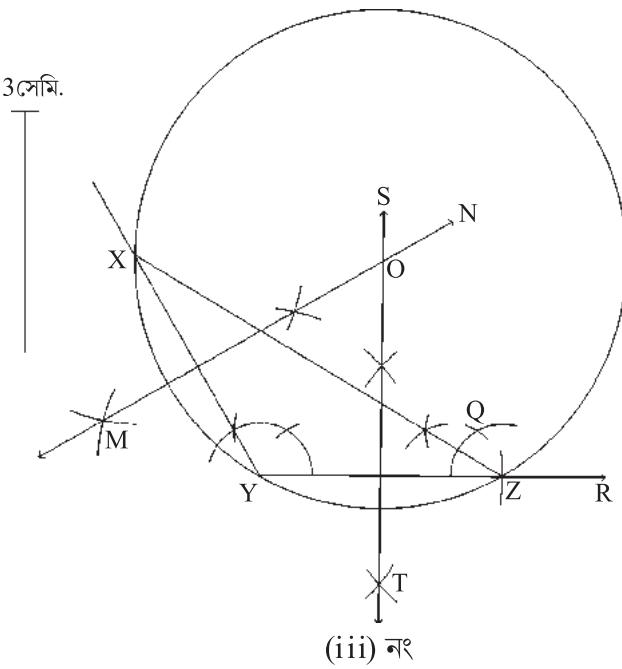
দেখছি,  $\Delta ABD$ -এর পরিবৃত্ত  $\Delta ABC$ -এর  $C$  বিন্দুগামী।

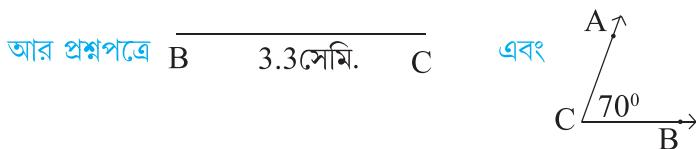
কিন্তু কেন  $\Delta ABD$  ও  $\Delta ABC$ -এর পরিবৃত্ত একই বৃত্ত পেলাম ত্রিভুজের কোণ মেপে যুক্তি দিয়ে লিখি। [নিজে লিখি]

প্রয়োগ : 1.  $ABC$  একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করি যার  $BC = 6.5$ সেমি.,  $\angle ABC = 60^\circ$  এবং  $\angle ACB = 70^\circ$

ত্রিভুজটি অঙ্কন করার সময় আমরা স্কেলের সাহায্যে 6.5সেমি. সরলরেখাখণ্ড ও চাঁদার সাহায্যে  $70^\circ$  কোণ আগে এঁকে নিই কেন? আবার পেনসিল কম্পাসের সাহায্যে ত্রিভুজটির  $60^\circ$  কোণ আঁকি কেন?

সম্পাদ্য করার সময় আমাদের কাছে চাঁদা বা নির্দিষ্ট দাগ চিহ্নিত স্কেল থাকে না। অর্থাৎ কোণ এবং সরলরেখাখণ্ড আঁকার জন্য আমাদের কাছে কেবলমাত্র পেনসিল কম্পাস ও দাগ ছাড়া স্কেল এবং পেনসিল থাকে।



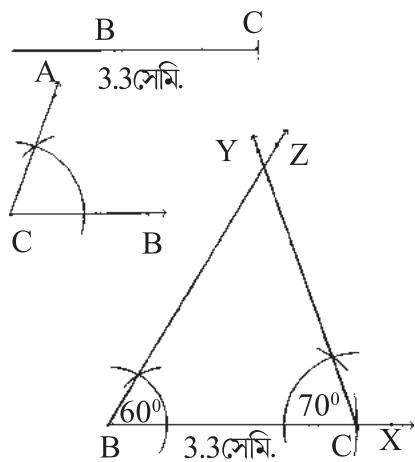


এঁকে দেওয়া থাকে।

যে কোণগুলি পেনসিল কম্পাসের সাহায্যে আঁকা যায় সেগুলি আঁকা থাকে না।

সুতরাং প্রশ্নপত্রে আঁকা  $BC$  রেখাখণ্ডের দৈর্ঘ্যের সমান করে  $BX$  রশি থেকে  $3.3\text{সেমি.}$  কেটে নেওয়া হয় এবং প্রশ্নপত্রে আঁকা  $\angle ACB$ -এর সমান করে  $BC$  রেখাখণ্ডের  $C$  বিন্দুতে  $\angle YCB = 70^\circ$  আঁকা হয়। তারপর পেনসিল কম্পাসের সাহায্যে  $B$  বিন্দুতে  $60^\circ$  কোণ  $\angle ZBC$  আঁকা হয়।  $CY$  ও  $BZ$  পরস্পরকে  $A$  বিন্দুতে ছেদ করে। এভাবে নির্দিষ্ট ত্রিভুজ  $ABC$  অঙ্কন করা হয়।

যেহেতু প্রশ্নপত্রে  $3.3\text{সেমি.}$  দৈর্ঘ্যের সরলরেখাখণ্ড ও  $70^\circ$  পরিমাপের কোণ প্রশ্নপত্রে আঁকা থাকে না তাই আমাদের ওই দুটি যথাকৰ্ম স্কেল ও চাঁদার সাহায্যে এঁকে নিতে হলো।



### কষে দেখি 11.1

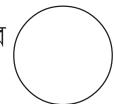
- নিম্নলিখিত ত্রিভুজগুলি অঙ্কন করি। প্রতিটি ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কন করে প্রতিক্ষেত্রে পরিকেন্দ্রের অবস্থান লিখি ও পরিব্যাসার্ধের [অর্থাৎ পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য] দৈর্ঘ্য মেপে লিখি।  
[প্রতিক্ষেত্রে কেবলমাত্র অঙ্কন চিহ্ন দিই]

  - একটি সমবাহু ত্রিভুজ যার প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য  $6$  সেমি।
  - একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যার ভূমির দৈর্ঘ্য  $5.2$  সেমি. এবং সমান বাহুর প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য  $7$  সেমি।
  - একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার সমকোণ সংলগ্ন বাহুদুটির দৈর্ঘ্য  $4$ সেমি. ও  $8$ সেমি।
  - একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার অতিভুজের দৈর্ঘ্য  $12$ সেমি. এবং অপর একটি বাহুর দৈর্ঘ্য  $5$ সেমি।
  - একটি ত্রিভুজ আঁকি যার একটি বাহুর দৈর্ঘ্য  $6.7$ সেমি. এবং বাহুসংলগ্ন কোণ দুটির পরিমাণ  $75^\circ$  ও  $55^\circ$ .
  - $ABC$  একটি ত্রিভুজ যার ভূমি  $BC = 5$ সেমি.,  $\angle ABC = 100^\circ$  এবং  $AB = 4$ সেমি.

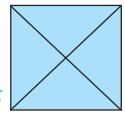
- $PQ = 7.5$  সেমি.  $\angle QPR = 45^\circ$ ,  $\angle PQR = 75^\circ$ ;  
 $PQ = 7.5$  সেমি.  $\angle QPS = 60^\circ$ ,  $\angle PQS = 60^\circ$ ;  
 $\Delta PQR$  ও  $\Delta PQS$  এমনভাবে অঙ্কন করি যে  $R$  ও  $S$  বিন্দু যেন  $PQ$ -এর একই দিকে অবস্থিত হয়।  $\Delta PQR$ -এর পরিবৃত্ত অঙ্কন করি এবং এই পরিবৃত্তের সাপেক্ষে  $S$  বিন্দুর অবস্থান তার ভিতরে, উপরে, না বাহিরে তা লক্ষ করে লিখি ও তারা ব্যাখ্যা খুঁজি।
- $AB = 5$  সেমি.  $\angle BAC = 30^\circ$ ,  $\angle ABC = 60^\circ$ ;  
 $AB = 5$  সেমি.  $\angle BAD = 45^\circ$ ,  $\angle ABD = 45^\circ$ ;

$\triangle ABC$  ও  $\triangle ABD$  এমনভাবে অঙ্কন করি যে, C ও D বিন্দু যেন AB-এর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত হয়।  $\triangle ABC$ -এর পরিবৃত্ত অঙ্কন করি এবং ওই পরিবৃত্তের সাপেক্ষে D বিন্দুর অবস্থান লিখি। এছাড়াও অন্য কী কী বৈশিষ্ট্য লক্ষ করছি বুঝে লিখি।

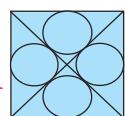
4. ABCD একটি চতুর্ভুজ অঙ্কন করি যার  $AB = 4\text{সেমি.}$ ,  $BC = 7\text{সেমি.}$ ,  $CD = 4\text{সেমি.}$ ,  $\angle ABC = 60^\circ$ ,  $\angle BCD = 60^\circ$ ;  $\triangle ABC$ -এর পরিবৃত্ত অঙ্কন করি এবং এর কী কী বৈশিষ্ট্য লক্ষ করছি বুঝে লিখি।
5. একটি আয়তক্ষেত্র PQRS অঙ্কন করি যার  $PQ = 4$  সেমি. এবং  $QR = 6$  সেমি.। আয়তক্ষেত্রের কর্ণদুটি অঙ্কন করি এবং অঙ্কন না করে  $\triangle PQR$ -এর পরিকেন্দ্র কোথায় হবে এবং পরিব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য কত হবে হিসাব করে লিখি।  
 $\triangle PQR$ -এর পরিবৃত্ত অঙ্কন করে যাচাই করি।
6. যে-কোনো বৃত্তাকার চিত্র প্রদত্ত হলে তার কেন্দ্র কীরূপে নির্ণয় করব? পাশের বৃত্তাকার চিত্রের কেন্দ্র নির্ণয় করি।



আমি জাহিরের বুমালে পেনসিল দিয়ে পাশের চিত্রটি এঁকে দিলাম।



উমা আমার আঁকা চিত্রের ত্রিভুজের মধ্যে পাশের মতো কতকগুলি বৃত্ত এঁকে একটি নকশা তৈরি করল।



- ③ দেখছি, উমার আঁকা নকশায় ত্রিভুজের মধ্যের বৃত্তগুলি ত্রিভুজের তিনটি বাহুকে স্পর্শ করে আছে। এইরকম বৃত্তকে কী বলা হয়?

ত্রিভুজের ভেতরে অবস্থিত বৃত্তটি যা ত্রিভুজের তিনটি বাহুকে স্পর্শ করে আছে, সেটি ওই ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত।

**সম্পাদ্য :** আমি একটি ত্রিভুজ আঁকি যার তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে  $4.5\text{সেমি.}$ ,  $5.5\text{সেমি.}$  এবং  $6\text{সেমি.}$ ।  
ত্রিভুজটির অন্তর্বৃত্ত আঁকার চেষ্টা করি।

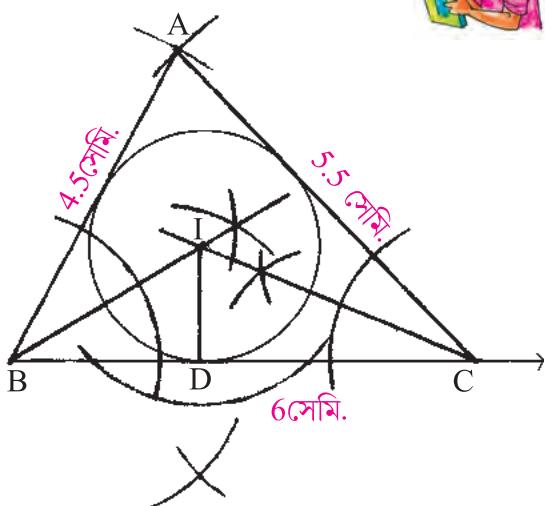
#### ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন

ABC একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করি, যার  $BC = 6\text{সেমি.}$ ,  $CA = 5.5\text{সেমি.}$  এবং  $AB = 4.5\text{সেমি.}$ ।  
 $\triangle ABC$ -এর অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন করি।



#### অঙ্কন প্রণালী :

- $\angle ABC$  ও  $\angle ACB$ -এর অন্তর্সমষ্টিখণ্ডক যথাক্রমে BI ও CI অঙ্কন করলাম যারা পরস্পরকে I বিন্দুতে ছেদ করল।
- I বিন্দু থেকে BC বাহুর উপর লম্ব অঙ্কন করলাম যা BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করল।
- I বিন্দুকে কেন্দ্র করে ID দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করলাম। ওই বৃত্তই হলো  $\triangle ABC$ -এর অন্তর্বৃত্ত।



৪ ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধকে কী বলে ?

কোনো ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্তের কেন্দ্রকে অন্তঃকেন্দ্র (Incentre) এবং ব্যাসার্ধকে অন্তঃব্যাসার্ধ (Inradius) বলা হয়।



কোনো সমবাহু ত্রিভুজের যে-কোনো কোণের অসম্মিলিখণ্ডক তার বিপরীত বাহুর লম্বসমিলিখণ্ডক হয়। সুতরাং সমবাহু ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র ও অন্তঃকেন্দ্র কোথায় অবস্থিত হবে অঙ্কন করে যাচাই করি। [নিজে করি]

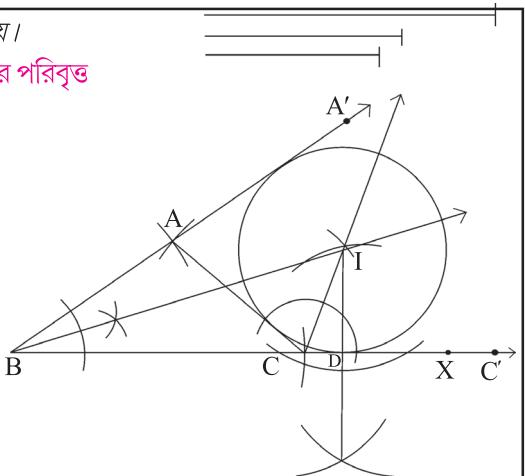
সমবাহু ত্রিভুজে পরিকেন্দ্র ও অন্তঃকেন্দ্র অঙ্কন করে দেখছি, সমবাহু ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র ও অন্তঃকেন্দ্র [একই / আলাদা] বিন্দু।

এই অংশটি (ত্রিভুজের বহির্বৃত্ত অঙ্কন) মূল্যায়নের অন্তর্ভুক্ত নয়।

**আমার বন্ধু সজল তার খাতায় নানান ধরনের ত্রিভুজ এঁকে তাদের পরিবৃত্ত**

**ও অন্তর্বৃত্ত আঁকার চেষ্টা করছে।**

সজল এক মজার কাণ্ড করল। সে একটি ত্রিভুজ ABC অঙ্কন করল যার BC = 4.5সেমি., CA = 2.7সেমি., AB = 3সেমি. BA ও BC বাহুকে যথাক্রমে A' ও C' পর্যন্ত বাড়িয়ে দিল।  $\angle ABC$  ও  $\angle ACC'$  এর সমান্তরাল অঙ্কন করল যারা পরস্পরকে I বিন্দুতে ছেদ করে। I বিন্দু থেকে বর্ধিত BC বাহুর উপর ID লম্ব অঙ্কন করল যা BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে। I বিন্দুকে কেন্দ্র করে ID দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধনিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করল যা বর্ধিত BC, CA ও বর্ধিত BA বাহুকে স্পর্শ করে।



এই ধরনের বৃত্তকে কী বলা হয় ?

কোনো ত্রিভুজের বাহিরে অবস্থিত এই ধরনের বৃত্ত যা ত্রিভুজের একটি বাহুকে এবং অপর দুটি বাহুর বর্ধিতাংশকে স্পর্শ করে আছে, তাকে ওই ত্রিভুজের বহির্বৃত্ত (excircle) বলা হয়। I বিন্দুকে বহিকেন্দ্র (excentre) এবং ব্যাসার্ধকে বহিব্যাসার্ধ (extradius) বলি।

আমি যে-কোনো একটি ত্রিভুজ আঁকি ও ওই ত্রিভুজের বহির্বৃত্ত অঙ্কনের চেষ্টা করি।



- একটি ত্রিভুজের কয়টি বহির্বৃত্ত ও কয়টি অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন করা যায় তা নিজে লিখি।
- একটি ত্রিভুজের কয়টি বিন্দু ত্রিভুজের বাহুগুলি থেকে সমন্বয়ত্বে তা নিজে লিখি।

কষে দেখি 11.2

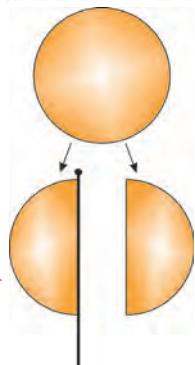
- নিম্নলিখিত ত্রিভুজগুলি অঙ্কন করি এবং প্রতিটি ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন করে অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য মেপে লিখি :
  - তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য 7 সেমি., 6 সেমি. ও 5.5 সেমি।
  - দুটি বাহুর দৈর্ঘ্য 7.6 সেমি., 6 সেমি. ও তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণের পরিমাপ  $75^\circ$
  - একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 6.2 সেমি. এবং ওই বাহু সংলগ্ন কোণ দুটির পরিমাপ  $50^\circ$  ও  $75^\circ$
  - একটি সমকোণী ত্রিভুজ, যার সমকোণ সংলগ্ন বাহু দুটির দৈর্ঘ্য 7 সেমি. ও 9 সেমি।
  - একটি সমকোণী ত্রিভুজ, যার অতিভুজের দৈর্ঘ্য 9 সেমি. এবং অপর একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 5.5 সেমি।
  - একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, যার ভূমির দৈর্ঘ্য 7.8 সেমি. এবং সমান বাহু দুটির প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য 6.5 সেমি।
  - একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, যার ভূমির দৈর্ঘ্য 10 সেমি. এবং সমান কোণের একটির পরিমাপ  $45^\circ$
  - 7 সেমি বাহুবিশিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন করি। ওই ত্রিভুজের পরিবৃত্ত ও অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন করে ক্ষেপের সাহায্যে পরিব্যাসার্ধের ও অন্তঃব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি এবং তাদের মধ্যে কোনো সম্পর্ক আছে কিনা লিখি।

প্রতি বছর আমরা মেলা থেকে তালপাতার হাতপাখা কিনে আনি। বাড়িতে ওই হাতপাখাগুলি ব্যবহার করি। কিন্তু স্কুলে যাওয়ার পথে ছোটো হাতপাখা থাকলে সুবিধা হয়। তাই আমরা ঠিক করেছি বাড়ির পড়ে থাকা পিচবোর্ডের সাহায্যে হাতপাখা তৈরি করব।



আমার ভাই-এর বন্ধু সুজিত অনেকগুলি ছোটো বড়ো গোলাকার পিচবোর্ডের চাকতি নিয়ে এসেছে।

আমার ভাই একটি পিচবোর্ডের গোলাকার চাকতি সমান দু-ভাঁজ করে দুটি অর্ধবৃত্তাকার চাকতি কেটে নিয়ে একটি চাকতির ব্যাস বরাবর একটি কাঠি আঠা ও কাগজ দিয়ে আটকে দিল ও পাশের ছবির মতো হাতপাখা তৈরি করল।



১) কিন্তু ওই কাঠিটিকে কেন্দ্র করে যখন ভাই অর্ধবৃত্তাকার চাকতিটি ঘোরাচ্ছে তখন অনেকটা বলের মতো ঘনবস্তু তৈরি হচ্ছে দেখছি। একে কী বলা হয়?

এইভাবে অর্ধবৃত্তাকার চাকতির ব্যাসকে অক্ষ করে চাকতিটি ঘোরালে বলের মতো দেখতে যে ঘনবস্তু দেখতে পাই সেটি **গোলক (Sphere)**।

বুঝেছি, গোলকের তল বলের তলের মতো।

∴ গোলকের  $\square$  টি তল এবং এটি একটি  $\square$  [ব্রুতল/সমতল]

আমরা সুজিতের আনা গোলাকার চাকতির সাহায্যে খুব সহজেই অনেকগুলি হাতপাখা তৈরি করলাম এবং প্রত্যেকে ১টি করে হাতপাখা নিয়ে নিলাম।

এবার আমরা ঠিক করেছি বাড়িতে ব্যবহৃত গোলক আকারের ঘনবস্তুগুলি খুঁজি। আমার বোন একটি বড়ো গোলাকার চামড়ার বল এনে দিল।

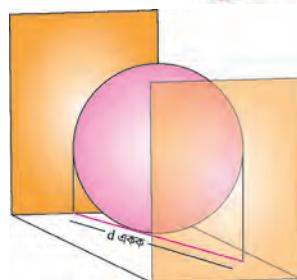
কিন্তু এই গোলাকার চামড়ার বল তৈরি করতে কতটা পরিমাণ চামড়া লেগেছে কীভাবে পাব?



অর্থাৎ একটি গোলকের ব্রুতলের বা সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল কীভাবে পাব? হাতেকলমে চেষ্টা করি।

হাতেকলমে গোলকের সমগ্রতলের বা ব্রুতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয়।

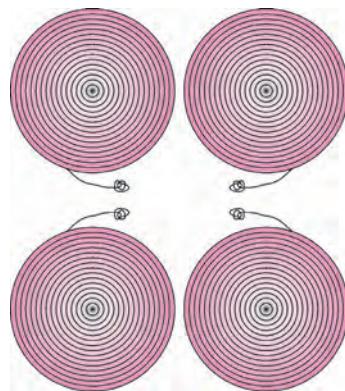
- (1) একটি গোলাকার বল নিলাম এবং দুটি উল্লম্ব পিচবোর্ডের মধ্যে পাশের ছবির মতো বলটি রেখে বলটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য ( $r$  একক) [যেখানে ব্যাসের দৈর্ঘ্য ( $d$  একক)] নির্ণয় করলাম।
- (2) বলটির উপরে একটি পিন আটকে দিলাম।
- (3) এবার পিনটিতে দড়ি আটকে পাশের ছবির মতো এমনভাবে জড়িয়ে দিলাম যাতে কোনো অংশ ফাঁকা না থাকে এবং দড়ির কোনো অংশ জড়ানো দড়ির উপর না থাকে।



- (4) এবার দড়ির শুরু ও শেষ বিন্দু দুটি চিহ্নিত করলাম এবং দড়িটি খুলে  
এই বিন্দুদুটির মধ্যবর্তী দূরত্ব ( $l$ ) মাপলাম।
- (5) মোটা সাদা আর্টপেপারে  $r$  একক দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের 4টি বৃত্ত অঙ্কন  
করলাম।
- (6) এবার প্রতিটি বৃত্ত গুই একই রকম দড়ি দিয়ে পাশের ছবির মতো  
ভরাট করলাম।

মেপে দেখছি, প্রতিটি বৃত্ত ভরাট করতে  $a$  দৈর্ঘ্যের দড়ি লেগেছে।

আবার দেখছি,  $l = 4a$



$$\begin{aligned}\therefore \text{গোলকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল} &= 4 \times (\text{একক দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের বৃত্তের ক্ষেত্রফল}) \\ &= 4 \times \pi r^2 \text{ বর্গ একক} = 4\pi r^2 \text{ বর্গ একক}\end{aligned}$$

$\therefore$  হাতেকলমে পেলাম

গোলকের বক্রতলের বা সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল (Curved Surface or Whole Surface Area)  $= 4\pi r^2$

বুঝেছি,  $r$  একক দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের চামড়ার বল তৈরি করতে  $4\pi r^2$  বর্গ একক চামড়া লাগবে।

প্রয়োগ : 1. যদি বলটির ব্যাস 42 সেমি. হয়, তবে বলটিতে কতটা চামড়া আছে হিসাব করি।

$$\begin{aligned}\text{বলটির ব্যাস} &= 42 \text{ সেমি. } \therefore \text{বলটির ব্যাসার্ধ} = \frac{42}{2} \text{ সেমি.} = 21 \text{ সেমি.} \\ \therefore \text{বলটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল} &= 4\pi \times (21)^2 \text{ বর্গ সেমি.} \\ &= 4 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \text{ বর্গ সেমি.} \\ &= \boxed{\quad} \text{ বর্গ সেমি.}\end{aligned}$$



$\therefore$  বলটিতে 5544 বর্গ সেমি. চামড়া আছে।

প্রয়োগ : 2. লোহার পাতে তৈরি একটি গোলকের ব্যাস 14 সেমি.। গোলকটিকে রং করতে প্রতি বর্গ সেমি. 2.50 টাকা হিসাবে কত খরচ পড়বে হিসাব করি। [নিজে করি]

২ ওই গোলকাকার বলটি যদি নিরেট পাথরের বল হতো তবে ওই বলে কতটা পরিমাণ পাথর থাকবে কীভাবে পাবো?

গোলকের আয়তন নির্ণয়ের মাধ্যমে পাবো।

$$\text{গোলকের আয়তন} = \frac{4}{3} \pi r^3 \text{ ঘন একক} \text{ (যেখানে গোলকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য } r \text{ একক)}$$

বুঝেছি,  $r$  একক দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের নিরেট পাথরের বলে পাথর আছে  $= \frac{4}{3} \pi r^3$  ঘন একক।

প্রয়োগ : 3. 14 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসবিশিষ্ট গোলকাকার নিরেট পাথরের বলে কতটা পরিমাণ পাথর আছে হিসাব করে লিখি।

$$\text{গোলকাকার নিরেট পাথরের বলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য} = \frac{14}{2} \text{ সেমি.} = 7 \text{ সেমি.}$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{গোলকাকার নিরেট পাথরের বলে পাথর আছে} &= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 7^3 \text{ ঘন সেমি.} \\ &= \boxed{\quad} \text{ ঘন সেমি.}\end{aligned}$$



প্রয়োগ : 4. 0.7 ডেসিমি দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের কোনো পাথরের গোলকাকার বল চৌবাচ্চার জলে ডোবালে কতটা পরিমাণ জল অপসারিত হবে হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 5. যদি কোনো গোলকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 2464 বর্গ মিটার হয়, তবে ওই গোলকের আয়তন কত হবে হিসাব করি।

ধরি, গোলকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য  $r$  মিটার।

$$\text{শর্তানুসারে, } 4\pi r^2 = 2464$$

$$\text{বা, } 4 \times \frac{22}{7} \times r^2 = 2464$$

$$\text{বা, } r^2 = 2464 \times \frac{7}{22 \times 4} = 28 \times 7 = 7^2 \times 2^2$$

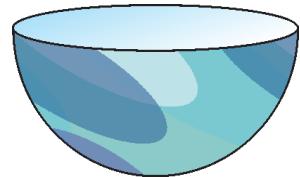
$$\therefore r = 14$$



$$\therefore \text{ওই গোলকের আয়তন} = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \times 14 \text{ ঘন মিটার}$$

$$= 11498.67 \text{ ঘন মিটার}$$

৩) আমার পড়ার ঘরের টেবিলে একটি Paperweight ছিল। আমার বোন Paperweight নিয়ে এসে স্কেল দিয়ে তার ব্যাসার্ধ মাপছে।



দেখছি ওই Paperweight টি একটি নিরেট অর্ধেক গোলকাকার ঘনবস্তু যার  $\square$  টি সমতল ও  $\square$  টি বক্রতল।

$$\begin{aligned} \text{এই অর্ধগোলকাকার ঘনবস্তুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল} &= \frac{1}{2} \times \text{গোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল} \\ &= \frac{1}{2} \times 4\pi r^2 \text{ বর্গ একক} \\ &= 2\pi r^2 \text{ বর্গ একক} \end{aligned}$$

[যেখানে অর্ধগোলকাকারের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য  $r$  একক]

এবং এই নিরেট অর্ধগোলকাকার ঘনবস্তুর সমতলের ক্ষেত্রফল  $= \pi r^2$  বর্গ একক

বুঝেছি, এই নিরেট অর্ধগোলকাকার ঘনবস্তুর ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য  $r$  একক হলে তার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল

$$= (2\pi r^2 + \pi r^2) \text{ বর্গ একক}$$

$$= 3\pi r^2 \text{ বর্গ একক}$$

$\therefore$  নিরেট অর্ধগোলকের (Solid Hemisphere) সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল  $= 3\pi r^2$  বর্গ একক

প্রয়োগ : 6. যদি একটি অর্ধগোলকাকার নিরেট ঘনবস্তুর ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 14 সেমি. হয়, তবে তার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

$$\begin{aligned} \text{সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল} &= 3 \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \text{ বর্গ সেমি.} \\ &= \boxed{\quad} \text{ বর্গ সেমি.} \end{aligned}$$



প্রয়োগ : 7. অর্ধগোলাকৃতি একটি বাটি তৈরি করতে যদি 173.25 বর্গ সেমি. পাত লাগে, তবে ওই বাটিটির মুখের ব্যাসের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

[উত্তর সংকেত : বাটিটি যেহেতু নিরেট নয় তাই শুধুমাত্র বক্রতলে পাত লাগবে]

৪) এবার একটি নিরেট অর্ধগোলকাকার পাথরের Paperweight-এ কতটা পরিমাণ পাথর আছে হিসাব করি।

ধরি, অর্ধগোলকাকার পাথরের Paperweight-এর ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য  $r$  একক

$$\begin{aligned}\therefore \text{নিরেট অর্ধগোলকের আয়তন} &= \frac{1}{2} \times \text{গোলকের আয়তন} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi r^3 \text{ ঘন একক} = \frac{2}{3} \pi r^3 \text{ ঘন একক} \\ \therefore \text{অর্ধগোলকের আয়তন} &= \frac{2}{3} \pi r^3 \text{ ঘন একক}\end{aligned}$$

প্রয়োগ : 8. যদি একটি পাথরের অর্ধগোলকাকার নিরেট ঘনবস্তুর ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 14 সেমি. হয়, তবে তাতে কতটা পরিমাণ পাথর আছে হিসাব করি।

নিরেট অর্ধগোলকাকার Paperweight-এ পাথর আছে  $= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \times 14$  ঘন সেমি. =  $\square$  ঘনসেমি.

প্রয়োগ : 9. দুটি গোলকাকার ঘনবস্তুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত 1:4 হলে, তাদের আয়তনের অনুপাত কী হবে হিসাব করে লিখি।

ধরি, দুটি গোলকাকার ঘনবস্তুর ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে  $r_1$  একক ও  $r_2$  একক

$$\text{শর্তানুসারে, } \frac{4\pi r_1^2}{4\pi r_2^2} = \frac{1}{4} \quad \text{বা, } \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \therefore \frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{2}$$



$$\therefore \frac{\text{প্রথম গোলকের আয়তন}}{\text{দ্বিতীয় গোলকের আয়তন}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r_1^3}{\frac{4}{3}\pi r_2^3} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$\therefore$  গোলকাকার ঘনবস্তুদুটির আয়তনের অনুপাত 1:8

প্রয়োগ : 10. যদি দুটি গোলকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত 1:2 হয়, তবে তাদের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 11. যদি একটি গোলকের আয়তন ও পৃষ্ঠাতলের ক্ষেত্রফলের সাংখ্যমান সমান হয়, তবে গোলকটির ব্যাসার্ধের সাংখ্যমান হিসাব করে লিখি।

ধরি, গোলকটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য  $r$  একক।

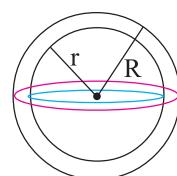
$$\therefore \text{গোলকটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল} = 4\pi r^2 \text{ বর্গ একক এবং আয়তন} = \frac{4}{3} \pi r^3 \text{ ঘন একক}$$

$$\text{প্রশ্নানুসারে, } \frac{4}{3} \pi r^3 = 4\pi r^2 \text{ (যেহেতু সাংখ্যমান সমান)} \therefore r = 3 [\because r \neq 0]$$



$\therefore$  গোলকটির ব্যাসার্ধের সাংখ্যমান 3.

৫) কোনো ফাঁপা গোলকের বহিঃব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য  $R$  একক এবং অন্তঃব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য  $r$  একক হলে, ওই ফাঁপা গোলকে কী পরিমাণ পদার্থ আছে অর্থাৎ ওই ফাঁপা গোলক তৈরি করতে কত পরিমাণ পদার্থ লেগেছে তার আয়তন কীভাবে পাব?



ওই ফাঁপা গোলক তৈরি করতে যে পরিমাণ পদার্থ লেগেছে তার আয়তন  $= \frac{4}{3} \pi (R^3 - r^3)$  ঘন একক।

**প্রয়োগ :** 12. 1 সেমি. ও 6 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধিশিষ্ট দুটি নিরেট গোলককে গলিয়ে 1 সেমি পুরু ফাঁপা গোলকে পরিণত করা হলে, নতুন গোলকটির বাইরের বক্রতলের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

ধরি, নতুন গোলকের বহিঃব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য  $r$  সেমি.

∴ ওই গোলকের অন্তঃব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য  $= (r-1)$  সেমি.

$$\text{প্রশ্নানুসারে, } \frac{4}{3} \pi r^3 - \frac{4}{3} \pi (r-1)^3 = \frac{4}{3} \pi (1)^3 + \frac{4}{3} \pi (6)^3$$

$$\text{বা, } \frac{4}{3} \pi \{r^3 - (r-1)^3\} = \frac{4}{3} \pi (1+216)$$

$$\text{বা, } r^3 - r^3 + 3r^2 - 3r + 1 = 217$$

$$\text{বা, } 3r^2 - 3r - 216 = 0$$

$$\text{বা, } r^2 - r - 72 = 0$$

$$\text{বা, } r^2 - 9r + 8r - 72 = 0$$

$$\text{বা, } r(r-9) + 8(r-9) = 0$$

$$\text{বা, } (r-9)(r+8) = 0$$

$$\text{হয়, } r - 9 = 0 \quad \therefore r = 9$$

$$\text{নতুবা, } r + 8 = 0 \quad \therefore r = -8$$

যেহেতু ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না, তাই  $r \neq -8$ ; সুতরাং  $r = 9$

∴ নতুন গোলকটির বহিঃব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য  $= 9$  সেমি.

∴ বাইরের বক্রতলের ক্ষেত্রফল  $= 4 \times \frac{22}{7} \times 9 \times 9$  বর্গ সেমি.  $= \boxed{\quad}$  বর্গ সেমি. [নিজে হিসাব করে লিখি]



### কষে দেখি | 12

- একটি গোলকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 10.5 সেমি. হলে, তার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।
- একটি চামড়ার বল তৈরি করতে প্রতি বর্গ সেমি. 17.50 টাকা হিসাবে 431.20 টাকা লেগেছে। বলটির ব্যাসের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।
- স্কুলে স্টপাট খেলার জন্য যে বলটি ব্যবহার করা হয় তার ব্যাসের দৈর্ঘ্য 7 সেমি. হলে, বলটিতে কত ঘন সেমি. লোহা আছে হিসাব করে লিখি।
- 28 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসবিশিষ্ট একটি নিরেট গোলক জলে সম্পূর্ণভাবে নিমজ্জিত করলে যে পরিমাণ জল অপসারিত করবে তা নির্ণয় করি।
- কোনো গোলকাকার গ্যাস বেলুন ফোলাবার সময়ে তার ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 7সেমি. থেকে 21 সেমি. হলে বেলুনটির পূর্বের ও পারের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত নির্ণয় করি।
- অর্ধগোলাকৃতি একটি বাটি তৈরি করতে  $127\frac{2}{7}$  বর্গ সেমি. পাত লেগেছে। বাটিটির মুখের ব্যাসের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।
- একটি নিরেট লোহার গোলার ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 2.1 সেমি। ওই গোলাটিতে কত ঘন সেমি. লোহা আছে তা হিসাব করে লিখি এবং ওই লোহার গোলার বক্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করি।

8. একটি নিরেট সিসার গোলকের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 14 সেমি। এই গোলকটি গলিয়ে 3.5 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের কতগুলি নিরেট গোলক তৈরি করা যাবে হিসাব করে লিখি।
9. 3 সেমি., 4 সেমি. ও 5 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের তিনটি নিরেট তামার গোলক গলিয়ে একটি নিরেট বড়ো গোলক তৈরি করা হলো। বড়ো গোলকটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।
10. একটি অর্ধগোলাকৃতি গন্ধুজের ভূমিতলের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 42 ডেসিমি। গন্ধুজটির উপরিতল রং করতে প্রতি বর্গ মিটার 35 টাকা হিসাবে কত খরচ পড়বে তা হিসাব করে লিখি।
11. একই ধাতুর পাত থেকে তৈরি দুটি ফাঁপা গোলকের ব্যাসের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 21 সেমি. এবং 17.5 সেমি। গোলকদুটি তৈরি করতে যে পরিমাণ ধাতুর পাত লেগেছে তার অনুপাত নির্ণয় করি।
12. একটি ধাতব গোলকের উপরিতল এমনভাবে কেটে নেওয়া হলো যে নতুন গোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল আগের গোলকের ঠিক অর্ধেক হয়। কেটে নেওয়া অংশের আয়তনের সঙ্গে অবশিষ্ট গোলকের আয়তনের অনুপাত নির্ণয় করি।
13. 14 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি ভূগোলকের অক্ষটির বক্রতলে 0.7 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট দুটি বৃত্তাকার ছিদ্র করা হয়েছে। ভূগোলকটির গোলাকার অংশের ধাতব পাতের ক্ষেত্রফল হিসাব করি।
14. 8 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের একটি নিরেট লোহার গোলককে গলিয়ে 1 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের কয়টি নিরেট গুলি তৈরি করা যাবে হিসাব করে লিখি।
15. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

**(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.):**

- (i)  $2r$  একক দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট নিরেট গোলকের আয়তন  
(a)  $\frac{32\pi r^3}{3}$  ঘনএকক   (b)  $\frac{16\pi r^3}{3}$  ঘনএকক   (c)  $\frac{8\pi r^3}{3}$  ঘনএকক   (d)  $\frac{64\pi r^3}{3}$  ঘনএকক
- (ii) দুটি নিরেট গোলকের আয়তনের অনুপাত 1:8 হলে, তাদের বক্রতলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত  
(a) 1:2   (b) 1:4   (c) 1:8   (d) 1:16
- (iii) 7সেমি দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি নিরেট অর্ধগোলকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল  
(a)  $588\pi$  বর্গ সেমি.   (b)  $392\pi$  বর্গ সেমি.   (c)  $147\pi$  বর্গ সেমি.   (d)  $98\pi$  বর্গ সেমি.
- (iv) দুটি নিরেট গোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত 16:9 হলে, তাদের আয়তনের অনুপাত  
(a) 64:27   (b) 4:3   (c) 27:64   (d) 3:4
- (v) একটি নিরেট গোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল ও 3 গুণ আয়তনের সাংখ্যমান সমান হলে, গোলকটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য  
(a) 1 একক   (b) 2 একক   (c) 3 একক   (d) 4 একক

**(B) নীচের বিবরিতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :**

- (i) একটি নিরেট গোলকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য দ্বিগুণ করলে গোলকটির আয়তন দ্বিগুণ হবে।

- (ii) দুটি অর্ধগোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত  $4:9$  হলে, তাদের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত হবে  $2:3$ .

**(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :**

- একটি তলবিশিষ্ট ঘনবস্তুর নাম \_\_\_\_\_।
- একটি নিরেট অর্ধগোলকের সমতলের সংখ্যা \_\_\_\_\_।
- একটি নিরেট অর্ধগোলকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য  $2r$  একক হলে সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল \_\_\_\_\_  $\pi r^2$  বর্গ একক।

**16. সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)**

- একটি নিরেট অর্ধগোলকের আয়তন এবং সমগ্রতলের ক্ষেত্রফলের সাংখ্যমান সমান। অর্ধগোলকটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য কত তা লিখি।
- একটি নিরেট গোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল একটি নিরেট লম্ববৃত্তাকার চোঙের বক্রতলের ক্ষেত্রফলের সমান। চোঙটির উচ্চতা এবং ব্যাসের দৈর্ঘ্য উভয়েই  $12$  সেমি। গোলকটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য কত তা লিখি।
- একটি নিরেট অর্ধগোলকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল এবং একটি নিরেট গোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল সমান। অর্ধগোলক এবং গোলকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত কত তা লিখি।
- একটি নিরেট গোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল =  $S$  এবং আয়তন =  $V$  হলে,  $\frac{S^3}{V^2}$ -এর মান কত তা লিখি। ( $\pi$  -এর মান না বসিয়ে)
- একটি গোলকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য  $50\%$  বৃদ্ধি করলে বক্রতলের ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি পায় তা লিখি।

# 13

## ভেদ VARIATION

আমি ও রাতুল ঠিক করেছি আমাদের থামের কোথায় স্কুল, বাজার, হাসপাতাল, ডাক্তারখানা, নদী, সমবায় সমিতি, বড়ো পুকুর, চাষের জমি ইত্যাদি আছে নির্দেশ করে একটি রাস্তার মানচিত্র তৈরি করব ও আমাদের ক্লাবগৰের সামনের একটি বড়ো বোর্ডে আটকে রাখব।

তাই আজ গ্রীষ্মের দুপুরে আমরা দুজনে ছোটো বড়ো নানান মাপের আর্টপেপার, পেন, পেনসিল, কাঁচি, আঠা ইত্যাদি নিয়ে কাজ শুরু করেছি।

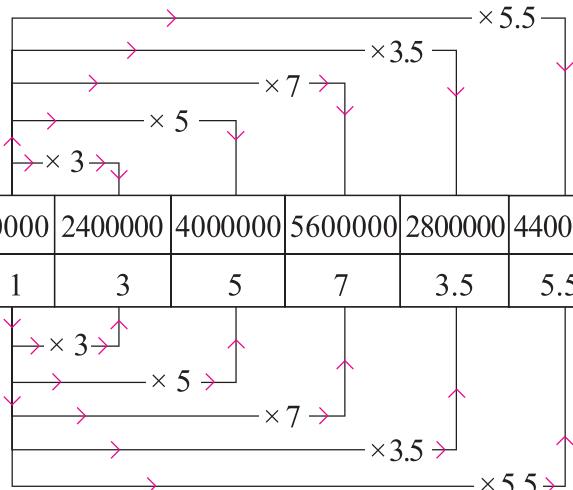


- ১ কিন্তু মানচিত্রে রাস্তার দৈর্ঘ্যের মাপ কীভাবে নেব?

থামের 8 কিমি. রাস্তার দৈর্ঘ্যের মানকে মানচিত্রে 1 সেমি. দৈর্ঘ্যের সমতুল্য দেখালাম।

তাহলে, থামের 24 কিমি. দৈর্ঘ্যের রাস্তা মানচিত্রে 3 সেমি. দৈর্ঘ্যের সমতুল্য হবে।

- ২ আমি নীচের ছকে থামের রাস্তার দৈর্ঘ্য =  $x$  সেমি. এবং মানচিত্রে রাস্তার দৈর্ঘ্য =  $y$  সেমি. ধরে কী পাই লিখি।



থামের রাস্তার দৈর্ঘ্য (x) [সেমি.]	800000	2400000	4000000	5600000	2800000	4400000
মানচিত্রে রাস্তার দৈর্ঘ্য (y) [সেমি.]	1	3	5	7	3.5	5.5

দেখছি, মানচিত্রের ক্ষেত্র অনুসারে থামের রাস্তার দৈর্ঘ্য প্রথমের যতগুণ হচ্ছে মানচিত্রে রাস্তার দৈর্ঘ্যও প্রথমের ততগুণ হচ্ছে।

$$\text{অর্থাৎ } \frac{800000}{1} = \frac{2400000}{3} = \frac{4000000}{5} = \dots\dots\dots = \frac{x}{y}$$

অর্থাৎ  $\frac{x}{y}$  -এর মানের কোনো পরিবর্তন হচ্ছে না।

ধরি,  $\frac{x}{y} = k$ ,  $[k \neq 0]$   $\therefore x = ky$ , [এখানে  $k$  অশূন্য ধ্রুবক]

- ৩ যদি দুটি পরস্পর সম্পর্কযুক্ত চলরাশি  $x$  ও  $y$  এমন হয় যে,  $\frac{x}{y} = k$  (অশূন্য ধ্রুবক) হয় তখন ওই দুটি চলরাশি কী সম্পর্কে আছে বলা হবে?

যদি দুটি পরস্পর সম্পর্কযুক্ত চলরাশি  $x$  ও  $y$  এমন হয় যে,  $\frac{x}{y} = k$  (অশূন্য ধ্রুবক) হয় তখন বলা হয় যে

$x$  ও  $y$  সরল ভেদে (Direct variation) আছে এবং লেখা হয়  $x \propto y$  এবং অশূন্য ধ্রুবকটিকে বলা হয় ভেদধ্রুবক (Variation Constant)।

যখন  $\frac{x}{y} = k$  (অশূন্য ধ্রুবক), এবং  $k > 0$ , তখন একটির মান বৃদ্ধি পেলে অপরটির অনুরূপ মানও বৃদ্ধি পায় এবং একটির মান হ্রাস পেলে অপরটির অনুরূপ মানও হ্রাস পায়।

যদি  $\frac{x}{y} = k$  (অশূন্য ধ্রুবক) এবং  $k < 0$  হয় তখন  $x$  ও  $y$  চলরাশি দুটির পরিবর্তন কীরকম হবে নিজে লিখি। রাস্তার দৈর্ঘ্য এবং মানচিত্রে রাস্তার দৈর্ঘ্য যথাক্রমে  $x$  ও  $y$  চলরাশি দুটি সরল ভেদে আছে অর্থাৎ  $x \propto y$ .



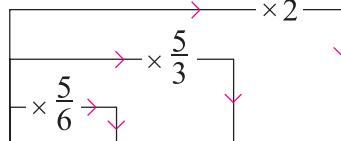
আমরা 60 সেমি. দৈর্ঘ্যের বাহুবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্রাকার আর্টপেপারে রাস্তার মানচিত্রটি আঁকার চেষ্টা করছি।

- ৪) এই 60 সেমি. দৈর্ঘ্যের বাহুবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রাকার আর্টপেপারের চারধার রঙিন কাগজ দিয়ে মুড়তে মোট কতটা দৈর্ঘ্যের রঙিন কাগজ লাগবে হিসাব করে লিখি।

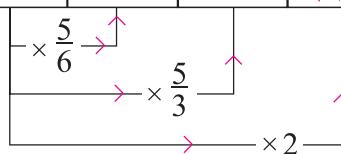
রঙিন কাগজ লাগবে =  $4 \times 60$  সেমি. দৈর্ঘ্যের = 240 সেমি. দৈর্ঘ্যের।

যদি বর্গক্ষেত্রাকার আর্টপেপারে একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 50 সেমি. হতো, তবে ওই আর্টপেপারের চারধার রঙিন কাগজ দিয়ে মুড়তে রঙিন কাগজ লাগবে  সেমি. দৈর্ঘ্যের। [নিজে লিখি]

আমি বর্গক্ষেত্রাকার আর্টপেপারের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য =  $x$  সেমি. ও ওই আর্টপেপারের পরিসীমা =  $y$  সেমি. ধরে, ছকটি পূরণ করি এবং  $x$  ও  $y$  কী সম্পর্কে আছে দেখি।



বর্গক্ষেত্রাকার আর্টপেপারের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য ( $x$ ) [সেমি.]	60	50	100	120
আর্টপেপারের পরিসীমা ( $y$ ) [সেমি.]	240	200	400	নিজে লিখি



এক্ষেত্রেও দেখছি বর্গক্ষেত্রাকার আর্টপেপারের বাহুর দৈর্ঘ্য  $x$  এবং পরিসীমা  $y$  দুটি পরস্পর সম্পর্কযুক্ত চলরাশি এমন হয় যে, সর্বদা  $\frac{x}{y} = \frac{1}{4}$  (অশূন্য ধূবক)

অর্থাৎ  $x$  ও  $y$  সরলভেদে আছে।



$\therefore x \propto y$  এবং এখানে ভেদ ধূবকের মান  $\frac{1}{4}$

- ৫) একইরকম পেনের সংখ্যা ( $x$ ) এবং পেনের মোট দাম ( $y$ ) সরলভেদে আছে কিনা বুঝে লিখি। [নিজে করি]

- ৬) আমি এইরকম দুই চলরাশি সংক্রান্ত 4টি উদাহরণ লিখি যেখানে চলরাশিগুলি পরস্পর সরলভেদে আছে। [নিজে করি]

দুটি চল  $A$  ও  $B$  সম্পর্কিত মানগুলি পেয়েছি:

A	90	30	12	15	156
B	60	20	8	10	104

প্রয়োগ : 1.  $A$  ও  $B$ -এর মধ্যে কোনো ভেদ সম্পর্ক থাকলে নির্ণয় করি ও ভেদ ধূবকের মান লিখি।

দেখছি  $A$ -এর মান বাড়লে বা কমলে  $B$ -এর মান বাড়ছে বা কমছে,

$$\text{আবার, } \frac{A}{B} = \frac{90}{60} = \frac{30}{20} = \frac{12}{8} = \frac{15}{10} = \frac{156}{104} = \frac{3}{2} \quad \therefore A = \frac{3}{2} B$$

$$\therefore A \propto B \text{ এবং এখানে ভেদ ধূবকের মান } \frac{3}{2}$$

যেহেতু ভেদধূবকের মান ধনাত্মক তাই  $A$ -চলের মান বাড়লে বা কমলে  $B$ -চলের অনুরূপ মান বাড়বে বা কমবে।



দুটি চলরাশি  $P$  ও  $Q$  সম্পর্কিত মানগুলি পেয়েছি,

P	35	49	56	14
Q	15	21	24	6

- ৭)  $P$  ও  $Q$ -এর মধ্যে কোনো ভেদ সম্পর্ক থাকলে নির্ণয় করি। [নিজে করি]

**প্রয়োগ : 2.** দোলকের [Pendulum-এর] দোলনকাল উহার দৈর্ঘ্যের বর্গমূলের সহিত সরলভেদে থাকে। যদি 1 মিটার দৈর্ঘ্যের কোনো দোলকের 1 সেকেন্ডে একবার পূর্ণ দোলন হয়, তবে যে দোলকের 2.5 সেকেন্ডে একবার পূর্ণ দোলন হয়, তার দৈর্ঘ্য কত হবে হিসাব করে দেখি।

ধরি,  $t =$  একবার পূর্ণ দোলনের সময় এবং  $l =$  দোলকের দৈর্ঘ্য।

∴ প্রদত্ত শর্তানুসারে,  $t \propto \sqrt{l}$

$$\therefore t = k\sqrt{l} \quad [k \text{ অশূন্য ভেদ ধূবক}]$$

$\therefore t = 1$  সেকেন্ড হলে  $l = 1$  মিটার

$$\text{সূতরাং}, 1 = k\sqrt{1} \quad \therefore k = 1 \quad \therefore \text{ভেদধূবকের মান } 1$$

$$\text{সূতরাং, পেলাম } t = \sqrt{l}$$

$$\therefore t = 2.5 \text{ সেকেন্ড হলে, } \sqrt{l} = 2.5$$

$$l = 6.25$$

∴ যে দোলকের 2.5 সেকেন্ডে একবার পূর্ণদোলন হয় তার দৈর্ঘ্য 6.25 মিটার।

**প্রয়োগ : 3.**  $y, x$  -এর বর্গের সঙ্গে সরলভেদে আছে এবং  $y = 9$  যখন  $x = 9$ ;  $y$ -কে  $x$  দ্বারা প্রকাশ করি এবং  $y = 4$  হলে,  $x$ -এর মান হিসাব করে লিখি।

$y, x$  -এর বর্গের সঙ্গে সরলভেদে আছে,

$$\text{সূতরাং, } y \propto x^2 \quad \therefore y = kx^2 \quad [\text{যেখানে } k \text{ অশূন্য ভেদ ধূবক}]$$

আবার,  $y = 9$  যখন  $x = 9$

$$\text{সূতরাং, } 9 = k(9)^2 \quad \therefore k = \frac{9}{9^2} = \frac{1}{9}$$

$$\text{সূতরাং, পেলাম } y = \frac{1}{9}x^2 \quad \text{(I)}$$

$$(I)-এ y = 4 \text{ বসিয়ে পাই, } 4 = \frac{1}{9}x^2$$

$$\text{বা, } x^2 = 36 \quad \therefore x = \pm 6$$

∴  $y = 4$  হলে  $x = \pm 6$

**প্রয়োগ : 4.**  $y, x$ -এর বর্গমূলের সঙ্গে সরলভেদে আছে এবং  $y=9$  যখন  $x=4$ ; ভেদধূবকের মান লিখি এবং  $y$ -কে  $x$  দ্বারা প্রকাশ করি।  $y=8$  হলে,  $x$ -এর মান কত হবে হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

আমি ও রাতুল যখন গ্রামের রাস্তার মানচিত্র তৈরি করতে ব্যস্ত, আমার দিদিমা একটি স্টিলের টিফিন বাক্সে অনেকগুলি নারকেলের নাড়ু আমাদের জন্যে পাঠিয়ে দিলেন।

8 গুনে দেখছি টিফিন বাক্সে 24 টি নারকেলের নাড়ু আছে। দুজনে না ভেঙে সমান ভাগে ভাগ করে নেব। প্রত্যেকে কতগুলি পাব দেখি।

আমরা প্রত্যেকে  $24 \div 2$  টি = 12 টি নাড়ু পাব।

কিন্তু শিবালীও আমাদের সঙ্গে এই কাজে যোগ দিল। তাই আমরা এখন 3 জনে 24 টি নাড়ু সমান ভাগে ভাগ করে নেব। এখন প্রত্যেকে পাব  $\boxed{\quad}$  টি নাড়ু।

কিন্তু আরও 3 জন বন্ধুর ক্লাবঘরের আসার কথা ছিল। ওরা যদি আসে আমরা মোট 6 জন হব।

তাই 6 জনে 24 টি নাড়ু সমান ভাগে ভাগ করে নিলে প্রত্যেকে পাব  $\boxed{\quad}$  টি নাড়ু।



- ৯) আমাদের দিদিমার পাঠানো 24 টি নারকেলের নাড়ু বিভিন্ন সংখ্যক বন্ধুদের মধ্যে সমান ভাগে ভাগ করে খেলে প্রত্যেকে কতগুলি পার নীচের ছকে লিখি।

বন্ধুদের সংখ্যা (x)	2	3	6	4
প্রত্যেকের পাওয়া নারকেলের নাড়ুর সংখ্যা (y)	12	8	4	<input type="text"/>

∴ দেখছি মোট নারকেল নাড়ুর সংখ্যা অপরিবর্তিত থাকলে বন্ধুদের সংখ্যা বাড়লে বা কমলে প্রত্যেকের পাওয়া নারকেল নাড়ুর সংখ্যা যথাক্রমে কমবে বা বাঢ়বে। দেখছি  $2 \times 12 = 3 \times 8 = 6 \times 4 = 4 \times 6 = x \times y$ .

অর্থাৎ  $x \times y$ -এর মানের কোনো পরিবর্তন হচ্ছে না। ধরি,  $x \times y = k$  [যেখানে k অশূন্য ধ্রুবক]।

- ১০) যদি দুটি পরস্পর সম্পর্কযুক্ত চলরাশি x ও y এমন হয় যে,  $xy = k$  (অশূন্য ধ্রুবক) হয়, তখন ওই দুটি চলরাশি কী সম্পর্কে আছে বলা হবে?

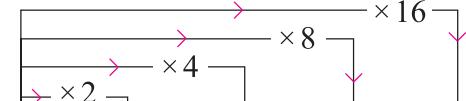
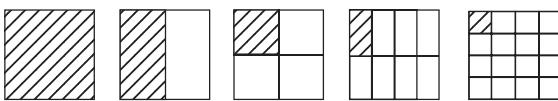
যদি দুটি পরস্পর সম্পর্কযুক্ত চলরাশি x ও y এমন হয় যে সর্বদা,  $xy = k$  (অশূন্য ধ্রুবক) হয়, তখন বলা হয় যে x ও y ব্যস্ত ভেদে (Inverse variation) আছে এবং লেখা হয়  $x \propto \frac{1}{y}$  এবং অশূন্য ধ্রুবকটিকে বলা হয় ভেদধ্রুবক (Variation Constant)।

যখন  $xy = k$  (অশূন্য ধ্রুবক), এবং  $k > 0$ , তখন একটির মান বৃদ্ধি পেলে অপরটির অনুরূপ মান হ্রাস পায় এবং একটির মান হ্রাস পেলে অপরটির অনুরূপ মান বৃদ্ধি পায়।

যদি  $xy = k$  (অশূন্য ধ্রুবক), এবং  $k < 0$ , হয় তখন x ও y চলরাশি দুটির পরিবর্তন কীরকম হবে নিজে লিখি।

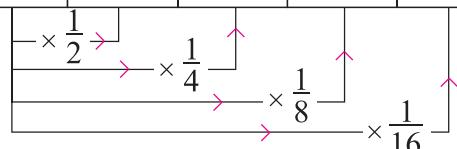
নাড়ুর সংখ্যা ও বন্ধুদের সংখ্যা যথাক্রমে x ও y চলরাশি দুটি ব্যস্ত ভেদে আছে, অর্থাৎ  $x \propto \frac{1}{y}$

- ১১) আমার বন্ধু শাবিনা 50 সেমি. দৈর্ঘ্যের বাহুবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রাকার অনেকগুলি আর্টপেপার ভাঁজ করে কতগুলি সমান ভাগে ভাগ করল। বাকি বন্ধুরা ওই আর্টপেপারের বিভিন্ন অংশে আঁকবে এবং ক্লাবঘরের বোর্ডে আটকে রাখবে। আমি শাবিনার ভাঁজ করা আর্টপেপারগুলি দেখি এবং বিভিন্ন অংশের ক্ষেত্রফল নীচের ছকে লেখার চেষ্টা করি।



বর্গক্ষেত্রাকার আর্টপেপারের অংশ (x)	1	2	4	8	16
প্রতিটি ভাঁজ করা অংশের ক্ষেত্রফল (y) [বর্গ সেমি.]	2500	1250	625	312.5	নিজে লিখি

দেখছি একই মাপের বর্গক্ষেত্রাকার কাগজের সমান অংশ সংখ্যা (x) বৃদ্ধির সঙ্গে প্রতিটি অংশের ক্ষেত্রফল (y) হ্রাস পাচ্ছে।



$$\therefore 1 \times 2500 = 2 \times 1250$$

$$= 4 \times 625 = 8 \times 312.5 = 16 \times 156.25 = x \times y$$

অর্থাৎ x × y এর মানের কোনো পরিবর্তন হচ্ছে না।

$$\therefore x \propto \frac{1}{y} \text{ এবং এখানে ভেদ ধ্রুকের মান } 2500.$$

প্রয়োগ : ৫. আমি 36 টি বোতাম আয়তাকারে সাজাই এবং প্রতিক্ষেত্রে দৈর্ঘ্যে ও প্রস্থে থাকা বোতামের সংখ্যা ব্যস্ত ভেদে আছে কিনা বুঝে লিখি। [নিজে লিখি]



**প্রয়োগ : 6.** দুই চলরাশি সংক্রান্ত 2 টি উদাহরণ লিখি যেখানে চলরাশিগুলি পরস্পর ব্যন্তভেদে আছে। [নিজে লিখি]

**প্রয়োগ : 7.** x ও y দুটি চলের সম্পর্কিত মানগুলি পেয়েছি :

x	5	25	10	4	8
y	10	2	5	12.5	6.25

x ও y-এর মধ্যে কোনো ভেদ সম্পর্ক থাকলে নির্ণয় করি ও ভেদ ধূবকের মান নির্ণয় করি।

দেখছি,  $xy = 5 \times 10 = 25 \times 2 = 10 \times 5 = 4 \times 12.5 = 8 \times 6.25$

$\therefore xy = \text{ধূবক}$

$\therefore x \propto \frac{1}{y}$  এবং ভেদ ধূবকের মান 50.



**প্রয়োগ : 8.** দুটি চল x ও y সম্পর্কিত মানগুলি হলো :

x	3	2	6
y	18	27	9

x ও y-এর মধ্যে কোনো ভেদ সম্পর্ক থাকলে নির্ণয় করি। [নিজে করি]

**প্রয়োগ : 9.** আমাদের কারখানায় 63 দিনে নির্দিষ্ট পরিমাণ লোহার যন্ত্রপাতি তৈরির জন্য 42টি মেশিন দরকার। কিন্তু ওই একই পরিমাণ লোহার যন্ত্রপাতি 54 দিনে তৈরির জন্য কতগুলি মেশিন দরকার ভেদ সম্পর্ক গঠন করে হিসাব করি।

ধরি, দিন সংখ্যা = D এবং মেশিনের সংখ্যা = M

যেহেতু কাজের পরিমাণ নির্দিষ্ট রেখে, মেশিনের সংখ্যা বৃদ্ধি (হ্রাস) পেলে দিন সংখ্যা একই অনুপাতে হ্রাস (বৃদ্ধি) পায়। সুতরাং D ও M ব্যন্তভেদে আছে।

সুতরাং,  $D \propto \frac{1}{M}$   $\therefore D = \frac{k}{M}$  [k = অশূন্য ভেদ ধূবক]

D = 63 হলে, M = 42

সুতরাং,  $63 = \frac{k}{42}$

বা, k =  $63 \times 42$

$$\therefore D = \frac{63 \times 42}{M} \quad \text{(I)}$$

$\therefore$  (I) নং সমীকরণে D = 54 বসিয়ে পাই

$$54 = \frac{63 \times 42}{M}$$

$$\text{বা, } M = \frac{63 \times 42}{54} \quad \therefore M = 49$$

$\therefore$  একই পরিমাণ লোহার যন্ত্রপাতি 54 দিনে তৈরি করতে 49 টি মেশিন দরকার।



**প্রয়োগ : 10.** সমীরবাবু বাড়ি থেকে 60 কিমি./ঘণ্টা বেগে গাড়ি চালিয়ে 2 ঘণ্টায় স্টেশনে পৌঁছান। তিনি যদি 80 কিমি./ঘণ্টা বেগে গাড়ি চালাতেন, তবে বাড়ি থেকে কত সময়ে স্টেশনে পৌঁছাতেন। ভেদতত্ত্ব প্রয়োগ করে হিসাব করি। [নিজে করি]



[উত্তর সংকেত : নির্দিষ্ট দূরত্ব অতিক্রম করতে গতিবেগ ও প্রয়োজনীয় সময় ব্যন্ত ভেদে আছে।]

**প্রয়োগ : 11.** যদি  $x \propto y$  হয়, তবে কি  $y \propto x$  হবে? যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি।

**প্রমাণ :**  $x \propto y \therefore x = ky$  [ $k$  অশূন্য ভেদ ধূবক]

সূতরাং,  $y = \frac{1}{k}x = mx$ , যেখানে  $m = \frac{1}{k}$  একটি অশূন্য ভেদ ধূবক। যেহেতু  $k$  অশূন্য ধূবক।  $\therefore y \propto x$   
 $\therefore$  পেলাম  $x \propto y$  হলে,  $y \propto x$  হবে।



**প্রয়োগ : 12.** যদি  $x \propto y$  এবং  $y \propto z$  হয়, তবে প্রমাণ করি যে  $x \propto z$  হবে।

**প্রমাণ :**  $x \propto y \therefore x = ky$  এবং  $y \propto z$  সূতরাং,  $y = k'z$

এখানে  $k$  ও  $k'$  দুটি অশূন্য ভেদ ধূবক।

আবার,  $x = ky = k(k'z) = kk'z = mz$  [যেখানে,  $m = kk' =$  অশূন্য ধূবক]  $\therefore x \propto z$

**প্রয়োগ : 13.**  $x \propto y$  হলে, প্রমাণ করি যে  $x+y \propto x-y$  হবে।

**প্রমাণ :**  $x \propto y$  সূতরাং,  $x = ky$ , যেখানে  $k$  অশূন্য ভেদ ধূবক।

$$\therefore \frac{x+y}{x-y} = \frac{ky+y}{ky-y} = \frac{y(k+1)}{y(k-1)} = \frac{k+1}{k-1} = n \quad [\text{যেখানে, } n = \text{অশূন্য ধূবক}]$$

$$\therefore x+y = n(x-y) \quad \therefore x+y \propto x-y$$

**প্রয়োগ : 14.**  $x \propto y$  হলে, প্রমাণ করি যে  $x^n \propto y^n$  হবে।

**প্রমাণ :**  $x \propto y$  সূতরাং,  $x = ky$ , যেখানে  $k$  অশূন্য ভেদ ধূবক।

$$x^n = k^n y^n = k_1 y^n \quad [k_1 = k^n = \text{অশূন্য ধূবক}] \quad \therefore x^n \propto y^n$$



**প্রয়োগ : 15.**  $x+y \propto x-y$  হলে, প্রমাণ করি যে  $x \propto y$  হবে।

**প্রমাণ :**  $x+y \propto x-y$

$$\therefore x+y = k(x-y) \quad [\text{যেখানে, } k \text{ অশূন্য ভেদ ধূবক}]$$

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{k}{1}$$

$$\text{বা, } \frac{2x}{2y} = \frac{k+1}{k-1} \quad [\text{যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া প্রয়োগ করে}]$$

$$\text{বা, } \frac{x}{y} = k_1 \quad [\text{যেখানে, } k_1 = \frac{k+1}{k-1} = \text{অশূন্য ধূবক}]$$

$$\text{বা, } x = k_1 y \quad \therefore x \propto y$$

**প্রয়োগ : 16.**  $A^2 + B^2 \propto A^2 - B^2$  হলে, প্রমাণ করি যে,  $A \propto B$  [নিজে করি]

**প্রয়োগ : 17.**  $x \propto y$  এবং  $u \propto z$  হলে, প্রমাণ করি যে  $xu \propto yz$  এবং  $\frac{x}{u} \propto \frac{y}{z}$

**প্রমাণ :**  $x \propto y$  সূতরাং,  $x = k_1 y$

$$u \propto z \quad \text{সূতরাং, } u = k_2 z \quad [\text{যেখানে, } k_1 \text{ এবং } k_2 \text{ অশূন্য ভেদ ধূবক}]$$

$$\therefore xu = k_1 y \cdot k_2 z = k_1 k_2 yz = myz \quad [\text{যেখানে } m = k_1 k_2 = \text{অশূন্য ধূবক}]$$

$$\therefore xu \propto yz$$



$$\frac{x}{u} = \frac{k_1 y}{k_2 z} = \left( \frac{k_1}{k_2} \right) \frac{y}{z} = n \frac{y}{z} \quad [\text{যেখানে } n = \frac{k_1}{k_2} = \text{অশূন্য ধূবক}]$$

$$\therefore \frac{x}{u} \propto \frac{y}{z}$$

আমাদের বন্ধু অর্ক কিছু ত্রিভুজাকারক্ষেত্র কাগজ কেটে তৈরি করল।

এই ত্রিভুজাকারক্ষেত্রগুলির ভূমি ও উচ্চতার দৈর্ঘ্য মাপি ও তাদের ক্ষেত্রফল হিসাব করে নীচের ছকে লিখি।

ত্রিভুজের ভূমি (x) [সেমি.]	8	14	13	22
ত্রিভুজের উচ্চতা (y) [সেমি.]	10	7	15	12
ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল (A) [বর্গ সেমি.]	$\frac{1}{2} \times 8 \times 10$	$\frac{1}{2} \times 14 \times 7$	$\frac{1}{2} \times 13 \times 15$	$\frac{1}{2} \times 22 \times 12$

$$\text{পেলাম, } \frac{A}{x \times y} = \frac{\frac{1}{2} \times 8 \times 10}{8 \times 10} = \frac{\frac{1}{2} \times 14 \times 7}{14 \times 7} = \frac{\frac{1}{2} \times 13 \times 15}{13 \times 15} = \frac{\frac{1}{2} \times 22 \times 12}{22 \times 12} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore A \propto x \times y$$



- (12) এখানে দেখছি, একটি চলরাশি A দুটি চলরাশি x ও y-এর গুণফলের সঙ্গে সরলভেদে আছে। এই রকম ভেদকে কী বলা হবে?

যদি একটি চলরাশি অন্য একাধিক চলরাশির গুণফলের সঙ্গে সরলভেদে থাকে, তবে প্রথম চলরাশি অপর চলরাশিগুলির সঙ্গে যৌগিক ভেদে (Joint Variation) আছে বলা হয়।

- (13) যৌগিক ভেদের উপপাদ্য (কেবল বিবৃতি)

x, y, z তিনটি চল এবৃপ্ত যে x  $\propto$  y যখন z ধূবক এবং x  $\propto$  z যখন y ধূবক, তাহলে x  $\propto$  yz হবে, যখন y এবং z উভয়েই পরিবর্তিত হয়।

বুবোছি, এখানে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল (A), ত্রিভুজের ভূমি (x) ও উচ্চতা (y)-এর সঙ্গে যৌগিক ভেদে আছে।

আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে বয়েল ও চার্লসের সূত্রের সমন্বয় থেকে পেয়েছি,

$$PV = RT, R \text{ একটি অশূন্য ধূবক।}$$

$$\therefore V = R \cdot \frac{T}{P}$$

- (14) এখানে V কি T ও  $\frac{1}{P}$ -এর সঙ্গে যৌগিক ভেদে আছে?

$V = R \cdot \frac{T}{P}$  [R ধূবক]-এই সম্পর্ক থেকে বলতে পারি V, T এবং  $\frac{1}{P}$ -এর সঙ্গে যৌগিক ভেদে আছে।

কোনো একটি কাজের ক্ষেত্রে মোট উপার্জন, কাজে নিযুক্ত লোকসংখ্যা ও তাদের কাজের দিনের সংখ্যার সঙ্গে যৌগিক ভেদে আছে কিনা নিজে বুবো লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 18. যদি 5 জন কৃষক 12 দিনে 10 বিঘা জমির পাট কাটতে পারেন, তবে কতজন কৃষক 18 বিঘা জমির পাট 9 দিনে কাটতে পারবেন তা ভেদতত্ত্ব প্রয়োগ করে নির্ণয় করি।

ধরি, কৃষকের সংখ্যা = A

দিনের সংখ্যা = B

এবং জমির পরিমাণ = C

যেহেতু কৃষকের সংখ্যা জমির পরিমাণের সঙ্গে সরলভেদে থাকে যখন দিনের সংখ্যা স্থির থাকে।

$\therefore A \propto C$ , যখন B ধূবক

আবার, যেহেতু জমির পরিমাণ স্থির থাকলে কৃষকের সংখ্যা দিনের সংখ্যার সঙ্গে ব্যস্ত ভেদে থাকে।

$\therefore A \propto \frac{1}{B}$ , যখন C ধূবক।



∴ যৌগিক ভেদের উপপাদ্য অনুসারে,  $A \propto \frac{C}{B}$ , যখন B ও C উভয়েই পরিবর্তনশীল

$$\text{অর্থাৎ, } A = K \frac{C}{B} \quad [\text{যেখানে, } K \text{ অশূন্য ভেদ ধূবক}] \quad \text{_____ (I)}$$

প্রদত্ত,  $A = 5$ ,  $B = 12$  এবং  $C = 10$

$$(I) \text{ নং থেকে পাই, } 5 = K \frac{10}{12}$$

$$\text{বা, } K = \frac{5 \times 12}{10} \quad \therefore K = 6$$

$$\text{এবার (I) নং-এ } K\text{-এর মান বসিয়ে পাই, } A = 6 \frac{C}{B} \quad \text{_____ (II)}$$

$$B=9 \text{ ও } C=18 \text{ হলে, (II) নং থেকে পাই, } A = \frac{6 \times 18}{9} = 12$$

∴ নির্ণেয় কৃষকের সংখ্যা 12 জন।



**প্রয়োগ : 19.** যদি 5 জন লোক 9 দিনে 10 বিঘা জমি চাষ করতে পারেন, তবে 30 বিঘা জমি চাষ করতে 25 জন লোকের কতদিন সময় লাগবে ভেদতত্ত্ব প্রয়োগ করে নির্ণয় করি। [নিজে করি]

**প্রয়োগ : 20.** x, y-এর সঙ্গে সরলভেদে (যখন z ধূবক) এবং z-এর সঙ্গে ব্যস্তভেদে (যখন y ধূবক) এমনভাবে আছে যে  $y=4$ ,  $z=5$  হলে  $x=3$  হয়। যখন  $y=16$ ,  $z=25$  তখন x-এর মান নির্ণয় করি।

$x \propto y$ , যখন z ধূবক

$$x \propto \frac{1}{z}, \text{ যখন } y \text{ ধূবক}$$

$$\therefore x \propto \frac{y}{z}, \text{ যখন } y \text{ এবং } z \text{ উভয়েই পরিবর্তনশীল।}$$

$$\text{সূতরাং, } x = k \cdot \frac{y}{z} \quad [\text{যেখানে } k \text{ অশূন্য ভেদ ধূবক}] \quad \text{_____ (I)}$$

প্রদত্ত,  $x=3$ ,  $y=4$  এবং  $z=5$

$$\text{সূতরাং, (I) নং থেকে পাই, } 3 = k \cdot \frac{4}{5} \quad \therefore k = \frac{15}{4}$$

$$\text{এবার (I) নং-এ } k\text{-এর মান বসিয়ে পাই, } x = \frac{15y}{4z} \quad \text{_____ (II)}$$

যখন  $y=16$ ,  $z=25$  তখন (II) নং থেকে পাবো,

$$x = \frac{15 \times 16}{4 \times 25} \quad \therefore x = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$$

**প্রয়োগ : 21.** যদি  $\frac{x}{y} \propto x+y$  এবং  $\frac{y}{x} \propto x-y$  হয়, তবে দেখাই যে  $x^2-y^2$  = ধূবক।

$$\frac{x}{y} \propto x+y \quad \therefore \frac{x}{y} = k_1(x+y) \quad [\text{যেখানে } k_1 \text{ অশূন্য ভেদ ধূবক}]$$

$$\text{আবার, } \frac{y}{x} \propto x-y \quad \therefore \frac{y}{x} = k_2(x-y) \quad [\text{যেখানে } k_2 \text{ অশূন্য ভেদ ধূবক}]$$

$$\text{সূতরাং, } \frac{x}{y} \times \frac{y}{x} = k_1(x+y) \times k_2(x-y)$$

$$\text{বা, } 1 = k_1 k_2 (x^2 - y^2)$$

$$\text{বা, } (x^2 - y^2) = \frac{1}{k_1 k_2}$$

$$\therefore x^2 - y^2 = \text{ধূবক} \quad (\because k_1 \text{ এবং } k_2 \text{ ধূবক, } \therefore \frac{1}{k_1 k_2} \text{ ধূবক}) \quad [\text{প্রমাণিত}]$$



প্রয়োগ : 22.  $x^2 \propto yz$ ,  $y^2 \propto zx$  এবং  $z^2 \propto xy$  হলে, দেখাই যে ভেদ ধূবক তিনটির গুণফল = 1

$$x^2 \propto yz \quad \therefore x^2 = k_1 yz$$

$$\text{আবার, } y^2 \propto zx \quad \therefore y^2 = k_2 zx$$

$$\text{আবার, } z^2 \propto xy \quad \therefore z^2 = k_3 xy$$

যেখানে  $k_1$ ,  $k_2$  ও  $k_3$  অশূন্য ভেদ ধূবক।

$$\text{সুতরাং, } x^2 \times y^2 \times z^2 = k_1 yz \times k_2 zx \times k_3 xy$$

$$\text{বা, } x^2 y^2 z^2 = k_1 k_2 k_3 \cdot x^2 y^2 z^2$$

$$\therefore k_1 k_2 k_3 = 1 \quad [\text{প্রমাণিত}]$$



প্রয়োগ : 23.  $a \propto b$  এবং  $b \propto c$  হলে, প্রমাণ করি যে  $a^3 + b^3 + c^3 \propto 3abc$

$$a \propto b \quad \therefore a = k_1 b \quad [\text{যেখানে } k_1 \text{ অশূন্য ভেদ ধূবক}]$$

$$\text{আবার, } b \propto c \quad \therefore b = k_2 c \quad [\text{যেখানে } k_2 \text{ অশূন্য ভেদ ধূবক}]$$

$$\text{সুতরাং, } a = k_1 b = k_1 k_2 c$$

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3abc} = \frac{(k_1 k_2 c)^3 + (k_2 c)^3 + c^3}{3(k_1 k_2 c) \times (k_2 c) \times c} = \frac{c^3 (k_1^3 k_2^3 + k_2^3 + 1)}{3k_1 k_2^2 c^3} = \frac{k_1^3 k_2^3 + k_2^3 + 1}{3k_1 k_2^2} = \text{অশূন্য ধূবক}$$

$[\because k_1$  এবং  $k_2$  অশূন্য ভেদ ধূবক]

$$\therefore a^3 + b^3 + c^3 \propto 3abc$$

প্রয়োগ : 24.  $x \propto y$  এবং  $y \propto z$  হলে, প্রমাণ করি যে  $x^2 + y^2 + z^2 \propto xy + yz + zx$  [নিজে করি]

প্রয়োগ : 25. কোনো গোলকের আয়তন তার ব্যাসার্ধের ঘনের সঙ্গে সরলভেদে আছে। যদি 3 সেমি., 4 সেমি. ও 5 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের তিনটি নিরেট গোলককে গলিয়ে একটি নতুন নিরেট গোলক তৈরি করা হয় এবং গলানোর ফলে যদি আয়তনের কোনো পরিবর্তন না হয়, তবে নতুন গোলকটির ব্যাসের দৈর্ঘ্য ভেদতত্ত্ব প্রয়োগ করে নির্ণয় করি।

মনে করি,  $r$  সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধিষ্ঠ কোনো গোলকের আয়তন  $V$  ঘন সেমি.

$$\text{সুতরাং, } V \propto r^3$$

$$\therefore V = kr^3 \quad [\text{এখানে } k \text{ অশূন্য ভেদ ধূবক}]$$

$$\therefore 3 \text{ সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের গোলকের আয়তন} = k \times 3^3 \text{ ঘন সেমি.} = 27k \text{ ঘন সেমি.}$$

$$4 \text{ সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের গোলকের আয়তন} = k \times 4^3 \text{ ঘন সেমি.} = 64k \text{ ঘন সেমি.}$$

$$5 \text{ সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের গোলকের আয়তন} = k \times 5^3 \text{ ঘন সেমি.} = 125k \text{ ঘন সেমি.}$$

$$\text{প্রশ্নানুসারে, নতুন গোলকের আয়তন} (27k + 64k + 125k) \text{ ঘন সেমি.} = 216k \text{ ঘন সেমি.}$$

$$\text{যদি নতুন গোলকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য } R \text{ সেমি. হয়, তবে } k R^3 = 216k$$

$$\text{বা, } R^3 = 216$$

$$\text{বা, } R^3 = 6^3 \quad \therefore R = 6$$



$$\therefore \text{নতুন গোলকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য } 6 \text{ সেমি.}$$

$$\therefore \text{নতুন গোলকের ব্যাসের দৈর্ঘ্য } 6 \times 2 \text{ সেমি.} = 12 \text{ সেমি.}$$

**প্রয়োগ : 26.** একটি হস্টেলের ব্যয় আংশিক ধূবক ও আংশিক ওই হস্টেলবাসী লোকসংখ্যার সঙ্গে সরলভেদে আছে। লোকসংখ্যা 120 হলে ব্যয় 2000 টাকা হয় এবং লোকসংখ্যা 100 হলে ব্যয় 1700 টাকা হয়। ব্যয় 1880 টাকা হলে লোকসংখ্যা কত হবে হিসাব করে লিখি।

মনে করি, ব্যয় ও লোকসংখ্যা যথাক্রমে  $x$  টাকা এবং  $y$  জন।

ধরি,  $x = k_1 + B$ , যেখানে হস্টেলের ব্যয়ের ধূবক অংশ  $k_1$  এবং অপর অংশ  $B \propto y$   
 $\therefore B = k_2 y$ , যেখানে  $k_2$  অশূন্য ভেদ ধূবক।



শর্তানুসারে,  $x = k_1 + k_2 y$

$$y=120 \text{ হলে } x=2000 \text{ (প্রদত্ত)} \quad \therefore 2000 = k_1 + 120k_2 \quad (\text{I})$$

$$\text{আবার, } y=100 \text{ হলে } x=1700 \text{ (প্রদত্ত)} \quad \therefore 1700 = k_1 + 100k_2 \quad (\text{II})$$

(বিয়োগ করে পাই)  $300 = 20k_2$

$$\text{বা, } k_2 = \frac{300}{20} \quad \therefore k_2 = 15$$

সুতরাং, (II) থেকে পাই,  $1700 = k_1 + 100 \times 15$

$$\text{বা, } k_1 = 1700 - 1500$$

$$\therefore k_1 = 200$$

সুতরাং,  $x = 200 + 15y \quad (\text{III})$

$\therefore$  যখন  $x = 1880$  তখন (III) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$$1880 = 200 + 15y$$

$$\text{বা, } 15y = 1880 - 200$$

$$\text{বা, } 15y = 1680$$

$$\text{বা, } y = \frac{1680}{15} \quad \therefore y = 112$$

$\therefore$  হস্টেলের ব্যয় 1880 টাকা হলে লোকসংখ্যা হবে 112

**প্রয়োগ : 27.** গোলকের আয়তন গোলকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের ত্রিখাতের সঙ্গে সরলভেদে আছে। একটি নিরেট সিসার গোলকের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 14 সেমি। এই গোলকটি গলিয়ে 3.5 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের কতগুলি গোলক তৈরি করা যাবে তা ভেদতত্ত্ব প্রয়োগ করে নির্ণয় করি। (ধরি গলানোর আগে ও পরে আয়তন একই থাকে) [নিজে করি]



কবে দেখি | 13

1. দুটি A ও B-এর সম্পর্কিত মানগুলি

A	25	30	45	250
B	10	12	18	100

A ও B-এর মধ্যে কোনো ভেদ সম্পর্ক থাকলে তা নির্ণয় করি ও ভেদ ধূবকের মান লিখি।

2. x ও y দুটি চল এবং তাদের সম্পর্কিত মানগুলি

x	18	8	12	6
y	3	$\frac{27}{4}$	$\frac{9}{2}$	9

x ও y-এর মধ্যে কোনো ভেদ সম্পর্ক আছে কিনা বুঝে লিখি।

3. (i) বিপিনকাকুর ট্যাঙ্কি 25 মিনিটে 14 কিমি. পথ অতিক্রম করে। একই গতিবেগে ট্যাঙ্কি চালিয়ে 5 ঘণ্টায় তিনি কতটা পথ যাবেন তা ভেদতত্ত্ব প্রয়োগ করে হিসাব করি।
- (ii) আমাদের স্কুলের প্রথম শ্রেণির 24 জন শিশুর মধ্যে একবাক্স সন্দেশ সমান ভাগে ভাগ করে দিলাম এবং প্রত্যেকে 5 টি করে গোটা সন্দেশ পেল। যদি শিশুর সংখ্যা 4 জন কম হত, তবে প্রত্যেকে কতগুলি গোটা সন্দেশ পেত তা ভেদতত্ত্ব প্রয়োগ করে হিসাব করি।
- (iii) একটি পুরুর কাটতে 50 জন গ্রামবাসীর 18 দিন সময় লেগেছে। পুরুরটি 15 দিনে কাটতে হলে অতিরিক্ত কতজন লোককে কাজ করতে হবে তা ভেদতত্ত্ব প্রয়োগ করে হিসাব করি।
4. (i)  $y, x$ -এর বর্গমূলের সঙ্গে সরলভেদে আছে এবং  $y=9$  যখন  $x=9$ ;  $x$ -এর মান নির্ণয় করি যখন  $y=6$ .
- (ii)  $x, y$ -এর সঙ্গে সরলভেদে এবং  $z$ -এর সঙ্গে ব্যস্ত ভেদে আছে।  $y=4, z=5$  হলে  $x=3$  হয়। আবার  $y=16, z=30$  হলে,  $x$ -এর মান হিসাব করে লিখি।
- (iii)  $x, y$ -এর সঙ্গে সরলভেদে এবং  $z$ -এর সঙ্গে ব্যস্তভেদে আছে।  $y=5$  ও  $z=9$  হলে  $x=\frac{1}{6}$  হয়।  $x, y$  ও  $z$ -এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করি এবং  $y=6$  ও  $z=\frac{1}{5}$  হলে,  $x$ -এর মান হিসাব করে লিখি।
5. (i)  $x \propto y$  হলে, দেখাই যে,  $x+y \propto x-y$
- (ii)  $A \propto \frac{1}{C}$ ,  $C \propto \frac{1}{B}$  হলে, দেখাই যে,  $A \propto B$
- (iii) যদি  $a \propto b$ ,  $b \propto \frac{1}{c}$  এবং  $c \propto d$  হয়, তবে  $a$  ও  $d$ -এর মধ্যে ভেদ সম্পর্ক লিখি।
- (iv)  $x \propto y, y \propto z$  এবং  $z \propto x$  হলে, ভেদ ধূবক তিনিটির মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করি।
6.  $x+y \propto x-y$  হলে, দেখাই যে,
- (i)  $x^2+y^2 \propto xy$
- (ii)  $x^3+y^3 \propto x^3-y^3$
- (iii)  $ax+by \propto px+qy$  [যেখানে  $a, b, p, q$  অশূন্য ধূবক]
7. (i)  $a^2+b^2 \propto ab$  হলে, প্রমাণ করি যে,  $a+b \propto a-b$
- (ii)  $x^3+y^3 \propto x^3-y^3$  হলে, প্রমাণ করি যে,  $x+y \propto x-y$
8. 15 জন কৃষক 5 দিনে 18 বিঘা জমি চাষ করতে পারেন। ভেদতত্ত্ব প্রয়োগ করে 10 জন কৃষক 12 বিঘা জমি কতদিনে চাষ করতে পারবেন তা নির্ণয় করি।
9. গোলকের আয়তন গোলকের ব্যাসার্ধের ত্রিপাতির সঙ্গে সরলভেদে আছে।  $1\frac{1}{2}, 2$  এবং  $2\frac{1}{2}$  মিটার দৈর্ঘ্যের ব্যাসবিশিষ্ট তিনিটি নিরেট গোলককে গলিয়ে একটি নিরেট গোলক বানানো হলো। নতুন গোলকের ব্যাসের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি। (ধরি, গলানোর আগে ও পরে আয়তন একই থাকে)
10.  $y$  দুটি চলের সমষ্টির সমান, যার একটি  $x$  চলের সঙ্গে সরলভেদে এবং অন্যটি  $x$  চলের সঙ্গে ব্যস্তভেদে আছে।  $x=1$  হলে  $y=-1$  এবং  $x=3$  হলে  $y=5$ ;  $x$  ও  $y$ -এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করি।
11.  $a \propto b, b \propto c$  হলে দেখাই যে,  $a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3 \propto abc(a^3+b^3+c^3)$
12.  $x$  ডেসিমিটার গভীর একটি কৃপ খনন করার জন্য মোট ব্যয়ের এক অংশ  $x$ -এর সঙ্গে সরলভেদে এবং অপর অংশ  $x^2$ -এর সঙ্গে সরলভেদে পরিবর্তিত হয়। যদি 100 ডেসিমিটার এবং 200 ডেসিমিটার কৃপ খনন করার জন্য যথাক্রমে 5000 টাকা এবং 12000 টাকা ব্যয় হয়, তবে 250 ডেসিমিটার গভীর কৃপ খননের জন্য কত ব্যয় হবে হিসাব করে লিখি।

13. চোঙের আয়তন, ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের বর্গের এবং উচ্চতার সঙ্গে যৌগিক ভোদে আছে। দুটি চোঙের ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত  $2:3$  এবং তাদের উচ্চতার অনুপাত  $5:4$  হলে, ওদের আয়তনের অনুপাত নির্ণয় করি।
14. পাঁচলা প্রামের কৃষি সমবায় সমিতি একটি ট্রান্স্ট্র ক্রয় করেছে। আগে সমিতির 2400 বিঘা জমি 25 টি লাঙল দিয়ে চাষ করতে 36 দিন সময় লাগত। এখন অর্ধেক জমি কেবল ট্রান্স্ট্রটি দিয়ে 30 দিনে চাষ করা যায়। একটি ট্রান্স্ট্র কয়টি লাঙলের সমান চাষ করে তা ভোদত্ত্ব প্রয়োগ করে নির্ণয় করি।
15. গোলকের আয়তন তার ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের ত্রিখাতের সঙ্গে সরলভোদে পরিবর্তিত হয় এবং গোলকের পৃষ্ঠাতলের ক্ষেত্রফল তার ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের বর্গের সঙ্গে সরলভোদে পরিবর্তিত হয়।  
প্রমাণ করি যে, গোলকের আয়তনের বর্গ তার পৃষ্ঠাতলের ক্ষেত্রফলের ঘনের সঙ্গে সরলভোদে থাকবে।

#### 16. অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)

##### (A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q) :

- (i)  $x \propto \frac{1}{y}$  হলে, (a)  $x = \frac{1}{y}$  (b)  $y = \frac{1}{x}$  (c)  $xy = 1$  (d)  $xy = \text{অশূন্য ধূবক}$
- (ii) যদি  $x \propto y$  হয়, তখন (a)  $x^2 \propto y^3$  (b)  $x^3 \propto y^2$  (c)  $x \propto y^3$  (d)  $x^2 \propto y^2$
- (iii)  $x \propto y$  এবং  $y=8$  যখন  $x=2$ ;  $y=16$  হলে,  $x$ -এর মান (a) 2 (b) 4 (b) 6 (d) 8
- (iv)  $x \propto y^2$  এবং  $y=4$  যখন  $x=8$ ;  $x=32$  হলে,  $y$ -এর ধনাত্মক মান (a) 4 (b) 8 (c) 16 (d) 32
- (v) যদি  $y-z \propto \frac{1}{x}$ ,  $z-x \propto \frac{1}{y}$  এবং  $x-y \propto \frac{1}{z}$  হয়, তাহলে তিনটি ভোদ ধূবকের সমষ্টি  
(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) 2

##### (B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

- (i)  $y \propto \frac{1}{x}$  হলে,  $\frac{y}{x} = \text{অশূন্য ধূবক}$
- (ii)  $x \propto z$  এবং  $y \propto z$  হলে,  $xy \propto z$

##### (C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

- (i)  $x \propto \frac{1}{y}$  এবং  $y \propto \frac{1}{z}$  হলে,  $x \propto \underline{\hspace{2cm}}$
- (ii)  $x \propto y$  হলে,  $x^n \propto \underline{\hspace{2cm}}$
- (iii)  $x \propto y$  এবং  $x \propto z$  হলে,  $(y+z) \propto \underline{\hspace{2cm}}$

#### 17. সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)

- (i)  $x \propto y^2$  এবং  $y=2a$  যখন  $x=a$ ;  $x$  ও  $y$ -এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করি।
- (ii)  $x \propto y$ ,  $y \propto z$  এবং  $z \propto x$  হলে, অশূন্য ভোদ ধূবক তিনটির গুণফল নির্ণয় করি।
- (iii)  $x \propto \frac{1}{y}$  এবং  $y \propto \frac{1}{z}$  হলে,  $x$ ,  $z$ -এর সঙ্গে সরলভোদে না ব্যস্তভোদে আছে তা নির্ণয় করি।
- (iv)  $x \propto yz$  এবং  $y \propto zx$  হলে, দেখাই যে,  $z$  একটি অশূন্য ধূবক।
- (v) যদি  $b \propto a^3$  হয় এবং  $a$ -এর বৃদ্ধি হয়  $2:3$  অনুপাতে, তাহলে  $b$ -এর বৃদ্ধি কী অনুপাতে হয় তা নির্ণয় করি।

আমার দিদি আমাদের বাড়ির একতলার একটি ঘরে খাতা তৈরি করে বিক্রি করার ব্যাবসা করতে চায়। দিদির আরও দুই বন্ধু তীর্থ ও তনবির দিদির সঙ্গে এই ব্যবসায় যোগ দিতে চায়। তাই আমার দিদি, তীর্থ ও তনবির যথাক্রমে 10000 টাকা, 12000 টাকা ও 11000 টাকা দিয়ে এই খাতা বিক্রির ব্যবসা শুরু করল।



**১ এইভাবে একসঙ্গে একাধিক জন টাকা দিয়ে ব্যাবসা করাকে কী বলা হয়?**

দুই বা ততোধিক ব্যক্তি একত্রে মিলিত হয়ে যেসব সংগঠন গড়ে তুলে ব্যাবসা-বাণিজ্য করেন ‘অংশীদারি কারবার’ (Partnership business) তাদের মধ্যে অন্যতম। অংশীদারি কারবারে অংশীদারদের প্রত্যেকের দেয় অর্থই হচ্ছে অংশীদারগণের নিজস্ব মূলধন (Capital)।



একবছর শেষে দিদিদের ব্যবসায় 9900 টাকা লাভ হলো। কিন্তু এই লভ্যাংশ কীভাবে তারা ভাগ করে নেবে?

**২ অংশীদারি কারবার সাধারণত কয়েকটি নীতির উপর গড়ে ওঠে এবং অংশীদারগণ নিজেদের মধ্যে আলোচনার ভিত্তিতে সেগুলি নির্ধারণ করেন। সেগুলি হলো —**

(i) **মূলধন (Capital)** : মূলধনের মোট পরিমাণ অংশীদারগণ সমানভাবে ভাগ করে সংগ্রহ করেন অথবা সর্বসম্মত আনুপাতিক হারে মূলধন সংগ্রহ করেন।

(ii) **লভ্যাংশ বণ্টন (Distribution of profit)** : অংশীদারদের সর্বসম্মত সিদ্ধান্তের ভিত্তিতে লাভ

- সমান ভাগে ভাগ করে নিতে পারেন।
- মূলধনের পরিমাণের অনুপাতে ভাগ করে নিতে পারেন।
- সর্বসম্মত অন্য কোনো চুক্তি অনুযায়ী ভাগ করে নিতে পারেন।

যদি অংশীদারি চুক্তিতে লাভ বণ্টনের কোনো সুনির্দিষ্ট নীতি বলা না থাকে, তবে ধরে নিতে হবে যে, লাভ অংশীদারদের মূলধনের অনুপাতে বণ্টিত হবে।

(iii) **ব্যাবসা পরিচালনার সাম্মানিক ভাতা** : ব্যাবসা পরিচালনার ক্ষেত্রে অংশীদারদের প্রত্যেকে বা কেউ কেউ যদি সময় ও শ্রম দিয়ে থাকেন তবে তার জন্য তাদের কী হারে সাম্মানিক ভাতা দেওয়া হবে তা চুক্তির সময়েই নির্ধারিত থাকে। এই ভাতা প্রদানের পর লভ্যাংশ বণ্টন করা হয়।

**প্রয়োগ :** 1. আমার দিদি ও তার দুই বন্ধু মিলে যে অংশীদারি কারবার শুরু করেছে এবং বছরের শেষে লাভের টাকা কে কত পাবে তার জন্য প্রথমে অংশীদারদের মূলধনের অনুপাত নির্ণয় করতে হবে।

.: লভ্যাংশ বণ্টনের অনুপাত হবে,

দিদির টাকা : তীর্থের টাকা : তনবিরের টাকা = 10000 : 11000 : 12000 = 10 : 11 : 12

$$\therefore \text{লাভের } 9900 \text{ টাকার মধ্যে দিদি পাবে = } \frac{10}{10+11+12} \times 9900 \text{ টাকা} = [\square] \text{ টাকা}$$

$$\text{লাভের } 9900 \text{ টাকার মধ্যে তীর্থ পাবে = } \frac{11}{33} \times 9900 = 3300 \text{ টাকা}$$

$$\text{লাভের } 9900 \text{ টাকার মধ্যে তনবির পাবে = } \frac{12}{33} \times 9900 \text{ টাকা} = 3600 \text{ টাকা}$$



প্রয়োগ : 2. সুলেখা, জয়নাল ও শিবু যথাক্রমে 5000 টাকা, 4500 টাকা ও 7000 টাকা দিয়ে  
একটি ব্যাবসা শুরু করল। যদি বৎসরান্তে 11550 টাকা লাভ হয়ে থাকে, তবে লাভের টাকা কে  
কত পাবে হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]



প্রয়োগ : 3. আমাদের গ্রামের মিতাদিদি, সাহানাবিবি ও অমলকাকু যথাক্রমে 15000 টাকা, 10000 টাকা  
এবং 17500 টাকা মূলধন নিয়ে ‘জ্যাম-জেলির’ ব্যাবসা শুরু করেন। কিন্তু বছরের শেষে 4250 টাকা লোকসান  
হলো। কাকে কত টাকা লোকসানের পরিমাণ দিতে হবে হিসাব করে লিখি।

$$\text{অংশীদারি কারবারে মিতাদিদি, সাহানাবিবি ও অমলকাকুর মূলধনের অনুপাত} = 15000 : 10000 : 17500 \\ = 6 : 4 : 7$$

প্রত্যেক অংশীদার তাদের মূলধনের অনুপাতে লোকসানের অংশ দেবেন।

$$\therefore 4250 \text{ টাকা লোকসানের মধ্যে মিতাদিদি দেবেন} = \left( \frac{6}{6+4+7} \times 4250 \right) \text{ টাকা} = \boxed{\quad} \text{ টাকা}$$

$$4250 \text{ টাকা লোকসানের মধ্যে সাহানাবিবি দেবেন} = \left( \frac{4}{17} \times 4250 \right) \text{ টাকা} = \boxed{\quad} \text{ টাকা}$$

$$4250 \text{ টাকা লোকসানের মধ্যে অমলকাকু দেবেন} = \boxed{\quad} \text{ টাকা} \quad [\text{নিজে হিসাব করে লিখি}]$$

প্রয়োগ : 4. মারিয়া ও সায়ন যথাক্রমে 25000 টাকা ও 35000 টাকা মূলধন নিয়ে অংশীদারি কারবার  
নিম্নলিখিত শর্তে শুরু করে।



- (i) মোট লাভের  $\frac{1}{3}$  অংশ প্রথমে সমান ভাগে ভাগ করে নেবে।
- (ii) পরে বাকি লাভ মূলধনের অনুপাতে ভাগ করে নেবে।

বছরের শেষে মোট 36000 টাকা লাভ হলে, কে কত টাকা লভ্যাংশ পাবে নির্ণয় করি।

- (i) মোট লাভের  $\frac{1}{3}$  অংশ প্রথমে সমান ভাগে ভাগ করে নেবে।

$$\text{অর্থাৎ } (36000 \times \frac{1}{3}) \text{ টাকা} = \boxed{\quad} \text{ টাকা} \text{ মারিয়া ও সায়ন দুজনে সমান দু-ভাগে ভাগ করে নেবে।$$

- (ii) অবশিষ্ট  $(36000 - 12000)$  টাকা  $= 24000$  টাকা তারা মূলধনের অনুপাতে ভাগ করে নেবে।

$$\text{মারিয়া ও সায়নের মূলধনের অনুপাত} = 25000 : 35000 = 5 : 7$$

$$\therefore \text{লাভের } 24000 \text{ টাকার মধ্যে মারিয়া পাবে} = \left( \frac{5}{5+7} \times 24000 \right) \text{ টাকা} = \boxed{\quad} \text{ টাকা}$$



$$\text{লাভের } 24000 \text{ টাকার মধ্যে সায়ন পাবে} = \left( \frac{7}{5+7} \times 24000 \right) \text{ টাকা} = \boxed{\quad} \text{ টাকা}$$

$$\therefore \text{মারিয়া মোট পাবে} = (12000 \div 2 + 10000) \text{ টাকা} = \boxed{\quad} \text{ টাকা}$$

$$\text{সায়ন মোট পাবে} = (12000 \div 2 + 14000) \text{ টাকা} = \boxed{\quad} \text{ টাকা}$$

$$\therefore \text{চুক্তি অনুযায়ী } 36000 \text{ টাকা লাভের মারিয়া পাবে } 16000 \text{ টাকা এবং সায়ন পাবে } 20000 \text{ টাকা।}$$

প্রয়োগ : 5. তিনজন অবসরপ্রাপ্ত ব্যক্তি 19500 টাকা, 27300 টাকা ও 15600 টাকা মূলধন নিয়ে একটি লেদ  
কারখানা স্থাপন করার এক বছর পর দেখলেন 43200 টাকা লাভ হয়েছে। ওই লাভের  $\frac{2}{3}$  অংশ তারা সমানভাগে  
এবং বাকি অংশ মূলধনের অনুপাতে ভাগ করে নিলে কে কত টাকা পাবেন নির্ণয় করি। [নিজে করি]

**প্রয়োগ :** 6. অভ, তনবির, অমৃতা ও তথাগত চার বন্ধু মিলে যথাক্রমে 15000 টাকা, 21000 টাকা, 30000 টাকা ও 45000 টাকা মূলধন নিয়োগ করে নিম্নলিখিত শর্তে একটি অংশীদারি কারবার শুরু করেন।

(i) অভ ও তনবির প্রত্যেকে ছয়মাস করে ব্যবসা পরিচালনা করবেন এবং তার জন্য মোট লাভের 0.25 অংশ দুজনে সমান ভাগ করে পাবেন।

(ii) বাকি লাভ চারজনে মূলধনের অনুপাতে ভাগ করে নেবেন।  
বছরের শেষে 27232 টাকা লাভ হলে তা থেকে কে কত টাকা পাবেন হিসাব করে লিখি।

(i) 27232 টাকার 0.25 অংশ =  টাকা অভ ও তনবির সমান দুই ভাগে ভাগ করে নেবেন।

(ii)  $(27232 - 6808)$  টাকা =  টাকা মূলধনের অনুপাতে চার বন্ধু ভাগ করে নেবে।

$$\begin{aligned} \text{অভ, তনবির, অমৃতা ও তথাগত-র মূলধনের অনুপাত} &= 15000 : 21000 : 30000 : 45000 \\ &= 5 : 7 : 10 : 15 \end{aligned}$$

∴ লাভের বাকি 20424 টাকা তারা মূলধনের অনুপাতে ভাগ করে নেবেন।

$$\text{অভ পাবেন} = \frac{5}{5+7+10+15} \times 20424 \text{ টাকা} =  \text{ টাকা}$$

একইভাবে 20424 টাকার মধ্যে তনবির, অমৃতা ও তথাগত কত টাকা করে পাবেন নিজে হিসাব করে লিখি।

$$\therefore \text{অভ মোট পাবেন} = (6808 \div 2 + \frac{5}{37} \times 20424) \text{ টাকা} =  \text{ টাকা}$$

$$\text{তনবির মোট পাবেন} = (6808 \div 2 + \frac{7}{37} \times 20424) \text{ টাকা} =  \text{ টাকা}$$

অমৃতা পাবেন 5520 টাকা ও তথাগত পাবেন 8280 টাকা।

**প্রয়োগ :** 7. জয়াকাকিমা 10000 টাকা মূলধন দিয়ে একটি ছেটো হাতে তৈরি জিনিস বিক্রির ব্যবসা শুরু করলেন। 6 মাস পরে সুলেখাদিদি 14000 টাকা মূলধন দিয়ে জয়া কাকিমার ব্যবসায় যোগ দিলেন। এক বছরে 5100 টাকা লাভ হলো। হিসাব করে দেখি কে, কত টাকা লভ্যাংশ পাবেন?

কিন্তু এক্ষেত্রে দেখছি দুজনের মূলধন সমান সময়ের জন্য ব্যবসায় নিয়োজিত হয়নি। সুতরাং এক্ষেত্রে তাদের মূলধনের অনুপাত কীভাবে নির্ণয় করব?



3. এই ধরনের অংশীদারি কারবারকে মিশ্র অংশীদারি কারবার বলা হয়।

অংশীদারি কারবার দুই প্রকার — (1) সরল, (2) মিশ্র

**সরল (Simple) :** অংশীদারগণের নিজ মূলধন যদি সমান সময় ধরে ব্যবসায়ে নিয়োজিত থাকে তবে তাকে সরল অংশীদারি কারবার বলা হয়।

**মিশ্র (Compound) :** অংশীদারগণের নিজস্ব মূলধন যদি বিভিন্ন সময় ধরে ব্যবসায়ে নিয়োজিত থাকে তবে তাকে মিশ্র অংশীদারি কারবার বলা হয়।

এক্ষেত্রে প্রথমে প্রত্যেক অংশীদারের সমতুল্য মূলধন (সময়ের সাপেক্ষে) নির্ণয় করে নিতে হবে।

কিন্তু মিশ্র অংশীদারি কারবারে সময়ের সাপেক্ষে সমতুল্য মূলধন কীভাবে পাব দেখি।

প্রথমে জয়াকাকিমা ও সুলেখাদিদির ব্যবসায়ে নিয়োজিত মূলধনের সময়কে সমান করে নিতে হবে।

ধরি, জয়াকাকিমা 1 মাসে 10000 টাকার জিনিস বিক্রি করে  $x$  টাকা লাভ করেন

তিনি 2 মাসে 10000 টাকার জিনিস বিক্রি করে  $2x$  টাকা লাভ করেন

∴ তিনি 12 মাসে 10000 টাকার জিনিস বিক্রি করে  $12x$  টাকা লাভ করেন।

জয়া কাকিমা যদি ওই  $12x$  টাকা লাভ 1 মাসে করতে চান তবে তাকে মূলধন দিতে হবে  $12 \times 10000$  টাকা  $= 120000$  টাকা

আবার, সুলেখা দিদি একইভাবে তার 14000 টাকা মূলধন 6 মাস খাটিয়ে যে লাভ পাবেন তা 1 মাসে পেতে হলে  $6 \times 14000$  টাকা  $= 84000$  টাকা দিতে হবে।

এইভাবে দুইক্ষেত্রেই সময়কে সমান করে অর্থাৎ 1 মাসে এনে সময়ের সাপেক্ষে জয়াকাকিমা ও সুলেখাদিদির সমতুল্য মূলধন পেলাম।

৪) মিশ্র অংশীদারি কারবারে সকল অংশীদারের নিয়োজিত মূলধনের সময়কে সমান করা হয়। অর্থাৎ 1 মাসে নিয়ে গিয়ে সময়ের সাপেক্ষে অংশীদারগণের সমতুল্য মূলধন নির্ণয় করা হয়। তাই সেক্ষেত্রে প্রত্যেক অংশীদারের নিজস্ব মূলধন ও সময়ের সাংখ্যমানের গুণফলের অনুপাতে অংশীদারদের মধ্যে লাভ বণ্টন করা হয়।

$$\therefore \text{জয়াকাকিমা ও সুলেখাদিদির মূলধনের অনুপাত} = 120000 : 84000 = 10 : 7$$

লভ্যাংশ মূলধনের অনুপাতে ভাগ হবে। অর্থাৎ,  $10 : 7$  অনুপাতে ভাগ হবে।

$$\therefore \text{লাভের } 5100 \text{ টাকার মধ্যে জয়াকাকিমা পাবেন} = \left( \frac{10}{10+7} \times 5100 \right) \text{ টাকা} = \boxed{\quad} \text{ টাকা}$$

$$\text{লাভের } 5100 \text{ টাকার মধ্যে সুলেখাদিদি পাবেন} = \left( \frac{7}{10+7} \times 5100 \right) \text{ টাকা} = \boxed{\quad} \text{ টাকা}$$

**প্রয়োগ :** 8 মনীয়া 3750 টাকা দিয়ে একটি ব্যবসা শুরু করেন। 6 মাস পরে রজত 15000 টাকা নিয়ে ওই ব্যবসায় ঘোগ দেন। বৎসরান্তে যদি 6900 টাকা ক্ষতি হয়ে থাকে, তবে ক্ষতির টাকা কে, কত দেবেন হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]



**প্রয়োগ :** 9. আমাদের গ্রামের আমিনাবিবি, রমেনবাবু ও ঈশিতাকাকিমা গত বছর 1 জানুয়ারি যথাক্রমে 50000 টাকা, 60000 টাকা ও 70000 টাকা মূলধন নিয়ে একটি অংশীদারি কারবার শুরু করেছিলেন। 1 এপ্রিল রমেনবাবু আরও 10000 টাকা মূলধন নিয়োগ করেন, কিন্তু 1 জুন ঈশিতাকাকিমা 10000 টাকা মূলধন উঠিয়ে নেন। 31 ডিসেম্বর পর্যন্ত মোট 39240 টাকা লাভ হলে মূলধনের অনুপাতে কে, কত টাকা লভ্যাংশ পাবেন হিসাব করে লিখি।

আমিনাবিবির 50000 টাকা 12 মাস খাটিয়ে যে পরিমাণ লাভ হয়েছে, সেই পরিমাণ লাভ একমাসে পেতে হলে তাঁর মূলধন হবে  $(50000 \times 12)$  টাকা অর্থাৎ 600000 টাকা।

অনুরূপভাবে, রমেনবাবুর মূলধন 60000 টাকা 3 মাস ও  $(60000 + 10000)$  টাকা অর্থাৎ 70000 টাকা 9 মাস খেটেছে।

$$\text{সুতরাং, } 1 \text{ মাস হিসাবে তাঁর মূলধন } \{(60000 \times 3) + (70000 \times 9)\} \text{ টাকা} = 810000 \text{ টাকা}$$

আবার, ঈশিতাকাকিমার মূলধন 70000 টাকা 5 মাস ও  $(70000 - 10000)$  টাকা = 60000 টাকা 7 মাস খেটেছে।

$$\text{সুতরাং, } 1 \text{ মাস হিসাবে তাঁর মূলধন হবে } \{(70000 \times 5) + (60000 \times 7)\} \text{ টাকা} = 770000 \text{ টাকা}$$

এই হিসাবে আমিনাবিবি, রমেনবাবু ও ঈশিতাকাকিমার মূলধনের অনুপাত হবে

$$= 600000 : 810000 : 770000 = 60 : 81 : 77$$

$\therefore$  আমিনাবিবি, রমেনবাবু ও ঈশিতাকাকিমার মূলধনের হিসাবে তাদের আনুপাতিক ভাগহার হবে যথাক্রমে  $\frac{60}{218}$ ,  $\frac{81}{218}$  ও  $\frac{77}{218}$

লভ্যাংশ মূলধনের অনুপাতে ভাগ হবে।

$$\therefore 39240 \text{ টাকার মধ্যে আমিনাবিবি পাবেন} = \left( \frac{60}{218} \times 39240 \right) \text{ টাকা} = 10800 \text{ টাকা}$$

$$39240 \text{ টাকার মধ্যে রমেনবাবু পাবেন} = \boxed{\quad} \text{ টাকা} \quad [\text{নিজে লিখি}]$$

$$39240 \text{ টাকার মধ্যে ঈশিতাকাকিমা পাবেন} = \boxed{\quad} \text{ টাকা} \quad [\text{নিজে লিখি}]$$



**প্রয়োগ :** 10. নিবেদিতা ও উমা যথাক্রমে 3000 টাকা ও 5000 টাকা দিয়ে একটি ব্যবসা শুরু করল। 6 মাস পরে নিবেদিতা ব্যবসায়ে আরও 4000 টাকা দিল, কিন্তু 6 মাস পরে উমা 1000 টাকা তুলে নিল। এক বছরে 6175 টাকা লাভ হলে লাভের টাকা কে কত পাবে হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

**প্রয়োগ :** 11. সাবু, দীপক ও পৃথা যথাক্রমে 6000 টাকা, 8000 টাকা ও 9000 টাকা মূলধন নিয়ে একত্রে একটি ব্যবসা আরম্ভ করল। কয়েকমাস পরে সাবু আরও 3000 টাকা লগ্নি করল। বছরের শেষে মোট 3000 টাকা লাভ হলো এবং পৃথা 1080 টাকা লভ্যাংশ পেল। সাবু 3000 টাকা কখন লগ্নি করেছিল নির্ণয় করি।

ধরি, সাবু  $x$  মাস পরে আরও 3000 টাকা লগ্নি করেছিল

$$\therefore \text{সাবু } 6000 \text{ টাকা } x \text{ মাস এবং } (6000 + 3000) \text{ টাকা} = 9000 \text{ টাকা}$$

বাকি  $(12 - x)$  মাস ব্যবসায় নিয়োজিত করেছিল

বছরের শেষে যে লাভ পাওয়া যায় সেই লাভ 1 মাসে পেতে হলে



$$\text{সাবুর প্রয়োজন হতো } \{6000 \times x + 9000 \times (12 - x)\} \text{ টাকা}$$

$$= (108000 - 3000x) \text{ টাকা}$$

আবার দীপক ও পৃথা যথাক্রমে 8000 টাকা ও 9000 টাকা 12 মাস ব্যবসায় নিয়োজিত করেছে।

$\therefore$  বছরের শেষে যে লাভ পাওয়া যায় সেই লাভ 1 মাসে পেতে হলে দীপকের প্রয়োজন  $(8000 \times 12)$  টাকা এবং পৃথির প্রয়োজন  $(9000 \times 12)$  টাকা।

$\therefore$  সাবু, দীপক ও পৃথির মূলধনের অনুপাত

$$= (108000 - 3000x) : 8000 \times 12 : 9000 \times 12$$

$$= (108 - 3x) : 96 : 108$$

$$= (36 - x) : 32 : 36$$

লভ্যাংশ মূলধনের অনুপাতে ভাগ হবে।

$$\therefore \text{পৃথির লাভের পরিমাণ} = 3000 \times \frac{36}{36 - x + 32 + 36} \text{ টাকা} = \frac{3000 \times 36}{104 - x} \text{ টাকা}$$

শর্তানুসারে,

$$\frac{3000 \times 36}{104 - x} = 1080$$

$$\text{বা, } 104 - x = \frac{3000 \times 36}{1080} = 100 \quad \therefore x = 4$$

$\therefore$  সাবু 3000 টাকা 4 মাস পরে ব্যবসায় লগ্নি করেছিল।

### কথে দেখি 14

- আমি ও আমার বন্ধু মালা দুজনে যথাক্রমে 15000 টাকা ও 25000 টাকা মূলধন নিয়ে একটি ব্যবসা শুরু করলাম। এক বছরে 16,800 টাকা লাভ হলো। হিসাব করে দেখি আমরা কে, কত টাকা লভ্যাংশ পাব?
- প্রিয়ম, সুপ্রিয়া ও বুলু যথাক্রমে 15000 টাকা, 10000 টাকা এবং 25000 টাকা দিয়ে একটি ছোটো মুদির দোকান খুলল। কিন্তু বৎসরান্তে 3000 টাকা লোকসান হলো। কাকে কত টাকা লোকসানের পরিমাণ দিতে হবে হিসাব করে লিখি।

3. শোভা ও মাসুদ দুজনে মিলে 2,50,000 টাকার একটি গাড়ি কিনে 2,62,500 টাকায় বিক্রি করলেন। গাড়িটি কেনার সময়ে শোভা মাসুদের  $\frac{1}{2}$  গুণ টাকা দিয়ে থাকলে, কে কত টাকা লভ্যাংশ পাবেন তা হিসাব করে লিখি।
4. তিনবন্ধু যথাক্রমে 5000 টাকা, 6000 টাকা ও 7000 টাকা দিয়ে একটি অংশীদারি ব্যাবসা শুরু করার এক বছর পর দেখলেন 1800 টাকা লোকসান হয়েছে। মূলধন ঠিক রাখার জন্য প্রত্যেকে লোকসানের পরিমাণ দিয়ে দেবেন বলে সিদ্ধান্ত করেন। তাদের কাকে কত টাকা দিতে হবে হিসাব করে লিখি।
5. দীপু, রাবেয়া ও মেঘা যথাক্রমে 6500 টাকা, 5200 টাকা ও 9,100 টাকা মূলধন নিয়ে একটি ছোটো ব্যাবসা শুরু করল ও ঠিক একবছর পরে 14,400 টাকা লাভ হলো। ওই লাভের  $\frac{2}{3}$  অংশ তারা সমানভাবে এবং বাকি অংশ মূলধনের অনুপাতে ভাগ করে নিলে কে কত টাকা লভ্যাংশ পাবে নির্ণয় করি।
6. তিনবন্ধু যথাক্রমে 8000 টাকা, 10000 টাকা ও 12000 টাকা সংগ্রহ করে এবং ব্যাংক থেকে কিছু টাকা ধার নিয়ে একটি ব্যাবসা শুরু করেন। বছরের শেষে তারা দেখলেন 13400 টাকা লাভ হয়েছে। সেই লাভ থেকে ব্যাংকের বছরের কিস্তি 5000 টাকা শোধ দেওয়ার পর বাকি টাকা তারা মূলধনের অনুপাতে ভাগ করে নিলেন। লভ্যাংশ থেকে কে কত টাকা পাবেন হিসাব করে লিখি।
7. দুই বছরের মধ্যে টাকা ফেরত দিলে কোনো সুদ দিতে হবে না এই শর্তে তিন বন্ধু একটি সমবায় ব্যাংক থেকে যথাক্রমে 6000 টাকা, 8000 টাকা, ও 5000 টাকা ধার নিয়ে যৌথভাবে চারটি সাইকেল রিকশা কৃয় করেন। দুই বছর পর হিসাব করে দেখা যায় সমস্ত খরচ-খরচা বাদ দিয়ে মোট 30400 টাকা আয় হয়েছে। তারা সেই আয় মূলধনের অনুপাতে ভাগ করে নেওয়ার পর প্রত্যেকে নিজ নিজ খণ্ডের টাকা ব্যাংকে ফিরিয়ে দেন। এখন কার হাতে কত টাকা থাকবে এবং তাদের হাতে থাকা টাকার অনুপাত কী হবে হিসাব করে লিখি।
8. তিন বন্ধু যথাক্রমে 1,20,000 টাকা, 1,50,000 টাকা ও 1,10,000 টাকা মূলধন নিয়ে একটি বাস কৃয় করেন। প্রথমজন ড্রাইভার ও বাকি দুজন কন্ডাইটের কাজ করেন। তারা ঠিক করেন যে মোট আয়ের  $\frac{2}{5}$  অংশ কাজের জন্য 3:2:2 অনুপাতে ভাগ করবেন এবং বাকি টাকা মূলধনের অনুপাতে ভাগ করে নেবেন। কোনো একমাসে যদি 29260 টাকা আয় হয়, তবে কে, কত টাকা পাবেন নির্ণয় করি।
9. বছরের প্রথমে প্রদীপবাবু ও আমিনাবিবি যথাক্রমে 24000 টাকা ও 30000 টাকা নিয়ে ব্যাবসা শুরু করেন। পাঁচ মাস পর প্রদীপবাবু আরও 4000 টাকা মূলধন দেন। বছরের শেষে 27716 টাকা লাভ হলে, কে, কত টাকা লভ্যাংশ পাবেন হিসাব করে লিখি।
10. নিয়ামতচাচা ও করবীদিদি যথাক্রমে 30,000 টাকা ও 50,000 টাকা মূলধন দিয়ে যৌথভাবে একটি ব্যাবসা আরম্ভ করলেন। 6 মাস পরে নিয়ামতচাচা আরও 40,000 টাকা লাভ করলেন, কিন্তু করবীদিদি ব্যক্তিগত প্রয়োজনে 10,000 টাকা তুলে নিলেন। বছরের শেষে যদি 19,000 টাকা লাভ হয়ে থাকে, তাহলে কে, কত টাকা লাভ পাবেন হিসাব করে দেখি।
11. বছরের শুরুতে শ্রীকান্ত ও সৈফুদ্দিন 2,40,000 টাকা ও 3,00,000 টাকা দিয়ে একটি মিনিবাস কৃয় করে চালাতে থাকেন। চার মাস পর তাদের বন্ধু পিটার 81,000 টাকা নিয়ে তাদের সঙ্গে যোগ দিলে শ্রীকান্ত ও সৈফুদ্দিন তাদের মূলধনের অনুপাতে সেই টাকা তুলে নেন। বছরের শেষে 39150 টাকা লাভ হলে, লভ্যাংশ থেকে কে, কত টাকা পাবেন হিসাব করে লিখি।

12. বছরের প্রথমে অরুণ ও অজয় যথাক্রমে 24,000 টাকা ও 30,000 টাকা দিয়ে ঘোথভাবে ব্যবসা শুরু করেন। কিন্তু কয়েক মাস পরে অরুণ আরও 12,000 টাকা ওই ব্যবসায়ে মূলধন দেন। বছরের শেষে ওই ব্যবসায়ে 14,030 টাকা লাভ হলো এবং অরুণ 7,130 টাকা লভ্যাংশ পেলেন। অরুণ কত মাস পরে ব্যবসায়ে টাকা দিয়েছিলেন নির্ণয় করি।
13. কুমারটুলির তিনজন মৃৎশিল্পী একটি সমবায় ব্যাংক থেকে ঘোথভাবে 100000 টাকা ধার করে মৃৎশিল্পের একটি কারখানা স্থাপন করেন। তারা এই চুক্তি করেন যে প্রতি বছর ব্যাংকের কিন্তি 28100 টাকা দেওয়ার পর বাকি লাভের অর্ধেক কাজের দিনের অনুপাতে এবং বাকি অর্ধেক সমান ভাগে ভাগ করে নেবেন। গত বছর তারা যথাক্রমে 300 দিন, 275 দিন ও 350 দিন কাজ করেছেন এবং মোট লাভ হয়েছে 139100 টাকা। কে, কত টাকা পেয়েছিলেন হিসাব করে লিখি।
14. দুই বন্ধু যথাক্রমে 40000 টাকা ও 50000 টাকা দিয়ে একটি ঘোথ ব্যবসা শুরু করেন। তাদের মধ্যে একটি চুক্তি হয় যে, লাভের 50% নিজেদের মধ্যে সমান ভাগে এবং লাভের অবশিষ্টাংশ মূলধনের অনুপাতে ভাগ হবে। প্রথম বন্ধুর লভ্যাংশের পরিমাণ যদি দ্বিতীয় বন্ধুর লভ্যাংশ অপেক্ষা 800 টাকা কম হয়, তবে প্রথম বন্ধুর লভ্যাংশের পরিমাণ হিসাব করে লিখি।
15. পূজা, উত্তম ও মেহের যথাক্রমে 5000 টাকা, 7000 টাকা ও 10000 টাকা মূলধন নিয়ে অংশীদারি কারবার এই শর্তে শুরু করে যে (i) কারবার চালানোর মাসিক খরচ 125 টাকা, (ii) হিসাবপত্র রাখার জন্য পূজা ও উত্তম প্রত্যেকে মাসিক 200 টাকা পাবে। বছরের শেষে 6960 টাকা লাভ হলে, তা থেকে কে, কত টাকা পাবে হিসাব করে লিখি।
16. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**
- (A) **বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :**
- (i) কোন ঘোথ ব্যবসায়ে তিন বন্ধুর মূলধন যথাক্রমে 200 টাকা, 150 টাকা ও 250 টাকা। একই সময় পরে তাদের লভ্যাংশের অনুপাত হবে
- (a) 5:3:4    (b) 4:3:5    (c) 3:5:4    (d) 5:4:3
- (ii) শুভেন্দু ও নৌসাদ যথাক্রমে 1500 এবং 1000 টাকা দিয়ে একটি ব্যবসা শুরু করে। এক বছর পরে ব্যবসায় 75 টাকা ক্ষতি হলে, শুভেন্দুর ক্ষতি হয়
- (a) 45 টাকা    (b) 30 টাকা    (c) 25 টাকা    (d) 40 টাকা
- (iii) ফতিমা, শ্রেয়া এবং স্মিতা তিনজনে মোট 6000 টাকা দিয়ে একটি ব্যবসা শুরু করে। এক বছর পরে ফতিমা, শ্রেয়া এবং স্মিতা যথাক্রমে লভ্যাংশের 50 টাকা, 100 টাকা এবং 150 টাকা পায়। স্মিতা ওই ব্যবসায় নিয়োজিত করে
- (a) 1000 টাকা    (b) 2000 টাকা    (c) 3000 টাকা    (d) 4000 টাকা
- (iv) অমল এবং বিমল একটি ব্যবসা শুরু করে। অমল 500 টাকা 9 মাসের জন্য এবং বিমল কিছু টাকা 6 মাসের জন্য ব্যবসায় নিয়োজিত করে। ব্যবসায় মোট লাভ হয় 69 টাকা এবং বিমল লাভের 46 টাকা পায়। ব্যবসায় বিমলের মূলধন
- (a) 1500 টাকা    (b) 3000 টাকা    (c) 4500 টাকা    (d) 6000 টাকা

- (v) পল্লবী 500 টাকা 9 মাসের জন্য এবং রাজিয়া 600 টাকা 5 মাসের জন্য একটি ব্যবসায় নিয়োজিত করে। লভ্যাংশ তাদের মধ্যে বণ্টিত হবে যে অনুপাতে তা হলো  
 (a) 3:2    (b) 5:6    (c) 6:5    (d) 9:5

**(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :**

- (i) অংশীদারি ব্যবসায় কমপক্ষে লোকের দরকার 3 জন।  
 (ii) একটি ব্যবসায় রাজু ও আসিফের মূলধনের অনুপাত 5 : 4 এবং রাজু মোট লাভের 80 টাকা পেলে আসিফ পায় 100 টাকা।

**(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :**

- (i) অংশীদারি কারবার \_\_\_\_\_ ধরনের।  
 (ii) অন্য কোনো শর্ত ছাড়া অংশীদারি ব্যবসায় অংশীদারগণ সমান সময়ের জন্য মূলধন নিয়োজিত করলে তাকে \_\_\_\_\_ অংশীদারি কারবার বলে।  
 (iii) অন্য কোনো শর্ত ছাড়া অংশীদারি ব্যবসায় অংশীদারগণ ভিন্ন ভিন্ন সময়ের জন্য মূলধন নিয়োজিত করলে তাকে \_\_\_\_\_ অংশীদারি কারবার বলে।

**17. সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)**

- (i) একটি অংশীদারি ব্যবসায় সমীর, ইদ্রিশ এবং অ্যান্টনির মূলধনের অনুপাত  $\frac{1}{6} : \frac{1}{5} : \frac{1}{4}$ ; বছরের শেষে ব্যবসায় মোট লাভ 3700 টাকা হলে, অ্যান্টনির লাভ কত হবে হিসাব করি।  
 (ii) একটি অংশীদারি ব্যবসায় পৃথা ও রাবেয়ার মূলধনের অনুপাত 2 : 3 এবং রাবেয়া ও জেসমিনের মূলধনের অনুপাত 4 : 5 হলে, পৃথা, রাবেয়া ও জেসমিনের মূলধনের অনুপাত কত তা হিসাব করি।  
 (iii) দুজনের একটি অংশীদারী ব্যবসায় মোট লাভ হয় 1500 টাকা। রাজীবের মূলধন 6000 টাকা এবং লাভ 900 টাকা হলে, আফতাবের মূলধন কত তা হিসাব করি।  
 (iv) একটি অংশীদারি ব্যবসায় তিনজনের মূলধনের অনুপাত 3 : 8 : 5 এবং প্রথম ব্যক্তির লাভ তৃতীয় ব্যক্তির লাভের থেকে 60 টাকা কম হলে, ব্যবসায় মোট কত লাভ হয়েছিল হিসাব করি।  
 (v) জয়স্ত, অজিত এবং কুণাল মোট 15000 টাকা দিয়ে একটি অংশীদারি ব্যাবসা শুরু করে। বছরের শেষে জয়স্ত, অজিত এবং কুণালের যথাক্রমে লাভ হয় 800 টাকা, 1000 টাকা এবং 1200 টাকা। জয়স্ত কত টাকা ব্যবসায় নিয়োজিত করে হিসাব করি।