6 চক্রবৃদ্ধি সুদ ও সমহার বৃদ্ধি বা হ্রাস
COMPOUND INTEREST AND UNIFORM RATE OF INCREASE OR DECREASE

আমাদের পাড়ার বাপ্পাদা সাইকেল কেনার জন্য পাড়ার সমবায় ব্যাংক থেকে বার্ষিক 8% সুদে 1200 টাকা 2 বছরের জন্য ধার করেছেন।

1 হিসাব করে দেখি 2 বছর পরে বাপ্পাদাকে মোট কত টাকা ফেরত দিতে হবে?

2 বছরের সুদ = $\frac{1200 \times 8 \times 2}{100}$ টাকা = ☐ টাকা

$\therefore$ 2 বছর পরে বাপ্পাদাকে মোট (1200 + 192) টাকা = 1392 টাকা ফেরত দিতে হবে।

কিন্তু 2 বছর পরে বাপ্পাদাকে মোট 1399.68 টাকা ফেরত দিতে হলো।

2 এমন হলো কেন? অর্থাৎ 2 বছরে সুদ-আসলে কীভাবে মোট টাকার পরিমাণ 1392 টাকার চেয়ে বেশি হলো হিসাব করে দেখি।

ওই সমবায় ব্যাংক বাপ্পাদাদাকে 1200 টাকা 2 বছরের জন্য বার্ষিক 8% চক্রবৃদ্ধি সুদে (Compound interest) ধার দিয়েছিলেন।

3 চক্রবৃদ্ধি সুদ কী?

বাস্তবে সুদ দুই ধরনের হয়ে থাকে — (i) সরল সুদ (ii) চক্রবৃদ্ধি সুদ।

সরল সুদ : কেবল আসল বা মূলধনের উপর সুদ ধার্য হলে তাকে সরল সুদ বলা হয়। [Simple Interest]

চক্রবৃদ্ধি সুদ : কোনো নির্দিষ্ট সময় শেষে অর্জিত সুদ মূলধন বা আসলের সঙ্গে যুক্ত করে ওই সুদ-আসল বা সবৃদ্ধিমূলকে পরবর্তী নির্দিষ্ট সময়ের জন্য নতুন আসল বা মূলধন হিসাবে গণ্য করে পুনরায় যখন সুদ হিসাব করা হয় তখন সেই সুদকে চক্রবৃদ্ধি সুদ (Compound Interest) বলা হয়।

4 চক্রবৃদ্ধি সুদ কত সময়ের শেষে প্রাপ্য হবে কীভাবে জানব?

যে সময়ের শেষে চক্রবৃদ্ধি সুদ প্রাপ্য হবে তাকে চক্রবৃদ্ধি সুদের পর্ব (Interest Period of Compound interest) বলে। চক্রবৃদ্ধি সুদের পর্ব সাধারণত 3 মাস, 6 মাস, 1 বছর হয়ে থাকে। চক্রবৃদ্ধি সুদের ক্ষেত্রে কোনো পর্বের উল্লেখ না থাকলে চক্রবৃদ্ধি সুদ বছরের শেষে দেয় বলে ধরা হয়ে থাকে অর্থাৎ সাধারণত সুদের পর্ব 1 বছর ধরা হয়।

5 সমূল চক্রবৃদ্ধি কী?

আসল বা মূলধন এবং কোনো নির্দিষ্ট সময়ের চক্রবৃদ্ধি সুদের সমষ্টিকে সমূল চক্রবৃদ্ধি বলা হয়।

বাপ্পাদার, প্রথম বছরের আসল = 1200 টাকা

প্রথম বছরের সুদ = $(1200 \times \frac{8}{100})$ টাকা = 96 টাকা

দ্বিতীয় বছরের আসল = (1200 + 96) টাকা = 1296 টাকা

$\therefore$ দ্বিতীয় বছরের সুদ = $(1296 \times \frac{8}{100})$ টাকা = 103.68 টাকা

$\therefore$ দ্বিতীয় বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি = (1296 + 103.68) টাকা = 1399.68 টাকা

$\therefore$ চক্রবৃদ্ধি সুদের ক্ষেত্রে আসল বা মূলধন সবসময় এক থাকে না এবং প্রত্যেক সুদ পর্বের শেষে আসল বা মূলধন পরিবর্তিত হয়।

প্রয়োগ : 1. আমি যদি বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি সুদে 1400 টাকা 2বছরের জন্য ধার নিই, তবে কত টাকা চক্রবৃদ্ধি সুদ ও সমূল চক্রবৃদ্ধি দেবো হিসাব করে লিখি।

ধরি, প্রথম বছরের আসল = 100.00 টাকা

প্রথম বছরের 5% সুদ = 5.00 টাকা

দ্বিতীয় বছরের আসল = 105.00 টাকা

দ্বিতীয় বছরের 5% সুদ = 5.25 টাকা $[105 \times \frac{5}{100}$ টাকা]

---

2 বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি = 110.25 টাকা

$\therefore$ 2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ = (110.25 – 100.00) টাকা অথবা (5.00 + 5.25) টাকা = 10.25 টাকা

এখন গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

আসল (টাকায়)	চক্রবৃদ্ধি সুদ (টাকায়)
100	10.25
1400	?

100 টাকা আসল হলে চক্রবৃদ্ধি সুদ 10.25 টাকা

1 টাকা আসল হলে চক্রবৃদ্ধি সুদ $\frac{10.25}{100}$ টাকা

1400 টাকা আসল হলে চক্রবৃদ্ধি সুদ $\frac{10.25 \times 1400}{100} = \square$ টাকা

($\because$ আসল ও চক্রবৃদ্ধি সুদের মধ্যে $\square$ সম্পর্ক [সরল/ব্যস্ত] আছে)

$\therefore$ নির্ণেয় চক্রবৃদ্ধি সুদ 143.50 টাকা এবং সমূল চক্রবৃদ্ধি (1400 + 143.50) টাকা $= \square$ টাকা

বিকল্প পদ্ধতি, প্রথম বছরের আসল = 1400.00 টাকা

প্রথম বছরের সুদ = 70.00 টাকা $[\because 1400 \times \frac{5}{100}$ টাকা]

দ্বিতীয় বছরের মূলধন = 1470.00 টাকা

দ্বিতীয় বছরের সুদ = 73.50 টাকা $[\because 1470 \times \frac{5}{100}$ টাকা]

---

2 বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি = 1543.50 টাকা

$\therefore$ 2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ = (1543.50 – 1400.00) টাকা
অথবা (70.00 + 73.50) টাকা = 143.50 টাকা

আমি অন্যভাবে হিসাব করে কী পাই দেখি

মনে করি আসল = p টাকা, বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার = r%

$\therefore$ প্রথম বছরের শেষে সুদ $= \frac{p \times r \times 1}{100}$ টাকা

প্রথম বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি $= p + \frac{pr}{100} = p\left(1 + \frac{r}{100}\right)$ টাকা

দ্বিতীয় বছরের মূলধন $= p\left(1 + \frac{r}{100}\right)$ টাকা

$\therefore$ দ্বিতীয় বছরের শেষে সুদ = $\left\{\dfrac{p\left(1+\dfrac{r}{100}\right)\times r\times 1}{100}\right\}$ টাকা

দ্বিতীয় বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি = $\left\{p\left(1+\dfrac{r}{100}\right)+\dfrac{p\left(1+\dfrac{r}{100}\right)\times r\times 1}{100}\right\}$ টাকা

$= p\left(1+\dfrac{r}{100}\right)\left\{1+\dfrac{r}{100}\right\}$ টাকা

$= p\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^2$ টাকা

$\therefore$ পেলাম 2 বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি = $p\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^2$ টাকা ------------------- (I)

$\therefore$ 2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ = $\left\{p\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^2-p\right\}$ টাকা

$= p\left\{1^2+\left(2\times1\times\dfrac{r}{100}\right)+\left(\dfrac{r}{100}\right)^2-1^2\right\}$ টাকা

$= p\,\dfrac{r}{100}\left(2+\dfrac{r}{100}\right)$ টাকা

$\therefore$ p = 1400 টাকা, r = 5 হলে,

(I) থেকে পাই, 2 বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি = $1400\left(1+\dfrac{5}{100}\right)^2$ টাকা

$= 1400\times\dfrac{105}{100}\times\dfrac{105}{100}$ টাকা = ☐ টাকা

2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ = (1543.50 – 1400.00) টাকা = 143.50 টাকা

প্রয়োগ :2. মূলধন p এবং বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার r% হলে 3 বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি কত হবে হিসাব করি।

(I) থেকে পেলাম, তৃতীয় বছরের মূলধন = $p\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^2$

$\therefore$ 3 বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি = $p\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^2+p\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^2\times\dfrac{r}{100}$

$= p\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^2\left(1+\dfrac{r}{100}\right)$

$= p\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^3$

$\therefore$ 3 বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি = $p\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^3$ ------------------- (II)

$\therefore$ n বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি = $p\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^n$
যেখানে, p = মূলধন, r = শতকরা বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার এবং n = সময় (বছরে)

প্রয়োগ :3. বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে 1000 টাকার 2 বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি কত হবে তা হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ :4. বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে 4000 টাকা একটি ব্যাংকে থাকলে, 3 বছর পর চক্রবৃদ্ধি সুদ কত পাব হিসাব করে লিখি।

ধরি প্রথম বছরের মূলধন = 4000.00 টাকা

প্রথম বছরের 5% সুদ = 200.00 টাকা ($\because 4000 \times \frac{5}{100}$ টাকা)

দ্বিতীয় বছরের আসল = 4200.00 টাকা

দ্বিতীয় বছরের 5% সুদ = 210.00 টাকা ($\because 4200 \times \frac{5}{100}$ টাকা)

তৃতীয় বছরের আসল = 4410.00 টাকা

তৃতীয় বছরের 5% সুদ = 220.50 টাকা ($4410 \times \frac{5}{100}$ টাকা)

---

3 বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি = 4630.50 টাকা

$\therefore$ 3 বছর পর চক্রবৃদ্ধি সুদ পাব = 4630.50 টাকা – 4000 টাকা
= 630.50 টাকা

আমি অন্যভাবে হিসাব করি।

ধরি, $p = 4000$ টাকা, $r = 5$ এবং $n = 3$ বছর,

(II) থেকে পেলাম, 3 বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি $= p\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$ টাকা

$= 4000\left(1+\frac{5}{100}\right)^3$ টাকা

$= 4000 \times \frac{105}{100} \times \frac{105}{100} \times \frac{105}{100}$ টাকা

= ☐ টাকা

3 বছর পরে চক্রবৃদ্ধি সুদ পাব = (4630.50 – 4000) টাকা = ☐ টাকা

প্রয়োগ : 5. বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে 10,000 টাকার 3 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ নির্ণয় করি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 6. যদি 6 মাস অন্তর সুদ আসলের সঙ্গে যুক্ত হয় তাহলে বার্ষিক 10% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 8000 টাকার $1\frac{1}{2}$ বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি ও চক্রবৃদ্ধি সুদ হিসাব করে লিখি।

প্রথম 6 মাসের আসল = 8000 টাকা

প্রথম 6 মাস বা $\frac{1}{2}$ বছরের 10% সুদ = 400 টাকা ($\because 8000 \times \frac{10}{100} \times \frac{1}{2}$ টাকা)

দ্বিতীয় 6 মাসে আসল = 8400 টাকা

দ্বিতীয় 6 মাসে 10% সুদ = 420 টাকা ($\because 8400 \times \frac{10}{100} \times \frac{1}{2}$ টাকা)

তৃতীয় 6 মাসে আসল = 8820 টাকা

তৃতীয় 6 মাসে 10% সুদ = 441 টাকা ($\because 8820 \times \frac{10}{100} \times \frac{1}{2}$ টাকা)

$\therefore 1\frac{1}{2}$ বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি = 9261 টাকা

$\therefore 1\frac{1}{2}$ বছরে চক্রবৃদ্ধি সুদ = (9261 টাকা – 8000 টাকা) = 1261 টাকা

অন্যভাবে হিসাব করি ও কী পাই দেখি।

ধরি, মূলধন = p টাকা, বার্ষিক সুদের হার = r%

$\therefore$ প্রথম 6 মাস বা $\frac{1}{2}$ বছরের শেষে সুদ = $\frac{p\times r\times \frac{1}{2}}{100}$ টাকা

$\therefore$ প্রথম 6 মাসে সমূল চক্রবৃদ্ধি = $\left(p+\frac{p\times\frac{r}{2}}{100}\right)$ টাকা = $p\left(1+\frac{\frac{r}{2}}{100}\right)$ টাকা

$\therefore$ দ্বিতীয় 6 মাসে মূলধন = $p\left(1+\frac{\frac{r}{2}}{100}\right)$ টাকা

দ্বিতীয় 6 মাসের শেষে সুদ = $\frac{p\left(1+\frac{\frac{r}{2}}{100}\right)\times r\times\frac{1}{2}}{100}$ টাকা

$\therefore$ দ্বিতীয় 6 মাস বা 1 বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি = $p\left(1+\frac{\frac{r}{2}}{100}\right)^{2}$ টাকা = $p\left(1+\frac{\frac{r}{2}}{100}\right)^{2\times1}$

একইভাবে, তৃতীয় 6 মাসে বা $1\frac{1}{2}$ বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি = $p\left(1+\frac{\frac{r}{2}}{100}\right)^{3}$ টাকা = $p\left(1+\frac{\frac{r}{2}}{100}\right)^{2\times\frac{3}{2}}$ টাকা

বুঝেছি, বার্ষিক r% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে অর্জিত সুদ ষাণ্মাসিক বা বছরে চক্রবৃদ্ধি সুদের পর্ব 2 হলে n বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি = $p\left(1+\frac{\frac{r}{2}}{100}\right)^{2n}$ ------------------ (III)

ধরি, p = 8000 টাকা r = 10, n = $1\frac{1}{2}$ বছর = $\frac{3}{2}$ বছর

$\therefore$ (III থেকে পেলাম), $1\frac{1}{2}$ বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি = $8000\left(1+\frac{\frac{10}{2}}{100}\right)^{\frac{3}{2}\times2}$ টাকা = $8000\left(1+\frac{5}{100}\right)^{3}$ টাকা

$= 8000\times\frac{105}{100}\times\frac{105}{100}\times\frac{105}{100}$ = ☐ টাকা

$\therefore$ $1\frac{1}{2}$ বছরের নির্ণেয় চক্রবৃদ্ধি সুদ = ☐ টাকা **[নিজে করি]**

প্রয়োগ :7. 6 মাস অন্তর দেয় বার্ষিক 10% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 1000 টাকার 1 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ নির্ণয় করি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ :8. 3 মাস অন্তর দেয় বার্ষিক 8% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 10000 টাকার 9 মাসের চক্রবৃদ্ধি সুদ হিসাব করে লিখি।

প্রথম 3 মাসে আসল = 10000.00 টাকা

প্রথম 3 মাস বা $\frac{1}{4}$ বছরের 8% সুদ = 200.00 টাকা [$\because 10000 \times \frac{8}{100} \times \frac{1}{4}$ টাকা]

দ্বিতীয় 3 মাসে আসল = 10200.00 টাকা

দ্বিতীয় 3 মাসের 8% সুদ = 204.00 টাকা [$\because 10200 \times \frac{8}{100} \times \frac{1}{4}$ টাকা]

তৃতীয় 3 মাসে আসল = 10404.00 টাকা

তৃতীয় 3 মাসের 8% সুদ = 208.08 টাকা [$\because 10404 \times \frac{8}{100} \times \frac{1}{4}$ টাকা]

$\therefore$ 9 মাসের সমূল চক্রবৃদ্ধি = 10612. 08 টাকা

$\therefore$ 9 মাসের চক্রবৃদ্ধি সুদ = 10612.08 টাকা – 10000.00 টাকা = 612.08 টাকা

আমি অন্যভাবে হিসাব করি।

ধরি, মূলধন = p টাকা, বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার = r%

প্রথম 3 মাসে বা $\frac{1}{4}$ বছরের শেষে সুদ = $\frac{p\times r\times \frac{1}{4}}{100}$ টাকা

প্রথম 3 মাসে সমূল চক্রবৃদ্ধি = $\left(p+\frac{p\times r\times \frac{1}{4}}{100}\right)$ টাকা = $p\left(1+\frac{\frac{r}{4}}{100}\right)$ টাকা = $p\left(1+\frac{\frac{r}{4}}{100}\right)^{4\times\frac{1}{4}}$ টাকা

($\because$ 3 মাস = $\frac{1}{4}$ বছর)

$\therefore$ দ্বিতীয় 3 মাসের মূলধন = $p\left(1+\frac{\frac{r}{4}}{100}\right)$ টাকা

$\therefore$ দ্বিতীয় 3 মাসে সমূল চক্রবৃদ্ধি = $p\left(1+\frac{\frac{r}{4}}{100}\right)+\frac{p\left(1+\frac{\frac{r}{4}}{100}\right)\times r\times\frac{1}{4}}{100}$ টাকা

$= p\left(1+\frac{\frac{r}{4}}{100}\right)^{2}$ টাকা = $p\left(1+\frac{\frac{r}{4}}{100}\right)^{4\times\frac{2}{4}}$ ($\because$ 6 মাস = $\frac{2}{4}$ বছর)

একইভাবে, তৃতীয় 3 মাসে সমূল চক্রবৃদ্ধি = $p\left(1+\frac{\frac{r}{4}}{100}\right)^{3}$ টাকা = $p\left(1+\frac{\frac{r}{4}}{100}\right)^{4\times\frac{3}{4}}$ টাকা ($\because$ 9 মাস = $\frac{3}{4}$ বছর)

বুঝেছি, বার্ষিক r% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে অর্জিত সুদ ত্রৈমাসিক অর্থাৎ বছরে চক্রবৃদ্ধি সুদের পর্ব 4 হলে n বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি = $p\left(1+\frac{\frac{r}{4}}{100}\right)^{4n}$ ——— (IV)

ধরি, p = 10000 টাকা, r = 8 এবং $n = \frac{9}{12}$ বছর $= \frac{3}{4}$ বছর

∴ (IV থেকে পেলাম), 9 মাসে বা $\frac{3}{4}$ বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি $= 10000\left(1+\frac{\frac{8}{4}}{100}\right)^{4\times\frac{3}{4}}$ টাকা

$= 10000\,(1 + \frac{2}{100})^3$ টাকা

$= 10000 \times \frac{102}{100} \times \frac{102}{100} \times \frac{102}{100}$ টাকা

= ☐ টাকা

∴ 9 মাসের চক্রবৃদ্ধি সুদ = (☐ – ☐) টাকা = ☐ টাকা **[নিজে লিখি]**

বি: দ্র: — এখানে উল্লেখযোগ্য যে, চক্রবৃদ্ধি সুদ সংক্রান্ত বর্তমান পাঠ্যসূচির আলোচনা সর্বসাকুল্যে কেবলমাত্র চক্রবৃদ্ধি সুদের 3টি পর্বের মধ্যে এবং মোট জমার 3 বছরের মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকবে।

প্রয়োগ :9. রোকেয়াবিবি 30000 টাকা 3 বছরের জন্য এমনভাবে ধার করলেন যে প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় বছরে বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার যথাক্রমে 4% , 5% ও 6%; 3 বছরের শেষে রোকেয়াবিবি সুদে-আসলে কত টাকা জমা দেবেন হিসাব করে লিখি।

ধরি প্রথম বছরের আসল = 100.00 টাকা

প্রথম বছরের 4% সুদ = 4.00 টাকা [∵ $100 \times \frac{4}{100}$ টাকা]

দ্বিতীয় বছরের আসল = 104.00 টাকা

দ্বিতীয় বছরের 5% সুদ = 5.20 টাকা [∵ $104 \times \frac{5}{100}$ টাকা]

তৃতীয় বছরের আসল = 109.20 টাকা

তৃতীয় বছরের 6% সুদ = 6.552 টাকা [∵ $109.20 \times \frac{6}{100}$ টাকা]

∴ 3 বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি = 115.752 টাকা

∴ চক্রবৃদ্ধি সুদ = (115.752 – 100.00) টাকা অথবা (4.00 + 5.20 + 6.552) টাকা = 15.752 টাকা

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি,

আসল (টাকায়)	চক্রবৃদ্ধি সুদ (টাকায়)
100	15.752
30000	?

100 টাকা আসল হলে চক্রবৃদ্ধি সুদ 15.752 টাকা

1 টাকা আসল হলে চক্রবৃদ্ধি সুদ $\frac{15.752}{100}$ টাকা

30000 টাকা আসল হলে চক্রবৃদ্ধি সুদ $\frac{15.752 \times 30000}{100}$ টাকা = 4725.60 টাকা

∴ 3 বছরের শেষে রোকেয়াবিবিকে সুদে-আসলে দিতে হবে = (30000 + 4725.60) টাকা

= 34725.60 টাকা

আমি অন্যভাবে হিসাব করে কী পাই দেখি।

ধরি, আসল = p টাকা এবং প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় বছরের বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার যথাক্রমে $r_1\%$, $r_2\%$ এবং $r_3\%$

$\therefore$ প্রথম বছরের সুদ = $\frac{p \times r_1 \times 1}{100}$ টাকা = $\frac{pr_1}{100}$ টাকা

$\therefore$ প্রথম বছরের সুদাসল = $p + \frac{pr_1}{100} = p\left(1 + \frac{r_1}{100}\right)$ টাকা

$\therefore$ দ্বিতীয় বছরের আসল = $p\left(1 + \frac{r_1}{100}\right)$ টাকা

$\therefore$ দ্বিতীয় বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ = $\frac{p\left(1+\frac{r_1}{100}\right)\times r_2 \times 1}{100}$ টাকা

$\therefore$ দ্বিতীয় বছরের শেষে সমূল চক্রবৃদ্ধি = $\left[p\left(1+\frac{r_1}{100}\right)+\frac{p\left(1+\frac{r_1}{100}\right)\times r_2}{100}\right]$ টাকা

$= p\left(1 + \frac{r_1}{100}\right)\left(1 + \frac{r_2}{100}\right)$ টাকা

$\therefore$ একইভাবে পাই, 3 বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি = $p\left(1 + \frac{r_1}{100}\right)\left(1 + \frac{r_2}{100}\right)\left(1 + \frac{r_3}{100}\right)$ টাকা

ধরি, $p = 30000$, $r_1 = 4\%$, $r_2 = 5\%$ এবং $r_3 = 6\%$

$\therefore$ 3 বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি = $30000 \times \left(1+\frac{4}{100}\right)\left(1+\frac{5}{100}\right)\left(1+\frac{6}{100}\right)$ টাকা

$= 30000 \times \frac{104}{100} \times \frac{105}{100} \times \frac{106}{100}$ টাকা = ☐ টাকা

$\therefore$ 3 বছরের শেষে রোকেয়াবিবি সুদে-আসলে 34725.60 টাকা ফেরত দেবেন।

প্রয়োগ : 10. যদি বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার প্রথম বছর 4% এবং দ্বিতীয় বছর 5% হয়, তবে 25000 টাকার 2 বছরে চক্রবৃদ্ধি সুদ নির্ণয় করি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 11. আমি বার্ষিক 4% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে 10000 টাকা $2\frac{1}{2}$ বছরের জন্য ধার নিয়েছি। সুদে-আসলে কত টাকা দিতে হবে হিসাব করে লিখি।

প্রথম 2 বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি = $p\left(1 + \frac{r}{100}\right)^2$ [p = 10000 টাকা, r = 4]

$= 10000\left(1 + \frac{4}{100}\right)^2$ টাকা $= 10000 \times \frac{104}{100} \times \frac{104}{100}$ টাকা

= 10816 টাকা

2 বছরের শেষে মূলধন = 10816 টাকা

পরবর্তী $\frac{1}{2}$ বছরের সুদ = $\frac{10816 \times 4 \times \frac{1}{2}}{100}$ টাকা = 216.32 টাকা

$\therefore 2\frac{1}{2}$ বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি = (10816 + 216.32)টাকা = ☐ টাকা

আমি অন্যভাবে হিসাব করি।

$2\frac{1}{2}$ বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি $= 10000\,(1+\frac{4}{100})^2$ টাকা $+ 10000\,(1+\frac{4}{100})^2 \times \frac{6}{12} \times \frac{4}{100}$ টাকা

$= 10000\,(1+\frac{4}{100})^2\,(1+\frac{6}{12}\times\frac{4}{100})$টাকা

$= 10000 \times \frac{104\times104}{100\times100} \times \frac{102}{100}$ টাকা $= \frac{1103232}{100}$ টাকা $= 11032.32$ টাকা

প্রয়োগ : 12. বার্ষিক 6% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে 30000 টাকার $2\frac{1}{2}$ বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি কত হবে নির্ণয় করি।
[নিজে করি]

প্রয়োগ : 13. বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে কত টাকার 2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ 246 টাকা হবে হিসাব করে লিখি।

ধরি, প্রথম বছরের আসল	= 100.00 টাকা	
প্রথম বছরের 5% সুদ	= 5.00 টাকা	
দ্বিতীয় বছরের আসল	= 105.00 টাকা	
দ্বিতীয় বছরের 5% সুদ	= 5.25 টাকা	[$\because 105\times\frac{5}{100}$ টাকা]
$\therefore$ 2 বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি	= 110.25 টাকা	

$\therefore$ 2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ $= (110.25 - 100.00)$ টাকা $= 10.25$ টাকা

$\therefore$ গণিতের ভাষায় সম্পর্কটি হলো,

চক্রবৃদ্ধি সুদ (টাকা)	আসল (টাকা)
10.25	100
246	?

চক্রবৃদ্ধি সুদ 10.25 টাকা হলে আসল 100 টাকা

চক্রবৃদ্ধি সুদ 1 টাকা হলে আসল $\frac{100}{10.25}$ টাকা

চক্রবৃদ্ধি সুদ 246 টাকা হলে আসল $\frac{100\times246}{10.25}$ টাকা $= 2400$ টাকা

আমি অন্যভাবে হিসাব করি।

ধরি, আসল $= x$ টাকা

বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে 2 বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি $= x\,(1+\frac{5}{100})^2$ টাকা

$= x \times \frac{105}{100} \times \frac{105}{100}$ টাকা $= \frac{441x}{400}$ টাকা

$\therefore$ 2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ $= (\frac{441x}{400} - x)$ টাকা

শর্তানুসারে, $\frac{441x}{400} - x = 246$

বা, $\frac{441x-400x}{400} = 246$

বা, $\frac{41x}{400} = 246$

$\therefore x = \frac{246\times400}{41} = 2400$

$\therefore$ আসল 2400 টাকা।

প্রয়োগ : 14. কত টাকা বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 2 বছর পরে সুদে-আসলে 3528 টাকা হবে হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 15. বার্ষিক 4% হার সুদে কত টাকার 2 বছরের সরল সুদ ও চক্রবৃদ্ধি সুদের অন্তর 80 টাকা হবে হিসাব করে লিখি।

ধরি, আসল = 100 টাকা

$\therefore$ বার্ষিক 4% সরল সুদের হারে 100 টাকার 2 বছরের সুদ = $\frac{100 \times 2 \times 4}{100}$ টাকা = 8 টাকা

বার্ষিক 4% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 100 টাকার 2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ

$= \left\{100\left(1+\frac{4}{100}\right)^2 - 100\right\}$ টাকা

$= 100\left\{\left(\frac{26}{25}\right)^2 - 1\right\}$ টাকা $= 100\left(\frac{676}{625} - 1\right)$ টাকা $= \frac{100 \times 51}{625}$ টাকা $= \frac{204}{25}$ টাকা $= 8.16$ টাকা

$\therefore$ চক্রবৃদ্ধি সুদ ও সরল সুদের অন্তর = (8.16 – 8.00) টাকা = 0.16 টাকা।

$\therefore$ গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

সুদের অন্তর (টাকায়)	আসল (টাকায়)
0.16	100
80	?

চক্রবৃদ্ধি সুদ ও সরল সুদের অন্তর 0.16 টাকা হলে আসল 100 টাকা

চক্রবৃদ্ধি সুদ ও সরল সুদের অন্তর 1 টাকা হলে আসল $\frac{100}{0.16}$ টাকা

চক্রবৃদ্ধি সুদ ও সরল সুদের অন্তর 80 টাকা হলে আসল $\frac{100 \times 80}{0.16}$ টাকা = 50000 টাকা

$\therefore$ আসল 50000 টাকা

আমি অন্য পদ্ধতিতে হিসাব করি ও কী পাই দেখি।

ধরি, আসল = x টাকা

$\therefore$ 4% হারে 2 বছরের সরল সুদ = $\frac{x \times 4 \times 2}{100}$ টাকা = $\frac{2x}{25}$ টাকা

4% হারে 2 বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি = $x\left(1+\frac{4}{100}\right)^2$ টাকা

$= x \times \frac{104}{100} \times \frac{104}{100}$ টাকা $= \frac{676x}{625}$ টাকা

$\therefore$ 2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ = $\left(\frac{676x}{625} - x\right)$ টাকা = $\frac{51x}{625}$ টাকা

শর্তানুসারে, $\frac{51x}{625} - \frac{2x}{25} = 80$

বা, $\frac{51x - 50x}{625} = 80$

বা, $x = 80 \times 625$

$\therefore x = 50000$

$\therefore$ আসল 50000 টাকা

প্রয়োগ :16. মিনতিদি বার্ষিক 8% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে কিছু টাকা 3 বছরের জন্য ব্যাংকে রেখে মেয়াদ শেষে 37791.36 টাকা পেলেন। মিনতিদি কত টাকা ব্যাংকে রেখেছিলেন হিসাব করে লিখি।

মনে করি, মিনতিদিদি x টাকা ব্যাংকে জমা রেখেছিলেন।

বার্ষিক 8% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 3 বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি = $x\left(1+\frac{8}{100}\right)^3$ টাকা = $x \times \frac{108}{100} \times \frac{108}{100} \times \frac{108}{100}$ টাকা

∴ শর্তানুসারে, $x \times \frac{108}{100} \times \frac{108}{100} \times \frac{108}{100} = 37791.36$

বা, $\frac{x \times 27 \times 27 \times 27}{25 \times 25 \times 25} = 37791.36$

বা, $x = \frac{37791.36 \times 25 \times 25 \times 25}{27 \times 27 \times 27}$ ∴ $x = 30000$

∴ মিনতিদিদি 30000 টাকা ব্যাংকে রেখেছিলেন।

প্রয়োগ :17. আমি অন্যভাবে হিসাব করে দেখি মিনতিদি ব্যাংকে 30000 টাকা রেখেছিলেন। [নিজে করি]

প্রয়োগ :18. কোনো মূলধনের 2 বছরের সরল সুদ ও চক্রবৃদ্ধি সুদ যথাক্রমে 400 টাকা ও 410 টাকা হলে, ওই মূলধনের পরিমাণ ও শতকরা বার্ষিক সুদের হার নির্ণয় করি।

2 বছরের সরল সুদ = 400 টাকা

1 বছরের সরল সুদ = (400 ÷ 2) টাকা = 200 টাকা

2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ ও সরল সুদের পার্থক্য = (410 – 400) টাকা = 10 টাকা

∴ 200 টাকার 1 বছরের সুদ = 10 টাকা

100 টাকার 1 বছরের সুদ = (10 ÷ 2) টাকা = 5 টাকা

∴ বার্ষিক সুদের হার = 5%

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

আসল (টাকায়)	সময় (বছরে)	সুদ (টাকায়)
100	1	5
?	2	400

1 বছরে 5 টাকা সুদ হবে যখন আসল 100 টাকা

2 বছরে 5 টাকা সুদ হবে যখন আসল $\frac{100}{2}$ টাকা

2 বছরে 1 টাকা সুদ হবে যখন আসল $\frac{100}{2\times5}$ টাকা

2 বছরে 400 টাকা সুদ হবে যখন আসল $\frac{100\times400}{2\times5}$ টাকা = 4000 টাকা

∴ নির্ণেয় মূলধন 4000 টাকা এবং বার্ষিক সুদের হার 5%

আমি অন্যভাবে হিসাব করে কী পাই দেখি।

ধরি, মূলধন p টাকা এবং বার্ষিক সুদের হার r%

∴ বার্ষিক r% সরল সুদে 2 বছরের সুদ = $\frac{p \times r \times 2}{100}$ টাকা = $\frac{2pr}{100}$ টাকা

আবার বার্ষিক r% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 2 বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি = $p\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$ টাকা

∴ 2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ = $\left[p\left(1+\frac{r}{100}\right)^2 - p\right]$ টাকা = $p\left[1+\frac{2r}{100}+\left(\frac{r}{100}\right)^2-1\right]$ টাকা

= $\frac{pr}{100}\left[2+\frac{r}{100}\right]$ টাকা

শর্তানুসারে, $\frac{2pr}{100} = 400$ .... (i)

$\frac{pr}{100}[2 + \frac{r}{100}] = 410$ .... (ii)

(ii) নং সমীকরণরকে (i) নং সমীকরণ দিয়ে ভাগ করে পাই,

$$\frac{\frac{pr}{100}\left[2+\frac{r}{100}\right]}{\frac{2pr}{100}} = \frac{410}{400}$$

বা, $\frac{2+\frac{r}{100}}{2} = \frac{41}{40}$

বা, $80 + \frac{40r}{100} = 82$

বা, $\frac{2r}{5} = 82 - 80 = 2$

বা, $2r = 10$ $\therefore r = 5$

$\therefore$ (i) নং সমীকরণ থেকে পেলাম, $\frac{2 \times p \times 5}{100} = 400$ $\therefore p = 4000$

$\therefore$ মূলধন 4000 টাকা এবং সুদের হার 5%

প্রয়োগ :19. কোনো মূলধনের 2 বছরের সরল সুদ ও চক্রবৃদ্ধি সুদ যথাক্রমে 840 টাকা এবং 869.40 টাকা হলে, ওই মূলধনের পরিমাণ ও বার্ষিক সুদের হার হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ :20. বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার কত হলে 2 বছরে 10000 টাকার সমূল চক্রবৃদ্ধি 11664 টাকা হবে তা নির্ণয় করি।

ধরি, বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার r%

$\therefore$ বার্ষিক r% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে সমূল চক্রবৃদ্ধি $= 10000\,(1 + \frac{r}{100})^2$

শর্তানুসারে, $10000\,(1 + \frac{r}{100})^2 = 11664$

বা, $(1 + \frac{r}{100})^2 = \frac{11664}{10000}$

বা, $(1 + \frac{r}{100})^2 = \frac{729}{625}$

বা, $(1 + \frac{r}{100})^2 = (\frac{27}{25})^2$

বা, $1 + \frac{r}{100} = \frac{27}{25}$

বা, $\frac{r}{100} = \frac{27}{25} - 1$

বা, $\frac{r}{100} = \frac{2}{25}$

বা, $r = \frac{200}{25}$ $\therefore r = 8$

$\therefore$ বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার 8%

প্রয়োগ :21. বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার কত হলে 2 বছরে 5000 টাকার সমূল চক্রবৃদ্ধি 5832 টাকা হবে, তা হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ :22. বার্ষিক 10% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে কত বছরে 4000 টাকার সমূল চক্রবৃদ্ধি 5324 টাকা হবে, তা হিসাব করে লিখি।

ধরি, বার্ষিক 10% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে n বছরে 4000 টাকার সমূল চক্রবৃদ্ধি 5324 টাকা হবে।

$\therefore$ n বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি $= 4000\left(1+\frac{10}{100}\right)^n$ টাকা

শর্তানুসারে, $4000\left(1+\frac{10}{100}\right)^n = 5324$

বা, $\left(\frac{11}{10}\right)^n = \frac{5324}{4000}$

বা, $\left(\frac{11}{10}\right)^n = \frac{1331}{1000}$

বা, $\left(\frac{11}{10}\right)^n = \left(\frac{11}{10}\right)^3$

$\therefore n = 3$

$\therefore$ বার্ষিক 10% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে 3 বছরে 4000 টাকার সমূল চক্রবৃদ্ধি 5324 টাকা হবে।

প্রয়োগ :23. বার্ষিক 10% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে কত বছরে 5000 টাকার সমূল চক্রবৃদ্ধি 6050 টাকা হবে, তা হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

কষে দেখি 6.1

1. আমার কাছে 5000 টাকা আছে। আমি ওই টাকা একটি ব্যাংকে বার্ষিক 8.5% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে জমা রাখলাম। 2 বছরের শেষে সুদে-আসলে মোট কত টাকা পাব হিসাব করে লিখি।
2. 5000 টাকার বার্ষিক 8% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে 3 বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি কত হবে নির্ণয় করি।
3. গৌতমবাবু 2000 টাকা বার্ষিক 6% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে 2 বছরের জন্য ধার নিয়েছেন। 2 বছর পরে তিনি কত টাকা চক্রবৃদ্ধি সুদ দেবেন তা হিসাব করে লিখি।
4. 30000 টাকার বার্ষিক 9% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে 3 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ নির্ণয় করি।
5. বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে 80000 টাকার $2\frac{1}{2}$ বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি কত হবে, তা হিসাব করে লিখি।
6. ছন্দাদেবী বার্ষিক 8% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে কিছু টাকা 2 বছরের জন্য ধার করেন। চক্রবৃদ্ধি সুদ 2496 টাকা হলে ছন্দাদেবী কত টাকা ধার করেছিলেন নির্ণয় করি।
7. বার্ষিক 10% চক্রবৃদ্ধির হার সুদে কোন আসলের 3 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ 2648 হবে, তা হিসাব করে লিখি।
8. রহমতচাচা বার্ষিক 9% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে কিছু টাকা সমবায় ব্যাংকে জমা রেখে 2 বছর পরে সুদে-আসলে 29702.50 টাকা ফেরত পেলেন। রহমতচাচা কত টাকা সমবায় ব্যাংকে জমা রেখেছিলেন নির্ণয় করি।

9. বার্ষিক 8% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে কত টাকার 3 বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি 31492.80 টাকা হবে, তা হিসাব করে লিখি।
10. বার্ষিক 7.5% সুদের হারে 12000 টাকার 2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ ও সরল সুদের অন্তর নির্ণয় করি।
11. 10,000 টাকার বার্ষিক 5% সুদের হারে 3 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ ও সরল সুদের পার্থক্য হিসাব করে লিখি।
12. বার্ষিক 9% সুদের হারে কিছু টাকার 2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ ও সরল সুদের অন্তর 129.60 টাকা হলে, ওই টাকার পরিমাণ হিসাব করে লিখি।
13. যদি বার্ষিক 10% হারে কিছু টাকার 3 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ ও সরল সুদের অন্তর 930 টাকা হয়, তবে ওই টাকার পরিমাণ কত হিসাব করে লিখি।
14. বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার যদি প্রথম বছর 7% এবং দ্বিতীয় বছর 8% হয়, তবে 6000 টাকার 2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ হিসাব করে লিখি।
15. বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার যদি প্রথম বছর 5% এবং দ্বিতীয় বছর 6% হয়, তবে 5000 টাকার 2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ নির্ণয় করি।
16. কোনো নির্দিষ্ট পরিমাণ মূলধনের 1 বছরের সরল সুদ 50 টাকা এবং 2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ 102 টাকা হলে, মূলধনের পরিমাণ ও বার্ষিক সুদের হার হিসাব করে লিখি।
17. কোনো মূলধনের 2 বছরের সুদ ও চক্রবৃদ্ধি সুদ যথাক্রমে 8400 টাকা এবং 8652 টাকা হলে মূলধন ও বার্ষিক সুদের হার হিসাব করে লিখি।
18. 6 মাস অন্তর দেয় বার্ষিক 8% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 6000 টাকার 1 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ নির্ণয় করি।
19. 3 মাস অন্তর দেয় বার্ষিক 10% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 6250 টাকার 9 মাসের চক্রবৃদ্ধি সুদ হিসাব করে লিখি।
20. যদি 60000 টাকার 2 বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি 69984 টাকা হয়, তবে বার্ষিক সুদের হার হিসাব করে লিখি।
21. বার্ষিক 8% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে কত বছরে 40000 টাকার সমূল চক্রবৃদ্ধি 46656 টাকা হবে, তা নির্ণয় করি।
22. শতকরা বার্ষিক কত চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 10000 টাকার 2 বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি 12100 টাকা হবে, তা হিসাব করে লিখি।
23. বার্ষিক 10% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে কত বছরে 50000 টাকার সমূল চক্রবৃদ্ধি 60500 টাকা হবে, তা নির্ণয় করি।
24. বার্ষিক 10% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে কত বছরের 300000 টাকার সমূল চক্রবৃদ্ধি 399300 টাকা হবে, তা হিসাব করে লিখি।
25. সুদের পর্ব 6 মাস হলে বার্ষিক 10% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 1600 টাকার $1\frac{1}{2}$ বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ ও সুদ-আসল নির্ণয় করি।

গত বছরে আমাদের গ্রামে একটি কম্পিউটার প্রশিক্ষণ কেন্দ্র চালু হয়েছে। সেখানে খুব অল্প খরচে পঞ্চম থেকে দশম শ্রেণির ইচ্ছুক ছাত্রছাত্রীরা ও অন্যান্য ইচ্ছুক ব্যক্তিরা তাদের যোগ্যতা অনুযায়ী কম্পিউটারের বিভিন্ন বিষয়ে প্রাথমিক জ্ঞান লাভ করতে পারে।

প্রয়োগ : 24. বর্তমানে 4000 জন শিক্ষার্থী এই প্রশিক্ষণ কেন্দ্রে প্রশিক্ষণ নিচ্ছে। ঠিক করা হয়েছে যে পরবর্তী 2 বছরের প্রতি বছরে পূর্ববর্তী বছরের তুলনায় 5% বেশি শিক্ষার্থীকে এই প্রশিক্ষণ কেন্দ্রে প্রশিক্ষণের সুযোগ দেওয়া হবে। হিসাব করে দেখি পরবর্তী 2 বছরের শেষে কতজন শিক্ষার্থী এই প্রশিক্ষণে অংশগ্রহণের সুযোগ পাবে?

বর্তমান শিক্ষার্থীর সংখ্যা = 4000 জন

প্রথম বছরে 5% বৃদ্ধি পাবে অর্থাৎ বাড়বে = 200 জন [$\because 4000 \times \frac{5}{100}$ জন = 200 জন]

দ্বিতীয় বছরের শুরুতে শিক্ষার্থী = 4200 জন

দ্বিতীয় বছরে 5% বৃদ্ধি পাবে অর্থাৎ বাড়বে = 210 জন [$\because 4200 \times \frac{5}{100}$ জন = 210 জন]

দ্বিতীয় বছরের শেষে শিক্ষার্থীর সংখ্যা হবে = 4410 জন

6 সমহারে এই বৃদ্ধিকে কী বলা হয়?

সমহারে বৃদ্ধি ঘটলে তাকে সমহার বৃদ্ধি [Uniform rate of growth] এবং সমহারে হ্রাস ঘটলে তাকে সমহার হ্রাস বা অপচয় [Uniform rate of decrease or depreciation] বলা হয়।

জনসংখ্যা বৃদ্ধি, শিক্ষার্থীর সংখ্যা বৃদ্ধি, কৃষি ও শিল্পের উৎপাদন বৃদ্ধি প্রভৃতি সমহার বৃদ্ধির অন্তর্গত। আবার ক্রমাগত চলার ফলে যন্ত্রের ক্ষয়, অনেকদিনের ঘরবাড়ি, আসবাবপত্র, যানবাহন ইত্যাদি অস্থাবর সম্পত্তির মূল্য হ্রাস, সচেতনতা বৃদ্ধির ফলে রোগ ব্যাধির সংখ্যা হ্রাস প্রভৃতি সমহার হ্রাসের অন্তর্গত।

বিকল্প পদ্ধতি, বর্তমান শিক্ষার্থীর সংখ্যা = 4000 জন

প্রথম বছরের শেষে শিক্ষার্থীর সংখ্যা $= 4000 \times \frac{105}{100}$ জন

দ্বিতীয় বছরের শেষে শিক্ষার্থীর সংখ্যা $= 4000 \times \frac{105}{100} \times \frac{105}{100}$ জন = 4410 জন

দ্বিতীয় বছরের শেষে শিক্ষার্থীর সংখ্যা = 4410 জন হবে।

সমহারে বৃদ্ধির সূত্র এবং চক্রবৃদ্ধি সুদের সূত্র একইরকম।

আমি $p(1+\frac{r}{100})^n$ সূত্রের সাহায্যে হিসাব করি ও কী পাই দেখি যেখানে p = বর্তমান জনসংখ্যা, r% = বছরে জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার এবং n = বছরের সংখ্যা

মনে করি, ওই শহরের বর্তমান জনসংখ্যা p এবং জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার বছরে r%

$\therefore$ n বছর পরে জনসংখ্যা হবে $= p(1+\frac{r}{100})^n$

বুঝেছি, এখানে p = 4000 জন, r = 5 এবং n = 2 বছর

$\therefore$ দ্বিতীয় বছরের শেষে মোট শিক্ষার্থী হবে $= 4000 \times (1+\frac{5}{100})^2$ জন $= 4000 \times \frac{105}{100} \times \frac{105}{100}$ জন

= ☐ জন

প্রয়োগ : 25. কোনো শহরে বছরের শেষে জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার ওই বছরের শুরুতে যে জনসংখ্যা থাকে তার 2%; ওই শহরের বর্তমান জনসংখ্যা যদি 2000000 হয়, তবে 3 বছর পরে ওই শহরের জনসংখ্যা কত হবে হিসাব করে লিখি।

বর্তমান জনসংখ্যা = 2000000

প্রথম বছরে 2% হারে জনসংখ্যা বৃদ্ধি = 40000 [$\because 2000000 \times \frac{2}{100} = 40000$]

দ্বিতীয় বছরের শুরুতে জনসংখ্যা = 2040000

দ্বিতীয় বছরে 2% হারে জনসংখ্যা বৃদ্ধি = 40800 [$\because 2040000 \times \frac{2}{100} = 40800$]

তৃতীয় বছরের শুরুতে জনসংখ্যা = 2080800

তৃতীয় বছরে 2% হারে জনসংখ্যা বৃদ্ধি = 41616 [$\because 2080800 \times \frac{2}{100} = 41616$]

3 বছরের শেষে জনসংখ্যা = 2122416

$\therefore$ 3 বছর পরে জনসংখ্যা হবে 2122416.

আমি অন্যভাবে হিসাব করি,

ধরি, p = 2000000 জন, r = 2 এবং n = 3

$\therefore$ 3 বছর পর জনসংখ্যা $= 2000000\left(1+\frac{2}{100}\right)^3$

$= 2000000 \times \frac{102}{100} \times \frac{102}{100} \times \frac{102}{100}$

$= 2122416$

প্রয়োগ : 26. আমার কাকার কারখানার একটি মেশিনের মূল্য প্রতি বছর 10% হারে হ্রাস প্রাপ্ত হয়। মেশিনটির বর্তমান মূল্য 60000 টাকা হলে, 3 বছর পরে ওই মেশিনটির মূল্য কত হবে নির্ণয় করি।

ধরি, যন্ত্রটির বর্তমান মূল্য = 100.00 টাকা

প্রথম বছর 10% মূল্য হ্রাস = 10.00 টাকা

দ্বিতীয় বছরের শুরুতে হ্রাসপ্রাপ্ত মূল্য = 90.00 টাকা

দ্বিতীয় বছরে 10% মূল্য হ্রাস = 9.00 টাকা [$\because 90 \times \frac{10}{100} = 9$]

তৃতীয় বছরের শুরুতে হ্রাসপ্রাপ্ত মূল্য = 81.00 টাকা

তৃতীয় বছরে 10% মূল্য হ্রাস = 8.10 টাকা [$\because 81 \times \frac{10}{100} = 8.10$]

3 বছর পর যন্ত্রটির মূল্য = 72.90 টাকা

$\therefore$ গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

বর্তমান মূল্য (টাকায়)	হ্রাস প্রাপ্ত মূল্য (টাকায়)
100	72.90
60000	?

বর্তমান মূল্য ও হ্রাসপ্রাপ্ত মূল্য সরল সম্পর্কে আছে।

$\therefore$ 3 বছর পর মেশিনটির মূল্য $= 72.90 \times \frac{60000}{100}$ টাকা = 43740 টাকা

বিকল্প পদ্ধতি,

যন্ত্রটির বর্তমান মূল্য	= 60000 টাকা	
প্রথম বছরে 10% হ্রাস	= 6000 টাকা	[$\because 60000 \times \frac{10}{100} = 6000$]
দ্বিতীয় বছরের শুরুতে মূল্য	= 54000 টাকা	
দ্বিতীয় বছরে 10% মূল্য হ্রাস	= 5400 টাকা	[$\because 54000 \times \frac{10}{100} = 5400$]
তৃতীয় বছরের শুরুতে মূল্য	= 48600 টাকা	
তৃতীয় বছরে 10% মূল্য হ্রাস	= 4860 টাকা	[$\because 48600 \times \frac{10}{100} = 4860$]
3 বছর পর মূল্য	= 43740 টাকা	

$\therefore$ 3 বছর পর মেশিনটির মূল্য 43740 টাকা

আমি অন্যভাবে হিসাব করি ও কী পাই দেখি।

ধরি, যন্ত্রটির বর্তমান মূল্য p টাকা, 1 বছরে হ্রাস পায় = r%

$\therefore$ প্রথম বছরে হ্রাস পায় = $\frac{p \times r}{100}$ টাকা

$\therefore$ দ্বিতীয় বছরের শুরুতে যন্ত্রটির মূল্য হয় = $\left(p - \frac{pr}{100}\right)$ টাকা = $p\left(1 - \frac{r}{100}\right)$ টাকা

দ্বিতীয় বছরে হ্রাস পায় $\dfrac{p\left(1 - \frac{r}{100}\right) \times r}{100}$ টাকা

$\therefore$ তৃতীয় বছরের শুরুতে মূল্য হয় = $\left[p\left(1 - \frac{r}{100}\right) - \frac{pr}{100}\left(1 - \frac{r}{100}\right)\right]$ টাকা = $p\left(1 - \frac{r}{100}\right)^2$ টাকা

একইভাবে, তৃতীয় বছরের শেষে মূল্য হবে = $p\left(1 - \frac{r}{100}\right)^3$ টাকা

বুঝেছি, n বছর পরে যন্ত্রটির মূল্য হবে = $p\left(1 - \frac{r}{100}\right)^n$

$\therefore$ 3 বছর পর যন্ত্রটির মূল্য হবে = $p\left(1 - \frac{r}{100}\right)^n$ [যেখানে p = 60000 টাকা, r = 10% এবং n = 3]

$= 60000\left(1 - \frac{10}{100}\right)^3$ টাকা $= 60000 \times \frac{90}{100} \times \frac{90}{100} \times \frac{90}{100}$ টাকা = ☐ টাকা

$\therefore$ 3 বছর পর যন্ত্রটির মূল্য হবে 43740 টাকা।

প্রয়োগ : 27. একটি মোটর গাড়ির মূল্য 3 লাখ টাকা। গাড়িটির বাৎসরিক অপচয়ের হার 30% হলে, 3 বছর পরে গাড়িটির কী দাম হবে, তা হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 28. কোনো রাজ্যে পথ নিরাপত্তা সংক্রান্ত প্রচারাভিযানের মাধ্যমে পথ দুর্ঘটনা প্রতি বছর তার পূর্ব বছরের তুলনায় 10% হ্রাস পেয়েছে। বর্তমান বছরে ওই রাজ্যে যদি 2916 টি পথ দুর্ঘটনা ঘটে তবে 3 বছর পূর্বে ওই রাজ্যে দুর্ঘটনার সংখ্যা কত ছিল, তা হিসাব করে লিখি।

মনে করি, 3 বছর পূর্বে ওই রাজ্যে দুর্ঘটনার সংখ্যা ছিল x টি

$\therefore$ বর্তমানে ওই রাজ্যে দুর্ঘটনার সংখ্যা = $x\left(1 - \frac{10}{100}\right)^3$ টি

শর্তানুসারে, $x\left(1 - \frac{10}{100}\right)^3 = 2916$

বা, $x \times \frac{90}{100} \times \frac{90}{100} \times \frac{90}{100} = 2916$ বা, $x = \frac{2916 \times 100 \times 100 \times 100}{90 \times 90 \times 90}$ $\therefore x = 4000$

$\therefore$ 3 বছর পূর্বে ওই রাজ্যে দুর্ঘটনার সংখ্যা ছিল 4000 টি।

প্রয়োগ : 29. একটি শহরের বর্তমান জনসংখ্যা 5,76,000; যদি জনসংখ্যা প্রতি বছর $6\frac{2}{3}\%$ হিসাবে বাড়ে তাহলে 2 বছর আগে জনসংখ্যা কত ছিল, তা নির্ণয় করি। **[নিজে করি]**

কষে দেখি 6.2

1. পহলমপুর গ্রামের বর্তমান লোকসংখ্যা 10000; ওই গ্রামে প্রতি বছর জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার 3% হলে, 2 বছর পরে ওই গ্রামের জনসংখ্যা কত হবে, তা হিসাব করে লিখি।

2. কোনো একটি রাজ্যের প্রতি বছর জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার 2%; বর্তমান জনসংখ্যা 80000000 হলে, 3 বছর পরে ওই রাজ্যের জনসংখ্যা কত হবে, তা নির্ণয় করি।

3. পাড়ার একটি লেদ কারখানার একটি মেশিনের মূল্য প্রতি বছর 10% হ্রাস প্রাপ্ত হয়। মেশিনটির বর্তমান মূল্য 100000 টাকা হলে, 3 বছর পরে ওই মেশিনটির মূল্য কত হবে, তা হিসাব করে লিখি।

4. সর্বশিক্ষা অভিযানের ফলে বিদ্যালয় ছেড়ে চলে যাওয়া শিক্ষার্থীদের পুনরায় বিদ্যালয়ে ভর্তির ব্যবস্থা করা হয়েছে। এরূপ শিক্ষার্থীদের ভর্তির হার প্রতি বছর তার পূর্ববর্তী বছর অপেক্ষা 5% বৃদ্ধি পেয়েছে। কোনো এক জেলায় বর্তমান বছরে যদি 3528 জন এরূপ শিক্ষার্থী নতুন করে ভর্তি হয়ে থাকে, তবে 2 বছর পূর্বে এরূপ কত জন শিক্ষার্থী ভর্তি হয়েছিল, তা হিসাব করে লিখি।

5. পুরুলিয়া জেলায় পথ নিরাপত্তা সংক্রান্ত প্রচার অভিযানের মাধ্যমে পথ দুর্ঘটনা প্রতি বছর তার পূর্ব বছরের তুলনায় 10% হ্রাস পেয়েছে। বর্তমান বছরে এই জেলায় 8748 টি পথ দুর্ঘটনা ঘটে থাকলে, 3 বছর আগে পথ দুর্ঘটনার সংখ্যা কত ছিল, তা নির্ণয় করি।

6. একটি মৎস্যজীবী সমবায় সমিতি উন্নত প্রথায় মাছ চাষ করার জন্য এরূপ একটি পরিকল্পনা গ্রহণ করেছে যে কোনো বছরের মাছের উৎপাদন পূর্ববর্তী বছরের তুলনায় 10% বৃদ্ধি করবে। বর্তমান বছরে যদি ওই সমবায় সমিতি 400 কুইন্টাল মাছ উৎপাদন করে, তবে 3 বছর পরে সমবায় সমিতির মাছের উৎপাদন কত হবে, তা হিসাব করে লিখি।

7. একটি গাছের উচ্চতা প্রতি বছর 20% হারে বৃদ্ধি পায়। গাছটির বর্তমান উচ্চতা 28.8 মিটার হলে, 2 বছর আগে গাছটির উচ্চতা কত ছিল, তা নির্ণয় করি।

8. কোনো একটি পরিবার আজ থেকে 3 বছর পূর্বে বিদ্যুৎ অপচয় বন্ধ করতে ইলেকট্রিক বিলের খরচ পূর্ববর্তী বছরের তুলনায় 5% হ্রাস করার পরিকল্পনা গ্রহণ করে। 3 বছর পূর্বে ওই পরিবারকে বছরে 4000 টাকার ইলেকট্রিক বিল দিতে হয়েছিল। বর্তমান বছরে ইলেকট্রিক বিলে বিদ্যুৎ খরচ কত হবে, তা হিসাব করে লিখি।

9. শোভনবাবুর ওজন 80 কিগ্রা.। ওজন কমানোর জন্য তিনি নিয়মিত হাঁটা শুরু করলেন। তিনি ঠিক করলেন যে প্রতি বছরের প্রারম্ভে যা ওজন থাকবে তার 10% হ্রাস করবেন। 3 বছর পরে শোভনবাবুর ওজন কত হবে, তা হিসাব করে লিখি।

10. কোনো এক জেলার সমস্ত মাধ্যমিক শিক্ষাকেন্দ্রের (M.S.K) বর্তমান শিক্ষার্থীর সংখ্যা 3993 জন। প্রতি বছর বিগত বছরের তুলনায় যদি 10% শিক্ষার্থী বৃদ্ধি পেয়ে থাকে, তবে 3 বছর পূর্বে ওই জেলার সকল মাধ্যমিক শিক্ষাকেন্দ্রের শিক্ষার্থীর সংখ্যা কত ছিল, তা নির্ণয় করি।

11. কৃষিজমিতে কেবলমাত্র রাসায়নিক সার ও কীটনাশক ব্যবহারের কুফল সম্পর্কে সচেতনতা বৃদ্ধির ফলে রসুলপুর গ্রামে কেবলমাত্র রাসায়নিক সার ও কীটনাশক ব্যবহারকারী কৃষকের সংখ্যা পূর্ববর্তী বছরের তুলনায় 20% হ্রাস পায়। 3 বছর পূর্বে রসুলপুর গ্রামের ওরকম কৃষকের সংখ্যা 3000 জন হলে, বর্তমানে ওই গ্রামে ওরকম কৃষকের সংখ্যা কত হবে, তা নির্ণয় করি।

12. একটি কারখানার একটি মেশিনের মূল্য 180000 টাকা। মেশিনটির মূল্য প্রতি বছর 10% হ্রাস প্রাপ্ত হয়। 3 বছর পরে ওই মেশিনটির মূল্য কত হবে, তা হিসাব করে লিখি।

13. বকুলতলা গ্রামের পঞ্চায়েত সমিতি যেসব পরিবারে বিদ্যুৎ সংযোগ নেই তাদের বাড়িতে বিদ্যুৎ পৌঁছানোর পরিকল্পনা গ্রহণ করে। এই গ্রামে 1200 পরিবারের বিদ্যুৎ সংযোগ নেই। প্রতি বছর যদি পূর্ব বছরের তুলনায় 75% বিদ্যুৎহীন পরিবারে বিদ্যুৎ পৌঁছানোর ব্যবস্থা করা হয়, তবে 2 বছর পরে বকুলতলা গ্রামে বিদ্যুৎহীন পরিবারের সংখ্যা কত হবে, তা হিসাব করে লিখি।

14. বোতল ভর্তি ঠান্ডা পানীয় ব্যবহারের উপর বিরূপ প্রতিক্রিয়া প্রচারের ফলে প্রতি বছর তার পূর্ববর্তী বছরের তুলনায় ওই ঠান্ডা পানীয় ব্যবহারকারীর সংখ্যা 25% হ্রাস পায়। 3 বছর পূর্বে কোনো শহরে ঠান্ডা পানীয় ব্যবহারকারীর সংখ্যা 80000 হলে, বর্তমান বছরে ঠান্ডা পানীয় ব্যবহারকারীর সংখ্যা কত হবে, তা হিসাব করে লিখি।

15. ধূমপান বিরোধী প্রচারের ফলে প্রতি বছর ধূমপায়ীর সংখ্যা $6\frac{1}{4}\%$ হারে হ্রাস পায়। বর্তমানে কোনো শহরে 33750 জন ধূমপায়ী থাকলে, 3 বছর পূর্বে ওই শহরে কত জন ধূমপায়ী ছিল, তা হিসাব করে লিখি।

16. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :

(i) চক্রবৃদ্ধি সুদের ক্ষেত্রে প্রতি বছর বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার
(a) সমান (b) অসমান (c) সমান অথবা অসমান উভয়ই (d) কোনোটিই নয়

(ii) চক্রবৃদ্ধি সুদের ক্ষেত্রে
(a) প্রতি বছর আসল একই থাকে (b) প্রতি বছর আসল পরিবর্তিত হয়
(c) প্রতি বছর আসল একই থাকতে পারে অথবা পরিবর্তিত হতে পারে (d) কোনোটিই নয়

(iii) একটি গ্রামের বর্তমান জনসংখ্যা p এবং প্রতি বছর জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার 2r% হলে, n বছর পর জনসংখ্যা হবে
(a) $p\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$ (b) $p\left(1+\frac{r}{50}\right)^n$ (c) $p\left(1+\frac{r}{100}\right)^{2n}$ (d) $p\left(1-\frac{r}{100}\right)^n$

(iv) একটি মেশিনের বর্তমান মূল্য 2p টাকা এবং প্রতি বছর মেশিনটির দাম 2r% হ্রাস হলে 2n বছর পরে মেশিনের দাম হবে
(a) $p\left(1-\frac{r}{100}\right)^n$ টাকা (b) $2p\left(1-\frac{r}{50}\right)^n$ টাকা

(c) $p\left(1-\frac{r}{50}\right)^{2n}$ টাকা (d) $2p\left(1-\frac{r}{50}\right)^{2n}$ টাকা

(v) এক ব্যক্তি একটি ব্যাংকে 100 টাকা জমা রেখে, 2 বছর পর সমূল চক্রবৃদ্ধি পেলেন 121 টাকা। বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার

(a) 10%   (b) 20%   (c) 5%   (d) $10\frac{1}{2}$%

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) নির্দিষ্ট পরিমাণ টাকার বার্ষিক নির্দিষ্ট শতকরা হার সুদে নির্দিষ্ট সময়ের জন্য চক্রবৃদ্ধি সুদ সরল সুদের থেকে কম হবে।

(ii) চক্রবৃদ্ধি সুদের ক্ষেত্রের নির্দিষ্ট সময় অন্তর সুদ আসলের সঙ্গে যোগ হয়। সেই কারণে আসলের পরিমাণ ক্রমাগত বাড়তে থাকে।

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) নির্দিষ্ট পরিমাণ টাকার বার্ষিক নির্দিষ্ট শতকরা হার সুদে 1 বছরে চক্রবৃদ্ধি সুদের পরিমাণ এবং সরল সুদের পরিমাণ ________।

(ii) সময়ের সঙ্গে কোনো কিছুর নির্দিষ্ট হারে বৃদ্ধি হলে সেটি ________ বৃদ্ধি।

(iii) সময়ের সঙ্গে কোনো কিছুর নির্দিষ্ট হারে হ্রাস হলে সেটি সমহার ________।

17. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)**

(i) 400 টাকার 2 বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি 441 টাকা হলে, বার্ষিক শতকরা চক্রবৃদ্ধি সুদের হার কত তা লিখি।

(ii) বার্ষিক নির্দিষ্ট শতকরা চক্রবৃদ্ধি হার সুদে কিছু টাকা n বছরে দ্বিগুণ হলে, কত বছরে 4 গুণ হবে তা লিখি।

(iii) বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে কিছু টাকার 2 বছরে চক্রবৃদ্ধি সুদ 615 টাকা হলে, আসল নির্ণয় করি।

(iv) প্রতি বছর r% হ্রাসপ্রাপ্ত হলে, n বছর পর একটি মেশিনের মূল্য হয় v টাকা। n বছর পূর্বে মেশিনটির মূল্য কত ছিল তা নির্ণয় করি।

(v) প্রতি বছর জনসংখ্যা r% বৃদ্ধি হলে n বছর পর জনসংখ্যা হয় p; n বছর পূর্বে জনসংখ্যা কত ছিল তা নির্ণয় করি।

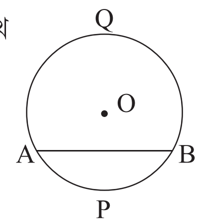
7 বৃত্তস্থ কোণ সম্পর্কিত উপপাদ্য

THEOREMS RELATED TO ANGLES IN A CIRCLE

প্রতি বছরের মতো এ বছরেও আমাদের বিদ্যালয়ের মাঠে ফেব্রুয়ারি মাসে একটি প্রদর্শনীর আয়োজন করা হয়েছে। আমরা দশম শ্রেণির ছাত্রছাত্রীরা গণিতের উপর কিছু মডেল তৈরি করব। এখনও প্রায় দুই সপ্তাহ সময় আছে।

আমরা ছোটো-বড়ো নানান আকারের কিছু বৃত্তাকার রিং ও ছোটো-বড়ো নানান দৈর্ঘ্যের কাঠি জোগাড় করেছি।

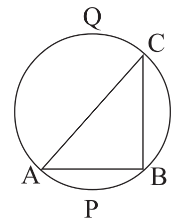
আমরা ঠিক করেছি এই বৃত্তাকার রিং-এর মধ্যে নানাভাবে কাঠি রেখে কী কী পাই দেখে নানান তথ্য জানব ও সেই অনুযায়ী মডেল তৈরির চেষ্টা করব।



সাথি প্রথমে একটি বৃত্তাকার রিং-এ একটি কাঠি পাশের ছবির মতো রাখল।

দেখছি, AB কাঠিটি বৃত্তকার রিং-এর একটি জ্যা।

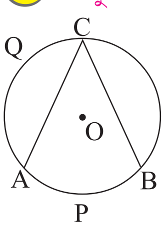
বৃত্তাকার রিং-এর উপচাপ $\overset{\frown}{APB}$ ও অধিচাপ $\overset{\frown}{AQB}$ ।



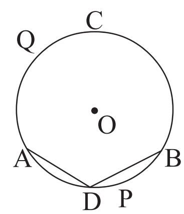
আমি আরও দুটি কাঠি AC ও BC পাশের ছবির মতো রাখলাম।

AC ও BC বৃত্তের অপর দুটি জ্যা।

1 কিন্তু AB জ্যা বৃত্তের C বিন্দুতে একটি সম্মুখ কোণ ∠ACB তৈরি করেছে। এই কোণকে কী বলা হয়?

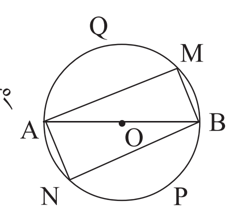


C বিন্দুটি $\overset{\frown}{APB}$ বৃত্তচাপ বাদে বাকি বৃত্তচাপটিতে অবস্থিত। তাই ∠ACB -কে বলা হয় বৃত্তচাপ $\overset{\frown}{APB}$ -এর দ্বারা গঠিত সম্মুখ বৃত্তস্থ কোণ।

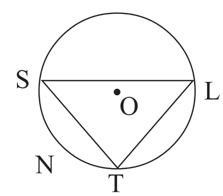


আবার যদি D বিন্দুটি $\overset{\frown}{AQB}$ বৃত্তচাপ বাদে বাকি বৃত্তচাপটিতে অবস্থিত হয়, তবে ∠ADB -কে বলা হবে বৃত্তচাপ $\overset{\frown}{AQB}$ দ্বারা গঠিত সম্মুখ বৃত্তস্থ কোণ।

নিজে করি 7.1



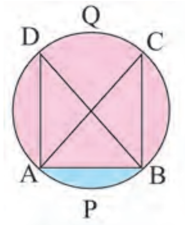
1) পাশের ছবিতে ∠AMB, বৃত্তচাপ $\overset{\frown}{APB}$ দ্বারা গঠিত সম্মুখ ______ কোণ এবং ∠ANB, বৃত্তচাপ ______ দ্বারা গঠিত সম্মুখ বৃত্তস্থ কোণ।



2) পাশের ছবিতে ∠SLT, ______ জ্যা-এর দ্বারা L বিন্দুতে গঠিত সম্মুখ কোণ।

আবার যেহেতু L বিন্দুটি বৃত্তে অবস্থিত, অতএব কোণ ______ ST জ্যা-এর দ্বারা গঠিত সম্মুখ বৃত্তস্থ কোণ।

আবার ∠SLT, বৃত্তচাপ ______ দ্বারা গঠিত সম্মুখ বৃত্তস্থ কোণ।

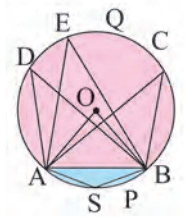


সোহম আরও দুটি কাঠি বৃত্তাকার রিং-এর মধ্যে পাশের ছবির মতো রাখল।

দেখছি, APB চাপের দ্বারা গঠিত অপর একটি সম্মুখ বৃত্তস্থ কোণ ∠ADB তৈরি হয়েছে।

কিন্তু ∠ACB ও ∠ADB বৃত্তস্থ কোণ দুটি ADQCB বৃত্তাংশে অবস্থিত।

সুতরাং, ∠ACB ও ∠ADB বৃত্তস্থ কোণদুটি একই বৃত্তাংশস্থ।



আমি আমার খাতায় O কেন্দ্রীয় বৃত্ত আঁকি এবং একই বৃত্তাংশস্থ বৃত্তস্থ কোণ আঁকি।

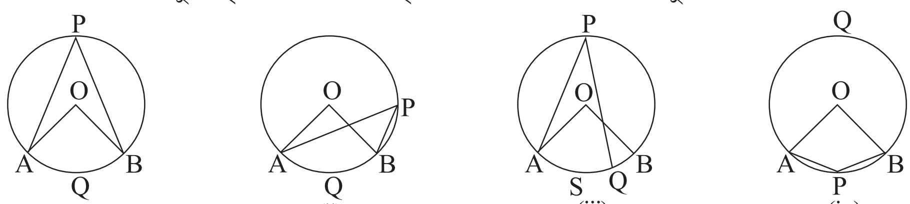
পাশের ছবির O কেন্দ্রীয় বৃত্তের চারটি বৃত্তস্থ কোণ হলো ______ , ______ , ______ ও ______ ।

এদের মধ্যে ADEQCB অধিবৃত্তাংশস্থ বৃত্তস্থ কোণগুলি এবং ASPB উপবৃত্তাংশস্থ বৃত্তস্থ কোণটি নিজে লিখি।

2 O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB জ্যা কেন্দ্রে একটি সম্মুখ কোণ ∠AOB উৎপন্ন করেছে।এই ∠AOB -কে কী বলা হয়?

∠AOB -কে বৃত্তচাপ $\overset{\frown}{ASB}$ -এর দ্বারা গঠিত সম্মুখ কেন্দ্রস্থ কোণ বলে।

মারিয়া ও শাকিল অনেকগুলি বৃত্তে কেন্দ্রস্থ ও বৃত্তস্থ কোণ এঁকেছে। সেগুলি হলো,



(i) (ii) (iii) (iv)

দেখছি, (i) নং, (ii) নং বৃত্তে AQB বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত কেন্দ্রস্থ কোণ ______ ও বৃত্তস্থ কোণ ______ । কিন্তু (iii) নং বৃত্তে ASB বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত কেন্দ্রস্থ কোণ ______ এবং ASQ বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত বৃত্তস্থ কোণ ______ ।

∴ (iii) নং বৃত্তে কেন্দ্রস্থ কোণ ∠AOB এবং বৃত্তস্থ কোণ ∠APQ একই বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত নয়।

আবার (iv) নং বৃত্তে AQB বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত কেন্দ্রস্থ কোণ প্রবৃদ্ধ ∠AOB এবং বৃত্তস্থ কোণ ∠APB

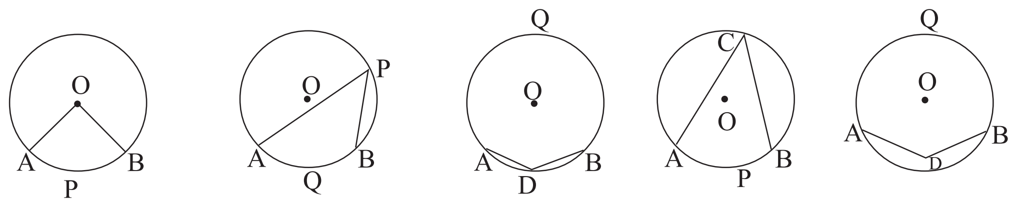
নিজে করি 7.2

1) আমি একটি বৃত্ত আঁকি এবং ওই বৃত্তে দুটি বৃত্তস্থ কোণ আঁকি যারা (a) একই বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত (b) একই বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত নয়।

2) আমি O কেন্দ্রীয় বৃত্তে একটি বৃত্তস্থ কোণ ও একটি কেন্দ্রস্থ কোণ আঁকি যারা (a) একই বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত (b) একই বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত নয়।

3) ছবিগুলি দেখে উত্তর দিই : (O বৃত্তের কেন্দ্র)

(a)



(i) (ii) (iii) (iv) (v)

(i) নং চিত্রে ∠AOB কোণটি APB বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত ______ কোণ।

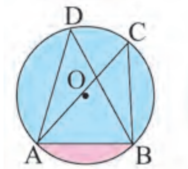
(ii) নং চিত্রে ______ কোণটি AQB বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত বৃত্তস্থ কোণ।

(iii) নং চিত্রে ∠ADB কোণটি ______ বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত ______ কোণ।

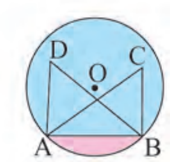
(iv) নং চিত্রে ∠ACB কোণটি ______ বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত বৃত্তস্থ কোণ ______।

(v) নং চিত্রে ______ কোণটি ______ বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত বৃত্তস্থ কোণ নয়।

(b)



(i)



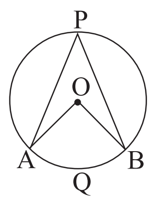
(ii)

(i) নং চিত্রের কোণদুটি ______ এবং ______ একই বৃত্তাংশস্থ কোণ। এরা ADCB বৃত্তাংশে অবস্থিত।

(ii) নং চিত্রের ______ ও ______ কোণদুটি বৃত্তাংশস্থ কোণ ______।

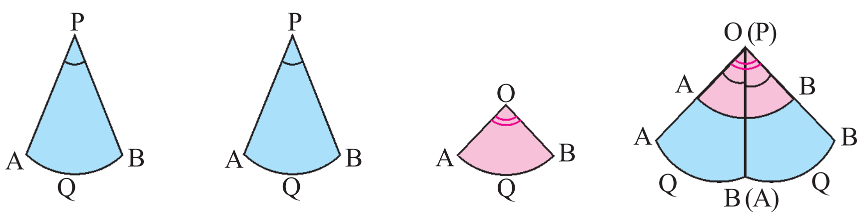
বীণা একটি বৃত্ত এঁকেছে। আমি ওই বৃত্তে একই বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত কেন্দ্রস্থ ও বৃত্তস্থ কোণ আঁকি ও তাদের মধ্যে সম্পর্ক বের করি।

হাতেকলমে



1) O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AQB বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত কেন্দ্রস্থ কোণ ∠AOB এবং বৃত্তস্থ কোণ ∠APB আঁকলাম।

2) ট্রেসিং পেপারের সাহায্যে দুটো ∠APB এবং একটি ∠AOB কেটে নিলাম।



3) ট্রেসিং পেপারের এই দুটি ∠APB, বৃত্তের ∠AOB-এর উপর পাশাপাশি বসিয়ে দিলাম।

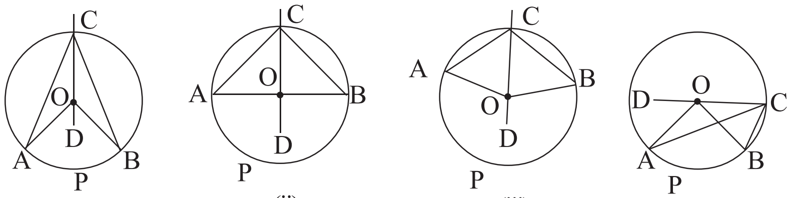
হাতেকলমে দেখছি, 2∠APB = ∠AOB

অর্থাৎ হাতেকলমে পেলাম, একই বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ।

আমি অন্য একটি যে-কোনো বৃত্ত এঁকে তার একই বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত কেন্দ্রস্থ কোণ ও বৃত্তস্থ কোণ এঁকে একইভাবে হাতেকলমে করে দেখছি কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ। [নিজে করি]

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য : 34. কোনো বৃত্তের একটি বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত সম্মুখ কেন্দ্রস্থ কোণ ওই চাপের দ্বারা গঠিত যে-কোনো বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ।



(i) (ii) (iii) (iv)

প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের বৃত্তচাপ APB-এর দ্বারা গঠিত কেন্দ্রস্থ কোণ ∠AOB এবং একটি বৃত্তস্থ কোণ ∠ACB।

প্রমাণ করতে হবে: ∠AOB = 2∠ACB

বৃত্তচাপ AB-এর দৈর্ঘ্য অনুযায়ী বিষয়টি তিনরকম হতে পারে। (i) ও (iv) নং চিত্রে APB উপচাপ (ii) নং চিত্রে APB অর্ধবৃত্তচাপ (iii) নং চিত্রে APB অধিচাপ।

অঙ্কন : C, O যুক্ত করে D বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করলাম।

প্রমাণ : প্রতিক্ষেত্রেই Δ AOC-এর OA = OC [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

∴ ∠OCA = ∠OAC

আবার, প্রতিক্ষেত্রেই, Δ AOC-এর CO বাহুকে D বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করায়

বহিঃস্থ ∠AOD = ∠OAC + ∠OCA

= 2 ∠OCA..... (I) [∵ ∠OAC = ∠OCA]

প্রতিক্ষেত্রেই Δ BOC-এর, OB = OC [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

সুতরাং ∠OBC = ∠OCB

আবার প্রতিক্ষেত্রেই Δ BOC-এর বাহুকে CO বাহুকে D বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করায়

বহিঃস্থ ∠BOD = ∠OCB + ∠OBC

= 2 ∠OCB ...... (II) [∵ ∠OBC = ∠OCB]

(i) ও (ii) নং চিত্রের ক্ষেত্রে, ∠AOD + ∠BOD = 2∠OCA + 2∠OCB [I ও II থেকে পেলাম]

∴ ∠AOB = 2 (∠OCA + ∠OCB) = 2∠ACB .... (III)

কিন্তু (iii) নং চিত্রের ক্ষেত্রে অর্থাৎ যখন APB অধিচাপ, III-কে লিখব,

প্রবৃদ্ধ ∠AOB = 2∠ACB

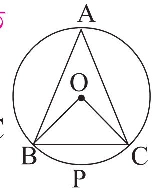
(iv) নং চিত্রের ক্ষেত্রে, ∠BOD – ∠AOD = 2∠OCB – 2∠OCA

বা, ∠AOB = 2(∠OCB – ∠OCA)

∴ ∠AOB = 2∠ACB (প্রমাণিত)

প্রয়োগ : 1. আমি P কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত অঙ্কন করি এবং ওই বৃত্তে ACB বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত কেন্দ্রস্থ কোণ ∠APB ও বৃত্তস্থ কোণ ∠AQB অঙ্কন করে, প্রমাণ করি যে ∠APB = 2∠AQB [নিজে করি]

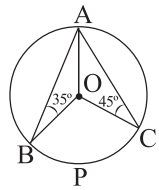
প্রয়োগ : 2. ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের কেন্দ্র O; বিন্দু A এবং BC জ্যা কেন্দ্রের বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত। $\angle BOC = 120^\circ$ হলে $\angle BAC$-এর মান হিসাব করে লিখি।



ছবি এঁকে দেখছি, O কেন্দ্রীয় বৃত্তের একই বৃত্তচাপ BPC-এর দ্বারা গঠিত কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle BOC$ ও বৃত্তস্থ কোণ $\angle BAC$

$\therefore \angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$

প্রয়োগ : 3. পাশের ছবির O কেন্দ্রীয় বৃত্তটি A, B ও C বিন্দুগামী। $\angle ABO = 35^\circ$ এবং $\angle ACO = 45^\circ$ হলে, $\angle BOC$-এর মান হিসাব করে লিখি।



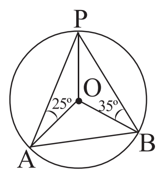
Δ OAB-তে, OA = OB (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ) $\therefore \angle OAB = \angle OBA = 35^\circ$

Δ OAC-তে, OA = OC (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ) $\therefore \angle OAC = \angle OCA = 45^\circ$

$\therefore \angle BAC = \square + \square = \square$ **[নিজে লিখি]**

যেহেতু, O কেন্দ্রীয় বৃত্তে BPC বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle BOC$ এবং বৃত্তস্থ কোণ $\angle BAC$, সুতরাং $\angle BOC = 2\angle BAC = 160^\circ$

প্রয়োগ : 4. পাশের O কেন্দ্রীয় বৃত্তের ছবিটি দেখি এবং $\angle OAB$-এর মান হিসাব করে লিখি যখন $\angle OAP = 25^\circ$ এবং $\angle OBP = 35^\circ$।



অঙ্কন : OP যোগ করি।

প্রমাণ : OA = OP (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ) $\therefore \angle OAP = \angle OPA$

$\because \angle OAP = 25^\circ$, সুতরাং, $\angle OPA = 25^\circ$

OB = OP (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ) $\therefore \angle OBP = \angle OPB$

$\because \angle OBP = 35^\circ$, সুতরাং, $\angle OPB = 35^\circ$

$\angle APB = \angle OPA + \angle OPB = 25^\circ + 35^\circ = 60^\circ$

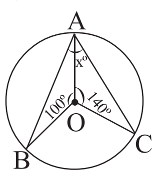
$\angle AOB = 2\angle APB = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$

ΔAOB -তে, $\angle OAB + \angle OBA = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ [ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি 180°]

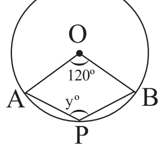
$\because$ AO = BO [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

$\therefore \angle OAB = \angle OBA = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$

প্রয়োগ : 5. নীচের চিত্রদুটি দেখে x ও y-এর মান হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**



(i)



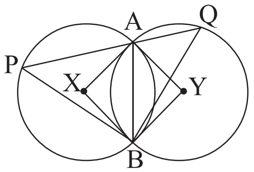
(ii)

প্রয়োগ : 6. দুটি সমান দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্ত যারা পরস্পরকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করেছে। A বিন্দুগামী একটি সরলরেখা AB-এর বিপরীত পার্শ্বে একটি বৃত্তকে P বিন্দুতে এবং অপর বৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করে। যেখানে, P ও Q বিন্দুদ্বয় AB-এর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত। প্রমাণ করি যে, BP = BQ

প্রদত্ত : দুটি সমান বৃত্ত পরস্পরকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করেছে। A বিন্দুগামী সরলরেখা একটি বৃত্তকে P বিন্দুতে এবং অপর বৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে: BP = BQ

অঙ্কন : ধরি, X ও Y যথাক্রমে প্রথম বৃত্ত ও দ্বিতীয় বৃত্তের কেন্দ্র। A, B; A, X; B, X; A,Y; B,Y যুক্ত করলাম।



প্রমাণ : Δ AXB ও Δ AYB-এর AX = AY [$\because$ সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

BX = BY [$\because$ ☐]

AB সাধারণ বাহু।

$\therefore \Delta AXB \cong \Delta AYB$ (S-S-S সর্বসমতার শর্তানুসারে)

$\therefore \angle AXB = \angle AYB$ [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ অংশ]

$\therefore \frac{1}{2}\angle AXB = \frac{1}{2}\angle AYB$

আবার, $\angle APB = \frac{1}{2}\angle AXB$ [$\because$ প্রথম বৃত্তের AB উপচাপের দ্বারা গঠিত $\angle AXB$ কেন্দ্রস্থ কোণ ও $\angle APB$ বৃত্তস্থ কোণ]

অনুরূপভাবে, $\angle AQB = \frac{1}{2}\angle AYB$ [$\because$ দ্বিতীয় বৃত্তের AB উপচাপের দ্বারা গঠিত $\angle AYB$ কেন্দ্রস্থ কোণ ও $\angle AQB$ বৃত্তস্থ কোণ]

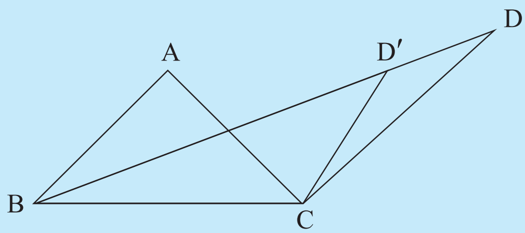
$\therefore \angle APB = \angle AQB$ অর্থাৎ $\angle QPB = \angle PQB$

$\therefore \Delta$ PQB-এর $\angle QPB = \angle PQB$ $\therefore$ BP = BQ [প্রমাণিত]

[যদি AB-এর একই পার্শ্বে সরলরেখাটি P ও Q বিন্দুতে বৃত্তকে ছেদ করে তাহলে নিজে ছবি এঁকে প্রমাণ করি BP = BQ]

প্রয়োগ : 7. ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যার AB = AC; BC-এর যে পার্শ্বে Δ ABC অবস্থিত, সেই পার্শ্বেই Δ DBC এমনভাবে অঙ্কন করা হলো যাতে $\angle BAC = 2\angle BDC$ হয়। প্রমাণ করি যে, A-কে কেন্দ্র করে AB ব্যাসার্ধ নিয়ে যে বৃত্ত অঙ্কন করা হবে তা D বিন্দুগামী হবে অর্থাৎ D বিন্দু ওই বৃত্তের উপর অবস্থিত হবে। [নিজে করি]

[**উত্তর সংকেত :** ধরি D বিন্দু ওই বৃত্তের উপর অবস্থিত নয়। $\therefore$ বৃত্তটি BD বা বর্ধিত BD -কে ধরি D' বিন্দুতে ছেদ করেছে। D' ও C বিন্দু দুটি যুক্ত করি।



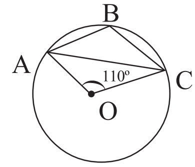
$\therefore \angle BAC = 2\angle BD'C$;

কিন্তু $\angle BAC = 2\angle BDC$

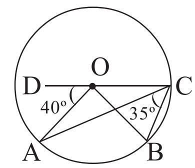
$\therefore \angle BD'C = \angle BDC$, কিন্তু এটা অসম্ভব যদি না D ও D' বিন্দু সমাপতিত হয়। কারণ ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ অন্তঃস্থ বিপরীত একটি কোণের সমান হতে পারে না।]

কষে দেখি 7.1

1. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB = AC. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্র O এবং BC বাহুর যেদিকে A বিন্দু অবস্থিত তার বিপরীত পার্শ্বে কেন্দ্র O অবস্থিত। $\angle BOC = 100^\circ$ হলে $\angle ABC$ ও $\angle ABO$-এর মান হিসাব করে লিখি।

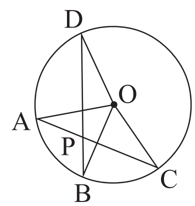


2. পাশের চিত্রে Δ ABC-এর পরিবৃত্তের কেন্দ্র O এবং $\angle AOC = 110^\circ$; $\angle ABC$-এর মান হিসাব করে লিখি।

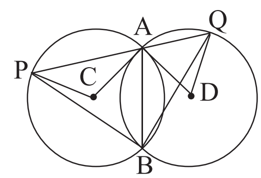


3. O কেন্দ্রীয় বৃত্তের ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। DC বাহুকে P বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হলো। $\angle BCP = 108^\circ$ হলে, $\angle BOD$-এর মান হিসাব করে লিখি।

4. পাশের চিত্রে O কেন্দ্রীয় বৃত্তের $\angle AOD = 40^\circ$ এবং $\angle ACB = 35^\circ$; $\angle BCO$ ও $\angle BOD$-এর মান হিসাব করে লিখি ও উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দিই।



5. পাশের চিত্রের O কেন্দ্রীয় বৃত্তের $\angle APB = 80^\circ$ হলে, $\angle AOB$ ও $\angle COD$-এর মানের সমষ্টি নির্ণয় করি ও উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দিই।



6. পাশের ছবির মতো C ও D কেন্দ্রবিশিষ্ট দুটি বৃত্ত অঙ্কন করেছি যারা পরস্পরকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করেছে। A বিন্দুগামী একটি সরলরেখা অঙ্কন করেছি যা C কেন্দ্রীয় বৃত্তকে P বিন্দুতে এবং D কেন্দ্রীয় বৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে,
(i) $\angle PBQ = \angle CAD$ (ii) $\angle BPC = \angle BQD$

7. ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O; প্রমাণ করি যে, $\angle OBC + \angle BAC = 90^\circ$

8. দুটি সমান বৃত্ত একটি অপরটির কেন্দ্রগামী এবং বৃত্তদুটি পরস্পরকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করেছে। A বিন্দুগামী সরলরেখা বৃত্ত দুটিকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করলে, প্রমাণ করি যে, ΔBCD সমবাহু ত্রিভুজ।

9. Δ ABC-এর পরিবৃত্তের কেন্দ্র S এবং $AD \perp BC$ হলে, প্রমাণ করি যে $\angle BAD = \angle SAC$

10. O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্তের দুটি জ্যা AB ও CD পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে, $\angle AOD + \angle BOC = 2\angle BPC$

 যদি $\angle AOD$ ও $\angle BOC$ পরস্পর সম্পূরক হয়, তাহলে প্রমাণ করি যে, জ্যা দুটি পরস্পর লম্ব।

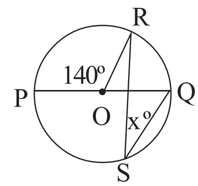
11. O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্তের AB ও CD দুটি জ্যা-কে বর্ধিত করলে তারা পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করলে, প্রমাণ করি যে, $\angle AOC - \angle BOD = 2\angle BPC$

12. ABCD চতুর্ভুজের A বিন্দুকে কেন্দ্র করে একটি বৃত্ত অঙ্কন করা হলো যেটি B, C ও D বিন্দু দিয়ে যায়। প্রমাণ করি যে, $\angle CBD + \angle CDB = \frac{1}{2}\angle BAD$

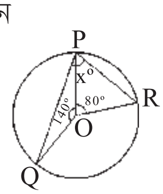
13. ΔABC-এর পরিকেন্দ্র O এবং OD, BC বাহুর উপর লম্ব। প্রমাণ করি যে $\angle BOD = \angle BAC$

14. **অতি সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

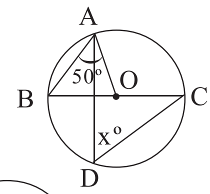
(A) বহু বিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :



(i) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র এবং PQ ব্যাস হলে, x-এর মান
(a) 140 (b) 40 (c) 80 (d) 20

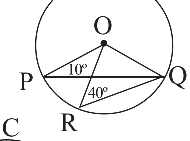


(ii) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র হলে, x-এর মান
(a) 70 (b) 60 (c) 40 (d) 200



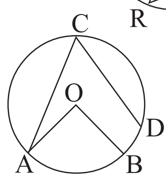
(iii) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র এবং BC ব্যাস হলে, x-এর মান
(a) 60 (b) 50 (c) 100 (d) 80

(iv) ABC ত্রিভুজের O পরিকেন্দ্র। $\angle OAB = 50^\circ$ হলে, $\angle ACB$-এর মান
(a) 50° (b) 100° (c) 40° (d) 80°



(v) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র হলে, $\angle POR$-এর মান
(a) 20° (b) 40° (c) 60° (d) 80°

(B) সত্য বা মিথ্যা লিখি :



(i) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র হলে, $\angle AOB = 2\angle ACD$

(ii) ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ভিতর O বিন্দু এমনভাবে অবস্থিত যে OA = OB এবং $\angle AOB = 2\angle ACB$. O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OA দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত অঙ্কন করলে C বিন্দু বৃত্তের উপর অবস্থিত হবে।

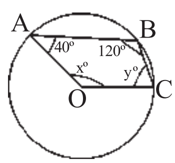
(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) একই চাপের উপর অবস্থিত বৃত্তস্থ কোণ কেন্দ্রস্থ কোণের ________।

(ii) O কেন্দ্রীয় বৃত্তে AB ও AC জ্যা দুটির দৈর্ঘ্য সমান। $\angle APB$ ও $\angle DQC$ বৃত্তস্থ কোণ হলে, কোণ দুটির মান ________।

(iii) একটি সমবাহু ত্রিভুজের পরিবৃত্তের কেন্দ্র O হলে, যে-কোনো একটি বাহু দ্বারা উৎপন্ন সম্মুখ কেন্দ্রস্থ কোণের মান ________।

15. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)**

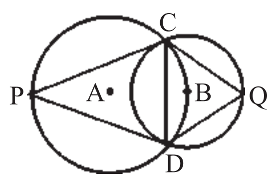


(i) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র। $\angle OAB = 40^\circ$, $\angle ABC = 120^\circ$, $\angle BCO = y^\circ$ এবং $\angle COA = x^\circ$ হলে, x ও y-এর মান নির্ণয় করি।

(ii) ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O এবং D বিন্দু BC বাহুর মধ্যবিন্দু। $\angle BAC = 40^\circ$ হলে, $\angle BOD$-এর মান নির্ণয় করি।

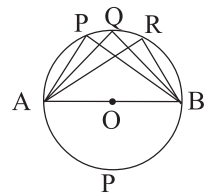
(iii) O কেন্দ্রীয় বৃত্তের উপর A, B, C তিনটি বিন্দু এমনভাবে অবস্থিত যে AOCB একটি সামান্তরিক। $\angle AOC$-এর মান নির্ণয় করি।

(iv) ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের পরিবৃত্তের কেন্দ্র O এবং $\angle ABC = 120^\circ$; বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 5 সেমি. হলে, AB বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।



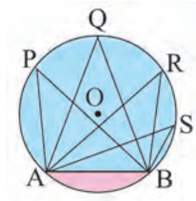
(v) A ও B কেন্দ্রীয় বৃত্তদ্বয় C এবং D বিন্দুতে ছেদ করে। A কেন্দ্রীয় বৃত্তের উপর অপর বৃত্তের কেন্দ্র B অবস্থিত। $\angle CQD = 70^\circ$ হলে, $\angle CPD$-এর মান নির্ণয় করি।

রাবেয়ার মতো শাকিলও স্কুলের ব্ল্যাকবোর্ডে একটি O কেন্দ্রীয় বৃত্ত এবং ওই বৃত্তের একটি ব্যাস AB এঁকেছে। তৃষা ওই বৃত্তে তিনটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ ∠APB, ∠AQB ও ∠ARB অঙ্কন করেছে।



প্রতিটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ ☐ সমকোণ [কোণগুলি মেপে লিখি]

∴ অর্থাৎ অর্ধবৃত্তস্থ সকল কোণই ☐ [সমান / অসমান]



আমি একই বৃত্তাংশস্থ অনেকগুলি বৃত্তস্থ কোণ আঁকি এবং চাঁদার সাহায্যে মেপে কোণগুলির মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয়ের চেষ্টা করি।

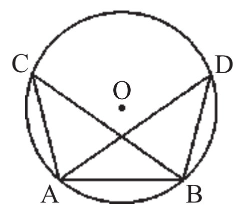
O কেন্দ্রীয় বৃত্তের ∠APB, ∠AQB, ∠ARB ও ∠ASB হলো ABSRQP বৃত্তাংশস্থ বৃত্তস্থ কোণ।

চাঁদার সাহায্যে মেপে দেখছি,

∠APB ☐ ∠AQB ☐ ∠ARB = ∠ASB [= / ≠ লিখি]

আমি খাতায় একই বৃত্তাংশস্থ বৃত্তস্থ একাধিক কোণ এঁকে ও চাঁদার সাহায্যে মেপে দেখছি একই বৃত্তাংশস্থ সকল বৃত্তস্থ কোণ ☐ [সমান / অসমান] **[নিজে এঁকে ও মেপে লিখি]**

হাতেকলমে



(1) সাদা আর্টপেপারে একটি O কেন্দ্রীয় বৃত্ত আঁকলাম।

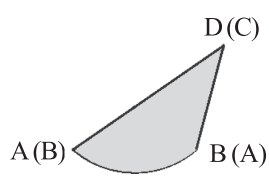
(2) এবার পাশের ছবির মতো O কেন্দ্রীয় বৃত্তে A ও B দুটি বিন্দু যোগ করে AB জ্যা পেলাম।

(3) এবার AB জ্যা-এর একই দিকে বৃত্তের C ও D বিন্দুতে দুটি কোণ ∠ACB ও ∠ADB আঁকলাম। অর্থাৎ ∠ACB ও ∠ADB হলো O কেন্দ্রীয় বৃত্তের ACDB বৃত্তাংশস্থ দুটি বৃত্তস্থ কোণ।

(4) ট্রেসিং পেপারের সাহায্যে ∠ACB ও ∠ADB কোণদুটি এঁকে কেটে নিলাম।

(5) এবার ট্রেসিং পেপারের কোণদুটি একটির উপর অপরটি এমনভাবে বসালাম যাতে শীর্ষবিন্দু C ও D মিশে যায়।

দেখছি, ∠ACB ও ∠ADB কোণদুটি পরস্পর মিশে গেছে।



∴ হাতেকলমে পেলাম, ∠ACB = ∠ADB

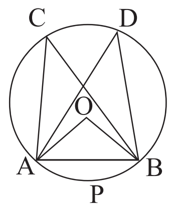
∴ হাতেকলমে পেলাম, একই বৃত্তাংশস্থ সকল বৃত্তস্থ কোণ সমান।

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য : 35. একই বৃত্তাংশস্থ সকল বৃত্তস্থ কোণের মান সমান।

প্রদত্ত : মনে করি O কেন্দ্রীয় বৃত্তের ∠ACB ও ∠ADB যে-কোনো দুটি কোণ ABDC বৃত্তাংশে অবস্থিত।

প্রমাণ করতে হবে : ACDB বৃত্তাংশস্থ সকল বৃত্তস্থ কোণই সমান।



যেহেতু ∠ACB ও ∠ADB ওই বৃত্তাংশস্থ যে-কোনো দুটি বৃত্তস্থ কোণ, সুতরাং ∠ACB ও ∠ADB পরস্পর সমান প্রমাণ করলেই উপপাদ্যটি প্রমাণিত হবে।

অঙ্কন : O, A বিন্দুদ্বয় ও O, B বিন্দুদ্বয় সরলরেখাংশ দ্বারা যুক্ত করলাম।

প্রমাণ : APB বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত ∠AOB কেন্দ্রস্থ কোণ এবং ∠ACB ও ∠ADB বৃত্তস্থ কোণ।

$\therefore \angle AOB = 2\angle ACB$

এবং $\angle AOB = 2\angle ADB$

সুতরাং, $2\angle ACB = 2\angle ADB$

$\therefore \angle ACB = \angle ADB$

নিজে করি 7.3

(1) প্রমাণ করি যে, একই বৃত্তের সমান সমান চাপের দ্বারা গঠিত বৃত্তস্থ সকল কোণই সমান।

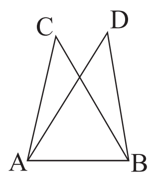
(2) প্রমাণ করি যে, বৃত্তের একাধিক বৃত্তস্থ কোণ সমান হলে সেই কোণগুলি যে যে চাপের দ্বারা গঠিত সেই, চাপগুলির দৈর্ঘ্য পরস্পর সমান।

আমরা হাতেকলমে যাচাই করে ও যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করলাম যে একই বৃত্তাংশস্থ সকল বৃত্তস্থ কোণের মান সমান।

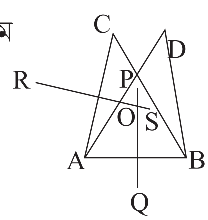
এই উপপাদ্যের বিপরীত কি সম্ভব? অর্থাৎ যে-কোনো দুটি বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তার একই পার্শ্বে অপর দুটি বিন্দুতে দুটি সমান কোণ উৎপন্ন করলে, ওই বিন্দু চারটি কি সমবৃত্তস্থ হবে?

হাতেকলমে যাচাই করি।

হাতেকলমে



(i) সাদা কাগজে A ও B যে-কোনো দুটি বিন্দু যোগ করে AB সরলরেখাংশ পেলাম। AB সরলরেখাংশ তার একই দিকে C ও D বিন্দুতে দুটি সমান কোণ ∠ACB ও ∠ADB উৎপন্ন করেছে।



(ii) কাগজ ভাঁজ করে হাতেকলমে AB ও AC সরলরেখাংশ দুটির লম্বসমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে PQ এবং RS পেলাম যারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

(iii) স্কেলের সাহায্যে মেপে দেখছি, AO ☐ OB ☐ OC ☐ OD

[নিজে হাতেকলমে করে = / ≠ বসাই]

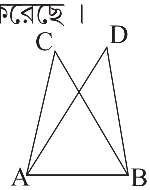
(iv) O-কে কেন্দ্র করে OA দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্ত A, B, C ও D বিন্দুগামী হবে।

সুতরাং পেলাম, A, B ও C তিনটি অসমরেখ বিন্দুগামী নির্দিষ্ট বৃত্ত D বিন্দুগামী হবে।

∴ হাতেকলমে পেলাম, A, B, D ও C বিন্দু চারটি সমবৃত্তস্থ।

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য : 36. দুটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাংশ তার একই পার্শ্বে অপর দুটি বিন্দুতে দুটি সমান কোণ উৎপন্ন করলে ওই চারটি বিন্দু সমবৃত্তস্থ হবে। [প্রমাণ মূল্যায়নের অন্তর্ভুক্ত নয়]

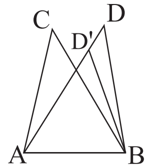


প্রদত্ত দুটি বিন্দু A ও B-এর সংযোজক সরলরেখাংশ C ও D বিন্দুতে সমান কোণ উৎপন্ন করেছে।

$\therefore \angle ACB = \angle ADB$

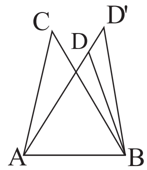
প্রমাণ করতে হবে : A, B, D ও C বিন্দুগুলি সমবৃত্তস্থ।

প্রমাণ : A, B ও C তিনটি অসমরেখ বিন্দু দিয়ে নির্দিষ্ট বৃত্ত অঙ্কন করি।



যদি নির্দিষ্ট বৃত্তটি D বিন্দুগামী না হয় তবে বৃত্তটি AD-কে বা বর্ধিত AD-কে একটি বিন্দুতে ছেদ করবে।

ধরি, বৃত্তটি AD-কে বা বর্ধিত AD-কে D′ বিন্দুতে ছেদ করেছে।



$\therefore$ A, B, D′ ও C বিন্দুচারটি সমবৃত্তস্থ। D′ ও B বিন্দু দুটি সরলরেখাংশ দ্বারা যুক্ত করি।

$\therefore \angle ACB = \angle AD'B$ (একই বৃত্তাংশস্থ বৃত্তস্থ কোণ)

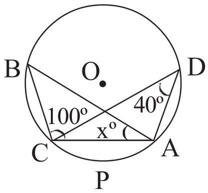
কিন্তু $\angle ACB = \angle ADB$

$\therefore \angle AD'B = \angle ADB$

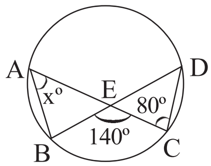
কিন্তু ইহা সম্ভব নয়, যদি না D ও D′ বিন্দুদ্বয় সমাপতিত হয়। [কারণ একটি ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ বিপরীত অন্তঃস্থকোণের সমান হতে পারে না]

$\therefore$ A, B, D ও C বিন্দু চারটি সমবৃত্তস্থ।

প্রয়োগ : 8. নীচের বৃত্তের ছবি দেখি ও x-এর মান নির্ণয় করি। O বৃত্তের কেন্দ্র।



(i)



(ii)

(i) O বৃত্তের কেন্দ্র।

দুটি বৃত্তস্থ কোণ $\angle ABC$ ও $\angle ADC$ উপচাপ CPA-এর দ্বারা গঠিত সম্মুখ কোণ।

$\therefore \angle ABC = \angle ADC = 40^\circ$ ($\because$ দেওয়া আছে $\angle ADC = 40^\circ$)

এবং ΔABC-এর $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ$

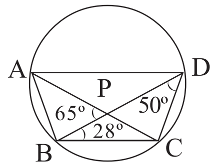
$\therefore 40^\circ + 100^\circ + x = 180^\circ$

বা, $x^\circ = 180^\circ - 140^\circ = \square$

$\therefore x = 40$

একইভাবে (ii) নং ছবির x-এর মান হিসাব করে লিখি।

প্রয়োগ : 9. পাশের ছবির $\angle BDC = 50^\circ$, $\angle APB = 65^\circ$, $\angle CBD = 28^\circ$; $\angle ADB$, $\angle ABD$, $\angle BAC$, $\angle ACB$, $\angle CAD$ এবং $\angle ACD$-এর মান নির্ণয় করি।



$\angle BAC = \angle BDC = \square$ [যেহেতু, একই বৃত্তাংশস্থ বৃত্তস্ত কোণ]

আবার, $\angle CAD = \square = 28^\circ$ [যেহেতু, একই বৃত্তাংশস্থ বৃত্তস্ত কোণ]

ΔBPC-এর, বহিঃস্থ $\angle APB = \angle PBC + \angle PCB$.

$\therefore 65^\circ = 28^\circ + \angle ACB$; $\therefore \angle ACB = \square$

$\therefore \angle ADB = \angle ACB = \square$ [একই বৃত্তাংশস্থ বৃত্তস্ত কোণ]

ΔABP-এর, $\angle ABP + \angle BPA + \angle PAB = 180^\circ$

$\therefore \angle ABP = \square$

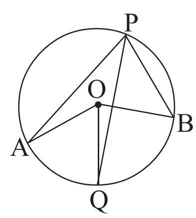
$\therefore \angle ABD = \square$ **[নিজে করি]**

$\angle ACD = \angle ABD = \square$ **[$\because$ একই বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত সম্মুখ বৃত্তস্থ বৃত্তস্ত কোণ]**

প্রয়োগ : 10. প্রমাণ করি যে-কোনো বৃত্তে একই বৃত্তাংশস্থ সমস্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডকগুলি একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী।

প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্তের APB বৃত্তাংশে অবস্থিত একটি কোণ $\angle APB$. $\angle APB$-এর সমদ্বিখণ্ডক বৃত্তটিকে Q বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে: PQ একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী।



প্রমাণ : $\angle APQ = \angle BPQ$ [$\because$ PQ, $\angle APB$-এর সমদ্বিখণ্ডক]

$\angle AOQ = 2\angle APQ$; আবার $\angle BOQ = 2\angle BPQ$

যেহেতু, $\angle APQ = \angle BPQ$, সুতরাং $\angle AOQ = \angle BOQ$

$\therefore$ বৃত্তচাপ AQ = বৃত্তচাপ BQ (যেহেতু চাপ AQ ও চাপ BQ কেন্দ্রে সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে)

$\therefore$ AQB বৃত্তচাপের মধ্যবিন্দু Q.

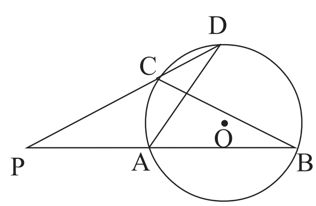
AQB নির্দিষ্ট হলে, Q একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

$\therefore$ APB বৃত্তচাপের উপর P বিন্দুর যে-কোনো অবস্থানের জন্য $\angle APB$-এর সমদ্বিখণ্ডক উহার বিপরীত চাপের মধ্যবিন্দুগামী অর্থাৎ নির্দিষ্ট বিন্দুগামী হবে।

প্রয়োগ : 11. পাশের চিত্রের একটি বৃত্তের AB ও CD দুটি জ্যা। BA ও DC-কে বর্ধিত করলে পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে $\angle PCB = \angle PAD$

প্রদত্ত : একটি বৃত্তের AB ও CD দুটি জ্যা। BA ও DC-কে বর্ধিত করলে পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে : $\angle PCB = \angle PAD$



প্রমাণ : $\angle BCD = \angle BAD$ (একই বৃত্তাংশস্থ বৃত্তস্ত কোণ)

আবার $\angle PCB = 180^\circ - \angle BCD$

এবং $\angle PAD = 180^\circ - \angle BAD$

$\because \angle BCD = \angle BAD$, সুতরাং $180^\circ - \angle BCD = 180^\circ - \angle BAD$

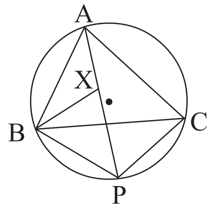
$\therefore \angle PCB = \angle PAD$ **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 12. ABC সমবাহু ত্রিভুজটি একটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত। BC উপচাপের উপর P যে-কোনো একটি বিন্দু। প্রমাণ করি যে PA = PB + PC

প্রদত্ত : ABC সমবাহু ত্রিভুজটি একটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত। BC উপচাপের উপর P যে-কোনো একটি বিন্দু।

প্রমাণ করতে হবে : PA = PB + PC

অঙ্কন : PA-এর থেকে PB-এর সমান করে PX অংশ কেটে নিলাম। B, X বিন্দুদ্বয় যোগ করলাম।



প্রমাণ : PB = PX [অঙ্কনানুসারে]

$\therefore \angle PBX = \angle PXB$ ———— (I)

আবার, $\angle ACB = \angle APB$ [একই বৃত্তাংশস্থ বৃত্তস্থ কোণ]

$= 60^\circ$ [যেহেতু, ABC সমবাহু ত্রিভুজ, সুতরাং $\angle ACB = 60^\circ$]

$\therefore \angle PBX + \angle PXB = 180^\circ - 60^\circ =$ ☐

$\therefore \angle PBX = \angle PXB = 60^\circ$ [(I) থেকে পেলাম]

$\therefore$ PBX সমবাহু ত্রিভুজ।

$\therefore \angle PBC = \angle PBX - \angle CBX = \angle CBA - \angle CBX = \angle XBA$ ———— (II)

ΔPBC ও ΔABX-এর মধ্যে AB = BC [$\because \Delta$ ABC সমবাহু]

$\angle ABX = \angle PBC$ [(II) থেকে পেলাম]

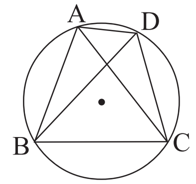
BX = PB ($\because \Delta BPX$ সমবাহু)

$\therefore \Delta BPC \cong \Delta ABX$ [সর্বসমতার S-A-S শর্তনুসারে]

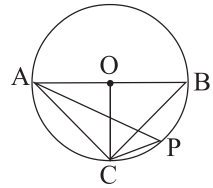
সুতরাং, AX = PC

$\therefore$ PA = PX + XA = PB + PC [প্রমাণিত]

কষে দেখি 7.2



1. পাশের ছবিতে $\angle DBA = 40^\circ$, $\angle BAC = 60^\circ$ এবং $\angle CAD = 20^\circ$; $\angle DCA$ ও $\angle BCA$-এর মান নির্ণয় করি। $\angle BAD$ ও $\angle DCB$-এর মানের সমষ্টি কত হবে হিসাব করে দেখি।



2. পাশের চিত্রে AOB বৃত্তের ব্যাস এবং O বৃত্তের কেন্দ্র। OC ব্যাসার্ধ AB-এর উপর লম্ব। যদি উপচাপ CB-এর উপর কোনো বিন্দু P হয়, তবে $\angle BAC$ ও $\angle APC$-এর মান হিসাব করে লিখি।

3. ABC ত্রিভুজের O লম্ববিন্দু এবং BC-এর উপর অঙ্কিত লম্ব AD-কে বর্ধিত করলে ΔABC-এর পরিবৃত্তকে G বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, OD = DG

4. ΔABC-এর অন্তর্বৃত্তের কেন্দ্র I; বর্ধিত AI ত্রিভুজের পরিবৃত্তকে P বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, $PB = PC = PI$

5. তিমির দুটি বৃত্ত এঁকেছে যারা পরস্পরকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। P বিন্দু দিয়ে দুটি সরলরেখা টানলাম যারা একটি বৃত্তকে A, B বিন্দুতে এবং অপর বৃত্তকে যথাক্রমে C, D বিন্দুতে ছেদ করল। প্রমাণ করি যে $\angle AQC = \angle BQD$

6. একটি বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুটি পরস্পর লম্ব। AB ও CD জ্যা দুটির ছেদবিন্দু P থেকে AD-এর উপর অঙ্কিত লম্বকে বর্ধিত করলে সেটি BC-কে E বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ করি যে, E, BC-এর মধ্যবিন্দু।

7. যদি ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের $AB = DC$ হয়, তবে প্রমাণ করি যে $AC = BD$ হবে।

8. O কেন্দ্রীয় বৃত্তে OA ব্যাসার্ধ এবং AQ একটি জ্যা। বৃত্তের উপর C একটি বিন্দু। O, A, C বিন্দুগামী বৃত্ত AQ জ্যা-কে P বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, $CP = PQ$

9. একটি বৃত্তে ABC ত্রিভুজটি অন্তর্লিখিত। AX, BY এবং CZ যথাক্রমে $\angle BAC$, $\angle ABC$ ও $\angle ACB$-এর সমদ্বিখণ্ডক এবং বৃত্তে যথাক্রমে X, Y ও Z বিন্দুতে মিলিত হয়। প্রমাণ করি যে, AX, YZ-এর উপর লম্ব।

10. একটি বৃত্তে ABC ত্রিভুজটি অন্তর্লিখিত। $\angle BAC$, $\angle ABC$ ও $\angle ACB$-এর সমদ্বিখণ্ডক বৃত্তে যথাক্রমে X, Y ও Z বিন্দুতে মিলিত হয়। প্রমাণ করি ΔXYZ -এর, $\angle YXZ = 90^\circ - \dfrac{\angle BAC}{2}$

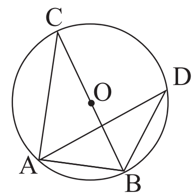
11. ΔABC-এর A বিন্দু থেকে BC বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব BC বাহুকে D বিন্দুতে এবং B বিন্দু থেকে CA বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব CA বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, A, B, D, E বিন্দু চারটি সমবৃত্তস্থ।

12. **অতি সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :

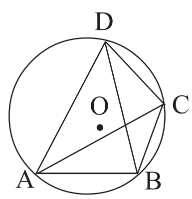
(i) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র ; $\angle ACB = 30^\circ$, $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle DAB = 35^\circ$ এবং $\angle DBC = x^\circ$ হলে, x-এর মান

(a) 35 (b) 70 (c) 65 (d) 55



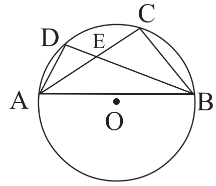
(ii) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র। $\angle BAD = 65^\circ$, $\angle BDC = 45^\circ$ হলে, $\angle CBD$-এর মান

(a) 65° (b) 45° (c) 40° (d) 20°

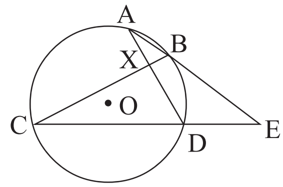


(iii) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র। $\angle AEB = 110^\circ$ এবং $\angle CBE = 30^\circ$ হলে, $\angle ADB$ -এর মান

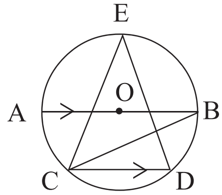
(a) 70° (b) 60° (c) 80° (d) 90°



(iv) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র। $\angle BCD = 28^\circ$, $\angle AEC = 38^\circ$ হলে, $\angle AXB$-এর মান
(a) 56° (b) 86° (c) 38° (d) 28°

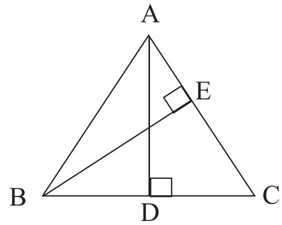


(v) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB ব্যাস। AB || CD. $\angle ABC = 25^\circ$ হলে, $\angle CED$ -এর মান
(a) 80° (b) 50° (c) 25° (d) 40°



(B) সত্য বা মিথ্যা লিখি :

(i) পাশের চিত্রে AD ও BE যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের BC ও AC বাহুর উপর লম্ব। A, B, D, E বিন্দু চারটি সমবৃত্তস্থ।



(ii) ABC ত্রিভুজের AB = AC; BE ও CF যথাক্রমে $\angle ABC$ ও $\angle ACB$-এর সমদ্বিখণ্ডক এবং AC ও AB বাহুকে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে। B, C, E, F বিন্দু চারটি সমবৃত্তস্থ নয়।

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

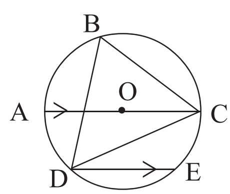
(i) একই বৃত্তাংশস্থ বৃত্তস্থ কোণ ________।

(ii) দুটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাংশ তার একই পার্শ্বে অপর দুটি বিন্দুতে সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করলে বিন্দু চারটি ________ হবে।

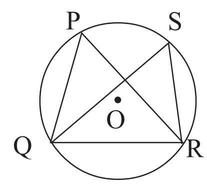
(iii) একই বৃত্তে দুটি চাপ দ্বারা উৎপন্ন বৃত্তস্থ কোণ দুটি সমান হলে চাপ দুটির দৈর্ঘ্য ________।

13. সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)

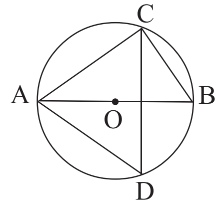
(i) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র, AC ব্যাস এবং জ্যা DE ও ব্যাস AC সমান্তরাল। $\angle CBD = 60^\circ$ হলে, $\angle CDE$-এর মান নির্ণয় করি।



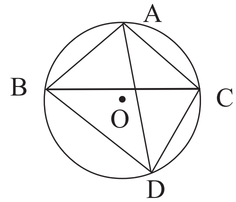
(ii) পাশের চিত্রে $\angle PQR$-এর সমদ্বিখণ্ডক QS; $\angle SQR = 35^\circ$ এবং $\angle PRQ = 32^\circ$ হলে , $\angle QSR$-এর মান নির্ণয় করি।



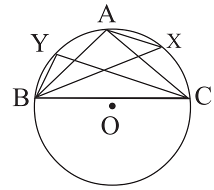
(iii) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB ব্যাস। AB ও CD পরস্পর লম্ব এবং $\angle ADC = 50^\circ$; $\angle CAD$-এর মান নির্ণয় করি।



(iv) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB = AC ; ∠ABC = 32º হলে, ∠BDC-এর মান নির্ণয় করি।



(v) পাশের চিত্রে BX ও CY যথাক্রমে ∠ABC ও ∠ACB-এর সমদ্বিখণ্ডক। AB = AC এবং BY = 4সেমি. হলে, AX-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

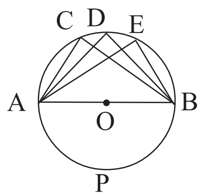


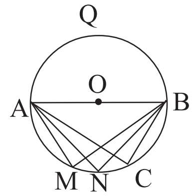
রাবেয়া একটি O কেন্দ্রীয় বৃত্ত এঁকেছে। শাকিল রাবেয়ার আঁকা বৃত্তে একটি ব্যাস AB আঁকল।

এই O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB ব্যাস বা APB বৃত্তচাপ কীরূপ বিভিন্ন বৃত্তস্থ কোণ উৎপন্ন করবে এঁকে ও মেপে লিখি।

মেপে দেখছি, AB ব্যাস বা APB বৃত্তচাপ বৃত্তের উপর C, D ও E প্রতিটি বিন্দুতে ☐ ডিগ্রি মাপের বৃত্তস্থ কোণ উৎপন্ন করেছে। [নিজে এঁকে ও মেপে লিখি]

আবার AB ব্যাস বা AQP বৃত্তচাপ বৃত্তের উপর M, N ও S প্রতিটি বিন্দুতে ☐ ডিগ্রি মাপের বৃত্তস্থ কোণ উৎপন্ন করেছে।





3 এই ∠ACB, ∠ADB, ∠AEB, ∠AMB, ∠ANB ও ∠ASB কোণগুলি অর্থাৎ একটি বৃত্তের ব্যাস যে-কোনো অর্ধবৃত্তে যে সম্মুখ বৃত্তস্থ কোণ উৎপন্ন করে তাদের কী বলা হয়?

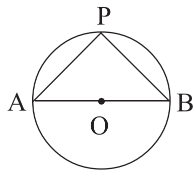
একটি বৃত্তের ব্যাস অর্ধবৃত্তে যে সম্মুখ বৃত্তস্থ কোণ উৎপন্ন করে তাকে **অর্ধবৃত্তস্থ কোণ** বলা হয়। এখানে ∠ACB, ∠ADB, ∠AEB এবং ∠AMB, ∠ANB ও ∠ASB প্রত্যেকে অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।

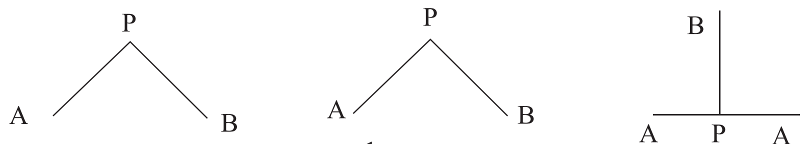
হাতেকলমে যাচাই করে দেখি যে অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ।

হাতেকলমে

(1) O কেন্দ্রীয় বৃত্তে যে-কোনো একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ ∠APB আঁকলাম।

(2) ট্রেসিং পেপারের সাহায্যে দুটি ∠APB এঁকে কেটে নিলাম এবং O কেন্দ্রীয় বৃত্তে AB ব্যাসের উপর O বিন্দুতে কোণদুটি নীচের ছবির মতো পাশাপাশি বসিয়ে দেখছি ∠APB, কোণদুটি পরস্পর সম্পূরক এবং সমান। (যেহেতু একই মাপের কোণ)
∴ প্রত্যেকে এক সমকোণ।



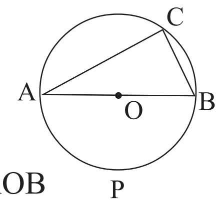


∴ হাতেকলমে পেলাম, $\angle APB = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$

∴ হাতেকলমে পেলাম, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ।

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য : 37. অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ।



প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের $\angle ACB$ যে-কোনো একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।

প্রমাণ করতে হবে যে : $\angle ACB = 1$ সমকোণ।

প্রমাণ : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের $\widehat{APB}$ বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত সম্মুখ কেন্দ্রস্থ কোণটি $\angle AOB$ এবং $\angle ACB$ ওই $\widehat{APB}$ বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত সম্মুখ বৃত্তস্থ কোণ।

$\therefore \angle AOB = 2\angle ACB$ .... (I)

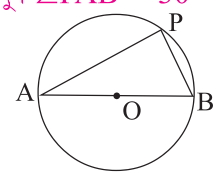
যেহেতু AB একটি সরলরেখাংশ, সুতরাং $\angle AOB$ একটি সরলকোণ। $\therefore \angle AOB = 2$ সমকোণ

সুতরাং, $2\angle ACB = 2$ সমকোণ [I থেকে পেলাম]

$\therefore \angle ACB = 1$ সমকোণ [প্রমাণিত]

অন্য একটি যে-কোনো O কেন্দ্রীয় বৃত্তে $\angle PQR$ একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ। যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে $\angle PQR = 90^\circ$। [নিজে করি]

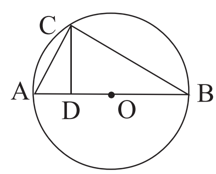
প্রয়োগ : 13. একটি বৃত্তের ব্যাস AB এবং P বৃত্তের উপর যে-কোনো একটি বিন্দু। $\angle PAB = 30^\circ$ হলে, $\angle PBA$-এর মান নির্ণয় করি।



উত্তর : $\angle APB$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ। $\therefore \angle APB = 90^\circ$; $\angle PAB = 30^\circ$

$\therefore \angle PBA = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

প্রয়োগ : 14. পাশের চিত্রে O কেন্দ্রীয় বৃত্তে AB ব্যাস। C বৃত্তের উপর যে-কোনো একটি বিন্দু। $\angle BAC = 50^\circ$ এবং CD, AB-এর উপর লম্ব হলে, $\angle BCD$-এর মান নির্ণয় করি।



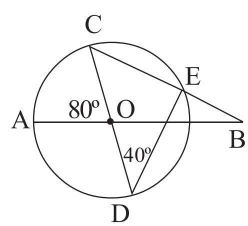
উত্তর : $\angle ACB$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ। সুতরাং $\angle ACB = 90^\circ$

সমকোণী ΔACD-তে, $\angle ADC = 90^\circ$, $\angle DAC = 50^\circ$, সুতরাং

$\angle ACD = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$

আবার, $\angle ACB = 90^\circ$; সুতরাং $\angle BCD = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$

প্রয়োগ : 15. পাশের চিত্রে AB ও CD সরলরেখাংশ দুটি বৃত্তের কেন্দ্র O-তে ছেদ করেছে। যদি $\angle AOC = 80^\circ$ $\angle CDE = 40^\circ$ হয়, তাহলে (i) $\angle DCE$ ও (ii) $\angle ABC$-এর মান নির্ণয় করি।



$\angle CED$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ। $\therefore \angle CED = 90^\circ$

সমকোণী ΔCED-তে, $\angle CED = 90^\circ$, $\angle CDE = 40^\circ$,

$\therefore \angle DCE = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$ ....(i)

ΔBOC-তে, বহিঃস্থ $\angle AOC = \angle OBC + \angle OCB$

$80^\circ = \angle OBC + 50^\circ$ ($\because \angle DCE = 50^\circ$)

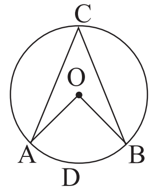
$\therefore \angle OBC = 30^\circ$

সুতরাং, $\angle ABC = 30^\circ$ .... (ii)

প্রয়োগ : 16. যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে অর্ধবৃত্তাংশস্থ অপেক্ষা বৃহত্তর বৃত্তাংশস্থ কোণ সূক্ষ্মকোণ।

প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের ACB বৃত্তাংশ অর্ধবৃত্তাংশস্থ অপেক্ষা বৃহত্তর।

প্রমাণ করতে হবে যে : $\angle ACB$ একটি সূক্ষ্মকোণ।



(iii)

প্রমাণ : যেহেতু, ACB বৃত্তাংশ অর্ধবৃত্তাংশস্থ অপেক্ষা বৃহত্তর বৃত্তাংশস্থ,

$\therefore \overset{\frown}{ADB}$ একটি উপচাপ।

$\therefore$ ADB উপচাপের দ্বারা গঠিত কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle AOB$, 2 সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

আবার, ADB উপচাপের দ্বারা গঠিত পরিধিস্থ কোণ $\angle ACB$; $\angle AOB < 180^o$

অর্থাৎ, $2\angle ACB < 180^o$ $\therefore \angle ACB < 90^o$

$\therefore \angle ACB$, 1 সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর অর্থাৎ $\angle ACB$ সূক্ষ্মকোণ। **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 17. প্রমাণ করি যে অর্ধবৃত্তাংশস্থ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বৃত্তাংশস্থ কোণ স্থূলকোণ। **[নিজে করি]**

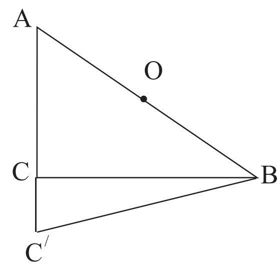
প্রয়োগ : 18. যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, যে-কোনো সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের মধ্যবিন্দু ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু থেকে সমদূরবর্তী।

প্রদত্ত : ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle ACB = 90^o$ এবং O অতিভুজ AB-এর মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ করতে হবে যে : OA = OB = OC

অঙ্কন : O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OB দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করলাম।

প্রমাণ : O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OB দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তটি A ও B বিন্দুগামী। যদি বৃত্তটি C বিন্দুগামী না হয়, ধরি বৃত্তটি AC-কে বা বর্ধিত AC-কে C′ বিন্দুতে ছেদ করে। B , C′ যুক্ত করি



$\therefore \angle AC'B = 90^o$ [$\because$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ]

আবার $\angle ACB = 90^o$

$\therefore \angle ACB = \angle AC'B$

এটা অসম্ভব, কারণ কোনো ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ একটি অন্তঃস্থ বিপরীত কোণের সমান হতে পারে না।

এটা সম্ভব হবে যদি C ও C′ একই বিন্দু হয়।

$\therefore$ বৃত্তটি C বিন্দুগামী

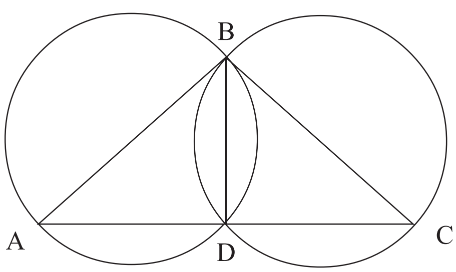
$\therefore$ OA = OB = OC [প্রমাণিত]

প্রয়োগ : 19. যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজকে ব্যাস করে বৃত্ত অঙ্কন করলে বৃত্তটি সমকৌণিক বিন্দু দিয়ে যাবে। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 20. যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে একটি বিষমবাহু ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর দুটি বাহুকে ব্যাস করে অঙ্কিত বৃত্ত দুটির ছেদবিন্দু তৃতীয় বাহুর উপর অবস্থিত হবে।

প্রদত্ত : Δ ABC-এর AC বৃহত্তম বাহু।

AB বাহুকে ব্যাস করে একটি বৃত্ত অঙ্কন করলাম যা AC-কে D বিন্দুতে ছেদ করেছে।



প্রমাণ করতে হবে যে : BC-কে ব্যাস করে অঙ্কিত বৃত্ত D বিন্দু দিয়ে যাবে।

অঙ্কন : B, D বিন্দুদ্বয় সরলরেখাংশ দ্বারা যুক্ত করলাম।

প্রমাণ : $\angle ADB$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ ।

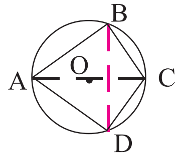
$\therefore \angle ADB$ = 1 সমকোণ

$\therefore \angle CDB$ = 1 সমকোণ

যেহেতু, CDB সমকোণী ত্রিভুজে $\angle CDB$ = 1 সমকোণ, সুতরাং BC বৃত্তের ব্যাস।

$\therefore$ BC-কে ব্যাস করে অঙ্কিত বৃত্ত অবশ্যই D বিন্দু দিয়ে যাবে।

প্রয়োগ :21. ABC ও ADC সমকোণী ত্রিভুজদুটির সাধারণ অতিভুজ AC; প্রমাণ করি যে ∠CAD = ∠CBD;



প্রদত্ত : ABC ও ADC সমকোণী ত্রিভুজের সাধারণ অতিভুজ AC।

প্রমাণ করতে হবে : ∠CAD = ∠CBD

প্রমাণ : ΔABC -এর ∠ABC = 90°

∴ AC-কে ব্যাস করে বৃত্ত অঙ্কন করলে B বিন্দুগামী হবে। অনুরূপে, AC-কে ব্যাস করে অঙ্কিত বৃত্তটি D বিন্দুগামী।

∠CAD ও ∠CBD কোণ দুটি বৃত্তের একই উপচাপ DC-এর দ্বারা গঠিত বৃত্তস্থ কোণ।

∴ ∠CAD = ∠CBD (**প্রমাণিত**)

কষে দেখি 7.3

1. ABC ত্রিভুজের B কোণটি সমকোণ। যদি AC-কে ব্যাস করে একটি বৃত্ত অঙ্কন করি যা AB-কে D বিন্দুতে ছেদ করে, তবে নীচের তথ্যগুলির মধ্যে কোনটি ঠিক লিখি—
(i) AB > AD (ii) AB = AD (iii) AB < AD

2. প্রমাণ করি যে একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহু দুটির যে-কোনোটিকে ব্যাস করে অঙ্কিত বৃত্ত অসমান বাহুটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

3. সাহানা দুটি বৃত্ত এঁকেছে যারা পরস্পরকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। PA ও PB যথাক্রমে দুটি বৃত্তের ব্যাস হলে, প্রমাণ করি যে A, Q ও B বিন্দুত্রয় সমরেখ।

4. রজত একটি সরলরেখাংশ PQ অঙ্কন করেছে যার মধ্যবিন্দু R এবং সে PR ও PQ-কে ব্যাস করে দুটি বৃত্ত অঙ্কন করেছে। আমি P বিন্দুগামী একটি সরলরেখা অঙ্কন করেছি যা প্রথম বৃত্তকে S বিন্দুতে এবং দ্বিতীয় বৃত্তকে T বিন্দুতে ছেদ করেছে। যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে PS = ST

5. একটি বৃত্তের উপর তিনটি বিন্দু P, Q ও R অবস্থিত। PQ ও PR-এর উপর P বিন্দুতে অঙ্কিত লম্ব দুটি বৃত্তকে যথাক্রমে S ও T বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে, RQ = ST

6. ABC একটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ। ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাস AP; BE ও CF যথাক্রমে AC ও AB বাহুর উপর লম্ব এবং তারা পরস্পরকে Q বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, BPCQ একটি সামান্তরিক।

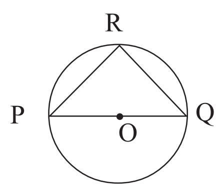
7. একটি ত্রিভুজের শীর্ষকোণের অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক ও বহির্সমদ্বিখণ্ডক ত্রিভুজটির পরিবৃত্তকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, PQ বৃত্তের একটি ব্যাস।

8. AB এবং CD একটি বৃত্তের দুটি ব্যাস। প্রমাণ করি যে, ACBD একটি আয়তাকার চিত্র।

9. প্রমাণ করি, একটি রম্বসের বাহুগুলিকে ব্যাস করে বৃত্ত অঙ্কন করলে বৃত্তগুলি একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে যায়।

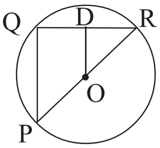
10. **অতি সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V. S. A.)**

(A) বহু বিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :

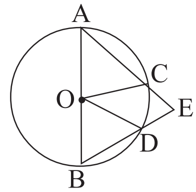


(i) O কেন্দ্রীয় বৃত্তে PQ একটি ব্যাস এবং PR = RQ; ∠RPQ -এর মান
(a) 30° (b) 90° (c) 60° (d) 45°

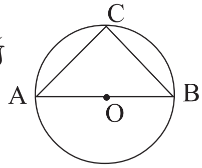
(ii) QR বৃত্তের একটি জ্যা এবং POR বৃত্তের একটি ব্যাস।
OD, QR বাহুর উপর লম্ব। OD = 4 সেমি. হলে, PQ-এর দৈর্ঘ্য
(a) 4সেমি. (b) 2সেমি. (c) 8সেমি. (d) কোনটিই নয়



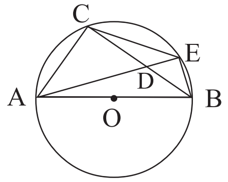
(iii) AOB বৃত্তের ব্যাস। AC এবং BD জ্যা দুটি বর্ধিত করলে E বিন্দুতে
মিলিত হয়। $\angle COD = 40^\circ$ হলে, $\angle CED$-এর মান
(a) 40° (b) 80° (c) 20° (d) 70°



(iv) AOB বৃত্তের ব্যাস। AC = 3 সেমি. ও BC = 4 সেমি. হলে AB -এর দৈর্ঘ্য
(a) 3 সেমি. (b) 4 সেমি. (c) 5 সেমি. (d) 8 সেমি.



(v) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB ব্যাস। $\angle BCE = 20^\circ$, $\angle CAE = 25^\circ$ হলে , $\angle AEC$-এর মান নির্ণয় করি।
(a) 50° (b) 90° (c) 45° (d) 20°



(B) সত্য বা মিথ্যা লিখি :

(i) অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর বৃত্তাংশস্থ কোণ স্থূলকোণ।

(ii) ABC ত্রিভুজের AB বাহুর মধ্যবিন্দু O এবং OA = OB = OC; AB বাহুকে ব্যাস করে বৃত্ত অঙ্কন করলে বৃত্তটি C বিন্দু দিয়ে যাবে।

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) অর্ধবৃত্তস্থ কোণ ________।

(ii) অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বৃত্তাংশস্থ কোণ ________।

(iii) সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজকে ব্যাস করে বৃত্ত অঙ্কন করলে বৃত্তটি ________ বিন্দু দিয়ে যাবে।

11. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S. A.)**

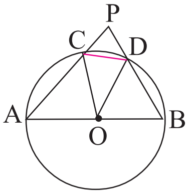
(i) ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB = AC; AB বাহুকে ব্যাস করে বৃত্ত অঙ্কন করলে বৃত্তটি BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে, BD = 4 সেমি. হলে CD-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

(ii) একটি বৃত্তে দুটি জ্যা AB এবং AC পরস্পর লম্ব। AB = 4 সেমি. ও AC = 3 সেমি. হলে , বৃত্তটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

(iii) একটি বৃত্তে দুটি জ্যা PQ এবং PR পরস্পর লম্ব। বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r সেমি. হলে, জ্যা QR-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

(iv) AOB বৃত্তের একটি ব্যাস। C বৃত্তের উপর একটি বিন্দু। $\angle OBC = 60^\circ$ হলে $\angle OCA$-এর মান নির্ণয় করি।

(v) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB ব্যাস। জ্যা CD-এর দৈর্ঘ্য বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের সমান। AC ও BD-কে বর্ধিত করায় P বিন্দুতে ছেদ করে। $\angle APB$-এর মান নির্ণয় করি।



8 লম্ব বৃত্তাকার চোঙ
RIGHT CIRCULAR CYLINDER

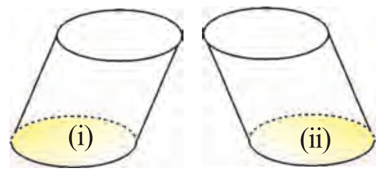
আমাদের বাড়ির পড়ার ঘরের টেবিলে একটি সুন্দর কাঠের পেনস্ট্যান্ড রাখা আছে। এটি অনেকদিনের পুরোনো। এটির কিছুটা অংশ ভেঙে গেছে। তাই আরও একটি পেনস্ট্যান্ডের প্রয়োজন।

আমি ও দিদি দুজনে মিলে ঠিক করেছি যে ওইরকম একটি পেনস্ট্যান্ড তৈরি করব।

1 কিন্তু এই পেনস্ট্যান্ড কীরূপ আকারের?

এই পেনস্ট্যান্ডটির আকার চোঙ বা বেলনের মতো। পাশের চিত্রের পেনস্ট্যান্ডটি **লম্ব বৃত্তাকার চোঙ** (Right Circular Cylinder)-এর মতো।

কিন্তু পাশের (i) ও (ii) নং চিত্রের চোঙ (Cylinder) দুটি লম্ব বৃত্তাকার নয়।



2 কিন্তু শুধু চোঙ বলা থাকলে কোন চোঙ বুঝব?

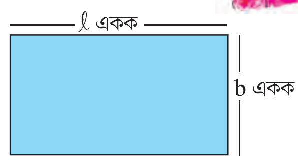
শুধু চোঙ বলা থাকলে এখানে **লম্ব বৃত্তাকার চোঙ** বুঝব।

একটি আয়তক্ষেত্রাকার রঙিন কাগজ আছে।

3 এই পেনস্ট্যান্ডটির বাইরের চারপাশ মুড়তে (উপর ও নীচে বাদ দিয়ে) ন্যূনতম কতটা রঙিন কাগজ লাগবে কীভাবে পাব?

লম্ব বৃত্তাকার চোঙের পার্শ্বতল নির্ণয়ের মাধ্যমে জানব।

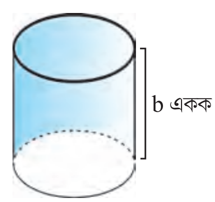
আমরা হাতেকলমে লম্ব বৃত্তাকার চোঙের পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করি।



(1) একটি আয়তক্ষেত্রাকার রঙিন কাগজ নিলাম।

ধরি, আয়তক্ষেত্রাকার ওই কাগজের দৈর্ঘ্য ℓ একক এবং প্রস্থ b একক।

(2) ওই আয়তক্ষেত্রাকার কাগজটি পাশের ছবির মতো পেনস্ট্যান্ডের বাইরের চারপাশের গা দিয়ে প্রস্থ বরাবর মুড়ে সেলোটেপ দিয়ে প্রান্তদুটি জুড়ে দিলাম।



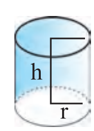
দেখছি, আয়তক্ষেত্রাকার কাগজের দৈর্ঘ্য = ℓ একক = লম্ব বৃত্তকার চোঙের ভূমির পরিধি = $2\pi r$ একক [যেখানে r একক = লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য]

আবার, আয়তক্ষেত্রাকার কাগজের প্রস্থ = b একক = চোঙের উচ্চতা (ধরি h একক)

$\therefore$ ওই আয়তক্ষেত্রাকার কাগজের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ = $\ell \times b$ বর্গ একক

= $2\pi r \times h$ বর্গ একক = $2\pi rh$ বর্গ একক

লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ব্যাসার্ধ মানে ভূমির ব্যাসার্ধ।



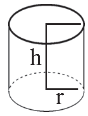
$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, লম্ব বৃত্তাকার চোঙের পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল $2\pi rh$ [যেখানে r = লম্ব বৃত্তকার চোঙের ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য, h = লম্ব বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা]

বুঝেছি, চাকতির (পেনস্ট্যান্ডের তলা) ব্যাসার্ধ r একক হলে এবং h একক উচ্চতার পেনস্ট্যান্ডটির বাইরের চারপাশ রঙিন কাগজ দিয়ে মুড়তে ন্যূনতম $2\pi rh$ বর্গ একক কাগজ লাগবে।

4 কিন্তু লম্ব বৃত্তাকার চোঙের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল কী হবে?

লম্ব বৃত্তাকার চোঙের একটি বক্রতল বা পার্শ্বতল এবং দুটি একই ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার সমতল থাকে।

লম্ব বৃত্তাকার চোঙের পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল=$2\pi rh$ [যেখানে r = চোঙের বৃত্তাকার তলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য এবং h = চোঙের উচ্চতা]



$= 2\pi r \times h$

= চোঙের বৃত্তাকার তলের পরিধি × উচ্চতা

∴ লম্ব বৃত্তাকার চোঙের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল
= পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল + দুটি বৃত্তাকার তলের ক্ষেত্রফল
$= 2\pi rh + 2\pi r^2$ [যেখানে r = চোঙের বৃত্তাকার তলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য এবং h = চোঙের উচ্চতা]
$= 2\pi r(h+r)$

কিন্তু আমরা লম্ব বৃত্তাকার চোঙের আকৃতির যে পেনস্ট্যান্ডটি কাগজ দিয়ে মুড়লাম সেটি একমুখ খোলা।

∴ ওই পেনস্ট্যান্ডের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2\pi rh + \pi r^2$ [r = চোঙের বৃত্তাকার তলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য এবং h = চোঙের উচ্চতা]

প্রয়োগ : 1. একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ভূমির ব্যাসের দৈর্ঘ্য 12 সেমি. এবং উচ্চতা 21 সেমি. হলে , চোঙের পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল কী হবে, হিসাব করে লিখি।

লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $\frac{12}{2}$ সেমি. = 6 সেমি.

∴ লম্ব বৃত্তাকার চোঙের পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল= $2 \times \pi \times 6 \times 21$ বর্গ সেমি.

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 6 \times 21$ বর্গ সেমি. = ☐ বর্গ সেমি.

প্রয়োগ : 2. যে চোঙের ভূমির পরিধি 44 মিটার এবং উচ্চতা 14 মিটার, তার পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল কী হবে, হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 3. একটি ঢাকনাসমেত চোঙাকৃতি জলের ট্যাঙ্কের ভূমির ক্ষেত্রফল 616 বর্গ মিটার এবং উচ্চতা 21 মিটার। হিসাব করে ওই ট্যাঙ্কের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল লিখি।

ধরি, জলের ট্যাঙ্কের বৃত্তাকার ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = r মিটার

∴ ভূমির ক্ষেত্রফল = πr^2 বর্গ মিটার

শর্তানুসারে, $\pi r^2 = 616$

বা, $\frac{22}{7} \times r^2 = 616$

বা, $r^2 = 616 \times \frac{7}{22}$ ∴ r = ☐

∴ জলের ট্যাঙ্কের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= (2\pi r^2 + 2\pi rh)$ বর্গ মিটার [যেখানে, চোঙের উচ্চতা = h মিটার]

$= 2\times \frac{22}{7} \times r(r+h)$ বর্গ মিটার

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 14(14+21)$ বর্গ মিটার

= ☐ বর্গ মিটার

প্রয়োগ : 4. যদি কোনো ঢাকনাসমেত চোঙাকৃতি পাত্রের ভূমির পরিধি 22 ডেকামিটার এবং উচ্চতা 5 ডেকামিটার হয়, তবে ওই পাত্রের বাইরের সমগ্রতল রং করতে কতটা পরিমাণ জায়গা রং করতে হবে, হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 5. (i) একটি একমুখ খোলা লম্ব বৃত্তাকার পাত্রের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 1474 বর্গ সেমি.। পাত্রটির ভূমির ব্যাসের দৈর্ঘ্য 14 সেমি. হলে, উচ্চতা কত হবে, হিসাব করে লিখি।

(ii) আবার পাত্রটি যদি দুই মুখ বন্ধ হতো, তবে সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল কত হতো হিসাব করে লিখি।

(i) লম্ব বৃত্তাকার পাত্রের ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $= \frac{14}{2}$ সেমি. = 7 সেমি.

ধরি,পাত্রটির উচ্চতা h সেমি.

$\therefore$ পাত্রটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = ভূমির ক্ষেত্রফল + বক্রতলের ক্ষেত্রফল

$= (\frac{22}{7}\times7^2 + 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times h)$ বর্গ সেমি.

$= (154 + 44h)$ বর্গ সেমি.

শর্তানুসারে, $154 + 44h = 1474$

$\therefore h =$ ☐ **[নিজে হিসাব করে লিখি]**

$\therefore$ পাত্রটির উচ্চতা 30 সেমি.।

যদি পাত্রটির দুই মুখ বন্ধ হতো তখন ওই পাত্রের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল

= পাত্রের উপরিতলের ক্ষেত্রফল + 1474 বর্গ সেমি.

$= (\frac{22}{7} \times 7^2 + 1474)$ বর্গ সেমি. = ☐ বর্গ সেমি.

প্রয়োগ : 6. স্টিলের পাতলা চাদর দিয়ে তৈরি ঢাকনাসমেত একটি ড্রামের ভূমির ব্যাসের দৈর্ঘ্য 4.2 ডেসিমি.। যদি ড্রামটি তৈরি করতে 112.20 বর্গ ডেসিমি. চাদর লাগে, তবে ড্রামটির উচ্চতা কত হবে তা হিসাব করে লিখি। আবার 1 বর্গ মি. স্টিলের দাম 25 টাকা হলে, ড্রামটি তৈরি করতে কত খরচ হবে হিসাব করি। **[নিজে করি]**

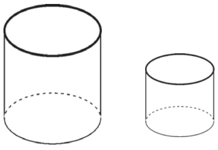
আমার ভাই ও বোন তাদের ব্যবহার করা লম্ব চোঙাকৃতি ঘনবস্তুগুলি ঘরের এক কোণে জড়ো করে রাখছে। তারা তাদের জল খাওয়ার লম্ব চোঙাকার গ্লাসগুলোও এনে রেখেছে।

দেখছি, দুটি গ্লাসের ভূমির ব্যাস ও উচ্চতা আলাদা।

(5) কিন্তু কোন গ্লাসে বেশি জল ধরে কীভাবে বুঝব?

চোঙাকার গ্লাসগুলির আয়তন নির্ণয় করে বুঝব

কিন্তু লম্ব বৃত্তাকার চোঙের আয়তন কীভাবে পাব?



লম্ব বৃত্তাকার চোঙের আয়তন = ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা

$= \pi r^2 \times h$

$= \pi r^2 h$

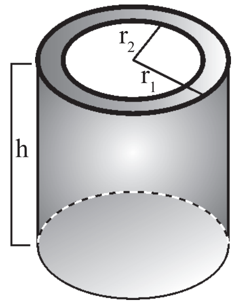
প্রয়োগ : 7. যদি গ্লাসের ভূমির ব্যাসের দৈর্ঘ্য 11.2 সেমি. এবং উচ্চতা 15 সেমি. হয়, তবে ওই গ্লাসে কত জল ধরবে, হিসাব করি।

বুঝেছি, যদি গ্লাসের ভূমির ব্যাসের দৈর্ঘ্য 11.2 সেমি. এবং উচ্চতা 15 সেমি. হয়, তবে ওই গ্লাসে জল ধরবে

$= \pi \times \left(\frac{11.2}{2}\right)^2 \times 15$ ঘন সেমি.

$= \frac{22}{7} \times \frac{56}{10} \times \frac{56}{10} \times 15$ ঘন সেমি.

= ☐ ঘন সেমি.



(6) কিন্তু ফাঁপা চোঙাকার ধাতব নলে কতটা পরিমাণ ধাতু আছে কীভাবে পাব?

কোনো ফাঁপা চোঙের বাইরের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r_1 একক,

ভিতরের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r_2 এবং উচ্চতা h একক হলে,

ফাঁপা চোঙটির আয়তন $= (\pi r_1^2 h - \pi r_2^2 h)$ ঘন একক

$= \pi (r_1^2 - r_2^2)\, h$ ঘন একক

প্রয়োগ : 8. দুই মুখ খোলা লোহার তৈরি একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা 42 সেমি.। চোঙটি 1 সেমি. পুরু এবং তার বহির্ব্যাসের দৈর্ঘ্য 10 সেমি. হলে, চোঙটি কত পরিমাণ লোহা দিয়ে তৈরি তা হিসাব করি।

চোঙটির বাহিরের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $= \frac{10}{2}$ সেমি. = 5 সেমি.

চোঙটি 1 সেমি. পুরু। $\therefore$ চোঙটির ভিতরের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = (5 – 1) সেমি. = 4 সেমি.

চোঙটিতে লোহা আছে,

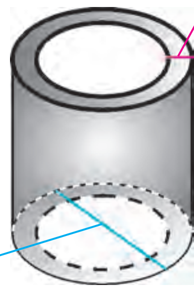
$= \frac{22}{7}(5^2 - 4^2) \times 42$ ঘন সেমি.

$= \frac{22}{7} \times (5+4)(5-4) \times 42$ ঘন সেমি. $[\because a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)]$

$= \frac{22}{7} \times 9 \times 1 \times 42$ ঘন সেমি.

$= 22 \times 9 \times 6$ ঘন সেমি.

= ☐ ঘন সেমি.



প্রয়োগ : 9. কিন্তু এই (**প্রয়োগ : 8** এর) দুই মুখ খোলা ফাঁপা লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ভিতর ও বাহিরে রং করলে কতটা পরিমাণ জায়গায় রং করতে হবে, হিসাব করে লিখি।

এই দুই মুখ খোলা লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ভিতর ও বাহিরের বক্রতলের মোট ক্ষেত্রফল

$= (2\times\pi\times5\times21 + 2\times\pi\times4\times21)$ বর্গ সেমি.

$= 2\times\pi\times21\,(5+4)$ বর্গ সেমি.

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 9$ বর্গ সেমি.

= ☐ বর্গ সেমি.

ফাঁপা চোঙের বাইরের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r_1 একক এবং ভিতরের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r_2 একক এবং উচ্চতা h একক হলে, ওই চোঙটির ভিতর ও বাহিরের বক্রতলের মোট ক্ষেত্রফল $= 2\pi(r_1 + r_2)h$ বর্গ একক।

7 কিন্তু এই দুই মুখ খোলা ফাঁপা লম্ববৃত্তাকার চোঙের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল কী হবে?

দুই মুখ খোলা ফাঁপা লম্ব বৃত্তাকার চোঙের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2\pi(r_1 + r_2)h + 2\pi(r_1^2 - r_2^2)$ বর্গ একক
[যেখানে বাহিরের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r_1 একক, ভিতরের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r_2 একক এবং উচ্চতা h একক]

প্রয়োগ : 10. একটি ফাঁপা লম্ব বৃত্তাকার চোঙাকৃতি লোহার নলের বহির্ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 5 সেমি. এবং অন্তর্ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 4 সেমি.। নলটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 1188 বর্গ সেমি. হলে, নলটির দৈর্ঘ্য কত হিসাব করি।

ফাঁপা চোঙের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= [2\pi(r_1 + r_2)h + 2\pi(r_1^2 - r_2^2)]$ বর্গসেমি.
যেখানে, বহির্ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $= r_1$ সেমি., অন্তর্ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $= r_2$ সেমি. এবং উচ্চতা = h সেমি.

শর্তানুসারে,

$$2\pi(r_1 + r_2)h + 2\pi(r_1^2 - r_2^2) = 1188$$

বা, $\pi[(5+4)h + (5^2 - 4^2)] = 594$

বা, $\frac{22}{7}[9h + 9] = 594$

বা, $9h + 9 = 594 \times \frac{7}{22}$

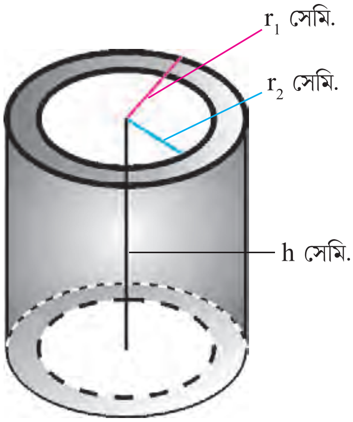
বা, $9h + 9 = 189$

বা, $9h = 189 - 9$

বা, $9h = 180$

বা, $h = \frac{180}{9}$

$\therefore \quad h = 20$



$\therefore$ চোঙটির দৈর্ঘ্য 20 সেমি.।

প্রয়োগ : 11. 6 মিটার লম্বা একটি লম্ববৃত্তাকার চোঙাকৃতি লোহার ফাঁপা পাইপের ভিতরের ও বাইরের ব্যাসের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3.5 সেমি. এবং 4.2 সেমি. হলে, পাইপটিতে কত লোহা আছে তা হিসাব করে লিখি।
এক ঘন ডেসিমি. লোহার ওজন 5 কিগ্রা. হলে, পাইপটির ওজন হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 12. একটি চোঙের ভূমির ক্ষেত্রফল 13.86 বর্গ মিটার এবং উচ্চতা 8 মিটার হলে, চোঙের আয়তন হিসাব করি।

ধরি, চোঙের ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r মিটার।

শর্তানুসারে, $\pi r^2 = 13.86$

বা, $\frac{22}{7} r^2 = \frac{1386}{100}$

বা, $r^2 = \frac{1386}{100} \times \frac{7}{22} = \square$

$\therefore r = \square$

$\therefore$ চোঙের আয়তন $\frac{22}{7} \times \frac{21}{10} \times \frac{21}{10} \times 8$ ঘন মিটার $= \square$ ঘন মিটার।

প্রয়োগ : 13. যে চোঙের ভূমির পরিধি 15.4 সেমি. এবং উচ্চতা 10 সেমি. তার আয়তন হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 14. 11 সেমি. বহিঃপরিধিবিশিষ্ট 105 সেমি. লম্বা টিউবলাইটের কাচ যদি 0.2 সেমি. পুরু হয়, তবে 5 টি টিউবলাইট তৈরি করতে কত ঘন সেমি. কাচ লাগবে, হিসাব করে লিখি।

ধরি, টিউবলাইটের বহিঃব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = r_1 সেমি., অন্তঃব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = r_2 সেমি. এবং উচ্চতা h সেমি.

শর্তানুসারে,

বহিঃপরিধি = $2\pi r_1 = 11$ বা, $r_1 = \frac{11\times 7}{2\times 22} = \frac{7}{4}$

∴ বহিঃব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = $\frac{7}{4}$ সেমি. = 1.75 সেমি.

টিউবলাইটের কাচ 0.2 সেমি. পরু।

∴ টিউবলাইটটির অন্তঃব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = r_2= (1.75 – 0.2) সেমি. = 1.55 সেমি.

প্রতিটি টিউবলাইটে কাচের আয়তন = $\pi(r_1^2 - r_2^2)h$

= $\frac{22}{7}\{(1.75)^2 - (1.55)^2\} \times 105$ ঘন সেমি.

= $\frac{22}{7} \times (1.75 + 1.55)(1.75 - 1.55) \times 105$ ঘন সেমি.

= $\frac{22}{7} \times 3.30 \times 0.2 \times 105$ ঘন সেমি.

= ☐ ঘন সেমি.

∴ 5 টি টিউবলাইট তৈরি করতে কাচ লাগবে 5 × 217.8 ঘন সেমি. = ☐ ঘন সেমি.

প্রয়োগ : 15. একটি ছিদ্র দিয়ে জাহাজের খোলে 110 কিলোলিটার জল ঢুকেছে। ছিদ্রটি বন্ধ করার পর জল নিকাশের জন্য একটি পাম্প লাগানো হয়েছে। পাম্পটির পাইপের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 10 সেমি. এবং চালু অবস্থায় জলের গতিবেগ মিনিটে 350 মিটার হলে, সমস্ত জল নিকাশ করতে পাম্পটি কতক্ষণ চালু রাখতে হবে, হিসাব করে লিখি।

এক মিনিটে পাম্পটি জল নিকাশ করতে পারে

= $\frac{22}{7} \times \frac{10}{2} \times \frac{10}{2} \times \frac{1}{100} \times 3500$ ঘন ডেসিমি.

= 2750 ঘন ডেসিমি. = 2750 লিটার [1 ঘন ডেসিমি. = 1 লিটার]

∴ 110 কিলোলিটার জল নিকাশ করতে সময় লাগবে = $\frac{110000}{2750}$ মিনিট = ☐ মিনিট

সুতরাং, ☐ মিনিটে পাম্পটি সমস্ত জল নিকাশ করতে পারবে।

প্রয়োগ : 16. 5 মিটার উচ্চতাবিশিষ্ট একটি লম্ববৃত্তাকার চোঙাকৃতি ট্যাঙ্ক জলপূর্ণ আছে। 8 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসের একটি পাইপ দিয়ে যদি মিনিটে 225 মিটার বেগে জল বের করা হয়, তাহলে 45 মিনিটে ট্যাঙ্কটির সমস্ত জল বেরিয়ে যায়। ট্যাঙ্কটির ব্যাসের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 17. তামার তৈরি একটি আয়তঘনের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 11 সেমি., 9 সেমি. এবং 6 সেমি.। আয়তঘনটিকে গলিয়ে 3 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসের এবং $\frac{1}{4}$ সেমি. পুরু কতগুলি মুদ্রা তৈরি করা যাবে হিসাব করি।

আয়তঘনের আয়তন = $11 \times 9 \times 6$ ঘন সেমি.

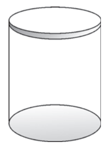
যেহেতু মুদ্রাগুলি লম্ব চোঙাকৃতি, সুতরাং চোঙের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $\frac{3}{2}$ সেমি. এবং উচ্চতা $\frac{1}{4}$ সেমি.।

প্রতিটি মুদ্রার আয়তন = $\frac{22}{7} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{4}$ ঘন সেমি.

সুতরাং মুদ্রার সংখ্যা = $\dfrac{11 \times 9 \times 6}{\frac{22}{7} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{4}}$ টি $= \dfrac{11 \times 9 \times 6 \times 7 \times 2 \times 2 \times 4}{22 \times 3 \times 3}$ টি $= 336$ টি

কষে দেখি 8

1. পাশের চিত্রের ঘনবস্তুটি দেখি ও নীচের প্রশ্নের উত্তর লিখি।



   (i) ছবির ঘনবস্তুটির ☐ টি তল।
   (ii) ছবির ঘনবস্তুটির ☐ টি বক্রতল ও ☐ টি সমতল।

2. আমার বাড়ির 5টি ঘনবস্তুর নাম লিখি যাদের আকার লম্ব বৃত্তাকার চোঙ।

3. স্টিলের পাতলা চাদর দিয়ে তৈরি ঢাকনাসমেত একটি ড্রামের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 28 সেমি.। ড্রামটি তৈরি করতে যদি 2816 বর্গ সেমি. চাদর লাগে, তবে ড্রামটির উচ্চতা হিসাব করে লিখি।

4. একটি ঘরের বারান্দায় 5.6 ডেসিমি. ব্যাসের এবং 2.5 মিটার লম্বা দুটি লম্ব বৃত্তাকার পিলার ঢালাই করতে কত ঘন ডেসিমি. মশলা লাগবে হিসাব করে লিখি।
   প্রতি বর্গ মিটার 125 টাকা হিসাবে পিলার দুটি প্লাস্টার করতে কত খরচ হবে হিসাব করি।

5. 2.8 ডেসিমি. দৈর্ঘ্যের অন্তর্ব্যাসবিশিষ্ট এবং 7.5 ডেসিমি. লম্বা একটি জ্বালানি গ্যাস সিলিন্ডারে 15.015 কিগ্রা. গ্যাস থাকলে, প্রতি ঘন ডেসিমি. গ্যাসের ওজন হিসাব করে লিখি।

6. সমান ব্যাস ও সমান উচ্চতাবিশিষ্ট তিনটি জারের প্রথমটির $\frac{2}{3}$ অংশ, দ্বিতীয়টির $\frac{5}{6}$ অংশ এবং তৃতীয়টির $\frac{7}{9}$ অংশ লঘু সালফিউরিক অ্যাসিডে পূর্ণ ছিল। ওই তিনটি জারের অ্যাসিড যদি 2.1 ডেসিমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসের একটি জারে রাখা হয়, তবে জারে অ্যাসিডের উচ্চতা 4.1 ডেসিমি. হয়। প্রথম তিনটি জারের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 1.4 ডেসিমি. হলে, তাদের উচ্চতা হিসাব করে লিখি।

7. একমুখ খোলা একটি লম্ব বৃত্তাকার পাত্রের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 2002 বর্গ সেমি.। পাত্রটির ভূমির ব্যাসের দৈর্ঘ্য 14 সেমি. হলে, পাত্রটিতে কত লিটার জল ধরবে হিসাব করে লিখি।

8. যদি 14 সেমি. ব্যাসের পাইপযুক্ত একটি পাম্পসেট মিনিটে 2500 মিটার জল সেচ করতে পারে, তাহলে ওই পাম্পটি 1 ঘণ্টায় কত কিলো লিটার জলসেচ করবে, হিসাব করে লিখি। [1লিটার = 1ঘন ডেসিমি.]

9. 7 সেমি. ব্যাসের একটি লম্বা গ্যাসজারে কিছু জল আছে। ওই জলে যদি 5.6 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসের 5 সেমি. লম্বা একটি নিরেট লোহার লম্ব বৃত্তাকার চোঙাকৃতি টুকরো সম্পূর্ণ ডোবানো হয়, তবে জলতল কতটুকু উপরে উঠবে হিসাব করে লিখি।

10. একটি লম্ব চোঙাকৃতি স্তম্ভের বক্রতলের ক্ষেত্রফল 264 বর্গ মিটার এবং আয়তন 924 ঘন মিটার হলে, এই স্তম্ভের ব্যাসের দৈর্ঘ্য ও উচ্চতা হিসাব করে লিখি।

11. 9 মিটার উচ্চতাবিশিষ্ট একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙাকৃতি ট্যাঙ্ক জলপূর্ণ আছে। 6 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসের একটি পাইপ দিয়ে মিনিটে 225 মিটার বেগে জল বের হয়, তাহলে 36 মিনিটে ট্যাঙ্কটির সমস্ত জল বেরিয়ে যায়। ট্যাঙ্কটির ব্যাসের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

12. সমান ঘনত্বের একটি লম্ব বৃত্তাকার কাঠের গুঁড়ির বক্রতলের ক্ষেত্রফল 440 বর্গ ডেসিমি.। এক ঘন ডেসিমি. কাঠের ওজন 1.5 কিগ্রা. এবং গুঁড়িটির ওজন 9.24 কুইন্টাল হলে, গুঁড়িটির ব্যাসের দৈর্ঘ্য ও উচ্চতা হিসাব করে লিখি।

13. দুই মুখ খোলা একটি লম্ব বৃত্তাকার লোহার পাইপের মুখের বহির্ব্যাসের দৈর্ঘ্য 30 সেমি., অন্তর্ব্যাসের দৈর্ঘ্য 26 সেমি. এবং পাইপটির দৈর্ঘ্য 14.7 মিটার। প্রতি বর্গ ডেসিমি. 2.25 টাকা হিসাবে ওই পাইপটির সমগ্রতলে আলকাতরার প্রলেপ দিতে কত খরচ হবে, হিসাব করে লিখি।

14. একটি দুই মুখ খোলা লোহার লম্ব বৃত্তাকার ফাঁপা চোঙের উচ্চতা 2.8 মিটার। চোঙটির অন্তর্ব্যাসের দৈর্ঘ্য 4.6 ডেসিমি. এবং চোঙটি 84.48 ঘন ডেসিমি. লোহা দিয়ে তৈরি হলে, চোঙটির বহির্ব্যাসের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

15. একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা উহার ব্যাসার্ধের দ্বিগুণ। যদি উচ্চতা 6 গুণ হতো তবে চোঙটির আয়তন 539 ঘন ডেসিমি বেশি হতো। চোঙটির উচ্চতা হিসাব করে লিখি।

16. ফায়ার ব্রিগেডের কোনো একটি দল একটি জলভরতি লম্ব বৃত্তাকার ট্যাঙ্কারের জল 2 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসের তিনটি হোস পাইপ দিয়ে মিনিটে 420 মিটার বেগে ঢেলে 40 মিনিটে আগুন নেভাল। যদি ট্যাঙ্কারটির ব্যাসের দৈর্ঘ্য 2.8 মিটার এবং দৈর্ঘ্য 6 মিটার হয়, তবে (i) আগুন নেভাতে কত জল খরচ হয়েছে এবং (ii) ট্যাঙ্কারে আর কত জল রয়েছে নির্ণয় করি।

17. 17.5 সেমি. ব্যাসের 4টি লম্ব বৃত্তাকার ঢালাই পিলারের চারিপাশে 3.5 সেমি. পুরু বালি-সিমেন্টের প্লাস্টার করতে হবে।

(i) প্রতিটি পিলার যদি 3 মিটার লম্বা হয়, তবে কত ঘন ডেসিমি মশলা লাগবে হিসাব করে লিখি।

(ii) প্লাস্টারের মশলা তেরি করতে যদি 4 : 1 অনুপাতে বালি ও সিমেন্ট মেশাতে হয়, তবে কত ঘন ডেসিমি. সিমেন্টের প্রয়োজন, হিসাব করে লিখি।

18. একটি লম্ব বৃত্তাকার ফাঁপা চোঙের বহির্ব্যাসের দৈর্ঘ্য 16 সেমি. এবং অন্তর্ব্যাসের দৈর্ঘ্য 12 সেমি.। চোঙটির উচ্চতা 36 সেমি.। চোঙটিকে গলিয়ে 2 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসবিশিষ্ট এবং 6 সেমি. দৈর্ঘ্যের কতগুলি নিরেট চোঙ তৈরি করা যাবে হিসাব করি।

19. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :

(i) দুটি লম্ব বৃত্তাকার নিরেট চোঙের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত 2 : 3 এবং উচ্চতার অনুপাত 5 : 3 হলে, তাদের বক্রতলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত

(a) 2 : 5 (b) 8 : 7 (c) 10 : 9 (d) 16 : 9

(ii) দুটি লম্ব বৃত্তাকার নিরেট চোঙের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত 2 : 3 এবং উচ্চতার অনুপাত 5 : 3 হলে, তাদের আয়তনের অনুপাত

(a) 27 : 20 (b) 20 : 27 (c) 4 : 9 (d) 9 : 4

(iii) দুটি লম্ব বৃত্তাকার নিরেট চোঙের আয়তন সমান এবং তাদের উচ্চতার অনুপাত 1 : 2 হলে, তাদের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত

(a) $1:\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{2}:1$ (c) 1 : 2 (d) 2 : 1

(iv) একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য অর্ধেক এবং উচ্চতা দ্বিগুণ হলে, চোঙটির আয়তন হবে পূর্বের চোঙের আয়তনের

(a) সমান (b) দ্বিগুণ (c) অর্ধেক (d) 4 গুণ

(v) একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য দ্বিগুণ এবং উচ্চতা অর্ধেক করা হলে, বক্রতলের ক্ষেত্রফল পূর্বের চোঙের বক্রতলের ক্ষেত্রফলের

(a) সমান (b) দ্বিগুণ (c) অর্ধেক (d) 4 গুণ

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) একটি লম্ব চোঙাকৃতি ড্রামের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r সেমি. এবং উচ্চতা h সেমি.। ড্রামের অর্ধেক জলপূর্ণ থাকলে, জলের আয়তন হবে πr^2h ঘন সেমি.।

(ii) একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 2 একক হলে, চোঙটির যে-কোনো উচ্চতার জন্য চোঙটির আয়তন এবং বক্রতলের ক্ষেত্রফলের সাংখ্যমান সমান হবে।

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) একটি আয়তক্ষেত্রাকার কাগজের দৈর্ঘ্য ℓ একক এবং প্রস্থ b একক। আয়তক্ষেত্রাকার কাগজটিকে মুড়ে একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙ তৈরি করা হলো যার পরিধি কাগজটির দৈর্ঘ্যের সমান। চোঙটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল ________ বর্গ একক।

(ii) একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 3 সেমি. এবং উচ্চতা 4 সেমি. হলে, চোঙটির ভিতর সর্বাপেক্ষা লম্বা যে দণ্ড রাখা যাবে তার দৈর্ঘ্য ________ সেমি.।

(iii) একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের আয়তন এবং বক্রতলের ক্ষেত্রফলের সাংখ্যমান সমান হলে, চোঙটির ব্যাসের দৈর্ঘ্য ________ একক।

20. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)**

(i) একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙাকৃতি স্তম্ভের বক্রতলের ক্ষেত্রফল 264 বর্গ মিটার এবং আয়তন 924 ঘন মিটার হলে, স্তম্ভের ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য কত লিখি।

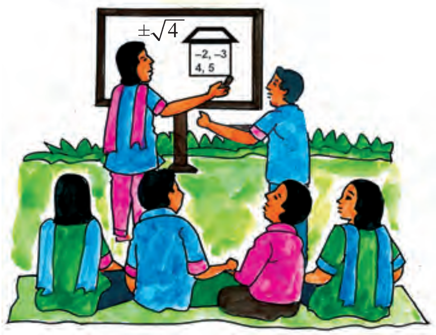
(ii) একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের বক্রতলের ক্ষেত্রফল c বর্গ একক, ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r একক এবং আয়তন v ঘন একক হলে, $\frac{cr}{v}$-এর মান কত তা লিখি।

(iii) একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা 14 সেমি. এবং বক্রতলের ক্ষেত্রফল 264 বর্গ সেমি. হলে, চোঙটির আয়তন কত তা লিখি।

(iv) দুটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতার অনুপাত 1 : 2 এবং ভূমির পরিধির অনুপাত 3 : 4 হলে, তাদের আয়তনের অনুপাত কত তা লিখি।

(v) একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 50% হ্রাস করা হলো এবং উচ্চতা 50% বৃদ্ধি করা হলো। চোঙটির আয়তনের শতকরা কত পরিবর্তন হবে তা লিখি।

9 দ্বিঘাত করণী
QUADRATIC SURD



রেবার দাদু রেবাকে একটি সাদা বোর্ড কিনে দিয়েছেন। আমরা সেই বোর্ডে ছবি আঁকি ও নানান মজার খেলায় বোর্ড ব্যবহার করি। আজ আমরা মতিউরদের বাগানে ওই বোর্ডটি নিয়ে জড়ো হয়েছি, একটি মজার খেলা খেলার জন্য।

আমাদের বন্ধু তপেন ওই বোর্ডে একটি ঘর আঁকল এবং ওই ঘরের মধ্যে কিছু ধনাত্মক ও ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা লিখল।

আমরা ঠিক করেছি প্রত্যেকে ওই পূর্ণসংখ্যার ঘর থেকে যে-কোনো দুটি সংখ্যা লিখব ও বিভিন্ন আকারে সাজাব ও তাদের প্রকৃতি জানব।

সীমা লিখল 5 ও 4

5+4, 5–4, 5×4 প্রত্যেকেই **পূর্ণ সংখ্যা**।

আবার, $\frac{5}{4}$ ও $\frac{4}{5}$ প্রত্যেকেই ☐ [পূর্ণসংখ্যা/মূলদ সংখ্যা]

1 আমি 5 ও 4-এর বর্গ করে কী পাই দেখি।

$5^2 =$ ☐ এবং $4^2 =$ ☐

$\therefore$ দেখছি 5 ও 4-এর বর্গও ☐ সংখ্যা।

আমরা জানি, কোনো একটি অঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা a-এর বর্গমূল $\pm\sqrt{a}$ বা, $\pm a^{\frac{1}{2}}$

কেননা $(+\sqrt{a})^2 = (a^{\frac{1}{2}})^2 = a^1 = a$ এবং $(-\sqrt{a})^2 = a$

2 কিন্তু $\sqrt{0}$ -এর মান কী হবে?

সংজ্ঞা অনুযায়ী, $\sqrt{0} = 0$

3 আমি 4 ও 5-এর বর্গমূল নিয়ে কী পাই দেখি।

4-এর বর্গমূল $\pm\sqrt{4}$ অর্থাৎ +2 এবং –2 [$\because (+2)^2=4$ এবং $(-2)^2=4$]

4-এর ধনাত্মক বর্গমূলটিকে $\sqrt{4}$ লেখা হয়

অর্থাৎ অঙ্কের ভাষায় $\sqrt{4} = 2$, $\therefore$ 4-এর বর্গমূল ☐ (মূলদ/অমূলদ) সংখ্যা **[নিজে লিখি]**

4 কিন্তু $\sqrt{4} = \sqrt{(-2)^2} = -2$ হবে কি?

$\sqrt{a^2} = |a|$ [সংজ্ঞা অনুযায়ী]

$\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = |2| = 2$ এবং $\sqrt{4} = \sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$

5-এর বর্গমূল $\pm\sqrt{5}$ [$\because$ কোনো পূর্ণসংখ্যা পাব না যার বর্গ 5 হবে]

বুঝেছি, 5 পূর্ণবর্গ সংখ্যা নয়, কিন্তু 4 পূর্ণবর্গ সংখ্যা।

5 $\pm\sqrt{5}$ আকারের সংখ্যাকে কী বলা হয়?

যদি a এমন একটি ধনাত্মক মূলদ সংখ্যা হয়, যা কোনো মূলদ সংখ্যার বর্গ নয়, তাহলে $\pm\sqrt{a}$ আকারের সংখ্যাকে **শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী** বলা হয়। আবার $a \pm\sqrt{b}$ আকারের সংখ্যা হলো **মিশ্র দ্বিঘাত করণী**, যেখানে a মূলদ সংখ্যা, $\sqrt{b}$ শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী।

আমরা জানি, $5^2 = 25$ বলে $\sqrt{25} = 25^{\frac{1}{2}} = (5^2)^{\frac{1}{2}} = 5^{2\times\frac{1}{2}} = 5^1 = 5$ [5 সংখ্যাটি 25-এর একটি বর্গমূল]

$5^3 = 125$ বলে $\sqrt[3]{125} = 125^{\frac{1}{3}} = (5^3)^{\frac{1}{3}} = 5^{3\times\frac{1}{3}} = 5^1 = 5$ [5 সংখ্যাটি 125-এর একটি ঘনমূল]

$5^4 = 625$ বলে $\sqrt[4]{625} = 625^{\frac{1}{4}} = (5^4)^{\frac{1}{4}} = 5^{4\times\frac{1}{4}} = 5^1 = 5$ [5 সংখ্যাটি 625-এর একটি চতুর্থমূল] .

বর্গমূল চিহ্নটির ক্ষেত্রে সাধারণত $\sqrt{\ }$ ব্যবহার করা হয়, $\sqrt[2]{\ }$ ব্যবহার করা হয় না। যে মূলগুলি উপরে উল্লেখ করলাম তারা প্রত্যেকে মূলদ সংখ্যা। কিন্তু সবসময় তা হয় না।

যেমন, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{20}$, $\sqrt[5]{25}$, ইত্যাদিরা মূলদ সংখ্যা নয়। এদের সুনির্দিষ্ট দশমিক মান সম্পূর্ণরূপে নির্ণয় করা যায় না। অর্থাৎ এরা অমূলদ সংখ্যা।

$\therefore \pm\sqrt{5}$ একটি শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী।

6 আমি 4 টি শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী ও 4 টি মিশ্র দ্বিঘাত করণী বুঝে লিখি।

4 টি শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী $\sqrt{3}$, $-\sqrt{5}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$, ☐ [নিজে লিখি]

4 টি মিশ্র দ্বিঘাত করণী $2-\sqrt{3}$, $2+\sqrt{6}$, $\frac{3}{5}-\sqrt{10}$, ☐ [নিজে লিখি]

কিন্তু সকল দ্বিঘাত করণীই কি অমূলদ সংখ্যা?

দ্বিঘাত করণীর দশমিক মান সম্পূর্ণ রূপে নির্ণয় করা যায় না। তাই এগুলি অমূলদ সংখ্যা। কিন্তু সকল অমূলদ সংখ্যাই করণী নয়। যেমন, $\sqrt{\pi}$ অমূলদ সংখ্যা, কিন্তু এটি দ্বিঘাত করণী নয়।

7 $\sqrt{4}$, $\sqrt{25}$ কি দ্বিঘাত করণী?

$\sqrt{4}$, $\sqrt{25}$ আপাতদৃষ্টিতে করণীর আকারে থাকলেও এগুলি করণী নয়।

মূলদ সংখ্যা, $\sqrt{4} = 2$ এবং $\sqrt{25} = 5$

আমি শ্রীধর আচার্যের সূত্রের সাহায্যে $x^2-2ax+(a^2-b^2)=0$ দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান করে দেখছি বীজদ্বয় $a+\sqrt{b}$ ও ☐ যারা উভয়েই মিশ্র দ্বিঘাত করণী, যেখানে b একটি ধনাত্মক মূলদ সংখ্যা যা কোনো মূলদ সংখ্যার বর্গ নয়। **[নিজে করি]**

এই স্তরে আমাদের আলোচনা দ্বিঘাত করণীতেই সীমাবদ্ধ থাকবে এবং সাধারণভাবে করণী বললে আমরা দ্বিঘাত করণীই বুঝব।

মণিদীপা বোর্ডে লিখল 8 ও 12

8 8 ও 12 সংখ্যাদুটির যোগফল, বিয়োগফল, গুণফল, ভাগফল, বর্গ নিয়ে যা পেলাম তা কেমন ধরনের সংখ্যা নিজে বুঝে লিখি। **[নিজে করি]**

যেহেতু $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ সুতরাং সূচকের নিয়ম অনুসারে পাই,

$\sqrt{ab} = (ab)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}\times b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}\times\sqrt{b}$, যেখানে a, b অঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা।

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, যেখানে a অঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা এবং b ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা।

9 আমি 8 ও 32-এর বর্গমূল নিই ও কী পাই বুঝে লিখি।

$\sqrt{8}$ একটি শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী কারণ 8 একটি পূর্ণবর্গ মূলদসংখ্যা নয়, আবার $\sqrt{32}$ -ও একটি শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী কারণ 32 একটি পূর্ণবর্গ মূলদ সংখ্যা নয়।

$\sqrt{8}$ -কে লিখতে পারি, $\sqrt{8} = \sqrt{4\times2} = \sqrt{4}\,.\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

এবং $\sqrt{32}$ -কে লিখতে পারি, $\sqrt{32} = \sqrt{16\times2} = \sqrt{16}\,.\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

10 দেখছি, দুটি শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী $\sqrt{8}$ ও $\sqrt{32}$ একই করণী $\sqrt{2}$ -এর মূলদ গুণিতক। এইরকম শুদ্ধ করণীকে কী বলা হয়?

দুই বা ততোধিক শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী যদি একই করণীর মূলদ গুণিতক হয় তবে ওই সকল শুদ্ধ করণীকে **সদৃশ করণী** বলা হয়।

বুঝেছি, $\sqrt{8}$ ও $\sqrt{32}$ শুদ্ধ করণী দুটি সদৃশ করণী।

প্রয়োগ : 1. $\sqrt{8}$ ও $\sqrt{\frac{25}{2}}$ কি সদৃশ করণী? হিসাব করে দেখি?

$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ এবং $\sqrt{\frac{25}{2}} = \sqrt{\frac{25\times2}{4}} = \frac{\sqrt{25\times2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{25}\times\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$ $\therefore \sqrt{8}$ ও $\sqrt{\frac{25}{2}}$ সদৃশ করণী।

প্রয়োগ : 2. $\sqrt{12}$ ও $\sqrt{28}$ সদৃশ করণী কিনা হিসাব করি।

$\sqrt{12} = \sqrt{4\times3} = 2\sqrt{3}$ এবং $\sqrt{28} = \sqrt{4\times7} = 2\sqrt{7}$

$\sqrt{12}$ ও $\sqrt{28}$ শুদ্ধ করণীদ্বয় একই করণীর মূলদ গুণিতক নয়।

এই রকম শুদ্ধ দ্বিঘাত করণীকে কী বলা হয়?

যে সকল শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী সদৃশ করণী নয় তারা **অসদৃশ করণী**।

বুঝেছি, $\sqrt{12}$ ও $\sqrt{28}$ **অসদৃশ করণী**।

অর্থাৎ যদি m এবং n দুটি এমন পরস্পর মৌলিক সংখ্যা [অর্থাৎ m ও n-এর গ.সা.গু 1] হয় যারা পূর্ণবর্গ নয়, তাহলে $\sqrt{m}$ এবং $\sqrt{n}$ অসদৃশ করণী হবে।

যেমন, 15 এবং 22 দুটি পরস্পর মৌলিক সংখ্যা, কারণ 15 এবং 22-এর গ.সা.গু. 1 এবং 15 এবং 22 কেউই পূর্ণবর্গ সংখ্যা নয়। সুতরাং $\sqrt{15}$ ও $\sqrt{22}$ অসদৃশ করণী।

11 দুটি অসদৃশ করণী $\sqrt{5}$ ও $\sqrt{7}$ -এর মধ্যে কোনটি বড়ো কীভাবে পাব দেখি।

যেহেতু, $7 > 5$ $\therefore \sqrt{7} > \sqrt{5}$ ($\because$ a, b ধনাত্মক সংখ্যা এবং $a^2 > b^2$ হলে $a > b$ হয়)

প্রয়োগ : 3. নীচের দ্বিঘাত করণীগুলির মধ্যে সদৃশ করণীগুলি একটি ঘরে লিখি

$\sqrt{45}, \sqrt{80}, \sqrt{147}, \sqrt{180}$ ও $\sqrt{500}$

$\sqrt{45} = \sqrt{9\times5} = 3\sqrt{5}$ $\sqrt{147} = \sqrt{7\times7\times3} = 7\sqrt{3}$

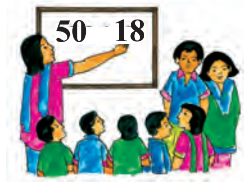
$\sqrt{80} = \sqrt{16\times5} = 4\sqrt{5}$ $\sqrt{180} = \sqrt{6\times6\times5} = 6\sqrt{5}$

$\sqrt{500} = \square$ [নিজে করি]

$\therefore$ সদৃশ করণীগুলি $\sqrt{45}, \sqrt{80}, \sqrt{180}$ ও $\sqrt{500}$

প্রয়োগ : 4. $\sqrt{48}, \sqrt{27}, \sqrt{20}$ ও $\sqrt{75}$ দ্বিঘাত করণীগুলির মধ্যে সদৃশ করণীগুলি লিখি। [নিজে করি]

রেবা বোর্ডে লিখেছে 50 ও 18
$\sqrt{50}$ ও $\sqrt{18}$ দুটি শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী।



প্রয়োগ : 5. $(\sqrt{50}+\sqrt{18})$ ও $(\sqrt{50}-\sqrt{18})$ এদের শুদ্ধ দ্বিঘাত করণীতে পরিণত করা যাবে কিনা দেখি।

$\sqrt{50}=5\sqrt{2}$ এবং $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$\therefore$ দেখছি $\sqrt{50}$ ও $\sqrt{18}$ সদৃশ করণী।

যেহেতু, 5x+3x = 8x এবং 5x–3x = $\square$

$\therefore \quad \sqrt{50}+\sqrt{18}=5\sqrt{2}+3\sqrt{2}=8\sqrt{2}$

$\sqrt{50}-\sqrt{18}=5\sqrt{2}-3\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

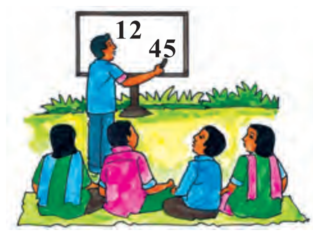
$\therefore$ দেখছি, $(\sqrt{50}+\sqrt{18})$ এবং $(\sqrt{50}-\sqrt{18})$-এদের শুদ্ধ করণীতে পরিণত করা যাচ্ছে।

প্রয়োগ : 6. আমি $(\sqrt{2}+\sqrt{8})$ এবং $(\sqrt{2}-\sqrt{8})$ -এর মান হিসাব করে লিখি এবং দেখি তাদের শুদ্ধ করণীতে পরিণত করা যায় কিনা। **[নিজে করি]**

মৃণাল বোর্ডে লিখল 12 ও 45

প্রয়োগ : 7. আমি $(\sqrt{12}+\sqrt{45})$ এবং $(\sqrt{12}-\sqrt{45})$ এদের মান হিসাব করে লিখি।

$\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ এবং $\sqrt{45}=3\sqrt{5}$



$\therefore \sqrt{12}$ ও $\sqrt{45}$ অসদৃশ করণী।

যেহেতু, 2x ও 3y -এর যোগফল = 2x+3y

$\therefore \sqrt{12}+\sqrt{45}=2\sqrt{3}+3\sqrt{5}$

একইভাবে, $\sqrt{12}-\sqrt{45}=2\sqrt{3}-3\sqrt{5}$

$\therefore$ আবার দেখছি, $(\sqrt{12}+\sqrt{45})$ এবং $(\sqrt{12}-\sqrt{45})$ অমূলদ সংখ্যা, কিন্তু তাদের শুদ্ধ করণীর আকারে লেখা যাচ্ছে না।

বুঝেছি, যেহেতু a ও b-এর যোগফল = a+b, $\therefore \sqrt{5}+\sqrt{7}=\square$ **[নিজে লিখি]**

প্রয়োগ : 8. আমি $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{2}$ ও $4\sqrt{3}$ -এর যোগফল নির্ণয় করি।

$2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+4\sqrt{3}=6\sqrt{3}+3\sqrt{2}$

প্রয়োগ : 9. $\sqrt{12}$, $-4\sqrt{3}$ ও $6\sqrt{3}$ -এর সমষ্টি হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 10. আমি দুটি মিশ্র দ্বিঘাত করণী $(2+\sqrt{3})$ ও $(2-2\sqrt{3})$-এর সমষ্টি নির্ণয় করি।

30 ও 2x-এর যোগফল = 30+2x এবং (30+2x)+(30–4x) = $\square$ হয়।

$\therefore (2+\sqrt{3})+(2-2\sqrt{3})=2+2+\sqrt{3}-2\sqrt{3}=4-\sqrt{3}$

$\therefore (2+\sqrt{3})$ ও $(2-2\sqrt{3})$-এর সমষ্টি মিশ্র দ্বিঘাত করণী পেলাম।

প্রয়োগ : 11. $(9-2\sqrt{5})+(12+7\sqrt{5})=\square$ **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 12. আমি $(2+\sqrt{3})$ ও $(2-\sqrt{3})$ -এর সমষ্টি নির্ণয় করি।

$$(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3}) = 2+2+\sqrt{3}-\sqrt{3} = 4$$

$\therefore$ দেখছি, দুটি দ্বিঘাত করণীর সমষ্টি মূলদ সংখ্যা পেলাম।

প্রয়োগ : 13. আমি অন্য যে-কোনো দুটি দ্বিঘাত করণী লিখি যাদের সমষ্টি মূলদ সংখ্যা। [নিজে করি]

কষে দেখি 9.1

1. মূলদ ও অমূলদ সংখ্যার গুণফল আকারে লিখি—
   (i) $\sqrt{175}$ (ii) $2\sqrt{112}$ (iii) $\sqrt{108}$ (iv) $\sqrt{125}$ (v) $5\sqrt{119}$
2. প্রমাণ করি যে, $\sqrt{108}-\sqrt{75}=\sqrt{3}$
3. দেখাই যে, $\sqrt{98}+\sqrt{8}-2\sqrt{32}=\sqrt{2}$
4. দেখাই যে, $3\sqrt{48}-4\sqrt{75}+\sqrt{192}=0$
5. সরলতম মান নির্ণয় করি :
   $\sqrt{12}+\sqrt{18}+\sqrt{27}-\sqrt{32}$
6. (a) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ -এর সঙ্গে কত যোগ করলে যোগফল $2\sqrt{5}$ হবে, হিসাব করে লিখি।
   (b) $7-\sqrt{3}$ -এর থেকে কত বিয়োগ করলে বিয়োগফল $3+\sqrt{3}$ হবে, নির্ণয় করি।
   (c) $2+\sqrt{3}$, $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ এবং $2+\sqrt{7}$ -এর যোগফল লিখি।
   (d) $(10-\sqrt{11})$ থেকে $(-5+3\sqrt{11})$ বিয়োগ করি ও বিয়োগফল লিখি।
   (e) $(-5+\sqrt{7})$ এবং $(\sqrt{7}+\sqrt{2})$-এর যোগফল থেকে $(5+\sqrt{2}+\sqrt{7})$ বিয়োগ করে বিয়োগফল নির্ণয় করি।
   (f) দুটি দ্বিঘাত করণী লিখি যাদের সমষ্টি মূলদ সংখ্যা।

12 এবার আমাদের বন্ধু অমিয় বোর্ডে লিখল 7 ও 11

দেখছি, বোর্ডে লেখা সংখ্যাদুটি মৌলিক সংখ্যা।

$\sqrt{7}$ ও $\sqrt{11}$ দুটি শুদ্ধ দ্বিঘাত করণীর যোগফল ও বিয়োগফল নিজে লিখি।

13 কিন্তু $\sqrt{7}$ ও $\sqrt{11}$ -এর গুণফল ও ভাগফল হিসাব করে লিখি।

যেহেতু $a^m \times b^m = (ab)^m$ [$a\neq0$, $b\neq0$, m একটি মূলদ সংখ্যা]

$$\therefore \sqrt{7}\times\sqrt{11} = 7^{\frac{1}{2}}\times 11^{\frac{1}{2}}$$
$$= (7\times11)^{\frac{1}{2}}$$
$$= 77^{\frac{1}{2}}$$
$$= \sqrt{77}$$

এখানে $\sqrt{77}$ একটি শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী।

প্রয়োগ : 14. আমি নীচের দ্বিঘাত করণীগুলির গুণফল নির্ণয় করি :

(i) $2\sqrt{5}\times3\sqrt{2}$ (ii) $7\sqrt{3}\times2\sqrt{3}$ (iii) $(2+\sqrt{3})(4+\sqrt{3})$ (iv) $(5-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$

(i) $2\sqrt{5}\times3\sqrt{2}=2\times3\times\sqrt{5\times2}=6\sqrt{10}$

(ii) $7\sqrt{3}\times2\sqrt{3}=7\times2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}$

$=14\sqrt{3^2}=14(3^2)^{\frac{1}{2}}=14\times3^{(2\times\frac{1}{2})}$

$=14\times3=42$ [$\because (a^m)^n=a^{mn}$, $a\neq0$ এবং m, n মূলদ সংখ্যা]

(iii) $(2+\sqrt{3})(4+\sqrt{3})=8+4\sqrt{3}+2\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2$

$=8+6\sqrt{3}+3=11+6\sqrt{3}$ [$\because (x+y)(a+b)=ax+ay+bx+by$]

(iv) $(5-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=5\times2-2\sqrt{3}-5\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2$

$=10-2\sqrt{3}-5\sqrt{3}+3=13-7\sqrt{3}$

প্রয়োগ : 15. আমি $(2+\sqrt{3}+\sqrt{5})\times(3-\sqrt{5})$-এর গুণফল নির্ণয় করি।

$$(2+\sqrt{3}+\sqrt{5})\times(3-\sqrt{5})=2\times(3-\sqrt{5})+\sqrt{3}\times(3-\sqrt{5})+\sqrt{5}\times(3-\sqrt{5})$$
$$=6-2\sqrt{5}+3\sqrt{3}-\sqrt{15}+3\sqrt{5}-5$$
$$=6-5+\sqrt{5}+3\sqrt{3}-\sqrt{15}$$
$$=1+\sqrt{5}+3\sqrt{3}-\sqrt{15}$$

প্রয়োগ : 16. $(3+\sqrt{7}-\sqrt{5})\times(2\sqrt{2}-1)$-এর গুণফল হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

নাথুরা বোর্ডে লিখল 13 ও 5

$\sqrt{13}$ ও $\sqrt{5}$ দুটি শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী।

প্রয়োগ : 17. আমি $\sqrt{13}\div\sqrt{5}$ -এর ভাগফল কী হবে হিসাব করে দেখি।

$\sqrt{13}\div\sqrt{5}=\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}}$

দেখছি হরে করণী আছে। কিন্তু কীভাবে $\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}}$ -এর হরকে করণীমুক্ত করব?

$\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}}$ -এর লব ও হরকে $\sqrt{5}$ দিয়ে গুণ করি ও কী পাই দেখি।

> $\frac{a}{b}$ কে বীজগাণিতিক ভগ্নাংশ বললে a কে লব ও b কে হর বলি। সেই অর্থে এর লব $\sqrt{13}$ এবং হর $\sqrt{5}$

$\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{13}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{65}}{5}$ অর্থাৎ $\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}}$ -এর হরকে করণী মুক্ত করে $\dfrac{\sqrt{65}}{5}$ পেলাম।

> কিন্তু এইভাবে গুণ করে কোনো করণীকে করণীমুক্ত করার প্রক্রিয়াকে কী বলা হয়?
> কোনো করণীর সঙ্গে অথবা একাধিক করণীর যোগ ও বিয়োগ দ্বারা গঠিত অমূলদ সংখ্যার সঙ্গে কোনো উৎপাদক গুণ করে গুণফলটি করণীমুক্ত করা অর্থাৎ একটি মূলদ সংখ্যা পাওয়ার প্রক্রিয়াকে করণী নিরসন **(Rationalisation)** বলে এবং ওই উৎপাদকটিকে ওই করণীর **অথবা ওই অমূলদ সংখ্যার** করণী নিরসক উৎপাদক **(Rationalising Factor)** বলা হয়।

$\sqrt{5}$ -এর একটি করণী নিরসক উৎপাদক $\sqrt{5}$; এছাড়াও $k\sqrt{5}$ যেখানে k একটি অশূন্য মূলদ সংখ্যা।

$\therefore \sqrt{a}$ -এর একটি করণী নিরসক উৎপাদক $\sqrt{a}$; এছাড়াও $k\sqrt{a}$,যেখানে k একটি অশূন্য মূলদ সংখ্যা।

প্রয়োগ : 18. $\sqrt{7}$ -এর 2টি করণী নিরসক উৎপাদক লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 19 . আমি $(5+\sqrt{7})$-এর করণী নিরসক উৎপাদক কী পাব দেখি।

$(5+\sqrt{7})\times(5-\sqrt{7}) = (5)^2-(\sqrt{7})^2 = 25-7 = \square$ $[(a+b)(a-b) = a^2-b^2]$

আবার, $(5+\sqrt{7})\times(-5+\sqrt{7}) = (\sqrt{7}+5)\times(\sqrt{7}-5) = (\sqrt{7})^2-(5)^2 = \square$

$\therefore$ দেখছি, $5+\sqrt{7}$ -এর করণী নিরসক উৎপাদক পেলাম $(5-\sqrt{7})$ এবং $(-5+\sqrt{7})$

বুঝেছি, $a+\sqrt{b}$ -এর করণী নিরসক উৎপাদক $a-\sqrt{b}$ অথবা $-a+\sqrt{b}$ অথবা এদের কোনো মূলদ গুণিতক।

প্রয়োগ : 20. $7-\sqrt{3}$ -এর 2 টি করণী নিরসক উৎপাদক লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 21. $(\sqrt{11}-\sqrt{6})$-অমূলদ সংখ্যাটির করণী নিরসক উৎপাদক কী কী পাব দেখি।

$(\sqrt{11}-\sqrt{6})(\sqrt{11}+\sqrt{6}) = (\sqrt{11})^2-(\sqrt{6})^2 = 11-6 = 5$

আবার, $(\sqrt{11}-\sqrt{6})(-\sqrt{11}-\sqrt{6}) = -[(\sqrt{11}-\sqrt{6})(\sqrt{11}+\sqrt{6})]$

$= \square$ **[নিজে করি]**

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})$-অমূলদ সংখ্যাটির করণী নিরসক উৎপাদক $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ অথবা $(-\sqrt{a}-\sqrt{b})$ অথবা এদের কোনো মূলদ গুণিতক।

প্রয়োগ : 22. $(\sqrt{15}+\sqrt{3})$-এর 2 টি করণী নিরসক উৎপাদক লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 23. আমি $(7+\sqrt{2})$ মিশ্র দ্বিঘাত করণীর একটি করণী নিরসক উৎপাদক লিখি যা $(7+\sqrt{2})$-এর সঙ্গে যোগ করলে মূলদ সংখ্যা পাব।

$(7+\sqrt{2})\times(7-\sqrt{2}) = 7^2-(\sqrt{2})^2 = \square$

আবার, $(7+\sqrt{2})+(7-\sqrt{2}) = 7+7 = 14$

$\therefore$ দেখছি, $7-\sqrt{2}$ উৎপাকটির সঙ্গে $(7+\sqrt{2})$ মিশ্র দ্বিঘাত করণীর যোগফল ও গুণফল মূলদ সংখ্যা।

কিন্তু কোনো মিশ্র দ্বিঘাত করণীর এরকম করণী নিরসক উৎপাদককে ওই মিশ্র দ্বিঘাত করণীর কী বলা হয়?

কোনো মিশ্র দ্বিঘাত করণীর করণী নিরসক উৎপাদকের সঙ্গে ওই করণীর যোগফল ও গুণফল উভয়ই যদি মূলদ সংখ্যা হয় তবে তাকে ওই মিশ্র দ্বিঘাত করণীর **অনুবন্ধী বা পূরক করণী (Conjugate surd)** বলা হয়।

বুঝেছি, $(7+\sqrt{2})$ মিশ্র দ্বিঘাত করণীর অনুবন্ধী করণী $7-\sqrt{2}$, কিন্তু $(-7+\sqrt{2})$ উৎপাদকটি অনুবন্ধী করণী নয়। যদিও এটি প্রদত্ত করণীর একটি করণী নিরসক উৎপাদক।

কারণ, $7+\sqrt{2}+7-\sqrt{2} = 14$ (মূলদ সংখ্যা)

আবার, $(7+\sqrt{2})(7-\sqrt{2}) = (7)^2-(\sqrt{2})^2 = 49-2=47$ (মূলদ সংখ্যা)।

কিন্তু $(7+\sqrt{2})+(-7+\sqrt{2}) = 7+\sqrt{2}-7+\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ (অমূলদ সংখ্যা)

প্রয়োগ : 24. আমি $(\sqrt{5}-1)$, $\sqrt{3}$, $(\sqrt{3}-2)$-এদের অনুবন্ধী করণীগুলি লিখি।

$(\sqrt{5}-1)$-এর অনুবন্ধী করণী $-\sqrt{5}-1$

$\sqrt{3}$-এর অনুবন্ধী করণী $-\sqrt{3}$

$(\sqrt{3}-2)$-এর অনুবন্ধী করণী $(-\sqrt{3}-2)$

$\therefore$ পেলাম, $a+\sqrt{b}$ আকারের করণীর অনুবন্ধী করণীটি $a-\sqrt{b}$

$a-\sqrt{b}$ আকারের করণীর অনুবন্ধী করণীটি $a+\sqrt{b}$

প্রয়োগ : 25. নীচের মিশ্র এবং শুদ্ধ দ্বিঘাত করণীগুলির অনুবন্ধী করণী লিখি—

(i) $2+\sqrt{3}$ (ii) $5-\sqrt{2}$ (iii) $\sqrt{5}-7$ (iv) $\sqrt{11}+6$ (v) $\sqrt{5}$ **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 26. আমি $(2\sqrt{2}\div\sqrt{5})$-এর হরের করণী নিরসন করি।

$$2\sqrt{2}\div\sqrt{5}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \text{ ——— (i)}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{2}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{10}}{\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

$\therefore$ পেলাম, $2\sqrt{2}\div\sqrt{5}=2\sqrt{10}\div5$

প্রয়োগ : 27. আমি হরের করণী নিরসন করি : (i) $6\div\sqrt{7}$ (ii) $5\sqrt{2}\div6\sqrt{3}$

$$\text{(i) } 6\div\sqrt{7}=\frac{6}{\sqrt{7}}=\frac{6\times\sqrt{7}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=\frac{6\sqrt{7}}{\left(\sqrt{7}\right)^2}=\frac{6\sqrt{7}}{7}=6\sqrt{7}\div7$$

$$\text{(ii) } 5\sqrt{2}\div6\sqrt{3}=\frac{5\sqrt{2}}{6\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{6\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{6}}{6\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{5\sqrt{6}}{6\times3}=\frac{5\sqrt{6}}{18}=5\sqrt{6}\div18$$

প্রয়োগ : 28. হরের করণী নিরসন করি : (i) $\frac{4\sqrt{5}}{5\sqrt{3}}$ (ii) $\frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{6}}$ **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 29. আমি হরের করণী নিরসন করি।

(i) $4\div(3-\sqrt{2})$ (ii) $(\sqrt{5}+2)\div(\sqrt{3}-1)$ (iii) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})\div(\sqrt{2}-\sqrt{3})$

$$\text{(i) } 4\div\left(3-\sqrt{2}\right)=\frac{4}{3-\sqrt{2}}=\frac{4\left(3+\sqrt{2}\right)}{\left(3-\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right)}=\frac{4\left(3+\sqrt{2}\right)}{(3)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{4\left(3+\sqrt{2}\right)}{9-2}=\frac{\left(12+4\sqrt{2}\right)}{7}$$

$$\text{(ii) } \left(\sqrt{5}+2\right)\div\left(\sqrt{3}-1\right)=\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{3}-1}=\frac{\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{\sqrt{15}+2\sqrt{3}+\sqrt{5}+2}{\left(\sqrt{3}\right)^2-(1)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{15}+2\sqrt{3}+\sqrt{5}+2}{2}$$

(iii) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\div\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\dfrac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}=\dfrac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}$

$$=\frac{2+3+2\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{2-3}$$

$$=\frac{5+2\sqrt{6}}{-1}$$

প্রয়োগ : 30. হরের করণী নিরসন করি :

(i) $(4+2\sqrt{3})\div(2-\sqrt{3})$ (ii) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})\div(\sqrt{5}-\sqrt{3})$ [নিজে করি]

কষে দেখি 9.2

1. (a) $3^{1/2}$ ও $\sqrt{3}$ -এর গুণফল নির্ণয় করি।

   (b) $2\sqrt{2}$ -কে কত দিয়ে গুণ করলে 4 পাব লিখি।

   (c) $3\sqrt{5}$ এবং $5\sqrt{3}$ -এর গুণফল নির্ণয় করি।

   (d) $\sqrt{6}\times\sqrt{15}=x\sqrt{10}$ হলে, x-এর মান হিসাব করে লিখি।

   (e) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})=25-x^2$ একটি সমীকরণ হলে, x-এর মান হিসাব করে লিখি।

2. **গুণফল নির্ণয় করি :**

   (a) $\sqrt{7}\times\sqrt{14}$ (b) $\sqrt{12}\times2\sqrt{3}$ (c) $\sqrt{5}\times\sqrt{15}\times\sqrt{3}$ (d) $\sqrt{2}(3+\sqrt{5})$

   (e) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})$ (f) $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})(4\sqrt{2}+\sqrt{5})$

   (g) $(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})$

3. (a) $\sqrt{5}$ -এর করণী নিরসক উৎপাদক $\sqrt{x}$ হলে, x-এর ক্ষুদ্রতম মান কত হবে তা হিসাব করে লিখি। [যেখানে x একটি পূর্ণসংখ্যা]

   (b) $3\sqrt{2}\div3$ -এর মান নির্ণয় করি।

   (c) $7\div\sqrt{48}$ -এর হরের করণী নিরসন করতে হরকে ন্যূনতম কত দিয়ে গুণ করতে হবে তা লিখি।

   (d) $(\sqrt{5}+2)$-এর করণী নিরসক উৎপাদক নির্ণয় করি যা করণীটির অনুবন্ধী করণী।

   (e) $(\sqrt{5}+\sqrt{2})\div\sqrt{7}=\frac{1}{7}(\sqrt{35}+a)$ হলে, a-এর মান নির্ণয় করি।

   (f) $\dfrac{5}{\sqrt{3}-2}$ -এর হরের একটি করণী নিরসক উৎপাদক লিখি যা অনুবন্ধী করণী নয়।

4. $(9-4\sqrt{5})$ ও $(-2-\sqrt{7})$ মিশ্র দ্বিঘাত করণীদ্বয়ের অনুবন্ধী করণীদ্বয় লিখি।

5. নীচের মিশ্র দ্বিঘাত করণীর 2 টি করে করণী নিরসক উৎপাদক লিখি:

   (i) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ (ii) $13+\sqrt{6}$ (iii) $\sqrt{8}-3$ (iv) $\sqrt{17}-\sqrt{15}$

6. হরের করণী নিরসন করি :

(i) $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$ (ii) $\frac{\sqrt{2}-1+\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$ (iii) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

(iv) $\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ (v) $\frac{3\sqrt{2}+1}{2\sqrt{5}-1}$ (vi) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

7. প্রথমটিকে দ্বিতীয়টি দিয়ে ভাগ করে ভাজককে মূলদ সংখ্যায় পরিণত করি।

(i) $3\sqrt{2}+\sqrt{5}, \sqrt{2}+1$ (ii) $2\sqrt{3}-\sqrt{2}, \sqrt{2}-\sqrt{3}$ (iii) $3+\sqrt{6}, \sqrt{3}+\sqrt{2}$

8. মান নির্ণয় করি : (i) $\frac{2\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}-\frac{4\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1}$ (ii) $\frac{8+3\sqrt{2}}{3+\sqrt{5}}-\frac{8-3\sqrt{2}}{3-\sqrt{5}}$

প্রয়োগ : 31. সরল করি : $\frac{3\sqrt{4.2}-2\sqrt{12}+\sqrt{20}}{3\sqrt{18}-2\sqrt{27}+\sqrt{45}}$

$$\frac{3\sqrt{4.2}-2\sqrt{12}+\sqrt{20}}{3\sqrt{18}-2\sqrt{27}+\sqrt{45}}=\frac{3\sqrt{4.2}-2\sqrt{4.3}+\sqrt{4.5}}{3\sqrt{9.2}-2\sqrt{9.3}+\sqrt{9.5}}=\frac{3.2\sqrt{2}-2.2\sqrt{3}+2\sqrt{5}}{3.3\sqrt{2}-2.3\sqrt{3}+3\sqrt{5}}$$

$$=\frac{6\sqrt{2}-4\sqrt{3}+2\sqrt{5}}{9\sqrt{2}-6\sqrt{3}+3\sqrt{5}}$$

$$=\frac{2\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{3\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}=\frac{2}{3}$$

∴ নির্ণেয় সরলফল $=\frac{2}{3}$

প্রয়োগ : 32. সরল করি : $\frac{3\sqrt{20}+2\sqrt{28}+\sqrt{12}}{5\sqrt{45}+2\sqrt{175}+\sqrt{75}}$ [নিজে করি]

প্রয়োগ : 33. সরল করি : $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

প্রদত্ত $=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ ———— (i)

প্রথম অংশ $=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{10}}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{10}}{3-2}=\sqrt{15}-\sqrt{10}$

দ্বিতীয় অংশ $=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}=\frac{3\sqrt{15}-3\sqrt{6}}{5-2}=\frac{3\left(\sqrt{15}-\sqrt{6}\right)}{3}$

$$=\sqrt{15}-\sqrt{6}$$

তৃতীয় অংশ $= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)} = \frac{2\sqrt{10}-2\sqrt{6}}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{2\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)}{5-3}$

$= \frac{2\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)}{2}$

$= \sqrt{10}-\sqrt{6}$

$\therefore$ (i) থেকে পাই,

প্রদত্ত $= \left(\sqrt{15}-\sqrt{10}\right)-\left(\sqrt{15}-\sqrt{6}\right)+\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)$

$= \sqrt{15}-\sqrt{10}-\sqrt{15}+\sqrt{6}+\sqrt{10}-\sqrt{6} = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলফল = 0.

প্রয়োগ : 34. সরল করি : $\frac{5}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ [নিজে করি]

প্রয়োগ : 35. $x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ হলে, (i) $x-\frac{1}{x}$ (ii) $x^2+\frac{1}{x^2}$ এবং (iii) $x^3-\frac{1}{x^3}$ -এর সরলতম মানগুলি নির্ণয় করি।

$x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

$\therefore \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$

(i) $x-\frac{1}{x} = \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) = \sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

(ii) $x^2+\frac{1}{x^2} = \left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\times x\times\frac{1}{x} = \left(2\sqrt{2}\right)^2+2.1 = 8+2 = 10$

(iii) $x^3-\frac{1}{x^3} = \left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\times x\times\frac{1}{x}\left(x-\frac{1}{x}\right) = \left(2\sqrt{2}\right)^3+3\times1\times2\sqrt{2} = 16\sqrt{2}+6\sqrt{2} = 22\sqrt{2}$

প্রয়োগ : 36. $x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ হলে, $\left(x-\frac{1}{x}\right)$, $\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)$ এবং $\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)$ -এর সরলতম মানগুলি নির্ণয় করি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 37. যদি $x = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ এবং $y = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ হয়, তবে

(a) দেখাই যে, $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = \frac{7\sqrt{3}}{12}$

(b) $\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}$ -এর সরলতম মান নির্ণয় করি।

(c) $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}$ -এর সরলতম মান নির্ণয় করি।

(d) x^3-y^3 -এর সরলতম মান নির্ণয় করি।

প্রথমে, x+y, x–y ও xy -এর মান নির্ণয় করি।

$x+y = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2+\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)} = \frac{3+1+2\sqrt{3}+3+1-2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2-(1)^2} = \frac{8}{3-1}$

$= \frac{8}{2} = 4$

অথবা, $x+y=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

$$=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2+\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{2\left[\left(\sqrt{3}\right)^2+(1)^2\right]}{\left(\sqrt{3}\right)^2-(1)^2}\quad\left[\because (a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)\right]$$

$$=\frac{2(3+1)}{3-1}=\frac{2\times4}{2}=4$$

$$x-y=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2-\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{\left(3+1+2\sqrt{3}\right)-\left(3+1-2\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-(1)^2}$$

$$=\frac{3+1+2\sqrt{3}-3-1+2\sqrt{3}}{3-1}=\frac{4\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$

অথবা, $x-y=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

$$=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2-\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{4\times\sqrt{3}\times1}{\left(\sqrt{3}\right)^2-(1)^2}\quad\left[\because (a+b)^2-(a-b)^2=4ab\right]$$

$$=\frac{4\sqrt{3}}{3-1}=\frac{4\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$

$$x\times y=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)}\times\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)}=1$$

(a) $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\dfrac{(x+y)^2-2xy}{(x+y)(x-y)}=\dfrac{(4)^2-2\times1}{4\times2\sqrt{3}}=\dfrac{14}{4\times2\sqrt{3}}=\dfrac{7\times\sqrt{3}}{4\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{7\sqrt{3}}{12}$

(b) $\dfrac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}=\dfrac{(x+y)^2-3xy}{(x+y)^2-xy}=\dfrac{4^2-3\times1}{4^2-1}=\dfrac{13}{15}$

অথবা, $\dfrac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}=\dfrac{(x-y)^2+xy}{(x-y)^2+3xy}=\dfrac{\left(2\sqrt{3}\right)^2+1}{\left(2\sqrt{3}\right)^2+3}=\dfrac{12+1}{12+3}=\dfrac{13}{15}$

বুঝেছি, (x+y) অথবা (x–y)-এর যে-কোনো একটির মান জানতে হবে।

(c) $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=\dfrac{x^3+y^3}{xy}=\dfrac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{xy}=\dfrac{4^3-3\times4}{1}=64-12=52$

(d) $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)=(2\sqrt{3})^3+3\times1\times2\sqrt{3}=24\sqrt{3}+6\sqrt{3}=30\sqrt{3}$

প্রয়োগ : 38. $\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)$ এবং $\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$-এর মধ্যে কোনটি বড়ো লিখি।

$\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2+2\times\sqrt{5}\times\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2 = 5+2\sqrt{15}+3 = 8+2\sqrt{15}$

$\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{6}\right)^2+2\times\sqrt{6}\times\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2 = 6+2\sqrt{12}+2 = 8+2\sqrt{12}$

যেহেতু, $\sqrt{15} > \sqrt{12}$, সুতরাং $8+2\sqrt{15} > 8+2\sqrt{12}$ $\quad\therefore \left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)$ সংখ্যাটি বড়ো।

কষে দেখি 9.3

1. (a) $m+\frac{1}{m}=\sqrt{3}$ হলে, (i) $m^2+\frac{1}{m^2}$ এবং (ii) $m^3+\frac{1}{m^3}$ -এদের সরলতম মান নির্ণয় করি।

   (b) দেখাই যে, $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=2\sqrt{15}$

2. সরল করি : (a) $\frac{\sqrt{2}\left(2+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)}-\frac{\sqrt{2}\left(2-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)}$ (b) $\frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}-\frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$

   (c) $\frac{4\sqrt{3}}{2-\sqrt{2}}-\frac{30}{4\sqrt{3}-\sqrt{18}}-\frac{\sqrt{18}}{3-\sqrt{12}}$ (d) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}-\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

3. যদি $x=2$, $y=3$ এবং $z=6$ হয় তবে,

   $\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{y}+\sqrt{z}}-\frac{4\sqrt{y}}{\sqrt{z}+\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ -এর মান হিসাব করে লিখি।

4. $x=\sqrt{7}+\sqrt{6}$ হলে (i) $x-\frac{1}{x}$ (ii) $x+\frac{1}{x}$ (iii) $x^2+\frac{1}{x^2}$ এবং (iv) $x^3+\frac{1}{x^3}$ -এদের সরলতম মান নির্ণয় করি।

5. সরল করি : $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}+\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$

   সরলফল 14 হলে, x-এর মান কী কী হবে হিসাব করে লিখি।

6. যদি $a=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$ ও $b=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$ হয়, তবে নীচের মানগুলি নির্ণয় করি।

   (i) $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}$ (ii) $\frac{(a-b)^3}{(a+b)^3}$ (iii) $\frac{3a^2+5ab+3b^2}{3a^2-5ab+3b^2}$ (iv) $\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}$

7. যদি $x=2+\sqrt{3}$, $y=2-\sqrt{3}$ হয়, তবে নিম্নলিখিতগুলির সরলতম মান নির্ণয় করি।

   (a) (i) $x-\frac{1}{x}$ (ii) $y^2+\frac{1}{y^2}$ (iii) $x^3-\frac{1}{x^3}$ (iv) $xy+\frac{1}{xy}$

   (b) $3x^2-5xy+3y^2$

8. $x=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ এবং $xy=1$ হলে, দেখাই যে, $\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}=\frac{12}{11}$

9. $(\sqrt{7}+1)$ এবং $(\sqrt{5}+\sqrt{3})$-এর মধ্যে কোনটি বড়ো লিখি।

10. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q) :

(i) $x=2+\sqrt{3}$ হলে, $x+\frac{1}{x}$-এর মান (a) 2 (b) $2\sqrt{3}$ (c) 4 (d) $2-\sqrt{3}$

(ii) যদি $p+q=\sqrt{13}$ এবং $p-q=\sqrt{5}$ হয়, তাহলে pq-এর মান (a) 2 (b) 18 (c) 9 (d) 8

(iii) যদি $a+b=\sqrt{5}$ এবং $a-b=\sqrt{3}$ হয়, তাহলে (a^2+b^2)-এর মান
(a) 8 (b) 4 (c) 2 (d) 1

(iv) $\sqrt{125}$ থেকে $\sqrt{5}$ বিয়োগ করলে বিয়োগফল হবে
(a) $\sqrt{80}$ (b) $\sqrt{120}$ (c) $\sqrt{100}$ (d) কোনটিই নয়

(v) $(5-\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)(5+\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)$-এর গুণফল (a) 22 (b) 44 (c) 2 (d) 11

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) $\sqrt{75}$ এবং $\sqrt{147}$ সদৃশ করণী।

(ii) $\sqrt{\pi}$ একটি দ্বিঘাত করণী।

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) $5\sqrt{11}$ একটি ________ সংখ্যা। (মূলদ/অমূলদ)

(ii) $(\sqrt{3}-5)$ -এর অনুবন্ধী করণী ________।

(iii) দুটি দ্বিঘাত করণীর যোগফল ও গুণফল একটি মূলদ সংখ্যা হলে করণীদ্বয় ________ করণী।

11. **সংক্ষিপ্তধর্মী উত্তরপ্রশ্ন (S.A.)**

(i) $x=3+2\sqrt{2}$ হলে, $x+\frac{1}{x}$ -এর মান লিখি।

(ii) $(\sqrt{15}+\sqrt{3})$ এবং $(\sqrt{10}+\sqrt{8})$ -এর মধ্যে কোনটি বড়ো লিখি।

(iii) দুটি মিশ্র দ্বিঘাত করণী লিখি যাদের গুণফল একটি মূলদ সংখ্যা।

(iv) $\sqrt{72}$ থেকে কত বিয়োগ করলে $\sqrt{32}$ হবে তা লিখি।

(v) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}\right)$ -এর সরলতম মান লিখি।

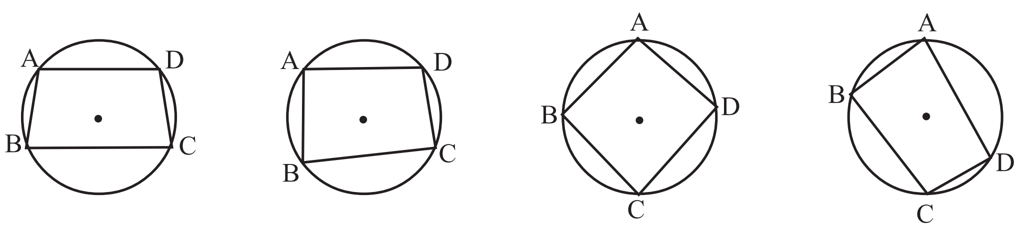
10 বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ সংক্রান্ত উপপাদ্য
THEOREMS RELATED TO CYCLIC QUADRILATERAL

আমরা নানারকম জ্যামিতিক বিষয়ের মডেল তৈরি করব। তাই অনেকগুলি ছোটো বড়ো কাঠি নিয়ে আমরা বন্ধুরা আজ শনিবার স্কুলের গণিতের ল্যাবরেটরিতে একত্রিত হয়েছি। কাঠিগুলি জুড়ে আমরা অনেকগুলি নানান মাপের ছোটো বড়ো ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ তৈরি করব ও সেগুলি দিয়ে নতুন কিছু তৈরির চেষ্টা করব।

গণিতের ল্যাবরেটরিতে অনেকগুলি বৃত্তাকার রিং রাখা আছে। সাহানা এক মজার কাজ করল। সে একটি বড়ো বৃত্তাকার রিং-এর মধ্যে কাঠির তৈরি চতুর্ভুজগুলি আটকে নতুন মডেল তৈরির চেষ্টা করছে।

দেখছি, সকল ধরনের ও মাপের চতুর্ভুজ বৃত্তাকার রিং-এর মধ্যে আটকানো যাচ্ছে না।

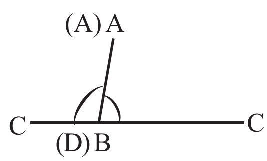
(1) যে সকল চতুর্ভুজগুলি বৃত্তাকার রিং-এর মধ্যে আটকানো গেল, তাদের আলাদা করে রাখি ও তাদের মধ্যে মিল খোঁজার চেষ্টা করি।



কাঠির A ও C বিন্দুতে জোড় খুলে পাশের ছবির মতো বসিয়ে

দেখছি, ∠ABC ও ∠ADC দুটি পরস্পর ☐ [পূরক / সম্পূরক]

একইভাবে, ∠BAD ও ∠BCD দুটিও পরস্পর ☐ [নিজে লিখি]



আমি খাতায় বৃত্ত ও বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ আঁকি ও হাতেকলমে যাচাই করে কী পাই দেখি।

হাতেকলমে

(i) আর্ট পেপারে বৃত্ত এঁকে বৃত্তাকার ক্ষেত্র কেটে নিলাম।

(ii) এবার ওই বৃত্তের উপরে যে-কোনো চারটি বিন্দু A, B, C ও D নিয়ে A, B; B, C; C, D ও D, A যোগ করে ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ পেলাম।

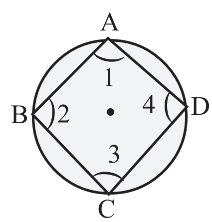
(iii) কোণগুলির 1, 2, 3 ও 4 নাম দিয়ে কেটে নিলাম।

(iv) এবার কোণ 4টির মধ্যে বিপরীত দুটি কোণ পাশাপাশি বসিয়ে দেখছি,

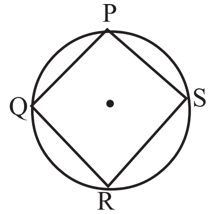
$\angle 1 + \angle 3 =$ ☐ এবং $\angle 2 + \angle 4 =$ ☐

[নিজে এঁকে ও কেটে হাতেকলমে যাচাই করে লিখি]

∴ হাতেকলমে পেলাম, বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সম্পূরক।

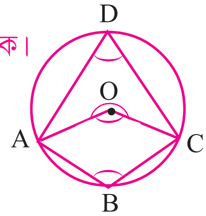


রাহুল একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ PQRS এঁকেছে।
আমি চাঁদা দিয়ে মেপে দেখছি,
$\angle P + \angle R = 180^\circ$ এবং $\angle Q + \angle S = 180^\circ$
[নিজে এঁকে মেপে যাচাই করি]



যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য : 38. বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সম্পূরক।



প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তে ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

প্রমাণ করতে হবে যে : $\angle ABC + \angle ADC = 2$ সমকোণ

এবং $\angle BAD + \angle BCD = 2$ সমকোণ

অঙ্কন : A, O এবং C, O যোগ করলাম।

প্রমাণ : ADC বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত কেন্দ্রস্থ কোণ প্রবৃদ্ধ $\angle AOC$ এবং বৃত্তস্থ কোণ $\angle ABC$

$\therefore$ প্রবৃদ্ধ$\angle AOC = 2\angle ABC$

$\therefore \angle ABC = \frac{1}{2}$ প্রবৃদ্ধ$\angle AOC$ ....(i)

আবার ABC বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle AOC$ এবং বৃত্তস্থ কোণ $\angle ADC$

$\therefore \angle AOC = 2\angle ADC$

$\therefore \angle ADC = \frac{1}{2}\angle AOC$ ....(ii)

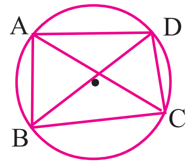
$\therefore$ (i) ও (ii) হইতে পাই, $\angle ABC + \angle ADC = \frac{1}{2}$ প্রবৃদ্ধ$\angle AOC + \frac{1}{2}\angle AOC$

$= \frac{1}{2}$ (প্রবৃদ্ধ$\angle AOC + \angle AOC$)

$= \frac{1}{2} \times 4$ সমকোণ $= 2$ সমকোণ

অনুরূপে B, O এবং D, O যোগ করে প্রমাণ করতে পারি যে, $\angle BAD + \angle BCD = 2$ সমকোণ [প্রমাণিত]

বিকল্প প্রমাণ



প্রদত্ত : ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

প্রমাণ করতে হবে যে : $\angle ABC + \angle ADC = 2$ সমকোণ

এবং $\angle BAD + \angle BCD = 2$ সমকোণ

অঙ্কন : AC ও BD দুটি কর্ণ টানলাম।

প্রমাণ : $\angle ADB = \angle ACB$ [একই বৃত্তাংশস্থ কোণ]

আবার $\angle BAC = \angle BDC$ [একই বৃত্তাংশস্থ কোণ]

আবার $\angle ADC = \angle ADB + \angle BDC$

$= \angle ACB + \angle BAC$

$\therefore \angle ADC + \angle ABC = \angle ACB + \angle BAC + \angle ABC$

$\therefore \angle ADC + \angle ABC = 2$ সমকোণ [$\because$ ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি 2 সমকোণ]

অনুরূপে প্রমাণ করতে পারি যে, $\angle BAD + \angle BCD = 2$ সমকোণ [প্রমাণিত]

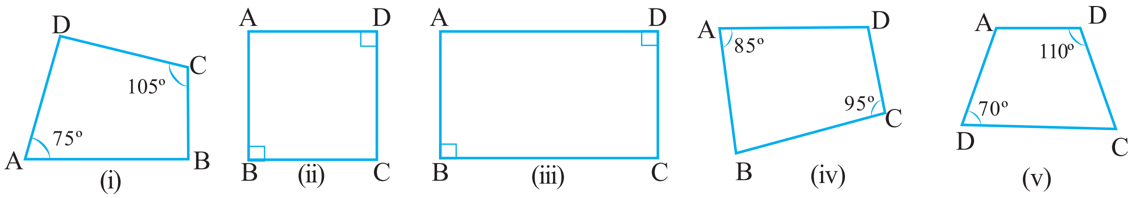
দুটি বিপরীত কোণের সমষ্টি 2 সমকোণ প্রমাণ করার পর 'চতুর্ভুজের চারটি কোণের সমষ্টি 4 সমকোণের সমান'— এই ধর্ম থেকে অপর দুটি বিপরীত কোণের সমষ্টি 2 সমকোণ সহজেই প্রমাণ করা যায়।

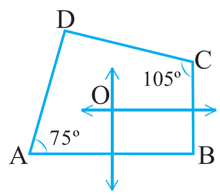
আমি যে-কোনো একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ PQRS অঙ্কন করি এবং যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, $\angle PQR + \angle PSR = 2$ সমকোণ এবং $\angle QPS + \angle QRS = 2$ সমকোণ [নিজে করি]

এই উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য কি সম্ভব?
অর্থাৎ কোনো চতুর্ভুজের বিপরীত কোণ পরস্পর সম্পূরক হলে চতুর্ভুজটির শীর্ষবিন্দুগুলি কি সমবৃত্তস্থ হবে?

হাতেকলমে

জয়িতা অনেকগুলি চতুর্ভুজ এঁকেছে যাদের বিপরীত কোণগুলির সমষ্টি 2 সমকোণ।





(I) আমি (i) নং চতুর্ভুজটি নিয়ে AB ও BC বাহুর দুটি লম্বসমদ্বিখণ্ডক আঁকলাম যারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করল।

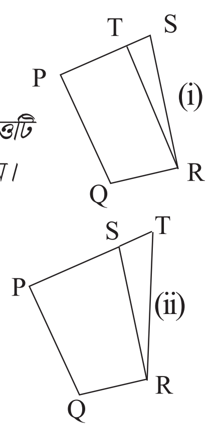
(II) O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OA দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত এঁকে দেখছি বৃত্তটি A, B, C ও ☐ বিন্দুগামী হচ্ছে।

∴ পেলাম A, B ও C তিনটি অসমরেখ বিন্দুগামী নির্দিষ্ট বৃত্ত D বিন্দুগামী হচ্ছে।

∴ হাতেকলমে পেলাম, চতুর্ভুজের বিপরীত কোণ পরস্পর সম্পূরক হলে চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি সমবৃত্তস্থ হবে।

আমি (ii), (iii), (iv) ও (v) নং চতুর্ভুজের মতো যে-কোনো চতুর্ভুজ আঁকি যাদের বিপরীত কোণগুলির সমষ্টি 180° এবং একইভাবে হাতেকলমে যাচাই করি যে চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি সমবৃত্তস্থ।

উপপাদ্য : 39. *কোনো চতুর্ভুজের বিপরীত কোণ পরস্পর সম্পূরক হলে, চতুর্ভুজটির শীর্ষবিন্দুগুলি সমবৃত্তস্থ হবে।* ***[প্রমাণ মূল্যায়নের অন্তর্ভুক্ত নয়]***



প্রদত্ত : *ধরি, PQRS একটি চতুর্ভুজ যার $\angle PQR$ এবং $\angle PSR$ পরস্পর সম্পূরক, অর্থাৎ*

$\angle PQR + \angle PSR = 2$ *সমকোণ*

প্রমাণ করতে হবে যে : *চতুর্ভুজটির শীর্ষবিন্দুগুলি অর্থাৎ P, Q, R, S বিন্দু চারটি সমবৃত্তস্থ।*

অঙ্কন : *P, Q, R তিনটি অসমরেখ বিন্দু দিয়ে একটি মাত্র বৃত্ত অঙ্কন করা যায়। ধরি, অঙ্কিত বৃত্তটি S বিন্দুগামী নয়। বৃত্তটি PS বা PS-এর বর্ধিতাংশকে T বিন্দুতে ছেদ করে। T ও R যুক্ত করলাম।*

প্রমাণ : *অঙ্কন অনুসারে, PQRT একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ*

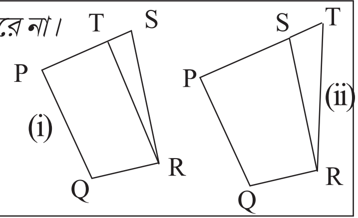
∴ $\angle PQR + \angle PTR = 2$ *সমকোণ* .... (1)

কিন্তু $\angle PQR + \angle PSR = 2$ *সমকোণ [প্রদত্ত]* .... (2)

(1) নং ও (2) নং থেকে পাই, $\angle PQR + \angle PTR = \angle PQR + \angle PSR$

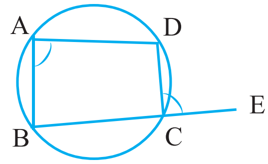
∴ $\angle PTR = \angle PSR$

একটি ত্রিভুজের বহিঃস্থকোণ ত্রিভুজের বিপরীত অন্তঃস্থ কোণের সমান হতে পারে না।
$\therefore \angle PTR = \angle PSR$ হবে যখন S ও T বিন্দুদ্বয় সমাপতিত হবে।
$\therefore$ P, Q, R বিন্দুগামী বৃত্তটি অবশ্যই S বিন্দু দিয়ে যাবে।
$\therefore$ P, Q, R, S বিন্দু চারটি সমবৃত্তস্থ।



অনুসিদ্ধান্ত : 'একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের কোনো বাহুকে বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণটি উৎপন্ন হয় তা অন্তঃস্থ বিপরীত কোণের সমান হবে' — যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি।

প্রদত্ত : ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের BC বাহুকে E বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করায় $\angle DCE$ বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হলো।



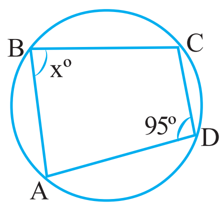
প্রমাণ করতে হবে যে : $\angle DCE$ = বিপরীত অন্তঃস্থ $\angle BAD$

প্রমাণ : $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$ [$\because$ ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ]

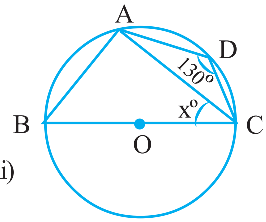
আবার, $\angle BCD + \angle DCE = 180^\circ$ [$\because$ BE সরলরেখাংশের উপর DC দণ্ডায়মান]

সুতরাং, $\angle BAD + \angle BCD = \angle BCD + \angle DCE$ $\quad \therefore \angle DCE = \angle BAD$ **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 1. নীচের দুটি O কেন্দ্রীয় বৃত্তের ছবি দেখি এবং প্রতিক্ষেত্রে x-এর মান হিসাব করে লিখি।



(i)



(ii)

(i) ABCD $\square$ চতুর্ভুজ, $\quad \therefore \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$

$\therefore x^\circ = \angle ABC = 180^\circ - \square = \square$

$x = \square$ [নিজে লিখি]

(ii) ABCD $\square$ চতুর্ভুজ, $\quad \therefore \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$

$\therefore \angle ABC = \square$

আবার $\angle BAC = \square$ সমকোণ, $\therefore \angle BAC = 90^\circ$

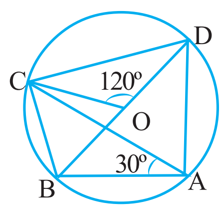
$\therefore x^\circ + \angle ABC + \angle BAC = 180^\circ$

$\therefore x^\circ + 50^\circ + 90^\circ = 180^\circ$; $\therefore x = \square$ [নিজে লিখি]

প্রয়োগ : 2. ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ এবং O ওই বৃত্তের কেন্দ্র। যদি $\angle COD = 120^\circ$ এবং $\angle BAC = 30^\circ$ হয়, তবে $\angle BOC$ ও $\angle BCD$-এর মান কত হবে, হিসাব করে লিখি।

BC উপচাপের দ্বারা গঠিত কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle BOC$ এবং বৃত্তস্থ কোণ $\angle BAC$।

$\therefore \angle BOC = 2\angle BAC = \square$ [নিজে লিখি]



(i)

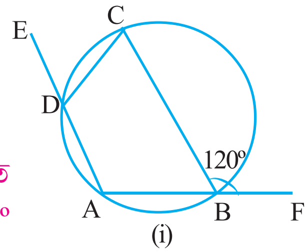
CD উপচাপের উপর কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle COD$ এবং বৃত্তস্থ কোণ $\angle CAD$,

$\therefore \angle CAD = \frac{1}{2} \angle COD = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$

$\therefore \angle BAD = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$

$\therefore$ ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজে $\angle BCD + \angle BAD = 180^\circ$

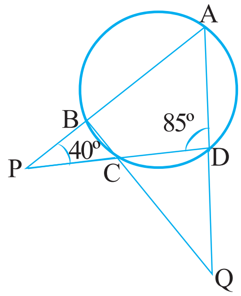
$\therefore \angle BCD = \square$ [নিজে লিখি]



(i)

প্রয়োগ : 3 পাশের বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ ABCD-এর AD ও AB বাহুকে যথাক্রমে E ও F বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করলাম। $\angle CBF = 120^\circ$ হলে, $\angle CDE$ -এর মান হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 4 ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের AB ও DC বাহুকে বর্ধিত করায় P বিন্দুতে এবং AD ও BC বাহুকে বর্ধিত করায় Q বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। $\angle ADC = 85^\circ$ এবং $\angle BPC = 40^\circ$ হলে, $\angle BAD$ ও $\angle CQD$-এর মান হিসাব করে লিখি।



ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বহিঃস্থ $\angle PBC = \angle ADC = 85^\circ$

$\therefore \Delta BPC$-এর $\angle BCP = 180^\circ - (85^\circ + 40^\circ) = \square$

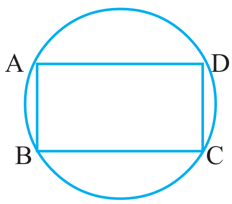
আবার, $\angle BAD =$ বহিঃস্থ $\angle BCP = 55^\circ$

ΔCQD-এর, $\angle CQD + \angle DCQ = 85^\circ$

$\therefore \angle CQD = 85^\circ - \angle DCQ = 85^\circ - \angle BCP = \square$

$\therefore \angle BAD = 55^\circ$ এবং $\angle CQD = 30^\circ$

প্রয়োগ : 5. প্রমাণ করি যে, বৃত্তস্থ সামান্তরিক একটি আয়তাকার চিত্র।



প্রদত্ত : ABCD চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ সামান্তরিক।

প্রমাণ করতে হবে যে : ABCD সামান্তরিক আয়তাকার চিত্র।

প্রমাণ : ABCD একটি সামান্তরিক

$\therefore \angle ABC = \angle ADC$

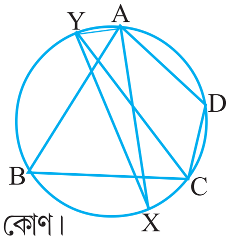
আবার, ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ

$\therefore \angle ABC + \angle ADC = \square$

সুতরাং, $2\angle ABC = 180^\circ$ $\therefore \angle ABC = 90^\circ$

যেহেতু, এই সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ, সুতরাং, ABCD সামান্তরিকটি একটি আয়তাকার চিত্র।

প্রয়োগ : 6. ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। $\angle DAB$ ও $\angle BCD$-এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় বৃত্তকে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে, XY ওই বৃত্তের ব্যাস।



প্রদত্ত : ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের $\angle DAB$ ও $\angle BCD$-এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় বৃত্তকে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে যে : XY বৃত্তের একটি ব্যাস।

অঙ্কন : A, Y বিন্দুদ্বয় যোগ করি।

প্রমাণ : $\angle YAB$ ও $\angle YCB$ বৃত্তের উপচাপ YB-এর দ্বারা গঠিত একই বৃত্তাংশস্থ বৃত্তস্থ কোণ।

$\therefore \angle YAB = \angle YCB = \frac{1}{2}\angle BCD$ ....(I) [$\because$ CY, $\angle BCD$-এর সমদ্বিখণ্ডক]

আবার, $\angle XAY = \angle XAB + \angle YAB$

$= \frac{1}{2}\angle BAD + \frac{1}{2}\angle BCD$ [(I) হইতে পেলাম] [$\because$ AX, $\angle DAB$-এর সমদ্বিখণ্ডক]

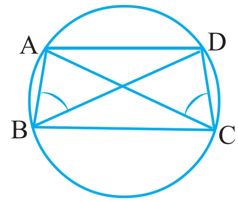
$= \frac{1}{2}(\angle BAD + \angle BCD) = \frac{1}{2} \times 180^\circ$ [$\because$ ABCD বৃত্তঃস্থ চতুর্ভুজ]

$= 90^\circ$

$\therefore \angle XAY$ একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ। $\therefore$ XY বৃত্তের ব্যাস।

প্রয়োগ : 7. প্রমাণ করি যে, বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়াম সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়াম এবং কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য সমান।

প্রদত্ত : ABCD একটি বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়াম যার AD || BC



প্রমাণ করতে হবে যে : AB = DC এবং AC = BD

প্রমাণ : $\angle ADC + \angle DCB = 180^\circ$ [∵ AD || BC এবং DC ভেদক]

আবার, $\angle BAD + \angle DCB = 180^\circ$ [∵ ABCD বৃত্তঃস্থ চতুর্ভুজ]

∴ $\angle ADC + \angle DCB = \angle BAD + \angle DCB$ ∴ $\angle ADC = \angle BAD$ .... (I)

ΔBAD ও ΔADC-এর মধ্যে, $\angle BAD = \angle ADC$ [(I) থেকে পেলাম]

$\angle ABD = \angle DCA$ [একই বৃত্তাংশস্থ কোণ]

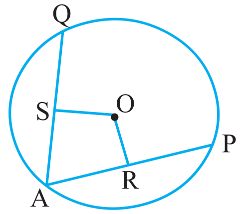
AD সাধারণ বাহু

∴ $\Delta BAD \cong \Delta ADC$ [সর্বসমতার A–A–S শর্তানুসারে]

∴ AB = DC এবং AC = BD (∵ সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ অংশ) [প্রমাণিত]

প্রয়োগ : 8. O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AP, AQ দুটি জ্যা-এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে R ও S; প্রমাণ করি যে, O, R, A, S বিন্দু চারটি সমবৃত্তস্থ।

প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AP ও AQ দুটি জ্যা-এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে R ও S



প্রমাণ করতে হবে যে : O, R, A, S বিন্দু চারটি সমবৃত্তস্থ।

অঙ্কন : O, R বিন্দুদ্বয় এবং O, S বিন্দুদ্বয় যুক্ত করি।

প্রমাণ : OR, AP জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। ∴ $OR \perp AP$

অর্থাৎ, $\angle ARO = 90^\circ$

OS, AQ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। ∴ $OS \perp AQ$

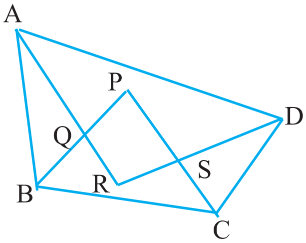
অর্থাৎ, $\angle ASO = 90^\circ$

∴ $\angle ARO + \angle ASO = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

যেহেতু AROS চতুর্ভুজের এক জোড়া বিপরীত কোণ পরস্পর সম্পূরক, সুতরাং, O, R, A, S বিন্দু চারটি সমবৃত্তস্থ।

প্রয়োগ : 9. প্রমাণ করি যে চতুর্ভুজের চারটি কোণের সমদ্বিখণ্ডকগুলি পরস্পর মিলিত হয়ে যে চতুর্ভুজ গঠন করে সেটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

প্রদত্ত : ABCD একটি চতুর্ভুজের AR, BP, CP ও DR যথাক্রমে $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ ও $\angle D$-এর সমদ্বিখণ্ডক পরস্পর মিলিত হয়ে PQRS চতুর্ভুজ উৎপন্ন করেছে।



প্রমাণ করতে হবে যে : PQRS বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

প্রমাণ : ΔARD-এর, $\angle ARD + \angle RDA + \angle DAR = 180^\circ$

∴ $\angle ARD + \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle D = 180^\circ$ .... (I)

আবার, ΔBPC-এর, $\angle BPC + \angle PCB + \angle CBP = 180^\circ$

∴ $\angle BPC + \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle B = 180^\circ$ .... (II)

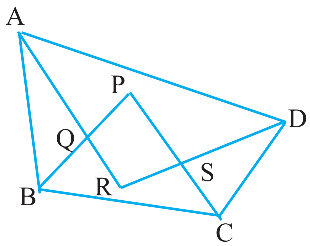
(I) ও (II) হইতে পাই, $\angle ARD + \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle D + \angle BPC + \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle B = 180^\circ + 180^\circ$

বা, $\angle ARD + \angle BPC + \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) = 360^\circ$

বা, $\angle ARD + \angle BPC + \frac{1}{2} \times 360^\circ = 360^\circ$

বা, $\angle ARD + \angle BPC = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$

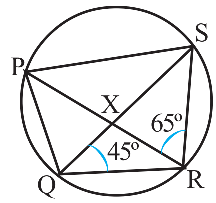
$\therefore \angle QRS + \angle QPS = 180^\circ$



PQRS চতুর্ভুজের একজোড়া বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সম্পূরক।

$\therefore$ PQRS চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

কষে দেখি 10



1. পাশের ছবির PQRS বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে X বিন্দুতে এমনভাবে ছেদ করেছে যে $\angle PRS = 65^\circ$ এবং $\angle RQS = 45^\circ$; $\angle SQP$ ও $\angle RSP$-এর মান হিসাব করে লিখি।

2. ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের AB বাহুকে X বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করলাম এবং মেপে দেখছি $\angle XBC = 82^\circ$ এবং $\angle ADB = 47^\circ$; $\angle BAC$-এর মান হিসাব করে লিখি।

3. PQRS বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের PQ, SR বাহু দুটি বর্ধিত করায় T বিন্দুতে মিলিত হলো। বৃত্তের কেন্দ্র O; $\angle POQ = 110^\circ$, $\angle QOR = 60^\circ$, $\angle ROS = 80^\circ$ হলে $\angle RQS$ ও $\angle QTR$-এর মান হিসাব করে লিখি।

4. দুটি বৃত্ত পরস্পরকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। P ও Q বিন্দুগামী দুটি সরলরেখা একটি বৃত্তকে যথাক্রমে A ও C এবং অপর বৃত্তকে যথাক্রমে B ও D বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে, AC || BD।

5. ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ অঙ্কন করেছি এবং এর BC বাহুকে E বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করলাম। প্রমাণ করি যে, $\angle BAD$ ও $\angle DCE$-এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় বৃত্তের উপর মিলিত হবে।

6. মোহিত একটি বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু X দিয়ে দুটি সরলরেখা অঙ্কন করেছে যারা বৃত্তটিকে যথাক্রমে A, B বিন্দু ও C, D বিন্দুতে ছেদ করেছে। যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, ΔXAC ও ΔXBD-এর দুটি করে কোণ সমান।

7. দুটি বৃত্ত অঙ্কন করেছি যারা পরস্পরকে G ও H বিন্দুতে ছেদ করেছে। এবার G বিন্দুগামী একটি সরলরেখা অঙ্কন করলাম যেটি বৃত্ত দুটিকে P ও Q বিন্দুতে এবং H বিন্দুগামী PQ-এর সমান্তরাল অপর একটি সরলরেখা অঙ্কন করলাম যা বৃত্তদুটিকে R ও S বিন্দুতে ছেদ করল। প্রমাণ করি যে PQ = RS।

8. ABC একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করেছি যার AB = AC এবং বর্ধিত BC-এর উপর E যে-কোনো একটি বিন্দু। ΔABC-এর পরিবৃত্ত AE-কে D বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ করি যে, $\angle ACD = \angle AEC$।

9. ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। DE জ্যা $\angle BDC$-এর বহির্দ্বিখণ্ডক। প্রমাণ করি যে, AE (বা বর্ধিত AE) $\angle BAC$-এর বহির্দ্বিখণ্ডক।

10. ABC ত্রিভুজের AC ও AB বাহুর উপর BE ও CF যথাক্রমে লম্ব। প্রমাণ করি যে, B, C, E, F বিন্দু চারটি সমবৃত্তস্থ। এর থেকে প্রমাণ করি যে, ΔAEF ও ΔABC এর দুটি করে কোণ সমান।

11. ABCD একটি সামান্তরিক। A ও B বিন্দুগামী একটি বৃত্ত AD ও BC-কে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, E, F, C, D বিন্দু চারটি সমবৃত্তস্থ।

12. ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। AB ও DC বাহুদ্বয়কে বর্ধিত করলে P বিন্দুতে এবং AD ও BC বাহুদ্বয়কে বর্ধিত করলে R বিন্দুতে মিলিত হয়। ΔBCP এবং ΔCDR-এর পরিবৃত্তদ্বয় T বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, P, T, R সমরেখ।

13. ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু O; প্রমাণ করি যে O বিন্দুটি পাদত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র।

14. ABCD এমন একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ এঁকেছি যে AC, ∠BAD-কে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। এবার AD-কে E বিন্দু পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করলাম যেন DE = AB হয়। প্রমাণ করি যে, CE = CA

15. দুটি বৃত্তের একটি অপরটির কেন্দ্র O বিন্দুগামী এবং বৃত্ত দুটি পরস্পরকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করেছে। A বিন্দুগামী একটি সরলরেখা O বিন্দুগামী বৃত্তকে P বিন্দুতে এবং O কেন্দ্রীয় বৃত্তকে R বিন্দুতে ছেদ করেছে। P, B ও R, B যুক্ত করে ,প্রমাণ করি যে PR = PB

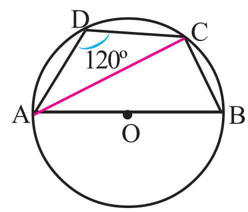
16. প্রমাণ করি যে একটি সুষম পঞ্চভুজের যে-কোনো চারটি শীর্ষবিন্দু সমবৃত্তস্থ।

17. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V. S. A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M. C. Q.) :

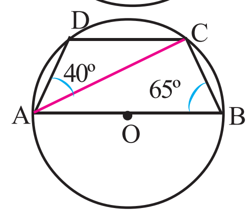
(i) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB ব্যাস। ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। ∠ADC = 120º হলে, ∠BAC-এর মান

(a) 50º (b) 60º (c) 30º (d) 40º



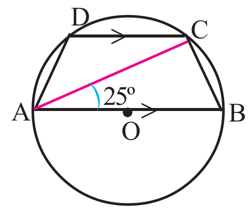
(ii) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB ব্যাস। ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। ∠ABC = 65º, ∠DAC = 40º হলে, ∠BCD-এর মান

(a) 75º (b) 105º (c) 115º (d) 80º



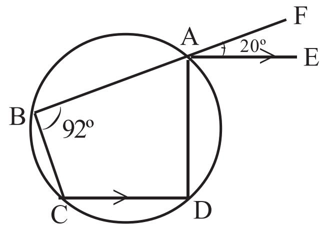
(iii) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB বৃত্তের ব্যাস। ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ যার AB || DC এবং ∠BAC = 25º হলে ∠DAC-এর মান

(a) 50º (b) 25º (c) 130º (d) 40º



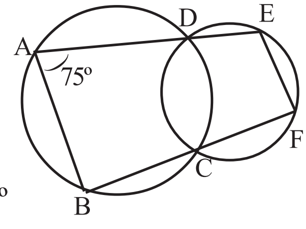
(iv) পাশের চিত্রে ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। BA -কে F বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হলো। AE || CD, ∠ABC = 92º এবং ∠FAE = 20º হলে, ∠BCD-এর মান

(a) 20º (b) 88º (c) 108º (d) 72º



(v) পাশের চিত্রে দুটি বৃত্ত পরস্পরকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে। D ও C বিন্দুগামী দুটি সরলরেখা একটি বৃত্তকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে এবং অপর বৃত্তকে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে। ∠DAB = 75º হলে, ∠DEF-এর মান

(a) 75º (b) 70º (c) 60º (d) 105º



(B) সত্য / মিথ্যা লিখি :

(i) একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণ পরস্পর পূরক।

(ii) একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের একটি বাহুকে বর্ধিত করলে উৎপন্ন বহিঃস্থ কোণ বিপরীত অন্তঃস্থ কোণের সমান হয়।

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

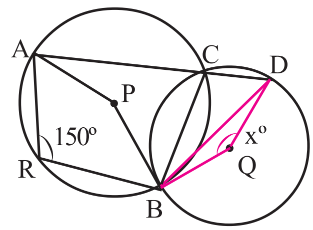
(i) একটি চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক হলে চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি ____________।

(ii) একটি বৃত্তস্থ সামান্তরিক একটি ____________ চিত্র।

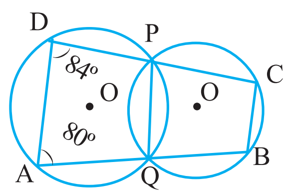
(iii) একটি বর্গাকার চিত্রের শীর্ষবিন্দুগুলি ____________।

18. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S. A.) :**

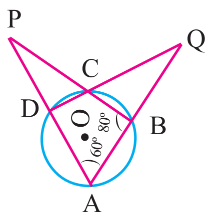
(i) পাশের চিত্রে P ও Q কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তদুটি B ও C বিন্দুতে ছেদ করেছে। ACD একটি সরলরেখাংশ। $\angle ARB = 150^\circ$, $\angle BQD = x^\circ$ হলে, x-এর মান নির্ণয় করি।



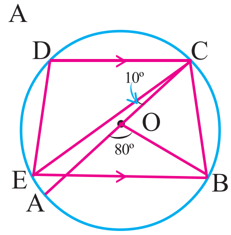
(ii) পাশের চিত্রে দুটি বৃত্ত পরস্পর P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। $\angle QAD = 80^\circ$ এবং $\angle PDA = 84^\circ$ হলে, $\angle QBC$ ও $\angle BCP$-এর মান নির্ণয় করি।



(iii) পাশের চিত্রে $\angle BAD = 60^\circ$, $\angle ABC = 80^\circ$ হলে, $\angle DPC$ এবং $\angle BQC$-এর মান নির্ণয় করি।



(iv) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AC ব্যাস। $\angle AOB = 80^\circ$ এবং $\angle ACE = 10^\circ$ হলে, $\angle BED$-এর মান নির্ণয় করি।



(v) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB বৃত্তের ব্যাস। $\angle AOD = 140^\circ$ এবং $\angle CAB = 50^\circ$ হলে, $\angle BED$-এর মান নির্ণয় করি।