પ્રકરણ

13

સમપ્રમાણ અને વ્યસ્ત પ્રમાણ

13.1 પ્રાસ્તાવિક

મોહન પોતાના માટે અને પોતાની બહેન માટે ચા બનાવે છે. આ માટે તે 300 મિલી પાણી, 2 ચમચી ખાંડ, 1 ચમચી ચાની ભૂકી અને 50 મિલી દૂધનો ઉપયોગ કરે છે. હવે જો તેને પાંચ વ્યક્તિઓ માટે ચા બનાવવી હોય તો, ઉપરોક્ત વસ્તુઓનો કેટલો જથ્થો જોઈશે ?

જો બે વિદ્યાર્થીઓને કોઈ એક સભામાં ખુરશીઓ ગોઠવવામાં 20 મિનિટનો સમય લાગે તો આ જ કામ પાંચ વિદ્યાર્થીઓ કેટલા સમયમાં કરી શકે ?

દૈનિક જીવનમાં આપણે આવી ઘણી બધી પરિસ્થિતિઓનો સામનો કરતાં હોઈએ છીએ જેમાં, આપણે જોઈએ છીએ કે કોઈ એક રાશિમાં થતાં પરિવર્તનને કારણે અન્ય રાશિમાં પણ પરિવર્તન આવે છે.

ઉદાહરણ તરીકે,

(i) જો ખરીદેલી વસ્તુની સંખ્યામાં વધારો થાય તો તેની કુલ ખરીદ કિંમતમાં પણ વધારો થાય છે.

(ii) બૅંકમાં વધારે રકમ જમા કરાવીએ તો વધારે વ્યાજ મેળવી શકાય.

(iii) જો વાહનની ઝડપમાં વધારો થાય તો અંતર કાપવા માટે લાગતાં સમયમાં ઘટાડો થાય છે.

(iv) કોઈ એક કાર્ય માટે, કારીગરની સંખ્યા વધે તો કાર્ય પૂરું કરવા લાગતો સમય ઘટે.

ધ્યાન રાખો, અહીં એક રાશિમાં થતાં પરિવર્તનને કારણે બીજી રાશિમાં પરિવર્તન થાય છે.

આવી બીજી પાંચ પરિસ્થિતિઓ લખો કે જેમાં એક રાશિમાં થતાં પરિવર્તનને કારણે અન્ય રાશિમાં પણ પરિવર્તન આવે છે.

મોહનને જોઈતી વસ્તુઓનો જથ્થો આપણે કેવી રીતે શોધીશું ? અથવા પાંચ વિદ્યાર્થીઓ દ્વારા કાર્યને પુરું કરવા માટે લાગતાં સમયને કેવી રીતે શોધીશું ?

આ પ્રકારના પ્રશ્નોના જવાબ આપવા માટે આપણે ચલન (variation)ના મહત્ત્વના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કરીશું.

13.2 સમપ્રમાણ

જો 1 કિગ્રા ખાંડની કિંમત ₹ 36 હોય, તો 3 કિગ્રા ખાંડની કિંમત કેટલી હશે ? તે ₹ 108 થાય.

આ જ પ્રકારે, આપણે 5 કિગ્રા તથા 8 કિગ્રા ખાંડની કિંમત શોધી શકીશું. નીચેના કોષ્ટકનો અભ્યાસ કરો.

ખાંડનું વજન (કિગ્રામાં)	1	3	5	6	8	10
કિંમત (રૂપિયામાં)	36	108	180	...	...	...

ધ્યાન આપો, અહીં ખાંડના જથ્થામાં વધારો થતાં તેની કિંમતમાં પણ એવી રીતે વધારો થાય છે કે જેથી તેનો ગુણોત્તર અચળ રહે.

બીજું એક ઉદાહરણ લઈએ. ધારો કે એક કાર 60 કિમી અંતર કાપવા માટે 4 લિટર પેટ્રોલ વાપરે છે તો 12 લિટર પેટ્રોલમાં તે કેટલું અંતર કાપશે ? જવાબ 180 કિમી આવશે. આ અંતર કેવી રીતે શોધીશું ?

અહીં આપેલ પરિસ્થિતિમાં 12 લિટર પેટ્રોલ એટલે કે 4 લિટરનું ત્રણ ગણું પેટ્રોલ વપરાય છે. તેથી કાપેલું અંતર પણ 60 કિમીનું ત્રણ ગણું થશે. એટલે કે પેટ્રોલનો વપરાશ ત્રણ ગણો વધારે થાય તો કાપેલું અંતર પણ અગાઉના અંતર કરતાં ત્રણ ગણું થશે. હવે, ધારો કે પેટ્રોલનો વપરાશ x લિટર અને તેને અનુરૂપ કાપેલું અંતર y કિમી છે. હવે, નીચેનું કોષ્ટક પૂર્ણ કરો.

પેટ્રોલ લિટરમાં (x)	4	8	12	15	20	25
અંતર કિમીમાં (y)	60	...	180	...	...	...

અહીં આપણે જોઈશું કે xના મૂલ્યમાં વધારો થાય છે ત્યારે yના મૂલ્યમાં પણ એવી રીતે વધારો થાય છે કે જેથી ગુણોત્તર $\frac{x}{y}$માં કોઈ ફેરફાર ન થાય. એટલે કે તે અચળ રહે. (ધારો કે k) આ સ્થિતિમાં અચળાંક $\frac{1}{15}$ છે.

(જાતે ચકાસો !)

આમ, આપણે કહી શકીએ કે જો $\frac{x}{y} = k$ અથવા $x = ky$ હોય તો x એ y ના સમપ્રમાણમાં છે.

આ ઉદાહરણમાં, $\frac{4}{60} = \frac{12}{180}$ છે, જ્યાં 4 અને 12 વપરાયેલા પેટ્રોલનો જથ્થો (x) લિટરમાં છે તથા 60 અને 180 એ કપાયેલ અંતર (y) કિમીમાં છે. આમ, જો x અને y સમપ્રમાણમાં હોય, તો આપણે $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ લખી શકીએ. (જ્યાં xનાં મૂલ્યો x_1 અને x_2 ને અનુરૂપ yનાં મૂલ્યો અનુક્રમે y_1 અને y_2 છે.)

પેટ્રોલનો વપરાશ અને કાર દ્વારા કપાયેલ અંતર એક સમપ્રમાણની સ્થિતિ બતાવે છે. આ જ પ્રમાણે કુલ ખર્ચેલ રકમ અને ખરીદેલ વસ્તુઓની સંખ્યા પણ સમપ્રમાણનું એક ઉદાહરણ છે.

સમપ્રમાણનાં થોડાંક વધારે ઉદાહરણો વિશે વિચારો. શરૂઆતના ઉદાહરણમાં પાંચ વ્યક્તિઓ માટે ચા બનાવવા માટે મોહન 750 મિલી પાણી, 5 ચમચી ખાંડ, $2\frac{1}{2}$ ચમચી ચાની ભૂકી અને 125 મિલી દૂધનો ઉપયોગ કરશે. ચાલો સમપ્રમાણના આ મુદ્દાને નીચેની પ્રવૃત્તિ દ્વારા સમજવાનો પ્રયત્ન કરીએ.

આટલું કરો

(i) • એક ઘડિયાળ લો અને તેના મિનિટ કાંટાને 12 પર ગોઠવો.

• મિનિટ કાંટાએ તેની પ્રારંભિક સ્થિતિ સાથે બનાવેલ ખૂણા તથા વીતેલા સમયને નીચેના કોષ્ટક સ્વરૂપે દર્શાવો.

વિતેલો સમય મિનિટમાં (T)	(T_1) 15	(T_2) 30	(T_3) 45	(T_4) 60
બનાવેલ ખૂણો (ડિગ્રીમાં) (A)	(A_1) 90°	(A_2) ...	(A_3) ...	(A_4) ...
$\frac{T}{A}$	...	...	...	...

તમને T અને Aના અવલોકન દ્વારા શું જાણવા મળ્યું ? શું બંનેમાં એક સાથે વધારો થાય છે ? શું $\frac{T}{A}$ દરેક વખતે સમાન હોય છે ?

શું મિનિટ કાંટાએ બનાવેલ ખૂણો વિતેલા સમયના સમપ્રમાણમાં છે ?

હા. ઉપરોક્ત કોષ્ટકમાં તમે જોઈ શકો છો કે,

$T_1 : T_2 = A_1 : A_2$ કારણ કે

$T_1 : T_2 = 15 : 30 = 1 : 2$

$A_1 : A_2 = 90 : 180 = 1 : 2$

ચકાસો $T_2 : T_3 = A_2 : A_3$ અને $T_3 : T_4 = A_3 : A_4$ થાય છે ?

હવે તમે પોતાની રીતે સમયગાળો નક્કી કરી અને ઉપરોક્ત પ્રવૃત્તિ ફરીથી કરી શકો છો.

(ii) તમારા મિત્રને નીચેનું કોષ્ટક ભરવાનું કહો તથા તેની ઉંમરને અનુરૂપ તેની માતાની ઉંમરનો ગુણોત્તર શોધવાનું પણ કહો.

	પાંચ વર્ષ પહેલાની ઉંમર	હાલની ઉંમર	પાંચ વર્ષ પછીની ઉંમર
મિત્રની ઉંમર (F)			
માતાની ઉંમર (M)			
$\frac{F}{M}$			

તમે શું અવલોકન કર્યું ? શું F અને Mમાં એકસાથે વધારો (અથવા ઘટાડો) થાય છે ?

શું $\frac{F}{M}$ નું મૂલ્ય દરેક વખતે સમાન છે ? ના. આ પ્રવૃત્તિને તમે તમારા અન્ય મિત્રો સાથે ફરીથી કરો અને અવલોકનો નોંધો.

આમ, એક સાથે વધતાં (અથવા ઘટતા) ચલ હંમેશા સમપ્રમાણમાં જ હોય તે જરૂરી નથી. ઉદાહરણ તરીકે :

(i) સમયની સાથે મનુષ્યમાં શારીરિક ફેરફારો થાય છે પરંતુ તે જરૂરી નથી કે તે પૂર્વનિર્ધારિત ગુણોત્તરમાં જ હોય.

(ii) મનુષ્યના વજન અને ઊંચાઈમાં થતાં ફેરફારો કોઈ નિશ્ચિત પ્રમાણમાં નથી હોતા.

(iii) કોઈ વૃક્ષની ઊંચાઈ અને તેની ડાળીઓ પર રહેલા પાનાની સંખ્યા વચ્ચે કોઈ સીધો સંબંધ નથી આવાં બીજાં ઉદાહરણો વિશે વિચારો.

પ્રયત્ન કરો

1. નીચેનાં કોષ્ટકનું અવલોકન કરો અને જણાવો કે x અને y સમપ્રમાણમાં છે કે નહીં.

(i)

x	20	17	14	11	8	5	2
y	40	34	28	22	16	10	4

(ii)

x	6	10	14	18	22	26	30
y	4	8	12	16	20	24	28

(iii)

x	5	8	12	15	18	20
y	15	24	36	60	72	100

2. મુદલ = ₹ 1000, વ્યાજનો દર = વાર્ષિક 8% માટે નીચે દર્શાવેલ કોષ્ટક પૂર્ણ કરો અને ચકાસો કે આ પ્રકારનું વ્યાજ (સાદું અથવા ચક્રવૃદ્ધિ) આપેલ સમયના સમપ્રમાણમાં છે.

$\frac{P \times r \times t}{100}$

$P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t - P$

આપેલ સમયગાળો	1 વર્ષ	2 વર્ષ	3 વર્ષ
સાદુ વ્યાજ (₹માં)			
ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ (₹માં)			

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

જો આપણે સમયગાળો તથા વ્યાજનો દર નિશ્ચિત રાખીએ તો સાદું વ્યાજ તેના મુદલના સમપ્રમાણમાં હોય છે, શું આ જ સંબંધ ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ માટે પણ સત્ય છે ? કેમ ?

ચાલો, હવે થોડાંક એવાં ઉદાહરણોના ઉકેલ મેળવીએ જેમાં સમપ્રમાણના મુદ્દાનો ઉપયોગ થતો હોય.

ઉદાહરણ 1 : એક વિશેષ પ્રકારના 5 મીટર કાપડની કિંમત ₹ 210 છે. તો આ પ્રકારના 2, 4, 10 અને 13 મીટર કાપડની કિંમત માટે કોષ્ટક બનાવો.

ઉકેલ : ધારો કે કાપડની લંબાઈ x મીટર છે અને તેની કિંમત ₹ y છે.

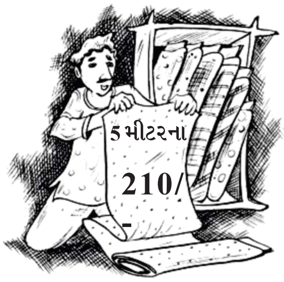
x	2	4	5	10	13
y	y_2	y_3	210	y_4	y_5

હવે જેમ કાપડની લંબાઈમાં વધારો થાય તેમ કાપડની કિંમત પણ તે જ ગુણોત્તરમાં વધે છે. આ એક સમપ્રમાણની સ્થિતિ છે.

આપણે અહીં $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ પ્રકારના સંબંધનો ઉપયોગ કરીએ.

(i) અહીં $x_1 = 5,\ y_1 = 210$ અને $x_2 = 2$

માટે $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ એટલે $\frac{5}{210} = \frac{2}{y_2}$ અથવા $5y_2 = 2 \times 210,\ \therefore\ y_2 = \frac{2 \times 210}{5} = 84$



(ii) જો $x_3 = 4$ હોય તો $\frac{5}{210} = \frac{4}{y_3},\ \therefore\ 5y_3 = 4 \times 210,\ \therefore\ y_3 = \frac{4 \times 210}{5} = 168$

[અહીં $\frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3}$ નો ઉપયોગ કરી શકાય ? પ્રયત્ન કરો.]

(iii) જો $x_4 = 10$ હોય તો $\frac{5}{210} = \frac{10}{y_4},\ \therefore\ y_4 = \frac{10 \times 210}{5} = 420$

(iv) જો $x_5 = 13$ હોય તો $\frac{5}{210} = \frac{13}{y_5},\ \therefore\ y_5 = \frac{13 \times 210}{5} = 546$

[ધ્યાન આપો, અહીં આપણે $\frac{5}{210}$ ની જગ્યાએ $\frac{2}{84}$ અથવા $\frac{4}{168}$ અથવા $\frac{10}{420}$ નો પણ ઉપયોગ કરી શકીએ.]

ઉદાહરણ 2 : 14 મીટર ઊંચાઈ ધરાવતા વિજળીના એક થાંભલાના પડછાયાની લંબાઈ 10 મીટર છે. આ જ પરિસ્થિતિમાં એક વૃક્ષના પડછાયાની લંબાઈ 15 મીટર હોય, તો વૃક્ષની ઊંચાઈ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે વૃક્ષની ઊંચાઈ x મીટર છે. હવે નીચે પ્રમાણે કોષ્ટક બનાવતાં,

પદાર્થની ઊંચાઈ (મીટરમાં)	14	x
પડછાયાની લંબાઈ (મીટરમાં)	10	15

ધ્યાન આપો, પદાર્થની ઊંચાઈ જેટલી વધારે, તેટલી જ તેના પડછાયાની લંબાઈ વધારે હશે. આથી આ એક સમપ્રમાણની સ્થિતિ છે. અર્થાત્ $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ લેતાં,

આપણને $\frac{14}{10} = \frac{x}{15}$ મળે. (કેમ ?)

$\therefore\ \frac{14}{10} \times 15 = x$

$\therefore\ \frac{14 \times 3}{2} = x$

તેથી $21 = x$

આમ, વૃક્ષની ઊંચાઈ 21 મીટર છે.

આપણે $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ ને $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$ તરીકે પણ દર્શાવી શકીએ.

એટલે કે, $x_1 : x_2 = y_1 : y_2$

$\therefore\ 14 : x = 10 : 15$

માટે $10 \times x = 15 \times 14$

$\therefore\ x = \frac{15 \times 14}{10} = 21$

ઉદાહરણ 3 : જો 12 જાડા કાગળનું વજન 40 ગ્રામ હોય, તો આ જ પ્રકારના કેટલા કાગળનું વજન $2\frac{1}{2}$ કિલોગ્રામ થાય ?

ઉકેલ : ધારો કે x સંખ્યાના કાગળનું વજન $2\frac{1}{2}$ કિગ્રા થાય છે. ઉપરોક્ત માહિતીને કોષ્ટક સ્વરૂપે દર્શાવતાં,

કાગળની સંખ્યા	12	x
કાગળનું વજન (ગ્રામમાં)	40	2500

1 કિલોગ્રામ = 1000 ગ્રામ

$2\frac{1}{2}$ કિલોગ્રામ = 2500 ગ્રામ

કાગળની સંખ્યા વધારે હશે તો તેનું વજન પણ વધશે. તેથી કાગળની સંખ્યા તેના વજનના સમપ્રમાણમાં છે.

તેથી, $\frac{12}{40} = \frac{x}{2500}$

$\therefore \quad \frac{12 \times 2500}{40} = x$

$\therefore \quad 750 = x$

આમ, માંગેલ કાગળની સંખ્યા = 750

બીજી રીત : બે રાશિઓ x અને y એકબીજાના સમપ્રમાણમાં રહેલ છે. તેથી $x = ky$ અથવા $\frac{x}{y} = k$

અહીં, $k = \frac{\text{કાગળની સંખ્યા}}{\text{કાગળનું ગ્રામમાં વજન}} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$

હવે જો x સંખ્યાના કાગળનું વજન $2\frac{1}{2}$ કિગ્રા (2500 ગ્રામ) હોય તો,

$x = ky$નો ઉપયોગ કરતાં, $x = \frac{3}{10} \times 2500 = 750$

આમ, 750 કાગળનું વજન $2\frac{1}{2}$ કિગ્રા હશે.

ઉદાહરણ 4 : એક રેલગાડી, 75 કિમી/કલાકની અચળ ઝડપે ગતિ કરે છે. તો,

(i) 20 મિનિટમાં કેટલું અંતર કાપશે ?

(ii) 250 કિલોમીટર અંતર કાપવા માટે લાગતો સમય શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે રેલગાડીએ 20 મિનિટમાં કાપેલ અંતર x કિમી છે અને 250 કિમી માટે લાગતો સમય (મિનિટમાં) y છે.

1 કલાક = 60 મિનિટ

કાપેલ અંતર (કિમીમાં)	75	x	250
સમય (મિનિટમાં)	60	20	y

અહીં ઝડપ અચળ છે, તેથી કાપેલું અંતર સમયના સમપ્રમાણમાં હશે.

(i) અહીં, $\frac{75}{60} = \frac{x}{20}$

$\therefore \frac{75 \times 20}{60} = x$

$\therefore x = 25$

તેથી, રેલગાડી 20 મિનિટમાં 25 કિમીનું અંતર કાપશે.

(ii) અને $\frac{75}{60} = \frac{250}{y}$

$\therefore y = \frac{250 \times 60}{75}$ = 200 મિનિટ અથવા 3 કલાક અને 20 મિનિટ

આમ, 250 કિમી અંતર કાપતાં લાગતો સમય 3 કલાક અને 20 મિનિટ છે. વૈકલ્પિક રીતે, જો તમે x જાણતા હોય તો $\frac{x}{20} = \frac{250}{y}$ પરથી તમે yને શોધી શકો છો.

> તમે જાણો છો કે ભૌગોલિક નકશો એક મોટા પ્રદેશનું લઘુ સ્વરૂપ છે. નકશાના નીચેના ભાગમાં પ્રમાણમાપ (સ્કેલ) આપેલ હોય છે. આ પ્રમાણમાપ વાસ્તવિક લંબાઈ અને નકશામાં દર્શાવેલ લંબાઈ વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવે છે. આમ, પ્રમાણમાપ નકશાના બે બિંદુ વચ્ચેનું અંતર અને વાસ્તવિક અંતર વચ્ચેનો ગુણોત્તર છે.
>
> ઉદાહરણ તરીકે, નકશા પરનું 1 સેમી અંતર વાસ્તવિક અંતર 8 કિમી દર્શાવતું હોય (એટલે કે પ્રમાણમાપ 1 સેમી : 8 કિમી અથવા 1 : 8,00,000) તો નકશા પરનું 2 સેમીનું માપ 16 કિમી દર્શાવશે. આથી આપણે કહી શકીએ કે નકશા પર દર્શાવેલ પ્રમાણમાપ, સમપ્રમાણતાને આધારિત છે.

ઉદાહરણ 5 : નકશામાં પ્રદર્શિત પ્રમાણમાપ 1 : 30000000 છે. નકશામાં બે શહેર વચ્ચેનું અંતર 4 સેમી હોય, તો વાસ્તવિક અંતર શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે નકશા પરનું અંતર x સેમી અને વાસ્તવિક અંતર y સેમી છે.

માટે $1 : 30000000 = x : y$

$\therefore \quad \frac{1}{3 \times 10^7} = \frac{x}{y}$

પરંતુ $x = 4$ છે. તેથી, $\frac{1}{3 \times 10^7} = \frac{4}{y}$

$\therefore \quad y = 4 \times 3 \times 10^7 = 12 \times 10^7$ સેમી = 1200 કિમી

આમ, નકશામાં 4 સેમીના અંતરે આવેલા બે શહેર વાસ્તવિક રૂપે એકબીજાથી 1200 કિમીના અંતરે આવેલ છે.

આટલું કરો

તમારા રાજ્યનો ભૌગોલિક નકશો લો. તેમાં આપેલ પ્રમાણમાપની નોંધ કરો. હવે ફૂટપટ્ટીની મદદથી નકશામાં દર્શાવેલ બે શહેર વચ્ચેનું અંતર માપો. હવે તેમનું વાસ્તવિક અંતર શોધો.

સ્વાધ્યાય 13.1

1. એક રેલવે સ્ટેશન પર કાર પાર્કિંગનો દર નીચે પ્રમાણે છે :

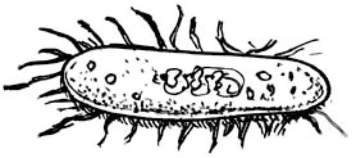
4 કલાક	₹ 60
8 કલાક	₹ 100
12 કલાક	₹ 140
24 કલાક	₹ 180

ઉપરોક્ત પાર્કિંગના દર તેમને અનુરૂપ સમય સાથે સમપ્રમાણમાં છે કે નહીં તે ચકાસો.

2. એક રંગના મૂળ મિશ્રણના 8 ભાગમાં, 1 ભાગ લાલ રંગ મેળવીને મિશ્રણ તૈયાર કરેલ છે. નીચેના કોષ્ટકમાં મૂળ મિશ્રણનો ભાગ શોધો.

લાલ રંગ	1	4	7	12	20
મૂળ મિશ્રણ	8	-	-	-	-

3. પ્રશ્ન 2માં, જો લાલ રંગના પદાર્થના 1 ભાગ માટે 75 મિલી મૂળ મિશ્રણ જોઈએ તો 1800 મિલી મૂળ મિશ્રણમાં કેટલા ભાગનો લાલ રંગનો પદાર્થ જોઈશે ?
4. ઠંડાં પીણાં બનાવતી એક ફેક્ટરીમાં, એક યંત્ર 6 કલાકમાં 840 બૉટલ ભરે છે, તો આ યંત્ર 5 કલાકમાં કેટલી બૉટલ ભરશે ?
5. એક જીવાણું(bacteria)ના ચિત્રને 50,000 ગણું મોટું કરતાં તેની લંબાઈ 5 સેમી થાય છે. જે આકૃતિમાં બતાવેલ છે. તો આ જીવાણુની વાસ્તવિક લંબાઈ કેટલી હશે ? હવે જો ચિત્રને 20,000 ગણું કરવામાં આવે તો તેની લંબાઈ શોધો.



6. એક વહાણની પ્રતિકૃતિમાં તેના કૂવાથંભની ઊંચાઈ 9 સેમી છે અને વાસ્તવિક વહાણમાં તેની ઊંચાઈ 12 મીટર છે. હવે જો વહાણની લંબાઈ 28 મીટર હોય, તો તેની પ્રતિકૃતિની લંબાઈ શોધો.

7. જો 2 કિગ્રા ખાંડમાં રહેલા સ્ફટિકોની સંખ્યા 9×10^6 છે, તો નીચે દર્શાવેલ જથ્થામાં કેટલા સ્ફટિકો હશે ? (i) 5 કિગ્રા (ii) 1.2 કિગ્રા
8. રશ્મિ પાસે, 1 સેમી બરાબર 18 કિમી પ્રમાણમાપ ધરાવતો એક સડક માર્ગનો નકશો છે. હવે જો તે આ સડક પર 72 કિમીનું અંતર કાપે છે, તો તેના દ્વારા કાપેલ અંતર નકશામાં કેટલું દર્શાવ્યું હોય ?
9. એક 5 મીટર અને 60 સેમી ઊંચા શિરોલંબ થાંભલાના પડછાયાની લંબાઈ 3 મીટર 20 સેમી છે. આ જ સમયે (i) 10 મીટર 50 સેમી ઊંચા થાંભલાના પડછાયાની લંબાઈ શોધો. (ii) 5 મીટર લંબાઈનો પડછાયો હોય તેવા થાંભલાની ઊંચાઈ શોધો.
10. એક ભારવાહક ખટારો 25 મિનિટમાં 14 કિમી અંતર કાપે છે. આ જ ઝડપે ગતિ કરે તો 5 કલાકમાં કેટલું અંતર કાપશે ?

આટલું કરો

1. એક ચોરસ પેપર ઉપર અલગ-અલગ લંબાઈના પાંચ ચોરસ દોરો. નીચેની માહિતી કોષ્ટકમાં લખો :

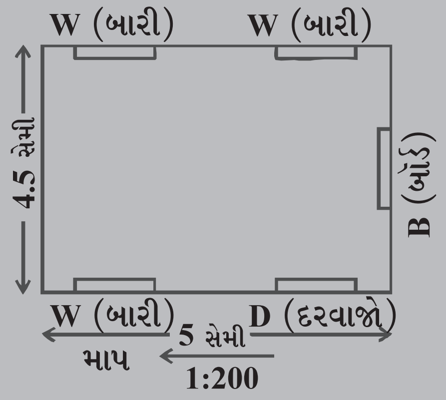
	ચોરસ-1	ચોરસ-2	ચોરસ-3	ચોરસ-4	ચોરસ-5
બાજુની લંબાઈ (L)					
પરિમિતિ (P)					
$\frac{L}{P}$					

ક્ષેત્રફળ (A)					
$\frac{L}{A}$					

શોધવાનો પ્રયત્ન કરો કે, તેની બાજુની લંબાઈ
(a) ચોરસની પરિમિતિના સમપ્રમાણમાં છે.
(b) ચોરસના ક્ષેત્રફળના સમપ્રમાણમાં છે.

2. પાંચ વ્યક્તિઓ માટે શીરો બનાવવા નીચેની સામગ્રીની જરૂરિયાત છે.
સોજી/રવો = 250 ગ્રામ, ખાંડ = 300 ગ્રામ,
ઘી = 200 ગ્રામ, પાણી = 500 મિલી.
સમપ્રમાણના પરિણામનો ઉપયોગ કરીને તમારા વર્ગનાં બધાં જ બાળકો માટે શીરો બનાવવા કેટલી સામગ્રી જોઈશે તે શોધો.

3. કોઈ એક પ્રમાણમાપ નક્કી કરીને તમારા વર્ગખંડનો એક નકશો બનાવો જેમાં બારી, બારણાં, કાળું પાટિયું વગેરે દર્શાવેલ હોય. (ઉદાહરણ આપેલ છે.)



વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

અત્યાર સુધી ચર્ચામાં લીધેલ સમપ્રમાણના ઉદાહરણો પૈકી થોડાક ઉદાહરણો લો અને વિચારો કે આ ઉદાહરણનો ઉકેલ એકમ પદ્ધતિ દ્વારા મળી શકે ?

13.3 વ્યસ્ત પ્રમાણ

બે રાશિઓ નીચે પ્રમાણે પણ પરિવર્તિત થઈ શકે છે. જેમ કે, એક રાશિમાં વધારો થાય તો તેને અનુરૂપ બીજી રાશિમાં ઘટાડો થાય અથવા તો એક રાશિમાં ઘટાડો થાય તો તેને અનુરૂપ બીજી રાશિમાં વધારો થાય. ઉદાહરણ તરીકે એક કામ પૂરું કરવા માટે કારીગરની સંખ્યામાં વધારો થાય તો કામ પૂરું કરવા માટે લાગતા સમયમાં ઘટાડો થાય છે. એ જ પ્રમાણે જો કોઈ નિયત અંતર કાપવા માટે, ઝડપમાં વધારો થાય તો, તેને અનુરૂપ સમયમાં ઘટાડો થાય છે. આ બાબત સમજવા માટે નીચે આપેલ સ્થિતિનો વિચાર કરીએ.

ઝાહિદા તેની શાળાએ ચાર અલગ-અલગ રીતે જઈ શકે છે : ચાલીને, દોડીને, સાયકલ ઉપર અથવા કારમાં. હવે નીચેના કોષ્ટકનો અભ્યાસ કરો.

$\times 15$ $\quad \times 3$ $\quad \times 2$

	ચાલીને	દોડીને	સાયકલ દ્વારા	કાર દ્વારા
ઝડપ (કિમી/કલાકમાં)	3	6	9	45
સમય (મિનિટમાં)	30	15	10	2

$\times \frac{1}{2}$ $\quad \times \frac{1}{3}$ $\quad \times \frac{1}{15}$

ધ્યાન આપો, અહીં જેમ ઝડપમાં વધારો થાય છે, તેમ નિયત અંતર કાપતાં લાગતા સમયમાં ઘટાડો થાય છે.

જ્યારે ઝાહિદા દોડીને પોતાની ઝડપ બમણી કરે છે ત્યારે અંતર કાપતાં લાગતો સમય $\frac{1}{2}$ ભાગનો થાય છે. હવે જ્યારે તે સાયકલનો ઉપયોગ કરીને ઝડપ ત્રણ ગણી કરે છે ત્યારે લાગતો સમય $\frac{1}{3}$ ભાગનો થાય છે. આ જ પ્રમાણે ઝડપમાં 15 ગણો વધારો થતાં નિયત અંતર કાપવા માટે લાગતો સમય $\frac{1}{15}$ ગણો થાય છે. અર્થાત્, નિયત અંતર કાપવા માટે લાગતા સમયમાં થતો ઘટાડો, ઝડપમાં થતાં વધારાના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં હોય છે. શું આપણે કહી શકીએ કે, ઝડપ અને સમય એકબીજાના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં પરિવર્તિત થાય છે ?

બે પરસ્પર વ્યસ્ત સંખ્યાઓનો ગુણાકાર 1 થાય. તેથી $\frac{1}{2}$ એ 2 ની વ્યસ્ત સંખ્યા છે. તેમજ 2 એ $\frac{1}{2}$ ની વ્યસ્ત સંખ્યા છે. (અહીં $2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$)

ચાલો, એક બીજું ઉદાહરણ જોઈએ. એક શાળા, ગણિતના પાઠ્યપુસ્તક માટે ₹ 6000 ખર્ચ કરવા માંગે છે. ₹ 40 પ્રતિ પુસ્તકના દરે કેટલાં પુસ્તક ખરીદી શકાય ? અહીં, સ્પષ્ટ છે કે 150 પુસ્તક ખરીદી શકાય. હવે જો પુસ્તકની કિંમત ₹ 40થી વધારે હોય તો આપેલ રકમમાં 150થી ઓછાં પુસ્તકોની ખરીદી શક્ય બનશે. નીચે આપેલ કોષ્ટક જુઓ :

એક પુસ્તકની કિંમત (₹ માં)	40	50	60	75	80	100
ખરીદી શકાય તેટલા પુસ્તકોની સંખ્યા	150	120	100	80	75	60

તમે શું અવલોકન કર્યું ? તમે જોઈ શકો છો કે જ્યારે એક પુસ્તકની કિંમતમાં વધારો થાય છે ત્યારે નિયત રકમમાં ખરીદી શકાય તેવાં પુસ્તકોની સંખ્યામાં ઘટાડો થાય છે.

જ્યારે પુસ્તકની કિંમત ₹ 40થી વધીને ₹ 50 થાય છે ત્યારે તેની વૃદ્ધિમાં થતો ગુણોત્તર 4 : 5 છે અને તેમને અનુરૂપ પુસ્તકોની સંખ્યા 150થી ઘટીને 120 થાય છે. તેથી તેમનો ગુણોત્તર 5 : 4 થાય. અર્થાત્ આ બંને ગુણોત્તરો એકબીજાના વ્યસ્ત છે.

ધ્યાન આપો, બે રાશિઓને અનુરૂપ મૂલ્યોનો ગુણાકાર અચળ હોય છે.

અર્થાત્ $40 \times 150 = 50 \times 120 = 6000$.

હવે જો આપણે એક પુસ્તકની કિંમત x અને ખરીદી શકાય તેવાં પુસ્તકોની સંખ્યાને y તરીકે દર્શાવીએ તો જ્યારે xમાં વધારો થાય ત્યારે yમાં ઘટાડો થશે અને તે જ પ્રમાણે xમાં ઘટાડો થાય તો yમાં વધારો થશે. અહીં બંનેનો ગુણાકાર xy અચળ રહે તે અગત્યનું છે. આમ આપણે કહી શકીએ કે x એ yના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં ચલે છે અને y એ xના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં ચલે છે. આમ, બે રાશિઓ x અને y એકબીજાના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં ચલે છે તેમ કહેવાય, જો તેમની વચ્ચે $xy = k$ પ્રકારનો કોઈ સંબંધ હોય, અહીં k અચળાંક છે.

હવે જો xનાં મૂલ્યો x_1 અને x_2 ને અનુરૂપ yનાં મૂલ્યો અનુક્રમે y_1 અને y_2 હોય તો

$x_1 y_1 = x_2 y_2 (= k)$ અર્થાત $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$ થાય.

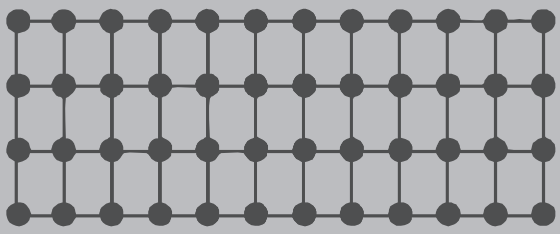
આમ, x અને y વ્યસ્ત પ્રમાણમાં છે.

આમ, ઉપરોક્ત ઉદાહરણમાં એક પુસ્તકની કિંમત અને નિયત રકમમાં ખરીદાયેલ પુસ્તકોની સંખ્યા એકબીજાના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં છે. તેવી જ રીતે વાહનની ઝડપ અને નિયત અંતર કાપવા માટે લાગતો સમય એકબીજાના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં છે. આ પ્રકારનાં બીજાં અન્ય રાશિયુગ્મો વિશે વિચારો કે જેઓ વ્યસ્ત પ્રમાણમાં પરિવર્તિત થતાં હોય. હવે તમે આ પ્રકરણની શરૂઆતમાં આપેલ ખુરશીઓની ગોઠવણી વિશેની સમસ્યાનો વિચાર કરો.

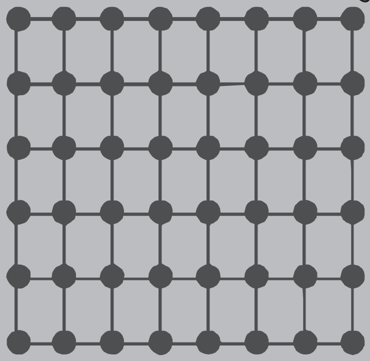
વ્યસ્ત પ્રમાણમાં આ મુદ્દાને નીચેની પ્રવૃત્તિ દ્વારા વધુ સારી રીતે સમજવાનો પ્રયત્ન કરીએ.

આટલું કરો

એક ચોરસ કાગળ લો અને તેના પર 48 ‘કુકરી’ને અલગ-અલગ સંખ્યાની હરોળમાં દર્શાવ્યા મુજબ ગોઠવો.



4 હાર, 12 સ્તંભ



6 હાર, 8 સ્તંભ

હરોળની સંખ્યા (R)	(R_1) 2	(R_2) 3	(R_3) 4	(R_4) 6	(R_5) 8
સ્તંભની સંખ્યા (C)	(C_1) ...	(C_2) ...	(C_3) 12	(C_4) 8	(C_5) ...

શું તમે જોયું ? અહીં જ્યારે Rમાં વધારો થાય છે ત્યારે Cમાં ઘટાડો થાય છે.

(i) શું $R_1 : R_2 = C_2 : C_1$ છે ? (ii) શું $R_3 : R_4 = C_4 : C_3$ છે ?

(iii) શું R અને C એકબીજાના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં છે ?

આ પ્રવૃત્તિ 36 ‘કુકરી’ લઈને ફરીથી કરો.

પ્રયત્ન કરો

નીચે દર્શાવેલ કોષ્ટકનો અભ્યાસ કરીને બતાવો કે કયા બે ચલ(અહીં x અને y)ની જોડ પરસ્પર વ્યસ્ત પ્રમાણમાં છે.

(i)

x	50	40	30	20
y	5	6	7	8

(ii)

x	100	200	300	400
y	60	30	20	15

(iii)

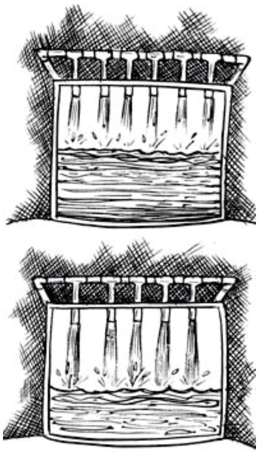
x	90	60	45	30	20	5
y	10	15	20	25	30	35

હવે થોડાંક એવાં ઉદાહરણ જોઈએ જેમાં વ્યસ્ત પ્રમાણનો ઉપયોગ થતો હોય,

> જ્યારે બે રાશિઓ x અને y સમપ્રમાણમાં (અથવા સમચલનમાં) હોય, તો તેને $x \propto y$ લખી શકાય. જ્યારે બે રાશિઓ x અને y વ્યસ્ત પ્રમાણમાં (અથવા વ્યસ્ત ચલનમાં) હોય ત્યારે તેને $x \propto \frac{1}{y}$ લખાય.

ઉદાહરણ 7 : એક ટાંકીને 1 કલાક અને 20 મિનિટમાં ભરવા માટે 6 પાઇપનો ઉપયોગ કરવો પડે છે. હવે જો ફક્ત 5 પાઇપનો ઉપયોગ કરીએ તો ટાંકીને ભરાતા કેટલો સમય લાગે ?

ઉકેલ : ધારો કે ટાંકીને ભરવા માટે લાગતો સમય x મિનિટ છે.



તેથી આપેલ કોષ્ટક પ્રમાણે :

પાઇપની સંખ્યા	6	5
સમય (મિનિટમાં)	80	x

પાઇપની સંખ્યા જેટલી ઓછી, ટાંકી ભરાવામાં લાગતો સમય એટલો જ વધારે. અર્થાત્ આ વ્યસ્ત પ્રમાણની સ્થિતિ છે.

માટે, $80 \times 6 = x \times 5$ $[x_1 y_1 = x_2 y_2]$

$\therefore \quad \frac{80 \times 6}{5} = x$

$\therefore \quad x = 96$

આમ, 5 પાઇપ વડે ટાંકીને ભરાતાં લાગતો સમય 96 મિનિટ એટલે કે 1 કલાક 36 મિનિટ થાય.

ઉદાહરણ 8 : એક છાત્રાલયમાં 100 વિદ્યાર્થીઓ છે. 20 દિવસ ચાલે તેટલી ભોજનસામગ્રી પડેલ છે. હવે જો 25 વિદ્યાર્થીઓ નવા આવે, તો ભોજનસામગ્રી કેટલા દિવસ ચાલશે ?

ઉકેલ : ધારો કે 125 વિદ્યાર્થીઓ હોય તો ભોજનસામગ્રી y દિવસ સુધી ચાલશે. આપની પાસે નીચે પ્રમાણેનું કોષ્ટક છે :

વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	100	125
દિવસ	20	y

ધ્યાન આપો, અહીં જેમ વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા વધશે, તેમ સામગ્રી ખલાસ થવા માટેના દિવસો ઘટશે.

આથી, આ વ્યસ્ત પ્રમાણની સ્થિતિ છે.

તેથી, $100 \times 20 = 125 \times y$

અથવા $\frac{100\ ´\ 20}{125} = y$ અથવા $16 = y$

આમ, જો 25 વિદ્યાર્થી વધારે જોડાય તો ભોજનસામગ્રી 16 દિવસ ચાલશે.

બીજી રીત : અહીં $x_1 y_1 = x_2 y_2$ ને $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$ તરીકે પણ લખી શકાય.

અર્થાત $x_1 : y_1 = x_2 : y_2$

$\therefore \quad 100 : 125 = y : 20$

$\therefore \quad y = \frac{100 \times 20}{125} = 16$

ઉદાહરણ 9 : જો 15 કારીગર એક દીવાલ 48 કલાકમાં બનાવી શકે તો આ જ કામને 30 કલાકમાં પૂરું કરવા કેટલા કારીગર જોઈએ ?

ઉકેલ : ધારો કે 30 કલાકમાં કામ પૂરું કરવા માટે જરૂરી કારીગરોની સંખ્યા y છે.

તેથી આપણને નીચે પ્રમાણે કોષ્ટક મળે.

સમય (કલાકમાં)	48	30
કારીગરની સંખ્યા	15	y

અહીં વધારે કારીગર હોય તો દીવાલ બનાવવા ઓછો સમય લાગે.
આમ, આ એક વ્યસ્ત પ્રમાણની સ્થિતિ છે.

માટે, $48 \times 15 = 30 \times y$

$\therefore \quad \frac{48 \times 15}{30} = y$

$\therefore \quad y = 24$

અર્થાત્ આ કામને 30 કલાકમાં પૂરું કરવા માટે 24 કારીગરની જરૂર પડે.

સ્વાધ્યાય 13.2

1. નીચેનામાંથી કયાં વિધાનો વ્યસ્ત પ્રમાણમાં છે ?
   (i) કોઈ એક કામમાં કારીગરોની સંખ્યા અને કામ પૂરું કરવા માટે લાગતો સમય.
   (ii) યાત્રા કરવા માટેનો કુલ સમય અને અચળ ઝડપથી કાપેલું અંતર.
   (iii) એક ખેતરનું ક્ષેત્રફળ અને તેમાંથી લીધેલ પાકનો જથ્થો.
   (iv) એક નિશ્ચિત યાત્રા માટે લાગતો સમય અને વાહનની ઝડપ.
   (v) કોઈ એક દેશની કુલ જનસંખ્યા અને વ્યક્તિ દીઠ જમીનનું ક્ષેત્રફળ.

2. એક ટેલીવિઝન ગેમ શો(game show)માં પુરસ્કારની રકમ ₹ 1,00,000 દરેક વિજેતાને સરખા ભાગે વહેંચવામાં આવે છે. નીચે દર્શાવેલ કોષ્ટકને પૂર્ણ કરો અને જણાવો કે કોઈ એક વ્યક્તિગત વિજેતાને મળેલી પુરસ્કારની રકમ કુલ વિજેતાઓની સંખ્યાના સમપ્રમાણમાં છે કે વ્યસ્ત પ્રમાણમાં છે ?

વિજેતાઓની સંખ્યા	1	2	4	5	8	10	20
પ્રત્યેક વિજેતાને મળેલ પુરસ્કાર (₹માં)	1,00,000	50,000					

3. રહેમાન, એક પૈડામાં આરા (spokes) લગાવે છે. આ માટે તે સમાન લંબાઈના આરાનો ઉપયોગ કરે છે. હવે તે આરા એવી રીતે લગાવે છે કે જેથી બે ક્રમિક આરા વચ્ચે બનતો ખૂણો સમાન હોય. હવે તેને નીચે આપેલ કોષ્ટક પૂર્ણ કરીને મદદ કરો.

આરાની સંખ્યા	4	6	8	10	12
બે ક્રમિક આરા વચ્ચે બનતો ખૂણો	90°	60°			

(i) શું આરાની સંખ્યા અને બે ક્રમિક આરા વચ્ચે બનતો ખૂણો પરસ્પર વ્યસ્ત પ્રમાણમાં છે ?

(ii) 15 આરાવાળા એક પૈડામાં બે ક્રમિક આરાની જોડ વચ્ચે બનતા ખૂણાનું માપ શોધો.

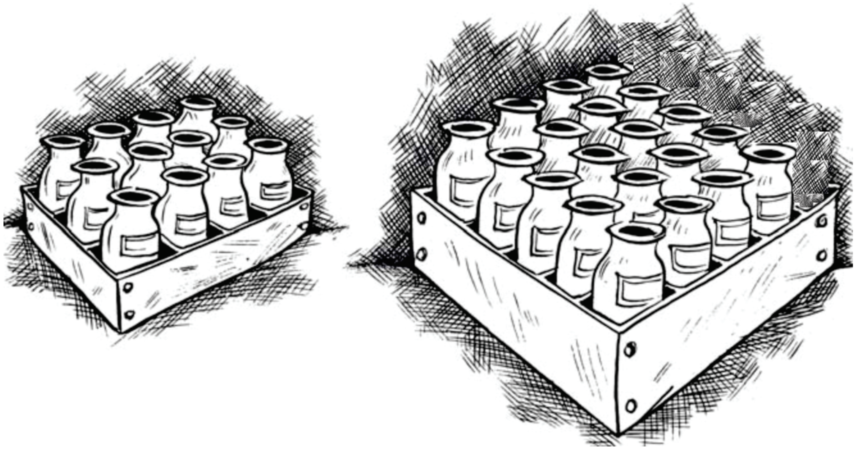
(iii) બે ક્રમિક આરાની જોડ વચ્ચે બનતા ખૂણાનું માપ 40° છે તો આરાની સંખ્યા શોધો.

4. ડબ્બામાં રહેલી મીઠાઈને 24 બાળકો વચ્ચે વહેંચતાં પ્રત્યેક બાળકને મીઠાઈના 5 ટુકડા મળે છે. હવે જો બાળકોની સંખ્યામાં 4નો ઘટાડો થાય તો પ્રત્યેક બાળકને કેટલી મીઠાઈ મળશે ?

5. એક ખેડૂત પાસે 20 પશુઓને 6 દિવસ સુધી ખવડાવી શકાય તેટલો ઘાસચારો છે. હવે જો તેની પાસે 10 પશુઓ વધારે આવે તો આ ઘાસચારો કેટલા દિવસ ચાલશે ?

6. એક ઠેકેદાર અંદાજ મૂકે છે કે જશમિંદરના ઘરે ફરીથી વીજતાર લગાવવાનું કામ 3 વ્યક્તિ, 4 દિવસમાં પૂરું કરી શકે છે. હવે જો તે 3ના બદલે 4 વ્યક્તિને આ કામ પર લગાવે તો આ કામ કેટલા દિવસમાં પૂરું થાય ?

7. એક જથ્થામાં રહેલી શીશીઓને, 1 બૉક્સમાં 12 શીશીઓ હોય તેવા 25 બૉક્સમાં રાખવામાં આવેલ છે. હવે જો આ જથ્થાની શીશીઓને એવી રીતે રાખવામાં આવે કે જેથી પ્રત્યેક બૉક્સમાં 20 શીશીઓ હોય તો આવાં કેટલાં બૉક્સ ભરાશે ?



8. એક ફેક્ટરીમાં નિશ્ચિત સંખ્યાની વસ્તુઓ 63 દિવસમાં બનાવવા 42 યંત્રોની જરૂર પડે છે. આ જ સંખ્યાની વસ્તુઓ 54 દિવસમાં બનાવવા કેટલાં યંત્રો જોઈએ ?

9. એક કારને 60 કિમી/કલાકની ઝડપથી કોઈ એક સ્થાન પર પહોંચવા માટે 2 કલાકનો સમય લાગે છે. હવે જો કારની ઝડપ 80 કિમી/કલાક હોય તો કેટલો સમય લાગશે ?

10. એક ઘરમાં નવી બારીઓ લગાવવા માટે 2 વ્યક્તિઓને 3 દિવસ લાગે છે.

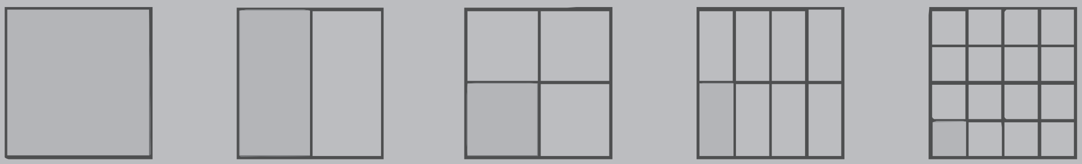
(i) કાર્યની શરૂઆતમાં જ એક વ્યક્તિ બીમાર પડે તો કાર્ય પૂરું કરવામાં કેટલો સમય લાગશે ?

(ii) એક જ દિવસમાં બારીઓ લગાવવા કેટલી વ્યક્તિઓની જરૂર પડશે ?

11. કોઈ એક શાળામાં 45 મિનિટનો એક એવા 8 તાસ છે. હવે જો શાળામાં 9 તાસ કરવા હોય તો દરેક તાસનો સમય કેટલો રાખવો પડે ? (અહીં, શાળાનો સમય સમાન રહે છે તેવું માનવું.)

આટલું કરો

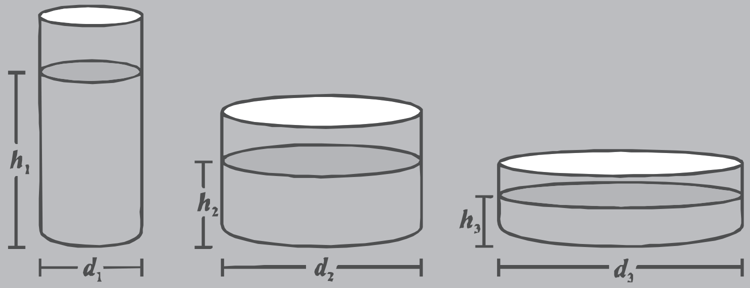
1. એક કાગળ લો. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ તેમાં ગડી પાડી અને સમાન ભાગમાં વિભાજિત કરો. દરેક સ્થિતિમાં બનતા ભાગની સંખ્યા અને કોઈ એક ભાગનું ક્ષેત્રફળ લખો.



તમારા અવલોકનોને કોષ્ટક સ્વરૂપે દર્શાવો અને તમારા મિત્રો સાથે ચર્ચા કરો. શું આ એક વ્યસ્ત પ્રમાણની સ્થિતિ છે ? કેમ ?

ભાગની સંખ્યા	1	2	4	8	16
પ્રત્યેક ભાગનું ક્ષેત્રફળ	કાગળનું ક્ષેત્રફળ	કાગળના ક્ષેત્રફળનો $\frac{1}{2}$ ભાગ			

2. ગોળાકાર તળિયું ધરાવતાં અલગ અલગ માપનાં પાત્ર લો. પ્રત્યેક પાત્રમાં નિશ્ચિત જથ્થાનું પાણી ભરો. હવે દરેક પાત્રનો વ્યાસ અને તેમાં રહેલા પાણીની ઊંચાઈ નોંધો. તમારાં અવલોકનોનું કોષ્ટક બનાવો. શું આ એક વ્યસ્ત પ્રમાણની સ્થિતિ છે ?



પાત્રનો વ્યાસ (સેમીમાં)			
પાણીની સપાટીનું સ્તર (સેમીમાં)			

આપણે શું ચર્ચા કરી ?

1. જો બે રાશિ x અને y એક સાથે એવી રીતે વધે (કે ઘટે) કે જેથી તેમનાં અનુરૂપ મૂલ્યોનો ગુણોત્તર અચળ રહે તો તે સમપ્રમાણમાં છે તેમ કહેવાય. એટલે કે જો $\frac{x}{y} = k$ (k કોઈ ધન સંખ્યા છે.) હોય તો x અને y સમપ્રમાણમાં છે તેમ કહેવાય. આ સ્થિતિમાં xનાં મૂલ્યો x_1 અને x_2ને અનુરૂપ yનાં ક્રમિક મૂલ્યો y_1 અને y_2 હોય, તો $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ થાય.

2. બે રાશિ x અને y માટે જો રાશિ xમાં થતો વધારો (કે ઘટાડો), રાશિ yમાં એવી રીતે ઘટાડો (કે વધારો) કરે કે જેથી તેમનાં અનુરૂપ મૂલ્યોનો ગુણાકાર અચળ રહે તો તેઓ એકબીજાના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં છે તેમ કહેવાય. એટલે કે જો $xy = k$ હોય તો x અને y પરસ્પર વ્યસ્ત પ્રમાણમાં છે. આ સ્થિતિમાં xનાં મૂલ્યો x_1 અને x_2ને અનુરૂપ yનાં ક્રમિક મૂલ્યો y_1 અને y_2 હોય તો $x_1 y_1 = x_2 y_2$ અથવા $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$ થાય.

અવયવીકરણ

પ્રકરણ
14

14.1 પ્રાસ્તાવિક

14.1.1 પ્રાકૃતિક સંખ્યાના અવયવો

ધોરણ 6 માં અવયવો વિશે ભણ્યા તે તમને યાદ હશે. ચાલો એક પ્રાકૃતિક સંખ્યા લઈએ.

ધારો કે 30, તેને પ્રાકૃતિક સંખ્યાના ગુણાકારના રૂપમાં લખો.

$$30 = 2 \times 15$$
$$= 3 \times 10 = 5 \times 6$$

તેથી 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 અને 30 એ 30ના અવયવો છે. આમાંથી 2, 3, 5 એ તેના અવિભાજ્ય અવયવો છે. (કેમ ?)

જે સંખ્યાને તેના અવિભાજ્ય અવયવોના ગુણાકાર સ્વરૂપે લખી શકાય, તેને તેનાં અવિભાજ્ય અવયવ રૂપ કહી શકાય.

આપણને ખબર છે કે, 30ને $30 = 1 \times 30$ પણ લખી શકાય. તેથી, 1 અને 30 પણ 30ના અવયવ છે. તમે નોંધ લેશો કે 1 એ કોઈ પણ સંખ્યાનો અવયવ છે. દા.ત., $101 = 101 \times 1$ જ્યારે આપણે કોઈ સંખ્યાને તેના અવયવના ગુણાકારના રૂપમાં લખીશું ત્યારે 1ને તેના અવયવ તરીકે નહિ લખીએ જ્યાં સુધી ખાસ જરૂરિયાત ન હોય.

દા. ત., 30નું અવિભાજ્ય અવયવ રૂપ $2 \times 3 \times 5$ થાય.

70નું અવિભાજ્ય અવયવ રૂપ $2 \times 5 \times 7$ છે,

90નું અવિભાજ્ય અવયવ રૂપ $2 \times 3 \times 3 \times 5$ છે.

આ રીતે આપણે બૈજિક પદાવલિ(Algebraic Expressions)ને તેના અવયવોના ગુણાકારના રૂપમાં લખી શકીએ. જે આપણે આ પ્રકરણમાં શીખીશું.

14.1.2 બૈજિક પદાવલિના અવયવો

આપણે ધોરણ 7માં જોયું કે બૈજિક પદાવલિમાં પદો એ અવયવોના ગુણાકારના રૂપમાં હોય છે. દા.ત., બૈજિક પદાવલિ $5xy + 3x$માં પદ $5xy$ એ અવયવો 5, x અને yથી બનેલ છે. i.e.,

$$5xy = 5 \times x \times y$$

અવલોકન કરો કે અવયવો 5, x અને y ને ફરીથી અવયવોના ગુણાકારના રૂપમાં દર્શાવી શકાશે નહિ. આપણે કહી શકીએ કે 5, x અને y એ $5xy$ના અવિભાજ્ય અવયવો છે. બૈજિક પદાવલિમાં આપણે અવિભાજ્યના બદલે અવિભાજિત શબ્દ વાપરીશું. આપણે કહી શકીએ કે $5 \times x \times y$ એ $5xy$નું અવિભાજિત અવયવ રૂપ છે. **નોંધ :** $5 \times (xy)$ એ $5xy$નું અવિભાજિત અવયવ રૂપ નથી, કારણ કે xyને x અને yના ગુણાકારના રૂપમાં દર્શાવી શકાય. અર્થાત્ $xy = x \times y$

નોંધ : 1 એ $5xy$નો અવયવ છે, તેથી $5xy = 1 \times 5 \times x \times y$ હકીકતમાં 1 એ બધા પદોનો અવયવ છે, છતાં પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓની જેમ, જ્યારે ખાસ જરૂરિયાત હોય ત્યારે જ તેને કોઈ પણ પદના અવયવના રૂપમાં દર્શાવીશું.

અન્ય પદાવલિ વિચારો : $3x(x + 2)$ જેને 3, x અને $(x + 2)$ અવયવોનાં ગુણાકારના રૂપમાં લખી શકાય.

$$3x(x + 2) = 3 \times x \times (x + 2)$$

અવયવો 3, x અને $(x + 2)$ એ $3x(x + 2)$ના અવિભાજિત અવયવો છે. આ રીતે પદાવલિ $10x(x + 2)(y + 3)$ને તેના અવિભાજિત અવયવોના રૂપમાં આ રીતે દર્શાવી શકાય.

$$10x(x + 2)(y + 3) = 2 \times 5 \times x \times (x + 2) \times (y + 3)$$

14.2 અવયવીકરણ એટલે શું ?

જ્યારે આપણે બૈજિક પદાવલિનું અવયવીકરણ કરીએ ત્યારે તેને અવયવોના ગુણાકારના રૂપમાં લખીએ છીએ. આ અવયવો સંખ્યા, બૈજિક ચલ કે બૈજિક પદાવલિ હોઈ શકે.

પદાવલિઓ જેવી કે $3xy$, $5x^2y$, $2x(y + 2)$, $5(y + 1)(x + 2)$ અવયવનાં રૂપમાં જ છે. તેના અવયવો માત્ર તેને વાંચીને જ મેળવી શકાય છે, જે આપણે જાણીએ છીએ.

બીજી તરફ $2x + 4$, $3x + 3y$, $x^2 + 5x$, $x^2 + 5x + 6$ જેવી પદાવલિમાં તેમના અવયવો સીધા મળી શકે તેમ નથી. આ પદાવલિનું અવયવીકરણ કરવા માટે અર્થાત્ અવયવો મેળવવા માટે એક વ્યવસ્થિત પદ્ધતિની જરૂર છે. જે આપણે હવે શીખીશું.

14.2.1 સામાન્ય અવયવોની રીત

- આપણે એક સાદી પદાવલિ $(2x + 4)$ લઈએ.

  દરેક પદને આપણે અવિભાજિત અવયવોના રૂપમાં લખીએ.

$$2x = 2 \times x$$
$$4 = 2 \times 2$$
$$2x + 4 = (2 \times x) + (2 \times 2)$$

અહીં, 2 એ બન્ને પદમાં સામાન્ય અવયવ છે.

વિભાજનના નિયમના આધારે અવલોકન કરતાં,

$$2 \times (x + 2) = (2 \times x) + (2 \times 2)$$

તેથી આપણે લખી શકીએ કે,

$$2x + 4 = 2 \times (x + 2) = 2(x + 2)$$

આમ, પદાવલિ $2x + 4$ એ $2(x + 2)$ જેવી જ છે. તેના અવયવો 2 અને $(x + 2)$ તરીકે વાંચી શકાય જે તેના અવિભાજિત અવયવો છે.

ધારો કે $5xy + 10x$ના અવયવ મેળવવા છે.

તો, $5xy$ અને $10x$ને તેના અવિભાજિત અવયવોના રૂપમાં નીચે મુજબ લખી શકાય :

$$5xy = 5 \times x \times y$$
$$10x = 2 \times 5 \times x$$

અહીં, 5 અને x એ બન્ને પદમાં સામાન્ય અવયવો છે.

હવે, $5xy + 10x$

$$= (5 \times x \times y) + (2 \times 5 \times x)$$
$$= (5x \times y) + (5x \times 2)$$

આપણે બન્ને પદને વિભાજનના નિયમનો ઉપયોગ કરીને જોડીએ,

$$(5x \times y) + (5x \times 2) = 5x \times (y + 2)$$

તેથી, $5xy + 10x = 5x(y + 2)$ જે પદાવલિનું ઇચ્છિત અવયવ સ્વરૂપ છે.

ઉદાહરણ 1 : $12a^2b + 15ab^2$નું અવયવીકરણ કરો.

ઉકેલ :

$$12a^2b = 2 \times 2 \times 3 \times a \times a \times b$$
$$15ab^2 = 3 \times 5 \times a \times b \times b$$

બન્ને પદોમાં 3, a, અને b સામાન્ય અવયવો છે.

તેથી, $12a^2b + 15ab^2 = (3 \times a \times b \times 2 \times 2 \times a) + (3 \times a \times b \times 5 \times b)$

$= 3 \times a \times b \times [(2 \times 2 \times a) + (5 \times b)]$

($\because$ પદોને જોડતાં;)

$= 3ab \times (4a + 5b)$

$= 3ab(4a + 5b)$ (જરૂરી અવયવ રૂપ)

ઉદાહરણ 2 : $10x^2 - 18x^3 + 14x^4$નું અવયવીકરણ કરો.

ઉકેલ :

$$10x^2 = 2 \times 5 \times x \times x$$
$$18x^3 = 2 \times 3 \times 3 \times x \times x \times x$$
$$14x^4 = 2 \times 7 \times x \times x \times x \times x$$

ત્રણે પદોમાં 2, x અને x સામાન્ય અવયવો છે.

તેથી, $10x^2 - 18x^3 + 14x^4 = (2 \times x \times x \times 5) - (2 \times x \times x \times 3 \times 3 \times x)$

$+ (2 \times x \times x \times 7 \times x \times x)$

$= 2 \times x \times x \times [(5 - (3 \times 3 \times x) + (7 \times x \times x)]$ ($\because$ ત્રણે પદોને જોડતાં;)

$= 2x^2(5 - 9x + 7x^2)$

$= 2x^2(7x^2 - 9x + 5)$

તમે નોંધ્યું કે પદાવલિના અવયવ રૂપમાં માત્ર એક જ પદ છે ?

પ્રયત્ન કરો

અવયવો શોધો : (i) $12x + 36$ (ii) $22y - 33z$ (iii) $14pq + 35pqr$

14.2.2 પદોની પુનઃગોઠવણી દ્વારા અવયવીકરણ

પદાવલિ $2xy + 2y + 3x + 3$ને જુઓ. તમે જોશો કે પ્રથમ બે પદોમાં 2 અને y અને છેલ્લાં બે પદોમાં 3 સામાન્ય અવયવ છે. પણ બધાં પદોમાં સામાન્ય અવયવ એક પણ નથી.

$(2xy + 2y)$ને અવયવોના રૂપમાં લખીએ

$2xy + 2y = (2 \times x \times y) + (2 \times y)$

$= (2 \times y \times x) + (2 \times y \times 1)$

$= (2y \times x) + (2y \times 1)$

$= 2y(x + 1)$

તે રીતે, $3x + 3 = (3 \times x) + (3 \times 1)$

$= 3 \times (x + 1)$

$= 3(x + 1)$

નોંધ : અહીં 1 ને અવયવ તરીકે દર્શાવવો જરૂરી છે. શા માટે ?

તેથી $2xy + 2y + 3x + 3 = 2y(x + 1) + 3(x + 1)$

અહીં, બન્ને પદોની જમણી બાજુમાં $(x + 1)$ સામાન્ય અવયવ છે. બન્ને પદોને જોડતાં,

$$2xy + 2y + 3x + 3 = 2y(x + 1) + 3(x + 1) = (x + 1)(2y + 3)$$

હવે, પદાવલિ $2xy + 2y + 3x + 3$ તેના અવયવોના ગુણાકારના રૂપમાં છે. તેના અવયવો $(x + 1)$ અને $(2y + 3)$ છે. જે અવિભાજિત અવયવો છે.

પદોની પુનઃગોઠવણી એટલે શું ?

ધારો કે, આપણે હમણાં અભ્યાસમાં લીધેલ પદાવલિ જો $2xy + 3 + 2y + 3x$ સ્વરૂપે આપવામાં આવે તો, તેનું અવયવીકરણ સરળ બનતું નથી. જેથી, આ પદાવલિના અવયવ મેળવવા આપેલાં પદોનાં સ્થાનમાં ફેરફાર કરી તેને $2xy + 2y + 3x + 3$ સ્વરૂપે લેતાં $(2xy + 2y)$ અને $(3x + 3)$ એવાં બે જૂથ મળે, જેનાથી અવયવીકરણ સરળ બને. આ પ્રક્રિયાને પદોની પુનઃગોઠવણી કહે છે.

પદોની પુનઃગોઠવણી એકથી વધારે રીતે થઈ શકે. ધારો કે, આપણે પદાવલિને $2xy + 3x + 2y + 3$ ક્રમમાં ગોઠવીએ તો,

$$\begin{aligned}2xy + 3x + 2y + 3 &= 2 \times x \times y + 3 \times x + 2 \times y + 3\\ &= x \times (2y + 3) + 1 \times (2y + 3)\\ &= (2y + 3)(x + 1)\end{aligned}$$

અહીં, અવયવો સમાન જ મળે છે. પરંતુ માત્ર અલગ ક્રમમાં દેખાય છે.

ઉદાહરણ 3 : $6xy - 4y + 6 - 9x$ નું અવયવીકરણ કરો.

ઉકેલ :

સોપાન 1 બધાં પદોમાં કોઈ સામાન્ય અવયવ છે ? તે ચકાસો. અહીં એક પણ નથી.

સોપાન 2 ગોઠવણી વિશે વિચારો. જુઓ પ્રથમ બે પદોમાં $2y$ સામાન્ય અવયવ છે.

$$6xy - 4y = 2y(3x - 2) \qquad (a)$$

છેલ્લાં બે પદોનું શું ? તમે તેનો ક્રમ $-9x + 6$ કરો તો અવયવ $(3x - 2)$ મળશે.

$$\begin{aligned}-9x + 6 &= -3(3x) + 3(2)\\ &= -3(3x - 2) \qquad (b)\end{aligned}$$

સોપાન 3 (a) અને (b)ને સાથે લેતાં

$$\begin{aligned}6xy - 4y + 6 - 9x &= 6xy - 4y - 9x + 6\\ &= 2y(3x - 2) - 3(3x - 2)\\ &= (3x - 2)(2y - 3)\end{aligned}$$

$(3x - 2)$ અને $(2y - 3)$ એ $(6xy - 4y + 6 - 9x)$ના અવયવો છે.

સ્વાધ્યાય 14.1

1. આપેલાં પદોમાં સામાન્ય અવયવ મેળવો.

(i) $12x, 36$ (ii) $2y, 22xy$ (iii) $14pq, 28p^2q^2$
(iv) $2x, 3x^2, 4$ (v) $6abc, 24ab^2, 12a^2b$ (vi) $16x^3, -4x^2, 32x$
(vii) $10pq, 20qr, 30rp$ (viii) $3x^2y^3, 10x^3y^2, 6x^2y^2z$

2. આપેલી પદાવલિઓના અવયવ મેળવો.

(i) $7x - 42$ (ii) $6p - 12q$ (iii) $7a^2 + 14a$
(iv) $-16z + 20z^3$ (v) $20l^2m + 30alm$ (vi) $5x^2y - 15xy^2$
(vii) $10a^2 - 15b^2 + 20c^2$ (viii) $-4a^2 + 4ab - 4ca$ (ix) $x^2yz + xy^2z + xyz^2$
(x) $ax^2y + bxy^2 + cxyz$

3. અવયવ મેળવો.

(i) $x^2 + xy + 8x + 8y$ (ii) $15xy - 6x + 5y - 2$ (iii) $ax + bx - ay - by$
(iv) $15pq + 15 + 9q + 25p$
(v) $z - 7 + 7xy - xyz$

14.2.3 નિત્યસમનો ઉપયોગ કરીને અવયવીકરણ

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{(I)}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{(II)}$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \quad \text{(III)}$$

નીચેનાં ઉદાહરણો દ્વારા આપણે આ નિત્યસમનો ઉપયોગ અવયવીકરણમાં કેવી રીતે થાય એ શીખીશું. આપણે પદાવલિઓનું અવલોકન કરીશું. જો કોઈ પદાવલિનું રૂપ (પ્રકાર) કોઈ પણ નિત્યસમની જમણી બાજુ જેવું હોય તો તે પદાવલિના ડાબી બાજુનાં પદો એ તેનું યોગ્ય અવયવીકરણ આપશે.

ઉદાહરણ 4 : $x^2 + 8x + 16$ના અવયવ મેળવો.

ઉકેલ : પદાવલિનું અવલોકન કરો. અહીં ત્રણ પદો છે. તેથી તે નિત્યસમ (III) જેવું નથી. તેનું પ્રથમ અને છેલ્લું પદ પૂર્ણવર્ગ છે અને વચ્ચેના પદ પહેલા '+'ની નિશાની છે. તેથી તે $a^2 + 2ab + b^2$વાળું રૂપ છે. જ્યાં $a = x$ અને $b = 4$

જેથી, $a^2 + 2ab + b^2 = (x)^2 + 2(x)(4) + (4)^2$

$= x^2 + 8x + 16$

હવે, $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ સાથે સરખાવતાં,

$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$ (જરૂરી અવયવીકરણ)

ઉદાહરણ 5 : $4y^2 - 12y + 9$ના અવયવ મેળવો.

ઉકેલ : અવલોકન કરો, $4y^2 = (2y)^2$, $9 = 3^2$, $12y = 2 \times 3 \times 2y$

તેથી, $4y^2 - 12y + 9 = (2y)^2 - 2 \times (3) \times (2y) + (3)^2$

$= (2y - 3)^2$ (જરૂરી અવયવીકરણ)

> અહીં અવલોકન કરી શકીએ કે,
> આપેલ પદાવલિનું સ્વરૂપ :
> $a^2 - 2ab + b^2$ પ્રકારનું છે.
> જ્યાં $a = 2y$ અને $b = 3$ અને
> $2ab = 2(2y)(3) = 12y$

ઉદાહરણ 6 : $49p^2 - 36$ના અવયવ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં બે પદો છે, બંને પૂર્ણવર્ગ છે અને બીજું પદ ઋણ છે.

પદાવલિનું રૂપ $(a^2 - b^2)$ જેવું છે. અહીં નિત્યસમ III નો ઉપયોગ કરીશું.

$49p^2 - 36 = (7p)^2 - (6)^2$

$= (7p - 6)(7p + 6)$ (જરૂરી અવયવીકરણ)

ઉદાહરણ 7 : $a^2 - 2ab + b^2 - c^2$ના અવયવ મેળવો.

ઉકેલ : આપેલ પદાવલિના પ્રથમ ત્રણ પદોનું રૂપ $(a - b)^2$ જેવું છે અને ચોથું પદ પૂર્ણવર્ગ છે. એટલે આપેલ પદાવલિને બે વર્ગોના તફાવતના રૂપમાં લખી શકાય.

તેથી, $a^2 - 2ab + b^2 - c^2 = (a - b)^2 - c^2$ (નિત્યસમ II)

$= [(a - b) - c]\,[(a - b) + c]$ (નિત્યસમ III)

$= (a - b - c)\,(a - b + c)$ (જરૂરી અવયવીકરણ)

અહીં, નોંધો કે જરૂરી અવયવીકરણ માટે આપણે બે નિત્યસમ એક પછી એક લાગુ પાડ્યા છે.

ઉદાહરણ 8 : $m^4 - 256$ના અવયવ મેળવો.

ઉકેલ : $m^4 = (m^2)^2$ અને $256 = (16)^2$

તેથી, આપેલ પદાવલિ નિત્યસમ (III) જેવી છે.

$$m^4 - 256 = (m^2)^2 - (16)^2$$
$$= (m^2 - 16)(m^2 + 16) \text{ (નિત્યસમ (III) પરથી)}$$

હવે $(m^2 + 16)$નું આગળ અવયવીકરણ ન થઈ શકે પણ $(m^2 - 16)$નું નિત્યસમ (III) દ્વારા આગળ અવયવીકરણ થઈ શકે.

$$m^2 - 16 = m^2 - 4^2$$
$$= (m - 4)(m + 4)$$

તેથી $m^2 - 256 = (m - 4)(m + 4)(m^2 + 16)$

14.2.4 $(x + a)$ $(x + b)$ પ્રકારના અવયવો

હવે આપણે એક ચલવાળી પદાવલિઓનું અવયવીકરણ શીખીએ. જેવી કે, $x^2 + 5x + 6$, $y^2 - 7y + 12$, $z^2 - 4z - 12$, $3m^2 + 9m + 6$ વિગેરે....અવલોકન કરો કે આ પદાવલિઓ $(a + b)^2$ કે $(a - b)^2$ જેવી નથી. તે પૂર્ણવર્ગ પણ નથી. દા.ત., $x^2 + 5x + 6$માં 6 એ પૂર્ણવર્ગ નથી.

આ પદાવલિઓ $(a^2 - b^2)$ જેવી પણ નથી. તે $x^2 + (a + b)x + ab$ જેવી લાગે છે. તેથી આપણે નિત્યસમ (IV) જે આગળના પ્રકરણમાં ભણ્યા તેનો ઉપયોગ કરીને આવી પદાવલિઓનું અવયવીકરણ કરીએ.

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab \qquad \text{(IV)}$$

તેના માટે આપણે xના સહગુણક અને અચળ પદનું અવલોકન કરીએ.

હવે નીચેના ઉદાહરણ દ્વારા જોઈએ કે એ કેવી રીતે થશે ?

ઉદાહરણ 9 : $x^2 + 5x + 6$ના અવયવ મેળવો.

ઉકેલ : આપણે નિત્યસમ (IV)ની જમણી બાજુને $x^2 + 5x + 6$ સાથે સરખાવીએ તો આપણને $ab = 6$ અને $a + b = 5$ મળે.

આ પરથી આપણે a અને b મેળવવા પડે, જેથી અવયવો $(x + a)$ અને $(x + b)$ થાય.

જો $ab = 6$ હોય તો a અને b એ 6ના અવયવ છે.

ચાલો, $a = 6$, $b = 1$ લઈ પ્રયત્ન કરીએ. આ કિંમતો માટે $a + b = 7$ મળે, 5 નહીં. તેથી આ પસંદગી યોગ્ય નથી. હવે $a = 2$ અને $b = 3$ ચકાસીએ. અહીં $a + b = 5$ થાય છે.

આમ, આપેલ પદાવલિનું અવયવીકરણવાળું રૂપ $(x + 2)(x + 3)$ થાય.

> વ્યાપક રીતે $x^2 + px + q$ પ્રકારની બૈજિક પદાવલિનું અવયવીકરણ કરવા માટે આપણે qના બે અવયવો a અને b શોધવા પડે જેથી
>
> $ab = q$ અને $a + b = p$ થાય.
>
> તો પદાવલિ $x^2 + (a + b)x + ab$ થશે.
>
> અર્થાત્, $x^2 + ax + bx + ab$ થશે.
>
> અર્થાત્, $x(x + a) + b(x + a)$ થશે.
>
> અર્થાત્, $(x + a)(x + b)$. જે જરૂરી ઇચ્છિત અવયવો છે.

ઉદાહરણ 10 : $y^2 - 7y + 12$ના અવયવ મેળવો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, $12 = 3 \times 4$ અને $3 + 4 = 7$

તેથી $y^2 - 7y + 12 = y^2 - 3y - 4y + 12$

$$= y(y - 3) - 4(y - 3) = (y - 3)(y - 4)$$

અહીં નોંધો કે આ વખતે આપણે a અને b શોધવા માટે આપેલ પદાવલિને નિત્યસમ (IV) સાથે સરખાવી નથી. થોડા પ્રયત્નો બાદ આપેલ પદાવલિનું અવયવીકરણ કરવા માટે તમારે પણ તેને નિત્યસમ સાથે સરખાવવાની જરૂર રહેશે નહિ. તમે સીધા જ આગળ વધી શકશો.

ઉદાહરણ 11 : $z^2 - 4z - 12$ના અવયવ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં $ab = -12$ તેનો મતલબ a અને bમાંથી કોઈ પણ એક ઋણ છે.

$a + b = -4$ છે તેથી જે સંખ્યા મોટી છે તે ઋણ છે. આપણે $a = -4$ અને $b = 3$ લઈને ચકાસીએ પણ આ શક્ય બનશે નહીં. કારણ કે, અહીં $a + b = -1$ થાય છે.

હવે, $a = -6$, $b = 2$ લઈને ચકાસીએ, અહીં $a + b = -4$ થાય છે.

તેથી,
$$z^2 - 4z - 12 = z^2 - 6z + 2z - 12$$
$$= z(z - 6) + 2(z - 6)$$
$$= (z - 6)(z + 2)$$

ઉદાહરણ 12 : $3m^2 + 9m + 6$ના અવયવ મેળવો.

ઉકેલ : આપણે નોંધીએ કે ત્રણેય પદોમાં 3 એ સામાન્ય અવયવ છે.

તેથી,
$$3m^2 + 9m + 6 = 3(m^2 + 3m + 2)$$

હવે,
$$m^2 + 3m + 2 = m^2 + m + 2m + 2 \quad (\because 2 = 1 \times 2)$$
$$= m(m + 1) + 2(m + 1)$$
$$= (m + 1)(m + 2)$$

આમ,
$$3m^2 + 9m + 6 = 3(m + 1)(m + 2)$$

સ્વાધ્યાય 14.2

1. નીચેની પદાવલિઓના અવયવ મેળવો.

(i) $a^2 + 8a + 16$ (ii) $p^2 - 10p + 25$ (iii) $25m^2 + 30m + 9$

(iv) $49y^2 + 84yz + 36z^2$ (v) $4x^2 - 8x + 4$

(vi) $121b^2 - 88bc + 16c^2$

(vii) $(l + m)^2 - 4lm$ (સૂચન : $(l + m)^2$ નું વિસ્તરણ કરો.)

(viii) $a^4 + 2a^2b^2 + b^4$

2. અવયવ મેળવો.

(i) $4p^2 - 9q^2$ (ii) $63a^2 - 112b^2$ (iii) $49x^2 - 36$

(iv) $16x^5 - 144x^3$ (v) $(l + m)^2 - (l - m)^2$

(vi) $9x^2y^2 - 16$ (vii) $(x^2 - 2xy + y^2) - z^2$

(viii) $25a^2 - 4b^2 + 28bc - 49c^2$

3. પદાવલિના અવયવ મેળવો.

(i) $ax^2 + bx$ (ii) $7p^2 + 21q^2$ (iii) $2x^3 + 2xy^2 + 2xz^2$

(iv) $am^2 + bm^2 + bn^2 + an^2$ (v) $(lm + l) + m + 1$

(vi) $y(y + z) + 9(y + z)$ (vii) $5y^2 - 20y - 8z + 2yz$

(viii) $10ab + 4a + 5b + 2$ (ix) $6xy - 4y + 6 - 9x$

4. અવયવ મેળવો.

(i) $a^4 - b^4$ (ii) $p^4 - 81$ (iii) $x^4 - (y + z)^4$

(iv) $x^4 - (x - z)^4$ (v) $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$

5. નીચેની પદાવલિના અવયવ મેળવો.

(i) $p^2 + 6p + 8$ (ii) $q^2 - 10q + 21$ (iii) $p^2 + 6p - 16$

14.3 બૈજિક પદાવલિઓનો ભાગાકાર

આપણે બૈજિક પદાવલિઓનો સરવાળો અને બાદબાકી કરતા શીખ્યા. આપણને બે પદાવલિઓનો ગુણાકાર કરતાં પણ આવડે છે. પણ આપણે એક બૈજિક પદાવલિનો બીજી પદાવલિ વડે ભાગાકાર કરવા તરફ ધ્યાન આપ્યું નથી. તે આપણે અહીં શીખીશું.

આપણે યાદ કરીએ કે ભાગાકાર એ ગુણાકારની વ્યસ્ત ક્રિયા છે. $7 \times 8 = 56$ તેથી $56 \div 8 = 7$ અથવા $56 \div 7 = 8$

આ જ રીતે આપણે બૈજિક પદાવલિઓનો ભાગાકાર કરીશું.

દા.ત.,

(i) $2x \times 3x^2 = 6x^3$

તેથી $6x^3 \div 2x = 3x^2$

અને $6x^3 \div 3x^2 = 2x$

(ii) $5x(x + 4) = 5x^2 + 20x$

તેથી $(5x^2 + 20x) \div 5x = x + 4$

અને $(5x^2 + 20x) \div (x + 4) = 5x$

હવે આપણે સમજીશું કે એક પદાવલિનો ભાગાકાર બીજી પદાવલિ દ્વારા કેવી રીતે થાય. આપણે એકપદીનો ભાગાકાર એકપદી દ્વારા કેવી રીતે કરી શકાય ત્યાંથી શરૂઆત કરીશું.

14.3.1 એકપદી વડે બીજી એકપદીનો ભાગાકાર

ધારો કે, $6x^3 \div 2x$

આપણે $2x$ અને $6x^3$નું અવિભાજિત અવયવરૂપ લખીએ.

$$2x = 2 \times x$$
$$6x^3 = 2 \times 3 \times x \times x \times x$$

હવે $2x$ને અલગ પાડવા માટે આપણે $6x^3$ના અવયવોનું જૂથ બનાવીએ.

$$6x^3 = 2 \times x \times (3 \times x \times x) = (2x) \times (3x^2)$$

તેથી $6x^3 \div 2x = 3x^2$

ટૂંકી રીત : સામાન્ય અવયવોને દૂર કરવા એ બે સંખ્યાનો ભાગાકાર દર્શાવતી રીત છે.

$$77 \div 7 = \frac{77}{7} = \frac{7 \times 11}{7} = 11$$

આ રીતે,
$$6x^3 \div 2x = \frac{6x^3}{2x} = \frac{2 \times 3 \times x \times x \times x}{2 \times x} = 3 \times x \times x = 3x^2$$

ઉદાહરણ 13 : નીચેના ભાગાકાર કરો.

(i) $-20x^4 \div 10x^2$ (ii) $7x^2y^2z^2 \div 14xyz$

ઉકેલ :

(i) $-20x^4 = -2 \times 2 \times 5 \times x \times x \times x \times x$

$$10x^2 = 2 \times 5 \times x \times x$$

તેથી, $(-20x^4) \div 10x^2 = \dfrac{-2\times2\times5\times x\times x\times x\times x}{2\times5\times x\times x}$

$= -2 \times x \times x = -2x^2$

(ii) $7x^2y^2z^2 \div 14xyz = \dfrac{7\times x\times x\times y\times y\times z\times z}{2\times7\times x\times y\times z}$

$= \dfrac{x\times y\times z}{2} = \dfrac{1}{2}xyz$

પ્રયત્ન કરો

ભાગાકાર કરો.

(i) $6yz^2$ દ્વારા $24xy^2z^3$ (ii) $7a^2b^2c^3$ દ્વારા $63a^2b^4c^6$

14.3.2 એકપદી વડે બહુપદીનો ભાગાકાર

ધારો કે ત્રિપદી $4y^3 + 5y^2 + 6y$નો ભાગાકાર એકપદી $2y$ દ્વારા કરીએ.

$$4y^3 + 5y^2 + 6y = (2 \times 2 \times y \times y \times y) + (5 \times y \times y) + (2 \times 3 \times y)$$

(અહીં આપણે બહુપદીના દરેક પદને તેના અવયવોના રૂપમાં દર્શાવ્યું છે.) આપણે જોયું કે, $2 \times y$ એ બધામાં સામાન્ય પદ છે. તેથી દરેક પદમાંથી $2 \times y$ને અલગ કરતાં

$$4y^3 + 5y^2 + 6y = 2 \times y \times (2 \times y \times y) + 2 \times y \times \left(\frac{5}{2}\times y\right) + 2 \times y \times 3$$

$$= 2y(2y^2) + 2y\left(\frac{5}{2}\times y\right) + 2y(3)$$

$$= 2y\left(2y^2+ \frac{5}{2}y+3\right)$$ (સામાન્ય અવયવ $2y$ અલગથી દર્શાવેલ છે.)

તેથી, $(4y^3 + 5y^2 + 6y) \div 2y$

$$= \frac{4y^3+5y^2+6y}{2y} = \frac{2y(2y^2+\frac{5}{2}y+3)}{2y}$$

$$= 2y^2 + \frac{5}{2}y + 3$$

બીજી રીત : આપણે બહુપદીના દરેક પદને એકપદી દ્વારા ભાગી શકીએ.

$$(4y^3 + 5y^2 + 6y) \div 2y = \frac{4y^3+5y^2+6y}{2y}$$

$$= \frac{4y^3}{2y} + \frac{5y^2}{2y} + \frac{6y}{2y}$$

$$= 2y^2 + \frac{5}{2}y + 3$$

અહીં આપણે અંશની બહુપદીના દરેક પદને છેદમાં આવેલી એકપદી દ્વારા ભાગીએ છીએ...

ઉદાહરણ 14 : $24(x^2yz + xy^2z + xyz^2)$ને $8xyz$ વડે બંને રીતથી ભાગો.

ઉકેલ : $24(x^2yz + xy^2z + xyz^2)$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times [(x \times x \times y \times z) + (x \times y \times y \times z) + (x \times y \times z \times z)]$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times x \times y \times z(x + y + z)$ (સામાન્ય અવયવ લેતાં;)

$= 8 \times 3 \times xyz \times (x + y + z)$

તેથી, $24(x^2yz + xy^2z + xyz^2) \div 8xyz$

$$= \frac{8\times3\times xyz\times(x+y+z)}{8\times xyz} = 3 \times (x + y + z) = 3(x + y + z)$$

બીજી રીત, $24(x^2yz + xy^2z + xyz^2) \div 8xyz = \frac{24x^2yz}{8xyz} + \frac{24xy^2z}{8xyz} + \frac{24xyz^2}{8xyz}$

$= 3x + 3y + 3z = 3(x + y + z)$

14.4 બૈજિક પદાવલિના ભાગાકાર (બહુપદી ÷ બહુપદી)

- ધારો કે $(7x^2 + 14x) \div (x + 2)$

  આપણે $(7x^2 + 14x)$ ના અવયવો મેળવીશું.

$$7x^2 + 14x = (7 \times x \times x) + (2 \times 7 \times x)$$
$$= 7 \times x \times (x + 2)$$
$$= 7x(x + 2)$$

શું અહીં, અંશમાં રહેલ દરેક પદને, છેદમાં રહેલ દ્વિપદી વડે ભાગવાથી સરળતા રહેશે ?

$$+ 14x) \div (x + 2) = \frac{7x^2 + 14x}{x + 2}$$
$$= \frac{7x(x + 2)}{(x + 2)} = 7x$$

[અવયવ $(x + 2)$નો છેદ ઉડાડતાં]

ઉદાહરણ 15 : $44(x^4 - 5x^3 - 24x^2)$ને $11x(x - 8)$ વડે ભાગો.

ઉકેલ : $44(x^4 - 5x^3 - 24x^2)$ના અવયવ મેળવતાં;

$$44(x^4 - 5x^3 - 24x^2) = 2 \times 2 \times 11 \times x^2(x^2 - 5x - 24)$$
$$= 2 \times 2 \times 11 \times x^2(x^2 - 8x + 3x - 24)$$
$$= 2 \times 2 \times 11 \times x^2[x(x - 8) + 3(x - 8))$$
$$= 2 \times 2 \times 11 \times x^2(x + 3)(x - 8)$$

તેથી, $44(x^4 - 5x^3 - 24x^2) \div 11x(x - 8)$

$$= \frac{2 \times 2 \times 11 \times x \times x \times (x + 3) \times (x - 8)}{11 \times x \times (x - 8)}$$
$$= 2 \times 2 \times x(x + 3) = 4x(x + 3)$$

અંશ અને છેદ બંનેમાં રહેલ સામાન્ય અવયવો : 11, x અને $(x - 8)$નો છેદ ઉડાડતા

ઉદાહરણ 16 : $z(5z^2 - 80)$ને $5z(z + 4)$ વડે ભાગો.

ઉકેલ : ભાજ્ય $= z(5z^2 - 80)$

$$= z[(5 \times z^2) - (5 \times 16)]$$
$$= z \times 5 \times (z^2 - 16)$$
$$= 5z \times (z + 4)(z - 4)$$

[$\because a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ નિત્યસમનો ઉપયોગ કરતાં]

આમ, $z(5z^2 - 80) \div 5z(z + 4) = \frac{5z \times (z + 4)(z - 4)}{5z(z + 4)} = (z - 4)$

સ્વાધ્યાય 14.3

1. ભાગફળ શોધો.

(i) $28x^4 \div 56x$ (ii) $-36y^3 \div 9y^2$ (iii) $66pq^2r^3 \div 11qr^2$

(iv) $34x^3y^3z^3 \div 51xy^2z^3$ (v) $12a^8b^8 \div (-6a^6b^4)$

2. આપેલ બહુપદીને એકપદી વડે ભાગો.

(i) $(5x^2 - 6x) \div 3x$ (ii) $(3y^8 - 4y^6 + 5y^4) \div y^4$

(iii) $8(x^3y^2z^2 + x^2y^3z^2 + x^2y^2z^3) \div 4x^2y^2z^2$ (iv) $(x^3 + 2x^2 + 3x) \div 2x$

(v) $(p^3q^6 - p^6q^3) \div p^3q^3$

3. નીચેનો ભાગાકાર કરો.

(i) $(10x - 25) \div 5$ (ii) $(10x - 25) \div (2x - 5)$

(iii) $10y(6y + 21) \div 5(2y + 7)$ (iv) $9x^2y^2(3z - 24) \div 27xy(z - 8)$

(v) $96abc(3a - 12)(5b - 30) \div 144(a - 4)(b - 6)$

4. સૂચવ્યા મુજબ ભાગાકાર કરો.

(i) $5(2x + 1)(3x + 5) \div (2x + 1)$ (ii) $26xy(x + 5)(y - 4) \div 13x(y - 4)$

(iii) $52pqr(p + q)(q + r)(r + p) \div 104pq(q + r)(r + p)$

(iv) $20(y + 4)(y^2 + 5y + 3) \div 5(y + 4)$ (v) $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) \div x(x + 1)$

5. આપેલી પદાવલિના અવયવ મેળવો અને સૂચવ્યા મુજબ ભાગાકાર કરો.

(i) $(y^2 + 7y + 10) \div (y + 5)$ (ii) $(m^2 - 14m - 32) \div (m + 2)$

(iii) $(5p^2 - 25p + 20) \div (p - 1)$ (iv) $4yz(z^2 + 6z - 16) \div 2y(z + 8)$

(v) $5pq(p^2 - q^2) \div 2p(p + q)$ (vi) $12xy(9x^2 - 16y^2) \div 4xy(3x + 4y)$

(vii) $39y^3(50y^2 - 98) \div 26y^2(5y + 7)$

14.5 શું તમે ભૂલ શોધી શકશો ?

પ્રવૃત્તિ 1 સમીકરણનો ઉકેલ શોધવામાં સરિતા નીચે મુજબ ગણતરી કરે છે.

$$3x + x + 5x = 72$$

તેથી, $8x = 72$

અને તેથી, $x = \frac{72}{8} = 9$

અહીં તે ગણતરીમાં ક્યાં ભૂલ કરે છે તે શોધો અને સાચો ઉકેલ મેળવો.

મોટેભાગે, પદના સહગુણક તરીકે ‘1’ને આપણે દર્શાવતા નથી. પણ, સજાતીય પદોના સરવાળા કરીએ ત્યારે ‘1’ ધ્યાને લેવો પડે છે.

પ્રવૃત્તિ 2 અપ્પુ નીચે મુજબ ગણતરી કરે છે.

$x = -3$ માટે, $5x = 5 - 3 = 2$

શું તેની ગણતરી બરાબર છે ? જો ના, તો સુધારો.

જ્યારે ચલની ઋણ (–) કિંમત લેવામાં આવે ત્યારે કૌંસનો ઉપયોગ કરવાનું યાદ રાખો.

પ્રવૃત્તિ 3 નમ્રતા અને સલમા બૈજિક પદાવલિમાં નીચે મુજબ ગણતરી કરે છે.

	નમ્રતા	સલમા
(a)	$3(x - 4) = 3x - 4$	$3(x - 4) = 3x - 12$

જ્યારે કૌંસની અંદર રહેલ પદાવલિને, કૌંસની બહાર આવેલ અચલ (કે ચલ) વડે ગુણવામાં આવે, ત્યારે પદાવલિનાં દરેક પદને અચલ (કે ચલ) વડે ગુણવાનું હોય છે.

(b) $(2x)^2 = 2x^2$ $\qquad$ $(2x)^2 = 4x^2$

(c) $(2a - 3)(a + 2)$ $\qquad$ $(2a - 3)(a + 2)$

$= 2a^2 - 6$ $\qquad$ $= 2a^2 + a - 6$

(d) $(x + 8)^2 = x^2 + 64$ $\qquad$ $(x + 8)^2 = x^2 + 16x + 64$

(e) $(x - 5)^2 = x^2 - 25$ $\qquad$ $(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$

યાદ રાખો કે, જ્યારે તમે એકપદીનો વર્ગ કરો છો, ત્યારે તેના સહગુણક તથા દરેક અવયવનો વર્ગ કરવો પડે.

શું નમ્રતા અને સલમા દ્વારા કરાયેલ ગણતરી સાચી છે ? તમારા જવાબ માટે કારણ આપો.

જ્યારે કોઈ રીત અપનાવો ત્યારે પ્રથમ નક્કી કરો કે આ રીત ખરેખર લાગુ પડી શકે કે નહીં ?

પ્રવૃત્તિ 4 જૉસેફ એક ભાગાકાર નીચે મુજબ કરે છે : $\frac{a+5}{5} = a + 1$ તેનો મિત્ર શિરીષ આ જ ભાગાકાર નીચે મુજબ કરે છે : $\frac{a+5}{5} = a$ તેનો બીજો મિત્ર સુમન નીચે મુજબ ગણતરી કરે છે. $\frac{a+5}{5} = \frac{a}{5} + 1$ કોણે ભાગાકાર સાચો કર્યો છે ? કોણે ભૂલ કરી છે ? શા માટે ?

અંશમાં આવેલ બહુપદીને છેદમાં રહેલ એકપદી દ્વારા ભાગવામાં આવે ત્યારે આપણે અંશમાં આવેલ બહુપદીના દરેક પદ સાથે એકપદીનો ભાગાકાર કરવો પડે છે !

ગણિત ગમ્મત !

અતુલ હંમેશા જુદી રીતે વિચાર કરતો વિદ્યાર્થી છે. તે તેના શિક્ષકને પૂછે છે કે, 'જો તમે સમજાવ્યું એ જ સાચું હોય તો પછી મને નીચેની ગણતરી માટે સાચો જવાબ કેમ મળ્યો ?'

$\frac{64}{16} = \frac{\not{6}4}{1\not{6}} = \frac{4}{1}$ **શિક્ષક :** 'તારો ઉત્તર સાચો છે, પરંતુ જો તું $\frac{64}{16}$માં 6નો છેદ ઉડાડી અને $\frac{4}{1}$ મેળવે તો તે બરાબર ગણતરી નથી. ખરેખર તો, 16 એ 64નો અવયવ છે. 6 એ 64 કે 16 બેમાંથી એકનો પણ અવયવ નથી. તેથી, $\frac{64}{16} = \frac{16 \times 4}{16 \times 1} = \frac{4}{1}$ થાય. ઉપરાંત, $\frac{664}{166} = \frac{4}{1}$, $\frac{6664}{1666} = \frac{4}{1}$ અને એ જ રીતે આગળ...'

શું ખરેખર આ રસપ્રદ નથી ? શું તમે અતુલને $\frac{64}{16}$ જેવાં બીજાં ઉદાહરણ શોધવામાં મદદ કરશો ?

સ્વાધ્યાય 14.4

નીચેનાં ગાણિતિક વિધાનોમાંથી ભૂલ શોધો અને તેને સુધારો.

1. $4(x - 5) = 4x - 5$ **2.** $x(3x + 2) = 3x^2 + 2$ **3.** $2x + 3y = 5xy$

4. $x + 2x + 3x = 5x$ **5.** $5y + 2y + y - 7y = 0$ **6.** $3x + 2x = 5x^2$

7. $(2x)^2 + 4(2x) + 7 = 2x^2 + 8x + 7$ **8.** $(2x)^2 + 5x = 4x + 5x = 9x$

9. $(3x + 2)^2 = 3x + 6x + 4$

10. $x = -3$ લઈએ તો,

(a) $x^2 + 5x + 4$ એટલે $(-3)^2 + 5(-3) + 4 = 9 + 2 + 4 = 15$

(b) $x^2 - 5x + 4$ એટલે $(-3)^2 - 5(-3) + 4 = 9 - 15 + 4 = -2$

(c) $x^2 + 5x$ એટલે $(-3)^2 + 5(-3) = -9 - 15 = -24$

11. $(y - 3)^2 = y^2 - 9$ **12.** $(z + 5)^2 = z^2 + 25$

13. $(2a + 3b)(a - b) = 2a^2 - 3b^2$ **14.** $(a + 4)(a + 2) = a^2 + 8$

15. $(a - 4)(a - 2) = a^2 - 8$ **16.** $\frac{3x^2}{3x^2} = 0$

17. $\frac{3x^2+1}{3x^2} = 1 + 1 = 2$ **18.** $\frac{3x}{3x+2} = \frac{1}{2}$ **19.** $\frac{3}{4x+3} = \frac{1}{4x}$

20. $\frac{4x+5}{4x} = 5$ **21.** $\frac{7x+5}{5} = 7x$

આપણે શું ચર્ચા કરી ?

1. જ્યારે આપણે પદાવલિના અવયવ પાડીએ છીએ ત્યારે આપણે પદાવલિને અવયવોના ગુણાકાર સ્વરૂપે લખીએ છીએ. આ અવયવો સંખ્યા, બૈજિક ચલ કે બૈજિક પદાવલિ હોઈ શકે.
2. અવિભાજિત અવયવ એ એવો અવયવ છે જેને ફરીથી અવયવોના ગુણાકાર સ્વરૂપે લખી શકાતો નથી.
3. પદાવલિના અવયવ પાડવાની પદ્ધતિસરની રીત એ સામાન્ય અવયવની રીત છે. તેમાં ત્રણ તબક્કા છે : (i) પદાવલિના દરેક પદને અવિભાજ્ય અવયવના સ્વરૂપે દર્શાવો. (ii) સામાન્ય અવયવોને જુદા તારવો અને (iii) વિભાજનના નિયમની મદદથી દરેક પદના બાકી વધેલ અવયવોને ભેગા કરો.
4. કોઈ વખત આપેલી પદાવલિનાં બધાં પદોમાં કોઈપણ અવયવ સામાન્ય હોતો નથી. આવા વખતે આપેલ પદોના એવાં જૂથ બનાવો કે જેથી દરેક જૂથમાં કોઈને કોઈ અવયવ સામાન્ય હોય જ્યારે આપણે આવું કરીએ છીએ ત્યારે દરેક જૂથમાં કોઈ એક સામાન્ય અવયવ મળી આવે છે અને ત્યાર બાદ આપણે પદાવલિના અવયવ મેળવવાની દિશામાં જઈ શકીએ છીએ. આ પદોની પુનઃગોઠવણીની રીત છે.
5. પદોની પુનઃગોઠવણી બાદ અવયવીકરણમાં આપણે યાદ રાખીશું કે આપેલ પદાવલિના પદોનાં માત્ર સ્થાન બદલવાથી કે ગમે તે રીતે પદોની ગોઠવણી કરવાથી (અર્થાત્, માત્ર પદોનો ક્રમ બદલવાથી) આપણને પદાવલિના અવયવ મળી શકતા નથી. આપણે પદાવલિના પદોનું અવલોકન કરવું જોઈએ અને ભૂલ અને પ્રયત્ન દ્વારા ઈચ્છિત ગોઠવણી કરવી જોઈએ.
6. અનેક પદાવલિઓને (તેના અવયવ મેળવવા માટે) આપણે $a^2 + 2ab + b^2$, $a^2 - 2ab + b^2$, $a^2 - b^2$ અને $x^2 + (a + b)x + ab$ સ્વરૂપે ગોઠવી શકીએ છીએ. આવી પદાવલિઓના અવયવ નિત્યસમ I, II, III અને IVની મદદથી (જે પ્રકરણ-9માં આપેલ છે.) સરળતાથી મેળવી શકાય છે.
$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$
$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$
$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$
7. જે પદાવલિના અવયવ $(x + a)(x + b)$ પ્રકારે મળતા હોય, તેમાં એ ખાસ ધ્યાનમાં લેવું જોઈએ કે પદાવલિના અંતિમ પદ(ab)ના એવા અવયવ શોધો કે જેથી તેનો સરવાળો (કે બાદબાકી) કરવાથી મળતી સંખ્યા xનો સહગુણક બને.
(**નોંધ :** અહીં મળતા અવયવોની નિશાનીમાં પણ કાળજી રાખવી જોઈએ.)
8. સંખ્યાના ભાગાકારની ક્રિયા એ ખરેખર ગુણાકારની વ્યસ્ત ક્રિયા છે. આ જ વિચાર (Idea) બૈજિક પદાવલિના ભાગાકાર માટે પણ ઉપયોગી છે.

9. બહુપદીનો એકપદી વડે ભાગાકાર કરવાના કિસ્સામાં આપણે બહુપદીના દરેક પદનો એકપદી સાથે ભાગાકાર કરીએ છીએ અથવા સામાન્ય અવયવ કાઢવાની રીતનો ઉપયોગ કરીએ છીએ.

10. બહુપદીનો બહુપદી વડે ભાગાકાર કરવાના કિસ્સામાં, ભાજ્ય પદાવલિ(Dividend Polynomial)ના દરેક પદનો ભાજક પદાવલિ(Divisor Polynomial)ના દરેક પદ સાથે ભાગાકાર કરીએ એ રીત બરાબર નથી.

તેના બદલે બંને પદાવલિનાં અવયવ પાડીને ત્યાર બાદ બંનેનો સામાન્ય અવયવ રદ (Cancel) કરવો જોઈએ.

11. અગાઉના પ્રકરણમાં શીખી ગયા તે મુજબ, બૈજિક પદાવલિનો ભાગાકાર એટલે,

ભાજ્ય પદાવલિ = ભાજક પદાવલિ × ભાગફળ

વ્યાપક સ્વરૂપે,

ભાજ્ય = (ભાજક × ભાગફળ) + શેષ

આ પ્રકરણમાં આપણે એવી જ પદાવલિના ભાગાકારની ચર્ચા કરેલ છે જેમાં શેષ શૂન્ય હોય.

12. બૈજિક પદાવલિના કોયડાઓ ઉકેલતી વખતે વિદ્યાર્થીઓ ઘણી સામાન્ય ભૂલો કરતાં હોય છે. તેને તમારે આવી ભૂલો કરતાં ટાળવા જોઈએ.

પ્રકરણ 15

આલેખનો પરિચય

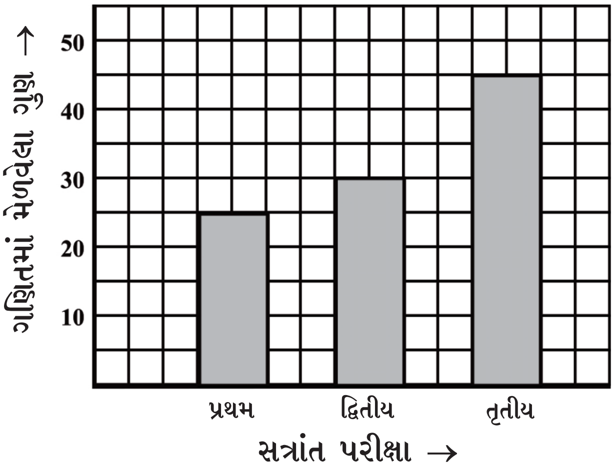
15.1 પ્રાસ્તાવિક

શું તમે સમાચારપત્રો, ટેલિવિઝન, સામયિકો, પુસ્તકો વગેરેમાં આલેખો જોયા છે ? આંકડાકીય તથ્યોને દૃશ્ય સ્વરૂપે રજુ કરવાના ઉદ્દેશ્યથી આલેખ તૈયાર કરવામાં આવે છે. આલેખના ઉપયોગથી આંકડાકીય માહિતી ઝડપથી, સરળતાથી અને સ્પષ્ટપણે સમજી શકાય છે. આમ, આલેખ એ પ્રાપ્ત થયેલ માહિતીની દૃશ્ય રજુઆત છે. માહિતીને કોષ્ટક સ્વરૂપે પણ દર્શાવી શકાય છે. આમ છતાં, આલેખ દ્વારા રજૂ થતી માહિતી વધુ સરળતાથી સમજી શકાય છે. જ્યારે પ્રાપ્ત માહિતી કોઈ ચલના સાપેક્ષમાં વધે કે ઘટે (દા.ત. બજારમાં તેજી છે કે મંદી) તે જાણવા કે પછી બે માહિતી અથવા તો કોઈ એક માહિતીને તેની ભૂતકાળની માહિતી સાથે સરખાવવા માટે તો આલેખ ખરેખર ખૂબ જ ઉપયોગી છે. કેટલાક પ્રકારના આલેખ આપણે અગાઉ શીખી ચૂક્યા છીએ. ચાલો ઝડપથી તેને યાદ કરી લઈએ.

15.1.1 લંબ આલેખ (દંડ આલેખ)

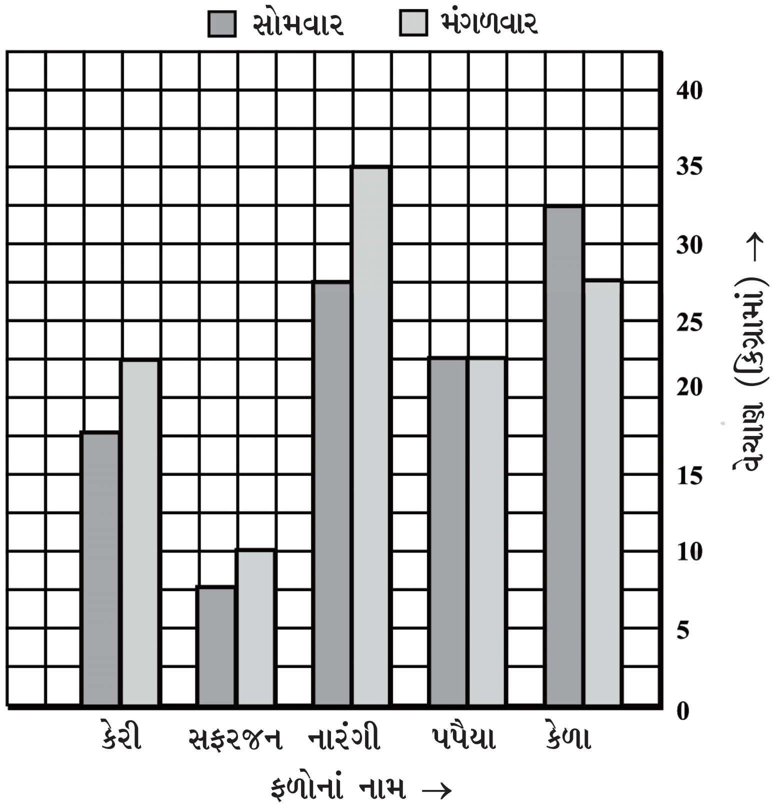
લંબ આલેખ (Bar graph) નો મુખ્ય ઉપયોગ માહિતીના કેટલાંક વિભાગો વચ્ચે તુલના કરવામાં થાય છે. લંબ આલેખને આડી અથવા ઊભી સમાંતર લીટીઓ દ્વારા દર્શાવાય છે. જોવામાં સરળતા રહે તે માટે સ્તંભ સ્વરુપે પણ દોરી શકાય છે. (અહીં એ નોંધીએ કે આ સ્તંભને જાડાઈ સાથે કોઈ સંબંધ નથી માત્ર ઊંચાઈને જ ધ્યાનમાં લેવાની છે. એટલે કે લંબ આલેખ એક જ પરિમાણ ધરાવે છે.)

આકૃતિ 15.1માં ગણિત વિષયની ત્રણ સત્રાંત પરીક્ષામાં અનુએ મેળવેલ ગુણના લંબ આલેખ છે. આ આલેખ દ્વારા તમે અનુના પરીક્ષામાં દેખાવની સરખામણી સરળતાથી કરી શકો છો.



આકૃતિ 15.1

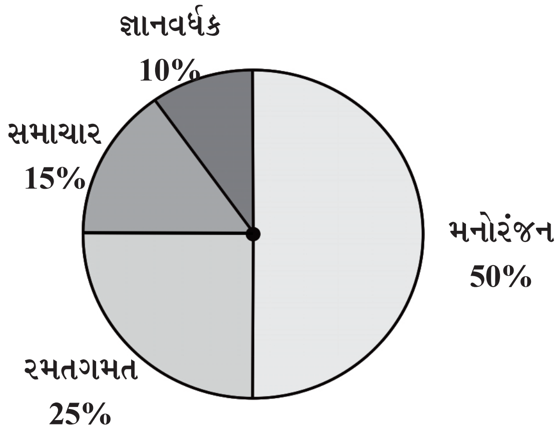
આકૃતિ 15.2માં દર્શાવ્યા મુજબ લંબ આલેખમાં લંબ / સ્તંભ જોડીમાં પણ હોઈ શકે છે. આ આલેખ આપણને બે દિવસના ગાળામાં જુદા જુદા ફળોના થયેલ વેચાણની તુલનાત્મક માહિતી રજુ કરે છે. આમ, આકૃતિ 15.2 એ આકૃતિ 15.1થી કઈ રીતે જુદી પડે છે ? એ બાબતે તમારા મિત્ર સાથે ચર્ચા કરો.



આકૃતિ 15.2

15.1.2 વૃત આલેખ (વર્તુળ આલેખ)

કોઈ સમગ્ર માહિતીના સાપેક્ષે તેના કોઈ એક અંશ કે પછી એક અંશની બીજા અંશ સાથે સરખામણી કરવા માટે વૃત આલેખ (Circle-graph / Pie graph) વપરાય છે. આકૃતિ 15.3માં વૃત આલેખ (વર્તુળ આલેખ) દર્શાવેલો છે. તેમાં ટેલિવિઝનની જુદી-જુદી ચેનલ જોનાર લોકોની માહિતી ટકામાં દર્શાવેલ છે.



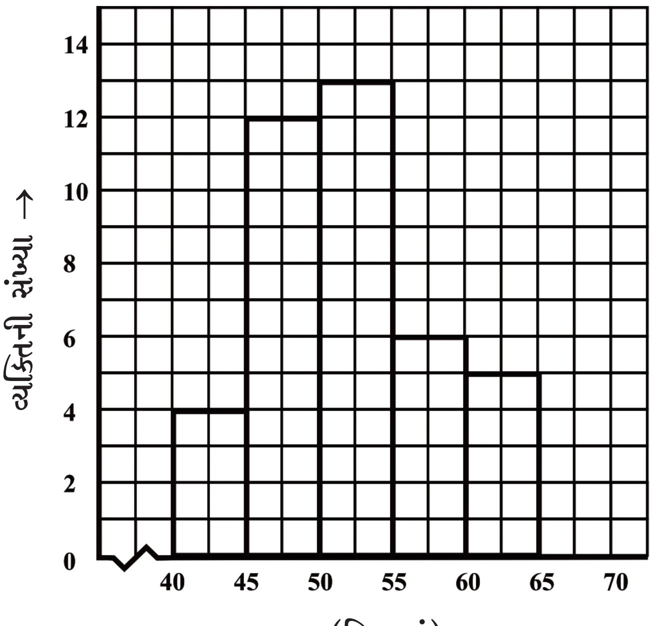
આકૃતિ 15.3

15.1.3 સ્તંભ આલેખ

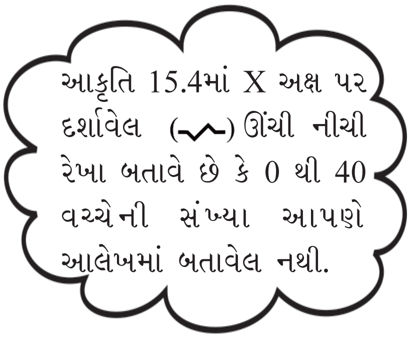
આપેલ સતત માહિતીને જ્યારે વર્ગ સ્વરૂપે આપવામાં આવેલ હોય ત્યારે તેના લંબ આલેખને સ્તંભઆલેખ (Histogram) તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. અહીં સ્તંભની જાડાઈ ધ્યાને લેવામાં આવે છે. (સ્તંભ આલેખ દ્વિ-પરિમાણીય છે : ઊંચાઈ અને જાડાઈ) તેના સ્તંભો સમગ્ર વિસ્તારમાં એકબીજાને લગોલગ આવેલા હોય છે.

આકૃતિ 15.4માં વસાહતના 40 લોકોનાં વજનનું આવૃત્તિ વિતરણ સ્તંભ આલેખ (હિસ્ટોગ્રામ) દ્વારા દર્શાવેલ છે.

વજન (કિગ્રામાં)	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65
વ્યક્તિની સંખ્યા	4	12	13	6	5



આકૃતિ 15.4



અહીં આલેખમાં સ્તંભ વચ્ચે જગ્યા નથી કારણ કે માહિતીમાં આપેલાં વર્ગો વચ્ચે જગ્યા નથી, માહિતી સળંગ છે. આ સ્તંભ આલેખ દ્વારા તમને શું માહિતી પ્રાપ્ત થાય છે ? તેની યાદી બનાવવાનો પ્રયત્ન કરો.

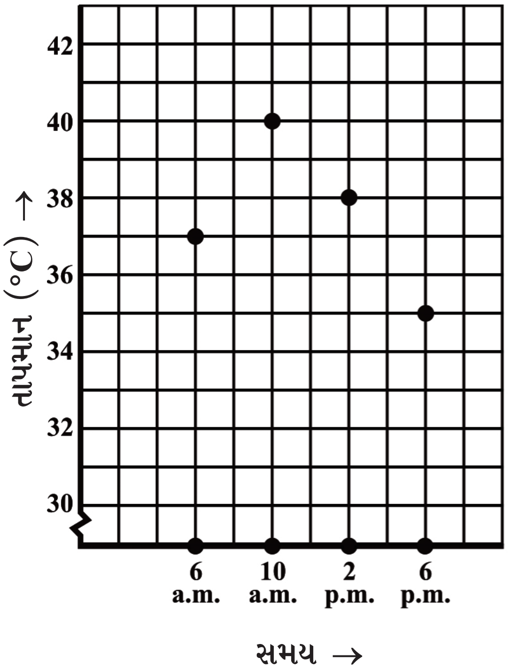
15.1.4 રેખીય આલેખ

નિશ્ચિત સમયગાળામાં સમય સાથે માહિતીમાં થતો સતત ફેરફાર દર્શાવવા રેખીય આલેખ (Line Graph) વપરાય છે.

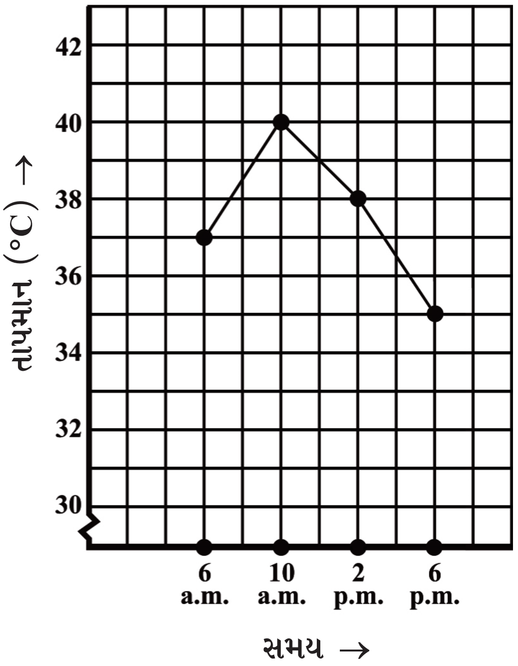
જ્યારે રેણુ બિમાર હતી ત્યારે ડૉક્ટરે દર ચાર કલાકે તેણીના શરીરનું તાપમાન નોંધેલ. આ માહિતી આલેખ સ્વરૂપે રજુ કરેલ હતી. (જે આકૃતિ 15.5 અને આકૃતિ 15.6માં બતાવેલ છે.) આપણે આ આલેખને "સમય વિરુદ્ધ તાપમાનનો આલેખ" કહી શકીએ. આકૃતિ 15.5 અને આકૃતિ 15.6 એ નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ માહિતીની ચિત્રાત્મક રજુઆત છે.

સમય	6 a.m.	10 a.m.	2 p.m.	6 p.m.
તાપમાન (°C)	37	40	38	35

આલેખમાં આડી રેખાને સામાન્ય રીતે X અક્ષ કહે છે. જ્યારે તાપમાન લેવામાં આવેલ હતું તે સમય X અક્ષ પર બતાવેલ છે. વળી, આલેખમાં ઊભી રેખાને સામાન્ય રીતે Y અક્ષ કહે છે. અહીં Y અક્ષ પર શાનું માપ લેવામાં આવેલ છે ?



આકૃતિ 15.5
આપેલ માહિતીના દરેક જોડકાને આલેખ પર બિંદુ દ્વારા દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 15.6
માહિતીનાં જોડકાઓ દ્વારા પ્રાપ્ત બિંદુઓને રેખાખંડથી જોડતા પરિણામ સ્વરૂપે રેખીય આલેખ પ્રાપ્ત થાય છે.

આલેખ તમને શું-શું કહે છે ? અહીં આલેખમાં આપણે તાપમાનમાં થતો ફેરફાર જોઈ શકીએ છીએ. આકૃતિ 15.5 પરથી આપણે કહી શકીએ કે 10 a.m. વાગ્યે મહત્તમ તાપમાન હતું અને પછી 6 p.m. સુધી તાપમાનમાં સતત ઘટાડો થતો રહેલ. અહીં આપણે નોંધી શકીએ કે 6 a.m. થી 10 a.m.ના સમયગાળામાં તાપમાનમાં 3°C (40°C - 37°C) જેટલો વધારો થયેલ.

અહીં 8 a.m. વાગ્યે તાપમાનની કોઈ નોંધ કરવામાં આવેલ ન હતી. છતાં તમે આલેખના આધારે કહી શકશો કે ત્યારે તાપમાન 37°C થી વધારે હતું. (કેવી રીતે ? વિચારો.)

ઉદાહરણ 1 : ("દેખાવ અથવા પ્રદર્શન" આધારિત આલેખ)

આકૃતિ 15.7માં આપેલા બે આલેખ વર્ષ 2007માં જુદા-જુદા દસ મેચ દરમિયાન બે બલ્લેબાજ (બૅટ્સમેન) A અને Bએ બનાવેલા રન દર્શાવે છે. આલેખનો અભ્યાસ કરી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(i) બંને અક્ષ પર શું માહિતી આપેલ છે ?

(ii) કઈ રેખા બૅટ્સમેન Aના રનનો સ્કોર બતાવે છે ?

(iii) વર્ષ 2007માં કઈ મૅચમાં બંને બૅટ્સમેને સરખા રનનો સ્કોર કર્યો હતો ?

(iv) બંને બૅટ્સમેનમાંથી કોણ વિશ્વાસપાત્ર છે ? (શા માટે તમે આમ નિર્ણય કર્યો ?)

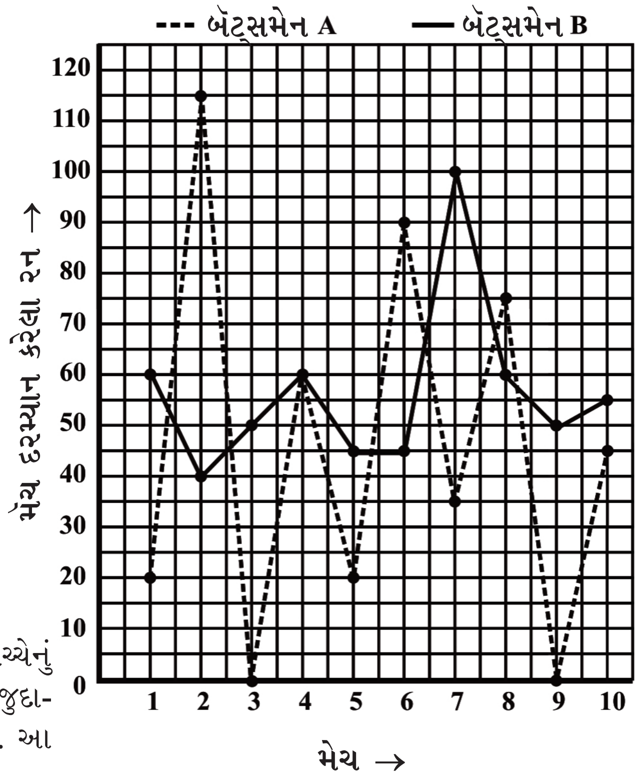
ઉકેલ :

(i) વર્ષ 2007 દરમિયાન રમાયેલ મેચ X અક્ષ પર દર્શાવેલ છે. Y અક્ષ પર દરેક મૅચમાં બંને ખેલાડીએ બનાવેલા કુલ રન દર્શાવેલ છે.

(ii) બેટ્સમેન A દ્વારા બનાવવામાં આવેલ રનના આલેખને તૂટક રેખા વડે દર્શાવેલ છે. (આ બાબત આલેખની ઉપરની બાજુએ પહેલેથી જ દર્શાવેલ છે.)

(iii) ચોથા મૅચ દરમિયાન બંને બૅટ્સમેને સમાન રન (60 રન) બનાવેલ છે. (બંને આલેખ આ બિંદુ પર ભેગા થતાં હોવાથી આપણે આમ કહી શકીએ.)

(iv) બૅટ્સમેન Aએ એક મૅચમાં સૌથી વધુ રન બનાવ્યા છે. પણ ઓછા રનના ખાડા પણ આલેખમાં જોવા મળે છે. બૅટ્સમેન Aની રમતમાં સાતત્ય નથી. જ્યારે બીજી તરફ બૅટ્સમેન B એ કોઈ મૅચમાં 40 થી ઓછા રન કર્યા નથી. આમ છતાં તેનો મહત્તમ સ્કોર 100 રન છે. જે બૅટ્સમેન Aના 115 રન કરતાં ઓછા છે. ઉપરાંત ખેલાડી Aએ બે મૅચમાં શૂન્ય રન સાથે આઉટ થયેલ છે અને પાંચ મૅચમાં 40 થી ઓછો સ્કોર કરેલ છે. તેને લઈને ખેલાડી Aના આલેખમાં ઘણા મોટા ઉતાર-ચઢાવ છે તેના સાપેક્ષે ખેલાડી Bની રમતમાં વધુ સાતત્ય હોવાથી તે વધુ વિશ્વાસપાત્ર બૅટ્સમેન છે.



આકૃતિ 15.7

ઉદાહરણ 2 :

એક કાર શહેર P થી શહેર Q તરફ યાત્રા કરે છે. બંને શહેર વચ્ચેનું અંતર 350 કિલોમીટર છે. આકૃતિ 15.8માં આપેલ આલેખમાં જુદા-જુદા સમયે કાર અને શહેર P વચ્ચેનું અંતર આપેલ છે. આ આલેખનો અભ્યાસ કરી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(i) બંને અક્ષો પર કઈ માહિતી આપેલ છે ?

(ii) કારની યાત્રા ક્યારે અને ક્યાંથી શરુ થઈ ?

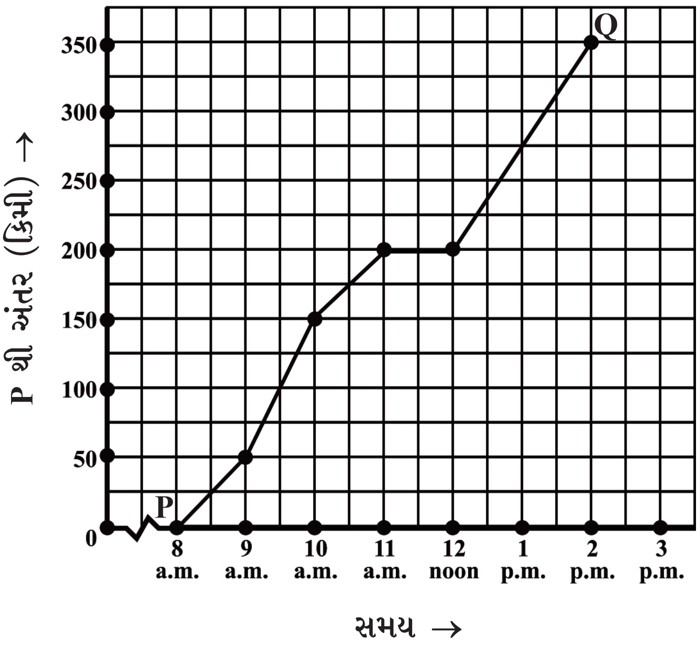
(iii) પ્રથમ એક કલાકમાં કાર કેટલી દૂર ગઈ ?

(iv) બે કલાક બાદ અને ત્રણ કલાક બાદ કાર કેટલે દૂર પહોંચી હતી ?

(v) શું પ્રથમ ત્રણ કલાકની ઝડપ સરખી રહી હતી ? આ તમે કેમ જાણ્યું ?

(vi) શું કાર કેટલાક સમય માટે કોઈ સ્થળે ઊભી રહેલ ? તમારા જવાબનો તર્ક રજુ કરો.

(vii) કાર ક્યારે શહેર Q પહોંચશે ?



આકૃતિ 15.8

ઉકેલ :

(i) x અક્ષ પર સમય દર્શાવેલ છે. y અક્ષ પર શહેર Pથી કારનું અંતર દર્શાવેલ છે.

(ii) કાર શહેર Pથી યાત્રાની શરૂઆત સવારે 8 વાગ્યે કરે છે.

(iii) પ્રથમ કલાક દરમિયાન કારે 50 કિલોમીટરનું અંતર કાપેલું હતું. [આ બાબત આ મુજબ સમજી શકાય. સવારે 8 વાગ્યે શહેર Pથી યાત્રા શરૂ કરી હતી અને સવારે 9 વાગ્યે તે 50 કિમી પર પહોંચેલ હતી (આલેખમાં આ બાબત જુઓ). તેથી કહી શકાય કે પ્રથમ કલાક દરમિયાન એટલે કે 8 a.m. અને 9 a.m.ની વચ્ચે કાર દ્વારા 50 કિમીની યાત્રા થઈ હતી.]

(iv) કાર દ્વારા કપાયેલ અંતર

(a) બીજા કલાકે (એટલે કે 9 a.m થી 10 a.m. દરમિયાન) 100 કિમી (150-50)

(b) ત્રીજા કલાકે (એટલે કે 10 a.m.થી 11 a.m. દરમિયાન) 50 કિમી (200-150)

(v) પ્રશ્ન (iii) અને (iv)ના જવાબના આધારે આપણે કહી શકીએ કે કારની ઝડપ સમગ્ર સમય દરમિયાન સરખી રહી ન હતી (આલેખ એ પણ બતાવે છે કે ઝડપ કઈ રીતે બદલી).

(vi) આલેખમાં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે કાર સવારે 11 વાગ્યે અને 12 વાગ્યે પણ P શહેરથી 200 કિમી દૂર જ હતી. આ સમય દરમિયાન કાર દ્વારા કપાયેલ અંતર આલેખની અંદર સમક્ષિતિજ રેખા દ્વારા પ્રદર્શિત થાય છે. આ બાબત પણ એ પુષ્ટિ કરે છે કે આ સમય દરમિયાન કારે યાત્રા કરેલ નથી, કાર ઊભી રહેલ હતી.

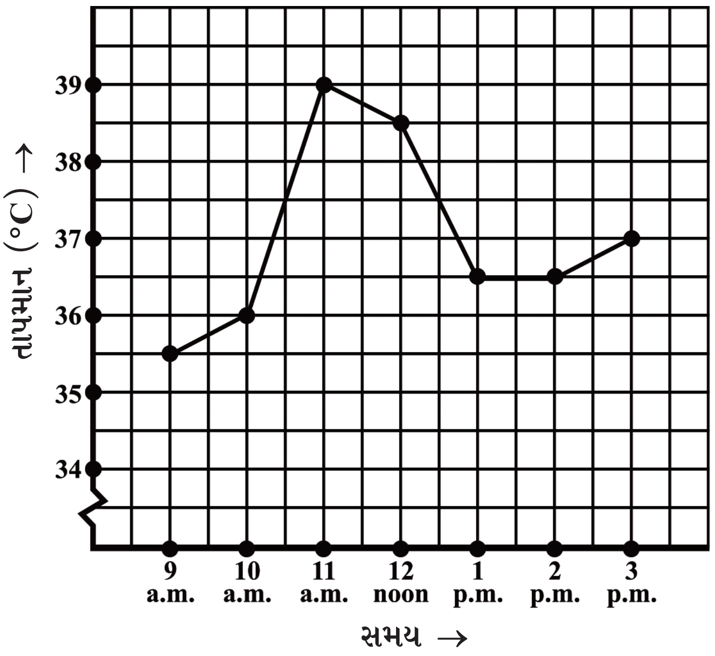
(vii) બપોરે 2:00 વાગ્યે કાર Q શહેર પર પહોંચી હશે.

સ્વાધ્યાય 15.1

1. નીચે આપેલ આલેખ હૉસ્પિટલમાં એક દર્દીનું દર કલાકે લીધેલ તાપમાન દર્શાવે છે. તેના પરથી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(a) બપોરે 1 વાગ્યે દર્દીના શરીરનું તાપમાન શું હતું ?

(b) દર્દીના શરીરનું તાપમાન 38.5°C ક્યારે હતું ?



(c) આ સમગ્ર સમય દરમિયાન દર્દીનું તાપમાન બે વખત સરખું રહ્યું હતું. આ બન્ને સમય કયા હતા ?

(d) બપોરના 1:30 વાગ્યે દર્દીનું તાપમાન શું હતું ? આ તારણ પર તમે કઈ રીતે પહોંચ્યા ?

(e) સમયના કયા ગાળામાં દર્દીનું તાપમાન વધી રહ્યાનું જણાતું હતું ?

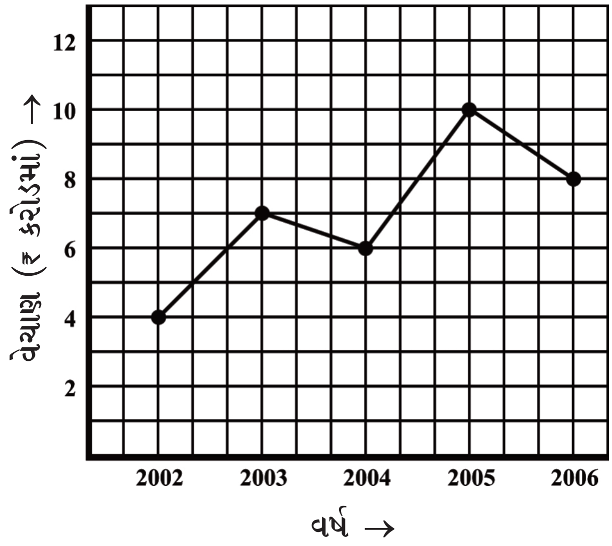
2. નીચે આપેલા રેખીય આલેખમાં એક ઉત્પાદક કંપનીએ જુદા-જુદા વર્ષમાં કરેલ વેચાણ દર્શાવેલ છે. તે પરથી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ લખો :

(a) (i) વર્ષ 2002 અને (ii) વર્ષ 2006માં કેટલું વેચાણ થયું હતું ?

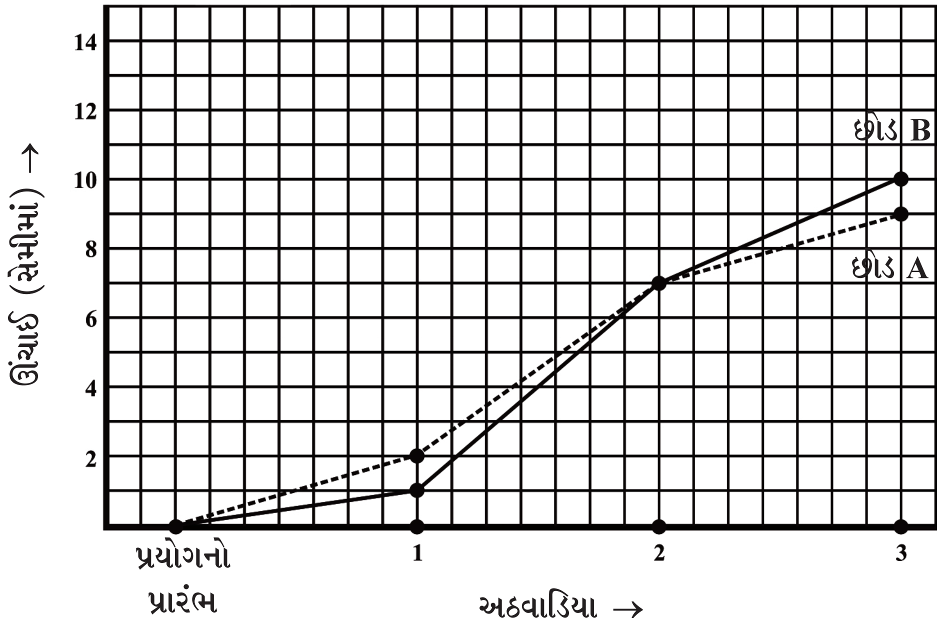
(b) (i) વર્ષ 2003 અને (ii) વર્ષ 2005માં કેટલું વેચાણ થયું હતું ?

(c) વર્ષ 2002 અને વર્ષ 2006નાં વેચાણ વચ્ચે કેટલો તફાવત હતો ?

(d) કયા બે ક્રમિક વર્ષનાં વેચાણ વચ્ચેનો તફાવત મહત્તમ હતો ?



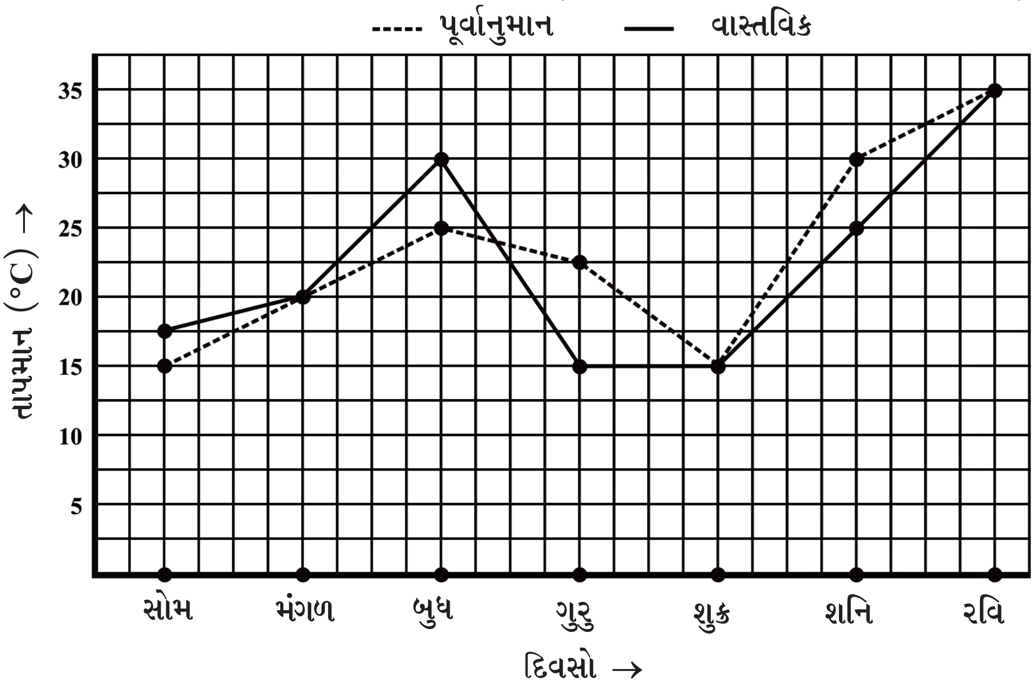
3. વનસ્પતિશાસ્ત્રના એક પ્રયોગમાં બે છોડ A અને Bને પ્રયોગશાળાની સમાન પરિસ્થિતિમાં ઉછેરવામાં આવ્યા. તેમની ઊંચાઈને અઠવાડિયાના અંતે માપવામાં આવતી હતી. આમ, ત્રણ અઠવાડિયા સુધી પ્રયોગ કરવામાં આવેલો. પ્રયોગના પરિણામને આલેખમાં દર્શાવેલ છે.



(a) (i) 2 સપ્તાહ પછી (ii) 3 સપ્તાહ પછી છોડ Aની ઊંચાઈ કેટલી હતી ?
(b) (i) 2 સપ્તાહ પછી (ii) 3 સપ્તાહ પછી છોડ Bની ઊંચાઈ કેટલી હતી ?
(c) ત્રણ સપ્તાહ દરમિયાન છોડ Aની ઊંચાઈ કેટલી વધી ?
(d) બીજા સપ્તાહના અંતથી ત્રીજા સપ્તાહનાં અંત સુધીમાં છોડ Bની ઊંચાઈ કેટલી વધી ?
(e) કયા સપ્તાહમાં છોડ Aની ઊંચાઈ સૌથી વધુ વધી ?
(f) કયા સપ્તાહમાં છોડ Bની ઊંચાઈ સૌથી ઓછી વધી ?
(g) શું કોઈ એક સપ્તાહમાં બન્ને છોડની ઊંચાઈ સરખી હતી ? સ્પષ્ટ કરો.

4. નીચે આપેલા આલેખમાં કોઈ એક સપ્તાહના દરેક દિવસ માટે પૂર્વાનુમાન કરેલ તાપમાન અને વાસ્તવિક તાપમાન દર્શાવેલ છે.

(a) કયા દિવસે પૂર્વાનુમાન કરેલ તાપમાન અને વાસ્તવિક તાપમાન સમાન હતા ?
(b) સપ્તાહ દરમિયાન પૂર્વાનુમાન કરેલ મહત્તમ તાપમાન કેટલું હતું ?
(c) સપ્તાહ દરમિયાન લઘુત્તમ વાસ્તવિક તાપમાન કેટલું હતું ?
(d) કયા દિવસે વાસ્તવિક તાપમાન અને પૂર્વાનુમાન કરેલ તાપમાન વચ્ચેનો તફાવત સૌથી વધુ હતો ?



5. નીચેના કોષ્ટકના આધારે રૈખિક આલેખ દોરો :

(a) જુદા-જુદા વર્ષોમાં કોઈ પર્વતીય શહેરમાં કેટલા દિવસો માટે હિમવર્ષા થયેલ તે અત્રે દર્શાવેલ છે.

વર્ષ	2003	2004	2005	2006
દિવસોની સંખ્યા	8	10	5	12

(b) એક ગામની અંદર જુદા-જુદા વર્ષમાં પુરુષ અને સ્ત્રીની વસ્તી (હજારમાં) આ મુજબ છે :

વર્ષ	2003	2004	2005	2006	2007
પુરુષોની સંખ્યા	12	12.5	13	13.2	13.5
સ્ત્રીઓની સંખ્યા	11.3	11.9	13	13.6	12.8

6. એક ટપાલી કોઈ નગરથી તે જ નગરના એક ઉપનગરમાં એક વેપારીને પાર્સલ પહોંચાડવા સાયકલ લઈને જાય છે. જુદા-જુદા સમયે નગરથી તેનું અંતર નીચેના આલેખમાં દર્શાવેલ છે.

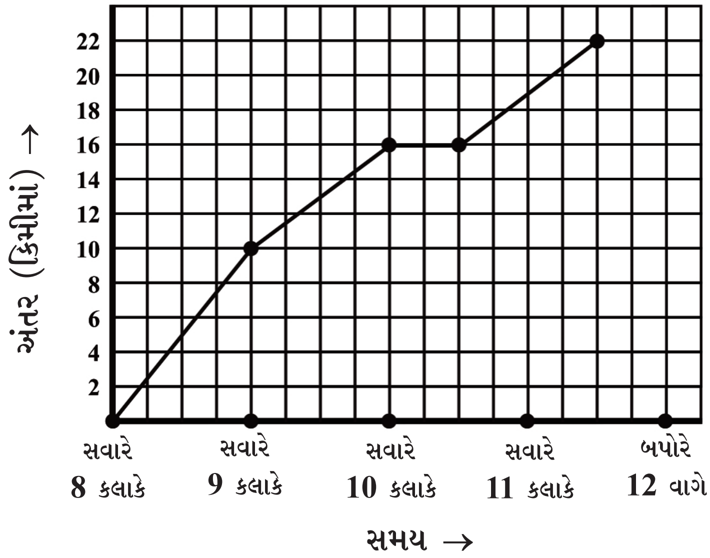
(a) x અક્ષ પર સમય દર્શાવવા માટે શું પ્રમાણમાપ લેવામાં આવ્યું છે ?

(b) ટપાલીએ આ મુસાફરી માટે કેટલો સમય લીધો ?

(c) નગરથી વેપારીનું સ્થળ કેટલું દૂર છે ?

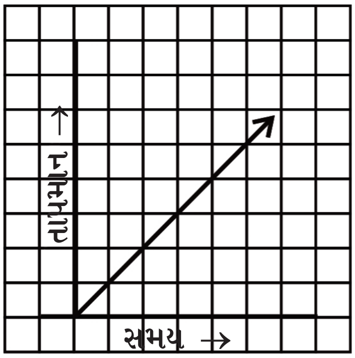
(d) શું ટપાલી તેના માર્ગમાં ક્યાંક થોભ્યો હતો ? વિગતે સમજાવો.

(e) કયા સમયગાળામાં તેણે સૌથી ઝડપી સવારી કરી ?

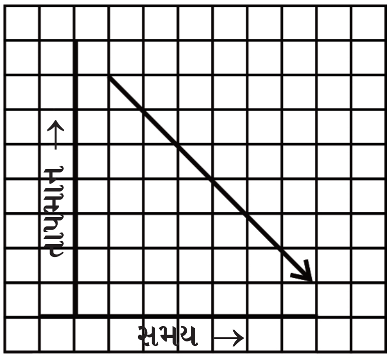


7. નીચે આપેલા આલેખોમાંથી કયા આલેખો સમય અને તાપમાન માટે શક્ય (સંભવ) છે. તમારો જવાબ સમજાવો.

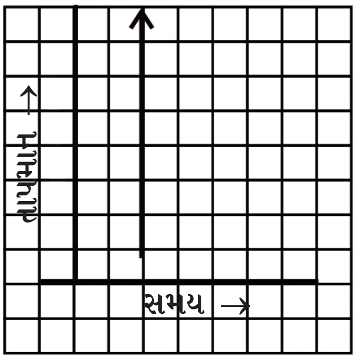
(i)



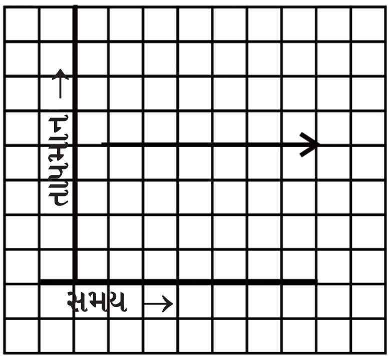
(ii)



(iii)

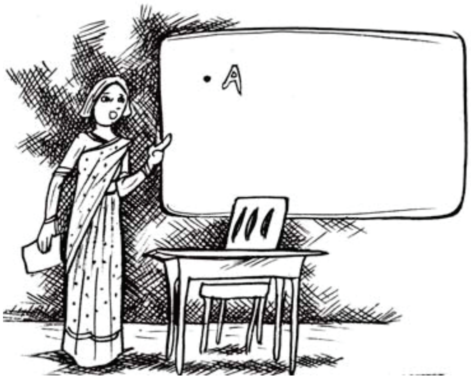


(iv)



15.2 સુરેખ આલેખ

રેખીય આલેખ કેટલાક રેખાખંડોને પરસ્પર જોડીને બનાવવામાં આવે છે. ક્યારેક આ આલેખ એક પૂરી અખંડિત રેખા સ્વરૂપે પણ હોઈ શકે છે. આવા આલેખને સુરેખ આલેખ (Linear Graph) કહેવામાં આવે છે. આ પ્રકારના આલેખ દોરવા માટે આલેખપત્ર પર કેટલાક બિંદુઓ દર્શાવવાની જરૂર પડે છે. હવે આપણે આલેખપત્ર પર સરળતાથી બિંદુઓ કઈ રીતે અંકિત કરી શકાય તે શીખીશું.



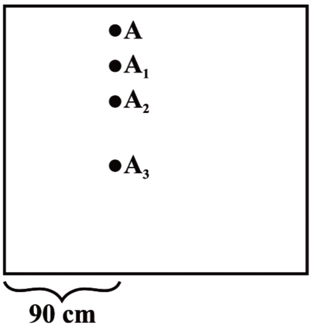
15.2.1 બિંદુની સ્થિતિ

શિક્ષિકાએ બ્લેકબૉર્ડ પર એક બિંદુ (Point) અંકિત કર્યું. પછી તેઓએ વિદ્યાર્થીઓને પૂછ્યું કે તેઓ આ બિંદુના સ્થાનને કઈ રીતે વર્ણવી શકે ? ત્યારે તેઓને કેટલાક જવાબ પ્રાપ્ત થયા.

આકૃતિ 15.9

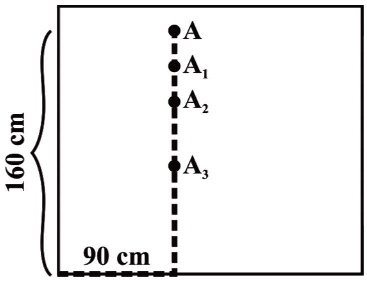
શું આમાંનું કોઈ પણ એક વિધાન આપણને બિંદુનું સ્થાન સુનિશ્ચિત (નક્કી) કરવામાં મદદરૂપ થશે ? ના. શા માટે નહીં ? આ બાબતે વિચારો.

ત્યારે જહોને એક સુઝાવ આપ્યો. તેણે બ્લેકબૉર્ડની ડાબી બાજુની ધારથી બિંદુનું અંતર માપ્યું અને કહ્યું, “આ બિંદુ બ્લેકબૉર્ડની ડાબી બાજુની ધારથી 90 સેમી દૂર આવેલું છે.” શું તેણે ખરેખર ઉપયોગી સુઝાવ આપ્યો તેમ તમે વિચારો છો ?



આકૃતિ 15.10

A, A_1, A_1 અને A_3 એ બધા બિંદુઓ બૉર્ડની ડાબી ધારથી 90 સેમી દૂર આવેલા છે.

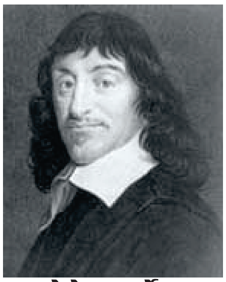


આકૃતિ 15.11

બિંદુ A એ બ્લેકબૉર્ડની ડાબી ધારથી 90 સેમી અને નીચેની ધારથી 160 સેમી અંતરે આવેલ છે.

ત્યારે રેખા સુધારેલા વિધાન સાથે ઊભી થઈ અને કહ્યું, ''આ બિંદુ બ્લેકબૉર્ડની ડાબી ધારથી 90 સેમી અને નીચેની ધારથી 160 સેમી દૂરની સ્થિતિ પર આવેલ છે.'' આમ, સમસ્યાનો પૂરેપૂરો ઉકેલ પ્રાપ્ત થયો (આકૃતિ 15.11). હવે શિક્ષિકાએ જણાવ્યું, ''આ બિંદુનું સ્થાન આપણે (90, 160) લખીને દર્શાવી શકીએ.'' શું બિંદુ (160, 90) એ બિંદુ (90, 160) થી ભિન્ન હશે ? આ બાબતે વિચારો.

સત્તરમી સદીમાં ગણિતશાસ્ત્રી રેને દકાર્તે(Rene Descartes) એ એક કીડીને છતના એક ખૂણા પાસેથી ચાલતી જોઈ અને તેમણે કોઈ પણ સમતલમાં બિંદુનું સ્થાન સુનિશ્ચિત કરવા માટેની પદ્ધતિ વિકસાવવાની શરૂઆત કરી હતી તેવું માનવામાં આવે છે. તેથી જ તેમની યાદમાં આડી અને ઊભી રેખાથી પ્રાપ્ત બે માપની મદદથી કોઈ એક બિંદુનું સ્થાન સુનિશ્ચિત કરવાની પદ્ધતિને કાર્ટેઝિયન પદ્ધતિ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

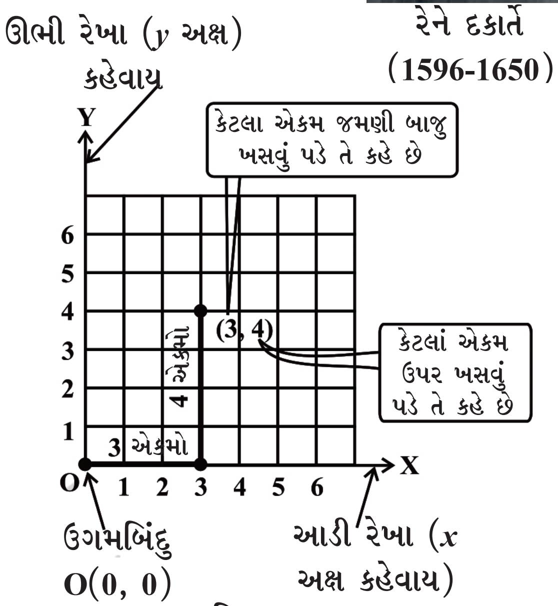


રેને દકાર્તે
(1596-1650)

15.2.2 નિર્દેશાંક

ધારો કે તમે એક થિયેટરમાં જાઓ છો અને ટિકિટ પર દર્શાવેલ નિયત જગ્યા તમે શોધો છો. તેના માટે તમારે બે સંખ્યાની જરૂર પડશે : હરોળ નંબર અને સીટ નંબર. કોઈ એક બિંદુને સમતલમાં સુનિશ્ચિત કરવા માટેની આ આધારભૂત પદ્ધતિ છે.

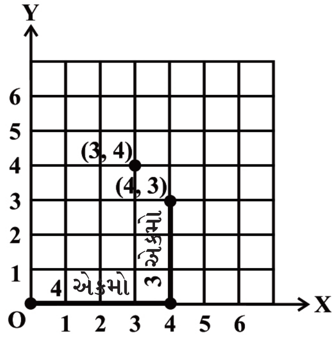
આકૃતિ 15.12માં જુઓ કે બિંદુ (3, 4)ને આલેખપત્રની ડાબી ધારથી 3 એકમ અને નીચેની ધારથી 4 એકમ દૂર કેવી રીતે સુનિશ્ચિત કરવામાં આવેલ છે. આલેખપત્ર ચોરસ જાળી સ્વરૂપે હોય છે, જેથી આ સમાન ચોરસ આપણને માપનમાં ઉપયોગી થાય. આલેખપત્ર ઉપર આપણે સૌપ્રથમ આપણી જરૂરિયાત અને અનુકૂળતા મુજબ x અક્ષ અને y અક્ષ દર્શાવીએ છીએ અને પછી તેના પર બિંદુનું સ્થાન સુનિશ્ચિત કરીએ છીએ. આકૃતિ 15.12માં 3ને આપેલ બિંદુનો x નિર્દેશાંક તથા 4ને y નિર્દેશાંક (Co-ordinates) કહેવામાં આવે છે. (ઘણી વખત x નિર્દેશાંકને સ્થાને x યામ અને y નિર્દેશાંકને સ્થાને y યામ જેવો શબ્દ પ્રયોગ પણ થાય છે.) તેથી આપણે (3, 4)ને આપેલ બિંદુના નિર્દેશાંક કહીએ છીએ. ઊભા યામને y યામ અને આડા યામને x યામ કહેવામાં આવે છે. નિર્દેશાંક (3, 4) બતાવે છે કે ઉદ્‌ગમ બિંદુથી કેટલાં એકમ જમણી બાજુ જવાનું છે અને કેટલાં એકમ ઉપર જવાનું છે.



આકૃતિ 15.12

ઉદાહરણ 3 : બિંદુ (4, 3)ને આલેખ પર અંકિત કરો. શું બિંદુ (4, 3) અને બિંદુ (3, 4) બંને એક જ બિંદુ છે ?

ઉકેલ : સૌ પ્રથમ x અક્ષ અને y અક્ષ દર્શાવો. (જે ખરેખર સંખ્યારેખા જ છે.) હવે ઉદ્‌ભવબિંદુ O(0, 0)થી શરૂ કરો. 4 એકમ જમણી બાજુ ખસો. પછી 3 એકમ ઉપર તરફ જતાં તમે બિંદુ (4, 3) પર પહોંચી જશો. આકૃતિ 15.13 પરથી આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે બિંદુ (3, 4) અને બિંદુ (4, 3) બંને અલગ બિંદુ છે.



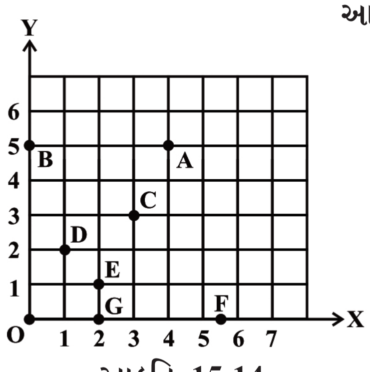
આકૃતિ 15.13

ઉદાહરણ 4 : નીચે આપેલા નિર્દેશાંકને અનુરૂપ અક્ષર આકૃતિ 15.14માંથી પસંદ કરો.

(i) (2, 1) (ii) (0, 5)

(iii) (2, 0) (iv) બિંદુ Aના નિર્દેશાંક લખો.

(v) બિંદુ Fના નિર્દેશાંક લખો.



આકૃતિ 15.14

ઉકેલ :

(i) બિંદુ E એ (2, 1) છે (બિંદુ D એ (2, 1) નથી !).

(ii) બિંદુ B એ (0, 5) છે (શા માટે ? તમારા મિત્ર સાથે ચર્ચા કરો).

(iii) બિંદુ G એ (2, 0) છે.

(iv) બિંદુ Aના નિર્દેશાંક (4, 5) છે.

(v) બિંદુ Fના નિર્દેશાંક (5.5, 0) છે.

ઉદાહરણ 5 : નીચે આપેલાં બિંદુઓને આલેખપત્ર પર અંકિત કરો અને ખાતરી કરી જુઓ કે તેઓ બધાં એક જ રેખા પર આવેલાં છે ? જો તેઓ એક જ રેખા પર રહેલાં હોય તો તે રેખાનું નામ આપો.

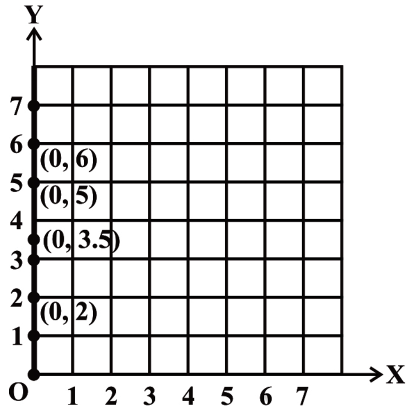
(i) (0, 2) (0, 5), (0, 6), (0, 3.5)

(ii) A (1, 1), B (1, 2), C (1, 3), D (1, 4)

(iii) K (1, 3), L (2, 3), M (3, 3), N (4, 3)

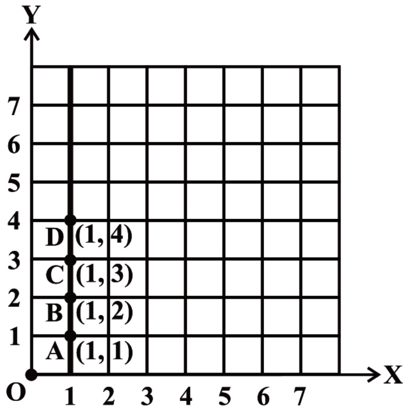
(iv) W (2, 6), X (3, 5), Y (5, 3), Z (6, 2)

ઉકેલ :



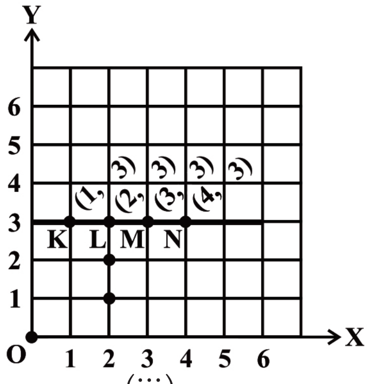
(i)

આ બધા બિંદુઓ એક જ રેખા પર આવેલાં છે, જે y અક્ષ છે.



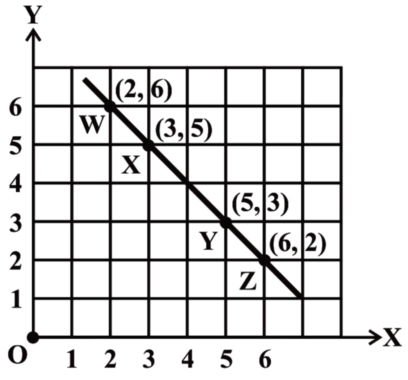
(ii)

આ બધા બિંદુઓ એક જ રેખા પર આવેલાં છે. તે રેખા AD છે. (તમે આ રેખાનું નામકરણ બીજી રીતે પણ કરી શકો) આ રેખા y અક્ષને સમાંતર છે.



(iii)

આ બધા બિંદુઓ એક જ રેખા પર આવેલાં છે. આપણે તેને રેખા KL અથવા રેખા KM અથવા રેખા MN વગેરેથી ઓળખી શકીએ. તે x અક્ષને સમાંતર છે.



(iv)

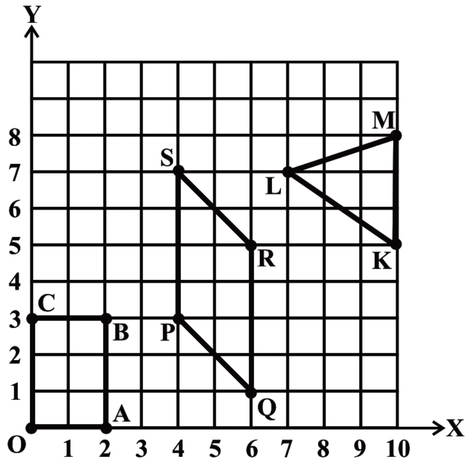
આકૃતિ 15.5

આ બધા બિંદુઓ એક જ રેખા પર આવેલાં છે. આપણે તેને XY અથવા WY અથવા YZ વગેરેથી નામાંકિત કરી શકીએ.

અહીં એ નોંધો કે, ઉપરોક્ત તમામ કિસ્સામાં આપેલ બિંદુઓને આલેખપત્ર પર દર્શાવીને તેમને જોડતા એક સીધી રેખા સ્વરૂપે પ્રાપ્ત થાય છે. આ પ્રકારના આલેખને રૈખિક આલેખ કહેવામાં આવે છે.

સ્વાધ્યાય 15.2

1. નીચેના બિંદુઓને આલેખપત્ર પર અંકિત કરો અને ચકાસણી કરો કે તે બધા એક જ રેખા પર આવેલા છે ?
   (a) A (4, 0), B (4, 2), C (4, 6), D (4, 2.5)
   (b) P (1, 1), Q (2, 2), R (3, 3), S (4, 4)
   (c) K (2, 3), L (5, 3), M (5, 5), N (2, 5)
2. બિંદુઓ (2, 3) અને (3, 2)માંથી પસાર થતી રેખા દોરો. આ રેખા x અક્ષ અને y અક્ષને જે બિંદુમાં છેદે તે બિંદુના નિર્દેશાંક દર્શાવો.
3. આલેખમાં દર્શાવેલ દરેક આકૃતિઓના શિરોબિંદુનાં નિર્દેશાંક લખો.



4. નીચે આપેલાં વિધાનો ખરા છે કે ખોટા તે જણાવો. ખોટાં વિધાનો સુધારીને લખો.
   (i) જે બિંદુનો x નિર્દેશાંક શૂન્ય હોય અને y નિર્દેશાંક શૂન્યેત્તર હોય તે બિંદુ y અક્ષ પર આવેલ હોય છે.
   (ii) જે બિંદુનો y નિર્દેશાંક શૂન્ય હોય અને x નિર્દેશાંક 5 હોય તે બિંદુ y અક્ષ પર આવેલ હોય છે.
   (iii) ઉદ્‌ગમબિંદુના નિર્દેશાંક (0, 0) હોય છે.

15.3 આલેખના કેટલાક ઉપયોગ

દૈનિક જીવનમાં તમે કદાચ જોયું હશે કે સુવિધાઓનો તમે જેટલો વધારે ઉપયોગ કરો છો તેની કિંમત પણ તમારે વધારે ચૂકવવી પડે છે. ઉદાહરણ તરીકે તમે જો વીજળીનો વધુ ઉપયોગ કરશો તો વીજળીનું બિલ પણ વધારે જ ચૂકવવું પડશે અને જો તમે વીજળી ઓછી વાપરશો તો વીજળીનો ખર્ચ પણ ઘણો ઓછો આવશે. અહીં આ ઉદાહરણમાં તમે જોઈ શકો છો કે એક રાશિ બીજી રાશિને અસર કરે છે. વીજળીના બિલની રકમને વીજળીના વપરાશનો જથ્થો અસર કરે છે. અહીં આપણે કહી શકીએ કે વીજળીનો જથ્થો એ એક સ્વતંત્ર ચલ છે (અથવા કેટલીક વખત અંકુશિત ચલ છે) અને વીજળીનાં બિલની રકમ પરતંત્ર ચલ છે. આવા ચલો વચ્ચેનો સંબંધ આપણે આલેખ દ્વારા દર્શાવી શકીએ.

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

એક કારની પેટ્રોલની ટાંકી ભરવા માટે તમારે કેટલી રકમ ચૂકવવી પડશે ? તેનો આધાર તમે કેટલાં લિટર પેટ્રોલ ખરીદો છો તેના પર રહેલો છે. જે અહીં સ્વતંત્ર ચલ છે. આ બાબતે વિચારો.

ઉદાહરણ 6 : (માત્રા અને મૂલ્ય)

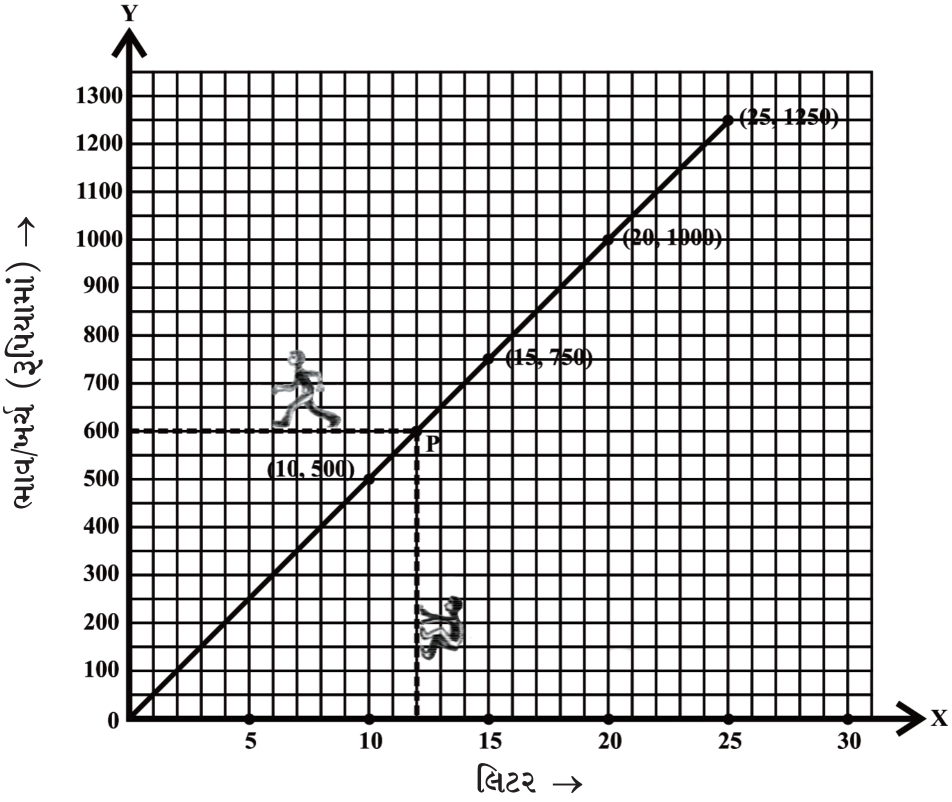
નીચેના કોષ્ટકમાં પેટ્રોલની માત્રા અને તેની કિંમત આપવામાં આવી છે :

પેટ્રોલની માત્રા (લિટરમાં)	10	15	20	25
પેટ્રોલનું મૂલ્ય (રૂપિયામાં)	500	750	1000	1250

આ આંકડાઓ દર્શાવવા આલેખ દોરો.

ઉકેલ :

(i) આકૃતિ 15.16માં દર્શાવ્યા મુજબ સૌ પ્રથમ આપણે અનુકૂળતા મુજબ પ્રમાણમાપ લઈશું.



આકૃતિ 15.16

(ii) સમક્ષિતિજ અક્ષ (x અક્ષ) પર પેટ્રોલની માત્રા દર્શાવીશું.

(iii) y અક્ષ પર પેટ્રોલની કિંમત દર્શાવીશું.

(iv) બિંદુઓ (10, 500), (15, 750), (20, 1000) અને (25, 1250)ને આલેખ પર અંકિત કરો.

(v) અંકિત કરેલા આ બિંદુઓને જોડો.

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે આ આલેખ રેખા સ્વરૂપે છે. (તે એક રૈખિક આલેખ છે.) આ આલેખ ઉદ્‌ગમબિંદુમાંથી શા માટે પસાર થાય છે ? આ બાબતે વિચારો.

આ આલેખ આપણને કેટલીક બાબતો(તથ્યો)નાં અનુમાન કરવામાં મદદરૂપ થઈ શકે છે. ધારો કે આપણે 12 લિટર પેટ્રોલ ખરીદવા માટે કેટલી રકમ જોઈશે તે જાણવા ઇચ્છીએ છીએ. આ માટે આપણે x અક્ષ પર 12 લિટર પાસેથી ઉર્ધ્વ દિશામાં જઈશું જેથી આલેખ પરના P બિંદુ પર પહોંચીશું. ત્યાંથી y અક્ષ તરફ સમક્ષિતિજ (સીધી) દિશામાં જતા આપણે y અક્ષ પર પહોંચશું, જ્યાં ₹ 600 મૂલ્ય દર્શાવે છે. આથી આપણે આ રીતે આલેખનો ઉપયોગ કરીને 12 લિટર પેટ્રોલ માટે આપણે ₹ 600 ચૂકવવા પડ્યા હશે તેનું અનુમાન કરી શકીએ છીએ.

આ આલેખ એક એવી પરિસ્થિતિ દર્શાવે છે કે જેમાં બે માત્રા એકબીજાને સીધા સમચલનમાં છે. (કઈ રીતે ? વિચારો) આવી પરિસ્થિતિમાં આલેખ હંમેશાં રૈખિક હોય છે.

પ્રયત્ન કરો

ઉપરનાં ઉદાહરણનાં આલેખનો ઉપયોગ કરીને જણાવો કે ₹ 800માં કેટલી માત્રામાં પેટ્રોલ ખરીદી શકાય ?

ઉદાહરણ 7 : (મુદ્દલ અને સાદું વ્યાજ)

એક બૅંક વરિષ્ઠ નાગરિકોને તેમનાં રોકાણ પર 10% સાદું વ્યાજ આપે છે. જમા કરાવેલ મુદ્દલ અને તેના પર પ્રાપ્ત થનાર સાદા વ્યાજના સંબંધને દર્શાવવા એક આલેખ દોરો. પ્રાપ્ત આલેખના આધારે નીચેની બાબતો શોધો.

(a) ₹ 250નાં રોકાણ પર પ્રાપ્ત થનાર વાર્ષિક વ્યાજ શોધો.

(b) ₹ 70 વાર્ષિક સાદું વ્યાજ મેળવવા માટે કેટલી મુદ્દલનું રોકાણ કરવું પડશે ?

ઉકેલ :

જમા રાશિ	એક વર્ષ માટે સાદું વ્યાજ
₹ 100	₹ $\frac{100 \times 1 \times 10}{100}$ = ₹ 10
₹ 200	₹ $\frac{200 \times 1 \times 10}{100}$ = ₹ 20
₹ 300	₹ $\frac{300 \times 1 \times 10}{100}$ = ₹ 30
₹ 500	₹ $\frac{500 \times 1 \times 10}{100}$ = ₹ 50
₹ 1000	₹ 100

આલેખ દોરવા માટેનાં પગલાં :

1. અંકિત કરવાની થતી જમા રાશિ માટે સાદા વ્યાજની ગણતરી કરો.
2. x અક્ષ અને y અક્ષ પર લેવાની થતી રાશિઓ નક્કી કરો.
3. યોગ્ય પ્રમાણમાપ પસંદ કરો.
4. બિંદુઓ અંકિત કરો.
5. બિંદુઓને જોડો.

આપણને નીચે મુજબની કિંમત ધરાવતું કોષ્ટક પ્રાપ્ત થશે.

જમા રાશિ (₹માં)	100	200	300	500	1000
વાર્ષિક સાદું વ્યાજ (₹માં)	10	20	30	50	100

(i) પ્રમાણમાપ : 1 એકમ = ₹ 100 (x અક્ષ માટે)
1 એકમ = ₹ 10 (y અક્ષ માટે)

(ii) જમા કરાવેલ મુદ્દલને x અક્ષ પર દર્શાવો.

(iii) પ્રાપ્ત થતા સાદા વ્યાજને y અક્ષ પર દર્શાવો.

(iv) (100, 10), (200, 20), (300, 30), (500, 50) વગેરે બિંદુઓને આલેખપત્ર પર અંકિત કરો.

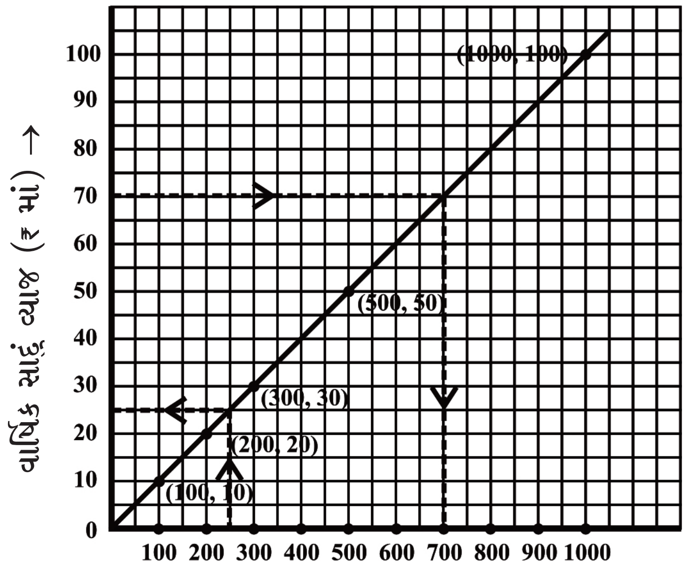
(v) બિંદુઓને જોડો. આકૃતિ 15.17માં દર્શાવ્યા મુજબનો આલેખ મળશે, જે રેખા સ્વરૂપે છે.

(a) x અક્ષ પર ₹ 250 મુદ્દલને અનુરૂપ y અક્ષ પર ₹ 25 સાદું વ્યાજ પ્રાપ્ત થાય છે.

(b) y અક્ષ પર ₹ 70 સાદું વ્યાજ મેળવવા આનુષંગિક x અક્ષ પર ₹ 700ની રકમનું મુદ્દલ હોવું જોઈએ.

પ્રયત્ન કરો

શું ઉદાહરણ 7 એ સમચલનનો કિસ્સો છે ?



આકૃતિ 15.17

ઉદાહરણ 8 : (સમય અને અંતર)

અજીત 30 કિમી/કલાકની ઝડપે સતત સ્કૂટર ચલાવી શકે છે. આ પરિસ્થિતિ માટે સમય → અંતરનો આલેખ દોરો. આ આલેખનો ઉપયોગ કરી નીચેની બાબતો શોધો :

(i) 75 કિમી અંતર કાપવા માટે અજીત કેટલો સમય લેશે ? (ii) $3\frac{1}{2}$ કલાકમાં અજીતે કાપેલું અંતર શોધો.

ઉકેલ :

મુસાફરીના કલાક	કાપેલું અંતર
1 કલાક	30 કિમી
2 કલાક	2 × 30 કિમી = 60 કિમી
3 કલાક	3 × 30 કિમી = 90 કિમી
4 કલાક	4 × 30 કિમી = 120 કિમી આવી જ રીતે આગળ

આ રીતે આપણને માહિતીનું કોષ્ટક મળશે.

સમય (કલાકમાં)	1	2	3	4
કાપેલ અંતર (કિમીમાં)	30	60	90	120

(i) પ્રમાણમાપ : (આકૃતિ 15.18)

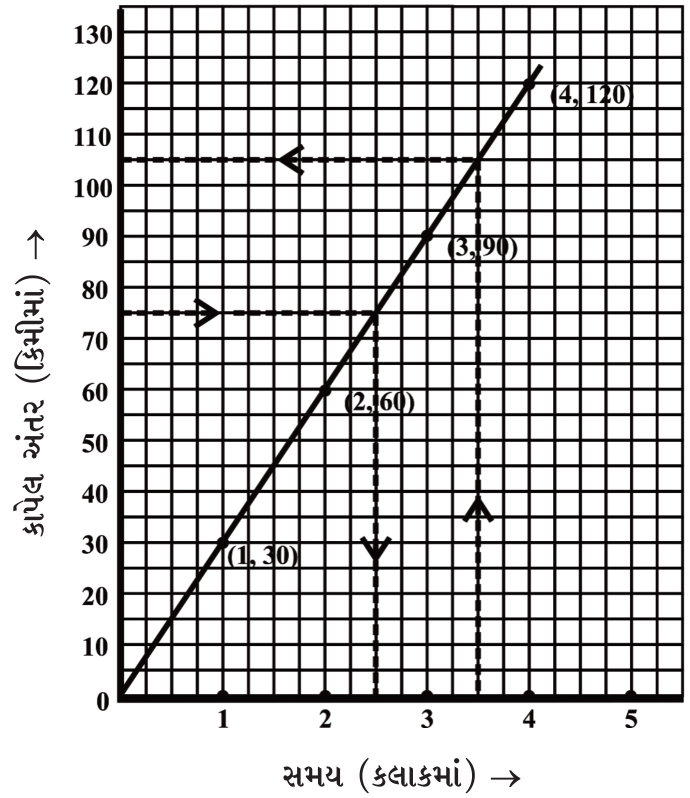
x અક્ષ માટે : 2 એકમ = 1 કલાક

y અક્ષ માટે : 1 એકમ = 10 કિમી

(ii) x અક્ષ પર સમય દર્શાવશું.

(iii) y અક્ષ પર અંતર દર્શાવશું.

(iv) (1, 30), (2, 60), (3, 90), (4, 120) બિંદુઓને આલેખમાં અંકિત કરો.



આકૃતિ 15.18

(v) ઉપરોક્ત બિંદુઓને જોડતા આપણને રૈખિક આલેખ પ્રાપ્ત થશે.

(a) y અક્ષ પર 75 કિમી અંતર લેતાં તેને અનુરૂપ x અક્ષ પર 2.5 કલાક સમય પ્રાપ્ત થાય છે. આમ, 75 કિમી અંતર કાપવા માટે 2.5 કલાકનો સમય લાગશે.

(b) x અક્ષ પર $3\frac{1}{2}$ કલાક લેતા તેને અનુરૂપ y અક્ષ પર 105 કિમી અંતર પ્રાપ્ત થશે. આમ, $3\frac{1}{2}$ કલાકમાં અજીત 105 કિમી અંતર કાપશે.

સ્વાધ્યાય 15.3

1. યોગ્ય પ્રમાણમાપનો ઉપયોગ કરી નીચેના કોષ્ટકના આધારે આલેખ દોરો.

(a) સફરજનના ભાવ (કિંમત)

સફરજનની સંખ્યા	1	2	3	4	5
કિંમત (₹ માં)	5	10	15	20	25

(b) કાર દ્વારા કપાયેલ અંતર

સમય (કલાકમાં)	6 a.m.	7 a.m.	8 a.m.	9 a.m.
અંતર (કિમીમાં)	40	80	120	160

(i) 7:30 a.m. થી 8:00 a.m. દરમિયાન કારે કેટલું અંતર કાપ્યું હશે ?

(ii) કાર દ્વારા યાત્રા શરૂ કર્યાના સ્થળથી 100 કિમી દૂર પહોંચવા માટે કેટલો સમય લાગ્યો હશે ?

(c) એક વર્ષ માટે જમા કરાવેલ મુદ્દલ માટે વ્યાજ આ મુજબ છે :

જમા રકમ (₹માં)	1000	2000	3000	4000	5000
સાદું વ્યાજ (₹માં)	80	160	240	320	400

(i) શું આ આલેખ ઉદ્ગમબિંદુમાંથી પસાર થશે ?

(ii) આલેખનો ઉપયોગ કરી ₹ 2500નું વાર્ષિક સાદું વ્યાજ મેળવો.

(iii) દર વર્ષે ₹ 280 વ્યાજ મેળવવા માટે કેટલી રકમ મુદ્દલ તરીકે જમા કરાવવી પડશે ?

2. નીચેના કોષ્ટક માટે આલેખ દોરો :

(i)

ચોરસની બાજુ (સેમીમાં)	2	3	3.5	5	6
પરિમિતિ (સેમીમાં)	8	12	14	20	24

શું આ રૈખિક આલેખ છે ?

(ii)

ચોરસની બાજુ (સેમીમાં)	2	3	4	5	6
ક્ષેત્રફળ (ચોરસ સેમીમાં)	4	9	16	25	36

શું આ રૈખિક આલેખ છે ?

આપણે શું ચર્ચા કરી ?

1. માહિતીની રજૂઆત આલેખ સ્વરૂપે કરવાથી તે સરળતાથી સમજાય છે.

2. (i) લંબ આલેખ જુદા-જુદા વિભાગોની વચ્ચે તુલના કરવા માટે ઉપયોગી છે.

(ii) વર્તુળ આલેખ એક સંપૂર્ણ ભાગના જુદા-જુદા ભાગોની તુલના કરવા માટે ઉપયોગી છે.

(iii) હિસ્ટોગ્રામ એ સતત વર્ગો સ્વરૂપની માહિતી માટેનો સ્તંભ આલેખ છે.

3. સમયના નિશ્ચિત ગાળામાં પરિવર્તન પામતી માહિતીને દર્શાવવા રેખા આલેખનો ઉપયોગ થાય છે.

4. જ્યારે રેખા આલેખ એક અખંડિત/પૂર્ણ રેખા સ્વરૂપે મળે છે ત્યારે તેને રૈખિક આલેખ કહેવામાં આવે છે.

5. આલેખપત્ર પર કોઈ પણ બિંદુની સ્થિતિ સુનિશ્ચિત કરવા માટે આપણને x નિર્દેશાંક અને y નિર્દેશાંકની જરૂર પડે.

6. એક સ્વતંત્ર ચલ અને પરતંત્ર ચલ વચ્ચેનો સંબંધ આલેખ દ્વારા પ્રદર્શિત કરી શકાય.

પ્રકરણ 16

સંખ્યા સાથે રમત

16.1 પ્રાસ્તાવિક

તમે પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ, પૂર્ણ સંખ્યાઓ, પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ અને સંમેય સંખ્યાઓ જેવી જુદા-જુદા પ્રકારની વિવિધ સંખ્યાઓનો અભ્યાસ કર્યો. તમે આવી સંખ્યાઓના રસપ્રદ ગુણધર્મો અને ખાસિયત પણ જોઈ. ધોરણ 6માં આપણે અવયવો અને અવયવીઓ અને તેઓની વચ્ચેના સંબંધો પણ જોયા હતા અને શોધી કાઢ્યા હતા.

આ પ્રકરણમાં આપણે સંખ્યાઓને વધુ વિગતથી જોઈશું. સંખ્યાઓમાં જોવા મળતી નવીન બાબતો શોધી કાઢીશું. આ બાબત આપણને સંખ્યાની ભાજકતા વિશે જાણકારી માટે ઉપયોગી બનશે.

16.2 સંખ્યાનું વ્યાપક સ્વરૂપ

ચાલો આપણે એક સંખ્યા 52 લઈએ,

52ને નીચે પ્રમાણે લખીએ.

$$52 = 50 + 2 = 10 \times 5 + 2$$

તેવી જ રીતે 37ને પણ નીચે પ્રમાણે લખી શકાય,

$$37 = 10 \times 3 + 7$$

સામાન્ય રીતે, અંક a અને bથી બનેલ કોઈપણ બે અંકોવાળી સંખ્યા abને નીચે મુજબ લખી શકાય :

$$ab = 10 \times a + b = 10a + b$$

અહીં ab નો અર્થ $a \times b$ નથી.

તો ba માટે શું કહી શકાય ?

$$ba = 10 \times b + a = 10b + a$$

ચાલો હવે આપણે એક સંખ્યા 351 લઈએ. આ એક ત્રણ અંકોથી બનતી સંખ્યા છે. તેને નીચે પ્રમાણે પણ લખી શકાય :

$$351 = 300 + 50 + 1 = 100 \times 3 + 10 \times 5 + 1 \times 1$$

તેવી જ રીતે $\quad 497 = 100 \times 4 + 10 \times 9 + 1 \times 7$

સામાન્ય સ્વરૂપે, અંક a, b અને cથી બનેલ કોઈપણ ત્રણ અંકવાળી સંખ્યા abcને નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

$$abc = 100 \times a + 10 \times b + 1 \times c$$
$$= 100a + 10b + c$$

તેવી જ રીતે,

$$cab = 100c + 10a + b$$
$$bca = 100b + 10c + a$$ તે જ રીતે આગળ....

પ્રયત્ન કરો

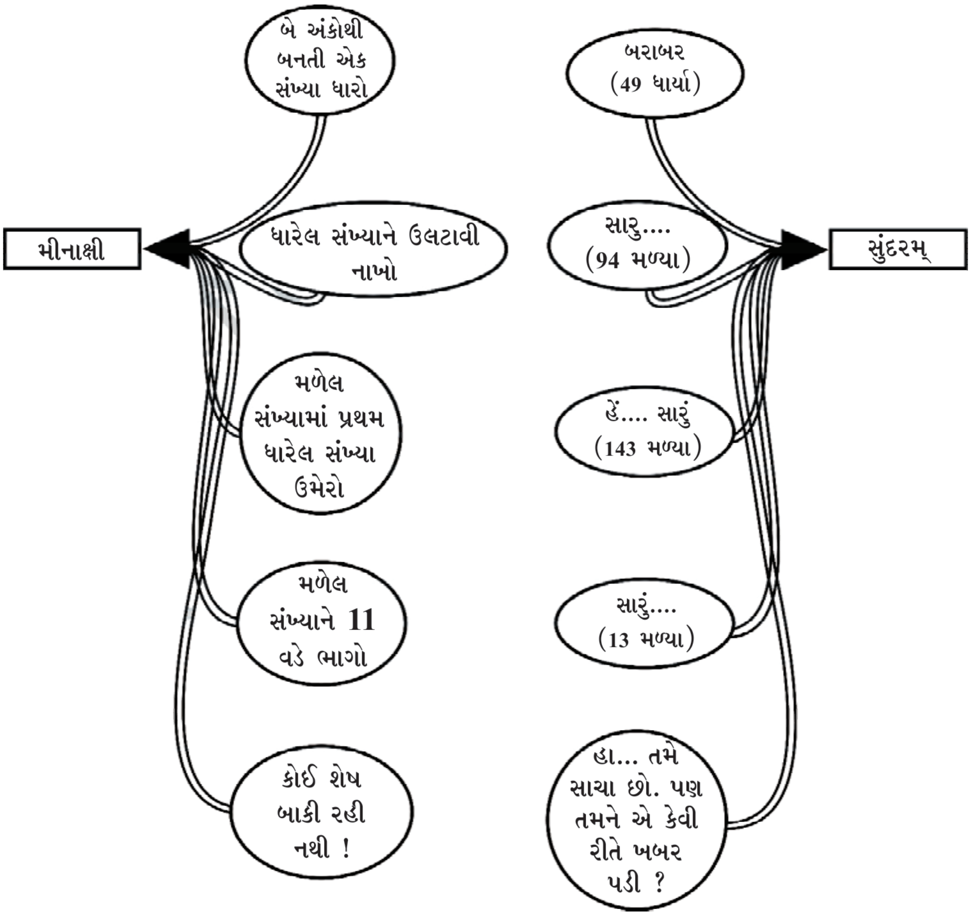
1. નીચે આપેલી સંખ્યાઓને તેમનાં વ્યાપક સ્વરૂપમાં લખો.
   (i) 25 (ii) 73 (iii) 129 (iv) 302
2. નીચે આપેલી સંખ્યાઓના સ્વરૂપને સામાન્ય સ્વરૂપમાં લખો.
   (i) $10 \times 5 + 6$ (ii) $100 \times 7 + 10 \times 1 + 8$ (iii) $100 \times a + 10 \times c + b$

16.3 સંખ્યાઓ સાથે ગમ્મત

(i) દ્વિઅંકી સંખ્યાઓમાં અંકોની અદલાબદલી

મીનાક્ષીએ સુંદરમ્‌ને 2 અંકોથી બનતી સંખ્યા ધારવાનું કહ્યું અને ત્યાર બાદ તેણી કહે એમ સુંદરમે કરવું એમ નક્કી થયું. તેઓ વચ્ચેની વાતચીત નીચે આકૃતિમાં બતાવેલ છે. આ આકૃતિને ધ્યાનથી જુઓ અને ત્યારબાદ આગળ વાંચો :

મીનાક્ષી અને સુંદરમ્ વચ્ચેની વાતચીત : પ્રથમ તબક્કો...



એવું કેમ બન્યું ? એવું એટલા માટે બન્યું કે સુંદરમે પ્રથમ 49 સંખ્યા ધારેલ હતી. તેથી તેણે ધારેલી સંખ્યાને ઉલટાવતાં તેને 94 મળ્યા. હવે સુંદરમે બંને સંખ્યાઓનો સરવાળો કર્યો.

અર્થાત્ $49 + 94 = 143$. છેલ્લે તેણે મળેલ સંખ્યાને 11 વડે ભાગવા કહ્યું. તેથી તેમને $143 \div 11 = 13$ મળ્યા. જેમાં શેષ વધતી નથી. આવું મીનાક્ષીએ અનુમાન કર્યું હતું.

પ્રયત્ન કરો

જો નીચે આપેલી સંખ્યા સુંદરમે ધારેલી હોય તો પરિણામ શું મળશે તે ચકાસો :

1. 27 **2.** 39 **3.** 64 **4.** 17

ચાલો, આપણે મીનાક્ષીની યુક્તિને સમજીએ.

ધારો કે સુંદરમે ધારેલ રકમ ab છે. જે બે અંકોવાળી સંખ્યા $10a + b$નું સંક્ષિપ્ત રૂપ છે. આ સંખ્યાના અંકોને ઉલટાવતા તેને $ba = 10b + a$ પ્રાપ્ત થાય છે. હવે આ બંને સંખ્યાનો સરવાળો કરતાં,

$$(10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b$$
$$= 11(a + b)$$

આમ, બંને સંખ્યાઓ, ધારેલ સંખ્યા અને તેને ઉલટાવવાથી મળતી સંખ્યાનો સરવાળો હંમેશા 11નો ગુણિત જ હોય !

અહીં આપણે એ પણ ખાસ નોંધ કરીએ કે જો આપણે મળેલ બંને સંખ્યાઓના સરવાળાને 11 વડે ભાગીએ તો તેનું ભાગફળ હંમેશા $(a + b)$ મળે. અને આ ભાગફળ $(a + b)$ એ ધારેલી સંખ્યા abના અંકો a અને bનો સરવાળો છે.

તમે અન્ય કોઈ બે અંકોની સંખ્યાઓ લઈ જાતે જ આ બાબતની ચકાસણી કરી શકો છો.

મીનાક્ષી અને સુંદરમ્ વચ્ચેની રમત હજુ ચાલુ છે !

મીનાક્ષી : સુંદરમ્, ફરીથી તું બે અંકોની એક સંખ્યા ધારી લે. પણ જોજે હો મને કહેવાની નથી.

સુંદરમ્ : સારું... બરાબર.

મીનાક્ષી : હવે ધારેલ રકમના અંકોનો ક્રમ ઉલટાવી નાખો. હવે ધારેલ રકમ અને ઉલટાવવાથી મળેલ રકમમાં જે મોટી રકમ હોય તેમાંથી નાની રકમની બાદબાકી કરો.

સુંદરમ્ : સારું... મેં બાદબાકી પણ કરી. આગળ શું કરું ?

મીનાક્ષી : સુંદરમ્, મળેલ બાદબાકીની સંખ્યાને 9 વડે ભાગો. હું જોયાં વિના કહી શકું છું કે તેની શેષ શૂન્ય હશે.

સુંદરમ્ : હા. મીનાક્ષી તમે સાચા છો હો ! ખરેખર આ ભાગાકાર નિ:શેષ છે. પણ આ વખતે મને પણ ખબર પડી ગઈ કે આ કેમ બને છે.

વાસ્તવમાં, સુંદરમે ધારેલી રકમ 29 હતી. તેણે કરેલી ગણતરી મુજબ : સૌપ્રથમ તેને સંખ્યા 92 મળી, ત્યારબાદ તેને $92 - 29 = 63$ મળ્યા; અને છેલ્લે 63ને 9 વડે ભાગતાં $(63 \div 9)$ તેને ભાગફળ 7 મળ્યું અને શેષ શૂન્ય મળી.

પ્રયત્ન કરો

જો સુંદરમે ધારેલ રકમ નીચે આપેલી સંખ્યામાંથી હોય તો તેનું પરિણામ શું મળે તે ચકાસો :

1. 17 **2.** 21 **3.** 96 **4.** 37

અહીં આપણે સુંદરમે મીનાક્ષીની બીજી યુક્તિ કેવી રીતે રજૂ કરી તે જોઈએ. હવે તે આવું આત્મવિશ્વાસ પૂર્ણ કરી શકે છે.

ધારો કે સુંદરમે 2 અંકોની ધારેલી રકમ ab હતી. તેને $ab = 10a + b$ સ્વરૂપે પણ લખી શકાય. આ રકમને ઉલટાવવાથી મળતી રકમ $ba = 10b + a$ છે. હવે જ્યારે મીનાક્ષીએ મોટી રકમ હોય તેમાંથી નાની રકમની બાદબાકી કરવાનું કહેતાં,

જો ધારેલી રકમનો દશકનો અંક એકમના અંકથી મોટો હોય, તો (અર્થાત્ $a > b$)

$$(10a + b) - (10b + a) = 10a + b - 10b - a$$
$$= 9a - 9b = 9(a - b)$$

જો ધારેલ રકમનો એકમનો અંક દશકના અંકથી મોટો હોય (અર્થાત્ $b > a$), તો
$(10b + a) - (10a + b) = 10b + a - 10a - b = 9b - 9a = 9(b - a)$
અને જો તે $a = b$ હોય તો તેને મળતી સંખ્યા 0 (શૂન્ય) હશે.

આમ, તમામ પ્રકારની શક્યતાઓમાં મળતું પરિણામ એ 9 વડે નિ:શેષ ભાગી શકાય છે. અર્થાત્ શેષ શૂન્ય છે. અહીં એ પણ નોંધીએ કે મળેલ પરિણામ (બાદબાકી કરતાં)ને ભાગીએ તો આપણને ભાગફળ તરીકે $a - b$ અથવા $b - a$ ($a > b$ અથવા $a < b$ મુજબ) મળે છે. તમે બીજી સંખ્યાઓ ધારીને આ બાબતની ચકાસણી કરી શકો છો.

(ii) **ત્રણ અંકોવાળી સંખ્યાના અંકોને ઉલટાવતાં :**

હવે અંકો સાથે રમત અને ગમ્મત કરવાનો વારો સુંદરમ્‌નો હતો.

સુંદરમ્ : મીનાક્ષી, તમે ત્રણ અંકોની કોઈ પણ રકમ ધારો. પણ મને કહેવાની નથી.

મીનાક્ષી : સારું...

સુંદરમ્ : હવે ધારેલ સંખ્યાના અંકોના ક્રમને ઉલટાવી નાખો. મળતી સંખ્યા અને ધારેલ સંખ્યામાંથી જે સંખ્યા નાની હોય તેને મોટી સંખ્યામાંથી બાદ કરો.

મીનાક્ષી : સારું... મેં તે પ્રમાણે બાદબાકી કરી નાખી. મારે હવે આગળ શું કરવાનું ?

સુંદરમ્ : મળેલ બાદબાકીની સંખ્યાને 99 વડે ભાગાકાર કરો. હું ચોક્કસપણે કહી શકું કે ત્યાં શેષ શૂન્ય મળે છે.

વાસ્તવમાં, મીનાક્ષીએ 3 અંકોની સંખ્યા 349 ધારેલ હતી.

- સંખ્યાના અંકોના ક્રમને ઉલટાવવાથી 943 મળે.
- મોટી સંખ્યામાંથી નાની સંખ્યા બાદ કરતાં $(943 - 349) = 594$ મળે.
- મળેલ પરિણામી સંખ્યાને 99 વડે ભાગવાથી $594 \div 99 = 6$, મળે અને શેષ શૂન્ય રહે.

પ્રયત્ન કરો

જો મીનાક્ષીએ ધારેલી ત્રણ અંકોની સંખ્યાઓ નીચે મુજબની હોય તો મળતાં પરિણામો જુઓ :

1. 132 **2.** 469 **3.** 737 **4.** 901

ચાલો, આપણે જાણીએ કે આ કેમ બને છે ?

ધારો કે મીનાક્ષીએ ધારેલ ત્રણ અંકવાળી સંખ્યા $abc = 100a + 10b + c$ છે. અંકોના ક્રમને ઉલટવતાં મળતી સંખ્યા $cba = 100c + 10b + a$ છે. હવે બાદબાકી કરતાં

જો $a > c$, તો બંને સંખ્યાઓનો તફાવત

$(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a$
$= 99a - 99c = 99(a - c)$

જો $c > a$, તો બંને સંખ્યાઓનો તફાવત

$(100c + 10b + a) - (100a + 10b + c) = 99c - 99a = 99(c - a)$

જો $a = c$ તો સ્પષ્ટ છે કે તફાવત શૂન્ય જ મળે.

આમ, બધા જ પ્રકારના કિસ્સાઓમાં મળતું પરિણામ એ 99 વડે નિ:શેષ ભાગી શકાય તેવું જ મળે છે. તેમજ મળતું ભાગફળ $(a - c)$ અથવા $(c - a)$ મળે છે. આ બાબતને અન્ય કોઈ ત્રણ અંકોવાળી સંખ્યા માટે તપાસી જુઓ.

(iii) **ત્રણ અંકોની મદદથી ત્રણ અંકોની સંખ્યા બનાવવી.**

હવે ફરીથી મીનાક્ષીનો દાવ આવ્યો.

મીનાક્ષી : સુંદરમ્, તમે કોઈ પણ ત્રણ અંકવાળી સંખ્યા ધારો.

સુંદરમ્ : સારું... મીનાક્ષી મેં ત્રણ અંકવાળી સંખ્યા ધારી લીધી ?

મીનાક્ષી : હવે આ અંકોનો ઉપયોગ કરી બીજી બે ત્રણ અંકવાળી સંખ્યાઓ બનાવો. જેમ કે ધારેલી સંખ્યા *abc* હોય તો,

તેની પ્રથમ સંખ્યા *cab* છે. (અર્થાત્ એકમના અંકને શરૂઆતમાં (ડાબી બાજુ) મૂકવામાં આવે.)

બીજી સંખ્યા *bca* છે. (અર્થાત્ શતકના અંકને જમણી બાજુ છેડે મૂકવામાં આવે.)

હવે આ ધારેલ સંખ્યા અને બીજી બે સંખ્યાનો સરવાળો કરો. મળતાં સરવાળાની સંખ્યાનો 37 વડે ભાગાકાર કરો. હું કહી શકું કે શેષ શૂન્ય મળે છે.

સુંદરમ : હા. મીનાક્ષી તમે સાચા હોં !!

વાસ્તવમાં સુંદરમે 3 અંકોવાળી સંખ્યા 237 ધારેલ હતી. ત્યાર બાદ મીનાક્ષીના કહેવા મુજબ સુંદરમે બીજી બે રકમો બનાવેલ, તે 723 અને 372 હતી. આમ,

$$\begin{array}{r} 237 \\ +\ 723 \\ +\ 372 \\ \hline +\ 1332 \\ \hline \end{array}$$

ત્રણ અંકો 2, 3 અને 7 અંકોની મદદથી શક્ય તેટલી ત્રણ અંકોની સંખ્યાઓ બનાવી તેનો સરવાળો કરો. શું તે 37થી નિઃશેષ ભાગી શકાય ? શું તે સંખ્યા *abc*ના અંકો *a*, *b* અને *c*થી બનતી બધી જ સંખ્યાઓના સરવાળા માટે સાચું છે ?

હવે 1332ને 37 વડે ભાગતાં

$$1332 \div 37 = 36, \text{ શેષ શૂન્ય મળે છે.}$$

પ્રયત્ન કરો

જો સુંદરમે ધારેલ ત્રણ અંકોથી બનતી સંખ્યા નીચે મુજબ હોય તો મળતાં પરિણામની ચકાસણી કરો :

1. 417 **2.** 632 **3.** 117 **4.** 937

શું આ બાબત હંમેશાં સાચી છે ?

ચાલો જોઈએ,

$$abc = 100a + 10b + c$$
$$cab = 100c + 10a + b$$
$$bca = 100b + 10c + a$$

હવે $abc + cab + bca = 111(a + b + c)$

$$= 37 \times 3\ (a + b + c)$$

જે 37 થી નિઃશેષ ભાગી શકાય.

16.4 સંખ્યાઓને બદલે મૂળાક્ષર

અહીં આપણી પાસે કોયડાઓ છે કે જેમાં ગાણિતિક સરવાળામાં અંકોના સ્થાને મૂળાક્ષર હોય છે. આપણે શોધી કાઢવાનું હોય છે કે કયો મૂળાક્ષર કયા અંકને બદલે મૂકી શકાય, તેથી આ એક ગુપ્ત સંકેતને ઉકેલવાની રમત જેવું છે. અહીં આપણે સરવાળા અને ગુણાકાર માટેના કોયડા જ જોઈશું.

અહીં આપણે નીચે મુજબના બે નિયમોનું પાલન કરીને કોયડાઓ ઉકેલીશું.

1. પ્રત્યેક મૂળાક્ષર કોઈ એક અંકની જગ્યાએ જ વાપરી શકાશે. પ્રત્યેક અંક એ કોઈ એક મૂળાક્ષરનું પ્રતિનિધિત્વ કરશે.
2. સંખ્યાનો પ્રથમ અંક શૂન્ય હશે નહિ. આથી આપણે ''ત્રેસઠ''ને 63 લખીશું. પરંતુ 063 કે 0063 લખીશું નહિ.

આપણે એક એવો નિયમ પણ બનાવીએ કે કોયડાનો જવાબ એક અને માત્ર એક જ હોય.

ઉદાહરણ 1 : સરવાળામાં Qની કિંમત શોધો.

$$\begin{array}{r} 3\,1\,Q \\ +\,1\,Q\,3 \\ \hline 5\,0\,1 \\ \hline \end{array}$$

ઉકેલ :

અહીં એક મૂળાક્ષર Q છે. આપણે Qની કિંમત શોધવી છે.

સરવાળાની એકમની છેલ્લી ઊભી હાર જુઓ. તે Q + 3 છે. જવાબમાં 1 આવે છે. તેથી આપણે એવી સંખ્યા Qની જગ્યાએ મૂકીએ કે તેનો એકમનો અંક 1 મળે.

આ તો જ શક્ય બને કે જો Qની કિંમત 8 હોય. તેથી કોયડો નીચે મુજબ ઉકેલી શકાય :

$$\begin{array}{r} 3\,1\,8 \\ +\,1\,8\,3 \\ \hline 5\,0\,1 \end{array} \quad \text{તેથી } Q = 8$$

ઉદાહરણ 2 : નીચેના સરવાળામાં A અને Bની કિંમત મેળવો.

$$\begin{array}{r} A \\ +\quad A \\ +\quad A \\ \hline B\,A \\ \hline \end{array}$$

ઉકેલ : અહીં આ કોયડામાં A અને B બંનેની કિંમત શોધવાની છે.

અહીં આપેલા સરવાળા પર નજર નાખીએ તો જોવા મળે છે કે સરવાળાની ઊભી હારમાં Aનો સરવાળો ત્રણ વાર કરવામાં આવતાં મળતી સંખ્યાનો એકમનો અંક પણ A જ મળે. જો Aનો સરવાળો બે વાર કરતાં મળતી સંખ્યાનો એકમનો અંક શૂન્ય મળે તો આ શક્ય બને. તેથી આપણે

A = 0 અથવા A = 5 વિચારી શકીએ.

જો A = 0, તો 0 + 0 + 0 = 0, તેથી B = 0 મળે. આપણે આ કિંમત A = 0 સ્વીકારીશું નહિ. (કેમ કે A = 0 તો A = B, તેથી BA સંખ્યાનો દશકનો અંક પણ શૂન્ય મળે.) તેથી આપણે A = 0 કિંમતને સ્વીકારતા નથી તેથી બીજી શક્યતા A = 5 લઈએ તો,

કોયડાનો ઉકેલ આ પ્રમાણે મળે,

$$\begin{array}{r} 5 \\ +\quad 5 \\ +\quad 5 \\ \hline 1\,5 \\ \hline \end{array} \quad \text{તેથી } A = 5 \text{ અને } B = 1$$

ઉદાહરણ 3 : નીચેના ગુણાકારમાં A અને Bની કિંમત મેળવો.

$$\begin{array}{r} B\ A \\ \times \quad B\ 3 \\ \hline 5\ 7\ A \\ \hline \end{array}$$

ઉકેલ :

અહીં આપેલા કોયડામાં બે મૂળાક્ષરો A અને Bની કિંમત શોધવાની છે.

$3 \times A$માં એકમનો અંક A હોવાથી, A = 0 અથવા A = 5 હોય.

હવે B માટે વિચારો. જો B = 1 હોય તો BA × B3ની કિંમત વધુમાં વધુ 19×19 ને બરાબર એટલે કે તે વધુમાં વધુ 361ને બરાબર હોઈ શકે. પરંતુ ગુણાકાર 57A આપેલ છે જે 500થી વધારે છે. તેથી B = 1 શક્ય નથી.

જો B = 3 લઈએ તો BA × B3ની કિંમત 30×30થી વધુ મળે એટલે કે 900થી વધારે મળે. પરંતુ 57A એ 600થી નાના છે તેથી B = 3 શક્ય નથી.

આમ, ઉપરની વાસ્તવિકતાઓ જોતાં B = 2 મળે તેથી ગુણાકાર 20×23 અથવા 25×23 બેમાંથી એક હોઈ શકે.

પરંતુ પ્રથમ શક્યતા $20 \times 23 = 460$ સ્વીકારી શકાય નહિ પરંતુ જો બીજી શક્યતા $25 \times 23 = 575$ જે શક્ય છે. તેથી અહીં A = 5 અને B = 2 ઉકેલ છે.

$$\begin{array}{r} 2\ 5 \\ \times \quad 2\ 3 \\ \hline 5\ 7\ 3 \\ \hline \end{array}$$

આટલું કરો

બે અંકોથી બનતી એક સંખ્યા *ab* ધારો. હવે આ ધારેલ સંખ્યાને ઉલટાવવાથી મળતી સંખ્યા *ba* છે. બંનેનો સરવાળો કરો. તેનો સરવાળો 3 અંકોથી બનતી સંખ્યા મળશે. ધારો કે તે *dad* છે.

એટલે કે $\quad ab + ba = dad$

$\therefore \ (10a + b) + (10b + a) = dad$

$\therefore \ 11(a + b) = dad$

અહીં $a + b$નો સરવાળો 18થી વધારે ક્યારેય ન હોય (કેમ ?)

શું *dad* એ 11નો ગુણક છે ?

શું *dad* એ 198થી નાનો છે ?

1 થી 198 વચ્ચે આવતાં 11ના ગુણકો લખો કે જે ત્રણ અંકોવાળી સંખ્યા હોય.

તમને *a* અને *d*ની કિંમત મળી જશે.

સ્વાધ્યાય 16.1

નીચે આપેલ સરવાળા કે ગુણાકારની પ્રક્રિયા માટે મૂળાક્ષરોની કિંમત મેળવો. તમે જે પગલાં લીધાં તેનું કારણ જણાવો.

1. $$\begin{array}{r} 3\ A \\ +\quad 2\ 5 \\ \hline B\ 2 \\ \hline \end{array}$$

2. $$\begin{array}{r} 4\ A \\ +\quad 9\ 8 \\ \hline C\ B\ 3 \\ \hline \end{array}$$

3. $$\begin{array}{r} 1\ A \\ \times\quad A \\ \hline 9\ A \\ \hline \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{r} A\,B \\ +\quad 3\,7 \\ \hline 6\,A \\ \hline \end{array}$$

5.
$$\begin{array}{r} A\,B \\ \times\quad 3 \\ \hline C\,A\,B \\ \hline \end{array}$$

6.
$$\begin{array}{r} A\,B \\ \times\quad 5 \\ \hline C\,A\,B \\ \hline \end{array}$$

7.
$$\begin{array}{r} A\,B \\ \times\quad 6 \\ \hline B\,B\,B \\ \hline \end{array}$$

8.
$$\begin{array}{r} A\,1 \\ +\quad 1\,B \\ \hline B\,0 \\ \hline \end{array}$$

9.
$$\begin{array}{r} 2\,A\,B \\ +\quad A\,B\,1 \\ \hline B\,1\,8 \\ \hline \end{array}$$

10.
$$\begin{array}{r} 1\,2\,A \\ +\quad 6\,A\,B \\ \hline A\,0\,9 \\ \hline \end{array}$$

16.5 વિભાજ્યતાની ચાવીઓ

નીચે આપેલી સંખ્યાઓ ભાજક તરીકે હોય તો તેની વિભાજ્યતાની ચાવીઓ વિશે તમે ધોરણ 6માં શીખી ગયા છો.

10, 5, 2, 3, 6, 4, 8, 9, 11

તમે ઉપરની સંખ્યાઓ માટે નિઃશેષ ભાગાકાર માટેની સરળ પદ્ધતિ જાણો છો. પરંતુ અહીં તમે એવું કેમ બને છે તે જાણીને નવાઈ પામશો. આ પ્રકરણમાં આપણે એવું કેમ ? તેના સંદર્ભે જોઈશું.

16.5.1 10 વડે વિભાજ્યતા

આ એક સાવ સરળ પદ્ધતિથી, સૌ પ્રથમ આપણે 10ના ગુણિત લખીએ.

10, 20, 30, 40, 50, 60 ...,

અને થોડા 10ની ગુણિત ન હોય તેવી સંખ્યા લખીએ જેમ કે,

13, 27, 32, 48, 55, 69

ઉપરની સંખ્યાઓનો અભ્યાસ કરતાં આપણને જોવા મળે છે કે જે સંખ્યાઓનો એકમનો અંક શૂન્ય છે, તે બધી જ સંખ્યાઓને 10 વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય છે. જ્યારે જે સંખ્યાનો એકમનો અંક શૂન્ય નથી તેવી કોઈ પણ સંખ્યાને 10 વડે નિઃશેષ ભાગી શકાતી નથી. તેથી આપણને 10 વડે વિભાજ્યતાની ચાવી મળી.

અલબત્ત આપણે અહીં જ અટકી નહિ જઈએ. આપણે એ પણ બતાવીશું કે ‘‘આવું કેમ ?’’ તે બતાવવું કોઈ અઘરું કામ નથી. તેના માટે આપણને ફક્ત સ્થાન કિંમતના નિયમોની માહિતી હોવી જોઈએ.

જો આપણે કોઈ સંખ્યા ... cba લઈએ તો, તેને નીચે મુજબ દર્શાવી શકાય.

$$...\,cba = ... + 100c + 10b + a$$

અહીં, a એ એકમનો અંક, b એ દશકનો અંક અને c એ શતકનો અંક છે. તેવી જ રીતે આગળ, અહીં ... ટપકાંનો મતલબ એવો છે કે c ની ડાબી બાજુ પણ હજુ સંખ્યાઓ છે.

10, 100, 1000, ... એ 10થી વિભાજ્ય છે. તેવી જ રીતે $10b$, $100c$ ... અને જ્યાં સુધી સંખ્યા aનો પ્રશ્ન છે, તો ત્યાં $a = 0$ હોય તો જ આપેલી સંખ્યા 10 થી વિભાજ્ય હોય.

આપેલી સંખ્યાનો એકમ અંક શૂન્ય હોય, તો જ આપેલી સંખ્યા 10 વડે વિભાજ્ય હોય.

16.5.2 5 વડે વિભાજ્યતા

ચાલો, 5ના ગુણિત જોઈએ :

5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50

અહીં આપણે ઉપરની યાદી પરથી જોઈ શકીએ છીએ કે યાદીમાં આપેલ સંખ્યાઓનો એકમનો અંક 5 અથવા 0 છે, તે સિવાય બીજો કોઈ અંક એકમના સ્થાને આવતો જ નથી.

તેથી આપણને 5 વડે વિભાજ્યતાની ચાવી આ પ્રમાણે મળે છે :

જો આપેલી સંખ્યાનો એકમનો અંક 5 અથવા 0 હોય તો તે સંખ્યા 5 વડે વિભાજ્ય છે.

ચાલો આપણે આ નિયમને સમજીએ. કોઈ એક સંખ્યા ... cbaને નીચે પ્રમાણે લખી શકાય.

$... cba = ... + 100c + 10b + a$

આપણે જાણીએ છીએ કે 10, 100 વગેરે 10થી વિભાજ્ય છે. તેથી $10b$, $100c$, ... પણ 10થી વિભાજ્ય હોય. તે 5 થી પણ વિભાજ્ય હોય કેમ કે $10 = 5 \times 2$. જ્યાં સુધી એકમના અંક a નો પ્રશ્ન છે, ત્યાં સુધી જો a, 5 વડે વિભાજ્ય હોય, તો જ તે સંખ્યા 5 વડે વિભાજ્ય હોય તેથી એકમનો અંક 5 અથવા 0 હોય.

પ્રયત્ન કરો

(પ્રથમ ઉદાહરણ તમને ગણીને આપેલ છે.)

1. જો N ÷ 5માં શેષ 3 વધે છે, તો Nની એકમનો અંક શું હોય ? (જ્યારે કોઈ એક સંખ્યાને 5 વડે ભાગીએ અને શેષ 3 વધે તો તે સંખ્યાનો એકમ અંક 3 અથવા 8 હોય.)
2. જો N ÷ 5માં શેષ 1 વધે છે, તો Nની એકમનો અંક શું હોય ?
3. જો N ÷ 5માં શેષ 4 વધે છે, તો Nની એકમનો અંક શું હોય ?

16.5.3 2 વડે વિભાજ્યતા

અહીં બેકી સંખ્યાઓની યાદી આપેલ છે.

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22 ...,

અને એકી સંખ્યાઓની યાદી નીચે પ્રમાણે હોય

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21 ...,

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે બેકી સંખ્યાનો એકમનો અંક

2, 4, 6, 8 કે 0 (શૂન્ય) છે.

જ્યારે એકી સંખ્યાનો એકમનો અંક

1, 3, 5, 7 અથવા 9 છે.

આપણે ધોરણ 6માં 2ની વિભાજ્યતાની ચાવી શીખી ગયેલ તે યાદ કરીએ. તે આ પ્રમાણે હતી :

જો આપેલી સંખ્યાનો એકમ અંક 0, 2, 4, 6 કે 8 હોય તો તેવી સંખ્યાને 2 વડે નિ:શેષ ભાગી શકાય અર્થાત્ તે સંખ્યા 2 વડે વિભાજ્ય છે.

આ નિયમને આપણે સમજીએ.

આપણે જાણીએ છીએ કે કોઈ સંખ્યા cbaને આપણે $100c + 10b + a$ સ્વરૂપે લખી શકીએ.

અહીં સ્પષ્ટ છે કે પ્રથમ બે પદો $100c$ અને $10b$ એ 2 વડે વિભાજ્ય છે. કેમ કે 100 અને 10 સંખ્યાઓ 2 વડે વિભાજ્ય છે. હવે જ્યાં સુધી સંખ્યા aનો પ્રશ્ન છે, તો આપેલ સંખ્યા 2 થી તો જ વિભાજ્ય હોય, કે જો a, 2 વડે વિભાજ્ય હોય, આ તો જ શક્ય છે કે જો $a = 0, 2, 4, 6$ કે 8.

પ્રયત્ન કરો

(પ્રથમ ઉદાહરણ ગણતરી સાથે આપેલ છે.)

1. જો N ÷ 2માં શેષ 1 વધે તો છે, તો સંખ્યા Nનો એકમનો અંક શું હશે ?
   (N એ એકી સંખ્યા છે. તેથી તેનો એકમનો અંક 1, 3, 5, 7 કે 9 હશે.)

2. જો N ÷ 2 કરતાં શેષ શૂન્ય વધે છે, તો સંખ્યા Nનો એકમનો અંક શું હશે ?
3. ધારો કે સંખ્યા N, માટે N ÷ 5 કરતાં શેષ 4 મળે છે અને N ÷ 2 કરવાથી શેષ 1 મળે છે, તો સંખ્યા Nનો એકમનો અંક શું હશે ?

16.5.4 9 અને 3 વડે વિભાજ્યતા

આપણને ત્રણ સંખ્યાઓ વડે નિ:શેષ ભાગાકારની ચાવીઓ મળી. આ ત્રણ સંખ્યા 10, 5 અને 2 છે. આપણને આ ત્રણેય ચાવીઓમાં એક બાબત સામાન્ય જણાય છે કે તેમાં એકમના અંકનો જ ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. બાકીના અંકો ગમે તે હોય તેની તરફ ધ્યાન આપેલ નથી એટલે વિભાજ્યતા માત્ર એકમના અંકની મદદથી જ નક્કી થાય છે. 10, 5, 2 એ 10ના અવયવો છે. તે આપણી સ્થાન કિંમતો ચાવી રૂપ સંખ્યા છે.

પરંતુ ચાલો આપણે 9 વડે વિભાજ્યતાની ચકાસણી કરીએ, તેમાં આ બાબત મદદરૂપ બનતી નથી. ચાલો, આપણે એક સંખ્યા 3573 લઈએ. તેને વિસ્તૃત રીતે લખતાં,

$$3573 = 3 \times 1000 + 5 \times 100 + 7 \times 10 + 3$$
$$= 3 \times (999 + 1) + 5 \times (99 + 1) + 7 \times (9 + 1) + 3$$
$$= 3 \times 999 + 5 \times 99 + 7 \times 9 + (3 + 5 + 7 + 3 () \quad 1)$$

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે જો (3 + 5 + 7 + 3)ને 9 કે 3 વડે નિ:શેષ ભાગી શકાય તો જ 3573ને 9 કે 3 વડે નિ:શેષ ભાગી શકાય.

આપણે એ પણ જોઈ શકીએ છીએ કે 3 + 5 + 7 + 3 = 18 જે 9 અને 3 બંને વડે નિ:શેષ ભાગી શકાય છે. આથી સંખ્યા 3573 એ 9 અને 3 વડે વિભાજ્ય છે.

હવે આપણે બીજી એક સંખ્યા 3576 લઈએ,

$3576 = 3 \times 999 + 5 \times 99 + 7 \times 9 + (3 + 5 + 7 + 6)$ ... (2)

ઉપરાંત (3 + 5 + 7 + 6 = 21). 21 એ 3 થી નિ:શેષ ભાગી શકાય. પરંતુ 9 વડે નિ:શેષ ન ભાગી શકાય.

આમ, 3576 એ 3 વડે વિભાજ્ય છે. પરંતુ 9 વડે વિભાજ્ય નથી.

આમ,

(i) કોઈ સંખ્યા N એ 9 વડે તો જ વિભાજ્ય છે કે તેના તમામ અંકોનો સરવાળો 9 વડે નિ:શેષ ભાગી શકાય. નહીં તો તે સંખ્યા N એ 9 વડે વિભાજ્ય નથી.

(ii) કોઈ સંખ્યા N એ 3 વડે તો જ વિભાજ્ય છે કે તેના તમામ અંકોનો સરવાળો 3 વડે નિ:શેષ ભાગી શકાય. નહીં તો તે સંખ્યા N એ 3 વડે વિભાજ્ય નથી.

જો સંખ્યા cba હોય તો, $cba = 100c + 10b + a = 99c + 9b + (a + b + c)$

$$= \underline{9(11c + b)} + (a + b + c)$$

જે 3 અને 9થી વિભાજ્ય છે.

આમ, 9 (અથવા 3) વડે વિભાજ્યતા તો જ શક્ય છે કે જો $(a + b + c)$ 9 (અથવા 3) વડે વિભાજ્ય હોય.

ઉદાહરણ 4 : 21436587 એ 9 વડે વિભાજ્ય છે ? ચકાસો.

ઉકેલ : આપેલ સંખ્યા 21436587ના અંકોનો સરવાળા કરતા 2 + 1 + 4 + 3 + 6 + 5 + 8 + 7 = 36 મળે છે. આમ, અંકોનો સરવાળો 36 એ 9 વડે વિભાજ્ય છે. તેથી આપણે એવું તારણ કાઢી શકીએ કે 21436587 એ 9 વડે વિભાજ્ય છે.

આપણે બીજી રીતે જોઈએ તો

$$\frac{21436587}{9} = 2381843 \qquad \text{(ભાગાકાર નિ:શેષ છે.)}$$

ઉદાહરણ 5 : 152875ની વિભાજ્યતા 9 વડે ચકાસો.

ઉકેલ : અહીં સંખ્યા 152875ના અંકોનો સરવાળો કરતાં,

સરવાળો = 1 + 5 + 2 + 8 + 7 + 5 = 28

તેથી સરવાળો 28 જે 9 વડે વિભાજ્ય નથી. એટલે આપણે કહી શકીએ કે 152875 એ 9 વડે વિભાજ્ય નથી.

પ્રયત્ન કરો

નીચેની સંખ્યાઓ 9 વડે વિભાજ્ય છે કે નહિ ? તે ચકાસો.

1. 108 **2.** 616 **3.** 294 **4.** 432 **5.** 927

ઉદાહરણ 6 : જો ત્રણ અંકોથી બનતી સંખ્યા $24x$ એ 9 વડે વિભાજ્ય હોય તો xની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : જો $24x$ એ 9 વડે વિભાજ્ય હોય તો તેના અંકોનો સરવાળો $2 + 4 + x = 6 + x$ પણ 9 વડે વિભાજ્ય હોય.

આ તો જ શક્ય છે કે $6 + x = 9$ અથવા 18 ...

પરંતુ x એ એક અંક છે. તેથી $6 + x = 9$ એટલે કે $x = 3$ આમ, xની કિંમત 3 મળે.

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

1. તમે જોયું કે 450 એ 10થી વિભાજ્ય છે. તે 2 અને 5થી પણ વિભાજ્ય છે. વળી, 2 અને 5 એ 10ના અવયવો પણ છે. તેવી જ રીતે 135 એ 9 થી વિભાજ્ય છે. તે 3થી પણ વિભાજ્ય છે. ઉપરાંત 3 એ 9નો અવયવ પણ છે.

શું તમે એમ કહી શકો કે કોઈ સંખ્યાએ m થી વિભાજ્ય છે, તો તે સંખ્યા mના અવયવોથી પણ વિભાજ્ય હોય ?

2. (i) 3 અંકોની સંખ્યા abc માટે

$$abc = 100a + 10b + c$$
$$= 99a + 11b + (a - b + c)$$
$$= 11(9a + b) + (a - b + c)$$

જો સંખ્યા abc એ 11 વડે વિભાજ્ય હોય તો, $(a - b + c)$ માટે શું કહી શકાય ?

શું તે અનિવાર્ય છે કે $(a + c - b)$ પણ 11 વડે નિ:શેષ ભાજ્ય હોય ?

(ii) 4 અંકોની સંખ્યા $abcd$ માટે

$$abcd = 1000a + 100b + 10c + d$$
$$= 1001a + 99b + 11c - (a - b + c - d)$$
$$= 11(91a + 9b + c) + [(b + d) - (a + c)]$$

જો સંખ્યા $abcd$ એ 11 વડે વિભાજ્ય હોય તો, $[(b + d) - (a + c)]$ માટે શું કહી શકાય ?

(iii) ઉપર દર્શાવેલ કિસ્સાઓ (i) અને (ii) પરથી આપણે કહી શકીએ કે, કોઈ પણ સંખ્યા 11 વડે તો જ નિ:શેષ ભાગી શકાય જો તે સંખ્યાના એકી સ્થાન પર આવેલ સંખ્યાનો સરવાળો અને બેકી સ્થાન પર આવેલ અંકોના સરવાળાના તફાવતને 11 વડે નિ:શેષ ભાગી શકાય.

ઉદાહરણ 7 : 2146587ની 3 વડે વિભાજ્યતા ચકાશો.

ઉકેલ : અહીં સંખ્યા 2146587ના અંકોનો સરવાળો 2 + 1 + 4 + 6 + 5 + 8 + 7 = 33 છે. આ સરવાળો એ 3 વડે વિભાજ્ય છે. આપણે એવું તારણ કાઢી શકીએ કે સંખ્યા 2146587 એ 3 વડે વિભાજ્ય છે.

ઉદાહરણ 8 : 15287ની 3 વડે વિભાજ્યતા ચકાસો.

ઉકેલ : અહીં સંખ્યા 15287ના અંકોનો સરવાળો 1 + 5 + 2 + 8 + 7 = 23 મળે છે.

આ સરવાળો 23 એ 3 વડે વિભાજ્ય નથી તેથી આપેલી સંખ્યા 15287 એ 3 વડે વિભાજ્ય નથી.

પ્રયત્ન કરો

નીચેની સંખ્યાઓ માટે 3ની વિભાજ્યતા ચકાસો.

1. 108 **2.** 616 **3.** 294 **4.** 432 **5.** 927

સ્વાધ્યાય 16.2

1. જો 21y5 એ 9નો ગુણિત છે, જ્યાં y એ એક અંક છે, તો yની કિંમત શોધો.
2. જો 31z5 એ 9નો ગુણિત છે, જ્યાં z એ એક અંક છે, તો zની કિંમત શોધો.
3. જો 24x એ 3નો ગુણિત છે. જ્યાં x એ એક અંક છે, તો xની કિંમત શોધો.

   તમને છેલ્લા પ્રશ્નોના બે ઉકેલ મળશે ? શા માટે ?

   (24x એ 3નો ગુણિત છે. તેથી અંકોનો સરવાળો 6 + x પણ 3નો ગુણિત હોય. એટલે 6 + x ની કિંમત 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, ... પૈકીની કોઈ હોય. પરંતુ x એ એક અંક છે, તે તો જ શક્ય બને કે 6 + x = 9 અથવા 12 અથવા 15. તેથી x = 0 અથવા x = 3 અથવા x = 6 અથવા x = 9. આમ, xની કિંમત ઉપરના ચાર પૈકી કોઈ પણ હોય.
4. જો 31z5 એ 3નો ગુણિત હોય, જ્યાં z એ એક અંક છે. તો zની કિંમત શું મળે ?

આપણે શું ચર્ચા કરી ?

1. સંખ્યાને વ્યાપક સ્વરૂપે લખી શકાય, તેથી બે અંકોની સંખ્યા ab હોય તો $ab = 10a + \quad b$
2. સંખ્યાનું સામાન્ય સ્વરૂપ આપણને કોયડાઓ ઉકેલવામાં મદદ કરે છે.
3. આપણે કોઈ સંખ્યાને વ્યાપક સ્વરૂપે લખીએ ત્યારે તે સંખ્યાની 10, 5, 2, 9 અથવા 3થી ભાજ્યતાનું કારણ આપી શકીએ છીએ.

જવાબો

સ્વાધ્યાય 1.1

1. (i) 2 (ii) $\frac{-11}{28}$

2. (i) $\frac{-2}{8}$ (ii) $\frac{5}{9}$ (iii) $\frac{-6}{5}$ (iv) $\frac{2}{9}$ (v) $\frac{19}{6}$

4. (i) $\frac{-1}{13}$ (ii) $\frac{-19}{13}$ (iii) 5 (iv) $\frac{56}{15}$ (v) $\frac{5}{2}$ (vi) −1

5. (i) 1 એ ગુણાકારનો એકમ ઘટક છે. (ii) જૂથનો નિયમ (iii) વ્યસ્ત સંખ્યા

6. $\frac{-96}{91}$ **7.** સંગઠિતતા **8.** ના, કારણ કે ગુણાકાર 1 ન થાય.

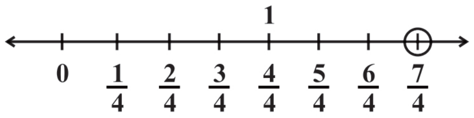
9. હા, કારણ કે $0.3 \times 3\frac{1}{3} = \frac{3}{10} \times \frac{10}{3} = 1$

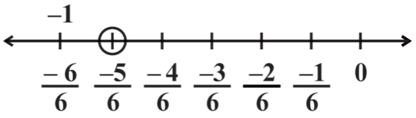
10. (i) 0 (ii) 1 અને (−1) (iii) 0

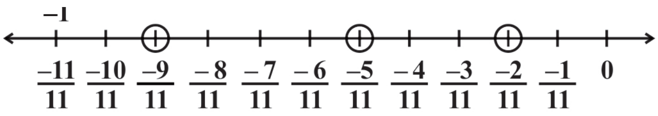
11. (i) ના (ii) 1, −1 (iii) $\frac{-1}{5}$ (iv) x (v) સંમેય સંખ્યા

(vi) ધન

સ્વાધ્યાય 1.2

1. (i)


(ii)


2.


3. તેઓ પૈકીના થોડા 1, $\frac{1}{2}$, 0, −1, $\frac{-1}{2}$

4. $\frac{-7}{20}, \frac{-6}{20}, \frac{-5}{20}, \frac{-4}{20}, \frac{-3}{20}, \frac{-2}{20}, \frac{-1}{20}$, 0, ..., $\frac{1}{20}, \frac{2}{20}$ (આવી અન્ય સંમેય સંખ્યાઓ પણ મળી શકે.)

5. (i) $\frac{41}{60}, \frac{42}{60}, \frac{43}{60}, \frac{44}{60}, \frac{45}{60}$ (ii) $\frac{-8}{6}, \frac{-7}{6}$, 0, $\frac{1}{6}, \frac{2}{6}$, (iii) $\frac{9}{32}, \frac{10}{32}, \frac{11}{32}, \frac{12}{32}, \frac{13}{32}$

(આવી અન્ય સંમેય સંખ્યાઓ પણ મળી શકે.)

6. $-\frac{3}{2}, -1, \frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ (આવી અન્ય સંમેય સંખ્યાઓ પણ મળી શકે.)

7. $\frac{97}{160}, \frac{98}{160}, \frac{99}{160}, \frac{100}{160}, \frac{101}{160}, \frac{102}{160}, \frac{103}{160}, \frac{104}{160}, \frac{105}{160}, \frac{106}{160}$

(આવી અન્ય સંમેય સંખ્યાઓ પણ મળી શકે.)

સ્વાધ્યાય 2.1

1. $x = 9$ **2.** $y = 7$ **3.** $z = 4$ **4.** $x = 2$ **5.** $x = 2$ **6.** $t = 50$

7. $x = 27$ **8.** $y = 24$ **9.** $x = \frac{25}{7}$ **10.** $y = \frac{3}{2}$ **11.** $p = -\frac{4}{3}$ **12.** $x = -\frac{8}{5}$

સ્વાધ્યાય 2.2

1. $\frac{3}{4}$, **2.** લંબાઈ = 52 મી, પહોળાઈ = 25 મી, **3.** $1\frac{2}{5}$ સેમી **4.** 40 અને 55

5. 45, 27 **6.** 16, 17, 18 **7.** 288, 296 અને 304 **8.** 7, 8, 9

9. રાહુલની ઉંમર 20 વર્ષ, હારુનની ઉંમર 28 વર્ષ **10.** 48 વિદ્યાર્થીઓ

11. ભરતની ઉંમર : 17 વર્ષ, ભરતના પિતાની ઉંમર : 46 વર્ષ, ભરતના દાદાની ઉંમર : 72 વર્ષ

12. 5 વર્ષ **13.** $-\frac{1}{2}$

14. ₹ 100 → 2000 નોટ, ₹ 50 → 3000 નોટ, ₹ 10 → 5000 નોટ

15. ₹ 1ના સિક્કાની સંખ્યા = 80; ₹ 2ના સિક્કાની સંખ્યા = 60; ₹ 5ના સિક્કાની સંખ્યા = 20

16. 19

સ્વાધ્યાય 2.3

1. $x = 18$ **2.** $t = -1$ **3.** $x = -2$ **4.** $z = \frac{3}{2}$ **5.** $x = 5$

6. $x = 0$ **7.** $x = 40$ **8.** $x = 10$ **9.** $y = \frac{7}{3}$ **10.** $m = \frac{4}{5}$

સ્વાધ્યાય 2.4

1. 4 **2.** 7, 35 **3.** 36 **4.** 26 (અથવા 62)

5. સરોજની ઉંમર 5 વર્ષ, સરોજની માતાની ઉંમર 30 વર્ષ

6. લંબાઈ = 275 મીટર, પહોળાઈ = 100 મીટર **7.** 200 મીટર **8.** 72

9. પૌત્રીની ઉંમર : 6 વર્ષ, દાદાની ઉંમર : 60 વર્ષ

10. અમનની ઉંમર : 60 વર્ષ, અમનના પુત્રની ઉંમર : 20 વર્ષ

સ્વાધ્યાય 2.5

1. $x = \frac{27}{10}$ **2.** $n = 36$ **3.** $x = -5$ **4.** $x = 8$ **5.** $t = 2$

6. $m = \frac{7}{5}$ **7.** $t = -2$ **8.** $y = \frac{2}{3}$ **9.** $z = 2$ **10.** $f = 0.6$

સ્વાધ્યાય 2.6

1. $x = \frac{3}{2}$ **2.** $x = \frac{35}{33}$ **3.** $z = 12$ **4.** $y = -8$ **5.** $y = -\frac{4}{5}$

6. હરિની ઉંમર = 20 વર્ષ, હેરીની ઉંમર = 28 વર્ષ **7.** $\frac{13}{21}$

સ્વાધ્યાય 3.1

1. (a) 1, 2, 5, 6, 7 (b) 1, 2, 5, 6, 7 (c) 1, 2
(d) 2 (e) 1

2. (a) 2 (b) 9 (c) 0 **3.** 360°, હા

4. (a) 900° (b) 1080° (c) 1440° (d) $(n - 2)180^\circ$

5. સમાન બાજુ અને સમાન ખૂણા ધરાવતો બહુકોણ,
(i) સમબાજુ ત્રિકોણ, (ii) ચોરસ, (iii) નિયમિત ષટ્કોણ

6. (a) 60° (b) 140° (c) 140° (d) 108°

7. (a) $x + y + z = 360^\circ$ (b) $x + y + z + w = 360^\circ$

સ્વાધ્યાય 3.2

1. (a) $360^\circ - 250^\circ = 110^\circ$ (b) $360^\circ - 310^\circ = 50^\circ$

2. (i) $\frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$ (ii) $\frac{360^\circ}{15} = 24^\circ$

3. $\frac{360}{24} = 15$ (બાજુઓ) 4. બાજુઓની સંખ્યા = 24

5. (i) ના, (22 એ 360નો ભાજક નથી.)
(ii) ના, (કારણ કે દરેક બહિષ્કોણ $180^\circ - 22^\circ = 158^\circ$, જે 360°નો ભાજક નથી.)

6. (a) સમબાજુ ત્રિકોણ એ 3 બાજુ ધરાવતો નિયમિત બહુકોણ છે, જેના અંતઃકોણનું માપ ઓછામાં ઓછું = 60°
(b) ઉપરોક્ત (a) પરથી મોટામાં મોટા બહિષ્કોણનું માપ = 120°

સ્વાધ્યાય 3.3

1. (i) BC (સામસામેની બાજુઓ સમાન) (ii) $\angle$DAB (સામસામેના ખૂણા સમાન/એકરૂપ હોય)

(iii) OA (વિકર્ણો એકબીજાને દુભાગે)

(iv) 180° ($\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ હોવાથી, અંતઃસંમુખકોણ)

2. (i) $x = 80°$, $y = 100°$, $z = 80°$ (ii) $x = 130°$, $y = 130°$, $z = 130°$

(iii) $x = 90°$, $y = 60°$, $z = 60°$ (iv) $x = 100°$, $y = 80°$, $z = 80°$

(v) $y = 112°$, $x = 28°$, $z = 28°$

3. (i) બની શકે પણ હંમેશાં જરૂરી નહીં.

(ii) ના (સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણમાં સામસામેની બાજુઓ એકરૂપ હોય છે, પરંતુ અહીં AD ≠ BC)

(iii) ના (સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણમાં સામસામેના ખૂણા એકરૂપ હોય છે, પરંતુ અહીં, ∠A ≠ ∠C)

4. પતંગ (ઉદાહરણ તરીકે) 5. 108°, 72° 6. દરેક કાટખૂણો હોય

7. $x = 110°$, $y = 40°$, $z = 30°$

8. (i) $x = 6$, $y = 9$ (ii) $x = 3$, $y = 13$ 9. $x = 50°$

10. $\overline{NM} \parallel \overline{KL}$ (અંતઃ સંમુખકોણોનો સરવાળો 180° હોય) આથી, KLMN એ સમલંબ ચતુષ્કોણ છે.

11. 60° 12. ∠P = 50° ∠S = 90°

સ્વાધ્યાય 3.4

1. (b), (c), (f), (g), (h) વિધાનો ખરાં છે બાકીનાં વિધાનો ખોટા છે.

2. (a) સમબાજુ, ચોરસ (b) ચોરસ, લંબચોરસ

3. (i) ચોરસને ચાર બાજુ છે; તેથી તે સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

(ii) ચોરસની સામસામેની બાજુની બન્ને જોડ સમાંતર હોય છે; તેથી સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

(iii) ચોરસ એ ચારે બાજુઓ સમાન હોય તેવો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે; તેથી સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

(iv) ચોરસ એ ચારે ખૂણાઓ કાટખૂણા હોય તેવો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે; તેથી તે લંબચોરસ છે.

4. (i) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ, સમબાજુ ચતુષ્કોણ, ચોરસ, લંબચોરસ

(ii) સમબાજુ, ચોરસ (iii) ચોરસ, લંબચોરસ

5. બંને વિકર્ણો તેના અંદરના ભાગમાં આવેલા છે.

6. $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ તેથી સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCDના વિકર્ણ $\overline{AC}$ નું મધ્યબિંદુ O થાય.

સ્વાધ્યાય 5.1

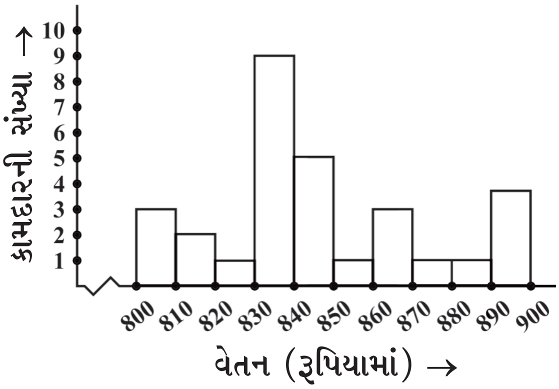
1. (b), (d) આ બધા કિસ્સામાં માહિતીને વર્ગ-અંતરાલોમાં રૂપાંતરિત કરી શકાય છે.

2.

દુકાનદાર	સિમા ચિહ્ન	સંખ્યા
W	卌 卌 卌 卌 卌 |||	28
M	卌 卌 卌	15
B	卌	5
G	卌 卌 ||	12

3.

વર્ગ	સીમા ચિન્હ	આવૃત્તિ
800-810	|||	3
810-820	||	2
820-830	|	1
830-840	~~||||~~ ||||	9
840-850	~~||||~~	5
850-860	|	1
860-870	|||	3
870-880	|	1
880-890	|	1
890-900	||||	4
	કુલ	**30**



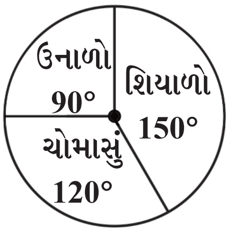
4. (i) 830-840 (ii) 10
(iii) 20

5. (i) 4-5 કલાક (ii) 34
(iii) 14

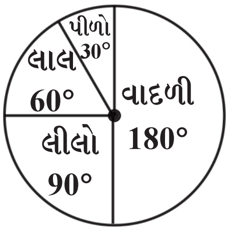
સ્વાધ્યાય 5.2

1. (i) 200, (ii) હળવું સંગીત, (iii) શાસ્ત્રીય સંગીત –100, અર્ધ શાસ્ત્રીય સંગીત – 200, હળવું સંગીત – 400, લોક સંગીત – 300

2. (i) શિયાળો (ii) શિયાળો–150°, ચોમાસું–120°, ઉનાળો–90° (iii)

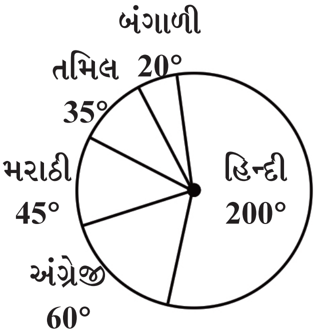


3.



4. (i) હિન્દી (ii) 30 ગુણ (iii) હા

5.



સ્વાધ્યાય 5.3

1. (a) અવલોકનો A, B, C, D

(b) HT, HH, TH, TT (અહીં, HT અર્થાત્ પ્રથમ સિક્કા ઉપર 'હેડ' અને બીજા સિક્કા ઉપર 'ટેઇલ' એ જ રીતે આગળ....)

2. આપેલી ઘટનામાં પ્રાપ્ત અવલોકનો

(i) (a) 2, 3, 5 (b) 1, 4, 6

(iii) (a) 6 (b) 1, 2, 3, 4, 5

3. (a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{1}{13}$ (c) $\frac{4}{7}$

4. (i) $\frac{1}{10}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{2}{5}$ (iv) $\frac{9}{10}$

5. લીલો વૃત્તાંશ મળવાની સંભાવના $= \frac{3}{5}$

વાદળી ન હોય તેવો વૃત્તાંશ મળવાની સંભાવના $= \frac{4}{5}$

6. અવિભાજ્ય સંખ્યા મળવાની સંભાવના $= \frac{1}{2}$

અવિભાજ્ય સંખ્યા ન હોય તેવી સંખ્યા મળવાની સંભાવના $= \frac{1}{2}$

5થી મોટી સંખ્યા મળવાની સંભાવના $= \frac{1}{6}$

5થી મોટી ન હોય તેવી સંખ્યાઓ મળવાની સંભાવના $= \frac{5}{6}$

સ્વાધ્યાય 6.1

1. (i) 1 (ii) 4 (iii) 1 (iv) 9 (v) 6 (vi) 9

(vii) 4 (viii) 0 (ix) 6 (x) 5

2. કારણ કે, આ સંખ્યાના એકમના અંક

(i) 7 (ii) 3 (iii) 8 (iv) 2 (v) 0 (vi) 2

(vii) 0 (viii) 0

3. (i), (iii) **4.** 10000200001, 100000020000001

5. 1020304030201, 101010101^2 **6.** 20, 6, 42, 43

7. (i) 25 (ii) 100 (iii) 144

8. (i) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13

(ii) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21

9. (i) 24 (ii) 50 (iii) 198

સ્વાધ્યાય 6.2

1.	(i) 1024	(ii) 1225	(iii) 7396	(iv) 8649	(v) 5041	(vi) 2116
2.	(i) 6, 8, 10	(ii) 14, 48, 50	(iii) 16, 63, 65	(iv) 18, 80, 82		

સ્વાધ્યાય 6.3

1.	(i) 1, 9	(ii) 4, 6	(iii) 1, 9	(iv) 5		
2.	(i), (ii), (iii)	**3.** 10, 13				
4.	(i) 27	(ii) 20	(iii) 42	(iv) 64	(v) 88	(vi) 98
	(vii) 77	(viii) 96	(ix) 23	(x) 90		
5.	(i) 7; 42	(ii) 5; 30	(iii) 7; 84	(iv) 3; 78	(v) 2; 54	(vi) 3; 48
6.	(i) 7; 6	(ii) 13; 15	(iii) 11; 6	(iv) 5; 23	(v) 7; 20	(vi) 5; 18
7.	49	**8.** 45 હરોળ અને દરેક હરોળમાં 45 છોડ			**9.** 900	**10.** 3600

સ્વાધ્યાય 6.4

1.	(i) 48	(ii) 67	(iii) 59	(iv) 23	(v) 57	(vi) 37
	(vii) 76	(viii) 89	(ix) 24	(x) 32	(xi) 56	(xii) 30
2.	(i) 1	(ii) 2	(iii) 2 (iv) 3	(v) 3		
3.	(i) 1.6	(ii) 2.7	(iii) 7.2	(iv) 6.5	(v) 5.6	
4.	(i) 2; 20	(ii) 53; 44	(iii) 1; 57	(iv) 41; 28	(v) 31; 63	
5.	(i) 4; 23	(ii) 14; 42	(iii) 4; 16	(iv) 24; 43	(v) 149; 81	
6.	21 મીટર	**7.** (a) 10 સેમી (b) 12 સેમી				
8.	24 છોડ	**9.** 16 બાળકો				

સ્વાધ્યાય 7.1

1.	(ii) અને (iv)				
2.	(i) 3	(ii) 2	(iii) 3	(iv) 5	(v) 10
3.	(i) 3	(ii) 2	(iii) 5	(iv) 3	(v) 11
4.	20 લંબઘન				

સ્વાધ્યાય 7.2

1.	(i) 4	(ii) 8	(iii) 22	(iv) 30	(v) 25	(vi) 24
	(vii) 48	(viii) 36	(ix) 56			
2.	(i) ખોટું	(ii) ખરું	(iii) ખોટું	(iv) ખોટું	(v) ખોટું	(vi) ખોટું
	(vii) ખરું					
3.	11, 17, 23, 32					

સ્વાધ્યાય 8.1

1. (a) 1 : 2 (b) 1 : 2000 (c) 1 : 10

2. (a) 75% (b) $66\frac{2}{3}$% **3.** 28% વિદ્યાર્થીઓ **4.** 25 મૅચ **5.** ₹ 2400

6. 10% ક્રિકેટ → 30 લાખ, ફૂટબૉલ → 15 લાખ, બીજી રમતો → 5 લાખ

સ્વાધ્યાય 8.2

1. ₹ 1,40,000 **2.** 80% **3.** ₹ 34.80 **4.** ₹ 18,342.50

5. નફો 2% **6.** ₹ 2,835 **7.** ખોટ ₹ 1,269.84

8. ₹ 14,560 **9.** ₹ 2,000 **10.** ₹ 4,576.27 **11.** ₹ 1050

સ્વાધ્યાય 8.3

1. (a) મુદ્દલ = ₹ 15,377.34, ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ = ₹ 4,577.34
(b) મુદ્દલ = ₹ 22,869, વ્યાજ = ₹ 4,869
(c) મુદ્દલ = ₹ 70,304, વ્યાજ = ₹ 7,804
(d) મુદ્દલ = ₹ 8,736.20, વ્યાજ = ₹ 736.20
(e) મુદ્દલ = ₹ 10,816, વ્યાજ = ₹ 816

2. ₹ 36,659.70 **3.** ફેબીના ₹ 362.50 વધુ ચૂકવે **4.** ₹ 43.20

5. (i) ₹ 63,600 (ii) ₹ 67,416 **6.** (ii) ₹ 92,400 (ii) ₹ 92,610

7. (i) ₹ 8,820 (ii) ₹ 441

8. મુદ્દલ = ₹ 11,576.25, વ્યાજ = ₹ 1,576.25, હા

9. ₹ 4,913 **10.** (i) આશરે 48,980 (ii) 59,535 **11.** ₹ 5,31,616 (અંદાજિત)

12. ₹ 38,640

સ્વાધ્યાય 9.1

1.

	પદ	સહગુણક
(i)	$5xyz^2$ $-3zy$	5 −3
(ii)	1 x x^2	1 1 1
(iii)	$4x^2y^2$ $-4x^2y^2z^2$ z^2	4 −4 1
(iv)	3 $-pq$ qr $-rp$	3 −1 1 −1
(v)	$\frac{x}{2}$ $\frac{y}{2}$ $-xy$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ −1
(vi)	$0.3a$ $-0.6ab$ $0.5b$	0.3 −0.6 0.5

2. એકપદી : 1000, pqr
દ્વિપદી : $x + y$, $2y - 3y^2$, $4z - 15z^2$, $p^2q + pq^2$, $2p + 2q$
ત્રિપદી : $7 + y + 5x$, $2y - 3y^2 + 4y^3$, $5x - 4y + 3xy$
જે પદાવલિઓ આ શ્રેણીમાં સમાવિષ્ટ નથી તેવી : $x + x^2 + x^3 + x^4$, $ab + bc + cd + da$

3. (i) 0 (ii) $ab + bc + ac$ (iii) $-p^2q^2 + 4pq + 9$
(iv) $2(l^2 + m^2 + n^2 + lm + mn + nl)$

4. (a) $8a - 2ab + 2b - 15$ (b) $2xy - 7yz + 5zx + 10xyz$
(c) $p^2q - 7pq^2 + 8pq - 18q + 5p + 28$

સ્વાધ્યાય 9.2

1. (i) $28p$ (ii) $-28p^2$ (iii) $-28p^2q$ (iv) $-12p^4$ (v) 0

2. pq; $50mn$; $100\ x^2y^2$; $12x^3$; $12mn^2p$

3.

પહેલી એકપદી → બીજી એકપદી ↓	$2x$	$-5y$	$3x^2$	$-4xy$	$7x^2y$	$-9x^2y^2$
$2x$	$4x^2$	$-10xy$	$6x^3$	$-8x^2y$	$14x^3y$	$-18x^3y^2$
$-5y$	$-10xy$	$25y^2$	$-15x^2y$	$20xy^2$	$-35x^2y^2$	$45x^2y^3$
$3x^2$	$6x^3$	$-15x^2y$	$9x^4$	$-12x^3y$	$21x^4y$	$-27x^4y^2$
$-4xy$	$-8x^2y$	$20xy^2$	$-12x^3y$	$16x^2y^2$	$-28x^3y^2$	$36x^3y^3$
$7x^2y$	$14x^3y$	$-35x^2y^2$	$21x^4y$	$-28x^3y$	$49x^4y^2$	$-63x^4y^3$
$-9x^2y^2$	$-18x^3y^2$	$45x^2y^3$	$-27x^4y^2$	$36x^3y^2$	$-63x^4y^3$	$81x^4y^4$

4. (i) $105a^7$ (ii) $64pqr$ (iii) $4x^4y^4$ (iv) $6abc$

5. (i) $x^2y^2z^2$ (ii) $-a^6$ (iii) $1024y^6$ (iv) $36a^2b^2c^2$ (v) $-m^3n^2p$

સ્વાધ્યાય 9.3

1. (i) $4pq + 4pr$ (ii) $a^2b - ab^2$ (iii) $7a^3b^2 + 7a^2b^3$
(iv) $4a^3 - 36a$ (v) 0

2. (i) $ab + ac + ad$ (ii) $5x^2y + 5xy^2 - 25xy$
(iii) $6p^3 - 7p^2 + 5p$ (iv) $4p^4q^2 - 4p^2q^4$
(v) $a^2bc + ab^2c + abc^2$

3. (i) $8a^{50}$ (ii) $-\frac{3}{5}x^3y^3$ (iii) $-4p^4q^4$ (iv) x^{10}

4. (a) $12x^2 - 15x + 3$; (i) 66 (ii) $\frac{-3}{2}$
(b) $a^3 + a^2 + a + 5$; (i) 5 (ii) 8 (iii) 4

5. (a) $p^2 + q^2 + r^2 - pq - qr - pr$ (b) $-2x^2 - 2y^2 - 4xy + 2yz + 2zx$
(c) $5l^2 + 25ln$ (d) $-3a^2 - 2b^2 + 4c^2 - ab + 6bc - 7ac$

સ્વાધ્યાય 9.4

1. (i) $8x^2 + 14x - 15$ (ii) $3y^2 - 28y + 32$ (iii) $6.25l^2 - 0.25m^2$
(iv) $ax + 5a + 3bx + 15b$ (v) $6p^2q^2 + 5pq^3 - 6q^4$ (vi) $3a^4 + 10a^2b^2 - 8b^4$

2. (i) $15 - x - 2x^2$ (ii) $7x^2 + 48xy - 7y^2$ (iii) $a^3 + a^2b^2 + ab + b^3$
(iv) $2p^3 + p^2q - 2pq^2 - q^3$

3. (i) $x^3 + 5x^2 - 5x$ (ii) $a^2b^3 + 3a^2 + 5b^3 + 20$ (iii) $t^3 - st + s^2t^2 - s^3$
(iv) $4ac$ (v) $3x^2 + 4xy - y^2$ (vi) $x^3 + y^3$
(vii) $2.25x^2 - 16y^2$ (viii) $a^2 + b^2 - c^2 + 2ab$

સ્વાધ્યાય 9.5

1. (i) $x^2 + 6x + 9$ (ii) $4y^2 + 20y + 25$ (iii) $4a^2 - 28a + 49$
(iv) $9a^2 - 3a + \frac{1}{4}$ (v) $1.21m^2 - 0.16$ (vi) $b^4 - a^4$
(vii) $36x^2 - 49$ (viii) $a^2 - 2ac + c^2$ (ix) $\frac{x^2}{4} + \frac{3xy}{4} + \frac{9y^2}{16}$
(x) $49a^2 - 126ab + 81b^2$

2. (i) $x^2 + 10x + 21$ (ii) $16x^2 + 24x + 5$ (iii) $16x^2 - 24x + 5$
(iv) $16x^2 + 16x - 5$ (v) $4x^2 + 16xy + 15y^2$ (vi) $4a^4 + 28a^2 + 45$
(vii) $x^2 y^2 z^2 - 6xyz + 8$

3. (i) $b^2 - 14b + 49$ (ii) $x^2 y^2 + 6xyz + 9z^2$ (iii) $36x^4 - 60x^2y + 25y^2$
(iv) $\frac{4}{9}m^2 + 2mn + \frac{9}{4}n^2$ (v) $0.16p^2 + 0.04pq + 0.25q^2$ (vi) $4x^2y^2 + 20xy^2 + 25y^2$

4. (i) $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$ (ii) $40x$ (iii) $98m^2 + 128n^2$
(iv) $41m^2 + 80mn + 41n^2$ (v) $4p^2 - 4q^2$ (vi) $a^2b^2 + b^2c^2$ (vii) $m^4 + n^4m^2$

6. (i) 5041 (ii) 9801 (iii) 10404 (iv) 996004
(v) 27.04 (vi) 89991 (vii) 6396 (viii) 79.21
(ix) 9.975

7. (i) 200 (ii) 0.08 (iii) 1800 (iv) 84

8. (i) 10712 (ii) 26.52 (iii) 10094 (iv) 95.06

સ્વાધ્યાય 10.1

1. (a) → (iii) → (iv) (b) → (i) → (v) (c) → (iv) → (ii)
(d) → (v) → (iii) (e) → (ii) → (i)

2. (a) (i) → આગળ (Front), (ii) → બાજુ (Side), (iii) → ઉપર (Top)
(b) (i) → બાજુ (Side), (ii) → આગળ (Front), (iii) → ઉપર (Top)
(c) (i) → આગળ (Front), (ii) → બાજુ (Side), (iii) → ઉપર (Top)
(d) (i) → આગળ (Front), (ii) → બાજુ (Side), (iii) → ઉપર (Top)

3. (a) (i) → ઉપર (Top), (ii) → આગળ (Front), (iii) → બાજુ (Side)
(b) (i) → બાજુ (Side), (ii) → આગળ (Front), (iii) → ઉપર (Top)
(c) (i) → ઉપર (Top), (ii) → બાજુ (Side), (iii) → આગળ (Front)
(d) (i) → બાજુ (Side), (ii) → આગળ (Front), (iii) → ઉપર (Top)
(e) (i) → આગળ (Front), (ii) → ઉપર (Top), (iii) → બાજુ (Side)

સ્વાધ્યાય 10.3

1. (i) ના (ii) હા (iii) હા **2.** શક્ય છે, જો પૃષ્ઠ (Faces)ની સંખ્યા 4 કે તેથી વધુ હોય તો
3. ફક્ત (ii) અને (iv)
4. (i) જો પ્રિઝમના પાયાની બાજુઓની સંખ્યા ખૂબ જ મોટી લઈએ તો તે નળાકાર બને.
   (ii) જો પિરામિડના પાયાની બાજુઓની સંખ્યા ખૂબ જ મોટી લઈએ તો તે શંકુ બને.
5. ના, તે લંબઘન પણ હોઈ શકે. **7.** ફલક (Faces) → 8, શિરોબિંદુઓ (Vertices) → 6, ધાર (Edges) → 30
8. ના

સ્વાધ્યાય 11.1

1. (a) **2.** ₹ 17,875 **3.** ક્ષેત્રફળ = 129.5 મી^{2}, પરિમિતિ = 48 મી
4. 45000 લાદી **5.** (b)

સ્વાધ્યાય 11.2

1. 0.88 મી^{2} **2.** 7 સેમી (3) 660 મી^{2} 4. 252 મી^{2}
5. 45 સેમી^{2} **6.** 24 સેમી^{2}, 6 સેમી **7.** ₹ 810
8. 140 મી **9.** 119 મી^{2}
10. જ્યોતિની રીત મુજબ, ક્ષેત્રફળ $= 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{15}{2}$ (30 + 15)મી^{2}
    = 337.5 મી^{2}
    કવિતાની રીતનો ઉપયોગ કરતાં ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} \times 15 \times 15 + 15 \times 15$
    = 337.5 મી^{2}
11. 80 સેમી^{2}, 96 સેમી^{2}, 80 સેમી^{2}, 96 સેમી^{2}

સ્વાધ્યાય 11.3

1. (a) **2.** 144 મી **3.** 10 સેમી **4.** 11મી^{2} **5.** 5 કેન
6. સામ્યતા → બંનેની ઊંચાઈ એક સમાન છે, તફાવત → એક નળાકાર છે, બીજો સમઘન છે. સમઘનની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ વધુ હોય છે.
7. 440 મી^{2} **8.** 322 સેમી **9.** 1980 મી^{2} **10.** 704 સેમી^{2}

સ્વાધ્યાય 11.4

1. (a) ઘનફળ (b) પૃષ્ઠફળ (c) ઘનફળ
2. નળાકાર Bનું ઘનફળ વધુ, નળાકાર Bની પૃષ્ઠસપાટીનું ક્ષેત્રફળ વધુ
3. 5 સેમી **4.** 450 **5.** 1 મી **6.** 49500 લિટર
7. (i) 4 ગણું (ii) 8 ગણું **8.** 30 કલાક

સ્વાધ્યાય 12.1

1. (i) $\frac{1}{9}$ (ii) $\frac{1}{16}$ (iii) 32

2. (i) $\frac{1}{(-4)^3}$ (ii) $\frac{1}{2^6}$ (iii) $(5)^4$ (iv) $\frac{1}{(3)^2}$ (v) $\frac{1}{(-14)^3}$

3. (i) 5 (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) 29 (iv) 1 (v) $\frac{81}{16}$

4. (i) 250 (ii) $\frac{1}{60}$ 5. $m = 2$ 6. (i) −1 (ii) $\frac{512}{125}$

7. (i) $\frac{625t^4}{2}$ (ii) 5^5

સ્વાધ્યાય 12.2

1. (i) 8.5×10^{-12} (ii) 9.42×10^{-12} (iii) 6.02×10^{15}
 (iv) 8.37×10^{-9} (v) 3.186×10^{10}

2. (i) 0.00000302 (ii) 45000 (iii) 0.00000003
 (iv) 1000100000 (v) 5800000000000 (vi) 3614920

3. (i) 1×10^{-6} (ii) 1.6×10^{-19} (iii) 5×10^{-7}
 (iv) 1.275×10^{-5} (v) 7×10^{-2}

4. 1.0008×10^2

સ્વાધ્યાય 13.1

1. ના

2.

લાલ દ્રવ્યનો ભાગ	1	4	7	12	20
માધ્યમનો ભાગ	8	32	56	96	160

3. 24 ભાગ 4. 700 બોટલ 5. 10^{-4} સેમી; 2 સેમી 6. 21 મી

7. (i) 2.25×10^7 સ્ફટિક (ii) 5.4×10^6 સ્ફટિક 8. 4 સેમી

9. (i) 6 મી (ii) 8 મી 75 સેમી 10. 168 કિમી

સ્વાધ્યાય 13.2

1. (i), (iv), (v) 2. 4 → 25,000; 5 → 20,000; 8 → 12,500; 10 → 10,000; 20 → 5,000
 વિજેતાઓની સંખ્યા એ વિજેતાઓને આપવાની ઇનામની રકમના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં હોય છે.

3. 8 → 45°, 10 → 36°, 12 → 30°, (i) હા (ii) 24° (iii) 9

4. 6 5. 4 6. 3 દિવસ 7. 15 ખોખાં

8. 49 મશિન/યંત્ર 9. $1\frac{1}{2}$ કલાક 10. (i) 6 દિવસ (ii) 6 વ્યક્તિ 11. 40 મિનિટ

સ્વાધ્યાય 14.1

1. (i) 12 (ii) $2y$ (iii) $14pq$ (iv) 1 (v) $6ab$ (vi) $4x$
 (vii) 10 (viii) x^2y^2

2. (i) $7(x-6)$ (ii) $6(p-2q)$ (iii) $7a(a+2)$ (iv) $4z(-4+5z^2)$
(v) $10lm(2l+3a)$ (vi) $5xy(x-3y)$ (vii) $5(2a^2-3b^2+4c^2)$
(viii) $4a(-a+b-c)$ (ix) $xyz(x+y+z)$ (x) $xy(ax+by+cz)$

3. (i) $(x+8)(x+y)$ (ii) $(3x+1)(5y-2)$ (iii) $(a+b)(x-y)$
(iv) $(5p+3)(3q+5)$ (v) $(z-7)(1-xy)$

સ્વાધ્યાય 14.2

1. (i) $(a+4)^2$ (ii) $(p-5)^2$ (iii) $(5m+3)^2$ (iv) $(7y+6z)^2$
(v) $4(x-1)^2$ (vi) $(11b-4c)^2$ (vii) $(l-m)^2$ (viii) $(a^2+b^2)^2$

2. (i) $(2p-3q)(2p+3q)$ (ii) $7(3a-4b)(3a+4b)$ (iii) $(7x-6)(7x+6)$
(iv) $16x^3(x-3)(x+3)$ (v) $4lm$ (vi) $(3xy-4)(3xy+4)$
(vii) $(x-y-z)(x-y+z)$ (viii) $(5a-2b+7c)(5a+2b-7c)$

3. (i) $x(ax+b)$ (ii) $7(p^2+3q^2)$ (iii) $2x(x^2+y^2+z^2)$
(iv) $(m^2+n^2)(a+b)$ (v) $(l+1)(m+1)$ (vi) $(y+9)(y+z)$
(vii) $(5y+2z)(y-4)$ (viii) $(2a+1)(5b+2)$ (ix) $(3x-2)(2y-3)$

4. (i) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$ (ii) $(p-3)(p+3)(p^2+9)$
(iii) $(x-y-z)(x+y+z)[x^2+(y+z)^2]$ (iv) $z(2x-z)(2x^2-2xz+z^2)$
(v) $(a-b)^2(a+b)^2$

5. (i) $(p+2)(p+4)$ (ii) $(q-3)(q-7)$ (iii) $(p+8)(p-2)$

સ્વાધ્યાય 14.3

1. (i) $\frac{x^3}{2}$ (ii) $-4y$ (iii) $6pqr$ (iv) $\frac{2}{3}x^2y$ (v) $-2a^2b^4$

2. (i) $\frac{1}{3}(5x-6)$ (ii) $3y^4-4y^2+5$ (iii) $2(x+y+z)$
(iv) $\frac{1}{2}(x^2+2x+3)$ (v) q^3-p^3

3. (i) $2x-5$ (ii) 5 (iii) $6y$ (iv) xy (v) $10abc$

4. (i) $5(3x+5)$ (ii) $2y(x+5)$ (iii) $\frac{1}{2}r(p+q)$ (iv) $4(y^2+5y+3)$
(v) $(x+2)(x+3)$

5. (i) $y+2$ (ii) $m-16$ (iii) $5(p-4)$ (iv) $2z(z-2)$
(v) $\frac{5}{2}q(p-q)$ (vi) $3(3x-4y)$ (vii) $3y(5y-7)$

સ્વાધ્યાય 14.4

1. $4(x-5)=4x-20$ **2.** $x(3x+2)=3x^2+2x$ **3.** $2x+3y=2x+3y$
4. $x+2x+3x=6x$ **5.** $5y+2y+y-7y=y$ **6.** $3x+2x=5x$

7. $(2x)^2 + 4(2x) + 7 = 4x^2 + 8x + 7$

8. $(2x)^2 + 5x = 4x^2 + 5x$

9. $(3x + 2)^2 = 9x^2 + 12x + 4$

10. (a) $(-3)^2 + 5(-3) + 4 = 9 - 15 + 4 = -2$ (b) $(-3)^2 - 5(-3) + 4 = 9 + 15 + 4 = 28$

(c) $(-3)^2 + 5(-3) = 9 - 15 = -6$

11. $(y - 3)^2 = y^2 - 6y + 9$

12. $(z + 5)^2 = z^2 + 10z + 25$

13. $(2a + 3b)(a - b) = 2a^2 + ab - 3b^2$

14. $(a + 4)(a + 2) = a^2 + 6a + 8$

15. $(a - 4)(a - 2) = a^2 - 6a + 8$

16. $\frac{3x^2}{3x^2} = 1$

17. $\frac{3x^2 + 1}{3x^2} = \frac{3x^2}{3x^2} + \frac{1}{3x^2} = 1 + \frac{1}{3x^2}$

18. $\frac{3x}{3x + 2} = \frac{3x}{3x + 2}$

19. $\frac{3}{4x + 3} = \frac{3}{4x + 3}$

20. $\frac{4x + 5}{4x} = \frac{4x}{4x} + \frac{5}{4x} = 1 + \frac{5}{4x}$

21. $\frac{7x + 5}{5} = \frac{7x}{5} + \frac{5}{5} = \frac{7x}{5} + 1$

સ્વાધ્યાય 15.1

1. (a) 36.5°C (b) બપોરે 12 વાગ્યે (c) 1 p.m. , 2 p.m.

(d) 36.5°C, 1 p.m. અને 2 p. m. વચ્ચેનું X-અક્ષ પરનું બિંદુ એ 1 અને 2થી સમાન અંતરે હોય છે. જે 1.30 p.m. દર્શાવે છે. આ જ રીતે Y-અક્ષ પરનું 36°C અને 37°C વચ્ચેનું બિંદુ 36.5°C દર્શાવે છે.

(e) 9 a.m. થી 10 a.m., 10 a.m. થી 11 a.m., 2 p.m. થી 3 p.m.

2. (a) (i) ₹ 4 કરોડ (ii) ₹ 8 કરોડ

(b) (i) ₹ 7 કરોડ (ii) ₹ 8.5 કરોડ (અંદાજે)

(c) ₹ 4 કરોડ (d) 2005

3. (a) (i) 7 સેમી (ii) 9 સેમી

(b) (i) 7 સેમી (ii) 10 સેમી

(c) 2 સેમી (d) 3 સેમી (e) બીજું અઠવાડિયું (f) પહેલું અઠવાડિયું

(g) બીજા અઠવાડિયાના અંતે

4. (a) મંગળ, શુક્ર, રવિ (b) 35°C (c) 15°C (d) ગુરુ

6. (a) 4 એકમ = 1 કલાક (b) $3\frac{1}{2}$ કલાક (c) 22 કિમી

(d) હા, તે આલેખના સમક્ષિતિજ ભાગથી દર્શાવી શકાય છે. (10 a.m. – 10:30 a.m.)

(e) 8 a.m. અને 9 a.m.ની વચ્ચે

7. (iii) શક્ય નથી.

સ્વાધ્યાય 15.2

1. (a) અને (b)માં દર્શાવેલ બિંદુઓ રેખા પર છે, જ્યારે (c)માં દર્શાવેલ બિંદુ રેખા પર નથી.

2. રેખા X-અક્ષને (5, 0) અને Y-અક્ષને (0, 5)માં છેદે છે.

3. O(0, 0), A(2, 0), B(2, 3), C(0, 3), P(4, 3), Q(6, 1) R(6, 5), S(4, 7), K(10, 5), L(7, 7), M(10, 8)
4. (i) ખરું (i) ખોટું (iii) ખરું

સ્વાધ્યાય 15.3

1. (b) (i) 20 કિમી (ii) 7.30 a.m. (c) (i) હા (ii) ₹ 200 (iii) ₹ 3500
2. (a) હા (b) ના

સ્વાધ્યાય 16.1

1. A = 7, B = 6 **2.** A = 5, B = 4, C = 1 **3.** A = 6
4. A = 2, B = 5 **5.** A = 5, B = 0, C = 1 **6.** A = 5, B = 0, C = 2
7. A = 7, B = 4 **8.** A = 7, B = 9 **9.** A = 4, B = 7
10. A = 8, B = 1

સ્વાધ્યાય 16.2

1. $y = 1$ **2.** $z = 0$ અથવા 9 **3.** $z = 0, 3, 6$ અથવા 9
4. 0, 3, 6 અથવા 9

ગમ્મત સાથે જ્ઞાન

1. પાયથાગોરસની ત્રિપુટી વિશે થોડું વધુ જોઈએ,
આપણે પાયથાગોરસની ત્રિપુટી શોધવા માટેની એક રીત જોઈ તે મુજબ,
$2m$, $m^2 - 1$, $m^2 + 1$ પાયથાગોરસ ત્રિપુટી થાય.
પાયથાગોરસની ત્રિપુટી a, b અને $c \in$ R માટે $a^2 + b^2 = c^2$. જો આપણે બે પ્રાકૃતિક સંખ્યાનો m અને n ($m > n$)નો ઉપયોગ કરીએ અને જો $a = (m^2 - n^2)$, $b = 2mn$, $c = (m^2 + n^2)$ લઈએ તો જોઈ શકાય છે કે $c^2 = a^2 + b^2$ ની ગણતરી સાચી ઠરે છે.
તેથી m અને n ની જુદી-જુદી કિંમતો માટે આપણે પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ a, b, c એવી શોધી શકીએ કે જેથી પાયથાગોરસની ત્રિપુટી બને.
ઉદાહરણ તરીકે, $m = 2$, $n = 1$ લો.
તેથી $a = m^2 - n^2 = 3$, $b = 2mn = 4$, $c = m^2 + n^2 = 5$ આમ, 3, 4, 5 એ પાયથાગોરસની એક ત્રિપુટી છે. (તપાસો !)
હવે, $m = 3$, $n = 2$ લઈએ તો,
$a = 5$, $b = 12$, $c = 13$ મળે. જે પણ પાયથાગોરસની ત્રિપુટી જ છે.
આમ, m, nની હજુ વધુ કિંમતો લઈ થોડી વધુ ત્રિપુટી બનાવો.
2. જ્યારે પાણીને ઠંડું કરવામાં આવે ત્યારે તેનું ઘનફળ 4% વધે છે, તો 221 સેમી^{3} બરફ બનાવવા કેટલું પાણી જોઈએ ?
3. જો ચાની ભૂકીના ભાવમાં 20% વધારો થાય તો તેના ઉપયોગમાં કેટલો ઘટાડો કરીએ જેથી ખર્ચ પહેલાં જેટલો એક સમાન જળવાઈ રહે ?

4. ઈ.સ. 1958માં ગૌરવ પુરસ્કાર આપવાની શરૂઆત થઈ એવું ધારી લઈએ તો 28 વર્ગ (Categories) ગૌરવ પુરસ્કાર જીતે છે. ઈ.સ. 1993માં 81 વર્ગ ગૌરવ પુરસ્કાર જીતે છે.
(i) ઈ.સ. 1958માં આપવામાં આવેલ ગૌરવ પુરસ્કારની સંખ્યા ઈ.સ. 1993ની સંખ્યાના કેટલા ટકા થાય ?
(ii) ઈ.સ. 1993માં આપવામાં આવેલ ગૌરવ પુરસ્કારની સંખ્યા ઈ.સ. 1958ની સંખ્યાના કેટલા ટકા થાય ?

5. મધપૂડાની કુલ મધમાખીમાંથી $\frac{1}{5}$ ભાગની મધમાખી કદમ્બની કળીઓ ઉપર બેસે છે. $\frac{1}{3}$ ભાગ સિલિન્ધ્રીરીનાં ફૂલ ઉપર બેસે છે અને ઉપરોક્ત બંને સંખ્યાના તફાવતના ત્રણ ગણી મધમાખીઓ કુતાજા પર બેસે છે, માત્ર દસ જ મધમાખીઓ મધપૂડા પર બાકી રહે છે. તો મધપૂડા પરની કુલ મધમાખીઓની સંખ્યા શોધો. (**નોંધ :** કદમ્બ, સિલિન્ધ્રીરી, કુતાજા એ ફૂલછોડનાં નામ છે. આ કોયડો પ્રાચીન ભારતીય બીજગણિતમાંથી લેવામાં આવ્યો છે.)

6. શેખર ચોરસનું ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે તેના માટેના સૂત્રનો ઉપયોગ કરે છે જ્યારે તેનો મિત્ર ફારુખ ચોરસની પરિમિતિ શોધવાના સૂત્રનો ઉપયોગ કરે છે. રસપ્રદ વાત એ છે કે બંનેના જવાબ એક સમાન આવે છે. શું તમે એ શોધી શકો કે ચોરસની બાજુના એકમ કેટલા હશે ?

7. જે ચોરસનું ક્ષેત્રફળ તેની બાજુના માપના છ ગણાથી સાંખ્યિક રીતે ઓછું હોય તેવા ચોરસની બાજુઓનાં માપ શોધો.

8. જે લંબવૃત્તીય નળાકારનું ઘનફળ તેની વક્રસપાટીના ક્ષેત્રફળ જેટલું જ હોય તેવા નળાકાર શક્ય છે ? જો હા, તો તેની ત્રિજ્યાનું માપ શોધો.

9. લીલા તેના જન્મદિવસની ઊજવણી નિમિત્તે તેના મિત્રોને આમંત્રણ આપે છે. તેની માતા ટેબલ (મેજ) ઉપર થોડી ડિશ અને થોડી પૂરી નાસ્તા માટે મૂકે છે. લીલા દરેક ડિશમાં 4 પુરી મૂકે છે. તેમ છતાં એક ડિશ વધે છે. જો તે દરેક ડિશમાં 3 પૂરી મૂકે તો એક પૂરી વધે છે. તો ટેબલ પર મૂકવામાં આવેલ કુલ ડિશ અને કુલ પૂરીની સંખ્યા શોધો.

10. શું એવી કોઈ સંખ્યા મળે જેનો ઘન તેના જેટલો જ થાય. પરંતુ તેના વર્ગ તેની બરાબર ન હોય ? જો હા, તો એ શોધી કાઢો.

11. 1 થી 20 સુધીની પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓમાંથી એવી સંખ્યાઓ શોધો કે જેને હારમાં ગોઠવવાથી કોઈ પણ બે પાસ-પાસેની સંખ્યાઓનો સરવાળો પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા બને.

જવાબો

2. $212\frac{1}{2}$ સેમી^{3}

3. $16\frac{2}{3}\%$

4. (i) 34.5% (ii) 289%

5. 150

6. 4 એકમ

7. બાજુઓનાં માપ : 1, 2, 3, 4, 5 એકમ

8. હા, જેની ત્રિજ્યા = 2 એકમ

9. પૂરીની સંખ્યા = 16
ડિશની સંખ્યા = 5

10. −1

11. 1, 3, 6, 19, 17, 8
(**સૂચના :** 1 + 3 = 4, 3 + 6 = 9, 6 + 19 = 25...વગેરે અન્ય રીતે પણ શોધવાનો પ્રયત્ન કરો.)