બૈજિક પદાવલિઓ અને નિત્યસમ

પ્રકરણ 9

9.1 પદાવલિઓ એટલે શું ?

વિદ્યાર્થીમિત્રો, આપણે અગાઉનાં ધોરણમાં બૈજિક પદાવલિઓ (Algebraic Expressions)નો પરિચય મેળવ્યો છે.

ઉદાહરણ :

$$x + 3,\ 2y - 5,\ 3x^2,\ 4xy + 7 \text{ વગેરે....}$$

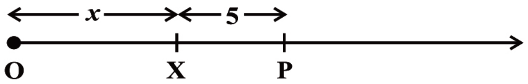
તમે આવી ઘણી પદાવલિઓ બનાવી શકો. તમે જાણો છો કે દરેક પદાવલિ ચલ અને અચલને સાંકળવાથી મળે છે. $2x + 3$માં ચલ x અને અચલ 2 અને 3 છે જ્યારે $4xy + 7$માં ચલ x, y અને અચલ 4, 7 છે.

વળી, આપણે એ પણ જાણીએ છીએ કે, પદાવલિમાં રહેલા ચલની કિંમત કોઈ પણ હોઈ શકે, જેને અનુરૂપ પદાવલિની કિંમત પણ બદલાતી રહે. ઉદાહરણ તરીકે, પદાવલિ $2y - 5$ માટે સમજીએ તો, જો $y = 2$ તો $2y - 5 = 2(2) -5 = (-1)$, $y = 0$ તો $2y - 5 = 2(0) -5 = (-5)$ વગેરે.

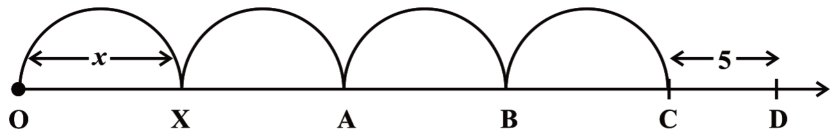
આમ, ચલ yની કિંમત બદલાય તો તેને અનુરૂપ પદાવલિ $2y - 5$ની કિંમત પણ બદલાય. તો હવે, yની અન્ય કિંમતો લઈને પદાવલિ $2y - 5$ની વિવિધ કિંમત મેળવવા પ્રયત્ન કરો.

સંખ્યારેખા દ્વારા રજૂઆત

સંખ્યારેખા પર ચલ xની વિવિધ કિંમતો માટે પદાવલિની કિંમત શું હોઈ શકે તે સમજવા આપણે પદાવલિ $x + 5$નું ઉદાહરણ લઈએ.



ઉપરોક્ત આકૃતિ પરથી ખ્યાલ આવે છે કે, ચલ xનું સ્થાન X ઉપર છે તો તેને અનુરૂપ પદાવલિ $x + 5$નું સ્થાન P ઉપર જશે. અર્થાત્, X બિંદુથી 5 એકમ જમણી તરફ. આ જ રીતે પદાવલિ $x - 4$ માટે વિચારીએ તો X થી 4 એકમ ડાબી તરફ મળે. જો પદાવલિ $4x + 5$ માટે લઈએ તો, સૌપ્રથમ $4x$નું સ્થાન સુનિશ્ચિત કરવું પડે અને ત્યાર બાદ $4x + 5$નું સ્થાન નિશ્ચિત કરી શકાય.



ઉપરોક્ત આકૃતિમાં જોઈ શકાય છે કે, જો ચલનું સ્થાન બિંદુ X પર નિશ્ચિત કરીએ તો $4x$નું સ્થાન બિંદુ C પર અને પદાવલિ $4x + 5$નું સ્થાન બિંદુ D પર સુનિશ્ચિત થશે. ઉપરોક્ત બંને આકૃતિમાં ચલની ધન કિંમત લીધેલ છે. અર્થાત્ $x > 0$ છે. આપણે $x < 0$ અર્થાત્ ઋણ કિંમત માટે પણ વિચારી શકીએ.

પ્રયત્ન કરો

1. એક ચલ ધરાવતી વિવિધ પદાવલિનાં પાંચ ઉદાહરણ આપો.
2. બે ચલ ધરાવતી વિવિધ પદાવલિનાં પાંચ ઉદાહરણ આપો.
3. સંખ્યારેખા ઉપર x, $x - 4$, $2x + 1$, $3x - 2$ દર્શાવો.

9.2 પદ, અવયવ અને સહગુણક (Terms, Factors and Coefficients)

પદાવલિ $4x + 5$માં $4x$ અને 5 એમ બે પદો છે. એટલે કે પદોને '+' કે '–' વડે જોડવાથી પદાવલિ મળે છે. આ પદ પોતે પણ બે કે તેથી વધુ અવયવોનો ગુણાકાર હોઈ શકે. અહીં, પદ $4x$ એ 4 અને xનો ગુણાકાર છે. આમ, 4 અને x એ $4x$નાં અવયવ બને. તથા 5 એ સાંખ્યિક પદ છે.

પદાવલિ $7xy - 5x$ માં $7xy$ અને $-5x$ એમ બે પદ છે. પદ $7xy$ એ 7, x અને y એમ ત્રણ અવયવોનો ગુણાકાર છે જેમાં સાંખ્યિક અવયવને જે-તે પદનો સાંખ્યિક સહગુણક અથવા સહગુણક કહેવામાં આવે છે. પદ $-7xy$ માં 7 ને સહગુણક અને પદ $-5x$ માં -5 ને સહગુણક કહે છે.

પ્રયત્ન કરો

પદાવલિ $x^2y^2 - 10x^2y + 5xy^2 - 20$ના દરેક પદના સહગુણક ઓળખો.

9.3 એકપદી, દ્વિપદી અને બહુપદી

જે પદાવલિમાં માત્ર એક જ પદ હોય તેવી પદાવલિને એકપદી (monomial) કહેવામાં આવે છે. આ જ રીતે બે પદ ધરાવતી પદાવલિને દ્વિપદી (binomial) કહે છે અને ત્રણ પદ ધરાવતી પદાવલિને ત્રિપદી (trinomial) કહે છે.

વ્યાપક સ્વરૂપે જોઈએ તો,

એક કે તેથી વધુ પદો કે જેના સહગુણકો શૂન્ય ન હોય (અને ચલના ઘાતાંક અનૃણ હોય) તેને બહુપદી કહેવાય. આમ, બહુપદીમાં પદોની સંખ્યા એક કે તેથી વધુ ગમે તેટલી હોઈ શકે.

ઉદાહરણ તરીકે,

એક પદી : $4x^2$, $3xy$, $-7z$, $5xy^2$, $10y$, -9, $82mnp$ વગેરે...

દ્વિપદી : $a + b$, $4l + 5m$, $a + 4$, $5 - 3xy$, $z^2 - 4y^2$ વગેરે...

ત્રિપદી : $a + b + c$, $2x + 3y - 5$, $x^2y - xy^2 + y^2$ વગેરે...

બહુપદી : $a + b + c + d$, $3xy$, $7xyz - 10$, $2x + 3y + 7z + 10$ વગેરે....

પ્રયત્ન કરો

1. નીચેની બહુપદીઓ પૈકી કઈ બહુપદી એકપદી, દ્વિપદી કે ત્રિપદી છે તે ઓળખો.
$-z + 5$, $x + y + z$, $y + z + 100$, $ab - ac$, 17

2. ઉદાહરણ આપો :
(a) માત્ર એક જ ચલ 'x' હોય તેવી 3 દ્વિપદી.
(b) ચલ 'x' અને 'y' હોય તેવી 3 દ્વિપદી.
(c) ચલ 'x' અને 'y' હોય તેવી 3 એકપદી.
(d) 4 કે તેથી વધુ પદો ધરાવતી 2 બહુપદી.

9.4 સજાતીય અને વિજાતીય પદો

નીચેની પદાવલિઓનું અવલોકન કરો.

$7x$, $14x$, $-13x$, $5x^2$, $7y$, $7xy$, $-9y^2$, $-9x^2$, $-5yx$

ઉપરોક્ત પદાવલિઓ પૈકી સજાતીય પદો લઈએ તો,

(i) $7x$, $14x$, $-13x$ સજાતીય પદો છે.
(ii) $5x^2$ અને $(-9x^2)$ પણ સજાતીય (Like Terms) પદો છે.
(iii) $7xy$ અને $(-5yx)$ પણ સજાતીય પદો છે.

વિચારો....

શા માટે $7x$ અને $7y$ સજાતીય પદો નથી ?
શા માટે $7x$ અને $7xy$ સજાતીય પદો નથી ?
શા માટે $7x$ અને $5x^2$ સજાતીય પદો નથી ?

પ્રયત્ન કરો

નીચેનાં પદો પરથી બે સજાતીય પદો લખો :

(i) $7xy$ (ii) $4mn^2$ (iii) $2l$

9.5 બૈજિક પદાવલિઓના સરવાળા-બાદબાકી

આપણે અગાઉના ધોરણમાં બૈજિક પદાવલિઓના સરવાળા અને બાદબાકી શીખી ગયા છીએ.

ઉદાહરણ તરીકે, $7x^2 - 4x + 5$ અને $9x - 10$નો સરવાળો કરવા,

$$\begin{array}{rrrr} & 7x^2 & -\ 4x & +\ 5 \\ + & & 9x & -\ 10 \\ \hline & 7x^2 & +\ 5x & -\ 5 \end{array}$$

ઉપરોક્ત ગણતરીમાં આપણે કેવી રીતે સરવાળો કર્યો તેનું અવલોકન કરો. આપણે દરેક પદાવલિને હાર (Row) સ્વરૂપે અલગ લખીએ છીએ. આવું કરતી વખતે સજાતીય પદોને એકની નીચે એક એમ ગોઠવી સરવાળો કરીએ છીએ. આ માટે, $5 + (-10) = +5 - 10 = -5$ તે જ રીતે, $-4x + 9x = (-4 + 9)x = + 5x$. ચાલો, થોડા વધુ દૃષ્ટાંત જોઈએ.

ઉદાહરણ 1 : $7xy + 5yz - 3zx$, $4yz + 9zx - 4y$ અને $-3xz + 5x - 2xy$નો સરવાળો કરો.

ઉકેલ : સૌપ્રથમ આપણે ઉપરોક્ત ત્રણે પદાવલિઓના દરેક પદને એવી રીતે અલગ હારમાં ગોઠવીશું કે જેથી દરેક સજાતીય પદો એકબીજાની ઉપર-નીચે રહે.

$$\begin{array}{rrrrrr} & 7xy & +\ 5yz & -\ 3zx & & \\ + & & 4yz & +\ 9zx & & -\ 4y \\ + & -2xy & & -\ 3zx & +\ 5x & \\ \hline & 5xy & +\ 9yz & +\ 3zx & +\ 5x & -\ 4y \end{array}$$

આમ, પદાવલિઓનો સરવાળો $5xy + 9yz + 3zx + 5x - 4y$ મળે. અહીં આપણે નોંધ લઈએ કે, બીજી પદાવલિમાં $-4y$ અને ત્રીજી પદાવલિમાં $5x$ અલગ દર્શાવ્યા છે (શા માટે ?) કારણ કે આ બંને પદોના સજાતીય પદો બાકીની પદાવલિઓમાં નથી.

ઉદાહરણ 2 : $7x^2 - 4xy + 8y^2 + 5x - 3y$માંથી $5x^2 - 4y^2 + 6y - 3$ બાદ કરો.

ઉકેલ :

$$\begin{array}{rrrrrr} 7x^2 & -\ 4xy & +\ 8y^2 & +\ 5x & -\ 3y & \\ 5x^2 & & -\ 4y^2 & & +\ 6y & -\ 3 \\ (-) & & (+) & & (-) & (+) \\ \hline 2x^2 & -\ 4xy & +\ 12y^2 & +\ 5x & -\ 9y & +\ 3 \end{array}$$

> અહીં આપણે નોંધીએ કે કોઈપણ સંખ્યાની બાદબાકી કરવી એટલે તે સંખ્યાની વિરોધી સંખ્યા ઉમેરવી. અહીં (-3) બાદ કરવા એટલે $+3$ ઉમેરવા. $6y$ બાદ કરવા એટલે $(-6y)$ ઉમેરવા. આ જ રીતે $(-4y^2)$ બાદ કરવા એટલે $4y^2$ ઉમેરવા બરાબર થાય. ત્રીજી હરોળમાં દર્શાવેલ નિશાનીઓ $(+, -)$ થી બીજી હરોળમાં રહેલા પદો સાથે કઈ ગાણિતિક ક્રિયા કરવી તે સ્પષ્ટ થાય છે.

સ્વાધ્યાય 9.1

1. નીચેની દરેક પદાવલિમાં રહેલ પદો અને સહગુણકો ઓળખો :

(i) $5xyz^2 - 3zy$ (ii) $1 + x + x^2$ (iii) $4x^2y^2 - 4x^2y^2z^2 + z^2$

(iv) $3 - pq + qr - rp$ (v) $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} - xy$ (vi) $0.3a - 0.6ab + 0.5b$

2. નીચેની બહુપદીઓનું એકપદી, દ્વિપદી કે ત્રિપદીમાં વર્ગીકરણ કરો. કઈ બહુપદી ઉપરોક્ત ત્રણમાંથી એક પણ પ્રકારમાં બંધ બેસતી નથી ?

$x + y$, 1000, $x + x^2 + x^3 + x^4$, $7 + y + 5x$, $2y - 3y^2$, $2y - 3y^2 + 4y^3$, $5x - 4y + 3xy$, $4z - 15z^2$, $ab + bc + cd + da$, pqr, $p^2q + pq^2$, $2p + 2q$

3. નીચેની બહુપદીઓના સરવાળા કરો :

(i) $ab - bc$, $bc - ca$, $ca - ab$

(ii) $a - b + ab$, $b - c + bc$, $c - a + ac$

(iii) $2p^2q^2 - 3pq + 4$, $5 + 7pq - 3p^2q^2$

(iv) $l^2 + m^2$, $m^2 + n^2$, $n^2 + l^2$, $2lm + 2mn + 2nl$

4. (a) $12a - 9ab + 5b - 3$માંથી $4a - 7ab + 3b + 12$ બાદ કરો.

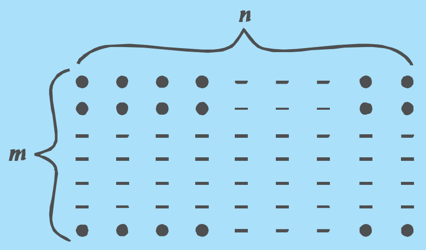
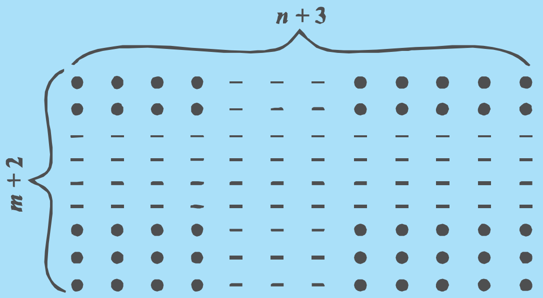
(b) $5xy - 2yz - 2zx + 10xyz$માંથી $3xy + 5yz - 7zx$ બાદ કરો.

(c) $18 - 3p - 11q + 5pq - 2pq^2 + 5p^2q$માંથી $4p^2q - 3pq + 5pq^2 - 8p + 7q - 10$ બાદ કરો.

9.6 બૈજિક પદાવલિઓના ગુણાકાર : પ્રસ્તાવના

(i) નીચે આપેલી બિંદુઓની ભાત જુઓ.

બિંદુઓની ભાત	કુલ બિંદુઓની સંખ્યા
● ●	4×9
● ●	5×7

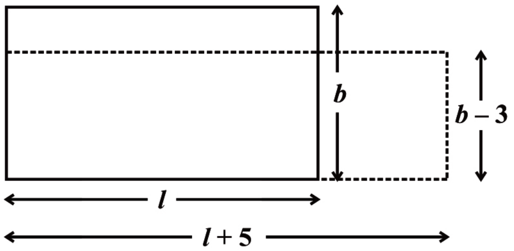
 $m \times n$	$m \times n$
	$(m + 2)\ (n + 3)$

> કુલ બિંદુઓની સંખ્યા શોધવા માટે આપણે હારની સંખ્યા (*m*) સાથે સ્તંભની સંખ્યા (*n*)નો ગુણાકાર કરવો પડે.

> અહીં હારની સંખ્યામાં 2નો વધારો થાય છે. અર્થાત્ (*m* + 2) અને સ્તંભની સંખ્યા 3 જેટલી વધે છે. અર્થાત્ (*n* + 3) થશે.

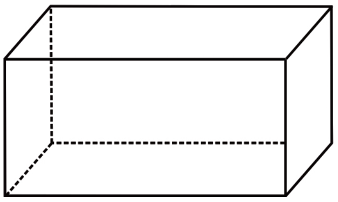
(ii) શું તમે અન્ય કોઈ એવી પરિસ્થિતિ વિચારી શકો જેમાં બે બૈજિક પદોનો ગુણાકાર કરવો પડે ?

અમીના : 'આપણે લંબચોરસના ક્ષેત્રફળ માટે વિચારી શકીએ.' લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ = $l \times b$, જ્યાં l એ લંબાઈ અને b એ પહોળાઈ છે. જો લંબાઈમાં 5 એકમનો વધારો કરીએ અર્થાત્ $(l + 5)$ લઈએ અને પહોળાઈમાં 3 એકમનો ઘટાડો કરીએ અર્થાત્ $(b - 3)$ લઈએ તો નવા લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ $(l + 5) \times (b - 3)$ (એકમ)^2 થશે.



> લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે આપણે બૈજિક પદોનો ગુણાકાર કરવો પડે જેવા કે $l \times b$ અથવા $(l + 5) \times (b - 3)$

(iii) શું તમે ઘનફળ વિશે વિચારી શકો ? (લંબઘનનું ઘનફળ એ તેની લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈનો ગુણાકાર છે.)



(iv) સરિતા એક ઉદાહરણ આપી સમજાવે છે કે, જ્યારે આપણે વસ્તુ ખરીદીએ છીએ ત્યારે કુલ ચૂકવવાની રકમ શોધવા ગુણાકાર કરવો પડે છે.

ઉદાહરણ : એક ડઝન કેળાની કિંમત = ₹ p

અને શાળા પ્રવાસ માટે જરૂરી કેળાં = z ડઝન

તો કુલ ચૂકવવાની રકમ = ₹ $p \times z$

ધારો કે કેળાંની કિંમતમાં ડઝન દીઠ ₹ 2નો ઘટાડો થાય છે અને જરૂરી કેળાંના જથ્થામાં 4 ડઝનનો ઘટાડો થાય છે.

તો, 1 ડઝન કેળાંની કિંમત = ₹ $(p - 2)$

અને કેળાંનો જરૂરી જથ્થો = $(z - 4)$ ડઝન થશે.

$\therefore$ કુલ ચૂકવવાની રકમ = ₹ $(p - 2) \times (z - 4)$

પ્રયત્ન કરો

વિદ્યાર્થીમિત્રો, શું તમે આવી કોઈ અન્ય પરિસ્થિતિઓ વિશે વિચારી બે ઉદાહરણ આપી શકો જેમાં આપણે બૈજિક પદાવલિઓનો ગુણાકાર કરવો પડે ?

[સૂચન : ● સમય અને ઝડપ માટે વિચારો.

● સાદું વ્યાજ શોધવા માટે મુદ્દલ અને વ્યાજના દર વગેરે માટે વિચારો.]

ઉપરનાં તમામ ઉદાહરણો માટે બે કે તેથી વધુ બૈજિક પદોનો ગુણાકાર કરવો પડે. જો કોઈ વિગત બૈજિક પદાવલિ સ્વરૂપે આપેલ હોય તો આપણે તે શોધવા ગુણાકાર કરવો પડે. મતલબ કે આપણે ગુણાકાર શા માટે કરવો ? કેમ કરવો ? તે જાણીએ છીએ. ચાલો આપણે આ પદ્ધતિસર કરીએ. શરૂઆતમાં આપણે બે એકપદીના ગુણાકાર કેવી રીતે કરવા તે જોઈશું.

9.7 એકપદીનો એકપદી સાથે ગુણાકાર

9.7.1 બે એકપદીનો ગુણાકાર

$4 \times x = x + x + x + x = 4x$

તે જ રીતે, $4 \times (3x) = 3x + 3x + 3x + 3x = 12x$

હવે, નીચેના ગુણાકાર જુઓ :

(i) $x \times 3y = x \times 3 \times y = 3 \times x \times y = 3xy$

(ii) $5x \times 3y = 5 \times x \times 3 \times y = 3 \times 5 \times x \times y = 15xy$

(iii) $5x \times (-3y) = 5 \times x \times (-3) \times y$

$= (-3) \times (5) \times x \times y$

$= (-15xy)$

અહીં, નોંધીએ કે બધા જ ગુણાકારના જવાબ : $3xy$, $15xy$ અને $(-15xy)$ પણ એકપદી જ છે.

થોડાં વધારે ઉપયોગી ઉદાહરણ નીચે મુજબ છે :

(iv) $5x \times 4x^2 = (5 \times 4)\ (x \times x^2)$

$= 20 \times x^3 = 20x^3$

(v) $5x \times (-4xyz) = (5 \times -4) \times (x \times xyz)$

$= -20 \times (x \times x \times yz)$

$= -20x^2yz$

અહીં, $5 \times 4 = 20$ અર્થાત્, પદાવલિના ગુણાકારનો સહગુણક = પ્રથમ એકપદીનો સહગુણક $\times$ બીજી એકપદીનો સહગુણક અને, $x \times x^2 = x^3$ અર્થાત્, પદાવલિના ગુણાકારનો બૈજિક અવયવ = પ્રથમ એકપદીનો બૈજિક અવયવ $\times$ બીજી એકપદીનો બૈજિક અવયવ

અહીં, આપણે એ અવલોકન કરવું જોઈએ કે બે પદાવલિના ગુણાકારમાં જે બૈજિક ભાગ છે તેમાં અલગ-અલગ ચલના ઘાતાંક કેવી રીતે મેળવાય છે.

આવું કરવા માટે ઘાત અને ઘાતાંકના નિયમોનો ઉપયોગ કરવો જોઈએ.

9.7.2 ત્રણ કે તેથી વધુ એકપદીના ગુણાકાર

નીચેનાં ઉદાહરણો જુઓ :

(i) $2x \times 5y \times 7z = (2x \times 5y) \times 7z$

$= 10xy \times 7z$

$= 70xyz$

(ii) $4xy \times 5x^2y^2 \times 6x^3y^3 = (4xy \times 5x^2y^2) \times 6x^3y^3$

$= 20x^3y^3 \times 6x^3y^3 = 120x^3y^3 \times x^3y^3$

$= 120\ (x^3 \times x^3)(y^3 \times y^3) = 120x^6 \times y^6 = 120x^6y^6$

અહીં એ સ્પષ્ટ છે કે, ઉપરોક્ત ઉદાહરણમાં ઉકેલ મેળવવા આપેલ એકપદીઓ પૈકી પ્રથમ અને દ્વિતીય એકપદીનો ગુણાકાર કરીએ છીએ અને ત્યાર બાદ જે જવાબ મળે તેને ત્રીજી એકપદી સાથે ગુણીએ છીએ. આ જ પદ્ધતિથી ગમે તેટલી એકપદીઓનો ગુણાકાર પણ મેળવી શકાય.

પ્રયત્ન કરો

- $4x \times 5y \times 7z$ શોધો.
- $(4x \times 5y)$ શોધી તેને $7z$થી ગુણો.
  અથવા $(5y \times 7z)$ શોધી તેને $4x$ વડે ગુણો.
  શું ઉપરોક્ત બંને પરિણામ સરખાં છે ?
  તેના પરથી તમે શું તારણ આપશો ?

આપણે નીચેની રીતે પણ ગુણાકાર શોધી શકીએ :
$4xy \times 5x^2y^2 \times 6x^3y^3$
$= (4 \times 5 \times 6) \times (x \times x^2 \times x^3) \times (y \times y^2 \times y^3) = 120x^6y^6$

ઉદાહરણ 3 : નીચેના કોષ્ટકમાં લંબચોરસ માટે આપેલી લંબાઈ અને પહોળાઈનાં માપ પરથી લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ :

લંબાઈ	પહોળાઈ	ક્ષેત્રફળ
$3x$	$5y$	$3x \times 5y = 15xy$
$9y$	$4y^2$	....
$4ab$	$5bc$	....
$2l^2m$	$3lm^2$	....

ઉદાહરણ 4 : નીચેના કોષ્ટકમાં લંબઘન માટે આપેલી લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈના માપ પરથી લંબઘનનું ઘનફળ શોધો.

	લંબાઈ	પહોળાઈ	ઊંચાઈ	ઘનફળ
(i)	$2ax$	$3by$	$5cz$	....
(ii)	m^2n	n^2p	p^2m	....
(iii)	$2q$	$4q^2$	$8q^3$	....

ઉકેલ : ઘનફળ = લંબાઈ × પહોળાઈ × ઊંચાઈ

તેથી,

(1) ઘનફળ $= (2ax) \times (3by) \times (5cz)$
$= (2 \times 3 \times 5)\ (ax)(by)(cz)$
$= 30\ abcxyz$

(2) ઘનફળ $= (m^2n)(n^2p)(p^2m)$
$= (m^2 \times m) \times (n \times n^2) \times (p \times p^2)$
$= m^3n^3p^3$

(3) ઘનફળ $= 2q \times 4q^2 \times 8q^3$
$= 2 \times 4 \times 8 \times q \times q^2 \times q^3$
$= 64q^6$

સ્વાધ્યાય 9.2

1. નીચે આપેલી એકપદીઓની જોડનો ગુણાકાર શોધો.

(i) $4,\ 7p$ (ii) $-4p,\ 7p$ (iii) $-4p,\ 7pq$ (iv) $4p^3,\ -3p$
(v) $4p,\ 0$

2. લંબચોરસની લંબાઈ અને પહોળાઈનાં માપ માટે નીચે આપેલી એકપદીની જોડનો ઉપયોગ કરીને લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

$(p,\ q)$; $(10m,\ 5n)$; $(20x^2,\ 5y^2)$; $(4x,\ 3x^2)$; $(3mn,\ 4np)$

3. ગુણાકાર કરી કોષ્ટક પૂર્ણ કરો.

પ્રથમ એકપદી→ બીજી એકપદી↓	$2x$	$-5y$	$3x^2$	$-4xy$	$7x^2y$	$-9x^2y^2$
$2x$	$4x^2$	.....	.....	.....	.....	.....
$-5y$	.....	.....	$-15x^2y$	.....	.....	.....
$3x^2$	.....	.....	.....	.....	.....	.....
$-4xy$	.....	.....	.....	.....	.....	.....
$7x^2y$	.....	.....	.....	.....	.....	.....
$-9x^2y^2$	.....	.....	.....	.....	.....	.....

4. લંબઘનની લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈના માપ અનુક્રમે નીચે મુજબ છે, તેના પરથી ઘનફળ શોધો.

(i) $5a,\ 3a^2,\ 7a^4$ (ii) $2p,\ 4q,\ 8r$ (iii) $xy,\ 2x^2y,\ 2xy^2$ (iv) $a,\ 2b,\ 3c$

5. ગુણાકાર શોધો.

(i) $xy,\ yz,\ zx$ (ii) $a,\ -a^2,\ a^3$ (iii) $2,\ 4y,\ 8y^2,\ 16y^3$

(iv) $a,\ 2b,\ 3c,\ 6abc$ (v) $m,\ -mn,\ mnp$

9.8 એકપદીનો બહુપદી સાથે ગુણાકાર

9.8.1 એકપદીનો દ્વિપદી સાથે ગુણાકાર

મિત્રો, અહીં આપણે એકપદી $3x$ને દ્વિપદી $5y + 2$ સાથે ગુણીએ. અર્થાત્, $3x \times (5y + 2) = ?$ અહીં, યાદ રાખીએ કે $3x$ અને $(5y + 2)$ એ સંખ્યા દર્શાવે છે. આથી વિભાજનના નિયમનો ઉપયોગ કરતાં, $3x \times (5y + 2) = (3x \times 5y) + (3x \times 2) = 15xy + 6x$

સામાન્ય રીતે આપણે ગણતરી દરમિયાન વિભાજનના નિયમનો ઉપયોગ કરીએ જ છીએ. ઉદાહરણ

$7 \times 106 = 7 \times (100 + 6)$
$= (7 \times 100) + (7 \times 6)$ (વિભાજનનાં નિયમનો ઉપયોગ કરતાં)
$= 700 + 42$
$= 742$

$7 \times 38 = 7 \times (40 - 2)$
$= (7 \times 40) - (7 \times 2)$ (વિભાજનનાં નિયમનો ઉપયોગ કરતાં)
$= 280 - 14 = 266$

આ જ રીતે, $-3x \times (-5y + 2) = (-3x) \times (-5y) + (-3x) \times (2) = 15xy - 6x$

અને, $5xy \times (y^2 + 3) = (5xy \times y^2) + (5xy \times 3) = 5xy^3 + 15xy$

મિત્રો, દ્વિપદી × એકપદી માટે શું કહી શકાય ? ઉદાહરણ તરીકે, $(5y + 2) \times 3x = ?$

અહીં, ક્રમના નિયમનો ઉપયોગ કરી શકાય : $7 \times 3 = 3 \times 7$ અથવા વ્યાપક સ્વરૂપે : $a \times b = b \times a$ આ જ રીતે, $(5y + 2) \times 3x = 3x \times (5y + 2) = 15xy + 6x$

પ્રયત્ન કરો

ગુણાકાર શોધો : (i) $2x(3x + 5xy)$ (ii) $a^2(2ab - 5c)$

9.8.2 એકપદીનો ત્રિપદી સાથે ગુણાકાર

$3p \times (4p^2 + 5p + 7)$ વિચારો. અગાઉના કિસ્સા મુજબ, આપણે વિભાજનના નિયમનો ઉપયોગ કરીએ.

$$3p \times (4p^2 + 5p + 7) = (3p \times 4p^2) + (3p \times 5p) + (3p \times 7)$$
$$= 12p^3 + 15p^2 + 21p$$

ત્રિપદી (Trinomial)ના દરેક પદને એકપદી (Monomial) વડે ગુણો અને પછી સરવાળો કરો.

> **અહીં અવલોકન કરો કે વિભાજનના નિયમનો ઉપયોગ કરીને આપણે તબક્કાવાર પદોનો ગુણાકાર મેળવી શકીએ છીએ.**

પ્રયત્ન કરો

ગુણાકાર શોધો : $(4p^2 + 5p + 7) \times 3p$

ઉદાહરણ 5 : આપેલ પદાવલિનું સરળ સ્વરૂપ આપો અને નિર્દેશ અનુસાર કિંમત મેળવો.

(i) $x(x - 3) + 2$, $x = 1$ માટે (ii) $3y(2y - 7) - 3(y - 4) - 63$, $y = (-2)$ માટે

ઉકેલ :

(i) $x(x - 3) + 2 = x^2 - 3x + 2$

$x = 1$ માટે, $x^2 - 3x + 2 = (1)^2 - 3(1) + 2$

$= 1 - 3 + 2$

$= 3 - 3 = 0$

(ii) $3y(2y - 7) - 3(y - 4) - 63 = 6y^2 - 21y - 3y + 12 - 63$

$= 6y^2 - 24y - 51$

$y = (-2)$ માટે, $6y^2 - 24y - 51$

$= 6(-2)^2 - 24(-2) - 51$

$= 6 \times 4 + 24 \times 2 - 51$

$= 24 + 48 - 51 = 72 - 51 = 21$

ઉદાહરણ 6 : સરવાળો કરો :

(i) $5m(3 - m)$ અને $6m^2 - 13m$ (ii) $4y(3y^2 + 5y - 7)$ અને $2(y^3 - 4y^2 + 5)$

ઉકેલ :

(i) પ્રથમ પદાવલિ $= 5m(3 - m) = (5m \times 3) - (5m \times m) = 15m - 5m^2$

હવે, બીજી પદાવલિ ઉમેરતાં, $15m - 5m^2 + 6m^2 - 13m = m^2 + 2m$

(ii) પ્રથમ પદાવલિ $= 4y(3y^2 + 5y - 7)$

$= (4y \times 3y^2) + (4y \times 5y) + (4y \times (-7))$

$= 12y^3 + 20y^2 - 28y$

બીજી પદાવલિ $= 2(y^3 - 4y^2 + 5)$

$= 2y^3 + 2(-4y^2) + 2 \times 5$

$= 2y^3 - 8y^2 + 10$

હવે, બંને પદાવલિનો સરવાળો કરતાં,

$$\begin{array}{r} 12y^3 + 20y^2 - 28y \\ +\ 2y^3 - 8y^2 + 10 \\ \hline 14y^3 + 12y^2 - 28y + 10 \end{array}$$

ઉદાહરણ 7 : $2pq(p + q)$માંથી $3pq(p - q)$ બાદ કરો.

ઉકેલ : અહીં, $3pq(p - q) = 3p^2q - 3pq^2$ અને $2pq(p + q) = 2p^2q + 2pq^2$

બાદબાકી કરતાં,

$$\begin{array}{r} 2p^2q + 2pq^2 \\ 3p^2q - 3pq^2 \\ - \quad\ + \quad \\ \hline -p^2q + 5pq^2 \end{array}$$

સ્વાધ્યાય 9.3

1. નીચેની પદાવલિઓની દરેક જોડ માટે ગુણાકાર મેળવો.
   (i) $4p,\ q + r$ (ii) $ab,\ a - b$ (iii) $a + b,\ 7a^2b^2$ (iv) $a^2 - 9,\ 4a$
   (v) $pq + qr + rp,\ 0$
2. કોષ્ટક પૂર્ણ કરો.

ક્રમ	પ્રથમ પદાવલિ	બીજી પદાવલિ	ગુણાકાર
(i)	a	$b + c + d$	...
(ii)	$x + y - 5$	$5xy$	...
(iii)	p	$6p^2 - 7p + 5$	...
(iv)	$4p^2q^2$	$p^2 - q^2$	...
(v)	$a + b + c$	abc	...

3. ગુણાકાર શોધો.
   (i) $(a^2) \times (2a^{22}) \times (4a^{26})$ (ii) $\left(\frac{2}{3}xy\right) \times \left(\frac{-9}{10}x^2y^2\right)$
   (iii) $\left(-\frac{10}{3}pq^3\right) \times \left(\frac{6}{5}p^3q\right)$ (iv) $x \times x^2 \times x^3 \times x^4$
4. (a) $3x(4x - 5) + 3$નું સાદું રૂપ આપો અને (i) $x = 3$ (ii) $x = \frac{1}{2}$ માટે તેની કિંમત શોધો.
   (b) $a(a^2 + a + 1) + 5$નું સાદું રૂપ આપો અને (i) $a = 0$ (ii) $a = 1$ (iii) $a = (-1)$ માટે તેની કિંમત શોધો.
5. (a) સરવાળો કરો : $p(p - q),\ q(q - r)$ અને $r(r - p)$
   (b) સરવાળો કરો : $2x(z - x - y)$ અને $2y(z - y - x)$
   (c) બાદબાકી કરો : $4l(10n - 3m + 2l)$માંથી $3l(l - 4m + 5n)$
   (d) બાદબાકી કરો : $4c(-a + b + c)$માંથી $3a(a + b + c) - 2b(a - b + c)$

9.9 બહુપદીનો બહુપદી સાથે ગુણાકાર

9.9.1 દ્વિપદીનો દ્વિપદી સાથે ગુણાકાર

અહીં આપણે, દ્વિપદી $(2a + 3b)$નો બીજી કોઈ દ્વિપદી $(3a + 4b)$ સાથે ગુણાકાર કરીએ. અગાઉના કિસ્સામાં જેમ ગણતરી કરી છે તે જ રીતે અહીં તબક્કાવાર ગણતરી કરીશું. ગુણાકાર માટે વિભાજનના નિયમનો ઉપયોગ કરીએ તો,

$$(3a + 4b) \times (2a + 3b) = 3a \times (2a + 3b) + 4b(2a + 3b)$$

જુઓ કે, પ્રથમ દ્વિપદીના દરેક પદનો બીજી દ્વિપદીના દરેક પદ સાથે ગુણાકાર થાય છે.

$$= (3a \times 2a) + (3a \times 3b) + (4b \times 2a) + (4b \times 3b)$$

$$= 6a^2 + 9ab + 8ba + 12b^2$$

$$= 6a^2 + 17ab + 12b^2 \qquad (\because\ ba = ab)$$

જ્યારે આપણે દરેક પદનો ગુણાકાર લઈએ છીએ, ત્યારે આપણે સ્વીકારીએ છીએ કે અહીં, $2 \times 2 = 4$ પદો છે. પરંતુ, તે પૈકીના બે પદ સજાતીય પદો છે. જે પરસ્પર જોડાય છે અને તેથી છેલ્લે ત્રણ પદ મળે છે. આમ, જ્યારે બહુપદી સાથે બહુપદીનો ગુણાકાર કરીએ ત્યારે આપણે હંમેશાં સજાતીય પદો શોધવાં જોઈએ અને જો હોય, તો તેઓને પરસ્પર જોડવા જોઈએ. (સરવાળા દ્વારા કે બાદબાકી દ્વારા)

ઉદાહરણ 8 : ગુણાકાર કરો.

(i) $(x - 4)$ અને $(2x + 3)$ (ii) $(x - y)$ અને $(3x + 5y)$

ઉકેલ :

(i) $(x - 4) \times (2x + 3) = x \times (2x + 3) - 4 \times (2x + 3)$

$= (x \times 2x) + (x \times 3) - (4 \times 2x) - (4 \times 3)$

$= 2x^2 + 3x - 8x - 12$

$= 2x^2 - 5x - 12$ [સજાતીય પદોનું સાદું રૂપ આપતાં]

(ii) $(x - y) \times (3x + 5y) = x \times (3x + 5y) - y \times (3x + 5y)$

$= (x \times 3x) + (x \times 5y) - (y \times 3x) - (y \times 5y)$

$= 3x^2 + 5xy - 3yx - 5y^2$

$= 3x^2 + 2xy - 5y^2$ [સજાતીય પદોનું સાદું રૂપ આપતાં]

ઉદાહરણ 9 : ગુણાકાર કરો.

(i) $(a + 7)$ અને $(b - 5)$ (ii) $(a^2 + 2b^2)$ અને $(5a - 3b)$

ઉકેલ :

(i) $(a + 7) \times (b - 5) = a \times (b - 5) + 7(b - 5)$

$= ab - 5a + 7b - 35$

(અહીં, આ ગુણાકારમાં કોઈ સજાતીય પદો નથી તેની નોંધ લઈએ.)

(ii) $(a^2 + 2b^2) \times (5a - 3b) = a^2 \times (5a - 3b) + 2b^2(5a - 3b)$

$= 5a^3 - 3a^2b + 10ab^2 - 6b^3$

9.9.2 દ્વિપદીનો ત્રિપદી સાથે ગુણાકાર

આ ગુણાકારમાં આપણે ત્રિપદીના દરેક ત્રણ પદોને દ્વિપદીના બંને પદો સાથે ગુણવા જોઈએ. જેથી કુલ $(2 \times 3) = 6$ પદો મળશે. વળી, જો સજાતીય પદો હશે તો 6 પદોને બદલે ઉકેલમાં 5 કે તેથી ઓછા પદો મળશે.

ધારો કે,

$\therefore (a + 7) \times (a^2 + 3a + 5) = a \times (a^2 + 3a + 5) + 7 \times (a^2 + 3a + 5)$ ($\because$ વિભાજનનો નિયમ)

દ્વિપદી ત્રિપદી $= a^3 + 3a^2 + 5a + 7a^2 + 21a + 35$

$= a^3 + (3a^2 + 7a^2) + (5a + 21a) + 35$

$= a^3 + 10a^2 + 26a + 35$ (શા માટે જવાબમાં માત્ર 4 પદો છે ? જુઓ.)

ઉદાહરણ 10 : $(a + b)(2a - 3b + c) - (2a - 3b)c$નું સાદું રૂપ આપો.

ઉકેલ : અહીં,

$(a + b)(2a - 3b + c) = a(2a - 3b + c) + b(2a - 3b + c)$

$= 2a^2 - 3ab + ac + 2ab - 3b^2 + bc$

$= 2a^2 - ab - 3b^2 + bc + ac$

(અહીં $-3ab$ અને $2ab$ સજાતીય પદો છે.)

અને, $(2a - 3b)c = 2ac - 3bc$

તેથી

$(a + b)(2a - 3b + c) - (2a - 3b)c = 2a^2 - ab - 3b^2 + bc + ac - (2ac - 3bc)$

$= 2a^2 - ab - 3b^2 + bc + ac - 2ac + 3bc$

$= 2a^2 - ab - 3b^2 + (bc + 3bc) + (ac - 2ac)$

$= 2a^2 - 3b^2 - ab + 4bc - ac$

સ્વાધ્યાય 9.4

1. દ્વિપદીનો ગુણાકાર કરો.

(i) $(2x + 5)$ અને $(4x - 3)$ (ii) $(y - 8)$ અને $(3y - 4)$

(iii) $(2.5l - 0.5m)$ અને $(2.5l + 0.5m)$ (iv) $(a + 3b)$ અને $(x + 5)$

(v) $(2pq + 3q^2)$ અને $(3pq - 2q^2)$ (vi) $\left(\frac{3}{4}a^2 + 3b^2\right)$ અને $4\left(a^2 - \frac{2}{3}b^2\right)$

2. ગુણાકાર શોધો.

(i) $(5 - 2x)\ (3 + x)$ (ii) $(x + 7y)\ (7x - y)$

(iii) $(a^2 + b)\ (a + b^2)$ (iv) $(p^2 - q^2)\ (2p + q)$

3. સાદું રૂપ આપો :

(i) $(x^2 - 5)\ (x + 5) + 25$ (ii) $(a^2 + 5)\ (b^3 + 3) + 5$

(iii) $(t + s^2)\ (t^2 - s)$

(iv) $(a + b)\ (c - d) + (a - b)\ (c + d) + 2(ac + bd)$

(v) $(x + y)\ (2x + y) + (x + 2y)\ (x - y)$

(vi) $(x + y)\ (x^2 - xy + y^2)$

(vii) $(1.5x - 4y)\ (1.5x + 4y + 3) - 4.5x + 12y$

(viii) $(a + b + c)\ (a + b - c)$

9.10 નિત્યસમ એટલે શું ?

વિદ્યાર્થી મિત્રો, અહીં નિત્યસમને સમજવા આપણે એક સમતા લઈએ. $(a + 1)\ (a + 2) = a^2 + 3a + 2$
અહીં, આપણે આ સમતાની બંને બાજુઓ
માટે $a = 10$ લઈ કિંમત શોધીએ.

ડા. બા. $= (a + 1)\ (a + 2) = (10 + 1)\ (10 + 2) = 11 \times 12 = 132$

જ. બા. $= a^2 + 3a + 2 = (10)^2 + 3(10) + 2 = 100 + 30 + 2 = 132$

આમ, $a = 10$ માટે આ સમતાની બંને બાજુની કિંમતો સરખી છે.

હવે આપણે $a = -5$ લઈએ

ડા. બા.$= (a + 1)\ (a + 2) = (-5 + 1)\ (-5 + 2) = (-4) \times (-3) = 12$

જ. બા.$= a^2 + 3a + 2 = (-5)^2 + 3(-5) + 2 = 25 - 15 + 2 = 10 + 2 = 12$

તેથી $a = (-5)$ લઈએ તોપણ ડા.બા. = જ.બા. મળે.

તો અહીં, તારવી શકીએ કે aની કોઈ પણ કિંમત માટે આપેલ સમતાની ડા.બા. = જ.બા. મળે.

આમ, **એવી સમતા કે જેમાં આપેલા ચલની કોઈ પણ કિંમત માટે તે સાચી હોય તો તેને નિત્યસમ (Identity) કહે છે.**

આમ, $(a + 1)\ (a + 2) = a^2 + 3a + 2$ એ એક નિત્યસમ છે.

આપણે એ પણ નોંધીએ કે, કોઈ પણ સમીકરણ એ તેમાં આપેલા ચલની કોઈ ચોક્કસ કિંમતો માટે જ સાચા હોય છે. તે જે-તે ચલની બધી જ કિંમતો માટે સાચા હોતા નથી.

દૃષ્ટાંત તરીકે, $a^2 + 3a + 2 = 132$

ઉપરોક્ત સમીકરણ $a = 10$ માટે સાચું છે. પરંતુ તે $a = (-5)$ અથવા $a = 0$ વિગેરે માટે સાચું નથી.

ચકાસો : $a^2 + 3a + 2 = 132$ એ $a = (-5)$ અને $a = 0$ માટે સાચું નથી.

9.11 પ્રમાણિત નિત્યસમ

આપણે હવે, ખૂબ જ અગત્યનાં ત્રણ નિત્યસમનો અભ્યાસ કરીશું, જે આપણા કાર્યમાં ખૂબ ઉપયોગી થશે. આ નિત્યસમ આપણે દ્વિપદીનો દ્વિપદી સાથે ગુણાકાર કરીને મેળવીશું.

- સૌપ્રથમ $(a + b)(a + b)$ અથવા $(a + b)^2$ મેળવીએ.

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b)(a + b)\\ &= a(a + b) + b(a + b)\\ &= a^2 + ab + ba + b^2\\ &= a^2 + 2ab + b^2 \qquad (\because ab = ba)\end{aligned}$$

આમ, $\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$ (I)

અહીં, એ સ્પષ્ટ છે કે જ.બા.ની પદાવલિ એ ડા.બા.ની પદાવલિના ખરેખર ગુણાકારથી જ મળે છે જેથી તે નિત્યસમ છે. અહીં, આપણે ચલ 'a' અને 'b'ની કોઈ પણ કિંમત લઈએ તો પણ બંને બાજુઓની કિંમત એકસમાન જ મળે છે. અર્થાત્, ડા.બા. = જ.બા. થાય છે.

(i) $a = 2$, $b = 3$ (ઉકેલ : 25) (ii) $a = 5$, $b = 2$ (ઉકેલ : 49)

- હવે, આપણે $(a - b)^2$ માટે વિચારીએ.

$$\begin{aligned}(a - b)^2 &= (a - b)(a - b) = a(a - b) - b(a - b)\\ &= a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad \text{(II)}\end{aligned}$$

આમ, $\boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

- છેલ્લે, $(a + b)(a - b)$ માટે વિચારો. $(a + b)(a - b) = a(a - b) + b(a - b)$
$= a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$ $(\because ab = ba)$

આમ, $\boxed{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$ (III)

ઉપરોક્ત નિત્યસમ (I), (II) અને (III) એ પ્રમાણિત નિત્યસમ તરીકે ઓળખાય છે.

પ્રયત્ન કરો

1. નિત્યસમ (I)માં bને બદલે $(-b)$ મૂકો. શું તમોને નિત્યસમ (II) મળશે ?

- હવે, આપણે એક વધુ ઉપયોગી નિત્યસમ માટે પ્રયત્ન કરીએ.

$$\begin{aligned}(x + a)(x + b) &= x(x + b) + a(x + b)\\ &= x^2 + bx + ax + ab\\ &= x^2 + (b + a)x + ab\end{aligned}$$

આમ, $\boxed{(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab}$ (IV)

પ્રયત્ન કરો

1. $a = 2$, $b = 3$, $x = 5$ માટે નિત્યસમ (IV) ચકાસો.
2. નિત્યસમ (IV)માં ખાસ કિસ્સા માટે $a = b$ લો. તમને શું મળે છે ? શું તેને નિત્યસમ (I) સાથે કંઈ સંબંધ છે ?
3. નિત્યસમ (IV)માં ખાસ કિસ્સા માટે $a = -c$ અને $b = -c$ લો. તમને શું મળે છે ? શું તેને નિત્યસમ (II) સાથે કોઈ સંબંધ છે ?
4. નિત્યસમ (IV)માં ખાસ કિસ્સા માટે $b = -a$ લો. તમને શું મળે છે ? શું તેને નિત્યસમ (III) સાથે કોઈ સંબંધ છે ?

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, નિત્યસમ (IV) એ નિત્યસમ (I), (II), (III)નું સામાન્ય સ્વરૂપ છે.

9.12 નિત્યસમની ઉપયોગિતા

હવે આપણે જોઈશું કે દ્વિપદીના ગુણાકાર તથા સંખ્યાઓના ગુણાકાર આધારિત કોયડાઓના ઉકેલ માટે નિત્યસમનો ઉપયોગ એ એક સરળ વૈકલ્પિક રીત છે.

ઉદાહરણ 11 : નિત્યસમ (I)નો ઉપયોગ કરીને સાદું રૂપ આપો. (i) $(2x + 3y)^2$ (ii) 103^2

ઉકેલ :

(i) $(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2$ [નિત્યસમ (I)નો ઉપયોગ કરતાં]

$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$

અહીં, આપણે નિત્યસમના ઉપયોગ વગર સીધી રીતે પણ ગણતરી કરી શકીએ.

$(2x + 3y)^2 = (2x + 3y)(2x + 3y)$

$= (2x)(2x) + (2x)(3y) + (3y)(2x) + (3y)(3y)$

$= 4x^2 + 6xy + 6yx + 9y^2$

$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$ $(\because yx = xy)$

નિત્યસમ (I)ના ઉપયોગથી આપણને $(2x + 3y)$નો વર્ગ કરવાની એક વૈકલ્પિક રીત મળે છે. શું તમે નોંધ્યું કે નિત્યસમની રીતમાં સીધી રીત કરતાં ઓછાં પગથિયાં છે ? તમે અનુભવશો કે $(2x + 3y)$ કરતાં વધુ જટીલ (સંકીર્ણ) દ્વિપદીના વર્ગ કરવા માટે પણ આ રીત વધુ સરળ છે.

(ii) $(103)^2 = (100 + 3)^2$

$= (100)^2 + 2(100)(3) + (3)^2$ [નિત્યસમ (I)નો ઉપયોગ કરતાં]

$= 10{,}000 + 600 + 9$

$= 10{,}609$

અહીં, આપણે (103×103) કરીને પણ ઉકેલ મેળવી શકીએ. પરંતુ તમે જોશો કે સીધી રીતે ગુણાકાર કરીને 103 નો વર્ગ કરવાની રીત કરતાં નિત્યસમ (I) નો ઉપયોગ કરવાથી વધુ સરળતા રહે છે. આ રીતે 1013 નો વર્ગ જાતે મેળવો.

તમે આ કિસ્સામાં એ પણ જોશો કે, સીધી રીતે ગુણાકાર કરીને ઉકેલ મેળવવાની રીત કરતાં નિત્યસમના ઉપયોગવાળી રીત વધુ આકર્ષક પણ છે.

ઉદાહરણ 12 : નિત્યસમ (II)નો ઉપયોગ કરીને, (i) $(4p - 3q)^2$ (ii) $(4.9)^2$ શોધો.

ઉકેલ :

(i) $(4p - 3q)^2 = (4p)^2 - 2(4p)(3q) + (3q)^2$ [નિત્યસમ (II)નો ઉપયોગ કરતાં]

$= 16p^2 - 24pq + 9q^2$

(ii) $(4.9)^2 = (5.0 - 0.1)^2 = (5.0)^2 - 2(5.0)(0.1) + (0.1)^2$

$= 25.00 - 1.00 + 0.01$

$= 24.00 + 0.01 = 24.01$

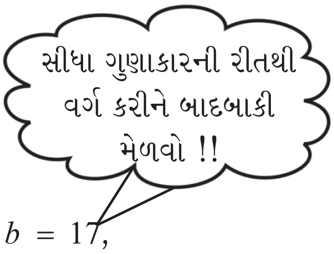
ઉદાહરણ 13 : નિત્યસમ (III)નો ઉપયોગ કરીને કિંમત શોધો.

(i) $\left(\frac{3}{2}m+\frac{2}{3}n\right)\left(\frac{3}{2}m-\frac{2}{3}n\right)$ (ii) $983^2 - 17^2$ (iii) 194×206

ઉકેલ :

(i) $\left(\frac{3}{2}m+\frac{2}{3}n\right)\left(\frac{3}{2}m-\frac{2}{3}n\right) = \left(\frac{3}{2}m\right)^2 - \left(\frac{2}{3}n\right)^2$

$= \frac{9}{4}m^2 - \frac{4}{9}n^2$



(ii) $983^2 - 17^2$

$= (983 + 17)(983 - 17)$ [અહીં, $a = 983$, $b = 17$, $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$]

$= 1000 \times 966$

$= 966000$

(iii) $194 \times 206 = (200 - 6) \times (200 + 6) = (200)^2 - (6)^2$

$= 40000 - 36 = 39964$

ઉદાહરણ 14 : નિત્યસમ $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)\,x + ab$નો ઉપયોગ કરીને કિંમત શોધો.

(i) 501×502 (ii) 95×103

ઉકેલ :

(i) $501 \times 502 = (500 + 1) \times (500 + 2) = (500)^2 + (1 + 2) \times 500 + 1 \times 2$

$= 250000 + 1500 + 2$

$= 251502$

(ii) $95 \times 103 = (100 - 5) \times (100 + 3) = (100)^2 + (-5 + 3) \times 100 + (-5) \times 3$

$= 10000 - 200 - 15 = 9785$

સ્વાધ્યાય 9.5

1. યોગ્ય નિત્યસમનો ઉપયોગ કરીને નીચેના ગુણાકાર મેળવો.

(i) $(x + 3)(x + 3)$ (ii) $(2y + 5)(2y + 5)$ (iii) $(2a - 7)(2a - 7)$

(iv) $(3a - \frac{1}{2})(3a - \frac{1}{2})$ (v) $(1.1m - 0.4)(1.1m + 0.4)$

(vi) $(a^2 + b^2)(-a^2 + b^2)$ (vii) $(6x - 7)(6x + 7)$ (viii) $(-a + c)(-a + c)$

(ix) $\left(\frac{x}{2}+\frac{3y}{4}\right)\left(\frac{x}{2}+\frac{3y}{4}\right)$ (x) $(7a - 9b)(7a - 9b)$

2. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)\,x + ab$ નિત્યસમનો ઉપયોગ કરીને નીચેના ગુણાકાર શોધો.

(i) $(x + 3)(x + 7)$ (ii) $(4x + 5)(4x + 1)$

(iii) $(4x - 5)(4x - 1)$ (iv) $(4x + 5)(4x - 1)$

(v) $(2x + 5y)(2x + 3y)$ (vi) $(2a^2 + 9)(2a^2 + 5)$

(vii) $(xyz - 4)(xyz - 2)$

3. નિત્યસમનો ઉપયોગ કરીને નીચેના વર્ગ શોધો.

(i) $(b - 7)^2$ (ii) $(xy + 3z)^2$ (iii) $(6x^2 - 5y)^2$

(iv) $\left(\frac{2}{3}m+\frac{3}{2}n\right)^2$ (v) $(0.4p - 0.5q)^2$ (vi) $(2xy + 5y)^2$

4. સાદું રૂપ આપો :

(i) $(a^2 - b^2)^2$ (ii) $(2x + 5)^2 - (2x - 5)^2$

(iii) $(7m - 8n)^2 + (7m + 8n)^2$ (iv) $(4m + 5n)^2 + (5m + 4n)^2$

(v) $(2.5p - 1.5q)^2 - (1.5p - 2.5q)^2$

(vi) $(ab + bc)^2 - 2ab^2c$ (vii) $(m^2 - n^2m)^2 + 2m^3n^2$

5. સાબિત કરો :

(i) $(3x + 7)^2 - 84x = (3x - 7)^2$ (ii) $(9p - 5q)^2 + 180pq = (9p + 5q)^2$

(iii) $\left(\frac{4}{3}m-\frac{3}{4}n\right)^2 + 2mn = \frac{16}{9}m^2 + \frac{9}{16}n^2$

(iv) $(4pq + 3q)^2 - (4pq - 3q)^2 = 48pq^2$

(v) $(a - b)(a + b) + (b - c)(b + c) + (c - a)(c + a) = 0$

6. નિત્યસમનો ઉપયોગ કરીને ગણતરી કરો.

(i) 71^2 (ii) 99^2 (iii) 102^2 (iv) 998^2

(v) 5.2^2 (vi) 297×303 (vii) 78×82 (viii) 8.9^2

(ix) 1.05×9.5

7. નિત્યસમ $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$નો ઉપયોગ કરીને કિંમત શોધો.

(i) $51^2 - 49^2$ (ii) $(1.02)^2 - (0.98)^2$ (iii) $153^2 - 147^2$ (iv) $12.1^2 - 7.9^2$

8. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$નો ઉપયોગ કરીને કિંમત શોધો.

(i) 103×104 (ii) 5.1×5.2 (iii) 103×98 (iv) 9.7×9.8

આપણે શું ચર્ચા કરી ?

1. 'ચલ' અને 'અચલ'ના ઉપયોગથી પદાવલિ રચી શકાય છે.

2. પદોનો સરવાળો કરીને પદાવલિ બનાવી શકાય છે. પદોને અવયવના ગુણાકાર સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય છે.

3. જે પદાવલિમાં એક, બે કે ત્રણ પદો હોય તેવી પદાવલિને અનુક્રમે એકપદી, દ્વિપદી કે ત્રિપદી પદાવલિ કહેવામાં આવે છે. વ્યાપક સ્વરૂપે, એક કે તેથી વધુ પદો જેના સહગુણકો શૂન્ય ન હોય (અને ચલના ઘાતાંક અનૃણ હોય) તેને બહુપદી કહેવાય.

4. સમાન ચલ ધરાવતાં અને તે ચલોની સમાન ઘાત ધરાવતાં પદોને સજાતીય પદો કહે છે. સજાતીય પદોના સહગુણકો સમાન હોવા જરૂરી નથી.

5. જ્યારે બહુપદીના સરવાળા (કે બાદબાકી) કરવા હોય ત્યારે સૌ પ્રથમ તેના સજાતીય પદોની યોગ્ય ગોઠવણી કરી તેને ઉમેરવા (કે બાદ કરવા) જોઈએ. ત્યારબાદ વિજાતીય પદોની ગોઠવણી કરવી જોઈએ.

6. ઘણી બધી પરિસ્થિતિમાં બૈજિક પદાવલિઓનો ગુણાકાર કરવો જરૂરી બને છે.
ઉદાહરણ તરીકે, જો લંબચોરસની બાજુઓનાં માપ બૈજિક પદાવલિ તરીકે આપેલાં હોય અને તેનું ક્ષેત્રફળ શોધવાનું હોય.

7. એકપદીનો એકપદી સાથે ગુણાકાર કરવાથી એકપદી જ મળે છે.

8. જ્યારે બહુપદીનો એકપદી સાથે ગુણાકાર કરવાનો હોય ત્યારે આપેલ બહુપદીના દરેક પદ સાથે જે-તે એકપદીનો ગુણાકાર કરવો પડે છે.

9. જ્યારે બહુપદીનો ગુણાકાર દ્વિપદી (કે ત્રિપદી) સાથે કરી ગુણનફળ મેળવવાનું હોય ત્યારે એક પછી એક એમ દરેક પદનો ગુણાકાર કરવો પડે.
અર્થાત્, આપેલ બહુપદીના દરેક પદનો દ્વિપદીના (કે ત્રિપદીના) દરેક પદ સાથે ગુણાકાર કરવો જોઈએ.

10. નિત્યસમ એ સમતા છે. જે ચલની કોઈ પણ કિંમત માટે સાચી ઠરે છે. જ્યારે સમીકરણ એ તેના ચલની અમુક ચોક્કસ કિંમતો માટે જ સાચું ઠરે છે. આમ, સમીકરણ એ નિત્યસમ નથી.

11. નીચેનાં નિત્યસમ પ્રમાણિત નિત્યસમ છે.

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (I)

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (II)

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ (III)

12. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ (IV) પણ એક ઉપયોગી નિત્યસમ છે.

13. બૈજિક પદાવલિના વર્ગ અને ગુણાકાર શોધવા માટે ઉપરોક્ત નિત્યસમ ઘણાં ઉપયોગી છે. ઉપરાંત, સંખ્યાના વર્ગ અને ગુણાકાર શોધવા માટે પણ એક વૈકલ્પિક પદ્ધતિ તરીકે ઉપયોગી છે.

પ્રકરણ
10

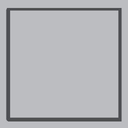
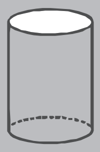
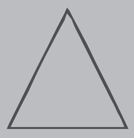
ઘનાકારોનું પ્રત્યક્ષીકરણ

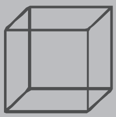
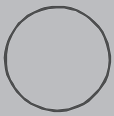
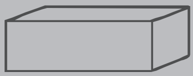
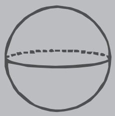
10.1 પ્રાસ્તાવિક

ધોરણ-7માં તમે સમતલ આકાર અને ઘન આકાર વિશે શીખી ગયા છો. સમતલ આકારોને બે માપ હોય છે : લંબાઈ અને પહોળાઈ. તેથી જ તેઓને દ્વિ-પરિમાણીય (Two Dimensional) આકાર કહેવાય છે. જ્યારે ઘન પદાર્થને ત્રણ માપ હોય છે : લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈ અથવા ઊંડાઈ. તેથી તેમને ત્રિ-પરિમાણીય (Three Dimensional) આકાર કહે છે. આ ઉપરાંત એક ઘન પદાર્થ કેટલીક જગ્યા પણ રોકે છે. દ્વિ-પરિમાણીય અને ત્રિ-પરિમાણીય આકૃતિને ટૂંકમાં 2-D અને 3-D આકૃતિ તરીકે પણ ઓળખવામાં આવે છે. ત્રિકોણ, ચોરસ, લંબચોરસ, વર્તુળ વગેરેને તમે યાદ કરો. આ બધી 2-D આકૃતિ છે. જ્યારે સમઘન, નળાકાર, શંકુ, ગોલક વગેરે ત્રિ-પરિમાણીય (3-D) આકાર છે.

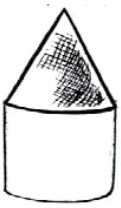
આટલું કરો

પહેલા આકારને તેના પ્રકાર અને નામ સાથે આપની સમજણ માટે જોડેલ છે. તે મુજબ બાકીના આકારને યોગ્ય રીતે જોડો.

આકાર	આકારના પ્રકાર	આકારનું નામ
	ત્રિ-પરિમાણ	ગોલક (Sphere)
	દ્વિ-પરિમાણ	નળાકાર (Cylinder)
	ત્રિ-પરિમાણ	ચોરસ (Square)
	દ્વિ-પરિમાણ	વર્તુળ (Circle)

	ત્રિ-પરિમાણ	લંબઘન (Cuboid)
	ત્રિ-પરિમાણ	સમઘન (Cube)
	દ્વિ-પરિમાણ	શંકુ (Cone)
	ત્રિ-પરિમાણ	ત્રિકોણ (Triangle)

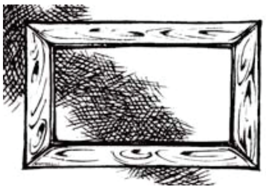
અહીં એ નોંધો કે ઉપરનો દરેક આકાર મૂળ આકાર છે. રોજબરોજના જીવનમાં આપણને ઉપર દર્શાવેલા આકારો ઉપરાંત બે કે તેથી વધારે આકારો મળીને બનતા કોઈ નવા આકાર સ્વરૂપે વસ્તુઓ જોવા મળે છે. નીચેની વસ્તુઓ ધ્યાનથી જુઓ :



તંબુ
(નળાકાર ઉપર શંકુ)

ડબ્બો
(પોલો નળાકાર)

આઈસ્ક્રીમ કોન
(શંકુ ઉપર અર્ધગોલક)



ફોટોફ્રેમ
(લંબચોરસ પાથ)

કટોરો
(પોલો અર્ધગોલક)

મિનારો
(નળાકાર ઉપર અર્ધગોલક)

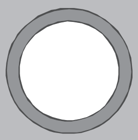
આટલું કરો

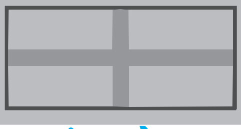
નીચેનાં ચિત્રોને તેમના આકારો સાથે જોડો :

ચિત્ર(વસ્તુ)		આકાર
(i) ખેતર		લંબચોરસ બગીચામાં એકબીજાને છેદતાં લંબચોરસ રસ્તા

(ii) નળાકારમાં ખાંચો વર્તુળાકાર મેદાનની ફરતે વર્તુળાકાર રસ્તો

(iii) ભમરડો ચોરસ ખેતર સાથે જોડાયેલ ત્રિકોણીય ખેતર

(iv) વર્તુળાકાર બગીચો  નળાકારમાંથી શંકુ આકાર કાઢી લેવામાં આવેલ હોય

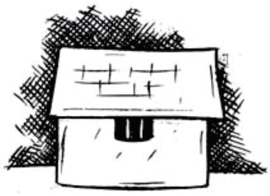
(v) રસ્તાની ચોકડી (ચોક)  શંકુ પર અર્ધગોલક ગોઠવવામાં આવેલ હોય

10.2 ત્રિ-પરિમાણીય આકારનાં દૃશ્યો

તમે નોંધ્યું હશે કે ત્રિ-પરિમાણીય વસ્તુઓને જુદી-જુદી જગ્યાએથી જોતાં જુદા-જુદા સ્વરૂપે જોવા મળે છે. આમ એક જ વસ્તુને આપણે જુદા-જુદા પરિપ્રેક્ષ્યથી અલગ-અલગ આકારે જોઈ શકીએ છીએ. ઉદાહરણ તરીકે નીચે આપેલ ઝૂંપડીને જુદા-જુદા સ્થાનેથી જોતાં કેવી દેખાય છે તે જુઓ.

ઝૂંપડી

આગળનું દૃશ્ય



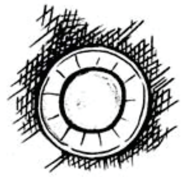
બાજુમાંથી દેખાતું દૃશ્ય

ઉપરથી દેખાતું દૃશ્ય

તેવી જ રીતે પ્યાલાને આ મુજબ જુદા-જુદા દૃશ્યોથી જોઈ શકાય.

પ્યાલો

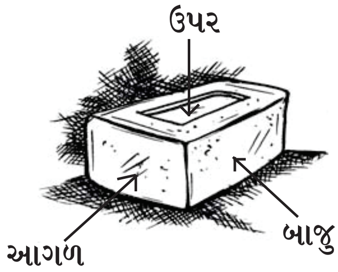
બાજુમાંથી દેખાતું દૃશ્ય



ઉપરથી દેખાતું દૃશ્ય

એક પ્યાલાના ઉપરથી દેખાતા દૃશ્ય (Top view)માં સમકેન્દ્રીય વર્તુળની જોડ શા માટે જોવા મળે છે ? શું બીજા કેટલાક સ્થાનેથી જોતા પ્યાલાનું 'બાજુએથી દેખાતું દૃશ્ય' જુદું પડશે ? વિચારો. પ્યાલાનું આગળનું દૃશ્ય (Front view), પાછળનું દૃશ્ય (Back view), ડાબી બાજુથી દેખાતું દૃશ્ય (Left view) અને જમણી બાજુથી દેખાતું દૃશ્ય (Right view) સરખા જોવા મળે છે. શું આવી રીતે દરેક વસ્તુના બાજુ પરના દેખાવ (Side view) અને આગળના દેખાવ (Front view) સરખા હોય ?

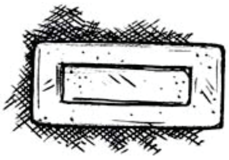
હવે આપણે ઈંટને જુદા-જુદા સ્થાનેથી જોતાં મળતા દૃશ્યોને ધ્યાનથી જોઈએ.



ઈંટ

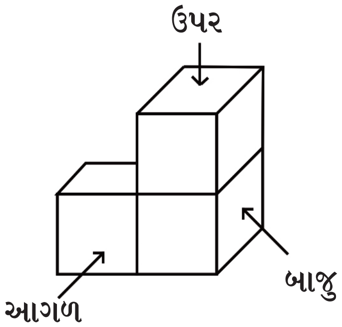
આગળથી દેખાતું દૃશ્ય

બાજુમાંથી દેખાતું દૃશ્ય

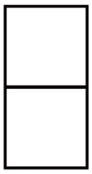


ઉપરથી દેખાતું દૃશ્ય

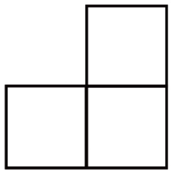
નીચે કેટલાક સમઘનથી બનેલા આકારોના જુદા-જુદા દૃશ્યો (view) આપેલા છે તેને જુઓ અને સમજો.



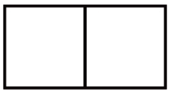
ત્રણ સમઘન દ્વારા બનેલ આકાર



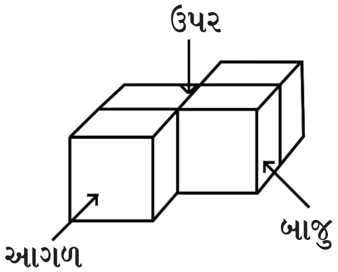
બાજુમાંથી દેખાતું દૃશ્ય



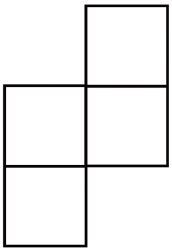
આગળથી દેખાતું દૃશ્ય



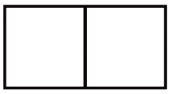
ઉપરથી દેખાતું દૃશ્ય



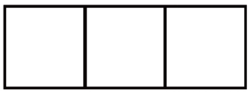
ચાર સમઘન દ્વારા બનેલ આકાર



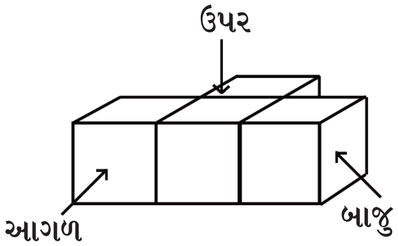
ઉપરથી દેખાતું દૃશ્ય



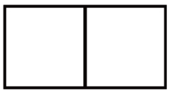
આગળથી દેખાતું દૃશ્ય



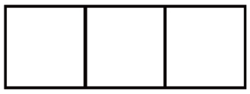
બાજુમાંથી દેખાતું દૃશ્ય



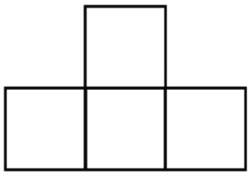
ચાર સમઘન દ્વારા બનેલ આકાર



બાજુમાંથી દેખાતું દૃશ્ય



આગળથી દેખાતું દૃશ્ય



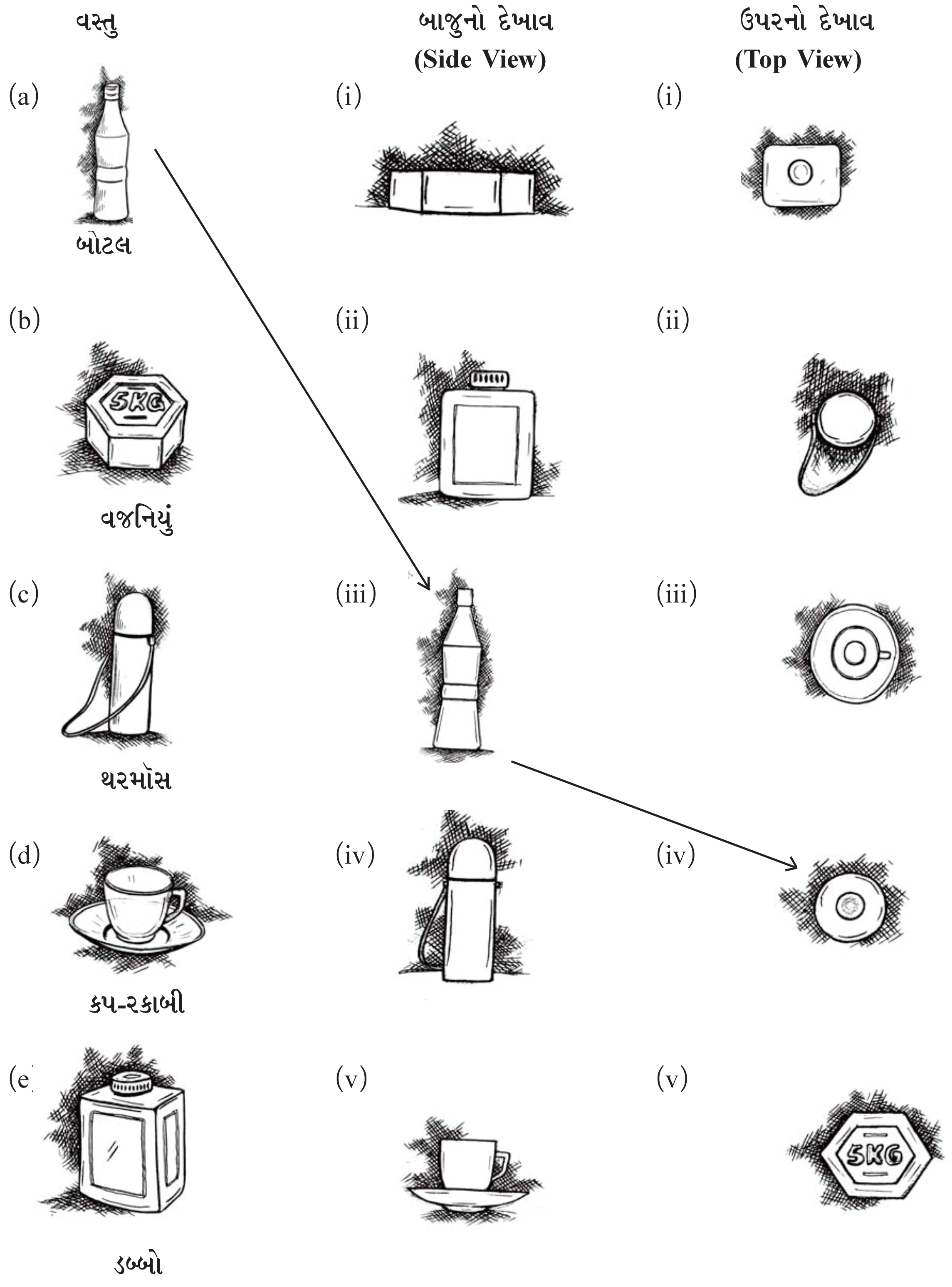
ઉપરથી દેખાતું દૃશ્ય

આટલું કરો

(તમારી આસપાસની જુદી-જુદી વસ્તુઓને જુદા-જુદા સ્થાનેથી જુઓ અને તેથી બનતા વિવિધ દૃશ્યોની તમારા મિત્ર સાથે ચર્ચા કરો.)

સ્વાધ્યાય 10.1

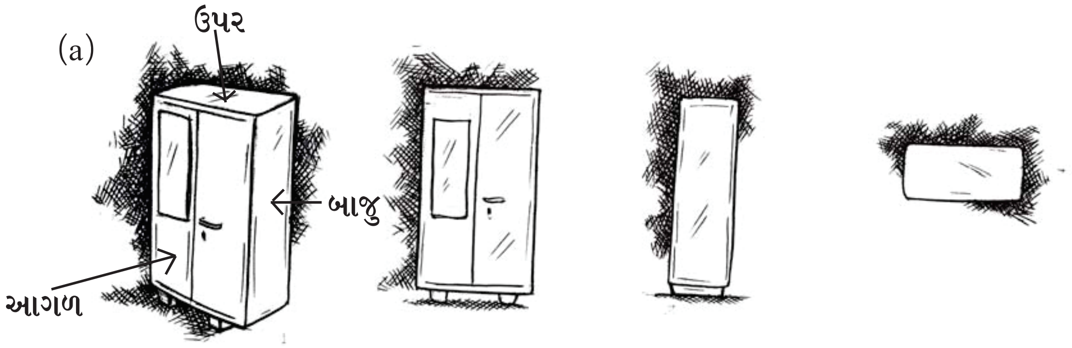
1. અહીં દરેક ઘન વસ્તુઓના બે દૃશ્ય (view) બાજુનો દેખાવ (Side view) અને ઉપરનું દૃશ્ય (Top view) આપેલ છે. વસ્તુ અને તેના સાચા દૃશ્યો (view)ને જોડો. પહેલું જોડકું તમારી સમજ માટે બતાવેલ છે.



2. આપેલ ઘન વસ્તુની સામે, તેના ત્રણ દૃશ્ય (view) આપેલ છે. આપેલ દરેક વસ્તુ માટે ઉપર (Top), આગળ (Front) અને બાજુ (Side)ના દૃશ્ય (view) ઓળખો અને સમજો.

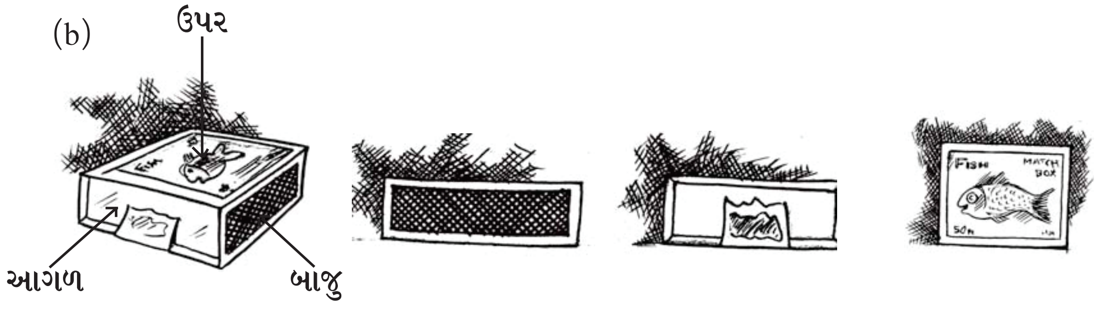
વસ્તુ	(i)	(ii)	(iii)

(a)



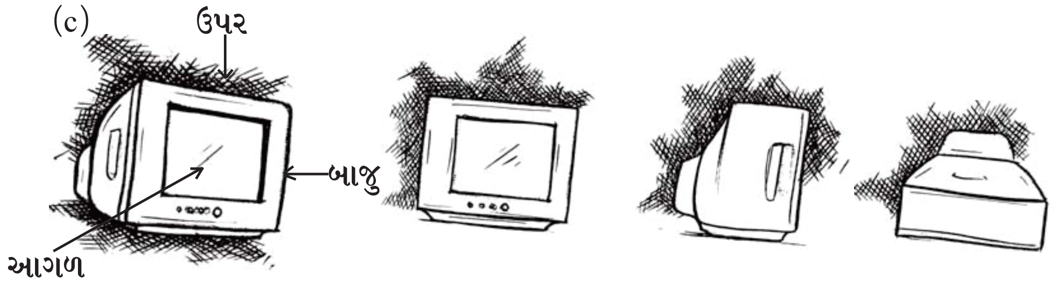
કબાટ

(b)



માચીસ

(c)



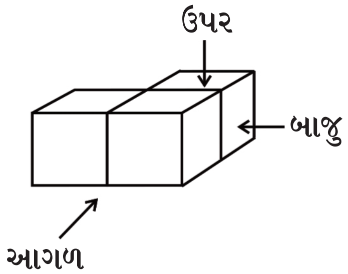
ટેલિવિઝન

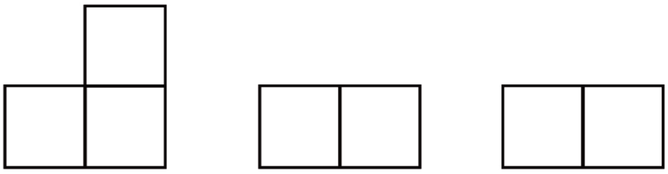
(d)

મોટરગાડી

3. આપેલા દરેક ઘન આકાર માટે ઉપરનું દૃશ્ય (Top view), આગળનું દૃશ્ય (Front view) અને બાજુનું દૃશ્ય (Side view) ઓળખો.

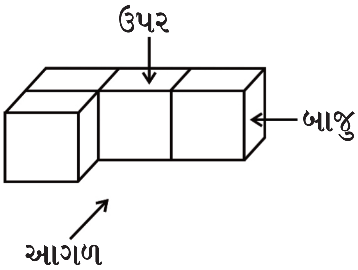
(a)

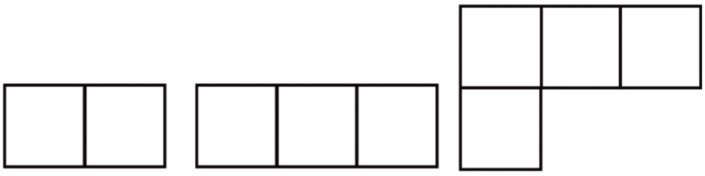




(i) (ii) (iii)

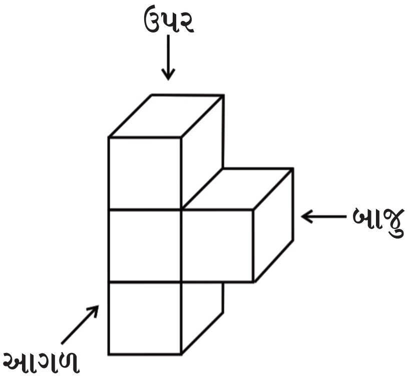
(b)

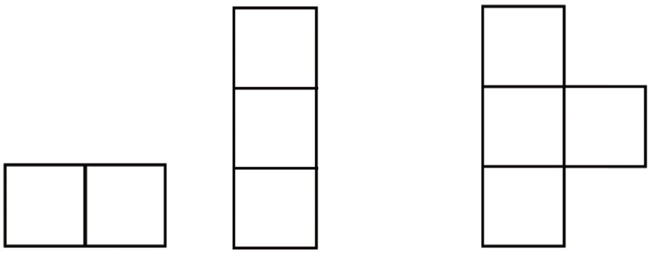




(i) (ii) (iii)

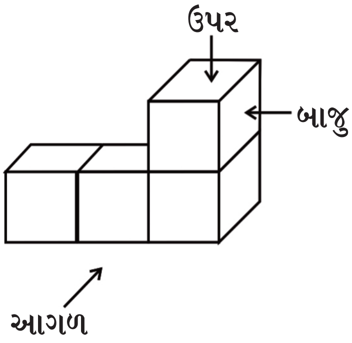
(c)

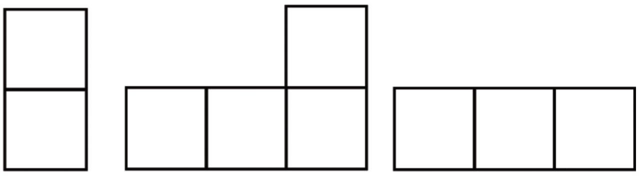




(i) (ii) (iii)

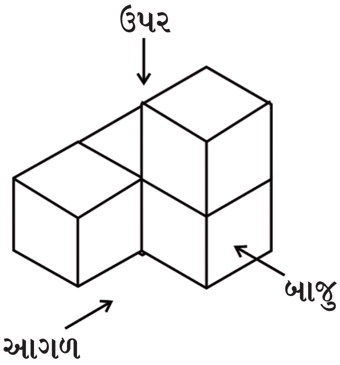
(d)

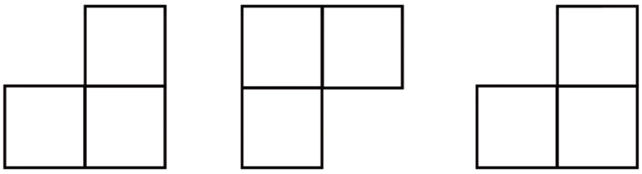




(i) (ii) (iii)

(e)

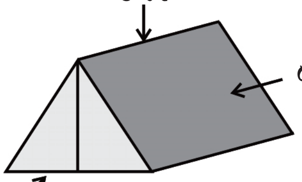




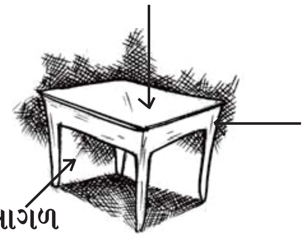
(i) (ii) (iii)

4. નીચે આપેલી વસ્તુઓનું આગળનું દૃશ્ય (Front view), બાજુનું દૃશ્ય (Side view) અને ઉપરનું દૃશ્ય (Top view) તમારી નોટબુકમાં દોરો.

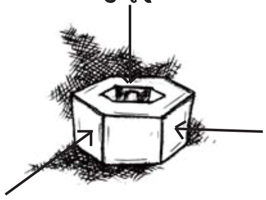
(a) સૈનિકનો તંબુ



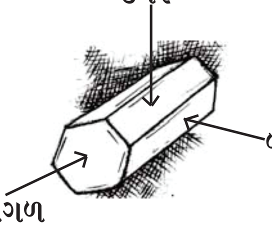
(b) ટેબલ



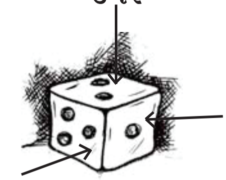
(c) લોખંડની નટ



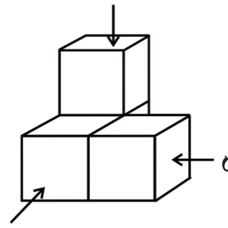
(d) છોલ્યા વગરની પેન્સિલ



(e) પાસો



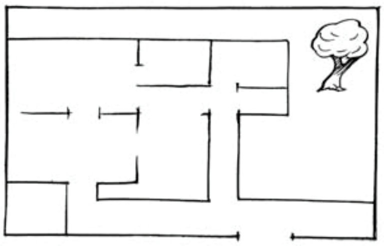
(f) ઘન



10.3 આપણી આસપાસની જગ્યાનું નકશા સ્વરૂપે આલેખન

તમે પ્રાથમિક શાળાના વર્ગોમાં હતા ત્યારથી જ તમે નકશાઓ વિશે જાણો છો. ભૂગોળ વિષયમાં તમને નકશામાં ચોક્કસ સ્થાન, ચોક્કસ રાજ્ય, ચોક્કસ નદી, પર્વત વગેરેને દર્શાવવાનું પૂછવામાં આવતું હતું. ઇતિહાસ વિષયમાં કદાચ તમને કોઈ નિશ્ચિત સ્થળને નકશામાં દર્શાવી અને ભૂતકાળમાં બનેલ મહત્ત્વપૂર્ણ ઘટના વર્ણવવાનું કહેવામાં આવતું હતું. આ ઉપરાંત તમે નકશામાં નદીઓના પ્રવાહ, રોડ, રેલવે-લાઇન જોતા હતા અને દર્શાવતા હતા. આપણે નકશો કઈ રીતે વાંચી શકીએ ? (સમજી શકીએ ?) જ્યારે આપણે નકશો જોઈએ છીએ ત્યારે આપણે શું સમજીએ છીએ અને શું તારણ કાઢીએ છીએ ? નકશામાં કઈ માહિતી આપેલ છે અને કઈ માહિતી આપેલ નથી ? શું ચિત્ર અને નકશા વચ્ચે કોઈ તફાવત છે ? આ વિભાગમાં આપણે આવા જ કેટલાક પ્રશ્નોના જવાબ મેળવીશું. અહીં એક મકાનના ચિત્રની બાજુમાં મકાનનો નકશો આપેલ છે. આ બંનેને ધ્યાનથી જુઓ (આકૃતિ 10.1).

આકૃતિ 10.1



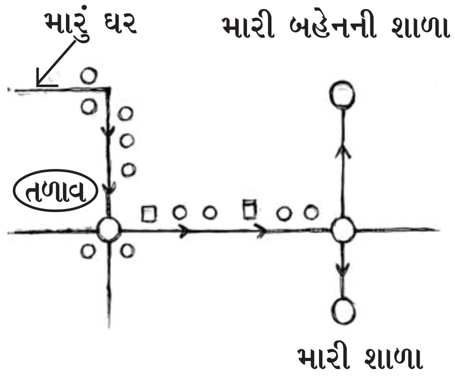
આકૃતિ 10.1ની રજુઆતથી તમે શું તારણ કાઢી શકો ? જ્યારે આપણે એક ચિત્ર દોરીએ છીએ ત્યારે આપણે વાસ્તવિક રજુઆત કરવા પ્રયત્ન કરીએ છીએ. આ માટે આપણે વાસ્તવિક વસ્તુની બધી વિગતો દર્શાવવા પ્રયત્ન કરીએ છીએ, પરંતુ જ્યારે આપણે નકશો દોરીએ છીએ ત્યારે આપણે માત્ર વસ્તુનું સ્થાન અને અન્ય ચીજ-વસ્તુની સાપેક્ષે સ્થાન અને અંતર પર જ વધારે ધ્યાન આપીએ છીએ. નકશામાં આપણે જે-તે વસ્તુના સ્વરૂપને વધુ મહત્ત્વ આપતા નથી. ચિત્ર અને નકશા વચ્ચેનો બીજો ભેદ એ છે કે કોઈ એક જ વસ્તુનું ચિત્ર જુદા-જુદા દૃષ્ટિકોણની સાપેક્ષે જુદા-જુદા સ્વરૂપે પ્રાપ્ત થાય છે, પરંતુ નકશાની બાબતે આવું થતું નથી એટલે કે અવલોકનકાર પોતાનું સ્થાન બદલે છતાં પણ મકાનનો નકશો તો જેમનો તેમ જ રહે છે. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો **ચિત્ર દોરવા માટે દૃષ્ટિકોણ ખૂબ જ અગત્યનો છે, પરંતુ નકશા માટે દૃષ્ટિકોણનું મહત્ત્વ નથી.**

હવે આકૃતિ 10.2માં સાત વર્ષના રાઘવે દોરેલો નકશો જુઓ તેમાં તેણે તેના ઘરેથી તેની શાળાએ પહોંચવાનો માર્ગ દર્શાવેલ છે. આ નકશા પરથી તમે નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપી શકશો ?

(i) રાઘવના ઘરથી તેની શાળા કેટલી દૂર છે ?

(ii) શું નકશાની અંદરના દરેક વર્તુળ કોઈ એક જ વસ્તુ બતાવે છે ?

(iii) રાઘવ અને તેની બહેનની શાળામાંથી કોની શાળા રાઘવના ઘરથી નજીક છે ?

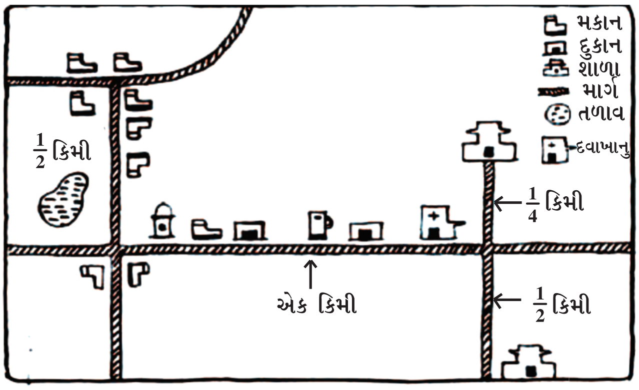


આકૃતિ 10.2

આકૃતિ 10.2માં આપેલ નકશામાંથી ઉપરોક્ત પ્રશ્નોના જવાબ આપવા ખૂબ જ મુશ્કેલ છે. શું તમે કહી શકશો કે આમ શા માટે ? કારણ એ છે કે આપણે નથી જાણતા કે સ્થળ વચ્ચેનું અંતર સપ્રમાણ છે કે પછી અંદાજે વર્તુળો દોરેલા છે અને આ નાનાં-મોટાં વર્તુળો શું બતાવે છે તે પણ સ્પષ્ટ નથી.

હવે આકૃતિ 10.3માંનો નકશો જુઓ. તેમાં રાઘવની દસ વર્ષની બહેન મીનાએ તેના ઘરેથી તેની શાળાનો માર્ગ દર્શાવ્યો છે.

આ નકશો અગાઉના નકશા કરતા અલગ છે. અહીં મીનાએ જુદા-જુદા મહત્ત્વનાં સ્થળો(સીમા ચિહ્નો)ને જુદા-જુદા ચિહ્નોના ઉપયોગથી દર્શાવ્યાં છે અને લાંબા અંતર માટે લાંબી લાઈન તથા ટૂંકા અંતર માટે ટૂંકી લાઈન દોરવામાં આવેલ છે એટલે કે નકશો દોરવામાં પ્રમાણમાપ (સ્કેલ) નો ઉપયોગ કરેલ છે.



આકૃતિ 10.3

હવે તમે નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપી શકશો :

- રાઘવના ઘેરથી રાઘવની શાળા કેટલી દૂર આવેલી છે ?
- કોની શાળા ઘરથી વધુ નજીક છે, રાઘવની કે મીનાની ?
- માર્ગના મહત્ત્વના ભૂચિહ્નો (અગત્યના સ્થળો) કયા કયા છે ?

આ પરથી આપણને સમજાયું કે કેટલાક સંકેતોનો ઉપયોગ કરવાથી અને સ્થળો વચ્ચેના અંતર દર્શાવવાથી આપણે નકશાને ઘણી સરળતાથી સમજી શકીએ છીએ. તમે જોયું હશે કે નકશામાં દર્શાવેલ અંતર એ જમીન પરના વાસ્તવિક અંતરને સપ્રમાણ હોય છે. આમ કરવા માટે ચોક્કસ પ્રમાણમાપ (સ્કેલમાપ) ધ્યાનમાં લેવામાં આવે છે, જ્યારે નકશો બનાવતા હોઈએ કે વાંચતા હોઈએ ત્યારે નકશો કેટલા સ્કેલનો છે તે બરાબર જાણવું હોવા જોઈએ એટલે કે નકશા પરનું 1 મિમી કે 1 સેમી અંતર વાસ્તવમાં કેટલું અંતર દર્શાવે છે તે જાણવું જરૂરી છે.

અર્થાત્ નકશો દોરતી વખતે જમીન પરના 1 કિમી કે 10 કિમી કે પછી 100 કિમી અંતરને નકશામાં 1 મિમી કે 1 સેમી દ્વારા દર્શાવી શકાય. આપણી જરૂરિયાત મુજબના માપના નકશાઓ તૈયાર કરવા નિશ્ચિત પ્રમાણમાપ (સ્કેલમાપ) ધ્યાનમાં લેવામાં આવે છે. જુદા-જુદા માપના નકશામાં જુદા-જુદા સ્કેલમાપ હોય છે. પરંતુ એક જ નકશામાં એક જ સ્કેલમાપ હોય છે. આ બાબત ભૂલવી ન જોઈએ. તે સમજવા ભારતના નકશામાં ગુજરાતના શહેરો જુઓ અને ગુજરાતના નકશામાં ગુજરાતના શહેરો જુઓ અને આ બંને નકશાના પ્રમાણમાપ (સ્કેલમાપ) પણ ચકાસો.

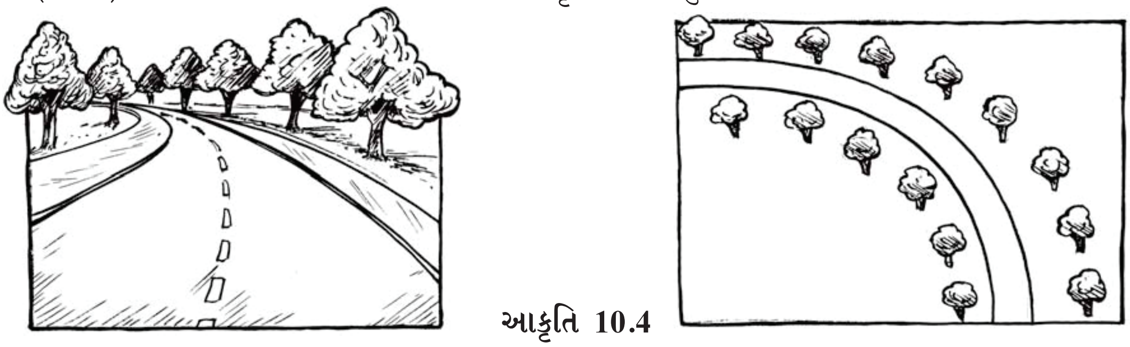
તમે જોશો કે ભારત અને ગુજરાતના નકશા માપમાં સરખા હોવા છતાં બંને નકશામાં 1 સેમી જેટલી જગ્યા જુદા-જુદા માપનું અંતર બતાવતા હશે એટલે કે ભારતના નકશા કરતાં ગુજરાતના નકશામાં 1 સેમીને સપ્રમાણ અંતર ઓછું હશે જ્યારે ભારતના નકશામાં 1 સેમીને સપ્રમાણ અંતર વધુ હશે આમ નકશામાં સ્કેલમાપનો ઉપયોગ કરી વિશાળ જગ્યાઓને મર્યાદિત જગ્યામાં દર્શાવી શકીએ છીએ, તેથી નકશામાં 1 સેમી એ ઘણું મોટું અંતર દર્શાવે છે.

ટૂંકમાં કહીએ તો...

(1) નકશા દ્વારા નિશ્ચિત વસ્તુ/સ્થળને અન્ય વસ્તુ/સ્થળની સાપેક્ષ (સંદર્ભ)માં દર્શાવાય છે.

(2) જુદી-જુદી વસ્તુ/સ્થળને દર્શાવવા માટે જુદા-જુદા સંકેતોનો (સંજ્ઞાઓનો) ઉપયોગ થાય છે.

(3) નકશામાં કોઈ પરિપ્રેક્ષ્ય (યથાર્થ ચિત્ર) કે સંદર્ભ નથી. જેથી નકશામાં દૃષ્ટિબિંદુ કે દૃષ્ટિકોણને કોઈ સ્થાન નથી. એટલે કે નકશામાં નજીકની વસ્તુ મોટી અને દૂરની વસ્તુ નાની દર્શાવવાની જરૂર હોતી નથી. નકશામાં દરેક સમાન વસ્તુનું કદ એકસરખું રાખવામાં આવે છે. કોઈ પણ સ્થળનો નકશો હંમેશાં તેના Top view(ઉપરથી દેખાતું દૃશ્ય)ને ધ્યાનમાં રાખી દોરવામાં આવે છે. નકશામાં અન્ય કોઈ દૃશ્ય (view)ને સ્થાન નથી. આ બાબત સમજવા આકૃતિ 10.4 જુઓ.

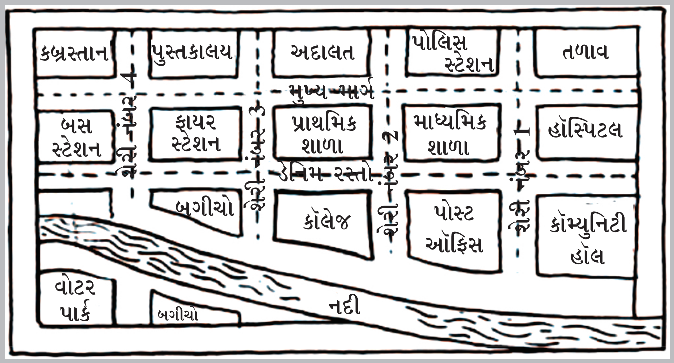


આકૃતિ 10.4

(4) નકશામાં પ્રમાણમાપ (સ્કેલમાપ)નો ઉપયોગ થાય છે નિશ્ચિત નકશા માટે પ્રમાણમાપ (સ્કેલમાપ) એક જ રહે છે એટલે કે બદલાતું નથી. વાસ્તવિક અંતરને પ્રમાણસર ઘટાડીને નકશાને કાગળ પર દર્શાવાય છે.

આટલું કરો

1. આ એક શહેરનો નકશો જુઓ (આકૃતિ 10.5).



આકૃતિ 10.5

(a) **નકશામાં રંગ પૂરો :** પાણીમાં વાદળી, ફાયર સ્ટેશનમાં લાલ, પુસ્તકાલયમાં નારંગી, શાળામાં પીળો, બગીચામાં લીલો, કોમ્યુનિટી સેન્ટરમાં ગુલાબી, હૉસ્પિટલમાં જાંબલી, કબ્રસ્તાનમાં કથ્થાઈ.

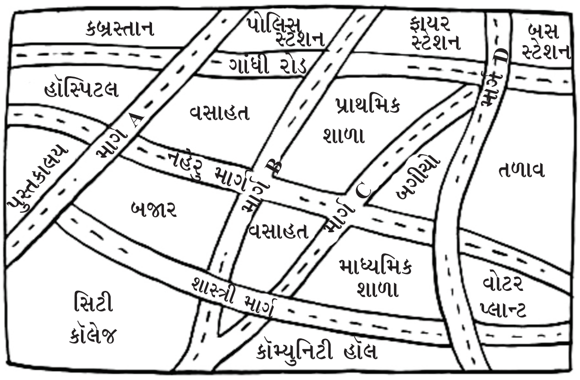
(b) શેરી નંબર 2 અને ડેનિમ માર્ગ જ્યાં ભેગા થાય છે ત્યાં લીલા રંગનો X કરો. શેરી નંબર 3 અને નદી જ્યાં ભેગા થાય છે ત્યાં કાળા રંગનો Y કરો. મુખ્ય માર્ગ અને શેરી નંબર 1 ભેગા થાય છે ત્યાં લાલ રંગનો Z કરો.

(c) કૉલેજથી તળાવ સુધીનો ટૂંકો રસ્તો કથ્થાઈ રંગથી દર્શાવો.

2. તમારા ઘરથી તમારી શાળાનો નકશો દોરો. તેમાં મહત્ત્વનાં સ્થળો (સીમાચિહ્નો) દર્શાવો.

સ્વાધ્યાય 10.2

1. એક શહેરના નકશા પર નજર કરો.



નકશા પરથી આપેલ પ્રવૃત્તિ કરો અને પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(a) **નકશામાં આ રીતે રંગ પૂરો :** પાણી-બ્લ્યુ, ફાયર સ્ટેશન-લાલ, પુસ્તકાલય-નારંગી, શાળા-પીળો, બગીચો-લીલો, કૉલેજ-ગુલાબી, હૉસ્પિટલ-જાંબલી, કબ્રસ્તાન-કથ્થાઈ.

(b) નહેરુ રોડ અને રોડ 'C' જ્યાં ભેગા થાય છે. ત્યાં લીલા રંગનો 'X' કરો. ગાંધી રોડ અને રોડ 'A' જ્યાં મળતાં હોય ત્યાં લીલા રંગનો 'Y' કરો.

(c) બસ સ્ટેશનથી પુસ્તકાલય જવાનો ટૂંકો માર્ગ લાલ રંગથી દોરો.

(d) બગીચો અને બજાર બેમાંથી પૂર્વ દિશામાં શું આવેલ છે ?

(e) પ્રાથમિક શાળા અને માધ્યમિક શાળામાંથી કયું સ્થળ વધારે દક્ષિણ દિશામાં આવેલ છે ?

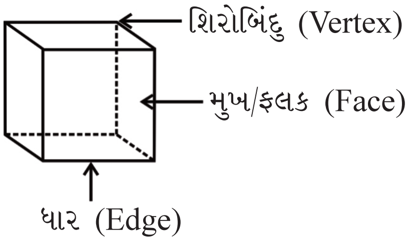
2. ચોક્કસ સ્કેલમાપ(પ્રમાણમાપ) લઈને તમારા વર્ગખંડનો નકશો દોરો અને વર્ગની જુદી-જુદી વસ્તુઓને સંકેતથી દર્શાવો.

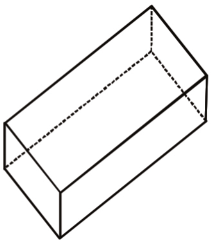
3. ચોક્કસ પ્રમાણમાપ (સ્કેલ) લઈને તમારી શાળાના મેદાનનો નકશો દોરો. તેમાં શાળાના મેદાનની દરેક વસ્તુ, મુખ્ય મકાન, બગીચો વગેરે દર્શાવો.

4. તમારો મિત્ર કોઈ પણ મુશ્કેલી વગર તમારા ઘરે પહોંચી શકે તે માટેની સૂચના સાથેનો રસ્તો દર્શાવતો નકશો દોરો.

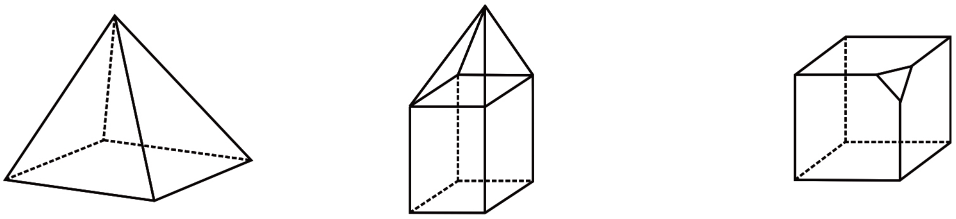
10.4 શિરોબિંદુ (Vertex), ધાર (Edge) અને ફલક (Face)

નીચેના ઘન આકારોને જુઓ :

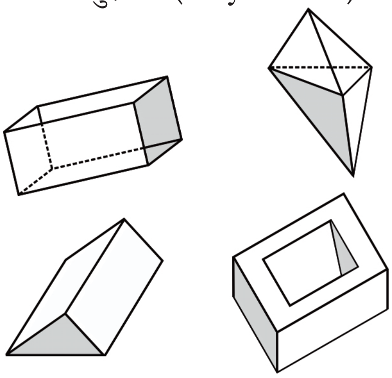




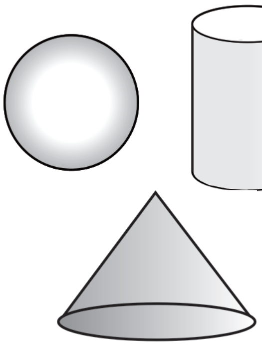
ઉખાણું :
મારે શિરોબિંદુ નથી. મારે સપાટ મુખફલક નથી. હું કોણ છું ?



ઉપરોક્ત તમામ ઘન બહુકોણના જોડાણથી તૈયાર થયેલ છે. બહુકોણથી ઘેરાતા સમતલીય ભાગને ફલક (Face) કહેવામાં આવે છે. આમ, ઉપરોક્ત તમામ ઘન આકારો ફલક (Faces)થી બનેલા છે. આ ફલક જ્યાં મળે છે તેને ધાર (Edges) કહે છે. આ ધાર રેખાખંડ સ્વરૂપે હોય છે. આ ધાર જ્યાં મળે છે, તેને શિરોબિંદુ (Vertices) તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. આ શિરોબિંદુ બિંદુ સ્વરૂપે હોય છે. આમ, આવા ઘનને બહુફલક (Polyhedrons) કહેવામાં આવે છે.

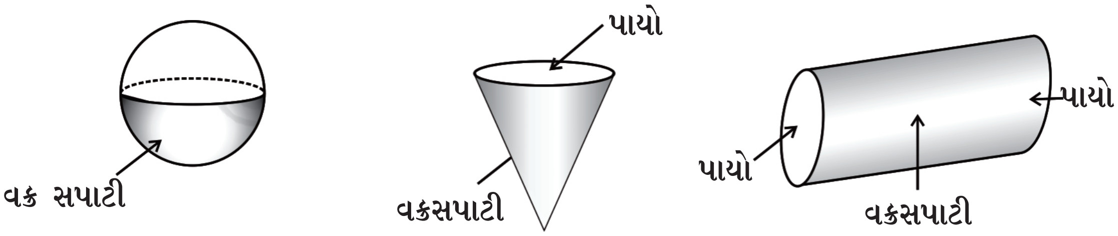


આ બહુફલકો (Polyhedrons) છે



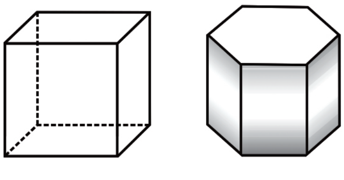
આ બહુફલકો (Polyhedrons) નથી

બહુફલક (Polyhedrons) હોય બહુફલક ન હોય તેવા ઘન આકારો (Non-polyhedrons) કઈ રીતે એકબીજાથી જુદા પડે છે ? આ વાત સમજવા ઉપરોક્ત આકૃતિનો કાળજીપૂર્વક અભ્યાસ કરો. તમે જોઈ શકશો કે Non-polyhedrons ઘન આકારમાં વક્ર સપાટી આવેલી છે, જ્યારે Polyhedronsમાં માત્ર સમતલ ભાગ જ આવે છે. વક્રીય સપાટી આવતી નથી. નીચેના ત્રણ સામાન્ય ઘનના પ્રકારોને તમે જાણો છો :

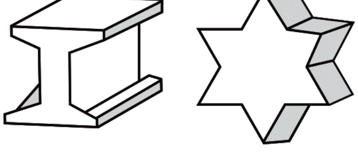


ગોલક **શંકુ** **નળાકાર**

બહિર્વૃત્ત બહુફલક : બહિર્વૃત્ત બહુકોણ (Convex Polygons)નો ખ્યાલ યાદ કરો બહિર્વૃત બહુફલક (Convex Polyhedrons)નો ખ્યાલ બહિર્વૃત બહુકોણ જેવો જ છે.

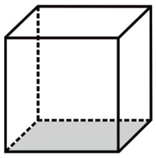


બહિર્વૃત્ત બહુફલક છે

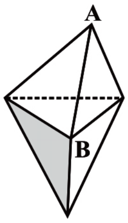


બહિર્વૃત્ત બહુફલક નથી

સામાન્ય બહુફલક : જ્યારે બહુફલકના દરેક ફલક સામાન્ય ફલક હોય અને તેના દરેક શિરોબિંદુ (Vertex) પર સરખી સંખ્યાના ફલક મળતા હોય ત્યારે તેને સામાન્ય બહુફલક (Regular Polyhedrons) કહેવામાં આવે છે.

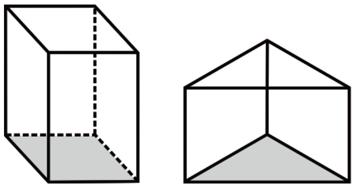


(આ સામાન્ય બહુફલક છે. તેના દરેક ફલક એકરુપ (Congruent), સામાન્ય બહુકોણ છે. તેના શિરોબિંદુ (Vertices) પર સરખી સંખ્યામાં ફલક મળે છે.)

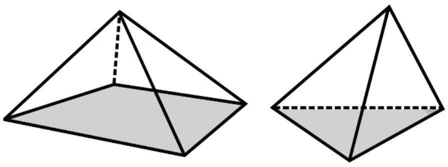


(સામાન્ય બહુફલક નથી, બધી બાજુઓ એકરુપ (Congruent) છે, પણ દરેક શિરોબિંદુ (Vertices) પાસે સરખી સંખ્યામાં ફલક ભેગા થતા નથી. અહીં A બિંદુ આગળ ત્રણ ફલક મળે છે. B બિંદુ આગળ ચાર ફલક મળે છે.)

બહુફલકના અગત્યના બે પ્રકાર છે : (1) પ્રિઝમ (2) પિરામિડ



આ પ્રિઝમ છે



આ પિરામિડ છે

જે બહુફલકનો પાયો અને મથાળું એકરુપ Congruent બહુકોણ હોય અને બાકીના ફલક સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણ હોય, તેને પ્રિઝમ કહે છે. પણ પિરામિડમાં (કોઈપણ સંખ્યાની બાજુવાળો) બહુકોણ પાયા તરીકે હોય છે. પાયાની દરેક બાજુમાંથી શરુ થતાં ફલકો ત્રિકોણ આકારના હોય છે. આ ત્રિકોણાકાર ફલકો એક જ શિરોબિંદુ (Vertex)માં મળે છે.

પ્રિઝમ અને પિરામિડ તેના પાયા પરથી ઓળખાય છે. આમ ષટ્કોણીય (Hexagonal) પ્રિઝમનો પાયો ષટ્કોણથી બનેલો હોય છે અને ત્રિકોણીય પિરામિડનો પાયો ત્રિકોણ હોય છે. શું લંબચોરસીય પ્રિઝમ હોય ? ચોરસીય પિરામિડ કેવો હોય ? સ્પષ્ટ છે કે તેમના પાયા અનુક્રમે લંબચોરસ અને ચોરસ હશે.

આટલું કરો

નીચે કોષ્ટકમાં આપેલા બહુફલકના ફલક (Faces), ધાર (Edges) અને શિરોબિંદુ(Vertices)ની સંખ્યા દર્શાવો. અહીં V એટલે શિરોબિંદુ (Vertices)ની સંખ્યા F એટલે ફલક (Faces)ની સંખ્યા અને E એટલે Edges(ધાર)ની સંખ્યા છે.

ઘન	F	V	E	F + V	E + 2
લંબઘન					
ત્રિકોણીય પિરામિડ					
ત્રિકોણીય પ્રિઝમ					
ચોરસ પાયાવાળો પિરામિડ					
ચોરસ પાયાવાળો પ્રિઝમ					

કોષ્ટકના છેલ્લા બે ખાનાની માહિતી શું દર્શાવે છે ? દરેક કિસ્સામાં (દરેક બહુફલક માટે) તમને F + V = E + 2 મળે છે ? એટલે કે F + V – E = 2 મળે છે ? આ સંબંધને યુલર (Euler)નું સૂત્ર કહે છે. અલબત્ત, આ સૂત્ર દરેક બહુફલક માટે સાચું છે.

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

કોઈ પણ બહુફલકમાંથી થોડો ભાગ કાપી નાખવામાં આવે તો F, V અને Eમાં શું ફેરફાર થશે ? (આ બાબત વિચારવા સૌ પ્રથમ સમઘન લો. હવે તેનો ખૂણો કાપી નાખો અને હવે વિચારો F, V અને Eમાં શું ફેરફાર થયો ?)

સ્વાધ્યાય 10.3

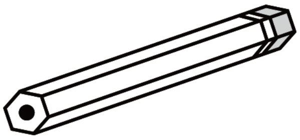
1. શું કોઈ બહુફલકને આટલા ફલક હોઈ શકે ?
(i) ત્રણ ત્રિકોણ (ii) ચાર ત્રિકોણ
(iii) એક ચોરસ અને ચાર ત્રિકોણ

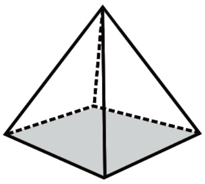
2. શું આપેલી કોઈપણ સંખ્યાના ફલકથી બહુફલક બની શકે ?
(**સૂચન :** પિરામિડને ધ્યાનમાં રાખી વિચારો.)

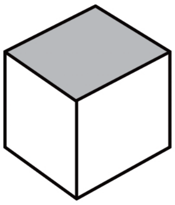
3. નીચેનામાંથી કઈ વસ્તુ પ્રિઝમ છે ?

(i)

ખીલી

(ii)

છોલ્યા વગરની પેન્સિલ

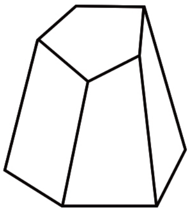
(iii)

પેપર વેઈટ

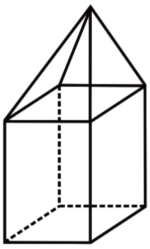
(iv)

ખોખું

4. (i) પ્રિઝમ અને નળાકારમાં શું સામ્ય છે ?
(ii) પિરામિડ અને શંકુમાં શું સામ્ય છે ?

5. શું ચોરસ પ્રિઝમ એ સમઘન જેવો જ હોય છે. સમજાવો.

6. યુલર (Euler)નું સૂત્ર નીચેના ઘનાકાર માટે તપાસો.


(i)


(ii)

7. યુલર(Euler's)ના સૂત્રનો ઉપયોગ કરી અજ્ઞાત સંખ્યા મેળવો.

ફલક (F)	?	5	20
શિરોબિંદુ (V)	6	?	12
ધાર (E)	12	9	?

8. શું કોઈ બહુફલકને 10 ફલક (Faces), 20 ધાર (Edges) અને 15 શિરોબિંદ (Vertices) હોઈ શકે ?

આપણે શું ચર્ચા કરી ?

1. 2D અને 3D વસ્તુઓની સમજ

2. જુદી-જુદી વસ્તુમાં રહેલ મુખ્ય/મૂળ આકારોની ઓળખ

3. 3D વસ્તુઓ જુદી-જુદી જગ્યાએથી જુદી-જુદી દેખાય છે.

4. નકશા ચિત્ર કરતાં અલગ હોય છે.

5. નકશામાં નિશ્ચિત વસ્તુ/સ્થળને અન્ય વસ્તુ/સ્થળની સાપેક્ષમાં દર્શાવવામાં આવે છે.

6. નકશામાં જુદી-જુદી વસ્તુ/સ્થળને દર્શાવવા જુદા-જુદા ખાસ સંજ્ઞા કે સંકેતોનો ઉપયોગ થાય છે.

7. નકશામાં કોઈ સંદર્ભ કે દૃષ્ટિકોણને ધ્યાનમાં લેવામાં આવતો નથી.

8. કોઈ એક નકશામાં પ્રમાણમાપ (સ્કેલ) અચળ રહે છે, ફરતો નથી.

9. યુલર (Euler)નું સૂત્ર : કોઈ પણ બહુફલક માટે $\mathbf{F + V - E = 2}$

જ્યાં F = ફલકની સંખ્યા

V = શિરોબિંદુની સંખ્યા

E = ધારની સંખ્યા

નોંધ

પ્રકરણ 11

માપન

11.1 પ્રાસ્તાવિક

બંધ સમતલ આકૃતિ માટે આપણે શીખી ગયા, કે તેની હદ કે સીમાની ચારે બાજુનું કુલ અંતર એટલે પરિમિતિ અને તે આકૃતિ દ્વારા ઘેરાયેલા કુલ ક્ષેત્રને તેનું ક્ષેત્રફળ કહેવામાં આવે છે. આપણે ત્રિકોણ, લંબચોરસ, વર્તુળ વગેરે જેવી વિભિન્ન સમતલ આકૃતિઓની પરિમિતિ અને ક્ષેત્રફળ શોધવાનું શીખી ચૂક્યા છીએ. ઉપરાંત લંબચોરસ આકાર ફરતે આવેલા રસ્તા કે પગદંડીનું ક્ષેત્રફળ શોધતા પણ શીખી ગયા છીએ.

આ પ્રકરણમાં આપણે ચતુષ્કોણ જેવી બંધ સમતલ આકૃતિઓની પરિમિતિ તથા ક્ષેત્રફળ સાથે સંબંધિત સમસ્યા કે પ્રશ્નો ઉકેલવાનો પ્રયત્ન કરીશું.

આપણે સમઘન, લંબઘન અને નળાકાર જેવા ઘન આકારોના પૃષ્ઠફળ અને કદ અંગે પણ અધ્યયન કરીશું.

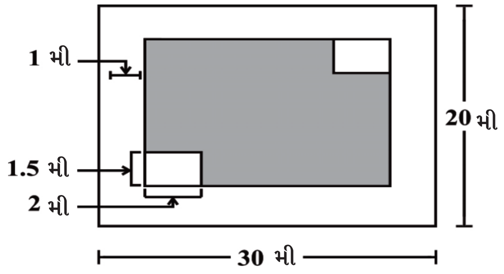
11.2 ચાલો ફરી યાદ કરી લઈએ

આપણા પૂર્વજ્ઞાનની ચકાસણી માટે એક ઉદાહરણની ચર્ચા કરીએ. આ એક લંબચોરસ આકારના બગીચાની આકૃતિ છે (આકૃતિ 11.1). જેની લંબાઈ 30 મીટર અને પહોળાઈ 20 મીટર છે.

(i) આ બગીચાની ચારે બાજુ આવેલ વાડની કુલ લંબાઈ કેટલી હશે ? વાડની લંબાઈ મેળવવા આપણે બગીચાની પરિમિતિ મેળવવાની જરૂર પડશે કે જે 100 મીટર છે (આ બાબત ચકાસો).

(ii) બગીચામાં કેટલી જમીન રોકાયેલી છે ? આ બગીચાએ રોકેલી જમીન શોધવા માટે આપણે બગીચાનું ક્ષેત્રફળ શોધવાની જરૂર પડશે. તે 600 ચોરસ મીટર (મી^{2}) છે (કઈ રીતે ?).

(iii) બગીચાની પરિમિતિ પર અંદરની તરફ એક મીટર પહોળો સિમેન્ટનો રસ્તો તૈયાર કરવાનો છે. જો 4 ચોરસ મીટર (મી^{2}) પર સિમેન્ટ લગાવવા એક થેલી સિમેન્ટ જોઈએ છે. તો આ આખા રસ્તા પર સિમેન્ટ લગાવવા માટે કેટલી થેલી સિમેન્ટની જરૂર પડશે ?



આકૃતિ 11.1

આપણે કહી શકીએ કે, જરૂરી સિમેન્ટની થેલી = $\dfrac{\text{રસ્તાનું ક્ષેત્રફળ}}{\text{સિમેન્ટની એક થેલીથી તૈયાર થતા વિસ્તારનું ક્ષેત્રફળ}}$

સિમેન્ટના રસ્તાનું ક્ષેત્રફળ = બગીચાનું કુલ ક્ષેત્રફળ – બગીચાના જે ભાગ પર સિમેન્ટ નથી લગાવવાનો તેનું ક્ષેત્રફળ રસ્તાની પહોળાઈ 1 મીટર છે તેથી સિમેન્ટ નથી લગાવવાનો તે બાગના લંબચોરસ ભાગનું ક્ષેત્રફળ = $(30 - 2) \times (20 - 2)$ મી^{2} થાય. = 28×18 મી^{2}

તેથી વપરાશમાં જરૂરી સિમેન્ટની થેલીની સંખ્યા = _________________

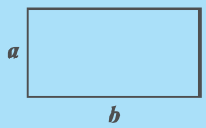
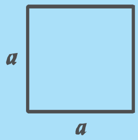
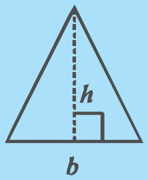
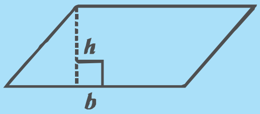
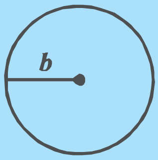
(iv) આકૃતિ 11.1માં દર્શાવ્યા મુજબ, આ બગીચામાં બે લંબચોરસ આકારનાં ફૂલોના ક્યારા છે. જેનું માપ 1.5 મી × 2 મી. છે અને બગીચાના બાકી ભાગમાં ઘાસ છે. બગીચાના ઘાસવાળા વિસ્તારનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

લંબચોરસ ક્યારાનું ક્ષેત્રફળ = ------------------

બગીચામાંથી સિમેન્ટનો રસ્તો બાદ કર્યા પછીનું બાગનું ક્ષેત્રફળ = ------------------

ઘાસવાળા વિસ્તારનું ક્ષેત્રફળ = ------------------

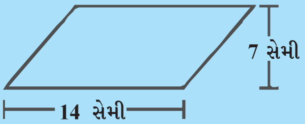
જો આપણને કેટલાક માપ આપ્યા હોય તો આપણે લંબચોરસ સિવાયના બીજા ભૌમિતિક આકારોનું ક્ષેત્રફળ પણ શોધી શકીએ. નીચેના આકારોનાં ક્ષેત્રફળનાં સૂત્રો યાદ કરી યોગ્ય જોડકાં જોડવાનો પ્રયત્ન કરો.

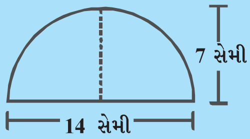
આકૃતિ	આકાર	ક્ષેત્રફળ
	લંબચોરસ	$a \times a$
	ચોરસ	$b \times h$
	ત્રિકોણ	πb^2
	સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ	$\frac{1}{2} b \times h$
	વર્તુળ	$a \times b$

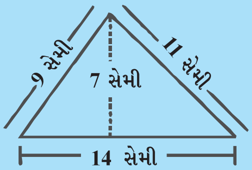
શું તમે ઉપરોક્ત દરેક આકારોની પરિમિતિનાં સૂત્ર લખી શકો છો ?

પ્રયત્ન કરો

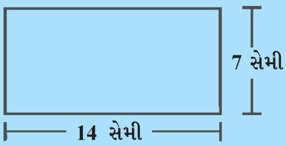
(a) નીચે આપેલા આકારોને બૉક્સમાં આપેલા ક્ષેત્રફળ સાથે યોગ્ય રીતે જોડો.

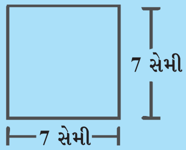






49 સેમી^{2}
77 સેમી^{2}
98 સેમી^{2}

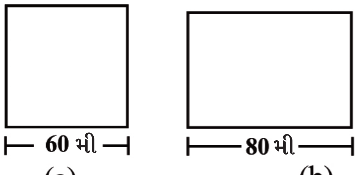




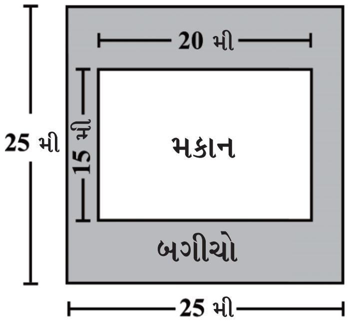
(b) ઉપર દર્શાવેલા દરેક આકારની પરિમિતિ લખો.

સ્વાધ્યાય 11.1

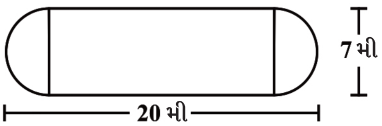
1. અહીં આકૃતિમાં એક ચોરસ અને એક લંબચોરસ ખેતર તેમના માપ સાથે આપેલા છે. આ બંને ખેતરોની પરિમિતિ સમાન છે. કયા ખેતરનું ક્ષેત્રફળ વધારે હશે ?



2. શ્રીમતી કૌશિકનો આકૃતિમાં બતાવ્યા મુજબના માપનો ચોરસ પ્લોટ છે. તે પ્લોટના મધ્યભાગમાં મકાન બનાવવા માગે છે. મકાનને ફરતે બગીચો વિકસાવેલ છે. બગીચો વિકસાવવાનો ભાવ ₹ 55 પ્રતિ ચોરસ મીટર હોય તો મકાનની ફરતે બગીચો વિકસાવવાનો કુલ ખર્ચ કેટલો થશે ?



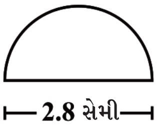
3. અહીં આકૃતિમાં બતાવ્યા મુજબનો એક બગીચો છે. બગીચાનો મધ્યભાગ લંબચોરસ છે અને આ લંબચોરસની બંને બાજુ છેડા પર એક-એક અર્ધવર્તુળાકાર ભાગ આવેલ છે. આ બગીચાની પરિમિતિ અને ક્ષેત્રફળ શોધો. (લંબ-ચોરસની લંબાઈ 20 – (3.5 + 3.5) મીટર છે.)



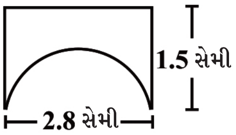
4. ભોંયતળિયે લગાવવાની એક લાદીનો આકાર સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. તેના પાયાની લંબાઈ 24 સેમી અને આનુષંગિક ઊંચાઈ 10 સેમી છે. 1080 ચોરસ મીટર ભોંયતળિયા ઉપર આ મુજબની લાદી લગાડવાની હોય તો કેટલી લાદી જોઈશે ? (ભોંયતળિયાના ખૂણાને લાદીથી ભરવા માટે જરૂરિયાત મુજબ લાદીને કોઈ પણ આકારમાં તમે કાપી શકો છો.)

5. એક કીડી કોઈ ભોંયતળિયા પર પડેલા જુદા-જુદા આકારોના ખાદ્યપદાર્થોની ચારે બાજુ પરિમિતિના માર્ગે પરિભ્રમણ કરે છે. ખાદ્ય પદાર્થના કયા ટુકડાના પરિભ્રમણ માટે કીડીને વધુ અંતર કાપવું પડશે ? (યાદ રાખો કે વર્તુળના પરિઘનું સૂત્ર $c = 2\pi r$ છે, જ્યાં r વર્તુળની ત્રિજ્યા છે.)

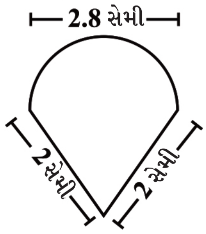
(a)



(b)



(c)

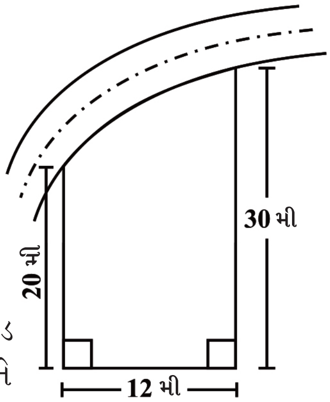


11.3 સમલંબનું ક્ષેત્રફળ (Area of Trapezium)

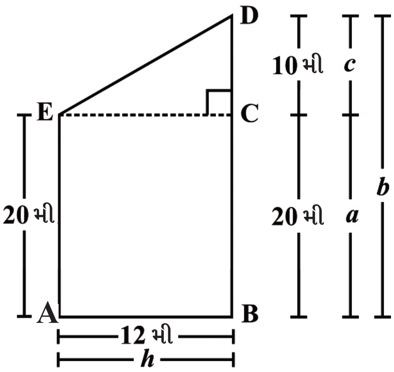
નઝમા પાસે એક પ્લોટ છે, જે મેઈન રોડની નજીક છે (આકૃતિ 11.2 મુજબ). નઝમાનો આ પ્લોટ તેના પાડોશના અન્ય કેટલાક લંબચોરસ પ્લોટ જેવો નથી. તેના પ્લોટની સામસામેની બાજુઓની એક જોડ પરસ્પર સમાંતર છે. તેથી તેનો પ્લોટ લગભગ સમલંબ ચતુષ્કોણ આકારનો છે. શું તમે આ પ્લોટનું ક્ષેત્રફળ મેળવી શકો ?

ચાલો આકૃતિ 11.3માં બતાવ્યા મુજબ પ્લોટને નામ નિર્દેશન કરીએ.

હવે અહીં આપણે AB રેખાખંડને સમાંતર રેખાખંડ EC રચીએ. જેથી ABCE લંબચોરસ બને અને પ્લોટનો બીજો ભાગ ECD ત્રિકોણ આકાર બને. જ્યાં ∠C કાટખૂણો છે જે આકૃતિ 11.3માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 11.2



($b = c + a = 30$ મી)

આકૃતિ 11.3

ΔECDનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} \times h \times c = \frac{1}{2} \times 12 \times 10 = 60$ મી^{2}

લંબચોરસ ABCEનું ક્ષેત્રફળ $= h \times a = 12 \times 20 = 240$ મી^{2}

હવે, સમલંબ ચતુષ્કોણ ABDEનું ક્ષેત્રફળ = ΔECDનું ક્ષેત્રફળ + લંબચોરસ ABCEનું ક્ષેત્રફળ

$= 60 + 240 = 300$ મી^{2}

ઉપરોક્ત ગણતરી આ રીતે પણ થઈ શકે.

સમલંબ ABDEનું ક્ષેત્રફળ $= \left(\frac{1}{2} \times h \times c\right) + (h \times a) = h\left(\frac{c}{2} + a\right)$

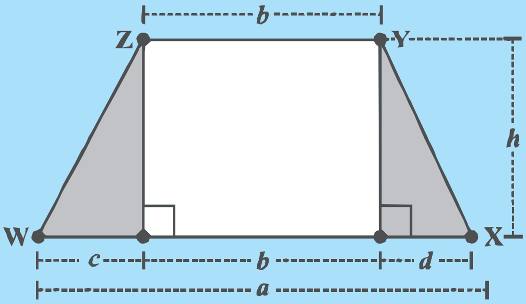
$$= h\left(\frac{c + 2a}{2}\right) = h\left(\frac{c + a + a}{2}\right)$$

$$= h\frac{(b + a)}{2} = \frac{\text{ઊંચાઈ (સમાંતર બાજુઓનો સરવાળો)}}{2}$$

આ વ્યાપક સૂત્રમાં h, b તથા aની કિંમત લઈને ગણતરી કરતાં આપણને, $h\frac{(b + a)}{2} = 300$ મી^{2} પ્રાપ્ત થશે.

પ્રયત્ન કરો

1. નઝમાની બહેન પાસે પણ એક સમલંબ આકારનો પ્લોટ છે. જે આકૃતિ 11.4માં દર્શાવેલ છે. આ પ્લોટને આકૃતિમાં બતાવ્યા મુજબ ત્રણ ભાગમાં વિભાજિત કરો. હવે આ સમલંબ ચતુષ્કોણ WXYZનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{h(a+b)}{2}$ છે તેમ દર્શાવો.



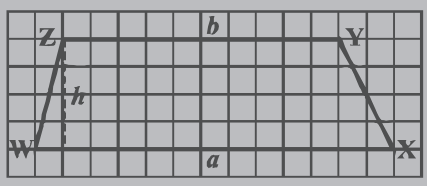
આકૃતિ 11.4

2. જો $h = 10$ સેમી, $c = 6$ સેમી, $b = 12$ સેમી અને $d = 4$ સેમી હોય, તો પ્લોટના દરેક ભાગનું ક્ષેત્રફળ અલગ-અલગ શોધો અને સમલંબ પ્લોટનું કુલ ક્ષેત્રફળ મેળવવા માટે આ ભાગનો સરવાળો કરો. ત્યાર બાદ સૂત્ર $\frac{h(a+b)}{2}$માં h, a અને bની કિંમત મૂકીને જવાબનો તાળો મેળવો.

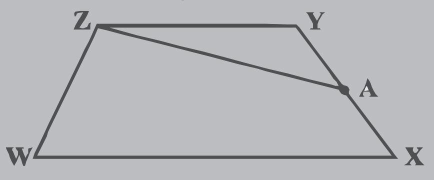
આટલું કરો

1. આલેખપત્રમાં આકૃતિ 11.5માં દર્શાવ્યા મુજબ કોઈ પણ સમલંબ ચતુષ્કોણ WXYZ દોરી તેને કાપીને અલગ કરો.

2. હવે આકૃતિ 11.6માં દર્શાવ્યા મુજબ ચતુષ્કોણની બાજુ XYને વાળીને તેનું મધ્યબિંદુ મેળવો અને તેને A નામ આપો.



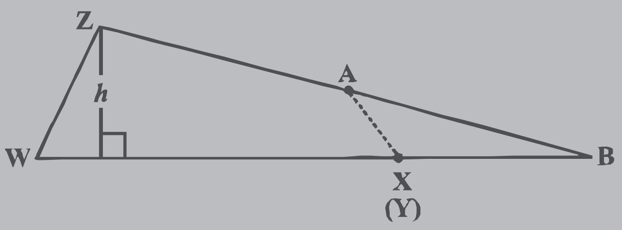
આકૃતિ 11.5



આકૃતિ 11.6

3. ચતુષ્કોણ WXYZ ને રેખાખંડ ZAમાંથી કાપી બે ભાગમાં વહેંચો હવે ΔZYA આકૃતિ 11.7માં દર્શાવ્યા મુજબ એવી રીતે રાખો કે જેથી AY અને AX એક ઉપર એક રહે.

હવે પ્રાપ્ત થતાં મોટા ત્રિકોણના પાયાની લંબાઈ કેટલી થશે ? આ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ મેળવવા માટેનું સૂત્ર લખો.



આકૃતિ 11.7

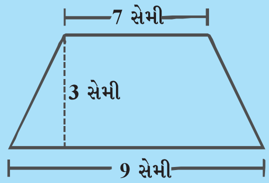
4. આ ત્રિકોણ WZB અને સમલંબ WXYZનું ક્ષેત્રફળ સમાન હશે. કેવી રીતે ? આ મોટા ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળ મેળવવાના સૂત્ર પરથી સમલંબ ચતુષ્કોણના ક્ષેત્રફળનું સૂત્ર મેળવો.

આ રીતે સમલંબ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ મેળવવા માટે આપણને સમાંતર બાજુઓની લંબાઈ અને આ સમાંતરબાજુ વચ્ચેનાં લંબઅંતરની જરૂર પડશે. સમાંતર બાજુઓની લંબાઈનો સરવાળો અને તેમની વચ્ચેના લંબઅંતરના ગુણાકારનું અડધું કરવાથી આપણને સમલંબ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ પ્રાપ્ત થાય છે.

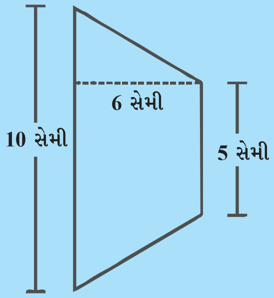
પ્રયત્ન કરો

આકૃતિ 11.8માં બતાવેલા સંમલંબનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

(i)



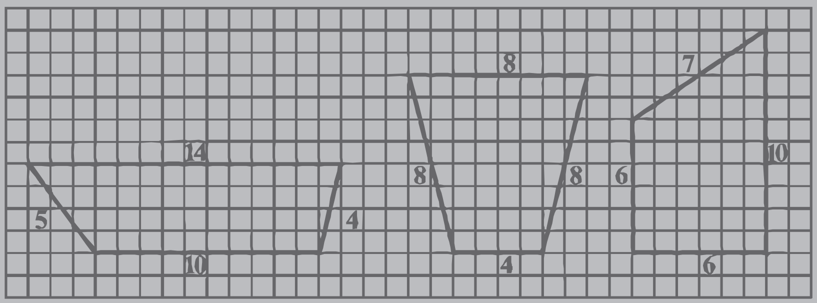
(ii)



આકૃતિ 11.8

આટલું કરો

ધોરણ-7માં આપણે સમાન ક્ષેત્રફળ ધરાવતા અને જુદી-જુદી પરિમિતિ ધરાવતા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરતાં શીખ્યા છીએ. શું સમલંબ ચતુષ્કોણ માટે પણ આમ કરી શકાય ? આકૃતિ 11.9માં દર્શાવેલા જુદી-જુદી પરિમિતિ ધરાવતા સમલંબનું ક્ષેત્રફળ સમાન છે કે કેમ ? તે ચકાસો.



આકૃતિ 11.9

આપણે જાણીએ છીએ કે એકરુપ આકૃતિઓનાં ક્ષેત્રફળ સરખાં હોય છે. તે પરથી આપણે શું એમ કહી શકીએ કે, સમાન ક્ષેત્રફળવાળી આકૃતિ એકરુપ હોય છે ?

એક આલેખપત્ર પર ઓછામાં ઓછા ત્રણ સમલંબ ચતુષ્કોણ એવા બનાવો કે જેની પરિમિતિ સમાન હોય પરંતુ ક્ષેત્રફળ જુદા-જુદા હોય.

11.4 સામાન્ય ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ

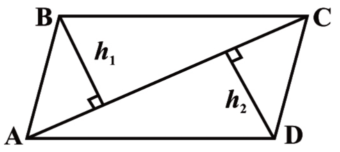
કોઈ પણ સામાન્ય ચતુષ્કોણ (General Quadrilateral)નો એક વિકર્ણ દોરી તેને બે ત્રિકોણમાં વિભાજિત કરી શકાય છે. આ રીતે ચતુષ્કોણને વિભાજિત કરવાની પ્રક્રિયા આપણને સામાન્ય ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ શોધવાનું સૂત્ર મેળવવામાં ઉપયોગી થાય છે. આકૃતિ 11.10નો અભ્યાસ કરો.

ચતુષ્કોણ ABCDનું ક્ષેત્રફળ= (ΔABCનું ક્ષેત્રફળ) + (ΔADCનું ક્ષેત્રફળ)

$$= \left(\frac{1}{2}AC \times h_1\right)\left(\frac{1}{2}AC \times h_2\right)$$

$$= \frac{1}{2}AC\ (h_1 + h_2)$$

$$= \frac{1}{2}d(h_1 + h_2)$$

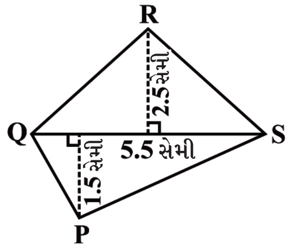


આકૃતિ 11.10

જ્યાં d = કર્ણ ACની લંબાઈ છે.

ઉદાહરણ 1 : આકૃતિ 11.11માં દર્શાવેલા ચતુષ્કોણ PQRSનું ક્ષેત્રફળ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં d = 5.5 સેમી, h_1 = 2.5 સેમી, h_2 = 1.5 સેમી



આકૃતિ 11.11

$\therefore$ ચતુષ્કોણ PQRSનું ક્ષેત્રફળ = $\frac{1}{2}d(h_1 + h_2)$

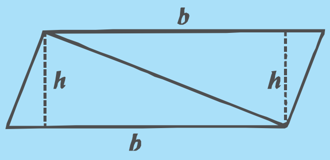
$$= \frac{1}{2} \times 5.5 \times (2.5 + 1.5) \text{ સેમી}^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 5.5 \times 4 \text{ સેમી}^2$$

$$= 11 \text{ સેમી}^2$$

પ્રયત્ન કરો

આપણે જાણીએ છીએ કે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ પણ એક ચતુષ્કોણ જ છે. તો ચાલો, આ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો એક વિકર્ણ દોરી તેને બે ત્રિકોણોમાં વિભાજિત કરીએ અને તે બન્ને ત્રિકોણનાં ક્ષેત્રફળ શોધીએ. આ રીતે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ પણ મેળવી શકાય. શું સમાંતર ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ શોધવાનું સૂત્ર આગળ મેળવેલ સૂત્ર સાથે સામ્ય ધરાવે છે ? (આકૃતિ 11.12)



આકૃતિ 11.12

11.4.1 વિશિષ્ટ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ

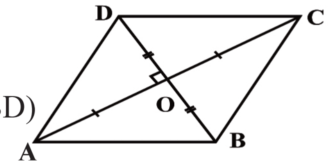
ચતુષ્કોણને કર્ણ દ્વારા બે ત્રિકોણમાં વિભાજિત કરવાની આ પદ્ધતિના આધારે આપણે સમબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ શોધવાનું સૂત્ર મેળવી શકીએ. આકૃતિ 11.13માં ચતુષ્કોણ ABCD એક સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે. તેથી તેના વિકર્ણો એકબીજાને લંબ સમદ્વિભાજક થશે.

સમબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ = (ΔACDનું ક્ષેત્રફળ) + (ΔABCનું ક્ષેત્રફળ)

$$= \left(\frac{1}{2} \times AC \times OD\right) + \left(\frac{1}{2} \times AC \times OB\right)$$

$$= \frac{1}{2} AC(OD + OB) = \frac{1}{2} AC \times BD \; (\because \; OD + OB = BD)$$

$$= \frac{1}{2} d_1 \times d_2 \text{ જ્યાં } d_1 = AC \text{ અને } d_2 = BD \text{ છે.}$$



આકૃતિ 11.13

આમ, સમબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ તેના બન્ને વિકર્ણના ગુણાકારનું અડધું હોય છે.

ઉદાહરણ 2 : એક સમબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણોની લંબાઈ 10 સેમી અને 8.2 સેમી હોય તો તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : સમબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$ જ્યાં d_1, d_2 વિકર્ણોની લંબાઈ છે.

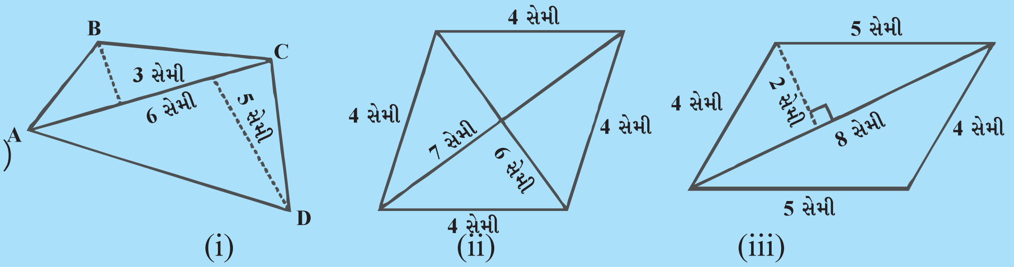
$$= \frac{1}{2}(10)(8.2) = 41 \text{ સેમી}^2$$

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો વિકર્ણ દોરી તેને એકરૂપ ત્રિકોણોમાં વહેંચી શકાય છે. શું સમલંબ ચતુષ્કોણને પણ આ રીતે વિકર્ણ દ્વારા વિભાજિત કરવાથી બે એકરૂપ ત્રિકોણ પ્રાપ્ત થશે ?

પ્રયત્ન કરો

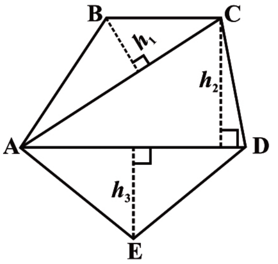
નીચે દોરેલા ચતુષ્કોણોનાં ક્ષેત્રફળ શોધો. (આકૃતિ 11.14)



આકૃતિ 11.14

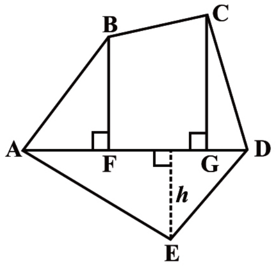
11.5 બહુકોણનું ક્ષેત્રફળ

આપણે, જેમ ચતુષ્કોણને ત્રિકોણોમાં વહેંચીને તેનું ક્ષેત્રફળ શોધી શકીએ છીએ, તે જ પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરીને બહુકોણ (Polygon)નું ક્ષેત્રફળ મેળવી શકાય છે. નીચે આપેલ આકૃતિ 11.15 અને 11.16માં દર્શાવેલા પંચકોણનાં ક્ષેત્રફળ મેળવવા માટે પ્રયત્ન કરો.



આકૃતિ 11.15

વિકર્ણ AC અને ADની રચના કરીને પંચકોણ ABCDEને ત્રણ ત્રિકોણોમાં વહેંચી શકાય છે. તેથી પંચકોણ ABCDEનું ક્ષેત્રફળ = ΔABCનું ક્ષેત્રફળ + ΔACDનું ક્ષેત્રફળ + ΔAEDનું ક્ષેત્રફળ થશે.

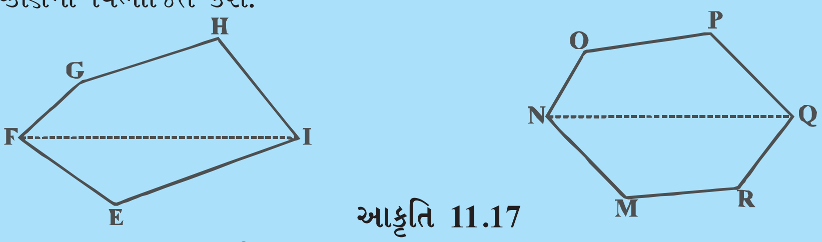


આકૃતિ 11.16

એક વિકર્ણ AD અને તેના પર બે લંબ BF અને CGની રચના કરવાથી પંચકોણ ABCDEને ચાર ભાગોમાં વહેંચી શકાય છે. તેથી, પંચકોણ ABCDEનું ક્ષેત્રફળ = કાટકોણ ત્રિકોણ AFBનું ક્ષેત્રફળ + સમલંબ BFGCનું ક્ષેત્રફળ + કાટકોણ ત્રિકોણ CGDનું ક્ષેત્રફળ + ΔAEDનું ક્ષેત્રફળ (અહીં સમલંબ ચતુષ્કોણ BFGCની સમાંતર બાજુઓને ઓળખો.)

પ્રયત્ન કરો

(i) નીચેની આકૃતિ 11.17માં દર્શાવેલા બહુકોણના ક્ષેત્રફળ મેળવવા માટે તેને ત્રિકોણ અને સમલંબ ચતુષ્કોણમાં વિભાજિત કરો.



આકૃતિ 11.17

બહુકોણ EFGHIનો એક વિકર્ણ FI છે. બહુકોણ MNOPQRનો એક વિકર્ણ NQ છે.

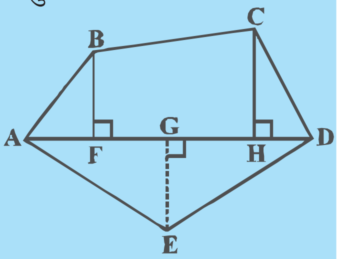
(ii) બહુકોણ ABCDEને આકૃતિ 11.18માં દર્શાવ્યા મુજબ જુદા-જુદા ભાગોમાં વિભાજિત કરવામાં આવેલ છે. અહીં AD = 8 સેમી, AH = 6 સેમી, AG = 4 સેમી, AF = 3 સેમી અને લંબ BF = 2 સેમી, CH = 3 સેમી, EG = 2.5 સેમી આપવામાં આવેલ છે તો બહુકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

બહુકોણ ABCDEનું ક્ષેત્રફળ =

ΔAFBનું ક્ષેત્રફળ + ...

ΔAFBનું ક્ષેત્રફળ = $\frac{1}{2} \times AF \times BF =$

$\frac{1}{2} \times 3 \times 2 =$ ....



આકૃતિ 11.18

સમલંબ ચતુષ્કોણ FBCHનું ક્ષેત્રફળ = FH $\times \frac{(BF+CH)}{2}$

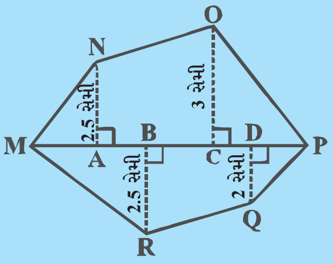
$= 3 \times \frac{(2+3)}{2}$ (FH = AH − AF)

ΔCHDનું ક્ષેત્રફળ = $\frac{1}{2} \times HD \times CH =$ ....

ΔADEનું ક્ષેત્રફળ = $\frac{1}{2} \times AD \times GE =$ ....

તેથી, બહુકોણ ABCDEનું ક્ષેત્રફળ = ...

(iii) આકૃતિ 11.19માં દર્શાવેલ બહુકોણ MNOPQRમાં જો MP = 9 સેમી, MD = 7 સેમી, MC = 6 સેમી, MB = 4 સેમી અને MA = 2 સેમી હોય, તો બહુકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો. NA, OC, QD અને RB એ વિકર્ણ MPને દોરેલા લંબ છે.



આકૃતિ 11.19

ઉદાહરણ 1 : એક સમલંબ આકારના ખેતરનું ક્ષેત્રફળ 480 મી^{2} છે. આ ખેતરની સમાંતર બાજુઓ વચ્ચેનું લંબઅંતર 15 મીટર છે અને સમાંતર બાજુઓમાંથી એકની લંબાઈ 20 મીટર છે તો બીજી સમાંતર બાજુની લંબાઈ શોધો.

ઉકેલ : સમલંબ ચતુષ્કોણની સમાંતર બાજુઓમાંથી એકની લંબાઈ a = 20 મીટર અને બીજી સમાંતર બાજુની લંબાઈ b ધારો અને તેમની વચ્ચેનું લંબ અંતર h = 15 મીટર છે.

ઉપરાંત સમલંબ ખેતરનું ક્ષેત્રફળ = 480 મીટર^2 આપેલ છે.

$$\text{સમલંબનું ક્ષેત્રફળ} = \frac{1}{2}h(a + b)$$

$$\therefore\ 480 = \frac{1}{2} \times 15 \times (20 + b)$$

$$\therefore\ \frac{480 \times 2}{15} = 20 + b$$

$$\therefore\ 64 = 20 + b \quad \therefore\ b = 44 \text{ મીટર}$$

આથી સમલબ ચતુષ્કોણની બીજી સમાંતર બાજુ 44 મીટરની હશે.

ઉદાહરણ 2 : સમબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ 240 સેમી^{2} છે અને તેના એક વિકર્ણની લંબાઈ 16 સેમી છે તો બીજા વિકર્ણની લંબાઈ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે એક વિકર્ણની લંબાઈ d_1 = 16 સેમી છે અને બીજા વિકર્ણની લંબાઈ d_2 છે.

હવે સમબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2$

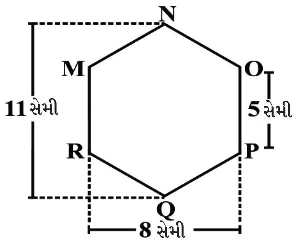
$$\therefore\ 240 = \frac{1}{2} \times 16 \times d_2$$

$$\therefore\ \frac{240 \times 2}{16} = d_2$$

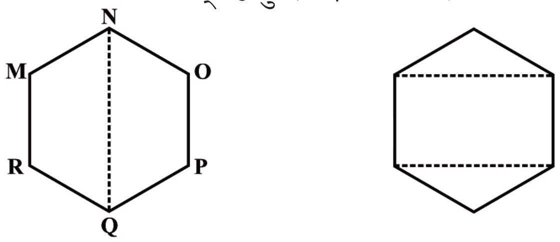
$\therefore\ d_2 = 30$ સેમી

સમબાજુ ચતુષ્કોણના બીજા વિકર્ણની લંબાઈ 30 સેમી છે.

ઉદાહરણ 3 : આકૃતિ 11.20માં એક સમબાજુ ષટ્કોણ MNOPQR દર્શાવેલ છે, તેની દરેક બાજુ 5 સેમી લંબાઈની છે. આકૃતિ 11.21માં દર્શાવ્યા મુજબ અમન અને રિદ્ધિમા આ ષટ્કોણને જુદી-જુદી રીતે વિભાજિત કરે છે. આ બંને પ્રકારના વિભાજનના આધારે ષટ્કોણનું ક્ષેત્રફળ મેળવો.



આકૃતિ 11.20

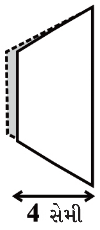


અમનની રીત **રિદ્ધિમાની રીત**

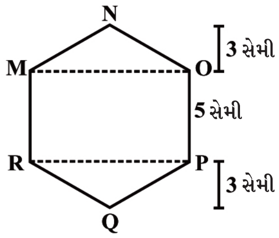
આકૃતિ 11.21

ઉકેલ : અમન દ્વારા કરેલ વિભાજન પ્રમાણે :

આપેલ ષટ્કોણ સમબાજુ હોવાથી NQ વિકર્ણ ષટ્કોણને બે એકરૂપ સમલંબ ચતુષ્કોણમાં વિભાજિત કરે છે. તમે તેને કાગળમાં ષટ્કોણ કાપી પછી NQમાંથી વાળીને ખરાઈ કરી શકો (જુઓ આકૃતિ 11.22). હવે સમલંબ MNQRનું ક્ષેત્રફળ $= 4 \times \frac{(11+5)}{2} = 2 \times 16 = 32$ સેમી^{2}



આકૃતિ 11.22



આકૃતિ 11.23

તેથી, ષટ્કોણ MNOPQRનું ક્ષેત્રફળ $= 2 \times 32 = 64$ સેમી^{2}

રિદ્ધિમાએ કરેલ ષટ્કોણના વિભાજન પ્રમાણે :

આકૃતિ 11.23માં ΔMNO અને ΔRPQ એકરૂપ ત્રિકોણ છે. તેના શિરોબિંદુમાંથી દોરેલા લંબની લંબાઈ 3 સેમી છે (આકૃતિ 11.23). આ બન્ને ત્રિકોણોને કાપી એકબીજા પર મૂકીને એકરૂપતાની ચકાસણી કરી શકાય.

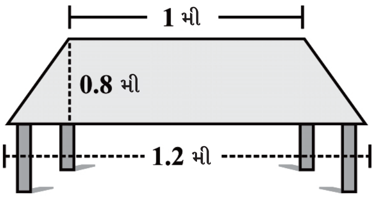
ΔMNOનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12$ સેમી^{2}

ΔRPQનું ક્ષેત્રફળ = 12 સેમી^{2} ($\because$ ΔMNO અને ΔRPQ એકરૂપ ત્રિકોણો છે.)

લંબચોરસ MOPRનું ક્ષેત્રફળ $= 8 \times 5 = 40$ સેમી^{2}

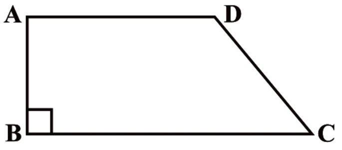
હવે ષટ્કોણ MNOPQRનું ક્ષેત્રફળ $= 40 + 12 + 12 = 64$ સેમી^{2}

સ્વાધ્યાય 11.2



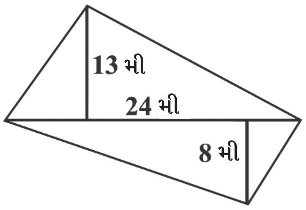
1. એક ટેબલની ઉપર સમતલ પાટિયું સમલંબ ચતુષ્કોણ આકારનું છે. જો તેની સમાંતર બાજુઓની લંબાઈ 1 મીટર અને 1.2 મીટર હોય અને સમાંતર બાજુઓની વચ્ચેનું લંબઅંતર 0.8મી હોય, તો આ ટેબલના આ પાટીયાનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

2. એક સમલંબ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ 34 સેમી^{2} છે અને તેની ઊંચાઈ 4 સેમી છે. આ સમલંબની સમાંતરબાજુઓમાંથી એક બાજુની લંબાઈ 10 સેમી છે, તો તેની બીજી સમાંતર બાજુની લંબાઈ શોધો.

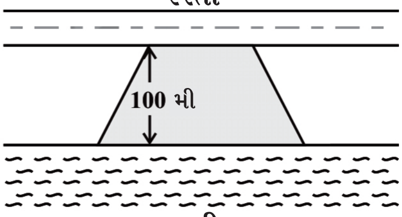


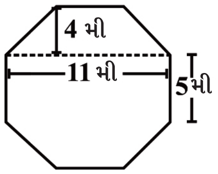
3. એક સમલંબ ચતુષ્કોણ આકારના ખેતર ABCDની વાડની લંબાઈ 120 મીટર છે. જો BC = 48 મીટર, CD = 17 મીટર અને AD = 40 મીટર હોય, તો આ ખેતરનું ક્ષેત્રફળ શોધો. અહીં બાજુ AB એ સમાંતર બાજુ AD અને BC પર લંબ છે.

4. એક ચતુષ્કોણ આકારના ખેતરના વિકર્ણની લંબાઈ 24 મીટર છે અને બાકીનાં બે શિરોબિંદુમાંથી આ વિકર્ણ પર દોરેલા લંબ 8 મીટર અને 13 મીટર છે તો ખેતરનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

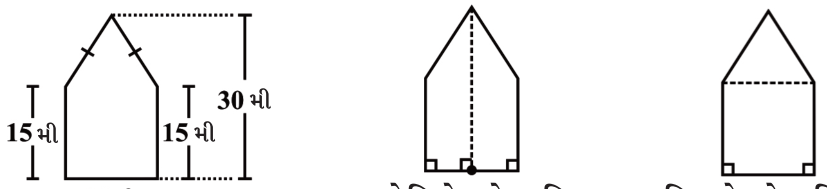


5. એક સમબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણોની લંબાઈ 7.5 સેમી અને 12 સેમી છે તો તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
6. એક સમબાજુ ચતુષ્કોણની બાજુ 5 સેમી અને વેધ 4.8 સેમી છે, તો તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો. જો એક વિકર્ણની લંબાઈ 8 સેમી હોય તો બીજા વિકર્ણની લંબાઈ મેળવો.
7. કોઈ મકાનના ભોંયતળિયામાં સમબાજુ ચતુષ્કોણ આકારની 3000 લાદીઓ લગાડેલ છે. આ લાદીના વિકર્ણની લંબાઈ 45 સેમી અને 30 સેમી છે. હવે એક ચોરસ મીટર લાદી ઘસવાનો ખર્ચ જો 4 રૂપિયા હોય તો સમગ્ર ભોંયતળિયાની લાદી ઘસાવવા માટે કેટલો ખર્ચ થશે ?
8. મોહન એક સમલંબ ચતુષ્કોણ આકારનું ખેતર ખરીદવા ઇચ્છે છે. આ ખેતરની નદી તરફની બાજુ એ, રસ્તા તરફની બાજુને સમાંતર અને અંતરમાં બમણી છે. જો આ ખેતરનું ક્ષેત્રફળ 10,500 મી^{2} હોય અને ખેતરની સમાંતર બાજુઓ વચ્ચેનું લંબ અંતર 100 મીટર હોય તો ખેતરની નદી તરફની બાજુઓની લંબાઈ શોધો.



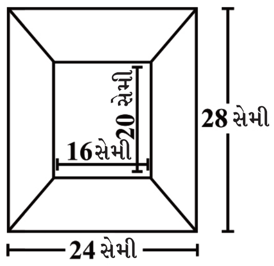


9. જમીનથી ઉપર ઊઠેલ એક ઓટલો છે. તેની ઉપરનું સમતલ સમબાજુ અષ્ટકોણ આકારનું છે. જે આકૃતિમાં દર્શાવેલ છે. આ અષ્ટકોણીય સમતલનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
10. એક પંચકોણ આકારનો બગીચો છે જે આકૃતિમાં દર્શાવેલ છે. આ પંચકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે જ્યોતિ અને કવિતાએ જુદી-જુદી રીતે પંચકોણને વિભાજિત કરેલ છે.



જ્યોતિએ કરેલ વિભાજન કવિતાએ કરેલ વિભાજન

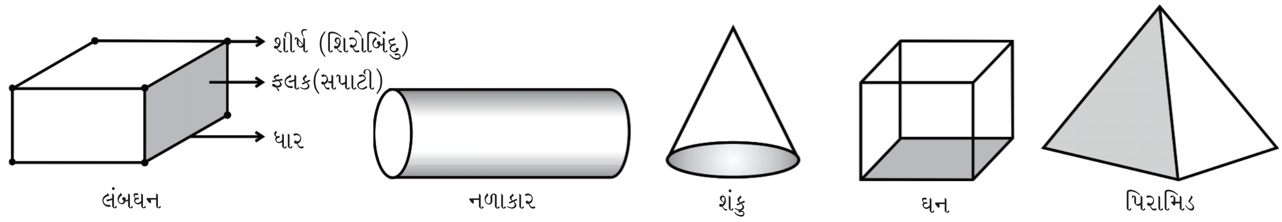
બન્ને રીતે કરેલા વિભાજનની મદદથી બગીચાનું ક્ષેત્રફળ શોધો. શું તમે આ પંચકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધવાની અન્ય કોઈ રીત બતાવી શકો છો ?



11. આકૃતિમાં બતાવેલ ફોટો ફ્રેમની બહારની ધારનું માપ 24 સેમી × 28 સેમી છે અને અંદરની ધારનું માપ અનુક્રમે 16 સેમી × 20 સેમી છે. હવે જો ફ્રેમના ચારે ટુકડાની જાડાઈ સમાન હોય તો ફ્રેમના પ્રત્યેક ટુકડાનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

11.6 ઘન આકાર

આગળના ધોરણમાં આપણે શીખી ચૂક્યા છીએ કે દ્વિ-પરિમાણીય આકૃતિઓને, ત્રિ-પરિમાણીય આકારના ફલક સ્વરૂપે ઓળખી શકાય છે. અત્યાર સુધીમાં મુખ્યત્વે આપણે જે ઘન આકાર (Solid Shape)નો અભ્યાસ કર્યો તે આકૃતિ 11.24માં દર્શાવેલ છે તે જુઓ.



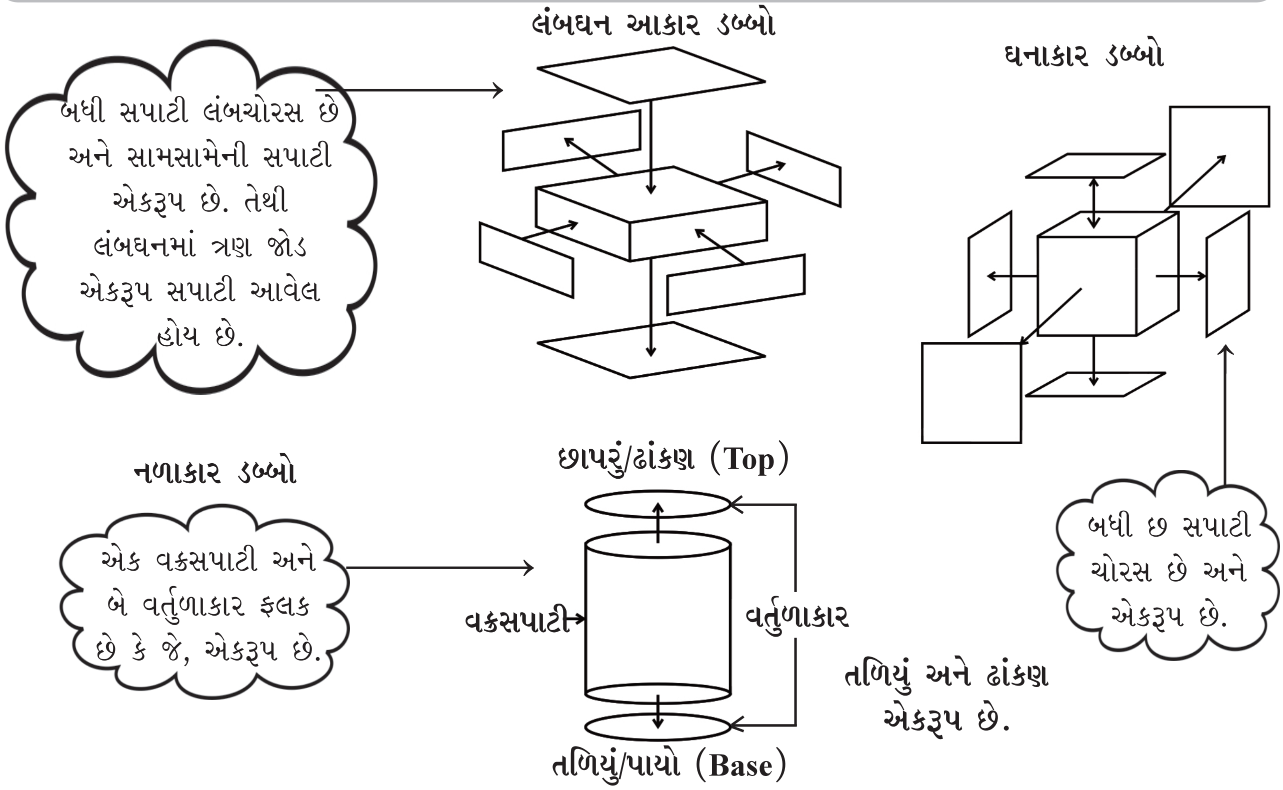
આકૃતિ 11.24

આકૃતિ 11.24માં દર્શાવેલા કેટલાક આકારોમાં બે કે બેથી વધારે એકરૂપ સપાટી આવેલી છે. તેનું નામકરણ કરો. કયા ઘનમાં બધી સપાટી એકરૂપ છે ? તે જણાવો.

આટલું કરો

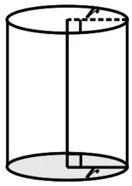
આકૃતિ 11.25માં દર્શાવ્યા મુજબ સાબુ, રમકડાં, દંતમંજન, બિસ્કિટ વગેરે ઘનાકાર, નળાકાર જેવા જુદા-જુદા આકારના ખોખા(બૉક્સ)માં આવે છે. આવા ડબ્બા કે ખોખાં ભેગાં કરો અને તેના આકારોનો અભ્યાસ કરો (આકૃતિ 11.25).

આકૃતિ 11.25



હવે એક પછી એક જુદા-જુદા આકારના ડબ્બા/ખોખા લો. તેની દરેક સપાટીને કાપીને અલગ કરો. દરેક સપાટીના આકારનું અવલોકન કરો. સપાટીને એકબીજા ઉપર રાખીને ખાતરી કરો કે તેઓ સમાન છે કે કેમ ? કુલ સપાટી અને સમાન સપાટીની સંખ્યા શોધો અને તમારાં તારણો લખો.

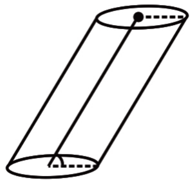
શું તમે નીચેની બાબતો પર ધ્યાન આપ્યું ?



આકૃતિ 11.26
(લંબવૃત્તીય નળાકાર)

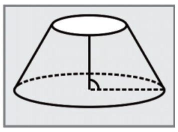
નળાકારના સમાન (એકરૂપ) વર્તુળાકાર બંને સપાટી એકબીજાને સમાંતર છે (આકૃતિ 11.26 જુઓ).

હવે આ વર્તુળાકાર સપાટી પર ધ્યાન કેન્દ્રિત કરો, વર્તુળાકાર સપાટીના મધ્યકેન્દ્રને જોડતો રેખાખંડ આધારને લંબ છે. આવા નળાકારને લંબવૃત્તીય નળાકાર કહે છે. આપણે માત્ર આ પ્રકારના જ નળાકારનો અભ્યાસ કરીશું. અલબત્ત, આકૃતિ 11.27માં દર્શાવ્યા મુજબના બીજા પ્રકારના નળાકાર પણ હોય છે, જે લંબવૃત્તીય નળાકાર નથી.



આકૃતિ 11.27
(આ એક લંબવૃત્તીય નળાકાર નથી.)

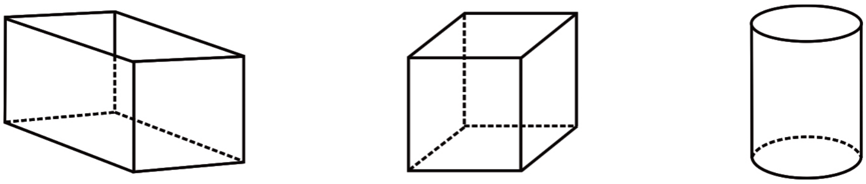
વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો



અહીં આપેલી આકૃતિમાં આપેલા ઘનાકારને નળાકાર કહેવો એ કંઈ ખોટું છે ?

11.7 ઘન, લંબઘન અને નળાકારના પૃષ્ઠફળ (પૃષ્ઠીય ક્ષેત્રફળ)

ઈમરાન, મોનિકા અને જસપાલ ક્રમશઃ આકૃતિ 11.28માં દર્શાવેલા સમાન ઊંચાઈના લંબઘન, સમઘન અને નળાકારને રંગ કરે છે.



આકૃતિ 11.28

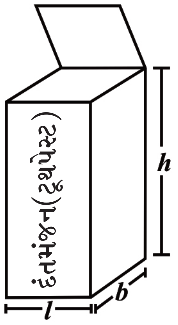
હવે તેઓ એ જાણવા પ્રયત્ન કરે છે કે કોણે વધુ રંગ કર્યો ? હરિ તેમને સલાહ આપે છે કે પ્રત્યેક ડબ્બાનું પૃષ્ઠફળ શોધવાથી તેઓ નક્કી કરી શકશે કે કોણે વધુ રંગ કર્યો છે.

કુલ પૃષ્ઠફળ મેળવવા માટે ઘનાકારના દરેક સપાટીનું ક્ષેત્રફળ મેળવો અને તેનો સરવાળો કરો. આમ, કોઈ પણ ઘન આકારનું પૃષ્ઠફળ તેની સપાટીના ક્ષેત્રફળના સરવાળા જેટલું હોય છે. આ બાબતને વધુ સ્પષ્ટ કરવા આપણે એક પછી એક કરીને દરેક આકાર વિશે આપણે સમજીએ.

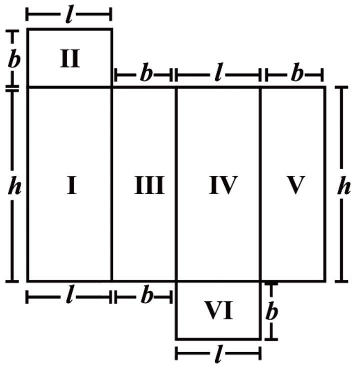
11.7.1 લંબઘન

ધારો કે આકૃતિ 11.29માં દર્શાવ્યા મુજબનું દંતમંજન(ટૂથપેસ્ટ)નું ખોખું તમારી પાસે છે. હવે આ ખોખા(બૉક્સ)ને આકૃતિ 11.30માં દર્શાવ્યા મુજબ કાપી અને ખોલી નાખતા દરેક ફલકના ક્ષેત્રફળ જાળીની જેમ એક બીજા સાથે જોડાયેલા પ્રાપ્ત થશે.

હવે અહીં દરેક બાજુની લંબાઈ દર્શાવો. આપણે જાણીએ છીએ કે લંબઘન (Cuboid)માં ત્રણ જોડ એકરૂપ લંબચોરસ ફલક પ્રાપ્ત થાય છે. આ પ્રત્યેક ફલકનું ક્ષેત્રફળ મેળવવા આપણે કયા સૂત્રનો ઉપયોગ કરી શકીશું ?



આકૃતિ 11.29



આકૃતિ 11.30

ડબ્બા(બૉક્સ)ના દરેક ફલકનું ક્ષેત્રફળ મેળવી કુલ ક્ષેત્રફળ મેળવો. આપણે જાણીએ છીએ કે, લંબઘનનું કુલ ક્ષેત્રફળ = ક્ષેત્રફળ I + ક્ષેત્રફળ II + ક્ષેત્રફળ III + ક્ષેત્રફળ IV + ક્ષેત્રફળ V + ક્ષેત્રફળ VI

$= (h \times l) + (b \times l) + (b \times h) + (l \times h) + (b \times h) + (l \times b)$

તેથી કુલ સપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 2[(h \times l) + (b \times h) + (b \times l)] = 2(lb + bh + hl)$

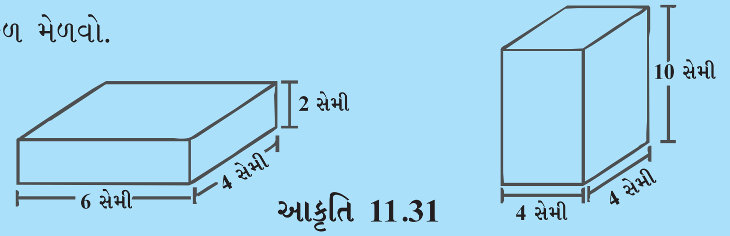
જ્યાં, h, l અને b અનુક્રમે લંબઘનની ઊંચાઈ, લંબાઈ અને પહોળાઈ છે. હવે જો ઉપરોક્ત દર્શાવેલ ડબ્બાની ઊંચાઈ, લંબાઈ અને પહોળાઈ ક્રમશઃ 20 સેમી, 15 સેમી અને 10 સેમી હોય તો,

કુલ પૃષ્ઠફળ $= 2[(20 \times 15) + (20 \times 10) + (10 \times 15)]$

$= 2(300 + 200 + 150) = 1300$ ચોરસમીટર થાય.

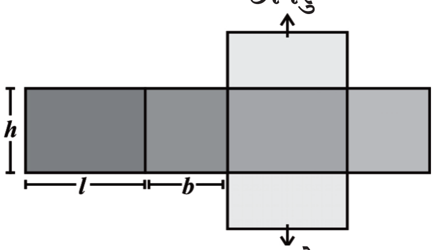
પ્રયત્ન કરો

આકૃતિ 11.31માં દર્શાવેલ લંબઘનનું પૃષ્ઠફળ મેળવો.



આકૃતિ 11.31

- લંબઘનના કુલ પૃષ્ઠફળમાંથી તેના તળિયા અને ઉપરની સપાટીને બાદ કરતાં લંબઘનની ચાર દીવાલનું ક્ષેત્રફળ પ્રાપ્ત થાય છે. ઉદાહરણ તરીકે તમે જે લંબઘન આકારના ઓરડામાં બેઠા છો, તેની ચારે દીવાલનું કુલ ક્ષેત્રફળ, ઓરડાનું પાર્શ્વ પૃષ્ઠફળ (ખુલ્લા લંબઘનનું ક્ષેત્રફળ) તરીકે ઓળખાય છે જુઓ આકૃતિ 11.32. આમ, લંબઘનના પાર્શ્વ પૃષ્ઠફળ (lateral surface area) $2(h \times l + b \times h)$ અથવા $2h(l + b)$ વડે મેળવી શકાય છે.



આકૃતિ 11.32

આટલું કરો

(i) તમારા વર્ગમાં શિક્ષક જે ડસ્ટર લઈને આવે છે તે લંબઘન આકારનું છે. આ ડસ્ટરની ઊંચાઈ જેટલી પહોળાઈ ધરાવતી ભૂરા રંગની કાગળની પટ્ટીને ડસ્ટરની આસ-પાસની ચારે દીવાલ સાથે ગોઠવીને એક પરિભ્રમણ પૂરું કરી વધારાની કાગળની પટ્ટી દૂર કરો. હવે આ કાગળની પટ્ટી દ્વારા લંબઘનની ચારે દીવાલ ઘેરાયેલી છે. હવે આ કાગળની પટ્ટીને હટાવીને તેનું ક્ષેત્રફળ માપો. શું આ માપ ડસ્ટરના પાર્શ્વ પૃષ્ઠફળ જેટલું છે ?

(ii) તમારા વર્ગખંડની લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈ માપો અને નીચે માગ્યા મુજબનું પૃષ્ઠફળ શોધો.

(a) દરવાજા અને બારીને બાદ કરતા વધતું ઓરડાનું કુલ પૃષ્ઠફળ

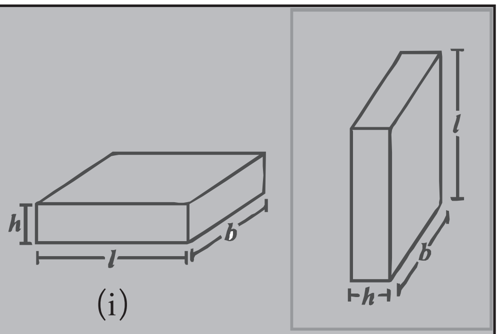
(b) આ ઓરડાનું પાર્શ્વ પૃષ્ઠફળ

(c) ઓરડાને જે ભાગમાં રંગવાનો છે તેનું કુલ ક્ષેત્રફળ

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

1. શું આપણે કહી શકીએ કે લંબઘનનું કુલ પૃષ્ઠફળ
= પાર્શ્વ પૃષ્ઠફળ + 2 (તળિયાનું ક્ષેત્રફળ) ?

2. જો આકૃતિ 11.33(i)માં દર્શાવેલા લંબઘનની ઊંચાઈ અને આધારની લંબાઈને પરસ્પર બદલી નાખીએ તો આકૃતિ 11.33(ii)માં દર્શાવેલ લંબઘન પ્રાપ્ત થાય છે તો તેનું પાર્શ્વ પૃષ્ઠીય ક્ષેત્રફળ બદલી જશે ?

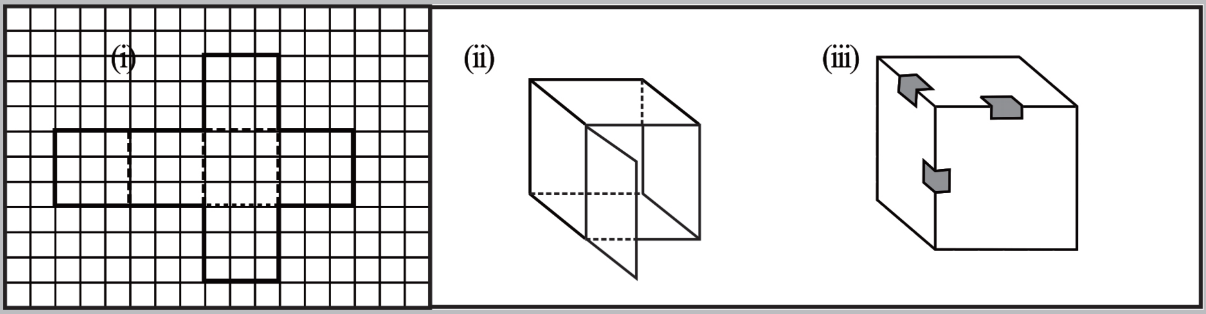


આકૃતિ 11.33 (ii)

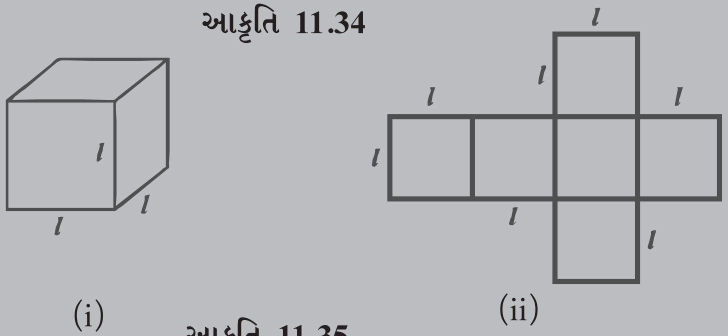
11.7.2 ઘન (Cube)

આટલું કરો

એક આલેખપત્ર પર આકૃતિ 11.34(i)માં દર્શાવ્યા મુજબની રેખાકૃતિ દોરો અને તેને કાપો. તમે જાણો છો તેમ આ રેખાકૃતિ એક ઘનનું પૃષ્ઠફળ દર્શાવતી નેટ (જાળી) છે. આ નેટને આકૃતિ 11.34(ii)માં દર્શાવ્યા મુજબ વાળો અને આકૃતિ 11.34(iii)માં દર્શાવ્યા મુજબ ગમ પટ્ટી લગાવીને ઘન તૈયાર કરો.



આકૃતિ 11.34



આકૃતિ 11.35

(a) આકૃતિ 11.35(i)માં દર્શાવેલ ઘનની લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈ કેટલી છે ? યાદ રાખો કે ઘનની દરેક સપાટી ચોરસ આકારની હોય છે. તેથી ઘનની લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈ સમાન હોય છે.

(b) ઘનની દરેક સપાટીનું ક્ષેત્રફળ લખો. શું બધાં ફલકોનું ક્ષેત્રફળ સમાન મળે છે ?

(c) આ ઘનનું કુલ પૃષ્ઠફળ લખો.

(d) જો ઘનની પ્રત્યેક બાજુની લંબાઈ l હોય, તો પ્રત્યેક સપાટીનું ક્ષેત્રફળ શું થશે ? (આકૃતિ 11.35 (ii) જુઓ.)
શું એમ કહી શકાય કે l લંબાઈની બાજુવાળા ઘનનું પૃષ્ઠફળ $6l^2$ થાય ?

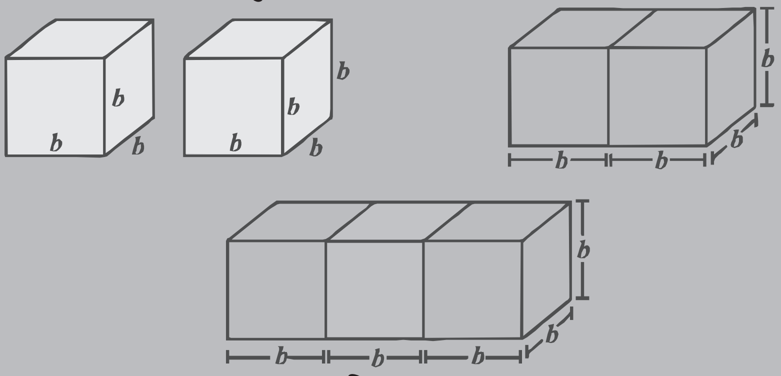
પ્રયત્ન કરો

આકૃતિ 11.36માં દર્શાવેલ ઘન Aનું પૃષ્ઠફળ અને ઘન Bનું પાર્શ્વ પૃષ્ઠફળ શોધો.

આકૃતિ 11.36

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

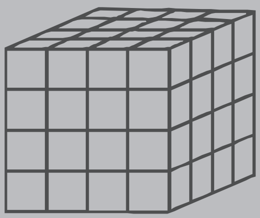
(i) આકૃતિ 11.37માં દર્શાવ્યા મુજબ b બાજુવાળા બે ઘનને જોડીને એક લંબઘન બનાવ્યો છે તો આ લંબઘનનું પૃષ્ઠફળ શું હશે ? શું એ $12b^2$ હશે ? શું આવી જ રીતે b બાજુ ધરાવતાં ત્રણ ઘન જોડીને બનાવેલ લંબઘનનું પૃષ્ઠફળ $18b^2$ થશે ? કેમ ?



આકૃતિ 11.37

(ii) સમાન બાજુવાળા 12 લંબઘનને કઈ રીતે ગોઠવીએ તો તેનાથી બનતા લંબઘનનું પૃષ્ઠફળ લઘુતમ થાય ?

(iii) આકૃતિ 11.38માં દર્શાવ્યા મુજબ એક ઘન ઉપર રંગ કર્યા બાદ તેના એકસરખા 64 ઘન બને તેમ કાપવામાં આવેલ છે અને અલગ કરવામાં આવે છે. તો આમાંથી કેટલા ઘન એવા હશે કે તેની એક પણ બાજુ રંગેલી નહીં હોય ? કેટલા ઘનનું માત્ર એક ફલક (બાજુ) રંગેલું હશે ? કેટલા ઘનની બે સપાટી રંગેલી હશે ? અને કેટલા ઘનની ત્રણ સપાટી રંગવાળાં હશે ?



આકૃતિ 11.38

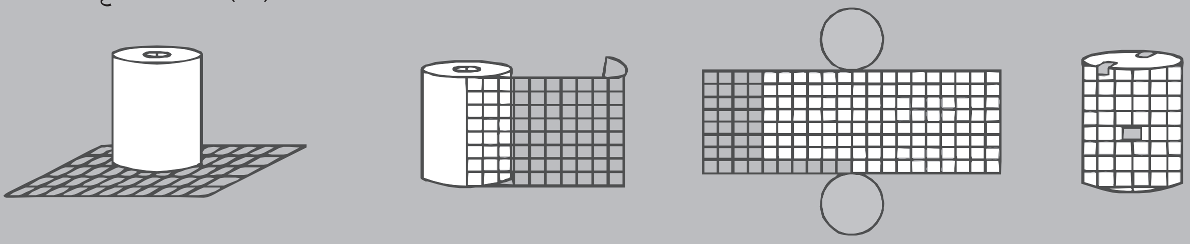
11.7.3 નળાકાર

આપણે જેટલા નળાકાર (Cylinder) જોઈએ છીએ તેમાંથી મોટા ભાગના લંબવૃત્તીય નળાકાર હોય છે. ઉદાહરણ તરીકે ડબ્બો, ભૂંગળું (ગોળ પાઇપ), ટ્યૂબલાઇટ, પાણીની પાઇપ વગેરે.

આટલું કરો

(i) આકૃતિ 11.39(i)માં દર્શાવ્યા મુજબ એક આલેખપત્ર પર એક નળાકાર કેન કે ડબ્બાને રાખી તેના તળિયાના માપનો ટુકડો કાપીને અલગ કરો. હવે આકૃતિ 11.39(ii)માં બતાવ્યા મુજબ નળાકારની ઊંચાઈ જેટલી પહોળાઈના એક આલેખપત્રને નળાકારની ફરતે વીંટાળો અને વધારાનો આલેખપત્ર કાપી નાખો. હવે આકૃતિ 11.39(iii)માં દર્શાવ્યા મુજબના બે વર્તુળાકાર અને એક લંબચોરસ આલેખના ટુકડાને આકૃતિ 11.39(iv)માં બતાવ્યા મુજબ ગમપટ્ટીથી જોડી નળાકાર તૈયાર કરો.

આકૃતિ 11.39(iv)માં નળાકાર કેનની વક્રસપાટી પર વીંટાળેલ ભાગનો આકાર કેવો છે ?

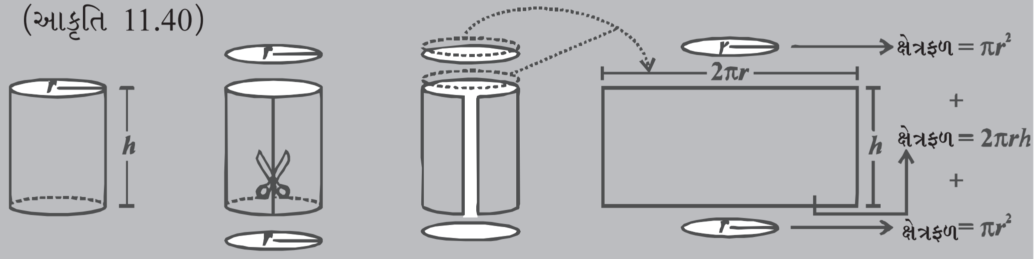


(i) (ii) (iiii) (iv)

આકૃતિ 11.39

આ આકાર ચોક્કસપણે લંબચોરસ જ છે. હવે જ્યારે આપણે નળાકારના આ ભાગોને એકબીજા સાથે પટ્ટીથી જોડીએ ત્યારે આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે લંબચોરસ પટ્ટીની લંબાઈ નળાકારના તળિયે (કે ઉપરની તરફ) આવેલા વર્તુળના પરિઘ જેટલી હોય છે. વર્તુળાકાર આધાર(તળિયા)ની ત્રિજ્યા r, લંબચોરસ પટ્ટીની લંબાઈ l અને પટ્ટીની પહોળાઈ h માપો. શું $2\pi r$ = પટ્ટીની લંબાઈ થાય છે ? લંબચોરસ પટ્ટીનું ક્ષેત્રફળ $2\pi rh$ થાય છે ? ચકાસો. હવે નળાકાર બનાવવામાં વપરાયેલ આલેખપત્ર પરના ચોરસોની સંખ્યા ગણીને નક્કી કરો કે નળાકાર બનાવવા કેટલા ચોરસ એકમનો ઉપયોગ થયેલ છે. શું ગણતરી કરેલ આ માપ લગભગ $2\pi r\,(r + h)$ના માપ જેટલું છે ?

(ii) આપણે નળાકારના પૃષ્ઠફળનો $2\pi r\ (r + h)$ સાથેનો સંબંધ બીજી રીતે પણ મેળવી શકીએ છીએ. નીચેની આકૃતિ 11.40માં દર્શાવ્યા મુજબના એક નળાકારને કાપવાની કલ્પના કરો. (આકૃતિ 11.40)



આકૃતિ 11.40

નોંધ : જ્યારે πની કિંમત વિષે કંઈ કહેવામાં આવેલ ન હોય ત્યારે તેની કિંમત આપણે $\frac{22}{7}$ લઈશું.

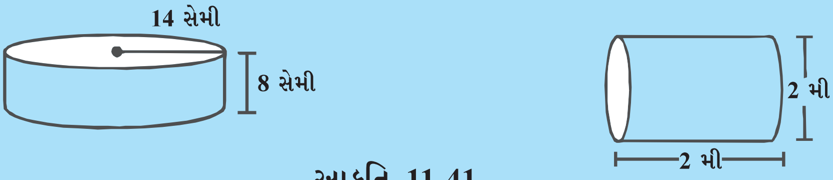
આથી નળાકારનું પાર્શ્વ પૃષ્ઠફળ (વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ) $2\pi rh$ છે.

નળાકારનું કુલ પૃષ્ઠફળ $= \pi r^2 + 2\pi rh + \pi r^2$

$= 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r\ (r + h)$

પ્રયત્ન કરો

આકૃતિ 11.41માં દર્શાવેલા નળાકારનું કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો.



આકૃતિ 11.41

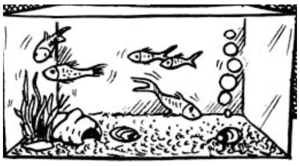
વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

નોંધ કરો કે કોઈ નળાકારના પાર્શ્વ પૃષ્ઠફળ (વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ) નળાકારના આધારના પરિઘ $\times$ નળાકારની ઊંચાઈ જેટલું હોય છે. શું આપણે લંબઘનના પાર્શ્વ પૃષ્ઠફળ(ચારે દીવાલનું ક્ષેત્રફળ)ને આધાર(તળિયા)ના લંબચોરસની પરિમિતિ $\times$ લંબઘનની ઊંચાઈના સ્વરૂપમાં લખી શકીએ ?

ઉદાહરણ 4 : એક માછલીઘર લંબઘન આકારનું છે, તેનું બહારથી માપ 80 સેમી $\times$ 30 સેમી $\times$ 40 સેમી છે. હવે આ માછલીઘરના તળિયા પર, બન્ને બાજુ પર, અને માછલીઘરની પાછળની સપાટી પર કાગળ લગાડવાનો છે તો જોઈતા કાગળનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : માછલીઘરની લંબાઈ (l) = 80 સેમી

માછલીઘરની પહોળાઈ (b) = 30 સેમી



માછલીઘરની ઊંચાઈ (h) = 40 સેમી છે.

તેથી તળિયાનું ક્ષેત્રફળ = $l \times b = 80 \times 30 = 2400$ સેમી^{2}

એક સાઈડ(બાજુ)નું ક્ષેત્રફળ = $b \times h = 30 \times 40 = 1200$ સેમી^{2}

પાછલા ફલકનું ક્ષેત્રફળ = $l \times h = 80 \times 40 = 3200$ સેમી^{2}

માંગેલ ક્ષેત્રફળ = આધારનું ક્ષેત્રફળ + પાછળના ફલકનું ક્ષેત્રફળ + (2 × બાજુ પરના ફલકનું ક્ષેત્રફળ)

= $2400 + 3200 + (2 \times 1200) = 8000$ સેમી^{2}

તેથી જરૂરી રંગીન કાગળનું ક્ષેત્રફળ 8000 સેમી^{2} છે.

ઉદાહરણ 5 : એક લંબઘન આકારના ઓરડાનું અંદરનું માપ 12 મી × 8 મી × 4 મી છે. ઓરડો રંગવાનો ભાવ 5 રૂપિયા પ્રતિ ચોરસ મીટર હોય તો ઓરડાની ચારે દીવાલ રંગવાનો ખર્ચ કેટલો થશે ? અને જો ઓરડાની છતને પણ રંગીએ તો રંગ કરાવવાનો ખર્ચ કેટલો થશે ?

ઉકેલ : ધારો કે ઓરડાની લંબાઈ (l) = 12 મીટર

ઓરડાની પહોળાઈ (b) = 8 મીટર

ઓરડાની ઊંચાઈ (h) = 4 મીટર

ઓરડાની ચારે દીવાલનું ક્ષેત્રફળ = ભોંયતળિયાની પરિમિતિ × ઓરડાની ઊંચાઈ

= $2\ (l + b) \times h$

= $2\ (12 + 8) \times 4$

= $2 \times 20 \times 4 = 160$ મીટર^2

હવે રંગ કરાવવાનો ખર્ચ 5 રૂપિયા/મીટર^2 છે.

તેથી ઓરડાની ચારે દીવાલ રંગવાનો કુલ ખર્ચ = $160 \times 5 = 800$ રૂપિયા

છતનું ક્ષેત્રફળ = $l \times b = 12 \times 8 = 96$ મી^{2}

માટે છતને રંગવાનો ખર્ચ = $96 \times 5 = 480$ રૂપિયા

તેથી ઓરડાને રંગવાનો કુલ ખર્ચ = ચાર દીવાલ રંગવાનો ખર્ચ + છત રંગવાનો ખર્ચ

= 800 + 480 = ₹ 1280

ઉદાહરણ 6 : એક મહેલમાં 24 નળાકાર સ્તંભો છે. દરેક સ્તંભની ત્રિજ્યા 28 સેમી અને ઊંચાઈ 4 મીટર છે. 8 રૂપિયા પ્રતિ ચોરસ મીટરના ભાવથી બધા સ્તંભોની વક્રસપાટીને રંગવાનો કુલ ખર્ચ કેટલો થશે ?

ઉકેલ : નળાકાર સ્તંભની ત્રિજ્યા = 28 સેમી = 0.28 મીટર

નળાકાર સ્તંભની ઊંચાઈ = 4 મીટર

હવે, નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = $2\pi rh$

સ્તંભની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = $2 \times \frac{22}{7} \times 0.28 \times 4 = 7.04$ મી^{2}

આવા 24 સ્તંભોની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = $7.04 \times 24 = 168.96$ મી^{2}

વળી, 1 મીટર^2 રંગકામ માટેનો ખર્ચ = ₹ 8 છે.

તેથી 168.96 મીટર^2 રંગકામ કરવાનો કુલ ખર્ચ = 168.96 × 8 = ₹ 1351.68

ઉદાહરણ 7 : એક નળાકારની ત્રિજ્યા 7 સેમી અને કુલ પૃષ્ઠફળ 968 સેમી^{2} છે, તો તેની ઊંચાઈ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે નળાકારની ઊંચાઈ = h છે.

નળાકારની ત્રિજ્યા = $r = 7$ સેમી

નળાકારનું કુલ પૃષ્ઠફળ = $2\pi r\ (h + r)$

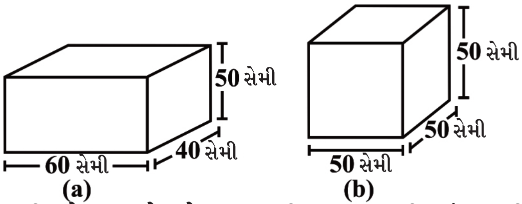
$\therefore\ 968 = 2 \times \frac{22}{7} \times 7\ (h + 7)$

$\therefore\ h = 15$ સેમી થાય.

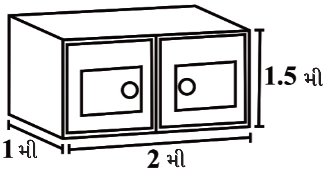
એટલે કે નળાકારની ઊંચાઈ 15 સેમી હશે.

સ્વાધ્યાય 11.3

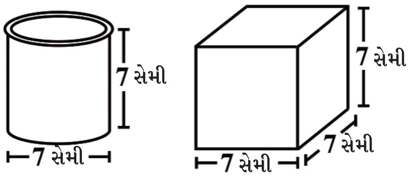
1. બાજુની આકૃતિમાં બતાવ્યા મુજબના માપનો એક લંબઘન અને એક સમઘન છે. આ બન્ને ડબ્બામાંથી કયો ડબ્બો બનાવવામાં ઓછી સામગ્રી વપરાશે ?



2. 80 સેમી × 48 સેમી × 24 સેમી માપ ધરાવતી એક સૂટકેસને તાડપત્રીના કપડાથી ઢાંકવાની છે (કવર બનાવવાનું છે). આવી 100 સૂટકેસને ઢાંકવા માટે 96 સેમી પહોળાઈ ધરાવતી તાડપત્રીના કેટલા કાપડની જરૂર પડશે ?
3. એક એવા ઘનની બાજુનું માપ શોધો કે જેનું પૃષ્ઠફળ 600 સેમી^{2} હોય ?
4. રુખસારે 1 મી × 2 મી × 1.5 મી માપવાળી પેટીને બહારથી રંગ કર્યો. જો તેણે પેટીના તળિયા સિવાય બહારની તરફ બધે રંગ કર્યો હોય, તો તેણે કેટલા પૃષ્ઠફળમાં રંગ કર્યો હશે ?

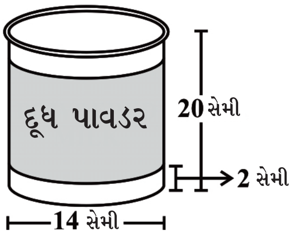


5. ડેનિયલ એક લંબઘન આકારના ઓરડાની દીવાલ અને છતને રંગે છે જેની લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈ ક્રમશઃ 15 મી, 10 મી અને 7 મી છે. રંગના એક ડબ્બામાંથી 100 મીટર^2 ક્ષેત્રફળ પર રંગ કરી શકાતો હોય, તો ઓરડાને રંગવા માટે કેટલા ડબ્બા રંગ જોઈશે ?
6. જમણી બાજુએ આપેલી આકૃતિમાંના બંને ડબ્બા કઈ રીતે સમાન છે અને કઈ રીતે એક બીજાથી જુદા પડે છે ? કયા ડબ્બાનું પાર્શ્વ પૃષ્ઠફળ વધારે હશે ?



7. 7 મીટર ત્રિજ્યા અને 3 મીટર ઊંચાઈવાળી એક બંધ નળાકાર ટાંકી ધાતુના પતરામાંથી બનાવવામાં આવેલ છે. આ ટાંકીને બનાવવા માટે ધાતુનું કેટલું પતરું જોઈશે ?
8. એક ખુલ્લા નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ 4224 સેમી^{2} છે. આ નળાકારને તેની ઊંચાઈ તરફથી કાપીને 33 સેમી પહોળાઈની એક લંબચોરસ આકારની સીટ બનાવવામાં આવે છે, તો લંબચોરસ સીટની પરિમિતિ મેળવો.
9. એક રસ્તાને એક વખત સમતલ કરવા માટે રોલરને 750 વખત પરિભ્રમણ કરવું પડે છે. હવે જો રોલરનો વ્યાસ 84 સેમી અને પહોળાઈ 1 મીટર હોય તો રસ્તાનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

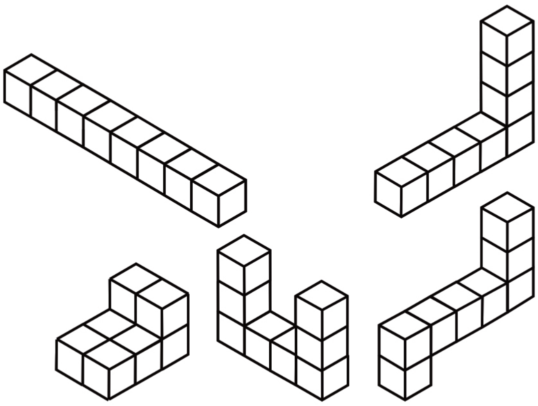
10. એક કંપની તેના દૂધ પાવડરને એવા નળાકાર ડબ્બામાં પેક કરે છે તેનો વ્યાસ 14 સેમી અને ઊંચાઈ 20 સેમી હોય. બાજુની આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે કંપની ડબ્બાની વક્રસપાટી પર ફરતે લેબલ લગાવે છે. જો આ લેબલ નળાકારના શીર્ષ અને તળિયા બન્નેથી 2 સેમી દૂર ચોંટાડવામાં આવતું હોય તો લેબલનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



11.8 ઘન, લંબઘન અને નળાકારનું ઘનફળ/કદ

ત્રિપરિમાણીય આકાર દ્વારા ઘેરાતી જગ્યાને તેનું ઘનફળ/કદ (Volume) કહેવામાં આવે છે. તમારી આસપાસની વસ્તુઓના ઘનફળ(કદ)ની સરખામણી કરવાનો પ્રયત્ન કરો. ઉદાહરણ તરીકે, ઓરડામાં રાખેલા કબાટના ઘનફળની સરખામણીમાં તે ઓરડાનું ઘનફળ વધારે છે. એ જ રીતે તમારા પેન્સિલબૉક્સનું ઘનફળ તેમાં રાખેલી પેન્સિલ કે દરેક રબ્બરના ઘનફળ કરતા વધારે છે. શું તમે એમાંથી કોઈ પણ વસ્તુનું ઘનફળ માપી શકો છો ?

યાદ કરો કે આપણે કોઈ પણ સપાટીનું ક્ષેત્રફળ મેળવવા માટે આલેખપત્ર જેવા ચોરસ એકમોનો ઉપયોગ કરતા હતા. અહીં આપણે ઘનાકાર વસ્તુનું ઘનફળ મેળવવા માટે ઘન એકમોનો ઉપયોગ કરીશું કારણ કે ઘન એ સૌથી વધારે સુવિધાયુક્ત ઠોસ આકાર છે. (જેમ સપાટીના ક્ષેત્રફળના માપન માટે ચોરસ સૌથી વધારે સુવિધાયુક્ત આકાર છે, તેમ ઘન વસ્તુનું ઘનફળ માપવા માટે ઘન એ સૌથી વધુ સુવિધાયુક્ત ઘન આકાર છે.)



આકૃતિ 11.42

કોઈ પણ ઘન પદાર્થનું ઘનફળ મેળવવા માટે આપણે જે-તે ઘનાકાર વસ્તુને ઘન એકમોમાં વિભાજિત કરવાની જરૂર પડે છે. આકૃતિ 11.42માં આપેલ દરેક ઘન આકારનું ઘનફળ 8 ઘન એકમ છે. આ બાબતે વિચારો.

આથી આપણે કહી શકીએ કે, કોઈ પણ ઠોસ(ઘન)ના ઘનફળ માપવા માટે આપણે તેમાં રહેલા ઘન એકમો ગણીએ છીએ.

1 ઘન સેમી $=$ 1 સેમી $\times$ 1 સેમી $\times$ 1 સેમી $=$ 1 સેમી^{3}

1 ઘન મીટર $=$ 1 મી $\times$ 1 મી $\times$ 1 મી $=$ 1 મી^{3}

$=$ .... સેમી^{3}

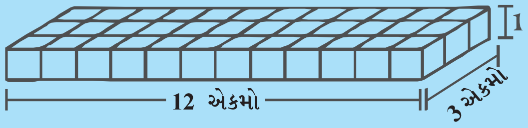
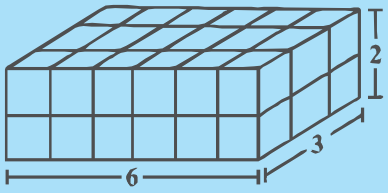
1 ઘન મિલીમીટર $=$ 1 મિમી $\times$ 1 મિમી $\times$ 1 મિમી $=$ 1 મિમી^{3}

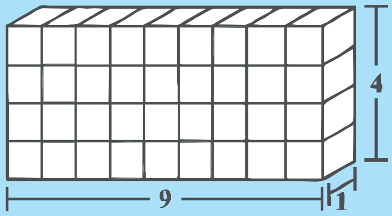
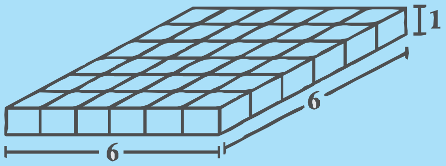
$=$ 0.1 સેમી $\times$ 0.1 સેમી $\times$ 0.1 સેમી $=$ .... સેમી^{3}

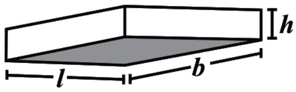
હવે આપણે ઘન, લંબઘન અને નળાકારનાં ઘનફળ મેળવવા માટેનાં સૂત્ર શોધીશું. ચાલો, દરેક ઘન ઉપર એક પછી એક ચર્ચા કરીએ.

11.8.1 લંબઘન

સમાન આકાર (પ્રત્યેક ઘનની લંબાઈ સમાન) હોય તેવા 36 સમઘન લો અને તેમને વ્યવસ્થિત ગોઠવીને લંબઘન (Cuboid) બનાવો. તમે આવા ઘણા પ્રકારના લંબઘન બનાવી શકો છો. નીચેના કોષ્ટક ઉપર વિચાર કરીને ખાલી જગ્યા પૂરો.

	ઘન	લંબાઈ	પહોળાઈ	ઊંચાઈ	$l \times b \times h = V$
(i)		12	3	1	$12 \times 3 \times 1 = 36$
(ii)		...	...	...	...

(iii)		...	...	...	...
(iv)		...	...	...	...



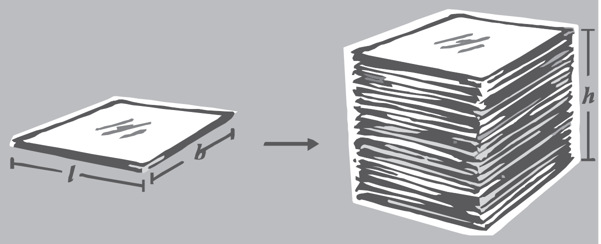
ઉપર દર્શાવેલ સારણીમાં તમે શું જોયું ?

સારણીના દરેક લંબઘન બનાવવામાં આપણે 36 ઘનનો ઉપયોગ કરેલ છે, તેથી પ્રત્યેક લંબઘનનું ઘનફળ પણ 36 ઘન એકમ થશે. આ ઉપરાંત દરેક લંબઘનનું ઘનફળ તેની લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈના ગુણાકારને સમાન છે, તે આપણે અનુભવે જોયું. આથી, ઉપરના ઉદાહરણના આધારે આપણે કહી શકીએ કે, લંબઘનનું ઘનફળ = લંબાઈ × પહોળાઈ × ઊંચાઈ = $l \times b \times h$

આ ઉપરાંત આ આપણે લંબઘનનું ઘનફળ = લંબઘનના આધારનું ક્ષેત્રફળ × ઊંચાઈ પણ કહી શકીએ કારણ કે $l \times b$ = લંબઘનના આધારનું ક્ષેત્રફળ થાય છે.

આટલું કરો

એક કાગળ લો અને તેનું ક્ષેત્રફળ માપો. આ માપનાં જ બીજાં કાગળ લઈને કાગળની થપ્પી લગાવી એક લંબઘન બનાવો (આકૃતિ 11.43 મુજબ). આ થપ્પીની ઊંચાઈ માપો. કાગળનું ક્ષેત્રફળ અને થપ્પીની ઊંચાઈના ગુણાકારનું મૂલ્ય મેળવી લંબઘનનું ઘનફળ જાણો.



આકૃતિ 11.43

આ પ્રવૃત્તિ પરથી આપણે એમ પણ કહી શકીએ કે ઘનનું ઘનફળ આ પ્રકારે પણ મેળવી શકાય. (જો કોઈ ઘન આકારનું શીર્ષ (TOP) અને આધાર (BASE) એકરૂપ હોય અને એકબીજાને સમાંતર હોય તો તેની ધાર/કિનારી (EDGE), આધાર(BASE)ને લંબ હશે.) જેનું ઘનફળ શોધવામાં આ રીતના ઉપયોગ કરી શકાતો હોય તેવી વસ્તુઓ બાબતે તમે વિચારી શકો છો ?

પ્રયત્ન કરો

નીચેની આકૃતિ 11.44માં દર્શાવેલા લંબઘનનું ઘનફળ શોધો.

(i)

આકૃતિ 11.44

11.8.2 ઘન

ઘન (Cube) એ લંબઘનનો એક ખાસ પ્રકાર છે. જેમાં $l = b = h$ થતા હોય,
એટલે કે ઘનનું ઘનફળ $= l \times l \times l = l^3$

પ્રયત્ન કરો

નીચે આપેલા ઘનના ઘનફળ શોધો.

(a) 4 સેમી બાજુવાળો ઘન (b) 1.5 મીટર બાજુવાળો ઘન

આટલું કરો

સમાન આકારવાળા 64 ઘનનો ઉપયોગ કરીને જેટલા પ્રકારના લંબઘન બનાવી શકો તેટલા બનાવો અને આ પ્રત્યેક સ્વરૂપના લંબઘનનું પૃષ્ઠફળ શોધો. શું સમાન ઘનફળવાળી ઘન આકૃતિઓના પૃષ્ઠફળ પણ સમાન હોય છે ?

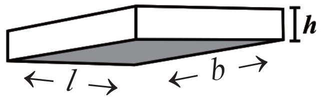
વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

એક કંપની બિસ્કિટ વેચે છે. બિસ્કિટને પૅક કરવા માટે લંબઘન આકારના ડબ્બાનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. ડબ્બો A → 3 સેમી × 8 સેમી × 20 સેમી અને ડબ્બો B → 4 સેમી × 12 સેમી × 10 સેમીનો છે. તો કંપનીને કયા માપના ડબ્બાનો ઉપયોગ કરવાથી આર્થિક લાભ થશે ? કેમ ? શું તમે આવા કોઈ બીજા આકારના ડબ્બાનો ઉપયોગ કરવાની સલાહ આપી શકો કે જેનું ઘનફળ તેના જેટલું જ હોય પરંતુ આર્થિક દૃષ્ટિએ વધુ લાભદાયક હોય.

11.8.3 નળાકાર

આપણે જાણીએ છીએ કે લંબઘનનું ઘનફળ તેના આકારના ક્ષેત્રફળ અને તેની ઊંચાઈના ગુણાકાર દ્વારા મેળવી શકાય છે. શું આ જ રીતે આપણે નળાકારનું ઘનફળ મેળવી શકીએ ?

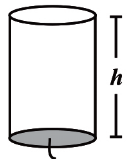
$A = (l \times b) \times h$



લંબઘન

લંબઘનની જેમ નળાકાર (Cylinder)માં પણ એક આધાર (Base) અને શીર્ષ (Top) હોય છે, જે એકબીજાને એકરૂપ અને સમાંતર હોય છે. લંબઘનની જેમ નળાકારની વક્રસપાટી તેના આધારને લંબ હોય છે.

$A = (\pi r^2)h$



આધારનું ક્ષેત્રફળ $= \pi r^2$

તેથી, લંબઘનનું ઘનફળ = આધારનું ક્ષેત્રફળ × ઊંચાઈ

$= (l \times b) \times h = lbh$

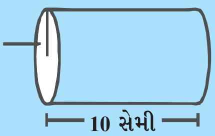
નળાકારનું ઘનફળ= આધારનું ક્ષેત્રફળ × ઊંચાઈ

$= \pi r^2 \times h = \pi r^2 h$

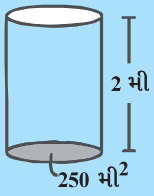
પ્રયત્ન કરો

નીચે આપેલા નળાકારના ઘનફળ મેળવો.

(i)



(ii)



11.9 ઘનફળ (કદ) અને ક્ષમતા

આ બે શબ્દોમાં વધારે તફાવત નથી.

(a) કોઈ વસ્તુ દ્વારા ઘેરાયેલી જગ્યાની માત્રાને ઘનફળ (કદ - Volume) કહે છે.

(b) કોઈ વાસણમાં ભરી શકાતી વસ્તુની માત્રાને તે વાસણની ક્ષમતા (Capacity) કહેવામાં આવે છે.

નોંધ : જો કોઈ પાણી ભરવાના ધાતુના વાસણમાં 100 સેમી^{3} પાણી ભરી શકાય તો તે ધાતુના વાસણની ક્ષમતા 100 સેમી^{3} છે.

ક્ષમતાને લિટરમાં પણ માપી શકાય છે. લિટર અને સેમી^{3}માં નીચે મુજબ સંબંધ છે :

1 મિલી = 1 સેમી^{3}, 1 લિટર = 1000 સેમી^{3}. આમ, 1 મીટર^3 = 1000000 સેમી^{3} = 1000 લિટર

ઉદાહરણ 8 : જેનું ઘનફળ 275 સેમી^{3} અને આધારનું ક્ષેત્રફળ 25 સેમી^{2} હોય, એવા લંબઘનની ઊંચાઈ મેળવો.

ઉકેલ : લંબઘનનું ઘનફળ = આધારનું ક્ષેત્રફળ × ઊંચાઈ

તેથી લંબઘનની ઊંચાઈ $= \dfrac{\text{લંબઘનનું ઘનફળ}}{\text{આધારનું ક્ષેત્રફળ}}$

$= \dfrac{275}{25} = 11$ સેમી

આ રીતે લંબઘનની ઊંચાઈ 11 સેમી છે.

ઉદાહરણ 9 : એક લંબઘન આકારનું ગોદામ છે. તેનું માપ = 60 મી × 40 મી × 30 મી છે. આ ગોદામની અંદર 0.8 મી^{3} ઘનફળ ધરાવતાં કેટલા ડબ્બા રાખી શકાય ?

ઉકેલ : એક ડબ્બાનું ઘનફળ = 0.8 મી^{3}

ગોદામનું ઘનફળ = 60 × 40 × 30 = 72000 મી^{3}

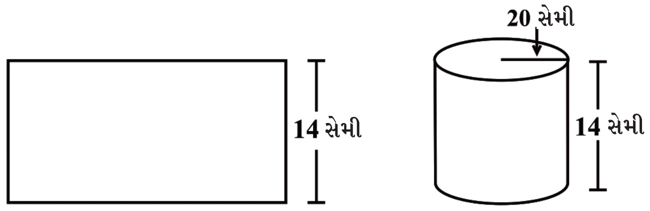
ગોદામની અંદર રાખી શકાય તેમ હોય તે ડબ્બાની સંખ્યા $= \dfrac{\text{ગોદામનું ઘનફળ}}{\text{એક ડબ્બાનું ઘનફળ}} = \dfrac{60 \times 40 \times 30}{0.8} = 90{,}000$

આ રીતે, ગોદામની અંદર 90,000 ડબ્બા રાખી શકાશે.

ઉદાહરણ 10 : 14 સેમી પહોળાઈ ધરાવતાં કાગળને તેની પહોળાઈની દિશામાં વાળીને 20 સેમી ત્રિજ્યાવાળો એક નળાકાર બનાવવામાં આવે છે, તો નળાકારનું ઘનફળ મેળવો (જુઓ આકૃતિ 11.45).

(અહીં π ની કિંમત $\frac{22}{7}$ લેવી.)

ઉકેલ : કાગળને તેની પહોળાઈની દિશામાંથી ગોળ વાળીને નળાકાર બનાવવામાં આવેલ છે, તેથી કાગળની પહોળાઈ નળાકારની ઊંચાઈ થશે અને આ નળાકારની ત્રિજ્યા 20 સેમી છે.



આકૃતિ 11.45

નળાકારની ઊંચાઈ (h) = 14 સેમી

ત્રિજ્યા(r) = 20 સેમી

નળાકારનું ઘનફળ = V $= \pi r^2 h$

$= \dfrac{22}{7} \times 20 \times 20 \times 14 = 17600$ સેમી^{3}

તેથી નળાકારનું ઘનફળ 17600 સેમી^{3} થશે.

ઉદાહરણ 11 : 11 સેમી × 4 સેમી માપ ધરાવતાં લંબચોરસ કાગળના ટુકડાને એકબીજા પર વધુ ન રહે તે રીતે વાળીને 4 સેમી ઊંચાઈનો એક નળાકાર બનાવવામાં આવે છે, તો આ નળાકારનું ઘનફળ શોધો.

ઉકેલ : અહીં કાગળની લંબાઈ નળાકારના આધારનો પરિઘ બની જાય છે અને કાગળની પહોળાઈ એ નળાકારની ઊંચાઈ બની જાય છે.

ધારો કે નળાકારની ત્રિજ્યા $= r$ અને ઊંચાઈ $= h$ છે.

નળાકારના આધારનો પરિઘ $= 2\pi r = 11$

$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 11$$

તેથી, $r = \frac{7}{4}$ સેમી થશે.

નળાકારનું ઘનફળ $(v) = \pi r^2 h$

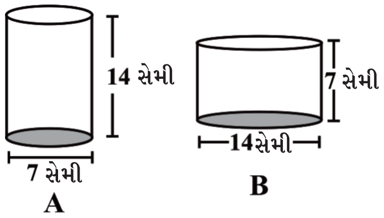
$$= \frac{22}{7} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} \times 4 = 38.5 \text{ સેમી}^3$$

તેથી નળાકારનું ઘનફળ 38.5 ઘન સેમી છે.

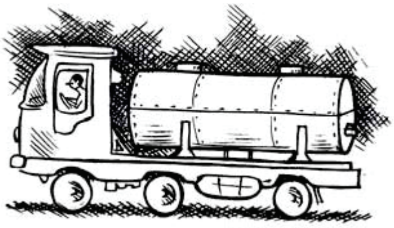
સ્વાધ્યાય 11.4

1. તમને એક નળાકાર ટાંકી આપેલ છે. નીચે આપેલી કઈ પરિસ્થિતિમાં તમે તેનું પૃષ્ઠફળ મેળવશો અને કઈ પરિસ્થિતિમાં તેનું ઘનફળ મેળવશો ?
   (i) નળાકાર ટાંકીમાં કેટલું પાણી રાખી શકાશે, તે નક્કી કરવા માટે.
   (ii) નળાકાર ટાંકીને પ્લાસ્ટર કરવા માટે જરૂરી સિમેન્ટની થેલીઓની સંખ્યા જાણવા.
   (iii) નળાકાર ટાંકીમાં ભરેલા પાણીથી પાણીની કેટલી નાની ટાંકીઓ ભરાશે તેની સંખ્યા જાણવા.

2. નળાકાર Aનો વ્યાસ 7 સેમી અને ઊંચાઈ 14 સેમી છે. નળાકાર Bનો વ્યાસ 14 સેમી અને ઊંચાઈ 7 સેમી છે. ગણતરી કર્યા વગર તમે કહી શકશો કે ઉપરના બે નળાકારમાંથી કોનું ઘનફળ વધારે હશે ? બંને નળાકારનું ઘનફળ મેળવી તમારા જવાબને ચકાસો. આ ઉપરાંત એ પણ ચકાસો કે વધુ ઘનફળ ધરાવતાં નળાકારનું પૃષ્ઠફળ પણ વધારે છે ?

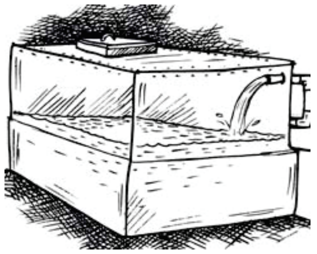


3. એક લંબઘનના આધારનું ક્ષેત્રફળ 180 સેમી^{2} છે અને તેનું ઘનફળ 900 સેમી^{3} છે, તો તે લંબઘનની ઊંચાઈ શોધો.
4. એક લંબઘનનું માપ 60 સેમી × 54 સેમી × 30 સેમી છે. આ લંબઘનની અંદર 6 સેમી બાજુવાળા કેટલા નાના ઘન રાખી શકાશે ?
5. જેનું ઘનફળ 1.54 મી^{3} અને તેના આધારનો વ્યાસ 140 સેમી હોય એવા નળાકારની ઊંચાઈ મેળવો.
6. એક દૂધનું ટેન્કર નળાકાર છે, જેની ત્રિજ્યા 1.5 મીટર અને લંબાઈ 7 મીટર છે. આ ટેન્કરમાં કેટલા લિટર દૂધ ભરી શકાશે ?



7. જો કોઈ ઘનની દરેક બાજુને બમણી કરી દેવામાં આવે તો
   (i) તેના પૃષ્ઠફળમાં કેટલા ગણો વધારો થશે ?
   (ii) તેના ઘનફળમાં કેટલા ગણો વધારો થશે ?

8. એક કુંડની અંદર 60 લિટર પાણી પ્રતિ મિનિટના દરથી પડે છે. જો કુંડનું ઘનફળ 108 મી^{3} હોય, તો આ કુંડને પાણીથી સંપૂર્ણ ભરાતા કેટલા કલાક લાગશે ?



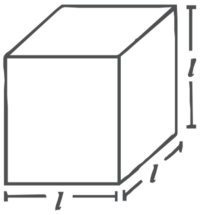
આપણે શું ચર્ચા કરી ?

1. સમલંબ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ

(i) સમલંબનું ક્ષેત્રફળ = સમાંતર બાજુઓની લંબાઈઓના સરવાળાનું અડધું × તેમની વચ્ચેનું લંબ અંતર

(ii) સમબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ = વિકર્ણોના ગુણાકારનું અડધું

2. એક **ઘનનું પૃષ્ઠફળ** તેના ફલકોના ક્ષેત્રફળના સરવાળા જેટલું હોય છે.



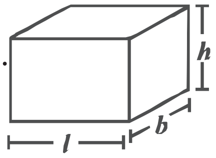
ઘન

3. લંબઘનનું પૃષ્ઠફળ = $2(lb + bh + hl)$

ઘનનું પૃષ્ઠફળ = $6l^2$

નળાકારનું પૃષ્ઠફળ = $2\pi r\ (r + h)$

4. કોઈ પણ ઘન વસ્તુ દ્વારા ઘેરાયેલી જગ્યાની માત્રાને તે ઘનાકારનું **ઘનફળ** કહેવામાં આવે છે.

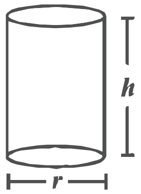


લંબઘન

5. લંબઘનનું ઘનફળ = $l \times b \times h$

ઘનનું ઘનફળ = l^3

નળાકારનું ઘનફળ = $\pi r^2 h$



નળાકાર

6. (i) 1 સેમી^{3} = 1 મિલી

(ii) 1 લિટર = 1000 સેમી^{3}

(iii) 1 મી^{3} = 1000000 સેમી^{3} = 1000 લિટર

প্রকরণ

ઘાત અને ઘાતાંક

પ્રકરણ

12

12.1 પ્રાસ્તાવિક

શું તમે જાણો છો ?

પૃથ્વીનું વજન 5,970,000,000,000,000,000,000,000 કિગ્રા છે. અગાઉના ધોરણમાં આપણે અભ્યાસ કરી ચૂક્યા છીએ કે આ પ્રકારની મોટી સંખ્યાઓને ઘાતાંકનો ઉપયોગ કરીને કેવી રીતે વધારે સરળતાથી લખી શકાય. દા.ત., 5.97×10^{24} કિગ્રા. આપણે 10^{24}ને 10ની 24 ઘાત એમ વાંચીશું.

10^{24} — ઘાતાંક: 24, આધાર: 10

બોલીશું :
10 ની 24 ઘાત

આપણે જાણીએ છીએ કે $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

તેમજ $2^m = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2 \times 2 \ldots$ (m વખત)

ચાલો હવે 2^2 નું મૂલ્ય કોના બરાબર છે તે શોધીએ.

> અહીં ઘાતાંક ઋણ પૂર્ણાંક છે.

12.2 ઋણ પૂર્ણાંક ઘાતાંક

તમે જાણો છો કે $10^2 = 10 \times 10 = 100$

$$10^1 = 10 = \frac{100}{10}$$

$$10^0 = 1 = \frac{10}{10}$$

$$10^1 = ?$$

> ઘાતાંકમાં 1નો ઘટાડો થતાં, મૂલ્ય અગાઉના મૂલ્ય કરતાં $\frac{1}{10}$ જેટલું થાય છે.

ઉપરની ક્રિયાને આગળ વધારતાં

$$10^1 = \frac{1}{10}$$

તે જ રીતે $$10^2 = \frac{1}{10} \div 10 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$$

$$10^3 = \frac{1}{100} \div 10 = \frac{1}{100} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3}$$

તો 10^{10} નું મૂલ્ય કેટલું થાય ?

નીચેનાં પદોને ધ્યાનમાં લો.

$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$

$3^2 = 3 \times 3 = 9 = \frac{27}{3}$

$3^1 = 3 = \frac{9}{3}$

$3^0 = 1 = \frac{3}{3}$

અગાઉની સંખ્યાને 3 વડે ભાગતા

ઉપરનાં પદોને જોતાં કહી શકાય કે,

$$3^1 = 1 \div 3 = \frac{1}{3}$$

$$3^2 = \frac{1}{3} \div 3 = \frac{1}{3 \times 3} = \frac{1}{3^2}$$

$$3^3 = \frac{1}{3^2} \div 3 = \frac{1}{3^2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3^3}$$

આ જ પ્રમાણે હવે તમે 2^2 નું મૂલ્ય શોધી શકશો.
અહીં,

$$10^2 = \frac{1}{10^2} \quad \text{અથવા} \quad 10^2 = \frac{1}{10^{-2}}$$

$$10^3 = \frac{1}{10^3} \quad \text{અથવા} \quad 10^3 = \frac{1}{10^{-3}}$$

$$3^2 = \frac{1}{3^2} \quad \text{અથવા} \quad 3^2 = \frac{1}{3^{-2}} \text{ વગેરે}$$

આમ, આપણે કહી શકીએ કે કોઈપણ શૂન્યેત્તર પૂર્ણાંક સંખ્યા a માટે, $a^m = \frac{1}{a^m}$, જ્યાં m એક ધન પૂર્ણાંક સંખ્યા છે. a^m એ a^mનો વ્યસ્ત છે.

પ્રયત્ન કરો

નિમ્નલિખિત સંખ્યાના વ્યસ્ત શોધો.

(i) 2^4 (ii) 10^5 (iii) 7^2 (iv) 5^3 (v) 10^{100}

આપણે 1425 જેવી સંખ્યાને વિસ્તૃત ઘાત સ્વરૂપે લખતાં શીખ્યા છીએ.
જેમ કે, $1425 = 1 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 5 \times 10^0$
ચાલો, હવે આપણે 1425.36ને વિસ્તૃત સ્વરૂપે કેવી રીતે દર્શાવાય તે જોઈએ.

અહીં, $1425.36 = 1 \times 1000 + 4 \times 100 + 2 \times 10 + 5 \times 1 + \frac{3}{10} + \frac{6}{100}$

$= 1 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 5 \times 10^0 + 3 \times 10^1 + 6 \times 10^2$

પ્રયત્ન કરો

$10^1 = \frac{1}{10}, 10^2 = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$

નીચેની સંખ્યાઓને વિસ્તૃત સ્વરૂપે લખો.

(i) 1025.63 (ii) 1256.249

12.3 ઘાતાંકના નિયમો

આપણે જાણીએ છીએ કે, કોઈપણ શૂન્યેત્તર પૂર્ણાંક સંખ્યા a માટે, $a^m \times a^n = a^{m+n}$ જ્યાં, m અને n પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ છે. શું આ નિયમ ઋણ ઘાતાંક માટે પણ લાગુ પડશે ? ચાલો સમજીએ.

(i) આપણે જાણીએ છીએ કે

કોઈપણ શૂન્યેત્તર સંખ્યા a માટે $a^m = \frac{1}{a^m}$

$2^3 = \frac{1}{2^3}$ અને $2^2 = \frac{1}{2^2}$

માટે $2^3 \times 2^2 = \frac{1}{2^3} \times \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^3 \times 2^2} = \frac{1}{2^{3+2}} = 2^5$

બે ઘાતાંક –3 અને –2નો સરવાળો –5 છે.

(ii) $(-3)^4 \times (-3)^3$ લેતાં,

$(-3)^4 \times (-3)^3 = \frac{1}{(-3)^4} \times \frac{1}{(-3)^3}$

$= \frac{1}{(-3)^4 \times (-3)^3}$

$(-4) + (-3) = -7$

$= \frac{1}{(-3)^{4+3}} = (-3)^7$

ધોરણ 7 માં તમે અભ્યાસ કરી ચૂક્યા છો કે કોઈપણ શૂન્યેત્તર પૂર્ણાંક સંખ્યા a માટે $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ જ્યાં m અને n પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ છે અને $m > n$

(iii) હવે $5^2 \times 5^4$ માટે

$(-2) + 4 = 2$

$5^2 \times 5^4 = \frac{1}{5^2} \times 5^4 = \frac{5^4}{5^2} = 5^{42} = 5^2$

(iv) હવે, $(-5)^4 \times (-5)^2$ માટે,

$(-5)^4 \times (-5)^2 = \frac{1}{(-5)^4} \times (-5)^2 = \frac{(-5)^2}{(-5)^4} = \frac{1}{(-5)^4 \times (-5)^{-2}}$

$= \frac{1}{(-5)^{4-2}} = (-5)^2$

$(-4) + 2 = -2$

આમ, આપણે કહી શકીએ કે કોઈપણ શૂન્યેત્તર સંખ્યા a માટે,

$a^m \times a^n = a^{m+n}$, જ્યાં m અને n પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ છે.

પ્રયત્ન કરો

સાદું રૂપ આપી અને ઘાત સ્વરૂપે લખો.

(i) $(-2)^3 \times (-2)^4$ (ii) $p^3 \times p^{10}$ (iii) $3^2 \times 3^5 \times 3^6$

આ જ પ્રમાણે તમે નીચે દર્શાવેલ ઘાતાંકના નિયમો ચકાસી શકો છો, જ્યાં a અને b શૂન્યેત્તર પૂર્ણાંક હોય તથા m અને n કોઈપણ પૂર્ણાંક સંખ્યા હોય.

(i) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$ (iii) $a^m \times b^m = (ab)^m$

(iv) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ (v) $a^0 = 1$

ધન ઘાતાંક માટે આ નિયમો આપણે ધોરણ 7માં શીખી ચૂક્યા છીએ.

ચાલો, હવે આપણે ઉપરના નિયમોનો ઉપયોગ કરીને થોડાંક ઉદાહરણના ઉકેલ મેળવીએ.

ઉદાહરણ 1 : કિંમત શોધો.

(i) 2^3 (ii) $\frac{1}{3^{-2}}$

ઉકેલ :

(i) $2^3 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ (ii) $\frac{1}{3^{-2}} = 3^2 = 3 \times 3 = 9$

ઉદાહરણ 2 : સાદું રૂપ આપો.

(i) $(-4)^5 \times (-4)^{10}$ (ii) $2^5 \div 2^6$

ઉકેલ :

(i) $(-4)^5 \times (-4)^{10} = (-4)^{(5-10)} = (-4)^5 = \frac{1}{(-4)^5}$ $(a^m \times a^n = a^{m+n}, a^{-m} = \frac{1}{a^m})$

(ii) $2^5 \div 2^6 = 2^{5-(-6)} = 2^{11}$ $(a^m \div a^n = a^{m-n})$

ઉદાહરણ 3 : 4^3 ને આધાર 2 હોય તેવા ઘાત સ્વરૂપે દર્શાવો.

ઉકેલ : અહીં, $4 = 2 \times 2 = 2^2$

માટે $(4)^3 = (2 \times 2)^3 = (2^2)^3 = 2^{2 \times (3)} = 2^6$ $[(a^m)^n = a^{mn}]$

ઉદાહરણ 4 : સાદુંરૂપ આપો અને જવાબને ઘાત સ્વરૂપે દર્શાવો.

(i) $(2^5 \div 2^8)^5 \times 2^5$ (ii) $(-4)^3 \times (5)^3 \times (-5)^3$

(iii) $\frac{1}{8} \times (3)^3$ (iv) $(-3)^4 \times \left(\frac{5}{3}\right)^4$

ઉકેલ :

(i) $(2^5 \div 2^8)^5 \times 2^5 = (2^{58})^5 \times 2^5 = (2^3)^5 \times 2^5 = 2^{155} = 2^{20} = \frac{1}{2^{20}}$

(ii) $(-4)^3 \times (5)^3 \times (-5)^3 = [(-4) \times 5 \times (-5)]^3 = [100]^3 = \frac{1}{100^3}$

$[a^m \times b^m = (ab)^m, a^{m} = \frac{1}{a^m}$ નિયમનો ઉપયોગ કરતાં$]$

(iii) $\frac{1}{8} \times (3)^3 = \frac{1}{2^3} \times (3)^3 = 2^3 \times 3^3 = (2 \times 3)^3 = 6^3 = \frac{1}{6^3}$

(iv) $(-3)^4 \times \left(\frac{5}{3}\right)^4 = (-1 \times 3)^4 \times \frac{5^4}{3^4} = (-1)^4 \times 3^4 \times \frac{5^4}{3^4}$

$= (-1)^4 \times 5^4 = 5^4$ $[(-1)^4 = 1]$

ઉદાહરણ 5 : જો $(-3)^{m+1} \times (-3)^5 = (-3)^7$ હોય તો m શોધો.

ઉકેલ : $(-3)^{m+1} \times (-3)^5 = (-3)^7$

$\therefore (-3)^{m+1+5} = (-3)^7$

$\therefore (-3)^{m+6} = (-3)^7$

બંને તરફના ઘાત સ્વરૂપનો આધાર સમાન છે. જે 1 અને −1થી ભિન્ન છે. તેથી તેમના ઘાતાંક પણ સમાન થાય.

માટે, $m + 6 = 7$

$m = 7 - 6 = 1$

જો $n = 0$ હોય તો જ $a^n = 1$ થાય. જે a ની કોઈપણ કિંમત માટે સત્ય છે, $a = 1$ માટે, $1^1 = 1^2 = 1^3 = 1^2 \quad ... == 1$
અથવા
અનંત સંખ્યા n માટે $(1)^n = 1$.
$a = -1$ માટે $(-1)^0 = (-1)^2 = (-1)^4 = (-1)^2 \quad ... == 1$
અથવા કોઈપણ યુગ્મ સંખ્યા p માટે $(-1)^p = 1$.

ઉદાહરણ 6 : $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{2^{-2}}{3^{-2}} = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{2^{-2}}{3^{-2}} = \frac{3^2}{2^2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

સામાન્ય રીતે, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$

ઉદાહરણ 7 : સાદું રૂપ આપો. (i) $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right\} \div \left\{\frac{1}{4}\right\}^{-2}$

(ii) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-7} \times \left(\frac{8}{5}\right)^{-5}$

ઉકેલ :

(i) $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right\} \div \left\{\frac{1}{4}\right\}^{-2} = \left\{\frac{1^{-2}}{3^{-2}} - \frac{1^{-3}}{2^{-3}}\right\} \div \frac{1^{-2}}{4^{-2}}$

$= \left\{\frac{3^2}{1^2} - \frac{2^3}{1^3}\right\} \div \frac{4^2}{1^2}$

$= \{9 - 8\} \div 16 = \frac{1}{16}$

(ii) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-7} \times \left(\frac{8}{5}\right)^{-5} = \frac{5^{-7}}{8^{-7}} \times \frac{8^{-5}}{5^{-5}} = \frac{5^{-7}}{5^{-5}} \times \frac{8^{-5}}{8^{-7}} = 5^{(-7)-(-5)} \times 8^{(-5)-(-7)}$

$= 5^{-2} \times 8^2 = \frac{8^2}{5^2} = \frac{64}{25}$

સ્વાધ્યાય 12.1

1. કિંમત શોધો.

(i) 3^{-2} (ii) $(-4)^{-2}$ (iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$

2. સાદું રૂપ આપો અને પરિણામને ધન ઘાતાંક સ્વરૂપે દર્શાવો.

(i) $(-4)^5 \div (-4)^8$ (ii) $\left(\frac{1}{2^3}\right)^2$ (iii) $(-3)^4 \times \left(\frac{5}{3}\right)^4$

(iv) $(3^{-7} \div 3^{-10}) \times 3^{-5}$ (v) $2^{-3} \times (-7)^{-3}$

3. કિંમત શોધો.

(i) $(3^0 + 4^{-1}) \times 2^2$ (ii) $(2^{-1} \times 4^{-1}) \div 2^{-2}$ (iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$

(iv) $(3^{-1} + 4^{-1} + 5^{-1})^0$ (v) $\left\{\left(\frac{-2}{3}\right)^{-2}\right\}^2$

4. કિંમત શોધો.

(i) $\dfrac{8^{-1} \times 5^{3}}{2^{-4}}$ (ii) $(5^{-1} \times 2^{-1}) \times 6^{-1}$

5. જો $5^{m} \div 5^{-3} = 5^{5}$ હોય, તો m શોધો.

6. કિંમત શોધો.

(i) $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\right\}^{-1}$ (ii) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-7} \times \left(\frac{8}{5}\right)^{-4}$

7. સાદું રૂપ આપો.

(i) $\dfrac{25 \times t^{-4}}{5^{-3} \times 10 \times t^{-8}}$ $(t \neq 0)$ (ii) $\dfrac{3^{-5} \times 10^{-5} \times 125}{5^{-7} \times 6^{-5}}$

12.4 નાની સંખ્યાઓને પ્રમાણિત સ્વરૂપે દર્શાવવામાં ઘાતાંકનો ઉપયોગ

નીચેનાં તથ્યોનું અવલોકન કરો.

1. પૃથ્વીનું સૂર્યથી અંતર આશરે 150,000,000,000 મી. છે.
2. પ્રકાશની ઝડપ 300,000,000 મી/સે છે.
3. ધોરણ 7ના ગણિતના પાઠ્યપુસ્તકની જાડાઈ 20 મીમી છે.
4. રક્તકણોનો સરેરાશ વ્યાસ 0.000007 મી છે.
5. મનુષ્યના વાળની જાડાઈ 0.005 સેમીથી 0.01 સેમીની વચ્ચે હોય છે.
6. પૃથ્વીથી ચંદ્રનું અંતર આશરે 384,467,000 મી છે.
7. વનસ્પતિ કોષનું માપ 0.00001275 મી છે.
8. સૂર્યની સરેરાશ ત્રિજ્યા 695000 કિમી છે.
9. અંતરિક્ષ યાનમાં રહેલા ઘન રોકેટ બૂસ્ટરમાં બળતણનું દ્રવ્યમાન 503600 કિગ્રા છે.
10. કાગળના ટુકડાની જાડાઈ 0.0016 સેમી છે.
11. કમ્પ્યૂટર ચિપના એક તારનો વ્યાસ 0.000003 સેમી છે.
12. માઉન્ટ ઍવરેસ્ટની ઊંચાઈ 8848 મી છે.

આપણે જોઈશું કે અહીં બહુ જ ઓછી સંખ્યાઓ છે જેને આપણે વાંચી શકીશું જેવી કે, 20 મીમી, 8848 મી, 6,95,000 કિમી. અહીં 150,000,000,000 મી જેવી બહુ જ મોટી સંખ્યાઓ છે તેમજ 0.000007 મી જેવી બહુ જ નાની સંખ્યાઓ છે. ઉપરોક્ત વિધાનોમાંથી આવી બહુ જ મોટી અને બહુ જ નાની સંખ્યાઓ શોધો અને આપેલ કોષ્ટકમાં લખો.

બહુ જ મોટી સંખ્યા	બહુ જ નાની સંખ્યા
150,000,000,000 મી	0.000007 મી
----------------	----------------
----------------	----------------
----------------	----------------
----------------	----------------

આગળના ધોરણમાં આપણે શીખ્યા છીએ કે બહુ જ મોટી સંખ્યાઓને તેમના પ્રમાણિત સ્વરૂપે કેવી રીતે દર્શાવી શકાય.

દા.ત. $150{,}000{,}000{,}000 = 1.5 \times 10^{11}$

હવે, આપણે 0.000007 મી ને પ્રમાણિત સ્વરૂપે દર્શાવીએ.

$0.000007 = \frac{7}{1000000} = \frac{7}{10^6} = 7 \times 10^{-6}$

$\therefore$ 0.000007 મી = 7×10^{-6} મી

આ જ રીતે, એક કાગળના ટુકડાની જાડાઈ 0.0016 સેમી

તેથી $0.0016 = \frac{16}{10000}$

$= \frac{1.6 \times 10}{10^4} = 1.6 \times 10 \times 10^{-4}$

$= 1.6 \times 10^{-3}$

માટે કાગળની જાડાઈ 1.6×10^{-3} સેમી છે.

1,5,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0 (11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1) દશાંશચિહ્ન 11 એકમ ડાબી બાજુ જશે

0.0,0,0,0,0,7 (1 2 3 4 5 6) દશાંશચિહ્ન 6 એકમ જમણી બાજુ જશે.

0.0,0,1,6 (1 2 3) દશાંશચિહ્ન 3 સ્થાન જમણી બાજુ જશે.

પ્રયત્ન કરો

1. નીચેની સંખ્યાઓને પ્રમાણિત સ્વરૂપે દર્શાવો.
   (i) 0.000000564 (ii) 0.0000021 (iii) 21600000 (iv) 15240000
2. આગળ આપેલ તથ્યોમાં દર્શાવેલ સંખ્યાને તેના પ્રમાણિત સ્વરૂપે લખો.

12.4.1 બહુ જ મોટી તથા બહુ જ નાની સંખ્યાઓની સરખામણી

સૂર્યનો વ્યાસ 1.4×10^9 મી અને પૃથ્વીનો વ્યાસ 1.2756×10^7 મી છે. ધારો કે તમે પૃથ્વીના વ્યાસની તુલના સૂર્યના વ્યાસ સાથે કરવા માગો છો.

સૂર્યનો વ્યાસ = 1.4×10^9 મી

પૃથ્વીનો વ્યાસ = 1.2756×10^7 મી

માટે, $\frac{1.4 \times 10^9}{1.2756 \times 10^7} = \frac{1.4 \times 10^{9-7}}{1.2756} = \frac{1.4 \times 100}{1.2756}$ જે લગભગ 100 થશે.

તેથી, સૂર્યનો વ્યાસ પૃથ્વીના વ્યાસ કરતાં 100 ગણો છે.

ચાલો, હવે 0.000007 મી માપ ધરાવતાં રક્તકણોની તુલના 0.00001275 મી માપ ધરાવતાં વનસ્પતિકોષ સાથે કરીએ.

રક્તકણનું માપ = 0.000007 મી = 7×10^{-6} મી

વનસ્પતિકોષનું માપ = 0.00001275 મી = 1.275×10^{-5} મી

માટે, $\frac{7 \times 10^{-6}}{1.275 \times 10^{-5}} = \frac{7 \times 10^{-6-(-5)}}{1.275} = \frac{7 \times 10^{-1}}{1.275} = \frac{0.7}{1.275} = \frac{0.7}{1.3} = \frac{1}{2}$ (આશરે)

તેથી, રક્તકણનું કદ વનસ્પતિકોષના કદ કરતાં અડધું છે.

પૃથ્વીનું દ્રવ્યમાન 5.97×10^{24} કિગ્રા અને ચંદ્રનું દ્રવ્યમાન 7.35×10^{22} કિગ્રા છે, તો કુલ દ્રવ્યમાન કેટલું હશે ?

કુલ દ્રવ્યમાન = 5.97×10^{24} કિગ્રા + 7.35×10^{22} કિગ્રા

$= 5.97 \times 100 \times 10^{22} + 7.35 \times 10^{22}$

$= 597 \times 10^{22} + 7.35 \times 10^{22}$

$= (597 + 7.35) \times 10^{22}$

$= 604.35 \times 10^{22}$ કિગ્રા

પ્રમાણિત સ્વરૂપે રહેલી સંખ્યાઓનો સરવાળો કરતી વખતે, સૌપ્રથમ તેમને સમાન ઘાતાંકવાળી સંખ્યામાં ફેરવીશું.

સૂર્ય અને પૃથ્વી વચ્ચેનું અંતર 1.496×10^{11} મી તથા પૃથ્વી અને ચંદ્ર વચ્ચેનું અંતર 3.84×10^8 મી છે. સૂર્યગ્રહણ વખતે ચંદ્ર પૃથ્વી અને સૂર્યની વચ્ચે આવે છે. આ સમયે ચંદ્રનું સૂર્યથી અંતર કેટલું હશે ?

સૂર્ય અને પૃથ્વી વચ્ચેનું અંતર $= 1.496 \times 10^{11}$ મી
પૃથ્વી અને ચંદ્ર વચ્ચેનું અંતર $= 3.84 \times 10^{8}$ મી
સૂર્ય અને ચંદ્ર વચ્ચેનું અંતર $= 1.496 \times 10^{11} - 3.84 \times 10^{8}$
$= 1.496 \times 1000 \times 10^{8} - 3.84 \times 10^{8}$
$= (1{,}496 - 3.84) \times 10^{8}$ મી $= 1492.16 \times 10^{8}$ મી

ઉદાહરણ 8 : નીચેની સંખ્યાઓને પ્રમાણિત સ્વરૂપે દર્શાવો.

(i) 0.000035 (ii) 4050000

ઉકેલ :

(i) $0.000035 = 3.5 \times 10^{-5}$ (ii) $4050000 = 4.05 \times 10^{6}$

ઉદાહરણ 9 : નીચેની સંખ્યાઓને સામાન્ય સ્વરૂપે લખો.

(i) 3.52×10^{5} (ii) 7.54×10^{-4} (iii) 3×10^{-5}

ઉકેલ :

(i) $3.52 \times 10^{5} = 3.52 \times 100000 = 352000$

(ii) $7.54 \times 10^{-4} = \frac{7.54}{10^{4}} = \frac{7.54}{10000} = 0.000754$

(iii) $3 \times 10^{-5} = \frac{3}{10^{5}} = \frac{3}{100000} = 0.00003$

ફરીથી આપણે પ્રમાણિત સ્વરૂપે આપેલી સંખ્યાઓને સમાન ઘાતાંક વાળી સંખ્યામાં બદલવી પડશે.

સ્વાધ્યાય 12.2

1. નીચેની સંખ્યાઓને તેમનાં પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં દર્શાવો.
   (i) 0.0000000000085 (ii) 0.00000000000942
   (iii) 6020000000000000 (iv) 0.00000000837
   (v) 31860000000
2. નીચેની સંખ્યાઓને તેમનાં સામાન્ય સ્વરૂપે લખો.
   (i) 3.02×10^{-6} (ii) 4.5×10^{4} (iii) 3×10^{-8}
   (iv) 1.0001×10^{9} (v) 5.8×10^{12} (vi) 3.61492×10^{6}
3. નીચે આપેલાં વિધાનોમાં દર્શાવેલ સંખ્યાને તેમનાં પ્રમાણિત સ્વરૂપે લખો.
   (i) 1 માઈક્રોન બરાબર $\frac{1}{1000000}$ મી થાય.
   (ii) એક ઈલૅક્ટ્રોનનો વીજભાર 0.000,000,000,000,000,000,16 કુલંબ છે.
   (iii) બૅક્ટેરિયાનું માપ 0.0000005 મી છે.
   (iv) વનસ્પતિકોષનું માપ 0.00001275 મી છે.
   (v) એક જાડા કાગળની જાડાઈ 0.07 મિમી છે.
4. એક થપ્પીમાં 20 મિમી જાડાઈ હોય તેવી 5 ચોપડી અને 0.016 મિમી જાડાઈના 5 કાગળ ગોઠવેલા છે, તો થપ્પીની કુલ ઊંચાઈ શોધો.

આપણે શું ચર્ચા કરી ?

1. ઋણ ઘાતાંક ધરાવતી સંખ્યાઓને પણ નીચેના નિયમો લાગુ પડે છે.
   (a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (b) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ (c) $(a^m)^n = a^{mn}$
   (d) $a^m \times b^m = (ab)^m$ (e) $a^0 = 1$ (f) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$
2. બહુ જ નાની સંખ્યાઓને ઋણ ઘાતાંકનો ઉપયોગ કરીને પ્રમાણિત સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય છે.