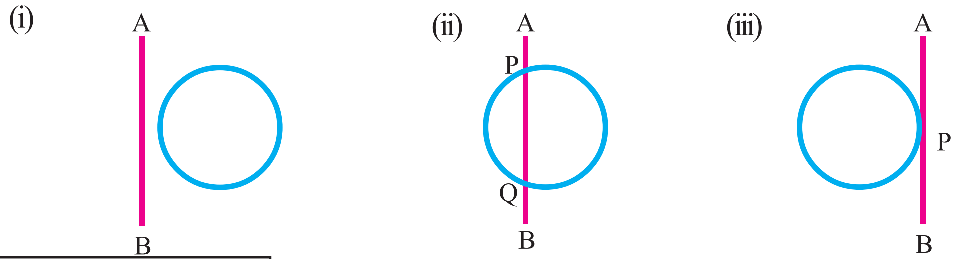
15 বৃত্তের স্পর্শক সংক্রান্ত উপপাদ্য
THEOREMS RELATED TO TANGENT OF A CIRCLE

গত রবিবার আমরা বাড়ির ভাইবোনেরা সকলে মিলে গ্রামের মেলায় গিয়েছিলাম। মেলায় অনেক চিনামাটির মূর্তি, চুড়ি, আচার, জিলিপি, বাঁশি, বাঁশকাঠি ও বেতের খেলনা ও নানান ধরনের হাতের কাজের শৌখিন জিনিস কিনেছি।

আমার ভাই পাশের ছবির মতো একটি বাঁশকাঠির খেলনা কিনেছে যেটির বৃত্তাকার চাকাটি হাওয়ায় ঘুরতে থাকে।

আমার কাছে একটি বৃত্তাকার রিং আছে। আমি ঠিক করেছি একইরকম একটি খেলনা তৈরির চেষ্টা করব।

আমি বাঁশের কাঠিটি বৃত্তাকার রিং-এর কাছে বিভিন্ন স্থানে বসিয়ে নীচের তিনটি অবস্থা পেলাম —



AB কাঠি ও বৃত্তাকার রিং-এর কোনো সাধারণ বিন্দু নেই	AB কাঠি ও বৃত্তাকার রিং-এর P ও Q দুটি সাধারণ বিন্দু আছে	AB কাঠি ও বৃত্তাকার রিং-এর একটি মাত্র সাধারণ বিন্দু P

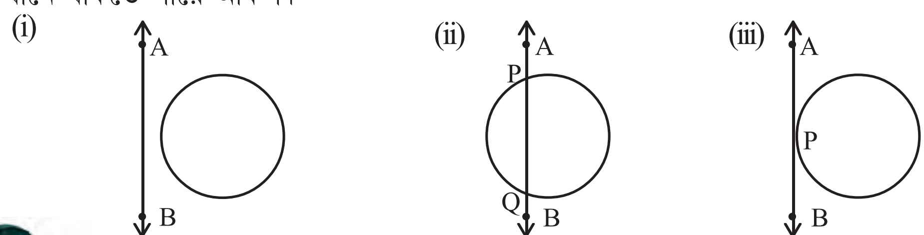
বুঝেছি, (i) নং ক্ষেত্রে AB কাঠিটি বৃত্তাকার রিং-কে ছেদ করেনি। আবার

(ii) নং ক্ষেত্রে AB কাঠিটি বৃত্তাকার রিং-কে ছেদ করেছে।

1 কিন্তু (iii) নং ক্ষেত্রে AB কাঠিটি ও বৃত্তাকার রিং কীভাবে আছে?

AB কাঠিটি বৃত্তাকার রিং-কে P বিন্দুতে স্পর্শ করে আছে।

আমার বন্ধু সুমেধা তার খাতায় আমার মতো একইরকমভাবে একটি সরলরেখা ও একটি বৃত্ত পরস্পর কী কী অবস্থানে থাকতে পারে আঁকল।



দেখছি, (i) নং চিত্রে AB সরলরেখা বৃত্তকে ছেদ করেনি।

আবার, (ii) নং চিত্রে AB সরলরেখা বৃত্তকে ☐ ও ☐ বিন্দুতে ছেদ করেছে।

2 কিন্তু, (ii)ও (iii) নং চিত্রে AB সরলরেখাকে বৃত্তের কী বলা হয়?

(ii) নং চিত্রে AB সরলরেখা বৃত্তের ছেদক (Secant) এবং PQ, AB ছেদকের অনুরূপ জ্যা [Corresponding chord]

দেখছি, (iii) নং চিত্রে AB সরলরেখা ও বৃত্তের সাধারণ বিন্দু ☐।

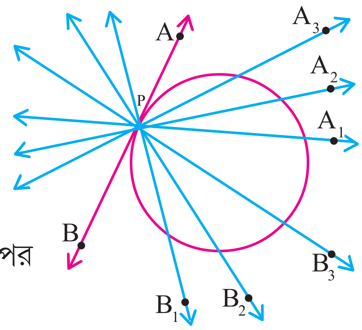
∴ AB সরলরেখা বৃত্তকে P বিন্দুতে স্পর্শ করেছে।

3 কিন্তু (iii) নং চিত্রে AB সরলরেখাকে বৃত্তের কী বলা হয়?

(iii) নং চিত্রে AB সরলরেখা P বিন্দুতে বৃত্তের **স্পর্শক** (tangent), P বিন্দু **স্পর্শবিন্দু** [Point of contact]

বুঝেছি, বৃত্তের ছেদকের অনুরূপ জ্যা-এর প্রান্তবিন্দুদ্বয় পরস্পর মিলিত হলে, ছেদকটি বৃত্তের একটি স্পর্শক হবে।

আমি হাতেকলমে যাচাই করি

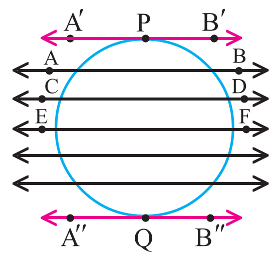


একটি শক্ত তারের বৃত্তাকার রিং-এর যে-কোনো একটি P বিন্দুতে একটি সোজা সরলরৈখিক (straight) তার PA_1-আটকে P বিন্দুকে কেন্দ্র করে ক্রমশ দু-দিকে ঘোরালাম।

দেখছি, PA_1, PA_2, PA_3 ... বা PB_3, PB_2, PB_1 ... অবস্থানের ছেদকটি ঘুরতে ঘুরতে যখন ছেদকের অনুরূপ জ্যা-এর প্রান্তবিন্দুদ্বয় পরস্পর মিলিত হলো, তখন বৃত্তের ছেদকটি একটি ☐ হলো।

রজত তার খাতায় একটি বৃত্ত ও তার একটি ছেদক AB সরলরেখা এঁকেছে।

4 আমি ওই বৃত্তে AB ছেদকের সমান্তরাল স্পর্শক আঁকার চেষ্টা করি।



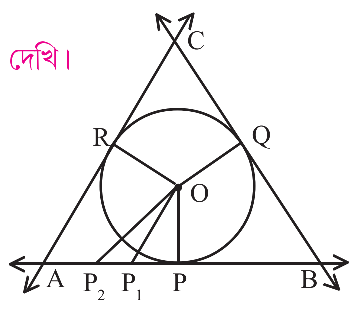
খাতায় একটি বৃত্ত এঁকে স্কেলের সাহায্যে স্কেলের দু-প্রান্তে দুটি সরলরেখা AB ও CD আঁকলাম। CD ছেদক AB ছেদকের সমান্তরাল। বৃত্তের AB ছেদকের সমান্তরাল একাধিক ছেদক স্কেলের সাহায্যে এঁকে A'B' ও A"B" দুটি ছেদক পেলাম যারা যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক এবং AB ছেদকের সমান্তরাল ওই বৃত্তে দুটির বেশি স্পর্শক পেলাম না। **[নিজে এঁকে যাচাই করি]**

আমরা গোলাকার রিং ও কাঠির সাহায্যে আগের খেলনার মতো অন্যরকম একটি খেলনা তৈরি করলাম। এছাড়া অনেক সাদা পিচবোর্ডের বৃত্তাকার চাকতিও তৈরি করেছি যেগুলি দিয়ে অন্যরকম খেলনা তৈরি করব।

রীতম তার রঙিন কাগজে একটি বৃত্তাকার চাকতি আটকে দিল যার কেন্দ্র O।

হাতেকলমে

আমি হাতেকলমে এই বৃত্তের যে-কোনো বিন্দুতে স্পর্শক আঁকি ও কী পাই দেখি।



(i) বৃত্তের উপরে যে-কোনো তিনটি বিন্দু P, Q ও R নিলাম।

(ii) কাগজ ভাঁজ করে পাশের ছবির মতো বৃত্তের P, Q ও R বিন্দুতে তিনটি স্পর্শক যথাক্রমে AB, BC ও CA অঙ্কন করলাম যারা A, B ও C বিন্দুতে ছেদ করল।

(iii) OP, OQ ও OR ব্যাসার্ধ পেলাম।

(iv) AB-এর উপরে P বিন্দু ব্যতীত অন্য যে-কোনো বিন্দু P_1, P_2 নিলাম।

ΔOP_1P ও ΔOP_2P থেকে দেখছি, $OP_1 > OP$ এবং $OP_2 > OP$.

∴ দেখছি, AB স্পর্শকের উপর যে-কোনো বিন্দু ও কেন্দ্রের সংযোজক সরলরেখাংশের মধ্যে OP ক্ষুদ্রতম

$\therefore OP \perp AB$

হাতেকলমে পেলাম, বৃত্তের কোনো বিন্দুতে স্পর্শক ও স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ পরস্পর লম্ব।

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

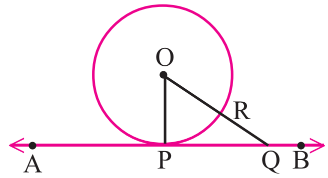
উপপাদ্য :40. বৃত্তের কোনো বিন্দুতে স্পর্শক ও ওই স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত।

প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের P বিন্দুতে AB স্পর্শক এবং OP, P বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ।

প্রমাণ করতে হবে : OP ও AB স্পর্শক পরস্পর লম্ব। অর্থাৎ, $OP \perp AB$

অঙ্কন : AB স্পর্শকের উপর অপর যে-কোনো একটি বিন্দু Q নিলাম। O, Q বিন্দুদ্বয় যোগ করলাম।

প্রমাণ : স্পর্শক AB -এর উপর স্পর্শবিন্দু P ছাড়া অন্য যে-কোনো বিন্দু বৃত্তের বাইরে অবস্থিত।
সুতরাং, OQ বৃত্তটিকে একটি বিন্দুতে ছেদ করবে।
মনে করি, ছেদবিন্দু R.
$\therefore OR < OQ$ [$\because$ R বিন্দু O, Q-এর মধ্যবর্তী]
আবার, $OR = OP$ [$\because$ একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
$\therefore OP < OQ$



$\because$ Q বিন্দু A B স্পর্শকের উপর যে-কোনো বিন্দু, সুতরাং বৃত্তের কেন্দ্র O থেকে AB স্পর্শক পর্যন্ত যত সরলরেখাংশ অঙ্কন করা যায় OP তাদের মধ্যে ক্ষুদ্রতম। আবার ক্ষুদ্রতম দূরত্ব লম্ব দূরত্ব।
সুতরাং, $OP \perp AB$ (প্রমাণিত)

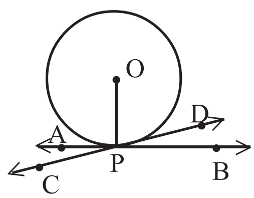
যুক্তি দিয়ে উপপাদ্য : 40-এর বিপরীত বিবৃতি প্রমাণ করি।

প্রয়োগ : 1. কোনো বৃত্তের যে-কোনো ব্যাসার্ধের প্রান্তবিন্দু দিয়ে ব্যাসার্ধের উপর অঙ্কিত লম্ব সরলরেখা ওই বৃত্তের ওই প্রান্তবিন্দুতে স্পর্শক হবে।

প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তে OP ব্যাসার্ধ এবং P বিন্দুতে OP ব্যাসার্ধের উপর AB সরলরেখা লম্ব।

প্রমাণ করতে হবে : সরলরেখা AB, P বিন্দুতে O কেন্দ্রীয় বৃত্তের স্পর্শক।

প্রমাণ : ধরি, AB সরলরেখা P বিন্দুতে O কেন্দ্রীয় বৃত্তের স্পর্শক নয়। O কেন্দ্রীয় বৃত্তের P বিন্দুতে একটি স্পর্শক CD অঙ্কন করি।

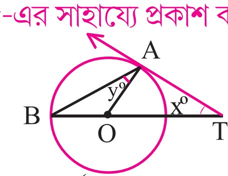


যেহেতু, O কেন্দ্রীয় বৃত্তের P বিন্দুতে CD স্পর্শক এবং OP, P বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ,
সুতরাং OP, CD সরলরেখার উপর লম্ব। $\therefore \angle OPD = 90^0$
আবার, $\angle OPB = 90^0$ (প্রদত্ত) [$\because$ OP, AB সরলরেখার উপর লম্ব]
$\therefore \angle OPD = \angle OPB$ অর্থাৎ CD সরলরেখা ও AB সরলরেখা পরস্পর সমাপতিত হবে।
$\therefore$ AB সরলরেখা O কেন্দ্রীয় বৃত্তের P বিন্দুতে স্পর্শক।

প্রয়োগ : 2. প্রমাণ করি যে বৃত্তের উপর অবস্থিত কোনো বিন্দুতে একটি মাত্র স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।
[**সংকেত :** যেহেতু ওই বিন্দুতে ওই বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর একটিমাত্র লম্ব সরলরেখাই অঙ্কন করা যায়।]

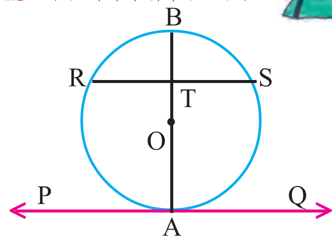
প্রয়োগ : 3. প্রমাণ করি যে, স্পর্শবিন্দুতে স্পর্শকের উপর অঙ্কিত লম্ব বৃত্তের কেন্দ্রগামী।
[**সংকেত :** একটি সরলরেখার উপর অবস্থিত একটি বিন্দুতে একটিমাত্র লম্ব সরলরেখাই অঙ্কন করা যায়।]

প্রয়োগ : 4. পাশের চিত্রে O কেন্দ্রীয় বৃত্তে A বিন্দুতে AT একটি স্পর্শক। x কে y-এর সাহায্যে প্রকাশ করি।



O কেন্দ্রীয় বৃত্তে AT স্পর্শক এবং OA স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ।
$\therefore \angle OAT = 90^o$; আবার, $\angle ATO = x^o$
সুতরাং, ΔAOT-এর, $\angle AOT = 90^o - x^o$ ______ (i)
আবার, ΔAOB-এর, $\angle OAB = \angle OBA = y^o$ [$\because$ OA ও OB একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $\therefore OA = OB$]
Δ AOB-তে, বহিঃস্থ $\angle AOT = \angle OAB + \angle OBA = 2y^o$ ______ (ii)
$\therefore$ (i) ও (ii) থেকে পেলাম, $2y^o = 90^o - x^o$ বা, $x^o = 90^o - 2y^o$ $\therefore x = 90 - 2y$

প্রয়োগ : 5. O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্ত এঁকেছি যার একটি ব্যাস AB এবং A বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক PAQ; PAQ-এর সমান্তরাল জ্যা RS; যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে AB, RS-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক।



প্রমাণ : ধরি, AB, RS-কে T বিন্দুতে ছেদ করেছে। O কেন্দ্রীয় বৃত্তের A বিন্দুতে PAQ স্পর্শক এবং AB ব্যাস। সুতরাং, $AB \perp PQ$

আবার, $PQ \parallel RS$ [প্রদত্ত]

$\therefore AB \perp RS$ অর্থাৎ, $OT \perp RS$

$\therefore$ T, RS-এর মধ্যবিন্দু [$\because$ বৃত্তের কেন্দ্র থেকে বৃত্তের জ্যা-এর উপর লম্ব জ্যা-টিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

$\therefore$ AB, RS-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক।

প্রয়োগ : 6. প্রমাণ করি যে-কোনো বৃত্তের ব্যাসের প্রান্তবিন্দু দুটিতে অঙ্কিত স্পর্শকদুটি পরস্পর সমান্তরাল। (নিজে করি)

কষে দেখি 15.1

1. মাসুম O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্ত অঙ্কন করেছে যার AB একটি জ্যা। B বিন্দুতে একটি স্পর্শক অঙ্কন করেছি যা বর্ধিত AO-কে T বিন্দুতে ছেদ করল। $\angle BAT = 21^0$ হলে, $\angle BTA$-এর মান হিসাব করে লিখি।
2. কোনো বৃত্তের XY একটি ব্যাস। বৃত্তটির উপর অবস্থিত A বিন্দুতে PAQ বৃত্তের স্পর্শক। X বিন্দু থেকে বৃত্তের স্পর্শকের উপর অঙ্কিত লম্ব PAQ-কে Z বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে, XA, $\angle YXZ$-এর সমদ্বিখণ্ডক।
3. একটি বৃত্ত অঙ্কন করলাম যার PR একটি ব্যাস। P বিন্দুতে একটি স্পর্শক অঙ্কন করলাম এবং এই স্পর্শকের উপরে S এমন একটি বিন্দু নিলাম যাতে PR = PS হয়। RS, বৃত্তকে T বিন্দুতে ছেদ করলে, প্রমাণ করি যে, ST = RT = PT.
4. একটি O কেন্দ্রীয় বৃত্ত অঙ্কন করি যার দুটি ব্যাসার্ধ OA ও OB পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত। A ও B বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পরকে T বিন্দুতে ছেদ করলে, প্রমাণ করি যে, AB = OT এবং তারা পরস্পরকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে।
5. দুটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তের বৃহত্তরটির AB ও AC জ্যা দুটি অপর বৃত্তকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে স্পর্শ করলে, প্রমাণ করি যে , $PQ = \frac{1}{2}BC$.
6. O কেন্দ্রীয় কোনো বৃত্তের উপর অবস্থিত A বিন্দুতে স্পর্শকের উপর X যে-কোনো একটি বিন্দু। X বিন্দু থেকে অঙ্কিত একটি ছেদক বৃত্তকে Y ও Z বিন্দুতে ছেদ করে। YZ-এর মধ্যবিন্দু P হলে, প্রমাণ করি যে, XAPO বা XAOP একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।
7. O কেন্দ্রীয় কোনো বৃত্তের একটি ব্যাসের উপর P যে-কোনো একটি বিন্দু। ওই ব্যাসের উপর O বিন্দুতে অঙ্কিত লম্ব বৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করে। বর্ধিত QP বৃত্তকে R বিন্দুতে ছেদ করে। R বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক বর্ধিত OP-কে S বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, SP=SR.
8. রুমেলা O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্ত অঙ্কন করেছে যার QR একটি জ্যা। Q ও R বিন্দুতে দুটি স্পর্শক অঙ্কন করেছি যারা পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করেছে। QM বৃত্তের একটি ব্যাস হলে, প্রমাণ করি যে, $\angle QPR = 2\angle RQM$.
9. কোনো বৃত্তের AC ও BD দুটি জ্যা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে। A ও B বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক দুটি পরস্পরকে P বিন্দুতে এবং C ও D বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক দুটি পরস্পরকে Q বিন্দুতে ছেদ করলে, প্রমাণ করি যে, $\angle P + \angle Q = 2\angle BOC$.

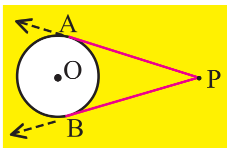
আজ আমরা ঠিক করেছি হাতেকলমে কোনো বিন্দু থেকে বৃত্তে স্পর্শক আঁকার চেষ্টা করব এবং কোন কোন ক্ষেত্রে কতগুলি স্পর্শক অঙ্কন সম্ভব জানব।

হাতেকলমে

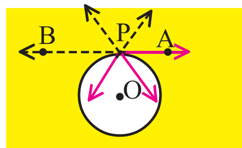
(i) তিনটি রঙিন শক্ত পিচবোর্ড নিলাম।

(ii) তিনটি সাদা কাগজে একই মাপের O কেন্দ্রীয় বৃত্ত এঁকে বৃত্তাকার ক্ষেত্র কেটে নিলাম এবং এই রঙিন পিচবোর্ডে আটকে দিলাম।

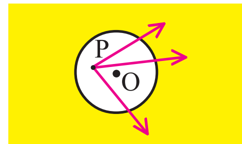
(iii) তিনটি বোর্ডে তিনটি আলপিন নীচের ছবির মতো যথাক্রমে বৃত্তাকার ক্ষেত্রের বাহিরে, বৃত্তের উপর ও বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ভিতরে P বিন্দুতে আটকে দিলাম এবং আলপিনে সুতোর একপ্রান্ত আটকে অন্য প্রান্ত নীচের ছবির মতো বিভিন্ন দিকে ঘুরিয়ে সুতোর সাহায্যে বৃত্তের স্পর্শক টানার চেষ্টা করলাম।



(i)



(ii)

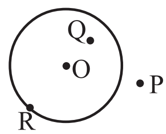


(iii)

দেখছি, (i) নং ক্ষেত্রে অর্থাৎ বৃত্তাকার ক্ষেত্রের বাহিরের যে-কোনো বিন্দু থেকে ওই বৃত্তে ☐ টি স্পর্শক অঙ্কন করতে পারব।

(ii) নং ক্ষেত্রে অর্থাৎ বৃত্তের উপরের যে-কোনো বিন্দুতে ওই বৃত্তে ☐ টি স্পর্শক অঙ্কন করতে পারব। এবং

(iii) নং ক্ষেত্রে অর্থাৎ বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ভেতরের যে-কোনো বিন্দু থেকে ওই বৃত্তের কোনো স্পর্শক অঙ্কন সম্ভব নয়।



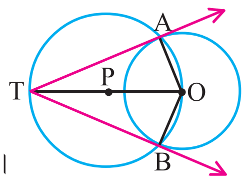
পাশের ছবির O কেন্দ্রীয় বৃত্তটির একটি বহিঃস্থ বিন্দু P এবং একটি অন্তঃস্থ বিন্দু Q এবং ওই বৃত্তে অবস্থিত একটি বিন্দু R.

হাতে কলমে যাচাই করে দেখি, P, Q ও R বিন্দু থেকে ওই বৃত্তে কয়টি স্পর্শক অঙ্কন সম্ভব।

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু থেকে ওই বৃত্তে 2টি স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

প্রয়োগ : 7. বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে ওই বৃত্তে দুটি স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।



প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের T যে-কোনো একটি বহিঃস্থ বিন্দু।

প্রমাণ করতে হবে : T বিন্দু থেকে O কেন্দ্রীয় বৃত্তে দুটি স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।

অঙ্কন : T, O যুক্ত করলাম। T O -কে ব্যাস করে একটি বৃত্ত অঙ্কন করলাম।
যেহেতু T বিন্দুটি O কেন্দ্রীয় বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু এবং O অন্তঃস্থ বিন্দু।
সুতরাং,TO-কে ব্যাস করে অঙ্কিত বৃত্তটি O কেন্দ্রীয় বৃত্তকে দুটি বিন্দুতে ছেদ করবে।
ধরি, ছেদবিন্দু দুটি A এবং B; T, A; T, B; O, A; O, B যুক্ত করলাম।

প্রমাণ : $\angle OAT$ এবং $\angle OBT$ প্রত্যেকে অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।

$\therefore$ $\angle OAT = \angle OBT = 1$ সমকোণ

অর্থাৎ, $OA \perp AT$ এবং $OB \perp BT$

TA ও TB যথাক্রমে ব্যাসার্ধ OA এবং OB-এর উপর A ও B বিন্দুতে লম্ব।

$\therefore$ TA ও TB, O কেন্দ্রীয় বৃত্তে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে দুটি স্পর্শক।

পেলাম, বহিঃস্থ বিন্দু থেকে একটি বৃত্তে দুটি স্পর্শক অঙ্কন করা যায়। [প্রমাণিত]

বুঝেছি, বৃত্তের ☐ [অন্তঃস্থ/বহিঃস্থ] কোনো বিন্দু থেকে ওই বৃত্তে কোনো স্পর্শক অঙ্কন করা যায় না। [নিজে লিখি]

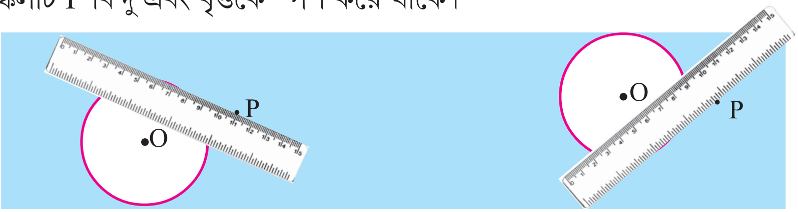
প্রয়োগ : 8. আমি একটি O কেন্দ্রীয় বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু P থেকে দুটি স্পর্শক PA ও PB অঙ্কন করেছি যারা বৃত্তকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। প্রমাণ করি যে, $\angle APB + \angle AOB = 180^0$ [নিজে করি]

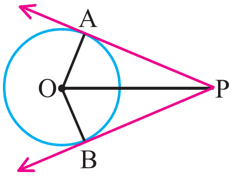
হাতেকলমে ও যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করেছি যে, বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু থেকে ওই বৃত্তে দুটি স্পর্শক অঙ্কন করা যায়। কিন্তু এই দুটি স্পর্শকের মধ্যে কীরকম সম্পর্ক থাকবে হাতেকলমে পরীক্ষা করে দেখি।

হাতেকলমে

(1) একটি কাগজে যে-কোনো O কেন্দ্রীয় বৃত্ত আঁকলাম এবং বৃত্তের বহিঃস্থ যে-কোনো বিন্দু P নিলাম।

(2) এবার একটি স্কেল কাগজের উপর এমনভাবে নীচের ছবির মতো বৃত্তের কেন্দ্রের দু-দিকে রাখলাম যাতে স্কেলটি P বিন্দু এবং বৃত্তকে স্পর্শ করে থাকে।





(3) কাগজটি দু-দিকে ভাঁজ করে P বিন্দু থেকে O কেন্দ্রীয় বৃত্তের দুটি স্পর্শবিন্দু A ও B পেলাম এবং A, P; B, P; O, P; O, A ও O, B যোগ করলাম ও দুটি স্পর্শক AP ও BP পেলাম।

(4) OP বরাবর কাগজটি দু-ভাঁজ করে দেখছি, AP ও BP পরস্পর মিলে গেছে এবং OA ও OB পরস্পর মিলে গেছে।

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, $AP = BP$ এবং $\angle AOP = \angle BOP$।

হাতেকলমে পেলাম, বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে দুটি স্পর্শক অঙ্কন করলে তাদের স্পর্শবিন্দু দুটির সঙ্গে বহিঃস্থ বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাংশ দুটির দৈর্ঘ্য সমান হয় এবং তারা কেন্দ্রে সমান কোণ উৎপন্ন করে।

[নিজে অপর একটি বৃত্ত এঁকে একইভাবে হাতেকলমে যাচাই করি]

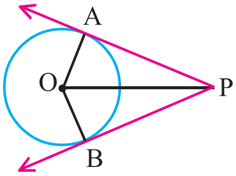
কিন্তু বহিঃস্থ বিন্দু P থেকে স্পর্শবিন্দু A পর্যন্ত দৈর্ঘ্যকে কী বলা হয়?

বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু P থেকে স্পর্শবিন্দু A পর্যন্ত দৈর্ঘ্যকে P বিন্দু থেকে PA **স্পর্শকের দৈর্ঘ্য** বলা হয়।

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য :41. বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে যে দুটি স্পর্শক অঙ্কন করা যায় তাদের স্পর্শবিন্দু দুটির সঙ্গে বহিঃস্থ বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাংশ দুটির দৈর্ঘ্য সমান এবং তারা কেন্দ্রে সমান কোণ উৎপন্ন করে।

প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু P থেকে PA ও PB দুটি স্পর্শক যাদের স্পর্শবিন্দু যথাক্রমে A ও B, O,A; O, B ; O, P যুক্ত করায় PA ও PB সরলরেখাংশ দুটি কেন্দ্রে যথাক্রমে $\angle POA$ ও $\angle POB$ দুটি কোণ উৎপন্ন করেছে।



প্রমাণ করতে হবে :(i) $PA = PB$ (ii) $\angle POA = \angle POB$

প্রমাণ : PA ও PB স্পর্শক এবং OA ও OB স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ।

$\therefore OA \perp PA$ এবং $OB \perp PB$

POA ও POB সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে, $\angle OAP = \angle OBP$ (প্রত্যেকে 1 সমকোণ)

অতিভুজ OP সাধারণ বাহু এবং $OA = OB$ (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

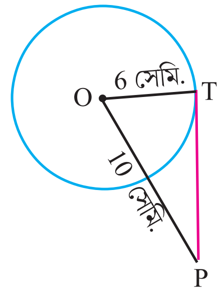
$\therefore \Delta PAO \cong \Delta PBO$ [সর্বসমতার R-H-S শর্তানুসারে]

$\therefore PA = PB$ (সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু) .... [(i) প্রমাণিত]

এবং $\angle POA = \angle POB$ (সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ কোণ) .... [(ii) প্রমাণিত]

এই উপপাদ্যটি থেকে আরও পেলাম $\angle APO = \angle BPO$ (সর্বসম ত্রিভুজ PAO ও PBO-এর অনুরূপ কোণ)। সুতরাং OP, $\angle APB$-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

প্রয়োগ : 9. আমি একটি O কেন্দ্রীয় বৃত্ত এঁকেছি যার ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 6 সেমি.। কেন্দ্র O থেকে 10 সেমি. দূরত্বে অবস্থিত P বিন্দু থেকে PT স্পর্শক আঁকলাম। হিসাব করে PT স্পর্শকের দৈর্ঘ্য লিখি।



O কেন্দ্রীয় বৃত্তের OT ব্যাসার্ধ এবং PT স্পর্শক। $\therefore OT \perp PT$

$\therefore$ সমকোণী ত্রিভুজ POT-তে, $PT^2 = PO^2 - OT^2$

[পিথাগোরাসের উপপাদ্য থেকে পেলাম]

বা, $PT^2 = \{(10)^2 - (6)^2\}$ বর্গ সেমি.

$= (100 - 36)$ বর্গ সেমি.

$= 64$ বর্গ সেমি.

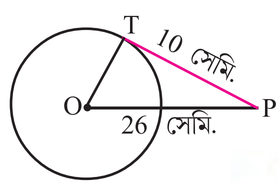
$\therefore PT = \sqrt{64}$ সেমি.

$= 8$ সেমি.

$\therefore$ পেলাম PT স্পর্শকের দৈর্ঘ্য 8 সেমি.।

প্রয়োগ : 10. আমি যদি এমন একটি O কেন্দ্রীয় বৃত্ত আঁকি যার কেন্দ্র থেকে 26 সেমি. দূরত্বে অবস্থিত P বিন্দু থেকে অঙ্কিত বৃত্তের স্পর্শকের দৈর্ঘ্য 10 সেমি. হবে, তবে বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য কী হবে হিসাব করে লিখি।

$PT = 10$ সেমি., $PO = 26$ সেমি.



$\therefore$ সমকোণী ΔPOT থেকে পাই,

$PO^2 = PT^2 + OT^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য থেকে পাই]

$\therefore (26\text{সেমি.})^2 = (10\text{সেমি.})^2 + OT^2$

বা, $OT^2 = (26\text{সেমি.})^2 - (10\text{সেমি.})^2 = \boxed{}$

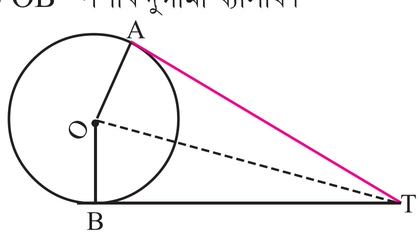
$\therefore OT = \boxed{}$ সেমি. **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 11. পাশের চিত্রের O কেন্দ্রীয় বৃত্তের দুটি ব্যাসার্ধ OA ও OB-এর মধ্যবর্তী কোণ 130°; A ও B বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় T বিন্দুতে ছেদ করে। $\angle ATB$ এবং $\angle ATO$-এর মান হিসাব করে লিখি।

A ও B বিন্দুতে অঙ্কিত বৃত্তের স্পর্শকদ্বয় পরস্পরকে T বিন্দুতে ছেদ করেছে।

$\therefore$ T বিন্দু থেকে অঙ্কিত দুটি স্পর্শক AT ও BT এবং OA ও OB স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ।

$\therefore OA \perp AT$ এবং



$\therefore \angle ATB + \angle AOB = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ)$

$= 180^\circ$

$\therefore \angle ATB = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$

আবার, যেহেতু OT, $\angle ATB$-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে, সুতরাং $\angle ATO = \frac{50^\circ}{2} = 25^\circ$

নিজে করি 15.1

(1) 5 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের কেন্দ্র থেকে 13 সেমি. দূরবর্তী কোনো বিন্দু থেকে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

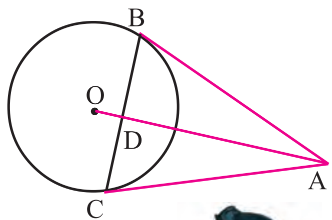
(2) O কেন্দ্রীয় বৃত্তের কেন্দ্র থেকে 13 সেমি. দূরত্বে অবস্থিত একটি বিন্দু P থেকে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য 12 সেমি. হলে, বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

(3) যদি O কেন্দ্রীয় বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু P থেকে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় PA ও PB; $\angle AOB = 120^\circ$ হলে, $\angle APB$ এবং $\angle APO$-এর মান হিসাব করে লিখি।

প্রয়োগ : 12. O কেন্দ্রীয় বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু A থেকে বৃত্তে দুটি স্পর্শক টানি যারা বৃত্তকে যথাক্রমে B ও C বিন্দুতে স্পর্শ করে। প্রমাণ করি যে, AO, BC-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক।

প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু A থেকে বৃত্তে দুটি স্পর্শক AB ও AC টানা হয়েছে যারা বৃত্তকে B ও C বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। A, O যুক্ত করি। AO, BC-কে D বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে : AO, BC-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক।



প্রমাণ : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB ও AC স্পর্শক। সুতরাং, $AB = AC$

এবং AO, $\angle BAC$-এর সমদ্বিখণ্ডক। অর্থাৎ, $\angle BAD = \angle CAD$

ΔABD ও ΔACD-তে, $AB = AC$

$\angle BAD = \angle CAD$ এবং AD সাধারণ বাহু

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$ (S-A-S সর্বসমতার শর্ত অনুসারে)

সুতরাং, $BD = CD$ (সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু)

এবং $\angle BDA = \angle CDA$ (সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ কোণ)

আবার, $\angle BDA + \angle CDA = 180^\circ$ বা, $2\angle BDA = 180^\circ$ ($\because \angle BDA = \angle CDA$)

$\therefore \angle BDA = 90^\circ$ সুতরাং $AD \perp BC$ $\therefore$ AD, BC-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক। **(প্রমাণিত)**

নিজে করি 15.2

(1) প্রমাণ করি যে, বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে অঙ্কিত স্পর্শক দুটির অন্তর্ভূত কোণকে ওই বিন্দু এবং কেন্দ্রের সংযোজক সরলরেখাংশ সমদ্বিখণ্ডিত করে।

(2) প্রমাণ করি যে, বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে অঙ্কিত স্পর্শক দুটির অন্তর্ভূত কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক কেন্দ্রগামী হবে।

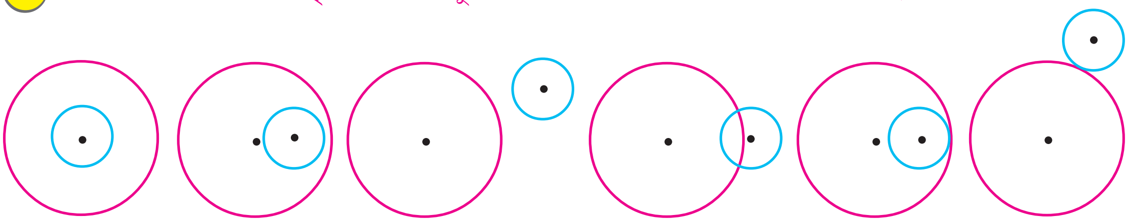
(3) প্রমাণ করি যে, বৃত্তের উপরিস্থিত দুটি বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক দুটি যদি পরস্পরকে ছেদ করে, তাহলে ছেদবিন্দু থেকে স্পর্শবিন্দু পর্যন্ত অঙ্কিত সরলরেখাংশদ্বয়ের দৈর্ঘ্য সমান হবে।

আজ আমরা ঠিক করেছি আমাদের নিজস্ব পরিবেশের বৃত্তাকার ছবি আঁকব। নীলাদ্রি খুব ভালো ছবি আঁকে। সে স্কুলের ব্ল্যাকবোর্ডে একটি বৃত্তাকার মাঠের ছবি আঁকল।

কিন্তু আমাদের পাড়ার বৃত্তাকার মাঠের চারধারে সমান চওড়া রাস্তা আছে। রাস্তাসমেত বৃত্তাকার মাঠটির ছবি আঁকি।

দেখছি, দুটি বৃত্ত পেলাম যাদের কেন্দ্র একই অর্থাৎ দুটি এককেন্দ্রীয় বৃত্ত পেলাম। এদিকে রাবেয়া দুটি বৃত্তকার তারের রিং নানাভাবে বসিয়ে নতুন কিছু তৈরির চেষ্টা করছে।

5 আমি রাবেয়ার বসানো বৃত্তাকার রিং-গুলির অবস্থান দেখি ও কী কী ভাবে আছে দেখি।



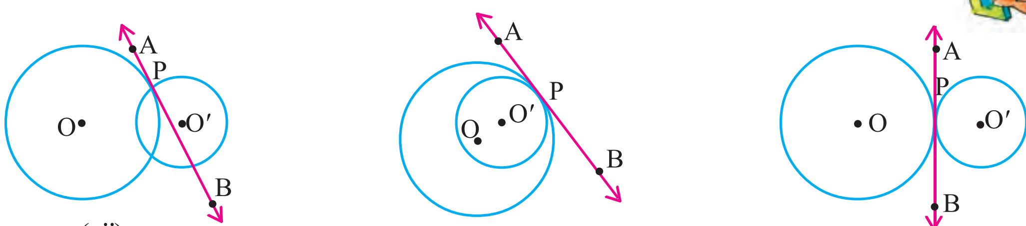
(i) (ii) (iii) (iv) (v) (vi)

দেখছি, (i) নং ছবির বৃত্তদ্বয় ☐, কিন্তু (ii) নং ছবিতে বৃত্তদ্বয় এককেন্দ্রীয় নয়। আবার, (iii) নং ছবির বৃত্তদ্বয় পরস্পরছেদী না হলেও (iv) নং ছবিতে বৃত্তদ্বয় দুটি বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করেছে।

6 স্পর্শবিন্দুতে স্পর্শক আঁকলে কী ধরনের স্পর্শক পাব ছবি এঁকে দেখি।

কিন্তু দেখছি, (v) ও (vi) নং চিত্রে বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে স্পর্শ করেছে।

7 দুটি বৃত্ত পরস্পরকে স্পর্শ করেছে তা বুঝব কীভাবে?



(vii) (viii) (ix)

একই সমতলে O কেন্দ্রীয় এবং O′ কেন্দ্রীয় দুটি বৃত্তের যদি একটি ছেদবিন্দু P হয় এবং P বিন্দুতে O কেন্দ্রীয় বৃত্তের স্পর্শকটি যদি O′ কেন্দ্রীয় বৃত্তকেও ঐ বিন্দুতে স্পর্শ করে তবে বলা হবে বৃত্তদুটি পরস্পরকে P বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। চিত্র (vii)-এ বৃত্তদুটি পরস্পরকে স্পর্শ করেনি। চিত্র (viii) ও চিত্র (ix)-এ বৃত্তদুটি পরস্পরকে স্পর্শ করেছে।

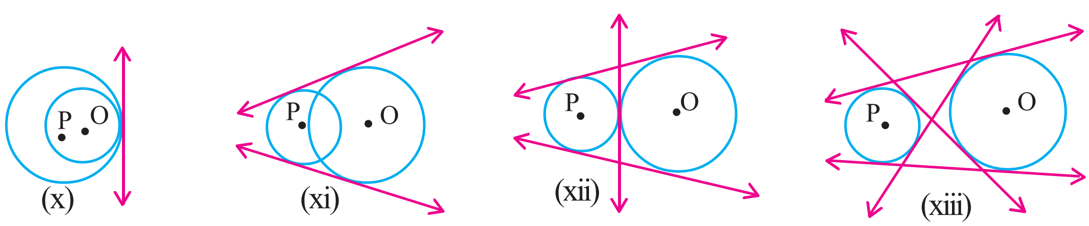
(viii) নং ছবিতে বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে P বিন্দুতে **অন্তঃস্থভাবে** বা **অন্তঃস্পর্শ (Internally Touch)** করেছে।

AB হলো বৃত্তদ্বয়ের **সাধারণ স্পর্শক**।

আবার (ix) নং ছবিতে বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে P বিন্দুতে **বহিঃস্থভাবে বা বহিঃস্পর্শ (Externally Touch)** করেছে। AB হলো বৃত্তদ্বয়ের ☐ **[নিজে লিখি]**

বুঝেছি, একটি সরলরেখা যদি দুটি বৃত্তের প্রত্যেকটিকেই স্পর্শ করে, তাহলে ওই সরলরেখাটিকে বৃত্তদুটির **সাধারণ স্পর্শক (Common Tangent)** বলা হয়।

8 আমি খাতায় নানাভাবে দুটি বৃত্তের সাধারণ স্পর্শক আঁকি ও কী পাই দেখি।



(x) (xi) (xii) (xiii)

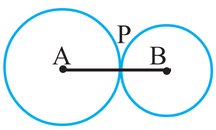
দেখছি দুটি বৃত্তের বিভিন্ন অবস্থানে কখনো 1টি, কখনো 2টি, কখনো 3টি, আবার কখনো 4টি সাধারণ স্পর্শক এঁকেছি।

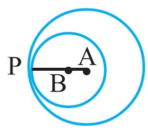
9 কিন্তু কখনো দেখছি সাধারণ স্পর্শকের একই পাশে বৃত্তদুটি আছে, আবার কখনো সাধারণ স্পর্শকের বিপরীত পাশে বৃত্তদুটি আছে। এই ধরনের স্পর্শককে কী বলা হয়?

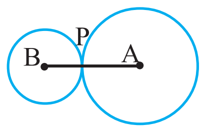
সাধারণ স্পর্শকের একই পাশে বৃত্তদুটি অবস্থিত হলে স্পর্শকটিকে **সরল সাধারণ স্পর্শক** এবং সাধারণ স্পর্শকের বিপরীত পাশে বৃত্তদুটি অবস্থিত হলে স্পর্শকটিকে **তির্যক সাধারণ স্পর্শক** বলা হয়।

বুঝেছি, (x) ও (xi) ছবির স্পর্শকগুলি সরল সাধারণ স্পর্শক, কিন্তু (xii)-এ দুটি সরল সাধারণ স্পর্শক ও 1টি ☐ সাধারণ স্পর্শক আছে। আবার (xiii) নং ছবিতে ☐ টি সরল সাধারণ স্পর্শক ও ☐ টি তির্যক সাধারণ স্পর্শক আছে। **[নিজে ছবি দেখে লিখি]**

10 কিন্তু দুটি বৃত্ত যদি পরস্পরকে স্পর্শ করে তবে স্পর্শবিন্দু ও বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয় কী অবস্থানে থাকবে ছবি এঁকে যাচাই করি।





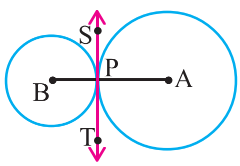


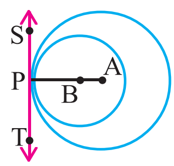
ছবি থেকে দেখছি, বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয় ও স্পর্শবিন্দু একই সরলরেখায় আছে।

আমি যে-কোনো দুটি বৃত্ত আঁকলাম যারা পরস্পরকে স্পর্শ করেছে এবং দেখছি বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয় ও স্পর্শবিন্দু সমরেখ। **[নিজে করি]**

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য :42. যদি দুটি বৃত্ত পরস্পরকে স্পর্শ করে, তাহলে স্পর্শবিন্দুটি কেন্দ্র দুটির সংযোজক সরলরেখাংশের উপর অবস্থিত হবে।





প্রদত্ত : A ও B কেন্দ্রীয় দুটি বৃত্ত পরস্পরকে P বিন্দুতে স্পর্শ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে : A, P ও B সমরেখ।

অঙ্কন : A, P ও B, P যোগ করলাম।

প্রমাণ : A কেন্দ্রীয় ও B কেন্দ্রীয় বৃত্তদুটি পরস্পরকে P বিন্দুতে স্পর্শ করেছে।

∴ P বিন্দুতে বৃত্তদুটির একটি সাধারণ স্পর্শক আছে।

ধরি, ST হলো সাধারণ স্পর্শক যা দুটি বৃত্তকেই P বিন্দুতে স্পর্শ করেছে।

∵ A কেন্দ্রীয় বৃত্তের ST স্পর্শক এবং AP স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ,

∴ $AP \perp ST$

আবার, যেহেতু B কেন্দ্রীয় বৃত্তের ST স্পর্শক এবং BP স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ,

∴ $BP \perp ST$

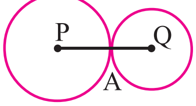
∴ AP ও BP একই P বিন্দুতে ST সরলরেখার উপর লম্ব।

∴ AP ও BP একই সরলরেখায় অবস্থিত অর্থাৎ A, P ও B সমরেখ। **(প্রমাণিত)**

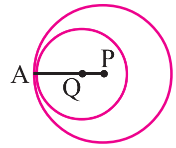
আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, দুটি বৃত্ত পরস্পরকে স্পর্শ করলে একটির কেন্দ্র ও স্পর্শবিন্দুগামী সরলরেখা অপর বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে যাবে। **[নিজে করি]**

যদি দুটি বৃত্ত বহিঃস্পর্শ করে, তবে কেন্দ্রদুটির দূরত্ব ব্যাসার্ধ দুটির দৈর্ঘ্যের ☐ [সমষ্টির / অন্তরের] সমান হবে।

পাশের চিত্রে, PQ = PA + AQ

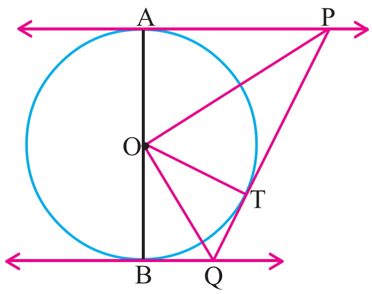


আবার, যদি দুটি বৃত্ত অন্তঃস্পর্শ করে, তবে কেন্দ্রদুটির দূরত্ব ব্যাসার্ধ দুটির দৈর্ঘ্যের অন্তরফলের সমান হবে। পাশের চিত্রে, PQ = ☐ – ☐ **[নিজে লিখি]**



প্রয়োগ : 13. আমি O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্ত অঙ্কন করেছি যার AB একটি ব্যাস। AB ব্যাসের A ও B বিন্দুতে বৃত্তের দুটি স্পর্শক অঙ্কন করেছি যা বৃত্তটির অপর একটি বিন্দু T-তে অঙ্কিত স্পর্শককে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি, $\angle POQ = 90^\circ$

প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB ব্যাস। A ও B বিন্দুতে বৃত্তের দুটি স্পর্শক অঙ্কন করা হয়েছে। বৃত্তের অপর একটি বিন্দু T-তে অঙ্কিত স্পর্শক A ও B বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শককে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে।



প্রমাণ করতে হবে : $\angle POQ = 90^\circ$

অঙ্কন : O, P; O, Q এবং O, T যুক্ত করি।

প্রমাণ : O কেন্দ্রীয় বৃত্তে A ও T বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক দুটি P বিন্দুতে ছেদ করেছে।

$\therefore$ PO, $\angle APT$-এর অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক [নিজে প্রমাণ করি]

$\therefore \angle TPO = \frac{1}{2}\angle APT$ ——— (i)

অনুরূপে, T ও B বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদুটি Q বিন্দুতে ছেদ করেছে।

$\therefore \angle TQO = \frac{1}{2}\angle BQT$ ——— (ii)

আবার, AP || BQ এবং PQ ভেদক।

$\therefore \angle APT + \angle BQT = 180^\circ$

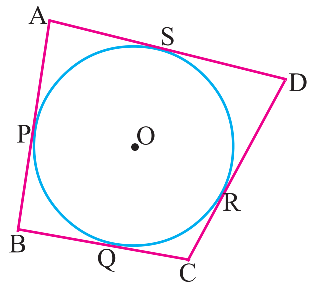
$\therefore \angle TPO + \angle TQO = \frac{1}{2}\angle APT + \frac{1}{2}\angle BQT$ [(i) ও (ii) থেকে পেলাম]

$= \frac{1}{2}(\angle APT + \angle BQT) = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$

$\therefore$ ΔPOQ-এর অপর কোণটি অর্থাৎ $\angle POQ = 90^\circ$ **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 14. O কেন্দ্রীয় বৃত্তের পরিলিখিত চতুর্ভুজ ABCD হলে প্রমাণ করি যে, AB + CD = BC + DA

প্রদত্ত : ABCD চতুর্ভুজটি O কেন্দ্রীয় বৃত্তে পরিলিখিত।
ধরি, AB, BC, CD ও DA বৃত্তটিকে যথাক্রমে P, Q, R ও S বিন্দুতে স্পর্শ করেছে।



প্রমাণ করতে হবে : AB + CD = BC + DA

প্রমাণ : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু A থেকে AS ও AP দুটি স্পর্শক

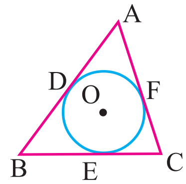
$\therefore$ AS = AP

অনুরূপে, BP = BQ, CQ = CR এবং DR = DS

AB + CD = AP + BP + CR + DR

= AS + BQ + CQ + DS = (AS + DS) + (BQ + CQ) = AD + BC **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 15. পাশের ছবিতে ΔABC-এর অন্তর্বৃত্ত AB, BC ও CA বাহুকে যথাক্রমে D, E ও F বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। প্রমাণ করি যে, $AD + BE + CF = AF + CE + BD$ $= \Delta ABC$ -এর পরিসীমার অর্ধেক। [নিজে করি]



প্রয়োগ : 16. P ও Q কেন্দ্রবিশিষ্ট দুটি বৃত্ত পরস্পরকে A বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করেছে। বৃত্ত দুটির একটি সরল সাধারণ স্পর্শক বৃত্ত দুটিকে যথাক্রমে R ও S বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। প্রমাণ করি যে,

(i) A বিন্দুতে অঙ্কিত সাধারণ স্পর্শক RS সরলরেখাংশকে T বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

(ii) $\angle RAS = 1$ সমকোণ

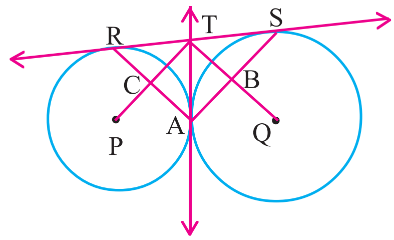
(iii) যদি PT ও QT, AR ও AS-কে যথাক্রমে C ও B বিন্দুতে ছেদ করে, তাহলে ABTC একটি আয়তাকার চিত্র হবে।

প্রদত্ত : P ও Q কেন্দ্রবিশিষ্ট দুটি বৃত্ত পরস্পরকে A বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করেছে। বৃত্ত দুটির একটি সরল সাধারণ স্পর্শক P ও Q কেন্দ্রীয় বৃত্ত দুটিকে যথাক্রমে R ও S বিন্দুতে স্পর্শ করে। A বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক RS-কে T বিন্দুতে ছেদ করে। PT, AR-কে C বিন্দুতে এবং QT, AS-কে B বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে : (i) AT, RS-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে

(ii) $\angle RAS = 1$ সমকোণ

(iii) ABTC একটি আয়তাকার চিত্র।



প্রমাণ : A বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক RS-কে T বিন্দুতে ছেদ করেছে।

$\therefore$ T বিন্দু থেকে P-কেন্দ্রীয় বৃত্তে দুটি স্পর্শক TR ও TA

$\therefore TR = TA$

অনুরূপে, $TS = TA \quad \therefore TR = TS$

$\therefore$ AT, RS-কে T বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। [(i) প্রমাণিত]

আবার ΔATR-এর $TR = TA \quad \therefore \angle TAR = \angle TRA$

অনুরূপভাবে, $\angle TAS = \angle TSA$

$\therefore \angle RAS = \angle TAR + \angle TAS = 90^\circ$

$[\because \angle TRA + \angle TAR + \angle TAS + \angle TSA = 180^\circ$

$\therefore 2(\angle TAR + \angle TAS) = 180^\circ$; সুতরাং, $\angle TAR + \angle TAS = 90^\circ]$ [(ii) নং প্রমাণিত]

আবার, PT, $\angle RTA$-এর সমদ্বিখণ্ডক এবং QT, $\angle ATS$-এর সমদ্বিখণ্ডক

$\therefore PT \perp TQ$ অর্থাৎ, $\angle PTQ = 1$ সমকোণ। অনুরূপে, $QT \perp SA$

$PT \perp RA$ এবং $QT \perp SA$,

$\therefore \angle ACT = \angle ABT = 1$ সমকোণ

ABTC চতুর্ভুজের, $\angle ACT = \angle ABT = 90^\circ$

এবং $\angle CAB = 90^\circ \quad \therefore \angle CTB = 90^\circ$

[কারণ ΔTRC ও ΔTAC -এর মধ্যে, $TR = TA$, $\angle RTC = \angle ATC$ এবং TC উহাদের সাধারণ বাহু $\therefore \Delta TRC \cong \Delta TAC$ (S-A-S সর্বসমতার শর্তানুসারে) সুতরাং, $\angle TCR = \angle TCA \therefore PT \perp RA]$

$\therefore$ ABTC একটি সামান্তরিক ($\because$ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণ সমান)

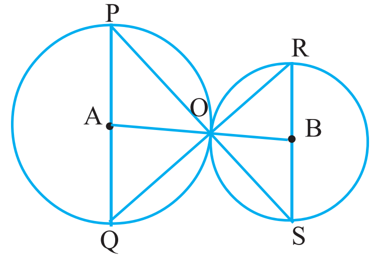
আবার, ABTC সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ।

$\therefore$ ABTC একটি আয়তাকার চিত্র, [(iii) প্রমাণিত]

প্রয়োগ : 17. সুমিতা দুটি বৃত্ত অঙ্কন করেছে যারা পরস্পরকে O বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করেছে। যদি PQ ও RS দুটি বৃত্তের ব্যাস হয় যারা পরস্পর সমান্তরাল, তবে প্রমাণ করি যে, P, O এবং S বিন্দু তিনটি সমরেখ।

প্রদত্ত : দুটি বৃত্ত পরস্পরকে O বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করেছে। বৃত্ত দুটির ব্যাস PQ ও RS সমান্তরাল।

প্রমাণ করতে হবে : P, O, S বিন্দু তিনটি সমরেখ।



অঙ্কন : ধরি বৃত্ত দুটির কেন্দ্র A ও B ; O, A;O, B; O, P; O,Q; O, R; O, S যুক্তি করি।

প্রমাণ : বৃত্তদুটির কেন্দ্র A ও B.

O বিন্দুতে বৃত্তদুটি পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করেছে।

$\therefore$ A, O ও B একই সরলরেখায় অবস্থিত।

ΔAOP-এর $AP = AO$, $\therefore \angle APO = \angle AOP$

আবার $\angle PAO + \angle APO + \angle AOP = 180^\circ$

$\therefore 2\angle AOP = 180^\circ - \angle PAO$

অনুরূপভাবে, ΔBOR থেকে পাই $2\angle ROB = 180^\circ - \angle RBO$

$\therefore 2\angle AOP + 2\angle ROB = 360^\circ - (\angle PAO + \angle RBO)$

$= 360^\circ - 180^\circ$ [$\because$ PQ || RS এবং AB ভেদক]

$= 180^\circ$

$\therefore \angle AOP + \angle ROB = 90^\circ$

$\therefore \angle POR = 180^\circ - (\angle AOP + \angle ROB) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

$\angle POR + \angle ROS = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ ($\because \angle ROS$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ, সুতরাং $\angle ROS = 90^\circ$)

$\therefore \angle POS = 180^\circ$

$\therefore$ P, O এবং S বিন্দু তিনটি সমরেখ। **[প্রমাণিত]**

কষে দেখি 15.2

1. 16 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসবিশিষ্ট একটি বৃত্তের কেন্দ্র থেকে 17 সেমি. দূরত্বে অবস্থিত বহিঃস্থ একটি বিন্দু থেকে অঙ্কিত বৃত্তের স্পর্শকের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।
2. একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত P ও Q বিন্দু দুটিতে অঙ্কিত স্পর্শক দুটি A বিন্দুতে ছেদ করেছে। $\angle PAQ = 60^\circ$ হলে $\angle APQ$-এর মান নির্ণয় করি।
3. O কেন্দ্রীয় বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু A থেকে অঙ্কিত দুটি স্পর্শক AP ও AQ বৃত্তকে P ও Q বিন্দুতে স্পর্শ করে। PR একটি ব্যাস হলে, প্রমাণ করি যে, OA || RQ
4. প্রমাণ করি যে, একটি বৃত্তের পরিলিখিত কোনো চতুর্ভুজের যে-কোনো দুটি বিপরীত বাহুর দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ সম্মুখ কোণ দুটি পরস্পর সম্পূরক।
5. প্রমাণ করি যে, বৃত্তের পরিলিখিত সামান্তরিক মাত্রই রম্বস।
6. A ও B কেন্দ্রীয় দুটি বৃত্ত অঙ্কন করেছি যারা পরস্পরকে C বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করেছে। C বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের উপর O একটি বিন্দু এবং OD ও OE যথাক্রমে A ও B কেন্দ্রীয় বৃত্তকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। $\angle COD = 56^\circ$, $\angle COE = 40^\circ$, $\angle ACD = x^\circ$ এবং $\angle BCE = y^\circ$ হলে প্রমাণ করি যে $OD = OC = OE$ এবং $x - y = 8$

7. A ও B কেন্দ্রবিশিষ্ট দুটি নির্দিষ্ট বৃত্ত পরস্পরকে অন্তঃস্পর্শ করেছে। অপর একটি বৃত্ত, বৃহত্তর বৃত্তটিকে X বিন্দুতে অন্তঃস্পর্শ এবং ক্ষুদ্রতর বৃত্তটিকে Y বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করেছে। O যদি ওই বৃত্তের কেন্দ্র হয়, তবে প্রমাণ করি যে, AO + BO ধ্রুবক হবে।
8. A ও B কেন্দ্রীয় দুটি বৃত্ত অঙ্কন করেছি যারা পরস্পরকে O বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করেছে। O বিন্দু দিয়ে একটি সরলরেখা অঙ্কন করেছি যা বৃত্ত দুটিকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে, AP || BQ.
9. তিনটি সমান বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করেছে। প্রমাণ করি যে, ওই বৃত্ত তিনটির কেন্দ্রগুলি একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।
10. একটি বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু A থেকে অঙ্কিত AB ও AC দুটি স্পর্শক বৃত্তকে B ও C বিন্দুতে স্পর্শ করে। উপচাপ BC-এর উপর অবস্থিত X বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক AB ও AC -কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, ΔADE-এর পরিসীমা = 2 AB.

11. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :

(i) O কেন্দ্রীয় বৃত্তের বহিঃস্থ A বিন্দু থেকে অঙ্কিত স্পর্শক বৃত্তকে B বিন্দুতে স্পর্শ করে। OB = 5 সেমি., AO = 13 সেমি. হলে, AB-এর দৈর্ঘ্য
(a) 12 সেমি. (b) 13 সেমি. (c) 6.5 সেমি. (d) 6 সেমি.

(ii) দুটি বৃত্ত পরস্পরকে C বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করে। AB বৃত্ত দুটির একটি সাধারণ স্পর্শক বৃত্ত দুটিকে A ও B বিন্দুতে স্পর্শ করে। $\angle$ACB-এর পরিমাপ
(a) 60° (b) 45° (c) 30° (d) 90°

(iii) O কেন্দ্রীয় বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 5 সেমি.। O বিন্দু থেকে 13 সেমি. দূরত্বে P একটি বিন্দু। P বিন্দু থেকে বৃত্তের দুটি স্পর্শকের দৈর্ঘ্য PQ এবং PR; PQOR চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল
(a) 60 বর্গ সেমি. (b) 30 বর্গ সেমি. (c) 120 বর্গ সেমি. (d) 150 বর্গ সেমি.

(iv) দুটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 5 সেমি. ও 3 সেমি.। বৃত্ত দুটি পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করে। বৃত্তদুটির কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব
(a) 2 সেমি. (b) 2.5 সেমি. (c) 1.5 সেমি. (d) 8 সেমি.

(v) দুটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 3.5 সেমি. ও 2 সেমি.। বৃত্ত দুটি পরস্পরকে অন্তঃস্পর্শ করে। বৃত্ত দুটির কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব
(a) 5.5 সেমি. (b) 1 সেমি. (c) 1.5 সেমি. (d) কোনোটিই নয়

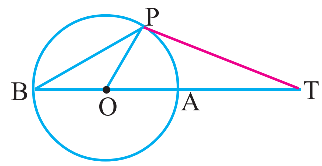
(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) একটি বৃত্তের অন্তঃস্থ একটি বিন্দু P ; বৃত্তে অঙ্কিত কোনো স্পর্শক P বিন্দুগামী নয়।
(ii) একটি বৃত্তে একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল দুইয়ের অধিক স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।

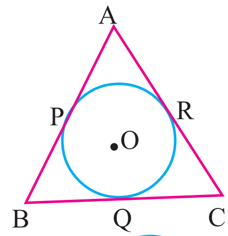
(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) একটি সরলরেখা বৃত্তকে দুটি বিন্দুতে ছেদ করলে সরলরেখাটিকে বৃত্তের ________ বলে।
(ii) দুটি বৃত্ত পরস্পরকে ছেদ বা স্পর্শ না করলে বৃত্তদুটির সর্বাধিক সংখ্যায় ________ টি সাধারণ স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।
(iii) দুটি বৃত্ত পরস্পরকে A বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করে। A বিন্দুতে অঙ্কিত বৃত্ত দুটির সাধারণ স্পর্শক হলো ________ সাধারণ স্পর্শক (সরল / তির্যক)।

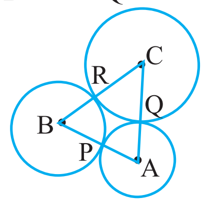
12. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)**



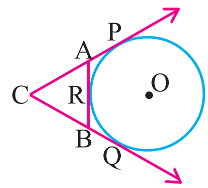
(i) পাশের চিত্রে বৃত্তের কেন্দ্র O এবং BOA বৃত্তের ব্যাস। বৃত্তের P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক বর্ধিত BA-কে T বিন্দুতে ছেদ করে। $\angle PBO = 30^{\circ}$ হলে, $\angle PTA$-এর মান নির্ণয় করি।



(ii) পাশের চিত্রে ABC ত্রিভুজটি একটি বৃত্তে পরিলিখিত এবং বৃত্তকে P, Q, R বিন্দুতে স্পর্শ করে। যদি AP = 4 সেমি., BP = 6 সেমি., AC = 12 সেমি. এবং BC = x সেমি. হয়। তাহলে x-এর মান নির্ণয় করি।



(iii) পাশের চিত্রে A, B, C কেন্দ্রবিশিষ্ট তিনটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করে। যদি AB = 5 সেমি., BC = 7 সেমি. এবং CA = 6 সেমি. হয়, তাহলে A কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।



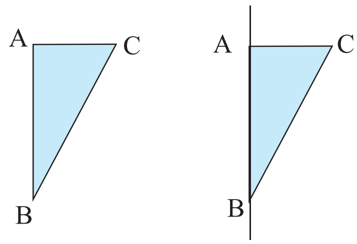
(iv) পাশের চিত্রে O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে বহিঃস্থ বিন্দু C থেকে অঙ্কিত দুটি স্পর্শক বৃত্তকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে স্পর্শ করে। বৃত্তের অপর একটি বিন্দু R-তে অঙ্কিত স্পর্শক CP ও CQ-কে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। যদি, CP = 11 সেমি. এবং BC = 7 সেমি. হয়, তাহলে BR-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

(v) দুটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 8 সেমি. ও 3 সেমি. এবং তাদের কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব 13 সেমি.। বৃত্ত দুটির একটি সরল সাধারণ স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

16 লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু
RIGHT CIRCULAR CONE

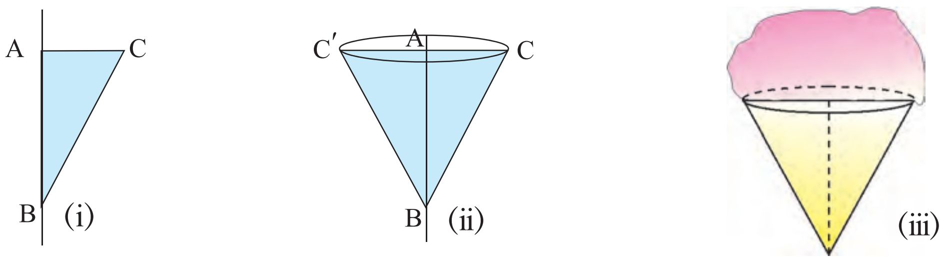
গত মাসে আমরা অর্ধবৃত্তাকার পিচবোর্ডে একটি সরু কাঠি আটকে অনেকগুলি হাতপাখা তৈরি করেছি।
আবার দেখেছি এই হাতপাখাগুলি তার কাঠিটিকে অক্ষ করে জোরে ঘোরালে গোলক আকারের ঘনবস্তু পাই।

1 কিন্তু একইভাবে কোনো সমকোণী ত্রিভুজাকার পিচবোর্ডকে ত্রিভুজটির লম্ব বা ভূমির দিকে কাঠির সঙ্গে আটকে কাঠির সাপেক্ষে ঘোরালে কী পাব দেখি।



আমার বন্ধু আসলাম একটি রঙিন আয়তক্ষেত্রাকার পিচবোর্ড থেকে পাশের চিত্রের মতো একটি সমকোণী ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র ABC কেটে নিল, যার $\angle A$ সমকোণ।
আমি এই ABC সমকোণী ত্রিভুজাকার পিচবোর্ডের সমকোণ সংলগ্ন একটি বাহু AB -এর সঙ্গে খুব সরু কাঠি আটকে পাশের চিত্রের মতো পেলাম।

2 এবার AB কাঠিটিকে অক্ষ করে অক্ষের চারপাশে ত্রিভুজাকার পিচবোর্ডটি খুব জোরে ঘুরিয়ে কী পাই দেখি।

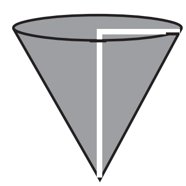


ABC সমকোণী ত্রিভুজের AB বাহুকে অক্ষ করে অক্ষের চারপাশে ঘোরানোর ফলে দেখছি আইসক্রিমের কোনের মতো আকারের একটি ঘনবস্তুর আকার তৈরি হয়েছে।

3 এইরকম আকারের ঘনবস্তুকে কী বলা হয়?

এইরকম আকারের ঘনবস্তুকে লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু বলা হয়।

4 ABC সমকোণী ত্রিভুজের AB বাহুর সাপেক্ষে ঘোরানোয় AC বাহু দ্বারা একটি বৃত্ত গঠিত হয়েছে একে কী বলা হয়?



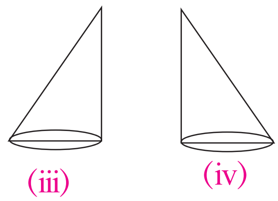
(ii) নং চিত্রের AC বাহু দ্বারা গঠিত বৃত্তকে লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমি বলা হয়। শঙ্কুর বৃত্তাকার ভূমির ব্যাসার্ধ AC এবং বৃত্তাকার ভূমির কেন্দ্র A

5 কিন্তু (ii) নং চিত্রের B বিন্দুকে লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর কী বলা হয়?

(ii) নং চিত্রের B বিন্দু লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর শীর্ষবিন্দু [apex]। আবার বৃত্তাকার ভূমির উপর লম্ব AB-কে লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা [Height] এবং BC-কে তির্যক উচ্চতা [Slant height] বলা হয়।

একটি মুখবন্ধ শঙ্কুর $\boxed{}$ টি তল। একটি সমতল এবং অন্যটি $\boxed{}$ [বক্রতল/সমতল] **[নিজে লিখি]**

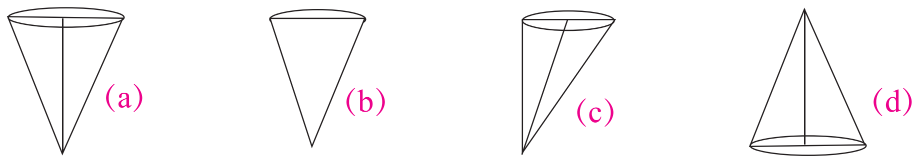
6 আমি আমার বাড়ির ব্যবহার করা 4টি ঘনবস্তু লিখি যাদের আকার লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির মতো।
আমার বোন কাগজ দিয়ে পাশের ছবির মতো দুটি শঙ্কু তৈরি করল।



7 (iii) ও (iv) নং ছবির শঙ্কুগুলি কি লম্ববৃত্তাকার শঙ্কু ?

(iii) ও (iv) নং চিত্রের শঙ্কুগুলি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু নয়। কারণ শঙ্কুগুলির শীর্ষবিন্দু ও তাদের বৃত্তাকার ক্ষেত্রের কেন্দ্র সংযোজক সরলরেখাংশ তাদের ভূমির উপর লম্বভাবে অবস্থিত নহে।

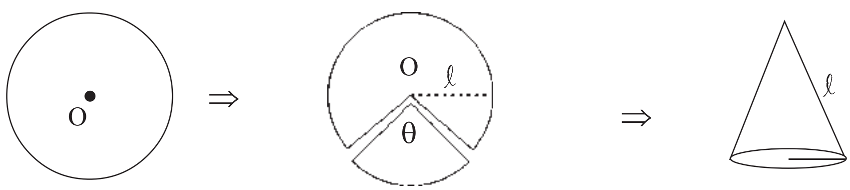
8 নীচের শঙ্কুর চিত্রগুলি দেখি এবং এদের মধ্যে কোনগুলি লম্ববৃত্তাকার শঙ্কু বুঝে লিখি :



তবে এখানে 'শঙ্কু' বলতে আমরা 'লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুকেই বুঝব'।
আমি একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু তৈরির চেষ্টা করি। কিন্তু কতটা পরিমাণ কাগজ লাগবে কীভাবে পাব?
লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের মাধ্যমে পাব।

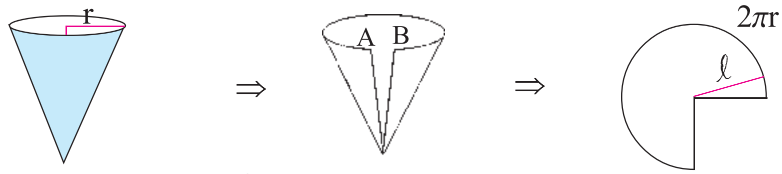
হাতেকলমে লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু তৈরি করি ও তার বক্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করি।

1. একটি কাঠের বোর্ডে একটি সাদা আর্টপেপার আটকে দিলাম।
2. এবার ওই আর্টপেপারে 'ℓ' একক দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত এঁকে বৃত্তাকার ক্ষেত্র কেটে নিলাম।
3. ওই বৃত্তাকার ক্ষেত্র থেকে যে-কোনো একটি বৃত্তকলা কেটে নিলাম।
4. এবার ওই কেটে নেওয়া বৃত্তকলার দুই প্রান্তের ব্যাসার্ধ দুটি আঠা দিয়ে আটকে লম্ব বৃত্তাকার ফাঁপা শঙ্কু পেলাম।



হাতেকলমে ওই শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করি।

(1) একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু নিয়ে নীচের ছবির মতো তির্যক উচ্চতা বরাবর কেটে খুলে দিলাম।
ধরি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা $= \ell$ এবং ব্যাসার্ধ $= r$



$\therefore$ লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু খুলে একটি বৃত্তকলা পেলাম।
শঙ্কুটির তির্যক উচ্চতা = বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $= \ell$
শঙ্কুটির ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $= r$

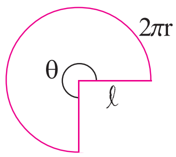
$\therefore$ শঙ্কুর ভূমির পরিধি $= 2\pi r$ = বৃত্তকলার দৈর্ঘ্য

$\therefore$ লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল

= বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল

$= \dfrac{\text{বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য}}{\text{বৃত্তের পরিধি}} \times$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল

$= \dfrac{2\pi r}{2\pi\ell} \times \pi\ell^2 = \pi r\ell$



[বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \dfrac{\theta}{360} \times \pi\ell^2$, যেখানে বৃত্তকলা বৃত্তাকার ক্ষেত্রের কেন্দ্রে θ° কোণ উৎপন্ন করে।

আবার, বৃত্তাকার ক্ষেত্রে চাপের দৈর্ঘ্য ও চাপ দ্বারা বৃত্তের কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ সমানুপাতী, $\therefore \dfrac{\theta}{360} = \dfrac{2\pi r}{2\pi\ell}$

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, **লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= \pi r\ell$**
[যেখানে শঙ্কুর ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r এবং শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা $= \ell$]

মুখ খোলা লম্ববৃত্তাকার শঙ্কু তৈরি করতে $\pi r\ell$ বর্গ একক কাগজ লাগবে,যেখানে $r = \boxed{}$ এবং $\ell = \boxed{}$ **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 1. আমি যে মুখখোলা লম্ব বৃত্তকার শঙ্কু তৈরি করেছি তার ভূমিতলের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 14সেমি. এবং তির্যক উচ্চতা 12 সেমি. হলে, ওই শঙ্কু তৈরি করতে কী পরিমাণ কাগজ লেগেছে হিসাব করে লিখি।

শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $= \dfrac{14}{2}$ সেমি. = 7 সেমি.

$\therefore$ শঙ্কুর পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল বা বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= \dfrac{22}{7} \times 7 \times 12$ বর্গ সেমি. = 264 বর্গ সেমি.

প্রয়োগ :2. যে লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাসার্ধ 1.5 মিটার এবং তির্যক উচ্চতা 2 মিটার তার পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ :3. কোনো শঙ্কুর ভূমির ক্ষেত্রফল $78\frac{4}{7}$ বর্গ সেমি. এবং তির্যক উচ্চতা 13সেমি. হলে,শঙ্কুর পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

ধরি, শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r সেমি.

শর্তানুসারে, $\dfrac{22}{7} r^2 = 78\dfrac{4}{7}$ $\quad \therefore r = \boxed{}$

$\therefore$ শঙ্কুর পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল $= \boxed{}$ বর্গ সেমি. [নিজে করি]

প্রয়োগ : 4. কোনো শঙ্কুর ভূমির পরিধি $\frac{660}{7}$ সেমি. এবং তির্যক উচ্চতা 25 সেমি. হলে, শঙ্কুর পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

9 কিন্তু যদি একটি মুখবন্ধ লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু তৈরি করি তবে কতটা পরিমাণ আর্টপেপার লাগবে হিসাব করি।

ধরি, লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = r এবং তির্যক উচ্চতা = ℓ

$\therefore$ আর্টপেপার লাগবে = শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল + ভূমির বৃত্তাকার তলের ক্ষেত্রফল

$= \pi r\ell + \pi r^2$

$= \pi r (\ell + r)$

লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = $\pi r\ (r+\ell)$

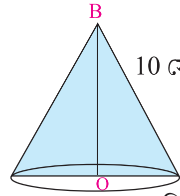
প্রয়োগ : 5. যে শঙ্কুর ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 1.5 সেমি. এবং তির্যক উচ্চতা 2.5 সেমি., তার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

শঙ্কুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = $\frac{22}{7} \times 1.5\ (1.5 + 2.5)$ বর্গ সেমি.

$= \frac{22}{7} \times \frac{15}{10} \times 4$ বর্গ সেমি. $= \boxed{}$ বর্গ সেমি.

প্রয়োগ : 6. যে শঙ্কুর ভূমির ব্যাসের দৈর্ঘ্য 20 সেমি. এবং তির্যক উচ্চতা 25 সেমি., তার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 7. একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু তৈরি করেছি যার ভূমির ব্যাসের দৈর্ঘ্য 12 সেমি. এবং তির্যক উচ্চতা 10 সেমি.। ওই শঙ্কুটির উচ্চতা কত হবে হিসাব করে লিখি।



লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = $\frac{12}{2}$ সেমি. = 6 সেমি.

চিত্রে শঙ্কুর ভূমির ব্যাসার্ধ OA, তির্যক উচ্চতা AB এবং উচ্চতা OB

OA = 6 সেমি., AB = 10 সেমি. শঙ্কুর উচ্চতা = OB

$\therefore$ সমকোণী ত্রিভুজ OAB-তে, $AB^2 = OB^2 + OA^2$ (পিথাগোরাসের উপপাদ্য থেকে পেলাম)

বা, $OB^2 = AB^2 - OA^2$

বা, $OB = \sqrt{AB^2 - OA^2}$ [$\because$ উচ্চতা ঋণাত্মক হতে পারে না]

$= \sqrt{(\text{তির্যক উচ্চতা})^2 - (\text{ব্যাসার্ধ})^2}$

$= \sqrt{(10)^2 - 6^2}$ সেমি.

$= \sqrt{64}$ সেমি.

$= 8$ সেমি.

$\therefore$ শঙ্কুর উচ্চতা 8 সেমি.

$\therefore$ শঙ্কুর উচ্চতা = $\sqrt{(\text{তির্যক উচ্চতা})^2 - (\text{ব্যাসার্ধ})^2}$

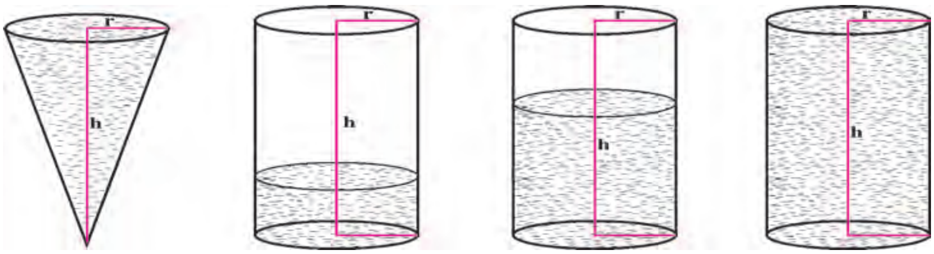
প্রয়োগ : 8. যে লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর পরিধি $\frac{660}{7}$ সেমি. এবং উচ্চতা 20 সেমি., তার তির্যক উচ্চতা হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

আমি আমাদের স্কুলের বিজ্ঞানের ল্যাবরেটরিতে একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির কাচের ফ্লাস্ক দেখেছি। ওই ফ্লাস্কে জল ভরা থাকে। কিন্তু ওই লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির ফ্লাস্কে কতটা পরিমাণ জল ধরবে কীভাবে পাব দেখি। হাতেকলমে পরিমাপের চেষ্টা করি।

হাতেকলমে

(1) একই দৈর্ঘ্যের ভূমির ব্যাস ও একই উচ্চতাবিশিষ্ট একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙ ও একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির খালি পাত্র নিলাম।

(2) এবার শঙ্কু আকৃতির পাত্রটি সম্পূর্ণভাবে জলপূর্ণ করে চোঙাকৃতি পাত্রে ঢাললাম।



প্রথমবারে $\frac{1}{3}$ অংশ ভর্তি দ্বিতীয়বারে $\frac{2}{3}$ অংশ ভর্তি তৃতীয়বারে সম্পূর্ণ ভর্তি

দেখছি, শঙ্কু আকৃতির পাত্রটি **তিনবার** জলপূর্ণ করে জল ঢাললে চোঙাকৃতি পাত্রটি সম্পূর্ণভাবে জলপূর্ণ হয়।

সুতরাং চোঙের আয়তন $= 3 \times$ শঙ্কুর আয়তন

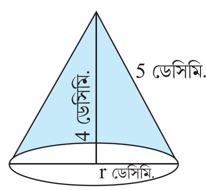
$\therefore$ শঙ্কুর আয়তন $= \frac{1}{3} \times$ চোঙের আয়তন $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, শঙ্কুর আয়তন $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$ [যেখানে $r =$ ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য এবং $h =$ ফ্লাস্কের উচ্চতা]

$\therefore$ স্কুলের ল্যাবরেটরির লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির ফ্লাস্কে জল আছে $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

প্রয়োগ : 9. স্কুলের বিজ্ঞানের ল্যাবরেটরির শঙ্কু আকৃতির ফ্লাস্কের উচ্চতা 4 ডেসিমি. এবং তির্যক উচ্চতা 5 ডেসিমি. হলে, ওই ফ্লাস্কে কী পরিমাণ জল ধরবে হিসাব করে লিখি।

ধরি, শঙ্কু আকৃতির ফ্লাস্কের ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $= r$ ডেসিমি.



সুতরাং $(5)^2 = r^2 + (4)^2$

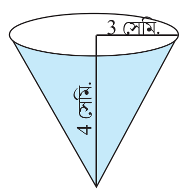
বা, $r^2 = 5^2 - 4^2 = 9 \therefore r = \pm 3$

কিন্তু ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না। $\therefore r \neq -3 \quad \therefore r = 3$

$\therefore$ ওই ফ্লাস্কে জল ধরবে $= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 3 \times 3 \times 4$ ঘন ডেসিমি. $= \boxed{}$ ঘন ডেসিমি. [নিজে করি]

প্রয়োগ : 10. যদি কোনো লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমির পরিধি 2.2 মিটার এবং উচ্চতা 45 ডেসিমি. হয়, তবে ওই লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর আয়তন হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 11. একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন বাহু দুইটির দৈর্ঘ্য 4সেমি. ও 3সেমি.। সমকোণ সংলগ্ন বাহু দুইটির দীর্ঘ বাহুটিকে অক্ষ ধরে ত্রিভুজটিকে একবার পূর্ণ আবর্তন করলে যে ঘনবস্তু তৈরি হয়, তার পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল, সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল এবং আয়তন হিসাব করে লিখি।



উত্তর সংকেত : যে লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু তৈরি হবে তার উচ্চতা 4 সেমি. এবং ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 3 সেমি.।

প্রয়োগ : 12. একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা 7 সেমি. এবং সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 147.84 বর্গ সেমি.। শঙ্কুটির ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

ধরি, শঙ্কুটির ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = r সেমি.

$\therefore$ শঙ্কুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = $\frac{22}{7}$ r (r+7) বর্গ সেমি.

শর্তানুসারে, $\frac{22}{7} r(r+7) = 147.84$

বা, $r(r+7) = \frac{14784}{100} \times \frac{7}{22} = \frac{1176}{25}$

বা, $25r^2 + 175r - 1176 = 0$

বা, $25r^2 + 280r - 105r - 1176 = 0$

বা, $5r(5r+56) - 21(5r+56) = 0$

বা, $(5r+56)(5r-21) = 0$

হয়, $5r - 21 = 0$ বা, $5r = 21$ বা, $r = \frac{21}{5}$

$\therefore r = 4.2$

অথবা, $5r + 56 = 0$ বা, $5r = -56$

$\therefore r = \frac{-56}{5}$

কিন্তু ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না।

$\therefore r \neq \frac{-56}{5}$

সুতরাং $r = 4.2$

$\therefore$ শঙ্কুটির ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 4.2 সেমি.।

প্রয়োগ :13. যদি দুটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতার অনুপাত 1 : 3 এবং তাদের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত যথাক্রমে 3 : 1 হয়, তবে হিসাব করে দেখাই যে শঙ্কুদ্বয়ের আয়তনের অনুপাত 3 : 1 হবে।

ধরি, প্রথম শঙ্কুর উচ্চতা x একক এবং দ্বিতীয় শঙ্কুর উচ্চতা 3x একক, যেখানে $x > 0$;

আবার, প্রথম শঙ্কুর ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 3y একক এবং দ্বিতীয় শঙ্কুর ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য y একক, যেখানে $y > 0$

সুতরাং, $\frac{\text{প্রথম শঙ্কুর আয়তন}}{\text{দ্বিতীয় শঙ্কুর আয়তন}} = \frac{\frac{1}{3} \times \pi \times (3y)^2 \times x}{\frac{1}{3} \times \pi \times (y)^2 \times 3x} = \frac{9}{3} = \frac{3}{1}$ $\therefore$ শঙ্কু দুটির আয়তনের অনুপাত 3 : 1

প্রয়োগ :14. যদি দুটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতার অনুপাত 2 : 3 এবং তাদের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত 3 : 5 হয়, তবে শঙ্কুদ্বয়ের আয়তনের অনুপাত হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ :15. লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির একটি তাঁবুর ভূমিতলের ক্ষেত্রফল 13.86 বর্গ মিটার। তাঁবুটি তৈরি করতে 5775 টাকা মূল্যের একটি ত্রিপল লাগে এবং এক বর্গমিটার ত্রিপলের মূল্য 150 টাকা হলে, তাঁবুটির উচ্চতা নির্ণয় করি। তাঁবুটিতে কত লিটার বায়ু আছে হিসাব করে লিখি।

ধরি, তাঁবুর ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r মিটার, উচ্চতা h মিটার এবং তির্যক উচ্চতা ℓ মিটার।

ভূমিতলের ক্ষেত্রফল = 13.86 বর্গ মিটার।

শর্তানুসারে, $\frac{22}{7} \times r^2 = 13.86$ $\therefore r = \boxed{}$ **[নিজে হিসাব করি]** $\therefore$ ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 2.1 মিটার।

প্রতি বর্গ মিটার 150 টাকা হিসাবে 5775 টাকায় ত্রিপলের পরিমাণ= $\frac{5775}{250}$ বর্গ মিটার = 23.1 বর্গ মিটার

$\therefore$ পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল = $\pi r \ell$ বর্গ মিটার = 23.1 বর্গ মিটার

বা, $\frac{22}{7} \times \frac{21}{10} \times \ell = 23.1$ $\therefore \ell = \frac{7}{2}$ **[নিজে হিসাব করি]**

$\therefore$ তির্যক উচ্চতা = $\frac{7}{2}$ মিটার = 3.5 মিটার

$\therefore h = +\sqrt{\ell^2 - r^2}$ [$\because$ উচ্চতা ঋণাত্মক হতে পারে না]

$= \sqrt{(3.5)^2 - (2.1)^2}$ মি.= $\sqrt{(3.5+2.1) \times (3.5-2.1)}$ মি. = $\boxed{}$ **[নিজে লিখি]** $\therefore$ উচ্চতা = 2.8 মিটার

$\therefore$ তাঁবুটিতে বায়ু ধরে = $\frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 2.1 \times 2.1 \times 2.8$ ঘন মি.= $\boxed{}$ ঘন মি. = 12936 ঘন ডেসিমি.

= 12936 লিটার

কষে দেখি 16

1. আমি একটি মুখবন্ধ লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু তৈরি করেছি যার ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 15 সেমি. এবং তির্যক উচ্চতা 24 সেমি.। ওই শঙ্কুর পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল ও সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।
2. শঙ্কুর আয়তন নির্ণয় করি যখন, (i) ভূমির ক্ষেত্রফল 1.54 বর্গ মিটার এবং উচ্চতা 2.4 মিটার,
   (ii) ভূমির ব্যাসের দৈর্ঘ্য 21 মিটার এবং তির্যক উচ্চতা 17.5 মিটার।
3. আমিনা একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন করেছে যার সমকোণ সংলগ্ন বাহু দুটির দৈর্ঘ্য 15 সেমি. ও 20 সেমি.। 15 সেমি. দীর্ঘ বাহুটিকে অক্ষ ধরে ত্রিভুজটিকে একবার পূর্ণ আবর্তন করলে যে ঘনবস্তু তৈরি হয়, তার পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল, সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল এবং আয়তন নির্ণয় করি।
4. কোনো শঙ্কুর উচ্চতা ও তির্যক উচ্চতা যথাক্রমে 6 সেমি. ও 10 সেমি. হলে, শঙ্কুটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় করি।
5. কোনো লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর আয়তন (100π) ঘন সেমি. এবং উচ্চতা 12 সেমি. হলে, শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা হিসাব করে লিখি।
6. লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির একটি তাঁবু তৈরি করতে 77 বর্গ মিটার ত্রিপল লেগেছে। তাঁবুটির তির্যক উচ্চতা যদি 7 মিটার হয়, তবে তাঁবুটির ভূমিতলের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।
7. একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাস 21 মিটার এবং উচ্চতা 14 মিটার। প্রতি বর্গ মিটার 1.50 টাকা হিসাবে পার্শ্বতল রং করতে কত টাকা খরচ পড়বে হিসাব করি।
8. নিরেট শঙ্কু আকৃতির একটি কাঠের খেলনার ভূমিতলের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 10 সেমি.। খেলনাটির বক্রতলে প্রতি বর্গ সেমি. 2.10 টাকা হিসাবে পালিশ করতে 429 টাকা খরচ পড়ে। খেলনাটির উচ্চতা কত হিসাব করি। খেলনাটি তৈরি করতে কত ঘন সেমি. কাঠ লেগেছে নির্ণয় করি।
9. লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির একটি লোহার পাতের বয়া তৈরি করতে $75\frac{3}{7}$ বর্গ মিটার লোহার পাত লেগেছে। বয়াটির তির্যক উচ্চতা যদি 5 মিটার হয়, তবে বয়াটিতে কত বায়ু আছে এবং বয়াটির উচ্চতা কত হিসাব করে লিখি।

   ওই বয়াটির চারপাশ রং করতে প্রতি বর্গ মিটার 2.80 টাকা হিসাবে কত খরচ পড়বে নির্ণয় করি। [লোহার পাতের বেধ হিসাবের মধ্যে ধরতে হবে না]
10. লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির একটি তাঁবুতে 11জন লোক থাকতে পারে। প্রত্যেক লোকের জন্য ভূমিতে 4 বর্গ মিটার জায়গা লাগে এবং 20 ঘন মিটার বাতাসের প্রয়োজন। ঠিক এই 11 জন লোকের জন্য নির্মিত তাঁবুর উচ্চতা নির্ণয় করি।
11. শোলা দিয়ে তৈরি একটি শঙ্কু আকৃতির মাথার টোপরের ভূমির বাইরের দিকের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 21 সেমি.। টোপরটির উপরিভাগ রাংতা দিয়ে মুড়তে প্রতি বর্গ সেমি. 10 পয়সা হিসাবে 57.75 টাকা খরচ পড়ে। টোপরটির উচ্চতা ও তির্যক উচ্চতা হিসাব করে লিখি।
12. গমের একটি স্তূপ লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকারে আছে, যার ভূমির ব্যাসের দৈর্ঘ্য 9 মিটার এবং উচ্চতা 3.5 মিটার। মোট গমের আয়তন নির্ণয় করি। গমের ওই স্তূপ ঢাকতে কমপক্ষে কত বর্গ মিটার প্লাসটিকের চাদর প্রয়োজন হবে হিসাব করে দেখি। [ধরি, $\pi = 3.14$, $\sqrt{130} = 11.4$]
13. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

    (A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :

    (i) একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা 15 সেমি. এবং ভূমিতলের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 16 সেমি. হলে, শঙ্কুটির পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল

    (a) 60π বর্গ সেমি. (b) 68π বর্গ সেমি. (c) 120π বর্গ সেমি. (d) 130π বর্গ সেমি.

(ii) দুটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর আয়তনের অনুপাত 1:4 এবং তাদের ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত 4:5 হলে, তাদের উচ্চতার অনুপাত

(a) 1:5 (b) 5:4 (c) 25:16 (d) 25:64

(iii) একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য একই রেখে উচ্চতা দ্বিগুণ করলে,শঙ্কুটির আয়তন বৃদ্ধি পায়

(a) 100% (b) 200% (c) 300% (d) 400%

(iv) একটি শঙ্কুর ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য এবং উচ্চতা প্রত্যেকটি দ্বিগুণ হলে, শঙ্কুটির আয়তন হয় পূর্বের শঙ্কুর আয়তনের

(a) 3গুণ (b) 4 গুণ (c) 6 গুণ (d) 8 গুণ

(v) একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $\frac{r}{2}$ একক এবং তির্যক উচ্চতা 2ℓ একক হলে, সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল

(a) $2\pi r(\ell+r)$ বর্গ একক (b) $\pi r(\ell+\frac{r}{4})$ বর্গ একক (c) $\pi r(\ell+r)$ বর্গ একক (d) $2\pi r\ell$ বর্গ একক

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য অর্ধেক এবং উচ্চতা দ্বিগুণ করা হলে শঙ্কুটির আয়তন একই থাকে।

(ii) একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা, ব্যাসার্ধ এবং তির্যক উচ্চতা সর্বদা একটি সমকোণী ত্রিভুজের বাহুত্রয়।

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি:

(i) ABC সমকোণী ত্রিভুজের AC অতিভুজ। AB বাহুকে অক্ষ করে ত্রিভুজটির একবার পূর্ণ আবর্তনের জন্য যে লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু উৎপন্ন হয় তার ব্যাসার্ধ ______।

(ii) একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর আয়তন V ঘন একক এবং ভূমিতলের ক্ষেত্রফল A বর্গ একক হলে, উচ্চতা ______।

(iii) একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙ এবং লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য সমান এবং তাদের উচ্চতা সমান। তাদের আয়তনের অনুপাত ______।

14. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)**

(i) একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা 12 সেমি. এবং আয়তন 100π ঘন সেমি.। শঙ্কুটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য কত তা লিখি।

(ii) একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল ভূমিতলের ক্ষেত্রফলের $\sqrt{5}$ গুণ। শঙ্কুটির উচ্চতা ও ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত কত তা লিখি।

(iii) একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর আয়তন V ঘন একক, ভূমিতলের ক্ষেত্রফল A বর্গ একক এবং উচ্চতা H একক হলে, $\frac{AH}{V}$-এর মান কত তা লিখি।

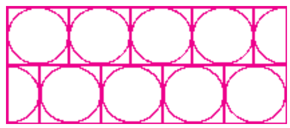
(iv) একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর আয়তন এবং পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফলের সাংখ্যমান সমান। শঙ্কুটির উচ্চতা এবং ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে h একক এবং r একক হলে, $\frac{1}{h^2}+\frac{1}{r^2}$ -এর মান কত তা লিখি।

(v) একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙ এবং লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত 3:4 এবং তাদের উচ্চতার অনুপাত 2:3; চোঙ এবং শঙ্কুর আয়তনের অনুপাত কত তা লিখি।

17 সম্পাদ্য : বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন

Construction of Tangent to a Circle

এবছরের গ্রীষ্মের ছুটিতে আমাদের গ্রামের ক্লাবঘর মেরামত করা হবে। পাড়ার সকল বাড়ি থেকে চাঁদা তোলা হয়েছে। প্রত্যেক পরিবার তাদের সাধ্যমতো চাঁদা দিয়েছে। ক্লাবঘরের সামনের বারান্দায় লোহার গ্রিল লাগানো হবে। তাই আমরা পাড়ার ছোটোরা সকলে মিলে গ্রিলের নকশা পছন্দ করব। লোহার দোকানে গিয়ে আমাদের গ্রিলের যে নকশাটি পছন্দ হলো, সেটি হলো—



বাড়ি ফিরে গিয়ে মায়া গ্রিলের নকশাটি তার খাতায় আঁকার চেষ্টা করল।

দেখছি, আমাদের পছন্দের গ্রিলের নকশায় অনেকগুলি বৃত্ত ও সরলরেখাংশ আছে। কিন্তু নকশায় বৃত্ত ও সরলরেখাংশগুলি কীভাবে আছে?

নকশায় বৃত্তগুলিকে কিছু সরলরেখাংশ স্পর্শ করে আছে। অর্থাৎ, কিছু সরলরেখাংশ বৃত্তের **স্পর্শক** হয়ে আছে।

একটি বৃত্তে কতগুলি স্পর্শক অঙ্কন সম্ভব? এঁকে দেখি।

বৃত্তের উপর অবস্থিত কোনো বিন্দুতে $\boxed{}$ [1টি/2টি] স্পর্শক অঙ্কন করা যায়। কিন্তু বৃত্তের বাহিরের কোনো বিন্দু থেকে বৃত্তে $\boxed{}$ [1টি / 2টি] স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।

সম্পাদ্য : আমি 2.5সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের বৃত্ত আঁকি এবং ওই বৃত্তের উপর অবস্থিত কোনো একটি বিন্দুতে ওই বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন করি।

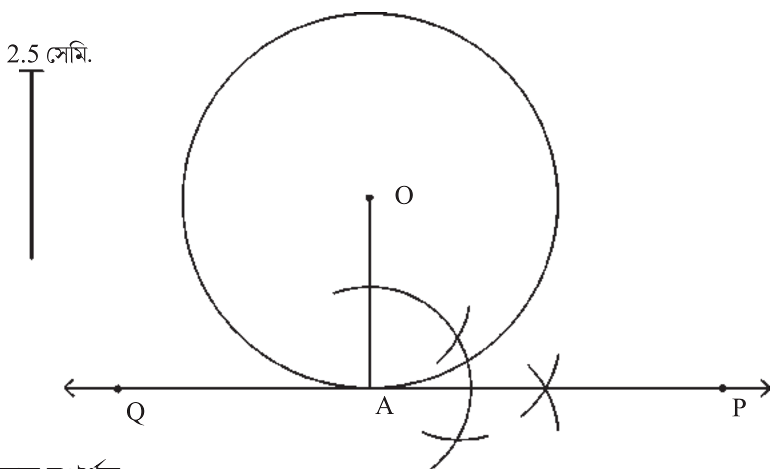
2.5 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্ত অঙ্কন করেছি যার উপর অবস্থিত যে-কোনো একটি বিন্দু A; A বিন্দুতে O কেন্দ্রীয় বৃত্তের একটি স্পর্শক অঙ্কন করি।

অঙ্কন প্রণালী :

(i) O, A যুক্ত করলাম।

(ii) A বিন্দুতে OA-এর উপর পেনসিল কম্পাসের সাহায্যে PQ লম্ব অঙ্কন করলাম।

$\therefore$ $\overleftrightarrow{PQ}$ হলো O কেন্দ্রীয় বৃত্তের A বিন্দুতে স্পর্শক।

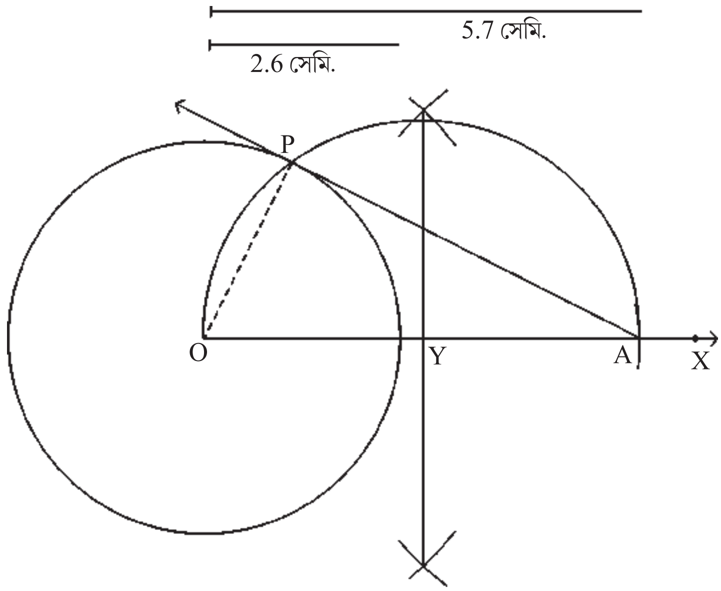


প্রমাণ : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ OA বৃত্তকে A বিন্দুতে ছেদ করেছে এবং $\overleftrightarrow{PQ} \perp OA$,

$\therefore$ $\overleftrightarrow{PQ}$, O কেন্দ্রীয় বৃত্তের A বিন্দুতে স্পর্শক

[$\because$ বৃত্তের কোনো ব্যাসার্ধ যে বিন্দুতে বৃত্তকে ছেদ করে সেই বিন্দুতে ওই ব্যাসার্ধের উপর অঙ্কিত লম্ব, ওই বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক]

সম্পাদ্য : 2.6সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত আঁকি এবং ওই বৃত্তের কেন্দ্র থেকে 5.7সেমি. দূরে ওই বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে বৃত্তটিতে একটি স্পর্শক অঙ্কন করি।



অঙ্কন প্রণালী :

(i) O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্ত এঁকেছি যার ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 2.6সেমি.। যে-কোনো একটি রশ্মি OX থেকে 5.7সেমি. দৈর্ঘ্যের সমান করে OA সরলরেখাংশ কেটে নিই।

(ii) O, A যুক্ত করলাম।

(iii) OA সরলরেখাংশকে Y বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করলাম।

(iv) Y বিন্দুকে কেন্দ্র করে এবং YO দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কন করলাম যা O কেন্দ্রীয় বৃত্তকে P বিন্দুতে ছেদ করল।

(v) A, P যোগ করে বর্ধিত করলাম।

$\therefore$ AP হলো O কেন্দ্রীয় বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু A থেকে ওই বৃত্তের একটি স্পর্শক।

প্রমাণ : O, P যোগ করি।

$\angle OPA$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ। সুতরাং $\angle OPA = 90^o$; O কেন্দ্রীয় বৃত্তের OP ব্যাসার্ধ এবং $OP \perp PA$. সুতরাং $\overrightarrow{AP}$, O কেন্দ্রীয় বৃত্তের একটি স্পর্শক।

বৃত্তের কেন্দ্র O থেকে বহিঃস্থ বিন্দু A- এর দূরত্ব বৃত্তের ব্যাসার্ধের দ্বিগুণ হলে OA- এর মধ্যবিন্দু Y বিন্দুটি O কেন্দ্রীয় বৃত্তের উপর অবস্থিত হয়।

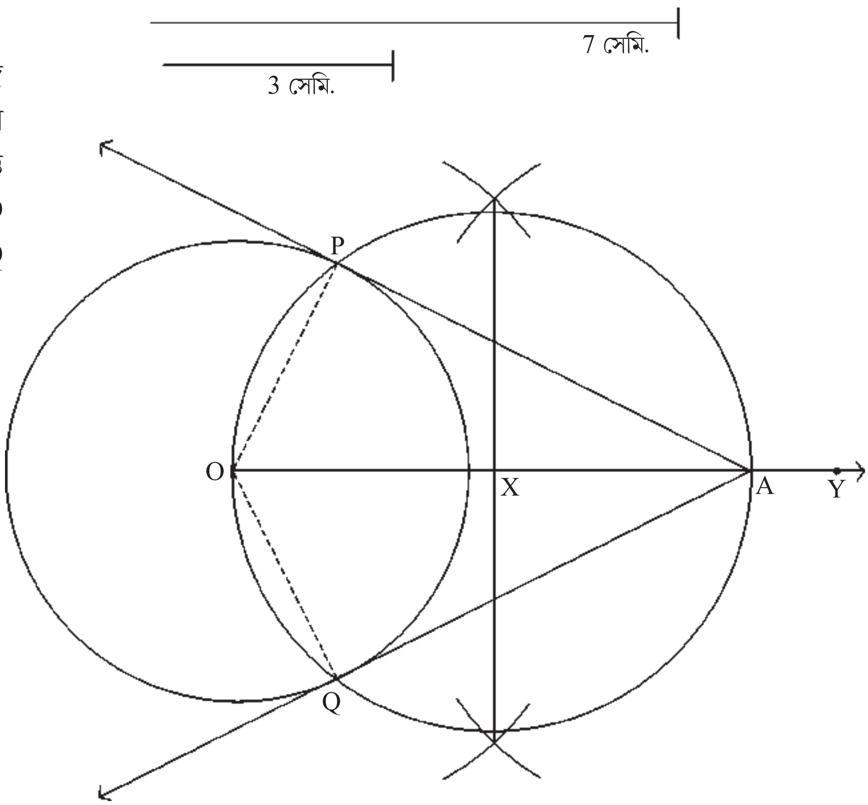
আমি হাতেকলমে ও যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করেছি যে, যে-কোনো বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে দুটি স্পর্শক অঙ্কন সম্ভব। নিজে অঙ্কনের চেষ্টা করি।

সম্পাদ্য : 3সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত অঙ্কন করি। বৃত্তের কেন্দ্র থেকে 7সেমি. দূরে বৃত্তটির বহিঃস্থ বিন্দু থেকে ওই বৃত্তের দুটি স্পর্শক অঙ্কন করি।

অঙ্কন প্রণালী :

(i) O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্ত এঁকেছি যার ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 3সেমি. এবং কেন্দ্র O থেকে 7 সেমি. দূরে OY রশ্মি থেকে OA সরলরেখাংশ কেটে নিই।

(ii) OA সরলরেখাংশকে সমদ্বিখণ্ডিত করলাম। ধরি, OA সরলরেখাংশের মধ্যবিন্দু X.



(iii) X বিন্দুকে কেন্দ্র করে এবং XO দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করলাম যা O কেন্দ্রীয় বৃত্তকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করল।

(iv) A, P ও A, Q যোগ করে বর্ধিত করলাম।

$\therefore$ $\overrightarrow{AP}$ ও $\overrightarrow{AQ}$ হলো O কেন্দ্রীয় বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু A থেকে অঙ্কিত দুটি স্পর্শক।

প্রমাণ :

O, P যোগ করলাম। $\angle OPA$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।

$\therefore \angle OPA = 90^\circ$

যেহেতু O কেন্দ্রীয় বৃত্তের OP ব্যাসার্ধ এবং $OP \perp AP$, সুতরাং $\overrightarrow{AP}$ হলো O কেন্দ্রীয় বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু P থেকে ওই বৃত্তে অঙ্কিত একটি স্পর্শক।

অনুরূপে, $\overrightarrow{AQ}$, O কেন্দ্রীয় বৃত্তের অপর একটি স্পর্শক।

সম্পাদ্য : আমি 2.5সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত আঁকি এবং ওই বৃত্তের কেন্দ্র থেকে 10সেমি. দূরে অবস্থিত কোনো বিন্দু থেকে ওই বৃত্তে দুটি স্পর্শক অঙ্কন করি এবং স্পর্শকদ্বয়ের দৈর্ঘ্য মেপে লিখি। [নিজে করি]

কষে দেখি 17

1. 3.2 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত অঙ্কন করি। ওই বৃত্তের উপর অবস্থিত যে-কোনো বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন করি।

2. 3 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট AB একটি সরলরেখাংশ অঙ্কন করে A বিন্দুকে কেন্দ্র করে AB দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করি এবং B বিন্দুতে ওই বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন করি।

3. 2.5 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত অঙ্কন করি। ওই বৃত্তের বাইরে এমন একটি বিন্দু নিই, কেন্দ্র থেকে যার দূরত্ব 6.5 সেমি.। ওই বহিঃস্থ বিন্দু থেকে বৃত্তের একটি স্পর্শক অঙ্কন করি এবং স্কেলের সাহায্যে ওই স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

4. 2.8 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত অঙ্কন করি। বৃত্তের কেন্দ্র থেকে 7.5 সেমি. দূরে একটি বিন্দু নিই। ওই বহিঃস্থ বিন্দু থেকে বৃত্তের দুটি স্পর্শক অঙ্কন করি।

5. O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্তের PQ একটি জ্যা। P ও Q বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন করি।

6. 8 সেমি. দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি সরলরেখাংশ XY অঙ্কন করে XY-কে ব্যাস করে একটি বৃত্ত অঙ্কন করি। X ও Y বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন করি এবং এই স্পর্শক দুটির মধ্যে কী সম্পর্ক লিখি।

7. যে-কোনো একটি বৃত্ত অঙ্কন করে তার দুটি ব্যাস অঙ্কন করি যারা পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত। ব্যাস দুটির চারটি প্রান্তবিন্দুতে বৃত্তের চারটি স্পর্শক অঙ্কন করি এবং এরফলে যে চতুর্ভুজটি গঠিত হলো তা কী ধরনের চতুর্ভুজ বুঝে লিখি।

8. 5 সেমি. দৈর্ঘ্যের বাহুবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজ ABC অঙ্কন করে ΔABC-এর পরিবৃত্ত অঙ্কন করি। ওই পরিবৃত্তের A, B ও C বিন্দুতে স্পর্শক অঙ্কন করি।

9. 5 সেমি. দৈর্ঘ্যের বাহুবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজ ABC অঙ্কন করে ওই ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কন করি। A বিন্দুতে ওই বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন করি এবং স্পর্শকের উপর P এমন একটি বিন্দু নিই যাতে AP = 5সেমি. হয়। P বিন্দু থেকে বৃত্তের অপর স্পর্শকটি অঙ্কন করি এবং এই স্পর্শকটি বৃত্তকে কোন বিন্দুতে স্পর্শ করেছে তা লক্ষ করে লিখি।

10. AB একটি সরলরেখাংশের উপর O একটি বিন্দু এবং O বিন্দুতে AB-এর উপর PQ একটি লম্ব অঙ্কন করি। A এবং B বিন্দুকে কেন্দ্র করে যথাক্রমে AO এবং BO দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে দুটি বৃত্ত অঙ্কন করি এবং এই বৃত্তদুটির সাপেক্ষে PQ-কে কী বলা হয় লিখি। P বিন্দু থেকে বৃত্ত দুটির অপর স্পর্শক দুটি অঙ্কন করি।

11. O কেন্দ্রীয় বৃত্তের উপর P একটি বিন্দু। P বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন করি এবং ওই স্পর্শক থেকে বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের সমান করে PQ অংশ কেটে নিই। Q বিন্দু থেকে বৃত্তের অপর স্পর্শক QR অঙ্কন করি এবং চাঁদার সাহায্যে $\angle$PQR পরিমাপ করে তার মান লিখি।

18 সদৃশতা
SIMILARITY

আমি এবছরে আমাদের জেলার হয়ে হকি খেলার সুযোগ পেয়েছি। তাই কিছু ফর্ম পূরণ করতে হবে এবং সেখানে আমার ছবি দরকার। আমি ও ভাই পাড়ার মিঠুদির সঙ্গে আমার এখনকার একটি ছবি নিয়ে পাড়ার প্রশান্তকাকুর Digital Store-এ গেলাম।

বললাম এই ছবি থেকে 3টি ছবি করে দিন।

কী সাইজের ছবি দরকার? স্ট্যাম্প সাইজ, পাসপোর্ট সাইজ না পোস্টকার্ড সাইজ?

সেটা কী রকম? একটু বুঝিয়ে বলুন।

স্ট্যাম্প সাইজ

পাসপোর্ট সাইজ

পোস্টকার্ড সাইজ

দেখছি, ছবিগুলি একই আকৃতির (Shape) কিন্তু বিভিন্ন আকারের (Size)।

1 এই ছবিগুলি কী সম্পর্কে আছে?

এই ছবিগুলি পরস্পর **সদৃশ (Similar)**।

2 আমার 5 বছর আগের অন্য একটি পাসপোর্ট সাইজ ছবি ও এখনকার পাসপোর্ট সাইজ ছবিদুটি কি পরস্পর সদৃশ হবে?

পাশের ছবিদুটি দেখি।

ছবিদুটি পরস্পর **সদৃশ নয়**। কারণ ছবিদুটির আকার (Size) এক হলেও আকৃতি (Shape) আলাদা।

3 কিন্তু দুটি সর্বসম চিত্র কি সদৃশ হবে?

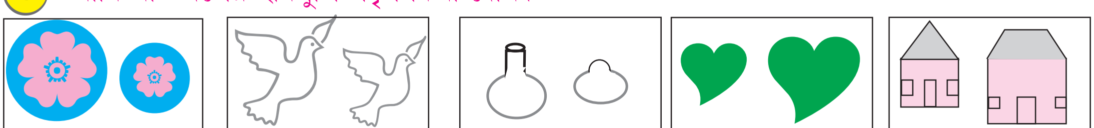
যেহেতু দুটি সর্বসম চিত্রে আকৃতি (Shape) ও আকার (Size) সমান, তাই দুটি সর্বসম চিত্র সর্বদা ______ **[সদৃশ / সদৃশ নয়]**। **[নিজে লিখি]**

অর্থাৎ যদি একাধিক চিত্রের আকার আলাদা হলেও আকৃতি এক হয়, তবে চিত্রগুলি পরস্পর সদৃশ হবে। তাই সর্বসম চিত্র সর্বদা সদৃশ হবে কিন্তু সদৃশ চিত্র সর্বসম নাও হতে পারে।

আমি বাড়ি ফিরে জানলাম পাসপোর্ট সাইজের ছবি দরকার এবং সেইমতো দোকানে বলে দিলাম।

আমার ভাই বাড়ি ফিরে অনেকগুলি ছবি আঁকল এবং একইরকম ছবিগুলি আলাদা দলে ভাগ করে রাখল।

4 আমি প্রতি দলের ছবিগুলি সদৃশ কিনা দেখি।

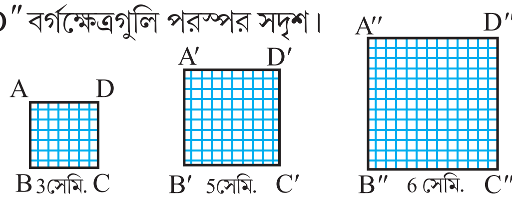


(i) (ii) (iii) (iv) (v)

দেখছি, (i), (ii) ও (iv) নং দলের ছবিগুলি পরস্পর ______। কিন্তু (iii) ও (v) নং দলের ছবিগুলি পরস্পর সদৃশ নয়।

5 আমি একাধিক বিভিন্ন আকারের বর্গক্ষেত্র আঁকি ও বর্গক্ষেত্রগুলি সদৃশ কিনা দেখি।

দেখছি, ABCD, $A'B'C'D'$ ও $A''B''C''D''$ বর্গক্ষেত্রগুলি পরস্পর সদৃশ।



আবার দেখছি, $\angle A = \angle A' = \angle A''$

$\angle B = \angle B' = \angle B''$

$\angle C = \angle C' = \angle C''$

$\angle D = \angle D' = \angle D''$

এবং $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CD}{C'D'} = \dfrac{DA}{D'A'} = \dfrac{3}{5}$

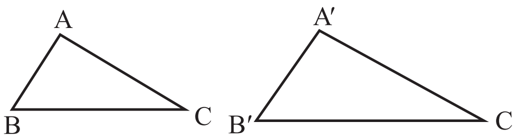
$\dfrac{AB}{A''B''} = \dfrac{BC}{B''C''} = \dfrac{CD}{C''D''} = \dfrac{DA}{D''A''} = \dfrac{3}{6}$

6 আমি দুটি ত্রিভুজ ABC ও $A'B'C'$ আঁকি যাদের

$\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$

ত্রিভুজ দুটির বাহু মেপে দেখছি,

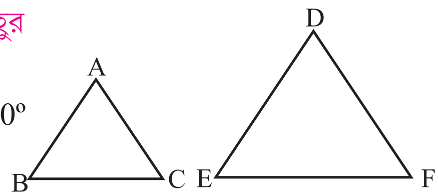
$\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CA}{C'A'}$ **[নিজে এঁকে যাচাই করি]**



7 আমি দুটি সমবাহু ত্রিভুজ আঁকি যার একটির প্রত্যেকটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3 সেমি. ও অপর একটির প্রত্যেকটির বাহুর দৈর্ঘ্য 5 সেমি.।

দেখছি, $\angle A = \angle D = 60^\circ$, $\angle B = \angle E = 60^\circ$, $\angle C = \angle F = 60^\circ$

এবং $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{3}{5}$; সুতরাং ত্রিভুজ দুটি সদৃশ।



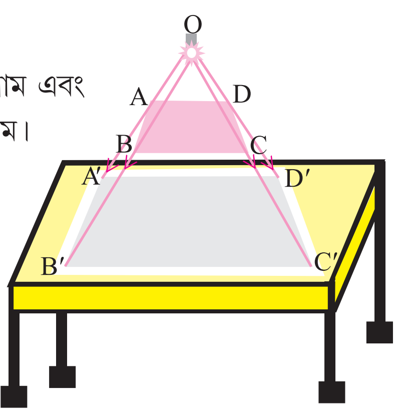
8 কিন্তু ত্রিভুজ দুটি কি সর্বসম হবে?

দেখছি ত্রিভুজ দুটি সর্বসম নয়।

অর্থাৎ দুটি ত্রিভুজ সর্বসম হলে সর্বদা সদৃশ। কিন্তু সদৃশ হলে সর্বসম নয়।

আরও দেখছি একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণ অপর একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমান হলে ত্রিভুজ দুটি সর্বদা সর্বসম নাও হতে পারে। অর্থাৎ কোণ-কোণ-কোণ (A-A-A) দ্বারা দুটি ত্রিভুজ সর্বদা সর্বসম নাও হতে পারে।

আমি দুটি বহুভুজাকার চিত্র কখন সদৃশ হবে হাতেকলমে যাচাই করি।



(1) ঘরের সিলিং-এর কাছের O বিন্দুতে একটি বাল্‌ব আটকে দিলাম এবং তার ঠিক নীচে একটি টেবিল রেখে তাতে সাদা আর্টপেপার রাখলাম।

(2) এবার যে-কোনো একটি বহুভুজাকার পিচ্‌বোর্ড (ধরি) (ABCD) চতুর্ভুজটি টেবিলের সমান্তরালে বাল্‌বের নীচে রাখলাম।

(3) এবার বাল্‌বের আলো জ্বাললে ABCD চতুর্ভুজের ছায়া $A'B'C'D'$ টেবিলের আর্টপেপারে পড়ল এবং পেন্‌সিলের সাহায্যে যোগ করে $A'B'C'D'$ চতুর্ভুজ পেলাম যা ABCD চতুর্ভুজের সদৃশ। এটা সম্ভব হলো কারণ আলো সরলরেখায় চলে। OA রশ্মির উপর A', OB রশ্মির উপর B', OC রশ্মির উপর C', OD রশ্মির উপর D' বিন্দু আছে।

ABCD ও A′B′C′D′ চতুর্ভুজের কোণগুলি ও বাহুগুলি মেপে দেখছি,

$\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\angle D = \angle D'$, এবং $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'}$

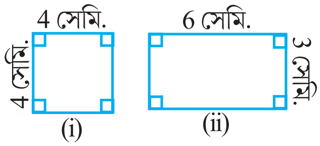
[নিজে একইভাবে হাতেকলমে যাচাই করি]

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, একই সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুটি বহুভুজ সদৃশ হবে যদি,

(i) তাদের অনুরূপ কোণগুলি সমান হয় এবং

(ii) অনুরূপ বাহুগুলি সমান অনুপাতে থাকে।

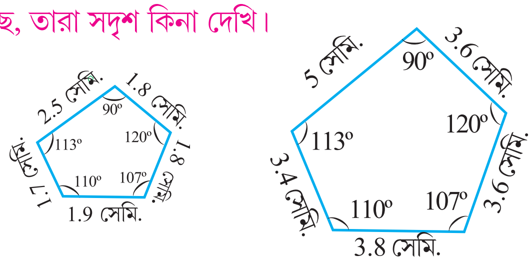
সহেলী দুটি চতুর্ভুজ এঁকেছে, তারা সদৃশ কিনা দেখি



দেখছি, সহেলির আঁকা (i) নং ও (ii) নং চতুর্ভুজদ্বয় সদৃশ নয়। কারণ চতুর্ভুজের অনুরূপ কোণগুলি সমান হলেও অনুরূপ বাহুগুলির অনুপাত সমান নয়।

একটি বর্গক্ষেত্র ও একটি রম্বস কি সর্বদা সদৃশ হবে? এঁকে যুক্তি দিয়ে লিখি। [নিজে করি]

পলাশ দুটি বহুভুজ এঁকেছে, তারা সদৃশ কিনা দেখি।



দেখছি,পলাশের আঁকা বহুভুজদ্বয় সদৃশ। কারণ নিজে বুঝে লিখি।

কষে দেখি 18.1

1. ☐-এ সঠিক উত্তর লিখি:

(i) সকল বর্গক্ষেত্র ☐ [সর্বসম / সদৃশ]

(ii) সকল বৃত্ত ☐ [সর্বসম / সদৃশ]

(iii) সকল ☐ [সমবাহু / সমদ্বিবাহু] ত্রিভুজ সর্বদা সদৃশ।

(iv) দুটি চতুর্ভুজ সদৃশ হবে যদি তাদের অনুরূপ কোণগুলি ☐ [সমান / সমানুপাতী] হয় এবং অনুরূপ বাহুগুলি ☐ [অসমান / সমানুপাতী] হয়।

2. নীচের বাক্যগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) যে-কোনো দুটি সর্বসম চিত্র সদৃশ।

(ii) যে-কোনো দুটি সদৃশ চিত্র সর্বদা সর্বসম।

(iii) যে-কোনো দুটি সদৃশ বহুভুজাকার চিত্রের অনুরূপ কোণগুলি সমান।

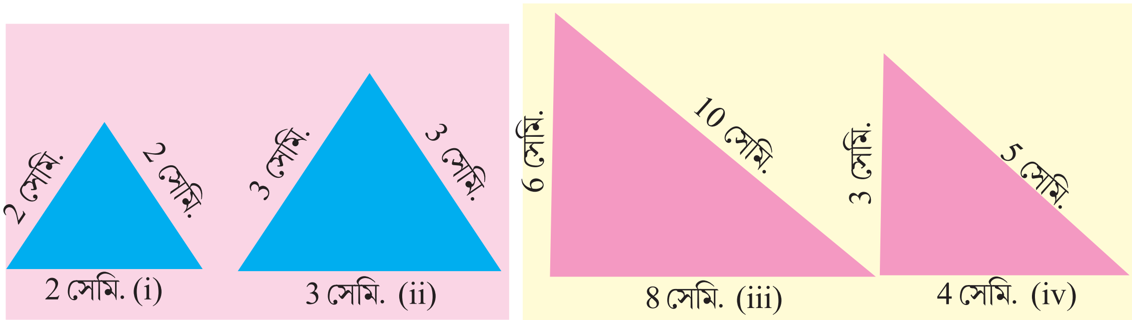
(iv) যে-কোনো দুটি সদৃশ বহুভুজাকার চিত্রের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতিক।

(v) বর্গক্ষেত্র ও রম্বস সর্বদা সদৃশ।

3. একজোড়া সদৃশ চিত্রের উদাহরণ লিখি।

4. একজোড়া চিত্র অঙ্কন করি যারা সদৃশ নয়।

আমার বন্ধু শাকিল নানান রঙের ও নানান ধরনের ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র তৈরি করেছে।
আমি এই ত্রিভুজগুলির কোণ ও বাহুর দৈর্ঘ্য মেপে সদৃশ ত্রিভুজগুলি আলাদা দলে ভাগ করে রাখি।



(i) ও (ii) নং চিত্রদুটি সদৃশ এবং (iii) ও (iv) নং চিত্রদুটি সদৃশ। কারণ এদের অনুরূপ বাহুগুলি ☐ এবং অনুরূপ কোণগুলি সমান।

9 দুটি ত্রিভুজের অনুরূপ কোণগুলি সমান হলে তাদের কী বলা হয়?

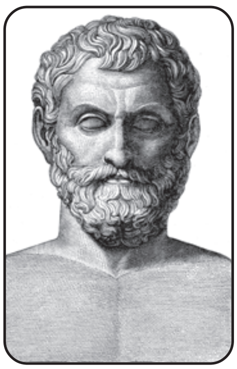
দুটি ত্রিভুজের অনুরূপ কোণগুলি সমান হলে তাদের **সদৃশকোণী ত্রিভুজ** বলা হয়।

বুঝেছি, দুটি ত্রিভুজ সদৃশ হলে, (i) তাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী হবে এবং (ii) ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী হবে।

গ্রিক গণিতজ্ঞ থ্যালেস (Thales) সদৃশকোণী ত্রিভুজের সম্পর্কে একটি সত্য বলেছিলেন। সেই সত্যটি হলো — 'সদৃশকোণী ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী।' অনেকে বিশ্বাস করেন যে তিনি একটি result ব্যবহার করেছিলেন এবং তাকে Basic Proportionality উপপাদ্য বা থ্যালেসের উপপাদ্য বলা হয়।

থ্যালেস উপপাদ্য বা Basic Proportionality উপপাদ্যটি হলো—

যে-কোনো ত্রিভুজের কোনো বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা অপরদুটি বাহুকে বা তাদের বর্ধিত বাহুকে সমানুপাতে বিভক্ত করে।



10 কিন্তু একটি সরলরেখাংশকে নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্ত করা বলতে কী বুঝি?

AB সরলরেখাংশের উপর P যে-কোনো একটি বিন্দু। এক্ষেত্রে P বিন্দু AB সরলরেখাংশকে AP : PB অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করেছে।

P বিন্দু AB সরলরেখাংশের মধ্যবিন্দু হলে $\frac{AP}{PB} = 1$ হবে।

P বিন্দু মধ্যবিন্দু থেকে A বিন্দুর কাছে কিন্তু B বিন্দুর থেকে দূরে থাকলে $\frac{AP}{PB}$ -এর মান 1-এর থেকে কম হবে।

আবার P বিন্দু মধ্যবিন্দু থেকে B বিন্দুর কাছে কিন্তু A বিন্দুর থেকে দূরে থাকলে $\frac{AP}{PB}$-এর মান 1-এর থেকে বেশি হবে।

(11) কিন্তু যদি P বিন্দু বর্ধিত AB সরলরেখাংশের উপর থাকে তখন কী হবে?

এক্ষেত্রে, P বিন্দু AB সরলরেখাংশকে $\frac{AP}{PB}$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করেছে।

AP এর দৈর্ঘ্য PB-এর দৈর্ঘ্য থেকে বড়ো হওয়ায় $\frac{AP}{PB}$-এর মান সর্বদা 1-এর থেকে বেশি হবে।

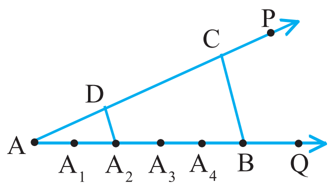
(12) কিন্তু যদি P বিন্দু বর্ধিত BA সরলরেখাংশের উপর থাকে তখন কী হবে?

এক্ষেত্রেও P বিন্দু AB সরলরেখাংশকে $\frac{AP}{PB}$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত

করেছে। এখানে PB-এর দৈর্ঘ্য AP-এর দৈর্ঘ্য থেকে বড়ো হওয়ায় $\frac{AP}{PB}$ এর মান 1-এর থেকে ছোটো হবে।

বুঝেছি, একটি ত্রিভুজের কোনো বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা অপর দুটি বাহুকে বা তাদের বর্ধিতাংশকে একই অনুপাতে বিভক্ত করলে তারা সমানুপাতী হবে।

আমি হাতেকলমে থ্যালেস উপপাদ্যটি যাচাই করি।



(1) আমার খাতায় $\angle PAQ$ অঙ্কন করলাম। AQ রশ্মির উপরে A_1, A_2, A_3, A_4 ও B পাঁচটি বিন্দু এমনভাবে নিলাম যাতে $AA_1=A_1A_2=A_2A_3=A_3A_4=A_4B$ হয়।

(2) B বিন্দু দিয়ে যে-কোনো একটি সরলরেখা টানলাম যা AP রশ্মিকে C বিন্দুতে ছেদ করল।

(3) A_2 বিন্দু দিয়ে BC-এর সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কন করলাম যা AP রশ্মিকে D বিন্দুতে ছেদ করল।

$\therefore$ পেলাম, $\frac{AA_2}{A_2B}=\frac{2}{3}$

স্কেল দিয়ে মেপে দেখছি, $\frac{AD}{DC}=\frac{2}{3}$ [নিজে এঁকে যাচাই করি]

$\therefore$ পেলাম, ΔABC-এর $BC \parallel A_2D$ হলে, $\frac{AA_2}{A_2B}=\frac{AD}{DC}$

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, যে-কোনো ত্রিভুজের কোনো বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা অপর দুটি বাহুকে বা বর্ধিত বাহুকে সমানুপাতে বিভক্ত করে।

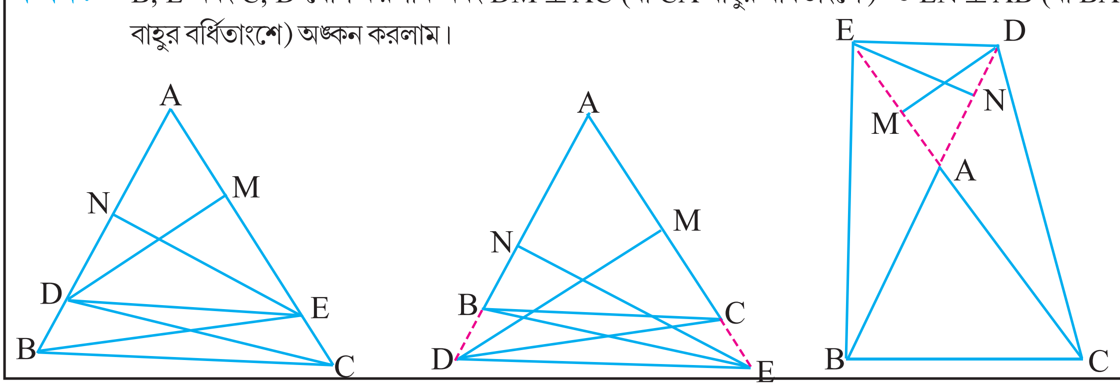
যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য :43. 'কোনো ত্রিভুজের কোনো বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা অপর দুটি বাহুকে বা তাদের বর্ধিত বাহুকে সমানুপাতে বিভক্ত করে।' *(প্রমাণ মূল্যায়নের অন্তর্ভুক্ত নয়)*

প্রদত্ত : ΔABC-এর BC বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা AB ও AC বাহুকে বা AB ও AC বাহুর বর্ধিতাংশকে (BA ও CA বাহুর বর্ধিতাংশকে) যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে : $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$

অঙ্কন : B, E এবং C, D যোগ করলাম এবং $DM \perp AC$ (বা CA বাহুর বর্ধিতাংশে) ও $EN \perp AB$ (বা BA বাহুর বর্ধিতাংশে) অঙ্কন করলাম।



প্রমাণ : ΔADE-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা

$= \frac{1}{2} \times AD \times EN$

অনুরূপে, ΔBDE-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা

$= \frac{1}{2} \times DB \times EN$

$\therefore \quad \dfrac{\Delta ADE\text{-এর ক্ষেত্রফল}}{\Delta BDE\text{-এর ক্ষেত্রফল}} = \dfrac{\frac{1}{2} \times AD \times EN}{\frac{1}{2} \times DB \times EN} = \dfrac{AD}{DB}$ ——— (I)

আবার, ΔADE-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times AE \times DM$

এবং ΔDEC-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times EC \times DM$

$\therefore \quad \dfrac{\Delta ADE\text{-এর ক্ষেত্রফল}}{\Delta DEC\text{-এর ক্ষেত্রফল}} = \dfrac{\frac{1}{2} \times AE \times DM}{\frac{1}{2} \times EC \times DM} = \dfrac{AE}{EC}$ ——— (II)

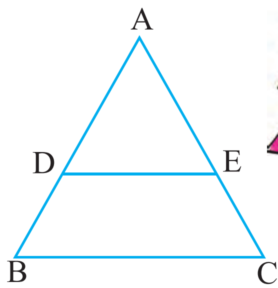
আবার, ΔBDE ও ΔDEC একই ভূমি DE-এর উপর এবং একই সমান্তরালযুগল DE ও BC-এর মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore$ ΔBDE-এর ক্ষেত্রফল $= \Delta DEC$-এর ক্ষেত্রফল।

$\therefore$ (I) ও (II) থেকে পাই, $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$ [প্রমাণিত]

অনুসিদ্ধান্ত : 1 ΔABC-এর BC-এর সমান্তরাল সরলরেখা AB ও AC-কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ করি যে,

(i) $\dfrac{AB}{DB} = \dfrac{AC}{EC}$ (ii) $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$



প্রমাণ : (i) থ্যালেস উপপাদ্য থেকে পাই, $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$

বা, $\dfrac{AD}{DB} + 1 = \dfrac{AE}{EC} + 1$

বা, $\dfrac{AD + DB}{DB} = \dfrac{AE + EC}{EC} \therefore \dfrac{AB}{DB} = \dfrac{AC}{EC}$ [প্রমাণিত]

(ii) থ্যালেস উপপাদ্য থেকে পাই, $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$

বা, $\dfrac{DB}{AD} = \dfrac{EC}{AE}$

বা, $1 + \dfrac{DB}{AD} = 1 + \dfrac{EC}{AE}$ বা, $\dfrac{AD+DB}{AD} = \dfrac{AE+EC}{AE}$

বা, $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE} \therefore \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$ [প্রমাণিত]

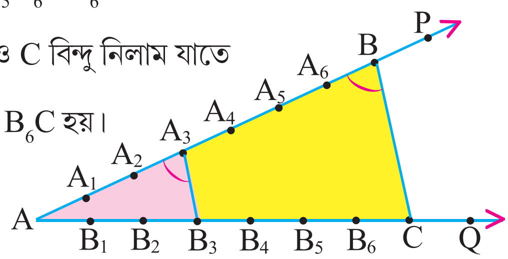
থ্যালেসের উপপাদ্যের বিপরীত কি সম্ভব অর্থাৎ যে সরলরেখা কোনো ত্রিভুজের দুটি বাহুকে বা তাদের বর্ধিতাংশকে সমানুপাতে বিভক্ত করে তা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল হবে কি? হাতেকলমে যাচাই করি।

হাতেকলমে

(1) আমি খাতায় $\angle PAQ$ অঙ্কন করলাম। $\overrightarrow{AP}$ রশ্মির উপর $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ ও B বিন্দু নিলাম যাতে $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6 = A_6B$ হয়।

আবার, $\overrightarrow{AQ}$ রশ্মির উপর $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ ও C বিন্দু নিলাম যাতে

$AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B_5 = B_5B_6 = B_6C$ হয়।



(2) এবার B ও C যোগ করে ΔABC পেলাম।

A_3 ও B_3 যোগ করে দেখছি,

$$\frac{AA_3}{A_3B} = \frac{AB_3}{B_3C} = \frac{3}{4}$$

(3) এবার $\angle AA_3B_3$ কেটে নিয়ে $\angle ABC$ -এর উপর $\angle AA_3B_3$ কোণটি বসিয়ে দেখছি কোণদ্বয় মিলে যাচ্ছে বা সমাপতিত হচ্ছে।

$\therefore$ পেলাম $\angle AA_3B_3 = \angle ABC$ যারা অনুরূপ কোণ,

$\therefore$ পেলাম $A_3B_3 \parallel BC$

একইভাবে A_1, B_1 যোগ করে পাব $\dfrac{AA_1}{A_1B} = \dfrac{AB_1}{B_1C} = \dfrac{\square}{\square}$ এবং $A_1B_1 \parallel BC$

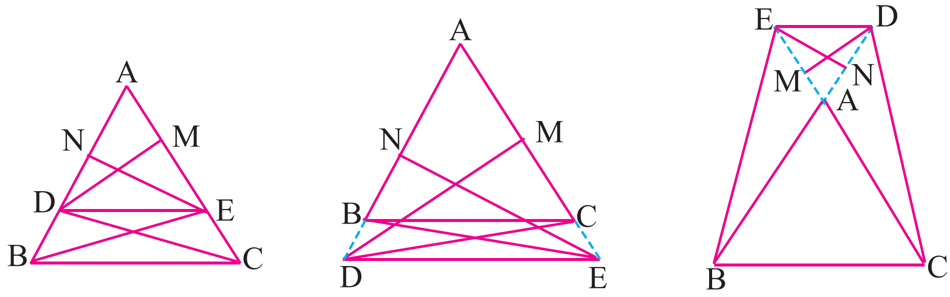
A_2, B_2 যোগ করে পাব $\dfrac{AA_2}{A_2B} = \dfrac{AB_2}{B_2C} = \dfrac{\square}{\square}$ এবং A_2B_2 $\boxed{}$ BC [= / || বসাই]

A_4, B_4 বা A_5, B_5 বা A_6, B_6 যোগ করে কী পাব নিজে যাচাই করে লিখি।

আমি একইভাবে অন্য একটি ত্রিভুজ আঁকলাম ও একটি সরলরেখা আঁকলাম যা ত্রিভুজের যে-কোনো দুটি বাহুকে বা তাদের বর্ধিতাংশকে সমানুপাতে বিভক্ত করেছে এবং দেখছি সরলরেখাটি তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল। [নিজে করি]

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, যে সরলরেখা কোনো ত্রিভুজের দুটি বাহুকে বা তাদের বর্ধিতাংশকে সমানুপাতে বিভক্ত করে, তা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল হবে।

উপপাদ্য : 44. যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে 'কোনো সরলরেখা যে-কোনো ত্রিভুজের দুটি বাহুকে বা তাদের বর্ধিতবাহুকে সমানুপাতে বিভক্ত করলে, তা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল হবে'। **(প্রমাণ মূল্যায়নের অন্তর্ভুক্ত নয়)**



প্রদত্ত : ABC একটি ত্রিভুজ। একটি সরলরেখাংশ AB এবং AC বাহুদ্বয়কে বা তাদের বর্ধিতাংশকে (বা BA এবং CA এর বর্ধিতাংশ) যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে এমনভাবে ছেদ করেছে যে, $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$

প্রমাণ করতে হবে : DE || BC

অঙ্কন : B, E এবং C, D যোগ করলাম। DM ⊥ AC (বা CA-এর বর্ধিতাংশ) ও EN ⊥ AB (বা BA -এর বর্ধিতাংশ) অঙ্কন করলাম।

প্রমাণ : Δ ADE-এর ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা $=\frac{1}{2}\times AD\times EN$

Δ BDE-এর ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা $=\frac{1}{2}\times DB\times EN$

$$\frac{\Delta\text{ ADE-এর ক্ষেত্রফল}}{\Delta\text{ BDE-এর ক্ষেত্রফল}}=\frac{\frac{1}{2}\times AD\times EN}{\frac{1}{2}\times DB\times EN}=\frac{AD}{DB}$$

আবার, Δ ADE-এর ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\times AE\times DM$

Δ DEC-এর ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\times EC\times DM$

$$\frac{\Delta\text{ ADE-এর ক্ষেত্রফল}}{\Delta\text{ DEC-এর ক্ষেত্রফল}}=\frac{\frac{1}{2}\times AE\times DM}{\frac{1}{2}\times EC\times DM}=\frac{AE}{EC}$$

যেহেতু, $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ (প্রদত্ত)

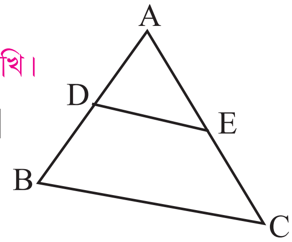
সুতরাং, $\frac{\Delta\text{ ADE-এর ক্ষেত্রফল}}{\Delta\text{ BDE-এর ক্ষেত্রফল}}=\frac{\Delta\text{ ADE-এর ক্ষেত্রফল}}{\Delta\text{ DEC-এর ক্ষেত্রফল}}$

$\therefore$ Δ BDE-এর ক্ষেত্রফল = Δ DEC-এর ক্ষেত্রফল

Δ BDE ও Δ DEC একই ভূমি DE-এর উপর অবস্থিত, DE-এর একই পার্শ্বে অবস্থিত এবং তাদের ক্ষেত্রফল সমান। সুতরাং, তারা একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore$ DE || BC **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 1 পাশের চিত্রে ΔABC-এর $DE \parallel BC$; যদি $AD = 5$ সেমি., $DB = 6$ সেমি. এবং $AE = 7.5$ সেমি. হয়,তবে AC-এর দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

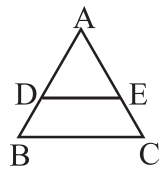


ΔABC-এর $DE \parallel BC$, $\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ [থ্যালেসের উপপাদ্য থেকে পেলাম]

$\therefore \frac{5}{6} = \frac{7.5}{EC}$

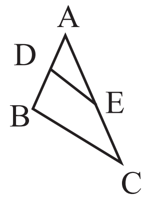
$\therefore EC = 7.5 \times \frac{6}{5}$ সেমি. $= 9$ সেমি.

$\therefore \quad AC = AE + EC = \boxed{} + \boxed{} = \boxed{}$



প্রয়োগ : 2 যদি ΔABC-এর $BC \parallel DE$, $\frac{AD}{DB} = \frac{2}{5}$ এবং $AC = 21$ সেমি. হয়, তবে AE-এর মান হিসাব করে লিখি**[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 3 ABC ত্রিভুজের BC বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা AB ও AC-কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করেছে। $AE = 2AD$ হলে, $DB : EC$-এর মান হিসাব করে লিখি।

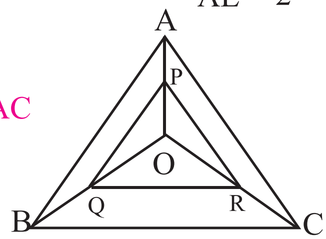


ΔABC -এর $DE \parallel BC$, $\quad \therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

$\therefore \frac{DB}{EC} = \frac{AD}{AE} = \frac{1}{2}$ [$\because AE = 2AD \quad \therefore \frac{AD}{AE} = \frac{1}{2}$]

$\therefore DB : EC = 1 : 2$

প্রয়োগ : 4 পাশের চিত্রের $PQ \parallel AB$ এবং $PR \parallel AC$ হলে, প্রমাণ করি যে $QR \parallel BC$



ΔOAB-এর $PQ \parallel AB$, $\therefore \frac{OP}{PA} = \frac{OQ}{QB}$ [থ্যালেসের উপপাদ্য থেকে পাই] ———— (i)

আবার, ΔAOC-এর $PR \parallel AC$, $\therefore \frac{OP}{PA} = \frac{OR}{RC}$ [থ্যালেসের উপপাদ্য থেকে পাই] ———— (ii)

(i) ও (ii) থেকে পাই, $\frac{OQ}{QB} = \frac{OR}{RC}$

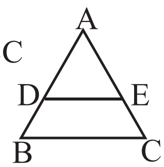
$\therefore \Delta OBC$-এর OB ও OC-এর উপর যথাক্রমে দুটি এমন বিন্দু Q ও R পেলাম যাতে $\frac{OQ}{QB} = \frac{OR}{RC}$

$\therefore$ থ্যালেসের বিপরীত উপপাদ্য থেকে পেলাম, $QR \parallel BC$.

প্রয়োগ : 5 একটি সরলরেখা ΔABC-এর AB ও AC -কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে এমনভাবে ছেদ করল যে $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ হলো। যদি $\angle ADE = \angle ACB$ হয়, প্রমাণ করি যে, ΔABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

প্রদত্ত : ΔABC-এর DE সরলরেখাংশ AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে এমনভাবে ছেদ করেছে যে $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

প্রমাণ করতে হবে : ΔABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।



প্রমাণ : যেহেতু, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ সুতরাং, থ্যালেসের বিপরীত উপপাদ্য থেকে পাই, $DE \parallel BC$

$\therefore$ অনুরূপ $\angle ADE = \angle ABC$ ———— (i)

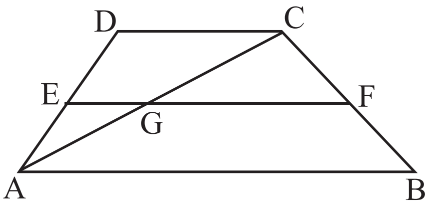
আবার, $\angle ADE = \angle ACB$ [প্রদত্ত] ———— (ii)

$\therefore$ (i) ও (ii) থেকে পাই, $\angle ABC = \angle ACB$

$\therefore AB = AC \qquad \therefore$ ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

প্রয়োগ : 6 ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম অঙ্কন করেছি যার AB || DC; AB-এর সমান্তরাল একটি সরলরেখা অঙ্কন করেছি যা AD ও BC-কে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে, AE : ED = BF : FC

প্রদত্ত : ABCD ট্রাপিজিয়ামের AB || DC; AB-এর সমান্তরাল সরলরেখা AD ও BC-কে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করেছে।



প্রমাণ করতে হবে : AE : ED = BF : FC

অঙ্কন : A, C যোগ করলাম যা EF-কে G বিন্দুতে ছেদ করল।

প্রমাণ : ΔADC -এর DC || EG

সুতরাং, থ্যালেসের উপপাদ্য থেকে পাই $\frac{AE}{ED} = \frac{AG}{GC}$ ———— (i)

আবার, ΔACB -এর AB || GF

$\therefore$ থ্যালেসের উপপাদ্য থেকে পাই, $\frac{AG}{GC} = \frac{BF}{FC}$ ———— (ii)

সুতরাং, (i) ও (ii) থেকে পাই, $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$

$\therefore$ AE : ED = BF : FC

প্রয়োগ : 7 থ্যালেসের বিপরীত উপপাদ্যের সাহায্যে প্রমাণ করি যে, ত্রিভুজের মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 8 ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম অঙ্কন করেছি যার AB || DC; AD ও BC-এর উপর যথাক্রমে P ও Q এমন দুটি বিন্দু নিলাম যাতে AP : PD = BQ : QC হয়। প্রমাণ করি যে, PQ || DC.

প্রদত্ত : ABCD ট্রাপিজিয়ামের AB || DC; P ও Q বিন্দু দুটি যথাক্রমে AD ও BC বাহুর উপর এমনভাবে অবস্থিত যাতে AP : PD = BQ : QC হয়।

প্রমাণ করতে হবে : PQ || DC

অঙ্কন : ধরি AB < DC; DA এবং CB বাহুকে বর্ধিত করা হলো। বর্ধিত DA ও CB বাহু পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করল। PQ যোগ করলাম।

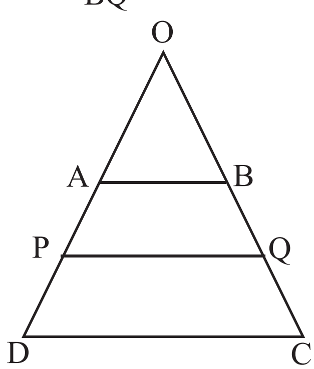
প্রমাণ : ΔODC-এর AB || DC

$\therefore \frac{OA}{AD} = \frac{OB}{BC}$ [থ্যালেসের উপপাদ্য থেকে পেলাম] ———— (i)

আবার $\frac{AP}{PD} = \frac{BQ}{QC}$ [প্রদত্ত]

অর্থাৎ, $\frac{PD}{AP} = \frac{QC}{BQ}$ বা, $1+\frac{PD}{AP} = 1+\frac{QC}{BQ}$ বা, $\frac{AP+PD}{AP} = \frac{BQ+QC}{BQ}$

$\therefore \frac{AD}{AP} = \frac{BC}{BQ}$ ———— (ii)



(i) ও (ii) থেকে পাই, $\frac{OA}{AD} \times \frac{AD}{AP} = \frac{OB}{BC} \times \frac{BC}{BQ}$

$\therefore \frac{OA}{AP} = \frac{OB}{BQ}$

$\therefore$ পেলাম, ΔOPQ-এর $\frac{OA}{AP} = \frac{OB}{BQ}$

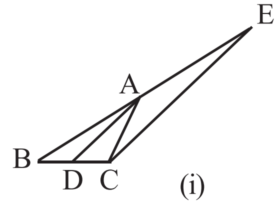
$\therefore$ থ্যালেসের বিপরীত উপপাদ্য থেকে পাই, AB || PQ

আবার, AB || DC. $\therefore$ PQ || DC **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 9** যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে একটি ত্রিভুজের কোনো কোণের অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক বা বহির্সমদ্বিখণ্ডক কোণটির বিপরীত বাহুকে অন্তঃস্থভাবে বা বহিঃস্থভাবে কোণসংলগ্ন বাহুদুটির দৈর্ঘ্যের অনুপাতে বিভক্ত করে। **(প্রমাণ মূল্যায়নের অন্তর্ভুক্ত নয়)

প্রদত্ত: ABC ত্রিভুজের $\angle BAC$-এর AD অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক (চিত্র-i) বা বহির্সমদ্বিখণ্ডক (চিত্র-ii) BC বাহুকে বা BC-এর বর্ধিতাংশকে D বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে : BD : DC = AB : AC

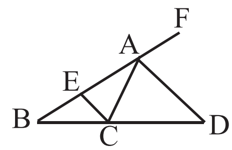

(i)

অঙ্কন : C বিন্দু দিয়ে DA বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কন করি যা বর্ধিত BA বাহুকে (চিত্র-i) বা BA বাহুকে (চিত্র-ii) E বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : DA || CE $\therefore \angle DAC$ = একান্তর $\angle ACE$

DA || CE, $\therefore \angle BAD$ (বা $\angle FAD$ চিত্র নং (ii)) = অনুরূপ $\angle AEC$

কিন্তু $\angle BAD$ (বা $\angle FAD$ চিত্র নং (ii)) = $\angle DAC$


(ii)

$\therefore \angle ACE = \angle AEC$

সুতরাং, AC = AE

ΔBEC (চিত্র i) বা ΔBDA (চিত্র ii)-তে DA || CE; সুতরাং, $\frac{BD}{DC}=\frac{BA}{AE}$ (থ্যালেসের উপপাদ্য অনুযায়ী)

অর্থাৎ BD : DC = AB : AE

সুতরাং, BD : DC = AB : AC ($\because$ AE = AC) **[প্রমাণিত]**

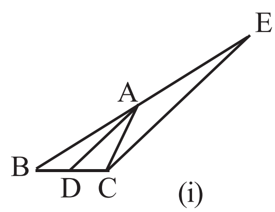
প্রয়োগ : 10** যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, একটি ত্রিভুজের কোনো কোণ থেকে অঙ্কিত কোনো সরলরেখা যদি ওই কোণের বিপরীত বাহুকে অন্তঃস্থভাবে বা বহিঃস্থভাবে ত্রিভুজের কোণ সংলগ্ন বাহু দুটির দৈর্ঘ্যের অনুপাতে বিভক্ত করে তাহলে সরলরেখাটি কোণটির অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক বা বহির্সমদ্বিখণ্ডক হবে। **(প্রমাণ মূল্যায়নের অন্তর্ভুক্ত নয়)

প্রদত্ত : ABC ত্রিভুজে A বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত একটি সরলরেখা BC (চিত্র-i) বা বর্ধিত BC (চিত্র-ii) বাহুকে D বিন্দুতে এমনভাবে ছেদ করে যে, BD : DC = AB : AC হয়।

প্রমাণ করতে হবে : AD, $\angle BAC$-এর অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক (চিত্র-i) বা বহির্সমদ্বিখণ্ডক (চিত্র-ii)

অঙ্কন : C বিন্দু দিয়ে DA বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কিত করি যা বর্ধিত BA বাহুকে (চিত্র-i) বা BA বাহুকে (চিত্র-ii) E বিন্দুতে ছেদ করে।

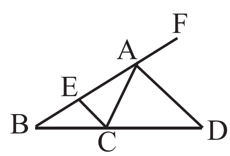
প্রমাণ : ΔBCE (চিত্র-i) বা ΔABD (চিত্র-ii)-তে, DA || CE


(i)

$\therefore \frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AE}$ (থ্যালেসের উপপাদ্য অনুযায়ী)

কিন্তু, $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$ (প্রদত্ত)

সুতরাং, $\frac{AB}{AE}=\frac{AB}{AC}$


(ii)

$\therefore$ AE = AC

সুতরাং $\angle AEC = \angle ACE$

আবার, DA || CE ;

$\therefore \angle DAC$ = একান্তর $\angle ACE$ এবং $\angle BAD$ (চিত্র-i) বা $\angle FAD$ (চিত্র-ii) = অনুরূপ $\angle AEC$.

যেহেতু, $\angle AEC = \angle ACE$,

সুতরাং $\angle BAD$ (চিত্র-i) বা $\angle FAD$ (চিত্র-ii) = $\angle DAC$.

সুতরাং AD, $\angle BAC$ এর অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক (চিত্র-i) বা বহির্সমদ্বিখণ্ডক (চিত্র-ii) **[প্রমাণিত]**

কষে দেখি 18.2

1. ΔABC-এর BC বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে।
   (i) $PB = AQ$, $AP = 9$ একক, $QC = 4$ একক হলে, PB-এর দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।
   (ii) PB-এর দৈর্ঘ্য AP-এর দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণ এবং QC-এর দৈর্ঘ্য AQ-এর দৈর্ঘ্যের চেয়ে 3 একক বেশি হলে, AC-এর দৈর্ঘ্য কত হবে, হিসাব করে লিখি।
   (iii) যদি $AP = QC$, AB-এর দৈর্ঘ্য 12 একক এবং AQ-এর দৈর্ঘ্য 2 একক হয়, তবে CQ-এর দৈর্ঘ্য কত হবে, হিসাব করে লিখি।
2. ΔPQR-এর PQ ও PR বাহুর উপর যথাক্রমে X, Y দুটি বিন্দু নিলাম।
   (i) $PX = 2$ একক, $XQ = 3.5$ একক, $YR = 7$ একক এবং $PY = 4.25$ একক হলে, XY ও QR পরস্পর সমান্তরাল হবে কিনা যুক্তি দিয়ে লিখি।
   (ii) $PQ = 8$ একক, $YR = 12$ একক, $PY = 4$ একক এবং PY-এর দৈর্ঘ্য XQ-এর দৈর্ঘ্যের চেয়ে 2 একক কম হলে, XY ও QR সমান্তরাল হবে কিনা যুক্তি দিয়ে লিখি।
3. প্রমাণ করি যে, কোনো ত্রিভুজের একটি বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অঙ্কিত দ্বিতীয় বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা তৃতীয় বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। [থ্যালেসের উপপাদ্যের সাহায্যে প্রমাণ করি]
4. ΔABC-এর AD মধ্যমার উপর P একটি বিন্দু। বর্ধিত BP ও CP যথাক্রমে AC ও AB-কে Q ও R বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে, $RQ \parallel BC$.
5. ΔABC-এর BE ও CF মধ্যমাদুটি পরস্পরকে G বিন্দুতে ছেদ করেছে এবং FE সরলরেখাংশ AG সরলরেখাংশকে O বিন্দুতে ছেদ করলে, প্রমাণ করি যে $AO = 3OG$.
6. প্রমাণ করি যে, ট্রাপিজিয়ামের তির্যক বাহুগুলির মধ্যবিন্দু দুটির সংযোজক সরলরেখাংশ সমান্তরাল বাহুগুলির সমান্তরাল।
7. ΔABC-এর BC বাহুর উপর D যে-কোনো একটি বিন্দু। P, Q যথাক্রমে ΔABD ও ΔADC-এর ভরকেন্দ্র। প্রমাণ করি যে, $PQ \parallel BC$.
8. একই ভূমি QR-এর উপর এবং একই পার্শ্বে দুটি ত্রিভুজ ΔPQR ও ΔSQR অঙ্কন করেছি যাদের ক্ষেত্রফল সমান। F ও G যথাক্রমে ত্রিভুজদুটির ভরকেন্দ্র হলে প্রমাণ করি যে, $FG \parallel QR$.
9. প্রমাণ করি যে, কোনো সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদুটির যে-কোনো একটির সংলগ্ন কোণ দুটি সমান।
10. ΔABC এবং ΔDBC একই ভূমি BC-এর উপর এবং BC-এর একই পার্শ্বে অবস্থিত। BC বাহুর উপর E যে-কোনো একটি বিন্দু। E বিন্দু দিয়ে AB এবং BD-এর সমান্তরাল সরলরেখা AC এবং DC বাহুকে যথাক্রমে F ও G বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, $AD \parallel FG$.
11. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

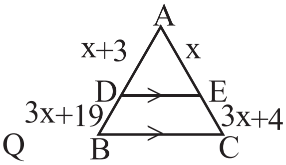
   (A) বহু বিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :

   (i) ΔABC-এর BC বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা AB এবং AC বাহুকে যথাক্রমে X এবং Y বিন্দুতে ছেদ করে। $AX = 2.4$ সেমি., $AY = 3.2$ সেমি. এবং $YC = 4.8$ সেমি., হলে, AB-এর দৈর্ঘ্য
   (a) 3.6 সেমি. (b) 6 সেমি. (c) 6.4 সেমি. (d) 7.2 সেমি.

   (ii) ΔABC ত্রিভুজের AB এবং AC বাহুর উপর D ও E বিন্দু এমনভাবে অবস্থিত যে $DE \parallel BC$ এবং $AD : DB = 3 : 1$; যদি $EA = 3.3$ সেমি. হয়, তাহলে AC-এর দৈর্ঘ্য
   (a) 1.1 সেমি. (b) 4 সেমি. (c) 4.4 সেমি. (d) 5.5 সেমি.

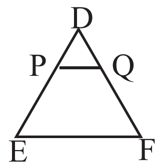
(iii) পাশের চিত্রে DE || BC হলে, x-এর মান

(a) 4 (b) 1 (c) 3 (d) 2



(iv) ABCD ট্রাপিজিয়ামের AB || DC এবং AD ও BC বাহুর উপর P ও Q বিন্দু দুটি এমনভাবে অবস্থিত যে PQ || DC; যদি PD = 18 সেমি., BQ = 35 সেমি., QC = 15 সেমি. হয়, তাহলে AD-এর দৈর্ঘ্য

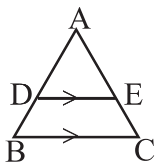
(a) 60 সেমি. (b) 30 সেমি. (c) 12 সেমি. (d) 15 সেমি.



(v) পাশের চিত্রে, DP = 5 সেমি., DE = 15 সেমি., DQ = 6 সেমি. এবং QF = 18 সেমি. হলে,

(a) PQ = EF (b) PQ || EF (c) PQ ≠ EF (d) PQ ∦ EF

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :



(i) দুটি সদৃশ ত্রিভুজ সর্বদা সর্বসম।

(ii) পাশের চিত্রে DE || BC হলে, $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}$ হবে।

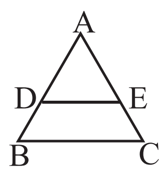
(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) একটি ত্রিভুজের যে-কোনো বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা অপর দুটি বাহুকে বা তাদের বর্ধিতাংশকে ________ বিভক্ত করে।

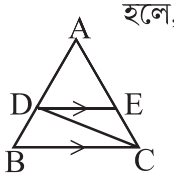
(ii) দুটি ত্রিভুজের ভূমি একই সরলরেখায় অবস্থিত এবং ত্রিভুজ দুটির অপর শীর্ষবিন্দুটি সাধারণ হলে ত্রিভুজ দুটির ক্ষেত্রফলের অনুপাত ভূমির দৈর্ঘ্যের অনুপাতের ________।

(iii) একটি ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল সরলরেখা অপর বাহুদ্বয়কে ________ বিভক্ত করে।

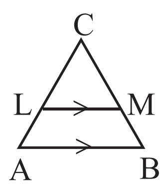
12. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)**



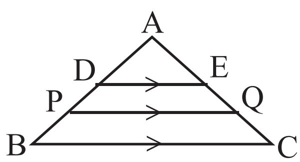
(i) পাশের চিত্রে, ABC ত্রিভুজে $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ এবং $\angle ADE = \angle ACB$ হলে, বাহুভেদে ABC ত্রিভুজটি কী ধরনের লিখি।



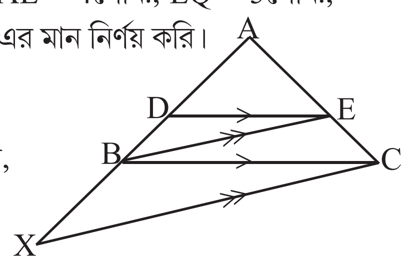
(ii) পাশের চিত্রে DE || BC এবং AD : BD = 3 : 5 হলে, ΔADE-এর ক্ষেত্রফল : ΔCDE-এর ক্ষেত্রফল কত তা লিখি।



(iii) পাশের চিত্রে, LM || AB এবং AL = (x–3) একক, AC = 2x একক, BM = (x–2) একক এবং BC = (2x + 3) একক হলে, x-এর মান নির্ণয় করি।



(iv) পাশের চিত্রে, ABC ত্রিভুজে DE || PQ || BC এবং AD = 3সেমি., DP = xসেমি., PB = 4সেমি., AE = 4সেমি., EQ = 5সেমি., QC = y সেমি. হলে, x এবং y-এর মান নির্ণয় করি।



(v) পাশের চিত্রে, DE || BC, BE || XC এবং $\frac{AD}{DB} = \frac{2}{1}$ হলে, $\frac{AX}{XB}$-এর মান নির্ণয় করি।

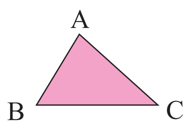
আজ আমরা ঠিক করেছি শাকিলের তৈরি পিচবোর্ডের ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রগুলির মধ্যে যেগুলি সদৃশ তাদের একটি চার্টে আটকে আমাদের শ্রেণিকক্ষে টাঙিয়ে রাখব।

রাবেয়া ওই ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রগুলির মধ্যে যাদের কোণগুলি সমান অর্থাৎ যারা সদৃশকোণী আলাদা করে রেখেছে।

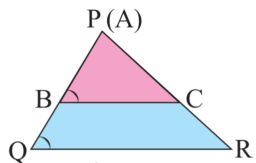
কিন্তু এই সকল সদৃশকোণী ত্রিভুজগুলির বাহুগুলি কি সমানুপাতে আছে? অর্থাৎ ত্রিভুজ দুটি কি সদৃশ হবে? হাতেকলমে যাচাই করি।

হাতেকলমে

1. প্রথমে দুটি রঙিন ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র ABC ও PQR নিলাম যাদের কোণগুলি সমান অর্থাৎ $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$ এবং $\angle C = \angle R$ এবং $PQ > AB$, $PR > AC$, $QR > BC$.



চিত্র (i)



চিত্র (ii)

2. ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রটি PQR ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের উপর এমনভাবে বসালাম যাতে শীর্ষবিন্দু A ও শীর্ষবিন্দু P মিশে যায় এবং AB বাহু PQ বাহুর উপর থাকে। [(ii) নং চিত্রের মতো]

দেখছি, (i) ΔABC-এর AC বাহু PR বাহুর সঙ্গে মিশে গেছে, **[নিজে যাচাই করি]**

(ii) $\dfrac{PB}{PQ} = \dfrac{PC}{PR}$ $\quad\therefore \dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{AC}{PR}$ [নিজে যাচাই করি] ———— (I)

ব্যাখ্যা : (ii) নং চিত্রে $\angle B = \angle Q$

$\therefore BC \parallel QR$ [$\because$ অনুরূপ কোণদ্বয় সমান]

$\therefore \dfrac{PB}{BQ} = \dfrac{PC}{CR}$ [থ্যালেসের উপপাদ্য থেকে পাই]

$\dfrac{AB}{BQ} = \dfrac{AC}{CR}$

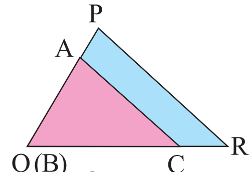
বা, $\dfrac{BQ}{AB} = \dfrac{CR}{AC}$

বা, $1 + \dfrac{BQ}{AB} = 1 + \dfrac{CR}{AC}$

বা, $\dfrac{AB + BQ}{AB} = \dfrac{AC + CR}{AC}$

বা, $\dfrac{AQ}{AB} = \dfrac{AR}{AC}$ $\quad\therefore \dfrac{PQ}{AB} = \dfrac{PR}{AC}$ সুতরাং, $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{AC}{PR}$

3. একইরকমভাবে ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রকে PQR ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের উপর পাশের ছবির মতো এমনভাবে বসালাম যাতে শীর্ষবিন্দু B ও শীর্ষবিন্দু Q পরস্পর মিশে যায় এবং AB বাহু PQ বাহুর উপর থাকে।



চিত্র (iii)

দেখছি, (i) BC বাহু QR বাহুর সঙ্গে মিশে গেছে। [নিজে হাতেকলমে যাচাই করি]

এবং (ii) $\frac{AQ}{PQ} = \frac{QC}{QR}$ $\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ [নিজে যাচাই করি] ———— (II)

উপরের মতো আমি নিজে ব্যাখ্যা লিখি **[নিজে করি]**

$\therefore$ (I) ও (II) থেকে পেলাম, $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$

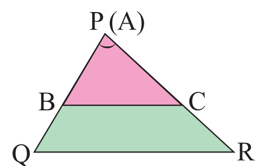
$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, দুটি সদৃশকোণী ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী। অর্থাৎ ত্রিভুজ দুটি সদৃশ।

কিন্তু এর বিপরীত কি সম্ভব? অর্থাৎ দুটি ত্রিভুজের বাহুগুলি সমানুপাতী হলে কি তাদের অনুরূপ কোণগুলি সমান হবে? দুটি ত্রিভুজের বাহুগুলি সমানুপাতী হলে ত্রিভুজদুটি সদৃশকোণী হবে কিনা হাতেকলমে যাচাই করি।

হাতেকলমে

1. প্রথমে রঙিন আর্টপেপার কেটে দুটি ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র ABC ও PQR তৈরি করলাম যাদের বাহুগুলি সমানুপাতী। অর্থাৎ, $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$

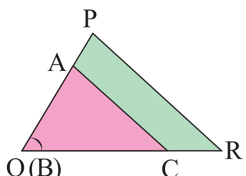
2. এবার পাশের চিত্রের মতো ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রটি PQR ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের উপর এমনভাবে বসালাম যাতে শীর্ষবিন্দু A ও শীর্ষবিন্দু P মিশে থাকে এবং AB বাহু PQ বাহুর উপর থাকে।



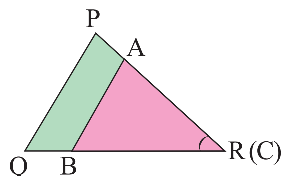
(i)

দেখছি, AC বাহু PR বাহুর সঙ্গে মিশে গেছে। অর্থাৎ পেলাম, $\angle A = \angle P$

3. একইভাবে নীচের (ii) নং ও (iii) নং চিত্রের মতো ΔABC-কে ΔPQR-এর উপরে বসিয়ে দেখছি $\angle B = \boxed{}$ এবং $\angle C = \boxed{}$ **[নিজে যাচাই করে লিখি]**



(ii)



(iii)

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম দুটি ত্রিভুজের বাহুগুলি সমানুপাতী হলে তাদের অনুরূপ কোণগুলি সমান হবে। অর্থাৎ ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণী হবে।

আমরা অন্য যে-কোনো দুটি ত্রিভুজ নিয়ে একইভাবে হাতেকলমে যাচাই করে দেখছি—

(i) দুটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে তাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী হবে।

আবার (ii) দুটি ত্রিভুজের বাহুগুলি সমানুপাতী হলে তারা সদৃশকোণী হবে। **[নিজে করি]**

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য :45. দুটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে তাদের অনুরূপ বাহুগুলির অনুপাত সমান হবে অর্থাৎ তাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী হবে। *[প্রমাণ মূল্যায়নের অন্তর্ভুক্ত নয়]*

প্রদত্ত : ABC ও DEF দুটি সদৃশকোণী ত্রিভুজ। অর্থাৎ $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$

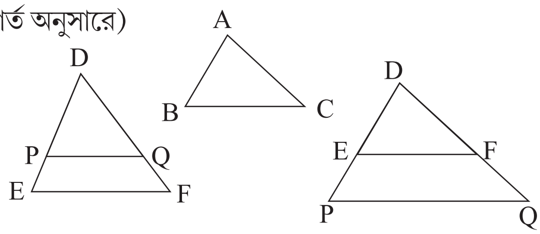
প্রমাণ করতে হবে : $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

অঙ্কন : ΔDEF থেকে AB ও AC-এর সমান করে DE বা বর্ধিত DE থেকে এবং DF বা বর্ধিত DF থেকে যথাক্রমে DP ও DQ অংশ কেটে নিলাম। P ও Q বিন্দুদ্বয় যোগ করলাম।

প্রমাণ : ΔABC ও ΔDPQ-এর মধ্যে,

$AB = DP$, $\angle A = \angle D$ এবং $AC = DQ$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (S-A-S সর্বসমতার শর্ত অনুসারে)



$\therefore \angle B = \angle P$

আবার, $\angle B = \angle E$ [প্রদত্ত]

$\therefore \angle P = \angle E$

সুতরাং, $PQ \parallel EF$ [$\because$ অনুরূপ কোণ সমান]

$\therefore \frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF}$ (থ্যালেসের উপপাদ্য থেকে পাই)

$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ ———— (I) [$\because$ $DP = AB$ এবং $DQ = AC$]

অনুরূপে, ED বা বর্ধিত ED থেকে BA এবং EF বা বর্ধিত EF থেকে BC-এর সমান করে কেটে নিয়ে প্রমাণ করতে পারি, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ ———— (II)

$\therefore$ (I) ও (II) থেকে পেলাম, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$ **[প্রমাণিত]**

বুঝেছি, যদি দুটি ত্রিভুজের একটির দুটি কোণ অপরটির দুটি কোণের সমান হয়, তাহলে ত্রিভুজ দুটির অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী হবে। কারণ নিজে বুঝে লিখি। **[নিজে করি]**

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য :46. দুটি ত্রিভুজের বাহুগুলি সমানুপাতে থাকলে তাদের অনুরূপ কোণগুলি সমান হবে। অর্থাৎ, ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী হবে। *[প্রমাণ মূল্যায়নের অন্তর্ভুক্ত নয়]*

প্রদত্ত : ΔABC ও ΔDEF -এর $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

প্রমাণ করতে হবে : ΔABC ও ΔDEF সদৃশকোণী অর্থাৎ $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$

অঙ্কন : DE বা বর্ধিত DE থেকে AB-এর সমান করে DP এবং DF বা বর্ধিত DF থেকে AC-এর সমান করে DQ কেটে নিলাম। P ও Q বিন্দুদ্বয় যোগ করলাম।

প্রমাণ : $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$; সুতরাং, $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF}$ [অঙ্কনানুসারে, $AB = DP$ এবং $AC = DQ$]

$\therefore$ থ্যালেসের বিপরীত উপপাদ্যের সাহায্যে পাই, $PQ \parallel EF$

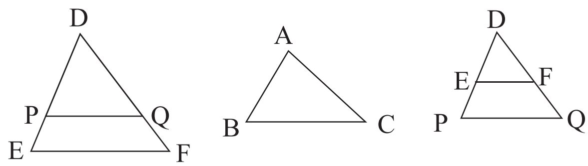
$PQ \parallel EF$ এবং DE ভেদক

$\therefore \angle P = \angle E$

$PQ \parallel EF$ এবং DF ভেদক,

$\therefore \angle Q = \angle F$

$\therefore \Delta DPQ$ ও ΔDEF সদৃশকোণী



$\therefore \frac{DP}{DE} = \frac{PQ}{EF}$

বা, $\frac{AB}{DE} = \frac{PQ}{EF}$ [$\because$ অঙ্কনানুসারে $DP = AB$] ——— (i)

কিন্তু $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ [প্রদত্ত] ——— (ii)

$\therefore$ (i) ও (ii) থেকে পাই, $\frac{PQ}{EF} = \frac{BC}{EF}$

$\therefore PQ = BC.$

$\therefore \Delta ABC$ ও ΔDPQ-এর মধ্যে $AB = DP$, $BC = PQ$ এবং $AC = DQ$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (S-S-S সর্বসমতার শর্ত অনুসারে)

$\therefore \angle A = \angle D$, $\angle B = \angle P = \angle E$ এবং $\angle C = \angle Q = \angle F$

$\therefore \angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$

$\therefore \Delta ABC$ ও ΔDEF সদৃশকোণী।

13 দুটি বহুভুজ সদৃশ হবে যখন

(i) বহুভুজের বাহুগুলি সমানুপাতী এবং (ii) বহুভুজের অনুরূপ কোণগুলি সমান হবে।

14 কিন্তু দুটি ত্রিভুজ কখন সদৃশ হবে?

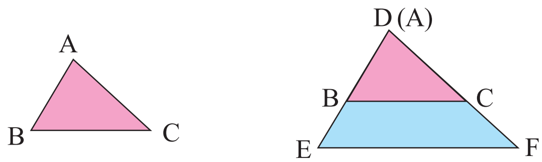
উপরের প্রমাণ থেকে দেখছি, দুটি ত্রিভুজ সদৃশ হবে যদি,

ত্রিভুজের বাহুগুলি সমানুপাতী হয়। অথবা ত্রিভুজের অনুরূপ কোণগুলি সমান হয় বা ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণী হয়।

কিন্তু যদি দুটি ত্রিভুজের একটির একটি কোণ অপরটির একটি কোণের সমান এবং কোণদুটির ধারক বাহুগুলি সমানুপাতী হয়, তবে কি ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ হবে? হাতেকলমে যাচাই করি।

হাতেকলমে

1. কাগজ কেটে দুটি রঙিন ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র ABC ও DEF তৈরি করলাম যাদের $\angle A = \angle D$ এবং $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$



2. উপরের ছবির মতো ΔABC-কে ΔDEF-এর উপর এমনভাবে বসালাম যাতে শীর্ষবিন্দু A ও শীর্ষবিন্দু D মিশে থাকে এবং DE বাহু AB বাহুর উপর থাকে।

দেখছি, (i) AC বাহু DF বাহুর সঙ্গে মিশে আছে [$\because \angle A = \angle D$]

এবং (ii) $\frac{BC}{EF} = \frac{\square}{\square}$ [নিজে মেপে লিখি] $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$

হাতেকলমে দেখছি, দুটি ত্রিভুজের একটির একটি কোণ অপরটির একটি কোণের সমান এবং কোণগুলির ধারক বাহুগুলি সমানুপাতী হলে, ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ হবে।

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য :47. দুটি ত্রিভুজের একটির একটি কোণ অপরটির একটি কোণের সমান এবং কোণগুলির ধারক বাহুগুলি সমানুপাতী হলে ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ হবে। *[প্রমাণ মূল্যায়নের অন্তর্ভুক্ত নয়]*

প্রদত্ত : ΔABC ও ΔDEF এর $\angle A = \angle D$ এবং $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$

প্রমাণ করতে হবে : ΔABC ও ΔDEF সদৃশ।

প্রমাণ : $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$ বা, $\dfrac{DB}{DE} = \dfrac{DC}{DF}$ বা, $\dfrac{DB}{BE} = \dfrac{DC}{CF}$ $\therefore BC \parallel EF$ [থ্যালেসের বিপরীত উপপাদ্য থেকে পাই]

সুতরাং, $\angle B =$ অনুরূপ $\angle E$ এবং $\angle C =$ অনুরূপ $\angle F$

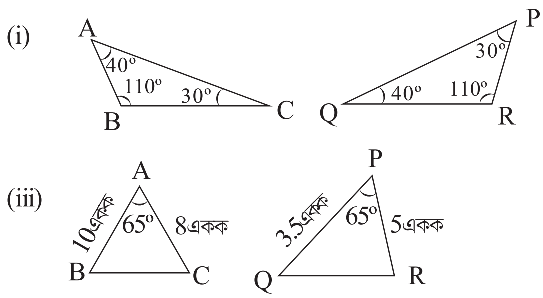
অর্থাৎ ΔABC ও ΔDEF সদৃশকোণী। $\therefore$ ΔABC ও ΔDEF সদৃশ।

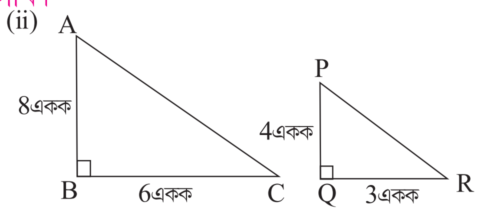
দুটি ত্রিভুজ সর্বসম হলে সর্বসমতার চিহ্ন হিসাবে যেমন $\cong$ এটি ব্যবহার করি, সেরকম দুটি ত্রিভুজ সদৃশ হলে কোনো চিহ্ন ব্যবহার করা যায় কি?

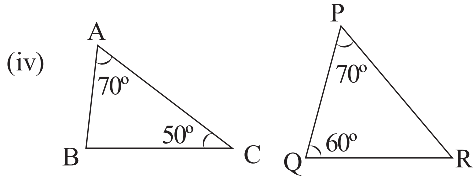
ΔABC ও ΔDEF-এর $\angle A=\angle D$, $\angle B=\angle E$, $\angle C=\angle F$ হলে ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণী। সুতরাং সদৃশ।

এখন লিখি $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

প্রয়োগ : 11. নীচের কোন ত্রিভুজ জোড়া সদৃশ হিসাব করে লিখি।







(i) $\angle A = \angle Q$, $\angle B = \angle R$ এবং $\angle C = \angle P$

$\therefore$ ΔABC ও ΔQRP সদৃশকোণী

$\therefore$ ΔABC ও ΔQRP সদৃশ বা $\Delta ABC \sim \Delta QRP$

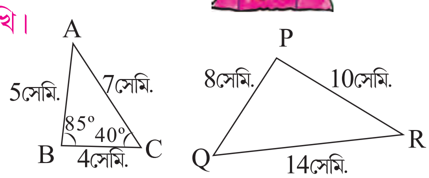
(ii) $\dfrac{AB}{RQ} = \dfrac{BC}{QP} = \dfrac{CA}{PR}$

$\therefore$ ΔABC ও ΔRQP-এর বাহুগুলি সমানুপাতী।

$\therefore$ ΔABC ও ΔRQP সদৃশ বা $\Delta ABC \sim \Delta QRP$

একইভাবে (iii) ও (iv) চিত্রের বাহু ও কোণের হিসাব করে নিজে লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 12. পাশের ছবি দেখি ও $\angle P$-এর মান হিসাব করে লিখি।



সমাধান : ΔABC ও ΔPQR -এর,

$$\frac{AB}{PR} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \quad \frac{BC}{PQ} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \text{এবং} \quad \frac{AC}{QR} = \frac{\square}{\square} = \frac{1}{2}$$

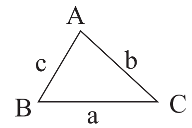
$$\therefore \frac{AB}{RP} = \frac{BC}{PQ} = \frac{CA}{QR} = \frac{1}{2}$$

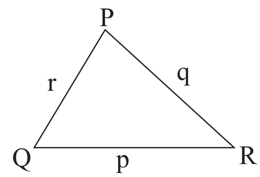
$\therefore$ ΔABC ও ΔRPQ সদৃশকোণী

$\therefore$ $\angle A = \angle R$, $\angle B = \angle P$ এবং $\angle C = \angle Q$

$\therefore$ $\angle P = \angle B = 85^\circ$

প্রয়োগ : 13. প্রমাণ করি যে, দুটি সদৃশ ত্রিভুজের পরিসীমা ত্রিভুজ দুটির অনুরূপ বাহুগুলির সঙ্গে সমানুপাতী।





প্রদত্ত : ABC ও PQR দুটি সদৃশ ত্রিভুজ।

প্রমাণ করতে হবে : $\dfrac{\Delta ABC\text{-এর পরিসীমা}}{\Delta PQR\text{-এর পরিসীমা}} = \dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{CA}{RP}$

প্রমাণ : ΔABC ও ΔPQR সদৃশ।

$\therefore \dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{CA}{RP}$

সুতরাং, $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{CA}{RP} = \dfrac{AB+BC+CA}{PQ+QR+PR}$

(সংযোজন প্রক্রিয়া করে পাই)

$\dfrac{\Delta ABC\text{-এর পরিসীমা}}{\Delta PQR\text{-এর পরিসীমা}} = \dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{CA}{RP}$ **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 14. দুটি সদৃশ ত্রিভুজের পরিসীমা যথাক্রমে 20 সেমি. ও 16 সেমি., প্রথম ত্রিভুজের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 9 সেমি. হলে, দ্বিতীয় ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুর দৈর্ঘ্য কী হবে হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

উত্তর সংকেত : $\dfrac{\text{প্রথম ত্রিভুজের পরিসীমা}}{\text{দ্বিতীয় ত্রিভুজের পরিসীমা}} = \dfrac{9 \text{ সেমি.}}{\text{দ্বিতীয় ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু}}$

প্রয়োগ : 15. প্রমাণ করি যে, যে-কোনো ত্রিভুজের কোনো একটি বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অপর একটি বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা তৃতীয় বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করবে এবং দুটি বাহু দ্বারা সমান্তরাল সরলরেখার খণ্ডিতাংশ দ্বিতীয় বাহুর অর্ধেক হবে।

প্রদত্ত : ΔABC-এর AB বাহুর মধ্যবিন্দু P দিয়ে BC-এর সমান্তরাল সরলরেখা AC-কে Q বিন্দুতে ছেদ করেছে।

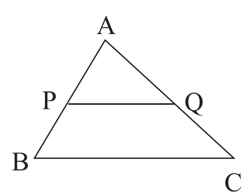
প্রমাণ করতে হবে : (i) Q, AC-এর মধ্যবিন্দু, (ii) $PQ = \dfrac{1}{2} BC$

প্রমাণ : ΔAPQ ও ΔABC-এর

$\angle PAQ = \angle BAC$ [সাধারণ কোণ]

$\angle APQ = \angle ABC$ [$\because PQ \parallel BC$ এবং AB ভেদক]

$\therefore \Delta APQ$ ও ΔABC সদৃশকোণী।



সুতরাং, ΔAPQ ও ΔABC সদৃশ।

$\therefore \dfrac{AP}{AB} = \dfrac{AQ}{AC} = \dfrac{PQ}{BC}$

কিন্তু, $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{1}{2}$ [$\because$ P, AB-এর মধ্যবিন্দু]

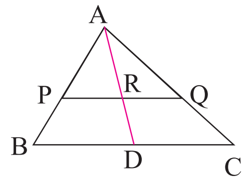
$\therefore \dfrac{AQ}{AC} = \dfrac{1}{2}$ বা, $AQ = \dfrac{1}{2} AC$ $\therefore$ Q, AC-র মধ্যবিন্দু **[(i) প্রমাণিত]**

আবার, $\dfrac{PQ}{BC} = \dfrac{1}{2}$ $\therefore$ $PQ = \dfrac{1}{2} BC$ **[(ii) প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 16. ΔABC-এর $\angle B = \angle C$, D ও E বিন্দু BA ও CA-এর উপর এমনভাবে অবস্থিত যে, $BD = CE$; প্রমাণ করি যে, $DE \parallel BC$ [নিজে করি]

প্রয়োগ : 17. ΔABC-এর একটি মধ্যমা AD অঙ্কন করেছি। যদি BC-এর সমান্তরাল কোনো সরলরেখা AB ও AC বাহুদ্বয়কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ করি যে AD দ্বারা PQ সরলরেখাংশ সমদ্বিখণ্ডিত হবে।

প্রদত্ত : ABC-এর AD মধ্যমা। BC বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা AB, AD ও AC-কে যথাক্রমে P, R ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে।



প্রমাণ করতে হবে : $PR = RQ$

প্রমাণ : ΔAPR ও ΔABD-এর $\angle PAR = \angle BAD$ [একই কোণ]

এবং $\angle APR =$ অনুরূপ $\angle ABD$ [$\because$ $PR \parallel BD$ এবং AB ভেদক]

$\therefore$ ΔAPR ও ΔABD সদৃশকোণী।

সুতরাং, ΔAPR ও ΔABD সদৃশ।

$\therefore \dfrac{PR}{BD} = \dfrac{AR}{AD}$ ———— (i)

ΔARQ ও ΔADC থেকে অনুরূপে প্রমাণ করা যায়, $\dfrac{RQ}{DC} = \dfrac{AR}{AD}$ ———— (ii)

(i) ও (ii) থেকে পাই, $\dfrac{PR}{BD} = \dfrac{RQ}{DC}$

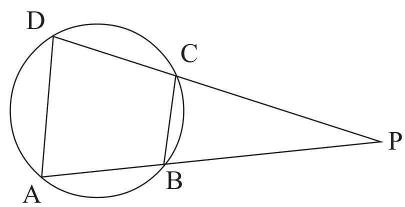
কিন্তু, $BD = DC$ [$\because$ AD মধ্যমা]

$\therefore$ $PR = RQ$ [প্রমাণিত]

প্রয়োগ : 18. একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ ABCD অঙ্কন করেছি। বর্ধিত AB ও DC বাহুদ্বয় পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করলে, প্রমাণ করি যে, $PA.PB = PC.PD$

প্রদত্ত : ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বর্ধিত AB ও DC বাহুদ্বয় পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে : $PA.PB = PC.PD$



প্রমাণ : ABCD বৃহস্থ চতুর্ভুজ।

$\therefore \angle DAB + \angle DCB = 180^\circ$

আবার, $\angle DCB + \angle BCP = 180^\circ$

$\therefore \angle DAB + \angle DCB = \angle DCB + \angle BCP$

$\therefore \angle DAB = \angle BCP$ ———— (i)

ΔAPD ও ΔCPB-এর, $\angle APD = \angle CPB$ [একই কোণ]

এবং $\angle PAD = \angle BCP$ [(i) থেকে পেলাম]

$\therefore$ ΔAPD ও ΔCPB সদৃশকোণী।

সুতরাং, ΔAPD ও ΔCPB সদৃশ।

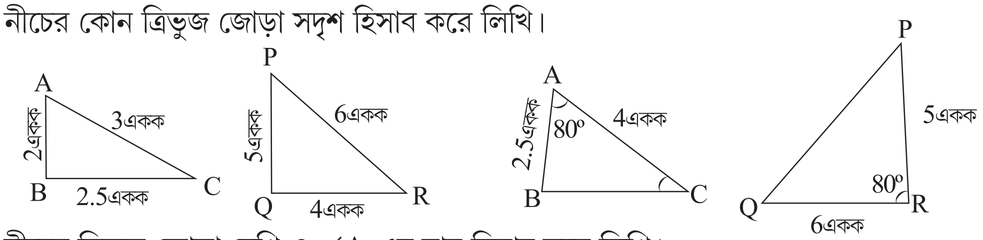
$\therefore \dfrac{PA}{PC} = \dfrac{PD}{PB}$

সুতরাং, $PA.PB = PC.PD$ (প্রমাণিত)

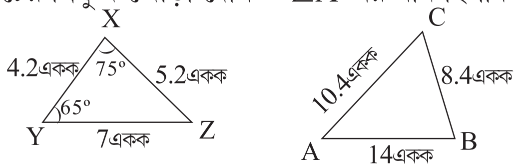
উপরের প্রমাণে দেখছি, ΔAPD ও ΔCPB-এর PA ও PC অনুরূপ বাহু এবং PD ও PB অনুরূপ বাহু।

কষে দেখি 18.3

1. নীচের কোন ত্রিভুজ জোড়া সদৃশ হিসাব করে লিখি।



2. নীচের ত্রিভুজ জোড়া দেখি ও $\angle A$-এর মান হিসাব করে লিখি।



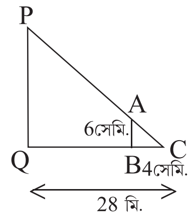
3. আমাদের মাঠে 6 সেমি. দৈর্ঘ্যের একটি কাঠির 4 সেমি. দৈর্ঘ্যের ছায়া মাটিতে পড়েছে। ওই একই সময়ে যদি একটি উঁচু টাওয়ারের ছায়ার দৈর্ঘ্য 28 মিটার হয়, তবে টাওয়ারের উচ্চতা কত হবে হিসাব করে লিখি।

উত্তর সংকেত : ধরি, PQ টাওয়ার এবং AB কাঠি

$\therefore$ BC = 4 সেমি., QC = 28 মি.

ΔPQC ও ΔABC সদৃশকোণী।

সুতরাং সদৃশ। $\therefore \dfrac{PQ}{AB} = \dfrac{QC}{BC}$ [নিজে করি]



4. প্রমাণ করি যে, কোনো ত্রিভুজের দুটি বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধেক।

5. তিনটি সমবিন্দু সরলরেখাকে দুটি সমান্তরাল সরলরেখা যথাক্রমে A, B, C ও X, Y, Z বিন্দুতে ছেদ করেছে, প্রমাণ করি যে, AB : BC = XY : YZ

6. PQRS একটি ট্রাপিজিয়াম অঙ্কন করেছি যার PQ || SR ; PR ও QS কর্ণ দুটি O বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করলে, প্রমাণ করি যে, OP : OR = OQ : OS; যদি SR = 2PQ হয়, তাহলে প্রমাণ করি যে, O বিন্দু কর্ণ দুটির প্রত্যেকটির সমত্রিখণ্ডক বিন্দুর একটি বিন্দু হবে।

7. PQRS একটি সামান্তরিক। S বিন্দুগামী একটি সরলরেখা PQ এবং বর্ধিত RQ-কে যথাক্রমে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করলে, প্রমাণ করি যে, PS : PX = QY : QX = RY : RS.

8. দুটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ ΔABC ও ΔPQR সদৃশকোণী। তাদের পরিকেন্দ্র যথাক্রমে X ও Y; BC ও QR অনুরূপ বাহু হলে, প্রমাণ করি যে, BX : QY = BC : QR.

9. কোনো বৃত্তের PQ ও RS দুটি জ্যা বৃত্তের অভ্যন্তরে X বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করেছে। P, S ও R, Q যুক্ত করে, প্রমাণ করি যে, ΔPXS ও ΔRSQ সদৃশকোণী। এর থেকে প্রমাণ করি যে, $PX \cdot XQ = RX \cdot XS$

অথবা একটি বৃত্তে দুটি জ্যা পরস্পরকে অন্তঃস্থভাবে ছেদ করলে একটির অংশদ্বয়ের আয়তক্ষেত্র অপরটির অংশদ্বয়ের আয়তক্ষেত্রের সমান হবে।

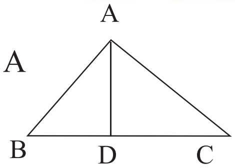
10. একটি সরলরেখার উপর P এবং Q দুটি বিন্দু। P এবং Q বিন্দুতে সরলরেখাটির উপর যথাক্রমে PR এবং QS লম্ব। PS এবং QR পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। OT, PQ -এর উপর লম্ব। প্রমাণ করি যে, $\dfrac{1}{OT} = \dfrac{1}{PR} + \dfrac{1}{QS}$

11. একটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত ΔABC; বৃত্তের ব্যাস AD এবং AE, BC বাহুর উপর লম্ব যা BC বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, ΔAEB এবং ΔACD সদৃশকোণী। এর থেকে প্রমাণ করি যে, AB.AC = AE.AD.

আমরা পিচবোর্ডে যে সকল ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র তৈরি করেছি তাদের মধ্যে সমকোণী ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রগুলি দেবমাল্য আলাদা করে রেখেছে।

নুসরৎ এদের মধ্যে দুটি সমকোণী ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র নিয়ে কাগজ ভাঁজ করে ত্রিভুজের সমকৌণিক বিন্দু থেকে অতিভুজের উপর লম্ব তৈরি করল।

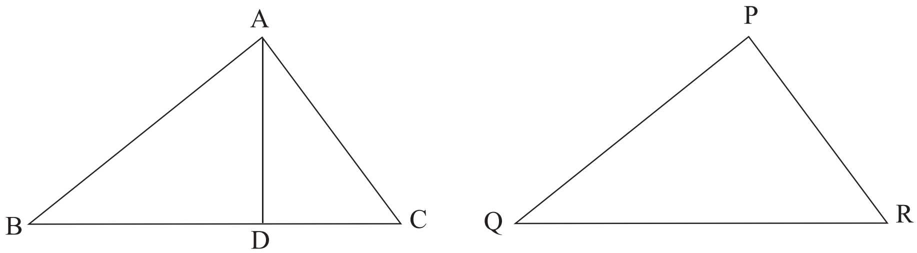
নুসরৎ সমকোণী ত্রিভুজ ABC-এর সমকৌণিক বিন্দু A থেকে $AD \perp BC$ অঙ্কন করেছে।



কাগজের ভাঁজ খুলে তিনটি ত্রিভুজ ABD, CAD ও ABC পেলাম। কিন্তু এই তিনটি ত্রিভুজ কি পরস্পর সদৃশ? হাতেকলমে যাচাই করি।

হাতেকলমে

1. দুটি একই মাপের ত্রিভুজ ABC ও PQR তৈরি করলাম যার $\angle A = \angle P = 90^\circ$, $\angle B = \angle Q$ এবং $\angle C = \angle R$ এবং ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র দুটি কেটে নিলাম।
2. এবার কাগজ ভাঁজ করে ΔABC-এর অতিভুজ BC-এর উপর AD লম্ব টানলাম।



3. এবার ΔABD ও ΔCAD কেটে নিলাম এবং ΔPQR-এর উপর বসিয়ে দেখছি

$\angle A = \angle P = \angle CDA = \angle ADB$

$\angle B = \angle Q = \angle ABD = \angle CAD$

$\angle C = \angle R = \angle DAB = \angle ACD$ **[নিজে করি]**

$\therefore$ পেলাম ΔABD, ΔCAD ও ΔABC সদৃশকোণী।

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম ΔABD, ΔCAD ও ΔABC পরস্পর সদৃশ।

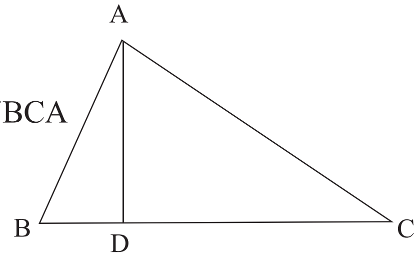
$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, কোনো সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌণিক বিন্দু থেকে অতিভুজের উপর অঙ্কিত লম্ব ত্রিভুজটিকে যে দুটি ত্রিভুজে বিভক্ত করে তারা পরস্পর সদৃশ এবং প্রত্যেকে মূল ত্রিভুজের সঙ্গে সদৃশ।

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য :48. যে-কোনো সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌণিক বিন্দু থেকে অতিভুজের উপর লম্ব অঙ্কন করলে, এই লম্বের উভয় পার্শ্বস্থিত ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ এবং ওই ত্রিভুজগুলির প্রত্যেকে মূল ত্রিভুজের সঙ্গে সদৃশ।

প্রদত্ত : ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle A$ সমকোণ এবং সমকৌণিক বিন্দু A থেকে অতিভুজ BC-এর উপর AD লম্ব।

প্রমাণ করতে হবে : (i) ΔDBA ও ΔABC পরস্পর সদৃশ। (ii) ΔDAC ও ΔABC পরস্পর সদৃশ।
(iii) ΔDBA ও ΔDAC পরস্পর সদৃশ।



প্রমাণ : ΔDBA ও ΔABC -এর মধ্যে,
$\angle BDA = \angle BAC = 90^\circ$
এবং $\angle ABD = \angle CBA$. সুতরাং অবশিষ্ট $\angle BAD = \angle BCA$
$\therefore$ ΔDBA ও ΔABC সদৃশকোণী।
$\therefore$ ΔDBA ও ΔABC পরস্পর সদৃশ। **[(i) প্রমাণিত]**
আবার, ΔDAC ও ΔABC-এর মধ্যে,
$\angle ADC = \angle BAC = 90^\circ$
$\angle ACD = \angle BCA$. সুতরাং অবশিষ্ট $\angle CAD = \angle CBA$
$\therefore$ ΔDAC ও ΔABC সদৃশকোণী।
$\therefore$ ΔDAC ও ΔABC সদৃশ। **[(ii) প্রমাণিত]**
ΔDBA ও ΔABC পরস্পর সদৃশ।
আবার, ΔDAC ও ΔABC পরস্পর সদৃশ।
সুতরাং ΔDBA ও ΔDAC পরস্পর সদৃশ। **[(iii) প্রমাণিত]**

দুটি সমকোণী ত্রিভুজের একটি করে সূক্ষ্মকোণ যদি সমান হয় তবে সমকোণী ত্রিভুজদুটি $\boxed{}$ হবে। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ :19. ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle A$ সমকোণ। সমকৌণিক বিন্দু A থেকে অতিভুজ BC-এর উপর AD লম্ব অঙ্কন করলাম। প্রমাণ করি (i) $AB^2 = BC.BD$, (ii) $AD^2 = BD.CD$ এবং (iii) $AC^2 = BC.CD$

প্রদত্ত : ABC ত্রিভুজের $\angle BAC = 90^\circ$; $AD \perp BC$.

প্রমাণ করতে হবে : (i) $AB^2 = BC \cdot BD$, (ii) $AD^2 = BD \cdot CD$ এবং (iii) $AC^2 = BC \cdot CD$

প্রমাণ :(i) ΔDBA ও ΔABC সদৃশ। ($\because$ ABC ত্রিভুজের সমকৌণিক বিন্দু A থেকে অতিভুজ BC-এর উপর AD লম্ব)

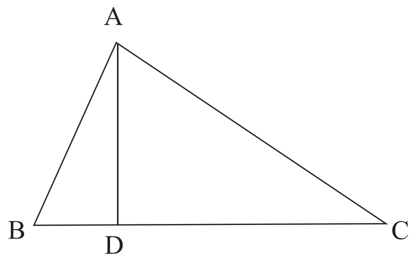
$\therefore \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BD}{AB}$ সুতরাং, $AB^2 = BC.BD$ **[(i) প্রমাণিত]**

(ii) ΔDBA ও ΔDAC সদৃশ।

$\therefore \dfrac{AD}{CD} = \dfrac{BD}{AD}$ সুতরাং, $AD^2 = BD.CD$ **[(ii) প্রমাণিত]**

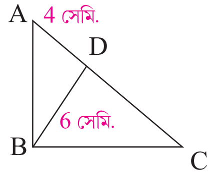
(iii) ΔDAC ও ΔABC সদৃশ।

$\therefore \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{CD}{AC}$ সুতরাং, $AC^2 = BC.CD$ **[(iii) প্রমাণিত]**



উপরের প্রমাণের (ii) নং ক্ষেত্রে দেখছি, ABC সমকোণী ত্রিভুজের ($\angle A$ সমকোণ) সমকৌণিক বিন্দু A থেকে অতিভুজ BC-এর উপর AD লম্ব অঙ্কন করলে AD সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্য, AD সরলরেখাংশ অতিভুজকে যে দুটি অংশে বিভক্ত করে সেই অংশ দুটির দৈর্ঘ্যের মধ্যসমানুপাতী।

প্রয়োগ :20. ΔABC-এর $\angle ABC = 90^\circ$ এবং $BD \perp AC$; যদি $BD = 6$ সেমি. এবং $AD = 4$ সেমি. হয়, তবে CD-এর দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।



ΔDAB ও ΔDBC সদৃশ।

$\therefore BD^2 = AD \cdot CD$ বা, $6^2 = 4 \times CD$ $\therefore$ $CD = \boxed{}$ **[নিজে লিখি]**

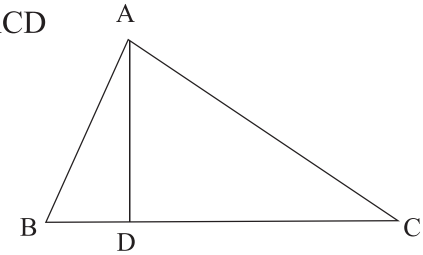
প্রয়োগ :21. ΔABC-এর $\angle ABC = 90^\circ$ এবং $BD \perp AC$; যদি $AB = 6$ সেমি. এবং $BD = 3$ সেমি. এবং $CD = 5.4$ সেমি. হয়, তবে BC বাহুর দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি। **[নিজে লিখি]**

প্রয়োগ :22. ΔABC-এর শীর্ষবিন্দু A থেকে BC বাহুর উপর AD লম্ব অঙ্কন করলাম। যদি $\frac{BD}{DA} = \frac{DA}{DC}$ হয়, তবে প্রমাণ করি যে, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

প্রমাণ : ΔBDA ও ΔADC-এর $\angle BDA = \angle ADC = 90^\circ$ [$\because$ $AD \perp BC$]এবং $\frac{BD}{DA} = \frac{DA}{DC}$

$\therefore \Delta BDA$ ও ΔADC সদৃশ। [যেহেতু দুটি ত্রিভুজের একটির একটি কোণ অপরটির একটি কোণের সমান হলে এবং কোণগুলির ধারক বাহুগুলি সমানুপাতী হলে, ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ হয়]

সুতরাং, $\angle ABD = \angle CAD$ এবং $\angle BAD = \angle ACD$



$\therefore \angle ABD + \angle ACD = \angle CAD + \angle BAD$

বা, $\angle B + \angle C = \angle A$

বা, $\angle A + \angle B + \angle C = 2\angle A$

বা, $2\angle A = 180^\circ$ $\therefore \angle A = 90^\circ$

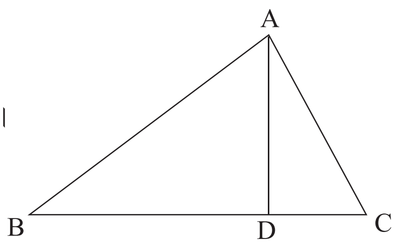
$\therefore$ ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

প্রয়োগ :23. যদি কোনো সমকোণী ত্রিভুজ ABC-এর সমকৌণিক বিন্দু A থেকে অতিভুজের উপর লম্ব অঙ্কন করি এবং যদি AC, AB ও BC ক্রমিক সমানুপাতী হয়, তবে প্রমাণ করি যে, অতিভুজটির বৃহত্তম অংশ ত্রিভুজটির ক্ষুদ্রতম বাহুর সমান হবে।

প্রদত্ত : সমকোণী ত্রিভুজ ABC-এর $\angle A$ সমকোণ; A থেকে অতিভুজ BC-এর উপর AD লম্ব অঙ্কন করলাম। ধরি, AC ক্ষুদ্রতম বাহু। $AC : AB = AB : BC$

প্রমাণ করতে হবে : অতিভুজ BC-এর বৃহত্তম অংশ AC বাহুর সমান। যেহেতু ADC সমকোণী ত্রিভুজের DC, অতিভুজ AC-এর সমান হতে পারে না,

সুতরাং, প্রমাণ করতে হবে $BD = AC$



প্রমাণ : সমকৌণিক বিন্দু A থেকে BC-এর উপর AD লম্ব।

$\therefore \Delta ABD$ ও ΔABC সদৃশ।

$\therefore \frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC}$

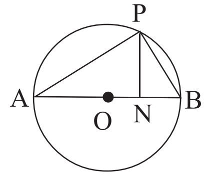
কিন্তু, $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{BC}$ [প্রদত্ত] সুতরাং, $\frac{BD}{AB} = \frac{AC}{AB}$

$\therefore$ $BD = AC$ **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 24. একটি বৃত্ত অঙ্কন করেছি যার ব্যাস AB এবং কেন্দ্র O; বৃত্তের উপরিস্থিত কোনো বিন্দু P থেকে AB ব্যাসের উপর একটি লম্ব অঙ্কন করলাম যা AB কে N বিন্দুতে ছেদ করল। প্রমাণ করি যে, $PB^2 = AB.BN$

প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB ব্যাস। P বৃত্তের উপরিস্থ যেকোনো একটি বিন্দু এবং $PN \perp AB$

প্রমাণ করতে হবে : $PB^2 = AB.BN$



প্রমাণ: AB বৃত্তের ব্যাস। সুতরাং $\angle APB$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।

$\therefore \angle APB = 1$ সমকোণ।

সমকোণী ত্রিভুজ APB-এর সমকৌণিক বিন্দু P থেকে অতিভুজ AB-এর উপর PN লম্ব।

$\therefore \Delta ABP$ ও ΔPBN পরস্পর সদৃশ।

সুতরাং, $\frac{PB}{BN} = \frac{AB}{PB}$

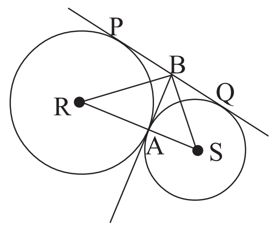
$\therefore PB^2 = AB.BN$ **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 25. দুটি বৃত্ত পরস্পরকে A বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করেছে। PQ ওই দুটি বৃত্তের একটি সরল সাধারণ স্পর্শক। যদি বৃত্ত দুটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে r ও r′ হয়, তাহলে প্রমাণ করি যে, $PQ^2 = 4rr'$

প্রদত্ত : R ও S কেন্দ্রীয় দুটি বৃত্ত যাদের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে r ও r′, পরস্পরকে A বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করেছে। PQ ওই দুটি বৃত্তের একটি সরল সাধারণ স্পর্শক এবং বৃত্তদুটিকে P ও Q বিন্দুতে স্পর্শ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে : $PQ^2 = 4rr'$

অঙ্কন: R, A ও A, S যোগ করলাম, A বিন্দুতে বৃত্তদুটির সাধারণ স্পর্শক অঙ্কন করলাম যা PQ-কে B বিন্দুতে ছেদ করল। R, B ও S, B যোগ করলাম।



প্রমাণ : B বিন্দু থেকে R কেন্দ্রীয় বৃত্তের দুটি স্পর্শক BP ও BA.

$\therefore BP = BA$ এবং RB , $\angle ABP$-এর সমদ্বিখণ্ডক।

সুতরাং, $\angle RBA = \frac{1}{2} \angle PBA$

আবার, B বিন্দু থেকে S কেন্দ্রীয় বৃত্তের দুটি স্পর্শক BQ ও BA

$\therefore BQ = BA$ এবং BS, $\angle ABQ$-এর সমদ্বিখণ্ডক।

$\therefore \angle SBA = \frac{1}{2} \angle QBA$

$\angle RBA + \angle SBA = \frac{1}{2} (\angle PBA + \angle QBA)$

বা, $\angle RBS = \frac{1}{2} \angle PBQ = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$

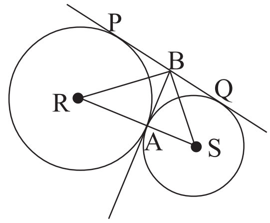
$\therefore \angle RBS = 1$ সমকোণ

R, S দুটি বৃত্তের কেন্দ্র এবং A স্পর্শবিন্দু।

$\therefore$ R, A, S বিন্দু তিনটি সমরেখ এবং $AB \perp RS$ [$\because$ বৃত্তের স্পর্শক এবং স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ পরস্পর লম্ব]

সমকোণী ত্রিভুজ RBS-এর সমকৌণিক বিন্দু B থেকে অতিভুজ RS-এর উপর BA লম্ব।

$\therefore \Delta ABR$ ও ΔASB পরস্পর সদৃশ।



সুতরাং, $\dfrac{AB}{AS} = \dfrac{AR}{AB}$

বা, $AB^2 = AR.AS$

$= r.r'$ $[\because AR = r$ এবং $AS = r']$

$\therefore 4AB^2 = 4r.r'$

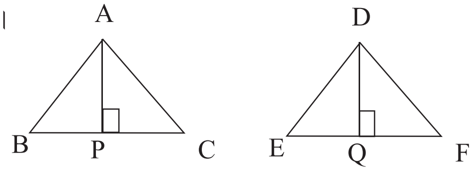
বা, $(2AB)^2 = 4rr'$

$\therefore PQ^2 = 4r.r'$ $[\because PQ = PB + BQ = 2AB;$ $\because PB = BA$ এবং $QB = BA]$ **(প্রমাণিত)**

প্রয়োগ : 26. *যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, দুটি সদৃশ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের অনুপাত অনুরূপ বাহুর বর্গের অনুপাতের সঙ্গে সমান [প্রমাণ মূল্যায়নের অন্তর্ভুক্ত নয়]*

প্রদত্ত : $\Delta ABC \sim \Delta DEF$; সুতরাং, ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণী।

$\therefore \angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$



প্রমাণ করতে হবে : $\dfrac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \dfrac{AB^2}{DE^2} = \dfrac{AC^2}{DF^2} = \dfrac{BC^2}{EF^2}$

অঙ্কন : ABC ত্রিভুজে $AP \perp BC$ এবং DEF ত্রিভুজে $DQ \perp EF$ অঙ্কন করি।

প্রমাণ : $\Delta ABC = \dfrac{1}{2} BC.AP$

এবং $\Delta DEF = \dfrac{1}{2} EF.DQ$

$$\frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{\frac{1}{2}BC.AP}{\frac{1}{2}EF.DQ} = \frac{BC}{EF}.\frac{AP}{DQ}$$

ΔABP ও ΔDEQ-তে, $\angle ABP = \angle DEQ$ $(\because \angle B = \angle E)$

$\angle APB = \angle DQE$ (প্রত্যেকটি সমকোণ)

সুতরাং, অবশিষ্ট $\angle PAB = \angle QDE$.

$\therefore \Delta ABP$ ও ΔDEQ সদৃশকোণী। সুতরাং সদৃশ।

$\therefore \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AP}{DQ}$

আবার, ΔABC ও ΔDEF সদৃশ।

সুতরাং $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$ $\quad \therefore \dfrac{AP}{DQ} = \dfrac{BC}{EF}$

$$\therefore \frac{\Delta ABC}{\Delta DEC} = \frac{BC}{EF}.\frac{AP}{DQ} = \frac{BC}{EF}.\frac{BC}{EF} = \frac{BC^2}{EF^2}$$

যেহেতু, $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$

সুতরাং, $\dfrac{AB^2}{DE^2} = \dfrac{AC^2}{DF^2} = \dfrac{BC^2}{EF^2}$ $\quad \therefore \dfrac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \dfrac{AB^2}{DE^2} = \dfrac{AC^2}{DF^2} = \dfrac{BC^2}{EF^2}$ **[প্রমাণিত]**

কষে দেখি 18.4

1. ΔABC-এর $\angle ABC = 90^\circ$ এবং $BD \perp AC$; যদি $BD = 8$ সেমি. এবং $AD = 5$ সেমি. হয়, তবে CD-এর দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

2. ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle B$ সমকোণ এবং $BD \perp AC$; যদি $AD = 4$ সেমি. এবং $CD = 16$ সেমি. হয়, তবে BD ও AB-এর দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

3. O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তের AB একটি ব্যাস। P বৃত্তের উপর যে-কোনো একটি বিন্দু। A ও B বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক দুটিকে P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকটি যথাক্রমে Q ও R বিন্দুতে ছেদ করেছে। যদি বৃত্তের ব্যাসার্ধ r হয়, প্রমাণ করি যে, $PQ.PR = r^2$

4. AB-কে ব্যাস করে একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কন করেছি। AB-এর উপর যে-কোনো বিন্দু C থেকে AB-এর উপর লম্ব অঙ্কন করেছি যা অর্ধবৃত্তকে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে, CD, AC ও BC-এর মধ্যসমানুপাতী।

5. সমকোণী ত্রিভুজ ABC-এর $\angle A$ সমকোণ। অতিভুজ BC-এর উপর লম্ব AD হলে, প্রমাণ করি যে,

$$\frac{\Delta ABC}{\Delta ACD} = \frac{BC^2}{AC^2}$$

6. O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB ব্যাস। A বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত একটি সরলরেখা বৃত্তকে C বিন্দুতে এবং B বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শককে D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে,

   (i) $BD^2 = AD.DC$ (ii) যে-কোনো সরলরেখার জন্য AC এবং AD দ্বারা গঠিত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সর্বদা সমান।

7. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

   (A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :

   (i) ΔABC ও ΔDEF-এ $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{FD} = \frac{AC}{EF}$ হলে,

   (a) $\angle B = \angle E$ (b) $\angle A = \angle D$ (c) $\angle B = \angle D$ (d) $\angle A = \angle F$

   (ii) ΔDEF ও ΔPQR-এ $\angle D = \angle Q$ এবং $\angle R = \angle E$ হলে, নীচের কোনটি সঠিক নয় লিখি।

   (a) $\frac{EF}{PR} = \frac{DF}{PQ}$ (b) $\frac{QR}{PQ} = \frac{EF}{DF}$ (c) $\frac{DE}{QR} = \frac{DF}{PQ}$ (d) $\frac{EF}{RP} = \frac{DE}{QR}$

   (iii) ABC ও DEF ত্রিভুজে $\angle A = \angle E = 40^\circ$, $AB : ED = AC : EF$ এবং $\angle F = 65^\circ$ হলে $\angle B$-এর মান

   (a) 35° (b) 65° (c) 75° (d) 85°

   (iv) ΔABC এবং ΔPQR-এ $\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{PR} = \frac{CA}{PQ}$ হলে,

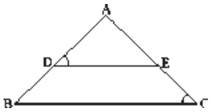
   (a) $\angle A = \angle Q$ (b) $\angle A = \angle P$ (c) $\angle A = \angle R$ (d) $\angle B = \angle Q$

   (v) ABC ত্রিভুজে AB = 9সেমি., BC = 6সেমি. এবং CA = 7.5সেমি.। DEF ত্রিভুজে BC বাহুর অনুরূপ বাহু EF; EF = 8সেমি. এবং $\Delta DEF \sim \Delta ABC$ হলে ΔDEF-এর পরিসীমা

   (a) 22.5 সেমি. (b) 25 সেমি. (c) 27 সেমি. (d) 30 সেমি.

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) দুটি চতুর্ভুজের অনুরূপ কোণগুলি সমান হলে চতুর্ভুজ দুটি সদৃশ।

(ii) 

পাশের চিত্রে $\angle ADE = \angle ACB$ হলে, $\Delta ADE \sim \Delta ACB$

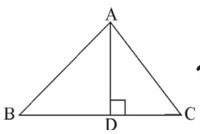
(iii) ΔPQR-এর QR বাহুর উপর D এমন একটি বিন্দু যে $PD \perp QR$; সুতরাং, $\Delta PQD \sim \Delta RPD$

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

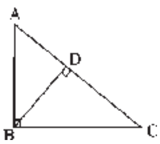
(i) দুটি ত্রিভুজ সদৃশ হবে যদি তাদের ________ বাহুগুলি সমানুপাতী হয়।

(ii) ΔABC ও ΔDEF-এর পরিসীমা যথাক্রমে 30সেমি. এবং 18সেমি.। $\Delta ABC \sim \Delta DEF$; BC ও EF অনুরূপ বাহু। যদি BC = 9সেমি. হয়, তাহলে EF = ________সেমি.।

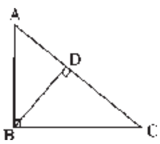
8. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)**

(i) 

পাশের চিত্রে, $\angle ACB = \angle BAD$ এবং $AD \perp BC$; AC = 15সেমি., AB = 20সেমি. এবং BC = 25সেমি. হলে, AD-এর দৈর্ঘ্য কত তা লিখি।

(ii) 

পাশের চিত্রে, $\angle ABC = 90^\circ$ এবং $BD \perp AC$; যদি AB = 30সেমি., BD = 24সেমি. এবং AD = 18সেমি. হলে, BC-এর দৈর্ঘ্য কত তা লিখি।

(iii) 

পাশের চিত্রে, $\angle ABC = 90^\circ$ এবং $BD \perp AC$; যদি BD = 8সেমি. এবং AD = 4সেমি. হয়, তাহলে CD-এর দৈর্ঘ্য কত তা লিখি।

(iv) ABCD ট্রাপিজিয়ামের $BC \parallel AD$ এবং AD = 4সেমি.। AC ও BD কর্ণদ্বয় এমনভাবে O বিন্দুতে ছেদ করে যে $\frac{AO}{OC} = \frac{DO}{OB} = \frac{1}{2}$ হয়। BC-এর দৈর্ঘ্য কত তা লিখি।

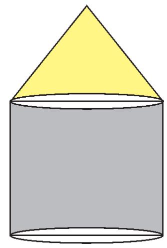
(v) $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ এবং ΔABC ও ΔDEF -এ AB,BC ও CA বাহুর অনুরূপ বাহুগুলি যথাক্রমে DE, EF ও DF; $\angle A = 47^\circ$ এবং $\angle E = 83^\circ$ হলে, $\angle C$-এর পরিমাপ কত তা লিখি।

19 বিভিন্ন ঘনবস্তু সংক্রান্ত বাস্তব সমস্যা

REAL LIFE PROBLEMS RELATED TO DIFFERENT SOLID OBJECTS

গত বছরের ডিসেম্বর মাসের শীতের ছুটিতে আমরা ও পিসিমণিরা একসঙ্গে আঁটপুরে আমাদের গ্রামের বাড়িতে বেড়াতে গিয়েছিলাম। তখন মাঠে মাঠে ধান ঝাড়া হচ্ছিল এবং মরাই-এ ধান ভরতি করে রাখা হচ্ছিল।

প্রয়োগ : 1. আমাদের বাড়ির ধানের মরাই-এর নীচের অংশ লম্ব বৃত্তাকার চোঙাকৃতি এবং উপরের অংশ শঙ্কু আকৃতির। এই মরাইটির ভূমিতলের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 2.1 মিটার, চোঙাকৃতি অংশের উচ্চতা 2 মিটার এবং শঙ্কু আকৃতি অংশের উচ্চতা 1.4 মিটার। কিন্তু এই মরাইটিতে, এর আয়তনের $\frac{2}{3}$ অংশ ধান রাখা হয়েছে। মরাইয়ে রাখা ধানের আয়তন কীভাবে পাব দেখি।



মরাই-এর ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $= \frac{2.1}{2}$ মিটার $= \frac{21}{20}$ মিটার

চোঙাকৃতি অংশের আয়তন $= \frac{22}{7} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times 2$ ঘন মিটার $= 6.93$ ঘন মিটার

শঙ্কু-আকৃতির অংশের আয়তন $= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times \frac{14}{10}$ ঘন মিটার

$= \frac{77 \times 21}{1000}$ ঘন মিটার $= 1.617$ ঘন মিটার

$\therefore$ ওই মরাইটির আয়তন $= (6.93 + 1.617)$ ঘন মিটার $= 8.547$ ঘন মিটার।

$\therefore$ ওই মরাইটিতে রাখা ধানের আয়তন $\frac{2}{3} \times 8.547$ ঘন মিটার $= 5.698$ ঘন মিটার।

বুঝেছি, যেহেতু মরাইটির কিছু অংশ চোঙাকৃতি এবং কিছু অংশ শঙ্কু আকৃতির, তাই দুটি আয়তন আলাদাভাবে নির্ণয় করে তাদের সমষ্টি নিয়ে মরাইটির আয়তন পেলাম।

প্রয়োগ : 2. কিন্তু যদি 25 সেমি. উচ্চতাবিশিষ্ট একটি লোহার তৈরি ফাঁপা চোঙের বহির্ব্যাসের দৈর্ঘ্য 14 সেমি. এবং অন্তর্ব্যাসের দৈর্ঘ্য 10 সেমি. হয় এবং চোঙটি গলিয়ে এর অর্ধেক উচ্চতাবিশিষ্ট একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু তৈরি করা হয়, তবে শঙ্কুটির ভূমিতলের ব্যাসের দৈর্ঘ্য কত হবে নির্ণয় করি।

ফাঁপা চোঙটির বহিঃব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য (R) $= \frac{14}{2}$ সেমি. $= 7$ সেমি., অন্তঃব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য (r) $= \frac{10}{2}$ সেমি. $= 5$ সেমি., চোঙটির উচ্চতা $= 25$ সেমি.

$\therefore$ চোঙটিতে লোহার পরিমাণ $= \pi (R^2 - r^2) \times$ উচ্চতা $= \pi (7^2 - 5^2) \times 25$ ঘন সেমি.

$= \pi \times 24 \times 25$ ঘন সেমি.

নিরেট শঙ্কুর উচ্চতা $= \frac{25}{2}$ সেমি.

ধরি, শঙ্কুটির ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $= r$ সেমি.

শর্তানুসারে, $\frac{1}{3} \pi \times r^2 \times \frac{25}{2} = \pi \times 24 \times 25$

$\therefore r = \pm \boxed{}$ [নিজে হিসাব করে লিখি]

কিন্তু ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না। $\therefore r \neq - \boxed{}$ সুতরাং $r = \boxed{}$

$\therefore$ শঙ্কুটির ভূমিতলের ব্যাস $= 2 \times r$ সেমি. $= \boxed{}$ সেমি.।

প্রয়োগ : 3. রূপার পাত দিয়ে তৈরি একটি অর্ধগোলাকার বাটির মুখের বাইরের দিকের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 8 সেমি. এবং ভিতরের দিকের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 4 সেমি.। বাটিটিকে গলিয়ে 8 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসবিশিষ্ট একটি নিরেট শঙ্কু তৈরি করা হলো। শঙ্কুটির উচ্চতা কত হবে হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 4. একটি লম্ব বৃত্তাকার ড্রামে কিছু জল আছে। 2.8 ডেসিমি. দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট ব্যাস ও 3 ডেসিমি. উচ্চতাবিশিষ্ট একটি শঙ্কু আকৃতির লোহার টুকরো ওই জলে সম্পূর্ণ ডোবালাম। এর ফলে ড্রামের জলতল 0.64 ডেসিমি. উপরে উঠে এল। ড্রামটির ভূমিতলের ব্যাসের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $= \frac{2.8}{2}$ ডেসিমি. $= 1.4$ ডেসিমি. এবং উচ্চতা $= 3$ ডেসিমি.

$\therefore$ শঙ্কুর আয়তন $= \frac{1}{3}\pi \times (1.4)^2 \times 3$ ঘন ডেসিমি.

ধরি, ড্রামটির ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r ডেসিমি.

শঙ্কু আকৃতির লোহার টুকরোটি ড্রামের জলে ডোবানোর ফলে ড্রামে জলতল 0.64 ডেসিমি. উপরে উঠেছে।

$\therefore$ ড্রামে বৃদ্ধিপ্রাপ্ত জলের আয়তন = শঙ্কু আকৃতির লোহার টুকরোর আয়তন।

$\therefore \pi r^2 \times 0.64 = \frac{1}{3}\pi \times (1.4)^2 \times 3$ বা, $r^2 = \boxed{}$ বা, $r = \pm\boxed{}$ **[নিজে করি]**

কিন্তু, ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না। $\therefore r \neq -\boxed{}$, সুতরাং, $r = \boxed{}$

$\therefore$ ড্রামটির ভূমিতলের ব্যাসের দৈর্ঘ্য = $\boxed{}$ ডেসিমি.।

প্রয়োগ : 5. 28 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসবিশিষ্ট একটি লম্ববৃত্তাকার চোঙে কিছু জল আছে এবং তাতে সমান ব্যাসের তিনটি নিরেট লোহার গোলক সম্পূর্ণ ডোবানো যায়। গোলকগুলি ডোবানোর আগে জলতলের যে উচ্চতা ছিল গোলকগুলি ডোবানোর ফলে জলতলের উচ্চতা তার থেকে 7 সেমি. বৃদ্ধি পায়। গোলকগুলির ব্যাসের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি। **[নিজে করি]**

উত্তর সংকেত : ধরি, গোলকগুলির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r সেমি.

শর্তানুযায়ী, $3 \times \frac{4}{3}\pi r^3 = \pi \times 14^2 \times 7 \quad \therefore r = \boxed{}$

প্রয়োগ : 6. 21 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ ও 21 সেমি. উচ্চতাবিশিষ্ট একটি লম্ব বৃত্তাকার ড্রাম এবং 21 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসবিশিষ্ট একটি নিরেট লোহার গোলক নিলাম। ওই ড্রাম ও নিরেট লোহার গোলকটির আয়তন অনুপাত হিসাব করে লিখি। (ড্রামের বেধ অগ্রাহ্য করব)। এবার ড্রামটি সম্পূর্ণ জলপূর্ণ করে ওই গোলকটি ড্রামটিতে সম্পূর্ণ ডুবিয়ে তুলে নিলাম। এরফলে এখন ড্রামে জলের গভীরতা কত হলো নির্ণয় করি।

ড্রামটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 21 সেমি. এবং উচ্চতা 21 সেমি.

$\therefore$ ড্রামটির আয়তন $= \pi \times 21^2 \times 21$ ঘন সেমি.

গোলকের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 21 সেমি. $\therefore$ ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $\frac{21}{2}$ সেমি.

$\therefore$ গোলকটির আয়তন $\frac{4}{3} \times \pi \times \left(\frac{21}{2}\right)^3$ ঘন সেমি.

$\therefore$ ড্রামের আয়তন : গোলকের আয়তন $= \pi \times 21 \times 21 \times 21 : \frac{4}{3}\pi \times \frac{21 \times 21 \times 21}{2 \times 2 \times 2} = 6:1$

গোলকটিকে সম্পূর্ণ ডুবিয়ে তুলে নেওয়ায় গোলকটি তার সমআয়তন জল অপসারিত করল।

ধরি, গোলকটি h সেমি. উচ্চতার জল অপসারণ করে।

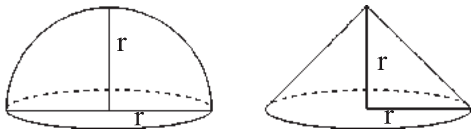
শর্তানুসারে, $\pi \times 21^2 \times h = \frac{4}{3}\pi \times \frac{21 \times 21 \times 21}{2 \times 2 \times 2}$ বা, $\pi \times 21 \times 21 \times h = \frac{4}{3}\pi \times \frac{21 \times 21 \times 21}{8} \quad \therefore h = 3.5$

$\therefore$ ড্রামে এখন জলের গভীরতা 21 সেমি. – 3.5 সেমি. = 17.5 সেমি.।

প্রয়োগ : 7. একটি নিরেট অর্ধগোলক ও একটি নিরেট শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাসের দৈর্ঘ্য সমান ও উচ্চতা সমান হলে তাদের আয়তনের অনুপাত এবং বক্রতলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত হিসাব করে লিখি।

অর্ধগোলক ও শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাসের দৈর্ঘ্য সমান। সুতরাং তাদের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য সমান।

মনে করি, অর্ধগোলক ও শঙ্কুটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r একক।



অর্ধগোলকের উচ্চতা = অর্ধগোলকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য

প্রদত্ত শর্তানুসারে, শঙ্কুর উচ্চতা = r একক।

$\therefore$ শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা $= \sqrt{r^2+r^2}$ একক $= \sqrt{2}\,r$ একক

এখানে, $\dfrac{\text{অর্ধগোলকের আয়তন}}{\text{শঙ্কুর আয়তন}} = \dfrac{\frac{2}{3}\pi r^3}{\frac{1}{3}\pi r^2 . r} = \dfrac{2}{1}$ $\therefore$ অর্ধগোলক ও শঙ্কুর আয়তনের অনুপাত $2:1$

এবং অর্ধগোলক এবং শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত $= \dfrac{2\pi r^2}{\pi . r . \sqrt{2} . r} = \dfrac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}:1$

প্রয়োগ : 8. 2.1 ডেসিমি. দৈর্ঘের ব্যাসার্ধের একটি নিরেট পিতলের গোলককে পিটিয়ে 7 সেমি. লম্বা একটি লম্ব বৃত্তাকার দণ্ড তৈরি করা হলে দণ্ডটির ব্যাসের দৈর্ঘ্য কত হবে হিসাব করে লিখি।

দণ্ডটি ও গোলকটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত নির্ণয় করি।

ধরি, লম্ব বৃত্তাকার দণ্ডের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r সেমি.

শর্তানুসারে, $\pi r^2 \times 7 = \frac{4}{3}\pi \times (21)^3$ [$\because$ 2.1 ডেসিমি. = 21 সেমি.]

$\therefore r^2 = \frac{4}{3} \times \frac{21\times21\times21}{7}$ বা, $r = \pm \boxed{}$ **[নিজে করি]**

কিন্তু ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না।

সুতরাং, $r \neq -\boxed{}$ $\therefore r = \boxed{}$

$\therefore$ দণ্ডের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 42 সেমি.। $\therefore$ দণ্ডের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 84 সেমি.

দণ্ড ও গোলকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত = $\boxed{} : \boxed{}$ **[নিজে হিসাব করে লিখি]**

প্রয়োগ : 9. 9 সেমি. দৈর্ঘ্যের অন্তর্ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি অর্ধগোলাকার পাত্র সম্পূর্ণ জলপূর্ণ আছে। এই জল 3 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাস ও 4 সেমি. উচ্চতাবিশিষ্ট চোঙাকৃতি বোতলে ভর্তি করে রাখব। হিসাব করে দেখি পাত্রটি খালি করতে কতগুলি বোতল দরকার।

মনে করি, n সংখ্যক বোতল দরকার।

1 টি বোতলে জল রাখা যায় $= \pi\left(\frac{3}{2}\right)^2 \times 4$ ঘন সেমি. [$\because$ ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $\frac{3}{2}$ সেমি.]

$\therefore$ n টি বোতলে জল রাখা যায় $= \pi\left(\frac{3}{2}\right)^2 \times 4 \times n$ ঘন সেমি.

শর্তানুসারে, $\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2 \times 4 \times n = \frac{2}{3}\pi(9)^3$ $\therefore n = \dfrac{\frac{2}{3}\times9\times9\times9}{4\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}} = \dfrac{6\times9\times9}{3\times3} = 54$

$\therefore$ জলপূর্ণ পাত্রটি খালি করতে 54 টি বোতল দরকার।

প্রয়োগ : 10. $12\sqrt{2}$ সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসবিশিষ্ট এবং 21 মিটার লম্বা একটি লম্ব বৃত্তাকার কাঠের গুঁড়ি থেকে সবচেয়ে কম কাঠ নষ্ট করে বর্গাকার প্রস্থচ্ছেদবিশিষ্ট একটি আয়তঘনকাকার কাঠের লগ তৈরি করলে তাতে কত পরিমাণ কাঠ থাকবে এবং কত পরিমাণ কাঠ নষ্ট হবে হিসাব করি।

লম্ব বৃত্তাকার চোঙাকৃতি কাঠের গুঁড়ির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = $\frac{12\sqrt{2}}{2}$ সেমি. = $6\sqrt{2}$ সেমি.

কাঠের গুঁড়ির দৈর্ঘ্য = 21 মিটার = 2100 সেমি.

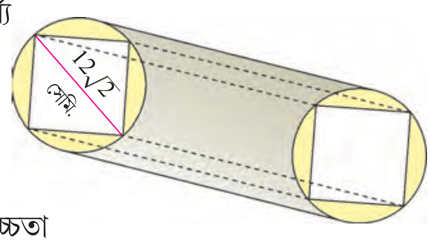
কাঠের গুঁড়ির আয়তন = ভূমিতলের ক্ষেত্রফল × উচ্চতা

$= \frac{22}{7} \times 6\sqrt{2} \times 6\sqrt{2} \times 2100$ ঘন সেমি.

= 475200 ঘন সেমি. = 475.2 ঘন ডেসিমি.

বৃত্তাকার প্রস্থচ্ছেদবিশিষ্ট কাঠের গুঁড়িকে সবচেয়ে কম কাঠ নষ্ট করে বর্গাকার প্রস্থচ্ছেদবিশিষ্ট কাঠের লগে পরিণত করতে হবে।

সুতরাং, বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য = বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ব্যাসের দৈর্ঘ্য



ধরি, বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য a সেমি.

সুতরাং, $\sqrt{2}\,a = 12\sqrt{2}$

$\therefore a = 12$

$\therefore$ আয়তঘনাকার কাঠের লগের আয়তন = ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা

= 12 × 12 × 2100 ঘন সেমি.

= 302400 ঘন সেমি.

= 302.4 ঘন ডেসিমি.

$\therefore$ আয়তঘনাকার কাঠের লগে কাঠ থাকবে 302.4 ঘন ডেসিমি.

এবং কাঠ নষ্ট হবে (475.2 – 302.4) ঘন ডেসিমি. = 172.8 ঘন ডেসিমি.

প্রয়োগ : 11. 13 মিটার দীর্ঘ এবং 11 মিটার প্রশস্ত একটি ছাদের জল বের হওয়ার নলটি বৃষ্টির সময় বন্ধ ছিল। বৃষ্টির পর দেখা গেল ছাদে 7 সেমি. গভীর জল দাঁড়িয়ে গেছে। যে নলটি দিয়ে জল বের হয় তার ব্যাসের দৈর্ঘ্য 7 সেমি. এবং চোঙাকারে মিনিটে 200 মিটার দৈর্ঘ্যের জল বের হয়। নলটি খুলে দিলে কতক্ষণে সব জল বেরিয়ে যাবে হিসাব করি।

ছাদে যে জল দাঁড়িয়েছে তার আয়তন = 1300 × 1100 × 7 ঘন সেমি.

নল দিয়ে প্রতি মিনিটে জল বের হয় $\frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 200 \times 100$ ঘন সেমি.

= 11 × 7 × 100 × 100 ঘন সেমি.

[$\because$ চোঙাকৃতি জলস্তম্ভের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = $\frac{7}{2}$ সেমি. এবং জলস্তম্ভের দৈর্ঘ্য 200 মিটার = 200 × 100 সেমি.]

নলটি খুলে নিলে সব জল বেরিয়ে যেতে সময় লাগবে = $\frac{1300 \times 1100 \times 7}{11 \times 7 \times 100 \times 100}$ মিনিট

= 13 মিনিট

কষে দেখি 19

1. আনোয়ারদের বাড়ির সামনে একটি নিরেট লোহার স্তম্ভ আছে যার নীচের অংশ লম্ব বৃত্তাকার চোঙ আকৃতির এবং উপরের অংশ শঙ্কু আকৃতির। এদের ভূমিতলের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 20 সেমি., চোঙাকৃতি অংশের উচ্চতা 2.8 মিটার এবং শঙ্কু আকৃতি অংশের উচ্চতা 42 সেমি.। 1 ঘন সেমি. লোহার ওজন 7.5 গ্রাম হলে, লোহার স্তম্ভের ওজন কত হবে তা হিসাব করে লিখি।

2. একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা 20 সেমি. এবং তির্যক উচ্চতা 25 সেমি.। শঙ্কুটির সমান আয়তনবিশিষ্ট একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা 15 সেমি. হলে, চোঙটির ভূমিতলের ব্যাসের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

3. 24 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসবিশিষ্ট একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙাকৃতি পাত্রে কিছু জল আছে। 6 সেমি. দৈর্ঘ্যের ভূমিতলের ব্যাস ও 4 সেমি উচ্চতাবিশিষ্ট 60 টি নিরেট শঙ্কু আকৃতির লোহার টুকরো ওই জলে সম্পূর্ণভাবে নিমজ্জিত করলে, জলতলের উচ্চতা কতটা বৃদ্ধি পাবে হিসাব করে লিখি।

4. একই দৈর্ঘ্যের ভূমিতলের ব্যাসার্ধ এবং একই উচ্চতাবিশিষ্ট একটি নিরেট শঙ্কু ও একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার চোঙের বক্রতলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত 5:8 হলে, উহাদের ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য ও উচ্চতার অনুপাত নির্ণয় করি।

5. 8 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের একটি নিরেট লোহার গোলককে গলিয়ে 1 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসের কয়টি নিরেট গুলি পাওয়া যাবে হিসাব করে দেখি।

6. একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার লোহার দণ্ডের ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 32 সেমি. এবং দৈর্ঘ্য 35 সেমি.। দণ্ডটি গলিয়ে 8 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ ও 28 সেমি. উচ্চতাবিশিষ্ট কতগুলি নিরেট শঙ্কু তৈরি করা যাবে তা হিসাব করে লিখি।

7. 4.2 ডেসিমি. দৈর্ঘ্যের ধারবিশিষ্ট একটি নিরেট কাঠের ঘনক থেকে সবচেয়ে কম কাঠ নষ্ট করে যে নিরেট লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু পাওয়া যাবে তার আয়তন নির্ণয় করি।

8. একটি নিরেট গোলক ও একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য সমান ও তাদের ঘনফলও সমান হলে, চোঙটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য ও উচ্চতার অনুপাত হিসাব করে লিখি।

9. 6.6 ডেসিমি. দীর্ঘ, 4.2 ডেসিমি. প্রশস্ত এবং 1.4 ডেসিমি. পুরু একটি তামার নিরেট আয়তঘনাকার টুকরো গলিয়ে 2.1 ডেসিমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসের কয়টি নিরেট গোলক ঢালাই করা যাবে এবং প্রতিটি গোলকে কত ঘন ডেসিমি. ধাতু থাকবে হিসাব করে দেখি।

10. 4.2 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের একটি সোনার নিরেট গোলক পিটিয়ে 2.8 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসের একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার দণ্ড তৈরি করা হলে, দণ্ডটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

11. 6 ডেসিমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসের একটি নিরেট রৌপ্য গোলক গলিয়ে 1 ডেসিমি. লম্বা একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার দণ্ড তৈরি করা হলে, দণ্ডটির ব্যাসের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

12. একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার দণ্ডের প্রস্থচ্ছেদের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 3.2 ডেসিমি.। সেই দণ্ডটি গলিয়ে 21টি নিরেট গোলক তৈরি করা হলো। গোলকগুলির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য যদি 8 সেমি. হয়, তবে দণ্ডটির দৈর্ঘ্য কত ছিল তা হিসাব করে লিখি।

13. 21 ডেসিমি. দীর্ঘ, 11 ডেসিমি. প্রশস্ত এবং 6 ডেসিমি. গভীর একটি চৌবাচ্চা অর্ধেক জলপূর্ণ আছে। এখন সেই চৌবাচ্চায় যদি 21 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসের 100টি লোহার গোলক সম্পূর্ণ ডুবিয়ে দেওয়া হয়, তবে জলতল কত ডেসিমি. উঠবে তা হিসাব করে লিখি।

14. সমান ভূমিতলের ব্যাস এবং সমান উচ্চতাবিশিষ্ট একটি নিরেট শঙ্কু, একটি নিরেট অর্ধগোলক এবং একটি নিরেট চোঙের আয়তনের অনুপাত নির্ণয় করি।

15. 1 সেমি. পুরু সিসার পাতের তৈরি একটি ফাঁপা গোলকের বাহিরের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 6 সেমি.। গোলকটি গলিয়ে 2 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার দণ্ড তৈরি করা হলে, দণ্ডটির দৈর্ঘ্য কত হবে হিসাব করে লিখি।

16. 2 মিটার লম্বা একটি আয়তঘনাকার কাঠের লগের প্রস্থচ্ছেদ বর্গাকার এবং তার প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 14 ডেসিমি.। সবচেয়ে কম কাঠ নষ্ট করে ওই লগটিকে যদি একটি লম্ব বৃত্তাকার গুঁড়িতে পরিণত করা যায়, তবে তাতে কত ঘন মিটার কাঠ থাকবে এবং কত ঘন মিটার কাঠ নষ্ট হবে হিসাব করি।
[**উত্তর সংকেত :** বর্গাকার চিত্রের অন্তর্লিখিত পরিবৃত্ত হলে, বৃত্তের ব্যাসের দৈর্ঘ্য বর্গাকার চিত্রের বাহুর দৈর্ঘ্যের সমান।]

17. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.)

(i) r একক দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি নিরেট গোলককে গলিয়ে r একক উচ্চতার একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু তৈরি করা হলো। শঙ্কুটির ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য

(a) 2r একক (a) 3r একক (a) r একক (a) 4r একক

(ii) একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুকে গলিয়ে একই দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার চোঙ তৈরি করা হলো যার উচ্চতা 5 সেমি.। শঙ্কুটির উচ্চতা

(a) 10 সেমি. (b) 15 সেমি. (c) 18 সেমি. (d) 24 সেমি.

(iii) একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r একক এবং উচ্চতা 2r একক। চোঙটির মধ্যে সর্ববৃহৎ যে গোলকটি রাখা যাবে তার ব্যাসের দৈর্ঘ্য

(a) r একক (b) 2r একক (c) $\frac{r}{2}$ একক (d) 4r একক

(iv) r একক দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি নিরেট অর্ধগোলক থেকে সর্ববৃহৎ যে নিরেট শঙ্কু কেটে নেওয়া যাবে তার আয়তন

(a) $4\pi r^3$ ঘন একক (b) $3\pi r^3$ ঘন একক (c) $\frac{\pi r^3}{4}$ ঘন একক (d) $\frac{\pi r^3}{3}$ ঘন একক

(v) x একক দৈর্ঘ্যের ধারবিশিষ্ট একটি নিরেট ঘনক থেকে সর্ববৃহৎ একটি নিরেট গোলক কেটে নেওয়া হলে, গোলকের ব্যাসের দৈর্ঘ্য

(a) x একক (b) 2x একক (c) $\frac{x}{2}$ একক (d) 4x একক

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) দুটি একই ধরনের নিরেট অর্ধগোলক যাদের ভূমিতলের প্রত্যেকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r একক এবং তা ভূমি বরাবর জোড়া হলে, মিলিত ঘনবস্তুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল হবে $6\pi r^2$ বর্গ একক।

(ii) একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r একক এবং উচ্চতা h একক এবং তির্যক উচ্চতা ℓ একক। শঙ্কুটির ভূমিতলকে একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ভূমিতল বরাবর জুড়ে দেওয়া হলো। যদি চোঙের ও শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য এবং উচ্চতা একই হয় তবে মিলিত ঘনবস্তুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $(\pi r\ell + 2\pi rh + 2\pi r^2)$ বর্গ একক।

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার চোঙ ও দুটি অর্ধগোলকের ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য সমান। দুটি অর্ধগোলককে চোঙটির দুটি সমতলে আটকে দেওয়া হলে নতুন ঘনবস্তুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = একটি অর্ধগোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল + _____ বক্রতলের ক্ষেত্রফল + অপর অর্ধগোলকটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল।

(ii) একমুখ কাটা একটি পেনসিলের আকার শঙ্কু ও _____ সমন্বয়।

(iii) একটি নিরেট গোলককে গলিয়ে একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার চোঙ তৈরি করা হলো। গোলক ও চোঙের আয়তন _____ ।

18. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)**

(i) একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুকে গলিয়ে একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার চোঙ তৈরি করা হলো। উভয়ের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য সমান। যদি শঙ্কুর উচ্চতা 15 সেমি. হয়, তাহলে নিরেট চোঙের উচ্চতা কত হিসাব করে লিখি।

(ii) একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু এবং একটি নিরেট গোলকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য সমান এবং আয়তন সমান। গোলকের ব্যাসের দৈর্ঘ্য এবং শঙ্কুর উচ্চতা অনুপাত কত তা হিসাব করে লিখি।

(iii) সমান দৈর্ঘ্যের ব্যাস এবং সমান উচ্চতাবিশিষ্ট নিরেট লম্ব বৃত্তাকার চোঙ, নিরেট লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু এবং নিরেট গোলকের আয়তনের অনুপাত কত তা লিখি।

(iv) একটি ঘনবস্তুর নীচের অংশ অর্ধগোলক আকারের এবং উপরের অংশ লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকারের। যদি দুটি অংশের তলের ক্ষেত্রফল সমান হয়, তাহলে ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য এবং শঙ্কুর উচ্চতার অনুপাত হিসাব করে লিখি।

(v) একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর, ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য একটি নিরেট গোলকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের সমান। গোলকের আয়তন শঙ্কুর আয়তনের দ্বিগুণ হলে, শঙ্কুর উচ্চতা এবং ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত কত তা লিখি।

20 ত্রিকোণমিতি : কোণ পরিমাপের ধারণা
TRIGONOMETRY : CONCEPT OF MEASUREMENT OF ANGLE

প্রতিদিন বিকালে আমরা বন্ধুরা পুকুরের ধারের বড়ো মাঠে নানান ধরনের খেলা খেলি। আমরা ঠিক করেছি আজ বিকালে মাঠে ঘুড়ি ওড়াব। তাই আজ বিকাল 4টের সময়ে আমরা সকলে কিছু ঘুড়ি ও লাটাই নিয়ে মাঠে জড়ো হয়েছি।

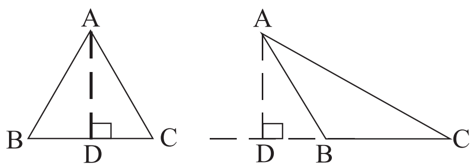
আমি ও শুভ ভালো ঘুড়ি ওড়াতে পারি না। তাই আমরা মাঠের ধারে বসে বন্ধুদের ঘুড়ি ওড়ানো দেখছি।
প্রথমে রীনা অন্য বন্ধুদের সাহায্য নিয়ে ঘুড়ি ওড়াল। দেখছি, রীনার লাল ঘুড়ি ভূমি থেকে অনেক উপরে উঠেছে।

1 কিন্তু রীনার ঘুড়ি ভূমি থেকে কতটা উপরে উঠল কীভাবে পাব?

এমন ধরনের উচ্চতা, উঁচু স্তম্ভের উচ্চতা [স্তম্ভের উপরে না উঠেও], খরস্রোতা নদী কতটা চওড়া ইত্যাদি দূরত্ব সহজে পরিমাপের পদ্ধতি গণিতের একটি বিশেষ শাখায় আলোচনা করা হয়। গণিতের এই বিশেষ শাখাটি হলো 'ত্রিকোণমিতি' [Trigonometry]।

এই ত্রিকোণমিতি শব্দটি এসেছে গ্রিক শব্দ 'Tri' [যার অর্থ তিন], 'gon' [যার অর্থ কোণ] এবং 'metron' [যার অর্থ পরিমাপ] থেকে।

'ত্রিকোণমিতি' হলো সমকোণী ত্রিভুজের কোণ এবং বাহুর মধ্যে সম্পর্কের আলোচনা। এছাড়াও সূক্ষ্মকোণী ও স্থূলকোণী ত্রিভুজের আলোচনাও ত্রিকোণমিতিতে করা হবে। কিন্তু সেক্ষেত্রে ত্রিভুজগুলিকে সমকোণী ত্রিভুজে ভেঙে নেওয়া হয়। যেমন :



পূর্বে পৃথিবী থেকে গ্রহ এবং নক্ষত্রের দূরত্ব নির্ণয়ের ক্ষেত্রে ত্রিকোণমিতি ব্যবহার করা হতো। কিন্তু এখন ইঞ্জিনিয়ারিং-এ ত্রিকোণমিতির উন্নত কৌশল ব্যবহার করা হয় এবং ভৌতবিজ্ঞানেও ত্রিকোণমিতির ধারণা ব্যবহার করা হয়।

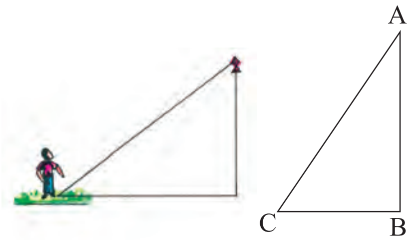
আমি রীনার ঘুড়ির অবস্থান খাতায় আঁকি ও কী পাই দেখি।

ধরি, পাশের ছবির,

C বিন্দু ভূমিতে রীনার অবস্থান

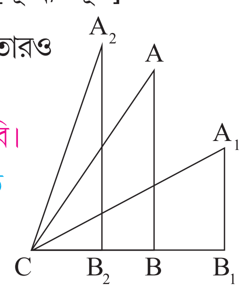
A বিন্দু রীনার ঘুড়ির অবস্থান

এবং AB ভূমি থেকে ঘুড়ির অবস্থানের লম্ব দূরত্ব বা উচ্চতা।



দেখছি, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ পেয়েছি যার $\angle ACB$ একটি $\boxed{}$ কোণ। [সূক্ষ্ম/স্থূল]

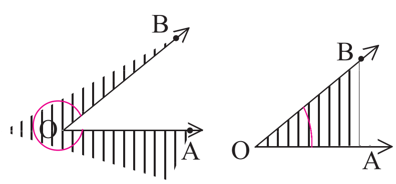
আবার, সমকোণী ত্রিভুজ ABC-এর $\angle ACB$-এর মানের পরিবর্তনের সঙ্গে AB উচ্চতারও পরিবর্তন হচ্ছে।



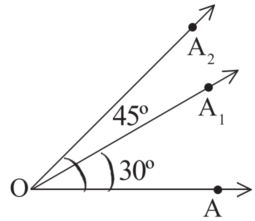
2 একটি কোণের মান 360^o-এর চেয়ে বেশি হতে পারে কি? ছবি এঁকে জানার চেষ্টা করি।

কোনো একটি বিন্দু থেকে যদি দুটি রশ্মি নির্গত হয় তবে রশ্মি দুটি যে সমতলে অবস্থিত সেই সমতলকে দুটি অঞ্চলে বিভক্ত করে। ওই রশ্মিদ্বয় দ্বারা উৎপন্ন অঞ্চলদ্বয়ের প্রত্যেকটিকে ওই বিন্দুতে উৎপন্ন কোণ বলা হয়।

পাশের চিত্রে, O বিন্দু থেকে OA এবং OB রশ্মিদুটি নির্গত হওয়ায় O বিন্দুতে $\angle AOB$ ও প্রবৃদ্ধকোণ $\angle BOA$ উৎপন্ন হয়েছে, এদের 'জ্যামিতিক কোণ' বলা হয়। জ্যামিতিক কোণের ক্ষেত্রে দিক ছাড়া কোণের পরিমাণই মূল বিচার্য বিষয়।



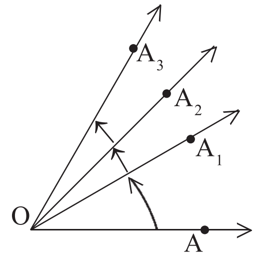
বুঝেছি, জ্যামিতিক কোণ 0° থেকে 360° পর্যন্ত যে-কোনো পরিমাপের হতে পারে।



রশ্মির ঘূর্ণনের দ্বারাও কি কোণের ধারণা করা যায় ?

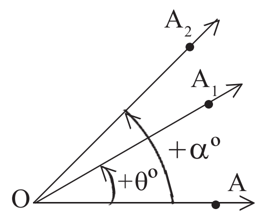
রশ্মিটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ও ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরলে কী কী পাব দেখি।

একটি রশ্মির প্রান্তবিন্দু, যে বিন্দু থেকে রশ্মিটি নির্গত হয় তাকে স্থির রেখে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে যদি একই তলে রশ্মিটি ঘোরাই, তবে সেই রশ্মি ঘূর্ণনের পর প্রথম অবস্থানের সঙ্গে তার পরবর্তী প্রতিটি অবস্থানে সেই প্রান্তবিন্দুতে এক একটি কোণ উৎপন্ন করে।



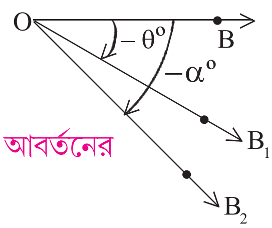
পাশের চিত্রে, OA রশ্মির প্রান্তবিন্দু O-কে স্থির রেখে একই তলে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরিয়ে রশ্মির OA_1, OA_2, OA_3 ইত্যাদি অবস্থান পেয়েছি যারা O বিন্দুতে যথাক্রমে $\angle AOA_1$, $\angle AOA_2$, $\angle AOA_3$ ইত্যাদি বিভিন্ন কোণ উৎপন্ন করেছে। এই কোণগুলিকে **ত্রিকোণমিতিক কোণ** বলা হয়।

ত্রিকোণমিতিক কোণের ক্ষেত্রে ঘূর্ণায়মান রশ্মির দিক ও তার ফলে সৃষ্ট কোণের পরিমাপ উভয়ই বিচার করা হয়। ঘূর্ণায়মান রশ্মিটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরলে উৎপন্ন কোণটিকে রীতি অনুসারে **ধনাত্মক কোণ** বলে এবং রশ্মিটি ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরলে **ঋণাত্মক কোণ** সৃষ্টি হয়।



পাশের চিত্রে, OA রশ্মিটি O বিন্দুকে কেন্দ্র করে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে $\angle AOA_1 = +\theta^\circ$ (Theta) এবং $\angle AOA_2 = +\alpha^\circ$ (Alpha) কোণ উৎপন্ন করেছে।

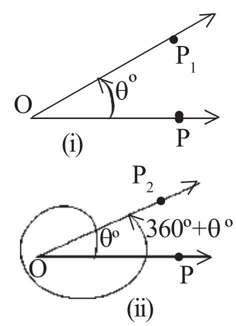
$\angle AOA_1 = \theta^\circ$ এবং $\angle AOA_2 = \alpha^\circ$ লেখা হয় [(+) চিহ্ন ব্যবহার করা হয় না]



কিন্তু পাশের চিত্রে, OB রশ্মিটি O বিন্দুকে কেন্দ্র করে ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরে $\angle BOB_1 = -\theta^\circ$ এবং $\angle BOB_2 = -\alpha^\circ$ কোণ উৎপন্ন করেছে। $(\theta>0, \alpha>0)$

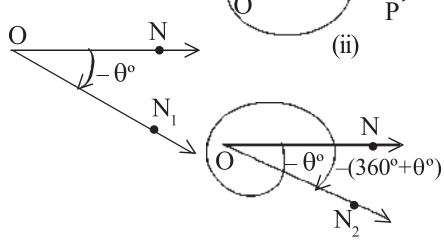
কিন্তু কোনো কোণের একটি রশ্মি যদি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে সম্পূর্ণ একবার আবর্তনের পর আবার প্রথম অবস্থানে আসে তখন কী পরিমাণ কোণ পাব দেখি।

কোনো কোণের একটি রশ্মির ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে যতবার পূর্ণ আবর্তন হবে কোণের পরিমাণ ততবার 360° করে বেড়ে যাবে। আবার রশ্মিটির ঘড়ির কাঁটার দিকে যতবার পূর্ণ আবর্তন হবে কোণের পরিমাণ ততবার 360° করে কমে যাবে।



বুঝেছি, পাশের চিত্রে OP_1 রশ্মিটি O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OP_1 অবস্থান থেকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে একবার সম্পূর্ণ আবতর্নের পর [অর্থাৎ আরও 360° ঘূর্ণনের পরে] আবার, OP_1 অবস্থানে এসেছে এবং সেক্ষেত্রে পেয়েছি, $\angle POP_2 = 360^\circ+\theta^\circ$ যখন, $\angle POP_1 = \theta^\circ$

[এখানে (ii) নং চিত্রে, OP_2 ও OP_1 রশ্মিদ্বয় সমাপতিত হয়েছে]



একইভাবে পাশের চিত্র থেকে দেখছি, ON_1 রশ্মিটি O বিন্দুকে কেন্দ্র করে ঘড়ির কাঁটার দিকে একবার সম্পূর্ণ আবর্তনের পর ON_2 (ON_1 রশ্মির উপর সমাপতিত হয়েছে) অবস্থানে এসেছে এবং এক্ষেত্রে $\angle NON_2 = -(360^\circ+\theta^\circ)$ যখন, $\angle NON_1 = -\theta^\circ$

3 যে-কোনো ঘূর্ণায়মান রশ্মি যদি তার প্রাথমিক অবস্থান থেকে প্রান্তবিন্দুকে কেন্দ্র করে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে দু-বার সম্পূর্ণ আবর্তনের পর আরও 30^{o} কোণ ঘূর্ণন সম্পন্ন করে, তবে সেক্ষেত্রে কোণের পরিমাণ কী হবে, হিসাব করি।

নির্ণেয় কোণের পরিমাপ $= 2\times360^{o}+30^{o} = \boxed{}$

যদি কোনো ঘূর্ণায়মান রশ্মি তার প্রাথমিক অবস্থান থেকে প্রান্তবিন্দুকে কেন্দ্র করে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে 3 বার সম্পূর্ণ আবর্তনের পর আরও 45^{o} ঘূর্ণন সম্পন্ন করে,সেক্ষেত্রে কোণের পরিমাণ কত হবে হিসাব করি। **[নিজে করি]**

> জ্যামিতিক কোণের সর্বনিম্ন ও সর্বাধিক পরিমাপ হয় যথাক্রম 0^{o} এবং 360^{o}; কিন্তু ত্রিকোণমিতিক কোণের পরিমাপ 0^{o} থেকে 360^{o} ছাড়াও 0^{o}-এর কম যে-কোনো পরিমাপ ও 360^{o}-এর বেশি যে-কোনো পরিমাপ হতে পারে।

4 কিন্তু ত্রিকোণমিতিক কোণ কী কী পদ্ধতিতে পরিমাপ করা হয় দেখি।

ত্রিকোণমিতিক কোণ পরিমাপের সাধারণভাবে দুটি পদ্ধতি হলো (i) **ষষ্টিক পদ্ধতি (Sexagesimal System),** (ii) **বৃত্তীয় পদ্ধতি (Circular System)**

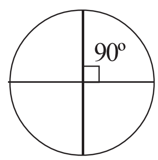
ষষ্টিক পদ্ধতি : দুটি পরস্পরছেদী সরলরেখা একে অপরের উপর লম্বভাবে দাঁড়ালে যে কোণ তৈরি হয় তাকে সমকোণ বলা হয়।

এই পদ্ধতিতে এক সমকোণকে 90টি সমান ভাগে বিভক্ত করা হয় এবং তার প্রতিটি ভাগকে এক ডিগ্রি (1^{o}) বলা হয় এবং এই কারণেই এক সমকোণ $= 90^{o}$; এক ডিগ্রিকে পুনরায় 60 টি সমান ষষ্টিক মিনিটে (Minutes) ও প্রতি মিনিটকে সমান 60টি ষষ্টিক সেকেন্ডে (Seconds) বিভক্ত করা হয়।

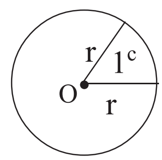
$\therefore$ পেলাম, 1 সমকোণ $= 90^{o}$ (ডিগ্রি)

1^{o} (ডিগ্রি) $= 60'$ (মিনিট)

$1'$ (মিনিট) $= 60''$ (সেকেন্ড)



বৃত্তীয় পদ্ধতি : একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের সমান দৈর্ঘ্যের বৃত্তচাপ ওই বৃত্তের কেন্দ্রে যে সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে তার পরিমাপকে এক রেডিয়ান [Radian] বলা হয় এবং লেখা হয় 1^{c}; যে-কোনো একটি বৃত্তের পরিধি এবং ব্যাসের দৈর্ঘ্যের অনুপাত ধ্রুবক। এই সম্পর্কটির উপর ভিত্তি করেই এই পদ্ধতির একক নির্ধারিত হয়েছে।



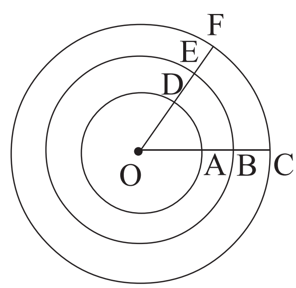
কিন্তু যে-কোনো ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের বৃত্তের সাহায্যে রেডিয়ানের সংজ্ঞা প্রকাশ করলে সর্বদা কি এটি একটি ধ্রুবক কোণ হবে? বিভিন্ন ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের বৃত্ত এঁকে হাতেকলমে যাচাই করি।

হাতেকলমে

(1) একটি আর্টপেপারে তিনটি এককেন্দ্রীয় বৃত্ত আঁকলাম।

(2) সবচেয়ে ছোটো বৃত্তটির বৃত্ত থেকে বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের সমান দৈর্ঘ্যের একটি বৃত্তচাপ AD বৃত্ত বরাবর সরু তার বসিয়ে কেটে নিলাম এবং O, A ও O, D যোগ করে $\angle AOD$ পেলাম যা ওই ছোটো বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের সমান দৈর্ঘ্যের চাপের দ্বারা উৎপন্ন সম্মুখ কেন্দ্রস্থ কোণ।

(3) OA ও OD বর্ধিত করলাম যা অন্য দুটি বৃত্তকে যথাক্রমে B, C ও E, F বিন্দুতে ছেদ করল।



মেপে দেখছি, BE চাপটির দৈর্ঘ্য অর্থাৎ BE চাপ বরাবর রাখা সুতোর দৈর্ঘ্য=OB=সংশ্লিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য

আবার CF চাপটির দৈর্ঘ্য = $\boxed{}$ [নিজে হাতেকলমে যাচাই করে লিখি]

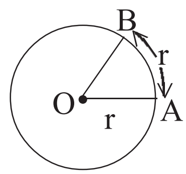
= সংশ্লিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য

$\therefore$ পেলাম, $\angle$BOE এবং $\angle$COF-ও সংশ্লিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের সমান দৈর্ঘ্যের বৃত্তচাপের দ্বারা উৎপন্ন সম্মুখ কেন্দ্রস্থ কোণ।

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, যে-কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের সমান দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট চাপ সবসময় কেন্দ্রে একটি নির্দিষ্ট পরিমাণের কোণ উৎপন্ন করে। অর্থাৎ, রেডিয়ান একটি ধ্রুবক কোণ।

আমি যে-কোনো বৃত্ত এঁকে হাতেকলমে যাচাই করে দেখছি রেডিয়ান একটি ধ্রুবক কোণ। **[নিজে করি]**

5 **আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে রেডিয়ান একটি ধ্রুবক কোণ।**



প্রমাণ : ধরি কোনো বৃত্তের কেন্দ্র O এবং তার ব্যাসার্ধ OA

ধরি, OA = r একক

OA ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের সমান দৈর্ঘ্যের একটি চাপ AB বৃত্তের কেন্দ্র O-তে $\angle$AOB উৎপন্ন করেছে। সুতরাং সংজ্ঞা অনুসারে, $\angle$AOB = 1 রেডিয়ান।

আমরা জানি যে, বৃত্ত দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণ চার সমকোণের সমান।

$$\because \frac{\text{বৃত্তচাপ AB-এর দৈর্ঘ্য}}{\text{বৃত্তের পরিধি}} = \frac{r}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi}$$

আবার, $\dfrac{\angle AOB}{4 \text{ সমকোণ}} = \dfrac{1 \text{ রেডিয়ান}}{4 \text{ সমকোণ}}$

জ্যামিতি থেকে পাওয়া যায়, যে-কোনো বৃত্তের বিভিন্ন দৈর্ঘ্যের চাপের দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণগুলির অনুপাত সেইসব চাপের দৈর্ঘ্যের অনুপাতের সমান।

সুতরাং, $\dfrac{\angle AOB}{4 \text{ সমকোণ}} = \dfrac{\text{বৃত্তচাপ AB-এর দৈর্ঘ্য}}{\text{বৃত্তের পরিধি}}$

বা, $\dfrac{1 \text{ রেডিয়ান}}{4 \text{ সমকোণ}} = \dfrac{1}{2\pi}$

বা, 1 রেডিয়ান $= \dfrac{4 \text{ সমকোণ}}{2\pi} = \dfrac{2 \text{ সমকোণ}}{\pi}$ এবং এই মানটি একটি ধ্রুবক সংখ্যা

কারণ 2 সমকোণ ও π উভয়েই ধ্রুবক।

$\therefore$ পেলাম, 1 রেডিয়ান $= \dfrac{2 \text{ সমকোণ}}{\pi}$

বা, $1^c = \dfrac{2 \text{ সমকোণ}}{\pi}$

অর্থাৎ, π রেডিয়ান = 2 সমকোণ বা 180°

বা, π^c = 2 সমকোণ বা, 180°

6 আমি 1 রেডিয়ানের মান ষষ্ঠিক পদ্ধতিতে কী হবে হিসাব করে লিখি।

π রেডিয়ান = 2 সমকোণ = 180^o

$\therefore$ 1 রেডিয়ান $= \dfrac{180^o}{\pi} = \dfrac{180^o}{\frac{22}{7}}$ [গণনার জন্য π-এর আসন্ন মান $\dfrac{22}{7}$ নেওয়া হয়]

$= \dfrac{180^o \times 7}{22} = 57^o16'22''$ (প্রায়) $\therefore$ 1 রেডিয়ান = $57^o16'22''$ (প্রায়)

$\dfrac{630^o}{11} \rightarrow$

```
     57
11 | 630
   – 55
     80
    –77
      3
```

$3^o = 3 \times 60' = 180'$

```
     16
11 | 180
   – 11
     70
    –66
      4
```

$4' = 4 \times 60'' = 240''$

```
     21.8
11 | 240
   – 22
     20
    –11
     90
   – 88
      2
```

$\dfrac{630^o}{11} = 57^o16'22''$ (প্রায়) $21.8'' \approx 22''$

7 আমি 1^o-র মান বৃত্তীয় পদ্ধতিতে কী হবে হিসাব করে দেখি।

$180^o = \pi^c$

বা, $1^o = \left(\dfrac{\pi}{180}\right)^c = \left(\dfrac{22}{7 \times 180}\right)^c$ $\therefore$ দেখছি, $1^o < 1^c$ $\left[\because \dfrac{22}{7 \times 180} < 1\right]$

বুঝেছি, পদ্ধতি দুটির এককাবলির মধ্যে সম্পর্ক পেলাম।

[ফাঁকা ঘরে নিজে লিখি]

ষষ্টিক পদ্ধতি	বৃত্তীয় পদ্ধতি
360^o	2π রেডিয়ান = $2\pi^c$
180^o	$\boxed{} = \pi^c$
90^o	$\dfrac{\pi}{2}$ রেডিয়ান = $\boxed{}$
60^o	$\boxed{} = \dfrac{\pi^c}{3}$
$\boxed{}$	$\dfrac{\pi}{4}$ রেডিয়ান = $\dfrac{\pi^c}{4}$
30^o	$\dfrac{\pi}{6}$ রেডিয়ান = $\boxed{}$

মনে রাখব : (1) ষষ্টিক পদ্ধতির কোণ বোঝানোর জন্য কোণের পরিমাণের উপরে '^{o}' চিহ্নটি ব্যবহার করা হয়, যেমন 60 ডিগ্রি = 60^o; আবার বৃত্তীয় পদ্ধতিতে কোণ বোঝানোর জন্য কোণের পরিমাণের উপরে '^{c}' -এই চিহ্নটি ব্যবহার করা হয়। যেমন, 1 রেডিয়ান = 1^c

(2) বৃত্তীয় পদ্ধতিতে কোণের মান প্রকাশ করার সময় আমরা π ও তার অংশ দিয়ে তা প্রকাশ করি। π দিয়ে প্রকাশ করলে সাধারণত আমরা '^{c}' এই চিহ্নটি সর্বদা ব্যবহার করি না। যেমন, $60^o = \dfrac{\pi}{3}$ লেখা হয়।

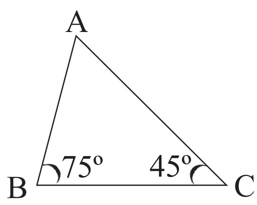
প্রয়োগ : 1. একটি ত্রিভুজের দুটি কোণের ষষ্টিক মান যথাক্রমে 75^o ও 45^o; তৃতীয় কোণের বৃত্তীয় মান নির্ণয় করি।

ধরি, ΔABC -এর $\angle ABC = 75^o$ এবং $\angle ACB = 45^o$

$\therefore \angle BAC = 180^o - (75^o + 45^o) = \boxed{}$

আবার, $180^o = \pi$ $\therefore 60^o = \dfrac{\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় তৃতীয় কোণের বৃত্তীয় মান $\dfrac{\pi}{3}$



প্রয়োগ : 2. একটি ত্রিভুজের দুটি কোণের ষষ্টিক মান যথাক্রমে 65° ও 85° হলে, তৃতীয় কোণের বৃত্তীয় মান নির্ণয় করি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 3. একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি কোনো একটি অবস্থান থেকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে দু-বার পূর্ণ আবর্তনের পরেও আরও 30° কোণ আবর্তন করে। ত্রিকোণমিতিক পরিমাপে কোণটির ষষ্টিক ও বৃত্তীয় মান কত হবে হিসাব করে লিখি।

যেহেতু রশ্মিটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরছে,

$\therefore$ কোণটি $\boxed{\quad\quad}$ [ধনাত্মক/ঋণাত্মক] হবে।

ঘূর্ণায়মান রশ্মির একবার পূর্ণ আবর্তনের জন্য $\boxed{\quad\quad}$ ডিগ্রি কোণ উৎপন্ন হয়।

$\therefore$ 2 বার পূর্ণ আবর্তনের জন্য কোণ উৎপন্ন করবে $2\times360^\circ = 720^\circ$

যেহেতু 2 বার পূর্ণ আবর্তনের পরেও 30° কোণ আবর্তন করেছে,

সুতরাং, ষষ্টিক পদ্ধতিতে কোণের মান $720^\circ+30^\circ = 750^\circ$

আবার, $180^\circ = \pi$ $\quad \therefore 750^\circ = \left(\frac{750}{180}\pi\right) = 4\frac{1}{6}\pi$

প্রয়োগ : 4. আমি $3750''$ কে ডিগ্রি, মিনিট ও সেকেন্ডে প্রকাশ করি।

$60'' = 1'$

$$\therefore 60 \overline{)\,3750\,}\,62$$
$$\begin{array}{r} 3750 \\ -360 \\ \hline 150 \\ -120 \\ \hline 30 \end{array}$$

$60' = 1^\circ$

$$\therefore 60 \overline{)\,62\,}\,1$$
$$\begin{array}{r} 62 \\ -60 \\ \hline 2 \end{array}$$

$\therefore 3750'' = 1^\circ 2' 30''$

প্রয়োগ : 5. আমি 85.12° কে ডিগ্রি, মিনিট ও সেকেন্ডে প্রকাশ করি।

$$\begin{aligned} 85.12^\circ &= 85^\circ+(0.12)^\circ \\ &= 85^\circ+(0.12\times60') \quad [\because 1^\circ = 60'] \\ &= 85^\circ + 7.2' \\ &= 85^\circ+7'+0.2' = 85^\circ+7'+(0.2\times60'') \quad [\because 1' = 60''] \\ &= 85^\circ+7'+12'' = 85^\circ7'12'' \end{aligned}$$

প্রয়োগ : 6. $40^\circ16'24''$ -কে রেডিয়ানে প্রকাশ করি।

$$\begin{aligned} 40^\circ16'24'' &= 40^\circ+16'+24'' \\ &= 40^\circ+16'+\left(\frac{24}{60}\right)' \quad [\because 60'' = 1'] \\ &= 40^\circ+16'+\frac{2'}{5} = 40^\circ+\left(16+\frac{2}{5}\right)' \\ &= 40^\circ+\frac{82'}{5} = 40^\circ+\left(\frac{82}{5\times60}\right)^\circ \quad [\because 60' = 1^\circ] \\ &= 40^\circ+\left(\frac{41}{150}\right)^\circ = \boxed{\quad\quad}^\circ \end{aligned}$$

[নিজে লিখি]

যেহেতু, $180^\circ = \pi$

$$\therefore \frac{6041}{150}^\circ = \frac{\pi}{180}\times\frac{6041}{150} = \frac{6041}{27000}\pi$$

প্রয়োগ : 7. $22^{o}30'$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ করি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 8. একটি সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণ দুটির অন্তর $\frac{2\pi}{5}$ রেডিয়ান। কোণ দুটির মান রেডিয়ান ও ডিগ্রিতে প্রকাশ করি।

মনে করি, সূক্ষ্মকোণ দুটির মান x^{c} ও y^{c} এবং $x>y$

শর্তানুসারে, $x+y=\frac{\pi}{2}$ এবং $x-y=\frac{2\pi}{5}$

$$x+y=\frac{\pi}{2}$$
$$x-y=\frac{2\pi}{5}$$
$$2x=\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{5}=\frac{9\pi}{10} \qquad \therefore x=\frac{9\pi}{20}$$
$$\therefore y=\frac{\pi}{2}-\frac{9\pi}{20}=\frac{\pi}{20}$$

আবার, $\pi=180^{o}$

$$\therefore x=\frac{9\pi}{20}=\frac{9\times180^{o}}{20}=81^{o}$$

এবং $y=\frac{\pi}{20}=\frac{180^{o}}{20}=9^{o}$ $\qquad \therefore$ কোণ দুটির মান $\frac{9\pi}{20}$ বা 81^{o} এবং $\frac{\pi}{20}$ বা 9^{o}

প্রয়োগ : 9. একটি ত্রিভুজের কোণগুলির অনুপাত $2:5:3$; ত্রিভুজটির ক্ষুদ্রতম কোণটির বৃত্তীয় মান হিসাব করে লিখি।

মনে করি, কোণগুলির মান $2x$, $5x$ ও $3x$ রেডিয়ান। যেখানে x সাধারণ গুণিতক এবং $x>0$

$\therefore 2x+5x+3x=\pi$

বা, $10x=\pi$

$\therefore x=\frac{\pi}{10}$

$\therefore$ ক্ষুদ্রতম কোণটির বৃত্তীয়মান হবে $2x=\frac{2\pi}{10}=\frac{\pi}{5}$

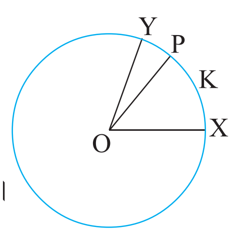
প্রয়োগ : 10. ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন করেছি। A শীর্ষবিন্দু থেকে BC বাহুর মধ্যবিন্দু D-এর সংযোজক সরলরেখাংশ AD; $\angle BAD$-এর বৃত্তীয় মান হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

> **উত্তর সংকেত :** সমবাহু ত্রিভুজে ABC-এর $\angle BAC=60^{o}$ এবং সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যমা সংশ্লিষ্ট কোণের সমদ্বিখণ্ডক হয়। $\therefore \angle BAD=30^{o}$

আমার বন্ধু শুভ তার খাতায় একটি বৃত্ত এঁকেছে এবং সেই বৃত্তে যে-কোনো একটি দৈর্ঘ্যের বৃত্তচাপ XKY এঁকেছে।

8 ওই XKY দৈর্ঘ্যের বৃত্তচাপ বৃত্তের কেন্দ্রে যে কেন্দ্রস্থ কোণ উৎপন্ন করবে তার বৃত্তীয় মান কীভাবে পাব দেখি।

আমি r একক দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট যে-কোনো একটি O কেন্দ্রীয় বৃত্ত আঁকি এবং ওই বৃত্তে s একক দৈর্ঘ্যের বৃত্তচাপ কেন্দ্রে কত রেডিয়ান কোণ উৎপন্ন করে হিসাব করি।



পাশের চিত্রে, O কেন্দ্রীয় বৃত্তের $OX=r$ একক

ধরি, চাপ XKY-এর দৈর্ঘ্য s একক

s একক দৈর্ঘ্যের বৃত্তচাপ XKY কেন্দ্রে $\angle XOY$ উৎপন্ন করেছে।

ধরি, r একক দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের সমান দৈর্ঘ্যের চাপ XKP কেন্দ্র $\angle XOP$ উৎপন্ন করেছে।

$\therefore \angle XOP=1$ রেডিয়ান [সংজ্ঞা অনুসারে]

কোনো বৃত্তের বিভিন্ন চাপের দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণগুলির অনুপাত সেইসব চাপের দৈর্ঘ্যের অনুপাতের সমান।

সুতরাং, $\dfrac{\angle XOY}{\angle XOP} = \dfrac{\text{চাপ XKY-এর দৈর্ঘ্য}}{\text{চাপ XKP -এর দৈর্ঘ্য}} = \dfrac{s}{r}$

বা, $\dfrac{\angle XOY}{1 \text{ রেডিয়ান}} = \dfrac{s}{r}$

বা, $\theta = \dfrac{s}{r}$ [ধরি, $\angle XOY = \theta$ রেডিয়ান]

$\therefore s = r\theta$

∴ **পেলাম, r একক দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তে s একক দৈর্ঘ্যের বৃত্তচাপ কেন্দ্রে যে কেন্দ্রস্থ কোণ উৎপন্ন করে তার বৃত্তীয় মান θ হলে, s = rθ হবে।**

প্রয়োগ : 11. যদি শুভ-র আঁকা বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 7 সেমি. হয়, তবে ওই বৃত্তে 5.5 সেমি. দৈর্ঘ্যের বৃত্তচাপ দ্বারা কেন্দ্রস্থ কোণটির বৃত্তীয় মান কত হবে হিসাব করে লিখি।

এখানে, r = 7 সেমি. এবং s = 5.5 সেমি.

ধরি, 5.5 সেমি. বৃত্তচাপ দ্বারা ধৃত কেন্দ্রস্থ কোণের বৃত্তীয় মান = θ

$s = r\theta$

$\therefore\ 5.5 = 7\times\theta$

বা, $\theta = \dfrac{5.5}{7} = \dfrac{55}{70} = \dfrac{11}{14}$

∴ নির্ণেয় কোণের বৃত্তীয় মান $\dfrac{11}{14}$ রেডিয়ান বা $\dfrac{11^c}{14}$ বা $\dfrac{\pi^c}{4}$ $\left(\because \dfrac{22}{7} \approx \pi\right)$

প্রয়োগ : 12. একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 6 সেমি. হলে, ওই বৃত্তে 15 সেমি. দৈর্ঘ্যের বৃত্তচাপ কেন্দ্রে যে কেন্দ্রস্থ কোণ তৈরি করে, তার বৃত্তীয় মান কত হবে তা হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 13. একটি বৃত্তের অসমান দৈর্ঘ্যের দুটি চাপ কেন্দ্রে যে দুটি কোণ ধারণ করে আছে তাদের অনুপাত 5:3 এবং দ্বিতীয় কোণটির ষষ্টিক মান 45°; প্রথম কোণটির ষষ্টিক মান এবং বৃত্তীয় মান নির্ণয় করি।

মনে করি, প্রথম কোণটির ষষ্টিক মান θ^o

শর্তানুসারে, $\dfrac{\theta^o}{45^o} = \dfrac{5}{3}$ বা, $\theta^o = \dfrac{5\times45^o}{3} = 75^o$

যেহেতু, $180^o = \pi^c$ সুতরাং, $75^o = \dfrac{75}{180}\times\pi^c = \dfrac{5}{12}\pi^c$

∴ প্রথম কোণের ষষ্টিক মান 75° এবং বৃত্তীয় মান $= \dfrac{5}{12}\pi$

প্রয়োগ : 14. একটি ত্রিভুজের দুটি কোণের পরিমাপ 35°57′4″ এবং 39°2′56″ হলে, তৃতীয় কোণটির বৃত্তীয় মান নির্ণয় করি।

ত্রিভুজের দুটি কোণের সমষ্টি $= 35^o57'4'' + 39^o2'56''$
$= 74^o59'60''$
$= 74^o60'$
$= 75^o$

$\therefore$ তৃতীয় কোণের পরিমাপ $= 180^o - 75^o = 105^o = 105\times\dfrac{\pi^c}{180} = \dfrac{7}{12}\pi^c$

সুতরাং, তৃতীয় কোণটির বৃত্তীয় মান $\dfrac{7}{12}\pi$

প্রয়োগ : 15. $65^\circ 35' 25''$ কোণটির পূরক কোণের মান ষষ্টিক পদ্ধতিতে লিখি।

$$90^\circ = 89^\circ 60' = 89^\circ 59' 60''$$

$$\begin{array}{r} 89^\circ 59' 60'' \\ -65^\circ 35' 25'' \\ \hline 24^\circ 24' 35'' \end{array}$$

$\therefore$ $65^\circ 35' 25''$ কোণটির পূরক কোণের মান $24^\circ 24' 35''$

প্রয়োগ : 16. $27^\circ 27' 27''$ কোণটির পূরক কোণের মান ষষ্টিক পদ্ধতিতে লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 17. $75^\circ 36' 24''$ কোণটির সম্পূরক কোণের মান ষষ্টিক পদ্ধতিতে লিখি।

$$180^\circ = 179^\circ 60' = 179^\circ 59' 60''$$

$$\begin{array}{r} 179^\circ 59' 60'' \\ -\ 75^\circ 36' 24'' \\ \hline 104^\circ 23' 36'' \end{array}$$

$\therefore$ $75^\circ 36' 24''$ কোণটির সম্পূরক কোণের মান $104^\circ 23' 36''$

প্রয়োগ : 18. $85^\circ 32' 36''$ কোণটির সম্পূরক কোণের মান ষষ্টিক পদ্ধতিতে লিখি। [নিজে করি]

কষে দেখি 20

1. নিম্নলিখিতগুলিকে ডিগ্রি, মিনিট ও সেকেন্ডে প্রকাশ করি :
   (i) $832'$ (ii) $6312''$ (iii) $375''$ (iv) $27\frac{1^\circ}{12}$ (v) 72.04°
2. নিম্নলিখিতগুলির বৃত্তীয় মান নির্ণয় করি :
   (i) 60° (ii) 135° (iii) -150° (iv) 72° (v) $22^\circ 30'$ (vi) $-62^\circ 30'$ (vii) $52^\circ 52' 30''$ (viii) $40^\circ 16' 24''$
3. ΔABC-এর AC = BC এবং BC বাহুকে D পর্যন্ত বর্ধিত করলাম। যদি $\angle ACD = 144^\circ$ হয়, তবে ABC ত্রিভুজের প্রতিটি কোণের বৃত্তীয় মান নির্ণয় করি।
4. একটি সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণ দুটির অন্তর $\frac{2\pi}{5}$ হলে, ষষ্টিক পদ্ধতিতে ওই কোণদ্বয়ের মান লিখি।
5. একটি ত্রিভুজের একটি কোণের পরিমাপ 65° এবং দ্বিতীয়টির পরিমাপ $\frac{\pi}{12}$; তৃতীয় কোণটির ষষ্টিক ও বৃত্তীয় মান হিসাব করে লিখি।
6. দুটি কোণের সমষ্টি 135° এবং তাদের অন্তর $\frac{\pi}{12}$ হলে, কোণ দুটির ষষ্টিক ও বৃত্তীয় মান হিসাব করে লিখি।
7. একটি ত্রিভুজের কোণ তিনটির অনুপাত 2:3:4 হলে, ত্রিভুজটির বৃহত্তম কোণটির বৃত্তীয় মান হিসাব করে লিখি।
8. একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 28 সেমি.। এই বৃত্তে 5.5 সেমি. দৈর্ঘ্যের বৃত্তচাপ দ্বারা ধৃত কেন্দ্রীয় কোণটির বৃত্তীয় মান হিসাব করে লিখি।
9. একটি বৃত্তের অসমান দৈর্ঘ্যের দুটি চাপ কেন্দ্রে যে কোণ ধারণ করে আছে তার অনুপাত 5:2 এবং দ্বিতীয় কোণটির ষষ্টিক মান 30° হলে, প্রথম কোণটির ষষ্টিক মান ও বৃত্তীয় মান হিসাব করে লিখি।

10. একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি $-5\frac{1}{12}\pi$ কোণ উৎপন্ন করেছে। রশ্মিটি কোনদিকে কতবার পূর্ণ আবর্তন করেছে এবং তারপরে আরও কত ডিগ্রি কোণ উৎপন্ন করেছে তা হিসাব করে লিখি।
11. ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন করেছি যার সমান বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুত কোণ $\angle ABC = 45^\circ$; $\angle ABC$-এর সমদ্বিখণ্ডক AC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। $\angle ABD$, $\angle BAD$, $\angle CBD$ এবং $\angle BCD$-এর বৃত্তীয় মান নির্ণয় করি।
12. ABC সমবাহু ত্রিভুজের BC ভূমিকে E বিন্দু পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করলাম যেন CE = BC হয়। A, E যুক্ত করে ACE ত্রিভুজের কোণগুলির বৃত্তীয় মান নির্ণয় করি।
13. কোনো চতুর্ভুজের তিনটি কোণের পরিমাপ যথাক্রমে $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$ ও 90° হলে, চতুর্থ কোণটির ষষ্টিক ও বৃত্তীয় মান হিসাব করে লিখি।
14. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q) :

(i) একটি ঘড়ির মিনিটের কাঁটার প্রান্তবিন্দু 1 ঘণ্টায় আবর্তন করে (a) $\frac{\pi}{4}$ রেডিয়ান (b) $\frac{\pi}{2}$ রেডিয়ান (c) π রেডিয়ান (d) 2π রেডিয়ান

(ii) $\frac{\pi}{6}$ রেডিয়ান সমান (a) 60° (b) 45° (c) 90° (d) 30°

(iii) একটি সুষম ষড়ভুজের প্রতিটি অন্তঃকোণের বৃত্তীয় মান (a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{2\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{6}$ (d) $\frac{\pi}{4}$

(iv) $s = r\theta$ সম্পর্কে θ-এর পরিমাপ করা হয় (a) ষষ্টিক পদ্ধতিতে (b) বৃত্তীয় পদ্ধতিতে (c) ওই দুই পদ্ধতিতে (d) ওই দুই পদ্ধতির কোনোটিতেই নয়

(v) ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের $\angle A=120^\circ$ হলে, $\angle C$-এর বৃত্তীয় মান (a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{6}$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{2\pi}{3}$

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) একটি রশ্মির প্রান্তবিন্দুকে কেন্দ্র করে রশ্মিটির ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘোরার জন্য উৎপন্ন কোণটি ধনাত্মক।

(ii) একটি রশ্মির প্রান্তবিন্দুকে কেন্দ্র করে রশ্মিটির ঘড়ির কাঁটার দিকে দু-বার পূর্ণ আবর্তনের জন্য 720° কোণ উৎপন্ন হয়।

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) π রেডিয়ান একটি ________ কোণ।

(ii) ষষ্টিক পদ্ধতিতে 1 রেডিয়ান সমান ________ (প্রায়)।

(iii) $\frac{3\pi}{8}$ পরিমাপের কোণটির সম্পূরক কোণের বৃত্তীয় মান ________।

15. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(i) একটি কোণের ডিগ্রিতে মান D এবং ওই কোণের রেডিয়ানে মান R হলে, $\frac{R}{D}$-এর মান নির্ণয় করি।

(ii) $63^\circ 35' 15''$ পরিমাপের কোণটির পূরক কোণের মান লিখি।

(iii) একটি ত্রিভুজের দুটি কোণের পরিমাপ $65^\circ 56' 55''$ এবং $64^\circ 3' 5''$ হলে, তৃতীয় কোণটির বৃত্তীয় মান নির্ণয় করি।

(iv) একটি বৃত্তে 220 সেমি. দৈর্ঘ্যের বৃত্তচাপ বৃত্তের কেন্দ্রে 63° পরিমাপের কোণ উৎপন্ন করলে, বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

(v) একটি ঘড়ির ঘণ্টার কাঁটার প্রান্তবিন্দু 1 ঘণ্টা আবর্তনে যে পরিমাণ কোণ উৎপন্ন করে তার বৃত্তীয় মান লিখি।

21 সম্পাদ্য: মধ্যসমানুপাতী নির্ণয়

DETERMINATION OF MEAN PROPORTIONAL

আমাদের বাড়ির একতলায় একটি গানের স্কুল আছে। পাড়ার অনেক ছেলেমেয়েরা গান শিখতে আসে। আমিও সেখানে গান শিখি। গানের স্কুলের ঘরের মেঝেতে যে মাদুরটা বিছানো হয় সেটি খারাপ হয়ে গেছে। আমার বন্ধু সুমিত 4 মিটার লম্বা ও 3 মিটার চওড়া একটি আয়তক্ষেত্রাকার মাদুর অর্ডার দিয়ে তৈরি করে এনেছে। গানের স্কুলের ঘরটি বর্গক্ষেত্রাকার। তাই এই মাদুরটি ঠিক মতো বিছানো যাচ্ছে না।

কিন্তু এই আয়তক্ষেত্রাকার মাদুরটি যদি বর্গক্ষেত্রাকার হতো তবে কি বর্গক্ষেত্রাকার ঘরের মেঝেতে বিছানো যেত? এই আয়তক্ষেত্রাকার মাদুরের সমান ক্ষেত্রফলের বর্গক্ষেত্রাকার মাদুরের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

4 মিটার লম্বা ও 3 মিটার চওড়া আয়তক্ষেত্রাকার মাদুরের সমান ক্ষেত্রফলের বর্গক্ষেত্রাকার মাদুরের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য = $\sqrt{4 \times 3}$ মিটার।

4 ও 3-এর মধ্যসমানুপাতী নির্ণয় করতে হবে। অর্থাৎ, 12-এর বর্গমূল নির্ণয় করতে হবে।

কিন্তু জ্যামিতিক উপায়ে কি 4 ও 3-এর মধ্যসমানুপাতী বা $\sqrt{12}$-এর মান নির্ণয় সম্ভব? অঙ্কনের চেষ্টা করি।

সম্পাদ্য :1. জ্যামিতিক উপায়ে a ও b-এর মধ্যসমানুপাতী বা $\sqrt{ab}$-এর মান নির্ণয়।

প্রথম পদ্ধতি a একক ও b একক দৈর্ঘ্যের দুটি সরলরেখাংশ অঙ্কন করলাম। এই দুটি সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্যের মধ্যসমানুপাতী অঙ্কন করি।

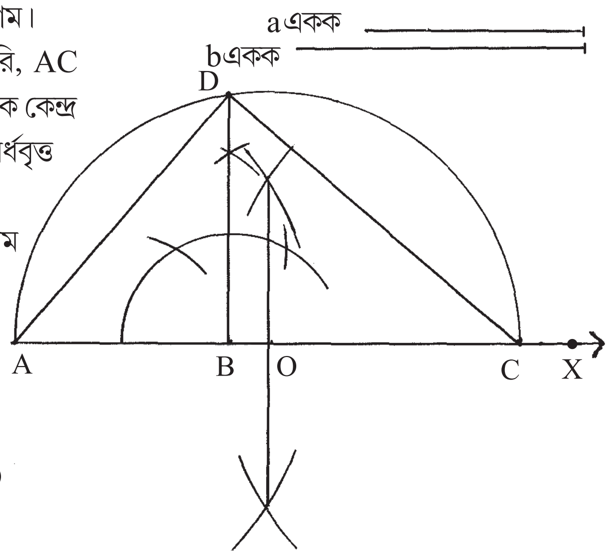
অঙ্কন প্রণালী :

(i)যে-কোনো রশ্মি AX অঙ্কন করলাম।

(ii)AX থেকে a একক দৈর্ঘ্যের সরলরেখাংশের সমান করে AB অংশ এবং BX থেকে b একক দৈর্ঘ্যের সরলরেখাংশের সমান করে BC অংশ কেটে নিলাম।

(iii) AC সরলরেখাংশকে সমদ্বিখণ্ডিত করি। ধরি, AC সরলরেখাংশ O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়। O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OA বা OC দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কন করি।

(iv) B বিন্দুতে BC-এর উপর লম্ব অঙ্কন করলাম যা অর্ধবৃত্তকে D বিন্দুতে ছেদ করল।



তাহলে BD সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্য হলো AB ও BC সরলরেখাংশদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের মধ্যসমানুপাতী।

অর্থাৎ BD সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্যের মান

= (a একক ও b একক-এর মধ্যসমানুপাতীর মান)

= $\sqrt{ab}$ একক

প্রমাণ : A, D ও C, D যুক্ত করলাম। $\angle ADC$ একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।

$\therefore$ $\angle ADC = 1$ সমকোণ।

ADC সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌণিক বিন্দু D থেকে DB, AC-এর উপর লম্ব।

$\therefore$ ΔABD ও ΔCBD সদৃশকোণী। সুতরাং সদৃশ।

$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{BD}{BC}$ বা, $BD^2 = AB.BC = a.b$

$\therefore BD = \sqrt{ab}$ একক

আমি অন্যভাবে দুটি সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্যের মধ্যসমানুপাতী অঙ্কন করি।

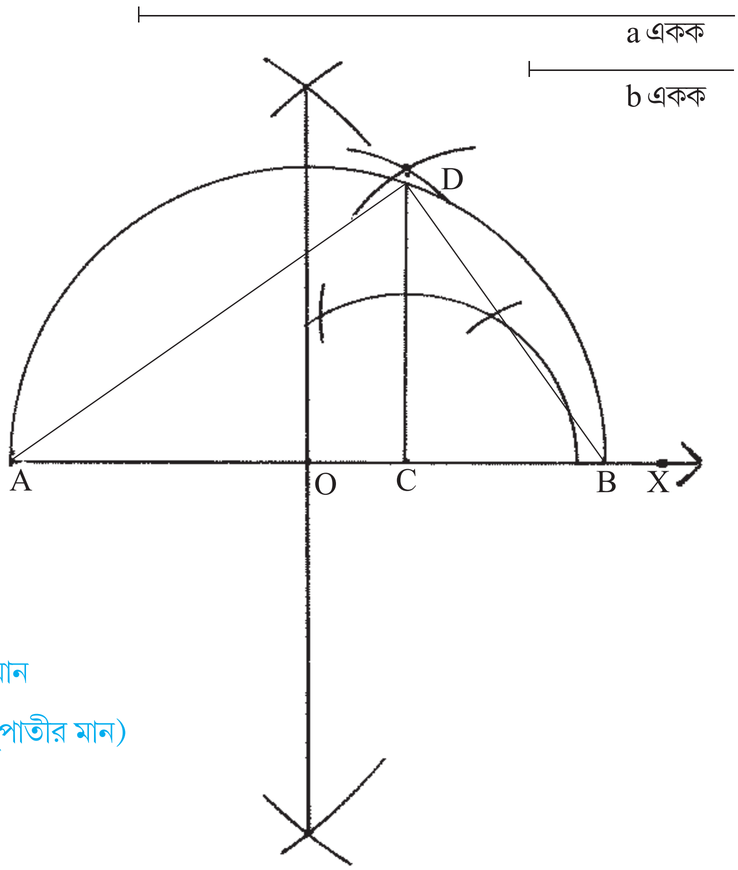
দ্বিতীয় পদ্ধতি a একক ও b একক দৈর্ঘ্যের দুটি সরলরেখাংশ অঙ্কন করলাম। এই দুটি সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্যের মধ্যসমানুপাতী অঙ্কন করি।

অঙ্কন প্রণালী :

(i) a একক দৈর্ঘ্যের সমান করে AX রশ্মি থেকে AB একটি সরলরেখাংশ কেটে নিলাম এবং BA থেকে b একক দৈর্ঘ্যের সমান করে BC অংশ কেটে নিলাম।

(ii) AB সরলরেখাংশকে সমদ্বিখণ্ডিত করি। ধরি, AB সরলরেখাংশ O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়। OA বা OB দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে O বিন্দুকে কেন্দ্র করে AB-এর উপর একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কন করলাম।

(iii) C বিন্দুতে AB সরলরেখাংশের উপর একটি লম্ব অঙ্কন করলাম যা অর্ধবৃত্তকে D বিন্দুতে ছেদ করল।



$\therefore$ BD সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্য হলো AB ও BC সরলরেখাংশদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের মধ্যসমানুপাতী।

অর্থাৎ BD সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্যের মান

= (a একক ও b একক-এর মধ্যসমানুপাতীর মান)

$= \sqrt{ab}$ একক

প্রমাণ : A ও D যুক্ত করলাম।

$\angle ADB$ একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।

$\therefore \angle ADB = 1$ সমকোণ।

$\therefore$ সমকোণী ত্রিভুজ ADB-এর সমকৌণিক বিন্দু D থেকে AB-এর উপর DC লম্ব।

$\therefore \Delta ABD$ ও ΔDBC সদৃশকোণী। সুতরাং সদৃশ।

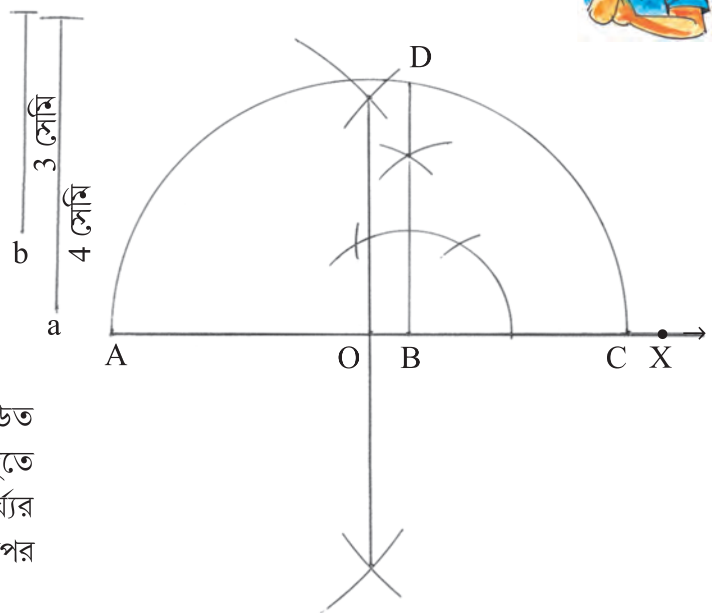
$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{BD}{BC}$ বা, $BD^2 = AB.BC = a.b$

$\therefore BD = \sqrt{ab}$ একক

প্রয়োগ :1. এবার আমি জ্যামিতিক উপায়ে $\sqrt{4 \times 3} = \sqrt{12}$ -এর মান নির্ণয় করি।

অঙ্কন প্রণালী :

(i) a ও b দুটি সরলরেখাংশ নিলাম যাদের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 4 সেমি. ও 3 সেমি.



(ii) AX রশ্মি থেকে 4 সেমি. দৈর্ঘ্যের সমান করে AB সরলরেখাংশ ও BX রশ্মি থেকে 3 সেমি. দৈর্ঘ্যের সমান করে BC সরলরেখাংশ কেটে নিলাম।

(iii) AC সরলরেখাংশকে সমদ্বিখণ্ডিত করি। ধরি, AC সরলরেখাংশ O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়। OA বা OB দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে O বিন্দুকে কেন্দ্র AC-এর উপর একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কন করি।

(iv) B বিন্দুতে BC-এর উপর একটি লম্ব অঙ্কন করলাম যা অর্ধবৃত্তকে D বিন্দুতে ছেদ করল।

$\therefore$ BD হলো AB ও BC সরলরেখাংশদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের মধ্যসমানুপাতী।

$\therefore$ BD সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্যই হচ্ছে $\sqrt{12}$ সেমি.

স্কেলের সাহায্যে মেপে দেখছি,

BD = 3.5 সেমি. (প্রায়)

$\therefore \sqrt{12} = 3.5$ (প্রায়)

প্রমাণ : BD, AB ও BC-এর মধ্যসমানুপাতী

$\therefore BD^2 = AB.BC = a.b = 4.3 = 12$

$\therefore BD = \sqrt{12}$ সেমি.

প্রয়োগ :2. আমি জ্যামিতিক উপায়ে $\sqrt{21}$ ও $\sqrt{15}$-এর মান নির্ণয় করি অথবা জ্যামিতিক উপায়ে 21ও 15-এর বর্গমূল নির্ণয় করি **[নিজে করি]**

উত্তর সংকেত : $21 = 7\times3$ $\therefore$ এক্ষেত্রে a ও b দুটি সরলরেখাংশ নেব যাদের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 7 একক ও 3 একক এবং একই পদ্ধতিতে a ও b-এর মধ্যসমানুপাতী নির্ণয় করব। আবার $15 = \boxed{} \times \boxed{}$. a ও b সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্য ঠিকমতো নিয়ে আঁকি।

প্রয়োগ :3. আমি পিথাগোরাসের উপপাদ্যের ভিত্তিতে অন্য অঙ্কন পদ্ধতিতে $\sqrt{12}$ -এর মান নির্ণয় করি।

পিথাগোরাসের উপপাদ্যের ভিত্তিতে অন্য অঙ্কন পদ্ধতি

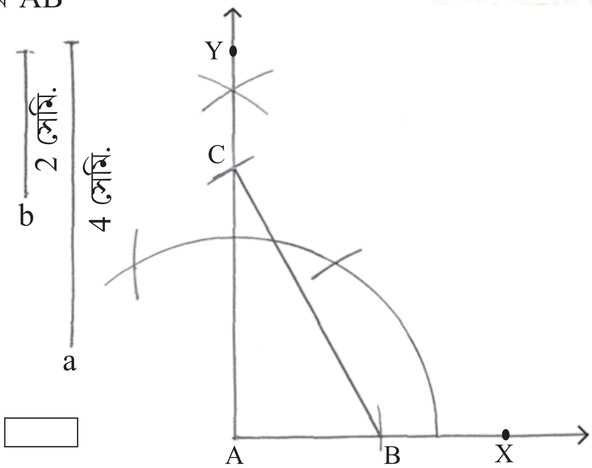
অঙ্কন প্রণালী :

ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন করলাম যার AB বাহু = 2 সেমি. এবং অতিভুজ BC = 4 সেমি.

$\therefore$ AC-এর দৈর্ঘ্য হলো $\sqrt{12}$ সেমি.

স্কেলের সাহায্যে মেপে দেখছি,
AC = 3.5 সেমি. (প্রায়)

$\therefore \sqrt{12} = 3.5$ (প্রায়)



প্রমাণ :

ΔABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ,

$\therefore AC^2 = BC^2 - AB^2 = 4^2 - 2^2 = \boxed{}$ [নিজে লিখি]

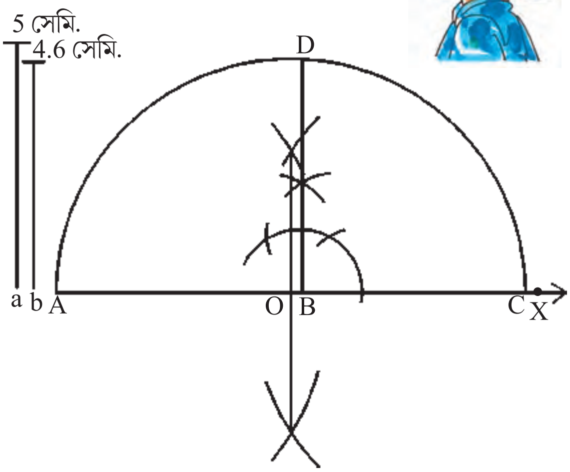
$\therefore AC = \sqrt{12}$ সেমি.

প্রয়োগ :4. আমি জ্যামিতিক উপায়ে $\sqrt{23}$-এর মান নির্ণয় করি।

$\boxed{23 = 5 \times 4.6}$

অঙ্কন প্রণালী :

(i) a ও b দুটি সরলরেখাংশ নিলাম যাদের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 5 সেমি. ও 4.6 সেমি.



স্কেলের সাহায্যে মেপে দেখছি, BD = $\boxed{}$ সেমি. (প্রায়)

$\therefore \sqrt{23} = \boxed{}$ [প্রায়]

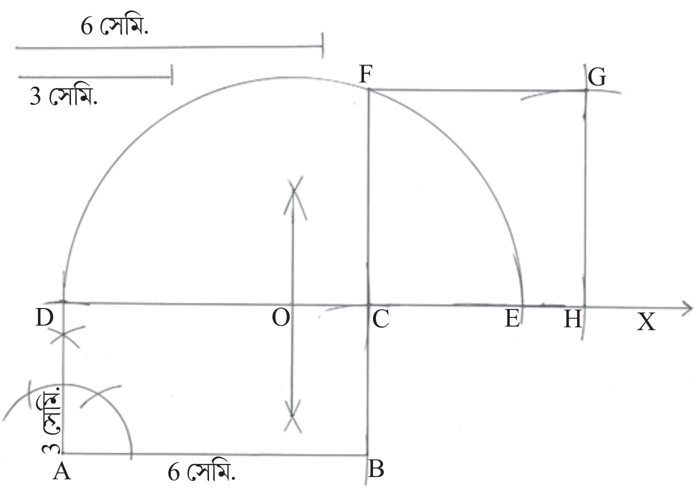
[বুঝেছি, অর্থাৎ যদি কোনো দুই অঙ্কের মৌলিক সংখ্যা থাকে, যেমন 17, 19, 29, 37 ইত্যাদি, তখন সেই সংখ্যাগুলিকে 5 দিয়ে ভাগ করে নেব। যেমন, 17=5×3.4, 19=5×3.8, 29=5×5.8, 37=5×7.4 ইত্যাদি]

প্রয়োগ :5. 4 মিটার লম্বা ও 3 মিটার চওড়া আয়তক্ষেত্রাকার মাদুরের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রাকার মাদুর কীভাবে পাব ? একটি আয়তক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কনের চেষ্টা করি।

6 সেমি. দৈর্ঘ্য ও 3 সেমি. প্রস্থবিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করি।

অঙ্কন প্রণালী :

(i) 6 সেমি. দৈর্ঘ্য ও 3 সেমি. প্রস্থবিশিষ্ট একটি আয়তাকার চিত্র ABCD অঙ্কন করলাম।



(ii) DC-কে বর্ধিত করলাম এবং বর্ধিতাংশ থেকে CB-এর সমান করে CE অংশ কেটে নিলাম।

(iii) DE সরলরেখাংশকে সমদ্বিখণ্ডিত করি। ধরি, O বিন্দুতে DE সরলরেখাংশ সমদ্বিখণ্ডিত হয়। O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OD বা OE দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে DE-এর উপর একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কন করি।

(iv) BC-কে বর্ধিত করলাম যা অর্ধবৃত্তকে F বিন্দুতে ছেদ করল।

(v) CF বাহুর দৈর্ঘ্যের সমান করে CFGH বর্গাকার চিত্র অঙ্কন করলাম।

$\therefore$ CFGH-ই হলো নির্ণেয় বর্গক্ষেত্র যার ক্ষেত্রফল ABCD আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান।

সুতরাং, CFGH বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ABCD আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

প্রমাণ : ABCD আয়তক্ষেত্র।

$\therefore$ $\angle BCD = 1$ সমকোণ। সুতরাং CF, DE-এর লম্ব।

$\therefore$ অঙ্কনানুসারে CF-এর দৈর্ঘ্য DC ও CE-এর দৈর্ঘ্যের মধ্যসমানুপাতী।

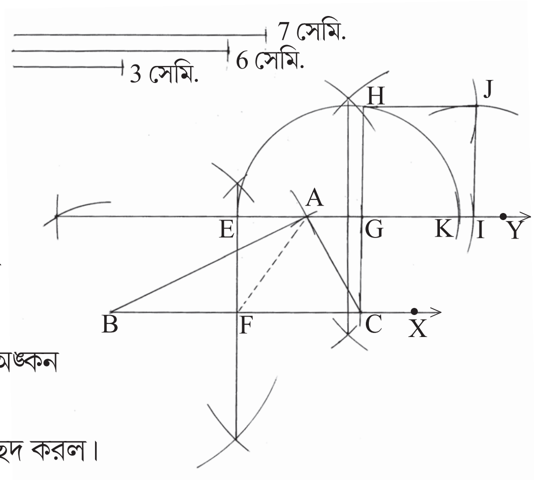
$\therefore$ $CF^2 = DC.CE = AB.BC =$ ABCD আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

প্রয়োগ : 6. 7 সেমি. দৈর্ঘ্য ও 4 সেমি. প্রস্থবিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 7. আমি একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করি যার তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 7 সেমি., 6 সেমি. ও 3 সেমি.। ওই ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করি।

অঙ্কন প্রণালী :

(i) ABC একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করলাম যার AB, BC ও CA-এর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 7 সেমি., 6 সেমি. ও 3 সেমি.



(ii) ΔABC-এর সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র EFCG অঙ্কন করলাম।

(iii) এবার EG-এর বর্ধিতাংশ থেকে GC-এর সমান করে GK অংশ কেটে নিলাম।

(iv) এবার EK সরলরেখাংশকে ব্যাস করে একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কন করলাম।

(v) CG -কে বর্ধিত করলাম যা অর্ধবৃত্তকে H বিন্দুতে ছেদ করল।

(vi) GH-কে বাহু করে HGIJ বর্গাকার চিত্র অঙ্কন করলাম।

$\therefore$ HGIJ হলো নির্ণেয় বর্গক্ষেত্র যার ক্ষেত্রফল Δ ABC-এর ক্ষেত্রফলের সমান।

প্রমাণ : AF যোগ করলাম।

Δ ABC-এর AF মধ্যমা। $\therefore$ Δ AFC-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ Δ ABC-এর ক্ষেত্রফল .... (i)

আবার Δ AFC এবং আয়তক্ষেত্র EFCG-এর একই ভূমি FC এবং একই সমান্তরালযুগল FC এবং EG-এর মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore$ Δ AFC-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ আয়তক্ষেত্র EFCG-এর ক্ষেত্রফল ....(ii)

(i) ও (ii) থেকে পেলাম, Δ ABC-এর ক্ষেত্রফল = আয়তক্ষেত্র EFCG-এর ক্ষেত্রফল।

EFCG আয়তক্ষেত্রের $\angle CGE = 1$ সমকোণ। সুতরাং, $HG \perp EK$.

অঙ্কনানুসারে, HG-এর দৈর্ঘ্য EG ও GK-এর দৈর্ঘ্যের মধ্যসমানুপাতী।

$\therefore HG^2 = EG.GK = EG.GC =$ EFCG আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

$\therefore$ HGIJ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = EFCG আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

আবার, Δ ABC-এর ক্ষেত্রফল = আয়তক্ষেত্র EFCG-এর ক্ষেত্রফল।

$\therefore$ Δ ABC-এর ক্ষেত্রফল = HGIJ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

প্রয়োগ :8. আমি 7 সেমি. দৈর্ঘ্যের বাহুবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করি। [নিজে করি]

কষে দেখি 21

1. নিম্নলিখিত দৈর্ঘের সরলরেখাংশগুলির মধ্যসমানুপাতী অঙ্কন করি এবং প্রতিক্ষেত্রে স্কেলের সাহায্যে মধ্যসমানুপাতীগুলির মান নির্ণয় করি :

(i) 5 সেমি., 2.5 সেমি. (ii) 4 সেমি., 3 সেমি. (iii) 7.5 সেমি., 4 সেমি.
(iv) 10 সেমি., 4 সেমি. (v) 9 সেমি., 5 সেমি. (vi) 12 সেমি., 3 সেমি.

2. জ্যামিতিক উপায়ে নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলির বর্গমূল নির্ণয় করি :

(i) 7 (ii) 18 (iii) 24 (iv) 28 (v) 13 (vi) 29

3. নিম্নলিখিত দৈর্ঘ্যের বাহুবিশিষ্ট বর্গাকার চিত্র অঙ্কন করি :

(i) $\sqrt{14}$ সেমি. (ii) $\sqrt{22}$ সেমি. (iii) $\sqrt{31}$ সেমি. (iv) $\sqrt{33}$ সেমি.

4. নিম্নলিখিত দৈর্ঘ্যের বাহুবিশিষ্ট আয়তক্ষেত্রগুলির সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রগুলি অঙ্কন করি :

(i) 8 সেমি., 6 সেমি. (ii) 6 সেমি., 4 সেমি.
(iii) 4.2 সেমি., 3.5 সেমি. (iv) 7.9 সেমি., 4.1 সেমি.

5. নিম্নলিখিত ত্রিভুজগুলির সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রগুলি অঙ্কন করি :

(i) ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 10 সেমি., 7 সেমি. ও 5 সেমি.।
(ii) একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যার ভূমির দৈর্ঘ্য 7 সেমি. এবং সমান বাহুদুটির প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য 5 সেমি.।
(iii) একটি সমবাহু ত্রিভুজ যার বাহুর দৈর্ঘ্য 6 সেমি.।

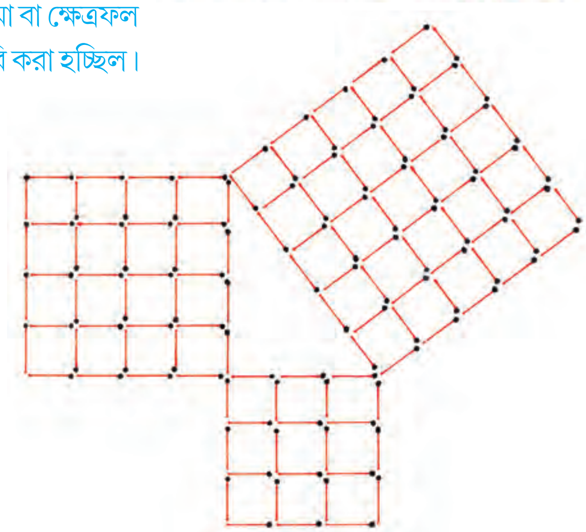
22 পিথাগোরাসের উপপাদ্য
PYTHAGORAS THEOREM

গত সপ্তাহে আমাদের স্কুলে একটি বিজ্ঞানের প্রদর্শনী হয়েছিল। আমরা সারাদিন ধরে প্রদর্শনীর বিভিন্ন বিষয়ের বিভাগে ঘুরেছি। গণিতের প্রদর্শনীর ঘরে অনেক কিছু মজার অঙ্ক দেখেছি। তবে তাদের মধ্যে 'দেশলাই কাঠি নিয়ে মজার খেলা' বিষয়টি আমার খুব ভালো লেগেছে। প্রদর্শনীর এই বিষয়টিতে দেশলাই কাঠি বসিয়ে নানান ধরনের সামতলিক চিত্র তৈরি করে তার পরিসীমা বা ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা বা নির্দিষ্ট ক্ষেত্রফলের সামতলিক চিত্র তৈরি করা হচ্ছিল।

[যেখানে  = 1 বর্গ একক ধরা হচ্ছে]

সেখানে অন্য একটি চার্টে দেশলাই কাঠির একটি মজার চিত্র দেখলাম।

সেটি হলো →



চার্টে দেখছি একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার অতিভুজে 5 টি কাঠি, লম্বে 4 টি কাঠি এবং ভূমিতে $\boxed{}$ টি কাঠি আছে।

আরও দেখছি, অতিভুজের উপর বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = 25 বর্গ একক = 5^2 বর্গ একক

ভূমির উপর বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = 9 বর্গ একক = 3^2 বর্গ একক

লম্বের উপর বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = 16 বর্গ একক = 4^2 বর্গ একক

দেখছি, $5^2 = 3^2 + 4^2$

$\therefore$ (অতিভুজ)^2 = (ভূমি)^2 + (লম্ব)^2

অর্থাৎ, অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

= ভূমির উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল + লম্বের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

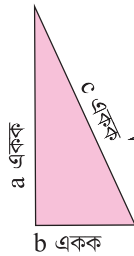
1 সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ, ভূমি ও লম্বের মধ্যে এই সম্পর্ক কোথা থেকে পেলাম? যে-কোনো সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রেই কি এই সম্পর্ক সম্ভব?

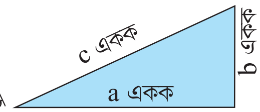
পিথাগোরাসের উপপাদ্য থেকে পেলাম

পিথাগোরাসের উপপাদ্য : যে-কোনো সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।

হাতেকলমে যে-কোনো সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে পিথাগোরাসের উপপাদ্য যাচাই করি।

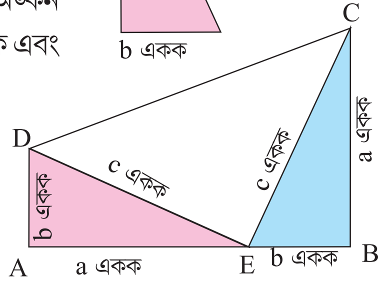
(1) একটি রঙিন আর্টপেপারে একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন করলাম, যার ভূমির দৈর্ঘ্য ‘b’ একক এবং উচ্চতা (লম্ব) ‘a’ একক এবং সমকোণী ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রটি কেটে নিলাম।





(2) অন্য একটি রঙিন আর্টপেপারে আর একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন করলাম, যার ভূমির দৈর্ঘ্য ‘a’ একক এবং উচ্চতা (লম্ব) ‘b’ একক এবং সমকোণী ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রটি কেটে নিলাম।

(3) ধরি ত্রিভুজ দুটির অতিভুজের দৈর্ঘ্য ‘c’ একক। এবার একটি সাদা আর্টপেপারে পাশের চিত্রের মতো দুটি সমকোণী ত্রিভুজ আটকে ABCD ট্রাপিজিয়াম আকারের ক্ষেত্র পেলাম।



(4) ABCD ট্রাপিজিয়াম আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}(a+b)\times(a+b)$ বর্গএকক

আবার ABCD ট্রাপিজিয়াম আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

= ΔDAE-এর ক্ষেত্রফল + ΔCBE-এর ক্ষেত্রফল + ΔDEC-এর ক্ষেত্রফল

$\therefore\ \frac{1}{2}(a+b)(a+b) = \frac{1}{2}a\times b + \frac{1}{2}a\times b + \frac{1}{2}c\times c \quad [\because \angle DEC = 90^\circ]$

বা, $(a+b)^2 = ab + ab + c^2$

বা, $a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$

$\therefore\ a^2 + b^2 = \boxed{}$

$\therefore$ পেলাম (ভূমি)^2 + (লম্ব)^2 = (অতিভুজ)^2

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, যে-কোনো সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

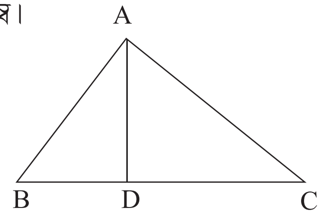
উপপাদ্য : 49. পিথাগোরাসের উপপাদ্য: যে-কোনো সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।

প্রদত্ত : ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle$A সমকোণ

প্রমাণ করতে হবে : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

অঙ্কন : সমকৌণিক বিন্দু A থেকে অতিভুজ BC-এর উপর AD লম্ব অঙ্কন করলাম যা BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : সমকোণী ত্রিভুজ ABC-এর অতিভুজ BC-এর উপর AD লম্ব।



$\therefore\ \Delta ABD$ ও ΔCBA সদৃশ।

সুতরাং, $\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB}$, $\therefore\ AB^2 = BC.BD$ ....(I)

আবার, ΔCAD ও ΔCBA সদৃশ।

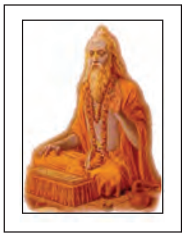
সুতরাং, $\frac{AC}{BC} = \frac{DC}{AC}$, $\therefore\ AC^2 = BC.DC$ ....(II)

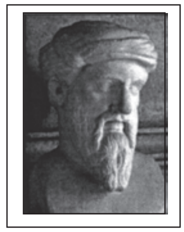
সুতরাং (I) ও (II) যোগ করে পাই, $AB^2 + AC^2 = BC.BD + BC.DC$

$= BC\,(BD + DC) = BC.BC = BC^2$

$\therefore\ BC^2 = AB^2 + AC^2$ **[প্রমাণিত]**

আজ থেকে অনেক পূর্বে (প্রায় 800 B.C.) একজন প্রাচীন ভারতীয় গণিতজ্ঞ বৌদ্ধায়ন (Baudhayan) পিথাগোরাসের উপপাদ্যটিকে নিম্নরূপে বলেছিলেন। তিনি বলেছিলেন ‘একটি আয়তাকার চিত্রের কর্ণের উপর বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল উহার উভয় বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান’।


বৌদ্ধায়ান


পিথাগোরাস

[The diagonal of a rectangle produces by itself the same area as produced by its both sides (i.e. length and breadth)]

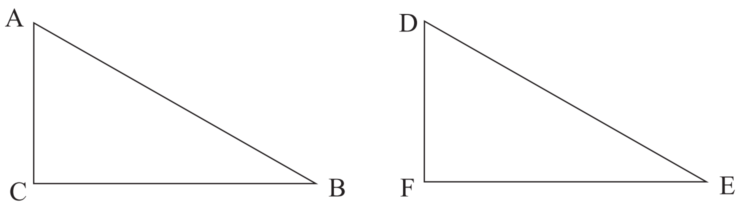
এই জন্য এই উপপাদ্যটিকে কখনও কখনও বৌদ্ধায়নের উপপাদ্যও বলা হয়।

পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিপরীত কি সম্ভব? অর্থাৎ যে-কোনো ত্রিভুজের এক বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান হলে প্রথম বাহুর বিপরীত কোণ কি সমকোণ হবে? যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি।

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য :50. পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য : যে-কোনো ত্রিভুজের একটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান হলে প্রথম বাহুর বিপরীত কোণটি সমকোণ হবে।

প্রদত্ত : ΔABC-এর AB বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল BC ও AC বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান। অর্থাৎ, $AB^2 = AC^2 + BC^2$



প্রমাণ করতে হবে : $\angle ACB = 1$ সমকোণ

অঙ্কন : CB-এর সমান করে FE সরলরেখাংশ অঙ্কন করলাম। FE বাহুর উপর F বিন্দুতে লম্ব অঙ্কন করলাম এবং সেই লম্ব থেকে CA বাহুর সমান করে FD অংশ কেটে নিলাম এবং D ও E বিন্দুদ্বয় যোগ করলাম।

প্রমাণ : $AB^2 = BC^2 + AC^2$ [প্রদত্ত]

$= EF^2 + DF^2$ [$\because$ অঙ্কনানুসারে, $EF = BC$ এবং $AC = DF$]

$= DE^2$ [$\because \angle DFE = 1$ সমকোণ]

$\therefore AB = DE$

এখন ΔABC ও ΔDEF -তে, $AB = DE$, $BC = EF$ এবং $AC = DF$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEF$ (S-S-S সর্বসমতার শর্তানুসারে)

$\therefore \angle ACB = \angle DFE = 1$ সমকোণ [$\because DF \perp EF$ অঙ্কনানুসারে]

$\therefore \angle ACB = 1$ সমকোণ **[প্রমাণিত]**

বুঝেছি, পিথাগোরাসের বিপরীত উপপাদ্য থেকে সহজেই কোনো ত্রিভুজ সমকোণী ত্রিভুজ কিনা বুঝতে পারব। যেমন, যে ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 5 সেমি., 12 সেমি. ও 13 সেমি., সেই ত্রিভুজটি $\boxed{}$ ত্রিভুজ হবে। যেহেতু, $13^2 = 5^2 + 12^2$ এবং অতিভুজের দৈর্ঘ্য 13 সেমি.।

(2) কিন্তু কোনো সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য কেমন হতে পারে তার কি কোনো সূত্র পাওয়া যায়?

যেহেতু, $(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$

অতএব যদি কোনো ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য $(m^2 - n^2)$ একক, $2mn$ একক এবং $(m^2 + n^2)$ একক হয় তবে সেটি সমকোণী ত্রিভুজ হবে এবং তার অতিভুজের দৈর্ঘ্য হবে $(m^2 + n^2)$ একক। (যেখানে, $m > n$)

প্রয়োগ :1. m ও n-এর বিভিন্ন উপযুক্ত মান ধরে 2 টি সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্যগুলি লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ :2. আমাদের বাগানে একটি 25 মিটার লম্বা মই পাঁচিলে হেলান দিয়ে এমনভাবে রাখা আছে যে মইটি ভূমি থেকে 24 মিটার উঁচুতে পাঁচিল স্পর্শ করে আছে। মই-এর পাদদেশটি পাঁচিল থেকে কত দূরে আছে হিসাব করে লিখি।

ধরি, AC মই-এর দৈর্ঘ্য = 25 মিটার , AB = 24 মিটার; ABC সমকোণী ত্রিভুজে পিথাগোরাসের সূত্র থেকে পাই,

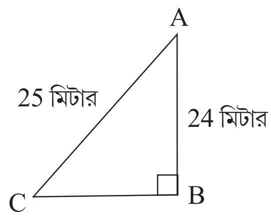
$AB^2 + BC^2 = AC^2$

বা, $(24 \text{ মিটার})^2 + (BC)^2 = (25 \text{ মিটার})^2$

বা, $BC^2 = (25 \text{ মিটার})^2 - (24 \text{ মিটার})^2 = \boxed{}$

$\therefore$ BC = 7 মিটার

$\therefore$ মই-এর পাদদেশটি পাঁচিল থেকে 7 মিটার দূরে আছে।

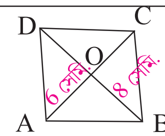


প্রয়োগ : 3. কোনো রম্বসের কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 12 সেমি. ও 16 সেমি. হলে, রম্বসের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

উত্তর সংকেত : রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

$\therefore \; OA = \frac{12}{2}$ সেমি. = $\boxed{}$ সেমি., $OB = \boxed{}$ সেমি.

AOB সমকোণী ত্রিভুজ। $\therefore$ পিথাগোরাসের সূত্র থেকে পাই, $AB^2 = OA^2 + OB^2$

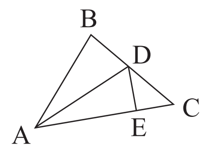


প্রয়োগ : 4 একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ ABC অঙ্কন করেছি যার $\angle B$ সমকোণ। $\angle BAC$-এর সমদ্বিখণ্ডক অঙ্কন করেছি যা BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে, $CD^2 = 2BD^2$

প্রদত্ত : ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের $\angle B = 1$ সমকোণ। $\angle BAC$-এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে : $CD^2 = 2BD^2$

অঙ্কন : D বিন্দু থেকে AC-এর উপর DE লম্ব অঙ্কন করলাম যা AC বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করল।



প্রমাণ : ABC সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। $\therefore \angle ACB = 45^\circ$

$\therefore$ DEC সমকোণী ত্রিভুজে, $\angle DCE = 45^\circ$ ($\because \angle ACB = 45^\circ$);

আবার , $\because \angle DEC = 90^\circ$, সুতরাং, $\angle EDC = 45^\circ$; $\therefore \Delta DEC$-তে, DE = EC

ΔABD ও ΔAED-এর মধ্যে, $\angle BAD = \angle EAD$ [$\because$ AD, $\angle BAE$-এর সমদ্বিখণ্ডক]

$\angle ABD = \angle AED$ (প্রত্যেকে 1 সমকোণ) এবং AD উহাদের সাধারণ বাহু।

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta AED$ (A-A-S সর্বসমতার শর্তানুসারে)

সুতরাং, BD = DE (সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু)

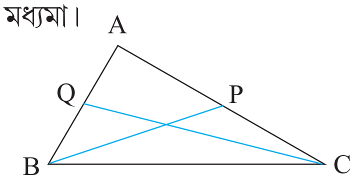
DEC সমকোণী ত্রিভুজে, $DC^2 = DE^2 + CE^2 = 2DE^2$ ($\because$ CE = DE)

$= 2BD^2$ ($\because$ DE = BD) **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ :5. ΔABC -এর $AD \perp BC$ হলে, প্রমাণ করি যে $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$ [নিজে করি]

প্রয়োগ :6. ΔABC-এর $\angle A$ সমকোণ এবং BP ও CQ দুটি মধ্যমা হলে, প্রমাণ করি যে, $5BC^2 = 4(BP^2 + CQ^2)$

প্রদত্ত : ΔABC-এর $\angle BAC = 1$ সমকোণ। BP ও CQ ত্রিভুজটির দুটি মধ্যমা।



প্রমাণ করতে হবে : $5BC^2 = 4(BP^2 + CQ^2)$

প্রমাণ : ΔABC-এর $\angle A$ সমকোণ।

$\therefore BC^2 = AB^2 + AC^2$

$= (2AQ)^2 + (2AP)^2$ [$\because$ P ও Q যথাক্রমে AC ও AB বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু]

$\therefore BC^2 = 4(AQ^2 + AP^2)$ .... (i)

আবার, ΔBAP ও ΔCAQ সমকোণী ত্রিভুজ।

$\therefore BP^2 = AB^2 + AP^2 = (2AQ)^2 + AP^2 = 4AQ^2 + AP^2$

$CQ^2 = AC^2 + AQ^2 = (2AP)^2 + AQ^2 = 4AP^2 + AQ^2$

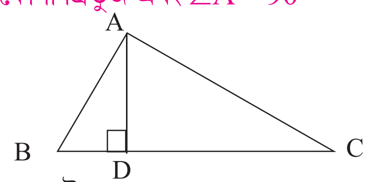
$\therefore BP^2 + CQ^2 = 4AQ^2 + AP^2 + 4AP^2 + AQ^2 \;\; = 5AQ^2 + 5AP^2 \;\; = 5(AQ^2 + AP^2)$ ......(ii)

$5BC^2 = 5.4\ (AQ^2 + AP^2)$ [(i) হইতে পাই]

$= 4.5\ (AQ^2 + AP^2) \;\; = 4\ (BP^2 + CQ^2)$ [(ii) হইতে পাই] **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ :7. ΔABC-এর শীর্ষবিন্দু A থেকে BC বাহুর উপর AD লম্ব অঙ্কন করেছি যা BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করেছে এবং $AD^2 = BD.CD$ হলে, প্রমাণ করি যে, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\angle A = 90^o$

প্রদত্ত : ΔABC-এর $AD \perp BC$ এবং $AD^2 = BD.DC$



প্রমাণ করতে হবে : $\angle BAC = 90^o$

প্রমাণ : ADB একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle ADB = 90^o$

$\therefore AB^2 = AD^2 + BD^2$ .... (i) [পিথাগোরাসের উপপাদ্য থেকে পাই]

আবার, ADC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle ADC = 90^o$

$\therefore AC^2 = AD^2 + CD^2$ .... (ii) [পিথাগোরাসের উপপাদ্য থেকে পাই]

(i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$AB^2 + AC^2 = BD^2 + CD^2 + 2AD^2$

$= BD^2 + CD^2 + 2BD.CD$ [$\because AD^2 = BD.CD$]

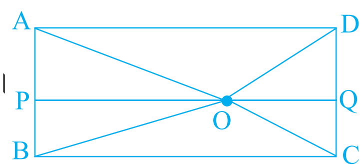
$= (BD + CD)^2 = BC^2$

$\therefore AB^2 + AC^2 = BC^2$

$\therefore$ পিথাগোরাসের বিপরীত উপপাদ্য থেকে পাই ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle BAC = 90^o$ **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ :8. প্রমাণ করি যে-কোনো বর্গক্ষেত্রের কর্ণের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ওই বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 9. ABCD একটি আয়তাকার চিত্র অঙ্কন করেছি। O আয়তাকার চিত্রের অভ্যন্তরে যে-কোনো একটি বিন্দু হলে, প্রমাণ করি যে, $OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2$



প্রদত্ত : ABCD আয়তাকার চিত্রের অভ্যন্তরে O যে-কোনো একটি বিন্দু।

প্রমাণ করতে হবে : $OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2$

অঙ্কন : O বিন্দু দিয়ে BC-এর সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কন করলাম যা AB ও DC বাহুদ্বয়কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করল।

প্রমাণ : অঙ্কনানুসারে PQ || BC

$\therefore$ $PQ \perp AB$ এবং $PQ \perp DC$ ($\because \angle B = 90^{\circ}$ এবং $\angle C = 90^{\circ}$)

$\therefore$ ΔAPO, ΔBPO, ΔCQO এবং ΔDQO প্রত্যেকে সমকোণী ত্রিভুজ।

$\therefore$ $OA^2 = AP^2 + OP^2$ $\qquad$ $OC^2 = CQ^2 + OQ^2$

$OB^2 = BP^2 + OP^2$ $\qquad$ $OD^2 = DQ^2 + OQ^2$

$\therefore$ $OA^2 + OC^2 = AP^2 + OP^2 + CQ^2 + OQ^2$ .... (i)

কিন্তু অঙ্কন অনুসারে, APQD ও BPQC এরা প্রত্যেকে আয়তাকার চিত্র।

সুতরাং, $\quad AP = DQ$ এবং $CQ = BP$

(i) থেকে পাই, $OA^2 + OC^2 = DQ^2 + OP^2 + BP^2 + OQ^2$

$= (DQ^2 + OQ^2) + (BP^2 + OP^2)$

$= OD^2 + OB^2 = OB^2 + OD^2$ [প্রমাণিত]

কষে দেখি 22

1. যদি কোনো ত্রিভুজের বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য নিম্নরূপ হয়, তবে কোন ক্ষেত্রে ত্রিভুজটি সমকোণী ত্রিভুজ হবে হিসাব করে লিখি : (i) 8 সেমি., 15 সেমি. ও 17 সেমি. (ii) 9 সেমি., 11 সেমি. ও 6 সেমি.
2. আমাদের পাড়ার রাস্তায় একটি 15 মিটার লম্বা মই এমনভাবে রাখা আছে যে মইটি ভূমি থেকে 9 মিটার উঁচুতে অবস্থিত মিলিদের জানালা স্পর্শ করেছে। এবার ওই রাস্তার একই বিন্দুতে মইটির পাদদেশ রেখে মইটিকে ঘুরিয়ে এমভাবে রাখা হলো যে মইটি রাস্তার অপর প্রান্তে অবস্থিত আমাদের জানালা স্পর্শ করল। আমাদের জানালা যদি ভূমি থেকে 12 মিটার উপরে থাকে, তবে পাড়ার ওই রাস্তাটি কত চওড়া হিসাব করে লিখি।
3. 10 সেমি. বাহুবিশিষ্ট কোনো রম্বসের একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 12 সেমি. হলে, রম্বসটির অপর কর্ণের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।
4. একটি ত্রিভুজ PQR অঙ্কন করেছি যার $\angle Q$ সমকোণ। QR বাহুর উপর S যে-কোনো একটি বিন্দু হলে, প্রমাণ করি যে, $PS^2 + QR^2 = PR^2 + QS^2$
5. প্রমাণ করি, যে-কোনো রম্বসের বাহুগুলির উপর অঙ্কিত বর্গের সমষ্টি কর্ণ দুটির উপর অঙ্কিত বর্গ দুটির সমষ্টির সমান হবে।
6. ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ। AD, BC বাহুর উপর লম্ব হলে, প্রমাণ করি যে $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 4AD^2$.
7. একটি সমকোণী ত্রিভুজ ABC অঙ্কন করলাম যার $\angle A$ সমকোণ। AB ও AC বাহুর উপর দুটি বিন্দু যথাক্রমে P ও Q নিলাম। P, Q; B, Q ও C, P যুক্ত করে, প্রমাণ করি যে, $BQ^2 + PC^2 = BC^2 + PQ^2$
8. ABCD চতুর্ভুজের দুটি কর্ণ পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করলে, প্রমাণ করি যে, $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$
9. একটি ত্রিভুজ ABC অঙ্কন করেছি যার উচ্চতা AD; $AB > AC$ হলে প্রমাণ করি যে $AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$
10. ΔABC-এর শীর্ষবিন্দু B ও C থেকে AC ও AB ($AC > AB$) বাহুদুটির উপর দুটি লম্ব অঙ্কন করেছি যারা পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে, $AC^2 + BP^2 = AB^2 + CP^2$
11. ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যার $\angle C$ সমকোণ। D, AB-এর উপর যে-কোনো একটি বিন্দু হলে, প্রমাণ করি যে, $AD^2 + DB^2 = 2CD^2$
12. ABC ত্রিভুজের $\angle A$ সমকোণ। CD মধ্যমা হলে, প্রমাণ করি যে, $BC^2 = CD^2 + 3AD^2$
13. ABC ত্রিভুজের অভ্যন্তরস্থ একটি বিন্দু O থেকে BC, CA ও AB বাহুর উপর যথাক্রমে OX, OY ও OZ লম্ব অঙ্কন করেছি। প্রমাণ করি যে, $AZ^2 + BX^2 + CY^2 = AY^2 + CX^2 + BZ^2$

14. RST ত্রিভুজের $\angle S$ সমকোণ। RS ও ST বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে X ও Y; প্রমাণ করি যে, $RY^2 + XT^2 = 5XY^2$

15. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M. C. Q.) :

(i) এক ব্যক্তি একটি স্থান থেকে 24 মিটার পশ্চিমদিকে যান এবং তারপর 10 মিটার উত্তর দিকে যান। যাত্রাস্থান থেকে ব্যক্তির দূরত্ব (a) 34 মিটার, (b) 17 মিটার, (c) 26 মিটার, (d) 25 মিটার।

(ii) ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং $AD \perp BC$ হলে, $AD^2 =$ (a) $\frac{3}{2} DC^2$ (b) $2DC^2$ (c) $3DC^2$ (d) $4DC^2$

(iii) ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে AC=BC এবং $AB^2=2AC^2$ হলে, $\angle C$-এর পরিমাপ
(a) 30° (b) 90° (c) 45° (d) 60°

(iv) 13 মিটার ও 7 মিটার উচ্চ দুটি দণ্ড ভূমিতলে লম্বভাবে অবস্থিত এবং তাদের পাদদেশের মধ্যে দূরত্ব 8 মিটার। তাদের শীর্ষদেশের মধ্যে দূরত্ব (a) 9 মিটার (b) 10 মিটার (c) 11 মিটার (d) 12 মিটার।

(v) একটি রম্বসের দুটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 24 সেমি. এবং 10 সেমি. হলে, রম্বসটির পরিসীমা (a) 13 সেমি. (b) 26 সেমি. (c) 52 সেমি. (d) 25 সেমি.।

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্যের অনুপাত 3 : 4 : 5 হলে, ত্রিভুজটি সর্বদা সমকোণী ত্রিভুজ হবে।

(ii) 10 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তে কোনো জ্যা কেন্দ্রে সমকোণ উৎপন্ন করলে জ্যাটির দৈর্ঘ্য 5 সেমি. হবে।

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

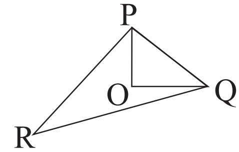
(i) একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের ___________ সমান।

(ii) একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়ের প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য $4\sqrt{2}$ সেমি. হলে, অতিভুজের দৈর্ঘ্য ___________ সেমি.।

(iii) ABCD আয়তাকার চিত্রের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে। AB = 12 সেমি., AO = 6.5 সেমি. হলে, BC-এর দৈর্ঘ্য ___________ সেমি.।

16. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S. A.)**

(i) ABC ত্রিভুজের AB = (2a – 1) সেমি., AC = $2\sqrt{2a}$ সেমি. এবং BC = (2a+1) সেমি. হলে $\angle BAC$-এর মান লিখি।



(ii) পাশের চিত্রে PQR ত্রিভুজের অভ্যন্তরে O বিন্দু এমনভাবে অবস্থিত যে $\angle POR = 90^\circ$, OP = 6 সেমি. এবং OR = 8 সেমি.। যদি PR = 24 সেমি. এবং $\angle QPR = 90^\circ$ হয়, তাহলে QR বাহুর দৈর্ঘ্য কত তা লিখি।

(iii) ABCD আয়তাকার চিত্রের অভ্যন্তরে O বিন্দু এমনভাবে অবস্থিত যে OB = 6 সেমি., OD = 8 সেমি. এবং OA = 5 সেমি.। OC-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

(iv) ABC ত্রিভুজের A বিন্দু থেকে BC বাহুর উপর AD লম্ব BC বাহুর সঙ্গে D বিন্দুতে মিলিত হয়। যদি BD = 8 সেমি., DC = 2 সেমি. এবং AD = 4 সেমি. হয়, তাহলে $\angle BAC$-এর পরিমাপ কত তা লিখি।

(v) ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle ABC = 90^\circ$, AB = 3 সেমি., BC = 4 সেমি. এবং B বিন্দু থেকে AC বাহুর উপর লম্ব BD যা AC বাহুর সঙ্গে D বিন্দুতে মিলিত হয়। BD-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

23 ত্রিকোণমিতিক অনুপাত এবং ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলি
TRIGONOMETRIC RATIOS AND TRIGOMETRIC IDENTITIES

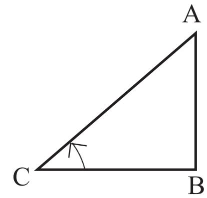
আমি আমার খাতায় রীনার ঘুড়ির ওড়ানোর ছবিটি এঁকে একটি সমকোণী ত্রিভুজ ABC পেয়েছি,

যার, C বিন্দু ভুমিতে রীনার অবস্থান

A বিন্দু রীনার ঘুড়ির অবস্থান

AB ভূমি থেকে ঘুড়ির অবস্থানের উচ্চতা।

এবং, ∠BCA একটি সূক্ষ্মকোণ।



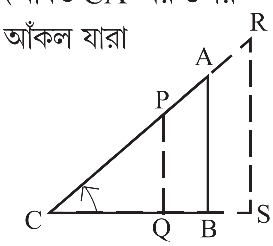
1 কিন্তু ∠BCA সূক্ষ্মকোণের সাপেক্ষে AB ও BC -কে কী বলব?

ABC সমকোণী ত্রিভুজের AB বাহুকে ∠BCA **কোণের বিপরীত বাহু বা লম্ব** এবং BC বাহুকে ∠ACB **কোণের সংলগ্ন বাহু বা ভূমি** বলা হয়।

বুঝেছি, ABC সমকোণী ত্রিভুজের ∠BAC কোণের বিপরীত বাহু ☐ এবং ∠BAC কোণ সংলগ্ন বাহু AB

শুভ আমার আঁকা সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ AC-এর উপরে একটি বিন্দু P এবং বর্ধিত CA-এর উপর একটি বিন্দু R নিল। P ও R বিন্দু থেকে BC ও বর্ধিত CB-এর উপর দুটি লম্ব আঁকল যারা BC-কে এবং CB-এর বর্ধিতাংশকে যথাক্রমে Q ও S বিন্দুতে ছেদ করল।

এরফলে, PQC ও RSC আরও দুটি সমকোণী ত্রিভুজ পেলাম।



2 PQC, ABC ও RSC সমকোণী ত্রিভুজগুলির বাহুগুলির মধ্যে সম্পর্ক জানার চেষ্টা করি ও কী পাই দেখি।

দেখছি, PQC, ABC ও RSC সমকোণী ত্রিভুজগুলি পরস্পর সদৃশ। **[নিজে প্রমাণ করি]**

(i) $\frac{PQ}{CP}=\frac{AB}{CA}=\frac{RS}{CR}$ (ii) $\frac{CQ}{CP}=\frac{CB}{CA}=\frac{CS}{CR}$ (iii) $\frac{PQ}{CQ}=\frac{AB}{CB}=\frac{RS}{CS}$

(iv) $\frac{CP}{PQ}=\frac{CA}{AB}=\frac{CR}{RS}$ (v) $\frac{CP}{CQ}=\frac{CA}{CB}=\frac{CR}{CS}$ (vi) $\frac{CQ}{PQ}=\frac{CB}{AB}=\frac{CS}{RS}$

দেখছি, তিনটি সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে ∠BCA সূক্ষ্মকোণের সাপেক্ষে

(i) $\frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$ অনুপাতগুলি সমান (ii) $\frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}$ অনুপাতগুলি সমান এবং (iii) $\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$ অনুপাতগুলিও সমান।

অন্য যে-কোনো সমকোণী ত্রিভুজ এঁকে ও একইভাবে একটি সূক্ষ্মকোণের সাপেক্ষে একাধিক সদৃশ সমকোণী ত্রিভুজ এঁকে দেখছি (i), (ii) ও (iii) নং অনুপাতগুলি সমান। **[নিজে করি]**

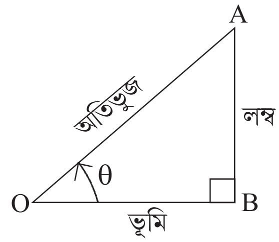
বুঝেছি, কোনো সমকোণী ত্রিভুজের একটি সূক্ষ্মকোণের সাপেক্ষে বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের অনুপাত ওই ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের উপর নির্ভরশীল নয়। অনুপাতগুলি সম্পূর্ণভাবে সূক্ষ্মকোণটির পরিমাণের উপর নির্ভরশীল।

3 কিন্তু একটি সমকোণী ত্রিভুজের দুটি করে বাহু নিয়ে যে ছয় প্রকারের অনুপাতগুলি পেলাম, তাদের আলাদা আলাদা কী নাম আছে দেখি।

একটি সমকোণী ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দুটি করে বাহু নিয়ে যে ছয় প্রকারের অনুপাত পাওয়া যায় তাদের **ত্রিকোণমিতিক অনুপাত** বলা হয়।

পাশের চিত্রের ABO সমকোণী ত্রিভুজের $\angle ABO$ = এক সমকোণ

$\therefore$ OA অতিভুজ এবং $\angle BOA$ সূক্ষ্মকোণের পরিপ্রেক্ষিতে OB = ভূমি এবং AB = লম্ব। ধরি, $\angle AOB = \theta$



$\angle BOA$ -এর Sine = $\dfrac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \dfrac{AB}{OA} = \sin\theta$ [সংক্ষেপে লিখি]

$\angle BOA$ -এর Cosine = $\dfrac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \dfrac{OB}{OA} = \cos\theta$ [সংক্ষেপে লিখি]

$\angle BOA$ -এর Tangent = $\dfrac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \dfrac{AB}{OB} = \tan\theta$ [সংক্ষেপে লিখি]

$\angle BOA$ -এর Cosecant = $\dfrac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}} = \dfrac{OA}{AB} = \operatorname{cosec}\theta$ [সংক্ষেপে লিখি]

$\angle BOA$ -এর Secant = $\dfrac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}} = \dfrac{OA}{OB} = \sec\theta$ [সংক্ষেপে লিখি]

$\angle BOA$ -এর Cotangent = $\dfrac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}} = \dfrac{OB}{AB} = \cot\theta$ [সংক্ষেপে লিখি]

4 উপরের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি দেখি ও তাদের মধ্যে সম্পর্ক লেখার চেষ্টা করি।

দেখছি, $\operatorname{cosec}\theta$, $\sec\theta$ ও $\cot\theta$ যথাক্রমে $\sin\theta$, $\cos\theta$ ও $\tan\theta$ -র অন্যোন্যক।

অর্থাৎ, $\boldsymbol{\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}}$, $\boldsymbol{\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}}$, $\boldsymbol{\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}}$

আবার, $\tan\theta = \dfrac{AB}{OB} = \dfrac{\frac{AB}{OA}}{\frac{OB}{OA}} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\therefore$ পেলাম, $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

আবার, $\cot\theta = \dfrac{OB}{AB} = \dfrac{\frac{OB}{OA}}{\frac{AB}{OA}} = \dfrac{\square}{\square}$ **[নিজে লিখি]**

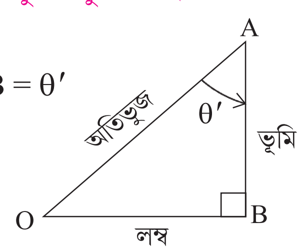
$\therefore$ পেলাম, $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

দেখছি, সমকোণী ত্রিভুজ ABO-এর সূক্ষ্মকোণ $\angle BOA$-এর ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ওই ত্রিভুজের কোণ ও বাহুগুলির মধ্যে সম্পর্ক প্রকাশ করে এবং কোনো নির্দিষ্ট কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মানগুলি সমকোণী ত্রিভুজটির বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের সঙ্গে পরিবর্তনশীল নয়।

5 কিন্তু ABO সমকোণী ত্রিভুজের $\angle OAB$ সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি কী হবে দেখি।

ABO সমকোণী ত্রিভুজের $\angle ABO$ = 1 সমকোণ। $\therefore$ OA = অতিভুজ

$\angle OAB$ সূক্ষ্মকোণের সাপেক্ষে AB = ভূমি এবং OB = লম্ব। ধরি, $\angle OAB = \theta'$

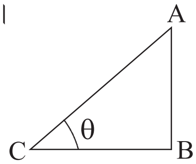


$\therefore \sin\theta' = \dfrac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \dfrac{OB}{OA}$

$\cos\theta' = \dfrac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \dfrac{AB}{OA}$

$\tan\theta'$, $\operatorname{cosec}\theta'$, $\sec\theta'$, $\cot\theta'$ **নিজে লিখি।**

বুঝেছি, রীনার ঘুড়ি যদি AC দৈর্ঘ্যের লম্বা সুতো দিয়ে বাঁধা থাকে এবং ঘুড়িটি যদি অনুভূমিক রেখার সঙ্গে 60° কোণ করে উড়তে থাকে তবে ঘুড়িটি রীনার অবস্থান থেকে AB উচ্চতায় থাকবে।



$$\sin\theta = \frac{AB}{AC} \qquad \therefore AB = AC \times \sin\theta$$

$\therefore$ তখন রীনার ঘুড়ি রীনার অবস্থান বা ভূমি থেকে $AC\times\sin\theta$ উচ্চতায় থাকবে।

6 **কিন্তু sinθ কি sin এবং θ -এর গুণফল ?**

θ কোণের sine-এর সংক্ষিপ্ত রূপ "sinθ"। কিন্তু **sin ও θ-এর গুণফল sinθ নয়**। একইভাবে cosθ , cos এবং θ-এর গুণফল নয় এবং অন্য সকল ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি একই রকমের।

আর্যভট্ট (500 A.D.) প্রথম sin-এর ধারণা ব্যবহার করেন। এরপর আর্যভট্টের কাজ আরবি ও লাতিন ভাষায় অনুবাদ করা হয়। লাতিন ভাষায় (Sinus) শব্দটি ব্যবহৃত হয়। এরপর সমগ্র ইউরোপে গণিতের সর্বক্ষেত্রে 'Sinus' শব্দটি 'Sine' শব্দ হিসাবে ব্যবহৃত হয়। ইংরেজ জ্যোতির্বিজ্ঞানী অধ্যাপক Edmund Gunter (1581–1626) প্রথম সংক্ষিপ্ত আকারে 'Sin' ব্যবহার করেন।

7 **Sinθ-এর বর্গ কীভাবে লিখব?**

লেখার সুবিধার জন্য, $(\sin\theta)^2 = \sin^2\theta$ লেখা হয়, তবে $(\sin\theta)^2 \neq \sin\theta^2$

অনুরূপে, $(\cos\theta)^2 = \cos^2\theta$, $(\tan\theta)^3 = \tan^3\theta$ ইত্যাদি।

$\operatorname{cosec}\theta = (\sin\theta)^{-1}$ লেখা যায়। কিন্তু $\operatorname{cosec}\theta \neq \sin^{-1}\theta$ (একে Sin inverse θ বলা হয়।)

$\sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$, $\therefore$ sinθ-এর মান কি 1-এর বেশি হতে পারে?

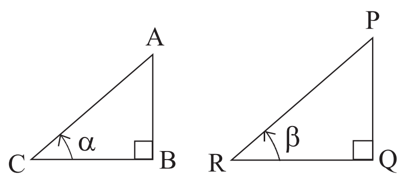
$\sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$; যেহেতু লম্ব, অতিভুজের থেকে বড়ো হতে পারে না।

সুতরাং, sinθ-এর মান 1-এর বেশি হবে না।

8 **cosθ-এর মান কি 1-এর বেশি হতে পারে? [নিজে করি]**

প্রয়োগ : 1. α ও β দুটি এমন সূক্ষ্মকোণ যে $\sin\alpha = \sin\beta$; প্রমাণ করি যে, $\alpha = \beta$

ধরি, ABC এবং PQR দুটি সমকোণী ত্রিভুজ। ABC ত্রিভুজে $\angle ABC = 90^{\circ}$ এবং $\angle BCA = \alpha$; PQR ত্রিভুজে $\angle PQR = 90^{\circ}$ এবং $\angle QRP = \beta$



সমকোণী ΔABC-তে, $\sin\alpha = \frac{AB}{AC}$;

সমকোণী ত্রিভুজ PQR-এ, $\sin\beta = \frac{PQ}{PR}$

যেহেতু, $\sin\alpha = \sin\beta$, সুতরাং, $\frac{AB}{AC} = \frac{PQ}{PR}$ বা, $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = k$ (ধরি) $(k>0)$

$\therefore AB = k.PQ$ এবং $AC = k.PR$

$\therefore BC = \sqrt{AC^2 - AB^2}$ এবং $QR = \sqrt{PR^2 - PQ^2}$

সুতরাং, $\frac{BC}{QR} = \frac{\sqrt{AC^2-AB^2}}{\sqrt{PR^2-PQ^2}} = \frac{\sqrt{k^2PR^2-k^2PQ^2}}{\sqrt{PR^2-PQ^2}} = \frac{k\sqrt{PR^2-PQ^2}}{\sqrt{PR^2-PQ^2}} = k \quad \therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR}$

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta PQR$ সুতরাং, $\angle BCA = \angle QRP$ $\therefore \alpha = \beta$ [প্রমাণিত]

বুঝেছি, $\sin\alpha = \sin 45^{\circ}$ হলে, $\alpha = 45^{\circ}$ [$\sin\alpha = \sin\beta$ হলে উভয়পক্ষে sin দিয়ে ভাগ করতে পারি না। কারণ $\sin\alpha = \sin\times\alpha$ নয়। তাই যখন, $\cancel{\sin}\ \alpha = \cancel{\sin}\ \beta$ তখন $\alpha = \beta$ এভাবে লিখতে পারি না। এটা ভুল]

প্রয়োগ : 2. $\sin(90^\circ-\theta)=\sin2\theta$ হলে, θ-এর মান হিসাব করে লিখি যখন 2θ সূক্ষ্মকোণ।

$\sin(90^\circ-\theta)=\sin2\theta$

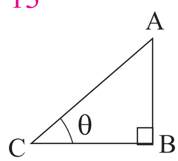
বা, $90^\circ-\theta=2\theta$

বা, $3\theta=90^\circ \quad \therefore \theta=30^\circ$

প্রয়োগ : 3. 5θ সূক্ষ্মকোণ এবং $\tan5\theta=\tan(60^\circ+\theta)$ হলে, θ-এর মান নির্ণয় করি। **[নিজে করি]**

> **মনে রাখব :** সাধারণত, (i) $\sin2\theta\neq2\sin\theta$
>
> (ii) $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}\neq\dfrac{\alpha}{\beta}$
>
> এবং (iii) $\sin\alpha\pm\sin\beta\neq\sin(\alpha\pm\beta)$
>
> কোণের Cosine, tangent ইত্যাদির ক্ষেত্রেও এই নিয়মগুলি প্রযোজ্য।

প্রয়োগ : 4. একটি সমকোণী ত্রিভুজে θ ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণের পরিপ্রেক্ষিতে $\sin\theta=\dfrac{12}{13}$ হলে, $\tan\theta$ এবং $\cos\theta$-এর মান হিসাব করে লিখি।



$\sin\theta=\dfrac{12}{13}=\dfrac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$

ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle ABC=90^\circ$ এবং $\angle BCA=\theta$

ধরি, লম্ব $AB=12k$ একক এবং অতিভুজ $AC=13k$ একক [যেখানে, $k>0$]

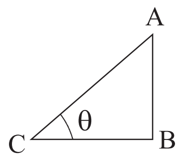
$\therefore$ ভূমি $BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{(13k)^2-(12k)^2}$ একক $=\sqrt{169k^2-144k^2}$ একক

$=5k$ একক

$\therefore \tan\theta=\dfrac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}=\dfrac{12k}{5k}=\dfrac{12}{5}$

$\cos\theta=\dfrac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}=\dfrac{5k}{13k}=\dfrac{5}{13}$

প্রয়োগ : 5. θ একটি ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং $\tan\theta=\dfrac{8}{15}$ হলে, $\sin\theta$ ও $\cos\theta$-র মান নির্ণয় করি ও দেখাই যে $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$



ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle ABC=90^\circ$ এবং $\angle ACB=\theta$

$\therefore \tan\theta=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{8}{15}$

ধরি, লম্ব $AB=8k$ একক এবং ভূমি $BC=15k$ একক [যেখানে, $k>0$]

$\therefore$ অতিভুজ $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{(8k)^2+(15k)^2}$ একক $=\sqrt{64k^2+225k^2}$ একক

$=\sqrt{289k^2}$ একক $=17k$ একক

$\therefore \sin\theta=\dfrac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}=\dfrac{8k}{17k}=\dfrac{8}{17}$

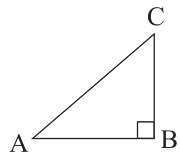
$\cos\theta=\dfrac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}=\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}=\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ **[নিজে লিখি]**

$\therefore \sin^2\theta+\cos^2\theta=\left(\dfrac{8}{17}\right)^2+\left(\dfrac{15}{17}\right)^2=\dfrac{64}{289}+\dfrac{225}{289}=\boxed{}$ **[নিজে লিখি]**

$\therefore \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 6. যদি $\tan\theta = \frac{4}{3}$ হয়, তবে দেখাই যে, $\sin\theta + \cos\theta = \frac{7}{5}$ **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 7. ABC ত্রিভুজের $\angle B$ সমকোণ এবং অতিভুজের দৈর্ঘ্য $\sqrt{13}$ একক। ওই ত্রিভুজের অপর দুটি বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি 5 একক হলে, $\sin C + \sin A$-এর মান নির্ণয় করি।



ABC সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ AC

$\angle C$-এর সাপেক্ষে লম্ব AB

এবং $\angle A$-এর সাপেক্ষে লম্ব BC

$\therefore \sin C + \sin A = \frac{AB}{AC} + \frac{BC}{AC} = \frac{AB+BC}{AC} = \frac{5}{\sqrt{13}}$

বিকল্প প্রমাণ : মনে করি, AB = x একক, BC = (5–x) একক

ABC সমকোণী ত্রিভুজে পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$x^2 + (5-x)^2 = (\sqrt{13})^2$

বা, $x^2 + 25 + x^2 - 10x = 13$

বা, $2x^2 - 10x + 12 = 0$

বা, $x^2 - 5x + 6 = 0$

বা, $x^2 - 3x - 2x + 6 = 0$

বা, $x(x-3) - 2(x-3) = 0$

বা, $(x-3)(x-2) = 0$

হয়, $x - 3 = 0 \quad \therefore x = 3$

অথবা, $x - 2 = 0 \quad \therefore x = 2$

যদি, AB = 3 একক হয়, তখন BC = (5 – 3) একক = 2 একক

সুতরাং, $\sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{\sqrt{13}}$ এবং $\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{\sqrt{13}}$

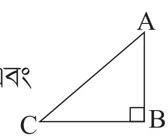
$\therefore \sin C + \sin A = \frac{3}{\sqrt{13}} + \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{5}{\sqrt{13}}$

আবার, AB=2 একক হলে BC= $\boxed{}$ একক এবং তখন sinC+sinA = $\boxed{}$ [একই ভাবে নিজে হিসাব করে লিখি]

কিন্তু যদি (sinC–sinA)-এর মান নির্ণয় করতে চাই তাহলে কি প্রথম পদ্ধতিতে করব না বিকল্প প্রমাণের সাহায্যে করব তা যুক্তিসহ চিন্তা করে নিজে করি।

কষে দেখি 23.1

1. একটি সমকোণী ত্রিভুজ ABC এঁকেছি যার অতিভুজ AB=10 সেমি., ভূমি BC= 8 সেমি. এবং লম্ব AC=6 সেমি.। $\angle ABC$-এর Sine এবং tangent-এর মান নির্ণয় করি।



2. সোমা একটি সমকোণী ত্রিভুজ ABC এঁকেছে যার $\angle ABC = 90^\circ$, AB=24 সেমি. এবং BC=7 সেমি.। হিসাব করে sinA, cosA, tanA ও cosecA-এর মান লিখি।
3. যদি ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজের $\angle C = 90^\circ$, BC=21 একক এবং AB=29 একক হয়, তাহলে sinA, cosA, sinB ও cosB-এর মান নির্ণয় করি।
4. যদি $\cos\theta = \frac{7}{25}$ হয়, তাহলে θ কোণের সকল ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান নির্ণয় করি।

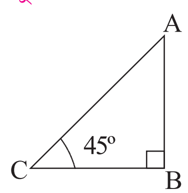
5. যদি $\cot\theta=2$ হয়, তাহলে $\tan\theta$ ও $\sec\theta$-এর মান নির্ণয় করি এবং দেখাই যে, $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$
6. $\cos\theta=0.6$ হলে, দেখাই যে, $(5\sin\theta-3\tan\theta)=0$
7. যদি $\cot A=\frac{4}{7.5}$ হয়, তাহলে $\cos A$ এবং $\operatorname{cosec} A$-এর মান নির্ণয় করি এবং দেখাই যে, $1+\cot^2 A=\operatorname{cosec}^2 A$
8. যদি $\sin C=\frac{2}{3}$ হয়, তবে $\cos C\times\operatorname{cosec} C$-এর মান হিসাব করে লিখি।
9. নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা তা যুক্তি সহকারে লিখি।
   (i) $\tan A$-এর মান সর্বদা 1 অপেক্ষা বড়ো।
   (ii) $\cot A$-এর মান সর্বদা 1 অপেক্ষা ছোটো।
   (iii) একটি কোণ θ-এর জন্য $\sin\theta=\frac{4}{3}$ হতে পারে।
   (iv) একটি কোণ α-এর জন্য $\sec\alpha=\frac{12}{5}$ হতে পারে।
   (v) একটি কোণ β(Beta)-এর জন্য $\operatorname{cosec}\beta=\frac{5}{13}$ হতে পারে।
   (vi) একটি কোণ θ-এর জন্য $\cos\theta=\frac{3}{5}$ হতে পারে।

আমাদের বন্ধুরা প্রত্যেকে ঘুড়ি ওড়াল। সবার ঘুড়িই অনেকটা উঁচুতে উড়েছিল। কিন্তু সতীশের ঘুড়ি সবচেয়ে বেশি উচ্চতায় উড়েছিল।

আজ আমরা ঠিক করেছি বাড়ি ফিরে নানা ধরনের সমকোণী ত্রিভুজ আঁকব (পেনসিল কম্পাসের সাহায্যে) যাদের একটি কোণের পরিমাপ 30° বা 45° বা 60° এবং সেই কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান নির্ণয়ের চেষ্টা করব।

আশা তার খাতায় একটি সমকোণী ত্রিভুজ ABC আঁকল আর $\angle ABC=90^\circ$ এবং $\angle BCA$ -এর মান 45°

9 আমার আঁকা ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle BCA$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি হিসাব করে লিখি।



ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle ABC=90^\circ$ এবং $\angle BCA=45^\circ$

$\therefore\ \angle CAB=45^\circ$

$\therefore\ \Delta ABC$ একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

সুতরাং, $BC=BA$

ধরি, $BA=BC=a$ একক

$\therefore\ AC^2=AB^2+BC^2=a^2+a^2=2a^2$

$\therefore\ AC=a\sqrt{2}$ একক

$\sin\angle BCA=\sin45^\circ=\frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}=\frac{AB}{AC}=\frac{a}{a\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\angle BCA=\cos45^\circ=\frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}=\frac{BC}{AC}=\frac{a}{a\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

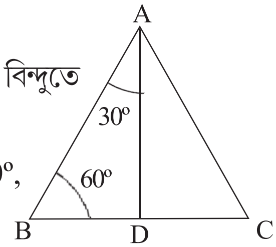
$\tan\angle BCA=\tan45^\circ=\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}=\frac{AB}{BC}=\frac{a}{a}=1$

বুঝেছি, $\operatorname{cosec}45^\circ=\frac{1}{\sin45^\circ}=\sqrt{2}$, $\sec45^\circ=\frac{1}{\boxed{}}=\sqrt{2}$ এবং $\cot45^\circ=\frac{1}{\tan45^\circ}=\boxed{}$

আমি 30° ও 60° কোণদ্বয়ের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান নির্ণয় করি।

আমি একটি সমবাহু ত্রিভুজ ABC আঁকলাম। একটি সমবাহু ত্রিভুজের প্রতিটি কোণ $\boxed{}$ [60º/45º]

$\therefore \angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$



A শীর্ষবিন্দু থেকে BC বাহুর উপর AD লম্ব অঙ্কন করলাম যা BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করল।

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$ [ΔABD ও ΔACD-তে $\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$, $\angle ABD = \angle ACD = 60^\circ$ এবং $AB = AC$.

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$ (A-A-S সর্বসমতার শর্তানুসারে)]

$\therefore BD = DC$ এবং $\angle BAD = \angle CAD$

আবার, ABD একটি সমকোণী ত্রিভুজ; $\angle ADB = 90^\circ$, $\angle DBA = 60^\circ$ $\therefore \angle BAD = 30^\circ$

ধরি, $AB = 2a$ একক, $\therefore BC = 2a$ একক

সুতরাং, $BD = \frac{1}{2}BC = a$ একক

$\therefore$ সমকোণী ত্রিভুজ ABD থেকে পাই, $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2}$

$= \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$ একক

$$\sin 30^\circ = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{BD}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

বুঝেছি, $\operatorname{cosec} 30^\circ = \boxed{}$, $\sec 30^\circ = \boxed{}$ এবং $\cot 30^\circ = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}$ **[নিজে লিখি]**

$$\sin 60^\circ = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

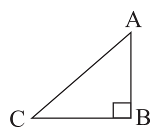
$$\cos 60^\circ = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{AD}{BD} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$$

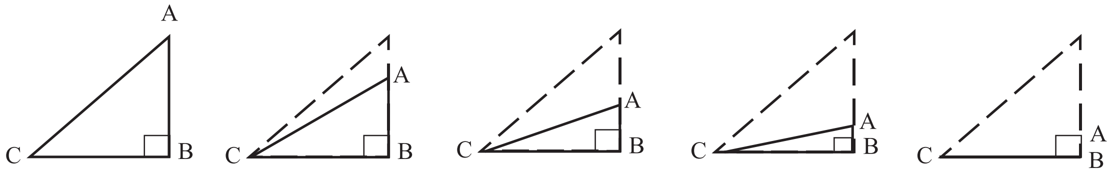
বুঝেছি, $\operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ **[নিজে লিখি]**

$$\sec 60^\circ = \frac{1}{\cos 60^\circ} = 2 \text{ এবং } \cot 60^\circ = \frac{1}{\tan 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

10 কিন্তু যে-কোনো সমকোণী ত্রিভুজের ABC-এর সূক্ষ্মকোণটির মান যদি ক্রমশ কমতে থাকে তবে ওই সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মানের কী পরিবর্তন হবে ছবি এঁকে দেখি।



ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle B$ সমকোণ; $\angle BCA$ -এর মান ক্রমশ কমতে থাকল যতক্ষণ না কোণটির মান প্রায় 0º-এর কাছে হয়।



চিত্রে দেখছি, $\angle BCA$-এর মান যতই কমতে থাকছে A-বিন্দু ততই B বিন্দুর দিকে অগ্রসর হচ্ছে অর্থাৎ ততই AB বাহুর দৈর্ঘ্য কমতে থাকছে এবং A বিন্দু প্রায় B বিন্দুর কাছে এলে $\angle BCA$-এর মান প্রায় 0^o হয় এবং AC ও AB বাহুর দৈর্ঘ্য প্রায় সমান হয়। অর্থাৎ $\angle BCA$-এর মান প্রায় 0^o-এর কাছে আসলে AB বাহুর দৈর্ঘ্য প্রায় 0-এর কাছে হয়।

$\therefore\ \sin\angle BCA = \dfrac{AB}{AC}$ -এর মান প্রায় 0-এর কাছে হবে যখন $\angle BCA$-এর মান প্রায় 0^o-এর কাছে হয়।

আবার $\angle BCA$-এর মান যখন প্রায় 0^o-এর কাছে হয় তখন AC ও BC বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য প্রায় সমান হয়।

সুতরাং $\cos\angle BCA = \dfrac{BC}{AC}$ -এর মান প্রায় 1-এর কাছে হয় যখন $\angle BCA$-এর মান 0^o-এর কাছে হয়।

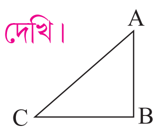
সুতরাং, এই ক্ষেত্রে নীচের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি সংজ্ঞা হিসাবে ধরা হয়।

$\sin 0^o = 0$ এবং $\cos 0^o = 1$

$\therefore\ \tan 0^o = \dfrac{\sin 0^o}{\cos 0^o} = 0$ এবং $\cot 0^o = \dfrac{1}{\tan 0^o}$, যা অসংজ্ঞাত

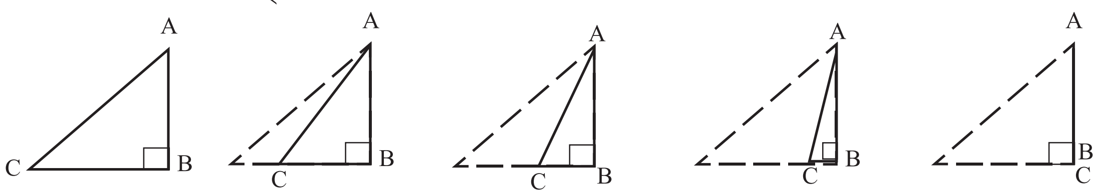
বুঝেছি, $\operatorname{cosec} 0^o = \dfrac{1}{\sin 0^o}$, যা অসংজ্ঞাত এবং $\sec 0^o = \dfrac{1}{\cos 0^o} = 1$

যদি উপরের ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle BCA$ সূক্ষ্মকোণের মান ক্রমশ বৃদ্ধি পায় এবং প্রায় 90^o কোণের কাছাকাছি যায়, তখন $\angle BCA$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির মান কী হবে দেখি।



ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle B$ সমকোণ,

$\angle BCA$-এর মান ক্রমশ বৃদ্ধি পেতে থাকল যতক্ষণ না কোণটির মান প্রায় 90^o-এর কাছাকাছি হয়।



চিত্রে দেখছি, $\angle BCA$-এর মান বৃদ্ধি পেয়ে যতই প্রায় 90^o-এর দিকে কাছাকাছি যাচ্ছে $\angle CAB$-এর মান ততই কমে প্রায় 0^o কোণের কাছাকাছি যাচ্ছে এবং C বিন্দু B বিন্দুর দিকে ক্রমশ সরে যাওয়ায় CB বাহুর দৈর্ঘ্য ক্রমশ প্রায় শূন্যের কাছে যাচ্ছে।

আবার, AC বাহুর দৈর্ঘ্য ক্রমশ প্রায় AB বাহুর দৈর্ঘ্যের সমান হচ্ছে।

সুতরাং, সেক্ষেত্রে $\sin\angle ACB = \dfrac{AB}{AC}$ -এর মান প্রায় 1-এর কাছাকাছি যাবে যখন $\angle BCA$এর মান 90^o-এর কাছাকাছি যাবে।

আবার, $\cos\angle BCA = \dfrac{BC}{AC}$ -এর মান প্রায় 0-এর কাছাকাছি যাবে যখন $\angle BCA$-এর মান প্রায় 90^o-এর কাছাকাছি যাবে।

সুতরাং, এক্ষেত্রে নীচের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি সংজ্ঞা হিসাবে ধরা হয়।

$\sin 90^o = 1$ এবং $\cos 90^o = 0$

$\therefore\ \tan 90^o = \dfrac{\sin 90^o}{\cos 90^o}$ যা অসংজ্ঞাত এবং $\cot 90^o = \dfrac{\cos 90^o}{\sin 90^o} = 0$

$\operatorname{cosec} 90^o$ ও $\sec 90^o$-এর মান হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

পেলাম,

θ কোণের কোণানুপাত	0° বা 0	30° বা $\frac{\pi}{6}$	45° বা $\frac{\pi}{4}$	60° বা $\frac{\pi}{3}$	90° বা $\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	অসংজ্ঞাত
$\operatorname{cosec}\theta$	অসংজ্ঞাত	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
$\sec\theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	অসংজ্ঞাত
$\cot\theta$	অসংজ্ঞাত	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

উপরের ছক থেকে দেখছি, θ কোণের মান 0° থেকে 90° বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে $\sin\theta$-এর মান 0 থেকে বৃদ্ধি পেয়ে 1 হয় এবং $\cos\theta$-এর মান 1 থেকে হ্রাস পেয়ে 0 হয়।

আরও দেখছি, 0° থেকে 90° পর্যন্ত ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি শূন্য, ধনাত্মক বা অসংজ্ঞাত হয়। কিন্তু ঋণাত্মক হয় না।

যেহেতু **দশম** শ্রেণির পাঠ্যসূচিতে θ সর্বদা ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ সুতরাং ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি ঋণাত্মক হবে না।

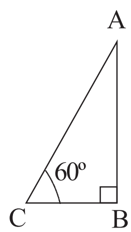
প্রয়োগ : 8. রীনার ঘুড়িটি যদি 150 মিটার লম্বা সুতো দিয়ে ওড়ানো হয় এবং ঘুড়িটি যদি অনুভূমিক রেখার সঙ্গে 60° কোণ করে থাকে, তবে ঘুড়িটি রীনার অবস্থান বা ভূমি থেকে কত উঁচুতে আছে হিসাব করে দেখি।

নীচের ছবিতে, ABC সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle ABC=90^\circ$, AC=150 মিটার লম্বা সুতোসমেত ঘুড়ি

এবং $\angle BCA = 60^\circ$

AB = রীনার অবস্থান বা ভূমি থেকে ঘুড়ির উচ্চতা

ABC সমকোণী ত্রিভুজের AB নির্ণয়ের জন্য সেই কোণানুপাতটি নেব যেখানে AB ও AC আছে। [$\because$ AC-এর দৈর্ঘ্য জানা]



ABC সমকোণী ত্রিভুজে, $\sin 60^\circ = \frac{AB}{AC}$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{150 \text{ মিটার}}$

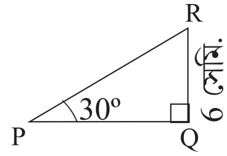
বা, $2AB = 150\sqrt{3}$ মিটার

বা, $AB = \frac{150\sqrt{3}}{2}$ মিটার $= 75\sqrt{3}$ মিটার

$\therefore$ ঘুড়িটি রীনার অবস্থান বা ভূমি থেকে $75\sqrt{3}$ মিটার উঁচুতে আছে।

প্রয়োগ : 9. যদি ঘুড়িটি 120 মিটার লম্বা সুতো দিয়ে ওড়ানো হতো এবং ঘুড়িটি অনুভূমিক রেখার সঙ্গে 30° কোণ করে থাকে, তাহলে ঘুড়িটি রীনার অবস্থান বা ভূমি থেকে কত উচ্চতায় থাকবে হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 10. PQR সমকোণী ত্রিভুজের $\angle Q$ সমকোণ এবং $\angle P=30^\circ$; RQ=6 সেমি. হলে, PQ ও PR বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।



সমকোণী ত্রিভুজ PQR-এ, $\tan 30^\circ = \dfrac{RQ}{PQ}$

বা, $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{6\text{সেমি.}}{PQ}$ $\quad \therefore PQ = 6\sqrt{3}$ সেমি.

সমকোণী ত্রিভুজ PQR-এ, $\sin 30^\circ = \dfrac{RQ}{PR}$

বা, $\dfrac{1}{2} = \dfrac{6\text{সেমি.}}{PR}$ $\quad \therefore PR = 12$ সেমি.

অন্যভাবে, পিথাগোরাসের সূত্র থেকে পাই, $PR^2 = PQ^2+RQ^2$

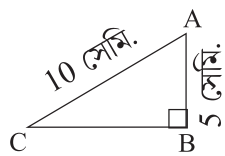
$= (6\sqrt{3}$ সেমি.$)^2 + (6$ সেমি.$)^2$

$= 108$ সেমি.$^2 + 36$ সেমি.^{2}

$= 144$ সেমি.^{2}

$\therefore PR = 12$ সেমি.

প্রয়োগ : 11. ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B$ সমকোণ। AB=5 সেমি. এবং AC=10 সেমি. হলে, $\angle BCA$ ও $\angle CAB$ -এর মান নির্ণয় করি।



ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B$ সমকোণ

AB=5 সেমি. এবং AC=10 সেমি.

সমকোণী ত্রিভুজ ABC-তে, $\sin\angle BCA = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2} = \sin 30^\circ$

$\therefore \angle BCA = 30^\circ$

$\therefore \angle CAB = 90^\circ - 30^\circ = \boxed{}$

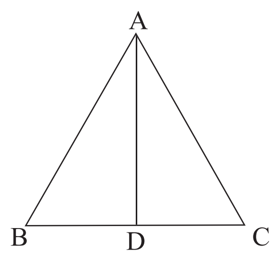
প্রয়োগ : 12. ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B$ সমকোণ। AB=7 সেমি. এবং $AC=7\sqrt{2}$ সেমি. হলে, $\angle BCA$ ও $\angle CAB$ -এর মান হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 13. দেখাই যে, $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = 1$

$$\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 \quad \textbf{[প্রমাণিত]}$$

প্রয়োগ : 14. দেখাই যে, $\tan^2 60^\circ + 1 = \sec^2 60^\circ$ **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 15. ABC সমবাহু ত্রিভুজের AD মধ্যমা হলে, প্রমাণ করি যে $\sin\angle BAD = \cos\angle DBA$.



ABC সমবাহু ত্রিভুজের AD মধ্যমা।

$\therefore AD \perp BC$ এবং $\angle BAD = \angle DAC$

ABD সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\angle DBA = 60^\circ$ [$\because$ ABC সমবাহু ত্রিভুজ]

$\therefore \angle BAD = 30^\circ$

$\therefore \sin\angle BAD = \sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$ এবং $\cos\angle DBA = \cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \sin\angle BAD = \cos\angle DBA$ **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 16. প্রমাণ করি যে, $\dfrac{1-\tan^2 30^\circ}{1+\tan^2 30^\circ} = \cos 60^\circ$

$$\frac{1-\tan^2 30^\circ}{1+\tan^2 30^\circ} = \frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\times\frac{3}{4} = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ$$

প্রয়োগ : 17. প্রমাণ করি যে, $\tan^2 60^\circ - 2\sin 60^\circ = 3-\cot 30^\circ$ [নিজে করি]

প্রয়োগ : 18. মান নির্ণয় করি : $\dfrac{5\cos^2\frac{\pi}{3}+4\sec^2\frac{\pi}{6}-\tan^2\frac{\pi}{4}}{\sin^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{6}}$

$$\frac{5\cos^2\frac{\pi}{3}+4\sec^2\frac{\pi}{6}-\tan^2\frac{\pi}{4}}{\sin^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{6}} = \frac{5\cos^2 60^\circ+4\sec^2 30^\circ-\tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ+\cos^2 30^\circ}$$

$$= \frac{5\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2-(1)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\frac{5}{4}+\frac{16}{3}-1}{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \frac{\frac{15+64-12}{12}}{\frac{4}{4}} = \frac{67}{12} = 5\frac{7}{12}$$

প্রয়োগ : 19. $\sin(A+B)=1$ এবং $\cos(A-B)=1$ যেখানে, $0^\circ \le (A+B) \le 90^\circ$ এবং $A>B$; A ও B কোণের মান নির্ণয় করি।

$\sin(A+B)=1=\sin 90^\circ$

$\therefore A+B=90^\circ$

আবার, $\cos(A-B)=1=\cos 0^\circ$

$\therefore A-B=0^\circ$

$$\begin{array}{l} A+B=90^\circ \\ A-B=0^\circ \\ \hline 2A \quad =90^\circ \end{array}$$

$\therefore A=45^\circ$ এবং $B=90^\circ-45^\circ=45^\circ$

প্রয়োগ : 20. θ $(0^\circ\le\theta\le 90^\circ)$ -এর কোন মানের জন্য $\sin^2\theta-3\sin\theta+2=0$ সত্য হবে নির্ণয় করি।

$\sin^2\theta-3\sin\theta+2=0$

বা, $\sin^2\theta-2\sin\theta-\sin\theta+2=0$

বা, $\sin\theta(\sin\theta-2)-1(\sin\theta-2)=0$

বা, $(\sin\theta-1)(\sin\theta-2)=0$

হয়, $\sin\theta-1=0 \quad \therefore \sin\theta=1$;

অথবা, $\sin\theta-2=0 \quad \therefore \sin\theta=2$

যেহেতু, $\sin\theta$ -এর মান 1-এর বেশি হতে পারে না, সুতরাং $\sin\theta=1=\sin 90^\circ \quad \therefore \theta=90^\circ$

প্রয়োগ : 21. θ $(0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ)$-এর কোন মান/মানগুলির জন্য $2\sin\theta\cos\theta = \cos\theta$ সত্য হবে নির্ণয় করি।

$2\sin\theta\cos\theta = \cos\theta$

বা, $2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$

বা, $\cos\theta(2\sin\theta - 1) = 0$

হয়, $\cos\theta = 0$ অথবা, $2\sin\theta - 1 = 0$

$\cos\theta = 0$ হলে, $\cos\theta = 0 = \cos 90^\circ$ $\therefore \theta = 90^\circ$

আবার, $2\sin\theta - 1 = 0$ হলে, $\sin\theta = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$ $\therefore \theta = 30^\circ$

$\therefore \theta = 90^\circ$ বা $\theta = 30^\circ$ মানের জন্য $2\sin\theta\cos\theta = \cos\theta$ হবে।

কিন্তু $2\sin\theta\cos\theta = \cos\theta$ উভয়পক্ষকে $\cos\theta$ দিয়ে ভাগ করলে শুধু পাই $\theta = 30^\circ$, θ-এর অন্য মানটি পাওয়া গেল না কেন দেখি।

$2\sin\theta\cos\theta = \cos\theta$-এর উভয়পক্ষকে $\cos\theta$ দিয়ে ভাগ করলে পাই, $2\sin\theta = 1$

$\therefore \sin\theta = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$ $\therefore \theta = 30^\circ$

কিন্তু এখানে $\cos\theta \neq 0$ নয়। তাই $\cos\theta$ দ্বারা উভয়পক্ষকে ভাগ করা যায় না। এর জন্য θ-এর দুটি মানের পরিবর্তে একটি মান পাওয়া গেল।

কষে দেখি 23.2

1. আমাদের বাড়ির জানালায় একটি মই ভূমির সঙ্গে 60° কোণে রাখা আছে। মইটি $2\sqrt{3}$ মিটার লম্বা হলে আমাদের ওই জানালাটি ভূমি থেকে কত উপরে আছে ছবি এঁকে হিসাব করে লিখি।
2. ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B$ সমকোণ। $AB = 8\sqrt{3}$ সেমি. এবং $BC = 8$ সেমি. হলে, $\angle ACB$ ও $\angle BAC$-এর মান হিসাব করে লিখি।
3. ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$ এবং $AC = 20$ সেমি.। BC এবং AB বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।
4. PQR সমকোণী ত্রিভুজের $\angle Q = 90^\circ$, $\angle R = 45^\circ$; যদি $PR = 3\sqrt{2}$ মিটার হয়, তাহলে PQ ও QR বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।
5. **মান নির্ণয় করি :**

(i) $\sin^2 45^\circ - \operatorname{cosec}^2 60^\circ + \sec^2 30^\circ$ (ii) $\sec^2 45^\circ - \cot^2 45^\circ - \sin^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$

(iii) $3\tan^2 45^\circ - \sin^2 60^\circ - \frac{1}{3}\cot^2 30^\circ - \frac{1}{8}\sec^2 45^\circ$

(iv) $\frac{4}{3}\cot^2 30^\circ + 3\sin^2 60^\circ - 2\operatorname{cosec}^2 60^\circ - \frac{3}{4}\tan^2 30^\circ$

(v) $\dfrac{\frac{1}{3}\cos 30^\circ}{\frac{1}{2}\sin 45^\circ} + \dfrac{\tan 60^\circ}{\cos 30^\circ}$ (vi) $\cot^2 30^\circ - 2\cos^2 60^\circ - \frac{3}{4}\sec^2 45^\circ - 4\sin^2 30^\circ$

(vii) $\sec^2 60^\circ - \cot^2 30^\circ - \dfrac{2\tan 30^\circ \operatorname{cosec} 60^\circ}{1+\tan^2 30^\circ}$

(viii) $\dfrac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{1+\tan 60^\circ \tan 30^\circ} + \cos 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 60^\circ \sin 30^\circ$

(ix) $\dfrac{1-\sin^2 30^\circ}{1+\sin^2 45^\circ} \times \dfrac{\cos^2 60^\circ + \cos^2 30^\circ}{\operatorname{cosec}^2 90^\circ - \cot^2 90^\circ} \div (\sin 60^\circ \tan 30^\circ)$

6. দেখাই যে,

(i) $\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ = 1$ (ii) $\cos 60^\circ = \cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ$ (iii) $\dfrac{2\tan 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ} = \sqrt{3}$

(iv) $\sqrt{\dfrac{1+\cos 30^\circ}{1-\cos 30^\circ}} = \sec 60^\circ + \tan 60^\circ$ (v) $\dfrac{2\tan^2 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ} + \sec^2 45^\circ - \cot^2 45^\circ = \sec 60^\circ$

(vi) $\tan^2\frac{\pi}{4}\ \sin\frac{\pi}{3}\ \tan\frac{\pi}{6}\ \tan^2\frac{\pi}{3} = 1\frac{1}{2}$ (vii) $\sin\frac{\pi}{3}\ \tan\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{3} = 2\sin^2\frac{\pi}{4}$

7. (i) $x\sin 45^\circ \cos 45^\circ \tan 60^\circ = \tan^2 45^\circ - \cos 60^\circ$ হলে, x-এর মান নির্ণয় করি।

(ii) $x \sin 60^\circ \cos^2 30^\circ = \dfrac{\tan^2 45^\circ \sec 60^\circ}{\operatorname{cosec} 60^\circ}$ হলে, x-এর মান নির্ণয় করি।

(iii) $x^2 = \sin^2 30^\circ + 4\cot^2 45^\circ - \sec^2 60^\circ$ হলে, x-এর মান নির্ণয় করি।

8. $x \tan 30^\circ + y \cot 60^\circ = 0$ এবং $2x - y \tan 45^\circ = 1$ হলে, x ও y-এর মান হিসাব করে লিখি।

9. যদি $A = B = 45^\circ$ হয়, তবে যাচাই করি যে,

(i) $\sin (A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

(ii) $\cos (A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

10. (i) ABC সমবাহু ত্রিভুজের BD একটি মধ্যমা। প্রমাণ করি যে, $\tan\angle ABD = \cot\angle BAD$

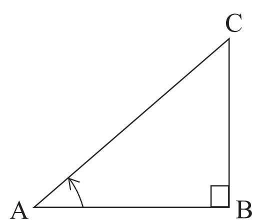
(ii) ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB=AC এবং $\angle BAC=90^\circ$; $\angle BAC$-এর সমদ্বিখণ্ডক BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করি যে, $\dfrac{\sec\angle ACD}{\sin\angle CAD} = \operatorname{cosec}^2 \angle CAD$

11. $\theta\ (0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ)$ - এর কোন মান/মানগুলির জন্য $2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0$ সত্য হবে নির্ণয় করি।

আমাদের বন্ধু বিশাখ বোর্ডে একটি সমকোণী ত্রিভুজ ABC আঁকল যার $\angle B$ সমকোণ।

11 আজ আমরা বিশাখের আঁকা সমকোণী ত্রিভুজের যে-কোনো সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির মধ্যে সম্পর্ক খোঁজার চেষ্টা করব।



ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle B$ সমকোণ।

$\therefore$ পিথাগোরাসের উপপাদ্য থেকে পাই, $AB^2+BC^2 = AC^2$ ———— (i)

(i) নং সম্পর্কের উভয়দিকে AC^2 দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2}$$

বা, $\left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\dfrac{BC}{AC}\right)^2 = 1$

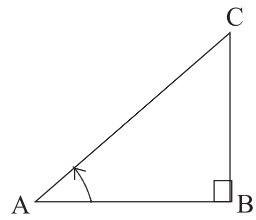
$\therefore\ \sin^2 A + \cos^2 A = 1$ ———— (I)

দেখছি, (I) নং সম্পর্কটি A কোণের সকল মানের জন্য প্রযোজ্য যখন $0^\circ \leq A \leq 90^\circ$

কিন্তু (I) নং সম্পর্কটিকে কী বলা হয়?

(I) নং সম্পর্কটি একটি **অভেদ**।

(i) নং সম্পর্কের উভয়দিকে AB^2 দ্বারা ভাগ করি ও কী পাই দেখি।



$$AB^2+BC^2=AC^2$$

বা, $\dfrac{AB^2}{AB^2}+\dfrac{BC^2}{AB^2}=\dfrac{AC^2}{AB^2}$

$\therefore\ 1+\tan^2 A=\sec^2 A$ ________ (II)

(II) নং অভেদে $A=0^\circ$ ও $A=90^\circ$ বসিয়ে কী পাই দেখি।

$A=0^\circ$ হলে II নং অভেদটি সত্য। কিন্তু $A=90^\circ$ হলে $\tan A$ অসংজ্ঞাত।

$\therefore$ **পেলাম,** A-এর সকল মানের জন্য যেখানে $0^\circ\leq A<90^\circ$

$1+\tan^2 A=\sec^2 A$ ________ (II)

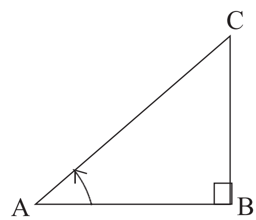
কিন্তু (i) নং সম্পর্কের উভয়দিকে BC^2 দ্বারা ভাগ করি ও কী পাই দেখি।

$$AB^2+BC^2=AC^2$$

বা, $\dfrac{AB^2}{BC^2}+\dfrac{BC^2}{BC^2}=\dfrac{AC^2}{BC^2}$

বা, $\left(\dfrac{AB}{BC}\right)^2+1=\left(\dfrac{AC}{BC}\right)^2$

$\therefore \cot^2 A+1=\operatorname{cosec}^2 A$ ________ (III)



(III) নং অভেদে $A=90^\circ$ ও $A=0^\circ$ বসিয়ে কী পাই দেখি।

$A=90^\circ$ হলে (III) নং অভেদটি সত্য। কিন্তু $A=0^\circ$ হলে $\cot A$ অসংজ্ঞাত।

$\therefore$ **পেলাম,** A-এর সকল মানের জন্য যেখানে $0^\circ<A\leq 90^\circ$

$1+\cot^2 A=\operatorname{cosec}^2 A$ ________ (III)

12 আমি (I), (II) ও (III) নং অভেদের সাহায্যে প্রতিটি ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাতকে অন্য ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাতের মাধ্যমে প্রকাশ করার চেষ্টা করি।

(I) নং থেকে পাই, $\sin^2 A+\cos^2 A=1$

$\therefore \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$ এবং $\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}$

কেবলমাত্র ধনাত্মক মান নেওয়া হলো, যেহেতু $0^\circ\leq A\leq 90^\circ$

(II) নং থেকে পাই, $1+\tan^2 A=\sec^2 A$

$\therefore \sec A=\sqrt{1+\tan^2 A}$ এবং $\tan A=\sqrt{\sec^2 A-1}$

কেবলমাত্র ধনাত্মক মান নেওয়া হলো, যেহেতু $0^\circ\leq A<90^\circ$

(III) নং থেকে পাই, $1+\cot^2 A=\operatorname{cosec}^2 A$

$\therefore \operatorname{cosec} A=\sqrt{1+\cot^2 A}$ এবং $\cot A=\sqrt{\operatorname{cosec}^2 A-1}$

কেবলমাত্র ধনাত্মক মান নেওয়া হলো, যেহেতু $0^\circ< A\leq 90^\circ$

প্রয়োগ : 22. $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ হলে, $\sin\theta = 0.5$ এবং $\cos\theta = 0.6$ হওয়া সম্ভব কিনা যুক্তিসহ লিখি।

$\sin\theta = 0.5 \qquad \therefore \sin^2\theta = 0.25$

$\cos\theta = 0.6 \qquad \therefore \cos^2\theta = 0.36$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 0.25 + 0.36 = 0.61$

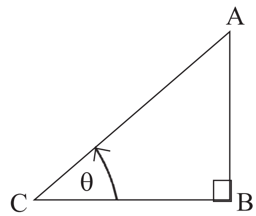
কিন্তু $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ হলে $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\therefore \sin\theta = 0.5$ এবং $\cos\theta = 0.6$ হওয়া সম্ভব নয়।

প্রয়োগ : 23. $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ হলে, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ এবং $\cos\theta = \frac{1}{3}$ হওয়া সম্ভব কিনা যুক্তিসহ লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 24. $0^\circ < \theta < 90^\circ$ হলে, দেখাই যে, $\sin\theta + \cos\theta > 1$

ধরি, ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B$ সমকোণ।



ধরি, $\angle BCA = \theta$ [যেখানে $0^\circ < \theta < 90^\circ$]

$\sin\theta = \frac{AB}{AC}$ এবং $\cos\theta = \frac{BC}{AC}$

$\sin\theta + \cos\theta = \frac{AB}{AC} + \frac{BC}{AC} = \frac{AB+BC}{AC}$

কিন্তু ABC ত্রিভুজে, $AB + BC > AC$ সুতরাং, $\frac{AB+BC}{AC} > 1$

$\therefore \sin\theta + \cos\theta > 1$

(i) $\tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$ (a) যদি লম্ব > ভূমি হয়, তাহলে $\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} > 1$

(b) আবার যদি লম্ব < ভূমি হয়, তাহলে $\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} < 1$ হয়,

(c) যখন লম্ব = ভূমি হয়, তাহলে $\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = 1$ হয়।

তাই $\tan\theta$-এর মান 1-এর বেশি, 1-এর কম এবং 1-এর সমান হতে পারে।

$\tan\theta = \sqrt{2}$ হওয়া সম্ভব কি?

যেহেতু $\sqrt{2} > 1$, তাই, $\tan\theta = \sqrt{2}$ হতে পারে।

(ii) $\operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}}$ যেহেতু, অতিভুজ > লম্ব, সুতরাং, $\frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}} > 1$

$\operatorname{cosec}\theta = \sqrt{3}$ হওয়া সম্ভব কি?

যেহেতু, $\sqrt{3} > 1$ সুতরাং $\operatorname{cosec}\theta$-এর মান $\sqrt{3}$ হওয়া সম্ভব।

প্রয়োগ : 25. আমি $\cot\theta$ ও $\sec\theta$ কে, $\sin\theta$-এর মাধ্যমে প্রকাশ করি।

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

বা, $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$

সুতরাং, $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$

$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$

প্রয়োগ : 26. আমি $\cot\theta$ ও $\operatorname{cosec}\theta$ কে, $\cos\theta$-এর মাধ্যমে প্রকাশ করি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 27. যদি $\tan\theta = \frac{8}{15}$ হয়, তাহলে $\sin\theta$ -এর মান কী হবে হিসাব করে লিখি।

$$\tan\theta = \frac{8}{15}$$

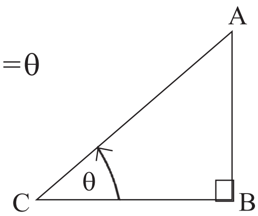
আমরা জানি, $\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta = 1+\left(\frac{8}{15}\right)^2 = 1+\frac{64}{225} = \frac{289}{225}$

$$\therefore \sec\theta = \frac{17}{15}$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{15}{17}$$

$$\therefore \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{15}{17}\right)^2} = \sqrt{\frac{289-225}{289}} = \sqrt{\frac{64}{289}} = \frac{8}{17}$$

অন্যভাবে পাই, $\sin\theta = \frac{\tan\theta}{\sec\theta} = \frac{\frac{8}{15}}{\frac{17}{15}} = \frac{8}{17}$



বিকল্প প্রমাণ : ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle B$ সমকোণ। ধরি, $\angle ACB=\theta$

$$\therefore \tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{8}{15}$$

ধরি, AB=8k একক এবং BC=15k একক (যেখানে $k > 0$)

ABC ত্রিভুজে, $AC^2=AB^2+BC^2 = (8k \text{ একক})^2+(15k \text{ একক})^2$

$= 64k^2$ বর্গএকক $+225k^2$ বর্গএকক $= 289k^2$ বর্গএকক

$\therefore AC=17k$ একক

$\sin\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{8k}{17k}$ $\quad \therefore \sin\theta = \frac{8}{17}$

প্রয়োগ : 28. যদি $\tan\theta = \frac{4}{3}$ হয়, তাহলে $(\sin\theta+\cos\theta)$-এর মান হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

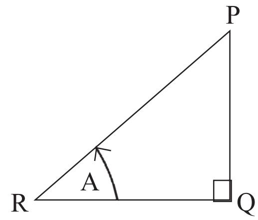
প্রয়োগ : 29. $\sin A = \frac{p}{q}$ হলে, $\tan A$, $\cot A$ ও $\sec A$-এর প্রত্যেকটি কত হবে নির্ণয় করি।

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}} = \frac{\frac{p}{q}}{\sqrt{1-\left(\frac{p}{q}\right)^2}} = \frac{\frac{p}{q}}{\sqrt{\frac{q^2-p^2}{q^2}}} = \frac{p}{q}\times\frac{q}{\sqrt{q^2-p^2}} = \frac{p}{\sqrt{q^2-p^2}}$$

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\sqrt{1-\sin^2 A}}{\sin A} = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{p}{q}\right)^2}}{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt{q^2-p^2}}{q}\times\frac{q}{p} = \frac{\sqrt{q^2-p^2}}{p}$$

$$\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 A}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{p}{q}\right)^2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{q^2-p^2}}{q}} = \frac{q}{\sqrt{q^2-p^2}}$$

বিকল্প প্রমাণ : PQR একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle Q$ সমকোণ।



ধরি, $\angle PRQ = A$

$$\sin A = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{p}{q}$$

ধরি, $PQ = pk$ একক এবং $PR = qk$ একক, যেখানে $k > 0$,

PQR ত্রিভুজে, $QR^2 = PR^2 - PQ^2 = q^2k^2 - p^2k^2 = k^2(q^2 - p^2)$

$\therefore QR = k\sqrt{q^2 - p^2}$

$$\tan A = \frac{PQ}{QR} = \frac{pk}{k\sqrt{q^2-p^2}} = \frac{p}{\sqrt{q^2-p^2}}$$

$$\sec A = \frac{PR}{QR} = \frac{qk}{k\sqrt{q^2-p^2}} = \frac{q}{\sqrt{q^2-p^2}}$$

$$\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{1}{\frac{p}{\sqrt{q^2-p^2}}} = \frac{\sqrt{q^2-p^2}}{p}$$

প্রয়োগ : 30. যদি $\cot\theta = \frac{x}{y}$ হয়, তবে প্রমাণ করি যে, $\frac{x\cos\theta - y\sin\theta}{x\cos\theta + y\sin\theta} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{x\cos\theta - y\sin\theta}{x\cos\theta + y\sin\theta}$$

$$= \frac{\frac{x\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{y\sin\theta}{\sin\theta}}{\frac{x\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{y\sin\theta}{\sin\theta}} \quad \text{[লব ও হরকে } \sin\theta \text{ দিয়ে ভাগ করে পাই]}$$

$$= \frac{x\cot\theta - y}{x\cot\theta + y} = \frac{x \times \frac{x}{y} - y}{x \times \frac{x}{y} + y} = \frac{\frac{x^2-y^2}{y}}{\frac{x^2+y^2}{y}} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \text{ডানপক্ষ}$$

বিকল্প পদ্ধতি : (I) $\cot\theta = \frac{x}{y}$ বা, $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{x}{y}$

$\therefore \frac{\cos\theta}{x} = \frac{\sin\theta}{y} = k$ (ধরি) যেখানে $k>0$

$\therefore \cos\theta = xk$ এবং $\sin\theta = yk$

$$\therefore \frac{x\cos\theta - y\sin\theta}{x\cos\theta + y\sin\theta} = \frac{x \times xk - y \times yk}{x \times xk + y \times yk} = \frac{k(x^2-y^2)}{k(x^2+y^2)} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

> **মনে রাখতে হবে :** $\cot\theta = \frac{x}{y}$ থেকে $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{x}{y}$ পাই,
> কিন্তু $\cos\theta = x$ এবং $\sin\theta = y$ লেখা ভুল। $\cos\theta = xk$ এবং $\sin\theta = yk$ নিতে পারি, যেখানে $k > 0$.

বিকল্প পদ্ধতি : (II) $\cot\theta = \frac{x}{y}$ বা, $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{x}{y}$

বা, $\frac{x\cos\theta}{y\sin\theta} = \frac{x^2}{y^2}$ (উভয়পক্ষে $\frac{x}{y}$ দ্বারা গুণ করে পাই)

বা, $\frac{x\cos\theta + y\sin\theta}{x\cos\theta - y\sin\theta} = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ (যোগ ও ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই)

$\therefore \frac{x\cos\theta - y\sin\theta}{x\cos\theta + y\sin\theta} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

প্রয়োগ : 31. যদি $\sin\theta+\cos\theta=\frac{7}{5}$ এবং $\sin\theta\cos\theta=\frac{12}{25}$ হয়, তাহলে $\sin\theta$ এবং $\cos\theta$-এর মান নির্ণয় করি।

$$\sin\theta+\cos\theta=\frac{7}{5}$$

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{7}{5}-\sin\theta \text{ ———— (i)}$$

$\sin\theta\cos\theta=\frac{12}{25}$, সমীকরণে $\cos\theta=\frac{7}{5}-\sin\theta$ বসিয়ে পাই,

$$\sin\theta\times\left(\frac{7}{5}-\sin\theta\right)=\frac{12}{25}$$

বা, $\frac{7\sin\theta}{5}-\sin^2\theta=\frac{12}{25}$

বা, $7\sin\theta-5\sin^2\theta=\frac{12}{5}$

বা, $35\sin\theta-25\sin^2\theta=12$

বা, $25\sin^2\theta-35\sin\theta+12=0$

বা, $25\sin^2\theta-20\sin\theta-15\sin\theta+12=0$

বা, $5\sin\theta(5\sin\theta-4)-3(5\sin\theta-4)=0$

বা, $(5\sin\theta-4)(5\sin\theta-3)=0$ [উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে পেলাম]

হয়, $5\sin\theta-4=0 \quad \therefore \sin\theta=\frac{4}{5}$

অথবা, $5\sin\theta-3=0 \quad \therefore \sin\theta=\frac{3}{5}$

$\sin\theta=\frac{4}{5}$ হলে, $\cos\theta=\frac{7}{5}-\frac{4}{5}=\frac{3}{5}$

আবার, $\sin\theta=\frac{3}{5}$ হলে, $\cos\theta=\frac{7}{5}-\frac{3}{5}=\frac{4}{5}$

$\therefore\ \left.\begin{array}{l}\sin\theta=\frac{4}{5}\\ \cos\theta=\frac{3}{5}\end{array}\right\}$ অথবা $\begin{array}{l}\sin\theta=\frac{3}{5}\\ \cos\theta=\frac{4}{5}\end{array}$

বিকল্প প্রমাণ : $(\sin\theta-\cos\theta)^2=(\sin\theta+\cos\theta)^2-4\sin\theta\cos\theta$

$$=\left(\frac{7}{5}\right)^2-4\times\frac{12}{25}=\frac{49}{25}-\frac{48}{25}=\frac{1}{25}$$

$$\therefore \sin\theta-\cos\theta=\pm\frac{1}{5}$$

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{7}{5}$

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{5}$

যোগ করে পাই, $2\sin\theta=\frac{8}{5}$

$\therefore \sin\theta=\frac{4}{5}$ এবং $\cos\theta=\frac{7}{5}-\frac{4}{5}=\frac{3}{5}$

আবার, $\sin\theta+\cos\theta=\frac{7}{5}$

$\sin\theta-\cos\theta=-\frac{1}{5}$

$2\sin\theta=\frac{6}{5}$

$\therefore \sin\theta=\frac{3}{5}$ এবং $\cos\theta=\frac{7}{5}-\frac{3}{5}=\frac{4}{5}$

$\therefore\ \sin\theta=\frac{4}{5}, \cos\theta=\frac{3}{5}$ অথবা, $\sin\theta=\frac{3}{5}, \cos\theta=\frac{4}{5}$

প্রয়োগ : 32. $1+2\sin\theta\cos\theta$ -কে পূর্ণবর্গ রাশি হিসাবে প্রকাশ করি।

$$1+2\sin\theta\cos\theta = \sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta \quad [\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1]$$
$$= (\sin\theta+\cos\theta)^2$$

প্রয়োগ : 33. $\frac{\sec\theta+\tan\theta}{\sec\theta-\tan\theta} = 2\frac{51}{79}$ হলে, $\sin\theta$ -এর মান নির্ণয় করি।

$$\frac{\sec\theta+\tan\theta}{\sec\theta-\tan\theta} = 2\frac{51}{79} = \frac{209}{79}$$

বা, $\frac{\sec\theta+\tan\theta+\sec\theta-\tan\theta}{\sec\theta+\tan\theta-\sec\theta+\tan\theta} = \frac{209+79}{209-79}$ (যোগ ও ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই)

বা, $\frac{2\sec\theta}{2\tan\theta} = \frac{288}{130}$

বা, $\frac{\tan\theta}{\sec\theta} = \frac{130}{288} = \frac{65}{144}$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \times \cos\theta = \frac{65}{144}$

$\therefore \sin\theta = \frac{65}{144}$

প্রয়োগ : 34. $\frac{5\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta}{5\cot\theta-\operatorname{cosec}\theta} = \frac{7}{3}$ হলে, $\cos\theta$-এর মান নির্ণয় করি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 35. $x=a\cos\theta$ এবং $y=b\sin\theta$ হলে, সম্পর্ক দুটি থেকে θ অপনয়ন করি ও কী পাই দেখি।

$x=a\cos\theta \quad \therefore \cos\theta = \frac{x}{a}$

আবার, $y=b\sin\theta \quad \therefore \sin\theta = \frac{y}{b}$

যেহেতু, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\therefore \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1$

সুতরাং, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

প্রয়োগ : 36. $2x=3\sin\theta$ এবং $5y=3\cos\theta$ সম্পর্ক দুটি থেকে θ অপনয়ন করে x ও y -এর সম্পর্ক লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 37. $x\cos\theta=3$ এবং $4\tan\theta=y$ সম্পর্ক দুটি থেকে θ অপনয়ন করি ও x এবং y -এর সম্পর্ক লিখি।

$x\cos\theta=3$ বা, $\cos\theta = \frac{3}{x} \quad \therefore \sec\theta = \frac{x}{3}$

$4\tan\theta = y \quad \therefore \tan\theta = \frac{y}{4}$

যেহেতু, $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

সুতরাং, $\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1$

$\therefore \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

প্রয়োগ : 38. $x=a\sec\theta,\ y=b\tan\theta$ সম্পর্ক দুটি থেকে θ অপনয়ন করি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 39. $x = a\cos\theta + b\sin\theta$, $y = b\cos\theta - a\sin\theta$ হলে, সম্পর্ক দুটি থেকে θ অপনয়ন করি।

$$x^2+y^2 = (a\cos\theta+b\sin\theta)^2+(b\cos\theta-a\sin\theta)^2$$
$$= a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta + 2ab\sin\theta\cos\theta + b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta - 2ab\sin\theta\cos\theta$$
$$= a^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta) + b^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$$
$$= a^2+b^2 \quad [\because \sin^2\theta+\sin^2\theta=1]$$

$$\therefore x^2+y^2 = a^2+b^2$$

প্রয়োগ : 40. যদি $\sin\theta + \operatorname{cosec}\theta = 2$ হয়, তাহলে $(\sin^{10}\theta + \operatorname{cosec}^{10}\theta)$-এর মান নির্ণয় করি।

$\sin\theta + \operatorname{cosec}\theta = 2$

বা, $\sin\theta + \dfrac{1}{\sin\theta} = 2$

বা, $\dfrac{\sin^2\theta + 1}{\sin\theta} = 2$

বা, $\sin^2\theta + 1 = 2\sin\theta$

বা, $\sin^2\theta - 2\sin\theta + 1 = 0$

বা, $(\sin\theta - 1)^2 = 0$

বা, $\sin\theta - 1 = 0$

$\therefore$ $\sin\theta = 1$

সুতরাং, $\operatorname{cosec}\theta = 1$

$$\sin^{10}\theta + \operatorname{cosec}^{10}\theta = (1)^{10} + (1)^{10}$$
$$= 1 + 1$$
$$= 2$$

প্রয়োগ : 41. যদি $\cos\theta + \sec\theta = 2$ হয়, তাহলে $(\cos^{11}\theta + \sec^{11}\theta)$-এর মান নির্ণয় করি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 42. যদি $0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$ হয়, তাহলে $(4\operatorname{cosec}^2\alpha + 9\sin^2\alpha)$ -এর সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করি।

$$4\operatorname{cosec}^2\alpha + 9\sin^2\alpha$$
$$= (2\operatorname{cosec}\alpha)^2 + (3\sin\alpha)^2$$
$$= (2\operatorname{cosec}\alpha - 3\sin\alpha)^2 + 2\times 2\operatorname{cosec}\alpha \times 3\sin\alpha$$
$$= (2\operatorname{cosec}\alpha - 3\sin\alpha)^2 + 12 \times \frac{1}{\sin\alpha} \times \sin\alpha$$
$$= (2\operatorname{cosec}\alpha - 3\sin\alpha)^2 + 12$$

যে-কোনো পূর্ণবর্গ সংখ্যামালার সর্বনিম্ন মান 0 (শূন্য)। সুতরাং $(2\operatorname{cosec}\alpha - 3\sin\alpha)^2$-এর ন্যূনতম মান শূন্য।

$\therefore$ $(4\operatorname{cosec}^2\alpha + 9\sin^2\alpha)$-এর সর্বনিম্ন মান 12

$$4\operatorname{cosec}^2\alpha + 9\sin^2\alpha = (2\operatorname{cosec}\alpha + 3\sin\alpha)^2 - 2\times 2\operatorname{cosec}\alpha \times 3\sin\alpha$$
$$= (2\operatorname{cosec}\alpha + 3\sin\alpha)^2 - 12$$

$(2\operatorname{cosec}\alpha + 3\sin\alpha)^2$-এর ন্যূনতম মান 0 (শূন্য)। সুতরাং $(4\operatorname{cosec}^2\alpha + 9\sin^2\alpha)$-এর ন্যূনতম মান -12

তাহলে কোনটি ন্যূনতম মান হবে?

দুটি বর্গ সংখ্যামালার সমষ্টি ঋণাত্মক হতে পারে না। তাই $(4\operatorname{cosec}^2\alpha + 9\sin^2\alpha)$ -এর মান 12।

কষে দেখি 23.3

1. (i) $\sin\theta=\frac{4}{5}$ হলে, $\frac{\operatorname{cosec}\theta}{1+\cot\theta}$ -এর মান নির্ণয় করে লিখি।

   (ii) যদি $\tan\theta=\frac{3}{4}$ হয়, তবে দেখাই যে $\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}=\frac{1}{2}$

   (iii) $\tan\theta=1$ হলে, $\frac{8\sin\theta+5\cos\theta}{\sin^3\theta-2\cos^3\theta+7\cos\theta}$ -এর মান নির্ণয় করি।

2. (i) $\operatorname{cosec}\theta$ এবং $\tan\theta$-কে $\sin\theta$-এর মাধ্যমে প্রকাশ করি।

   (ii) $\operatorname{cosec}\theta$ এবং $\tan\theta$-কে $\cos\theta$-এর মাধ্যমে লিখি।

3. (i) $\sec\theta+\tan\theta=2$ হলে, $(\sec\theta-\tan\theta)$-এর মান নির্ণয় করি।

   (ii) $\operatorname{cosec}\theta-\cot\theta=\sqrt{2}-1$ হলে, $(\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta)$-এর মান হিসাব করে লিখি।

   (iii) $\sin\theta+\cos\theta=1$ হলে, $\sin\theta\times\cos\theta$ -এর মান নির্ণয় করি।

   (iv) $\tan\theta+\cot\theta=2$ হলে, $(\tan\theta-\cot\theta)$-এর মান নির্ণয় করি।

   (v) $\sin\theta-\cos\theta=\frac{7}{13}$ হলে, $\sin\theta+\cos\theta$ -এর মান নির্ণয় করি।

   (vi) $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$ হলে, $(\sin\theta+\cos\theta)$ -এর মান হিসাব করে লিখি।

   (vii) $\sec\theta-\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে, $\sec\theta$ এবং $\tan\theta$ উভয়ের মান নির্ণয় করি।

   (viii) $\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta=\sqrt{3}$ হলে, $\operatorname{cosec}\theta$ এবং $\cot\theta$ উভয়ের মান নির্ণয় করি।

   (ix) $\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=7$ হলে, $\tan\theta$-এর মান হিসাব করে লিখি।

   (x) $\frac{\operatorname{cosec}\theta+\sin\theta}{\operatorname{cosec}\theta-\sin\theta}=\frac{5}{2}$ হলে, $\sin\theta$ -এর মান হিসাব করে লিখি।

   (xi) $\sec\theta+\cos\theta=\frac{5}{2}$ হলে, $(\sec\theta-\cos\theta)$ -এর মান হিসাব করে লিখি।

   (xii) $5\sin^2\theta+4\cos^2\theta=\frac{9}{2}$ সম্পর্কটি থেকে $\tan\theta$-এর মান নির্ণয় করি।

   (xiii) $\tan^2\theta+\cot^2\theta=\frac{10}{3}$ হলে, $\tan\theta+\cot\theta$ এবং $\tan\theta-\cot\theta$ -এর মান নির্ণয় করি এবং সেখান থেকে $\tan\theta$-এর মান হিসাব করে লিখি।

   (xiv) $\sec^2\theta+\tan^2\theta=\frac{13}{12}$ হলে, $(\sec^4\theta-\tan^4\theta)$-এর মান হিসাব করে লিখি।

4. (i) PQR ত্রিভুজে $\angle Q$ সমকোণ। $PR=\sqrt{5}$ একক এবং $PQ-RQ=1$ একক হলে, $\cos P-\cos R$-এর মান নির্ণয় করি।

   (ii) XYZ ত্রিভুজে $\angle Y$ সমকোণ। $XY=2\sqrt{3}$ একক এবং $XZ-YZ=2$ একক হলে, $(\sec X-\tan X)$-এর মান নির্ণয় করি।

5. সম্পর্কগুলি থেকে 'θ' অপনয়ন করি :

   (i) $x=2\sin\theta,\ y=3\cos\theta$ (ii) $5x=3\sec\theta,\ y=3\tan\theta$

6. (i) যদি $\sin\alpha=\frac{5}{13}$ হয়, তাহলে দেখাই যে $\tan\alpha+\sec\alpha=1.5$

   (ii) যদি $\tan A=\frac{n}{m}$ হয়, তাহলে $\sin A$ ও $\sec A$ উভয়ের মান নির্ণয় করি।

(iii) যদি $\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ হয়, তাহলে দেখাই যে, $x\sin\theta = y\cos\theta$

(iv) যদি $\sin\alpha = \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ হয়, তাহলে দেখাই যে, $\cot\alpha = \dfrac{2ab}{a^2-b^2}$

(v) যদি $\dfrac{\sin\theta}{x} = \dfrac{\cos\theta}{y}$ হয়, তাহলে দেখাই যে, $\sin\theta - \cos\theta = \dfrac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(vi) যদি $(1+4x^2)\cos A = 4x$ হয়, তাহলে দেখাই যে, $\operatorname{cosec}A + \cot A = \dfrac{1+2x}{1-2x}$

7. যদি $x = a\sin\theta$ এবং $y = b\tan\theta$ হয়, তাহলে প্রমাণ করি যে, $\dfrac{a^2}{x^2} - \dfrac{b^2}{y^2} = 1$

8. যদি $\sin\theta + \sin^2\theta = 1$ হয়, তাহলে প্রমাণ করি যে, $\cos^2\theta + \cos^4\theta = 1$

9. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :

(i) যদি $3x = \operatorname{cosec}\alpha$ এবং $\dfrac{3}{x} = \cot\alpha$ হয়, তাহলে $3\left(x^2 - \dfrac{1}{x^2}\right)$-এর মান (a) $\dfrac{1}{27}$ (b) $\dfrac{1}{81}$ (c) $\dfrac{1}{3}$ (d) $\dfrac{1}{9}$

(ii) যদি $2x = \sec A$ এবং $\dfrac{2}{x} = \tan A$ হয়, তাহলে $2\left(x^2 - \dfrac{1}{x^2}\right)$-এর মান (a) $\dfrac{1}{2}$ (b) $\dfrac{1}{4}$ (c) $\dfrac{1}{8}$ (d) $\dfrac{1}{16}$

(iii) $\tan\alpha + \cot\alpha = 2$ হলে, $(\tan^{13}\alpha + \cot^{13}\alpha)$-এর মান (a) 1 (b) 0 (c) 2 (d) কোনটিই নয়

(iv) যদি $\sin\theta - \cos\theta = 0$ $(0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ)$ এবং $\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta = x$ হয়, তাহলে x-এর মান
(a) 1 (b) 2 (c) $\sqrt{2}$ (d) $2\sqrt{2}$

(v) $2\cos3\theta = 1$ হলে, θ-এর মান (a) 10° (b) 15° (c) 20° (d) 30°

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) যদি, $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$ হয়, তাহলে $(\sec^2\alpha + \cos^2\alpha)$-এর সর্বনিম্ন মান 2

(ii) $(\cos0^\circ \times \cos1^\circ \times \cos2^\circ \times \cos3^\circ \times .... \cos90^\circ)$ -এর মান 1

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) $\left(\dfrac{4}{\sec^2\theta} + \dfrac{1}{1+\cot^2\theta} + 3\sin^2\theta\right)$ -এর মান ________

(ii) $\sin(\theta - 30^\circ) = \dfrac{1}{2}$ হলে, $\cos\theta$ -এর মান ________

(iii) $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \dfrac{1}{2}$ হলে, $\cos^4\theta - \sin^4\theta$ -এর মান ________

10. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)**

(i) যদি $r\cos\theta = 2\sqrt{3}$, $r\sin\theta = 2$ এবং $0^\circ < \theta < 90^\circ$ হয়, তাহলে r এবং θ উভয়ের মান নির্ণয় করি।

(ii) যদি $\sin A + \sin B = 2$ হয়, যেখানে $0^\circ \leq A \leq 90^\circ$ এবং $0^\circ \leq B \leq 90^\circ$, তাহলে $(\cos A + \cos B)$-এর মান নির্ণয় করি।

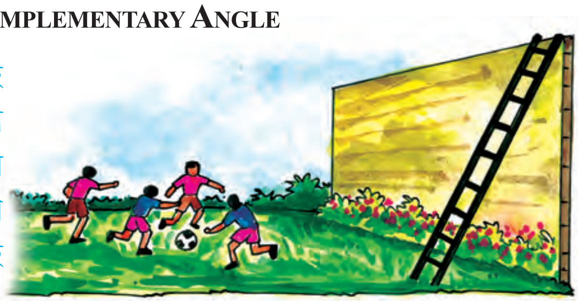
(iii) যদি $0^\circ < \theta < 90^\circ$ হয়, তাহলে $(9\tan^2\theta + 4\cot^2\theta)$-এর সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করি।

(iv) $(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha)$-এর মান নির্ণয় করি।

(v) যদি $\operatorname{cosec}^2\theta = 2\cot\theta$ এবং $0^\circ < \theta < 90^\circ$ হয়, তাহলে θ-এর মান নির্ণয় করি।

24 পূরক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত
TRIGONOMETRIC RATIOS OF COMPLEMENTARY ANGLE

আমরা যে বড়ো মাঠে রোজ খেলা করি, তার পাশেই রামুদের বাগান বাড়ি। প্রায়ই আমাদের খেলার বল ওদের বাগানে পড়ে যায়। আজ আমরা ওদের বাগানের পাঁচিলের দেয়ালে হেলান দিয়ে একটি মই রেখে দিয়েছি। আমরা ঠিক করেছি বাগানে বল পড়লে ওই মই-এর সাহায্যে বাগানে গিয়ে বল আনতে পারব।



(1) কিন্তু দেখছি মইটি ওইভাবে রাখায় মই, ভূমি ও বাগানের পাঁচিলের ধার সমকোণী ত্রিভুজ আকারে আছে। এই সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণগুলির মধ্যে সম্পর্ক লিখি।

ধরি, পাশের ছবির AB পাঁচিল BC ভূমির উপর লম্ব এবং AC মই-এর দৈর্ঘ্য; AC , BC-এর সঙ্গে θ কোণ করে আছে।

$\therefore$ ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ তৈরি হয়েছে যার $\angle ABC=90^\circ$ এবং $\angle BCA=\theta$

(2) কিন্তু $\angle CAB$-এর মান কত হবে?

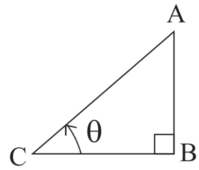
$\angle BCA=\theta$ হলে $\angle CAB=90^\circ-\theta$

বুঝেছি, $\angle BCA$ ও $\angle CAB$ পরস্পর $\square$ [পূরক/সম্পূরক]

$\angle BCA$ ও $\angle CAB$ দুটি পরস্পর পূরক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত কী হবে ছবি এঁকে হিসাব করি।

ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle B=90^\circ$

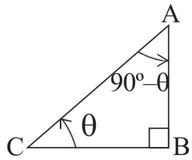
ধরি, $\angle BCA=\theta \quad \therefore \angle CAB=90^\circ-\theta$



$\therefore\ \sin\theta=\frac{AB}{AC}$, $\cos\theta=\frac{BC}{AC}$, $\tan\theta=\frac{\square}{\square}$, $\operatorname{cosec}\theta=\frac{AC}{AB}$, $\sec\theta=\frac{\square}{\square}$

এবং $\cot\theta=\frac{BC}{AB}$

(3) আমি সমকোণী ত্রিভুজ ABC-এর $(90^\circ-\theta)$ সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি লিখি।



$\sin(90^\circ-\theta)=\sin\angle CAB=\frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}=\frac{BC}{AC}$

$\cos(90^\circ-\theta)=\cos\angle CAB=\frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}=\frac{AB}{AC}$

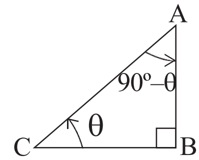
$\tan(90^\circ-\theta)=\tan\angle CAB=\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}=\frac{\square}{\square}$

$\operatorname{cosec}(90^\circ-\theta)=\operatorname{cosec}\angle CAB=\frac{\square}{\square}=\frac{AC}{BC}$

$\sec(90^\circ-\theta)=\sec\angle CAB=\frac{\square}{\square}=\frac{\square}{\square}$

$\cot(90^\circ-\theta)=\cot\angle CAB=\frac{\square}{\square}=\frac{AB}{BC}$

4 সমকোণী ত্রিভুজের $\angle BCA$ ও $\angle CAB$-এর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি তুলনা করে কী পাই লিখি।



দেখছি, $\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$ | $\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$

$\tan(90^\circ-\theta)=\cot\theta$ | $\cot(90^\circ-\theta)=\boxed{}$ [নিজে করি]

$\sec(90^\circ-\theta)=\text{cosec}\,\theta$ | $\text{cosec}(90^\circ-\theta)=\boxed{}$ [নিজে করি]

বুঝেছি, যদি মইটি ভূমির সঙ্গে 60° কোণ করে, অর্থাৎ যদি $\theta=60^\circ$ হয়, $\sin\theta=\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

আবার, $\cos(90^\circ-\theta)=\cos(90^\circ-60^\circ)$

$=\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ পেলাম, $\sin\theta=\cos(90^\circ-\theta)$

যদি $\theta=45^\circ$ হয় $\tan\theta=\cot(90^\circ-\theta)$ **[নিজে যাচাই করি]**

দেখছি, 0° এবং 90°-এর মধ্যে সকল কোণের জন্য পূরক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের অভেদগুলি সত্য।

5 কিন্তু $\theta=0^\circ$ এবং $\theta=90^\circ$ হলে কী পাব দেখি।

$\theta=0^\circ$ হলে, $\tan0^\circ=0=\cot(90^\circ-0^\circ)$

এবং $\sec0^\circ=1=\text{cosec}\,(90^\circ-0^\circ)$

$\theta=90^\circ$ হলে, $\tan 90^\circ$, $\sec 90^\circ$ অসংজ্ঞাত।

এবং $\theta=0^\circ$ হলে, $\cot 0^\circ$, $\text{cosec}\ 0^\circ$ অসংজ্ঞাত।

প্রয়োগ : 1. $\frac{\cos 53^\circ}{\sin 37^\circ}$ -এর মান নির্ণয় করি।

আমরা জানি, $\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$

$\cos 53^\circ=\cos(90^\circ-37^\circ)=\sin 37^\circ$

$\therefore \frac{\cos 53^\circ}{\sin 37^\circ}=\frac{\sin 37^\circ}{\sin 37^\circ}=1$

প্রয়োগ : 2. $\frac{\sec 49^\circ}{\text{cosec}\,41^\circ}$ -এর মান নির্ণয় করি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 3. দেখাই যে, $\cos 55^\circ\cos 35^\circ-\sin 55^\circ\sin 35^\circ=0$

$\cos 55^\circ\cos 35^\circ-\sin 55^\circ\sin 35^\circ$

$=\cos(90^\circ-35^\circ)\cos 35^\circ-\sin(90^\circ-35^\circ)\sin 35^\circ$

$=\sin 35^\circ\cos 35^\circ-\cos 35^\circ\sin 35^\circ=0$ **(প্রমাণিত)**

প্রয়োগ : 4. দেখাই যে, $\sin 43^\circ\cos 47^\circ+\cos 43^\circ\sin 47^\circ=1$ [নিজে করি]

প্রয়োগ : 5. প্রমাণ করি যে, $\tan 7^\circ\tan 23^\circ\tan 60^\circ\tan 67^\circ\tan 83^\circ=\sqrt{3}$

$\tan 7^\circ\tan 23^\circ\tan 60^\circ\tan 67^\circ\tan 83^\circ$

$=(\tan 7^\circ\tan 83^\circ)\tan 60^\circ(\tan 23^\circ\tan 67^\circ)$

$=\{\tan 7^\circ\times(\tan(90^\circ-7^\circ)\}\tan 60^\circ\{\tan 23^\circ\times\tan(90^\circ-23^\circ)\}$

$=(\tan 7^\circ\cot 7^\circ)\tan60^\circ(\tan 23^\circ\cot 23^\circ)=1\times\sqrt{3}\times1$ $(\because \tan\theta\times\cot\theta=1)$

$=\sqrt{3}$ (প্রমাণিত)

প্রয়োগ : 6. দেখাই যে, $\sin^2 21^\circ+\sin^2 69^\circ=1$

$\sin 69^\circ=\sin(90^\circ-21^\circ)=\cos 21^\circ$

$\therefore \sin^2 21^\circ+\sin^2 69^\circ=\sin^2 21^\circ+\cos^2 21^\circ=1$ $[\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1]$

প্রয়োগ : 7. দেখাই যে, $\tan 15^\circ + \tan 75^\circ = \dfrac{\sec^2 15^0}{\sqrt{\sec^2 15^0 - 1}}$

$\tan 15^\circ + \tan 75^\circ$

$= \tan 15^\circ + \tan(90^\circ - 15^\circ)$

$= \tan 15^\circ + \cot 15^\circ = \tan 15^\circ + \dfrac{1}{\tan 15^\circ}$

$= \dfrac{\tan^2 15^\circ + 1}{\tan 15^\circ} = \dfrac{\sec^2 15^\circ}{\sqrt{\sec^2 15^\circ - 1}}$

[$\because \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ এবং $\tan\theta = \sqrt{\sec^2\theta - 1}$]

(প্রমাণিত)

প্রয়োগ : 8. A ও B দুটি পরস্পর পূরক কোণ হলে, দেখাই যে, $(\sin A + \sin B)^2 = 1 + 2\sin A \sin B$

A ও B দুটি পরস্পর পূরক কোণ।

সুতরাং, $A + B = 90^\circ$

$\therefore B = 90^\circ - A$

$\sin B = \sin(90^\circ - A) = \cos A$

$(\sin A + \sin B)^2$

$= (\sin A + \cos A)^2$

$= \sin^2 A + \cos^2 A + 2\sin A \cos A$

$= 1 + 2\sin A \cos A$

$= 1 + 2\sin A \cos(90^\circ - B)$

$= 1 + 2\sin A \sin B$ (প্রমাণিত)

প্রয়োগ : 9. যদি $\sec\theta = \operatorname{cosec}\varphi$ হয় এবং $0^\circ < \theta < 90^\circ$, $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ তাহলে $\sin(\theta + \varphi)$-এর মান নির্ণয় করি।

$\sec\theta = \operatorname{cosec}\varphi$

বা, $\sec\theta = \sec(90^\circ - \varphi)$

বা, $\theta = 90^\circ - \varphi$ $\quad \therefore \theta + \varphi = 90^\circ \quad \therefore \sin(\theta + \varphi) = \sin 90^\circ = 1$

প্রয়োগ : 10. যদি $\tan 2A = \cot(A - 18^\circ)$ হয়, যেখানে 2A ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ, তাহলে A-এর মান নির্ণয় করি।

$\tan 2A = \cot(A - 18^\circ)$

বা, $\cot(90^\circ - 2A) = \cot(A - 18^\circ)$ [$\because \cot(90^\circ - \theta) = \tan\theta$]

বা, $90^\circ - 2A = A - 18^\circ$

বা, $-2A - A = -90^\circ - 18^\circ$

বা, $-3A = -108^\circ \quad \therefore A = 36^\circ$

প্রয়োগ : 11. যদি $\sec 4A = \operatorname{cosec}(A - 20^\circ)$ হয়, যেখানে 4A ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ, তাহলে A-এর মান নির্ণয় করি।

$\sec 4A = \operatorname{cosec}(A - 20^\circ)$

বা, $\operatorname{cosec}(90^\circ - 4A) = \operatorname{cosec}(A - 20^\circ)$ [$\because \operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) = \sec\theta$]

বা, $90^\circ - 4A = A - 20^\circ$

বা, $-4A - A = -20^\circ - 90^\circ$

বা, $-5A = -110^\circ \quad \therefore A = 22^\circ$

প্রয়োগ : 12. $\cos 43^\circ = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ হলে, $\tan 47^\circ$ -এর মান হিসাব করে লিখি।

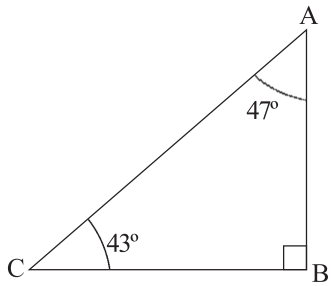
$\cos 43^\circ = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

$\sin^2 43^\circ = 1 - \cos^2 43^\circ = 1 - \dfrac{x^2}{x^2 + y^2} = \dfrac{x^2 + y^2 - x^2}{x^2 + y^2} = \dfrac{y^2}{x^2 + y^2}$

$\therefore \sin 43^\circ = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ [যেহেতু 43° ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ, সুতরাং $\sin 43^\circ$-এর মান ঋণাত্মক হতে পারে না]

$$\therefore \tan 47^\circ = \tan(90^\circ - 43^\circ) = \cot 43^\circ = \frac{\cos 43^\circ}{\sin 43^\circ} = \frac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \times \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y} = \frac{x}{y}$$

বিকল্প পদ্ধতি :



ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle B=90^\circ$

ধরি, $\angle BCA=43^\circ$; সুতরাং, $\angle CAB = 90^\circ-43^\circ=47^\circ$

$$\cos 43^\circ = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{BC}{AC}$$

ধরি, $BC = kx$ একক এবং $AC = k\sqrt{x^2-y^2}$ একক। যেখানে $k > 0$.

সমকোণী ΔABC -তে, $AB^2 = AC^2-BC^2 = (k\sqrt{x^2+y^2}\text{ একক })^2-(kx\text{ একক})^2$

$= (k^2x^2 + k^2y^2 - k^2x^2)$ বর্গ একক $= k^2y^2$ বর্গ একক

$\therefore AB = ky$ একক

$$\therefore \tan 47^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{kx}{ky} = \frac{x}{y}$$

প্রয়োগ : 13. $\tan 50^\circ = \frac{p}{q}$ হলে, $\cos 40^\circ$ -এর মান নির্ণয় করি। **[নিজে করি]**

কষে দেখি 24

1. মান নির্ণয় করি : (i) $\frac{\sin 38^\circ}{\cos 52^\circ}$ (ii) $\frac{\operatorname{cosec} 79^\circ}{\sec 11^\circ}$ (iii) $\frac{\tan 27^\circ}{\cot 63^\circ}$

2. দেখাই যে : (i) $\sin 66^\circ - \cos 24^\circ = 0$ (ii) $\cos^2 57^\circ + \cos^2 33^\circ = 1$
(iii) $\cos^2 75^\circ - \sin^2 15^\circ = 0$ (iv) $\operatorname{cosec}^2 48^\circ - \tan^2 42^\circ = 1$
(v) $\sec 70^\circ \sin 20^\circ + \cos 20^\circ \operatorname{cosec} 70^\circ = 2$

3. যদি α ও β কোণ দুটি পরস্পর পূরক কোণ হয়, তাহলে দেখাই যে,
(i) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta = 1$ (ii) $\cot\beta+\cos\beta = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}(1+\sin\beta)$ (iii) $\frac{\sec\alpha}{\cos\alpha} - \cot^2\beta = 1$

4. যদি $\sin 17^\circ = \frac{x}{y}$ হয়, তাহলে দেখাই যে, $\sec 17^\circ - \sin 73^\circ = \frac{x^2}{y\sqrt{y^2-x^2}}$

5. দেখাই যে, $\sec^2 12^\circ - \frac{1}{\tan^2 78^\circ} = 1$

6. $\angle A + \angle B = 90^\circ$ হলে, দেখাই যে, $1+\frac{\tan A}{\tan B} = \sec^2 A$

7. দেখাই যে, $\operatorname{cosec}^2 22^\circ \cot^2 68^\circ = \sin^2 22^\circ + \sin^2 68^\circ + \cot^2 68^\circ$

8. যদি $\angle P + \angle Q = 90^\circ$ হয়, তবে দেখাই যে, $\sqrt{\frac{\sin P}{\cos Q} - \sin P \cos Q} = \cos P$

9. প্রমাণ করি যে, $\cot 12^\circ \cot 38^\circ \cot 52^\circ \cot 78^\circ \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

10. O কেন্দ্রীয় যে-কোনো একটি বৃত্তের AOB একটি ব্যাস এবং বৃত্তের উপর C যে-কোনো একটি বিন্দু। এবার A, C; B, C এবং O, C যুক্ত করে দেখাই যে,
(i) $\tan\angle ABC = \cot\angle ACO$ (ii) $\sin^2\angle BCO + \sin^2\angle ACO = 1$
(iii) $\operatorname{cosec}^2\angle CAB - 1 = \tan^2\angle ABC$

11. ABCD একটি আয়তাকার চিত্র। A, C যুক্ত করে প্রমাণ করি যে,
(i) $\tan\angle ACD = \cot\angle ACB$ (ii) $\tan^2\angle CAD + 1 = \frac{1}{\sin^2\angle BAC}$

12. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :

(i) $(\sin 43^\circ \cos 47^\circ + \cos 43^\circ \sin 47^\circ)$ -এর মান

(a) 0 (b) 1 (c) $\sin 4^\circ$ (d) $\cos 4^\circ$

(ii) $\left(\frac{\tan 35^\circ}{\cot 55^\circ} + \frac{\cot 78^\circ}{\tan 12^\circ}\right)$ -এর মান

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) কোনোটিই নয়

(iii) $\{\cos(40^\circ+\theta) - \sin(50^\circ-\theta)\}$-এর মান

(a) $2\cos\theta$ (b) $7\sin\theta$ (c) 0 (d) 1

(iv) ABC একটি ত্রিভুজ। $\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) =$

(a) $\sin\frac{A}{2}$ (b) $\cos\frac{A}{2}$ (c) $\sin A$ (d) $\cos A$

(v) $A+B=90^\circ$ এবং $\tan A=\frac{3}{4}$ হলে, cot B-এর মান

(a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{4}{3}$ (c) $\frac{3}{5}$ (d) $\frac{4}{5}$

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) $\cos 54^\circ$ এবং $\sin 36^\circ$ -এর মান সমান।

(ii) $(\sin 12^\circ - \cos 78^\circ)$ -এর সরলতম মান 1.

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) $(\tan 15^\circ \times \tan 45^\circ \times \tan 60^\circ \times \tan 75^\circ)$-এর মান ________

(ii) $(\sin 12^\circ \times \cos 18^\circ \times \sec 78^\circ \times \operatorname{cosec} 72^\circ)$-এর মান ________

(iii) A এবং B পরস্পর পূরক কোণ হলে, $\sin A =$ ________

13. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.) :**

(i) $\sin 10\theta = \cos 8\theta$ এবং 10θ ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হলে, $\tan 9\theta$-এর মান নির্ণয় করি।

(ii) $\tan 4\theta \times \tan 6\theta = 1$ এবং 6θ ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হলে, θ-এর মান নির্ণয় করি।

(iii) $\frac{2\sin^2 63^\circ + 1 + 2\sin^2 27^\circ}{3\cos^2 17^\circ - 2 + 3\cos^2 73^\circ}$ -এর মান নির্ণয় করি।

(iv) $(\tan 1^\circ \times \tan 2^\circ \times \tan 3^\circ \ldots\ldots\ldots\ldots \tan 89^\circ)$ -এর মান নির্ণয় করি।

(v) $\sec 5A = \operatorname{cosec}(A+36^\circ)$ এবং 5A ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হলে, A-এর মান নির্ণয় করি।

25 ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের প্রয়োগ : উচ্চতা ও দূরত্ব

APPLICATION OF TRIGONOMETRIC RATIOS : HEIGHTS & DISTANCES

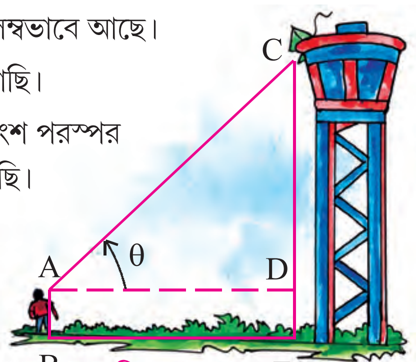
আমরা যে বড়ো মাঠে রোজ বিকালে খেলা করি সেই মাঠের একদিকে রামুদের বাগানবাড়ি। কিছু দূরে ওই এলাকার জলের ট্যাঙ্ক অনেক উঁচু থামের উপর রাখা আছে। আমরা মাঝে মাঝে ওই মাঠে ঘুড়ি ওড়াই। প্রায় প্রতিদিনই সতীশের ঘুড়ি ভূমি থেকে সবচেয়ে উঁচুতে ওঠে এবং ওই উঁচুতে রাখা জলের ট্যাঙ্কের উপরে উঠে যায়।

1 কিন্তু ওই এলাকার জলের ট্যাঙ্কটি ভূমি থেকে কত উপরে আছে কীভাবে পাব ছবি এঁকে দেখি।

ধরি, CE জলের ট্যাঙ্কের উচ্চতা এবং জলের ট্যাঙ্কটি ভূমিতলে লম্বভাবে আছে।

AB আমার উচ্চতা এবং আমি ভূমিতলে লম্বভাবে দাঁড়িয়ে আছি।

জলের ট্যাঙ্ক থেকে আমি BE দূরত্বে আছি, AD ও BE সরলরেখাংশ পরস্পর সমান্তরাল। আমি জলের ট্যাঙ্কের শীর্ষবিন্দু AC রেখা বরাবর দেখছি।



চিত্র (i)

2 এই AC রেখাকে কী বলা হয়?

এই AC রেখাকে **দৃষ্টির রেখা [Line of Sight]** বলা হয়।

বুঝেছি, কোনো পর্যবেক্ষক যখন কোনো বস্তু দেখেন পর্যবেক্ষকের চোখ ও ওই বস্তুর ওপর কোনো বিন্দুর সংযোজক রেখাই হলো দৃষ্টির রেখা। [Line of Sight]

দেখছি ট্যাঙ্কের চূড়া দেখার জন্য আমার দৃষ্টিররেখা AC অনুভূমিক রেখা AD-এর সঙ্গে একটি কোণ (θ) করে আছে।

3 এই θ কোণটিকে কী বলা হয়?

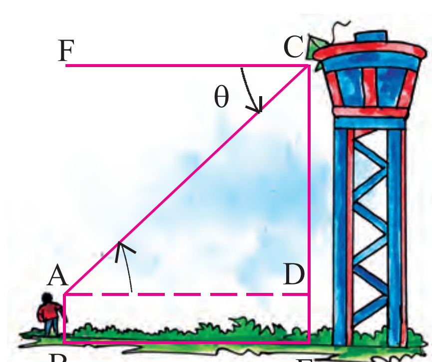
এই কোণকে **উন্নতি কোণ [Angle of Elevation]** বলা হয়।

বুঝেছি, যখন পর্যবেক্ষক ভূমিতে দাঁড়িয়ে ভূমি থেকে উপরে অবস্থিত কোনো বস্তু দেখেন, তখন পর্যবেক্ষকের দৃষ্টির রেখা অনুভূমিক রেখার সঙ্গে যে কোণ করে থাকে তাকে উন্নতি কোণ বলা হয় এবং উন্নতি কোণের ক্ষেত্রে পর্যবেক্ষকের মাথা উপরের দিকে উঠে থাকে।

4 কিন্তু আমি যদি ট্যাঙ্কের উপরে C বিন্দুতে থাকতাম এবং সেখান থেকে ভূমিতে AB অবস্থানে দাঁড়ানো আমার বন্ধুর মাথার দিকে তাকাতাম তখন কী ধরনের কোণ পেতাম ছবি এঁকে দেখি।

ধরি, আমার বন্ধু ভূমিতে AB অবস্থানে আছে। আমি জলের ট্যাঙ্কের চূড়ার C বিন্দু থেকে A বিন্দু দেখছি।

সেক্ষেত্রে আমার দৃষ্টি রেখা CA অনুভূমিক রেখার সমান্তরাল রেখা CF-এর সঙ্গে θ কোণ করে আছে। [$\because \angle DAC=\theta$, $CF \parallel AD$, সুতরাং একান্তর $\angle DAC = \angle FCA$]

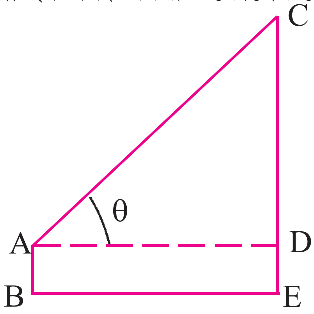


চিত্র (ii)

5 এইরকম θ কোণকে কী বলা হয়?

এই কোণকে **অবনতি কোণ [Angle of Depression]** বলা হয়।

বুঝেছি, যখন পর্যবেক্ষক তার অবস্থানের নীচের দিকে অবস্থিত কোনো বস্তু দেখে তখন তার দৃষ্টির রেখা অনুভূমিক রেখার সঙ্গে যে কোণ করে সেই কোণকে অবনতি কোণ বলা হয় এবং অবনতি কোণের ক্ষেত্রে পর্যবেক্ষকের মাথা নীচু হয়ে থাকে।



6 চিত্র (i) থেকে জলের ট্যাঙ্কের উচ্চতা কীভাবে পাব দেখি।

জলের ট্যাঙ্কের উচ্চতা $CE = CD + DE$

$= CD + AB$

সমকোণী ত্রিভুজ ADC-এর $\angle D = 90^{\circ}$

উন্নতি কোণ $\angle DAC = \theta$

$\therefore$ ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সাহায্যে নির্ণয়ের জন্য AC অথবা AD-র মান জানা প্রয়োজন।

7 যদি $\theta = 30^{\circ}$,অর্থাৎ A বিন্দু থেকে ট্যাঙ্কের চূড়ার উন্নতি কোণ 30° এবং $AD = 120$ মিটার অর্থাৎ জলের ট্যাঙ্ক থেকে আমার দূরত্ব 120 মিটার হয়, তবে জলের ট্যাঙ্কের উচ্চতা কী হবে হিসাব করে লিখি।

সমকোণী ত্রিভুজ ACD-এর ($\angle D = 90^{\circ}$) ; CD নির্ণয় করতে হবে। এক্ষেত্রে এমন একটি ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নেব যেখানে CD ও AD আছে।

সমকোণী ত্রিভুজ ACD-তে, $\tan\theta = \frac{CD}{AD}$ বা, $\tan 30^{\circ} = \frac{CD}{120 \text{ মি.}}$

বা, $\frac{CD}{120 \text{ মি.}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore CD = \frac{120 \text{ মি.}}{\sqrt{3}} = \frac{40\times3 \text{ মি.}}{\sqrt{3}} = 40\sqrt{3}$ মি.

$\therefore$ সেক্ষেত্রে ট্যাঙ্কের উচ্চতা = [$40\sqrt{3}$ মিটার + আমার উচ্চতা (AB)]

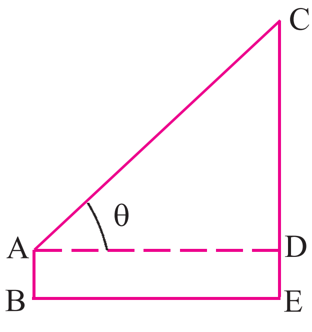
কোনো উচ্চতা নির্ণয়ের জন্য আমরা কী কী করলাম লিখি।

(i) আমার অবস্থান থেকে যার উচ্চতা নির্ণয় করব তার দূরত্ব নির্ণয় করলাম।

(ii) যার উচ্চতা নির্ণয় করব তার শীর্ষবিন্দুর উন্নতি কোণ নির্ণয় করলাম।

(iii) এবার ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সাহায্যে উচ্চতা নির্ণয় করলাম।

8 কিন্তু যদি $\theta = 30^{\circ}$ এবং $AC = 150$ মিটার হয়, তবে উচ্চতা কী হবে নির্ণয় করি।



সমকোণী ত্রিভুজ ACD-এর $\angle D = 90^{\circ}$; CD নির্ণয় করতে হবে।

এমন ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নেব যেখানে CD ও AC আছে,

সমকোণী ΔACD-তে; $\sin 30^{\circ} = \frac{CD}{AC}$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{CD}{150 \text{ মি.}}$

বা, $CD = \frac{150 \text{ মি.}}{2} = 75$ মি.

$\therefore$ সেক্ষেত্রে জলের ট্যাঙ্কের উচ্চতা = [75 মিটার + AB]

মনে রাখতে হবে : বিশেষভাবে কিছু বলা না থাকলে এই ধরনের সমস্যায় যে ব্যক্তির সাপেক্ষে উন্নতি বা অবনতি কোণ সংক্রান্ত তথ্য দেওয়া থাকবে, ওই ব্যক্তির উচ্চতাকে অগ্রাহ্য করে ছবি আঁকতে হবে। অর্থাৎ এই সমস্যাগুলিতে ব্যক্তিকে একটি বিন্দু হিসাব ধরে নিতে হবে। গাছ, স্তম্ভ, লাইট-পোস্ট ইত্যাদি ভূমিতলের উপর লম্বভাবে আছে ধরে নিতে হবে।

প্রয়োগ : 1. রীতাদের পুকুরের পাড়ে একটি নারকেল গাছ আছে। পুকুরের পাড় ধরে 12 মিটার দূরে একটি বিন্দুর সাপেক্ষে ওই গাছের শীর্ষবিন্দুর উন্নতি কোণ 60° হলে, রীতাদের পুকুর পাড়ের ওই নারকেল গাছটির উচ্চতা হিসাব করে লিখি। [$\sqrt{3}=1.732$ (প্রায়)]

ধরি, AB নারকেল গাছের উচ্চতা যা ভূমিতলের উপর লম্বভাবে আছে। B বিন্দু থেকে পুকুরের পাড় ধরে C বিন্দুতে গিয়ে C বিন্দুর সাপেক্ষে A বিন্দুর উন্নতি কোণ 60° হয়েছে।

A ও C বিন্দুদ্বয় যুক্ত করে ABC সমকোণী ত্রিভুজ পেয়েছি যার $\angle B=90^{\circ}$ এবং $\angle ACB=60^{\circ}$

$\therefore$ $\angle ACB$-এর পরিপ্রেক্ষিতে ভূমি BC=12 মিটার। সমকোণী ΔABC-তে, ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সাহায্যে পাই,

$$\tan\angle ACB=\tan 60^{\circ}=\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}=\frac{AB}{BC}=\frac{AB}{12\text{ মি.}}$$

বা, $\tan 60^{\circ}=\dfrac{AB}{12\text{ মি.}}$

বা, $\sqrt{3}=\dfrac{AB}{12\text{ মি.}}$

বা, $AB=12\sqrt{3}$ মি. $=12\times1.732$ মি. (প্রায়)

$=20.784$ মি. (প্রায়)

$\therefore$ নারকেল গাছটির উচ্চতা $=20.784$ মিটার (প্রায়)।

প্রয়োগ : 2. যদি একটি নারকেল গাছের গোড়া থেকে অনুভূমিক তলে 20 মিটার দূরের একটি বিন্দুর সাপেক্ষে গাছটির অগ্রভাগের উন্নতি কোণ 60° হয়, তবে গাছটির উচ্চতা হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

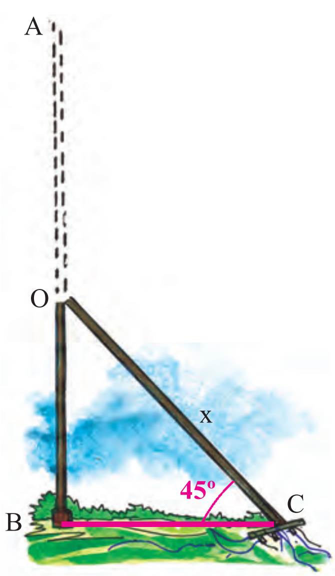
প্রয়োগ : 3. গতকাল ঝড়ে একটি লাইটপোস্ট মচকে গিয়ে তার অগ্রভাগ পাদবিন্দু থেকে 4 মিটার দূরে ভূমি স্পর্শ করেছে এবং অনুভূমিক রেখার সঙ্গে 45° কোণ উৎপন্ন করেছে। লাইটপোস্টটি কত লম্বা ছিল হিসাব করে লিখি। [$\sqrt{2}=1.414$ (প্রায়)]

ধরি, AB দৈর্ঘ্যের লাইটপোস্টটি O বিন্দুতে মচকে গিয়ে তার অগ্রভাগ C বিন্দুতে ভূমি স্পর্শ করেছে।

$\therefore$ AO = OC = x মি. (ধরি)

$\therefore$ AB = AO+OB = CO+OB

$\therefore$ OBC একটি সমকোণী ত্রিভুজ তৈরি হয়েছে যার $\angle B=90^{\circ}$, BC=4 মিটার ও OC=x মি.



সমকোণী ΔOBC -তে, $\cos 45^{\circ}=\dfrac{BC}{OC}=\dfrac{4}{x}$

বা, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{4}{x}$ $\quad\therefore x=4\sqrt{2}$

$\therefore$ $OC=4\sqrt{2}$ মি. $=4\times1.414$ মি. $=5.656$ মি. (প্রায়)

ΔOBC -এর, $\angle OCB=45^{\circ}$ $\quad\therefore \angle BOC=90^{\circ}-45^{\circ}=45^{\circ}$

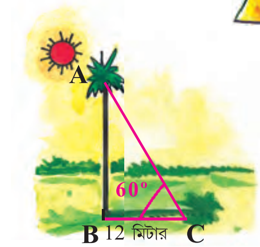
$\therefore$ BO = CO = 4 মি.

$\therefore$ লাইটপোস্টের দৈর্ঘ্য $=(4+5.656)$ মিটার (প্রায়)

$=9.656$ মিটার (প্রায়)

প্রয়োগ : 4. সূর্যের উন্নতি কোণ 60° হলে একটি তালগাছের ছায়ার দৈর্ঘ্য 12 মিটার হয়। তালগাছটির উচ্চতা নির্ণয় করি।

পাশের চিত্রে, AB তালগাছের উচ্চতা এবং BC তালগাছের ছায়ার দৈর্ঘ্য যখন $\angle ACB=60^\circ$



সমকোণী ΔABC-তে, $\tan 60^\circ = \dfrac{AB}{BC}$

বা, $\sqrt{3} = \dfrac{AB}{12 \text{ মি.}}$

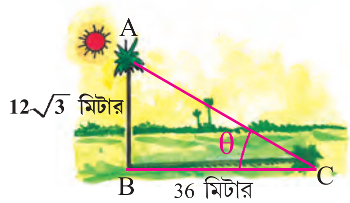
বা, $AB = 12\sqrt{3}$ মি.

$\therefore$ তালগাছের উচ্চতা $12\sqrt{3}$ মিটার।

কিন্তু ওই তালগাছটির (যার উচ্চতা $12\sqrt{3}$ মিটার) ছায়ার দৈর্ঘ্য যখন 36 মিটার হবে তখন সূর্যের উন্নতি কোণ কী হবে হিসাব করে লিখি।

ধরি, $12\sqrt{3}$ মিটার দৈর্ঘ্যের AB তালগাছটির ছায়ার দৈর্ঘ্য BC যখন 36 মিটার তখন সূর্যের উন্নতি কোণ θ

সমকোণী ΔABC-তে, $\tan\theta = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{12\sqrt{3}}{36} = \dfrac{12\sqrt{3}}{12\times 3} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$



সুতরাং, $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^\circ \quad \therefore \theta = 30^\circ$

$\therefore$ তখন সূর্যের উন্নতি কোণ 30°

প্রয়োগ : 5. সূর্যের উন্নতি কোণ কত হলে 20 মিটার লম্বা লাঠির ছায়ার দৈর্ঘ্য $20\sqrt{3}$ মিটার হবে হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 6. হাঁসখালি পোলের বড়ো খালের ঠিক পাড়ে অবস্থিত সমীরণদের তিনতলা বাড়ির ছাদ থেকে সে সোজাসুজি খালের ঠিক অপর পারের একটি লাইটপোস্ট দেখছিল। সমীরণের চোখ থেকে সেই পোস্টের পাদবিন্দুর অবনতি কোণ যদি 30° হয় এবং বাড়িটির উচ্চতা যদি 10 মিটার হয়, তাহলে ছবি এঁকে ওই খালটি কত চওড়া হিসাব করি। [$\sqrt{3} = 1.732$ (প্রায়)]

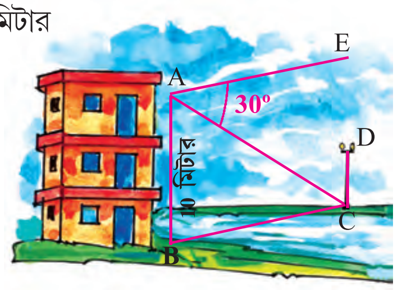
ধরি, AB তিনতলা বাড়িটি এবং CD পোস্টটি BC চওড়া খালের দুই পারে এবং ঠিক বিপরীত দিকে অবস্থিত।

সমীরণ A বিন্দু থেকে CD পোস্টের পাদবিন্দু C-কে 30° অবনতি কোণে দেখছিল।

$\therefore \angle EAC = 30^\circ$ [ধরি, $AE \parallel BC$]

$\therefore$ ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ পেলাম যার $\angle B=90^\circ$, $AB=10$ মিটার

এবং $\angle ACB =$ একান্তর $\angle EAC$ [$\because AE \parallel BC$]



$\therefore \angle ACB = 30^\circ$

সমকোণী ΔABC-তে, $\tan 30^\circ = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{10 \text{ মি.}}{BC}$

বা, $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{10 \text{ মি.}}{BC}$

$\therefore$ $BC = 10\sqrt{3}$ মি. $= 10\times 1.732$ মি. (প্রায়)

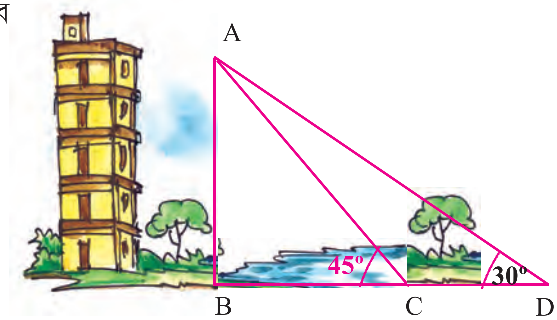
$= 17.32$ মি. (প্রায়)

$\therefore$ খালটি 17.32 মি. (প্রায়) চওড়া।

প্রয়োগ : 7. কিন্তু কোনো নদীর পাড়ে যদি উঁচু অট্টালিকা থাকে তবে নদীর অপর পারে দাঁড়িয়ে ওই অট্টালিকার উচ্চতা কীভাবে মাপব দেখি।

ধরি, AB অট্টালিকার উচ্চতা $= x$ মিটার

যদি নদীর অপর পারে অট্টালিকার B বিন্দুর ঠিক বিপরীত দিকে নদীর ধার বরাবর C বিন্দু থেকে অট্টালিকার চূড়ার উন্নতি কোণ 45° এবং C বিন্দু থেকে 14 মিটার বর্ধিত BC সরলরেখাংশ বরাবর দূরে সরে গিয়ে D বিন্দু থেকে অট্টালিকার চূড়ার উন্নতি কোণ 30° হয়, তবে অট্টালিকার উচ্চতা x নির্ণয় করি।



ধরি, নদীর প্রস্থ (BC) = y মিটার

$\therefore$ সমকোণী ত্রিভুজ ABC থেকে পাই, $\tan 45^\circ = \dfrac{AB}{BC}$

বা, $1 = \dfrac{x}{y}$

$\therefore x = y$

আবার সমকোণী ত্রিভুজ ABD থেকে পাই, $\tan 30^\circ = \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AB}{BC+CD}$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{y+14}$$

বা, $y+14 = x\sqrt{3}$

বা, $x+14 = x\sqrt{3}$ $[\because x=y]$

বা, $x(\sqrt{3}-1) = 14$

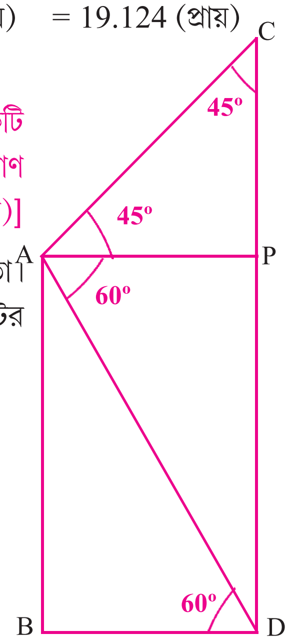
$$\therefore x = \frac{14}{\sqrt{3}-1} = \frac{14(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$

$$= \frac{14(1.732+1)}{3-1}$$

$= 7\times 2.732$ (প্রায়) $= 19.124$ (প্রায়)

$\therefore$ অট্টালিকার উচ্চতা 19.124 মিটার (প্রায়)।

প্রয়োগ : 8. যদি একটি 18 মিটার উঁচু পাঁচতলা বাড়ির ছাদ থেকে দেখলে একটি মনুমেন্টের চূড়ার উন্নতি কোণ 45° এবং মনুমেন্টের পাদদেশের অবনতি কোণ 60° হয়, তাহলে মনুমেন্টের উচ্চতা হিসাব করে লিখি। [$\sqrt{3} = 1.732$ (প্রায়)]



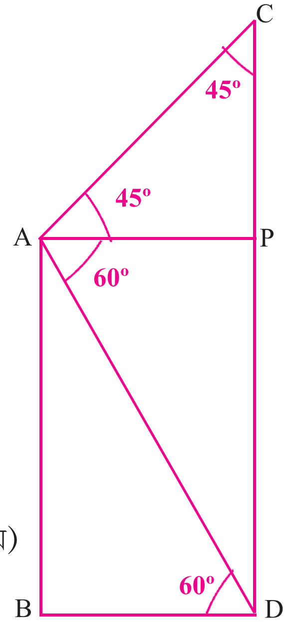
ধরি, পাশের চিত্রে, AB 18 মিটার উঁচু পাঁচতলা বাড়ি এবং CD মনুমেন্টের উচ্চতা। AB-এর A বিন্দু থেকে মনুমেন্টের চূড়ার C বিন্দুর উন্নতি কোণ 45° ও মনুমেন্টের পাদদেশ D বিন্দুর অবনতি কোণ 60°.

$\therefore$ $\angle PAC = 45^\circ$ এবং $\angle PAD = 60^\circ$ [ধরি, $AP \parallel BD$]

$\angle PAD =$ একান্তর $\angle ADB$ $[\because AP \parallel BD]$ $\therefore \angle ADB = 60^\circ$

ধরি, মনুমেন্টের উচ্চতা CD=x মিটার এবং BD=y মিটার = AP

AB = 18 মিটার। সুতরাং, CP = (x–18) মি.



সমকোণী ΔABD থেকে পাই, $\tan 60^\circ = \dfrac{AB}{BD}$

বা, $\sqrt{3} = \dfrac{18}{y}$ $\quad \therefore y = \dfrac{18}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$

সমকোণী ΔAPC থেকে পাই, $\tan \angle PAC = \dfrac{CP}{AP}$

বা, $\tan 45^\circ = \dfrac{x-18}{y} = \dfrac{x-18}{6\sqrt{3}}$

বা, $1 = \dfrac{x-18}{6\sqrt{3}}$

বা, $x-18 = 6\sqrt{3}$

বা, $x = 18+6\sqrt{3} = 6(3+\sqrt{3})$

বা, $x = 6(3+1.732)$ (প্রায়)

বা, $x = 6 \times 4.732$ (প্রায়) $\quad \therefore x = 28.392$ (প্রায়)

$\therefore$ মনুমেন্টের উচ্চতা 28.392 মি. (প্রায়)

প্রয়োগ : 9. 11 মিটার উঁচু একটি বাড়ির ছাদ থেকে দেখলে একটি ল্যাম্পপোস্টের চূড়া ও পাদবিন্দুর অবনতি কোণ যথাক্রমে 30° এবং 60°; ল্যাম্পপোস্টটির উচ্চতা হিসাব করে লিখি।

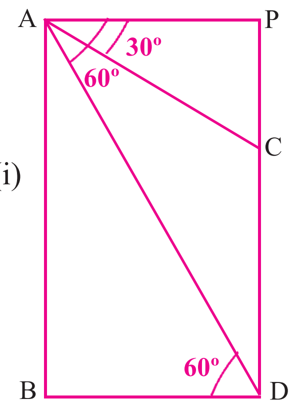
ধরি, পাশের চিত্রের, AB = 11 মিটার উঁচু একটি বাড়ি

CD = ল্যাম্পপোস্টের উচ্চতা = x মিটার (ধরি)

AB-এর A বিন্দু থেকে ল্যাম্পপোস্টের চূড়া C বিন্দুর অবনতি কোণ 30° এবং A বিন্দু থেকে ল্যাম্পপোস্টের পাদদেশ D বিন্দুর অবনতি কোণ 60°

$\therefore \angle PAC = 30^\circ$ এবং $\angle PAD = 60^\circ$ [ধরি, $AP \parallel BD$ এবং DC-এর বর্ধিতাংশ CP]

$AB = PD = 11$ মি., $CD = x$ মি. $\quad \therefore PC = (11-x)$ মি.



ধরি, $BD = y$ মি. $= AP$

সমকোণী ত্রিভুজ APD থেকে পাই, $\tan 60^\circ = \dfrac{PD}{AP} = \dfrac{11}{y}$

বা, $\sqrt{3} = \dfrac{11}{y}$ $\quad \therefore y = \dfrac{11}{\sqrt{3}}$ ———— (i)

আবার, সমকোণী ত্রিভুজ APC থেকে পাই, $\tan 30^\circ = \dfrac{PC}{AP}$

বা, $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{11-x}{y}$

বা, $y = 11\sqrt{3} - x\sqrt{3}$

বা, $\dfrac{11}{\sqrt{3}} = 11\sqrt{3} - x\sqrt{3}$ [(1) থেকে পাই]

বা, $11 = 33 - 3x$

বা, $3x = 22$ $\quad \therefore x = \dfrac{22}{3} = 7\frac{1}{3}$

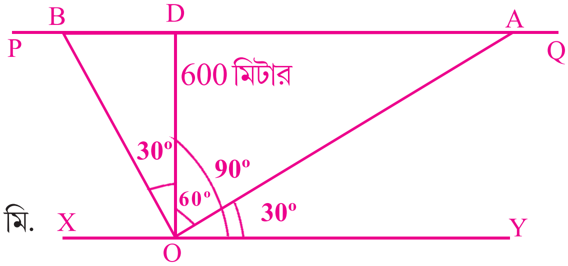
$\therefore$ ল্যাম্পপোস্টটির উচ্চতা $7\frac{1}{3}$ মিটার।

প্রয়োগ : 10. 60 মিটার উঁচু একটি অট্টালিকার চূড়া থেকে কোনো টাওয়ারের চূড়া ও পাদদেশের অবনতি কোণ যথাক্রমে 30° ও 60° হলে, টাওয়ারের উচ্চতা হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 11. 600 মিটার চওড়া কোনো নদীর একটি ঘাট থেকে দুটি নৌকা দুটি আলাদা অভিমুখে নদীর ওপারে যাওয়ার জন্য রওনা দিল। যদি প্রথম নৌকাটি নদীর এপারের সঙ্গে 30° কোণে এবং দ্বিতীয় নৌকাটি প্রথম নৌকার গতিপথের সঙ্গে 90° কোণ করে চলে ওপারে পৌঁছায়, তাহলে ওপারে পৌছানোর পরে নৌকাদুটির মধ্যে দূরত্ব কত হবে নির্ণয় করি। [$\sqrt{3}=1.732$ (প্রায়)]

ধরি, পাশের ছবিতে নদীর XY পাড়ের O বিন্দুতে অবস্থিত ঘাট থেকে প্রথম নৌকা OA বরাবর গিয়ে নদীর অপর পাড় PQ-এর A বিন্দুতে এবং অপর নৌকা OB বরাবর গিয়ে B বিন্দুতে ওপারে পৌঁছায়।

$\therefore \angle YOA=30^\circ$, $\angle AOB=90^\circ$; O বিন্দু থেকে AB-এর উপর OD লম্ব অঙ্কন করি।



$\therefore \angle AOD=60^\circ$ এবং $\angle DOB=30^\circ$

সমকোণী ত্রিভুজ AOD থেকে পাই, $\tan 60^\circ = \dfrac{AD}{OD}$

$$\text{বা, } \sqrt{3} = \frac{AD}{600 \text{ মি.}}$$

$$\therefore AD = 600\sqrt{3} \text{ মি.}$$

আবার, সমকোণী ত্রিভুজ BOD থেকে পাই, $\tan 30^\circ = \dfrac{BD}{OD}$

$$\text{বা, } \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{BD}{600 \text{ মি.}}$$

$$\text{বা, } BD = \frac{600 \text{ মি.}}{\sqrt{3}} = \frac{600\sqrt{3} \text{ মি.}}{3}$$

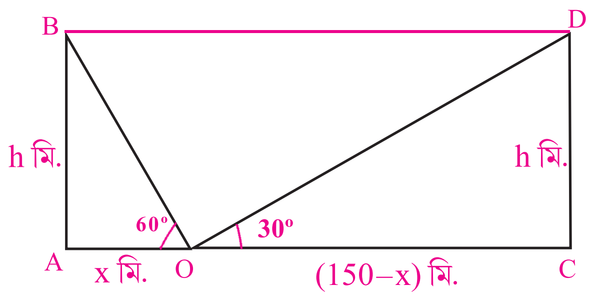
$$= 200\sqrt{3} \text{ মি.}$$

$AD+BD=(600\sqrt{3}+200\sqrt{3})$ মি.

$AB = 800\sqrt{3}$ মি. $= 800\times1.732$ মি. (প্রায়) $= 1385.6$ মি. (প্রায়)

$\therefore$ ওপারে পৌঁছালে নৌকা দুটির মধ্যে দূরত্ব হবে 1385.6 মিটার (প্রায়)

প্রয়োগ : 12. একটি 150 মিটার চওড়া রাস্তার দু-পাশে ঠিক বিপরীতে দুটি সমান উচ্চতার স্তম্ভ আছে। স্তম্ভ দুটির মাঝখানে রাস্তার উপর কোনো এক নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে স্তম্ভ দুটির চূড়ার উন্নতি কোণ যথাক্রমে 60° ও 30° হলে, প্রতিটি স্তম্ভের উচ্চতা নির্ণয় করি।



ধরি, AB ও CD দুটি সমান উচ্চতার স্তম্ভ।

ধরি, $AB=CD=h$ মিটার।

ধরি, AC রাস্তার উপর নির্দিষ্ট বিন্দু O

ধরি, $OA=x$ মি. $\therefore OC=(150-x)$ মি.

$\therefore \angle AOB=60^\circ$ এবং $\angle COD=30^\circ$

সমকোণী ত্রিভুজ AOB থেকে পাই, $\tan 60^\circ = \dfrac{AB}{AO} = \dfrac{h}{x}$

$$\text{বা, } \sqrt{3} = \frac{h}{x} \quad \therefore x = \frac{h}{\sqrt{3}} \text{ ——————— (i)}$$

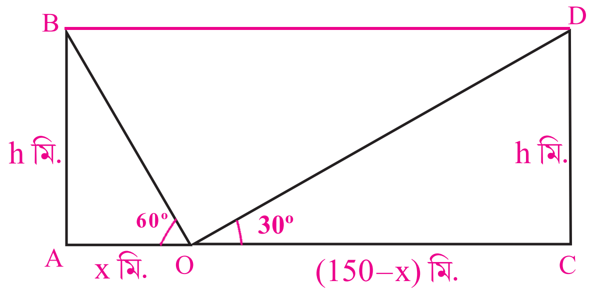
আবার, সমকোণী ত্রিভুজ COD থেকে পাই,

$\tan 30^\circ = \frac{CD}{OC} = \frac{h}{150-x}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{150-x}$

বা, $150-x = h\sqrt{3}$

$\therefore \quad x = 150 - h\sqrt{3}$ ———— (ii)



$\therefore$ (i) ও (ii) নং তুলনা করে পাই, $\frac{h}{\sqrt{3}} = 150 - h\sqrt{3}$

বা, $h = 150\sqrt{3} - 3h$

বা, $4h = 150\sqrt{3} \quad \therefore h = \frac{150\sqrt{3}}{4} = \frac{75\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ প্রতিটি স্তম্ভের উচ্চতা $\frac{75\sqrt{3}}{2}$ মিটার।

প্রয়োগ : 13. একটি পাখি ভূমিতলের সঙ্গে সমান্তরাল রেখায় 200 মিটার উঁচু দিয়ে উত্তর থেকে দক্ষিণদিকে যাচ্ছিল। মাঠের মাঝখানে দাঁড়িয়ে সুশোভন প্রথমে পাখিটিকে উত্তরদিকে 30° কোণে দেখতে পেল। 3 মিনিট পরে আবার দক্ষিণদিকে 45° কোণে দেখতে পেল। আসন্ন পূর্ণসংখ্যায় কিলোমিটারে পাখিটির গতিবেগ ঘণ্টায় কত ছিল হিসাব করে লিখি। [$\sqrt{3} = 1.732$ (প্রায়)]

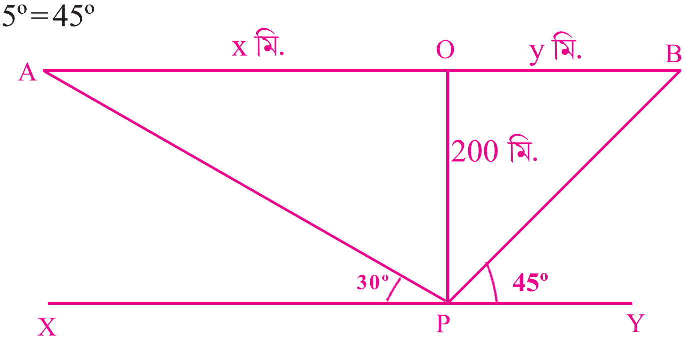
মনে করি, P বিন্দু থেকে সুশোভন প্রথমে পাখিটিকে 30° কোণে A বিন্দুতে দেখতে পেল এবং 3 মিনিট পরে 45° কোণে B বিন্দুতে দেখতে পেল।

ধরি, AO = x মি. এবং BO = y মি.

P বিন্দু থেকে AB-এর উপর PO লম্ব। $\therefore$ PO = 200 মি.

$\because \angle XPA = 30^\circ, \therefore \angle APO = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$;

$\because \angle BPY = 45^\circ, \therefore \angle BPO = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$



সমকোণী ত্রিভুজ APO-তে

$\tan \angle APO = \tan 60^\circ = \frac{x}{200}$

বা, $\sqrt{3} = \frac{x}{200} \quad \therefore x = 200\sqrt{3}$

সমকোণী ত্রিভুজ BPO-তে

$\tan \angle BPO = \tan 45^\circ = \frac{y}{200}$

বা, $1 = \frac{y}{200} \quad \therefore y = 200$

সুতরাং, $x+y = 200\sqrt{3} + 200 = 200(\sqrt{3}+1) = 200 \times 2.732 = 546.4$

3 মিনিটে পাখিটি যায় 546.4 মিটার

1 মিনিটে পাখিটি যায় $\frac{546.4 \text{ মি.}}{3}$

60 মিনিটে পাখিটি যায় $\frac{546.4}{3} \times 60$ মিটার $= 10928$ মিটার $= 10.928$ কিমি.

$\therefore$ আসন্ন পূর্ণসংখ্যায় পাখিটির গতিবেগ ঘণ্টায় 11 কিলোমিটার।

কষে দেখি 25

1. একটি নারকেল গাছের গোড়া থেকে অনুভূমিক তলে 20 মিটার দূরের একটি বিন্দুর সাপেক্ষে গাছটির অগ্রভাগের উন্নতি কোণ যদি 60° হয়, তাহলে গাছটির উচ্চতা নির্ণয় করি।
2. সূর্যের উন্নতি কোণ যখন 30° তখন একটি স্তম্ভের ছায়ার দৈর্ঘ্য 9 মিটার হয়। স্তম্ভটির উচ্চতা হিসাব করে লিখি।
3. 150 মি. লম্বা সুতো দিয়ে একটি মাঠ থেকে ঘুড়ি ওড়ানো হয়েছে। ঘুড়িটি যদি অনুভূমিক রেখার সঙ্গে 60° কোণ করে উড়তে থাকে, তাহলে ঘুড়িটি মাঠ থেকে কত উঁচুতে রয়েছে হিসাব করে লিখি।
4. একটি নদীর একটি পাড়ের একটি তালগাছের সোজাসুজি অপর পাড়ে একটি খুঁটি পুঁতলাম। এবার নদীর পাড় ধরে ওই খুঁটি থেকে $7\sqrt{3}$ মিটার সরে গিয়ে দেখছি নদীর পাড়ের পরিপ্রেক্ষিতে গাছটির পাদদেশ 60° কোণে রয়েছে। নদীটি কত মিটার চওড়া নির্ণয় করি।
5. ঝড়ে একটি টেলিগ্রাফপোস্ট মাটি থেকে কিছু উপরে মচকে যাওয়ায় তার অগ্রভাগ গোড়া থেকে $8\sqrt{3}$ মিটার দূরে মাটি স্পর্শ করেছে এবং অনুভূমিক রেখার সঙ্গে 30° কোণ উৎপন্ন করেছে। পোস্টটি মাটি থেকে কত উপরে মচকে ছিল এবং পোস্টটির উচ্চতা কত ছিল হিসাব করে লিখি।
6. আমাদের পাড়ায় রাস্তার দু-পাশে পরস্পর বিপরীত দিকে দুটি বাড়ি আছে। প্রথম বাড়ির দেয়ালের গোড়া থেকে 6 মিটার দূরে একটি মই-এর গোড়া রেখে যদি মইটিকে দেয়ালে ঠেকানো যায়, তবে তা অনুভূমিক রেখার সঙ্গে 30° কোণ উৎপন্ন করে। কিন্তু মইটিকে যদি একই জায়গায় রেখে দ্বিতীয় বাড়ির দেয়ালে লাগানো যায়, তাহলে অনুভূমিক রেখার সঙ্গে 60° কোণ উৎপন্ন করে।
   (i) মইটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।
   (ii) দ্বিতীয় বাড়ির দেয়ালের গোড়া থেকে মইটির গোড়া কত দূরে রয়েছে হিসাব করে লিখি।
   (iii) রাস্তাটি কত চওড়া নির্ণয় করি।
   (iv) দ্বিতীয় বাড়ির কত উঁচুতে মইটির অগ্রভাগ স্পর্শ করবে নির্ণয় করি।
7. যদি একটি চিমনির গোড়ার সঙ্গে সমতলে অবস্থিত একটি বিন্দবু সাপেক্ষে চিমনির চূড়ার উন্নতি কোণ 60° হয় এবং সেই বিন্দু ও চিমনির গোড়ার সঙ্গে একই সরলরেখায় অবস্থিত ওই বিন্দু থেকে আরও 24 মিটার দূরের অপর একটি বিন্দুর সাপেক্ষে চিমনির চূড়ার উন্নতি কোণ 30° হয়, তাহলে চিমনির উচ্চতা হিসাব করে লিখি।
   [$\sqrt{3}$-এর আসন্ন মান 1.732 ধরে তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান নির্ণয় করি]
8. সূর্যের উন্নতি কোণ 45° থেকে বৃদ্ধি পেয়ে 60° হলে, একটি খুঁটির ছায়ায় দৈর্ঘ্য 3 মিটার কমে যায়। খুঁটিটির উচ্চতা নির্ণয় করি।
   [$\sqrt{3} = 1.732$ ধরে তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান নির্ণয় করি]
9. $9\sqrt{3}$ মিটার উঁচু তিনতলা বাড়ির ছাদ থেকে দেখলে 30 মিটার দূরে অবস্থিত একটি কারখানার চিমনির উন্নতি কোণ 30° হয়। চিমনির উচ্চতা হিসাব করে লিখি।
10. একটি লাইট হাউস থেকে তার সঙ্গে একই সরলরেখায় অবস্থিত দুটি জাহাজের মাস্তুলের গোড়ার অবনতি কোণ যদি যথাক্রমে 60° ও 30° হয় এবং কাছের জাহাজের মাস্তুল যদি লাইট হাউস থেকে 150 মিটার দূরত্বে থাকে, তাহলে দূরের জাহাজের মাস্তুল লাইটি হাউস থেকে কত দূরত্বে রয়েছে এবং লাইট হাউসটির উচ্চতা হিসাব করে লিখি।
11. একটি পাঁচতলা বাড়ির ছাদের কোনো বিন্দু থেকে দেখলে মনুমেন্টের চূড়ার উন্নতি কোণ ও গোড়ার অবনতি কোণ যথাক্রমে 60° ও 30° ; বাড়িটির উচ্চতা 16 মিটার হলে, মনুমেন্টের উচ্চতা এবং বাড়িটি মনুমেন্ট থেকে কত দূরে অবস্থিত হিসাব করে লিখি।

12. 250 মিটার লম্বা সুতো দিয়ে একটি ঘুড়ি ওড়াচ্ছি। সুতোটি যখন অনুভূমিক রেখার সঙ্গে 60° কোণ করে থাকে এবং সুতোটি যখন অনুভূমিক রেখার সঙ্গে 45° কোণ করে তখন প্রতিক্ষেত্রে ঘুড়িটি আমার থেকে কত উপরে থাকবে হিসাব করে লিখি। এদের মধ্যে কোন ক্ষেত্রে ঘুড়িটি বেশি উঁচুতে থাকবে নির্ণয় করি।

13. উড়ো জাহাজের একজন যাত্রী কোনো এক সময় তাঁর এক পাশে হাওড়া স্টেশনটি এবং ঠিক বিপরীত পাশে শহিদ মিনারটি যথাক্রমে 60° ও 30° অবনতি কোণে দেখতে পান। ওই সময়ে উড়োজাহাজটি যদি $545\sqrt{3}$ মিটার উঁচুতে থাকে, তাহলে হাওড়া স্টেশন ও শহিদ মিনারের দূরত্ব নির্ণয় করি।

14. একটি তিনতলা বাড়ির ছাদে 3.3 মিটার দৈর্ঘ্যের একটি পতাকা আছে। রাস্তার কোনো এক স্থান থেকে দেখলে পতাকা দণ্ডটির চূড়া ও পাদদেশের উন্নতি কোণ যথাক্রমে 50° ও 45° হয়। তিনতলা বাড়িটির উচ্চতা হিসাব করে লিখি। [ধরি, $\tan 50^\circ = 1.192$]

15. দুটি স্তম্ভের উচ্চতা যথাক্রমে 180 মিটার ও 60 মিটার। দ্বিতীয় স্তম্ভটির গোড়া থেকে প্রথমটির চূড়ার উন্নতি কোণ 60° হলে, প্রথমটির গোড়া থেকে দ্বিতীয়টির চূড়ার উন্নতি কোণ হিসাব করে লিখি।

16. সূর্যের উন্নতি কোণ 45° হলে, কোনো সমতলে অবস্থিত একটি স্তম্ভের ছায়ার দৈর্ঘ্য যা হয়, উন্নতি কোণ 30° হলে, ছায়ার দৈর্ঘ্য তার চেয়ে 60 মিটার বেশি হয়। স্তম্ভটির উচ্চতা নির্ণয় করি।

17. একটি চিমনির সঙ্গে একই সমতলে অবস্থিত অনুভূমিক সরলরেখায় কোনো এক বিন্দু থেকে চিমনির দিকে 50 মিটার এগিয়ে যাওয়ায় তার চূড়ার উন্নতি কোণ 30° থেকে 60° হলো। চিমনির উচ্চতা হিসাব করে লিখি।

18. 126 ডেসিমি উঁচু একটি উল্লম্ব খুঁটি মাটি থেকে কিছু উপরে দুমড়ে গিয়ে উপরের অংশ কাত হয়ে পড়ায় তার অগ্রভাগ মাটি স্পর্শ করে ভূমির সঙ্গে 30° কোণ উৎপন্ন করেছে। খুঁটিটি কত উপরে দুমড়ে গিয়েছিল এবং তার অগ্রভাগ গোড়া থেকে কত দূরে মাটি স্পর্শ করেছিল হিসাব করে লিখি।

19. মাঠের মাঝখানে দাঁড়িয়ে মোহিত একটি উড়ন্ত পাখিকে প্রথমে উত্তরদিকে 30° উন্নতি কোণে এবং 2 মিনিট পরে দক্ষিণদিকে 60° উন্নতি কোণে দেখতে পেল। পাখিটি যদি একই সরলরেখা বরাবর $50\sqrt{3}$ মিটার উঁচুতে উড়ে থাকে, তবে তার গতিবেগ কিলোমিটার প্রতি ঘন্টায় নির্ণয় করি।

20. $5\sqrt{3}$ মিটার উঁচু একটি রেলওয়ে ওভারব্রিজে দাঁড়িয়ে অমিতাদিদি প্রথমে একটি ট্রেনের ইঞ্জিনকে ব্রিজের এপারে 30° অবনতি কোণে দেখলেন। কিন্তু 2 সেকেন্ড পরই ওই ইঞ্জিনকে ব্রিজের ওপারে 45° অবনতি কোণে দেখলেন। ট্রেনটির গতিবেগ মিটার প্রতি সেকেন্ডে হিসাব করে লিখি।

21. একটি নদীর পাড়ের সঙ্গে লম্বভাবে একটি সেতু আছে। সেতুটির একটি পাড়ের প্রান্ত থেকে নদীর পাড় ধরে কিছু দূর গেলে সেতুর অপর প্রান্তটি 45° কোণে দেখা যায় এবং পাড় ধরে আরও 400 মিটার দূরে সরে গেলে সেই প্রান্তটি 30° কোণে দেখা যায়। সেতুটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

22. একটি পার্কের একপ্রান্তে অবস্থিত 15 মিটার উঁচু একটি বাড়ির ছাদ থেকে পার্কের অপর পারে অবস্থিত একটি ইটভাটার চিমনির পাদদেশ ও অগ্রভাগ যথাক্রমে 30° অবনতি কোণ ও 60° উন্নতি কোণে দেখা যায়। ইটভাটার চিমনির উচ্চতা এবং ইটভাটা ও বাড়ির মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় করি।

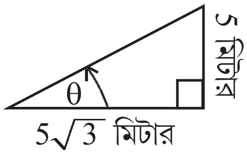
23. একটি উড়োজাহাজ থেকে রাস্তায় পরপর দুটি কিলোমিটার ফলকের অবনতি কোণ যথাক্রমে 60° ও 30° হলে, উড়োজাহাজটির উচ্চতা নির্ণয় করি, (i) যখন ফলক দুটি উড়োজাহাজের বিপরীত পাশে অবস্থিত, (ii) যখন ফলক দুটি উড়োজাহাজের একই পাশে অবস্থিত।

24. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :

(i) মাঠের উপর একটি বিন্দু থেকে মোবাইল টাওয়ারের চূড়ার উন্নতি কোণ 60° এবং টাওয়ারের গোড়া থেকে ওই বিন্দুর দূরত্ব 10 মিটার। টাওয়ারের উচ্চতা

(a) 10 মিটার (b) $10\sqrt{3}$ মিটার (c) $\frac{10}{\sqrt{3}}$ মিটার (d) 100 মিটার

(ii) 

θ-এর মান - (a) 30° (b) 45° (c) 60° (d) 75°

(iii) তিনতলা বাড়ির ছাদ থেকে মাটিতে পড়ে থাকা একটি বাক্সকে যত কোণে দেখলে বাড়ির উচ্চতা ও বাড়ি থেকে বাক্সটির দূরত্ব সমান হয় তা হলো,

(a) 15° (b) 30° (c) 45° (d) 60°

(iv) একটি টাওয়ারের উচ্চতা $100\sqrt{3}$ মিটার। টাওয়ারের পাদবিন্দু থেকে 100 মিটার দূরে একটি বিন্দু থেকে টাওয়ারের চূড়ার উন্নতি কোণ

(a) 30° (b) 45° (c) 60° (d) কোনোটিই নয়

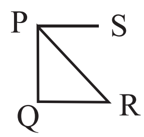
(v) একটি পোস্টের ভূমিতলে ছায়ার দৈর্ঘ্য পোস্টের উচ্চতার $\sqrt{3}$ গুণ হলে, সূর্যের উন্নতি কোণ

(a) 30° (b) 45° (c) 60° (d) কোনোটিই নয়

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) ΔABC এর $\angle B=90^\circ$, $AB=BC$ হলে, $\angle C=60^\circ$.

(ii) PQ একটি বাড়ির উচ্চতা, QR ভূমি। P বিন্দু থেকে R বিন্দুর অবনতি কোণ $\angle SPR$; সুতরাং, $\angle SPR = \angle PRQ$.



(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) সূর্যের উন্নতি কোণ 30° থেকে বৃদ্ধি পেয়ে 60° হলে, একটি পোস্টের ছায়ার দৈর্ঘ্য_____ পায়। (হ্রাস/বৃদ্ধি)

(ii) সূর্যের উন্নতি কোণ 45° হলে, একটি পোস্টের দৈর্ঘ্য ও তার ছায়ার দৈর্ঘ্য__________ হবে।

(iii) যখন সূর্যের উন্নতি কোণ 45°-এর __________ তখন একটি স্তম্ভের ছায়ার দৈর্ঘ্য স্তম্ভের উচ্চতা থেকে কম।

25. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.) :**

(i) একটি ঘুড়ির উন্নতি কোণ 60° এবং সুতোর দৈর্ঘ্য $20\sqrt{3}$ মিটার হলে, ঘুড়িটি মাটি থেকে কত উচ্চতায় আছে হিসাব করি।

(ii) একটি সমকোণী ত্রিভুজাকারক্ষেত্র ABC-এর অতিভুজ AC-এর দৈর্ঘ্য 100 মিটার এবং $AB=50\sqrt{3}$ মিটার হলে, $\angle C$ এর মান নির্ণয় করি।

(iii) ঝড়ে একটি গাছ মচকে গিয়ে তার অগ্রভাগ এমনভাবে ভূমি স্পর্শ করেছে যে গাছটির অগ্রভাগ থেকে গোড়ার দূরত্ব এবং বর্তমান উচ্চতা সমান। গাছটির অগ্রভাগ ভূমির সাথে কত কোণ করেছে হিসাব করি।

(iv) ABC সমকোণী ত্রিভুজ $\angle B=90^\circ$, AB র উপর D এমন একটি বিন্দু যে $AB : BC : BD = \sqrt{3} : 1 : 1$, $\angle ACD$ -এর মান নির্ণয় করি।

(v) একটি স্তম্ভের ছায়ার দৈর্ঘ্য এবং স্তম্ভের উচ্চতার অনুপাত $\sqrt{3} : 1$ হলে, সূর্যের উন্নতি কোণ নির্ণয় করি।

26 রাশিবিজ্ঞান : গড় , মধ্যমা, ওজাইভ, সংখ্যাগুরুমান
STATISTICS : MEAN, MEDIAN, OGIVE, MODE

আমাদের বিরামপুর গ্রামের চৌরাস্তার মোড়ে দুটি চায়ের দোকানে খুব ভালো মানের চা পাওয়া যায়। একটি বিমলকাকার চা-এর দোকান এবং অন্যটি আশাকাকিমার চা-এর দোকান। দিনের প্রায় সকল সময়ে ওই দুটি দোকানে খরিদ্দারদের ভিড় লেগেই থাকে।

সুতপা ওই দুটি চা-এর দোকানের প্রত্যেকটির গতমাসের প্রতিদিন কত টাকা লাভ হয়েছে তার একটা হিসাবের ছক তৈরি করেছে।

সুতপার তৈরি সেই হিসাবের ছক দুটি হলো,

গতমাসে বিমলকাকার দোকানের প্রতিদিন লাভের (টাকায়) ছক,

321,	352,	388,	410,	480,	400,	475,	415,	345,	360
445,	390,	552,	495,	570,	530,	436,	580,	510,	462
437,	491,	498,	460,	372,	463,	458,	515,	464,	428

গতমাসে আশাকাকিমার দোকানের প্রতিদিন লাভের (টাকায়) ছক,

315,	420,	480,	530,	580,	315,	360,	440,	480,	465
530,	465,	580,	360,	420,	360,	480,	530,	580,	360
440,	420,	360,	480,	530,	420,	580,	530,	465,	420

(1) কিন্তু উপরের তথ্য থেকে গতমাসে কোন দোকানে গড় লাভ বেশি হয়েছে কীভাবে বুঝব? অর্থাৎ দুটি দোকানের পাওয়া তথ্যের তুলনা কীভাবে করতে পারব দেখি।

আমরা প্রতিটি তথ্যের জন্য এমন কোনো কোনো বিশেষ সংখ্যা নির্ণয় করব যা সম্পূর্ণ তথ্যটির প্রতিনিধিত্ব (Representative) করবে।

(2) প্রতিটি তথ্যের জন্য এই কোনো কোনো বিশেষ সংখ্যাকে কী বলা হয়?

কোনো তথ্যের কোনো কোনো বিশেষ সংখ্যা যেগুলি সম্পূর্ণ তথ্যের প্রতিনিধিত্ব করে, সেগুলি সাধারণত তথ্যের কেন্দ্রীয় অবস্থান (Central position)-এর কাছাকাছি থাকে। তাই ওই বিশেষ সংখ্যাগুলিকে তথ্যের **মধ্যগামিতার মাপক** (Measure of Central tendency) বলা হয়।

(3) কেন্দ্রীয় অবস্থান বলতে কী বুঝি?

তথ্যের সংখ্যা গুলিকে উর্ধ্বক্রমানুসারে সাজালে মাঝের সংখ্যা / সংখ্যাগুলির কাছাকাছি অবস্থানকে কেন্দ্রীয় অবস্থান বলা হয়।

মধ্যগামিতার মাপক তিনটি— (i) গড় (Mean) (ii) মধ্যমা (Median) (iii) ভূয়িষ্ঠক বা সংখ্যাগুরুমান (Mode)

(4) সুতপার পাওয়া বিমলকাকার চা-এর দোকানের লাভের তথ্যের গড় (Mean)নির্ণয় করি ও কী পাই দেখি।

গতমাসে 30 দিনে বিমলকাকার মোট লাভ হয় = $x_1+x_2+x_3+ \ldots\ldots\ldots +x_{30}$

যেখানে x_1=321 টাকা, x_2=352 টাকা, x_3=388 টাকা , ..., x_{30}=428 টাকা

∴ মোট লাভ = (321+352+388+........+428) টাকা

= 13502 টাকা

∴ বিমলকাকার দোকানের গড় লাভ = $\frac{13502 \text{ টাকা}}{30}$ = 450.06 টাকা = 450 টাকা(প্রায়)।

এই পদ্ধতিতে পাওয়া গড়কে **যৌগিক গড় (Arithmetic mean)** বলা হয়। শুধু গড় বলতে আমরা সাধারণত যৌগিক গড়কেই বুঝি।

x চলের n টি বিভিন্ন মান $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ -এর যৌগিক গড় $\overline{x}$ হলে,

$$\overline{x} = \frac{x_1+x_2+x_3+\ldots..+x_n}{n}$$

$\overline{x}$ কে পড়ি x -bar.

5 কিন্তু সংক্ষেপে কীভাবে লিখব?

$$\overline{x} = \frac{x_1+x_2+x_3+\ldots..+x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

এখানে $\sum$ চিহ্নটি গ্রিক বর্ণ এবং বলা হয় Capital Sigma , যার অর্থ সমষ্টি।

তাহলে $\sum_{i=1}^{10} x_i$ কী হবে?

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}.$$

$\sum_{i=1}^{10}(10\times i)$ কী হবে?

$$\sum_{i=1}^{10}(10\times i) = (10\times1)+(10\times2)+\ldots..+(10\times10)$$
$$= 10\times(1+2+3+\ldots..+10)$$
$$= 10\times55 \quad = 550$$

আমি সুতপার পাওয়া আশাকাকিমার চা-এর দোকানের লাভের তথ্যটির পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা তৈরি করি।

সারণি-1 (Table – 1)

লাভের পরিমাণ (টাকায়) (x_i)	315	360	420	440	465	480	530	580	মোট
দিনসংখ্যা (f_i)	2	5	5	2	3	4	5	4	30

এক্ষেত্রে আশাকাকিমার চা-এর দোকানের গতমাসের গড় লাভ কীভাবে পাব? অর্থাৎ পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা থেকে গড় মান কীভাবে নির্ণয় করব দেখি। অর্থাৎ অবিন্যস্ত (Ungrouped) তথ্যের যৌগিক গড় নির্ণয় করি।

লাভের পরিমাণ টাকা (x_i)	দিন সংখ্যা (f_i)	$x_i f_i$
315	2	630
360	5	1800
420	5	2100
440	2	880
465	3	1395
480	4	1920
530	5	2650
580	4	2320
মোট	$\sum f_i = 30$	$\sum f_i x_i = 13695$

∴ গতমাসে আশাকাকিমার চা-এর দোকানের গড়লাভ $= \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{13695}{30}$ টাকা = 456.50 টাকা

∴ দেখছি, সুতপার পাওয়া তথ্য অনুযায়ী গতমাসে আশাকাকিমার দোকানে লাভের গড় বেশি ছিল।

কিন্তু পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা থেকে যে যৌগিক গড় নির্ণয় করলাম তাকে কী বলা হয়?

x চলের **ভারযুক্ত গড় (Weighted mean)** বলা হয়।

বুঝেছি, যদি x চলের $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$ মানের পরিসংখ্যাগুলি যথাক্রমে $f_1, f_2, f_3 \ldots\ldots f_n$ হয়, তাহলে $\bar{x}$ উহাদের ভারযুক্ত গড় হবে যদি, $\bar{x} = \dfrac{x_1f_1 + x_2f_2 + x_3f_3 + \ldots\ldots + x_nf_n}{f_1 + f_2 + \ldots\ldots + f_n} = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$ হয়।

প্রয়োগ : 1. আমাদের গ্রামের উচ্চমাধ্যমিক বিদ্যালয়ে শাকিলদের শ্রেণির 40 জন শিক্ষার্থীর উচ্চতার তালিকা তৈরি করেছি। ওদের গড় উচ্চতা নির্ণয় করি।

শিক্ষার্থীর সংখ্যা	2	6	8	12	7	3	2
শিক্ষার্থীর উচ্চতা (সেমি.)	90	97	110	125	134	140	148

শিক্ষার্থীর উচ্চতা (সেমি.) (x_i)	শিক্ষার্থীর সংখ্যা (f_i)	$x_i f_i$
90	2	$90\times2 = 180$
97	6	$97\times6 = \square$
110	8	$110\times8 = \square$
125	12	$\square$
134	7	$\square$
140	3	$\square$
148	2	$\square$
মোট	$\sum f_i = 40$	$\sum f_i x_i = 4796$

$\therefore$ শিক্ষার্থীর গড় উচ্চতা $= \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \dfrac{4796}{40}$ সেমি. $= 119.9$ সেমি.

প্রয়োগ : 2. বিশাখের শ্রেণির 30 জন ছাত্রের ভূগোল পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বর হলো,

61, 78, 80, 77, 80, 69, 73, 61, 82, 78, 79, 72, 78, 62, 80
71, 82, 73, 66, 73, 62, 80, 74, 78, 62, 80, 66, 70, 79, 75

ভূগোল পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বরের যৌগিক গড় নির্ণয় করি। [নিজে করি]

আমি সারণি-1 (Table-1)-এর সুতপার তৈরি আশাকাকিমার চা-এর দোকানের লাভের অবিন্যস্ত (Ungrouped) তথ্যটি বিন্যস্ত (Grouped) তথ্যে লিখি যেখানে শ্রেণি দৈর্ঘ্য 50.

সারণি-2 (Table – 2)

লাভের পরিমাণ (টাকা)	দিনসংখ্যা (f_i)
300 - 350	2
350 - 400	5
400 - 450	7
450 - 500	7
500 - 550	5
550 - 600	4
মোট	30

আমি পাশের বিন্যস্ত তথ্যটি থেকে লাভের যৌগিক গড় নির্ণয় করি ও কী পাই দেখি।

পাশের পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকায় প্রতিটি শ্রেণি অন্তরের প্রতিনিধিত্ব করবে এমন সংখ্যা কীভাবে পাব?

ধরে নেওয়া হয় যে, বিন্যস্ত তথ্যের পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকার প্রতিটি শ্রেণির পরিসংখ্যার বেশিরভাগ সংখ্যাগুলি সেই **শ্রেণির মধ্যমান বা শ্রেণি মধ্যকের** কাছাকাছি কেন্দ্রীভূত হয়ে থাকে। তাই প্রতিটি শ্রেণির শ্রেণি মধ্যককে ওই শ্রেণির প্রতিনিধি ধরা হয়, যেখানে

শ্রেণি মধ্যক $= \dfrac{\text{নিম্ন শ্রেণি সীমানা + উচ্চ শ্রেণি সীমানা}}{2}$

প্রয়োগ : 3. আমি Table-2 থেকে গতমাসে আশাকাকিমার দোকানের লাভের যৌগিক গড় নির্ণয় করি ও কী পাই দেখি।

সারণি-3 (Table – 3)

লাভের পরিমাণ (টাকা)	দিনসংখ্যা (পরিসংখ্যা f_i)	শ্রেণি মধ্যক (x_i)	$x_i f_i$
300 - 350	2	325	650
350 - 400	5	375	1875
400 - 450	7	425	2975
450 - 500	7	475	3325
500 - 550	5	525	2625
550 - 600	4	575	2300
মোট	$\sum f_i = 30$		$\sum f_i x_i = 13750$

$\therefore$ লাভের যৌগিক গড় $= \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \dfrac{13750}{30}$ টাকা $= 458.33$ টাকা (প্রায়)

6 যৌগিক গড় নির্ণয়ের এই নতুন পদ্ধতিকে কী বলা হয়?

যৌগিক গড় নির্ণয়ের এই নতুন পদ্ধতিকে **প্রত্যক্ষ পদ্ধতি** (Direct Method) বলা হয়।

দেখছি, আশাকাকিমার দোকানের লাভের অবিন্যস্ত তথ্য থেকে গড় লাভ পেয়েছি 456.50 টাকা এবং বিন্যস্ত তথ্য থেকে গড় লাভ পেলাম 458.33 টাকা (প্রায়)।

7 কিন্তু এমন আলাদা মান কেন পেলাম এবং কোনটি ঠিক?

Table-2-এর বিন্যস্ত তথ্যে শ্রেণি মধ্যক ধরে নিয়েছি, তাই বিন্যস্ত তথ্য থেকে আসন্ন মানে (approximate) গড় 458.33 পেয়েছি।

কিন্তু অবিন্যস্ত তথ্যের গড় মান 456.50 ঠিক।

8 কিন্তু x_i এবং f_i-এর মান খুব বড়ো হলে তখন x_i এবং f_i-এর গুণফল নিয়ে হিসাব করা জটিল ও সময়সাপেক্ষ হয়ে পড়বে এবং ভুল হওয়ার সম্ভবনা থাকবে। তাই আরও সহজে এবং কম সময়ে কীভাবে হিসাব করব দেখি।

f_i-এর মানের পরিবর্তন করা যাবে না। কিন্তু প্রতিটি x_i থেকে একটি নির্দিষ্ট মান বিয়োগ করে যে নতুন x_i পাব তাদের সাহায্যে যৌগিক গড় নির্ণয় করতে পারব।

তাই প্রথমে x_i থেকে একটি নির্দিষ্ট x_i বেছে নিয়ে প্রতিটি x_i থেকে বিয়োগ করে যৌগিক গড় নির্ণয় করি।

9 কিন্তু ওই নির্দিষ্ট x_i-কে কী বলা হয়?

ওই নির্দিষ্ট x_i যা প্রতিটি x_i থেকে বিয়োগ করা হয়, তাকে **কল্পিত গড়** (Assumed mean) বলা হয় এবং সাধারণত "a" চিহ্ন দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

আবার, এই যৌগিক গড় নির্ণয়ের হিসাব আরও সহজ করার জন্য এই কল্পিত গড় (Assumed mean)-a -কে সাধারণত $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$-এর মধ্য থেকে যে x_i কেন্দ্রে আছে তাকে নেওয়া হয়।

$\therefore$ Table-3-এ ধরি, a=425 বা a=475

প্রয়োগ : 4. আমি $a=425$ ধরে, $d_i=x_i-a=x_i-425$ লিখে Table – 1 থেকে প্রাপ্ত তথ্যের যৌগিক গড় নির্ণয় করি ।

সারণি-4 (Table – 4)

লাভের পরিমাণ (টাকা)	দিনসংখ্যা (পরিসংখ্যা f_i)	শ্রেণি মধ্যক (x_i)	$(d_i=x_i-a)$ $d_i=(x_i-425)$	$d_i f_i$
300 - 350	2	325	–100	–200
350 - 400	5	375	–50	–250
400 - 450	7	425 = a	0	0
450 - 500	7	475	50	350
500 - 550	5	525	100	500
550 - 600	4	575	150	600
মোট	$\sum f_i=30$			$\sum f_i d_i=1000$

∴ উপরের ছক থেকে পাই, $\bar{d}=\dfrac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}=\dfrac{1000}{30}=33.33$ (প্রায়)

10 এই $\bar{d}$ কে কী বলা হয়?

d_i হলো প্রতিটি x_i থেকে a -এর **বিচ্যুতি** [Deviation] এবং $\bar{d}$ হলো **বিচ্যুতির গড়** [Mean of the Deviation]।

11 এখন আমরা $\bar{x}$ ও $\bar{d}$ -এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করি।

$$\bar{d}=\frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}=\frac{\sum f_i(x_i-a)}{\sum f_i}$$

$$=\frac{\sum f_i x_i-\sum f_i a}{\sum f_i}$$

$$=\frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}-\frac{\sum f_i a}{\sum f_i}=\frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}-\frac{a\sum f_i}{\sum f_i}\quad [\because a \text{ ধ্রুবক}]$$

$$\bar{d}=\bar{x}-a$$

বা, $\bar{x}=a+\bar{d}$

বা, $\bar{x}=a+\dfrac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

লাভের যৌগিক গড় $=a+\bar{d}=(425+33.33)$ (প্রায়) $=458.33$ (প্রায়)

∴ গতমাসে আশাকাকিমার চা-এর দোকানে গড় লাভ হয়েছিল 458.33 টাকা (প্রায়)।

12 তুলনামূলকভাবে সহজে যৌগিক গড় নির্ণয়ের এই পদ্ধতিকে কী বলা হয়?

যৌগিক গড় নির্ণয়ের উপরের পদ্ধতিকে **কল্পিত গড় পদ্ধতি (Asumed Mean Method)** বা **সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি (Short Method)** বা **বিচ্যুতি পদ্ধতি (Deviation Method)** বলা হয়।

> যৌগিক গড় নির্ণয়ের ক্ষেত্রে প্রত্যক্ষ পদ্ধতি (Direct Method) বা কল্পিত গড় পদ্ধতি (Asumed Mean Method) যে-কোনো একটি পদ্ধতি ব্যবহার করা যায়। তবে তথ্যের সাংখ্যমান বড়ো হলে কল্পিত গড় পদ্ধতি (Asumed Mean Method)-তে যৌগিক গড় নির্ণয় করা সুবিধাজনক।

আমি সারণি 3-এর $a=325$; [অথবা $a=375$ বা $a=475$ বা $a=525$ বা $a=575$] নিয়ে কল্পিত গড় (Asumed Mean) পদ্ধতিতে যৌগিক গড় নির্ণয় করে হাতেকলমে যাচাই করি যে প্রতিক্ষেত্রে যৌগিক গড়ের মান একই হবে। [নিজে করি]

কিন্তু কল্পিত গড় পদ্ধতিতে যৌগিক গড় নির্ণয়ের সময়ে দেখছি Table-4-এর চতুর্থ স্তম্ভের প্রতিটি সংখ্যা 50-এর গুণিতক। তাই প্রতিটি d_i-কে 50 দিয়ে ভাগ করে হিসাব করলে হিসাবটি আগের তুলনায় অনেক সহজ হয়। অর্থাৎ প্রতিটি d_i-কে শ্রেণি দৈর্ঘ্য (h) দিয়ে ভাগ করলে সহজে হিসাব করা সম্ভব হয়।

প্রয়োগ : 4. Table-4-থেকে $\bar{u}=\dfrac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}$ নির্ণয় করি যেখানে $u_i=\dfrac{x_i-a}{h}$, এখানে a=425 এবং h=50

লাভের পরিমাণ (টাকা)	দিনসংখ্যা (পরিসংখ্যা f_i)	শ্রেণি মধ্যক (x_i)	$(d_i=x_i-a)$ $d_i=x_i-425$	$u_i=\dfrac{x_i-a}{50}$	$f_i u_i$
300 - 350	2	325	-100	-2	-4
350 - 400	5	375	-50	-1	-5
400 - 450	7	425	0	0	0
450 - 500	7	475	50	1	7
500 - 550	5	525	100	2	10
550 - 600	4	575	150	3	12
মোট	$\sum f_i=30$				$\sum f_i u_i=20$

$\therefore$ পেলাম, $\bar{u}=\dfrac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}=\dfrac{20}{30}=\dfrac{2}{3}$

(13) আমি $\bar{u}$ ও $\bar{x}$ -এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করি।

$$\bar{u}=\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}=\frac{\sum f_i\left(\frac{x_i-a}{h}\right)}{\sum f_i} \qquad \left[\because u_i=\frac{x_i-a}{h}\right]$$

$$=\frac{1}{h}\times\frac{\sum f_i(x_i-a)}{\sum f_i}$$

$$=\frac{1}{h}\times\left[\frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}-\frac{a\sum f_i}{\sum f_i}\right]$$

$$\bar{u}=\frac{1}{h}\times(\bar{x}-a)$$

বা, $h\bar{u}=\bar{x}-a$

সুতরাং, $\bar{x}=a+h\bar{u}$

$$\therefore\ \bar{x}=a+h\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}$$

বুঝেছি, এই পদ্ধতিতে গতমাসে আশাকাকিমার চা-এর দোকানের গড় লাভ $=(425+50\times\frac{2}{3})$ টাকা
$=458.33$ টাকা (প্রায়)

$\therefore$ যৌগিক গড়ের একই মান পেলাম।

(14) তুলনামূলকভাবে আরও সহজে যৌগিক গড় নির্ণয়ের উপরের পদ্ধতিকে কী বলা হয়?

যৌগিক গড় নির্ণয়ের উপরের পদ্ধতিকে **ক্রম-বিচ্যুতি পদ্ধতি (Step-deviation method)** বলা হয়।

(15) ক্রম-বিচ্যুতি (Step-deviation) পদ্ধতিতে যৌগিক গড় নির্ণয় কি সর্বদা সুবিধাজনক?

যদি সকল শ্রেণির শ্রেণি-দৈর্ঘ্য সমান হয় অথবা সকল d_i-এর একটি সাধারণ উৎপাদক থাকে তবেই ক্রম-বিচ্যুতি

পদ্ধতিতে যৌগিক গড় নির্ণয় সুবিধাজনক।

$\therefore$ **পেলাম,** (i) প্রত্যক্ষ পদ্ধতি, কল্পিত গড় পদ্ধতি ও ক্রম-বিচ্যুতি পদ্ধতির প্রতিক্ষেত্রে প্রাপ্ত যৌগিক গড়ের মান সমান।

(ii) কল্পিত গড় পদ্ধতি এবং ক্রম-বিচ্যুতি পদ্ধতি উভয়েই প্রত্যক্ষ পদ্ধতির একটি সরলতর রূপ।

(iii) যদি শ্রেণি দৈর্ঘ্য সমান হয় তাহলে যৌগিক গড় নির্ণয়ের ক্ষেত্রে ক্রম-বিচ্যুতি পদ্ধতিতে গণনা সহজ হবে।

(iv) আবার, শ্রেণি দৈর্ঘ্য অসমান হলে যৌগিক গড় নির্ণয়ের ক্ষেত্রে ক্রম-বিচ্যুতি পদ্ধতি করা যাবে যদি সকল $\mathbf{d_i}$-এর একটি সাধারণ উৎপাদক থাকে।

প্রয়োগ : 5. আমি ও সতীশ আমাদের পাড়ার 50 টি পরিবারের এক সপ্তাহে বিদ্যুৎ খরচের তথ্যটি একটি ছকে লিখেছি, সেই ছকটি হলো—

বিদ্যুৎ খরচের পরিমাণ (ইউনিট)	85–105	105–125	125–145	145–165	165–185	185–205
পরিবারের সংখ্যা	3	12	18	10	5	2

আমি যৌগিক গড় নির্ণয়ের তিনটি পদ্ধতিতে 50 টি পরিবারের এক সপ্তাহের বিদ্যুৎ খরচের যৌগিক গড় নির্ণয় করি।

প্রথমে শ্রেণি মধ্যক নির্ণয় করে প্রদত্ত তথ্যটি লিখি,

বিদ্যুৎ খরচের পরিমাণ (ইউনিট)	পরিবারের সংখ্যা (পরিসংখ্যা f_i)	শ্রেণি মধ্যক (x_i)
85 - 105	3	95
105 -125	12	115
125 - 145	18	135
145 - 165	10	155
165 - 185	5	175
185 - 205	2	195
মোট	$\sum f_i = 50$	

ধরি, $a=155$ এবং এখানে শ্রেনি দৈর্ঘ্য $h=20$

$\therefore d_i = x_i - 155$ এবং $u_i = \dfrac{x_i - 155}{20}$ ধরে নীচের ছকে লিখি।

বিদ্যুৎ খরচের পরিমাণ (ইউনিট)	পরিবারের সংখ্যা (f_i)	শ্রেণি মধ্যক (x_i)	$d_i = x_i - 155$	$u_i = \dfrac{x_i - 155}{20}$	$f_i x_i$	$f_i d_i$	$f_i u_i$
85 - 105	3	95	–60	–3	285	–180	–9
105 -125	12	115	–40	–2	1380	–480	–24
125 - 145	18	135	–20	–1	2430	–360	–18
145 - 165	10	155	0	0	1550	0	0
165 - 185	5	175	20	1	875	100	5
185 - 205	2	195	40	2	390	80	4
মোট	50				6910	–840	–42

$\therefore$ উপরের ছক থেকে পেলাম, $\sum f_i = 50, \sum f_i x_i = 6910, \sum f_i d_i = -840$ এবং $\sum f_i u_i = -42$

$\therefore$ প্রত্যক্ষ পদ্ধতি থেকে পাই, যৌগিক গড় $= \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{6910}{50}$ ইউনিট $= 138.2$ ইউনিট

কল্পিত গড় পদ্ধতি থেকে পাই, যৌগিক গড় $= a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = 155 + \frac{(-840)}{50}$ ইউনিট

$= 155 - 16.8 = 138.2$ ইউনিট

আবার, ক্রম-বিচ্যুতি পদ্ধতি থেকে পাই, যৌগিক গড় $= a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h$

$= 155 + \left(\frac{-42}{50}\right) \times 20$ ইউনিট

$= 155 - 16.8 = 138.2$ ইউনিট

$\therefore$ তিনটি পদ্ধতির সাহায্যে দেখছি, পাড়ার 50 টি পরিবারের এক সপ্তাহের বিদ্যুৎ খরচের যৌগিক গড় 138.2 ইউনিট।

প্রয়োগ : 6. রমেশ তাঁতির অনেকগুলি তাঁত আছে। সেখানে 35 জন তাঁতির সাপ্তাহিক আয়ের (টাকার) পরিমাণের তথ্যটি নীচের ছকে লিখেছি।

আয় (টাকায়)	2500 - 3000	3000 - 3500	3500 - 4000	4000 - 4500	4500 - 5000
পরিসংখ্যা	3	6	9	12	5

আয়ের যৌগিক গড় নির্ণয় করি।

$a=3750$ এবং $h=500$ ধরে ক্রম-বিচ্যুতি[Step-deviation]পদ্ধতিতে যৌগিক গড় নির্ণয় করি।

আয় (টাকায়) (শ্রেণি অন্তর)	পরিসংখ্যা (f_i)	শ্রেণি মধ্যক (x_i)	$u_i = \frac{x_i - 3750}{500}$	$f_i u_i$
2500 - 3000	3	2750	-2	-6
3000 - 3500	6	3250	-1	-6
3500 - 4000	9	3750	0	0
4000 - 4500	12	4250	1	12
4500 - 5000	5	4750	2	10
মোট	$\sum f_i = 35$			$\sum f_i u_i = 10$

$\therefore$ আয়ের যৌগিক গড় $= 3750$ টাকা $+ 500 \times \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}$ টাকা

$= 3750$ টাকা $+ \left[500 \times \frac{10}{35}\right]$ টাকা $= \boxed{}$ টাকা

প্রয়োগ : 7. যে-কোনো পদ্ধতির সাহায্যে নীচের তথ্যের যৌগিক গড় নির্ণয় করি। [নিজে করি]

শ্রেণি	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60
পরিসংখ্যা	7	5	6	12	8	2

হাতেকলমে

আমি আমার শ্রেণির 40 জন বন্ধুর ওজনের একটি বিন্যস্ত তথ্যের ছক তৈরি করি ও ওই তথ্য থেকে যৌগিক গড়ের তিনটি পদ্ধতির সাহায্যে আমার শ্রেণির ওই 40 জন বন্ধুর ওজনের যৌগিক গড় নির্ণয় করি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 8. যদি নীচের পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকার যৌগিক গড় 54 হয়, তবে k-এর মান নির্ণয় করি।

শ্রেণি	0 - 20	20 - 40	40 - 60	60 - 80	80 - 100
পরিসংখ্যা	7	11	k	9	13

শ্রেণি অন্তর	পরিসংখ্যা (f_i)	শ্রেণি মধ্যক (x_i)	$f_i x_i$	$u_i = \frac{x_i - 50}{20}$	$f_i u_i$
0 - 20	7	10	70	-2	-14
20 - 40	11	30	330	-1	-11
40 - 60	k	$50 = a$	50k	0	0
60 - 80	9	70	630	1	9
80 - 100	13	90	1170	2	26
মোট	$\sum f_i = 40+k$		$\sum f_i x_i = 2200+50k$		$\sum f_i u_i = 10$

$\therefore$ নির্ণেয় যৌগিক গড় $= \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{2200+50k}{40+k}$

শর্তানুসারে, $\frac{2200+50k}{40+k} = 54$

বা, $2200 + 50k = 2160 + 54k$

বা, $50k - 54k = 2160 - 2200$

বা, $-4k = -40$

$\therefore$ $k = 10$

অন্যভাবে,

যৌগিক গড় $= a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h$

$54 = 50 + \frac{10}{40+k} \times 20$

বা, $4 = \frac{200}{40+k}$

বা, $40+k = 50$

$\therefore$ $k = 10$

প্রয়োগ : 9. যদি নীচের পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকার যৌগিক গড় 25 হয়, তবে k-এর মান নির্ণয় করি। [নিজে করি]

শ্রেণি	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
পরিসংখ্যা	5	k	15	16	6

প্রয়োগ : 10. মারিয়া তাদের গ্রামের অঙ্কন প্রতিযোগিতায় কে কত নম্বর পেয়েছে তার একটি ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা তৈরি করেছে। তালিকাটি হলো:

নম্বর	0 অথবা 0-এর বেশি	10 অথবা 10-এর বেশি	20 অথবা 20-এর বেশি	30 অথবা 30-এর বেশি	40 অথবা 40-এর বেশি	50 অথবা 50-এর বেশি
প্রতিযোগীর সংখ্যা	40	36	22	11	2	0

আমি অঙ্কন প্রতিযোগিতায় প্রাপ্ত নম্বরের যৌগিক গড় নির্ণয় করি।

প্রথমে বৃহত্তর সূচক ক্রম যৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকাটিকে সাধারণ বিভাজন তালিকায় প্রকাশ করি।

দেখছি, 40 জন শিক্ষার্থী 0 বা 0-এর বেশি নম্বর পেয়েছে,

এবং 36 জন শিক্ষার্থী 10 বা 10-এর বেশি নম্বর পেয়েছে,

$\therefore$ 0 থেকে 10-এর মধ্যে নম্বর পেয়েছে (40–36) জন =4 জন শিক্ষার্থী

একইভাবে 10 থেকে 20-এর মধ্যে নম্বর পেয়েছে (36–22) জন =14 জন শিক্ষার্থী

$\therefore$ পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকাটি হলো :

নম্বর	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
প্রতিযোগীর সংখ্যা	4	14	11	9	2

কল্পিত গড় 25 ধরে ক্রম বিচ্যুতি পদ্ধতিতে যৌগিক গড় নির্ণয় করি—

শ্রেণি-সীমানা (নম্বর)	প্রতিযোগীর সংখ্যা (f_i)	শ্রেণি মধ্যক (x_i)	$u_i=\frac{x_i-25}{10}$	$f_i u_i$
0 - 10	4	5	–2	–8
10 - 20	14	15	–1	–14
20 - 30	11	25	0	0
30 - 40	9	35	1	9
40 - 50	2	45	2	4
মোট	$\sum f_i=40$			$\sum f_i u_i=-9$

নির্ণেয় যৌগিক গড় $=25+10\times\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}$ $=25+10\left(\frac{-9}{40}\right)$ $=25-2.25$ $=22.75$

$\therefore$ 40 জন প্রতিযোগীর প্রাপ্ত নম্বরের গড় 22.75

প্রয়োগ : 11. আমি নীচের পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকার যৌগিক গড় নির্ণয় করি :

শ্রেণি-সীমা	20 - 29	30 - 39	40 - 49	50 - 59	60 - 69	70 - 79
পরিসংখ্যা	12	20	14	6	5	3

প্রদত্ত পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকার শ্রেণিগুলি শ্রেণি-অন্তর্ভুক্ত।

তাই প্রথমে পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকার শ্রেণি-অন্তর্ভূত শ্রেণিগুলি শ্রেণি-বহির্ভুক্ত আকারে লিখে যৌগিক গড় নির্ণয় করি। কল্পিত গড় 44.5 ধরি। এখানে শ্রেণি দৈর্ঘ্য (h) = 10

শ্রেণি-সীমা	শ্রেণি-সীমানা	পরিসংখ্যা (f_i)	শ্রেণি মধ্যক (x_i)	$[u_i=\frac{x_i-a}{h}]$ $u_i=\frac{x_i-44.5}{10}$	$f_i u_i$
20 - 29	19.5 - 29.5	12	24.5	–2	–24
30 - 39	29.5 - 39.5	20	34.5	–1	–20
40 - 49	39.5 - 49.5	14	44.5	0	0
50 - 59	49.5 - 59.5	6	54.5	1	6
60 - 69	59.5 - 69.5	5	64.5	2	10
70 - 79	69.5 - 79.5	3	74.5	3	9
	মোট	$\sum f_i=60$			$\sum f_i u_i=-19$

$\therefore$ নির্ণেয় যৌগিক গড় $=44.5+h\times\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}$ $=44.5+\left(10\times\frac{-19}{60}\right)$ $=\boxed{}$ [নিজে হিসাব করে লিখি]

প্রয়োগ : 12. নীচের পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকার যৌগিক গড় নির্ণয় করি। [নিজে করি]

শ্রেণি-সীমা	25 - 29	30 - 34	35 - 39	40 - 44	45 - 49	50 -54
পরিসংখ্যা	10	12	15	5	3	5

প্রয়োগ : 13. নীচের তালিকা থেকে একটি বিদ্যালয়ের দশম শ্রেণির 52 জন ছাত্রের গড় নম্বর প্রত্যক্ষ পদ্ধতি ও কল্পিত গড় পদ্ধতিতে নির্ণয় করি।

ছাত্র সংখ্যা	4	7	10	15	8	5	3
নম্বর	30	33	35	40	43	45	48

ধরি, কল্পিত গড় (a) = 40

নম্বর (x_i)	**ছাত্র সংখ্যা (f_i)**	$f_i x_i$	$(d_i = x_i - a)$ $d_i = (x_i - 40)$	$f_i d_i$
30	4	120	–10	–40
33	7	231	–7	–49
35	10	350	–5	–50
40=a	15	600	0	0
43	8	344	3	24
45	5	225	5	25
48	3	144	8	24
মোট	$\sum f_i = 52$	$\sum f_i x_i = 2014$		$\sum f_i d_i = -66$

প্রত্যক্ষ পদ্ধতিতে গড় নম্বর $= \frac{2014}{52} = 38.73$ (প্রায়)

কল্পিত গড় পদ্ধতিতে, গড় নম্বর $= a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

$= 40 + \frac{-66}{52}$

$= 40 - \frac{66}{52}$

$= (40 - 1.27)$ (প্রায়)

$= 38.73$ (প্রায়)

কষে দেখি 26.1

1. আমি আমার 40 জন বন্ধুর বয়স নীচের ছকে লিখেছি,

বয়স (বছর)	15	16	17	18	19	20
বন্ধুর সংখ্যা	4	7	10	10	5	4

আমি আমার বন্ধুদের গড় বয়স প্রত্যক্ষ পদ্ধতিতে নির্ণয় করি।

2. গ্রামের 50 টি পরিবারের সদস্য সংখ্যা নীচের তালিকায় লিখেছি।

সদস্য সংখ্যা	2	3	4	5	6	7
পরিবারের সংখ্যা	6	8	14	15	4	3

ওই 50 টি পরিবারের গড় সদস্য সংখ্যা কল্পিত গড় পদ্ধতিতে লিখি।

3. যদি নীচের প্রদত্ত তথ্যের যৌগিক গড় 20.6 হয়, তবে a-এর মান নির্ণয় করি :

চল (x_i)	10	15	a	25	35
পরিসংখ্যা (f_i)	3	10	25	7	5

4. যদি নীচের প্রদত্ত তথ্যের যৌগিক গড় 15 হয়, তবে p-এর মান হিসাব করে লিখি :

চল	5	10	15	20	25
পরিসংখ্যা	6	p	6	10	5

5. রহমতচাচা তার 50 টি বাক্সে বিভিন্ন সংখ্যায় আম ভরে পাইকারি বাজারে নিয়ে যাবেন। কতগুলি বাক্সে কতগুলি আম রাখলেন তার তথ্য নীচের ছকে লিখলাম।

আমের সংখ্যা	50 - 52	52 - 54	54 - 56	56 - 58	58 - 60
বাক্সের সংখ্যা	6	14	16	9	5

আমি ওই 50টি বাক্সে গড় আমের সংখ্যা হিসাব করে লিখি। (যে-কোনো পদ্ধতিতে)

6. মহিদুল পাড়ার হাসপাতালের 100 জন রোগীর বয়স নীচের ছকে লিখল। ওই 100 জন রোগীর গড় বয়স হিসাব করে লিখি। (যে-কোনো পদ্ধতিতে)

বয়স (বছরে)	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70
রোগীর সংখ্যা	12	8	22	20	18	20

7. প্রত্যক্ষ পদ্ধতিতে নীচের তথ্যের গড় নির্ণয় করি।

(i)

শ্রেণি-সীমানা	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
পরিসংখ্যা	4	6	10	6	4

(ii)

শ্রেণি-সীমানা	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70
পরিসংখ্যা	10	16	20	30	13	11

8. কল্পিত গড় পদ্ধতিতে নীচের তথ্যের গড় নির্ণয় করি।

(i)

শ্রেণি-সীমানা	0 - 40	40 - 80	80 - 120	120 - 160	160 - 200
পরিসংখ্যা	12	20	25	20	13

(ii)

শ্রেণি-সীমানা	25 - 35	35 - 45	45 - 55	55 - 65	65 - 75
পরিসংখ্যা	4	10	8	12	6

9. ক্রম-বিচ্যুতি পদ্ধতিতে নীচের তথ্যের গড় নির্ণয় করি।

(i)

শ্রেণি-সীমানা	0 - 30	30 - 60	60 - 90	90 - 120	120 - 150
পরিসংখ্যা	12	15	20	25	8

(ii)

শ্রেণি-সীমানা	0 - 14	14 - 28	28 - 42	42 - 56	56 - 70
পরিসংখ্যা	7	21	35	11	16

10. যদি নীচের পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকার নম্বরের যৌগিক গড় 24 হয়, তবে p-এর মান নির্ণয় করি।

শ্রেণি-সীমানা (নম্বর)	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
ছাত্র সংখ্যা	15	20	35	p	10

11. আলোচনা সভায় উপস্থিত ব্যক্তিদের বয়সের তালিকা দেখি ও গড় বয়স নির্ণয় করি।

বয়স (বছর)	30 - 34	35 - 39	40 - 44	45 - 49	50 - 54	55 - 59
রোগীর সংখ্যা	10	12	15	6	4	3

12. নীচের তথ্যের গড় নির্ণয় করি।

শ্রেণি-সীমা	5 - 14	15 - 24	25 - 34	35 - 44	45 - 54	55 - 64
পরিসংখ্যা	3	6	18	20	10	3

13. ছাত্রীদের প্রাপ্ত নম্বরের গড় নির্ণয় করি যদি তাদের প্রাপ্ত নম্বরের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা নিম্নরূপ হয়:

শ্রেণি-সীমা (নম্বর)	10-এর কম	20-এর কম	30-এর কম	40-এর কম	50-এর কম
ছাত্রী সংখ্যা	5	9	17	29	45

14. নীচের তালিকার 64 জন ছাত্রের প্রাপ্ত নম্বরের গড় নির্ণয় করি।

শ্রেণি-সীমা (নম্বর)	1 - 4	4 - 9	9 - 16	16 - 17
ছাত্র	6	12	26	20

[সংকেত : যেহেতু প্রত্যেকটি শ্রেণির শ্রেণি দৈর্ঘ্য সমান নয়, তাই ক্রমবিচ্যুতি পদ্ধতিতে করতে পারব না। প্রত্যক্ষ পদ্ধতি এবং কল্পিত গড় পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় করি]

গতকাল আমরা মোট দশজন বন্ধু সাঁতরাগাছি ঝিলের ধারে অনেকক্ষণ মজা করে সময় কাটিয়েছি। গান, আবৃত্তি ও গল্পের সঙ্গে সঙ্গে পরিযায়ী পাখিদের যাতায়াতও লক্ষ করেছি। আমার বন্ধু মিতা ও সজল কিছু খাবারের ব্যবস্থাও করেছিল।

ওই খাবারের ব্যবস্থা করার জন্যে আমরা যে যার সাধ্যমতো টাকা দিলাম। আমরা দশজনের প্রত্যেকে দিলাম10 টাকা, 15 টাকা,14 টাকা, 20 টাকা,12 টাকা, 18 টাকা, 22 টাকা, 24 টাকা, 100 টাকা ও 200 টাকা।

16 কিন্তু আমরা গড়ে কত টাকা দিলাম হিসাব করে দেখি।

আমরা গড়ে দিলাম $= \frac{10+15+14+20+12+18+22+24+100+200}{10}$ টাকা $= \boxed{}$ টাকা

যৌগিক গড় মধ্যগামিতার একটি মাপক।

17 কিন্তু দেখছি যৌগিক গড় 43.5 টাকা। কিন্তু এটি কেন্দ্রীয় অবস্থানের কাছাকাছি নেই।

প্রদত্ত তথ্যের মানগুলির দুই একটি যদি অন্যান্য মানগুলির তুলনায় অত্যধিক বড়ো বা ছোটো হয় তখন অনেকক্ষেত্রে যৌগিক গড় কেন্দ্রীয় অবস্থানের কাছাকাছি থাকে না।

18 তখন এই ধরনের তথ্যের ক্ষেত্রে কোন মধ্যগামিতার মাপক ব্যবহার করব?

ওইসব ক্ষেত্রে মধ্যগামিতার মাপক হিসাবে **মধ্যমা (Median)** ব্যবহার করা হয়।

19 কিন্তু মধ্যমা (Median) কী?

মধ্যমা মধ্যগামিতার অপর একটি মাপক।

প্রদত্ত অবিন্যস্ত রাশিতথ্যকে মানের ঊর্ধ্বক্রম বা অধঃক্রম অনুযায়ী সাজালে তাদের মধ্যমান বা দুটি মধ্যমানের গড়ই হলো রাশিতথ্যের মধ্যমা (Median)।

বুঝেছি, প্রদত্ত তথ্যটি মানের ঊর্ধ্বক্রমে সাজিয়ে পাই,

$10, 12, 14, 15, \boxed{18}, \boxed{20}, 22, 24, 100, 200$

20 কিন্তু প্রদত্ত তথ্যটি মানের ঊর্ধ্বক্রমে সাজানোর পরে মধ্যমান দুটি সংখ্যা 18 ও 20 পেলাম। রাশিতথ্যের মধ্যমা কীভাবে পাব?

ধরি, x চল/চলরাশির n টি মান $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ মানের ঊর্ধ্বক্রম অনুযায়ী সাজিয়ে পেলাম, $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ [যেখানে, $x_1 < x_2 < x_3 \ldots\ldots < x_n$]

[মানগুলির মধ্যে কয়েকটি পরস্পর সমান হতে পারে।

(i) যদি $\boxed{\text{n অযুগ্ম (Odd)}}$ হয় তাহলে $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ -তম মানটিই মধ্যমা।

$\therefore$ মধ্যমা $= x_{\frac{n+1}{2}}$, যখন n অযুগ্ম

(ii) যদি $\boxed{\text{n যুগ্ম (Even)}}$ হয়, কোনো একটি মধ্যমান পাওয়া যাবে না। এক্ষেত্রে $\left(\frac{n}{2}\right)$ -তম এবং $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ -তম মান দুইটির গড়কে মধ্যমা হিসাবে ধরা হয়।

$\therefore$ মধ্যমা $= \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}$, যখন n যুগ্ম

বুঝেছি, 10, 12, 14, 15, $\boxed{18}$, $\boxed{20}$, 22, 24, 100, 200-এর ক্ষেত্রে পদের সংখ্যা = 10

$\therefore$ এক্ষেত্রে মধ্যমা $\left(\frac{10}{2}\right)$ তম ও $\left(\frac{10}{2}+1\right)$ তম পদের গড়।

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যমা = $\frac{18+20}{2} = 19$

প্রয়োগ : 14. আমি আমার কিছু বন্ধুর ওজন নীচে লিখেছি, তাদের ওজনের মধ্যমা নির্ণয় করি।

32 কিগ্রা., 30 কিগ্রা., 38 কিগ্রা., 40 কিগ্রা., 36 কিগ্রা., 45 কিগ্রা., 50 কিগ্রা., 52 কিগ্রা., 40 কিগ্রা., 65 কিগ্রা., 54 কিগ্রা.

বন্ধুদের ওজন মানের ঊর্ধ্বক্রমে সাজিয়ে পাই,

30 কিগ্রা., 32 কিগ্রা., 36 কিগ্রা., 38 কিগ্রা., 40 কিগ্রা., 40 কিগ্রা., 45 কিগ্রা., 50 কিগ্রা., 52 কিগ্রা., 54 কিগ্রা., 65 কিগ্রা.

এখানে, $n=11$ অর্থাৎ n অযুগ্ম।

ওজনের মধ্যমা = $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ -তম মান = $\left(\frac{11+1}{2}\right)$ -তম মান = 6 -তম মান = 40 কিগ্রা.

প্রয়োগ : 15. আমরা কিছু বন্ধুদের এই মাসে স্কুলে উপস্থিতির দিনসংখ্যা লিখেছি। যেমন, 20 দিন, 25 দিন, 10 দিন, 18 দিন, 21 দিন, 18 দিন, 16 দিন, 22 দিন। আমি বন্ধুদের উপস্থিতির দিনসংখ্যার মধ্যমা নির্ণয় করি।

এই মাসে স্কুলে বন্ধুদের উপস্থিতির দিনসংখ্যা ঊর্ধ্বক্রমে সাজিয়ে পাই,

10 দিন, 16 দিন, 18 দিন, 18 দিন, 20 দিন, 21 দিন, 22 দিন, 25 দিন

এখানে, $n=8$ অর্থাৎ n যুগ্ম।

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যমা $= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{8}{2}\right) \text{-তম মান} + \left(\frac{8}{2}+1\right) \text{-তম মান}\right\}$

$= \frac{1}{2}\left\{\text{চতুর্থ মান} + \text{পঞ্চম মান}\right\}$

$= \frac{1}{2}\left[18 \text{ দিন} + 20 \text{ দিন}\right] = 19 \text{ দিন}$

প্রয়োগ : 16. দুটি কবাডি দলের বিভিন্ন ম্যাচে প্রাপ্ত পয়েন্ট নীচে দেওয়া হলো। এদের মধ্যমা নির্ণয় করি।

(i) 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15

(ii) 6, 7, 8, 8, 9, 10, 15, 15, 16, 17, 19, 25 **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 17. নিয়ামতচাচার দোকানে ছয়রকম দৈর্ঘ্যের ব্যাসবিশিষ্ট 100 টি বল আছে। ওই বলগুলির ব্যাসের দৈর্ঘ্যের পরিসংখ্যা বিভাজন নিম্নরূপ :

ব্যাস (মিমি.)	44	45	46	47	48	49
পরিসংখ্যা (বলের সংখ্যা)	12	15	23	20	15	15

আমি এই 100 টি বলের ব্যাসের দৈর্ঘ্যের মধ্যমা নির্ণয় করি।

এখানে, $n=100$ অর্থাৎ n যুগ্ম।

$\therefore$ মধ্যমা = $\left(\frac{n}{2}\right)$ -তম ও $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ -তম পর্যবেক্ষণের গড়

= 50-তম ও 51-তম পর্যবেক্ষণের গড়

বলের ব্যাসের দৈর্ঘ্যের মধ্যমা নির্ণয়ের জন্য প্রথমে প্রদত্ত পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকার ক্ষুদ্রতর সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা তৈরি করি।

ব্যাসের দৈর্ঘ্য (মিমি.)	বলের সংখ্যা
44	12
45 পর্যন্ত	12+15=27
46 পর্যন্ত	27+23=50
47 পর্যন্ত	50+20=70
48 পর্যন্ত	70+15=85
49 পর্যন্ত	85+15=100

$\therefore$ প্রদত্ত পরিসংখ্যা বিভাজন ছকে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যার স্তম্ভ যোগ করে পাই,

ব্যাসের দৈর্ঘ্য (মিমি.)	পরিসংখ্যা	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (ক্ষুদ্রতর সূচক)
44	12	12
45	15	27
46	23	50
47	20	70
48	15	85
49	16	100=n

উপরের ছক থেকে দেখছি, 50 -তম পর্যবেক্ষণ 46
এবং 51-তম পর্যবেক্ষণ 47

$\therefore$ মধ্যমা $= \dfrac{46+47}{2} = 46.5$

$\therefore$ নিয়ামতচাচার দোকানের 100 টি বলের ব্যাসের দৈর্ঘ্যের মধ্যমা 46.5 মিমি.।

বুঝেছি, নিয়ামত চাচার দোকানের 50% বলের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 46.5 মিলিমিটারের কম এবং 50% বলের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 46.5 মিলিমিটারের বেশি।

প্রয়োগ : 18. আমি নীচের পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা থেকে তথ্যটির মধ্যমা নির্ণয় করি।

চল (x_i)	25	26	27	28	29	30	31	32	33
পরিসংখ্যা (f_i)	4	2	4	7	6	5	5	4	2

প্রথমে প্রদত্ত পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকার একটি ক্ষুদ্রতর সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা তৈরি করি:

চল (x_i)	পরিসংখ্যা (f_i)	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (ক্ষুদ্রতর সূচক)
25	4	4
26	2	6
27	4	10
28	7	17
29	6	23
30	5	28
31	5	33
32	4	37
33	2	39=n

এখানে, n=39 অর্থাৎ n অযুগ্ম।

$\therefore$ মধ্যমা $= \left(\frac{n+1}{2}\right)$ -তম পর্যবেক্ষণ

$= \frac{39+1}{2}$ -তম পর্যবেক্ষণ $= 20$ -তম পর্যবেক্ষণ

উপরের ছক থেকে দেখছি, 18-তম থেকে 23 -তম সব পর্যবেক্ষণের একই মান 29.

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যমা = 20 -তম পদ = 29

প্রয়োগ : 19. আমি নীচের পরিসংখ্যা বিভাজন থেকে তথ্যটির মধ্যমা নির্ণয় করি : [নিজে করি]

চল (x_i)	1	2	3	4	5	6
পরিসংখ্যা (f_i)	8	12	16	19	21	24

আমাদের স্কুলের 100 জন শিক্ষার্থীর বুদ্ধ্যাঙ্ক পরীক্ষা (I.Q. test) করা হয়েছে। তার পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটি হলো,

বুদ্ধ্যাঙ্ক (x_i)	75 - 85	85 - 95	95 - 105	105 - 115	115 - 125	125 - 135
শিক্ষার্থীর সংখ্যা (f_i)	9	12	27	30	17	5

আমি উপরের ছকের 100 জন শিক্ষার্থীর বুদ্ধ্যাঙ্কের মধ্যমা নির্ণয় করি।

দেখছি, প্রদত্ত পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটি একটি বিন্যস্ত পরিসংখ্যা বিভাজন ছক।

এই বিন্যস্ত পরিসংখ্যা বিভাজন ছকের ক্ষুদ্রতর সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন ছক তৈরি করি।

বুদ্ধ্যাঙ্ক (x_i)	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (ক্ষুদ্রতর সূচক)
75 বা 75 -এর থেকে বড়ো কিন্তু 85-এর থেকে ছোটো	9
95-এর থেকে ছোটো	9+12=21
105-এর থেকে ছোটো	21+27=48
115-এর থেকে ছোটো	48+30=78
125-এর থেকে ছোটো	78+17=95
135-এর থেকে ছোটো	95+5=100

$\therefore$ প্রদত্ত পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকার ক্ষুদ্রতর সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা পেলাম,

বুদ্ধ্যাঙ্ক (x_i)	পরিসংখ্যা (f_i)	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (ক্ষুদ্রতর সূচক)
75 - 85	9	9
85 - 95	12	21
95 - 105	27	48
105 - 115	30	78
115 - 125	17	95
125 - 135	5	100=n

এখানে, মোট পরিসংখ্যা =n=100

আমরা প্রথমে উপরের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকের কোন শ্রেণিতে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা $\frac{n}{2}$-এর সমান বা বড়ো হবে দেখি।

$$\frac{n}{2} = \frac{100}{2} = 50$$

∴ 105-115 শ্রেণিটির ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা 78 যা 50 অপেক্ষা ঠিক বেশি।

(21) কিন্তু এই 105-115 শ্রেণিটিকে উপরের পরিসংখ্যা বিভাজনের কী বলা হয়?

105-115 শ্রেণিটি প্রদত্ত পরিসংখ্যা বিভাজনের **মধ্যমা শ্রেণি (Median Class)**।

কিন্তু প্রদত্ত পরিসংখ্যা বিভাজন থেকে তথ্যটির মধ্যমা কীভাবে নির্ণয় করব?

মধ্যমা শ্রেণিটি নির্বাচনের পরে আমরা নীচের সূত্রটি প্রয়োগ করে মধ্যমা নির্ণয় করব।

$$\text{মধ্যমা} = \ell + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

যেখানে, ℓ = মধ্যমা শ্রেণির নিম্ন শ্রেনি-সীমানা, n = পর্যবেক্ষণ সংখ্যা, f = মধ্যমা শ্রেণির পরিসংখ্যা

cf = মধ্যমা শ্রেণির ঠিক আগের শ্রেণির ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা, h = মধ্যমা শ্রেণির শ্রেণি দৈর্ঘ্য

বুঝেছি, নির্ণেয় মধ্যমা $= \ell + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$ [এখানে, $\ell=105, n=100, cf=48, f=30, h=10$]

$$= 105 + \left[\frac{\frac{100}{2} - 48}{30}\right] \times 10$$

$$= 105 + \frac{50-48}{30} \times 10$$

$$= 105 + 0.66 = 105.66$$

বুঝেছি, অর্ধেক সংখ্যক শিক্ষার্থীর বুদ্ধ্যাঙ্ক 105.66-এর কম এবং অর্ধেক সংখ্যক শিক্ষার্থীর বুদ্ধ্যাঙ্ক 105.66-এর বেশি।

প্রয়োগ : 20. আমাদের গ্রামের 45 জন ছাত্রীদের হাতের কাজের উপরে কিছু নম্বর দেওয়া হয়েছে। সেই নম্বরের তালিকাটি নীচের ছকে লিখলাম।

নম্বর (x_i)	0-4	5-9	10-14	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39
ছাত্রী সংখ্যা (f_i)	4	5	7	8	7	5	6	3

উপরের পরিসংখ্যা বিভাজনের মধ্যমা নির্ণয় করি।

প্রদত্ত পরিসংখ্যা বিভাজন ছকের শ্রেণিগুলি শ্রেণি অন্তর্ভুক্ত গঠনে আছে।

∴ প্রথমে ছকটি শ্রেণি বহির্ভূত গঠনে লিখি এবং ক্ষুদ্রতর সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা লিখি।

নম্বর (x_i)	–0.5-4.5	4.5-9.5	9.5-14.5	14.5-19.5	19.5-24.5	24.5-29.5	29.5-34.5	34.5-39.5
ছাত্রী সংখ্যা (f_i)	4	5	7	8	7	5	6	3
ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (ক্ষুদ্রতর সূচক)	4	9	16	24	31	36	42	45=n

এখানে $n=45$, $\therefore \frac{n}{2}=22.5$

22.5 -এর থেকে ঠিক বেশি ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা 24 এবং অনুরূপ শ্রেণি (14.5-19.5)

$\therefore$ মধ্যমা শ্রেণি (Median class) = (14.5-19.5)

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যমা $= \ell + \left[\dfrac{\frac{n}{2}-cf}{f}\right] \times h$ [এখানে, $\ell=14.5, n=45, f=8, cf=16, h=5$]

$$= 14.5 + \left[\dfrac{\frac{45}{2}-16}{8}\right] \times 5$$

$$= 14.5 + 4.06$$
$$= 18.56$$

$\therefore$ অর্ধেক সংখ্যক ছাত্রী 18.56-এর কম নম্বর পেয়েছে এবং অর্ধেক সংখ্যাক ছাত্রী 18.56-এর বেশি নম্বর পেয়েছে।

প্রয়োগ : 21. নীচের পরিসংখ্যা বিভাজন ছক দেখি এবং মধ্যমা নির্ণয় করি : **[নিজে করি]**

শ্রেণি অন্তর	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
পরিসংখ্যা	8	10	24	16	15	7

প্রয়োগ : 22. নীচের পরিসংখ্যা বিভাজন থেকে তথ্যটির মধ্যমা নির্ণয় করি :

প্রাপ্ত নম্বর	10-এর কম	20-এর কম	30-এর কম	40-এর কম	50-এর কম	60-এর কম
শিক্ষার্থী সংখ্যা	8	15	29	42	60	70

প্রদত্ত ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা ছক থেকে পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটি পাই,

প্রাপ্ত নম্বর (x_i)	পরিসংখ্যা (f_i) [শিক্ষার্থীর সংখ্যা]	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (ক্ষুদ্রতর সূচক)
10-এর কম	8	8
10 - 20	7	15
20 - 30	14	29
30 - 40	13	42
40 - 50	18	60
50 - 60	10	70=n

$n=70$, $\therefore \frac{n}{2}=35$

35-এর থেকে ঠিক বেশি ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (30-40) শ্রেণির মধ্যে আছে।

সুতরাং, মধ্যমা শ্রেণিটি হলো (30-40)

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যমা $= \ell + \left[\dfrac{\frac{n}{2}-cf}{f}\right] \times h$ [এখানে, $\ell=30, n=70, cf=\boxed{}, f=13, h=10$]

$= \boxed{}$ [নিজে করি]

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যমা 34.6

প্রয়োগ : 23. নীচের তথ্যের মধ্যমা 525 হলে, x ও y-এর মান নির্ণয় করি, যখন পরিসংখ্যার সমষ্টি 100

শ্রেণি অন্তর	পরিসংখ্যা
0 - 100	2
100 - 200	5
200 - 300	x
300 - 400	12
400 - 500	17
500 - 600	20
600 - 700	y
700 - 800	9
800 - 900	7
900 - 1000	4

প্রদত্ত তথ্যের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (ক্ষুদ্রতর সূচক) বিভাজন তালিকা তৈরি করি—

শ্রেণি অন্তর	পরিসংখ্যা (f_i)	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (ক্ষুদ্রতর সূচক)
0 - 100	2	2
100 - 200	5	7
200 - 300	x	7 + x
300 - 400	12	19 + x
400 - 500	17	36 + x
500 - 600	20	56 + x
600 - 700	y	56 + x + y
700 - 800	9	65 + x + y
800 - 900	7	72 + x + y
900 - 1000	4	76 + x + y = n

যেহেতু $n=100$, সুতরাং $76+x+y=100$ $\therefore x+y=24$ ——— (i)

আবার , মধ্যমা = 525

$\therefore$ মধ্যমার শ্রেণিটি 500-600

$$\therefore\ 525=\ell+\left[\frac{\frac{n}{2}-cf}{f}\right]\times h \quad [\ell=500, n=100, cf=36+x, f=20, h=100]$$

বা, $525=500+\left[\frac{50-(36+x)}{20}\right]\times 100$

বা, $525-500=(14-x)5$

বা, $5(14-x)=25$

বা, $14-x=5$ $\quad\therefore x=9$

(i) থেকে পাই, $x+y=24$

বা, $y=24-x=24-9=15$ $\qquad\therefore x=9$ এবং $y=15$

প্রয়োগ : 24. যদি নীচের তথ্যের মধ্যমা 28.5 হয়, এবং পরিসংখ্যার সমষ্টি 60 হয়, তাহলে x ও y-এর মান নির্ণয় করি। **[নিজে করি]**

শ্রেণি অন্তর	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
পরিসংখ্যা	5	x	20	15	y	5

প্রয়োগ : 25. নীচের পরিসংখ্যা বিভাজনের মধ্যমা নির্ণয় করি।

প্রাপ্ত নম্বর	0-10	10-30	30-60	60-70	70-90
ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা	15	25	30	4	10

প্রাপ্ত নম্বর (x_i)	ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (ক্ষুদ্রতর সূচক)
0 - 10	15	15
10 - 30	25	$15+25=40$
30 - 60	30	$40+30=70$
60 - 70	4	$70+4=74$
70 - 90	10	$74+10=84=n$

$n=84$, $\therefore \frac{n}{2}=42$

42-এর থেকে ঠিক বেশি ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (30-60) শ্রেণির মধ্যে আছে।

কিন্তু এখানে দেখছি সব শ্রেণির শ্রেণি দৈর্ঘ্য সমান নয়। তাহলে শ্রেণি দৈর্ঘ্য কত নেব?

যেহেতু, h= মধ্যমা শ্রেণির দৈর্ঘ্য, তাই সব শ্রেণির শ্রেণি দৈর্ঘ্য সমান না হলেও মধ্যমা শ্রেণির দৈর্ঘ্য নেব।

$\therefore$ মধ্যমা $=\ell+\left[\frac{\frac{n}{2}-cf}{f}\right]\times h$ $\quad [\because \ell=30, \frac{n}{2}=42, cf=40, f=30, h=30]$

$= 30+\left[\frac{42-40}{30}\right]\times 30 = 30+2 = 32$ নম্বর

অর্থাৎ, অর্ধেক সংখ্যক ছাত্র-ছাত্রী 32-এর কম নম্বর পেয়েছে এবং অর্ধেক সংখ্যক ছাত্র-ছাত্রী 32-এর বেশি নম্বর পেয়েছে।

কষে দেখি 26.2

1. মধুবাবুর দোকানের গত সপ্তাহের প্রতিদিনের বিক্রয়লব্ধ অর্থ (টাকায়) হলো, 107, 210, 92, 52, 113, 75, 195; বিক্রয়লব্ধ অর্থের মধ্যমা নির্ণয় করি।
2. কিছু পশুর বয়স (বছরে) হলো, 6, 10, 5, 4, 9, 11, 20, 18; বয়সের মধ্যমা নির্ণয় করি।
3. 14 জন ছাত্রের প্রাপ্ত নম্বর হলো, 42, 51, 56, 45, 62, 59, 50, 52, 55, 64, 45, 54, 58, 60; প্রাপ্ত নম্বরের মধ্যমা নির্ণয় করি।
4. আজ পাড়ার ক্রিকেট খেলায় আমাদের স্কোর হলো,

7	9	10	11	11	8	7	7	10	6	9
7	9	9	6	6	8	8	9	8	7	8

ক্রিকেট খেলায় আমাদের স্কোরের মধ্যমা নির্ণয় করি।

5. নীচের 70 জন ছাত্রের ওজনের পরিসংখ্যা বিভাজন ছক থেকে ওজনের মধ্যমা নির্ণয় করি।

ওজন (কিগ্রা.)	43	44	45	46	47	48	49	50
ছাত্র সংখ্যা	4	6	8	14	12	10	11	5

6. নলের ব্যাসের দৈর্ঘ্যের (মিমি.) পরিসংখ্যা বিভাজন ছক থেকে ব্যাসের দৈর্ঘের মধ্যমা নির্ণয় করি।

ব্যাসের দৈর্ঘ্য (মিমি.)	18	19	20	21	22	23	24	25
পরিসংখ্যা	3	4	10	15	25	13	6	4

7. মধ্যমা নির্ণয় করি :

x	0	1	2	3	4	5	6
f	7	44	35	16	9	4	1

8. আমাদের 40 জন শিক্ষার্থীর প্রতি সপ্তাহে টিফিন খরচের (টাকায়) পরিসংখ্যা হলো,

টিফিন খরচ (টাকায়)	35-40	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70
শিক্ষার্থী	3	5	6	9	7	8	2

টিফিন খরচের মধ্যমা নির্ণয় করি।

9. নীচের তথ্য থেকে ছাত্রদের উচ্চতার মধ্যমা নির্ণয় করি :

উচ্চতা (সেমি.)	135-140	140-145	145-150	150-155	155-160	160-165	165-170
ছাত্রদের সংখ্যা	6	10	19	22	20	16	7

10. নীচের পরিসংখ্যা বিভাজন থেকে তথ্যটির মধ্যমা নির্ণয় করি :

শ্রেণি-সীমানা	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
পরিসংখ্যা	4	7	10	15	10	8	5

11. নীচের তথ্যের মধ্যমা নির্ণয় করি :

শ্রেণি-সীমানা	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45
পরিসংখ্যা	5	6	15	10	5	4	3	2

12. নীচের তথ্যের মধ্যমা নির্ণয় করি :

শ্রেণি-সীমা	1-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35
পরিসংখ্যা	2	3	6	7	5	4	3

13. নীচের তথ্যের মধ্যমা নির্ণয় করি :

শ্রেণি-সীমা	51-60	61-70	71-80	81-90	91-100	101-110
পরিসংখ্যা	4	10	15	20	15	4

14. নীচের তথ্যের মধ্যমা নির্ণয় করি :

নম্বর	ছাত্রীদের সংখ্যা
10-এর কম	12
20-এর কম	22
30-এর কম	40
40-এর কম	60
50-এর কম	72
60-এর কম	87
70-এর কম	102
80-এর কম	111
90-এর কম	120

15. নীচের তথ্যের মধ্যমা 32 হলে, x ও y-এর মান নির্ণয় করি যখন পরিসংখ্যার সমষ্টি 100;

শ্রেণি-সীমানা	পরিসংখ্যা
0-10	10
10-20	x
20-30	25
30-40	30
40-50	y
50-60	10

আজ আমাদের স্কুলের বিজ্ঞানের পরীক্ষাগারে অনেকগুলি নানান আকারের গাছের পাতা সংগ্রহ করে আনা হয়েছে। আমাদের দাদা ও দিদিরা সেই পাতাগুলি পর্যবেক্ষণ করবে।

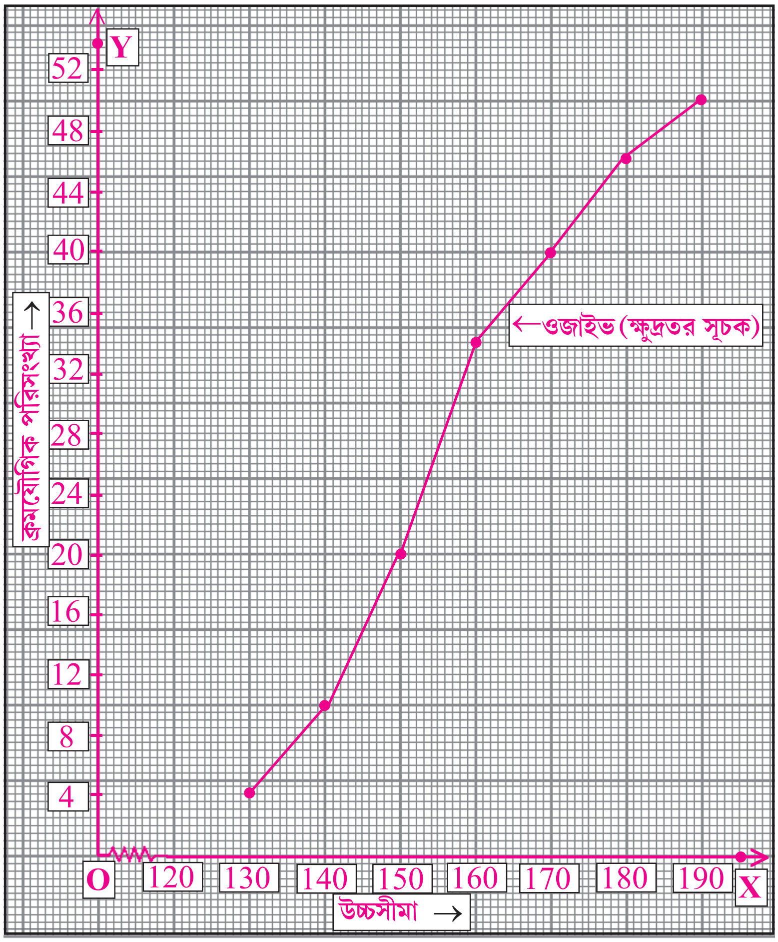
আমরা কিছু বন্ধুরা ঠিক করেছি ওই পরীক্ষাগারের কিছু গাছের পাতার দৈর্ঘ্য মেপে গাছের পাতার দৈর্ঘ্যের একটি পরিসংখ্যা বিভাজন ছক তৈরি করব।

গাছের পাতার দৈর্ঘ্যের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটি হলো,

গাছের পাতার দৈর্ঘ্য (মিমি.) (প্রায়)	120-130	130-140	140-150	150-160	160-170	170-180	180-190
পাতার সংখ্যা	4	6	10	14	6	6	4

আমি গাছের পাতার দৈর্ঘ্যের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটির ক্ষুদ্রতর সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন ছক তৈরি করি।

গাছের পাতার দৈর্ঘ্য মিমি. (প্রায়) (x_i)	ক্ষুদ্রতর সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা
130-এর কম	4
140-এর কম	10
150-এর কম	20
160-এর কম	34
170-এর কম	40
180-এর কম	46
190-এর কম	50



উপরের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যার ছক থেকে দেখছি 130, 140, 150, ... 190 যথাক্রমে শ্রেণি-সীমাগুলির উচ্চসীমা।

কিন্তু উপরের ক্ষুদ্রতর সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা ছকটির লেখচিত্র অঙ্কন কি সম্ভব?

উভয় অক্ষের একটি নির্দিষ্ট স্কেল ধরে প্রতিটি শ্রেণির উচ্চসীমাকে অনুভূমিক রেখা অর্থাৎ x-অক্ষ বরাবর এবং তাদের অনুরূপ ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যাকে উল্লম্ব রেখা বা y-অক্ষ বরাবর নির্দেশ করা হয়। তবে উভয় অক্ষের মাপের স্কেল প্রয়োজনে আলাদাও নেওয়া যায়।

বুঝেছি, উপরের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন ছকের (130, 4), (140, 10), (150, 20), (160, 34), (170, 40), (180, 46), (190, 50) বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করে স্কেল ছাড়া খালি হাতে (free hand) বিন্দুগুলি যুক্ত করে কী পাই দেখি। x-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 1 টি বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 মিমি. এবং y-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 2 টি বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 টি গাছের পাতা ধরে বিন্দুগুলি স্থাপন করলাম এবং বিন্দুগুলি যুক্ত করে একটি বক্ররেখা পেলাম।

(22) **এইভাবে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যার যে লেখচিত্র পেলাম তাকে কী বলা হয়?**

ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যার লেখচিত্র বক্ররেখাকে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যার বক্ররেখা (Cumulative frequency curve) বা ওজাইভ (ক্ষুদ্রতর সূচক) (Ogive of the Less than type) বলা হয়।

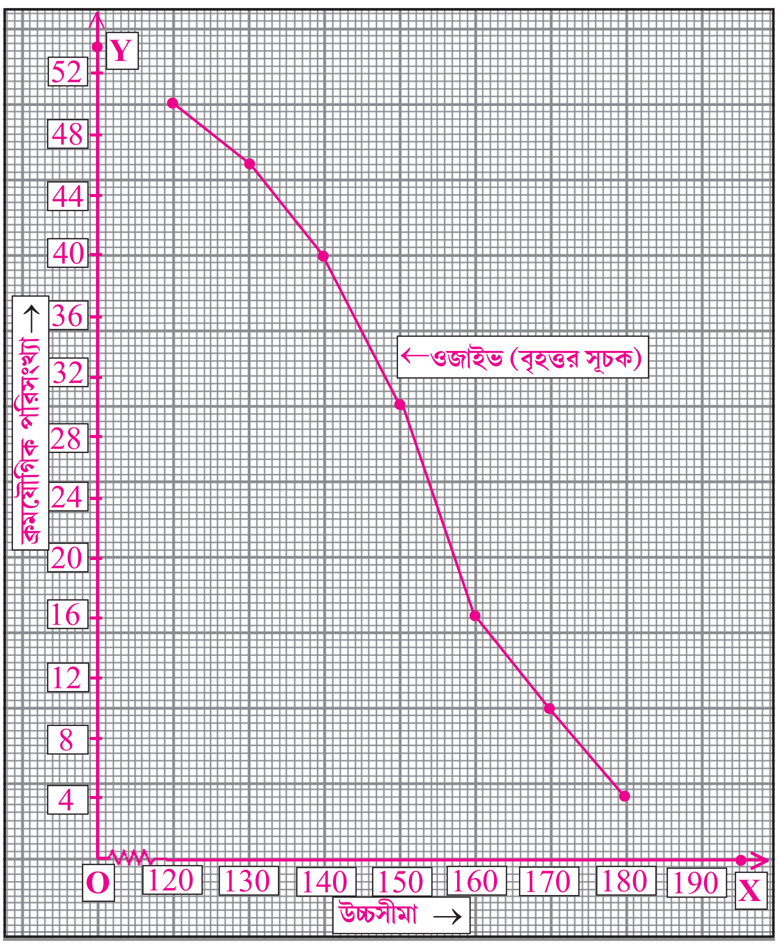
গাছের পাতার দৈর্ঘ্যের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটির বৃহত্তর সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা নির্ণয় করি।

গাছের পাতার দৈর্ঘ্য মিমি. (প্রায়) (x_i)	বৃহত্তর সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা
120 বা 120-এর বেশি	50
130 বা 130-এর বেশি	46
140 বা 140-এর বেশি	40
150 বা 150-এর বেশি	30
160 বা 160-এর বেশি	16
170 বা 170-এর বেশি	10
180 বা 180-এর বেশি	4

বৃহত্তর সূচক যৌগিক পরিসংখ্যার ছক থেকে দেখছি 120, 130, 140, 150, 160, 170 ও 180 যথাক্রমে শ্রেণিগুলির নিম্ন-সীমা।

কিন্তু বৃহত্তর সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যার লেখচিত্র কীভাবে আঁকব?

উভয় অক্ষের একটি নির্দিষ্ট স্কেল ধরে প্রতিটি শ্রেণির নিম্ন-সীমাকে অনুভূমিক রেখা অর্থাৎ x-অক্ষ বরাবর এবং তাদের অনুরূপ ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যাকে উল্লম্ব রেখা বা y-অক্ষ বরাবর নির্দেশ করা হয়। [এক্ষেত্রেও উভয় অক্ষের পরিমাপের স্কেল আলাদাও নেওয়া যায়]



আমি উপরের বৃহত্তর সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যার লেখচিত্র অঙ্কনের চেষ্টা করি ও কী পাই দেখি।

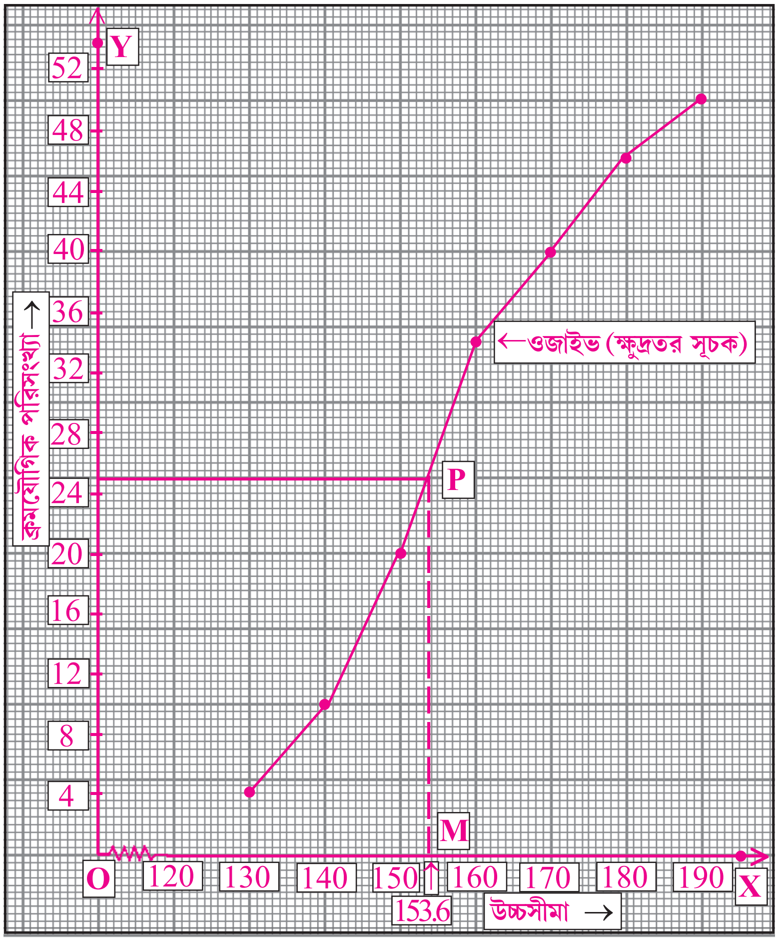
x-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 1টি বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 মিমি. এবং y-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 2টি বাহুর দৈর্ঘ্য = গাছের 1টি পাতা ধরে (120, 50), (130, 46), (140, 40), (150, 30), (160, 16), (170, 10) ও (180, 4) বিন্দুগুলি স্থাপন করে ও যুক্ত করে একটি বক্ররেখা পেলাম।

প্রাপ্ত বক্ররেখাটি বৃহত্তর সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যার বক্ররেখা [Cumulative frequency curve (of more than type)] বা ওজাইভ (বৃহত্তর সূচক) [Ogive (of more than type)]

দেখছি, দুই ধরনের ওজাইভ একই তথ্যের পরিসংখ্যা বিভাজনকে বোঝাচ্ছে।

কিন্তু যে-কোনো একটি ওজাইভ থেকে মধ্যমার মান পাব কিনা দেখি।

গাছের পাতার দৈর্ঘ্য মিমি. (প্রায়)	ক্ষুদ্রতর সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা
130-এর কম	4
140-এর কম	10
150-এর কম	20
160-এর কম	34
170-এর কম	40
180-এর কম	46
190-এর কম	50



এখানে পাতার সংখ্যা n=50

$\therefore \frac{n}{2} = 25$

$\therefore$ ওজাইভের (ক্ষুদ্রতর সূচক) y-অক্ষে (0, 25) বিন্দুটি নির্ণয় করে ওই বিন্দু দিয়ে x-অক্ষের একটি সমান্তরাল সরলরেখা টানলাম যা ওজাইভকে P বিন্দুতে ছেদ করল।

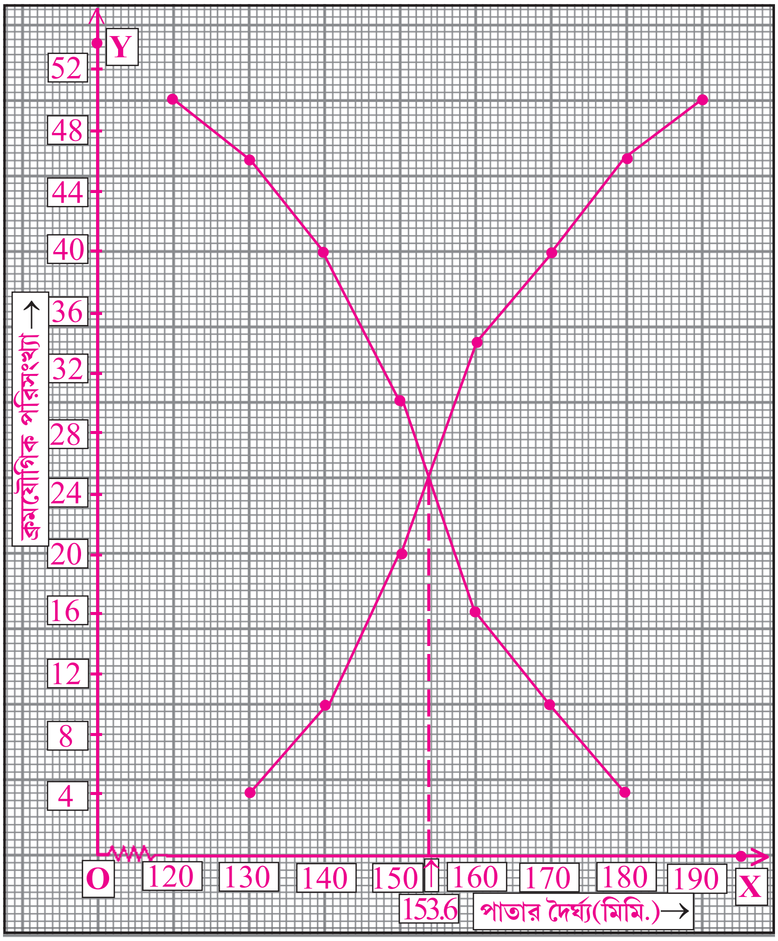
P বিন্দু থেকে x-অক্ষের উপর PM লম্ব টানলাম যা x-অক্ষকে M বিন্দুতে ছেদ করল।

এই M বিন্দুর ভুজের মানই নির্ণেয় মধ্যমা।

$\therefore$ মধ্যমা = 153.6 মিমি.

আমার বন্ধু আনোয়ারা তার খাতায় একই ছক কাগজে গাছের পাতার দৈর্ঘ্যের পরিসংখ্যার দুই ধরনের ওজাইভ এঁকেছে।

কিন্তু আনোয়ারার আঁকা দুই ধরনের ওজাইভ থেকে মধ্যমার মান কীভাবে পাব?



ওজাইভ দুটির ছেদবিন্দু থেকে x-অক্ষের উপর লম্ব টানলে, x অক্ষ ও লম্বের ছেদবিন্দুর ভুজই হলো মধ্যমা।

দেখছি, দুই ধরনের ওজাইভ দুটি পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করেছে।

P বিন্দু থেকে x-অক্ষের উপর PM লম্ব টানলাম যা x-অক্ষকে M বিন্দুতে ছেদ করল।

M বিন্দুর ভূজ 153.6 মিমি.(প্রায়) হলো মধ্যমা।

প্রয়োগ : 26. নীচের পরিসংখ্যা বিভাজনের ওজাইভ অঙ্কন করি এবং সেই ওজাইভ থেকে মধ্যমা নির্ণয় করি।

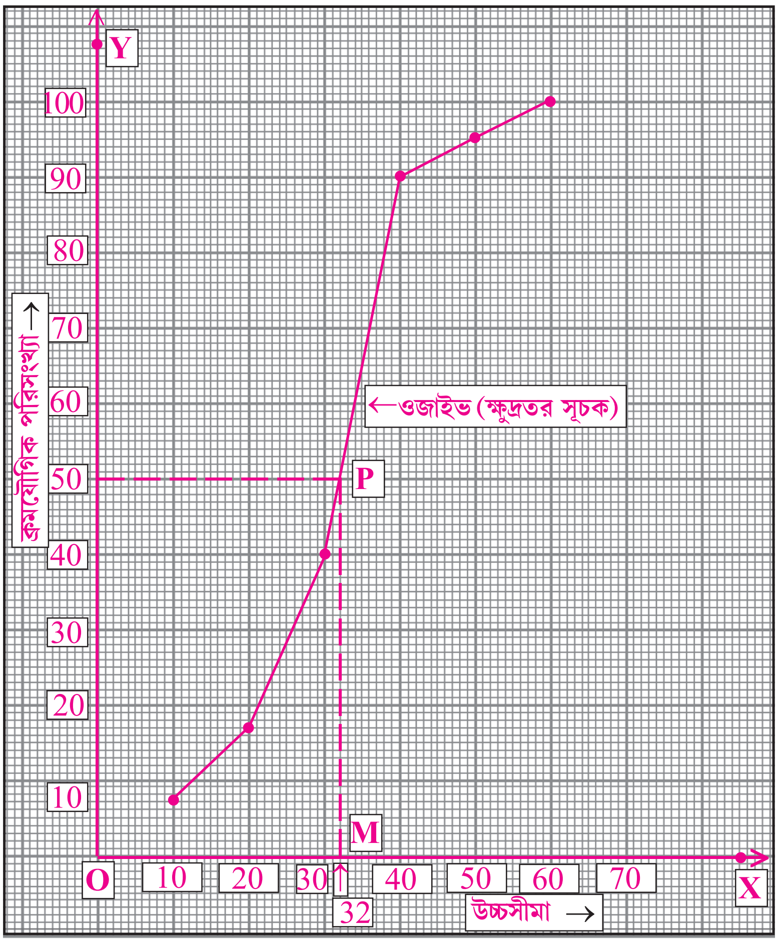
শ্রেণি	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
পরিসংখ্যা	7	10	23	50	6	4

প্রথমে ক্ষুদ্রতর সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যার ছক তৈরি করি।

শ্রেণি	10-এর কম	20-এর কম	30-এর কম	40-এর কম	50-এর কম	60-এর কম
ক্ষুদ্রতর সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা	7	17	40	90	96	100

ছক কাগজের x অক্ষের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 1 টি বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক এবং y-অক্ষের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 1 টি বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে (10, 7), (20, 17), (30, 40), (40, 90) (50, 96) এবং (60, 100) বিন্দুগুলি স্থাপন করে যুক্ত করলাম এবং নির্ণেয় ওজাইভ (ক্ষুদ্রতর সূচক) পেলাম। এখানে মোট পরিসংখ্যা (n) = 100

$\therefore \frac{n}{2} = 50$



$\therefore$ y-অক্ষের (0, 50) বিন্দু দিয়ে x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা ওজাইভকে P বিন্দুতে ছেদ করল।
P বিন্দু থেকে x-অক্ষের উপর PM লম্ব টানলাম যা x-অক্ষকে M বিন্দুতে ছেদ করল।
দেখছি, M বিন্দুর স্থানাঙ্ক (32, 0)
$\therefore$ ওজাইভ থেকে পেলাম, মধ্যমা = 32

অন্যভাবে : প্রদত্ত পরিসংখ্যা বিভাজন ছকের ক্ষুদ্রতর সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা ও বৃহত্তর সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যার ছক তৈরি করি।

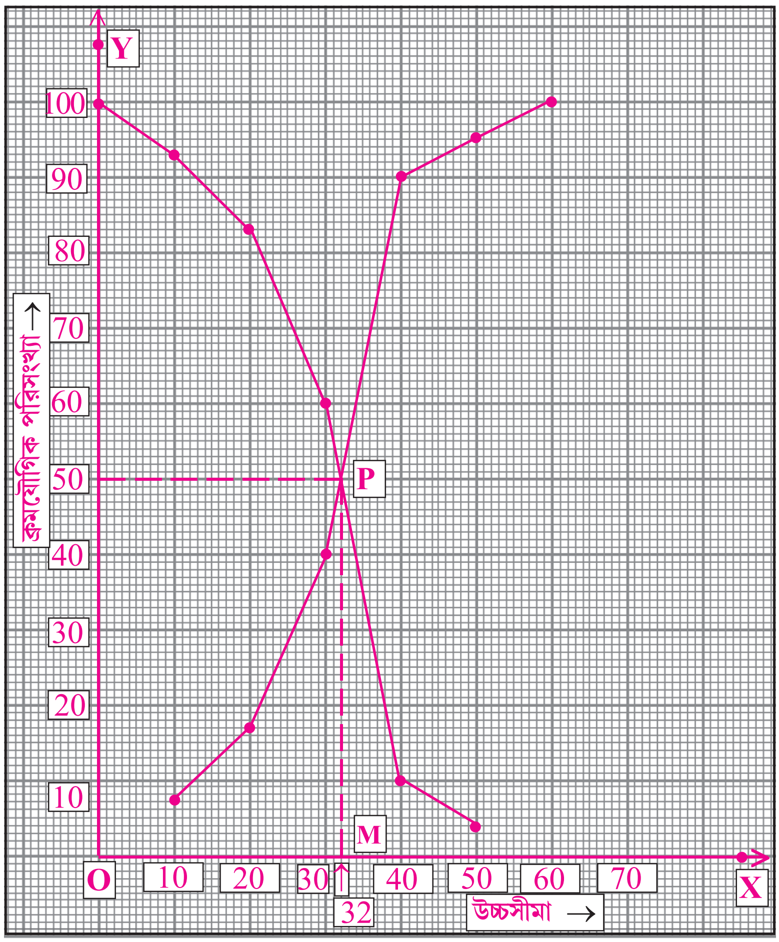
শ্রেণি	পরিসংখ্যা
0-10	7
10-20	10
20-30	23
30-40	50
40-50	6
50-60	4

শ্রেণি	বৃহত্তর সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা
0 বা 0-এর বেশি	100
10 বা 10-এর বেশি	93
20 বা 20-এর বেশি	83
30 বা 30-এর বেশি	60
40 বা 40-এর বেশি	10
50 বা 50-এর বেশি	4

শ্রেণি	ক্ষুদ্রতর সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা
10-এর কম	7
20-এর কম	17
30-এর কম	40
40-এর কম	90
50-এর কম	96
60-এর কম	100

x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 1টি বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 1টি বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে, বৃহত্তর সূচক ও ক্ষুদ্রতর সূচক ওজাইভ অঙ্কন করলাম।

[বৃহত্তর সূচক ওজাইভ অঙ্কনের জন্য (0, 100), (10, 93), (20, 83), (30, 60), (40, 10), (50, 4) বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করে যুক্ত করলাম]



বৃহত্তর সূচক ওজাইভ ও ক্ষুদ্রতর সূচক ওজাইভ পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করেছে। P বিন্দু থেকে x-অক্ষের উপর PM লম্ব টানলাম যা x-অক্ষকে M বিন্দুতে ছেদ করল।

দেখছি, M বিন্দুর স্থানাঙ্ক (32, 0)

∴ নির্ণেয় মধ্যমা = 32

সূত্রের সাহায্যে মধ্যমা নির্ণয় করে যাচাই করি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 27. একটি মেডিকেলের প্রবেশিকা পরীক্ষায় 200 জন পরীক্ষার্থীর প্রাপ্ত নম্বরের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটি হলো,

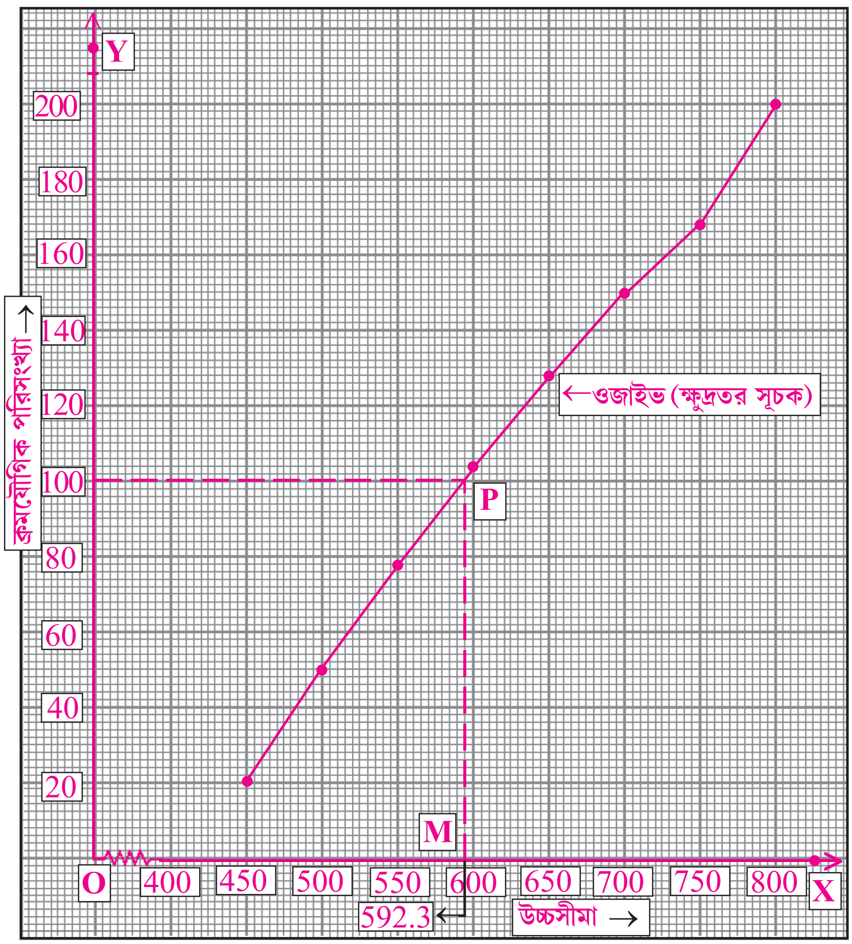
প্রাপ্ত নম্বর	400-450	450-500	500-550	550-600	600-650	650-700	700-750	750-800
পরীক্ষার্থীর সংখ্যা	20	30	28	26	24	22	18	32

ওজাইভ অঙ্কন করি ও তার সাহায্যে মধ্যমা নির্ণয় করি। সূত্রের সাহায্যে মধ্যমা নির্ণয় করে যাচাই করি।

প্রথমে প্রদত্ত তথ্যের ক্ষুদ্রতর সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটি নির্ণয় করি।

প্রাপ্ত নম্বর	450-এর কম	500-এর কম	550-এর কম	600-এর কম	650-এর কম	700-এর কম	750-এর কম	800-এর কম
ক্ষুদ্রতর সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা	20	50	78	104	128	150	168	200

x-অক্ষের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 1 টি বাহুর দৈর্ঘ্য = 5 নম্বর এবং y অক্ষের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 1 টি বাহুর দৈর্ঘ্য = 2 জন পরীক্ষার্থী ধরে (450, 20), (500, 50), (550,78), (600,104), (650,128),(700,150), (750, 168) ও (800,200) বিন্দুগুলি স্থাপন করে ও যুক্ত করে ওজাইভ (ক্ষুদ্রতর সূচক) পেলাম।



এখানে মোট পরীক্ষার্থী (n) = 200 জন

$\therefore \frac{n}{2} = 100$

$\therefore$ (0, 100) বিন্দু দিয়ে x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা ওজাইভকে P বিন্দুতে ছেদ করল। P বিন্দু থেকে OX-এর উপর PM লম্ব টানি যা x-অক্ষকে M বিন্দুতে ছেদ করে। M বিন্দুর স্থানাঙ্ক (592.3)

$\therefore$ মধ্যমা = 592.3

আমি অন্যভাবে বৃহত্তর সূচক ওজাইভ ও ক্ষুদ্রতর সূচক ওজাইভ এঁকে ও তাদের ছেদবিন্দুর সাহায্যে মধ্যমা নির্ণয় করি। [নিজে করি]

সূত্রের সাহায্যে মধ্যমা,

$$\text{মধ্যমা} = \ell + \left[\frac{\frac{n}{2}-cf}{f}\right] \times h$$

$$= 550 + \frac{100-78}{26} \times 50$$

$$= 550 + \frac{22 \times 50}{26}$$

$$= 550 + \frac{550}{13} \quad = 550 + 42.3 \quad = 592.3$$

প্রয়োগ : 28. নীচের পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকার বৃহত্তর সূচক ও ক্ষুদ্রতর সূচক ওজাইভ অঙ্কন করি ও মধ্যমা নির্ণয় করি। [নিজে করি]

শ্রেণি	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75	75-80	80-85
পরিসংখ্যা	2	8	12	24	34	16	4

কষে দেখি 26.3

1. আমাদের গ্রামের 100 টি দোকানের দৈনিক লাভের (টাকায়) পরিমাণের ছকটি হলো,

প্রতি দোকানের লাভ (টাকায়)	0-50	50-100	100-150	150-200	200-250	250-300
দোকানের সংখ্যা	10	16	28	22	18	6

প্রদত্ত তথ্যের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (ক্ষুদ্রতর সূচক) তালিকা তৈরি করে ছক কাগজে ওজাইভ অঙ্কন করি।

2. নিবেদিতাদের ক্লাসের 35 জন শিক্ষার্থীর ওজনের তথ্য হলো,

ওজন (কিগ্রা)	38-এর কম	40-এর কম	42-এর কম	44-এর কম	46-এর কম	48-এর কম	50-এর কম	52-এর কম
শিক্ষার্থীর সংখ্যা	0	4	6	9	12	28	32	35

প্রদত্ত তথ্যের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (ক্ষুদ্রতর সূচক) তালিকা তৈরি করে ছক কাগজে ওজাইভ অঙ্কন করি এবং লেখচিত্র থেকে মধ্যমা নির্ণয় করি। সূত্রের সাহায্যে মধ্যমা নির্ণয় করে যাচাই করি।

3.

শ্রেণি	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30
পরিসংখ্যা	4	10	15	8	3	5

প্রদত্ত তথ্যের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (বৃহত্তর সূচক) তালিকা তৈরি করে ছক কাগজে ওজাইভ অঙ্কন করি।

4.

শ্রেণি	100-120	120-140	140-160	160-180	180-200
পরিসংখ্যা	12	14	8	6	10

প্রদত্ত তথ্যের একই অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতর সূচক ওজাইভ ও বৃহত্তর সূচক ওজাইভ ছক কাগজে অঙ্কন করে মধ্যমা নির্ণয় করি।

আজ 5 সেপ্টেম্বর অর্থাৎ শিক্ষকদিবস। প্রতি বছরের মতো এই বছরেও আমরা দিনটি বিশেষভাবে পালন করব। এবছরে আমরা দশম শ্রেণির ছাত্রছাত্রীরা ঠিক করেছি যে, আমাদের পারকরে আসা শ্রেণিগুলির ছাত্রছাত্রীদের কাছে যাব ও শিক্ষক-শিক্ষিকাদের উপস্থিতিতে ওদের ক্লাস নেব। অর্থাৎ গান, নাচ, আবৃত্তি, আঁকা, অভিনয়, কুইজ ইত্যাদি বিভিন্ন মজার খেলার মাধ্যমে দিনটি আনন্দে কাটাব।

আমরা ষষ্ঠ শ্রেণির 36 জন ছাত্রছাত্রীদের সমান তিনটি দলে ভাগ করে প্রথম দলের প্রত্যেককে 10 টি মজার ধাঁধার উত্তর লিখতে বললাম।

23 প্রথম দলের 12 জনের প্রত্যেকে যতগুলি সঠিক উত্তর লিখল দেখি।

প্রথম দলের প্রত্যেকে যতগুলি সঠিক উত্তর দিয়েছে তার সংখ্যা হলো,

4, 6, 5, 4, 7, 2, 3, 4, 2, 4, 5, 4

উপরের সঠিক উত্তরের তথ্যটির পরিসংখ্যা বিভাজন ছক গঠন করি,

সঠিক উত্তরের সংখ্যা (x_i)	2	3	4	5	6	7
ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা (f_i)	2	1	5	2	1	1

উপরের ছক থেকে দেখছি, “4টি সঠিক উত্তর দিয়েছে” — এমন ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা সবচেয়ে বেশি। অর্থাৎ, 4-এর পরিসংখ্যা সবচেয়ে বেশি।

24 উপরের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকে যে পর্যবেক্ষণটি সবচেয়ে বেশি বার আছে অর্থাৎ যে পর্যবেক্ষণটির সর্ব্বোচ্চ পরিসংখ্যা সেই পর্যবেক্ষণটিকে কী বলা হয়?

কোনো তথ্যের মধ্যে যে পর্যবেক্ষণটির পরিসংখ্যা সবচেয়ে বেশি সেই পর্যবেক্ষণটিকে ওই তথ্যের ভুয়িষ্ঠক বা সংখ্যাগুরুমান (Mode) বলা হয়।

সংখ্যাগুরুমান মধ্যগামিতার আর একটি মাপক। এটি খুব সহজে পরিমাপ করা যায়। জামা, জুতো ইত্যাদির দোকানে সাধারণত সংখ্যাগুরুমান ব্যবহার করা হয়। কারণ বেশির ভাগ জনসাধারণের চাহিদা অনুযায়ী জামা, কাপড় ও জুতো তৈরি করা হয়। যেমন একটি বিশেষ কোম্পানির ক্ষেত্রে মেয়েদের জুতোর সাইজ 5 এর চাহিদা বেশি। অর্থাৎ উপরের তালিকা থেকে বুঝলাম 4 হল প্রদত্ত তথ্যের সংখ্যাগুরু মান।

ষষ্ঠ শ্রেণির দ্বিতীয় দলের 12 জন ছাত্রছাত্রীকে অন্য 10টি মজার ধাঁধা দিলাম। তাদের সঠিক উত্তরের সংখ্যা হলো,

2, 4, 3, 5, 2, 5, 8, 2, 5, 9, 5, 2

আমি উপরের তথ্যটির পরিসংখ্যা বিভাজন ছক তৈরি করে সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় করি।

সঠিক উত্তরের সংখ্যা (x_i)	2	3	4	5	8	9
ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা (f_i)	4	1	1	4	1	1

উপরের ছক থেকে দেখছি, 2 টি সঠিক উত্তর দিয়েছে 4 জন ছাত্রছাত্রী। এবং 5 টি সঠিক উত্তর দিয়েছে 4 জন ছাত্রছাত্রী।

25 কিন্তু এক্ষেত্রে প্রদত্ত তথ্যের সংখ্যাগুরুমান কী হবে?

প্রদত্ত তথ্যের সংখ্যাগুরুমান 2 টি।

$\therefore$ সংখ্যাগুরুমান 2 ও 5

26 কিন্তু যে সকল তথ্যের সংখ্যাগুরুমান 2 টি, তাদের কী বলা হয়?

যে তথ্যের সংখ্যাগুরু মান 1 টি তাকে এক ভূয়িষ্ঠক বা এক সংখ্যাগুরুমান সংবলিত (Unimodal) এবং যে তথ্যের সংখ্যাগুরু মান 2টি তাকে দ্বি-ভূয়িষ্ঠক বা দুই সংখ্যাগুরুমান সংবলিত (Bimodal) তথ্য বলা হয়।

ষষ্ঠ শ্রেণির তৃতীয় দলের 12 জন ছাত্রছাত্রী অন্য 10 টি মজার ধাঁধার যতগুলি সঠিক উত্তর দিল সেই সংখ্যাগুলি হলো,

4, 5, 6, 7, 6, 7, 5, 4, 5, 4, 6, 7

আমি উপরের তথ্যটির পরিসংখ্যা বিভাজন ছক তৈরি করি ও সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করি।

সঠিক উত্তরের সংখ্যা (x_i)	4	5	6	7
ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা (f_i)	3	3	3	3

উপরের ছকে 4, 5, 6 ও 7 প্রত্যেকে 3 বার করে আছে।

∴ প্রদত্ত তথ্যের সংখ্যাগুরুমান 4, 5, 6 ও 7; এক্ষেত্রে তথ্যের সবকটি সংখ্যাই সংখ্যাগুরুমান, সুতরাং, বলা হয়ে থাকে প্রদত্ত তথ্যের সংখ্যাগুরুমান নেই।

অর্থাৎ তথ্যটি চতুর্ভূয়িষ্ঠক (Tetramodal)। সুতরাং কোনো তথ্যের অনেকগুলি পর্যবেক্ষণের সর্বোচ্চ পরিসংখ্যা সমান হলে, সেই তথ্যটিকে বহুভূয়িষ্ঠক (Multimodal) তথ্য বলে।

প্রয়োগ : 29. দিনের শেষে আমরা 10 জন বন্ধু সামান্য কিছু খাওয়া দাওয়া করার জন্য নিজেদের মধ্যে চাঁদা তুললাম। আমরা দিলাম,

16 টাকা, 15 টাকা, 11 টাকা, 12 টাকা, 15 টাকা, 10 টাকা, 15 টাকা, 10 টাকা, 15 টাকা, 10 টাকা

আমাদের চাঁদা (টাকায়) দেওয়ার তথ্যটি মানের ঊর্ধ্বক্রমে সাজিয়ে পাই,

10, 10, 10, 11, 12, 15, 15, 15, 15, 16

∴ প্রদত্ত তথ্যে সবচেয়ে বেশিবার আছে (অর্থাৎ সবচেয়ে বেশি পরিসংখ্যা) $\boxed{}$ **[নিজে লিখি]**

∴ প্রদত্ত তথ্যের সংখ্যাগুরুমান 15.

প্রয়োগ : 30. আমি নীচের তথ্যগুলির সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় করি।

(i) 2, 3, 5, 6, 2, 4, 2, 8, 9, 4, 5, 4, 7, 4, 4

(ii) 11, 27, 18, 26, 13, 12, 9, 15, 4, 9

(iii) 102, 104, 117, 102, 118, 104, 120, 104, 122, 102

(iv) 5, 9, 18, 27, 15, 5, 8, 10, 16, 5, 7, 5

(i) প্রদত্ত তথ্যের সংখ্যাগুলি মানের ঊর্ধ্বক্রমে সাজিয়ে লিখে পাই,

2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 9

দেখছি, 4 সংখ্যাটি সবচেয়ে বেশিবার আছে।

∴ তথ্যটির সংখ্যাগুরুমান = 4

(ii), (iii) ও (iv) -এর তথ্যগুলির সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় করি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 31. আমাদের শ্রেণির 100 জন ছাত্রছাত্রীর গত মাসে উপস্থিতির পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকাটি হলো,

উপস্থিতির দিনসংখ্যা	6-10	10-14	14-18	18-22	22-26
ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা	8	28	34	18	12

উপস্থিতির পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকার সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় করি।

27 কিন্তু বিন্যস্ত পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে শুধুমাত্র পরিসংখ্যা দেখে সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় সম্ভব নয়। এক্ষেত্রে কীভাবে সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় করব?

বিন্যস্ত পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকার ক্ষেত্রে প্রথমে কোন শ্রেণির পরিসংখ্যা সবচেয়ে বেশি সেটি নির্ণয় করব।

28 যে শ্রেণির পরিসংখ্যা সবচেয়ে বেশি তাকে কী বলা হয়?

সংখ্যাগুরুমানের শ্রেণি [Modal class] বলা হয়।

বুঝেছি, উপরের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকের সংখ্যাগুরুমানের শ্রেণি (14-18)

29 কিন্তু সংখ্যাগুরুমানের শ্রেণি নির্ণয়ের সাহায্যে তথ্যটির সংখ্যাগুরুমান কীভাবে পাব?

তথ্যটির সংখ্যাগুরুমান ওই সংখ্যাগুরুমানের শ্রেণির মধ্যেই থাকে এবং নির্ণেয় সংখ্যাগুরুমান পাব নীচের সূত্রের সাহায্যে,

নির্ণেয় সংখ্যাগুরুমান $= \ell + \left(\dfrac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$

এখানে, ℓ = সংখ্যাগুরুমান সংবলিত শ্রেণির নিম্ন সীমানা।
h = সংখ্যাগুরুমান সংবলিত শ্রেণির শ্রেণি দৈর্ঘ্য।
f_1 = সংখ্যাগুরুমান সংবলিত শ্রেণির পরিসংখ্যা।
f_0 = সংখ্যাগুরুমান সংবলিত শ্রেণির ঠিক পূর্ববর্তী শ্রেণির পরিসংখ্যা।
f_2 = সংখ্যাগুরুমান সংবলিত শ্রেণির ঠিক পরবর্তী শ্রেণির পরিসংখ্যা।

বুঝেছি, 100 জন ছাত্রছাত্রীর গতমাসের উপস্থিতির তথ্যটির সংখ্যাগুরুমান,

$= \ell + \left(\dfrac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$ [এখানে, $\ell = 14,\ f_1 = 34,\ f_0 = 28,\ f_2 = 18,\ h = 4$]

$= 14 + \left(\dfrac{34-28}{2\times34-28-18}\right) \times 4$

$= 14 + \dfrac{6\times4}{22} = 14 + \dfrac{12}{11} = 15.09$ (দিন)[প্রায়]

কিন্তু আয়তলেখ-এর সাহায্যে উপরের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকের থেকে তথ্যটির সংখ্যাগুরুমান কীভাবে পাব দেখি,
[এটি মূল্যায়নের অন্তর্ভুক্ত নহে]

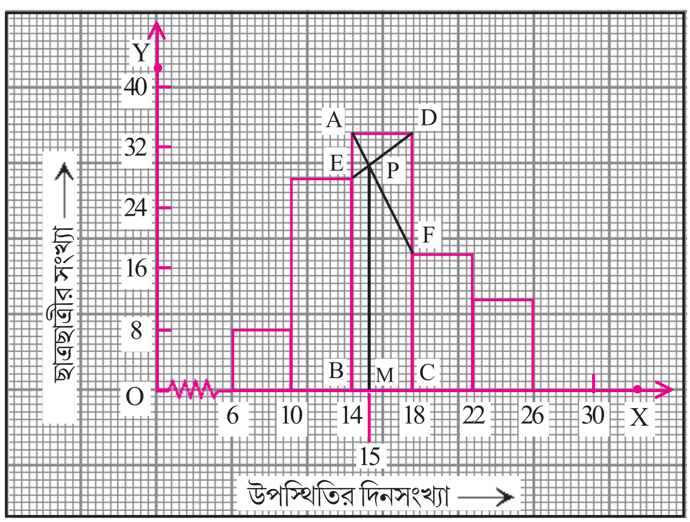
উপরের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটি আয়তলেখের মাধ্যমে প্রথমে প্রকাশ করলাম। সংখ্যাগুরুমানের শ্রেণির আয়তক্ষেত্র ABCD (পাশের চিত্রে)

AF ও ED যুক্ত করলাম যারা পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করল।

x-অক্ষের উপর P বিন্দু থেকে PM লম্ব অঙ্কন করলাম যা x-অক্ষকে M বিন্দুতে ছেদ করল। M বিন্দুর স্থানাঙ্ক (15, 0)

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাগুরু মান = 15 (প্রায়)

$\therefore$ আয়তলেখের সাহায্যে উপরের পরিসংখ্যা বিভাজনের দ্বারা প্রদত্ত তথ্যের সংখ্যাগুরুমান প্রায় একই পেলাম।



প্রয়োগ : 32. নীচের পরিসংখ্যা বিভাজনের দ্বারা প্রদত্ত তথ্যটির সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় করি।

দ্রব্যের আকারের নম্বর	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24	24-28	28-32
পরিসংখ্যা	9	10	18	14	10	6	3

প্রদত্ত পরিসংখ্যা বিভাজন ছকে সর্বাধিক পরিসংখ্যা 18

∴ সংখ্যাগুরুমান সংবলিত শ্রেণি (12-16)

∴ তথ্যটির সংখ্যাগুরুমান $= \ell + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$ [এখানে, $\ell = 12$, $h = 4$, $f_1 = 18$, $f_0 = 10$, $f_2 = 14$]

$$= 12 + \left(\frac{18-10}{2\times18-10-14}\right) \times 4$$

$$= 12 + \frac{8}{36-24} \times 4$$

$$= 12 + \frac{8\times4}{12} = 12 + \frac{8}{3} = 14.66$$ নম্বর[প্রায়]

∴ নির্ণেয় সংখ্যাগুরুমান = 14.66 নম্বর[প্রায়]

প্রয়োগ : 33. নীচের শ্রেণি-বিন্যাসিত পরিসংখ্যা বিভাজনের সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় করি: [নিজে করি]

শ্রেণি	3-6	6-9	9-12	12-15	15-18	18-21	21-24
পরিসংখ্যা	2	6	12	24	21	12	3

প্রয়োগ : 34. আমাদের পাড়ার উন্নয়ন কমিটির 200 জন সদস্যদের বয়সের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটি হলো,

বয়স (বছরে)	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
সদস্য সংখ্যা	30	38	70	42	20

আমি উপরের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকের সাহায্যে তথ্যটির যৌগিক গড়, মধ্যমা ও সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় করি।

বয়স (বছরে)	শ্রেণি মধ্যক (x_i)	পরিসংখ্যা (সদস্য সংখ্যা f_i)	ক্ষুদ্রতর সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা	$u_i = \frac{x_i - 45}{10}$	$f_i u_i$
20 - 30	25	30	30	−2	−60
30 - 40	35	38	68	−1	−38
40 - 50	45	70	138	0	0
50 - 60	55	42	180	1	42
60 - 70	65	20	200	2	40
মোট		$\sum f_i = 200$			$\sum f_i u_i = -16$

ধরি, কল্পিত গড় = 45

নির্ণেয় যৌগিক গড় (Arithmetic Mean) $= A + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h$

$$= \left\{45 + \left(\frac{-16}{200}\right) \times 10\right\}$$ বছর

$$= \left(45 - \frac{4}{5}\right)$$ বছর

$= 44.2$ বছর

$n = 200 \quad \therefore \frac{n}{2} = 100$

$\therefore$ (40-50) শ্রেণির মধ্যে মধ্যমা আছে।

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যমা $= \ell + \left(\dfrac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$

$$= 40 + \frac{\frac{200}{2} - 68}{70} \times 10 \quad = 40 + \frac{32}{7} \quad = 40 + 4.57 \quad = 44.57$$ বছর[প্রায়]

উপরের পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা থেকে দেখছি,

সংখ্যাগুরুমান সংবলিত শ্রেণি (40-50)

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাগুরুমান $= \ell + \left(\dfrac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$

$$= 40 + \frac{70 - 38}{2 \times 70 - 38 - 42} \times 10 \quad = 40 + \frac{32}{60} \times 10 \quad = 45.33$$ বছর[প্রায়]

প্রয়োগ : 35. নীচের প্রদত্ত রাশিতথ্য থেকে সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় করি।

মান	10-এর কম	20-এর কম	30-এর কম	40-এর কম	50-এর কম	60-এর কম	70-এর কম	80-এর কম
পরিসংখ্যা	4	16	40	76	96	112	120	125

প্রথমে প্রদত্ত ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটি থেকে পরিসংখ্যা বিভাজন ছক তৈরি করি।

শ্রেণি সীমানা (মান)	পরিসংখ্যা
10 -এর কম	4
10 - 20	$16 - 4 = 12$
20 - 30	$40 - 16 = 24$
30 - 40	$76 - 40 = 36$
40 - 50	$96 - 76 = 20$
50 - 60	$112 - 96 = 16$
60 - 70	$120 - 112 = 8$
70 - 80	$125 - 120 = 5$

সংখ্যাগুরুমান সংবলিত শ্রেণিটি হলো (30-40)

$\therefore$ সংখ্যাগুরুমান $= \ell + \left(\dfrac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$

$$= 30 + \frac{36 - 24}{2 \times 36 - 24 - 20} \times 10$$

$$= 30 + \frac{12}{72 - 44} \times 10$$

$$= 30 + \frac{12}{28} \times 10 \quad = 30 + \frac{30}{7}$$

$$= 30 + 4.29$$

$= 34.29$[প্রায়]

[$\because$ h সংখ্যাগুরু মান সংবলিত শ্রেণির শ্রেণি দৈর্ঘ্য, অর্থাৎ সংখ্যাগুরুমান নির্ণয়ের সময় সকল শ্রেণির শ্রেণি-দৈর্ঘ্য সমান নাও হতে পারে। তাই 10-এর কম এই ক্ষেত্রে (0-10) নেওয়া হয় না। 10-এর কমই লেখা হয়।]

মূল্যায়নের অন্তর্ভুক্ত নয়।

যৌগিক গড়, মধ্যমা ও সংখ্যাগুরুমানের মধ্যে বিশেষ ক্ষেত্রে একটি প্রায়োগিক সম্পর্ক আছে। সেটি হলো,

যৌগিক গড় – সংখ্যাগুরুমান = 3 (যৌগিক গড় – মধ্যমা)

$\therefore$ সংখ্যাগুরুমান = 3 × মধ্যমা – 2 × যৌগিক গড়

কষে দেখি 26.4

1. আমাদের 16 জন বন্ধুর প্রতিদিন স্কুলে যাতায়াত ও অন্যান্য খরচের জন্য প্রাপ্ত টাকার পরিমাণ,
15, 16, 17, 18, 17, 19, 17, 15, 15, 10, 17, 16, 15, 16, 18, 11
আমাদের বন্ধুদের প্রতিদিন পাওয়া অর্থের সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় করি।

2. নীচে আমাদের শ্রেণির কিছু ছাত্রছাত্রীদের উচ্চতা (সেমি.) হলো,
131, 130, 130, 132, 131, 133, 131, 134, 131, 132, 132, 131, 133,
130, 132, 130, 133, 135, 131, 135, 131, 135, 130, 132, 135, 134, 133
ছাত্রছাত্রীদের উচ্চতার সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় করি।

3. নীচের তথ্যের সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় করি।
(i) 8, 5, 4, 6, 7, 4, 4, 3, 5, 4, 5, 4, 4, 5, 5, 4, 3,
3, 5, 4, 6, 5, 4, 5, 4, 5, 4, 2, 3, 4
(ii) 15, 11, 10, 8, 15, 18, 17, 15, 10, 19, 10, 11,
10, 8, 19, 15, 10, 18, 15, 3, 16, 14, 17, 2

4. আমাদের পাড়ার একটি জুতোর দোকানে একটি বিশেষ কোম্পানির জুতো বিক্রির পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা হলো,

সাইজ (x_i)	2	3	4	5	6	7	8	9
পরিসংখ্যা (f_i)	3	4	5	3	5	4	3	2

উপরের পরিসংখ্যা বিভাজনের সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় করি।

5. একটি প্রবেশিকা পরীক্ষায় পরীক্ষার্থীর বয়সের পরিসংখ্যা বিভাজন ছক থেকে সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় করি।

বয়স (বছরে)	16-18	18-20	20-22	22-24	24-26
পরীক্ষার্থীর সংখ্যা	45	75	38	22	20

6. শ্রেণির একটি পর্যায়ক্রমিক পরীক্ষায় 80 জন ছাত্রছাত্রীর প্রাপ্ত নম্বরের পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা দেখি ও সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় করি।

নম্বর	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা	2	6	10	16	22	11	8	5

7. নীচের পরিসংখ্যা বিভাজনের সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় করি।

শ্রেণি	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
পরিসংখ্যা	5	12	18	28	17	12	8

8. নীচের পরিসংখ্যা বিভাজনের সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় করি।

শ্রেণি	45-54	55-64	65-74	75-84	85-94	95-104
পরিসংখ্যা	8	13	19	32	12	6

[সংকেত : যেহেতু সংখ্যাগুরুমান সংবলিত শ্রেণির নিম্ন শ্রেণি-সীমানা নেওয়া হয়, তাই শ্রেণি-সীমাকে শ্রেণি-সীমানায় পরিণত করতে হবে।]

9. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন :**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q) :

(i) একটি পরিসংখ্যা বিভাজনের মধ্যমা যে লেখচিত্রের সাহায্যে পাওয়া যায় তা হলো, (a) পরিসংখ্যা রেখা (b) পরিসংখ্যা বহুভুজ (c) আয়তলেখ (d) ওজাইভ

(ii) 6, 7, x, 8, y, 14 সংখ্যাগুলির গড় 9 হলে, (a) x+y=21 (b) x+y=19 (c) x–y=21 (d) x–y=19

(iii) 30, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40 তথ্যে 35 না থাকলে মধ্যমা বৃদ্ধি পায় (a) 2 (b) 1.5 (c) 1 (d) 0.5

(iv) 16, 15, 17, 16, 15, x, 19, 17, 14 তথ্যের সংখ্যাগুরুমান 15 হলে x-এর মান (a) 15 (b) 16 (c) 17 (d) 19

(v) ঊর্ধ্বক্রমানুসারে সাজানো 8, 9, 12, 17, x+2, x+4, 30, 31, 34, 39 তথ্যের মধ্যমা 24 হলে, x-এর মান (a) 22 (b) 21 (c) 20 (d) 24

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) 2, 3, 9, 10, 9, 3, 9 তথ্যের সংখ্যাগুরুমান 10

(ii) 3, 14, 18, 20, 5 তথ্যের মধ্যমা 18

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) যৌগিক গড়, মধ্যমা, সংখ্যাগুরুমান হলো ________ প্রবণতার মাপক।

(ii) $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$ এর গড় $\overline{x}$ হলে, $ax_1, ax_2, ax_3 \ldots\ldots ax_n$-এর গড় ________, যেখানে $a\neq0$

(iii) ক্রম-বিচ্যুতি পদ্ধতিতে বিন্যস্ত রাশিতথ্যের যৌগিক গড় নির্ণয়ের সময় সকল শ্রেণির শ্রেণি-দৈর্ঘ্য ________।

10. **সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন :**

(i)

শ্রেণি	65-85	85-105	105-125	125-145	145-165	165-185	185-205
পরিসংখ্যা	4	15	3	20	14	7	14

উপরের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকের মধ্যমা শ্রেণির উর্ধ্ব শ্রেণি-সীমানা এবং সংখ্যাগুরুমান শ্রেণির নিম্ন শ্রেণি-সীমানার অন্তরফল নির্ণয় করি।

(ii) 150 জন অ্যাথলিট 100 মিটার হার্ডল রেস যত সেকেন্ডে সম্পূর্ণ করে তার একটি পরিসংখ্যা বিভাজন ছক নীচে দেওয়া আছে।

সময় (সেকেন্ডে)	13.8-14	14-14.2	14.2-14.4	14.4-14.6	14.6-14.8	14.8-15
অ্যাথলিটের সংখ্যা	2	4	5	71	48	20

14.6 সেকেন্ডের কম সময়ে কতজন অ্যাথলিট 100 মিটার দৌড় সম্পন্ন করে নির্ণয় করি।

(iii) একটি পরিসংখ্যা বিভাজনের গড় 8.1, $\sum f_i x_i = 132+5k$ এবং $\sum f_i = 20$ হলে, k-এর মান নির্ণয় করি।

(iv) যদি $u_i = \dfrac{x_i-25}{10}$, $\sum f_i u_i = 20$ এবং $\sum f_i = 100$ হয়, তাহলে $\overline{x}$-এর মান নির্ণয় করি।

(v)

নম্বর	10-এর কম	20-এর কম	30-এর কম	40-এর কম	50-এর কম	60-এর কম
ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা	3	12	27	57	75	80

উপরের পরিসংখ্যা বিভাজন ছক থেকে সংখ্যাগুরুমান শ্রেণিটি লিখি।

মিলিয়ে দেখি (LET'S MATCH)

অধ্যায় - 1

নিজে করি :

প্রয়োগ : 1. (iv) দ্বিঘাত সমীকরণ নয়। (v) দ্বিঘাত সমীকরণ নয়।

4. $x^2+2x-24=0$, প্রস্থ = x মিটার

কষে দেখি-1.1 [Page : 4]

1. (i), (iii) 2. (i) 3. x^3 4. (i) 2 (ii) 1 (iii) $2x^2+9=0$ (iv) $6x^2+13x+8=0$; 6, 13, 8

5. (i) $x^2+x-42=0$; যেখানে, x একটি সংখ্যা।

(ii) $x^2-36=0$; যেখানে, $2x-1$ ও $2x+1$ ক্রমিক অযুগ্ম সংখ্যা।

(iii) $x^2+x-156=0$; যেখানে, x ও $x+1$ ক্রমিক সংখ্যা।

6. (i) $x^2+3x-108=0$; যেখানে, প্রস্থ = x মিটার।

(ii) $x^2+4x-320=0$; যেখানে, x কিগ্রা. চিনির মূল্য 80 টাকা।

(iii) $x^2+5x-750=0$; যেখানে, প্রথমে ট্রেনটির সমবেগ x কিমি./ঘন্টা

(iv) $x^2+100x-33600=0$; যেখানে, ক্রয়মূল্য x টাকা।

(v) $5x^2-21x-20=0$; যেখানে, স্থির জলে নৌকার বেগ x কিমি./ঘন্টা

(vi) $x^2-x-6=0$; যেখানে, মহিম একা x ঘন্টায় কাজটি সম্পূর্ণ করে।

(vii) $x^2-5x+6=0$; যেখানে, দশক স্থানীয় অঙ্কটি x

(viii) $2x^2+85x-225=0$; যেখানে রাস্তাটি x মিটার চওড়া।

নিজে করি :

প্রয়োগ : 8. –4 13. $\frac{a+b}{ab}$ ও $\frac{2}{a+b}$ 15. $x=-9$ এবং $x=9$

কষে দেখি-1.2 [Page : 10]

1. (i) না (ii) না (iii) না (iv) হ্যাঁ 2. (i) $-\frac{1}{6}$ (ii) $2a^2$ 3. $a=3, b=-6$

4. (i) $y=-6$ এবং $y=6$ (ii) $x=3$ এবং $x=-3$ (iii) $x=-6$ এবং $x=22$

(iv) $x=-3$ এবং $x=3$ (v) $x=-6$ এবং $x=6$ (vi) $x=-\frac{1}{5}$ এবং $x=\frac{1}{2}$

(vii) $x=\frac{1}{2}$ এবং $x=2$ (viii) $x=0$ এবং $x=\frac{2}{3}$ (ix) $x=-9$ এবং $x=7$

(x) $x=-4$ এবং $x=3$ (xi) $x=-1$ এবং $x=1$ (xii) $x=0$ এবং $x=1$

(xiii) $x=-7$ এবং $x=0$ (xiv) $x=-\frac{68}{9}$ এবং $x=3$ (xv) $x=6$ এবং $x=9$

(xvi) $x=-a$ এবং $x=-b$ (xvii) $x=2a$ এবং $x=3a$ (xviii) $x=-(a+b)$ এবং $x=a$

(xix) $x=-2$ এবং $x=7$ (xx) $x=0$ এবং $x=\frac{2ab-bc-ca}{a+b-2c}$

(xxi) $x=\sqrt{3}$ এবং $x=2$

নিজে করি :

প্রয়োগ : 18. 8 অথবা 9

কষে দেখি-1.3 [Page : 13]

1. 6 এবং 9 **2.** 15 মিটার **3.** 3 **4.** 20 কিমি./ঘন্টা **5.** দৈর্ঘ্য = 50 মিটার, প্রস্থ = 40 মিটার
6. 5 অথবা 9 **7.** 20 মিনিট এবং 25 মিনিট **8.** 6 দিন **9.** 30 টাকা
10. **(A)** (i) b (ii) c (iii) b (iv) a (v) b **(B)** (i) মিথ্যা, (ii) মিথ্যা
(C) (i) রৈখিক (ii) $x^2 - 2x + 1 = 0$ (iii) 0 ও 6
11. (i) $a = -4$ (ii) 3 (iii) 1 (iv) $\frac{1}{x} - x = \frac{9}{20}$; যেখানে x প্রকৃত ভগ্নাংশ (v) $a=1, b=12$

নিজে করি :

প্রয়োগ : **26.** 11 ও 13 **30.** (v) -1 ও $\frac{1}{2}$ (vi) 1 ও $\frac{7}{2}$ (vii) 1 ও $\sqrt{2}$

কষে দেখি-1.4 [Page : 22]

1. (i) না। যেহেতু একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ নয়। (ii) একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ। (iii) -2
2. (i) -4 ও $\frac{1}{3}$ (ii) -1 ও -1 (iii) $\frac{1}{8}$ ও $\frac{3}{2}$ (iv) -1 ও $\frac{1}{3}$ (v) বাস্তব বীজ নেই।
(vi) $-\frac{1}{2}$ ও $\frac{3}{5}$ (vii) বাস্তব বীজ নেই (viii) $\frac{3-\sqrt{2}}{5}$ ও $\frac{3+\sqrt{2}}{5}$ (ix) $-\frac{7}{8}$ ও $\frac{3}{2}$
3. (i) 10 সেমি., 24 সেমি. ও 26 সেমি. (ii) 3 (iii) 9 মিটার/সেকেন্ড (iv) 9 মিটার (v) 10
(vi) 18 (vii) $1\frac{3}{5}$ কিমি./ঘন্টা (viii) 60 কিমি./ঘন্টা (ix) 80 টাকা

নিজে করি :

প্রয়োগ : **31.** (iv) বাস্তব ও অসমান **33.** $\frac{25}{2}$ **36.** (ii) সমষ্টি = $\frac{9}{4}$, গুণফল = -25 **38.** 3
41. $\frac{3abc-b^3}{c^3}$

কষে দেখি-1.5 [Page : 29]

1. (i) বাস্তব ও অসমান। (ii) বাস্তব ও সমান। (iii) কোনো বাস্তব বীজ নেই। (iv) কোনো বাস্তব বীজ নেই।
2. (i) ± 14 (ii) $\frac{25}{24}$ (iii) 16 (iv) $\frac{9}{8}$ (v) 2 ও $\frac{1}{2}$ (vi) $-\frac{1}{2}$ ও 1
3. (i) $x^2 - 6x + 8 = 0$ (ii) $x^2 + 7x + 12 = 0$ (iii) $x^2 + x - 12 = 0$ (iv) $x^2 - 2x - 15 = 0$
4. -3 **8.** (i) $\frac{34}{25}$ (ii) $-\frac{98}{125}$ (iii) $\frac{2}{3}$ (iv) $\frac{98}{75}$ **10.** $x^2 + px + 1 = 0$ **11.** $x^2 + x + 1 = 0$
12. **(A)** (i) c (ii) c (iii) a (iv) d (v) c **(B)** (i) মিথ্যা (ii) সত্য **(C)** (i) 2:3 (ii) a (iii) 0
13. (i) $x^2 - 14x + 24 = 0$ (ii) $-\frac{2}{3}$ (iii) ± 8 (iv) $-\frac{1}{2}$ (v) 12

অধ্যায় - 2

নিজে করি :

প্রয়োগ : **2.** 30 টাকা, 81 টাকা **4.** 1200 টাকা **5.** 1500 টাকা, 1700 টাকা
10. 93.75 টাকা, 593.75 টাকা; 0.01 টাকা, 146.01 টাকা; 456.50 টাকা, 5021.50 টাকা
13. 400 টাকা, 7300 টাকা **16.** 840 টাকা, 10,000 টাকা **19.** $3\frac{1}{2}$ বছর, 2 বছর **23.** (i) 5 (ii) 2
26. 400 টাকা, 8 **30.** 90,000 টাকা, 97,500 টাকা **32.** 6087.50 টাকা
34. 3,00,000 টাকা, 2,00,000 টাকা, 1,20,000 টাকা

কষে দেখি-2 [Page : 46]

1. 7200 টাকা **2.** 48 টাকা **3.** 1060 টাকা **4.** 3584 টাকা **5.** 8000 টাকা **6.** 37800 টাকা **7.** $16\frac{2}{3}$ বছর **8.** $6\frac{1}{4}$ **9.** 170 টাকা **10.** $6\frac{1}{4}$ **11.** $3\frac{1}{2}$ বছর **12.** 5 বছর **13.** 5000 টাকা, 6 **14.** 3:4 **15.** $9\frac{1}{2}$ **16.** ব্যাঙ্কে 60000 টাকা এবং পোস্টঅফিসে 40000 টাকা **17.** 6000 টাকা এবং 4000 টাকা **18.** 20837.50 টাকা **19.** 9 বছর **20.** 80,000 টাকা এবং 60,000 টাকা **21.** **(A)** (i) c (ii) c (iii) b (iv) c (v) b **(B)** (i) সত্য (ii) মিথ্যা **(C)** (i) উত্তমর্ণ (ii) $\frac{prt}{100}$ (iii) $12\frac{1}{2}\%$ **22.** (i) 16 (ii) 24000 টাকা (iii) 8 (iv) $6\frac{2}{3}$ (v) 240 টাকার

অধ্যায় - 3

কষে দেখি-3.1 [Page : 52]

1. AO, CO, PO, QO **2.** (i) অসংখ্য (ii) ব্যাস (iii) বৃত্তাংশে (iv) কেন্দ্র (v) সমান (vi) ব্যাসার্ধ (vii) বড়ো **4.** (i) সত্য (ii) সত্য (iii) সত্য (iv) সত্য (v) মিথ্যা (vi) মিথ্যা (vii) মিথ্যা (viii) সত্য

নিজে করি :

প্রয়োগ : **6.** 30 সেমি. **8.** 7 সেমি.

কষে দেখি-3.2 [Page : 65]

1. 3 সেমি. **2.** 24 সেমি. **3.** 5.8 সেমি. **4.** 3 সেমি. **5.** 30 সেমি. **6.** 3.25 সেমি. **10.** 13 সেমি. **16.** **(A)** (i) c (ii) b (iii) b (iv) a (v) b **(B)** (i) মিথ্যা (ii) সত্য (iii) মিথ্যা **(C)** (i) 1 : 1 (ii) কেন্দ্রগামী **17.** (i) 16 সেমি. (ii) 9.6 সেমি. (iii) 6 সেমি. (iv) 8 সেমি. (v) 10 সেমি.

অধ্যায় - 4

নিজে করি :

প্রয়োগ : **2.** 1440 বর্গ সেমি. **4.** 864 বর্গ সেমি. **7.** 9 মিটার **10.** 640 বর্গ সেমি., কর্ণের দৈর্ঘ্য $8\sqrt{6}$ সেমি. **18.** 9 ঘণ্টা

কষে দেখি-4 [Page : 74]

2. তলগুলি — ABCD, EFGH, ADFE, BCGH, ABHE, DCGF,
ধারগুলি — AB, BC, CD, DA, EF, FG, GH, HE, AE, DF, BH, CG.
শীর্ষবিন্দুগুলি — A, B, C, D, E, F, G, H.

3. $5\sqrt{2}$ মিটার **4.** 512 ঘন মিটার **5.** 150 মিটার **6.** 96 বর্গ সেমি. **7.** 125 ঘন সেমি. **8.** 216 ঘন সেমি. **9.** 6 সেমি. **10.** 8:1 **11.** 352 বর্গ সেমি. **12.** 200 গ্রাম **13.** 75 **14.** 75 সেমি. **15.** 18 লিটার **16.** 26.25 ঘন সেমি., 1.5 সেমি. **17.** 2 ডেসিমি. **18.** $1\frac{5}{59}$ মিটার **19.** 2 মিটার **20.** দৈর্ঘ্য 20 ডেসিমি. ও প্রস্থ 15 ডেসিমি., রাখা যাবে না, যেহেতু পাত্রের আয়তন 1500 লিটার। **21.** 1 মিটার, 8 ডেসিমি. **22.** 5 ডেসিমি., 775 টাকা 50 পয়সা **23.** 7 ঘণ্টা 24 মিনিট, 5 ডেসিমি. **24.** **(A)** (i) b (ii) b (iii) d (iv) c (v) d **(B)** (i) মিথ্যা (ii) সত্য **(C)** (i) 4টি (ii) $\sqrt{2}$ (iii) ঘনক **25.** (i) 6 (ii) 3.5 (iii) 125 (iv) 6 সেমি. (v) 96 বর্গ মি.

অধ্যায় - 5

নিজে করি :

প্রয়োগ : **4.** y : x **6.** 14 ও 21 **9.** 1 : $p^2q^2r^2$ **11.** 24 : 35 **13.** 20 : 36 : 45 **17.** 50 : 19 **19.** 247 : 778 **21.** 9

কষে দেখি-5.1 [Page : 82]

1. (i) 2 : 9, লঘু অনুপাত (ii) 3 : 5, লঘু অনুপাত (iii) 1 : 1, সাম্যানুপাত (iv) 20 : 1, গুরু অনুপাত

2. (i) 1000p : q (ii) একই এককে আনলে (iii) সাম্যানুপাত (iv) 1 : abc (v) y^2 : xz (vi) 1 : xyz

3. (i) 36 : 77 (ii) 1 : 1 **4.** (i) 48 : 49 (ii) 16 : 35 (iii) 3 : 4 : 6 (iv) 8 : 12 : 21

5. (i) 9 : 10 (iii) 86 **6.** (i) 40 : 19 (ii) 9 : 4

8. (i) $\frac{8}{5}$ (ii) $\frac{bm-an}{m-n}$ (iii) 1

নিজে করি :

প্রয়োগ : **25.** সমানুপাত আছে **26.** সমানুপাতে আছে **29.** সমানুপাতী **31.** 84 **33.** 20 **34.** 5 : 10 : : 6 : 12; 6 : 5 : : 12 : 10; 10 : 5 : : 12 : 6 **36.** 3 **38.** না। যেহেতু, 3+10 = 6+7 **40.** 48 টাকা **42.** 16 pq^3 **44.** 1.5 **46.** xyz

কষে দেখি-5.2 [Page : 87]

1. (i) 12 (ii) 75 **2.** (i) $\frac{3}{20}$ (ii) 22.8 কিগ্রা. (iii) $\frac{yz^3}{x}$ (iv) p^3+q^3 **3.** (i) 20 (ii) 1.5 (iii) $\frac{q^2r^2}{p^3}$ (iv) $(x+y)^4(x-y)^2$ **4.** (i) 20 (ii) 4.5 (iii) x^2y^2 (iv) x^2-y^2

5. পরস্পর বিপরীত সম্পর্ক **6.** 2 **7.** 162 **8.** 3 **9.** 6 **10.** $\frac{qr-ps}{q+r-p-s}$

কষে দেখি-5.3 [Page : 97]

6. (vi) 2 **12. (A)** (i) a (ii) c (iii) c (iv) c (v) d **(B)** (i) সত্য (ii) সত্য

(C) (i) 4 (ii) $12\frac{1}{2}$ (iii) –6 **13.** (i) 11 (ii) $\frac{7}{8}$ (iii) 17 : 7 (iv) x = 8, y = 18 (v) 3 : 2

অধ্যায় - 6

নিজে করি :

প্রয়োগ : **3.** 1102.50 টাকা **5.** 1576.25 টাকা **7.** 102.50 টাকা **10.** 2300 টাকা **12.** 34719.24 **14.** 3200 টাকা **19.** 6000 টাকা, 7% **21.** 8% **23.** 2 বছর

কষে দেখি-6.1 [Page : 112]

1. 5886.13 টাকা (প্রায়) **2.** 6298.56 টাকা **3.** 247.20 টাকা **4.** 8850.87 টাকা **5.** 90405 টাকা **6.** 15000 টাকা **7.** 8,000 টাকা **8.** 25,000 টাকা **9.** 25,000 টাকা **10.** 67.50 টাকা **11.** 76.25 টাকা

12. 16,000 টাকা 13. 30,000 টাকা 14. 933.60 টাকা 15. 565 টাকা 16. 1250 টাকা, 4%
17. 70,000 টাকা, 6% 18. 489.60 টাকা 19. 480.57 টাকা (প্রায়) 20. 8% 21. 2 বছর
22. 10% 23. 2 বছর 24. 3 বছর 25. 252.20 টাকা, 1852.20 টাকা

নিজে করি :

প্রয়োগ : 27. 102900 টাকা 29. 506250

কষে দেখি-6.2 [Page : 117]

1. 10609 2. 84896640 3. 72900 টাকা 4. 3200 জন 5. 12000 6. 532.4 কুই. 7. 20 মিটার
8. 3429.50 টাকা 9. 58.32 কিগ্রা. 10. 3000 11. 1536 12. 131220 টাকা 13. 75
14. 33750 15. 40960 16. (A) (i) c (ii) b (iii) b (iv) d (v) a (B) (i) মিথ্যা (ii) সত্য
(C) (i) সমান (ii) সমহার (iii) হ্রাস 17. (i) 5 (ii) 2n (iii) 6000 টাকা (iv) $v\left(1-\frac{r}{100}\right)^{-n}$
(v) $P\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-n}$

অধ্যায় - 7

নিজে করি : 7.1 1. বৃত্তস্থ, $\overset{\frown}{AQB}$ 2. ST, $\angle SLT$, $\overset{\frown}{SNT}$

নিজে করি : 7.2 3. (a) (i) কেন্দ্রস্থ (ii) $\angle APB$ (iii) AQB, বৃত্তস্থ (iv) APB, নয় (v) $\angle ADB$, $\overset{\frown}{AQB}$
(b) (i) $\angle ACB$, $\angle ADB$ (ii) $\angle ACB$, $\angle ADB$, নয়

নিজে করি :

প্রয়োগ : 5. (i) $x=60$ (ii) $y=120$

কষে দেখি-7.1 [Page : 126]

1. 65°, 25° 2. 125° 3. 144° 4. 55°, 110° 5. 160° 14. (A) (i) d (ii) a (iii) b (iv) c (v) c
(B) (i) মিথ্যা (ii) সত্য (C) (i) অর্ধেক (ii) সমান (iii) 120° 15. (i) $x=40, y=80$ (ii) 40°
(iii) 120° (iv) 5 সেমি. (v) 40°

নিজে করি :

প্রয়োগ : 8. (ii) $x=60$

কষে দেখি-7.2 [Page : 132]

1. 40°, 60°, 180° 2. $\angle BAC = 45°$, $\angle APC = 45°$ 12. (A) (i) d (ii) d (iii) c
(iv) b (v) d (B) (i) সত্য (ii) মিথ্যা (C) (i) সমান (ii) সমবৃত্তস্থ (iii) সমান
13. (i) $\angle CDE = 30°$ (ii) 78° (iii) 80° (iv) 64° (v) 4 সেমি.

কষে দেখি-7.3 [Page : 138]

1. (ii) 10. (A) (i) d (ii) c (iii) d (iv) c (v) c (B) (i) মিথ্যা (ii) সত্য (C) (i) সমকোণ
(ii) স্থূলকোণ (iii) সমকৌণিক 11. (i) 4 সেমি. (ii) 2.5 সেমি. (iii) 2r সেমি. (iv) 30° (v) 60°

অধ্যায় - 8

নিজে করি :

প্রয়োগ : **2.** 616 বর্গ মি. **4.** 187 বর্গ ডেকামি. **6.** 6.4 ডেসিমি., 28.05 টাকা
11. 2.541 ঘন ডেসিমি., 12.705 কিগ্রা. **13.** 188.65 ঘন সেমি. **16.** 360 সেমি.

কষে দেখি-8 [Page : 146]

1. (i) 3 (ii) 1;2 **3.** 18 সেমি. **4.** 1232 ঘন ডেসিমি.; 1100 টাকা **5.** 325 গ্রাম **6.** 4.05 ডেসিমি.
7. 6.468 লিটার **8.** 2310 কিলোলিটার **9.** 3.2 সেমি. **10.** 14 মিটার, 6 মিটার **11.** 180 সেমি.
12. 5.6 ডেসিমি., 25 ডেসিমি. **13.** 5829.12 টাকা **14.** 5 ডেসিমি. **15.** 7 ডেসিমি.
16. 15840 লিটার; 21120 লিটার **17.** (i) 277.2 ঘন ডেসিমি. (ii) 55.44 ঘন ডেসিমি. **18.** 168 টি
19. **(A)** (i) c (ii) b (iii) b (iv) c (v) a **(B)** (i) মিথ্যা (ii) সত্য **(C)** (i) ℓb (ii) 5 (iii) 4
20. (i) 7 মিটার (ii) 2 (iii) 396 ঘন সেমি. (iv) 9:32 (v) $62\frac{1}{2}$% হ্রাস

অধ্যায় - 9

নিজে করি :

প্রয়োগ : **4.** $\sqrt{48}, \sqrt{27}, \sqrt{75}$ **6.** $3\sqrt{2}, -\sqrt{2}$, শুদ্ধ করণী **9.** $4\sqrt{3}$ **11.** $21+5\sqrt{5}$

কষে দেখি-9.1 [Page : 153]

1. (i) $5\sqrt{7}$ (ii) $8\sqrt{7}$ (iii) $6\sqrt{3}$ (iv) $5\sqrt{5}$ (v) $5\sqrt{119}$ **5.** $5\sqrt{3}-\sqrt{2}$
6. (a) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ (b) $4-2\sqrt{3}$ (c) $4+2\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$ (d) $15-4\sqrt{11}$ (e) $\sqrt{7}-10$
(f) $5+\sqrt{3}$ ও $5-\sqrt{3}$ [অন্য উত্তরও হবে]

নিজে করি :

প্রয়োগ : **16.** $6\sqrt{2}+2\sqrt{14}-2\sqrt{10}-3-\sqrt{7}+\sqrt{5}$ **18.** $\sqrt{7}, k\sqrt{7}$ (k একটি অশূন্য মূলদ সংখ্যা)
20. $7+\sqrt{3}, -7-\sqrt{3}$ **22.** $\sqrt{15}-\sqrt{3}, \sqrt{3}-\sqrt{15}$ **25.** (i) $2-\sqrt{3}$ (ii) $5+\sqrt{2}$
(iii) $-\sqrt{5}-7$ (iv) $6-\sqrt{11}$ (v) $-\sqrt{5}$ **28.** $\frac{4\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{42}}{2}$ **30.** (i) $14+8\sqrt{3}$
(ii) $4+\sqrt{15}$

কষে দেখি-9.2 [Page : 157]

1. (a) 3 (b) $\sqrt{2}$ (c) $15\sqrt{15}$ (d) 3 (e) $\pm\sqrt{23}$ **2.** (a) $7\sqrt{2}$ (b) 12 (c) 15
(d) $3\sqrt{2}+\sqrt{10}$ (e) -1 (f) $24+8\sqrt{6}+2\sqrt{15}+3\sqrt{10}$ (g) 4 **3.** (a) 5 (b) $\sqrt{2}$ (c) $\sqrt{3}$
(d) $2-\sqrt{5}$ (e) $\sqrt{14}$ (f) $2+\sqrt{3}$ **4.** $9+4\sqrt{5}$; $-2+\sqrt{7}$
5. (i) $-\sqrt{5}+\sqrt{2}$; $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ (ii) $13-\sqrt{6}$; $-13+\sqrt{6}$ (iii) $-\sqrt{8}-3$; $\sqrt{8}+3$
(iv) $\sqrt{17}+\sqrt{15}$; $-\sqrt{17}-\sqrt{15}$ **6.** (i) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ (ii) $\frac{1}{5}(\sqrt{10}-\sqrt{5}+\sqrt{30})$ (iii) $2+\sqrt{3}$
(iv) $\frac{1}{4}(3\sqrt{7}+\sqrt{35}+3\sqrt{3}+\sqrt{15})$ (v) $\frac{1}{19}(6\sqrt{10}+2\sqrt{5}+3\sqrt{2}+1)$ (vi) $5+2\sqrt{6}$
7. (i) $6+\sqrt{10}-3\sqrt{2}-\sqrt{5}$ (ii) $-(4+\sqrt{6})$ (iii) $\sqrt{3}$

8. (i) $-\frac{(5+2\sqrt{5})}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}(9\sqrt{2}-8\sqrt{5})$

নিজে করি :

প্রয়োগ : **32.** $\frac{2}{5}$ **34.** $6\sqrt{3}-4\sqrt{2}$ **36.** $2\sqrt{2}, 18\sqrt{3}, 4\sqrt{6}$

কষে দেখি-9.3 [Page : 161]

1. (a) (i) 1 (ii) 0 **2.** (a) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (b) 0 (c) $4\sqrt{6}$ (d) 0 **3.** 0

4. (i) $2\sqrt{6}$ (ii) $2\sqrt{7}$ (iii) 26 (iv) $50\sqrt{7}$ **5.** $(4x^2-2), x=\pm 2$

6. (i) $1\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{5\sqrt{5}}{27}$ (iii) $1\frac{5}{8}$ (iv) $\frac{9\sqrt{5}}{20}$

7. (a) (i) $2\sqrt{3}$ (ii) 14 (iii) $30\sqrt{3}$ (iv) 2 (b) 37 **9.** $\sqrt{5}+\sqrt{3}$

10. **(A)** (i) c (ii) a (iii) b (iv) a (v) b **(B)** (i) সত্য (ii) মিথ্যা **(C)** (i) অমূলদ (ii) $-\sqrt{3}-5$ (iii) অনুবন্ধী

11. (i) 6 (ii) $\sqrt{10}+\sqrt{8}$ (iii) $a+\sqrt{b}$ ও $a-\sqrt{b}$ [যেখানে a মূলদ সংখ্যা এবং $\sqrt{b}$ শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী] (iv) $2\sqrt{2}$ (v) 1

অধ্যায় - 10

কষে দেখি-10 [Page : 169]

1. $\angle SQP = 65^\circ, \angle RSP = 70^\circ$ **2.** 35° **3.** $40^\circ, 25^\circ$ **17.** **(A)** (i) c (ii) c (iii) d (iv) c (v) d **(B)** (i) মিথ্যা (ii) সত্য **(C)** (i) সমবৃত্তস্থ (ii) আয়তাকার (iii) সমবৃত্তস্থ

18. (i) $x = 60$ (ii) $\angle QBC = 100^\circ, \angle BCP = 96^\circ$ (iii) $\angle DPC = 40^\circ, \angle BQC = 20^\circ$ (iv) $\angle BED = 80^\circ$ (v) $\angle BED = 20^\circ$

অধ্যায় - 11

নিজে করি : 11 **1.** জ্যা **2.** কেন্দ্র **3.** সমান **4.** ব্যাসার্ধ

অধ্যায় - 12

নিজে করি :

প্রয়োগ : **2.** 1540 টাকা **4.** $1437\frac{1}{3}$ ঘন সেমি. **7.** 10.5 সেমি. **10.** 1:4

কষে দেখি-12 [Page : 183]

1. 1386 বর্গ সেমি. **2.** 2.8 সেমি. **3.** $179\frac{2}{3}$ ঘন সেমি. **4.** $11498\frac{2}{3}$ ঘন সেমি. **5.** 1:9 **6.** 9 সেমি. **7.** 38.808 ঘন সেমি; 55.44 বর্গ সেমি. **8.** 8টি **9.** 6 সেমি. **10.** 970 টাকা 20 পয়সা **11.** 36:25

12. $1 : (2\sqrt{2}-1)$ **13.** 2460.92 বর্গ সেমি. **14.** 512টি **15.** **(A)** (i) a (ii) b (iii) c (iv) a (v) a **(B)** (i) মিথ্যা (ii) সত্য **(C)** (i) গোলক (ii) 1 (iii) 12

16. (i) 4.5 একক (ii) 6 সেমি. (iii) $2 : \sqrt{3}$ (iv) 36π (v) 125

অধ্যায় - 13

নিজে করি :

প্রয়োগ : **4.** $\frac{9}{2}$, $y=\frac{9}{2}\sqrt{x}$, $x=\frac{256}{81}$ **5.** হ্যাঁ, $x \propto \frac{1}{y}$ **10.** $1\frac{1}{2}$ ঘণ্টা **19.** $5\frac{2}{5}$ দিন **27.** 8 টি

কষে দেখি-13 [Page : 195]

1. $A \propto B, \frac{5}{2}$ **2.** $x \propto \frac{1}{y}$ **3.** (i) 168 কিমি. (ii) 6 টি (iii) 10 জন **4.** (i) $x=4$ (ii) 2 (iii) $x=\frac{3y}{10z}$, 9 **5.** (iii) $a \propto \frac{1}{d}$ (iv) ভেদ ধ্রুবক তিনটির গুণফল 1 **8.** 5 দিন **9.** 3 মিটার

10. $y=2x-\frac{3}{x}$ **12.** 16250 টাকা **13.** 5 : 9 **14.** 15

16. **(A)** (i) d (ii) d (iii) b (iv) b (v) a **(B)** (i) মিথ্যা (ii) সত্য **(C)** (i) z (ii) y^n (iii) x

17. (i) $y^2=4ax$ (ii) 1 (iii) সরলভেদে (v) 8 : 27

অধ্যায় - 14

নিজে করি :

প্রয়োগ :

2. সুলেখা পাবে 3500 টাকা, জয়নাল পাবে 3150 টাকা এবং শিবু পাবে 4900 টাকা **5.** 14100 টাকা,15900 টাকা ও 13200 টাকা **8.** মনীষা দেবেন 2300 টাকা এবং রজত দেবেন 4600 টাকা

10. নিবেদিতা পাবে 3250 টাকা এবং উমা পাবে 2925 টাকা।

কষে দেখি-14 [Page : 202]

1. আমার লভ্যাংশ 6,300 টাকা ও মালার লভ্যাংশ 10,500 টাকা

2. প্রিয়ম, সুপ্রিয়া ও বুলুকে যথাক্রমে 900 টাকা, 600 টাকা ও 1500 টাকা লোকসানের পরিমাণ হিসাবে দিতে হবে।

3. মাসুদের লভ্যাংশ 5000 টাকা ও শোভার লভ্যাংশ 7500 টাকা

4. তিনবন্ধুকে যথাক্রমে 500 টাকা, 600 টাকা ও 700 টাকা দিতে হবে,

5. দীপুর লভ্যাংশ 4700 টাকা, রাবেয়ার লভ্যাংশ 4400 টাকা ও মেঘার লভ্যাংশ 5300 টাকা

6. তিন বন্ধু লভ্যাংশ থেকে যথাক্রমে 2240 টাকা, 2800 টাকা এবং 3360 টাকা পাবেন

7. তিন বন্ধুর হাতে যথাক্রমে 3600 টাকা, 4800 টাকা এবং 3000 টাকা থাকবে; 6:8:5

8. তিন বন্ধু পাবেন যথাক্রমে 10560 টাকা, 10274 টাকা ও 8426 টাকা

9. প্রদীপবাবু পাবেন 12956 টাকা ও আমিনাবিবি পাবেন 14760 টাকা

10. নিয়ামতচাচা লাভ পাবেন 10000 টাকা করবীদিদি লাভ পাবেন 9000টাকা

11. শ্রীকান্ত পাবেন 15660 টাকা, সৈফুদ্দিন পাবেন 19575 টাকা ও পিটার পাবেন 3915 টাকা।

12. 5 মাস পরে

13. তিনজন মৃৎশিল্পী পেয়েছিলেন যথাক্রমে 36500 টাকা, 35000 টাকা ও 39500 টাকা

14. 6800 টাকা **15.** পূজা পাবে 2550 টাকা, উত্তম পাবে 2610 টাকা, মেহের পাবে 300 টাকা

16. **(A)** (i) b (ii) a (iii) c (iv) a (v) a **(B)** (i) মিথ্যা (ii) মিথ্যা **(C)** (i) দুই (ii) সরল (iii) মিশ্র

17. (i) 1500 টাকা (ii) 8:12:15 (iii) 4000 টাকা (iv) 480 টাকা (v) 4000

অধ্যায় - 15

কষে দেখি-15.1 [Page : 209]

1. 48°

নিজে করি : 15.1 **1.** 12 সেমি. **2.** 5 সেমি. **3.** $\angle APB = 60^{\circ}$, $\angle APO = 30^{\circ}$

কষে দেখি-15.2 [Page : 218]

1. 15 সেমি. **2.** 60° **11.** **(A)** (i) a (ii) d (iii) a (iv) d (v) c **(B)** (i) সত্য (ii) মিথ্যা **(C)** (i) ছেদক (ii) 4 (iii) তির্যক **12.** (i) 30° (ii) 14 (iii) 2 সেমি. (iv) 4 সেমি. (v) 12 সেমি.

অধ্যায় - 16

নিজে করি : **প্রয়োগ :** **2.** $9\frac{3}{7}$ বর্গ মি. **4.** $1178\frac{4}{7}$ বর্গ সেমি. **6.** 1100 বর্গ সেমি. **8.** 25 সেমি. **10.** 577.5 ঘন ডেসিমি. **14.** 6:25

কষে দেখি-16 [Page : 227]

1. 1131.43 বর্গ সেমি. (প্রায়), 1838.57 বর্গ সেমি. (প্রায়) **2.** (i) 1.232 ঘন মি. (ii) 1617 ঘন মিটার **3.** $1571\frac{3}{7}$ বর্গ সেমি., $2828\frac{4}{7}$ বর্গ সেমি., $6285\frac{5}{7}$ ঘন সেমি. **4.** $452\frac{4}{7}$ বর্গ সেমি.; $402\frac{2}{7}$ ঘন সেমি. **5.** 13 সেমি. **6.** 38.5 বর্গ মি. **7.** 866.25 টাকা **8.** 12 সেমি.; $314\frac{2}{7}$ ঘন সেমি. **9.** 4 মি., $37\frac{5}{7}$ ঘন মি., 211.20 টাকা **10.** 15 মিটার **11.** 14 সেমি.; 17.5 সেমি. **12.** 74.18 ঘন মি. (প্রায়); 80.54 বর্গ মি.(প্রায়) **13.** **(A)** (i) c (ii) d (iii) a (iv) d (v) b **(B)** (i) মিথ্যা (ii) সত্য **(C)** (i) BC (ii) $\frac{3V}{A}$ (iii) 3 : 1 **14.** (i) 5 সেমি. (ii) 2:1 (iii) 3; (iv) $\frac{1}{9}$ (v) 9:8

অধ্যায় - 18

কষে দেখি-18.1 [Page : 235]

1. (i) সদৃশ (ii) সদৃশ (iii) সমবাহু (iv) সমান, সমানুপাতী
2. (i) সত্য (ii) মিথ্যা (iii) সত্য (iv) সত্য (v) মিথ্যা

নিজে করি : **প্রয়োগ :** **2.** 6 সেমি.

কষে দেখি-18.2 [Page : 244]

1. (i) 6 একক (ii) 9 একক (iii) 4 একক **2.** (i) না (ii) হ্যাঁ **11.** **(A)** (i) b (ii) c (iii) d (iv) a (v) d **(B)** (i) মিথ্যা (ii) সত্য **(C)** (i) সমানুপাতে (ii) সমান (iii) সমানুপাতে
12. (i) সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ (ii) 3 : 5 (iii) $x = 9$ (iv) $x = \frac{15}{4}, y = \frac{16}{3}$ (v) $\frac{3}{1}$

কষে দেখি-18.3 [Page : 253]

1. প্রথম জোড়া সদৃশ **2.** $\angle A = 40^{\circ}$ **3.** 42 মিটার

নিজে করি : **প্রয়োগ :** **21.** 10.8 সেমি.

কষে দেখি-18.4 [Page : 259]

1. 12.8 সেমি. **2.** BD = 8 সেমি., AB = $4\sqrt{5}$ সেমি. **7.** **(A)** (i) c (ii) b (iii) c (iv) a (v) d **(B)** (i) মিথ্যা (ii) সত্য (iii) মিথ্যা **(C)** (i) অনুরূপ (ii) 5.4 **8.** (i) 12 সেমি. ii) 40 সেমি. (iii) 16 সেমি. (iv) 8 সেমি. (v) 50°

অধ্যায় - 19

নিজে করি :

প্রয়োগ : **3.** 7 সেমি.

কষে দেখি-19 [Page : 265]

1. 693 কিগ্রা. **2.** 20 সেমি. **3.** 5 সেমি. **4.** 3:4 **5.** 4096 টি **6.** 60 টি **7.** 19404 ঘনসেমি. **8.** 3:4 **9.** 8টি; 4.851 ঘনডেসিমি. **10.** 50.4 সেমি. **11.** 12 ডেসিমি. **12.** 14 সেমি. **13.** 2.1 ডেসিমি **14.** 1:2:3 **15.** $30\frac{1}{3}$ সেমি. **16.** 3.08 ঘন মি. 0.84 ঘনমি. **17.** **(A)** (i) a (ii) b (iii) b (iv) d (v) a **(B)** (i) মিথ্যা (ii) মিথ্যা **(C)** (i) চোঙের (ii) চোঙের (iii) সমান

18. (i) 5 সেমি. (ii) 1 : 2 (iii) 3 : 1 : 2 (iv) $1 : \sqrt{3}$ (v) 2 : 1

অধ্যায় - 20

নিজে করি :

প্রয়োগ : **2.** $\frac{\pi}{6}$ **7.** $\frac{\pi}{8}$ **12.** $\frac{5}{2}$ রেডিয়ান **16.** $62^\circ\ 32'\ 33''$ বা $\frac{35\pi}{44}$ **18.** $94^\circ\ 27'\ 24''$

কষে দেখি-20 [Page : 276]

1. (i) $13^\circ\ 52'$ **(ii)** $1^\circ\ 45'\ 12''$ **(iii)** 6' 15" **(iv)** 27º 5' **(v)** 72º 2' 24"

2. (i) $\frac{\pi}{3}$ (ii) $\frac{3\pi}{4}$ (iii) $-\frac{5\pi}{6}$ (iv) $\frac{2\pi}{5}$ (v) $\frac{\pi}{8}$ (vi) $-\frac{25\pi}{72}$ (vii) $\frac{47}{160}\pi$ (viii) $\frac{6041\pi}{27000}$

3. $\frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5}$ **4.** $81^\circ, 9^\circ$ **5.** $100^\circ, \frac{5\pi}{9}$ **6.** $75^\circ, 60^\circ ; \frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{3}$ **7.** $\frac{4\pi}{9}$ **8.** $\frac{\pi}{16}$ **9.** $75^\circ, \frac{5\pi}{12}$

10. ঘড়ির কাঁটার দিকে 2বার পূর্ণ আবর্তন করেছে এবং তারপরে 195º কোণ উৎপন্ন করেছে।

11. $\angle ABD = \frac{\pi}{8}, \angle BAD = \frac{3\pi}{8}, \angle CBD = \frac{\pi}{8}, \angle BCD = \frac{3\pi}{8}$ **12.** $\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$ **13.** $60^\circ, \frac{\pi}{3}$

14. **(A)** (i) d (ii) d (iii) b (iv) b (v) a **(B)** (i) সত্য (i) মিথ্যা **(C)** (i) ধ্রুবক (ii) $57^\circ\ 16'\ 22''$ (প্রায়) (iii) $\frac{5\pi}{8}$ **15.** (i) $\frac{\pi}{180}$ (ii) $26^\circ\ 24'\ 45''$ (iii) $\frac{5\pi}{18}$ (iv) 200 সেমি. (v) $\frac{\pi}{6}$

অধ্যায় - 22

কষে দেখি-22 [Page : 289]

1. (i) এর ত্রিভুজটি সমকোণী ত্রিভুজ হবে। **2.** 21 মিটার **3.** 16 সেমি. **15.** **(A)** (i) c (ii) c (iii) b (iv) b (v) c **(B)** (i) সত্য (ii) মিথ্যা **(C)** (i) সমষ্টির (ii) 8 (iii) 5 **16.** (i) 90º (ii) 26 সেমি. (iii) $5\sqrt{3}$ সেমি. (iv) 90º (v) 2.4 সেমি.

অধ্যায় - 23

নিজে করি :

প্রয়োগ : **3.** 15°

কষে দেখি-23.1 [Page : 295]

1. $\frac{3}{5}, \frac{3}{4}$ **2.** $\frac{7}{25}, \frac{24}{25}, \frac{7}{24}, \frac{25}{7}$ **3.** $\frac{21}{29}, \frac{20}{29}, \frac{20}{29}, \frac{21}{29}$

4. $\sin\theta = \frac{24}{25}$, $\tan\theta = \frac{24}{7}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{25}{24}$, $\sec\theta = \frac{25}{7}$, $\cot\theta = \frac{7}{24}$

5. $\tan\theta = \frac{1}{2}$, $\sec\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$ **7.** $\cos A = \frac{8}{17}$, $\operatorname{cosec} A = \frac{17}{15}$ **8.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$

9. (i) মিথ্যা (ii) মিথ্যা (iii) মিথ্যা (iv) সত্য (v) মিথ্যা (vi) সত্য

নিজে করি :

প্রয়োগ : **9.** 60 **12.** $45^\circ, 45^\circ$

কষে দেখি-23.2 [Page : 302]

1. 3 **2.** $\angle ACB = 60^\circ, \angle BAC = 30^\circ$ **3.** $BC = 10$ সেমি., $AB = 10\sqrt{3}$ সেমি.

4. PQ=QR=3 মি. **5.** (i) $\frac{1}{2}$ (ii) 0 (iii) 1 (iv) $3\frac{1}{3}$ (v) $\frac{6+\sqrt{6}}{3}$ (vi) 0 (vii) 0

(viii) $\frac{5}{2\sqrt{3}}$ (ix) 1 **7.** (i) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (ii) $2\frac{2}{3}$ (iii) $\pm\frac{1}{2}$ **8.** $\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$ **11.** $0^\circ, 60^\circ$

নিজে করি :

প্রয়োগ : **23.** না **26.** $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$ **28.** $\frac{7}{5}$ **34.** $\frac{1}{2}$

36. $4x^2 + 25y^2 = 9$ **38.** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ **41.** 2

কষে দেখি-23.3 [Page : 311]

1. (i) $\frac{5}{7}$ (iii) 2 **2.** (i) $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$, $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$

(ii) $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$, $\tan\theta = \frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$

3. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\sqrt{2}+1$ (iii) 0 (iv) 0 (v) $\frac{17}{13}$ (vi) $\sqrt{2}$ (vii) $\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ (viii) $\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$

(ix) $\frac{4}{3}$ (x) $\frac{1}{2}$ (xi) $\frac{3}{2}$ (xii) 1 (xiii) $\frac{4}{\sqrt{3}}, \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ অথবা, $\sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ (xiv) $\frac{13}{12}$

4. (i) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **5.** (i) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ (ii) $25x^2 - y^2 = 9$

6. (i) $\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}, \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}$ **9.** **(A)** (i) c (ii) a (iii) c (iv) d (v) c

(B) (i) সত্য (ii) মিথ্যা **(C)** (i) 4 (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{1}{2}$

10. (i) $4, 30^\circ$ (ii) 0 (iii) 12 (iv) 1 (v) 45°

অধ্যায় - 24

নিজে করি : প্রয়োগ : 2. 1 13. $\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}$

কষে দেখি-24 [Page : 316]

1. (i) 1 (ii) 1 (iii) 1 12.(A) (i) b (ii) c (iii) c (iv) b (v) a (B) (i) সত্য (ii) মিথ্যা (C) (i) $\sqrt{3}$ (ii) 1 (iii) cos B 13. (i) 1 (ii) 9° (iii) 3 (iv) 1 (v) 9°

অধ্যায় - 25

নিজে করি : প্রয়োগ : 2. $20\sqrt{3}$ মিটার 5. 30° 10. 40 মিটার

কষে দেখি-25 [Page : 325]

1. $20\sqrt{3}$ মিটার 2. $3\sqrt{3}$ মিটার 3. $75\sqrt{3}$ মিটার 4. 21 মিটার 5. 8 মিটার, 24 মিটার 6. (i) $4\sqrt{3}$ মিটার (ii) $2\sqrt{3}$ মিটার (iii) $2(3+\sqrt{3})$ মিটার (iv) 6 মিটার 7. 20.784 মিটার 8. 7.098 মিটার 9. $19\sqrt{3}$ মিটার 10. 450 মিটার, $150\sqrt{3}$ মিটার 11. 64 মিটার, $16\sqrt{3}$ মিটার 12. $125\sqrt{3}$ মিটার, $125\sqrt{2}$ মিটার, প্রথম ক্ষেত্রে 13. 2180 মিটার 14. 17.19 মিটার (প্রায়) 15. 30° 16. 81.96 মিটার (প্রায়) 17. $25\sqrt{3}$ মিটার 18. 42 ডেসিমিটার, $42\sqrt{3}$ ডেসিমিটার 19. 6 কিমি./ঘণ্টা 20. 11.83 মিটার/সেকেন্ড (প্রায়) 21. $200(\sqrt{3}+1)$মিটার 22. 60মিটার, $15\sqrt{3}$ মিটার 23. (i) $250\sqrt{3}$ মিটার (ii) $500\sqrt{3}$ মিটার 24.(A) (i) b (ii) a (iii) c (iv) c (v) a (B) (i) মিথ্যা (ii) সত্য (C) (i) হ্রাস (ii) সমান (iii) বেশি 25. (i) 30 মিটার (ii) 60° (iii) 45° (iv) 15° (v) 30°

অধ্যায় - 26

নিজে করি : প্রয়োগ : 9. 18 12. 36.4

কষে দেখি-26.1 [Page : 340]

1. 17.43 বছর (প্রায়) 2. 4.24 3. 20 4. 8 5. 54.72 6. 43.4 বছর 7. (i) 25 (ii) 40.3 8. (i) 100.89 (প্রায়) (ii) 51.5 9. (i) 75.75 (ii) 36.24 (প্রায়) 10. 20 11. 41.1 বছর 12. 35.67 (প্রায়) 13. 31.67 (প্রায়) 14. 11.69 (প্রায়)

নিজে করি : প্রয়োগ : 16. (i) 10 (ii) 12.5 19. 4 21. 29.17 (প্রায়) 24. x=8, y=7

কষে দেখি-26.2 [Page : 349]

1. 107 টাকা 2. 9.5 বছর 3. 54.5 4. 8 5. 47 কিগ্রা 6. 22 মিমি. 7. 2 8. 53.33 টাকা (প্রায়) 9. 153.41 সেমি. (প্রায়) 10. 35.67 (প্রায়) 11. 19.67 (প্রায়) 12. 18.36 (প্রায়) 13. 83 14. 40 15. x=9, y=16

নিজে করি : প্রয়োগ : 28. 70.59 (প্রায়)

কষে দেখি-26.3 [Page : 358]

2. 46.69 (প্রায়) 4. 138.57 (প্রায়)

নিজে করি : প্রয়োগ : 30. (ii) 9 (iii) 102, 104 (iv) 5 33. 14.4

কষে দেখি-26.4 [Page : 364]

1. 15 টাকা, 17 টাকা 2. 131 সেমি. 3. (i) 4 (ii) 10, 15 4. 4,6 5. 18.90 বছর (প্রায়) 6. 21.76 (প্রায়) 7. 17.38 (প্রায়) 8. 78.44 (প্রায়) 9. (A) (i) d (ii) b (iii) d (iv) a (v) b (B) (i) মিথ্যা (ii) মিথ্যা (C)(i)কেন্দ্রীয় (ii) $a.\overline{x}$ (iii) সমান 10.(i)20 (ii)82 (iii)6 (iv)27 (v) 30–40

গণিতের পরিভাষান্তর (Terminology of Mathematics)

অর্ধবৃত্ত	-	Semicircle
অধমর্ণ বা দেনাদার	-	Debtor
অধিবৃত্তাংশ	-	Major Segment
অধিচাপ	-	Major Arc
অনুপাত	-	Ratio
অন্তর্বৃত্ত	-	Incircle
অর্ধগোলক	-	Hemisphere
অংশীদারি কারবার	-	Partnership Business
অবিন্যস্ত তথ্য	-	Ungrouped Data
অবনতি কোণ	-	Angle of Depression
আয়তঘন	-	Rectangular Parallelopiped or cuboid
আয়তন	-	Volume
আকার	-	Size
আকৃতি	-	Shape
আয়তলেখ	-	Histogram
আসল	-	Capital/Principal
উত্তমর্ণ বা পাওনাদার	-	Creditor
উচ্চতা	-	Height
উত্তরপদ	-	Consequent
উপচাপ	-	Minor Arc
উন্নতি কোণ	-	Angle of Elevation
উপবৃত্তাংশ	-	Minor Segment
উপপাদ্য	-	Theorem
এককেন্দ্রীয় বৃত্ত	-	Concentric Circles
একান্তর প্রক্রিয়া	-	Alternendo
কর্ণ	-	Diagonal
কল্পিত গড়	-	Assumed Mean
ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা	-	Cumulative Frequency
ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা রেখা	-	Cumulative frequency curve or ogive
ক্রম-বিচ্যুতি পদ্ধতি	-	Step-deviation method
কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ	-	Measures of Central tendency
গুরুঅনুপাত	-	Ratio of Greater Inequality

গড়	-	Mean
গোলক	-	Sphere
ঘনক	-	Cube
চক্রবৃদ্ধি সুদ	-	Compound Interest
চাপ	-	Arc
ছোটোবৃত্তকলা	-	Minor Sector
তল	-	Surface
তির্যক উচ্চতা	-	Slant Height
ত্রিকোণমিতি	-	Trigonometry
দ্বিঘাত সমীকরণ	-	Quadratic Equation
দ্বিঘাত করণী	-	Quadratic Surd
দৈর্ঘ্য	-	Length
দৃষ্টিরেখা	-	Line of Sight
নমুনা	-	Sample
নিরূপক	-	Discriminant
পরিধি	-	Circumference
প্রস্থ	-	Breadth
প্রান্তিকী	-	Edge
পূর্বপদ	-	Antecedent
পরিসংখ্যা	-	Frequency
পরিসংখ্যা বহুভুজ	-	Frequency Polygon
পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা	-	Frequency Distribution - Table
পূরক কোণ	-	Complementry Angle
পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল	-	Area of the Lateral Surface
বহুপদী সংখ্যামালা	-	Polynominal
বক্রতলের ক্ষেত্রফল	-	Area of the Curved Surface
বীজ	-	Root
বৃত্ত	-	Circle
বৃত্তাকার ক্ষেত্র	-	Circular Region
বৃত্তচাপ	-	Arc
বৃত্তাংশ	-	Segment

বৃত্তকলা	- Sector
বড়ো বৃত্তকলা	- Major sector
বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ	- Cyclic Quadrilateral
ব্যাস	- Diameter
ব্যাসার্ধ	- Radius
বিপরীত অনুপাত	- Inverse Ratio
বৈষম্যানুপাত	- Ratio of inequality
বিপরীত বা ব্যস্তপ্রক্রিয়া	- Invertendo
ব্যস্তভেদ	- Inverse variation
বৃত্তের ছেদক	- Secant
বৃত্তীয় পদ্ধতি	- Circular system
বিন্যস্ত তথ্য	- Grouped data
বহুভূয়িষ্ঠক	- Multimodal
ভূমি	- Base
ভূমির ক্ষেত্রফল	- Area of the Base
ভাগ প্রক্রিয়া	- Dividendo
ভেদ	- Variation
ভেদ ধ্রুবক	- Variation constant
ভারযুক্ত গড়	- Weighted mean
মাত্রা	- Dimension
মূলধন	- Capital/Principal
মধ্যসমানুপাতী	- Mean Proportional
মধ্যমা	- Median
যৌগিক অনুপাত বা মিশ্র অনুপাত	- Compound ratio or Mixed ratio
যোগ প্রক্রিয়া	- Componendo
যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া	- Componendo and Dividendo
যৌগিক ভেদ	- Joint variation
যৌগিক গড়	- Arithmetic mean
রাশিবিজ্ঞান	- Statistics
লঘু অনুপাত	- Ratio of Less Inequality
লম্ববৃত্তাকার চোঙ	- Right circular cylinder
লম্ববৃত্তাকার শঙ্কু	- Right circular cone
লভ্যাংশ বণ্টন	- Distribution of profit
শীর্ষবিন্দু	- Vertex
শঙ্কুর শীর্ষবিন্দু	- Apex
শ্রেণি সীমা	- Class limit
শ্রেণি সীমানা	- Class boundary
শ্রেণিমধ্যক	- Mid value of the class
ষষ্টিক পদ্ধতি	- Sexagesimal system
সমাধান	- Solution
সরল সুদ	- Simple interest
সর্বসম বৃত্ত	- Equal circles
সমবৃত্তস্থ	- Concyclic
সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়াম	- Isosceles Trapezium
সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল	- Whole surface area
সমানুপাত	- Proportion
সমহার বৃদ্ধি	- Uniform rate of growth
সমহার হ্রাস বা অপচয়	- Uniform rate of decrease or depreciation
সংযোজন প্রক্রিয়া	- Addendo
সংখ্যাগুরুমান বা ভূয়িষ্ঠক	- Mode
সংখ্যাগুরুমানের শ্রেণি	- Modal class
সম্পাদ্য	- Construction
স্পর্শক	- Tangent
স্পর্শবিন্দু	- Point of contact
সদৃশ	- Similar
সদৃশতা	- Similarity
সদৃশকোণী	- Equiangular
সাম্যানুপাত	- Ratio of Equality
সাংখ্যমান	- Numerical value
সবৃদ্ধিমূল	- Amount
সুদ	- Interest
সুদের হার	- Rate of Interest

শিখন পরামর্শ

- জাতীয় পাঠক্রম রূপরেখা (NCF) - 2005-এর পরামর্শ এই যে শিক্ষার্থী যেন তার বিদ্যালয় জীবন ও বিদ্যালয়ের বাইরের জীবনের সঙ্গে সর্বদা সংযোগ ঘটাতে পারে। এই নথি নির্দেশ করে যে শিক্ষার্থীর শিক্ষা যেন কেবলমাত্র বই থেকে না হয়। শুধুমাত্র বই থেকে শিক্ষা হলে শিক্ষার্থীর শিক্ষায় বিদ্যালয়, বাড়ি এবং সমাজ থেকে শিক্ষার ভেতর একটি ফাঁকের সৃষ্টি হয়। জাতীয় পাঠক্রম রূপরেখার এই মূল দৃষ্টিভঙ্গির উপর ভিত্তি করেই বর্তমান পাঠক্রম, পাঠ্যসূচি ও পাঠ্যবই তৈরি করা হয়। এই নথি আরও পরামর্শ দেয় যে শিক্ষার্থীর শিক্ষা যেন বিষয়কেন্দ্রিক না হয়। বিভিন্ন বিষয়ের মধ্যে যতটা সম্ভব সে যেন সম্পর্ক খুঁজে পায়।
- আশা করা যায়, শিক্ষিকা/শিক্ষকরা যখন এই পাঠ্যবইটি ব্যবহার করবেন যতটা সম্ভব এই নীতি ও নীচের পরামর্শ অনুধাবন করবেন।
- বর্তমানে শিক্ষা শিক্ষার্থীকেন্দ্রিক। শিক্ষিকা/শিক্ষক সহায়ক মাত্র। অর্থাৎ শিক্ষার্থী যে জন্মের পর থেকেই বাড়ি, পরিবেশ, সমাজ থেকে অনেক কিছুই শিখে ফেলে সেটা শিক্ষিকা/শিক্ষকরা খেয়াল রাখবেন। কোনো বিষয় জানানোর আগে সেই বিষয়ে শিক্ষার্থীর পূর্বে অর্জিত জ্ঞানের দিকে খেয়াল রেখে সহায়তা করবেন। শিক্ষার্থীর চিন্তা বা যুক্তি কোনোভাবে যাতে আটকে না যায়, সে যেন মুক্ত চিন্তায় যেতে পারে সেদিকে সর্বদা খেয়াল রাখবেন।
- পাঠ্যবই শিক্ষার্থীর শিক্ষার একটি সহায়ক মাত্র। একমাত্র সহায়ক নয়। শিক্ষার্থীর শিক্ষা যাতে আনন্দদায়ক হয়ে ওঠে তার জন্য বিভিন্ন শিখন সম্ভারের সাহায্য নেওয়া প্রয়োজন এবং প্রয়োজনে শিক্ষার্থীর চাহিদামতো বিভিন্ন সমস্যা শিক্ষিকা/শিক্ষকরা শ্রেণিকক্ষে তৈরি করে দেবেন যাতে শিক্ষার্থীর শ্রেণি অনুযায়ী কোনো অধ্যায়ের জ্ঞান অসম্পূর্ণ না থাকে।
- গণিত শিক্ষায়, শিক্ষার্থীর যেন মূর্ত বস্তুর ধারণা থেকে বিমূর্তের ধারণা জন্মায়। তা না হলে শিক্ষার্থীর কাছে গণিত বিষয় একটি ভয়ের কারণ হয়ে ওঠে।
- শিক্ষিকা/শিক্ষকরা যেন যে অধ্যায়ে সম্ভব শিক্ষার্থীর পরিচিত পরিবেশ থেকে কিছু বাস্তব সমস্যা তৈরি করে গণিতের কোনো অধ্যায় শুরু করেন। তারপর সম্ভব হলে সক্রিয়তাভিত্তিক কাজের (Activity) মাধ্যমে সেই অধ্যায় সম্পর্কে শিক্ষার্থীর মনে যুক্তিপূর্ণ ধারণার জন্ম দেন। শিক্ষার্থীর চিন্তা ও যুক্তির স্বচ্ছতা আসার পরেই যেন সে বিমূর্ত বিষয় নিয়ে কাজ করে।
- শিক্ষিকা/শিক্ষকরা যেন লক্ষ রাখেন শিক্ষার্থী পাঠ্যবইটি থেকে নিজে নিজেই কতদূর পর্যন্ত কোনো একটি অধ্যায় শিখতে পারে। যখন সে ওই অধ্যায়ের কোনো একটি অংশ শিখতে বাধাপ্রাপ্ত হয় তখনই তাঁরা যেন ধীরে ধীরে সহায়তা করেন, যাতে সে সমস্যাটি সমাধানের পথ নিজেই খুঁজে পায়।
- শিক্ষিকা/শিক্ষকরা কোনো অধ্যায় সম্পর্কে প্রথমে শিক্ষার্থীর কাছে এমনভাবে গল্প বলবেন যাতে শিক্ষার্থী প্রথমে কিছু বুঝতে না পারে যে তাকে কিছু শেখানো হচ্ছে।
- দলগত শিক্ষণ শিক্ষার্থীর পক্ষে শিখনে যথেষ্ট সহায়ক হয়। শিক্ষিকা/শিক্ষক শ্রেণিকক্ষে সেদিকটি খেয়াল রাখবেন।
- বর্তমান শিক্ষায় শিক্ষার্থীকে পাঠদান বা কিছু তথ্য জানানো নয়, শিক্ষার্থী যাতে জ্ঞান গঠন করতে পারে সেদিকে শিক্ষিকা/শিক্ষকরা লক্ষ রাখবেন। শিক্ষার্থী জ্ঞান গঠন করতে পারলেই সে ধীরে ধীরে অনেক বিষয়ের মধ্যে গণিত খুঁজতে চাইবে এবং গণিত বিষয়টি তার কাছে আনন্দদায়ক হয়ে উঠবে।
- শিক্ষার্থী যাতে মনে মনে তাড়াতাড়ি কোনো অঙ্ক করতে পারে (মানসাঙ্ক) সেদিকে শিক্ষিকা/শিক্ষকরা যেন যথেষ্ট খেয়াল রাখেন। গণিতের প্রতিটি অধ্যায় থেকেই শিক্ষার্থী যদি মানসাঙ্ক করতে শেখে তাহলে শিক্ষার্থীর চিন্তা, যুক্তি ও গণনা করার ক্ষমতা তাড়াতাড়ি তৈরি হয়।
- শিক্ষার্থী গণিতের কোনো অধ্যায় শেখার সময় শিক্ষিকা/শিক্ষকরা ওই অধ্যায়ের উপর এমনভাবে যদি একটি তালিকা তৈরি করেন যাতে ওই অধ্যায় থেকে শিক্ষার্থীর শিখনের যতগুলি সম্ভাবনা থাকে সবগুলিই সে শেখে। যেমন, একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের ক্ষেত্রে —

  1) দ্বিঘাত সংখ্যামালার ধারণা।
  2) দ্বিঘাত সমীকরণের ধারণা।
  3) দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$ - এর ধারণা।

4) $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণে $a \neq 0$ লেখা হয় কেন তার ধারণা।
5) $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণে $a = 0$ হলে সমীকরণটি কি ধরনের সমীকরণ হবে তার ধারণা।
6) উৎপাদক বিশ্লেষণ পদ্ধতিতে দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধানের ধারণা।
7) দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান সর্বদা কটি হবে তার ধারণা।
8) দ্বিঘাত সমীকরণে বীজের ধারণা।
9) শ্রীধর আচার্যের সূত্রের ধারণা।
10) নিরূপকের মান শূন্য বা শূন্যের বড়ো হলে বীজদ্বয়ের প্রকৃতি সম্বন্ধে ধারণা।
11) দুটি বীজ জানা থাকলে দ্বিঘাত সমীকরণ গঠনের ধারণা।

- যে-কোনো অধ্যায়ের কিছু Open ended প্রশ্ন থাকা প্রয়োজন।

a) একটি দ্বিঘাত সমীকরণের দুটি বীজ স্বাভাবিক সংখ্যা ধরে সমীকরণটি গঠন করো।
b) মূলধনের অনুপাত $3:2:5$ হলে মোট লাভের একটি মান লেখো।
c) একটি আয়তঘনের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার পরিমাপ অমূলদ সংখ্যা লিখে আয়তন নির্ণয় কর যেটি মূলদ সংখ্যা।
d) তিনটি সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্য লেখো যাদের দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র ত্রিভুজের বাহুর উপর অবস্থিত।

- এরকম সম্ভাবনা শিক্ষিকা/শিক্ষকরা নিজেরা আরও তৈরি করলে তাঁদের পক্ষে শিক্ষার্থীর আরহিত জ্ঞান মৌলিক কিনা বুঝতে সুবিধা হবে।
- গণিতের কোনো প্রক্রিয়া শিক্ষার্থী যেন না বুঝে মুখস্থ করে না নেয়। প্রত্যেকটি প্রক্রিয়া যেন সে যুক্তি দিয়ে বুঝতে পারে কেন হয়। শিক্ষিকা/শিক্ষকরা সেদিকে যেন যথেষ্ট খেয়াল রাখেন।
- শ্রেণিকক্ষে শিক্ষিকা/শিক্ষকের দেওয়া কোনো সমস্যা কোনো শিক্ষার্থী তাড়াতাড়ি সমাধান করে যেন চুপ করে বসে না থাকে। যে শিক্ষার্থী তাড়াতাড়ি অধ্যায়টি বুঝে এগিয়ে যাচ্ছে শিক্ষিকা/শিক্ষকরা তাকে আরও কঠিন থেকে কঠিনতর যুক্তি নির্ভর সমস্যা দিয়ে এগিয়ে দেবেন। আর যে ধীরে ধীরে এগোচ্ছে তাকে ধীরে ধীরে যুক্তির বিকাশ ঘটিয়ে ওই অধ্যায়ের যে সামর্থ্য কাম্য সেটায় পৌঁছোতে সাহায্য করবেন।

1. সর্বভারতীয় বোর্ড এবং কাউন্সিলের পাঠক্রম ও পাঠ্যসূচির মধ্যে সামঞ্জস্য রাখার জন্য দশম শ্রেণিরও পাঠক্রম ও পাঠ্যসূচিতে পরিবর্তন করা হয়েছে।
2. একাদশ শ্রেণির গণিতের পাঠ্যসূচির সাঙ্গে সামঞ্জস্য রাখার জন্য দশম শ্রেণির গণিতে কিছু নতুন অধ্যায় সংযুক্ত করা হয়েছে।
3. দশম শ্রেণির ‘গণিত প্রকাশ’ বইয়ে পাটিগণিত, বীজগণিত, জ্যামিতি, পরিমিতি, ত্রিকোণমিতি এবং রাশিবিজ্ঞান অধ্যায়গুলি আলাদাভাবে নেই। কারণ, পাটিগণিতের একটি অধ্যায়ের সঙ্গে বীজগণিতের একটি অধ্যায় বা জ্যামিতির একটি অধ্যায়ের সঙ্গে পরিমিতির একটি অধ্যায় পরস্পরযুক্ত। যেমন চক্রবৃদ্ধি সুদের সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান জানা প্রয়োজন। ত্রিকোণমিতির ক্ষেত্রে জ্যামিতিক চিত্রের সদৃশতা জানা প্রয়োজন।

   অর্থাৎ শিক্ষার্থীরা যেন কোনো সূত্র মুখস্থ বিদ্যার (Rote Learning) উপর নির্ভর না করে কেন হয় জেনে প্রয়োগ করতে পারে। তাই গণিতের বিভিন্ন শাখার অধ্যায়গুলি পাঠ্যপুস্তকে সেভাবে সাজানো হয়েছে।
4. পাঠ্যপুস্তকে প্রতিটি অধ্যায়ের প্রথমে না দিয়ে শেষে অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন এবং সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন দেওয়া আছে। কারণ শিক্ষার্থীদের যাতে বড়ো সমস্যা সমাধান করতে গিয়ে অধ্যায়টি সম্বন্ধে ধারণা সম্পূর্ণ হয় এবং তারপর ওই ধরনের সমস্যা যাতে তারা খুব তাড়াতাড়ি করতে পারে।
5. শ্রেণিকক্ষের ও বাস্তবের সমস্যা বুঝে শিক্ষিকা/শিক্ষকরা নিজেরাই শিক্ষার্থীর যুক্তিপূর্ণ আনন্দদায়ক শিক্ষার জন্য পাঠ্যবইটিকে কেমন করে আরও ভালোভাবে ব্যবহার করা যাবে সেটিরও পরামর্শ জানাবেন যাতে ভবিষ্যতে পাঠ্যবইটি নিখুঁত ও সর্বাঙ্গীণ সুন্দর হয়।

পাঠ পরিকল্পনা

মাস	অধ্যায়
January	1 একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ (Quadratic Equations with one variable) 2 সরল সুদকষা (Simple Interest) 3 বৃত্ত সম্পর্কিত উপপাদ্য (Theorems related to circle)
February	4 আয়তঘন (Rectangular Parallelopiped or Cuboid) 5 অনুপাত ও সমানুপাত (Ratio and Proportion) 6 চক্রবৃদ্ধি সুদ ও সমহার বৃদ্ধি বা হ্রাস (Compound Interest and Uniform Rate of Increase or Decrease)
March	7 বৃত্তস্থ কোণ সম্পর্কিত উপপাদ্য (Theorems related to Angles in a Circle) 8 লম্ব বৃত্তাকার চোঙ (Right Circular Cylinder) 9 দ্বিঘাত করণী (Quadratic Surd) 10 বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ সংক্রান্ত উপপাদ্য (Theorems related to Cyclic Quadrilateral)
April	11 সম্পাদ্য : ত্রিভুজের পরিবৃত্ত ও অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন (Construction : Construction of circumcircle and incircle of a triangle) 12 গোলক (Sphere) 13 ভেদ (Variation) 14 অংশীদারি কারবার (Partnership Business) 15 বৃত্তের স্পর্শক সংক্রান্ত উপপাদ্য (Theorems related to Tangent to a Circle)
May & June	16 লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু (Right Circular Cone) 17 সম্পাদ্য : বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন (Construction : Construction of Tangent to a circle) 18 সদৃশতা (Similarity)
July	19 বিভিন্ন ঘনবস্তু সংক্রান্ত বাস্তব সমস্যা (Real life Problems related to different Solid Objects) 20 ত্রিকোণমিতি : কোণ পরিমাপের ধারণা (Trigonometry : Concept of measurement of angle) 21 সম্পাদ্য : মধ্যসমানুপাতী নির্ণয় (Construction : Determination of Mean Proportional) 22 পিথাগোরাসের উপপাদ্য (Pythagoras Theorem)
August	23 ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ও ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলি (Trigonometric Ratios and Trigonometric Identities) 24 পূরক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (Trigonometric Ratios of Complementrary angle)
September & October	25 ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের প্রয়োগ : উচ্চতা ও দূরত্ব (Application of Trigonometric Ratios : Heights & Distances) 26 রাশিবিজ্ঞান : গড়, মধ্যমা, ওজাইভ, সংখ্যাগুরুমান (Statistics : Mean , Median , Ogive , Mode)

প্রথম পর্যায়ক্রমিক মূল্যায়ন

নমুনা প্রশ্নপত্র

সময়: 1 ঘণ্টা 30 মিনিট **পূর্ণমান : 40**

1. **সঠিক উত্তর নির্বাচন করো:** **1×6=6**

(i) বার্ষিক একই সুদের হারে চক্রবৃদ্ধি সুদ ও সরল সুদ সমান হয়

(a) 1 বছরে (b) 2 বছরে (c) 3 বছরে (d) 4 বছরে

(ii) 5 বছরে আসল ও সরল সুদের অনুপাত 10:3 হলে, বর্ষিক শতকরা সরল সুদের হার

(a) 3 (b) 30 (c) 6 (d) 12

(iii) নীচের কোনটি দ্বিঘাত সমীকরণ নয়

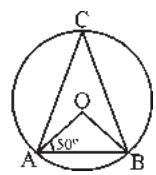
(a) $2x-3x^2 = 3x^2+5$ (b) $(2x+3)^2 = 2(x^2-5)$

(c) $(\sqrt{3}x+2)^2 = 3x^2-7$ (d) $(x-2)^2 = 5x^2+2x-3$

(iv) যদি $4x^2+6kx+9=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হয়, তবে k-এর মান

(a) 2 অথবা 0 (b) –2 অথবা 0 (c) 2 অথবা –2 (d) কেবলমাত্র 0

(v) পাশের চিত্রে O কেন্দ্রীয় বৃত্তের $\angle OAB=50^\circ$ এবং C বৃত্তের উপরে কোনো একটি বিন্দু হলে, $\angle ACB$-এর মান



(a) 50° (b) 40° (c) 80° (d) 100°

(vi) O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB ও CD দুটি সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা। $\angle AOB=70^\circ$ হলে, $\angle COD$-এর মান

(a) 110° (b) 70° (c) 35° (d) 80°

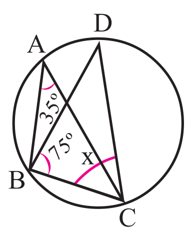
2. **নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও:** **2×5=10**

(i) বার্ষিক 10% সরলসুদে কত বছরে সুদ আসলের $\frac{3}{5}$ অংশ হবে?

(ii) $p:q = 5:7$ এবং $p-q = -4$ হলে, $(3p-2q)$-এর মান কত?

(iii) O কেন্দ্রীয় বৃত্তের দুটি সমান্তরাল জ্যা কেন্দ্রের বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত। যদি AB=10 সেমি., CD=24 সেমি. এবং AB ও CD জ্যা দুটির দূরত্ব 17 সেমি. হয়, তবে ওই বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় করো।

(iv) পাশের চিত্রে x-এর মান নির্ণয় করো।



(v) একটি ঘনকের আয়তন 512 ঘন সেমি. হলে, ওই ঘনকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

3. বার্ষিক 10% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে কত বছরে 1,00,000 টাকার সমূল চক্রবৃদ্ধি 1,33,100 টাকা হবে?

অথবা

একটি গাছের উচ্চতা প্রতি বছর 20% হারে বৃদ্ধি পায়। গাছটির বর্তমান উচ্চতা 28.8 মিটার হলে, 2 বছর আগে গাছটির উচ্চতা কত ছিল নির্ণয় করো। **5**

4. **সমাধান করো : [যে-কোনো একটি]** **3×1=3**

(i) $(2x+1)+\frac{3}{2x+1}=4, \ (x\neq -\frac{1}{2})$

(ii) $\frac{1}{(x-2)(x-4)}+\frac{1}{(x-4)(x-6)}+\frac{1}{(x-6)(x-8)}+\frac{1}{3}=0, \ (x\neq 2, 4, 6, 8)$

5. সুলতা একটি সমকোণী ত্রিভুজ এঁকেছে যার অতিভুজের দৈর্ঘ্য 13 সেমি. এবং অপর দুটি বাহুর দৈর্ঘ্যের অন্তর 7 সেমি.। সুলতার আঁকা সমকোণী ত্রিভুজের অপর দুটি বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো। **4**

অথবা

যদি দুই অঙ্কের একটি ধনাত্মক সংখ্যাকে উহার এককের ঘরের অঙ্ক দিয়ে গুণ করলে গুণফল 189 হয় এবং দশকের ঘরের অঙ্ক এককের ঘরের অঙ্কের দ্বিগুণ হয়, তবে এককের ঘরের অঙ্কটি নির্ণয় করো।

6. a, b, c ও d ক্রমিক সমানুপাতী হলে, প্রমাণ কর যে, $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$

অথবা

$a=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$ এবং $ab=1$ হলে, $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$ -এর মান নির্ণয় করো। **3**

7. প্রমাণ করো যে, কোনো বৃত্তের একই বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত সন্মুখ কেন্দ্রস্থ কোণ ওই চাপের দ্বারা গঠিত যে-কোনো বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ।

অথবা

প্রমাণ করো যে, ব্যাস নয় এরূপ কোনো জ্যা-কে যদি বৃত্তের কেন্দ্রগামী কোনো সরলরেখা সমদ্বিখণ্ডিত করে, তাহলে ওই সরলরেখা জ্যা-এর উপর লম্ব হবে। **5**

8. 21 ডেসিমি. দীর্ঘ, 11 ডেসিমি. প্রশস্ত এবং 6 ডেসিমি. গভীর একটি চৌবাচ্চা অর্ধেক জলপূর্ণ আছে। এখন ওই চৌবাচ্চায় যদি 21 সেমি. ব্যাস এবং 20 সেমি. উচ্চতার 100টি লোহার নিরেট চোঙ সম্পূর্ণ ডুবিয়ে দেওয়া হয়, তবে জলতল কত ডেসিমি. উঠে আসবে?

অথবা

একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা এবং ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত 3 : 1; চোঙটির আয়তন 1029π ঘন সেমি. হলে, চোঙটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল কত? **4**

মিলিয়ে দেখি

1. (i) a (ii) c (iii) c (iv) c (v) b (vi) b **2.** (i) 6 বছর (ii) 2 (iii) 13 সেমি. (iv) 70° (v) 384 বর্গ সেমি. **3.** 3 বছর অথবা, 20 মিটার **4.** (i) x=0 এবং x=1 (ii) x=5 এবং x=5 **5.** 12 সেমি. ও 5 সেমি. অথবা, 3 **6.** অথবা, 7 **8.** 3 ডেসিমি. অথবা, 1232 বর্গ সেমি.

দ্বিতীয় পর্যায়ক্রমিক মূল্যায়ন

নমুনা প্রশ্নপত্র

সময় :1 ঘণ্টা 30 মিনিট **পূর্ণমান : 40**

1. সঠিক উত্তর নির্বাচন করো: **1×7=7**

(i) $5x^2 - 2x + 1 = 0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি

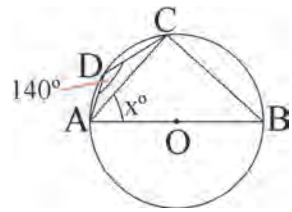
(a) 2 (b) 1 (c) $\frac{1}{5}$ (d) $\frac{2}{5}$

(ii) সমীর 4000 টাকা 3 মাসের জন্য এবং অমিতা 3000 টাকা 5 মাসের জন্য একটি ব্যবসায়ে নিয়োজিত করল। লভ্যাংশ সমীর ও অমিতার মধ্যে যে অনুপাতে বণ্টিত হবে তা হলো,

(a) 4 : 3 (b) 3 : 4 (c) 4 : 5 (d) 5 : 4

(iii) $x \propto \frac{1}{y}$ এবং $y = \frac{2}{5}$ যখন $x = 5$; $x = \frac{1}{6}$ হলে, y-এর মান

(a) $\frac{1}{3}$ (b) 6 (c) 12 (d) 18



(iv) পাশের চিত্রে O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB ব্যাস। $\angle ADC = 140^\circ$ এবং $\angle CAB = x^\circ$ হলে, x-এর মান

(a) 80 (b) 40 (c) 50 (d) 30

(v) যদি দিনের কোনো এক সময়ে একটি স্তম্ভ ও একটি 20 মিটার লম্বা উল্লম্ব লাঠির ছায়ার দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 50 মিটার ও 10 মিটার হয়, তবে ওই স্তম্ভের উচ্চতা

(a) 120মি. (b) 250মি. (c) 25মি. (d) 100মি.

(vi) একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা 15 সেমি. এবং ভূমিতলের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 16 সেমি. হলে, শঙ্কুর পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল

(a) 120π বর্গ সেমি. (b) 240π বর্গ সেমি. (c) 136π বর্গ সেমি. (d) 130π বর্গ সেমি.

(vii) একটি নিরেট অর্ধগোলকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 147π বর্গ সেমি. হলে, ওই অর্ধগোলকের ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য

(a) 14 সেমি. (b) 7 সেমি. (c) 21 সেমি. (d) 7.5 সেমি.

2. নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও: **2×4=8**

(i) $A \propto \frac{1}{C}$ এবং $C \propto \frac{1}{B}$ হলে, A এবং B-এর মধ্যে ভেদ সম্পর্ক নির্ণয় করো।

(ii) শূন্যস্থান পূরণ করো :

(a) একটি সরলরেখা একটি বৃত্তকে দুটি ভিন্ন বিন্দুতে ছেদ করলে সরলরেখাটিকে বৃত্তের ________ বলে।

(b) দুটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 4 সেমি. ও 5 সেমি.। বৃত্তদুটি পরস্পর বহিঃস্পর্শ করলে, তাদের কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব ________ সেমি.।

(iii) একটি গোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল S এবং আয়তন V হলে, $\frac{S^3}{V^2}$ -এর মান π-এর সাপেক্ষে কত তা লেখো।

(iv)একটি শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল তার ভূমির ক্ষেত্রফলের $\sqrt{5}$ গুণ। শঙ্কুটির উচ্চতা ও ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত নির্ণয় করো।

3. শোভা, মামুদ ও রাবেয়া যথাক্রমে 3000 টাকা, 3500 টাকা ও 2500 টাকা মূলধন নিয়ে একটি ব্যবসা আরম্ভ করল। তারা ঠিক করল যে মোট লাভের $\frac{1}{3}$ অংশ তারা নিজেদের মধ্যে সমান ভাগে ভাগ করে নেবে এবং লাভের অবশিষ্ট অংশ তারা মূলধনের অনুপাতে ভাগ করবে। যদি বছরের শেষে 810 টাকা লাভ হয়, তাহলে প্রত্যেকের লাভের পরিমাণ কত হবে? **5**

অথবা

শাকিল ও মহুয়া যথাক্রমে 30,000 টাকা ও 50,000 টাকা মূলধন দিয়ে যৌথভাবে একটি ব্যবসা আরম্ভ করল। 6 মাস পরে শাকিল আরও 40,000 টাকা ব্যবসায় লগ্নি করল, কিন্তু মহুয়া ব্যক্তিগত প্রয়োজনে 10,000 টাকা তুলে নিল। বছরের শেষে যদি 19,000 টাকা লাভ হয়ে থাকে, তাহলে কে, কত টাকা লাভ পাবে?

4. $a \propto b$ এবং $b \propto c$ হলে, দেখাও যে, $a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 \propto abc\,(a^3+b^3+c^3)$ **3**

অথবা

সমাধান করো : $\frac{x-2}{x+2} + 6\left(\frac{x-2}{x-6}\right) = 1, \ (x \neq -2, 6)$

5. প্রমাণ করো যে, যদি দুটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে তাহলে স্পর্শবিন্দুটি তাদের কেন্দ্র দুটির সংযোজক সরলরেখাংশের উপর অবস্থিত হবে। **5**

অথবা

প্রমাণ করো যে, একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌণিক বিন্দু থেকে অতিভুজের ওপর লম্ব অঙ্কন করলে যে দুটি ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় তাদের প্রত্যেকটি মূল ত্রিভুজের সঙ্গে সদৃশ এবং তারা নিজেরাও পরস্পর সদৃশ।

6. ΔABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle BAC = 1$ সমকোণ। অতিভুজ BC-এর উপর AD লম্ব। প্রমাণ করো যে, $\frac{\Delta ABC}{\Delta ACD} = \frac{BC^2}{AC^2}$ **3**

7. একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করো যার একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 6.8 সেমি. এবং ওই বাহু সংলগ্ন কোণ দুটির মান 60° ও 75°; ওই ত্রিভুজটির পরিবৃত্ত অঙ্কন করো। [শুধুমাত্র অঙ্কন চিহ্ন দিতে হবে] **5**

অথবা

2.5 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্ত অঙ্কন করো। বৃত্তের বাইরে P এমন একটি বিন্দু যার O বিন্দু থেকে দূরত্ব 5 সেমি.; P বিন্দু থেকে ওই বৃত্তের দুটি স্পর্শক অঙ্কন করো। [শুধুমাত্র অঙ্কন চিহ্ন দিতে হবে]

8. 3 সেমি., 4 সেমি. ও 5 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের তিনটি তামার নিরেট গোলক গলিয়ে একটি বড়ো নিরেট গোলক তৈরি করা হলো। বড়ো গোলকটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য কত হবে? **4**

অথবা

ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 12 মিটার এবং উচ্চতা 5 মিটার বিশিষ্ট একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির তাঁবু তৈরি করতে প্রতি বর্গ মিটার 3.50 টাকা হিসাবে মোট কত খরচ হবে তা নির্ণয় করো?

মিলিয়ে দেখি

1. (i) d (ii) c (iii) c (iv) c (v) d (vi) c (vii) b **2.** (i) $A \propto B$ (ii) a. ছেদক b. 9 সেমি. (iii) 36π (iv) 2:1 **3.** 270 টাকা, 300 টাকা ও 240 টাকা অথবা, শাকিল পাবে 10,000 টাকা ও মহুয়া পাবে 9,000 টাকা **4.** অথবা, $x=0$ এবং $x=\frac{2}{3}$ **8.** 6 সেমি. অথবা, 1716 টাকা

তৃতীয় পর্যায়ক্রমিক মূল্যায়ন

নমুনা প্রশ্নপত্র

সময় : 3 ঘণ্টা পূর্ণমান : 90

1.A. নীচের প্রশ্নগুলির সঠিক উত্তর নির্বাচন করো (সবগুলি প্রশ্নের উত্তর দাও) $1\times6=6$

(i) বার্ষিক a% সরল সুদের হারে b টাকার c মাসের সুদ

(a) $\frac{abc}{1200}$ টাকা (b) $\frac{abc}{100}$ টাকা (c) $\frac{abc}{200}$ টাকা (d) $\frac{abc}{120}$ টাকা

(ii) $kx^2 - 5x + k = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় সমান ও বাস্তব হবে যদি k-এর মান হয়

(a) ± 5 (b) $\pm\frac{5}{2}$ (c) $\pm\frac{2}{5}$ (d) ± 2

(iii) $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 30^\circ$ হলে, $\sin(\alpha - \beta)$-এর মান

(a) 1 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(iv) O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তের বহিঃস্থ P বিন্দু থেকে বৃত্তের স্পর্শক PA অঙ্কন করা হলো। PA = 4 সেমি. এবং OP = 5 সেমি. হলে, বৃত্তটির ব্যাসের দৈর্ঘ্য হবে

(a) 5 সেমি. (b) 4 সেমি. (c) 6 সেমি. (d) 8 সেমি.

(v) দুটি ঘনকের আয়তনের অনুপাত 8 : 125 হলে, ঘনক দুটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত

(a) 2 : 5 (b) 4 : 25 (c) 4 : 5 (d) 2 : 25

(vi) 8, 15, 10, 11, 7, 9, 11, 13, 16 -এর মধ্যমা

(a) 15 (b) 10 (c) 11.5 (d) 11

B. নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির শূন্যস্থান পূরণ কর (যেকোনো পাঁচটি) $1\times5=5$

(i) p টাকার 6 মাস অন্তর দেয় বার্ষিক 2r% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে n বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি $p(1+\frac{r}{\_\_})^{2n}$ টাকা।

(ii) a-এর 50% = b-এর 20% = c-এর 25% হলে a : b : c = 2 : 5 : ________

(iii) $\alpha=90^\circ$ এবং $\beta=30^\circ$ হলে, $\text{Sin}\ (\alpha - \beta)$ এর মান ________

(iv) একটি সরলরেখা একটি বৃত্তকে দুটি বিন্দুতে ছেদ করলে সরলরেখাটিকে ________ বলা হয়।

(v) একটি নিরেট অর্ধগোলকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r একক হলে, তার সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল ________ বর্গএকক।

(vi) যে তথ্যের সংখ্যাগুরুমান 2 টি তাকে ________ ভূয়িষ্টক তথ্য বলা হয়।

C. নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির সত্য না মিথ্যা লেখো (যেকোনো পাঁচটি) $1\times5=5$

(i) একটি অংশীদারি ব্যবসায় আনোয়ার, অমল ও ডেভিডের নিয়োজিত মুলধনের অনুপাত 3:2:5 হলে, তাদের মধ্যে লভ্যাংশ বন্টিত হবে যথাক্রমে 5:2:3 অনুপাতে।

(ii) A, B-এর সাথে সরলভেদে আছে। B, C-এর সাথে সরলভেদে আছে। সুতরাং, A, C-এর সাথে সরলভেদে আছে।

(iii) $\alpha + \beta = 90^\circ$ হলে, $Sin^2\alpha + Sin^2\beta = 1$

(iv) ABC ও DEF ত্রিভুজ দুটির $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle F$ এবং $\angle C = \angle E$ হলে, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$

(v) দুটি নিরেট গোলকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত 2 : 3 হলো, তাদের সমগ্রস্থলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত 4 : 9

(vi) ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা লেখচিত্র থেকে কোনো তথ্যের মধ্যমা নির্ণয় করা যায়।

2. নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও: (যেকোনো দশটি) $2\times10=20$

(i) বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে কিছু টাকার 2 বছরে চক্রবৃদ্ধি সুদ 615 টাকা হলে, আসল নির্ণয় করো।

(ii) একটি জিনিসের মূল্য প্রতিবছর 10% হারে হ্রাসপ্রাপ্ত হয়। জিনিসটির বর্তমানমূল্য 182 টাকা হলে। 2 বছর পূর্বে জিনিসটির দাম কত ছিল তা নির্ণয় করো।

(iii) x ও y দুটি চলরাশি। তাদের সম্পর্কিত মানগুলি হলো :

$x = 6, y = 9; x = 4, y = 6; x = 12, y = 18; x = 3.6, y = 5.4;$ x ও y -এর মধ্যে কীরূপ ভেদ সম্পর্ক আছে তা যুক্তিসহ নির্ণয় করো।

(iv) $x^2 + 8x + 2 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের দুটি বীজ α ও β হলে, $\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)$ -এর মান নির্ণয় করো।

(v) একই দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের একটি চোঙ ও একটি গোলকের ঘনফল সমান হলে, চোঙের ব্যাসের দৈর্ঘ্য ও উচ্চতার অনুপাত নির্ণয় করো।

(vi) একটি নিরেট অর্ধগোলকের আয়তন 144π ঘনসেমি হলে, এর ব্যাসের দৈর্ঘ্য কত?

(vii) 17 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের একটি জ্যা-এর কেন্দ্র থেকে দূরত্ব 8 সেমি.। জ্যাটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

(viii) একটি বৃত্তের কেন্দ্র O এবং AOC ব্যাস। B বৃত্তের উপর যেকোনো একটি বিন্দু এবং $\angle ACB = 50^\circ$; AT বৃত্তের A বিন্দু স্পর্শক যেখানে B ও T বিন্দু AC ব্যাসের একই পার্শ্বে অবস্থিত। $\angle BAT$-এর মান নির্ণয় কর।

(ix) ABC ত্রিভুজে BC বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। AD : DB = 5 : 4 হলে, AE : AC কত?

(x) $\tan\theta . \tan2\theta = 1$ হলে, $\cos2\theta$ -এর মান কত?

(xi) একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 14 সেমি.। ওই বৃত্তে 66 সেমি. দৈর্ঘ্যের বৃত্তচাপ দ্বারা ধৃত কেন্দ্রীয় কোণটির বৃত্তীয় মান কত?

(xii)

x_i	3	5	8	9	11	13
f_i	6	8	5	p	8	4

উপরের তথ্যের যৌগিক গড় 8 হলে, p-এর মান নির্ণয় করো।

3. বার্ষিক কত হার সুদে 2 বছরে 60,000 টাকার সমূল চক্রবৃদ্ধি 69,984 টাকা হবে? **5**

অথবা

বছরের প্রথমে অরুণ ও অজয় যথাক্রমে 24,000 টাকা ও 30,000 টাকা দিয়ে যৌথভাবে ব্যবসা শুরু করে। কিন্তু কয়েক মাস পরে অরুণ আরও 12,000 টাকা ওই ব্যবসায়ে মূলধন দেয়। বছরের শেষে ওই ব্যবসায়ে 14,030 টাকা লাভ হলো এবং অরুণ 7,130 টাকা লভ্যাংশ পেল। অরুণ কত মাস পরে ব্যবসায়ে টাকা দিয়েছিল তা নির্ণয় করো।

4. সমাধান করো : $\frac{1}{a+b+x} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}$, $[x\neq 0, -(a+b)]$ **3**

অথবা

স্থির জলে একটি নৌকার গতিবেগ 8 কিমি./ঘণ্টা। নৌকাটি 5 ঘণ্টায় স্রোতের অনুকূলে 15 কিমি. এবং স্রোতের প্রতিকূলে 22 কিমি. গেলে, স্রোতের বেগ কত ছিল নির্ণয় করো।

5. সরল করো : $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} - \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ **3**

অথবা

যদি 5 জন কৃষক 12 দিনে 10 বিঘা জমির পাট কাটতে পারেন, তবে কতজন কৃষক 18 বিঘা জমির পাট 9 দিনে কাটতে পারবেন তা ভেদতত্ত্ব প্রয়োগ করে নির্ণয় করো।

6. যদি, $\frac{ay-bx}{c} = \frac{cx-az}{b} = \frac{bz-cy}{a}$ হয়, তবে প্রমাণ করো যে, $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ **3**

অথবা

a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী হলে, দেখাও যে, $a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)= a^3+b^3+c^3$

7. পিথাগোরাসের উপপাদ্যটি বিবৃত করো ও প্রমাণ করো। **1+4**

অথবা

প্রমাণ করো যে, বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সম্পূরক। **5**

8. ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম যার AB || DC; AB-এর সমান্তরাল একটি সরলরেখা AD ও BC-কে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, AE : ED = BF : FC **3**

অথবা

যদি ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের AB = DC হয়, তবে প্রমাণ করো যে, AC = BD

9. জ্যামিতিক উপায়ে $\sqrt{22}$-এর মান নির্ণয় করো। [শুধুমাত্র অঙ্কন চিহ্ন দিতে হবে] **5**

অথবা

একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করো যার ভূমির দৈর্ঘ্য 6.5 সেমি. এবং ওই বাহু সংলগ্ন কোণ দুটির পরিমাপ 50° ও 75°; ওই ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন করো। [শুধুমাত্র অঙ্কন চিহ্ন দিতে হবে]

10. **যে-কোনো 2টি প্রশ্নের উত্তর দাও:** **3×2=6**

(i) x-এর মান নির্ণয় করো :

$$(x+1)\cot^2\frac{\pi}{6} = 2\cos^2\frac{\pi}{3} + \frac{3}{4}\sec^2\frac{\pi}{4} + 4\sin^2\frac{\pi}{6}$$

(ii) দেখাও যে, $\operatorname{cosec}^2 22^\circ \cot^2 68^\circ = \sin^2 22^\circ + \sin^2 68^\circ + \cot^2 68^\circ$

(iii) যদি $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ হয়, তাহলে দেখাও যে, $x\sin\theta = y\cos\theta$

11. **যে-কোনো 2টি প্রশ্নের উত্তর দাও:** **$4\times2=8$**

(i) একটি অর্ধগোলক ও একটি শঙ্কুর ভূমি সমান ও উচ্চতাও সমান হলে, তাদের আয়তনের অনুপাত ও বক্রতলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত কত?

(ii) 4.2 ডেসিমি. দৈর্ঘ্যের ধারবিশিষ্ট একটি নিরেট কাঠের ঘনক থেকে সবচেয়ে কম কাঠ নষ্ট করে যে নিরেট লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু পাওয়া যাবে, তার আয়তন নির্ণয় করো।

(iii) একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা উহার ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণ। যদি উচ্চতা 6 গুণ হতো, তবে চোঙটির আয়তন 539 ঘন ডেসিমি. বেশি হতো। চোঙটির উচ্চতা নির্ণয় করো।

12. মিহিরদের পাঁচতলা বাড়ির ছাদের কোনো বিন্দু থেকে দেখলে মনুমেন্টের চূড়ার উন্নতি কোণ ও গোড়ার অবনতি কোণ যথাক্রমে 60° ও 30° হয়; বাড়িটির উচ্চতা যদি 16 মিটার হয়, তবে মনুমেন্টের উচ্চতা কত? **5**

অথবা

সূর্যের উন্নতি কোণ যখন 45° থেকে 60°-তে পরিবর্তিত হয়, তখন একটি টেলিগ্রাফ স্তম্ভের ছায়ার দৈর্ঘ্য 4 মিটার পরিবর্তিত হয়। উন্নতি কোণ যখন 30° হয়, তখন ওই টেলিগ্রাফ স্তম্ভের ছায়ার দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

13. **যে-কোনো 2টি প্রশ্নের উত্তর দাও:** **$4\times2=8$**

(i) শাকিলবাবু তার 50টি বাক্সে বিভিন্ন সংখ্যায় আম ভরে পাইকারি বাজারে নিয়ে যাবেন। কতগুলি বাক্সে কতগুলি আম রাখলেন তার তথ্য নীচের ছকে দেওয়া হলো।

আমের সংখ্যা	50 - 52	52 - 54	54 - 56	56 - 58	58 - 60
বাক্সের সংখ্যা	5	14	16	10	5

ওই 50টি বাক্সে গড় আমের সংখ্যা নির্ণয় করো।

(ii) নীচের তথ্য থেকে ছাত্রদের উচ্চতার মধ্যমা নির্ণয় করো:

উচ্চতা (সেমি.)	135-140	140-145	145-150	150-155	155-160	160-165
ছাত্রদের সংখ্যা	7	12	20	24	20	17

(iii) নীচের পরিসংখ্যা বিভাজনের সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় করো:

শ্রেণি	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
পরিসংখ্যা	5	12	18	28	17	12	8

মিলিয়ে দেখি

1. (i) a (ii) c (iii) d (iv) b (v) a (vi) c (vii) c (viii) a (ix) d (x) c (xi) c (xii) b (xiii) b (xiv) c (xv) d **2.** (i) 6000 টাকা (ii) $x \propto y$ (iii) -4 (iv) 3:2 (v) 12 সেমি. (vi) a. মিথ্যা b. সত্য (vii) a. সূক্ষ্মকোণ b. কেন্দ্রগামী (viii) $\frac{1}{2}$ (ix) $\frac{3\pi}{2}$ (x) 10 **3.** 8% অথবা, 5 মাস পরে **4.** $x=-a$ এবং $x=-b$ অথবা, $1\frac{3}{5}$ কিমি./ঘণ্টা **5.** 0 অথবা, 12 জন **10.** (i) 0 **11.** (i) $2:1$, $\sqrt{2}:1$
(ii) 19404 ঘন সেমি. (iii) 7 ডেসিমি. **12.** 64 মিটার অথবা, $6(\sqrt{3}+1)$ মিটার
13. (i) 54.84 (ii) 152.29 সেমি. (প্রায়) (iii) 17.38 (প্রায়)