અનુક્રમણિકા

પ્રકરણ	1	સંમેય સંખ્યાઓ	1
પ્રકરણ	2	એક ચલ સુરેખ સમીકરણ	21
પ્રકરણ	3	ચતુષ્કોણની સમજ	37
પ્રકરણ	4	પ્રાયોગિક ભૂમિતિ	57
પ્રકરણ	5	માહિતીનું નિયમન	69
પ્રકરણ	6	વર્ગ અને વર્ગમૂળ	89
પ્રકરણ	7	ઘન અને ઘનમૂળ	109
પ્રકરણ	8	રાશિઓની તુલના	117
પ્રકરણ	9	બૈજિક પદાવલિઓ અને નિત્યસમ	137
પ્રકરણ	10	ઘનાકારોનું પ્રત્યક્ષીકરણ	153
પ્રકરણ	11	માપન	169
પ્રકરણ	12	ઘાત અને ઘાતાંક	193
પ્રકરણ	13	સમપ્રમાણ અને વ્યસ્ત પ્રમાણ	201
પ્રકરણ	14	અવયવીકરણ	217
પ્રકરણ	15	આલેખનો પરિચય	231
પ્રકરણ	16	સંખ્યા સાથે રમત	249
		જવાબો	261
		ગમ્મત સાથે જ્ઞાન	275

સંમેય સંખ્યાઓ

પ્રકરણ

1

1. પ્રાસ્તાવિક

ગણિતશાસ્ત્રમાં આપણે સુરેખ (સાદા) સમીકરણને વારંવાર ઉકેલીએ છીએ. ઉદાહરણ તરીકે સમીકરણ

$$x + 2 = 13 \qquad (1)$$

જો સમીકરણ (1)માં આપણે $x = 11$ મૂકીએ, તો આ સમીકરણનો ઉકેલ મળે છે. કેમ કે xની કિંમત 11 મૂકતાં સમીકરણનું સમાધાન થાય છે. આ સમીકરણનો ઉકેલ 11 જે એક **પ્રાકૃતિક સંખ્યા (Natural Number)** છે. જ્યારે સમીકરણ

$$x + 5 = 5 \qquad (2)$$

સમીકરણ (2)નો ઉકેલ **પૂર્ણ સંખ્યા (Whole Number)** 0 (શૂન્ય) છે. જો આપણે માત્ર પ્રાકૃતિક સંખ્યા જ વિચારીએ તો સમીકરણ (2) ઉકેલી શકાય નહિ. સમીકરણ (2)ને ઉકેલવા માટે, પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના સમૂહમાં 0 (શૂન્ય) ઉમેરવું પડે છે. આમ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓમાં 0 (શૂન્ય) ઉમેરતાં પૂર્ણ સંખ્યાઓ મળે. પરંતુ પૂર્ણ સંખ્યાઓ પણ કેટલાંક સમીકરણ ઉકેલવા માટે પૂરતી નથી. જેવાં કે,

$$x + 18 = 5 \qquad (3)$$

તમે નિરીક્ષણ કર્યું કે, આવું કેમ ? આ સમીકરણ (3)ના ઉકેલ માટે (–13) સંખ્યાની જરૂર પડે છે. આ બાબત આપણને **પૂર્ણાંક (ધન અને ઋણ)** સંખ્યા તરફ દોરી જાય છે. અહીં નોંધીએ કે ધન પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ એ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓને સંલગ્ન છે. હવે કોઈ એમ પણ વિચારી શકે કે આપણી પાસે સુરેખ સમીકરણોને ઉકેલવા માટે પૂરતી સંખ્યામાં પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ છે.

હવે નીચેનાં સમીકરણો ચકાસો.

$$2x = 3 \qquad (4)$$

$$5x + 7 = 0 \qquad (5)$$

ઉપરનાં કયાં સમીકરણો માટે આપણને પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ ઉકેલ તરીકે મળતી નથી. (તપાસો) આ બાબતની ચકાસણી કરતાં સમીકરણ (4) માટે $\frac{3}{2}$ અને સમીકરણ (5) માટે $\frac{-7}{5}$ સંખ્યાની જરૂર પડે છે. આ બાબત આપણને **સંમેય સંખ્યા** તરફ દોરી જાય છે.

આપણે **સંમેય સંખ્યા** પરની મૂળભૂત ક્રિયાઓ જોઈ ગયાં છીએ. હવે આપણે અત્યાર સુધી શીખેલ જુદા જુદા પ્રકારની સંખ્યાઓ માટેની ગાણિતિક ક્રિયાઓના ગુણધર્મો સમજવાનો પ્રયત્ન કરીએ.

1.2 સંમેય સંખ્યાઓના ગુણધર્મો

1.2.1 સંવૃત્તતા (Closure)

(i) પૂર્ણ સંખ્યાઓ (Whole numbers)

આવો, ફરી એક વખત સંક્ષેપમાં પૂર્ણ સંખ્યાઓ માટે બધી ક્રિયાઓ પર સંવૃત્તતાના ગુણધર્મની ચર્ચા કરીએ.

ક્રિયા	સંખ્યાઓ	નોંધ
સરવાળો	$0 + 5 = 5$, પૂર્ણ સંખ્યા છે. $4 + 7....$ = શું આ પૂર્ણ સંખ્યા છે ? સામાન્ય રીતે, કોઈપણ બે પૂર્ણ સંખ્યા a અને b માટે $a + b$ પૂર્ણ સંખ્યા છે.	સરવાળાની ક્રિયા માટે પૂર્ણ સંખ્યાઓ સંવૃત્ત છે.
બાદબાકી	$5 - 7 = -2$ એ પૂર્ણ સંખ્યા નથી.	બાદબાકીની ક્રિયા માટે પૂર્ણ સંખ્યાઓ સંવૃત્ત નથી.
ગુણાકાર	$0 \times 3 = 0$, પૂર્ણ સંખ્યા છે. $3 \times 7 ...$ = શું આ પૂર્ણ સંખ્યા છે ? સામાન્ય રીતે જો a અને b કોઈ પણ બે પૂર્ણ સંખ્યાઓ હોય તો તેનો ગુણાકાર ab પણ પૂર્ણ સંખ્યા જ હોય.	ગુણાકારની ક્રિયા માટે પૂર્ણ સંખ્યાઓ સંવૃત્ત છે.
ભાગાકાર	$5 \div 8 = \frac{5}{8}$, એ પૂર્ણ સંખ્યા નથી.	ભાગાકારની ક્રિયા માટે પૂર્ણ સંખ્યાઓ સંવૃત્ત નથી.

તમે પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના સંદર્ભમાં પાયાની ચાર ક્રિયાઓ માટે સંવૃત્તતાના ગુણધર્મોની ચકાસણી કરો.

(ii) પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ (Integers numbers)

હવે આપણે ફરીથી યાદ કરી લઈએ કે કઈ ક્રિયાઓ અંગે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ સંવૃત્ત છે.

ક્રિયા	સંખ્યાઓ	નોંધ
સરવાળો	$-6 + 5 = -1$ એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે. $-7 + (-5)$ શું પૂર્ણાંક સંખ્યા છે ? શું $8 + 5$ એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે ? સામાન્ય રીતે કોઈ બે પૂર્ણાંકો a અને b માટે, $a + b$ એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.	સરવાળાની ક્રિયા માટે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ સંવૃત્ત છે.
બાદબાકી	$7 - 5 = 2$, એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે. શું $5 - 7$ એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે ? $-6 - 8 = -14$, એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.$-6 - (-8) = 2$, એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે. શું $8 - (-6)$ એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે ? સામાન્ય રીતે કોઈ બે પૂર્ણાંકો a અને b માટે $a - b$ એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે. ચકાસો કે $b - a$ પણ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.	બાદબાકીની ક્રિયા માટે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ સંવૃત્ત છે.

ગુણાકાર	$5 \times 8 = 40$, એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે. શું -5×8 એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે ? $-5 \times (-8) = 40$, એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે. સામાન્ય રીતે કોઈ પણ બે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ a અને b માટે, $a \times b$ પણ એક પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.	ગુણાકારની ક્રિયા માટે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ સંવૃત્ત છે.
ભાગાકાર	$5 \div 8 = \frac{5}{8}$, એ પૂર્ણાંક સંખ્યા નથી.	ભાગાકારની ક્રિયા માટે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ સંવૃત્ત નથી.

તમે જોયું કે પૂર્ણ સંખ્યાઓ સરવાળા અને ગુણાકારની ક્રિયા માટે સંવૃત્ત છે પણ બાદબાકી અને ભાગાકારની ક્રિયા માટે સંવૃત્ત નથી. જ્યારે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ સરવાળો, બાદબાકી અને ગુણાકારની ક્રિયા માટે સંવૃત્ત છે, પણ ભાગાકારની ક્રિયા માટે સંવૃત્ત નથી.

(iii) સંમેય સંખ્યાઓ (Rational numbers)

તમે યાદ કરો કે જે સંખ્યાને $\frac{p}{q}$, (જ્યાં p અને q પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ છે અને $q \neq 0$) સ્વરૂપે લખી શકાય તેવી સંખ્યાને **સંમેય સંખ્યાઓ** કહે છે. ઉદાહરણ તરીકે : $-\frac{2}{3}$, $\frac{6}{7}$ એ સંમેય સંખ્યાઓ છે. જ્યારે 0, –2, 4 ને પણ $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપે લખી શકાય છે. તેથી તે પણ સંમેય સંખ્યાઓ છે. (ચકાસણી કરો !)

(a) બે સંમેય સંખ્યાઓનો સરવાળો કઈ રીતે થાય તે તમે જાણો છો. ચાલો, થોડી સંમેય સંખ્યાઓની જોડીઓનો સરવાળો કરીએ.

$\frac{3}{8} + \frac{(-5)}{7} = \frac{21 + (-40)}{56} = \frac{-19}{56}$ (સંમેય સંખ્યા છે.)

$\frac{-3}{8} + \frac{(-4)}{5} = \frac{-15 + (-32)}{40} \ldots =$ શું આ સંમેય સંખ્યા છે ?

$\frac{4}{7} + \frac{6}{11} \ldots =$ શું આ સંમેય સંખ્યા છે ?

આપણને બે સંમેય સંખ્યાઓનો સરવાળો કરતાં સંમેય સંખ્યા મળે છે. વધુ સંમેય સંખ્યાઓની જોડીઓ માટે ચકાસણી કરો.

આપણે કહી શકીએ કે સરવાળાની ક્રિયા માટે સંમેય સંખ્યાઓ સંવૃત્ત છે, *અર્થાત્ કોઈ પણ બે સંમેય સંખ્યાઓ a અને b માટે, $a + b$ પણ સંમેય સંખ્યા મળે છે.*

(b) શું બે સંમેય સંખ્યાઓનો તફાવત ફરીથી સંમેય સંખ્યા મળે ?

આપણી પાસે,

$-\frac{5}{7} - \frac{2}{3} = \frac{-5 \times 3 - 2 \times 7}{21} = \frac{-29}{21}$ (સંમેય સંખ્યા છે.)

$\frac{5}{8} - \frac{4}{5} = \frac{25-32}{40}\ldots =$ શું આ સંમેય સંખ્યા છે ?

$\frac{3}{7} - \left(\frac{-8}{5}\right)\ldots =$ શું આ સંમેય સંખ્યા છે ?

થોડી વધુ સંમેય સંખ્યાઓની જોડીઓ માટે પ્રયત્ન કરો. આપણે કહી શકીએ કે બાદબાકીની ક્રિયા માટે સંમેય સંખ્યાઓ સંવૃત્ત છે. અર્થાત્, બે સંમેય સંખ્યાઓ a અને b માટે, $a - b$ પણ સંમેય સંખ્યા છે.

(c) ચાલો, બે સંમેય સંખ્યાઓના ગુણાકારની ક્રિયાઓમાં શું થાય છે તે આપણે જોઈએ.

$\frac{-2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{-8}{15}$; $\frac{3}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{35}$ (બંનેનો ગુણાકાર સંમેય સંખ્યા છે.)

$\frac{-4}{5} \times \frac{-6}{11}\ldots =$ શું આ સંમેય સંખ્યા છે ?

તમે સંમેય સંખ્યાઓની વધુ જોડીઓ લઈ ચકાસણી કરો કે તે સંખ્યાઓનો ગુણાકાર ફરીથી સંમેય સંખ્યા આવે છે કે નહીં.

આપણે કહી શકીએ કે ગુણાકારની ક્રિયા માટે સંમેય સંખ્યાઓ સંવૃત્ત છે. *કેમ કે કોઈ પણ બે સંમેય સંખ્યાઓ a અને b માટે, $a \times b$ પણ સંમેય સંખ્યા છે.*

(d) આપણે નોંધીએ કે... $\frac{-5}{3} \div \frac{2}{5} = \frac{-25}{6}$ (સંમેય સંખ્યા છે.)

$\frac{2}{7} \div \frac{5}{3}\ldots =$ શું આ સંમેય સંખ્યા છે ?

$\frac{-3}{8} \div \frac{-2}{9}\ldots =$ શું આ સંમેય સંખ્યા છે ?

શું તમે કહી શકો કે સંમેય સંખ્યાઓ ભાગાકારની ક્રિયા માટે સંવૃત્ત છે ? કોઈ સંમેય સંખ્યા a માટે $a \div 0$ એ **અવ્યાખ્યાયિત** છે. તેથી કહી શકાય કે ભાગાકારની ક્રિયા માટે સંમેય સંખ્યાઓ **સંવૃત્ત નથી.** જો કે આપણે શૂન્યને અપવાદ ગણીએ તો કહી શકાય કે ભાગાકારની ક્રિયા માટે સંમેય સંખ્યાઓ સંવૃત્ત છે.

પ્રયત્ન કરો

નીચેના કોષ્ટકમાં ખાલી જગ્યા પૂરો :

સંખ્યાઓ	ક્રિયા માટે સંવૃત્ત			
	સરવાળો	બાદબાકી	ગુણાકાર	ભાગાકાર
સંમેય સંખ્યાઓ	હા	હા	...	ના
પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ	...	હા	...	ના
પૂર્ણ સંખ્યાઓ	...	...	હા	...
પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ	...	ના	...	...

1.2.2 ક્રમનો ગુણધર્મ (Commutativity)

(i) પૂર્ણ સંખ્યાઓ

પૂર્ણ સંખ્યાઓની જુદી-જુદી ક્રિયા માટે ક્રમના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરી કોષ્ટકની ખાલી જગ્યા ભરો.

ક્રિયા	સંખ્યાઓ	નોંધ
સરવાળો	$0 + 7 = 7 + 0 = 7$ $2 + 3 = \ldots + \ldots = \ldots$ કોઈ પણ બે પૂર્ણ સંખ્યાઓ a અને	b માટે, $a + b = b + a$ સરવાળાની ક્રિયામાં ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે.
બાદબાકી	....	બાદબાકીની ક્રિયામાં ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.
ગુણાકાર	....	ગુણાકારની ક્રિયામાં ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે.
ભાગાકાર	....	ભાગાકારની ક્રિયામાં ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.

તમે પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ માટે વિવિધ ક્રિયાઓ માટે ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે કે નહીં તે જાતે ચકાસો.

(ii) પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ

પૂર્ણાંક સંખ્યાઓમાં વિવિધ ક્રિયાઓ માટે ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે કે નહીં તે ચકાસણી કરી અને નીચેના કોષ્ટકમાં ખાલી જગ્યા પૂરો.

ક્રિયા	સંખ્યાઓ	નોંધ
સરવાળો	....	સરવાળાની ક્રિયામાં ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે.
બાદબાકી	શું $5 - (-3) = -3 - 5$?	બાદબાકીની ક્રિયામાં ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.
ગુણાકાર	....	ગુણાકારની ક્રિયામાં ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે.
ભાગાકાર	....	ભાગાકારની ક્રિયામાં ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.

(iii) સંમેય સંખ્યાઓ

(a) સરવાળો

તમે જાણો છો કે બે સંમેય સંખ્યાનો સરવાળો કઈ રીતે કરાય. ચાલો આપણે થોડીક સંમેય સંખ્યાઓના સરવાળા કરીએ.

$$\frac{-2}{3} + \frac{5}{7} = \frac{1}{21} \text{ અને } \frac{5}{7} + \left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{1}{21}$$

તેથી, $\frac{-2}{3} + \frac{5}{7} = \frac{5}{7} + \left(\frac{-2}{3}\right)$

વળી, $\frac{-6}{5} + \left(\frac{-8}{3}\right) = \ldots$ અને $\frac{-8}{3} + \left(\frac{-6}{5}\right) = \ldots$

શું $\frac{-6}{5} + \left(\frac{-8}{3}\right) = \left(\frac{-8}{3}\right) + \left(\frac{-6}{5}\right)$ છે ?

શું $\frac{-3}{8} + \frac{1}{7} = \frac{1}{7} + \left(\frac{-3}{8}\right)$ છે ?

તમે જોયું કે બે સંમેય સંખ્યાઓનો કોઈ પણ ક્રમમાં સરવાળો કરીએ તો મળતી સંખ્યા સમાન જ આવે છે. તેથી કહી શકાય કે સંમેય સંખ્યાઓમાં સરવાળાની ક્રિયા માટે ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે. જેમ કે, કોઈ પણ બે સંમેય સંખ્યાઓ a અને b માટે, $a + b = b + a$.

(b) બાદબાકી

શું $\frac{2}{3} - \frac{5}{4} = \frac{5}{4} - \frac{2}{3}$ છે ?

શું $\frac{1}{2} - \frac{3}{5} = \frac{3}{5} - \frac{1}{2}$ છે ?

તમે જોશો કે સંમેય સંખ્યાઓમાં બાદબાકીની ક્રિયા માટે ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.
અહીં નોંધો કે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓમાં બાદબાકીની ક્રિયા માટે ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી અને પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ સંમેય સંખ્યાઓ પણ છે.
તેથી સંમેય સંખ્યાઓમાં બાદબાકીની ક્રિયા માટે ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.

(c) ગુણાકાર

અહીં, $\frac{-7}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{-42}{15} = \frac{6}{5} \times \left(\frac{-7}{3}\right)$

શું $\frac{-8}{9} \times \left(\frac{-4}{7}\right) = \frac{-4}{7} \times \left(\frac{-8}{9}\right)$ છે ?

આવી બીજી સંમેય સંખ્યાઓ લઈ ગુણાકાર માટે ક્રમના ગુણધર્મની ચકાસણી કરો.
તમને જાણવા મળશે કે બે સંમેય સંખ્યાઓનો કોઈ પણ ક્રમમાં ગુણાકાર કરીએ તો પણ મળતી સંખ્યા સમાન જ આવે છે. તેથી કહી શકાય કે સંમેય સંખ્યાઓમાં ગુણાકારની ક્રિયા માટે ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે.
સામાન્ય રીતે $a \times b = b \times a$ (કોઈ પણ બે સંમેય સંખ્યાઓ a અને b માટે)

(d) ભાગાકાર

શું $\frac{-5}{4} \div \frac{3}{7} = \frac{3}{7} \div \left(\frac{-5}{4}\right)$ છે ?

તમે જોશો કે બંને બાજુઓ સમાન થતી નથી. તેથી કહી શકાય કે સંમેય સંખ્યાઓમાં ભાગાકારની ક્રિયા માટે ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.

પ્રયત્ન કરો

નીચેનું કોષ્ટક પૂર્ણ કરો :

સંખ્યાઓ	ક્રમનો ગુણધર્મ			
	સરવાળો	બાદબાકી	ગુણાકાર	ભાગાકાર
સંમેય સંખ્યાઓ	હા	...	...	...
પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ	...	ના	...	...
પૂર્ણ સંખ્યાઓ	...	...	હા	...
પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ	...	...	...	ના

1.2.3 જૂથનો ગુણધર્મ (Associativity)

(i) પૂર્ણ સંખ્યાઓ

નીચેના કોષ્ટકની મદદથી પૂર્ણ સંખ્યાઓ માટે પાયાની ચાર ક્રિયાઓ માટે જૂથના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરો.

ક્રિયા	સંખ્યાઓ	નોંધ
સરવાળો	....	સરવાળા માટે જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે.
બાદબાકી	....	બાદબાકી માટે જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.
ગુણાકાર	શું $7 \times (2 \times 5) = (7 \times 2) \times 5$? શું $4 \times (6 \times 0) = (4 \times 6) \times 0$? કોઈ પણ ત્રણ પૂર્ણ સંખ્યાઓ a, b અને c માટે $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$	ગુણાકાર માટે જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે.
ભાગાકાર	....	ભાગાકાર માટે જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.

ઉપરના કોષ્ટકમાં ખાલી જગ્યા પૂરી અને છેલ્લા ખાનામાં કરેલ નોંધની ચકાસણી કરો.
આ ઉપરાંત પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ માટે જૂથના ગુણધર્મની ચકાસણી જાતે કરો.

(ii) પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ

પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ માટે ચાર ક્રિયાઓ અંગે જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે કે કેમ તે નીચેના કોષ્ટકની મદદથી જોઈ શકાશે.

ક્રિયા	સંખ્યાઓ	નોંધ
સરવાળો	શું $(-2) + [3 + (-4)]$ $= [(-2) + 3] + (-4)$ થાય ? શું $(-6) + [(-4) + (-5)]$ $= [(-6) + (-4)] + (-5)$ થાય ? કોઈ પણ ત્રણ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ a, b અને c માટે $a + (b + c) = (a + b) + c$	સરવાળાની ક્રિયામાં જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે.
બાદબાકી	$5 - (7 - 3) = (5 - 7) - 3$ થાય ?	બાદબાકીની ક્રિયામાં જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.
ગુણાકાર	શું $5 \times [(-7) \times (-8)]$ $= [5 \times (-7)] \times (-8)$ થાય ? શું $(-4) \times [(-8) \times (-5)]$ $= [(-4) \times (-8)] \times (-5)$ થાય ? કોઈ પણ ત્રણ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ a, b અને c માટે, $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$	ગુણાકારની ક્રિયામાં જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે.
ભાગાકાર	શું $[(-10) \div 2] \div (-5)$ $= (-10) \div [2 \div (-5)]$ થાય ?	ભાગાકારની ક્રિયામાં જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.

(iii) સંમેય સંખ્યાઓ

(a) સરવાળો

આપણી પાસે,

$$\frac{-2}{3} + \left[\frac{3}{5} + \left(\frac{-5}{6}\right)\right] = \frac{-2}{3} + \left(\frac{-7}{30}\right) = \frac{-27}{30} = \frac{-9}{10}$$

$$\left[-\frac{2}{3} + \frac{3}{5}\right] + \left(\frac{-5}{6}\right) = \frac{-1}{15} + \left(\frac{-5}{6}\right) = \frac{-27}{30} = \frac{-9}{10}$$

તેથી $\frac{-2}{3} + \left[\frac{3}{5} + \left(\frac{-5}{6}\right)\right] = \left[\frac{-2}{3} + \frac{3}{5}\right] + \left(\frac{-5}{6}\right)$

ઉપરાંત, $\frac{-1}{2} + \left[\frac{3}{7} + \left(\frac{-4}{3}\right)\right]$ અને $\left[\frac{-1}{2} + \frac{3}{7}\right] + \left(\frac{-4}{3}\right)$ શોધો.

શું બંનેનો સરવાળો સમાન આવે છે ?

બીજી સંમેય સંખ્યાઓ લઈને ઉપર મુજબ સરવાળો કરો અને તપાસો કે બંને સમાન આવે છે ? આપણે જોઈ શકીશું કે *સંમેય સંખ્યા માટે સરવાળાની ક્રિયામાં જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે. તેથી કોઈ પણ સંમેય સંખ્યાઓ a, b અને c માટે, $a + (b + c) = (a + b) + c$.*

(b) બાદબાકી

તમે જાણો છો કે બાદબાકીની ક્રિયામાં પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ માટે જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી, તો સંમેય સંખ્યાઓ માટે

શું $\frac{-2}{3} - \left[\frac{-4}{5} - \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{-2}{3} - \left(\frac{-4}{5}\right)\right] - \frac{1}{2}$ થાય ?

ઉપરની બાબતની ચકાસણી તમારી જાતે કરો.

સંમેય સંખ્યાઓ માટે બાદબાકીની ક્રિયામાં **જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.**

(c) ગુણાકાર

ચાલો આપણે ગુણાકારની ક્રિયા માટે જૂથના ગુણધર્મની ચકાસણી કરીએ.

$$\frac{-7}{3} \times \left(\frac{5}{4} \times \frac{2}{9}\right) = \frac{-7}{3} \times \frac{10}{36} = \frac{-70}{108} = \frac{-35}{54}$$

$$\left(\frac{-7}{3} \times \frac{5}{4}\right) \times \frac{2}{9} = \ldots$$

આપણને મળશે કે, $\frac{-7}{3} \times \left(\frac{5}{4} \times \frac{2}{9}\right) = \left(\frac{-7}{3} \times \frac{5}{4}\right) \times \frac{2}{9}$

શું $\frac{2}{3} \times \left(\frac{-6}{7} \times \frac{4}{5}\right) = \left(\frac{2}{3} \times \frac{-6}{7}\right) \times \frac{4}{5}$ થાય ?

બીજી સંમેય સંખ્યાઓ લઈને ઉપર મુજબ ગુણાકાર કરો અને ચકાસો કે બંને ગુણાકાર સમાન આવે છે કે નહીં.

આપણે જોઈ શકીશું કે *સંમેય સંખ્યા માટે ગુણાકારની ક્રિયામાં જૂથના ગુણધર્મનં પાલન થાય છે. તેથી કોઈ પણ ત્રણ સંમેય સંખ્યાઓ a, b અને c માટે, $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$*

(d) ભાગાકાર

યાદ કરો કે, પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ માટે જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી, તો પછી સંમેય સંખ્યાઓ માટે શું ?

અહીં, જો $\frac{1}{2} \div \left[\frac{-1}{3} \div \frac{2}{5}\right] = \left[\frac{1}{2} \div \left(\frac{-1}{3}\right)\right] \div \frac{2}{5}$ ચકાસીએ.

ડા. બા. $= \frac{1}{2} \div \left[\frac{-1}{3} \div \frac{2}{5}\right] = \frac{1}{2} \div \left(\frac{-1}{3} \times \frac{5}{2}\right)$ [$\because \frac{5}{2}$ એ $\frac{2}{5}$નો વ્યસ્ત છે.)

$= \frac{1}{2} \div \left(\frac{-5}{6}\right)$ ...

જ. બા.$= \left[\frac{1}{2} \div \left(\frac{-1}{3}\right)\right] \div \frac{2}{5}$

$= \left(\frac{1}{2} \times \frac{-3}{1}\right) \div \frac{2}{5} = \frac{-3}{2} \div \frac{2}{5}$ ...

શું ડા.બા. = જ.બા. થાય છે ? જાતે ચકાસણી કરો. તમને જાણવા મળશે કે સંમેય સંખ્યાઓ માટે ભાગાકારની ક્રિયામાં જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.

પ્રયત્ન કરો

નીચેનું કોષ્ટક પૂર્ણ કરો :

સંખ્યાઓ	જૂથનો ગુણધર્મ			
	સરવાળો	બાદબાકી	ગુણાકાર	ભાગાકાર
સંમેય સંખ્યાઓ	...	...	...	ના
પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ	...	...	હા	...
પૂર્ણ સંખ્યાઓ	હા	...	...	...
પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ	...	ના	...	...

ઉદાહરણ 1 : $\frac{3}{7} + \left(\frac{-6}{11}\right) + \left(\frac{-8}{21}\right) + \left(\frac{5}{22}\right)$ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : $\frac{3}{7} + \left(\frac{-6}{11}\right) + \left(\frac{-8}{21}\right) + \left(\frac{5}{22}\right)$

$= \frac{198}{462} + \left(\frac{-252}{462}\right) + \left(\frac{-176}{462}\right) + \left(\frac{105}{462}\right)$ [7, 11, 21 અને 22નો લ.સા.અ. 462 થાય.]

$= \frac{198 - 252 - 176 + 105}{462} = \frac{-125}{462}$

આ ઉદાહરણ નીચે પ્રમાણે પણ ઉકેલી શકાય :

$$\frac{3}{7}+\left(\frac{-6}{11}\right)+\left(\frac{-8}{21}\right)+\frac{5}{22}$$

$$=\left[\frac{3}{7}+\left(\frac{-8}{21}\right)\right]+\left[\frac{-6}{11}+\frac{5}{22}\right]$$ (ક્રમના અને જૂથના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરતાં)

$$=\left[\frac{9+(-8)}{21}\right]+\left[\frac{-12+5}{22}\right]$$

[7 અને 21નો લ.સા.અ 21; 11 અને 22નો લ.સા.અ. 22]

$$=\frac{1}{21}+\left(\frac{-7}{22}\right)$$

$$=\frac{22-147}{462}$$

$$=\frac{-125}{462}$$

શું તમને લાગે છે કે ક્રમનો ગુણધર્મ અને જૂથનો ગુણધર્મ આ ગણતરીને સરળ બનાવે છે ?

ઉદાહરણ 2 : કિંમત શોધો : $\frac{-4}{5}\times\frac{3}{7}\times\frac{15}{16}\times\left(\frac{-14}{9}\right)$

ઉકેલ : આપણી પાસે $\frac{-4}{5}\times\frac{3}{7}\times\frac{15}{16}\times\left(\frac{-14}{9}\right)$

$$=\left[-\frac{4\times3}{5\times7}\right]\times\left[\frac{15\times(-14)}{16\times9}\right]$$

$$=\frac{-12}{35}\times\left(\frac{-35}{24}\right)=\frac{-12\times(-35)}{35\times24}=\frac{1}{2}$$

આ ગણતરી બીજી રીતે પણ કરી શકાય.

$$\frac{-4}{5}\times\frac{3}{7}\times\frac{15}{16}\times\left(\frac{-14}{9}\right)$$

$$=\left(-\frac{4}{5}\times\frac{15}{16}\right)\times\left[\frac{3}{7}\times\left(\frac{-14}{9}\right)\right]$$ (ક્રમના અને જૂથના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરતાં)

$$=\frac{-3}{4}\times\left(\frac{-2}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

1.2.4 શૂન્યની ભૂમિકા

નીચેના પદ જુઓ :

$2+0=0+2=2$ (પૂર્ણ સંખ્યામાં શૂન્ય ઉમેરતાં)

$-5+0\ldots=\ldots+\ =-5$ (પૂર્ણાંક સંખ્યામાં શૂન્ય ઉમેરતાં)

$\frac{-2}{7}\ldots+\ =\ 0+\left(\frac{-2}{7}\right)=\frac{-2}{7}$ (સંમેય સંખ્યામાં શૂન્ય ઉમેરતાં)

તમે આવા સરવાળા પહેલાં પણ કરેલ છે. ચાલો, આવા બીજા વધુ સરવાળા કરીએ.

તમે શું જોયું ? જ્યારે પૂર્ણ સંખ્યામાં શૂન્ય ઉમેરવામાં આવે તો મળતી સંખ્યા પણ પૂર્ણ છે. આવું પૂર્ણાંક અને સંમેય સંખ્યા માટે પણ બને છે.

સામાન્ય રીતે, $a + 0 = 0 + a = a$ જ્યાં, a એ પૂર્ણ સંખ્યા છે.

$b + 0 = 0 + b = b$ જ્યાં b એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.

$c + 0 = 0 + c = c$ જ્યાં c એ સંમેય સંખ્યા છે.

આમ, શૂન્યને સરવાળા માટેનો તટસ્થ ઘટક (એકમ ઘટક) કહે છે. તે પૂર્ણાંક અને પૂર્ણ સંખ્યા માટે પણ સરવાળાનો તટસ્થ ઘટક છે.

1.2.5 1ની ભૂમિકા

અહીં,

$5 \times 1 = 5 = 1 \times 5$ (પૂર્ણ સંખ્યાને 1 વડે ગુણતાં)

$\frac{-2}{7} \times 1 \ldots = \times \ldots = \frac{-2}{7}$

$\frac{3}{8} \times \ldots = 1 \times \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$

તમે શું જોયું ?

જ્યારે આપણે સંમેય સંખ્યાને 1 વડે ગુણીએ છીએ, ત્યારે એ જ સંમેય સંખ્યા નીપજ તરીકે મળે છે. આ બાબતની અન્ય સંમેય સંખ્યાઓ સાથે ગુણાકાર કરી ચકાસણી કરો. આપણને જોવા મળશે. કોઈ પણ સંમેય સંખ્યા a માટે $a \times 1 = 1 \times a = a$.

આપણે કહી શકીએ કે 1 એ ગુણાકાર માટેનો તટસ્થ ઘટક (એકમ ઘટક) છે.

શું 1 એ પૂર્ણાંક સંખ્યા માટે તટસ્થ ઘટક છે ? શું તે પૂર્ણ સંખ્યા માટે તટસ્થ ઘટક છે ?

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

જો કોઈ ગુણધર્મ સંમેય સંખ્યા માટે સાચો હોય તો તે પૂર્ણાંક સંખ્યા માટે પણ સાચો હોય ? પૂર્ણ સંખ્યા માટે શું કહી શકાય ? ક્યારે સાચો અને ક્યારે સાચો નહીં ?

1.2.6 સંખ્યાની વિરોધી સંખ્યા (Negative of a Number)

જ્યારે આપણે પૂર્ણાંક સંખ્યાનો અભ્યાસ કરતાં હતાં ત્યારે વિરોધી પૂર્ણાંકો પણ જોઈ ગયા છીએ. 1ની વિરોધી સંખ્યા શું ? તે −1 છે, કેમ કે $1 + (-1) = (-1) + 1 = 0$

તેથી શું આપણે કહી શકીએ કે (−1) ની વિરોધી સંખ્યા કઈ ? તેનો જવાબ 1 છે.

તેમજ, $2 + (-2) = (-2) + 2 = 0$, તેથી આપણે કહી શકીએ છે કે 2નો **વિરોધી સંખ્યા અથવા વિરોધી ઘટક** −2 અને તેનું ઉલટું પણ કહી શકીએ કે −2 ની વિરોધી સંખ્યા 2 છે. સામાન્ય રીતે, કોઈ પૂર્ણાંક a માટે, $a + (-a) = (-a) + a = 0$. તેથી a એ $-a$ની વિરોધી સંખ્યા છે. તેમજ $-a$ એ $+a$ની વિરોધી સંખ્યા છે.

સંમેય સંખ્યા $\frac{2}{3}$ માટે,

$$\frac{2}{3} + \left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{2 + (-2)}{3} = 0$$

વળી, $\left(\frac{-2}{3}\right) + \frac{2}{3} = 0$ (શા માટે ?)

તેવી જ રીતે, $\frac{-8}{9} + \ldots = \ldots + \left(\frac{-8}{9}\right) = 0$

$+ \ldots \left(\frac{-11}{7}\right) = \left(\frac{-11}{7}\right) = \ldots + 0$

આમ, વ્યાપક રૂપે, કોઈ સંમેય સંખ્યા $\frac{a}{b}$ માટે, જો $\frac{a}{b} + \left(\frac{-a}{b}\right) = \left(\frac{-a}{b}\right) + \left(\frac{a}{b}\right) = 0$, તો આપણે કહી શકીએ કે $\frac{-a}{b}$ એ $\frac{a}{b}$ની **વિરોધી સંખ્યા (Additive Inverse) છે.** તેમજ ઊલટી રીતે પણ કહી શકાય કે $\frac{a}{b}$ એ $\frac{-a}{b}$ની વિરોધી સંખ્યા છે.

1.2.7 વ્યસ્ત સંખ્યા (Reciprocal)

કઈ સંખ્યા વડે $\frac{8}{21}$ને ગુણવાથી મળતી સંખ્યા 1 હોય ? સ્પષ્ટ છે કે તે સંખ્યા $\frac{21}{8}$ જ હોય કેમ કે,

$\frac{8}{21} \times \frac{21}{8} = 1$

તેવી જ રીતે $\frac{-5}{7}$ ને $\frac{7}{-5}$ વડે ગુણવાથી 1 મળે.

આમ, આપણે કહી શકીએ કે, $\frac{8}{21}$ની વ્યસ્ત સંખ્યા $\frac{21}{8}$ છે, જ્યારે $\frac{-5}{7}$ની વ્યસ્ત સંખ્યા $\frac{7}{-5}$ છે.

તમે કહી શકશો કે શૂન્યની વ્યસ્ત સંખ્યા કઈ ?

શું એવી કોઈ સંમેય સંખ્યા મળે કે જેને 0 સાથે ગુણવાથી 1 મળે ? ના, તેથી આપણે કહી શકીએ કે શૂન્યની વ્યસ્ત સંખ્યા ન મળે. તેથી આપણે કહી શકીએ કે સંમેય સંખ્યા $\frac{c}{d}$ માટે, જો કોઈ શૂન્યેત્તર સંમેય સંખ્યા $\frac{a}{b}$ હોય અને $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = 1$, તો $\frac{c}{d}$ એ $\frac{a}{b}$ની **વ્યસ્ત સંખ્યા (Reciprocal)** છે.

1.2.8 સંમેય સંખ્યા માટે ગુણાકારનું સરવાળા પર વિભાજન

આ બાબતને સમજવા માટે, ચાલો $\frac{-3}{4}$, $\frac{2}{3}$ અને $\frac{-5}{6}$ સંમેય સંખ્યાઓ લઈએ.

હવે, $\frac{-3}{4} \times \left\{\frac{2}{3} + \left(\frac{-5}{6}\right)\right\} = \frac{-3}{4} \times \left\{\frac{(4) + (-5)}{6}\right\}$

$= \frac{-3}{4} \times \left(\frac{-1}{6}\right) = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$

પણ $\frac{-3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{-3 \times 2}{4 \times 3} = \frac{-6}{12} = \frac{-1}{2}$

અને $\frac{-3}{4} \times \frac{-5}{6} = \frac{5}{8}$

આથી, $\left(\frac{-3}{4} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{-3}{4} \times \frac{-5}{6}\right) = \frac{-1}{2} + \frac{5}{8} = \frac{1}{8}$

આમ, $\frac{-3}{4} \times \left\{\frac{2}{3} + \left(\frac{-5}{6}\right)\right\} = \left(\frac{-3}{4} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{-3}{4} \times \frac{-5}{6}\right)$

ગુણાકારનું સરવાળા પર અને બાદબાકી પર વિભાજન

કોઈ પણ સંમેય સંખ્યા a, b અને c માટે,

$a\ (b + c) = ab + ac$

$a\ (b - c) = ab - ac$

પ્રયત્ન કરો

વિભાજનના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરી શોધો : (i) $\left\{\frac{7}{5} \times \left(\frac{-3}{12}\right)\right\} + \left\{\frac{7}{5} \times \frac{5}{12}\right\}$ (ii) $\left\{\frac{9}{16} \times \frac{4}{12}\right\} + \left\{\frac{9}{16} \times \frac{-3}{9}\right\}$

ઉદાહરણ 3 : નીચે આપેલ સંખ્યાની વિરોધી સંખ્યાઓ જણાવો :

(i) $\frac{-7}{19}$ (ii) $\frac{21}{112}$

જ્યારે તમે વિભાજનના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરો છો ત્યારે તમે કોઈ એક ગુણાકારને બે ગુણાકારોના સરવાળા અથવા બાદબાકી સ્વરૂપે વિભાજિત કરો છો.

ઉકેલ : (i) $\frac{7}{19}$ એ $\frac{-7}{19}$ની વિરોધી સંખ્યા છે, કેમ કે

$\frac{-7}{19} + \frac{7}{19} = \frac{-7+7}{19} = \frac{0}{19} = 0$

(ii) $\frac{-21}{112}$ એ $\frac{21}{112}$ની વિરોધી સંખ્યા છે. (ચકાસણી કરો.)

ઉદાહરણ 4 : નીચે આપેલ સંખ્યાને x તરીકે લઈ ચકાસો કે $-(-x) = x$.

(i) $x = \frac{13}{17}$ (ii) $x = \frac{-21}{31}$

ઉકેલ : (i) અહીં, $x = \frac{13}{17}$ છે.

$x = \frac{13}{17}$ ની વિરોધી સંખ્યા $-x = \frac{-13}{17}$ હોવાથી $\frac{13}{17} + \left(\frac{-13}{17}\right) = 0$

સમતા $\frac{13}{17} + \left(\frac{-13}{17}\right) = 0$ દર્શાવે છે કે $\frac{13}{17}$ ની વિરોધી સંખ્યા $\frac{-13}{17}$ છે.

અથવા $-\left(\frac{-13}{17}\right) = \frac{13}{17}$ એટલે કે $-(-x) = x$

(ii) $x = \frac{-21}{31}$ની વિરોધી સંખ્યા $-x = \frac{21}{31}$ હોવાથી $\frac{-21}{31} + \frac{21}{31} = 0$

સમતા $\frac{-21}{31} + \frac{21}{31} = 0$ દર્શાવે છે કે $\frac{-21}{31}$ ની વિરોધી સંખ્યા $\frac{21}{31}$ છે.

એટલે કે $-(-x) = x$.

ઉદાહરણ 5 : કિંમત શોધો : $\frac{2}{5} \times \frac{-3}{7} - \frac{1}{14} - \frac{3}{7} \times \frac{3}{5}$

ઉકેલ : અહીં, $\frac{2}{5} \times \frac{-3}{7} - \frac{1}{14} - \frac{3}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{-3}{7} - \frac{3}{7} \times \frac{3}{5} - \frac{1}{14}$

[ક્રમનો ગુણધર્મ]

$= \frac{2}{5} \times \left(\frac{-3}{7}\right) + \left(\frac{-3}{7}\right) \times \frac{3}{5} - \frac{1}{14}$

$= \frac{-3}{7}\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\right) - \frac{1}{14}$ [વિભાજનનો ગુણધર્મ]

$= \frac{-3}{7} \times 1 - \frac{1}{14}$

$= \frac{-6-1}{14}$

$= \frac{-1}{2}$

સ્વાધ્યાય 1.1

1. યોગ્ય ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરી કિંમત શોધો.

(i) $\frac{-2}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{5}{2} - \frac{3}{5} \times \frac{1}{6}$ (ii) $\frac{2}{5} \times \left(\frac{-3}{7}\right) - \frac{1}{6} \times \frac{3}{2} + \frac{1}{14} \times \frac{2}{5}$

2. નીચે આપેલ સંખ્યાની વિરોધી સંખ્યા લખો.

(i) $\frac{2}{8}$ (ii) $\frac{-5}{9}$ (iii) $\frac{-6}{-5}$ (iv) $\frac{2}{-9}$

(v) $\frac{19}{-6}$

3. ચકાસણી કરો : $-(-x) = x$

(i) $x = \frac{11}{15}$ (ii) $x = -\frac{13}{17}$

4. નીચે આપેલ સંખ્યાનો વ્યસ્ત જણાવો.

(i) -13 (ii) $\frac{-13}{19}$ (iii) $\frac{1}{5}$ (iv) $\frac{-5}{8} \times \frac{-3}{7}$

(v) $-1 \times \frac{-2}{5}$ (vi) -1

5. નીચે આપેલ ગુણાકારની ક્રિયામાં કયા ગુણધર્મનો ઉપયોગ થયેલ છે તે જણાવો.

(i) $\frac{-4}{5} \times 1 = 1 \times \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{-13}{17} \times \frac{-2}{7} = \frac{-2}{7} \times \frac{-13}{17}$

(iii) $\frac{-19}{29} \times \frac{29}{-19} = 1$

6. સંખ્યા $\frac{6}{13}$ ને $\frac{-7}{16}$ના વ્યસ્ત વડે ગુણો.

7. $\frac{1}{3} \times \left(6 \times \frac{4}{3}\right)$ની $\left(\frac{1}{3} \times 6\right) \times \frac{4}{3}$ રીતે ગણતરી કયા ગુણધર્મના ઉપયોગથી કરી શકાય તે જણાવો.

8. શું $\frac{8}{9}$ એ સંખ્યા $-1\frac{1}{8}$નો વ્યસ્ત છે ? કેમ અથવા કેમ નહીં ?

9. શું 0.3 એ $3\frac{1}{3}$નો વ્યસ્ત છે ? કેમ અથવા કેમ નહીં ?

10. લખો.

(i) એવી સંમેય સંખ્યા કે જેનો વ્યસ્ત ન હોય.

(ii) એવી સંમેય સંખ્યાઓ કે જે તેના વ્યસ્તને સમાન હોય.

(iii) એવી સંમેય સંખ્યા કે જે તેની વિરોધી સંખ્યાને સમાન હોય.

11. નીચેની ખાલી જગ્યા પૂરો.

(i) શૂન્યનો વ્યસ્ત ______ .

(ii) સંખ્યાઓ ______ અને ______ પોતાના જ વ્યસ્ત છે.

(iii) -5 ની વ્યસ્ત સંખ્યા ______ છે.

(iv) $\frac{1}{x}$ ની વ્યસ્ત સંખ્યા ______ છે, કે જ્યાં $x \neq 0$.

(v) બે સંમેય સંખ્યાનો ગુણાકાર હંમેશા ______ જ હોય.

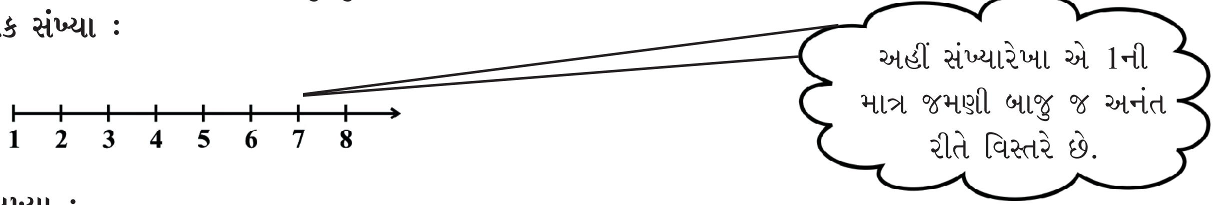
(vi) ધન સંમેય સંખ્યાની વ્યસ્ત સંખ્યા ______ હોય.

1.3 સંમેય સંખ્યાનું સંખ્યારેખા પર નિરૂપણ

તમે સંખ્યારેખા પર પ્રાકૃતિક સંખ્યા, પૂર્ણ સંખ્યા, પૂર્ણાંક સંખ્યા અને સંમેય સંખ્યાનું નિરૂપણ અગાઉ શીખી ગયા છો. ચાલો, આપણે તેનું પુનરાવર્તન કરી લઈએ.

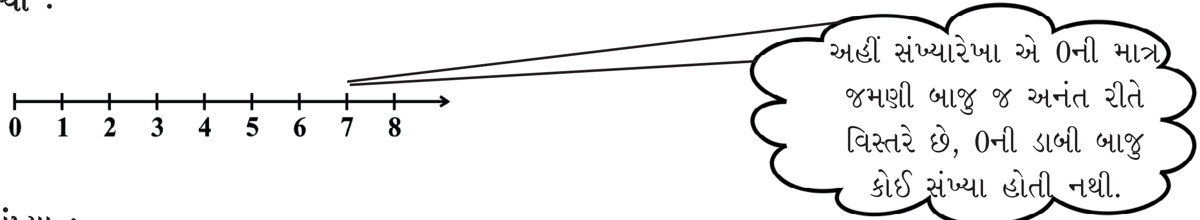
પ્રાકૃતિક સંખ્યા :

(i)



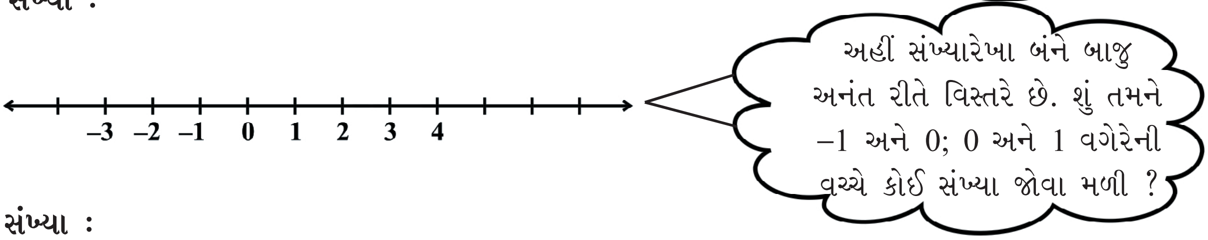
પૂર્ણ સખ્યા :

(ii)



પૂર્ણાંક સંખ્યા :

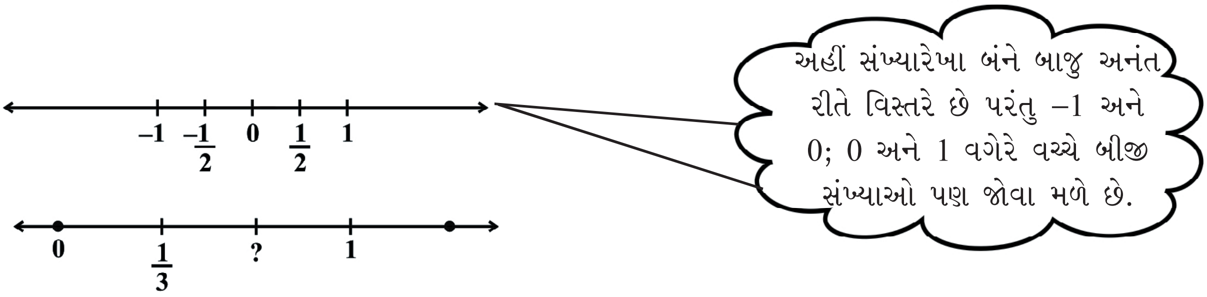
(iii)



સંમેય સંખ્યા :

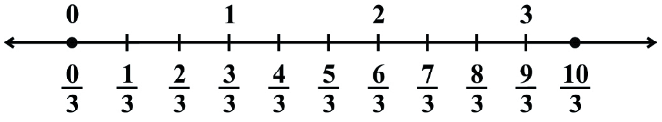
(iv)

(v)

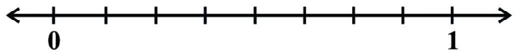


ઉપર સંખ્યારેખા(iv)માં 0 અને 1ની બરોબર વચ્ચે એક બિંદુ આવે છે, જેને $\frac{1}{2}$ વડે દર્શાવેલ છે. વળી, સંખ્યારેખા(v)માં બિંદુ $\frac{1}{3}$ એ 0 થી 1ના ત્રણ સરખા ભાગ કરે છે, તેથી તેને $\frac{1}{3}$ વડે દર્શાવેલ છે. તમે સંખ્યારેખા(v)માં બીજો ભાગ કે જેને (?) વડે દર્શાવેલ છે, ત્યાં કઈ સંમેય સંખ્યા લખશો ?

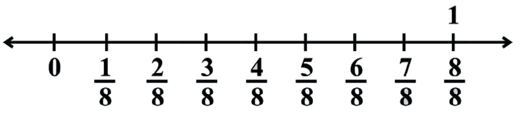
આ બિંદુ 0 થી જમણી બાજુ $\frac{1}{3}$થી બમણું દૂર છે. તેથી તેને $\frac{2}{3}$ વડે દર્શાવીશું. આ જ રીતે તમે સરખા ભાગ કરીને સંખ્યારેખા પર સંખ્યાઓ દર્શાવી શકો છો. આ પ્રમાણે પછીનું બિંદુ 1 થી દર્શાવેલ છે. આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે $\frac{3}{3}$ અને 1 એ એક જ બિંદુ છે. ત્યાર પછી $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{6}{3}$ (અથવા 2), $\frac{7}{3}$ વગેરે આવે જે સંખ્યારેખા (vi) પર દર્શાવેલ છે.

(vi) 

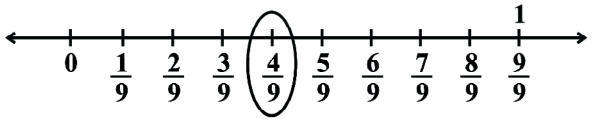
તેવી જ રીતે, $\frac{1}{8}$ સંખ્યાને સંખ્યારેખા પર દર્શાવવા માટે 0 થી 1 વચ્ચેની સંખ્યારેખાના આઠ સરખા ભાગ કરવામાં આવે છે. જેમ કે,

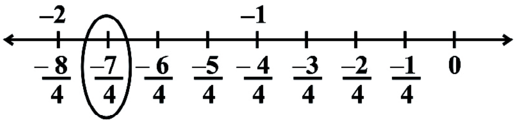


અહીં આપણે પ્રથમ ભાગના બિંદુને $\frac{1}{8}$ તરીકે દર્શાવીશું. બીજા ભાગના બિંદુને $\frac{2}{8}$, ત્રીજા ભાગના બિંદુને $\frac{3}{8}$ તેવી જ રીતે ક્રમશઃ આગળ બિંદુઓને દર્શાવીશું. જે સંખ્યારેખા (vii)માં બતાવેલ છે.

(vii) 

કોઈ પણ સંમેય સંખ્યાનું આ રીતે સંખ્યારેખા પર નિરૂપણ કરી શકાય. આપણે જાણીએ છીએ કે સંખ્યારેખામાં છેદમાં આપેલ સંખ્યા એ એક એકમના કેટલા ભાગ કરવા તે બતાવે છે. જ્યારે અંશમાં આપેલ સંખ્યા તે કરવામાં આવેલ ભાગમાંથી કેટલામો ભાગ છે તે દર્શાવે છે. તેથી સંમેય સંખ્યા $\frac{4}{9}$ નો અર્થ એ કે 9 સમાન ભાગનો ચોથો ભાગ કે જે શૂન્યની જમણી બાજુ છે. [સંખ્યારેખા (viii)] અને $\frac{-7}{4}$ માટે $\frac{1}{4}$ લંબાઈવાળા 7 ભાગ કરવાના કે જે શૂન્યથી ડાબી બાજુ હોય અને સાતમો ભાગ એ $\frac{-7}{4}$ દર્શાવે છે. [સંમેય સંખ્યા (ix)]

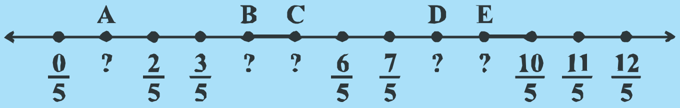
(viii) 

(ix) 

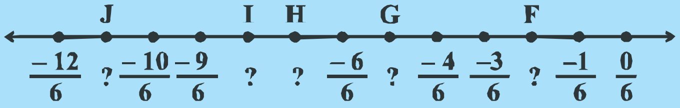
પ્રયત્ન કરો

નીચે આપેલ સંખ્યારેખામાં અંગ્રેજી મૂળાક્ષરથી દર્શાવેલ બિંદુઓને સંમેય સંખ્યાથી દર્શાવો :

(i)



(ii)



1.4 બે સંમેય સંખ્યાઓ વચ્ચેની સંમેય સંખ્યાઓ

શું તમે 1 અને 5 વચ્ચેની પ્રાકૃતિક સંખ્યા કહી શકો ? તે 2, 3 અને 4 છે. 7 અને 9 ની વચ્ચે કેટલી પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ છે ? માત્ર એક અને તે સંખ્યા 8 છે.

10 અને 11 ની વચ્ચે કેટલી પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ છે ? સ્પષ્ટ છે કે એક પણ નહિ.

–5 અને 4 વચ્ચે આવતી પૂર્ણાંક સંખ્યાની યાદી બનાવો. તે યાદી –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3 છે.

–1 અને 1 વચ્ચે કેટલી પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ હોય ?

–9 અને –10 વચ્ચે કેટલી પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ હોય ?

અહીં, તમને બે પ્રાકૃતિક કે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ વચ્ચે આવેલી પ્રાકૃતિક કે પૂર્ણાંક સંખ્યાની ચોક્કસ સંખ્યા મળશે.

$\frac{3}{10}$ અને $\frac{7}{10}$ વચ્ચે કેટલી સંમેય સંખ્યાઓ મળશે ?

તમને એમ થશે કે તે સંખ્યાઓ માત્ર $\frac{4}{10}$, $\frac{5}{10}$ અને $\frac{6}{10}$ છે.

પરંતુ તમે $\frac{3}{10}$ ને $\frac{30}{100}$ અને $\frac{7}{10}$ ને $\frac{70}{100}$ વડે લખી શકો. તેથી સંખ્યાઓ $\frac{31}{100}$, $\frac{32}{100}$, $\frac{33}{100}$, ... $\frac{68}{100}$, $\frac{69}{100}$. આ બધી જ સંખ્યાઓ $\frac{3}{10}$ અને $\frac{7}{10}$ ની વચ્ચે આવેલી હોય છે. આ 39 સંખ્યાઓ થાય.

ઉપરાંત $\frac{3}{10}$ ને $\frac{3000}{10000}$ વડે અને $\frac{7}{10}$ ને $\frac{7000}{10000}$ વડે પણ દર્શાવી શકાય. તેથી આપણને $\frac{3001}{1000}$, $\frac{3002}{1000}$, $\frac{3003}{1000}$, ..., $\frac{6998}{1000}$, $\frac{6999}{1000}$ સંખ્યાઓ પણ $\frac{3}{10}$ અને $\frac{7}{10}$ વચ્ચે આવેલી સંખ્યાઓ છે. આ સંખ્યાઓ 3999 જેટલી થાય.

આ રીતે આગળ ને આગળ આપણે $\frac{3}{10}$ અને $\frac{7}{10}$ વચ્ચે સંમેય સંખ્યાઓ ઉમેરતાં જઈ શકીએ. તેથી પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ અને પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓની જેમ, બે સંખ્યાઓની વચ્ચે આવેલ સંમેય સંખ્યાઓની સંખ્યા નિશ્ચિત નથી. અહીં બીજું ઉદાહરણ પણ આપેલ છે.

$\frac{-1}{10}$ અને $\frac{3}{10}$ વચ્ચે કેટલી સંમેય સંખ્યાઓ હશે ?

સ્પષ્ટ છે કે $\frac{0}{10}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$ સંમેય સંખ્યાઓ $\frac{-1}{10}$ અને $\frac{3}{10}$ વચ્ચે છે.

જો આપણે $\frac{-1}{10}$ ને $\frac{-10000}{100000}$ અને $\frac{3}{10}$ ને $\frac{30000}{100000}$ વડે દર્શાવીએ, તો આપણને $\frac{-9999}{100000}$, $\frac{-9998}{100000}$, ... , $\frac{-29998}{100000}$, $\frac{-29999}{100000}$ સંખ્યાઓ $\frac{-1}{10}$ અને $\frac{3}{10}$ વચ્ચે મળે.

આમ, આપણે કહી શકીએ કે આપેલ કોઈ પણ બે સંમેય સંખ્યાઓ વચ્ચે આપણને અગણિત સંમેય સંખ્યાઓ મળે.

ઉદાહરણ 6 : –2 અને 0 વચ્ચે આવતી કોઈ પણ ત્રણ સંમેય સંખ્યા લખો.

ઉકેલ : –2 ને $\frac{-20}{10}$ અને 0 ને $\frac{0}{10}$ વડે દર્શાવી શકાય.

તેથી $\frac{-19}{10}, \frac{-18}{10}, \frac{-17}{10}, \frac{-16}{10}, \frac{-15}{10}, \ldots, \frac{-1}{10}$ એ –2 અને 0 ની વચ્ચે આવતી સંમેય સંખ્યાઓ છે.

ઉદાહરણ 7 : $\frac{-5}{6}$ અને $\frac{5}{8}$ વચ્ચે આવતી કોઈ પણ દસ સંમેય સંખ્યાઓ લખો.

ઉકેલ : સૌ પ્રથમ આપણે $\frac{-5}{6}$ અને $\frac{5}{8}$ ને સમચ્છેદી બનાવીશું. એટલે કે બંને સંખ્યાઓના છેદ સરખા કરીશું.

તેથી $\frac{-5 \times 4}{6 \times 4} = \frac{-20}{24}$ અને $\frac{5 \times 3}{8 \times 3} = \frac{15}{24}$

તેથી $\frac{-19}{24}, \frac{-18}{24}, \frac{-17}{24}, \ldots, \frac{14}{24}$ એ સંખ્યાઓ $\frac{-20}{24}$ અને $\frac{15}{24}$ વચ્ચે આવેલી સંમેય સંખ્યાઓ છે. આમાંથી આપણે ગમે તે 10 લઈ શકીએ.

બીજી રીત

ચાલો આપણે 1 અને 2 વચ્ચે આવતી સંમેય સંખ્યાઓ શોધીએ. 1.5 અથવા $1\frac{1}{2}$ અથવા $\frac{3}{2}$ એ 1 અને 2 વચ્ચે આવતી સંખ્યાઓ પૈકીની એક સંખ્યા છે. જે 1 અને 2નો મધ્યક છે. તમે ધોરણ 7 માં મધ્યક વિશે શીખી ગયા છો.

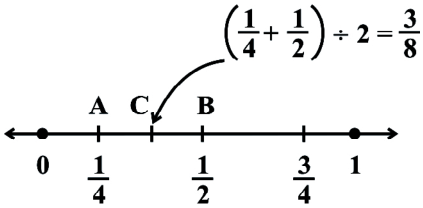
આપણે કહી શકીએ કે, આપેલ કોઈ પણ બે સંખ્યાઓ માટે, એવું જરૂરી નથી કે આપેલ બે સંખ્યાઓની વચ્ચે એક પૂર્ણાંક સંખ્યા મળે, પરંતુ એક સંમેય સંખ્યા તો અવશ્ય મળે.

આપણે મધ્યકના ખ્યાલનો ઉપયોગ કરી આપેલ બે સંમેય સંખ્યાઓની વચ્ચે આપેલ સંમેય સંખ્યાઓ શોધીશું.

ઉદાહરણ 8 : $\frac{1}{4}$ અને $\frac{1}{2}$ વચ્ચે આવેલ સંમેય સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ : સૌ પ્રથમ આપણે આપેલ સંખ્યાનો મધ્યક શોધીશું.

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) \div 2 = \left(\frac{1+2}{4}\right) \div 2 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$



આમ, $\frac{3}{8}$ એ $\frac{1}{4}$ અને $\frac{1}{2}$ વચ્ચે આવેલી સંમેય સંખ્યા છે.

આ સંખ્યાને આપણે સંખ્યારેખા પર પણ નિરૂપણ કરી શકીએ.

અહીં આપણને ABનું મધ્યબિંદુ C મળે છે. બિંદુ C એ $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) \div 2 = \frac{3}{8}$ સંખ્યા બતાવે છે.

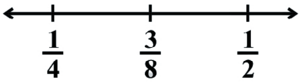
ઉપરાંત $\frac{1}{4} < \frac{3}{8} < \frac{1}{2}$.

જો a અને b બે સંમેય સંખ્યાઓ હોય, તો $\frac{a+b}{2}$ એ સંમેય સંખ્યાઓ a અને b વચ્ચે આવેલ સંમેય સંખ્યા છે. જ્યાં $a < \frac{a+b}{2} < b$.

આ બાબત ફરીથી સાબિત કરે છે કે આપેલ કોઈ પણ બે સંમેય સંખ્યાઓની વચ્ચે અગણિત સંમેય સંખ્યાઓ હોય.

ઉદાહરણ 9 : $\frac{1}{4}$ અને $\frac{1}{2}$ વચ્ચેની ત્રણ સંમેય સંખ્યાઓ શોધો.

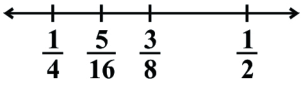
ઉકેલ : સૌ પ્રથમ આપણે આપેલ બંને સંમેય સંખ્યાનો મધ્યક મેળવીએ. ઉપરના ઉદાહરણમાં જણાવ્યા મુજબ $\frac{1}{4}$ અને $\frac{1}{2}$નો મધ્યક $\frac{3}{8}$ છે અને $\frac{1}{4} < \frac{3}{8} < \frac{1}{2}$.



હવે આપણે સંમેય સંખ્યા $\frac{1}{4}$ અને $\frac{3}{8}$ વચ્ચેની બીજી સંમેય સંખ્યા શોધીએ.

તેના માટે ફરીથી $\frac{1}{4}$ અને $\frac{3}{8}$નો મધ્યક મેળવીએ.

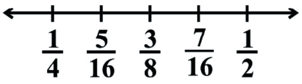
$\therefore \quad \left(\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\right) \div 2 = \frac{5}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{16}$ અને



$\frac{1}{4} < \frac{5}{16} < \frac{3}{8} < \frac{1}{2}$

હવે $\frac{3}{8}$ અને $\frac{1}{2}$ નો મધ્યક મેળવીએ.

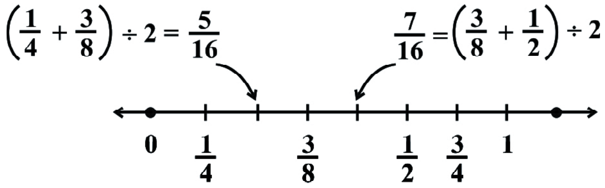
$\therefore \quad \left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\right) \div 2 = \frac{7}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{16}$



આમ, આપણે $\frac{1}{4} < \frac{5}{16} < \frac{3}{8} < \frac{7}{16} < \frac{1}{2}$ જેવી સંખ્યાઓ મેળવી.

આમ, $\frac{5}{16}, \frac{3}{8}, \frac{7}{16}$ એ ત્રણ સંમેય સંખ્યાઓ $\frac{1}{4}$ અને $\frac{1}{2}$ વચ્ચે આવેલી સંખ્યાઓ છે.

આ બાબતને નીચે મુજબ સંખ્યારેખા પર સ્પષ્ટ રીતે દર્શાવી શકાય :



આ રીતે આપણે આપેલ કોઈ પણ બે સંમેય સંખ્યાઓની વચ્ચે ઇચ્છીએ તેટલી સંમેય સંખ્યાઓ મેળવી શકીએ. અહીં ફરીથી આપણે નોંધીએ કે કોઈ પણ બે સંમેય સંખ્યાઓ વચ્ચે અગણિત સંમેય સંખ્યાઓ મળે.

સ્વાધ્યાય : 1.2

1. નીચે આપેલ સંખ્યાઓનું સંખ્યારેખા પર નિરૂપણ કરો.

(i) $\frac{7}{4}$ (ii) $\frac{-5}{6}$

2. સંખ્યાઓ $\frac{-2}{11}$, $\frac{-5}{11}$, $\frac{-9}{11}$ને સંખ્યારેખા પર દર્શાવો.

3. 2 થી નાની હોય તેવી પાંચ સંમેય સંખ્યાઓ લખો.

4. $\frac{-2}{5}$ અને $\frac{1}{2}$ વચ્ચે આવતી દસ સંમેય સંખ્યાઓ લખો.

5. નીચે આપેલી સંખ્યાઓ વચ્ચે આવતી પાંચ સંમેય સંખ્યાઓ લખો.

(i) $\frac{2}{3}$ અને $\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{-3}{2}$ અને $\frac{5}{3}$ (iii) $\frac{1}{4}$ અને $\frac{1}{2}$

6. -2 થી મોટી હોય તેવી પાંચ સંમેય સંખ્યાઓ લખો.

7. $\frac{3}{5}$ અને $\frac{3}{4}$ વચ્ચે આવતી હોય તેવી દસ સંમેય સંખ્યાઓ લખો.

આપણે શું ચર્ચા કરી ?

1. સંમેય સંખ્યાઓ સરવાળો, બાદબાકી અને ગુણાકારની ક્રિયા અંગે **સંવૃત્ત** હોય છે.
2. સરવાળા અને ગુણાકારની ક્રિયા દરમ્યાન,

   (i) સંમેય સંખ્યાઓ માટે **ક્રમના ગુણધર્મ**નું પાલન થાય છે.

   (ii) સંમેય સંખ્યાઓ માટે **જૂથના ગુણધર્મ**નું પાલન થાય છે.
3. સંમેય સંખ્યા શૂન્ય (0) એ સંમેય સંખ્યાઓ માટે **સરવાળાનો તટસ્થ** ઘટક છે.
4. સંમેય સંખ્યા 1 (એક) એ સંમેય સંખ્યાઓ માટે **ગુણાકારનો તટસ્થ** ઘટક છે.
5. સંમેય સંખ્યા $\frac{a}{b}$ ની વિરોધી સંખ્યા $\frac{-a}{b}$ છે. ઉલટું પણ સાચું છે.
6. જો $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = 1$ હોય તો સંમેય સંખ્યા $\frac{a}{b}$ એ સંમેય સંખ્યા $\frac{c}{d}$નો વ્યસ્ત છે.
7. સંમેય સંખ્યા માટે **વિભાજનનો ગુણધર્મ** : સંમેય સંખ્યાઓ a, b અને c માટે,

   $a\ (b + c) = ab + ac$ અને $a\ (b - c) = ab - ac$
8. સંમેય સંખ્યાઓને સંખ્યારેખા પર નિરૂપણ કરી શકાય.
9. કોઈ પણ બે સંમેય સંખ્યાઓની વચ્ચે અગણિત સંમેય સંખ્યાઓ આવેલ હોય છે. બે સંખ્યાઓના **મધ્યક**નો ખ્યાલ બે સંખ્યાઓ વચ્ચેની સંખ્યાઓ શોધવામાં મદદરૂપ બને છે.

એક ચલ સુરેખ સમીકરણ

પ્રકરણ

2

2.1 પ્રાસ્તાવિક

અગાઉના ધોરણમાં તમે કેટલીક **બૈજિક પદાવલિઓ** અને **સમીકરણો** વિશે જાણકારી મેળવી છે. એવી પદાવલિઓ, જે આપણે શીખ્યાં છીએ, તેનાં થોડાંક ઉદાહરણ :

$$5x,\ 2x - 3,\ 3x + y,\ 2xy + 5,\ xyz + x + y + z,\ x^2 + 1,\ y + y^2$$

અને સમીકરણનાં થોડાં ઉદાહરણ : $5x = 25$, $2x - 3 = 9$, $2y + \frac{5}{2} = \frac{37}{2}$, $6z + 10 = -2$

તમને યાદ હશે કે સમીકરણમાં હંમેશાં સમતા (બરાબર) (=) ના ચિહ્નનો ઉપયોગ થાય છે, જ્યારે પદાવલિમાં તેનો ઉપયોગ થતો નથી.

ઉપરની અમુક પદાવલિઓમાં એકથી વધારે ચલનો ઉપયોગ કરેલ છે. ઉદાહરણ તરીકે $2xy + 5$માં બે ચલ છે. તેમ છતાં, હવે આપણે સમીકરણ બનાવવા ફક્ત એક જ ચલનો ઉપયોગ કરીશું. તદુપરાંત, ફક્ત સુરેખ પદાવલિઓ જ સમીકરણ બનાવવા ઉપયોગમાં લઈશું એટલે કે પદાવલિમાં રહેલા ચલની મોટામાં મોટી ઘાત 1 હશે.

સુરેખ પદાવલિના ઉદાહરણ આ મુજબ છે.

$$2x,\ 2x + 1,\ 3y - 7,\ 12 - 5z,\ \frac{5}{4}(x - 4) + 10$$

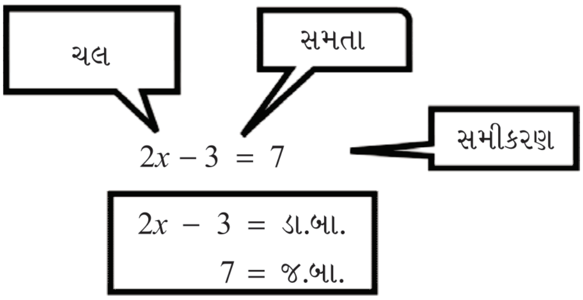
નીચે મુજબની પદાવલિઓ સુરેખ પદાવલિઓ નથી.

$x^2 + 1$, $y + y^2$, $1 + z + z^2 + z^3$ (અહીં ચલની અધિકતમ ઘાત 1 કરતાં વધારે છે.)

હવે આપણે સમીકરણોમાં એક ચલવાળી સુરેખ પદાવલિઓનો જ ઉપયોગ કરીશું. આવા સમીકરણને **એક ચલ સુરેખ સમીકરણ** કહે છે. અગાઉના ધોરણમાં તમે જે સાદાં સમીકરણોનો ઉકેલ મેળવવાનું શીખ્યા હતા તે આ પ્રકારનાં હતાં.

ચાલો, હવે જે જાણીએ છીએ તેનું ટૂંકમાં પુનરાવર્તન કરીએ.

(a) *બૈજિક સમીકરણ એ ચલોના ઉપયોગથી બનતી સમતા છે.* તેમાં સમતા (બરાબર) (=) નું ચિહ્ન હોય છે. સમતાના ચિહ્નની ડાબી બાજુની પદાવલિને ડા.બા. (LHS) તથા જમણી બાજુની પદાવલિને જ.બા. (RHS) કહે છે.



(b) *સમીકરણમાં ડાબી બાજુ અને જમણી બાજુએ આવેલી પદાવલિઓનું મૂલ્ય સમાન હોય છે.* આવું, ફક્ત ચલનાં અમુક ચોક્કસ મૂલ્યો માટે જ સાચું છે. તેથી આવાં મૂલ્યને સમીકરણનો **ઉકેલ** કહે છે.

> $x = 5$ એ સમીકરણ $2x - 3 = 7$નો ઉકેલ છે.
> $x = 5$ માટે ડા.બા. $= 2 \times 5 - 3 = 7 =$ જ.બા.
> જ્યારે $x = 10$ એ સમીકરણનો ઉકેલ નથી.
> $x = 10$ માટે ડા.બા. $= 2 \times 10 - 3 = 17$ જે જ.બા.ને બરાબર નથી.

(c) *સમીકરણનો ઉકેલ કેવી રીતે મેળવીશું ?*
આપણે સમીકરણની બંને બાજુ ત્રાજવાનાં બે પલ્લાંની જેમ સંતુલિત છે તેમ માનીએ છીએ. આથી આપણે સમીકરણની બંને બાજુએ સમાન ગાણિતિક ક્રિયાઓ કરીશું જેથી તેની સંતુલિતતા ખોરવાય નહીં. આવાં થોડાંક પદો પછી તમને સમીકરણનો ઉકેલ મળી જશે.

2.2 એક બાજુ સુરેખ પદાવલિ હોય અને બીજી બાજુ સંખ્યા હોય તેવાં સમીકરણોનો ઉકેલ

ચાલો, થોડાંક ઉદાહરણો વડે સમીકરણનો ઉકેલ મેળવવાની પદ્ધતિ યાદ કરીએ. ધ્યાનથી ચકાસો, સમીકરણનો ઉકેલ કોઈ પણ સંમેય સંખ્યા હોઈ શકે છે.

ઉદાહરણ 1 : ઉકેલ શોધો : $2x - 3 = 7$

ઉકેલ :

સોપાન 1 : બંને બાજુ 3 ઉમેરતાં,

$$2x - 3 + 3 = 7 + 3 \quad \text{(સંતુલન ખોરવાયું નથી.)}$$

$$\therefore 2x = 10$$

સોપાન 2 : બંને બાજુને 2 વડે ભાગતાં,

$$\frac{2x}{2} = \frac{10}{2}$$

$$\therefore x = 5 \quad \text{(અપેક્ષિત ઉકેલ)}$$

ઉદાહરણ 2 : ઉકેલ શોધો : $2y + 9 = 4$

ઉકેલ : 9 ને જ.બા. તરફ લઈ જતાં

$$2y = 4 - 9$$

$$\therefore 2y = -5$$

બંને બાજુને 2 વડે ભાગતાં $y = \frac{-5}{2}$ (ઉકેલ)

તાળો મેળવો **:** ડા.બા. $= 2\left(\frac{-5}{2}\right) + 9 = -5 + 9 = 4 =$ જ.બા. (અપેક્ષિત ઉકેલ)

શું તમે ધ્યાનમાં લીધું કે ઉકેલ $\left(\frac{-5}{2}\right)$ એક સંમેય સંખ્યા છે ? ધોરણ 7માં આપણે જે સમીકરણના ઉકેલ મેળવ્યા હતા તે આવી સંખ્યાઓ નહોતી.

ઉદાહરણ 3 : ઉકેલ શોધો : $\frac{x}{3} + \frac{5}{2} = \frac{-3}{2}$

ઉકેલ : $\frac{5}{2}$ ને જ.બા. લઈ જતાં, $\frac{x}{3} = \frac{-3}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{8}{2}$ મળે.

અથવા $\frac{x}{3} = -4$

બંને બાજુને 3 વડે ગુણતાં, $x = -4 \times 3$

$\therefore x = -12$ (ઉકેલ)

તાળો મેળવો : ડા.બા. $= -\frac{12}{3} + \frac{5}{2} = -4 + \frac{5}{2} = \frac{-8+5}{2} = \frac{-3}{2} =$ જ.બા. (અપેક્ષિત ઉકેલ)

તમે જોયું, અહીં ચલનો સહગુણક પૂર્ણાંક સંખ્યા હોવી જરૂરી નથી.

ઉદાહરણ 4 : ઉકેલ શોધો : $\frac{15}{4} - 7x = 9$

ઉકેલ : $\frac{15}{4} - 7x = 9$ આપેલ છે.

$\therefore -7x = 9 - \frac{15}{4}$ ($\frac{15}{4}$ ને જ.બા. લઈ જતાં)

$\therefore -7x = \frac{21}{4}$

$\therefore x = \frac{21}{4 \times (-7)}$ (બંને બાજુને −7 વડે ભાગતાં)

$\therefore x = -\frac{3 \times 7}{4 \times 7}$

$\therefore x = -\frac{3}{4}$ (ઉકેલ)

તાળો મેળવો : ડા.બા. $= \frac{15}{4} - 7\left(\frac{-3}{4}\right) = \frac{15}{4} + \frac{21}{4} = \frac{36}{4} = 9 =$ જ.બા. (અપેક્ષિત ઉકેલ)

સ્વાધ્યાય 2.1

નીચેનાં સમીકરણ ઉકેલો :

1. $x - 2 = 7$
2. $y + 3 = 10$
3. $6 = z + 2$
4. $\frac{3}{7} + x = \frac{17}{7}$
5. $6x = 12$
6. $\frac{t}{5} = 10$
7. $\frac{2x}{3} = 18$
8. $1.6 = \frac{y}{1.5}$
9. $7x - 9 = 16$
10. $14y - 8 = 13$
11. $17 + 6p = 9$
12. $\frac{x}{3} + 1 = \frac{7}{15}$

2.3 કેટલાક ઉપયોગો

આપણે એક સરળ ઉદાહરણથી શરૂઆત કરીએ.

બે સંખ્યાઓનો સરવાળો 74 છે. આમાંની એક સંખ્યા બીજી સંખ્યા કરતાં 10 વધારે હોય તો બંને સંખ્યાઓ શોધો.

આ એક કૂટપ્રશ્ન છે. આપણે બંનેમાંથી એક પણ સંખ્યા જાણતા નથી અને આપણે તે સંખ્યાઓ શોધવાની છે. અહીં આપણને બે શરત આપેલ છે.

(i) એક સંખ્યા બીજી સંખ્યા કરતાં 10 વધારે છે.

(ii) બંને સંખ્યાનો સરવાળો 74 છે.

આપણે ધોરણ 7 માં આવા કૂટપ્રશ્નની શરૂઆત કેવી રીતે કરવી તે શીખ્યા હતા. જો નાની સંખ્યાને x લઈએ તો મોટી સંખ્યા x થી 10 વધારે અર્થાત્ $x + 10$ થાય. બીજી શરત પ્રમાણે બંને સંખ્યાનો સરવાળો 74 છે.

એટલે કે, $x + (x + 10) = 74$

$\therefore 2x + 10 = 74$

10ને જ.બા. લઈ જતાં, $2x = 74 - 10$

$\therefore 2x = 64$

બંને બાજુને 2 વડે ભાગતાં, $x = 32$. આ નાની સંખ્યા છે.

$\therefore$ મોટી સંખ્યા $x + 10 = 32 + 10 = 42$

અપેક્ષિત સંખ્યાઓ 32 અને 42 છે. (બંનેનો સરવાળો 74 થાય છે અને મોટી સંખ્યા નાની સંખ્યા કરતાં 10 વધારે છે.)

આ પદ્ધતિની ઉપયોગિતા દર્શાવવા આપણે થોડાંક વધારે ઉદાહરણો વિચારીએ.

ઉદાહરણ 5 : સંમેય સંખ્યા $-\frac{7}{3}$ના બમણામાં કઈ સંખ્યા ઉમેરતાં $\frac{3}{7}$ મળે ?

ઉકેલ : સંમેય સંખ્યા $-\frac{7}{3}$ની બમણી સંખ્યા $2 \times \left[\frac{-7}{3}\right] = \frac{-14}{3}$ છે. ધારો કે, આ સંખ્યામાં x ઉમેરતાં આપણને $\frac{3}{7}$ મળે છે. આથી,

$$x + \left(\frac{-14}{3}\right) = \frac{3}{7}$$

$$\therefore x - \frac{14}{3} = \frac{3}{7}$$

$$\therefore x = \frac{3}{7} + \frac{14}{3} \qquad \left(\frac{14}{3}\text{ ને ડા.બા. લઈ જતાં}\right)$$

$$\therefore x = \frac{(3 \times 3) + (14 \times 7)}{21}$$

$$= \frac{9 + 98}{21} = \frac{107}{21}$$

આમ, $2 \times \left(\frac{-7}{3}\right)$ માં $\frac{107}{21}$ ઉમેરતાં $\frac{3}{7}$ મળે.

ઉદાહરણ 6 : એક લંબચોરસની પરિમિતિ 13 સેમી અને તેની પહોળાઈ $2\frac{3}{4}$ સેમી હોય તો તેની લંબાઈ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે લંબચોરસની લંબાઈ x સેમી છે.

લંબચોરસની પરિમિતિ = 2 × (લંબાઈ + પહોળાઈ)

$$= 2 \times (x + 2\tfrac{3}{4})$$

$$= 2 \times (x + \tfrac{11}{4})$$

પરિમિતિ 13 સેમી આપેલ છે.

માટે, $2\ (x + \frac{11}{4}) = 13$

$\therefore\ x + \frac{11}{4} = \frac{13}{2}$ (બંને બાજુને 2 વડે ભાગતાં)

$$x = \frac{13}{2} - \frac{11}{4}$$

$$= \frac{26}{4} - \frac{11}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$$

આમ, લંબચોરસની લંબાઈ $3\frac{3}{4}$ સેમી છે.

ઉદાહરણ 7 : સાહિલની માતાની હાલની ઉંમર સાહિલની હાલની ઉંમર કરતાં ત્રણ ગણી છે. 5 વર્ષ પછી તેમની ઉંમરનો સરવાળો 66 વર્ષ થાય છે તો બંનેની હાલની ઉંમર શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે સાહિલની હાલની ઉંમર x વર્ષ છે.

	સાહિલ	માતા	સરવાળો
હાલની ઉંમર	x	$3x$	
5 વર્ષ પછીની ઉંમર	$x + 5$	$3x + 5$	$4x + 10$

સાહિલની 5 વર્ષ પછીની ઉંમરને પણ x ધારીને ઉકેલ મેળવી શકાય. તમે આ રીતે પ્રયત્ન કરો.

તેમની ઉંમરનો સરવાળો 66 વર્ષ આપેલ છે.

માટે, $4x + 10 = 66$

આ સમીકરણ સાહિલની હાલની ઉંમર દર્શાવે છે. જે x વર્ષ છે. સમીકરણના ઉકેલ માટે,

10 ને જ.બા. લઈ જતાં

$$4x = 66 - 10$$
$$\therefore 4x = 56$$
$$\therefore x = \frac{56}{4} = 14$$ (ઉકેલ)

આમ, સાહિલની હાલની ઉંમર 14 વર્ષ અને માતાની ઉંમર 42 વર્ષ છે. (તમે ચકાસી શકો છો કે 5 વર્ષ પછી તેમની ઉંમરનો સરવાળો 66 વર્ષ થશે.)

ઉદાહરણ 8 : બંસી પાસે 2 રૂપિયાના તથા 5 રૂપિયાના કેટલાક સિક્કા છે. બે રૂપિયાના સિક્કાઓની સંખ્યા પાંચ રૂપિયાના સિક્કાઓની સંખ્યા કરતાં ત્રણ ગણી છે. જો સિક્કાઓનું કુલ મૂલ્ય ₹ 77 હોય તો દરેક મૂલ્યના સિક્કાની સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે બંસી પાસે રહેલા ₹ 5ના સિક્કાની સંખ્યા x છે.

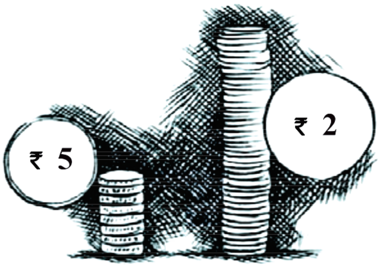
માટે, ₹ 2ના સિક્કાઓની સંખ્યા $3x$ થાય.

આથી,

(i) 5 રૂપિયાના સિક્કાઓનું કુલ મૂલ્ય, ₹ $5 \times x$ = ₹ $5x$

(ii) 2 રૂપિયાના સિક્કાઓનું કુલ મૂલ્ય, ₹ $2 \times 3x$ = ₹ $6x$ થાય.

આમ, તેની પાસે રહેલા સિક્કાઓનું કુલ મૂલ્ય = ₹ $11x$



પરંતુ, કુલ મૂલ્ય ₹ 77 આપેલ છે.

માટે, $11x = 77$

$$\therefore x = \frac{77}{11} = 7$$

આમ, 5 રૂપિયાના સિક્કાઓની સંખ્યા $= x = 7$

2 રૂપિયાના સિક્કાઓની સંખ્યા $= 3x = 21$

(તમે ચકાસી શકો છો કે બંસી પાસે કુલ ₹ 77 છે.) (ઉકેલ)

ઉદાહરણ 9 : 11ના ત્રણ ક્રમિક ગુણિતનો સરવાળો 363 હોય તો આ ગુણિતો શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે 11નો એક ગુણિત x છે. આથી, તેની પછીનો ગુણિત $x + 11$ થાય અને તેના પછીનો ગુણિત $x + 11 + 11$ અથવા $x + 22$ થાય. આમ, આપણે 11ના ત્રણ ક્રમિક ગુણિત અનુક્રમે x, $x + 11$ અને $x + 22$ લઈએ.

અહીં, 11 ના ત્રણેય ગુણિતોનો સરવાળો 363 આપેલ છે. આથી આપણને નીચે પ્રમાણેનું સમીકરણ મળે :

$$x + (x + 11) + (x + 22) = 363$$
$$\therefore x + x + 11 + x + 22 = 363$$
$$\therefore 3x + 33 = 363$$
$$\therefore 3x = 363 - 33$$
$$\therefore 3x = 330$$
$$\therefore x = \frac{330}{3}$$
$$\therefore x = 110$$

આમ, 110, 121 અને 132 એ ત્રણ ક્રમિક ગુણિતો છે (જવાબ).

અહીં, આપણે જોયું કે કૂટપ્રશ્નનો ઉકેલ જુદી-જુદી રીતે પણ મેળવી શકાય.

વૈકલ્પિક ઉકેલ : 11 ના ત્રણ ક્રમિક ગુણિતમાં જો મધ્યમાં રહેલ ગુણિતને x લઈએ તો તેની અગાઉનો ગુણિત $x - 11$ અને તેની પછીનો ગુણિત $x + 11$ થાય. આમ, આપણને સમીકરણ $(x - 11) + x + (x + 11) = 363$ મળે.

$$\therefore 3x = 363$$
$$x = \frac{363}{3} = 121$$

આથી,

$x = 121$, $x - 11 = 110$, $x + 11 = 132$

આમ, 110, 121, 132 એ 11 ના ત્રણ ક્રમિક ગુણિતો છે.

ઉદાહરણ 10 : બે પૂર્ણ સંખ્યાઓનો તફાવત 66 છે. જો તેમનો ગુણોત્તર 2 : 5 હોય તો તે સંખ્યાઓ શોધો.

ઉકેલ : બે સંખ્યાઓનો ગુણોત્તર 2:5 હોવાથી આપણે એક સંખ્યાને $2x$ તથા બીજી સંખ્યાને $5x$ લઈશું. (ધ્યાન આપો, $2x : 5x$ એ $2 : 5$ નું જ સ્વરૂપ છે.)

બંને સંખ્યાનો તફાવત $(5x - 2x)$ છે. પરંતુ, તફાવત આપણને 66 આપેલ છે. માટે,

$$5x - 2x = 66$$
$$3x = 66$$
$$x = 22$$

પરંતુ, સંખ્યાઓ $2x$ અને $5x$ છે. માટે, માંગેલ સંખ્યાઓ અનુક્રમે $2 \times 22 = 44$ અને $5 \times 22 = 110$ છે. બંને સંખ્યાઓનો તફાવત $110 - 44 = 66$ જ થાય છે.

ઉદાહરણ 11 : દેવેશી પાસે ₹ 50, ₹ 20 અને ₹ 10ના મૂલ્યની કુલ ₹ 590 ની ચલણી નોટો છે. ₹ 50 અને ₹ 20ના મૂલ્યની ચલણી નોટોનો ગુણોત્તર 3 : 5 છે. જો તેની પાસે કુલ 25 ચલણી નોટો હોય તો ઉપરોક્ત મૂલ્યવાળી નોટોની સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે ₹ 50 અને ₹ 20ના મૂલ્યવાળી નોટોની સંખ્યા અનુક્રમે $3x$ અને $5x$ છે.
તેની પાસે કુલ 25 નોટો છે.

માટે ₹ 10ના મૂલ્યવાળી નોટોની સંખ્યા $= 25 - (3x + 5x)$

$= 25 - 8x$

તેની પાસે રહેલ રકમ,

₹ 50ની નોટ દ્વારા, $3x \times 50 = 150x$

₹ 20ની નોટ દ્વારા, $5x \times 20 = 100x$

₹ 10ની નોટ દ્વારા, $(25 - 8x) \times 10 = (250 - 80x)$

આમ, તેની પાસે રહેલ કુલ રકમ $= 150x + 100x + (250 - 80x) =$ ₹ $(170x + 250)$

પરંતુ, તેની પાસે કુલ ₹ 590 છે. માટે, $170x + 250 = 590$

$$\therefore\ 170x = 590 - 250 = 340$$

$$\therefore\ x = \frac{340}{170} = 2$$

$$\therefore\ x = 2$$

તેણી પાસે રહેલી ₹ 50ના મૂલ્યની નોટોની સંખ્યા $= 3x$

$= 3 \times 2 = 6$

તેણી પાસે રહેલી ₹ 20ના મૂલ્યની નોટોની સંખ્યા $= 5x = 5 \times 2 = 10$

તેણી પાસે રહેલી ₹ 10ના મૂલ્યની નોટોની સંખ્યા $= 25 - 8x$

$= 25 - (8 \times 2)$

$= 25 - 16 = 9$

સ્વાધ્યાય 2.2

1. એક સંખ્યામાંથી $\frac{1}{2}$ બાદ કરીને મળતાં પરિણામને $\frac{1}{2}$ વડે ગુણતાં જો $\frac{1}{8}$ મળે તો તે સંખ્યા શોધો.
2. એક લંબચોરસ સ્વીમીંગ પુલની પરિમિતિ 154 મી છે. જો તેની લંબાઈ તેની પહોળાઈના બમણાથી બે વધારે હોય તો સ્વીમીંગ પુલની લંબાઈ અને પહોળાઈ શોધો.
3. એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાનું માપ $\frac{4}{3}$ સેમી છે. જો ત્રિકોણની પરિમિતિ $4\frac{2}{15}$ સેમી હોય તો ત્રિકોણની બે સમાન બાજુઓની લંબાઈ શોધો.
4. બે સંખ્યાઓનો સરવાળો 95 છે. એક સંખ્યા બીજી સંખ્યા કરતાં 15 વધારે હોય તો તે સંખ્યાઓ શોધો.
5. બે સંખ્યાઓનો ગુણોત્તર 5 : 3 અને તેમનો તફાવત 18 હોય તો તે સંખ્યાઓ શોધો.
6. જો ત્રણ ક્રમિક પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો સરવાળો 51 હોય, તો તે સંખ્યાઓ શોધો.
7. 8ના ત્રણ ક્રમિક ગુણિતનો સરવાળો 888 છે તો તે ગુણિત શોધો.
8. ચઢતા ક્રમમાં રહેલી ત્રણ ક્રમિક પૂર્ણાંક સંખ્યાઓને અનુક્રમે 2, 3 તથા 4 વડે ગુણાકાર કરી અને સરવાળો કરતાં જો સરવાળો 74 આવે તો તે સંખ્યાઓ શોધો.
9. રાહુલ અને હારુનની હાલની ઉંમરનો ગુણોત્તર 5 : 7 છે. 4 વર્ષ પછી તેમની ઉંમરનો સરવાળો 56 વર્ષ થાય તો તેમની હાલની ઉંમર શોધો.
10. વર્ગખંડમાં છોકરા અને છોકરીઓની સંખ્યાનો ગુણોત્તર 7 : 5 છે. જો છોકરાઓની સંખ્યા છોકરીઓની સંખ્યા કરતાં 8 વધારે હોય તો વર્ગખંડમાં વિદ્યાર્થીઓની કુલ સંખ્યા શોધો.
11. ભરતના પિતાજી ભરતના દાદા કરતાં 26 વર્ષ નાના અને ભરત કરતાં 29 વર્ષ મોટા છે. જો ત્રણેયની ઉંમરનો સરવાળો 135 વર્ષ હોય તો ત્રણેયની ઉંમર શોધો.
12. 15 વર્ષ પછી રવિની ઉંમર તેની હાલની ઉંમર કરતાં ચાર ગણી થાય તો રવિની હાલની ઉંમર શોધો.
13. એક સંમેય સંખ્યાને $\frac{5}{2}$ વડે ગુણી અને પરિણામમાં $\frac{2}{3}$ ઉમેરતાં આપણને $\frac{-7}{12}$ મળે તો તે સંખ્યા શોધો.

14. લક્ષ્મી એક બૅંકમાં ખજાનચી છે. તેની પાસે અનુક્રમે ₹ 100, ₹ 50 અને ₹ 10ના મૂલ્યની ચલણી નોટો છે. આ નોટોની સંખ્યાનો ગુણોત્તર અનુક્રમે 2 : 3 : 5 છે. જો કુલ રકમ ₹ 4,00,000 હોય તો લક્ષ્મી પાસે દરેક મૂલ્યની કેટલી ચલણી નોટો હશે ?
15. મારી પાસે ₹ 1, ₹ 2 અને ₹ 5ના મૂલ્યવાળા કુલ ₹ 300ના સિક્કા છે. ₹ 2ના સિક્કાની સંખ્યા, ₹ 5ના સિક્કા કરતાં ત્રણ ગણી છે. જો સિક્કાની કુલ સંખ્યા 160 હોય તો દરેક મૂલ્યના સિક્કાઓની સંખ્યા શોધો.
16. એક નિબંધ સ્પર્ધાના આયોજકોએ પ્રત્યેક વિજેતાને ₹ 100 તથા વિજયી ન બનનારા દરેક સ્પર્ધકને ₹ 25નો પુરસ્કાર આપવાનું નક્કી કરેલ છે. જો પુરસ્કાર સ્વરૂપે આપવામાં આવેલ કુલ રકમ ₹ 3,000 હોય તો કુલ 63 સ્પર્ધકોમાંથી વિજેતા થનાર સ્પર્ધકની સંખ્યા શોધો.

2.4 બંને બાજુ ચલ હોય તેવા સમીકરણોનો ઉકેલ

સમીકરણ એ બે પદાવલિઓનાં મૂલ્યો વચ્ચેની સમતા છે. સમીકરણ $2x - 3 = 7$ માં રહેલી બે પદાવલિઓ અનુક્રમે $2x - 3$ અને 7 છે. અત્યાર સુધી આપણે લીધેલા દરેક ઉદાહરણમાં જમણી બાજુ ફક્ત સંખ્યા જ હતી. પરંતુ, આવું આવશ્યક નથી. બંને બાજુ ચલવાળી પદાવલિ પણ હોઈ શકે. ઉદાહરણ તરીકે $2x - 3 = x + 2$ માં બંને બાજુએ ચલ હોય તેવી પદાવલિઓ છે. ડાબી બાજુની પદાવલિ $2x - 3$ છે અને જમણી બાજુની પદાવલિ $x + 2$ છે.

- હવે આપણે બંને બાજુ ચલવાળી પદાવલિઓ હોય તેવાં સમીકરણોનો ઉકેલ કેવી રીતે મેળવવો તે વિશે ચર્ચા કરીએ.

ઉદાહરણ 12 : ઉકેલ શોધો : $2x - 3 = x + 2$

ઉકેલ : આપણી પાસે

$$\therefore\ 2x = x + 2 + 3$$

$$\therefore\ 2x = x + 5$$

$$\therefore\ 2x - x = x + 5 - x$$ (બંને બાજુથી x બાદ કરતાં)

$$x = 5$$ (ઉકેલ)

અહીંયાં આપણે સમીકરણની બંને બાજુથી ફક્ત સંખ્યા (અચળ પદ) જ નહીં પરંતુ ચલવાળું પદ પણ બાદ કરેલ છે. કારણ કે ચલ પોતે પણ એક સંખ્યા જ છે. ધ્યાન રાખો અહીં બંને બાજુથી x બાદ કરવું તે હકીકતમાં x ને ડાબી બાજુ લઈ જવાની ક્રિયા છે.

ઉદાહરણ 13 : ઉકેલ શોધો : $5x + \frac{7}{2} = \frac{3}{2}x - 14$

ઉકેલ : બંને બાજુને 2 વડે ગુણતાં,

$$2 \times \left(5x + \frac{7}{2}\right) = 2 \times \left(\frac{3}{2}x - 14\right)$$

$$\therefore\ (2 \times 5x) + \left(2 \times \frac{7}{2}\right) = \left(2 \times \frac{3}{2}x\right) - (2 \times 14)$$

$$\therefore\ 10x + 7 = 3x - 28$$

$$\therefore\ 10x - 3x + 7 = -28$$ ($3x$ ને ડા.બા. લઈ જતાં)

$$\therefore\ 7x + 7 = -28$$

$$7x = -28 - 7$$

$$\therefore\ 7x = -35$$

$$\therefore\ x = \frac{-35}{7} \quad \text{અથવા} \quad x = -5$$ (ઉકેલ)

સ્વાધ્યાય 2.3

નીચેનાં સમીકરણોનો ઉકેલ મેળવો અને જવાબ ચકાસો :

1. $3x = 2x + 18$ **2.** $5t - 3 = 3t - 5$ **3.** $5x + 9 = 5 + 3x$

4. $4z + 3 = 6 + 2z$ **5.** $2x - 1 = 14 - x$ **6.** $8x + 4 = 3(x - 1) + 7$

7. $x = \frac{4}{5}(x + 10)$ **8.** $\frac{2x}{3} + 1 = \frac{7x}{15} + 3$ **9.** $2y + \frac{5}{3} = \frac{26}{3} - y$

10. $3m = 5m - \frac{8}{5}$

2.5 થોડાક વધારે ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 14 : બે અંકોની એક સંખ્યાના અંકોનો તફાવત 3 છે. અંકોની અદલાબદલી કરીને મળતી નવી સંખ્યાને મૂળ સંખ્યામાં ઉમેરતાં 143 મળે છે તો મૂળ સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ : દાખલા તરીકે, બે અંકોવાળી એક સંખ્યા, ધારો કે 56 લઈએ.

આને આપણે આ પ્રકારે લખી શકીએ.

$56 = (10 \times 5) + 6$

હવે સંખ્યાના અંકોની અદલાબદલી કરતાં આપણને 65 મળે જેને આપણે $(10 \times 6) + 5$ પ્રમાણે લખી શકીએ. ધારો કે બે અંકોવાળી સંખ્યામાં, એકમનો અંક b છે. હવે, બંને અંકોનો તફાવત 3 છે તેથી દશકનો એક $b + 3$ થાય. આમ, બે અંકોવાળી સંખ્યા $10(b + 3) + b = 10b + 30 + b = 11b + 30$ થાય.

અંકોની અદલાબદલી કરતાં મળતી નવી સંખ્યા

$10b + (b + 3) = 11b + 3$ થાય.

બંને સંખ્યાનો સરવાળો કરતાં $(11b + 30) + (11b + 3)$

$= 11b + 11b + 30 + 3$

$= 22b + 33$ મળે.

શું આપણે દશકનો અંક $(b - 3)$ લઈ શકીએ ? પ્રયત્ન કરો અને જુઓ શું જવાબ મળે છે.

બંને સંખ્યાનો સરવાળો 143 છે. માટે $22b + 33 = 143$

$\therefore 22b = 143 - 33$

$\therefore 22b = 110$

$\therefore b = \frac{110}{22}$

$\therefore b = 5$

ધ્યાન રાખો, આ ઉકેલમાં આપણે દશકનો અંક એકમના અંક કરતાં ત્રણ વધારે લીધો છે. દશકના અંકને $(b - 3)$ લઈને જુઓ શું ઉકેલ મળે છે ?

આમ, એકમનો અંક 5 છે, માટે દશકનો અંક

$5 + 3 = 8$

$\therefore$ મૂળ સંખ્યા $= 85$

તાળો મેળવો : અંકોની અદલાબદલી કરતાં 58 મળે છે અને 58 અને 85નો સરવાળો પ્રશ્નમાં જણાવ્યા મુજબ 143 થાય છે.

ઉદાહરણમાં આપેલ કૂટ પ્રશ્ન 58 અને 85 બંને સંખ્યા માટે સાચો છે. આમ બંને ઉત્તર સાચા છે.

ઉદાહરણ 15 : અર્જુનની હાલની ઉંમર શ્રીયાની હાલની ઉંમરથી બમણી છે. 5 વર્ષ પહેલાં અર્જુનની ઉંમર શ્રીયાની ઉંમર કરતાં ત્રણ ગણી હતી તો બંનેની હાલની ઉંમર શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે શ્રીયાની હાલની ઉંમર x વર્ષ છે. માટે,

અર્જુનની હાલની ઉંમર $2x$ વર્ષ થાય.

શ્રીયાની 5 વર્ષ પહેલાંની ઉંમર : $(x - 5)$ વર્ષ

$\therefore$ અર્જુનની 5 વર્ષ પહેલાંની ઉંમર : $(2x - 5)$ વર્ષ

5 વર્ષ પહેલાં અર્જુનની ઉંમર શ્રીયાની ઉંમર કરતાં ત્રણ ગણી હતી.

માટે, $2x - 5 = 3(x - 5)$

$\therefore 2x - 5 = 3x - 15$

$15 - 5 = 3x - 2x$

$10 = x$

આમ, શ્રીયાની હાલની ઉંમર $x = 10$ વર્ષ

માટે, અર્જુનની હાલની ઉંમર $= 2x = 2 \times 10 = 20$ વર્ષ

સ્વાધ્યાય 2.4

1. અમીના એક સંખ્યા ધારે છે. તે આ સંખ્યામાંથી $\frac{5}{2}$ બાદ કરી અને મળેલ પરિણામનો 8 વડે ગુણાકાર કરે છે. જો મળેલ નવું પરિણામ ધારેલ સંખ્યાનું ત્રણ ગણું હોય તો અમીનાએ ધારેલી સંખ્યા શોધો.
2. બે ધન સંખ્યાઓમાં પહેલી સંખ્યા બીજી સંખ્યા કરતાં 5 ગણી છે. દરેક સંખ્યામાં 21 ઉમેરતાં નવી મળેલ બંને સંખ્યાઓમાંથી પહેલી સંખ્યા બીજી સંખ્યા કરતાં બમણી થાય છે તો મૂળ સંખ્યાઓ શોધો.
3. બે અંકની સંખ્યાના અંકોનો સરવાળો 9 છે. જો અંકોની અદલાબદલી કરતાં મળેલ નવી સંખ્યા, મૂળ સંખ્યા કરતાં 27 વધારે હોય તો, મૂળ સંખ્યા શોધો.
4. બે અંકની સંખ્યાના અંકો પૈકી એક અંક બીજા અંક કરતાં ત્રણ ગણો છે. અંકોની અદલાબદલી કરતાં મળેલ નવી સંખ્યાને, મૂળ સંખ્યામાં ઉમેરતાં 88 મળે છે, તો મૂળ સંખ્યા શોધો.
5. સરોજની માતાની હાલની ઉંમર, સરોજની હાલની ઉંમર કરતાં છ ગણી છે. 5 વર્ષ પછી સરોજની ઉંમર તેની માતાની હાલની ઉંમર કરતાં ત્રીજા ભાગની થશે. તો બંનેની હાલની ઉંમર શોધો.
6. મહુલી ગામમાં જમીનનો એક સાંકડો લંબચોરસ ટુકડો શાળા બનાવવા માટે ફાળવેલ છે. પ્લોટની લંબાઈ અને પહોળાઈનો ગુણોત્તર 11 : 4 છે. જો આ પ્લોટની ફરતે વાડ બનાવવા માટે ગ્રામપંચાયતને ₹ 100 પ્રતિ મીટરના દરે ₹ 75,000 ખર્ચ કરવા પડે તો પ્લોટની લંબાઈ અને પહોળાઈ શોધો.
7. હસન ગણવેશ બનાવવા માટે બે પ્રકારનું કાપડ ખરીદે છે. શર્ટ માટેના કાપડનો ભાવ ₹ 50 પ્રતિ મીટર છે તથા પાટલૂનના કાપડનો ભાવ ₹ 90 પ્રતિ મીટર છે. શર્ટના પ્રત્યેક 3 મીટર કાપડ માટે

તે પાટલૂનનું 2 મીટર કાપડ ખરીદે છે. તે આ કાપડને અનુક્રમે 12% અને 10% નફા સાથે વેચે છે, તેને કુલ ₹ 36,600 મળે છે, તો તેણે પાટલૂન માટે કેટલું કાપડ ખરીદ્યું હશે ?

8. હરણના એક ઝુંડમાંથી અડધાં હરણ ખેતરમાં ચરી રહ્યાં છે. બાકી બચેલાં હરણના ત્રણ ચતુર્થાંશ ભાગનાં હરણ ઊછળકૂદ કરી રહ્યાં છે અને બાકીનાં 9 હરણ તળાવમાંથી પાણી પી રહ્યાં છે. તો ઝુંડમાં રહેલાં હરણની સંખ્યા શોધો.

9. દાદાજીની ઉંમર તેમની પૌત્રીની ઉંમર કરતાં દસ ગણી છે. જો તેમની ઉંમર તેમની પૌત્રીની ઉંમર કરતાં 54 વર્ષ વધારે હોય તો બંનેની ઉંમર શોધો.

10. અમનની હાલની ઉંમર તેના પુત્રની હાલની ઉંમર કરતાં ત્રણ ગણી છે. 10 વર્ષ પહેલાં તેની ઉંમર તેના પુત્રની ઉંમર કરતાં પાંચગણી હોય તો તેમની હાલની ઉંમર શોધો.

2.6 સમીકરણનું સરળ સ્વરૂપમાં રૂપાંતરણ

ઉદાહરણ 16 : ઉકેલ શોધો : $\frac{6x+1}{3} + 1 = \frac{x-3}{6}$

> 6 વડે જ કેમ ? અહીં બંને બાજુ પર રહેલ પદોના છેદનો લ. સા. અ. 6 છે.

ઉકેલ : બંને બાજુને 6 વડે ગુણતાં

$$\frac{6(6x+1)}{3} + 6 \times 1 = \frac{6(x-3)}{6}$$

$$\therefore\ 2(6x+1) + 6 = x - 3$$

$$\therefore\ 12x + 2 + 6 = x - 3 \qquad \text{(કૌંસ છોડતાં)}$$

$$\therefore\ 12x + 8 = x - 3$$

$$\therefore\ 12x - x + 8 = -3$$

$$\therefore\ 11x + 8 = -3$$

$$\therefore\ 11x = -3 - 8$$

$$\therefore\ 11x = -11$$

$$\therefore\ x = -1 \qquad \text{(જોઈતું પરિણામ)}$$

ચકાસો : ડા.બા. $\frac{6(-1)+1}{3} + 1 = \frac{-6+1}{3} + 1 = \frac{-5}{3} + \frac{3}{3}$

$$= \frac{-5+3}{3} = \frac{-2}{3}$$

જ.બા. $= \frac{(-1)-3}{6} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$

$\therefore$ ડા.બા. = જ.બા.

ઉદાહરણ 17 : ઉકેલ શોધો : $5x - 2(2x - 7) = 2(3x - 1) + \frac{7}{2}$

ઉકેલ : કૌંસને દૂર કરતાં,

ડા.બા. $= 5x - 4x + 14 = x + 14$

$$\text{જ.બા.} = 6x - 2 + \frac{7}{2} = 6x - \frac{4}{2} + \frac{7}{2} = 6x + \frac{3}{2}$$

આમ સમીકરણ, $x + 14 = 6x + \frac{3}{2}$

$$\therefore\ 14 = 6x - x + \frac{3}{2}$$

$$\therefore\ 14 = 5x + \frac{3}{2}$$

$$\therefore\ 14 - \frac{3}{2} = 5x$$ ($\frac{3}{2}$ ને ડા.બા. લઈ જતાં)

$$\therefore\ \frac{28 - 3}{2} = 5x$$

$$\therefore\ \frac{25}{2} = 5x$$

$$\therefore\ x = \frac{25}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{5 \times 5}{2 \times 5} = \frac{5}{2}$$

> શું તમે જોયું કે સમીકરણને આપણે કેવી રીતે સરળ બનાવ્યું ? અહીંયાં, બંને તરફની પદાવલિઓમાં રહેલા પદોના છેદના લ. સા. અ. વડે બંને બાજુનો ગુણાકાર કર્યો.

આમ, $x = \frac{5}{2}$ એ સમીકરણનો જરૂરી ઉકેલ છે.

ચકાસો **:** ડા.બા. $= 5 \times \frac{5}{2} - 2\left(\frac{5}{2} \times 2 - 7\right)$

$$= \frac{25}{2} - 2(5 - 7) = \frac{25}{2} - 2(-2)$$

$$= \frac{25}{2} + 4 = \frac{25 + 8}{2} = \frac{33}{2}$$

$$\text{જ.બા.} = 2\left(\frac{5}{2} \times 3 - 1\right) + \frac{7}{2} = 2\left(\frac{15}{2} - \frac{2}{2}\right) + \frac{7}{2}$$

$$= \frac{2 \times 13}{2} + \frac{7}{2}$$

$$= \frac{26 + 7}{2} = \frac{33}{2} = \text{ડા.બા.}$$

> ધ્યાન આપો, આ ઉદાહરણમાં આપણે કૌંસને ખોલી અને બંને બાજુએ રહેલાં સમાન પદોને મેળવીને સમીકરણને સરળ બનાવેલ છે.

સ્વાધ્યાય 2.5

નીચેનાં સુરેખ સમીકરણોનો ઉકેલ મેળવો :

1. $\frac{x}{2} - \frac{1}{5} = \frac{x}{3} + \frac{1}{4}$ **2.** $\frac{n}{2} - \frac{3n}{4} + \frac{5n}{6} = 21$ **3.** $x + 7 - \frac{8x}{3} = \frac{17}{6} - \frac{5x}{2}$

4. $\frac{x - 5}{3} = \frac{x - 3}{5}$ **5.** $\frac{3t - 2}{4} - \frac{2t + 3}{3} = \frac{2}{3} - t$ **6.** $m - \frac{m - 1}{2} = 1 - \frac{m - 2}{3}$

સાદુંરૂપ આપી નીચેનાં સમીકરણોનો ઉકેલ મેળવો :

7. $3(t - 3) = 5(2t + 1)$

8. $15(y - 4) - 2(y - 9) + 5(y + 6) = 0$

9. $3(5z - 7) - 2(9z - 11) = 4(8z - 13) - 17$

10. $0{\cdot}25\ (4f - 3) = 0{\cdot}05\ (10f - 9)$

2.7 સુરેખ સ્વરૂપે બદલી શકાય તેવા સમીકરણ

ઉદાહરણ 18 : ઉકેલ શોધો : $\frac{x+1}{2x+3} = \frac{3}{8}$

ઉકેલ : ધ્યાન આપો, આપેલ સમીકરણ સુરેખ સમીકરણ નથી. કારણ કે ડાબી બાજુની પદાવલિ સુરેખ નથી. પરંતુ આપણે તેને સુરેખ સમીકરણના સ્વરૂપમાં બદલી શકીએ છીએ. સમીકરણની બંને બાજુનો (2x + 3) વડે ગુણાકાર કરતાં

$$\left(\frac{x+1}{2x+3}\right) \times (2x+3) = \frac{3}{8}(2x+3)$$

ધ્યાન આપો
$2x + 3 \neq 0$
(કેમ ?)

ડા.બા. એથી (2x + 3)નો છેદ ઊડી જશે આથી આપણને

$$x + 1 = \frac{3(2x+3)}{8} \text{ મળશે.}$$

હવે, આપણી પાસે એક સુરેખ સમીકરણ છે. જેનો ઉકેલ આપણને મેળવતાં આવડે છે.
બંને બાજુને 8 વડે ગુણતાં

$$8(x+1) = 3\ (2x+3)$$
$$\therefore\ 8x + 8 = 6x + 9$$
$$\therefore\ 8x = 6x + 9 - 8$$
$$\therefore\ 8x = 6x + 1$$
$$\therefore\ 8x - 6x = 1$$
$$\therefore\ 2x = 1$$
$$\therefore\ x = \frac{1}{2}$$

આ પદને આપણે ચોકડી ગુણાકારથી પણ મેળવી શકીએ
$\frac{x+1}{2x+3} \nearrow\!\!\!\!\swarrow \frac{3}{8}$

ઉકેલ : $x = \frac{1}{2}$

તાળો મેળવો : ડા.બા.નો અંશ $= \frac{1}{2} + 1 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$

ડા.બા.નો છેદ $= 2x + 3 = 2 \times \frac{1}{2} + 3 = 1 + 3 = 4$

$$\therefore \text{ ડા.બા.} = \text{અંશ} \div \text{છેદ} = \frac{3}{2} \div 4$$
$$= \frac{3}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$
$$\therefore \text{ ડા.બા.} = \text{જ.બા.}$$

ઉદાહરણ 19 : અનુ અને રાજની હાલની ઉંમરનો ગુણોત્તર 4 : 5 છે. 8 વર્ષ પછીની તેમની ઉંમરનો ગુણોત્તર 5 : 6 થાય તો તેમની હાલની ઉંમર શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે અનુ અને રાજની હાલની ઉંમર અનુક્રમે $4x$ અને $5x$ છે.

8 વર્ષ પછી, અનુની ઉંમર $= (4x + 8)$ વર્ષ

8 વર્ષ પછી, રાજની ઉંમર $= (5x + 8)$ વર્ષ

આમ, 8 વર્ષ પછી તેમની ઉંમરનો ગુણોત્તર $= \dfrac{4x+8}{5x+8}$

પરંતુ, ગુણોત્તર 5 : 6 આપેલ છે.

માટે, $\dfrac{4x+8}{5x+8} = \dfrac{5}{6}$

ચોકડી ગુણાકાર કરતાં $6(4x + 8) = 5(5x + 8)$

$\therefore\ 24x + 48 = 25x + 40$

$\therefore\ 24x + 48 - 40 = 25x$

$\therefore\ 24x + 8 = 25x$

$\therefore\ 8 = 25x - 24x$

$\therefore\ 8 = x$

આમ, અનુની હાલની ઉંમર $= 4x = 4 \times 8 = 32$ વર્ષ

રાજની હાલની ઉંમર $= 5x = 5 \times 8 = 40$ વર્ષ

સ્વાધ્યાય 2.6

નીચે આપેલાં સમીકરણો ઉકેલો :

1. $\dfrac{8x-3}{3x} = 2$ **2.** $\dfrac{9x}{7-6x} = 15$ **3.** $\dfrac{z}{z+15} = \dfrac{4}{9}$

4. $\dfrac{3y+4}{2-6y} = \dfrac{-2}{5}$ **5.** $\dfrac{7y+4}{y+2} = \dfrac{-4}{3}$

6. હરિ અને હેરીની હાલની ઉંમરનો ગુણોત્તર 5 : 7 છે. 4 વર્ષ પછી તેમની ઉંમરનો ગુણોત્તર 3 : 4 હશે તો તેમની હાલની ઉંમર શોધો.

7. એક અપૂર્ણાંકનો છેદ તેના અંશ કરતાં 8 વધારે છે. જો તેના અંશમાં 17 ઉમેરવામાં આવે અને છેદમાંથી 1 બાદ કરવામાં આવે તો મળતો નવો અપૂર્ણાંક $\dfrac{3}{2}$ હોય તો મૂળ અપૂર્ણાંક શોધો.

આપણે શું ચર્ચા કરી ?

1. બૈજિક સમીકરણ એ ચલોના ઉપયોગથી બનતી સમતા છે. તે દર્શાવે છે કે સમતાના ચિહ્નની એક બાજુ આવેલ પદાવલિનું મૂલ્ય તેની બીજી બાજુ આવેલ પદાવલિના મૂલ્ય જેટલું જ હોય.

2. ધોરણ VI, VII અને VIII માં આપણે જેનો અભ્યાસ કર્યો હતો તે સમીકરણો એક ચલ સુરેખ સમીકરણો હતાં. આ સમીકરણોમાં સમીકરણ બનાવવા ઉપયોગ થયેલ પદાવલિમાં ફક્ત એક જ ચલ હતો અને આ બધાં જ સમીકરણો સુરેખ હતાં અર્થાત્ સમીકરણમાં રહેલા ચલની અધિકતમ ઘાત 1 હતી.

3. સુરેખ સમીકરણનો ઉકેલ કોઈપણ સંમેય સંખ્યા હોઈ શકે છે.

4. સમીકરણની બંને બાજુએ સુરેખ પદાવલિઓ હોઈ શકે છે. ધોરણ 6 અને 7 માં અભ્યાસ કરેલ સમીકરણમાં કોઈપણ એક બાજુ ફક્ત સંખ્યા હતી.

5. સંખ્યાની જેમ જ ચલને પણ એક બાજુથી બીજી બાજુ તરફ લઈ જઈ શકાય છે.

6. ક્યારેક ઉકેલ લાવતાં પહેલાં, સમીકરણ બનાવવામાં વપરાયેલ પદાવલિઓને તેમના સરળ સ્વરૂપમાં ફેરવવામાં આવે છે. શરૂઆતમાં અમુક સમીકરણ સુરેખ નથી હોતાં પરંતુ સમીકરણની બંને બાજુઓને યોગ્ય પદાવલિ વડે ગુણીને તેમને સુરેખ સમીકરણમાં બદલી શકાય છે.

7. વિવિધ પ્રકારના કૂટપ્રશ્નોનો ઉકેલ મેળવવામાં સુરેખ સમીકરણ ઉપયોગી છે. સંખ્યા, ઉંમર, પરિમિતિ, ચલણી સિક્કા તથા નોટો પર આધારિત કૂટપ્રશ્નોના ઉકેલ સુરેખ સમીકરણના ઉપયોગથી મેળવી શકાય છે.

પ્રકરણ

3

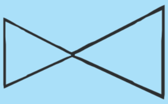
ચતુષ્કોણની સમજ

3.1 પ્રાસ્તાવિક

તમે જાણો છો કે કાગળ એક **સમતલની પ્રતિકૃતિ** છે. જ્યારે તમે કાગળ પર પેન્સિલ ઉપાડ્યા વગર તેના પર રહેલાં બિંદુઓને એકબીજાં સાથે જોડો છો (માત્ર એક બિંદુ ના હોય તેવા આકૃતિના કોઇ પણ ભાગને રેખાંકિત કર્યા વગર) ત્યારે તમને **સમતલીય વક્ર** મળે છે.

અગાઉના ધોરણમાં અભ્યાસ કરેલ અલગ-અલગ પ્રકારના વક્રને યાદ કરવાનો પ્રયત્ન કરો.

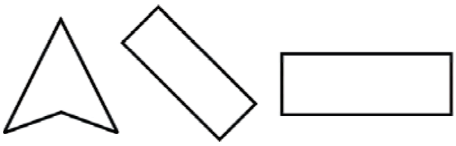
નીચેની આકૃતિઓને તેના પ્રકાર સાથે મેળવો : (**સૂચના :** એક આકૃતિના એકથી વધારે પ્રકાર હોઈ શકે છે.)

આકૃતિ	પ્રકાર
(1)	(a) સરળ બંધ વક્ર
(2)	(b) બંધ વક્ર કે જે સરળ નથી
(3)	(c) સરળ વક્ર જે બંધ નથી
(4) 	(d) વક્ર જે સરળ નથી

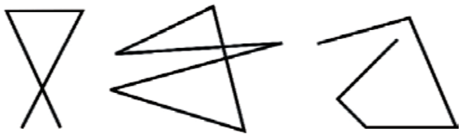
તમારા મિત્રો સાથે તમે કરેલ જોડની તુલના કરો. શું તે તમારી સાથે સહમત છે ?

3.2 બહુકોણ

ફક્ત રેખાખંડથી બનતા સાદા બંધ વક્રને બહુકોણ કહે છે.



વક્ર જે બહુકોણ છે

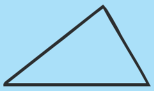
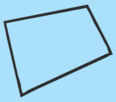
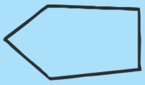
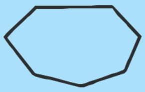
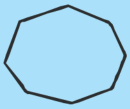
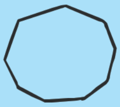
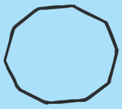


વક્ર જે બહુકોણ નથી

બહુકોણનાં થોડાં વધારે ઉદાહરણ આપવાનો પ્રયત્ન કરો તથા થોડાં એવાં પણ ઉદાહરણ આપો કે જે બહુકોણ ના હોય. એક બહુકોણની કાચી આકૃતિ દોરો અને તેની બાજુઓ તથા શિરોબિંદુઓની ઓળખ મેળવો.

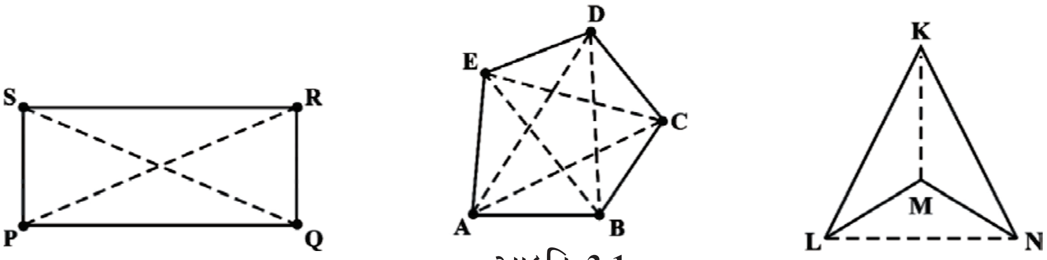
3.2.1 બહુકોણનું વર્ગીકરણ

આપણે બહુકોણનું વર્ગીકરણ તેની બાજુઓ(અથવા શિરોબિંદુઓ)ની સંખ્યાના આધારે કરીએ છીએ.

બાજુઓ અથવા શિરોબિંદુઓની સંખ્યા	વર્ગીકરણ	આકૃતિ
3	ત્રિકોણ	
4	ચતુષ્કોણ	
5	પંચકોણ	
6	ષટ્કોણ	
7	સપ્તકોણ	
8	અષ્ટકોણ	
9	નવકોણ	
10	દસકોણ	
⋮	⋮	⋮
n	n-કોણ	

3.2.2 વિકર્ણ

બહુકોણનો વિકર્ણ એ ક્રમિક ના હોય તેવાં શિરોબિંદુઓને જોડવાથી મળતો રેખાખંડ છે.



આકૃતિ 3.1

તમે, ઉપરોક્ત આકૃતિમાં રહેલા વિકર્ણનાં નામ આપી શકશો ? (આકૃતિ 3.1)

શું $\overline{PQ}$ વિકર્ણ છે ? $\overline{LN}$ માટે શું કહી શકાય ?

એક બંધ વક્રમાં **અંતર્ભાગ** અને **બહિર્ભાગ** કોને કહેવાય તેનાથી આપ સુપરિચિત છો. (આકૃતિ 3.2)

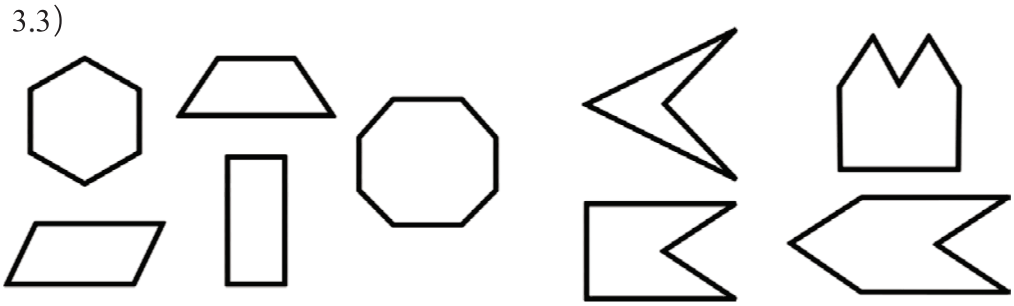
અંતર્ભાગ **બહિર્ભાગ**

આકૃતિ 3.2

અંતર્ભાગની એક સીમા હોય છે. શું બહિર્ભાગને પણ સીમા હોય ? તમારા મિત્રો સાથે આ વિશે ચર્ચા કરો.

3.2.3 બહિર્મુખ અને અંતર્મુખ બહુકોણ

અહીં થોડા બહિર્મુખ (Convex) બહુકોણ અને થોડા અંતર્મુખ (Concave) બહુકોણ આપેલ છે. (આકૃતિ 3.3)



બહિર્મુખ બહુકોણ **અંતર્મુખ બહુકોણ**

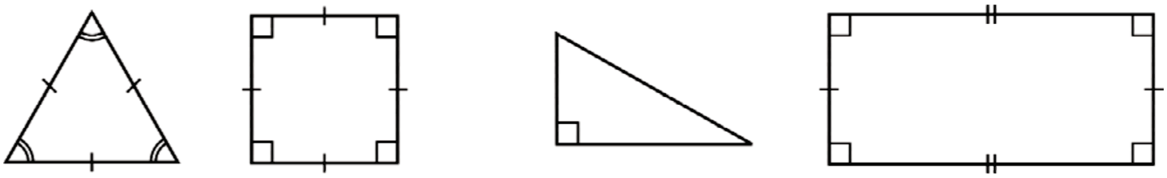
આકૃતિ 3.3

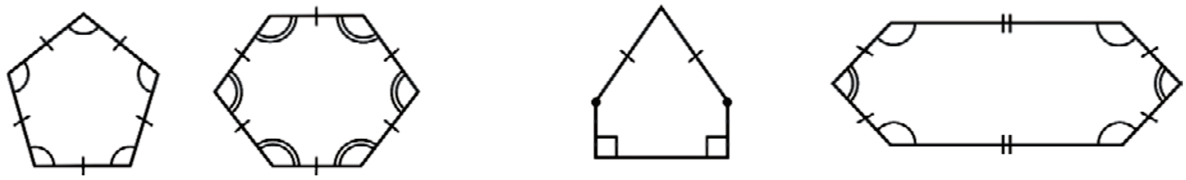
તમે કહી શકો, કે આ પ્રકારના બહુકોણ એકબીજાથી કેવી રીતે અલગ છે ? જે બહુકોણ બહિર્મુખ હોય છે તેમના વિકર્ણનો કોઈપણ ભાગ બહુકોણના બહિર્ભાગમાં હોતો નથી. અથવા બહુકોણના અંતર્ભાગમાં રહેલ બે ભિન્ન બિંદુઓને જોડતો કોઈ એક રેખાખંડ સંપૂર્ણપણે તેના અંતર્ભાગમાં જ હોય છે. શું આ વાક્ય અંતર્મુખ બહુકોણ માટે પણ સત્ય છે ? આપેલ આકૃતિઓનો અભ્યાસ કરો. તદુપરાંત પોતાના શબ્દોમાં બહિર્મુખ અને અંતર્મુખ બહુકોણનું વર્ણન કરવાનો પ્રયત્ન કરો અને દરેક પ્રકારના બહુકોણની બે કાચી આકૃતિ દોરો.

આ ધોરણમાં આપણે ફક્ત બહિર્મુખ બહુકોણની જ ચર્ચા કરીશું.

3.2.4 નિયમિત અને અનિયમિત બહુકોણ

એક નિયમિત બહુકોણ સમબાજુ તથા સમકોણીય હોય છે. ઉદાહરણ તરીકે, ચોરસમાં બાજુના તથા ખૂણાનાં માપ સમાન હોય છે. આથી તે નિયમિત બહુકોણ છે. લંબચોરસ સમકોણીય છે પરંતુ સમબાજુ નથી. તો શું તે નિયમિત બહુકોણ છે ? શું સમબાજુ ત્રિકોણ નિયમિત બહુકોણ છે ? કેમ ?





નિયમિત બહુકોણ **બહુકોણ કે જે નિયમિત નથી**

[**નોંધ :** અથવા ની નિશાની સમાન લંબાઈવાળા રેખાખંડ દર્શાવે છે.]

અગાઉના ધોરણમાં તમે એવા કોઈ ચતુષ્કોણનો અભ્યાસ કર્યો છે કે જે સમબાજુ હોય પણ સમકોણ ના હોય ?

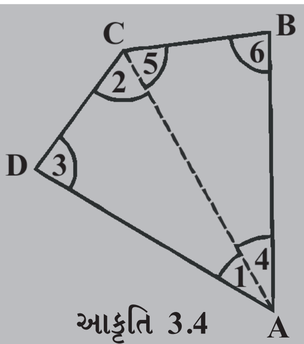
અગાઉના ધોરણમાં આવેલ ચતુષ્કોણની આકૃતિઓ યાદ કરો જેવી કે, લંબચોરસ, ચોરસ, સમબાજુ ચતુષ્કોણ વગેરે.

કોઈ એવો ત્રિકોણ છે કે જે સમબાજુ હોય પણ સમકોણ ના હોય ?

3.2.5 ખૂણાના સરવાળાનો ગુણધર્મ

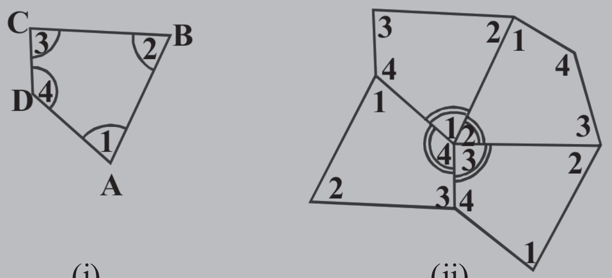
તમને ત્રિકોણના ખૂણાના સરવાળાનો ગુણધર્મ યાદ છે ? ત્રિકોણના ત્રણેય ખૂણાના માપનો સરવાળો 180° થાય છે. આ નિત્યસમ સમજવા ઉપયોગમાં આવેલ પદ્ધતિને યાદ કરો. હવે આપણે આ નિત્યસમનો ઉપયોગ ચતુષ્કોણ માટે કરીશું.

આટલું કરો



આકૃતિ 3.4

1. એક ચતુષ્કોણ ABCD લો (આકૃતિ 3.4). તેનો એક વિકર્ણ દોરીને તેને બે ત્રિકોણમાં વિભાજિત કરો. તમને છ ખૂણા 1, 2, 3, 4, 5 અને 6 મળશે. ત્રિકોણ માટેના ખૂણાના સરવાળાના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરીને બતાવો કે કેવી રીતે $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ તથા $\angle D$ના માપનો સરવાળો $180^o + 180^o = 360^o$ થાય.
2. કોઈ એક ચતુષ્કોણની પૂંઠામાંથી બનાવેલ ચાર એવી પ્રતિકૃતિ લો કે જેમાં ખૂણા દર્શાવેલ હોય [આકૃતિ 3.5 (i)]. આ પ્રતિકૃતિઓને, આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે એવી રીતે ગોઠવો કે જેથી $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ એક જ બિંદુ પર મળે. (આકૃતિ 3.5(ii)).



આકૃતિ 3.5

આવું કરવા માટે તમારે ખૂણાઓની બાજુઓને વ્યવસ્થિત રીતે દોરવી પડે.

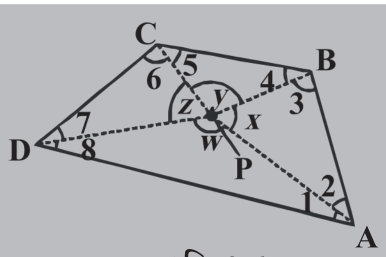
$\angle 1, \angle 2, \angle 3$ અને $\angle 4$ના સરવાળા વિશે શું કહી શકાય ?

(**નોંધ :** આપણે ખૂણાઓને $\angle 1, \angle 2, \angle 3$, ... તથા તેમના માપને $m\angle 1, m\angle 2, m\angle 3$, ... વડે દર્શાવીશું.)

ચતુષ્કોણના ચારેય ખૂણાના માપનો સરવાળો .... થાય છે.

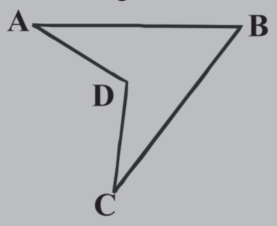
તમે ઉપરોક્ત પરિણામ અન્ય પદ્ધતિ દ્વારા પણ તારવી શકો છો.

3. ચતુષ્કોણ ABCD પર પુનઃવિચાર કરો. (આકૃતિ 3.6) ધારો કે તેના અંતર્ભાગમાં કોઈ એક બિંદુ P આવેલ છે. બિંદુ P ને શિરોબિંદુઓ A, B, C, D સાથે જોડો. આકૃતિમાં ત્રિકોણ PAB વિશે વિચારો. અહીં આપણને $x = 180^o - m\angle 2 - m\angle 3$ મળે છે. તેવી જ રીતે ΔPBC માં, $y = 180^o - m\angle 4 - m\angle 5$, Δ PCD માં, $z = 180^o - m\angle 6 - m\angle 7$ અને ΔPDA માં $w = 180^o - m\angle 8 - m\angle 1$ મળે. આનો ઉપયોગ કરીને કુલ માપ $m\angle 1 + m\angle 2 ..... + m\angle 8$ શોધો. શું આ તમને પરિણામ સુધી પહોંચાડવામાં મદદ કરે છે ? યાદ રાખો. $\angle x + \angle y + \angle z + \angle w = 360^o$ છે.



આકૃતિ 3.6

4. આ ચતુષ્કોણ બહિર્મુખ હતા. જો આ ચતુષ્કોણ બહિર્મુખ ન હોત તો શું થાત ? ચતુષ્કોણ ABCD પર વિચાર કરો. તેને બે ત્રિકોણમાં વિભાજિત કરી તેના અંતઃકોણનો સરવાળો શોધો. (આકૃતિ 3.7)



આકૃતિ 3.7

સ્વાધ્યાય 3.1

1. અહીં કેટલીક આકૃતિઓ આપેલ છે.

(1) (2) (3) (4)

(5) (6) (7) (8)

પ્રત્યેકનું નીચે દર્શાવેલ આધાર પ્રમાણે વર્ગીકરણ કરો.

(a) સરળ વક્ર (b) સરળ બંધ વક્ર (c) બહુકોણ

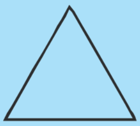
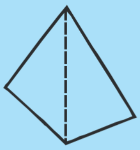
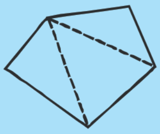
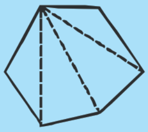
(d) બહિર્મુખ બહુકોણ (e) અંતર્મુખ બહુકોણ

2. નીચે દર્શાવેલ પ્રત્યેકને કેટલા વિકર્ણ છે તે જણાવો.

(a) બહિર્મુખ ચતુષ્કોણ (b) નિયમિત ષટ્કોણ (c) ત્રિકોણ

3. બહિર્મુખ ચતુષ્કોણના ખૂણાના માપનો સરવાળો કેટલો થાય ? હવે જો, ચતુષ્કોણ બહિર્મુખ ના હોય તો, શું આ ગુણધર્મ લાગુ પડશે ? (એક બહિર્મુખ ના હોય તેવો ચતુષ્કોણ બનાવો અને પ્રયત્ન કરો.)

4. નીચેનું કોષ્ટક જુઓ. (અહીં પ્રત્યેક આકૃતિને ત્રિકોણમાં વિભાજિત કરેલ છે અને તેના પરથી ખૂણાના માપનો સરવાળો શોધેલ છે.)

આકૃતિ				
બાજુ	3	4	5	6
ખૂણાના માપનો સરવાળો	180°	$2 \times 180^o = (4 - 2) \times 180^o$	$3 \times 180^o = (5 - 2) \times 180^o$	$4 \times 180^o = (6 - 2) \times 180^o$

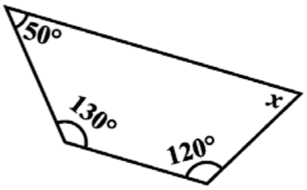
નિમ્નલિખિત સંખ્યા દર્શાવતી બાજુઓ ધરાવતા બહુકોણના ખૂણાના માપના સરવાળા વિશે શું કહી શકાય ?

(a) 7　　(b) 8　　(c) 10　　(d) n

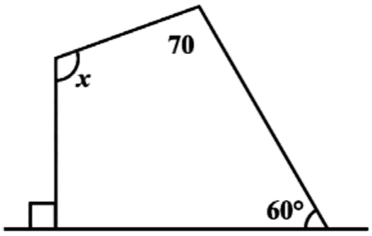
5. નિયમિત બહુકોણ એટલે શું ? એવા નિયમિત બહુકોણનાં નામ આપો જેમાં :

(i) 3 બાજુ હોય　　(ii) 4 બાજુ હોય　　(iii) 6 બાજુ હોય

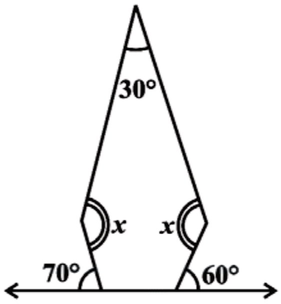
6. નીચેની આકૃતિઓમાં x (ખૂણાનું માપ) શોધો :



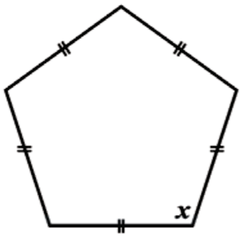
(a)



(b)

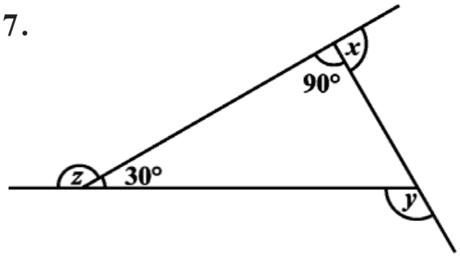


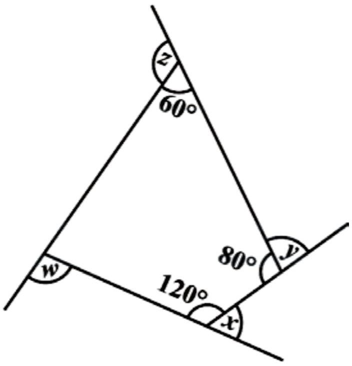
(c)



(d)

7.





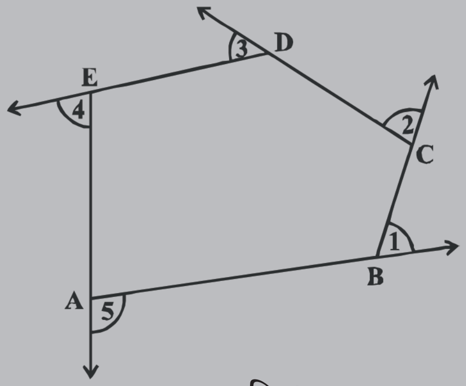
(a) $x + y + z$ શોધો.　　(b) $x + y + z + w$ શોધો.

3.3 એક બહુકોણનાં બહિષ્કોણનાં માપનો સરવાળો

કેટલાક પ્રસંગોમાં બહિષ્કોણ અંગેનું જ્ઞાન અંતઃકોણ તેમજ બાજુઓના પ્રકાર જાણવામાં મદદરૂપ થાય છે.

આટલું કરો

ચૉકના ટુકડાથી જમીન પર એક બહુકોણ બનાવો. (આકૃતિમાં, એક પંચકોણ ABCDE દર્શાવેલ છે.) (આકૃતિ 3.8). આપણે બધા જ ખૂણાના માપનો સરવાળો જાણવા માંગીએ છીએ, અર્થાત્ $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 5$. શિરોબિંદુ A થી શરૂઆત કરીને $\overline{AB}$ તરફ ચાલવાનું શરૂ કરો. B પર પહોંચ્યા બાદ, તમારે $m\angle 1$ પર વળવું પડશે જેનાથી તમે $\overline{BC}$ તરફ ચાલી શકશો. C પર પહોંચ્યા બાદ, $\overline{CD}$ તરફ ચાલવા માટે તમારે $m\angle 2$ પરથી વળવું પડશે. આ રીતે, બાજુ AB પર પરત ન ફરો ત્યાં સુધી ચાલવાનું ચાલુ રાખો. આ રીતે તમે એક ચક્કર પૂરું કરશો. આમ, $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 5 = 360^\circ$. ઉપરોક્ત પરિણામ, ગમે તેટલી બાજુઓ ધરાવતા બહુકોણ માટે સત્ય છે. આથી, એક બહુકોણમાં બહિષ્કોણનાં માપનો સરવાળો 360° છે.



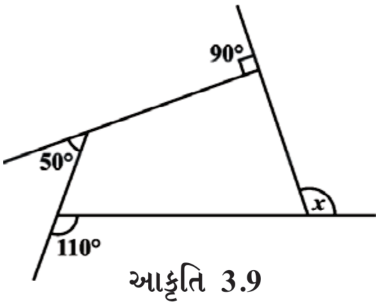
આકૃતિ 3.8

ઉદાહરણ 1 : આકૃતિ 3.9માં x નું માપ શોધો :

ઉકેલ : $x + 90^\circ + 50^\circ + 110^\circ = 360^\circ$ (કેમ ?)

$x + 250^\circ = 360^\circ$

$x = 110^\circ$

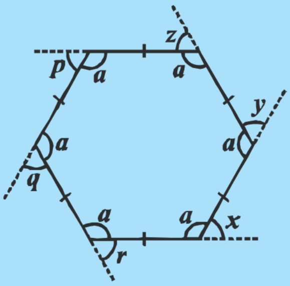


આકૃતિ 3.9

પ્રયત્ન કરો

એક નિયમિત ષટ્કોણ લો (આકૃતિ 3.10).

1. તેના બહિષ્કોણ x, y, z, p, q તથા rનાં માપનો સરવાળો કેટલો છે ?
2. $x = y = z = p = q = r$ છે ? કેમ ?
3. નીચેના પ્રત્યેકનું માપ કેટલું હશે ?
   (i) બહિષ્કોણ (ii) અંતઃકોણ
4. આ પ્રવૃત્તિ નીચે આપેલ સ્થિતિ માટે ફરીથી કરો.
   (i) નિયમિત અષ્ટકોણ (ii) નિયમિત 20-કોણ



આકૃતિ 3.10

ઉદાહરણ 2 : એક નિયમિત બહુકોણના પ્રત્યેક બહિષ્કોણનું માપ 45° હોય તો તેની બાજુઓની સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ : બધા જ, બહિષ્કોણનાં માપનો સરવાળો $= 360^\circ$

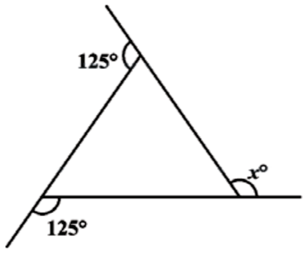
પ્રત્યેક બહિષ્કોણનું માપ $= 45^\circ$

એટલે, બહિષ્કોણની સંખ્યા $= \frac{360}{45} = 8$

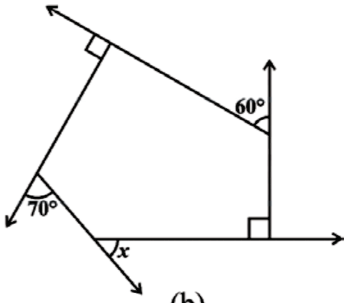
આપેલ બહુકોણને 8 બાજુ હશે.

સ્વાધ્યાય 3.2

1. નીચેની આકૃતિઓમાં x શોધો.



(a)



(b)

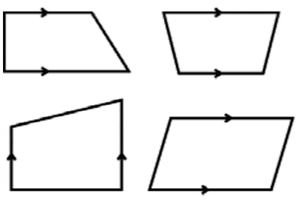
2. નીચે પ્રમાણેની બાજુઓ ધરાવતા નિયમિત બહુકોણમાં બહિષ્કોણનું માપ શોધો.
   (a) 9 બાજુ (b) 15 બાજુ
3. એક નિયમિત બહુકોણને કેટલી બાજુઓ હોય તો તેના દરેક બહિષ્કોણનું માપ 24° થાય ?
4. એક નિયમિત બહુકોણને કેટલી બાજુઓ હોય તો તેના દરેક અંતઃકોણનું માપ 165° થાય ?
5. (a) એવો નિયમિત બહુકોણ શક્ય છે કે જેમાં દરેક બહિષ્કોણનું માપ 22° હોય ?
   (b) શું આ માપ નિયમિત બહુકોણના અંતઃકોણનું હોઈ શકે ? કેમ ?
6. (a) નિયમિત બહુકોણમાં અંતઃકોણનું ઓછામાં ઓછું માપ કેટલું હોઈ શકે ? કેમ ?
   (b) નિયમિત બહુકોણમાં બહિષ્કોણનું વધુમાં વધુ માપ કેટલું હોઈ શકે ?

3.4 ચતુષ્કોણના પ્રકાર

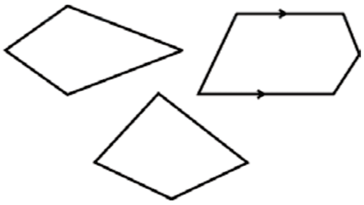
ચતુષ્કોણની બાજુઓ તથા ખૂણાના પ્રકારના આધારે, તેને નામ આપવામાં આવે છે.

3.4.1 સમલંબ ચતુષ્કોણ (Trapezium)

સમલંબ ચતુષ્કોણ એક એવો ચતુષ્કોણ છે, જેમાં સામસામેની બાજુની ફક્ત એક જ જોડની બાજુઓ પરસ્પર સમાંતર હોય છે.



સમલંબ ચતુષ્કોણ છે

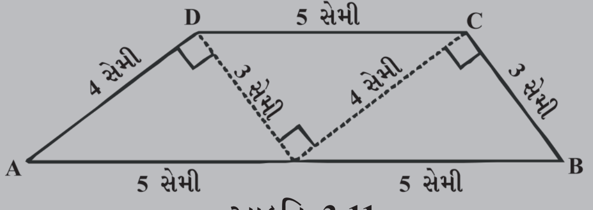


સમલંબ ચતુષ્કોણ નથી

ઉપરની આકૃતિઓનો અભ્યાસ કરો અને મિત્રો સાથે ચર્ચા કરો કે, કેમ આમાંથી કેટલાક સમલંબ ચતુષ્કોણ છે જ્યારે બીજા નથી. (**નોંધ :** તીરની નિશાની સમાંતર રેખાઓ દર્શાવે છે.)

આટલું કરો

1. બાજુઓનાં માપ 3 સેમી, 4 સેમી અને 5 સેમી હોય તેવા એકરૂપ ત્રિકોણના, એકસરખા ટુકડાઓ લો. તેમને આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ગોઠવો.



આકૃતિ 3.11

અહીં તમને એક સમલંબ ચતુષ્કોણ મળશે. (નિરીક્ષણ કરો!) કઈ બાજુઓ પરસ્પર સમાંતર છે? અસમાંતર બાજુઓનું માપ સમાન છે ?

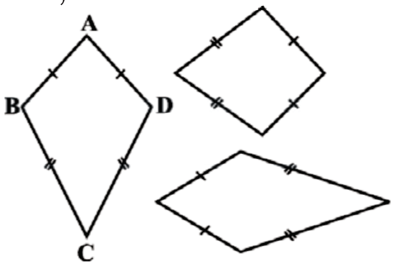
અહીં ઉપયોગમાં લીધેલ એકરૂપ ત્રિકોણના ઉપયોગથી તમને બીજા બે સમલંબ ચતુષ્કોણ મળી શકે છે. તેમને શોધી તેમના આકારની ચર્ચા કરો.

2. તમારા તથા તમારા મિત્રોના ''કંપાસબૉક્સ''(જિઑમેટ્રી બૉક્સ)માંથી ચાર કાટખૂણિયા લો. તેમને અલગ-અલગ સંખ્યામાં ઉપયોગ કરી સાથે-સાથે રાખીને અલગ-અલગ પ્રકારના સમલંબ ચતુષ્કોણ મેળવો.

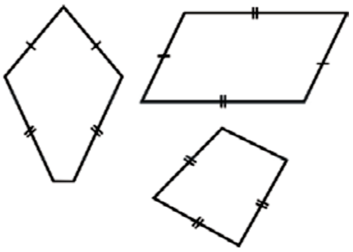
સમલંબ ચતુષ્કોણમાં પરસ્પર સમાંતર ન હોય તેવી બાજુઓ જો સમાન લંબાઈની હોય તો તે ચતુષ્કોણને સમદ્વિબાજુ સમલંબ ચતુષ્કોણ કહે છે. ઉપરોક્ત નિરીક્ષણમાં તમને એક પણ સમદ્વિબાજુ સમલંબ ચતુષ્કોણ મળ્યો ?

3.4.2 પતંગ (પતંગાકાર ચતુષ્કોણ) (Kite)

પતંગ એક વિશિષ્ટ પ્રકારનો ચતુષ્કોણ છે. દરેક આકૃતિમાં એકસરખી નિશાનીવાળી બાજુઓની લંબાઈ સમાન છે. દા.ત., AB = AD અને BC = CD.



આ પતંગાકાર ચતુષ્કોણ છે.



આ પતંગાકાર ચતુષ્કોણ નથી.

આપેલ આકૃતિઓનો અભ્યાસ કરી અને પતંગાકાર ચતુષ્કોણ વિશે સમજાવો. ધ્યાન આપો.

(i) પતંગને 4 બાજુઓ હોય છે (તે ચતુષ્કોણ છે).

(ii) તેમાં સમાન લંબાઈવાળી પાસ-પાસેની બાજુની બે અલગ-અલગ જોડ હોય છે.

ચોરસને પતંગ કહી શકાય કે નહીં તે ચકાસો.

આટલું કરો

એક જાડો કાગળ લો. તેને વચ્ચેથી વાળો.

આકૃતિ 3.12માં બતાવ્યા પ્રમાણે અલગ-અલગ લંબાઈના બે રેખાખંડ દોરો.

આ રેખાખંડને કાપી અને કાગળને ખોલો.

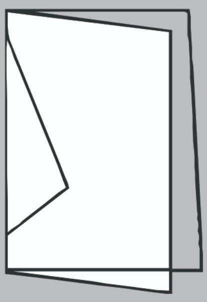
તમને એક પતંગનો આકાર મળશે. (આકૃતિ 3.13)

પતંગમાં કોઈ સંમિત રેખા છે ?

પતંગના બંને વિકર્ણ પર ગડી વાળો. હવે આ વિકર્ણ કાટખૂણે છેદે છે કે નહીં તે કાટખૂણિયાની મદદથી ચકાસો. શું આ વિકર્ણની લંબાઈ સમાન છે ? વિકર્ણ પરસ્પર દુભાગે છે કે નહીં તે ચકાસો. (કાગળની ગડી વાળીને અથવા માપીને) પતંગના એક ખૂણાને, વિકર્ણની વિપરીત દિશામાં વાળીને સમાન માપના ખૂણા ચકાસો.

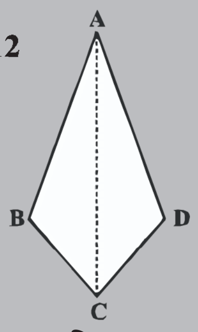
વિકર્ણ પર પડેલ ગડીનું નિરીક્ષણ કરો, શું તે એમ દર્શાવે છે કે વિકર્ણ એક ખૂણાનો દ્વિભાજક છે ?

તમારાં અવલોકનો તમારા મિત્રોને જણાવો અને તેની સૂચિ બનાવો. આ પરિણામોનો સારાંશ આ પ્રકરણમાં કોઈ એક જગ્યાએ આપેલ છે.



આકૃતિ 3.12

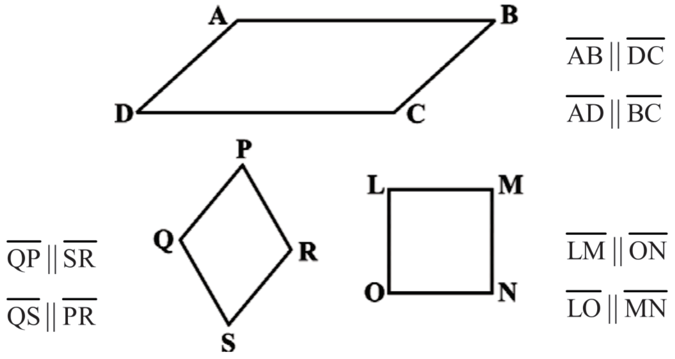
અહીં બતાવો કે ΔABC અને ΔADC એકરૂપ છે. તમે આમાંથી શું તારણ કાઢશો ?



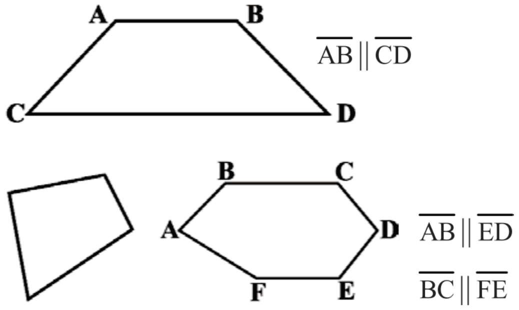
આકૃતિ 3.13

3.4.3 સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ (Parallelogram)

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ એક ચતુષ્કોણ છે. તેના નામ પ્રમાણે તેનો સંબંધ સમાંતર રેખાઓ સાથે છે.



સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.



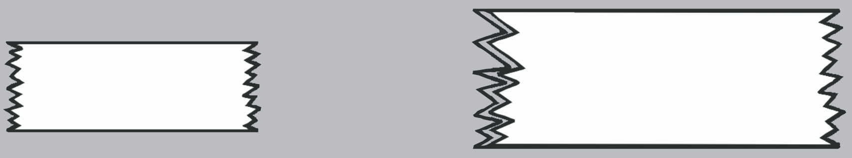
સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ નથી.

આ આકૃતિઓનો અભ્યાસ કરો અને પોતાના શબ્દોમાં બતાવવાનો પ્રયત્ન કરો કે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ કોને કહેવાય ? તમારું નિરીક્ષણ તમારા મિત્રોને જણાવો.

લંબચોરસને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ કહી શકાય કે નહીં તે ચકાસો.

આટલું કરો

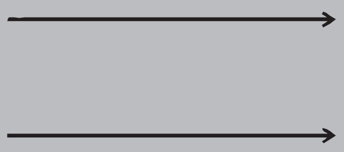
પૂંઠાની બે અલગ-અલગ પહોળાઈવાળી લંબચોરસ પટ્ટીઓ લો. (આકૃતિ 3.14)



પટ્ટી-1 **પટ્ટી-2**

આકૃતિ 3.14

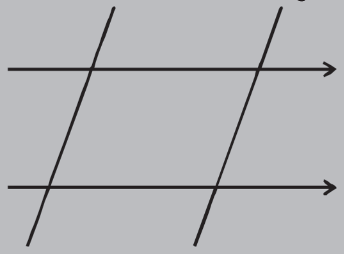
એક પૂંઠાની પટ્ટીને સમક્ષિતિજ રાખીને આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે તેની લંબાઈની દિશામાં બે રેખા દોરો. (આકૃતિ 3.15)



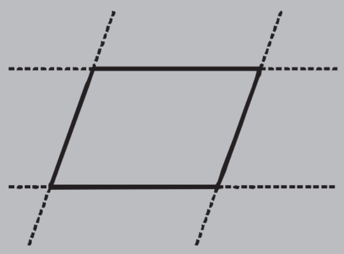
આકૃતિ 3.15

હવે બીજી પટ્ટીને દોરેલી રેખાઓ ઉપર ત્રાંસી રાખીને આ જ પ્રમાણે બીજી બે રેખા દોરો. (આકૃતિ 3.16)

આ ચાર રેખા વડે બનતી બંધ આકૃતિ ચતુષ્કોણ છે. આ પરસ્પર સમાંતર રેખાની બે જોડ દ્વારા બનેલ છે. (આકૃતિ 3.17) જે એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.



આકૃતિ 3.16

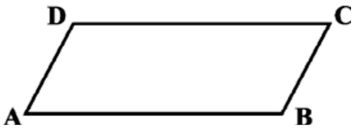


આકૃતિ 3.17

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ એક એવો ચતુષ્કોણ છે જેમાં સામસામેની બાજુની દરેક જોડમાં બાજુઓ પરસ્પર સમાંતર હોય છે.

3.4.4 સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનાં અંગો

એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણને ચાર બાજુ અને ચાર ખૂણા હોય છે. આમાંથી અમુક સમાન માપના હોય છે. આ અંગોને સંબંધિત કેટલાક શબ્દો તમારે યાદ રાખવા પડશે.



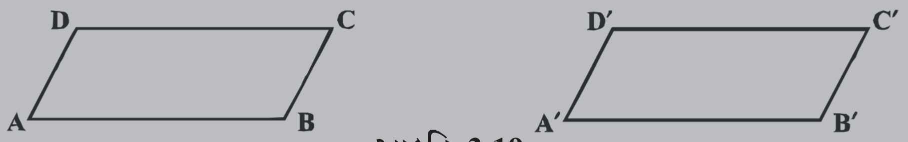
આકૃતિ 3.18

એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD આપેલ છે (આકૃતિ 3.18). $\overline{AB}$ અને $\overline{CD}$ તેની **સામસામેની બાજુ** છે. $\overline{AD}$ તથા $\overline{BC}$ સામસામેની બાજુની બીજી જોડ બનાવે છે. $\angle A$ તથા $\angle C$ **સામસામેના ખૂણા**ની એક જોડ છે અને આ પ્રકારે $\angle B$ તથા $\angle D$ સામસામેના ખૂણાની બીજી એક જોડ છે.

$\overline{AB}$ અને $\overline{BC}$ **પાસપાસેની બાજુ** છે અર્થાત્ એક બાજુના અંત્યબિંદુથી બીજી બાજુની શરૂઆત થાય છે. શું $\overline{BC}$ અને $\overline{CD}$ પાસપાસેની બાજુ છે ? બીજી બે પાસપાસેની બાજુની જોડ શોધવાનો પ્રયત્ન કરો. $\angle A$ અને $\angle B$ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના **પાસપાસેના ખૂણા** છે. આ ખૂણાઓ કોઈ એક બાજુનાં અંત્યબિંદુઓ પર બનેલા હોય છે. $\angle B$ તથા $\angle C$ પણ પાસપાસેના ખૂણા છે. આવી બીજી પાસ પાસેના ખૂણાની જોડને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં ઓળખવાનો પ્રયત્ન કરો.

આટલું કરો

એકરૂપ હોય તેવા બે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ટુકડાઓ ABCD તથા A′B′C′D′ લો (આકૃતિ 3.19).



આકૃતિ 3.19

અહીં $\overline{AB}$ અને $\overline{A'B'}$ સમાન છે, પરંતુ તેમના નામ અલગ છે. આવી જ રીતે બીજી સંગત બાજુની જોડ પણ સમાન માપની હશે.

હવે $\overline{A'B'}$ ને $\overline{DC}$ પર મૂકો. શું તે સુસંગત છે ? હવે તમે $\overline{AB}$ અને $\overline{DC}$ ની લંબાઈ વિશે શું કહેશો ?

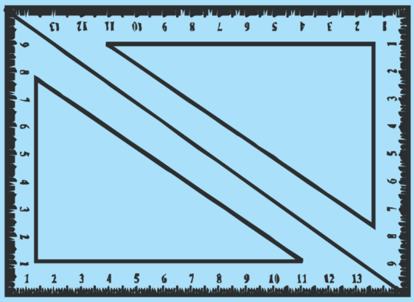
આ જ પ્રમાણે $\overline{AD}$ અને $\overline{BC}$ ની લંબાઈનું નિરીક્ષણ કરો. તમને શું જોવા મળ્યું ?

આ જ પરિણામ તમને $\overline{AB}$ અને $\overline{DC}$ ની લંબાઈ માપીને પણ મળી શકશે.

ગુણધર્મ : સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં સામસામેની બાજુની લંબાઈ સમાન હોય છે.

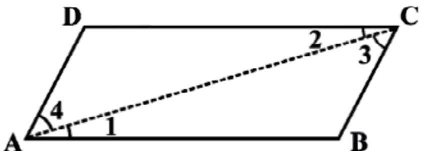
પ્રયત્ન કરો

30°–60°–90°ના ખૂણા ધરાવતા બે કાટખૂણિયા લો. હવે તેમને એ પ્રમાણે ગોઠવો કે જેથી સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ બને (આકૃતિ 3.20). શું આ પ્રવૃત્તિ તમને ઉપરોક્ત ગુણધર્મને ચકાસવામાં મદદ કરશે ?


આકૃતિ 3.20

તમે આ ગુણધર્મને તાર્કિક દલીલોથી પણ પ્રભાવશાળી બનાવી શકો છો.

એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD લો (આકૃતિ 3.21). તેનો વિકર્ણ $\overline{AC}$ દોરો. આપણે જોઈએ છીએ કે $\angle 1 = \angle 2$ અને $\angle 3 = \angle 4$ (કેમ ?)



આકૃતિ 3.21

હવે ત્રિકોણ ABC અને ADCમાં, $\angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4$ અને $\overline{AC}$ સામાન્ય બાજુ છે. તેથી એકરૂપતાની ખૂબાખૂ (ASA) શરત દ્વારા $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (અહીં ખૂબાખૂ શરતનો ઉપયોગ કેવી રીતે થયો ?)

એટલે, AB = DC અને BC = AD

ઉદાહરણ 3 : આકૃતિ 3.22 માં દર્શાવેલ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ PQRSની પરિમિતિ શોધો.

ઉકેલ : સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં સામસામેની બાજુનું માપ સમાન હોય છે.

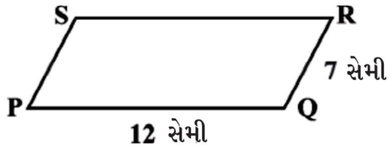
એટલે, PQ = SR = 12 સેમી

અને QR = PS = 7 સેમી

∴ પરિમિતિ = PQ + QR + RS + SP

= 12 સેમી + 7 સેમી + 12 સેમી + 7 સેમી

= 38 સેમી



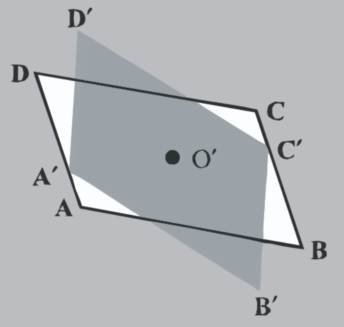
આકૃતિ 3.22

3.4.5 સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ખૂણાઓ

આપણે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજુનાં માપ સંબંધિત ગુણધર્મનો અભ્યાસ કર્યો. હવે ખૂણાઓ વિશે શું કહી શકાય ?

આટલું કરો

ધારો કે એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD છે (આકૃતિ 3.23) 'ટ્રેસિંગ' કાગળ પર આની એક નકલ A′B′C′D′ દોરો. હવે A′B′C′D′ને ચતુષ્કોણ ABCD પર મૂકો. ચતુષ્કોણના વિકર્ણના છેદબિંદુ પર એક ટાંકણી લગાવો. હવે 'ટ્રેસિંગ' કાગળને 180°ના ખૂણો બનાવે તે રીતે ફેરવો. આ ચતુષ્કોણ હજુ પણ એકબીજાને સુસંગત હશે, પરંતુ હવે તમે જોશો કે બિંદુ A′, બિંદુ C પર તથા તે જ રીતે બિંદુ B′, બિંદુ D પર હશે.



આકૃતિ 3.23

ઉપરોક્ત પ્રવૃત્તિ દ્વારા તમને ખૂણા ∠A તથા ખૂણા ∠Cના માપ વિશે કાંઈ જાણકારી પ્રાપ્ત થઈ ? આ જ રીતે ∠B તથા ∠Dના માપની જાણકારી મેળવો અને તમારું તારણ જણાવો.

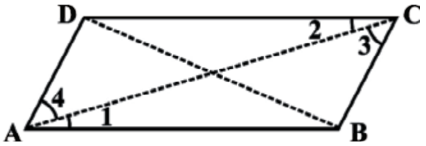
ગુણધર્મ : સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં સામસામેના ખૂણાનાં માપ સમાન હોય છે.

પ્રયત્ન કરો

30°–60°–90°ના માપ ધરાવતાં બે કાટખૂણિયા લઈને અગાઉની જેમ એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ બનાવો. શું આ રીતે બનેલ આકૃતિ ઉપરોક્ત ગુણધર્મની પુષ્ટિ કરે છે ?

ઉપરોક્ત ગુણધર્મને તમે તાર્કિક દલીલો દ્વારા પણ પુરવાર કરી શકો છો.

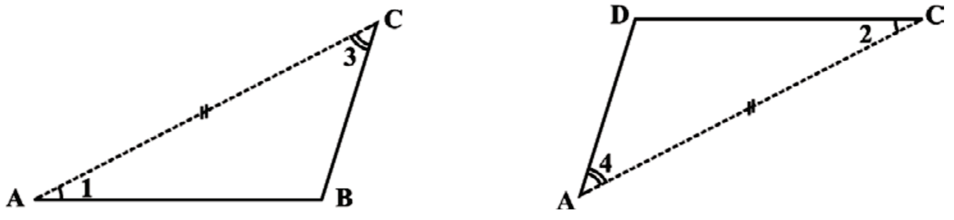
જો $\overline{AC}$ અને $\overline{BD}$ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણ હોય (આકૃતિ 3.24) તો તમને $\angle 1 = \angle 2$, અને $\angle 3 = \angle 4$ મળે (કેમ ?)



આકૃતિ 3.24

ΔABC અને ΔADC (આકૃતિ 3.25)નો અલગ-અલગ અભ્યાસ કરતાં તમે જોઈ શકો છો કે એકરૂપતાની ખૂબાખૂ (ASA) શરત પ્રમાણે,

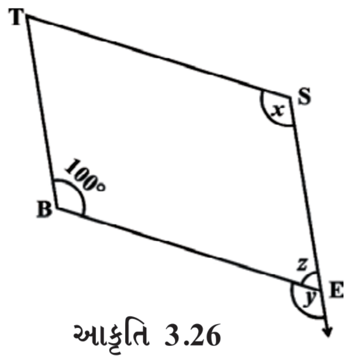
$$\Delta ABC \cong \Delta CDA \text{ (કેવી રીતે ?)}$$



આકૃતિ 3.25

આ દર્શાવે છે કે $\angle$B અને $\angle$D નાં માપ સમાન છે. આ જ પ્રમાણે $m\angle A = m\angle C$.

ઉદાહરણ 4 : આકૃતિ 3.26 માં, BEST એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. x, y, z નાં મૂલ્ય શોધો.



આકૃતિ 3.26

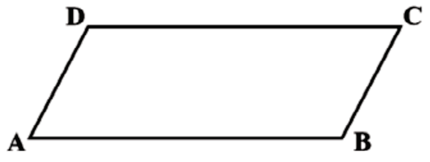
ઉકેલ : બિંદુ S, બિંદુ Bની સામે છે.

તેથી $x = 100^\circ$ (સામેના ખૂણાનો ગુણધર્મ)

$y = 100^\circ$ ($\angle x$ નો અનુકોણ)

$z = 80^\circ$ ($\angle y$ અને $\angle z$ રૈખિક જોડ બનાવે છે.)

હવે આપણે આપણું ધ્યાન સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના પાસપાસેના ખૂણાઓ ઉપર કેન્દ્રિત કરીએ. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD માં, (આકૃતિ 3.27)



આકૃતિ 3.27

$\angle$A અને $\angle$D, $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ ની છેદિકા $\overline{DA}$ થી બનતા છેદિકાની એક તરફના અંતઃકોણ હોવાથી તે એકબીજાના પૂરકકોણ છે.

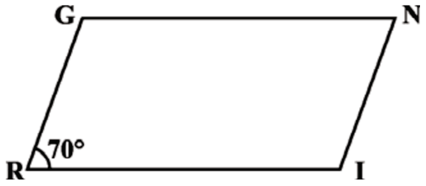
$\angle$A અને $\angle$B પણ એકબીજાના પૂરકકોણ છે. કેમ ?

$\angle$A અને $\angle$B, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ની છેદિકા $\overline{BA}$ થી બનતા છેદિકાની એકતરફના અંતઃકોણ છે.

આકૃતિ પરથી પૂરકકોણની આવી બીજી બે જોડ શોધો.

ગુણધર્મ : સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં પાસપાસેના ખૂણા એકબીજાના પૂરક હોય છે.

ઉદાહરણ 5 : સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ RING(આકૃતિ 3.28)માં, જો $m\angle R = 70^\circ$ હોય તો બીજા ખૂણાનાં માપ શોધો.



આકૃતિ 3.28

ઉકેલ : અહીં $m\angle R = 70^\circ$ આપેલ છે.

આથી $m\angle N = 70^\circ$ થાય.

કારણ કે, $\angle$R અને $\angle$N સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણા છે.

હવે $\angle$R અને $\angle$I એકબીજાના પૂરકકોણ હોવાથી $m\angle I = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$

અને $m\angle G = 110^\circ$, $\angle$G અને $\angle$I સામસામેના ખૂણા હોવાથી

આથી, $m\angle R = m\angle N = 70^\circ$ અને $m\angle I = m\angle G = 110^\circ$

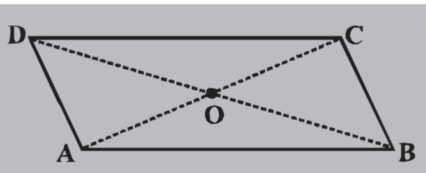
વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

$m\angle R = m\angle N = 70^{\circ}$ દર્શાવ્યા બાદ, બીજી કોઈ રીતે $m\angle I$ અને $m\angle G$ નું માપ શોધી શકાય ?

3.4.6 સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણ

સામાન્ય રીતે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણના માપ સમાન હોતા નથી. (શું તમે આ તમારી અગાઉની પ્રવૃત્તિઓમાં ચકાસ્યું ?) છતાં પણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણ એક વિશિષ્ટ ગુણધર્મ ધરાવે છે.

આટલું કરો



આકૃતિ 3.29

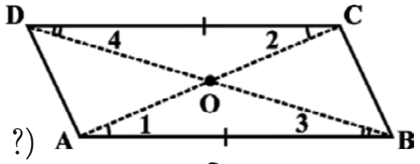
સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો એક કાપેલો ટુકડો (ધારો કે ABCD) લો. તેના વિકર્ણ એકબીજાને બિંદુ Oમાં છેદે છે.

બિંદુ C, બિંદુ A પર આવે તે રીતે ગડી વાળીને $\overline{AC}$ નું મધ્યબિંદુ શોધો. શું આ મધ્યબિંદુ, બિંદુ O છે ?

શું આ બતાવે છે કે વિકર્ણ $\overline{DB}$, વિકર્ણ $\overline{AC}$ ને બિંદુ Oમાં દુભાગે છે ? તમારા મિત્રો સાથે આની ચર્ચા કરો અને $\overline{DB}$ નું મધ્યબિંદુ ક્યાં મળશે તે શોધવા આ પ્રવૃત્તિ ફરી કરો.

ગુણધર્મ : *સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણ એકબીજાને (તેમના છેદબિંદુમાં જ) દુભાગે છે.*

ઉપરોક્ત ગુણધર્મને તાર્કિક દલીલોથી પુરવાર કરવો મુશ્કેલ નથી. આકૃતિ 3.30 માં એકરૂપતાની ખૂબાખૂ (ASA) શરતનો ઉપયોગ કરવાથી આપણે જોઈ શકીએ કે



આકૃતિ 3.30

$\Delta AOB \cong \Delta COD$ (અહીં ખૂબાખૂ શરત કેવી રીતે ઉપયોગી થઈ ?)

તેથી AO = CO અને BO = DO.

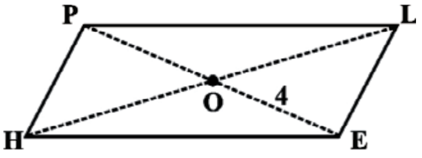
ઉદાહરણ 6 : આકૃતિ 3.31 માં, HELP એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે (લંબાઈ સેમીમાં આપેલ છે). અહીં OE = 4 અને HL, PE કરતાં 5 વધારે છે. તો OH શોધો.

ઉકેલ : જો, OE = 4 હોય તો OP = 4 (કેમ ?)

તેથી, PE = 8 (કેમ ?)

આથી, HL = 8 + 5 = 13

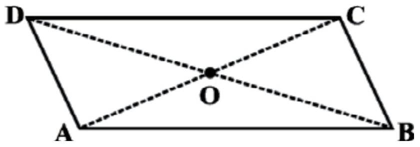
માટે, $OH = \frac{1}{2} \times 13 = 6.5$ (સેમી)



આકૃતિ 3.31

સ્વાધ્યાય 3.3

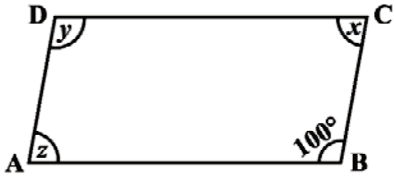
1. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD આપેલ છે. દરેક વિધાનને તેમાં ઉપયોગ કરવામાં આવેલ વ્યાખ્યા અથવા ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરીને પૂરું કરો.



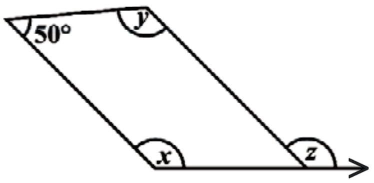
(i) AD = ... (ii) $\angle DCB$ = ...

(iii) OC = ... (iv) $m\angle DAB + m\angle CDA$ = ...

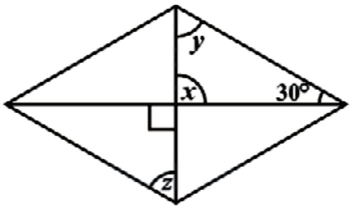
2. નીચેના સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં x, y અને z નાં મૂલ્ય શોધો.



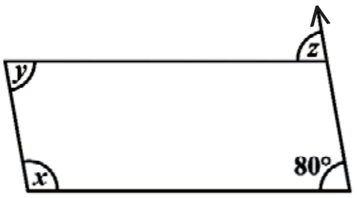
(i)



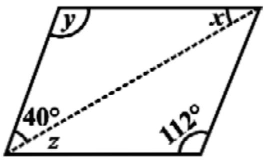
(ii)



(iii)



(iv)



(v)

3. શું ચતુષ્કોણ ABCD, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ થઈ શકે, જો ....

(i) $\angle D + \angle B = 180^o$?

(ii) AB = DC = 8 સેમી, AD = 4 સેમી અને BC = 4.4 સેમી ?

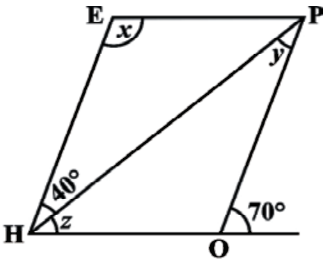
(iii) $\angle A = 70^o$ અને $\angle C = 65^o$?

4. એક એવા ચતુષ્કોણની કાચી (Rough) આકૃતિ દોરો કે જે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ના હોય પરંતુ સામસામેના ખૂણાની એક જોડ સમાન હોય.

5. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં બે પાસપાસેના ખૂણાના માપનો ગુણોત્તર 3:2 છે, તો ચતુષ્કોણના બધા જ ખૂણાના માપ શોધો.

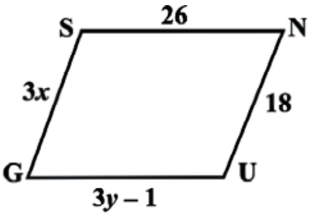
6. એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના પાસપાસેના ખૂણાની એક જોડના ખૂણાના માપ સમાન છે. તો ચતુષ્કોણના બધા જ ખૂણાના માપ શોધો.

7. આકૃતિમાં એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ HOPE દર્શાવેલ છે. x, y, z ખૂણાના માપ શોધો. ખૂણો શોધવા કયા ગુણધર્મનો ઉપયોગ કર્યો છે તે જણાવો.

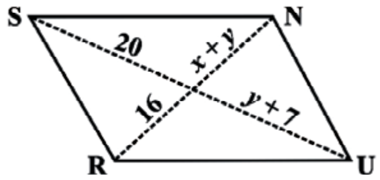


8. નીચેની આકૃતિ GUNS અને RUNS સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. x અને y શોધો. (લંબાઈ સેમીમાં છે.)

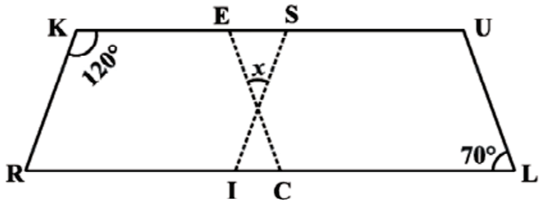
(i)



(ii)

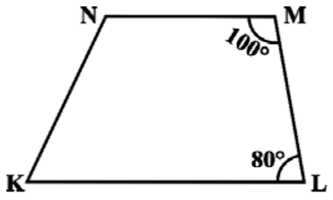


9.

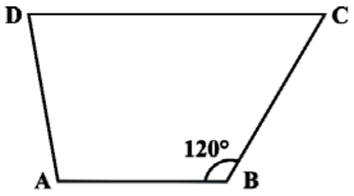


ઉપરની આકૃતિમાં RISK અને CLUE સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે, તો x શોધો.

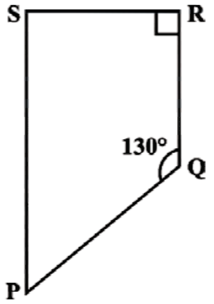
10. નીચેની આકૃતિ સમલંબ ચતુષ્કોણ કેવી રીતે છે, તે સમજાવો. કઈ બે બાજુ પરસ્પર સમાંતર છે ? (આકૃતિ 3.32)



આકૃતિ 3.32



આકૃતિ 3.33



આકૃતિ 3.34

11. આકૃતિ 3.33 માં, જો $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ હોય, તો $m\angle C$ શોધો.

12. આકૃતિ 3.34 માં, જો $\overline{SP} \parallel \overline{RQ}$ હોય, તો $\angle P$ અને $\angle S$નું માપ શોધો. (જો તમે $m\angle R$ શોધતા હોય, તો શું, $m\angle P$ શોધવાની અન્ય પદ્ધતિઓ હશે ?)

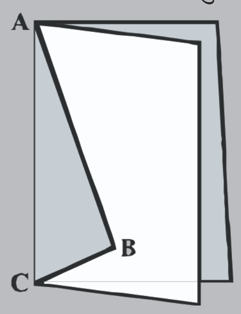
3.5 વિશિષ્ટ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ

3.5.1 સમબાજુ ચતુષ્કોણ (Rhombus)

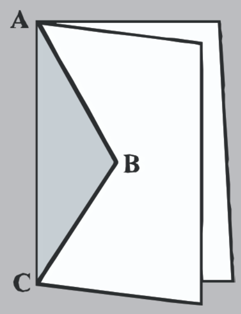
પતંગાકાર ચતુષ્કોણની (જે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ નથી) એક વિશેષ સ્થિતિમાં આપણને સમબાજુ ચતુષ્કોણ (તમે જોશો, કે તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હશે) મળે છે.

આટલું કરો

તમે પોતે બનાવેલ પતંગાકાર ચતુષ્કોણને યાદ કરો.



પતંગ-કાપ

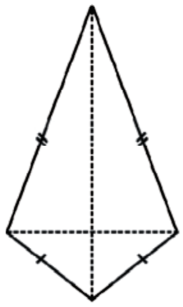


સમબાજુ ચતુષ્કોણ-કાપ

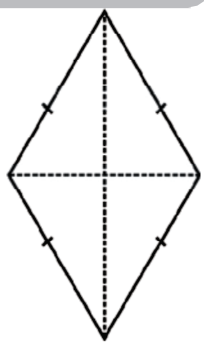
જ્યારે તમે ABCની દિશામાં કાગળને કાપીને ખોલો છો ત્યારે તમને પતંગાકાર ચતુષ્કોણ મળે છે. અહીં AB અને BCની લંબાઈ અલગ-અલગ છે. હવે જો તમે AB = BC દોરો, તો મળેલ પતંગાકાર ચતુષ્કોણને, સમબાજુ ચતુષ્કોણ કહેવાય.

ધ્યાન રાખો, સમબાજુ ચતુષ્કોણમાં બધી જ બાજુની લંબાઈ સમાન હોય છે, પરંતુ પતંગાકાર ચતુષ્કોણમાં આ આવશ્યક નથી. સમબાજુ ચતુષ્કોણ એક એવો ચતુષ્કોણ છે કે જેમાં બધી જ બાજુની લંબાઈ સમાન હોય છે.

હવે, સમબાજુ ચતુષ્કોણમાં સામસામેની બાજુની લંબાઈ સમાન હોવાથી તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ પણ થાય. તેથી સમબાજુ ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ અને પતંગ બંનેના બધા જ ગુણધર્મ ધરાવે છે. તેમની યાદી બનાવવાનો પ્રયત્ન કરો. ત્યાર બાદ, તમે બનાવેલ યાદીને આ પુસ્તકમાં આપેલ યાદી સાથે સરખાવો.



પતંગાકાર ચતુષ્કોણ



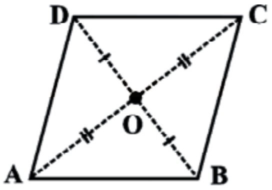
સમબાજુ ચતુષ્કોણ

સમબાજુ ચતુષ્કોણનો સૌથી અગત્યનો ગુણધર્મ તેના વિકર્ણ વિશે છે.

ગુણધર્મ : *સમબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણ એકબીજાને કાટખૂણે દુભાગે છે.*

આટલું કરો

સમબાજુ ચતુષ્કોણની કાગળની એક પ્રતિકૃતિ લો. હવે આ કાગળની ગડી વાળી અને ચકાસો કે બે વિકર્ણનું છેદબિંદુ એ જ તેમનું મધ્યબિંદુ છે કે નહીં ? કાટખૂણિયાનો ઉપયોગ કરીને ચકાસો કે બે વિકર્ણ એકબીજાને કાટખૂણે છેદે છે.



આકૃતિ 3.35

અહીં આ ગુણધર્મને તાર્કિક દલીલોથી પુરવાર કરતું એક રેખાચિત્ર આપેલ છે. ABCD એક સમબાજુ ચતુષ્કોણ (આકૃતિ 3.35) છે. તેથી, તે એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ પણ છે. તેના વિકર્ણ એકબીજાને દુભાગે છે. માટે, OA = OC અને OB = OD થાય. અહીં, $m\angle AOD = m\angle COD = 90^o$ સાબિત કરવાનું છે.

એકરૂપતાની બાબાબા (SSS) શરતને આધારે

$$\Delta AOD \cong \Delta COD$$

અહીં AO = CO (કેમ ?)
AD = CD (કેમ ?)
OD = OD

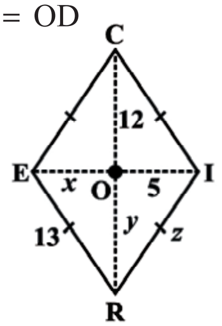
માટે $m\angle AOD = m\angle COD$

હવે $\angle AOD$ અને $\angle COD$, રૈખિક જોડના ખૂણા હોવાથી,

$m\angle AOD = m\angle COD = 90^o$

ઉદાહરણ 7 :

RICE સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે (આકૃતિ 3.36). x, y, z શોધો અને તેની સત્યાર્થતા પુરવાર કરો.



આકૃતિ 3.36

ઉકેલ :

x = OE
= OI (વિકર્ણ દુભાગે છે)
= 5

y = OR
= OC (વિકર્ણ દુભાગે છે)
= 12

z = સમબાજુ ચતુષ્કોણની બાજુ છે
= 13 (બધી બાજુઓ સમાન હોય)

3.5.2 લંબચોરસ (Ractangle)

આકૃતિ 3.37

લંબચોરસ એક સમાન માપના ખૂણા ધરાવતો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. (આકૃતિ 3.37)

ઉપરની વ્યાખ્યાનો અર્થ શું થાય ? તમારા મિત્રો જોડે ચર્ચા કરો.

હવે જો, લંબચોરસના બધા જ ખૂણાના માપ સમાન હોય તો દરેક ખૂણાનું માપ કેટલું હશે ?

ધારો કે દરેક ખૂણાનું માપ x^o છે.

તેથી, $4x^o = 360^o$ (કેમ ?)

$\therefore\ x^o = 90^o$

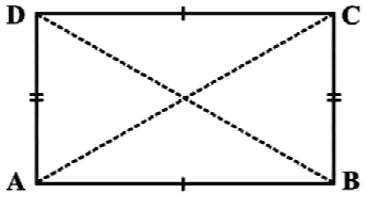
તેથી, લંબચોરસનો દરેક ખૂણો કાટખૂણો હોય છે.

આમ લંબચોરસ, એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. જેના બધા જ ખૂણા કાટખૂણા હોય છે.

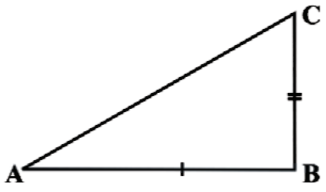
સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોવાને લીધે લંબચોરસની સામસામેની બાજુઓ સમાન લંબાઈની હોય છે તથા તેના વિકર્ણ એકબીજાને દુભાગે છે.

લંબચોરસમાં વિકર્ણની લંબાઈ અસમાન હોઈ શકે ? (ચકાસો); તમને આશ્ચર્ય થશે કે લંબચોરસ(વિશેષ હોવાથી)ના વિકર્ણ સમાન લંબાઈના હોય છે.

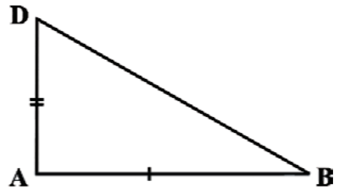
ગુણધર્મ : લંબચોરસના વિકર્ણની લંબાઈ સમાન હોય છે.



આકૃતિ 3.38



આકૃતિ 3.39



આકૃતિ 3.40

આ પુરવાર કરવું એકદમ સરળ છે. જો ABCD લંબચોરસ હોય (આકૃતિ 3.38) અને તેમાં બનતા ત્રિકોણ ABC અને ત્રિકોણ ABD (અનુક્રમે આકૃતિ 3.39 અને 3.40)નું અલગ-અલગ નિરીક્ષણ કરતાં આપણને

$$\Delta ABC \cong \Delta ABD$$

કારણ કે, $AB = AB$ (સામાન્ય બાજુ)

$BC = AD$ (કેમ ?)

$m\angle A = m\angle B = 90^{\circ}$ (કેમ ?)

આ એકરૂપતા બાબૂબા (SAS) શરતને અનુસરે છે.

તેથી $AC = BD$

અને લંબચોરસમાં વિકર્ણ સમાન લંબાઈના હોવા ઉપરાંત એકબીજાને દુભાગે પણ છે. (કેમ ?)

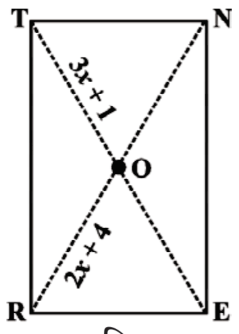
ઉદાહરણ 8 : RENT, લંબચોરસ છે. તેના વિકર્ણ પરસ્પર બિંદુ O માં છેદે છે. જો $OR = 2x + 4$ અને $OT = 3x + 1$ હોય, તો x શોધો.

ઉકેલ : $\overline{OT}$ ની લંબાઈ, વિકર્ણ $\overline{TE}$ ની લંબાઈથી અર્ધી છે અને $\overline{OR}$ ની લંબાઈ, વિકર્ણ $\overline{RN}$ કરતાં અર્ધી છે. બંને વિકર્ણની લંબાઈ સમાન છે. (કેમ ?)

તેથી, તેમના અર્ધા ભાગ પણ સમાન લંબાઈના થાય.

માટે, $3x + 1 = 2x + 4$

$\therefore$ $x = 3$



આકૃતિ 3.41

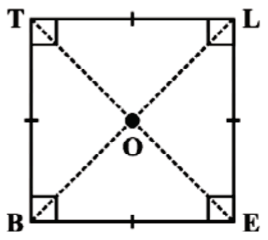
3.5.3 ચોરસ (Square)

ચોરસ, એક સમાન લંબાઈવાળી બાજુ ધરાવતો લંબચોરસ છે.

આમ ચોરસ, લંબચોરસના બધા જ ગુણધર્મો ધરાવે છે તેમજ બધી જ બાજુની લંબાઈ સમાન હોવાનો એક વધારાનો ગુણધર્મ પણ ધરાવે છે.

લંબચોરસની જેમ જ ચોરસના વિકર્ણ પણ સમાન લંબાઈના હોય છે.

લંબચોરસના વિકર્ણ પરસ્પર કાટખૂણે હોય તે જરૂરી નથી. (ચકાસો)



BELT એક ચોરસ છે. $BE = EL = LT = TB$

$\angle B$, $\angle E$, $\angle L$, $\angle T$ કાટખૂણા છે.

$BL = ET$ અને $\overline{BL} \perp \overline{ET}$ છે.

$OB = OL$ અને $OE = OT$.

કોઈ પણ ચોરસમાં વિકર્ણ

(i) પરસ્પર દુભાગે. (ચોરસ એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોવાથી)

(ii) સમાન લંબાઈના હોય. (ચોરસ એક લંબચોરસ હોવાથી)

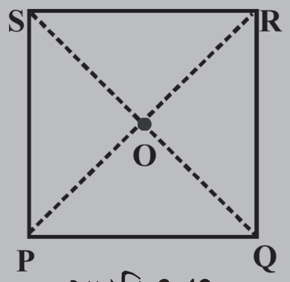
(iii) પરસ્પર લંબ હોય.

તેથી આપણને નીચે પ્રમાણેનો ગુણધર્મ મળે.

ગુણધર્મ : *ચોરસના વિકર્ણ એકબીજાને કાટખૂણે દુભાગે છે.*

આટલું કરો

એક ચોરસ ટુકડો PQRS લો. (આકૃતિ 3.42) તેના વિકર્ણ પરથી તેની ગડી વાળો. શું બંને વિકર્ણનું મધ્યબિંદુ એક જ છે ? કાટખૂણિયાની મદદથી ખૂણા O નું માપ 90° છે કે નહીં તે ચકાસો. આ ઉપરોક્ત ગુણધર્મને સાબિત કરે છે.



આકૃતિ 3.42

આ ગુણધર્મને આપણે તાર્કિક દલીલો દ્વારા પણ સાબિત કરી શકીએ :

ચોરસ ABCD ના વિકર્ણ પરસ્પર બિંદુ Oમાં છેદે છે. (આકૃતિ 3.43)

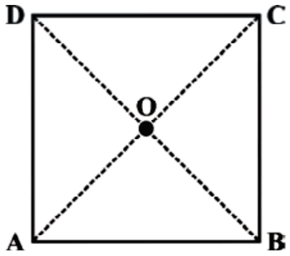
OA = OC (ચોરસ એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોવાથી)

એકરૂપતાની બાબાબા શરત પ્રમાણે આપણને,

$\Delta AOD \cong \Delta COD$ (કેમ ?)

માટે $m\angle AOD = m\angle COD$

આ ખૂણાઓ રૈખિક જોડના હોવાથી દરેક ખૂણો કાટખૂણો છે.



આકૃતિ 3.43

સ્વાધ્યાય 3.4

1. નીચેનાં વિધાનો સાચાં છે કે ખોટાં તે જણાવો.

(a) દરેક લંબચોરસ ચોરસ છે.

(b) દરેક સમબાજુ ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

(c) દરેક ચોરસ સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે તેમજ લંબચોરસ પણ છે.

(d) દરેક ચોરસ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ નથી.

(e) દરેક પતંગાકાર ચતુષ્કોણ સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

(f) દરેક સમબાજુ ચતુષ્કોણ પતંગાકાર ચતુષ્કોણ છે.

(g) દરેક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ સમલંબ ચતુષ્કોણ છે.

(h) દરેક ચોરસ સમલંબ ચતુષ્કોણ છે.

2. એવા ચતુષ્કોણનાં નામ આપો કે જેમાં :

(a) ચારેય બાજુની લંબાઈ સમાન હોય. (b) ચાર કાટખૂણા હોય.

3. કેવી રીતે એક ચોરસ એ

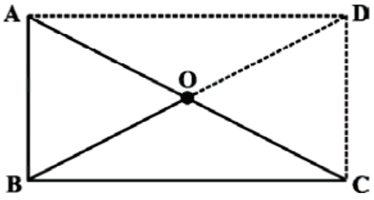
(i) ચતુષ્કોણ (ii) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ (iii) સમબાજુ ચતુષ્કોણ (iv) લંબચોરસ છે તે વિગતવાર સમજાવો.

4. નીચે દર્શાવ્યા મુજબ વિકર્ણ ધરાવતાં ચતુષ્કોણનાં નામ આપો.

(i) પરસ્પર દુભાગે (ii) પરસ્પરના લંબદ્વિભાજક હોય (iii) સમાન હોય

5. લંબચોરસ એક બહિર્મુખ ચતુષ્કોણ છે, સમજાવો.

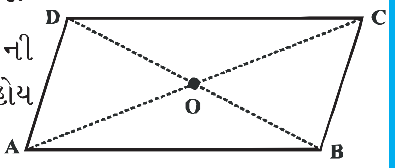
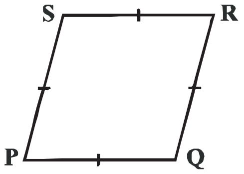
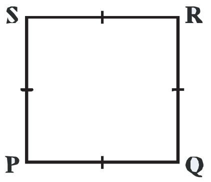
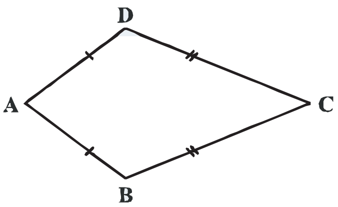
6. કાટકોણ ત્રિકોણ ABCમાં કાટખૂણાની સામેની બાજુનું મધ્યબિંદુ O છે. શિરોબિંદુઓ A, B અને Cથી બિંદુ O કેવી રીતે સમાન અંતરે આવે છે તે સમજાવો. (અહીં તૂટક રેખાઓ તમારી સહાયતા માટે દોરેલ છે.)



વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

1. કડિયો કોંક્રિટનો એક ‘સ્લેબ’ બનાવે છે. તે તેને લંબચોરસ બનાવવા માંગે છે. કેટલા અલગ-અલગ પ્રકારથી, તે આ ‘સ્લેબ’ લંબચોરસ જ છે તેવી ચકાસણી કરી શકશે ?
2. સમાન લંબાઈની બાજુઓ ધરાવતા લંબચોરસ તરીકે ચોરસને વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવ્યો હતો. આપણે તેને સમાન ખૂણા ધરાવતાં સમબાજુ ચતુષ્કોણ તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરી શકીએ ? સ્પષ્ટતા કરો.
3. સમલંબ ચતુષ્કોણના બધા જ ખૂણા સમાન હોઈ શકે ? તેની દરેક બાજુઓ સમાન હોઈ શકે ? સ્પષ્ટતા કરો.

આપણે શું ચર્ચા કરી ?

ચતુષ્કોણ	ગુણધર્મ
સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ : સામસામેની બાજુની પ્રત્યેક જોડ સમાંતર હોય તેવો ચતુષ્કોણ. 	(1) સામસામેની બાજુની લંબાઈ સમાન હોય. (2) સામસામેનાં ખૂણાનાં માપ સમાન હોય. (3) વિકર્ણ પરસ્પર દુભાગે.
સમબાજુ ચતુષ્કોણ : સમાન લંબાઈની બાજુ ધરાવતો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ. 	(1) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના બધા જ ગુણધર્મો. (2) વિકર્ણ પરસ્પર કાટખૂણે દુભાગે.
લંબચોરસ : કાટકોણ ધરાવતો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ	(1) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના બધા જ ગુણધર્મો. (2) દરેક ખૂણો કાટખૂણો હોય. (3) વિકર્ણની લંબાઈ સમાન હોય.
ચોરસ : સમાન લંબાઈની બાજુ ધરાવતો લંબચોરસ. 	સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ, સમબાજુ ચતુષ્કોણ અને લંબચોરસના બધા જ ગુણધર્મો.
પતંગાકાર ચતુષ્કોણ : પાસપાસેની બાજુઓની ફક્ત બે જોડ સમાન લંબાઈની હોય તેવો ચતુષ્કોણ. 	(1) વિકર્ણ પરસ્પર કાટખૂણે હોય. (2) એક વિકર્ણ, બીજા વિકર્ણને દુભાગે. (3) આપેલ આકૃતિમાં $m\angle B = m\angle D$ પણ $m\angle A \neq m\angle C$

પ્રાયોગિક ભૂમિતિ

પ્રકરણ

4

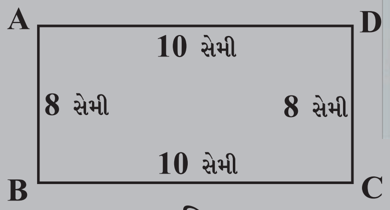
4.1 પ્રાસ્તાવિક

ધોરણ 7 માં તમે ત્રિકોણ કઈ રીતે દોરવો તે શીખી ચૂક્યા છો. ત્રિકોણને ત્રણ ખૂણા અને ત્રણ બાજુઓ હોય છે. કોઈ પણ નિશ્ચિત ત્રિકોણ દોરવા માટે આપણી પાસે ત્રણ ખૂણા અને ત્રણ બાજુઓમાંથી કોઈ પણ ત્રણનાં માપ હોવાં જરૂરી છે.

આમ, નિશ્ચિત ત્રિકોણ દોરવા માટે ત્રણ માપ પૂરતાં છે. તો હવે આપણને સહજ પ્રશ્ન થશે કે તો શું એક ચાર બાજુવાળી બંધ આકૃતિ એટલે કે ચતુષ્કોણ (Quadrilateral)ને દોરવા માટે ચાર માપ પૂરતાં છે ?

આટલું કરો

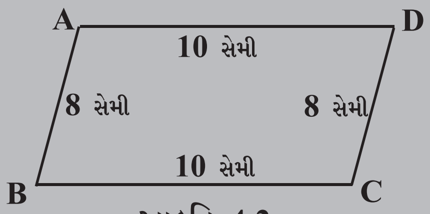
10 સેમી લંબાઈની સળીઓની એક જોડ લો. સળીઓની બીજી જોડ 8 સેમી લંબાઈની લો. હવે આકૃતિ 4.1માં દર્શાવ્યા મુજબ ચારે સળીઓને જોડી એક લંબચોરસ બનાવો કે જેની લંબાઈ 10 સેમી અને પહોળાઈ 8 સેમી હોય.



આકૃતિ 4.1

આ લંબચોરસ આપેલા ચાર માપથી બનાવવામાં આવ્યો છે.

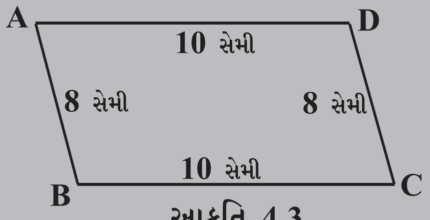
હવે લંબચોરસના પાયા (BC) ને જરા ડાબી બાજુ ખસેડો, જેથી આકૃતિ 4.2 જેવો આકાર પ્રાપ્ત થશે. શું આ પ્રાપ્ત થયેલો આકાર (આકૃતિ 4.2) લંબચોરસ છે ? ના, તમે જોઈ શકો છો કે લંબચોરસ હવે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ બની ચૂક્યો છે.



આકૃતિ 4.2

શું તમે સળીઓની લંબાઈમાં ફેરફાર કર્યો ? ના, બાજુઓનાં માપ જેમના તેમ જ છે તેમાં કશો ફેરફાર કરેલ નથી.

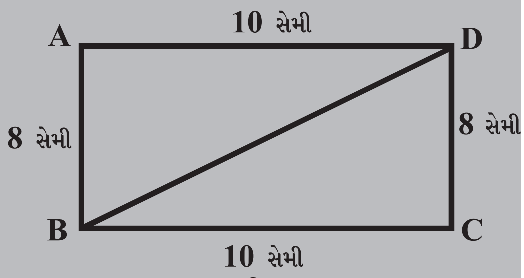
હવે ફરી ચતુષ્કોણ ABCD ના પાયા BC ને વિરૂદ્ધ દિશામાં ખસેડો. તમને કેવો આકાર પ્રાપ્ત થયો ? તમને ફરીથી એક જુદા પ્રકારનો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ પ્રાપ્ત થશે જે આકૃતિ 4.3માં દર્શાવેલ છે. હજુ પણ ચતુષ્કોણની બાજુઓ તો પહેલાં હતી તે જ છે.



આકૃતિ 4.3

આ પ્રવૃત્તિ દ્વારા જાણવા મળે છે કે નિશ્ચિત ચતુષ્કોણ દોરવા માટે ચાર માપ પૂરતાં નથી, તો શું પાંચ માપ પૂરતાં છે ? ચાલો, આ બાબત ચકાસવા બીજી પ્રવૃત્તિ કરીએ.

હવે ધારો કે તમે 10 સેમી લંબાઈની બે સળીઓ અને 8 સેમી લંબાઈની બે સળીઓનો ઉપયોગ કરી, એક લંબચોરસ બનાવ્યો છે. હવે BD લંબાઈની એક સળીને આકૃતિ 4.4માં બતાવ્યા મુજબ B અને D સાથે જોડી દો. જુઓ, હવે તમે લંબચોરસના પાયા BC ને ડાબી બાજુ કે જમણી બાજુ ખસેડીને આકાર બદલી શકો છો ? ના, આકૃતિને ખોલ્યા સિવાય આ શક્ય નથી. આમ, પાંચમી સળીને લંબચોરસના વિકર્ણ (Diagonal) તરીકે ગોઠવતાં એક નિશ્ચિત લંબચોરસ પ્રાપ્ત થાય છે. આવો બીજો કોઈ ચતુષ્કોણ (આપેલ બાજુઓની લંબાઈ ધરાવતો) શક્ય નથી.



આકૃતિ 4.4

આ રીતે આપણે અહીં જોયું કે પાંચ માપ દ્વારા નિશ્ચિત ચતુષ્કોણ પ્રાપ્ત થાય છે. પણ શું પાંચ માપ (ખૂણા અને બાજુ) એક નિશ્ચિત ચતુષ્કોણ દોરવા માટે પૂરતાં છે ?

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

અર્ષદ પાસે ચતુષ્કોણ ABCD ના પાંચ માપ આ મુજબ છે; AB = 5 સેમી, $\angle A = 50^\circ$, AC = 4 સેમી, BD = 5 સેમી અને AD = 6 સેમી, તો શું એક નિશ્ચિત ચતુષ્કોણ રચી શકાશે ? તમારા જવાબનું કારણ આપો.

4.2 ચતુષ્કોણ રચો

નીચે આપેલાં માપના આધારે આપણે નિશ્ચિત ચતુષ્કોણ કેવી રીતે રચી શકાય તે શીખીશું :

જ્યારે ચાર બાજુ અને એક વિકર્ણ આપ્યો હોય.

જ્યારે બે વિકર્ણો અને ત્રણ બાજુ આપી હોય.

જ્યારે પાસ-પાસેની બે બાજુ અને ત્રણ ખૂણા આપ્યા હોય.

જ્યારે ત્રણ બાજુ અને તેના બે અંતર્ગત ખૂણા આપ્યા હોય.

જ્યારે અન્ય ખાસ લાક્ષણિકતા જાણતા હોઈએ.

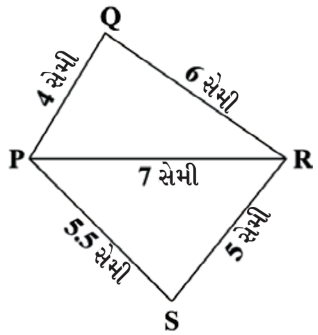
તો ચાલો, એક પછી એક આ બધી રચનાઓ લઈએ.

4.2.1 જ્યારે ચાર બાજુ અને એક વિકર્ણની લંબાઈ આપ્યા હોય

આ પ્રકારની રચના આપણે એક ઉદાહરણથી સમજીએ.

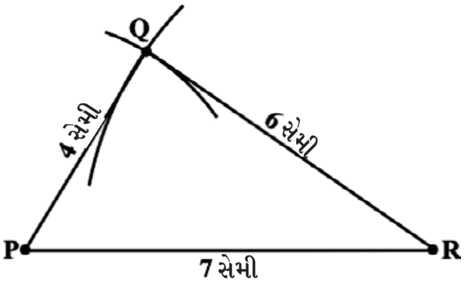
ઉદાહરણ 1 : ચતુષ્કોણ PQRS રચો, જ્યાં PQ = 4 સેમી, QR = 6 સેમી, RS = 5 સેમી, PS = 5.5 સેમી અને PR = 7 સેમી.

ઉકેલ : (આકૃતિ 4.5માં આપણે ચતુષ્કોણની કાચી આકૃતિ દોરેલ છે. જે આપણને ચતુષ્કોણ સમજવામાં ઉપયોગી થશે. આપણે પહેલા ચતુષ્કોણને દોરી અને પછી નામ નિદર્શન કરેલ છે.)



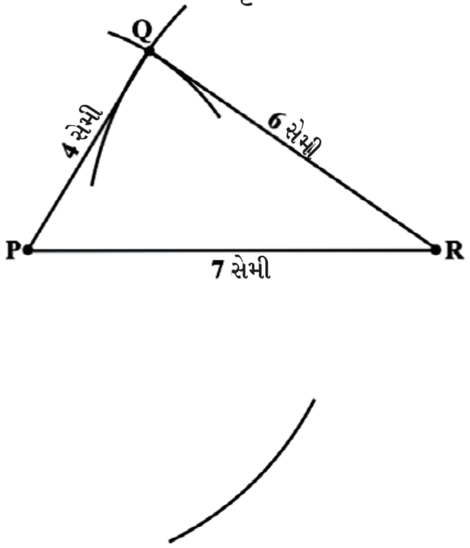
આકૃતિ 4.5

સોપાન 1 : આકૃતિ 4.5 પરથી આપણે સરળતાથી જોઈ શકીએ છીએ કે બાબાબા રચનાની શરત મુજબ આપણે ΔPQR રચી શકીએ.
આકૃતિ 4.6માં આપણે ΔPQR રચ્યો.



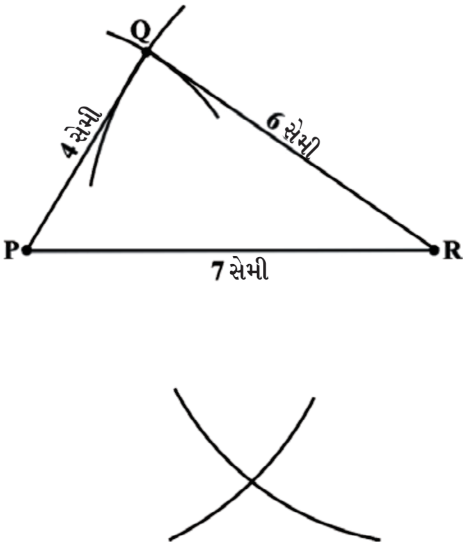
આકૃતિ 4.6

સોપાન 2 : હવે આપણે ચોથું બિંદુ S દર્શાવીશું. આ બિંદુ S એ PRની સાપેક્ષે Qની વિરુદ્ધ દિશામાં દર્શાવીશું. આ માટે આપણી પાસે બે માપ છે.
બિંદુ S એ બિંદુ P થી 5.5 સેમી દૂર છે. તેથી, Pને કેન્દ્ર રાખી 5.5 સેમીની એક ચાપ દોરો. (બિંદુ S એ આ ચાપ ઉપર ક્યાંક હશે.) (આકૃતિ 4.7)



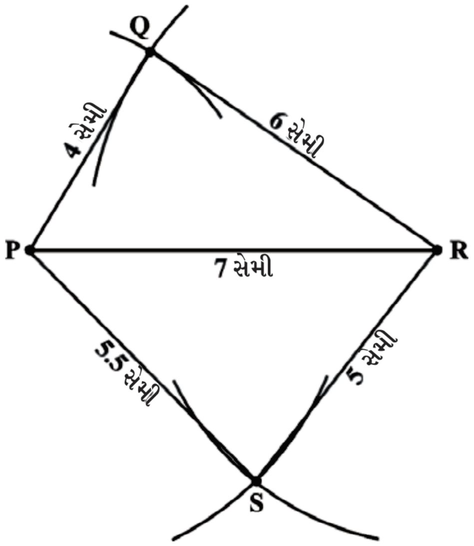
આકૃતિ 4.7

સોપાન 3 : બિંદુ S એ બિંદુ R થી 5 સેમી દૂર છે. તેથી, Rને કેન્દ્ર લઈને 5 સેમીની ચાપ રચો. (બિંદુ S એ આ ચાપ ઉપર પણ ક્યાંક હશે.) (આકૃતિ 4.8)



આકૃતિ 4.8

સોપાન 4 : બિંદુ S આપણે દોરેલી બંને ચાપ પર હોવું જોઈએ. તેથી તે બંને ચાપનું છેદબિંદુ છે.
તેને S દર્શાવીને ચતુષ્કોણ PQRS પૂર્ણ કરો. આ PQRS એ માગ્યા મુજબનો ચતુષ્કોણ છે. (આકૃતિ 4.9)



આકૃતિ 4.9

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

(i) આપણે જોયું કે ચતુષ્કોણના પાંચ માપ એક નિશ્ચિત ચતુષ્કોણ નિર્ધારિત કરે છે. શું તમે કહી શકશો કે ચતુષ્કોણનાં કોઈ પણ પાંચ માપ દ્વારા આ રીતે નિશ્ચિત ચતુષ્કોણ નિર્ધારિત થશે ?

(ii) શું તમે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ BATS એવો દોરી શકો કે જ્યાં BA = 5 સેમી, AT = 6 સેમી અને AS = 6.5 સેમી હોય ? શા માટે ?

(iii) શું તમે સમબાજુ ચતુષ્કોણ ZEAL એવો દોરી શકો કે જ્યાં ZE = 3.5 સેમી, વિકર્ણ EL = 5 સેમી હોય ? શા માટે ?

(iv) એક વિદ્યાર્થીએ ચતુષ્કોણ PLAY દોરવા પ્રયત્ન કર્યો, જ્યાં PL = 3 સેમી, LA = 4 સેમી, AY = 4.5 સેમી, PY = 2 સેમી અને LY = 6 સેમી હોય, પરંતુ તે દોરી ન શક્યો. શું કારણ હોય ? (સૂચન : કાચી આકૃતિ દોરી ચર્ચા કરો.)

સ્વાધ્યાય 4.1

1. નીચેના ચતુષ્કોણની રચના કરો.

(i) ચતુષ્કોણ ABCD
AB = 4.5 સેમી
BC = 5.5 સેમી
CD = 4 સેમી
AD = 6 સેમી
AC = 7 સેમી

(ii) ચતુષ્કોણ JUMP
JU = 3.5 સેમી
UM = 4 સેમી
MP = 5 સેમી
PJ = 4.5 સેમી
PU = 6.5 સેમી

(iii) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ MORE
OR = 6 સેમી
RE = 4.5 સેમી
EO = 7.5 સેમી

(iv) સમબાજુ ચતુષ્કોણ BEST
BE = 4.5 સેમી
ET = 6 સેમી

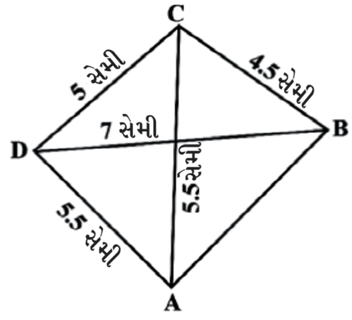
4.2.2 જ્યારે બે વિકર્ણ અને ત્રણ બાજુ આપી હોય

જ્યારે ચાર બાજુ અને એક વિકર્ણ આપ્યા હોય ત્યારે આપણે આપેલી માહિતી પરથી પહેલાં ત્રિકોણ દોરીએ છીએ અને પછી ચોથું બિંદુ દર્શાવવાનો પ્રયત્ન કરીએ છીએ. એ જ રીતનો ઉપયોગ આપણે અહીંયાં કરીશું.

ઉદાહરણ 2 : ચતુષ્કોણ ABCD રચો, જ્યાં BC = 4.5 સેમી, AD = 5.5 સેમી, CD = 5 સેમી, વિકર્ણ AC = 5.5 સેમી અને વિકર્ણ BD = 7 સેમી આપેલા હોય.

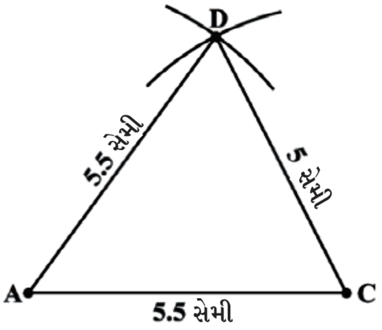
ઉકેલ :

અહીંયા આકૃતિ 4.10માં ચતુષ્કોણ ABCD ની કાચી આકૃતિ દર્શાવેલ છે. આ આકૃતિનો અભ્યાસ કરો. આપણે સરળતાથી જોઈ શકીશું કે પ્રથમ ΔACD દોરવો શક્ય છે. (કઈ રીતે ?)



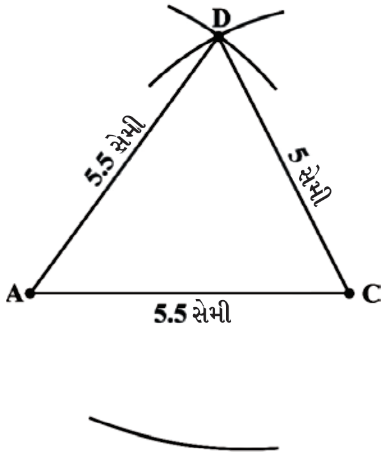
આકૃતિ 4.1

સોપાન 1 : બાબાબા રચનાના આધારે ΔACD રચો. (આકૃતિ 4.11) (હવે આપણે D ની વિરુદ્ધ બાજુએ બિંદુ B એવું મેળવીશું કે જે C બિંદુથી 4.5 સેમી અને D બિંદુથી 7 સેમી દૂર હોય.)



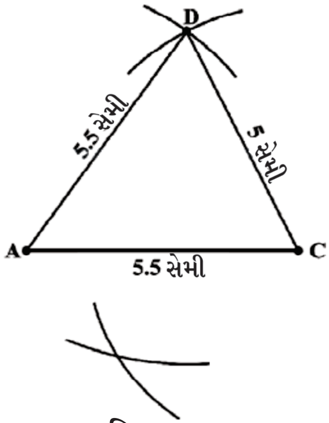
આકૃતિ 4.11

સોપાન 2 : Dને કેન્દ્ર રાખી 7 સેમી ત્રિજ્યાની એક ચાપ રચો. (બિંદુ B આ ચાપ પર ક્યાંક હશે.) (આકૃતિ 4.12)



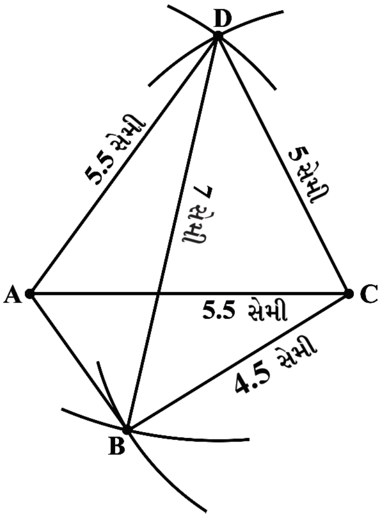
આકૃતિ 4.12

સોપાન 3 : C ને કેન્દ્ર રાખી 4.5 સેમી ત્રિજ્યાની એક ચાપ રચો. (બિંદુ B આ ચાપ ઉપર પણ ક્યાંક હશે.) (આકૃતિ 4.13)



આકૃતિ 4.13

સોપાન 4 : હવે B બંને ચાપ ઉપર આવેલ છે. માટે B એ બંને ચાપના છેદબિંદુ પર આવેલ હશે. હવે B દર્શાવીને ABCD પૂર્ણ કરો. આમ, ABCD એ માંગ્યા મુજબનો ચતુષ્કોણ છે. (આકૃતિ 4.14)



આકૃતિ 4.14

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

1. શું ઉપરના ઉદાહરણમાં આપણે પહેલા ΔABD દોરી પછી ચોથું બિંદુ C શોધીને, ચતુષ્કોણ દોરી શકીએ ?
2. શું તમે ચતુષ્કોણ PQRS એવો રચી શકો જ્યાં PQ = 3 સેમી, RS = 3 સેમી, PS = 7.5 સેમી, PR = 8 સેમી અને SQ = 4 સેમી હોય ? તમારા જવાબને ચકાસો.

સ્વાધ્યાય 4.2

1. નીચેના ચતુષ્કોણની રચના કરો.

(i) ચતુષ્કોણ LIFT
LI = 4 સેમી
IF = 3 સેમી
TL = 2.5 સેમી
LF = 4.5 સેમી
IT = 4 સેમી

(ii) ચતુષ્કોણ GOLD
OL = 7.5 સેમી
GL = 6 સેમી
GD = 6 સેમી
LD = 5 સેમી
OD = 10 સેમી

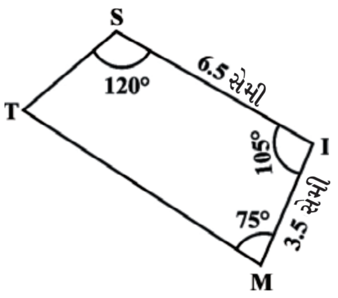
(iii) સમબાજુ ચતુષ્કોણ BEND
BN = 5.6 સેમી
DE = 6.5 સેમી

4.2.3 જ્યારે પાસ-પાસેની બે બાજુ અને ત્રણ ખૂણા જાણતા હોઈએ

આ અગાઉ આપણે રચનાની શરૂઆતમાં એક ત્રિકોણ રચી પછી ચોથું બિંદુ મેળવી અને ચતુષ્કોણ પૂર્ણ કરેલ છે.

ઉદાહરણ 3 : ચતુષ્કોણ MIST રચો, જ્યાં MI = 3.5 સેમી, IS = 6.5 સેમી, $\angle M = 75^\circ$, $\angle I = 105^\circ$ અને $\angle S = 120^\circ$ હોય.

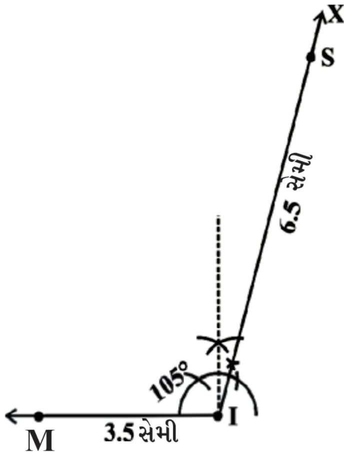
ઉકેલ : અહીં આકૃતિ 4.15માં ચતુષ્કોણ MIST ની કાચી આકૃતિ દર્શાવેલ છે જે આપણને રચનાનાં સોપાનો નક્કી કરવામાં ઉપયોગી થશે.



આકૃતિ 4.15

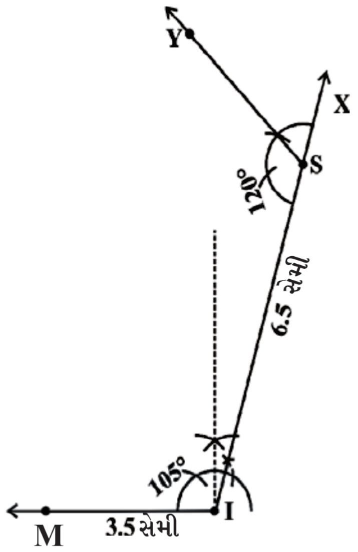
સોપાન 1 : તમે બિંદુઓ કેવી રીતે દર્શાવશો ? તમારી પાસે શરૂઆત કરવા માટેના વિકલ્પો કયા છે અને પહેલું સોપાન શું હોઈ શકે ?

આટલું વિચારી તમે (આકૃતિ 4.16) માં દર્શાવ્યા મુજબ, 3.5 સેમી લંબાઈનો રેખાખંડ MI રચ્યા બાદ I બિંદુ પાસે ∠MIS = 105° રચી શકો.



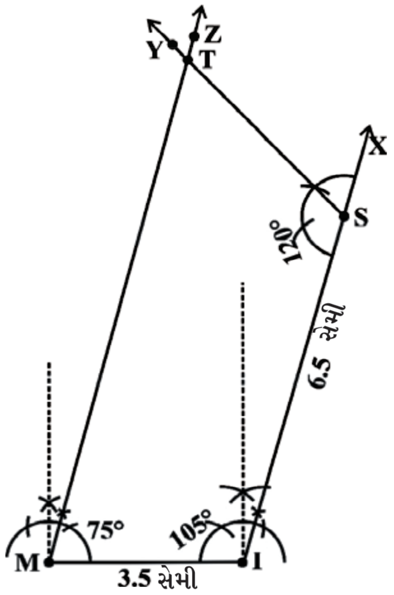
આકૃતિ 4.16

સોપાન 2 : હવે બિંદુ S પાસે ∠ISY = 120° રચો. (આકૃતિ 4.17)



આકૃતિ 4.17

સોપાન 3 : બિંદુ M પાસે ∠IMZ = 75° રચો. (આમ કરવાથી શું SY અને MZ એકબીજાને છેદે છે ?) આ બિંદુને T વડે દર્શાવો. આ રીતે આપણને માગ્યા મુજબનો ચતુષ્કોણ MIST પ્રાપ્ત થશે (આકૃતિ 4.18).



આકૃતિ 4.18

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

1. જો આપણી પાસે ∠M એ 75°ને બદલે 100° હોય, તો શું તમે ઉપરનો ચતુષ્કોણ MIST રચી શકો ?
2. જો PL = 6 સેમી, LA = 9.5 સેમી, ∠P = 75°, ∠L = 150° અને ∠A = 140° હોય, તો તમે ચતુષ્કોણ PLAN રચી શકો ? (સૂચન : ખૂણાના સરવાળાની લાક્ષણિકતા યાદ કરો.)
3. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં પાસ-પાસેની બાજુઓ (Adjacent Sides)ની લંબાઈ જાણતાં હોઈએ તો પણ ઉપરના ઉદાહરણની રચના માટે ખૂણાના માપની જરૂર રહેશે ?

સ્વાધ્યાય 4.3

1. નીચેના ચતુષ્કોણની રચના કરો.

(i) ચતુષ્કોણ MORE
MO = 6 સેમી
OR = 4.5 સેમી
∠M = 60°
∠O = 105°
∠R = 105°

(ii) ચતુષ્કોણ PLAN
PL = 4 સેમી
LA = 6.5 સેમી
∠P = 90°
∠A = 10°
∠N = 85°

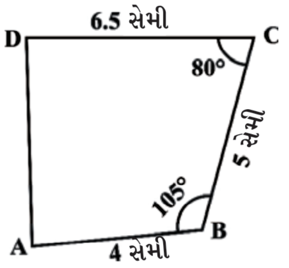
(iii) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ HEAR
HE = 5 સેમી
EA = 6 સેમી
∠R = 85°

(iv) લંબચોરસ OKAY
OK = 7 સેમી
KA = 5 સેમી

4.2.4 જ્યારે ત્રણ બાજુ અને તેના બે અંતર્ગત ખૂણા આપ્યા હોય

આ રીતમાં આપણે જ્યારે કાચી આકૃતિ દોરતાં હોઈએ ત્યારે ''અંતર્ગત'' ખૂણા દર્શાવવામાં સાવચેતી રાખવી.

ઉદાહરણ 4 : ચતુષ્કોણ ABCD રચો. જ્યાં AB = 4 સેમી, BC = 5 સેમી, CD = 6.5 સેમી અને $\angle B = 105^o$ અને $\angle C = 80^o$ છે.

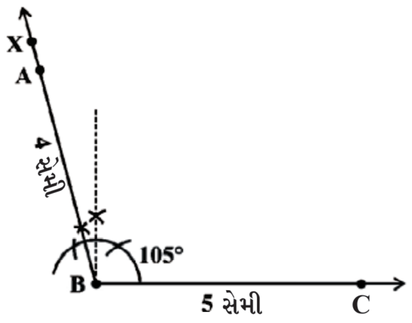


આકૃતિ 4.19

ઉકેલ :

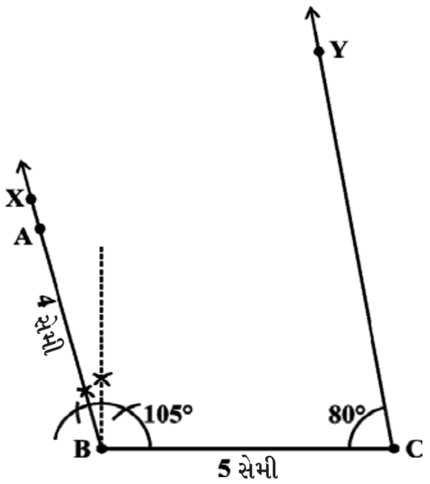
હંમેશની માફક આપણે પહેલાં કાચી આકૃતિ દોરીશું, જેથી આપણને શરૂઆત કઈ રીતે કરવી તેનો ખ્યાલ આવે (આકૃતિ 4.19).

સોપાન 1 : સૌ પ્રથમ આપણે 5 સેમીનો રેખાખંડ BC રચીશું. બિંદુ B પાસે 105^oનો ખૂણો રચાય તેવું કિરણ BX રચો. હવે કિરણ BX પર B બિંદુથી 4 સેમી દૂર A બિંદુ દર્શાવો. હવે આપણી પાસે B, C અને A એમ ત્રણ બિંદુ છે. (આકૃતિ 4.20)



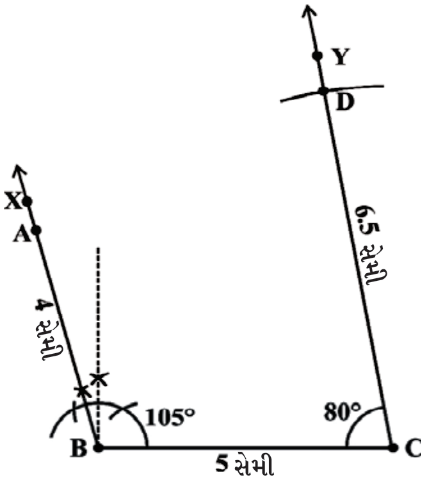
આકૃતિ 4.20

સોપાન 2 : હવે ચોથું બિંદુ D એ કિરણ CY પર એવું મળે કે જેથી કિરણ CY એ કિરણ BC સાથે 80^oનો ખૂણો બનાવે. આમ કરવા માટે BC પરના બિંદુ C આગળ $\angle BCY = 80^o$ રચો. (આકૃતિ 4.21)



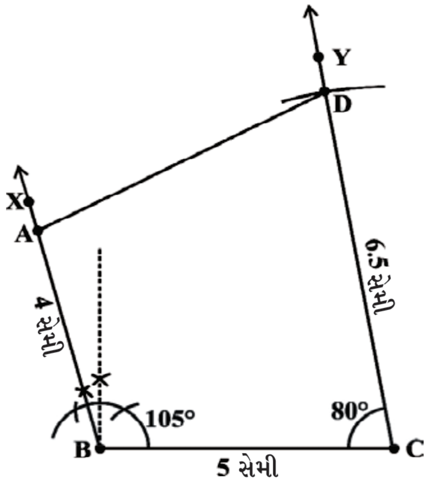
આકૃતિ 4.21

સોપાન 3 : હવે બિંદુ C ને કેન્દ્ર રાખી 6.5 સેમીની ચાપ દોરો, આ ચાપ કિરણ CY ને D માં છેદે છે. (આકૃતિ 4.22)



આકૃતિ 4.22

સોપાન 4 : ચતુષ્કોણ ABCD પૂર્ણ કરો. આ ચતુષ્કોણ ABCD માંગ્યા મુજબનો ચતુષ્કોણ છે. (આકૃતિ 4.23)



આકૃતિ 4.23

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

1. ઉપરના ઉદાહરણમાં આપણે સૌ પ્રથમ રેખાખંડ BC રચ્યો. તેના બદલે આપણે બીજા કયાં બિંદુઓથી શરૂ કરી શકીએ ?
2. અત્યાર સુધી આપણે કેટલાક પાંચ માપનો ઉપયોગ કરીને ચતુષ્કોણની રચના કરી. શું આપણે અત્યાર સુધી લીધેલા પાંચ માપ સિવાયના અન્ય પાંચ માપના સમૂહથી ચતુષ્કોણ રચી શકીએ ?

   નીચેના પ્રશ્નો તમને જવાબ આપવામાં ઉપયોગી થશે.

   (i) ચતુષ્કોણ ABCD માં AB = 5 સેમી, BC = 5.5 સેમી, CD = 4 સેમી, AD = 6 સેમી અને $\angle B = 80^\circ$

   (ii) ચતુષ્કોણ PQRS માં PQ = 4.5 સેમી, $\angle P = 70^\circ$, $\angle Q = 100^\circ$, $\angle R = 80^\circ$ અને $\angle S = 110^\circ$

   ચતુષ્કોણની રચના માટે પૂરતાં અને અપૂરતાં માપ દર્શાવતાં બીજા કેટલાંક ઉદાહરણો તમે તમારી જાતે રચો.

સ્વાધ્યાય 4.4

1. નીચેના ચતુષ્કોણની રચના કરો.

(i) ચતુષ્કોણ DEAR
DE = 4 સેમી
EA = 5 સેમી
AR = 4.5 સેમી
$\angle E = 60^\circ$
$\angle A = 90^\circ$

(ii) ચતુષ્કોણ TRUE
TR = 3.5 સેમી
RU = 3 સેમી
UE = 4 સેમી
$\angle R = 75^\circ$
$\angle U = 120^\circ$

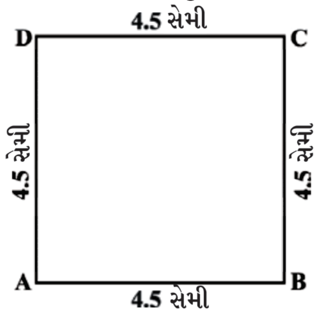
4.3 કેટલાક ખાસ કિસ્સાઓ

ચતુષ્કોણની રચના માટે આપણે પાંચ માપનો ઉપયોગ કરીએ છીએ. શું પ્રાપ્ત માપો કરતાં ઓછી સંખ્યાના માપથી આપણે કોઈ નિશ્ચિત ચતુષ્કોણ રચી શકીએ ? આવા ખાસ કિસ્સાઓ માટે નીચે આપેલાં ઉદાહરણો ચકાસો.

ઉદાહરણ 5 : 4.5 સેમી બાજુવાળો ચોરસ રચો.

ઉકેલ : પહેલી નજરે અહીં આપણને માત્ર એક જ માપ આપેલ છે તેવું દેખાશે. પરંતુ વાસ્તવમાં આપણી પાસે બીજી ઘણી માહિતીઓ છે. કારણ કે આ આકૃતિ નિશ્ચિત ચતુષ્કોણ દર્શાવે છે, જેને આપણે ચોરસના નામથી ઓળખીએ છીએ. ચોરસની ચારે બાજુ સરખી હોય છે અને ચારે ખૂણા કાટખૂણા હોય છે. (આકૃતિ 4.24ની કાચી આકૃતિ જુઓ.)

કાચી આકૃતિ



આકૃતિ 4.24

આકૃતિ 4.24ની મદદથી આપણે રચના કરી શકીશું.
સૌ પ્રથમ બાખૂબા શરતને આધારે આપણે ΔABC રચીશું. પછી આપણે સરળતાથી બિંદુ D પણ દર્શાવી શકીશું. તો આપેલા માપના ચોરસની રચના તમારી જાતે કરવાનો પ્રયત્ન કરો.

ઉદાહરણ 6 : શું એવો સમબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD રચવો શક્ય છે કે જ્યાં AC = 7 સેમી અને BD = 6 સેમી હોય ? તમારા જવાબની સત્યાર્થતા ચકાસો.

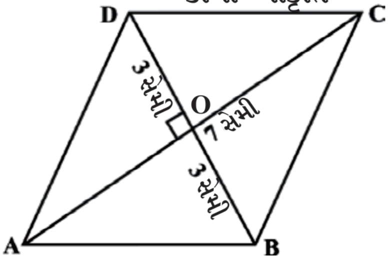
ઉકેલ : સમબાજુ ચતુષ્કોણના માત્ર બે વિકર્ણોના જ માપ આપ્યાં છે. આમ છતાં, સમબાજુ ચતુષ્કોણની લાક્ષણિકતાને કારણે આપણને ઘણી મદદ મળી રહેશે.

સમબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણ એકબીજાના લંબદ્વિભાજક હોય છે. તેથી સૌપ્રથમ 7 સેમી લંબાઈનો રેખાખંડ AC રચો. ત્યાર બાદ તેનો લંબદ્વિભાજક રચો. તે પરસ્પર O બિંદુમાં છેદે છે.

હવે બંને વિકર્ણના છેદબિંદુને કેન્દ્રસ્થાને લઈને 3 સેમીની ચાપ રચો. જે લંબદ્વિભાજકને બિંદુ B અને બિંદુ D માં છેદશે. હવે સીધીપટ્ટીની મદદથી બિંદુ A, B, C અને D ને જોડો. જે માગ્યા મુજબનો સમબાજુ ચતુષ્કોણ પ્રાપ્ત થશે.

આ વર્ણનના આધારે હવે તમે તમારી જાતે આ સમબાજુ ચતુષ્કોણ રચવાનો પ્રયત્ન કરો. (આકૃતિ 4.25ને કાચી આકૃતિ તરીકે ધ્યાને લો.)

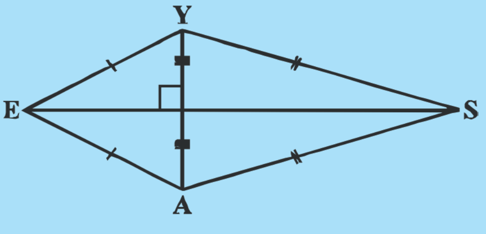
કાચી આકૃતિ



આકૃતિ 4.25

આટલું કરો

1. જો તમે માત્ર PQ અને QR ની લંબાઈ જાણતા હશો તો લંબચોરસ PQRS કઈ રીતે રચશો ?
2. જો આકૃતિ 4.26માં AY = 8 સેમી, EY = 4 સેમી અને SY = 6 સેમી હોય તો પતંગ EASYની રચના કરો. પતંગની કઈ લાક્ષણિકતા તમે રચના દરમિયાન ઉપયોગમાં લેશો ?



આકૃતિ 4.26

સ્વાધ્યાય 4.5

નીચેની રચના કરો.

1. RE = 5.1 સેમી ધરાવતો ચોરસ READ રચો.
2. જેના વિકર્ણોની લંબાઈ 5.2 સેમી અને 6.4 સેમી હોય તેવો સમબાજુ ચતુષ્કોણ રચો.
3. એવા લંબચોરસની રચના કરો કે જેની પાસપાસેની બાજુઓની લંબાઈ 5 સેમી અને 4 સેમી હોય.
4. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ OKAY રચો જ્યાં OK = 5.5 સેમી, KA = 4.2 સેમી હોય, શું આ અનન્ય છે ?

આપણે શું ચર્ચા કરી ?

1. ચતુષ્કોણના પાંચ માપ, એક અનન્ય ચતુષ્કોણ સુનિશ્ચિત કરે છે.
2. જો ચતુષ્કોણની ચાર બાજુ અને એક વિકર્ણ આપેલ હોય તો તેના દ્વારા એક અનન્ય ચતુષ્કોણ સુનિશ્ચિત થાય છે.
3. જો ચતુષ્કોણના બે વિકર્ણ અને ત્રણ બાજુઓ જાણતાં હોઈએ તો એક અનન્ય ચતુષ્કોણ સુનિશ્ચિત થાય.
4. જો ચતુષ્કોણની પાસ-પાસેની બે બાજુઓ અને ત્રણ ખૂણાઓ જાણતાં હોઈએ તો તેના દ્વારા એક અનન્ય ચતુષ્કોણ સુનિશ્ચિત થાય.
5. જો ત્રણ બાજુઓ અને તેના બે અંતર્ગત ખૂણાઓ આપ્યા હોય તો એક અનન્ય ચતુષ્કોણ સુનિશ્ચિત થાય.