$a(b+c)=ab+ac$

రాష్ట్ర విద్యా పరిశోధన శిక్షణా సంస్థ,
తెలంగాణ రాష్ట్రం, హైదరాబాదు

తెలంగాణ రాష్ట్ర ప్రభుత్వం వారిచే ఉచిత పంపిణీ

గణితం

7వ తరగతి

FREE

గణితం

7వ తరగతి

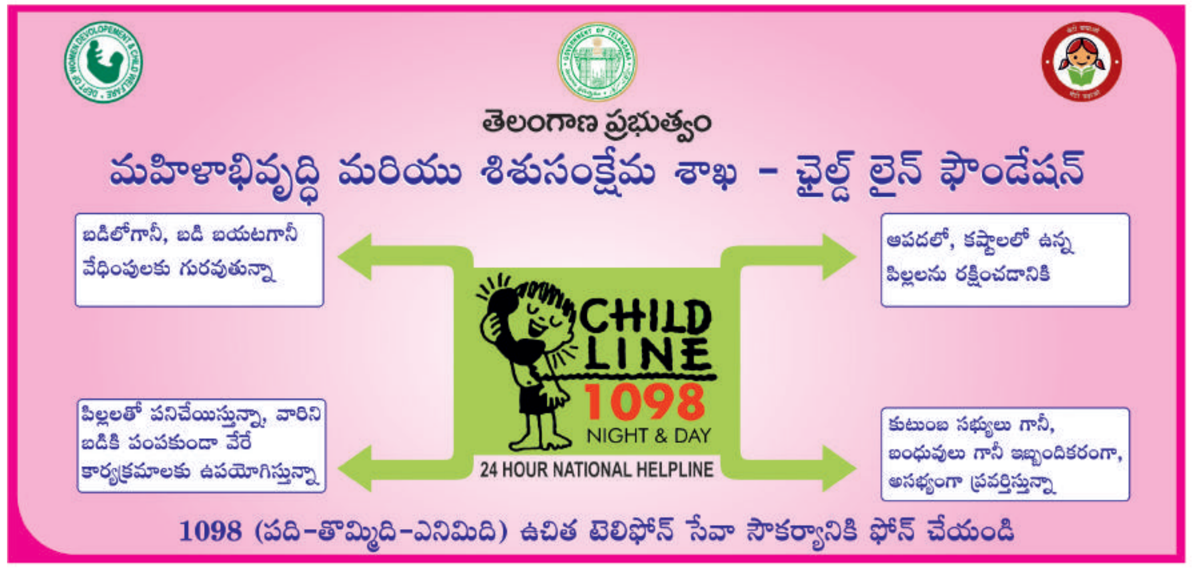
తెలంగాణ ప్రభుత్వ ప్రచురణ,
హైదరాబాదు

తెలంగాణ రాష్ట్ర ప్రభుత్వం వారిచే ఉచిత పంపిణీ

Graph

పిల్లలూ! మీ కోసమే ఈ సూచనలు...

- పాఠ్యపుస్తకంలో ప్రతి భావన అవగాహన కోసం సందర్భం లేదా ఉదాహరణలు లేదా సమస్యలు లేదా ఆటలు మొదలగునవి దానికి సంబంధించిన బొమ్మలు/పటాలు ఇవ్వబడినవి. సందర్భాన్ని పటంతో/బొమ్మతో పాటుచదివి భావనను అవగాహన చేసుకొనుటకు ప్రయత్నించాలి.
- భావనలు అవగాహన చేసుకోవడానికి నిర్వహిస్తున్న కృత్యాలలో పాల్గొంటున్న సందర్భంలో మీకు వచ్చే అనుమానాలను వెంటనే మీ ఉపాధ్యాయులను అడిగి తెలుసుకోవాలి.
- భావన అవగహన అయినది అని తెలుసుకొనుటకు "ఇవి చేయండి"లోని సమస్యలను మీరు స్వంతంగా సాధించాలి. ఒకవేల సాధించలేకపోతే మాదిరి సమస్యను పరిశీలించి అవగాహన పొందాలి. లేదా ఉపాధ్యాయున్ని అడిగి తెలుసుకోవాలి.
- "ప్రయత్నించండి" శీర్షిక కింద ఉన్న సమస్యలు మీ ఆలోచనలను పదునుపెట్టడానికి ఉపయోగపడతాయి. అనగా మీకు ఆలోచన నైపుణ్యాలను పెంపొందిస్తాయి. వీటిని స్వయంగా సాధించలేనపుడు తోటివిద్యార్థులతో కలిసి జట్లలో సాధించడానికి ప్రయత్నించాలి. లేదా ఉపాధ్యాయులతో చర్చించి సాధనను తెలుసుకోవాలి.
- "ఆలోచించండి-చర్చించండి"లోని కృత్యాలు మీరు భావనను మరింత లోతుగా విస్తృతంగా అవగాహన చేసుకోవడానికి దోహదపడతాయి. కావున వీటిని మీ మిత్రులతో కలిసి చర్చిస్తూ, ప్రశ్నిస్తూ అవగాహన పొందండి.
- అధ్యాయం చివరన ఇచ్చిన అభ్యాసంలోని సమస్యలు మీరు అధ్యాయంలో నేర్చుకున్న అన్ని భావనలకు సంబంధించినవి. ఈ సమస్యలన్ని ఒకే విధంగా ఉండవు. వీటిని మీరు స్వయంగా ఇంటిపనిగా గాని లేదా విరామ సమయంలో గాని సాధించవచ్చు.
- "ఇవి చేయండి" "ప్రయత్నించండి"లోని సమస్యలు మాత్రం పాఠశాలలోనే ఉపాధ్యాయుల సమక్షంలో తప్పక సాధించాలి.
- పాఠ్యపుస్తకంలో ఎక్కడైతే ప్రాజెక్టులు ఇవ్వబడినవో వాటిని మీరు జట్లలో చేయవలసి ఉంటుంది. అయితే వీటి నివేదికలు మీరు వ్యక్తిగతంగా రాసివ్వవలసి ఉంటుంది.
- భావన అవగాహన కోసం నిర్వహించే కృత్యాలు, అభ్యాసాలలో ఉండే సమస్యలలో మీ ప్రతిస్పందనలను పాఠ్యపుస్తకంలోనే రాయవలసి ఉంటే వాటిని అక్కడే రాయాలి.
- మీరు ఏరోజు సాధించవలసిన సమస్యలను ఆ రోజే పూర్తిచేసి మీ ఉపాధ్యాయునితో తప్పక సరిచేయించుకోవాలి.
- పాఠ్యపుస్తకంలో మీరు నేర్చుకున్న భావనలకు సంబంధించిన సమస్యలను మరికొన్నింటిని సేకరించి లేదా మీరు స్వయంగా తయారుచేసి గాని మీ ఉపాధ్యాయునికి, తోటి విద్యార్థులకు చూపించండి. అందరు కలిసి వాటిని సాధించండి.
- గణిత భావనలకు సంబంధించి పాఠ్యపుస్తకంలో ఇచ్చిన ఆటలు, పజిల్స్, ఆసక్తికరమైన విషయాలు అవగాహన చేసుకొని అలాంటివి మరికొన్ని సేకరించి సాధించాలి.
- పాఠ్యపుస్తకం ద్వారా తరగతిగదిలో నేర్చుకున్న భావనలను తరగతిగదికే పరిమితం చేయకుండా జీవితంలో (తరగతి బయట) వివిధ సందర్భాలకు వాటిని జోడించడం, ఉపయోగించడం వంటివి చేయాలి.
- గణితంలో మీరు ముఖ్యంగా సమస్యసాధన, కారణాలు చెప్పడం-నిరూపణలు చేయడం, గణితభాషలో వ్యక్తపరచడం, గణిత భావనలను, అవగహనను వివిధ సందర్భంలో, విషయాలలో, నిత్య జీవితంలో అనుసందానం చేయడం, ప్రాతినిధ్యపరచడం వంటి సామర్థ్యాలను సాధించాలి.
- పై గణిత సామర్థ్యాలను సాధించడంలో భావనల అవగాహన పరంగా ఏవైనా ఇబ్బందులు ఎదురైతే ఎప్పటికప్పుడు ఉపాధ్యాయుల సహకారం తీసుకోవాలి.



గణితం

7వ తరగతి

పాఠ్య పుస్తక అభివృద్ధి, ప్రచురణ కమిటి

ప్రధాన నిర్వహణాధికారి
శ్రీమతి బి. శేషు కుమారి
సంచాలకులు, రాష్ట్ర విద్య,పరిశోధన, శిక్షణ సంస్థ
హైదరాబాదు.

ప్రధాన వ్యవహారనిర్వాహకులు
శ్రీ. బి. సుధాకర్
సంచాలకులు, ప్రభుత్వ పాఠ్యపుస్తక ముద్రణాలయం
హైదరాబాదు.

కార్యనిర్వాహకులు
డా నన్నూరు ఉపేందర్ రెడ్డి
ప్రొఫెసర్, కరికులం & పాఠ్యపుస్తక విభాగం
రాష్ట్ర విద్య, పరిశోధన, శిక్షణ సంస్థ,
హైదరాబాదు.

సహాయ కార్యనిర్వాహకులు
శ్రీ. కె.యాదగిరి
లెక్చరర్, రాష్ట్ర విద్య, పరిశోధన, శిక్షణ సంస్థ,
హైదరాబాదు.

కోఆర్డినేటర్లు

శ్రీ. కె. బ్రహ్మయ్య, ప్రొఫెసర్
రాష్ట్ర విద్య, పరిశోధన శిక్షణ సంస్థ,
హైదరాబాదు.

శ్రీ. కాకుళవరం రాజేందర్ రెడ్డి, కోఆర్డినేటర్
రాష్ట్ర విద్య, పరిశోధన, శిక్షణ సంస్థ,
హైదరాబాదు.

సంపాదకులు

శ్రీమతి బి. శేషు కుమారి, సంచాలకులు, రాష్ట్ర విద్య,పరిశోధన, శిక్షణ సంస్థ, హైదరాబాదు.

శ్రీ. కె. బ్రహ్మయ్య, ప్రొఫెసర్, రాష్ట్ర విద్య, పరిశోధన, శిక్షణ సంస్థ, హైదరాబాదు.

శ్రీ. పి. ఆదినారాయణ, రిటైర్డ్ లెక్చరర్, న్యూ సైన్స్ కాలేజి, అమీర్‌పేట్, హైదరాబాద్.

ఛైర్మన్, గణిత ఆధార పత్రం, గణిత పాఠ్యప్రణాళిక, పాఠ్యపుస్తక అభివృద్ధి కమిటీ

ప్రొఫెసర్. వి. కన్నన్, గణితం – సాంఖ్యకశాస్త్రవిభాగం, హైదరాబాదు విశ్వవిద్యాలయం.

ముఖ్యసలహాదారు

డా హెచ్. కె. దివాన్, విద్యా సలహాదారు, విద్యాభవన్ సొసైటి, రిసోర్స్ సెంటర్, ఉదయపూర్, రాజస్తాన్.

తెలంగాణ ప్రభుత్వ ప్రచురణ, హైదరాబాదు

చట్టాలను గౌరవించండి
హక్కులను పొందండి

విద్యవల్ల ఎదగాలి
వినయంతో మెలగాలి

తెలంగాణ ప్రభుత్వం వారిచే ఉచిత పంపిణీ 2019-20

© Government of Telangana, Hyderabad.

First Published 2012
New Impressions 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019

All rights reserved.

No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means without the prior permission in writing of the publisher, nor be otherwise circulated in any form of binding or cover other than that in which it is published and without a similar condition including this condition being imposed on the subsequent purchaser.

The copy right holder of this book is the Director of School Education, Hyderabad, Telangana.

This Book has been printed on 70 G.S.M. SS Maplitho
Title Page 200 G.S.M. White Art Card

తెలంగాణ ప్రభుత్వం వారిచే ఉచిత పంపిణీ 2019-20

Printed in India
at the Telangana Govt. Text Book Press,
Mint Compound, Hyderabad,
Telangana.

— o —

పాఠ్య పుస్తక అభివృద్ధి కమిటీ సభ్యులు

రచయితలు

డాక్టర్. పి.రమేష్, లెక్చరర్, ప్రభుత్వ ఐ.ఎ.ఎస్.ఇ, నెల్లూరు

శ్రీ. ఎమ్. రామాంజనేయులు, లెక్చరర్, డైట్, వికారాబాద్, రంగారెడ్డి

శ్రీ. కాకుళవరం రాజేందర్ రెడ్డి, కో-ఆర్డినేటర్, రాష్ట్ర విద్య, పరిశోధన, శిక్షణ సంస్థ, హైదరాబాద్

శ్రీ. టి.వి. రామకుమార్, హెడ్‌మాస్టర్, జి.ప.ఉ.పా., ములుమూడి, నెల్లూరు

శ్రీ. పి. ఆంథోనిరెడ్డి, హెడ్ మాస్టర్, సెయింట్ పీటర్స్ హైస్కూల్, రంగనాయకులపేట, నెల్లూరు

శ్రీ. ఎస్. ప్రసాదబాబు, పి.జి.టి, గిరిజన గురుకుల పాఠశాల, చంద్రశేఖరపురం నెల్లూరు

శ్రీ. జి.వి.బి.సూర్యనారాయణరాజు, స్కూల్ అసిస్టెంట్, మున్సిపల్ హైస్కూల్, కస్పా, విజయనగరం.

శ్రీ. పి. సురేష్‌కుమార్, స్కూల్ అసిస్టెంట్, ప్ర.ఉ.పా., విజయనగర్ కాలనీ, హైదరాబాద్.

శ్రీ. కె.వి. సుందర్ రెడ్డి, స్కూల్ అసిస్టెంట్, ప్ర.ఉ.పా., తక్కశిల, అలాంపూర్ మండల్, మహబూబ్‌నగర్..

శ్రీ. సి.హెచ్. రమేశ్, స్కూల్ అసిస్టెంట్, ఉ.ప్రా.పా., నాగారం మండల్, గుంటూరు.

శ్రీ. ఎస్. నరసింహమూర్తి, స్కూల్ అసిస్టెంట్, జి.ప.ఉ.పా ముదివర్తిపాలెం, నెల్లూరు.

శ్రీ. జి. వెంకటేశ్వర్లు, స్కూల్ అసిస్టెంట్, జి.పా.ఉ.పా., వేములకోట, ప్రకాశం.

శ్రీ. పి.డి.ఎల్. గణపతి శర్మ, స్కూల్ అసిస్టెంట్, ప్ర.ఉ.పా., జమిస్తాన్‌పుర్, మాణికేశ్వర్‌నగర్, హైదరాబాద్.

శ్రీ. పి. అశోక్, హెడ్‌మాస్టర్ జి.ప.ఉ.పా., కుమారి, ఆదిలాబాద్

విద్యావిషయక సహకారం అందించిన సభ్యులు

శ్రీమతి. నమ్రిత బాత్రా, విద్యాభవన్ సొసైటి, రిసోర్స్ సెంటర్, ఉదయపూర్, రాజస్తాన్.

శ్రీ. ఇందర్ మోహన్, విద్యాభవన్ సొసైటి, రిసోర్స్ సెంటర్, ఉదయపూర్, రాజస్తాన్.

శ్రీ. యశ్వంత్‌కుమార్ ధవే, విద్యాభవన్ సొసైటి, రిసోర్స్ సెంటర్, ఉదయపూర్, రాజస్తాన్.

శ్రీమతి. పద్మప్రియ శిరాలి, కమ్యూనిటి మేథమేటిక్స్ సెంటర్, రుషివ్యాలి స్కూల్, చిత్తూర్.

కుమారి. ఎమ్. అర్చన, డిపార్ట్‌మెంట్ ఆఫ్ మేథమేటిక్స్ & స్టాటిస్టిక్స్, యూనివర్శిటీ ఆఫ్ హైదరాబాద్

శ్రీ. శరన్ గోపాల్, డిపార్ట్‌మెంట్ ఆఫ్ మేథమేటిక్స్ & స్టాటిస్టిక్స్, యూనివర్శిటీ ఆఫ్ హైదరాబాద్

శ్రీ. పి. చిరంజీవి, డిపార్ట్‌మెంట్ ఆఫ్ మేథమేటిక్స్ & స్టాటిస్టిక్స్, యూనివర్శిటీ ఆఫ్ హైదరాబాద్

శ్రీ. అబ్బరాజు కిశోర్, ఎస్.జి.టి, ఎమ్.పి.యుపిఎస్, చమళ్లమూడి, గుంటూరు.

కవర్‌పేజ్ డిజైనింగ్

శ్రీ కె.సుధాకరాచారి, హెడ్‌మాస్టర్, యు.పి.ఎస్.నీలికుర్తి, మం.మరిపెడ, జి.వరంగల్

ముందుమాట

పిల్లల పాఠశాల జీవితం వారిదైనందిన జీవితానికి ముడిపడి ఉండాలని రాష్ట్ర ప్రణాళిక పరిధి పత్రం – 2011 (SCF-2011) సూచిస్తున్నది. పాఠశాలలో చేరిన ప్రతీ విద్యార్థి ఆయా స్థాయిలలో ఆవశ్యక నైపుణ్యాలను సముపార్జించాలని విద్యాహక్కు చట్టం – 2009 నిర్దేశించింది. వీటి దృష్ట్యా, విద్యలో నాణ్యతను సాధించడం కోసం ప్రతి పాఠ్య విషయంలోను విద్యా ప్రమాణాలను రూపొందించారు. జాతీయవిద్యా ప్రణాళిక చట్రం 2005 మౌళిక ఉద్దేశ్యం అమలు యొక్క ప్రాధాన్యతను దృష్టిలో ఉంచుకుని, రాష్ట్ర విద్యా ప్రణాళిక పరిధి పత్రం 2011 ఆధారంగా గణిత పాఠ్య విషయ ప్రణాళిక మరియు పాఠ్యపుస్తకాలు రూపుదిద్దుకున్నాయి.

పిల్లలు ప్రాథమిక విద్యను పూర్తిచేసుకొని, ప్రాథమికోన్నత స్థాయిలోకి అడుగిడుతారు. ఈ స్థాయి సెకండరీ విద్యను కొనసాగించడానికి ప్రముఖమైన వారిధిగా ఉంటుంది. పిల్లలు స్వేచ్ఛగా పెద్దలతో, సామాగ్రితో, తోటివారితో ప్రతిచర్యలు జరపడం, వివిధ సన్నివేశాలల్లో ప్రక్రియల్లో పరస్పరం సహకరించుకుంటూ పాల్గొనే అవకాశం లభించడం మూలంగా, అన్వేషణతో నూతన జ్ఞానాన్ని నిర్మించుకోగలరని మనం గుర్తిస్తాం. పిల్లలు కేవలం నిష్క్రియాత్మక గ్రహీతలుగా కాకుండా, అభ్యసనంలో భాగస్వాములు అని భావించినపుడు వారిలో సృజనాత్మకత, చొరవలను పెంపొందించడం సాధ్యమవుతుంది. పిల్లలు ఈ దశలో ఉత్సుకత, ఆసక్తి, ప్రశ్నించేతత్త్వం, హేతుబద్ధత, ఋజువులను కోరడం, సవాళ్ళను అంగీకరించడం వంటి లక్షణాలను కలిగి ఉంటారు. అందుచేత ఆనందదాయకంగా పిల్లలు వివిధ భావనలను అన్వేషించడానికి తమ సొంత శైలిలో సమస్యా సాధనచేయడానికి వీలుగా గణితశాస్త్ర బోధనను అభివృద్ధి పరచాల్సిన ఆవశ్యకత ఉంది. అమూర్తస్వభావంతో ఉండే గణితంలోని భావనలను పిల్లలు అర్థం చేసుకొని, సొంతంగా గణిత జ్ఞానాన్ని నిర్మించుకొనే సామర్థ్యానికి తోడ్పడే విధానాలను అభివృద్ధి పరచే కార్యక్రమానికి మనం శ్రీకారం చుట్టాం.

గణితంలోని ప్రధాన విషయాలైన సంఖ్యావ్యవస్థ, అంకగణితం, బీజగణితం, రేఖాగణితం, క్షేత్రమితి మరియు సాంఖ్యక శాస్త్రాలను ప్రాథమికోన్నత స్థాయిలో చేర్చారు.

ఈ విషయాలకు సంబంధించిన అంశాలను బోధించడం వల్ల సమస్యా పరిష్కారం, తార్కిక ఆలోచనలు, నిత్యసత్యాలను గణిత భాషలో వ్యక్తీకరించడం, సేకరించిన దత్తాంశాన్ని విశ్లేషించడం, వివిధ రూపాల్లో పొందుపరచడం, నిత్యజీవితంలో గణితాన్ని ఉపయోగించడం వంటి నిర్ణీత విద్యా ప్రమాణాలు, నైపుణ్యాలు అభివృద్ధి చెందుతాయి. పుస్తకంలో పొందుపరచిన **ఇవిచేయండి, ప్రయత్నించండి, ప్రకల్పనలు** వంటి అంశాలకు అధిక ప్రాధాన్యత ఇచ్చి పిల్లలు సొంతంగా నేర్చుకునేలా చేయడానికి, జట్లలో ప్రయత్నించడానికి ఈ పాఠ్యపుస్తకం అవకాశం కల్పిస్తోంది.

ఈ పుస్తకం సరళమైన భాష, పదజాలం కలిగి వుండి పిల్లల మేథస్సు, గణిత భావాలను ఉపయోగించుకోవడానికి తద్వారా తామే స్వయంగా గణిత స్వరూపాలను ఏర్పరచుకోవడానికి అవకాశాలను కల్పిస్తుంది. పుస్తకంలో గల వివిధ ఉదాహరణలు పిల్లలు తమకు తామే సొంతంగా సమస్యలను తయారుచేసుకోవడానికి దోహదపడతాయి. వీటన్నింటినీ సాకారం చేయడానికి తరగతి గదిలో ఉపాధ్యాయులు అవసరమైన సందర్భాలను ఏర్పరచడం, సహాయ సహకారాలు అందించడం అత్యంత అవసరం. మూల్యాంకనం కూడా నేర్చుకోవడంలో భాగంగా పరిగణిస్తూ ప్రతీ అభ్యసన అంశాన్ని నిరంతర సమగ్ర మూల్యాంకనం ద్వారా అంచనా వేసే విధంగా అధ్యాయాలను పొందుపరిచారు.

దీన్ని రూపొందించడంలో విషయనిష్ణాతులు, చాలాకాలంగా గణిత అభ్యసన, పరిశోధన, పుస్తక రచనలో అనుభవమున్న ఉపాధ్యాయులు పాల్గొన్నారు. వారంతా పిల్లల్లో గణితం పట్ల ఉన్న భయాలను తొలగించడానికి కృషి చేసారు. ఈ పుస్తకానికి తుదిరూపం ఇవ్వడానికి సహాయ సహకారాలందించిన జాతీయ స్థాయి విషయనిపుణులు, విశ్వవిద్యాలయాల ఆచార్యులు, పరిశోధక విద్యార్థులు, ప్రభుత్వేతర సంస్థలు, విద్యాధికులు, ప్రధానోపాధ్యాయులు, రచయితలు, విద్యార్థులు, ముద్రణసంస్థ వారికి పుస్తకరూపకల్పన నిపుణులకు ప్రత్యేక కృతజ్ఞతలు. ఉపాధ్యాయలోకం, పుస్తకంలో పొందుపరచిన అంశాల ద్వారా విద్యా ప్రమాణాలను సాధించే క్రమంలో మన:పూర్వక ప్రయత్నం చేస్తుందని ఆశిస్తున్నాను.

పుస్తకాభివృద్ధి నిరంతర ప్రకియ. అందరి కృషి ఫలితంగా ఈ పుస్తకం తయారైంది. **రాష్ట్ర విద్య, పరిశోధన, శిక్షణ సంస్థ** ఒక నిబద్ధతతో కూడిన సంస్థగా ప్రయత్నిస్తూ వ్యవస్థాగత సంస్కరణలతో నాణ్యమైన పాఠ్యపుస్తకాలను అందించడానికి కృషి చేస్తున్నది. ఇందులో భాగంగా గణితప్రియుల నుండి తగిన సలహాలు, సూచనలను ఆహ్వానిస్తున్నది. వీటిని పరిగణనలోకి తీసుకొని మరింత నాణ్యత కోసం కృషి చేస్తుంది.

తేది : 28-01-2012
హైదరాబాద్

శ్రీమతి బి. శేషుకుమారి
రాష్ట్ర విద్య, పరిశోధన, శిక్షణ సంస్థ
హైదరాబాద్

PREAMBLE

THE PEOPLE OF INDIA, having solemnly resolved to constitute India into a **SOVEREIGN SOCIALIST SECULAR DEMOCRATIC REPUBLIC** and to secure to all its citizens:

JUSTICE, social, economic and political;

LIBERTY of thought, expression, belief, faith and worship;

EQUALITY of status and of opportunity; and to promote among them all

FRATERNITY assuring the dignity of the individual and the unity and integrity of the Nation;

IN OUR CONSTITUENT ASSEMBLY this twenty-sixth day of November, 1949, do HEREBY ADOPT, ENACT AND GIVE TO OURSELVES THIS CONSTITUTION.

గణితం
7వ తరగతి

క్ర.సం.	విషయం	పూర్తిచేయాల్సిన కాలం	పుట సంఖ్య
1	పూర్ణ సంఖ్యలు	జూన్	1-24
2	భిన్నాలు, దశాంశాలు మరియు అకరణీయ సంఖ్యలు	జూన్, జూలై	25-57
3	సామాన్య సమీకరణాలు	జూలై	58-67
4	రేఖలు - కోణములు	ఆగష్టు	68-85
5	త్రిభుజము ధర్మాలు	ఆగష్టు	86-107
6	నిష్పత్తి - ఉపయోగాలు	సెప్టెంబర్	108-139
7	దత్తాంశ నిర్వహణ	సెప్టెంబర్	140-160
8	త్రిభుజాల సర్వసమానత్వం	అక్టోబర్	161-179
9	త్రిభుజాల నిర్మాణాలు	నవంబర్	180-189
10	బీజీయ సమాసాలు	నవంబర్	190-208
11	ఘాతాలు మరియు ఘాతాంకాలు	డిసెంబర్	209-224
12	చతుర్భుజాలు	డిసెంబర్	225-242
13	వైశాల్యం - చుట్టుకొలత	జనవరి	243-262
14	త్రిమితీయ మరియు ద్విమితీయ ఆకారాల అవగాహన	ఫిబ్రవరి	263-274
15	సౌష్ఠవం	ఫిబ్రవరి	275-287
	పునర్విమర్శ	మార్చి	

తెలంగాణ ప్రభుత్వం వారిచే ఉచిత పంపిణీ 2019-20

జాతీయ గీతం

– రవీంద్రనాథ్ ఠాగూర్

జనగణమన అధినాయక జయహే!
భారత భాగ్యవిధాతా!
పంజాబ, సింధ్, గుజరాత, మరాఠా,
ద్రావిడ, ఉత్కళ, వంగ!
వింధ్య, హిమాచల, యమునా, గంగ!
ఉచ్ఛల జలధి తరంగ!
తవ శుభనామే జాగే!
తవ శుభ ఆశిష మాఁగే
గాహే తవ జయగాథా!
జనగణ మంగళదాయక జయహే!
భారత భాగ్య విధాతా!
జయహే! జయహే! జయహే!
జయ జయ జయ జయహే!!

ప్రతిజ్ఞ

– పైడిమర్రి వెంకట సుబ్బారావు

భారతదేశం నా మాతృభూమి. భారతీయులందరూ నా సహోదరులు.

నేను నా దేశాన్ని ప్రేమిస్తున్నాను. సుసంపన్నమైన, బహువిధమైన నా దేశపు వారసత్వ సంపద నాకు గర్వకారణం. దీనికి అర్హత పొందడానికి సర్వదా నేను కృషి చేస్తాను.

నా తల్లిదండ్రుల్ని, ఉపాధ్యాయుల్ని, పెద్దలందర్ని గౌరవిస్తాను. ప్రతివారితోను మర్యాదగా నడుచుకొంటాను. జంతువులపట్ల దయతో ఉంటాను.

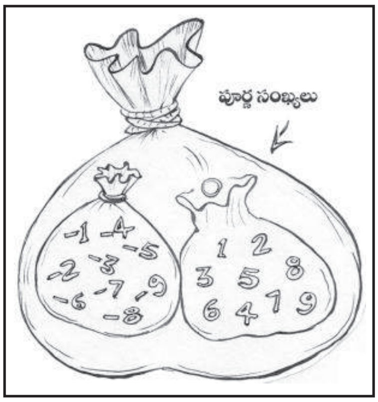
నా దేశంపట్ల, నా ప్రజలపట్ల సేవానిరతితో ఉంటానని ప్రతిజ్ఞ చేస్తున్నాను.

వారి శ్రేయోభివృద్ధిలే నా ఆనందానికి మూలం.

పూర్ణ సంఖ్యలు

1

1.0 పరిచయం



మన చుట్టూ ఉండే పరిసరాలలోని వస్తువులను 1,2,3 ... అంటూ లెక్కిస్తాం కదా! అలా లెక్కించడానికి ఉపయోగించే సంఖ్యలను "సహజ సంఖ్యలు" లేదా లెక్కించే సంఖ్యలు అంటారు.

(i) కనిష్ఠ సహజ సంఖ్య ఎంత?

(ii) 100, 10000 ల మధ్య ఏవైనా ఐదు సహజ సంఖ్యలను తెలపండి.

(iii) సహజ సంఖ్యల వరుసలో చివరి సంఖ్యను చెప్పగలరా?

(iv) ఏవైనా రెండు వరుస సహజ సంఖ్యల మధ్య భేదమెంత?

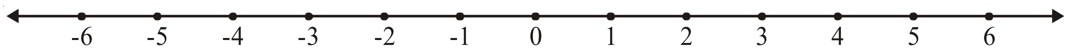
లేని పరిమాణాన్ని దేనితో ప్రాతినిధ్య పరుస్తారో తెలుసా! దీన్ని '0' తో ప్రాతినిధ్య పరుస్తాము.

సహజ సంఖ్యలకు '0' (పూర్ణము లేదా సున్నా) ను చేరిస్తే ఏర్పడే సంఖ్యలు పూర్ణాంకాలు అవుతాయి.

వాటిని **పూర్ణాంకాలు** అంటారు. అవి 0, 1, 2, 3, 4, ...

6వ తరగతిలో ఋణ సంఖ్యల గురించి నేర్చుకొని ఉన్నాం. ఈ ఋణ సంఖ్యలు, పూర్ణాంకాలను కలుపగా ఏర్పడే సంఖ్యలను 'పూర్ణసంఖ్యలు' అంటారు. ఈ అధ్యాయంలో మనమిప్పుడు పూర్ణసంఖ్యల ధర్మాలను, పూర్ణసంఖ్యలతో వివిధ ప్రక్రియలను గురించి చర్చిద్దాం.

మొదటగా పూర్ణసంఖ్యలను సంఖ్యారేఖపై ఎలా చూపవచ్చో పరిశీలిద్దాం.



(i) పై సంఖ్యారేఖపై ఉన్న సంఖ్యలలో గరిష్ఠ సంఖ్య ఏది?

(ii) పై సంఖ్యారేఖపై ఉన్న సంఖ్యలలో కనిష్ఠ సంఖ్య ఏది?

(iii) -3 కన్నా 1 పెద్దదేనా? ఎందుకు?

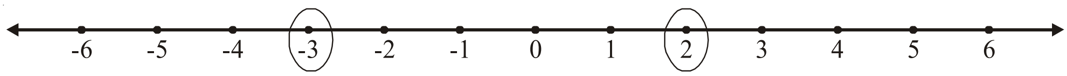
(iv) -3 కన్నా -6 పెద్దదేనా? ఎందుకు?

(v) 4, 6, -2, 0, -5 లను ఆరోహణ క్రమంలో రాయండి.

(vi) 0, 1 మరియు 0, -1,ల మధ్య భేదమెంతో సంఖ్యారేఖను పరిశీలించి పోల్చండి.

అభ్యాసం - 1

1. కింది సంఖ్యారేఖపై '0' చుట్టబడిన సంఖ్యలలో పెద్ద, చిన్న సంఖ్యలను రాయండి.



2. కింది ఇచ్చిన పూర్ణసంఖ్యల జతల మధ్యగల అన్ని పూర్ణసంఖ్యలను రాసి, వాటిలో కనిష్ఠ, గరిష్ఠ సంఖ్యలను తెల్పండి.

(i) –5, –10 (ii) 3, –2 (iii) –8, 5

3. కింది పూర్ణసంఖ్యలను ఆరోహణ క్రమంలో రాయండి. (చిన్న సంఖ్య నుండి పెద్ద సంఖ్యకు)

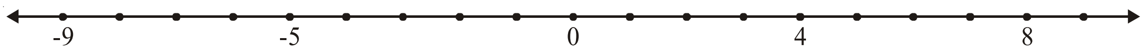
(i) –5, 2, 1, –8 (ii) –4, –3, –5, 2 (iii) –10, –15, –7

4. కింది పూర్ణసంఖ్యలను అవరోహణ క్రమములో రాయండి. (పెద్ద సంఖ్య నుండి చిన్న సంఖ్యకు)

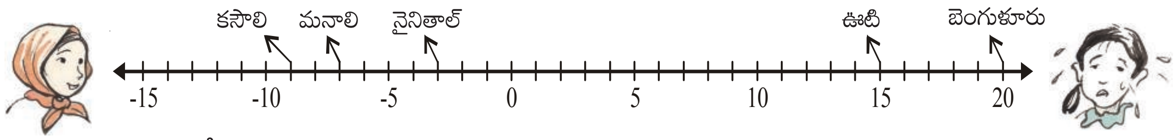
(i) –2, –3, –5 (ii) –8, –2, –1 (iii) 5, 8, –2

5. 6, –4, 0 మరియు 4 లను సంఖ్యారేఖపై సూచించండి.

6. కింది సంఖ్యారేఖపై లోపించిన పూర్ణ సంఖ్యలను రాయండి.



7. కింది సంఖ్యా రేఖను చూడండి. భారతదేశం లోని వివిధ ప్రాంతాలలోని ఐదు నగరాల ఉష్ణోగ్రతలు (సెంటీగ్రేడ్) ఒకరోజువి గుర్తించబడ్డాయి.



పై సంఖ్యారేఖ ఆధారంగా కింది ప్రశ్నలకు జవాబులు రాయండి.

(i) గుర్తించబడిన నగరాల ఉష్ణోగ్రతలు తెల్పండి?

(ii) ఏ నగరం యొక్క ఉష్ణోగ్రత గరిష్టంగా ఉంది?

(iii) ఏ నగరం యొక్క ఉష్ణోగ్రత కనిష్టంగా ఉంది?

(iv) ఏయే నగరాల ఉష్ణోగ్రతలు $0^{\circ}C$ కన్నా తక్కువగా ఉన్నాయి?

(v) ఏయే నగరాల ఉష్ణోగ్రతలు $0^{\circ}C$ కన్నా ఎక్కువగా ఉన్నాయి?

1.1 పూర్ణసంఖ్యలు - చతుర్విధ ప్రక్రియలు

కింది తరగతిలో పూర్ణసంఖ్యలతో సంకలన, వ్యవకలన ప్రక్రియల గురించి తెలుసుకొన్నాం. పూర్ణసంఖ్యలతో గుణకార, భాగాహారాల గురించి తెలుసుకోబోయే ముందు మరొకసారి సంకలన, వ్యవకలనాల ప్రక్రియలను పరిశీలిద్దాం.

1.1.1 పూర్ణసంఖ్యల సంకలనం

కింది సంకలనాలను పరిశీలించండి.

$4 + 3 \quad = \; 7$

$4 + 2 \quad = \; 6$

$4 + 1 \quad = \; 5$

$4 + 0 \quad = \; 4$

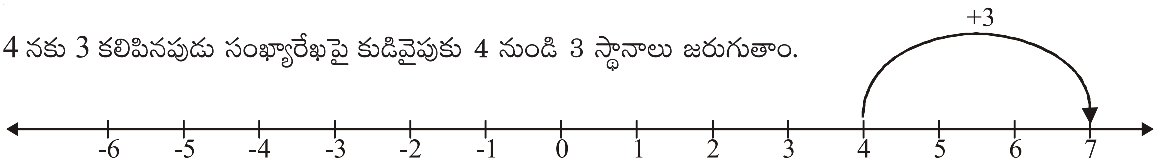
$4 + (-1) = 3$

$4 + (-2) = 2$

$4 + (-3) = 1$

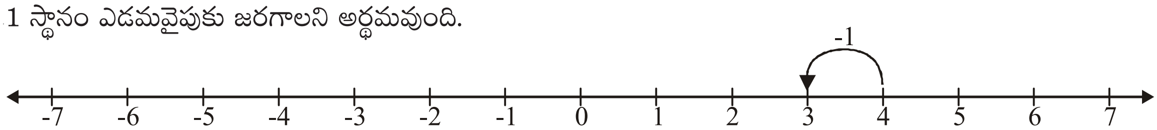
పై సంకలనాల అమరికలో ఉన్న ఏదైనా క్రమాన్ని గమనించారా? 4 తో కూడే సంఖ్యలు క్రమంగా 1 చొప్పున తగ్గుతున్నప్పుడు $(3, 2, 1, 0, -1, -2, -3)$ ఫలితం కూడా క్రమంగా 1 చొప్పున తగ్గడం గమనించండి. దానిని సంఖ్యారేఖపై పరిశీలిద్దాం.

4 నకు 3 కలిపినపుడు సంఖ్యారేఖపై కుడివైపుకు 4 నుండి 3 స్థానాలు జరుగుతాం.



ఇదేవిధంగా 4 నకు 2, 1 లను కలిపినపుడు ఏమిజరుగుతుంది? ప్రతీ సందర్భంలో కూడా సంఖ్యారేఖపై కుడివైపునకు జరగడం మీరు గమనించవచ్చు.

ఇప్పుడు 4 కి -1 కలిపితే ఏమౌతుంది? పై సంకలనాల అమరిక నుండి $4+(-1) = 3$ అని తెలుసు కావున సంఖ్యారేఖపై 1 స్థానం ఎడమవైపుకు జరగాలని అర్థమవుంది.



ఇదేవిధంగా 4 నకు $-2, -3$ లను కలిపినపుడు ఏమి జరుగుతుంది? ప్రతీ సందర్భంలో కూడా సంఖ్యారేఖపై ఎడమవైపుకు జరగడం మీరు గమనించవచ్చు.

ఒక సంఖ్యకు ధన పూర్ణసంఖ్యను కలిపినప్పుడు సంఖ్యారేఖపై కుడివైపునకు, ఋణపూర్ణసంఖ్యను కలిపినపుడు సంఖ్యారేఖపై ఎడమవైపునకు జరుగుతాము.

ప్రయత్నించండి.

1.	$9 + 7$	= 16		$9 + 1$	=
	$9 + 6$	= 15		$9 + 0$	=
	$9 + 5$	=		$9 + (-1)$	=
	$9 + 4$	=		$9 + (-2)$	=
	$9 + 3$	=		$9 + (-3)$	=
	$9 + 2$	=			

(i) 9 + 2, 9 + (–1), 9 + (–3) సంకలనాలను సంఖ్యారేఖపై సూచించండి.

(ii) ఒక సంఖ్యకు ధనపూర్ణసంఖ్యను సంకలనం చేసినపుడు సంఖ్యారేఖపై ఎటువైపు జరుగుతాం?

(iii) ఒక సంఖ్యకు ఋణపూర్ణసంఖ్యను సంకలనం చేసినపుడు సంఖ్యారేఖపై ఎటువైపు జరుగుతాం?

2. 'ఏ రెండు పూర్ణసంఖ్యల మొత్తమైనా ఆ సంఖ్యలకన్నా ఎక్కువ' అని సంగీత భావించింది. ఆమె భావన సత్యమేనా? నీ సమాధానాన్ని సమర్థించు కారణాలు రాయండి.

అభ్యాసం - 2

1. కింది సంకలనాలను సంఖ్యారేఖపై సూచించండి.

(i) 5 + 7 (ii) 5 + 2 (iii) 5 + (–2) (iv) 5 + (–7)

2. కింది వానిని గణించండి.

(i) 7 + 4	(ii) 8 + (–3)	(iii) 11 + 3
(iv) 14 + (–6)	(v) 9 + (–7)	(vi) 14 + (–10)
(vii) 13 + (–15)	(viii) 4 + (–4)	(ix) 10 + (–2)
(x) 100 + (–80)	(xi) 225 + (–145)	

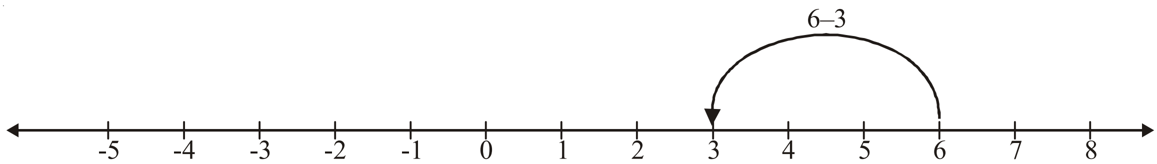
1.1.2. పూర్ణసంఖ్యల వ్యవకలనం

కింది వ్యవకలనాలను పరిశీలించండి.

6 – 3 = 3
6 – 2 = 4
6 – 1 = 5
6 – 0 = 6
6 – (–1) = 7
6 – (–2) = 8
6 – (–3) = 9
6 – (–4) = 10

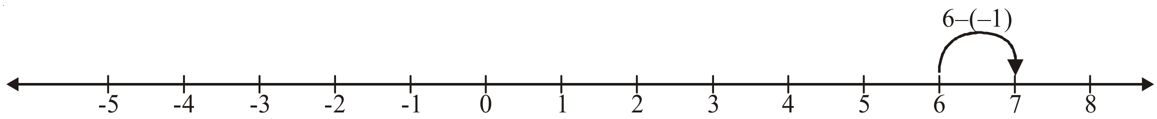
పై వ్యవకలనాల అమరికలో ఏదైనా క్రమాన్ని గమనించారా? 6 నుంచి వ్యవకలనం చేయబడు సంఖ్యలు క్రమంగా 1 చొప్పున తగ్గుతున్నప్పుడు ఫలితం క్రమంగా 1 చొప్పున పెరగడం గమనించండి. దీనిని సంఖ్యారేఖపై పరిశీలిద్దాం.

6 నుండి 3 ను తీసివేయునపుడు సంఖ్యారేఖపై ఎడమ వైపునకు 6 నుండి 3 స్థానాలు జరుగుతాం.



ఇదే విధంగా 6 నుండి 2, 1 లను వ్యవకలనం చేయడాన్ని సంఖ్యారేఖపై గుర్తించండి. ప్రతిసారి ఎడమవైపు జరగడాన్ని గమనించవచ్చు.

సంఖ్యారేఖపై 6 నుంచి –1 ని వ్యవకలనం చేయగా ఏమిజరుగుతుంది? పై వ్యవకలనాల అమరికల నుండి 6– (–1) = 7 అని తెలుస్తుంది. అందువల్ల సంఖ్యారేఖపై ఒకస్థానం కుడివైపుకు జరగాలని అర్థమైతుంది.



ఇదేవిధంగా 6 నుండి –2, –3, –4 లను వ్యవకలనం చేసినప్పుడు ఏమి జరుగుతుంది? ప్రతీ సందర్భంలో కూడా సంఖ్యారేఖపై కుడివైపునకు జరగడం గమనించవచ్చు.

ఒక సంఖ్యనుండి ధనపూర్ణసంఖ్యను వ్యవకలనం చేసినప్పుడు సంఖ్యారేఖపై ఎడమవైపునకు, ఋణపూర్ణసంఖ్యను వ్యవకలనం చేసినప్పుడు సంఖ్యరేఖపై కుడివైపునకు జరుగుతాం.

ప్రయత్నించండి.

1. 8 – 6 = 2
   8 – 5 = 3
   8 – 4 =
   8 – 3 =
   8 – 2 =
   8 – 1 =
   8 – 0 =
   8 – (–1) =
   8 – (–2) =
   8 – (–3) =
   8 – (–4) =

   (i) 8 –6, 8–1, 8–0, 8–(–2), 8–(–4) లను సంఖ్యారేఖపై సూచించండి.

   (ii) ఒక సంఖ్యనుండి ధనపూర్ణసంఖ్యను తీసివేసినపుడు సంఖ్యారేఖపై మీరైతే ఎటువైపు జరుగుతారు?

   (iii) ఒక సంఖ్యనుండి ఋణపూర్ణసంఖ్యను తీసివేసినపుడు సంఖ్యారేఖపై మీరైతే ఎటువైపు జరగుతారు?

2. 'ఒక పూర్ణసంఖ్యనుండి మరొక పూర్ణసంఖ్యను తీసివేసినపుడు ఫలితం ఆ సంఖ్యలకన్నా చిన్నది' అని రిచా భావించింది. ఆమె భావనతో నీవు ఏకీభవిస్తావా? నీ జవాబును సమర్థించు కారణాలు రాయండి.

అభ్యాసం - 3

1. కింది వ్యవకలనాలను సంఖ్యారేఖపై సూచించండి. ఫలితాన్ని రాయండి.

(i) $7 - 2$ (ii) $8 - (-7)$ (iii) $3 - 7$

(iv) $15 - 14$ (v) $5 - (-8)$ (vi) $(-2) - (-1)$

2. కింది వానిని గణించండి.

(i) $17 - (-14)$ (ii) $13 - (-8)$ (iii) $19 - (-5)$

(iv) $15 - 28$ (v) $25 - 33$ (vi) $80 - (-50)$

(vii) $150 - 75$ (viii) $32 - (-18)$

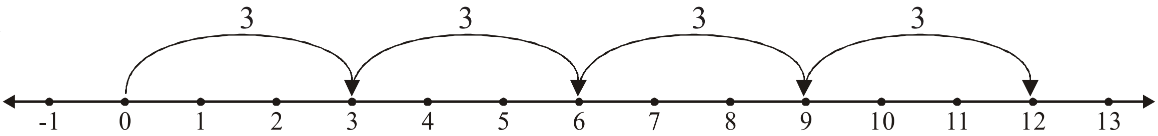
3. '-6' ను ఋణపూర్ణసంఖ్య, పూర్ణాంకాల మొత్తంగా రాయండి.

1.1.3 పూర్ణసంఖ్యల గుణకారం

పూర్ణ సంఖ్యల గుణకారం గురించి తెలుసుకొందాం!

$3 + 3 + 3 + 3 = 4 \times 3$ (4 మార్లు 3) అని మనకు తెలుసు.

దీనిని సంఖ్యారేఖపై కింది విధంగా సూచించవచ్చు.

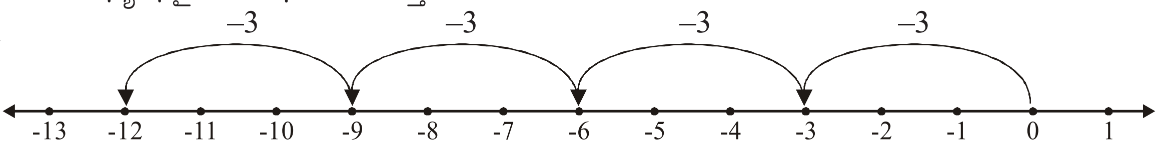


4×3 అనగా 0 నుండి ప్రారంభించి ఒక్కొక్క సారికి 3 చొప్పున 4 గెంతులు సంఖ్యారేఖపై కుడివైపుకు జరుగగా $4 \times 3 = 12$ అవుతుంది.

మనమిప్పుడు $4 \times (-3)$ ను సంఖ్యారేఖపై ఎట్లు సూచించవచ్చో పరిశీలిద్దాం.

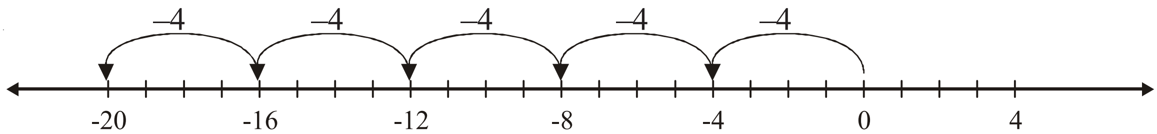
$4 \times -3 = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -12$

దీనిని సంఖ్యారేఖపై కింది విధంగా సూచిస్తాం.



$4 \times (-3)$ అనగా 0 నుండి ప్రారంభించి 3 చొప్పున 4 గెంతులు సంఖ్యారేఖపై ఎడమవైపుకి జరుగగా $4 \times (-3) = -12$ అవుతుంది.

ఇదేవిధంగా $5 \times -4 = (-4) + (-4) + (-4) + (-4) + (-4) = -20$ దీనిని కింది విధంగా సూచిస్తాం.



$5 \times (-4)$ అనగా 4 చొప్పున 5 గెంతులు సంఖ్యారేఖపై ఎడమవైపుకు జరుగగా $5 \times (-4) = -20$ అవుతుంది.

అట్లే $2 \times -5 = (-5) + (-5) = -10$

$3 \times -6 = (-6) + (-6) + (-6) = -18$

$4 \times -8 = (-8) + (-8) + (-8) + (-8) = -32$

ఇవి చేయండి

1. కింది వానిని గణించండి.

(i) 2×-6 (ii) 5×-4 (iii) 9×-4

-4×3 ను గుణిద్దాం!

కింది అమరికలోని క్రమాన్ని పరిశీలించండి.

$4 \times 3 = 12$

$3 \times 3 = 9$

$2 \times 3 = 6$

$1 \times 3 = 3$

$0 \times 3 = 0$

$-1 \times 3 = -3$

$-2 \times 3 = -6$

$-3 \times 3 = -9$

$-4 \times 3 = -12$

పై గుణకారాల అమరికలో గుణకము క్రమంగా 1 చొప్పున తగ్గేకొలది $(4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4)$ లబ్ధం క్రమంగా 3 చొప్పున తగ్గుతుందని గమనించవచ్చు.

ఈ క్రమంను అనుసరించి $-4 \times 3 = -12$ అని తెలుస్తుంది. కానీ $= 4 \times (-3) = -12$ అని మనకు తెలుసు.

కావున $-3 \times 4 = 3 \times -4 = -12$

పై గుణకారాలలో ఋణ గుర్తు మారుతున్నప్పుడు ఫలితాన్ని గమనించండి. పై అమరికను ఉపయోగించి

$4 \times (-5) = -4 \times 5 = -20$

$2 \times (-5) = -2 \times 5 = -10$ అని రాయవచ్చు

$3 \times (-2) =$

$8 \times (-4) =$

$6 \times (-5) =$

ఈ గుణకారాలను గమనించినపుడు 'ఒక ధనపూర్ణసంఖ్య, ఒక ఋణపూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధము ఎల్లప్పుడు ఋణపూర్ణసంఖ్య' అవుతుంది.

1.1.3 (అ) రెండు ఋణపూర్ణసంఖ్యలతో గుణకారం

-3, -4 లను గుణిస్తే లబ్ధం ఏమొస్తుందో చూద్దాం!

కింది గుణకారాల అమరికలోని క్రమాన్ని పరిశీలిద్దాం.

$$-3 \times 4 = -12$$
$$-3 \times 3 = -9$$
$$-3 \times 2 = -6$$
$$-3 \times 1 = -3$$
$$-3 \times 0 = 0$$
$$-3 \times -1 = 3$$
$$-3 \times -2 = 6$$
$$-3 \times -3 = 9$$
$$-3 \times -4 = 12$$

పై గుణకారాల్లో అమరికను గుర్తించారా గుణించే సంఖ్యలు క్రమంగా 1 చొప్పున తగ్గుకొలది $(4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4)$ లబ్ధం క్రమంగా 3 చొప్పున పెరుగుతున్నట్లుగా గమనించవచ్చును.

ఇప్పుడు $-4 \times (-3)$ ను గుణిద్దాం.

కింది గుణకారాల లబ్దాల అమరికను పరిశీలించి, ఖాళీలను పూరించండి.

$$-4 \times 4 = -16$$
$$-4 \times 3 = -12$$
$$-4 \times 2 = -8$$
$$-4 \times 1 = -4$$
$$-4 \times 0 = 0$$
$$-4 \times -1 = ____$$
$$-4 \times -2 = ____$$
$$-4 \times -3 = ____$$

పైగుణకారాల అమరికలో గుణించే సంఖ్యలు క్రమంగా 1 చొప్పున తగ్గుకొలది లబ్ధం క్రమంగా 4 చొప్పున పెరుగుతుంది.

పై రెండు గుణకార అమరికల నుండి $-3 \times (-4) = -4 \times (-3) = 12$

ఇదే విధంగా

$-3 \times (-1) = 3$ $\quad$ $-4 \times (-1) = 4$

$-3 \times (-2) = 6$ $\quad$ $-4 \times (-2) = 8$

$-3 \times (-3) = 9$ $\quad$ $-4 \times (-3) = 12$

అందుచేత, ప్రతి సందర్భంలో కూడా రెండు ఋణ పూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధం ధనపూర్ణ సంఖ్య అవుతుంది.

కృత్యం 1

కింది పట్టికలో మొదటి నిలువు వరుసలో ప్రతి సంఖ్యను, మొదటి అడ్డువరుసలోని ప్రతి సంఖ్యచే గుణిస్తూ పట్టికను పూరించండి.

×	3	2	1	0	–1	–2	–3
3	9	6	3	0	–3	–6	–9
2	6	4	2	0			
1							
0							
–1	–3	–2	–1	0	1	2	3
–2							
–3							

(i) రెండు ధనపూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధం ఎల్లపుడు ధనపూర్ణ సంఖ్యేనా?

(ii) రెండు ఋణ పూర్ణసంఖ్యల లబ్ధం ఎల్లపుడు ధనపూర్ణ సంఖ్యేనా?

(iii) ఒక ఋణ పూర్ణసంఖ్య, ఒక ధన పూర్ణసంఖ్యల లబ్ధం ఎల్లప్పుడు ఋణ సంఖ్యయేనా?

1.1.3 (అ) రెండుకన్నా ఎక్కువ ఋణపూర్ణసంఖ్యల గుణకారం

రెండు ఋణపూర్ణసంఖ్యల లబ్ధం ధనపూర్ణ సంఖ్య అని తెలుసుకొన్నాం. ఇప్పుడు మూడు, ఋణ పూర్ణసంఖ్యల లబ్ధాలు ఏమౌతాయి. అలాగే నాలుగు …

కింది వాటిని గమనించండి.

(i) $(-2) \times (-3) = 6$

(ii) $(-2) \times (-3) \times (-4) = [(-2) \times (-3)] \times (-4) = 6 \times (-4) = -24$

(iii) $(-2) \times (-3) \times (-4) \times (-5) = [(-2) \times (-3) \times (-4)] \times (-5) = (-24) \times (-5) = 120$

(iv) $[(-2) \times (-3) \times (-4) \times (-5)] \times (-6) = 120 \times (-6) = -720$

పై లబ్ధాల నుండి ఏఏ అంశాలను మనం గమనించవచ్చు.

(i) రెండు ఋణపూర్ణసంఖ్యల లబ్ధం ధనపూర్ణసంఖ్య

(ii) మూడు ఋణపూర్ణసంఖ్యల లబ్ధం ఋణపూర్ణసంఖ్య.

(iii) నాలుగు ఋణపూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధం ధనపూర్ణ సంఖ్య.

(iv) ఐదు ఋణపూర్ణసంఖ్యల లబ్ధం ఋణపూర్ణసంఖ్య

ఇలాగే ఆరు ఋణపూర్ణసంఖ్యల లబ్ధం ధనపూర్ణ సంఖ్యనా? లేక ఋణపూర్ణ సంఖ్యనా? కారణం తెల్పండి.

ప్రయత్నించండి.

అ) $(-1) \times (-1) =$ ——

ఆ) $(-1) \times (-1) \times (-1) =$ ——

ఇ) $(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) =$ ——

ఈ) $(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) =$ ——

పై వాటిని పరిశీలిస్తే (అ) మరియు (ఇ) గుణకారాలలో గుణించాల్సిన ఋణ పూర్ణ సంఖ్యల సంఖ్య సరిపర్యాయములు ఉంటే వాటి లబ్ధం ధనపూర్ణ సంఖ్య అయినది. (ఆ) మరియు (ఈ) గుణకారాలలో ఋణపూర్ణసంఖ్యల సంఖ్య 'బేసి సంఖ్య' గుణించాల్సిన ఋణపూర్ణ సంఖ్యల సంఖ్య బేసి పర్యాయములలో ఉంటే వాటి లబ్ధం ఋణపూర్ణ సంఖ్య అయినది.

కాబట్టి, గుణకారాలలో ఋణపూర్ణసంఖ్యల సంఖ్య 'సరిసంఖ్య' ఐతే లబ్ధం ధనపూర్ణసంఖ్య. అట్లే ఋణపూర్ణసంఖ్యల సంఖ్య బేసి సంఖ్య ఐతే లబ్ధం ఋణపూర్ణ సంఖ్య.

అభ్యాసం - 4

1. ఖాళీలను పూరించండి.

(i) $-100 \times -6 =$ ....

(ii) $-3 \times$ .... $= 3$

(iii) $100 \times (-6) =$ ....

(iv) $-20 \times (-10) =$ ....

(v) $15 \times (-3) =$ ....

2. కింది వాటికి లబ్ధాలను కనుగొనండి.

(i) $3 \times (-1)$ (ii) $(-1) \times 225$

(iii) $(-21) \times (-30)$ (iv) $(-316) \times (-1)$

(v) $(-15) \times 0 \times (-18)$ (vi) $(-12) \times (-11) \times (10)$

(vii) $9 \times (-3) \times (-6)$ (viii) $(-18) \times (-5) \times (-4)$

(ix) $(-1) \times (-2) \times (-3) \times 4$ (x) $(-3) \times (-6) \times (-2) \times (-1)$

3. శీతలీకరణ ద్వారా 40°C వద్ద గల గది ఉష్ణోగ్రతను ప్రతి గంటకు 5°C చొప్పున చల్లబరచ (తగ్గించ) బడుతుంది. శీతలీకరణం ప్రారంభించిన 10 గంటల తరువాత గది ఉష్ణోగ్రత ఎంత ఉంటుంది?

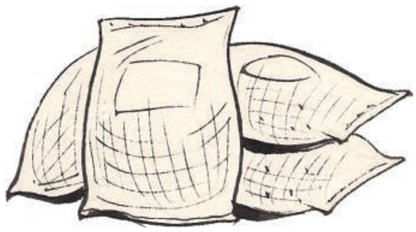
4. ఒక తరగతికి పరీక్షలో 10 ప్రశ్నలు ఇవ్వబడినవి. పరీక్షలో రాయబడిన సరైన జవాబుకు '3' మార్కులు, సరిగాని జవాబుకు (–1) మార్కు. జవాబు రాయనిచో '0' మార్కులు కేటాయించడం జరిగినది.

(i) గోపి రాసిన జవాబులలో 5 సరైనవి, 5 తప్పయిన, అతనికి వచ్చిన మొత్తం మార్కులెన్ని?

(ii) రేష్మ రాసిన 10 జవాబులలో 7 సరైనచో ఆమె పొందిన మార్కులెన్ని?

(iii) రశ్మి రాసిన 7 జవాబులలో 4 తప్పు 3 సరైనచో ఆమె పొందిన మార్కులెన్ని?

5. ఒక వర్తకుడు బియ్యం అమ్మడం ద్వారా ప్రతి బస్తా బాసుమతి బియ్యం పై ₹ 10 లాభం. బాసుమతి కాని బియ్యంపై ₹ 5 నష్టాన్ని పొందుతున్నాడు.



(i) ఒక నెలలో వర్తకుడు 3,000 బస్తాలు బాసుమతి బియ్యం, 5,000 బస్తాలు బాసుమతి కాని బియ్యం అమ్మాడు. లాభమా? నష్టమా? ఎంతో తెలుపండి.

(ii) బాసుమతి కాని బియ్యం 6,400 బస్తాలు అమ్మినపుడు లాభంకానీ, నష్టం కానీ రాకుండా ఉండాలంటే ఎన్ని బస్తాలు బాసుమతి బియ్యం అమ్మాలి?

6. ఖాళీలను పూరించండి.

(i) $(-3) \times$ ______________ $= 27$ (ii) $5 \times$ ______________ $= -35$

(iii) ______________ $\times (-8) = -56$ (iv) ______________ $\times (-12) = 132$

1.1.4 పూర్ణసంఖ్యల భాగహారం

భాగహారం, గుణకారంనకు విలోమ ప్రక్రియ అని మనకు తెలుసు. సహజ సంఖ్యలలో భాగహార ప్రక్రియకు చెందిన మరికొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాం.

$3 \times 5 = 15$ అని మనకు తెలుసు.

కావున $15 \div 5 = 3$ లేక $15 \div 3 = 5$

ఇదే విధంగా $4 \times 3 = 12$

కావున $12 \div 4 = 3$, $12 \div 3 = 4$ అవుతుంది.

అంటే సహజ సంఖ్యలలో ప్రతి గుణకారానికి రెండు భాగహార వాక్యాలు ఉంటాయని చెప్పవచ్చు.

పూర్ణసంఖ్యలలో కూడా ప్రతి గుణకార వాక్యానికి రెండు భాగహార వాక్యాలు రాయవచ్చు.

కింది పట్టికలో ఉన్న గుణకార, భాగహారాలను పరిశీలించి మిగిలిన ఖాళీలను పూరించండి.

గుణకార వాక్యాలు	భాగహార వాక్యాలు		
$2 \times (-6) = (-12)$	$(-12) \div (-6) = 2$	,	$(-12) \div 2 = (-6)$
$(-4) \times 5 = (-20)$	$(-20) \div (5) = (-4)$	,	$(-20) \div (-4) = 5$
$(-8) \times (-9) = 72$	$72 \div (-8) = (-9)$	,	$72 \div (-9) = (-8)$
$(-3) \times (-7) =$ ________	______ $\div (-3) =$ _____	,	________________
$(-8) \times 4 =$ __________	________________	,	________________
$5 \times (-9) =$ __________	________________	,	________________
$(-10) \times (-5) =$	________________	,	________________

పై పట్టిక నుండి నీవేమి చెప్పగలవు?

ఒక ధనపూర్ణసంఖ్యను ఋణపూర్ణసంఖ్యచేగాని, ఒక ఋణపూర్ణసంఖ్యను ధనపూర్ణసంఖ్యచే గాని భాగించినపుడు భాగఫలం ఒక ఋణసంఖ్య పూర్ణాంకాలను భాగించునట్లే భాగించి, ఋణ గుర్తు నుంచుతాము. అలా భాగఫలం ఋణ పూర్ణ సంఖ్య అవుతుంది. ఇంకా ఏమి గమనించావు?

ఇవి చేయండి

1. కింది వాటిని చేయండి.

(i) $(-100) \div 5$ (ii) $(-81) \div 9$ (iii) $(-75) \div 5$ (iv) $(-32) \div 2$

(v) $125 \div (-25)$ (vi) $80 \div (-5)$ (vii) $64 \div (-16)$

ప్రయత్నించండి.

$(-48) \div 8 = 48 \div (-8)$ అవుతుందా?

ఈ కింద నీయబడినవి సత్యమేనా? తెలుపండి.

(i) $90 \div (-45) = (-90) \div 45$ (ii) $(-136) \div 4 = 136 \div (-4)$

కింది భాగహారాలను కూడా గమనించండి

$(-12) \div (-6) = 2$; $(-20) \div (-4) = 5$; $(-32) \div (-8) = 4$; $(-45) \div (-9) = 5$

కావున ఒక ఋణపూర్ణసంఖ్యను మరొక ఋణపూర్ణ సంఖ్యచే భాగించగా భాగఫలం ఒక ధన సంఖ్య వస్తుందని చెప్పవచ్చు.

ఇవి చేయండి.

1. కింది భాగాహారాలను చేయండి.

   (i) $-36 \div (-4)$ (ii) $(-201) \div (-3)$ (iii) $(-325) \div (-13)$

1.2 పూర్ణసంఖ్యల ధర్మాలు

6వ తరగతిలో పూర్ణాంకాల $\{0, 1, 2, 3 ......\}$ ధర్మాలు గురించి నేర్చుకొన్నాం. ఈ తరగతిలో $\{0, \pm 1, \pm 2, ..\}$ పూర్ణసంఖ్యల యొక్క ధర్మాల గురించి చర్చిద్దాం.

1.2.1 పూర్ణసంఖ్యలలో సంకలన ధర్మాలు

(i) **సంవృత ధర్మం**

కింది పట్టికలో సంకలనాలను పరిశీలించి పూరించండి.

ప్రవచనం	సారాంశం
$5 + 8 = 13$	మొత్తం ఒక పూర్ణాంకం
$6 + 3 =$	
$13 + 5 =$	
$10 + 2 =$	
$2 + 6 = 8$	మొత్తం ఒక పూర్ణాంకము

రెండు పూర్ణాంకాల మొత్తం ఎల్లప్పుడు పూర్ణాంకమే అవుతుందా? ఇది సత్యమని మీరు గ్రహించగలరు. కావున పూర్ణాంకాల సంకలనంకు సంవృత ధర్మం వర్తిస్తుంది.

అయితే పూర్ణసంఖ్యల సంకలనంనకు కూడా సంవృత ధర్మం వర్తిస్తుందా లేదా? కింది పట్టికలో సంకలనాలు పరిశీలించి పూరించండి.

ప్రవచనం	సారాంశం
$6 + 3 = 9$	మొత్తం ఒక పూర్ణసంఖ్య
$-10 + 2 =$	
$-3 + 0 =$	
$-5 + 6 = 1$	
$(-2) + (-3) = -5$	
$7 + (-6) =$	మొత్తం ఒక పూర్ణసంఖ్య

రెండు పూర్ణ సంఖ్యల మొత్తం ఎల్లప్పుడూ పూర్ణ సంఖ్యే అవుతుందా?

రెండు పూర్ణసంఖ్యల మొత్తం పూర్ణసంఖ్య కాని ఉదాహరణ చెప్పగలవా? ఇది అసాధ్యం. కావున పూర్ణసంఖ్యల సంకలనాలకు కూడా సంవృత ధర్మం వర్తిస్తుంది.

a మరియు b, లు ఏవైనా రెండు పూర్ణసంఖ్యలైన a + b కూడా పూర్ణసంఖ్య.

(ii) స్థిత్యంతర ధర్మం (వినిమయన్యాయం)

కింది ఉదాహరణలను గమనించి పూరించండి.

ప్రవచనం 1	ప్రవచనం 2	సారాంశం
$4 + 3 = 7$	$3 + 4 = 7$	$4 + 3 = 3 + 4 = 7$
$3 + 5 =$	$5 + 3 =$	
$3 + 1 =$	$1 + 3 =$	

రెండు పూర్ణాంకాలను కూడే క్రమంలో సంఖ్యలను పరస్పరం మార్చినపుడు వాటి మొత్తాలలో ఏమైనా తేడా ఉందా? తేడా ఉండే పూర్ణాంకాల కూడిక జతలను రాయలేము. కావున పూర్ణాంకాల సంకలనాలకు స్థిత్యంతర ధర్మం వర్తిస్తుంది.

కింది ఉదాహరణలను గమనించి పూరించండి.

ప్రవచనం 1	ప్రవచనం 2	సారాంశం
$5 + (-6) = -1$	$(-6) + 5 = -1$	$5 + (-6) = (-6) + 5 = -1$
$-9 + 2 =$	$2 + (-9) =$	
$-4 + (-5) =$	$(-5) + (-4) =$	

రెండు పూర్ణసంఖ్యల సంకలనంలో వాటి క్రమంను పరస్పరం మార్చినప్పుడు వాటి మొత్తాలలో ఏమైనా తేడా ఉందా? తేడా ఉండే పూర్ణసంఖ్యల జతలను రాయలేము. **కావున పూర్ణసంఖ్యల సంకలనంలో స్థిత్యంతర ధర్మం వర్తిస్తుంది.**

a మరియు b లు ఏవైనా రెండు పూర్ణసంఖ్యలు ఐన $a + b = b + a$

(iii) సహచర ధర్మం

కింది ఉదాహరణలను పరిశీలించండి.

(i) $(2 + 3) + 4$ $\quad$ $2 + (3 + 4)$
$= 5 + 4$ $\quad$ $= 2 + 7$
$= 9$ $\quad$ $= 9$

(ii) $(-2 + 3) + 5$ $\quad$ $-2 + (3 + 5)$
$= 1 + 5$ $\quad$ $= -2 + 8$
$= 6$ $\quad$ $= 6$

(iii) $(-2 + 3) + (-5)$ $\quad$ $(-2) + [3 + (-5)]$
$= 1 + (-5)$ $\quad$ $= (-2) + (-2)$
$= -4$ $\quad$ $= -4$

(iv) $[(-2) + (-3)] + (-5)$ $\quad$ $-2 + [(-3) + (-5)]$
$= -5 + (-5)$ $\quad$ $= -2 + (-8)$
$= -10$ $\quad$ $= -10$

ప్రతి సందర్భంలో సంకలనాల మొత్తాలు సమానమేనా? ఇది సత్యమని గ్రహిస్తాం. **కావున పూర్ణసంఖ్యల సంకలనాలకు సహచర ధర్మం వర్తిస్తుంది.**

a, b మరియు c లు ఏవైనా మూడు పూర్ణసంఖ్యలైన $(a + b) + c = a + (b + c)$

ప్రయత్నించండి.

1. కింది వాటిని సత్యాలో, కాదో పరీక్షించండి.

   (i) $(2 + 5) + 4 = 2 + (5 + 4)$

   (ii) $(2 + 0) + 4 = 2 + (0 + 4)$

2. పూర్ణాంకాల సంకలనాలకు సహచరధర్మం వర్తిస్తుందా? మరో రెండు ఉదాహరణలతో వివరించండి.

(iv) సంకలన తత్సమాంశం

కింది సంకలనాలను పరిశీలించండి.

$-2 + 0 = -2$

$5 + 0 = 5$

$8 + 0 =$

$-10 + 0 =$

పూర్ణసంఖ్యకు **'0'** ను కూడితే అదే పూర్ణ సంఖ్య వస్తుందా? ఫలితం అదే పూర్ణ సంఖ్య.

కావున '0' ను పూర్ణసంఖ్యలకు సంకలన తత్సమాంశం అంటారు.

a ఏదైనా పూర్ణసంఖ్య ఐన $a+0 = 0 + a = a$

ప్రయత్నించండి.

1. కింది గణనలను చేయండి.

   (i) $2 + 0 =$

   (ii) $0 + 3 =$

   (iii) $5 + 0 =$

2. పై ఉదాహరణలలో మాదిరి మరిన్ని పూర్ణాంకాలకు '0' ను కూడండి.

   పూర్ణాంకాలకు కూడా '0' సంకలన తత్సమాంశమేనా?

(v) సంకలన విలోమం

3 నకు ఏ పూర్ణసంఖ్యను కూడగా ఫలితం సంకలన తత్సమాంశం '0' అవుతుంది?

కింది వాటిని పరిశీలిద్దాం.

$3 + (-3) = 0$

$7 + (-7) = 0$

$(-10) + 10 = 0$

పై విధంగా అన్నిపూర్ణసంఖ్యలకు ఇలాంటి జతలను ఏర్పరచగలమా?

పై జతలలో ప్రతీ సంఖ్యను రెండవ సంఖ్యకు సంకలన విలోమం అంటారు.

'a' ఒక పూర్ణసంఖ్య అయిన $a + (-a) = 0$. అగునట్లుగా $(-a)$ అను పూర్ణసంఖ్య ఉంటుంది. 'a' మరియు $(-a)$ లు ఒకదానికొకటి సంకలన విలోమాలు.

1.2.2 పూర్ణసంఖ్యలలో గుణకారధర్మాలు

(i) సంవృత ధర్మం

కింది గుణకారాలను పరిశీలించి పూరించండి.

ప్రవచనం	సారాంశం
$9 \times 8 = 72$	లబ్ధం ఒక పూర్ణసంఖ్యయే
$10 \times 0 =$	
$-15 \times 2 =$	
$-15 \times 3 = -45$	
$-11 \times (-8) =$	
$10 \times 10 =$	
$5 \times (-3) =$	

రెండు పూర్ణసంఖ్యల లబ్ధం పూర్ణసంఖ్య కానటువంటి పూర్ణసంఖ్యల జతలను రాయగలవా? వీటిని రాయడం సాధ్యం కాదు. **కావున పూర్ణసంఖ్యలలో గుణకారాలకు సంవృత ధర్మం వర్తిస్తుంది.**

a మరియు b లు ఏవైనా రెండు పూర్ణసంఖ్యలు అయిన $a \times b$ కూడా పూర్ణసంఖ్యయే.

ప్రయత్నించండి.

1. (i) 2×3 = ________

(ii) 5×4 = ________

(iii) 3×6 = ________

(iv) అదే విధంగా ఏవేని రెండు పూర్ణాంకాలను గుణించగా వచ్చు లబ్ధం ఎల్లప్పుడూ పూర్ణాంకమేనా?

(ii) స్థిత్యంతర ధర్మం

పూర్ణాంకాలలో గుణకారానికి స్థిత్యంతర ధర్మం వర్తిస్తుందని తెలుసుకదా. పూర్ణసంఖ్యలకు కూడా ఈ ధర్మం ఉందా?

ప్రవచనం 1	ప్రవచనం 2	సారాంశం
$5 \times (-2) = -10$	$(-2) \times 5 = -10$	$5 \times (-2) = (-2) \times 5 = -10$
$(-3) \times 6 =$	$6 \times (-3) =$	
$-20 \times 10 =$	$10 \times (-20) =$	

పై సందర్భాలన్నింటిలో ఇది సత్యం. రెండు పూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధం పూర్ణ సంఖ్య కాకుండా ఉండే ఉదాహరణ చెప్పండి. సాధ్యం కాదు. కావున పూర్ణసంఖ్యల గుణకారానికి స్థిత్యంతర ధర్మం వర్తిస్తుంది.

a మరియు b లు ఏవైనా రెండు పూర్ణసంఖ్యలైన $a \times b = b \times a$

(iii) సహచర ధర్మం

$2, -3, -4$ లతో గుణకారాలను చేద్దాం.

వీటిని కింది విధాలుగా గుణిద్దాం.

$[2 \times (-3)] \times (-4)$	$2 \times [(-3) \times (-4)]$
$= (-6) \times (-4)$	$= 2 \times 12$
$= 24$	$= 24$

మొదటి సందర్భంలో మొదటి రెండు పూర్ణసంఖ్యల లబ్ధంను మూడవ సంఖ్యతో గుణించడం జరిగింది, రెండవ సందర్భంలో చివరి రెండు పూర్ణసంఖ్యల లబ్ధంను మొదటి సంఖ్యతో గుణించడం జరిగింది. ఈ రెండు సందర్భాలలో కూడా చివరగా లబ్ధం సమానమే.

అందుచేత $[2 \times (-3)] \times [(-4)] = 2 \times [(-3) \times (-4)]$

పై రెండు సందర్భాలలో పూర్ణ సంఖ్యలు గ్రూపుగా చేసి గుణించినపుడు లబ్ధపూర్ణ సంఖ్యలపై ఎలాంటి ప్రభావం చూపదు. కావున పూర్ణసంఖ్యలలో సహచర ధర్మం వర్తిస్తుంది. మూడు పూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధం అనునది పూర్ణ సంఖ్యలు గ్రూపుగా చేసి గుణించడంపై ఆధారపడదు.

a, b, c లు ఏవైనా మూడు పూర్ణసంఖ్యలు ఐన $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

ఇవి చేయండి.

1. $[(-5) \times 2)] \times 3 = (-5) \times [2 \times 3]$ అవుతుందా?
2. $[(-2) \times 6] \times (-4) = (-2) \times [6 \times -4]$ అవుతుందా?

ప్రయత్నించండి.

1. $(5 \times 2) \times 3 = 5 \times (2 \times 3)$
2. పూర్ణాంకాలలో గుణకారానికి సహచరధర్మం వర్తిస్తుందా? మరికొన్ని ఉదాహరణలతో సరిచూడండి.

(iv) విభాగ న్యాయం

$9 \times (10 + 2) = (9 \times 10) + (9 \times 2)$ అని మనకు తెలుసు.

అందుచే, పూర్ణాంకాలలో గుణకారం సంకలనంపై విభాగన్యాయం పాటిస్తుందనడం సత్యం.

కావున పూర్ణసంఖ్యలకు కూడ ఈ ధర్మం ఉందా పరిశీలిద్దాం.

(i) $-2 \times (1 + 3) = [(-2) \text{ x } 1] + [(-2) \times 3]$

$-2 \times 4 = -2 + (-6)$

$-8 = -8$

(ii) $-1 \times [3 + (-5)] = [(-1) \times 3] + [(-1) \times (-5)]$

$-1 \times (-2) = -3 + (+5)$

$2 = 2$

$-3 \times (-4+2) = [(-3) \times (-4)] + [-3 \times (2)]$ ను సరిచూడండి.

పై రెండు సందర్భాలలో ఎడమవైపు ఉన్న విలువ. కుడివైపు ఉన్న విలువకు సమానం.

కావున పూర్ణసంఖ్యలలో గుణకారం సంకలనంపై విభాగన్యాయం పాటిస్తుంది.

a, b మరియు c, లు ఏవైనా మూడు పూర్ణసంఖ్యలు ఐన $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

(v) గుణకార తత్సమాంశం

కింది గుణకారాలను పరిశీలించి, ఖాళీలను పూరించండి.

$2 \times 1 = 2$

$-5 \times 1 = -5$

$-3 \times 1 =$ ______

$-8 \times 1 =$ ______

$1 \times -5 =$ ______

పూర్ణ సంఖ్యలలో గుణకార తత్సమాంశము '1'

పై ఉదాహరణలను బట్టి పూర్ణసంఖ్యను 1తో గుణించినపుడు పూర్ణసంఖ్యలో ఎటువంటి మార్పులేదు.

కావున 1 ని పూర్ణసంఖ్యలలో గుణకార తత్సమాంశం అంటారు.

'a' ఒక పూర్ణసంఖ్య అయిన $a \times 1 = 1 \times a = a$

(vi) 0 (సున్న) తో గుణకారం

ఏ పూర్ణాంకాన్నైనా '0' తో గుణించినపుడు, వాని లబ్ధం కూడా సున్న అవుతుంది.
అయితే పూర్ణసంఖ్యల విషయంలో ఇది సత్యమా? పరిశీలించండి.

$(-3) \times 0 = 0$

$0 \times (-8) =$ ——

$9 \times 0 =$ ——

పై వాటిని పరిశీలించినపుడు పూర్ణసంఖ్య, సున్నాల లబ్ధం సున్నాయే.

a, ఏదయిన ఒక పూర్ణసంఖ్య అయిన $a \times 0 = 0 \times a = 0$

అభ్యాసం - 5

1. కింది వానిని సరిచూడండి.
   (i) $18 \times [7 + (-3)] = [18 \times 7] + [18 \times (-3)]$
   (ii) $(-21) \times [(-4) + (-6)] = [(-21) \times (-4)] + [(-21) \times (-6)]$
2. (i) a, ఒక పూర్ణసంఖ్య అయిన $(-1) \times a$ యొక్క విలువ ఎంతవుతుంది?
   (ii) (-1) తో ఏ పూర్ణసంఖ్యయొక్క లబ్ధము 5 అగును.
3. సరైన ధర్మాలను ఉపయోగించి కింది వానిని గణన చేయండి.
   (i) $26 \times (-48) + (-48) \times (-36)$ (ii) $8 \times 53 \times (-125)$
   (iii) $15 \times (-25) \times (-4) \times (-10)$ (iv) $(-41) \times 102$
   (v) $625 \times (-35) + (-625) \times 65$ (vi) $7 \times (50 - 2)$
   (vii) $(-17) \times (-29)$ (viii) $(-57) \times (-19) + 57$

1.2.3 పూర్ణసంఖ్యలలో వ్యవకలన ధర్మాలు

(i) సంవృత ధర్మం

కింది ఒక పూర్ణ సంఖ్య నుండి మరొక పూర్ణ సంఖ్యను తీసివేసిన ఎల్లప్పుడు పూర్ణసంఖ్యనే వస్తుందా? వీటిని చేయండి.

$9 - 7 =$ ______

$7 - 10 =$ ______

$2 - 3 =$ ______

$-2 - 3 =$ ______

$-2 - (-5) =$ ______

$0 - 4 =$ ______

ఏమి గమనించారు? పూర్ణ సంఖ్యలలో వ్యవకలనానికి సంవృతధర్మం వర్తిస్తుందని చెప్పవచ్చునా?

a మరియు b, లు ఏవైనా పూర్ణసంఖ్యలైన a – b కూడా పూర్ణసంఖ్యయే.

(ii) స్థిత్యంతర ధర్మం

ఒక ఉదాహరణ పరిశీలిద్దాం!

6, –4 పూర్ణసంఖ్యలను తీసుకుందాం.

$6 - (-4) = 6 + 4 = 10$ మరియు

$-4 - (6) = -4 - 6 = -10$

అనగా $6 - (-4) \neq -4 - (6)$

పూర్ణసంఖ్యలలో వ్యవకలనానికి స్థిత్యంతర ధర్మం వర్తించదు.

ప్రయత్నించండి.

ఏవైనా ఐదు జతల పూర్ణసంఖ్యలను తీసుకొని స్థిత్యంతర ధర్మాన్ని సరిచూడండి.

1.2.4 పూర్ణసంఖ్యల భాగహార ధర్మాలు

(i) సంవృత ధర్మం

కింది పట్టికను పరిశీలించి, పూరించండి.

ప్రవచనం	సారాంశం	ప్రవచనం	సారాంశం
$(-8) \div (-4) = 2$	ఫలితం పూర్ణసంఖ్య	$(-8) \div 4 = \frac{-8}{4} = -2$	
$(-4) \div (-8) = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$	ఫలితం పూర్ణసంఖ్య కాదు	$4 \div (-8) = \frac{4}{-8} = \frac{-1}{2}$	

పట్టిక నుంచి ఏమి గమనించారు? పూర్ణసంఖ్యలలో భాగహారానికి సంవృత ధర్మం వర్తించదు.

ప్రయత్నించండి.

ఏవైనా ఐదు పూర్ణసంఖ్యల జతలను తీసుకొని భాగహారాలలో సంవృత ధర్మాన్ని సరిచూడండి.

(ii) స్థిత్యంతర ధర్మం

పూర్ణాంకాలలో భాగహారానికి స్థిత్యంతర ధర్మం లేదు. పూర్ణసంఖ్యలలో ఈ ధర్మాన్ని పరిశీలిద్దాం. పట్టికలోని ఉదాహరణ ఆధారంగా $(-8) \div (-4) \neq (-4) \div (-8)$ అని తెలియుచున్నది.

ఇంకనూ $(-9) \div 3$, $3 \div (-9)$ లు సమానమేనా?

$(-30) \div (-6)$, $(-6) \div (-30)$ లు సమానమేనా?

అందుచే, పూర్ణసంఖ్యలలో భాగహారంనకు స్థిత్యంతర ధర్మం వర్తించదు.

ప్రయత్నించండి.

ఏవైనా ఐదు పూర్ణ సంఖ్యల జతలను తీసుకొని భాగహారంలో స్థిత్యంతర ధర్మంను సరిచూడండి.

(iii) సున్నతో భాగహారం

ఒక దానిని రెండు భాగములు, మూడు భాగములు... చేయవచ్చును. కానీ సున్న భాగములుగా విభజించడం అనేది అర్థం లేనిది. సున్నను శూన్యేతర పూర్ణ సంఖ్యచే భాగించగా భాగఫలం '0' అవుతుంది.

a, ఒక పూర్ణసంఖ్య ఐన a ÷ 0 నిర్వచింపబడదు. a ఒక శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్య ఐన 0 ÷ a = 0

(iv) –1 తో భాగాహారం

కింది భాగహారాలను పరిశీలించి, పూరించండి.

(–8) ÷ 1 = –8 (–11) ÷ 1 = –11 (–13) ÷ 1 = _____ (–25) ÷ 1 = ________

పై ఉదాహరణలనుండి ఒక ధన లేద ఋణ పూర్ణసంఖ్యను 1 చే భాగించగా ఫలితం అదే పూర్ణసంఖ్య అవుతుంది. కానీ –1 చే భాగించగా ధనపూర్ణసంఖ్య ఋణపూర్ణసంఖ్యగా, ఋణపూర్ణసంఖ్య ధనపూర్ణసంఖ్యగా మారుతుంది.

a, ఏదైన ఒక పూర్ణసంఖ్య అయిన a ÷ 1 = a.

ఏవైన ఒకపూర్ణసంఖ్యను (–1) చే భాగిస్తే ఏమొస్తుంది. కింది వాటిని చేసి తెల్పండి.

(–8) ÷ (–1) = 8 11 ÷ (–1) = –11 13 ÷ (–1) = _____ (–25) ÷ (–1) = _____

ఏదేని ఒక పూర్ణసంఖ్యను (–1) చే భాగించునపుడు ఫలితం అదే పూర్ణసంఖ్య కాదు. అని తెలుస్తుంది.

ప్రయత్నించండి

1. a, ఏదైన ఒక పూర్ణసంఖ్య అయిన

 (i) a ÷ 1 = 1

 (ii) a ÷ (–1) = –a

 'a'కు వేరువేరు విలువలు చేసుకొని సరిచూడండి.

(v) సహచర ధర్మం

–16, 4, –2 పూర్ణసంఖ్యలను తీసుకొంటే

[(–16) ÷ 4] ÷ (–2) = (–16) ÷ [4 ÷ (–2)] అగునా?

[(–16) ÷ 4] ÷ (–2) = (–4) ÷ (–2) = 2

(–16) ÷ [4 ÷ (–2)] = (–16) ÷ (–2) = 8

అందుకే [(–16) ÷ 4] ÷ (–2) ≠ (–16) ÷ [4 ÷ (–2)]

కనుక పూర్ణసంఖ్యలలో భాగహారానికి సహచర ధర్మం వర్తించదు.

ప్రయత్నించండి.

ఏవైనా ఐదు ఉదాహరణలను తీసుకొని పూర్ణసంఖ్యలలో భాగహారానికి సహచర ధర్మాన్ని సరిచూడండి.

అభ్యాసం - 6

1. కంది ఖాళీలను పూరించండి.

   (i) $-25 \div$ .... $=$ 25

   (ii) .... $\div 1 = -49$

   (iii) $50 \div 0 =$ ....

   (iv) $0 \div 1 =$ ....

1.3 ఋణ పూర్ణసంఖ్యలపై కొన్ని సమస్యలు

ఉదాహరణ 1 : ఒక పరీక్షలో ప్రతి సరైన జవాబుకు (+5) మార్కులు. తప్పు జవాబుకు (–2) ఇవ్వబడ్డాయి.

(i) రాధిక అన్ని ప్రశ్నలకు జవాబులు రాయగా 10 సరైనవి. 30 మార్కులు పొందింది.

(ii) జయ కూడా అన్ని ప్రశ్నలకు జవాబులు రాయగా, 4 సరైనవి కానీ, (–12) మార్కులు పొందినది.

ఐన పరీక్షలలో రాధిక, జయలు ఎన్ని ప్రశ్నలకు తప్పు జవాబులు రాసారు?

సాధన : (i) ఒక్కొక్క సరైన జవాబుకు మార్కులు $= 5$

10 సరైన జవాబులకు మొత్తం మార్కులు $= 5 \times 10 = 50$

రాధికకు వచ్చిన మార్కులు $= 30$

తప్పు జవాబులకు ఇవ్వబడిన మార్కులు $= 30 - 50 = -20$

ఒక్కొక్క తప్పు జవాబుకు మార్కులు $= (-2)$

కాబట్టి రాధిక తప్పు జవాబుల సంఖ్య $= (-20) \div (-2) = 10$

(ii) 4 సరైన జవాబులకు మార్కులు $= 5 \times 4 = 20$

జయకు వచ్చిన మార్కులు $= -12$

తప్పు జవాబులకు ఇవ్వబడిన మార్కులు $= -12 - 20 = -32$

ఒక్కొక్క తప్పు జవాబుకు మార్కులు $= (-2)$

కాబట్టి జయ తప్పు జవాబుల సంఖ్య $= (-32) \div (-2) = 16$

ఉదాహరణ 2 : ఒక దుకాణాదారుడు ఒక్కొక్క పెన్ను అమ్మడం వలన ₹ 1 లాభాన్ని ఒక్కొక్క పాత పెన్సిలు అమ్మడం వలన 40 పైసల నష్టాన్ని పొందుతున్నాడు.

(i) ₹ 5. నష్టం పొందిన నెలలో అమ్మిన పెన్నుల సంఖ్య 45 ఐన ఎన్ని పెన్సిళ్లు అమ్మినాడు?

(ii) తరువాత నెలలో ఎటువంటి లాభం గాని నష్టం గాని లేదు. 70 పెన్నులను అమ్మిఉంటే, ఎన్ని పెన్సిళ్లు అమ్మినాడు?

సాధన : (i) ఒక్కొక్క పెన్ను అమ్మకం వలన లాభం ₹ 1

45 పెన్నుల అమ్మకం వలన లాభం $= 1 \times 45$, అనగా ₹ 45

మొత్తం నష్టము = ₹ 5, అనగా -5.

పెన్నులపై లాభం + పెన్సిళ్లపై నష్టం = మొత్తం నష్టం (ఈ సమస్యలో)

కాబట్టి పెన్సిళ్లపై నష్టం = మొత్తం నష్టం - పెన్నులపై లాభం

$= -5 - (45) = (-50) = -$ ₹ 50 = – 5000 పైసలు

ఒక్కొక్క పెన్సిలుపై నష్టము = 40 పై. అనగా –40 పైసలు

కాబట్టి అమ్మిన పెన్సిళ్ల సంఖ్య $= (-5000) \div (-40) = 125$ పెన్సిళ్లు

(ii) తరువాత నెలలో 70 పెన్నులపై పొందిన లాభం = 1×70 = ₹ 70 అనగా +70

పొందిన మొత్తం లాభం = 0

పెన్నులపై లాభం + పెన్సిళ్లపై నష్టం = 0.

70 పెన్నుల అమ్మకం పై వచ్చిన లాభం = ₹ 70

పెన్సిళ్లపై నష్టం = – 70 అనగా –7000 పైసలు

అమ్మిన పెన్సిళ్ల సంఖ్య $= (-7000) \div (-40)$

= 175 పెన్సిళ్లు.

అభ్యాసం - 7

1. ఒక తరగతికి ఇవ్వబడ్డ ప్రశ్నాపత్రంలో 15 ప్రశ్నలున్నవి. ప్రతి సరైన జవాబుకు 4 మార్కులు, ప్రతి తప్పు జవాబుకు (–2) మార్కులు కేటాయిస్తారు. (i) భారతి అన్ని ప్రశ్నలకు జవాబులు రాస్తే 9 మాత్రమే సరైనవి. (ii) ఆమె స్నేహితురాలు దీక్షిత 5 ప్రశ్నలకు సరైన జవాబులు రాయగా అన్ని సరైనవి. అయితే వారికి వచ్చిన మార్కులు ఎన్ని?

2. ఒక సిమెంటు కంపెనీ ఒక్కొక్క బస్తా తెల్ల సిమెంటు పై ₹ 9 లాభం, బూడిదరంగు సిమెంటుపై ₹ 5 నష్టం చొప్పున అమ్మింది.

   (i) ఒక నెలలో 7000 బస్తాల తెల్ల సిమెంటు, 6000 బస్తాల బూడిద రంగు సిమెంటు అమ్మినట్లయిన ఆ నెలలో పొందిన లాభమా లేదా నష్టమా ఎంత?

   (ii) 5400 బస్తాల బూడిద రంగు సిమెంటు అమ్మిన నెలలో ఎటువంటి లాభం కానీ నష్టం కానీ రాని పక్షంలో ఎన్ని బస్తాల తెల్ల సిమెంటు అమ్మి ఉండాలి.

3. శ్రీనగర్ నందు మధ్యాహ్నం 12 గంటల సమయంలో ఉష్ణోగ్రత 10^o C అని గుర్తించబడినది. ప్రతి గంటకు 2^oC చొప్పున ఉష్ణోగ్రత తగ్గుతూ ఉంటే (i) ఎన్ని గంటల సమయంలో ఉష్ణోగ్రత 0^o C కన్నా 8^oC తక్కువగా ఉంటుంది? (ii) అర్ధరాత్రి 12 గంటల సమయంలో ఉష్ణోగ్రత ఎంత ఉంటుంది?

4. ఒక పరీక్షలో ప్రతి సరైన జవాబుకు (+3) మార్కులు, తప్పు జవాబుకు (–2) మార్కులు, జవాబు రాయకపోతే 0 మార్కులు కేటాయించబడ్డాయి. (i) రాధిక రాసిన జవాబులలో 12 సరైనవి అప్పుడు ఆమె మార్కులు 20 ఐన ఆమె రాసిన తప్పు జవాబులెన్ని? (ii) మోహినికి (–5) మార్కులు వచ్చినవి. ఆమె రాసిన జవాబులలో 7 ఒప్పు జవాబులు ఐన సరికాని జవాబులెన్ని?

5. ఒక గనిలో ఏర్పాటు చేయబడిన ఎలివేటరు నిమిషానికి 6 మీ. వేగంతో కిందికి దిగుతుంది. భూమట్టం కన్నా 10 మీ. ఎత్తునుండి బయలు దేరిన ఎలివేటరు –350 మీ. వరకు ప్రయాణించుటకు ఎంత సమయం పడుతుంది.

మనం నేర్చుకున్నవి

1. సహజ సంఖ్యలు $N = \{1, 2, 3, 4, 5 ...\}$

   పూర్ణాంకములు $W = \{0, 1, 2, 3, 4, 5 ...\}$

   పూర్ణసంఖ్యలు $Z = \{...... -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 ....\}$

   $Z = \{0, \pm1, \pm2, \pm3 .....\}$ అని కూడా రాస్తారు.

2 (i) సంఖ్యారేఖపై ఒక సంఖ్యకు ధనపూర్ణసంఖ్యను కూడినపుడు కుడివైపుకు, ఋణపూర్ణసంఖ్యను కూడినపుడు ఎడమ వైపుకు జరుగుతారు.

3 సంఖ్యారేఖపై ఒక సంఖ్యనుండి ధనపూర్ణసంఖ్యను తీసివేస్తే ఎడమ వైపుకు, ఋణపూర్ణసంఖ్యను తీసివేస్తే కుడివైపునకు జరుగుతారు.

4 (i) ధనపూర్ణసంఖ్యను ఋణపూర్ణసంఖ్యచే లేక ఋణపూర్ణసంఖ్యను ధనపూర్ణ సంఖ్యచే గుణించగా లబ్ధం ఋణపూర్ణసంఖ్య.

   (ii) రెండు ఋణపూర్ణసంఖ్యల లబ్ధం ఒక ధనపూర్ణసంఖ్య.

   (iii) ఒక గుణకారం నందలి ఋణపూర్ణసంఖ్యల సంఖ్య సరిసంఖ్య అయిన లబ్ధం ధనపూర్ణసంఖ్య. అట్లే ఋణపూర్ణ సంఖ్యల సంఖ్య బేసిసంఖ్య అయిన లబ్ధం ఋణపూర్ణ సంఖ్య అగును.

5 (i) ధనపూర్ణసంఖ్య ఋణపూర్ణసంఖ్యచే గానీ లేక ఋణపూర్ణ సంఖ్య ధనపూర్ణ సంఖ్యచే గాని భాగింపబడినపుడు భాగఫలం ఋణసంఖ్య.

   (ii) ఒక ఋణపూర్ణసంఖ్యను మరొక ఋణపూర్ణ సంఖ్యచే భాగించగా భాగఫలం ధనసంఖ్య.

   (iii) ఒకే గుర్తు గల రెండు పూర్ణ సంఖ్యలను గుణించినా లేదా భాగించినా ఫలితం ధన సంఖ్య. వేర్వేరు గుర్తులైతే ఋణ సంఖ్య.

6. పూర్ణసంఖ్యల ధర్మాలు

ధర్మం	సంకలనం(+)	వ్యవకలనం(−)	గుణకారం(×)	భాగహారం (÷)
సంవృత ధర్మం	✓	✓	✓	×
స్థిత్యంతర ధర్మం	✓	×	✓	×
సహచర ధర్మం	✓	×	✓	×
తత్సమాంశం	✓	–	✓	–
విలోమం	✓	–	×	–

7. పూర్ణసంఖ్యలందు గుణకారం సంకలనం పై విభాగిస్తుంది. a, b, పూర్ణ సంఖ్యలు ఐన

   $a \times (b+c) = a \times b + a \times c$

8. (i) a ఒక పూర్ణసంఖ్య అయిన $a \div 0$ నిర్వచింపబడదు.

   (ii) a ఒక శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్య అయిన $0 \div a = 0$

   (iii) $a \div 1 = a$

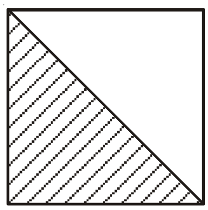
భిన్నాలు, దశాంశాలు మరియు అకరణీయ సంఖ్యలు

2

2.0 పరిచయం

భిన్నాలను ఉపయోగించి అనేక నిత్యజీవిత సమస్యలు సాధించడం మనకు తెలుసు. క్రమ, అపక్రమ భిన్నాలను ఏ విధంగా గుర్తించాలో, వాటి సంకలన వ్యవకలనాలు ఎలా చేయాలో కింది తరగతులలో నేర్చుకున్నాం. మనం వాటిని మరొకసారి పునశ్చరణ చేసుకొని భిన్నాల గుణకారం, భాగహారం నేర్చుకోవడంతో పాటు దశాంశ భిన్నాలను గురించి కూడా తెలుసుకుందాం. అదే విధంగా అకరణీయ సంఖ్యలను పరిచయం చేసుకుందాం.

దిగువనివ్వబడిన పటాలలో రంగుల భాగాలు భిన్నాలలో సూచింపబడ్డాయి. ఇందులో ఏ భాగాలు సరైనవో తెల్పండి.



పటం 1

$\frac{1}{2}$

అవును/కాదు

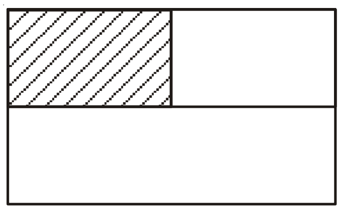
కారణం : ....

పటం 2

$\frac{1}{2}$

అవును/కాదు

కారణం : ....



పటం 3

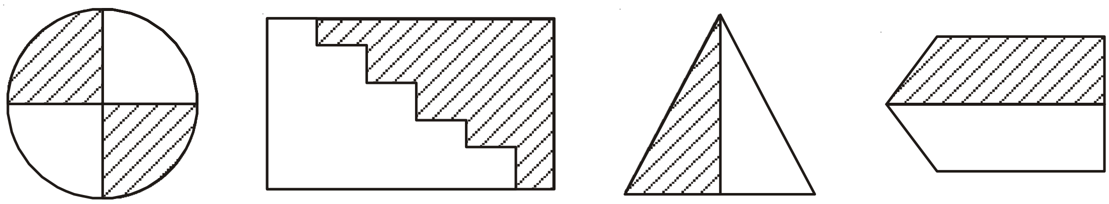
$\frac{1}{3}$

అవును/కాదు

కారణం : ....

పై పటాలను పరిశీలించే క్రమంలో సమానభాగాలు గల పటాలను గుర్తించే ఉంటారు. అటువంటి ఐదు ఉదాహరణలను రాసి నీ స్నేహితులకు ఇచ్చి, సరిచూడమనండి.

'నేహా' $\frac{1}{2}$ ను వివిధ పటాలలో కింద ఏ విధంగా చూపిందో గమనించండి.



అన్ని పటాలలో షేడ్ చేసిన భాగాలు ఆ పటాలలో $\frac{1}{2}$ ను సూచిస్తాయని నీవు భావిస్తున్నావా? షేడ్ చేయిని భాగం ఏ భిన్నాన్ని సూచిస్తుంది.

ప్రయత్నించండి

వివిధ రకాల పటాలు గీచి, వాటిలో $\frac{3}{4}, \frac{1}{4}$ భిన్నాలను షేడ్ చేయండి. వీటిని నీవు ఏ విధంగా సూచించావో నీ స్నేహితులతో పరిశీలింపచేసి, సరిచూడండి.

క్రమ, అపక్రమ భిన్నాలు

మీరు గతంలో క్రమ, అపక్రమ భిన్నాల గూర్చి తెలుసుకున్నారు. క్రమభిన్నం అనేది మొత్తంలో ఒక భాగంగా గుర్తించాం.

క్రమ భిన్నాలకు ఐదు ఉదాహరణ లివ్వండి.

$\frac{3}{2}$ అనేది క్రమభిన్నమా? ఇది క్రమ భిన్నం అవునో, కాదో ఏ విధంగా సరిచూస్తావు?

అపక్రమ భిన్నంలో లవం, హారం కన్నా ఎక్కువగా ఉంటుంది. ప్రతి అపక్రమ భిన్నాన్ని ఒక మిశ్రమ భిన్నంగా రాయవచ్చు. ఉదాహరణకు $\frac{3}{2}$ అనే అపక్రమ భిన్నాన్ని $1\frac{1}{2}$ అని రాయవచ్చు. ఇది ఒక మిశ్రమ భిన్నం. ఇందులో పూర్ణాంకభాగం, భిన్న భాగాలు ఉంటాయి. భిన్న భాగం తప్పనిసరిగా క్రమభిన్నమవుతుంది.

ఇవి చేయండి

1. క్రమ, అపక్రమ, మిశ్రమభిన్నాలకు ఏవేని ఐదు చొప్పున ఉదాహరణలు రాయండి.

ప్రయత్నించండి.

$2\frac{1}{4}$ భిన్నాన్ని పటాలలో చూపండి. దీనిని చూపడానికి ఎన్ని యూనిట్ పటాలు అవసరం?

భిన్నాల పోలిక

సజాతి భిన్నాలను ఏ విధంగా పోల్చారో జ్ఞప్తికి తెచ్చుకోండి. ఉదాహరణకు $\frac{1}{5}, \frac{3}{5}$ భిన్నాలలో $\frac{3}{5}$ పెద్దది. ఎలా?

అదే విధంగా రెండు విజాతి భిన్నాలను ఏ విధంగా పోల్చారో జ్ఞప్తికి తెచ్చుకోండి. ఉదాహరణకు $\frac{5}{7}$ మరియు $\frac{3}{4}$ లను తీసుకోండి.

$\frac{5}{7}, \frac{3}{4}$ లను సజాతిభిన్నలుగా మార్చి పోల్చుదాం.

$\frac{5}{7} \times \frac{4}{4} = \frac{20}{28}$, అలాగే $\frac{3}{4} \times \frac{7}{7} = \frac{21}{28}$

$\frac{5}{7} = \frac{20}{28}$ మరియు $\frac{3}{4} = \frac{21}{28}$ ల నుండి $\frac{20}{28} < \frac{21}{28}$

కావున $\frac{5}{7} < \frac{3}{4}$ అయినది

ఇవి చేయండి

1. $\frac{3}{5}$ మరియు $\frac{4}{7}$ భిన్నాలకు ఐదేసి సమానభిన్నాలను రాయండి.

2. $\frac{5}{8}, \frac{3}{5}$ లలో ఏది పెద్దది?

3. కింది జతల భిన్నాలను సూక్ష్మరూపంలో రాసి, ఏ జతలు సమానమో తెలపండి.

   (i) $\frac{3}{8}, \frac{375}{1000}$ (ii) $\frac{18}{54}, \frac{23}{69}$

   (iii) $\frac{6}{10}, \frac{600}{1000}$ (iv) $\frac{17}{27}, \frac{25}{45}$

ఇప్పుడు మనం కొన్ని సమస్యలు సాధిద్దాం.

ఉదా 1 : రజియా ఇంటి పనిలో $\frac{3}{7}$ భాగం పూర్తిచేసింది. రేఖ $\frac{4}{9}$ భాగం పూర్తి చేసింది. ఎవరు తక్కువ భాగం ఇంటి పని పూర్తి చేసారు?

సాధన : సమస్య సాధనకు $\frac{3}{7}$ ను $\frac{4}{9}$ తో పోల్చాలి

ఈ భిన్నాలను సజాతి భిన్నాలుగా మార్చిన

$\frac{3}{7} = \frac{27}{63}$; $\frac{4}{9} = \frac{28}{63}$ అగును. ఇచ్చట $\frac{27}{63} < \frac{28}{63}$ కావున

$\frac{3}{7} < \frac{4}{9}$ అవుతుంది.

దీనిని బట్టి రజియా తక్కువ భాగం ఇంటిపని పూర్తి చేసిందని చెప్పవచ్చు.

ఉదా 2 : ఒక నెలలో శంకర్ కుటుంబం $3\frac{1}{2}$ కి.గ్రా పంచదారను పక్షం రోజులలో వాడారు. మిగిలిన రోజులకు $3\frac{3}{4}$ కి.గ్రా పంచదార వాడారు. అయిన ఆ నెలలో వారు వాడిన మొత్తం పంచదార ఎంత?

సాధన : నెలలో వాడిన పంచదార మొత్తం బరువు

$$= \left(3\frac{1}{2}+3\frac{3}{4}\right) \text{ కి.గ్రా}$$

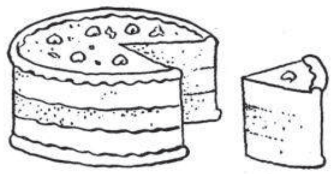
$$= \left(\frac{7}{2}+\frac{15}{4}\right) \text{ కి.గ్రా} = \left(\frac{14}{4}+\frac{15}{4}\right)$$

$$= \frac{29}{4} \text{ కి.గ్రా} = 7\frac{1}{4} \text{ కి.గ్రా}$$

ఉదా 3 : అహ్మద్ పుట్టినరోజున కోసిన కేకులో $\frac{5}{7}$ భాగం పంచాడు. ఇంకా ఎంత భాగం కేకు మిగిలి ఉంది?

సాధన : మొత్తం కేకు $= 1$ లేదా $\frac{1}{1}$

పంచిన కేకు భాగం $= \frac{5}{7}$



మిగిలిన కేకు భాగం $= \frac{1}{1}-\frac{5}{7}$

$$= \frac{7}{7}-\frac{5}{7} = \frac{7-5}{7} = \frac{2}{7}$$

అందుచే మొత్తం కేకులో $\frac{2}{7}$ భాగం ఇంకా మిగిలి ఉంది.

అభ్యాసం - 1

1. కింది వానిని సాధించండి.

(i) $2+\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{7}{9}+\frac{1}{3}$ (iii) $1-\frac{4}{7}$

(iv) $2\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$ (v) $\frac{5}{8}+\frac{1}{6}$ (vi) $2\frac{2}{3}+3\frac{1}{2}$

2. కింది భిన్నాలను ఆరోహణ క్రమంలో ఉంచండి.

(i) $\frac{5}{8}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}$ (ii) $\frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{3}{10}$

3. కింది చదరంలో అడ్డు వరుసలు, నిలువు వరుసలు మరియు కర్ణాల వరుసలలో గల భిన్నాల మొత్తం కనుగొనండి వాటి మొత్తం సమానం అయినదో లేదో తెల్పండి.

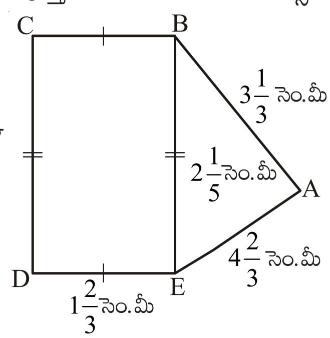
$\frac{6}{13}$	$\frac{13}{13}$	$\frac{2}{13}$
$\frac{3}{13}$	$\frac{7}{13}$	$\frac{11}{13}$
$\frac{12}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{8}{13}$

4. ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార కాగితం పొడవు $5\frac{2}{3}$ సెం.మీ మరియు వెడల్పు $3\frac{1}{5}$ సెం.మీ కలదు. దీని చుట్టుకొలతను కనుగొనండి.

5. ఒక వంటకానికి $3\frac{1}{4}$ కప్పుల పిండి అవసరం. రాధ వద్ద $1\frac{3}{8}$ కప్పుల పిండి కలదు. ఆ వంటకానికి ఇంకనూ కావల్సిన పిండి ఎంత?

6. అబ్దుల్ వార్షిక పరీక్షలకు సన్నద్ధం అవుతున్నాడు. అతడు కోర్సులో $\frac{5}{12}$ భాగం పూర్తిచేసాడు. ఇంకా చదవాల్సిన కోర్సు భాగం ఎంత?

7. ప్రక్కపటంలో (i) ΔABE (ii) దీర్ఘచతురస్రం BCDE ల యొక్క చుట్టుకొలతలు కనుగొనండి. దేని చుట్టుకొలత ఎక్కువ? ఎంత ఎక్కువ?

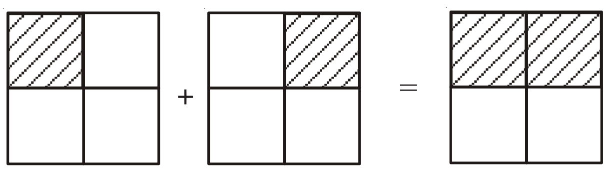


2.1 భిన్నాల గుణకారం

2.1.1 భిన్నాన్ని పూర్ణాంకం చే గుణించుట

మనం పూర్ణాంకాల గుణకారంలో ఒక సంఖ్యను ఆవర్తన సంకలనం చేయటం ద్వారా లబ్ధం కనుగొంటాం. ఉదాహరణకు 5 x 4 అనగా 5 మార్లు 4 లను కూడటం. అంటే 4కు 5 రెట్లు. దీనిని బట్టి మనం

$2\times\frac{1}{4}$ అంటే 2 మార్లు $\frac{1}{4}$ అనగా $\frac{1}{4}$ అనే భిన్నాన్ని 2 సార్లు కూడటం. దీనిని పటాల ద్వారా సూచిద్దాం. కింది పటాలలో 1వ దానిని చూడండి. షేడ్ చేసిన ప్రతి భాగం చతురస్రంలో $\frac{1}{4}$ వ వంతు. అందుచే రెండు షేడ్ చేసిన భాగాలు మొత్తం $2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}$ అగును



పటం 1

పటం 2

ఇప్పుడు $3, \frac{1}{2}$ ల లబ్ధం కనుగొందాం. దీనిని మనం $\frac{1}{2}$ యొక్క 3 రెట్లు లేదా మూడు అరభాగాలు అనవచ్చు.

అందుచే $3\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ అగును.

ఇవి చేయండి.

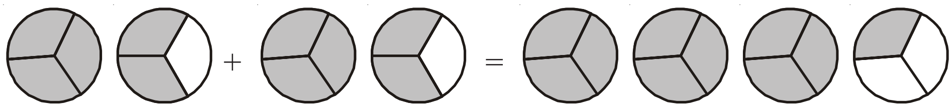
1. కనుగొనండి (i) $4\times\frac{2}{7}$ (ii) $4\times\frac{3}{5}$ (iii) $7\times\frac{1}{3}$

ఇంత వరకు మనం క్రమభిన్నాలను తీసుకొని అంటే $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{7}$ మరియు $\frac{3}{5}$ లను పూర్ణాంకంతో గుణకారం చేసాం. ఇప్పుడు కొన్ని అపక్రమభిన్నాలను తీసుకుందాం. ఉదా : $\frac{5}{3}$

ఉదాహరణకు $2\times\frac{5}{3}$ తీసుకొనిన

$$2\times\frac{5}{3}=\frac{5}{3}+\frac{5}{3}=\frac{10}{3}=3\frac{1}{3}$$

పటాలతో సూచించిన

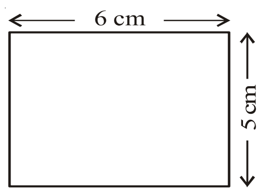


$\frac{5}{3}$ $\frac{5}{3}$ $\frac{10}{3}$ అగును

ప్రయత్నించండి

1. కనుగొనండి (i) $5\times\frac{3}{2}$ (ii) $4\times\frac{7}{5}$ (iii) $5\times\frac{3}{2}$

దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం, పొడవు × వెడల్పుకు సమానమని మనకు తెలుసు.

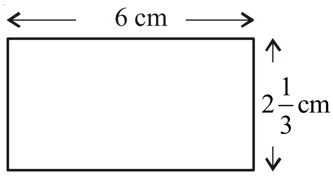


ఒక దీర్ఘచతురస్రం పొడవు 6 సెం.మీ, వెడల్పు 5 సెం.మీ అనుకొందాం. దాని వైశాల్యం ఎంత? దాని వైశాల్యం $6\times5=30$ చ.సెం.మీ. అవుతుంది కదా!

మరొక దీర్ఘచతురస్రం కొలతలు 6 సెం.మీ $2\frac{1}{3}$ సెం.మీ అయితే, దాని వైశాల్యం ఎంత?

ఇచ్చట ఒక పూర్ణాంకంను, మిశ్రమ భిన్నంచే గుణించాలి. మొదట మిశ్రమ భిన్నాన్ని, అపక్రమ భిన్నంగా మార్చి తర్వాత పూర్ణాంకంచే గుణించాలి.

అందుచే దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం $= 6\times2\frac{1}{3}$



$6\times\frac{7}{3} = 6\times\frac{7}{3} = \frac{42}{3}$ చ॥సెం.మీ = 14 చ.సెం.మీ.

మనం క్రమ, అపక్రమ భిన్నాలను పూర్ణాంకాలతో గుణించునప్పుడు భిన్నంలో గల లవంను పూర్ణాంకంతో గుణించి, దానిని లబ్దంలో లవం గానూ, భిన్నంలో హారంను లబ్దంలో హారం గానూ రాసామని గమనించవచ్చు.

ఇది చేయండి

1. కింది వానిని కనుగొనండి

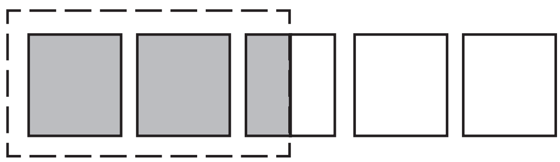
(i) $3\times2\frac{2}{7}$ (ii) $5\times2\frac{1}{3}$ (iii) $8\times4\frac{1}{7}$ (iv) $4\times1\frac{2}{9}$ (v) $5\times1\frac{1}{3}$

2. $2\times\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$ అనే లబ్ధాన్ని పటంలో చూపండి.

ఇప్పుడు $\frac{1}{2}\times5$ అంటే అర్థమేమి? నీవు ఎలా అర్థం చేసుకొంటావు?

$\frac{1}{2}\times5$ అనగా 5 లో సగం అని అర్థం

5లో సగం తీసుకొంటే అది $2\frac{1}{2}$ లేదా $\frac{5}{2}$ అగును



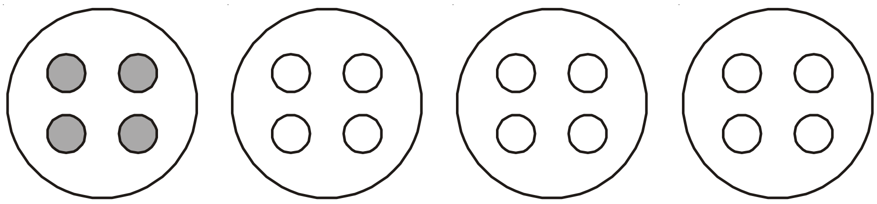
అందుచే 5లో సగం $= \frac{1}{2}\times5=\frac{5}{2}$

అదే విధంగా 3 లో సగం $= \frac{1}{2}\times3 = \frac{3}{2}$ లేదా $1\frac{1}{2}$

దీని నుండి 'లో' అనే పదం గుణకారాన్ని సూచిస్తుందని భావించవచ్చు.

అందుచే 16 లో $\frac{1}{4}$ భాగం అర్థమేమి? 16 పూర్ణాంకాలను 4 సమానభాగాలుగా చేసి దానిలో ఒక భాగం విలువ తీసుకోవడం. అది 4 అవుతుంది కావున 16 లో $\frac{1}{4}$ భాగం 4 కు సమానం

ఈ లబ్ధంను కింది పటంలో గోళీల అమరికతో గమనించవచ్చు.



16 లో $\frac{1}{4}$ భాగం = 4 లేదా $\frac{1}{4} \times 16 = \frac{16}{4} = 4$

ఇదే విధంగా మనకు 16 లో $\frac{1}{2}$ భాగం $= \frac{1}{2} \times 16 = \frac{16}{2} = 8$.

ఉదా 4 : నజియా వద్ద 20 గోళీలు ఉన్నాయి. రేష్మా వద్ద నజియా వద్ద గల గోళీలలో $\frac{1}{5}$ భాగం ఉంటే, రేష్మా వద్ద ఎన్ని గోళీలు ఉంటాయి?

సాధన : రేష్మా వద్ద గల గోళీల సంఖ్య $\frac{1}{5} \times 20 = 4$ గోళీలు

ఉదా 5 : నలుగురు సభ్యులు గల కుటుంబంలో రోజుకు 15 చపాతీలు తింటారు. తల్లి $\frac{1}{5}$ భాగం, $\frac{3}{5}$ భాగం పిల్లలు, మిగిలిన చపాతీలు తండ్రి తిన్నారు. అయిన

(i) తల్లి తిన్న చపాతీలు ఎన్ని?

(ii) పిల్లలు తిన్న చపాతీలు ఎన్ని?

(iii) తండ్రి తిన్న చపాతీలు మొత్తంలో ఎంతభాగం?

సాధన : మొత్తం చపాతీల సంఖ్య $= 15$

(i) తల్లి తిన్న చపాతీల సంఖ్య = మొత్తంలో $\frac{1}{5}$ భాగం = $\frac{1}{5} \times 15 = 3$ చపాతీలు

(ii) పిల్లలు తిన్న చపాతీల సంఖ్య = మొత్తంలో $\frac{3}{5}$ భాగం = $\frac{3}{5} \times 15 = 9$ చపాతీలు

(iii) మిగిలిన చపాతీలు $= 15 - 3 - 9 = 3$ చపాతీలు

తండ్రి తిన్న చపాతీల భాగం = $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

అభ్యాసం - 2

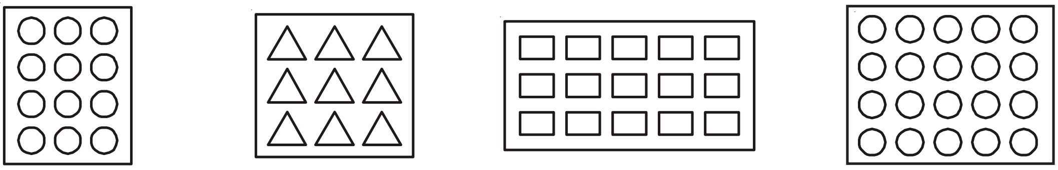
1. కింది వాటిని గుణించండి. లబ్దాన్ని మిశ్రమ భిన్నంగా మార్చి రాయండి.

(i) $\frac{3}{6}\times 10$ (ii) $\frac{1}{3}\times 4$ (iii) $\frac{6}{7}\times 2$ (iv) $\frac{2}{9}\times 5$ (v) $15\times\frac{2}{5}$

2. కింది పటాలలో ఇచ్చిన భాగాన్ని షేడ్ చేయండి.

(i) పటం 'a' లోని వృత్తాలలో $\frac{1}{2}$ భాగం (ii) పటం 'b' లోని త్రిభుజాలలో $\frac{2}{3}$ భాగం

(iii) పటం 'c' లోని దీర్ఘచతురస్రాలలో $\frac{3}{5}$ భాగం (iv) పటం 'd'లోని వృత్తాలలో $\frac{3}{4}$ భాగం



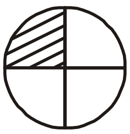
(a) (b) (c) (d)

3. కనుగొనండి. (i) 12 లో $\frac{1}{3}$ భాగం (ii) 15 లో $\frac{2}{5}$ భాగం

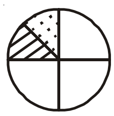
2.1.2 భిన్నాన్ని, మరొక భిన్నంతో గుణించడం

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$ అంటే అర్థమేమి? ముందు నేర్చుకున్న సమస్యలను బట్టి దీని అర్థం $\frac{1}{4}$ లో $\frac{1}{2}$ అని అర్థము.

$\frac{1}{4}$ భాగాన్ని తీసుకోండి

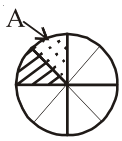


షేడ్ చేసిన భాగంలో $\frac{1}{2}$ భాగాన్ని ఎలా కనుగొంటారు? మనం $\left(\frac{1}{4}\right)$ వ వంతు గల షేడ్ చేసిన భాగాన్ని రెండు సమాన భాగాలుగా చేస్తాం. (1వ పటం) ఇందు ప్రతిభాగం $\frac{1}{4}$ లో $\frac{1}{2}$ ను తెలుపుతుంది.



పటం 1

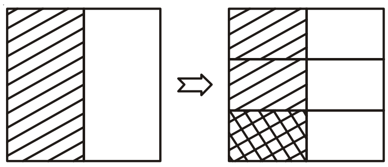
ఇందులో ఒక భాగాన్ని 'A' అనుకుందాం. ఈ భాగం మొత్తం పటంలో ఎన్నవ భాగం? మిగిలిన వృత్తభాగంలో ప్రతీ భాగాన్ని రెండేసి సమాన భాగాలు చేస్తే మొత్తం 8 భాగాలు వస్తాయి. అందులో 'A' భాగాన్ని తీసుకొని పరిశీలించండి. ఇది మొత్తంలో $\frac{1}{8}$ భాగం అవుతుంది. కావున $\frac{1}{4}$ లో $\frac{1}{2}$ అంటే $\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$ అగును.



పటం 2

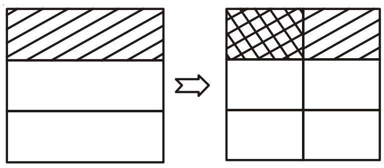
ఇప్పుడు $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$ మరియు $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$ లను కనుగొందాం.

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$ అనగా $\frac{1}{2}$ లో $\frac{1}{3}$ అనగా



$=\frac{1}{6}$ కావున $\frac{1}{3}$ లో $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$ అనగా $\frac{1}{3}$ లో $\frac{1}{2}$ అనగా



$=\frac{1}{6}$ కావున $\frac{1}{3}$ లో $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

దీనిని బట్టి $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$ అని గమనించవచ్చు.

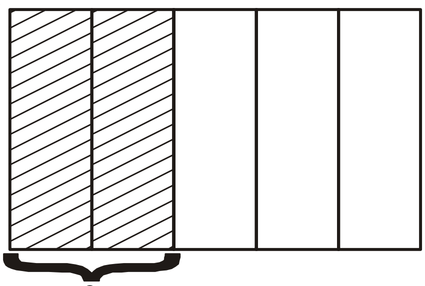
ఇవి చేయండి

1. కింది వాటిలో గడులను నింపండి

   (i) $\frac{1}{5}\times\frac{1}{7}=\frac{1\times 1}{5\times 7}=\square$ (ii) $\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\square=\square$

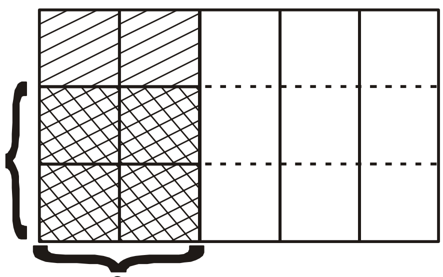
2. $\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}$ మరియు $\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}$ లను పటంనుపయోగించి కనుగొని $\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}$ అని సరిచూడండి.

మరొక ఉదాహరణ $\frac{2}{5}$ లో $\frac{2}{3}$ ఎంతో పరిశీలిద్దాం. ఇచ్చట 1వ పటంలో $\frac{2}{5}$ భాగం, 2 వ పటంలో $\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}$ భాగం షేడ్ చేయబడ్డాయి.



$\frac{2}{5}$ పటం 1

$\frac{2}{3}$



$\frac{2}{5}$ పటం 2

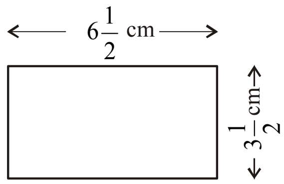
2వ పటంలో జల్లెడ షేడ్ $\frac{2}{5}$ లో $\frac{2}{3}$ అంటే $\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$

$\frac{2}{5}$ లో $\frac{2}{3}$ విలువ కనుగొనడానికి $\frac{2}{5}$ ను మూడు సమానభాగాలు చేసి అందులో రెండు భాగాలు తీసుకున్నాం. ఇది మొత్తం 15 భాగాలలో 4 భాగాలకు సమానం అయింది. అందుచే $\frac{2}{5}$ లో $\frac{2}{3}$ అనగా $\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$ అయింది.

దీనిని బట్టి రెండు భిన్నాల లబ్ధం = $\dfrac{\text{లవాల లబ్ధం}}{\text{హారాల లబ్ధం}}$

ఇప్పుడు ఒక దీర్ఘచతురస్రం యొక్క పొడవు $6\frac{1}{2}$ సెం.మీ., వెడల్పు $3\frac{1}{2}$ సెం.మీ అయినపుడు దాని వైశాల్యం కనుగొందాం.

దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం $= 6\frac{1}{2}\times 3\frac{1}{2} = \frac{13}{2}\times\frac{7}{2} = \frac{91}{4} = 22\frac{3}{4}$ చ॥ సెం.మీ.



ఉదా 6 : నరేంద్ర ఒక నవలలో $\frac{1}{4}$ భాగాన్ని 1 గంటలో చదవగలడు. అయిన అతడు $2\frac{1}{2}$ గంటలలో చదవగలిగే భాగం ఎంత?

సాధన : నరేంద్ర 1 గంటలో నవలలో చదవగలిగే భాగం $= \frac{1}{4}$

$2\frac{1}{2}$ గంటలలో చదవగలిగే భాగం $= 2\frac{1}{2}\times\frac{1}{4} = \frac{5}{2}\times\frac{1}{4} = \frac{5}{8}$

కావున నరేంద్ర $2\frac{1}{2}$ గంటలలో $\frac{5}{8}$ భాగాన్ని చదవగలడు.

ఉదా 7 : ఒక ఈత కొలనులో అరగంటకు $\frac{3}{10}$ భాగం నీటితో నింపవచ్చు. అయిన $1\frac{1}{2}$ గంటలలో ఎంత భాగం నింపవచ్చు? (సూచన : అరగంట అంటే ఒకగంటలో సగం = $\frac{1}{2}$)

సాధన : అరగంటలో ఈత కొలనులో నిండే భాగం= $\frac{3}{10}$.

అంటే $1\frac{1}{2}$ గంటలలో 3 అరగంటలు ఉంటాయి కావున

$1\frac{1}{2}$ గంటలలో ఈత కొలనులో నిండే భాగం $= 3\times\frac{3}{10} = \frac{9}{10}$

కావున $\frac{9}{10}$ భాగం ఈతకొలను $1\frac{1}{2}$ గంటలలో నిండుతుంది.

ప్రయత్నించండి

1 కంటె పెద్దవైన రెండు పూర్ణాంకాలు గుణించునపుడు, వాటి లబ్ధం, ఆ రెండు పూర్ణాంకాల కన్నా ఎక్కువ అని మనకు తెలుసు. ఉదాహరణకు $3 \times 4 = 12$ కావున $12 > 4$ మరియు $12 > 3$. ఇదే విధంగా రెండు భిన్నాలను గుణించగా వచ్చే లబ్ధం ఏ విధంగా ఉంటుంది?

ఉదా : $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$	$\frac{8}{15} < \frac{2}{3}, \frac{8}{15} < \frac{4}{5}$	లబ్ధం, భిన్నాల కన్నా తక్కువ
$\frac{1}{5} \times \frac{2}{7} = ------$		
$\frac{3}{5} \times \frac{\square}{8} = \frac{21}{40}$		
$\frac{2}{\square} \times \frac{4}{9} = \frac{8}{45}$		

అభ్యాసం - 3

1. కింది లబ్ధాలను కనుగొనండి

(i) $\frac{5}{6} \times \frac{7}{11}$ (ii) $6 \times \frac{1}{5}$ (iii) $2\frac{1}{3} \times 3\frac{1}{5}$

2. గుణించండి. లబ్ధాన్ని సూక్ష్మరూపంలో రాయండి.

(i) $\frac{2}{3} \times 5\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{2}{7} \times \frac{1}{3}$ (iii) $\frac{9}{3} \times \frac{5}{5}$

3. కింది వానిలో ఏది పెద్దది?

(i) $\frac{4}{7}$ లో $\frac{2}{5}$ లేదా $\frac{1}{2}$ లో $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{4}{7}$ లో $\frac{1}{2}$ లేదా $\frac{3}{7}$ లో $\frac{2}{3}$

4. రెహెనా ప్రతిరోజూ దుస్తుల అల్లిక కొరకు $2\frac{1}{2}$ గంటలు సమయం వెచ్చిస్తుంది. ఇలా ఆమెకు ఒక బట్ట అల్లడానికి 7 రోజులు పట్టింది. ఆమె దీని కొరకు మొత్తం ఎన్ని గంటల సమయం వెచ్చించింది?

5. ఒక లారీ 8 కి.మీ దూరం ప్రయాణించడానికి 1 లీటరు పెట్రోలు అవసరం. అది $10\frac{2}{3}$ లీటర్ల పెట్రోలు తో ఎంత దూరం ప్రయాణించగలదు?

6. రాజా 1 సెకనులో $1\frac{1}{2}$ మీటర్లు దూరం నడువగలడు. అయిన 15 నిమిషాలలో అతను నడిచే దూరం ఎంత?

7. క్రింద ఖాళీగదులను $\square$ పూరించండి.

(i) $\frac{2}{3}\times\square = \frac{20}{21}$. (ii) $\frac{5}{7}\times\frac{\square}{5} = \frac{3}{\square}$

2.2 భిన్నాల భాగహారం

నీ వద్ద 15 మీటర్ల బట్ట ఉన్నదనుకో. దానిని $1\frac{1}{2}$ మీటర్ల చొప్పున సమానభాగాలు చేయాలి. నీకు ఎన్ని ముక్కలు వస్తాయి? ఇచ్చట మనం 15 మీటర్ల బట్ట నుండి $1\frac{1}{2}$ మీటర్ల చొప్పున తగ్గిస్తూ చివరకు బట్ట మిగలనంత వరకు పోతే ఎన్నిసార్లు తగ్గిస్తూ పోతామే ఆలోచించండి.

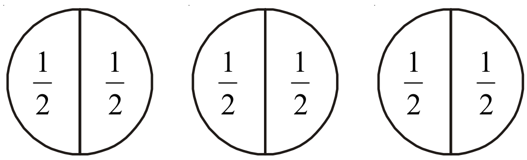
మరొక ఉదాహరణ పరిశీలిద్దాం : ఒక కాగితం పొడవు $\frac{21}{2}$ సెం.మీ ఉంది. దానిని $\frac{3}{2}$ సెం.మీ చొప్పున ముక్కలుగా కత్తిరిస్తే మనకు ఎన్ని ముక్కలు వస్తాయి? దీనికి మనం ప్రతిసారి $\frac{3}{2}$ సెం.మీ భాగాలను కత్తిరిస్తాం. లేదా $\frac{21}{2}$ ను $\frac{3}{2}$ చే భాగిస్తాం. అంటే $\frac{21}{2}\div\frac{3}{2}$ అన్నమాట.

పూర్ణాంకాల భాగహారం గుర్తుకు తెచ్చుకో. ఈ పద్ధతిని భిన్నాల గుణకారానికి వర్తింపచేయి. ఉదాహరణకు $15\div3$, అంటే 15 లో ఎన్ని మూడులు ఉన్నవో చెప్పాలి అనుకుంటే జవాబు 5 వస్తుంది. ఇదే విధంగా 18 లో ఎన్ని రెండ్లు ఉన్నాయో చెప్పాలంటే 18 ను 2 చే భాగించాలి. అంటే $18\div2$. ఇది 9 కి సమానం. ఇప్పుడు మనం పూర్ణాంకాలలో చేసిన భాగహారాలను బట్టి, పూర్ణాంకాన్ని భిన్నంతోనూ, భిన్నాన్ని మరొక భిన్నంతోనూ భాగించడం తెలుసుకొందాం.

2.2.1 పూర్ణాంకంను భిన్నంతో భాగించడం

$3\div\frac{1}{2}$ ను కనుగొందాం.

3 లో ఎన్ని $\left(\frac{1}{2}\right)$ (సగాలు) ఉన్నాయో కనుగొనాలని కిరణ్ అన్నాడు. దీనికి కింది విధంగా పటం గీద్దాం.

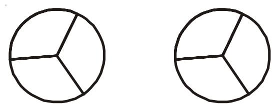


పై పటాలను బట్టి 3లో 6 సగాలు ($\frac{1}{2}$) ఉన్నాయని తెలుస్తున్నది.

అందుచే మనం $3 \div \frac{1}{2} = 6$ అని చెప్పవచ్చు.

$2 \div \frac{1}{3}$ గురించి ఆలోచించు

రెండులో ఎన్ని మూడవ భాగాలు $\left(\frac{1}{3}\right)$ ఉన్నాయో కనుగొనడం అని అర్థం. మరే విధంగానైనా కనుక్కోవచ్చా?



ప్రక్క పటాలు పరిశీలిస్తే రెండు పటాలలో 6 మూడవ భాగాలు $\left(\frac{1}{3}\right)$ ఉన్నాయి.

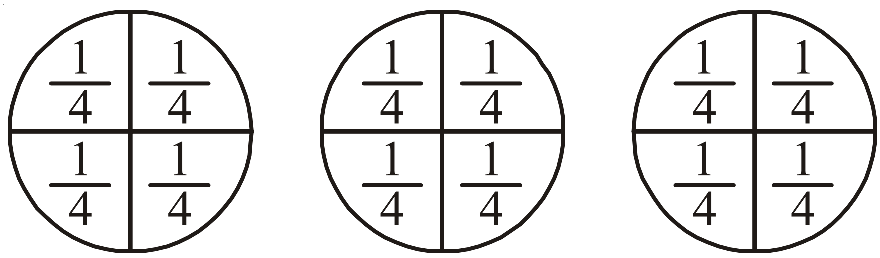
అంటే $2 \div \frac{1}{3} = 6$ అయింది.

ఇవి చేయండి

(i) $2 \div \frac{1}{4}$ (ii) $7 \div \frac{1}{2}$ (iii) $3 \div \frac{1}{5}$ కనుగొనండి.

2.2.1 (అ) భిన్నానికి వ్యుత్క్రమం (గుణకార విలోమం)

$3 \div \frac{1}{4}$ తీసుకొండి. దీనిని భాగించడం అంటే మూడులో ఎన్ని $\frac{1}{4}$ భాగాలు ఉన్నాయో తెలుసుకోవడం.



3 లో $\frac{1}{4}$ లు 12 ఉన్నాయని చెప్పవచ్చు లేదా $3 \div \frac{1}{4} = 12$ అగును

అనగా $3 \div \frac{1}{4} = 3 \times \frac{4}{1} = 12$ అని గమనించవచ్చు.

దీని నుండి మనం $3 \div \frac{1}{4} = 3 \times \frac{4}{1}$ అని తెలుస్తుంది.

అదే విధంగా $2 \div \frac{1}{3}$ పరిశీలించండి

$2 \div \frac{1}{3} = 6$ అగును ఎలా అంటే $2 \div \frac{1}{3} = 2 \times \frac{3}{1} = 6$

అలాగే $4 \div \frac{1}{4} = 16$ ఎందుకంటే $4 \times \frac{4}{1} = 16$.

ఇచ్చట $\frac{3}{1}$ అనేది $\frac{1}{3}$ అనే భిన్నంలో లవహారాలను తారుమారు చేయగా ఏర్పడింది. అంటే $\frac{1}{3}$ యొక్క వ్యుత్క్రమం $\frac{3}{1}$

అదేవిధంగా $\frac{4}{1}$ అనేది $\frac{1}{4}$ యొక్క వ్యుత్క్రమం అగును.

కింది లబ్ధాలను పరిశీలించి, ఖాళీలను నింపండి.

$7 \times \frac{1}{7} = 1$ $\qquad$ $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{2 \times 3}{3 \times 2} = \frac{6}{6} = 1$

$\frac{1}{9} \times 9 = \text{............}$ $\qquad$ $\frac{2}{7} \times \text{............} = 1$

$\frac{5}{4} \times \frac{4}{5} = \text{............}$ $\qquad$ $\text{.........} \times \frac{5}{9} = 1$

ఇటువంటి మరొక ఐదు జతలను తీసుకొని గుణించండి

ఏ రెండు శూన్యేతర సంఖ్యల లబ్ధం 1 అగునో, వాటిని ఒకదాని కొకటి వ్యుత్క్రమాలు (గుణకార విలోమాలు) అంటారు.

అందుచే $\frac{4}{7}$ యొక్క వ్యుత్క్రమం $\frac{7}{4}$ అలాగే $\frac{7}{4}$ యొక్క వ్యుత్క్రమం $\frac{4}{7}$ అగును. $\frac{5}{9}$ మరియు $\frac{2}{5}$ భిన్నాల వ్యుత్క్రమాలు రాయండి.

ప్రయత్నించండి

1. ఒక క్రమభిన్నం యొక్క వ్యుత్క్రమం మరొక క్రమభిన్నం అగునా?
2. ఒక అపక్రమ భిన్నం యొక్క వ్యుత్క్రమం మరొక అపక్రమభిన్నం అగునా?

అందువలన

$1 \div \frac{1}{2} = 1 \times \frac{1}{2}$ యొక్క వ్యుత్క్రమం $= 1 \times \frac{2}{1}$

$3 \div \frac{1}{4} = 3 \times \frac{1}{4}$ యొక్క వ్యుత్క్రమం $= 3 \times \frac{4}{1}$

$3 \div \frac{1}{2} =$ .... = ...

రాజు వ్యుత్క్రమం పద్ధతి అనుసరించి ఒక మిశ్రమ భిన్నం $1\frac{1}{2}$ వ్యుత్క్రమం $1\frac{2}{1}$ అన్నాడు. అతను చెప్పినది సత్యమా? సరిచూడండి.

అలాగే $2 \div \frac{3}{4} = 2 \times \frac{3}{4}$ యొక్క వ్యుత్క్రమం $= 2 \times \frac{4}{3}$

$5 \div \frac{2}{4} = 5 \times$ .... = $5 \times$......................

ఈ విధంగా ఒక పూర్ణాంకాన్ని ఒక భిన్నంచే భాగించాలంటే, ఆ భిన్నం యొక్క వ్యుత్క్రమం చేత పూర్ణాంకాన్ని గుణించాలని భావించాలి.

ఇవి చేయండి

1. కనుగొనండి (i) $9 \div \frac{2}{5}$ (ii) $3 \div \frac{4}{7}$ (iii) $2 \div \frac{8}{9}$

ఒక పూర్ణాంకాన్ని, మిశ్రమభిన్నంచే భాగించునపుడు, మిశ్రమభిన్నాన్ని మొదట అపక్రమ భిన్నంగా మార్చి సాధించాలి.

ఉదా : $4 \div 3\frac{2}{5} = 4 \div \frac{17}{5} = 4 \times \frac{5}{17} = \frac{20}{17}$ అలాగే $11 \div 3\frac{1}{3} = 11 \div \frac{10}{3} = ?$ ను కనుగొనండి.

ఇవి చేయండి.

1. కనుగొనండి (i) $7 \div 5\frac{1}{3}$ (ii) $5 \div 2\frac{4}{7}$

2.2.2 ఒక భిన్నాన్ని ఒక పూర్ణాంకం చే భాగించడం

$\frac{3}{4}\div 3$ ఎంతకు సమానం?

ముందు పరిశీలించిన సమస్యలను బట్టి మనకు $\frac{3}{4}\div 3=\frac{3}{4}\div\frac{3}{1}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

అందుచే $\frac{2}{3}\div 5=\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}=?$ అలాగే $\frac{5}{7}\div 6,\ \ \frac{2}{7}\div 8$ ఎంత?

మిశ్రమ భిన్నాలను పూర్ణాంకాలచే భాగించునపుడు, మిశ్రమభిన్నాలను మొదట అపక్రమ భిన్నాలుగా మార్చి, సాధన చేయాలి.

ఉదాహరణకు $2\frac{1}{3}\div 5=\frac{7}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{7}{15}$ అలాగే $4\frac{2}{5}\div 3=$ .... మరియు $2\frac{3}{5}\div 2=$ ....

2.2.3 ఒక భిన్నాన్ని మరొక భిన్నంచే భాగించడం

మనం $\frac{1}{4}\div\frac{5}{6}$ కనుగొందాం

$\frac{1}{4}\div\frac{5}{6}=\frac{1}{4}\times\frac{6}{5}$ ($\frac{5}{6}$ యొక్క వ్యుత్క్రమం) $=\frac{1}{4}\times\frac{6}{5}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$

ఇదే విధంగా $\frac{8}{5}\div\frac{2}{3}=\frac{8}{5}\times\frac{3}{2}$ ($\frac{2}{3}$ యొక్క వ్యుత్క్రమం) = ? మరియు $\frac{1}{2}\div\frac{3}{4}=?$

ఇవి చేయండి

కనుగొనండి. (i) $\frac{3}{5}\div\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}\div\frac{3}{5}$ (iii) $2\frac{1}{2}\div\frac{3}{5}$ (iv) $5\frac{1}{6}\div\frac{9}{2}$

ఉదా 8 : ఒక ఖాళీ ఈతకొలను యొక్క సామర్థ్యంలో $\frac{9}{10}$ భాగం నింపబడాలి. దానిలో $\frac{3}{10}$ భాగం నింపడానికి అరగంట పడితే, $\frac{9}{10}$ భాగం నింపడానికి ఎంతకాలం పడుతుంది?

సాధన: మనం $\frac{9}{10}$ భాగంలో $\frac{3}{10}$ భాగాలు ఎన్ని వున్నాయో కనుగొనాలి.

ఈ భాగహార సమస్య సాధిస్తే $\frac{9}{10}\div\frac{3}{10}=\frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{10}_{1}}\times\frac{\cancel{10}^{1}}{\cancel{3}_{1}}=3$ అగును.

కావున ఈతకొలను లో $\frac{9}{10}$ భాగం నింపడానికి 3 అర్ధ గంటలు అంటే $1\frac{1}{2}$ గంటల కాలం పడుతుంది.

అభ్యాసం - 4

1. కింది భిన్నాలకు వ్యుత్క్రమాలు రాయండి.

(i) $\frac{5}{8}$ (ii) $\frac{8}{7}$ (iii) $\frac{13}{7}$ (iv) $\frac{3}{4}$

2. కనుగొనండి.

(i) $18 \div \frac{3}{4}$ (ii) $8 \div \frac{7}{3}$ (iii) $3 \div 2\frac{1}{3}$ (iv) $5 \div 3\frac{4}{7}$

3. కనుగొనండి.

(i) $\frac{2}{5} \div 3$ (ii) $\frac{7}{8} \div 5$ (iii) $\frac{4}{9} \div \frac{4}{5}$

4. దీపక్ ఒక ఇంటిలో $\frac{2}{5}$ భాగం ఒక రోజులో రంగు వేయగలడు. ఇదే వేగంతో పనిచేస్తే ఆ ఇంటికి పూర్తిగా రంగు వేయుటకు ఎన్ని రోజులు పడుతుంది?

2.3 దశాంశ సంఖ్యలు లేదా దశాంశ భిన్నాలు

దశాంశ సంఖ్యల గురించి, వాటి సంకలన, వ్యవకలనాల గురించి మీరు 6వ తరగతిలో నేర్చుకున్నారు. మనం ఒకసారి వాటిని పునశ్చరణ చేసుకుందాం.

12714 అనే సంఖ్య విస్తరణ రూపం రాద్దాం.

$12714 = 1 \times 10000 + 2 \times 1000 + 7 \times ...... + 1 \times ...... + 4 \times 1$

మరి 12714.2 యొక్క విస్తరణ రూపం ఏది?

స్థానవిలువల పట్టికలో కుడి నుండి ఎడమ వైపుకు పోయిన కొలదీ, స్థాన విలువ 10 రెట్లు చొప్పున పెరుగుతుందని గమనించారు.

← × 10 | 10 వేలు = 10,000 | ← × 10 | 10 వందలు = 1,000 | ← × 10 | 10 పదులు = 100 | ← × 10 | 10 ఒకట్లు = 10 | ← × 10 | ఒకట్లు

మనం ఎడమ వైపు నుండి కుడివైపునకు పోవునపుడు ఏమి జరుగుతుంది? ప్రతి స్థానవిలువ దాని ఎడమ వైపున కల ఎగువ స్థానంలో 10 వ భాగం అవుతుంది అంటే ప్రతిస్థానం విలువ దాని ముందు స్థానాన్ని 10చే భాగిస్తే వస్తుంది. కదా

ఇదే విధంగా యూనిట్ (ఒకట్లు) స్థానాన్ని 10 చే భాగిస్తే ఏమి వస్తుంది. $1 \div 10 = \frac{1}{10} = 0.1$ అని జ్ఞప్తికి తెచ్చుకో.

ఒకట్లు | ÷ 10 | పదో వంతు లేదా 0.1 | ÷ 10 | వందో వంతు $\frac{1}{100}$ లేదా 0.01 | ÷ 10 → | వెయ్యో వంతు $\frac{1}{1000}$ లేదా 0.001 | ÷ 10

కావున 12714.2 యొక్క విస్తరణ రూపం

$$12714.2 = 1 \times 10000 + 2 \times 1000 + 7 \times ......+ 1 \times ...... + 4 \times 1 + 2 \times \frac{1}{10}$$

3.42 అనే సంఖ్యలో అన్ని అంకెల స్థానవిలువలు కనుగొందాం. ఇచ్చట దశాంశ బిందువు (.) అనేది ఆ సంఖ్యను పూర్ణాంక భాగం మరియు దశాంశ భాగాలుగా విభజిస్తుంది అని గమనించి ఉంటారు. దశాంశ బిందువుకు కుడివైపున గల సంఖ్యా భాగాన్ని 'దశాంశ భాగం' అంటారు. అదే విధంగా దశాంశ బిందువుకు ఎడమ వైపుగల సంఖ్యను "పూర్ణాంక భాగం" అంటారు.

3.42 లోని అంకెల స్థాన విలువలు.

	ఒకట్ల స్థానంలో 3 కలదు	దశాంశ భాగంలో దశాంశ బిందువుకు వెంటనే కుడి వైపున 4 కలదు	దశాంశ భాగంలో దశాంశ బిందువుకు రెండు స్థానాలు కుడి వైపున 2 కలదు
స్థానవిలువ	$3 \times 1 = 3$	$4 \times \frac{1}{10} = \frac{4}{10}$ లేదా 0.4	$2 \times \frac{1}{100} = \frac{2}{100}$ లేదా 0.02

ప్రయత్నించండి

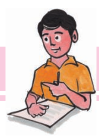
1. కింది పట్టిక పరిశీలించి, ఖాళీలను నింపండి.

వందలు (100)	పదులు (10)	ఒకట్లు (1)	పదోవంతు $\left(\frac{1}{10}\right)$	వందోవంతు $\left(\frac{1}{100}\right)$	వెయ్యో వంతు $\left(\frac{1}{1000}\right)$	సంఖ్య
5	4	7	8	2	9	547.829
0	7	2	1	7	7	______
3	2	__	__	5	4	327.154
6	__	4	__	2	__	614.326
2	__	6	5	__	2	236.512

2. కింది సంఖ్యలను విస్తరణ రూపంలో రాయండి

(i) 30.807 (ii) 968.038 (iii) 8370.705

మనం ద్రవ్యం, పొడవు, బరువు మొదలగు వాటిని తక్కువ లేదా ఎక్కువ యూనిట్లులోనికి మార్చునపుడు దశాంశాలు వాడుతాం. ఉదాహరణకు 5 పైసలు = ₹ $\frac{5}{100}$, 220 గ్రా. = $\frac{220}{1000}$ కి.గ్రా, 5 సెం.మీ = $\frac{5}{100}$ మీ



ఇవి చేయండి.

1. కనుగొనండి.

(i) 50 పైసలు = ₹ _____ (ii) 22 గ్రా॥ = ________ కి.గ్రా (iii) 80 సెం.మీ = మీ॥

2.3.1 దశాంశ భిన్నాలను పోల్చడం.

ఎవరి వద్ద ఎక్కువ డబ్బు ఉన్నదో చూద్దాం.

అభిషేక్ మరియు లాస్యలు ₹ 375.50 మరియు ₹375.75 వారి పొదుపు పెట్టె (కిడ్డీ బ్యాంకు) లో దాచుకున్నారు. ఎవరి వద్ద ఎక్కువ డబ్బు ఉన్నదో తెలుసుకోగలవా? ముందుగా మనం దశాంశ బిందువుకు ఎడమ వైపున గల పూర్ణాంక భాగాన్ని పరిశీలిస్తాం. ఇద్దరి వద్దా ₹ 375 ఉన్నది కావున, దశాంశ బిందువుకు కుడివైపున గల దశాంశ స్థానాలలో మొదట పదవ వంతును చూద్దాం. అభిషేక్ వద్ద గల డబ్బులో పదవ వంతు స్థానంలో 7, లాస్య వద్ద గల పదవ వంతు స్థానంలో 5 కలవు. 7 పదవ వంతులు $\frac{7}{10}$ > 5 పదవ వంతులు $\frac{5}{10}$ కావున అభిషేక్ పొదుపు చేసిన డబ్బు లాస్య పొదుపు చేసిన డబ్బు కన్నా ఎక్కువ. అంటే 375.75 > 375.50.

కింది వానిలో ఏది పెద్దదో చెప్పండి.

(i) 37.65 మరియు 37.60 (ii) 1.775 మరియు 19.780 (iii) 364.10 మరియు 363.10

2.3.2 మనం దశాంశ సంఖ్యలను కూడడం, తీసివేయడం నేర్చుకున్నాం. కొన్నిసమస్యలు సాధించి చూద్దాం.

(i) 221.85 + 37.10

```
  221.85
 +37.10
 ------
  258.95
```

(ii) 39.70 - 6.85

```
  39.70
 - 06.85
 -------
  32.85
```

దశాంశ సంఖ్యల సంకలనం లేదా వ్యవకలనంలో ఒకే స్థాన విలువలు కలిగిన అంకెలను కూడాలి లేదా తీసివేయాలి. అంటే సంఖ్యలను ఒకదాని క్రింద ఒకటి వ్రాయునప్పుడు దశాంశ బిందువులు కూడా ఖచ్చితంగా ఒకదాని క్రింద మరొకటి వచ్చునట్లు వ్రాయాలి. దశాంశ స్థానంలోని స్థానాలు కుడివైపున 'సున్నలు' చేర్చడం ద్వారా సమానం చేయాలి.

ఇవి చేయండి.

కనుగొనండి. (i) 0.25 + 5.30. (ii) 29.75 - 25.97.

ఉదా 9 : ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజంలో రెండు సమాన భుజాల పొడవులు 3.5 సెం.మీ మరియు మూడవ భుజం 2.5 సెం.మీ అయిన త్రిభుజ చుట్టుకొలత ఎంత?

సాధన : సమద్విబాహు త్రిభుజ భుజాలు వరుసగా 3.5 సెం.మీ, 3.5 సెం.మీ మరియు 2.5 సెం.మీ అగును.
కావున, త్రిభుజ చుట్టుకొలత = 3.5 సెం.మీ + 3.5 సెం.మీ + 2.5 సెం.మీ = 9.5 సెం.మీ

అభ్యాసం - 5

1. కింది వానిలో ఏది పెద్దది?
   (i) 0.7 లేదా 0.07 (ii) 7 లేదా 8.5
   (iii) 1.47 లేదా 1.51 (iv) 6 లేదా 0.66
2. కింది వానిని రూపాయిలలో దశాంశ సంఖ్యతో సూచించండి
   (i) 9 పైసలు (ii) 77 రూపాయల 7 పైసలు (iii) 235 పైసలు
3. (i) 10 సెం.మీలను మీటర్లలోనూ, కిలోమీటర్లలో వ్యక్తపరచండి.
   (ii) 45 మి.మీ లను సెం.మీ, మీ, కి.మీ లలో వ్యక్తపరచండి.

1 మీ = 100 సెం.మీ.
1 కి.మీ. = 1000 మీ.
1 సెం.మీ. = 10 మి.మీ.
1 కి.గ్రా. = 1000 గ్రా.

4. కింది వానిని కిలోగ్రాములలో వ్యక్తపర్చండి

(i) 190 గ్రా॥ (ii) 247 గ్రా॥ (iii) 44 కి.గ్రా 80 గ్రా॥

5. కింది దశాంశ సంఖ్యలను విస్తరించి రాయండి

(i) 55.5 (ii) 5.55 (iii) 303.03

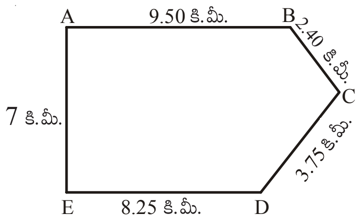
(iv) 30.303 (v) 1234.56

6. కింది దశాంశ సంఖ్యలలో 3 యొక్క స్థానవిలువలు రాయండి.

(i) 3.46 (ii) 32.46 (iii) 7.43

(iv) 90.30 (v) 794.037

7. అరుణ, రాధ వారి ప్రయాణాన్ని A మరియు E అనే స్థానాల నుండి ప్రారంభించారు. అరుణ A నుండి B కు అచ్చట నుండి C కు చేరింది రాధ E నుండి D కు అచ్చట నుండి C కు చేరింది. ఎవరు ఎక్కువ దూరం ప్రయాణించారు? ఎంత ఎక్కువ ప్రయాణించారు?



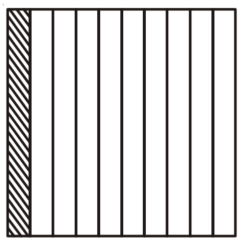
8. ఉపేంద్ర కూరగాయలు కొనడానికి బజారుకు వెళ్లాడు. అతడు 2 కి.గ్రా 250 గ్రా॥ టమాటాలు, 2 కి.గ్రా500గ్రా ఆలుగడ్డలు, 750 గ్రా॥ బెండకాయలు మరియు 125 గ్రా॥ పచ్చిమిర్చి కొన్నాడు. అయిన ఉపేంద్ర ఇంటికి తీసుకొని పోయే కూరగాయల మొత్తం బరువు ఎంత?

2.4. దశాంశ సంఖ్యల గుణకారం.

7వ తరగతి చదువుతున్న రాజేంద్ర తల్లితో కలసి కూరగాయలు కొనడానికి బజారుకు వెళ్లాడు. వారు 1 కి.గ్రా ₹ 8.50 చొప్పున 2.5 కి.గ్రా॥ల ఆలుగడ్డలను కొన్నారు. వారు ఎంత సొమ్ము చెల్లించాలి?

ఇటువంటి దశాంశ సంఖ్యలతో కూడిన సమస్యలు మనకు నిత్యజీవితంలో అనేకం వస్తుంటాయి. ఈ సందర్భంలో మనం రెండు దశాంశ సంఖ్యల గుణకారం ఏ విధంగా చేయాలో తెలుసుకుందాం.

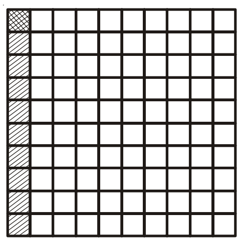
0.1×0.1 గుణిద్దాం



పటం 1

0.1 అంటే 1లో 10 వ వంతు దీనిని మనం పటంలో $\frac{1}{10}$ భిన్నంగా చూపవచ్చు.

కావున $0.1 \times 0.1 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$ అనగా $\frac{1}{10}$ లో $\frac{1}{10}$. అందుచే ఇక్కడ మనం $\frac{1}{10}$ లో 10వ భాగం కనుగొంటాం. కావున మనం $\frac{1}{10}$ భాగాన్ని 10 సమానభాగాలు చేసి అందులో ఒక భాగం విలువను తీసుకుందాం. ఇది 2వ పటంలో ఒక చదరాన్ని తెలుపుతుంది. 2వ పటంలో ఎన్ని చదరాలో లెక్కించు మొత్తం 100 చదరాలుఉన్నాయి కదూ! అందులో ఒక చదరం 100 చదరాలలో ఒకదాన్ని తెలుపుతుంది. అంటే $\frac{1}{100}$ అందువలన మనం



పటం 1

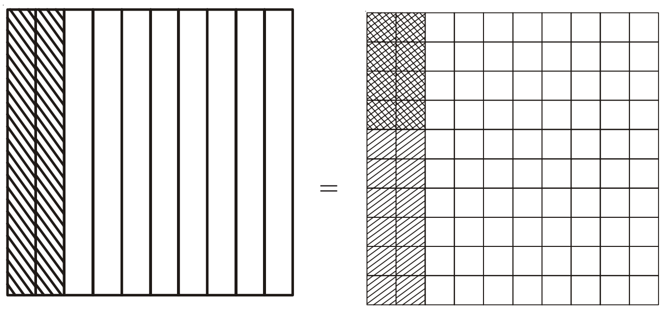
$0.1 \times 0.1 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100} = 0.01$ అని చెప్పవచ్చు.

0.4×0.2 విలువ ఎంతో చూద్దాం.

$0.4 \times 0.2 = \frac{4}{10} \times \frac{2}{10}$ లేదా $\frac{2}{10}$ లో $\frac{4}{10}$ అని అర్థం

దీనిని పటంలో పరిశీలిస్తే

$\frac{2}{10}$ లో $\frac{4}{10}$ వ భాగం



$= \frac{8}{100}$

$\frac{2}{10}$ భాగం $\frac{2}{10}$ భాగంలో $\frac{4}{10}$ వ భాగం

2వ పటంలో 100 చదరాలలో 8 చదరాలు రెండేసి సార్లు షేడ్ చేయబడి ఉన్నాయి. దీనిని 0.08 అని సూచించవచ్చు మనం 0.1×0.1 మరియు 0.4×0.2, సంఖ్యలు గుణించునప్పుడు దశాంశ బిందువులుని తొలగించి పూర్ణాంకాల వలే గుణిస్తే అంటే 0.1×0.1, అనగా 01×01 లేదా 1×1. అదే విధంగా 0.4×0.2 అనగా 04×02 లేదా 4×2 అంటే వరుసగా 1 మరియు 8 లబ్ధాలుగా వచ్చాయి.

ఇప్పుడు లబ్ధంలో దశాంశ బిందువును ఉంచడానికి గుణకారంలో ఇచ్చిన సంఖ్యలలో దశాంశ స్థానాలలో ఎన్ని అంకెలు ఉన్నాయో చూడాలి. మొత్తం దశాంశ స్థానాలు 2 ఉన్నాయి. అందుచే ఈ సంఖ్యల లబ్ధంలో దశాంశ బిందువును రెండు స్థానాలు కుడి నుండి ఎడమకు లెక్కించి పెట్టాం.

కావున $0.1 \times 0.1 = .01$

$0.4 \times 0.2 = .08$ అయినది

> ఒక దశాంశ సంఖ్యలో పూర్ణసంఖ్య భాగము లోపించిన సాధారణంగా దశాంశమునకు ఎడమ వైపున 'సున్న'ను ఉంచుతాం.

ఒకవేళ మనం 0.5×0.05 గుణిస్తే మనం లబ్ధంలో దశాంశ భాగంలో మొత్తం మూడు స్థానాలు కుడి నుండి ఎడమకు లెక్కించి దశాంశ బిందువును ఉంచాలి. అంటే $0.5 \times 0.05 = 0.025$.

ఇప్పుడు 1.2×2.5 కనుగొందాం

12 ను25 చే గుణించండి. మనకు 300 వస్తుంది. 1.2 మరియు 2.5, లలో దశాంశ బిందువుకు కుడివైపు 1 స్థానం చొప్పున ఉన్నది. అందుచే $1 + 1 = 2$ స్థానాలు వచ్చాయి. ఇప్పుడు లబ్ధం 300 లో కుడివైపు నుండి (అంటే '0' నుండి రెండు స్థానాలు ఎడమ వైపుకు వస్తే మనకు 3.00 అగును అంటే 3 కావున $1.2 \times 2.5 = 3$ అగును

ఇదే విధంగా 2.5 మరియు 1.25 గుణించునపుడు మొదట 25 ను 125 చే గుణిస్తాం. లబ్ధంలో దశాంశ బిందువును పై ఉదాహరణల ప్రకారం పెడతాం. దశాంశ స్థానాల సంఖ్య $1 + 2 = 3$ (ఎలా?) కావున $2.5 \times 1.25 = 3.125$ అగును.

ఇవి చేయండి.

1. కనుగొనండి. (i) 1.7×3 (ii) 2.0×1.5 (iii) 2.3×4.35
2. పై సమస్యలోని (1) లబ్ధాలను అవరోహణ క్రమంలో రాయండి.

ఉదా 10 : ఒక దీర్ఘచతురస్రం పొడవు 7.1 సెం.మీ, వెడల్పు 2.5 సెం.మీ అయిన వైశాల్యం ఎంత?

సాధన : దీర్ఘచతురస్ర పొడవు = 7.1 సెం.మీ

వెడల్పు = 2.5 సెం.మీ

అందువలన దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం $= 7.1 \times 2.5 = 17.75$ చ॥సెం.మీ

2.4.1 దశాంశ సంఖ్యను 10, 100, 1000 .... మొదలగు సంఖ్యలతో గుణించుట

$3.2 = \frac{32}{10}$ అని, $2.35 = \frac{235}{100}$ అని రేష్మ తెలుసుకుంది. దీని నుండి దశాంశ బిందువు యొక్క స్థానం, దశాంశ భిన్నంలో గల హారాలు అయిన 10,100,1000 లను బట్టి మారుతుందని గమనించింది.

అదే విధంగా 10, 100, 1000 .....మొదలగు సంఖ్యలతో దశాంశ సంఖ్యను గుణించినపుడు లబ్ధంలో దశాంశ బిందువు అమరిక పరిశీలిద్దాం.

కింది పట్టిక పరిశీలించి, ఖాళీలను పూరించండి.

$1.76 \times 10 = \frac{176}{100} \times 10 = 17.6$	$2.35 \times 10 =$	$12.356 \times 10 =$ ....
$1.76 \times 100 = \frac{176}{100} \times 100 = 176$ or 176.0	$2.35 \times 100 =$	$12.356 \times 100 =$ ....
$1.76 \times 1000 = \frac{176}{100} \times 1000 = 1760$ or 1760.0	$2.35 \times 1000 =$	$12.356 \times 1000 =$ ....
$0.5 \times 10 = \frac{5}{10} \times 10 = 5$; $0.5 \times 100 =$ .... ; $0.5 \times 1000 =$		

మీ జవాబులను పరిశీలించండి. వాటిలో అమరికను కనిపెట్టారా? లబ్ధాలలో దశాంశ బిందువు కుడి వైపు 10, 100, 1000 .... మొదలగు సంఖ్యలలో గల 'సున్న'ల సంఖ్యకు సమాన స్థానాలు జరుగుతుంది.

2.4.2 దశాంశ సంఖ్యల భాగహారం

గోపాల్ తన తరగతి గదిని అలంకరించడానికి రంగు కాగితాలను సిద్ధం చేసుకుంటున్నాడు. అతనికి 1.6 సెం.మీ పొడవైన రంగు కాగితాలు కొన్ని కావాలి. అతని దగ్గర మొత్తం 9.6 సెం.మీ పొడవైన రంగు కాగితం కలదు. ఈ కాగితం నుండి అతనికి కావలసిన కొలత గల ముక్కలు ఎన్ని వస్తాయి? అవి కావాలంటే $\frac{9.6}{1.6}$ అగునని భావించాడు కాని 9.6 మరియు 1.6 రెండునూ దశాంశ సంఖ్యలే. అందుచే దశాంశ సంఖ్యల భాగహారం మనకు తెలియాలి.

2.4.2 అ) దశాంశ సంఖ్యలను 10, 100, 1000 ..... మొదలగు వానిచే భాగించడం

ఒక దశాంశ సంఖ్యను 10, 100, మరియు 1000 చే భాగిద్దాం

$31.5 \div 10$ తీసుకొండి

$$31.5 \div 10 = \frac{315}{10} \div 10 = \frac{315}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{315}{100} = 3.15$$

ఇదే విధంగా $31.5 \div 100 = \frac{315}{10} \div 100 = \frac{315}{10} \times \frac{1}{100} = \frac{315}{1000} = 0.315$

ఈ విధంగా దశాంశ సంఖ్యలను 10, 100,1000..... మొదలగు సంఖ్యలతో భాగించునపుడు ఏమైనా అమరిక ఉందా? ఇది తెలిస్తే 10, 100,1000 మొదలగు సంఖ్యలతో భాగించడం మరింత సులభతరం అవుతుంది.

29.5 ÷ 10 = 2.95	132.7 ÷ 10 = ...	1.5 ÷ 10 = ...	17.36 ÷ 10 = ...
29.5 ÷ 100 = 0.295	132.7 ÷ 100 = ...	1.5 ÷ 100 = ...	17.36 ÷ 100 = ...
29.5 ÷ 1000 = 0.0295	132.7 ÷ 1000 = ...	1.5 ÷ 1000 = ...	17.36 ÷ 1000 = ...

పై పట్టికలోని అమరికలను పరిశీలించి నీవు గమనించిన అంశాన్ని రాయుము.

2.4.2 ఆ) దశాంశ సంఖ్యను ఒక పూర్ణాంకం చే భాగించుట

$\frac{6.4}{2}$ విలువ ఎంతో కనుగొందాం. దీనిని మనం $6.4 \div 2$ అని కూడా రాస్తాం.

అందుచే $6.4 \div 2 = \frac{64}{10} \div 2 = \frac{64}{10} \times \frac{1}{2}$ (భిన్నాల భాగహారంలో వ్యుత్క్రమం)

$$= \frac{64 \times 1}{10 \times 2} = \frac{1 \times 64}{10 \times 2} = \frac{1}{10} \times \frac{64}{2} = \frac{1}{10} \times 32 = \frac{32}{10} = 3.2$$

ఇదే విధంగా $12.96 \div 4 = \frac{1296}{100} \div 4 = \frac{1296}{100} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{100} \times \frac{1296}{4} = \frac{1}{100} \times 324 = 3.24$

ఇవి చేయండి.

1. కనుగొనండి. (i) $35.7 \div 3$ (ii) $25.5 \div 3$

ఉదా 11 : 4.2, 3.8 మరియు 7.6 సంఖ్యల సరాసరి ఎంత?

సాధన : 4.2, 3.8 మరియు 7.6 సంఖ్యల సరాసరి $= \frac{4.2 + 3.8 + 7.6}{3} = \frac{15.6}{3} = 5.2$

2.4.2 (ఇ) ఒక దశాంశ సంఖ్యను మరొక దశాంశ సంఖ్యతో భాగించడం

ఒక దశాంశ సంఖ్యను, మరొక దశాంశ సంఖ్యతో ఏ విధంగా భాగిద్దామో తెలుసుకుందాం.

ఉదాహరణకు $35.5 \div 0.5$ తీసుకుందాం. $35.5 \div 0.5 = \frac{355}{10} \div \frac{5}{10} = \frac{355}{10} \times \frac{10}{5} = 71$

కావున $35.5 \div 0.5 = 71$ అయింది.

ఉదా 12 : ఒక బస్సు 92.5 కి.మీ దూరం ప్రయాణించడానికి 2.5 గంటలు పట్టును. స్థిర వేగంతో బస్సు మొత్తం దూరం ప్రయాణిస్తే అది 1 గంటలో ప్రయాణించే దూరం ఎంత?

సాధన : బస్సు ప్రయాణించిన దూరం = 92.5 కి.మీ

ప్రయాణానికి పట్టిన కాలం = 2.5 గంటలు

కావున 1 గంటలో ప్రయాణించే కాలం $= \frac{92.5}{2.5} = \frac{925}{25} = 37$ కి.మీ

అభ్యాసం - 6

1. కింది వానిని సాధించండి

(i) 0.3×6 (ii) 7×2.7 (iii) 2.71×5

(iv) 19.7×4 (v) 0.05×7 (vi) 210.01×5

(vii) 2×0.86

2. పొడవు 6.2 సెం.మీ, వెడల్పు 4 సెం.మీ గల దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం కనుగొనండి.

3. కింది వానిని సాధించండి.

(i)	21.3×10	(ii)	36.8×10	(iii)	53.7×10
(iv)	168.07×10	(v)	131.1×100	(vi)	156.1×100
(vii)	3.62×100	(viii)	43.07×100	(ix)	0.5×10
(x)	0.08×10	(xi)	0.9×100	(xii)	0.03×1000

4. ఒక మోటర్ బైక్ 1 లీటరు పెట్రోలు తో 62.5 కి.మీ దూరం ప్రయాణించగలదు. అదే వాహనం 10 లీటర్ల పెట్రోల్‌తో ఎంతదూరం ప్రయాణించగలదు?

5. కింది వానిని సాధించండి.

(i)	1.5×0.3	(ii)	0.1×47.5	(iii)	0.2×210.8
(iv)	4.3×3.4	(v)	0.5×0.05	(vi)	11.2×0.10
(vii)	1.07×0.02	(viii)	10.05×1.05	(ix)	101.01×0.01
(x)	70.01×1.1				

6. కింది వానిని సాధించండి.

(i)	$2.3 \div 100$	(ii)	$0.45 \div 5$	(iii)	$44.3 \div 10$
(iv)	$127.1 \div 1000$	(v)	$7 \div 3.5$	(vi)	$88.5 \div 0.15$
(vii)	$0.4 \div 20$				

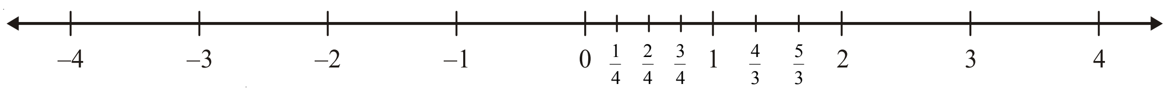
7. ఒక క్రమ బహుభుజి యొక్క భుజం పొడవు 3.5 సెం.మీ దాని చుట్టుకొలత 17.5 సెం.మీ అయిన ఆ బహుభుజికి గల భుజాలు ఎన్ని?

8. ఒక ప్రదేశంలో 7 గంటల కాలంలో 0.896 సెం.మీ వర్షపాతం నమోదైనది. అయిన 1 గంటలో పడిన సగటు వర్షపాతం ఎంత?

2.5 అకరణీయ సంఖ్యల పరిచయం

2.5.1 ధనాత్మక భిన్నాలు

మనం పూర్ణ సంఖ్యల గురించి, భిన్నాల గూర్చి నేర్చుకున్నాం. ఈ రెండింటిని సంఖ్యా రేఖ పై గుర్తిస్తే ఏ విధంగా ఉంటుందో పరిశీలిద్దాం.



మనకు 0 కు 1 కు మధ్య $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$ ..... వంటి సంఖ్యలున్నాయి. ఇవన్నీ 1 కన్నా తక్కువైన సంఖ్యలు. ఇవన్నీ క్రమభిన్నాలని, క్రమభిన్నాలన్నీ 0,1 ల మధ్యన ఉంటాయని చెప్పవచ్చు. ఇదే విధంగా $\frac{4}{3}, \frac{5}{3}$ అనేవి 1,2 ల మధ్యగల భిన్నాలు, ఈ భిన్నాలు అపక్రమ భిన్నాలని మనకు తెలుసు. వీటన్నింటిని ధనాత్మక భిన్నాలు అనవచ్చు.

ఇవి చేయండి.

1. (i) 0 మరియు 1 ల మధ్య (ii) 1 మరియు 2 ల మధ్య ఉండే 5 భిన్నాలను రాయండి

2. $4\frac{3}{5}$ అనే భిన్నం సంఖ్యా రేఖపై ఎక్కడ వుంటుంది?

సున్నకు ఎడమవైపున మనకు $-1, -2, -3$ .... వంటి పూర్ణసంఖ్యలు ఉన్నాయి.

మనం సంఖ్యా రేఖపై ఎడమ వైపుకు పోవు కొలది వీటి విలువ పెరుగుతున్నదా తగ్గుతున్నదా?

మనకు తెలిసి సంఖ్యా రేఖ పై ఎడమ వైపుకు పోవు కొలది సంఖ్య విలువ తగ్గుతూ ఉంటుంది. సున్నకు ఎడమ ఎంతదూరం జరిగితే, ఆ సంఖ్య అంత చిన్నదవుతున్నది.

ఇవి చేయండి.

1. కింది సంఖ్యలలో అతి పెద్ద, అతి చిన్న సంఖ్యలేవి?

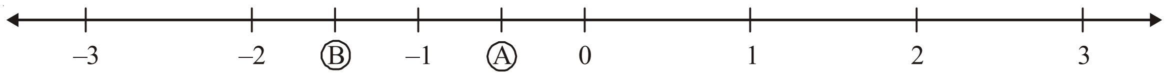
   (i) $2, -2, -3, 4, 0, -5$ (ii) $-3, -7, -8, 0, -5, -2$

2. కింది సంఖ్యలను ఆరోహణ క్రమంలో రాయండి.

   (i) $-5, -75, 3-2, 4, \frac{3}{2}$ (ii) $\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 0, -1, -2, 5$

2.5.2 ఋణాత్మక భిన్నాలు

కింద సంఖ్యా రేఖపై A అనే బిందువును చూడండి.



ఇది 0 మరియు -1 ల మధ్య గలదు. ఈ సంఖ్య 0 కన్నా పెద్దదా? చిన్నదా?

అదే విధంగా ఇది $\frac{1}{2}$ అవుతుందా? కాని ఇది సున్న కన్నా తక్కువ కాబట్టి $\frac{1}{2}$ కానేరదు.

$\frac{-9}{4}$ అనే సంఖ్యను సంఖ్యారేఖపై గుర్తించడానికి నేహా దానిని మొదట మిశ్రమ భిన్నంగా రాసింది $\frac{-9}{4} = -2\frac{1}{4}$ కాబట్టి దీనిని -2 మరియు -3 ల మధ్య గుర్తించింది.

ఇది సున్న కన్నా $\frac{1}{2}$ సగం తక్కువ కాబట్టి A ను మనం $-\frac{1}{2}$ అని రాస్తాం

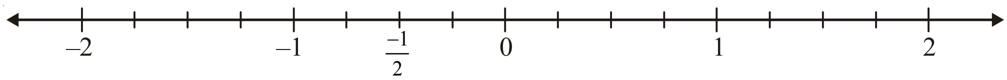
ఇదే విధంగా B అనేది -1 మరియు -2 మధ్య బిందువుపై వున్నది కావున ఇది $\frac{-3}{2}$.

దీనిని బట్టి $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{-9}{4}$ వంటి ఋణాత్మక భిన్నాలు, రెండు ఋణ పూర్ణ సంఖ్యల మధ్య లేదా సున్న మరియు ఒక ఋణ పూర్ణ సంఖ్యల మధ్య ఉంటాయని తెలుసుకోవచ్చు.

ఇవి చేయండి.

1. కింద ఇవ్వబడిన సంఖ్యలను ఇచ్చిన సంఖ్యా రేఖపై గుర్తించండి.

(i) $-\frac{7}{2}$ (ii) $\frac{3}{2}$ (iii) $\frac{7}{4}$ (iv) $\frac{-7}{4}$ (v) $\frac{-1}{4}$ (vi) $\frac{\ }{4}$



2. సంఖ్యారేఖపై కింది సంఖ్యలను పరిశీలించండి

$27, -\frac{7}{8}, \frac{11}{943}, \frac{54}{17}, -68, -3, -\frac{9}{6}, \frac{7}{2}$

(i) సంఖ్యా రేఖపై కింది సంఖ్యలు ఏ పూర్ణ సంఖ్యలకు ఎడమవైపున ఉంటాయి?

(a) 0 (b) –2 (c) 4 (d) 2

(ii) సంఖ్యా రేఖపై కింది సంఖ్యలు ఏ పూర్ణ సంఖ్యలకు కుడివైపున ఉంటాయి?

(a) 0 (b) –5 (c) $3\frac{1}{2}$ (d) $\frac{-5}{2}$

2.5.3 అకరణీయ సంఖ్యలు

0, 1, 2, 3, 4, 5 సంఖ్యలు పూర్ణాంకాలు. అదే విధంగా .... –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 --- అనే సంఖ్యలు పూర్ణాంకాల కన్నా పెద్ద సముదాయం అయిన పూర్ణ సంఖ్యలని మనకు తెలుసు.

అన్ని పూర్ణాంకాలు కూడా పూర్ణ సంఖ్యలే కాని, అన్ని పూర్ణసంఖ్యలు, పూర్ణాంకాలు కావని రాఖీ చెప్పింది. ఆమెతో నీవు ఏకీభవిస్తావా? రాఖీ చెప్పినది సత్యం. ఎందుకంటే రుణ సంఖ్యలైన –5, –4, –3, –2, –1 వంటి సంఖ్యలు పూర్ణసంఖ్యలే కాని పూర్ణాంకాలు కావు. అందుచే అన్ని పూర్ణాంకాలు పూర్ణ సంఖ్యలే, కాని పూర్ణసంఖ్యలన్నీ పూర్ణాంకాలు కావు.

ధనాత్మక భిన్నాలైన $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{6}, \frac{11}{5}, \frac{8}{8}$ వంటివి పూర్ణాంకాల నిష్పత్తులు. అందుచే సాధారణంగా మనం ధనాత్మక భిన్నాలను $\frac{w_1}{w_2}$ అని రాయవచ్చు. ఇందులో w_1 మరియు w_2 అనేవి రెండు పూర్ణాంకాలు మరియు w_2 సున్నకు సమానం కాదు.

ప్రయత్నించండి.

5 ధనాత్మక భిన్నాలను రాసి వాటిలో w_1 w_2 లను గుర్తించండి.

అకరణీయ సంఖ్యలనేవి అన్ని పూర్ణ సంఖ్యలు, ధనాత్మక భిన్నాలు మరియు రుణాత్మక భిన్నాలతో కూడిన ఒక పెద్ద సంఖ్యల సముదాయం. అందుచే $\frac{-7}{3}, \frac{-5}{2}, \frac{-7}{7}, \frac{-2}{7}, 0, \frac{1}{4}, \frac{4}{4}, \frac{17}{5}, \frac{6}{1}$ వంటి సంఖ్యలు అకరణీయ సంఖ్యలు అగును. ఈ సంఖ్యలన్నియూ రెండు పూర్ణసంఖ్యల నిష్పత్తిగా చెప్పవచ్చు. **p, q** లు అనేవి ఏవైనా రెండు పూర్ణ సంఖ్యలు, **q** సున్నకు సమానం కానప్పుడు $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయగలిగే సంఖ్యలను అకరణీయ సంఖ్యలు అంటారు.

ప్రయత్నించండి.

(i) ఏవైనా ఐదు పూర్ణ సంఖ్యలు తీసుకొని వీలయినన్ని అకరణీయ సంఖ్యలు రాయండి.

(ii) ఏవైనా ఐదు అకరణీయ సంఖ్యలు తీసుకొండి. అవి ఏ పూర్ణసంఖ్యలను కలిగియున్నవో తెలుపండి.

2.5.4 అకరణీయ సంఖ్యలను పోల్చడం

$\frac{3}{4}$ మరియు $\frac{9}{12}$ అనేవి రెండు సమ భిన్నాలు. మనం భిన్నాలను పోల్చునపుడు వాటిని సమాన భిన్నాలుగా మార్చి, సమాన హారాలను బట్టి పోల్చుతాం.

ఉదాహరణకు $\frac{3}{4}$ మరియు $\frac{5}{7}$ లను పోల్చుదాం.

మొదట వీటికి సమాన భిన్నాలను రాస్తాం.

$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}, \frac{9}{12}, \frac{12}{16}, \frac{15}{20}, \frac{18}{24}, \frac{21}{28}$ ....మరియు

$\frac{5}{7} = \frac{10}{14}, \frac{15}{21}, \frac{20}{28}$ ....

ఇప్పుడు మనం $\frac{21}{28}$ తో $\frac{20}{28}$ పోల్చవచ్చు. ఈ రెండింటిలో సమానహారం ఉంది కావున

$\frac{21}{28}$ అనేది $\frac{20}{28}$ కన్నా పెద్దది.

అందువలన $\frac{3}{4} > \frac{5}{7}$

ప్రయత్నించండి.

1. $\frac{3}{4}$ యొక్క సమాన భిన్నాలన్నీ సంఖ్యారేఖపై ఒకే బిందువు వద్దనే ఉంటాయా?

2. $\frac{6}{7}$ యొక్క సమాన భిన్నాలన్నీ సంఖ్యారేఖపై ఒకే బిందువు వద్ద ఉంటాయా?

$\frac{-1}{2}$ మరియు $\frac{-2}{3}$ ను పోల్చుదాం.

రెండింటికీ సమాన భిన్నాలు రాద్దాం.

$$\frac{-1}{2} = \frac{-2}{4}, \frac{-3}{6}, \frac{-4}{8} \;.....$$

$$\frac{-2}{3} = \frac{-4}{6}, \frac{-6}{9} \;......$$

$\frac{-3}{6}$ మరియు $\frac{-4}{6}$ లు సమాన హారాలు కల్గివున్నాయి. కావున మనం వీటిని పోల్చవచ్చు.

$\frac{-4}{6} < \frac{-3}{6}$ $\left(\frac{-4}{6}\right.$ అనేది $\frac{-3}{6}$ కు సంఖ్యారేఖపై ఎడమవైపున ఉంటుంది$\left.\right)$

కావున $\frac{-2}{3} < \frac{-1}{2}$

ప్రయత్నించండి.

1. $\frac{-1}{2}$ మరియు $\frac{-3}{6}$ అనేవి సంఖ్యారేఖపై ఒకే బిందువు వద్ద ఉంటాయా?

2. $\frac{-2}{3}$ మరియు $\frac{-4}{6}$ అనేవి సంఖ్యారేఖపై ఒకేచోట ఉంటాయా?

ఉదా :- $\frac{-1}{2}, \frac{-2}{4}$ లను సంఖ్యా రేఖపై సూచించునపుడు, రెండునూ ఒకేచోట ఏకీభవిస్తాయని కనుగొంటాం. కావున, ఈ రెండూ సమాన అకరణీయ సంఖ్యలు.

ఇవి చేయండి.

1. (i) $\frac{5}{2}$ (ii) $\frac{-7}{9}$ (iii) $-\frac{3}{7}$ లకు ఐదు సమాన అకరణీయ సంఖ్యలు రాయండి.
2. కింది వానిలో సమాన అకరణీయ సంఖ్యలను గుర్తించండి.

   (i) $\frac{-1}{2}, \frac{-3}{4}, \frac{-2}{4}, \frac{-4}{8}$ (ii) $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{3}, \frac{10}{6}, \frac{2}{4}, \frac{20}{12}$

సమాన అకరణీయ సంఖ్యలు కావాలంటే మనం ఇచ్చిన సంఖ్యలో లవ, హారాలలో గల పూర్ణ సంఖ్యలను ఒకే సంఖ్యతో గుణించాలి లేదా భాగించాలి అని చెప్పవచ్చు.

ఉదాహరణకు

$\frac{1}{5}$ కు సమాన అకరణీయ సంఖ్యలు కావాలంటే $\frac{1\times2}{5\times2}=\frac{2}{10}$ మరొకటి $\frac{1\times3}{5\times3}=\frac{3}{15}$ అగును.

ఇలాగే $\frac{-2}{7}$ కు సమాన అకరణీయ సంఖ్యలు కావాలంటే $\frac{-2\times2}{7\times2}=\frac{-4}{14}$ మరొకటి $\frac{-2\times3}{7\times3}=\frac{-6}{21}$ అగును.

ఈ విధంగా మనం సమాన అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనడానికి అకరణీయ సంఖ్యలను $\frac{1}{1}=\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=\frac{4}{4}$ లతో గుణిస్తాం.

అభ్యాసం - 7

1. కింది సంఖ్యలకు మూడేసి సమాన అకరణీయ సంఖ్యలు రాయండి.

   (i) $\frac{2}{3}$ (ii) $-\frac{3}{8}$

2. (i) హారం 12 ఉండే విధంగా $\frac{-15}{36}$ కు సమాన అకరణీయ సంఖ్య రాయండి.

   (ii) లవం -75 ఉండే విధంగా $\frac{-15}{36}$ కు సమాన అకరణీయ సంఖ్య రాయండి.

3. కింది అకరణీయ సంఖ్యలను సంఖ్యారేఖపై సూచించండి.

   (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{3}{4}$ (iii) $\frac{3}{2}$ (iv) $\frac{10}{3}$

4. కింది గణిత వాక్యములు సత్యములో, అసత్యములో గుర్తించండి.

(i) ప్రతి పూర్ణ సంఖ్య అకరణీయ సంఖ్య అట్లే ప్రతి అకరణీయ సంఖ్య ఒక పూర్ణ సంఖ్య (   )

(ii) $\frac{p}{q}$ రూపంలోని అకరణీయ సంఖ్యలో q ఒక శూన్యేతర పూర్ణ సంఖ్య (   )

(iii) ప్రతి దశాంశ సంఖ్యను అకరణీయ సంఖ్యారూపంలో రాయవచ్చు (   )

(iv) $\frac{5}{7}, \frac{6}{7}, \frac{7}{7}$ లు సమాన అకరణీయ సంఖ్యలను సూచిస్తాయి. (   )

(v) ధన అకరణీయ సంఖ్య యొక్క సమాన అకరణీయ సంఖ్యలన్నీ ధన రాశులే. (   )

మనం నేర్చుకున్నవి

1. భిన్నాల సంకలనం, వ్యవకలనం చేయాలంటే, వాటిని సజాతి భిన్నాలుగా మార్చాలి.
2. రెండు భిన్నాల గుణకారం అనగా $\frac{\text{లవాల లబ్ధం}}{\text{హారాల లబ్ధం}}$
3. 'లో' (OF) అనే అక్షరం రెండు సంఖ్యల గుణకారాన్ని తెల్పుతుంది.

   ఉదా : 6 లో $\frac{1}{3} = \frac{1}{\cancel{3}} \times \cancel{6} = 2$.
4. రెండు క్రమభిన్నాల లబ్ధం, గుణించిన ప్రతి క్రమభిన్నం విలువ కన్నా తక్కువ. ఒక క్రమ, అపక్రమ భిన్నాల లబ్ధం గుణించిన అపక్రమ భిన్నం విలువ కన్నా తక్కువ మరియు క్రమభిన్నం విలువ కన్నా ఎక్కువ.
5. ఒక భిన్నం యొక్క వ్యుత్క్రమం అనగా లవ, హారాలను తారుమారు చేయగా ఏర్పడిన భిన్నం.
6. మనం భిన్నాల భాగహారాన్ని గమనించాం.

   (i) ఒక పూర్ణాంకాన్ని భిన్నంచే భాగించునపుడు, ఆ పూర్ణాంకాన్ని భిన్నం యొక్క వ్యుత్క్రమంతో గుణించాం.

   (ii) ఒక భిన్నాన్ని, పూర్ణాంకంచే భాగించునపుడు, ఆ భిన్నాన్ని పూర్ణాంకం యొక్క వ్యుత్క్రమంతో గుణించాం.

   (iii) ఒక భిన్నాన్ని, మరొక భిన్నంతో భాగించునపుడు, మొదటి భిన్నాన్ని రెండవ భిన్నం యొక్క వ్యుత్క్రమంతో గుణించాం. ఉదా : $\frac{3}{4} \div \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \times \frac{7}{5} = \frac{21}{20}$.
7. మనం దశాంశ సంఖ్యలను గుణించడం కూడా నేర్చుకున్నాం. రెండు దశాంశ సంఖ్యలు గుణించునపుడు, వాటిని మనం పూర్ణ సంఖ్యలుగా భావించి గుణించాలి. తర్వాత దశాంశ సంఖ్యలలో దశాంశ బిందువుకు కుడివైపున గల దశాంశ స్థానాలను లెక్కించి, లబ్ధంలో వాటి మొత్తం సంఖ్య స్థానాలు కుడి వైపు నుండి విడిచి దశాంశ బిందువు ఉంచాలి.

8. ఒక దశాంశ సంఖ్యను 10, 100, 1000 .... వంటి సంఖ్యలచే గుణించునపుడు, ఈ సంఖ్యలలో సున్నాల సంఖ్యను లెక్కించి లబ్దంలో అన్ని స్థానాలు కుడివైపుకు దశాంశ సంఖ్యలో గల దశాంశ బిందువును జరుపుతాం.

9. దశాంశ సంఖ్యలను భాగహారం ఏ విధంగా చేయాలో నేర్చుకున్నాం.

   (i) ఒక దశాంశ సంఖ్యను పూర్ణాంకంచే భాగించునపుడు, వాటిని పూర్ణాంకాలుగా భావించి మొదట భాగిస్తాం. తర్వాత భాగఫలంలో దశాంశ బిందువును విభాజ్యంలో వలే ఉంచుతాం.

   ఇచ్చట భాగాహారాలలో శేషం సున్న వచ్చే వాటినే తీసుకున్నామని గమనించాలి.

   (ii) ఒక దశాంశ సంఖ్యను 10, 100, 1000 వంటి సంఖ్యలచే భాగించునపుడు, ఈ సంఖ్యలలో సున్నల సంఖ్యను లెక్కించి భాగఫలంలో అన్ని స్థానాలు ఎడమవైపుకు దశాంశ బిందువును జరుపుతాం.

   (iii) రెండు దశాంశ సంఖ్యలను భాగించునపుడు, విభాజకంను పూర్ణాంకం చేయుటకు లవ, హారాలను సమాన స్థానాలు జరిపి భాగించాలి.

10. అకరణీయ సంఖ్యలనేవి అన్ని పూర్ణ సంఖ్యలు, అన్ని ధనాత్మక భిన్నాలు మరియు అన్ని ఋణాత్మక భిన్నాలు కలిసి ఉన్న ఒక పెద్ద సంఖ్యల సముదాయం. $\frac{-7}{3}, \frac{-5}{2}, \frac{-7}{7}, \frac{-2}{7}, 0, \frac{1}{4}, \frac{4}{4}, \frac{17}{5}, \frac{6}{1}$ వంటి సంఖ్యలన్నీ అకరణీయ సంఖ్యలే. ఇవన్నియూ రెండు పూర్ణ సంఖ్యల నిష్పత్తులే. అందుచే (అ) p, q లు పూర్ణ సంఖ్యలై యుండి (ఆ) q సున్నకు సమానం కాకుండా వున్న సందర్భంలో $\frac{p}{q}$ రూపంలో ఉన్న సంఖ్యలను అకరణీయ సంఖ్యలు అంటారు.

జాన్ నేపియర్ (స్కాట్‌లాండ్)

1550 - 1617 AD

సంవర్గ మానాలను రూపొందించాడు. గుణకారాలకు నేపియర్ పట్టీలను ప్రవేశపెట్టాడు. అదే విధంగా దశాంశ భిన్నాలను ప్రవేశపెట్టిన గణిత శాస్త్రవేత్త.

సామాన్య సమీకరణాలు 3

3.0 పరిచయం

మీరు 6వ తరగతిలో $4x = 44$, $2m = 10$ వంటి సామాన్య సమీకరణాల గురించి తెలుసుకొని వుంటారు. ఇటువంటి సమీకరణాలతో కొన్ని పజిల్స్ మరియు నిత్యజీవిత సమస్యలు ఎలా సాధించవచ్చో మీకు తెలుసు. మీరు నేర్చుకున్న సామాన్య సమీకరణాలను వాటి సాధనలను పునర్విమర్శ అభ్యాసం ద్వారా గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం.

అభ్యాసం - 1

1. కింది సామాన్య సమీకరణాలలో L.H.S మరియు R.H.S లను గుర్తించండి.

(i)	$2x = 10$	(ii)	$2x-3 = 9$
(iii)	$4z + 1 = 8$	(iv)	$5p + 3 = 2p + 9$
(v)	$14 = 27 - y$	(vi)	$2a - 3 = 5$
(vii)	$7m = 14$	(viii)	$8 = q + 5$

2. క్రింది సమీకరణాలను యత్న-దోష పద్ధతిలో సాధించండి.

(i)	$2 + y = 7$	(ii)	$a - 2 = 6$
(iii)	$5m = 15$	(iv)	$2n = 14$

3.1 సమీకరణం - బరువులు తూచే త్రాసు

సామాన్య సమీకరణాలను, సామాన్య త్రాసుతో పోల్చవచ్చునని 6వ తరగతిలో మీరు తెలుసుకున్నారు కదా!

ఒక త్రాసు యొక్క ఎడమ వైపు పళ్ళెంలో 5 కి.గ్రా. బరువు, కుడివైపు పళ్ళెంలో 2 కి.గ్రా. బరువు వేస్తే ఏమౌతుంది? అదేవిధంగా ఎడమ వైపు పళ్ళెంలో 3 కి.గ్రా. బరువు, కుడి వైపు పళ్ళెంలో 7 కి.గ్రా. బరువు వేస్తే ఏమౌతుంది?

అలాగే ఎడమ వైపు పళ్ళెంలో 3 కి.గ్రా. బరువు, కుడివైపు పళ్ళెంలో 3 కి.గ్రా. బరువులు వేస్తే త్రాసు ఏవిధంగా ఉంటుందో పరిశీలించండి.

త్రాసు యొక్క రెండు పళ్ళాలలో సమాన బరువులు ఉన్నప్పుడే అది ఖచ్చితంగా సరి తూగునని గమనించండి.

ఇదే సూత్రం మనకు సమానత్వ సూత్రాలలో కనబడుతుంది.

ఈ సమానత్వాన్ని పరిశీలించండి.

$12 - 2 = 6 + 4$

ఇచ్చట

(ఎడమవైపు) L.H.S = 12 – 2 = 10 మరియు

(కుడివైపు) R.H.S = 6 + 4 = 10

కుడి, ఎడమలు సమానం కావున, ఇచ్చట సమానత్వం వర్తించింది.

1. ఇదే సమీకరణానికి ఇరువైపులా 3 కలపండి. ఏమౌతుంది? ఇరువైపులా విలువలు సమానం అవుతాయా? ఒకవేళ ఇరువైపులా 10 కలిపినా కూడా సమానమేనా? మీరు కూడా మరికొన్ని సంఖ్యలు తీసుకొని ప్రయత్నించండి.

2. ఇదే సమీకరణాల నుండి ఇరువైపులా 5 తీసివేయండి. రెండు వైపులా సమానంగా ఉన్నాయా? ఇదే విధంగా 7 ను ఇరువైపులనుండి తీసివేసిన కూడా సమానమేనా? మీరు కూడా మరిన్ని సంఖ్యలు తీసుకుని సమానత్వాన్ని పరిశీలించండి.

3. ఇదే సమానత్వంనకు ఇరువైపుల గల సంఖ్యలను 6 చేగుణించి పరిశీలించండి. ఇరువైపులా సమానమేనా? ఇదే విధంగా 8 చేత కూడా గుణించి చూడండి. మీకు నచ్చిన మరిన్ని సంఖ్యలు తీసుకొని గుణించి, సమానత్వం చూడండి.

4. ఇదే సమానత్వ సమీకరణంను తీసుకొని ఇరువైపులా 5 చే భాగించి చూడండి. ఇరువైపులా సమానం అయినదా? ఈ సమీకరణంను ఇరువైపులా 2చే భాగించిననూ సమానమేనా?

పైన మీరు ప్రక్రియలు చేసిన అన్ని సందర్భాలలోనూ మీకు "అవును" అనే సమాధానమే వచ్చింది కదూ!

అందుచే, మనం సమానత్వంనకు ఇరువైపులా గల రాశులకు ఒకే సంఖ్యను కూడినా, తీసివేసినా ఒకే సంఖ్యచే గుణించినా లేదా భాగించినా, సమానత్వంలో ఎటువంటి మార్పులేదని గమనించవచ్చును.

ఈ సమానత్వ ధర్మాన్ని మనం సాధించబోయే సమీకరణాల సాధనలలో ఉపయోగిస్తాం!

3.2 సమీకరణాల సాధన

మీరు ఇప్పటికే యత్నదోష పద్ధతిలో సమీకరణాలను సాధించడం నేర్చుకున్నారు. ఇప్పుడు మనం సమానత్వ ధర్మాలను ఆధారంగా చేసుకొని సమీకరణాలను మరింత సులభంగా త్వరితంగా సాధించడం నేర్చుకుందాం.

మనం సమీకరణాలను సమానత్వ ధర్మాలను ఆధారంగా చేసుకొని సాధించాలంటే మొదట సమానత్వ గుర్తునకు ఇరువైపుల గల అంకపదాలను, బీజీయ పదాలను గుర్తించాలి. తదుపరి సమానత్వ ధర్మాలనుపయోగించి సాధించాలి.

క్రింది ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం.

ఉదా. 1 : $x + 3 = 7$ సాధించండి.

సాధన : $x + 3 = 7$ .... (1)

ఈ సమీకరణంలో L.H.S = $x + 3$. విలువ x కంటే 3 ఎక్కువ.

'x' విలువ కనుగొనాలంటే L.H.S నుండి 3 ను తొలగించాలి. అందుచే L.H.S నుండి 3 ను తీసివేయాలి. సమానత్వధర్మం ప్రకారం L.H.S నుండి 3 తీసివేస్తే, R.H.S నుండి కూడా 3 ను తీసివేయాలి. అప్పుడే సమీకరణం సమానత్వం ధర్మాన్ని కలిగి ఉంటుంది.

$x + 3 = 7$ అని ఇవ్వబడింది.

$x + 3 - 3 = 7 - 3$

$x = 7 - 3$ .... (2)

$x = 4$

అందువలన, $x = 4$ అయినది.

(1), (2) లనుండి గమనించినది ఏమనగా LHS నుండి '+3' తొలగించాలంటే RHS నుండి 3 తీసివేయబడింది. దీని అర్థం LHS లో గల '+3' పదం RHS లోనికి మార్చేటప్పుడు '–3' గా పక్షాంతరం చెందినది.

సరి చూచుట : x = 4 విలువను సమీకరణంలోగల L.H.S, R.H.S లలో ప్రతిక్షేపించిన

L.H.S= $x + 3$

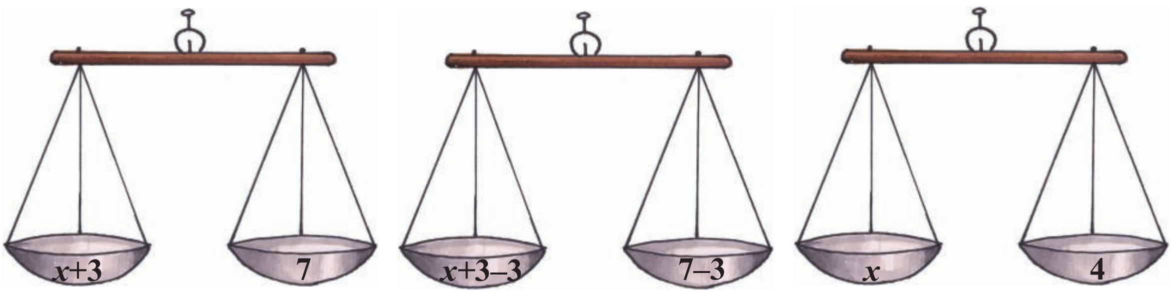
$= 4 + 3$ (x = 4 ను ప్రతిక్షేపించగా)

L.H.S= 7

R.H.S = 7

కావున L.H.S = R.H.S.

పై ఉదాహరణను కింది పటంలో చూపినట్లుగా త్రాసునందు పరిశీలించండి.



ఉదా. 2 : y – 7 = 9 ను సాధించండి.

సాధన : y – 7 = 9 .... (1)

ఇచ్చట సమీకరణంలో L.H.S = y – 7

y – 7 విలువను కనుగొనడానికి సమీకరణం ఇరువైపులా 7 ను కలపాలి.

అందుచే, $y - 7 + 7 = 9 + 7$

$y = 9 + 7$ .... (2)

$y = 16$

(1), (2) లను గమనిస్తే సమీకరణానికి LHS లోగల '–7' RHSలోనికి '+7' గా పక్షాంతరం చెందినది.

కావున $y = 16$.

సరిచూచుట : సమీకరణంలో y కు బదులుగా 16ను ప్రతిక్షేపించి L.H.S = R.H.S అగునేమో పరిశీలించండి.

ఉదా 3 : $5x = -30$ సాధించండి.

సాధన : $5x = -30$ .... (1)

$\frac{5x}{5} = \frac{-30}{5}$ (ఇరువైపులనూ 5 చే భాగించగా)

$x = \frac{-30}{5}$ .... (2)

$x = -6$

(1), (2)లను పరిశీలిస్తే LHS లో x గుణకం '5', RHS లోనికి విభాజకం '5'గా మార్పు చెందినది.

సరిచూచుట : $x = -6$ విలువను సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించగా

L.H.S = R.H.S అగునేమో పరిశీలించండి.

ఉదా 4 : $\frac{z}{6} = -3$ ను సాధించండి.

సాధన : $\frac{z}{6} = -3$ .... (1)

$6\left(\frac{z}{6}\right) = 6 \times (-3)$ (ఇరువైపులా 6 చే గుణించగా)

$z = 6 \times (-3)$ .... (2)

$z = -18$

(1), (2)లను పరిశీలిస్తే LHS లో విభాజకం '6', RHS లోనికి గుణకం '6'గా రూపాంతరం చెందినట్లుగా గమనించవచ్చు.

సరిచూచుట : $z = -18$ విలువను సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించిన

L.H.S = R.H.S అగునేమో పరిశీలించండి.

ఉదా 5 : $3x + 5 = 5x - 11$ సాధించండి.

సాధన : $3x + 5 = 5x - 11$

$3x + 5 - 5x = 5x - 11 - 5x$ (ఇరువైపులా 5x తీసివేయగా)

$-2x + 5 = -11$

$-2x + 5 - 5 = -11 - 5$ (ఇరువైపులా '5' తీసివేయగా)

$-2x = -16$

ఇరువైపులను '−2' చే భాగించగా

$x = 8$

సరిచూచుట : x=8 విలువను సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించగా

L.H.S = $3x + 5 = 3(8) + 5 = 24 + 5 = 29$

R.H.S = $5x - 11 = 5(8) - 11 = 40 - 11 = 29$

$\therefore$ L.H.S = R.H.S

గమనించండి.

గుర్తులు పక్షాంతరం చెందడమనగా

'+ రాశి' పక్షాంతరం చెందిన '– రాశి' గానూ

'– రాశి' పక్షాంతరం చెందిన '+ రాశి' గానూ

'× రాశి' పక్షాంతరం చెందిన ÷ రాశి' గానూ

'÷ రాశి' పక్షాంతరం చెందిన '× రాశి' గానూ మార్పు చెందడం.

ఉదా 6 : $12 = x + 3$ సాధించండి.

సాధన : L.H.S లో గల 12 ను R.H.S వైపుకు మార్చునపుడు –12 అగును. అదేవిధంగా R.H.S వైపునగల $x+3$ ను L.H.S కు మార్చునపుడు $-x - 3$ అగును.

అనగా $-x -3 = -12$

ఇరువైపులా (–1) చే గుణించగా

$-1 (-x -3) = -1 (-12)$

$x + 3 = 12$

అందువలన సమీకరణంలో **L.H.S** మరియు **R.H.S** నందు గల పదాలను తారుమారు చేసిననూ సమీకరణంలో ఎటువంటి మార్పులేదని గమనించగలరు.

ఇప్పుడు $x = 12 - 3$

$x = 9$ అయినది

అభ్యాసం - 2

1. కింది సమీకరణాలలో పదాలను పక్షాంతరం చెందించకుండా సాధించి, ఫలితాలను సరిచూడండి.

(i) $x + 5 = 9$ (ii) $y - 12 = -5$

(iii) $3x + 4 = 19$ (iv) $9z = 81$

(v) $3x + 8 = 5x + 2$ (vi) $5y + 10 = 4y - 10$

2. కింది సమీకరణాలలో పదాలను పక్షాంతరం చెందించడం ద్వారా సాధించి, ఫలితాలను సరిచూడండి.

(i) $2 + y = 7$ (ii) $2a - 3 = 5$

(iii) $10 - q = 6$ (iv) $2t - 5 = 3$

(v) $14 = 27 - x$ (vi) $5 (x+4) = 35$

(vii) $-3x = 15$ (viii) $5x -3 = 3x - 5$

(ix) $3y + 4 = 5y - 4$ (x) $3 (x - 3) = 5 (2x + 1)$

3.3 నిత్యజీవిత సమస్యల సాధనలో సామాన్య సమీకరణాల వినియోగం

కింది ఉదాహరణలను పరిశీలించండి.

(i) తరగతిలో బాలబాలికల మొత్తం సంఖ్య 52. బాలికల సంఖ్య, బాలుర సంఖ్య కన్నా 10 ఎక్కువ అయిన బాలుర సంఖ్య ఎంత?

(ii) రాము తండ్రి ప్రస్తుత వయస్సు, రాము వయస్సుకు 3 రెట్లు. 5 సంవత్సరాల తర్వాత వారిద్దరి వయస్సుల మొత్తం 70 సంవత్సరాలు అయిన వారి ప్రస్తుత వయస్సులు కనుగొనండి.

(iii) ఒక పర్సులో కొన్ని ₹10 మరియు కొన్ని ₹ 50 నోట్లు మొత్తం కలిపి ₹ 250 కలవు. ₹ 50 నోట్ల సంఖ్య కన్నా, ₹ 10 నోట్ల సంఖ్య ఒకటి ఎక్కువ. అయిన ప్రతి రకం నోట్లు ఎన్నెన్ని గలవో తెలపండి.

(iv) ఒక దీర్ఘచతురస్రం యొక్క పొడవు దాని వెడల్పుకు రెట్టింపు కన్నా 8 తక్కువగా కలదు. దీర్ఘచతురస్రం యొక్క చుట్టుకొలత 56 మీ. అయిన పొడవు, వెడల్పులు కనుగొనుము.

పైన పేర్కొన్న అనేక రకాల నిత్యజీవిత సమస్యల సాధన కొరకు సామాన్య సమీకరణాలను ఉపయోగిస్తాం. ఇటువంటి సమస్యల సాధనకొరకు దిగువ సోపానాలు అనుసరించవచ్చును.

సోపానం 1 : సమస్యను సమగ్రంగా చదవాలి.

సోపానం 2 : తెలియని లేదా కనుగొనవల్సిన రాశులను గుర్తించి వాటిని x, y, z, u, v, w, p, t వంటి చరరాశులతో సూచించాలి.

సోపానం 3 : సమస్యలో పదాల మధ్య సంబంధం ఏర్పరిచే బీజీయ సమాసాలు పొందుపరిచి సమీకరణం రూపొందించాలి.

సోపానం 4 : సమీకరణం సాధించాలి.

సోపానం 5 : ఫలితాన్ని సరిచూడాలి.

ఉదా 7 : ఒక తరగతిలో గల బాలబాలికల మొత్తం సంఖ్య 52. బాలుర కన్నా బాలికలసంఖ్య 10 ఎక్కువైన, బాలుర సంఖ్య ఎంత?

సాధన : తరగతిలో బాలుర సంఖ్య x అనుకొనుము

అయిన బాలికల సంఖ్య $= x + 10$

తరగతిలో బాల, బాలికల మొత్తం సంఖ్య $= x + (x + 10)$

$= x + x + 10$

$= 2x + 10$

లెక్కప్రకారం బాల బాలికల మొత్తం సంఖ్య = 52

కావున $2x + 10 = 52$ అగును.

సమీకరణం సాధించగా

$2x = 52 - 10$ (10 ను L.H.S నుండి R.H.S కు పక్షాంతరం చేయగా)

$2x = 42$

$x = \frac{42}{2}$ (2 ను L.H.S నుండి R.H.S కు పక్షాంతరం చేయగా)

$x = 21$

అందుచే బాలుర సంఖ్య = 21 మరియు

బాలికల సంఖ్య = 21 + 10 = 31 అగును.

సరిచూచుట : 21 + 31 = 52 అనగా తరగతిలో బాలబాలికల మొత్తం 52.

మరియు 31 – 21=10 అనగా బాలికలు, బాలుర కన్నా 10 మంది ఎక్కువ కలరు.

ఉదా 8 : రాము యొక్క తండ్రి ప్రస్తుత వయస్సు, రాము ప్రస్తుత వయస్సుకు మూడు రెట్లు కలదు. 5 సంIIల తర్వాత వారి వయస్సులమొత్తం 70 సంII అయిన వారి ప్రస్తుత వయస్సులు ఎంతెంత?

సాధన : రాము ప్రస్తుత వయస్సు = x సంII అనుకొనిన

అతని తండ్రి ప్రస్తుత వయస్సు = $3x$ సంII

5 సంII తర్వాత రాము వయస్సు = $x+5$ సంII

అతని తండ్రి వయస్సు = $3x + 5$ సంII

5 సంII తర్వాత వారి యొక్క వయస్సుల మొత్తం = $(x + 5) + (3x + 5) = 4x + 10$ సం II

కానీ లెక్కప్రకారం, 5సంII తర్వాత వారి వయస్సుల మొత్తం $4x + 10 = 70$

$$4x = 70 - 10$$

$$4x = 60$$

$$x = \frac{60}{4} = 15$$

అందుచే రాము యొక్క ప్రస్తుత వయస్సు = 15 సంII

తండ్రి యొక్క ప్రస్తుత వయస్సు = 3 × 15 సంII = 45 సంII

సరిచూచుట :

15కు 3 రెట్లు 45 అంటే ప్రస్తుతం తండ్రి వయస్సు రాము వయస్సుకు 3 రెట్లు

5 సంII తర్వాత తండ్రి వయస్సు = 45 + 5 = 50 సంII

5 సంII తర్వాత రాము వయస్సు = 15 + 5 = 20 సంII

వారి వయస్సుల మొత్తం = 50 + 20 = 70 సంII

సరిచూడబడినది.

ఉదా 9 : ఒక పర్సులో కొన్ని ₹10 మరియు కొన్ని ₹ 50 నోట్లు మొత్తం కలిపి ₹ 250 కలవు. ₹ 50 నోట్ల సంఖ్య కన్నా ₹ 10 నోట్ల సంఖ్య ఒకటి ఎక్కువగా కలదు. అయిన ప్రతి రకం నోట్లు ఎన్నెన్ని కలవో తెలపండి.

సాధన : ₹ 50 నోట్ల సంఖ్య = x అనుకొనిన

అప్పుడు మొత్తం ₹ 50 నోట్ల విలువ = $50\,x$

మరియు ₹ 10 నోట్ల సంఖ్య = $x + 1$ అవుతుంది.

మొత్తం ₹ 10 నోట్ల విలువ = $10\,(x+1)$

పర్సులో మొత్తం పైకం = $50x + 10(x + 1)$

$= 50x + 10x + 10$

$= 60x + 10$

కాని లెక్క ప్రకారం పర్సులో గల మొత్తం పైకం = ₹ 250

అందుచే $60x + 10 = 250$ అగును.

$60x = 250 - 10$

$60x = 240$

$$x = \frac{240}{60}$$

$x = 4$

కావున ₹ 50 నోట్ల సంఖ్య = 4

₹ 10 నోట్ల సంఖ్య = 4 + 1 = 5

సరిచూచుట :

₹ 10 నోట్ల సంఖ్య (5), ₹ 50 నోట్ల సంఖ్య (4) కన్నా 1 ఎక్కువ.

పర్సులోగల మొత్తం పైకం = 50 (4) + 10 (5)

= 200 + 50

= ₹ 250 సరి చూడబడినది.

ఉదా 10 : ఒక దీర్ఘచతురస్రం యొక్క పొడవు దాని వెడల్పుకు రెట్టింపు కన్నా 8 తక్కువగా కలదు. దీర్ఘచతురస్రం యొక్క చుట్టుకొలత 56 మీ. అయిన దాని పొడవు, వెడల్పులు కనుగొనుము.

సాధన : దీర్ఘచతురస్రం వెడల్పు $= x$ మీ. అనుకొనుము.

వెడల్పునకు రెట్టింపు $= 2x$ మీ.

(లెక్క ప్రకారం) పొడవు $= 2x - 8$ మీ.

దీర్ఘచతురస్రం చుట్టుకొలత = 2 (పొడవు + వెడల్పు)

$= 2(2x - 8 + x)$ మీ.

$= 2(3x - 8)$ మీ.

$= 6x - 16$ మీ.

కాని, లెక్క ప్రకారం దీర్ఘచతురస్రం చుట్టుకొలత = 56 మీ॥

కావున $6x - 16 = 56$

$$6x = 56 + 16$$

$$6x = 72$$

$$x = \frac{72}{6}$$

$$x = 12$$

దీర్ఘచతురస్రం వెడల్పు = 12 మీ.

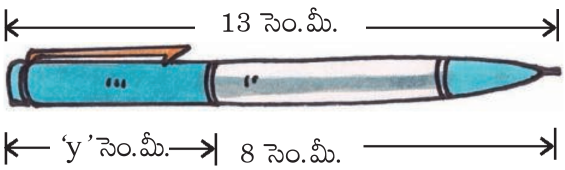
పొడవు $= 2 \times 12 - 8 = 16$ మీ.

సరిచూచుట : చుట్టుకొలత = 2 (పొడవు + వెడల్పు) = 2 (12+16) = 2 (28) = 56 మీ.

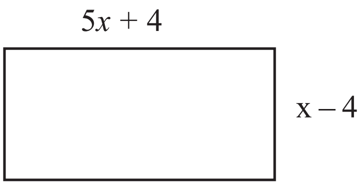
అభ్యాసం - 3

1. క్రింది పటంలో చూపిన సమాచారంను సమీకరణ రూపంలో వ్రాయండి. సమీకరణం సాధించి x విలువ కనుగొనండి.

2. క్రింది పటంలో చూపిన సమాచారం ను సమీకరణ రూపంలో వ్రాయండి. సమీకరణం సాధించి 'y' విలువ కనుగొనండి.



3. ఒక సంఖ్యను రెట్టింపు చేసి 7 కలుపగా 49 అయినది. అయిన ఆ సంఖ్యఏది?
4. ఒక సంఖ్యకు మూడు రెట్ల నుండి 22 ను తీసివేయగా 68 వచ్చింది. అయిన ఆ సంఖ్య ఏది?
5. ఏ సంఖ్యను 7 చే గుణించి లబ్ధం నుండి 3 తగ్గించగా అది 53 కు సమానం అగునో కనుక్కోండి.
6. రెండు సంఖ్యల మొత్తం 95. అందులో ఒక సంఖ్య రెండవ దాని కన్నా 3 ఎక్కువ. అయిన ఆ సంఖ్యలు ఏవి?
7. మూడు వరుస పూర్ణసంఖ్యల మొత్తం 24. అయిన ఆ సంఖ్యలేవి?
8. క్రింది దీర్ఘచతురస్రం యొక్క చుట్టుకొలత 72 మీ॥ అయిన పొడవు, వెడల్పులను కనుగొనుము.



9. ఒక దీర్ఘచతురస్రం యొక్క పొడవు, వెడల్పు కన్నా 4 మీ॥ ఎక్కువ. దాని చుట్టు కొలత 84 మీ. అయిన పొడవు, వెడల్పులు కనుగొనుము.

10. 15 సం॥ తర్వాత హేమయొక్క వయస్సు ఆమె ప్రస్తుత వయస్సుకు 4 రెట్లు అగును. అయిన ఆమె ప్రస్తుత వయస్సు ఎంత?

11. 63 బహుమతుల మొత్తం విలువ ₹ 3000. ఈ బహుమతులలో ₹ 100 మరియు ₹ 25 విలువ గలవి ఉన్నచో అవి ఒక్కొక్కరకం ఎన్నెన్ని ఉన్నాయో తెలపండి.

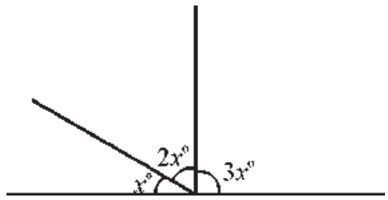
12. ఒక సంఖ్యను రెండు భాగాలు చేయగా మొదటి భాగం రెండవ దాని కన్నా 10 ఎక్కువ మరియు ఈ భాగాల నిష్పత్తి 5:3 అయిన ఆ సంఖ్యను మరియు రెండు భాగాలను కనుగొనండి.

13. "నేను అనుకున్న ఒక సంఖ్యను 5 చే గుణించి 8 కలిపినా లేదా అదే సంఖ్యను 20 నుండి తీసివేసినా ఫలితం ఒకటే వస్తుంది" అని సుహానా చెప్పింది. సుహాన అనుకున్న సంఖ్యను తెల్పండి.

14. "తరగతిలో అత్యధిక మార్కులు పొందిన విద్యార్థి మార్కులు, అత్యల్పమార్కులు పొందిన విద్యార్థి మార్కులను రెట్టింపు చేసి 7 కలిపిన సమానమైనాయి" అని ఉపాధ్యాయుడు తెలిపాడు. తరగతిలో అత్యధిక మార్కులు పొందిన విద్యార్థికి 87 వచ్చిన అయిన అత్యల్ప మార్కులు పొందిన విద్యార్థి మార్కులు ఎన్ని?

15. ప్రక్క పటంలో 3 కోణాలు ఇవ్వబడ్డాయి. వాటిని కనుగొనండి.

(సూచన : సరళరేఖ పై ఒక బిందువు వద్ద ఏర్పడిన కోణాల మొత్తం 180^o)



16. క్రింది పొడుపు కథను చదివి సాధించండి.

నేనొక సంఖ్యను

నన్ను గుర్తించగలవా?

నన్ను రెట్టింపు చేసి

దానికి 36 కలిపి చూడు!

నేను శతకానికి చేరాలంటే

నాకు ఇంకా నాలుగు కావాలి.

మనం నేర్చుకున్నవి.

- సామాన్య సమీకరణాలు మన నిత్యజీవిత సమస్యల సాధనలో అనేక రకాలుగా ఉపయోగపడతాయి.
- సమీకరణాన్ని సమానత్వం చేయడానికి మనం
  (i) ఇరువైపులా ఒకే సంఖ్యను కలుపవచ్చు.
  (ii) ఇరువైపులా ఒకే సంఖ్యను తీసివేయవచ్చు.
  (iii) ఇరువైపులా ఒకే సంఖ్యతో గుణించవచ్చు.
  (iv) ఇరువైపులా ఒకే సంఖ్యతో భాగించవచ్చు.
- ఒక సమీకరణం యొక్క ఎడమ వైపు పదాలు (LHS) మరియు కుడివైపు పదాలు (RHS) ఇరువైపులా తారుమారు చేసిననూ సమానత్వంలో మార్పు ఉండదు.

రేఖలు - కోణములు 4

4.0 పరిచయం

క్రింది తరగతులలో కొన్ని జ్యామితీయ భావనలను గూర్చి నేర్చుకొనియున్నారు. వీటిని గూర్చి మరికొన్ని విషయాల్ని సరదాగా నేర్చుకుందాం!

అభ్యాసం - 1

1. కింది వాటికి పేర్లివ్వండి.

(i) (ii) (iii) (iv)

2. కింది వానిని సూచించు పటాలను గీయండి.

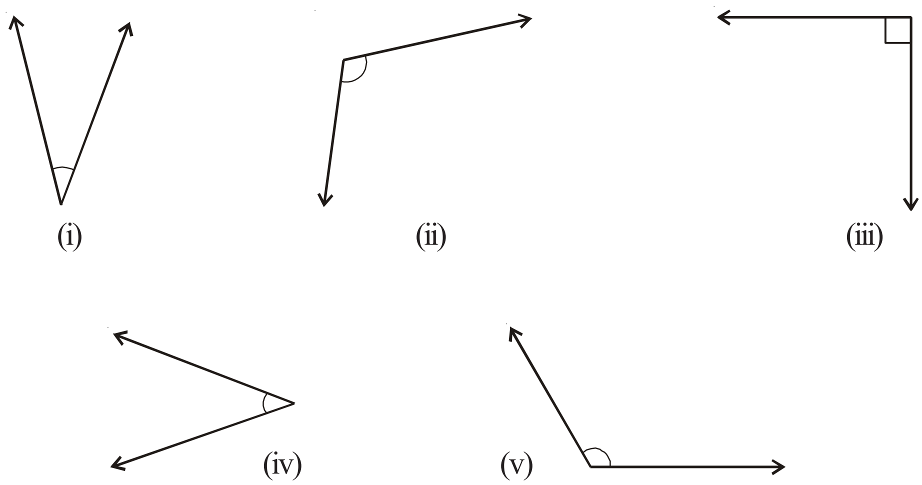
(i) $\overrightarrow{OP}$ (ii) బిందువు X (iii) $\overleftrightarrow{RS}$ (iv) $\overline{CD}$

3. కింద ఇవ్వబడిన పటములో సాధ్యమైనన్ని రేఖాఖండాల పేర్లను తెలపండి.

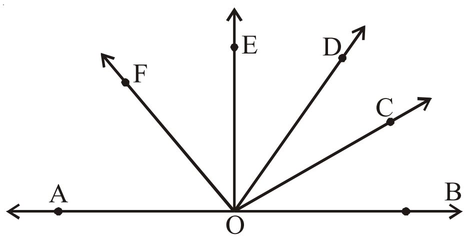
4. నీ పరిశీలనలో నీవుగమనించిన కోణములకు సంబంధించిన ఏవేని ఐదు ఉదాహరణలిమ్ము.

ఉదా : కత్తెరనుపయోగించునపుడు, రెండు పదునైన అంచుల మధ్యకోణం.

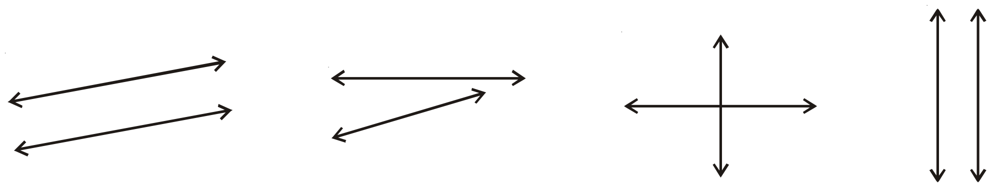
5. కింద ఇవ్వబడిన కోణాలలో ఏవేవి అల్ప, లంబ మరియు అధిక కోణాలో గుర్తించండి.



6. క్రింద ఇవ్వబడిన పటము నుంచి సాధ్యమైనన్ని కోణాలను గుర్తించుము. అందులోఏవేవి అల్ప, లంబ, అధిక కోణాలో తెలుపుము.

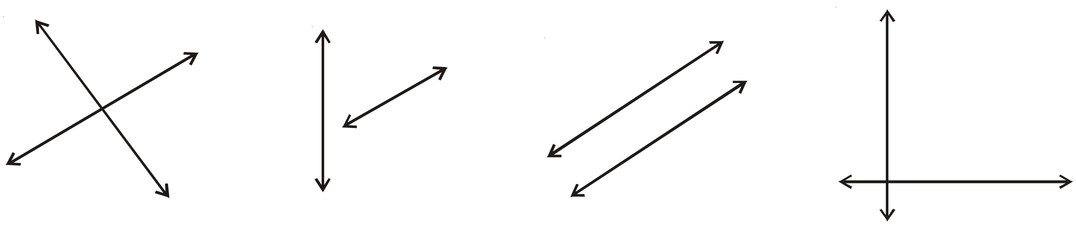


7. కిందివానిలో ఏ రేఖల జతలు సమాంతరములు? ఎందుకు?



(i) (ii) (iii) (iv)

8. కింద ఇవ్వబడిన రేఖల జతలలో ఏవి ఖండన రేఖలు.



(i) (ii) (iii) (iv)

4.1 కోణాల జతలను గూర్చి నేర్చుకుందాం

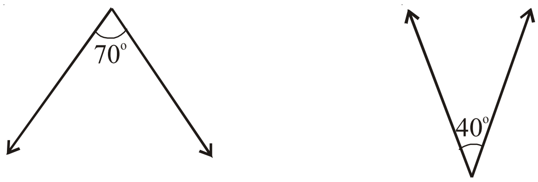
కొన్ని కోణాలను ఎలా గుర్తించాలో ముందు అభ్యాసంలో నేర్చుకున్నాం. ఇపుడు మరికొన్ని కోణాలను, వివిధ కోణాల జతలను గూర్చి నేర్చుకొందాం!

4.1.1 పూరక కోణాలు

ఏవేని రెండు కోణాల మొత్తం 90^0 కు సమానమైతే ఆ కోణాలను ఒకదానికి మరొకటి పూరక కోణాలు అంటాం.

పై కోణాలు 30^0, 60^0 లను పూరక కోణాలు అంటాం. ఎందుకనగా $30^0 + 60^0 = 90^0$.

30^0 కు 60^0 ని, 60^0 కు 30^0 ని పూరక కోణమని కూడా అంటాం.



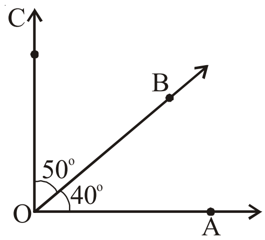
పై పటంలో ఇవ్వబడిన 70^0, 40^0 పూరక కోణాలు కావు. ఎందుకనగా $70^0 + 40^0 \neq 90^0$.

ప్రయత్నించండి.

నీకు ఇష్టం వచ్చిన ఏవేని ఐదుజతల పూరక కోణాలను గీయండి.

ఇవి చేయండి.

$\angle AOB = 40^0$ అగునట్లు గీయండి. 'O' ను శీర్షముగా $\overrightarrow{OB}$ తొలికిరణంగా $\angle BOC = 50^0$ అగునట్లు గీయండి.

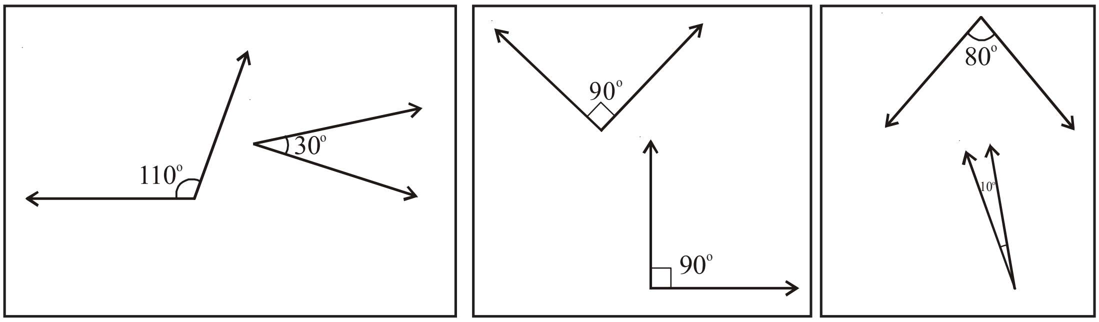


ఈ రెండుకోణాల మొత్తం 90^0, అనగా ఆ మొత్తం ఒకలంబకోణాన్ని ఏర్పరుస్తుంది.

మరియొక జతకోణాలు 60^0 మరియు 50^0 లుగా తీసుకొని పై విధంగా చేయండి. అవికూడా పూరక కోణాలను ఏర్పరుస్తాయా? ఏర్పరచవా? ఎందుకు?

అభ్యాసం - 2

1. క్రింది వానిలో ఏ జతకోణాలు పూరక కోణాలవుతాయి?



(i) (ii) (iii)

2. క్రింది ఇవ్వబడిన కోణాలకు పూరక కోణాలను కనుగొనండి.

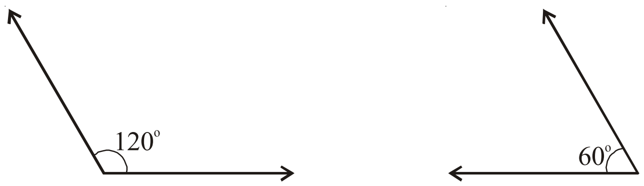
   (i) 25^0 (ii) 40^0 (iii) 89^0 (iv) 55^0

3. రెండుకోణాలు ఒకదానికొకటి పూరకాలు మరియు సమానము. ఆ కోణాలను కనుగొనండి.

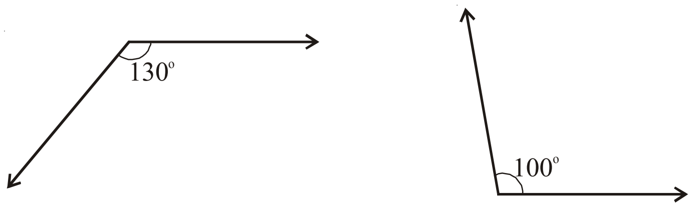
4. "పూరక కోణాలు ఎల్లప్పుడూ అల్పకోణాలు" అంటున్నది మానస. నీవు ఏకీభవిస్తావా? ఎందుకు?

4.1.2 సంపూరక కోణాలు

ఏవేని రెండు కోణాల మొత్తం 180^0 అయిన ఆ కోణాలను ఒకదానికి మరొకటి సంపూరక కోణము అంటారు.



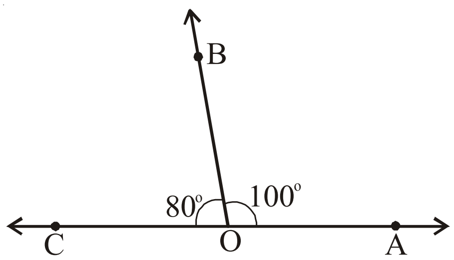
పైన ఇవ్వబడిన కోణాలు 120^0, 60^0 ల మొత్తం 180^0. కావున అవి సంపూరకాలు. అనగా 120^0,లు 60^0కు, 60^0 లు 120^0 కి సంపూరక కోణాలు.



130^0 మరియు 100^0 సంపూరక కోణాల జతకాదు. ఎందుకు?

ఇవి చేయండి.

$\angle AOB = 100^0$ అగునట్లు గీచి, $\overrightarrow{OB}$ ఉమ్మడి కిరణముగా O ఉమ్మడి శీర్షముగా ఉండునట్లు $\angle BOC = 80^0$ అగునట్లు గీయండి.



పై రెండు కోణాల కలయిక 180^0 లతో ఒక సరళ కోణము ఏర్పడటం మనం గమనించవచ్చు. అనగా 100^0 మరియు 80^0 లు సంపూరక కోణాలు.

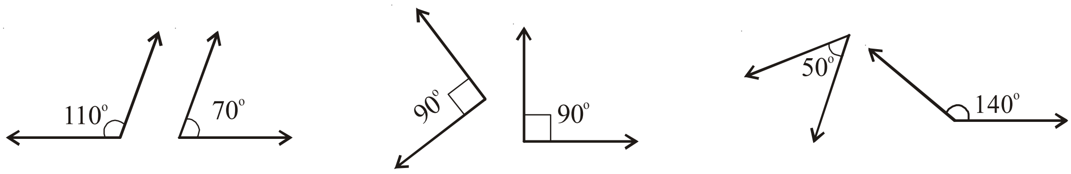
130^0 మరియు 70^0 సంపూరక కోణాలేనా? ఎందుకు?

ప్రయత్నించండి.

నీకు ఇష్టమైన ఏవేని ఐదు జతల సంపూరక కోణాలను రాయండి.

అభ్యాసం - 3

1. కింది వానిలో ఏవి సంపూరక కోణాల జతలు?



(i) (ii) (iii)

2. కింది కోణాలకు సంపూరక కోణాలను కనుగొనుము.

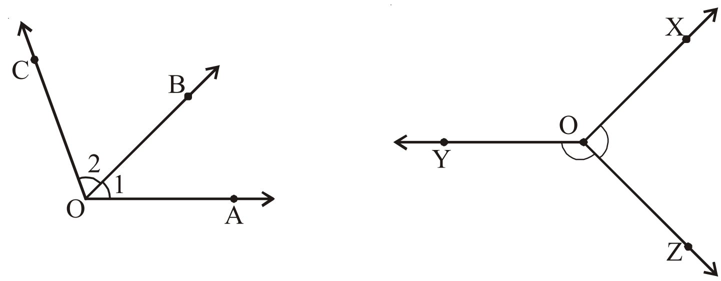
   (i) 105^0 (ii) 95^0 (iii) 150^0 (iv) 20^0

3. "రెండు అల్పకోణాలు సంపూరకాలు కానేరవు" సమర్థింపుము.

4. రెండు కోణాలు సమానములు మరియు సంపూరకాలు. అవి ఏవి?

4.1.3 ఆసన్నకోణాలు

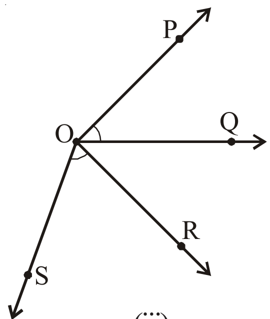
ఉమ్మడి భుజము మరియు ఉమ్మడి శీర్షములు గల కోణాలను "ఆసన్నకోణాలు" అంటాం.



(i) (ii)

పటము (i) లో $\angle AOB$, $\angle BOC$ లు ఆసన్నకోణాలు. ఎందుకనగా వాటికి ఉమ్మడి శీర్షము 'O', ఉమ్మడి భుజము $\overrightarrow{OB}$ ఉన్నాయి.

పటము (ii) లో ఆసన్నకోణాలు ఉన్నాయా? ఉంటే ఉమ్మడి శీర్షమేది? ఉమ్మడి భుజాలు ఏవి?



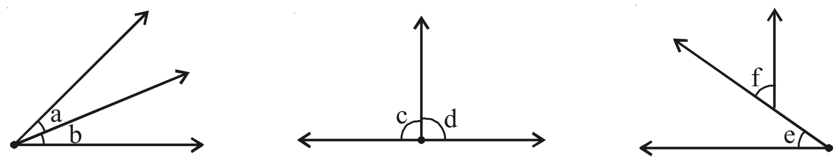
(iii)

పటము (iii) ని చూడండి $\angle POQ$ మరియు $\angle ROS$ లు ఆసన్నకోణాలేనా? ఎందుకు?

ఈ పటములో ఏ, ఏ కోణాలు ఒకదానికొకటి ఆసన్న కోణాలు అవుతాయి? ఎందుకివి ఆసన్న కోణాలు అవుతాయని భావిస్తున్నావు?

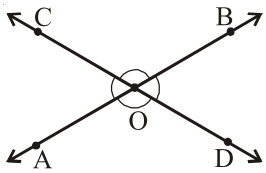
అభ్యాసం - 4

1. కింది వాటిలో ఏవి ఆసన్న కోణాలు?



(i) (ii) (iii)

2. కింది పటము లోని ఆసన్నకోణాలన్నింటినీ పేర్కొనండి? ఎన్ని జతల ఆసన్నకోణాలు ఏర్పడతాయి? వాటిని ఎందుకు ఆసన్న కోణాలు అని అంటాం?



3. రెండు ఆసన్న కోణాలు సంపూరకాలు అవుతాయా? పటము గీచి చూపండి.

4. రెండు ఆసన్నకోణాలు పూరకాలు అవుతాయా? పటముగీచి చూపండి.

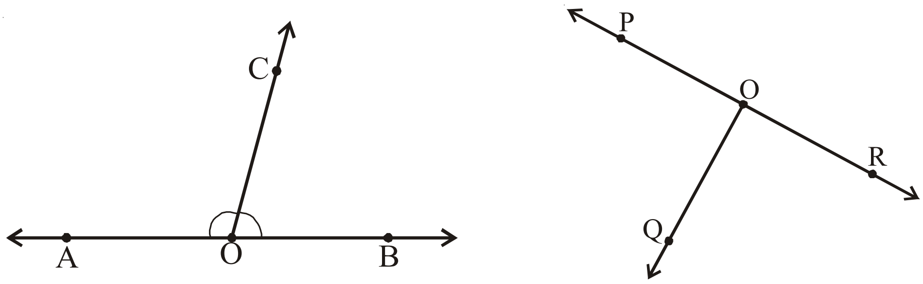
5. దైనందిన జీవితములో ఆసన్నకోణాలకు ఏవేని నాలుగు ఉదాహరణ లివ్వండి.

   ఉదా : సైకిలు చక్రపు చువ్వల మధ్యకోణాలు

   (i) ____________________ (ii) ____________________

   (iii) ____________________ (iv) ____________________

4.1.3 (అ) రేఖీయ ద్వయము



(i) (ii)

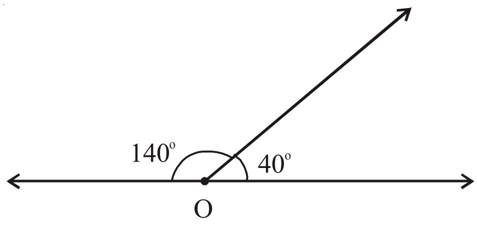
పటము (i) లో $\angle AOC$ మరియు $\angle BOC$ లు ఆసన్న కోణాలు. వాటి మొత్తం తెలుసా? ఈ రెండు కోణాల కలయిక ఒక సరళ కోణము ఏర్పరుస్తుంది. పటము (ii) లో $\angle POQ$, $\angle ROQ$ లు సరళకోణాన్ని ఏర్పరుస్తాయి.

ఒక జత ఆసన్న కోణాల మొత్తం 180^0 అయితే దానిని 'రేఖీయ ద్వయము' అంటాం.

ఇవి చేయండి

40^0 మరియు 140^0 అనునవి ఆసన్న కోణాలు. ఆ కోణాలు రేఖీయ ద్వయాన్ని ఏర్పరుస్తాయా? పటము గీచి సరిచూడండి.

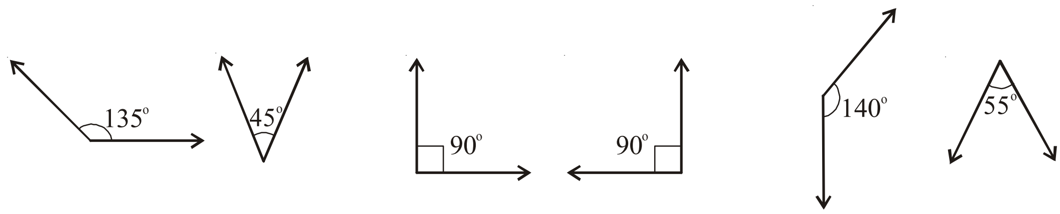
రేణు ఆ పటాన్ని ఇలా గీచింది.



ఆమె సరిగా గీసిందా? ఆ ఆసన్నకోణాలు రేఖీయ ద్వయాన్ని ఏర్పరుస్తాయా?

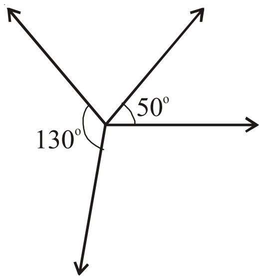
అభ్యాసం - 5

1. కింది జతల కోణాలను ఆసన్నకోణాలుగా గీయండి. ఏవి రేఖీయద్వయమును ఏర్పరుస్తున్నవి?



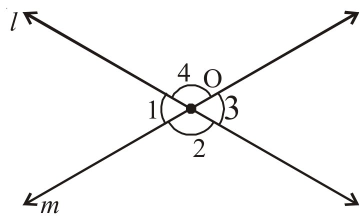
(i) (ii) (iii)

2. నీహారిక 130^0 మరియు 50^0 అను రెండు కోణాలలో రేఖీయ ద్వయమును ఏర్పరచవచ్చునేమో సరిచూడాలను కుని క్రింది విధంగా తయారు చేసింది.



పై పటములో ఆ రెండు కోణాలు రేఖీయ ద్వయాన్ని ఏర్పరచాయని చెప్పవచ్చునా? అలా కాకపోతే నీహారిక చేసిన పొరపాటేమిటి?

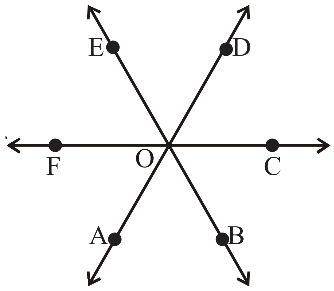
4.1.4 శీర్షాభిముఖ కోణాలు



రెండు రేఖలు ఖండించుకొన్నపుడు ఖండన బిందువు వద్ద ఏర్పడు ఎదురెదురు కోణాలను 'శీర్షాభిముఖ కోణాలు" అంటాం.

'l' మరియు 'm' అనురేఖలు 'O' బిందువు వద్ద ఖండించుకుంటున్నాయి. కోణము $\angle 1$ అనునది కోణము $\angle 3$ నకు ఎదుటి కోణము అలాంటి జత మరొకటి $\angle 2$ మరియు $\angle 4$. కావున, $\angle 1, \angle 3$ లను $\angle 2, \angle 4$ లను శీర్షాభిముఖ కోణముల జతలు అంటాం.

ప్రక్క పటం నందలి శీర్షాభిముఖ కోణాల జతలను తెలుపండి.

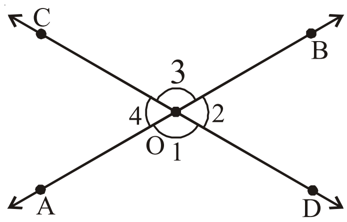


ఇవి చేయండి.

AB, CD అనురేఖలు 'O' వద్ద ఖండించుకొనునట్లు గీయండి.

ఉల్లి పొరకాగితమునుపయోగించి క్రింది పటమునకు నకలును గీచి, ఈ నకలును పటముపైన ఉంచి $\angle AOD$, $\angle BOC$,; $\angle AOC$, $\angle BOD$ తో ఏకీభవించునట్లు భ్రమణము చేయుము. (త్రిప్పుము)

$\angle AOD = \angle BOC$ మరియు $\angle AOC = \angle BOD$ అగుటను మీరు గమనింతురు.

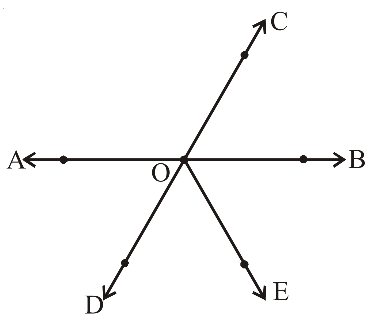


దీనిని బట్టి శీర్షాభిముఖ కోణములు సమానమని చెప్పవచ్చును.

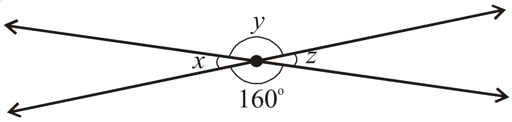
గమనిక : రెండు స్ట్రా' లను తీసుకొని వాటిమధ్య బిందువు వద్ద పిన్నును గుచ్చి ఒకదానిపై మరొకటి వుండునట్లు చేయుము. రెండు స్ట్రాలలో ఏదో ఒకదానిని త్రిప్పినపుడు శీర్షాభిముఖ కోణములు ఏర్పడుట మనము గమనించవచ్చును.

అభ్యాసము - 6

1. కింది పటములో ఒక జత శీర్షాభిముఖ కోణాలను పేర్కొనుము.



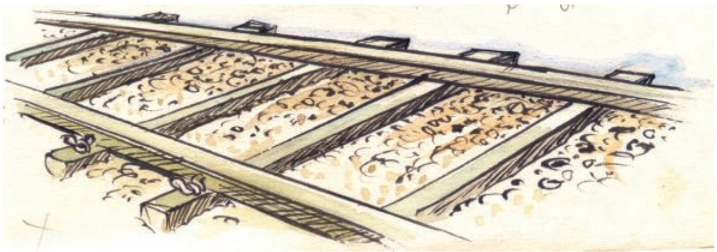
2. కొలవకుండానే x, y మరియు z కోణాల కొలతలను కనుగొనుము.



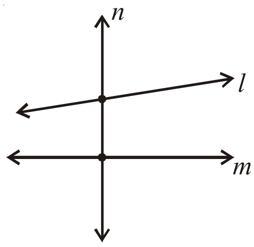
3. మీ పరిసర ప్రాంతాలలో నీవు గమనించిన శీర్షాభిముఖ కోణాలకు ఉదాహరణలిమ్ము.

4.2 తిర్యగ్రేఖలు

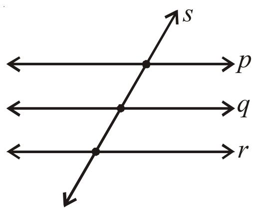
బహుశా మీరు రైలు పట్టాలను గమనించి వుంటారు. కింది పటమును తిర్యగ్రేఖలకు ఉదాహరణగా పేర్కొనవచ్చును.



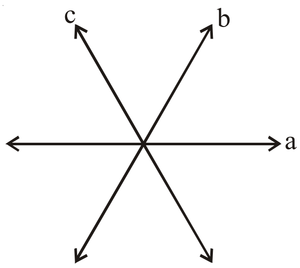
ఒకరేఖ రెండులేక అంతకన్నా ఎక్కువ రేఖలను విభిన్న బిందువుల వద్ద ఖండిస్తే ఆ రేఖను తిర్యగ్రేఖ అంటాం.



పటం (i)



పటం (ii)



పటం (iii)

పటం (i) లో 'l', 'm' అను రెండు రేఖలను 'n' అనురేఖ రెండు విభిన్న బిందువుల వద్ద ఖండిస్తోంది.

కావున 'l' మరియు m'' రేఖలకు 'n' అనేది తిర్యగ్రేఖ.

పటం (ii)లో 'p', 'q' మరియు 'r' అనుమూడు రేఖలను 's' అనురేఖ, మూడు విభిన్న బిందువుల వద్ద ఖండిస్తోంది.

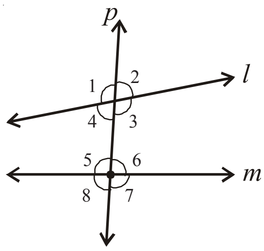
కావున, 'p' 'q' మరియు 'r' అనురేఖలకు 's' అనేది తిర్యగ్రేఖ.

పటం (iii) లో రెండు రేఖలు a మరియు b లను 'c' ఖండిస్తోంది. a మరియు b రేఖల ఖండన బిందువు వద్దనే, 'c' అను రేఖ వాటిని ఖండిస్తోంది. ఈ మూడు రేఖలు ఖండన రేఖలే గానీ ఏరేఖ కూడా మిగిలిన రెండు రేఖలకు తిర్యగ్రేఖ కాదు. కారణము ఏరేఖ కూడా మిగిలిన రెండు రేఖలను విభిన్న బిందువుల దగ్గర ఖండించక పోవడమే.

ప్రయత్నించండి.

రెండు విభిన్న రేఖలకు వీలైనన్ని తిర్యగ్రేఖలను గీయుము.

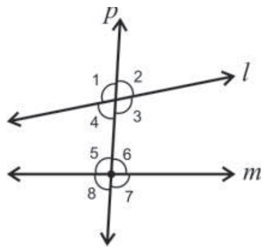
4.2.1 తిర్యగ్రేఖచే ఏర్పడు కోణాలు



రెండు రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించినపుడు 8 కోణాలు ఏర్పడుతాయి. కారణము ప్రతిఖండనకు 4 కోణాలు ఏర్పడటమే. ప్రక్క పటాన్ని పరిశీలించండి.

'l' మరియు 'm' అనురేఖలను 'p' అను తిర్యగ్రేఖ ఖండించగా $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6, \angle 7$ మరియు $\angle 8$ అను 8 కోణాలు ఏర్పడతాయి.

$\angle 1, \angle 2, \angle 7$ మరియు $\angle 8$, కోణాలు 'l' మరియు 'm' రేఖలకు బయట (బాహ్యంలో) వున్నాయి. కావున ఈ కోణాలను బాహ్యకోణాలు అంటాం. $\angle 3, \angle 4, \angle 5$ మరియు $\angle 6$ కోణాలు 'l' మరియు 'm' రేఖలకు లోపల (అంతరంలో) వున్నాయి. కావున ఈ కోణాలను అంతరకోణాలు అంటాం.



ప్రక్కపటాన్ని పరిశీలించండి.

$\angle 1, \angle 2, \angle 7$ మరియు $\angle 8$ కోణాలను బాహ్యకోణాలు అంటాం.

$\angle 3, \angle 4, \angle 5$ మరియు $\angle 6$ కోణాలను అంతర కోణాలు అంటాం.

శీర్షాభిముఖ కోణాలను గూర్చి మనం ఇదివరకే నేర్చుకొని యున్నాము. శీర్షాభిముఖ కోణాలు సమానము అని కూడా మనకు తెలుసు.

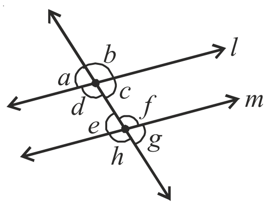
ఈ పటాన్ని చూస్తూ రేణు $\angle 1 = \angle 3$ మరియు $\angle 2 = \angle 4$ అంది.

మరి మిగిలిన రెండు జతల శీర్షాభిముఖ కోణాలేవి? ఇంకా రేణు ఇలా అంటోంది. "ప్రతి బాహ్యకోణము అంతరాభిముఖ కోణానికి జత మరియు ఇలాంటి జతల కోణాలు సమానంగా వుంటాయి". ఈ విషయంలో నీవు రేణుతో ఏకీభవిస్తావా?

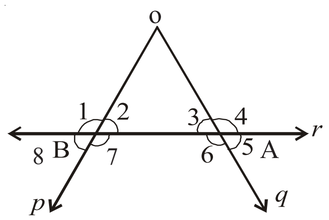
ఇవి చేయండి.

1. (i), (ii) పటాలలో తిర్యగ్రేఖలను గుర్తించండి.

అలాగే అంతర, బాహ్య కోణాలను గుర్తించి కింది పట్టికలో రాయండి.



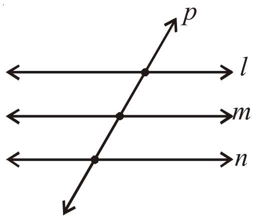
పటం (i)

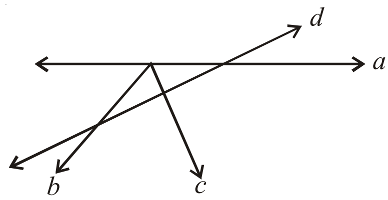


పటం (ii)

పటం	తిర్యగ్రేఖ	బాహ్యకోణాలు	అంతర కోణాలు
(i)			
(ii)			

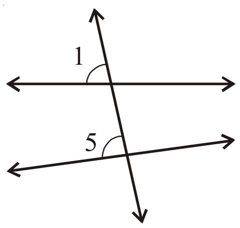
2. కింది పటాలను పరిశీలించి ప్రతి పటములోని తిర్యగ్రేఖలను తెలపండి. ప్రతి పటములో ఏర్పడు కోణాల సంఖ్యను తెలిపి వాటి జాబితాను వ్రాయండి. మరియు అంతర, బాహ్య కోణాలను తెలుపండి.



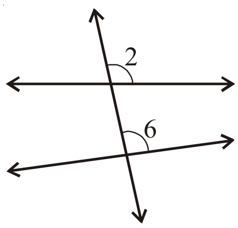


4.2.1 (ఎ) సదృశ కోణాలు (అనురూప కోణాలు)

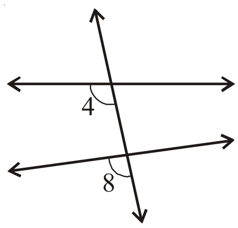
(i), (ii), (iii) మరియు (iv) పటాలను పరిశీలించండి.



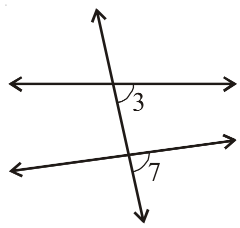
(i)



(ii)

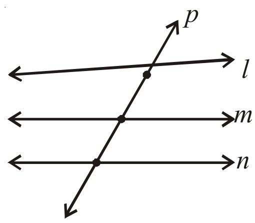


(iii)



(iv)

కింది కోణాల జతలను పరిగణించండి. $(\angle 1, \angle 5), (\angle 2, \angle 6), (\angle 4, \angle 8), (\angle 3, \angle 7)$. ఈ జతలలో కోణాల మధ్య సారూప్యతను గమనించారా? ప్రతి జతలోని కోణాలు, విభిన్న శీర్షాల వద్ద ఏర్పడి, తిర్యగ్రేఖకు ఒకే వైపున వుంటూ, ఒక కోణము బాహ్య కోణముగాను, మరియొక కోణము అంతర కోణముగానూ వున్నది. కావున పై కోణాల జతలలో ప్రతి జతకోణాలను సదృశ (అనురూప) కోణాలు అంటాం.



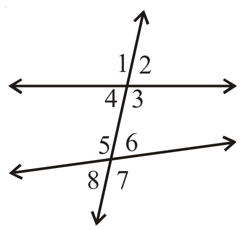
మరి మూడు రేఖలకు ఒక తిర్యగ్రేఖ వుంటే ఏమౌతుంది? ఈ సందర్భములో సదృశ కోణాలేవి? మరియు బాహ్య, అంతర కోణాలు ఎన్ని?

ఒక తిర్యగ్రేఖచే ఖండింపబడే రేఖలసంఖ్య 4, 5 లేక అంతకన్నా ఎక్కువైతే ఏమవుతుంది?

అంతర, బాహ్య కోణాలు మరియు వాటి సదృశ కోణాలను ఊహించగలవా?

4.2.1 (బి) ఏకాంతర, ఏక బాహ్య కోణాలు

ప్రక్క పటమును పరిశీలించి క్రింద ఇవ్వబడిన ధర్మాలు గల కోణాలను కనుగొనుము.

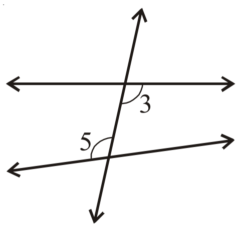


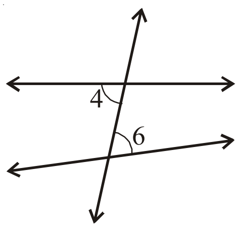
(i) విభిన్న శీర్షాల వద్ద గల కోణాలు

(ii) తిర్యగ్రేఖకు ఇరువైపులా గలకోణాలు

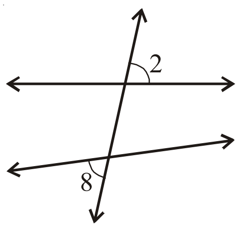
(iii) రెండు రేఖల అంతరములో గల కోణాలు (అంతర కోణాలు)

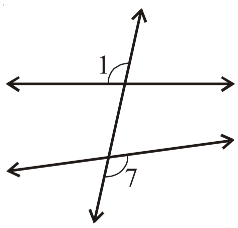
పై ధర్మాలు గల కోణాలను "ఏకాంతర కోణాలు" అంటాం.





పై పటాలనుంచి ($\angle 3$, $\angle 5$) మరియు ($\angle 4$, $\angle 6$) కోణాల జతలను ఏకాంతర కోణాలు అంటాం. అలాగే ఏక బాహ్య కోణాలను కనుగొందాం!

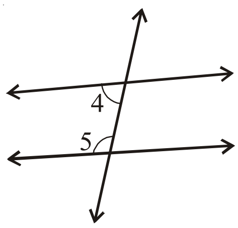


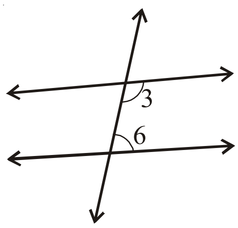


పై పటాలనుంచి $\angle 2$, $\angle 8$ మరియు $\angle 1$, $\angle 7$ కోణాల జతలను ఏక బాహ్యకోణాలు అంటాం.

4.2.1 (సి) తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపున గల అంతర కోణాలు

అంతర కోణాలు తిర్యగ్రేఖకు ఒకే వైపున కూడా ఉండవచ్చును.

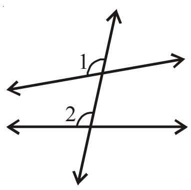




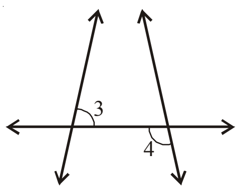
పై పటముల నుంచి ($\angle 4$, $\angle 5$) మరియు ($\angle 3$, $\angle 6$) అనునవి తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపున గల అంతరకోణాలు.

ఇవి చేయండి

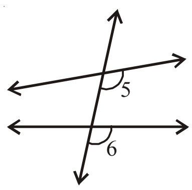
1. ధర్మములను బట్టి కింద ఇవ్వబడిన జతల కోణాల పేర్లు వ్రాయండి.



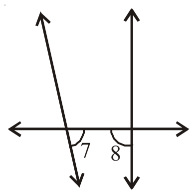
(i)



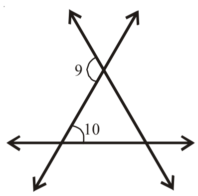
(ii)



(iii)



(iv)



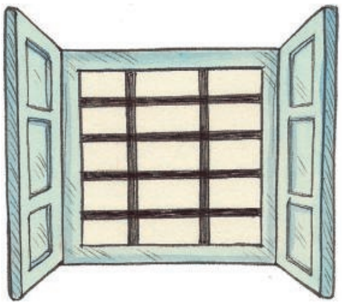
(v)

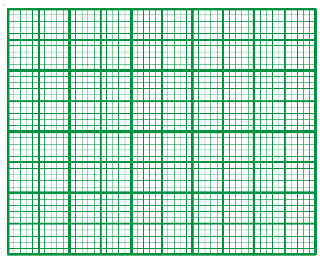
4.2.2. సమాంతర రేఖలపై తిర్యగ్రేఖ

ఒకే తలములోని రెండు రేఖలు ఖండన రేఖలు కాకుంటే, అట్టి రేఖలను సమాంతర రేఖలు అంటాం.

సమాంతర రేఖలపై తిర్యగ్రేఖను గీచినపుడు ఏర్పడు కోణాల ధర్మాలను గూర్చి తెలుసుకుందాం!

క్రింది పటాలను పరిశీలించండి.



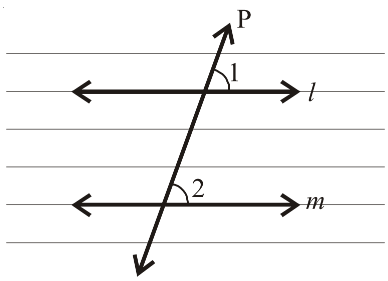


పై పటాలు సమాంతర రేఖలపై గీయబడిన తిర్యగ్రేఖలకు ఉదాహరణ

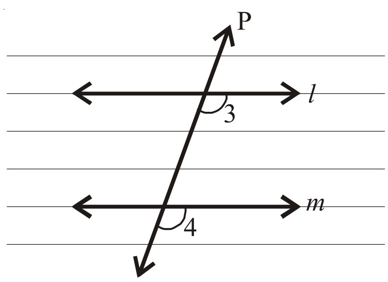
ఇవి చేయండి.

రూళ్ళ కాగితములను తీసుకొని వాటిపై 'l' మరియు 'm' రేఖలను గీచి వాటికి 'p' అను తిర్యగ్రేఖను గీయుము.

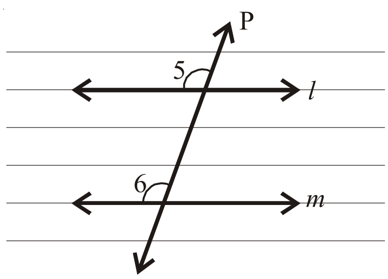
పటములు (i), (ii), (iii) మరియు (iv) లలో చూపబడి ఉన్నట్లు సదృశ కోణాలను గుర్తించండి.



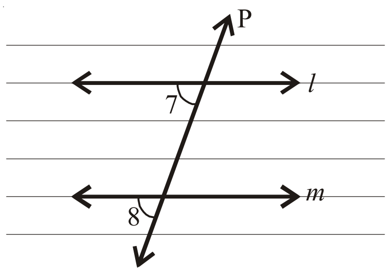
పటం (i)



పటం (ii)



పటం (iii)



పటం (iv)

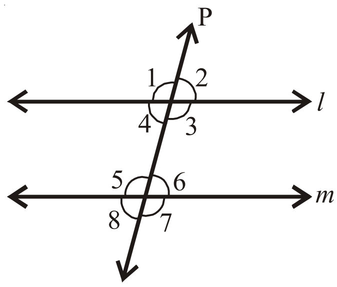
ఉల్లిపొర కాగితము నుపయోగించి పటము (i) కి నకలుగా l, m, p రేఖలు గీయండి. 'p' వెంబడి ఉల్లిపొర కాగితమును జరుపుతూ 'l', 'm' తో ఏకీభవించునట్లు చేయండి. ఉల్లిపొర కాగితము మీది $\angle 1$ అసలు పటములోని $\angle 2$ తో ఏకీభవించుట మనము గమనించగలము. కావున $\angle 1 = \angle 2$

అలాగే మిగిలిన జతలలోని సదృశ కోణాలు కూడా సమానమేనా? ఉల్లిపొర కాగితపు నకలును జరుపుట ద్వారా సరిచూడండి.

రెండు సమాంతర రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించగా ఏర్పడు ప్రతి జతయొక్క సదృశ కోణాలు సమానము.

సమాంతర రేఖలకు చెందిన సదృశ కోణాల సమానత్వ ధర్మాన్ని ఉపయోగించి మరియొక ధర్మాన్ని రాబడదాం.

ప్రక్క పటములో 'l' మరియు 'm' అను రేఖలకు 'p' అనునది తిర్యగ్రేఖ.



కావున అన్నిజతల సదృశ కోణాలు సమానము.

$\angle 1 = \angle 5$

కానీ $\angle 1 = \angle 3$ (శీర్షాభిముఖ కోణాలు)

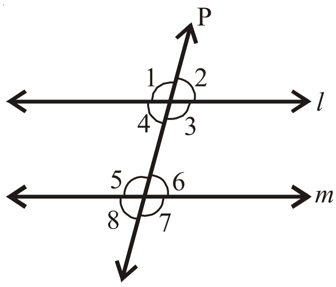
కావున $\angle 3 = \angle 5$

అలాగే $\angle 4 = \angle 6$ అని చూపవచ్చును.

కావున రెండు సమాంతర రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించగా ఏర్పడు ప్రతి జత ఏకాంతర కోణాలు సమానము.

ఏక బాహ్య కోణాలకు కూడా ఈ సమానత్వ ధర్మము వర్తిస్తుందా? ప్రయత్నించి ఋజువు చేయండి.

ఇపుడు తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపున గల అంతర కోణములకు సంబంధించి మరియొక ఆసక్తి కరమైన అంశాన్ని కనుగొందాం!



ప్రక్క పటములో 'l' మరియు 'm' అను సమాంతర రేఖలను 'p' అను తిర్యగ్రేఖ ఖండిస్తోంది.

కావున $\angle 3 = \angle 5$ (ఏకాంతర కోణాలు)

కాని $\angle 3 + \angle 4 = 180^0$ (ఎందుకు?)

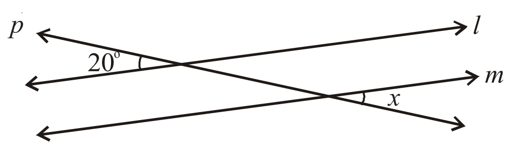
$\angle 4 + \angle 5 = 180^0$

అలాగే $\angle 3 + \angle 6 = 180^0$ (కారణమివ్వండి)

కావున రెండు సమాంతర రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించగా తిర్యగ్రేఖకు ఒకే వైపునగల అంతర కోణాలు సంపూరకాలు.

ఉదాహరణ 1 : క్రింద ఇవ్వబడిన పటములో 'l' మరియు 'm' లు సమాంతర రేఖలు మరియు 'p' ఒక తిర్యగ్రేఖ అయితే '$\angle x$' ను కనుగొనుము.

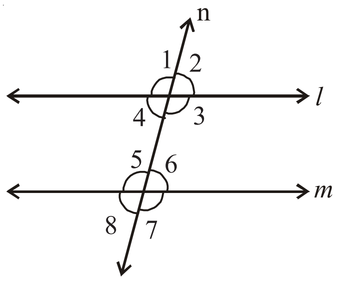
సాధన :



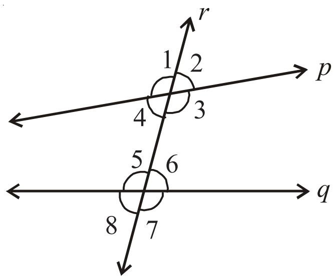
$l \parallel m$ మరియు p ఒక తిర్యగ్రేఖ.

$\angle x$ మరియు 20^0 ఏక బాహ్యకోణాలు. కావున అవి సమానము కావున $\angle x = 20^0$.

ఇవి చేయండి.



పటం (i)



పటం (ii)

(i), (ii) పటాలను ఉల్లిపొర కాగితము నుపయోగించి మీ నోటు పుస్తకాలలో నకలు చేయండి. కోణమానినుపయోగించి ఫలితాలను క్రింది పట్టికలలో నింపండి.

పట్టిక 1 : సదృశ కోణాల కొలతలను పట్టికలో వ్రాయండి.

పటం	సదృశ కోణాల జతలు			
	మొదటి జత	రెండవ జత	మూడవ జత	నాలుగవ జత
(i)	$\angle 1=$	$\angle 2 =$	$\angle 3 =$	$\angle 4 =$ ....
	$\angle 5 =$	$\angle 6 =$	$\angle 7 =$	$\angle 8 =$ ....
(ii)	$\angle 1 =$	$\angle 2 =$	$\angle 3 =$	$\angle 4 =$ ....
	$\angle 5 =$	$\angle 6 =$	$\angle 7 =$	$\angle 8 =$ ....

ఏయే జతల సదృశకోణాలు సమానంగా ఉన్నాయి?

కావున 'l' మరియు 'm' రేఖలను గూర్చి నీవేమి చెప్పగలవు?

అలాగే 'p' మరియు 'q' రేఖలను గూర్చి నీవేమి చెప్పగలవు?

ఏయే రేఖల జతలు సమాంతరాలు?

కావున రెండు రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించినపుడు ఏర్పడు సదృశ కోణాలు సమానమైతే ఆ రెండు రేఖలు సమాంతర రేఖలు.

పట్టిక 2 : మీరు కొలిచిన ఏకాంతర కోణాలను ఈ పట్టికలో పొందుపరచండి.

పటము	ఏకాంతర కోణాల జతలు	
	మొదటి జత	రెండవ జత
(i)	$\angle 3 =$ .... $\angle 5 =$	$\angle 4 =$ .... $\angle 6 =$ ....
(ii)	$\angle 3 =$ .... $\angle 5 =$	$\angle 4 =$ .... $\angle 6 =$ ....

పటాలలో ఏ పటంలోని ఏకాంతర కోణాలు సమానంగా వున్నాయి.

కావున *'l'* మరియు *'m'* రేఖల గూర్చి ఏమి చెప్పగలవు?

'p' మరియు 'q' రేఖల గూర్చి ఏమి చెప్పగలవు?

కాబట్టి రెండు రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించగా ఏర్పడు ఏకాంతర కోణాలు సమానమైతే ఆరేఖలు సమాంతర రేఖలు.

పట్టిక 3 : తిర్యగ్రేఖకు ఒకే వైపునగల అంతర కోణాలను కొలిచి పట్టికలో వ్రాయుము.

పటం	తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపునగల అంతరకోణాలు			
	మొదటి జత		రెండవ జత	
(i)	$\angle 3=$ .... $\angle 6=$	$\angle 3+\angle 6$	$\angle 4=$ .... $\angle 5=$	$\angle 4+\angle 5=$ ....
(ii)	$\angle 3=$ .... $\angle 6=$	$\angle 3+\angle 6$	$\angle 4=$ .... $\angle 5=$	$\angle 4+\angle 5=$ ....

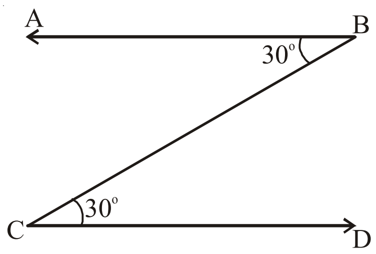
ఏ పటములోని తిర్యగ్రేఖకు ఒకే వైపున గల అంతరకోణాలు సంపూరకాలు? అనగా వాటి మొత్తము 180^0.

'l' మరియు *'m'* రేఖల గూర్చి ఏమి చెప్పగలవు?

'p' మరియు *'q'* రేఖల గూర్చి ఏమి చెప్పగలవు?

కావున రెండు రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించినపుడు తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపుగల అంతర కోణాలు సంపూరక కోణాలయితే ఆ రేఖలు సమాంతర రేఖలు.

ఉదాహరణ 2 : కింద ఇవ్వబడిన పటంలో, రెండు కోణాలను ప్రతి ఒకటి 30^0 ఉండేలా గుర్తించబడినవి. ఐతే AB||CD అవుతుందా? ఎలా?



సాధన : ఇవ్వబడిన కోణాలు, $\overline{BC}$ తిర్యగ్రేఖతో ఏర్పడిన ఒక జత ఏకాంతర కోణాలు

కావున ఈ కోణాలు సమానం, AB||CD

అభ్యాసం - 7

1. కింది ఖాళీలను పూరించండి.

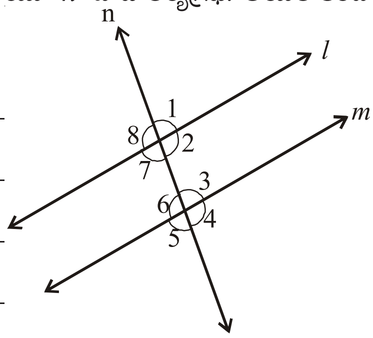
(i) ఒక రేఖ, రెండు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ రేఖలను విభిన్న బిందువుల వద్ద ఖండిస్తే ఆ రేఖను .... అంటారు.

(ii) ఒక జత ఏకాంతర కోణాలు సమానమైతే ఆరేఖలు ....

(iii) తిర్యగ్రేఖకు ఒకే వైపున గల అంతర కోణాలు సంపూరకాలైతే ఆరేఖలు ....

(iv) రెండు రేఖలు పరస్పరము ఖండించుకుంటే ఆ రేఖలకు ఉమ్మడి బిందువుల సంఖ్య ....

2. ప్రక్కన చూపబడిన పటంలో 'l' మరియు 'm' లు సమాంతర రేఖలు మరియు 'n' వాటి తిర్యగ్రేఖ. అయితే కింద ఇవ్వబడిన సందర్భాలలో ఖాళీలను పూరించండి.



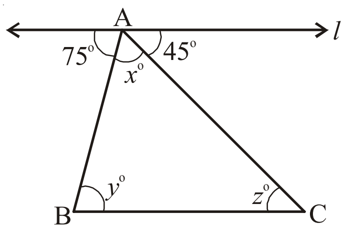
(i) $\angle 1 = 80^0$ అయితే $\angle 2 =$ _______________

(ii) $\angle 3 = 45^0$ అయితే $\angle 7 =$ _______________

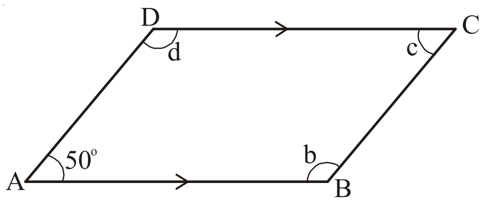
(iii) $\angle 2 = 90^0$ అయితే $\angle 8 =$ _______________

(iv) $\angle 4 = 100^0$ అయితే $\angle 8 =$ _______________

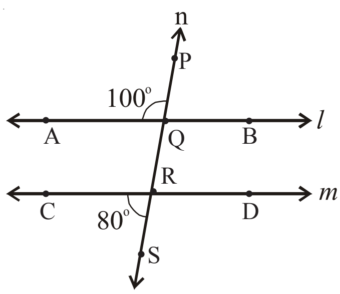
3. ఇవ్వబడిన పటంలో $l \parallel BC$ అయిన x,y, z కోణాల పరిమాణములను కనుగొనుము.



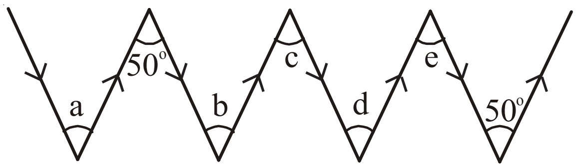
4. ABCD ఒక చతుర్భుజములో AB || DC మరియు AD || BC అయినచో $\angle$ b, $\angle$ c మరియు $\angle$ d లను కనుగొనుము.



5. ఇవ్వబడిన పటములో 'l' మరియు 'm' రేఖలకు 'n' తిర్యగ్రేఖ $l \parallel m$ అవునా?



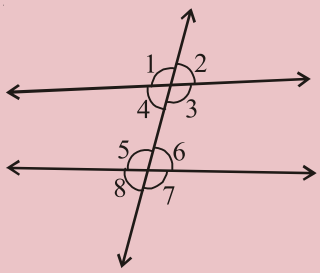
6. కింది పటములో $\angle$a, $\angle$b, $\angle$c, $\angle$d మరియు $\angle$e లను కనుగొనుము. కారణాలను తెలపండి.



(సూచన : రేఖలపై ఒకే దిశలో చూపిన బాణాల గుర్తులు సమాంతర రేఖలను సూచించును).

మనం నేర్చుకున్నవి

1. (i) రెండు కోణాల మొత్తము 90^0 అయినచో ఆ కోణాలను పూరక కోణాలు అంటాం.
   (ii) పరిపూరక కోణాలలో ప్రతి కోణము అల్పకోణము.
2. (i) రెండు కోణాల మొత్తము 180^0 అయినచో ఆ కోణాలను సంపూరక కోణాలు అంటాం.
   (ii) పూరక కోణాలలో ప్రతి కోణము అల్పకోణములేదా లంబకోణం లేదా అధిక కోణం అగును.
   (iii) రెండు లంబకోణాలు ఎల్లప్పుడు పరస్పర సంపూరకాలు.
3. ఉమ్మడి శీర్షము కలిగి ఉమ్మడి భుజానికి ఇరువైపులా గల కోణాలను ఆసన్న కోణాలు అంటాం.
4. పూరక కోణాలు గానీ, సంపూరక కోణాలు గానీ ఆసన్న కోణాలు కానవసరములేదు.
5. ఒక జత ఆసన్నకోణాలు సంపూరకాలయితే వానిని రేఖీయ ద్వయము అంటాం.
6. (i) రెండు రేఖలు ఒక బిందువు వద్ద ఖండించుకుంటే ఖండన బిందువు వద్ద ఏర్పడు ఎదురెదురు కోణాలను 'శీర్షాభిముఖ కోణాలు' అంటాం.
   (ii) శీర్షాభిముఖ కోణాలు ఎల్లప్పుడూ సమానం.
7. (i) రెండు రేఖలను వేర్వేరు బిందువుల వద్ద ఖండించు రేఖను తిర్యగ్రేఖ అంటాం.
   (ii) పటములో చూపినట్లు రెండు రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించినపుడు 8 కోణాలను ఏర్పరచును.



క్రమ సంఖ్య	కోణాల రకాలు	జతల సంఖ్య	కోణాలు
1.	అంతర కోణాలు	—-	$\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$
2.	బాహ్య కోణాలు	—-	$\angle 1, \angle 2, \angle 7, \angle 8$
3.	శీర్షాభిముఖ కోణాలు	4 జతలు	$(\angle 1, \angle 3)$; $(\angle 4, \angle 2)$; $(\angle 5, \angle 7)$; $(\angle 8, \angle 6)$
4.	సదృశ కోణాలు	4 జతలు	$(\angle 1, \angle 5)$; $(\angle 2, \angle 6)$; $(\angle 4, \angle 8)$; $(\angle 3, \angle 7)$
5.	ఏకాంతర కోణాలు	2 జతలు	$(\angle 3, \angle 5)$; $(\angle 4, \angle 6)$
6.	ఏక బాహ్య కోణాలు	2 జతలు	$(\angle 1, \angle 7)$; $(\angle 2, \angle 8)$
7.	తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపున గల అంతర కోణాలు	2 జతలు	$(\angle 3, \angle 6)$; $(\angle 4, \angle 5)$

రెండు సమాంతర రేఖలను తిర్యగ్రేఖచే ఖండించగా ఏర్పడు

(i) ప్రతి జతలోని సదృశకోణాలు సమానము

(ii) ప్రతి జత ఏకాంతర కోణ జతలోని కోణాలు సమానము.

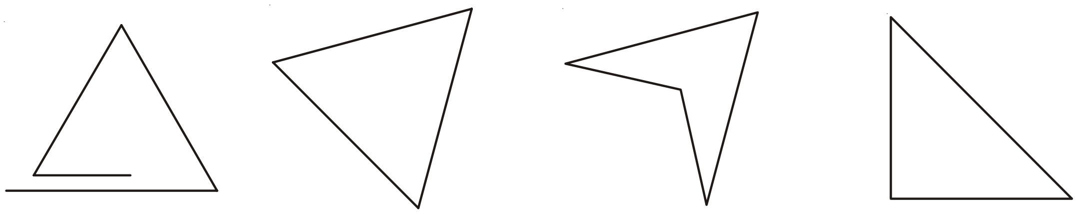
(iii) ప్రతి జత ఏక బాహ్య జతలోని కోణాలు సమానము.

(iv) తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపున గల అంతర కోణాలు సంపూరకాలు.

త్రిభుజము - ధర్మాలు 5

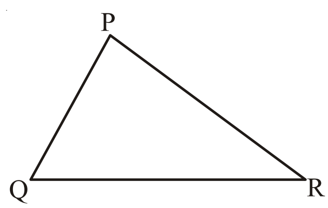
5.0 పరిచయం

మీరు త్రిభుజాలను గురించి క్రింది తరగతులలో నేర్చుకొన్నారు. కింది పటాలను చూడండి. వీటిలో త్రిభుజాలేవో తెలుపండి.



(i) (ii) (iii) (iv)

వీనిలో కొన్ని పటాలు మాత్రమే త్రిభుజాలు కదా! ఇలా ఎందుకు కొన్ని పటాలు మాత్రమే త్రిభుజాలు అవుతున్నాయో నీ స్నేహితులతో చర్చించు? మూడు భుజాలు గల సంవృత పటాలనే త్రిభుజాలంటారని మనకు తెలుసు.



ప్రక్క పటములో త్రిభుజము PQR ను పరిశీలించు. దీనిలో

(i) మూడు భుజాలు కలవు. అవి $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RP}$

(ii) మూడు కోణాలు కలవు. అవి $\angle PQR$, $\angle QRP$, $\angle RPQ$

(iii) మూడు శీర్షాలు కలవు. అవి P, Q, R

ఈ త్రిభుజములో శీర్షము P కి ఎదుటి భుజము QR. మరి శీర్షములు Q,R లకు ఎదుటి భుజాలు ఏవో నీవు చెప్పగలవా?

ఇదే త్రిభుజములో $\angle QPR$ కోణానికి ఎదురుగా వున్న భుజము $\overline{QR}$.

అదే విధంగా $\angle PQR$ కోణానికి ఎదురుగావున్న భుజమేదో నీవు చెప్పగలవా?

ప్రయత్నించండి

ఉమ ఒక త్రిభుజము మూడు సరేఖీయ బిందువులతో ఏర్పడుతుందని భావిస్తున్నది. నీవు ఉమతో ఏకీభవిస్తావా? ఎందుకు?

సూచన : మూడు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ బిందువులు ఒకే రేఖపై వుంటే, వాని సరేఖీయ బిందువులు అంటాం.

గమనిక : LM = రేఖా ఖండము LM పొడవు. $\overline{LM}$ = రేఖా ఖండము LM

$\overrightarrow{LM}$ = కిరణము LM $\overleftrightarrow{LM}$ = సరళరేఖ LM

5.1 త్రిభుజాలు - రకాలు

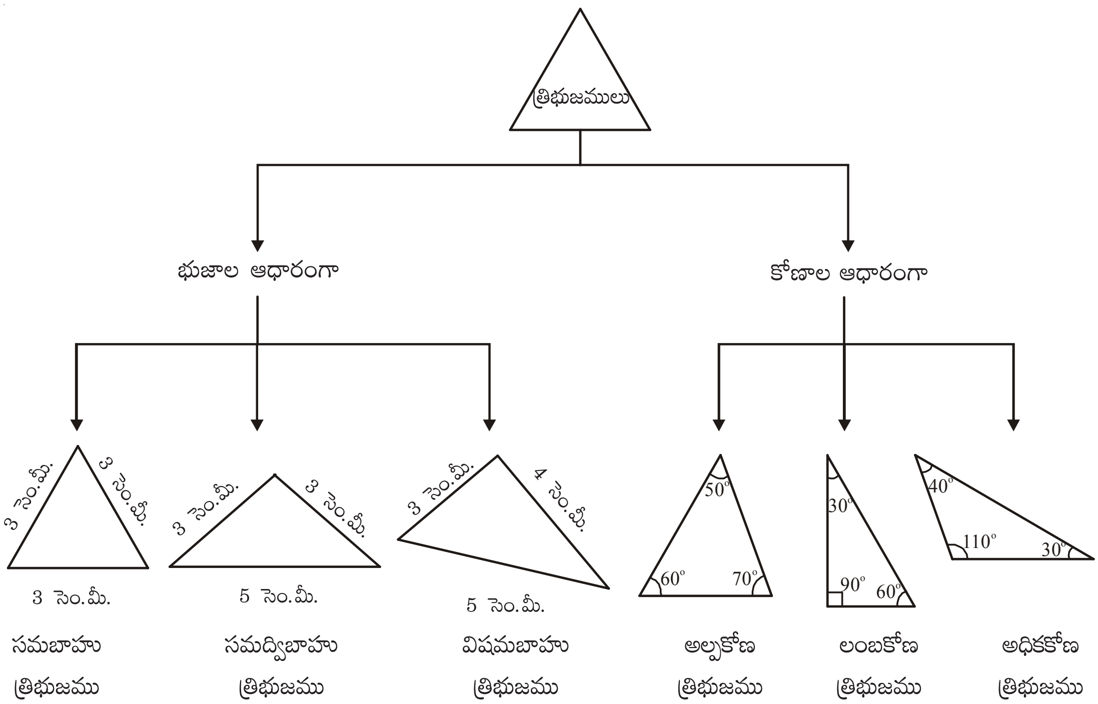
త్రిభుజాలను వాని భుజాల పొడవుల ఆధారంగా మరియు వాని కోణాల ఆధారంగా విభజించవచ్చు.

భుజాల పొడవుల ఆధారంగా త్రిభుజాలను మూడు రకాలుగా విభజించవచ్చు.

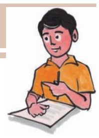
- మూడు భుజాల పొడవులు సమానంగా గల త్రిభుజాన్ని **సమబాహు త్రిభుజము** అంటారు.
- ఏవైనా రెండు భుజాల పొడవులు మాత్రమే సమానంగా గల త్రిభుజాన్ని **సమద్విబాహు త్రిభుజము** అంటారు.
- మూడు భుజాల పొడవులు వేరు వేరుగా వున్న త్రిభుజాన్ని **విషమ బాహు త్రిభుజము** అంటారు.

అదే విధంగా కోణాల ఆధారంగా కూడా త్రిభుజాలను మూడు రకాలుగా విభజించవచ్చు.

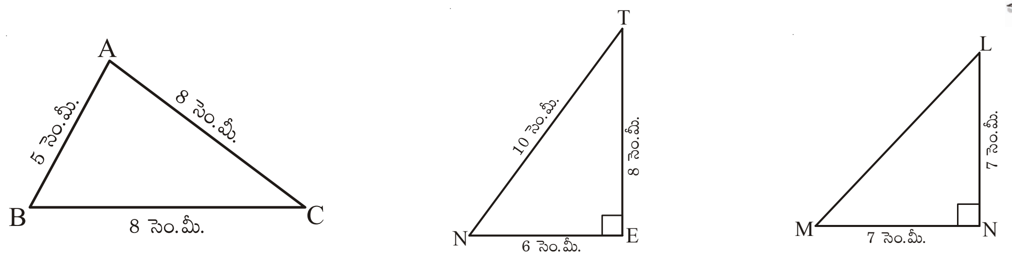
- మూడు కోణాలు అల్పకోణాలైన త్రిభుజాన్ని **అల్పకోణ త్రిభుజ**మంటారు.
- ఒక కోణం అధిక కోణంగా గల త్రిభుజాన్ని **అధికకోణ త్రిభుజ** మంటారు.
- ఒక కోణం లంబకోణంగా గల త్రిభుజాన్ని **లంబకోణ త్రిభుజము** అంటారు.

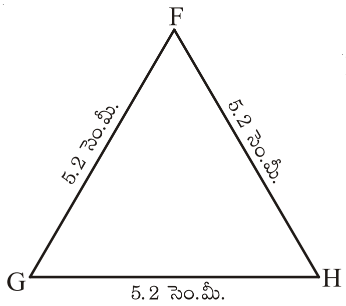


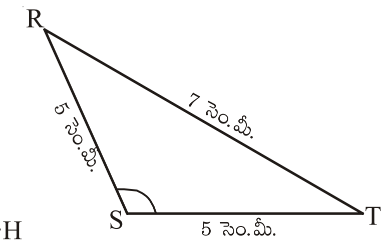
ఇవి చేయండి

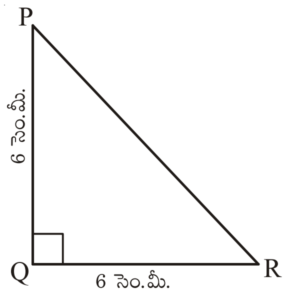


1. కింది త్రిభుజాలను భుజాల ఆధారంగా మరియు కోణాల ఆధారంగా విభజించుము.







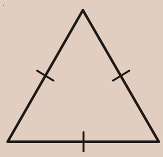
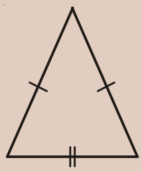
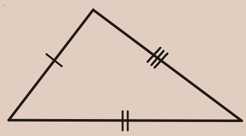
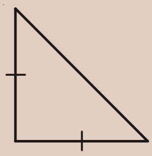
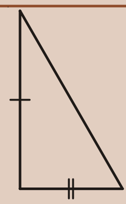
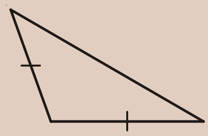
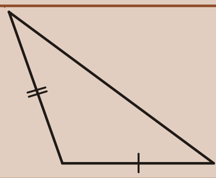


2. ΔABC యొక్క మూడు భుజాలను, మూడు కోణాలను పేర్కొనుము?

3. ΔPQR లో శీర్షము Q కు ఎదురుగా వున్న భుజం ఏది?

4. Δ LMN లో $\overline{LM}$ భుజానికి ఎదురుగా గల కోణం ఏది?

5. ΔRST లో $\overline{RT}$ భుజానికి ఎదురుగా గల శీర్షం ఏది?

	సమబాహు	సమద్విబాహు	విషమబాహు
అల్ప కోణము			
లంబ కోణము			
అధిక కోణము			

ప్రయత్నించండి :

1. పేపరును పైన చర్చించిన వివిధ రకాల త్రిభుజాలుగా కత్తిరించండి. నీ త్రిభుజాలను నీ మిత్రుని త్రిభుజాలతో పోల్చుము

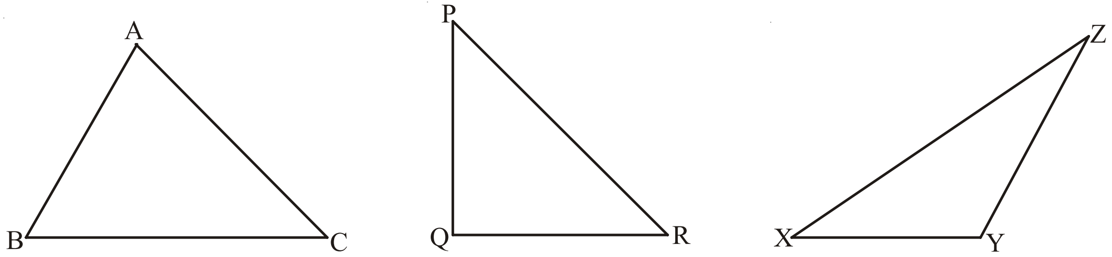
2. ఒక త్రిభుజములో ఒకటి కంటే ఎక్కువ లంబకోణాలు వుండవని రష్మి అంటున్నది. రష్మితో నీవు ఏకీభవిస్తావా? ఎందుకు?

3. రెండు కంటే ఎక్కువ అల్పకోణాలు కలిగిన త్రిభుజాలు వుండవు అని కమల్ అంటున్నాడు. కమల్‌తో నీవు ఏకీభవిస్తావా? ఎందుకు?

5.2 త్రిభుజ భుజాల మధ్య సంబంధము

5.2.1 త్రిభుజములో రెండు భుజాల పొడవుల మొత్తము

కింది పటములో చూపిన విధంగా ఏవైనా మూడు త్రిభుజాలు ΔABC, ΔPQR మరియు ΔXYZ లను గీయండి.



స్కేలు సహాయముతో పై త్రిభుజాల భుజాల పొడవులను కనుగొని వాని విలువలను క్రింది పట్టికలో పొందు పరచండి.

త్రిభుజము	భుజం పొడవు	రెండు భుజాల పొడవుల మొత్తము	ఇది నిజమేనా?	అవును / కాదు
ΔABC	AB =	AB+BC =	AB + BC > CA	
	BC =	BC+CA =	BC + CA > AB	
	CA=	CA+AB =	CA + AB > BC	
ΔPQR	PQ =	PQ+QR =	PQ + QR > RP	
	QR =	QR+RP =	QR + RP > PQ	
	RP =	RP+PQ =	RP + PQ > QR	
ΔXYZ	XY=	XY+YZ =	XY+YZ > ZX	
	YZ=	YZ+ZX =	YZ + ZX > XY	
	ZX	ZX+XY =	ZX + XY > YZ	

పై పట్టిక నుంచి ఒక త్రిభుజంలో ఏవైనా రెండు భుజాల పొడవుల మొత్తము మూడవ భుజం పొడవు కంటే ఎక్కువని మనం గమనించవచ్చు.

ఉదాహరణకు ΔABC లో, $AB + BC > CA$

$$BC + CA > AB$$

$$CA + AB > BC$$

5.2.2 త్రిభుజంలో రెండు భుజాల పొడవుల భేదం

పై ఉదాహరణలో పేర్కొన్న త్రిభుజాలనే తీసుకొనుము. వాని భుజాల పొడవులను క్రింది పట్టికలో పొందుపరచండి.

త్రిభుజము	భుజాల పొడవులు	రెండు భుజాల పొడవుల భేదము	ఇది నిజమేనా?	అవును/కాదు
ΔABC	$AB =$	$BC–CA =$	$BC – AC < AB$	
	$BC =$	$CA–AB =$	$CA – AB < BC$	
	$CA =$	$AB–BC =$	$AB – BC < CA$	
ΔPQR	$PQ =$	$QR–RP =$	$QR – RP < PQ$	
	$QR =$	$RP–PQ =$	$RP – PQ < QR$	
	$RP =$	$PQ–QR =$	$PQ – QR < RP$	
ΔXYZ	$XY =$	$YZ–ZX =$	$YZ – ZX < XY$	
	$YZ =$	$ZX–XY =$	$ZX – XY < YZ$	
	$ZX =$	$XY–YZ =$	$XY – YZ < ZX$	

పై పట్టిక నుంచి ఒక త్రిభుజంలో ఏవైనా రెండు భుజాల పొడవుల భేదము మూడవ భుజం పొడవు కంటే తక్కువని నిర్ధారించగలము. అనగా

ఉదాహరణకు ΔABC లో $AB – BC < CA$; $BC – AB < CA$

$BC – CA < AB$; $CA – BC < AB$

$CA – AB < BC$; $AB – CA < BC$

ప్రయత్నించండి :

ఒక త్రిభుజంలో రెండు భుజాల కొలతలు 6 సెం.మీ మరియు 9 సెం.మీ. అయిన మూడవ భుజం కొలతకు సరిపడు సాధ్యమయ్యే కొలతలన్నింటిని రాయుము.

ఉదాహరణ 1: భుజాల పొడవులు 6 సెం.మీ, 5 సెం.మీ, 8 సెం.మీ గా గల త్రిభుజం ఏర్పడుతుందా?

సాధన : త్రిభుజ భుజాల పొడవులు

AB = 6 సెం.మీ

BC = 5 సెం.మీ

CA = 8 సెం.మీ

ఏవైనా రెండు భుజాల మొత్తం అనగా $AB + BC = 6 + 5 = 11 > 8$

$BC + CA = 5 + 8 = 13 > 6$

$CA + AB = 8 + 6 = 14 > 5$

ఇచ్చట ఏవైనా రెండు భుజాల మొత్తం మూడవ భుజం కంటే ఎక్కువగా వుంది కనుక పైన తెల్పిన కొలతలతో త్రిభుజం ఏర్పడుతుంది.

అభ్యాసం - 1

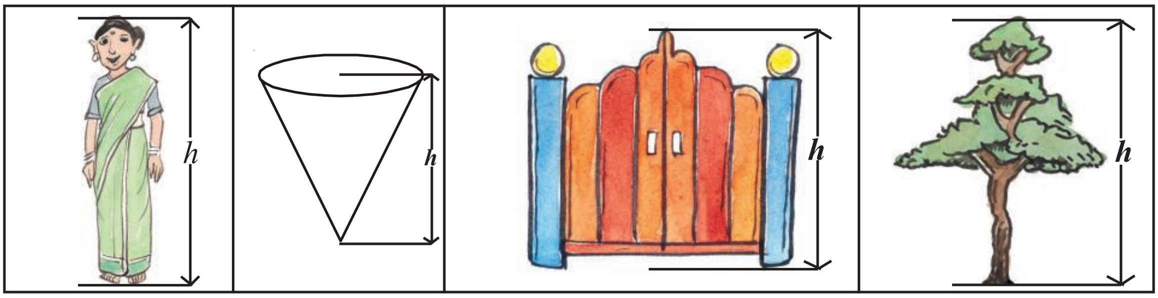
1. ఈ కింది కొలతలు భుజాలుగా తీసుకుంటే ఏవి త్రిభుజాలను ఏర్పరుస్తాయి? ఏవి ఏర్పరచవో సకారణంగా తెలుపుము?

(i) 3 సెం.మీ, 4 సెం.మీ, 5 సెం.మీ.　　(ii) 6 సెం.మీ, 6 సెం.మీ, 6 సెం.మీ.

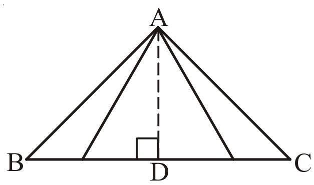
(iii) 4 సెం.మీ, 4 సెం.మీ, 8 సెం.మీ.　　(iv) 3 సెం.మీ, 5 సెం.మీ, 7 సెం.మీ.

5.3 త్రిభుజము - ఎత్తులు :

మన నిత్య జీవితంలో వివిధ సందర్భాలలో 'ఎత్తు' అనే పదాన్ని ఉపయోగిస్తూ ఉంటాము. అయితే క్రింది పటాల ఎత్తును ఎలా కనుగొంటావు.



పై పటాల ఎత్తును కనుగొనుటకు పటములలో చూపిన విధంగా పటము యొక్క పై భాగము నుంచి ఆధారము వరకూ గల దూరాన్ని కొలుస్తాము కదా! ఇదే విధానాన్ని త్రిభుజము యొక్క ఎత్తును కనుగొనుటకు కూడా ఉపయోగిస్తాం.

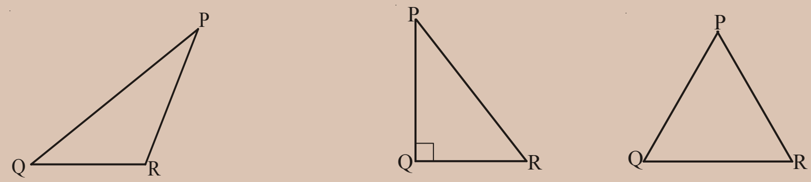


ఇచ్చిన త్రిభుజము ABC లో శీర్షము A నుంచి భూమి $\overline{BC}$ కి గల దూరమునే ఎత్తు అంటాం. అయితే పటములో చూపిన విధంగా A నుంచి $\overline{BC}$ కి అనేక దూరాలను రేఖాఖండాలుగా మనము ఊహించవచ్చు. వీనిలో ఎత్తును ఏ రేఖా ఖండము తెలియజేస్తుంది?

ΔABC లో A నుంచి $\overline{BC}$ కి గీయబడిన లంబమునే ఎత్తు అంటాం. కనుక $\overline{AD}$ ఎత్తు అవుతుంది. ఈ విధమైన ఎత్తులను త్రిభుజంలోని ప్రతి శీర్షం నుంచి ఎదుటి భుజం మీదకు గీయవచ్చు.

ప్రయత్నించండి.

(i) కింది త్రిభుజాలలో P నుంచి $\overline{QR}$ కు అదే విధముగా మిగిలిన రెండు శీర్షాల నుంచి కూడా ఎత్తులను నిర్మించుము. (అవసరమైతే మూలమట్టాలు ఉపయోగించుము).

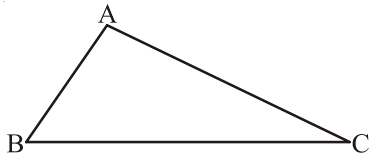


అధిక కోణ త్రిభుజము　　లంబకోణ త్రిభుజము　　అల్పకోణ త్రిభుజము

(ii) ఒక త్రిభుజము యొక్క ఎత్తు ఎల్లప్పుడూ దాని అంతరములోనే వుంటుందా?

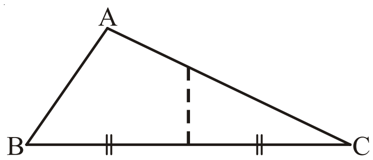
(iii) ఏ త్రిభుజములో రెండు ఎత్తులు దాని రెండు భుజాలుగా వుంటాయో ఊహించగలవా?

5.4 త్రిభుజము - మధ్యగత రేఖలు

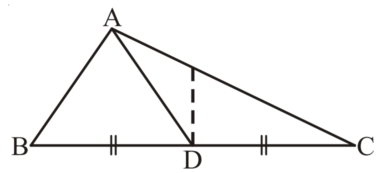


ఒక పేపరు పై త్రిభుజము ABC ని గీచి కత్తిరించుము.

ఇపుడు త్రిభుజము యొక్క B ,C. శీర్షాలు ఒకదానికొకటి ఏకీభవించే విధంగా మడత పెట్టుము. ఈ మడత పటము 1 లో చూపినట్లు BC భుజాన్ని ఖండించును. ఖండన బిందువు BC మధ్య బిందువు అవుతుంది.



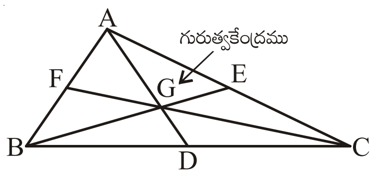
పటం 1



పటం 2

ఈ బిందువును D గా గుర్తించి AD ని కలుపుము. ఇదే విధంగా A,C తో ఏకీభవించునట్లు మరియు A,B తో ఏకీభవించునట్లు మడిచి AC, AB ల మధ్యబిందువులను కనుగొని వానిని వరుసగా E ,F లుగా గుర్తించి BE , CF లను కలుపుము

AD, BE , CF లు వరుసగా శీర్షాలు A,B,C ల నుంచి వాని ఎదుటి భుజాల మధ్యబిందువులను కలుపు రేఖా ఖండాలు. వీనినే త్రిభుజం యొక్క మధ్యగత రేఖలు అంటాము.



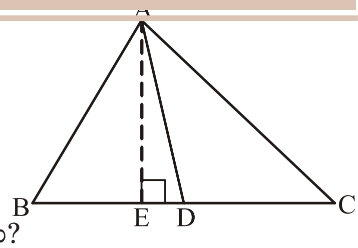
ఒక త్రిభుజంలో మూడు మధ్యగత రేఖలను నిర్మిస్తే అవి పటములో చూపిన విధంగా ఒక బిందువు వద్ద ఖండించుకుంటాయి. ఈ మిళిత బిందువునే గురుత్వ కేంద్రము (G) అంటారు.

ఈ విధంగా త్రిభుజంలో ఒక శీర్షం నుంచి దాని ఎదుటి భుజము యొక్క మధ్య బిందువుకు గీయబడిన రేఖా ఖండమునే మధ్యగత రేఖ అంటాము. ఈ మధ్యగత రేఖల మిళిత బిందువునే గురుత్వ కేంద్రము (G) అంటాము.

ప్రయత్నించండి

లంబకోణ మరియు అధికకోణ త్రిభుజాల ఆకారంలో పేపర్లను కత్తిరించి పైన చెప్పిన విధంగా వాని గురుత్వకేంద్రములను కనుగొనండి.

అభ్యాసం - 2



1. ప్రక్కపటము ΔABC లో BC మధ్య బిందువు D అయిన

   (i) AD ని ______________________ అంటాము

   (ii) AE ని ______________________ అంటాము

2. ఏ రకమైన త్రిభుజంలో దాని రెండు భుజాలే రెండు ఎత్తులుగా వుంటాయి?

3. ఒక త్రిభుజం యొక్క మధ్యగత రేఖ ఎల్లపుడూ ఆ త్రిభుజం యొక్క అంతరములోనే వుంటుందా?

4. ఒక త్రిభుజములో ఎత్తు ఎల్లపుడూ ఆ త్రిభుజం యొక్క అంతరములోనే వుంటుందా?

5. (i) ΔXYZ లో శీర్షము Y కి ఎదురుగా గల భుజమేది?

(ii) ΔPQR లో భుజం PQ కు ఎదురుగా గల కోణమేది?

(iii) ΔABC లో AC భుజానికి కి ఎదురుగా గల శీర్షమేది?

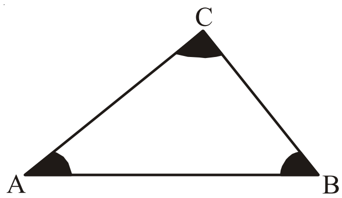
5.5 త్రిభుజ ధర్మాలు

5.5.1 త్రిభుజము - మూడు కోణాల మొత్తము

క్రింది నాలుగు కృత్యాల ద్వారా త్రిభుజం యొక్క ఈ ధర్మాన్ని గురించి నేర్చుకుందాం.

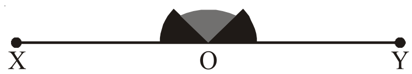
కృత్యము 1

1. ఒక తెల్ల కాగితముపై త్రిభుజము ABC గీచి పటములో చూపిన విధంగా దాని కోణాలకు రంగులు వేయండి.



2. రంగులు వేసిన కోణభాగాలను కత్తిరించండి.
3. వేరే కాగితముపై XY రేఖను గీచి దానిమీద ఒకచోట 'O' ను గుర్తించుము

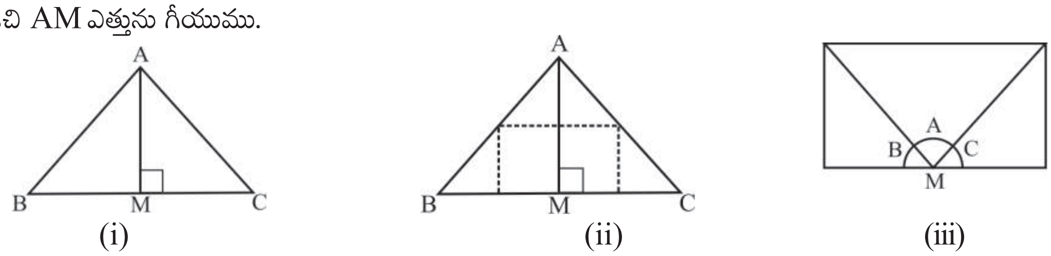
4. కత్తిరించిన మూడు కోణీయ భాగాల శీర్షాలు 'O' వద్ద కలిసే విధంగా క్రింది పటములో చూపిన విధముగా అతికించుము.



ఇలా అతికించినపుడు ఈ మూడూ కలసి ఒక సరళ కోణంగా ఏర్పడటం మనం గమనించవచ్చు. కనుక త్రిభుజములోని మూడు కోణాల మొత్తం 180^o.

కృత్యము 2

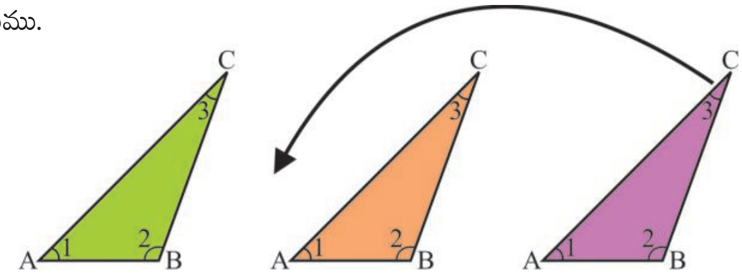
ఒక పేపరును తీసుకొని దీని నుంచి త్రిభుజము ABC ని కత్తిరించుము. ABC త్రిభుజాన్ని తగిన విధంగా మడిచి AM ఎత్తును గీయుము.



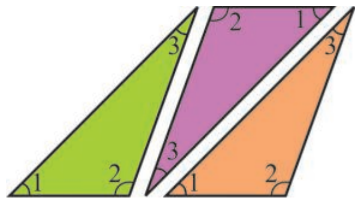
ఇపుడు మూడు శీర్షాలు A,B,C లు M వద్ద కలిసే విధంగా మడత పెట్టిన మూడు కోణాలు A, B,C లు కలసిన ఒక సరళ కోణంగా ఏర్పడటం గమనించవచ్చు. కనుక $\angle A + \angle B + \angle C = 180^o$.

కృత్యము 3

ఒక త్రిభుజం ABC యొక్క మూడు నమూనాలను తయారుచేయుము. వాని కోణాలకు పటములో చూపిన విధంగా 1,2,3 లను గుర్తించుము.



ఈ మూడు నమూనాలను ప్రక్క పటములో చూపిన విధంగా అమర్చుము



బిందువు 'O' వద్ద గల $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$ గురించి నీవేమి చెప్పగలవు?

ఈ మూడు కలసి ఒక సరళకోణంగా ఏర్పడం గమనించవచ్చు. కనుక త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల మొత్తం 180^o.

కృత్యము 4

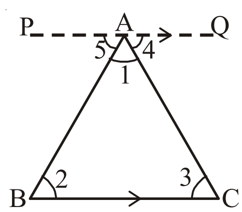
నీ నోట్‌బుక్‌లో ΔABC, ΔPQR, ΔXYZ లను గీయుము. ఈ త్రిభుజాల కోణాల కొలతలను కోణమాని సహాయంతో కనుగొనుము. ఫలితాలను క్రింది పట్టికలో పొందుపరుచుము.

త్రిభుజము	కోణాల కొలతలు	కోణాల మొత్తం
ΔABC	$\angle A$ =....., $\angle B$ =....., $\angle C$ =.....,	$\angle A + \angle B + \angle C =$
ΔPQR	$\angle P$ =....., $\angle Q$ =....., $\angle R$ =.....,	$\angle P + \angle Q + \angle R =$
ΔXYZ	$\angle X$ =....., $\angle Y$ =....., $\angle Z$ =.....,	$\angle X + \angle Y + \angle Z =$

కోణాలను కొలిచేటపుడు కొలతలలో ఏర్పడే చిన్న చిన్న దోషాలను పరిగణలోనికి తీసుకోకుంటే త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల మొత్తం 180^oగా పొందవచ్చు.

ఇపుడు "త్రిభుజములోని మూడు కోణాల మొత్తము 180^o యొక్క తార్కిక నిరూపణను పరిశీలిద్దాం.

త్రిభుజములోని మూడు కోణాల మొత్తం 180^o అని నిరూపించుట :



సామాన్య వివరణ : త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల మొత్తం 180^o

దత్తాంశము : ABC ఒక త్రిభుజము

సారాంశము : $\angle A + \angle B + \angle C = 180^o$

నిర్మాణము : BC కి సమాంతరంగా A గుండా PQ రేఖను నిర్మించుము.

నిరూపణ (ఉపపత్తి) :

కోణాలను పటములో చూపిన విధంగా అంకెలతో గుర్తించుము.

పటం నుండి $\angle 2$	=	$\angle 5$	(ఏకాంతర కోణాలు)
$\angle 3$	=	$\angle 4$	(ఏకాంతర కోణాలు)
$\angle 2 + \angle 3$	=	$\angle 5 + \angle 4$	(పై రెండు సమీకరణాలను కూడటం ద్వారా)
$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$	=	$\angle 1 + \angle 5 + \angle 4$	($\angle 1$ ని రెండు వైపులా కూడటం ద్వారా)
$\angle 1 + \angle 5 + \angle 4$	=	180^o	(సరళరేఖపై ఏదైనా బిందువు వద్ద కోణము)
$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$	=	180^o	
$\therefore \angle A + \angle B + \angle C$	=	180^o	

అనగా త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల మొత్తం 180^o.

ఉదాహరణ 1 : ΔABC లో $\angle A = 30^o$, $\angle B = 45^o$, అయిన $\angle C$ ను కనుగొనుము.

సాధన : ΔABC లో $\angle A + \angle B + \angle C = 180^o$ (త్రిభుజములోని మూడు కోణాల మొత్తం 180^o)

$$30^o + 45^o + \angle C = 180^o$$
$$75^o + \angle C = 180^o$$
$$\angle C = 180^o - 75^o$$
$$\therefore \angle C = 105^o$$

ఉదాహరణ 2 : ΔABC లో $\angle A = 3\angle B$ మరియు $\angle C = 2\angle B$. అయిన త్రిభుజములోని మూడు కోణాలను కనుగొనుము.

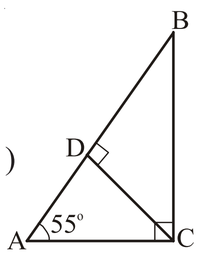
సాధన :

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^o \quad \text{[త్రిభుజములోని మూడుకోణాల మొత్తం]}$$
$$3\angle B + \angle B + 2\angle B = 180^o \quad [\angle A = 3\angle B, \ \angle C = 2\angle B]$$
$$6\angle B = 180^o$$
$$\angle B = 30^o$$

మరియు $\angle A = 3\angle B = 3 \times 30^o = 90^o$

$\angle C = 2\angle B = 2 \times 30^o = 60^o$

ఉదాహరణ 3 : ΔABC లో C వద్ద లంబకోణము కలదు. $CD \perp AB$ మరియు $\angle A = 55^o$ అయిన (i) $\angle ACD$ (ii) $\angle BCD$ (iii) $\angle ABC$ లను కనుగొనుము.



సాధన : ΔACD లో

$$\angle CAD + \angle ADC + \angle ACD = 180^o \quad \text{(త్రిభుజములోని కోణాల మొత్తం } 180^o\text{)}$$
$$\Rightarrow 55^o + 90^o + \angle ACD = 180^o$$

$\Rightarrow \quad 145^{\circ} + \angle ACD = 180^{\circ}$

$\Rightarrow \quad \angle ACD = 180^{\circ} - 145^{\circ} = 35^{\circ}$

$\therefore \angle ACD = 35^{\circ}$

(ii) ΔABC లో

$\angle ACB = 90^{\circ}$

$\Rightarrow \quad \angle ACD + \angle BCD = 90^{\circ}$ {పటము నుంచి $\angle ACB = \angle ACD + \angle BCD$)

$35^{\circ} + \angle BCD = 90^{\circ}$ ((i) నుంచి $\angle ACD = 35^{\circ}$)

$\angle BCD = 90^{\circ} - 35^{\circ} = 55^{\circ}$

(iii) ΔABC లో

$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^{\circ}$ [త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల మొత్తం]

$\angle ABC + 90^{\circ} + 55^{\circ} = 180^{\circ}$ (దత్తాంశము నుంచి)

$\angle ABC + 145^{\circ} = 180^{\circ}$

$\angle ABC = 180^{\circ} - 145^{\circ}$

అనగా $\angle ABC = 35^{\circ}$

ఉదాహరణ 4 : ఒక త్రిభుజములో కోణాలు 2 : 3 : 4 నిష్పత్తిలో కలవు. అయిన ఆ కోణాలను కనుగొనుము.

సాధన : కోణాల నిష్పత్తి = 2 : 3 : 4

నిష్పత్తిలోని పదాల మొత్తము = 2 + 3 + 4 = 9

త్రిభుజంలో కోణాల మొత్తము = 180°

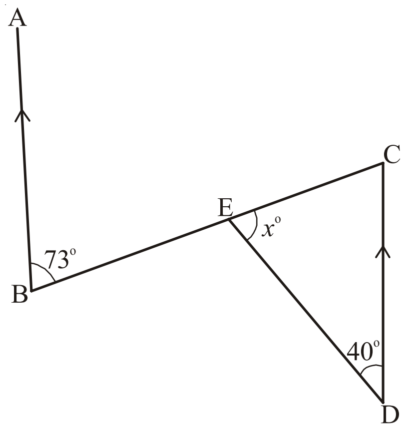
కనుక మొదటి కోణము $= \frac{2}{9} \times 180^{\circ} = 40^{\circ}$

రెండవ కోణము $= \frac{3}{9} \times 180^{\circ} = 60^{\circ}$

మూడవ కోణము $= \frac{4}{9} \times 180^{\circ} = 80^{\circ}$

$\therefore$ త్రిభుజములోని కోణాలు = $40^{\circ}, 60^{\circ}, 80^{\circ}$.

ఉదాహరణ 5 : ప్రక్క పటములో కోణము x ను కనుగొనుము



సాధన : $\angle ECD = \angle ABC = 73^o$

(AB || CD కనుక ఈ రెండూ ఏకాంతర కోణాలు)

ΔECD లో

$\angle CED + \angle EDC + \angle DCE = 180^o$

$x^o + 40^o + 73^o = 180^o$

$x^o + 113^o = 180^o$

$x^o = 180^o - 113^o$

$x^o = 67^o$

ఉదాహరణ 6 : ΔABC లో ఒక కోణము 40^o మరియు మిగిలిన రెండు కోణాలు సమానము. అయిన మిగిలిన రెండు కోణాలను కనుగొనుము.

సాధన : $\angle C = 40^o$ మరియు $\angle A = \angle B = x^o$ అనుకొనుము.

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^o$ (త్రిభుజములోని మూడు కోణాల మొత్తము)

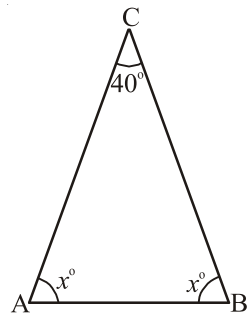
$x^o + x^o + 40^o = 180^o$

$2x^o + 40^o = 180^o$

$2x = 180^o - 40^o$

$2x = 140^o$

$x^o = 70^o$



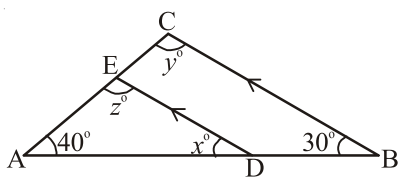
కనుక రెండు సమాన కోణాలలో ప్రతి కోణము 70^o

ఉదాహరణ 7 : ప్రక్క పటము ΔABC లో D,E లు వరుసగా AB,AC ల మీద బిందువులు మరియు DE || BC, $\angle B = 30^o$, $\angle A = 40^o$, అయిన (i) x (ii) y (iii) z విలువలను కనుగొనుము.

సాధన : (i) $\angle ADE = \angle ABC$ (DE||BC కనుక ఈ రెండు సదృశ్య కోణాలు)

$\therefore x^o = 30^o$

(ii) ΔABC లో



(దత్తాంశము)

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^o$

$40^o + 30^o + y^o = 180^o$

$70^o + y^o = 180^o$ విలువలను ప్రతిక్షేపించగా

$\therefore y^o = 180^o - 70^o = 110^o$

(iii) ΔADE లో

$$\angle D + \angle A + \angle E = 180^\circ \quad \text{(త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల మొత్తం)}$$

$$30^\circ + 40^\circ + z^\circ = 180^\circ$$

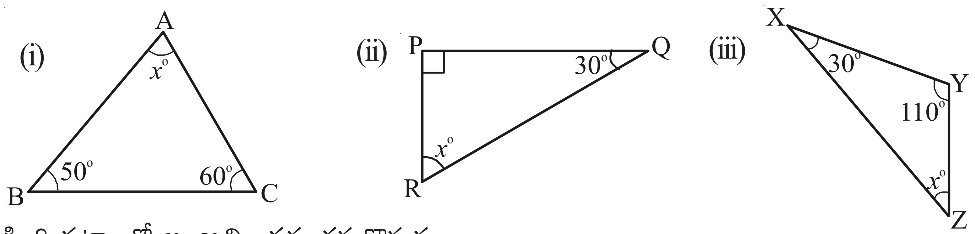
$$70^\circ + z^\circ = 180^\circ$$

$$z^\circ = 180^\circ - 70^\circ$$

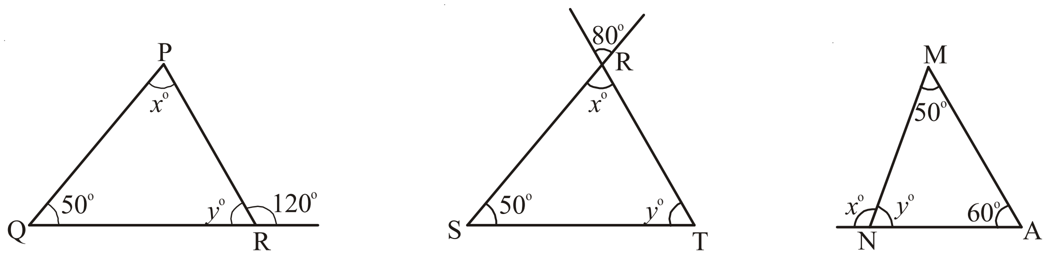
$$z^\circ = 110^\circ$$

అభ్యాసం - 3

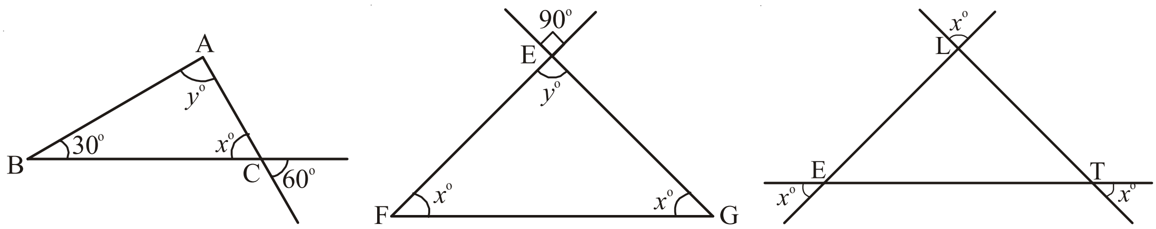
1. కింది త్రిభుజాలలో x^0 విలువను కనుగొనుము.



2. కింది పటాలలో x , y విలువను కనుగొనుము.



(i) (ii) (iii)



(iv) (v) (vi)

3. త్రిభుజాల రెండు కోణాల కొలతలు కింది నీయబడినాయి. మూడవ కోణం కొలతను కనుగొనుము.

   (i) 38°, 102° (ii) 116°, 30° (iii) 40°, 80°

4. ఒక లంబకోణ త్రిభుజములో ఒక అల్పకోణము 30° అయిన రెండవ అల్పకోణం ఎంత?

5. క్రింది వాక్యాలు సత్యమో, అసత్యమో రాయండి?

(i) ఒక త్రిభుజం రెండు లంబ కోణాలను కలిగి వుండవచ్చు.

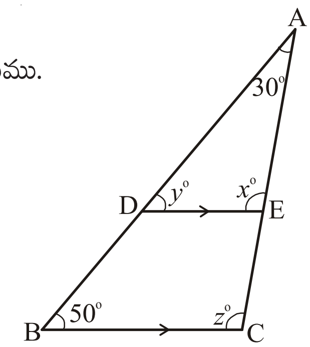
(ii) ఒక త్రిభుజం రెండు అల్ప కోణాలను కలిగి వుండవచ్చు.

(iii) ఒక త్రిభుజం రెండు అధిక కోణాలను కలిగి వుండవచ్చు.

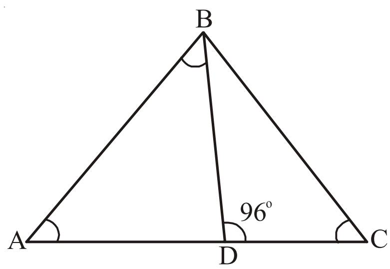
(iv) ఒక త్రిభుజంలోని ప్రతీ కోణము 60^o కంటే తక్కువ వుండవచ్చు.

6. ఒక త్రిభుజంలోని కోణాల నిష్పత్తి $1 : 2 : 3$ అయిన ఆ కోణాలను కనుగొనుము.

7. ప్రక్కపటంలో $DE \| BC$, $\angle A = 30^o$, $\angle B = 50^o$ అయిన x, y, z విలువను కనుగొనుము.



8. పక్క పటంలో $\angle ABD = 3\ \angle DAB$ మరియు $\angle BDC = 96^o$ అయిన $\angle ABD$ ని కనుగొనుము?

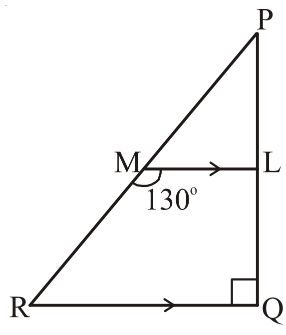


9. ΔPQR లో $\angle P = 2\ \angle Q$ మరియు $2\ \angle R = 3\ \angle Q$, అయిన ΔPQR లోని కోణాలను కనుగొనుము

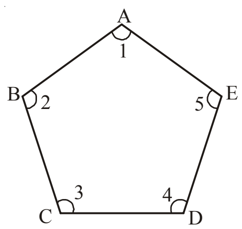
10. ఒక త్రిభుజంలోని కోణాల నిష్పత్తి $1 : 4 : 5$ అయిన ఆ కోణాలను కనుగొనుము

11. ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో రెండు అల్పకోణాలు $2 : 3$. నిష్పత్తిలో కలవు. అయిన ఆ రెండు అల్పకోణాలను కనుగొనుము.

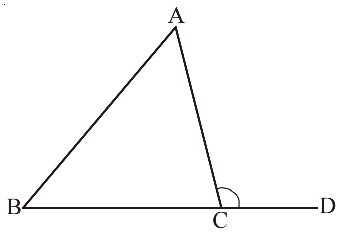
12. ప్రక్క పటము ΔPQR లో Q వద్ద లంబకోణం కలదు $ML \| RQ$ మరియు $\angle LMR = 130^o$. అయిన $\angle LPM$, $\angle PML$ మరియు $\angle PRQ$ లను కనుగొనుము.



13. క్రింది ABCDE పటంలో $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5$ విలువను కనుగొనుము? (సూచన : పటం అంతరంలో ఏదయినా ఒక బిందువు P ను గుర్తించి, అన్ని శీర్షాలకు కలపండి)



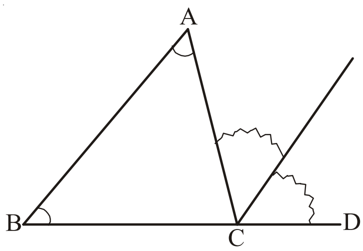
5.5.2 త్రిభుజము - బాహ్యకోణము



పటము (1)

ΔABC త్రిభుజాన్ని గీచి పటము (1) లో చూపిన విధంగా BC భుజాన్ని D వరకూ పొడిగించుము. ఈ సమయములో ఏర్పడిన $\angle ACD$ ని పరిశీలించుము. ఇది త్రిభుజము యొక్క బాహ్యములో కలదు కనుక C వద్ద త్రిభుజం యొక్క బాహ్యకోణము అంటారు.

పటము (1) నుంచి $\angle ACD$ కి $\angle ACB$ ఆసన్న కోణమని గమనించవచ్చు. ఈ కోణములే కాకుండా ABC త్రిభుజములోని మిగిలిన రెండు కోణాలు అనగా $\angle A$ లేదా $\angle BAC$ మరియు $\angle B$ లేదా $\angle CBA$ లను $\angle ACD$. యొక్క అంతరాభిముఖ కోణాలు అంటాము. ఇపుడు A,B కోణాలను కత్తిరించి పటము (2) లో చూపిన విధంగా వానిని C వద్ద ఒక దాని ప్రక్కన ఒక దానిని ఉంచుము..



పటము (2)

ఈ రెండు కోణాలు కలసి $\angle ACD$ కోణం తో ఏకీభవించాయా?

అనగా $\angle ACD = \angle A + \angle B$ అని నీవు చెప్పగలవా?

ఈ కృత్యము నుండి **"ఒక త్రిభుజములో ఒక భుజాన్ని పొడిగించగా ఏర్పడిన బాహ్య కోణము దాని అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానము"**ని మనము చెప్పగలము.

ఇవి చేయండి

త్రిభుజం ABC ని గీచి దానికి C వద్ద $\angle ACD$ బాహ్యకోణమును ఏర్పరుచుము. కోణమాని సహాయంతో $\angle ACD, \angle A, \angle B$ లను కొలవండి.

ఇపుడు $\angle A + \angle B$ ని కనుగొని $\angle ACD$ తో పోల్చండి. $\angle ACD$ మరియు $\angle A + \angle B$ సమానమేనా?

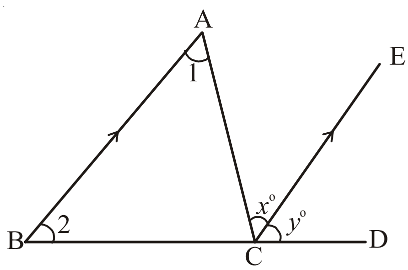
ఒక త్రిభుజములో ఒక భుజాన్ని పొడిగించగా ఏర్పడిన బాహ్య కోణము దాని అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానమని తార్కికంగా కింది విధంగా నిరూపించవచ్చు.

సామాన్య వివరణ : ఒక త్రిభుజములోని బాహ్యకోణము దాని అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానం.

దత్తాంశము : ΔABC లో $\angle ACD$ బాహ్యకోణం.

సారాంశము : $\angle ACD = \angle A + \angle B$

నిర్మాణము : C నుంచి $\overline{BA}$ కు సమాంతరంగా CE ని నిర్మించుము.



నిరూపణ (ఉపపత్తి) :

$\angle 1 = \angle x$ (BA || CE, $\overline{AC}$ తిర్యగ్రేఖ, కనుక ఇవి ఏకాంతర కోణాలు)

$\angle 2 = \angle y$ (BA || CE, $\overline{BD}$ తిర్యగ్రేఖ కనుక ఇవి సదృశ్య కోణాలు)

$\angle 1 + \angle 2 = \angle x + \angle y$ (పటం నుంచి $\angle x + \angle y = \angle ACD$)

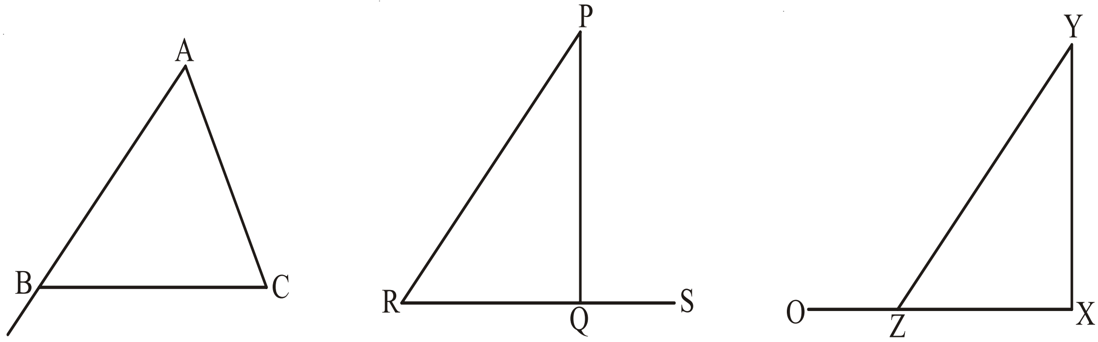
$\angle ACD = \angle 1 + \angle 2$

అనగా త్రిభుజంలో ఒక భుజాన్ని పొడిగించగా ఏర్పడిన బాహ్యకోణం దాని అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానము.

దీనిని త్రిభుజం యొక్క బాహ్యకోణ ధర్మం అంటాము.

ఇది చేయండి

క్రింది పటాల నకలు గీయుము. ప్రతీ సందర్భంలో బాహ్యకోణము దాని అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానమవుతుందేమో సరిచూడుము.



ఉదాహరణ 8 : ప్రక్క పటములో x,y విలువలను కనుగొనుము.

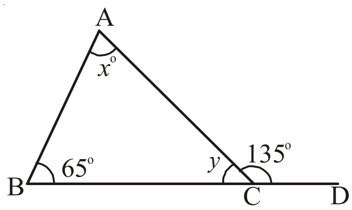
సాధన : $\angle ACD = \angle ABC + \angle BAC$

(బాహ్యకోణం అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానం)

$$135^o = 65^o + x^o$$

$$135^o - 65^o = x^o$$

$$\therefore x^o = 70^o$$



మరియు $\angle ABC + \angle BAC + \angle BCA = 180^o$ (త్రిభుజములోని మూడు కోణాల మొత్తం)

$$65^o + 70^o + y^o = 180^o$$

$$135^o + y^o = 180^o$$

$$y^o = 180^o - 135^o$$

$$\therefore y^o = 45^o$$

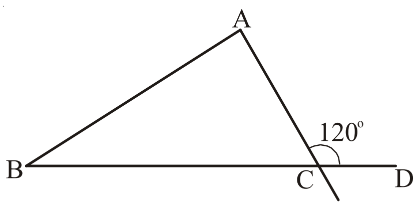
ఉదాహరణ 9 : ఒక త్రిభుజములో ఒక బాహ్యకోణము 120^o దాని అంతరాభిముఖ కోణాలు 1 : 5 నిష్పత్తిలో వున్న త్రిభుజములోని కోణాలను కనుగొనుము.

సాధన : $\angle ACD = 120^o$

$\angle ACD = \angle A + \angle B$

$\angle A + \angle B = 120^o$

కానీ $\angle B : \angle A = 1 : 5$



$$\angle B = \frac{1}{6} \times 120^\circ = 20^\circ$$

$$\angle A = \frac{5}{6} \times 120^\circ = 100^\circ$$

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ (త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల మొత్తం)

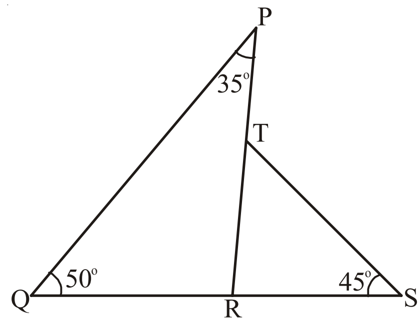
$100^\circ + 20^\circ + \angle C = 180^\circ$

$\therefore \angle C = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

ఉదాహరణ 10 : ప్రక్క పటములో

(i) $\angle PRS$ (ii) $\angle PTS$ (iii) $\angle STR$

(iv) $\angle PRQ$ లను కనుగొనుము.



సాధన : (i) ΔPQR లో $\angle PRS$ బాహ్యకోణం

$\angle RQP$ మరియు $\angle QPR$ లు అంతరాభి ముఖ కోణాలు

$\angle PRS = \angle RQP + \angle QPR$ (బాహ్యకోణం అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానం)

$\angle PRS = 50^\circ + 35^\circ = 85^\circ$

(ii) ΔRST లో $\angle PTS$ బాహ్యకోణం మరియు $\angle SRT, \angle RST$ లు అంతరాభిముఖ కోణాలు

$\therefore \angle PTS = \angle SRT + \angle RST$

$\angle PTS = 85^\circ + 45^\circ$ $(\angle SRT = \angle PRS = 85^\circ)$

$\angle PTS = 130^\circ$

(iii) ΔRST లో

$\angle STR + \angle RST + \angle SRT = 180^\circ$

$\angle STR + 45^\circ + 85^\circ = 180^\circ$

$\angle STR + 130^\circ = 180^\circ$

$\therefore \angle STR = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$

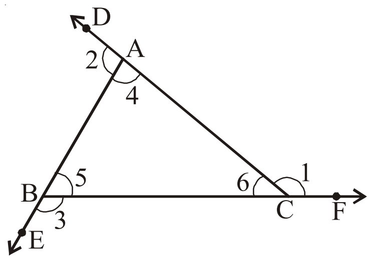
(iv) $\angle PRQ + \angle PRS = 180^\circ$ (రేఖీయద్వయము)

$\angle PRQ + 85^\circ = 180^\circ$

$\angle PRQ = 180^\circ - 85^\circ$

$\angle PRQ = 95^\circ$

ఉదాహరణ 11 : పటములో చూపబడిన ΔABC యొక్క బాహ్యకోణాల మొత్తము 360^o అని చూపుము.



సాధన : $\angle 2 + \angle 4 = 180^o$ (రేఖీయద్వయము)

$\angle 3 + \angle 5 = 180^o$ (రేఖీయద్వయము)

$\angle 6 + \angle 1 = 180^o$ (రేఖీయద్వయము)

పై వానిని ఇరువైపులా కూడగా

$\angle 2 + \angle 4 + \angle 3 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 1 = 180^o + 180^o + 180^o$

$(\angle 4 + \angle 5 + \angle 6) + (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3) = 540^o$

కానీ $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180^o$ అని మనకు తెలుసు (త్రిభుజములోని మూడుకోణాల మొత్తం)

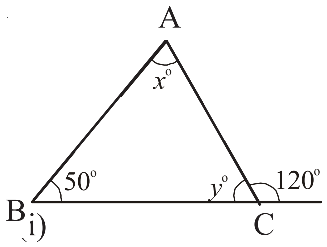
కనుక $180^o + \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 540^o$

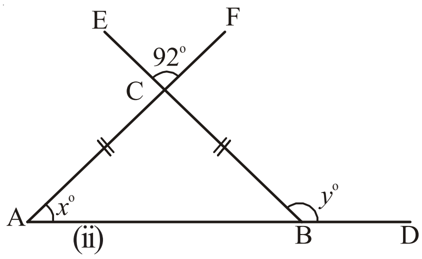
$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 540^o - 180^o$

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 360^o$

$\therefore$ ఒక త్రిభుజములోని బాహ్యకోణాల మొత్తము = 360^o.

ఉదాహరణ 12 : క్రింది పటాలలో x మరియు y విలువలను కనుగొనుము





సాధన : (i) $\angle BAC + \angle ABC = \angle ACD$ (బాహ్యకోణం అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానం)

$x^o + 50^o = 120^o$

$x^o = 120^o - 50^o = 70^o$

$\angle ACB + \angle ACD = 180^o$ (రేఖీయద్వయం)

$y^o + 120^o = 180^o$

$y^o = 180^o - 120^o = 60^o$

(ii) $\angle ACB = \angle ECF = 92^o$ (శీర్షాభిముఖ కోణాలు)

$\angle CAB = \angle CBA$ (సమాన భుజాలకు ఎదురుగా గల కోణాలు సమానం)

ΔABC లో

$\angle BAC + \angle CBA + \angle ACB = 180^o$

$x^o + x^o + 92^o = 180^o$

$2x = 180^o - 92^o = 88^o$

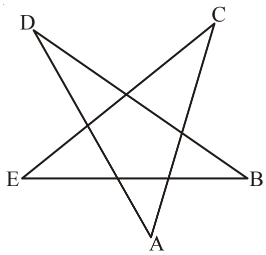
$$\therefore \quad x^o = \frac{88}{2} = 44^o$$

ఇంకా $\angle ABC + y^o = 180^o$ (రేఖీయద్వయం)

$$y^o = 180^o - x^o$$

$$\therefore \quad y^o = 180^o - 44^o = 136^o$$

ఉదాహరణ 13 : ప్రక్కపటములో $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E$ విలువను కనుగొనుము?



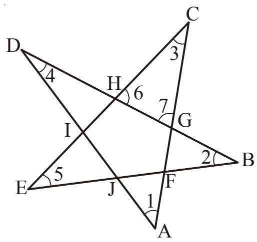
సాధన : పటములో చూపిన విధంగా కోణాలను గుర్తించుము

ΔGHC లో $\angle 3 + \angle 6 + \angle 7 = 180^o$ .... (1)

ΔEHB లో $\angle 6 = \angle 5 + \angle 2$ ....(2)

ΔAGD లో $\angle 7 = \angle 1 + \angle 4$ ....(3)

(బాహ్యకోణము అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానం)



(2), (3) లను (1) లో ప్రతిక్షేపించగా

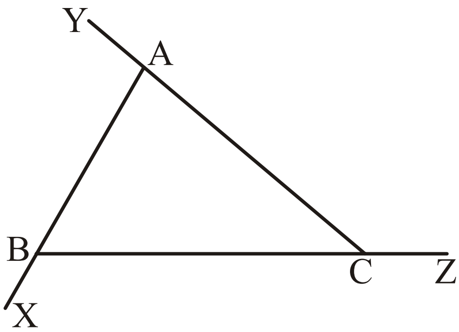
$\Rightarrow \quad \angle 3 + \angle 5 + \angle 2 + \angle 1 + \angle 4 = 180^o$

$\Rightarrow \therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 180^o$

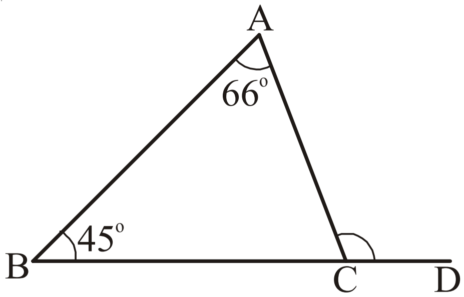
అనగా $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 180^o$

అభ్యాసం - 4

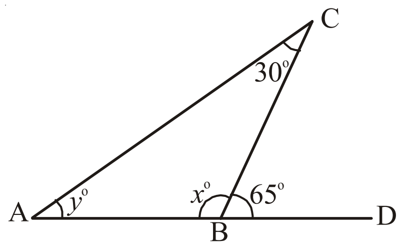
1. ΔABC యొక్క అంతర, బాహ్యకోణాలను పేర్కొనుము.



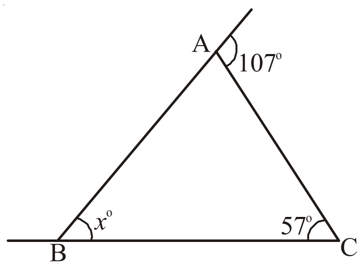
2. ప్రక్కపటము ΔABC లో $\angle ACD$ విలువను కనుగొనుము.

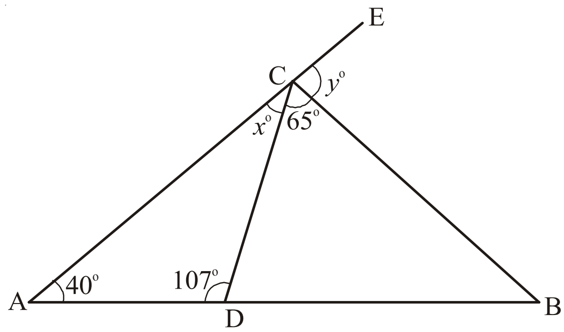


3. x,y కోణాల విలువలను కనుగొనుము.

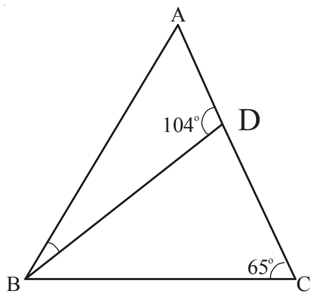


4. క్రింది పటాలలో x, y లను కనుగొనుము.

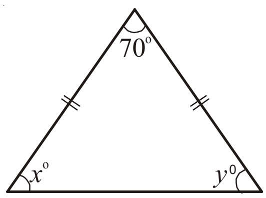




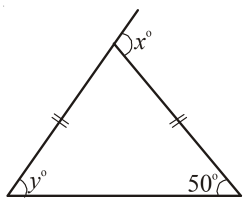
5. పటములో $\angle BAD = 3\angle DBA$, అయిన $\angle CDB$, $\angle DBC$ మరియు $\angle ABC$ లను కనుగొనుము.



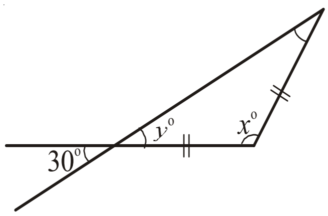
6. క్రింది పటాలలో x, y విలువను కనుగొనుము.



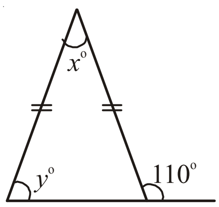
(i)



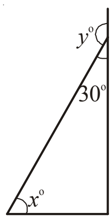
(ii)



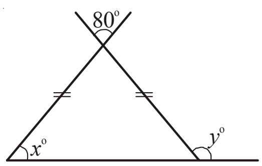
(iii)



(iv)



(v)



(vi)

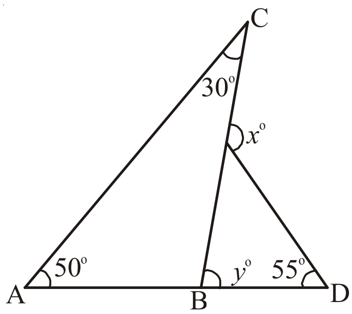
7. ఒక త్రిభుజములో బాహ్యకోణము 125^o మరియు దీని అంతరాభిముఖ కోణాలు 2 : 3. నిష్పత్తిలో వున్న త్రిభుజములోని కోణాలను కనుగొనుము.

8. ΔPQR లో బాహ్యకోణము $\angle PRS = 105^o$ మరియు $Q = 70^o$, అయిన $\angle P$. విలువను కనుగొనుము. $\angle PRS > \angle P$ అవుతుందా?

9. ఒక త్రిభుజములో బాహ్యకోణము 130^o మరియు దీని అంతరాభిముఖ కోణాలలో ఒక దాని విలువ 60^o అయిన రెండవ కోణము విలువ ఎంత?

10. ఒక త్రిభుజములో బాహ్యకోణము 105^o మరియు దీని అంతరాభిముఖ కోణాలు 2 : 5, నిష్పత్తిలో వున్న త్రిభుజములోని కోణాలను కనుగొనుము.

11. పటములో x మరియు y లను కనుగొనుము.



మనం నేర్చుకున్నవి

1 (i) ఏవైనా మూడు రేఖా ఖండాలచే ఏర్పడిన సరళ సంవృత పటమునే త్రిభుజము అంటాము.

(ii) భుజాల పొడవుల ఆధారంగా త్రిభుజాలు మూడు రకాలు

- మూడు భుజాలు సమానంగా గల త్రిభుజాన్ని సమబాహు త్రిభుజమంటారు.
- కనీసం ఏవైనా రెండు భుజాలు సమానంగా గల త్రిభుజాన్ని సమద్విబాహు త్రిభుజము అంటారు.
- మూడు భుజాలు వేరువేరు పొడవులు కలిగియున్న త్రిభుజాన్ని విషమబాహు త్రిభుజము అంటారు.

(iii) కోణాల ఆధారంగా త్రిభుజాలు మూడు రకాలు

- అన్ని కోణాలు అల్పకోణాలైన త్రిభుజాన్ని అల్పకోణ త్రిభుజమంటారు.
- ఒక కోణం అధికకోణంగా గల త్రిభుజాన్ని అధికకోణ త్రిభుజమంటారు.
- ఒక కోణం లంబకోణమైన త్రిభుజాన్ని లంబకోణ త్రిభుజము అంటారు.

2. మూడు భుజాలు, మూడు కోణాలను కలిపి త్రిభుజం యొక్క 6 అంశాలు అంటాము.

3. త్రిభుజ భుజాల పొడవుల మధ్య సంబంధము :

(i) ఏవైనా రెండు భుజాల పొడవుల మొత్తము మూడవ భుజం పొడవు కంటే ఎక్కువ

(ii) ఏవైనా రెండు భుజాల పొడవుల భేదము మూడవ భుజం పొడవు కంటే తక్కువ

4. త్రిభుజములో ఏదైనా ఒక శీర్షం నుంచి ఎదుటి భుజం మధ్య బిందువుకు గీయబడిన రేఖా ఖండమును మధ్యగత రేఖ అంటారు. త్రిభుజములో ఇలాంటి మధ్యగత రేఖలు మూడు వుంటాయి.

5. త్రిభుజములో ఏదైనా ఒక శీర్షం నుంచి దాని ఎదుటి భుజానికి గీయబడిన లంబమును ఎత్తు అంటాము. ఇలాంటి ఎత్తులు త్రిభుజములో మూడింటిని నిర్మించవచ్చు.

6. త్రిభుజములోని మూడు కోణాల మొత్తం 180^o.

7. త్రిభుజంలో ఏదైనా ఒక భుజాన్ని పొడిగించగా ఏర్పడిన బాహ్య కోణము దాని అంతరాభి ముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానము.

సూచన : LM = LM రేఖాఖండం యొక్క పొడవు

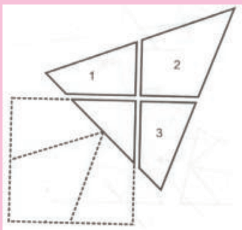
$\overline{LM}$ = రేఖా ఖండం LM

$\overrightarrow{LM}$ = కిరణం LM

$\overleftrightarrow{LM}$ = సరళ రేఖ LM

అట్ట ముక్కలతో తమాషా!

ఒక చతురస్రాకార అట్ట ముక్కను తీసుకోండి. దాని భుజాల మధ్య బిందువును గుర్తించి, పటంలో చూపిన విధంగా రేఖలను గీయండి. వాటి వెంబడి చతురస్రాన్ని 4 భాగాలుగా విభజించి వాటితో ఒక త్రిభుజం ఏర్పడేటట్లు అమర్చండి.



నిష్పత్తి - ఉపయోగాలు 6

6.0 ఉపోద్ఘాతము

నిష్పత్తి మరియు అనుపాతంలను రాశులను పోల్చడానికి ఉపయోగిస్తారని క్రింది తరగతిలో నేర్చుకున్నాము. ఈ తరగతిలో మొదట మనం నేర్చుకున్న వాటిని పునర్విమర్శ చేసుకుని నిష్పత్తులకు ఒక రూపమైన శాతంలను గురించి నేర్చుకుందాం.

6.1 నిష్పత్తి

- మాధురి బరువు 50 కిలోలు మరియు ఆమె కుమార్తె బరువు 10 కిలోలు. మాధురి బరువు ఆమె కుమార్తె బరువుకు 5 రెట్లు అని చెప్పవచ్చు. మరో రకంగా కుమార్తె బరువు తల్లి బరువులో 5వ వంతు అని అనవచ్చు. ఈ విధంగా మాధురి బరువుకు, ఆమె కుమార్తె బరువుకు గల నిష్పత్తి 50:10 లేక 5:1.

  విలోమంగా, కుమార్తె బరువు, తల్లి బరువుల నిష్పత్తి 1:5.

- ఒక తరగతిలో 60 మంది బాలురు, 40 మంది బాలికలు కలరు. బాలుర సంఖ్య బాలికల సంఖ్యకు $\frac{3}{2}$ రెట్లు.

  మరోవిధంగా బాలికల సంఖ్య బాలుర సంఖ్యలో 2/3 వ వంతు. ఈ విధంగా బాలురు మరియు బాలికల నిష్పత్తి 60 : 40 లేదా 3 : 2. విలోమంగా బాలికలు, బాలుర నిష్పత్తి 2 : 3.

- ఆనంద్ వద్ద 100 సెం.మీ. పొడవు గల తీగ మరియు రష్మి వద్ద 5 మీ. పొడవుగల తీగ కలదు. ఆనంద్, రష్మితో "నావద్ద గల తీగ పొడవు నీవద్ద గల తీగ పొడవు కంటే 20 రెట్లు పొడవైనది." అని అన్నాడు. ఇది అసత్యము. ఎందుకంటే 100 సెం.మీ. కన్నా 5 మీ. అనేది చాలా పొడవైనదని నీకు తెలుసు. రష్మి తీగ పొడవును మీటర్లలో తెలుపగా, అదే ఆనంద్ తీగ పొడవును సెం.మీ.లలో తెలుపబడినది. కనుక రెండు పొడవులను ఒకే ప్రమాణాలలోనికి మార్చుకున్నాకనే పోల్చాలి.

1 మీ. = 100 సెం.మీ. అని నీకు తెలుసు. కనుక రష్మీ తీగపొడవు = 5 మీ. = 5×100 = 500 సెం.మీ. ఈ విధంగా రష్మీ, ఆనంద్‌ల తీగల పొడవుల నిష్పత్తి 500 : 100 లేక 5 : 1 మరోవిధంగా రష్మి తీగ పొడవు ఆనంద్ తీగపొడవుకు 5 రెట్లు.

పై అన్ని ఉదాహరణల్లో రాశులను, నిష్పత్తుల రూపంలో పోల్చడం జరిగింది. కనుక **ఒకే ప్రమాణంలో గల రాశుల క్రమానుగత పోలికే నిష్పత్తి. దీనిని ':' గుర్తుతో సూచిస్తాం. రెండు రాశులు a,b నిష్పత్తి a : b మరియు దీన్ని 'a ఈజ్ టు b' అని చదువుతాము. 'a', 'b' లను నిష్పత్తిలోని పదాలు అంటాం. 'a' ని మొదటి పదం లేదా పూర్వ పదం అని, 'b' ని రెండవ పదం లేదా పరపదం అని అంటాం.**

ప్రయత్నించండి.

రాశులను నిష్పత్తి రూపంలో పోల్చడానికి నిత్య జీవితంలోని కొన్ని సందర్భాలను ఆలోచించండి.

అభ్యాసం - 1

1. ₹ 100 మరియు ₹ 10 ల నిష్పత్తి ఎంత? సూక్ష్మ రూపంలో మీ సమాధానాన్ని తెలపండి.

2. సుధ వద్ద ₹ 5 ఉన్నవి. రాధ వద్ద సుధ కన్నా 3 రెట్లు సొమ్ము ఉన్నది. అయితే రాధ వద్ద ఉన్న సొమ్మెంత?

   ఎ) రాధ మరియు సుధల వద్ద నున్న సొమ్ముల నిష్పత్తి ఎంత?

   బి) సుధ సొమ్ముకు, రాధ సొమ్ముకు గల నిష్పత్తి ఎంత?

3. రాజు మరియు రవిలకు 96 చాక్లెట్లను 5 : 7 నిష్పత్తిలో పంచండి.

4. AB రేఖా ఖండం పొడవు 38 సెం.మీ. దీనిపై గల X అనే బిందువు రేఖాఖండాన్ని 9 : 10 నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది. అయిన AX మరియు XB రేఖా ఖండాల పొడవులెంత?

5. ₹ 1,60,000ను 3 : 5 నిష్పత్తిలో రెండు భాగములుగా విభజించబడింది. వీటిలో కనిష్ట భాగమెంత?

6. ఆకు పచ్చరంగు పొందడానికి, ఒక పెయింటర్ పసుపు, నీలం రంగులను 3 : 2 నిష్పత్తిలో కలపాలి. పసుపు రంగును 12 లీటర్లు వాడితే నీలం రంగును ఎన్ని లీటర్లు వాడాలి?

7. ఒక దీర్ఘచతురస్రం పొడవు 40 సెం.మీ., వెడల్పు 20 సెం.మీ. పొడవు, వెడల్పుల నిష్పత్తిని కనుగొనండి.

8. ఒకసాధారణ నత్త వేగం గంటకు 50 మీ. మరియు చిరుతపులి వేగం గంటకు 120 కి.మీ. వాటి వేగాల నిష్పత్తి కనుగొనండి.

9. కనుగొనండి.

   ఎ) నీ తరగతిలోని బాలురు, బాలికల నిష్పత్తి.

   బి) నీ తరగతి గదిలోని తలుపులు, కిటికీల నిష్పత్తి

   సి) నీ వద్ద గల పాఠ్యపుస్తకాలు మరియు నోటు పుస్తకాల నిష్పత్తి.

ప్రాజెక్ట్ పని

1) టేప్‌తో నీ తరగతి గది పొడవు, వెడల్పులను నీ మిత్రుని సహాయంతో కొలిచి, పొడవు, వెడల్పుల నిష్పత్తిని కనుగొనండి.

2) ₹ 10 ల నోటు పొడవు, వెడల్పులను కొలచి దగ్గరి సంఖ్యకు సవరించి, వాటి పొడవు, వెడల్పుల నిష్పత్తిని కనుగొనండి.

ఇదే కృత్యాన్ని ₹ 20 మరియు ₹ 50 ల నోట్లతో ప్రయత్నించి నీ నోట్ పుస్తకంలో వ్రాయండి.

6.2 అనుపాతము

శ్రీలేఖ తల్లి 2 చెంచాల టీ పొడిని 1 కప్పు టీ తయారీకి ఉపయోగిస్తుంది. ఒక రోజు ముగ్గురు బంధువులు వారి ఇంటికి వచ్చారు. 3 కప్పుల టీ తయారీకి ఎన్ని చెంచాల టీ పొడిని వాడాలి? అవును. మీరు అనుకొన్నది నిజమే. 6 చెంచాల టీపొడిని 3 కప్పుల టీ తయారీకి వాడాలి. శ్రీలేఖ తల్లి సమస్యా సాధనకు అనుపాత ధర్మాన్ని ఉపయోగించింది. ఇంకొక ఉదాహరణను చూద్దాం.

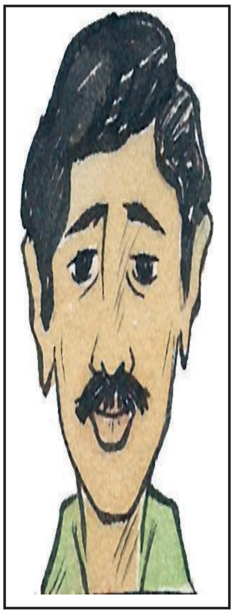
4 సెం.మీ.

6 సెం.మీ.

రవి ఒక ఫోటో స్టూడియోలో ఫోటో తీయించుకొన్నాడు.

దాని కొలతలు 4 సెం.మీ. × 6 సెం.మీ.

4 సెం.మీ.



12 సెం.మీ.

ఆఫోటోని అతడు ల్యాబ్‌కు వెళ్ళి పెద్దది చేయించుకోవాలనుకున్నాడు.

ల్యాబ్ అతను కొంతసమయం తర్వాత ఇలా చేసి ఇచ్చాడు.

“ఇప్పుడు చేసిన ఫోటోలో ఏదో దోషం ఉందని” అన్నాడు రవి.

మరి రవి అన్నది నిజమేనా?

దోషం ఏమిటో నువ్వు చెప్పగలవా?

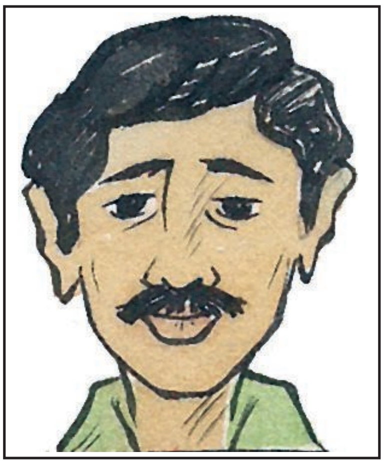
రవి ఈ ఫోటో పొడవు, వెడల్పులను కొలిచాడు. పొడవు, వెడల్పుల నిష్పత్తి మొదటి ఫోటోకి, రెండవ ఫోటోకి ఒకే విధంగా ఉండాలని అతనికి తెలుసు.

మొదటి ఫోటో పొడవు, వెడల్పుల నిష్పత్తి = 4 : 6 = 2 : 3

రెండవ ఫోటో పొడవు, వెడల్పుల నిష్పత్తి = 4 : 12 = 1 : 3

మరి ఈ రెండు నిష్పత్తులు సమానమా? మొదటి ఫోటో పొడవు, వెడల్పుల నిష్పత్తి, రెండవ ఫోటో పొడవు, వెడల్పుల నిష్పత్తికి సమానంగా లేదని గ్రహించాడు. రెండవ ఫోటో మొదటి ఫోటోకు అనుపాతంలో లేదని అర్థమయింది. అప్పుడు ల్యాబ్ అతన్ని మరొక పెద్ద ఫోటోను చేయమన్నాడు. ఇప్పుడు చేసిన ఫోటో సరిగా ఉంది. మరలా పొడవు, వెడల్పులను కొలిచి నిష్పత్తి కనుగొన్నాడు.

8 సెం.మీ.



12 సెం.మీ.

పొడవు వెడల్పుల నిష్పత్తి = 8 : 12 = 2 : 3

ఇప్పుడు రవి మొదటి ఫోటో, మూడవ ఫోటో రెండూ బాగున్నాయని భావించాడు. ఎందుకంటే వాటి పొడవు, వెడల్పుల నిష్పత్తి సమానం. అంటే అవి అనుపాతంలో ఉన్నాయి.

ఈ విధంగా రెండు నిష్పత్తులు సమానంగా ఉంటే అవి అనుపాతంలో ఉన్నాయంటారు. అనుపాతానికి గుర్తు ': :'. రెండు నిష్పత్తులు a : b మరియు c : d లు సమానమైతే ఇలా వ్రాయవచ్చు., a : b = c : d లేక a : b : : c : d.

దీన్ని a : b ఈజ్ ఏజ్‌టు c : d అని చదువుతాం.

a, b, c, d నాలుగు రాశులను ఒకటవ, రెండవ, మూడవ, నాలుగవ పదాలని అంటాం. ఒకటవ, నాల్గవ పదాలను అంత్యపదాలని లేక అంత్యాలని, రెండవ, మూడవ పదాలను మధ్యపదాలని లేక మధ్యమాలని అంటాం.

ఈ అనుపాతంలో a : b = c : d

అంటే $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

కావున, ad = bc

ఈ విధంగా అంత్యముల లబ్ధం = మధ్యమాల లబ్ధమునకు సమానం.

అంటే

మధ్యములు

a : b = c : d

అంత్యములు

దీనిలో d ని అనుపాత చతుర్థం లేదా చతుర్థానుపాతం అని అంటాం. మరియు $d = \frac{b.c}{a}$

కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ 1 : అనుపాతమును పూర్తిచేయుటకు $\square$ ను నింపుము.

(i) $2 : 5 = 6 : \square$

అంత్యముల లబ్ధము, మధ్యముల లబ్ధానికి సమానము.

అనగా $2 : 5 = 6 : \square$

కనుక $2 \times \square = 5 \times 6$

$$\square = \frac{30}{2} = 15$$

(ii) $16 : 20 = \square : 35$

అంత్యాల లబ్ధం, మధ్యమాల లబ్ధానికి సమానం.

∴ $16 : 20 = \square : 35$

కావున, $20 \times \square = 16 \times 35$

$$\square = \frac{560}{20} = 28 \quad \therefore \quad 6 : 20 = \boxed{28} \times 35$$

అభ్యాసం - 2

1. కింది పట్టికలోని ఖాళీలలో లోపించిన పదాలను సరియైన సమాధానాలతో నింపండి.

క్ర.సంఖ్య	అనుపాతము	అంత్యాల లబ్ధము	మధ్యముల లబ్ధము
1.	1 : 2 : : 4 : 8		
2.	5 : 6 : : 75 : 90		
3.	3 : 4 : : 24 : 32		
4.	2 : 5 : : ☐ : 15	30	
5.	3 : 6 : : 12 : ☐		72

2. సత్యమా? అసత్యమా? తెల్పండి.

(i) 15: 30 : : 30 : 40

(ii) 22 : 11 : : 12 : 6

(iii) 90 : 30 : : 36 : 12

(iv) 32 : 64 : : 6 : 12

(v) 25 : 1 : : 40 : 160

3. మధు మార్కెట్‌లో 5 కిలోల ఆలుగడ్డలు కొన్నాడు. 2 కిలోల ధర ₹ 36 లు అయితే మధు ఎంత సొమ్ము చెల్లించాలి?

4. భౌతికశాస్త్రం ప్రకారం భూమిపై ఒక వస్తువు బరువు చంద్రునిపై అదే వస్తువు బరువులు అనుపాతంలో ఉంటాయి. ఉదాహరణకి భూమిపై 90 కిలోల బరువు గల ఒక పురుషుని బరువు చంద్రునిపై 15 కిలోలైతే, భూమిపై 60 కిలోల బరువుగల స్త్రీ బరువు చంద్రునిపై ఎంత?

5. ఒక విపత్తు సహాయక బృందంలో ఇంజనీర్లు మరియు డాక్టర్లు 2 : 5 నిష్పత్తిలో ఉన్నారు.

ఎ) 18 మంది ఇంజనీర్లున్న బృందంలో డాక్టర్ల సంఖ్య ఎంత?

బి) 65 మంది డాక్టర్లున్న బృందంలో ఇంజనీర్ల సంఖ్య ఎంత?

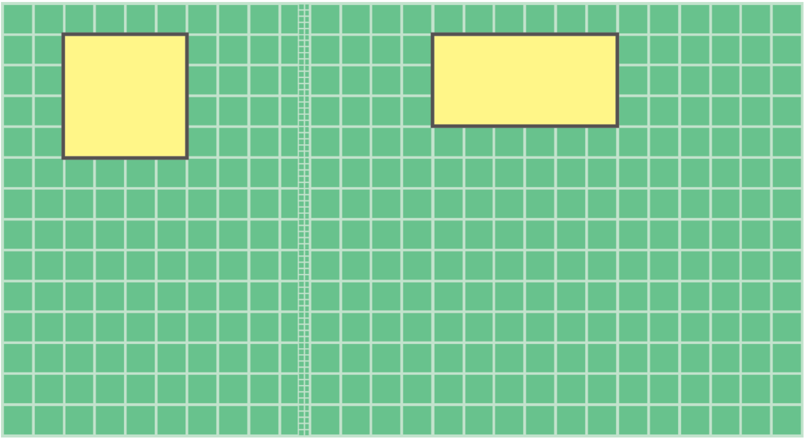
6. రెండు కోణాల నిష్పత్తి 3:1 అయిన

ఎ) చిన్న కోణం 180^0 ఐన పెద్ద కోణం ఎంత?

బి) పెద్ద కోణం 63^0 ఐన చిన్న కోణం ఎంత?

ఇవి చేయండి.

కింది పటంలో చతురస్రం, దీర్ఘచతురస్రం ఇవ్వబడ్డాయి. ఈ పటాలను పెద్దవిచేసి అనుపాతంలో ఉండేలా మరొక చతురస్రం, దీర్ఘచతురస్రాలను గీయండి.



6.3 రేటు

కొన్ని సందర్భాల్లో నిష్పత్తులను రేటుగా చెప్తాం. కింద కొన్ని ఉదాహరణలను ఇవ్వబడినవి.

(i) మానాన్నగారు వాహనాన్ని గంటకు 60 కి.మీ. వేగంతో నడుపుతారు. (అనగా 60 కి.మీ./గం.) (గంటకు 60 కిలో మీటర్లు)

(ii) నేను కిలో ఆపిల్ పండ్లు ₹ 120 వంతున కొన్నాను. (₹ 120 లకు ఒక కి.గ్రా.)

(iii) నా హృదయ స్పందన రేటు నిమిషానికి 72 సార్లు (ఒక నిమిషానికి 72 స్పందనలు)

(iv) డజను గుడ్ల వెల ₹ 60 లు. (₹ 60 లకు ఒక డజను గుడ్లు)

(v) ఆంధ్రప్రదేశ్ సరాసరి జననరేటు 924.(జనన రేటు అనగా ఇచ్చిన సమయంలో ప్రతి వేయి మందికి ఉండే జననాల సంఖ్య).

మొదటి ఉదాహరణలో వాహనం వెళ్ళే దూరాన్ని దానికి పట్టే కాలంతో పోల్చారు. రెండవ దాన్లో ఆపిల్ పండ్ల ధరను దాని బరువుతో పోల్చారు. మూడవ దాన్లో హృదయ స్పందనల సంఖ్యను కాలంతో పోల్చారు. నాల్గవ దాన్లో గుడ్ల ధరను గుడ్ల సంఖ్యతో పోల్చారు. ఐదవ దాన్లో సజీవ జననాల సంఖ్యను 1000 మంది జనులతో పోల్చారు.

గంటకు 60 కి.మీ. వేగాన్ని సాంకేతికంగా 60 కి.మీ./గం. అని అలాగే ₹ 120/కి.గ్రా., 72 స్పందనలు/ని., ₹ 60/డజన్, 918/1000 జననాలుగా రాస్తాము.

6.4 ఏకవస్తుమార్గం

మొదటగా ఒక రాశి విలువను కనుగొని తర్వాత కావలసిన రాశుల విలువను కనుగొనే పద్ధతినే ఏకవస్తు మార్గం అంటాం.

ఉదాహరణ 2 : ఒక దుకాణదారు ₹ 30 లకు 5 గ్లాసులు అమ్ముతున్నాడు. అలాంటి 10 గ్లాసుల విలువ ఎంత?

సాధన : 5 గ్లాసుల ధర = ₹ 30

కావున, 1 గ్లాసు ధర ₹ $\frac{30}{5} = ₹\ 6$

ఈ విధంగా, 10 గ్లాసుల ధర = 6×10 = ₹ 60

ఉదాహరణ 3 : ఒక డజను అరటిపండ్ల వెల ₹ 20 లు అయిన 9 అరటి పండ్ల వెల ఎంత?

సాధన : 1 డజను = 12 యూనిట్లు

12 అరటిపండ్ల వెల = ₹ 20లు

కావున ఒక అరటి పండు వెల = $\frac{20}{12}$

అందువల్ల 9 అరటిపండ్ల వెల = $\frac{20}{12} \times 9 = ₹\ 15$

ఇవి చేయండి.

1. 160 మంది పిల్లలు కూర్చోవడానికి 40 బెంచీలు అవసరం. ఇదే వంతున 240 మంది పిల్లలు కూర్చోవడానికి ఎన్ని బెంచీలు అవసరమౌతాయి.
2. ఒక పిట్ట 10 సెకన్లకు 23 సార్లు తన రెక్కలను ఆడిస్తుంది. మరి 2 నిమిషాల్లో ఎన్ని సార్లు అది రెక్కలను ఆడిస్తుంది.
3. మానవ గుండె సరాసరిన నిమిషానికి 72 సార్లు కొట్టుకుంటుంది. మరి 15 సెకన్లలో ఎన్ని సార్లు కొట్టుకుంటుంది? అలాగే 1 గంటలో, 1 రోజులో ఎన్ని సార్లు కొట్టుకుంటుంది?

6.5 అనులోమానుపాతం

నిత్యజీవితంలో ఎన్నో సందర్భాల్లో ఒక రాశిలో వచ్చే మార్పు మరొక రాశిలో మార్పుకు దారితీయటాన్ని గమనించి ఉంటాం.

ఉదాహరణకు

- కొనే వస్తువుల సంఖ్య పెరిగితే, దానికి చెల్లించవలసిన మొత్తం కూడా పెరుగుతుంది. అలాగే కొనే వస్తువుల సంఖ్య తగ్గితే చెల్లించవలసిన మొత్తం కూడా తగ్గుతుంది.
- బ్యాంకులో డిపాజిట్ చేసే సొమ్ము పెరిగిన కొలదీ దానిపై వచ్చే వడ్డీ పెరుగుతుంది. అలాగే డిపాజిట్ సొమ్ము తగ్గిన కొలదీ దానిపై వచ్చే వడ్డీ కూడా తగ్గుతుంది.
- వేగంలో మార్పులేనప్పుడు ప్రయాణించే దూరం పెరిగితే దానికి పట్టేకాలం పెరుగుతుంది. అలాగే దూరం తగ్గితే, పట్టేకాలం కూడా తగ్గుతుంది.

పై ఉదాహరణల ద్వారా ఒక రాశి పరిమాణం పెరిగే కొద్దీ(తగ్గేకొద్దీ) మరొక రాశి పరిమాణం కూడా పెరుగుతుందని (తగ్గుతుందని) తెలుస్తుంది. మరియు దాని విపర్యయం కూడా సత్యమే.

ఇలాంటి సందర్భాన్నే ఒక ఉదాహరణ ద్వారా అర్థం చేసుకుందాం.

ఒక కుళాయి గంటకు 300 లీటర్ల సామర్థ్యంతో ఒక ట్యాంకును నింపుతుంది. 2 గంటల్లో ఎన్ని లీటర్లని నింపగలదు? 600 లీటర్లను నింపగలదు. అలాగే 4 గంటల్లో, 8 గంటల్లో ఎన్ని లీటర్లు నింపగలదో ఎలా కనుగొంటావు?

కింది పట్టికను గమనించండి.

	×2 / ×4 / ×8			
ట్యాంక్‌ను నింపే సమయం(గంటల్లో)	1	2	4	8
నింపే నీటి సామర్థ్యం (లీటర్లలో)	300	600	1200	2400
	×2 / ×4 / ×8			

ప్రతి సందర్భంలోను కాల వ్యవధి పెరిగే కొద్ది, నింపే సామర్థ్యం పెరుగుతోంది. అనగా పట్టే కాలవ్యవధికి, నింపే సామర్థ్యానికి గల నిష్పత్తులు సమానము. ఈ విధంగా పట్టేకాలము రెట్టింపైన నింపే సామర్థ్యం కూడా రెట్టింపవుతుంది. పట్టే కాలము 4 రెట్లయిన నింపే సామర్థ్యం కూడా 4 రెట్లవుతోంది. అలాగే పట్టేకాలము 8 రెట్లయిన, నింపేసామర్థ్యం కూడా 8 రెట్లయింది. పట్టేకాలమునకు గల నిష్పత్తి 1 :2 మరియు నింపే సామర్థ్యంనకు గల నిష్పత్తి కూడా 1 : 2. ఈవిధంగా ట్యాంక్‌నింపడానికి పట్టే కాలం మరియు నింపే నీటి సామర్థ్యంలు అనులోమానుపాతంలోనున్నవని చెప్పవచ్చు.

ఉదాహరణ 4 : ఒక దుకాణదారు 6 గుడ్లను ₹ 30 లకు అమ్మిన 10 గుడ్ల ధర ఎంత?

సాధన : 10 గుడ్ల ధర ₹ x అనుకొనుము.

గుడ్లసంఖ్యపెరిగితే వాటికి చెల్లించవలసిన ధర కూడా పెరుగుతుందని మనకు తెలుసు. అనగా గుడ్ల సంఖ్యకు గల నిష్పత్తి, వాటి ధరకు గల నిష్పత్తి సమానంగా ఉంటుంది. మరోవిధంగా, గుడ్ల సంఖ్యల నిష్పత్తి మరియు వాటి ధరల నిష్పత్తులు అనుపాతంలో ఉంటాయి. ఈ విధంగా

$$6 : 10 = 30 : x$$

అంత్యముల లబ్దం, మధ్యమముల లబ్దం సమానం కనుక,

$$6 \times x = 10 \times 30$$

$$6x = 30 \times 10$$

$$x = \frac{10 \times 30}{6} = 50$$

$$x = ₹\ 50$$

పది గుడ్ల ధర = ₹ 50

ఈ సమస్యనే ఏకవస్తు మార్గం ద్వారా కూడా సాధించవచ్చు. అంటే ఒక గుడ్డు ధరను కనుగొని దాని వెలతో కావలసిన గుడ్ల సంఖ్యను గుణించడం ద్వారా కనుగొనవచ్చు.

6 గుడ్ల ధర = ₹ 30

1 గుడ్డు ధర = ₹ $\frac{30}{6}$ = ₹ 5

10 గుడ్ల ధర = 5×10 = ₹ 50

ఉదాహరణ 5 : నలుగురు సభ్యులు గల కుటుంబానికి 20 కి.గ్రా.ల బియ్యం అవసరం. సభ్యుల సంఖ్య 10 కి పెరిగిన ఎన్ని కి.గ్రా.ల బియ్యం అవసరమౌతుంది?

మొదటి పద్ధతి : గిరిజ ఇలా అంటోంది.

సభ్యుల సంఖ్య పెరిగితే, కావలసిన బియ్యం పరిమాణం కూడా పెరుగుతుంది. అలాగే సభ్యుల నిష్పత్తి, కావలసిన బియ్యం పరిమాణాల నిష్పత్తులు సమానం. ఇలా సభ్యుల సంఖ్య, బియ్యం పరిమాణానికి అనులోమానుపాతంలో ఉంటుంది.

10 మంది సభ్యులకు x కి.గ్రా.ల బియ్యం అవసరమనుకొనిన

$x : 20 = 10 : 4$

అంత్యముల లబ్ధం మధ్యమముల లబ్ధం సమానం కనుక,

$4x = 20 \times 10$

$$x = \frac{20 \times 10}{4} = 50$$

$x = 50$ కి.గ్రా.

రెండవ పద్ధతి : సరళ ఏకవస్తుమార్గం ద్వారా సమస్యను ఇలా సాధించింది.

నలుగురు సభ్యులకు అవసరమైన బియ్యం పరిమాణం = 20 కి.గ్రా.

ఒకరికి అవసరమయ్యే బియ్యం పరిమాణం = $\frac{20}{4} = 5$ కి.గ్రా.

$\therefore$ 10 మంది సభ్యులకు అవసరమయ్యే బియ్యం పరిమాణం = 10×5 = 50 కి.గ్రా.

ఉదాహరణ 6 : ఒక జీపు 3 గంటల్లో 90 కి.మీ. ప్రయాణిస్తుంది. అదేవేగంతో ఎన్ని గంటల్లో ఆజీపు 150 కి.మీ. దూరాన్ని పూర్తి చేయగలదు?

సాధన : ప్రయాణించే దూరం పెరిగితే దానికి పట్టే కాలం పెరుగుతుందని మనకు తెలుసు. అలాగే వాటి నిష్పత్తులు కూడా సమానం. ఈ విధంగా ప్రయాణించే దూరం దానికి పట్టే కాలానికి అనులోమానుపాతంలో ఉంటుంది.

150 కి.మీ. దూరం పూర్తి చేయడానికి పట్టే కాలం x గం॥లు అనుకొనిన

కావున, $x : 3 = 150 : 90$

అంత్యముల లబ్ధం, మధ్యమముల లబ్ధం సమానం కనుక

$90\,x = 150 \times 3$

$$x = \frac{150 \times 3}{90} = 5$$

$x = 5$ గంటలు.

అనగా 150 కి.మీ. దూరం పూర్తి చేయడానికి పట్టేకాలం = 5 గం॥లు.

ఉదాహరణ 7 : ఒకపటం యొక్క స్కేలు 1 : 30,000 అని ఇవ్వబడినది. పటంలో రెండు పట్టణాలమధ్య 4సెం.మీ. ఉన్నది. ఆ రెండు పట్టణాల మధ్య గల నిజదూర మెంత?

వాస్తవ దూరం x కి.మీ. అనుకొనుము. పటంలో దూరం, వాస్తవ దూరానికి అనులోమానుపాతంలో ఉంటుంది. కావున $1:30,000 = 4 : x$

అంత్యముల లబ్ధము, మధ్యముల లబ్ధమునకు సమానము కావున

$x = 4 \times 30,000$

$= 1,20,000$ సెం.మీ.

$= 1.2$ కి.మీ. ($\because$ 1 కి.మీ. = 1,00,000 సెం.మీ.)

ఈ విధంగా పటంలో 4 సెం.మీ. దూరంగల రెండు పట్టణాల మధ్య గల నిజదూరం 1.2 కి.మీ.

ప్రయత్నించండి.

1. బొట్టు బొట్లుగా కారుతున్న ఒక కుళాయి క్రింద ఒక లీటరు ఖాళీ సీసాను ఉంచండి. అందులో ప్రతి నీటిచుక్కను భద్ర పరిస్తే, సీసా నిండటానికి ఎంత సమయం పడుతుందో చూడండి. ఈ విధంగా ఒక సంవత్సరానికి ఎంత నీరు వృథా అవుతుందో కనుగొనండి.
2. ఒక గడియారాన్ని తీసుకొని దాని నిమిషాల ముల్లును 12 వద్ద ఉంచండి. ఇచ్చిన కాల వ్యవధులలో నిమిషాల ముల్లు చేసే కోణము, కాలములను పట్టికలో చూపండి.

కాలము	T_1	T_2	T_3	T_4
నిమిషాలలో	15	30	45	60
తిరిగిన కోణము	A_1	A_2	A_3	A_4
(డిగ్రీలలో)	90	....	....	....

నిమిషాల ముల్లు తిరిగిన కోణము కాలమునకు అనులోమానుపాతంలో ఉన్నదా? అవును.

పై పట్టిక నుంచి ఇవి గమనించవచ్చు.

$T_1 : T_2 = A_1 : A_2$, కావున

$T_1 : T_2 = 15 : 30 = 1 : 2$

$A_1 : A_2 = 90 : 180 = 1 : 2$

$T_2 : T_3 = A_2 : A_3$ మరియు $T_3 : T_4 = A_3 : A_4$ అవుతుందేమో సరిచూడండి.

ఇదే కృత్యాన్ని వివిధ కాల వ్యవధులకు ప్రయత్నించండి.

అభ్యాసం - 3

1. ఒక బ్యాక్టీరియా పొడవును 50,000 రెట్లు పెద్దది చేయగా, 5 సెం.మీ. పొడవుంది అయిన బ్యాక్టీరియా అసలు పొడవెంత? ఒకవేళ 20,000 రెట్లు పెంచబడితే, బ్యాక్టీరియా పొడవు ఎంత ఉంటుంది ?

2. క్రింది పట్టికలను పరిశీలించి x, y లు అనులోమానుపాతంలో ఉన్నాయేమో పరిశీలించండి.

(i)

x	20	17	14	11	8	5	2
y	40	34	28	22	16	10	4

(ii)

x	6	10	14	18	22	26	30
y	4	8	12	16	20	24	28

(iii)

x	5	8	12	15	18	20	25
y	15	24	36	60	72	100	125

3. సుష్మ వద్ద ఒక రోడ్డు మ్యాప్ ఉన్నది. దాని స్కేలు 1సెం.మీ.కు 18 కి.మీ. గా ఇవ్వబడినది. ఆమె రోడ్డుపై 72 కి.మీ. వాహనం నడిపిన మ్యాప్‌పై ఎంత దూరం పూర్తి చేసినట్లో తెలపండి.

4. ఒక గళ్ళ కాగితముపై వివిధ కొలతలతో ఐదు చతురస్రాలను గీయండి. సమాచారాన్ని క్రింది పట్టికలో నింపండి.

	చతురస్రం 1	చతురస్రం 2	చతురస్రం 3	చతురస్రం 4	చతురస్రం 5
భుజం కొలత (L)					
చుట్టుకొలత (P)					
వైశాల్యం (A)					

భుజం కొలత క్రింది వాటికి అనులోమానుపాతంలో ఉందేమో కనుగొనండి.

ఎ) చతురస్ర చుట్టుకొలతకు

బి) చతురస్ర వైశాల్యంనకు

నిష్పత్తులు శాతముల రూపంలో కూడా ఉండవచ్చు. ఇప్పుడు మనం శాతముల గురించి, వాటిని నిత్యజీవితంలో ఎలా ఉపయోగిస్తామనే విషయాలను గురించి నేర్చుకుందాం.

6.6 శాతములు

- గణితంలో సౌమ్య 65% మార్కులను, రంజిత్ 59% మార్కులను తెచ్చుకున్నారు.
- ఒక వస్త్ర వ్యాపారి టోకు వ్యాపారంలో సిల్క్ చీరలపై 25% లాభమును, చిల్లర వ్యాపారం దుకాణంలో 10% లాభమును పొందును.

- బ్యాంకునుంచి అనిత ₹ 10,000 లను ఒక సంవత్సరానికి అప్పుగా తీసుకుంది. దానిపై ఆమె 10% వడ్డీని సంవత్సరాంతమున చెల్లించాలి.
- పండుగల సందర్భంగా ఒక టి.వి. దుకాణదారు 10% రాయితీని, మరొకరు 15% రాయితీని ఇస్తున్నారు.

శాతము అనగా 'ప్రతి వందకు' లేక వందకు అని అర్థం. శాతంను '%' గుర్తుతో సూచిస్తాము.

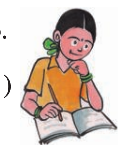
ఈ విధంగా 1% అనగా 100కు 1 అని, 27% అనగా 100కు 27 అని మరియు 93% అనగా 100 కు 93 అని అర్థం.

1% ను $\frac{1}{100}$ లేక 0.01 అని కూడా రాయవచ్చు.

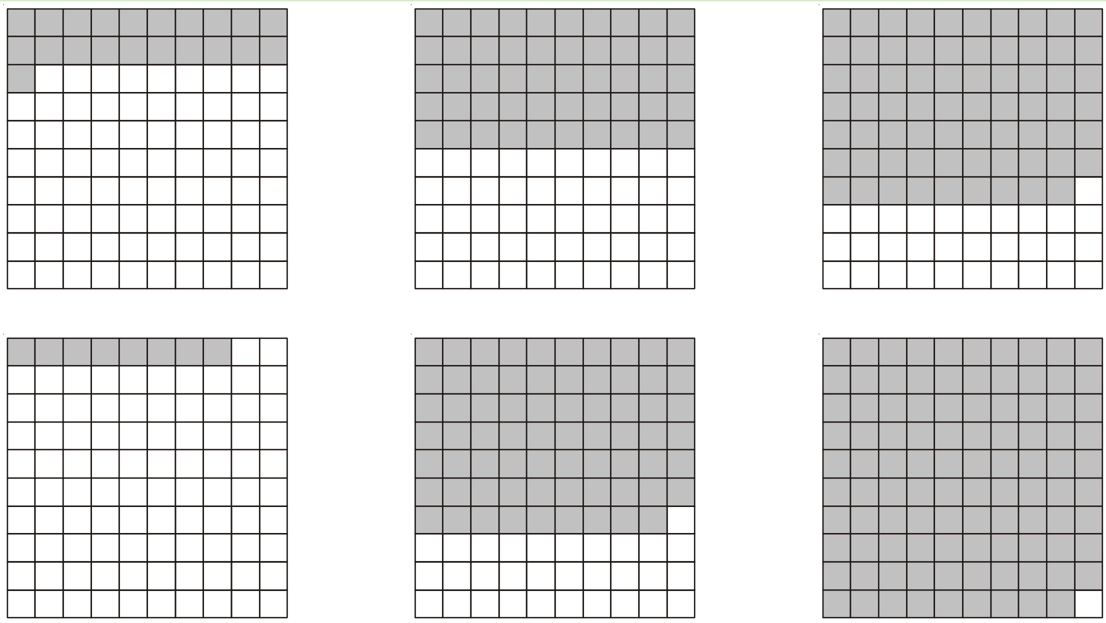
27% ను $\frac{27}{100}$ లేక 0.27 అని కూడా రాయవచ్చు.

93% ను $\frac{93}{100}$ లేక 0.93 అని కూడా రాయవచ్చు.

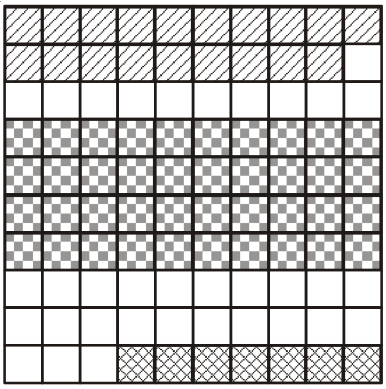
ఇవి చేయండి.



1. కింద ఇవ్వబడిన 100 చదరాలు గల గళ్ళ కాగితంపై ప్రతి చిత్రంలోను కొన్ని గళ్ళను రంగుతో నింపారు. ప్రతి చిత్రం లోను గల రంగు గళ్ల భాగాన్ని, తెల్లని గళ్ల భాగాన్ని (1) శాతం గాను (2) భిన్నంగాను (3) దశాంశ భిన్నంగాను తెల్పండి.



2. కింది గ్రిడ్ పేపర్‌ను చూచి ప్రశ్నలకు జవాబివ్వండి.



భాగం ఎంత శాతమును సూచిస్తుంది?

భాగం ఎంత శాతమును సూచిస్తుంది?

భాగం ఎంత శాతాన్ని సూచిస్తుంది?

భాగం ఎంత శాతాన్ని సూచిస్తుంది?

3. కింద ఇవ్వబడిన సమాచారంతో వివిధ తరగతుల పిల్లల సంఖ్యను మొత్తం పిల్లల సంఖ్యలో భిన్నంగా, శాతంగా రాయుము.

తరగతి	పిల్లల సంఖ్య	భిన్నరూపంలో	శాతరూపంలో
VI	17		
VII	15		
VIII	20		
IX	30		
X	18		
మొత్తం	100		

పై అన్ని ఉదాహరణలలో మొత్తం సంఖ్య 100. మొత్తం సంఖ్య 100 కానప్పుడు శాతాలను ఎలా కనుగొంటాం?

ఉదాహరణ 8 : ఒక తరగతిలో 35 మంది బాలికలు మరియు 15 మంది బాలురు కలరు. బాలికల శాతం, బాలుర శాతం కనుగొనుము.

సాధన : సుధీర్ కింది విధంగా సాధించాడు.

పద్ధతి– 1

విద్యార్థులు	సంఖ్య	భిన్నం	హారాలను 100 కు మార్చగా	శాతంలో
బాలికలు	35	$\frac{35}{50}$	$\frac{35}{50}\times\frac{100}{100}=\frac{70}{100}$	70%
బాలురు	15	$\frac{15}{50}$	$\frac{15}{50}\times\frac{100}{100}=\frac{30}{100}$	30%
మొత్తం	50			

పద్ధతి - 2

అన్వర్ బాలికల శాతం, బాలుర శాతం ఇలా కనుగొన్నాడు.

మొత్తం విద్యార్థులు = $35 + 15 = 50$

50 మంది విద్యార్థుల్లో 35 మంది బాలికలు

ఈ విధంగా, 100 మంది విద్యార్థులకు గాను $\frac{35}{50}\times 100 = 70$ మంది బాలికలు.

పద్ధతి - 3

రీనా ఇలా సాధించింది

$$\frac{35}{50}\times\frac{2}{2} = \frac{70}{100} = 70\%$$

మొత్తము 100 కానపుడు, శాతములను కనుగొనడానికి పైన మూడు పద్ధతులను తెలుసుకున్నాం. ఒకటవ పద్ధతిలో భిన్నాన్ని $\frac{100}{100}$ చే గుణిస్తాము. దీని వల్ల భిన్నం యొక్క విలువ మారదు. ఈ క్రమంలో 100 హారంగా ఉంటుంది. రీనా, హారంలో 100 రావడానికి $\frac{2}{2}$ చే గుణించింది. అన్వర్ ఏకాంక పద్ధతిని ఏకవస్తు మార్గాన్ని ఉపయోగించాడు. వీటిలో నీవు ఏ పద్ధతినైనా ఎన్నుకోవచ్చు. లేదా సొంత పద్ధతిన కనుక్కోవచ్చు.

మరి అన్వర్ వాడిన పద్ధతి అన్ని నిష్పత్తులకు పనిచేస్తుందా? రీనా ఉపయోగించిన పద్ధతి అన్ని నిష్పత్తులకు వుపయోగపడుతుందా?

రీనా వాడిన పద్ధతి ప్రకారం హారమును ఒక సహజ సంఖ్యచే గుణించగా 100 వస్తుందని అన్వర్ అన్నాడు. ఇక్కడ హారము 50 కనుక దీన్ని 2 చే గుణించగా 100 వచ్చింది. ఒకవేళ హారము 60 అయిన ఈ పద్ధతి ఉపయోగ పడదని అంగీకరిస్తావా?

ఉదాహరణ 9 : "A" అనే చొక్కాలో $\frac{3}{5}$ వ వంతు నూలు, "B" అనే మరొక చొక్కాలో $\frac{3}{4}$ వ వంతు నూలు వాడిన

ఎ) ప్రతి చొక్కాలోని నూలు శాతమెంత?

బి) ఏ చొక్కాలో నూలు శాతం ఎక్కువగా ఉన్నది?

సాధన : "A" చొక్కాలోని నూలు శాతం $= \frac{3}{5} \times 100 = 60\%$

"B" చొక్కాలోని నూలు శాతం $= \frac{3}{4} \times 100 = 75\%$

B చొక్కాలోని నూలు శాతం ఎక్కువ.

ఉదాహరణ 10 : గంగ ఒక దర్జీ వద్దకు 1 మీటరు గుడ్డతో వెళ్ళి, ఒక రవికను కుట్టమని అడిగింది. దర్జీ 0.75 మీటర్ల గుడ్డను వాడి మిగిలిన దాన్ని తిరిగి గంగకు ఇచ్చేశాడు.

ఎ) రవికను కుట్టడానికి ఎంత శాతం గుడ్డను ఉపయోగించాడు?

బి) గంగకు తిరిగి ఇచ్చిన గుడ్డ శాతం ఎంత?

సాధన : దర్జీ వాడిన గుడ్డ కొలత = 0.75 మీటర్లు

ఉపయోగించిన గుడ్డశాతం = $0.75 \times 100\%$

$$= \frac{75}{100} \times 100\,\%$$

$$= 75\%$$

దర్జీ తిరిగి ఇచ్చిన గుడ్డ కొలత = 1 – 0.75 = 0.25 మీటర్లు

ఉపయోగించని గుడ్డ శాతం = $0.25 \times 100\%$

$$= \frac{25}{100} \times 100\%$$

$$= 25\%$$

ఉదాహరణ 11 : గత సంవత్సరం ఒక వస్తువు ధర ₹ 40. ఈ సంవత్సరం దాని ధర ₹ 50 లకు పెరిగినది. ధరలో పెరుగుదల శాతమెంత?

సాధన : ధరలో పెరుగుదల శాతం $= \dfrac{\text{ధరలో మార్పు}}{\text{అసలు ధర}} \times 100\,\%$

$$= \frac{50-40}{40} \times 100\,\%$$

$$= \frac{10}{40} \times 100\% = \frac{1000}{40}\% = 25\,\%$$

ఉదాహరణ 12 : శ్యామ్ అతని ఆదాయంలో 25% పొదుపుకు, ఖర్చులకు 60%, వైద్యానికి 10%, విరాళములకు 5% కేటాయించాడు. అతని నెలసరి ఆదాయం ₹ 10,000 అయిన ప్రతి అంశానికి కేటాయించిన మొత్తం ఎంత?

సాధన : ప్రతి 100 రూపాయలకు శ్యామ్ పొదుపుకు ₹ 25, ఖర్చులకు ₹ 60, వైద్యానికి ₹ 10లు, విరాళములకు ₹ 5లు, కేటాయిస్తే ₹ 10,000 లకు అతడు క్రింది విధంగా కేటాయిస్తాడు.

పొదుపునకు కేటాయించిన సొమ్ము = మొత్తంలో 25%

₹ 10,000లో 25% = $\frac{25}{100} \times 10000 = 2500$

ఖర్చులకు = $\frac{60}{100} \times 10000$ = ₹ 6000

వైద్యానికి = $\frac{10}{100} \times 10000$ = ₹ 1000

విరాళములకు = $\frac{5}{100} \times 10000$ = ₹ 500

అభ్యాసం - 4

1. X అనే ఒక పాఠశాలలో పదవ తరగతి పరీక్షలలో 48 మందికి గాను 36 మంది ఉత్తీర్ణులైనారు. Y అనే మరొక పాఠశాలలో 30 మందికి గాను 24 మంది ఉత్తీర్ణులయ్యారు. జిల్లా విద్యాశాఖాధికారి ఉత్తీర్ణత శాతాన్ని బట్టి అవార్డు ఇవ్వాలనుకున్నారు. ఏ పాఠశాలకు అవార్డు ఇస్తారు?

2. గత సంవత్సరం 1000 వస్తువుల ధర ₹ 5000లు ఈ సంవత్సరం వాటి వస్తువుల ధర ₹ 4000లకు పడిపోయినది. ధరలో తగ్గుదల శాతమెంత?

3. శ్రీజ్యోతి బుట్టనిండా అరటిపండ్లు, కమలాలు, మామిడి పండ్లు ఉన్నాయి. అందులో 50% అరటిపండ్లు, 15% కమలాలు ఉన్న మామిడి పండ్ల శాతమెంత?

4. 64% + 20% + ... = 100%

5. ఒక పాఠశాలలో వర్షం పడిన రోజున 150 మంది విద్యార్థులకు గాను, 25 మంది పాఠశాలకు రాలేదు. అయిన రాని విద్యార్థుల శాతమెంత? అలాగే వచ్చిన విద్యార్థుల శాతమెంత?

6. ఒక నియోజక వర్గంలోని 12000 మంది ఓటర్లలో 60% మంది ఓటువేశారు. అయిన ఓటు వేసిన వారి సంఖ్య ఎంత?

7. ఓ స్థానిక క్రికెట్ టీము 20 మ్యాచ్‌లను ఆడగా అందులో 25% మ్యాచ్‌లలో విజయం సాధించింది. అయిన ఆ టీమ్ కోల్పోయిన మ్యాచ్‌ల సంఖ్య ఎంత?

8. ఒక కంసాలి ప్రతి గ్రాము బంగారానికి 0.25 గ్రాముల వెండిని, 0.05 గ్రాముల రాగిని కలుపుతాడు. ప్రతి గ్రాము బంగారంలో గల బంగారు, వెండి, రాగిల శాతాలను కనుగొనండి.

9. ఒక సంఖ్యలో 40 శాతము 800 కి సమానమైన, ఆసంఖ్య ఎంత?

ప్రయత్నించండి.

1. 2011 జనాభా లెక్కల ప్రకారం మన దేశజనాభా సుమారుగా 12×10^8 (120,00,00,000) ప్రతి సంవత్సరం మన జనాభా 3% వంతున పెరిగితే 2012 లో మన జనాభా ఎంత ఉంటుంది?
2. ఎ) ఒక దోశలో 75% ను తినగలవా?

   బి) ఒక వస్తువు వెల 90% పెరగగలదా?

   సి) ఒక వస్తువు వెల 100% పెరగ గలదా?

ప్రాజెక్ట్ పని

ఒక రోజులో వివిధ పనులకు నీవు కేటాయించే సమయాన్ని కింది పట్టికలో నింపి, రోజులో అది ఎంత శాతమో కనుగొనండి.

పనులు	కేటాయించిన సమయం	ఒక రోజులో శాతంగా (గంటల్లో)
పండ్లు తోముట, స్నానం, పాఠశాలకు సిద్ధమవుటకు		
పాఠశాలలో గడుపుటకు		
ఇంటిపనికి, చదువుకొనుటకు		
ఆడుకొనుటకు, టి.వి. చూచుటకు, తల్లిదండ్రులకు సహాయపడుటకు		
నిద్రించుటకు		

6.7 శాతాలలో వాడే కొన్ని సందర్భాలు

శాతాలను మనం లాభనష్టాలని వ్యక్తపరచటానికి రుసుము, వడ్డీలను తెలపడానికి ఉపయోగిస్తాము. శాతము ద్వారా వ్యక్తపరచడం వలన సులభంగా మనం పోల్చవచ్చు.

6.7.1 లాభము – నష్టము

- ఒక కుమ్మరి మట్టి కుండలను తయారుచేసి కాల్చి, రంగులు వేయును. అతను ముడి పదార్థములకై ₹ 3 లను, కాల్చుటకు ₹ 2 లను మరియు రంగులకై ₹ 1 ఖర్చుచేయును. అతను ప్రతి కుండను ₹ 10 లకి అమ్మిన లాభమా? నష్టమా?
- ఒక ఆట–వస్తువుల తయారీదారు ₹ 50 లకు ఒక బొమ్మను చేసి ₹ 75 చొప్పున అమ్మినచో లాభమా? లేక నష్టమా?
- ఒక వ్యాపారి చొక్కాలను ఒక్కొక్కటి ₹ 500 చొప్పున కొనెను. సంవత్సరాంతమున ₹ 540 చొప్పున అమ్మితే అతనికి లాభమా? లేక నష్టమా?

- అమర్ 10 గ్రాముల బంగారమును ₹ 15,000 కు గత సంవత్సరములో కొనెను. బంగారము రేటు ఈ సంవత్సరము ₹ 20,000కు పెరిగెను. ప్రస్తుత ధరకు బంగారం అమ్మిన అమర్‌కు లాభమా? నష్టమా?

  పై అన్ని సందర్భాలకు వచ్చు లాభము లేదా నష్టమును కనుగొనగలరు. కానీ లాభనష్టాలను కొనడం, అమ్మడం మొదలగు లావాదేవీలలో శాతాలను ఉపయోగించి చెప్పటం అర్థవంతంగా ఉంటుంది.

ఉదాహరణ 13 : రామయ్య కొన్ని కలాలను ₹ 200 లకు కొని వాటిని ₹ 240 లకు అమ్మెను. సోమయ్య కొన్ని కలాలను ₹ 500 లకు కొని వాటిని ₹ 575 లకు అమ్మెను. ఎవరు ఎక్కువ లాభాన్ని ఆర్జించినట్లుగా చెప్పవచ్చు?

సాధన : రామయ్యకు వచ్చిన లాభము = ₹ 240 – ₹ 200 = ₹ 40

సోమయ్యకు వచ్చిన లాభము = ₹ 575 – ₹ 500 = ₹ 75

పై ఫలితాలను బట్టి సోమయ్యకు ఎక్కువ లాభం వచ్చినదని అనటం సరియైనదా?

రామయ్య పెట్టుబడి ₹ 200 లకు గాను వచ్చిన లాభం ₹ 40

సోమయ్య పెట్టుబడి ₹ 500 లకు గాను వచ్చిన లాభం ₹ 75

అందువలన నిష్పత్తుల రూపంలో లాభం మరియు పెట్టుబడులను తెల్పిన

రామయ్య నిష్పత్తి = $\frac{40}{200}$ మరియు

సోమయ్య నిష్పత్తి = $\frac{75}{500}$

నిష్పత్తులను పోల్చుటకు వాటిని శాతాలలోనికి మారుస్తాము.

కావున రామయ్య లాభ శాతము = $\frac{40}{200} \times 100 = 20\%$

సోమయ్య లాభశాతం = $\frac{75}{500} \times 100\,\% = 15\%$

రామయ్య లాభశాతం 20% అంటే ₹ 100 కు లాభము ₹ 20

సోమయ్య లాభశాతం 15% అంటే ₹100 కు లాభము ₹ 15

కాబట్టి రామయ్యకు ఎక్కువ లాభం వచ్చినట్లు చెప్పవచ్చు.

ఉదాహరణ 14 : ఒక వ్యాపారి ఒక టి.వి. ను ₹ 9000లకు కొని ₹ 10000 లకు అమ్మిన అతనికి వచ్చునది లాభమా? నష్టమా? ఎంతశాతం?

సాధన : **గోపాల్ ఈ విధంగా సాధించాడు.**

టి.వి. కొన్నవెల (కొ.వె.) = ₹ 9000

టి.వి. అమ్మిన వెల (అ.వె.) = ₹ 10,000

అ.వె.> కొన్న వెల. కావున లాభం వస్తుంది.

లాభం = 10,000 – 9,000 = ₹ 1000

అందువలన కొ.వె. ₹ 9,000 అయినపుడు వచ్చిన లాభం ₹ 1000.

లాభం మరియు కొ.వె.ల నిష్పత్తి = $\frac{1000}{9000}$

లాభశాతంను కనుగొనుటకు ఈ నిష్పత్తిని 100% చే గుణించాలి.

అంటే $\frac{1000}{9000}\times 100\% = \frac{100}{9}\% = 11\frac{1}{9}\%$

మధు ఈ సమస్యను అనుపాత ధర్మంతో ఇలా సాధించాడు.

కొ.వె. ₹ 9000 అయినపుడు లాభం ₹ 1000

ఇప్పుడు కొ.వె. ₹ 100 అయిన లాభం x అనుకొనిన, లాభం మరియు కొ.వె.లు అనులోమానుపాతంలో ఉంటాయని మనకు తెలుసు. కావున లాభాల నిష్పత్తి, కొ.వె. ల నిష్పత్తికి సమానం.

కావున, $x : 1000 = 100 : 9000$

$$\frac{x}{1000} = \frac{100}{9000}$$

$$9000 \times x = 1000 \times 100$$

$$x = \frac{1000\times 100}{9000} = 11\frac{1}{9}$$

కావున లాభశాతం $= 11\frac{1}{9}\%$

ప్రయత్నించండి.

12 మామిడి పండ్ల కొ.వె. 15 మామిడి పండ్ల అ.వె. కు సమానమైన నష్టశాతమెంత?

ఉదాహరణ 15 : ఒకడు ఒక వస్తువును ₹ 650 లకు కొని అమ్మడం ద్వారా 6% లాభాన్ని పొందెను. అ.వె. కనుగొనండి.

సాధన : **రవి సాధన ఇలా ఉంది.**

కొ.వె. = ₹ 650

లా.శా. = 6%

అంటే కొ.వె. ₹ 100 అయిన లాభం ₹ 6 అపుడు అ.వె. = 100 + 6 = ₹ 106

కాని కొ.వె. 650 మరియు అ.వె. ₹ x అనుకొనిన

(కొ.వె. మరియు అ.వె.లు అనులోమానుపాతంలో ఉంటాయి)

కొ.వె. ల నిష్పత్తి = అ.వె.ల నిష్పత్తి

$100 : 650 = ₹\ 106 : x$

$$\frac{100}{650} = \frac{106}{x}$$

కావున, $100\,x = 106 \times 650$

కావున, $x = \dfrac{106 \times 650}{100} = 689$

అంటే అ.వె. = 689

అరుణ్ పై లెక్కను ఇలా సాధించాడు.

కొ.వె. = ₹ 650

లాభశాతం = 6%

కావున లాభం = ₹ 650 లో 6%.

$$= \frac{6}{100} \times 650 = 39$$

అ.వె. = కొ.వె. + లాభం కనుక

అ.వె. = 650 + 39 = ₹ 689.

ఉదాహరణ 16 : రమేష్ ఒక D.V.D ప్లేయర్‌ను ₹ 2800 కు అమ్మడం ద్వారా 12% లాభాన్ని పొందెను. అయిన కొ.వె. ఎంత?

సాధన : నాయక్ అనుపాత ధర్మం ద్వారా ఇలా సాధించాడు.

లా.శా. = 12%

అ.వె. = ₹ 2800

కనుక కొ.వె. ₹ 100 అనుకొంటే అ.వె. ₹ (100+12) = ₹ 112 అవుతుంది.

కానీ అ.వె. ₹ 2800 మరియు కొ.వె. x అనుకుంటే

కొ.వె., అ.వె.లు అనులోమాను పాతంలో ఉంటాయి.

$$x : 100 = 2800 : 112$$

$$\frac{x}{100} = \frac{2800}{112}$$

కావున, $112 \times x = 100 \times 2800$

కావున, $x = \frac{100 \times 2800}{112} = 2500$

కావున, కొ.వె. = ₹ 2500

మీనా ఏకవస్తు మార్గం' ద్వారా ఇలా సాధించింది.

అ.వె. = ₹ 2800

లా.శా. = 12%

అంటే కొ.వె. ₹ 100 అయిన లాభం ₹ 12

కావున, అ.వె. = 100 + 12 = ₹ 112

అ.వె. ₹ 112 అయిన కొ.వె. ₹ 100 అవుతుంది.

అందుచే, అ.వె. ₹ 1 అయిన కొ.వె. $= \frac{100}{112}$

కాబట్టి అ.వె. ₹ 2800 అయిన కొ.వె. $= \frac{100}{112} \times 2800 =$ ₹ 2500

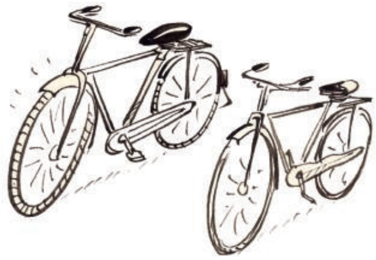
కొ.వె. = ₹ 2500

ఉదాహరణ 17 : ఒక వ్యక్తి రెండు సైకిళ్ళను ఒక్కొక్కటి ₹ 3000 లకు అమ్మెను. ఒక దానిపై 20% లాభం, రెండవ దానిపై 20% నష్టం వచ్చెను. మొత్తం మీద అతనికి లాభమా? నష్టమా? ఎంతశాతం?

సాధన : అ.వె. = ₹ 3000

మొదటి సైకిల్ పై లా.శా. = 20%

రెండవ సైకిల్ పై నష్టశాతం = 20%



(ఎ) ఏక వస్తుమార్గం ద్వారా సాధన :

మొదటి సైకిల్ :

కొ.వె. ₹ 100 మరియు లాభం ₹ 20 అనుకొనిన అ.వె. = ₹ 100 + 20 = ₹ 120

అంటే 20% లాభానికి అ.వె. ₹ 120 అయిన కొ.వె. = ₹ 100

అంటే అ.వె. ₹ 1 అయిన కొ.వె. = ₹ $\frac{100}{120}$

కనుక అ.వె. ₹ 3000 అయినపుడు కొ.వె. = $\frac{100}{120} \times 3000$ = ₹ 2500

రెండవ సైకిల్ :

కొ.వె. ₹ 100 మరియు నష్టం ₹ 20 అనుకొనిన అ.వె. = ₹ 100 – 20 = ₹ 80

కనుక 20% నష్టానికి అ.వె. ₹ 80 అయిన కొ.వె. = ₹ 100

ఈ విధంగా అ.వె. ₹ 3000 అయినపుడు కొ.వె. = $\frac{100}{80} \times 3000$ = ₹ 3750

ఇప్పుడు కొ.వె.ల మొత్తం = ₹ 2500 + ₹ 3750 = ₹ 6250

అ.వె.ల మొత్తం = 3000 + 3000 = ₹ 6,000

కానీ అ.వె. < కొ.వె. కావున నష్టం = 6250 – 6000 = ₹ 250

నష్టశాతం = $\frac{\text{నష్టం}}{\text{కొన్న వెల}} \times 100 = \frac{250}{6250} \times 100 = 4\%$

బి) అనుపాత ధర్మం ద్వారా సాధన :

మొదటి సైకిల్ :

కొ.వె. మరియు అ.వె.లు అనులోమానుపాతంలో ఉన్నాయి. కావున

కొ.వె.	అ.వె.
100	120
x	3000

కొ.వె.ల నిష్పత్తి = అ.వె.ల నిష్పత్తి

$100 : x = 120 : 3000$

$$\frac{100}{x} = \frac{120}{3000}$$

$100 \times 3000 = 120\,x$

$$\frac{100 \times 3000}{120} = x$$

₹ $2500 = x$

రెండవ సైకిల్

కొ.వె.	అ.వె.
100	80
x	3000

$100 : x = 80 : 3000$

$$\frac{100}{x} = \frac{80}{3000}$$

$$x = \frac{100 \times 3000}{80} = ₹\ 3750$$

రెండు సైకిళ్ళ కొ.వె.ల మొత్తం = ₹ 2500 + ₹ 3750 = ₹ 6250

రెండు సైకిళ్ళ అ.వె.ల మొత్తం = ₹ 3000 + ₹ 3000 = ₹ 6000

అ.వె. విలువ కొ.వె. విలువ కన్నా తక్కువ కావున, నష్టం.

నష్టశాతం = $\dfrac{\text{నష్టం}}{\text{కొన్న వెల}} \times 100 = \dfrac{250}{6250} \times 100 = 4\%$

మూడవ పద్ధతి :

మొదటి సైకిల్ అ.వె. = ₹ 3000

లా.శా. = 20%

కొ.వె. = x అనుకొనుం.

కావున లాభం $= \dfrac{20}{100} \times x = \dfrac{20}{100}x$

అ.వె. = కొ.వె. + లాభం.

కనుక, $x+\frac{20}{100}x = 3000$

$$\frac{100x+20x}{100} = 3000$$

$$\frac{120x}{100} = 3000$$

$$x = \frac{3000\times100}{120} = 2500$$

కనుక మొదటి సైకిల్ కొ.వె. = ₹ 2500

రెండవ సైకిల్ అ.వె. = ₹ 3000

నష్టశాతం = 20%.

కొ.వె. ₹ x అనుకొనిన

నష్టం = $\frac{20}{100}\times x = \frac{20}{100}x$

అ.వె. = కొ.వె. – నష్టం

కావున, $x-\frac{20}{100}x = 3000$

$$\frac{80}{100}x = 3000$$

$$80\,x = 3000\times100$$

$$x = \frac{3000\times100}{80} = ₹\ 3750$$

కనుక రెండవ సైకిల్ కొ.వె. = ₹ 3750

రెండు సైకిళ్ళ కొ.వె.ల మొత్తం = ₹ 2500 + ₹ 3750 = ₹ 6250

రెండు సైకిళ్ళ అ.వె.ల మొత్తం = ₹ 3000 + ₹ 3000 = ₹ 6000

అ.వె. < కొ.వె. కనుక నష్టం

నష్టం = కొ.వె. – అ.వె.

= ₹ 6250 – ₹ 6000 = ₹250

నష్ట శాతం = $\frac{\text{నష్టం}}{\text{కొన్న వెల}}\times 100 = \frac{250}{6250}\times100 = 4\%$

ఉదాహరణ 18 : ఒక వస్తువు విలువ ప్రతి సంవత్సరం 20% చొప్పున తగ్గుచున్నది. ఈ లెక్కన ఒక వస్తువు విలువ రెండు సంవ్సతరాల తర్వాత ₹ 19200 అయిన అసలు విలువ ఎంత?

సాధన : రెండవ సంవత్సరం చివర వస్తువు విలువ = ₹ 19200

విలువ 20% చొప్పున తగ్గునని ఈయబడినది.

ఆరంభ విలువ ₹ 100 అనుకొనుము. రెండవ సంవత్సర ప్రారంభమున వస్తువు విలువ 20% తగ్గి 100 – 20 = ₹ 80 అవుతుంది.

3 సంవత్సర ప్రారంభమున ఆ వస్తువు విలువ = 80 లో 20% తగ్గిన

= 80–16

= 64.

ఈ రకంగా 20% చొప్పున తగ్గే వస్తువు విలువ ఆరంభంన 100 అనుకుంటే రెండు సంవత్సరాల చివరకు 64 అవుతుంది.

లెక్క ప్రకారం 2 సం॥ల తర్వాత వస్తువు విలువ = ₹ 19200

ఆరంభ విలువ x అనుకొనుము.

ఆరంభ, అంతిమ విలువల నిష్పత్తులు సమానం.

$x : 100 = 19200 : 64$

$$\frac{x}{100} = \frac{19200}{64}$$

$$64\,x = 19200 \times 100$$

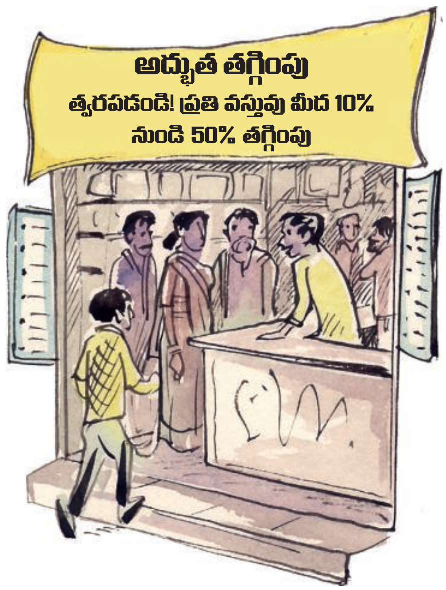
$$x = \frac{19200 \times 100}{64}$$

$$= ₹\ 30000$$

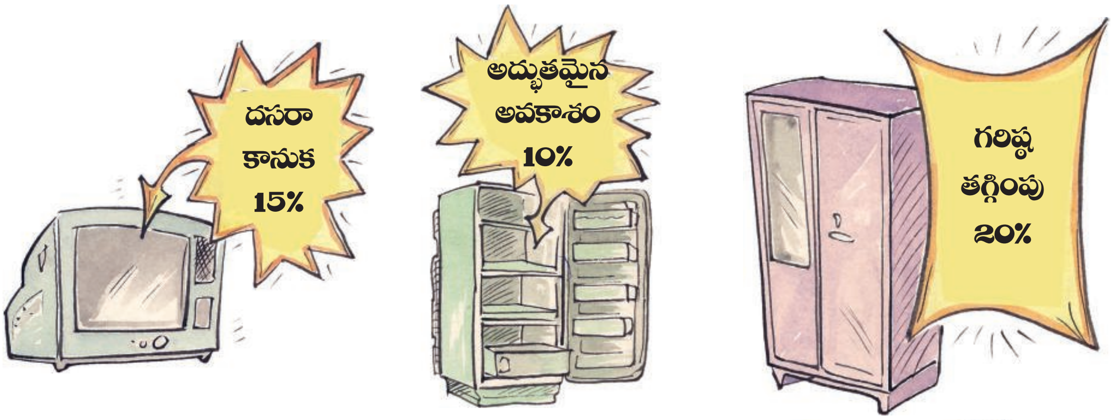
కావున వస్తువు ఆరంభ విలువ = ₹ 30,000

6.7.2 డిస్కౌంటు (తగ్గింపు)

సందర్భం 1 : విజయ్ తన బట్టల దుకాణం ప్రారంభ సందర్భంగా ఇలా ప్రచారం చేసెను.



సందర్భం 2 : దసరా, సంక్రాంతి మొ॥లగు పండుగల సందర్భంగా వ్యాపారులు ప్రకటన ధరపై తగ్గించి ఇస్తారు.



సందర్భం 3 : వ్యాపారులు తమ వద్ద మిగిలిపోయిన మరియు నిలువ వున్న వస్తువుల అంతిమ అమ్మకాలపై 'తగ్గింపును" ప్రకటిస్తారు.

ఉదాహరణ 19 : ఒక దుకాణదారుడు తన వస్తువుల ప్రకటన ధరను కొ.వె. కన్నా 25% అధికంగా ప్రకటించెను. అతను ప్రతి వస్తువుపై 12% రుసుం నిచ్చిన అతనికి వచ్చు లాభశాతమెంత?

సాధన : కొ.వె. ₹ 100 అనుకొనుము.

ఇప్పుడు ప్రకటన వెల (ప్ర.వె) = ₹ 100 + ₹ 25 = ₹ 125

రుసుము శాతం = ప్ర.వె.పై 12%

$$\text{రుసుము} = \frac{12}{100} \times 125$$

$$= ₹\ 15$$

అ.వె. = ప్ర.వె.– రుసుం

= 125 – 15 = ₹ 110

కావున లాభం = అ.వె. – కొ.వె.

$= 110 - 100$

$= ₹\ 10$

$$\text{లాభశాతం} = \frac{10}{100} \times 100 = 10\%$$

కావున దుకాణదారుడు 10% లాభాన్ని పొందుతాడు.

అభ్యాసం - 5

1. ఒక వ్యాపారి ఒక పెట్టెను ₹ 480 లకు కొని ₹ 540 లకు అమ్మెను. అతని లాభశాతం ఎంత?
2. అజయ్ ఒక టి.వి. ను ₹ 15,000 లకు కొని ₹ 14100కు అమ్మితే నష్టశాతం ఎంత?
3. రాము ఒక స్థలాన్ని ₹ 2,40,000 అమ్మటం ద్వారా 20% లాభాన్ని పొందెను. అయిన ఆ స్థలం కొన్ని వెల ఎంత?
4. ఒక సెల్‌ఫోన్‌ను ₹ 750 లకు అమ్మటం ద్వారా ఒకవ్యాపారి 10% నష్టం పొందెను. 5% లాభం పొందుటకు ఆ సెల్‌ఫోన్‌ను అమ్మవలసిన ధర ఎంత?
5. ఒక రైతు రెండు ఎడ్లను ఒక్కొక్కటి ₹ 24000 కు అమ్మెను. ఒక దానిపై 25% లాభాన్ని, రెండవదానిపై 20% నష్టాన్ని పొందితే మొత్తం మీద అతనికి లాభమా? నష్టమా? ఎంతశాతం?
6. శ్రావ్య ఒక గడియారాన్ని ₹ 480లకు కొని రిధికి $6\frac{1}{4}\%$ లాభానికి అమ్మెను. రిధి ఆ గడియారాన్ని 10% లాభంతో దివ్యకు అమ్మెను. దివ్యచెల్లించిన మొత్తం ఎంత?
7. ఒక పుస్తకము ప్రకటన వెల ₹ 225 ప్రచురణ కర్త 10% రుసుమును ఇస్తే పుస్తకము అమ్మకపు వెల ఎంత?
8. ఒక వడ్రంగి తాను తయారుచేసిన వస్తువులపై 15% తగ్గింపును అమలుచేయును. ఒక కుర్చీ అమ్మిన వెల ₹ 680 అయిన దాని ప్రకటన వెల ఎంత?
9. ఒక డీలరు తన వస్తువుల ప్రకటన వెలపై 10% తగ్గింపు నిచ్చి కూడా 10% లాభం పొందగలడు. ఒక వస్తువు కొ.వె. ₹ 900 అయిన దాని ప్రకటన వెలఎంత?

6.7.3 సాధారణ వడ్డీ

రమణయ్య వద్ద వ్యవసాయ పనుల నిమిత్తం ₹ 10,000 ఉన్నాయి. కానీ అతనికి ₹ 15000 మేరకు ఖర్చులకు అవసరమౌతాయి. మిగిలిన ₹ 5000 కోసం వ్యవసాయ ఋణం కొరకు బ్యాంకుకు వెళ్ళి మేనేజర్‌ను కలిసాడు. వారి సంభాషణ ఇలా ఉంది.

రమణయ్య : నమస్తే! సర్! నాకు వ్యవసాయ ఋణం కావాలి.

బ్యాంకు మేనేజర్ : ఎంత సొమ్ము కావాలి?

రమణయ్య : ₹ 5000

బ్యాం.మే. : ఎంత కాలానికి తిరిగి చెల్లించగలవు?

రమణయ్య : 1 సం॥

బ్యాం.మే. : అసలుతోబాటు 6% వడ్డీని కూడా చెల్లించాలి.

రమణయ్య : అలాగేనండి. చెల్లిస్తాను.

బ్యాం.మే. : ఎంత చెల్లించాలో తెలుసా?

రమణయ్య : ఓ! తెలుసండి. ₹ 100 కు రూ.6 చొప్పున ₹ 1 కి ₹ $\frac{6}{100}$ అంటే అసలు ₹ 5000 తోపాటు

$\frac{6}{100} \times 5000 = 300$ చెల్లించాలి అంటే మొత్తం ₹ 5300 చెల్లించాలి.

అప్పుతీసుకున్న లేదా అప్పుగా ఇచ్చిన సొమ్మును అసలు అంటాం. అసలును కొంత కాలము తర్వాత చెల్లించేటపుడు వాడుకున్న కాలానికి గాను అదనంగా కొంత సొమ్మును అసలుతోపాటు చెల్లించాలి. అసలుకు అదనంగా చెల్లించే సొమ్మును వడ్డీ అంటారు.

చెల్లించవలసిన మొత్తం సొమ్ము అసలు, వడ్డీల మొత్తానికి సమానం.

మొత్తం = అసలు + వడ్డీ.

A = P + I

సాధారణంగా 1సం॥ వడ్డీని అసలుతో కొంత శాతంగా తెలుపుతారు.

ఉదాహరణకు 1సం॥నకు 10 శాతం వడ్డీని 10% అని తెలుపుతారు.

అంటే ప్రతి ₹ 100కు ఒక సం॥నకు గాను ₹ 10 వడ్డీగా చెల్లించాలి. కింది ఉదాహరణను పరిశీలిద్దాం.

ఉదా 20 : సునీత ₹ 5000 లను 12% వడ్డీకి అప్పుగా తీసుకొంది. 1 సం॥ తర్వాత ఆమె చెల్లించవలసిన వడ్డీఎంత?

సాధన : అసలు = ₹ 5000

వడ్డీరేటు = 12% సం॥నకు

₹ 100కు రూ.12 చొప్పున ₹ 5000 కు గాను $\frac{12}{100} \times 5000$ = ₹ 600 చెల్లించాలి.

అంటే చెల్లించవలసిన మొత్తం = ₹ 5000 + ₹ 600 = ₹ 5600

> సాధారణంగా అసలు (P), వడ్డీరేటు (R), చొప్పున 1సం॥నకు అగు వడ్డీ (I) అయిన చెల్లించవలసిన మొత్తం (A)
>
> $$A = P + \frac{P \times R}{100}$$

పై ఉదాహరణలో 1సం॥లో రామయ్య బాకీని చెల్లించలేనిచో, వడ్డీని 2సం॥లకు లెక్కగడతారు. అంటే తరువాతి సం॥నకు కూడా రూ.300 చెల్లించాలి. 2 సం॥లకు గాను వడ్డీ 2×300 = రూ.600 చెల్లించాలి.

రూ.100కు, 1సం॥నకు వడ్డీ 18 చొప్పున 3సం॥లకు అగువడ్డీ = 18+18+18 = రూ.54.

'అసలు'ను చెల్లించుటకు పట్టేకాలము పెరిగిన కొలదీ వడ్డీ కూడా పెరుగుతుంది. చెల్లించ వలసిన వడ్డీ, వాడుకున్న కాలానికి అనులోమానుపాతంలో ఉంటుంది.

> సాధారణంగా అసలు (P), వడ్డీరేటు (R), కాలము (T)
>
> అయిన వడ్డీ (I) = P×R%×T or $P \times \frac{R}{100} \times T = \frac{PRT}{100}$

ఇవి చేయండి.

1. అసలు రూ.8250 పై 3 సంవత్సరాల కాలానికి 8% వడ్డీరేటు చొప్పున వడ్డీ ఎంత?
2. రూ.3000 లను 9% వడ్డీరేటున ఇచ్చిన 21/2 సం॥ల తర్వాత చెల్లించలసిన వడ్డీని కనుగొనుము.

ఉదాహరణ 21 : 10% బారువడ్డీ / సాధారణ వడ్డీ చొప్పున ₹ 6880 ఎంతకాలానికి ₹ 7224 అవుతుందో కనుగొనండి.

సాధన : మొత్తం = ₹ 7224

అసలు(P) = ₹ 6880

సాధారణ వడ్డీ = మొత్తం – అసలు = ₹ 7224 – ₹ 6880 = ₹ 344

R% = 10%

$$I = P \times \frac{R}{100} \times T$$

$$344 = 6880 \times \frac{10}{100} \times T$$

$$344 \times 100 = 6880 \times 10 \times T$$

కావున, $T = \frac{344 \times 100}{6880 \times 10} = \frac{1}{2} = 6$ నెలలు.

ఉదాహరణ 22 : కొంత సొమ్ము 8% వడ్డీరేటున 2సం॥ల 4 నెలలకు ₹ 3927ను వడ్డీగా ఇచ్చును. అయిన అసలు కనుక్కోండి.

సాధన : S.I = ₹ 3927,

R% = 8 %

T = 2 సం॥, 4 నెలలు = $\left(2 + \frac{4}{12}\right)$ సం ॥లు = $\left(2 + \frac{1}{3}\right)$ సం॥లు $\frac{7}{3}$ సం॥లు

$I = P \times \frac{R}{100} \times T$ లో ప్రతిక్షేపించగా

$$3927 = P \times \frac{8}{100} \times \frac{7}{3}$$

$$3927 \times 100 \times 3 = P \times 8 \times 7$$

కావున, $\frac{3927 \times 100 \times 3}{8 \times 7} = P$

అందుచే, P = ₹ 21037.50

కావున, అసలు = ₹ 21037.50

ఉదాహరణ 23 : సంవత్సరానికి ఏ రేటు వంతున ₹ 6360లు 2 1/2 సం॥లలో ₹ 1378 వడ్డీ నిచ్చును.

జవాబు : అసలు (P) = ₹ 6360

కాలం (T) = $2\frac{1}{2}$ సం॥

సాధారణ వడ్డీ (S.I) = ₹ 1378

$I = P\times\frac{R}{100}\times T$ లో ప్రతిక్షేపించగా

$$1378 = 6360\times\frac{R}{100}\times\frac{5}{2}$$

$$1378\times100\times2 = 6360\times5\times R$$

కావున $R = \frac{1378\times100\times2}{6360\times5} = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}\%$

ఉదాహరణ 24 : ఏడాదికి ఏ రేటు వంతున 16 సంవత్సరాలలో అసలు మూడింతలగును?

సాధన : అసలు ₹ x అనుకొనుము.

16 సం॥ల తర్వాత మొత్తం = $3x$

మొత్తం – అసలు = వడ్డీ

కావున, $3x - x = 2x$

$P = x,\quad T = 16,\quad I = 2x$

$$I = P\times\frac{R}{100}\times T$$

$$2x = x\times\frac{R}{100}\times16$$

$$2x\times100 = x\times16\times R$$

కావున, $R = \frac{2x\times100}{x\times16} = \frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}\%$

అభ్యాసం - 6

1. ₹ 12,600 లు 9% వడ్డీ వంతున మొత్తం ₹ 15624 అగుటకు ఎంత కాలము పట్టును?
2. 8 సం॥ల 4 నెలల సమయంలో ఏరేటు వంతున అసలు రెట్టింపగును?
3. ఒక బ్యాంక్ వారు స్కూల్ పిల్లలకు ఒక పొదుపు స్కీమును ప్రకటించారు. పిల్లలకు కిడ్డీ బ్యాంక్‌లను ఇచ్చి, వారి పొదుపు సొమ్మును అందులో వుంచుకునేలా చేసి, సంవత్సరానికి ఒకసారి ఆసొమ్మును సేకరిస్తారు. అందులో సొమ్ము ₹ 10,000 లు పైన ఉంటే 6% వంతున, అంతకు తక్కువైన 5% వడ్డీరేటు వంతున చెల్లిస్తారు. ₹ 9000లు. సేకరణపై ఆస్కూల్ ఎంత వడ్డీ పొందగలదు.
4. కొంత సొమ్ముపై 8% వడ్డీ రేటు వంతున 2 సంవత్సరాలకు సాధారణ వడ్డీతో ₹ 12122 లు అయిన 9% వడ్డీ రేటు వంతున 2 సంవత్సరాల 8 నెలలకు ఎంత మొత్తమగును.
5. కొంత వడ్డీరేటుపై ₹ 6500లు, 4 సం॥లకు ₹ 8840 లు అగును. అదే వడ్డీరేటు వంతున ₹ 1600లు ఎంత కాలములో ₹ 1816 లు మొత్తమగును.

వడ్డీ పొందుదాం!

పిల్లలూ! సరళవడ్డీ (సామాన్యవడ్డీ) పై ఒక ఆటను ఆడుదామా!

ఈ ఆటను 5 మంది ఆడవచ్చు.

1. మూడు P, R మరియు T అని గుర్తించిన గిన్నెలను తీసుకొనుము. ప్రతి గిన్నెలోను 5 కాగితము ముక్కలను, ప్రతిముక్కపై ఒక సంఖ్యను వ్రాసి వేయవలెను.

   (గమనిక : P గిన్నెలోని సంఖ్యలు 100 గుణిజాలు కాని, 1000 గుణిజాలు కాని రాయండి).
2. ప్రతి గిన్నెనుంచి ఒక కాగితము ముక్క వంతున మూడు గిన్నెల నుండి మూడు కాగితము ముక్కలను వరుసగా తీసుకొనుము.
3. P గిన్నె నుంచి తీసిన సంఖ్య అసలుగాను, R గిన్నెనుంచి తీసిన సంఖ్య వడ్డీ రేటుగాను, T గిన్నె నుంచి తీసిన సంఖ్య కాలముగాను గుర్తించుము.
4. ఇపుడు వడ్డీని కనుగొని, I, P, T మరియు R విలువలను తెలుపుము.
5. నీవు సరియైన సమాధానము చెప్పిన నీ అకౌంటులో ఆ విలువను గుర్తించి, తప్పు చెప్పిన (O) గా గుర్తించుము.

   గమనిక : 2 లేక 3సార్లు ఇదే ఆటను ఆడి కింది పట్టికలో విలువలను గుర్తించుము.

వడ్డీ మొత్తం				
పేరు	మొదటి సారి	రెండవ సారి	మూడవ సారి	మొత్తం

మనం నేర్చుకున్నవి

- నిత్యజీవితంలో చాలా సందర్భాలను నిష్పత్తులలో పోలుస్తాం. ఉదాహరణకు నాజీతం నెలకు ₹ 10,000 మరియు నా మిత్రుని జీతం నెలకు ₹ 20,000 అనుకొందాం. అంటే నా జీతం నా మిత్రుని జీతంలో సగమని లేదా నా మిత్రుని జీతం నా జీతానికి రెట్టింపని అంటాం. నాజీతం మరియు మిత్రుని జీతాల నిష్పత్తి 1 : 2 గా మిత్రుని మరియు నా జీతాల నిష్పత్తి 2 : 1 గా చెప్తాం.
- రెండు నిష్పత్తులు సమానమైన వాటిలోని పదాలు అనుపాతంలో ఉన్నాయంటాము.
- ఒక రాశిలోని పెరుగుదల (తగ్గుదల) మరొక రాశిలో పెరుగుదల(తగ్గుదల)కు కారణమైతే ఆరెండు రాశులు అనులోమ చరత్వాన్ని కలిగి యున్నాయంటాము.
- శాతం అంటే నూటికి అని అర్థం. నిష్పత్తుల పోలికలో శాతాలను వాడటం అర్థవంతంగా వుంటుంది. శాతమునకు గుర్తు %.

  ఉదా $13\% = \frac{13}{100} = 0.13$
- నిత్యజీవితంలో లాభనష్టాలు, రుసుములు, వడ్డీలను గణించడంలో శాతాలను ఉపయోగిస్తారు.
- నిత్య జీవితములో వివిధ సందర్భములలో శాతములనుపయోగిస్తారు. ఈ పాఠ్యాంశములో లాభము, నష్టం, రుసుము మరియు సామాన్య వడ్డీని గూర్చి నేర్చుకొన్నారు.

అద్భుత నిష్పత్తులతో తమాషా!

1, 2, 3 ..... 9 అంకెలను అన్నింటిని ఒక్కొక్కసారి మాత్రమే ఉపయోగించి రెండు సంఖ్యలుగా రూపొందించి వాటి నిష్పత్తి కనుగొంటే 1:2 అగును.

ఉదాహరణ : $\frac{7329}{14658} = \frac{1}{2} = 1:2$. ఇది ఒక అద్భుత నిష్పత్తి.

అదే విధంగా ఈ అంకెలను మరొక విధంగా అమర్చి సంఖ్యల నిష్పత్తి కనుగొంటే 1:3, 1:4, 1:5, 1:6, 1:7, 1:8, 1:9 వస్తాయి. వాటిని కనుగొని ఆనందించండి.

దత్తాంశ నిర్వహణ

7

7.0 పరిచయం

ఒక దినపత్రికలో క్రీడా వార్తల విభాగాన్ని రవి చదువుతున్నాడు. ఆ విభాగంలోని ఒక పేజీలో రెండు పట్టికలు కింది విధంగా ఉన్నాయి.

2011 ప్రపంచకప్‌లో ఐదుగురు ఉత్తమ బ్యాట్స్‌మెన్

బ్యాట్స్‌మెన్ పేరు	చేసిన పరుగులు
టి.ఎం. దిల్షన్ (శ్రీలంక)	500
సచిన్ టెండూల్కర్ (ఇండియా)	482
కె. సంగక్కర (శ్రీలంక)	465
జొనాథన్ ట్రాట్ (ఇంగ్లాండ్)	422
తరంగ యు. (శ్రీలంక)	395

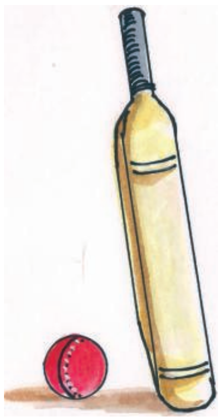
పట్టిక - 1

2011 ప్రపంచకప్‌లో ఐదుగురు ఉత్తమ బౌలర్లు

బౌలర్ పేరు	తీసిన వికెట్లు
అఫ్రీదీ (పాకిస్తాన్)	21
జహీర్ ఖాన్ (ఇండియా)	21
టి.జి. సౌతీ (న్యూజిలాండ్)	18
రాబిన్ పీటర్ సన్ (సౌత్ ఆఫ్రికా)	15
ఎం. మురళీధరన్ (శ్రీలంక)	15

పట్టిక - 2

పై రెండు పట్టికలు ఏం తెలియజేస్తున్నాయి?



2011 ప్రపంచకప్‌లో ఎక్కువ పరుగులు చేసిన బ్యాట్స్‌మెన్ పేర్లను, వారు చేసిన పరుగులను మొదటి పట్టిక తెలియజేస్తుంది. నిర్ణయాలు తీసుకునేందుకు, ఉదాహరణకు అత్యుత్తమ బ్యాట్స్‌మెన్ అవార్డును ఎవరికివ్వాలనే విషయంలో నిర్ణయానికి వచ్చేందుకు ప్రపంచకప్ నిర్వాహకులకు ఈ సమాచారం దోహదపడుతుంది.

2011 ప్రపంచకప్‌లో ఎక్కువ వికెట్లు తీసిన బౌలర్ల పేర్లను, వారు తీసుకున్న వికెట్ల సంఖ్యను రెండో పట్టిక తెలుపుతుంది. పట్టికలోని సమాచారం అంతిమ ఫలితాలను రాబట్టి తగు నిర్ణయాలు తీసుకోవడానికి ఉపకరిస్తుంది. ఉదాహరణకు అత్యుత్తమ బౌలర్ అవార్డును ఎవరికివ్వాలనే విషయంలో నిర్ణయానికి వచ్చేందుకు ప్రపంచకప్ నిర్వాహకులకు ఈ సమాచారం దోహదపడుతుంది.

"సంఖ్యలు, పదాల రూపంలో ఉంటూ అంతిమ ఫలితాలను రాబట్టి తగు నిర్ణయాలను తీసుకోవడానికి సేకరించబడిన సమాచారాన్ని దత్తాంశం (data) అంటారు". సమాచారంలోని సంఖ్యా వివరాలను 'రాశులు' అంటారు. పై ఉదాహరణలో బ్యాట్స్‌మెన్ పేర్లు వాళ్ళు చేసిన పరుగులు, బౌలర్ల పేర్లు - తీసుకున్న వికెట్లు మొదలైన వివరాలనే దత్తాంశం అంటారు. పట్టికలు, గ్రాఫులు మనకు దత్తాంశాన్ని తెలియజేస్తాయి. సంజ్ఞా రూపంలో నమోదు చేయబడ్డ దత్తాంశాన్ని పరిశీలనాంశాలు అంటారు.

ప్రయత్నించండి.

మీ పాఠశాల నోటీస్ బోర్డును ఒకసారి పరిశీలించండి. అందులో ఏమైనా సమాచార పట్టికలు ఉన్నాయా? ఈ సమాచారాన్ని ఎవరు ఉపయోగిస్తారో తెలుసుకోండి.

7.1 దత్తాంశ అమరిక

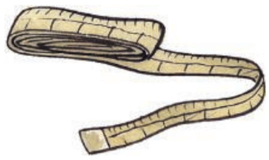
'జవహర్ బాల ఆరోగ్యరక్ష' పథకంలో ఒక పాఠశాలలో ఎనిమిదో తరగతి చదివే ఏడుగురు పిల్లల వివరాలను నమోదు చేశారు.

ఆ పిల్లల ఎత్తులను కృష్ణ తన నోట్ పుస్తకంలో కింది విధంగా నమోదు చేశాడు :

అమల -125 సెం.మీ, లేఖ్య -133సెం.మీ, తబస్సుమ్ -121సెం.మీ, సుధ -140సెం.మీ, వనజ -117సెం.మీ, లెనిన్ -129సెం.మీ, రాజేశ్ -132 సెం.మీ.

ఇదే సమాచారాన్ని కుమార్ అనే మరో విద్యార్థి పట్టికా రూపంలో నమోదు చేసి ఆరోహణ క్రమంలో అమర్చాడు.

విద్యార్థి పేరు	ఎత్తు (సెం.మీలలో)
వనజ	117
తబస్సుమ్	121
అమల	125
లెనిన్	129
రాజేశ్	132
లేఖ్య	133
సుధ	140



కింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలు ఇవ్వండి.

(i) విద్యార్థులందరిలో ఎక్కువ పొడవైన వారు ఎవరు?

(ii) విద్యార్థులందరిలోకి మిక్కిలి పొట్టిగా ఉన్నదెవరు?

(iii) విద్యార్థులందరినీ ఎత్తుల ప్రకారం నిలబెడితే అమలకూ, రాజేష్‌కూ మధ్య ఉండేది ఎవరు?

– పై ప్రశ్నలకు సమాధానం ఇచ్చేందుకు మీరు కృష్ణ రాసిన సమాచారాన్ని ఉపయోగిస్తారా లేదా కుమార్ రాసిన సమాచారాన్నా? మీరు బహుశా కుమార్ రూపొందించిన సమాచారాన్నే ఉపయోగించి ఉంటారు. కుమార్ రూపొందించిన సమాచారం క్రమపద్ధతిలో ఉండి, చదవడానికీ అవగాహన చేసుకోవడానికీ సులువుగా ఉండడమే దీనికి కారణం.

ఇవి చేయండి.

ఒక లఘు పరీక్షలో తెలుగు, హిందీ, ఇంగ్లీషు, గణితం, సామాన్యశాస్త్రం, సాంఘిక శాస్త్రం విషయాల్లో అమర్ వరుసగా 15, 12, 18, 16, 19 , 17 మార్కులు సాధించాడు. పీటర్ వరుసగా ఆ విషయాల్లో 18, 16, 15, 14, 19, 12 మార్కులు సాధించాడు. ఈ సమాచారాన్ని అర్థవంతంగా క్రమపద్ధతిలో అమర్చండి. సమాచారాన్ని క్రమపద్ధతిలో వ్యాఖ్యానించండి.

తరగతి గది ప్రాజెక్టు

మీ తరగతిలోని పిల్లల బరువులను, బరువు తూచే యంత్రం (weighing machine) సహాయంతో తూచండి. ఈ సమాచారాన్ని ఆరోహణ లేదా అవరోహణ క్రమంలో అమర్చండి. కింది ప్రశ్నలకు సమాధానం ఇవ్వండి.

a. మీ తరగతిలో అందరికంటే తక్కువ బరువు గల వారు ఎవరు?

b. 25 కి.గ్రా కంటే ఎక్కువ బరువు ఉండే విద్యార్థులెందరు?

c. 20 కి.గ్రా నుండి 30 కి.గ్రా. మధ్య బరువు ఉండే విద్యార్థులెందరు?

7.2 ప్రాతినిధ్య విలువలు

ఒక వసతిగృహంలో,

- ఒక రోజులో వినియోగించే సరాసరి బియ్యం వినియోగం 150 గ్రా.
- విద్యార్థుల సరాసరి వయస్సు 13 సంవత్సరాలు.
- విద్యార్థుల సరాసరి ఎత్తు 135 సెం.మీ.

పిల్లలూ! పై సమాచారాన్ని ఒకసారి పరిశీలించండి. ప్రతి విద్యార్థి ఒక్కో రోజు ఖచ్చితంగా 150 గ్రా. బియ్యాన్ని వినియోగిస్తున్నాడా? తరగతిలోని ప్రతి విద్యార్థి వయస్సూ 13 సం. అని చెప్పగలమా? తరగతిలోని ప్రతి విద్యార్థీ 135 సెం.మీ ఎత్తు ఉంటాడని చెప్పగలమా?

పై ప్రశ్నలన్నింటికీ సమాధానం 'కాదు' అనే వస్తుంది. కొందరు పిల్లలు 150 గ్రా. బియ్యం కంటే ఎక్కువ తీసుకుంటే మరి కొందరు పిల్లలు 150 గ్రా. కంటే తక్కువ తీసుకుంటారు. కొందరు ఖచ్చితంగా 150గ్రా. బియ్యాన్నే తీసుకుంటారు కూడా. పిల్లల బరువు, ఎత్తుల విషయంలోనూ అంతే!

ఈ సందర్భంలో వసతిగృహంలోని ఒక్కొక్క విద్యార్థి వినియోగించిన బియ్యాన్ని 150 గ్రా. తెలియజేస్తుంది. ఒక్కొక్క విద్యార్థి వినియోగించిన బియ్యానికి ఇది 'ప్రాతినిధ్య విలువ' (Representative value) అదే విధంగా వసతిగృహంలోని ఒక్కో విద్యార్థి వయస్సును 13సం. సూచిస్తుంది. ఇది ఒక్కో విద్యార్థి వయస్సుకు 'ప్రాతినిధ్య విలువ' ఎత్తు విషయంలోనూ ఇదే వర్తిస్తుంది. పై ఉదాహరణలన్నీ ఆయా దత్తాంశాలకు ఒక ప్రాతినిధ్య విలువను సూచిస్తాయి. దాన్నే 'సగటు' అంటారు. ఈ అధ్యాయంలో 'సగటు' తో పాటు 'మధ్యగతం', 'బాహుళకం' అనే మరో రెండు ప్రాతినిధ్య విలువల గురించి కూడా నేర్చుకుందాం.

7.3.1 సగటు లేదా అంక మధ్యమము

ఒక పాఠశాలలోని ఫిజికల్ ఎడ్యుకేషన్ టీచర్ ప్రతిరోజూ సాధన చేయవలసిందిగా తన విద్యార్థులకు చెప్పారు. ఒక వారంలో రాజేందర్ అనే విద్యార్థి చేసిన సాధన కాలం వివరాలు (నిమిషాల్లో) కింది విధంగా ఉన్నాయి.

రోజు	సోమ	మంగళ	బుధ	గురు	శుక్ర	శని	ఆది
సాధన చేసిన కాలం (నిమిషాల్లో)	20	35	40	30	25	45	15

సాధన కోసం రాజేందర్ రోజుకు వినియోగించిన కాలాన్ని మనం గణించవచ్చా? పరిశీలిద్దాం.

మొత్తం వారంలో సాధనకోసం రాజేంద్ర వినియోగించిన సమయ మెంత?

మొత్తం సమయం $= 20 + 35 + 40 + 30 + 25 + 45 + 15 = 210$ నిమిషాలు

రోజుకు సాధన కోసం వినియోగించిన కాలాన్ని లెక్కించేందుకు ఈ మొత్తం సమయాన్ని రోజుల సంఖ్యతో భాగించాలి.

అంటే $\dfrac{20+35+40+30+20+45+15}{7} = \dfrac{210}{7} = 30$ నిమిషాలు

ఇది రోజుకు సాధన కోసం వినియోగించిన సమయం లేదా ఒక్కోరోజుకు ప్రాక్టీస్ సెషన్ కాలం.

ఉదాహరణ 1: ఒక కూరగాయల వ్యాపారి ఒక వారంలో సంపాదించిన సొమ్ము (రూపాయల్లో) 200, 150, 180, 300, 160, 170, 170. రోజుకు అతని సరాసరి సంపాదనను కనుక్కోండి.

సాధన : వారంలో మొత్తం సంపాదన(రూపాయల్లో) = 200+150+180+300+160+170+170

= ₹1330

వారంలోని మొత్తం రోజులు = 7

సరాసరి సంపాదన $= \frac{1330}{7} =$ ₹190

'సరాసరి' నే 'సగటు' లేదా 'అంక మధ్యమం' అంటారు.

$$\text{సరాసరి లేదా అంక మధ్యమం (A.M)} = \frac{\text{రాశుల మొత్తం విలువ}}{\text{రాశుల సంఖ్య}}$$

ప్రయత్నించండి.

1. ఒక టీమ్‌లోని క్రీడాకారుల వయస్సులు (సంవత్సరాల్లో) 16, 16, 16, 14, 17, 18. అయితే
   (i) అతి తక్కువ, అతి ఎక్కువ వయస్సు ఉన్న క్రీడాకారుల వయస్సులు ఎంతెంత?
   (ii) క్రీడాకారుల సగటు వయస్సు ఎంత?
2. మీరు ఒక వారంలో సరాసరిన రోజుకు ఎన్ని గ్లాసుల నీళ్ళు తాగుతారు? ఈ సరాసరిని మీరు ఎలా కనుక్కొన్నారు?

7.3.2 మధ్యమం ఎక్కడ ఉంటుంది?

తెలుగు, హిందీ, ఇంగ్లీషు పాఠ్యాంశాలలో (సబ్జెక్టులలో) అనిల్, అమర్, ఆంటోనీ, ఇందర్ పొందిన మార్కుల వివరాలు కింది విధంగా ఉన్నాయి.

	తెలుగు	హిందీ	ఇంగ్లీషు
అనిల్	15	8	10
అమర్	10	10	12
ఆంటోనీ	11	6	11
ఇందర్	12	12	13

ప్రతి సబ్జెక్ట్‌లోను విద్యార్థులు పొందిన సరాసరి మార్కులను గణిద్దాం.

తెలుగు	హిందీ	ఇంగ్లీషు
A.M $= \frac{15+10+11+12}{4}$	A.M $= \frac{8+10+6+12}{4}$	A.M =
$= \frac{48}{4}$	$= \frac{36}{4}$	= ………
= 12	= ……..	= ………
అత్యధిక మార్కులు = 15	అత్యధిక మార్కులు = …….	అత్యధిక మార్కులు = …….
అత్యల్ప మార్కులు = 10	అత్యల్ప మార్కులు = …….	అత్యల్ప మార్కులు = …….
మధ్యమం = 12	మధ్యమం = …….	మధ్యమం = …….

పై ప్రతి సందర్భంలోనూ 'అంక మధ్యమం' విలువ అత్యధిక, అతితక్కువ విలువల మధ్యే ఉందా?

ఉంది కదూ!

అంక మధ్యమం ఎల్లప్పుడూ అత్యధిక, అత్యల్ప పరిశీలనా విలువల మధ్యే ఉంటుంది.

7.3.3 అంక మధ్యమము యొక్క ధర్మము

ఉదాహరణ 3 : ఒక కుటుంబంలోని కృష్ణ, రాధిక, నీహారిక, నిఖిల్ అనే కుటుంబసభ్యుల వయస్సులు (సంవత్సరాల్లో) 44, 39, 17,12. అయితే (i) వారి వయస్సుల అంక మధ్యమాన్ని కనుక్కోండి (ii) ఐదేళ్ళ క్రితం వారి వయస్సులెంత? ఐదేళ్ళ క్రితం సగటు వయస్సెంత? (iii) సగటులోని మార్పుకూ, వయస్సుల సంఖ్యకూ మధ్య ఏదైనా సంబంధాన్ని మీరు గమనించారా?

సాధన : కుటుంబ సభ్యుల వయస్సులు (సంవత్సరాల్లో) = 44, 39, 17, 12

కుటుంబ సభ్యుల సంఖ్య = 4

కాబట్టి వారి వయస్సుల అంక మధ్యమం $= \frac{44+39+17+12}{4} = \frac{112}{4} = 28$ సంవత్సరాలు

ఐదేళ్ళ క్రితం కుటుంబ సభ్యుల వయస్సులు(సంవత్సరాల్లో) = 44 – 5, 39 – 5, 17 – 5, 12 – 5

= 39, 34, 12, 7

కాబట్టి ఐదేళ్ళ క్రితం వారి వయస్సుల అంక మధ్యమం $= \frac{39+34+12+7}{4} = \frac{92}{4} = 23$ సంవత్సరాలు

ప్రస్తుత అంక మధ్యమానికీ, ఐదేళ్ళ క్రితం వారి వయస్సుల అంక మధ్యమానికీ తేడా ఎంత?

దీన్ని బట్టి ఏం తెలుస్తోంది?

ప్రతి కుటుంబసభ్యుని వయస్సును ఐదేళ్ళు తగ్గిస్తే అంక మధ్యమమూ ఐదేళ్ళు తగ్గింది.

ఇప్పటి నుండి మూడేళ్ళ తర్వాత ఆ కుటుంబంలోని సభ్యుల వయస్సుల అంక మధ్యమం కనుక్కోండి.

పదేళ్ళ తర్వాత ఆ కుటుంబంలోని సభ్యుల వయస్సుల అంక మధ్యమం ఎంత ఉండవచ్చు?

ఒక దత్తాంశంలోని అన్ని విలువలకూ ఒకే సంఖ్యను కలిపినా లేదా తీసేసినా అంక మధ్యమం కూడా అదే సంఖ్యా విలువలో పెరుగుతుంది లేదా తగ్గుతుంది.

ప్రయత్నించండి.

1. ఒక దత్తాంశంలోని పది రాశులలో గరిష్ఠ విలువ 25గానూ, కనిష్ఠ విలువ 15 గానూ ఉంది. ఈ పరిశీలనల సగటు ఎంత అయ్యే అవకాశము ఉంది? ఎందుకు?

   (i) 12 (ii) 15 (iii) 21 (iv) 27

2. పరిశీలనల విలువలు 28, 45, 33, 21, 48, 30, 34, 36 , 40 గా నమోదయ్యాయి. కింది విలువల్లో ఏది ఈ విలువల సగటు అవుతుందో గణించకుండానే తెలపండి.

   (i) 20 (ii) 35 (iii) 48 (iv) 50

అభ్యాసం - 1

1. హైదరాబాదులో 2011 ఫిబ్రవరి 26 నుండి మార్చి 4 వరకు వారంలో గల ప్రతిరోజూ గరిష్ఠ ఉష్ణోగ్రతలు $26\,^{o}C$, $27^{0}C$, $30^{0}C$, $30^{0}C$, $32^{0}C$, $33^{0}C$, $32^{0}C$ గా నమోదయ్యాయి.

   (i) ఆ వారంలో అత్యధిక ఉష్ణోగ్రత ఎంత?

   (ii) ఆ వారంలోని రోజువారి గరిష్ఠ ఉష్ణోగ్రతల సరాసరి ఎంత?

2. ఒక పాఠశాలలో మధ్యాహ్న భోజన పథకంలో వరుసగా 5 రోజుల పాటు వినియోగించిన బియ్యం 15.750 కి.గ్రా; 14.850 కి.గ్రా;16.500 కి.గ్రా; 14.700 కి.గ్రా; 17.700 కి.గ్రా, ఆ 5 రోజుల్లో సరాసరి బియ్యం వినియోగాన్ని కనుక్కోండి.

3. ఒక గ్రామంలో వేరుశనగ, జొన్నలు, తృణధాన్యాలను పండిస్తారు. వరుసగా నాలుగు సంవత్సరాల్లో ఆయా పంటలపై ఎకరానికి లాభం విలువలు (రూపాయల్లో) కింది విధంగా ఉన్నాయి.

సంవత్సరం / పంట	2005	2006	2007	2008
వేరు శనగ	7000	8000	7500	7500
జొన్నలు	6000	1000	8000	1000
తృణధాన్యాలు	9000	5000	3000	4000

   (i) పై నాలుగు సంవత్సరాల్లో ప్రతి పంటపై సరాసరి లాభాన్ని గణించండి.

   (ii) ఆ తరువాతి సంవత్సరంలో ఏ పంట పండిస్తే బాగుంటుందో మీ ఫలితం ఆధారంగా తెలపండి.

4. టి.ఎస్ ఆర్ టి సి బస్సులో ఆదిలాబాద్ నుండి నిర్మల్ వరకు ఒక రోజులో 4 ట్రిప్పుల్లో ప్రయాణించిన ప్రయాణికుల సంఖ్య 39, 30, 45, 54. ఆ బస్సు ఆక్యుపెన్సీ రేషియో (ఒక ట్రిప్పులో ప్రయాణించిన సగటు ప్రయాణికుల సంఖ్య) ఆ రోజులో ఎంత?

5. ఇంగ్లీషులో 4 లఘు పరీక్షల్లో అంజు, నీలేష్, లేఖ్య పొందిన మార్కుల వివరాలు క్రింది విధంగా ఉన్నాయి.

విద్యార్థి పేరు	లఘు పరీక్ష I	లఘు పరీక్ష II	లఘు పరీక్ష III	యూనిట్ పరీక్ష IV
అంజు	అనుపస్థితి	19	18	19
నీలేష్	0	15	17	19
లేఖ్య	15	19	19	19

(i) లేఖ్య పొందిన సరాసరి మార్కులను కనుగొనండి.

(ii) అంజు పొందిన సరాసరి మార్కులను కనుగొనండి. ఆమె పొందిన మొత్తం మార్కులను 3 తో భాగిస్తారా లేక 4తో భాగిస్తారా? ఎందుకు?

(iii) నీలేష్ అన్ని పరీక్షలకూ హాజరైనాడు. అతడి సరాసరి మార్కులెన్ని? అతడు పొందిన మొత్తం మార్కులను 3 తో భాగిస్తారా లేక 4తోనా? ఎందుకు?

(iv) ఇంగ్లీషులో బాగా ప్రతిభ కనబరిచిన విద్యార్థి ఎవరు?

6. ముగ్గురు స్నేహితులు ఒక హోటల్‌కు వెళ్లి వారికిష్టమైన అల్పాహారం తీసుకున్నారు. వాళ్ళు ₹ 16, ₹ 17, ₹ 21 చెల్లించారు. (i) వాళ్ళ సరాసరి ఖర్చును కనుక్కోండి. (ii) వాళ్ళు ఖర్చుపెట్టిన మొత్తానికి 3 రెట్ల మొత్తాన్ని ఖర్చుపెడితే సరాసరి ఖర్చు ఎంత అవుతుంది? (iii) ఖర్చులో మార్పుకూ సరాసరి ఖర్చులో మార్పుకూ మధ్య ఏమైనా సంబంధాన్ని గమనించారా?

7. మొదటి 10 సహజ సంఖ్యల సగటును కనుక్కోండి.

8. మొదటి 5 ప్రధాన సంఖ్యల సగటును కనుక్కోండి.

9. నాలుగు పూర్ణసంఖ్యలలో మొదటి రెండు కనిష్ట పూర్ణసంఖ్యల సగటు 102. మొదటి మూడు కనిష్ట పూర్ణసంఖ్యల సగటు 103, మొత్తం నాలుగు పూర్ణసంఖ్యల సగటు 104. ఈ పూర్ణసంఖ్యలన్నింటిలోనూ గరిష్ట పూర్ణసంఖ్యను కనుక్కోండి.

10. సగటును కనుగొనేందుకు సరైన సమాచారం ఇస్తూ రెండు ప్రశ్నలను రాయండి.

ప్రాజెక్టు

మీ వీధిలోని ఇళ్ళలో ఉండే కుటుంబ సభ్యుల సంఖ్య తెలుసుకోండి. మీ వీధిలో కుటుంబ సగటు పరిమాణం ఎంత? గణించండి.

7.4 బాహుళకం

ప్రాతినిధ్య విలువల్లో రెండవ దైన 'బాహుళకం' గురించి తెలుసుకుందాం. క్రింది ఉదాహరణను చదువుదాం.

ఉదాహరణ 4 : ఏ వంటనూనెను ఎక్కువ సంఖ్యలో నిల్వ ఉంచుకోవాలో ఒక వ్యాపారి తెలుసుకోవాలనుకున్నాడు. అందుకోసం ఒకవారంలో వంట నూనెల అమ్మకాలను కింది విధంగా రికార్డు రూపంలో పొందుపరిచాడు.

రోజు	అమ్మిన వంటనూనె ప్యాకెట్లు.
సోమ	GGGSSSSPP
మంగళ	GGGSSSSSPP
బుధ	GGSSSSSP
గురు	GGGSSSP
శుక్ర	GGGSSPP
శని	GSSSSSSSS
ఆది	GGGSSSP

G = వేరుశనగ నూనె ప్యాకెట్, S = సన్‌ఫ్లవర్ నూనె ప్యాకెట్, మరియు P= పామోలిన్ నూనె ప్యాకెట్

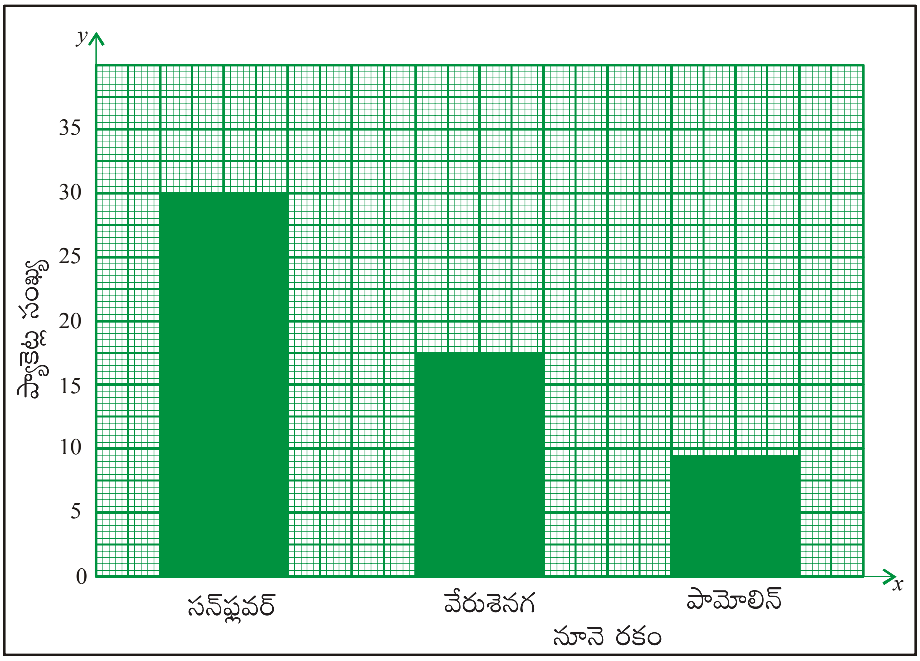
ఇలాంటి సందర్భంలో వంటనూనె ప్యాకెట్ల సగటు సంఖ్యను గణించడం వల్ల ఒక నిర్ణయానికి వచ్చేందుకు ఆ వ్యాపారికి ఉపయోగపడుతుందా?

సాధన : తాను ఆర్డర్ చేయాల్సిన వంటనూనె ప్యాకెట్ల సగటు సంఖ్యను వ్యాపారి మొదట గణిస్తాడు.

$$\text{వంటనూనె ప్యాకెట్ల సగటు సంఖ్య} = \frac{18+30+9}{3} = \frac{57}{3} = 19.$$

ప్రతిరకానికి 19 వంట నూనె ప్యాకెట్లను నిల్వ చేయాల్సి ఉంటుందా? వ్యాపారి వంటనూనెల అమ్మకాలను మరోసారి పరిశీలిస్తాడు. సన్‌ఫ్లవర్ వంట నూనెకు ఎక్కువ డిమాండ్ ఉన్నట్లు, పామోలిన్ వంట నూనెకు అతి తక్కువ డిమాండ్ ఉన్నట్లు గమనిస్తాడు. ఒక్కోరకం ప్యాకెట్లు 19 చొప్పున ఆర్డర్ ఇస్తే సన్‌ఫ్లవర్ వంటనూనె ప్యాకెట్లు సరిపోవు; పామోలిన్ వంట నూనె ప్యాకెట్లు మిగిలిపోతాయి. కాబట్టి సన్‌ఫ్లవర్ నూనె ప్యాకెట్లు ఎక్కువగా, పామోలిన్ నూనె ప్యాకెట్లు తక్కువగా కొనుగోలు చేసేందుకు ఆ వ్యాపారి నిర్ణయిస్తాడు. ఈ నిర్ణయానికి మూలం సన్‌ఫ్లవర్ నూనె ప్యాకెట్ల అమ్మకాలు ఆ వారంలో 30 కావడమే. ఈ ప్రాతినిధ్య విలువే ఆ వారంలో అధికంగా అమ్మినవి సన్‌ఫ్లవర్ వంటనూనె ప్యాకెట్లుగా పేర్కొంటోంది. ఇదే బాహుళకం (mode). ఇచ్చిన పరిశీలనా విలువల్లో తరచుగా పునరావృతమయ్యే విలువను బాహుళకం (mode) అంటారు.

కమ్మీ చిత్రంలో అతి పొడవైన కమ్మీ సూచించే విలువను, ఆ దత్తాంశానికి బాహుళకం (mode) గా పేర్కొంటాం. ఉదాహరణకు కింది గ్రాఫ్ చూడండి.



ఉదాహరణ 5 : 2, 3, 5, 3, 4, 7, 3, 2, 1, 7, 3 అనే పరిశీలనాంశాల బాహుళకాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన : ఈ సంఖ్యలను ఒక క్రమపద్ధతిలో అమర్చితే 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 5, 7, 7 వస్తుంది.

మిగతా వాటికంటే 3 ఎక్కువ సార్లు వచ్చింది.

కాబట్టి బాహుళకం = 3

ఉదాహరణ 6 : 3, 5, 9, 6, 5, 9, 2, 9, 3, 5 అనే సంఖ్యల బాహుళకాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన : ఒకే విలువగల సంఖ్యలు ఒకే దగ్గర ఉండేట్లు క్రమపద్ధతిలో అమర్చితే

2, 3, 3, 5, 5, 5, 6, 9, 9, 9 వస్తుంది.

ఇందులో 5, 9 అనే సంఖ్యలు ఎక్కువ సార్లు వచ్చాయి.

కాబట్టి ఈ దత్తాంశానికి రెండు బాహుళకాలు 5, 9 లు ఉన్నాయి.

ఇలాంటి దత్తాంశాన్ని 'ద్విబాహుళక దత్తాంశం' (Bimodal data) అంటారు.

గమనిక : ఒక దత్తాంశములో ప్రతి రాశి విలువ సమాన సంఖ్యలో పునరావృతమైతే ఆ దత్తాంశమునకు బాహుళకం ఉండదు.

ప్రయత్నించండి.

1. కింద ఇచ్చిన దత్తాంశాలకు బాహుళకం విలువలను కనుక్కోండి.

(i) 5, 6, 3, 5, 4, 9, 5, 6, 4, 9, 5
(ii) 25, 14, 18, 15, 17, 16, 19, 13, 12, 24
(iii) 10, 15, 20, 15, 20, 10, 15, 20, 10

ఉదాహరణ 7 : 10 మార్కులకు నిర్వహించిన ఒక పరీక్షలో 50 మంది విద్యార్థులకు వచ్చిన మార్కులు కింది విధంగా ఉన్నాయి.

పొందిన మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య
0	2
1	1
2	2
3	1
4	–
5	4
6	10
7	15
8	9
9	5
10	1

సాధన : దత్తాంశ ప్రకారం '7 మార్కులు' అను రాశిని ఎక్కువ మంది విద్యార్థులు పొందారు. అనగా 7 అను సంఖ్య ఎక్కువ సార్లు పునరావృతం అయింది.

దత్తాంశపు బాహుళకము = 7

గమనిక : పదిహేను సార్లు పునరావృతమైన 7 అనే సంఖ్యే బాహుళకం కానీ పునరావృతాల సంఖ్య 15ను బాహుళకంగా భావించకూడదు.

ఉదాహరణ 8 : క్రింద పేర్కొన్న ఏ సందర్భాల్లో బాహుళకం సరైన ప్రాతినిధ్య విలువ అవుతుంది?

(a) చొక్కాలను అమ్మే వ్యాపారి ఏ సైజు చొక్కాలను ఎక్కువగా ఆర్డర్ చేయాలో నిర్ణయించేందుకు

(b) ఇరవై మంది వ్యక్తులు హాజరయ్యే విందుకై బియ్యం కొనుగోలు చేయుటకు

(c) మీ ఇంట్లోని తలుపుల ఎత్తు కనుగొనేందుకు

మొదటి సందర్భాన్ని పరిశీలిద్దాం. వ్యాపారి నాలుగు సైజుల చొక్కాలు అమ్ముతాడనుకుంటే ఫిబ్రవరి నెలలో అతని అమ్మకాలు కింది విధంగా ఉండవచ్చు.

సైజు	సంఖ్య
M	15
L	18
XL	40
XXL	22
మొత్తం	92

ఒక్కో సైజులో ఆ వ్యాపారి అమ్మే సగటు చొక్కాల సంఖ్య = $\frac{12+18+40+22}{4} = 23$ చొక్కాలు

ఇలాంటి సందర్భంలో ప్రతి సైజులోనూ 23 చొక్కాలను ఆర్డర్ చేయడం సరైనదేనా? ఆ వ్యాపారి తన దగ్గరున్న సమాచారాన్ని మరోసారి పరిశీలిస్తాడు. అత్యంత అధికంగా అమ్మకాలు జరిగే సైజు XL అని గుర్తిస్తాడు. అన్ని సైజుల చొక్కాలూ 23 చొప్పున తెప్పించినట్లయితే XL సైజు చొక్కాలు తక్కువపడతాయి. కాబట్టి ఈ సైజు చొక్కాలను అధికంగానూ, మిగిలిన సైజు చొక్కాలను తక్కువ సంఖ్యలోనూ తెప్పించడం అర్థవంతంగా ఉంటుంది.

ఈ నిర్ణయానికి వచ్చేందుకు ఆ వ్యాపారి 'బాహుళకం' లేదా 'తరచుగా పునరావృతమయ్యే విలువ' అనే భావనను పరిగణనలోకి తీసుకుంటాడు.

రెండో సందర్భాన్ని పరిశీలిద్దాం.

ఒక్కొక్కరు తినేది గరిష్టంగా ఊహించి 20 రెట్లు బియ్యం కొనుగోలు చేస్తే ఎక్కువ వృధా అవుతుంది. అట్లే ఒక్కొక్కరు తినేది కనిష్టంగా ఊహించి 20 రెట్లు బియ్యం కొనుగోలు చేస్తే సరిపోకపోవచ్చు. అయితే ఒక్కొక్కరు తినేది మధ్యస్థంగా (సరాసరిగా) ఊహించినట్లయితే సరియైన పరిమాణంలో బియ్యం కొనుగోలు చెయ్యవచ్చును. కానీ ఈ దత్తాంశమునకు బాహుళకము ఎంత మాత్రము ఉపయోగపడదు.

– ఇప్పుడు మూడో సందర్భాన్ని పరిశీలిద్దాం

ఒక ఇంట్లో 134 సెం.మీ, 132 సెం.మీ, 100 సెం.మీ,125 సెం.మీ, 144 సెం.మీ. మరియు 125 సెం.మీ. ఎత్తు ఉండే ఆరుగురు కుటుంబసభ్యులు ఉన్నారు. ఈ దత్తాంశంలో బాహుళకం 125 సెం.మీ. కాబట్టి ఇంట్లోని తలుపుల ఎత్తు 125 సెం.మీగా ఉండవచ్చా? ఆరుగురిలో ఐదుగురి ఎత్తు 136 సెం.మీ కంటే తక్కువ కాబట్టి తలుపుల ఎత్తు 140 సెం.మీ గా నిర్ణయించవచ్చా? ఇక్కడ సగటునో, బాహుళకాన్నో ఉపయోగిస్తామా? అందరి కంటే పొడవైన వ్యక్తి సౌకర్యవంతంగా వెళ్ళగలిగేలా తలుపుల ఎత్తు నిర్ణయిస్తామా? ఈ సందర్భములో సగటు కానీ, బహుళకం కాని పరిగణలోకి తీసుకోము.

ప్రయత్నించండి.

1. సగటు సరైన ప్రాతినిధ్య విలువగా ఉండే ఒక సందర్భాన్ని పేర్కొనండి.
2. బాహుళకం సరైన ప్రాతినిధ్య విలువగా ఉండే ఒక సందర్భాన్ని పేర్కొనండి.

అభ్యాసం - 2

1. ఒక బృందంలోని ఏడుగురు విద్యార్థులు లాంగ్‌జంప్‌లో 98 సెం.మీ, 125 సెం.మీ, 140 సెం.మీ, 155 సెం.మీ, 174 సెం.మీ, 140 సెం.మీ, 155 సెం.మీ. దూరం దూకారు. ఈ దత్తాంశానికి బాహుళకాన్ని కనుక్కొండి.

2. ఒక జట్టు క్రీడాకారుల వయస్సులు 25, 26, 25, 27, 28, 30, 31, 27, 33, 27, 29. (i) ఈ దత్తాంశ అంకగణిత సగటును, బాహుళకాన్ని కనుక్కోండి. (ii) బాహుళకం మారేందుకు వీలుగా ఈ టీమ్‌లో చేర్చగలిగే క్రీడాకారుల కనీస సంఖ్యను కనుక్కోండి. వారి వయస్సులు ఎంతెంత ఉండాలి?

3. కింది దత్తాంశ బాహుళకాన్ని కనుక్కోండి 12, 24, 36, 46, 25, 38, 72, 36, 25, 38, 12, 24, 46, 25, 12, 24, 46, 25, 72, 12, 24, 36,25, 38, 36.

4. కింద పేర్కొన్న సందర్భాలకు సగటు, బాహుళకాల్లో దేనిని ప్రాతినిధ్య విలువగా వినియోగించవచ్చో పేర్కొనండి.

(i) వివిధ సైజుల్లో ఉండే టూత్‌పేస్టులను అమ్మే వ్యాపారి ఏ సైజు టూత్ పేస్టులను అధికంగా కొనుగోలు చేయాలో నిర్ణయించుకునేందుకు

(ii) పరీక్షా హాలులోకి సరిపోయేన్ని అదనపు పేపర్లు తెచ్చుకోవడంలో ఇన్విజిలేటర్‌కు ఉపయోగపడేందుకు

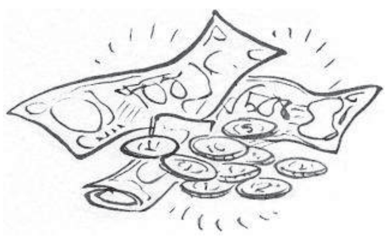
(iii) ఒక పెళ్ళిలో తయారుచేయవలసిన లడ్డూల సంఖ్యను నిర్ణయించేందుకు

(iv) ఒక తరగతిలోని విద్యార్థులకు అభిమాన క్రికెటర్ ఎవరో నిర్ధారించేందుకు

7.5 మధ్యగతం

దత్తాంశ ప్రాతినిధ్య విలువగా అంక మధ్యమం, బాహుళకం ఉండే సందర్భాలను మనం పరిశీలించాం. ఇపుడు మరో సందర్భాన్ని చూద్దాం. ఒక ఉత్పాదక సంస్థలో మేనేజరు, కార్మికుల వేతన వివరాలు కింది విధంగా ఉన్నాయి.

మేనేజరు	–	రూ. 40,000
మొదటి కార్మికుడు	–	రూ. 3300
రెండవకార్మికుడు	–	రూ. 5000
మూడవ కార్మికుడు	–	రూ. 4000
నాలుగో కార్మికుడు	–	రూ. 4200
ఐదో కార్మికుడు	–	రూ. 3500
ఆరో కార్మికుడు	–	రూ. 4500
ఏడో కార్మికుడు	–	రూ. 4200
ఎనిమిదో కార్మికుడు	–	రూ. 4300
తొమ్మిదో కార్మికుడు	–	రూ. 3500
పదో కార్మికుడు	–	రూ. 3500



ఈ దత్తాంశానికి అంక మధ్యమం లేదా బాహుళకం ప్రాతినిధ్య విలువగా ఉండగలుగుతాయా? పరిశీలిద్దాం!

ఆ సంస్థలో వేతనాల అంక మధ్యమాన్ని గణిద్దాం.

$$\text{వేతనాల సగటు} = \frac{\text{వేతనాల మొత్తం}}{\text{ఉద్యోగుల సంఖ్య}}$$

$$\frac{3300+5000+4000+4200+3500+4500+4200+4300+3500+3500+40000}{11}$$

$$= ₹\ 7272.72$$

ఈ వేతనాల సగటు మేనేజరు, కార్మికుల వేతనాలకు ప్రాతినిధ్య విలువగా ఉంటుందా? లేదు! ఇది మేనేజరు వేతనం కంటే చాలా తక్కువ కాగా కార్మికుల వేతనాల కంటే చాలా ఎక్కువ.

ఇప్పుడు బాహుళకాన్ని పరిశీలిద్దాం. ఈ దత్తాంశంలో ఎక్కువసార్లు పునరావృతమైన విలువ 3500. అయితే ఇది మూడుసార్లే పునరావృతమైనందు వల్ల ఇది ఈ దత్తాంశానికి సరైన ప్రాతినిధ్య విలువ కాదు.

కాబట్టి మరో ప్రాతినిధ్య విలువను గణించే పద్ధతి చూద్దాం.

ఈ వేతనాలన్ని ఆరోహణ పద్ధతిలో అమర్చగా

3300, 3500, 3500, 3500, 4000, 4200, 4200, 4300, 4500, 5000, 40000

ఈ దత్తాంశ మధ్య విలువ 4200. ఈ విలువ మొత్తం ఉద్యోగులను రూ.4200 కంటే ఎక్కువ సంపాదించే ఐదుగురు, అంతకంటే తక్కువ సంపాదించే ఐదుగురుగా – రెండు సమూహాలుగా విభజిస్తుంది.

ఈ విలువనే మధ్యగతం (Median) అంటారు. ఈ సంస్థలోని ఉద్యోగుల వేతనాలకు ఇది ప్రాతినిధ్య విలువగా ఉంటుంది.

పై ఉదాహరణలో మొత్తం పరిశీలనల సంఖ్య 11 ఒక బేసిసంఖ్య. అందువల్ల మధ్యగతం మిగతా దత్తాంశాన్ని రెండు భాగాలుగా విభజిస్తుంది.

ఒకవేళ పరిశీలనల సంఖ్య సరిసంఖ్య అయితే?

పై ఉత్పాదక సంస్థ ఉదాహరణనే మళ్ళీ తీసుకుందాం. రూ. 4000 సంపాదించే మరో వ్యక్తి ఈ ఉత్పాదక సంస్థలో చేరితే ఎలా ఉంటుంది?

ఇప్పుడు 12 మంది సంపాదనలను ఆరోహణ పద్ధతిలో అమర్చుదాం.

3300, 3500, 3500, 3500, 4000, 4000, 4200, 4200, 4300, 4500, 5000, 40000

ఈ దత్తాంశం మధ్యలో 4000 , 4200 అనే రెండు విలువలు ఉన్నాయి. ఇలాంటి సందర్భాల్లో ఈ రెండు విలువల సరాసరిని కనుక్కోవడం ద్వారా మధ్యగతాన్ని గణిస్తాం. అందువల్ల మధ్యగత వేతనం $= \frac{4000+4200}{2} = 4100.$

ఉదాహరణ 9 : ఏడుగురు ఉద్యోగుల నెలసరి ఆదాయాలు 8000, 9000, 8200, 7900, 8500, 8600 , 60000. మధ్యగత ఆదాయాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన : ఆదాయాలను ఆరోహణ క్రమంలో అమర్చితే : 7900, 8000, 8200, 8500, 8600, 9000, 60000

మొత్తం పరిశీలనల సంఖ్య = 7

మధ్యలో ఉండే సంఖ్య అనగా దత్తాంశంలో 4వ పదం = 8500

కాబట్టి మధ్యగత ఆదాయం = ₹ 8500

ఉదాహరణ 10 : 49, 48, 15, 20, 28, 17, 14, 110 ల మధ్యగతాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన : పరిశీలనల ఆరోహణ క్రమం = 14, 15, 17, 20, 28, 48, 49,110

మొత్తం పరిశీలనల సంఖ్య = 8

మధ్యలో ఉండే విలువలు అంటే దత్తాంశంలోని 4,5 పదాలు = 20,28

మధ్యగతం = 4,5 పదాల సగటు

$$\text{మధ్యగతం} = \frac{20+28}{2} = 24$$

కాబట్టి దత్తాంశ మధ్యగతం 24

అభ్యాసం - 3

1. **సత్యమా? అసత్యమా? తెల్పండి.**

   (i) గరిష్ట, కనిష్ట రాశుల మధ్య భేదాన్ని 'అంకగణిత మధ్యమం' అంటారు.

   (ii) కమ్మీ చిత్రంలో అతి పెద్ద కమ్మీ బాహుళకాన్ని కలిగి ఉండవచ్చు.

   (iii) మధ్యగతాన్ని గణించేటప్పుడు దత్తాంశంలోని ప్రతి పరిశీలనా విలువను పరిగణన లోకి తీసుకుంటాం.

   (iv) దత్త సంఖ్యలకు మధ్యగతమెప్పుడూ ఆ సంఖ్యల్లో ఏదో ఒకటి అవుతుంది.

2. ఒక గ్రామంలోని ఏడు కుటుంబాల నెలసరి ఆదాయం (రూపాయల్లో) 1200, 1500, 1400, 1000, 1000, 1600, 10000. (i) ఆ కుటుంబాల మధ్యగత ఆదాయాన్ని కనుక్కోండి. (ii) ₹ 1500 నెలసరి ఆదాయం ఉండే మరో కుటుంబాన్ని ఈ దత్తాంశంలో కలిపితే మధ్యగత ఆదాయం ఎంత ఉంటుంది?

3. ఒక దత్తాంశ పరిశీలనలు 16, 72, 0, 55, 65, 55, 10, 41. చైతన్య అనే విద్యార్థి 'సున్న'ను పరిగణనలోకి తీసుకోకుండా బాహుళకాన్ని, మధ్యగతాన్ని కనుక్కొన్నాడు. అతను చేసినది సరైనదేనా?

4. మూడు ధనపూర్ణ సంఖ్యల వేర్వేరు సముదాయాలను ఎన్ని తీసుకుంటే అంక మధ్యమం 6, మధ్యగతం 7 వచ్చి బాహుళకం లేకుండా ఉంటుంది?

5. 3, 4, 5, 5 ,8 అనే ఒక పూర్ణ సంఖ్యల సముదాయానికి నాలుగు పూర్ణసంఖ్యలను కలిపితే అంక మధ్యమం, మధ్యగతం, బాహుళకం 1 చొప్పున పెరుగుతాయి. కొత్తగా చేర్చిన సముదాయంలో గరిష్ట పూర్ణ సంఖ్య ఎంత?

ఆడండి

1, 2, 3, 4, 5,6 అంకెలు గుర్తించిన పాచిక (dice) ను తీసుకోండి. ముగ్గురు విద్యార్థుల్లో ఒక్కొక్కరిని పాచిక వేసి అంకె గుర్తించమనండి. ఈ ప్రక్రియను 10 రౌండ్ల వరకు కొనసాగించండి. ప్రతి విద్యార్థి 10 అంకెలు పొందుతాడు. ప్రతి విద్యార్థి పొందిన 10 అంకెలకు అంక మధ్యమం, మధ్యగతం, బాహుళకాలను కనుక్కోండి.

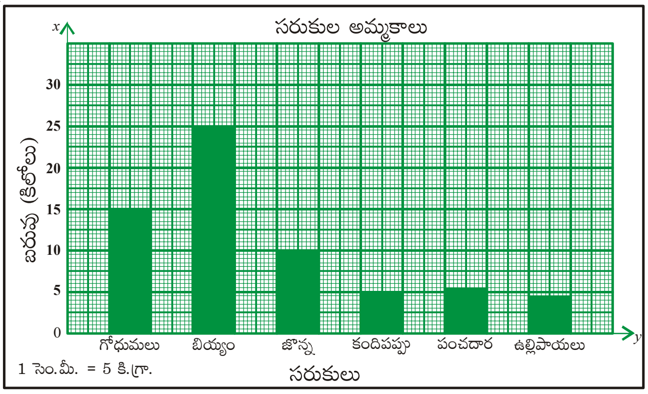
7.6 సమాచార ప్రదర్శన

సమాచారాన్ని కమ్మీ చిత్రంలోనూ, పటచిత్రం (pictograph) లోను సూచించడాన్ని ఆరో తరగతిలో నేర్చుకున్నాం. వస్తువుల చిత్రాలను ఉపయోగిస్తూ సమాచారాన్ని సూచించేవి పిక్టోగ్రాఫ్స్. అయితే పిక్టోగ్రాఫ్‌ను ఉపయోగించడం వల్ల సమయం అధికంగా వినియోగించబడుతుంది. ఇది కష్టతరం కూడా. కమ్మీ చిత్రాల్లో సమాచారాన్ని చూపడం సులభంగా ఉంటుంది.

7.6.1 కమ్మీ చిత్రం (బార్ గ్రాఫ్)

ఈ విభాగంలో కమ్మీ చిత్రాల గురించి మరికొంచెం ఎక్కువగా నేర్చుకొందాం. మధ్య దూరం సమానం గానూ, సమాన వెడల్పుతోనూ ఉన్న కమ్మీలతో కూడి ఉండేదే కమ్మీ చిత్రం. ప్రతి అంశం యొక్క పౌన:పున్యం ఎంత ఉందో దాని కమ్మీ పొడవు తెలుపుతుంది. స్కేలును బట్టి కమ్మీల పొడవులు మారుతాయి.

ఉదాహరణ 11 : ఒక దుకాణంలోని వివిధ వస్తువుల ఒకరోజు అమ్మకాలను ఈ కమ్మీ చిత్రం తెలియజేస్తుంది.



(i) x- అక్షం, y – అక్షం పై ఏ అంశాలను తీసుకొన్నాం?

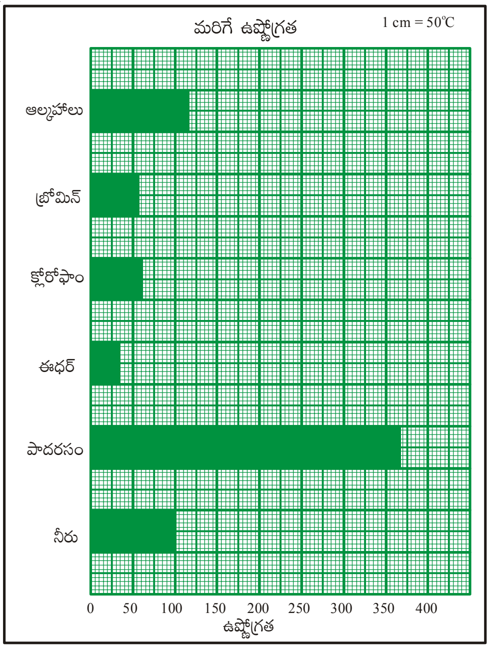
(ii) y- అక్షానికి ఎంపిక చేసిన స్కేలు ఏది?

(iii) వీటిలో ఏ వస్తువు ఎక్కువగా అమ్ముడయింది? ఎంత?

(iv) ఉల్లిపాయల అమ్మకం కందిపప్పు అమ్మకం కన్నా ఎక్కువగా ఉందా?

(v) జొన్నలు, కందిపప్పు ల అమ్మకాల నిష్పత్తి ఎంత?

ఉదాహరణ 12 : మరో కమ్మీ చిత్రాన్ని పరిశీలించండి.



(i) ఈ గ్రాఫ్ ఏ వివరాలను తెలియజేస్తుంది?

(ii) x- అక్షం, y- అక్షాలపై వేటిని తీసుకున్నారు?

(iii) ఎక్కువ మరిగే ఉష్ణోగ్రత ఉండే ద్రవ పదార్థం వీటిలో ఏది?

(iv) ఇచ్చిన ద్రవ పదార్థాల్లో తక్కువ మరిగే ఉష్ణోగ్రత ఉండే ద్రవం ఏది?

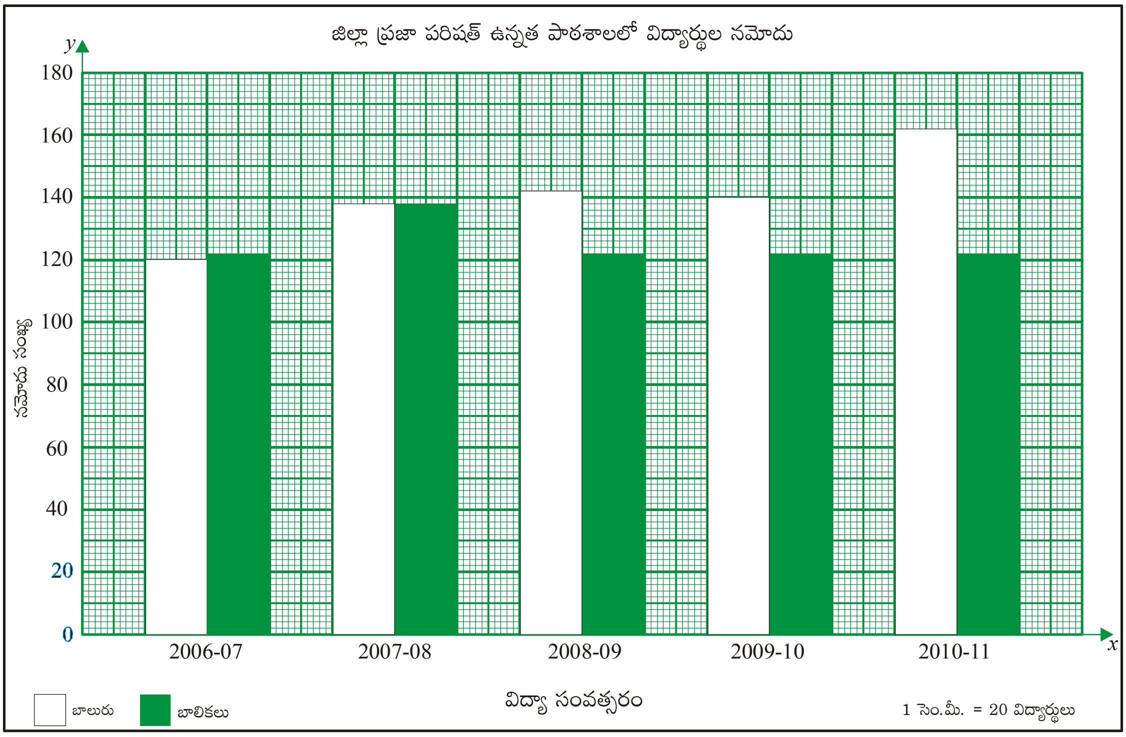
(v) పాదరసం, ఈథర్‌ల మరిగే ఉష్ణోగ్రతల మధ్య నిష్పత్తి ఎంత?

7.6.2 రెండు వరుసల కమ్మీ చిత్రాలు (డబుల్ బార్ గ్రాఫ్)

ఇప్పుడు మరో రకం కమ్మీ చిత్రాల గురించి తెలుసుకుందాం.

ఉదాహరణ 13 : క్రింది కమ్మీ చిత్రాన్ని పరిశీలించండి. జిల్లా ప్రజా పరిషత్తు ఉన్నత పాఠశాలలో బాలురు, బాలికల నమోదు సంఖ్యను ఈ చిత్రం సూచిస్తుంది.

ప్రతి సంవత్సరంలోనూ రెండు కమ్మీలుండడాన్ని మీరు గమనించారా? మొదటి కమ్మీ ఏం తెలుపుతుంది? రెండో కమ్మీ ఏం తెలుపుతుంది? ఇలాంటి కమ్మీ చిత్రాన్ని రెండు వరుసల కమ్మీ చిత్రం (Double bar graph) అంటాం. ఈ చిత్రం రెండు పరిశీలనల్ని పక్క పక్కనే సూచిస్తుంది.



(i) ఏ సంవత్సరంలో బాలుర సంఖ్య కంటే బాలికల సంఖ్య ఎక్కువగా ఉంది?

(ii) ఏ సంవత్సరంలో బాలురు, బాలికల సంఖ్య సమానంగా ఉంది?

(iii) ఏ సంవత్సరంలో బాలికల సంఖ్య కనిష్ఠ స్థాయిలో ఉంది?

(iv) 2007-08 సంవత్సరంలో మొత్తం విద్యార్థుల సంఖ్య ఎంత?

ఉదాహరణ 14 : ఏడో తరగతిలో ఐదుగురు విద్యార్థుల మార్కుల వివరాలు క్రింది పట్టికలో ఉన్నాయి. ఈ సమాచారాన్ని రెండు వరుసల కమ్మీ చిత్రం (double bar graph.) రూపంలో తెలపండి.

విద్యార్థి పేరు	గణితం	సామాన్యశాస్త్రం
శరవణ్	70	75
రామన్	35	30
మణి	65	75
రేణుక	90	100
గిరిజ	22	35
షర్మిల	50	50

సాధన : రెండు వరుసల కమ్మీ చిత్రం గీయడంలో సోపానాలు

1. గ్రాఫ్ పేపర్ పై x- అక్షం (అడ్డగీత), y- అక్షం (నిలువు గీత) గీయండి. ఖండన బిందువును 'O' గా గుర్తించండి.

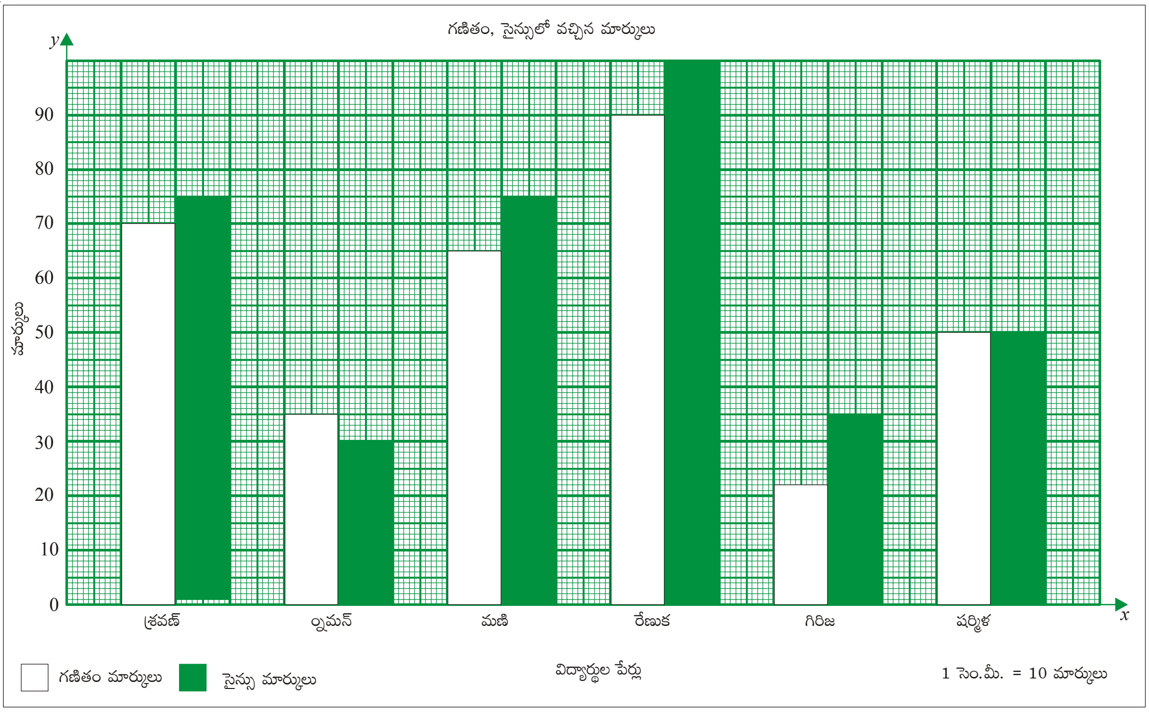
2. x- అక్షం పై విద్యార్థుల పేర్లు తీసుకోండి.

3. y- అక్షం పై గణితం, సామాన్యశాస్త్రం లలో మార్కులు తీసుకోండి.

4. రెండు పాఠ్యాంశాలలోనూ గరిష్ఠ మార్కులు గ్రాఫ్ పేపర్ పై గుర్తించబడేలా సరైన స్కేలును y- అక్షం పై తీసుకోండి. y- అక్షం పై 100, అనే విలువ గరిష్టంగా ఉంటుంది. కాబట్టి 1 సెం.మీ = 10 మార్కులు అనే సూచిక భిన్నం సరైనది.

5. మార్కులను 10 తో భాగించి కమ్మీ పొడవు నిర్ధారించండి. (సూచిక భిన్నం 1 సెం.మీ = 10 మార్కులు)

6. ప్రతి విద్యార్థి గణితం మార్కులను, సామాన్యశాస్త్రం మార్కులను పక్క పక్కనే పేర్కొనండి.

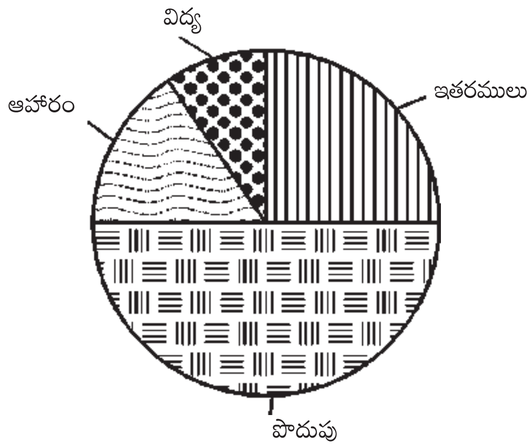


7.6.3 వృత్తరేఖా చిత్రాలు (పై చిత్రం)

సమాచారాన్ని సూచించే మరో పద్ధతి 'వృత్తరేఖా చిత్రం' (పై చిత్రం) ద్వారా సూచించడం

ఒక కుటుంబ నెలవారీ బడ్జెట్ వివరాలు ఎడమ వైపు ఉన్న పట్టికలో ఉన్నాయి. కుడి వైపు ఈ సమాచారం పై చిత్రంలో ఉంది. మొత్తం ఆదాయంలో బడ్జెట్ ఏ అంశంలో ఎక్కువగా ఉంటే వృత్త రేఖా చిత్రంలో ఆ అంశం ఎక్కువ భాగం ఉంటుంది.

బడ్జెట్ పద్దు	ఖర్చు (₹)
ఆహారం	1500
విద్య	750
ఇతర ఖర్చులు	2250
పొదుపు	4500
మొత్తం	9000



పైన ఇచ్చిన పై చిత్రాన్ని పరిశీలించి, కింది ప్రశ్నలకు జవాబివ్వండి.

(i) పై చిత్రం ఏ ఆకారంలో ఉంటుంది?

(ii) ఆహారం, విద్య, పొదుపు, ఇతర ఖర్చులను పై చిత్రంలో ఏ ఆకారంలో సూచించడం జరిగింది?

(iii) సత్యమో అసత్యమో తెలపండి.

(a) ఆదాయంలో అధికభాగం పొదుపు చేశారు.

(b) విద్యపై అతి తక్కువ మొత్తాన్ని ఖర్చు చేశారు.

7.6.4 వృత్త రేఖా చిత్రాన్ని గీయడం

ఈ 'వృత్తరేఖా చిత్రం' నందు సమాచారం ఎలా సూచిస్తామో ఇప్పుడు నేర్చుకుందాం.

మొత్తం ఆదాయంలో ఖర్చులకు సంబంధించిన ఒక్కో అంశం ఎంత భాగమో, వృత్తంలో అంతభాగం (సెక్టరు) ఆ అంశమును సూచిస్తుంది.

వృత్త కేంద్రం వద్ద మొత్తం కోణం 360^0. అని మనకు తెలుసు. ఇది మొత్తం ఆదాయం ₹ 9000. ను సూచిస్తుంది. ఖర్చులోని ప్రతి అంశం మొత్తం ఆదాయంలో ఒక భాగం. అందువల్ల ప్రతి అంశంలోని ఖర్చుకూ మొత్తం ఆదాయానికి మధ్య నిష్పత్తిపై సెక్టరు కోణం లేదా సెక్టరు వైశాల్యం ఆధారపడి ఉంటుంది.

అందువల్ల ప్రతి సెక్టరు కోణం = $\dfrac{\text{ఖర్చు}}{\text{మొత్తం ఆదాయం}} \times 360^0$

సెక్టరు కోణాన్ని కనుక్కొనేందుకు కింది పట్టిక రూపొందించాలి

బడ్జెట్ పద్దు	ఖర్చు (రూపాయల్లో)	ఖర్చుకూ మొత్తం ఆదాయానికీ మధ్య నిష్పత్తి	సెక్టరు కోణం (లేదా) సెక్టారు వైశాల్యం
ఆహారం	1500	$\frac{1500}{9000}=\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}\times 360^o = 60^o$
విద్య	750	$\frac{750}{9000}=\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}\times 360^o = 30^o$
ఇతర ఖర్చులు	2250	$\frac{2250}{9000}=\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}\times 360^o = 90^o$
పొదుపు	4500	$\frac{4500}{9000}=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\times 360^o = 180^o$

నిర్మాణ సోపానాలు :

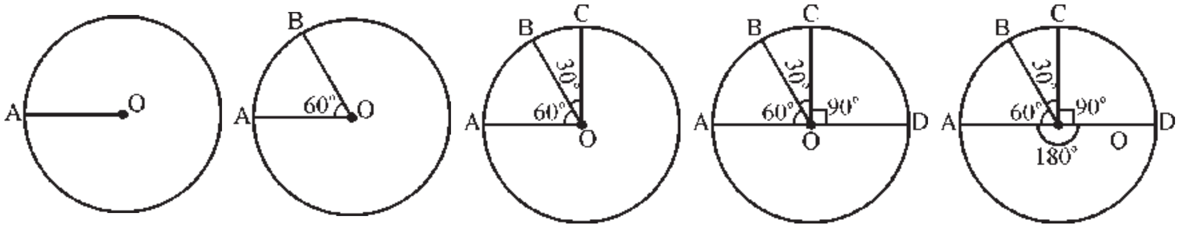
1. ఏదేని ఒక వ్యాసార్ధంతో వృత్తాన్ని గీచి, దాని కేంద్రాన్ని 'O' గా గుర్తించండి.
2. వృత్త పరిధి పై ఏదైనా ఒక బిందువును 'A' గా గుర్తించండి. OA ను కలపండి.
3. ఆహారం సెక్టరు కోణం 60^o ఉండేట్లు $\angle AOB = 60^o$ని నిర్మించండి.

4. విద్య సెక్టరు కోణం 30° ఉండేట్లు ∠BOC = 30°. ని నిర్మించండి.

5. ఇతర ఖర్చుల సెక్టరు కోణం 90° ఉండేట్లు ∠COD = 90°. ని నిర్మించండి.

6. ∠DOA = 180° అనే సెక్టరు కోణం 'పొదుపు'ను సూచిస్తుంది.

గమనిక : అన్ని సెక్టర్ ల లోని కోణాల మొత్తం 360° అవుతుందేమో సరిచూడండి.



అభ్యాసం 4

1. కింది సమాచారానికి కమ్మీ చిత్రాన్ని గీయండి.

   వివిధ సంవత్సరాల్లో భారతదేశ జనాభా –

సంవత్సరం	1941	1951	1961	1971	1981	1991	2001
జనాభా (మిలియన్లలో) (సుమారుగా)	320	360	440	550	680	850	1000

   ఆధారం : 1991,2001 సంవత్సరాల భారతదేశ జనాభా సమాచారం

2. కింది సమాచారానికి పై చిత్రాన్ని గీయండి.

ఖర్చు వివరాలు	ఆహారం	ఆరోగ్యం	దుస్తులు	విద్య	పొదుపు
ఖర్చు మొత్తం (రూపాయల్లో)	3750	1875	1875	1200	7500

3. కింది సమాచారంతో రెండు వరుసల కమ్మీ చిత్రాన్ని (double bar graph) గీయండి.

   1999 లో వివిధ రాష్ట్రాల జనన, మరణాల రేటు (సుమారుగా)

రాష్ట్రం	జననాల రేటు (ప్రతి 1000కి)	మరణాల రేటు (ప్రతి 1000 కి)
ఆంధ్రప్రదేశ్	22	8
కర్నాటక	22	8
తమిళనాడు	19	8
కేరళ	18	6
మహారాష్ట్ర	21	8
ఒరిస్సా	24	11

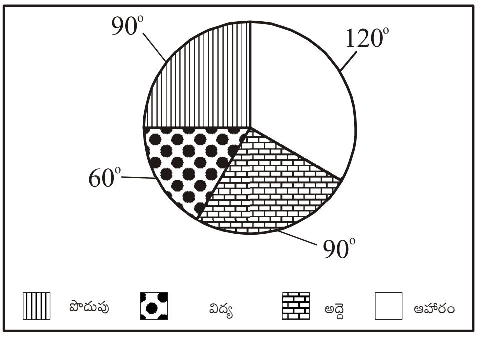
   ఆధారం : ఎస్ ఆర్ ఎస్ 1999 గణాంకాలు

4. కింది సమాచారాన్ని ఉపయోగించి 'పై-చిత్రం' గీయండి.

పిల్లల రోజువారీ కార్యకలాపాల కాలం

కార్యకలాపాలు	నిద్ర	పాఠశాల	ఆటలు	ఇతరులు
కాలం	8 గంటలు	6 గంటలు	2 గంటలు	8 గంటలు

5. ఒక కుటుంబం ఒక నెలలో చేసిన ఖర్చు వివరాలను ప్రక్కన ఉండే 'పై-చిత్రం' సూచిస్తుంది. (పై-చిత్రం చుట్టూ ఉండే సంఖ్యలు ఒక్కో సెక్టరు కేంద్రం వద్ద చేసే కోణాలను తెలుపుతాయి)



కింది ప్రశ్నలకు జవాబివ్వండి.

(i) ఆ కుటుంబం దేనిపై ఖర్చు తక్కువ పెడుతుంది?

(ii) ఆ కుటుంబం దేనిపై ఎక్కువ ఖర్చు చేస్తోంది?

(iii) కుటుంబ ఆదాయం ₹ 9000 అయితే, అద్దెకు పెట్టిన ఖర్చు ఎంత?

(iv) ఆహారానికి పెట్టిన ఖర్చు ₹ 3000, అయితే పిల్లల విద్యకు పెట్టిన ఖర్చు ఎంత?

ప్రాజెక్టు పని

1. మీ వార్డు / కాలనీ / గ్రామంలో వివిధ రకాలకు చెందిన ఇళ్ళు ఎన్ని ఉన్నాయనే సమాచారం సేకరించండి. ఆ సమాచారానికి బాహుళకాన్ని కనుక్కోండి.
2. మీ కుటుంబం ఒక నెలలో చేసే ఖర్చు వివరాలను సేకరించండి. 'పై-చిత్రం'లో సూచించండి.
3. మ్యాగజైన్లు, దినపత్రికలలో కమ్మీ చిత్రాలు, పై చిత్రాల రూపంలో ఉన్న సమాచారాన్ని సేకరించండి. మీ పాఠశాల గోడపత్రికలో ప్రదర్శించండి.
4. ఒక వారంలో మీ తరగతి రోజువారీ హాజరును సేకరించండి. వారం రోజుల సగటు హాజరును కనుక్కోండి.

మనం నేర్చుకున్నవి

- ఒక దత్తాంశ సమితికి ప్రాతినిధ్య విలువలు అంక మధ్యమం, బాహుళకం, మధ్యగతం.
- ఒక దత్తాంశ సమితిలోని రాశుల మొత్తాన్ని రాశుల సంఖ్యతో భాగిస్తే వచ్చే ఫలితం అంకగణిత మధ్యమానికి సమానం. ఇది దత్తాంశ గరిష్ట, కనిష్ట విలువల మధ్య ఉంటుంది.
- ఎక్కువ సార్లు పునరావృతమయ్యే దత్తాంశ రాశిని 'బాహుళకం' అంటారు. ఒక దత్తాంశ సమితిలో ఒకటి కంటే ఎక్కువ బాహుళకాలు ఉండవచ్చు, కొన్నిసార్లు బాహుళకం లేకపోవచ్చు.
- రాశులను ఆరోహణ లేదా అవరోహణ క్రమంలో అమర్చితే

1. రాశుల సంఖ్య బేసి సంఖ్య అయితే మధ్యగతం, ఆ రాశుల వరుస మధ్యలో ఉండే రాశి అవుతుంది.
2. రాశుల సంఖ్య సరి సంఖ్య అయితే మధ్యలో ఉండే రెండు రాశుల సరాసరి మధ్యగతం అవుతుంది.

- వృత్తాన్ని సెక్టర్లుగా విభజించి సమాచారాన్ని సూచించే చిత్రమే 'పై' చిత్రం.
- 'పై' చిత్రంలో ప్రతి సెక్టరు కేంద్రం వద్ద చేసే కోణం (లేదా సెక్టరు వైశాల్యం) అది సూచించే రాశికి అనుపాతంలో ఉంటుంది.

డా. సి.ఆర్. రావు (భారతదేశం)

1920 AD

ప్రముఖ సాంఖ్యక శాస్త్రజ్ఞుడు. ఈయన రచించిన "థియరీ ఆఫ్ ఎస్టిమేషన్" అనే గ్రంథము (1945) ప్రాముఖ్యత పొందింది. ఈయన క్రామర్-రావ్ ఇనిక్వాలిటీ మరియు ఫిషర్-రావు సిద్ధాంతాలను రూపొందించారు.

త్రిభుజాల సర్వసమానత్వం 8

8.1 పరిచయం

మనం కొన్ని ఒక రూపాయి నాణేలను తీసుకొని ఒక నాణెముపై మరో నాణెమును పేర్చితే అవి ఒక దొంతరగా ఏర్పడతాయి. ఒక దానితో ఒకటి సరిగ్గా ఏకీభవిస్తాయి. దీనికి కారణం మీకు తెలుసా? అన్ని నాణెములు ఒకే ఆకార, పరిమాణాలను కలిగిఉన్నాయి. ఇలాగే ఒక నోట్‌పుస్తకంలో పేజీలన్నీ ఒకే ఆకారము, ఒకే పరిమాణము కలిగిఉంటాయి.

మీ చుట్టూఉన్న పరిసరాలలో వస్తువులను గమనించండి. వాటిలో ఒకే ఆకారం, ఒకే పరిమాణం కలిగిన వస్తువులను పరిశీలించి కనీసం 5 ఉదాహరణలను చెప్పండి.

ఒకే పరిమాణము, ఆకారము కలిగిన వస్తువులను "సర్వసమానములు" అంటారు. వస్తువుల సర్వసమానత్వమును ప్రయోగాత్మకముగా పరిశీలించాలంటే ఆ వస్తువుల అంచులతో ఏర్పడే పటాలను ఒకదానిపై మరొకటి ఉంచితే ఆ రెండు పటాలు ఖచ్చితముగా ఒకదానితో ఒకటి ఏకీభవించాలి.

కృత్యము

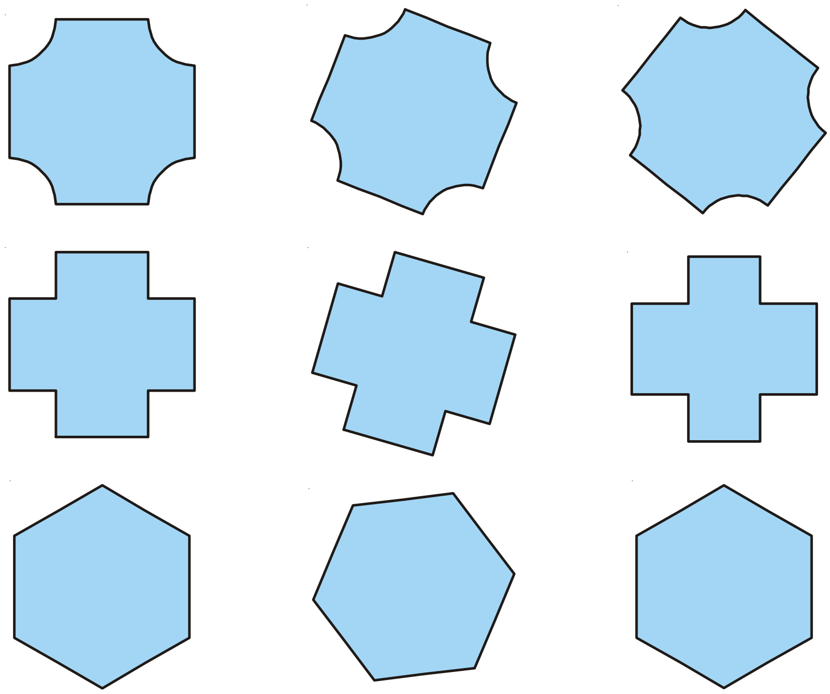
అన్ని పది రూపాయల నోట్లు సర్వసమానాలేనా? ఎలా చెప్పగలవు

రెండు 5 రూపాయల నోట్లు, పరిశీలించండి సర్వసమానంగా ఉన్నాయా? మీ పరిశీలనలను రాయండి.

నిత్యము మనచుట్టూ ఉన్న పరిసరాలలో సర్వసమాన వస్తువులెన్నింటినో చూస్తూ ఉంటాం. ఇపుడు సర్వసమానంగా ఉన్న మరి కొన్ని ఆకారములను గురించి ఆలోచించండి.

ఇవి చేయండి.

1. ఇక్కడ కొన్ని ఆకారాలు ఉన్నాయి. ఒక వరుసలో ఉన్న పటములన్నీ సర్వసమానాలేనా? వాటి నకలును తీసి సరిచూడండి.

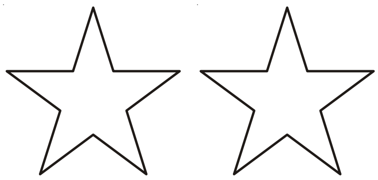


(i)

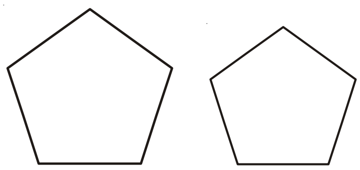
(ii)

(iii)

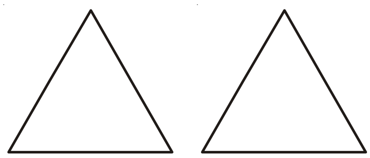
2. ఈ కింది ఆకారాల జతలలో ఏవి సర్వసమానములు?



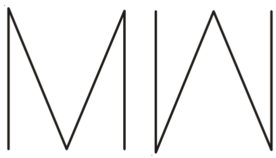
(i)



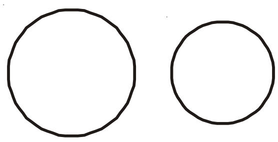
(ii)



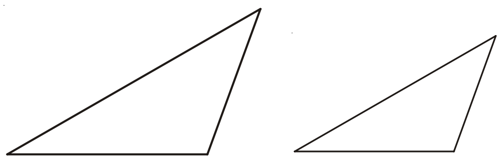
(iii)



(iv)



(v)



(vi)

8.1 రేఖా ఖండముల సర్వసమానత్వము

కింద ఇచ్చిన రేఖాఖండముల జతలను పరిశీలించండి.

పటం 1 పటం 2

రేఖా ఖండము $\overline{AB}$ ని పారదర్శక కాగితమునుపయోగించి నకలు చేయాలి. రేఖాఖండము $\overline{CD}$ పై ఉంచాలి. మనము రెండు రేఖా ఖండములు ఏకీభవించినట్లు గమనించవచ్చు. బిందువు A, C తోనూ ; బిందువు B, D తోనూ ఏకీభవిస్తుంది. కాబట్టి రెండు రేఖాఖండములు $\overline{AB}, \overline{CD}$ లు సర్వసమానములు అని చెప్పవచ్చు. దానిని మనము $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ గా రాయవచ్చు. (సర్వసమానమును ≅ గుర్తుతో సూచిస్తారు)

అదే విధంగా పటము 2 తో కూడా చేయండి. మీరు ఏమి గమనించారు? ఆ రెండు రేఖా ఖండములు సర్వసమానములేనా?

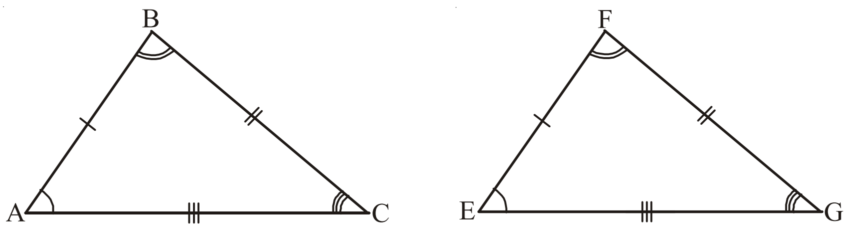
పటము 1 లో రెండు రేఖాఖండములు ఏకీభవించాయి. దీనికి గల కారణము $\overline{AB}, \overline{CD}$ లు ఒకే పొడవును కల్గియున్నాయి కాని పటము 2 లో రెండు రేఖాఖండములు విభిన్న పొడవులను కలిగి ఉన్నాయి. అందుచేత అవి సర్వసమానములు కావు. దీనిని $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$ అని రాయవచ్చు. దీనిని రేఖాఖండం PQ, RS లు సర్వసమానములు కావు, అని చదువుతాం.

రేఖాఖండము 'పొడవు' అనే ఒకే కొలతను కల్గియుంటుంది. అందుచే రెండు రేఖాఖండములు ఒకే పొడవును కల్గియున్నచో ఆ రేఖాఖండములు సర్వసమానములు. మరో విధంగా చెప్పాలి అంటే

సర్వసమాన రేఖాఖండముల పొడవులు సమానము.

8.2 త్రిభుజాల సర్వసమానత్వము

రెండు రేఖాఖండముల పొడవులు సమానమైనప్పుడు, అవి సర్వసమానములని నేర్చుకున్నారు కదా! ఈ భావనను త్రిభుజములకు వర్తింపచేద్దాం. రెండు త్రిభుజాలను ఒక దానిపై మరొకటిని ఉంచితే రెండు త్రిభుజాలు ఏకీభవిస్తే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానములు.



ΔABC, ΔEFG లు పూర్తిగా ఏకీభవిస్తే, ఆరెండు త్రిభుజాలు ఒకే ఆకారము, పరిమాణము కల్గి ఉంటాయి. వీటిని సర్వసమాన త్రిభుజాలు అంటారు. వీటిని $\Delta ABC \cong \Delta EFG$ గా వ్రాయవచ్చు.

రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానములు అయితే సదృశ భుజాలు, సదృశ కోణాలు సమానం. అలాగే సదృశ భుజాలు, సదృశ కోణాలు సమానము అయితే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానములు. ΔABC ను ΔEFG పై ఉంచితే A, E ; B , F ; C, G. శీర్షాలు ఏకీభవిస్తాయి. $\overline{AB}$, $\overline{EF}$; $\overline{BC}$, $\overline{FG}$; $\overline{AC}$, $\overline{EG}$; భుజాలు ఏకీభవిస్తాయి. $\angle A$, $\angle E$; $\angle B$, $\angle F$; $\angle C$, $\angle G$ లు ఏకీభవిస్తాయి.

అనగా రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానములు అయితే వాటి యొక్క సదృశ భాగాలు సమానము.

సదృశ కోణములు, సదృశ భుజాలు సమానము.

ΔABC మరియు ΔEFG లలో

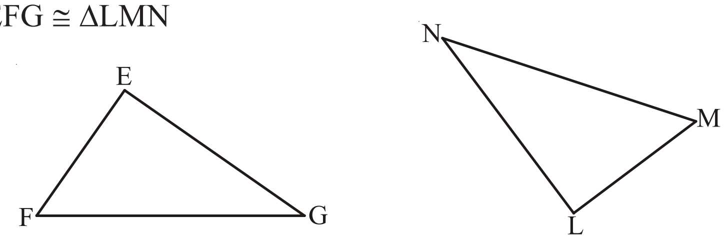
$\angle A = \angle E$ $\quad$ $\angle B = \angle F$ $\quad$ $\angle C = \angle G$ $\quad$ (సదృశ కోణాలు)

$\overline{AB} = \overline{EF}$ $\quad$ $\overline{BC} = \overline{FG}$ $\quad$ $\overline{AC} = \overline{EG}$ $\quad$ (సదృశ భుజాలు)

సర్వసమాన త్రిభుజాలను సూచించే అక్షర క్రమము సదృశ భాగాల మధ్య సంబంధమును తెలియజేస్తుంది.

ఇవి చేయండి.

1. $\Delta EFG \cong \Delta LMN$

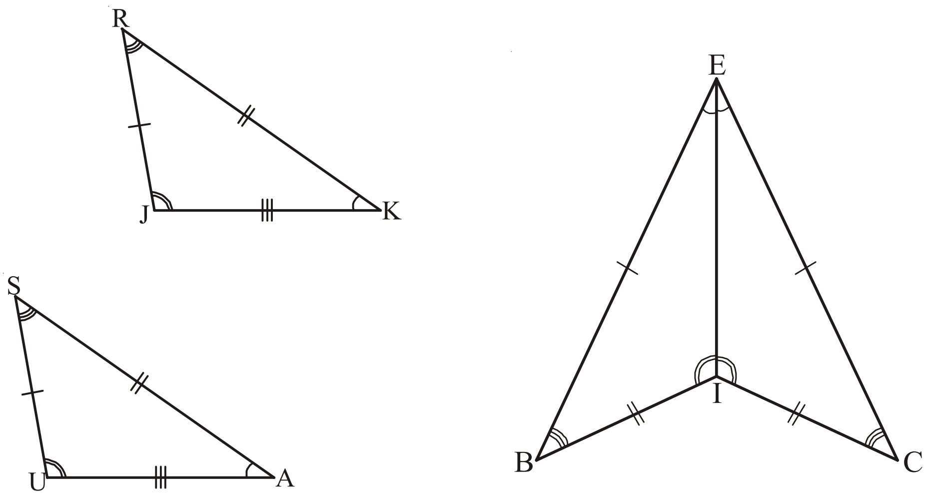


రెండు త్రిభుజాల యొక్క సదృశ భుజాలు, సదృశ కోణాలు, సదృశ శీర్షాలను రాయండి?

2. $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ అయితే ΔDEF లోని కింది భాగాలు ΔABC లో వేటితో సమానమవుతాయి?

(i) DE $\quad$ (ii) $\angle E$ $\quad$ (iii) DF $\quad$ (iv) EF $\quad$ (v) $\angle F$

3. సర్వసమానమైన త్రిభుజాల పేర్లను రాయండి. వాటిని సర్వ సమానత్వపు గుర్తు ‘ $\cong$’ తో సూచించండి.



4. ఈ కింది ఇవ్వబడిన సర్వసమాన త్రిభుజాల యొక్క సదృశకోణాలను, సదృశ భుజాలను కనుగొని రాయండి?

1. $\Delta TUV \cong \Delta XYZ$ $\qquad$ 2. $\Delta CDG \cong \Delta RSW$

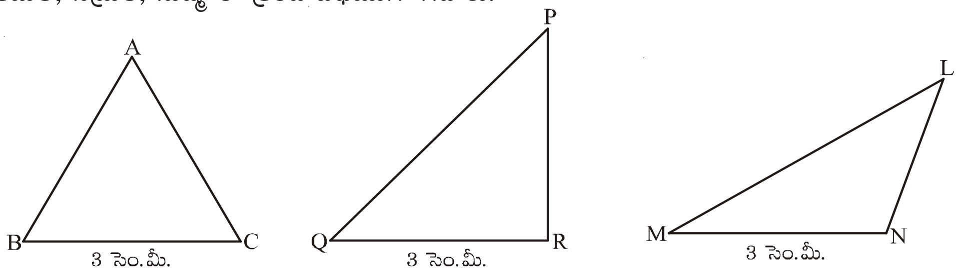
8.3 త్రిభుజాల సర్వసమానత్వమునకు నియమాలు

రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానాలో కాదో నిర్ధారించడానికి ఆ రెండింటిలోని సమానత్వాలను పరిశీలించడం అవసరం మన దగ్గర ఉండే స్కేలు, వృత్తలేఖిని వంటి పరికరాలతో త్రిభుజాల సర్వసమానత్వాన్ని పరిశీలించగలమా? ప్రయత్నిద్దాం.

8.3.1 భుజము - భుజము - భుజము సర్వసమానత (భు.భు.భు. నియమం)

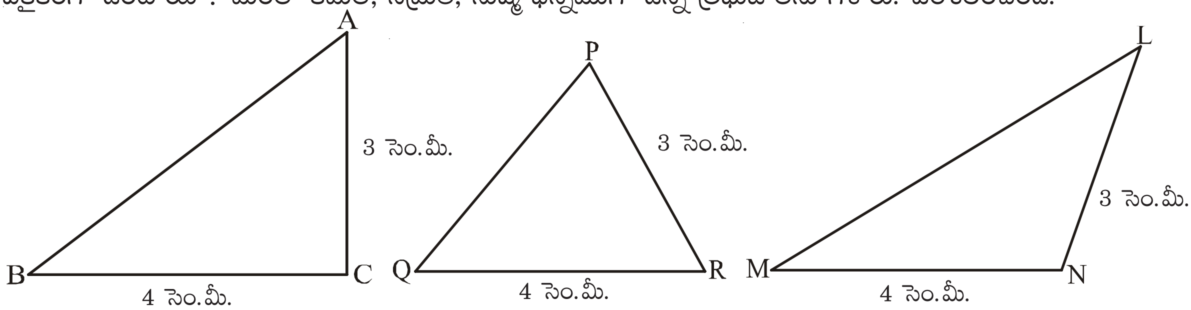
ఒక భుజము కొలత 3 సెం.మీ. గల త్రిభుజమును మీరందరూ ఒకేలా గీయగలరా?

కమల్, నమ్రత, సుష్మ ఈ క్రింది విధముగా గీచారు.

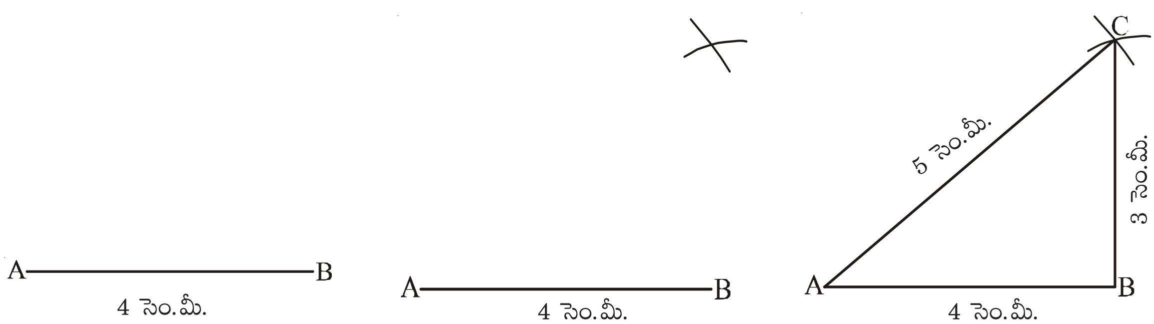


గమనించండి ముగ్గురు గీచిన త్రిభుజాలు విభిన్నంగా ఉన్నాయి కదా! కమల్ 3 సెం.మీ. కొలతగల సమబాహు త్రిభుజమును గీస్తే, నమ్రత లంబకోణ త్రిభుజాన్ని, సుష్మ అధిక కోణ త్రిభుజాన్ని గీశారు.

ఉదాహరణకు త్రిభుజము యొక్క రెండు భుజాల కొలతలు 3సెం.మీ. మరియు 4సెం.మీ. వాటితో గీసే త్రిభుజాలు ఏకైకంగా ఉంటాయా? మరలా కమల్, నమ్రత, సుష్మ భిన్నముగా ఉన్న త్రిభుజాలను గీశారు. పరిశీలించండి.



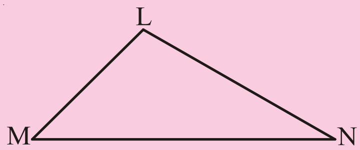
మనకు త్రిభుజముయొక్క మూడు భుజాల కొలతలు తెలిస్తే గీయగలమా? ఇది ఎలావుంటుంది? కమల్, నమ్రత, సుష్మ ముగ్గురూ గీసిన త్రిభుజాలు ఏకైకంగా ఉంటాయా? త్రిభుజము యొక్క భుజాల కొలతలు వరుసగా 4సెం.మీ., 3 సెం.మీ., 5 సెం.మీ. అనుకుంటే ఆ త్రిభుజాన్ని ఎవరు గీసినా ఒకే విధంగా ఉంటుంది.



ABC త్రిభుజమునకు సర్వసమానము అయిన మరో త్రిభుజమును గీయాలి అంటే మనకు ABC త్రిభుజము యొక్క మూడు భుజాల కొలతలు అవసరము. దీనిని మనము త్రిభుజాల సర్వసమానత్వమునకు భుజము. భుజము. భుజము. నియమము అంటారు.

భుజము – భుజము – భుజము సర్వసమానత్వ నియమము : "రెండు త్రిభుజాలలో మొదటి త్రిభుజములోని మూడు భుజాలు వరుసగా రెండవ త్రిభుజములోని సదృశ భుజాలకు సమానము అయితే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానము"

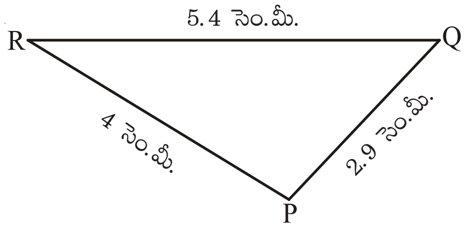
ప్రయత్నించండి.

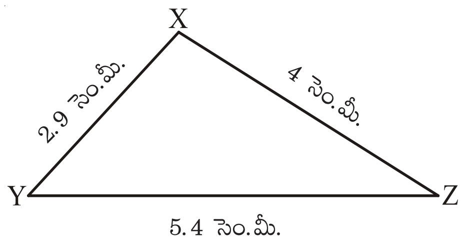


ΔLMN యొక్క భుజాల కొలతలను కొలవండి. ఒక కాగితముపై ఆ కొలతలతో త్రిభుజమును నిర్మించండి. ఈ త్రిభుజమును ΔLMN పై ఉంచండి. రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానమేనా? ఈ సందర్భములో త్రిభుజాల సర్వసమానత్వమునకు ఏ నియమాన్ని ఉపయోగించాము?

రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాల యొక్క సదృశ భుజాల కొలతలు సమానం అయినపుడు సదృశ కోణాల కొలతలు కూడా సమానము అవుతాయా? పరిశీలించండి.

ఉదాహరణ 1 : $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$ సత్యమేనా? రెండు త్రిభుజాల యొక్క సదృశ కోణాలను గుర్తించండి.





సాధన : ఇచ్చిన ΔPQR, ΔXYZ త్రిభుజాల నుండి

PQ = XY = 2.9 సెం.మీ.

QR = YZ = 5.4 సెం.మీ.

RP = ZX = 4 సెం.మీ.

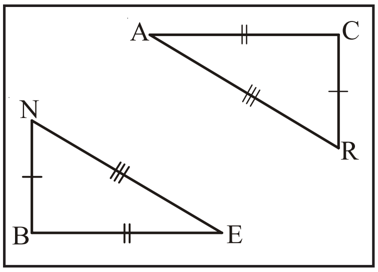
అందుచే భుజము–భుజము–భుజము సర్వసమానత ఆధారముగా $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$

P యొక్క సదృశ శీర్షము X, Q యొక్క సదృశ శీర్షము Y, R యొక్క సదృశ శీర్షము Z.

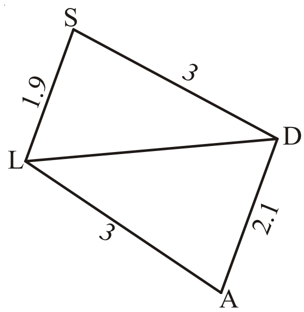
అభ్యాసం - 1

1. ఈ కింది ఇవ్వబడిన త్రిభుజాలు భుజము-భుజము-భుజము సర్వసమానత ఆధారముగా సర్వసమానమేనా? కారణములు చెప్పండి.

(i)

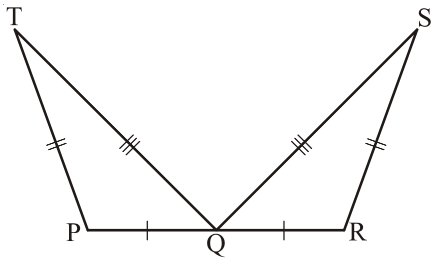


(ii)

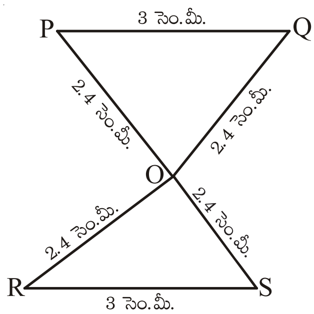


2. ఈ కింది ఇవ్వబడిన సర్వసమాన త్రిభుజాలలో సదృశ కోణాలను తెలపండి.

(i)



(ii)



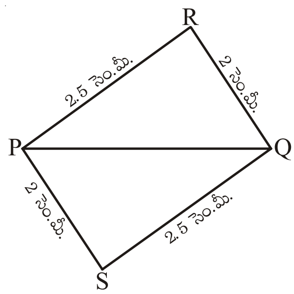
3. క్రింది వానిలో ఏది సరైనది? ఎందుకు?

(i) $\Delta PQR \cong \Delta PQS$

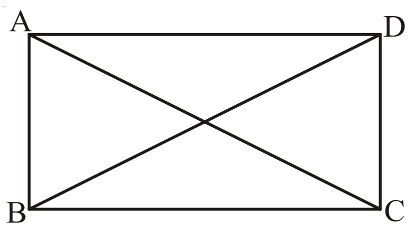
(ii) $\Delta PQR \cong \Delta QPS$

(iii) $\Delta PQR \cong \Delta SQP$

(iv) $\Delta PQR \cong \Delta SPQ$

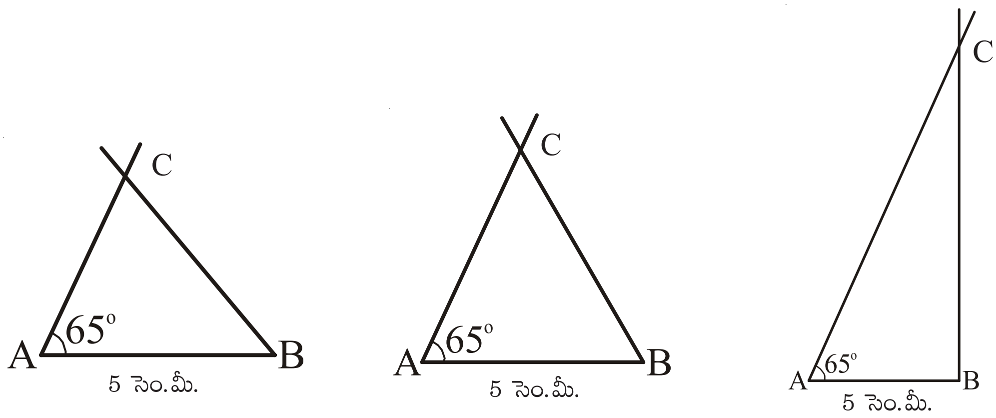


4. ఈ కింది ఇవ్వబడిన పటములో $AB = DC$ మరియు $AC = DB$ అయితే $\Delta ABC \cong \Delta DCB$ అవుతుందా?



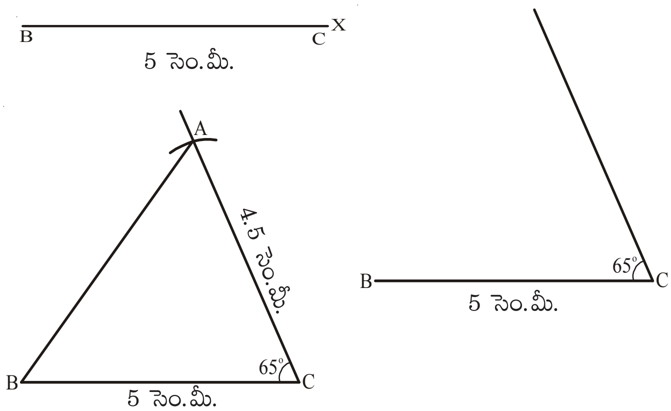
8.3.2 భుజము-కోణము-భుజము సర్వసమానత (భు.కో.భు. నియమం)

త్రిభుజము యొక్క ఒక భుజము కొలత ఇస్తే ఒకే రకమైన త్రిభుజాలు సాధ్యం కాదు అని నేర్చుకున్నాం. ఇప్పుడు త్రిభుజము యొక్క ఒక కోణము కొలత, భుజము కొలతలిస్తే గీయగల త్రిభుజాలు ఏకైకమో కాదో తెలుసుకొందాం. 5 సెం.మీ., 65^0 కోణము కొలతలనిస్తే గీసిన త్రిభుజాలను ఈ కింది విధముగా గీశారు.



ఇప్పుడు ఇవి వేరువేరుగా ఉన్నాయి కదా! త్రిభుజము యొక్క రెండు భుజాల కొలతలు, వాటి ఉమ్మడి కోణాన్ని ఇస్తే గీయగల త్రిభుజాలు ఏకైకమో కాదో చూద్దాం. వారు 5 సెం.మీ., 4.5 సెం.మీ. కొలతలుగా రెండు భుజములు, వాటి మధ్యకోణము 65^0 గా తీసుకొని త్రిభుజమును నిర్మించారు. కమల్ ఎలా నిర్మించాడో చూద్దాం.

కమల్ 5 సెం.మీ. కొలత గల రేఖాఖండమును స్కేలు సహాయతో నిర్మించి BC గా పేరు పెట్టాడు. కోణమానిని ఉపయోగించి C వద్ద 65^0 కోణమును నిర్మించాడు. C ను కేంద్రముగా చేసుకొని 4.5 సెం.మీ. కొలత వ్యాసార్ధముగా వృత్తలేఖిని సహాయంతో ఒక చాపమును గీశాడు. ఖండిత బిందువుకు A గా పేరు పెట్టాడు. A, B లను కలిపి ΔABC త్రిభుజమును నిర్మించాడు.

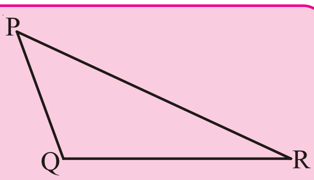


AB = 5సెం.మీ. BC= 4.5సెం.మీ. గా తీసుకొని B బిందువు వద్ద 65^0 కోణముతో త్రిభుజమును నిర్మించగలమా? ఈ త్రిభుజము కమల్ గీచిన త్రిభుజముతో సర్వసమానత్వమును కలిగి ఉంటుందా? ఇలాంటి సందర్భములో ఏర్పడిన త్రిభుజములు సర్వసమానములుగా గుర్తించవచ్చు.

ΔABC త్రిభుజమునకు సర్వసమానమైన త్రిభుజాన్ని గీయాలంటే రెండు భుజాల కొలతలు, వాటి మధ్య కోణము తెలిసియుండాలి దీనిని భుజము-కోణము-భుజము సర్వసమానత్వ నియమము అందురు.

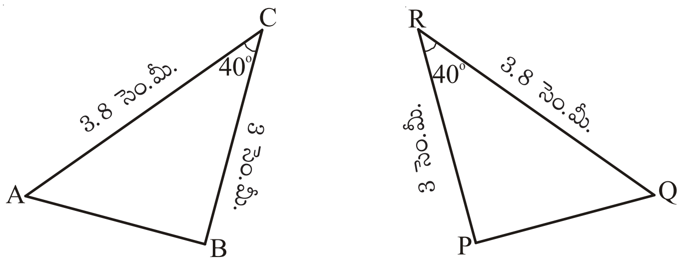
భుజము-కోణం-భుజము సర్వసమానత్వ నియమం : (భు.కో.భు. నియమం) "రెండు త్రిభుజాలలో మొదటి త్రిభుజములోని రెండు భుజాలు, వాటిమధ్యకోణము రెండవ త్రిభుజములోని సదృశ భుజాలు, వాటి మధ్యకోణమునకు సమానము అయితే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానములు."

ప్రయత్నించండి.



ΔPQR లో భుజాలు PQ, QR మరియు $\angle Q$ ను కొలవండి. ఒక కాగితముపై ఈ కొలతలతో త్రిభుజమును గీయండి. ఈ త్రిభుజమును ΔPQR పై ఉంచండి. రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానమేనా? ఏ నియమము ఆధారముగా రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానములు?

ఉదాహరణ 2: ఈ కింద ఇవ్వబడిన త్రిభుజముల యొక్క కొలతలను పరిశీలించండి. ఆ త్రిభుజములు సర్వసమానములేనా? వాటియొక్క సదృశ శీర్షాలు, సదృశ కోణాలు తెలపండి.



సాధన : ΔABC, ΔPQR త్రిభుజములలో

$AC = QR$, $BC = PR$ మరియు ఉమ్మడి కోణము $\angle C = \angle R$

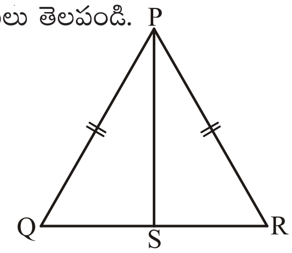
అందుచే $\Delta ABC \cong \Delta QPR$ (భు.కో.భు. సర్వసమానతా నియమం)

రెండు త్రిభుజాలలోని సదృశ శీర్షాలు $A \leftrightarrow Q$, $B \leftrightarrow P$ మరియు $C \leftrightarrow R$

సదృశ కోణాలు $\angle A = \angle Q$, $\angle B = \angle P$ మరియు $\angle C = \angle R$

ఉదాహరణ 3: ΔPQR త్రిభుజములో $PQ = PR$ మరియు $\angle P$ యొక్క కోణసమద్విఖండన రేఖ PS.

ΔPQS మరియు ΔPRS లు సర్వసమానములేనా? అయితే కారణములు తెలపండి.



సాధన : ΔPQS మరియు PRS లలో

$PQ = PR$ (దత్తాంశము) (భుజం)

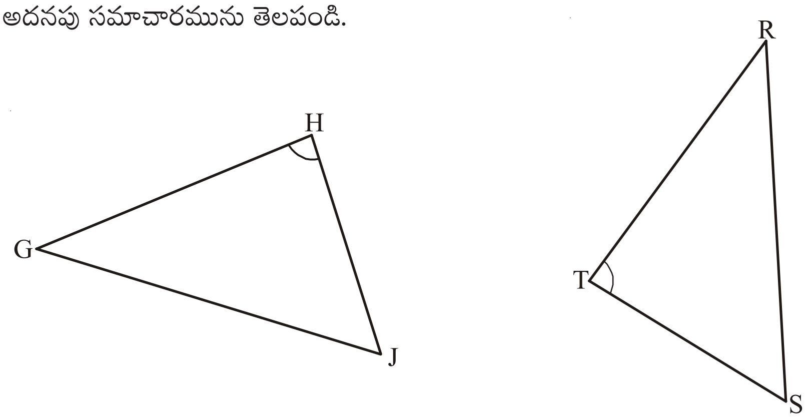
$PS = PS$ (ఉమ్మడి భుజము) (భుజం)

$\angle QPS = \angle RPS$ (PS, $\angle P$ యొక్క కోణ సమద్విఖండనరేఖ) (కోణము)

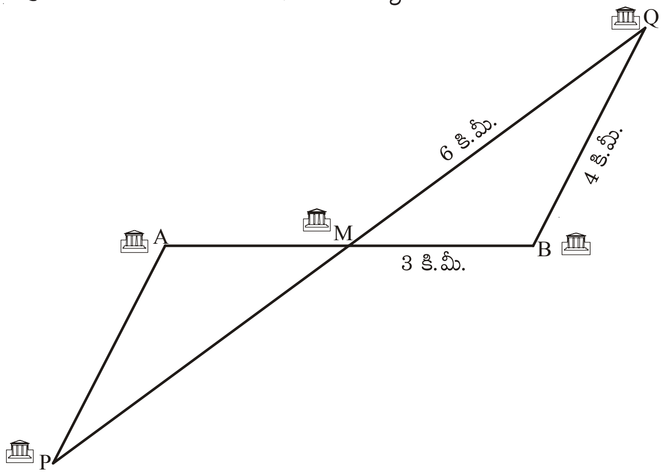
అందుచే $\Delta PQS \cong \Delta PRS$ (భు.కో.భు. సర్వసమానత్వ నియమం)

అభ్యాసం - 2

1. ఈ కింది ఇవ్వబడిన త్రిభుజము భు.కో.భు. నియమము ఆధారముగా సర్వసమానము అని చూపుటకు కావలసిన అదనపు సమాచారమును తెలపండి.

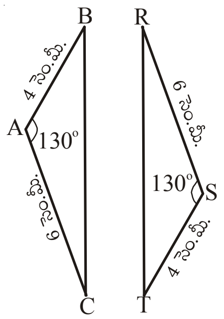


2. A, B అను గ్రామాలను కలిపే రేఖా ఖండానికి మరియు P, Q అను గ్రామాలను కలిపే రేఖా ఖండానికి మధ్య బిందువు వద్ద M అనే గ్రామం ఉంది. అయిన A, P ల మధ్య దూరం ఎంత?

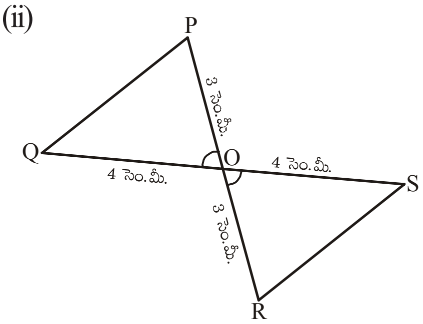


3. ఇక్కడ కొన్ని త్రిభుజాల జతలు ఇవ్వబడ్డాయి. అవి సర్వసమానములేనా? సర్వసమానములు అయితే సదృశ భాగాల పేర్లు రాయండి.

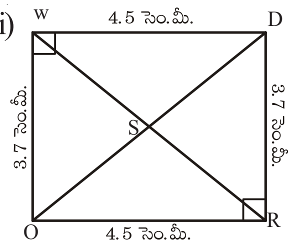
(i)



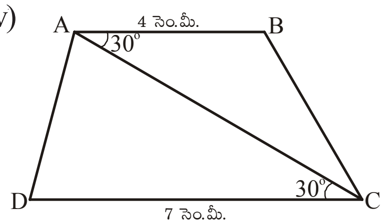
(ii)



(iii)

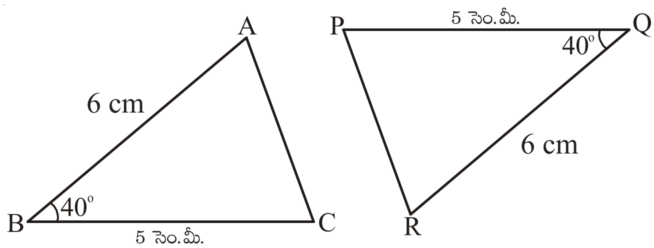


(iv)

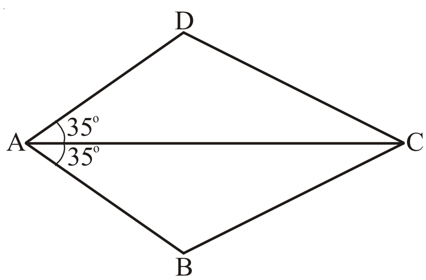


4. భు.కో.భు. నియమము ద్వారా ఇచ్చిన త్రిభుజాలు సర్వసమానము అని చూపుటకు ఏ భుజాలను సదృశ భుజాలుగా తీసుకోవాలి.

(i)



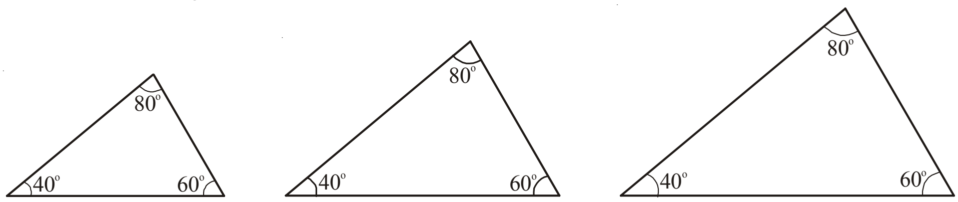
(ii)



8.3.3 కోణము-భుజము-కోణము సర్వసమానత (కో.భు.కో. నియమం)

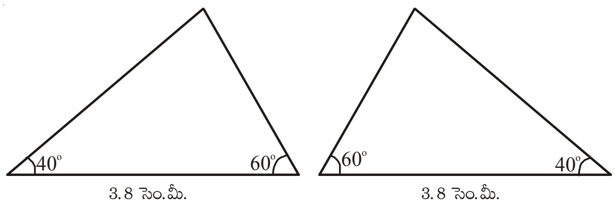
విద్యార్థులూ! మీరు త్రిభుజములోని ఒక కోణము కొలతనిస్తే త్రిభుజమును నిర్మించగలరా? రెండు కోణముల కొలతలు తెలిసిన సందర్భములోనైనా త్రిభుజము నిర్మించగలరా? త్రిభుజము యొక్క మూడు కోణముల కొలతలు తెలిస్తే సర్వసమాన త్రిభుజములను నిర్మించగలరా?

కమల్, నమ్రత మరియు సుష్మలు 40^o, 60^o మరియు 80^o కొలతలుగా గల త్రిభుజాలను ఇలా గీసారు.



ఇచ్చట త్రిభుజముల యొక్క కోణముల కొలతలు సమానము కాని భుజముల కొలతలు సమానము కాదు. అందుచే త్రిభుజములు సర్వసమానములు కావు.

అందుచే సర్వసమాన త్రిభుజములు నిర్మించడానికి త్రిభుజ భుజాల కొలతలు అవసరము. మనకు త్రిభుజము యొక్క రెండుకోణముల కొలతలు, ఒక భుజము కొలత తెలిస్తే సర్వసమాన త్రిభుజాలను నిర్మించగలమా?



కమల్ మరియు నమ్రత 60^0, 40^0 మరియు భుజము కొలత 3.8 సెం.మీ. గా గల త్రిభుజములను గీశారు. కమల్ మరియు నమ్రత త్రిభుజములను నిర్మించినపుడు భుజమును 60^0, 40^0 లకు ఉమ్మడి భుజముగా తీసుకొని నిర్మించారు.

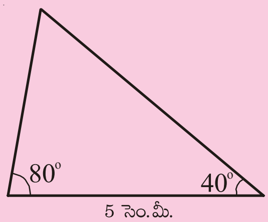
అందుచేత మనము రెండుకోణముల కొలతలు, ఒక భుజముకొలత తెలిసినప్పుడు సర్వసమాన త్రిభుజాలను నిర్మించగలం అంటే రెండు కోణముల కొలతలు, ఆ కోణముల యొక్క ఉమ్మడి భుజము కొలత అవసరము.

దీనిని మనము కోణము భుజము కోణము సర్వసమానత్వ నియమము అంటాం

కోణము-భుజము-కోణము సర్వసమానత్వ నియమం : (కో.భు.కో. నియమం) రెండు త్రిభుజాలలో ఒక త్రిభుజము యొక్క రెండుకోణములు వాటి ఉమ్మడి భుజము వరుసగా రెండవ త్రిభుజములోని సదృశ కోణములు, మరియు సదృశ భుజమునకు సమానము అయితే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానములు.

దీనిని కోణము - భుజము - కోణము సర్వసమానత్వ నియమం అంటారు.

ప్రయత్నించండి.



ఉపాధ్యాయుడు 60^0, 40^0 మరియు 5 సెం.మీ. కొలతలుగా గల త్రిభుజాన్ని నిర్మించమని విద్యార్థులను కోరాడు. త్రిభుజంలో మూడు కోణాల మొత్తం 180^0 కావున మూడవ కోణం 80^0 గా సుష్మ లెక్కించింది. తరగతిలో కమల్, సుష్మ, నమ్రత త్రిభుజాలను విభిన్నంగా దిగువ కొలతలతో గీచారు.

కమల్ : 60^0, 40^0 మరియు 5 సెం.మీ. (ఉపాధ్యాయుడు ఇచ్చిన కొలతలు)

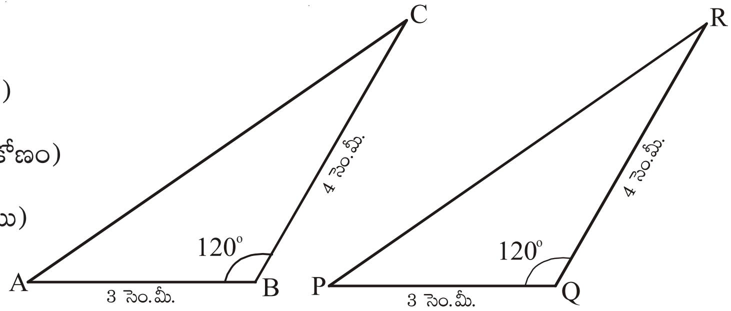
సుష్మ : 80^0, 40^0 మరియు 5 సెం.మీ.

నమ్రత : 60^0, 80^0 మరియు 5 సెం.మీ.

ఈ మూడు త్రిభుజాలను కత్తిరించి ఒక దానిపై మరొకటి పెట్టి సరిపోల్చారు. ఇవి సర్వ సమానాలగునా? మీరూ ప్రయత్నించండి.

ఉదా 4 : త్రిభుజములు CAB మరియు RPQ ఇవ్వబడ్డాయి. ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానములేనా? పరిశీలించండి. సర్వసమానములు అయితే మిగిలిన త్రిభుజ భాగాల యొక్క కొలతలను గురించి మీరు ఏమి చెప్పగలుగుతారు?

సాధన : ΔCAB, ΔRPQ లలో



$BC = QR = 4$ సెం.మీ (భుజం)

$\angle B = \angle Q = 120^\circ$ (ఉమ్మడి కోణం)

$AB = PQ = 3$ సెం.మీ (భుజము)

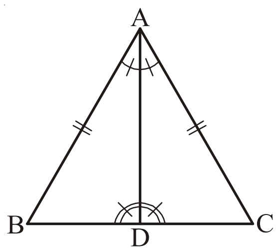
$\Delta CAB \cong \Delta RPQ$ (భు.కో.భు. సర్వసమానత నియమం ప్రకారం)

అందుచే రెండు త్రిభుజాలలో

$AC = PR$

$\angle C = \angle R \;\; \angle A = \angle P$ అని కూడా చెప్పవచ్చు.

ఉదాహరణ 5 : ప్రక్క పటములో ఇవ్వబడిన రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానములేనా. సమాన భాగాలు సూచించబడినవి.



సాధన : ΔABD, ΔACD త్రిభుజాలలో

$\angle BAD = \angle CAD$ (దత్తాంశము) కోణము

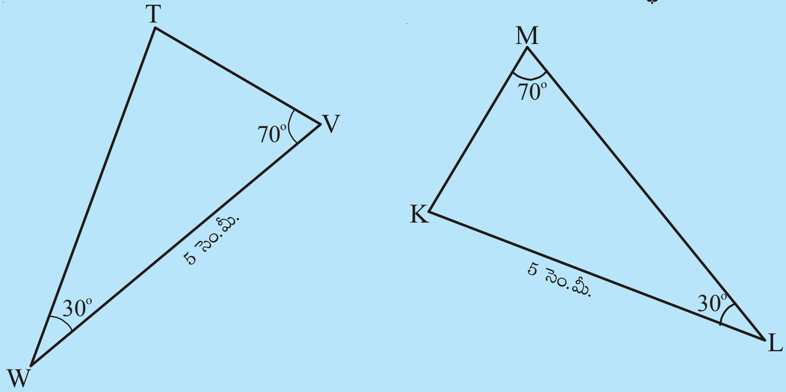
$\angle ADB = \angle ADC$ (దత్తాంశము) కోణము

$AD = AD$ (ఉమ్మడి భుజము) భుజము

$\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (కో.భు.కో. సర్వ సమానత్వ నియమం ప్రకారం)

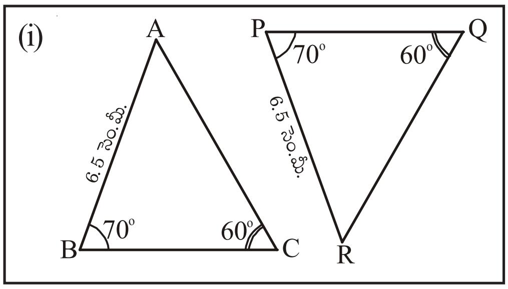
ప్రయత్నించండి.

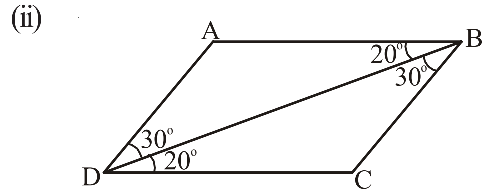
ఇచ్చట ఇవ్వబడిన త్రిభుజములు సర్వసమానములేనా? మీ సమాధానమును సమర్థిస్తూ కారణములు తెలపండి.

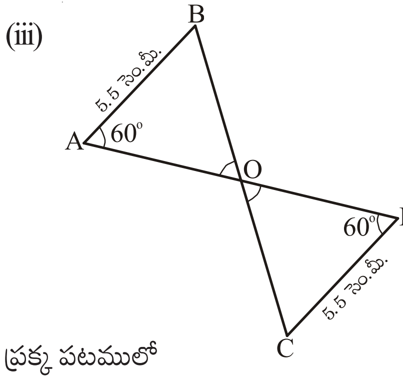


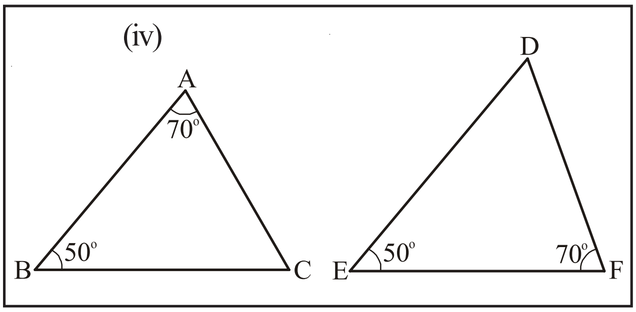
అభ్యాసం - 3

1. ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన త్రిభుజాల జతలలో ఏ త్రిభుజాలు సర్వసమానములు? సర్వసమానత్వమునకు కారణమైన నియమమును తెలుపుము.







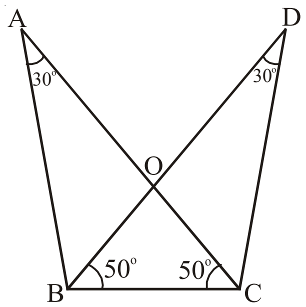


2. ప్రక్క పటములో

(i) ΔABC మరియు ΔDCB సర్వసమానములేనా?

(ii) ΔAOB, ΔDOC త్రిభుజాలు సర్వసమానములేనా?

సదృశ భుజాలను గుర్తించండి. సర్వసమానత్వమును తెలుపుటకు కావలసిన నియమము పేరు తెలుపుము.



8.3.4 లంబకోణము - కర్ణము - భుజము సర్వసమానత (లం.క.భు నియమం)

లంబకోణ త్రిభుజాలలో ఒక కోణము లంబకోణము. అందుచే లంబకోణ త్రిభుజాలు సర్వసమానములు అని చెప్పడానికి మనకు కావలసిన అంశాలను పరిశీలిద్దాం.

ఒక ఉదాహరణను పరిశీలిద్దాం. ABC త్రిభుజములో $\angle B = 90$ మనము త్రిభుజమును ఏ సందర్భములో గీయగలము?

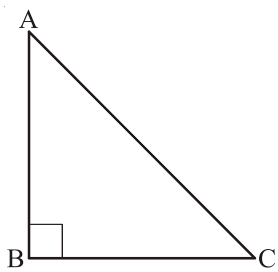
(i) కేవలము BC కొలత తెలిసినపుడు

(ii) కేవలము $\angle C$ తెలిసినపుడు

(iii) $\angle A$ మరియు $\angle C$ కొలత తెలిసినపుడు

(iv) AB మరియు BC కొలతలు తెలిసినపుడు

(v) $\angle C$ మరియు BC కొలతలు తెలిసినపుడు.



(vi) BC మరియు కర్ణము AC కొలతలు తెలిసినపుడు.

(vii) AB మరియు కర్ణము AC కొలతలు తెలిసినప్పుడు మనము త్రిభుజాలను గీయడానికి ప్రయత్నిస్తే (iv) (v) (vi) మరియు (vii) సందర్భాలలో గీసే త్రిభుజాలు ఏకైకంగా ఉంటాయి.

(vi) మరియు (vi) సందర్భాలు లంబకోణము - కర్ణము - భుజము సర్వసమానత్వ నియమమును ఇస్తాయి.

లంబకోణము - కర్ణము - భుజము సర్వసమానత్వ నియమము (లం.క.భు. నియమము)

"రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలు సర్వసమానము కావడానికి ఒక త్రిభుజములోని కర్ణము భుజము వరుసగా రెండవ త్రిభుజములోని కర్ణము, సదృశ భుజము నకు సమానము కావాలి.

ఉదాహరణ 6 : కింద రెండు త్రిభుజముల యొక్క భాగాల కొలతల ఇవ్వబడినవి. ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానములేనా? లం.క.భు. నియమము ఆధారముగా సర్వసమానమేనా? సర్వసమానములు అయితే వాటిని గుర్తులతో సూచించుము.

	ΔABC	ΔPQR
(i)	$\angle B = 90^o$, AC = 8 సెం.మీ, AB = 3 సెం.మీ	$\angle P = 90^o$, PR = 3 సెం.మీ, QR = 8 సెం.మీ
(ii)	$\angle A = 90^o$, AC = 5 సెం.మీ, BC= 9 సెం.మీ	$\angle Q = 90^o$, PR = 8 సెం.మీ, PQ = 5 సెం.మీ

సాధన :

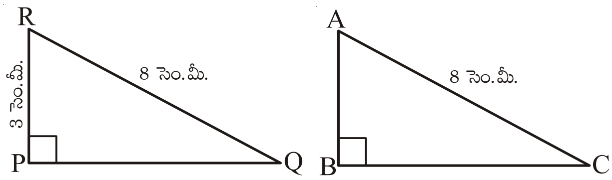
(i) ఇక్కడ $\angle B = \angle P = 90^o$

కర్ణము AC = కర్ణము RQ (8 సెం.మీ)

భుజము AB = భుజము RP (3 సెం.మీ)

అందుచే $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$

(లం.క.భు. నియమం)



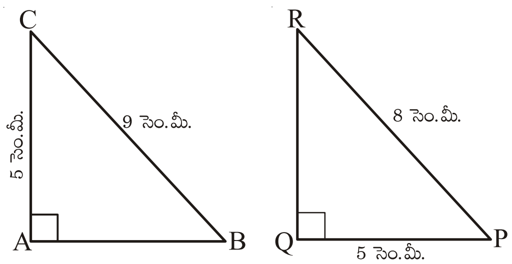
పటం 1

(ii) ఇచ్చుట $\angle A = \angle Q = 90^o$

భుజము AC = భుజము PQ (5 సెం.మీ).

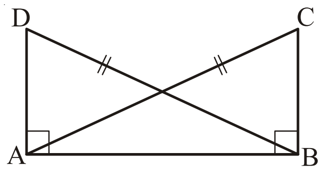
కర్ణము BC $\neq$ కర్ణము PR

అందుచే రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానము కావు.



పటం 2

ఉదాహరణ 7 : ప్రక్కపటములో $DA \perp AB$, $CB \perp AB$ మరియు $AC = BD$.



ΔABC మరియు ΔDAB త్రిభుజాలలో సర్వసమాన భాగాల పేర్లను రాయుము.

ఈ క్రింది వాటిలో ఏవి సరియైనవి?

(i) $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ (ii) $\Delta ABC \cong \Delta ABD$

సాధన : సర్వసమాన భాగాలు

$\angle ABC = \angle BAD \ (= 90^o)$

$\overline{AC} = \overline{BD}$ (దత్తాంశం)

$\overline{AB} = \overline{BA}$ (ఉమ్మడి భుజం)

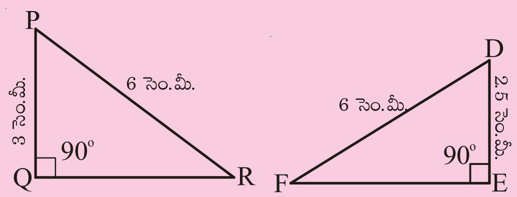
$\Delta ABC \cong \Delta BAD$ (లం.క.భు. సర్వసమానత్వ నియమం ప్రకారం).

అందుచే వాక్యము (i) సత్యం

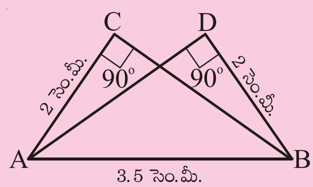
వాక్యము (ii) సరియైనది కాదు. ΔABC, ΔBAD లలో శీర్షాలు సదృశాలు కావు.

ప్రయత్నించండి.

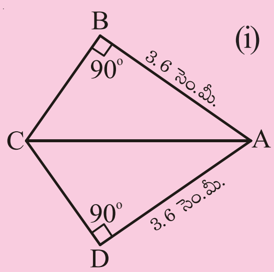
1. కింద కొన్ని త్రిభుజాలు వాటికొలతలు ఇవ్వబడ్డాయి. లం.క.భు. నియమము ఆధారముగా అవి సర్వసమానమేనా? మీ సమాధానమును సరియైన సంజ్ఞలలో రాయండి.



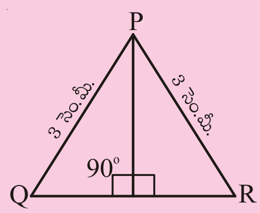
(i)



(ii)



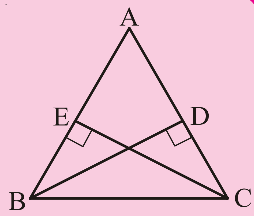
(iii)



(iv)

2. $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$ (లం.క.భు. నియమము ఆధారముగా) అయితే $\angle B = \angle P = 90^o$ మరియు $AB = RP$ అన్న సమాచారము సరిపోతుందా? అదనముగా ఏ సమాచారము కావాలి?

3. ప్రక్కపటము ΔABC లో BD, CE లు ఉన్నతులు. BD = CE.

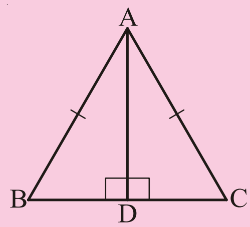


(i) ΔCBD మరియు ΔBCE సమానముగా ఉన్న భాగాలు ఏవి?

(ii) $\Delta CBD \cong \Delta BCE$ సత్యమేనా? ఎందుచేత?

(iii) $\angle DBC = \angle EBC$ సత్యమేనా? ఎందుచేత కారణము తెలపండి.

4. ABC ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజము. AB = AC మరియు AD ,BC పై గీచిన ఉన్నతి. .



(i) ΔADB మరియు ΔADC లో సమాన భాగాలు పేర్లను రాయుము.

(ii) $\Delta ADB \cong \Delta ADC$ సత్యమేనా? కారణములు తెలపండి.

(iii) $\angle B = \angle C$ సత్యమేనా? కారణములు తెలపండి.

(iv) BD = CD సత్యమేనా? కారణములు తెలపండి.

అభ్యాసం - 4

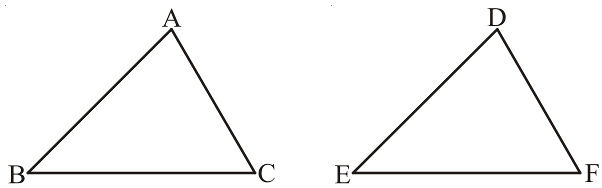
1. ఏ సర్వసమానత్వ నియమము ఆధారముగా త్రిభుజాలు సర్వసమానములో తెలపండి.

(i) $\overline{AC} = \overline{DF}$

$\overline{AB} = \overline{DE}$

$\overline{BC} = \overline{EF}$

అందుచే $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

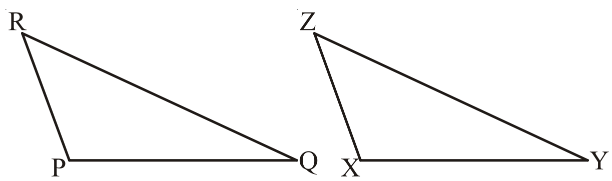


(ii) $\overline{ZX} = \overline{RP}$

$\overline{ZY} = \overline{RQ}$

$\angle PRQ = \angle XZY$

అందుచే $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$

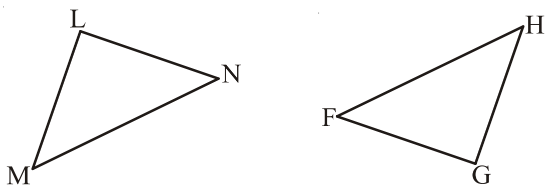


(iii) $\angle MLN = \angle FGH$

$\angle NML = \angle GFH$

$\overline{ML} = \overline{FG}$

అందుచే $\Delta LMN \cong \Delta GFH$

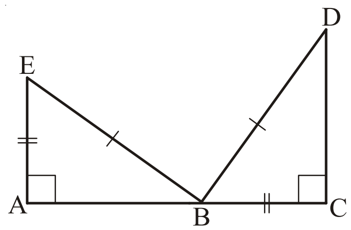


(iv) $\overline{EB} = \overline{DB}$

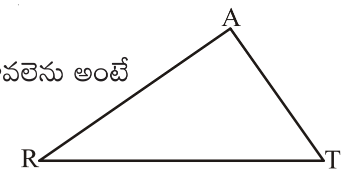
$\overline{AE} = \overline{BC}$

$\angle A = \angle C = 90^o$

అందుచే $\Delta ABE \cong \Delta CDB$



2. $\Delta ART \cong \Delta PEN$ అని చూపడానికి

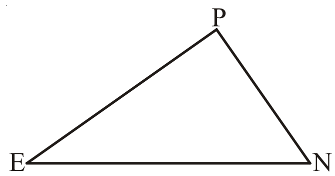


(i) భు.భు.భు. సర్వసమానత్వ నియమము ప్రకారము సర్వసమానము కావలెను అంటే

(a) AR = (b) RT = (c) AT =

(ii) $\angle T = \angle N$ అని ఇస్తే భు.కో.భు. నియమము ను వర్తింపచేయాలంటే

(a) RT = (ii) PN =



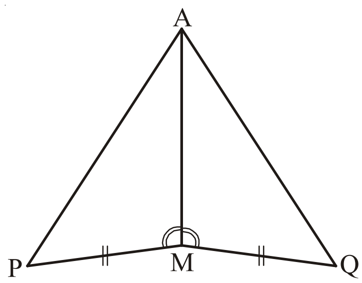
(iii) AT = PN అని ఇస్తే కో.భు.కో.నియమం వర్తింపచేయాలంటే

(a) ? (b) ?

3. $\Delta AMP \cong \Delta AMQ$ గా చూపాలి అంటే

ఈ క్రింది ఇవ్వబడిన సాధనలో సోపానముల కారణములు ఇవ్వలేదు. వాటిని తెలపండి.

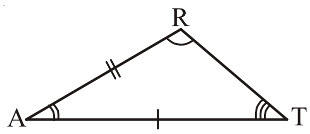
సోపానం	కారణం
(i) $\overline{PM} = \overline{QM}$	(i) ....
(ii) $\angle PMA = \angle QMA$	(ii) ....
(iii) $\overline{AM} = \overline{AM}$	(iii) ....
(iv) $\Delta AMP \cong \Delta AMQ$	(iv) ....



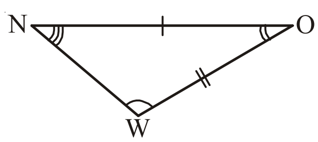
4. ΔABC, $\angle A = 30^o$, $\angle B = 40^o$ మరియు $\angle C = 110^o$

ΔPQR, $\angle P = 30^o$, $\angle Q = 40^o$ మరియు $\angle R = 110^0$

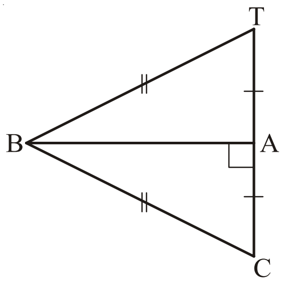
పై కొలతల ఆధారంగా ఒక విద్యార్థి కోణము, కోణము, కోణము, నియమము ఉపయోగించి రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానము $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ అని చెప్పాడు. సత్యమేనా? కారణము చెప్పండి.



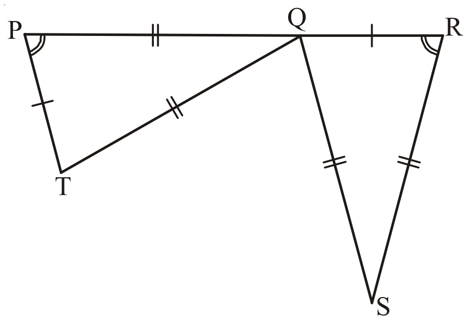
5. ప్రక్కపటములో రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలు ఇవ్వబడ్డాయి. సమాన భాగాల పేర్లు రాయండి. $\Delta RAT \cong$?



6. సర్వసమానత్వమును పూరింపుము.



$\Delta ABC \cong$?



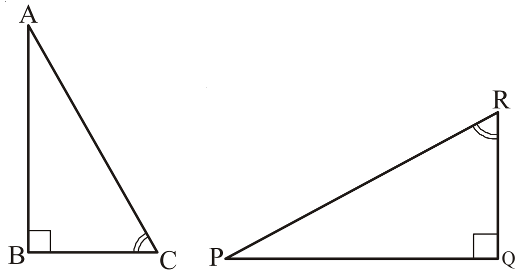
$\Delta QRS \cong$?

7. కింది సందర్భాలకు తగినట్లు, సమాన వైశాల్యాలు గల రెండు త్రిభుజాలను ఒక గళ్ళ కాగితములో గీయండి.

(i) త్రిభుజాలు సర్వసమానములు.

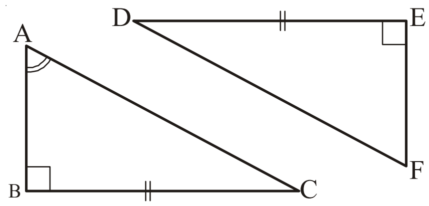
(ii) త్రిభుజాలు సర్వసమానములుకావు.

త్రిభుజముల యొక్క చుట్టుకొలతలను గూర్చి నీవేమి చెప్పగలవు?



8. ΔABC మరియు ΔPQR లు సర్వసమానములు. ఏ నియమము ఆధారముగా ఇవి సర్వసమానములో చెప్పండి. పటములలో సూచించబడిన మిగిలిన ఏ భుజాలు, ఏ కోణములు సమానములో చెప్పండి.

9. $\Delta ABC \cong \Delta FED$ సత్యమేనా? ఎందుచేత?



మనం నేర్చుకున్నవి

1. సర్వసమాన పటములు ఒకే ఆకారము, ఒకే పరిమాణము కలిగి యుంటాయి.
2. రెండు పటాలను ఒక దానిపై మరొకటిని పెట్టినపుడు పూర్తిగా ఏకీభవిస్తే ఆ పటాలు సర్వసమాన పటాలు అంటాము.
3. $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ లు ఒకే పొడవును కల్గియున్నచో అవి సర్వసమానములు. దీనిని $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ గా వ్రాస్తాము. సాధారణంగా AB = CD గా కూడా వ్రాస్తాము.
4. రెండుత్రిభుజాలలో ఒక త్రిభుజములోని భాగాలు వరుసగా రెండవ త్రిభుజములోని సదృశ భాగాలకు సమానము అయితే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానం.

5. రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానము కావటానికి కావలసిన ఆవశ్యక-పర్యాప్త నియమాలు

(i) భుజము-భుజము-భుజము సర్వసమానత్వ నియమం :

రెండు త్రిభుజాలలో ఒక త్రిభుజములోని మూడు భుజాల కొలతలు వరుసగా రెండవ త్రిభుజములోని సదృశ భుజాల కొలతలకు సమానము అయితే ఆరెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానం.

(ii) భుజము-కోణము-భుజము సర్వసమానత్వ నియమం.

రెండు త్రిభుజాలలో ఒక త్రిభుజములోని రెండుభుజాలు వాటి మధ్య కోణము వరుసగా రెండవ త్రిభుజములోని సదృశ భుజాలు వాటి మధ్య కోణమునకు సమానము అయితే ఆ త్రిభుజాలు సర్వసమానములు.

(iii) కోణము-భుజము-కోణము సర్వసమానత్వ నియమము.

రెండు త్రిభుజాలలో ఒక త్రిభుజములోని రెండు కోణాలు, వాటి ఉమ్మడి భుజము వరుసగా రెండవ త్రిభుజములోని సదృశ కోణాలు, వాటి ఉమ్మడి భుజమునకు సమానము అయితే ఆ త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు.

(iv) లంబకోణము-కర్ణము-భుజము సర్వసమానత్వ నియమం

రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలలో ఒక త్రిభుజములోని కర్ణము, ఒక భుజము వరుసగా రెండవ త్రిభుజములో కర్ణము, సదృశ భుజానికి సమానము అయితే ఆ త్రిభుజాలు సర్వసమానములు.

త్రిభుజాల నిర్మాణాలు

9

9.0 పరిచయం

ఈ అధ్యాయంలో మనం త్రిభుజాల నిర్మాణాల గురించి నేర్చుకుందాం. త్రిభుజములో సర్వ సమానత్వాన్ని నిర్ధారించడానికి ఏయే కొలతలు కావాలో అవే కొలతలతో మనము త్రిభుజము నిర్మించవచ్చు. కింది సందర్భాలను పరిశీలించండి.

(i) త్రిభుజం యొక్క 3 భుజాల కొలతలు ఇచ్చినప్పుడు

(ii) త్రిభుజం యొక్క 2 భుజాల కొలతలు, వాని మధ్య కోణం ఇచ్చినపుడు

(iii) త్రిభుజం యొక్క 2 భుజాల కొలతలు మరియు వాని మధ్యలేని కోణం ఇచ్చినపుడు.

(iv) రెండు కోణాలు మరియు వాని మధ్యభుజం కొలతలు ఇచ్చినపుడు

(v) ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో కర్ణం మరియు ఒక భుజం ఇచ్చినపుడు

అనగా ఒక త్రిభుజము నిర్మించడానికి మూడు స్వతంత్ర కొలతలు సరిపోతాయి.

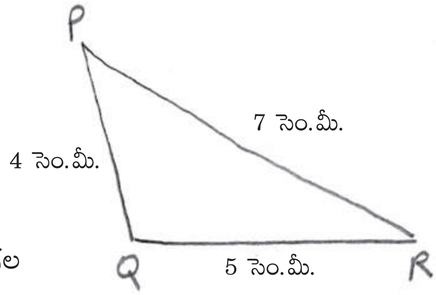
పైన పేర్కొన్న సందర్భాలలో త్రిభుజాలను ఎలా నిర్మించాలో ఇప్పుడు నేర్చుకుందాం.

9.1 ఒక త్రిభుజము మూడు భుజాల కొలతలు ఇచ్చినపుడు త్రిభుజమును నిర్మించటం

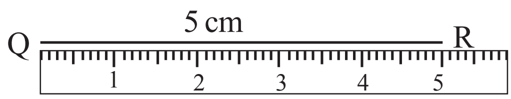
ఒక జ్యామితీయ పటం నిర్మాణం గీసేటపుడు మొదట చిత్తుపటాన్ని గీసి, దానిలో మనకు ఇచ్చిన కొలతలను గుర్తించాలి.

ఉదాహరణ 1 : PQ = 4 సెం.మీ, QR = 5 సెం.మీ, RP = 7 సెం.మీ. కొలతలు గల త్రిభుజము PQR ను నిర్మించుము.

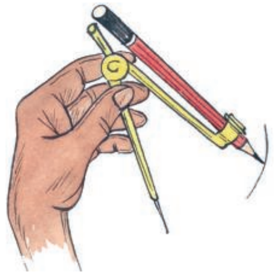
సోపానము 1 : ఇచ్చిన త్రిభుజము యొక్క చిత్తుపటము గీసి, కొలతలు గుర్తించాలి.

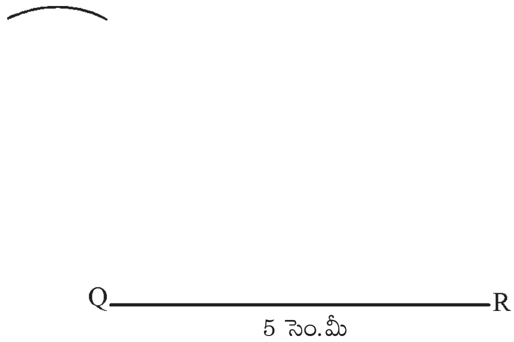


సోపానము 2 : స్కేలు సహాయంతో 5 సెం.మీ పొడవు గల రేఖాఖండము QR ను గీయాలి.

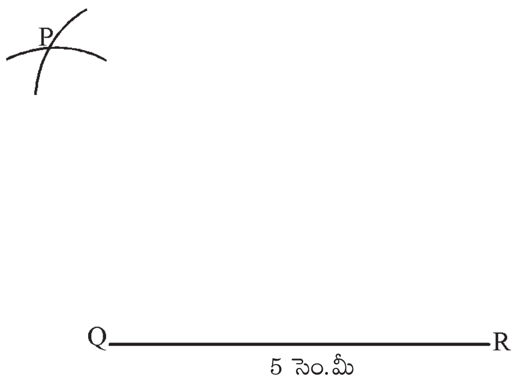


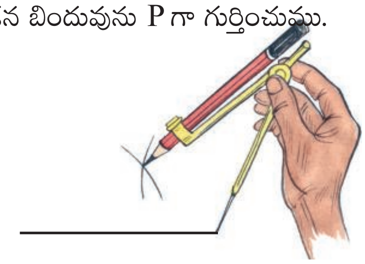
సోపానము 3 : బిందువు Q కేంద్రముగా, 4 సెం.మీ వ్యాసార్ధంతో ఒక చాపరేఖను గీయాలి.



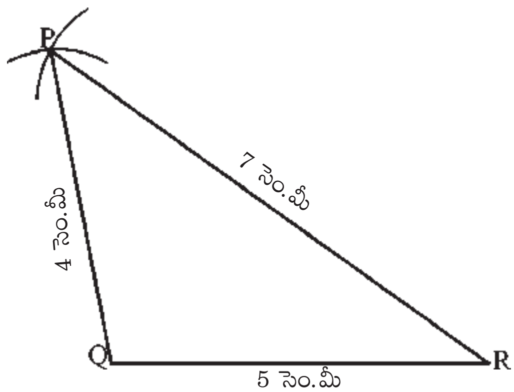


సోపానము 4 : P బిందువు R నుంచి 7 సెం.మీ దూరములో వుంది. కావున బిందువు R కేంద్రముగా 7 సెం.మీ, వ్యాసార్ధంతో మొదటి చాపరేఖను ఖండించునట్లు మరొక చాపరేఖను గీచి వాటి ఖండన బిందువును P గా గుర్తించుము.





సోపానము 5 : బిందువు 'P' ని బిందువులు 'Q' మరియు 'R' లకు కలపండి. ఏర్పడిన త్రిభుజము PQR మనకు కావలసిన త్రిభుజము.



ప్రయత్నించండి.

1. పై ఉదాహరణలో పేర్కొన్న కొలతలతో, PQ భుజము ఆధారముగా వుండేటట్లు ఒక త్రిభుజాన్ని నిర్మించండి. నిర్మించిన త్రిభుజము, పై ఉదాహరణలో ఏర్పడిన త్రిభుజము సర్వసమాన త్రిభుజాలు అవుతాయా?

2. మీ నోట్ పుస్తకములో PE = 4.5 సెం.మీ, ET = 5.4 సెం.మీ మరియు TP = 6.5 సెం.మీ కొలతలతో త్రిభుజము PET ని నిర్మించుము.

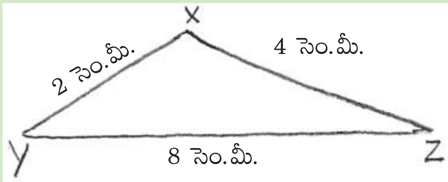
   ఒక కాగితముపై AB = 5.4 సెం.మీ, BC = 4.5 సెం.మీ మరియు CA = 6.5 సెం.మీ కొలతలతో త్రిభుజము ABC ని నిర్మించుము. కాగితంపై నిర్మించిన త్రిభుజము ABC ని కత్తిరించి నోట్ పుస్తకములో నిర్మించిన త్రిభుజము PET పై అమర్చుము. రెండు త్రిభుజములు సర్వ సమాన త్రిభుజములవుతాయా? నీ సమాధానాన్ని గణిత భాషలో నీ నోట్ పుస్తకములో రాయుము.

అభ్యాసం - 1

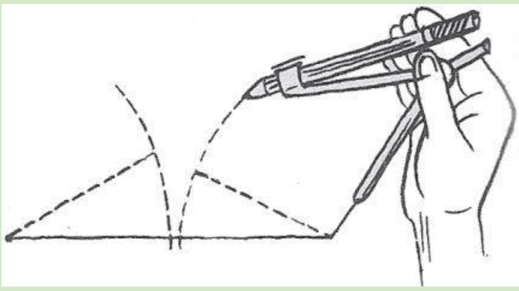
1. AB = 5.5 సెం.మీ, BC = 6.5 సెం.మీ మరియు CA = 7.5 సెం.మీ. కొలతలతో త్రిభుజము ABC ని నిర్మించుము.
2. NI = 5.6 సెం.మీ, IB = 6 సెం.మీ మరియు BN = 6 సెం.మీ. కొలతలతో త్రిభుజము NIB ను నిర్మించుము. ఏర్పడిన త్రిభుజము ఏ రకమైన త్రిభుజము?
3. 6.5 సెం.మీ. భుజము కొలత గల సమబాహు త్రిభుజము APE ని నిర్మించుము.
4. XY = 6 సెం.మీ, YZ = 8 సెం.మీ మరియు ZX = 10 సెం.మీ. కొలతలతో త్రిభుజము XYZ ని నిర్మించి, కోణమానిని సహాయంతో శీర్షము Y వద్ద కోణాన్ని కొలవండి. XYZ ఏరకమైన త్రిభుజము?
5. $\overline{AB}$ = 4 సెం.మీ, $\overline{BC}$ = 7 సెం.మీ మరియు $\overline{CA}$ = 4 సెం.మీ. కొలతలతో త్రిభుజము ABC ని నిర్మించండి. ఇది ఏ రకమైన త్రిభుజము?
6. PE = 4 సెం.మీ, EN = 5 సెం.మీ మరియు NP = 3 సెం.మీ. కొలతలతో త్రిభుజము PEN ను నిర్మించుము. నిర్మాణములో చాపరేఖల బదులు వృత్తములు గీసిన ఎన్ని ఖండన బిందువులు వస్తాయి? యిచ్చిన కొలతలతో ఎన్ని త్రిభుజాలను నిర్మించడం సాధ్యపడుతుంది. ప్రతీ త్రిభుజ నిర్మాణంలో యిది సత్యమా?

ప్రయత్నించండి.

XY = 2 సెం.మీ, YZ = 8 సెం.మీ మరియు XZ = 4 సెం.మీ. కొలతలతో త్రిభుజము XYZ ను నిర్మించమని సుశాంత్ ఒక ప్రశ్నను తయారు చేసాడు. దానికి ఒక చిత్తు పటాన్ని కూడా గీయడం జరిగింది.



ఈ ప్రశ్నను చదివిన శ్రీజ, ఈ కొలతలతో త్రిభుజాన్ని నిర్మించడం సాధ్యం కాదు అని చెప్పింది. కానీ సుశాంత్ ఆ త్రిభుజాన్ని నిర్మించడానికి ఇలా ప్రయత్నించాడు.

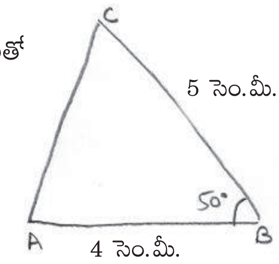


సుశాంత్ త్రిభుజాన్ని నిర్మించగలడా? లేదా? ఒక వేళ నిర్మించలేడు అనుకుంటే ఎందుకు నిర్మించలేడు. యీ విషయాలను మీ మిత్రులతో చర్చించండి.

త్రిభుజాల ఏ ధర్మం శ్రీజ చెప్పిన విషయాన్ని సత్యమని బలపరుస్తుంది.

9.2 త్రిభుజం యొక్క రెండు భుజాలు, వాటి మధ్య కోణం కొలతలు యిచ్చినపుడు త్రిభుజాన్ని నిర్మించటం.

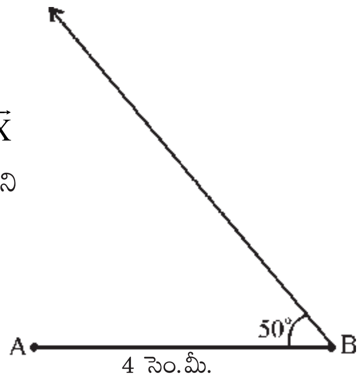
ఉదాహరణ 2 : AB = 4 సెం.మీ, BC = 5సెం.మీ మరియు $\angle B = 50^\circ$ కొలతలతో నిర్మించండి.



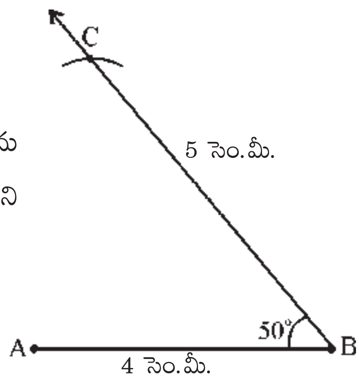
సోపానము 1 : ఇచ్చిన త్రిభుజము యొక్క చిత్తుపటమును గీసి కొలతలు గుర్తించాలి.

సోపానము 2 : 4 సెం.మీ. కొలతతో రేఖాఖండము AB ని గీయుము.

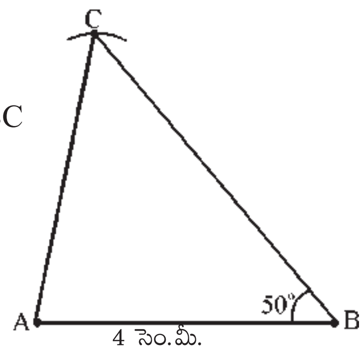
సోపానము 3 : బిందువు B వద్ద, BA తో 50° కోణము చేయునట్లు కిరణము $\overrightarrow{BX}$ ను గీయుము. (ఈ కోణమును కొలుచుటకు జ్యామితీయ పెట్టెలోని కోణమానిని ఉపయోగించాలి)



సోపానము 4 : బిందువు 'B' కేంద్రముగా, 5 cm వ్యాసార్ధముతో కిరణము $\overrightarrow{BX}$ ను ఖండించునట్లు ఒక చాపరేఖను గీయుము. ఖండన బిందువుకు C అని పేరు పెట్టాము.



సోపానము 5 : బిందువులు C, A లను స్కేలు సహాయంతో కలుపుము. ΔABC మనకు కావలసిన త్రిభుజము.



అభ్యాసం - 2

1. CA = 8 సెం.మీ., $\angle A = 60^\circ$ మరియు AR = 8 సెం.మీ. కొలతలతో ΔCAR ను నిర్మించుము. భుజము CR పొడవును, కోణములు $\angle R$ మరియు $\angle C$ లను కొలిచి, ΔCAR ఏరకమైన త్రిభుజమో చెప్పండి.
2. AB = 5 సెం.మీ., $\angle B = 45^\circ$ మరియు BC = 6 సెం.మీ. కొలతలతో ΔABC ని నిర్మించుము.
3. $\angle R=100^\circ$, QR = RP = 5.4 సెం.మీ. కొలతలతో ΔPQR ను నిర్మించుము.
4. TE = 3 సెం.మీ., $\angle E = 90^\circ$ మరియు NE = 4 సెం.మీ. కొలతలతో ΔTEN ను నిర్మించుము.

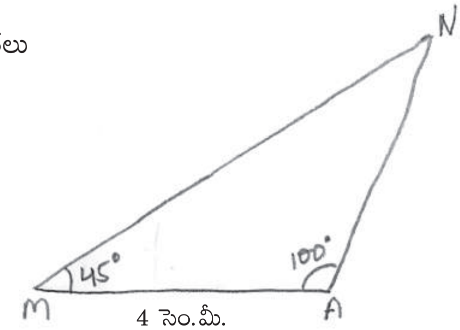
ప్రయత్నించండి.

మీకు నచ్చిన రెండు భుజాల కొలతలు మరియు ఒక అధిక కోణము కొలత తీసుకొని ఒక త్రిభుజాన్ని నిర్మించండి. ఈ నిర్మాణంలో పైన చెప్పినట్లు రెండు త్రిభుజాలు ఏర్పడతాయా?

9.3 రెండు కోణములు మరియు వాటి మధ్య భుజం కొలతలు యిచ్చినపుడు త్రిభుజమును నిర్మించుట.

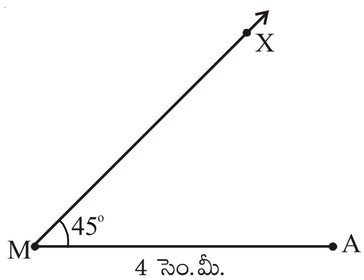
ఉదాహరణ 4 : MA = 4 సెం.మీ $\angle M = 45^\circ$ మరియు $\angle A = 100^\circ$ కొలతలతో ΔMAN ను నిర్మించుము.

సోపానము 1 : ఇచ్చిన త్రిభుజము యొక్క చిత్తుపటము గీసి కొలతలు గుర్తించాలి.



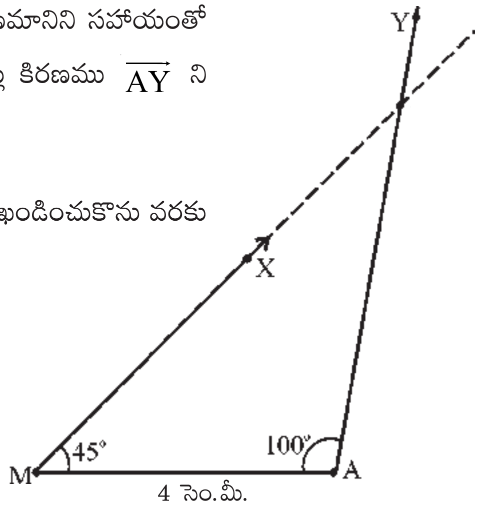
సోపానము 2 : స్కేలు సహాయంతో 4 సెం.మీ. పొడవు కల రేఖాఖండము MA ని గీయాలి.

సోపానము 3 : కోణమానిని సహాయంతో బిందువు M వద్ద MA తో 45° కోణము చేయునట్లు కిరణము $\overrightarrow{MX}$ ను గీయాలి.

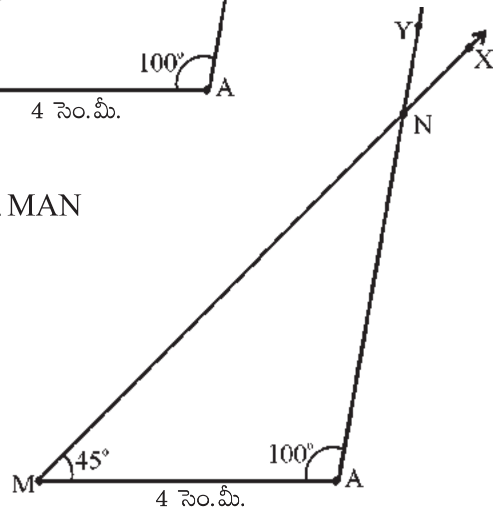


సోపానము 4 : అదే విధంగా బిందువు A వద్ద కోణమానిని సహాయంతో MA తో $100°$ కోణము చేయునట్లు కిరణము $\overrightarrow{AY}$ ని గీయాలి.

కిరణము $\overrightarrow{MX}$ మరియు $\overrightarrow{AY}$ లను ఖండించుకొను వరకు పొడిగించాలి.



సోపానము 5 : రెండు కిరణముల ఖండన బిందువు N అగును. Δ MAN మనకు కావలసిన త్రిభుజము.



ప్రయత్నించండి.

i) కోణములు $105°$ మరియు $95°$ మరియు మీకు నచ్చిన భుజము కొలతతో త్రిభుజమును నిర్మించడానికి ప్రయత్నించుము. ఇటువంటి త్రిభుజము నిర్మించడం సాధ్యపడుతుందా? మీ స్నేహితులతో చర్చించి సరియైన వివరణ ఇవ్వండి.

అభ్యాసం - 3

1. NE = 6.4 సెం.మీ, $\angle N = 50°$ మరియు $\angle E = 100°$ కొలతలతో Δ NET ని నిర్మించుము.

2. QR = 6 సెం.మీ, $\angle Q = \angle R = 60°$ కొలతలతో Δ PQR ను నిర్మించుము. మిగిలిన రెండు భుజాల పొడవులు కొలుచుము. ఇది ఏ రకమైన త్రిభుజము?

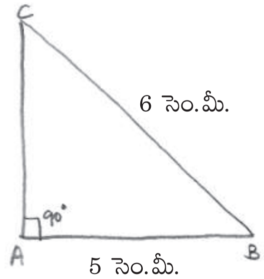
3. RN = 5సెం.మీ, $\angle R = \angle N = 45°$ కొలతలతో Δ RUN ని నిర్మించుము. మూడవ కోణమును మరియు మిగిలిన రెండు భుజాల పొడవులను కొలుచుము. ఇది ఏ రకమైన త్రిభుజము?

9.4 ఒక లంబకోణ త్రిభుజములో కర్ణము మరియు ఒక భుజము కొలతలు యిచ్చినపుడు త్రిభుజమును నిర్మించుట.

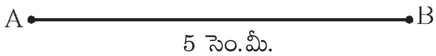
ఉదాహరణ 5: శీర్షము A వద్ద లంబకోణాన్ని కలిగి BC = 6 సెం.మీ మరియు AB = 5 సెం.మీ కొలతలు గల లంబకోణ త్రిభుజము ΔABC ని నిర్మించుము.

సోపానము 1 : ఇచ్చిన త్రిభుజము యొక్క చిత్తుపటమును గీసి కొలతలు గుర్తించాలి.

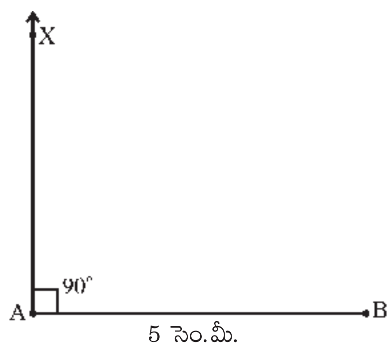
గమనిక : ఒక లంబకోణ త్రిభుజములో లంబకోణానికి ఎదురుగా వున్న భుజాన్ని కర్ణము అంటాం.



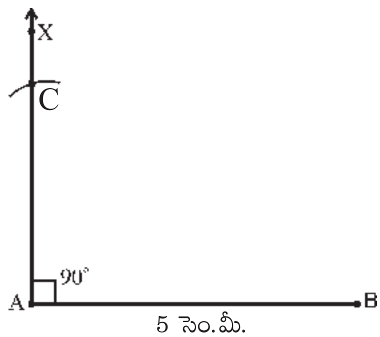
సోపానము 2 : స్కేలు సహాయంతో 5 సెం.మీ. పొడవుగల రేఖా ఖండము $\overline{AB}$ ని గీయాలి.



సోపానము 3 : బిందువు A వద్ద కోణమానిని సహాయంతో $\overline{AB}$ తో 90^0 కోణము చేయునట్లు $\overrightarrow{AX}$ ను గీయాలి.

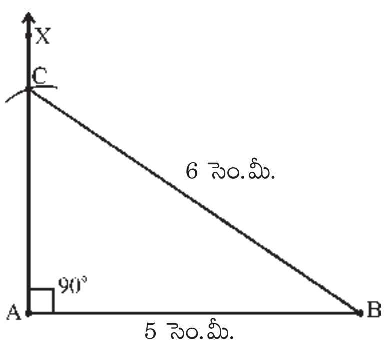


సోపానము 4 : బిందువు B కేంద్రముగా 6 సెం.మీ. వ్యాసార్ధముతో కిరణము $\overrightarrow{AX}$ ను ఖండించునట్లు చాపరేఖను గీయాలి. ఖండన బిందువు C అగును.



సోపానము 5 : బిందువులు B, C లను స్కేలు సహాయంతో కలపాలి.

ఏర్పడిన ΔABC మనకు కావలసిన త్రిభుజము.



అభ్యాసం - 4

1. $\angle B = 90°$, AB = 8 సెం.మీ. మరియు AC = 10 సెం.మీ. కొలతలుగల లంబకోణ త్రిభుజము ΔABC ని నిర్మించుము.

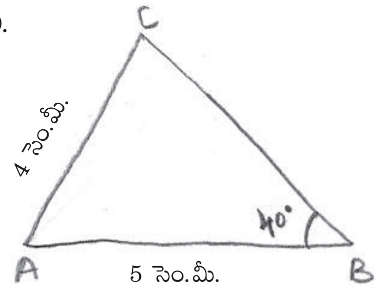
2. కర్ణము 5 సెం.మీ., ఒక భుజము 4 సెం.మీ. కొలతలు కలిగి R వద్ద లంబకోణాన్ని కలిగిన లంబకోణ త్రిభుజము ΔPQR నిర్మించుము.

3. $\angle Y = 90°$ మరియు మిగిలిన రెండు భుజాల కొలతలు (కర్ణము కాక) ప్రతీది 5 సెం.మీ. వుండేటట్లు ఒక లంబకోణ సమద్విబాహు త్రిభుజాన్ని నిర్మించండి.

9.5 త్రిభుజం యొక్క రెండు భుజాలు మరియు వాటి మధ్యలేని కోణం కొలతలు యిచ్చినపుడు త్రిభుజమును నిర్మించుట.

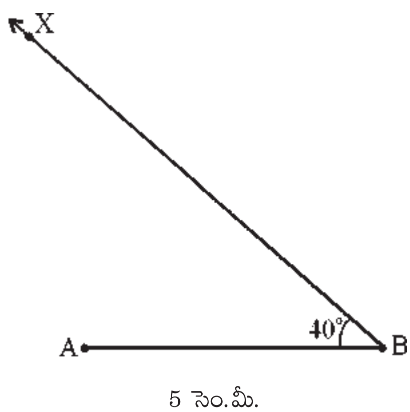
ఉదాహరణ 3 : AB = 5 సెం.మీ., AC = 4 సెం.మీ., $\angle B = 40°$ కొలతలతో ΔABC ని నిర్మించుము.

సోపానము 1 : ఇచ్చిన త్రిభుజము యొక్క చిత్తు పటము గీసి కొలతలు గుర్తించాలి.

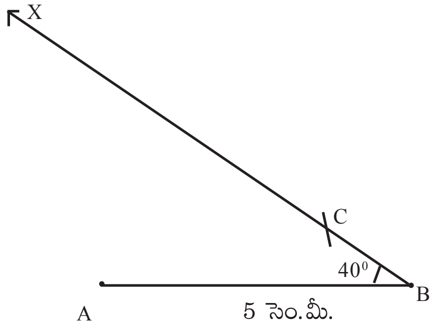


సోపానము 2 : 5 సెం.మీ. పొడవు గల రేఖా ఖండము AB ని గీయాలి.

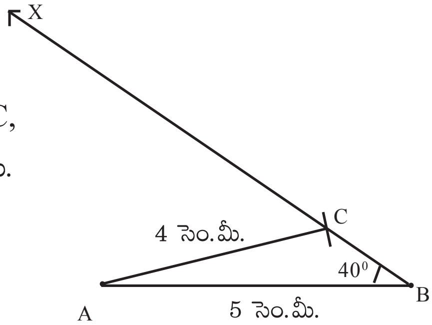
సోపానము 3 : బిందువు B వద్ద కోణమానిని సహాయమున BA తో 40° కోణము చేయునట్లు కిరణము $\overrightarrow{BX}$ ను గీయాలి.



సోపానము 4 : బిందువు A కేంద్రముగా 4 సెం.మీ. వ్యాసార్థముతో కిరణము $\overrightarrow{BX}$ ను ఖండించునట్లు చాపరేఖను గీయాలి.

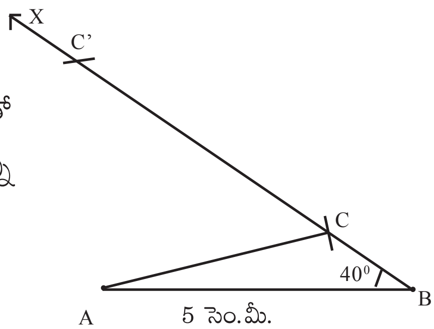


సోపానము 5 : ఖండన బిందువుకు C అని పేరు పెట్టాలి. బిందువులు, C, A లను కలుపుము. ΔABC మనకు కావలసిన త్రిభుజము.



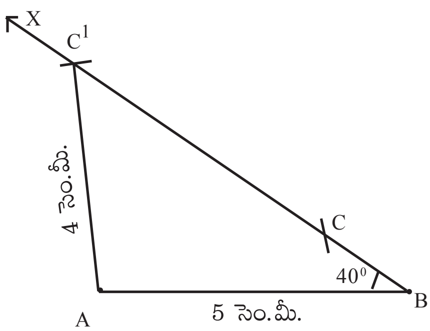
కిరణము $\overrightarrow{BX}$ ను వేరొక బిందువు వద్ద ఖండించడం సాధ్యపడుతుందా?

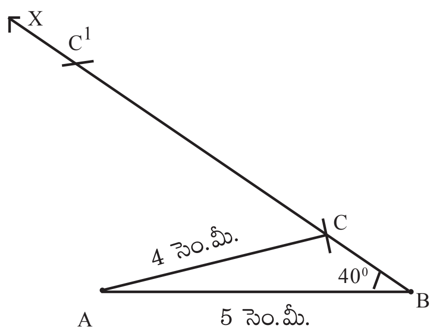
కోణము $\angle B$ అల్పకోణము కావున 'A' కేంద్రముగా 4 సెం.మీ. వ్యాసార్థముతో గీసిన చాపరేఖ, కిరణము $\overrightarrow{BX}$ ను రెండు బిందువుల వద్ద ఖండించడాన్ని మనము గమనించవచ్చు.



ఖండన బిందువులకు C, C^1 అని పేరు పెట్టాలి.

బిందువులు, C,A ను కలిపినపుడు ఒక త్రిభుజము, బిందువులు C^1, A లను కలిపినపుడు మరో త్రిభుజము ఏర్పడతాయి. యీ విధంగా రెండు త్రిభుజాలు ఏర్పడడాన్ని మనం గమనించవచ్చు.





ప్రయత్నించండి

నీకు నచ్చిన కొలతలతో రెండు భుజాలు మరియు వాని మధ్య లేని అధిక కోణంతో ఒక త్రిభుజాన్ని నిర్మించగలరా? ఈ సందర్భములో కూడా రెండు త్రిభుజాలను నిర్మించగలమా?

అభ్యాసం - 5

1. AB = 4.5 సెం.మీ., AC = 4.5 సెం.మీ. మరియు కోణము $\angle B = 50°$ కొలతలతో ΔABC ని నిర్మించుము. రెండు త్రిభుజాలను ఏర్పరచగలిగారా.

2. XY = 4.5 సెం.మీ. XZ = 3.5 సెం.మీ. మరియు $\angle Y = 70°$. కొలతలతో ΔXYZ ను నిర్మించుము. రెండు త్రిభుజాలను ఏర్పరచగలిగారా.

3. భుజములు AN, AR ల కొలతలు వరుసగా 5 సెం.మీ. మరియు 6 సెం.మీ. కోణము $\angle N = 100^0$ కొలతలతో ANR ను నిర్మించుము. రెండు త్రిభుజాలను ఏర్పరచగలిగారా.

4. QR = 5.5 సెం.మీ. QP = 5.5 సెం.మీ. మరియు కోణము $\angle Q = 60°$ కొలతలతో ΔQPR ను నిర్మించుము. భుజము RP పొడవును కొలుచుము. ఇది ఏ రకమైన త్రిభుజము.

5 క్రింది పట్టికలో యిచ్చిన కొలతలతో త్రిభుజములను నిర్మించుము.

త్రిభుజము	కొలతలు
ΔABC	BC = 6.5 సెం.మీ. CA = 6.3 సెం.మీ., AB = 4.8 సెం.మీ.
ΔPQR	PQ = 8 సెం.మీ., QR = 7.5 సెం.మీ., $\angle PQR = 85°$
ΔXYZ	XY = 6.2 సెం.మీ., $\angle Y = 130°$, $\angle Z = 70°$
ΔABC	AB = 4.8 సెం.మీ., AC = 4.8 సెం.మీ. $\angle B = 35°$
ΔMNP	$\angle N = 90°$, MP = 11.4 సెం.మీ., MN = 7.3 సెం.మీ.
ΔRKS	RK = KS = SR = 6.6 సెం.మీ.
ΔPTR	$\angle P = 65°$, PT = PR = 5.7 సెం.మీ.

మనం నేర్చుకున్నవి

ఒక త్రిభుజమును నిర్మించడానికి 3 స్వతంత్ర కొలతలు కావాలి.

i) మూడు భుజాల కొలతలు

ii) రెండు భుజాల కొలతలు మరియు వాటి మధ్యకోణం కొలత యిచ్చినపుడు

iii) రెండు కోణాలు మరియు వాటి మధ్య భుజం కొలతలు యిచ్చినపుడు

iv) ఒక లంబ కోణ త్రిభుజంలో కర్ణం మరియు ఒక భుజం కొలత యిచ్చినపుడు

v) రెండు భుజాల కొలతలు మరియు వాటి మధ్యలో లేని కోణం కొలత యిచ్చినపుడు త్రిభుజములను నిర్మించవచ్చును.

బీజీయ సమాసాలు 10

10.0 పరిచయం

చరరాశి విలువ మారుతూ ఉంటుందని, స్థిరరాశి విలువ మారదని మీరు 6 వ తరగతిలో తెలుసుకున్నారు. అదేవిధంగా x, y, z, a, b , p, m లాంటి అక్షరాలనుపయోగించి చరరాశులను ఎలా సూచిస్తారో తెలుసుకున్నారు. ఇంకా $2x-3$ లాంటి సరళమైన బీజీయ సమాసాలను గురించి నేర్చుకున్నారు. ఈ బీజీయ సమాసాలు సూత్రాల తయారీలోనూ మరియు సమస్య సాధనలోనూ ఏ విధంగా ఉపయోగపడతాయో తెలుసుకున్నారు.

ఈ అధ్యాయంలో మీరు బీజీయ సమాసాల గురించి వాటి కూడిక మరియు తీసివేతల గురించి మరింత వివరంగా నేర్చుకొంటారు. ముందుగా మనం "సజాతి పదాలు", "విజాతి పదాలు" మరియు "గుణకాల"ను గురించి తెలుసుకొందాం.

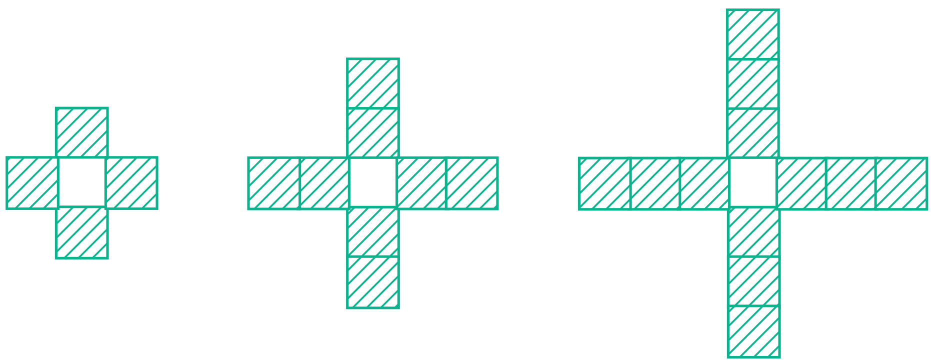
ముందుగా 6 తరగతి బీజగణితంలో మనం నేర్చుకున్న విషయాలను ఒకసారి గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం.

అభ్యాసం - 1

1. కింది అమరికలలో ఉపయోగించే అగ్గిపుల్లల సంఖ్యను సూచించే సూత్రాన్ని రాయండి.

   (i) HHHH.... (ii) VVVV........

2. ఈ కింది అమరికలు రంగుల టైల్స్ మరియు తెలుపు రంగు టైల్స్ ఉపయోగించి తయారు చేయబడ్డాయి.



పటం 1　　పటం 2　　పటం 3

   (i) పై అమరికలో తరువాత వచ్చే రెండు చిత్రాలను గీయండి.

   (ii) కింది పట్టికలోని ఖాళీ గడులను పూరించి ఆ అమరికను బీజీయసమాసాల రూపంలో వ్యక్తపరచండి.

పటం సంఖ్య	1	2	3	4	5
రంగుల టైల్స్ సంఖ్య	4				

(iii) కింది పట్టికలోని ఖాళీగడులను పూరించి ఆ అమరికను బీజీయ సమాస రూపంలో వ్యక్తపరచండి.

పటం సంఖ్య	1	2	3	4	5
మొత్తం టైల్‌ల సంఖ్య	5				

3. చరరాశి, స్థిరాంకం మరియు అంకగణిత పరిక్రియలను ఉపయోగించి ఈ కింది వాక్య రూపాలను బీజీయ రూపంలో రాయండి.

(i) p కంటే 6 ఎక్కువ

(ii) 'x' విలువను 4 తగ్గించిన

(iii) y నుంచి 8 తీసివేయబడింది.

(iv) q అనునది '-5' చే గుణించబడినది.

(v) y అనునది 4 చే భాగించబడినది.

(vi) 'p', 'q' ల లబ్దంలో 4 వ భాగము.

(vii) 'z' యొక్క 3 రెట్లకు 5 కలపబడింది.

(viii) x ను 5 చే గుణించి '10' కి కలపబడింది.

(ix) 'y' రెట్టింపునకు నుండి 5ను తీసివేయబడింది.

(x) y ను 10 చే గుణించి 13 తో సంకలనము చేయబడింది.

4. కింది బీజీయ రూపాలను వాక్యరూపంలో రాయండి.

(i) $x + 3$ (ii) $y - 7$ (iii) $10l$

(iv) $\frac{x}{5}$ (v) $3m + 11$ (vi) $2y - 5$

5. కింద కొన్ని సందర్భాలు ఇవ్వబడ్డాయి. ఈ సందర్భాలలోని సంఖ్య స్థిరరాశి అవుతుందా? చరరాశి అవుతుందా? తెలపండి.

ఉదాహరణ : "మన వయస్సు నిరంతరం మారుతూ ఉంటుంది" ఇందులో వయస్సు ఒక చరరాశిని సూచిస్తుంది.

(i) జనవరి నెలలోని దినాల సంఖ్య

(ii) ఒక రోజులో ఉష్ణోగ్రత

(iii) మీ తరగతి గది పొడవు.

(iv) పెరుగుతున్న మొక్క ఎత్తు

10.1 బీజీయ పదము, సంఖ్యాపదం

$2x + 9$ అనే బీజీయ రూపాన్ని పరిశీలిద్దాం. ఇక్కడ 'x' అనునది 2 చే గుణించబడిన తరువాత 9 కలుపబడింది. '$2x$' మరియు '9' లను $2x + 9$ లో పదాలు అని అంటాం. $2x$ ను బీజీయ పదం అని, 9 ని సంఖ్యా పదం అని అంటాం.

$3x^2 - 11y$ అను బీజీయ రూపాన్ని పరిశీలించండి.

$3x^2$ అనునది $3, x, x$ ల లబ్ధం. $11y$ అనునది $11, y$ ల లబ్ధము. $11y$ ని $3x^2$ నుండి తీసివేసిన $3x^2 - 11y$ బీజీయరూపం లభిస్తుంది. $3x^2 - 11y$ లో $3x^2$ ఒక పదం మరియు $11y$ మరొక పదం.

> x ను x తో గుణించినపుడు లబ్దాన్ని x^2 అని, x ను మూడుమార్లు గుణించగా లబ్దాన్ని $x \times x \times x = x^3$ అని రాస్తాము. ఇదే విధంగా 4×4 ను 4^2 గా, $6 \times 6 \times 6$ ను 6^3 గా సూచిస్తాం. $4^2, 6^3$ లందు, 4,6 లను భూములని, 2,3లను ఘాతాంకాలు అని అంటాం.

ఇవి చేయండి.

కింది బీజీయ రూపాలలో గల అన్నిపదాలను గుర్తించి రాయండి.

(i) $5x^2 + 3y + 7$ (ii) $5x^2y + 3$ (iii) $3x^2y$

(iv) $5x - 7$ (v) $5x + 8 - 2(-y)$ (vi) $7x^2 - 2x$

10.1.1 సజాతిపదాలు మరియు విజాతిపదాలు

క్రింది ఉదాహరణలను గమనిద్దాం.

(i) $5x$ మరియు $8x$ (ii) $7a^2$ మరియు $14a^2$

(iii) $3xy$ మరియు $4xy$ (iv) $3xy^2$ మరియు $4x^2y$

మొదటి ఉదాహరణలలో రెండు పదాలు ఒకే చరరాశి x ను కలిగివున్నవి మరియు చరరాశి ఘాతాంకం 1.

రెండవ ఉదాహరణలో రెండు పదాలు ఒకే చరరాశి a ను కలిగివున్నవి. రెండు చరరాశుల ఘాతాంకం సమానం అంటే 2 గా వుంది.

మూడవ ఉదాహరణలో రెండు పదాలు ఒకే చరరాశులు x, y లను కలిగి వున్నవి. రెండు పదాలలో చరరాశి x ఘాతాంకం 1 మరియు, చరరాశి y ఘాతాంకం 1.

నాలుగవ ఉదాహరణలో రెండు పదాలు ఒకే చరరాశులు x, y లను కలిగిఉన్నాయి. కాని వాటి ఘాతాంకాలు సమానంగా లేవు. మొదటి పదంలో x ఘాతాంకం 1 మరియు రెండవపదంలో x ఘాతాంకం 2. అదే విధంగా మొదటి, రెండు పదాలలో y ఘాతాంకాలు వరుసగా 2, 1.

ఈ ఉదాహరణలలో మొదటి మూడు ఉదాహరణలలోని జతలు సజాతి పదాలు కాని నాలుగవ ఉదాహరణలోని జత విజాతి పదాలు.

సమాన ఘాతాంకాలతో కూడి ఒకే చరరాశులను కలిగివున్న పదాలను సజాతి పదాలు అంటారు.

ఇవి చేయండి.

1. సజాతి పదాలన్నింటిని ఒక సమూహంగా రాయండి.

   $12x, 12, 25x, -25, 25y, 1, x, 12y, y, 25xy, 5x^2y, 7xy^2, 2xy, 3xy^2, 4x^2y$

2. సత్యమా? అసత్యమా? కారణాలు తెలపండి.

   (i) $7x^2$ మరియు $2x$ లు విజాతి పదాలు

   (ii) pq^2 మరియు $-4pq^2$ లు సజాతి పదాలు

   (iii) xy, $-12x^2y$ మరియు $5xy^2$ లు సజాతి పదాలు

10.2 గుణకము

$9\,xy$ లో

'9' అనునది 'xy' యొక్క గుణకం ఎందుకంటే $9\,(xy) = 9xy$

'x' అనునది '$9y$' యొక్క గుణకం ఎందుకంటే $x\,(9y) = 9xy$

'y' అనునది '$9x$' యొక్క గుణకం ఎందుకంటే $y\,(9x) = 9xy$

'$9x$' అనునది 'y' యొక్క గుణకం ఎందుకంటే $9x\,(y) = 9xy$

$9y$ అనునది 'x' యొక్క గుణకం ఎందుకంటే $9y\,(x) = 9xy$

xy అనునది '9' యొక్క గుణకం ఎందుకంటే $xy\,(9) = 9xy$

9 అనునది ఒక సంఖ్య కావున 9 ని సంఖ్యాగుణకం అని అంటారు. x, y మరియు xy లు చరరాశులు కావున వాటిని బీజీయ గుణకాలు అని అంటారు.

అదే విధంగా '$-5x$', లో '-5' సంఖ్యాగుణకం, 'x' బీజీయ గుణకం

ప్రయత్నించండి.

(i) 'x' లో సంఖ్యాగుణకము ఎంత?

(ii) '$-y$' లో సంఖ్యాగుణకము ఎంత?

(iii) '$-3z$' లో బీజీయగుణకం ఎంత?

(iv) సంఖ్యాగుణకం ఒక స్థిరాంకమేనా?

(v) బీజీయ గుణకం ఎల్లప్పుడూ చరరాశియేనా?

10.3 సమాసములు

'+' (ప్లస్) లేక '–' (మైనస్) గుర్తులచే కలపబడిన ఒకటి లేదా అంతకంటే ఎక్కువ పదాల కలయికనే సమాసము అని అంటారు.

ఉదాహరణ : $6x + 3y,\ 3x^2 + 2x + y,\ 10y^3 + 7y + 3,\ 9a + 5,\ 5a + 7b,\ 9xy,\ 5+7-2x,\ 9+3-2$

గమనిక : గుణకారం (×), భాగహారం (÷) లు పదాలను వేరుచేసి చూపలేవు. ఉదాహరణకు $2x \times 3y$ మరియు $\dfrac{2x}{3y}$ లు ఒకొక్క పదాలే.

ఇవి చేయండి.

1. కింది సమాసాలలో ఎన్ని పదాలున్నాయి?

(i) $x + y$ (ii) $11x - 3y - 5$ (iii) $6x^2 + 5x - 4$

(iv) $x^2z + 3$ (v) $5x^2y$ (vi) $x + 3 + y$

(vii) $x - \frac{11}{3}$ (viii) $\frac{3x}{7y}$ (ix) $2z - y$ (x) $3x + 5$

10.3.1 సంఖ్యా సమాసాలు మరియు బీజీయ సమాసాలు

కింది ఉదాహరణలను పరిగణించండి.

(i) $1 + 2 - 9$ (ii) $-3 - 5$ (iii) $x - \frac{11}{3}$ (iv) $4y$

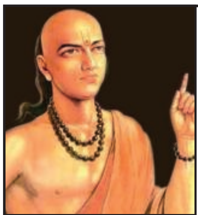
(v) $9 + (6-5)$ (vi) $3x + 5$ (vii) $(17-5) + 4$ (viii) $2x - y$

(i), (ii), (v) మరియు (vii) ఉదాహరణలలో ఏవయినా బీజీయ పదాలను గమనించారా?

ఒక సమాసంలోని ప్రతిపదం స్థిరాంకం అయితే ఆ సమాసాన్ని సంఖ్యాసమాసము అని అంటారు. ఒక సమాసంలో ఒక పదమైనా బీజీయపదం అయితే ఆ సమాసాన్ని బీజీయ సమాసము అని అంటారు.

ప్రయత్నించండి.

మూడు పదాలను కలిగివున్న ఏవయినా మూడు బీజీయ సమాసాలు వ్రాయండి.



ఆర్యభట్ట (భారతదేశం)

475 - 550 AD

ఖగోళ శాస్త్రానికి సంబంధించిన 'ఆర్యభట్టీయం' (499 AD) అనే ఉద్గ్రంథాన్ని రచించాడు. బీజీయ సమాసాలను ఉపయోగించిన మొట్టమొదటి భారతీయ గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు. ఆయన విశే కృషికి గుర్తింపుగా తొలి భారత ఉపగ్రహం 'ఆర్యభట్ట'గా నామకరణం చేయబడింది.

10.3.2 బీజీయ సమాసాల రకాలు

బీజీయ సమాసాలను 'బహుళ పదులు' అని కూడా అంటారు. ఆ బీజీయ సమాసంలోని పదాల సంఖ్యను బట్టి వాటిని వేరువేరు పేర్లతో పిలుస్తాం.

పదాల సంఖ్య	బీజీయ సమాసం పేరు	ఉదాహరణలు
ఒకే పదం	ఏక పది (ఏకపద బీజీయ సమాసం)	(a) x (b) $7xyz$ (c) $3x^2y$ (d) qz^2
రెండు విజాతి పదాలు	ద్విపది	(a) $a + 4x$ (b) $x^2 + 2y$ (c) $3x^2 - y^2$
మూడు విజాతి పదాలు	త్రిపది	(a) $ax^2 + 4x + 2$ (b) $7x^2 + 9y^2 + 10z^3$
ఒకటి కంటే ఎక్కువ విజాతి పదాలు	బహుళపది	(a) $4x^2 + 2xy + cx + d$ (b) $9p^2 - 11q + 19r + t$

ఇవి చేయండి.

1. వివిధ రకాల బీజీయ సమాసాలకు రెండేసి ఉదాహరణలు ఇవ్వండి.
2. కింద ఇవ్వబడిన సమాసాలలో ఏవి ఏకపది, ద్విపది, త్రిపది, బహుళపదులు అవుతాయో గుర్తించండి.

(i) $5x^2 + y + 6$ (ii) $3xy$

(iii) $5x^2y + 6x$ (iv) $a + 4x - xy + xyz$

10.4 బీజీయ సమాసం యొక్క పరిమాణం

బీజీయ సమాసం యొక్క పరిమాణం గురించి తెలుసుకోవడానికి ముందు ఏకపది యొక్క పరిమాణం అంటే ఏమిటో చర్చిద్దాం.

10.4.1 ఏకపది పరిమాణం

$9x^2y^2$ బీజీయ పదాన్ని పరిగణించండి.

1. పై పదంలోని 'x' యొక్క ఘాతాంకం ఎంత?
2. $9x^2y^2$లో 'y' యొక్క ఘాతాంకం ఎంత?
3. ఈ రెండింటి ఘాతాంకాల మొత్తం ఎంత?

ఒక పదంలోని చరరాశుల ఘాతాంకాల మొత్తాన్ని ఆ పదం యొక్క పరిమాణం లేదా ఏకపది పరిమాణం అని అంటారు.

కింది పట్టికను గమనించండి.

క్రమ సంఖ్య	ఏకపది	ఘాతాంకాలు			ఏకపది పరిమాణము
		x	y	z	
1	x	1	-	-	1
2	$7x^2$	2	-	-	2
3	-3xyz	1	1	1	1 + 1 + 1 = 3
4	$8y^2z^2$	-	2	2	2 + 2 = 4

10.4.2 స్థిరరాశుల పరిమాణం

5 ఒక స్థిరాంకం. దీని పరిమాణం గురించి ఇప్పుడు చర్చిద్దాం.

$x^0 = 1$, కాబట్టి 5 ను $5x^0$ గా వ్రాయవచ్చు.

$5 = 5x^0$ చరరాశి యొక్క ఘాతాంకం '0' కావున 5 యొక్క పరిమాణం '0'.

ప్రతి స్థిరసంఖ్యయొక్క పరిమాణం సున్నా.

10.4.3 బీజీయ సమాసము యొక్క పరిమాణం

కింది పట్టికను గమనించండి.

క్రమ సంఖ్య	బీజీయ సమాసం	ప్రతి పదం యొక్క పరిమాణం				గరిష్ఠ పరిమాణం
		మొదటి పదం	రెండవ పదం	మూడవ పదం	నాలుగవ పదం	
1.	$7xy^2$	3	-	-	-	3
2	$3y - x^2y^2$	1	4	-	-	4
3	$4x^2 + 3xyz + y$	2	3	1	-	3
4	$pq - 6p^2q^2 - p^2q + 9$	2	4	3	0	4

రెండవ ఉదాహరణలో ఒకపదం యొక్క గరిష్ఠ పరిమాణం 4. కాబట్టి ఆ బీజీయ సమాసం పరిమాణం 4. అదేవిధంగా నాలుగవ ఉదాహరణలో $-6p^2q^2$ పదం పరిమాణం 4. ఇది గరిష్ఠం కాబట్టి $pq - 6p^2q^2 - p^2q + 9$ యొక్క పరిమాణం 4.

ఒక బీజీయ సమాసంలోని అన్నిపదాల పరిమాణాలలో గరిష్ఠమయిన దానిని ఆ బీజీయ సమాస పరిమాణం అంటారు.

అభ్యాసం - 2

1. కింది వానిలో ప్రతి దానిలో గల సజాతి పదాలను గుర్తించి సమూహాలుగా రాయండి.

(i) $a^2, b^2, -2a^2, c^2, 4a$ (ii) $3a, 4xy, -yz, 2zy$

(iii) $-2xy^2, x^2y, 5y^2x, x^2z$ (iv) $7p, 8pq, -5pq, -2p, 3p$

2. కింది సమాసాలు సంఖ్యాసమాసాలో, బీజీయ సమాసాలో గుర్తించి రాయండి.

(i) $x + 1$ (ii) $3m^2$ (iii) $-30 + 16$

(iv) $4p^2-5q^2$ (v) 96 (vi) x^2-5yz

(vii) $215x^2yz$ (viii) $95 \div 5 \times 2$ (ix) $2 + m + n$

(x) $310 + 15 + 62$ (xi) $11a^26b^2-5$

3. ఈ కింద ఇవ్వబడిన బహుళ పదులలో ఏవి ఏకపది, ద్విపది, త్రిపది అగునో గుర్తించి రాయండి.

(i) y^2 (ii) $4y - 7z$ (iii) $1 + x + x^2$

(iv) $7mn$ (v) $a^2 + b^2$ (vi) $100xyz$

(vii) $ax + 9$ (viii) $p^2 - 3pq + r$ (ix) $3y^2 - x^2 y^2 + 4x$

(x) $7x^2 - 2xy + 9y^2 - 11$

4. కింది ప్రతి ఏకపది యొక్క పరిమాణం ఎంత?

(i) $7y$ (ii) $-xy^2$ (iii) xy^2z^2

(iv) $-11y^2z^2$ (v) $3mn$ (vi) $-5pq^2$

5. కింది బీజీయ సమాసాల పరిమాణం కనుగొనండి.

(i) $3x-15$ (ii) $xy + yz$ (iii) $2y^2z + 9yz -7z - 11x^2y^2$

(iv) $2y^2z + 10yz$ (v) $pq + p^2q - p^2q^2$ (vi) $ax^2 + bx + c$

6. ఒకే పరిమాణం గల ఏవైనా రెండు బీజీయ సమాసాలను రాయండి.

10.5 సజాతి పదాల సంకలనం మరియు వ్యవకలనం

కింది సమస్యలను పరిశీలించండి.

1. సిద్ధు వద్ద కొన్ని పెన్సిల్‌లు ఉన్నాయి. వినయ్ వద్ద సిద్ధూ వద్ద ఉన్న పెన్సిళ్ల కంటే నాలుగురెట్లు ఎక్కువ పెన్సిళ్లు ఉన్నాయి. ఇద్దరి వద్ద ఉన్న మొత్తం పెన్సిళ్ల సంఖ్య ఎంత?

2. టోని మరియు బాషాలు దుకాణానికి వెళ్ళారు. టోని 7 పుస్తకాలు కొన్నాడు మరియు బాషా 2 పుస్తకాలు కొన్నాడు. పుస్తకాలన్నీ ఒకే ధరవి అయితే టోని బాషాకంటే ఎంత ఎక్కువ డబ్బు చెల్లించాలి?

ఇలాంటి సమస్యలకు సమాధానం కావాలి అంటే మనం సజాతి పదాలు కూడటం మరియు తీసివేయడం ఎలా? అనునది తెలుసుకోవాలి.

ఇప్పుడు మనం సమస్య 1, 2 లకు సమాధానాలు తెలుసుకుందాం.

1. సిద్ధూ వద్ద ఎన్ని పెన్సిళ్ళు ఉన్నాయో సమస్యలో ఇవ్వలేదు. కాబట్టి పెన్సిల్‌ల సంఖ్య 'x' అనుకుందాం.

వినయ్ వద్ద ఉన్న పెన్సిళ్ళు సిద్ధూ వద్దగల పెన్సిళ్ల సంఖ్యకు నాలుగురెట్లున్నాయి. కావున $4 \times x = 4x$

ఇద్దరి వద్ద ఉన్న మొత్తం పెన్సిళ్ల సంఖ్య కావాలంటే x మరియు $4x$ ను కూడాలి.

కావున మొత్తం పెన్సిళ్ల సంఖ్య $= x + 4x$

$= (1 + 4)\, x$

$= 5x$ (విభాగ న్యాయం నుంచి)

2. పుస్తకం వెల సమస్యలో ఇవ్వబడలేదు. కాబట్టి 'y' అనుకుందాం.

కాబట్టి టోని ఖర్చు $7 \times y$ = ₹$7y$

భాషా ఖర్చు $2 \times y$ = ₹$2y$

కాబట్టి టోని భాషాకంటే ఎక్కువగా చెల్లించాల్సిన డబ్బు $= 7y - 2y$

$= (7-2)y$

= ₹$5y$. (విభాగ న్యాయం ప్రకారం)

పై పరిశీలనల నుంచి $x + 4x = 5x,\ 7y - 2y = 5y.$

రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ సజాతి పదాల మొత్తం ఒక సజాతి పదం మరియు ఆ ఫలిత సజాతి పదం యొక్క సంఖ్యాగుణకం దత్త సజాతి పదాల సంఖ్యా గుణకాల మొత్తానికి సమానం.

రెండు సజాతి పదాల బేధం ఒక సజాతి పదం. ఆ ఫలిత సజాతి పదం యొక్క సంఖ్యాగుణకం దత్త సజాతి పదాల సంఖ్యా గుణకాల బేధానికి సమానం.

ఇవి చేయండి.

1. సజాతి పదాల మొత్తాన్ని కనుగొనండి.

(i) $5x, 7x$ (ii) $7x^2y, -6x^2y$ (iii) $2m, 11m$

(iv) $18ab, 5ab, 12ab$ (v) $3x^2, -7x^2, 8x^2$

(vi) $4m^2, 3m^2, -6m^2, m^2$ (vii) $18pq, -15pq, 3pq$

2. రెండవ పదం నుంచి మొదటి పదాన్ని తీసివేయండి.

(i) $2xy, 7xy$ (ii) $5a^2, 10a^2$ (iii) $12y, 3y$

(iv) $6x^2y, 4x^2y$ (v) $6xy, -12xy$

10.5.1 విజాతి పదాల కూడిక మరియు తీసివేత

$3x$ మరియు $4y$ లు విజాతి పదాలు. వాటి మొత్తాన్ని $3x + 4y$ గా వ్రాయవచ్చు.

'x', 'y' లు వేరు వేరు చరరాశులు. కాబట్టి విభాగ న్యాయాన్ని ఉపయోగించి వాటిని కూడలేము.

10.6 బీజీయ సమాస సూక్ష్మీకరణ

$9x^2 - 4xy + 5y^2 + 2xy - y^2 - 3x^2 + 6xy$

అను బీజీయ సమాసాన్ని తీసుకొండి. ఈ సమాసంలో $-9x^2, -3x^2$; $5y^2, y^2$ మరియు $-4xy, +6xy$ లు సజాతి పదాలు. ఈ సజాతి పదాలను సంకలనం చేయడం ద్వారా బీజీయ సమాసాన్ని సూక్ష్మరూపంలో పొందవచ్చు.

పై బీజీయ సమాసాన్ని ఎలా సూక్ష్మీకరిస్తారో మనం చూద్దాం.

క్ర.సం.	సోపానాలు	విధానము
1.	ఇచ్చిన బీజీయ సమాసం వ్రాయండి	$9x^2 - 4xy + 5y^2 + 2xy - y^2 - 3x^2 + 6xy$
2.	సజాతి పదాలను ఒకదగ్గరికి చేర్చండి.	$(9x^2 - 3x^2) + (2xy - 4xy + 6xy) + (5y^2 - y^2)$
3.	సజాతి పదాలను కూడండి.	$(9-3)x^2 + (2-4+6)xy + (5-1)y^2$ $= 6x^2 + 4xy + 4y^2$

గమనిక : ఒక సమాసంలో ఏ రెండు పదాలు సజాతి పదాలు కాకుంటే అది సూక్ష్మ రూపంలో ఉంది అనిఅంటాం.

మరొక ఉదాహరణ $5x^2y + 2x^2y + 4 + 5xy^2 - 4x^2y - xy^2 - 9$ ను పరిశీలిద్దాం.

సోపానము 1 : $5x^2y + 2x^2y + 4 + 5xy^2 - 4x^2y - xy^2 - 9$

సోపానము 2 : $(5x^2y + 2x^2y - 4x^2y) + (5xy^2 - xy^2) + (4 - 9)$ (సజాతి పదాలను ఒకే దగ్గరకు చేర్చటం)

సోపానము 3 : $3x^2y + 4xy^2 - 5$

ఇవి చేయండి.

1. సూక్ష్మీకరించండి.

(i) $3m + 12m - 5m$ (ii) $25yz - 8yz - 6yz$

(iii) $10m^2 - 9m + 7m - 3m^2 - 5m - 8$ (iv) $9x^2 - 6 + 4x + 11 - 6x^2 - 2x + 3x^2 - 2$

(v) $3a^2 - 4a^2b + 7a^2 - b^2 - ab$ (vi) $5x^2 + 10 + 6x + 4 + 5x + 3x^2 + 8$

10.7 బీజీయ సమాసం ప్రామాణిక రూపం

$3x + 5x^2 - 9$ ని తీసుకోండి. ఇందులోని మొదటి, రెండు మరియు మూడవ పదాల పరిమాణాలు వరుసగా 1, 2 మరియు 0. పదాల పరిమాణాలు అవరోహణ క్రమం (తగ్గేక్రమం)లో లేవు అని మనం గమనించవచ్చు.

పదాల పరిమాణాలు తగ్గే క్రమంలో వ్రాస్తే పై బీజీయ సమాసం $5x^2 + 3x - 9$ గా మారుతుంది. ఈ రూపంలో ఉండే బీజీయ సమాసాన్ని ప్రామాణిక రూపం అంటారు. $3c+6a-2b$ ని గమనించండి. సమాసంలోని అన్ని పదాల పరిమాణాలు సమానం. కాబట్టి ఈ సమాసము ప్రామాణిక రూపంలోనే ఉంది. దీనిని మరింత అందంగా a,b,c లవరుసలో రాయుటకు $6a-2b+3c$ గా రాస్తాం.

ఒక బీజీయ సమాసంలోని పదాల పరిమాణాలు అవరోహణ (తగ్గే) క్రమంలో ఉంటే ఆ బీజీయ సమాసం ప్రామాణిక రూపంలో ఉంది అంటారు.

ప్రామాణిక రూపంలో ఉండే బీజీయ సమాసానికి ఉదాహరణ (i) $7x^2+2x+11$ (ii) $5y^2-6y-9$

ఇవి చేయండి.

1. కింది సమాసాలను ప్రామాణిక రూపంలో రాయండి.

   (i) $3x+18+4x^2$ (ii) $8-3x^2+4x$

   (iii) $-2m+6-3m^2$ (iv) $y^3+1+y+3y^2$

2. కింది సమాసాలలో ప్రామాణిక రూపంలో ఉన్నవాటిని గుర్తించండి.

   (i) $9x^2 + 6x + 8$ (ii) $9x^2 + 15 + 7x$

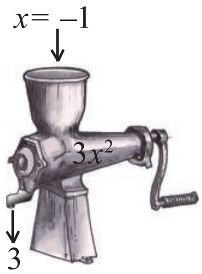
   (iii) $9x^2 + 7$ (iv) $9x^3 + 15x + 3$

   (v) $15x^2 + x^3 + 3x$ (vi) $x^2y + xy + 3$

   (vii) $x^3 + x^2y^2 + 6xy$

3. ప్రామాణిక రూపంలోని ఏవయినా 5 బీజీయ సమాసాలు రాయండి.

10.8 ఒక సమాసం యొక్క విలువ కనుగొనటం



ఉదాహరణ 1 : $x=-1$ అయినపుడు $3x^2$ విలువను కనుగొనుము.

సాధన :
సోపానం 1 : $3x^2$ (ఇచ్చిన సమాసాన్ని రాయండి)
సోపానం 2: $3(-1)^2$ (చరరాశి విలువను ప్రతిక్షేపించండి)
సోపానం 3 : $3\ (1) = 3$

ఉదాహరణ 2 : $x = 0$ మరియు $y = -1$ అయితే x^2-y+2 విలువ కనుక్కోండి.

సాధన :
సోపానం 1 : x^2-y+2 (ఇచ్చిన సమాసాన్ని రాయండి)
సోపానం 2: $0^2-(-1)+2$ (చరరాశి విలువలు ప్రతిక్షేపించండి)
సోపానం 3 : $1+2=3$

ఉదాహరణ 3 : త్రిభుజ వైశాల్యము $A=\frac{1}{2}bh$ మరియు b = 12 సెం.మీ. , h = 7 సెం.మీ. అయితే త్రిభుజ వైశాల్యం ఎంత?

సాధన :
సోపానం 1 : $A=\frac{1}{2}bh$
సోపానం 2: $A=\frac{1}{2}\times 12\times 7$
సోపానం 3 : $A=42$ చ.సెం.మీ.

ప్రయత్నించండి.

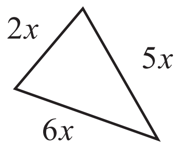
1. $x = -3$ అయితే '$-9x$' యొక్క విలువ కనుగొనండి.

2. $x = -3$ అయినప్పుడు సమాసం విలువ -9 అయ్యేట్లు ఒక బీజీయ సమాసాన్ని వ్రాయండి.

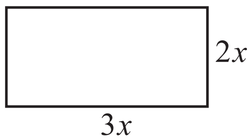
అభ్యాసం - 3

1. PR రేఖాఖండము యొక్క పొడవును 'a' పదాలలో కనుక్కోండి.

2. (i) కింది త్రిభుజం యొక్క చుట్టుకొలతను కనుగొనండి.



(ii) కింది దీర్ఘచతురస్రం యొక్క చుట్టుకొలతను కనుగొనండి.



3. మొదటి పదం నుండి రెండవ పదాన్ని తీసివేయండి.

(i) $8x,\ 5x$ (ii) $5p,\ 11p$ (iii) $13m^2,\ 2m^2$

4. . $x = 1$ అయినప్పుడు క్రింది ఏకపదుల విలువలు కనుక్కోండి.

(i) $-x$ (ii) $4x$ (iii) $-2x^2$

5. $4x + x - 2x^2 + x - 1$ సమాసాన్ని సూక్ష్మీకరించి $x = -1$ అయినప్పుడు దానివిలువ లెక్కించండి.

6. $5x^2 - 4 - 3x^2 + 6x + 8 + 5x - 13$ ను సూక్ష్మీకరించండి. $x = -2$ అయినపుడు ఆ సమాసం విలువ కనుక్కోండి.

7. $x = 1$; $y = 2$ అయినప్పుడు కింది సమాసాల విలువలను కనుక్కోండి.

(i) $4x - 3y + 5$ (ii) $x^2 + y^2$ (iii) $xy + 3y - 9$

8. దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యము $A = l \times b$. $l = 9$ సెం.మీ., $b = 6$ సెం.మీ. అయినప్పుడు దీర్ఘచతురస్రం వైశాల్యం కనుక్కోండి.

9. బారువడ్డీ $I = \frac{PTR}{100}$, P = ₹ 900, T = 2 సంIIలు; మరియు R = 5%, అయిన బారువడ్డీని కనుక్కోండి.

10. వేగం, దూరం మరియు కాలంల మధ్య సంబంధము $s = \frac{d}{t}$ గా ఇవ్వబడింది. దూరము d = 135 మీటర్లు మరియు t = 10 సెకండ్లు అయిన వేగము s ను కనుక్కోండి.

10.9 బీజీయ సమాసాల సంకలనం, వ్యవకలనం

కింది సమస్యలను పరిశీలించండి.

1. సమీర వద్ద కొన్ని మామిడి పళ్ళు గలవు. పద్మ వద్ద సమీరకంటే 9 ఎక్కువ ఉన్నాయి. మేరి తన వద్ద సమీర, పద్మల వద్ద ఉన్న మొత్తం మామిడి పళ్ళకంటే 4 ఎక్కువగా ఉన్నాయి అని చెప్పింది. అయితే మేరి వద్ద ఉన్న మామిడి పళ్ళు ఎన్ని?

సమీర వద్ద ఎన్ని మామిడి పళ్ళు ఉన్నాయో మనకు తెలియదు. కాబట్టి ఆమె వద్ద x మామిడి పళ్ళున్నాయి అనుకుందాం.

పద్మ వద్ద సమీరకంటే 9 ఎక్కువ మామిడి పళ్ళున్నాయి.

కాబట్టి, పద్మ వద్ద ఉన్నవి $= x + 9$ మామిడిపళ్ళు

మేరీ వద్ద ఉన్న పండ్ల సంఖ్య సమీర, పద్మల వద్ద ఉన్న మొత్తం మామిడి పండ్ల సంఖ్య కంటే 4 ఎక్కువ.

కాబట్టి మేరీ వద్ద ఉన్న మామిడిపళ్ళు $= x + (x + 9) + 4$

$= 2x + 13$ మామిడిపళ్ళు

2. ఒక గణిత పరీక్షలో ఇమ్రాన్ కంటే రాజుకు 11 మార్కులు ఎక్కువగా వచ్చినవి. రాహుల్‌కు రాజు మరియు ఇమ్రాన్‌లకు కలిపి వచ్చిన మొత్తం మార్కుల కంటే 4 మార్కులు తక్కువగా వచ్చినవి. అయితే రాహుల్‌కు వచ్చిన మార్కులు ఎన్ని?

మనకు ఇమ్రాన్‌కు వచ్చిన మార్కులు తెలియవు. కాబట్టి ఇమ్రాన్‌కు వచ్చినవి x మార్కులు అనుకొందాం.

రాజుకు ఇమ్రాన్‌కంటే 11 మార్కులు ఎక్కువగా వచ్చాయి. కాబట్టి రాజుకు వచ్చినవి $= x + 11$ మార్కులు

రాహుల్‌కు మిగిలిన ఇద్దరి మార్కుల మొత్తం కంటే 4 తక్కువగా వచ్చాయి. కావున రాహుల్‌కు వచ్చిన మార్కులు

$= x + (x + 11) - 4$ మార్కులు

$= 2x + 7$ మార్కులు

పై రెండు సందర్భాలలో మనం బీజీయ సమాసాలను సంకలనం, వ్యవకలనం చేయాల్సి వచ్చింది. నిత్యజీవితంలో మనం చాలా సందర్భాలలో ఇలాంటి సమస్యలు సాధించడానికి బీజీయసమాసాలను కూడటం, తీసివేయడం చేయాలి. ఇప్పుడు మనం బీజీయ సమాసాలను కూడటం తీసివేయడం నేర్చుకుందాం.

10.9.1 బీజీయ సమాసాల సంకలనం

సజాతి పదాలను కూడటం ద్వారా సమాసాలను సంకలనం చేస్తాం. దీనిని రెండు పద్ధతులలో చేయవచ్చు.

(i) నిలువు వరుస పద్ధతి లేదా దొంతి పద్ధతి

(ii) అడ్డువరుస పద్ధతి లేదా పంక్తి పద్ధతి

(i) దొంతి లేదా నిలువు వరుస పద్ధతి

ఉదాహరణ 4 : $3x^2+5x-4$ మరియు $6+6x^2$ లను కూడండి.

సాధన :

క్రమసంఖ్య	సోపానములు	విధానము
1	బీజీయ సమాసాలు ప్రామాణిక రూపంలో లేనిచో వాటిని ప్రామాణిక రూపంలో రాయండి	(i) $3x^2 + 5x - 4 = 3x^2 + 5x - 4$ (ii) $6 + 6x^2 = 6x^2 + 6$
2	సజాతి పదాలు ఒకదాని కింద ఒకటి వచ్చునట్లు బీజీయ సమాసాలన్నీ నిలువు వరుసలలో ఒకదానికింద ఒకటి రాయండి.	$3x^2 + 5x - 4$ $6x^2 \quad + 6$
3.	ఒకే నిలువు వరుసలోఉన్న సజాతి పదాలను కూడి ఫలితాన్ని దాని కింద అదే నిలువు వరుసలో రాయుము	$3x^2 + 5x - 4$ $6x^2 \quad + 6$ $9x^2 + 5x + 2$

ఉదాహరణ 5 : $5x^2+9x+6, 4x+3x^2-8$ మరియు $5-6x$ లను కూడండి.

సోపానం 1 :

$$5x^2+9x+6 = 5x^2+9x+6$$
$$4x+3x^2-8 = 3x^2+4x-8$$
$$5-6x = -6x+5$$

సోపానం 2 :

$$\begin{array}{r} 5x^2+9x+6 \\ 3x^2+4x-8 \\ -6x+5 \end{array}$$

సోపానం 3 :

$$\begin{array}{r} 5x^2+9x+6 \\ 3x^2+4x-8 \\ -6x+5 \\ \hline 8x^2+7x+3 \\ \hline \end{array}$$

(ii) అడ్డువరుస లేదా పంక్తి పద్ధతి

ఉదాహరణ 6 : $3x^2 + 5x - 4$ మరియు $6 + 6x^2$ లను కూడండి.

క్ర. స.	సోపానాలు	విధానము
1	ఇచ్చిన బీజీయ సమాసాలను సంకలనం గుర్తు + ను ఉపయోగించి కలిపి రాయండి.	$3x^2 + 5x - 4 + 6 + 6x^2$
2	సజాతి పదాలను సమూహాలుగా చేర్చి సమాసాన్ని తిరగ రాయండి.	$(3x^2 + 6x^2) + (5x) + (-4 + 6)$
3	గుణకాలను సూక్ష్మీకరించండి.	$(3+6)\ x^2 + 5x + 2$
4	ఫలిత సమాసాన్ని ప్రమాణ రూపంలో రాయండి.	$9x^2 + 5x + 2$

ఇవి చేయండి.

1. కింది బీజీయ సమాసాలను సంకలనం చేయండి.

(i) $x - 2y,\ 3x + 4y$

(ii) $4m^2 - 7n^2 + 5mn,\ 3n^2 + 5m^2 - 2mn$

(iii) $3a - 4b,\ 5c - 7a + 2b$

బీజీయ సమాసాల వ్యవకలనం

10.9.2 (అ) సమాసము యొక్క సంకలన విలోమము

మనం ఒక ధనసంఖ్య 9 ను తీసుకొంటే $9 + (-9) = 0$ అయ్యేటట్లు '-9' వ్యవస్థితం అవుతుంది. .

మనం '9' సంకలన విలోమం '-9' అని మరియు '-9' సంకలన విలోమము '9' అని వ్యవహరిస్తాం.

కాబట్టి ప్రతి ధనసంఖ్యకూ ఒక ఋణసంఖ్య రెండు సంఖ్యల మొత్తం సున్నా అయ్యేవిధంగా వ్యవస్థితమవుతుంది. ఈ రెండు సంఖ్యలను ఒకదానికొకటి పరస్పరము సంకలన విలోమములుగా పిలుస్తాము.

బీజీయ సమాసాల విషయంలో ఇది సత్యమవుతుందా? ప్రతీ బీజీయ సమాసానికి సంకలన విలోమము ఉంటుందా? ఉంటే '$3x$' యొక్క సంకలన విలోమము ఏది?

'$3x$' కు $3x + (-3x) = 0$ అయ్యేటట్లు '$-3x$' వ్యవస్థితం అవుతుంది.

కాబట్టి '$3x$' యొక్క సంకలన విలోమము '$-3x$' మరియు '$-3x$' యొక్క సంకలన విలోమము .'$3x$'

కనుక ప్రతి బీజీయ సమాసానికి మరొక బీజీయ సమాసము రెండు సమాసాల మొత్తం సున్నా అగునట్లుగా వ్యవస్థితము అవుతుంది. మరియు ఈ రెండు బీజీయ సమాసాలను ఒకదానికొకటి సంకలన విలోమాలు అని అంటారు.

ఉదాహరణ 6 : ($6x^2 – 4x + 5$) యొక్క సంకలన విలోమాన్ని కనుగొనండి.

సాధన : $6x^2 – 4x + 5$ యొక్క సంకలన విలోమము = $– (6x^2 – 4x + 5) = –6x^2 + 4x – 5$

10.9.2 (ఆ) వ్యవకలనము

A, B లు రెండు బీజీయ సమాసాలు అనుకుందాం. $A – B = A + (–B)$

అంటే A నుంచి B ను తీసివేయడానికి A కు B యొక్క సంకలన విలోమాన్ని కూడాలి.

ఇప్పుడు మనం బీజీయ సమాసాలను నిలువు వరుస మరియు అడ్డువరుస పద్ధతులలో తీసివేయటం ఎలాగో నేర్చుకుందాం.

(i) నిలువు వరుస పద్ధతి

ఉదాహరణ 7 : $3c + ba – 2b$ నుంచి $3a + 4b–2c$ ను తీసివేయండి.

సాధన :

క్ర. స.	సోపానాలు	విధానము
1	రెండు బీజీయ సమాసాలను అవసరం అయితే ప్రామాణిక రూపంలో వ్రాయాలి.	$3c+6a-2b=6a-2b+3c$ $3a+4b-2c=3a+4b-2c$
2	రెండు బీజీయ సమాసాలను సజాతి పదాలు ఒకదానికింద ఒకటి ఉండునట్లు వ్రాయాలి. తీసివేయాల్సిన సమాసాన్ని రెండవ అడ్డువరుసలో వ్రాయాలి.	$6a-2b+3c$ $3a+4b-2c$
3	రెండవ అడ్డువరుసలోని బీజీయ సమాసం యొక్క సంకలన విలోమం వ్రాయుటకు దాని ప్రతి పదం గుర్తు మార్చాలి.	$6a-2b+3c$ $3a+4b-2c$ $-\quad -\quad +$
4	నిలువు వరుసలోని సజాతి పదాలు కూడి ఫలితాన్ని దిగువన వ్రాయాలి.	$6a-2b+3c$ $3a+4b-2c$ $-\quad -\quad +$ $3a-6b+5c$

ఉదాహరణ 8 : $4m^2+7m-3$ నుంచి $4+3m^2$ తీసివేయండి.

సోపానం 1 : $4m^2+7m-3=4m^2+7m-3$

$4+3m^2 = 3m^2+4$

సోపానం 2 : $4m^2+7m-3$

$3m^2 \qquad +4$

సోపానం 3 :

$$\begin{array}{l} 4m^2 + 7m - 3 \\ 3m^2 \qquad + 4 \\ - \qquad\quad - \\ \hline \end{array}$$

సోపానం 4 :

$$\begin{array}{l} 4m^2 + 7m - 3 \\ 3m^2 \qquad + 4 \\ - \qquad\quad - \\ \hline m^2 + 7m - 7 \\ \hline \end{array}$$

(ii) **అడ్డువరుస పద్ధతి :**

ఉదాహరణ 9 : $3c + 6a - 2b$ ను $3a + 4b - 2c$ నుంచి తీసివేయండి.

సాధన :

క్ర. స.	సోపానాలు	విధానము
1	తీసివేయాల్సిన బీజీయ సమాసాన్ని బ్రాకెట్‌లో ఉంచి దాని ముందు మైనస్ గుర్తు రాస్తూ ఇచ్చిన అన్నిసమాసాలను ఒకే అడ్డ వరుసలో వ్రాయాలి.	$3c + 6a - 2b - (3a + 4b - 2c)$
2	మొదటి సమాసానికి రెండవ సమాసం యొక్క సంకలన విలోమమును కూడాలి.	$3c + 6a - 2b - 3a - 4b + 2c$
3	సజాతి పదాలను సమూహాలుగా రాసి సూక్ష్మీకరించాలి.	$(3c + 2c) + (6a - 3a) + (-2b - 4b)$ $= 5c + 3a - 6b$
4	ఫలితాన్ని ప్రామాణిక రూపంలో వ్రాయాలి.	$3a - 6b + 5c$

ఉదాహరణ 10 : $6m^3 + 4m^2 + 7m - 3$ నుంచి $3m^3 + 4$ తీసివేయుము.

సాధన :

సోపానం 1 : $6m^3 + 4m^2 + 7m - 3 - (3m^3 + 4)$

సోపానం 2 : $6m^3 + 4m^2 + 7m - 3 - 3m^3 - 4$

సోపానం 3 : $(6m^3 - 3m^3) + 4m^2 + 7m - 3 - 4$

$= 3m^3 + 4m^2 + 7m - 7$

సోపానం 4 : $3m^3 + 4m^2 + 7m - 7$

అభ్యాసము - 4

1. ఈ కింది బీజీయ సమాసాలను అడ్డువరుస పద్ధతిలోనూ మరియు నిలువు వరుస పద్ధతిలోనూ సంకలనం చేయండి. రెండు పద్ధతులలో ఒకే సమాధానము వచ్చినదా?

   (i) $x^2 - 2xy + 3y^2;\ 5y^2 + 3xy - 6x^2$

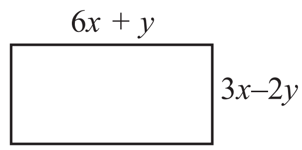
   (ii) $4a^2 + 5b^2 + 6ab\ ;\ 3ab\ ;\ 6a^2 - 2b^2\ ;\ 4b^2 - 5ab$

   (iii) $2x + 9y - 7z\ ;\ 3y + z + 3x\ ;\ 2x - 4y - z$

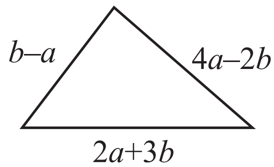
   (iv) $2x^2 - 6x + 3\ ;\ -3x^2 - x - 4\ ;\ 1 + 2x - 3x^2$

2. $2x^2 + 5x - 1 + 8x + x^2 + 7 - 6x + 3 - 3x^2$ ను సూక్ష్మీకరించండి.

3. కింది దీర్ఘచతురస్రం చుట్టుకొలతను కనుగొనండి.



4. $2a + 3b,\ b–a,\ 4a–2b$ భుజాలు గల త్రిభుజం చుట్టుకొలతను కనుగొనండి.



5. మొదటి బీజీయ సమాసం నుంచి రెండవ బీజీయ సమాసాన్ని తీసివేయండి.

   (i) $2a+b,\ a-b$

   (ii) $x+2y+z\ ,\ -x-y-3z$

   (iii) $3a^2-8ab-2b^2\ ,\ 3a^2-4ab+6b^2$

   (iv) $4pq-6p^2-2q^2,\ 9p^2$

   (v) $7-2x-3x^2,\ \ 2x^2-5x-3$

   (vi) $5x^2-3xy-7y^2\ ,\ 3x^2-xy-2y^2$

   (vii) $6m^3+4m^2+7m-3\ ,\ 3m^3+4$

6. $6x^2-8xy-y^2$ మరియు $2xy-2y^2-x^2$ ల మొత్తం నుంచి $x^2-5xy+2y^2$ మరియు $y^2-2xy-3x^2$ ల మొత్తాన్ని తీసివేయండి.

7. $1+2x-3x^2$ కు ఎంత కలిపినచో x^2-x-1 వస్తుంది?

8. $3x^2- 4y^2 + 5xy + 20$ నుంచి ఎంత తీసివేసిన $-x^2- y^2 + 6xy + 20$ వస్తుంది?

9. మూడు సమాసాల మొత్తం $8 + 13a + 7a^2$ వానిలో రెండు సమాసాలు $2a^2 + 3a + 2$ మరియు $3a^2 - 4a + 1$ అయితే మూడవ సమాసాన్ని కనుగొనండి.

10. $A = 4x^2 + y^2 - 6xy;$

$B = 3y^2 + 12x^2 + 8xy;$

$C = 6x^2 + 8y^2 + 6xy$ అయితే

(i) $A + B + C$ (ii) $(A - B) - C$ (iii) $2A + B$ (iv) $A - 3B$ విలువలను కనుక్కోండి.

మనం నేర్చుకున్నవి

- బీజీయ పదాలను లేదా సంఖ్యాపదాలను '+' (ప్లస్), '–' (మైనస్) గుర్తులచే కలుపబడిన సమాసాన్ని బీజీయ సమాసము అంటారు.
- ఒక సమాసములో ప్రతి పదము స్థిరపదము అయితే ఆ సమాసాన్ని సంఖ్యా సమాసమని అంటారు. ఒక సమాసంలోని పదాలలో కనీసం ఒకటయినా బీజీయ పదం ఉంటే దానిని బీజీయ సమాసము అని అంటారు.
- ఒకే పదం కలిగిన సమాసాన్ని ఏకపది అంటారు. రెండు విజాతి పదాలు కలిగివున్న సమాసాన్ని ద్విపది అంటారు. మూడు విజాతి పదాలు కలిగివున్న సమాసాన్ని త్రిపది అంటారు. రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ విజాతి పదాలు కలిగిన సమాసాన్ని బహుళపది అని అంటారు. ద్విపది, త్రిపదులు కూడా బహుళపదులే అయినా వాటిని ప్రత్యేకమయిన పేర్లతో పిలుస్తారు.
- ఒక ఏకపదిలోని చరరాశుల ఘాతాంకాల మొత్తాన్ని ఆ ఏకపది పరిమాణం అని అంటారు.
- స్థిరాంకం యొక్క పరిమాణం సున్న
- ఒక సమాసంలోని అన్ని పదాల పరిమాణాలలో మిక్కిలి పెద్దదానిని ఆ సమాసము యొక్క పరిమాణం అని అంటాం.
- ఒక సమాసంలోని ఏ రెండు పదాలు కూడా సజాతి పదాలు కానిచో ఆ సమాసం సూక్ష్మ రూపంలో ఉంది అని అంటాం.
- ఒక సమాసంలో పదాల పరిమాణాలు అవరోహణ క్రమంలో ఉంటే ఆ సమాసం ప్రామాణిక రూపంలో ఉంది అని అంటాం.
- రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ సజాతి పదాల మొత్తం ఒక సజాతిపదం మరియు ఆ ఫలిత సజాతిపదం యొక్క సంఖ్యాగుణకం దత్త సజాతి పదాల సంఖ్యా గుణకాల మొత్తానికి సమానం.
- రెండు సజాతి పదాల భేదం ఒక సజాతి పదం మరియు ఆ ఫలిత సజాతిపదం యొక్క సంఖ్యాగుణకం దత్త సజాతి పదాల సంఖ్యా గుణకాల భేదానికి సమానం.

ఘాతాలు మరియు ఘాతాంకాలు

11

11.0 పరిచయం

2011 జనాభాలెక్కల ప్రకారం భారతదేశ జనాభా దాదాపు 120,00,00,000 గావుంది.

సూర్యుడు, మరియు భూమి మధ్యదూరం దాదాపుగా 15,00,00,000 కి.మీ.

శూన్యంలో కాంతి వేగం సెకనుకు, 30,00,00,000 మీ. దూరం ప్రయాణిస్తుంది.

2011 జనాభా లెక్కల సేకరణ ప్రకారం ఆంధ్రప్రదేశ్ జనాభా దాదాపుగా 8,50,00,000 గా వుంది.

ఇవి అన్నీ చాలా పెద్ద సంఖ్యలు. వీటిని వ్రాయడం, చదవడం, అర్థం చేసుకోవడం సులభమేనా? ఖచ్చితంగా సులభం కాదు అని చెప్పవచ్చు. కాబట్టి పెద్దసంఖ్యలను సరళమయిన రీతిలో వ్యక్తపరచడానికి మనకు ఒక పద్ధతి అవసరం. ఆ విధంగా వ్యక్తపరచడానికి ఘాతాలు మనకు దోహదపడతాయి. ఈ అధ్యాయంలో మీరు ఘాతాలు మరియు ఘాతాంక న్యాయాల గురించి వివరంగా తెలుసుకుంటారు.

11.1 ఘాత రూపం

ఈ కింది పునరావృత సంకలనాలను పరిశీలిద్దాం.

$4 + 4 + 4 + 4 + 4$

$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$

$7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7$

మనం ఈ పునరావృత సంకలనాల సూక్ష్మీకరణను గుణకారాన్ని ఉపయోగించి వరుసగా 5×4, 6×5 మరియు 8×7 రూపంలో వ్యక్తపరచవచ్చు.

ఇదే విధంగా ఒకసంఖ్య యొక్క పునరావృత గుణకారాన్ని కూడా సరళమయిన రీతిలో వ్యక్తపరచవచ్చా?

ఈ క్రింది ఉదాహరణలను గమనించండి.

2011 జనాభా లెక్కల ప్రకారం బీహార్ రాష్ట్ర జనాభా సుమారుగా 10,00,00,000.

ఇక్కడ 10 అనే సంఖ్య 8 సార్లు గుణించబడింది. $10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10$

కాబట్టి బీహార్ రాష్ట్ర జనాభాను 10^8 చే సూక్ష్మరూపంలో సూచించవచ్చు. ఇందులో 10ని భూమి లేక ఆధారము అని 8 ని ఘాతాంకమని అంటాం. 10^8 ని ఘాతరూపం అని అంటాం. 10^8 ని "10 యొక్క 8వ ఘాతం" అని చదువుతాం.

శూన్యంలో కాంతివేగం 30,00,00,000 మీ/సె. దీన్ని ఘాతరూపంలో 3×10^8 మీ/సె.గా వ్యక్తపరుస్తాం. 10^8 లో 10 ని ఆధారం లేక భూమి అని 8 ని ఘాతాంకం అని అంటాం. "10 యొక్క 8వ ఘాతం" అని చదువుతాం.

సూర్యుడు మరియు భూమి మధ్య దూరము సుమారుగా 15,00,00,000 కి.మీ. ఉంటుంది. దీనిని ఘాతరూపంలో $15 \times 100,00,000 = 15 \times 10^7$ కి.మీ. గా వ్రాస్తాము. 10^7 లో 10 ని భూమి అని 7 ను ఘాతాంకమని అంటాం.

2011 జనాభా లెక్కల ప్రకారం ఆంధ్రప్రదేశ్ జనాభా దాదాపుగా 8,50,00,000. దీనిని ఘాతరూపంలో 85×10^6 గా వ్యక్తపరుస్తాము. 10^6 లో 10 భూమి మరియు 6 ఘాతాంకం. దీనిని "10 యొక్క 6 వ ఘాతం" గా చదువుతాం.

ఘాతాంకాలను ఉపయోగించి మనం ఒకసంఖ్య యొక్క విస్తృత రూపాన్ని కూడా వ్రాయవచ్చు.

ఉదాహరణకు 36,584 యొక్క విస్తృత రూపం.

$$36584 = (3 \times 10000) + (6 \times 1000) + (5 \times 100) + (8 \times 10) + (4 \times 1)$$
$$= (3 \times 10^4) + (6 \times 10^3) + (5 \times 10^2) + (8 \times 10^1) + (4 \times 1)$$

ఇవి చేయండి.

1. కింది వాటిని ఘాతరూపంలో వ్రాయండి. (విలువలు సవరింపబడినవి)
   (i) భూమి యొక్క సంపూర్ణ ఉపరితల వైశాల్యం 51,00,00,000 చ.కి.మీ.
   (ii) రాజస్థాన్ రాష్ట్ర జనాభా దాదాపుగా 7,00,00,000.
   (iii) భూమి యొక్క వయస్సు దాదాపుగా 4550 మిలియన్ సంవత్సరాలు
   (iv) 1000 కి.మీ. లను మీటర్లలో.
2. (i) 48951 (ii) 89325 లను ఘాతాంకాల నుపయోగించి విస్తృత రూపంలో వ్రాయండి.

11.1.1 వేరువేరు భూములు గల ఘాతాలు

ఇంతవరకు మనం 10 భూమిగా కలిగిన సంఖ్యలను గురించి చర్చించాం. కానీ భూమిగా ఏ సంఖ్య అయినా ఉండవచ్చు.

ఉదాహరణకు $81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$

ఇక్కడ భూమి = 3, ఘాతాంకం = 4

$125 = 5 \times 5 \times 5 = 5^3$

ఇక్కడ భూమి = 5, మరియు ఘాతాంకం 3.

ఉదాహరణ 1: 3^4 మరియు 4^3 లలో ఏదిపెద్దది?

$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$

$81 > 64$

కావున $3^4 > 4^3$

ఇవి చేయండి.

1. 3^2 అనేది 2^3 కు సమానమా? మీ జవాబును సమర్ధించండి.

2. క్రింది సంఖ్యలను ఘాతరూపంలో రాయండి. వాటి (a) భూమి (b) ఘాతాంకం మరియు (c) ఎలా చదువుతారో సూచించండి.

(i) 32 (ii) 64 (iii) 256 (iv) 243 (v) 49

వర్గము మరియు ఘనము

ఏ భూమినైనా ఘాతాంకం 2 లేదా 3 ఉన్నప్పుడు వాటిని ప్రత్యేకమయిన పేర్లతో పిలుస్తాం.

$10 \times 10 = 10^2$ ను **'10** యొక్క **2** వ ఘాతము**'** లేక **'10** యొక్క వర్గము**'**. అలాగే $4 \times 4 = 4^2$ మరియు "4యొక్క రెండవ ఘాతము" లేక "4 యొక్క వర్గము" అని చదువుతాం.

$10 \times 10 \times 10 = 10^3$. దీనిని "10 యొక్క 3వ ఘాతం" లేక "10 యొక్క ఘనము" అని చదువుతాం.

$6 \times 6 \times 6 = 6^3$ దీనిని "6 యొక్క 3వ ఘాతం" అని లేక "6 యొక్క ఘనము" అని చదువుతాం.

సాధారణంగా ఏదయినా ఒక ధన సంఖ్య a ను భూమిగా తీసుకొని ఇలా రాస్తాం.

$a \times a = a^2$ (దీనిని "a యొక్క రెండవ ఘాతం" లేక "a యొక్క వర్గము" అని చదువుతాం).

$a \times a \times a = a^3$ (దీనిని 'a యొక్క మూడవ ఘాతం' లేక 'a యొక్క ఘనము' అని చదువుతాం).

$a \times a \times a \times a = a^4$ (దీనిని 'a యొక్క నాలుగవ ఘాతం" అని చదువుతాము).

__________ $= a^5$ (దీనిని ____________________ అని చదువుతాం).

__________ $= a^6$ (దీనిని ____________________) అని చదువుతాం.

అలాగే దీనిని బట్టి $\boldsymbol{a \times a \times a \times a \times a \times a \times}$**........................ 'm'** సార్లు $= \boldsymbol{a^m}$ అని చదువుతాం.

ఇక్కడ **'a'** భూమి **'m'** ఘాతాంకం

ఇవి చేయండి.

1. కింది వాటికి విస్తృత రూపాలు రాయండి.

(i) p^7 (ii) l^4 (iii) s^9 (iv) d^6 (v) z^5

2. కింది వాటిని ఘాతరూపంలో రాయండి.

(i) $a \times a \times a \times$ .... 'l' మార్లు

(ii) $5 \times 5 \times 5 \times$.................... '$n$' మార్లు

(iii) $q \times q \times q \times$.................. 15 మార్లు

(iv) $r \times r \times r \times$ .... 'b' మార్లు

11.2 ఒక సంఖ్యను ప్రధాన కారణాంకములుగా విభజించి ఘాతరూపంలో రాయడం

ఇచ్చిన సంఖ్యలను ప్రధాన కారణాంక పద్ధతిని ఉపయోగించి ఘాతరూపంలో రాయవచ్చు.

(i) 432 (ii) 450

సాధన (i) $432 = 2 \times 216$

$= 2 \times 2 \times 108$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 54$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 27$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 9$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3)$

$= 2^4 \times 3^3$

2	432
2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1

కాబట్టి $432 = 2^4 \times 3^3$

(ii) $450 = 2 \times 225$

$= 2 \times 3 \times 75$

$= 2 \times 3 \times 3 \times 25$

$= 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$

$= 2 \times 3^2 \times 5^2$

2	450
3	225
3	75
5	25
5	5
	1

కాబట్టి $450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$

ఇవి చేయండి.

(i) 2500 (ii) 1296 (iii) 8000 (iv) 6300

లను ప్రధాన కారణాంక పద్ధతి నుపయోగించి ఘాతరూపంలో రాయండి.

అభ్యాసం - 1

1. కింది వాటికి ఆధారము, ఘాతాంకములను సూచిస్తూ వాటిని విస్తృత రూపంలో రాయండి.

(i) 3^4 (ii) $(7x)^2$ (iii) $(5ab)^3$ (iv) $(4y)^5$

2. కింద వ్యక్తపరచిన రూపాలకు ఘాతరూపాలను రాయండి.

(i) $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$

(ii) $3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$

(iii) $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5$

3. కింది వాటిని ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంగా రాసి వాటిని ఘాతరూపంలో వ్యక్తపరచండి.

(i) 288 (ii)1250 (iii) 2250 (iv) 3600 (v) 2400

4. కింద ఇవ్వబడిన జతలలో పెద్దదానిని గుర్తించండి.

(i) 2^3 లేదా 3^2 (ii) 5^3 లేదా 3^5 (iii) 2^8 లేదా 8^2

5. $a = 3, b = 2$ అయిన క్రింది విలువలను కనుక్కోండి.

(i) $a^b + b^a$ (ii) $a^a + b^b$ (iii) $(a + b)^b$ (iv) $(a–b)^a$

11.3 ఘాతాంక న్యాయాలు

ఘాతరూపంలో ఉన్న పదాల గుణకారం సులభంగా చేయడానికి, వాటి లబ్ధాలను కనుగొనడానికి మనం కొన్ని సూత్రాలను ఉపయోగిస్తాము. వాటి గురించి ఇక్కడ చర్చిద్దాం.

11.3.1 ఒకే ఆధారముగా గల పదాల గుణకారం

ఉదాహరణ 2 : $2^4 \times 2^3$

సాధన : $2^4 \times 2^3 = \underbrace{(2 \times 2 \times 2 \times 2)}_{\text{4 మార్లు}} \times \underbrace{(2 \times 2 \times 2)}_{\text{3 మార్లు}}$

$= \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{\text{7 మార్లు}}$

$=$ 2^7 మరియు ఇది 2^{4+3} కు సమానం (ఎందుకంటే $4 + 3 = 7$)

కావున $2^4 \times 2^3 = 2^{4+3}$

ఉదాహరణ 3: $5^2 \times 5^3$

సాధన : $5^2 \times 5^3 = \underbrace{(5 \times 5)}_{\text{2 మార్లు}} \times \underbrace{(5 \times 5 \times 5)}_{\text{3 మార్లు}}$

$= \underbrace{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}_{\text{5 మార్లు}}$

$=$ 5^5 మరియు ఇది 5^{2+3} కు సమానం ($2 + 3 = 5$ కాబట్టి)

కాబట్టి $5^2 \times 5^3 = 5^{2+3}$

ఇవి చేయండి.

2^4 ,2^3 మరియు 2^7 విలువలను కనుగొని

$2^4 \times 2^3 = 2^7$ అవుతుందేమో సరిచూడండి.

5^2 ,5^3 మరియు 5^5 విలువలు కనుక్కొని $5^2 \times 5^3 = 5^5$ అవుతుందేమో సరిచూడండి.

ఉదాహరణ 4 : $a^4 \times a^5$

సాధన : $a^4 \times a^5 = (a \times a \times a \times a) \times (a \times a \times a \times a \times a)$

$= (a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a)$

$= a^9$ మరియు ఇది a^{4+5} కి సమానము. $(4 + 5 = 9$ కావున)

కావున $a^4 \times a^5 = a^{4+5}$

పై పరిశీలనలనుంచి మనం

$a^m \times a^n = (a \times a \times a$ ....'m' సార్లు) $\times (a \times a \times a \times$ ....'n' సార్లు)$= a^{m+n}$ అని చెప్పగలం.

'a' ఏదైనా ఒక శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్య 'm', 'n' లు పూర్ణసంఖ్యలయితే

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

ఇవి చేయండి.

1. ఈ కింది వాటిని $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ను ఉపయోగించి సూక్ష్మీకరించండి.

   (i) $3^{11} \times 3^9$ (ii) $p^5 \times p^8$

2. కింద నివ్వబడిన ? గుర్తు స్థానంలో ఉండదగిన సంఖ్యను కనుక్కోండి. (k ఏదేని ఒక శూన్యేతర పూర్ణ సంఖ్య).

   (i) $k^3 \times k^4 = k^?$ (ii) $k^{15} \times k^? = k^{31}$

11.3.2 ఘాతం యొక్క ఘాతం

ఉదాహరణ 5 : $(3^2)^3$ ను పరిశీలిద్దాం.

సాధన : ఇక్కడ భూమి 3^2 మరియు ఘాతాంకం 3

$(3^2)^3 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2$

$= 3^{2+2+2}$ (సమాన భూములు గల పదాల లబ్దం)

$= 3^6$ మరియు ఇది $3^{2\times3}$ కి సమానం $(2 \times 3 = 6$ కాబట్టి)

కావున $(3^2)^3 = 3^{2\times3}$

ఇవి చేయండి.

3^6 విలువ 3^2 యొక్క ఘనం విలువలను కనుగొని $(3^2)^3 = 3^6$ అవుతుందేమో సరిచూడండి.

ఉదాహరణ 6 : $(4^5)^3$ ను పరిశీలిద్దాం.

సాధన : $(4^5)^3 = 4^5 \times 4^5 \times 4^5$

$= 4^{5+5+5}$ (సమాన భూములు గల పదాల లబ్ధం)

$= 4^{15}$ మరియు ఇది $4^{5\times3}$ కు సమానం

కావున $(4^5)^3 = 4^{5 \times 3}$

ఉదాహరణ 7 : $(a^m)^4$ ను పరిశీలిద్దాం.

సాధన : $(a^m)^4 = a^m \times a^m \times a^m \times a^m$

$= a^{m+m+m+m}$ (సమాన భూములు గల పదాల లబ్ధం)

$= a^{4m}$ మరియు ఇది $a^{m\times4}$ కు సమానం $(4 \times m = 4m)$

కావున $(a^m)^4 = a^{m\times4}$

పై ఉదాహరణల నుంచి $(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times$...... n సార్లు $= a^{m+m+m+\ldots n \text{ సార్లు}} = a^{mn}$

'a' ఏదేని ఒక శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్య మరియు 'm', 'n' లు పూర్ణసంఖ్యలు అయితే $(a^m)^n = a^{mn}$

11.3.3 లబ్ధం యొక్క ఘాతం

ఉదాహరణ 8 : $3^5 \times 4^5$ ను పరిశీలిద్దాం.

సాధన : ఇక్కడ 3^5 మరియు 4^5 లు ఒకే ఘాతాంకం 5ను కలిగి ఉన్నాయి. కాని వాటి భూములు వేరువేరుగా ఉన్నాయి.

$3^5 \times 4^5 = (3\times3\times3\times3\times3) \times (4\times4\times4\times4\times4)$

$= (3\times4) \times (3\times4) \times (3\times4) \times (3\times4) \times (3\times4)$

$= (3\times4)^5$

కావున $3^5 \times 4^5 = (3 \times 4)^5$

ఉదాహరణ 9 : $4^4 \times 5^4$ ను పరిశీలిద్దాం.

సాధన : ఇక్కడ 4^4 మరియు 5^4 లు ఒకే ఘాతాంకం 4 ను కలిగి ఉన్నాయి.

కాని వాటి భూములు వేరువేరుగా ఉన్నాయి.

$4^4 \times 5^4 = (4 \times 4 \times 4 \times 4) \times (5 \times 5 \times 5 \times 5)$

$= (4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5)$

$= (4 \times 5)\times (4 \times 5) \times (4 \times 5)\ (4 \times 5)$

$= (4 \times 5)^4$

కావున $4^4 \times 5^4 = (4 \times 5)^4$

ఉదాహరణ 10 : $p^7 \times q^7$ను పరిశీలిద్దాం.

సాధన : ఇక్కడ p^7 మరియు q^7 లు ఘాతాంకం 7ను కలిగి ఉన్నాయి. మరియు వాటి భూములు వేరుగా ఉన్నాయి.

$$p^7 \times q^7 = (p \times p \times p \times p \times p \times p \times p) \times (q \times q \times q \times q \times q \times q \times q)$$
$$= (p \times p \times p \times p \times p \times p \times p \times q \times q \times q \times q \times q \times q \times q)$$
$$= (p \times q) \times (p \times q) \times (p \times q) \times (p \times q) \times (p \times q) \times (p \times q) \times (p \times q)$$
$$= (p \times q)^7$$

కావున $p^7 \times q^7 = (p \times q)^7$

పై ఉదాహరణల నుంచి $a^m \times b^m = (a \times b)^m = (ab)^m$ గా రాయవచ్చు.

> **'*a*', '*b*' లు ఏవైనా రెండు శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్యలు మరియు '*m*' ఏదైనా ధన పూర్ణసంఖ్య అయితే**
>
> $$a^m \times b^m = (ab)^m$$

ఇవి చేయండి.

1. కింది వాటిని $a^m \times b^m = (a\,b)^m$ సూత్రాన్నుపయోగించి సూక్ష్మీకరించండి.

   (i) $(2 \times 3)^4$ (ii) $x^p \times y^p$ (iii) $a^8 \times b^8$ (iv) $(5\times4)^{11}$

11.3.4 ఘాతరూప సంఖ్యల భాగహారము

ఘాతరూపాల భాగహారమును చర్చించుటకు ముందు మనం ఋణఘాతరూపాల గురించి చర్చిద్దాం.

11.3.4 (అ) ఋణ ఘాతాంకాలు

కింది వాటిని పరిశీలించండి.

2^5	=	32	3^5	=	243
2^4	=	16	3^4	=	81
2^3	=	8	3^3	=	27
2^2	=	4	3^2	=	9
2^1	=	2	3^1	=	3
2^0	=	1	3^0	=	1
2^{-1}	=	...	3^{-1}	=	...
(సూచన : 1లో సగము)			(సూచన : 1 లో 3 వ వంతు)		
2^{-2}	=	...	3^{-2}	=	...

32 లో ఎన్నవ భాగం 16 అవుతుంది?

2^5 మరియు 2^4 ల మధ్య బేధం ఎంత?

ఘాతాంకం విలువ 1 తగ్గిన ప్రతిసారి దానివిలువ $\frac{1}{2}$ రెట్లు తగ్గటం మీరు గమనించే ఉంటారు.

పై పరిశీలనల నుంచి మనం

$2^{-1} = \frac{1}{2}$ మరియు $2^{-2} = \frac{1}{4}$

$3^{-1} = \frac{1}{3}$ మరియు $3^{-2} = \frac{1}{9}$

ఇంకా $2^{-2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$

అదేవిధంగా $3^{-1} = \frac{1}{3}$ మరియు $3^{-2} = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$

'a' ఏదైనా శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్య మరియు 'n' ఒక పూర్ణసంఖ్య అయితే

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

ఇవి చేయండి.

1. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ను ఉపయోగించి కిందివానిని రాయండి.

(i) x^{-7} (ii) a^{-5} (iii) 7^{-5} (iv) 9^{-6}

11.3.4 (ఆ) శూన్యఘాతాంకం

ముందు చర్చించిన విధానంలో

$2^0 = 1$, $3^0 = 1$ అని మనం గమనించాము.

ఇదేవిధంగా $4^0 = 1$, $5^0 = 1$, ... అని మనం చెప్పవచ్చు.

కాబట్టి a ఏదైనా ఒక శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్య అయితే $a^0 = 1$.

11.3.4 (ఇ) ఒకే భూమి కలిగిన ఘాత రూపాల భాగహారము

ఉదాహరణ 11 : $\frac{3^8}{3^3}$

సాధన : $\frac{3^8}{3^3} = \frac{3\times3\times3\times3\times3\times\not{3}\times\not{3}\times\not{3}}{\not{3}\times\not{3}\times\not{3}} = 3\times3\times3\times3\times3$

$= 3^5$ ఇది 3^{8-3} కు సమానం (8 – 3 = 5 కావున)

కాబట్టి $\frac{3^8}{3^3} = 3^{8-3}$

ఉదాహరణ 12 : $\frac{5^5}{5^8}$

సాధన : $\frac{5^5}{5^8} = \frac{\not{5}\times\not{5}\times\not{5}\times\not{5}\times\not{5}}{5\times5\times5\times\not{5}\times\not{5}\times\not{5}\times\not{5}\times\not{5}} = \frac{1}{5\times5\times5} = \frac{1}{5^3}$

$\frac{1}{5^3}$ మరియు ఇది $\frac{1}{5^{8-5}}$ కు సమానం. (8 – 5 = 3 కాబట్టి)

కాబట్టి $\frac{5^5}{5^8} = \frac{1}{5^{8-5}}$

ఉదాహరణ 13 : $\frac{7^7}{7^3}$

సాధన : $\frac{7^7}{7^3} = \frac{7\times7\times7\times7\times\not{7}\times\not{7}\times\not{7}}{\not{7}\times\not{7}\times\not{7}} = 7\times7\times7\times7$

$= 7^4$ మరియు ఇది 7^{7-3} కు సమానం (ఎందుకంటే 7 – 3 = 4)

కాబట్టి $\frac{7^7}{7^3} = 7^{7-3}$

ఉదాహరణ 14 : $\frac{a^2}{a^7}$

సాధన : $= \frac{a^2}{a^7} = \frac{\not{a}\times\not{a}}{a\times a\times a\times a\times a\times\not{a}\times\not{a}} = \frac{1}{a\times a\times a\times a\times a}$

$= \frac{1}{a^5}$ మరియు ఇది $\frac{1}{a^{7-2}}$ కు సమానం (7 – 2 = 5 కాబట్టి)

అందువల్ల $\frac{a^2}{a^7} = \frac{1}{a^{7-2}}$

పై అన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలించిన తరువాత

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (**$m > n$** అయితే) మరియు $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$ (**$m<n$** అయితే)

> **'a' ఏదైనా శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్య మరియు 'm', 'n' లు పూర్ణ సంఖ్యలైన**
>
> **$m > n$ అయిన $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ మరియు $m < n$ అయిన $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$**

$m = n$ అయినప్పుడు ఏం జరుగుతుంది? సమాధాన మివ్వండి.

ఉదాహరణ 15 : $\frac{4^3}{4^3}$ ను కనుగొందాం.

సాధన : $\frac{4^3}{4^3} = \frac{4\times4\times4}{4\times4\times4} = \frac{1}{1} = 1$.............(I)

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ అని మనకు తెలుసు.

కావున $\frac{4^3}{4^3} = 4^{3-3} = 4^0$.....1

పై విధంగా $\frac{7^4}{7^4}$ ను కనుగొనండి.

సాధన : $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ నుండి

$\frac{7^4}{7^4}$ = ? పై వాటి నుంచి మీరు ఏమి గమనించారు?

అదే విధంగా $\frac{a^4}{a^4} = \frac{a\times a\times a\times a}{a\times a\times a\times a} = 1$

కానీ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ నుండి

$\frac{a^4}{a^4} = a^{4-4} = a^0 = 1$ ఇక్కడ ఏదేని శూన్యేతర సంఖ్య a ఐతే $a^0 = 1$ మరియు

m, n లను పరిశీలించగా $m=n$. ఆ విధంగా $m = n$ అయినప్పుడు $\frac{a^m}{a^n} = 1$ అవుతుంది.

ఇవి చేయండి.

1. కింది వానిని సూక్ష్మీకరించి a^{m-n} లేదా $\frac{1}{a^{n-m}}$ రూపంలో రాయండి.

(i) $\frac{13^8}{13^5}$ (ii) $\frac{3^4}{3^{14}}$

2. $\square$ (ఖాళీ గడి) ని సరైన సంఖ్యతో నింపండి.

ఉదాహరణ : $\frac{8^8}{8^3} = 8^{\boxed{8-3}} = 8^{\boxed{5}}$

(i) $\frac{12^{12}}{12^7} = 12^{\square} = 12^{\square}$ (ii) $\frac{a^{18}}{a^{\square}} = a^{\square} = a^{\boxed{10}}$

11.3.4 (ఈ) ఒకే ఘాతాంకం గల సంఖ్యలను భాగించడం

ఉదాహరణ 16 : $\left(\frac{7}{4}\right)^5$

సాధన : $\left(\frac{7}{4}\right)^5 = \frac{7}{4}\times\frac{7}{4}\times\frac{7}{4}\times\frac{7}{4}\times\frac{7}{4}$

$= \frac{7\times7\times7\times7\times7}{4\times4\times4\times4\times4}$

$= \frac{7^5}{4^5}$ (ఘాతరూపం నిర్వచనం నుంచి)

కాబట్టి $\left(\frac{7}{4}\right)^5 = \frac{7^5}{4^5}$

ఉదాహరణ 17 : $\left(\frac{p}{q}\right)^6$

సాధన : $\left(\frac{p}{q}\right)^6 = \left(\frac{p}{q}\right)\times\left(\frac{p}{q}\right)\times\left(\frac{p}{q}\right)\times\left(\frac{p}{q}\right)\times\left(\frac{p}{q}\right)\times\left(\frac{p}{q}\right)$

$= \frac{p\times p\times p\times p\times p\times p}{q\times q\times q\times q\times q\times q}$

$$= \frac{p^6}{q^6} \quad \text{(నిర్వచనం నుంచి)}$$

కాబట్టి $\left(\frac{p}{q}\right)^6 = \frac{p^6}{q^6}$

పై పరిశీలనల నుంచి మనం ఈ విధంగా చెప్పగలం.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a \times a \times a \times a \times .... \times a \text{ 'm' మార్లు}}{b \times b \times b \times b \times .... \times b \text{ 'm' మార్లు}} = \frac{a^m}{b^m}$$

a, b లు ఏవైనా రెండు శూన్యేతర పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు '*m*' ఒక పూర్ణసంఖ్య అయిన $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

ఇవి చేయండి.

1. ఖాళీగడులను పూరించండి.

(i) $\left(\frac{5}{7}\right)^3 = \frac{5^3}{\square}$ (ii) $\left(\frac{3}{2}\right)^{\square} = \frac{3^5}{2^5}$

(iii) $\left(\frac{8}{3}\right)^4 = \frac{\square}{\square}$ (iv) $\left(\frac{x}{y}\right)^{11} = \frac{\square}{y^{11}}$

11.3.5 ఋణ సంఖ్యలు భూమిగాగల ఘాతరూపాలు

ఉదాహరణ 18 : $(1)^4$, $(1)^5$,$(1)^7$, $(-1)^2$, $(-1)^3$, $(-1)^4$, $(-1)^5$ విలువలను లెక్కించండి.

సాధన : $(1)^4 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$

$(1)^5 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$

$(1)^7 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$

$(-1)^2 = (-1) \times (-1) = 1$

$(-1)^3 = (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$

$(-1)^4 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = 1$

$(-1)^5 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$

పై ఉదాహరణల నుండి మనం క్రింది విషయాలు గమనించవచ్చు.

(i) 1 యొక్క ఏ ఘాతంకైనా దానివిలువ 1

(ii) (–1) యొక్క బేసి ఘాతం విలువ (–1) మరియు సరిఘాతం విలువ (+1)

కాబట్టి $(-a)^m = -a^m$ (m, బేసి సంఖ్య అయితే)

$(-a)^m = a^m$ (m, సరి సంఖ్య అయితే)

ఇప్పుడు మరి కొన్ని ఉదాహరణలను గమనిద్దాం.

$(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$

$(-a)^4 = (-a) \times (-a) \times (-a) \times (-a) = a^4$

$(-a)^{-3} = \dfrac{1}{(-a)^3} = \dfrac{1}{(-a)} \times \dfrac{1}{(-a)} \times \dfrac{1}{(-a)} = \dfrac{1}{-a^3}$ లేక $\dfrac{-1}{a^3}$

ఉదాహరణ 19 : $\dfrac{-27}{125}$ ను ఘాతరూపంలో వ్యక్తపరచండి.

సాధన : $-27 = (-3) \times (-3) \times (-3) = (-3)^3$

$125 = 5 \times 5 \times 5 = (5)^3$

కావున $\dfrac{-27}{125} = \dfrac{(-3)^3}{(5)^3}$; $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$ నుంచి

$$\frac{-27}{125} = \left(\frac{-3}{5}\right)^3$$

ఇవి చేయండి.

1. విస్తరణ రూపంలో రాయండి.

(i) $(a)^{-5}$ (ii) $(-a)^4$ (iii) $(-7)^{-5}$ (iv) $(-a)^m$

2. ఘాతరూపంలో రాయండి.

(i) $(-3) \times (-3) \times (-3)$ (ii) $(-b) \times (-b) \times (-b) \times (-b)$

(iii) $\dfrac{1}{(-2)} \times \dfrac{1}{(-2)} \times \dfrac{1}{(-2)}$ ...... 'm' సార్లు.

అభ్యాసం - 2

1. ఘాతాంక న్యాయాలనుపయోగించి కిందివానిని సూక్ష్మీకరించండి.

(i) $2^{10} \times 2^{4}$ (ii) $(3^{2}) \times (3^{2})^{4}$ (iii) $\dfrac{5^{7}}{5^{2}}$

(iv) $9^{2} \times 9^{18} \times 9^{10}$ (v) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{4} \times \left(\dfrac{3}{5}\right)^{3} \times \left(\dfrac{3}{5}\right)^{8}$ (vi) $(-3)^{3} \times (-3)^{10} \times (-3)^{7}$

(vii) $(3^{2})^{2}$ (viii) $2^{4} \times 3^{4}$ (ix) $2^{4a} \times 2^{5a}$

(x) $(10^{2})^{3}$ (xi) $\left[\left(\dfrac{-5}{6}\right)^{2}\right]^{5}$ (xii) $2^{3a+7} \times 2^{7a+3}$

(xiii) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{5}$ (xiv) $(-3)^{3} \times (-5)^{3}$ (xv) $\dfrac{(-4)^{6}}{(-4)^{3}}$

(xvi) $\dfrac{9^{7}}{9^{15}}$ (xvii) $\dfrac{(-6)^{5}}{(-6)^{9}}$ (xviii) $(-7)^{7} \times (-7)^{8}$

(xix) $(-6^{4})^{4}$ (xx) $a^{x} \times a^{y} \times a^{z}$

2. 3^{-4} ను ఏ సంఖ్యచే గుణించగా లబ్ధం 729 అవుతుంది?

3. $5^{6} \times 5^{2x} = 5^{10}$ అయితే x విలువ కనుగొనుము.

4. $2^{0} + 3^{0}$ విలువ లెక్కించుము.

5. $\left(\dfrac{x^{a}}{x^{b}}\right)^{a} \times \left(\dfrac{x^{b}}{x^{a}}\right)^{a} \times \left(\dfrac{x^{a}}{x^{a}}\right)^{b}$ సూక్ష్మీకరించండి.

6. సత్యమా లేదా అసత్యమా తెలిపి కారణాలు తెలపండి.

(i) $100 \times 10^{11} = 10^{13}$ (ii) $3^{2} \times 4^{3} = 12^{5}$ (iii)) $5^{0} = (100000)^{0}$

(iv) $4^{3} = 8^{2}$ (v) $2^{3} > 3^{2}$ (vi) $(-2)^{4} > (-3)^{4}$

(vii) $(-2)^{5} > (-3)^{5}$

ప్రాజెక్ట్ పని

మీ పరిసర ప్రాంతంలోని ఏవేని 10 కుటుంబాల యొక్క వార్షిక ఆదాయం వివరాలను సేకరించి, వేలు మరియు లక్షల స్థానానికి సవరించి ఒక్కొక్క కుటుంబం యొక్క వార్షిక ఆదాయాన్ని ఘాత రూపంలో చూపండి.

11.3.6 మిక్కిలి పెద్దసంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపంలో వ్యక్తపరచటం

భూమి యొక్క ద్రవ్యరాశి దాదాపుగా 5976 x 10^{21} కి.గ్రా. పాలపుంత ఒక అంచునుంచి మరొక అంచు వరకు గల దూరం = 946 x 10^{15} కి.మీ. ఈ రకం సంఖ్యలను అర్థంచేసుకోవటం సులభం కాదు. కావున వీటిని ప్రామాణిక రూపంలో రాస్తే అవగాహన సులభం అవుతుంది.

భూమి యొక్క ద్రవ్యరాశి = 5.976×10^{24} ప్రామాణిక రూపం.

అదే విధంగా, 946×10^{15} ప్రామాణిక రూపం 9.46 x 10^{17}

కాబట్టి ఒక సంఖ్యను 1.0 మరియు 10.0 మధ్యగల దశాంశ భిన్నంగారాసి దానికి కావలసిన 10 యొక్క ఘాతాలతో లబ్ధం చేయటాన్ని ప్రామాణిక రూపంలో వ్యక్తపరచటం అంటాం.

అభ్యాసం - 3

కింది వాక్యాలలో గల సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపంలో వ్యక్తపరచండి.

(i) భూమి మరియు చంద్రుడి మధ్యదూరం 384,000,000మీ.

(ii) విశ్వం యొక్క వయస్సు 12,000,000,000 సంవత్సరాలుగా అంచనా వేశారు.

(iii) పాలపుంత గెలాక్సీ యొక్క మధ్యబిందువునుంచి సూర్యునికి గల దూరం300,000,000,000,000,000,000మీ. గా అంచనా వేయబడింది.

(iv) భూమి 1,353,000,000 ఘన కి.మీ.ల ఘనపరిమాణంగల నీటిని కలిగిఉంది.

మనం నేర్చుకున్నవి

- మిక్కిలి పెద్ద సంఖ్యలను ఘాతరూపంలో రాసినప్పుడు వాటిని చదవటం, వ్రాయటం మరియు అర్థం చేసుకోవటం సులభమవుతుంది.
- $10,000 = 10^4$ ని 10 యొక్క నాలుగవ ఘాతం అని చదివి 10ని భూమి అని, 4ను ఘాతాంకం అని అంటాం.

  $243 = 3^5$ ని 3 యొక్క 5వ ఘాతం అని చదివి, 3ను భూమి అని, 5ను ఘాతాంకం అని అంటాం.
- ఘాతాంక న్యాయాలు : 'a', 'b' ఏవైనా రెండు శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్యలు మరియు 'm', 'n' లు పూర్ణసంఖ్యలు.

  (i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$ (iii) $a^m \times b^m = (ab)^m$

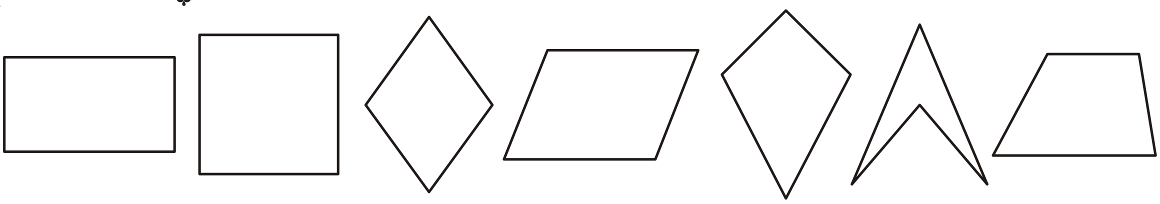
  (iv) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (v) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $m > n$ అయిన

  (vi) $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$, $n > m$ (vii) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ (viii) $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$

చతుర్భుజాలు 12

చతుర్భుజాల గురించి మీరు ఆరోతరగతిలో నేర్చుకున్నారు. చతుర్భుజాల రకాలు, వాటి ధర్మాలను గురించి ఇప్పుడు నేర్చుకుంటారు.

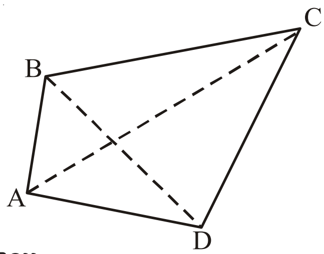
12.0 చతుర్భుజాలు



ఈ పటాలన్నింటిలోనూ మీరు గమనించిన ఉమ్మడి ధర్మమేది?

(సూచన : భుజాల సంఖ్య, కోణాల సంఖ్య, శీర్షాల సంఖ్య, సంవృత పటమా? వివృత పటమా?)

అందువల్ల నాలుగు భుజాలు, నాలుగు కోణాలు, నాలుగు శీర్షాలు ఉండే సంవృత పటాన్ని చతుర్భుజం అంటారు.



ABCD చతుర్భుజంలో

(i) నాలుగు భుజాలుంటాయి. $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ మరియు $\overline{DA}$

(ii) నాలుగు శీర్షాలు A, B, C మరియు D.

(iii) నాలుగు కోణాలు $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$ మరియు $\angle DAB$ ఉంటాయి.

(iv) చతుర్భుజంలో ఎదురెదురు శీర్షాలను కలిపే రేఖాఖండాలను చతుర్భుజ కర్ణాలు అంటారు. చతుర్భుజం ABCD కి AC మరియు BD లను కర్ణాలు అంటారు.

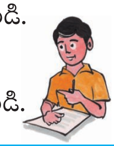
(v) ఉమ్మడి శీర్షం ఉండే రెండు భుజాలను 'పక్క పక్క భుజాలు' లేదా ఆసన్న భుజాలు అంటారు.. ABCD చతుర్భుజంలో AB, BC లు పక్క పక్క భుజాలు. 'వాటి ఉమ్మడి శీర్షం' B.

(vi) ఉమ్మడి భుజం ఉండే రెండు కోణాలను పక్క పక్క కోణాలు లేదా ఆసన్న కోణాలు అంటారు. అందువల్ల $\angle ABC$, $\angle BCD$ లు పక్కపక్క కోణాలు, BC ఉమ్మడి భుజం.

ఇవి చేయండి

(i) ABCD చతుర్భుజంలో మిగిలిన ఆసన్న భుజాల జతలను, వాటి ఉమ్మడి శీర్షాలను కనుక్కోండి.

(ii) చతుర్భుజం ABCD లో మిగిలిన ఆసన్నకోణాల జతలు, వాటి ఉమ్మడి భుజాలను కనుక్కోండి.

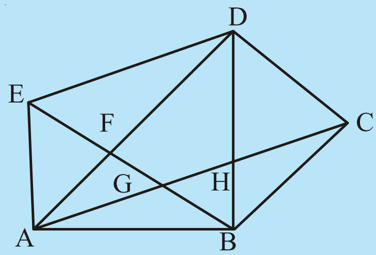


(vii) చతుర్భుజిలో ఉమ్మడి శీర్షం లేని రెండు భుజాలను ఎదురెదురు భుజాలు లేదా అభిముఖ భుజాలు అంటారు. ABCD చతుర్భుజంలో AB, CD మరియు AD, BC లు ఎదురెదురు భుజాల జతలు.

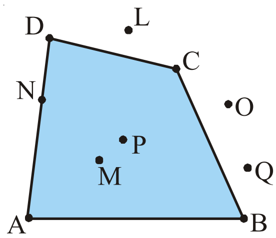
(viii) చతుర్భుజంలో ఉమ్మడి భుజంలేని రెండు కోణాలను ఎదురెదురుకోణాలు లేదా అభిముఖ కోణాలు అంటారు. ABCD చతుర్భుజంలో $\angle BAD$, $\angle DCB$ మరియు $\angle ADC$, $\angle CBA$ ఎదురెదురు కోణాల జతలు.

ప్రయత్నించండి.

పక్కనున్న చిత్రంలో ఎన్ని చతుర్భుజాలు ఉన్నాయి? వాటిని పేర్కొనండి.



12.1 చతుర్భుజంలో అంతర, బాహ్యబిందువులు



చతుర్భుజం ABCD లో అంతరంగా ఉన్న బిందువులు ఏవి?

చతుర్భుజానికి బాహ్యంగా ఉన్న బిందువు లేవి?

చతుర్భుజంపై ఉన్న బిందువు లేవి?

చతుర్భుజం లోపల అంతరంగా P, M బిందువులున్నాయి. బాహ్యంగా L, O మరియు Q అనే బిందువులున్నాయి. చతుర్భుజంపై N, A, B, C మరియు D అనే బిందువులున్నాయి.

చతుర్భుజ అంతరంలో మీకు వీలైనన్ని బిందువులను గుర్తించండి.

చతుర్భుజానికి బాహ్యంగా మీకు వీలైనన్ని బిందువులను గుర్తించండి.

చతుర్భుజ అంతరంలో ఎన్ని బిందువులుంటాయని మీరు భావిస్తున్నారు?

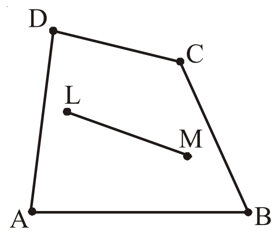
12.2 కుంభాకార, పుటాకార చతుర్భుజాలు

చతుర్భుజం అంతరంలో L మరియు M బిందువులను గుర్తించండి. L, M లను కలుపు రేఖా ఖండము పూర్తిగా చతుర్భుజం అంతరం లోనే ఉంది. చతుర్భుజం అంతరంలోని ఏవేని రెండు బిందువులను కలిపే రేఖాఖండం పూర్తిగా చతుర్భుజ అంతరంలోనే ఉంటే ఆ చతుర్భుజిని కుంభాకార బహుభుజి అంటారు.

ఒక రేఖా ఖండం చివరి బిందువులు అంతరంగా ఉంటూ రేఖా ఖండంలో కొంత భాగము చతుర్భుజ బాహ్యంలో ఉండునట్లు ఏవేని రెండు బిందువులను నీవు గుర్తించగలవా?

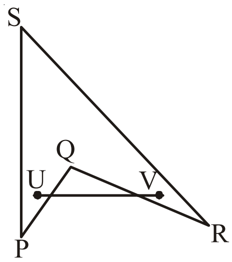
ఇది సాధ్యం కాదని మీరు తెలుసుకుంటారు.

ఇప్పుడు మరో చతుర్భుజం PQRS ని చూద్దాం.



పటం 1

చతుర్భుజం PQRS కి అంతర్గతంగా U, V అనే ఏవైనా రెండు బిందువులను గుర్తించండి. ఈ బిందువులను కలిపే రేఖా ఖండం చతుర్భుజానికి బాహ్యంగా ఉందా?



చతుర్భుజం PQRSలో ఇలాంటి మరిన్ని రేఖాఖండాలను మీరు ఏర్పరచగలరా?

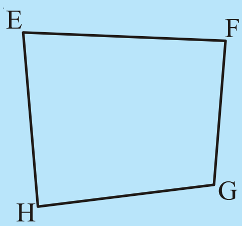
చతుర్భుజం PQRS లో రెండు బిందువులను కలిపే రేఖా ఖండాలు చతుర్భుజానికి అంతరంగా ఉండేలా ఏర్పరచగలరా? ఇది కూడా సాధ్యమేనని మీరు కనుక్కొంటారు.

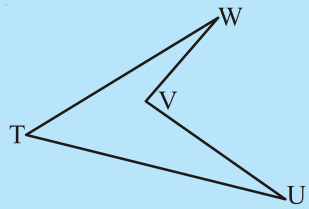
చతుర్భుజంలో అంతరంగా ఉన్న బిందువులను కలిపే రేఖాఖండాలన్ని చతుర్భుజానికి అంతరంగా ఉంటాయి. కాబట్టి చతుర్భుజం ABCD ని కుంభాకార చతుర్భుజం అంటారు.

చతుర్భుజంలో అంతరంగా ఉన్న బిందువులను కలిపే రేఖాఖండాలన్నీ చతుర్భుజానికి అంతరంగా ఉండే అవకాశం లేదు కాబట్టి చతుర్భుజం PQRS ను పుటాకార చతుర్భుజం అంటారు.

ప్రయత్నించండి.

1.





(i) చతుర్భుజం EFGH కుంభాకార చతుర్భుజమా?

(ii) చతుర్భుజం TUVW పుటాకార చతుర్భుజమా?

(iii) చతుర్భుజం EFGH. కి రెండు కర్ణాలు గీయండి. అవి రెండూ పరస్పరం ఖండించుకుంటాయా?

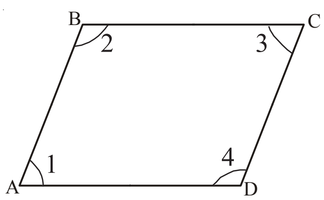
(iv) చతుర్భుజం TUVW కు రెండు కర్ణాలు గీయండి. అవి రెండూ పరస్పరం ఖండించుకుంటాయా?

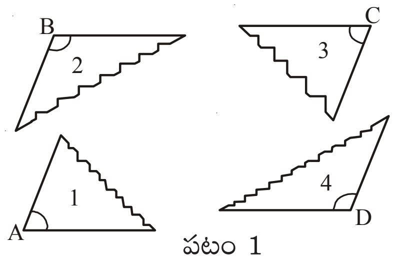
కుంభాకార చతుర్భుజ కర్ణాలు రెండూ పరస్పరం చతుర్భుజానికి అంతరంగా ఖండించుకుంటాయని; పుటాకార చతుర్భుజ కర్ణాలు రెండూ పరస్పరం చతుర్భుజానికి బాహ్యంగా ఖండించుకుంటాయని మీరు కనుక్కొంటారు.

12.3 చతుర్భుజంలోని కోణాల మొత్తం

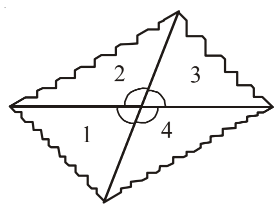
కృత్యం 1

ఒక కార్డ్‌బోర్డ్ ముక్కను తీసుకోండి. దానిపై ABCD చతుర్భుజాన్ని గీయండి. పటం -1 లో చూపినట్లు దాన్ని 4 ముక్కలు చేయండి. $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ లు ఒకే బిందువు. వద్ద కలిసేలా చిత్రం (2) లో చూపినట్లు అమర్చండి.





పటం 1



పటం 2

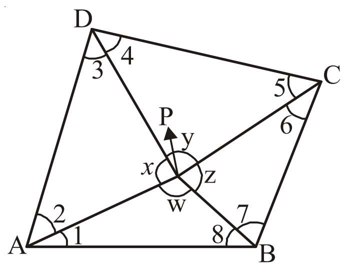
$\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ మరియు $\angle 4$ ల మొత్తం 360^0 కు సమానం అవుతుందా? (ఒక బిందువు వద్ద కోణాల మొత్తం)

చతుర్భుజంలోని కోణాల మొత్తం 360^0.

(గమనిక : $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ మొదలైన కోణాల కొలతలను $m\angle 1$, $m\angle 2$, $m\angle 3$ మొదలైన విధంగా చూపాలి.)

ఈ ఫలితాన్ని వేరేవిధాలుగా కూడా రాబట్టవచ్చు.

1. చతుర్భుజం ABCD లో అంతరంగా ఉండే బిందువు P అనుకోండి. శీర్షాలు A, B, C మరియు D లకు P ని కలపండి. చిత్రంలోని ΔPAD ని పరిగణనలోకి తీసుకోండి.



$m\angle 2 + m\angle 3 = 180° - x$ .... (1)

ఇదేవిధంగా ΔPDC లో, $m\angle 4 + m\angle 5 = 180° - y$ .... (2)

ΔPCB లో $m\angle 6 + m\angle 7 = 180^o - z$ మరియు .... (3)

ΔPBA లో $m\angle 8 + m\angle 1 = 180^o - w$. .... (4)

(త్రిభుజ కోణాల మొత్తం సూత్రం)

(1), (2), (3) మరియు (4) లను కలుపగా

$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 5 + m\angle 6 + m\angle 7 + m\angle 8$

$= 180° - x + 180° - y + 180° - z + 180° - w$

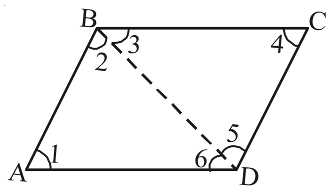
$= 720° - (x + y + z + w)$

($x + y + z + w = 360^o$; ఒక బిందువు వద్ద కోణాల మొత్తం)

$=720° - 360° \quad = 360°$

కాబట్టి చతుర్భుజంలోని కోణాల మొత్తం 360^o.

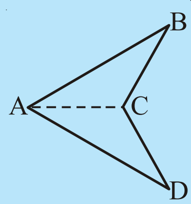
2. ABCD చతుర్భుజాన్ని తీసుకోండి. దీన్ని ఒక కర్ణం గీయడం ద్వారా రెండు త్రిభుజాలుగా విభజించండి. 1, 2, 3, 4, 5, 6 అనే కోణాలు ఏర్పడతాయి.



త్రిభుజ కోణాల మొత్తం సూత్రం సహాయంతో $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$ ల మొత్తం $360°$ ఎలా అవుతుందో మీరు సులువుగా కనుక్కోగలరు.

ప్రయత్నించండి.

చతర్భుజం కుంభాకారం కాకపోతే ఏం జరుగుతుంది? చతుర్భుజం ABCD ని రెండు త్రిభుజాలుగా విభజించి అంతరకోణాల మొత్తం కనుక్కోండి. పుటాకార చతుర్భుజ అంతరకోణాల మొత్తం ఎంత?



ఉదాహరణ 1 : చతుర్భుజంలోని 3 కోణాలు 55°, 65° మరియు 105° నాలుగో కోణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన : చతుర్భుజంలోని నాలుగు కోణాల మొత్తం = 360°.

ఇచ్చిన 3 కోణాల మొత్తం $= 55^\circ + 65^\circ + 105^\circ = 225^\circ$

కాబట్టి నాలుగో కోణం $= 360^\circ - 225^\circ = 135^\circ$

ఉదాహరణ 2 : చతుర్భుజంలో రెండు కోణాలు 80°, 120°. మిగతా రెండు కోణాలు సమానం అయితే ఆ రెండు కోణాలను కనుక్కోండి.

సాధన : చతుర్భుజంలోని నాలుగు కోణాల మొత్తం = 360°.

ఇచ్చిన రెండుకోణాల మొత్తం $= 80^\circ + 120^\circ = 200^\circ$

కాబట్టి మిగతా రెండు కోణాల మొత్తం $= 360^\circ - 200^\circ = 160^\circ$

ఈ రెండు కోణాలు సమానం

కాబట్టి ఒక్కో కోణం $= 160^\circ \div 2 = 80^\circ$

ఉదాహరణ 3 : చతుర్భుజంలోని కోణాలు x°, $(x-10)^\circ$, $(x+30)^\circ$ మరియు $2x^\circ$ అయిన ఆ కోణాలను కనుక్కోండి.

సాధన : చతుర్భుజంలోని కోణాల మొత్తం $= 360^\circ$

కాబట్టి, $x + (x - 10) + (x + 30) + 2x = 360^\circ$

$5x + 20 = 360^\circ$

$x = 68^\circ$

కాబట్టి ఆ నాలుగు కోణాలు $= 68^\circ$; $(68-10)^\circ$; $(68+30)^\circ$; $(2\times68)^\circ$

$= 68^\circ, 58^\circ, 98^\circ$ మరియు 136°.

ఉదాహరణ 4 : చతుర్భుజ కోణాలు $3 : 4 : 5 : 6$ నిష్పత్తిలో ఉంటే ఆ కోణాలను కనుక్కోండి.

సాధన : చతుర్భుజంలోని 4 కోణాల మొత్తం $= 360^\circ$

కోణాల నిష్పత్తి = $3 : 4 : 5 : 6$

కాబట్టి ఆ కోణాలు = $3x$, $4x$, $5x$ మరియు $6x$.

$3x + 4x + 5x + 6x = 360^0$

$18x = 360^0$

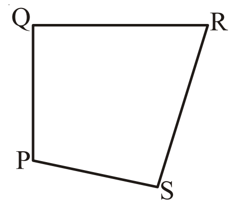
$$x = \frac{360}{18} = 20$$

కాబట్టి ఆ కోణాలు $= 3 \times 20^0; 4 \times 20^0; 5 \times 20^0; 6 \times 20^0$

$= 60^\circ, 80^\circ, 100^\circ$ మరియు 120°

అభ్యాసం - 1

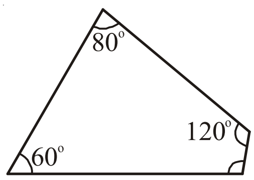
1. చతుర్భుజం PQRS లో



(i) భుజాలు, కోణాలు, శీర్షాలు, కర్ణాలను పేర్కొనండి

(ii) ఆసన్న భుజాలు, ఆసన్న కోణాలు, అభిముఖ భుజాలు, అభిముఖ కోణాల జతలను పేర్కొనండి.

2. చతుర్భుజంలోని 3 కోణాలు $60°$, $80°$, $120°$ అయితే నాలుగో కోణాన్ని కనుక్కోండి.



3. చతుర్భుజంలోని కోణాలు $2:3:4:6$ నిష్పత్తిలో ఉన్నాయి. ఒక్కోకోణం కొలత కనుక్కోండి.

4. చతుర్భుజంలోని 4 కోణాలు సమానం అయితే ఒక్కోదాన్ని కనుక్కోండి. మీ నోటు పుస్తకంలో ఈ చతుర్భుజాన్ని గీయండి.

5. ఒక చతుర్భుజంలో కోణాలు $x°$, $(x+10)°$, $(x+20)°$, $(x+30)°$ అయితే ఆ కోణాలను కనుక్కోండి.

6. చతుర్భుజ కోణాలు $1:2:3:6$ నిష్పత్తిలో ఉండవు. ఎందువల్ల? కారణాలు తెలపండి.

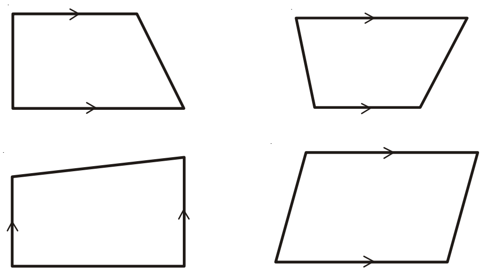
(సూచన : ఈ చతుర్భుజ పటాన్ని గీయడానికి ప్రయత్నించండి)

12.4 చతుర్భుజాల రకాలు

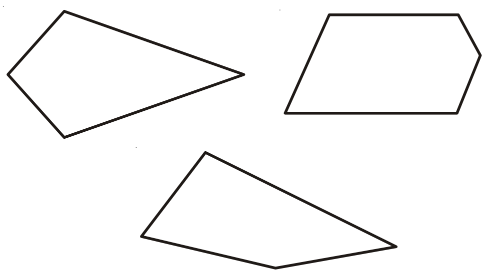
భుజాలు, కోణాల స్వభావం ఆధారంగా చతుర్భుజాలకు విభిన్నమైన పేర్లున్నాయి.

12.4.1 ట్రెపీజియం (సమలంబ చతుర్భుజం)

ఒక జత సమాంతర భుజాలు ఉండే చతుర్భుజాన్ని 'ట్రెపీజియం' అంటారు.



ఇవి ట్రెపీజియాలు



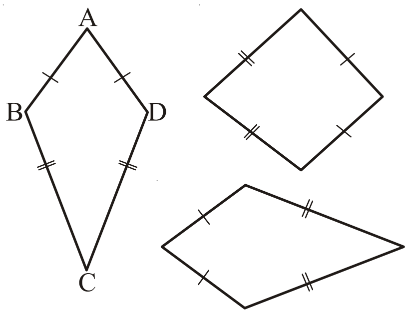
ఇవి ట్రెపీజియాలు కావు

గమనిక : బాణం గుర్తులు సమాంతర రేఖలను సూచిస్తాయి.

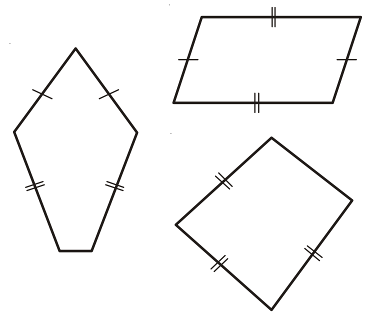
రెండో సమితిలోని పటాలు ట్రెపీజియాలు కావు ఎందువల్ల?

12.4.2 గాలిపటం (KITE)

చతుర్భుజాలలో కొన్ని, గాలిపటాల ఆకారంలో ఉంటాయి. కింది పటాల్లో సమాన పొడవులను ఒకే విధమైన గుర్తులతో సూచించబడినవి. ఉదాహరణకు AB = AD మరియు BC = CD.



ఇవి గాలిపటాలు



ఇవి గాలిపటాలు కావు

రెండో సమితిలోని రూపాలు గాలిపటాలు ఎందువల్ల కావు?

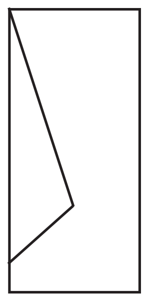
పరిశీలించండి.

(i) **గాలిపటానికి 4 భుజాలున్నాయి. (చతుర్భుజం)**

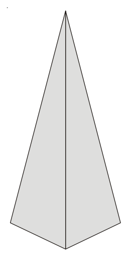
(ii) **సమాన కొలతలుండే ఆసన్న భుజాల జతలు రెండు ఉంటాయి.**

కృత్యం 2 :

మందం కలిగిన ఒక కాగితాన్ని తీసుకోండి. మధ్యలోకి మడవండి. చిత్రం (1) లో చూపించినట్లు వేర్వేరు కొలతలు గల రెండు రేఖాఖండాలను గీయండి. ఆ రేఖా ఖండాల వెంబడి కత్తిరించి చిత్రం (2) లో చూపినట్టు కాగితం ముక్కలను తెరవండి. ఇప్పుడు గాలిపటం ఆకారం సిద్ధం. గాలిపటానికి సౌష్టవ రేఖలుంటాయా?



పటం 1



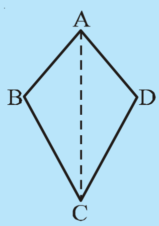
పటం 2

గాలిపటం కర్ణాలను మడవండి. ఆ కర్ణాలు ఖండించుకున్నచోట లంబకోణము ఉంటుందా? లేదా? తెలుసుకునేందుకు మూలమట్టాలను ఉపయోగించండి.

గాలిపటం కర్ణాలు రెండూ సమాన పొడవులో ఉంటాయా? కాగితాన్ని మడవడం లేదా కొలవడం ద్వారా కర్ణాలు పరస్పరం ఖండించుకుంటాయో లేదో పరిశీలించండి.

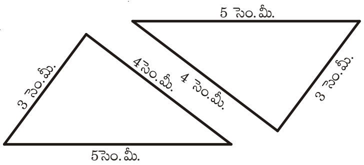
ప్రయత్నించండి.

గాలిపటం ABCD లో ΔABC, ΔADC లు సర్వసమానాలని నిరూపించండి.

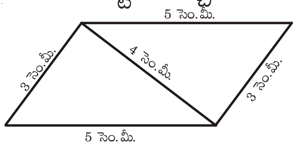


12.4.3 సమాంతర చతుర్భుజం

కృత్యం 3 :



3 సెం.మీ., 4 సెం.మీ., 5 సెం.మీ. భుజాలుగా ఉండే రెండు సర్వ సమాన త్రిభుజ రూపాలను తీసుకోండి. వాటిని కింది పటంలో చూపినట్టు అమర్చండి.

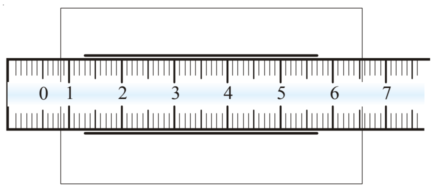


సమాంతర చతుర్భుజం ఏర్పడుతుంది. ఇక్కడ సమాంతర భుజాలేవి? సమాంతర భుజాలు సమానంగా ఉంటాయా? ఇవే త్రిభుజాలతో మరో రెండు సమాంతర చతుర్భుజాలను రూపొందించవచ్చు. వాటిని కనుగొనండి.

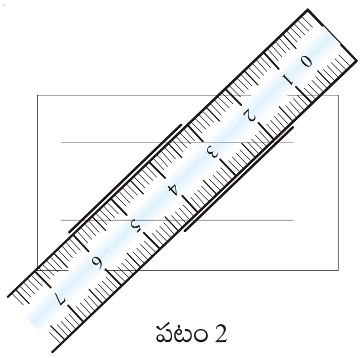
రెండు జతల ఎదురెదురు భుజాలు సమాంతరంగా ఉండే చతుర్భుజమే సమాంతర చతుర్భుజం.

కృత్యం 4 :

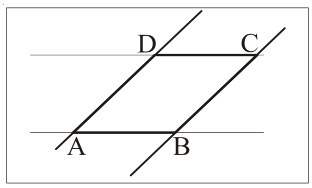
ఒక కొలబద్దను తీసుకోండి. దాన్ని కాగితంపై ఉంచి దాని అంచుల వెంబడి చిత్రం (1)లో చూపినట్లు రెండు రేఖలను గీయండి. కొలబద్దను ఆ రేఖలపై చిత్రం (2)లో చూపినట్లు ఉంచండి. దాని అంచుల వెంబడి మరో రెండు రేఖలను గీయండి.



పటం 1



పటం 2



పటం 3

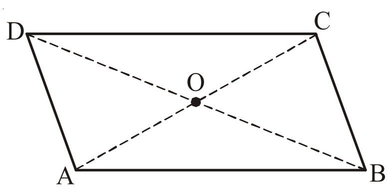
చిత్రం (3)లో ఎదురెదురుగా ఉన్న భుజాలు సమాంతరాలు. ఇది సమాంతర చతుర్భుజం.

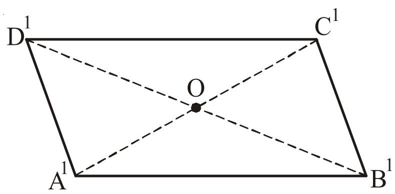
12.4.3 (అ) సమాంతర చతుర్భుజ ధర్మాలు

సమాంతర చతుర్భుజ భుజాలు

కృత్యం 5 :

ABCD; $A^1B^1C^1D^1$ అనే రెండు ఏకరీతి సమాంతర చతుర్భుజ రూపాలను కత్తిరింపబడినవి తీసుకోండి. వీలైతే వేర్వేరు రంగులు కలిగినవి తీసుకోండి.



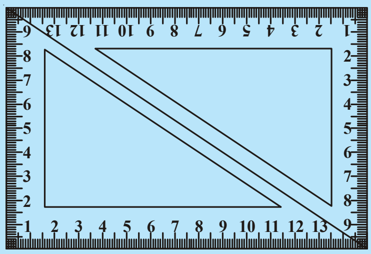


పేరు తప్ప $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ రెండూ ఒకేవిధంగా ఉంటాయి. అదే విధంగా మిగతా భుజాలు కూడా ఉంటాయి. $\overline{DC}$ పై $\overline{A'B'}$ ను ఉంచండి. ఇవి రెండూ ఏకీభవిస్తూ $\overline{A'B'}$, $\overline{DC}$ ల పొడవులు సమానమా? అదే విధంగా $\overline{AD}$, $\overline{B'C'}$ భుజాలను పరిశీలించండి. మీరేం కనుక్కుంటారు?

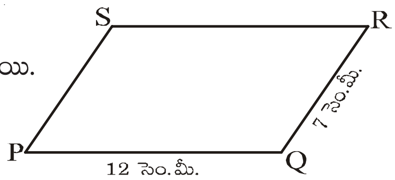
ఈ రెండు సందర్భాల్లోనూ భుజాలు సమానమని మీరు తెలుసుకుంటారు. అందువల్ల **సమాంతర చతుర్భుజంలో ఎదురెదురు భుజాలు సమాన పొడవుతో ఉంటాయి.** సమాంతర చతుర్భుజ భుజాలను కొలచినా మీకు ఇవే ఫలితాలొస్తాయి.

ప్రయత్నించండి.

30°, 60°, 90° కొలతలు ఉండే ఏకరీతి మూలమట్టాలను రెండు జతలు తీసుకోండి. పక్క చిత్రంలో చూపినట్టు సమాంతర చతుర్భుజం ఏర్పడేలా పక్కపక్కన అమర్చండి. ఈ ధర్మాన్ని సరిచూసేందుకు ఇది సహాయకారిగా ఉందా?



ఉదాహరణ 5 : సమాంతర చతుర్భుజం PQRS పరిధి కనుక్కోండి.



సాధన : సమాంతర చతుర్భుంలో ఎదురెదురు భుజాలు సమాన పొడవుతో ఉంటాయి.

దత్తాంశం ప్రకారం PQ= SR = 12 సెం.మీ మరియు QR = PS = 7 సెం.మీ

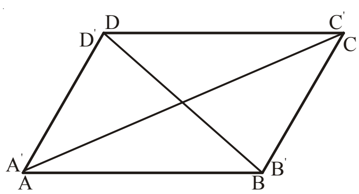
కాబట్టి పరిధి = PQ + QR + RS + SP

= 12 సెం.మీ + 7 సెం.మీ + 12 సెం.మీ + 7 సెం.మీ = 38 సెం.మీ

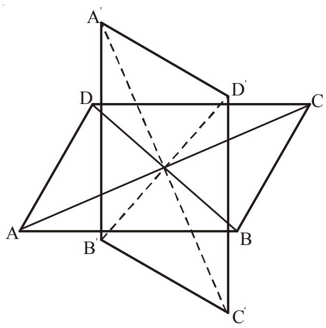
సమాంతర చతుర్భుజ కోణాలు

కృత్యం 6 :

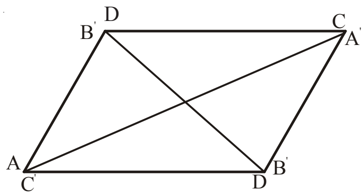
సమాంతర చతుర్భుజం ABCD ని ట్రేసింగ్ షీట్‌పై కాపీ చేయండి. A'B'C'D' గా గుర్తించండి. చిత్రం– (1)లో చూపినట్లు A'B'C'D' ని ABCD పై ఉంచండి. కర్ణాలు కలిసేచోట ఈ రెండింటినీ గుండుసూదితో కలపండి. పారదర్శక షీటును చిత్రం – (2) లో చూపినట్లు 90° భ్రమణం చేయించండి. అదే దిశలో సమాంతర చతుర్భుజాన్ని 90° భ్రమణం చేయించండి. చిత్రం – (3)లో చూపినట్లు రెండు సమాంతర చతుర్భుజాలు ఏకీభవిస్తాయి. C బిందువుపై A' బిందువు, A పై C' బిందువు ఉంటాయని మీరు గమనిస్తారు. అదేవిధంగా D పై B' మరియు B పై D' చిత్రం (3)లో చూపినట్లు ఉంటాయి.



పటం 1



పటం 2



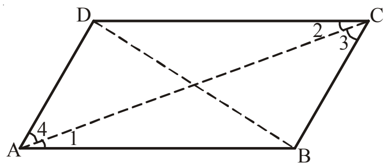
పటం 3

A, C కోణాల కొలతల గురించి ఇది ఏమన్నా తెలుపుతుందా? B, D కోణాల కొలతలను పరిశీలించి, మీ పరిశీలనలను పేర్కొనండి.

సమాంతర చతుర్భుజ ఎదురెదురు కోణాలు సమాన కొలతలతో ఉంటాయని మీరు తెలుసుకుంటారు.

ప్రయత్నించండి.

$30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ కొలతల మూలమట్టాల జతలను తీసుకొనండి. గతంలో చేసినట్టే సమాంతర చతుర్భుజాలను రూపొందించండి. పైన పేర్కొన్న ధర్మాన్ని నిరూపించేందుకు ఈ చిత్రం మీకేమైనా సహాయపడుతుందా?



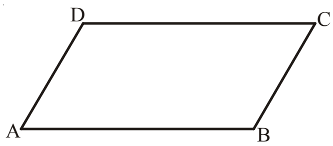
తార్కిక వాదనలతో ఈ ఆలోచనను బలపరచవచ్చు.

సమాంతర చతుర్భుజం ABCD కర్ణాలు AC, BD అయితే $\angle 1 = \angle 2$ మరియు $\angle 3 = \angle 4$ (ఏకాంతర కోణాల ధర్మం)

$\Delta ABC, \Delta CDA$ లు $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ సర్వసమానాలు

కాబట్టి $\angle B = \angle D$

ఇదేవిధంగా, $\Delta ABD \cong \Delta CDB$, కాబట్టి $\angle A = \angle C$.



అందువల్ల సమాంతర చతుర్భుజ ఎదురెదురు కోణాలు సమానంగా ఉంటాయి.

సమాంతర చతుర్భుజ ఆసన్న కోణాలను పరిశీలిద్దాం. సమాంతర చతుర్భుజం ABCD **లో** DC||AB, DA తిర్యగ్రేఖ. కాబట్టి $\angle A, \angle D$ ఆసన్న కోణాలు, పరస్పరం సంపూరకాలు.

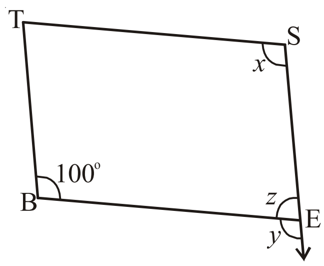
$\angle A, \angle B$ లు కూడా పరస్పర సంపూరకాలే. ఎందువల్ల?

AD||BC ; BA తిర్యగ్రేఖ. అందువల్ల $\angle A, \angle B$ ఆసన్న కోణాలు.

ఇది చేయండి.

పైన ఇచ్చిన ABCD సమాంతర చతుర్భుజంలో మరో రెండు జతల సంపూరక కోణాలను గుర్తించండి.

ఉదాహరణ 6 : BEST ఒక సమాంతర చతుర్భుజం. x, y, z విలువలు కనుక్కోండి.



సాధన : $\angle S, \angle B$ కి అభిముఖ కోణం.

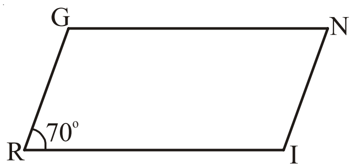
కాబట్టి $x = 100^0$ (అభిముఖ కోణాల నియమం)

$y = 100^0$ (సాదృశ్య కోణాలు)

$z = 80^0$ ($\angle y, \angle z$ రేఖీయ ద్వయం కాబట్టి)

సమాంతర చతుర్భుజంలో ఆసన్న కోణాలు సంపూరకాలు. పై ఉదాహరణ నుండి కూడా ఈ పరిశీలన చేయవచ్చు.

ఉదాహరణ 7 : సమాంతర చతుర్భుజం RING లో m $\angle R = 70^\circ$, అయితే మిగతా కోణాలను కనుక్కోండి.



సాధన : దత్తాంశ ప్రకారం $\angle R = 70^\circ$

$\angle N = 70^\circ$ అవుతుంది.

(సమాంతర చతుర్భుజ అభిముఖ కోణాలు)

$\angle R$, $\angle I$ లు సంపూరక కోణాలు కాబట్టి

$\angle I = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$

$\angle G$, $\angle I$, లు సమాంతర చతుర్భుజ అభిముఖ కోణాలు కాబట్టి $\angle G = 110^\circ$ కాబట్టి

$\angle R = \angle N = 70^\circ$ మరియు $\angle I = \angle G = 110^\circ$

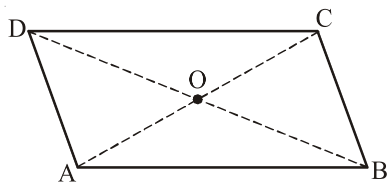
ప్రయత్నించండి.

పై ఉదాహరణలో $\angle I$, $\angle G$ లను మరేదైనా ఇతర పద్ధతిలో కనుక్కోవచ్చా?

సూచన : చతుర్భుజ కోణాల మొత్తానికి సూత్రం.

12.4.3. (అ) సమాంతర చతుర్భుజ కర్ణాలు

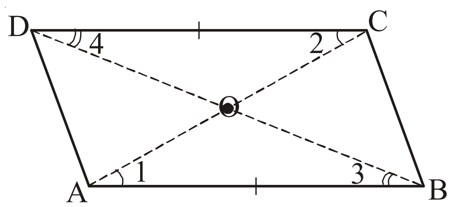
కృత్యం : 7



ABCD సమాంతర చతుర్భుజ నమూనా (కట్ - అవుట్) ను తీసుకోండి. కర్ణాలు, AC, BDలు 'O' వద్ద ఖండిస్తాయనుకోండి.

మడతపెట్టి A పై C ని ఉంచడం ద్వారా AC మధ్యబిందువు కనుక్కోండి. ఈ మధ్య బిందువు 'O' ఉందా?

కర్ణం AC ని కర్ణం DB 'O' బిందువు వద్ద సమద్విఖండన చేస్తుందా? మీ స్నేహితులతో చర్చించండి.



DB మీద మధ్య బిందువు ఎక్కడ ఉండునో తెలుసుకోవడానికి ఈ కృత్యాన్ని మళ్ళీ చేయండి.

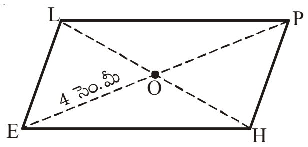
సమాంతర చతుర్భుజ కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకొంటాయి.

కో.భు.కో. సరూపతననుసరించి ఈ ధర్మాన్ని నిరూపించడం కష్టమేమీ కాదు.

$\Delta AOB \cong \Delta COD$ (కో.భు.కో. నియమాన్ని ఇక్కడ ఎలా ఉపయోగిస్తాం?)

దీని నుండి $AO = CO$; $BO = DO$ అవుతాయి.

ఉదాహరణ 8 : HELP ఒక సమాంతర చతుర్భుజం. OE = 4 సెం.మీ. కర్ణాల సమద్విఖండన బిందువు O. PE కంటే HL 5 సెం.మీ. ఎక్కువ. OH ని కనుక్కోండి.



సాధన : OE = 4 సెం.మీ. అయితే OP = 4 సెం.మీ. (ఎందుకు?)

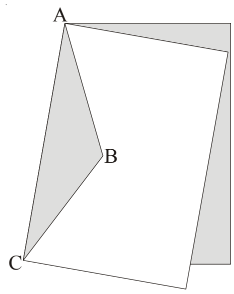
PE కంటే HL 5 సెం.మీ. ఎక్కువ.

కాబట్టి HL = 8 + 5 = 13 సెం.మీ.

అందువల్ల $OH = \frac{1}{2} \times 13 = 6.5$ సెం.మీ.

12.4.4 రాంబస్ (సమచతుర్భుజం) (RHOMBUS)

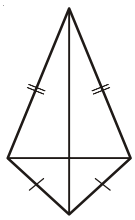
మీరు గతంలో చేసిన గాలిపటం తయారీని జ్ఞప్తికి తెచ్చుకోండి. ABC వెంబడి కత్తిరించి, తెరిస్తే గాలిపటం తయారౌతుంది. AB, BC రేఖల పొడవులు వేర్వేరుగా ఉంటాయి. AB = BCని గీస్తే మీరు పొందే పటమే రాంబస్ లేదా సమచతుర్భుజం.



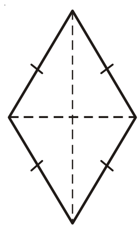
రాంబస్ కట్

సమచతుర్భుజంలోని భుజాలన్నీ సమానంగా ఉంటాయి. గాలిపటం ఇలా ఉండదు.

సమచతుర్భుజంలోని ఎదురెదురు భుజాలు సమాంతరంగా ఉంటాయి. కాబట్టి ఇది సమాంతర చతుర్భుజం కూడా అవుతుంది. కాబట్టి సమచతుర్భుజానికి సమాంతర చతుర్భుజం, గాలిపటాల ధర్మాలన్నీ వర్తిస్తాయి. ఆ ధర్మాలను జాబితా రూపంలో తయారు చేయండి. ఈ అధ్యాయం చివర ఉండే జాబితాతో సరిచూసుకోండి.



గాలి పటం



రాంబస్

సమచతుర్భుజ కర్ణాలు పరస్పరం లంబ సమద్విఖండన చేసుకొంటాయి.

కృత్యం 8 :

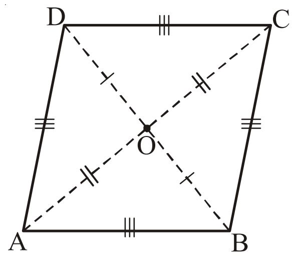
సమచతుర్భుజ నమూనాను తీసుకోండి. మడత పెట్టడం ద్వారా ఖండన బిందువు కర్ణాల మధ్య బిందువు అవుతుందేమో సరిచూడండి. మూలమట్టాల చివరల ద్వారా అవి లంబకోణం వద్ద ఖండిస్తాయేమో సరిచూడండి.

తార్కిక సోపానాలతో ఈ ధర్మాన్ని సరిచూడండి.

ABCD ఒక సమచతుర్భుజం. ఇది ఒక సమాంతర చతుర్భుజం కూడా కావడం వల్ల కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకొంటాయి.

కాబట్టి OA = OC ; OB = OD.

$\angle AOD = \angle COD = 90^\circ$ అని నిరూపించాలి.



భు.భు.భు. సరూప ధర్మాన్ని అనుసరించి

$\Delta AOD \cong \Delta COD$

కాబట్టి $\angle AOD = \angle COD$

$\angle AOD$ మరియు $\angle COD$ రేఖీయ జత కావడం వల్ల $\angle AOD = \angle COD = 90^\circ$

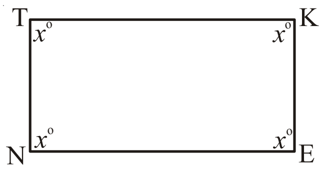
సమచతుర్భుజ కర్ణాలు పరస్పరం లంబ సమద్విఖండన చేసుకొంటాయి.

12.4.5 దీర్ఘ చతురస్రం (RECTANGLE)

సమాన కోణాలతో ఉండే సమాంతర చతుర్భుజమే దీర్ఘచతురస్రం.

ఈ నిర్వచనానికి పూర్తి అర్థం ఏంటి? మీ స్నేహితులతో చర్చించండి.

దీర్ఘ చతురస్రం సమాన కోణాలతో ఉంటే ప్రతికోణం విలువ ఎంత?



ప్రతికోణం విలువ x° అయితే $4x^\circ = 360^\circ$ (ఎందువల్ల?)

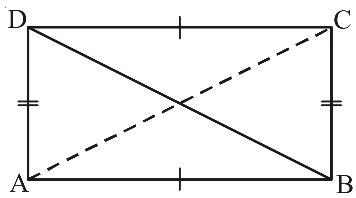
కాబట్టి $x^\circ = 90^\circ$

అందువల్ల దీర్ఘచతురస్రంలోని ప్రతికోణం లంబకోణం.

కాబట్టి ప్రతి కోణం లంబకోణం ఉండే సమాంతర చతుర్భుజమే దీర్ఘ చతురస్రం.

దీర్ఘ చతురస్రం కూడా సమాంతర చతుర్భుజమే కాబట్టి దీర్ఘ చతురస్రంలో ఎదురెదురు భుజాలు సమానంగా ఉంటాయి; కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకొంటాయి.

సమాంతర చతుర్భుజంలో కర్ణాలు వేర్వేరు పొడవుల్లో ఉండవచ్చు (సరిచూడండి); కానీ దీర్ఘచతురస్రంలోని కర్ణాలు సమాన పొడవుల్లో ఉండడం గమనార్హం.



నిరూపణ సులువు –

ABCD దీర్ఘచతురస్రమైతే $\Delta ABC \cong \Delta BAD$

ఎందుకంటే $AB = AB$

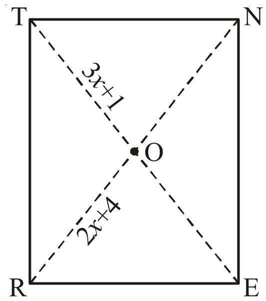
$BC = AD$ (ఎందువల్ల?)

$m\angle A = m\angle B = 90^\circ$ (ఎందువల్ల?)

కాబట్టి భు.కో.భు. సరూపధర్మాన్ని అనుసరించి $\Delta ABC \cong \Delta BAD$; $AC = BD$

కాబట్టి దీర్ఘచతురస్రంలో కర్ణాలు సమానంగా ఉంటాయి.

ఉదాహరణ 9 : RENT ఒక దీర్ఘ చతురస్రం. దీని కర్ణాలు 'O' వద్ద సమద్విఖండన చేసుకొంటాయి. OR = $2x + 4$, OT = $3x + 1$ అయితే x ను కనుక్కోండి.



సాధన : కర్ణం TE లో సగం OT. కర్ణం RN లో సగం OR

కర్ణాలు రెండూ సమానం (ఎందువల్ల?)

కాబట్టి వాటి సగాలు కూడా సమానం

కాబట్టి $3x + 1 = 2x + 4$

లేదా $x = 3$

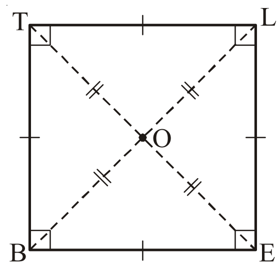
12.4.6 చతురస్రం

ఆసన్న భుజాలు సమానంగా ఉండే దీర్ఘచతురస్రాన్ని 'చతురస్రం' అంటారు.

అంటే దీర్ఘ చతురస్ర నియమాలన్ని పాటిస్తూ 'అన్ని భుజాలు సమానం' అనే నియమాన్ని చతురస్రం అదనంగా పాటిస్తుంది. దీర్ఘచతురస్రంలాగా చతురస్రంలోనూ కర్ణాలు సమానంగా ఉంటాయి.

దీర్ఘచతురస్రంలో కర్ణాలు పరస్పరం లంబంగా ఉండాల్సిన అవసరంలేదు. (సరిచూడండి) కానీ చతురస్రం విషయంలో ఇది సరికాదు.

నిరూపిద్దాం –



BELT ఒక చతురస్రం. కాబట్టి BE = EL = LT = TB

ΔBOE మరియు ΔLOE లను పరిశీలిస్తే,

OB=OL (ఎందుకు?)

OE ఉమ్మడి భుజం

కాబట్టి, భు.భు.భు. సరూప నియమం ప్రకారం $\Delta BOE \cong \Delta LOE$

కాబట్టి $\angle BOE = \angle LOE$

కానీ $\angle BOE + \angle LOE = 180^\circ$ (ఎందువల్ల?)

$$\angle BOE = \angle LOE = \frac{180}{2} = 90^\circ$$

కాబట్టి చతురస్ర కర్ణాలు పరస్పరం లంబ సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి.

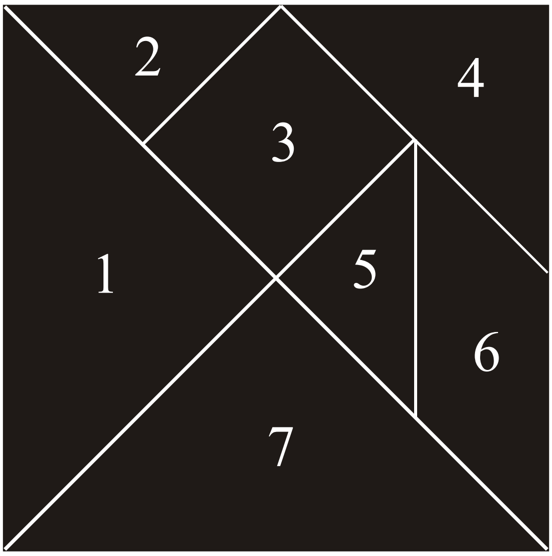
చతురస్రంలో కర్ణాలు

(i) **సమద్వి ఖండన చేసుకొంటాయి. (దీర్ఘచతురస్ర ధర్మం)**

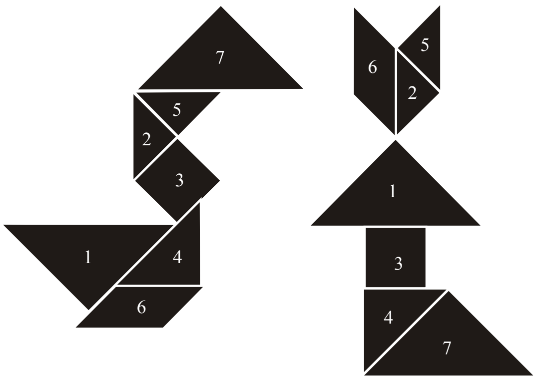
(ii) **సమానంగా ఉంటాయి. (దీర్ఘచతురస్ర ధర్మం)**

(iii) **పరస్పరం లంబంగా ఉంటాయి.**

12.5 టాన్‌గ్రామ్‌తో చిత్రాలను రూపొందించడం

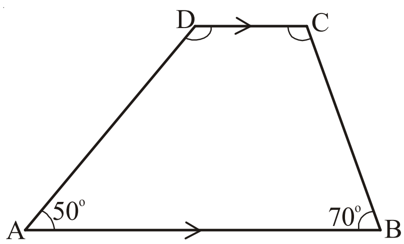


టాన్‌గ్రామ్ ముక్కలను అన్నింటినీ ఉపయోగించి ట్రెపీజియం, సమాంతర చతుర్భుజం, దీర్ఘచతురస్రం, చతురస్రాలను నిర్మించండి.



ఈ ముక్కలన్నీ ఉపయోగించి మీరు వీలైనన్ని ఆకారాలను నిర్మించండి. పైన రెండు ఉదాహరణలిచ్చాం.

ఉదాహరణ 10 : ట్రెపీజియం ABCD లో CD కి AB సమాంతరంగా ఉంటుంది. $\angle A = 50°$, $\angle B = 70°$. అయితే $\angle C$ మరియు $\angle D$ లను కనుక్కోండి.



సాధన : CD కి AB సమాంతరం కాబట్టి

$\angle A + \angle D = 180°$

(తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపుఉన్న అంతరకోణాలు)

కాబట్టి $\angle D = 180° - 50° = 130°$

అదేవిధంగా $\angle B + \angle C = 180°$

కాబట్టి $\angle C = 180° - 70° = 110°$

ఉదాహరణ 11 : సమాంతర చతుర్భుజంలోని రెండు ఆసన్న కోణాలు 3 : 2 నిష్పత్తిలో ఉంటే ఆ కోణాలను కనుక్కోండి.

సాధన : సమాంతర చతుర్భుజంలోని ఆసన్న కోణాలు సంపూరకాలు

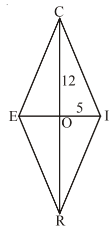
వాటి మొత్తం $= 180°$

ఆసన్నకోణాల నిష్పత్తి $= 3:2$

కాబట్టి కోణాలు $= 180 \times \frac{3}{5} = 108^{o}$ మరియు

$= 180 \times \frac{2}{5} = 72^{o}$

ఉదాహరణ 12 : RICE ఒక సమ చతుర్భుజం. కర్ణాల ఖండన బిందువు 'O' OE, OR లను కనుక్కోండి. మీ పరిశీలనలను నిరూపించండి.



సాధన : సమ చతుర్భుజ కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకొంటాయి.

OE = OI , OR = OC

కాబట్టి OE = 5 , OR = 12

అభ్యాసం - 2

1. సత్యమో, అసత్యమో తెలపండి.

   (i) దీర్ఘచతురస్రాలన్నీ చతురస్రాలు ( )

   (ii) సమచతుర్భుజాలన్నీ సమాంతర చతుర్భుజాలు ( )

   (iii) చతురస్రాలన్నీ సమచతుర్భుజాలు, మరియు దీర్ఘచతురస్రాలు ( )

   (iv) చతురస్రాలన్నీ సమాంతర చతుర్భుజాలు కావు. ( )

   (v) గాలిపటాలన్నీ సమచతుర్భుజాలే ( )

   (vi) సమచతుర్భుజాలన్నీ గాలిపటాలే ( )

   (vii) సమాంతర చతుర్భుజాలన్నీ ట్రెపీజియాలే ( )

   (viii) చతురస్రాలన్నీ ట్రెపీజియాలే ( )

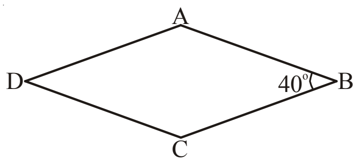
2. చతురస్రం ఎలా?

   (i) చతుర్భుజం అవుతుందో తెలపండి. (ii) సమాంతర చతుర్భుజం అవుతుందో తెలపండి.

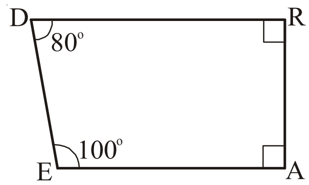
   (iii) సమచతుర్భుజం అవుతుందో తెలపండి. (iv) దీర్ఘచతురస్రం అవుతుందో తెలపండి.

3. సమచతుర్భుజం ABCD లో $\angle CBA = 40°$

   మిగతా కోణాలను కనుక్కోండి.

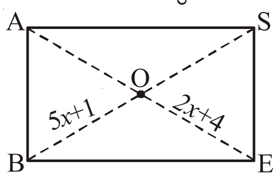


4. ఒక సమాంతర చతుర్భుజంలోని ఆసన్న కోణాలు x°, $(2x + 30)^\circ$ సమాంతర చతుర్భుజంలోని అన్నికోణాలను కనుక్కోండి.



5. DEAR ఒక ట్రెపీజియం ఎందువల్ల అవుతుందో వివరించండి. ఏరెండు భుజాలు సమాంతరంగా ఉన్నాయి?

6. BASE ఒక దీర్ఘచతురస్రం. దాని కర్ణాలు O వద్ద సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి. OB = $5x$+1, OE = $2x$+ 4 అయితే x ను కనుక్కోండి.



7. $\angle A = 70^\circ$, $\angle C = 65^\circ$ అయితే ABCD సమాంతర చతుర్భుజం అవుతుందా? కారణం తెలపండి.

8. సమాంతర చతుర్భుజంలోని రెండు ఆసన్న భుజాలు 5:3 నిష్పత్తిలో ఉన్నాయి. దాని పరిధి 48 సెం.మీ. అయితే దాని భుజాల కొలతలను కనుక్కోండి.

9. చతుర్భుజ కర్ణాలు పరస్పరం లంబంగా ఉంటే ఆ చతుర్భుజం సమ చతుర్భుజం అవుతుందా? మీ సమాధానాన్ని బలపర్చేందుకు చిత్రపటాన్ని గీయండి.

10. ABCD ట్రెపీజియంలో AB // DC. $\angle A = \angle B = 30^\circ$ అయితే మిగతా రెండు కోణాలను కనుక్కోండి.

11. ఖాళీలు పూరించండి.

(i) రెండు ఆసన్న భుజాలు సమానంగా ఉండే సమాంతర చతుర్భుజం ______________.

(ii) ఒక కోణం 90°, రెండు ఆసన్న భుజాలు సమానంగా ఉండే సమాంతర చతుర్భుజం ______________.

(iii) ట్రెపీజియం ABCD లో AB // DC. $\angle D = x^\circ$ అయితే $\angle A =$ ____________.

(iv) సమాంతర చతుర్భుజంలోని ప్రతి కర్ణం దాన్ని __________ త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది.

(v) సమాంతర చతుర్భుజం ABCD లో కర్ణాలు AC, BD లు O వద్ద ఖండించుకుని AO = 5 సెం.మీ అయితే AC = __________ సెం.మీ

(vi) సమ చతుర్భుజం ABCD లో కర్ణాలు 'O' వద్ద ఖండించుకుంటే $\angle AOB =$ __________ డిగ్రీలు

(vii) ABCD సమాంతర చతుర్భుజమైతే $\angle A - \angle C =$ __________ డిగ్రీలు

(viii) దీర్ఘచతురస్రం ABCD లో కర్ణం AC = 10సెం.మీ అయితే రెండవ కర్ణం BD = ________ సెం.మీ

(ix) ABCD చతురస్రంలో కర్ణం AC గీయబడింది. $\angle BAC =$ ____________ డిగ్రీలు

మనం నేర్చుకున్నవి

1. నాలుగు రేఖాఖండాలతో సంవృతమైన చిత్రాన్ని 'చతుర్భుజం' అంటారు.
2. ప్రతి చతుర్భుజం తలాన్ని అంతర, బాహ్య, హద్దు తలాలుగా విభజిస్తుంది.
3. ప్రతి చతుర్భుజంలో ఒక జత కర్ణాలుంటాయి.
4. చతుర్భుజంలో అంతరంగా ఉన్న బిందువులను కలిపే రేఖాఖండాలన్ని చతుర్భుజానికి అంతరంగా ఉంటాయి. అనగా చతుర్భుజంలో అంతరంగా కర్ణాలు ఉంటే ఆ చతుర్భుజాన్ని కుంభాకార చతుర్భుజం అంటారు.
5. చతుర్భుజంలో అంతరంగా ఉన్న బిందువులను కలిపే రేఖాఖండాలన్నీ చతుర్భుజానికి అంతరంగా ఉండే అవకాశం లేని అనగా కర్ణాలలో ఏదైనా చతుర్భుజానికి అంతరంగా లేకపోతే దాన్ని పుటాకార చతుర్భుజం అంటారు.
6. చతుర్భుజ అంతరకోణాల మొత్తం $360°$.
7. చతుర్భుజాల ధర్మాలు

చతుర్భుజం	**ధర్మాలు**
సమాంతర చతుర్భుజం : ఎదురెదురు భుజాల జతలు రెండూ సమాంతరంగా ఉండే చతుర్భుజం	(1) ఎదురెదురు భుజాలు సమానం (2) ఎదురెదురు కోణాలు సమానం (3) కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి.
సమ చతుర్భుజం : అన్ని భుజాలు సమానంగా ఉండే సమాంతర చతుర్భుజం	(1) సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క అన్ని ధర్మాలు (2) కర్ణాలు పరస్పరం లంబంగా ఉంటాయి.
దీర్ఘచతురస్రం : అన్నీ లంబకోణాలుండే సమాంతర చతుర్భుజం	(1) సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క అన్ని ధర్మాలు (2) ప్రతి కోణమూ లంబకోణం (3) కర్ణాలు సమానం
చతురస్రం : భుజాలు సమానంగా ఉండే దీర్ఘచతురస్రం	(1) సమాంతర చతుర్భుజ, సమ చతుర్భుజ, దీర్ఘచతురస్రం యొక్క అన్నిధర్మాలు (2) భుజాలన్ని సమానం
గాలిపటం : వరుస భుజాలు సమానంగా ఉండే జత భుజాలు కలిగిన చతుర్భుజం	(1) కర్ణాలు పరస్పరం లంబంగా ఉంటాయి. (2) కర్ణాలు సమాన కొలతల్లో ఉండవు. (3) కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి.
ట్రెపీజియం : ఒక జత భుజాలు సమాంతరంగా ఉండే చతుర్భుజం	(1) ఎదురెదురు భుజాలు సమాంతరంగా ఉండే ఒక జతను కలిగి ఉంటుంది.

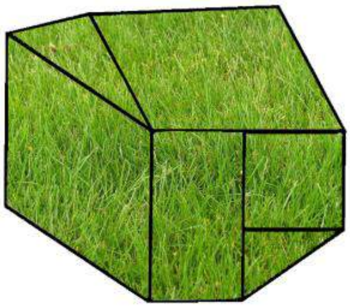
వైశాల్యం - చుట్టుకొలత

13

13.0 పరిచయం

ఇరా తన పొలం (పటం -1) వైశాల్యం కనుగొనాలని అనుకొంది. కాని ఇది క్రమకారంలో లేదని గుర్తించింది. కావున ఇరా తన పొలంను (పటం-2) లో చూపిన విధంగా త్రిభుజం, దీర్ఘచతురస్రం, సమాంతర చతుర్భుజం, రాంబస్ మొదలైన క్రమాకార రూపాలుగా విభజించింది. ఈ క్రమాకార ఆకారాలన్నింటి వైశాల్యంను కనుగొన గలిగితే తన పొలం మొత్తం వైశాల్యంను కనుక్కోవచ్చునని భావించింది.

పటం -1

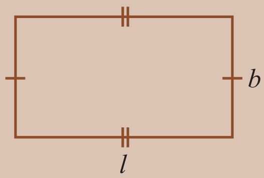
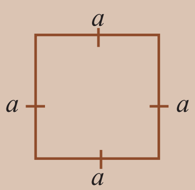


పటం -2

దీర్ఘచతురస్రం, చతురస్రంల యొక్క చుట్టుకొలత, వైశాల్యాలను ఎలా కనుగొంటామో మనం కింది తరగతులలో నేర్చుకున్నాం. ఈ అధ్యాయంలో త్రిభుజం, సమాంతర చతుర్భుజం, సమ చతుర్భుజం (రాంబస్) వైశాల్యాలను ఎలా కనుగొంటామో తెలుసుకుందాం. ముందుగా చతురస్రం, దీర్ఘచతురస్రాల చుట్టుకొలత, వైశాల్యాల గురించి కింది తరగతులలో మనమేమి నేర్చుకున్నామో గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం.

అభ్యాసం 1

1. కింది పట్టికలోని ఖాళీలను పూరించండి.

పటం	ఆకారం	వైశాల్యం	చుట్టుకొలత
	దీర్ఘచతురస్రం	$l \times b = lb$	______
	చతురస్రం	______	4a

2. కొన్ని చతురస్రాల కొలతల వివరాలు కింది పట్టికలో ఇవ్వబడినాయి. అయితే ఇవి అసంపూర్తిగా ఉన్నాయి. వీటిని గణించి పూర్తి చేయండి?

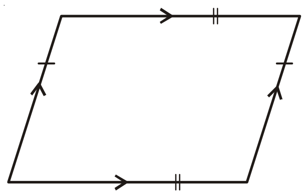
చతురస్ర భుజం	వైశాల్యం	చుట్టుకొలత
15 సెం.మీ.	225 చ.సెం.మీ.	
		88 సెం.మీ.

3. కొన్ని దీర్ఘచతురస్రాలకు సంబంధించిన కొలత వివరాలు కింది పట్టికలో అసంపూర్తిగా ఇవ్వబడినాయి. అసంపూర్తిగా ఉన్న వివరాలను గుర్తించి పూరించండి?

పొడవు	వెడల్పు	వైశాల్యం	చుట్టుకొలత
20 సెం.మీ.	14 సెం.మీ.		
	12 సెం.మీ.		60 సెం.మీ.
15 సెం.మీ.		150 సెం.మీ.^{2}	

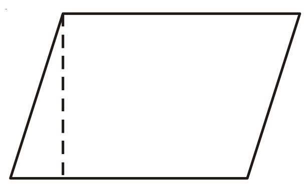
13.1 సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం

పక్క పటం-1 ఆకారాన్ని చూడండి. ఇది ఒక సమాంతర చతుర్భుజం. దీని వైశాల్యంను ఎలా కనుగొంటామో నేర్చుకుందాం.

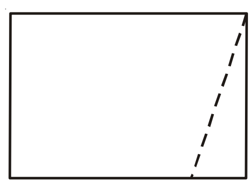

పటం -1

కృత్యం 1

- కాగితంపై ఒక సమాంతర చతుర్భుజం (పటం-2) ను గీయండి.
- ఈ సమాంతర చతుర్భుజంను కాగితం నుండి కత్తిరించి వేరు చేయండి.
- పటం 2లో చూపిన విధంగా చుక్కల గీత వెంట కత్తిరించి త్రిభుజంను, సమాంతర చతుర్భుజం నుంచి వేరు చేయండి.


పటం -2

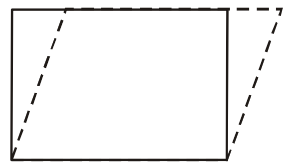
- కత్తిరించిన త్రిభుజం పటం-3 లో చూపిన విధంగా సమాంతర చతుర్భుజంనకు మరొక వైపు అమర్చండి. అయితే ఈ రెండు కాగితం ముక్కలను కలపడం వలన దీర్ఘ చతురస్రం ఏర్పడింది.


పటం -3

పటం (2) లోని సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం, పటం (3)లోని దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యంనకు సమానమే అని చెప్పవచ్చా? సమానమే అని మీరు కనుక్కోవచ్చు.

కింది కృత్యం నుంచి సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం, దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం సమానమని గుర్తించగలం.

దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం, పొడవు × వెడల్పునకు సమానమని మనకు తెలుసు. దీర్ఘచతురస్రం యొక్క పొడవు సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క భూమికి మరియు దీర్ఘచతురస్రం యొక్క వెడల్పు సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఎత్తుకు సమానమని కూడా మనకు తెలుసు.

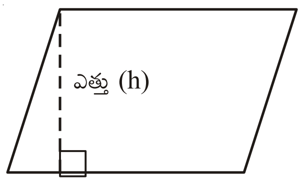


కాబట్టి సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం = దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం

= పొడవు × వెడల్పు

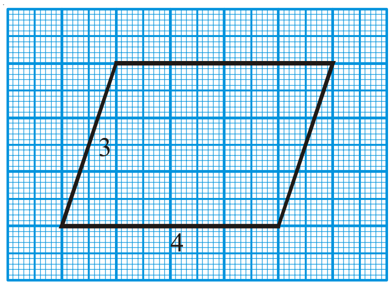
= భూమి × ఎత్తు (పొడవు = భూమి, వెడల్పు = ఎత్తు)

కావున సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం దాని భూమి (b) మరియు అనురూప ఎత్తు అనగా (h) ల లబ్ధానికి సమానం అనగా A = bh.



ఉదాహరణ 1 : (i), (ii) పటాలలో ఇవ్వబడిన సమాంతర చతుర్భుజాల వైశాల్యాలను కనుగొనుము.

(i)



పటం -1

సాధన :

సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క భూమి (b) = 4 యూనిట్లు.

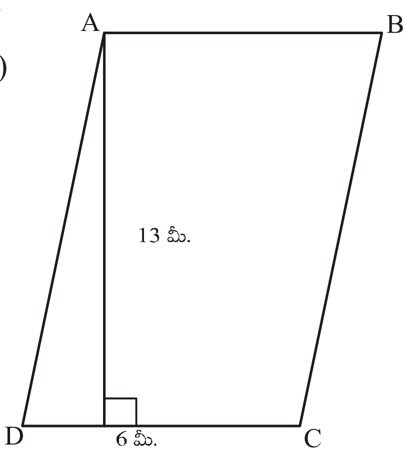
సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఎత్తు (h) = 3 యూనిట్లు.

సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం (A) = bh

కాబట్టి, A = 4 × 3 = 12 చ. యూనిట్లు.

అందుచే సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం 12 చ.యూనిట్లు.

(ii)



పటం -2

సాధన :

సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క భూమి (b) = 6 మీ.

సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఎత్తు (h) = 13 మీ.

వైశాల్యం (A) = bh

కాబట్టి A = 6×13 = 78 చ.మీ.

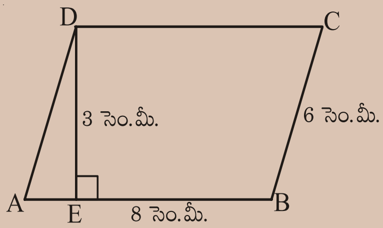
ABCD సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం = 78 చ.మీ.

ప్రయత్నించండి.

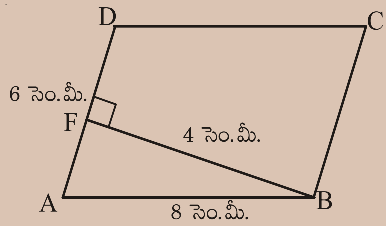
ABCD సమాంతర చతుర్భుజం పటం – 1 యొక్క భుజాలు 8సెం.మీ., 6 సెం.మీ. అయిన సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క భూమి పొడవు ఎంత? ఎత్తు ఎంత? దాని వైశాల్యం ఎంత?

పటం – 2 లోని సమాంతర చతుర్భుజంలో భూమి ఏది? ఎత్తు ఏది? దీని వైశాల్యం ఎంత?

పటం – 1 మరియు పటం – 2 లో వైశాల్యాలు సమానమేనా?

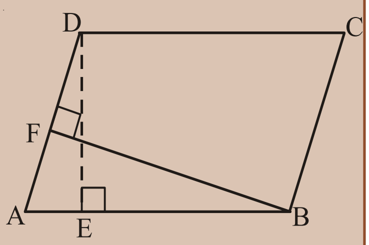


పటం – 1



పటం – 2

సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఏ భుజాన్నైనా దాని భూమిగా ఎంచుకోవచ్చు లేదా తీసుకోవచ్చు. పటం–1లో AB మీదకు గీయబడిన లంబం $\overline{DE}$ కనుక ఈ సమాంతర చతుర్భుజంలో భూమి $\overline{AB}$, ఎత్తుగా $\overline{DE}$ అవుతుంది. అదే విధంగా పటం –2లో $\overline{AD}$ పైకి గీయబడిన లంబం $\overline{BF}$ కనుక ఈ సమాంతర చతుర్భుజంలో AD భూమి. ఎత్తు $\overline{BF}$ అవుతుంది.

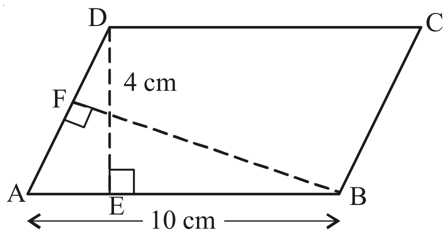


ఇవి చేయండి.

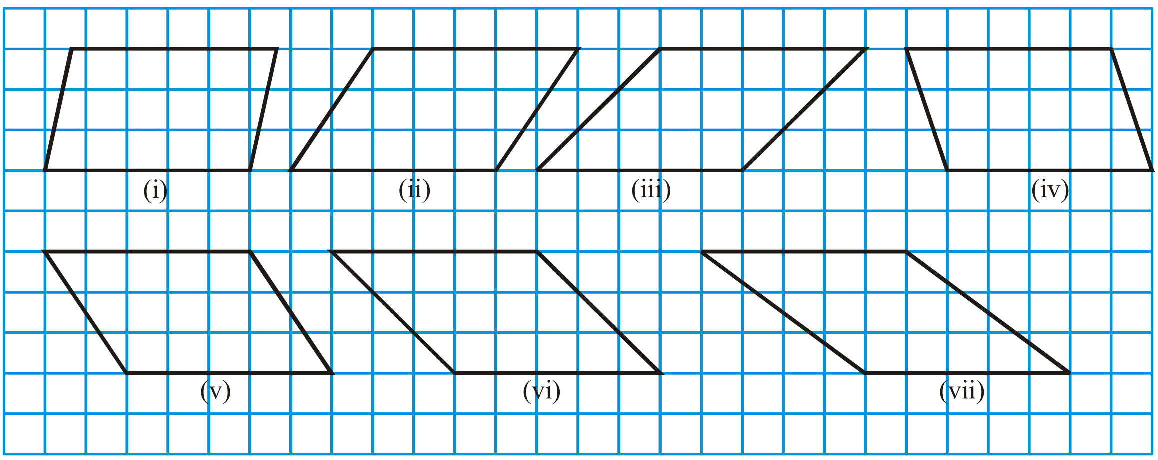
1. సమాంతర చతుర్భుజం ABCD లో $\overline{AB}$ = 10 సెం.మీ. $\overline{DE}$ = 4 సెం.మీ. అయిన కింది వాటిని కనుక్కోండి.

   (i) ABCD వైశాల్యం

   (ii) $\overline{AD}$ = 6 సెం.మీ. అయిన $\overline{BF}$ యొక్క పొడవు



2. కింది పటాలను జాగ్రత్తగా పరిశీలించండి.



(i) ప్రతీ సమాంతర చతుర్భుజంలోని గళ్ళు (చతురస్రాల)ను లెక్కించుట ద్వారా దాని వైశాల్యమును కనుగొనండి? ప్రతి సమాంతర చతుర్భుజంలో అసంపూర్ణ చతురస్రాలను లెక్కించునపుడు రెండు అసంపూర్ణ చతురస్రాలు కలిసి ఒక చతురస్రం అయ్యేలా తీసుకోండి.

వీటి ఆధారంగా కింది పట్టికను పూరించండి?

సమాంతర చతుర్భుజం	భూమి	ఎత్తు	వైశాల్యం	లెక్కించిన చతురస్రాల ఆధారంగా వైశాల్యం		
				పూర్తి చతురస్రాల సంఖ్య	అసంపూర్ణ చతురస్రాల సంఖ్య	మొత్తం
(i)	5 యూనిట్లు	3 యూనిట్లు	5 × 3 = 15 చదరపు యూనిట్లు	12	6	15
(ii)						
(iii)						
(iv)						
(v)						
(vi)						
(vii)						

(ii) సమాన భూమి, సమాన ఎత్తు గల సమాంతర చతుర్భుజాల వైశాల్యాలు సమానంగా ఉంటాయా?

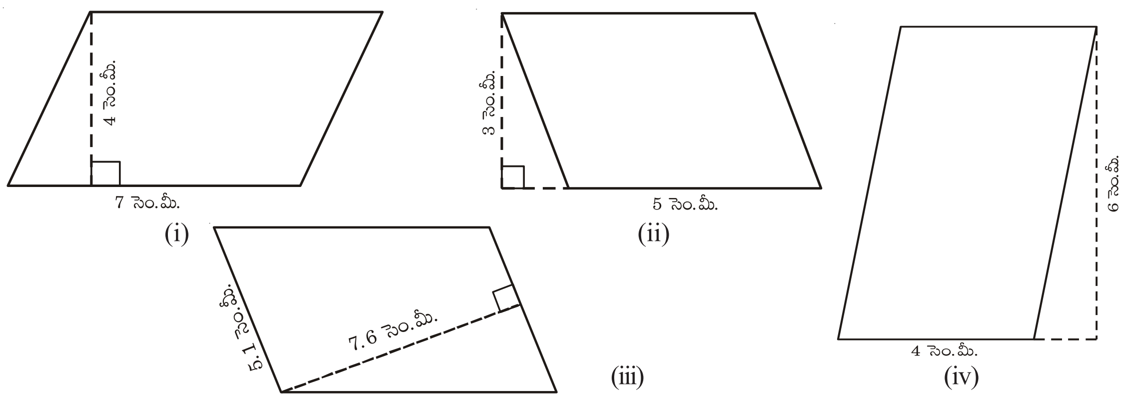
ప్రయత్నించండి.

(i) దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం, సమాంతర చతుర్భుజం వైశాల్యాలను కనుగొనుటకు ఉపయోగించే సూత్రాలు ఒకే విధంగా ఎందుకు ఉన్నాయి?

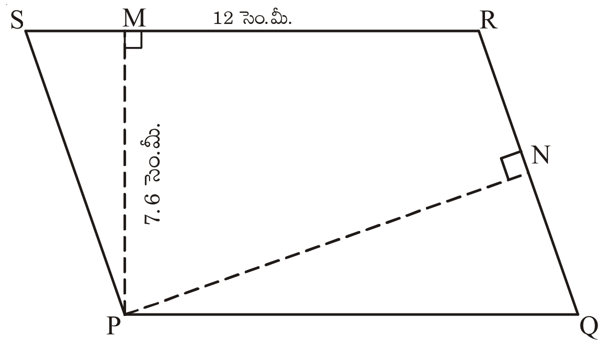
(ii) ప్రతీ దీర్ఘచతురస్రం ఒక సమాంతర చతుర్భుజమైంది. కానీ ప్రతీ సమాంతర చతుర్భుజం ఒక దీర్ఘచతురస్రము కాకపోవచ్చు వివరించండి.

అభ్యాసం - 2

1. ప్రతి సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యంను కనుగొనండి?



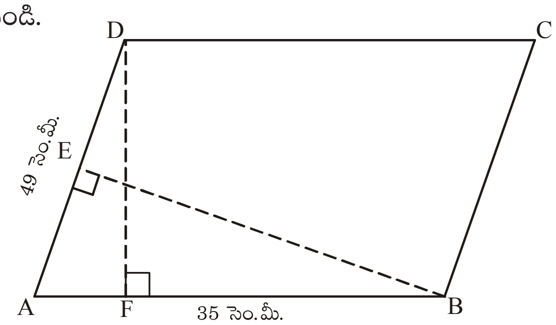
2. PQRS ఒక సమాంతర చతుర్భుజం. P నుండి $\overline{SR}$ పైకి గీయబడిన లంబం $\overline{PM}$. మరియు P నుండి $\overline{QR}$ పైకి గీయబడిన లంబం $\overline{PN}$. $\overline{SR}$ = 12 సెం.మీ. PM = 7.6 సెం.మీ. అయిన



(i) PQRS సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యమెంత?

(ii) $\overline{QR}$ = 8 సెం.మీ. అయిన $\overline{PN}$ విలువను కనుగొనండి?

3. ABCD సమాంతర చతుర్భుజంలో $\overline{DF}$, $\overline{BE}$ లు వరుసగా $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ ల పైకి గీయబడిన లంబాలు. $\overline{AB}$ = 35 సెం.మీ. $\overline{AD}$ = 49 సెం.మీ. మరియు సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం 1470 సెం.మీ.^{2} అయిన BE, DF లను కనుగొనండి.



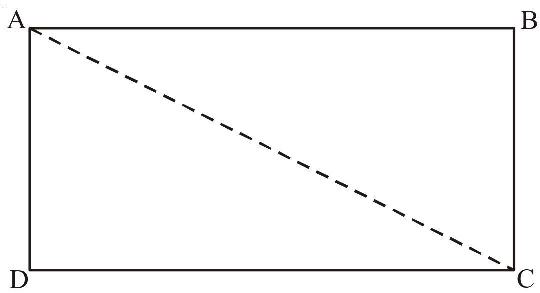
4. ఒక సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఎత్తు, దాని భూమిలో 1/3 వ వంతు ఉంది. సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం 192 సెం.మీ.^{2} అయిన దాని భూమిని, ఎత్తును కనుగొనండి?

5. ఒక సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క భూమి, ఎత్తులు 5:2 నిష్పత్తిలో ఉన్నాయి. సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం 360 చ.మీ. అయిన దాని భూమి మరియు ఎత్తులను కనుగొనండి?

6. ఒక చతురస్రం, మరియు ఒక సమాంతర చతుర్భుజంల యొక్క వైశాల్యం సమానం. చతురస్రం యొక్క భుజము 40 మీ. సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఎత్తు 20మీ. అయిన సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క భూమిని కనుగొనండి.

13.2 త్రిభుజ వైశాల్యం

13.2.1 దీర్ఘచతురస్రంలో భాగాలుగా త్రిభుజాలు



ఒక దీర్ఘచతురస్రాన్ని ఒక కాగితంపై గీయండి. దీనిని పటంలో చూపిన విధంగా దాని కర్ణము వెంట కత్తిరించగా ఏర్పడిన రెండు త్రిభుజాలను తీసుకోండి.

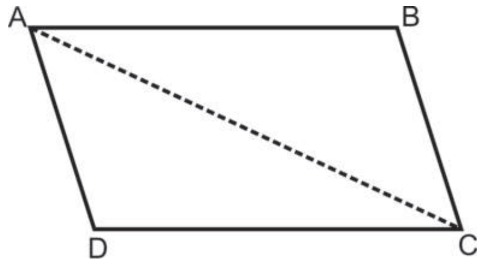
వీటిని ఒక త్రిభుజంపై మరొక త్రిభుజం ఏకీభవించునట్లుగా ఉంచండి. ఈ రెండు త్రిభుజాల వైశాల్యాలు సమానమేనా? రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానమని చెప్పవచ్చా?

ఈ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానం. అందుచే దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం రెండు త్రిభుజాల వైశాల్యాల మొత్తంనకు సమానం.

కాబట్టి, త్రిభుజం వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times$ (దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం)

$$= \frac{1}{2} \times (l \times b) = \frac{1}{2} lb$$

13.2.2 సమాంతర చతుర్భుజాలలో భాగాలుగా త్రిభుజాలు



పటంలో చూపిన విధంగా కాగితంపై ఒక సమాంతర చతుర్భుజంను గీయండి. దీనిని రెండు త్రిభుజాలుగా కర్ణము వెంట కత్తిరించుము. ఏర్పడిన రెండు త్రిభుజాలను ఒక దానిపై మరొకటి ఉంచండి. ఈ రెండు త్రిభుజాల వైశాల్యాలు సమానమేనా?

సమాంతర చతుర్భుజం వైశాల్యం దాని భూమి, ఎత్తుల లబ్దానికి సమానం అని మనకు తెలుసు కాబట్టి,

త్రిభుజ వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times$ (సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం)

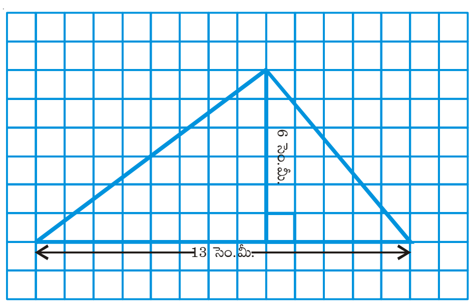
$= \frac{1}{2} \times$ (భూమి $\times$ ఎత్తు)

$= \frac{1}{2} \times b \times h \quad = \frac{1}{2} bh$

అందుచే ఒక త్రిభుజవైశాల్యం దాని భూమి (b), ఎత్తు (h)ల లబ్దంలో సగానికి సమానం.

అనగా త్రిభుజ వైశాల్యం $A = \frac{1}{2} bh$

ఉదాహరణ 2 : కింది పటంలోని త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యంను కనుగొనండి.



సాధన :

త్రిభుజ భూమి (b) = 13 సెం.మీ.

త్రిభుజ ఎత్తు (h) = 6 సెం.మీ.

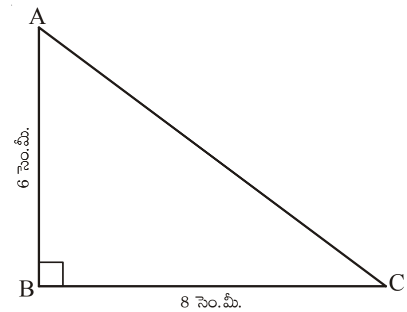
త్రిభుజ వైశాల్యం (A) $= \frac{1}{2}$ (భూమి $\times$ ఎత్తు) లేదా $= \frac{1}{2} bh$

కాబట్టి, $A = \frac{1}{2} \times 13 \times 6$

$= 13 \times 3 = 39$ చ.సెం.మీ.

త్రిభుజ వైశాల్యం = 39 చ.సెం.మీ.

ఉదాహరణ 3 : త్రిభుజం ABC యొక్క వైశాల్యంను కనుగొనండి



త్రిభుజం యొక్క భూమి (b) $= 8$ సెం.మీ.

త్రిభుజం యొక్క ఎత్తు (h) $= 6$ సెం.మీ.

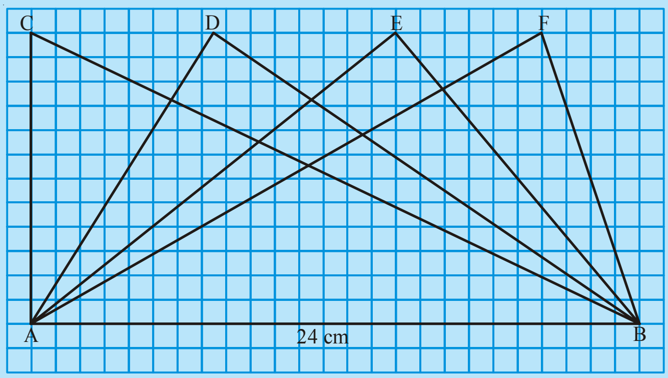
త్రిభుజ వైశాల్యం (A) $= \frac{1}{2}$ bh

కాబట్టి, త్రిభుజ వైశాల్యం $A = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24$ సెం.మీ.^{2}

అందుచే ABC త్రిభుజ వైశాల్యం $= 24$ సెం.మీ.^{2}

లంబకోణ త్రిభుజంలోని రెండు భుజాలలో దేనినైనా ఎత్తుగా తీసుకోవచ్చని గమనించగలరు.

ప్రయత్నించండి.



పక్క పటంలో అన్ని త్రిభుజాలు ఒకే భూమి AB = 24 సెం.మీ. పై గీయబడినవి. ఒకే భూమి AB పై గీయబడిన అన్ని త్రిభుజాల ఎత్తులు సమానమేనా?

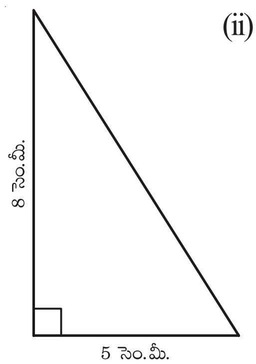
అన్ని త్రిభుజాల వైశాల్యాలు సమానమేనా? నీ సమాధానానికి తగిన కారణాలు తెలపండి.

ఈ త్రిభుజాలు సర్వసమానం కూడా అవుతాయా?

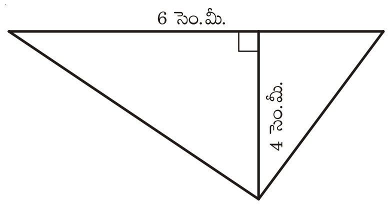
అభ్యాసం - 3

1. కింది త్రిభుజాల వైశాల్యాలను కనుగొనండి.

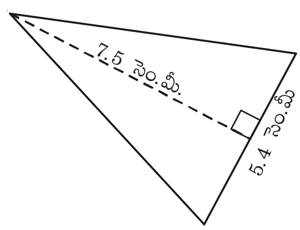
(i)



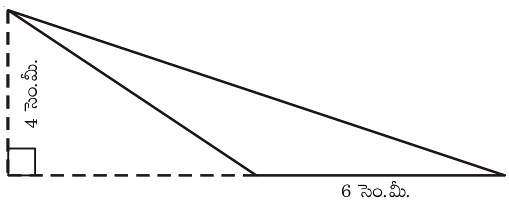
(ii)



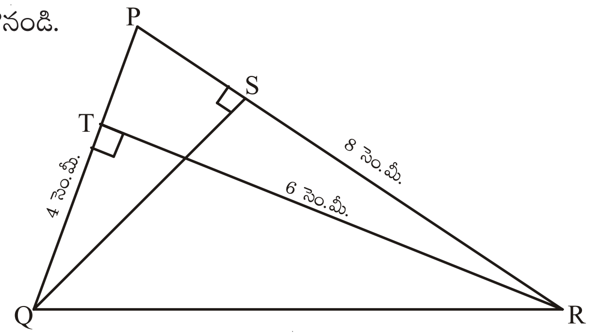
(iii)



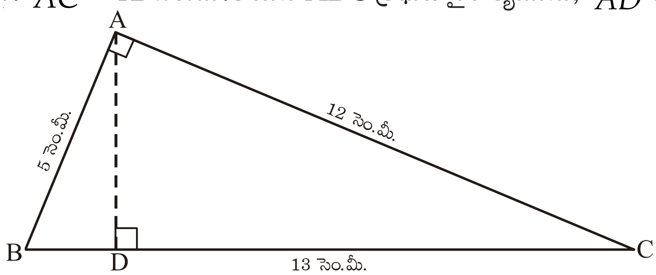
(iv)



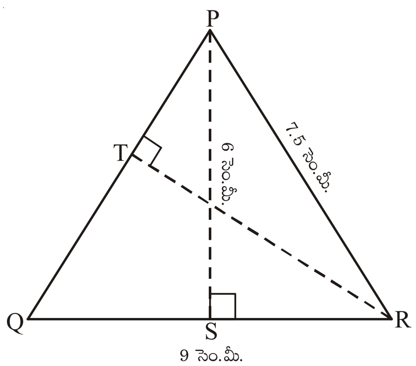
2. ΔPQR లో $\overline{PQ}=4$ సెం.మీ., $\overline{PR}=8$ సెం.మీ., $\overline{RT}=6$ సెం.మీ. అయిన (i) ΔPQR వైశాల్యంను (ii) $\overline{QS}$ పొడవును కనుగొనండి.



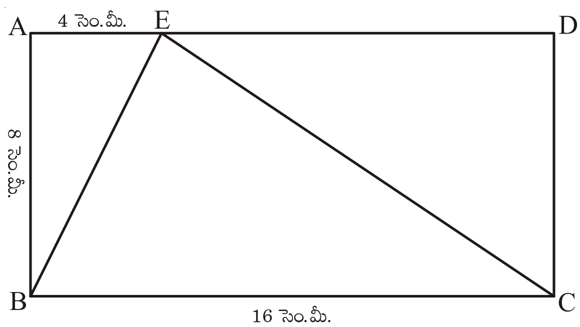
3. ΔABC లో A వద్ద లంబకోణం కలదు. $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ పైకి గీయబడిన లంబం. AB = 5 సెం.మీ., $\overline{BC}=13$ సెం.మీ. $\overline{AC}=12$ సెం.మీ.అయిన ABC త్రిభుజ వైశాల్యమును, $\overline{AD}$ పొడవును కనుగొనండి?



4. PQR ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజం. $\overline{PQ}=\overline{PR}=7.5$ సెం.మీ. మరియు $\overline{QR}=9$ సెం.మీ. P నుంచి $\overline{QR}$ పైకి గీయబడిన ఎత్తు $\overline{PS}=6$ సెం.మీ. అయిన ΔPQR వైశాల్యంను మరియు $\overline{RT}$ పొడవును కనుగొనండి?

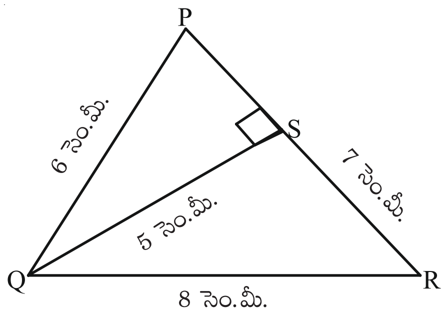


5. ABCD దీర్ఘచతురస్రంలో $\overline{AB}=8$ సెం.మీ., $\overline{BC}=16$ సెం.మీ., $\overline{AE}=4$ సెం.మీ. అయిన ΔBCE వైశాల్యంను కనుగొనండి? ΔBAE, ΔCDE త్రిభుజాల వైశాల్యాల మొత్తం, ΔBEC వైశాల్యం సమానమేనా? ఎందుకు?



6. రాము PQR త్రిభుజ వైశాల్యం $A = \frac{1}{2} \times 7 \times 5$ సెం.మీ.^{2} అని చెప్పాడు.

గోపి, అదే త్రిభుజ వైశాల్యం $A = \frac{1}{2} \times 8 \times 5$ సెం.మీ.^{2} అని చెప్పాడు. ఎవరు సరిగా చెప్పారు? ఎందుకు?

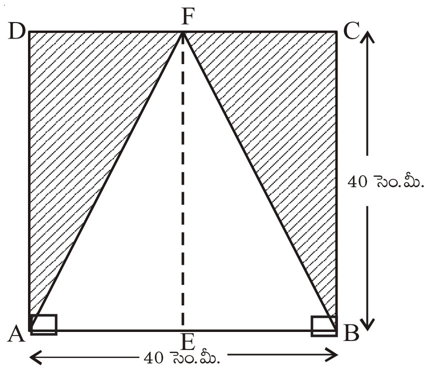


7. ఒక త్రిభుజ వైశాల్యం 220 సెం.మీ.^{2} దాని ఎత్తు 11 సెం.మీ. అయిన దాని భూమిని కనుగొనండి?

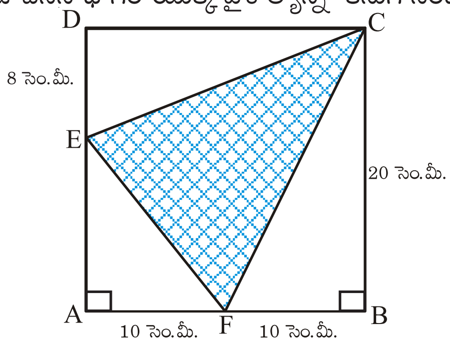
8. ఒక త్రిభుజం ఎత్తు దాని భూమికి రెండు రెట్లు ఉంది. త్రిభుజ వైశాల్యం 400 సెం.మీ.^{2} అయిన త్రిభుజ భూమిని, ఎత్తును కనుగొనండి?

9. ఒక త్రిభుజ వైశాల్యం, దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యంనకు సమానం. దీర్ఘచతురస్రం యొక్క పొడవు, వెడల్పులు వరుసగా 20 సెం.మీ., 15 సెం.మీ. త్రిభుజం యొక్క భూమి 30 సెం.మీ. అయిన త్రిభుజం యొక్క ఎత్తును కనుగొనండి?

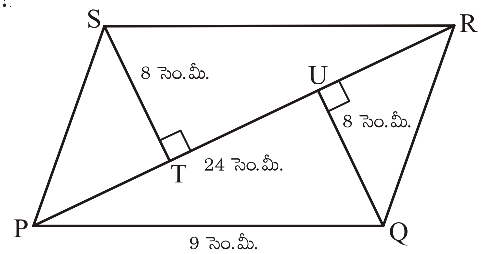
10. పటం ABCD లో షేడ్ చేయబడిన భాగం యొక్క వైశాల్యంను కనుగొనండి? ($\overline{DF} = \overline{CF}$)



11. ABCD పటంలో షేడ్ చేసిన భాగం యొక్క వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి?



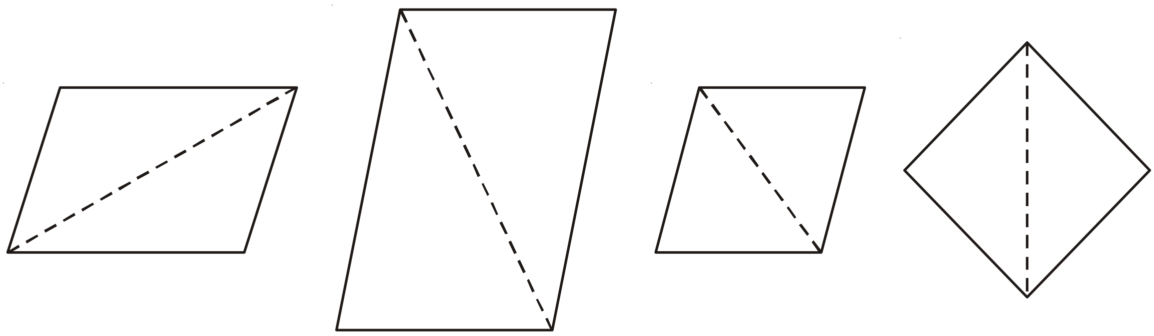
12. PQRS సమాంతర చతుర్భుజంలో $\overline{PR} = 24$ సెం.మీ. మరియు $\overline{QU} = \overline{ST} = 8$ సెం.మీ. అయిన దాని వైశాల్యం కనుగొనండి?



13. ఒక త్రిభుజం యొక్క భూమి, ఎత్తులు 3:2 నిష్పత్తిలో కలవు. త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యం 108 సెం.మీ.^{2} అయిన దాని భూమి, ఎత్తులను కనుగొనండి?

13.3 సమచతుర్భుజం (రాంబస్) యొక్క వైశాల్యం

సంతోష్, అఖిల మంచి మిత్రులు. కాగితంతో వివిధ ఆకారాలను కత్తిరించి వాటితో ఆడుతున్నారు. ఒకరోజు సంతోష్ వివిధ త్రిభుజాల ఆకారాలను అఖిలకు ఇచ్చాడు. అఖిల వాటితో వేరువేరు ఆకారాలు కల్గిన సమాంతర చతుర్భుజాలను ఏర్పరచింది. ఈ సమాంతర చతుర్భుజాలు కింద చూపబడినవి.



"వీటిలో అన్ని భుజాలు సమానంగా ఉన్న సమాంతర చతుర్భుజాలు ఏవి?" అని సంతోష్ అఖిలను అడిగాడు.

దానికి అఖిల "చివరి రెండు" సమాన భుజాలు కల్గి ఉన్నాయి అని తెలిపింది.

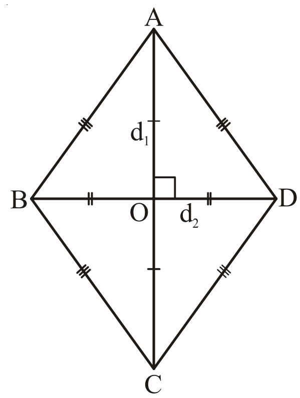
వెంటనే సంతోష్ **"ఈ విధంగా అన్ని భుజాలు సమానంగా గల సమాంతర చతుర్భుజాన్ని సమచతుర్భుజం (రాంబస్) అంటాం".** అని తెల్పాడు.

మనమిప్పుడు సమచతుర్భుజం వైశాల్యాన్ని ఎలా గణించవచ్చో నేర్చుకుందాం!

త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యంను కనుగొనడానికి సమాంతర చతుర్భుజంను రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా ఎలా విభజించామో, అదే పద్ధతిని సమచతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యంను కనుగొనుటలో కూడా ఉపయోగిద్దాం.

ABCD ఒక సమచతుర్భుజం (రాంబస్)

ABCD సమచతర్భుజ వైశాల్యం = (ΔACD వైశాల్యం) + (ΔACB వైశాల్యం)



$$= \left(\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{OD}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{OB}\right)$$

(సమచతుర్భుజములో కర్ణాలు పరస్పరం లంబ సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి

$$= \frac{1}{2}\overline{AC}\times(\overline{OD}+\overline{OB})$$

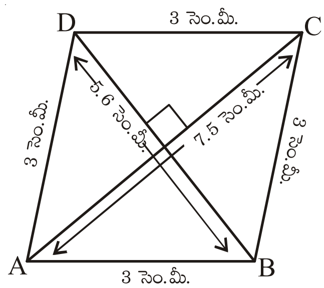
$$= \frac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{BD}$$

$$= \frac{1}{2}d_1\times d_2 \ (AC = d_1 \text{ మరియు } BD = d_2)$$

సమచతుర్భుజ, వైశాల్యం దాని కర్ణాల లబ్ధంలో సగానికి సమానం.

అనగా $A = \frac{1}{2}\ d_1 d_2$

ఉదాహరణ 4 : ABCD సమచతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం కనుగొనండి?



సాధన : మొదటి కర్ణం పొడవు (d_1) = 7.5 సెం.మీ.

రెండవ కర్ణం పొడవు (d_2) = 5.6 సెం.మీ.

సమచతుర్భుజ వైశాల్యం (A) = $\frac{1}{2}\ d_1\ d_2$

సమచతుర్భుజ వైశాల్యం A = $\frac{1}{2} \times 7.5 \times 5.6 = 21$ సెం.మీ.^{2}

అందుచే, సమచతుర్భుజం ABCD వైశాల్యం = 21 సెం.మీ.^{2}

ఉదాహరణ 5 : ఒక సమచతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం 60 సెం.మీ.^{2} దాని ఒక కర్ణం 8 సెం.మీ. అయిన రెండవ కర్ణంను కనుగొనండి.

సాధన : మొదటి కర్ణం పొడవు (d_1) = 8 సెం.మీ.

రెండవ కర్ణం పొడవు = d_2

సమచతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం = $\frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$

కాబట్టి $60 = \frac{1}{2} \times 8 \times d_2$

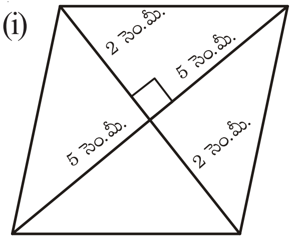
$d_2 = 15$ సెం.మీ.

అందుచేత, రెండవ కర్ణం యొక్క పొడవు = d_2 = 15 సెం.మీ.

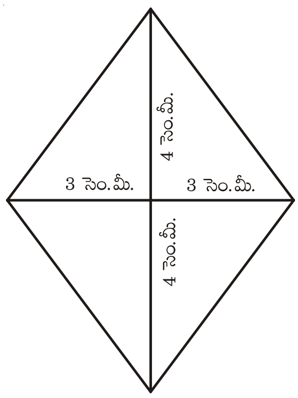
అభ్యాసం - 4

1. కింది సమచతుర్భుజాల వైశాల్యం కనుగొనండి?

(i)



(ii)



2. ఖాళీ గళ్ళను పూరించండి?

మొదటి కర్ణం (d_1)	రెండవ కర్ణం (d_2)	సమచతుర్భుజ వైశాల్యం
12 సెం.మీ.	16 సెం.మీ.	
27 మి.మీ.		2025 మి.మీ.^{2}
24 మీ.	57.6 మీ.	

3. ఒక సమచతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం 216 చ.సెం.మీ. ఒక కర్ణం 24 సెం.మీ. అయిన ఆ సమచతుర్భుజం యొక్క రెండవ కర్ణం ఎంత?

4. ఒక భవనం నేలపై సమచతుర్భుజాకారంలో ఉన్న 3000 టైల్స్ పరుచబడి ఉన్నాయి. ఒక్కొక్క టైల్ యొక్క కర్ణాలు 45 సెం.మీ., 30 సెం.మీ. ఒక చదరపు మీటరు వైశాల్యం గల నేలను పాలిష్ చేయుటకు ₹ 2.50 ఖర్చు అయిన మొత్తం నేలను (టైల్స్) పాలిష్ చేయుటకు ఎంత ఖర్చగును.

13.4 వృత్తం చుట్టుకొలత

నజియా సైకిల్ టైరుతో ఆడుకుంటుంది. ఆమె టైరును కర్రతో తిప్పుతూ దాని వెంట పరిగెత్తుతుంది. టైరు ఒక పూర్తి చుట్టు తిరిగినపుడు అది ప్రయాణించిన దూరం ఎంత?

సైకిల్ టైరు ఒక పూర్తి చుట్టు తిరిగినపుడు అది ప్రయాణించిన దూరం, ఆ టైరు చుట్టూ ఉన్న పొడవుకు సమానం. సైకిల్ టైరు యొక్క ఈ చుట్టూ వున్న పొడవునే దాని చుట్టుకొలత అంటారు.

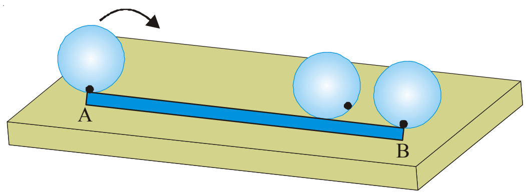
సైకిల్ టైరు ప్రయాణించిన మొత్తం దూరానికి అది తిరిగిన చుట్ల సంఖ్యకు మధ్యగల సంబంధం ఏమిటో చెప్పగలరా?

మొత్తం ప్రయాణించిన దూరం = టైరు తిరిగిన చుట్ల సంఖ్య × టైరు చుట్టుకొలత.

కృత్యం : 2

జయ ఒక వృత్తాకార ముక్కను కార్డుబోర్డునుండి కత్తిరించి తీసుకొంది. దీనిని అందంగా తయారుచేయటం కొరకు దీనిచుట్టూ ఒక లేసును పటంలో చూపిన విధంగా అతికించాలనుకున్నది. అయితే ఆమెకు కావలసిన లేసు యొక్క పొడవు వృత్తాకార కార్డుబోర్డు యొక్క చుట్టుకొలతకు సమానమేనా? వృత్తాకార కార్డుబోర్డు యొక్క చుట్టుకొలత స్కేలు సహాయంతో కొలవగలదా?

జయ ఏమి చేసిందో పరిశీలిద్దాం?



జయ టేబుల్‌పై ఒక రేఖను గీసి ఆ గీతపై బిందువు A ను గుర్తించింది. వృత్తాకార కార్డుబోర్డుపై అంచువెంట ఒకచోట ఒక చుక్కను గుర్తించింది. ఈ చుక్కను రేఖపై గుర్తించిన A బిందువుతో ఏకీభవించునట్లు కార్డుబోర్డును టేబుల్‌పై ఉంచింది. పటంలో చూపిన విధంగా దొర్లించటం ప్రారంభించింది. కార్డుబోర్డు అంచువెంట గుర్తించిన చుక్క తిరిగి టేబుల్‌పై గీచిన రేఖతో ఏకీభవించే వరకూ దానిని దొర్లించింది. కార్డుబోర్డుపైన ఉన్న చుక్క మళ్లీ రేఖను ఏకీభవించిన బిందువును B గా గుర్తించింది. AB రేఖ పొడవు వృత్తాకార కార్డుబోర్డు యొక్క చుట్టుకొలతకు సమానమవుతుంది కనుక AB రేఖ పొడవుకు సమానమైన లేస్ పొడవు వృత్తాకార కార్డు బోర్డుకు అవసరమౌతుంది.

ప్రయత్నించండి.

సీసామూత, గాజు లేదా ఏదైనా ఒక వృత్తాకార వస్తువును తీసుకోండి. వాటి యొక్క చుట్టుకొలతను తీగ సహాయంతో కనుగొనండి.

అయితే ప్రతీ వృత్తాకార వస్తువు యొక్క చుట్టుకొలతను ఈ విధంగా కనుగొనటం సులభం కాదు. కనుక వేరే ఒక పద్ధతిని తెలుసుకోవలసి ఉంది. దీనికొరకై వృత్తం యొక్క వ్యాసంనకు దాని చుట్టుకొలతకు మధ్యసంబంధమేమైనా ఉందేమో పరిశీలిద్దాం.

ఒక వ్యక్తి వేరువేరు వ్యాసార్ధాలున్న 6 వృత్తాకార కార్డుబోర్డులను తయారు చేసి తీగ సహాయముతో వీని చుట్టుకొలతలను కనుగొన్నాడు. ఇంకా వ్యాసమునకు, చుట్టుకొలతకు మధ్యగల నిష్పత్తిని కూడా కనుగొన్నాడు.

ఈ విలువలన్నింటిని కింది పట్టికలో నమోదు చేశాడు.

వృత్తము	వ్యాసార్ధము	వ్యాసము	చుట్టుకొలత	చుట్టుకొలతకు, వ్యాసమునకు మధ్యగల నిష్పత్తి
1.	3.5 సెం.మీ.	7.0 సెం.మీ.	22.0 సెం.మీ.	$\frac{22}{7} = 3.14$
2.	7.0 సెం.మీ.	14.0 సెం.మీ.	44.0 సెం.మీ.	$\frac{44}{14} = 3.14$
3.	10.5 సెం.మీ.	21.0 సెం.మీ.	66.0 సెం.మీ.	
4.	21.0 సెం.మీ.	42.0 సెం.మీ.	132.0 సెం.మీ.	
5.	5.0 సెం.మీ.	10.0 సెం.మీ.	32.0 సెం.మీ.	
6.	15.0 సెం.మీ.	30.0 సెం.మీ.	94.0 సెం.మీ.	

పట్టికలోని ఫలితాల ఆధారంగా మీరేమి గ్రహించారు? ప్రతీ వృత్తం యొక్క చుట్టుకొలత, దాని వ్యాసంనకు మధ్యగల నిష్పత్తి సుమారుగా సమానమేనా? ఎల్లప్పుడు వృత్తం యొక్క చుట్టుకొలత, దాని వ్యాసంనకు దాదాపు మూడు రెట్లు ఉంటుందని చెప్పవచ్చా?

వృత్తం చుట్టుకొలత దాని వ్యాసంనకు మధ్యగల నిష్పత్తి విలువ సుమారుగా $\frac{22}{7}$ లేదా 3.14గా ఉంటుంది. దీనిని π (పై) చేత సూచిస్తాం. ఇది ఒక స్థిర విలువ.

కాబట్టి వృత్తం యొక్క చుట్టుకొలతను 'c' చేత వ్యాసంను 'd' చేత సూచిస్తే $\frac{c}{d} = \pi$ అవుతుంది.

కావున $\frac{c}{d} = \pi$

$c = \pi d$

అయితే, వృత్తం యొక్క వ్యాసం, వ్యాసార్ధానికి రెండింతలు అవుతుంది. అనగా $d = 2r$ (r = వ్యాసార్ధం)

$c = \pi \times 2r$ లేదా $c = 2\pi r$

అయితే, వృత్తం యొక్క చుట్టుకొలత $c = 2\pi r$

ఉదాహరణ 6 : 10 సెం.మీ. వ్యాసం కలిగిన వృత్తం యొక్క చుట్టుకొలతను కనుగొనండి. ($\pi = 3.14$ గా తీసుకొనిన)

సాధన : వృత్తం యొక్క వ్యాసం (d) = 10 సెం.మీ.

వృత్తం యొక్క చుట్టుకొలత (c) $= \pi d$

$= 3.14 \times 10$

$c = 31.4$ సెం.మీ.

అందుచేత వృత్తం చుట్టుకొలత = 31.4 సెం.మీ.

ఉదాహరణ 7 : 14 సెం.మీ. వ్యాసార్ధం గల వృత్తం యొక్క చుట్టుకొలతను కనుగొనండి? ($\pi = \frac{22}{7}$ గా తీసుకొనిన)

వృత్త వ్యాసార్ధం (r) = 14 సెం.మీ.

వృత్తం చుట్టుకొలత (c) $= 2\pi r$

$c = 2 \times \frac{22}{7} \times 14$

$c = 88$ సెం.మీ.

అందుచే, వృత్తం చుట్టుకొలత = 88 సెం.మీ.

అభ్యాసం - 5

1. కింది వ్యాసార్థాలుగా గల వృత్తాల చుట్టుకొలతలను కనుగొనండి.

   (i) 35 సెం.మీ. (ii) 4.2 సెం.మీ. (iii) 15.4 సెం.మీ.

2. కింది వ్యాసాలుగా గల వృత్తాల చుట్టుకొలతలను కనుగొనండి?

   (i) 17.5 సెం.మీ. (ii) 5.6 సెం.మీ. (iii) 4.9 సెం.మీ.

   గమనిక : పై రెండు సందర్భాలలో $\pi = \frac{22}{7}$ గా తీసుకొనుము.

3. (i) $\pi = 3.14$ గా తీసుకొని కింది వ్యాసార్థాలు కల్గిన వృత్తాల చుట్టుకొలతలు కనుగొనండి?

   (a) 8 సెం.మీ. (b) 15 సెం.మీ. (c) 20 సెం.మీ.

   (ii) చుట్టుకొలత 44 సెం.మీ.గా గలిగిన వృత్తం యొక్క వ్యాసార్థంను కనుగొనండి?

4. ఒక వృత్తం చుట్టుకొలత 264 సెం.మీ. దాని వ్యాసార్థంను కనుగొనండి. $\pi = \frac{22}{7}$.

5. ఒక వృత్తం యొక్క చుట్టుకొలత 33 సెం.మీ. అయిన దాని వ్యాసంను కనుగొనండి.

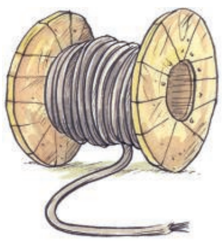
6. 35 సెం.మీ. వ్యాసార్థం గల ఒక చక్రం ఎన్ని చుట్లు తిరిగిన అది 660 సెం.మీ. దూరం ప్రయాణించగలదు?

   ($\pi = \frac{22}{7}$ గా తీసుకొనిన)

7. రెండు వృత్తాల వ్యాసాల నిష్పత్తి 3 : 4 అయిన వాని చుట్టుకొలతల నిష్పత్తిని కనుగొనండి?

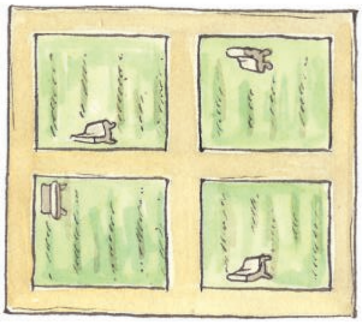
8. ఒక రోడ్డురోలరు 2200 మీ. దూరంను చదును చేయుటకు 200 చుట్లు తిరుగును. అయిన రోలరు యొక్క వ్యాసార్థంను కనుగొనండి?

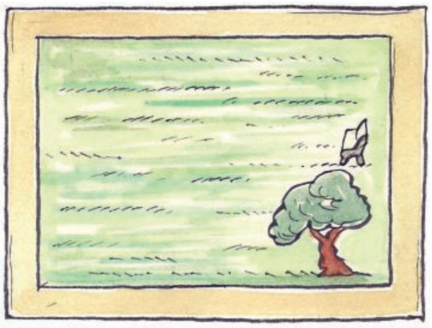
9. ఒక నిమిషాల ముల్లు పొడవు 15 సెం.మీ. దాని చివరి కొన 1 గంటలో ప్రయాణించే దూరమును కనుగొనండి.? ($\pi = 3.14$ గా తీసుకొనిన).

10. 

    ఒక తీగతో 25 సెం.మీ. వ్యాసార్థం గల వృత్తాకారాన్ని మలిచి అదే తీగతో ఒక చతురస్రాకారాన్ని తయారు చేసిన ఆ చతురస్ర భుజం పొడవు ఎంత?

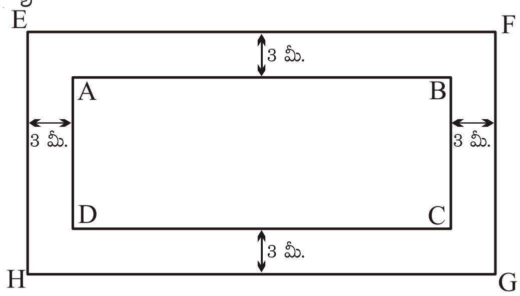
13.5 దీర్ఘచతురస్రాకార బాటలు





సాధారణంగా మనం తోటలు, పార్కులు, ఆట స్థలాలలో నడక కోసం బాటలను ఏర్పరచడం గమనించి ఉంటాం. అయితే మనం ఉపయోగం కోసం నిర్మించుకొనే ఈ బాటల కోసం అయ్యే ఖర్చు లెక్కించడానికి వాటి వైశాల్యాలు ఎలా లెక్కిస్తారో తెలుసుకుందాం.

ఉదాహరణ 8 : 60మీ. పొడవు 40 మీ. వెడల్పు గల ఒక ప్లాటు చుట్టూ 3 మీ. వెడల్పు గల బాట నిర్మించారు. అయిన ఆ బాట వైశాల్యంను కనుగొనండి?



సాధన : పై పటంలో ABCD దీర్ఘచతురస్రాకార ప్లాటును సూచిస్తుంది. దీని చుట్టూ 3 మీ. బాటను నిర్మించడమైంది. ఈ బాట వైశాల్యాన్ని కనుగొనవలెనన్న EFGH బయటి దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యాల నుండి ABCD లోపలి దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యాన్ని తీసివేయాలి.

లోపలి దీర్ఘ చతురస్రం ABCD యొక్క పొడవు	=	60 మీ.
లోపలి దీర్ఘ చతురస్రం ABCD యొక్క వెడల్పు	=	40 మీ.
లోపలి దీర్ఘ చతురస్రం ABCD వైశాల్యం	=	(60 x 40) మీ.^{2}
	=	2400 మీ.
బాట వెడల్పు	=	3 మీ.
వెలుపలి దీర్ఘచతురస్రం EFGH పొడవు	=	60 మీ. + (3+3) మీ.
	=	66 మీ.
వెలుపలి దీర్ఘచతురస్రం EFGH వెడల్పు	=	40 మీ. + (3+3) మీ.
	=	46 మీ.

∴ వెలుపలి దీర్ఘచతురస్రం EFGH వైశాల్యం = 66×46 మీ^{2} = 3036 మీ^{2}

∴ బాట వైశాల్యం = (వెలుపలి దీర్ఘచతురస్ర EFGH వైశాల్యం)

–(లోపలి దీర్ఘచతురస్ర ABCD వైశాల్యం)

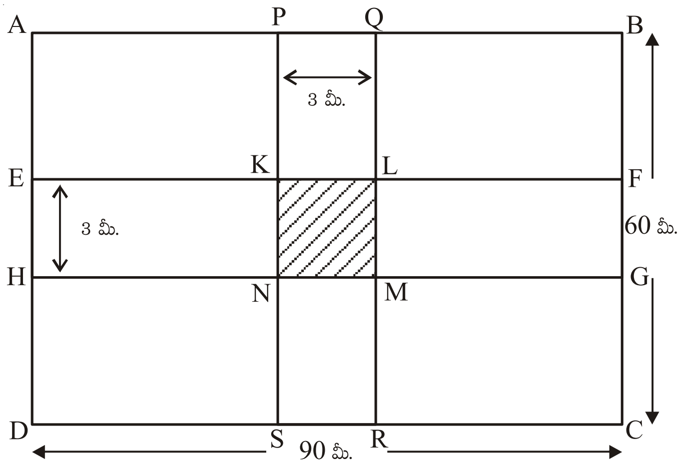
= (3036 - 2400) మీ^{2} = 636 మీ^{2}

ఉదాహరణ 9 : ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార మైదానం యొక్క పొడవు, వెడల్పు వరుసగా 90 మీ., 60 మీ. ఈ మైదానంలో పటంలో చూపిన విధంగా PQRS, EFGH అనే రెండు రోడ్లను ఒక్కొక్కటి 3 మీ. వెడల్పు ఉండేటట్లు నిర్మించినారు. ఈ రోడ్లు దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క భుజాలకు సమాంతరంగా ఉండి, మైదానం మధ్య భాగంలో అవి ఒక దానికొకటి కలుసుకున్నాయి. అయితే

(i) రోడ్ల వైశాల్యం

(ii) మీటరుకు ₹ 110 చొప్పున రోడ్ల నిర్మాణానికి అయ్యే ఖర్చును కనుగొనండి.

సాధన :



(i) సమస్యలో ఇచ్చిన అంశాలు

PQ = 3 మీ. మరియు PS = 60 మీ. EH = 3 మీ. మరియు EF = 90 మీ.

KL = 3 మీ. మరియు KN = 3 మీ **అనగా KLMN ఒక చతురస్రం.**

రోడ్ల వైశాల్యం PQRS మరియు EFGH దీర్ఘచతురస్రాల వైశాల్యాల మొత్తానికి సమానం. అయితే ఈ పటంను గమనించినట్లయితే KLMN చతురస్ర వైశాల్యాన్ని రెండు సార్లు తీసుకోబడుతున్నట్లుగా తెలుస్తుంది. అందువల్ల KLMN చతురస్ర వైశాల్యాన్ని రోడ్ల వైశాల్యం (PQRS, EFGH) ల నుండి ఒకసారి తీసివేయాలి.

∴ రోడ్ల వైశాల్యం = దీర్ఘ చతురస్రం PQRS వైశాల్యం + దీర్ఘచతురస్రం EFGH వైశాల్యం

– చతురస్రం KLMN వైశాల్యం

= $(PS \times PQ) + (EF \times EH) - (KL \times KN)$

= $(60 \times 3) + (90 \times 3) - (3 \times 3)$ మీ^{2}

= $(180 + 270 - 9)$ మీ^{2}

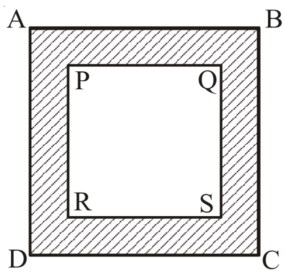
= 441 మీ^{2}

(ii) 1 మీ^{2} నిర్మాణానికి అయ్యే ఖర్చు = ₹ 110

441 మీ^{2} నిర్మాణానికి అయ్యేఖర్చు = 110×441

రోడ్డు నిర్మాణానికి అయ్యేఖర్చు = ₹ 48,510

ఉదాహరణ 10 : 100మీ. భుజంగల ఒక చతురస్ర మైదానం చుట్టు బయట 5 మీ. వెడల్పుగల బాట గలదు. అయిన బాట వైశాల్యంను కనుగొనండి? 10 చ.మీ. బాటను సిమెంటుతో నిర్మించుటకు అయ్యే ఖర్చు ₹ 250 అయిన మొత్తం బాటను నిర్మించుటకు అయ్యే ఖర్చును కనుగొనండి.



సాధన : పటం PQRS చతురస్ర మైదానం. షేడ్‌చేసిన భాగం 5 మీ. వెడల్పు గల బాట.

PQRS చతురస్ర భుజం = 100 మీ.

PQRS చతురస్ర వైశాల్యం = $100^2 = 10000$ చ.మీ.

AB భుజం యొక్క పొడవు = $100 + (5+5) = 110$ మీ.

ABCD చతురస్ర వైశాల్యం = $110^2 = 12100$ చ.మీ.

బాట వైశాల్యం = ABCD వైశాల్యము – PQRS వైశాల్యము

= $12100 - 10000 = 2100$ చ.మీ.

10 చ.మీ. బాట నిర్మించుటకు అయ్యే ఖర్చు = ₹ 250

1 చ.మీ. బాట నిర్మించుటకు అయ్యే ఖర్చు = $\frac{250}{10}$

2100 చ.మీ. బాట నిర్మించుటకు అయ్యే ఖర్చు = $\frac{250}{10} \times 2100$

= ₹ 52,500

బాట నిర్మాణానికి అయ్యే ఖర్చు = ₹ 52,500

అభ్యాసం – 6

1. 45మీ. భుజముగల ఒక చతురస్రాకార మైదానం చుట్టూ 2.5 మీ. వెడల్పు గల బాట కలదు. బాట వైశాల్యంను కనుగొనండి?

2. ఒక పాఠశాల భవనంలో 18మీ. పొడవు, 12.5 మీ. వెడల్పు గల హాలు కలదు. హాలునేలపై గోడలనుంచి 50 సెం.మీ. వెడల్పున స్థలం వదిలి హాలు మధ్యలో ఒక కార్పెట్ పరచబడింది. కార్పెట్ వైశాల్యంను, కార్పెటుకు గోడల అంచుకు మధ్యగల ఖాళీ ప్రదేశం యొక్క వైశాల్యంను కనుగొనండి?

3. ఒక చతురస్రాకార గడ్డి మైదానం యొక్క భుజం 80మీ. దీనిలో నడవడానికి వీలుగా మైదానం యొక్క భుజాలకు సమాంతరంగా రెండు రోడ్లు ఒకదానికొకటి మైదానం యొక్క మధ్యభాగంలో పరస్పరం ఖండించుకొనే విధంగా నిర్మించబడినవి. రోడ్ల వెడల్పు 4 మీ. అయిన ఆ రోడ్డు వైశాల్యంను కనుగొనండి?

4. 8మీ. × 5మీ. కొలతలు గల ఒక గదిచుట్టూ 2 మీ. వెడల్పుగల వరండా కలదు. వరండా ఆక్రమించిన ప్రదేశం యొక్క వైశాల్యంను కనుగొనండి?

5. ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార పార్కు యొక్క పొడవు, వెడల్పులు వరుసగా 700మీ. మరియు 300 మీ. దీని భుజాలకు సమాంతరంగా 10 మీ. వెడల్పుగల రెండు రోడ్లు పార్కు మధ్యభాగంలో పరస్పరం ఖండించుకొనే విధంగా నిర్మించబడినవి. రోడ్డు వైశాల్యంను కనుగొనండి? అలాగే రోడ్డు కాకుండా మిగిలిన పార్కు వైశాల్యంను కనుగొనండి?

మనం నేర్చుకున్నవి

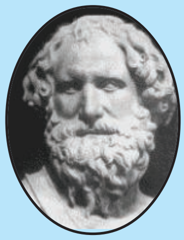
- సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం (A) దాని భూమి (b) ఎత్తుల (h) లబ్ధానికి సమానం. అనగా $A = bh$. (సమాంతర చతుర్భుజంలో ఏ భుజాన్నైనా భూమిగా తీసుకోవచ్చు).
- త్రిభుజ వైశాల్యం (A) దాని భూమి (b) ఎత్తు (h) ల లబ్ధంలో సగానికి సమానము. అనగా $A = \frac{1}{2} bh$.
- రాంబస్ వైశాల్యం (A) దాని కర్ణాల లబ్ధంలో సగానికి సమానం అనగా $A = \frac{1}{2} d_1 d_2$.
- వృత్త పరిధి (C) = $2 \pi r$ ఇచ్చట r వ్యాసార్ధము మరియు $\pi = \frac{22}{7}$ లేదా 3.14.

ఆర్కిమెడిస్ (గ్రీసు)

287 - 212 BC

ప్రప్రథమంగా ఇతడు π విలువను గణించాడు.

వృత్తం చుట్టుకొలత, వైశాల్యాలకు గణిత సూత్రాలను కనుగొన్నాడు.



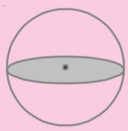
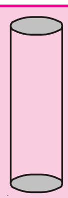
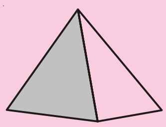
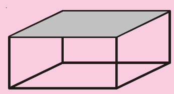
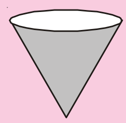
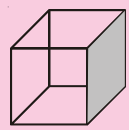
త్రిమితీయ మరియు ద్విమితీయ ఆకారాల అవగాహన **14**

14.0 పరిచయం

మీకు 6వ తరగతిలో వివిధ త్రిమితీయ ఆకారాలను పరిచయం చేయడం జరిగింది. ఆ ఆకారాల ముఖాలను, అంచులను, శీర్షాలను గుర్తించడం కూడా నేర్చుకున్నారు. మీరు క్రింది తరగతిలో నేర్చుకొన్న విషయాలను ఒక్కసారి గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం.

అభ్యాసం - 1

1. కింద కొన్ని వస్తువుల చిత్రాలు ఈయబడినాయి. వాటిని ఆకారాల ప్రకారం వర్గీకరించి కింది ఈ పట్టికలో వాటి పేర్లు నింపండి.

 గోళము	 స్థూపము	 పిరమిడ్	 దీర్ఘఘనము	 శంకువు	 సమ ఘనము

2. కింద ఈయబడిన త్రిమితీయ ఆకారాలకు, మీ దైనందిన జీవితంలో మీరు చూసే వస్తువుల నుండి కనీసం రెండు ఉదాహరణల నివ్వండి.

(i) శంకువు ----------- ----------- ----------- -----------

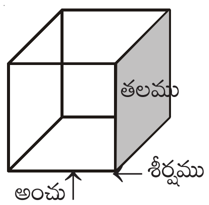
(ii) సమ ఘనము ----------- ----------- ----------- -----------

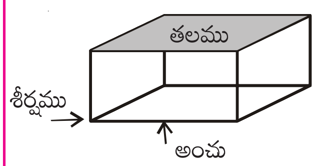
(iii) దీర్ఘ ఘనము ----------- ----------- ----------- -----------

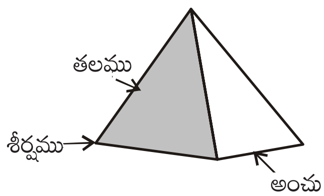
(iv) గోళము ----------- ----------- ----------- -----------

(v) స్థూపము ----------- ----------- ----------- -----------

3. క్రింద ఈయబడిన ఆకారాల, ముఖాలు, అంచులు మరియు శీర్షాలను గుర్తించి వాటి సంఖ్యను క్రింది పట్టికలో నింపండి.





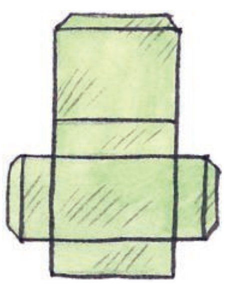


	సమ ఘనము	దీర్ఘ ఘనము	పిరమిడ్
ముఖాలు			
అంచులు			
శీర్షాలు			

14.1 త్రిమితీయ ఆకారాల 'వల' రూపాలు

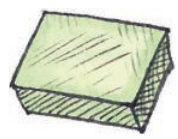
ఇప్పుడు మనం త్రిమితీయ ఆకారాలను విప్పగా కాగితం వంటి ద్విమితీయ తలాల (సమతలాల)పై ఎలా వుంటాయో చూద్దాం. దీనిని మనం వివిధ 3-D చిత్రాల 'వల' రూపాల ద్వారా గమనించవచ్చును.

ఒక దళసరి కాగితంతో చేయబడ్డ అట్టపెట్టెను (టూత్‌పేస్ట్ పెట్టె లేదా షూ పెట్టె) తీసుకొని, దాని అంచుల వద్ద కత్తిరించి సమతలం ఏర్పడేటట్లు చేయండి. ఇలా ఏర్పడిన దానినే ఆ పెట్టె వల అంటారు. పటము – 1 లో చూపినట్లు వల అనేది ద్విమితీయ తలంలో నున్న ఆకారము యొక్క అంచుల రూపము వంటిది. దానిని మడిచినపుడు పటము – 2 లో వున్నట్లు వస్తుంది. చివరకు పటము –3 లో చూపినట్లు పెట్టె ఆకారము ఏర్పడుతుంది.



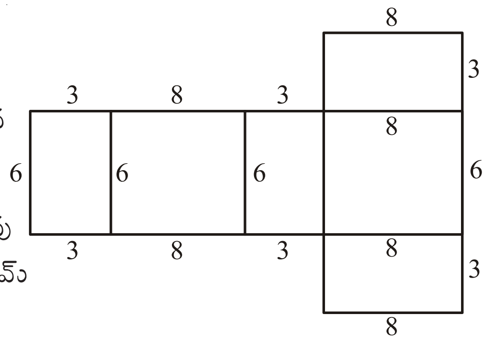
పటం 1

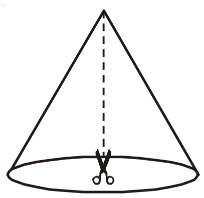
పటం 2



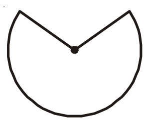
పటం 3

ఇక్కడ ఒక పెట్టె యొక్క వల రూపం ఈయబడినది. దీనిని కాగితంపై గీసి కత్తిరించి ఒక దళసరి కాగితముపై అంటించండి. అంచుల వెంబడి మడిచి జిగురుతో అంటించి ఒక పెట్టెను తయారు చేయండి. ఇలా ఏర్పడిన పెట్టె ఆకారము ఏమిటి?





పటం



పటం 2

ఇదే విధంగా శంకువు ఆకృతిలో వున్న ఐస్‌క్రీమ్ కాగితపు కప్పును (లేదా ఆ ఆకారం లోని మరేదైనా కప్పు) తీసుకొని పటము – 1 లో చూపినట్లు దాని ఏటవాలు ఎత్తు వెంబడి జాగ్రత్తగా కత్తిరించండి. ఇలా చేయగా మీకు శంకువు యొక్క వల, పటము – 2 లో చూపినట్లు ఏర్పడుతుంది.

ప్రయత్నించండి

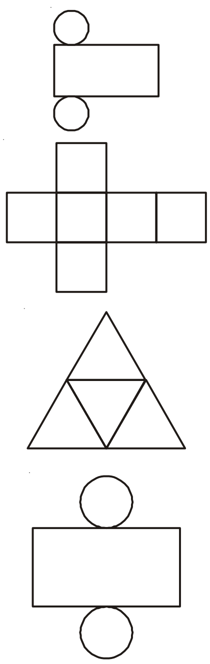
వివిధ ఆకృతులు (స్థూపము, ఘనము, దీర్ఘఘనము, శంకువు మొదలైనవి) గల వస్తువులు తీసుకొని వాటిని జాగ్రత్తగా కత్తిరించి వాటి వలలను తయారుచేయండి. ఇలా చేయడానికి మీ ఉపాధ్యాయులు లేదా స్నేహితుల సహాయం తీసుకోండి.

పై కృత్యం ద్వారా మీరు వివిధ ఆకృతులు గల వస్తువులకు వివిధ రకాలైన వలలు ఏర్పడతాయని తెలుసుకుంటారు. అంతేకాక ఒకే ఆకారానికి మనం కత్తిరించే విధానాన్ని బట్టి ఒకటి కంటే ఎక్కువ వలలు ఏర్పడతాయని తెలుసుకుంటారు.

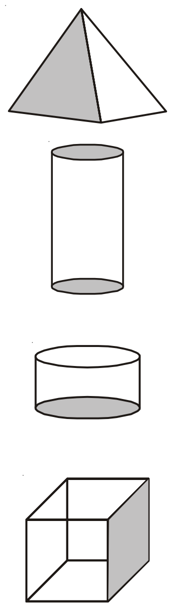
అభ్యాసము – 2

1. కింద కొన్ని వలలు యివ్వబడ్డాయి. వాటిని నకలు చేసుకొని దళసరి కాగితం పై అంటించండి. వాటిని జాగ్రత్తగా మడిచి జిగురుతో అంటించడం ద్వారా త్రిమితీయ ఆకారాలను తయారుచేయండి. ఏ వలకు ఏ త్రిమితీయ ఆకారం ఏర్పడిందో వాటిని జతపరచండి.

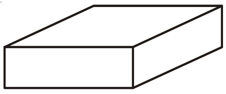
వల రూపము

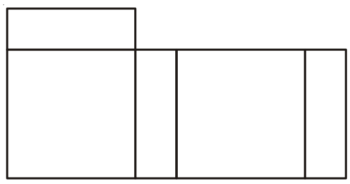


త్రిమితీయ ఆకారం

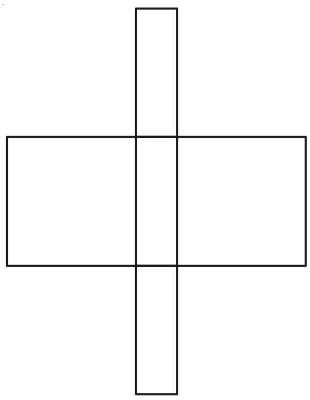


2. ఇక్కడ ప్రతి ఆకారానికి 3 వల రూపాలు ఈయబడినాయి. సరియైన వల రూపాన్ని దాని త్రిమితీయ ఆకారంతో జతపరచండి.

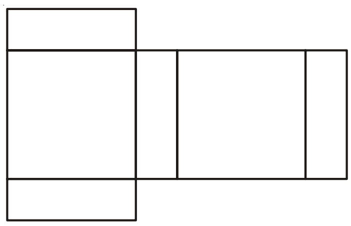
(i) 



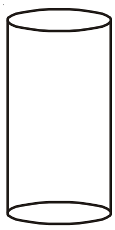
(a)

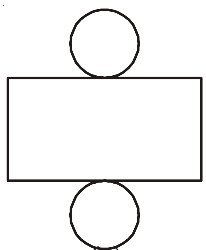


(b)



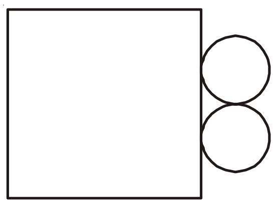
(c)

(ii) 



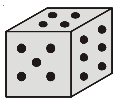
(a)

(b)

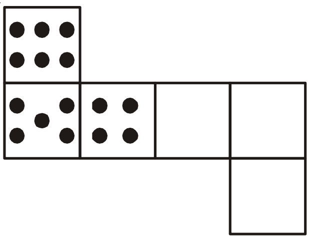


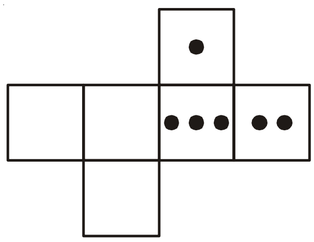
(c)

3. సమఘనాకార పాచిక అనేది ప్రతి తలం పై బిందువులను కలిగిన ఒక సమ ఘనము. ఒక సమఘనాకార పాచిక ఎదురెదురు తలాలపై బిందువుల మొత్తము ఏడు ఉంటుంది.



ఇక్కడ సమఘనాకార పాచికలను తయారుచేయడానికి రెండు వలలు ఈయబడ్డాయి. ఖాళీ గడులలో సరియైన సంఖ్యలో బిందువులను గుర్తించండి.





ఇలా ఆడండి.

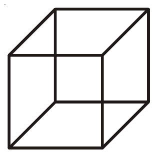
మీరు, మీ మిత్రుడు వీపు భాగాలు ఆనేటట్లు కూర్చోండి. మీలో ఒకరు ఒక త్రిమితీయ ఆకారాన్ని తయారుచేయడానికి కావలసిన వల రూపాన్ని చదవండి. రెండవవారు దానిని నకలు చేసి, గీసి ఇచ్చిన త్రిమితీయ ఆకారాన్ని తయారుచేయాలి.

14.2 ఘనాకారాలను సమతలం పై గీయడం

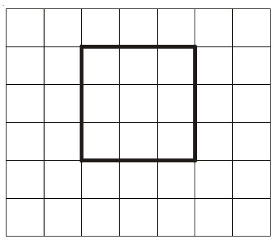
మనం పటాలను గీసే కాగితం ఒక సమతలం. ఒక ఘనాకారాన్ని దీనిపై గీసినపుడు విరూపము చెందినది. ఇది కేవలము దృశ్యభ్రాంతి మాత్రమే. ఇక్కడ మనం ఒక త్రిమితీయ ఆకారాన్ని ఒక సమతలం పై గీయడానికి రెండు పద్ధతులను ఉపయోగిస్తాము.

14.2.1 ఏటవాలు రేఖా చిత్రాలు

ఇక్కడ ఒక సమ ఘనం పటం ఇవ్వబడింది. దీనిని ముందు నుండి చూస్తే ఎలా కన్పిస్తుందో ఈ పటం చూడగానే అర్థమవుతుంది. నిజానికి మనం ఘనము యొక్క అన్ని తలాలను పటంలో చూడలేము. ఒక ఘనంలో అన్ని అంచుల పొడవులు సమానంగా వున్నట్లు, యీ పటంలో అన్ని అంచుల పొడవులూ సమానం కాదు, అయినా దీనిని చూడగానే మనము ఒక ఘనం అని గుర్తుపడతాము. ఇటువంటి పటాలనే ఏటవాలు రేఖా చిత్రాలు అంటారు.

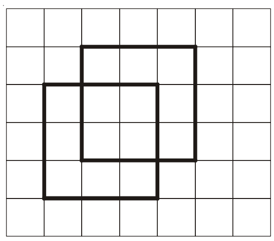


ఇటువంటి చిత్రాలను ఎలా గీయాలి? వీటిని గీసే పద్ధతిని నేర్చుకునేందుకు ప్రయత్నిద్దాము. మొదట గళ్ళ కాగితాలపై వీటిని సాధన చేస్తే తరువాత తెల్లకాగితాలపై కూడా సులభంగా గీయవచ్చును. ఇప్పుడు మనం $3 \times 3 \times 3$ కొలతలు గల (అనగా ప్రతీ అంచు 3 యూనిట్లు) ఒక ఘనానికి ఏటవాలు రేఖా చిత్రం నిర్మిద్దాము.



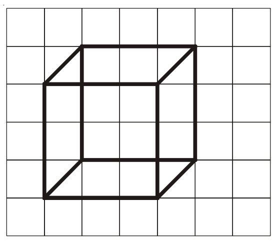
సోపానం 1

ముందుగా ఒక ముఖాన్ని గీయండి



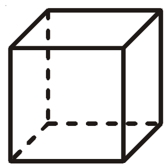
సోపానం 2

అదే కొలతలతో గీచిన ముఖానికి వెనుక ముఖం గీయండి. ఇది కొంచెం ప్రక్కకు గీయండి.



సోపానం 3

సంబంధిత మూలాలను కలపండి



సోపానం 4

ఈ పటాన్ని తిరిగి గీయండి. కనిపించని అంచులను చుక్కల రేఖలతో గీయండి. ఇదే మనకు కావలసిన చిత్రము

ఏటవాలు చిత్రంలో యీ క్రింది అంశాలను గమనించారా?

(i) ముందు మరియు దానికి వెనుకగా వుండే తలాలు ఒకే పరిమాణాన్ని కలిగి వుంటాయి.

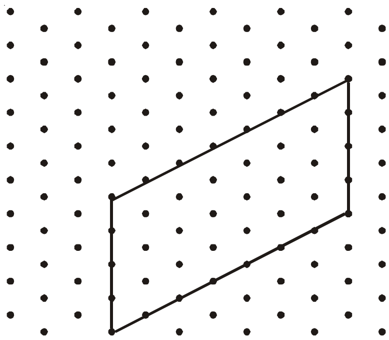
(ii) ఒక ఘనంలో అంచులు ఏ విధంగా ఒకే కొలతను కలిగి వుంటాయో, అదే విధంగా యీ చిత్రంలో కూడా కొలతలు తీసుకొని గీయకపోయినా అంచులన్నీ సమానంగా ఉన్నట్లు కనిపిస్తాయి.

ఇప్పుడు మీరు ఒక దీర్ఘఘనానికి ఏటవాలు చిత్రాన్ని గీయటానికి ప్రయత్నించండి. (ఇలా నిర్మించేటపుడు ఒక దీర్ఘఘనం ముఖాలన్నీ దీర్ఘచతురస్రాలని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి)

ఘనాలను ఇచ్చిన కొలతలలో వుండేటట్లు కూడా మనం చిత్రాలను గీయవచ్చును. ఇలా గీయడానికి మనకు తుల్య బిందుమాపని కావాలి. ఇప్పుడు మనం పొడవు 7 సెం.మీ, వెడల్పు 3 సెం.మీ, ఎత్తు 4 సెం.మీ కొలతలు గల ఒక దీర్ఘఘనాన్ని ఈ కాగితం పై గీయడానికి ప్రయత్నిద్దాం.

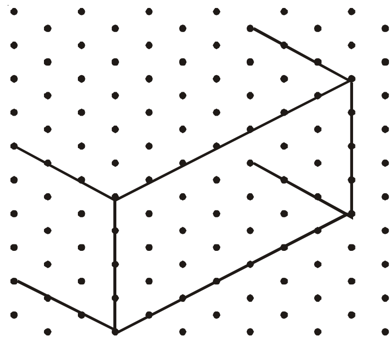
14.2.2 తుల్యరేఖా చిత్రాలు

ఇచ్చిన కొలతలతో ఘనాకారాలను గీయడానికి మనం తుల్య బిందు కాగితాలను వాడతాము. ఈ కాగితమంతా చిన్న చిన్న సమబాహు త్రిభుజ ఆకారాలు వుండేటట్లు బిందువులు లేదా గీతలు గీయబడి వుంటాయి. యిటువంటి కాగితం పైన మనం $7 \times 3 \times 4$ కొలతలు గల (అనగా పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తు, వరుసగా 7 యూనిట్లు, 3 యూనిట్లు, 4 యూనిట్లు) దీర్ఘ ఘనాన్ని గీద్దాము.



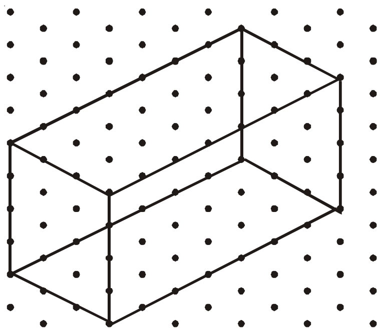
సోపానం 1

పటంలో చూపినట్లు ఎదురుగా ఉండే ముఖాన్ని సూచించే ఒక దీర్ఘచతురస్రాన్ని గీయండి.



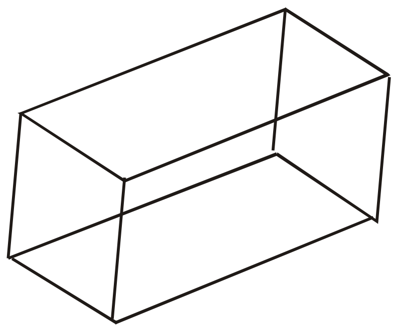
సోపానం 2

దీర్ఘచతురస్రము 4 శీర్షముల నుండి 4 సమాంతర రేఖా ఖండములను 3 యూనిట్ల కొలతతో గీయండి.



సోపానం 3

సంబంధిత శీర్షాలను రేఖా ఖండములచే కలపండి.

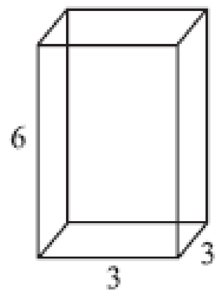


సోపానం 4

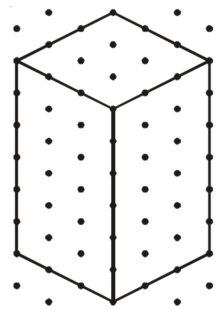
ఇదే మనకు కావలసిన దీర్ఘ ఘనము యొక్క తుల్యరేఖా చిత్రము

మీరు తుల్యరేఖా చిత్రాలలో యిచ్చిన కొలతలతో ఖచ్చితంగా సమానంగా వుండే కొలతలు గల ఘనాకార పటాలను గమనించవచ్చును. కాని ఏటవాలు చిత్రంలో యీ విధంగా వుండదు.

ఉదాహరణ 1 : ఒక దీర్ఘఘనానికి ఏటవాలు చిత్రం యిక్కడ ఈయబడినది. దానికి ఒక తుల్యరేఖా చిత్రాన్ని గీయండి.



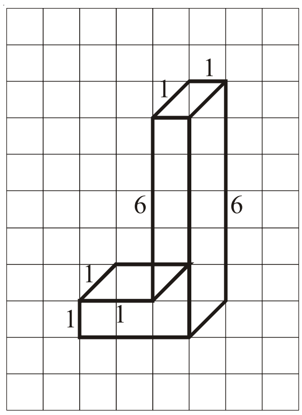
సాధన : ఇక్కడ పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తులు వరుసగా 3 యూనిట్లు, 3 యూనిట్లు మరియు 6 యూనిట్లు.



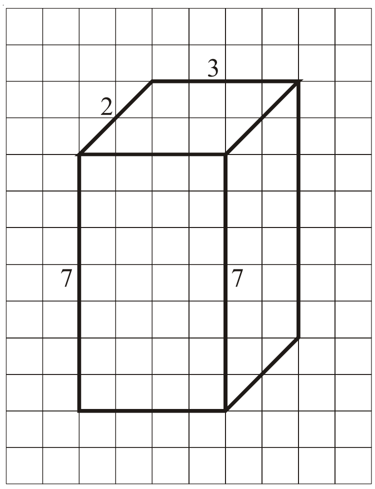
అభ్యాసము - 3

1. కింద యిచ్చిన ఆకారాలకు తుల్య బిందు కాగితాన్ని వుపయోగించి తుల్యరేఖా చిత్రాలను గీయండి.

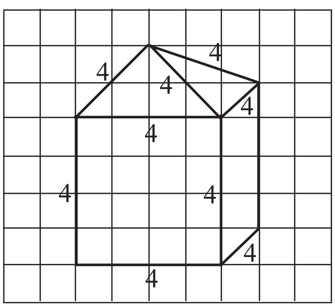
(i)



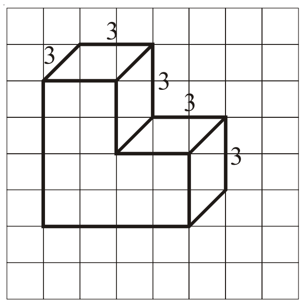
(ii)



(iii)



(iv)

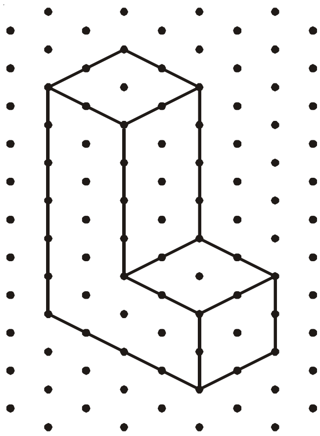


2. ఒక దీర్ఘఘనము కొలతలు 5 సెంమీ, 3 సెంమీ మరియు 2 సెంమీ దీనికి మూడు విభిన్న తుల్యరేఖా చిత్రాలను గీయండి.

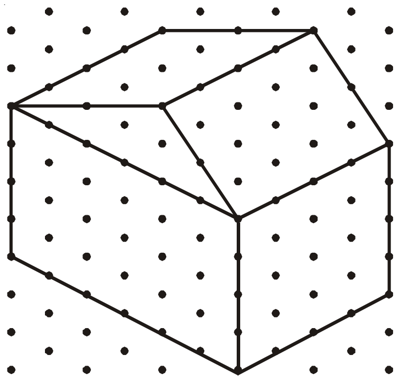
3. 2 సెంమీ అంచుగా గల మూడు ఘనములు వరుసగా ఒకదాని ప్రక్కన ఒకటి వుంచబడ్డాయి. అప్పుడు ఏర్పడిన దీర్ఘఘనానికి ఏటవాలు రేఖా చిత్రము లేదా తుల్యరేఖా చిత్రాన్ని గీయండి.

4. క్రింద యివ్వబడిన తుల్యరేఖాచిత్రాలకు ఏటవాలు రేఖా చిత్రాలను గీయండి.

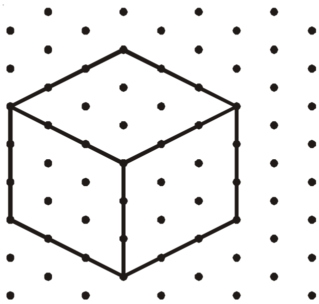
(i)



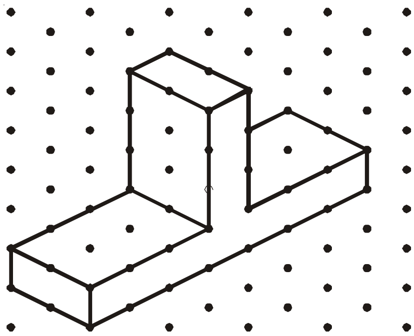
(ii)



(iii)



(iv)

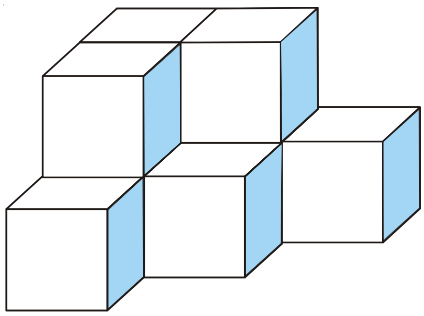


5. క్రింద యిచ్చిన ఆకారాలకు ఏటవాలు రేఖా చిత్రము మరియు తుల్యరేఖా చిత్రాలను గీయండి.

(a) 5 సెంమీ, 3 సెంమీ, 2 సెంమీ కొలతలు గల ఒక దీర్ఘఘనము. (ఇలా మీకు ఒకటే చిత్రం ఏర్పడుతుందా? ఆలోచించండి)

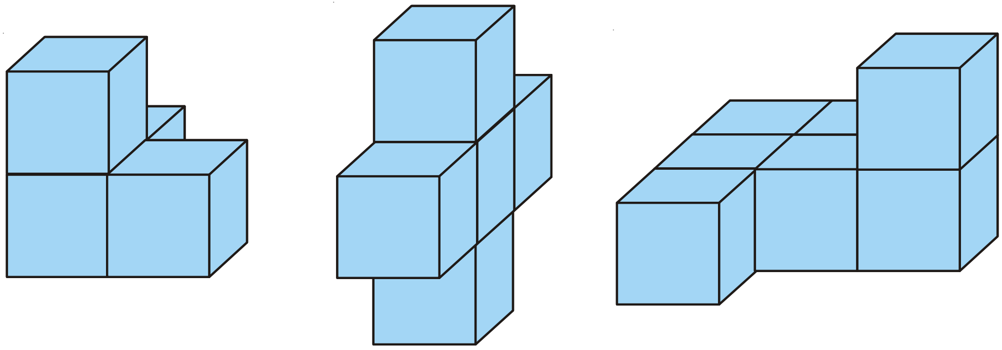
(b) అంచు 4 సెంమీ కొలత గల ఘనం.

14.3 ఘనవస్తువులకు ఊహా చిత్రాలను ఏర్పరచుకోవడం



కొన్ని సందర్భాలలో, ఆకారాల కూర్పులను గమనిస్తే, కొన్ని ఆకారాలు దాగి వుండి మనకు కనబడకపోవచ్చు.

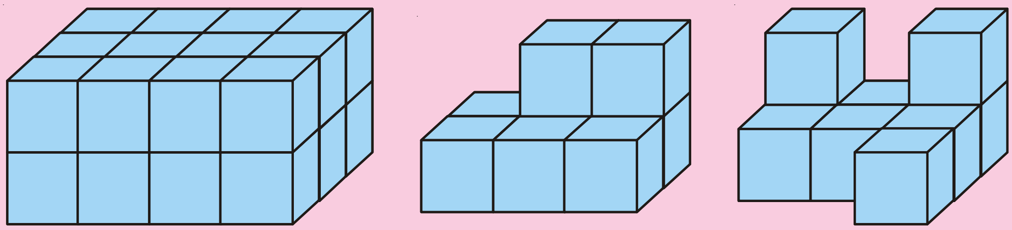
అటువంటి ఆకారాలను నిశితంగా పరిశీలించి వాటిని అర్థం చేసుకోవడానికి యిక్కడ కొన్ని కృత్యాలు యివ్వబడ్డాయి. కొన్ని ఘనాలను తీసుకొని క్రింద పటాలలో చూపినట్లు అమర్చండి.



యిప్పుడు మీ మిత్రులను ఆ ఆకారాలను ముందు వైపు నుండి మాత్రమే చూసి, మీరు ఎన్ని ఘనాలతో దానిని నిర్మించారో ఊహించి చెప్పమనండి.

ప్రయత్నించండి

క్రింద ఏర్పరచిన అమరికలలో ఎన్ని ఘనాలు వున్నాయో అంచనా వేసి చెప్పండి.



ఇటువంటి ఊహా చిత్రాలు ఏర్పరచుకోవడం మనకు చాలా ఉపయోగకరం.

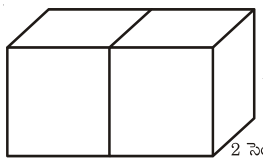
ఉదాహరణకు మీరు కొన్ని ఘనాలను ప్రక్కప్రక్కనే వుంచి ఒక దీర్ఘఘనాన్ని తయారు చేసారనుకుందాం. ఆ దీర్ఘ ఘనానికి పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తులు ఎంత వుంటాయో మీరు అంచనా వేయగలుగుతారు.

ఉదాహరణ 2 : 2 సెం.మీ × 2 సెం.మీ× 2 సెం.మీ కొలతలు గల రెండు ఘనాలు ప్రక్కప్రక్కనే వుంచగా ఏర్పడిన దీర్ఘ ఘనము కొలతలు ఎంత వుంటాయి?

సాధన : రెండు ఘనాలు ప్రక్క ప్రక్కను వుంచినపుడు కేవలం పొడవు మాత్రమే పెరగడాన్ని మీరు గమనిస్తారు.

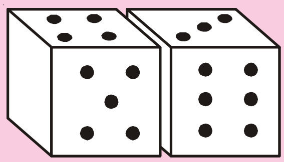
పొడవు $2 + 2 = 4$ సెం.మీ

వెడల్పు $= 2$ సెం.మీ మరియు ఎత్తు $= 2$ సెం.మీ



ప్రయత్నించండి

1. పటంలో చూపినట్లు రెండు సమఘనాకార పాచికలు ప్రక్కప్రక్కన అమర్చబడ్డాయి. ఈయబడిన ముఖాలకు వ్యతిరేక ముఖాల మీద వున్న అంకెల మొత్తమెంతో మీరు చెప్పగలరా?



(i) 5 + 6 (ii) 4 + 3

(ఒక సమఘనాకార పాచికలో వ్యతిరేక ముఖాలపై నున్న అంకెల మొత్తము 7 అని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి)

2. 2 సెం.మీ. అంచుగల మూడు సమ ఘనాకార పాచికలను ఒక దాని ప్రక్కన ఒకటి అమర్చగా ఒక దీర్ఘ ఘనము ఏర్పడినది. దీనికి ఒక ఏటవాలు చిత్రాన్ని గీయడానికి ప్రయత్నించండి మరియు దాని పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తులను కనుగొనండి.

14.3.1 ఒక ఘనము యొక్క వివిధ భాగాలను చూచుట

యిప్పుడు మనం ఒక త్రిమితీయ ఆకారాన్ని ఎన్ని రకాలుగా చూడవచ్చునో నేర్చుకుందాము.

14.3.1ఎ) యిచ్చిన వస్తువును అడ్డంగా పలుచని ముక్కలుగా కోసి చూడడం ఒక పద్ధతి

పలుచని ముక్కలుగా కత్తిరించే ఆట

ఒక రొట్టె ఇవ్వబడినది. అది దీర్ఘ ఘనాకారంలో వుంది. దీని అభిముఖ ముఖాలు చతురస్రాలు. దీనిని చాకుతో పలుచని ముక్కలుగా కోయండి.

అడ్డంగా కోసినప్పుడు పటంలో చూపినట్లు మనకు అనేక ముక్కలు ఏర్పడతాయి. ప్రతీ ముక్కకు ఆధారతలం ఒక చతురస్రమే యీ తలాలనే మనం మొత్తం రొట్టె యొక్క “అడ్డుకోత” అంటాము. యీ సందర్భంలో రొట్టె యొక్క అడ్డుకోత యించుమించుగా ఒక చతురస్రము.

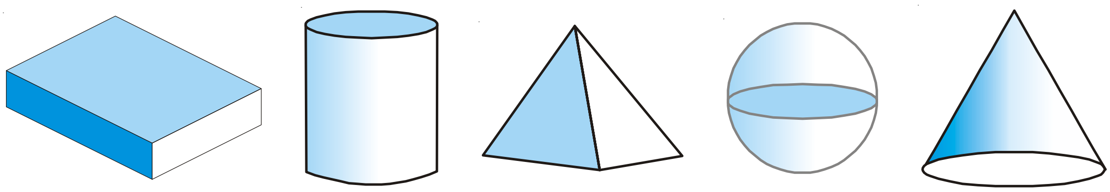
మీరు చేసే ఈ కోత నిలువు వుంటే ఏర్పడే నిలువుకోత వేరుగా ఏర్పడే ప్రమాదముంది. దాని గురించి ఆలోచించండి. ఇలా ఏర్పడిన నిలువు కోత అంచు ఒక వక్రం అనే విషయాన్ని మీరు గమనించారా?

వంటింటి ఆట

మీరు వంటింట్లో వంట వండేటపుడు కొన్ని కూరగాయలను తరిగినపుడు ఏర్పడే అడ్డుకోతలను గమనించారా? వివిధ కూరగాయల ముక్కలను పరిశీలించి ఏర్పడే అడ్డుకోతలను, వాటి ఆకారాలను పరిశీలించండి.

ఇవి చేయండి.

1. కింద ఇచ్చిన ఘనాలకు బంక మట్టితో (లేదా ప్లాస్టిసైన్‌తో) నమూనాలు తయారుచేయండి. వాటిని నిలువుగా మరియు అడ్డంగా కత్తిరించండి. ఇలా ఏర్పడిన కోతలకు చిత్తు పటాలను గీసి, తెలిసిన వాటికి పేర్లు వ్రాయండి.



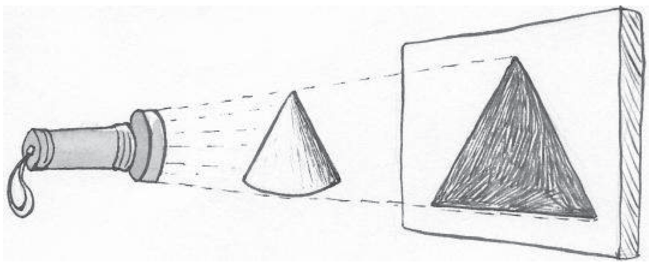
2. కింద ఇచ్చిన ఘనాలకు నిలువుకోత మరియు అడ్డుకోత చేయగా ఏమి ఏర్పడతాయి?

(a) ఒక ఇటుక (b) ఒక గుండ్రని ఆపిల్ (c) ఒక సమఘనాకారపు పాచిక (d) ఒక స్థూపాకార గొట్టము (e) శంఖు ఆకృతిలో నున్న ఐస్‌క్రీమ్ గొట్టము.

14.3.1 (బి) నీడలతో ఆడటం మరొక పద్ధతి

నీడలతో ఆట

త్రిమితీయ ఆకారాలకు చెందిన వస్తువులను ద్విమితీయ ఆకారాలుగా చూడటానికి వాటి నీడలు చాలా ఉపయోగపడతాయి. మీరు ఎప్పుడైనా నీడతో ఆట చూసారా?



పటము 1

కాంతి పుంజ మార్గంలో ఘనాకారాలను రకరకాలుగా కదుపుతూ నీడలు కదులుతున్నట్లు భ్రాంతి కలిగించే ఒక రకమైన వినోద సాధనము ఈ నీడ చిత్రాలతో ఆట. దీనిలో గణిత భావనల పరోక్ష వినియోగం ఉంటుంది.

ఈ కృత్యము చేయడానికి మీకు ఒక కాంతి జనకము మరియు కొన్ని ఘనాకార వస్తువులు కావాలి. మీకు ఓవర్ హెడ్ ప్రొజెక్టర్ వుంటే, ఘన వస్తువులను దీపము క్రింద వుంచి యీ పరిశోధనలు చేయుము.

టార్చిలైటు కాంతికి ఎదురుగా ఒక శంకువును వుంచిన, తెరపై ఏ రకమైన నీడ ఏర్పడుతుంది? (పటము1)

ఘనాకార వస్తువు త్రిమితీయమైనది, మరి నీడ సంగతి ఏమిటి?

శంకువుకు బదులుగా, ఒక సమఘనాన్ని వుంచితే ఏ విధమైన నీడ ఏర్పడుతుంది?

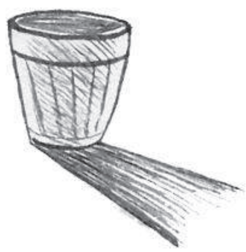
కాంతి జనక స్థానాన్ని, ఘనాకార వస్తువు స్థానాన్ని మార్చుతూ ప్రయోగాలు చేయండి. ఏర్పడిన నీడలలోని వస్తువుల ఆకారాలు, పరిమాణాలపై ఈ స్థాన మార్పుల ప్రభావాన్ని అధ్యయనం చేయండి.

మీరు ఇప్పటికే ఈ వినోదాత్మక ప్రయోగాన్ని ప్రయత్నించి వుంటారు.

పటంలో చూపినట్లు, ఒక గ్లాసు మధ్యాహ్నం ఎండ సూర్యకిరణాల మార్గంలో పెట్టండి : నీడ ఎలా ఏర్పడుతుంది?

మధ్యాహ్నము, సాయంత్రము ఏర్పడే నీడలు ఒకేలా వుంటాయా?

(a) మధ్యాహ్నము?

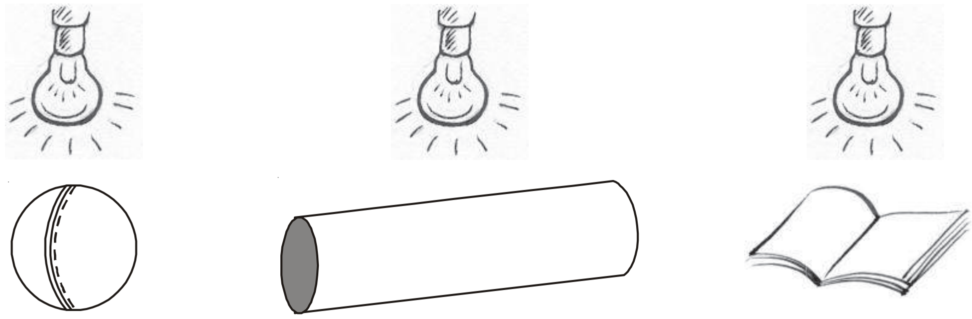


(b) సాయంత్రము?

సూర్యుడు వున్న స్థానము, మనము చూసే కాలాలను దృష్టిలో వుంచుకొని నీడలను అధ్యయనం చేయండి.

అభ్యాసము - 4

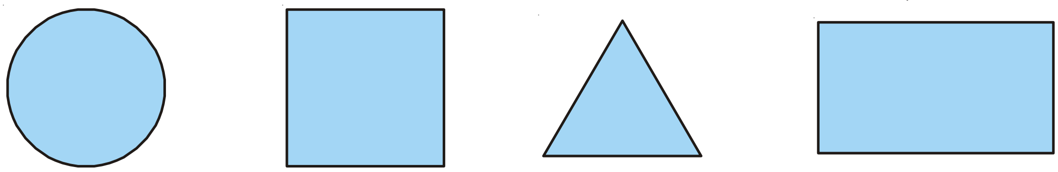
1. కింద యిచ్చిన ఘనాకార వస్తువుల పై ఒక విద్యుత్ బల్బు వెలుగుతూ వుంది. అపుడు ఏర్పడిన నీడల ఆకారాల పేర్లను తెలపండి. ఆ నీడ చిత్రాల చిత్తు పటాలను గీయడానికి ప్రయత్నించండి. (మొదట వీటిని ప్రయోగం చేయడానికి ప్రయత్నించి తరువాత క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలు వ్రాయండి).



ఒక బంతి　　　ఒక స్థూపాకార గొట్టం　　　ఒక పుస్తకం

2. కింద కొన్ని త్రిమితీయ వస్తువులను ఓవర్ హెడ్ ప్రొజెక్టర్ దీపం క్రింద పెట్టగా ఏర్పడిన నీడలు యివ్వబడ్డాయి. ప్రతీ నీడ ఏర్పడటానికి కారణమయ్యే త్రిమితీయ వస్తువులను గుర్తుపట్టండి (వీటికి అనేక సమాధానాలు వుండవచ్చును)

ఒక వృత్తము　　　ఒక చతురస్రము　　　ఒక త్రిభుజము　　　ఒక దీర్ఘచతురస్రం



(i)　　　(ii)　　　(iii)　　　(iv)

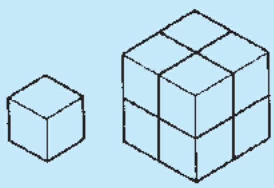
మనం నేర్చుకున్నది

త్రిమితీయ వస్తువులకు ద్విమితీయ తలాలపై అనగా కాగితం పై వాటి వల రూపాలను గీయడం ద్వారా ఊహా చిత్రాలను ఏర్పరచుకోవచ్చును.

ఏటవాలు రేఖా చిత్రాలు మరియు తుల్యరేఖా చిత్రాలనుపయోగించి త్రిమితీయ ఆకారాలకు ఒక సమతలం పై ఊహా చిత్రాలను ఏర్పరచవచ్చును.

ఘనంతో తమాషా!

ఏడు యూనిట్ల సమఘనాలకు ఒక యూనిట్ సమఘనాన్ని జోడిస్తే అన్నీ కలిసి రెండు యూనిట్ అంచుల గల పెద్ద ఘనం ఏర్పడుతుంది. మూడు యూనిట్లు అంచులు గల పెద్ద ఘనాన్ని తయారు చేయడానికి ఎన్ని యూనిట్ల సమఘనాలు అవసరమవుతాయి?

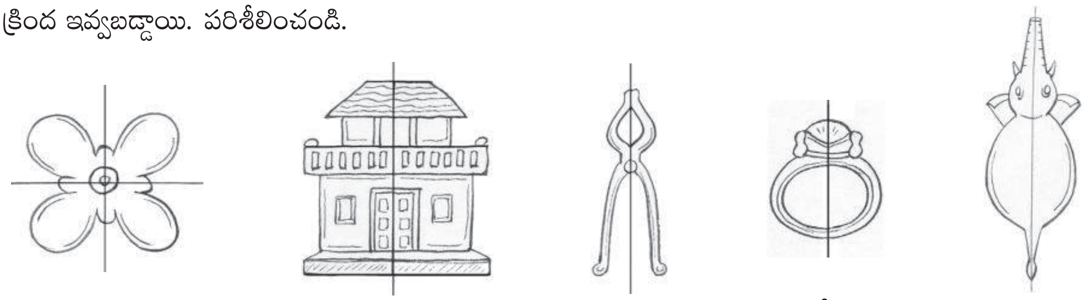


సౌష్ఠవం

15

15.0 పరిచయం

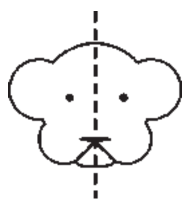
మీ పరిసరాలను గమనించండి. ఎన్నో వస్తువులలో సౌష్ఠవతను గమనించ గలరు. అటువంటి కొన్ని వస్తువులు ఈ క్రింద ఇవ్వబడ్డాయి. పరిశీలించండి.



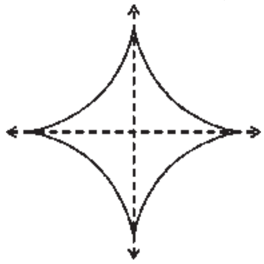
పై చిత్రాలలో ప్రతి దానిని ఒక రేఖతో రెండు సర్వసమాన భాగాలుగా ఒకదానితో ఒకటి ఏకీభవించు భాగాలుగా విభజించ గలము. కావున ఇవన్నియు సౌష్ఠవ చిత్రాలు.

15.1 సౌష్టవ రేఖ లేక సౌష్టవాక్షము

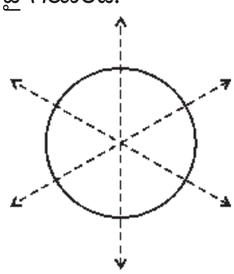
మరికొన్ని చిత్రాలను పరిశీలిద్దాము. కింది పటాలను ఉల్లిపొర కాగితం పై గీయండి.



పటము 1



పటము 2



పటము 3

పటము 4

పటము–1 ని చుక్కల రేఖ వెంబడి మడిచి చూడండి. ఏమి గమనించారు?

పటంలోని రెండు విభాగములు ఒకదానితో ఒకటి పూర్తిగా ఏకీభవిస్తాయి. 2,3,4 పటములలో కూడా ఇది సత్యమా? ఇంకనూ పటము–2 ను రెండు రేఖల వెంబడి మడువచ్చుని, పటము 3 ను అనేక రేఖల వెంబడి మడువ వచ్చుని గమనించగలరు. కానీ పటము–4 ను రెండు విభాగములు ఒక దానితో ఒకటి ఏకీభవించు విధంగా మడువ లేమని చూడండి.

పటములు 1,2,3 లు చుక్కల రేఖ వెంబడి మడువగా రెండు విభాగములు ఒక దానితో ఒకటి ఏకీభవిస్తున్నాయి. కావున అవి సౌష్టవ రేఖను కలిగి యున్నవి.

ఒక పటమును రెండు సర్వసమాన విభాగములుగా విభజించునట్లు పటము మధ్య గా గీయదగు రేఖను ఆ పటము యొక్క 'సౌష్టవ రేఖ' లేక 'సౌష్ఠవాక్షము' అంటాము. సౌష్టవాక్షమును చుక్కల రేఖచే సూచిస్తాము.

కొన్ని పటములకు సౌష్టవాక్షము లేకపోవచ్చు. అట్లే కొన్ని పటములు ఒకటి లేక అంతకన్నా ఎక్కువ సౌష్ఠవాక్షములను కలిగియుండ వచ్చును.

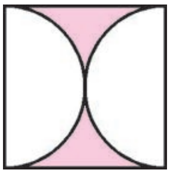
ప్రయత్నించండి

1. సౌష్ఠవత కలిగిన కొన్ని సహజ వస్తువులను పేర్కొనండి.
2. సౌష్ఠవత కలిగిన ఐదు మానవ నిర్మిత వస్తువులను పేర్కొనండి.

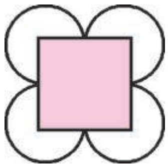
అభ్యాసం - 1

1. కింది పటములలో సాధ్యమగు వానికి సౌష్ఠవాక్షములను గీయండి.

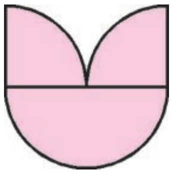
(i)



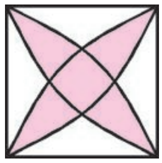
(ii)



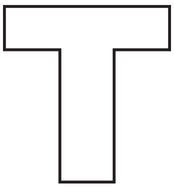
(iii)



(iv)

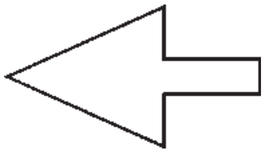


(v)

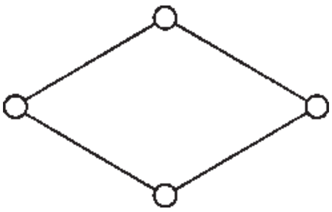


(vi)

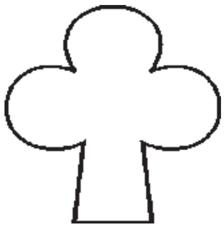
(vii)



(viii)



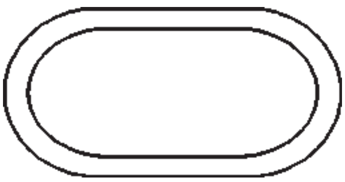
(ix)



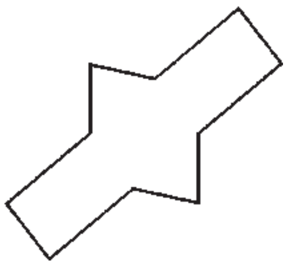
(x)

(xi)

(xii)



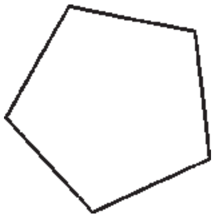
(xiii)

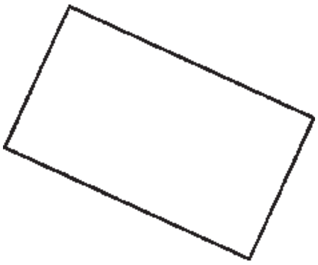


(xiv)

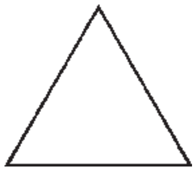
(xv)

(xvi)

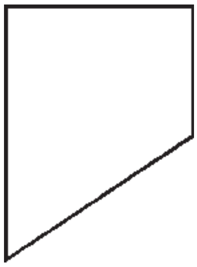

(xvii)

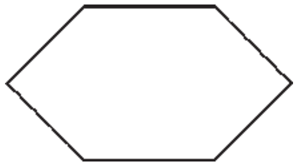

(xviii)

(xix)


(xx)

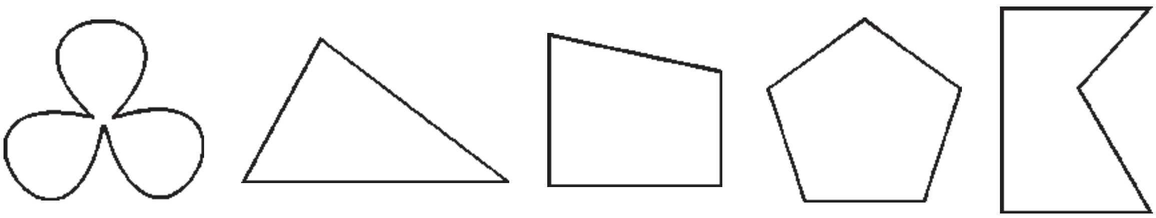
(xxi)


(xxii)


(xxiii)

15.1.1 క్రమ బహుభుజుల సౌష్టవాక్షములు

కింది సంవృత పటములను పరిశీలించండి.



అన్ని వైపులా రేఖా ఖండములచే పూరింపబడిన సంవృత పటమును 'బహుభుజి' అంటాము.

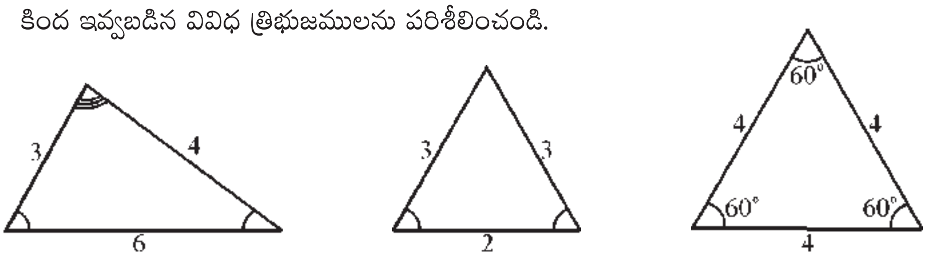
పై పటములలో ఏవి బహుభుజులు?

ప్రయత్నించండి

మూడు కన్నా తక్కువ రేఖా ఖండములతో బహుభుజిని ఏర్పరచగలమా?

ఒక బహుభుజి యొక్క కనీస భుజాల సంఖ్య ఎంత?

కింద ఇవ్వబడిన వివిధ త్రిభుజములను పరిశీలించండి.

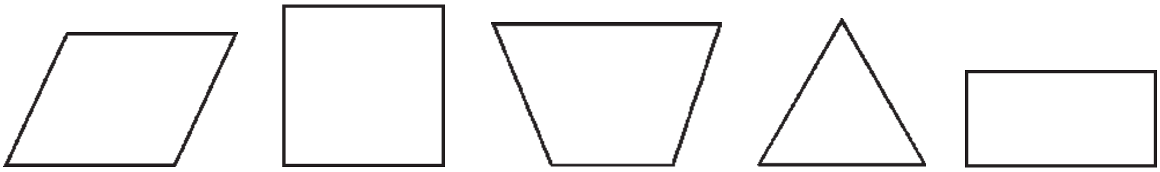


పటం 1 పటం 2 పటం3

పటము 3 నందు త్రిభుజము యొక్క మూడు భుజములు సమానము. మరియు మూడు కోణములు సమానములు కనుక దీనిని క్రమ బహుభుజి అంటాము.

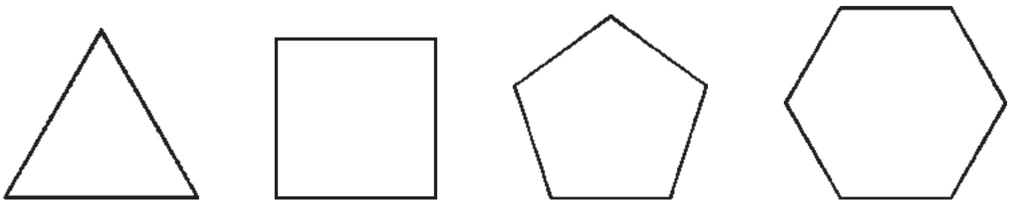
అన్ని భుజములు,కోణములు సమానంగా గల బహుభుజిని 'క్రమ బహుభుజి' అంటాము.

క్రింది పటములలో ఏవి క్రమ బహుభుజులు



సమాంతర చతుర్భుజం చతురస్రం సమలంబ చతుర్భుజం సమబాహు త్రిభుజం దీర్ఘ చతురస్రం

కింది క్రమ బహుభుజులకు వీలయినన్ని సౌష్టవాక్షములను గీయండి.



సమబాహు త్రిభుజం చతురస్రం క్రమ పంచభుజి క్రమషడ్భుజి

పరిశీలనాంశములను కింది పట్టికలో పొందుపరచండి.

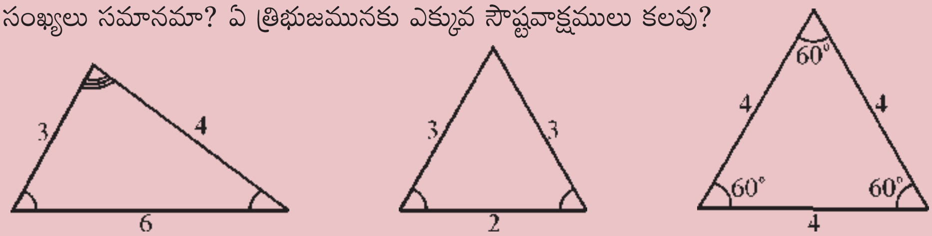
క్రమ బహుభుజి	భుజముల సంఖ్య	సౌష్టవాక్షముల సంఖ్య
త్రిభుజం	3	3
చతురస్రం		
పంచభుజి		
షడ్భుజి		

పై కృత్యమును బట్టి ఒక క్రమబహుభుజి యొక్క సౌష్ఠవాక్షముల సంఖ్య దాని భుజముల సంఖ్యకు సమానమని తెలియుచున్నది కదా!

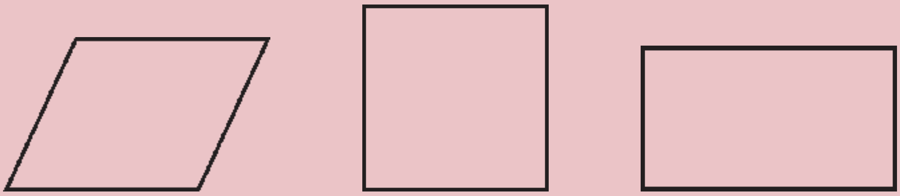
పై పటములను ఉల్లిపొర కాగితం పై గీచి, కత్తిరించి, మడతలు పెట్టడము ద్వారా కూడా పై విషయమును ఋజువు చేసుకొనవచ్చును. ప్రయత్నించండి.

ప్రయత్నించండి

1. వివిధ రకముల త్రిభుజములు కింద ఇవ్వబడ్డాయి. అన్ని త్రిభుజముల యొక్క సౌష్ఠవాక్షముల సంఖ్యలు సమానమా? ఏ త్రిభుజమునకు ఎక్కువ సౌష్ఠవాక్షములు కలవు?



2. వివిధ రకముల చతుర్భుజములు కింద ఇవ్వబడ్డాయి. అన్ని చతుర్భుజముల యొక్క సౌష్ఠవాక్షముల సంఖ్యలు సమానమా? ఏ చతుర్భుజమునకు ఎక్కువ సౌష్ఠవాక్షములు కలవు?



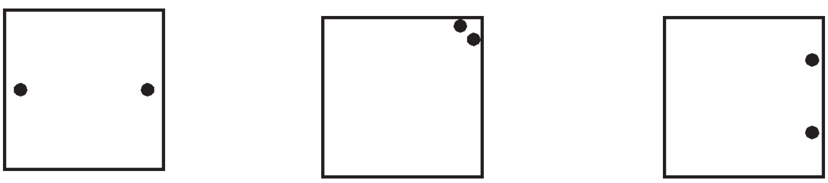
సమబాహు చతుర్భుజం   చతురస్రం   దీర్ఘ చతురస్రం

సూచన: పై పటములను ఉల్లిపొర కాగితం పై గీచి, కత్తిరించి, మడత పెట్టడం ద్వారా సౌష్ఠవాక్షముల సంఖ్యను కనుగొనండి.

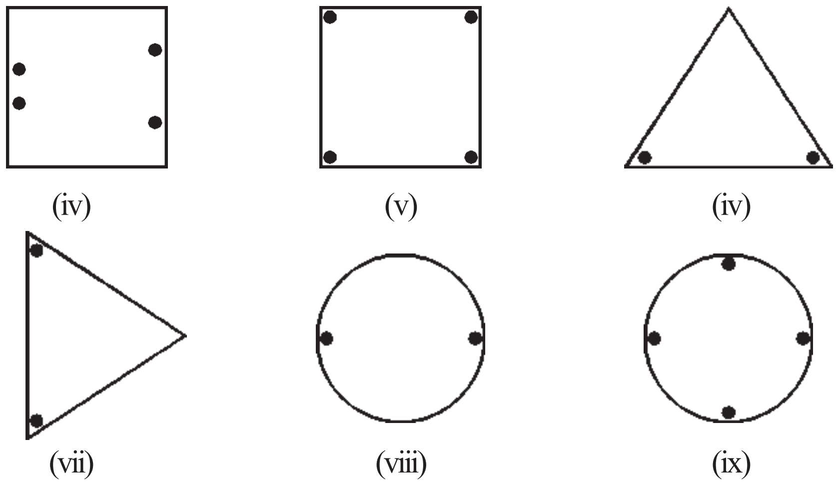
3. పై రెండు సందర్భముల నుండి క్రమబహుభుజులు గరిష్ఠ సంఖ్యలో సౌష్ఠవాక్షములు కలిగి ఉంటాయని చెప్పగలమా?

అభ్యాసం - 2

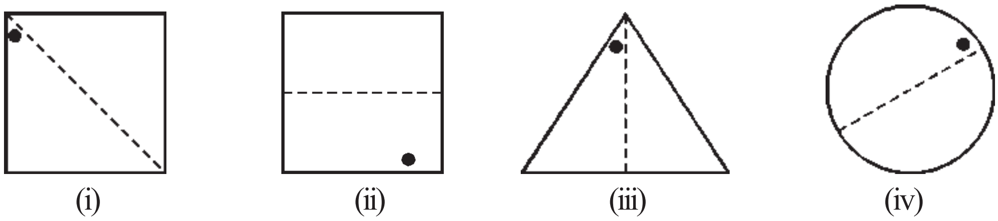
1. కింద ఇవ్వబడిన పటములలో బిందువులు కూడా గుర్తించబడ్డాయి. బిందువులు కూడా సరిసమానంగా పంచబడే విధంగా సౌష్ఠవాక్షములను గీయండి.



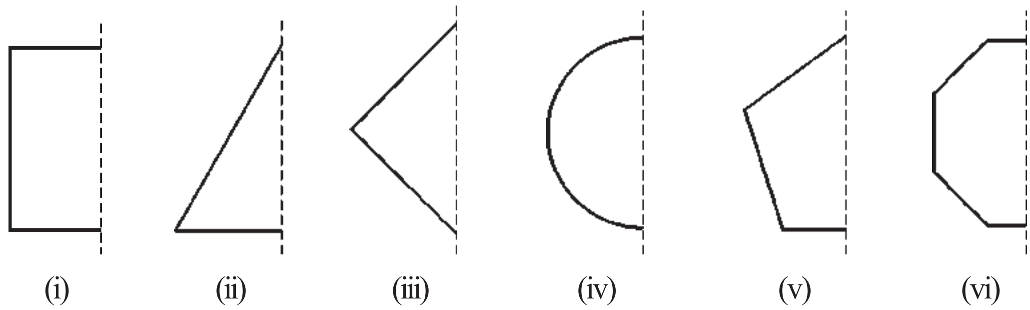
(i)   (ii)   (iii)



2. కింది పటములకు సౌష్టవాక్షములు ఇవ్వబడ్డాయి, కానీ ఒక విభాగంలో మాత్రమే బిందువులు ఇవ్వబడ్డాయి. రెండవ విభాగంలోని బిందువులను గుర్తించండి.



3. కింద ఇవ్వబడిన అసంపూర్ణ పటములలో చుక్కల రేఖలు సౌష్టవాక్షములను సూచిస్తున్నవి. చుక్కల రేఖల వెంబడి అద్దమును ఉంచడం ద్వారా ప్రతిబింబములతో పూర్తి పటములను గమనించండి. అన్ని పటములను పూర్తి పటములుగా పూరించండి.



4. క్రింది ప్రవచనములు సత్యములో, కాదో గుర్తించండి.

(i) ప్రతి సంవృత పటము సౌష్టవాక్షమును కలిగి ఉంటుంది. ( )

(ii) కనీసం ఒక సౌష్టవాక్షము గల పటమును సౌష్టవ పటం అంటారు. ( )

(iii) 10 భుజములు గల క్రమ బహుభుజి యొక్క సౌష్టవాక్షముల సంఖ్య 12 ( )

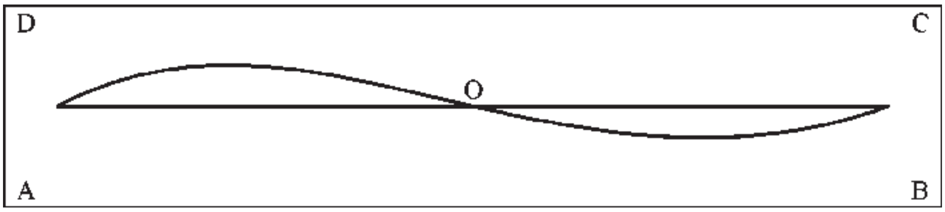
5. ఒక చతురస్రమును నిర్మించి దాని యొక్క అన్ని సౌష్టవాక్షములను గీయండి. ప్రతి రెండు ఆసన్న సౌష్టవ అక్షముల మధ్య కోణం కొలవండి. ఏమి గమనించారు? అన్ని క్రమ బహుభుజులకు ఈ నియమం వర్తిస్తుందా?

15.2 భ్రమణ సౌష్టవము

కృత్యము 1 : కింది పటమును ఒక ఉల్లిపొర కాగితము పై నకలు గీయండి.

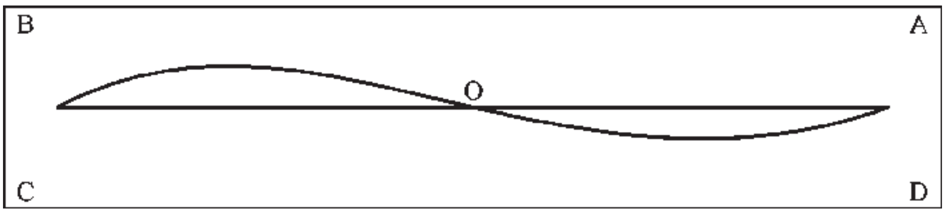
మడత పెట్టుట ద్వారా రెండు విభాగములు ఏకీభవించునట్లుగా ప్రయత్నించండి వీలగుచున్నదా? ఈ పటము సౌష్టవ పటమా? కాదు కదా!

ఒక పటమును వివిధ దిశలలో త్రిప్పినపుడు ఏర్పడు ఆకారములను పోల్చుదాము పటము-1 లో వలె పటము మధ్యబిందువు 'O' ను గుర్తించండి.



పటం 1

'O' కేంద్రముగా పటమును 180^o భ్రమణం చేసి చూడండి.



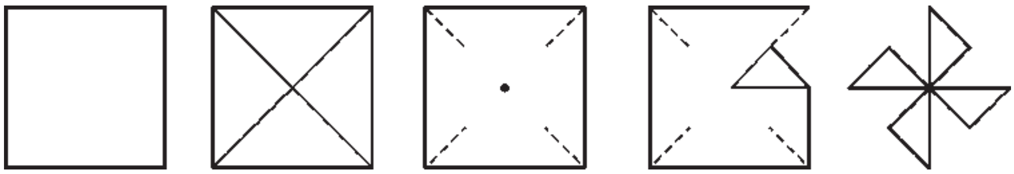
పటం 2

పటము 2 లో ఏమి గమనించారు? పటము 1 మరియు పటము 2 ల మధ్య భేదమేమయినా కలదా? పటము యొక్క స్థానములో ఎటువంటి మార్పు కనుపించదు. కనుక ఈ పటమునకు 'భ్రమణ సౌష్టవము' కలదు అంటాము.

కృత్యము 2 : గాలిమరను తయారుచేద్దాం

- చతురస్రాకారపు కాగితమును తీసుకొనండి
- రెండు కర్ణముల వెంబడి మడవండి.
- కాగితం యొక్క ప్రతి శీర్షము నుండి, కర్ణము వెంబడి నాల్గవ వంతు దూరము వరకు కత్తిరించండి?
- కత్తిరించిన మూలలో ఒకటి మార్చి మరొక దానిని పటంలో చూపినట్లు మధ్యకు మడవండి.
- అన్ని మడిచిన చివరలను, అవసరమైతే అతికించండి కాగితం మధ్యబిందువు గుండా, ఒక పిన్ను సహాయంతో ఒక కర్రపుల్ల చివర గ్రుచ్చండి.

• ఇప్పుడు దీనిని వీచే గాలికి అభిముఖంగా ఉంచి చూడండి. అది ఎంత వేగంగా తిరుగుతుందో గమనించండి.



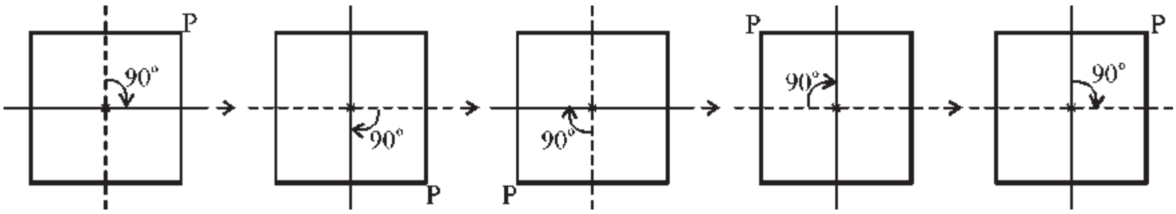
ఇప్పుడు ఈ గాలిమరను బల్లపై ఉంచి, 90^o భ్రమణం చేయించండి. గాలిమర ఆకారంలో ఎటువంటి మార్పు అయినా కన్పించిందా? గమనిస్తే ప్రతి 90^o భ్రమణానికి గాలిమర ఆకారం పూర్తిగా మొదటి ఆకారంతో పోలి ఉంటుంది. కనుక ఈ గాలిమర భ్రమణ సౌష్టవమును కలిగి ఉంది.

ఒక పటములోని మధ్యబిందువు గుండా పటాన్ని కొంత కోణము భ్రమణం చేయగా ఏర్పడు పటం మొదటి పటానికి సర్వసమానమయితే, ఆ పటం భ్రమణ సౌష్టవత కలిగియున్నది అంటాము.

15.2.1 భ్రమణ సౌష్టవ కోణము

చతురస్రమునకు రేఖీయ సౌష్టవత గలదని, దానికి 4 సౌష్టవాక్షములు గలవని మనకు తెలుసుకదా. ఇప్పుడు చతురస్రమునకు భ్రమణ సౌష్టవము కలదో లేదో పరిశీలిద్దాము. పటము-1 లో వలె చతురస్రము యొక్క ఒక శీర్షమును P అని గుర్తించి, చతురస్రం యొక్క రెండు సౌష్టవాక్షములను గుర్తించండి.

పటము-1 చతురస్రము యొక్క తొలిస్థితిని తెలియజేస్తున్నదని అనుకొనుము. చతురస్రమును దాని కేంద్రము గుండా 1/4 వ వంతు భ్రమణం అనగా 90^0 భ్రమణం చేయండి. ఇప్పుడు, పటం 2 లోని స్థితి ఏర్పడుతుంది. బిందువు P యొక్క స్థితిని గమనించండి. రెండవసారి 90^0 భ్రమణం చేయగా పటం 3 లోని స్థితి ఏర్పడుతుంది. అట్లే మరి రెండుసార్లు 90^0 భ్రమణములు చేయగా పటం 5 లోని స్థితి ఏర్పడుతుంది. ఇది పూర్తిగా తొలిస్థితియే.



పటం 1 పటం 2 పటం 3 పటం 4 పటం 5

పరిశీలించినట్లయితే ప్రతి 90^0 భ్రమణం తరువాత చతురస్రము యొక్క స్థితి పటం 1 లోని తొలిస్థితి వలె కనిపిస్తున్నది. అనగా చతురస్రము భ్రమణ సౌష్టవతను కలిగియున్నది.

పై కృత్యము నందు చతురస్రమును 90^0, 180^0, 270^0,360^0 భ్రమణములు చేయగా ఏర్పడిన స్థితులు పటము 2, పటము 3, పటము 4 మరియు పటము5లలో వలె ప్రతి ఒక్కటి పటము 1 లోని తొలిస్థితిని పోలి యున్నది. వీనిలోని కనిష్ట కోణము 90^0 లను చతురస్రము యొక్క భ్రమణ సౌష్టవ కోణము అంటారు.

ఏదైనా ఒక పటమును ఏ కనీస కోణంతో భ్రమణము చేసినపుడు అది పూర్తిగా తొలిస్థితిని పోలి ఉంటుందో ఆ కోణమును ఆ పటము యొక్క 'భ్రమణ సౌష్టవ కోణము' అంటారు.

ఇది చేయండి.

1. చతురస్రము యొక్క భ్రమణ సౌష్టవ కోణమెంత?
2. సమాంతర చతుర్భుజము యొక్క భ్రమణ సౌష్టవ కోణమెంత?
3. వృత్తము యొక్క భ్రమణ సౌష్టవ కోణమెంత?

15.2.2 భ్రమణ సౌష్టవ పరిమాణము

పై కృత్యము ద్వారా చతురస్రము యొక్క భ్రమణ సౌష్టవ కోణము 90^0 అని తెలుసుకొన్నాము. అట్లే చతురస్రమును దాని భ్రమణ సౌష్టవ కోణంలో నాలుగు సార్లు భ్రమణం చేసినప్పుడు అది యథాస్థితికి వచ్చినదని కూడా తెలియుచున్నది. కనుక చతురస్రము యొక్క భ్రమణ సౌష్టవ పరిమాణము 4 అంటాము.

ఒక సమబాహు త్రిభుజము యొక్క భ్రమణ సౌష్టవ కోణము 120^0 అనగా సమబాహు త్రిభుజమును ఒక్కొక్కసారికి 120^0 చొప్పున 3 సార్లు భ్రమణం చేయగా అది దాని తొలిస్థితికి వస్తుంది అని తెలియుచున్నది. కనుక సమబాహు త్రిభుజం యొక్క భ్రమణ సౌష్టవ పరిమాణము 3.

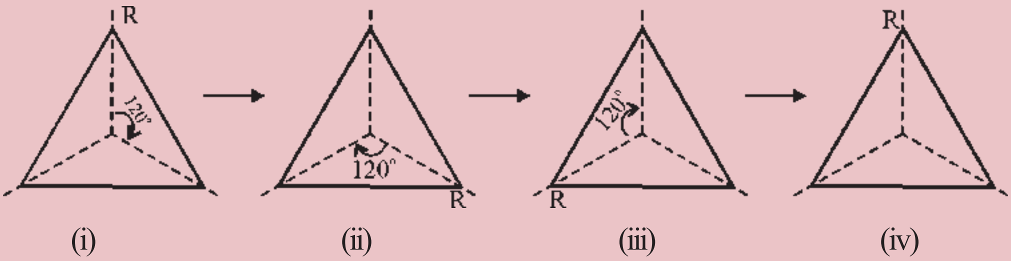
పై ఉదాహరణల నుంచి, 'ఒక పటమును, దాని భ్రమణ సౌష్టవ కోణము గుండా ఎన్నిసార్లు భ్రమణం చేస్తే అది తన తొలిస్థితికి వస్తుందో ఆ సంఖ్యను పటం యొక్క 'భ్రమణ సౌష్టవ పరిమాణం' అంటారు అని నిర్వచింప వచ్చును.

పై ఉదాహరణల నుండి సంగ్రహ పరచగా

- చతురస్ర కర్ణాల ఖండన బిందువు భ్రమణ కేంద్రము
- చతురస్రము యొక్క భ్రమణ సౌష్టవ కోణము90^0
- చతురస్రము యొక్క భ్రమణ సౌష్టవ పరిమాణము 4.

ప్రయత్నించండి

1. (i) సమబాహు త్రిభుజం యొక్క భ్రమణ సౌష్టవ పరిమాణము కనుగొనండి.



(ii) ప్రతిపటములోసౌష్టవాక్షములు ఎన్ని?

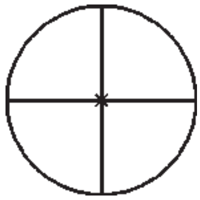
(iii) ప్రతి రెండు ఆసన్న (ప్రక్క ప్రక్క) సౌష్టవాక్షముల మధ్య కోణ మెంత?

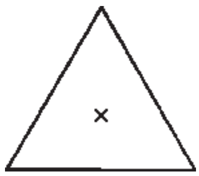
2. మీ పరిసరములను పరిశీలించి భ్రమణ సౌష్టవము గల ఏవైనా ఐదు వస్తువులను పేర్కొనండి.

గమనిక : ప్రతి పటము 360^0 భ్రమణ చేసినపుడు అది దాని తొలి స్థితిలతో సర్వసమానత్వమును కలిగి ఉంటుంది. కావున అది పరిమాణము 1 గా గల భ్రమణ సౌష్టవము కలిగి ఉంటుంది అని చెప్పరాదు. ఏదైనా పటము యొక్క భ్రమణ సౌష్టవ పరిమాణం 1 కన్నా ఎక్కువ ఉన్నప్పుడు (భ్రమణ సౌష్టవ కోణము 360^0 కన్నా తక్కువ ఉన్నప్పుడు) మాత్రమే ఆ పటము భ్రమణ సౌష్టవత కలిగియున్నది అంటాము.

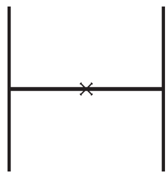
అభ్యాసం - 3

1. కింది పటములలో వేని యొక్క భ్రమణ సౌష్టవ పరిమాణములు 1 కన్నా ఎక్కువ?


(i)


(ii)

(iii)

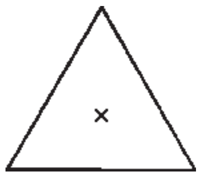

(iv)

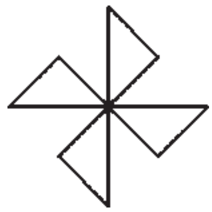
(v)

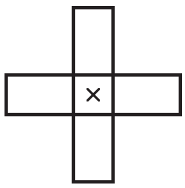
2. కింది పటముల యొక్క భ్రమణ సౌష్టవ పరిమాణములు రాయండి.

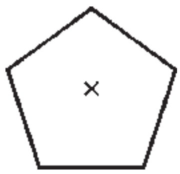
(i)

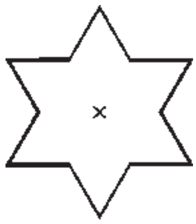
(ii)

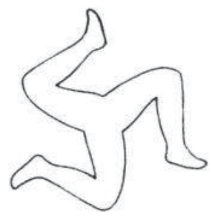

(iii)


(iv)


(v)


(vi)


(vii)


(viii)

3. కింది పట్టికలో ఇవ్వబడిన పటాలను నిర్మించి, పరిశీలనల ద్వారా పట్టికను పూరించండి.

పటము	భ్రమణ కేంద్రము (కర్ణముల ఖండన బిందువు/ సౌష్టవాక్షముల ఖండన బిందువు)	భ్రమణ సౌష్టవ పరిమాణము	భ్రమణ సౌష్టవ కోణము
చతురస్రం			
దీర్ఘ చతురస్రము			
సమచతుర్భుజము			
సమబాహు త్రిభుజం			
క్రమ షడ్భుజి			
వృత్తము			
అర్ధవృత్తము			

15.3 రేఖీయ సౌష్టవము, భ్రమణ సౌష్టవము

ఇప్పటి వరకు సాగిన చర్చను బట్టి కొన్ని పటములు రేఖీయ సౌష్టవమును మాత్రము, కొన్ని పటములు భ్రమణ సౌష్టవమును మాత్రము, కొన్ని పటములు రెండు సౌష్టవములను కలిగియుంటాయని అర్థం చేసుకొని ఉంటారు.

వృత్తము సంపూర్ణ సౌష్టవము గల రేఖా పటము. ఎంత కోణము భ్రమణమునకు అయినా వృత్తము భ్రమణ సౌష్టవతను కలిగి యుంటుంది. అనగా వృత్తమునకు సౌష్టవాక్షముల సంఖ్య అనంతము, భ్రమణ సౌష్టవ పరిమాణము అనంతము.

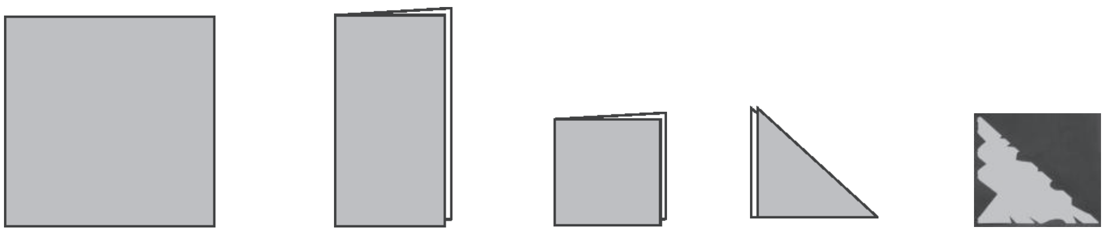
ఉదాహరణ 1 : క్రింది ఆకారములలో ఏవి రేఖీయ సౌష్టవతను కలిగియున్నవి? ఏవి భ్రమణ సౌష్టవతను కలిగియున్నవి.

(i) (ii) (iii) (iv)

పటము	రేఖీయ సౌష్టవము	భ్రమణ సౌష్టవము
1.	కలదు	లేదు
2.	లేదు	కలదు
3.	కలదు	కలదు
4.	లేదు	కలదు

కృత్యము 3

- చతురస్రాకారపు కాగితమును తీసుకొనండి.
- దానిని మధ్యగా నిలువుగా, తరువాత అడ్డముగా మడవండి.
- మడచిన అంచులు కలుసుకొనునట్లు ఐ మూలగా (కర్ణం వెంబడి) మరొకసారి మడవండి.
- పటంలో చూపిన విధంగా మడిచిన అంచుల వెంట కత్తిరించండి.
- కాగితం మడతలు విప్పి చూడండి.
- మరికొన్ని డిజైనులను తయారుచేయండి.



పటం 1 పటం 2 పటం 3 పటం 4 పటం 5

(i) ఈ కాగితము (డిజైను కత్తిరించిన కాగితము) రేఖీయ సౌష్టవతను కలిగి ఉన్నదా? ఉంటే ఎన్ని సౌష్ఠవాక్షములు?

(ii) ఈ కాగితము భ్రమణ సౌష్టవతను కలిగి ఉన్నదా?

అభ్యాసం - 4

1. ఆంగ్లమునందు కొన్ని పెద్ద అక్షరములు అందమైన సౌష్టవమును కలిగి ఉంటాయి. ఏయే అక్షరములు ఒక్క సౌష్టవాక్షమును కలిగి ఉంటాయో వ్రాయండి. ఏయే అక్షరములు 2 పరిమాణం గల భ్రమణ సౌష్టవమును కలిగి ఉన్నాయి?

పరిశీలించి క్రింది పట్టికను పూరించండి.

అక్షరము	రేఖీయ సౌష్టవము	సౌష్టవ అక్షముల సంఖ్య	భ్రమణ సౌష్టవము	భ్రమణ సౌష్టవ పరిమాణం
Z	లేదు	0	కలదు	2
S				
H				
O				
E	కలదు	1	లేదు	
N				
C				

ప్రాజెక్టు పని :

వార్తాపత్రికలు, వారపత్రికలు, ప్రకటనల కరపత్రముల నుండి సౌష్టవ పటములను సేకరించి వాటి సౌష్టవాక్షములను గీయండి. వర్గీకరించండి.

మనం నేర్చుకున్నవి

- ఒక పటమును రెండు సర్వసమాన విభాగములుగా విభజించునట్లుగా పటము మధ్య గీయదగు రేఖను ఆ పటము యొక్క 'సౌష్టవరేఖ' లేక 'సౌష్టవాక్షము' అంటాము.
- కొన్ని పటములకు ఒకటి, లేక అంతకన్నా ఎక్కువ సౌష్టవాక్షములు ఉంటాయి.
- ఒక పటంలోని మధ్యబిందువు గుండా పటాన్ని కొంత కోణములో భ్రమణము చేయించగా ఏర్పడు పటము మొదటి పటానికి సర్వసమానమయితే ఆ పటము భ్రమణ సౌష్టవము కలిగియున్నది అంటాము.
- ఒక పటమును ఏ కనీస కోణముతో భ్రమణం చేసినప్పుడు అది పూర్తిగా తొలిస్థితిని పోలి ఉంటుందో ఆ కోణమును పటం యొక్క 'భ్రమణ సౌష్టవ కోణం' అంటాము.
- ప్రతి పటము 360^{o} భ్రమణము చేసినపుడు, అది దాని తొలి స్థానముతో సర్వసమానత్వమును కలిగి ఉంటుంది. కావున అది 1 పరిమాణంగా గల భ్రమణ సౌష్టవము కలిగి ఉంటుంది అని చెప్పరాదు. ఏదయినా పటము యొక్క భ్రమణ సౌష్టవ పరిమాణం 1 కన్నా ఎక్కువ ఉన్నప్పుడు (భ్రమణ సౌష్టవ కోణము 360^{o} కన్నా తక్కువ ఉన్నప్పుడు) మాత్రమే ఆ పటము భ్రమణ సౌష్టవత కలిగియున్నది అంటాము.
- కొన్ని ఆకారములు రేఖీయ సౌష్టవతను మాత్రము, కొన్ని ఆకారములు భ్రమణ సౌష్టవతను మాత్రము, కొన్ని ఆకారములు రెండింటిని కలిగి యుంటాయి.

జవాబులు

01 – పూర్ణ సంఖ్యలు

అభ్యాసం – 1

(1) పెద్ద సంఖ్య = 2 ; చిన్న సంఖ్య = –3

(2) (i) –9, –8, –7, –6 ; గరిష్ట సంఖ్య = –6 ; కనిష్ట సంఖ్య = –9

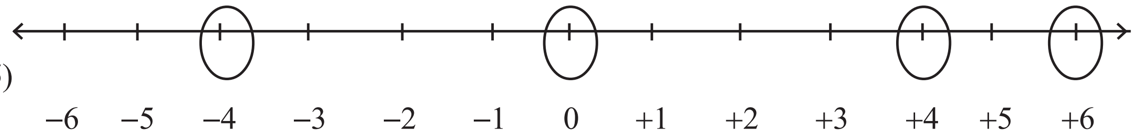
(ii) –1, 0 +1, +2 ; గరిష్ట సంఖ్య = +2 ; కనిష్ట సంఖ్య = –1

(iii) –7, –6, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4 గరిష్ట సంఖ్య = +4 ; కనిష్ట సంఖ్య = –7

(3) (i) –8, –5, 1, 2 (ii) –5, –4, –3, 2 (iii) –15, –10, –7

(4) (i) –2, –3, –5 (ii) –1, –2, –8 (iii) 8, 5, –2

(5)



(6) –8, –7, –6, –4, –3, –2, –1, 1, 2, 3, 5, 6,7, 9

(7)i)

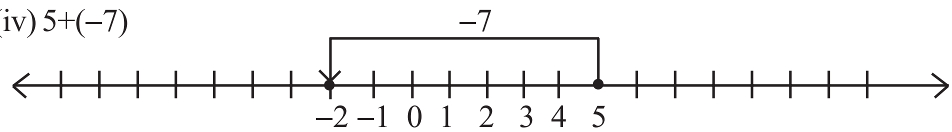
క్ర.సం.	పట్టణం	ఉష్ణోగ్రత
1	బెంగుళూరు	20°C
2	ఊటీ	15°C
3	నైనితాల్	–3°C
4	మనాలి	–7°C
5	కసౌలి	–9°C

(ii) బెంగుళూరు (20°C) (iii) కసౌలి (–9°C)

(iv) నైనితాల్ (–3°C) మనాలి (–7°C) కసౌలి (–9°C) (v) ఊటీ (15°C) బెంగుళూరు (20°C)

అభ్యాసం – 2

(1) (iv) 5+(–7)



i, ii, iii లను పై విధంగా గుర్తించాలి.

(2) (i) 11 (ii) 5 (iii) 14 (iv) 8 (v) 2 (vi) 4
(vii) –2 (viii) 0 (ix) 8 (x) 20 (xi) 80

అభ్యాసం – 3

(1) (i) 5 (ii) 15 (iii) –4 (iv) 1 (v) 13 (vi) -1

(2) (i) 31 (ii) 21 (iii) 24 (iv) –13
(v) –8 (vi) 130 (vii) 75 (viii) 50

(3) క్ర.సం. ఋణపూర్ణసంఖ్య + పూర్ణాంకం = −6

1	(−6)	+	0	=	−6
2	(−7)	+	1	=	−6
3	(−8)	+	2	=	−6
4	(−9)	+	3	=	−6 మొదలగునవి

అభ్యాసం - 4

(1) (i) +600 (ii) −1 (iii) −600 (iv) +200 (v) −45

(2) (i) −3 (ii) −225 (iii) 630 (iv) 316 (v) 0
(vi) 1320 (vii) 162 (viii) −360 (ix) −24 (x) 36

(3) −10° (4) (i) 10 (ii) 18 (iii) 5 (5) (i) ₹.5000 లాభం (ii) 3200

(6) (i) −9 (ii) −7 (iii) +7 (iv) −11

అభ్యాసం - 5

(1) (i) సత్యం (72 = 126 − 54 = 72) (ii) సత్యం (210 = 84 + 126 = 210) (2) (i) −a (ii) −5

(3) (i) 480 (ii) −53,000 (iii) −15000 (iv) −4182
(v) −62500 (vi) 336 (vii) 493 (viii) 1140

అభ్యాసం - 6

(1) (i) −1 (ii) −49 (iii) నిర్వచింప లేము (iv) 0

అభ్యాసం - 7

(1) (i) 24 (ii) 20 (2) (i) లాభం ₹33,000 (ii) 3000

(3) రాత్రి 9 గం॥ ; అర్థరాత్రి 12 గంట సమయంలో ఉష్ణోగ్రత = −14°C

(4) (i) 8 ప్రశ్నలు (ii) 13 ప్రశ్నలు (5) 1 గంట

02- భిన్నాలు, దశాంశాలు మరియు అకరణీయ సంఖ్యలు

అభ్యాసం - 1

(1) (i) $2\frac{3}{4}$ (ii) $1\frac{1}{9}$ (iii) $\frac{3}{7}$ (iv) $3\frac{1}{6}$ (v) $\frac{11}{24}$ (vi) $6\frac{1}{6}$

(2) (i) $\frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{5}{6}$ (ii) $\frac{3}{10}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}$

(3) అడ్డువరుసలలో మొత్తం = $\frac{21}{13}$, నిలువు వరుసలలో మొత్తం = $\frac{21}{13}$, కర్ణాల వరసలలో మొత్తం = $\frac{21}{13}$ అన్ని వరుసలలలోని మొత్తాలు సమానం.

(4) $17\frac{11}{15}$ సెం.మీ (5) $1\frac{7}{8}$ (6) $\frac{7}{12}$

(7) చుట్టుకొలత $\Delta ABE = 10\frac{1}{5}$ సెం.మీ; BCDE చుట్టుకొలత = $7\frac{11}{15}$ సెం.మీ;

ΔABE చుట్టుకొలత పెద్దది; భేదం = $2\frac{7}{15}$

అభ్యాసం - 2

(1) (i) $5\frac{0}{6}$ లేక 5 (ii) $1\frac{1}{3}$ (iii) $1\frac{5}{7}$ (iv) $1\frac{1}{9}$ (v) $6\frac{0}{5}$ లేక 6

(2) (i) 6 (ii) 6 (iii) 9 (iv) 15

(3) (i) 4 (ii) 6

అభ్యాసం - 3

(1) (i) $\frac{35}{66}$ (ii) $1\frac{1}{5}$ (iii) $7\frac{7}{15}$ (2) (i) $3\frac{7}{15}$ (ii) $\frac{2}{21}$ (iii) 3

(3) (i) $\frac{3}{8} = \frac{1}{2}$లో $\frac{3}{4}$ (ii) రెండు సమానమే (4) $17\frac{1}{2}$ గంటలు (5) $85\frac{1}{3}$ కి.మీ (6) 1350మీ.

(7) (i) $\frac{10}{7}$ (ii) $\frac{3}{5}$, 35 లేక 3,7

అభ్యాసం - 4

(1) (i) $\frac{8}{5}$ (ii) $\frac{7}{8}$ (iii) $\frac{7}{13}$ (iv) $\frac{4}{3}$ (2) (i) 24 (ii) $3\frac{3}{7}$ (iii) $1\frac{2}{7}$ (iv) $\frac{7}{5}$

(3) (i) $\frac{2}{15}$ (ii) $\frac{7}{40}$ (iii) $\frac{5}{9}$ (4) $2\frac{1}{2}$ రోజులు

అభ్యాసం - 5

(1) (i) 0.7 (ii) 8.5 (iii) 1.51 (iv) 6 (2) (i) ₹. 0-09 (ii) ₹. 77-07 (iii) ₹. 2-35

(3) (i) 0.1 మీ, 0.0001 కి.మీ (ii) 4.5 సెం.మీ, 0.045 మీ 0.000045 కి.మీ

(4) (i) 0.19 కి.గ్రా (ii) 0.247 కి.గ్రా (iii) 44.08 కి.గ్రా

(5) (i) $50 + 5 + \frac{5}{10}$ (ii) $5 + \frac{5}{10} + \frac{5}{100}$ (iii) $300 + 3 + \frac{3}{100}$

(iv) $30 + \frac{3}{10} + \frac{3}{1000}$ (v) $1000 + 200 + 30 + 4 + \frac{5}{10} + \frac{6}{100}$

(6) (i) 3 (ii) 30 (iii) $\frac{3}{100}$ (iv) $\frac{3}{10}$ (v) $\frac{3}{100}$ (7) రాధ, 100 మీ. (8) 5.625 కి.గ్రా.

అభ్యాసం - 6

(1) (i) 1.8 (ii) 18.9 (iii) 13.55 (iv) 78.8 (v) 0.35

(vi) 1050.05 (vii) 1.72 (2) 24.8 సెం.మీ^{2}

(3) (i) 213 (ii) 368 (iii) 537 (iv) 1680.7 (v) 13110

(vi) 15610 (vii) 362 (viii) 4307 (ix) 5 (x) 0.8

(xi) 90 (xii) 30 (4) 625 కి.మీ (5) (i) 0.45 (ii) 4.75

(iii) 42.16 (iv) 14.62 (v) 0.025 (vi) 1.12 (vii) 0.0214

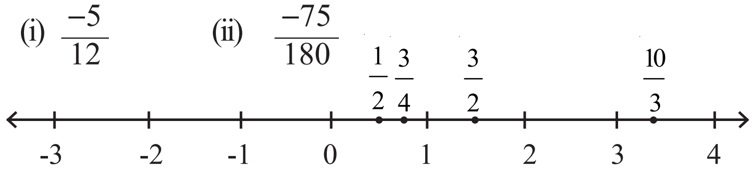
(viii) 10.5525 (ix) 1.0101 (x) 77.011 (6) (i) 0.023 (ii) 0.09 (iii) 4.43

(iv) 0.1271 (v) 2 (vi) 590 (vii) 0.02 (7) 5 (8) 0.128 సెం.మీ

అభ్యాసం - 7

(2) (i) $\frac{-5}{12}$ (ii) $\frac{-75}{180}$

(3)



(4) (i) అసత్యం (ii) సత్యం (iii) అసత్యం (iv) అసత్యం (v) సత్యం

03 - సామాన్య సమీకరణాలు

అభ్యాసం - 1

(1) (i) L.H.S = 2x, R.H.S = 10 (ii) L.H.S = 2x–3, R.H.S = 9 (iii) L.H.S = 4z+1, R.H.S = 18 (iv) L.H.S = 5p+3, R.H.S = 2p+9

(v) L.H.S = 14, R.H.S = 27–y (vi) L.H.S = 2a–3, R.H.S = 5 (vii) L.H.S = 7 m, R.H.S = 14 (viii) L.H.S = 8, R.H.S = q + 5

(2) (i) y = 5 (ii) a = 8 (iii) m = 3 (iv) n = 7

అభ్యాసం - 2

(1) (i) x = 4 (ii) y = 7 (iii) x = 5 (iv) z = 9 (v) x = 3 (vi) y = –20

(2) (i) y = 5 (ii) a = 4 (iii) q = 4 (iv) t = 4 (v) x = 13

(vi) x = 3 (vii) x = –5 (viii) x = –1 (ix) y = 4 (x) x = –2

అభ్యాసం - 3

(1) 4 సెం.మీ (2) 5 సెం.మీ (3) 21 (4) 30 (5) 8 (6) 46, 49 (7) 7, 8, 9

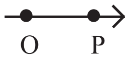
(8) l = 34 మీ, b = 2 మీ (9) l=23 మీ, b=19 మీ (10) 5 సంవత్సరాలు (11) 19, 44 (12) 40;25,15

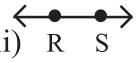
13) 2 (14) 40 (15) 30°, 60°, 90° (16) 30

04 - రేఖలు - కోణాలు

అభ్యాసం - 1

(1) (i) రేఖా ఖండం AB (ii) కిరణం CD (iii) రేఖ XY (iv) బిందువు 'P'

(2) (i) 

(ii) • X
(iii) 

(iv)

(3) $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}, \overline{BC}, \overline{BD}, \overline{CD}$

(5) (i) అల్పకోణం (ii) అధిక కోణం (iii) లంబ కోణం (iv) అల్పకోణం (v) అధిక కోణం

(6) $\angle AOF, \angle FOE, \angle EOD, \angle DOC, \angle COB, \angle FOD, \angle EOC, \angle DOB$ - అల్పకోణాలు

$\angle AOE, \angle EOB, \angle FOC$ - లంబ కోణం ; $\angle AOD, \angle AOC, \angle FOB$ - అధిక కోణాలు

$\angle AOB$ - సరళ కోణం (7) (i) మరియు (iv) సమాంతరాలు; (ii) మరియు (iii) సమాంతరాలు కావు

(8) (i) (ii) మరియు (iv) ఖండన రేఖలు మరియు (iii) ఖండన రేఖలు కావు.

అభ్యాసం - 2

(1) iii (2) (i) 65° (ii) 50° (iii) 1° (iv) 35° (3) 45°, 45°

(4) అవును. ఎందుకనగా కోణాలు మొత్తం 90°

అభ్యాసం - 3

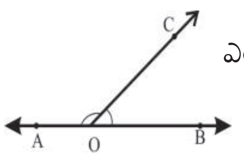
(1) (i), (ii) (2) (i) 75° (ii) 85° (iii) 30° (iv) 160°

(3) రెండు అల్పకోణాల మొత్తం ఎల్లప్పుడు 180° కన్నా తక్కువ (4) 90°, 90°

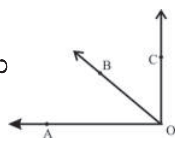
అభ్యాసం - 4

(1) (i) a, b (ii) c, d (2) (i) $\angle AOD, \angle DOB$ (ii) $\angle DOB, \angle BOC$

(iii) $\angle BOC, \angle COA$ (iv) $\angle COA, \angle AOD$

(3) అవును 

ఎందుకనగా $\angle AOC + \angle COB = 180°$

(4) అవును 

. ఎందుకనగా $\angle AOB + \angle BOC = 90°$

అభ్యాసం - 5

(1) i, ii (2) లేదు, ఎందుకనగా రెండింటికి ఉమ్మడి భుజం లేదు

అభ్యాసం - 6

(1) (i) $\angle AOD, \angle BOC$ (ii) $\angle AOC, \angle BOD$

(2) $y = 160°$ (నిలువు శీర్షాభిముఖ కోణాలు) $x + 160° = 180°$ $\therefore x = 20°$

$\angle x = \angle z$ అడ్డు శీర్షాభిముఖ కోణాలు $\therefore z = 20°$

అభ్యాసం - 7

(1) (i) తిర్యగ్రేఖ (ii) సమాంతరం (iii) సమాంతరం (iv) ఒకటి

(2) (i) 100° (ii) 45° (iii) 90° (iv) 100°

(3) $\angle x = 180 - (75+45) = 60°$; $\angle y = 75°$; $z = 45°$

(4) $b + 50° = 180°$ $\therefore b = 130°$

$b + c = 180° \Rightarrow 130° + c = 180° \Rightarrow c = 50°$

$d + 50° = 180° \Rightarrow d = 130°$

(5) $\therefore l \| m$ అగును

(6) $\angle a = 50°$ (ఏకాంతర కోణాలు)

$\angle b = 50°$ (ఏకాంతర కోణాలు)

$\angle c = \angle d = \angle e = 50°$

(అన్నియు ఏకాంతర కోణాలు)

05 - త్రిభుజము - ధర్మాలు

అభ్యాసం - 1

(1) (i) సంభవము (ii) సంభవము (iii) సంభవము కాదు (iv) సంభవము

అభ్యాసం - 2

(1) (i) మధ్యగతం (ii) ఉన్నతి (ఎత్తు) (2) లంబకోణ త్రిభుజము (3) అవును

(4) కాదు, కొన్ని సందర్భాలలో త్రిభుజం బాహ్య ప్రదేశంలో ఉంటాయి. (5) (i) XZ (ii) $\angle R$ (iii) B

అభ్యాసం - 3

(1) (i) $70°$ (ii) $60°$ (iii) $40°$ (2) (i) $x = 70°$; $y = 60°$ (ii) $x = 80°$; $y = 50°$
(iii) $x = 110°$; $y = 70°$ (iv) $x = 60°$; $y = 90°$ (v) $x = 45°$; $y = 90°$ (iv) $x = 60°$

(3) (i) $40°$ (ii) $34°$ (iii) $60°$ (4) $60°$ (5) (i) అసత్యం (ii) సత్యం (iii) అసత్యం (iv) అసత్యం

(6) (i) $30°$; $60°$; $90°$ (7) $x = 100°$; $y = 50°$; $z = 100°$ (8) $72°$

(9) $\angle P = 80°$; $\angle Q = 40°$; $\angle R = 60°$ (10) $18°$; $72°$; $90°$ (11) $36°, 54°$

(12) $\angle LPM = 40°$; $\angle PML = 50°$; $\angle PRQ = 50°$ (13) $540°$

అభ్యాసం - 4

(1) అంతర కోణాలు : $\angle ABC, \angle ACB, \angle BAC$; బాహ్యకోణాలు : $\angle CBX, \angle ACZ, \angle BAY$

(2) $\angle ACD = 111°$ (3) $x = 115°$; $y = 35°$ (4) (i) $x = 50°$ (ii) $x = 33°$; $y = 82°$

(5) $\angle CDB = 76°$; $\angle DBC = 39°$; $\angle ABC = 58°$

(6) (i) $x = 55°$ (ii) $x = 100°$ (iii) $x = 120°$; $y = 30°$ (iv) $y = 70°$ (v) $x = 60°$; $y = 150°$;

(vi) $x = 50°$; $y = 130°$ (7) $50°$; $75°$; $55°$ (8) $\angle P = 35°$; అవును (9) $70°$

(10) $30°$; $75°$; $75°$ (11) $x = 135°$; $y = 80°$

06 - నిష్పత్తి - ఉపయోగాలు

అభ్యాసం - 1

(1) 100 : 10 , 10:1 (2) ₹.15 (i) 15 : 5 లేక 3 : 1 (రాధ : సుధ)

(ii) 5 : 15 or 1 : 3 (సుధ:రాధ) (3) రాజు యొక్క వాటా = 40 ; రవి యొక్క వాటా = 56

(4) $\overline{AX}$ = 18 సెం.మీ ; $\overline{XB}$ = 20 సెం.మీ (5) ₹.60,000 (6) 8 లీటర్లు

(7) 40 : 20 లేక 2: 1 (8) 1:2400 లేక 0.05 : 120

(9) (i) నీ తరగతిలోని బాలురు, బాలికలను లెక్కించి నిష్పత్తి రూపంలో తెలుపాలి. ఒకవేళ బాలురు లేక బాలికల సంఖ్య సున్న అయితే నిష్పత్తి దానిని రూపంలో తెల్పగలవా? ఇలాంటి నిష్పత్తులను పోల్చలేము.

(ii) నీ తరగతి గది తలుపులు, కిటికీలు లెక్కించి దీనిని నిష్పత్తి రూపంలో తెలపాలి.

(iii) నీ దగ్గరి పాఠ్యపుస్తకాలు, నోటుపుస్తకాలను లెక్కించి దీనిని నిష్పత్తి లో తెలపాలి.

అభ్యాసం - 2

(1) (i) 8, 8 (ii) 450, 450 (iii) 96, 96 (iv) 6, 30 (v) 24, 72

(2) (i) అసత్యం (ii) సత్యం (iii) సత్యం (iv) సత్యం (v) అసత్యం

(3) ₹.90 (4) 10 కి.గ్రా (5) a) 45 b) 26 (6) i) $540°$ ii) $21°$

అభ్యాసం - 3

(1) 0.0001 సెం.మీ ; 2సెం.మీ (2) (i) అవును (ii) లేదు (iii) లేదు (3) 4 సెం.మీ

(4)
- వేరువేరు చతురస్రాలను గీయండి. వాటి భుజాల పొడవులను కొలచి పట్టికను పూరించండి.
- చతురస్ర చుట్టుకొలత దాని భుజానికి నాలుగు రెట్లు దీని ఆధారంగా పట్టికను పూరించండి.
- ప్రతి చతురస్రం యొక్క భుజాన్ని వర్గం చేసి దీని ఆధారంగా పట్టికను పూరించాలి.

(i) అవును. చతురస్రంలో భుజం పొడవు దాని చుట్టుకొలతకు అనులోమానుపాతంలో ఉంటుంది.

(ii) అవును. చతరస్రంలో భుజం పొడవు దాని వైశాల్యానికి అనులోమానుపాతంలో ఉంటుంది.

అభ్యాసం - 4

(1) పాఠశాల Y (2) 20% తగ్గింపు (3) మామిడిపండ్లు = 35% (4) 16%

(5) పాఠశాలకు రానివారు $= 16\frac{2}{3}\%$ లేక 16.66% పాఠశాలకు వచ్చినవారు $= 83\frac{1}{3}\%$ లేక 83.33%

(6) 7200 (7) 15 (8) బంగారం 70% ; వెండి 25% ; రాగి 5% (9) 2000

అభ్యాసం - 5

(1) $12\frac{1}{2}\%$ లేక 12.5% (2) 6% (3) ₹. 2,00,000 (4) ₹. 875

(5) నష్టం = 1200 (2.44%) (6) 561 (7) 202.5 (8) 800 (9) 1100

అభ్యాసం - 6

(1) 2 సంవత్సరాల 8 నెలలు లేక $\frac{8}{3}$ సంవత్సరాలు లేక $2\frac{2}{3}$ సంవత్సరాలు (2) 12%

(3) ₹. 450 (4) ₹. 12958 (5) $1\frac{1}{2}$ సంవత్సరాలు

07 - దత్తాంశ నిర్వహణ

అభ్యాసం - 1

(1) (i) 33 ^{0}C (ii) 30 ^{0}C (2) 15.9 కి.గ్రా

(3) (i) వేరుశనగ ₹:7500 ; జొన్న ₹:4000 ; తృణధాన్యాలు ₹:5250 (ii) వేరుశనగ (4) 42

(5) (i) 23 (ii) 21 (iii) 16.5 (iv) లేఖ్య (6) (i) ₹:18 (ii) ₹:54 (iii) అనుపాతం

(7) 5.5 (8) 5.6 (9) 107

అభ్యాసం - 2

(1) 155 సెం.మీ, 140సెం.మీ. (2) (i) అంకగణిత సగటు = 28, బాహుళకం= 27

(ii) 25 సం॥ వయస్సు కల్గిన ఆటగాళ్లు ఇద్దరు చొప్పున

(3) 25 (4) (i) బాహుళకం (ii) అంకగణిత సగటు (iii) అంకగణిత సగటు (iv) బాహుళకం

అభ్యాసం - 3

(1) (i) అసత్యం (ii) సత్యం (iii) అసత్యం (iv) అసత్యం (2) (i) ₹ 1400 (ii) ₹ 1450

(3) బాహుళకం సరిగా ఉన్నది. కాని మధ్యగతం తప్పు (4) 1,7,10 లేదా 2,7,9 లేదా 3,7,8 (5) 11

అభ్యాసం - 4

(5) (i) విద్య (ii) ఆహారం (iii) ₹ 2250 (iv) ₹1500

08 - త్రిభుజాల సర్వసమానత్వం

అభ్యాసం - 1

(1) (i) సత్యం (ii) అసత్యం

(2) (i) $\angle P = \angle R$ (ii) $\angle ROS = \angle POQ$

$\angle TQP = \angle SQR$ $\angle R = \angle Q$ or $\angle R = \angle P$

$\angle T = \angle S$ $\angle S = \angle P$ or $\angle S = \angle Q$

(3) (ii) సరైనది (4) అవును (భు.భు.భు. సర్వసమానత్వ ధర్మం)

అభ్యాసం - 2

(1) సమాచారం ఇవ్వల్సిన అవసరం ఉంది; GH = TR మరియు HJ = TS

(2) AP = 4 కి.మీ ($\therefore$ AP = BQ c.p.c.t.)

(3) (i) $\Delta ABC \cong \Delta STR$

AB = ST అందుచేత BC = TR

$\angle A = \angle S$ $\angle B = \angle T$

AC = SR $\angle C = \angle R$

(ii) $\Delta POQ \cong \Delta ROS$

PO = RO అందుచేత PQ = RS

OQ = OS $\angle P = \angle R$

$\angle POQ = \angle ROS$ $\angle Q = \angle S$

(iii) $\Delta DRO \cong \Delta OWD$ DR = OW అందుచేత DO = OD

RO = WD $\angle ODR = \angle DOW$

$\angle R = \angle W$ $\angle DOR = \angle ODW$

పటం □ WORD లో

$\angle R = 90^0$

WD = OR మరియు WO = DR

$\therefore$ □ WORD ఒక దీర్ఘచతురస్రం

$\therefore$ $\Delta WSD \cong \Delta OSR$

$\therefore$ $\Delta WSO \cong \Delta DSR$

మరియు $\Delta ORW \cong \Delta DWR$.

(iv) ΔABC మరియు ΔCDA సర్వసమానాలు కావు.

(4) (i) ΔABC మరియు ΔRQP తో తెలుసుకోవాల్సింది $AB = RQ$.

(ii) ΔABC మరియు ΔADC తో తెలుసుకోవాల్సింది $AB = AD$.

అభ్యాసం - 3

(1) (i) కో.కో.భు. ధర్మం $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$ (ii) కో.భు.కో.లేక భు.భు.భు.ధర్మం $\Delta ABD \cong \Delta CDB$

(iii) కో.భు.కో.ధర్మం $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (iv) సర్వసమానములు కావు

(2) (i) $\Delta ABC \cong \Delta DCB$ (కో.కో.భు.)

(ii) నుండి $AB = CD$ (సర్వసమాన త్రిభుజాల సదృశభాగాలు)

$\therefore$ $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (కో.భు.కో)

అభ్యాసం - 4

(1) (i) భు.భు.భు (ii) భు.కో.భు (iii) కో.భు.కో (iv) లం.క.భు.

(2) (i) a) $AR = PE$ b) $RT = EN$ c) $AT = PN$ (ii) a) $RT = EN$ b) $PN = AT$
(iii) a) $\angle A = \angle P$ b) $\angle T = \angle N$

(3) (i) భుజం (ii) కోణం (iii) ఉమ్మడి భుజం (iv) భు.కో.భు.

(4) సదృశకోణాలు సమానమైనంత మాత్రనా సర్వసమానమని చెప్పలేము. $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ కాని త్రిభుజాలు సరూపాలని చెప్పవచ్చు.

(5) $\Delta RAT \cong \Delta WON$ (6) $\Delta ABC \cong \Delta ABT$ మరియు $\Delta QRS \cong \Delta TPQ$

(7) (i) ఒకే కొలతతో కూడిన 2 త్రిభుజాలు నిర్మించాలి.

(ii) వేర్వేరు కొలతలతో కూడిన 2 త్రిభుజాలు నిర్మించాలి.

(8) $BC = QR$ (కో.భు.కో) or $AB = PQ$ (కో.కో.భు.) లేక $AC = PR$ (కో.కో.భు)

(9) $\angle B = \angle E$; $\angle A = \angle F$ కో.కో.భు. ఆధారంగా $\Delta ABC \cong \Delta FED$ సర్వసమానం ; $BC = ED$

10 - బీజీయ సమాసాలు

అభ్యాసం - 1

(1) (i) $3n$ (ii) $2n$

(2) (i) • పటం-4 లో ప్రతి వైపు 4 రంగుల టైల్స్ ఉంటాయి.

• పటం - 5లో ప్రతి వైపు 5 రంగుల టైల్స్ ఉంటాయి.

(ii) అమరిక ఆధారంగా బీజీయ సమాసం = 4n ; 4, 8, 12, 16, 20 . . . సమాసం = 4n

(iii) అమరిక ఆధారంగా బీజీయ సమాసం = 4n + 1 ; 9, 13, 17, 21 ... సమాసం = 4n + 1

(3) (i) $p + 6$ (ii) $x - 4$ (iii) $y - 8$ (iv) $-5q$ (v) $y \div 4$ లేక $\frac{y}{4}$

(vi) pq లో $\frac{1}{4}$ లేక $\frac{pq}{4}$ (vii) $5z + 5$ (viii) $10 + 5x$ (ix) $2y - 5$ (x) $13 + 10y$

(4) (i) x కన్నా 3 ఎక్కువ లేక xకు మూడు కలుపగా (ii) y కన్నా 7 తక్కువ లేక y నుండి 7 నుతీసివేయగా

(iii) 10 చే l ను గుణించగా (iv) 5 చే x ను భాగించగా

(v) 3 తో m ను గుణించి 11ను కూడగా

(vi) 2తో y ను గుణించి 5ను తీసివేయగా లేక y యొక్క రెట్టింపు విలువ నుండి 5ను తీసివేయగా

(5) (i) స్థిరరాశి (ii) చరరాశి (iii) స్థిరరాశి (iv) చరరాశి

అభ్యాసం - 2

(1) (i) $(a^2, -2a^2)$ (ii) $(-yz, 2zy)$ (iii) $(-2xy^2, 5y^2x)$ (iv) $(7p, -2p, 3p)$ and $(8pq, -5pq)$

(2) బీజీయ సమాసాలు : లెక్క నెంబర్లు : i, ii, iv, vi, vii,ix, xi

సంఖ్యా సమాసాలు : లెక్క నెంబర్లు iii, v, viii, x

(3) ఏకపది i, iv, vi ; ద్విపది : ii, v, vii ; త్రిపది : iii, viii, ix బహుళపది: x

(4) (i) 1 (ii) 3 (iii) 5 (iv) 4 (v) 2 (vi) 3 (5) (i) 1 (ii) 2 (iii) 4 (iv) 3

(v) 4 (vi) 2 (6) $xy + yz$ $2x^2 + 3x + 5$

అభ్యాసం - 3

(1) 3a + 2a = 5a (2) (i) $13x$ (ii) $10x$ (3) (i) $3x$ (ii) $-6p$ (iii) $11m^2$

(4) (i) −1 (ii) 4 (iii) −2 (5) −9 (6) $2x^2 + 11x - 9$; -23 (7) (i) 3 (ii) 5 (iii) −1

(8) 54 సెం.మీ. × సెం.మీ. = 54 సెం.మీ.^{2} (9) ₹. 90

(10) $s = \frac{d}{t} = \frac{135 \text{ మీ.}}{10 \text{ సె.}} = \frac{27}{2}$ మీ./సెకను. లేక $13\frac{1}{2}$ మీ./సెకను. లేక 13.5 మీ./సెకను

అభ్యాసం - 4

(1) (i) $-5x^2 + xy + 8y^2$ (ii) $10a^2 + 7b^2 + 4ab$ (iii) $7x + 8y - 7z$ (iv) $-4x^2 - 5x$

(2) $7x + 9$ (3) $18x - 2y$ (4) 5a + 2b (5) (i) a+2b (ii) $2x+3y+4z$ (iii) $-4ab - 8b^2$

(iv) $4pq - 15p^2 - 2q^2$ (v) $-5x^2 + 3x + 10$ (vi) $2x^2 - 2xy - 5y^2$ (vii) $3m^3 + 4m^2 + 7m - 7$

(6) $7x^2 + xy - 6y^2$ (7) $4x^2-3x-2$ (8) $4x^2 - 3y^2 - xy$ (9) $2a^2 + 14a + 5$

(10) (i) $22x^2 + 12y^2 + 8xy$ (ii) $-14x^2 - 10y^2 - 20xy$ or $-(14x^2 + 10y^2 + 20xy)$

(iii) $20x^2 + 5y^2 - 4xy$ (iv) $-8y^2 - 32x^2 - 30xy$

11 – ఘాతాంకాలు

అభ్యాసం – 1

1. (i) ఆధారము = 3, ఘాతాంకము = 4; $3 \times 3 \times 3 \times 3$ (ii) ఆధారము = $7x$, ఘాతాంకము = 2; $7 \times x \times 7 \times x$ (iii) ఆధారము = 5ab, ఘాతాంకము = 3; $5 \times 5 \times 5 \times a \times a \times a \times b \times b \times b$ (iv) ఆధారము = 4y, ఘాతాంకము = 5; $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times y \times y \times y \times y \times y$
2. (i) 7^5 (ii) $3^3 \times 5^4$ (iii) $2^3 \times 3^4 \times 5^3$
3. (i) $2^5 \times 3^2$ (ii) 2×5^4 (iii) $2 \times 3^2 \times 5^3$ (iv) $2^4 \times 3^2 \times 5^2$ (v) $2^5 \times 3 \times 5^2$
4. (i) 3^2 (ii) 3^5 (iii) 2^8 5. (1) 17 (ii) 31 (iii) 25 (iv) 1

అభ్యాసం – 2

(1) (i) 2^{14} (ii) 3^{10} (iii) 5^5 (iv) 9^{30} (v) $\left(\frac{3}{5}\right)^{15}$ (vi) 3^{20}

(vii) 3^4 (viii) 6^4 (ix) 2^{9a} (x) 10^6 (xi) $\left(\frac{-5}{6}\right)^{10} = \frac{(-5)^{10}}{6^{10}} = \frac{5^{10}}{6^{10}}$

(xii) 2^{10a+10} (xiii) $\frac{2^5}{3^5}$ (xiv) 15^3 (xv) -4^3 (xvi) $\frac{1}{9^8}$ (xvii) $\frac{1}{6^4}$

(xviii) -7^{15} (xix) 6^{16} (xix) a^{x+y+z} (2) 3^{10} (3) 2 (4) 2 (5) 1

(6) (i) సత్యం (2+11=13) (ii) అసత్యం (iii) సత్యం (iv) సత్యం (v) అసత్యం (vi) అసత్యం (vii) సత్యం

అభ్యాసం – 3

(i) 3.84×10^8మీ. (ii) 1.2×10^{10} (iii) 3×10^{20}మీ. (iv) 1.353×10^9కి.మీ.^{3}

12 – చతుర్భుజాలు

అభ్యాసం – 1

(1) (i) భుజాలు : $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RS}$, $\overline{SP}$ కోణాలు : $\angle QPS$, $\angle PSR$, $\angle SRQ$, $\angle RQP$

శీర్షాలు : P, Q, R, S కర్ణాలు : $\overline{PR}$, $\overline{QS}$

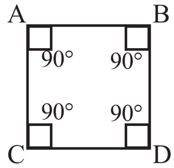
(ii) ఆసన్న భుజాల జతలు $\overline{PQ}, \overline{QR}$; $\overline{QR}, \overline{RS}$; $\overline{RS}, \overline{SP}$ మరియు $\overline{PQ}, \overline{SP}$

ఆసన్న కోణాల జతలు : $\angle QPS$, $\angle PSR$; $\angle PSR$, $\angle SRQ$; $\angle SRQ$, $\angle RQP$ మరియు $\angle RQP$, $\angle QPS$

అభిముఖ భుజాల జతలు : $\overline{PS}$, $\overline{QR}$ మరియు $\overline{QP}$, $\overline{RS}$

అభిముఖ కోణాల జతలు : $\angle QPS$, $\angle SRQ$ మరియు $\angle PSR$, $\angle RQP$

(2) 100° (3) 48°, 72°, 96°, 144° (4) 90°, 90°, 90°, 90°



(5) 75°, 85°, 95°, 105°

(6) చతుర్భుజంలోని ఏ ఒక్క కోణం 180^0 గా ఉండదు.

అభ్యాసం - 2

(1) (i) అసత్యం (ii) సత్యం (iii) సత్యం (iv) అసత్యం (v) అసత్యం (vi) సత్యం (vii) సత్యం (viii) సత్యం

(2) (i) ఇది 4 భుజాలను కల్గి ఉంటుంది (ii) చతురస్రంలోని అభిముఖ భుజాలు సమాంతరం

(iii) చతురస్రంలో కర్ణాలు పరస్పరం లంబసమద్విఖండన మవుతాయి.

(iv) చతురస్రంలో అభిముఖ భుజాలు సమాన పొడవు ఉంటాయి.

(3) $\angle BAC = 140°$, $\angle DCA = 140°$, $\angle CDA = 40°$ (4) 50°, 130°, 50°, 130°

(5) ఇది 4 భుజాలు మరియు ఒక జత సమాంతర భుజాలు కల్గి ఉన్నాయి. అవి •$\overline{EA}$, $\overline{DR}$ (6) 1

(7) అభిముఖ కోణాలు సమానం కావు (8) 15 సెం.మీ, 9 సెం.మీ, 15 సెం.మీ, 9 సెం.మీ

(9) కాదు; రాంబస్‌లో ఎప్పుడూ కూడా భుజాల పొడవులు సమానం (10) $\angle C = 150°$, $\angle D = 150°$

(11) (i) సమచతుర్భుజం (ii) చతురస్రం (iii) 180° - x°

(iv) రెండు సర్వసమాన (v) 10 (vi) 90°

(vii) 0 (viii) 10 (ix) 45

13 - వైశాల్యం - చుట్టుకొలత

అభ్యాసం - 1

(1) 2(l+b); a^2 (2) 60 సెం.మీ; 22 సెం.మీ; 484 సెం.మీ^{2}

(3) 280 సెం.మీ^{2}; 68 సెం.మీ; 18 సెం.మీ; 216 సెం.మీ^{2}; 10 సెం.మీ; 50 సెం.మీ

అభ్యాసం - 2

(1) (i) 28 సెం.మీ (ii) 15 సెం.మీ^{2} (iii) 38.76సెం.మీ^{2}

(iv) 24 సెం.మీ^{2} (2) (i) 91.2 సెం.మీ^{2} (ii) 11.4 సెం.మీ

(3) 42 సెం.మీ ; 30 సెం.మీ (4) 8సెం.మీ ; 24సెం.మీ (5) 30 మీ, 12 మీ (6) 80 మీ

అభ్యాసం - 3

(1) (i) 20 సెం.మీ ^{2} (ii) 12 సెం.మీ^{2} (iii) 20.25సెం.మీ^{2} (iv) 12సెం.మీ (2) (i) 12సెం.మీ^{2} (ii) 3సెం.మీ

(3) 30 సెం.మీ^{2} ; 4.62 సెం.మీ (4) 27సెం.మీ^{2} ; 7.2 సెం.మీ

(5) 64 సెం.మీ^{2} ; అవును ; Δ BEC, Δ BAE మరియు ΔCDE లు సమాంతర రేఖల మధ్య గీయబడిన రెండు త్రిభుజాలు.

రేఖలు BC మరియు AD, BC = AE+ED

(6) రాము; ΔPQR లో PR భూమి. ఎందుకనగా QS$\perp$PR. (7) 40 సెం.మీ

(8) 20 సెం.మీ 40 సెం.మీ; (9) 20 సెం.మీ (10) 800 సెం.మీ^{2} (11) 160 సెం.మీ^{2}

(12) 192సెం.మీ^{2} (13) 18 సెం.మీ ; 12 సెం.మీ

అభ్యాసం - 4

(1) (i) 20 సెం.మీ^{2} (ii) 24 సెం.మీ^{2} (2) 96 సెం.మీ^{2} ; 150 మి.మీ. : 691.2 మీ^{2}

(3) 18 సెం.మీ (4) ₹ 5062.50

అభ్యాసం - 5

(1) (i) 220 సెం.మీ (ii) 26.4 సెం.మీ (iii) 96.8 సెం.మీ (2) (i) 55మీ (ii) 17.6 మీ (iii) 15.4మీ

(3) (i) (a) 50.24 సెం.మీ (b) 94.2 సెం.మీ (c) 125.6 సెం.మీ (ii) 7 సెం.మీ (4) 42 సెం.మీ

(5) 10.5 సెం.మీ (6) 3 మార్లు (7) 3:2 (8) 1.75 సెం.మీ (9) 94.20 సెం.మీ (10) 39.25 సెం.మీ

అభ్యాసం - 6

(1) 475మీ^{2} (2) 195.5మీ^{2};29.5మీ^{2} (3) 304 మీ^{2} (4) 68 మీ^{2} (5) 9900 మీ^{2} ; 200100మీ^{2}

14 - త్రిమితీయ మరియు ద్విమితీయ ఆకారాల అవగాహన

అభ్యాసం -1

(1) గోళం: ఫుట్ బాల్, క్రికెట్ బంతి, లడ్డు,

స్థూపం : డ్రమ్ము, బిస్కెట్‌ప్యాకెట్, దుంగ (కర్ర), క్యాండిల్

పిరమిడ్ : పిరమిడ్; దీర్ఘ ఘనం : అగ్గిపెట్టె, ఇటుక, బిస్కట్ ప్యాక్

శంఖం : ఐస్‌క్రీం, చిచ్చుబుడ్డి, ఘనం : డైస్, అట్టపెట్టె

(2) (i) శంఖం: ఐస్‌క్రీం, గౌర పై భాగం (ii) ఘనం: డైస్, అట్టపెట్టె

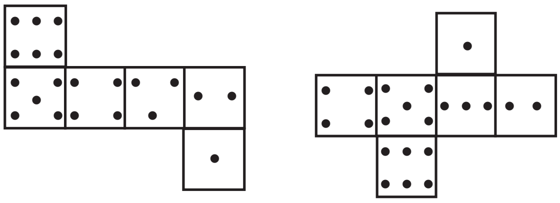
(iii) దీర్ఘఘనం : డస్టరు, ఇటుక (iv) గోళం : బంతి, గోళాలు; (v) స్థూపం : పెన్సిలు, పైపు

(3)

	ఘనం	దీర్ఘఘనం	పిరమిడ్
తలాలు	6	6	5
అంచులు	12	12	8
శీర్షాలు	8	8	5

అభ్యాసం - 2

(1) కృత్యంను చేయండి (2) i) C ii) a (3)



అభ్యాసం - 4

(1) బంతి : వృత్తం

స్థూపాకార గొట్టం : దీర్ఘచతురస్రం

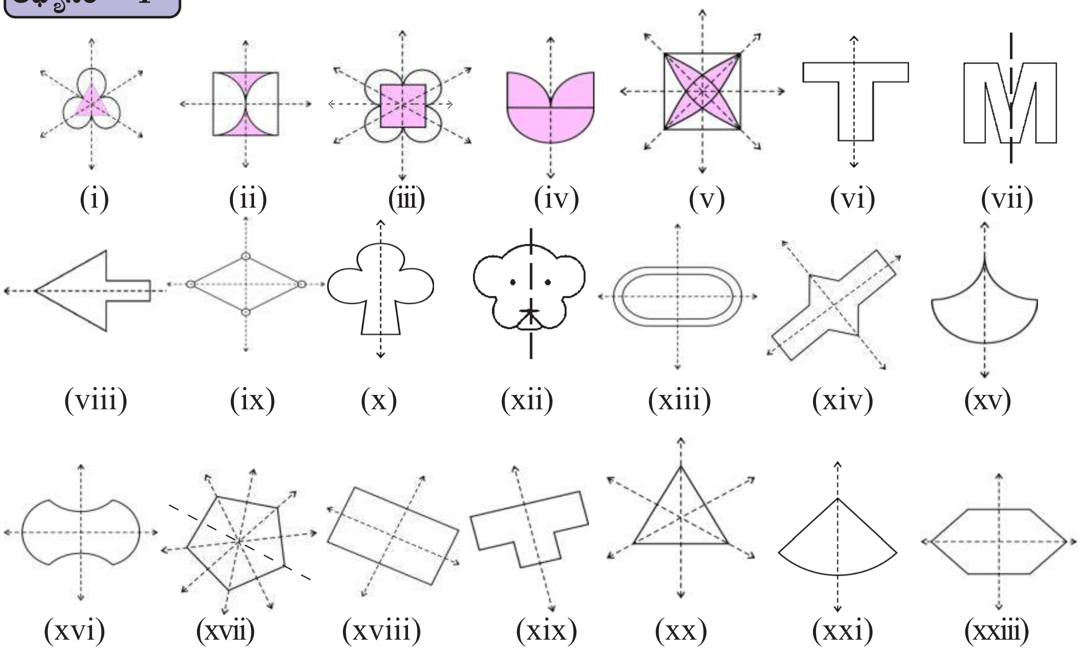
పుసక్తం : దీర్ఘచతురస్రం

(2) (i) గోళాకార / వృత్తాకార వస్తువులు (ii) ఘనాకార / చతురస్రాకార కాగితం

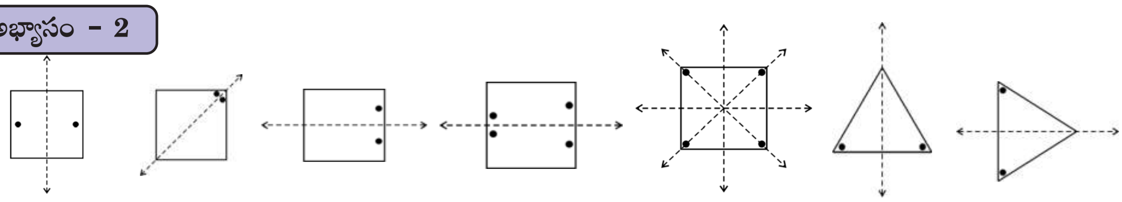
(iii) త్రిభుజాకారాలు లేక క్రమ పట్టకం (iv) స్థూపం / దీర్ఘచతురస్రాకార కాగితం

15. సౌష్ఠవం

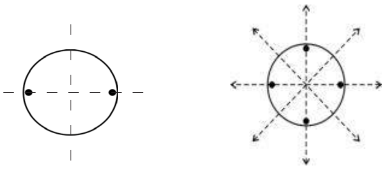
అభ్యాసం - 1



అభ్యాసం - 2



(i) (ii) (iii) (iv) (v) (vi) (vii)

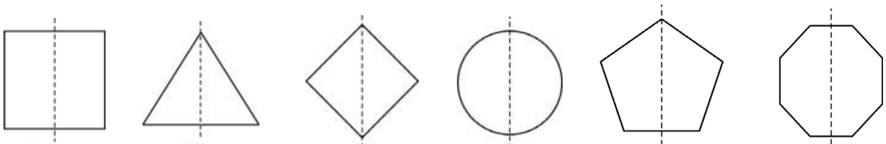


(viii) (ix)

(2)

(i) (ii) (iii) (ix)

(3)



(i) (ii) (iii) (iv) (v) (vi)

(4) (i) అసత్యం (ii) సత్యం (iii) అసత్యం

(5) ఆసన్న సౌష్ఠవ అక్షాల మధ్య కోణం = 360/2n =360/2x4 = 360/8 = 45^0

ఇది అన్ని క్రమ బహుభుజులకు సత్యం అవుతుంది.

అభ్యాసం - 3

1. పటాలు i, ii, iv మరియు పటం v భ్రమణ సౌష్ఠవ పరిమాణాలు 1 కన్నా ఎక్కువ.
2. (i) 2 (ii) 4 (iii) 3 (iv) 4 (v) 4 (vi) 5 (vii) 6 (viii) 3
3.

చతురస్రం	అవును	90^0	4
దీర్ఘచతురస్రం	అవును	180^0	2
సమచతుర్భుజం	అవును	180^0	2
సమబాహుత్రిభుజం	అవును	120^0	3
క్రమషడ్భుజి	అవును	60^0	6
వృత్తం	అవును	అనంతం	అనంతం
అర్ధవృత్తం	కాదు	-	-

అభ్యాసం - 4

1.

S	లేదు	0	కలదు	2
H	కలదు	2	కలదు	2
O	కలదు	2	కలదు	2
N	లేదు	0	కలదు	2
C	కలదు	1	లేదు	0

ఉపాధ్యాయులకు సూచనలు

ప్రియమైన ఉపాధ్యాయినీ, ఉపాధ్యాయులకు,

విద్యాభివందనాలు మరియు నూతనంగా అభివృద్ధి పరచిన నూతన గణిత పాఠ్యపుస్తకాలలోకి స్వాగతం .

- ప్రాథమికోన్నత స్థాయి విద్యకోసం SCF - 2011 మౌళిక సూత్రాలు, గణిత ఆధార పత్రం, నిర్బంధ ఉచిత విద్యహక్కు చట్టం – 2009 ఆధారంగా సిలబస్‌ను తయారుచేసుకొని ప్రస్తుత పాఠ్యపుస్తకాలను రూపొందించారు.
- గణితంలోని వివిధ శాఖలైన అంకగణితం, బీజగణితం, రేఖాగణితం, క్షేత్రమితి మరియు సాంఖ్యక శాస్త్రాలకు సంబంధించిన విషయాలను 15 అధ్యాయాల్లో పొందుపరచారు.
- ఈ అధ్యాయాలు గణితంలో నిర్ధారించిన విషయ నైపుణ్యాలు, సమస్యా పరిష్కారం, హేతుకీకరణ, నిరూపణలు, వివిధ విషయాల మధ్య సంబంధాలను ఏర్పరచడం, ప్రాతినిధ్యం వంటి విద్యా ప్రమాణాలను పిల్లలు సాధించడానికి దోహదపడుతాయి.
- అమరికల పరిశీలన (observation of patterns), ఆగమనం ద్వారా సాధారణీకరించడం, అనుగమన ఆలోచనలు, తార్కిక ఆలోచనలు, వివిధ పద్ధతులలో సమస్యలను పరిష్కరించడం, ప్రశ్నించడం, పరస్పర చర్చలు, వంటి నైపుణ్యాలను విద్యార్థులలో అభివృద్ధిపరచే దిశగా అధ్యాయాలు రూపొందించారు.
- ప్రాథమిక స్థాయిలో పిల్లలు అభ్యసించిన సామర్థ్యాలను ఆధారంగా చేసుకొని ఉదాహరణలు, కృత్యాలు, సన్నివేశాలను ఈ పుస్తకంలో పొందుపరచారు. దీని వల్ల పిల్లలు ఉత్సాహంగా కృత్యాల్లో పాల్గొని గణిత అధ్యయనంలో ఆనందాన్ని పొందుతారు.
- ఈ పుస్తకంలో పొందుపరచిన విద్యా ప్రమాణాలను పిల్లలందరూ సాధించడానికి అధ్యాయాలలో సూచించిన విధంగా చర్చల్లో, కృత్యాలలో విద్యార్థులు నిరంతరం పాల్గొనేలా ఉపాధ్యాయులు కృషి చేయాలి.
- ప్రతీ అధ్యాయంలోని ప్రశ్నల గురించి పిల్లలందరూ ఆలోచించడానికి, సమాధానాలు కనుక్కోడానికి తగు ప్రోత్సాహం ఇవ్వాలి. ఇటువంటి ప్రశ్నలు విద్యార్థుల్లో తార్కిక, ఆగమన, నిగమన విధానాలలో ఆలోచించే విధంగా దోహదపడతాయి.
- గణిత విషయాలను నేర్చుకోవడంలో అర్థంచేసుకోవడం, వాటిని సాధారణీకరించడం ప్రధానమైనవి. విద్యార్థులు మొదట నేర్చుకొనే విషయం ఆవశ్యకతను గుర్తించడం, తర్వాత అవగాహన చేసుకోవడం ద్వారా సమస్యలను తమకు తాముగా పరిష్కరించి అందులోని సత్యాలను సాధారణీకరించుకొంటారు. ప్రతీ అధ్యాయంలో పిల్లలు భావనలు ఏర్పరచుకొనేలా, వాటిని అర్థం చేసుకుని తదుపరి అభ్యసనంలో వినియోగించేలా ప్రతి అధ్యాయంలో దృష్టి పెట్టాలి.
- సందర్భానుసారంగా వివరణలు, పొందుపరిచిన చిత్రాలు సరైన అవగాహన కల్పించి అపోహలను తొలగించడానికి దోహదపడుతాయి.

- భావనలపై అవగాహన కల్పించిన తర్వాత వాటికి సంబంధించిన **"ఇవి చేయండి", "ప్రయత్నించండి"** లాంటి అభ్యాసాలను విస్తృతంగా ఇచ్చారు. **"ఇవి చేయండి"** అనేది రెండు మూడు భావనలు నేర్పించిన తర్వాత వెనువెంటనే అభ్యాసం కోసం ఉద్దేశించినది. వీటిని పిల్లలతో తమకు తాముగా గాని, జట్లలో గాని చేయించాలి. **"ప్రయత్నించండి"** అనే అభ్యాసాలు పిల్లల్లో సత్యాలకు సంబంధించిన సాధరణీకరణలు చేసుకోవడానికి, సరిచూసుకోవడానికి దోహదం చేస్తాయి. ఈ క్రమంలో అవసరం మేరకు సహాయ సహకారాలను ఉపాధ్యాయులు పిల్లలకు అందించాలి. ఇలా చేయడం వల్ల పిల్లలు ఏ మేరకు నేర్చుకున్నారో తెలుసుకోవచ్చు.
- అధ్యాయాల్లో చివరగా పొందపరచిన **"మనం నేర్చుకొన్నవి"** అనే శీర్షిక కింద ఉన్న అంశాలు విద్యా ప్రమాణాలను దృష్టిలో పెట్టుకొని రూపొందించారు. కాబట్టి వీటిని పిల్లలందరూ సంపూర్ణంగా సాధించాలి. ఇలా నేర్చుకొన్న నైపుణ్యాలన్నింటిని పిల్లలందరూ ప్రదర్శించగలరని నిర్ధారించుకొన్న తర్వాతనే తదుపరి అధ్యాయం ప్రారంభించాలి.
- అధ్యాయాల్లో ఇచ్చిన అభ్యాసాలతోబాటు ఉపాధ్యాయుడు కూడా మరికొన్ని సమస్యలను సొంతంగా తయారుచేసుకోవాలి. అలాగే పిల్లలు కూడా నిత్య జీవితంలో ఎదురయ్యే సమస్యలను గణితాన్ని ఉపయోగించి సాధించేట్లు, సొంతంగా సమస్యలు తయారు చేసేట్లు ప్రోత్సహించాలి.
- పై అంశాల్ని విజయవంతంగా అమలు చేయడానికి ఉపాధ్యాయులు తప్పని సరిగా గణిత పుస్తకాన్ని సమూలంగా, సమగ్రంగా, విమర్శనాత్మకంగా అధ్యయనం చేయాలి. ఇందుకోసం పుస్తకంలోని అభ్యాసాలలోని అన్ని సమస్యలను తాను చేసిచూడాలి. ఆ తర్వాతనే బోధనాభ్యసన ప్రక్రియలను నిర్వహించాలి.
- ఉపాధ్యాయుల మార్గదర్శనం కోసం బోధనాభ్యసన వ్యూహాలను, ఆశించిన అభ్యసన ఫలితాలను, తరగతి వారీగా, విషయం వారీగా, సిలబస్ వారీగా కరదీపిక రూపంలో తయారుచేసి పాఠశాలలకు అందివ్వడం జరిగింది. ఈ కరదీపిక సహాయంతో ఉపాధ్యాయులు ఉత్తమ బోధనాభ్యసన ప్రక్రియలను నిర్వహించి తద్వారా విద్యార్థులందరూ ఆశించిన అభ్యసన ఫలితాలు సాధించేలా కృషి చేయాలి.

7వ తరగతి సిలబస్

సంఖ్యా వ్యవస్థ (50 గంటలు)
(i) పూర్ణ సంఖ్యలు
(ii) భిన్నాలు మరియు అకరణీయ సంఖ్యలు

- మన సంఖ్యలను తెలుసుకోవడం. అమరికలు, క్రమాల ద్వారా పూర్ణ సంఖ్యల గుణకార, భాగాహారాలు
- పూర్ణసంఖ్యల ధర్మాలు,
  సంవృత, సహచర, స్థిత్యంతర ధర్మాలు, విభాగన్యాయం – సంకలన, గుణకార తత్సమాంశాలు, విలోమము. (పైవన్నీ అమరికలు, క్రమాలు మరియు పూర్ణాంకాల ఉదాహరణల ద్వారా). సంఖ్య ధర్మాలను సాధారణ రూపంలో వ్యక్తపరచటం. ప్రత్యుదాహరణలు (ఉదా : వ్యవకలనం వినిమయం కాదు)
- పూర్ణ సంఖ్యల చతుర్విధ ప్రక్రియలపై పద సమస్యలు

భిన్నాలు మరియు అకరణీయ సంఖ్యలు

- భిన్నాల పోలిక
- భిన్నాల గుణకారం
- Of (రాశిలో) ప్రక్రియలో భిన్నం.
- ఒక భిన్నం యొక్క వ్యుత్క్రమము మరియు దాని ఉపయోగం
- భిన్నాల భాగాహారం
- మిశ్రమ భిన్నాలపై పదసమస్యలు (నిత్య జీవిత ఉదాహరణలు)
- అకరణీయ సంఖ్యల పరిచయం (సంఖ్యారేఖపై సూచించడం)
- భిన్నానికి, అకరణీయ సంఖ్యకు గల తేడా
- అకరణీయ సంఖ్యలను దశాంశ రూపంలో సూచించడం
- అకరణీయ సంఖ్యలపై పద సమస్యలు (చతుర్విధ ప్రక్రియలపై)
- దశాంశ భిన్నాల గుణకార, భాగాహారాలు
- ప్రమాణాల మార్పిడి (మితి, ద్రవ్యరాశి)
- పదసమస్యలు (అన్ని ప్రక్రియలు)

బీజ గణితం
(20 గంటలు)
ఫలితాలు
ఘాతాంకాలు పరిచయం
బీజీయ సమాసాలు
సామాన్య సమీకరణాలు

ఘాతాలు – ఘాతాంకాలు పరిచయం

- a^x లో x నిర్వచనం ($a \in z$ అయిన) ఘాతాంక న్యాయాలు. అమరికలు, క్రమాలను పరిశీలించుట ద్వారా సాధారణీకరించడం ఘాతాంక న్యాయాలు. $m, n \in z$ అయినప్పుడు (i) $a^m . a^n = a^{m+n}$ (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$ (iii) $a^m/a^n = a^{m-n}$ $(m-n) \in N$ (iv) $a^m.b^m = (ab)^m$ (v) సున్న ఘాతాంకం గల సంఖ్యలు; దశాంశ సంఖ్యలు ఘాత రూపంలో; పెద్ద సంఖ్యల శాస్త్రీయ రూపం.

బీజీయ సమాసాలు

- పరిచయం, సామాన్య బీజీయ సమాసాల తయారీ (ఒకటి లేదా రెండు చరరాశులలో)
- స్థిరపదము, గుణకము, ఘాతాంకాలను గుర్తించటం
- సజాతి, విజాతి పదాలు పదాల పరిమాణము (ఉదా : x^2y మొ॥నవి. ఘాతము ;చరరాశుల సంఖ్య ≤ 2)
- బీజీయ సమాసాల సంకలనం మరియు వ్యవకలనం (గుణకాలు కేవలం పూర్ణసంఖ్యలే)

సామాన్య సమీకరణాలు

- సామాన్య రేఖీయ సమీకరణాలు ఏకచరరాశితో (సందర్భ సహిత సమస్యలు). కేవలం +, – ప్రక్రియలు మరియు గుణకాలు పూర్ణసంఖ్యలు.

అంక గణితం నిష్పత్తి - ఉపయోగాలు	**నిష్పత్తి - అనుపాతం** ● నిష్పత్తి - అనుపాతం (పునర్విమర్శ) ● ఏకవస్తుమార్గం, అనులోమానుపాతం (సాధారణీకరించడం) ● శాతాలు - పరిచయం ● శాతాలను 100 హారంగా గల భిన్నాలుగా అవగాహన చేసుకొనడం ● దశాంశాలను, భిన్నాలను శాతాలుగా మార్చడం. శాతాలను దశాంశాలు మరియు భిన్నాలుగా మార్చడం ● లాభనష్టాలలో శాతాల అనుప్రయోగం ● బారువడ్డీ (కాలము పూర్తిగా సం॥లలో మాత్రమే) లోశాతాల అనుప్రయోగం
రేఖాగణితం (60 - గంటలు)	**రేఖలు - కోణాలు** ● కోణాల జతలు. (రేఖీయ, సంపూరక, పూరక, ఆసన్న, శీర్షాభిముఖ కోణాల జతలు) ● సమాంతర రేఖను తిర్యగ్రేఖ ఖండించగా ధర్మాలు (ఏకాంతర, సంగత, అంతర, బాహ్య కోణాల జతలు)
	త్రిభుజాలు ● త్రిభుజ నిర్వచనం ● భుజాల, కోణాల ఆధారంగా త్రిభుజ రకాలు ● త్రిభుజ ధర్మాలు ● త్రిభుజంలో రెండు భుజాల మొత్తం మరియు బేధం. అంతర కోణాల మొత్తం (నిరూపణ భావనతో). కాగితపు మడతలతో సరిచూడటం. ● సమాంతర రేఖల ధర్మాలతో నిరూపించడం (సరిచూచుట, నిరూపణల బేధం) ● త్రిభుజాల బాహ్యకోణ ధర్మం
	త్రిభుజ సర్వసమానత్వము ● అంచులు ఏకీభవించుట ద్వారా సర్వసమానత్వము (తపాలా బిళ్ళలు, బ్లేడులు ఒకదానిపై ఒకటి బోర్లించడం ద్వారా) ● సర్వసమానత్వ భావనను త్రిభుజం, వృత్తం వంటి జ్యామితీయ ఆకారాలకు విస్తరించడం ● సర్వసమానత్వ నియమాలు (సరిచూచుట ద్వారా) ● కో.భు.కో., భు.భు.భు., భు.కో.భు., లం.క.భు సర్వసమాన ధర్మాలు పటాలతో
	త్రిభుజాల నిర్మాణం (అన్ని రకాలు) ● త్రిభుజం యొక్క మూడు భుజాల కొలతలు ఇచ్చినపుడు ● త్రిభుజం యొక్క రెండు భుజాలు, వాటి మధ్య కోణము ఇచ్చినపుడు ● రెండు కోణములు మరియు వాటి మధ్య భుజం కొలతలు ఇచ్చినపుడు ● ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో కర్ణము, ఒక భుజం ఇచ్చినపుడు ● ఆ రెండు భుజాలు, వాటి మధ్య లేని కోణం ఇచ్చినపుడు
	● చతుర్భుజాలు చతుర్భుజం - నిర్వచనం ● చతుర్భుజం - భుజాలు, కోణాలు, కర్ణాలు ● చతుర్భుజ అంతరం, బాహ్యం ● కుంభాకార, పుటాకార బహుభుజులు, వాటి భేదం (పటాల సహాయంతో) ● అంతరకోణాల ధర్మం (సరిచూడటం ద్వారా), సమస్యలు ● చతుర్భుజాల రకాలు ● సమాంతర చతుర్భుజం, సమలంబ చతుర్భుజం, రాంబస్, దీర్ఘచతురస్రం, చతురస్రం మరియు గాలిపట ఆకారాల ధర్మాలు

	సౌష్ఠవం ● పరావర్తన సౌష్ఠవాన్ని జ్ఞప్తికి తెచ్చుకోవటం ● భ్రమణ సౌష్ఠవం భావన, ద్విమితీయ పటాల భ్రమణ సౌష్ఠవాన్ని పరిశీలించడం (90^0, 180^0, 120^0) ● సాధారణ పటాలపై 90^0, 180^0 భ్రమణ ప్రక్రియలు ● పరావర్తన, భ్రమణ సౌష్ఠవాలు కలిగిన పటాలకు ఉదాహరణలు. ● పరావర్తన, భ్రమణ సౌష్ఠవాలలో కేవలం ఒక సౌష్ఠవము కల్గిన పటాలు
	త్రిమితీయ ఆకృతులను ద్విమితీయ పటాలుగా చూపటం ● త్రిమితీయ ఆకృతులకు ద్విమితీయ పటాలు గీయడం, దాగివున్న ముఖాలను సూచించడం ● సమఘనం, దీర్ఘఘనం, స్థూపం మరియు శంఖువులలో శీర్షాలు, అంచులు, ముఖాలు వల చిత్రాలను గుర్తించడం, వాటి వాటి సంఖ్యలను లెక్కించడం ● పటాలను, ఆకృతులతో జతపరచడం, పేర్లు గుర్తించడం
క్షేత్రగణితం (15 గంటలు)	● చతురస్రం, దీర్ఘ చతురస్రాల వైశాల్యం మరియు చుట్టుకొలతల పునర్విమర్శ, వృత్త పరిధి భావన ● వైశాల్యం : వైశాల్యాలను ప్రాథమిక ప్రమాణాలలో కొలిచే భావన ● త్రిభుజం, సమాంతర చతుర్భుజం మరియు సమ చతుర్భుజ వైశాల్యాలు ● దీర్ఘ చతురస్రాకార బాటల వైశాల్యాలు
దత్తాంశ నిర్వహణ (15 గంటలు)	**దత్తాంశం సేకరణ మరియు నిర్వహణ** ● అవర్గీకృత దత్తాంశానికి అంక మధ్యమం, మధ్యగతం మరియు బాహుళకం మరియు అవి సూచించే విషయాల అవగాహన ● కమ్మీరేఖా చిత్రాలు ● జంట దిమ్మె చిత్రాల నిర్మాణం ● రేఖాచిత్రాలు తగు సమాచారంతో

విద్యా ప్రమాణాలు

అధ్యాయాలు	విషయ వివరణ	
సంఖ్యా వ్యవస్థ • పూర్ణ సంఖ్యలు	సమస్యా సాధన	• పూర్ణసంఖ్యలపై చతుర్విధ ప్రక్రియలకు సంబంధించిన సమస్యలను సాధించును. • పూర్ణసంఖ్యలపై పద సమస్యలనుసాధించును.
	కారణాలు చెప్పడం నిరూపణలు చేయడం	• సున్నతో భాగాహారం ఎందుకు అర్థరహితమో వివరించును. • పూర్ణసంఖ్యలను, సహజ సంఖ్యలతో పోల్చును, తేడాలు చెప్పును. • సంఖ్యాధర్మాలైన సంవృత, సహచర, స్థిత్యంతర మొదలైన వాటికి ఉదాహరణలు, ప్రత్యుదాహరణలు ఇచ్చును.
	వ్యక్తపరచడం	• పూర్ణసంఖ్యల ధర్మాలను సాధారణ రూపంలో వ్యక్తపరచును. • ఋణ గుర్తును వివిధ సందర్భాలలో వినియోగించును.
	సంధాన చేయడం	• నిత్య జీవిత సందర్భాలలో పూర్ణ సంఖ్యల వినియోగాన్ని కనుగొంటారు. • N, W మరియు Z ల మధ్య సంబంధాన్ని అవగాహన చేసుకొనును.
	ప్రాతినిధ్య పరచడం	• పూర్ణసంఖ్యలను సంఖ్యా రేఖపై సూచించును.
భిన్నాలు మరియు అకరణీయ సంఖ్యలు	సమస్యా సాధన	• భిన్నాలపై చతుర్విధ ప్రకియలకు సంబంధించిన సమస్యలను సాధించును. • అకరణీయ సంఖ్యలపై చతుర్విధ (ప్రాథమిక) ప్రక్రియలకు సంబంధించిన పద సమస్యలను సాధించును. • దశాంశ సంఖ్యలకు సంబంధించి అన్ని ప్రక్రియల పై గల సమస్యలను సాధించును. • ప్రమాణాల పరస్పర మార్పిడి చేస్తారు.
	కారణాలు చెప్పడం నిరూపణలు చేయడం	• అకరణీయ సంఖ్యల, భిన్నాల తేడాలు చెప్పును. • అకరణీయ సంఖ్యలలో సాంద్రత ధర్మాన్ని సమర్థించును.
	వ్యక్తపరచడం	• అకరణీయ సంఖ్యల అవశ్యకతను వ్యక్తపరచును. • అకరణీయ సంఖ్యల ధర్మాలను సాధారణ రూపంలో వ్యక్తపరచును.
	సంధాన చేయడం	• భిన్నాలు, అకరణీయ సంఖ్యలు, దశాంశ సంఖ్యల మధ్యగల సహసంబంధ వినియోగాన్ని కనుగొనును.
	ప్రాతినిధ్య పరచడం	• అకరణీయ సంఖ్యలను సంఖ్యారేఖ పై సూచించును • అకరణీయ సంఖ్యలను దశాంశ రూపంలో సూచించును.
ఘాతాలు – ఘాతాంకాలు	సమస్యా సాధన	• పెద్ద సంఖ్యలను ప్రధాన కారణాంక విభజన చేసి ఘాత రూపంలో వ్రాయును.
	కారణాలు చెప్పడం నిరూపణలు చేయడం	• సంఖ్యా అమరికలు, క్రమాలు, పరిశీలనల ద్వారా ఘాతాంక న్యాయాలను సాధారణీకరించును.
	వ్యక్తపరచడం	• $a^x ; x \in z$ ను అవగాహన చేసుకొనును. • పెద్ద సంఖ్యల వినియోగంలో ఘాతాంక రూపాలను వాడును.

	సంధాన చేయడం	• పెద్ద సంఖ్యలను ఘాతరూపంలో వ్రాయుట నందు ప్రధాన కారణాంకాల విభజనను వినియోగించును.
	ప్రాతినిధ్య పరచడం	• పెద్ద సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపంలో వ్యక్తపరచును.
బీజీయ సమాసాలు	**సమస్యా సాధన**	• బీజీయ సమాసాల పరిమాణమును కనుగొనును. • పూర్ణాంకాలు గుణకాలుగా గల బీజీయ సమాసాల సంకలన, వ్యవకలనాలను చేయును. • ఏకచరరాశి సామాన్య సమీకరణాలకు సంబంధించిన పదసమస్యలను (కేవలం +, −) సాధించును.
	కారణాలు చెప్పడం నిరూపణలు చేయడం	• ఏకచరరాశి లేదా రెండు చరరాశుల బీజీయ సమాసాలను క్రమాలను అనుసరించి తయారు చేయును.
	వ్యక్తపరచడం	• ఏకచరరాశి మరియు రెండు చరరాశులు గల ఏక, ద్వి, మరియు త్రి పరిమాణ బీజీయ సమాసాల సాధారణ రూపాలను వ్రాయును. • నిత్యజీవిత సమస్యలను సామాన్య సమీకరణాల రూపంలోనికి (ఏకచరరాశి గల) మార్చును.
	సంధాన చేయడం	• బీజీయ సమాసాల సంకలన, వ్యవకలనాలలో సంవృత, సహచర మరియు స్థిత్యంతర ధర్మాలను వినియోగించును. • నిత్యజీవిత సమస్యల సాధనలో సామాన్య సమీకరణాల సాధనను వినియోగించును.
	ప్రాతినిధ్య పరచడం	• బీజీయ సమాసాలను ప్రామాణిక రూపంలో సూచించును.
నిష్పత్తి – ఉపయోగాలు	**సమస్యా సాధన**	• ఏకవస్తుమార్గం గల పదసమస్యలను సాధించును. • శాతాల భావనలు గల పద సమస్యలను సాధించును. • కాల పరిధి పూర్తి సం॥లలో తెల్పబడిన బారు వడ్డీ పదసమస్యలను సాధించును
	కారణాలు చెప్పడం నిరూపణలు చేయడం	• శాతాల రూపంలోనికి మారే దశాంశాలను మరియు దశాంశాల రూపంలోనికి మారే శాతాలను పోల్చును. • నిష్పత్తి, అనుపాతాల సామాన్య ధర్మాలను సూత్రీకరించును.
	వ్యక్తపరచడం	• భిన్నాలను శాతరూపంలో మరియు దశాంశ రూపంలో వ్యక్తపరచును. వాని వినియోగాన్ని వివరించును.
	సంధాన చేయడం	• లాభ-నష్టాల భావనలను నిజ జీవిత సమస్యల సాధనలో వినియోగించును. • శాతాల సమస్యల సాధనలు అవగాహన చేసుకొని నిజజీవితంలో వినియోగించును.
	ప్రాతినిధ్య పరచడం	• భిన్నాలు, దశాంశాలను శాతాలలోనికి, శాతాలను భిన్న మరియు దశాంశ రూపాలలోనికి పరస్పరం మార్పు చేయును.

ద్విమితీయ, త్రిమితియ ఆకారాల అవగాహన రేఖాగణితం	సమస్యా సాధన	• ఇచ్చిన కొలతలతో త్రిభుజ నిర్మాణము సాధ్యమవునో కాదో కనుగొందురు. • బాహ్యకోణము మరియు ఇతర కోణములలోని ఇవ్వని కోణములను కనుగొంటారు. • త్రిభుజాల సర్వసమానత్వ ధర్మములనుపయోగించి ఇచ్చిన త్రిభుజములలోని సర్వసమాన త్రిభుజాలను గుర్తిస్తారు. • ఇచ్చిన కొలతలతో త్రిభుజాన్ని నిర్మిస్తారు. • కోణధర్మాలనుపయోగించి ఇచ్చిన సమస్యలను సాధిస్తారు. • ఇచ్చిన పటమును భ్రమణం చేసి కోణ సౌష్ఠవతను పరిశీలిస్తారు. • త్రిమితీయ ఆకృతుల (ఘనం, దీర్ఘఘనం, శంఖువు, స్థూపం) యొక్క అంచులు, ముఖాలు, శీర్షాలు వలల ఆకృతులను లెక్కిస్తాడు. మరియు గుర్తిస్తారు.
	కారణాలు చెప్పడం నిరూపణలు చేయడం	• ఇచ్చిన కోణములలో కోణీయ జతలలోని భేదాలను వివరిస్తారు. • సమాంతర రేఖల ధర్మాలనుపయోగించి ఇచ్చిన రేఖలు సమాంతర రేఖలు అని సరిచూస్తారు. • పేపర్ ఫోల్డింగ్ పద్ధతి నుపయోగించి, సమాంతర రేఖల ధర్మాలనుపయోగించి త్రిభుజములోని కోణాల మొత్తం ధర్మానికి నిరూపణలనిస్తాడు మరియు సరిచూస్తారు. • బాహ్యకోణము అంతరాభిముఖ కోణముల మధ్య సంబంధమును కనుగొంటారు. • కుంభాకార, పుటాకార చతుర్భుజాలను వర్గీకరిస్తారు. • చతుర్భుజ కోణాల మొత్తమునకు సంబంధించిన ధర్మాన్ని పరిశీలించి వివరిస్తారు. • పటములు, వస్తువులనుపయోగించి రేఖీయ పరావర్తన సౌష్ఠవములను పరిశీలిస్తారు. త్రిమితీయాకృతులు యొక్క అంచులు, శీర్షాలు, ముఖాలకు ఊహా చిత్రాలు గీస్తారు.
	వ్యక్తపరచడం	• కోణీయ జతలకు ఉదాహరణలిస్తారు. • భుజాలు, కోణాలు ఆధారముగా త్రిభుజములలోని రకములను వివరిస్తారు. • త్రిభుజ బాహ్య కోణధర్మమును వివరిస్తారు. • ద్విమితీయ ఆకృతుల సర్వసమానత్వమును ప్రశంసిస్తారు. • త్రిభుజము, చతుర్భుజముల మధ్య అంతర్ సంబంధమును వివరిస్తారు. • చతుర్భుజ ధర్మాల ఆధారముగా వాటి రకాలను వివరిస్తారు. • పరావర్తన సౌష్ఠమునకు ఉదాహరణలిస్తారు.
	సంధాన చేయడం	• తన పరిసరాలలోని సమాంతరతను పరిశీలిస్తారు. • త్రిభుజ భావనలనుపయోగిస్తారు. • చతుర్భుజాన్ని నిర్వచించడానికి ప్రయత్నిస్తారు. • చతుర్భుజాలను ధర్మాలు మరియు అంతర్గత సంబంధాల ఆధారముగా వర్గీకరిస్తారు.
	ప్రాతినిధ్య పరచడం	• కోణమును సూచించే విధానమును నేర్చుకుంటారు. • సర్వసమాన త్రిభుజాలను గుర్తులతో సూచిస్తారు. • త్రిమితీయ ఆకృతులను, ద్విమితీయ ఆకృతులుగా గీయగలరు.

క్షేత్రగణితం	సమస్యా సాధన	• చతురస్రం, దీర్ఘచతురస్రం, సమాంతర చతుర్భుజం, త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యము, పరిధిలపై సమస్యలను సాధిస్తారు.
	కారణాలు చెప్పడం నిరూపణలు చేయడం	• చతురస్రం, దీర్ఘచతురస్రం, సమాంతర చతుర్భుజం, త్రిభుజముల మధ్య సంబంధములను గుర్తించి త్రిభుజ వైశాల్యమును కనుక్కొంటారు. • త్రిభుజ వైశాల్యము నుపయోగించి సమచతుర్భుజము యొక్క వైశాల్యమును కనుగొని అవగాహన చేసుకొంటారు.
	వ్యక్తపరచడం	• ప్రామాణిక కొలత సహాయముతో భావనను వివరిస్తారు.
	సంధాన చేయడం	• వైశాల్యము, పరిధి భావనలను నిత్య జీవిత సమస్య సాధనలకు ఉపయోగిస్తారు. • దీర్ఘచతురస్రం, బాట వైశాల్యము భావనకు అన్వయిస్తారు. • దీర్ఘచతురస్రాకార బాట వైశాల్యములను కనుగొంటారు.
	ప్రాతినిధ్య పరచడం	• ________________
దత్తాంశ నిర్వహణ	సమస్యా సాధన	• అవర్గీకృత దత్తాంశమును, వర్గీకృత దత్తాంశముగా వ్రాస్తారు. • అవర్గీకృత దత్తాంశమునకు, అంకమధ్యం, మధ్యగతం, బాహుళకం కనుగొంటారు.
	కారణాలు చెప్పడం నిరూపణలు చేయడం	• అవర్గీకృత దత్తాంశము యొక్క సగటు, మధ్యగతం, బాహుళకమును అవగాహన చేసుకొంటారు.
	వ్యక్తపరచడం	• అవర్గీకృత దత్తాంశము యొక్క సగటు, మధ్యగతం, బాహుళకములను వివరిస్తారు.
	సంధాన చేయడం	• నిత్యజీవితములో సగటు, మధ్యగతము, బాహుళకముల ఉపయోగములను అవగాహన చేసుకొందురు. • నిత్యజీవితంలో దిమ్మచిత్రాలు, వృత్తచిత్రాలు, వృత్తచిత్రాల ఉపయోగమును అవగాహన చేసుకొందురు. (బడ్జెట్, జనాభా, పంటల ఉత్పత్తి)
	ప్రాతినిధ్య పరచడం	• అవర్గీకృత దత్తాంశమునకు సగటు, మధ్యగతం, బాహుళకంను సూచిస్తారు. • ఇచ్చిన దత్తాంశమును దిమ్మచిత్రాలు, వృత్తచిత్రాల ద్వారా సూచిస్తారు.