પ્રકરણ

5

માહિતીનું નિયમન

5.1 માહિતી

તમારાં રોજબરોજનાં જીવનમાં તમને ઘણી બધી માહિતી મળે છે. જેમ કે,

(a) છેલ્લી 10 ક્રિકેટ ટેસ્ટ મેચમાં બૅટ્સમેને બનાવેલ રન.

(b) છેલ્લી 10 વન-ડે ક્રિકેટ મેચમાં બૉલરે લીધેલી વિકેટો.

(c) તમારા વર્ગમાં ગણિતની એકમ કસોટીમાં વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલ ગુણ.

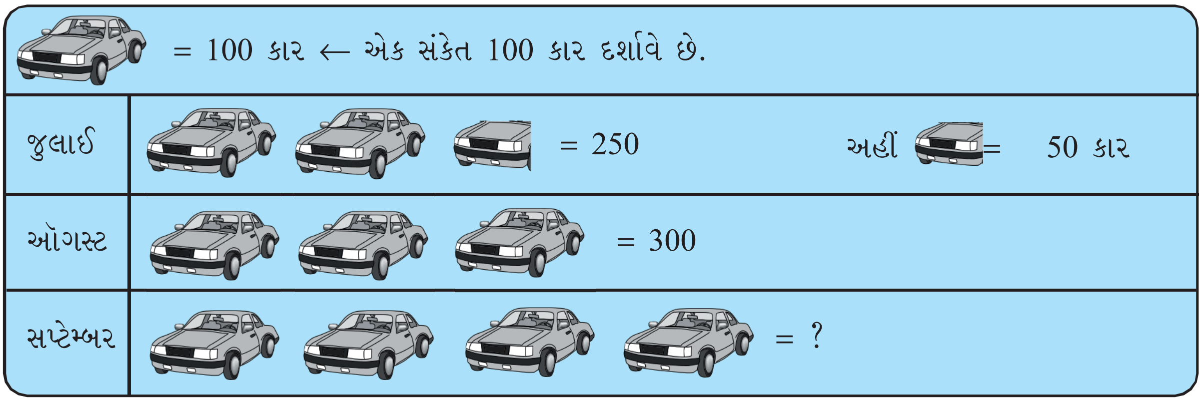
(d) તમારા દરેક મિત્રએ વાંચેલી વાર્તાની ચોપડીઓની સંખ્યા વગેરે.

ઉપરોક્ત કિસ્સાઓ જેવા અનેક કિસ્સામાં એકત્રિત કરાતી વિગતને માહિતી (Data) કહેવામાં આવે છે. સામાન્ય રીતે આપણે જે પરિસ્થિતિનો અભ્યાસ કરવાનો હોય તેને સંગત માહિતી એકત્રિત કરવામાં આવે છે. ઉદાહરણ તરીકે, કોઈ વર્ગશિક્ષક તેના વર્ગના વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈનું સરેરાશ માપ શોધવા માગે છે તો તેણે સૌ પ્રથમ પોતાના વર્ગના બધા જ વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈનાં માપ લખવાં જોઈએ અને સુવ્યવસ્થિત રીતે વર્ગીકરણ કરવું જોઈએ. ત્યાર બાદ તેનું અર્થઘટન કરવું જોઈએ.

કેટલીક વખત 'માહિતી'નો સ્પષ્ટ ચિતાર મેળવવા તેને **આલેખ સ્વરૂપે** દર્શાવવામાં આવે છે. તમે અગાઉનાં વર્ષોમાં વિવિધ પ્રકારના આલેખ વિશે અભ્યાસ કર્યો છે શું તમે તે યાદ કરી શકશો ?

1. **ચિત્ર આલેખ :** આપેલી 'માહિતી'ને સંકેતનો ઉપયોગ કરીને કરવામાં આવતી ચિત્રાત્મક રજુઆત એટલે ચિત્ર આલેખ (A Pictograph).

ઉદાહરણ : નીચેનું દૃષ્ટાંત જુઓ :

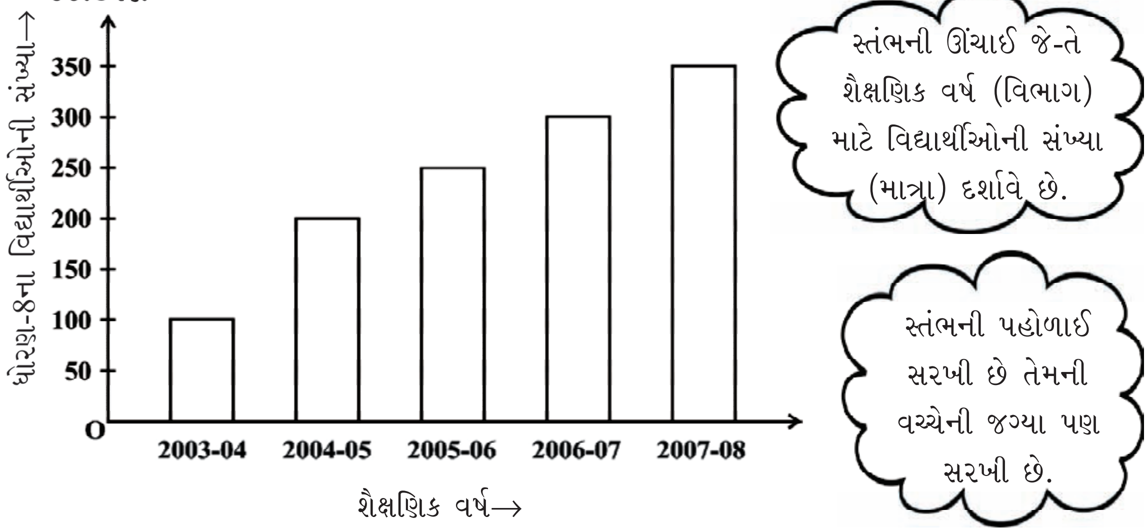


(i) જુલાઈ માસમાં કુલ કેટલી મોટરકારનું ઉત્પાદન થયું ?

(ii) કયા માસમાં સૌથી વધુ મોટરકારનું ઉત્પાદન થયું ?

2. **લંબ આલેખ (દંડ આલેખ) :** રેખાખંડ કે સમાન પહોળાઈવાળા સ્તંભોની મદદથી કરવામાં આવેલી માહિતીની રજૂઆતને લંબાલેખ (A Bar Graph) કહે છે. આ સ્તંભોની ઊંચાઈ જે-તે ચલની કિંમતના સમપ્રમાણમાં હોય છે. તેની જાડાઈનું કશું મહત્ત્વ હોતું નથી.

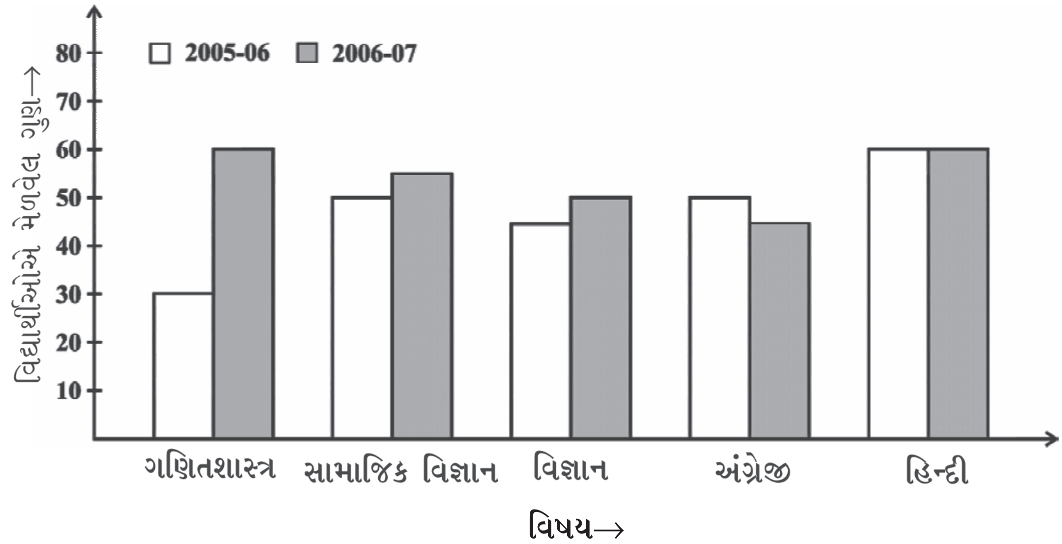
ઉદાહરણ :



(i) લંબાલેખ દ્વારા કઈ માહિતી દર્શાવવામાં આવી છે ?
(ii) કયા વર્ષમાં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યામાં વધારો સૌથી મહત્તમ છે ?
(iii) કયા વર્ષમાં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા સૌથી વધુ છે ?
(iv) નીચેનું વિધાન ખરું છે કે ખોટું ?
'વર્ષ 2005-06 ના વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા વર્ષ 2003-04 કરતાં બમણી છે.'

3. **દ્વિ-લંબાલેખ :** જે લંબાલેખમાં બે પ્રકારની માહિતીને એકસાથે દર્શાવવામાં આવે છે તેને દ્વિ-લંબાલેખ (Double Bar Graph) કહેવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ : □ 2005-06 ■ 2006-07



(i) દ્વિ-લંબાલેખ દ્વારા કઈ માહિતી દર્શાવવામાં આવી છે ?
(ii) કયા વિષયના દેખાવમાં સૌથી વધુ વધારો થયો છે ?
(iii) કયા વિષયના દેખાવમાં સૌથી વધુ ઘટાડો થયો છે ?
(iv) કયા વિષયમાં દેખાવ સમાન છે ?

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

જો લંબાલેખના કોઈ સ્તંભની સ્થિતિમાં ફેરફાર કરવામાં આવે તો, શું આપેલી માહિતીનું અર્થઘટન બદલાય છે ? શા માટે ?

પ્રયત્ન કરો

નીચેની માહિતી દર્શાવતા યોગ્ય આલેખ દોરો.

1.

મહિના	જુલાઈ	ઑગસ્ટ	સપ્ટેમ્બર	ઑક્ટોબર	નવેમ્બર	ડિસેમ્બર
વેચાયેલ ઘડિયાળની સંખ્યા	1000	1500	1500	2000	2500	1500

2.

વિદ્યાર્થીની પસંદગી	શાળા A	શાળા B	શાળા C
ચાલવું (Walking)	40	55	15
સાયકલ સવારી (Cycling)	45	25	35

3. વન-ડે ક્રિકેટમાં વિશ્વની શ્રેષ્ઠ 8 ક્રિકેટ ટીમના વિજયનું પ્રતિશત પ્રમાણ

ટીમ	ચેમ્પિયન ટ્રોફીથી વર્લ્ડ કપ-06 સુધી	2007માં છેલ્લી 10 વન-ડે ક્રિકેટ
સાઉથ આફ્રિકા	75%	78%
ઑસ્ટ્રેલિયા	61%	40%
શ્રીલંકા	54%	38%
ન્યૂઝીલૅન્ડ	47%	50%
ઇંગ્લૅન્ડ	46%	50%
પાકિસ્તાન	45%	44%
વેસ્ટ ઇન્ડિઝ	44%	30%
ઇન્ડિયા	43%	56%

5.2 માહિતીની ગોઠવણી

સામાન્ય રીતે આપણને પ્રાપ્ત થતી માહિતી અવ્યવસ્થિત સ્વરૂપમાં હોય છે જેથી તેને કાચા પ્રાપ્તાંક/કાચી માહિતી પણ કહે છે. અર્થપૂર્ણ તારણ મેળવવા માટે આપેલ કાચી માહિતીને સુવ્યવસ્થિત રીતે ગોઠવવી જોઈએ.

ઉદાહરણ : ધારો કે વિદ્યાર્થીઓના એક સમૂહને તેઓના પસંદગીના વિષય અંગે પૂછવામાં આવતાં નીચે મુજબ માહિતી મળે છે.

કલા, ગણિતશાસ્ત્ર, વિજ્ઞાન, અંગ્રેજી, ગણિતશાસ્ત્ર, કલા, અંગ્રેજી, ગણિતશાસ્ત્ર, અંગ્રેજી, કલા, વિજ્ઞાન, કલા, વિજ્ઞાન, વિજ્ઞાન, ગણિતશાસ્ત્ર, કલા, અંગ્રેજી, કલા, વિજ્ઞાન, ગણિતશાસ્ત્ર, વિજ્ઞાન, કલા. વિદ્યાર્થીઓમાં કયો વિષય સૌથી વધુ પસંદગીપાત્ર છે અને કયો સૌથી ઓછો ?

અહીં નોંધાયેલ માહિતી આડી-અવળી રીતે નોંધાયેલી હોઈ ઉપરોક્ત પ્રશ્નનો ઉત્તર આપવો એકદમ સરળ નથી. આપણે ઉપરોક્ત માહિતીને કોષ્ટક 5.1 મુજબ આવૃત્તિ ચિહ્નથી ગોઠવીશું.

કોષ્ટક : 5.1

વિષય	આવૃત્તિ ચિહ્ન	વિદ્યાર્થીની સંખ્યા
કલા	𝍸 ||	7
ગણિતશાસ્ત્ર	𝍸	5
વિજ્ઞાન	𝍸 |	6
અંગ્રેજી	||||	4

ઉપરોક્ત કોષ્ટક 5.1 માં જે-તે વિષયને અનુરૂપ આવૃત્તિચિહ્ન દર્શાવેલ છે જે વિદ્યાર્થીની સંખ્યા દર્શાવે છે. આ સંખ્યાને તે વિષયની આવૃત્તિ કહે છે.

કોઈ ચોક્કસ નોંધ કેટલીવાર આવે છે તે સંખ્યા આવૃત્તિ દર્શાવે છે.

કોષ્ટક 5.1 મુજબ, **અંગ્રેજી વિષય પસંદ કરતા વિદ્યાર્થીઓની આવૃત્તિ : 4 તથા ગણિતશાસ્ત્ર વિષય પસંદ કરતા વિદ્યાર્થીઓની આવૃત્તિ : 5**

ઉપરોક્ત કોષ્ટકને આવૃત્તિ વિતરણ કોષ્ટક કહે છે.

પ્રયત્ન કરો

1. વિદ્યાર્થીઓના એક સમૂહને પાલતુ પ્રાણીઓમાં સૌથી વધુ ગમતાં પ્રાણી વિશે પૂછવામાં આવ્યું. જેનું પરિણામ નીચે મુજબ છે :
   કૂતરો, બિલાડી, બિલાડી, માછલી, બિલાડી, સસલું, કૂતરો, બિલાડી, સસલું, કૂતરો, બિલાડી, કૂતરો, કૂતરો, કૂતરો, બિલાડી, ગાય, માછલી, સસલું, કૂતરો, બિલાડી, કૂતરો, બિલાડી, બિલાડી, કૂતરો, સસલું, બિલાડી, માછલી, કૂતરો.
   આ માહિતી પરથી આવૃત્તિ વિતરણ કોષ્ટક તૈયાર કરો.

5.3 વર્ગીકૃત માહિતી

વિષય પસંદગીના ઉપરોક્ત ઉદાહરણમાં દર્શાવેલ ચોક્કસ નોંધ (Entry) એકથી વધુ વખત પુનરાવર્તિત થાય છે. ઉદાહરણ તરીકે, કલા વિષય 7 વિદ્યાર્થીઓને પસંદ છે. ગણિતશાસ્ત્ર વિષય 5 વિદ્યાર્થીઓ (એ જ રીતે આગળ...) પસંદ કરે છે (કોષ્ટક 5.1). આ માહિતી ચિત્ર-આલેખ (A Pictograph) અથવા લંબાલેખ (A Bargraph) દ્વારા પણ દર્શાવી શકાય. કોઈ વખત આપણે ખૂબ જ મોટા જથ્થામાં માહિતીનો ઉપયોગ કરવો પડે છે. ઉદાહરણ તરીકે, ધોરણ VIII ના 60 વિદ્યાર્થીઓએ ગણિત વિષયના 50 ગુણમાંથી મેળવેલ ગુણ નીચે મુજબ છે :

21, 10, 30, 22, 33, 5, 37, 12, 25, 42, 15, 39, 26, 32, 18, 27, 28, 19, 29, 35, 31, 24, 36, 18, 20, 38, 22, 44, 16, 24, 10, 27, 39, 28, 49, 29, 32, 23, 31, 21, 34, 22, 23, 36, 24, 36, 33, 47, 48, 50, 39, 20, 7, 16, 36, 45, 47, 30, 22, 17.

જો ઉપરોક્ત અવલોકનોનો ઉપયોગ કરીને આવૃત્તિ વિતરણ કોષ્ટક તૈયાર કરવામાં આવે તો, કોષ્ટક ખૂબ જ મોટું બનશે. આપણી અનુકૂળતા માટે 0-10, 10-20, 20-30, 30-40, 40-50 અને

50-60 એમ વર્ગ બનાવીશું અને તેમાં જે તે અવલોકનોનો સમાવેશ કરીશું. આ રીતે, નીચે મુજબ આવૃત્તિ વિતરણ કોષ્ટક તૈયાર થશે :

કોષ્ટક 5.2

વર્ગ	આવૃત્તિ ચિહ્ન	આવૃત્તિ
0-10	||	02
10-20	卌 卌	10
20-30	卌 卌 卌 卌 |	21
30-40	卌 卌 卌 ||||	19
40-50	卌 ||	07
50-60	|	01
	કુલ	**60**

ઉપરોક્ત રીતે રજુ કરેલ **'માહિતી'**ને વર્ગીકૃત માહિતી કહે છે અને વર્ગીકરણને **વર્ગીકૃત આવૃત્તિ વિતરણ** કહે છે. જેની મદદથી આપણે અર્થપૂર્ણ તારણ કાઢી શકીએ છીએ. જેમ કે,

(1) મોટા ભાગના વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલ ગુણ 20 અને 40 વચ્ચે છે.

(2) આઠ વિદ્યાર્થીઓએ 40 થી વધુ (50માંથી) ગુણ મેળવ્યા છે.

દરેક વર્ગ 0-10, 10-20, 20-30, ... વગેરેને વર્ગ અંતરાલ અથવા વર્ગ કહે છે.

અહીં આપણે નોંધીએ કે 10 એ 0-10 અને 10-20 બંને વર્ગમાં સમાવિષ્ટ છે. આ જ રીતે, 20 એ 10-20 અને 20-30 એમ બંને વર્ગમાં સમાવિષ્ટ છે, પરંતુ આ અવલોકન (10 કે 20, ...) એ એકસાથે બંને વર્ગમાં સમાવિષ્ટ થાય એ શક્ય નથી. આ વિસંગતતા ટાળવા આપણે એવું સ્વીકારીશું કે જે-તે અવલોકન ઉચ્ચ વર્ગમાં સમાવિષ્ટ રહે. અર્થાત્, 10 નો 0-10 માં નહીં પરંતુ 10-20 વાળા વર્ગમાં સમાવેશ કરવો. આ જ રીતે 20 ને 20-30 માં સમાવિષ્ટ કરીશું (10-20 માં નહીં).

અહીં વર્ગ 10-20 માં 10 ને અધઃસીમા અને 20 ને ઉર્ધ્વસીમા કહે છે. આ જ રીતે, 20-30 ના વર્ગમાં 20 ને અધઃસીમા અને 30 ને ઉર્ધ્વસીમા કહે છે. અહીં, આપણે એ પણ નોંધીએ કે દરેક વર્ગ અંતરાલમાં ઉર્ધ્વ સીમા અને અધઃ સીમા વચ્ચેનો તફાવત એ એકસમાન રહે છે. આપણા કિસ્સામાં અહીં 0-10, 10-20, 20-30 ...નો તફાવત 10 છે. ઉર્ધ્વસીમા અને અધઃસીમાના તફાવતને વર્ગની વર્ગલંબાઈ અથવા કદ કહે છે.

પ્રયત્ન કરો

1. નીચે આપેલ આવૃત્તિ વિતરણ કોષ્ટકનો અભ્યાસ કરો અને નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.
   એક કારખાનાનાં 550 કામદારોનું દૈનિક વેતન દર્શાવતું આવૃત્તિ વિતરણ કોષ્ટક નીચે મુજબ છે :

કોષ્ટક 5.3

વર્ગ અંતરાલ (દૈનિક આવક રૂપિયામાં)	આવૃત્તિ (કામદારની સંખ્યા)
100-125	45
125-150	25

150-175	55
175-200	125
200-225	140
225-250	55
250-275	35
275-300	50
300-325	20
કુલ	**550**

(i) અહીં વર્ગ લંબાઈ કેટલી છે ?

(ii) કયા વર્ગની આવૃત્તિ સૌથી વધુ છે ?

(iii) કયા વર્ગની આવૃત્તિ સૌથી ઓછી છે ?

(iv) વર્ગ અંતરાલ 250-275ની ઉર્ધ્વસીમા શું છે ?

(v) કયા બે વર્ગમાં સમાન આવૃત્તિ છે ?

2. એક વર્ગના 20 વિદ્યાર્થીઓના વજન (કિગ્રામાં) દર્શાવતી નીચેની માહિતી માટે એવું આવૃત્તિ વિતરણ-કોષ્ટક તૈયાર કરો જેના વર્ગો 30-35, 35-40 અને એ રીતે આગળ .. હોય ?
40, 38, 33, 48, 60, 53, 31, 46, 34, 36, 49, 41, 55, 49, 65, 42, 44, 47, 38, 39.

5.3.1 લંબ આલેખની ખાસ રજૂઆત (સ્તંભ આલેખ)

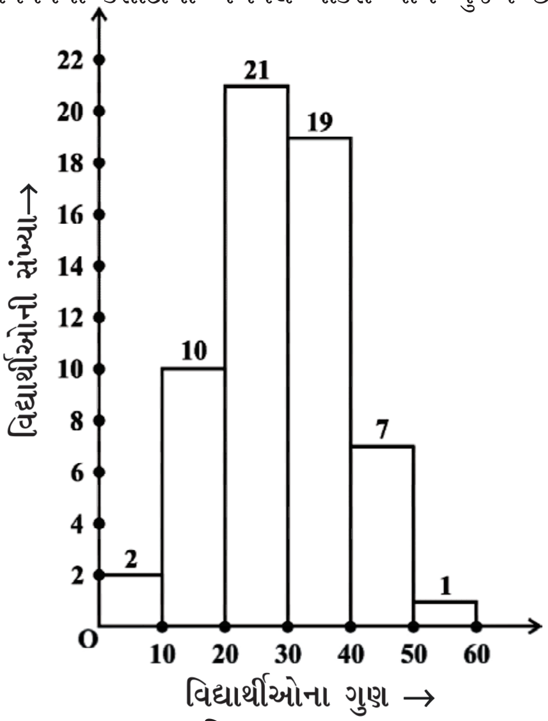
આપણે વર્ગીકૃત આવૃત્તિ વિતરણનો જુદી રીતે અભ્યાસ કરીએ.

ધારો કે, એક વર્ગના 60 વિદ્યાર્થીઓએ ગણિત વિષયની કસોટીમાં મેળવેલ માર્કસ નીચે મુજબ છે (કોષ્ટક 5.4).

કોષ્ટક 5.4

વર્ગ અંતરાલ	આવૃત્તિ
0-10	2
10-20	10
20-30	21
30-40	19
40-50	7
50-60	1
કુલ	**60**

તેની આલેખાત્મક રજૂઆત તેની બાજુમાં દર્શાવેલ છે (આકૃતિ 5.1).



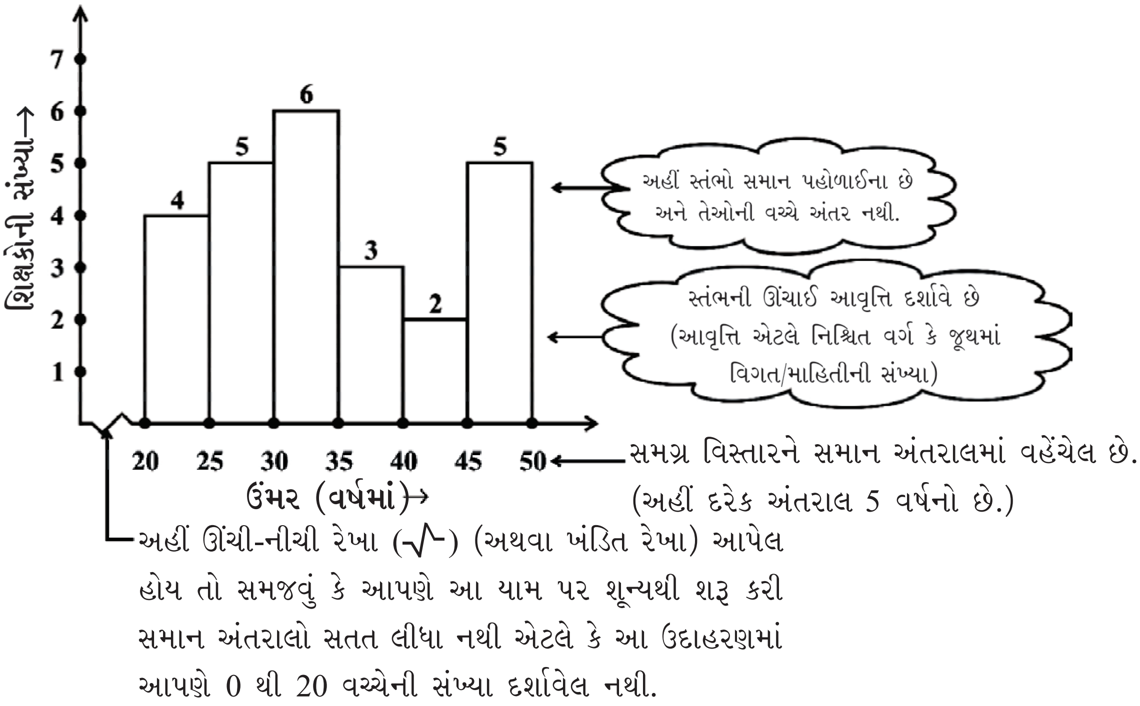
આકૃતિ 5.1

ધોરણ 7 માં શીખેલ લંબાલેખ કરતાં આ આલેખ કઈ રીતે જુદો પડે છે ? અહીં આપણે નોંધીએ કે, અવલોકનોનો સમૂહ (એટલે કે વર્ગઅંતરાલ) સમક્ષિતિજ રેખા / X- અક્ષ પર દર્શાવેલ છે.

સ્તંભની ઊંચાઈ એ જે-તે વર્ગની આવૃત્તિ દર્શાવે છે. જે રીતે બે વર્ગ અંતરાલ વચ્ચે જગ્યા નથી, તે જ રીતે બે સ્તંભો વચ્ચે પણ જગ્યા નથી.

આ પ્રકારની આલેખાત્મક રજૂઆતને સ્તંભાલેખ (Histogram) કહે છે. નીચે દર્શાવેલ આકૃતિ 5.2 માં એક અન્ય સ્તંભાલેખ છે.

શાળાના 25 શિક્ષકોની ઉંમર



આકૃતિ 5.2

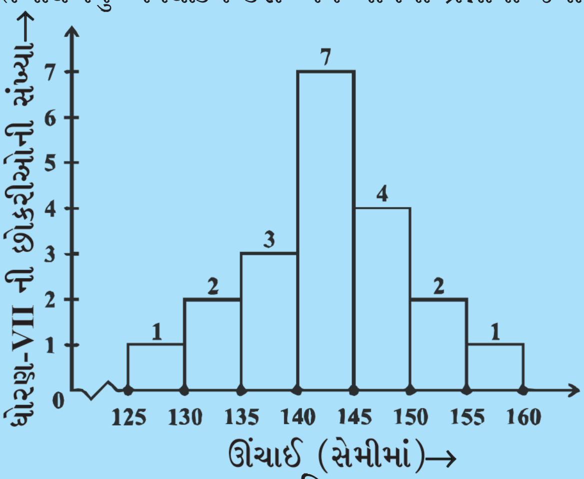
ઉપરોક્ત સ્તંભાલેખના સ્તંભ ઉપરથી આપણે નીચે મુજબના પ્રશ્નોના જવાબ આપી શકીએ.

(i) કેટલા શિક્ષકોની ઉંમર 45 વર્ષથી વધુ પરંતુ 50 વર્ષથી ઓછી છે ?

(ii) કેટલા શિક્ષકોની ઉંમર 35 વર્ષથી ઓછી છે ?

પ્રયત્ન કરો

1. આકૃતિ 5.3 ના સ્તંભાલેખનું અવલોકન કરો અને નીચેના પ્રશ્નોનાં જવાબ આપો :



આકૃતિ 5.3

(i) ઉપરોક્ત સ્તંભાલેખમાં શું માહિતી આપવામાં આવી છે ?

(ii) કયા વર્ગમાં છોકરીઓની સંખ્યા મહત્તમ છે ?

(iii) કેટલી છોકરીઓની ઊંચાઈ 145 સેમી કે તેથી વધારે છે ?

(iv) જો આપણે છોકરીઓને નીચે મુજબ ત્રણ વિભાગમાં વહેંચણી કરીએ તો દરેક વિભાગની સંખ્યા શું થાય ?

150 સેમી કે તેથી વધુ	જૂથ A
140 સેમી અને 150 સેમીની વચ્ચે	જૂથ B
150 સેમીથી ઓછી	જૂથ C

સ્વાધ્યાય 5.1

1. નીચેની માહિતીમાંથી કઈ માહિતી દર્શાવવા સ્તંભાલેખ(Histogram)નો ઉપયોગ કરશો ?

(a) ટપાલીના થેલામાં રહેલ જુદા-જુદા વિસ્તારોના પત્રોની સંખ્યા.

(b) રમત સ્પર્ધાના સ્પર્ધકોની ઊંચાઈ.

(c) પાંચ કંપનીઓ દ્વારા ઉત્પાદન થયેલ કેસેટની સંખ્યા.

(d) રેલ્વે સ્ટેશને સવારે 7:00 થી સાંજના 7:00 વાગ્યા દરમિયાન ટ્રેનમાં મુસાફરી કરનાર મુસાફરોની સંખ્યા.

ઉપરોક્ત દરેક માટે કારણ આપો.

2. એક દુકાનદાર પોતાના 'ડિપાર્ટમેન્ટલ સ્ટોર્સ' પર આવતા પુરુષ (M), સ્ત્રી (W), છોકરો (B) અથવા છોકરી (G) માટે નોંધ કરે છે. નીચેની યાદી દુકાનદારને સવારના પ્રથમ ચાર કલાકમાં આવતા ગ્રાહકોની માહિતી દર્શાવે છે :

W, W, W, G, B, W, W, M, G, G, M, M, W, W, W, W, G, B, M, W, B, G, G, M, W, W, M, M, W, W, W, M, W, B, W, G, M, W, W, W, W, G, W, M, M, W, W, M, W, G, W, M, G, W, M, M, B, G, G, W

ઉપરોક્ત માહિતી પરથી આવૃત્તિ ચિહ્નનો ઉપયોગ કરીને આવૃત્તિ વિતરણ કોષ્ટક તૈયાર કરો અને લંબાલેખ દ્વારા દર્શાવો.

3. એક કારખાનાના 30 કારીગરોનું સાપ્તાહિક વેતન (₹) નીચે મુજબ છે :

830, 835, 890, 810, 835, 836, 869, 845, 898, 890, 820, 860, 832, 833, 855, 845, 804, 808, 812, 840, 885, 835, 835, 836, 878, 840, 868, 890, 806, 840.

ઉપરોક્ત માહિતી પરથી આવૃત્તિ ચિહ્નનો ઉપયોગ કરીને 800-810, 810-820, ... વર્ગ ધરાવતું આવૃત્તિ વિતરણ કોષ્ટક તૈયાર કરો.

4. પ્રશ્ન-3 માં આપેલ માહિતી પરથી બનાવેલ આવૃત્તિ કોષ્ટકનો ઉપયોગ કરીને સ્તંભાલેખ (Histogram) તૈયાર કરો અને નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(i) કયા વર્ગમાં કારીગરોની સંખ્યા મહત્તમ છે ?

(ii) ₹ 850 કે તેથી વધુ વેતન મેળવતા કારીગરોની સંખ્યા કેટલી છે ?

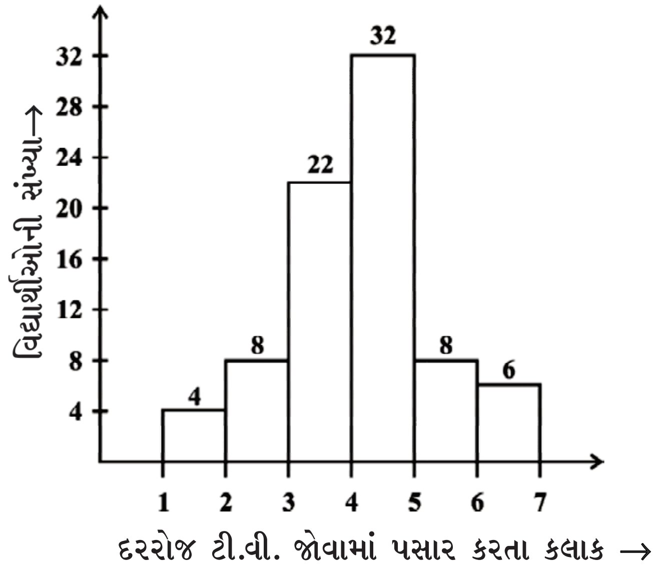
(iii) ₹ 850 થી ઓછુ વેતન મેળવતા કારીગરોની સંખ્યા કેટલી છે ?

5. ચોક્કસ વર્ગના વિદ્યાર્થીઓ દ્વારા રજા દરમિયાન નિહાળેલ ટી.વી.ના કલાકોની સંખ્યા આલેખ દ્વારા દર્શાવેલ છે. જેના પરથી નીચેના પ્રશ્નોના ઉત્તર લખો.

(i) સૌથી વધુ વિદ્યાર્થીઓએ કેટલા કલાક ટી.વી. જોયું ?

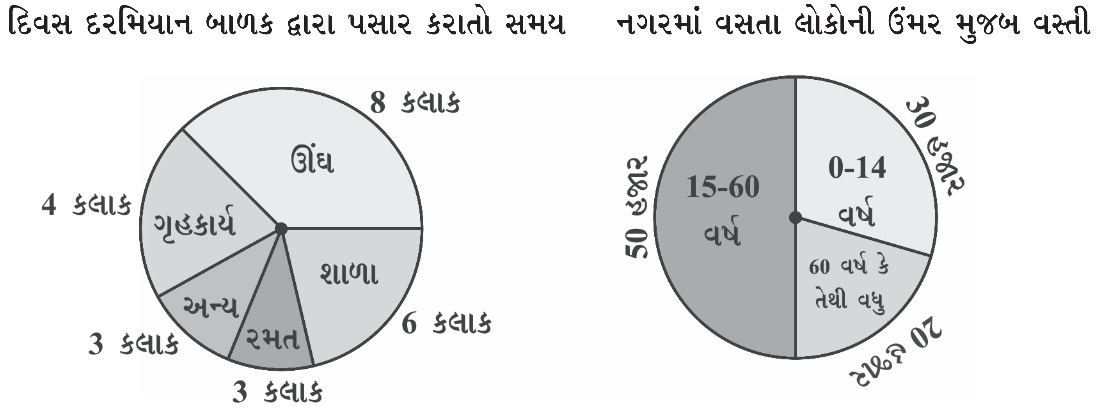
(ii) કેટલા વિદ્યાર્થીઓએ 4 કલાકથી ઓછું ટી.વી. જોયું ?

(iii) કેટલા વિદ્યાર્થીઓએ 5 કલાકથી વધુ સમય ટી.વી. જોવામાં પસાર કર્યો ?



5.4 વર્તુળ આલેખ અથવા પાઈ-ચાર્ટ

શું તમે ક્યારેય (આકૃતિ 5.4 મુજબ) વર્તુળાકાર સ્વરૂપે દર્શાવેલ માહિતી ઉપયોગમાં લીધી છે ?



(i) (ii)

આકૃતિ 5.4

આવા આલેખને વર્તુળ આલેખ કહે છે. વર્તુળ આલેખ એ આપેલી વિગતનો ચોક્કસ ભાગ અને તેના કુલ ભાગ વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવે છે. અહીં, આકૃતિ 5.4 માં આખું વર્તુળ એ ચોક્કસ વૃત્તાંશોમાં વહેંચાયેલ છે. દરેક વૃત્તાંશનું કદ એ જે-તે પ્રવૃત્તિઓ કે માહિતીના પ્રમાણમાં દર્શાવેલ છે.

ઉદાહરણ તરીકે,

ઉપરોક્ત આલેખમાં બાળક દ્વારા ઊંઘ માટે વપરાતો સમયગાળો (કે ઊંઘ માટે વપરાતા કલાકોનું પ્રમાણ)

$$= \frac{\text{ઊંઘના કલાકો}}{\text{દિવસના કુલ કલાકો}} = \frac{8 \text{ કલાક}}{24 \text{ કલાક}} = \frac{1}{3}$$

તેથી, ઊંઘનો સમયગાળો દર્શાવતા વૃત્તાંશનો ભાગ એ કુલ વર્તુળનો $\frac{1}{3}$ ભાગ બને. આ જ રીતે,

શાળા માટે બાળક દ્વારા વપરાતા કલાકોનું પ્રમાણ $= \frac{\text{શાળાના કલાકો}}{\text{દિવસના કુલ કલાકો}} = \frac{6 \text{ કલાક}}{24 \text{ કલાક}} = \frac{1}{4}$

આમ, શાળાના સમયગાળા માટે દર્શાવેલ વૃત્તાંશ એ આખા વર્તુળનો $\frac{1}{4}$ ભાગ છે.

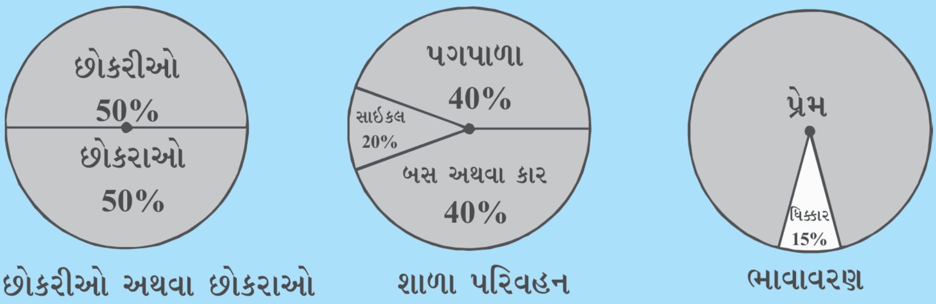
આ જ રીતે, બીજા વૃત્તાંશનો વિસ્તાર (કે કદ) પણ મેળવી શકાય. બધી જ પ્રવૃત્તિઓ માટે જરૂરી વૃત્તાંશ દર્શાવતાં અપૂર્ણાંક ભાગનો સરવાળો કરો. શું તમને સરવાળો એક મળે છે ?

વર્તુળ આલેખને પાઈ ચાર્ટ (π-Chart) પણ કહે છે.

પ્રયત્ન કરો

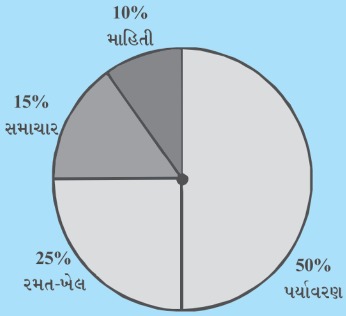
1. નીચે દર્શાવેલ દરેક પાઈ-આલેખ (આકૃતિ 5.5) એક વર્ગની વિવિધ માહિતી દર્શાવે છે. આ દરેક માહિતી વર્તુળનો કેટલામો ભાગ દર્શાવે છે તે શોધો.

(i) (ii) (iii)



આકૃતિ 5.5

2. આકૃતિ 5.6 માં દર્શાવેલ પાઈ-ચાર્ટ પરથી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :
   (i) કયા પ્રકારના કાર્યક્રમો સૌથી વધુ જોવાય છે ?
   (ii) કયા બે પ્રકારના કાર્યક્રમો નિહાળનાર દર્શકોની સંખ્યા રમત વિભાગના કાર્યક્રમો નિહાળનાર દર્શકોની સંખ્યા બરાબર છે ?



ટી.વી. પર વિવિધ કાર્યક્રમોની ચેનલ નિહાળનારા દર્શકો

આકૃતિ 5.6

5.4.1 પાઈ-ચાર્ટ દોરવો

શાળાના વિદ્યાર્થીઓના એક સમૂહને જુદા-જુદા પ્રકારના સ્વાદવાળા આઈસ્ક્રીમ આપવામાં આવ્યા તેની ટકાવારી નીચે મુજબ છે :

સ્વાદ	સ્વાદ પસંદગીમાં વિદ્યાર્થીઓની ટકાવારી
ચોકલેટ	50 %
વેનિલા	25 %
અન્ય	25 %

ઉપરોક્ત માહિતીનો આપણે પાઈ-ચાર્ટ બનાવીએ.

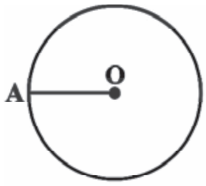
વર્તુળના કેન્દ્ર પાસે ખૂણાનું કુલ માપ 360° હોય. જે-તે વૃત્તાંશ માટે ખૂણાનું માપ એ 360°નો અપૂર્ણાંક

ભાગ બને. આપણે જુદા-જુદા વૃત્તાંશો માટે તેના કેન્દ્ર પાસે બનતા ખૂણાનું માપ શોધવા માટેનું કોષ્ટક બનાવીએ. (કોષ્ટક 5.5)

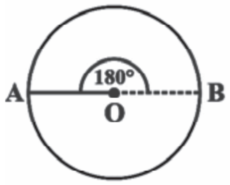
કોષ્ટક 5.5

સ્વાદ	સ્વાદ પસંદગીમાં વિદ્યાર્થીઓની ટકાવારી	અપૂર્ણાંક	360°નો ભાગ
ચોકલેટ	50%	$\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$	360°નો $\frac{1}{2}$ ભાગ = 180°
વેનિલા	25%	$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$	360°નો $\frac{1}{4}$ ભાગ = 90°
અન્ય	25%	$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$	360°નો $\frac{1}{4}$ ભાગ = 90°

1. યોગ્ય ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ દોરો. તેના કેન્દ્રને O અને ત્રિજ્યાને OA કહો.



2. ચોકલેટી સ્વાદવાળા વૃત્તાંશનો ખૂણો 180° છે. કોણ-માપકનો ઉપયોગ કરીને ∠AOB = 180° દોરો.



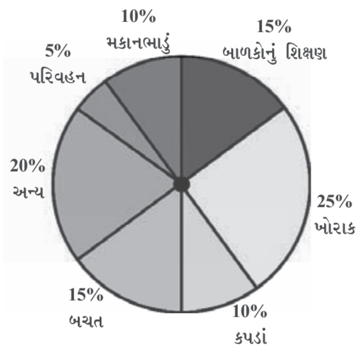
3. બાકીના વૃત્તાંશ માટે પણ કોણમાપકનો ઉપયોગ કરો.

ઉદાહરણ 1 : આકૃતિ 5.7 માં દર્શાવ્યા મુજબ વિવિધ વસ્તુઓનો ખર્ચ (ટકાવારીમાં) અને કુટુંબની માસિક બચત દર્શાવતો પાઈ-ચાર્ટ આપેલ છે.

(i) કઈ વસ્તુનો ખર્ચ મહત્તમ છે ?

(ii) કઈ વસ્તુનો ખર્ચ એ કુટુંબની કુલ બચત જેટલો છે ?

(iii) જો કુટુંબની માસિક બચત ₹ 3000 હોય તો કપડાનો માસિક ખર્ચ કેટલો હોય ?



આકૃતિ 5.7

ઉકેલ :

(i) ખોરાકમાં મહત્તમ ખર્ચ છે.

(ii) બાળકોના શિક્ષણ માટેનો ખર્ચ (અર્થાત્ 15%) એ કુટુંબની બચત બરાબર છે.

(iii) ₹ 3000 એ 15% દર્શાવે છે.

તેથી ₹ 3000નાં 10% = ₹ $\frac{3000}{15} \times 10$ = ₹ 2000

ઉદાહરણ 2 : કોઈ ચોક્કસ દિવસે, બૅકરીની વિવિધ વસ્તુઓનું વેચાણ (₹ માં) નીચે મુજબ આપેલ છે :

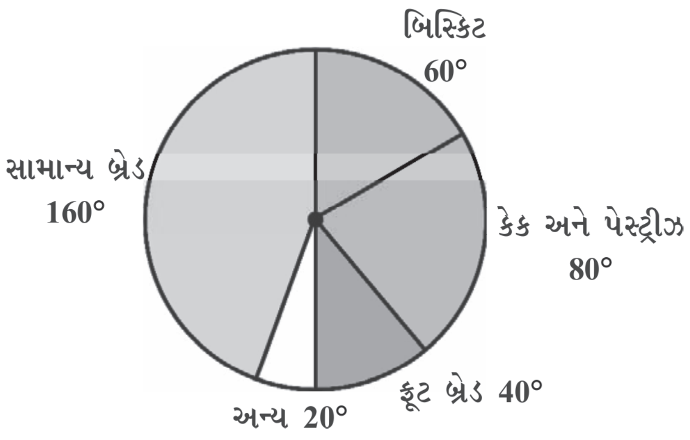
સામાન્ય બ્રેડ	:	320
ફ્રૂટ બ્રેડ	:	80
કેક અને પેસ્ટ્રી	:	160
બિસ્કિટ	:	120
અન્ય	:	40
કુલ	**:**	**720**

આ માહિતી માટે પાઈ-ચાર્ટ દોરો

ઉકેલ : આપણે અહીં દરેક વૃત્તાંશ માટે તેનો કેન્દ્ર પાસેનો ખૂણો શોધીએ. અહીં, કુલ વેચાણ = ₹ 720 છે.

વસ્તુ	વેચાણ (₹)	અપૂર્ણાંક	કેન્દ્ર પાસેનો ખૂણો
સામાન્ય બ્રેડ	320	$\frac{320}{720} = \frac{4}{9}$	$\frac{4}{9} \times 360° = 160°$
બિસ્કિટ	120	$\frac{120}{720} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} \times 360° = 60°$
કેક અને પેસ્ટ્રીઝ	160	$\frac{160}{720} = \frac{2}{9}$	$\frac{2}{9} \times 360°- = 80°$
ફ્રૂટ બ્રેડ	80	$\frac{80}{720} = \frac{1}{9}$	$\frac{1}{9} \times 360° = 40°$
અન્ય	40	$\frac{40}{720} = \frac{1}{18}$	$\frac{1}{18} \times 360° = 20°$

હવે, ઉપરોક્ત કોષ્ટક (આકૃતિ 5.8) મુજબ પાઈ-ચાર્ટ બનાવીએ.



આકૃતિ 5.8

પ્રયત્ન કરો

નીચેની માહિતી માટે પાઈ-ચાર્ટ બનાવો :

દિવસ દરમિયાન બાળક દ્વારા પસાર કરાતો સમય.

ઊંઘ	-	8 કલાક
શાળા	-	6 કલાક
ગૃહકાર્ય	-	4 કલાક
રમત	-	4 કલાક
અન્ય	-	2 કલાક

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

નીચેની માહિતી દર્શાવવા કયા પ્રકારનો આલેખ દોરવો વધુ યોગ્ય છે ?

1. રાજ્યનું ખાદ્ય અનાજનું ઉત્પાદન

વર્ષ	2001	2002	2003	2004	2005	2006
ઉત્પાદન લાખ ટનમાં	60	50	70	55	80	85

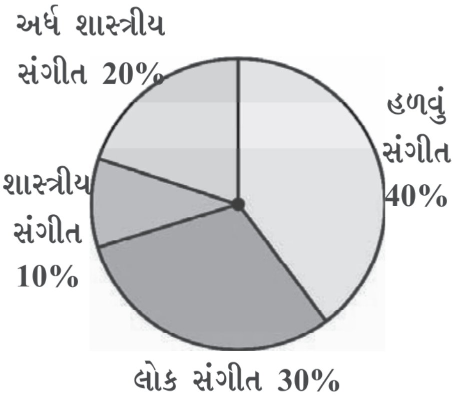
2. લોકોની ખોરાક માટેની પસંદગી

પસંદગીનો ખોરાક	લોકોની સંખ્યા
ઉત્તર ભારત	30
દક્ષિણ ભારત	40
ગુજરાતી	25
અન્ય	25
કુલ	**120**

3. કારખાનાનાં કામદારોની દૈનિક આવક

દૈનિક આવક (₹)	કામદારોની સંખ્યા
75-100	45
100-125	35
125-150	55
150-175	30
175-200	50
200-225	125
225-250	140
કુલ	**480**

સ્વાધ્યાય 5.2



1. એક શહેરના યુવા વર્ગને ગમતાં વિવિધ પ્રકારનાં સંગીત વિશે એક મોજણી (Survey) કરવામાં આવી. બાજુમાં દર્શાવેલ વર્તુળ આલેખ (પાઈ-ચાર્ટ) મુજબ તેનાં પરિણામો મળ્યાં હતાં. આ વર્તુળ આલેખ (પાઈ-ચાર્ટ)ની મદદથી નીચેના પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

(i) જો 20 યુવાનો શાસ્ત્રીય સંગીત પસંદ કરે છે તો, કેટલા યુવાનોની મોજણી કરી હતી ?

(ii) કયા પ્રકારનું સંગીત મહત્તમ યુવાનો પસંદ કરે છે ?

(iii) જો કોઈ કેસેટ કંપની આ સંગીતની 1000 CD તૈયાર કરે તો દરેક પ્રકારનાં સંગીત માટે કેટલી CD તૈયાર થાય ?

ઋતુ	મતની સંખ્યા
ઉનાળો	90
ચોમાસું	120
શિયાળો	150

2. 360 લોકોને શિયાળો, ઉનાળો અને ચોમાસું એમ ત્રણ ઋતુમાંથી પોતાની પસંદગીની ઋતુ માટે મત આપવા જણાવવામાં આવ્યું.

(i) કઈ ઋતુને સૌથી વધુ મત મળ્યા ?

(ii) દરેક ઋતુના વૃત્તાંશ માટે તેના કેન્દ્ર પાસેના ખૂણાનું માપ શોધો.

(iii) ઉપરોક્ત માહિતી દર્શાવતો પાઈ-ચાર્ટ તૈયાર કરો.

3. નીચેની માહિતી માટે પાઈ-ચાર્ટ તૈયાર કરો. કોષ્ટકમાં આપેલી વિગતો લોકોના પસંદગીના રંગ અંગેની માહિતી દર્શાવે છે.

રંગ	લોકોની સંખ્યા
વાદળી	18
લીલો	9
લાલ	6
પીળો	3
કુલ	**36**

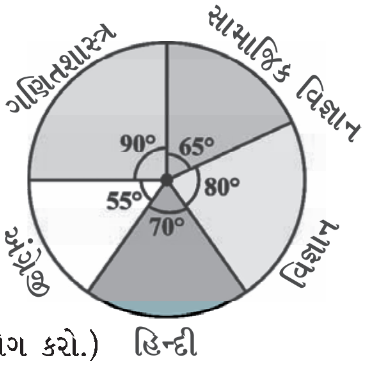
દરેક વૃત્તાંશ માટે પ્રમાણ શોધો.
ઉદાહરણ : વાદળી માટે $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$; લીલા માટે $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ વિગેરે. સંગત ખૂણો દર્શાવવા માટે તેનો ઉપયોગ કરો.

4. અહીં આપેલ પાઈ-ચાર્ટમાં વિદ્યાર્થીઓ દ્વારા હિન્દી, અંગ્રેજી, ગણિતશાસ્ત્ર, સામાજિક વિજ્ઞાન અને વિજ્ઞાનની પરીક્ષામાં 540 ગુણમાંથી મેળવેલા ગુણ દર્શાવેલ છે.

(i) કયા વિષયમાં વિદ્યાર્થીઓએ 105 ગુણ મેળવ્યા છે ?
(**સૂચન :** 540 ગુણ માટે વૃતાંશકોણ 360° તેથી, 105 ગુણ માટે વૃતાંશકોણ કેટલો ?)

(ii) હિન્દી વિષય કરતાં ગણિતશાસ્ત્રમાં વિદ્યાર્થીઓએ કેટલા વધારે ગુણ મેળવ્યા છે ?

(iii) ચકાસો કે શું વિજ્ઞાન અને હિન્દી વિષયમાં મેળવેલ ગુણના સરવાળા કરતાં સામાજિક વિજ્ઞાન અને ગણિતશાસ્ત્રમાં મેળવેલ ગુણ વધારે છે ?
(**સૂચન :** વૃત્તાંશનાં કેન્દ્ર પાસેના ખૂણાના માપનો ઉપયોગ કરો.)



5. એક છાત્રાલયમાં જુદી-જુદી ભાષાઓ બોલતાં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા નીચે મુજબ છે, તો પાઈ-ચાર્ટ તૈયાર કરો :

ભાષા	ગુજરાતી	અંગ્રેજી	ઉર્દુ	હિન્દી	સિંધી	કુલ
વિદ્યાર્થીની સંખ્યા	40	12	9	7	4	72

5.5 તક અને સંભાવના

ઘણી વખત ચોમાસાની ઋતુમાં એવું બને છે કે નિયમિત રીતે તમે રેઈન-કોટ સાથે રાખો છો પણ તે દિવસોમાં વરસાદ આવતો નથી અને જે દિવસે તમે તમારો રેઈન-કોટ ભૂલી જાઓ છો તે જ દિવસે ધોધમાર વરસાદ આવે છે.

ઘણી વખત એવું બને છે કે તમે પરીક્ષા માટે નક્કી કરાયેલાં 5 પ્રકરણોમાંથી 4 પ્રકરણ ખૂબ જ સારી રીતે તૈયાર કર્યાં હોય છે અને પ્રશ્નપત્રમાં જુઓ તો જે પ્રકરણ ઓછું તૈયાર કર્યું હોય તેમાંથી જ સૌથી વધુ પ્રશ્નો પૂછાય છે.

આ જ રીતે નિયમિત સમય પર દોડતી ટ્રેન પકડવા તમે સમયસર રેલવે-સ્ટેશન પર પહોંચી જાઓ છો, પરંતુ તે દિવસે જ એ ટ્રેન મોડી આવે છે.

આવું ઘણી વખત બને છે કે જે પરિસ્થિતિને તમે સાનુકૂળ બનાવવા પ્રયત્ન કરો એ વખતે જ તમારે પ્રતિકૂળતા ઊભી થાય છે. શું તમે આવાં વધુ ઉદાહરણો આપી શકો ?

ઉપર્યુક્ત ઉદાહરણો એવાં છે કે જેમાં કોઈ ચોક્કસ ઘટના બનશે કે નહીં બને તે એકસમાન હોતું નથી. કોઈ ટ્રેન નિર્ધારિત સમયે જ આવે કે મોડી પહોંચે તેની તકો (chances) એકસમાન હોતી નથી. તમે જ્યારે પ્રતિક્ષાયાદી (waiting list)માં હોય તેવી ટિકિટ ખરીદો છો, ત્યારે ખરેખર તો તમે એક તક ઝડપો છો, એવી આશા સાથે કે તમારી મુસાફરી શરૂ કરવાના સમય પહેલાં તમે તમારી બેઠક (seat) ચોક્કસ મેળવી શકશો.

અહીં, આપણે કેટલાક એવા પ્રયોગો કરીશું કે જેમાં જે-તે ઘટના ઘટવાની તકો એકસમાન હોય.

5.5.1 પરિણામ મેળવવું

તમે એવું નિહાળ્યું હશે કે કોઈ ક્રિકેટ મેચ શરૂ થતાં પહેલાં બંને ટીમના કપ્તાનો એક સિક્કા વડે 'ટોસ' (toss) ઉછાળે છે કે કોણ પ્રથમ બેટિંગ કરશે ?

જ્યારે સિક્કાને ઉછાળવામાં આવે છે ત્યારે સંભવિત પરિણામ શું હોઈ શકે ?

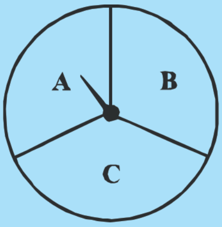
અલબત્ત, H (છાપ) અથવા T (કાંટો). કલ્પના કરો કે તમે એક ટીમના કપ્તાન છો અને તમારો મિત્ર બીજી ટીમનો કપ્તાન છે. તમે 'ટોસ' ઉછાળો છો અને તમારા મિત્રને તે અંગે બોલવા કહો છો. શું તમે આ અંગેનાં પરિણામ પર કાબુ રાખી શકો છો ? શું તમારે (H) જોઈતો હોય તો તે મેળવી શકો છો ? અથવા (T) જોઈતો હોય તો મળે છે ? ના, આ શક્ય નથી. આ પ્રકારના પ્રયોગને **યાદચ્છિક પસંદગીના પ્રયોગો** કહે છે, અહીં છાપ અથવા કાંટો એ આપણને મળતી બે શક્યતાઓ છે.

પ્રયત્ન કરો

1. તમે કોઈ સ્કૂટર શરૂ કરવા જઈ રહ્યા છો તો તેની સંભવીત શક્યતાઓ શું હોઈ શકે ?
2. જ્યારે આપણે એક પાસો (die) ફેંકીએ છીએ ત્યારે કઈ છ સંભવીત શક્યતાઓ રહેલી હોય છે ?

3. આકૃતિ 5.9 માં દર્શાવ્યા મુજબનું એક ચક્ર જ્યારે તમે ઘુમાવો છો ત્યારે શું શક્યતાઓ રહેલી છે ? (યાદી કરો.)

(અહીં શક્યતાઓ એટલે જ્યારે ચક્ર ઊભું રહે ત્યારે દર્શકકાંટો કયા વૃત્તાંશ ઉપર આવશે તે.)



આકૃતિ 5.9

આકૃતિ 5.10

4. તમારી પાસે આકૃતિ 5.10 માં દર્શાવ્યા મુજબના એક ઘડામાં વિવિધ રંગોવાળા પાંચ દડાઓ રાખેલા છે. તમારે તેમાં જોયા વગર કોઈ એક દડો પસંદ કરવાનો છે. તમને કયા રંગનો દડો મળશે તેની પ્રયત્નોની યાદી બનાવો.

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

પાસો (Die) ઉછાળવાની રમતમાં,

- શું પહેલા પાસો ફેંકનાર ખેલાડીને 6 મળવાની તકો વધુ રહે છે ?
- શું પ્રથમ ખેલાડી બાદ રમનાર બીજા ખેલાડીને 6 મળવાની તકો ઓછી રહે છે ?
- ધારો કે બીજા ખેલાડીને 6 મળે છે, તો તેનો એવો અર્થ કરી શકાય કે ત્રીજા ખેલાડીને 6 મળવાની કોઈ શક્યતા નથી ?

5.5.2 સમસંભાવી શક્યતાઓ

ધારો કે, એક સિક્કો અનેક વખત ઉછાળવામાં આવે છે અને કેટલી વખત H (છાપ) કે T (કાંટો) મળે છે તે નોંધવામાં આવે છે. હવે નીચેનું પરિણામપત્રક જુઓ, જેમાં ટોસ ઉછાળવાની સંખ્યા સતત વધતી જાય છે.

ટોસ ઉછાળવાની સંખ્યા	આવૃત્તિ ચિહ્ન (H માટે)	H ની સંખ્યા	આવૃત્તિ ચિહ્ન (T માટે)	T ની સંખ્યા
50	卌 卌 卌 卌 卌 II	27	卌 卌 卌 卌 III	23
60	卌 卌 卌 卌 卌 III	28	卌 卌 卌 卌 卌 卌 II	32
70	-	33	-	37
80	-	38	-	42
90	-	44	-	46
100	-	48	-	52

અહીં, આપણે અવલોકન કરી શકીએ છીએ કે જેમ ટોસ (સિક્કો) ઉછાળવાની સંખ્યા વધતી જાય છે તેમ H અને T મળવાની સંખ્યા વધુ ને વધુ નજીક આવતી જાય છે.

આ જ ઘટના પાસો ઉછાળવામાં પણ બને છે. જેમ પાસો ઉછાળવાની સંખ્યા વધતી જાય છે તેમ 1 થી 6 ક્રમાંક મળવાની સંખ્યા લગભગ એકબીજાને સમાન જેવી હોય છે.

આવા કિસ્સાઓમાં આપણે કહી શકીએ કે પ્રયોગ દરમિયાન જુદાં-જુદાં પરિણામો મળવાની તકો સમસંભાવી હોય છે. આનો મતલબ એ થયો કે, પ્રયોગ દરમ્યાન દરેક ઘટના બનવાની શક્યતા એકસમાન હોય છે.

5.5.3 તક અને સંભાવના વચ્ચે સંબંધ

એક સિક્કો ઉછાળવાનો પ્રયોગ વિચારો. શું શક્યતાઓ હોઈ શકે ? અહીં માત્ર બે જ શક્યતાઓ હોઈ શકે : H (છાપ) અથવા T (કાંટો) બંને પરિણામ મળવાની શક્યતા સમસંભાવી છે. H મળવાની શક્યતા એ કુલ બે શક્યતાઓ પૈકીની એક શક્યતા છે. અર્થાત્ $\frac{1}{2}$. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો, H મળવાની સંભાવના = $\frac{1}{2}$. તો પછી, T મળવાની સંભાવના કેટલી હોઈ શકે ?

હવે, પાસો ફેંકવાનો પ્રયોગ વિચારો. (અહીં આપણે ઉપયોગમાં લેવાના પાસાની કુલ છ બાજુઓ પર 1 થી 6 નંબર લખેલા હોવા જોઈએ અર્થાત્ દરેક બાજુ પર માત્ર એક જ નંબર અને બધા જ નંબર અલગ-અલગ હોવા જોઈએ.) જો તમે આ પાસો 1 વખત ઉછાળો તો શું શક્યતા (outcomes) હોઈ શકે ?

અહીં, 1, 2, 3, 4, 5, 6 મળવાની શક્યતા છે. આમ, અહીં છ શક્યતાઓ સમાન રીતે એકસરખી બને છે. ''2 મળવાની સંભાવના કેટલી થાય ?''

અહીં $\frac{1}{6}$ ← 2 મળવાની શક્યતાની સંખ્યા / ← સમસંભાવી કુલ શક્યતાની સંખ્યા

5 મળવાની સંભાવના શું હોઈ શકે ? 7 મળવાની સંભાવના શું હોઈ શકે ? 6 માંથી 1 મળે તેની સંભાવના કેટલી ?

5.5.4 શક્યતા ઘટના સ્વરૂપે

દરેક પ્રયોગમાં મળતી શક્યતા કે શક્યતાઓનો સમૂહ 'ઘટના'ને સ્વરૂપ આપે છે.

ઉદાહરણ તરીકે, સિક્કો ઉછાળવાના પ્રયોગમાં 'H' મળવો એ એક ઘટના છે અને તે જ રીતે 'T' મળવો એ પણ એક ઘટના છે.

પાસો ફેંકવાના પ્રયોગમાં દરેક પ્રયત્નને અંતે મળતી સંખ્યા 1, 2, 3, 4, 5 કે 6 એ એક ઘટના જ છે.

શું યુગ્મ સંખ્યા મળવી એ એક ઘટના છે ? યુગ્મ સંખ્યાઓ 2, 4 અથવા 6 હોઈ શકે, તેથી યુગ્મ સંખ્યા મળવી એ પણ એક ઘટના જ છે. યુગ્મ સંખ્યા પ્રાપ્ત થવાની સંભાવના કેટલી ?

અહીં, $\frac{3}{6}$ 3 ← શક્યતાની સંખ્યા જે ઘટના બનાવે છે.
6 ← કુલ શક્યતાની સંખ્યા

ઉદાહરણ 3 : એક થેલામાં 4 લાલ રંગના અને 2 પીળા રંગના દડા છે. (અહીં, દરેક દડા રંગ સિવાય અન્ય કોઈ રીતે જુદા પડતા નથી.) જો થેલામાં જોયા વગર એક દડો યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે (બહાર કાઢવામાં આવે) છે તો આ દડો લાલ રંગનો જ હોય તેની સંભાવના કેટલી ? શું તે સંભાવના પીળા રંગનો દડો હોવાની સંભાવના કરતાં વધુ કે ઓછી છે ?

ઉકેલ : આ ઘટના માટે કુલ (4 + 2 =) 6 શક્યતાઓ છે. લાલ રંગનો દડો મળે તેવી શક્યતા 4 છે. (શા માટે ?) તેથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલો દડો લાલ રંગનો હોય તેની સંભાવના $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ થાય.

આ જ રીતે, યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ દડો પીળા રંગનો હોય તેની સંભાવના = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ થાય. (શા માટે ?) આમ, પસંદ થયેલ દડો લાલ રંગનો હોય તેની સંભાવના પીળા રંગનો દડો હોવાની સંભાવના કરતાં વધુ છે.

પ્રયત્ન કરો

ધારો કે તમે એક ચક્ર ઘુમાવો છો.

1. (i) આકૃતિ 5.11 માં દર્શાવ્યા મુજબ, લીલા રંગનું વૃત્તાંશ હોય તેવી શક્યતાની યાદી કરો અને લીલા રંગનું વૃત્તાંશ ન હોય તેવી શક્યતાની યાદી કરો.

   (ii) લીલા રંગનું વૃત્તાંશ મળે તેની સંભાવના શોધો.

   (iii) લીલા રંગનું વૃત્તાંશ ન મળે તેની સંભાવના શોધો.

આકૃતિ 5.11

5.5 વ્યવહારિક જીવનમાં તકો અને સંભાવનાઓ

જે દિવસે તમારી પાસે રેઈનકોટ ન હોય તે જ દિવસે વરસાદ આવે તેવી તકો વિશે આપણે અગાઉ ચર્ચા કરી.

તમે આ તકને સંભાવનાના સ્વરૂપમાં શું કહી શકો ? શું ચોમાસાના 10 દિવસમાંથી માત્ર એક દિવસ જ આવું બને ? તો તેનો અર્થ એવો થયો કે વરસાદ આવવાની સંભાવના $\frac{1}{10}$ છે અને તેથી વરસાદ ન આવવાની સંભાવના $\frac{9}{10}$ છે. (અહીં, આપણે ધારી લઈએ કે જે-તે દિવસે વરસાદ આવે કે ન આવે તેની શક્યતા એકસરખી છે.)

આપણા વ્યવહારુ જીવનમાં ઘણા કિસ્સામાં સંભાવનાનો ઉપયોગ થાય છે.

1. કોઈ એક મોટા સમૂહની લાક્ષણિકતા શોધવા માટે તે જ સમૂહના નાનકડા ભાગની લાક્ષણિકતા શોધવી.
   ઉદાહરણ તરીકે, ચૂંટણી દરમિયાન એક્ઝિટ પોલ (Exit poll) લેવામાં આવે છે. આમાં જે લોકો પોતાનો મત આપીને આવ્યા હોય છે તેવા લોકોમાંથી એક સમૂહ બનાવી તેઓનો અભિપ્રાય લેવામાં આવે છે. આવું દરેક વિસ્તારના લોકો (સમૂહ) સાથે કરવામાં આવે છે અને તેના પરથી દરેક ઉમેદવારની જીતવાની તકો વિશે અનુમાન કરાય છે.

2. ભૂતકાળનાં વર્ષોની માહિતી પરથી તે વખતના પ્રવાહો (Trends)નું અવલોકન કરી હવામાન ખાતું (Metrological department) હવામાન વિશે આગાહી કરે છે.

સ્વાધ્યાય 5.3

1. અહીં આપેલા પ્રયોગમાં તમને જોવા મળતી શક્યતાઓની યાદી બનાવો.

(a) ફરતું ચક્ર

(b) એક સાથે બે સિક્કા ઉછાળવા

2. પાસાને ફેંકવાથી મળતાં પરિણામની મદદથી નીચે પૈકીની ઘટના બનવાની શક્યતા

(i) (a) અવિભાજ્ય સંખ્યા (b) અવિભાજ્ય ન હોય તેવી સંખ્યા

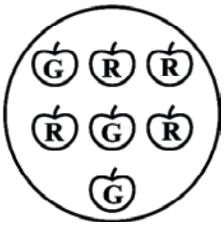
(ii) (a) 5 કરતાં મોટી સંખ્યા (b) 5 કરતાં મોટી ન હોય તેવી સંખ્યા

3. સંભાવના શોધો.

(a) પ્રશ્ન 1 (a)ની આકૃતિમાં દર્શક કાંટો વૃત્તાંશ D પર સ્થિર થાય.

(b) સારી રીતે ચીપેલાં (Well shuffled) 52 પાનાની જોડમાંથી એક પાનું યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરીએ અને તે એક્કો હોય.

(c) લાલ સફરજન મળવાની શક્યતા.



4. એક ચબરખી પર માત્ર એક જ નંબર લખેલ હોય તેવી કુલ 10 ચબરખી પર 1 થી 10 અંકો લખીને તેને એક ખોખામાં રાખી તેને સારી રીતે ભેળવવામાં (Mix) આવે છે. તેમાંથી કોઈ એક ચબરખી જોયા વગર પસંદ કરવામાં આવે છે. તો, નીચેની ઘટનાઓ માટે સંભાવના શોધો.

(i) ચબરખી પરની સંખ્યા 6 હોય.

(ii) ચબરખી પર લખાયેલ સંખ્યા 6 કરતાં નાની હોય.

(iii) ચબરખી પર લખાયેલ સંખ્યા 6 કરતાં મોટી હોય.

(iv) ચબરખી પર લખાયેલ સંખ્યા એક અંકવાળી હોય.

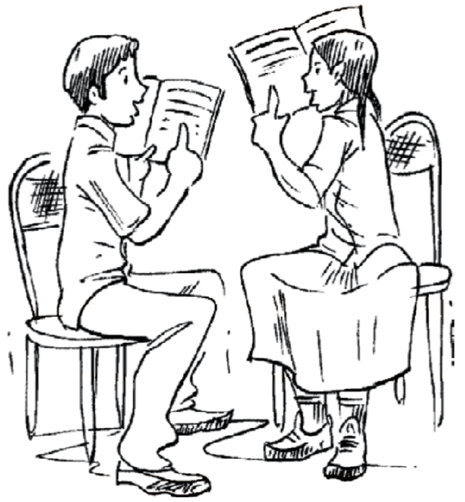
5. જો તમારી પાસે 3 લીલાં રંગનાં વૃત્તાંશો, 1 વાદળી રંગનું વૃત્તાંશ અને 1 લાલ રંગનું વૃત્તાંશ ધરાવતું ફરતું ચક્ર હોય તો લીલા રંગનું વૃત્તાંશ મળવાની સંભાવના કેટલી ? વાદળી રંગનું ન હોય, તેવાં વૃત્તાંશ મળવાની સંભાવના કેટલી ?

6. ઉપરોક્ત પ્રશ્ન-2 માં આપેલી ઘટનાઓ માટે સંભાવના શોધો.

આપણે શું ચર્ચા કરી ?

1. સામાન્ય રીતે આપણને મળતી માહિતી અવ્યવસ્થિત સ્વરૂપે મળતી હોય છે જેને કાચી માહિતી કહે છે.
2. જો આપણી પાસે રહેલ માહિતી પરથી કોઈ ચોક્કસ તારણ મેળવવું હોય તો આ માહિતીને સુવ્યવસ્થિત રીતે ગોઠવવી પડે છે.
3. કોઈ ચોક્કસ નોંધ (Entry) કેટલી વખત બની તે દર્શાવતી સંખ્યાને આવૃત્તિ કહે છે.
4. કાચી માહિતીને સમૂહ કે વર્ગમાં ગોઠવી રજૂ કરી શકાય છે અને આવી ગોઠવણ ધરાવતાં કોષ્ટકને વર્ગીકૃત આવૃત્તિ વિતરણ કહે છે.
5. વર્ગીકૃત માહિતીને સ્તંભાલેખ (histogram) સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય છે. સ્તંભાલેખ એ લંબાલેખનો જ એક પ્રકાર છે જેમાં, વર્ગ અંતરાલ(class intervals)ને તેના સમક્ષિતિજ અક્ષ(X-અક્ષ) પર દર્શાવાય છે અને સ્તંભની ઊંચાઈ એ આવૃત્તિ દર્શાવે છે જે શિરોલંબ અક્ષ(Y-અક્ષ)ની મદદથી દર્શાવાય છે.

   ઉપરાંત, અહીં બે સ્તંભ વચ્ચે કોઈ અંતરાલ (Gap) હોતો નથી. અર્થાત્ બધા જ સ્તંભ એકબીજાને અડેલા હોય છે.
6. માહિતીને વર્તુળ આલેખ કે પાઈ-ચાર્ટની મદદથી પણ દર્શાવી શકાય છે. વર્તુળ આલેખ એ સમગ્ર માહિતી અને તેના થોડા ભાગ વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવે છે.
7. એવા ઘણા પ્રયોગો છે જેમાં મળતાં પરિણામ અંગે એકસમાન તક હોય છે.
8. યાદચ્છિક પ્રયોગ એ એવો પ્રયોગ છે જેમાં કોઈ ઘટના બને તે પહેલાં તેનાં પરિણામ/શક્યતા વિશે અગાઉથી ચોક્કસ તારણ આપી શકાતું નથી.
9. જો કોઈ પ્રયોગમાં દરેક ઘટના બનવાની એકસમાન તક હોય તો તેવા પ્રયોગમાં મળતાં ઇચ્છિત પરિણામો મળવાની તકો એકસમાન હોય છે.
10. ઘટનાની સંભાવના $= \dfrac{\text{જે-તે ઘટના બનવાની શક્યતા}}{\text{પ્રયોગમાં રહેલ કુલ શક્યતાની સંખ્યા}}$
11. કોઈ પ્રયોગમાં એક કે એકથી વધુ શક્યતા ''ઘટના'' દર્શાવે છે.
12. આપણાં વ્યવહારુ જીવન સાથે પણ તકો અને સંભાવનાઓ સંકળાયેલી છે.



પ્રકરણ

6

વર્ગ અને વર્ગમૂળ

6.1 પ્રાસ્તાવિક

આપણે જાણીએ છીએ કે ચોરસનું ક્ષેત્રફળ = બાજુ × બાજુ (જ્યાં 'બાજુ' એ ચોરસની લંબાઈનું માપ છે.) નીચેના કોષ્ટકનો અભ્યાસ કરો :

ચોરસની બાજુ (સેમીમાં)	ચોરસનું ક્ષેત્રફળ (સેમી^{2}માં)
1	$1 \times 1 = 1 = 1^2$
2	$2 \times 2 = 4 = 2^2$
3	$3 \times 3 = 9 = 3^2$
5	$5 \times 5 = 25 = 25^2$
8	$8 \times 8 = 64 = 8^2$
a	$a \times a = a^2$

4, 9, 25, 64 અને તેના જેવી અન્ય સંખ્યાઓમાં ખાસ બાબત શું છે ?

અહીં 4ને 2 × 2 વડે, 9 ને 3 × 3 વડે રજૂ કરી શકાય છે. આમ, આવી સંખ્યાઓને કોઈ એક સંખ્યા લઈ ફરી એ જ સંખ્યા સાથે ગુણાકારના સ્વરૂપે લખી શકાય છે.

આમ, આવી 1, 4, 9, 16, 25, ... વગેરે સંખ્યાઓને **વર્ગ સંખ્યા** તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

સામાન્ય રીતે, કોઈ પ્રાકૃતિક સંખ્યા m એ તો જ વર્ગ સંખ્યા તરીકે ઓળખવામાં આવે છે કે જો mને n^2 વડે દર્શાવી શકાય. જ્યાં n પણ એક પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે. શું 32 એ વર્ગ સંખ્યા છે ?

આપણે જાણીએ છીએ કે $5^2 = 25$ અને $6^2 = 36$. જો 32 એ વર્ગ સંખ્યા હોય, તો તે 5 અને 6ની વચ્ચે આવતી કોઈપણ પ્રાકૃતિક સંખ્યાનો વર્ગ હોય, પરંતુ 5 અને 6ની વચ્ચે કોઈ પણ પ્રાકૃતિક સંખ્યા નથી. આમ, 32 એ વર્ગ સંખ્યા નથી.

નીચેની સંખ્યાઓ અને તેના વર્ગો વિશે વિચારો :

સંખ્યા	વર્ગ
1	$1 \times 1 = 1$
2	$2 \times 2 = 4$

3	3 × 3 = 9
4	4 × 4 = 16
5	5 × 5 = 25
6	-------------
7	-------------
8	-------------
9	-------------
10	-------------

બાકીનું તમે જાતે પૂરું કરી શકો ?

ઉપરના કોષ્ટક પરથી આપણે 1 થી 100 વચ્ચે આવતી વર્ગ સંખ્યાઓની યાદી બનાવી શકીએ. આ 1 થી 100 વચ્ચે આવતી પ્રાકૃતિક વર્ગ સંખ્યામાં કોઈ સંખ્યા બાકી રહી જાય છે ?

આપણને એવું જાણવા મળશે કે ક્રમ 1 થી 100 વચ્ચે આ સિવાય કોઈ સંખ્યા બાકી રહેતી નથી કે જે વર્ગ સંખ્યા હોય.

તેથી 1, 4, 9, 16, ... વર્ગ સંખ્યાઓ છે. આવી સંખ્યાઓને **પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાઓ** પણ કહે છે.

પ્રયત્ન કરો

નીચે આપેલ સંખ્યાઓ વચ્ચે આવતી પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાઓ શોધો :

(i) 30 અને 40 (ii) 50 અને 60

6.2 વર્ગ સંખ્યાઓના ગુણધર્મો

નીચે આપેલા કોષ્ટકમાં સંખ્યા 1 થી 20ની વર્ગસંખ્યાઓ દર્શાવેલ છે.

સંખ્યા	વર્ગ	સંખ્યા	વર્ગ
1	1	11	121
2	4	12	144
3	9	13	169
4	16	14	196
5	25	15	225
6	36	16	256
7	49	17	289
8	64	18	324
9	81	19	361
10	100	20	400

ઉપરના કોષ્ટકમાં આપેલી વર્ગ સંખ્યાઓનો અભ્યાસ કરો. દરેક વર્ગ સંખ્યાનો એકમનો અંક શું જોવા મળે છે ? એટલે કે દરેક વર્ગ સંખ્યાનો અંતિમ અંક શું મળે છે ? આ બધી જ વર્ગ સંખ્યાઓનો એકમનો અંક 0, 1, 4, 5, 6 અથવા 9 છે. એકપણ વર્ગ સંખ્યાનો એકમનો અંક 2, 3, 7 અથવા 8 પૈકી કોઈ નથી.

શું આપણે એમ કહી શકીએ કે જો આપેલી સંખ્યાનો એકમનો અંક 0, 1, 4, 5, 6 અથવા 9 હોય તો તે સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ જ હોય ? આ બાબતે થોડુંક વિચારશો.

પ્રયત્ન કરો

નીચે આપેલી સંખ્યાઓ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાઓ છે ? તમને કેવી રીતે ખબર પડી તે પણ જણાવો :

1. (i) 1057 (ii) 23453 (iii) 7928 (iv) 222222
(v) 1069 (vi) 2061

એવી પાંચ સંખ્યાઓ જણાવો કે જેના એકમના અંક પરથી જ જાણી શકાય કે તે વર્ગ સંખ્યા નથી.
2. એવી પાંચ સંખ્યાઓ જણાવો કે જેના એકમના અંક પરથી અનુમાન ન કરી શકાય કે તે વર્ગ સંખ્યા હશે કે નહિ હોય.

- નીચે આપેલા કોષ્ટકનો અભ્યાસ કરો. તેમાં કેટલીક સંખ્યાઓ અને તેના વર્ગ આપેલાં છે. આવી સંખ્યાઓના એકમના અંકનું નિરીક્ષણ કરો :

કોષ્ટક : 1

સંખ્યા	વર્ગ	સંખ્યા	વર્ગ	સંખ્યા	વર્ગ
1	1	11	121	21	441
2	4	12	144	22	484
3	9	13	169	23	529
4	16	14	196	24	576
5	25	15	225	25	625
6	36	16	256	30	900
7	49	17	289	35	1225
8	64	18	324	40	1600
9	81	19	361	45	2025
10	100	20	400	50	2500

નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલી વર્ગ સંખ્યાનો એકમનો અંક 1 છે :

વર્ગ	સંખ્યા
1	1
81	9
121	11
361	19
441	21

પ્રયત્ન કરો

123^2, 77^2, 82^2, 161^2 અને 109^2 માં કઈ સંખ્યાનો એકમનો અંક 1 છે ?

હવે પછીની એવી બે વર્ગ સંખ્યાઓ લખો જેનો એકમનો અંક 1 હોય અને તેને સંલગ્ન સંખ્યાઓ લખો

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે જો કોઈ સંખ્યાનો એકમનો અંક 1 અથવા 9 હોય, તો તેનો વર્ગ કરતાં મળતી સંખ્યાનો એકમનો અંક 1 હોય.

- નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલી વર્ગ સંખ્યાનો એકમનો અંક 6 છે :

વર્ગ	સંખ્યા
16	4
36	6
196	14
256	16

પ્રયત્ન કરો

નીચેનામાંથી કઈ સંખ્યાનો એકમનો અંક 6 હશે ?

(i) 19^2 (ii) 24^2 (iii) 26^2
(iv) 36^2 (v) 34^2

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે જે સંખ્યાનો એકમનો અંક 4 અથવા 6 હોય, તેની વર્ગસંખ્યાનો એકમનો અંક 6 હશે.

શું તમને કોષ્ટક 1ની મદદથી બીજા કોઈ નિયમની જાણકારી મળે છે ?

પ્રયત્ન કરો

નીચે આપેલી સંખ્યાનો વર્ગ કરવાથી મળતી સંખ્યાનો એકમનો અંક શું મળશે ?

(i) 1234 (ii) 26387 (iii) 52698 (iv) 99880
(v) 21222 (vi) 9106

- નીચે આપેલી સંખ્યા અને તેના વર્ગો વિશે વિચારો :

અહીં એક જ શૂન્ય છે.

$10^2 = 100$
$20^2 = 400$
$80^2 = 6400$

અહીં બે શૂન્યો મળે છે.

અહીં બે શૂન્યો છે.

$100^2 = 10000$
$200^2 = 40000$
$700^2 = 490000$
$900^2 = 810000$

અહીં 4 શૂન્યો મળે છે.

જો કોઈ સંખ્યાના છેલ્લા ત્રણ અંકો શૂન્ય હોય તો તેવી સંખ્યાનો વર્ગ કરતાં મળતી સંખ્યામાં છેલ્લે કેટલાં શૂન્યો હશે ?

કોઈ સંખ્યાના અંતે રહેલા શૂન્યની સંખ્યા અને તે સંખ્યાનો વર્ગ કરવાથી મળતી સંખ્યામાં રહેલ શૂન્યોની સંખ્યા વિશે તમે શું નિરીક્ષણ કર્યુ ?

શું આપણે કહી શકીએ કે કોઈ વર્ગ સંખ્યાનાં અંતિમ શૂન્યોની સંખ્યા હંમેશાં બેકી જ હોય ?

- સંખ્યા અને તેના વર્ગો દર્શાવતું કોષ્ટક 1 જુઓ.

તમે એકી સંખ્યા અને બેકી સંખ્યાના વર્ગો વિશે શું કહી શકો છો ?

પ્રયત્ન કરો

1. નીચે આપેલી કઈ સંખ્યાઓનો વર્ગ કરવાથી તે એકી સંખ્યા કે બેકી સંખ્યા આવશે ? કેમ ?

   (i) 727 (ii) 158 (iii) 269 (iv) 1980

2. નીચે આપેલી સંખ્યાઓનો વર્ગ કરવાથી મળતી સંખ્યાઓમાં કેટલાં શૂન્યો હશે ?

   (i) 60 (ii) 400

6.3 કેટલીક રસપ્રદ પેટર્ન

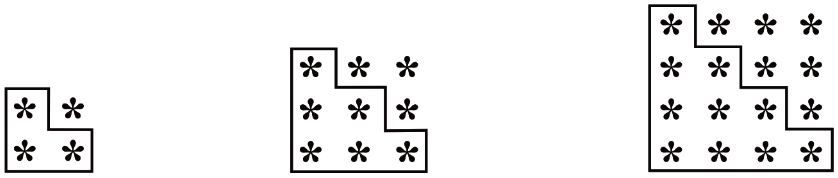
1. ત્રિકોણીય સંખ્યાઓનો સરવાળો.

તમને ત્રિકોણીય સંખ્યાઓ યાદ છે (એવી સંખ્યાઓ કે જેની બિંદુઓથી દર્શાવતી પેટર્નને ત્રિકોણ તરીકે ગોઠવી શકાય)

```
                                          *
                                 *        **
                       *         **       ***
             *         **        ***      ****
   *         **        ***       ****     *****

   1         3         6         10       15
```

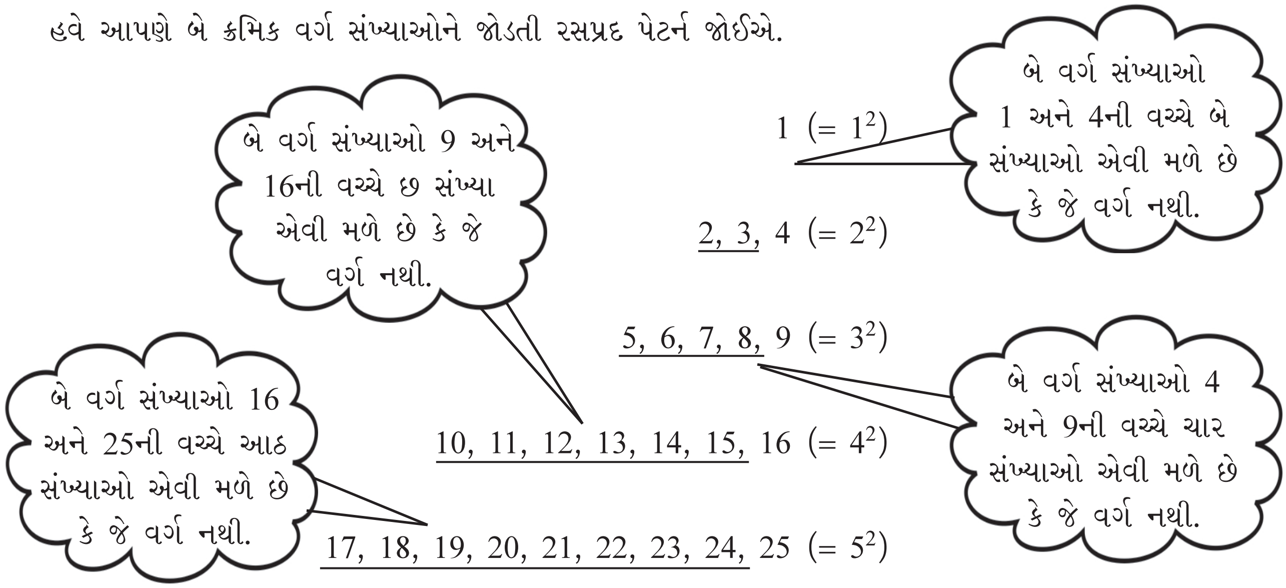
જો આપણે એક સાથે બે ક્રમિક ત્રિકોણીય સંખ્યા વિચારીએ, તો આપણને વર્ગ સંખ્યા મળે છે, જેમ કે-



$1 + 3 = 4 = 2^2$ $\qquad$ $3 + 6 = 9 = 3^2$ $\qquad$ $6 + 10 = 16 = 4^2$

2. બે વર્ગ સંખ્યાઓની વચ્ચેની સંખ્યાઓ

હવે આપણે બે ક્રમિક વર્ગ સંખ્યાઓને જોડતી રસપ્રદ પેટર્ન જોઈએ.



આમ, 1^2 (= 1) અને 2^2 (= 4) વચ્ચ બે (2 × 1) વર્ગ સંખ્યા ન હોય તેવી સંખ્યાઓ 2, 3 મળે.
2^2 (= 4) અને 3^2 (= 9) વચ્ચે ચાર (2 × 2) વર્ગ સંખ્યા ન હોય તેવી સંખ્યાઓ 5, 6, 7, 8 મળે.

હવે $\qquad 3^2 = 9$ અને $4^2 = 16$

તેથી $\qquad 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$

પરંતુ $9(= 3^2)$ અને $16(= 4^2)$ વચ્ચે વર્ગ સંખ્યા ન હોય તેવી સંખ્યાઓ છે 10, 11, 12, 13, 14, 15. આમ, મળેલી છ સંખ્યાઓ એ બે વર્ગોના તફાવતથી એક ઓછી છે.

હવે, $\qquad 4^2 = 16$ અને $5^2 = 25$

તેથી $\qquad 5^2 - 4^2 = 9$

પરંતુ $16(= 4^2)$ અને $25\ (= 5^2)$ વચ્ચે વર્ગ સંખ્યા (એટલે કે પૂર્ણવર્ગ) ન હોય તેવી સંખ્યાઓ આઠ હોય છે. જેમ કે, 17, 18, 19, ..., 24. આમ આવી મળતી સંખ્યાઓ એ બે વર્ગોના તફાવતથી એક ઓછી હોય છે.

7^2 અને 6^2 માટે વિચારો. તમે કહી શકો કે 6^2 અને 7^2 વચ્ચે આવી પૂર્ણવર્ગ ન હોય તેવી કેટલી સંખ્યાઓ હશે ?

જો આપણે કોઈ પણ પ્રાકૃતિક સંખ્યા n અને $(n + 1)$ માટે વિચારીએ તો,

$$(n + 1)^2 - n^2 = (n^2 + 2n + 1) - n^2 = 2n + 1$$

આપણે શોધી શકીએ કે n^2 અને $(n + 1)^2$ વચ્ચે પૂર્ણવર્ગ ન હોય તેવી સંખ્યાઓ $2n$ હોય. જે બે પૂર્ણવર્ગના તફાવતથી એક ઓછી છે.

આમ, આપણે વ્યાપક રૂપે કહી શકીએ કે કોઈ પણ બે સંખ્યાઓ n અને $(n + 1)$ના વર્ગો વચ્ચે આવતી પૂર્ણવર્ગ ન હોય તેવી સંખ્યાઓ $2n$ હશે. તમે $n = 5$, $n = 6$ માટે ચકાસણી કરો.

પ્રયત્ન કરો

1. 9^2 અને 10^2 વચ્ચે કેટલી પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ આવે ? તેમજ 11^2 અને 12^2 વચ્ચે કેટલી ?
2. નીચે આપેલ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાઓની જોડીઓ વચ્ચે પૂર્ણવર્ગ ન હોય તેવી કેટલી સંખ્યાઓ આવે ?
   (i) 100^2 અને 101^2 (ii) 90^2 અને 91^2 (iii) 1000^2 અને 1001^2

3. એકી સંખ્યાઓનો સરવાળો

નીચેના સરવાળાઓ જુઓ :

1 [એક એકી સંખ્યા છે] $= 1 = 1^2$

1 + 3 [પ્રથમ બે એકી સંખ્યાઓનો સરવાળો] $= 4 = 2^2$

1 + 3 + 5 [પ્રથમ ત્રણ એકી સંખ્યાઓનો સરવાળો] $= 9 = 3^2$

1 + 3 + 5 + 7 [...] $= 16 = 4^2$

1 + 3 + 5 + 7 + 9 [...] $= 25 = 5^2$

1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 [...] $= 36 = 6^2$

તેથી આપણે કહી શકીએ કે પ્રથમ n એકી સંખ્યાનો સરવાળો n^2 મળે.

આ બાબતને જો આપણે બીજી રીતે જોઈએ તો, 'જો કોઈ સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા છે, તો તેને 1 થી શરૂ કરી ક્રમિક એકી સંખ્યાના સરવાળા તરીકે રજૂ કરી શકાય.'

અહીં, 2, 3, 5, 6, ... વગેરે પૂર્ણવર્ગ ન હોય તેવી સંખ્યાઓ છે. શું આપણે તેને 1 થી શરૂ કરી ક્રમિક એકી સંખ્યાના સરવાળા તરીકે રજૂ કરી શકીએ ? વિચારો.

તમે કહી શકશો કે આ રીતે રજૂ કરી શકાય નહિ.

હવે સંખ્યા 25 વિચારો. 25માંથી ક્રમિક 1, 3, 5, 7, 9 ... ની બાદબાકી કરીએ તો...

(i) $25 - 1 = 24$ (ii) $24 - 3 = 21$ (iii) $21 - 5 = 16$

(iv) $16 - 7 = 9$ (v) $9 - 9 = 0$

અર્થાત્, $25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$ અને 25 પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા પણ છે.

હવે બીજી સંખ્યા 38 વિચારો. ઉપર મુજબ જ બાદબાકી કરતાં,

(i) $38 - 1 = 37$ (ii) $37 - 3 = 34$ (iii) $34 - 5 = 29$

(iv) $29 - 7 = 22$ (v) $22 - 9 = 13$ (vi) $13 - 11 = 2$

(vii) $2 - 13 = -11$

આ બતાવે છે કે આપણે 38 ને 1 થી શરૂ કરી ક્રમિક એકી સંખ્યાના સરવાળા તરીકે રજૂ કરી શકતા નથી તેમજ 38 એ પૂર્ણવર્ગ પણ નથી.

તેથી આપણે કહી શકીએ કે, "જો આપેલ પ્રાકૃતિક સંખ્યાને 1 થી શરૂ કરી ક્રમિક એકી સંખ્યાના સરવાળા તરીકે રજૂ ન કરી શકાય, તો તે પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા નથી."

આ પરિણામના ઉપયોગથી આપણે આપેલ સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ છે કે નહિ તે શોધી શકીએ છીએ.

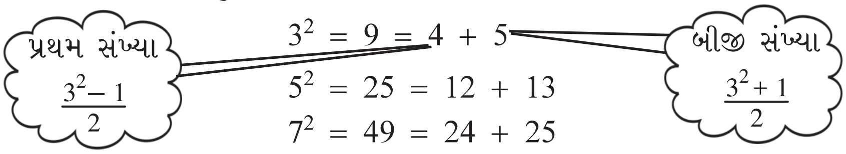
પ્રયત્ન કરો

નીચેની સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા છે કે નહિ તે કહો :

(i) 121 (ii) 55 (iii) 81 (iv) 49 (v) 69

4. ક્રમિક પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો

નીચેની બાબત ધ્યાનથી જુઓ :



$3^2 = 9 = 4 + 5$

$5^2 = 25 = 12 + 13$

$7^2 = 49 = 24 + 25$

$9^2 = 81 = 40 + 41$

$11^2 = 121 = 60 + 61$

$15^2 = 225 = 112 + 113$

પ્રયત્ન કરો

1. નીચેની સંખ્યાઓને બે ક્રમિક સંખ્યાના સરવાળા તરીકે રજૂ કરો :
   (i) 21^2 (ii) 13^2 (iii) 11^2 (iv) 19^2
2. શું એ પણ સાચું છે કે, બે ક્રમિક સંખ્યાઓનો સરવાળો એ કોઈ સંખ્યાનો વર્ગ હશે ? તમારા જવાબના આધાર માટે ઉદાહરણ પણ આપો.

5. બે ક્રમિક એકી અથવા બેકી સંખ્યાઓનો ગુણાકાર

$11 \times 13 = 143 = 12^2 - 1$

પણ $11 \times 13 = (12 - 1) \times (12 + 1)$

તેથી $11 \times 13 = (12 - 1) \times (12 + 1) = 12^2 - 1$

તેવી જ રીતે $13 \times 15 = (14 - 1) \times (14 + 1) = 14^2 - 1$

$29 \times 31 = (30 - 1)(30 + 1) = 30^2 - 1$

$44 \times 46 = (45 - 1)(45 + 1) = 45^2 - 1$

તેથી આપણે એવું કહી શકીએ કે, $(a + 1) \times (a - 1) = a^2 - 1$

6. પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાઓની અન્ય બીજી તરાહો

$1^2 =$ 1

$11^2 =$ 1 2 1

$111^2 =$ 1 2 3 2 1

$1111^2 =$ 1 2 3 4 3 2 1

$11111^2 =$ 1 2 3 4 5 4 3 2 1

$11111111^2 =$ 1 2 3 4 5 6 7 8 7 6 5 4 3 2 1

બીજી રસપ્રદ તરાહ...

$7^2 = 49$

$67^2 = 4489$

$667^2 = 444889$

$6667^2 = 44448889$

$66667^2 = 4444488889$

$666667^2 = 444444888889$

આવું કેમ બને છે તે શોધી કાઢવા તમે જ્યારે સક્ષમ બનશો ત્યારે મજા પડશે. જ્યારે અમુક વર્ષો પછી તમને તેનો જવાબ મળશે ત્યારે તે તમારા માટે રસપ્રદ રહેશે અને આવા પ્રશ્નોથી વિચાર શક્તિ વિસ્તરશે.

પ્રયત્ન કરો

નીચેની સંખ્યા માટે ઉપર દર્શાવેલ તરાહ મુજબ વર્ગ કરો :
(i) 111111^2 (ii) 1111111^2

પ્રયત્ન કરો

શું તમે બાજુની તરાહની મદદથી આપેલી સંખ્યાઓનો વર્ગ શોધી શકો ?
(i) 6666667^2 (ii) 66666667^2

સ્વાધ્યાય 6.1

1. નીચે આપેલ સંખ્યાઓના વર્ગ કરવાથી એકમનો અંક શું મળશે ?

   (i) 81 (ii) 272 (iii) 799 (iv) 3853

   (v) 1234 (vi) 26387 (vii) 52698 (viii) 99880

   (ix) 12796 (x) 55555

2. નીચેની સંખ્યાઓ માટે સ્પષ્ટ છે કે તે પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાઓ નથી. કારણ સહ જણાવો.

   (i) 1057 (ii) 23453 (iii) 7928 (iv) 222222

   (v) 64000 (vi) 89722 (vii) 222000 (viii) 505050

3. નીચે આપેલી સંખ્યાઓમાંથી કઈ સંખ્યાઓનો વર્ગ કરતાં મળતી સંખ્યા એકી સંખ્યા હશે ?

   (i) 431 (ii) 2826 (iii) 7779 (iv) 82004

4. નીચેની પેટર્નમાંથી ખૂટતી સંખ્યાઓ જણાવો :

$$11^2 = 121$$
$$101^2 = 10201$$
$$1001^2 = 1002001$$
$$100001^2 = 1.....2.....1$$
$$10000001^2 = ...$$

5. નીચે આપેલી પેટર્નમાં ખૂટતી સંખ્યાઓ જણાવો :

$$11^2 = 121$$
$$101^2 = 10201$$
$$10101^2 = 102030201$$
$$1010101^2 = ...$$
$$..................^2 = 10203040504030201$$

6. નીચેની રીત મુજબ ખૂટતી સંખ્યાઓ શોધો :

$1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$

$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$

$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$

$4^2 + 5^2 + ...^2 = 21^2$

$5^2 + ...^2 + 30^2 = 31^2$

$6^2 + 7^2 + ...^2 = ...^2$

> **રીત શોધવા માટે :**
> ત્રીજી સંખ્યા એ પ્રથમ અને બીજી સંખ્યા સાથે સંલગ્ન છે. કેવી રીતે ?
> ચોથી સંખ્યા એ ત્રીજી સંખ્યા સાથે સંલગ્ન છે. કેવી રીતે ?

7. સરવાળાની ક્રિયા વિના સરવાળો મેળવો.

   (i) 1 + 3 + 5 + 7 + 9

   (ii) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19

   (iii) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23

8. (iv) 49ને 7 એકી સંખ્યાઓના સરવાળા તરીકે દર્શાવો.

   (v) 121ને 11 એકી સંખ્યાઓના સરવાળા તરીકે દર્શાવો.

9. નીચે આપેલી સંખ્યાઓના વર્ગો વચ્ચે કેટલી સંખ્યાઓ આવશે તે જણાવો.

   (i) 12 અને 13 (ii) 25 અને 26 (iii) 99 અને 100

6.4 સંખ્યાઓનો વર્ગ શોધવો

આપણા માટે 3, 4, 5, 6, 7, ... વગેરે નાની સંખ્યાઓના વર્ગો શોધવા સરળ છે, પરંતુ 23નો વર્ગ ઝડપથી શોધવો હોય તો ?

તેનો જવાબ આપવો સરળ નથી. વર્ગ શોધવા માટે આપણે 23×23 કરવું પડે.

પરંતુ 23×23 કર્યા વિના 23નો વર્ગ શોધવાનો એક બીજો રસ્તો પણ છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$23 = 20 + 3$$

તેથી
$$\begin{aligned} 23^2 &= (20 + 3)^2 \\ &= 20(20 + 3) + 3(20 + 3) \\ &= 20^2 + 20 \times 3 + 3 \times 20 + 3^2 \\ &= 400 + 60 + 60 + 9 \\ &= 529 \end{aligned}$$

ઉદાહરણ 1 : ખરેખર ગુણાકારની ક્રિયા કર્યા વિના જ નીચેની સંખ્યાઓના વર્ગો શોધો :

(i) 39 (ii) 42

ઉકેલ : (i)
$$\begin{aligned} 39^2 &= (30 + 9)^2 = 30(30 + 9) + 9\,(30 + 9) \\ &= 30^2 + 30 \times 9 + 9 \times 30 + 9^2 \\ &= 900 + 270 + 270 + 81 \\ &= 1521 \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} 42^2 &= (40 + 2)^2 \\ &= 40(40 + 2) + 2(40 + 2) \\ &= 40^2 + 40 \times 2 + 2 \times 40 + 2^2 \\ &= 1600 + 80 + 80 + 4 \\ &= 1764 \end{aligned}$$

6.4.1 વર્ગ શોધવા માટેની અન્ય રીતો

નીચેની રીત પર વિચારો :

$25^2 = 625 = (2 \times 3) \times$ સો $+ 25$

$35^2 = 1225 = (3 \times 4) \times$ સો $+ 25$

$75^2 = 5625 = (7 \times 8) \times$ સો $+ 25$

$125^2 = 15625 = (12 \times 13) \times$ સો $+ 25$

જે સંખ્યાનો એકમનો અંક 5 છે એટલે કે તે સંખ્યા $a5$ હોય તો

$$\begin{aligned} (a5)^2 &= (10a + 5)^2 \\ &= 10a(10a + 5) + 5\,(10a + 5) \\ &= 100a^2 + 50a + 50a + 25 \\ &= 100a\,(a + 1) + 25 \\ &= a(a + 1) \times \text{સો} + 25 \end{aligned}$$

પ્રયત્ન કરો

નીચે આપેલી સંખ્યામાં એકમનો અંક 5 છે, તેમનો વર્ગ શોધો.

(i) 15 (ii) 95 (iii) 105 (iv) 205

6.4.2 પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટીઓ

નીચેના માટે વિચારો :

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$$

સંખ્યાઓ 3, 4 અને 5નો સમૂહ એ "પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટી" તરીકે ઓળખાય છે. તેમજ 6, 8, 10 એ પણ પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટી છે. કેમ કે,

$$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$$

ફરીથી નિરીક્ષણ કરો $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$

એટલે કે સંખ્યાઓ 5, 12 અને 13 પણ આવી ત્રિપુટી રચે છે.

શું તમે આવી અન્ય ત્રિપુટીઓ શોધી શકો ?

કોઈ પણ પ્રાકૃતિક સંખ્યા $m > 1$, માટે જો $(2m)^2 + (m^2 - 1)^2 = (m^2 + 1)^2$ તો $2m$, $m^2 - 1$ અને $m^2 + 1$ એ પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટી હોય છે. આ તેનું વ્યાપક સ્વરૂપ છે.

ઉપરના પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટી માટેના વ્યાપક સ્વરૂપની મદદથી પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટીઓ મેળવો.

ઉદાહરણ 2 : જેનો નાનામાં નાનો અંક 8 હોય તેવી પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટી શોધો.

ઉકેલ : આપણે પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટી તેના વ્યાપક સ્વરૂપ $2m$, $m^2 - 1$ અને $m^2 + 1$ ની મદદથી શોધીશું.

સૌ પ્રથમ આપણે $m^2 - 1 = 8$ લઈશું.

તેથી $m^2 = 8 + 1 = 9$

તેથી $m = 3$

એટલે કે $2m = 6$ અને $m^2 + 1 = 10$

અહીં પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટી 6, 8 અને 10 મળે છે, પરંતુ 8 એ આ પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટીનો નાનામાં નાનો અંક નથી.

તેથી આપણે $2m = 8$ લઈએ

$\therefore m = 4$

તેથી આપણને $m^2 - 1 = 16 - 1 = 15$ અને

$m^2 + 1 = 16 + 1 = 17$ મળશે.

આમ, 8, 15, 17 એ એવી પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટી છે કે જેનો નાનામાં નાનો અંક 8 છે.

ઉદાહરણ 3 : જે પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટીમાં એક સંખ્યા 12 હોય તેવી પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટી શોધો.

ઉકેલ : જો આપણે $m^2 - 1 = 12$ લઈએ તો

$m^2 = 12 + 1 = 13$

તેથી mની કિંમત પૂર્ણાંક નથી.

તેથી આપણે $m^2 + 1 = 12$ લઈએ, ફરી $m^2 = 11$ અહીં, આપણને mની પૂર્ણાંક કિંમત મળતી નથી.

તેથી આપણે $2m = 12$ લઈએ.

$\therefore m = 6$

તેથી $m^2 - 1 = 36 - 1 = 35$, $m^2 + 1 = 36 + 1 = 37$

આમ, પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટી 12, 35 અને 37 મળે.

નોંધ : બધી જ પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટી આ વ્યાપક સ્વરુપથી નથી મળતી. ઉદાહરણ તરીકે 5, 12, 13 બીજી એક પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટી છે, જેનો એક અંક 12 છે.

સ્વાધ્યાય 6.2

1. નીચે આપેલી સંખ્યાઓના વર્ગ શોધો :
   (i) 32 (ii) 35 (iii) 86
   (iv) 93 (v) 71 (vi) 46
2. નીચે આપેલી સંખ્યા ધરાવતી પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટી લખો :
   (i) 6 (ii) 14 (iii) 16 (iv) 18

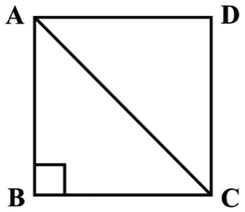
6.5 વર્ગમૂળ

નીચેની પરિસ્થિતિનો અભ્યાસ કરો :

(a) જો એક ચોરસનું ક્ષેત્રફળ 144 cm^2 હોય તો તે ચોરસની બાજુનું માપ કેટલું હોય ?

આપણે જાણીએ છીએ કે,
ચોરસનું ક્ષેત્રફળ = $(\text{બાજુ})^2$
જો આપણે ચોરસની બાજુની લંબાઈ 'a' ધારીએ તો, $144 = a^2$
આમ, a ની કિંમત શોધવા માટે આપણે એવી સંખ્યા શોધવી પડે કે જેનો વર્ગ 144 મળે.

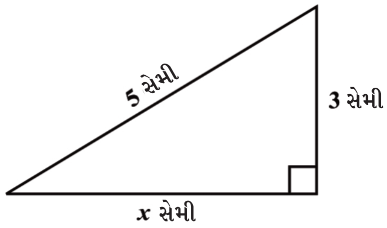
(b) આકૃતિ 6.1માં 8 સેમી બાજુવાળા ચોરસના વિકર્ણની લંબાઈ શું હશે ?
શું આપણે પાયથાગોરસના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી આનો ઉકેલ મેળવી શકીએ ?
$AB^2 + BC^2 = AC^2$
$\therefore\ 8^2 + 8^2 = AC^2$
અથવા $64 + 64 = AC^2$
અથવા $128 = AC^2$



આકૃતિ 6.1

આપણને ACની કિંમત તો જ મળે જો આપણે શોધી કાઢીએ કે 128 એ કઈ સંખ્યાનો વર્ગ છે.

(c) કાટકોણ ત્રિકોણમાં કર્ણ અને કોઈ એક બાજુની લંબાઈ અનુક્રમે 5 સેમી અને 3 સેમી છે. (આકૃતિ 6.2) શું તમે ત્રીજી બાજુની લંબાઈ શોધી શકશો ?
ધારો કે ત્રીજી બાજુની લંબાઈ x સેમી છે.
પાયથાગોરસના પ્રમેયની મદદથી, $5^2 = x^2 + 3^2$
$\therefore\ 25 = x^2 + 9$
$\therefore\ 25 - 9 = x^2$
$\therefore\ 16 = x^2$



આકૃતિ 6.2

આપણને xની કિંમત માટે 16 કઈ સંખ્યાનો વર્ગ છે તેની જાણકારી જરૂરી છે.
આમ, ઉપરના બધા જ કિસ્સાઓમાં આપણે એક એવી સંખ્યા શોધવી પડે કે જેનો વર્ગ જાણીતી સંખ્યા મળે.
આમ, જાણીતી સંખ્યા કઈ સંખ્યાનો વર્ગ છે, તે શોધવાની પ્રક્રિયાને વર્ગમૂળ શોધવાની પ્રક્રિયા કહે છે.

6.5.1 વર્ગમૂળ શોધવું

જેવી રીતે સરવાળાની વિરુદ્ધ ક્રિયા બાદબાકી અને ગુણાકારની વિરુદ્ધ ક્રિયા ભાગાકાર છે, તેવી જ રીતે કોઈ સંખ્યાનું વર્ગમૂળ શોધવું તે વર્ગ શોધવાની ક્રિયાની વિરુદ્ધ પ્રકારની ક્રિયા છે. આપણે જાણીએ છીએ કે,

$1^2 = 1$ તેથી 1નું વર્ગમૂળ 1 છે.
$2^2 = 4$ તેથી 4નું વર્ગમૂળ 2 છે.
$3^2 = 9$ તેથી 9નું વર્ગમૂળ 3 છે.

> જો કે $9^2 = 81$ અને $(-9)^2 = 81$ તેથી આપણે કહી શકીએ કે 81નું વર્ગમૂળ −9 અને 9 છે.

પ્રયત્ન કરો

(i) જો $11^2 = 121$, તો 121નું વર્ગમૂળ ?
(ii) $14^2 = 196$, તો 196નું વર્ગમૂળ ?

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

$(-1)^2 = 1$, શું −1 એ 1નું વર્ગમૂળ છે ? $(-2)^2 = 4$, શું −2 એ 4 નું વર્ગમૂળ છે ?
$(-9)^2 = 81$, શું −9 એ 81નું વર્ગમૂળ છે ?

ઉપરની ચર્ચા પરથી આપણે કહી શકીએ કે, કોઈ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાનું વર્ગમૂળ બે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ હોય છે. આ પ્રકરણમાં આપણે ફક્ત પ્રાકૃતિક સંખ્યાનું ધન વર્ગમૂળ જ લઈશું.
ધન વર્ગમૂળ ને આપણે $\sqrt{\ }$ સંકેતથી દર્શાવીશું
દાખલા તરીકે, $\sqrt{4} = 2$ (−2 નહીં લઈએ) $\sqrt{9} = 3$ (−3 નહીં લઈએ) વગેરે.

વિધાન	અનુમાન
$1^2 = 1$	$\sqrt{1} = 1$
$2^2 = 4$	$\sqrt{4} = 2$
$3^2 = 9$	$\sqrt{9} = 3$
$4^2 = 16$	$\sqrt{16} = 4$
$5^2 = 25$	$\sqrt{25} = 5$

વિધાન	અનુમાન
$6^2 = 36$	$\sqrt{36} = 6$
$7^2 = 49$	$\sqrt{49} = 7$
$8^2 = 64$	$\sqrt{64} = 8$
$9^2 = 81$	$\sqrt{81} = 9$
$10^2 = 100$	$\sqrt{100} = 10$

6.5.2 પુનરાવર્તીત બાદબાકીની મદદથી વર્ગમૂળ શોધવું

તમને યાદ છે ને કે પ્રથમ n એકી પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો n^2 મળે ? તેથી પ્રત્યેક પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાને 1 થી શરૂ કરી ક્રમિક એકી સંખ્યાના સરવાળા સ્વરૂપે રજૂ કરી શકાય.

$\sqrt{81}$ માટે વિચારીએ તો,

(i) $81 - 1 = 80$ (ii) $80 - 3 = 77$ (iii) $77 - 5 = 72$

(iv) $72 - 7 = 65$ (v) $65 - 9 = 56$ (vi) $56 - 11 = 45$

(vii) $45 - 13 = 32$ (viii) $32 - 15 = 17$ (ix) $17 - 17 = 0$

અહીં આપણે 81માંથી 1 થી શરૂ કરી ક્રમિક એકી સંખ્યા બાદ કરતા ગયા અને 9મા પગલે આપણને બાદબાકી શૂન્ય મળે છે. તેથી $\sqrt{81} = 9$

શું તમે 729નું વર્ગમૂળ આ પદ્ધતિથી શોધી શકો ? હા. પરંતુ તે પ્રક્રિયા ઘણી જ લાંબી અને વધારે સમય લાગે તેવી છે. ચાલો, આપણે સરળ રીતે વર્ગમૂળ શોધવાની રીત જાણીએ.

પ્રયત્ન કરો

1 થી શરૂ કરી ક્રમિક અયુગ્મ સંખ્યાની પુનરાવર્તિત બાદબાકી કરીને જણાવો કે નીચેની સંખ્યાઓ પૂણવર્ગ છે કે નહીં ? જો પૂર્ણવર્ગ હોય તો તેમનું વર્ગમૂળ શોધો.

(i) 121
(ii) 55
(iii) 36
(iv) 49
(v) 90

6.5.3 અવિભાજ્ય અવયવીકરણની મદદથી વર્ગમૂળ શોધવું

નીચે સંખ્યા અને તેના વર્ગોને અવિભાજ્ય અવયવના ગુણાકાર તરીકે રજૂ કરેલ છે.

સંખ્યાના અવિભાજ્ય અવયવો	વર્ગના અવિભાજ્ય અવયવ
$6 = 2 \times 3$	$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$
$8 = 2 \times 2 \times 2$	$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
$12 = 2 \times 2 \times 3$	$144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$
$15 = 3 \times 5$	$225 = 3 \times 3 \times 5 \times 5$

અહીં 6ના અવિભાજ્ય અવયવીકરણમાં 2 કેટલી વાર આવે છે ? એકવાર. 36 ના અવિભાજ્ય અવયવીકરણમાં 2 કેટલી વાર આવે છે ? બે વાર. તેવી જ રીતે નિરીક્ષણ કરો કે 6 અને 64ના અવયવીકરણમાં 3 તેમજ 8 અવયવીકરણમાં 8 કેટલીવાર આવે છે ? 6 અને 36ના અવયવીકરણમાં 3 તેમજ 8 અને 64ના અવયવીકરણમાં 2 કેટલીવાર આવે છે ?

આપણને જાણવા મળશે કે દરેક પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાના અવિભાજ્ય અવયવીકરણમાં દરેક અવિભાજ્ય અવયવ બે વાર આવે છે. એટલે કે દરેક અવિભાજ્ય અવયવ બે-બેની જોડીમાં આવે છે. ચાલો, આપણે તેનો ઉપયોગ 324 નું વર્ગમૂળ શોધવા માટે કરીએ.

2	324
2	162
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$324 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

અવિભાજ્ય અવયવોની જોડી બનાવતાં,

$$324 = \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{3 \times 3} = 2^2 \times 3^2 \times 3^2 = (2 \times 3 \times 3)^2$$

તેથી $\sqrt{324} = 2 \times 3 \times 3 = 18$

તેવી જ રીતે આપણે 256નું વર્ગમૂળ શોધીએ. 256ના અવિભાજ્ય અવયવો.

2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

$$256 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

અવિભાજ્ય અવયવોની જોડી બનાવતાં

$$256 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2}$$
$$= (2 \times 2 \times 2 \times 2)^2$$

$\therefore \quad \sqrt{256} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

શું 48 પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા છે ?

આપણે જાણીએ છીએ કે, $48 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times 3$

અહીં 48ના અવિભાજ્ય અવયવો જોડિમાં નથી. તેથી 48 એ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા નથી.

ધારો કે આપણે 48 નો એવો નાનામાં નાનો ગુણક શોધવો છે કે જેથી 48 પૂર્ણવર્ગ બને. તો આપણે શું કરીશું ? 48ના અવયવોની જોડી બનાવતાં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે અવયવ 3 જોડીમાં નથી. તેથી 48ને માત્ર 3 વડે ગુણવાથી જોડી બની જાય.

આમ, $48 \times 3 = 144$ એ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા છે.

શું આપણે કહી શકીએ કે કઈ નાનામાં નાની સંખ્યા વડે 48 ને ભાગવાથી મળતી સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ મળે ?

48ના અવિભાજ્ય અવયવમાં 3 એ જોડીમાં નથી, તેથી જો આપણે 48 ને 3 વડે ભાગીએ તો આપણને $48 \div 3 = 16$ મળે. તેમજ $16 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} = 16$ પણ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા છે. આમ, 48ને 3 વડે ભાગવાથી મળતી સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ છે.

ઉદાહરણ 4 : 6400નું વર્ગમૂળ શોધો.

ઉકેલ : આપણે 6400 ને નીચે પ્રમાણે લખી શકીએ :

2	6400
2	3200
2	1600
2	800
2	400
2	200
2	100
2	50
5	25
5	5
	1

$$6400 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{5 \times 5}$$

$\therefore \quad \sqrt{6400} = 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 80$

ઉદાહરણ 5 : શું 90 એ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા છે ?

2	90
3	45
3	15
	5

ઉકેલ : આપણે 90ને નીચે પ્રમાણે દર્શાવીએ $90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$

પરંતુ, અહીં અવિભાજ્ય સંખ્યા 2 અને 5 જોડીમાં નથી. તેથી 90 એ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા નથી. જો કે બીજી રીતે જોઈએ તો 90 માં માત્ર એક જ શૂન્ય છે. તેથી તે પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા ન હોય.

ઉદાહરણ 6 : શું 2352 એ પૂર્ણવર્ગ છે ? જો ના તો કઈ નાનામાં નાની સંખ્યાને 2352 સાથે ગુણવાથી મળતી સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ મળે ? આ મળતી નવી સંખ્યાનું વર્ગમૂળ પણ શોધો.

2	2352
2	1176
2	588
2	294
3	147
7	49
7	7
	1

ઉકેલ : અહીં, $2352 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times 3 \times \underline{7 \times 7}$

અહીં, અવિભાજ્ય અવયવ 3 એ જોડીમાં નથી. તેથી 2352 એ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા નથી. હવે જો 3 જોડીમાં હોય તો તે પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા બને. તેથી આપણે 2352 ને 3 વડે ગુણીએ તો મળતી સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ બને.

$\therefore \; 2352 \times 3 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{7 \times 7}$

હવે દરેક અવિભાજ્ય સંખ્યા જોડીમાં છે. તેથી $2352 \times 3 = 7056$ એ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા છે. આમ, 2352ને નાનામાં નાની સંખ્યા 3 વડે ગુણવાથી મળતી સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ છે અને તે મળતી સંખ્યા 7056 છે.

અને, $\sqrt{7056} = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 84$

ઉદાહરણ 7 : 9408ને એવી કઈ નાનામાં નાની સંખ્યા વડે ભાગવાથી મળતું ભાગફળ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા મળે ? આ ભાગફળનું વર્ગમૂળ પણ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $9408 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times 3 \times \underline{7 \times 7}$

જો 9408ને અવયવ 3 વડે ભાગીએ તો

$9408 \div 3 = 3136 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{7 \times 7}$ જે પૂર્ણવર્ગ છે. (કેમ ?)

માટે, અપેક્ષિત નાનામાં નાની સંખ્યા 3 છે.

અને $\sqrt{3136} = 2 \times 2 \times 2 \times 7 = 56$

2	6, 9, 15
3	3, 9, 15
3	1, 3, 5
5	1, 1, 5
	1, 1, 1

ઉદાહરણ 8 : સંખ્યાઓ 6, 9 અને 15 થી નિઃશેષ ભાગી શકાય તેવી નાનામાં નાની પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ : આ ઉદાહરણને આપણે બે સોપાનમાં ઉકેલીશું. સૌપ્રથમ આપણે નાનામાં નાનો સામાન્ય અવયવી શોધીશું અને ત્યારબાદ જરૂરી પૂર્ણવર્ગ શોધીશું. 6, 9, 15થી નિશેષ ભાગી શકાય તેવી નાનામાં નાની સંખ્યા તેમનો લ.સા.અ. છે. 6, 9 અને 15નો લ.સા.અ. $2 \times \underline{3 \times 3} \times 5 = 90$ છે.

90ના અવિભાજ્ય અવયવો $90 = 2 \times \underline{3 \times 3} \times 5$

અહીં અવિભાજ્ય અવયવો 2 અને 5 જોડીમાં નથી. તેથી 90 એ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા નથી.

પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા મેળવવા માટે 90નો દરેક અવયવ જોડીમાં હોવો જરૂરી છે. તેથી આપણે 2 અને 5 ની જોડી બનાવવી પડશે. તેથી આપણે 90ને 2×5 એટલે કે 10 વડે ગુણીશું.

તેથી અપેક્ષિત પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા $90 \times 10 = 900$ છે.

સ્વાધ્યાય 6.3

1. નીચે આપેલ સંખ્યાઓના વર્ગમૂળમાં એકમનો અંક કયો હશે ?
   (i) 9801 (ii) 99856 (iii) 998001 (iv) 657666025
2. કોઈ પણ પ્રકારની ગણતરી કર્યા વિના જ જણાવો કે નીચેના પૈકી કઈ સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ નથી ?
   (i) 153 (ii) 257 (iii) 408 (iv) 441
3. પુનરાવર્તીત બાદબાકીની રીતે 100 અને 169નું વર્ગમૂળ શોધો.
4. નીચે આપેલી સંખ્યાઓનું વર્ગમૂળ અવિભાજ્ય અવયવીકરણની રીતે શોધો.
   (i) 729 (ii) 400 (iii) 1764 (iv) 4096
   (v) 7744 (vi) 9604 (vii) 5929 (viii) 9216
   (ix) 529 (x) 8100
5. નીચે આપેલી દરેક સંખ્યા માટે નાનામાં નાની એવી સંખ્યા શોધો કે જેના વડે ગુણવાથી મળતી સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ હોય. ઉપરાંત મળતી આ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાનું વર્ગમૂળ પણ શોધો.
   (i) 252 (ii) 180 (iii) 1008 (iv) 2028
   (v) 1458 (vi) 768
6. નીચે આપેલી દરેક સંખ્યા માટે નાનામાં નાની એવી સંખ્યા શોધો કે જેના વડે ભાગવાથી મળતી સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ હોય. ઉપરાંત મળેલી પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાનું વર્ગમૂળ પણ શોધો.
   (i) 252 (ii) 2925 (iii) 396 (iv) 2645
   (v) 2800 (vi) 1620
7. એક નિશાળના ધોરણ 8ના તમામ વિદ્યાર્થીઓ મળીને ₹ 2401 પ્રધાનમંત્રી રાષ્ટ્રીય રાહત ફંડમાં ફાળો આપે છે. વર્ગમાં જેટલી સંખ્યા છે તેટલા રૂપિયા દરેક વિદ્યાર્થી દાનમાં આપે છે, તો વર્ગમાં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા કેટલી હશે ?

8. એક બગીચામાં 2025 છોડ એવી રીતે રોપેલ છે કે પ્રત્યેક હારમાં રોપેલા છોડની સંખ્યા કુલ હારની સંખ્યા બરાબર થાય. તો પ્રત્યેક હારમાં રોપેલ છોડ અને કુલ હારની સંખ્યા શોધો.

9. 4, 9 અને 10 વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય તેવી નાનામાં નાની પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા શોધો.

10. 8, 15 અને 20 વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય તેવી નાનામાં નાની પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા શોધો.

6.5.4 ભાગાકારની રીતે વર્ગમૂળ શોધવું

જ્યારે કોઈ સંખ્યા ઘણી મોટી હોય, ત્યારે અવિભાજ્ય અવયવીકરણની રીત ખૂબ જ લાંબી અને મુશ્કેલ બને છે. આ સમસ્યાના ઉકેલ માટે આપણે ભાગાકારની રીત અપનાવીશું.

આ માટે આપણે નીચે આપેલ સંખ્યાના વર્ગમૂળનાં કેટલા અંકો છે તે જોઈએ.
નીચેનું કોષ્ટક જુઓ :

સંખ્યા	વર્ગ	વિશેષતા
10	100	તે ત્રણ અંકોની નાનામાં નાની પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા છે.
31	961	તે ત્રણ અંકોની મોટામાં મોટી પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા છે.
32	1024	તે ચાર અંકોની નાનામાં નાની પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા છે.
99	9801	તે ચાર અંકોની મોટામાં મોટી પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા છે.

તેથી, આપણે સંખ્યાના વર્ગમૂળના અંકોની સંખ્યા વિશે શું કહી શકીએ જો આપેલ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા 3 અથવા વર્ગ 4 અંકોથી બનતી સંખ્યા હોય ? આપણે કહી શકીએ કે પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા 3 અથવા 4 અંકોથી બનેલી હોય તો તેના વર્ગમૂળની સંખ્યા 2 અંકોથી બનેલી હોય.

શું તમે 5 અંક અથવા 6 અંકોવાળી પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાના વર્ગમૂળની સંખ્યાના અંકો વિશે કહી શકો ?

નાનામાં નાની 3 અંકોવાળી પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા 100 છે અને તેનું વર્ગમૂળ 10 છે. જ્યારે મોટામાં મોટી 3 અંકોવાળી પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા 961 છે અને તેનું વર્ગમૂળ 31 છે. નાનામાં નાની 4 અંકોવાળી પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા 1024 છે અને તેનું વર્ગમૂળ 32 છે જ્યારે મોટામાં મોટી 4 અંકોવાળી પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા 9801 છે અને તેનું વર્ગમૂળ 99 છે.

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

શું આપણે એમ કહી શકીએ કે, n અંકોવાળી પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાના વર્ગમૂળની સંખ્યા જો n બેકી હોય, તો $\frac{n}{2}$ મળે અને એકી હોય તો $\frac{(n+1)}{2}$ મળે ?

કોઈ સંખ્યાના વર્ગમૂળની સંખ્યાના કેટલા અંકો મળે તેનો ઉપયોગ નીચેની પદ્ધતિમાં કરી શકાય :

● 529નું વર્ગમૂળ શોધવા માટે નીચેનાં પગલાં વિચારીએ :

શું તમે 529નું વર્ગમૂળ શોધતાં મળતી સંખ્યાના અંકો વિશે અનુમાન કરી શકો ?

સોપાન 1 આપેલી સંખ્યાના એકમના અંકથી શરૂ કરી સંખ્યાની જોડી બનાવવા માટે તેની ઉપરની બાજુ લીટી દોરો. જો આપેલી સંખ્યાના અંકોની સંખ્યા એકી હોય તો સંખ્યાની ડાબી બાજુના છેલ્લા એક અંક પર પણ લીટી દોરો. તેથી આપણી પાસે $\overline{5}\,\overline{29}$ મળે.

સોપાન 2 હવે આપેલી સંખ્યાની સૌથી ડાબી બાજુ આવેલી જોડી માટે સૌથી મોટી એવી સંખ્યા શોધો કે જેનો વર્ગ આપેલ જોડી જેટલો હોય કે તેથી નાનો હોય ($2^2 < 5 < 3^2$). આ સંખ્યાને ભાજક તરીકે લો અને સૌથી ડાબી બાજુ આપેલી આ જોડીને ભાજ્ય (અહીં 5) તરીકે લઈ ભાગફળ મેળવો. ભાગાકાર કરો અને શેષ મેળવો (આ કિસ્સામાં શેષ 1 છે.)

```
    2
  ------
2 | 5 29
   -4
  ------
    1
```

```
      2
   ┌────
 2 │ 5̅ 2̅9̅
   │-4
 ──┼────
   │ 129
```

સોપાન 3 ત્યાર પછી આવતી જોડીને મળેલ શેષની જમણી બાજુએ નીચે ઉતારો. તેથી નવો ભાજ્ય 129 મળે છે.

સોપાન 4 ભાજકને બમણો કરો અને તેની જમણી બાજુ ખાલી જગ્યામાં મૂકો.

```
        2
    ┌──────
 2  │ 5̅ 2̅9̅
    │ -4
 ───┼──────
 4– │ 1 29
```

સોપાન 5 હવે ખાલીજગ્યામાં એવો મોટામાં મોટો અંક પસંદ કરો કે, જે ભાગફળનો નવો અંક બને અને તેના નવા ભાજક સાથેનો ગુણાકાર ભાજ્ય કરતાં નાનો અથવા ભાજ્ય જેટલો થાય. આ કિસ્સામાં $42 \times 2 = 84$
અને $43 \times 3 = 129$. તેથી આપણે નવી સંખ્યા 3 પસંદ કરીશું.

```
       23
    ┌──────
 2  │ 5̅ 2̅9̅
    │ -4
 ───┼──────
 43 │ 1 29
    │ 1 29
 ───┼──────
    │  0
```

સોપાન 6 અહીં શેષ શૂન્ય મળે છે અને આપેલ સંખ્યામાં કોઈ અંકો પણ બાકી રહેતા નથી.
તેથી, $\sqrt{529} = 23$

- હવે સંખ્યા $\sqrt{4096}$ના વર્ગમૂળ માટે વિચારો.

સોપાન 1 એકમના અંકથી શરૂ કરી જોડીઓ બનાવવા માટે લીટીઓ દોરો, (અહીં $\overline{40}\,\overline{96}$).

```
      6
   ┌──────
 6 │ 4̅0̅ 9̅6̅
   │-36
 ──┼──────
   │  4
```

સોપાન 2 આપેલી સંખ્યામાં સૌથી ડાબી બાજુ આપેલ જોડી માટે એવી મોટામાં મોટી સંખ્યા શોધો કે જેનો વર્ગ આપેલ જોડી જેટલો અથવા નાનો હોય (અહીં $6^2 < 40 < 7^2$). આ નંબરને ભાજક તરીકે લો અને સૌથી ડાબી બાજુ આવેલ જોડીની સંખ્યાને ભાજ્ય તરીકે લો. ભાગાકાર કરો અને શેષ મેળવો. અહીં આ કિસ્સામાં શેષ 4 છે.

```
      6
   ┌──────
 6 │ 4̅0̅ 9̅6̅
   │-36
 ──┼──────
   │ 496
```

સોપાન 3 હવે બીજી જોડીને નીચે ઉતારો (અહીં બીજી જોડી 96 છે). જેને શેષની બાજુમાં જોડતાં ભાજ્ય સંખ્યા 496 બને.

```
        6
    ┌──────
 6  │ 4̅0̅ 9̅6̅
    │ -36
 ───┼──────
 12–│  496
```

સોપાન 4 ભાજકને બમણા કરો અને તેની જમણી બાજુ ખાલી જગ્યા મૂકો.

```
        64
     ┌──────
 6   │ 4̅0̅ 9̅6̅
     │ -36
 ────┼──────
 124 │ 496
     │-496
 ────┼──────
     │   0
```

સોપાન 5 હવે ખાલીજગ્યામાં એવો મોટામાં મોટો અંક પસંદ કરો, કે જે નવી ભાગફળનો નવો અંક બને અને તેનો નવા ભાજક સાથેનો ગુણાકાર ભાજ્ય કરતાં નાનો અથવા ભાજ્ય જેટલો થાય. આ કિસ્સામાં $124 \times 4 = 496$
તેથી આપણને ભાગફળમાં નવી સંખ્યા 4 મળે છે અને શેષ મેળવો.

સોપાન 6 અહીં શેષ શૂન્ય મળે છે અને કોઈ જોડી બાકી રહેતી નથી. $\therefore \sqrt{4096} = 64$

સંખ્યાનું અનુમાન કરવું

આપણે પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાઓમાં બનાવેલ જોડીઓની મદદથી તેના વર્ગમૂળની સંખ્યાનો અંક શોધીશું.

$\sqrt{\overline{5}\,\overline{29}} = 23$ અને $\sqrt{\overline{40}\,\overline{96}} = 64$

આ બંને સંખ્યાઓ 529 અને 4096માં બે-બે જોડીઓ છે તેમજ બંને સંખ્યાઓના વર્ગમૂળ તરીકે આવતી સંખ્યાના અંકો પણ બે છે. શું તમે 14400 સંખ્યાના વર્ગમૂળ તરીકે જે સંખ્યા આવશે તેના અંકોની સંખ્યા કહી શકો ?

સંખ્યા $\overline{1}\,\overline{44}\,\overline{00}$ માં જોડીઓ ત્રણ છે. જેથી તેના વર્ગમૂળ તરીકે જે સંખ્યા આવશે તેના અંકો પણ ત્રણ જ હશે.

પ્રયત્ન કરો

નીચે આપેલી સંખ્યાઓનું વર્ગમૂળ શોધ્યા વિના જણાવો કે, મળતા વર્ગમૂળના અંકોની સંખ્યા કેટલી હશે ?

(i) 25600 (ii) 100000000 (iii) 36864

ઉદાહરણ 9 : વર્ગમૂળ શોધો : (i) 729 (ii) 1296

ઉકેલ :

(i)

	27
2	$\overline{7}\,\overline{29}$
	−4
47	329
	329
	0

$\sqrt{729} = 27$

(ii)

	36
3	$\overline{12}\,\overline{96}$
	−9
66	396
	396
	0

$\sqrt{1296} = 36$

ઉદાહરણ 10 : એવી નાનામાં નાની સંખ્યા શોધો કે જેને 5607માંથી બાદ કરતાં મળતી સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ હોય. ઉપરાંત મળતી પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાનું વર્ગમૂળ પણ શોધો.

	74
7	$\overline{56}\,\overline{07}$
	−49
144	707
	−576
	131

ઉકેલ : ચાલો, 5607નું ભાગાકારની રીતે વર્ગમૂળ શોધીએ. આપણને શેષ 131 મળે છે. જે દર્શાવે છે કે 74^2 એ 5607 થી 131 નાનો છે. અર્થાત્ જો આપણે 131ને 5607માંથી બાદ કરીએ તો મળતી સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ હોય.

આમ, નવી મળતી પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા 5607 − 131 = 5476 છે અને $\sqrt{5476} = 74$

ઉદાહરણ 11 : 4 અંકોવાળી મોટામાં મોટી પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા શોધો.

	99
9	$\overline{99}\,\overline{99}$
	−81
189	1899
	−1701
	198

ઉકેલ : 4 અંકોવાળી મોટામાં મોટી સંખ્યા 9999 છે. સૌ પ્રથમ આપણે $\sqrt{9999}$ ભાગાકારની રીતે શોધવા પ્રયત્ન કરીએ. અહીં શેષ 198 મળે છે. જે દર્શાવે છે કે 99^2 એ 9999 કરતાં 198 નાનો છે.

અર્થાત્ 9999માંથી શેષ 198 બાદ કરતાં આપણને પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા મળે. આમ, 9999 − 198 = 9801 એ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા છે.

ઉપરાંત $\sqrt{9801} = 99$

તેથી 4 અંકોવાળી મોટામાં મોટી સંખ્યા 9801 છે અને તેનું વર્ગમૂળ 99 છે.

	36
3	$\overline{13}\,\overline{00}$
	−9
66	400
	−396
	4

ઉદાહરણ 12 : એવી નાનામાં નાની સંખ્યા શોધો કે જેને 1300માં ઉમેરતાં મળતી સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ હોય. ઉપરાંત આ નવી મળતી સંખ્યાનું વર્ગમૂળ પણ શોધો.

ઉકેલ : સૌ પ્રથમ આપણે 1300નું વર્ગમૂળ ભાગાકારની રીતે શોધવા પ્રયત્ન કરીએ. આમ, આ રીતે વર્ગમૂળ શોધતાં શેષ 4 મળે છે. આ બતાવે છે $36^2 < 1300$

તેથી 1300 પછીની પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા $37^2 = 1369$ છે.

તેથી આપણે કહી શકીએ કે $37^2 - 1300 = 1369 - 1300 = 69$.

6.6 દશાંશ સંખ્યાઓનું વર્ગમૂળ

વિચારો કે $\sqrt{17.64}$ શું મળે ?

સોપાન 1 દશાંશ સંખ્યાઓનું વર્ગમૂળ શોધવા માટે આપણે પૂર્ણાંક ભાગમાં ભાગાકારની રીતે વર્ગમૂળ શોધવા જેમ જોડીઓ બનાવવા લીટી કરીએ છીએ તેમ જ કરીશું. (અહીં, 17) અને દશાંશ ભાગમાં જોડીઓ બનાવવા માટે દશાંશ ચિહ્નની જમણી બાજુથી જ લીટીઓ કરી જોડીઓ બનાવીશું. (અહીં 64) અને આગળ જોડીઓ બનાવવા લીટી દોરીશું.

	4
4	$\overline{17}\,\overline{64}$
	−16
	1

સોપાન 2 હવે આપણે ભાગાકારની રીતે જ આગળ વધીશું. ડાબી બાજુની સૌ પ્રથમ સંખ્યા 17 અને $4^2 < 17 < 5^2$. આથી 4 ને ભાજક તરીકે અને ડાબી બાજુની સૌ પ્રથમ જોડી 17 ને ભાજ્ય તરીકે લેવામાં આવે છે. ભાગાકાર કરો અને શેષ મેળવો.

	4
4	$\overline{17}.\overline{64}$
	−16
8−	1 64

સોપાન 3 શેષ 1 વધે છે. હવે પછીથી આવતી જોડીની સંખ્યાને શેષ 1ની બાજુમાં લખો. અહીં શેષ 1 અને પછીની જોડીની સંખ્યા 64 છે. તેથી આપણને સંખ્યા 164 મળે.

	4.
4	17.64
	−16
82	164

સોપાન 4 ભાજકને બમણું કરો. ઉપરાંત 64 એ દશાંશ વિભાગમાં આવેલ છે તેથી ભાગફળમાં દશાંશ ચિહ્ન મૂકો.

સોપાન 5 આપણે જાણીએ છીએ કે, $82 \times 2 = 164$ તેથી નવો અંક 2 છે. ભાગાકાર કરો અને શેષ મેળવો.

સોપાન 6 અહીં શેષ શૂન્ય મળે છે અને હવે કોઈ જોડીઓ બાકી રહેતી નથી. તેથી $\sqrt{17.64} = 4.2$

	4.2
4	17.64
	−16
82	164
	− 164
	0

ઉદાહરણ 13 : 12.25નું વર્ગમૂળ શોધો.

ઉકેલ :

	3.5
3	$\overline{12}.\overline{25}$
	−9
65	325
	− 325
	0

$\therefore \sqrt{12.25} = 3.5$

આગળ કઈ રીતે વધીશું ?

સંખ્યા 176.341 માટે વિચારો. પૂર્ણાંક ભાગ અને દશાંશ ભાગમાં જોડીઓ બનાવવા લીટીઓ મૂકો. શું પૂર્ણાંક ભાગ અને દશાંશ ભાગમાં જોડીઓ બનાવવા લીટીઓ મૂકવાની રીત જુદી-જુદી છે ? વિચારો. અહીં તમે જોયું હશે કે પૂર્ણાંક ભાગ 176માં જોડીઓ બનાવવા માટે એકમના સ્થાનથી શરૂ કરી જોડીઓ માટે લીટીઓ દોરવામાં આવે છે અને ત્યાર બાદ ડાબી તરફ આગળ વધવામાં આવે છે. પ્રથમ લીટી 76 પર અને બીજી લીટી 1 પર કરવામાં આવે છે, પરંતુ .341 માટે એટલે કે દશાંશ ભાગમાં આપણે લીટીઓ દોરવાની શરૂઆત દશાંશ ચિહ્ન પછી તરત જ જમણી તરફથી કરીશું અને આગળ વધીશું. તેથી પ્રથમ લીટી 34 પર અને બીજી જોડી માટે આપણે 1 પછી 0 મૂકી અને લીટી દોરીશું. તેથી $.\overline{34}\,\overline{10}$ સંખ્યા મળે.

ઉદાહરણ 14 : એક ચોરસ પ્લોટનું ક્ષેત્રફળ 2304 મીટર^2 છે. તો આ ચોરસ પ્લોટની બાજુનું માપ શોધો.

	48
4	$\overline{23}\,\overline{04}$
	− 16
88	704
	704
	0

ઉકેલ : ચોરસ પ્લોટનું ક્ષેત્રફળ = 2304 મીટર^2

તેથી ચોરસ પ્લોટની બાજુ = $\sqrt{2304}$ મીટર

પરંતુ $\sqrt{2304} = 48$

આમ, 2304 મીટર^2 ક્ષેત્રફળ ધરાવતાં ચોરસ પ્લોટની બાજુનું માપ 48 મીટર હોય.

ઉદાહરણ 15 : એક નિશાળમાં કુલ 2401 વિદ્યાર્થીઓ છે. આ નિશાળના વ્યાયામ શિક્ષક તમામ વિદ્યાર્થીઓને એવી રીતે હાર અને સ્તંભમાં ઊભા રાખવા માંગે છે કે, હાર અને સ્તંભોની સંખ્યા સમાન હોય. તો હારની સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે હારની સંખ્યા x છે. તેથી સ્તંભની સંખ્યા પણ x મળે. તેથી

વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા $= x \times x = x^2$ તેથી $x^2 = 2401$

હવે 2401નું વર્ગમૂળ શોધતાં 49 મળે છે.

આમ, $x = 49$

તેથી હારની સંખ્યા 49 મળે.

	49
4	$\overline{24}\,\overline{01}$
	−16
89	801
	801
	0

6.7 વર્ગમૂળનું અનુમાન કરવું

નીચેની પરિસ્થિતિઓનો વિચાર કરો :

1. દેવેશી પાસે 125 સેમી^{2} ક્ષેત્રફળ ધરાવતો એક કાપડનો ચોરસ ટુકડો છે. તેણી તેમાંથી 15 સેમી બાજુવાળા હાથ રૂમાલ બનાવવા માંગે છે. જો તે શક્ય ન હોય તો તે એ જાણવા માંગે છે કે વધુમાં વધુ કેટલી લંબાઈવાળો હાથરૂમાલ આ ટુકડામાંથી બનાવી શકાય ?
2. મીના અને શોભા રમત રમે છે. એક સંખ્યા બોલે છે અને બીજી તેમનું વર્ગમૂળ કહે છે. મીનાએ સંખ્યા 25 કહી તો શોભાએ ઝડપથી તેનું વર્ગમૂળ 5 એમ જવાબ આપ્યો. પછી શોભાએ 81 કહ્યા તો મીનાએ ઝડપથી 9 એમ જવાબ આપ્યો. આ પ્રમાણે રમત આગળ ચાલતી હતી. એકવાર મીનાએ 250 સંખ્યા કહી અને શોભા તેનો જવાબ આપી શકી નહિ. તો મીનાએ શોભાને કહ્યું કે તે એવી સંખ્યા બતાવે કે જેનો વર્ગ 250ની સૌથી નજીક હોય.

આવા કિસ્સાઓમાં આપણે વર્ગમૂળ સંખ્યાઓનાં અનુમાન કરવાના હોય છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે, $100 < 250 < 400$ અને $\sqrt{100} = 10$, $\sqrt{400} = 20$

તેથી $10 < \sqrt{250} < 20$

છતાં હજુ આપણે 250 સંખ્યાની સૌથી વધુ નજીક હોય તેવી પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા પ્રાપ્ત કરી શક્યા નથી.

પરંતુ આપણે જાણીએ છીએ કે, $15^2 = 225$ અને $16^2 = 256$

આમ, $15 < \sqrt{250} < 16$ અને 256 એ 225 કરતાં 250ની વધુ નજીક છે.

તેથી $\sqrt{250}$ એ લગભગ 16 છે.

પ્રયત્ન કરો

નીચેની સંખ્યાઓના વર્ગમૂળની સૌથી નજીકની પૂર્ણ સંખ્યા તરીકે શું મળે તેની ગણતરી કરો :

(i) $\sqrt{80}$ (ii) $\sqrt{1000}$ (iii) $\sqrt{350}$ (iv) $\sqrt{500}$

સ્વાધ્યાય 6.4

1. નીચે આપેલી સંખ્યાઓનું ભાગાકારની રીતે વર્ગમૂળ શોધો :

(i) 2304	(ii) 4489	(iii) 3481	(iv) 529
(v) 3249	(vi) 1369	(vii) 5776	(viii) 7921
(ix) 576	(x) 1024	(xi) 3136	(xii) 900

2. નીચે આપેલી સંખ્યાના વર્ગમૂળ તરીકે આવતી સંખ્યામાં કેટલા અંકો હશે તે જણાવો (કોઈ ગણતરી કર્યા વગર જણાવો.)

(i) 64	(ii) 144	(iii) 4489	(iv) 27225
(v) 390625			

3. નીચે આપેલ દશાંશ સંખ્યાઓનું વર્ગમૂળ શોધો :

(i) 2.56 (ii) 7.29 (iii) 51.84 (iv) 42.25

(v) 31.36

4. નીચે આપેલી સંખ્યાઓ માટે એવી નાનામાં નાની સંખ્યા શોધો કે જેની આપેલ સંખ્યામાંથી બાદબાકી કરતાં મળતી નવી સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ હોય. ઉપરાંત આ નવી સંખ્યાનું વર્ગમૂળ પણ શોધો.

(i) 402 (ii) 1989 (iii) 3250

(iv) 825 (v) 4000

5. નીચે આપેલી સંખ્યાઓ માટે એવી નાનામાં નાની સંખ્યા શોધો કે જેનો સરવાળો આપેલ સંખ્યા સાથે કરવાથી મળતી નવી સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ હોય. ઉપરાંત આ નવી સંખ્યાનું વર્ગમૂળ પણ શોધો :

(i) 525 (ii) 1750 (iii) 252 (iv) 1825

(v) 6412

6. 441 મીટર^2 ક્ષેત્રફળ વાળા ચોરસની બાજુનું માપ શોધો.

7. કાટકોણ ત્રિકોણ ABC માં, $\angle B = 90°$ છે.

(i) જો AB = 6 સેમી, BC = 8 સેમી, તો AC શોધો.

(ii) જો AC = 13 સેમી, BC = 5 સેમી, તો AB શોધો.

8. એક માળી પાસે 1000 છોડ છે. તે આ છોડને એવી રીતે રોપવા માગે છે કે બગીચામાં હાર અને સ્તંભોની સંખ્યા સમાન મળે, તો માળીને તેના માટે હજુ ઓછામાં ઓછા કેટલા છોડ વધુ જોઈએ ?

9. એક નિશાળમાં 500 વિદ્યાર્થીઓ છે. પી.ટી.ની કવાયત કરવા માટે તમામ વિદ્યાર્થીઓને એવી રીતે ઊભા રાખ્યા છે કે જેથી હાર અને સ્તંભોની સંખ્યા સમાન રહે. તો નિશાળના કેટલા વિદ્યાર્થીઓ આ ગોઠવણી કરવાથી બહાર રહેશે ?

આપણે શું ચર્ચા કરી ?

1. જો કોઈ પ્રાકૃતિક સંખ્યા mને n^2 વડે દર્શાવી શકાય અને n પણ એક પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે, તો સંખ્યા m એ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા છે.

2. બધી જ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાઓના એકમનો અંક 0, 1, 4, 5, 6 અથવા 9 હોય.

3. પૂર્ણવર્ગ સંખ્યામાં છેલ્લે આવેલાં શૂન્યો હંમેશાં બેકી સંખ્યામાં જ હોય.

4. વર્ગ અને વર્ગમૂળ પ્રક્રિયા એકબીજાની વ્યસ્ત છે.

5. પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાના વર્ગમૂળ બે હોય છે.

ધન વર્ગમૂળને "$\sqrt{\ }$" વડે દર્શાવાય છે.

જેમ કે $3^2 = 9$ એટલે $\sqrt{9} = 3$.

પ્રકરણ

7

ઘન અને ઘનમૂળ

7.1 પ્રાસ્તાવિક

ભારતના મહાન અને મેધાવી ગણિતશાસ્ત્રી એસ. રામાનુજન વિશે એક રસપ્રદ વાર્તા પ્રચલિત છે. એકવાર એક બીજા પ્રખ્યાત ગણિતશાસ્ત્રી પ્રોફેસર જી. એચ. હાર્ડી, એસ. રામાનુજનને મળવા આવેલ હતા. તે જે વાહનમાં (ટેક્સી) આવેલ તે વાહન પર 1729 અંક લખેલ હતો. બંને ગણિતશાસ્ત્રી જ્યારે ચર્ચા કરતા હતા ત્યારે વાત વાતમાં પ્રોફેસર હાર્ડીએ 1729 અંકને 'ડલ અંક' (A Dull Number) તરીકે રજૂ કર્યો. એસ. રામાનુજને પ્રત્યુત્તરમાં કહ્યું કે 1729 એક ખરેખર રસપ્રદ અંક છે. તેમણે નીચે મુજબ ગણતરી કરી જણાવ્યું કે 1729 એક એવો સૌથી નાનામાં નાનો અંક છે કે, જેને જુદી જુદી બે સંખ્યાના ઘનના સરવાળા તરીકે બે રીતે રજૂ કરી શકાય. તેમણે નીચે મુજબ રજૂઆત કરી બતાવી.

$$1729 = 1728 + 1 = 12^3 + 1^3$$

$$1729 = 1000 + 729 = 10^3 + 9^3$$

હાર્ડી-રામાનુજન સંખ્યા
1729 એ નાનામાં નાની હાર્ડી-રામાનુજન સંખ્યા છે. આવી ઘણી બધી સંખ્યાઓ હોય છે. જેમ કે 4104 (2, 16; 9, 15) 13832 (18, 20; 2, 24), કૌંસમાં આપેલ સંખ્યાનો ઉપયોગ કરી ચકાસો.

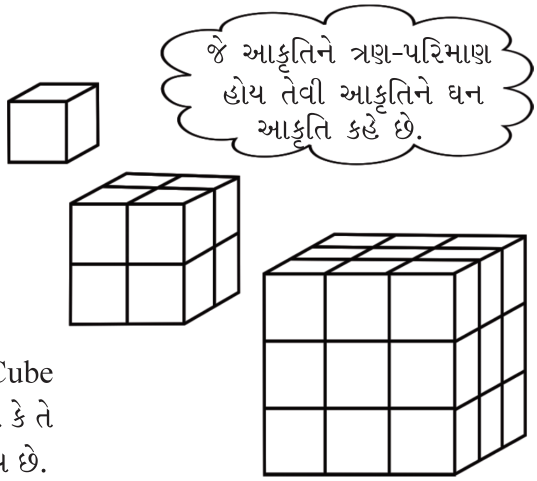
ત્યારથી 1729 એ હાર્ડી-રામાનુજન સંખ્યા તરીકે હાલ પણ પ્રચલિત છે. જો કે અંક 1729 ની આ ખાસિયત તો રામાનુજનના સમય પહેલાં 300 થી પણ વધારે વર્ષોથી જાણીતી હતી.

તમને કદાચ પ્રશ્ન થશે કે એસ. રામાનુજનને આ ખબર કેમ પડી ? તેનો જવાબ એ છે કે એસ. રામાનુજનને અંકો બહુ જ ગમતા હતા. તેઓએ પોતાના જીવનમાં અંકો સાથે ઘણા બધા પ્રયોગો કર્યા. તેમણે એવા ઘણા અંકો શોધી કાઢ્યા કે તેને કોઈ બે જુદી જુદી સંખ્યાના વર્ગના સરવાળા સ્વરૂપે રજૂ કરી શકાય અને સાથે સાથે તેને બે જુદી જુદી સંખ્યાના ઘનના સરવાળા સ્વરૂપે રજૂ કરી શકાય.

અહીં ઘન માટે ઘણી રસપ્રદ પેટર્ન છે. ચાલો આપણે ઘન અને ઘનમૂળ તેમજ તેની સાથે જ જોડાયેલ બીજી રસપ્રદ જાણકારી મેળવીએ.

7.2 ઘન

આપણે જાણીએ છીએ કે 'ઘન' શબ્દનો ઉપયોગ ભૂમિતિમાં થાય છે. ઘન એ એવી નક્કર આકૃતિ છે કે, જેની તમામ બાજુઓનાં માપ સમાન હોય છે. 1 સેમી બાજુવાળા કેટલા ઘનની મદદથી 2 સેમી બાજુવાળો એક ઘન બને ? 1 સેમી બાજુવાળા કેટલા ઘનની મદદથી 3 સેમી બાજુવાળો એક ઘન બને ? 1, 8, 27, ... સંખ્યાઓ માટે વિચારો.



આવી સંખ્યાઓને **'પૂર્ણઘન કે ઘન સંખ્યા'** (Perfect Cubes or Cube Numbers) કહે છે. તમે કહી શકો કે તેનું નામ ઘન સંખ્યા કેમ છે ? કેમ કે તે એક જ પ્રકારની સંખ્યાને પોતાની જ સાથે ત્રણ વાર ગુણવાથી પ્રાપ્ત થાય છે.

આપણે નોંધીએ કે $1 = 1 \times 1 \times 1 = 1^3$; $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$; $27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$. અહીં, $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$ તેથી આપણે કહી શકીએ કે 125 એ એક ઘન સંખ્યા છે.

શું 9 એ ઘન સંખ્યા છે ? ના, કેમ કે $9 = 3 \times 3$ અને એવી કોઈ બીજી પ્રાકૃતિક સંખ્યા નથી કે જેને પોતાની જ સાથે ત્રણ વાર ગુણવાથી સંખ્યા 9 આવે. આ ઉપરાંત આપણે જાણીએ છીએ કે $2 \times 2 \times 2 = 8$ અને $3 \times 3 \times 3 = 27$. તેથી કહી શકાય કે 9 એ ઘન સંખ્યા નથી.

નીચેના કોષ્ટક-1માં 1 થી 10 સંખ્યાના ઘન આપેલ છે.

કોષ્ટક-1

729, 1000, 1728 પણ પૂર્ણઘન છે.

સંખ્યા	ઘન
1	$1^3 = 1$
2	$2^3 = 8$
3	$3^3 = 27$
4	$4^3 = 64$
5	$5^3 =$ ....
6	$6^3 =$ ....
7	$7^3 =$ ....
8	$8^3 =$ ....
9	$9^3 =$ ....
10	$10^3 =$ ....

પૂર્ણ કરો.

1 થી 1000 સુધીની સંખ્યાઓમાં ફક્ત દસ સંખ્યાઓ જ એવી છે કે જે પૂર્ણઘન સંખ્યા છે. (તમે જાતે ચકાસણી કરો). 1 થી 100 સુધીની સંખ્યાઓમાં કેટલી સંખ્યાઓ એવી છે કે જે પૂર્ણઘન સંખ્યા છે ?

બેકી સંખ્યાઓના ઘનનું નિરીક્ષણ કરો. શું તે બેકી સંખ્યા જ છે ? એકી સંખ્યાઓના ઘન વિશે તમે શું કહી શકો છો ?

નીચે કોષ્ટક-2માં 11 થી 20 સંખ્યાઓના ઘન આપેલ છે.

કોષ્ટક-2

સંખ્યાઓ	ઘન
11	1331
12	1728
13	2197
14	2744
15	3375
16	4096
17	4913
18	5832
19	6859
20	8000

અમે બેકી, તેથી અમારા ઘન પણ બેકી

અમે એકી, તેથી અમારા ઘન પણ એકી

એવી સંખ્યા વિચારો કે જેનો એકમનો અંક 1 હોય. આવી સંખ્યાનો ઘન શોધો. તમે આવી સંખ્યા કે જેનો એકમનો અંક 1 હોય, તેના ઘન કરવાથી મળતી સંખ્યાના એકમના અંક વિશે શું કહી શકો ? તેવી જ રીતે એકમનો અંક 2, 3, 4... વગેરે હોય તેવી અન્ય સંખ્યાઓ લઈ તેનો ઘન કરવાથી મળતી સંખ્યાના એકમના અંક વિશે વિચારો.

પ્રયત્ન કરો

નીચે આપેલી સંખ્યાના ઘન કરવાથી મળતી સંખ્યાનો એકમનો અંક શોધો.

(i) 3331	(ii) 8888	(iii) 149	(iv) 1005
(v) 1024	(vi) 77	(vii) 5022	(viii) 53

7.2.1 કેટલીક રસપ્રદ પેટર્ન (Patterns)

1. ક્રમિક એકી સંખ્યા ઉમેરવી

નીચે આપેલી ક્રમિક એકી સંખ્યાના સરવાળાની પેટર્ન જુઓ.

$$1 = 1 = 1^3$$
$$3 + 5 = 8 = 2^3$$
$$7 + 9 + 11 = 27 = 3^3$$
$$13 + 15 + 17 + 19 = 64 = 4^3$$
$$21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125 = 5^3$$

શું આ રસપ્રદ નથી ? હવે તમે કહી શકો કે 10^3ને ક્રમિક એકી સંખ્યાના સરવાળા તરીકે દર્શાવવા કેટલી ક્રમિક એકી સંખ્યા જોઈએ ?

પ્રયત્ન કરો

ઉપરની જેવી પેટર્નનો ઉપયોગ કરી નીચે આપેલ સંખ્યાને ક્રમિક એકી સંખ્યાના સરવાળા તરીકે દર્શાવો.

(a) 6^3 (b) 8^3 (c) 7^3

નીચેની પેટર્ન જુઓ.

$$2^3 - 1^3 = 1 + 2 \times 1 \times 3$$
$$3^3 - 2^3 = 1 + 3 \times 2 \times 3$$
$$4^3 - 3^3 = 1 + 4 \times 3 \times 3$$

ઉપરની પેટર્ન જોઈ નીચેની સંખ્યાની કિંમત શોધો.

(i) $7^3 - 6^3$ (ii) $12^3 - 11^3$ (iii) $20^3 - 19^3$ (iv) $51^3 - 50^3$

2. ઘન અને તેના અવિભાજ્ય અવયવ

નીચે આપેલ સંખ્યાના અવિભાજ્ય અવયવીકરણ અને તેના ઘન વિશે વિચારો.

ઘનમાં દરેક અવિભાજ્ય અવયવ ત્રણ વાર આવે છે.

સંખ્યાના અવિભાજ્ય અવયવ	સંખ્યાના ઘનના અવિભાજ્ય અવયવ
$4 = 2 \times 2$	$4^3 = 64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^3 \times 2^3$
$6 = 2 \times 3$	$6^3 = 216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^3$
$15 = 3 \times 5$	$15^3 = 3375 = 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 = 3^3 \times 5^3$
$12 = 2 \times 2 \times 3$	$12^3 = 1728 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 2^3 \times 3^3$

2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1

ખાસ નોંધો કે દરેક અવિભાજ્ય અવયવ ઘનના અવયવીકરણ વખતે ત્રણ વાર આવે છે.

કોઈ પણ સંખ્યાના અવિભાજ્ય અવયવીકરણ વખતે જો દરેક અવયવ ત્રણ વાર આવે તો શું તે સંખ્યા પૂર્ણઘન હોય ? વિચારો શું 216 પૂર્ણઘન છે ?

શું તમને યાદ છે કે, $a^m \times b^m = (a \times b)^m$

અહીં, $216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

દરેક અવયવ ત્રણ વાર આવે છે $216 = 2^3 \times 3^3 = (2 \times 3)^3$

$= 6^3$ તે પૂર્ણઘન છે.

શું 729 પૂર્ણઘન છે ? અહીં $729 = \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{3 \times 3 \times 3}$

અવયવોના ત્રણનાં જોડકાં બનાવી શકાય.

હા, 729 એ પૂર્ણઘન છે.

ચાલો 500 માટે ચકાસણી કરીએ.

500ના અવિભાજ્ય અવયવો $2 \times 2 \times \underline{5 \times 5 \times 5}$ છે.

અવયવ 5 ત્રણ વાર આવે છે. પણ અવયવ 2 બે જ વાર આવે.

તેથી 500 પૂર્ણઘન નથી.

ઉદાહરણ 1 : શું 243 એ પૂર્ણઘન સંખ્યા છે ?

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે $243 = \underline{3 \times 3 \times 3} \times 3 \times 3$

તેથી 243 પૂર્ણઘન નથી. કેમ કે અવયવ 3 ત્રણ વાર આવે છે, પરંતુ બીજી વાર અવયવ 3 માત્ર બે જ વાર છે.

પ્રયત્ન કરો

નીચે આપેલી સંખ્યામાંથી કઈ સંખ્યા પૂર્ણઘન છે ?

1. 400 **2.** 3375 **3.** 8000 **4.** 15625

5. 9000 **6.** 6859 **7.** 2025 **8.** 10648

7.2.2 નાનામાં નાનો ગુણક કે જેથી પૂર્ણ ઘન સંખ્યા મળે

રાજે પ્લાસ્ટિકનો એક લંબઘન બનાવ્યો જેની લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈ અનુક્રમે 15 સેમી, 30 સેમી, 15 સેમી છે.

અનુએ રાજને પ્રશ્ન કર્યો કે આવા કેટલા લંબઘન સાથે મળે તો મળતો ઘન પૂર્ણઘન હોય ? શું રાજ તે તું કહી શકે ?

રાજે કહ્યું કે આપેલ લંબઘનનું ઘનફળ $15 \times 30 \times 15 = 3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 5 \times 3 \times 5$

$= 2 \times \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{5 \times 5 \times 5}$

અહીંયા મળેલ અવિભાજ્ય અવયવોમાં 2 માત્ર એક જ વાર આવે છે. તેથી આપણે તે ત્રણ વાર આવે તે માટે 2×2 વડે ગુણવા જોઈએ. તેથી આવા 4 લંબઘન એકસાથે રાખવાથી મળતો ઘન એ પૂર્ણઘન હશે.

ઉદાહરણ 2 : શું 392 એ પૂર્ણઘન સંખ્યા છે ? જો ના, તો એવી નાનામાં નાની પ્રાકૃતિક સંખ્યા શોધો કે જેને 392 સાથે ગુણવાથી મળતી નવી સંખ્યા પૂર્ણઘન હોય.

ઉકેલ : $392 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times 7 \times 7$

અહીં અવિભાજ્ય અવયવ 7 એ ત્રણ વાર આવતો નથી. તેથી 392 એ પૂર્ણઘન સંખ્યા નથી. તેને પૂર્ણઘન બનાવવા માટે હજુ એક વાર 7 જોઈએ. તેથી આ કિસ્સામાં

$392 \times 7 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{7 \times 7 \times 7} = 2744$ મળે, જે પૂર્ણઘન સંખ્યા છે.

તેથી 7 એ એવી નાનામાં નાની પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે કે જેને 392 સાથે ગુણવાથી મળતી નવી સંખ્યા 2744 પૂર્ણઘન સંખ્યા મળે.

ઉદાહરણ 3 : શું 53240 એ પૂર્ણઘન સંખ્યા છે ? જો ના, તો એવી નાનામાં નાની પ્રાકૃતિક સંખ્યા શોધો કે, જેનાથી 53240ને ભાગવાથી મળતું ભાગફળ પૂર્ણઘન હોય.

ઉકેલ : અહીં $53240 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{11 \times 11 \times 11} \times 5$

આ અવિભાજ્ય અવયવીકરણમાં અવયવ 5 ત્રણ વાર આવતો નથી. તેથી કહી શકાય કે 53240 એ પૂર્ણઘન સંખ્યા નથી. અવયવ 5 એ માત્ર એક જ વાર આવે છે. તેથી જો આપણે આપેલ સંખ્યાને 5 વડે ભાગીએ તો મળતું ભાગફળ પૂર્ણઘન સંખ્યા હોય.

તેથી $53240 \div 5 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{11 \times 11 \times 11}$

તેથી નાનામાં નાની પ્રાકૃતિક સંખ્યા 5 એવી સંખ્યા છે કે જેના વડે 53240ને ભાગવાથી મળતી સંખ્યા 10648 એ પૂર્ણઘન હોય.

ઉદાહરણ 4 : શું 1188 એ પૂર્ણઘન સંખ્યા છે ? જો ના, તો એવી નાનામાં નાની પ્રાકૃતિક સંખ્યા શોધો, કે જેનાથી 1188ને ભાગવાથી મળતું ભાગફળ પૂર્ણઘન હોય.

ઉકેલ : અહીં $1188 = 2 \times 2 \times \underline{3 \times 3 \times 3} \times 11$

આ અવિભાજ્ય અવયવીકરણમાં અવયવ 2 અને અવયવ 11 ત્રણ વાર આવતા નથી. તેથી સંખ્યા 1188 એ પૂર્ણઘન સંખ્યા નથી. અહીં 1188ના અવયવીકરણમાં અવયવ 2 માત્ર બે જ વાર અને અવયવ 11 માત્ર એક જ વાર આવે છે. તેથી જો 1188ને $2 \times 2 \times 11 = 44$ વડે ભાગતાં મળતા ભાગફળના અવિભાજ્ય અવયવ 2 અને 11 નહીં હોય.

આમ, નાનામાં નાની પ્રાકૃતિક સંખ્યા કે જેના વડે 1188 ને ભાગતાં પૂર્ણઘન મળે તે 44 છે અને પરિણામે મળતી પૂર્ણઘન સંખ્યા $1188 \div 44 = 27$ $(=3^3)$ છે.

ઉદાહરણ 5 : શું 68600 એ પૂર્ણઘન સંખ્યા છે ? જો ના, તો એવી નાનામાં નાની પ્રાકૃતિક સંખ્યા શોધો કે, જેનાથી 68600 ને ગુણવાથી મળતી નવી સંખ્યા પૂર્ણઘન હોય.

ઉકેલ : અહીં $68600 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7$.

અહીં અવિભાજ્ય અવયવીકરણમાં અવયવ 5 એ ત્રણ વાર આવતો નથી. તેથી 68600 એ પૂર્ણઘન સંખ્યા નથી. તેને પૂર્ણઘન બનાવવા માટે આપણે તેને 5 વડે ગુણીશું.

$68600 \times 5 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7$

$= 343000$ જે પૂર્ણઘન સંખ્યા છે.

અહીં નોંધીએ કે 343 એ પૂર્ણઘન સંખ્યા છે. ઉદાહરણ 5 પરથી આપણે જાણી શકીએ છીએ કે 343000 પણ પૂર્ણઘન સંખ્યા છે.

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

નીચેનામાંથી કઈ સંખ્યા પૂર્ણઘન સંખ્યા છે ?

(i) 2700 (ii) 16000 (iii) 64000 (iv) 900 (v) 125000 (vi) 36000 (vii) 21600 (viii) 10000 (ix) 27000000 (x) 1000

તમે આ પૂર્ણઘન સંખ્યાઓમાં કઈ પેટર્નનું નિરીક્ષણ કર્યું ?

સ્વાધ્યાય 7.1

1. નીચેનામાંથી કઈ સંખ્યા પૂર્ણઘન નથી ?
(i) 216 (ii) 128 (iii) 1000 (iv) 100 (v) 46656

2. એવી નાનામાં નાની સંખ્યા શોધો કે જેથી તેને નીચે આપેલ સંખ્યા સાથે ગુણવાથી મળતી સંખ્યા પૂર્ણઘન હોય.
(i) 243 (ii) 256 (iii) 72 (iv) 675 (v) 100

3. એવી નાનામાં નાની સંખ્યા શોધો કે જેના વડે નીચે આપેલ સંખ્યાને ભાગવાથી મળતી સંખ્યા પૂર્ણઘન હોય.
(i) 81 (ii) 128 (iii) 135 (iv) 192 (v) 704

4. પરિક્ષિતે 5 સેમી, 2 સેમી, 5 સેમી માપ લઈ એક પ્લાસ્ટિકનો લંબઘન બનાવ્યો છે. તો આવા કેટલા લંબઘન સાથે રાખવાથી મળતો ઘન એ પૂર્ણઘન હોય ?

7.3 ઘનમૂળ

જો એક ઘનનું ઘનફળ 125 સેમી^{3} હોય તો, આપણે તેની બાજુની લંબાઈ વિશે શું કહી શકીએ ? આ ઘનની બાજુની લંબાઈ જાણવા માટે આપણે એવી સંખ્યાની જરૂર પડે કે જે સંખ્યાનો ઘન 125 હોય.

જેવી રીતે વર્ગમૂળ શોધવું એ વર્ગ કરવાની પ્રક્રિયાની વ્યસ્ત પ્રક્રિયા છે, તેવી જ રીતે ઘનમૂળ શોધવાની ક્રિયા પણ ઘન કરવાની ક્રિયાની વ્યસ્ત પ્રક્રિયા છે.

આપણે જાણીએ છીએ $2^3 = 8$. તેથી 8નું ઘનમૂળ 2 છે.

સંકેતમાં તેને $\sqrt[3]{8} = 2$થી દર્શાવાય. ‘ $\sqrt[3]{\ }$ ’ ઘનમૂળનો સંકેત દર્શાવે છે.

નીચેના કોષ્ટક માટે વિચારો.

વિધાન	અનુમાન	વિધાન	અનુમાન
$1^3 = 1$	$\sqrt[3]{1} = 1$	$6^3 = 216$	$\sqrt[3]{216} = 6$
$2^3 = 8$	$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$	$7^3 = 343$	$\sqrt[3]{343} = 7$
$3^3 = 27$	$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$	$8^3 = 512$	$\sqrt[3]{512} = 8$
$4^3 = 64$	$\sqrt[3]{64} = 4$	$9^3 = 729$	$\sqrt[3]{729} = 9$
$5^3 = 125$	$\sqrt[3]{125} = 5$	$10^3 = 1000$	$\sqrt[3]{1000} = 10$

7.3.1 અવિભાજ્ય અવયવીકરણની રીતે ઘનમૂળ

સંખ્યા 3375 માટે વિચારો, આપણે તેનું ઘનમૂળ અવિભાજ્ય અવયવીકરણની રીતે શોધીશું.

અહીં $3375 = \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{5 \times 5 \times 5} = 3^3 \times 5^3 = (3 \times 5)^3$

તેથી 3375 નું ઘનમૂળ $= \sqrt[3]{3375} = 3 \times 5 = 15$

તેવી જ રીતે $\sqrt[3]{74088}$ નું ઘનમૂળ મેળવવા માટે

$$74088 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{7 \times 7 \times 7} = 2^3 \times 3^3 \times 7^3 = (2 \times 3 \times 7)^3$$

આમ, $\sqrt[3]{74088} = 2 \times 3 \times 7 = 42$

ઉદાહરણ 6 : 8000 નું ઘનમૂળ શોધો.

ઉકેલ : અહીં 8000 ના અવિભાજ્ય અવયવો $\underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{5 \times 5 \times 5}$ છે.

તેથી $\sqrt[3]{8000} = 2 \times 2 \times 5 = 20$

ઉદાહરણ 7 : 13824 નું ઘનમૂળ અવિભાજ્ય અવયવીકરણની રીતે શોધો.

ઉકેલ : અહીં,

$13824 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{3 \times 3 \times 3} = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 3^3$

તેથી, $\sqrt[3]{13824} = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

કોઈ પણ પૂર્ણાંક સંખ્યા m માટે, $m^2 < m^3$? આ વિધાન ખરું છે કે ખોટું તે કહો.

7.3.2 ઘન સંખ્યાનું ઘનમૂળ

જો તમને ખબર હોય કે આપેલ સંખ્યા પૂર્ણઘન છે, તો નીચે આપેલ પદ્ધતિથી આપણે ઘનમૂળ શોધી શકીએ.

સોપાન 1 કોઈ એક પૂર્ણઘન સંખ્યા 857375 માટે, જમણી બાજુથી ત્રણ-ત્રણ સંખ્યા લઈને નીચે મુજબ જૂથ બનાવીશું.

$\underline{857}$	$\underline{375}$
↓	↓
બીજું જૂથ	પ્રથમ જૂથ

હવે આપણે આપેલ ઘન સંખ્યાનું ઘનમૂળ નીચે આપેલ ક્રમિક પગલાં મુજબ મેળવીશું.

આપણને 375 અને 857 એવાં બે જૂથ મળ્યા કે દરેક જૂથમાં ત્રણ-ત્રણ સંખ્યા હોય.

સોપાન 2 પ્રથમ જૂથ એટલે કે 375નો એકમના અંક આપેલ સંખ્યાના ઘનમૂળનો એકમનો અંક મળશે. પ્રથમ જૂથમાં આવેલ સંખ્યા 375 માં એકમનો અંક 5 છે. તેથી આપણે કહી શકીએ કે જો સંખ્યાનો એકમનો અંક 5 હોય તો તેવી સંખ્યાના ઘનમૂળ તરીકે જે સંખ્યા મળે તેનો એકમનો અંક પણ 5 હોય. તેથી અહીં આપણને ઘનમૂળની સંખ્યાનો એકમનો અંક 5 મળે છે.

સોપાન 3 હવે બીજું જૂથ લઈએ જે 857 છે. ઉપરાંત આપણે એ પણ જાણીએ છીએ કે $9^3 = 729$ અને $10^3 = 1000$. તેમજ $729 < 857 < 1000$. તેથી દશકના અંક તરીકે નાનામાં નાની સંખ્યા 729 નો એકમનો અંક લઈશું. તેથી આપણને $\sqrt[3]{857375} = 95$ મળશે.

ઉદાહરણ 8 : અનુમાન કરીને 17576નું ઘનમૂળ શોધો.

ઉકેલ : અહીં સંખ્યા 17576 આપેલ છે.

સોપાન 1 સૌ પ્રથમ આપણે સંખ્યા 17576ના જમણી બાજુથી શરૂ કરી ત્રણ-ત્રણનાં જૂથ બનાવીશું. અહીં, 576 અને 17 એમ બે જૂથ બને છે. 576 માં ત્રણ અને 17માં બે સંખ્યા રહે છે.

સોપાન 2 હવે સંખ્યા 576 લો. તેમાં એકમનો અંક 6 છે. તેથી ઘનમૂળમાં પણ એકમનો અંક 6 મળશે.

સોપાન 3 હવે બીજું જુથ 17 છે. 2 નો ઘન 8 છે અને 3 નો ઘન 27 છે. તેમજ 17 એ 8 અને 27 ની વચ્ચે આવેલી સંખ્યા છે. તેમજ 2 અને 3માં નાની સંખ્યા 2 છે. સંખ્યા 2માં એકમનો અંક 2 પોતે જ છે. તેથી 17576ના ઘનમૂળમાં દશકના અંક તરીકે 2ને લેતાં,

$\sqrt[3]{17576} = 26$ (ચકાસો)

સ્વાધ્યાય 7.2

1. નીચે આપેલી દરેક સંખ્યાનું ઘનમૂળ અવિભાજ્ય અવયવીકરણની રીતે શોધો.

(i) 64 (ii) 512 (iii) 10648 (iv) 27000

(v) 15625 (vi) 13824 (vi) 110592 (viii) 46656

(ix) 175616 (x) 91125

2. નીચેનું વિધાન ખરું છે કે ખોટું તે કહો :

(i) કોઈપણ એકી સંખ્યાનો ઘન બેકી સંખ્યા હોય.

(ii) પૂર્ણ ઘન સંખ્યાના અંતિમ બે અંકો શૂન્ય ન હોય.

(iii) જો કોઈ સંખ્યાનો વર્ગ કરતાં એકમનો અંક 5 આવે તો ઘન કરતાં મળતી સંખ્યાના છેલ્લા બે અંક 25 આવે.

(iv) એવી કોઈ પૂર્ણઘન સંખ્યા ના મળે કે જેનો એકમનો અંક 8 હોય.

(v) બે અંકોવાળી સંખ્યાનો ઘન કરતાં મળતી સંખ્યા ત્રણ અંકોની પણ હોય.

(vi) બે અંકોવાળી સંખ્યાનો ઘન કરતાં સાત કે તેથી વધુ અંકોની સંખ્યા પણ મળે.

(vii) એક અંકની સંખ્યાનો ઘન કરવાથી એક અંકની સંખ્યા પણ મળે.

3. જો તમને એમ કહેવામાં આવે કે 1331 એ પૂર્ણઘન સંખ્યા છે. શું તમે અવિભાજ્ય અવયવીકરણની પ્રક્રિયા વિના જ તેનું ઘનમૂળ શોધી શકો ? તેવી જ રીતે 4913, 12167, 32768ના ઘનમૂળનું અનુમાન કરો.

આપણે શું ચર્ચા કરી ?

1. સંખ્યાઓ જેવી કે 1729, 4104, 13832 એ **હાર્ડી-રામાનુજન સંખ્યા** તરીકે જાણીતી છે. આવી સંખ્યાને બે સંખ્યાઓના ઘનના સરવાળા તરીકે બે અલગ રીતે રજૂ કરી શકાય.

2. કોઈ સંખ્યાને તેની જ સાથે ત્રણ વાર ગુણવાથી મળતી સંખ્યાને તે **સંખ્યાનો ઘન** કહે છે

જેમ કે 1, 8, 27, ... વગેરે.

3. જો કોઈ સંખ્યાના અવિભાજ્ય અવયવીકરણમાં દરેક અવયવ ત્રણવાર આવે તો તેવી સંખ્યા **પૂર્ણઘન સંખ્યા** હોય છે.

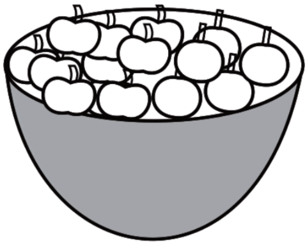
4. સંકેત ‘ $\sqrt[3]{\ }$ ’ ને ઘનમૂળ કહે છે. જેમ કે $\sqrt[3]{27} = 3$.

પ્રકરણ 8

રાશિઓની તુલના

8.1 ગુણોત્તર અને ટકાવારીનું પુનરાવર્તન

આપણને ખબર છે કે ગુણોત્તર એટલે બે રાશિઓની સરખામણી.
એક ટોપલીમાં બે પ્રકારનાં ફળો છે. તેમાં 20 સફરજન અને 5 નારંગી છે.
તો નારંગીની સંખ્યા અને સફરજનની સંખ્યાનો ગુણોત્તર = 5 : 20.



અપૂર્ણાંકનો ઉપયોગ કરી આ સરખામણી આ રીતે થઈ શકે $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

નારંગીની સંખ્યા એ સફરજનની સંખ્યા કરતાં $\frac{1}{4}$ જેટલી છે.

ગુણોત્તરના રૂપમાં તે 1 : 4 લખાય અને ''1 જેમ 4'' એમ વંચાય છે.

અથવા

સફરજનની સંખ્યા અને નારંગીની સંખ્યાનો ગુણોત્તર $\frac{20}{5} = \frac{4}{1}$ એટલે કે સફરજનની સંખ્યા એ નારંગીની સંખ્યા કરતાં 4 ગણી છે.
આ સરખામણી ટકાવારી દ્વારા પણ થઈ શકે છે.

અહીં 25 ફળો પૈકી 5 નારંગી છે, તેથી નારંગીની ટકાવારી $\frac{5}{25} \times \frac{4}{4} = \frac{20}{100} = 20\%$ [છેદમાં 100 લાવવા]	અથવા	ત્રિરાશીની રીતે : અહીં 25 ફળો પૈકી નારંગીની સંખ્યા 5 છે, તેથી 100 ફળોમાંથી નારંગીની સંખ્યા $\frac{5}{25} \times 100 = 20$

આમ, ટોપલીમાં માત્ર સફરજન અને નારંગી જ હોય

તો સફરજનની ટકાવારી + નારંગીની ટકાવારી = 100
અથવા સફરજનની ટકાવારી + 20 = 100
અથવા સફરજનની ટકાવારી = 100 – 20 = 80
એટલે કે ટોપલીમાં 20% નારંગી અને 80% સફરજન છે.

ઉદાહરણ 1 : શાળામાં ધોરણ VII માટે પ્રવાસ નક્કી કરવામાં આવે છે. જેમાં કુલ વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યામાંથી 60% છોકરીઓ છે અને તેમની સંખ્યા 18 છે.
પ્રવાસનું સ્થળ શાળાથી 55 કિમી દૂર છે અને પરિવહન સંસ્થા ₹ 12 પ્રતિ કિમી વસૂલ કરે છે. અલ્પાહારની કુલ કિંમત ₹ 4280 છે.

શું તમે કહી શકશો કે,

1. વર્ગમાં છોકરીઓની સંખ્યા અને છોકરાઓની સંખ્યાનો ગુણોત્તર કેટલો ?
2. જો બે શિક્ષકો વર્ગ સાથે જતાં હોય તો વ્યક્તિ દીઠ ખર્ચ કેટલો ?
3. જો પ્રવાસનું પ્રથમ વિરામ સ્થળ 22 કિમી દૂર હોય તો તે પ્રવાસના કુલ 55 કિમીના કેટલા ટકા થાય ? પ્રવાસમાં બાકી રહેલ અંતરની ટકાવારી શું થાય ?

ઉકેલ :

1. છોકરીઓ અને છોકરાઓનો ગુણોત્તર શોધવા માટે

આશિમા અને જ્હોન નીચે મુજબ જવાબ આપે છે.

તેમણે છોકરાઓની સંખ્યા અને વિદ્યાર્થીઓની કુલ સંખ્યા શોધવાની છે.

આશિમાની રીત

ધારો કે, વિદ્યાર્થીઓની કુલ સંખ્યા x છે.

x ના 60% છોકરીઓ છે.

$\therefore$ x ના 60% = 18

$\frac{60}{100} \times x = 18$

અથવા $x = \frac{18 \times 100}{60} = 30$

વિદ્યાર્થીઓની કુલ સંખ્યા = 30

અથવા

જ્હોને ત્રિરાશિની રીત વાપરી

100 વિદ્યાર્થીઓમાંથી 60 છોકરીઓ છે.

$\frac{100}{60}$ વિદ્યાર્થીઓમાંથી 1 છોકરી છે,

તો કેટલા વિદ્યાર્થીઓમાંથી 18 છોકરીઓ હશે ?

વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા $= \frac{100}{60} \times 18$

$= 30$

તેથી છોકરાઓની સંખ્યા = 30 − 18 = 12

હવે, છોકરીઓની સંખ્યા અને છોકરાઓની સંખ્યાનો ગુણોત્તર 18 : 12 અથવા $\frac{18}{12} = \frac{3}{2}$ હશે.

જેને 3 : 2 લખાય અને "3 જેમ 2" વંચાય છે.

2. વ્યક્તિ દીઠ કિંમત શોધવા :

પરિવહનનો ખર્ચ= કુલ અંતર બંને તરફનું × ભાવ

= ₹ (55 × 2) × ₹ 12

= ₹ 110 × 12

= ₹ 1320

કુલ ખર્ચ = અલ્પાહારનો ખર્ચ + પરિવહનનો ખર્ચ

= ₹ 4280 + ₹ 1320

= ₹ 5600

કુલ વ્યક્તિઓ= 18 છોકરીઓ + 12 છોકરાઓ + 2 શિક્ષકો

= 32 વ્યક્તિઓ

પછી, આશિમા અને જ્હોને ત્રિરાશિની રીત વાપરીને માથા દીઠ કિંમત શોધી.

32 વ્યક્તિ માટે વપરાયેલી રકમ = ₹ 5600

તો એક વ્યક્તિ માટે વપરાયેલી રકમ $= \frac{5600}{32}$ = ₹ 175

3. પ્રથમ વિરામ સ્થળનું અંતર = 22 કિમી.

અંતરની ટકાવારી શોધવા માટે

આશિમાની રીત		જ્હોને ત્રિરાશિની રીત વાપરી
$\frac{22}{55} = \frac{22}{55} \times \frac{100}{100} = \frac{40}{100}$ $= 40\%$ [તેણે ગુણોત્તરનો ગુણાકાર $\frac{100}{100} = 1$ વડે કર્યો અને ટકાવારીમાં રૂપાંતર કર્યું.]	અથવા	55 કિમીમાંથી 22 કિમી. અંતર કાપ્યું. 1 કિમીમાંથી $\frac{22}{55}$ કિમી. અંતર કાપ્યું 100 કિમીમાંથી $\frac{22}{55} \times 100$ કિમી અંતર કાપ્યું કુલ અંતરનું 40% અંતર કાપ્યું.

બંને જવાબ સરખા છે. આમ, તેઓ જે સ્થળે પહોંચ્યા છે તે સ્થળનું શાળાથી અંતર (કુલ અંતરના) 40% છે.

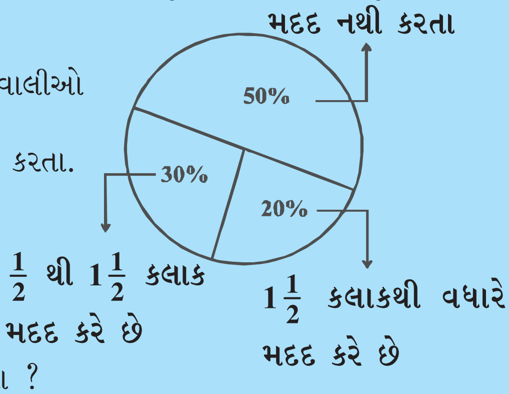
$\therefore$ બાકીના અંતરની ટકાવારી

$= 100\% - 40\% = 60\%$

પ્રયત્ન કરો

એક પ્રાથમિક શાળાના વિદ્યાર્થીઓના વાલીઓને પૂછવામાં આવ્યું કે તેઓ એક દિવસમાં કેટલા કલાક તેઓના બાળકોને ગૃહકાર્યમાં મદદ કરે છે ?

90 વાલીઓ એવા હતા કે જેઓ પોતાના બાળકને $\frac{1}{2}$ થી $1\frac{1}{2}$ કલાક મદદ કરે છે. બાજુની આકૃતિમાં વાલીઓ પોતાના બાળકને મદદ કરવા જે સમય ફાળવે છે, તેના પરથી તેઓનું (વાલીની સંખ્યાનું) વિભાજન કરેલ છે.



20% વાલીઓ $1\frac{1}{2}$ કલાકથી વધારે સમય મદદ કરે છે, 30% વાલીઓ $\frac{1}{2}$ થી $1\frac{1}{2}$ કલાક મદદ કરે છે અને 50% વાલીઓ મદદ નથી કરતા.

આ પરથી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(i) કુલ કેટલા વાલીઓને પૂછવામાં આવ્યું હતું ?

(ii) કેટલા વાલીઓ મદદ જ નહોતા કરતા ?

(iii) કેટલા વાલીઓ $1\frac{1}{2}$ કલાકથી વધારે સમય મદદ કરતા હતા ?

સ્વાધ્યાય 8.1

1. નીચે આપેલ સંખ્યાઓનો ગુણોત્તર શોધો.
   (a) સાયકલની ઝડપ 15 કિમી/કલાક અને સ્કૂટરની ઝડપ 30 કિમી/કલાક
   (b) 5 મીટર અને 10 કિમી (c) 50 પૈસા અને ₹ 5 રૂપિયા
2. નીચે આપેલ ગુણોત્તરોનું ટકાવારીમાં રૂપાંતર કરો.
   (a) 3 : 4 (b) 2 : 3
3. 25 વિદ્યાર્થીઓમાંથી 72% વિદ્યાર્થીઓ ગણિતમાં રસ લે છે, તો કેટલા વિદ્યાર્થી ગણિતમાં રસ લેતા નથી ?
4. એક ફૂટબૉલ ટીમ તેમણે રમેલી મૅચમાંથી 10 મૅચ જીતી હતી. જો તેમની જીતેલી મૅચની ટકાવારી 40% હોય તો તેઓ કુલ કેટલી મૅચ રમ્યા હશે ?
5. જો ચમેલી પાસે તેની રકમના 75% વાપર્યા પછી ₹ 600 બાકી રહ્યાં હોય, તો તેની પાસે શરૂઆતમાં કુલ કેટલી રકમ હશે ?

6. એક શહેરમાં કુલ વ્યક્તિમાંથી 60% વ્યક્તિઓને ક્રિકેટ , 30% વ્યક્તિઓને ફૂટબૉલ અને બાકીની વ્યક્તિઓને બીજી રમતો ગમે છે. જો શહેરમાં કુલ 50 લાખ વ્યક્તિઓ હોય તો પ્રત્યેક રમતમાં કુલ વ્યક્તિઓની સંખ્યા કેટલી હશે ?

8.2 ટકાવારીમાં વધારો કે ઘટાડો શોધવો

આપણને આપણા રોજિંદા જીવનમાં આવી જાણકારી મળતી રહે છે.

(i) છાપેલ કિંમતમાં 25% છૂટ (ii) પેટ્રોલની કિંમતમાં 10% વધારો

ચાલો, આપણે આવાં થોડાં વધુ ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 2 : ગયા વર્ષે એક સ્કૂટરની કિંમત ₹ 34,000 હતી. આ વર્ષે તેની કિંમતમાં 20% વધારો થયો, તો હાલ તેની કિંમત શું હશે ?

ઉકેલ :

અમિતા કહે છે કે તે પહેલા કિંમતમાં વધારો શોધશે જે ₹ 34,000ના 20% છે અને પછી નવી કિંમત શોધશે.

₹ 34,000નાં 20% = $\frac{20}{100}$ × ₹ 34,000

= ₹ 6800

નવી કિંમત = જૂની કિંમત + કિંમતમાં વધારો

= ₹ 34,000 + ₹ 6800

= ₹ 40,800

અથવા

સુનીતાએ ત્રિરાશિની રીત વાપરી.

20% વધારો એટલે ₹ 100ના ₹ 120

તેથી ₹ 34,000માં કેટલો વધારો ?

કિંમતમાં વધારો = ₹ $\frac{120}{100}$ × 34,000

= ₹ 40,800

આ રીતે કિંમતમાં ટકાવારીનો ઘટાડો શોધવા પહેલાં કુલ ઘટાડો શોધી અને પછી તેને તેની મૂળ કિંમતમાંથી બાદ કરો.

ધારો કે વેચાણ વધારવા માટે સ્કૂટરની મૂળ કિંમતમાં 5% ઘટાડો કરવામાં આવ્યો. તો ચાલો સ્કૂટરની નવી કિંમત શોધીએ.

સ્કૂટરની મૂળ કિંમત = ₹ 34,000

= ₹ 34,000ના 5%

= 34,000 × $\frac{5}{100}$ = ₹ 1700

નવી કિંમત = મૂળ કિંમત − ઘટાડો

= ₹ 34000 − ₹ 1700 = ₹ 32300

આમ, સ્કૂટરની નવી કિંમત ₹ 32,300 થાય.

8.3 વળતર શોધવું

વળતર એ વસ્તુની છાપેલ કિંમતમાં આપેલ ઘટાડો છે.

આમ તો વળતર ગ્રાહકોને વસ્તુઓ ખરીદવા માટે આકર્ષવા અથવા વસ્તુઓનું વેચાણ વધારવા માટે હોય છે.

આપણે, છાપેલી કિંમતમાંથી વેચાણ કિંમત બાદ કરીને વળતર શોધી શકીએ છીએ.

તેથી

વળતર = છાપેલી કિંમત − વેચાણ કિંમત

ઉદાહરણ 3 : એક વસ્તુની છાપેલી કિંમત ₹ 840 છે અને તેની વેચાણ કિંમત ₹ 714 છે, તો વળતર અને વળતરની ટકાવારી શું થાય ?

ઉકેલ : વળતર = છાપેલ કિંમત − વેચાણ કિંમત

= ₹ 840 − ₹ 714

= ₹ 126

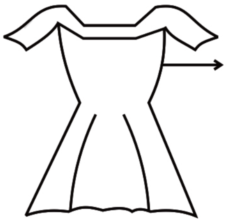
₹ 840ની છાપેલી કિંમત પર વળતર ₹ 126 છે.
₹ 100ની છાપેલી કિંમત પર વળતર કેટલું હશે ?

વળતરની ટકાવારી $= \frac{126}{840} \times 100$

$= 15\%$

ઉદાહરણ 4 : ફ્રોકની યાદી મુજબની કિંમત ₹ 220 છે. વેચાણ પર 20% વળતર નક્કી કરેલ છે. તો ફ્રોક પર વળતર અને તેની વેચાણ કિંમત શોધો.

ઉકેલ : યાદી મુજબની કિંમત અને છાપેલ કિંમત એક જ કહેવાય.
20% વળતર એટલે ₹ 100 (છા. કિં.) પર ₹ 20નું વળતર



ત્રિરાશિની રીતથી ₹ 1 પર વળતર ₹ $\frac{20}{100}$ છે.

તો ₹ 220 પર વળતર $= \frac{20}{100} \times 220 =$ ₹ 44

વેચાણ કિંમત = ₹ 220 − ₹ 44

= ₹ 176

રેહાનાએ વેચાણ કિંમત આ રીતે શોધી.

20% વળતર એટલે ₹ 100ની વેચાણ કિંમત પર ₹ 20નું વળતર. તેથી વેચાણ કિંમત ₹ 80 થશે.

ત્રિરાશિની રીતથી ₹ 100ની છાપેલી કિંમત હોય ત્યારે વેચાણ કિંમત ₹ 80 થશે.

જ્યારે છાપેલી કિંમત ₹ 1 હોય ત્યારે વેચાણ કિંમત ₹ $\frac{80}{100}$ થશે.

તો જ્યારે છાપેલી કિંમત ₹ 220 હોય ત્યારે વેચાણ કિંમત = ₹ $\frac{80}{100} \times$ ₹ 220 = ₹ 176

પ્રયત્ન કરો

1. એક દુકાનદાર 20% વળતર આપે છે, તો નીચે આપેલી વસ્તુઓની વેચાણ કિંમત શું થશે ?
   (a) એક ડ્રેસ જેની છાપેલી કિંમત ₹ 120 છે.
   (b) એક જોડી બૂટ જેની છાપેલી કિંમત ₹ 750 છે.
   (c) એક થેલો જેની છાપેલી કિંમત ₹ 250 છે.
2. એક ટેબલ જેની છાપેલી કિંમત ₹ 15000 છે તે ₹ 14,400માં મળે છે. તેના પર મળેલ વળતર અને વળતરની ટકાવારી શોધો.
3. એક કબાટ 5% વળતર આપી ₹ 5,225માં વેચેલ છે તો તેની છાપેલ કિંમત શોધો.

8.3.1 ટકાવારીમાં અંદાજો

એક દુકાનનું તમારું બિલ ₹ 577.80 છે અને દુકાનદાર તમને 15% નું વળતર આપે છે. તમે ચૂકવવાના થતાં રૂપિયાનો અંદાજ કેવી રીતે મેળવશો ?

(i) ₹ 577.80ની રકમની નજીકના દશક સુધીની અંદાજિત કિંમત = ₹ 580

(ii) આ રકમના 10% શોધો.

અર્થાત્, ₹ $\frac{10}{100} \times 580$ = ₹ 58

(iii) આ રકમની અડધી રકમ એટલે $\frac{1}{2}$ × ₹ 58 = ₹ 29

(iv) (ii) અને (iii)ની રકમનો સરવાળો કરો. એટલે ₹ 87 મળશે.

આ રીતે તમને તમારા બિલમાં ₹ 87 અથવા ₹ 85 ની છૂટ મળી શકે અને બિલ પેટે ચૂકવવાની કિંમત આશરે ₹ 495 થશે.

(1) ઉપરોક્ત બિલ પર 20% લેખે વળતર શોધવાનો પ્રયત્ન કરો.

(2) ₹ 375ના 15% શોધવાનો પ્રયત્ન કરો.

8.4 વેચાણ અને ખરીદી સંબંધિત કિંમત (નફો અને ખોટ)

આ વખતે શાળાના મેળામાં હું ઇનામી વસ્તુનો સ્ટોલ રાખવાની છું. હું એક ઇનામી વસ્તુ માટે ₹ 10 વસૂલ કરીશ, જે હું ₹ 5માં ખરીદીશ.

તો તને 100% નફો મળશે.

ના, હું ₹ 3નો ખર્ચ ઇનામી વસ્તુના પેકિંગ માટે કરીશ. તેથી વસ્તુ દીઠ ખર્ચ ₹ 8 થશે. જેથી મને ₹ 2નો નફો થશે. જે $\frac{2}{8} \times 100 = 25\%$ છે.

ઘણીવાર કોઈ વસ્તુ ખરીદવામાં આવે ત્યારે તેને ખરીદવાનો અથવા વેચાણ પહેલા અમુક વધારાનો ખર્ચ લાગે છે. જે તેની મૂળ કિંમતમાં ઉમેરવો પડે છે.

આ ખર્ચને આપણે પડતર ખર્ચ (વધારાનો ખર્ચ) કહીએ છીએ અને પડતર ખર્ચ સહિતની ખરીદ કિંમતને પડતર કિંમત કહે છે. આવા ખર્ચમાં સામાન્ય રીતે પરિવહન ખર્ચ, મરામત ખર્ચ, મજૂરી ખર્ચ વગેરેનો સમાવેશ થાય છે.

8.4.1 મૂળ કિંમત અથવા વેચાણ કિંમત શોધવી, નફો % અથવા ખોટ % શોધવા

ઉદાહરણ 5 : સોહને એક જૂનું ફ્રીઝ ₹ 2500માં ખરીદ્યું. તેમાં તેણે ₹ 500નો ખર્ચ કર્યો અને ₹ 3300માં વેચ્યું. તો તેને થયેલ નફા અથવા ખોટની ટકાવારી શોધો.

ઉકેલ : મૂળ કિંમત (CP) = ₹ 2500 + ₹ 500 (વધારાનો ખર્ચ મૂળ કિંમતમાં ઉમેરતાં)

= ₹ 3000

વેચાણ કિંમત = ₹ 3300

અહીં, વેચાણ કિંમત > મૂળ કિંમત, તેથી નફો = ₹ 3300 – ₹ 3000 = ₹ 300

₹ 3000 પર તેને ₹ 300 નફો થયો. તો ₹ 100 પર કેટલો નફો થશે ?

નફો% = $\frac{300}{3000} \times 100\% = \frac{30}{3}\% = 10\%$

નફો % = $\frac{\text{નફો}}{\text{મૂ. કિં.}} \times 100$

પ્રયત્ન કરો

1. જો 5% નફો થતો હોય તો નીચેની વિગતો માટે વેચાણ કિંમત શોધો.
   (a) ₹ 700ની એક સાયકલ, ₹ 50ના વધારાના ખર્ચ સાથે
   (b) ₹ 1150માં ખરીદેલ ઘાસ કાપવાનું મશિન ₹ 50ના પરિવહન ખર્ચ સાથે.
   (c) ₹ 560માં ખરીદેલ પંખો, ₹ 40ના સમારકામના વધારાના ખર્ચ સાથે.

ઉદાહરણ 6 : એક દુકાનદારે ₹ 10 લેખે 200 વીજળીના ગોળા (Bulb) ખરીદ્યા. આમાંથી 5 વીજળીના ગોળા ઉડી ગયા અને ફેંકી દેવા પડ્યા. બાકીના ગોળાઓ ₹ 12 પ્રતિ ગોળા લેખે વેચાયા. નફો કે ખોટની ટકાવારી શોધો.

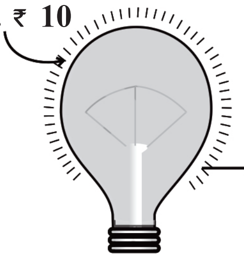
ઉકેલ : 200 વીજળીના ગોળાની મૂળ કિંમત = ₹ 200 × 10 = ₹ 2000

5 વીજળીના ગોળા ઉડી ગયા તેથી વધેલા ગોળાઓની સંખ્યા = 200 − 5 = 195

તેમને ₹ 12 પ્રતિ ગોળા લેખે વેચવામાં આવ્યા.

તેથી 195 વીજળીના ગોળાઓની વેચાણ કિંમત (વે. કિ.)

= ₹ 195 × ₹ 12 = ₹ 2340



તેણે ચોક્કસ નફો કર્યો છે. (વે. કિ. > મૂ. કિ.)

નફો = ₹ 2340 − ₹ 2000 = ₹ 340

₹ 2000 પર ₹ 340નો નફો થયો તો ₹ 100 પર કેટલો નફો થશે ?

નફો % = $\frac{340}{2000} \times 100 = 17\%$

ઉદાહરણ 7 : મીનુએ બે પંખા ₹ 1200 લેખે ખરીદ્યા. તેણે એક પંખો 5% ની ખોટ સાથે અને બીજો 10%ના નફા સાથે વેચ્યો. બન્નેની વેચાણ કિંમત શોધો. કુલ નફો અથવા ખોટ પણ શોધો.

ઉકેલ : એક પંખાની મૂળ કિંમત = ₹ 1200

એક પંખો 5% ખોટ સાથે વેચે છે.

એટલે કે જો મૂ. કિં. = ₹ 100 તો વે. કિં. = ₹ 95

∴ જ્યારે મૂ. કિં. ₹ 1200 હોય, ત્યારે વે. કિં. = $\frac{95}{100} \times 1200$ = ₹ 1140

બીજો પંખો 10% નફા સાથે વેચે છે એટલે કે જો મૂ. કિં. = ₹ 100
તો વે. કિં. = ₹ 110

∴ જ્યારે મૂ. કિં. = ₹ 1200 હોય, ત્યારે વે. કિં. = $\frac{110}{100} \times 1200$ = ₹ 1320

શું સમગ્ર રીતે નફો થયો કે ખોટ ?

આપણે મૂ. કિં. અને વે. કિં.ને સંયુક્ત રીતે શોધીને કહી શકીએ કે સમગ્ર રીતે નફો થયો કે ખોટ.

કુલ મૂ. કિં. = ₹ 1200 + ₹ 1200 = ₹ 2400

કુલ વે. કિં. = ₹ 1140 + ₹ 1320 = ₹ 2460

અહીં કુલ વે. કિં. > કુલ મૂ. કિં.

તેથી નફો = ₹ 2460 − ₹ 2400 = ₹ 60 ∴ ₹ 60નો નફો થયો.

પ્રયત્ન કરો

1. એક દુકાનદારે દરેકના ₹ 10,000 લેખે બે ટી.વી. (TV) ખરીદ્યા. તે પૈકી એક 10%ના નફા સાથે અને બીજું 10%ની ખોટ સાથે વેચે છે. તેને સમગ્ર રીતે નફો થયો કે ખોટ તે શોધો.

8.5 GST (Goods and Service Tax) આધારિત પ્રશ્નો

શિક્ષકે વર્ગમાં બીલ બતાવી જેમાં નીચે મુજબનાં શિર્ષકો લખેલાં હતાં.

બીલ નંબર		તારીખ		
વિગત				
અનુક્રમ નંબર	વસ્તુ	જથ્થો	દર	મૂલ્ય
		બીલની રકમ = GST (5%)		
	કુલ			

વેચાણ કર (ST - Sales Tax) એ કોઈ પણ વસ્તુના વેચાણ ઉપર સરકાર દ્વારા વસુલવામાં આવતો કર છે. આ કર ગ્રાહક પાસેથી દુકાનદાર વસુલી અને સરકારમાં જમા કરાવે છે તે હમેંશા વસ્તુની વે.કિં. ઉપર જ ગણાય છે. જ્યારે મૂલ્ય વર્ધિત કર (VAT - Value Added Tax) એ વસ્તુની કિંમતમાં જ સમાવિષ્ટ હોય છે. તે અલગથી વસુલવામાં આવતો નથી.

1 જુલાઈ, 2017 થી ભારત સરકારે ST, VAT, ... વિગેરે જેવા વિવિધ કરને બદલે એક જ પ્રકારનો કર લાગુ પાડેલ છે. જે વસ્તુ અને સેવા કર (GST - Goods And Service Tax) ના નામથી ઓળખાય છે. આ કર વસ્તુની કિંમત અથવા સેવા અથવા બંને ઉપર વસુલવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ 8 : એક દુકાનમાં પૈડાંવાળા બૂટની એક જોડની કિંમત ₹ 450 હતી. તેના પર 5% GST લેવામાં આવ્યો. તો બિલની રકમ શોધો.

ઉકેલ : ₹ 100 પર ₹ 5નો GST લેવામાં આવ્યો હતો,

તો ₹ 450 પર કેટલો GST ભરવો પડે $= \frac{5}{100} \times 450$

$= ₹\ 22.50$

બિલ કિંમત = વસ્તુની કિંમત + GST = 450 + 22.50 = ₹ 472.50

ઉદાહરણ 9 : વહીદા ₹ 2240માં 12% GST સાથે એરકૂલરની ખરીદી કરે છે. તો ટેક્ષ લાગ્યા પહેલાની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : કિંમતમાં GST ઉમેરાય છે.

12% GST એટલે જો GST લગાવ્યા પહેલાની કિંમત ₹ 100 હોય તો GST લગાવ્યા સાથેની કિંમત ₹ 112 થાય.

હવે GST સાથેની કિંમત ₹ 112 ત્યારે મૂળકિંમત ₹ 100 હોય.

તો જ્યારે GST સાથેની કિંમત ₹ 2240 હોય તો મૂળકિંમત = ₹ $\frac{100}{112} \times 2240$ = ₹ 2000

ઉદાહરણ 10 : સલીમ એક વસ્તુ ₹ 784માં ખરીદે છે. જેમાં 12% GST સામેલ છે. તો GST ઉમેર્યા પહેલા આ વસ્તુની કિંમત શું હશે ?

ઉકેલ : ધારો કે વસ્તુની મૂ.કિ. ₹ 100 છે. GST = 12% છે.

$\therefore$ GST સહિત વસ્તુની કિંમત = ₹ (100 + 12) = ₹ 112

આમ, વે.કિં. ₹ 112 હોય તો મૂ.કિં. = ₹ 100

$\therefore$ વે.કિં. ₹ 784 હોય તો મૂ.કિં. = ₹ $(\frac{100}{112} \times 784)$ = ₹ 700 થાય.

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

1. કોઈ સંખ્યાની બમણી સંખ્યા એ 100%નો વધારો છે. જો આપણે તે સંખ્યાનો અડધો ભાગ લઈએ તો ટકાવારીમાં કેટલો ઘટાડો થશે ?
2. ₹ 2000 એ ₹ 2400 કરતાં કેટલા ટકા ઓછા છે ? ₹ 2400 એ ₹ 2000 કરતાં ટકાવારીમાં કેટલા વધુ છે ? શું બંને ફેરફાર સમાન છે ?

સ્વાધ્યાય 8.2

1. એક વ્યક્તિને તેના પગારમાં 10%નો વધારો મળ્યો. જો તેનો નવો પગાર ₹ 1,54,000 થયો હોય તો તેનો મૂળ પગાર શોધો.

2. રવિવારે 845 લોકોએ પ્રાણીસંગ્રહાલયની મુલાકાત લીધી. સોમવારે માત્ર 169 લોકો ગયા. તો સોમવારે પ્રાણીસંગ્રહાલયની મુલાકાત લેનાર લોકોની સંખ્યામાં કેટલા ટકા ઘટાડો થયો ?

3. એક દુકાનદાર ₹ 2400 માં 80 વસ્તુઓ ખરીદે છે અને તેને 16% નફા સાથે વેચે છે. તો એક વસ્તુની વેચાણ કિંમત શોધો.

4. એક વસ્તુની કિંમત ₹ 15,500 હતી. તેના પર ₹ 450નું સમારકામ કરવામાં આવ્યું. જો તેને 15% ના નફા સાથે વેચવામાં આવે તો તે વસ્તુની વેંચાણ કિંમત શોધો.

5. એક VCR અને TV ₹ 8000નું એક એમ ખરીદવામાં આવ્યા. દુકાનદારને VCR પર 4% ની ખોટ ગઈ અને TV પર 8% નો નફો થયો. તો આ વ્યવહારમાં થયેલ નફો કે ખોટ ટકાવારીમાં શોધો.

6. વેચાણ દરમ્યાન, એક દુકાનમાં બધી વસ્તુઓમાં છાપેલ કિંમત પર 10% વળતર મળતું હતું. તો એક ગ્રાહકને એક જોડી જીન્સ ₹ 1450 અને બે શર્ટ દરેકના ₹ 850ની છાપેલ કિંમત પર કેટલા રૂપિયા આપવા પડશે ?

7. દૂધવાળાએ પોતાની બે ભેંસ ₹ 20,000 લેખે વેચી. એક ભેંસ પર તેને 5% નફો અને બીજી ભેંસ પર તેને 10% ખોટ થઈ. તો સમગ્ર રીતે નફો કે ખોટ શોધો. (સૂચન : બન્નેની મૂળ કિંમત શોધો.)

8. એક T. V.ની કિંમત ₹ 13,000 છે. તેના પર 12% GST લગાડવામાં આવેલ છે. જો વિનોદને T.V. ખરીદવું હોય તો તેણે કેટલી રકમ ચૂકવવી પડે ?

9. અરુણે એક જોડી સ્કેટીંગ માટેના બૂટ 20%ના વળતર પર ખરીદ્યા. જો તેણે ₹ 1600 આપ્યા હોય તો તેની છાપેલ કિંમત શોધો.

10. મેં ₹ 5400 માં ''હેર-ડ્રાયર'' ખરીદ્યું. જેમાં 18% GST લાગ્યો હતો. GST પહેલાંની કિંમત શોધો.

11. એક વસ્તુ 18% GST સાથે ₹ 1239 માં ખરીદવામાં આવે છે. વસ્તુની છાપેલી કિંમત શોધો.

8.6 ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ

તમે આવાં વાક્યો સાંભળ્યાં જ હશે. જેમકે '' 'સ્થાયી થાપણ' (fixed deposit) માટે બેંકમાં 9% લેખે પ્રતિ વર્ષ વ્યાજ.'' અથવા ''બચત ખાતામાં પ્રતિ વર્ષ 5% વ્યાજ.''

વ્યાજ એટલે વધારાની રકમ જે આપણને બૅંક અને ડાકઘર જેવી સંસ્થા દ્વારા આપવામાં આવે છે (જ્યારે આપણે તેમાં પૈસા જમા કરીએ છીએ). લોકો જ્યારે પૈસા ઉધાર લે છે ત્યારે તેમણે વ્યાજ આપવું પડે છે. સાદું વ્યાજ ગણતાં આપણને આવડે છે.

ઉદાહરણ 10 : ₹ 10,000 ની રકમ, 15% પ્રતિ વર્ષ વ્યાજ લેખે 2 વર્ષ માટે ઉછીની લેવામાં આવી છે. આ રકમ પર સાદું વ્યાજ અને વ્યાજમુદલ શોધો.

ઉકેલ : ₹ 100 પર એક વર્ષનું વ્યાજ ₹ 15 થશે.

તો ₹ 10,000 પર વ્યાજ $= \frac{15}{100} \times$ ₹ 10,000 = ₹ 1500

2 વર્ષનું વ્યાજ = ₹ 1500 × 2 = ₹ 3000

બે વર્ષના અંતે આપવાની રકમ (વ્યાજમુદલ) = મુદલ + વ્યાજ

= ₹ 10,000 + ₹ 3000 = ₹ 13,000

પ્રયત્ન કરો

₹ 15,000નું 5% પ્રતિ વર્ષ વ્યાજ લેખે 2 વર્ષનું વ્યાજ અને વ્યાજ મુદલ શોધો.

મારા પપ્પાએ ડાકઘરમાં થોડા રૂપિયા 3 વર્ષ માટે મૂક્યા છે. દર વર્ષે આગલા વર્ષ કરતાં રૂપિયા વધે છે.

અમારી પાસે બૅંકમાં થોડા રૂપિયા છે. એમાં દર વર્ષે થોડું વ્યાજ ઉમેરાય છે. જે પાસબુકમાં જોઈ શકાય છે. આ વ્યાજ સરખું નથી, તે દર વર્ષે વધે છે.

સામાન્ય રીતે, જે વ્યાજ ચૂકવવામાં કે આપવામાં આવે છે તે ક્યારેય સાદું નથી હોતું. આ વ્યાજની ગણતરી આગલા વર્ષના વ્યાજમુદલ પર કરવામાં આવે છે. આ વ્યાજને ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ કહેવાય છે.

ચાલો, એક ઉદાહરણ લઈએ અને વર્ષ દીઠ વ્યાજ શોધીએ. દર વર્ષે આપણી રકમ અથવા મુદલ બદલાશે.

ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજની ગણતરી

હીનાએ ₹ 20,000ની રકમ વાર્ષિક 8% ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજે લીધી. ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ અને જે રકમ 2 વર્ષના અંતે આપવી પડશે એ કુલ રકમ શોધો.

અસલમે તેના શિક્ષકને પૂછ્યું કે, ‘‘આનો અર્થ એમ કે તેણે વર્ષ-પ્રતિ વર્ષ (દર વર્ષનું) વ્યાજ શોધવું.’’ શિક્ષકે જવાબ આપ્યો ‘‘હા’’ અને અસલમને આ પ્રમાણે કરવા કહ્યું.

1. સાદું વ્યાજ એક વર્ષ માટે શોધો.
   પ્રથમ વર્ષના મુદલને આપણે P_1 કહીએ. અહીં P_1 = ₹ 20,000
   સાદું વ્યાજ (SI) = સાદું વ્યાજ 8% લેખે પ્રથમ વર્ષ માટે $= \frac{20000 \times 8}{100}$ = ₹ 1600
2. હવે, તેને આપેલ કે મેળવેલ વ્યાજમુદલ શોધો. આ આપણા માટે પછીના વર્ષની મુદલ બનશે.
   પ્રથમ વર્ષના અંતે રકમ = $P_1 + SI_1$ = ₹ 20,000 + ₹ 1600
   = ₹ 21,600 (બીજા વર્ષનું મુદલ)

3. ફરી આ રકમ પર બીજા વર્ષનું વ્યાજ શોધો.

SI_2 = સાદું વ્યાજ 8% લેખે બીજા વર્ષ માટે = ₹ $\frac{21600}{100} \times 8$

= ₹ 1728

4. બીજા વર્ષના અંતે મેળવેલ કે ચૂકવેલ વ્યાજમુદ્દલ શોધો.

બીજા વર્ષના અંતે વ્યાજમુદ્દલ = $P_2 + SI_2$

= ₹ 21600 + ₹ 1728

= ₹ 23328

કુલ વ્યાજ = ₹ 1600 + ₹ 1728

= ₹ 3328

રીટાએ પૂછ્યું આ રકમ સાદા વ્યાજ માટે જુદી હશે ? તો શિક્ષકે કહ્યું, ''બે વર્ષના અંતે વ્યાજ શોધો અને તમે પોતે જ ચકાસી લો.''

સાદું વ્યાજ બે વર્ષ માટે = $\frac{20000 \times 8 \times 2}{100}$ = ₹ 3200

રીટાએ કહ્યું કે જ્યારે હીનાએ ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજે રકમ લીધી તો ₹ 128 વધારે આપવા પડ્યા.

ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ અને સાદા વ્યાજ વચ્ચેનો તફાવત જુઓ. આપણે ₹ 100 થી શરૂ કરીએ.

		સાદા વ્યાજ હેઠળ	ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ હેઠળ
પ્રથમ વર્ષ	મુદ્દલ	₹ 100.00	₹ 100.00
	10% વ્યાજ	₹ 10.00	₹ 10.00
	વર્ષાંતે કિંમત	₹ 110.00	₹ 110.00
બીજું વર્ષ	મુદ્દલ	₹ 100.00	₹ 110.00
	10% વ્યાજ	₹ 10.00	₹ 11.00
	વર્ષાંતે કિંમત	₹ (110 + 10) = ₹ 120	₹ 121.00
ત્રીજું વર્ષ	મુદ્દલ	₹ 110.00	₹ 121.00
	10% વ્યાજ	₹ 10.00	₹ 12.10
	વર્ષાંતે કિંમત	₹ (120 + 10) = ₹ 130	₹ 133.10

એટલે કે, તમે વ્યાજનું પણ વ્યાજ ચૂકવો છો.

અહીં, નોંધ લઈએ કે 3 વર્ષમાં,

સાદા વ્યાજમાં મળતું વ્યાજ = ₹ 130 − ₹ 100 = ₹ 30

ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજમાં મળતું વ્યાજ = ₹ 133.10 − ₹ 100 = ₹ 33.10

અહીં નોંધ લઈએ કે, સાદા વ્યાજમાં મુદ્દલની રકમ સરખી રહે છે, જ્યારે ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજમાં તે વર્ષ દીઠ બદલાય છે.

8.7 ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજના સૂત્રની તારવણી

ઝુબેદાએ શિક્ષકને પૂછ્યું, “શું ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ શોધવાનો કોઈ સરળ રસ્તો છે ?” શિક્ષકે કહ્યું, ‘ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ શોધવાનો સરળ રસ્તો છે. ચાલો તેને શોધવાનો પ્રયત્ન કરીએ.

ધારો કે P_1 એ રકમ છે, જેનું ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ R% પ્રતિ વર્ષ લેખે ગણવાનું છે.

તેથી P_1 = ₹ 5000, R = 5% પ્રતિ વર્ષ હવે ઉપરનાં સોપાનો પ્રમાણે

1. $SI_1 = ₹\ \frac{5000 \times 5 \times 1}{100}$ અથવા $SI_1 = ₹\ \frac{P_1 \times R \times 1}{100}$

$A_1 = ₹\ 5000 + \frac{5000 \times 5 \times 1}{100}$ અથવા $A_1 = P_1 + SI_1$

$= ₹\ 5000\left(1 + \frac{5}{100}\right) = P_2$

$= P_1 + \frac{P_1 R}{100}$

$= P_1\left(1 + \frac{R}{100}\right) = P_2$

2. $SI_2 = ₹\ 5000\left(1 + \frac{5}{100}\right) \times \frac{5 \times 1}{100}$ અથવા $SI_2 = \frac{P_2 \times R \times 1}{100}$

$= ₹\ \frac{5000 \times 5}{100}\left(1 + \frac{5}{100}\right)$

$= P_1\left(1 + \frac{R}{100}\right) \times \frac{R}{100}$

$= \frac{P_1 R}{100}\left(1 + \frac{R}{100}\right)$

$A_2 = ₹\ 5000\left(1 + \frac{5}{100}\right)$ અથવા $A_2 = P_2 + SI_2$

$+ \frac{5000 \times 5}{100}\left(1 + \frac{5}{100}\right)$

$= P_1\left(1+\frac{R}{100}\right) + \frac{P_1 R}{100}\left(1+\frac{R}{100}\right)$

$= ₹\ 5000\left(1+\frac{5}{100}\right)\left(1+\frac{5}{100}\right)$

$= P_1\left(1+\frac{R}{100}\right) \cdot \left[1+\frac{R}{100}\right]$

$= ₹\ 5000\left(\frac{1 + 5}{100}\right)^2 = P_3$

$= P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)^2 = P_3$

આ રીતે આગળ વધતાં, ‘*n*’ વર્ષના અંતે મળતી રકમ,

$$A_n = P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

અથવા આપણે એમ પણ કહી શકીએ.

$$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

તેથી ઝુબેદાએ કહ્યું, પણ આનો ઉપયોગ કરીને આપણે માત્ર n વર્ષના અંતે ચૂકવેલ રકમનું સૂત્ર મેળવી શકીએ અને ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજનું (CI) સૂત્ર મેળવી શકતા નથી.

અરુણાએ કહ્યું, આપણે જાણીએ છીએ કે CI = A – P તેથી આપણે ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ સહેલાઈથી શોધી શકીએ.

ઉદાહરણ 11 : ₹ 12600 પર 10% પ્રતિ વર્ષના દરે 2 વર્ષ માટે ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ શોધો.

ઉકેલ : આપણી પાસે $A = P\left(1 + \frac{R}{100}\right)^n$ છે. જ્યાં P = ₹ 12600, R = 10, $n = 2$

$$A = 12600\left(1 + \frac{10}{100}\right)^2 = ₹\ 12600\left(\frac{11}{10}\right)^2$$

$$= 12600 \times \frac{11}{10} \times \frac{11}{10} = ₹\ 15246$$

$$CI = A - P = ₹\ 15246 - ₹\ 12600 = ₹\ 2646$$

પ્રયત્ન કરો

1. ₹ 8000 પર 5% પ્રતિ વર્ષ વ્યાજ દરે 2 વર્ષ માટે ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ શોધો.

8.8 વાર્ષિક ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ દર અથવા અર્ધવાર્ષિક ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ દર

તમે જાણવા ઉત્સુક હશો કે શું કામ ‘વ્યાજ દર’ પછી ‘‘વાર્ષિક ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ’’ એમ દર્શાવવામાં આવે છે. શું આનો કોઈ અર્થ છે ?

હા છે, કારણ કે આપણી પાસે વ્યાજ દર અર્ધવાર્ષિક અથવા ત્રિમાસિક પણ હોઈ શકે. ચાલો જોઈએ શું થાય ? જો ₹ 100ને એક વર્ષ અથવા 6 મહિના માટે ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજે મૂકવામાં આવે તો,

સમયગાળો અને વ્યાજદર (જ્યારે ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ વાર્ષિક ન હોય)

જે સમયગાળા પછી તેટલા સમયના વ્યાજને મુદ્દલમાં ઉમેરવામાં આવે તો તે સમયગાળાને રૂપાંતરિત સમયગાળો કહે છે. જ્યારે અર્ધવાર્ષિક ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ હોય ત્યારે રૂપાંતરિત સમયગાળા બે હોય છે. (દર 6 મહિને) આવી પરિસ્થિતિમાં અર્ધવાર્ષિક દર વાર્ષિક દર કરતાં અડધો થઈ જાય છે. ત્રિમાસિક ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ હોય ત્યારે આ રૂપાંતરિત ગાળો 4 વખત આવે છે અને ત્રિમાસિક વ્યાજ દર વાર્ષિક દર કરતાં $\frac{1}{4}$ થઈ જાય છે.

P = ₹ 100, 10% લેખે વાર્ષિક ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજે	P = ₹ 100, 10% લેખે અર્ધવાર્ષિક ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજે
સમયગાળો 1 વર્ષનો છે.	સમયગાળો છ મહિના અથવા $\frac{1}{2}$ વર્ષનો
$I = ₹\ \frac{100 \times 10 \times 1}{100} = ₹\ 10$	$I = ₹\ \frac{100 \times \boxed{10 \times \frac{1}{2}}}{100} = ₹\ 5$ (દર અડધો થઈ ગયો)
A = ₹ 100 + ₹ 10 = ₹ 110	A = ₹ 100 + ₹ 5 = ₹ 105 હવે આગલા 6 મહિના માટે P = ₹ 105
	તેથી $I = \frac{105 \times 10 \times \frac{1}{2}}{100} = ₹\ 5.25$ અને A = ₹ 105 + ₹ 5.25 = ₹ 110.25

તમે જોયું કે, જો ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજનો સમય અર્ધવાર્ષિક હોય તો વ્યાજ બે વખત ગણવું પડે, તેથી સમયગાળો બમણો અને દર અડધો થઈ જાય છે.

પ્રયત્ન કરો

સમયગાળો અને દર શોધો.

1. એક રકમ $1\frac{1}{2}$ વર્ષ માટે 8%ના દરે અર્ધવાર્ષિક ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજે લેવામાં આવે છે.
2. એક રકમ 2 વર્ષ માટે 4%ના દરે અર્ધવાર્ષિક ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજે લેવામાં આવે છે.

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

એક રકમ એક વર્ષ માટે 16% પ્રતિ વર્ષના દરે લેવામાં આવેલ છે. ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ દરનો સમય ત્રિમાસિક હોય તો એક વર્ષમાં કેટલીવાર વ્યાજની ગણતરી કરવામાં આવશે ?

ઉદાહરણ 12 : જો ₹ 12000ની લોન $1\frac{1}{2}$ વર્ષ માટે 10% અર્ધવાર્ષિક વ્યાજે લેવામાં આવી હોય, તો કુલ કેટલી રકમ પરત ચૂકવવી પડે ?

ઉકેલ :

પહેલા 6 મહિના માટેનું મુદ્દલ = ₹ 12,000	**પહેલા છ મહિના માટેનું મુદ્દલ = ₹ 12,000**
$1\frac{1}{2}$ વર્ષમાં ત્રણ અડધા વર્ષ હોય છે. ∴ વ્યાજની ગણતરી ત્રણ વખત થશે. વ્યાજ દર = 10%ના અડધા = 5% અડધા વર્ષે $A = P\left[1 + \frac{R}{100}\right]^n$ $= ₹\ 12,000 \left[1 + \frac{5}{100}\right]^3$ $= ₹\ 12,000 \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20}$ = ₹ 13,891.50	સમય = 6 મહિના = $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ વર્ષ દર = 10% $I = ₹\ \frac{12000 \times 10 \times \frac{1}{2}}{100} = ₹\ 600$ A = P + I = ₹ 12,000 + ₹ 600 = ₹ 12600 આ આગલા છ મહિના માટેનું મુદ્દલ છે. $I = ₹\ \frac{12600 \times 10 \times \frac{1}{2}}{100} = ₹\ 630$ ત્રીજા સમયગાળાનું મુદ્દલ = ₹ 12600 + ₹ 630 = ₹ 13,230 $I = ₹\ \frac{13230 \times 10 \times \frac{1}{2}}{100} = ₹\ 661.50$ A = P + I = ₹ 13230 + ₹ 661.50 = ₹ 13891.50

પ્રયત્ન કરો

ચૂકવવાની રકમ શોધો.

1. ₹ 2400નું 2 વર્ષના અંતે 5% ના વાર્ષિક દરે ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ
2. ₹ 1800નું 1 વર્ષના અંતે 8% ના ત્રિમાસિક દરે ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ

ઉદાહરણ 13 : શિક્ષકે મયુરીને પ્રશ્ન કર્યો કે, જો ₹ 10,000નું 1 વર્ષ અને 3 મહિના માટે $8\frac{1}{2}\%$ લેખે ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજે રોકાણ કર્યું હોય, તો તેનું ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ શોધો.

ઉકેલ : મયુરીએ સૌપ્રથમ સમયગાળાને વર્ષમાં રૂપાંતરિત કર્યો.

$$1 \text{ વર્ષ } 3 \text{ મહિના} = 1\frac{3}{12} \text{ વર્ષ} = 1\frac{1}{4} \text{ વર્ષ}$$

મયુરીએ બધી કિંમતો સૂત્રમાં મૂકી.

$$A = ₹\ 10,000 \left(1 + \frac{17}{200}\right)^{1\frac{1}{4}}$$

હવે તે મૂંઝાઈ. તેણે તેના શિક્ષકને પૂછ્યું કે ઘાતાંકમાં અપૂર્ણાંક હોય તો શું કરવું ?

શિક્ષકે તેને સૂચન આપ્યું કે પૂરા સમય માટે મુદ્દલ શોધો. અહીં 1 વર્ષ અને પછી આ મુદ્દલનો ઉપયોગ કરી બીજા $\frac{1}{4}$ વર્ષ માટે સાદું વ્યાજ શોધો.

$$A = ₹\ 10,000 \left(1 + \frac{17}{200}\right)$$

$$= ₹\ 10,000 \times \frac{217}{200} = ₹\ 10,850$$

હવે આ રકમને $\frac{1}{4}$ વર્ષ માટે મુદ્દલ તરીકે લઈ શકીએ. હવે આપણે ₹ 10,850નું સાદું વ્યાજ $\frac{1}{4}$ વર્ષ માટે શોધીએ.

$$SI = ₹\ \frac{10,850 \times \frac{1}{4} \times 17}{100 \times 2}$$

$$= ₹\ \frac{10,850 \times 1 \times 17}{800} = ₹\ 230.56$$

પ્રથમ વર્ષનું વ્યાજ $= ₹\ 10,850 - ₹\ 10,000 = ₹\ 850$

અને પછીના $\frac{1}{4}$ વર્ષ માટેનું વ્યાજ $= ₹\ 230.56$

કુલ ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ $= ₹\ 850 + ₹\ 230.56 = ₹\ 1080.56$

8.9 ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજના સૂત્રની ઉપયોગિતા

ઘણી પરિસ્થિતિઓ એવી છે જેમાં આપણે ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ(CI)માં વ્યાજમુદ્દલની ગણતરી કરવા માટેના સૂત્રનો ઉપયોગ કરી શકીએ. અહીં થોડાં ઉદાહરણો આપ્યાં છે.

(i) જનસંખ્યામાં વધારો (અથવા ઘટાડો)

(ii) જો વિકાસનો દર ખબર હોય તો બૅક્ટેરિયાનો વિકાસ જાણવા માટે.

(iii) કોઈ પણ વસ્તુનું મૂલ્ય જાણવા, જો મધ્યવર્તી વર્ષોમાં તેની કિંમતમાં વધારો અથવા ઘટાડો થતો હોય.

ઉદાહરણ 14 : એક શહેરની જનસંખ્યા વર્ષ 1997 માં 20,000 હતી. તે વર્ષ દીઠ 5%ના દરે વધતી હતી. તો વર્ષ 2000ના અંતે શહેરની જનસંખ્યા શોધો.

ઉકેલ : અહીં જનસંખ્યામાં પ્રતિ વર્ષ 5%નો વધારો થાય છે. તેથી દર નવા વર્ષે નવી જનસંખ્યા મળે છે. તેથી આપણે કહી શકીએ કે વધારો ચક્રવૃદ્ધિ છે.

વર્ષ 1998 ની શરૂઆતમાં જનસંખ્યા = 20,000 (આને આપણે પ્રથમ વર્ષનું મુદ્દલ ગણીશું)

5% નો વધારો = $\frac{5}{100} \times 20,000 = 1000$

વર્ષ 1999 માં જનસંખ્યા = $20000 + 1000 = 21000$ (આને બીજા વર્ષ માટે મુદ્દલ લઈશું.)

5% નો વધારો = $\frac{5}{100} \times 21000 = 1050$

વર્ષ 2000ની જનસંખ્યા = $21000 + 1050$

= 22050 (આને ત્રીજા વર્ષ માટે મુદ્દલ લઈશું.)

5% નો વધારો = $\frac{5}{100} \times 22050$

= 1102.5

વર્ષ 2000ના અંતે જનસંખ્યા = $22050 + 1102.5 = 23152.5$

અથવા, સૂત્રની રીતે

વર્ષ 2000ના અંતે જનસંખ્યા = $20000\left[1 + \frac{5}{100}\right]^3$

$= 2000 \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20}$

$= 23152.5$

તેથી અંદાજિત જનસંખ્યા = 23153

અરુણાએ પૂછ્યું કે ઘટાડો થયો હોય તો શું કરવું ? શિક્ષકે નીચે મુજબનું ઉદાહરણ આપ્યું.

ઉદાહરણ 15 : એક ટી.વી. ₹ 21,000 માં ખરીદવામાં આવ્યું હતું. એક વર્ષ પછી ટી.વી.ની કિંમતમાં 5% નો ઘટાડો થયો. એક વર્ષ પછીની ટી.વી.ની કિંમત શોધો.

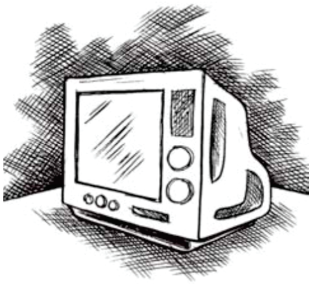
ઉકેલ :

મુદ્દલ = ₹ 21,000

ઘટાડો = વાર્ષિક ₹ 21,000ના 5%ના દરે

$$= \frac{21000 \times 5 \times 1}{100} = ₹\ 1050$$

એક વર્ષના અંતે ટી.વી.ની કિંમત = ₹ 21,000 – ₹ 1050 = ₹ 19,950



એકંદરે, આ ઉકેલ નીચે મુજબ સીધી રીતે મેળવી શકીએ.

એક વર્ષના અંતે ટી.વી.ની કિંમત $= ₹\ 21,000 \times \left(1 - \frac{5}{100}\right)$

$= ₹\ 21,000 \times \frac{19}{20} = ₹\ 19,950$

પ્રયત્ન કરો

1. ₹ 10,500 ની યંત્રસામગ્રીમાં 5% નો ઘટાડો થયો. તો એક વર્ષ પછી તેની કિંમત શોધો.
2. એક શહેરની હાલની જનસંખ્યા 12 લાખ છે, તેમાં પ્રતિ વર્ષ 4% નો વધારો થાય છે. તો બે વર્ષ પછી શહેરની જનસંખ્યા શોધો.

સ્વાધ્યાય 8.3

1. વ્યાજમુદ્દલ (Amount) અને ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજની ગણતરી કરો.

(a) ₹ 10,800, 3 વર્ષ માટે, $12\frac{1}{2}$% વાર્ષિક ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજે.

(b) ₹ 18,000, $2\frac{1}{2}$ વર્ષ માટે, 10% વાર્ષિક ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજે.

(c) ₹ 62,500, $1\frac{1}{2}$ વર્ષ માટે, 8% અર્ધવાર્ષિક ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજે.

(d) ₹ 8000, 1 વર્ષ માટે, 9% અર્ધવાર્ષિક ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજે.

(તમે સાદા વ્યાજના સૂત્ર પ્રમાણે વર્ષ દીઠ ગણતરી કરી શકો છો.)

(e) ₹ 10,000, 1 વર્ષ માટે, 8% અર્ધવાર્ષિક ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજે.

2. કમલાએ સ્કૂટર ખરીદવા બૅંકમાંથી ₹ 26,400 પ્રતિ વર્ષ 15%ના દરે ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજે લીધા. 2 વર્ષ અને 4 મહિના પછી ઉધાર ચૂકતે કરવા માટે તેણે કેટલી રકમ ચૂકવવી પડશે ?

(**સૂચન :** 2 વર્ષ માટે ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજની રીતે વ્યાજમુદ્દલ શોધો. આને ત્રીજા વર્ષનું મુદ્દલ ગણી $\frac{4}{12}$ વર્ષ માટે સાદું વ્યાજ શોધો.)

3. ફેબીનાએ ₹ 12500 ત્રણ વર્ષ માટે 12%ના દરે સાદા વ્યાજે ઉધાર લીધા અને રાધાએ એ જ રકમ એ જ સમય માટે 10%ના દરે ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજે ઉધાર લીધી. કોણ વધારે વ્યાજ ચૂકવશે ? કેટલું ?

4. મેં જમશેદ પાસેથી ₹ 12,000 સાદા વ્યાજે 6%ના દરે 2 વર્ષ માટે ઉધાર લીધા. જો મેં આ જ રકમ 6%ના દરે પ્રતિ વર્ષના ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજે લીધી હોત તો કેટલી વધારાની કિંમત ચૂકવવી પડી હોત ?

5. વાસુદેવન ₹ 60,000 ને 12%ના દરે પ્રતિ વર્ષ અર્ધવાર્ષિક ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજે રોકે છે, તો તેને

(i) 6 મહિના પછી

(ii) એક વર્ષ પછી કેટલી રકમ મળશે ?

6. આરીફે બૅંકમાંથી ₹ 80,000ની લોન લીધી. જો વ્યાજનો દર 10% પ્રતિ વર્ષ હોય, તો $1\frac{1}{2}$ વર્ષ પછી ચૂકવવાની થતી રકમનો તફાવત નીચે મુજબ શોધો.

(i) વાર્ષિક ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ

(ii) અર્ધવાર્ષિક ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ.

7. મારિયાએ ₹ 8000 વ્યવસાયમાં રોક્યા. તેને 5% પ્રતિ વર્ષના દરે કેટલું ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ મળશે તે શોધો.

(i) બીજા વર્ષના અંતે તેના નામે કેટલી રકમ જમા થશે ?

(ii) ત્રીજા વર્ષનું વ્યાજ શોધો.

8. જો ₹ 10,000 ને $1\frac{1}{2}$ વર્ષ માટે 10% ના દરે પ્રતિ વર્ષ અર્ધવાર્ષિક ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજે મૂકવામાં આવે. તો ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ અને વ્યાજમુદ્દલ શોધો. શું આ વ્યાજ તેના વાર્ષિક ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ કરતાં વધુ હશે ?

9. જો રામ ₹ 4096, 12% પ્રતિ વર્ષના દરે વ્યાજે આપશે તો તેને 18 મહિનાના અંતે કુલ કેટલી રકમ મળશે ? (અર્ધવાર્ષિક ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ છે.)

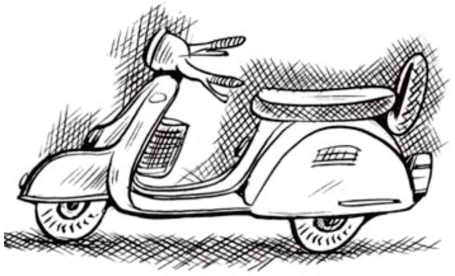
10. એક સ્થળની જનસંખ્યા વર્ષ 2003 માં 5% પ્રતિ વર્ષના દરે વધીને 54,000 થાય છે.

(i) 2001ની જનસંખ્યા શોધો.

(ii) 2005માં જનસંખ્યા શું હશે ?

11. એક પ્રયોગશાળામાં એક પ્રયોગમાં બક્ટેરિયાની સંખ્યા પ્રતિ કલાકે 2.5%ના દરે વધતી હતી, જો પહેલાં બૅક્ટેરિયાની સંખ્યા 5,06,000 હોય તો બે કલાક પછી બૅક્ટેરિયાની સંખ્યા કેટલી હશે ?

12. એક સ્કૂટર ₹ 42,000 માં ખરીદવામાં આવ્યું. તેની કિંમતમાં 8%ના દરે પ્રતિ વર્ષનો ઘટાડો આવ્યો. તો એક વર્ષના અંતે તેની કિંમત શોધો.



આપણે શું ચર્ચા કરી ?

1. વળતર એટલે છાપેલી કિંમતમાં આપેલી છૂટ.

   વળતર = છાપેલી કિંમત – વેચાણ કિંમત

2. જ્યારે ટકાવારી આપી હોય ત્યારે વળતર શોધી શકાય.

   વળતર = છાપેલી કિંમત પર વળતરની ટકાવારી

3. વસ્તુ ખરીદ્યા બાદ જે વધારાનો ખર્ચ થયો હોય તેને મૂળ કિંમત સાથે જોડવામાં આવે છે તેને પડતર કિંમત કહે છે.

   પડતર કિંમત = ખરીદે કિંમત + વધારાનો ખર્ચ

4. જે તે વસ્તુના વેચાણ પર સરકાર દ્વારા વસુલવામાં આવતો કર એટલે વેચાણ કર. (ST)

   વેચાણ કર (ST) = બીલની રકમ પરનો કર (%માં)

5. GST અર્થાત્, વસ્તુ અને સેવા કર. આ કર વસ્તુની કિંમત કે સેવા કે બંને ઉપર વસુલ કરવામાં આવે છે.

6. ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ એવું વ્યાજ છે જેને ગણવા માટે આગળના વર્ષના વ્યાજમુદ્દલને મુદ્દલ તરીકે લેવામાં આવે છે. અર્થાત્ (A = P + I).

7. (i) વાર્ષિક ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ પ્રમાણે,

   $$\text{વ્યાજમુદ્દલ} = P \cdot \left(1 + \frac{R}{100}\right)^n; \quad \begin{cases} P = \text{મુદ્દલ}, R = \text{વ્યાજનો દર}, \\ n = \text{વર્ષની સંખ્યા} \end{cases}$$

   (ii) અર્ધવાર્ષિક ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ પ્રમાણે,

   $$\text{વ્યાજમુદ્દલ} = P \cdot \left(1 + \frac{R}{200}\right)^{2n} \quad \begin{cases} P = \text{મુદ્દલ}, \frac{R}{2} = \text{અર્ધવાર્ષિક દર} \\ 2n = \text{અડધાં વર્ષોની સંખ્યા} \end{cases}$$