

## अध्याय-1

# पूर्णक की समझ

### 1.1 भूमिका

हम पूर्ण संख्याओं एवं पूर्णांकों से परिचित हैं। इस अध्याय में पूर्णांकों, उनके गुणों एवं संक्रियाओं के बारे में और अधिक चर्चा करेंगे पर इससे पहले हम पूर्ण संख्या एवं पूर्णांकों की पुनरावृत्ति कर लेंगे।

### 1.2 पुनरावलोकन

पिछली कक्ष में हमने जीवा:

- बदि गुडिपाल से एक फैल की ऊँचाई 560 मीटर है। उसे की गहराई 65 नीटर तथा गहाङ ली ऊँचाई का + 560 मीटर तथा उसे की ऊँचाई (गहराई) को - 65 नीटर द्वारा व्यक्त किया जा सकता है। पर्याक्रमान्वयी की धनपूर्णांक से जापत करते हैं तो गहराई को ऋण पूर्णांक से व्यक्त करेंगे।
- लभ को धन पूर्णांक से तथा डान्न को ऋण पूर्णांक से प्रकट कर सकते हैं।
- '0' से ऊपर के त्रिप को अनावृत्तक तथा '0' से नीचे के ताप को ऋणावृत्तक रूप में दर्शाते हैं।

यहाँ विनिमय राशियों की सूची दी गई है, जिन्हें धन पूर्णांकों से प्रशांत हैं, हे इनके विपरीत कानूनी राशियों होंगे जिन्हें ऋण पूर्णांकों में व्यक्त कर सकते हैं?

क्र.सं.	धन पूर्णांकों में व्यक्त होनेवाली राशियाँ	ऋण पूर्णांकों में व्यक्त होनेवाली राशियाँ
1.	सामुद्र तल से ऊँचाई	
2.	आनादी में वृद्धि	
3.	औसत से अधिक वर्षा	

4.	$0^{\circ}\text{C}$ रो उपर के ऊपर	
5.	किसी स्थान से दायरी ओर की दूरी	
6.	लाग	
7.	नूल्य चूंचि	
8.	जना ह-	
9.	औसत से अधिक उपज	



### 6म जानते हैं—

...  $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$  आदि पूर्णांक हैं जिनमें  $1, 2, 3, 4, 5, \dots$  आदि भन पूर्णांक हैं तथा  $-1, -2, -3, -4, -5, \dots$  इन्हें ऋण पूर्णांक हैं।

- ‘0’ (शून्य) न हो धन पूर्णांक है न ऋण पूर्णांक है।
- ‘0’ के बाद की संख्याएँ बढ़त क्रम में हैं।
- ‘0’ के वृत्त की संख्याएँ इनमें शून्य भी है।
- संख्या-रेखा पर छाँटे स बाएँ की संख्याएँ बढ़ी जाती हैं।
- संख्या-रेखा पर दाएँ की संख्याएँ घटी होती हैं।
- शून्य उत्तेक अव्याप्तक पूर्णांक से बड़ी तथा प्रत्येक अव्याप्तक अव्याप्तक पूर्णांक से छोटा शोता है।
- अव्याप्तक पूर्णांक में यहि  $a > b$  ता ऋणात्मक पूर्णांकों में  $-a < -b$  जैसे  $8 > 4$  तो  $-8 < -4$
- यिसी पूर्णांक के विररात्रि चिह्न के पूर्णांक वा उसका योगात्मक प्रतिलिपि या योज्य प्रतिलिपि (Additive inverse) कहते हैं, जैसे 5 का योगात्मक प्रतिलिपि  $-5$  है तथा  $-8$  का योगात्मक प्रतिलिपि  $18$  है। यो योगात्मक प्रतिलिपियों का योग शून्य होता है। ऐसो—  $5 + (-5) = 0, -5 + 5 = 0$ ; इस अधार पर यदि दो पूर्णांकों का योग शून्य होता है तो वे एक दूसरे का योगात्मक प्रतिलिपि कहलते हैं।

### स्वयं करके देखिए

पूर्णांक	8	-5	-12	15	-20	16	18
योग्य प्रतिलिपि	-8	+5					
परिणाम	$(8) - (-8) = 0$	$(-5) + (+5) = 0$					

हम अपनी पिछली कक्षा में पूर्णांकों के योग एवं व्यवकलन के बारे में अध्ययन कर चुके हैं कि किसी संख्या रेखा पर जब हम—

- एक धनात्मक पूर्णांक को जोड़ते हैं, तो दाइं और चलते हैं।
- एक ऋणात्मक पूर्णांक को जोड़ते हैं, तो बाइं और चलते हैं।
- एक धनात्मक पूर्णांक को घटाते हैं, तो बाइं और चलते हैं।
- एक ऋणात्मक पूर्णांक को घटाते हैं, तो दाइं और चलते हैं।

बाद ए [के निलिमित कथन रहे हैं स्थाना गल्ला] जे कथन गलत है उनको सही कीजिए—

- जब दो धनात्मक पूर्णांकों को जोड़ा जाता है, तो हाँ एक धनात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।
- जब दो ऋणात्मक पूर्णांकों को जोड़ा जाता है, तो हाँ एक धनात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।
- जब एक धनात्मक पूर्णांक के लैरे एक ऋणात्मक पूर्णांक को जोड़ा जाता है, तो हमेशा एक ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।
- $-4 + (-8) + (-12) + (-18) + (-5) = -13$
- $(-10) + 3 = 10 - 3$
- $8 + (-7) - (-4) \neq 8 + 7 - 4$

अपने लक्टर की तुलना निलिमित लक्तरों के साथ कीजिए—

- सही है। उत्तराहस्तः
 

(a) $56 + 73 = 129$	(b) $113 - 82 = 195$
(c) $15 + 25 = 40$	(d) $20 + 30 + 15 = 65$ आदि।

अतः धनात्मक पूर्णांकों का योगफल एक धनात्मक पूर्णांक होती है। ऐसे 5 और उदाहरण दीजिए।

- (iii) पाला है कर्तीके  $(-5) + (-8) = -13$ , जो उसे अनुग्रह करूँगे नहीं है।  
 $(-18) + (-7) + (-5) = -30$   
 जहाँ अधिकारक पूर्णांकों का योगफल उसे अधिकारक पूर्णांक होती है। इसी कथन के पश्चात् निचे और नद हरण हीजिए।

(iii) गलत, क्योंकि  $(-8) + (20) = 12$ , यह एक ऋणात्मक पूर्णांक नहीं है।

$$\langle +15 \rangle + \langle -50 \rangle = -35$$

अतः याथ एक विनाशक और एक उद्धारक अथवा एक क्रपात्मक और एक धनात्मक पूर्णक का जड़ जाता है तो सच्चाया वह घटा दत्त है और बड़े पूर्णक का फ़िल्ड छल अन् इसे पूर्णे रख दिया जाता है। यहे पूर्णांबै का निर्गम द्वेषों पूर्णों के द्वितीय की अवधेलन करते हुए लिया जाता है। जैसा कि सूर्य के उद्दाहरण से स्पष्ट है।

(iv)  $3\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k} + (-8)(12) + (-18)\hat{i} + (5)$  को सरल रूप प्रकार लिखें।

$$-1 + (-8) + (12) - \underline{(-18)} + (5) \text{ या } -30 + 17 = -13$$

अतः देरों अधिक उत्तमक और बनावाक का योग्य कल ही करने के लिए धन्तमक तंख्याओं का मोर्गपत्र एक साथ और ऋणान्व तंख्याओं का योग्य कल एक साथ ज्ञात करने का शार्ट पुनर्वृद्धि इन्डिया अन्तर नियन (iii) के अनुसार प्राप्त कर लेत है। अतः पूर्णकां का योग्यकल एक पूर्णक होता है।

प्र० ७. अन्तर्यामी

1

$$8 + (-7)$$

अतः  असत्य

### 1.3 पूर्णकों के गोकु व घटाव के गुण

### 1.3.1 ;kx dsvxrlr lør xqk ;k ləjd xqk

इस रीढ़ गुप्ते हैं कि यो पूर्ण संख्याओं का योग ५०: इक पूर्ण संख्या ही होती है। उदहरणः ५ – ८ – १३ है, जे कि एक पूर्ण संख्या है। हम जानते हैं कि यह गुण, पूर्ण संख्याओं के योग का संवृत्त गुण या संवरक गुण कहलाता है।

आइए देखें कि क्या यह गुरु पूर्णांकों के लिए भी सच्च है अधब नहीं। पूर्णांकों के कुल युग्म आग दिए जा रहे हैं। आग तो हृदय सार्थी के देखिए और इसे पूरा कीजिए—

ੴ ਸਤਿਗੁਰ ਪ੍ਰਸਾਦਿ

$$-8 + (12) =$$

$$25 + (-15) =$$

$$-28 + (-52) =$$

$50 + 88 =$

$$-20 + (-15) + 50 =$$

$$-12 + (-4) - (-10) + 15 + 18 =$$

क्रमांक	प्रैक्टिस
(i) $8 + 4 = \boxed{\quad}$	परिणाम एक पूर्णक है।
(ii) $(-5) - 5 = \underline{\quad}$	$\underline{\quad}$
(iii) $(25) + 8 = \underline{\quad}$	$\underline{\quad}$
(iv) $19 - (-25) = \underline{-6}$	परिणाम एक पूर्णक है।
(v) $5 + (-3) = \underline{\quad}$	$\underline{\quad}$
(vi) $(-20) + 0 = \underline{\quad}$	$\underline{\quad}$
(vii) $(-7) + (-8) = \underline{\quad}$	$\underline{\quad}$

क्या दो पूर्णकों का योग हमेशा एक पूर्णक होता है? क्या आपको पूर्णकों का कोई ऐसा यूनिभिरल जित का योग नूर्णीक नहीं है? इस प्रकार पूर्णक का योग एक पूर्णक होता है, इसलिए इन कहते हैं कि पूर्णक, योग ल अंतर्गत संवृत्त (closed) होता है।

व्यापक रूप में, लेन्डी दो पूर्णकों  $a$  व ब के लिए  $a + b$  एक पूर्णक होता है।

### 1.3.2 क्रम विनियम गुणधर्म

$$(-3) + (-5) = -8 \quad \text{पुनः } (-5) + (-3) = -8$$

$$\text{तो हम पाते हैं कि } (-3) + (-5) = (-5) + (-3)$$

अतः दो पूर्णक संख्याओं का योगफल एवं उनके उलटे क्रम का योगफल समान होते हैं। इस त्रैया के **क्रम विनियम गुण (commutative property)** कहते हैं। आप अन्य पूर्णकों के साथ ऐसा करके देखिए। क्या आपको ऐसे पूर्णक निक्षेप जो क्रम विनियम नियम का पालन नहीं करता? व्यापक रूप में  $a$  और  $b$  दो पूर्णक हैं तो  $a + b = b + a$ , वह क्रम विनियम गुण है।

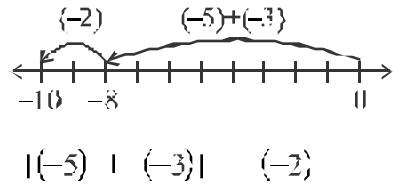
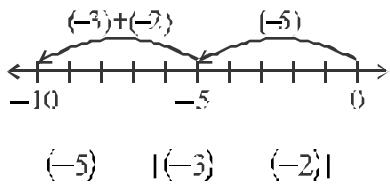
### 1.3.3 साहचर्य गुण (सहचरी)

निम्नलिखित उदाहरणों के देखें:

पूर्णकों  $-3, -2$  एवं  $-5$  का जीडिए।

$$(-5) + [(-3) - (-2)] \text{ और } [(-5) + (-3)] + (-2) \text{ वर इधर दीजिए।}$$

प्रथम योग में  $(-3)$  और  $(-2)$  को गिलाकर एक रुप हनाया गया है और दूसरे योग में  $(-5)$  एवं  $(-3)$  को गिलाकर एक संग्रह बनाया गया है। इन इसकी जाँच करेंग कि इन क्या परिणाम प्राप्त होते हैं?



इन दोनों ही रूपाओं में फैले  $-10$  का होता है।

$$\text{अर्थात् } (-5) + [(-3) + (-2)] = [(-5) + (-2)] + (-3)$$

इसी प्रकार,  $1, -3$ , और  $-7$  का संघरण।

$$(-3) + [1 + (-7)] = -3 + \dots + \dots$$

$$[(-3) + 1] + (-7) = -2 + \dots + \dots$$

परं  $(-3) + [1 + (-7)]$  एवं  $[(-3) + 1] + (-7)$  का इस समान है?

इस प्रकार के योग के उदाहरण लें जैसे। आप ऐसा किसी चदाहरण नहीं पाएंगे जिसके लिए इस विधि के बोन निम्न हैं। यह चर्चाता है कि पूर्णांकों के लिए योग संहयाती (associative) होता है। व्यापक रूप से,

$$\text{पूर्णांकों } a, b \text{ और } c \text{ के लिए यह कह सकते हैं कि } a + (b + c) = (a + b) + c$$

**गिरा पर विवार करें—**

$$(i) (-5) + 0 = -5$$

$$(ii) 2 + 0 = 2$$

$$\text{पुनः } 0 + (-5) = -5$$

$$\text{पुनः } 0 + 2 = 2$$

$$\rightarrow (-5) + 0 = 0 + (-5) = -5$$

$$0 + 2 = 2 + 0$$

अतः हाँ कह सकते हैं कि किसी पूर्णांक  $a$  के लिए

$$a + 0 = a \quad \text{एवं} \quad 0 + a = a$$

तब  $0$  (शून्य) जोड़ के लिए '0' (शून्य) ; **I; rR led** (Additive identity) कहलाता है।

स्वयं करके देखिए

निम्नलिखित के सामने उसके उचित गुणों को लिखें—

1.	$5 + (-2) = -2 + 5$	
2.	$\boxed{(-2) - 5 \not= (-4)} = -2 + \{5 + (-4)\}$	
3.	$-25 + 0 = -25$	
4.	$-12 + (-5) = -17$	

#### 1.4 पूर्णांकों का व्यवकलन (Subtraction) : देखिए और समाप्ति

$$(i) 12 - 20 = -8 \quad (ii) 8 - (-5) = 8 + 5 = 13$$

$$(iii) -5 - (-4) = -5 + 4 = -1 \quad (iv) -10 - (4) = -10 - 4 = -14$$

स्वयं करके देखिए

$$-5 - (-50) = \quad 20 - (-45) = \quad -55 - (+75) = \quad -60 - (-4) =$$

#### 1.5 पूर्णांकों का गुण (व्यवकलन के लिए)

$$(a) -10 - (5) = -15 \quad (b) 6 - (-10) = 6 + 10 = 16$$

अतः दो पूर्णांकों का अन्तर एक पूर्णांक संख्या होती है, इसे घटान का संवरक गुण (closure property) कहते हैं। आप लद हरण लेकर देखिए क्या कोई ऐसे पूर्णांक नहीं मिले हिन्हका अन्तर एक पूर्णांक न हो? व्यापक रूप में  $a$  और  $b$  दो पूर्णांक जंख्याएँ हैं तो  $a - b$  भी एक पूर्णांक जंख्या होगा।

स्वयं करके देखिए

$$4, 12, 20, 28, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}$$

$$8, 6, 4, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}$$

$$-8, -12, \underline{\quad}, -20, \underline{\quad}, \underline{\quad}$$

$$-15, -10, -5, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}$$

ऐसे कुछ और pattern बनाइए और रत्नालय अपने नित्रों से वर्तवाइए।

## प्रश्नावली- 1.1

1. निम्नलिखित के बीच की सभी पूर्णांक लिखिए।

- (a)  $-5$  और  $5$       (b)  $-2$  और  $8$   
(c)  $-6$  और  $-2$       (d)  $-4$  और  $-10$

2. निम्नलिखित में से प्रत्येक में बड़े पूर्णांक पर धेरा ( $\circlearrowleft$ ) लगाएं।

- (a)  $-20, 4$       (b)  $-15, -8$       (c)  $0, -5$   
(d)  $-20, -7$       (e)  $25, -2$       (f)  $-20, -18$

3. रिक्त स्थानों में उचित चिह्न ( $>$ ,  $<$  और  $=$ ) को भरिए।

- (a)  $-6 \square -8$       (b)  $4 \square 0$       (c)  $-15 \square 2$   
(d)  $-50 \square -54 + 4$       (e)  $25 \square 25$       (f)  $4 - 15 \square 2 - 20$

4. नीचे दिए गए पूर्णांकों को बड़ता क्रम में लिखिए।

- (a)  $-8, 12, -5, 15, 20, -2$       (b)  $5, 0, -2, -4, -15, 8$

5. नीचे दिए गए पूर्णांकों की अगली पूर्णांक बताएँ।

- (a)  $-18$       (b)  $15$       (c)  $-20$   
(d)  $18$       (e)  $-5$

6. नीचे दिए गए पूर्णांकों के पहले का पूर्णांक बताएँ।

- (a)  $25$       (b)  $-59$       (c)  $-55$   
(d)  $-26$       (e)  $+100$

7. रिक्त स्थान भरिए—

(i)  $(-5) + (2) = \dots\dots\dots\dots\dots$       (ii)  $(2) + (-5) = \dots\dots\dots\dots\dots$

क्या  $(-5) + (2) = 2 + (-5)$  है?  $\dots\dots\dots\dots\dots$

कुछ अन्य पूर्णांक संख्याएं लेकर सारणी को पूरा कीजिए व जाँचिए-

### **८. रिक्त स्थानों की पुर्ति कीजिए—**

- (i)  $(-a) + (6) - (6) = (\dots)$

(ii)  $-8 + \dots = 0$

(iii)  $[2] + [9 - (-6)] - [2 + 9] + (\dots)$

(iv)  $15 + \dots = 15$

### 9. निम्नलिखित को जोड़िए।

- (a)  $-15$  में  $-18$  को (b)  $-20$  में  $17$  को  
 (c)  $+21$  में  $-16$  को (d)  $-8$  में  $5$  को

#### **10. निजलिखित को घटाइएँ।**



11. निम्नलिखित ग्रन्तों का एक-एक उत्पादन यीजिए।

- (a) कन विनिर्मेय नियन (गुज) (b) स्नाहचर्य गुण  
 (c) संचरक नियम (d) योज्य तत्समक

## **12. ऐसा पूर्णक युग्म लिखिए जिसका –**



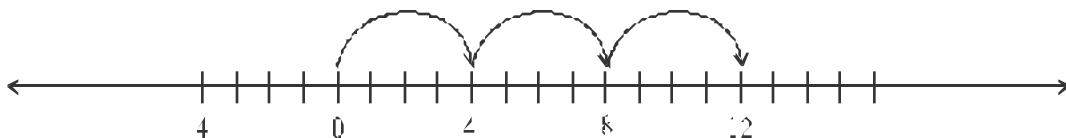
(संज्ञत (a) ले लिए (i)  $-5 + (-3) = -8$  (ii)  $-1 + (-7) = -8$ )

## 1.6 पूर्णांकों का गुणा (Multiplication of integers)

धन पूर्णांकों का गुणा—

तम जानते हैं  $4 \times 3$  यही 4 तीन बर अर्थात्  $4+4+4=12$

इसे संख्या-रेखा पर इस प्रकार निरूपित भर सकते हैं—



संख्या-रेखा से स्पष्ट है  $\rightarrow 4+4+4 = 3 \times 4 = 12$  अर्थात्  $3 \times 4 = 12$

धन पूर्णांक का ऋण पूर्णांक से गुणा—

जैसे  $4 \times (-5)$  का अर्थ है:  $-5$  का चर बर जोड़ना।

अर्थात् प्रबल  $(-5) + (-5) + (-5) + (-5) = -20$  है, संख्या-रेखा द्वारा इसे इस प्रकार निरूपित कर सकते हैं—



राशि-रेखा से स्पष्ट है  $\rightarrow (-5) + (-5) + (-5) + (-5) = 4 \times -5 = -20$

स्पष्ट है कि—

(i) दो धन पूर्णांकों का गुणात्मक भगात्मक होता है।

नगा कि  $+a$  और  $-b$  तो धन पूर्णांक है।

$$\therefore (-a) \times (+b) = +ab$$

(ii) एक धन पूर्णांक का दूसरे ऋण पूर्णांक से गुणा करने से प्राप्त गुणात्मक ऋणात्मक होता है।

नगा कि  $+a$  और  $-b$  तो ऋणांक है।

$$\therefore (-a) \times (-b) = -ab$$

स्वयं करके देखिए

$$5 \times (-6) =$$

$$4 \times (-2) =$$

$$3 \times (-1) =$$

$$5 \times (-2) =$$

$$2 \times 7 =$$

### आइए निम्न पैटर्न पर विचार करें।

$$5 \times 4 = -20 \downarrow$$

$$5 \times 3 = -15$$

$$5 \times 2 = -10$$

$$5 \times 1 = -5$$

$$5 \times 0 = 0$$

$$5 \times (-1) = ?$$

बगल की रेल में गुणनफल के पैटर्न को देखने से पता चलता है कि अप्पे रो नीचे की ओर संख्या लम्बाई 5 कम होती जाती है।  
अतः  $5 \times (-1) = -5$

इसी प्रकार रो इनके लिए यह पैटर्न बन इतः—

- (i)  $4 \times 3$  को शुरू कीजिए।
- (ii)  $7 \times 3$  को शुरू कीजिए।

अतः एक धन पूर्णक व एक ऋण पूर्णक का गुणा करने पर सदैव एक ऋण पूर्णक प्राप्त होता है।

### दो ऋण पूर्णक का गुणा

पुनः निम्न पैटर्न पर विचार करें—

$$5 \times (-1) = -5$$

$$4 \times (-1) = -4$$

$$3 \times (-1) = -3$$

$$2 \times (-1) = -2$$

$$1 \times (-1) = -1$$

$$0 \times (-1) = 0$$

$$(-1) \times (-1) = ?$$

बगल की साथी ने गुणनफल के पैटर्न को देखने से यह चलता है कि अप्पे ले नीचे की ओर संख्या का मात्र लम्बाई 1 (एक) उधीक होता जाता है। अतः  $-1 \times (-1) = +1$  इस पैटर्न के आधार होता है।

$$(+a) \times (+b) = +ab$$

$$(-a) \times (-b) = +ab$$

$$(-a) \times (+b) = -ab$$

$$(+a) \times (+b) = -ab$$

ऐसे भी रैपर्टर बनाएँ— (i)  $-5 \times 3$  को शुरू करें      (ii)  $-3 \times 4$  को शुरू करें

अतः जब दो ऋण पूर्णकों का गुणा किया जाता है तो रैपर एक धन पूर्णक प्राप्त होता है।

### निम्न उदाहरण को पढ़ें और समझें—

- (i)  $(+5) \times (+4) = +20$  च  $5 \times 4 = 20$   
 (ii)  $(-5) \times (+4) = -20$  य  $-5 \times 4 = -20$   
 (iii)  $(+8) \times (-2) = -16$  य  $8 \times (-2) = -16$   
 (iv)  $-10 \times (-5) = +50$  य  $-10 \times (-5) = 50$

### रखयं करके देखिए

- (i)  $-8 \times (-20) =$  (ii)  $-5 \times (-15) =$  (iii)  $-10 \times 40 =$   
 (iv)  $-30 \times 20 =$  (v)  $18 \times 4 =$  (vi)  $16 \times (-5) =$

प्रयास कीजिए : एवेक नं. १० में सभी छोड़ दीजें राशि से गुणा कीजिए तथा लिखें।

10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
9	-81																			
8																				
7																				
6																				
5																				
4																				
3																				
2																				
1																				
-1																				
-2																				
-3																				
-4																				
-5																				
-6																				

### 1.7 तीन अथवा अधिक ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल : आइए गिन-लिखित उदाहरणों को देखें—

- (a)  $(-2) \times (-4) = 8$
- (b)  $(-2) \times (-4) \times (-5) = [(-2) \times (-4)] \times (-5) = 8 \times -5 = -40$
- (c)  $(-3) \times (-4) \times (-6) \times (-8) = [(-3) \times (-4)] \times [(-6) \times (-8)] = 12 \times 48 = 576$
- (d)  $(-4) \times (-5) \times (-2) \times (-6) \times (-3) = [(-4) \times (-5)] \times [(-2) \times (-6)] \times (-3) = 20 \times 12 \times (-3) = 240 \times (-3) = -720$

उपर्युक्त उदाहरणों से हम देखते हैं कि—

- (a) पहले दो पूर्णांकों का गुणनफल प्राप्त करते हैं। फिर प्राप्त गुणनफल को अन्य पूर्णांक से गुणा करते हैं।
- (b) दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक है।
- (c) तीन ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक होता है।
- (d) चार ऋणात्मक पूर्णांक का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक है।

अतः ब्रेक्षणों से स्पष्ट होता है कि चार ऋणात्मक पूर्णांक के सम वर गुणा किया जाय तो गुणनफल धनात्मक पूर्णांक होता है, जबकि अन्य तीन पूर्णांक को विषय वार गुणा किया जाय तो गुणनफल अणात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।

आप भी पौन ऋणात्मक पूर्णांक लेकर गुणनफल की उचित कीजिए, क्या गुणनफल ऋणात्मक प्राप्त होता है?

### 1.8 पूर्णांकों के गुणन रास्त्रिया के गुण

#### L. गुणन के लिए संघरक

निम्न पर विचार करें—

$$4 \times 2 = 8$$

$$-5 \times -3 = 15$$

$$-2 \times 4 = -8$$

$$3 \times -6 = -18$$

इन उदाहरणों से स्पष्ट है कि दो पूर्णांकों का गुणनफल एक पूर्णांक ही होता है। अब पूर्णांक गुणा के लिए संतरक ज्ञोत है। गाना के  $a$  और  $b$  जो पूर्णांक हैं तथा उसका गुणनफल  $c$  है तो  $c$  भी एक पूर्णांक होना क्या आगे से कह सकते हैं जिनका गुणनफल पूर्णांक न हो?

### A. गुणन की क्रमविनिमेयता

**इस तथ्य पर विचार करें—**

$$\begin{array}{lll} -8 \times 2 = -16 & \text{इसी प्रकार } 5 \times \boxed{\phantom{00}} = 20 & -2 \times 3 = -6 \\ 2 \times \boxed{\phantom{00}} = -16 & 4 \times \boxed{\phantom{00}} = 20 & 3 \times \boxed{\phantom{00}} = -6 \\ \rightarrow \boxed{\phantom{00}} \times 2 = 2 \times \boxed{\phantom{00}} & \rightarrow 5 \times \boxed{\phantom{00}} = 4 \times \boxed{\phantom{00}} & \rightarrow -2 \times 3 = 3 \times \boxed{\phantom{00}} \end{array}$$

उपर्युक्त उदाहरण से स्पष्ट है कि दो पूर्णांकों के गुणन में यहले पूर्णांक को छुट्टे से गुणा करें तो फूटे के पछले से, गुणनफल बराबर होता है। इतने पूर्णांकों का गुणन क्रम विनिमेय गुण का गालन करता है। यदि  $a$  और  $b$  जो गुणांक हों तो  $a \times b = b \times a$  की सत्त्व है।

### B. गुणन सांखर्य गुण

**निम्न पर विचार करें—**

$$\begin{array}{lll} 2 \times 3 \times 4 & (2 \times 3) \times 4 & 2 \times (3 \times 4) \\ & = 6 \times 4 & = 2 \times 12 \\ & = 24 & = 24 \\ \text{तरह } (2 \times 3) \times 4 = 2 \times (3 \times 4) & & \end{array}$$

**इसी प्रकार—**

$$\begin{array}{lll} -4 \times 5 \times 6 & (-4 \times 5) \times 6 & -4 \times (5 \times 6) \\ & = -20 \times 6 & = -4 \times 30 \\ & = -120 & = -120 \\ \text{अतः } (-4 \times 5) \times 6 = -4 \times (5 \times 6) & & \end{array}$$

गीच दिए गए तीन पूर्णांकों का इसी प्रकार समूह बदलकर गुण कीजिए।

$$(i) \quad 3 \times -2 \times 4, \quad (ii) \quad -3 \times -5 \times 7$$

क्या इनका गुणनफल न मूँह बदलने से बदलता है?

व्यापक रूप में किसी तीन गुणाकारों  $a, b, c$  के लिए—

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

$a, b, c$  में प्रत्येक के लिए ऐसा गान लैज़ेए और इस गुण का उत्पादन लैज़ेए।

अतः दूसरे संख्याओं की तरह इन पूर्णकों का गुणनफल उनके समूह बनाने पर निर्भर नहीं करता है। अर्थात् एहली का दूसरी के साथ गुण करके तीसरे पूर्णक के साथ गुण करें या दूसरे दो दोस्त गुणाले का गुण कर तबल गुणाक के साथ लगाक दुगा करें, गुणनफल ज्ञान आता है। यह पूर्णकों के लिए गुणन का **साहचर्य गुण** कहलाता है।

व्यापक रूप में, नाम कि  $a, b$  और  $c$  तीन पूर्णक हैं तो  $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

भी उत्पत्त है।

#### IV. वितरण नियम

निम्न पर विचार करें—

$$\begin{aligned} 4 \times (5 + 8) &= 4 \times 5 + 4 \times 8 \\ - 4 \times 13 &= 20 + 32 \\ - 52 &= 52 \end{aligned}$$

अतः  $4 \times (5 + 8) = 4 \times 5 + 4 \times 8$

$$\begin{aligned} \text{इसी प्रकार, } 4 \times (-5 + 7) &= 4 \times (-5) + 4 \times 7 \\ - 4 \times 2 &= -20 + 28 \\ = 8 &= 8 \end{aligned}$$

अतः  $4 \times (-5 + 7) = 4 \times (-5) + 4 \times 7$

$$\begin{aligned} \text{इसी प्रकार, } 4 \times [5 + (-7)] &= 4 \times 5 + 4 \times (-7) \\ 4 \times (5 - 7) &= 20 - 28 \\ - 4 \times (-2) &= -8 \\ - - 8 &= -8 \end{aligned}$$

अतः  $4 \times [5 + (-7)] = 4 \times 5 + 4 \times (-7)$

उपर्युक्त तथ्यों से स्पष्ट है कि दो दो अधिक गुणाकों का यार में किसी अन्य गुणाक से गुण किया जाय तो गुणनफल छही आता है, जो गुणक का पूर्णालों में अलग-अलग गुण उत्पन्न हो प्राप्त गुणनफलों का बोय जाता है।

अतः इस गुण को **वितरण नियम (distributive law)** कहते हैं। यहाँ कि  $x$  और  $y$  हो

पूर्णांक हैं, जिनके योगफल  $(x+y)$  है, इसके योगफल में  $a$  पूर्णांक से तुम्हा करने पर ब्राह्म गुणनफल वही आता है जो पूर्णांक  $a$  के  $x$  और  $y$  के साथ अलग-अलग तुम्हा कर जोड़ने पर आता है—  $a(x+y) = ax + ay$

### V. गुणन के लिए तत्समक अवयव

#### निम्न पर गौर फर्झे—

$$4 \times 1 = 4$$

$$-2 \times 1 = -2$$

$$(-3) \times 1 = \dots\dots\dots$$

$$(4) \times 1 = \dots\dots\dots$$

$$25 \times 1 = \dots\dots\dots$$

$$-32 \times 1 = \dots\dots\dots$$

उपर्युक्त सारणी से हम जाते हैं कि किसी तूणांक को एक से तुग करने पर वहे पूर्णांक प्राप्त होता है। अतः पूर्णांकों में गुणन के लिए तत्समक अपयोग 1 है।

### VI. निम्न को समझो—

$$5 \times (-1) = -5$$

$$-5 \times (-1) = +5$$

$$-1 \times (-5) = +5$$

$$-1 \times 5 = -5$$

इस प्रकार 'केरा' पूर्णांक में  $-1$  से गुणन करने पर गुणनफल विवरीत विवर का वही पूर्णांक ब्राह्म होता है, उधार्त योगात्मक प्रतिलोम प्राप्त होता है। यदि  $a$  कोई पूर्णांक हो, तो  $a \times -1 = -a$

#### VII. निम्न को समझो—

$$2 \times 0 = 0$$

$$-4 \times 0 = 0$$

$$25 \times 0 = \dots\dots\dots$$

$$37 \times 0 = \dots\dots\dots$$

$$125 \times 0 = \dots\dots\dots$$

$$229 \times 0 = \dots\dots\dots$$

अब [केरी] पूर्णांक में इन्होंने रोप गुणन करने पर गुणनफल शून्य प्राप्त होता है। यानि यदि  $a$  एक तूणांक है, तो  $a \times 0 = 0$

### VIII. निम्न को समझो—

$$8 > 5$$

$$\text{या, } 8 \times 2 > 5 \times 2$$

$$\text{युन: } 8 > 5$$

$$8 \times -2 < 5 \times -2$$

यदि  $a, b$  वाया  $c$  ऐसे पूर्णांक हैं तो  $a > b$  हो

(i)  $a \times c > b \times c$  यदि  $c$  – धनपूर्णांक हो,

(ii)  $a \times c < b \times c$  यदि  $c$  = ऋणपूर्णांक हो

IX. (i)  $2 \times 3 \times 4 = (2 \times 3) \times 4 = 2 \times (3 \times 4) = (4 \times 2) \times 3$

(ii)  $(-2) \times (-3) \times (-4) = [(-2) \times (-3)] \times (-4) = (-2) \times [(-3) \times (-4)] = [(-2) \times 1] \times (-3)$

अतः तीन पूर्णांकों का गुणा करने में किन्तु दो पूर्णांकों के गुणनकल नं शेष तौसरे पूर्णांक का गुणा करने से लम्बामध्यानकल बड़ी सहायता है।

### स्वयं करके देखिए

निम्न गुणों के सामने प्रत्येक का एक चरित सदाहरण दे (गुण के लिए)

गुण	गुण के अन्तर्गत	उदाहरण
संतती गुण		
वितरण गुण		
संबंधक गुण		
क्रम विनियोग गुण		
तत्समक गुण		

### 1.9 गुण को आसान बनाने का तरीका

$20 \times 78 \times 5$  को हल करने के लिए हम इसे दो चरीके से कर सकते हैं—

$$= (20 \times 78) \times 5 = 1560 \times 5 = 7800$$

$$\text{अथवा, } (20 \times 5) \times 78$$

$$= 100 \times 78 = 7800$$

कौन-सी विधि आसान है?

रूपष्ट है कि दूसरी विधि आरान है, क्योंकि 20 को 5 से भूला करने पर 100 प्राप्त होता है, जिसे 78 से भूला करना असान है। इसने उंडे दूसरी विधि में पूर्णांकों की क्रमविनियोगता और सहचारिता का नुसार लगायोग किया।

### उदाहरण-1.

(i)  $28 \times 12$

$$\begin{aligned} 28 \times 12 &= 28 \times (10 + 2) \\ &= 28 \times 10 + 28 \times 2 \\ &= 280 + 56 = 336 \end{aligned}$$

(ii)  $-8 \times 48$

$$\begin{aligned} -8 \times 48 &= -8 \times (50 - 2) \\ &= -8 \times 50 + [(-8) \times (-2)] \\ &= -400 + 16 = -384 \end{aligned}$$

(iii)  $(-25) \times (-98)$

$$\begin{aligned} &= -25 \times (-100 + 2) \\ &= (-25) \times (-100) + (-25) \times 2 \\ &= 2500 - 50 = 2450 \end{aligned}$$

(iv)  $54 \times (-8) + (-54) \times 2$

$$\begin{aligned} &= -54 \times 8 + (-54) \times 2 \\ &= -54 \times (8 + 2) = -54 \times 10 \\ &= -540 \end{aligned}$$

उपर्युक्त उदाहरणों के देखने से पता चलता है कि गुणा के नियमों/गुणों का उपयोग कर गुणनफल को आसानी से प्राप्त किया जा सकता है।

### रवयं करके देखिए

गुणा के नियमों प्राप्त निम्नलिखित को सख्त करें।

(a)  $-50 \times 48 \times 2$

(b)  $850 \times 48$

(c)  $-75 \times 52$

(d)  $-38 \times 2 - 38 \times 8$

### शब्द समस्याएँ

उदाहरण-2. वो पूर्णांकों का गुणनफल  $-30$  है उनमें से एक पूर्णांक  $15$  है तो दूसरी पूर्णांक ज्ञात करें।

हल: दूसरा एक पूर्णांक  $-15$

$$\text{गुणनफल} = -30$$

$$\therefore \text{एक } \text{पूर्णांक} \times \text{दूसरा } \text{पूर्णांक} = \text{गुणनफल}$$

$$\therefore 15 \times \text{दूसरा } \text{पूर्णांक} = -30$$

$$\therefore \text{दूसरा } \text{पूर्णांक} = \frac{-30}{15} = -2 \text{ उत्तर।}$$

## प्रश्नावली—1.2

### 1. गुण कीजिए—

- |   |                                    |
|---|------------------------------------|
| (a) $225 \times (-4)$                             | (b) $(-405) \times (-5)$           |
| (c) $(-80) \times (-50)$                          | (d) $(-11) \times 15$              |
| (e) $(-3) \times 35 \times (-10)$                 | (f) $(-25) \times 0$               |
| (g) $(-4) \times (-4) \times (-4) \times (-4)$    | (h) $(-2) \times (-2) \times (-2)$ |
| (i) $(-20) \times (-15) \times (-25) \times (-5)$ | (j) $-50 \times 5 \times (-20)$    |

### 2. निम्नलिखित में सत्य और असत्य को चुनें—

- |  |                           |
|--|---------------------------|
| (i) $18 \times (-2) = (-2) \times 18$                                      | (ii) $-38 \times 1 = -38$ |
| (iii) $(-20) \times (-5) = (-5) \times (-20)$                              | (iv) $43 \times 0 = 43$   |
| (v) $1 \times -425 = -425$   | (vi) $-1 \times 25 = -25$ |
| (vii) $[( -2) \times (-12)] \times -24 = (-2) \times [(-12) \times (-24)]$ |                           |
| (viii) $(-5) \times (2 + 3) = (-5) \times 2 + (-5) \times 3$               |                           |

### 3. निम्नलिखित के सामने उसके ज्ञान गुण को लिखिए—

- |  |                           |
|--|---------------------------|
| (i) $-25 \times (8 + 2) = (-25) \times 8 + (-25) \times 2$ ..... |                           |
| (ii) $(-8) \times (-1) = (-4) \times (-8)$                       | (iv) $-2 \times -10 = 20$ |
| (iii) $(20 \times 30) \times 10 = 20 \times (30 \times 10)$      | (v) $-5 \times 1 = -5$    |

### 4. सत्यापित करें—

- |   |  |
|---|--|
| (i) $42 \times (-5) = -5 \times 42$                         |  |
| (ii) $25 \times (28 + 2) = 25 \times 28 + 25 \times 2$      |  |
| (iii) $(50 \times 60) \times 70 = 50 \times (60 \times 70)$ |  |
| (iv) $(-24) \times (5 \times 2) = (-24 \times 5) \times 2$  |  |

### 5. किस पूर्णांक में $(-1)$ का गुण करने पर गुणनफल निम्न ग्राह दोते हैं—

- |        |          |         |        |         |
|--------|----------|---------|--------|---------|
| (i) 20 | (ii) -15 | (iii) 0 | (iv) 1 | (v) -50 |
|--------|----------|---------|--------|---------|

6.  $-1 \times 0 = 0$  के आधार पर सत्यावित कीजिए कि दो ऋण गूणांकों का गुणनाकल घनात्मक पूर्णांक दोता है।

$$\text{उसके तहत } -4 \times (2 - 2) = 0 \text{ या } -4 \times [2 + (-2)] = -4 \times 2 + (-4) \times (-2) = -8 + (-4) \times (-2)$$

इसका गान शून्य (अंगी) है। जब  $(-4) \times (-2) = -8$

∴ दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल धन पूर्णांक होता है।

### 7. सरल कीजिए (विभिन्न गुणों का उपयोग करते हुए)

- |       |                                  |      |                                     |
|-------|----------------------------------|------|-------------------------------------|
| (i)   | $(-7) \times 5 + (-7) \times 11$ | (ii) | $675 \times (-5) - 5 \times (-675)$ |
| (iii) | $8 \times (50 - 4)$              | (iv) | $5 \times 27 \times (-4)$           |
| (v)   | $987 \times 98$                  | (vi) | $-57 \times (-19) + 57$             |

### 8. निम्नलिखित सारणी को पूरा करें-

$x$	0	-1	-2	-3	4	6
-2						
-3						
-1						
-1						
5						

### 9. निम्नलिखित में से कौन सत्य है और कौन वक्तव्य?

- |       |  |     |
|-------|--|-----|
| (i)   | -20 का योज्ञा प्रतिसम 20 है।   | ( ) |
| (ii)  | किसी पूर्णांक का चार्ज प्रतिलिपमप्राप्त करने के लिए उसमें शून्य रूप गुणा करते हैं। | ( ) |
| (iii) | 5 ऋण पूर्णांकों का गुणनफल धन पूर्णांक होता है।                                     | ( ) |
| (iv)  | चार ऋण पूर्णांकों का गुणनफल धन पूर्णांक होता है।                                   | ( ) |
| (v)   | $-4 \times 1 = -4$   | ( ) |
| (vi)  | $-5 \times 0 = 0$  | ( ) |

### 10. निम्नलिखित में पूर्णांकों के गुण में सही कथनों के आगे सही का निशान लगाएं तथा गलत कथनों को ठीक करके लिखें।

- |       |                         |     |      |                          |     |
|-------|-------------------------|-----|------|--------------------------|-----|
| (i)   | $(-2) \times (-3) = -6$ | ( ) | (ii) | $(-4) \times (18) = 132$ | ( ) |
| (iii) | $(-2) \times (-2) = 14$ | ( ) | (iv) | $(-3) \times (14) = -12$ | ( ) |

11. किसी हेलीकर्स (डिटा) प्रिंटिंग में, तापरे के उपयोग को 40°C से 50°C तक बढ़ाने की दस से लगे गुण की आवश्यकता है। उस प्रिंटिंग के शुरू होने के 10 घंटे बाद कारों का तापमान क्या होता?
12. दस प्रश्नांवाले एक कक्षा टर्स्ट में प्रत्येक सही उत्तर के लिए 5 अंक दिए जाते हैं और प्रत्येक गलत उत्तर के लिए (-2) अंक दिए जाते हैं एवं प्रयत्न नहीं किये गये प्रश्नों के लिए शून्य दिया जाता है।
- मोहन द्वारा प्रश्नों का राजी और छह प्रश्नों का गलत उत्तर देय है, उसके द्वारा प्राप्त अंक कितने हैं?
  - रेशम के पौधे उत्तर रही है और जौधे उत्तर गलत है, उसके द्वारा प्राप्त अंक कितने हैं?
  - हीना न बुल जात प्रश्न इसे किए हैं, उनमें से दो के उत्तर रखी हैं और पौधे के उत्तर गलत हैं तो, उसके द्वारा प्राप्त अंक कितने हैं?
13. एक सीमेंट कंपनी का सफद सीमेंट बेचने पर 8 रुपये प्रति बोरी की दर से लाभ होता है और स्लेटी (Grit) से की सीमेंट बेचने पर 5 रुपये प्रति बोरी की दर से हानि होती है।
- किसी नहींने नई गार्ड रोडी सफद सीमेंट की 3000 बोरियों के लिए रलेटी रीमेंट की 5000 बोरियों बेचती है। उसका लाभ अथवा हानि क्या है?
  - यारे कंपनी नई गार्ड रोडी की 8000 बोरियों की बांदला 6400 है तो, कंपनी की स्लेटी सीमेंट की लेतनी बारियों बेचनी चाहिए, ताकि उसे ना तो लाभ हा द्वारा ना हानि?
14. एक विद्युत कम्पनी प्रत्येक रंगीन टीवीवी पर 80 रुपये का लाभ कमाता है और प्रत्येक रेफ्रिजरेटर पर 60 रुपये का हानि हाता है।
- कम्पने 5000 रंगीन टीवीवी और 4000 रेफ्रिजरेटर एक स्टोर में बचता है। तो कंपनी को लेना लाभ या हानि थोक है?
  - कंपनी द्वारा 1000 रेफ्रिजरेटर बेचने पर कंपनी लेना रंगीन टीवीवी बेचे कि उसे न लग हो द्वारा न हानि?

## 1.10 पूर्णकों में भाग रास्त्रिया (Division Operation in Integers)

हम जानते हैं कि भाग, दूषा की विवरीत अंकिया है, जैसे  $4 \times 7 = 28$  है, इसलिए  $28 : 4 = 7$  तथा  $28 : 7 = 4$  है।

इसी प्रकार 5  $\times$  4 = 20 और  $20 \div 5 = 4$  एवं  $20 \div 4 = 5$  प्राप्त होता है।

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि पूर्ण संख्याओं के ब्रह्मेषु गुणन कथन के लिए ये विधान वा न, कथन होते हैं।

क्या काउं पूर्णकों के लिए यह कथन एवं नाम वाय कथन कथनों को लिक राकते हैं?

निम्नलिखित सारणी को देखिए और इसे पूरा करें।

गुणन कथन	रास्त्रिया भाग कथन	
	I	II
$2 \times (-6) = (-12)$	$(-12) : (-6) = 2$	$(-12) \div 2 = (-6)$
$(-4) \times 5 = (-20)$	$(-20) \div (5) = (-4)$	$(-20) \div (-4) = 5$
$(-8) \times (-9) = 72$	$72 \div \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$	$72 \div \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$
$(-3) \times (-7) = \underline{\hspace{2cm}}$	$\underline{\hspace{2cm}} \div (-3) = \underline{\hspace{2cm}}$	$\underline{\hspace{2cm}}$
$(-8) \times 4 = \underline{\hspace{2cm}}$	$\underline{\hspace{2cm}}$	$\underline{\hspace{2cm}}$
$5 \times (-9) = \underline{\hspace{2cm}}$	$\underline{\hspace{2cm}}$	$\underline{\hspace{2cm}}$
$(-10) \times (-5) = \underline{\hspace{2cm}}$	$\underline{\hspace{2cm}}$	$\underline{\hspace{2cm}}$

उपर्युक्त से हम देखते हैं कि—

$$(-12) : 2 = (-6)$$

$$(-20) : (5) = (-4)$$

$$(-32) \div 4 = -8$$

$$(-15) \div 5 = -3$$

हम देखते हैं कि लाव हम एक व्रहाणात्मक पूर्णांक को धनात्मक नूपांक से भग दते हैं, तो हम उन्हें यूपं संख्याओं के रूप ने भर देते हैं और इसके पश्यात् भागफल से कहले त्रैप विक्षि (-) रख देते हैं। इस प्रकार हम एक व्रहाणात्मक पूर्णांक प्राप्त करते हैं।

हम यह भी देखते हैं कि—

$$72 \div (-8) = -9 \quad \text{और} \quad 50 \div (-10) = -5$$

$$72 \div (-9) = -8 \quad \text{और} \quad 50 \div (-5) = -10$$

इस प्रकार, हम यह कह सकते हैं कि जब हम एक धनात्मक पूँण्डिक को एक ऋणात्मक पूँण्डिक से भाग देते हैं, तो सर्वग्रन्थ हम उन्हें पूँज लंबाओं के लिए ने भाग देते हैं और उसके अवधारणा ने गलत क समगे ऋण चिह्न (-) रख दत है। इस प्रकार, हमें एक ऋणात्मक पूँण्डिक प्राप्त होता है।

व्यापक रूप में,

$$(+a) \div (+b) = +\frac{a}{b}, \quad (-a) \div (-b) = +\frac{a}{b}, \quad (+a) \div (-b) = -\frac{a}{b}, \quad (-a) \div (+b) = -\frac{a}{b}$$

### स्वयं कीजिए

- |                    |                    |                    |
|--------------------|--------------------|--------------------|
| (a) $-50 \div 10$  | (b) $-56 \div 7$   | (c) $85 \div (-5)$ |
| (d) $90 \div (-3)$ | (e) $-100 \div 20$ |                    |

**उदाहरण—3.** केसी ट्रेन में प्रथम राही उत्तर के लिए  $+6$  कंक दिए जाते हैं और प्रथम उत्तर उत्तर के लिए  $(-2)$  अंक दिए जाते हैं। (i) रखा ने सभी प्रश्नों के उत्तर दिए और  $36$  अंक प्राप्त किए जबकि उसके  $12$  उत्तर सही पाए गये। (ii) पंडित ने भी सुन्दर प्रश्नों के उत्तर दिए और उसने  $-12$  अंक प्राप्त किए, जबकि उसके पौन उत्तर सही पाए गये। प्रथम ने किसने प्रश्नों के उत्तर गलत दिए?

**हल :** (i) एक राही उत्तर के लिए दिए दिए गये अंक  $= 6$

अत  $12$  सही उत्तरों के लिए दिए गये अंक  $= 6 \times 12 = 72$

रखा के सुन्दर प्राप्त किए गये अंक  $= 36$

गलत उत्तरों के लिए प्राप्त अंक  $= 36 - 72 = -36$

$(-2)$  के गिरता है एक गलत उत्तर पर

**उत्तर**  $(-36)$  उंक मिलता  $-36 \div (-2) = 18$  गलत उत्तरों पर

A. गलत उत्तरों की संख्या  $= 18$

(ii) पौन रही उत्तरों के लिए दिए गये अंक  $= 5 \times 6 = 30$

पौन द्वारा प्राप्त किए गये अंक  $= -12$

गलत उत्तरों के लिए प्राप्त अंक  $= -12 - 30 = -42$

$(-2)$  अंक मिलता है एक गलत उत्तर पर

B.  $-12$  उंक मिलता  $-12 \div (-2) = 21$  गलत उत्तर पर

C. गलत उत्तरों की संख्या  $= 21$

## 1.11 भाग संक्रिया के गुण (Properties of Division Operation)

### निम्नलिखित पर विचार करें—

I.  $-6 \div (-2) = 3$ , पूर्णांक संख्या है       $6 \div (-2) = -3$  एक पूर्णांक है।

$$\text{परन्तु } -2 \div (-6) = \frac{-2}{-6}, \text{ पूर्णांक संख्या नहीं है।}$$

उपर्युक्त उदाहरण ऐसे स्पष्ट हैं कि कोन्हीं दो पूर्णांकों का भाग जल्द एक पूर्णांक होगा या नहीं गौ।

II.  $-12 \div (-4) = 3$                                      $-4 \div (-12) = \frac{-4}{-12}$

$$\Rightarrow -12 \div (-4) \neq -4 \div (-12)$$

अतः भूमि में अनिवार्य गुण नहीं है।

III.  $-4 : 0 = \text{अवरेखांश}$                              $5 : 0 = \text{अवरेखांश}$

अतः किसी भी पूर्णांक को ० से भाग करना अवश्यक है। एवं  $0 \div (-4) = 0$ ;  $0 \div 5 = 0$

अतः इनमें से किसी भी पूर्णांक (शून्य को छोड़कर) से भाग करने पर शाखाल इन्हीं होता है।

इसे एक उदाहरण के लिए समझा जा सकता है, जैसे  $-0 \div 4 = ?$

$$\text{हम जानते हैं, } 0 \div -\frac{0}{4} = -\frac{1-1}{4} = -\frac{1}{4} = \frac{1}{4} = 0$$

### निम्नलिखित के एवं इनके विवरण—

$-10 \div 1 = -10$      $+5 \div 1 = 5$

यह दर्शाता है कि किसी भी पूर्णांक में 1 से भाग देने पर शाखाल वही पूर्णांक प्राप्त होता है। अतः पूर्णांक में भाग के लिए तत्त्वनाल अवयव  $a$  है। माना कि गुणांक  $a$  है, तो  $a : 1 = a$  क्या  $(-1)$  से भाग जैसे जरूर भी वही पूर्णांक प्राप्त होता है?

V.  $(-4) \div (-1) = 4$      $-4 \div (-1) = -4$

अतः किसी भी पूर्णांक में  $(-1)$  से भाग जैसे वही पूर्णांक प्राप्त नहीं होता है।

- V. क्या हम कह सकते हैं  $[-8] \div [-4] \div [-2]$  एवं  $[-8] \div [(-4) \div (-2)]$  एवं वर हैं?
- हम जानते हैं कि  $[-8] \div [-4] \div [-2] = 2 \div -2 = -1$
- और  $[-8] \div [(-4) \div (-2)] = (-8) \div 2 = -4$
- अतः  $[-8] \div [(-4) \div (-2)] \neq [-8] \div [(-4) \div (-2)]$
- क्या इस कह सकते हैं कि गुणीकों के लिए भ्र साहचर्य है, नहीं।
- अपनी आर स पॉच उन्ह्य उदाहरण लकर इस सत्यापेत करनिए।

स्वयं करके देखिए

क्या न्न में संवरक, तत्सन्धि, क्रम विगम्य साहचर्य नियम लागू है ?  
एक-एक उदाहरण द्वारा समझाएँ।

### प्रश्नावली—1.3

#### 1. बहु कीजिए—

- (i)  $(-40) \div 5$       (ii)  $(-450) \div 3$       (iii)  $(-45) \div (-5)$   
 (iv)  $(-56) \div (-1)$       (v)  $25 \div 5$       (vi)  $(-128) \div (-16)$   
 (vii)  $0 \div 50$       (viii)  $50 \div 0$       (ix)  $(-80) \div (-80)$

#### 2. निम्नलिखित गुण को क्रिया को भाग की दो प्रक्रिया में बदलिए—

- (i)  $5 \times 8 = 40$       (ii)  $-4 \times (-6) = 24$   
 (iii)  $-12 \times 9 = -108$       (iv)  $-7 \times (-12) = 84$   
 (v)  $-10 \times 8 = -80$

#### 3. खाली जगह में उपयुक्त पूर्णांक भरिए—

- (i)  $\boxed{\phantom{0}} \div (-8) = (-12)$       (ii)  $\boxed{\phantom{0}} \div 8 = (-9)$   
 (iii)  $24 \div \boxed{\phantom{0}} = -4$       (iv)  $-80 \div \boxed{\phantom{0}} = 10$   
 (v)  $-48 \div 6 = \boxed{\phantom{0}}$

4. निम्नलिखित में कौन सत्य तथा कौन असत्य है। हल कीजिए व बताइए।

- |                               |  |
|-------------------------------|--|
| (i) $-4 \div 2 = 2 \div (-4)$ | (ii) $(-2 \div 4) \div 6 = -2 \div (4 \div 6)$ |
| (iii) $-25 : 0 = 0$           | (iv) $0 : 5 = 0$                               |
| (v) $-125 : 1 = -125$         | (vi) $-45 : (-45) = 1$                         |

5. दोपहर 12 बजे ज्ञानमान शून्य से  $10^{\circ}\text{C}$  ऊपर था। यदि यह आधी रत तक  $2^{\circ}\text{C}$  प्रति घंटे की दर से कम होता है, तो किसी रमय वापन शून्य से  $8^{\circ}\text{C}$  नीचे होगा? यह के 12 बजे वापन क्या होगा?
6. एक लिफ्ट (lift) लिफ्टी द्वारा न कूफ़े में 6m प्रति चंद्र की दर से नीचे जाता है। यदि नीचे जाना दूरी तल से 10m ऊपर से दूर होता है, तो  $-350\text{m}$  गहुँचन में कितने स्तर लगेगा?

### 1.12 कई राक्रियाओं युक्त व्यंजकों का रारलीकरण

**उदाहरण—1.**  $8 + 20 \div 25$  का  $\frac{1}{5} \times 10 - 4$

$$\begin{aligned} \text{हल : } & 8 + 20 \div 25 \text{ का } \frac{1}{5} \times 10 - 4 \\ & = 8 + 20 \div 5 \times 10 - 4 \\ & = 8 + 4 \times 10 - 4 \\ & = 8 + 40 - 4 \\ & = 48 - 4 = 44 \end{aligned}$$

#### कार्य विधि

- सबसे पहले “का” को हल करते हैं।
- लगातार : किर  $\times$  की क्रिया वरत हैं।
- + तथा - की क्रिया ने पहले धनात्मक संख्या के एक राख और अधात्मक संख्या के एक राख जोड़कर देते हैं और किसी राखी राख्या बाजी लगा देते हैं। (चिन्ह रहित बड़ी संख्या)

**उदाहरण—2.**  $240 \text{ का } \frac{5}{6}$

$$\text{हल : } \cancel{240}^0 \text{ का } \frac{5}{6} = 40 \text{ का } 5$$

(अर्थ है 40 का 5 चूपा)

अर्थात्  $10 \times 5 = 200$ .

**उदाहरण-6.**  $350 \div \frac{7}{5}$

हल :  $350 \div \frac{7}{5} = 350 \times \frac{5}{7} = 50 \times 5 = 250$

याद रखें

जहाँ राशियों के सारलीकरण का क्रम

ले लिए इन्हें यदृच्छा —

पहले “का” कर, पीछे (÷) भाग।

तो युग्म विभाग हो जाएगा ॥

### कार्य विधि—

या के गुणाने बदलकर भाग के शब्द जाने पाती रखा (प्रैन) को उलट देते हैं, किंतु या की प्रेक्षण लगते हैं। युग्म विभाग की अंश और इस को किसी उस्थगिर संख्या, जिससे अंश और इस पूरी तरह विभाजित होता हो, सस्त संख्या से भाग देतर उस संख्या के उपर या नीचे भगदड़ को लेते हैं, जैसा कि उदाहरण से देखें है।

**1.13 कोष्ठकों का प्रयोग (Use of brackets) :** आइए निम्न उदाहरण पर विचार करें—

**उदाहरण-7.** कुछ दौड़ीयों के 5 लड़के और 3 लड़कियों में बराबर-बराबर हस्त प्रकार नामिना है तो उन्हें को 10 दौड़ी मिले तो वहाँ कुल कितनी दौड़ीयाँ हों?

हल : इस का हल ये लड़कों ने दो प्रैन उपरीको से निकाला—

कुल दौड़ी	$- 5 \times 10 + 3 \times 10$	कुल दौड़ी	$- 10 \times (5 + 3)$
	$- 50 + 30$		$- 10 \times 8$
	$- 80$		$- 80$

अतः उपर्युक्त उदाहरण से स्पष्ट होता है कि समस्याओं को हल करना में लोटक का उपयोग किया जाता है, जिससे समस्या का समाधान करना अस्ताने हो जाता है।

**कोष्ठक (Brackets)** निम्न प्रकार के हैं—

- रेखा कोष्ठक (line bracket) :** इसे सरल रेखा छार लंजक के ऊपर लगते हैं, जिसका हल गहल करना है। जैसे  $-3 + 4 - 2 + (\overbrace{2 - 3} + 4) = 2 - 3$  का पहले हल करना है।
- छोटा कोष्ठक (Small bracket या Parenthesis) :** इसका चेहरा “( )” जैसे —  $2 + 3 \times (4 - 2)$  इसमें  $4 - 2$  को पहले हल करना है।
- मेझला कोष्ठक (Curly bracket या Braces) :** इसका चेहरा “{ }” है।
- बड़ा कोष्ठक (Big bracket या Square bracket) :** इसका चेहरा “[ ]” है। कोष्ठकों के तोड़न अथवा व्याप्ति के सरलीकरण का कम इस प्रकार है—पहले

५५ – कोष्ठक, उत्तर लोटा कोष्ठक, पूर्ण गांडल कोष्ठक और अंत में बड़े कोष्ठक को तोहँते हैं। अर्थात् कोष्ठक व अन्दर के व्यंजकों को जर्जीकरण करते हैं।

### निन्नलिखित उदाहरण पर गौर फूर—

$$\text{उदाहरण-8. } (14 \div 7) \times [8 + \{3 - \overline{8-2}\}] - (5 - 2)$$

$$\text{हल : } (14 \div 7) \times [8 + \{3 + \overline{8-2}\}] - (5 - 2)$$

$$\begin{aligned} &= \left(14 \times \frac{1}{7}\right) \times [8 + \{3 - 6\}] - 3 \\ &= 2 \times |8 + 9| - 3 \\ &= 2 \times 17 - 3 \\ &= 34 - 3 = 31 \end{aligned}$$

उपर्युक्त उदाहरण के हल ऐसा होता है कि—

- (i) सबस पहले रेखा कोष्ठक के भीतर की सूक्ष्मया करते हैं।
- (ii) उत्तर बाद पहला कोष्ठक लगा।
- (iii) उत्तर बाद मैंडला कोष्ठक का और
- (iv) अंत में बड़ा काटक के भीतर की सूक्ष्मया करते हैं।

हमें कोष्ठक का तोहँते या हलते तथा निन्नलिखित तथ्यों पर ध्यान देना चाहिए—

- (i) यदि किसी कोष्ठक के पहल संख्याएँ हैं तो इसका अर्थ है कि काटक के भीतर की प्रत्येक संख्या से गुणा करा।
- (ii) यदि कोष्ठक के पहल अंक (-) चिह्न है तो कोष्ठक के भीतर के प्रत्येक संख्या (पद) का चिह्न बदल जाता है। (सिर्फ + और - चिह्न) [ जैसे : - (8 - 2) = - 8 + 2 ]
- (iii) यदि कोष्ठक के बछर धन (+) चिह्न है तो कोष्ठक के भीतर के प्रत्येक संख्या (पद) का चिह्न में कोई बदलाव नहीं होता है।
- (iv) कोष्ठक के बहुर कथे कोई विलंब हो तो उन्हाँ का विहर (x) समझा जाए है।
- (v) यदि एक ही कोष्ठक के उन्दर कोई फिल्ड्युल संख्या (पद) हो तो राशियाँ में इस फॉर्म ("का", ÷, ×, +, -) के पालन करें।

इसे राहजड़ा सो आद रखने के लिए BODMAS के अक्षरों का क्रम आद रखें। अर्थात्

B	→ Bracket (क्लॉप्टक)
O	→ Of (ज्ञ)
D	→ Division (भाग)
M	→ Multiplication (गुण)
A	→ Addition (जोड़)
S	→ Subtraction (घटाव)

### कोष्ठक लगाने का नियम—

- यदि कोष्ठक के बाहर अंक (-) विड रखते हैं तो कोष्ठक के भीतर लाले जानेवाले प्रत्येक राहजड़ा (पद) का चिह्न (+ और -) बदलकर रखते हैं। जैसे :  $-12+4-2-5 = -(12-4+2-5)$
- यदि कोष्ठक ल बाहर भन (+) छिन्न रखते हैं तो कोष्ठक के भीतर ल ले जानेवाले किसी भी संख्या (पद) का चिह्न नहीं बदलता है। जैसे :  $-12+1-2-5 = +(-12+/-2+5)$

**उदाहरण—9.** नीन उपन पिंडा से 50 रुपये मता से 30 रुपय लेकर बाजार गया। इन रुपयों ने स 50 रुपये का चुसने कण्डा छरीदा। बचे छुए धन के 5% भाग से एक पुस्तक खरीदा। उक्त उदाहरण को कोष्ठकों की राहजड़ा सो गणितीय रूप में लिखें तथा उपाय के मनोष ने किनारे रुपये की दूरधिक खरीदी?

हल :  $[(50+30)-50] \div 5$  (उक्त उदाहरण के गणितीय रूप)

$$= [90-50] \div 5$$

$$= 40 \div 5$$

$$= 40 \times \frac{1}{5} = 8$$

अतः गनीष = 8 रुपय की पुस्तक खरीदी।

## प्रश्नावली—1.4

### 1. सरल कीजिए—

(i)  $20 \text{ का } \frac{1}{4}$       (ii)  $\frac{250}{9} \text{ का } \frac{3}{50}$       (iii)  $2\frac{1}{2} : \frac{20}{8}$

(iv)  $\frac{12}{7} : \frac{9}{35}$       (v)  $\frac{75}{18} \times \frac{60}{36}$

(vi)  $20 \text{ का } \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{8} = 10 - 15$       (vii)  $20 - (8 + 5)$

(viii)  $16 : (15 - 8 - 3) + 4$       (ix)  $14 : [3 \text{ का } 2 - (5 - 6)] + 9$

(x)  $(30 - 5 \times 6 + 2) \div 2$

### 2. कोष्ठकों का प्रयोग कर निम्नलिखित प्रश्नों को गणितीय रूप दीजिए—

(i) 5 और 15 के बीच में 18 को भाग देना।

(ii) 69 ने 4 और 6 के गुणफल से 1 कम का भाग देना।

(iii) राहुल ने अपनी 24 पैसेलों में से 4 को अपने पास रखकर ₹९ को अपने 5 साथियों में हासान—बद्री बाट दिया। प्रत्येक साथी को कितनी पैसेल दिली?

(iv) 25 वाले 5 के भाग से 1 अधिक ता 124 में भाग देना।

(v) 2 तथा 4 के गुणफल से 2 लम का 9 रुपया लर उपायल में 6 से भाग देना।

### 3. सरल कीजिए—

(i)  $50 + \{15 - 5 + (8 - 2)\}$       (ii)  $8 [6 + 2 \{5 - 4 (5 - 8)\}]$

(iii)  $12 : \overline{6-2} + 10$       (iv)  $15 + [2 - 3 - \{2 (5 - 4 + 1)\}]$

(v)  $103 - [144 \div (12 \times 12) + 5 + 12 \div \overline{6-2} + 10]$

(vi)  $5 [5 - \{5 - (5 - 5 - 5)\}]$

(vii)  $15 - (-3) (4 - 4) \div \{5 - (-6) \times (-3)\}$

(viii)  $(-6) + (-6) \div 2 - [(-5) \times (-1) - 2 (4 - 2)]$

(ix)  $25 + \left[ 20 - \left\{ 2 - \left( 20 \div \frac{1}{5} \div \frac{1}{8} \times \frac{1}{16} - 8 \right) \right\} \right]$

## हमने रीखा

1. पूर्ण संख्याएँ – उन पूर्ण संख्याएँ के परिवार में ऋणात्मक संख्या शामिल हो जाती हैं जो इस संख्या परिवार का नूर्णक संख्याएँ कहते हैं। जैसे : ..... , -1, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, .....
2. दो निपर्से युग्मों को दर्शाने के लिए पूर्णांक का उपयोग किया जाता है, ऐसे—  
ऊँचाई—गहराई, लभ—हापि, ढाला—गने आदि।
3. तीन भनात्मक पूर्णांकों को लोड़ने पर भनात्मक नूर्णक प्राप्त होता है तथा दो ऋणात्मक नूर्णकों लोड़ने पर ऋणात्मक नूर्णक प्राप्त होता है। यदि दो नूर्णक घिपरीत चिह्न के होते तो वे छट जाते हैं तथा जिसका परिभाग बढ़ जाता है उसका द्वितीय घट जाता है।
4. अब हमने जोड़ एवं घट छारा संतुष्ट एवं नेपाले युग्मों का अध्ययन किया है।
  - (अ) पूर्णक जोड़ एवं घटा जोगों के लिए संवरक है। अर्थात्  $a + b$  और  $a - b$  को पूर्ण पूर्णांक होते हैं, जहाँ  $a$  और  $b$  छोड़ भी पूर्णांक हैं।
  - (ब) पूर्णांकों के लिए योग क्रा. दिनेमेय है, अर्थात् जबकि पूर्णांकों  $a$  तथा  $b$  के लिए  $a + b = b + a$ , वर्ग घटाव के लिए नहीं है अर्थात्  $a - b \neq b - a$
  - (स) पूर्णांकों का लिए योग साध्यवर्य है, अर्थात् जबकि पूर्णांकों  $a$ ,  $b$  तथा  $c$  का लिए  $(a+b)c = a + (b+c)$  ज्ञाता है। घटना घटाव का लिए साध्यवर्य नहीं है अर्थात्  $(a-b)-c = a-(b+c)$
  - (द) यह कि अंतर्गत पूर्णक इन्युत्य तत्त्वात्मक है, अर्थात् किसी भी पूर्णांक  $a$  के लिए  $a + 0 = 0 + a = a$  जोकि है।
5. **सूक्ष्म घटावक** एवं **एक ऋणात्मक पूर्णांक** का गुणनकल एक ऋणात्मक पूर्णांक है, जबकि दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनकल एक घनात्मक पूर्णांक है।  
उदाहरण:  $-2 \times 7 = -14$  और  $-3 \times -8 = 24$  है।
6. एक ज्ञ ज्ञात ऋण पूर्णांकों के गुणन की दशा में उद्दि ऋणात्मक पूर्णांकों की संख्या सम होने पर उनका गुणनफल घनात्मक होता है जबकि कम सम गुणन का होने पर उनका गुणनफल घनात्मक का होता है।
7. पूर्णक गुणन का अंतर्गत कुछ नूर्णांकों को दर्शाते हैं।
  - (अ) नूर्णन के अंतर्गत पूर्णांक के संयुत होते हैं, अर्थात् किसी जो पूर्णांकों  $a$  तथा  $b$  का लिए  $a \times b$  एक पूर्णांक होता है।

- (अ) नूर्णालों के लिए गुणन क्रम विनिमेय होता है, अर्थात् किन्हें दो पूर्णांकों  $a$  तथा  $b$  के लिए  $a \times b = b \times a$  होता है।
- (ब) नूपन का अर्थात् नूर्णाल 1, वृत्तमक है, अर्थात् किसी भी पूर्णांक  $a$  के लिए  $1 \times a = a \times 1 = a$  होता है।
- (द) नूर्णालों के लिए गुणन साहचर्य हाल है, अर्थात् किन्हें तीन पूर्णांक  $a, b$  तथा  $c$  के लिए  $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$  होता है।
8. यह एवं नुगन के अंतर्गत पूर्णांक चेत्रग गुण का जालग लरत है। अर्थात् ऐसी ही तीन पूर्णांक  $a, b$  तथा  $c$  के लिए  $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$  होता है।
9. ये एवं नुगन के अंतर्गत क्रन विनिमेय, राहवर्षीय और विवरपरा के गुपा लनरे नारेकलन को आजान बनाते हैं।
10. (अ) केन्द्री दो दूर्जकों को धागफल एक दूर्जक हो नी राकता है और नहीं भी।  
 (ब) यह एक धनात्मक नूर्णाल को धनात्मक पूर्णांक से भाग दिया जाता है तो प्राप्त नागफल धनात्मक होता है।  
 (स) यह एक धनात्मक नूर्णाल को एक ऋणात्मक पूर्णांक से भाग दिया जाता है या यह एक ऋणात्मक पूर्णांक को एक धनात्मक पूर्णांक से भाग दिया जाता है, तो प्राप्त भागफल एक ऋणात्मक होता है।  
 (द) एक ऋणात्मक पूर्णांक को जूहरे ऋणात्मक दूर्जक से नन देने गर ग्राह नागफल एक धनात्मक होता है।
11. (अ) नाग में क्रम विनिमेय गुण नहीं होता है।  
 (ब) शून्य में किसी भी पूर्णांक (शून्य क छोड़कर) से भाग देने पर नागफल शून्य होता है परं किसी भी पूर्णांक को शून्य से भाग देन अर्थशील नहीं है। अपरिभावी है।  
 (स) किसी भी पूर्णांक में 1 से भाग देने पर वही पूर्णांक प्राप्त होता है। जरो  $5 \div 1 = 5, 4 \div 1 = 4$  अर्थात्  $a \div 1 = a$  जहाँ  $a$  कोई एक पूर्णांक है।  
 (द) किसी भी पूर्णांक में (-1) से भाग करने पर वही पूर्णांक ग्राह नहीं होत है। जस:  $5 \div (-1) = -5$ , तथा  $6 \div (-1) = -6$   
 (इ) नूर्णाल भाग क लिए सहचर्य गुण ग्रहर्षित नहीं करते हैं।

## गोल

## अध्याय-2

# भिन्न

### 2.1 गृहिणी

पिछली कक्षाओं में, आप भिन्न और उसके लोड पर धटाव का अध्ययन कर दुफे हैं। आपने ऐनों की हुलना, हुला निन, गिनों को संख्या रेखा पर निरूपित करना और गिनों को क्रम बदल करना जैसे के बारे में इस अध्ययन किया है। इस अध्ययन में हा इस तो जैसे गिनों के गुणन एवं भाग के घर ने अध्ययन करेंग।

### 2.2 पुनरावलोकन

हमने पिछले कक्षाओं में यह है कि भिन्न  $\frac{a}{b}$  संख्याएँ हैं जिनका  $\frac{a}{b}$  रूप लिखा जा सकता है। यहाँ  $a$  और  $b$  पूर्ण एवं वैधाएँ हैं तथा  $b \neq 0$ , या  $1\frac{2}{3}$  एवं भिन्न है? उचित भिन्न (समभिन्न) है, भिन्न नहीं है जो रूपों के एक भाग को निरूपित करती है। या  $\frac{5}{3}$  एक उचित भिन्न है? इसके अंत तथा हर में कौन यहाँ है?

**विषय भिन्न** में, समूर्ण एवं समूर्ण के एक भाग (जैसे भिन्न) का लंबाजन होता है। क्या  $\frac{5}{3}$  एक विगत भिन्न है? यहाँ अंश अथवा हर में कोग बढ़ा है? विषय भिन्न  $\frac{5}{3}$  लो  $1\frac{2}{3}$  के रूप में लिखा जा सकता है। यह एक नियमित भिन्न है। आप उचित विषय एवं नियमित भिन्न के पाँच-पाँच उदाहरण लिखिए। क्या  $\frac{4}{7}$  और  $\frac{8}{14}$  तुल्य भिन्न हैं? दो निन द्वितीय निन कहलती है, यदि वे सामान न तथा को नियमित नहीं हैं।

$\frac{6}{7}$  और  $\frac{8}{14}$  में से कौन का सरलतम रूप कौन है? जिस भिन्न के हर ओर अंश में 1 के अलावा कोई दूसरा उभद्देष्य गुणनखंड न हो, वह भिन्न का सरलतम रूप (lowest form) होता है।

**उदाहरण—1.**  $\frac{6}{7}$  और  $\frac{4}{5}$  में कौन बड़ा है?

**हल :** 7 और 5 का सार्वभूमज (L.C.M.) 35

$$\begin{array}{ll} \text{इस लिए} & \frac{6}{7} = \frac{6 \times 5}{7 \times 5} = \frac{30}{35} \\ \text{मूँके} & \frac{30}{35} > \frac{28}{35} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{जैसा} & \frac{4}{5} = \frac{4 \times 7}{5 \times 7} = \frac{28}{35} \\ \text{जरा} & \frac{6}{7} > \frac{4}{5} \end{array}$$

**उदाहरण—2.** गिरदू ने  $4\frac{1}{2}$  किलोग्राम आण और  $2\frac{3}{4}$  किलोग्राम दीयों खरीदे। गिरदू का उरीद गये पद्धतों का कुल भार कितना है?

**हल :** फलों का कुल भार  $= 4\frac{1}{2} \text{ किलोग्राम} + 2\frac{3}{4} \text{ किलोग्राम}$

$$\begin{aligned} &= \left( \frac{9}{2} + \frac{11}{4} \right) \text{ किलोग्राम} \\ &= \left( \frac{18}{4} + \frac{11}{4} \right) \text{ किलोग्राम} \quad \left( \frac{9}{2} - \frac{18}{4} \text{ शुल्क भिन्न} \right) \\ &= \frac{29}{4} \text{ किलोग्राम} \quad - 7\frac{1}{4} \text{ किलोग्राम} \end{aligned}$$

**उदाहरण—3.** रोहित प्रतीक्षित  $3\frac{2}{3}$  घंटे खेलता है। वह अपने द्वारा 8 मिन में रो  $1\frac{4}{5}$  घंटे नहिं के साथ खेलता है तो दूसरे जागियों के साथ वह कितना समय खेलता है?

**हल :** रोहित के खेल का कुल समय  $3\frac{2}{3}$  घंटे  $= \frac{11}{3}$  घंटे

रोहित का नहीं के साथ खेलने में लगा समय  $= 1\frac{4}{5}$  घंटे  $= \frac{9}{5}$  घंटे

अतः रोहित का दूसरे रथयों के साथ लगा समय  $= \left(\frac{11}{3} - \frac{9}{5}\right)$  घंटे

$$= \left(\frac{55}{15} - \frac{27}{15}\right) \text{ घंटे} \quad (\frac{11}{3} = \frac{55}{15} \text{ जबकि } \frac{9}{5} = \frac{27}{15})$$

$$= \frac{28}{15} \text{ घंटे} = 1\frac{13}{15} \text{ घंटे}$$

## प्रश्नावली-2.1

### 1. निन के चार-चार तुल्य मिन लिखिए-

(i)  $\frac{2}{3}$       (ii)  $\frac{6}{7}$       (iii)  $\frac{9}{11}$

### 2. नीचे दिए गए मिन संख्याएँ के बीच की तुलना कीजिए और बताइए कि योनों में से कौन सी मिन संख्या छोटी है?

(i) $\frac{3}{5}$ और $\frac{4}{3}$	(ii) $\frac{6}{7}$ और $\frac{7}{6}$
(iii) $\frac{21}{5}$ और $\frac{18}{4}$	(iv) $\frac{7}{15}$ और $\frac{9}{20}$

### 3. हल लिखिए-

(i) $\frac{2}{5} - 0$	(ii) $4 + \frac{7}{8}$	(iii) $\frac{3}{2} + \frac{2}{7}$	(iv) $\frac{5}{9} + \frac{4}{7}$
(v) $\frac{4}{5} + \frac{9}{15}$	(vi) $\frac{2}{15} - \frac{1}{20}$	(vii) $\frac{9}{11} - \frac{4}{15}$	
(viii) $7\frac{1}{2} - 2\frac{1}{5}$	(ix) $4\frac{1}{2} - 1\frac{1}{5} - \frac{2}{5}$	(x) $2\frac{1}{5} + 1\frac{1}{4} - \frac{1}{2}$	

4. एक 'जादुई वर्ग' में प्रत्येक पंक्ति, प्रत्येक स्तम्भ एवं प्रत्येक विकर्ण की संख्याओं का योग समान होता है। क्या यह एक जादुई वर्ग है?

$\frac{4}{13}$	$\frac{9}{13}$	$\frac{2}{13}$
$\frac{3}{13}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{7}{13}$
$\frac{8}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{6}{13}$

(एथन पंक्ति के अनुदिश  $\frac{4}{13} + \frac{9}{13} + \frac{2}{13} = \frac{15}{13}$ )

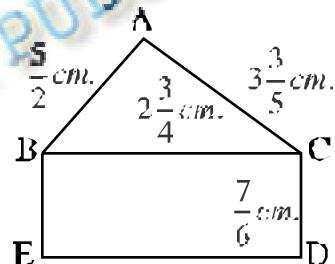
5. निम्नलिखित शिख संख्याओं को आरोही क्रम (बढ़ते क्रम) में लिखिए—

(i)  $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}$

(ii)  $\frac{3}{7}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}$

6. एक आवासाकर उदानपट्ट की लंबाई  $3\frac{1}{2}$  मी. और ऊँचाई  $2\frac{2}{3}$  मी. है। इस मपट्ट का परिमाप ज्ञान कीजिए।

7. चित्र नं ती हुई आवृत्ति में (i)  $\triangle ABC$  है।  
(ii) आयत BCDE का परिमाप ज्ञान कीजिए।  
(iii) वर्ताइए किसका परिमाप ज्ञाता है?



8. राधाकुमार ने एक घाँट को पढ़ने में  $\frac{11}{16}$  घंटे का समय लिया? रालीना ने उसी घाँट को पढ़ने में  $\frac{3}{4}$  घंटे का समय लिया। लेहर ने अचादा समय लिया। यह समय लेहना ज्ञाता था?

9. खाली स्थानों में सही अंक भरिए—

(i)  $\frac{5}{7} + \frac{\square}{7} = \frac{6}{7}$

(ii)  $\frac{8}{15} - \frac{2}{15} = \frac{\square}{15}$

(iii)  $\frac{7}{9} + \frac{\square}{9} = \frac{7}{9}$

(iv)  $\frac{3}{5} - \frac{\square}{5} = \frac{1}{5}$

(v)  $1 - \frac{1}{2} = \frac{\square}{2}$

## 2.3 भिन्नों का गुणन

हम जानते हैं कि यदि छेत्री आयत के लम्बाई एवं चौड़ाई क्रमशः  $9\frac{1}{2}$  सेमी. और  $5\frac{1}{2}$  सेमी. हो तो इसका क्षेत्रफल  $9\frac{1}{2} \text{ सेमी.} \times 5\frac{1}{2} \text{ सेमी.} = 45 \text{ सेमी.}^2$  होगा।

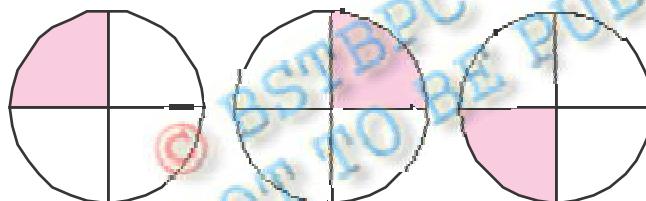
अब यदि आयत की लम्बाई एवं चौड़ाई क्रमशः  $9\frac{1}{2}$  सेमी. एवं  $5\frac{1}{2}$  सेमी. है तो इसका

क्षेत्रफल लगभग होना<sup>2</sup> उपलब्ध होगा कि यह  $9\frac{1}{2} \text{ सेमी.} \times 5\frac{1}{2} \text{ सेमी.} - \left(\frac{19}{2} \times \frac{11}{2}\right) \text{ सेमी.}^2$  है।

$\frac{19}{2} \times \frac{11}{2}$  भिन्नों का गुणन है। जाकर भिन्नों का गुणन करे होता है ऐसे—

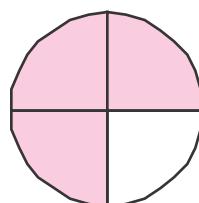
### 2.3.1 पूर्ण संख्या एवं शिर्षक का गुणन

आकृति 2.1 के देखिए। प्रत्येक छायाँची (Shaded) भाग, चूल्हे का  $\frac{1}{4}$  हाई है।



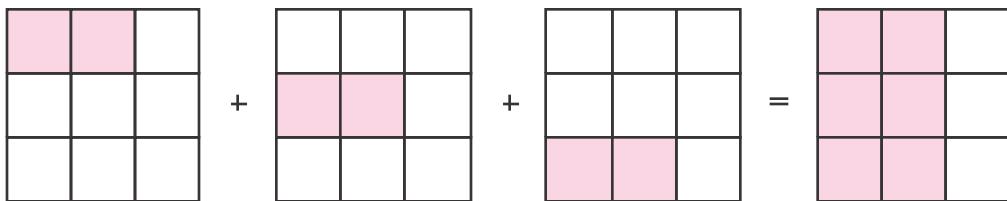
आकृति-2.1

इस प्रकार सोने छायाँचित चूल्हे मिलकर चूल्हे के  $\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 3 \times \frac{1}{4}$  को निरूपित करेंगे। इन तीन छायाँचों को संख्याएँ जैसे लगाने पर उन्हें आकृति 2.2 प्राप्त होती है, जो चूल्हे के  $\frac{3}{4}$  भाग को निरूपित करता है, अर्थात्  $3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$



आकृति-2.2

क्या इन आप बता सकते हैं कि आकृति 2.3 किसे निरूपित करेगी?



आकृति-2.3

यहाँ प्रत्येक में शायदीप्रिता पायग  $\frac{2}{9}$  है। इस इए अब हम  $3 \times \frac{2}{9}$  ज्ञात करेंगे हैं।

$$3 \times \frac{2}{9} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{2+2+2}{9} = \frac{3 \times 2}{9} = \frac{6}{9}$$

$$\text{इसी प्रकार } 5 \times \frac{2}{3} = \frac{5 \times 2}{3} = \frac{10}{3}$$

$$\text{क्या आप जाता है कि (i) } 3 \times \frac{1}{5} = ? \quad \text{(ii) } 4 \times \frac{2}{7} = ?$$

उत्तर हमें  $\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{2}{3}$  यादि उचित भिन्नों का जूरा ऐसा गुणन की यादी की, लेन्हु यह

विषम भिन्न के लिए भी लागू होता है।

$$\text{उदाहरणार्थ } 2 \times \frac{5}{3} = \frac{2 \times 5}{3} = \frac{10}{3}$$

$$\text{प्रयास करें (i) } 4 \times \frac{12}{7} = ? \quad \text{(ii) } 3 \times \frac{8}{5} = ?$$

अब किसी पूर्ण संख्या का किसी उचित अथवा विषम भिन्न से गुणा करना के लिए हम-

- (1) पूर्ण संख्या के भिन्न के अंश के साथ गुणा करें हैं और
- (2) भिन्न के दर को अपरिवर्तेत या समान (same) रखें।

### स्वयं करके देखिए

$$1. \quad 3 \times \frac{1}{3} = \frac{3}{3} \quad \Rightarrow \text{साधित निरूपित कीजिए।}$$

2. आधा कीजिए।

$$(i) \quad 3 \times \frac{3}{8} \quad (ii) \quad \frac{3}{7} \times 4 \quad (iii) \quad \frac{13}{9} \times 7 \quad (iv) \quad \frac{16}{7} \times 3$$

ध्यान दें कि कैसे भेदभिन्न भिन्न को एक टुकड़े संख्या से गुणा करने के लिए वर्तमान विधि भिन्न के विषय में परिवर्तित कीजिए और उस गुणा कीजिए।

$$\text{जैसे } 5 \times 2\frac{3}{7} = 5 \times \frac{17}{7} = \frac{85}{7} = 12\frac{1}{7}$$

$$\text{प्रदर्शन कीजिए } (i) \quad 3 \times 2\frac{5}{7} = ? \quad (ii) \quad 2 \times 4\frac{2}{5} = ?$$

**गिन्न, प्रचालक (operator) 'का' के रूप में**

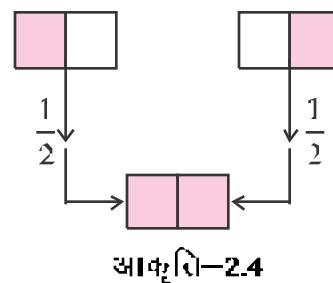
विवार कीजिए—

$$(i) \quad 2 \text{ का जाहा} \quad (ii) \quad 3 \text{ का जाहा}$$

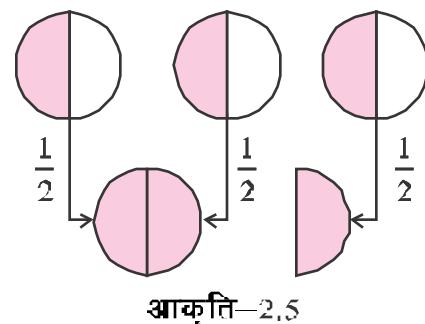
आकृति 2.4 में प्रत्यक्ष छायाकित टुकड़े  $1\frac{1}{2}$  (आठे) को निरूपित करते हैं।

अब 2 छायाकित आधे भागों को निरूपाने पर ध्येना छायाकित टुकड़े  $2\frac{1}{2}$  को निरूपित करते हैं।

$$\text{अतः } 2 \text{ का } \frac{1}{2} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$



अब आकृति 2.5 में तीन छायाकित टुकड़े विलक्ष 3 के  $\frac{1}{2}$  (आठे) गाम को निरूपित करते हैं।



तथा हाँ गिजाने पर यह  $1\frac{1}{2}$  अर्थात्  $\frac{3}{2}$  को निरूपित करता है।

$$\text{इसलिए } 3 \text{ का } \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \quad \text{अतः } 3 \times \frac{1}{2} - \frac{3}{2}$$

इस प्रकार हम देखते हैं कि 'का' गुण का निरूपित करता है।

**उदाहरण—4.** शुग के पर 30 रुपये हैं। शकीला के पास शुग के रुपयों का  $\frac{1}{5}$  है तो शकीला के पास कितना रुपय है?

**हल :** शुग के पास 30 रुपय हैं। शकीला के पास 30 का  $\frac{1}{5}$  रुपय है, अर्थात्  $30 \times \frac{1}{5} = 6$  रुपय।

<b>प्रथास कीजिए:</b>	(i) $16 \text{ का } \frac{1}{2} = ?$	(ii) $25 \text{ का } \frac{2}{5} = ?$
----------------------	--------------------------------------	---------------------------------------

**उदाहरण—5.** 60 विद्यार्थियों की एक कक्षा में कुल विद्यार्थियों की संख्या का  $\frac{1}{4}$  अंग्रेजी

पढ़ना पसंद नहीं है, कुल संख्या का  $\frac{1}{2}$  गणित पढ़ना पसंद करते हैं और शेष विद्यार्थी

विज्ञान पढ़ना पसंद करते हैं। तो इसका कितन विद्यार्थी अंग्रेजी पढ़ना पसंद करते हैं? कितने विद्यार्थी गणित पढ़ना पसंद करते हैं? कुल विद्यार्थियों की संख्या का कितना भाग विज्ञान पढ़ना पसंद करते हैं?

**हल :** कक्षा में कुल विद्यार्थियों की संख्या = 60

इनमें से कुल का  $\frac{1}{4}$  अंग्रेजी पढ़ना पसंद करते हैं। अतः  $\frac{1}{4} \text{ का } 60 = 15$

पाले विद्यार्थियों की संख्या =  $60 \text{ का } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 60 = 30$

गणित पढ़ना पसंद करनेवाले विद्यार्थियों की संख्या =  $60 \text{ का } \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 60 = 30 - 15 = 15$

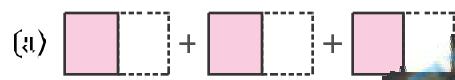
शेष विद्यार्थी विद्या न पढ़ना पसंद करते हैं अतः विज्ञान पसंद करनेवाले विद्यार्थियों की

संख्या कूल विद्यार्थी – (अंग्रेजी पढ़ना पसंद करनेवाले विद्यार्थी – गणेता पढ़ना न संदर्भ करनेवाले विद्यार्थी)  
 $= 60 - (15 - 30) = 60 - 45 = 15$   
 अतः वांछित भिन्न  $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$  है।

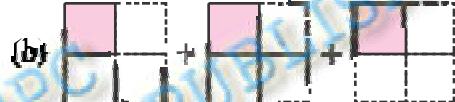
## प्रश्नावली 2.2

1. नीचे कुछ भिन्न संख्याओं के गुण के लिए चित्र बनाए गए हैं, प्रत्येक गुण को उसके सही चित्र से मिलाइए—

(i)  $3 \times \frac{1}{5}$



(ii)  $3 \times \frac{1}{2}$



(iii)  $2 \times \frac{2}{3}$



(iv)  $3 \times \frac{1}{4}$



2. नीचे दी गई भिन्न संख्याओं का गुणन कीजिए व सरलतम रूप में लिखिए—

(i)  $7 \times \frac{1}{5}$

(ii)  $3 \times \frac{2}{3}$

(iii)  $7 \times \frac{2}{9}$

(iv)  $\frac{1}{3} \times 4$

(v)  $2 \times \frac{6}{7}$

(vi)  $\frac{7}{2} \times 6$

(vii)  $11 \times \frac{3}{7}$

(viii)  $15 \times \frac{3}{5}$

(ix)  $11 \times \frac{1}{3}$

(x)  $10 \times \frac{3}{5}$

(xi)  $5 \times \frac{3}{2}$

(xii)  $6 \times \frac{1}{6}$

### 3. निम्नलिखित विक्रों के लिए निम्न सिखिए—

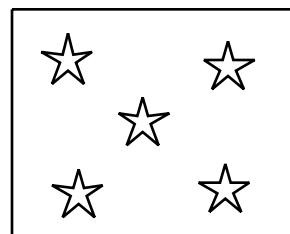
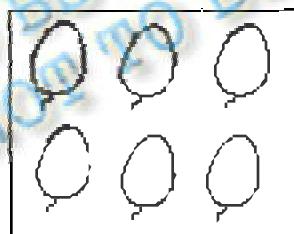
(i)   -   
 $2 \frac{1}{3} - \underline{\quad} = \underline{\quad}$

(ii)    -     
 $3 \frac{2}{9} - \underline{\quad} = \underline{\quad}$

(iii)    =   
 $3 \frac{2}{6} - \underline{\quad} = \underline{\quad}$

### 4. छायाकित कीजिए—

(i) चूनों का  $\frac{1}{2}$  भाग।      (ii) रेशों का  $\frac{2}{3}$  भाग।      (iii) तारों का  $\frac{3}{5}$  भाग



### 5. छात कीजिए—

- |                               |                            |                                |
|-------------------------------|----------------------------|--------------------------------|
| (i) 26 ला $\frac{1}{2}$       | (ii) 38 ला $\frac{1}{2}$   | (iii) 21 का $\frac{2}{3}$      |
| (iv) 24 ला $\frac{2}{3}$      | (v) 20 ला $\frac{3}{4}$    | (vi) 36 का $\frac{3}{4}$       |
| (vii) 25 ला $\frac{4}{5}$     | (viii) 30 ला $\frac{4}{5}$ | (ix) 81 क्लास का $\frac{7}{9}$ |
| (x) 14 रुपया ला $\frac{4}{7}$ |                            |                                |

### 6. गुण कीजिए और भिन्न के सम में व्यवहार कीजिए—

- (i)  $3 \times 5 \frac{1}{5}$
- (ii)  $4 \times 6 \frac{1}{2}$
- (iii)  $7 \frac{1}{5} \times 5$
- (iv)  $4 \frac{1}{7} \times 21$
- (v)  $3 \frac{1}{4} \times 6$
- (vi)  $\frac{5}{8} \times 108$

7. रीया और राहुल पैकेजिंग पर गए। उन्हीं माँ ने उन्होंने 5 लैटर पनीरले एक बोतल दी। रीया ने कुल गानी का  $\frac{3}{5}$  उपयोग किया। शब्द गानी राहुल ने पिया।

- (i) रीया ने कितना गानी पिया?
- (ii) गानी की जुल गाना का किसना हिरण्या राहुल ने पिया?

### 8. स्रात करें—

- (i) एक दिन का  $\frac{5}{6}$  (घंटाएँ नें)
  - (ii) एक घंटा का  $\frac{2}{3}$  (मिनट में)
  - (iii) एक सप्ताह का  $\frac{2}{7}$  (दिन में)
  - (iv) एक किलोग्राम का  $\frac{3}{5}$  (ग्राम में)
  - (v) एक दांत का  $\frac{3}{5}$  (दिन में)
9. एक आयताकार आवान  $5 \frac{1}{4}$  मीटर लम्बा और  $1 \frac{1}{7}$  मीटर चौड़ा है। त आवान का वरिसाप ज्ञात करें।

### 2.3.2 भिन्न का भिन्न से गुणन

आइए देखते हैं कि जो निन्हों का उपयोग लौस  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$  कैसे ज्ञात किया जाए?

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$  का अर्थ है  $\frac{1}{3}$  का  $\frac{1}{2}$  या  $\frac{1}{3}$  का आधा। इसे जाइने के लिए

एक दृत का  $\frac{1}{3}$  गत लेत हैं। (आकृति-2.6)



आकृति-2.6

पुनः  $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$  के लिए इत्ति हाइ गान का आशा करते हैं। (आकृति 2.7)

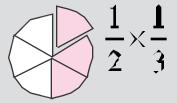


यह आशा हिस्सा ( $\Delta$ ) पूरे दृष्टि के कितने हिस्से है?

आकृति-2.7

यह पता करने के लिए पूरे घूर्त को A के बराबर हिस्सों में बोटन पड़ेगा। उस पाते हैं

कि इस छह हिस्से हाते हैं तथा A उसमें से एक है। अतः  $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$



$$\text{कर } \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \text{ भी } \frac{1}{6} \text{ होगा। चित्र हनकर तर्किए।}$$



आकृति-2.8

इस प्रकार हम पाते हैं कि दो भिन्नों का गुणनफल =  $\frac{\text{अंशों का गुणनफल}}{\text{हरों का गुणनफल}}$

उदाहरणार्थ  $\frac{2}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{2 \times 4}{3 \times 7} = \frac{8}{21}$

प्रयास करें:

$$(i) \quad \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = ?$$

$$(ii) \quad \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = ?$$

## गुणनफल का मान

हम जानते हैं कि दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल उन दोनों संख्याओं से बड़ा होता है।  
उदाहरणार्थ  $2 \times 3 = 6$  और  $6 > 3, 6 > 2$

दो भिन्नों का गुणा वह गुणनफल ले गए लो दिए गए भिन्नों से तुलना कीजिए।

भिन्नों का गुणन	गुणनफल की दोनों भिन्नों से तुलना	निष्कर्ष
$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$	$\frac{8}{15} < \frac{2}{3}, \frac{8}{15} < \frac{4}{5}$	गुणनफल प्रत्येक भिन्न से छम है।
$\frac{1}{4} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{28}$	$\frac{3}{28} < \frac{1}{4}, \frac{3}{28} < \frac{3}{7}$	

$\frac{1}{4} \times \frac{3}{7}$		
$\frac{7}{8} \times \frac{2}{5}$		

हम पाते हैं कि दो लघित भेन्नों के गुणनफल का मान दोनों भिन्नों से प्रथक से छोटा होता है। स्टर्जी को पूरा कर इसके जाँच कीजिए।

आइए अब हम दो विषम भेन्नों के गुणनफल की चर्चा करते हैं।

$\frac{7}{4} \times \frac{7}{3} = \frac{49}{12}$	$\frac{49}{12} > \frac{7}{3}, \frac{49}{12} > \frac{7}{4}$	गुणनफल बड़ेगा। यह भिन्न भी बड़ा है।
$\frac{1}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{28}{15}$		
$\frac{7}{2} \times \frac{9}{2} = \frac{63}{4}$		
$\frac{3}{2} \times \frac{7}{6} = \frac{21}{12}$		

हम पाते हैं कि दो विषम भिन्नों के गुणनफल का मान उन्हाँसे प्रथक भिन्न से अधिक है। एसे पौँच और लदाहरणों को बनाइए और लार्युक्त कथन को सत्यपित कीजिए।

आइए अब हम एक विषम और एक लघित भेन्न को गुणा करते हैं।

मान लीजिए  $\frac{3}{2}$  और  $\frac{8}{5}$  को गुणा करना है।

$$\text{एस एते हैं } \frac{3}{4} \times \frac{8}{5} = \frac{24}{20} \quad \text{यह } \frac{24}{20} < \frac{8}{5} \text{ और } \frac{24}{20} > \frac{3}{4}$$

अर्थात् प्राप्त गुणनफल, गुणन की विषम भेन्न से कम और उचित भिन्न से छोटा है।

$\frac{7}{5} \times \frac{2}{7}, \frac{10}{3} \times \frac{3}{5}$  के लिए भी गुणनफल ली जाँच कीजिए।

## प्रश्नावली-2.3

### 1. निम्न का मान छात लीजिए—

- (i)  $\frac{1}{2}$  का  $\frac{1}{2}$       (ii)  $\frac{2}{5}$  का  $\frac{1}{4}$       (iii)  $\frac{5}{4}$  का  $\frac{1}{4}$   
 (iv)  $\frac{12}{5}$  का  $\frac{1}{5}$       (v)  $\frac{6}{2} \times \frac{3}{8}$       (vi)  $2\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$   
 (vii)  $\frac{3}{5} \times 3\frac{4}{7}$       (viii)  $9 \times \frac{7}{2}$       (ix)  $5\frac{1}{4} \times \frac{2}{5}$   
 (x)  $\frac{7}{9} \times 6\frac{2}{5}$

### 2. कौन बड़ा है—

- (i)  $\frac{1}{2}$  का  $\frac{2}{7}$  अथवा  $\frac{3}{4}$  का  $\frac{2}{3}$       (ii)  $\frac{5}{8}$  का  $\frac{3}{5}$  अथवा  $\frac{3}{4}$  का  $\frac{1}{6}$   
 3. बुधवारी अकाल वर्षों में ग्रीष्म छोटे पौधे एक पर्यावरण ने लगाती है। दो क्रमागत छोटे पौधे के लीब की दूरी  $\frac{3}{4}$  मी. है। प्रथम एवं अंतिम पौधे के लीब की दूरी ज्ञात कीजिए।  
 4. शिवानी एक पुस्तक को प्रतिदिन  $1\frac{2}{7}$  घंटे पढ़ती है। वह सम्पूर्ण पुस्तक का एक उपाधान में फ़क़ती है। उस पुस्तक को पढ़ने में उसने जुलूस फ़िराने दें लगा पड़े?  
 5. एक स्कूटर 1 लीटर ड्रेल में 35 किमी. दूरी तय करता है।  $3\frac{4}{5}$  लीटर ड्रेल में वह स्कूटर कुल कितनी दूरी तय करता?

### 2.4 भिन्नों का माग

जब हर के पास 9 रोपी, लंबी लागत की दूरी पड़ती है। वह इस पड़ती को 3 रोपी, लंबी छोटी पड़तीयों में काटता है। तो वह  $9 \div 3 = 3$  पड़तीय प्राप्त करता।

अब अब जब हर 9 रोपी, लंबी दूरी की एक दूसरी पड़ती को  $\frac{3}{2}$  रोपी, लंबाई व ली

छाटी पट्टियों में कठना चाहता है तो उस  $9 \div \frac{3}{2}$  पट्टियों पर्याप्त होगी। इसी ग्राफ़  $\frac{21}{2}$  समी.

लम्बाई वाली पट्टी के  $\frac{3}{2}$  समी. लम्बाई वाली छाटी गटियाँ में कठने पर हमें  $\frac{21}{2} \div \frac{3}{2}$  दुकड़े

प्राप्त होंगे। इसे हल करने के लिए हमें एक पूर्ण संख्या को किसी निम्न से अद्यता एक निम्न को दूर से निम्न से पापा देने की आवश्यकता पड़ती है। आइए इसे हल करने का जारी करें।

### 2.4.1 भिन्न से पूर्ण संख्या का भाग

आइए  $1 : \frac{1}{2}$  इत लक्ष्य है। यदि 1 सेने, लम्बी पट्टी हो तो उसमें आधे समी.

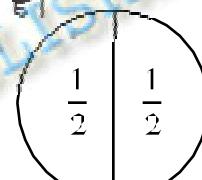
के केतनी पट्टियाँ काट सकते हैं (आकृति 2.9)। एस आधे भागों की संख्या  $1 : \frac{1}{2} = 2$  होगी।

अर्थात् ऐसे दो आधे भाग हैं। अतः एक इकाई में आधे—आधे दो भाग होते हैं।

$$\text{इसलिए } 1 \times \frac{2}{1} = 2 \text{ होगा}$$

$$\text{साथ ही } 1 \times \frac{2}{1} = 1 \times 2 = 2$$

$$\text{अतः } 1 : \frac{1}{2} = 1 \frac{2}{1} \text{ होगा।}$$

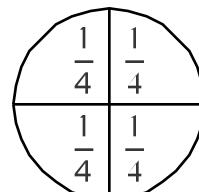
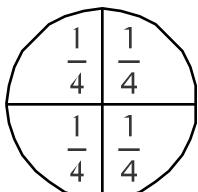
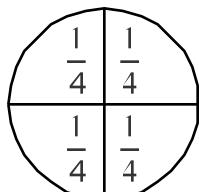


आकृति - 2.9

इसी ग्राफ़  $3 + \frac{1}{4}$  यानी 3 लम्बूल में कितने  $\frac{1}{4}$  भाग हैं यह जानने के लिए हम 3

इकाइयों का  $\frac{1}{4}$  भागों में बांटेंगे व गिनेंग।

$$\frac{1}{4} \cdot 12 \text{ की संख्या} = 12 \text{ (अ. अ. 2.10)}$$



आकृति - 2.10

$$\text{युग्म छन जात हैं } 3 \div \frac{1}{4} = 12 \quad \text{तथा } 3 \times \frac{4}{1} = 12$$

इसी प्रकार  $3 : \frac{1}{3}$  और  $3 \times \frac{3}{1}$  जात कीजिए। हम पाते हैं कि मिन्न से पूर्ण संख्या को भाग देने पर वही भागफल प्राप्त होता है जो हम पूर्ण संख्या को भेन्न के लुक्कन (Reciprocal) से उपर करने पर प्राप्त है।

$\frac{1}{4}$  का अंश एवं हर जा परस्पर बदलने पर  $\frac{4}{1}$  प्राप्त होता है। यही  $\frac{1}{4}$  का लुक्कन है। इसी प्रकार किसी भी मिन्न के उपर—हर को परस्पर बदलने से उस मिन्न का लुक्कन प्राप्त होता है।

### निम्नलिखित गुणनफलों को घेखिए और रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए—

$$\begin{array}{ll} 8 \times \frac{1}{8} = 1 & \frac{7}{3} \times \frac{3}{7} = \dots\dots\dots \\ \frac{1}{7} \times 7 = \dots\dots\dots & \frac{3}{7} \times \dots\dots\dots = 1 \\ \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{6}{6} = 1 & \dots\dots\dots \times \frac{4}{9} = 1 \end{array}$$

#### सोचिए,

1. क्या एक उचित भेन्न का लुक्कन भी नवेत्र मिन्न होगा?
2. क्या एक विषन मिन्न का लुक्कन भी मिन्न होगा?

रवयं करके देखिए : जात काजिए

(i) $8 + \frac{2}{5}$	(ii) $12 \div \frac{4}{7}$	(iii) $1 \div \frac{8}{9}$
(iv) $5 \div 5\frac{1}{3}$	(v) $9 \div 2\frac{4}{7}$	

**ज्ञान दें—** कैसे पूर्ण संख्या को एक मिन्न से भाग करते समय, सर्वप्रथम निम्नेत मिन्न को ठिक्का भेन्न ने बदलते हैं, तब फल जरूरते हैं।

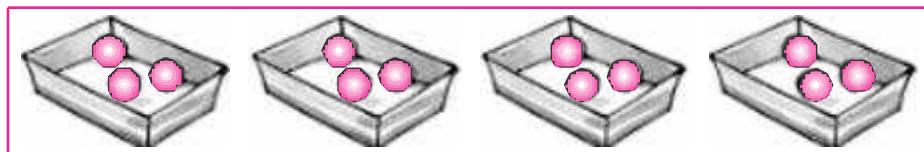
$$\text{उदाहरणधी } 3 \div \frac{12}{5} = 3 + \frac{12}{5}$$

$$= 3 \times \frac{5}{12} = \frac{5}{4}$$

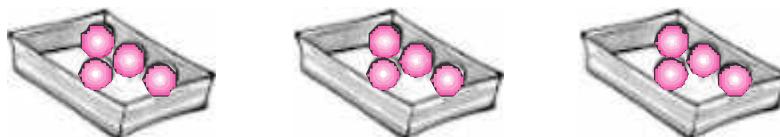
### 2.4.2 पूर्ण संख्या से भिन्न का भाग

इस भाग के दो तरह से समझ सकते हैं:  $12 \div 3$

1. 12 में तीन-तीन जै कितने समूह हैं?

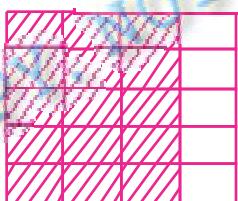
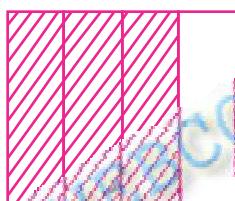


2. 12 बोर्ड को तीन लोगों में इसने पर ब्रह्मेश को मिलनेवाला हिस्सा ?

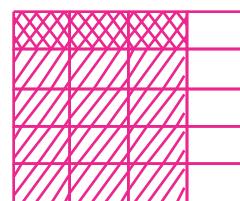


अब  $\frac{3}{4} \div 5$  की चर्चा करें।

$\frac{3}{4} \div 5$  अर्थात्  $\frac{3}{4}$  को 5 भागों में बाटना राशी प्रकार किस्सा कितना है यह पता लगाना है।



इसका एक हिस्सा -



यह हिस्सा पूर्ण का कितना भाग है, पता करने के लिए नूपर के इतने ही बरबर छोटे हिस्से किरण गर हैं। इस एकार कुल हिस्से 20 तथा उचाकित हिस्से 3 हैं। अतः  $\frac{3}{4}$  के 5 हिस्से

करने पर हमें  $\frac{3}{20}$  हिस्से मिलेगा अर्थात्  $\frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{1} : \frac{5}{1} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{20}$

इसी प्रकार  $\frac{5}{4} \div 5$  का ना होगा  $= \frac{5}{4} : \frac{5}{1} = \frac{5}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{4}$

इसी प्रकार  $\frac{2}{3} : 5 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$  होगा।

किन्तु  $2\frac{1}{4} : 3 = ?$

यहाँ मिश्रित नियन को तुरा से भाग करने के लिए मिश्रित नियन को विषय में बदलना होगा अर्थात्

$$2\frac{1}{4} : 3 = \frac{9}{4} : 3 = \frac{9}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$$

**प्रयास करें:**

i.  $2\frac{2}{5} : 4 = ?$

ii.  $3\frac{3}{5} : 3 = ?$

### 2.4.3 एक विषय का दूसरी विषय से भाग

उदाहरणम्  $\frac{2}{3} : \frac{5}{6}$

$$= \frac{2}{3} \times \left( \frac{5}{6} \text{ का व्युत्क्रम} \right)$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{4}{5}$$

इसी प्रकार  $\frac{9}{5} : \frac{2}{3} = \frac{9}{5} \times \left( \frac{2}{3} \text{ का व्युत्क्रम} \right)$

$$= \frac{9}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{27}{10}$$

**रवयं करके देखें:**

(i)  $\frac{2}{5} : \frac{1}{2} = ?$

(ii)  $2\frac{1}{2} : \frac{2}{5} = ?$

(iii)  $5\frac{1}{3} : \frac{9}{2} = ?$

### प्रश्नावली-2.4

#### 1. क्रात कीजिए-

(i)  $15 : \frac{3}{4}$

(ii)  $12 : \frac{5}{6}$

(iii)  $9 : \frac{7}{3}$

(iv)  $8 : \frac{8}{3}$

(v)  $3 : 2\frac{2}{3}$

(vi)  $7 : 3\frac{2}{7}$

2. गिनतिखित भिन्नों में से प्रत्येक का व्युत्कृश छात कीजिए। व्युत्कृशों को उचित भिन्न, विषम भिन्न एवं पूर्ण संख्या के रूप में वर्गीकृत कीजिए।

- |                    |                    |                      |                    |
|--------------------|--------------------|----------------------|--------------------|
| (i) $\frac{3}{5}$  | (ii) $\frac{4}{5}$ | (iii) $\frac{9}{7}$  | (iv) $\frac{7}{5}$ |
| (v) $\frac{15}{8}$ | (vi) $\frac{1}{5}$ | (vii) $\frac{1}{13}$ |                    |

3. ज्ञात कीजिए—

- |                           |                            |                             |                               |
|---------------------------|----------------------------|-----------------------------|-------------------------------|
| (i) $\frac{5}{3} \div 2$  | (ii) $\frac{7}{9} \div 5$  | (iii) $\frac{7}{13} \div 7$ | (iv) $2\frac{1}{3} \div 3$    |
| (v) $4\frac{1}{2} \div 4$ | (vi) $3\frac{3}{7} \div 7$ | (vii) $5\frac{3}{4} \div 7$ | (viii) $3\frac{2}{3} \div 11$ |

4. ज्ञात कीजिए—

- |                                   |                                   |                                     |                                      |
|-----------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|
| (i) $\frac{3}{5} : \frac{1}{2}$   | (ii) $\frac{2}{3} + \frac{7}{3}$  | (iii) $\frac{3}{7} - \frac{6}{7}$   | (iv) $2\frac{1}{3} : \frac{2}{5}$    |
| (v) $5\frac{1}{2} + \frac{11}{3}$ | (vi) $\frac{2}{5} + 2\frac{1}{2}$ | (vii) $2\frac{1}{5} + 3\frac{2}{3}$ | (viii) $3\frac{1}{5} + 2\frac{1}{5}$ |

5. आधुनिक जल के नूल्य  $7\frac{1}{2}$  लूपया है तो 1 लूल का मूल्य ज्ञात कीजिए।

6. एक छात्रावास में औसतन ग्रन्थल छात्र प्रतिदिन  $1\frac{5}{6}$  लिटर तूध लेता है। ग्रन्थल दिन कुल 308 लीटर दूध छात्रावास ने उपयोग की तोता है, तो उन्हों की संख्या ज्ञात कीजिए।

7. एक  $15\frac{1}{5}$  एमी. लंब रिहन के 4 ब्रावर हिस्से किया जाता है, तो प्रत्येक हिस्से की लम्बाई क्या होगी?

8.  $3\frac{1}{4}$  किंग्रा. स्क का गूल्ह 130 रुपया है, तो 1 किलोग्राम स्क का गूल्ह क्या हग?

## हमने क्या सीखा।

1. दो निन्हों को मुपा लर्स के लिए उनके उसी एवं इस को वृद्धक-पृथक गुण किया जाता है और फिर गुणनफल को  $\frac{\text{उशों का गुणनफल}}{\text{उश का गुणनफल}}$  के रूप में लिखते हैं।
2. अब, प्रवालक 'उश' के रूप में काम करती है। जैसे  $2 \times \frac{1}{2}$  होता है  $2 \times \frac{1}{2} = 1$
3. (अ) दो उचित गिन्हों का गुणनफल, गुणा किए गए प्रत्येक निन से कम हता है।  
 (ब) दो विषन निन्हों का गुणनफल, गुणा किए नए दोनों निन्हों में से प्रत्येक से बड़ा होता है।  
 (स) एक उचित और एक चैषन निन जो गुणनफल छिप भिन्न से कम रहता उपरोक्त भिन्न से बड़ी होता है।
4. एक भिन्न का व्युत्क्रम अंश और भूमि को फरस्तर बदलने से प्राप्त होता है।
5. ऐसे शूद्येतर संख्याएँ जिनका परस्पर गुणनफल 1 है, एक दूसरे की व्युत्क्रम संख्या कहलती है। जैसे,  $5 \times \frac{1}{5}$  या  $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2}$ ।
6. किसी गूण या भिन्न संख्या को दूसरी गूण या भिन्न संख्या से भाग करने के लिए हम पहली संख्या को दूसरी संख्या द्वारा व्युत्क्रम से गुणा करते हैं।
  - (1) गूण जो निन से भाग  $2 : \frac{3}{5} = 2 \times \frac{5}{3}$
  - (2) निन जो गूण से भाग  $\frac{2}{3} \div 7 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{7}$
  - (3) निन जो निन से भाग  $\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5}$

**प्र० ४**

## अध्याय-3

## दशमलव मिलन

## 3.1 गूणिका

आपने पिछले अध्याय में दशमलव मिलन का अध्ययन किया है जिसमें हमने दशमलव मिलन की त्रिलक्षण, जोड़ व घटाव शीर्षक है। इस अध्याय में हम दरमालव मिलों के पूर्ण—गाम पर चर्चा करने परन्तु इससे पूर्व शिल्प उच्चरण उन्हें को अधिक सफल करने के लिए आइये कुछ करते हैं। नीचे दी गई सारणी को ध्येय और स्थित स्थानों की सूचि कीजिए।

सैकड़ा	दहाई	इकाई	दशांश	शतांश	सहस्रांश	संख्या
100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	
1	2	3	4	5	6	123,456
2	3	4	5	6	7	.....
0	4	5	6	7	8	.....
5	.....	6	7	8	9	506.789
6	7	8	9	0	1	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....	890,001
9	0	1	0	0	0	.....
3	0	0	2	.....	.....	.....

लक्षण की सारणी में आपने संख्याओं का प्रसारित रूपनीय नाम से संबंध ज्ञात की। यदि संख्या ज्ञात हो तो उनका प्रसारित रूपनीय मान भी ज्ञात किया जा सकता है।

$$\text{लौस} - 256.457 = 2 \times 100 + 5 \times 10 + 6 \times 1 - 4 \times \frac{1}{10} + 5 \times \frac{1}{100} + 7 \times \frac{1}{1000}$$

रशीदा की लम्बाई 1.67 मीटर है वहा बुधन की लम्बाई 1.85 मीटर है। कौन उंचिक लगा है? यह पता करने के लिए हमें 1.67 व 1.85 की तुलना करने की ज़रूरत है, इसके लिए सबसे गहले बारी आर से शुरूआत करते हैं। इस स्थिति में दोनों 1 बराबर हैं तब हम दशांश स्थान के अंक की तुलना करेंगे जूँकि 6 छोटा है 8 से (6<8)। अतः 1.67, 1.85 रु छोटा हगा। अतः रशीद की लम्बाई बुधन से कम है।

यदि दशांश स्थान के अंक भी बराबर हो तो तब इतांश उक्त जी तुलना कर बड़े-छोटी संख्या के निर्धारण करेंगे और इसी प्रकार राशियों के दशा छोटार्ह भाग और इसारो आगे तक दशांश भीने की तुलना की जा सकती है।

$$2.34 < 3.45 \text{ क्योंकि } 2 \text{ पूर्ण } 3 + 2 < 3 \text{ पूर्ण } 3 + 3 \text{ से}$$

$$2.34 > 2.12 \text{ क्योंकि } 2 \text{ पूर्ण } 3 + 2 = \text{पूर्ण भाग } 2 \text{ और } \text{दशांश } 3 > \text{दशांश } 1 \text{ से}$$

इसी प्रका र दशा इव गिन्न राख्याओं की तुलना के लिए बायें से दायें की प्रस्तुत चर चक बढ़ते जाते हैं जब तक राख्याओं में इंतर नहीं आ जाता है और यदि इतिम् रथान् चक अंक बराबर ह तो दोनों दशांश भिन्न बराबर होती।

दशांश भिन्न के ग्रयोग हम मुख्य लम्बाई अवधान् राख्याओं की तुलना के लिए बायें से दायें की प्रस्तुत चर चक बढ़ते जाते हैं जब तक राख्याओं में इंतर नहीं आ जाता है और यदि इतिम् रथान् चक अंक बराबर ह तो दोनों दशांश भिन्न बराबर होती।

$$5 \text{ पैस} - \frac{5}{100} \text{ रु} = .05 \text{ रु} = 0.05 \text{ रु}$$

$$10 \text{ रु } \text{पी.} = \frac{10}{100} = .1 \text{ रु.} = 0.1 \text{ रु.}$$

$$12 \text{ ग्राम} = \frac{12}{1000} \text{ किग्रा.} = .012 \text{ किग्रा.} = 0.012 \text{ किग्रा.}$$

$$30 \text{ रु} = \frac{30}{60} \text{ मि.} = 0.5 \text{ मिनट}$$

#### प्रथास कीजिए

गिन्न की तुलना कीजिए।

1. 1.234 व 2.345
2. 1.234 व 1.123
3. 1.134 व 1.132

#### प्रथास कीजिए

गिन्न के ददलें

1. 10 पैसे के रूपाएँ में
2. 125 रोपी. को गोले में
3. 1025 रुप एक किलोग्रन में

दशांश गिन्न राख्याओं के दशांश राख्याएँ भी कहते हैं। हाने दशांश राख्याओं को जोड़ने एवं घटने की सक्रिया का उभ्यास किया है। इसमें हमने जखा ह कि सहजांश में सहजांश, इतांश में शतांश, दशांश नं दशांश, इन्डाइंश में इन्डाइंश और इसी प्रकार आगे संख्याओं को जोड़ते रुप धरते हैं।

जैरे—  $25.67 + 4.3$  का हल शारी कीजिए।

$$\begin{array}{r} 25.67 \\ + 4.30 \\ \hline 29.97 \end{array}$$

निना का हल क्या होगा ?

$$\begin{array}{r} 0.23 \\ + 1.90 \\ \hline 2.13 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1.75 \\ - 0.30 \\ \hline 1.45 \end{array}$$

### प्रयास कीजिए

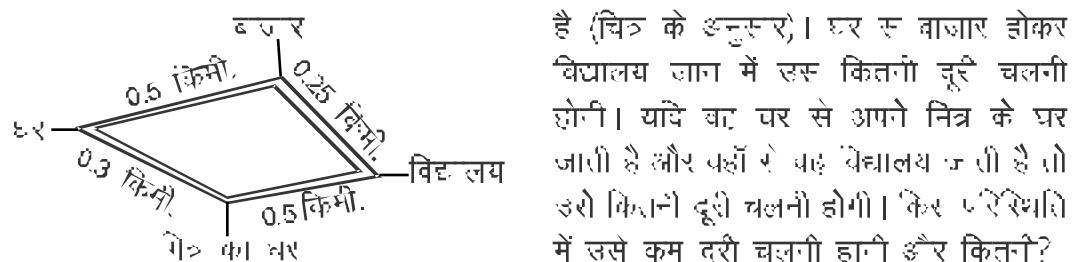
(i) $0.44 + 0.11 =$	(ii) $2.12 - 2.1 =$	(iii) $1.23 + 1.2 =$
(iv) $1.12 - 0.12 =$	(v) $1.02 + 1.05 =$	(vi) $4.12 - 1.13 =$

## प्रश्नावली-3.1

- 1. निम्नलिखित दशमलव संख्याएँ जोड़े में से बड़ी संख्या लिखिए।**
  - (a)  $5.67$  एवं  $5.7$
  - (b)  $5.60$  एवं  $5.61$
  - (c)  $5.67$  एवं  $4.67$
- 2. जोड़िए।**
  - (a)  $1.22 + 2.11$
  - (b)  $1.23 + 0.12$
  - (c)  $2.13 + 0.87$
  - (d)  $1.2 + 1.002$
  - (e)  $1.02 + 2.099$
  - (f)  $2.37 + 3.76$
- 3. घटावें।**
  - (a)  $2.34 - 1.23$
  - (b)  $1.01 - 0.1$
  - (c)  $1.02 - 0.02$
4.  $1.20, 2.01, 0.123, 0.21, 1.02$  को बहुते क्रम में लिखिए।
- 5. दशमलव का प्रयोग कर निम्नलिखित को रूपये में व्यक्त कीजिए।**
  - (a)  $212$  रुपये  $10$  पैसा।
  - (b)  $5$  रुपये  $5$  पैसा।
  - (c)  $315$  पैसा।
- 6.**
  - (i)  $10$  मी. को मीटर एवं किमी. में लिखिए।
  - (ii)  $115$  सेमी. को मीटर एवं किमी. में लिखिए।

7. दशमलव संख्या 2.345 व 3.24 का प्रशारित रूप हिंखेए तथा प्रत्येक में 2 का गुणनीय नन क्षाति करें।

8. नला उपने के रो विद्युतय बाज र होलर जाती है या उपने निव के रो होलर जाती है (चित्र के अनुसर)। यह रु बाजार जोकर विद्युतय जान में उस कितनी दूरी चलनी होगी। यदि बाज पर से आपने निव के घर जाती है और वहाँ से वह विद्युतय जाती है तो उसे कितनी दूरी चलनी होगी। केर उपरिभि में उसे कम दूरी चलनी हानी और कितनी?



9. बवलू न घर ल लिए 3 किलोग्राम 500 ग्राम आलू, 1 किलोग्राम बन्न एवं अफसाना ने 2 किलोग्राम 50 ग्राम चीनी 2 किलोग्राम 250 ग्राम बस्तु खरीदें। किसने छज्जन भे अधिक सामान खरीदे और कितना?

10. 15 मेटर, 6.5 नेटर से कितना अधिक है?

### 3.2 दशमलव संख्याओं का गुणा (Multiplication)

राधेन्द्र ने 12.50 रुपये किलोग्राम की दर से 2 किलोग्राम बाज एवं 6.5 रुपये किलोग्राम की दर 1.5 किलोग्राम आलू खरीदे। जल्दे कितने रुपये दूकानदार को देन होंगे? निश्चित रूप से यह प्याज खरीदने में होगे कुछ रुपये एवं आलू खरीदने में लग कुल रुपये के जोड़ के बराबर होगा।

$$\text{प्याज खरीदने में सके कुल रुपये} = 12.50 \times 2 \text{ रु.} = 25.00 \text{ रु.}$$

$$\text{आलू खरीदने में लगे कुल रुपये} = (6.50 \times 1.5) \text{ रु.} = ?$$

इस तरह हमार सानन ऐसी लझे परिस्थितियें जो सकती हैं जिसमें हम द दशमलव भिन्न को उपका में गुणा करना होता है। आइये एक तरल उदाहरण  $0.1 \times 0.1$  की गणना रो दो दशमलव भिन्न के गुणा के साक्षने का प्रयास करें।

$$0.1 \times 0.1 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \quad (\text{दशमलव भिन्न के गणना के बदला})$$

$$\text{अब } 0.1 \times 0.1 = \text{अर्थात् } \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1 \times 1}{10 \times 10} = \frac{1}{100} = 0.01$$

आइये  $0.1 \times 0.1$  के गुणनफल को 'वेन से रामङ्गने का प्रयार करें।

$$0.1 = \frac{1}{10} \quad \text{मिन्न } \frac{1}{10} \text{ का अर्थ है } 10 \text{ तस्मान}$$

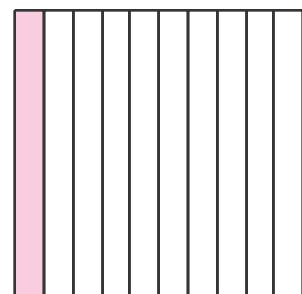
भाग नं से एक भाग। चित्र-3.1 का छायाकित भाग  $\frac{1}{10}$  को प्रदर्शित करता है। हम जानते हैं कि  $0.1 \times 0.1 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$  अर्थात्

$\frac{1}{10}$  का  $\frac{1}{10}$  अब विना में निरूपित 10 बेरे हिस्सों के और 10 हिस्सों किये।

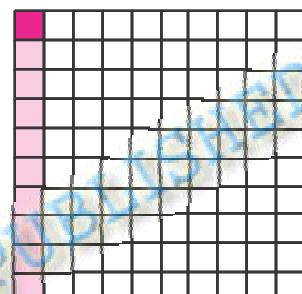
इस प्रकार गहरा छायाकित भाग  $0.1 \times 0.1$  को दर्शात् है।

यह पूर्ण कि लितना हिस्सा है? यह एता लगाने के लिए पूरी इकड़े (एवं) को बेस छोटे-छोटे वर्गों नं बाँटा। इन पार्टों हैं कि इस प्रकार प्राप्त उटा वर्ग 100 बराबर भागों में से एक भाग है।

अर्थात् यह  $\frac{1}{100}$  है यानी  $0.01$ । अर्थात्  $0.1 \times 0.1 = 0.01$



चित्र-3.1

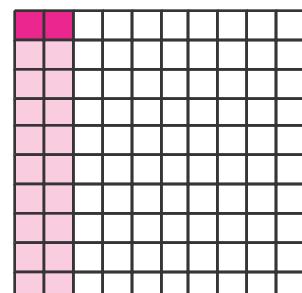


चित्र 3.2

क्या हम अप्रै दी यथो विके  $0.2 \times 0.2$  गुणनफल खाते वर्षे हैं? स्पष्ट है कि  $0.2 \times 0.2 = \frac{2}{10} \times \frac{2}{10}$  अर्थात्

$\frac{4}{100}$  जो कुल 100 बराबर भाग में से चार भाग छाग आते यह

छायाकित भाग  $\frac{4}{100}$  को निरूपित करता है जो 0.04 के बराबर है। अतः  $0.2 \times 0.2 = 0.04$



चित्र 3.3

ध्यान दें कि दशमलव के गुणा में जांक १ देव वह संख्या होगी जो मूल दशमलव संख्या में ३ है ( $2 \times 2 - 4$ )। अतः उसका गुणनफल विना दशमलव में कर्द बन गी संख्या वही आएगी पुनः हर में उतनो ही संख्या ने दूर हत हैं जितना कि नूल संख्याओं में दशमलव के बाद शून्य की कुल संख्या थी।

मैंना ने दो दशमलव टिन्न को तुप्पा करते समय सबसे पहले दशमलव येट के छोड़ते हुए उन दोनों संख्याओं का गुण किया। फिर उसने दोनों दशमलव संख्याओं के दशमलव पाले भाग में अंकों की संख्या के गिना व जोड़ दिया और उन्हें प्राप्त गुणनफल के दायें ओर से उतारी। मैं अंकों के छोड़कर दशमलव येट के रूप दिया।

जैसे  $2.37 \times 1.4$  में उसे 237 व 14 ला गुण किए परं देख के पहले में दशमलव के बाद व अंक व दूसरी संख्या में एक अंक है तो उसने ग्राह उपग्रह 3318 ने ऐसी जगह दशमलव लगाया कि दशमलव के बाद हीन अंक रह यानी 3 के बड़। अतः ग्राह गुणकल 3318 आए।

जैसे  $0.2 \times 0.2$  में दशमलव छिक्क के बिना गुण करने पर  $= 02 \times 02 = 2 \times 2 = 4$

अब हम दोनों दशग्रन्थ गिन्न एवं दरग्रन्थ चिक्क के बहु अंकों का गिनाते हैं। जिनकी संख्या क्र. १ और १ है। इन्हें ओडने वाले  $1 + 1 = 2$

अब ब्रावा मुण्डफल में दृढ़ी रो वायी और दो नंक कहते हैं। किन्तु उपनगल में तो रिफर पक अंक ही है। ऐसे स्थिर में इस मुण्डफल के बायी और ज्ञानशक्तिरार दून्हा रखते हैं। दिये गए परिस्थिति में यदि ~~एक~~ शून्य बायी और दून्हों लोन ०.८८ रुपये के लिए आवश्यक दो अंक ४० पा हो जाते हैं, तिराके बायी और पराल्व के बिल प्रयोग करने से ०.०४ प्रा च है जो  $0.2 \times 0.2 = 0.04$  नफकत है। अतः  $0.2 \times 0.2 = 0.04$

**नोट :** दशनज्ञव चिह्न का स्थान राय करने के लिए गुपनफल के इकाई अंक से बायीं और बढ़ते हैं और इसीलिए ज्ञात पड़ते पर भूम्य सी गुपनफल के बायें लोहे हैं रखते हैं।

निम्न का गुणफल करें -  $0.25 \times 0.25$

25

सबसे पहल 25  $\times$  25 इत करेगे  $\frac{\times 25}{625}$

पहले दशमलाव भैना में द्वानजाव चिह्न के बाद 2 अंक है।

द्वारे दूर पलट तिन में दशमालत चिह्न के बाद 2 अंक ले।

પ્રથમ કીજાણ

## रूपानश्चल आत् करे-

- (i)  $0.2 \times .02$
  - (ii)  $0.2 \times 1.2$
  - (iii)  $1.3 \times 1.3$
  - (iv)  $1.23 \times 1.2$
  - (v)  $5 \times 2.5$
  - (vi)  $4 \times 1.3$

सर्व शिक्षा : 2013-14 (निःशुल्क)

इनके दशमलव छोटे दायीं ८ रख रो बायीं ८ रख बढ़ने पर (2 + 2) बार अंकों के बाद 0.0625 के ८ हो जाएंगे। इसे लेने पुण्यांक -  $0.0625 \times 0.25 = 0.0625$

### 3.2.1 दशमलव गिन्न संख्या का 10, 100 एवं 1000 से गुणन—

हमने ने पूरी संख्याओं से तुपा करते राय पर कि किसी भी कृति संख्या में 10, 100 या 1000 से गुणा करने पर उस संख्या के दायीं ओर क्रमशः एक, दो या तीन शून्य ढूँढ़ जाते हैं, जैसे—

$$5 \times 10 = 50, 5 \times 100 = 500, 5 \times 1000 = 5000$$

उत्तरे पूर्ण संख्याओं, नूर्णाकों के साथ भी यह कायं दूर कर गया कि प्रत्येक स्थिति में संख्या के बाद शून्य की वृद्धि उपर्युक्त नियमानुसार ही होती है। हमने दशमलव द्वितीयक संख्याओं में क्रमशः 10, 100 एवं 1000 से गुणा कर गुणांक त्राच कर अपने नियम की पुष्टि करनी चाही। उसने एक दशमलव जिन 3.456 लिया और क्रमशः 10, 100, 1000 से गुणा किया।

$$3.456 \times 10 = \frac{3456}{1000} \times 10 = \frac{3456}{100} = 34.56$$

$$3.456 \times 100 = \frac{3456}{1000} \times 100 = \frac{3456}{10} = 345.6$$

$$3.456 \times 1000 = \frac{3456}{1000} \times 1000 = 3456 = 3456.00$$

हमने आदर्शजनक परिपान त्राच किए। हमारे देखा ऐसी संख्या में क्रमशः 10, 100 या 1000 से गुणा करने पर शून्य की संख्या नहीं होती बल्कि दशमलव छोटे स्थान बदल जाता है। और यह बदलाव 10, 100 या 1000 में रूपयों की संख्या पर निर्भर करती है। 10 ने 1 शून्य है तब: 10 से तुपा करने पर दशमलव छोटे 1 स्थान दायें और स्थानांतरित हो जाता है। 100 या 1000 से गुणा करने पर यह बदलाव बिल्कुल क्रमशः दो अंक या दो अंक दायें लियाकर जाता है।

अब आप समझ गए होंगे कि सत्यन्द्र का कुल ( $12.50 \times 2$ ) + ( $6.50 \times 1.5$ ) रुपये बाती 25 +  $9.750 = 34.75$  रुपये होंगे।

#### गुणनफल ज्ञात करें

$$1.230 \times 10 =$$

$$1.203 \times 100 =$$

$$1.203 \times 1000 =$$

$$1.203 \times 10000 =$$

## प्रश्नावली 3.2

### 1. गुणनफल ज्ञात कीजिए।

- (i)  $5.4 \times 0.4$       (ii)  $4.32 \times .02$       (iii)  $8.24 \times 0$   
 (iv)  $15.2 \times 0.002$       (v)  $3 \times 0.3$       (vi)  $0.7 \times 0.7$   
 (vii)  $0.0003 \times 10$       (viii)  $0.0003 \times 100$       (ix)  $0.0003 \times 1000$   
 (x)  $0.0003 \times 10000$       (xi)  $0.0003 \times 100000$   
 (xii)  $0.0003 \times 0.0003$       (xiii)  $0.400 \times 0.500$   
 (xiv)  $-2.5 \times 5$       (xv)  $(-2.5) \times (-2.5)$

2. किसी वर्ग के भूज 2.3 नेटर है तो उसका क्षेत्रफल क्या होगा?
3. किसी त्रिमुख का आधार एवं आधार पर शीर्षसंत दोनों लम्बाई ज्ञात: 2 सेमी. एवं 1.5 सेमी. है। त्रिमुख का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. 70.5 रु० प्रति मीटर की दर से 3.5 मीटर कमरे का मूल्य क्या होगा?
5. एक मटरस इच्छिल 1 लीच्चर पेट्रोल से 55.75 किमी. जाते हैं यदि तेल टंकी में 2.750 पेट्रोल हो तो उस गाड़ी द्वारा अधिकतम छितरी दूरी तय की जा सकती है?

### 3.3 दशमलव भिन्न संख्याओं का भाग (Division)

इस अध्यने में कई ऐसे ऐथरियों से गुजरते हैं जिनमें दशमलव राशियाँ नं दशमलव संख्याओं का भाग करने वाले आवश्यकता होती है। इज सूरभि गी लुछ इसी तरह की समस्या नं फैस रही है। उसके पर में 1.5 लीटर दूध खरीदा जाता है। वह दूध का गिलास नं रखना चाहती है। प्रत्येक गिलास नं अधिकतम 0.25 लीटर दूध रख्या जा सकता है। उसे किसे नं गिलास की आवश्यकता नहीं? क्या इन सूरभि की कोई नदद कर रखते हैं। आश्ये इसी राजाजने के लिए दशमलव राशियाँ में लुछ दूर्ण संख्याएँ रो १० कहते हैं।

एक दशमलव भिन्न राशि लेते हैं 345.67 इसमें क्रमांक: 10, 100 एवं 1000 से वारी-वारी गत करते हैं।

### 10 रो भाग करने पर

$$345.67 \div 10 = 345.67 \times \frac{1}{10} = \frac{34567}{100} \times \frac{1}{10} = \frac{34567}{1000} = 34.567$$

यहाँ 10 में शून्य की संख्या 1 है। अतः दशनलव चिह्न का विस्थापन बाइं ओर एक स्थान हुआ।

### 100 रो भाग करने पर

$$345.67 \div 100 = 345.67 \times \frac{1}{100} = \frac{34567}{100} \times \frac{1}{100} = \frac{34567}{10000} = 3.4567$$

यहाँ 100 में शून्य की संख्या 2 हो दी है। अतः दशमलव चिह्न का विस्थापन 2 ई ओर दो रुपये न हुआ।

### 1000 रो भाग करने पर

$$345.67 \div 1000$$

$$= 345.67 \times \frac{1}{1000} = \frac{34567}{100} \times \frac{1}{100} = \frac{34567}{10000} = 34.567$$

यहाँ 1000 में शून्य की संख्या तीन है अतः दशमलव चिह्न का विस्थापन बाइं आर तीन स्थान हुआ।

इसी प्रकार हन पारे हैं कि जब इसी दशनलव भिन्न संख्या जो 10, 100 या 1000 से भाग किया जाए तो नियम सभी दशनलव टिक्का बाई तरफ उतारने की स्थान खेसक जाता है जिनमें 10, 100, 1000 आदि में 1 के आगे शून्य होते हैं।

### एक दशमलव भिन्न को 3.6 : 2

$$3.6 \div 2 = 3.6 \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{36}{10} \times \frac{1}{2} \quad \text{या} \quad - \frac{36}{2} \times \frac{1}{10}$$

$$= 18 \times \frac{1}{10} \quad \text{या} \quad = \frac{18}{10} = 1.8$$

### प्रयारा कीजिए:

$$2.4 \div 10 = ?$$

$$2.4 \div 100 = ?$$

$$2.4 \times 1000 = ?$$

### प्रयास कीजिए

$$7.5 \div 3 = ?$$

$$0.15 \div 3 = ?$$

$$15.8 : 2 = ?$$

उपर्युक्त उदाहरणों से कह सकता है कि यदि भाजक पूर्ण संख्या हो तो उसके दशनलव शीन संख्याओं में गाम देना रोकता है। अर्थात् रूप्रथम् हा 36 के 2 से गाम करते हैं जिससे हमें 18 प्राप्त होता है। 3.6 में दशनलव के दाइँ और एक अंक है। अतः 18 में भी दशनलव इस प्रकार रखते कि दशमलव के बाद उक संख्या बचे।

किसी दशगलव मिन संख्या गें दशनलव शीन संख्या से गाम करने वाले हों तब उसके दिये गये विधि का प्रयोग करते हैं पर उसके लिए यहल भाजक को नूपर संख्या में बदलते हैं। भाजक का पूर्ण संख्या बनाने के लिए आवश्यकतानुसार 10, 100, 1000, ..... आदि से भाजक का भाजक ५ पूर्ण करते हैं, 'फैर बाद नाज्य' दशगलव विकल बनता है तो उसे भी राखारपा शीन के लिए लिखते हैं। अंत में गाम देने की क्रिया लिखते हैं। आइए कुछ लदाहरण से जमझें।

$$1. \quad 4.5 : 0.5 = 4.5 \times \frac{1}{0.5} = \frac{4.5}{0.5} = \frac{4.5 \times 10}{0.5 \times 10} = \frac{45}{5} = 9 \quad \therefore 0.5 \text{ में दशमलव के बाद } 1 \text{ अंक है इसलिए } 10 \text{ से गुणा करें।$$

पुनः चुरनि को सनत्या पर विचार करते हैं। उसे पूछ के लिए आवश्यक गिलासों की संख्या  $= \frac{\text{पुल पूल}}{\text{एक गिलास में दूध}} = \frac{1.5}{0.25} = \frac{1.5 \times 100}{0.25 \times 100} = \frac{150}{25} = 6$

इस प्रकार चुरनि को 6 गिलास की आवश्यकत होगी।

अपर दिये गए लदाहरणों में हाने देखा कि गाम की क्रिया करने पर ऐ शून्य रह गया। अमानद कोई पूर्ण संख्या दशमलव मिन होता है किन्तु कन्ते—कभी भी की किया न जैवकल शून्य नहुँ उत्ता। जैसे—  $129 \div 9$  ऐसी स्थिरहेट के बार में उम अगले लक्षण में वर्षी करेंगे।

### प्रथास कीजिए—

$$40.23 \div 10 = ?$$

$$40.23 : 100 = ?,$$

$$40.23 \div 1000 = ?$$

## प्रश्नावली-3.3

### 1. भाग कीजिए-

- |                       |                         |
|-----------------------|-------------------------|
| (i) 4.25 को 2 से      | (ii) 0.25 को 0.5 से     |
| (iii) 17.5 को 3.5 से  | (iv) 1.75 को 3.5 से     |
| (v) 0.175 को 3.5 से   | (vi) 0.175 को 35 से     |
| (vii) 2.75 को 0.5 से  | (viii) 0.175 को 0.35 से |
| (ix) 400.23 को 10 से  | (x) 400.23 को 100 से    |
| (xi) 40.23 को 1000 से | (xii) 35 को 0.2 से      |

### 2. हल कीजिए-

- |                      |                       |                      |
|----------------------|-----------------------|----------------------|
| (i) $40.5 \div 2.2$  | (ii) $40.5 \div 1000$ | (iii) $2.5 \div 0.5$ |
| (iv) $8 \div 0.25$   | (v) $1 \div 0.25$     | (vi) $0 \div 0.5$    |
| (vii) $0.2 \div 0.2$ |                       |                      |

3. एक व्यक्ति के भान की चूड़ा लम्बाई **32.50** मीटर है। यदि एक भान की लम्बाई 3.25 मीटर कम हो सतती है तो चूड़ा के इस भान से कितनी छाड़ओं के लिए पोशाक बनाई जा सकती है?
4. छिल्की व्यायर का दौड़फल 6.5 काम्पीटर है। यदि उसकी वैधाई 1.25 मी. की हो तो लम्बाई छाट किसी जैसे?
5. एक नाबाह्ल लम्बाई 3 गैसे पति स्लेलग्ज की दर से कंल करने का चारं लेती है। यदि सोनारी द्वारा फोग करने पर 0.9 रुपया लगता है तो उसने कितना सनय तक मोबाइल पर खर्च किया?
6. एक आदमी ने लगातार 10.5 घंटे तक स्लिलाई की। यदि वह 3.5 घंटा में एक सलवार सिलता है तो उसने कुल कितनी जलवार सिलती?
7. लररॉ के 15 पैकेट का वज़ा 1.47 |केलोग्राम है तो एक पैकेट का वज़ान **शास्त्रीय** है।

## हमने सीखा

1. दशगलव गिन्नों की तुलना में राशरे पहले पूर्ण राश की तुलना करते हैं। जिस दशगलव निन्म १० पूर्ण राश रुप होता है वह दशगलव गिन बड़ा होता है। दशगलव गिन का पूर्ण भाग बराबर होने पर दशनलव भाग के दशांश की तुलना करते हैं उसका दशांश बड़ा होता है यह दशनलव जिन बड़ा होता है।
2. दशमलव संख्याओं के गुणन नं सबसे पहले संख्याओं नं गुणा बैग दशमलव चिह्न का करते हैं। फिर दशमलव टिक के निष्ठारूप करने के लिए दोनों गुणा दोनों दशांशों के दशनलव भाग के अंक को निष्ठारूप जोड़ लेते हैं एवं गुणांकल १ दर्शाते हैं और ऐसे शुरू करके बाईं दशगलव के बराबर उनके इसका दशगलव चिह्न देते हैं।
3. दशगलव रांझा में 10, 100, 1000 से गुणा करने पर दशगलव चिह्न का रखना चाहता है। यह स्थान दायीं उस रूप होता है जितने रूप 1 छ अलावा होते हैं। स्थान बद्धाने के लिए यदि अंक नहीं होते हैं तो दायीं और आपस्यपत्रानुसार रूप की रांझा बड़ा रहते हैं।
4. दशमलव संख्याओं के भाज्य एवं भाजक को पूर्ण संख्या में बदलकर न-न की क्रिया करते हैं एवं जिन गुणा या भाग के रूप में 10, 100, 1000, ..... आदि से गुणा या भाग कर दशगलव चिह्न निरूपित करते हैं।
5. दशगलव संख्या में 10, 100, 1000 आदि से भाग लेने पर दशगलव चिह्न बाईं ओर स्थान अंक से विस्तारित होता है जितने रूप 10, 100 या 1000 ..... ने 1 के अलावा होते हैं। अंक कम रह जाने पर दशमलव संख्या उ बाईं ओर आपस्यपत्रानुसार रूप को बढ़ा देते हैं।

४०८

## अध्याय-4

## आँकड़ों का प्रबंधन

## सारणी 4.1

## 4.1 भूमिका:

पिछली कक्षाओं में आपने विभिन्न प्रकार के आँकड़ों पर काढ़ लिया था। आपने आँकड़ों को इकट्ठा करा, उनका तालिकाबद्ध लगाया, सज्हे दिग्गजों व पश्चालेख के रूप में प्रदर्शित करना शीखा था। आँकड़ों के रांगड़, अलेखन और प्ररूपीकरण हमारे अनुग्रहों को रांगड़ते रखने और उनसे निष्पर्ध निकलने में हमारी सहायता करते हैं। इस अध्याय में हम इससे आगे आँकड़ों के बर में सेंखेंगे।

आपके दैनिक जीवन में आपके सामने अनेक तरह की सूचनाएँ उत्ती हैं। जैसे आपकी कक्षा के निवारियों द्वारा त्रिमिस के बूनिट देस्ट में प्राप्त किए गए अंक आदि। इरे पर्सनल ऑफिस व डिजिटल विभाग, विभिन्न कारों और उन्हें संभन्नों से विभिन्न उकाए की सूचनाएँ देख सकते हैं। इन्हीं

सूचनाओं को **आँकड़ा (Data)** कहत हैं। आँकड़े प्राप्ति: एक ऐसी स्थिति ल संदर्भ में एकत्रित किए जाते हैं, जिनका उन अध्ययन करना चाहते हैं। आँकड़ों के में रांगड़ आपको क्या बताते हैं?

## सारणी 4.2

## एक विद्यालय में प्रेमेन सोमवार को अनुपस्थिति दर्शानेवाला आँकड़ा

प्रधान सोमवार	😊😊😊😊😊
द्वितीय सोमवार	😊😊😊
तृतीय सोमवार	😊😊😊😊😊😊
चौथी सोमवार	😊😊
पंचामी सोमवार	😊😊😊😊😊
छठ (एक बव्वे को निरूपित करता है।)	😊

सारणी 4.1 से हम लकड़ों के गया का अधिकार्य तापान्न राष्ट्रों क्षमिक २०८३। श्रीगंगार ला तापमान लघुसे कन था। सारणी 4.2 से हम कह सकते हैं कि चतुर्थ सोमवार को विद्यालय ने लघुसे कम बब्बे अनुपस्थित थे। जिनमें से प्रथम सोमवार को अनुपस्थित थे उन्हें ही बब्बे चौथा सोमवार को अनुपस्थित थे। इस प्रकार आँकड़े हमें अनेक बताते बता सकते हैं।

## 4.2 ऑकड़ों का संग्रह (Collecting Data)

सारणी 4.1 के ऑकड़े हमें यह नहीं बता सकते कि पूरे वर्ष में किस नगर का अधिकरण तापमान सबसे अधिक था? यह जानने के लिए हमें इन नगरों में से प्रत्येक नगर के पूरे दर्छ के दौरान शिल्ड किए और अधिकतम तापमानों से संबंधित ऑकड़े इकट्ठे करने चाहेंगे।

इससे यह प्रश्नित होता है कि ऑकड़ों का एक दिया हुआ संग्रह हमें उससे संबंधित एक डिविज्ट सूचना दे पाता है। इसके लिए हमें उस योशेट सूचना का ध्यान में रखते हुए, ऑकड़ों के इकट्ठे करने की आपृथक्कता होती है। सारणी 4.1 में पूरे वर्ष के दौरान इन नगरों के अधिकारण तापमान तया रहे, के बारे में कुछ नहीं बता रखा है। इस उकार, ऑकड़ों को इकट्ठे करने से पहले, हमें यह जानना आवश्यक है कि हम इनका प्रयोग किसके लिए करेंगे?

उद्दरणार्थ, उप निम्न स्थितियां पर गर करें—

- कद्दा में आपके निवास में प्रदर्शन का ऑकड़ा
- आपकी घर का गणित में प्रदर्शन का ऑकड़ा
- बिहर में गहिल संस्करण दर का ऑकड़ा
- फिसी बौद्ध में 5 वर्ष से कम आयु के बच्चों की संख्या का ऑकड़ा।

उपर्युक्त स्थितियों में आपका किस प्रकार के ऑकड़ों की आपृथक्कता है? अर्थात् प्रत्येक के लिए सभी ऑकड़े का क्या है? आपने जितों से नहीं किये। ऐसे उपर्युक्त स्थितियों के लिए ऑकड़ों की अवश्यकता है।

## 4.3 ऑकड़ों का संगठन (Organisation of Data)

जब हम ऑकड़ों को संचालित करते हैं, तो हमें उन्हें रिकॉर्ड करके संगठित करना हाता है। आइए एक उदाहरण पर विचार करें—

कभी अध्यापिका सुश्री अर्का यह जन्मा चाहती थी कि गणित में बच्चों का प्रदर्शन कैसा रहा? यह बच्चों द्वारा प्राप्त अंकों को निम्नलिखित प्रकार से लिखती है:

23, 35, 48, 30, 25, 46, 13, 27, 32, 38

इस रूप में ऑकड़े सरलता से समझने याद्य नहीं थे। इस ऑकड़े से यह भी पत्ता नहीं बल्कि आ कि किस छोटी दर्दी का प्रदर्शन कैसा रहा? उन्हें उन अंकों के एक समूहमीं ने उन ऑकड़ों को सारणी रूप में शुरू करने में दर की राह यादा की। (सारणी 4.3)

### रासणी 4.3

रोल नं.	नाम	प्राप्तांक	रोल नं.	नाम	प्राप्तांक
1	आर्शीष	23	6	सुहना	46
2	अरशद	35	7	जयराज	13
3	इमरेन्द्र	48	8	जे. केल	27
4	दीपू	30	9	नीष	32
5	दीपि	25	10	दीरज	38

अब अचंगा रह समझ सकते कि किस छात्र ने कितने अंक ग्राप्त किए। लेकिन यह कुछ और जानकारी भी चाहती थी। तो सुहनी ने उन अंकों का यूसुरे तरह से प्रदर्शित किया।

### सारणी 4.4

रोल नं.	नाम	प्राप्तांक	रोल नं.	नाम	प्राप्तांक
3	आरशद	48	4	दीपू	30
6	सुहना	45	8	जे. केल	27
10	दीरज	38	5	दीपि	25
2	अरशद	35	1	आर्शीष	23
9	नीषा	32	7	जयराज	13

अब सर्वना को यह जानना राखल हो नहीं कि कितने राबरो अंकों प्रदर्शन किया है? कितने बच्चे 25 से कम अंक लाये हैं और कितनका सहायता ली अवश्यकता है। इस त्रिकार जब हम ऑफँडर्डों को एक उपयुक्त सारणी में रख लेते हैं, तो उन्हें समझना और उनकी व्याख्या करना सरल हो जाता है।

हमारे सभी आनवाले अनेक ऑफँडर्ड सारणीबद्ध रूप में होते हैं। हमारे स्कूल के जिएटर, प्रगति रिपोर्ट, अभ्यास-पुस्तिकाओं में क्रान्तुर र खुशी, रफाइन के रिपोर्ट, पर उन्हें अनेक ऑफँडर्ड रासाणीबद्ध (Tabular) रूप में होते हैं। क्या आप कुछ और अंकों के बारे में जो भी स्कूलते हैं, जो सारणीबद्ध हो?

## स्वयं करके देखिए

अपनी कक्ष के शब्दों का जनपद कीजिए। प्राप्त ऑफलॉन के साथी में संगठित कीजिए तथा निम्नलिखित प्रश्नों के लिए दीजिएः

- (i) सबसे कम भार किसका है?
- (ii) किन्तु छात्र 40 किलोग्राम से अधिक भर का है?
- (iii) कौन-सा शार अधिक लगता का है?
- (iv) सबसे अधिक और सबसे कम भार ला अंतर कितना है?

### 4.4 प्रतिगिधि मान

आप ‘औसत’ (Average) शब्द से अवश्य ही परिचित होंगे तथा आपना दैनिक जीवन में जौसत शब्द से संबंधित निम्नलिखित ६०८ के कथन जापश्य ही चुने था पढ़ेः

- इस औसतना ५ घंटे पढ़ती है।
  - मेरे इहर के औरत ताजन न ४० उम्री सेन्टिसिस (40°C) है।
  - मेरी कक्ष के विद्यार्थियों के औसत आयु १२ वर्ष है।
  - एक स्कूल की वार्षिक गणिका के समय विद्यार्थियों की औसत उपस्थिति ५४ प्रतिशत थी।
- इसे प्रकार के अनुकूलन ढो सकते हैं। कहा तिर हुए लकड़ों के बार न सोचिए।

व्याआग सोचत है कि यहाँ कथन में बताया गया बच्चा प्रतिज्ञन तोक ५ घंटे पढ़ता है? अथवा, व्याआग इस विद्यार्थि समय पर, दिए हुए स्थान का तापनन तदेव 40°C रहता है? अथवा, क्या उस कक्ष के ग्रस्त विद्यार्थी की आयु १२ वर्ष है? स्पष्टतः इन प्रश्नों का उत्तर है ‘नहीं।’ तब, वे कथन हमें क्या बताते हैं?

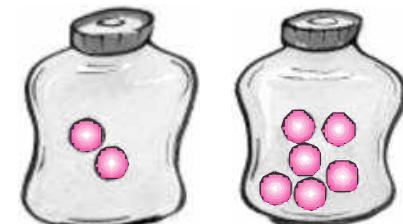
आसता से हम रमझते हैं कि इस। व्याआग एक दिन में ५ घंटे पढ़ती है। कुछ ऐन वह इस से लग नहीं जाती है और कुछ दिन इसो अधिक नहीं पढ़ती है। इसी त्रैकर 40°C के औसत तापनन का अर्थ है कि वर्ष के इस समय गर तापनन प्राय 40°C रहत है। कभी वह 40°C से कम रहता है उत्तर कभी 40°C से अधिक भी रहता है।

औसत एक ऐसे संचय है जो ऑफलॉन के समूह के केंद्रीय प्रवृत्ति (Central Tendency) को निरूपित करती है। इसलिए इस कहते हैं कि औसत, ऑफलॉन के एक समूह की केंद्रीय प्रवृत्ति का मापक (Measure) है।

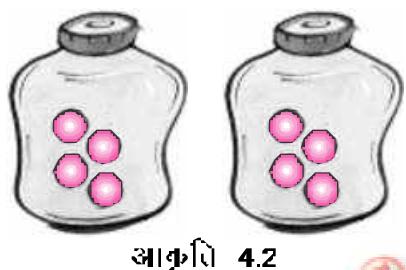
पिभिन्न प्रकार के अँकड़ों की व्याख्या करने के लिए, पिभिन्न प्रकार के प्रतिनिधि (Representative) वा केंद्रीय मानों (Central Values) की आवश्यकता होती है। इनमें से एक प्रतिनिधि गान अंकगणितीय माध्य वा रागांतर माध्य (Arithmetic Mean) है।

#### 4.5 अंकगणितीय माध्य

आँकड़ों के एक समूह के लिए अधिकांश प्रयोग किया जानवाला प्रतिनिधि मान अंकगणितीय माध्य वा स्माल्टर माध्य (Arithmetic Mean) है, संखेग में इसे नाम्य (Mean) या औसत कहते हैं। दो बत्तें ने क्रमशः 2 लड्डू और 6 लड्डू हैं। यदि दोनों बत्तें में बराबर-बराबर लड्डू रखे जाएं तो ग्रन्थि का उतना ही लड्डू होगा?



आकृति 4.1



इसे लिए होंगे अंकगणितीय वा औसत करना होगा।

$$\text{अंकगणितीय माध्य या औसत} = \frac{\text{लड्डू की कुल संख्या}}{\text{बत्तें की संख्या}}$$

$$= \frac{2+6}{2} \text{ लड्डू} = 4 \text{ लड्डू}$$

माध्य को गिम्नालिखित रूप से घरिभाषित किया जाता है।

$$\text{माध्य} = \frac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}}$$

**उदाहरण-1** नीलम दोन क्रमागत दिनों में क्रमशः 5 घंटे, 6 घंटे और 4 घंटे बढ़ती है। उसके फूले का औसत रान्य क्या है?

**हल :** नीलम के बढ़ने का कैसा रागम हो?

$$\text{बढ़ाई में लाना} = \frac{\text{दिनों की संख्या की कुल रान्य}}{3} = \frac{5+6+4}{3} \text{ घंटे} = 5 \text{ घंटे प्रतिदिन}$$

इस प्रकर नीलम प्रतिदिन 5 घंटे के उत्तर स पढ़ाई लरती है। अर्थात् कुछ दिन वह दूर से कम हो भैर फूट दिन इतरों अधिक घंटे बढ़ती है।

**उदाहरण-2.** एक ब्लॉपोज ने 6 चारियों ने नीम रन बनाये— 15, 56, 58, 38, 37, 48  
एक गारी में उसके प्राप्त बना गए रनों का माध्य ज्ञात कीजिए।

**हल :** कुल रन =  $45 + 56 + 58 + 38 + 37 + 48 = 282$

$$\text{मध्य} = \frac{\text{सभी प्रक्षणों का योग}}{\text{सभी प्रक्षणों की संख्या}} = \frac{282}{6} = 47$$

इस ग्रन्थार एवं गारी में उसके हास्य बनाए गए रनों का माध्य 47 है।

### रोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

उपर्युक्त उदाहरण में दिए गए अंकों पर विचार कीजिए तथा बताइए—

- प्रयोग मध्य प्रत्येक प्रेक्षण से बड़ा है?
- आगे भिन्नों के साथ चर्चा कीजिए। इसी तरह का एक और उदाहरण बनाइए और इन्हीं प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

आप पाएंगे कि माध्य सबसे बड़े और सबसे कोटे प्रेक्षणों के बीच में स्थित होता है। गिएष्टर्स रूप में, दो संख्याओं का मध्य राष्ट्रीय छनके बीच में स्थित होता है। उदाहरणार्थ, 6 और 10 का मध्य  $\frac{6+10}{2}=8$  है, जो 6 और 10 के बीच में स्थित है।

### स्वयं करके देखिए

1. आप पढ़ाई में असीम किए गए आपो सम्बन्ध (छंटों में) का पूरे सप्ताह का औसत ज्ञात कीजिए।
2. आप औसतन एक दिन में किसे धने चाहते हैं। चार दिन के अंकों ले कैसे बताएँ।
3. 5 और 11 का माध्य कहाँ स्थित होता है?

#### 4.5.1 प्रसार या परिसर

प्रेक्षणों के उत्तराग एवं नीमनाग गारों के अंदर से, हमें प्रेक्षणों के प्रसार (Range) का एक छनौतान लग जाता है। इसे रास्ते बहु प्रेक्षण में से रास्ते छोटे प्रेक्षण को एवं उस ज्ञात किया जा सकता है। हम इस परिणाम को अंकों या प्रेक्षणों का प्रसार या परिसर (Range) कहते हैं।

अतः प्रेक्षणों का परिसर = पक्ष का उच्चतम मान – गेक्षण का निम्नतम मान

**उदाहरण-3.** एक स्कूल के 10 अध्यापकों की वयों में आयु इस प्रकार है

38, 40, 32, 41, 28, 54, 35, 26, 23, 33

- सबसे बड़ी सन्निवाल अध्यापक की आयु क्या है? तथा सबसे छोटी उम्रवाले अध्यापक की आयु क्या है?
- अध्यापकों की आयु का परिसर क्या है?
- इन अध्यापकों की माध्य उम्र क्या है?

**हल :** (i) आयु का आरोटी उम्र = 23, 26, 28, 32, 33, 35, 38, 40, 41, 54

स्पष्ट है कि सबसे बड़े उम्र = 54 वर्ष

तथा सबसे छोटी उम्र = 23 वर्ष

(ii) अध्यापकों की आयु का परिसर  $(54 - 23)$  वर्ष = 31 वर्ष

$$(iii) \text{ माध्य उम्र} = \frac{23 + 26 + 28 + 32 + 33 + 35 + 38 + 40 + 41 + 54}{10} \text{ वर्ष}$$

$$= \frac{350}{10} \text{ वर्ष} = 35 \text{ वर्ष}$$

### प्रश्नावली- 4.1

- अपनी कक्षा के किन्हीं सभी विद्यार्थियों के वजन का ऑकल इकट्ठा कीजिए तथा इसका परिसर ज्ञात कीजिए।
- प्रथम 7 पूर्ण संख्याओं का माध्य ज्ञात कीजिए।
- कक्षा के एक मूल्यांकन में प्राप्त किए गए निम्नलिखित अंकों को एक सारणीकृत रूप में संगठित कीजिए :

4, 6, 7, 5, 3, 5, 4, 5, 2, 6, 2, 5, 1, 9, 6, 5, 8, 4, 6, 7

- सबसे बड़ा अंक कौन-ता है?
- सबसे छोटा अंक कौन-ता है?
- इन अंकों का वरिसर क्या है?
- अंकगणितीय माध्य ज्ञात कीजिए।

**4. एक क्रिकेट खिलाड़ी ने 8 पारियों में निम्नलिखित रन बनाए :**

45, 40, 35, 50, 0, 100

इनका माध्य है कीजिए।

**5. निम्न सारणी प्रत्येक खिलाड़ी द्वारा बार छेतों ने अर्थित किए गए अंकों को दर्शाती है-**

खिलाड़ी	खेल 1	खेल 2	खेल 3	खेल 4
A	16	10	10	14
B	6	8	4	0
C	8	0	11	13

**अब निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए-**

- (i) सभी छेतों में A है अर्जित अंकों का माध्य ज्ञात कीजिए।
  - (ii) सभी छेतों में C द्वारा अर्जित माध्य अंक द्वारा क्रमानुसार कैसे बदलते हैं? इनका माध्य क्या है?
  - (iii) B ने सभी छेतों से भाग लिया है। आप इसके अंकों का माध्य कैसे ज्ञात करेंगे? लिखिए।
  - (iv) किस खिलाड़ी का प्रदर्शन सबसे अच्छा है?
6. यह क्रमागत अंकों में एक समूह ने निम्न अंकों को रांग निम्नलिखित शी-

1870, 1750, 2540, 2820

इस काल में विद्यार्थियों जी नाम संक्षेप द्वारा ज्ञात कीजिए।

**7. गणित की एक परीक्षा में बच्चों के एक समूह द्वारा (100 में से) प्राप्त किए गए अंक 40, 50, 85, 90, 86, 48, 92, 84 और 75 हैं तो ज्ञात कीजिए-**

- (i) बच्चों द्वारा प्राप्त अंकों का औसत राशि अंडिल अंक
- (ii) प्राप्त अंकों का वरिस्त
- (iii) समूह द्वारा प्राप्त नव्या अंक

8. एक नगर में किसी विशेष सप्ताह के 7 दिनों में हुई वर्षा (मिमी. में) निम्नलिखित रूप से अंकित की गई—

दिन	रविवार	सोमवार	मंगलवार	बुधवार	बृहस्पतिवार	शुक्रवार	शनिवार
वर्षा (मिमी.)	12.2	0.0	20.5	2.1	5.5	1.0	0.0

उपरोक्त ऑकड़ों से

- (i) वर्षा का परिसर (Range) ज्ञात करें।
  - (ii) सप्ताह की माध्य वर्षा निकालें।
  - (iii) निचे वर्षा से क्या वर्षा कैन-कैन से देन रही है?
9. यदि  $6, 8, 5, x, 4, 7$  और  $8$  का मध्य  $7$  है, तो  $x$  का मान ज्ञात करें।
10. यदि  $10$  संख्याओं का मध्य  $20$  है, तो प्रथम संख्या से  $2$  घटाने पर नया मध्य क्या होगा?
11. पाँच संख्याओं का मध्य  $16$  है। यदि राशी में एक संख्या और मिलाई जाए  $< 6$  संख्याओं का मध्य  $21$  हो जाए है, तो कौन से दो मान ज्ञात करें।

#### 4.6 माध्यक (Median)

एमने देखा कि ओस्ट्रा अंगारितीय माध्य ऑकड़ों का एक प्रतिनिहित नन है। परन्तु यह रख्ता उपर्युक्त हो यह अवस्थक नहीं। जैसे—  $11$  निम्नांकितों का एक राशी जेनकी ऊँचाईयाँ तो। में नीचे दी गई है—

$$128, 106, 115, 102, 123, 125, 117, 120, 112, 115, 110$$

जबल शिविका जल को ऐसे दो समूहों ने बांटना चाहते हैं कि एक उल्ल ऊँचाई समूह हो तथा एक निम्न ऊँचाई समूह हो। कौन सेंज किस प्रकार करेगी?

$$\begin{aligned} &= \frac{120 + 106 + 115 + 102 + 123 + 125 + 117 + 120 + 112 + 115 + 110}{11} \\ &= \frac{1247}{11} = 113.36 \end{aligned}$$

इस प्रकार माध्य ऊँचाई रो का ऊँचाईवले  $\frac{1}{2}$  ते व बब्ले व निच्य ऊँचाई से उथिक ऊँचाईताले  $\frac{1}{2}$  होंगे। इसीले दोनों राशी में बदलाव बच्चे नहीं होंगे। इसालि ऐसी परिस्थिति के लिए एक अन्य प्रतिनिधि मान की आवश्यकता हरी। आहर मध्यक के बारे में सांचे।

नियक दिए गए औंकड़ों ने वह मान होता है, जो इसे ठीक-ठीक दो भागों में बिनका कर देता है। आधे प्रेक्षण इससे अधिक न-नहीं ले ले रहे हैं और आधे प्रेक्षण इससे कम गानवाले होते हैं।

दिए गए औंकड़ों का नियक निकालने के लिए औंकड़ों के आरोही व अवरोही शब्दों ने व्यवस्थित करते हैं। यह प्रश्नाओं की संख्या ( $n$ ) चिन्ह सही है, तब माध्यक  $\left(\frac{n+1}{2}\right)$  वें प्रेक्षण का उन होता है। उदाहरण के लिए, यदि  $n=11$  है, तो  $\left(\frac{n+1}{2}\right)$  वें अर्थात्  $\frac{11+1}{2}=\frac{12}{2}=6$  वें प्रेक्षण का नन्हा माध्यक होता अर्थात् 115, 106, 110, 115, 115, 115, 117, 120, 120, 123, 125 में 115 माध्यक होगा।

इस प्रकार माध्यक (जब प्रेक्षणों की संख्या  $n$  विषम)  $-\left(\frac{n-1}{2}\right)$  वें प्रेक्षण

जब प्रेक्षणों की संख्या ( $n$ ) सम होती है, तो माध्यक  $\left(\frac{n}{2}\right)$  वें और  $\left(\frac{n}{2}+1\right)$  वें प्रेक्षण का नियक होता है। उदाहरण के लिए, यदि  $n=10$  है, तो  $\left(\frac{10}{2}\right)$  वें और  $\left(\frac{10}{2}+1\right)$  वें प्रेक्षणों के बीचों के माध्य अर्थात् 5वें और 6वें प्रेक्षणों के बीचों का मध्य ही माध्यक होता।

इस प्रकार माध्यक (जब प्रेक्षणों की संख्या  $n$  विषम)  $= \frac{1}{2} \left( \frac{n}{2} \text{ वें प्रेक्षण} - \left( \frac{n}{2} + 1 \right) \text{ वें प्रेक्षण} \right)$

**उदाहरण 4** एक कक्षा के 9 विद्यार्थियों की (सेंटीमीटरों में) लम्बाईयों ये हैं—

155, 160, 145, 149, 150, 147, 152, 144, 148

इन औंकड़ों का नियक ज्ञात कीजिए।

**हल :** यहाँ पहले ही इन औंकड़ों को आरोही शब्द (या अवरोही शब्द) में दूर टक्के लिखते हैं : 144, 145, 147, 148, 149, 150, 152, 155, 160

यहाँ विद्यार्थियों की संख्या 9 है, अर्थात् विषम है, इसलिए हम  $\left(\frac{n+1}{2}\right)$  वें  $= \left(\frac{9+1}{2}\right)$  वें = 5वें विद्यार्थी की लम्बाई, जो कि 149 सेंटीमीटर है, इसके माध्यक ग्राह कर लेते हैं। उत्तर माध्यक लम्बाई 149 सेंटीमीटर है।

**उदाहरण-5.** कबड्डी की एक टीम द्वारा अनेक मैचों में ब्राउं फिल नंबर नंबर ये हैं—

17, 2, 7, 27, 15, 5, 14, 8, 10, 24, 48, 10, 8, 7, 18, 28

तीव्र द्वारा प्राप्त फिल नंबर अंकों का प्राधान शब्द कीजिए।

**हल :** दीव्र द्वारा प्राप्त फिल नंबर अंकों का आरोही शब्द

2, 5, 7, 7, 8, 8, 10, 10, 14, 15, 17, 18, 24, 27, 28, 48

यहाँ 16 जद है, जो सन संख्या का ग्रेडिण है। इसलिए यहाँ दो नव्य पद हैं। ये  $\frac{16}{2}$  वें और  $\left(\frac{16}{2}-1\right)$  वें अर्थात् 8वें और 9वें जद हैं।

अतः 8वें और 9वें जद के मान ज्ञा नव्य शी मध्यक होता।

$$\text{इसलिए मध्यक} = \frac{10+14}{2} = 12$$

अतः कबड्डी टीम द्वारा प्राप्त फिल नव्यक और 12 है।

#### 4.7 बहुलक (Mode):

एमने देख, माध्य और मध्यक के द्वारा प्राप्ति की माप या प्रतिनिधि नन हैं। परन्तु क्या ये हाँरी तारी अवधिकरण के लिए उपयुक्त हैं। आओ एक उदाहरण के देखें।

एक दूकानदार का कमीजों की बेके का रिकॉर्ड इस प्रकार है—

माप (kg) में	90	95	100	105	110
बेके में गई कमीजों की संख्या	8	22	32	37	6

अब तुलनात्मक कमीजों के स्टॉक (Stock) के लिए प्रदृष्टि के मानक का उपयोग कर कि वह आपने ग्राहकों के आवश्यकताओं ला पूरा कर गाँ।

देखें नव्य और मध्यक का ज्ञाता क्या मापक आत हैं—

$$\text{बेके में गई कमीजों का माध्य} = \frac{8+22+32+37+6}{5} = \frac{105}{5} = 21$$

अर्थात् वह प्रत्येक मान ज्ञी 21 कर्नें टॉक में रखें।

बच्चे गाई कीजियों का प्रत्यक्ष = 6, 8, 22, 32, 37, 41  $\left(\frac{5+1}{2}\right)$  वे गान = तीसरा गान  
= 22 है।

अर्थात् वह प्रत्यक्ष मप की 22 कमीज़ स्टॉक में रखें। ज्यादा है, रेडीमेड (Readymade) कपड़ों के दूकानदार ले लिए मध्य और माध्यक जेसे मापक उपयुक्त नहीं है। वह दूकानदार कीज़ के ऊपर गाप के देखेग, जो राखरे अधिक बिकती है। यह ऑकड़ों का एक अन्य प्रतिनिधि गान है। लाखों अधिक बिक्री 105 रोपी, गाप की कमीज़ की 37 है। वह प्रतिनिधि गान (105) ऑकड़ का बहुलक (Mode) कहलाता है।

इस प्रकार बहुलक ग्रेक्षण का वह नाम हता है, जो सबसे अधिक बार घटित हता है।

**उदाहरण-6.** निम्नलिखित राशियों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

1, 1, 2, 3, 4, 2, 1, 2, 2, 4

**उत्तर :** समान नमूनी संख्याओं को एक साथ लगानेश्वर करने पर, इसे प्राप्त करा।

1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4

इन ऑकड़ों का बहुलक 2 है, जो एक अन्य ऑकड़ों का दूलना में अधिक बार आता है।

#### 4.7.1 बड़े ऑकड़ों का बहुलक :

यदि ग्रेशणों की संख्या बड़ी हो, तो उनको समान नमूने ग्रेशणों के रूप में लगानेश्वर करना और उनको गिनाना शामाना राखना नहीं हो सकता है। ऐसी स्थिति में, हाँ ऑकड़ों को सारणीवद्ध करते हैं, जैसा कि आगे गिनाले लक्ष में कर द्युके हैं, ऑकड़ों की सरणी बनाने का कार्य निलान लिङ्कों (Tally Marks) से प्रारंभ करते हुए ग्रेशणों ली वारंवारताएँ (Frequencies) बना कर पूरा किया जा सकता है। अथोर्ट कैसे ग्राहिष्ठ की बारन्वारता पहुँच संख्या है, जितनी बार वह ग्राहिष्ठ ऑकड़ों में आता है।

**उदाहरण-7.** एक निदालय की 7वीं कक्षा के 22 छायाँछों द्वारा (100 अंकों में से) प्राप्ति किए गए अंक निम्न हैं—

10, 20, 30, 50, 50, 50, 60, 60, 70, 70, 36, 40, 36, 60, 40, 50, 50, 56, 60, 70, 60, 60,

इन ऑकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

**हल :** इन आँकड़ों को एक सारणी के तौर पर लिखें।

इस सारणी के देखते हुए ज्ञात कि 10 का बहुलक है '60' बहुलक है, व्यापक 60 सारणी अधिक वार अस्थ है। इस प्रलम्ब अधिकार विद्यार्थी ने 60 अंक प्राप्त किए हैं। एक गिरिचित अंक प्राप्त वर्णन लिये विद्यार्थीजी संख्या को इस अंक की वर्णनारेत्र (Frequency) कहते हैं। अधिकरण वर्णन व्यापक प्रेक्षण को बहुलक कह जाता है। क्या संख्याओं के एक समूह में दो बहुलक हो सकते हैं? जोचिए और चर्चा करें।

अंक	मिलान चिह्न	विद्यार्थीयों की संख्या (बारंबारता)
10	I	1
20	I	1
30	III	3
40	II	2
50	III	4
56	II	2
60	IN I	6
70	III	3

**उदाहरण—8.** निमालिहित संख्याओं का बहुलक ज्ञात कीजिए।

2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 8

**हल :** इहाँ 2 वेर 5 दोनों ही तीन वार आए हैं। अतः ये दोनों ही आँकड़ों के बहुलक हैं।

### स्वयं करके देखिए

- उप आपनी ~~कक्षा~~ के साथीयों ली जाने में आयु रिकॉर्ड कीजिए और किरण का बहुलक ज्ञात कीजिए।
- निमालिहित आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए—

12, 14, 12, 16, 15, 13, 14, 18, 19, 12, 14, 15, 16, 15, 16, 16, 15, 17, 13, 16,  
15, 15, 13, 15, 17, 15, 14, 15, 13, 15, 14

- 25 लंबाई की ऊँचाईयाँ (cm.) नीचे दो गई हैं—

168, 165, 163, 160, 163, 161, 162, 164, 163, 162, 164, 162, 160, 163, 160,  
165, 163, 162, 163, 164, 163, 160, 165, 163, 162

उनकी लंबाईयों का बहुलक क्या है? यहों बहुलक से आप क्या समझते हैं?

**उदाहरण—9.** एक लखाने में 5 लक्षित लाम कहते हैं, जिसने एक चूपरपाइजर है और यार भजदू है। प्रत्येक भजदू को प्रति माह 5000 रु० वेतन मिलता है, जबकि सुपरवाइजर को 5000 रु० वेतन मिलता है। इनके वेतनों के गाँध, गाँधक और बहुलक ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल : } \text{मध्य} = \frac{5000 + 5000 + 5000 + 5000 + 15000}{5} = \frac{35000}{5} = 7000$$

अतः मध्य वेतन 7000 रु० प्रतिमाह है।

नांदिक इस करने के लिए इन वेतन के लंबड़े के इस प्रकार आरोही श्रम में स्थित है—

5000, 5000, 5000, 5000, 15000

वयोंकि ऐकरसी में काग लगनेवाल जोगों की संख्या 5 है, इसलिए माध्यक व्यवहार  $= \frac{5+1}{2}$  वर्ष  $= \frac{6}{2}$  वर्ष = तीसरा प्रेक्षण होगा। अतः माध्यक तीसरे प्रेक्षण का मान, अर्थात् 5000 रु० प्रतिमाह होगा।

वेतनों का बहुलक 5000 रु० (वयोंकि सबसे अधिक व्यवहारों का वेतन 5000 रु. है) प्रति नह।

यह उँचड़ों का मध्य 7000 रु० है, जो ऊँकड़ों के चरन मान से प्रन्तित है। यह मध्य की दुर्बलता है। यदि उँचड़ों के कुछ अंकों में अंतर बहुत अधिक है (जैसे, 1, 7, 8, 9, 9) तो इस स्थिति में गाँध इन ऊँकड़ों का उत्तम प्रतिमान नहीं कर सकता। माध्यक उत्तम बहुलक औंकड़ों ने उचित उत्तम मानों से प्रगावित नहीं होते हैं। रडीगेड गर्गेत (सिले-सिलाये वस्त्र) उद्घोष, और चुपा चुप्पे उनकी उचित उत्तम मानों के बहुलक मापदंश पर गाँध करत हैं और गिराय लेते हैं कि किस साइज या माप उत्तम अधिक संचया न करना यादें।

**सोचिए और चर्चा कीजिए** — कौन सी केन्द्रीय प्रवृत्ति (प्रतिनिधि मान) सप्तुष्ट होगा?

- (i) आगको एक पिकनिक में 10 स्थितियों के लिए आवश्यक तुड़ियों के बर में निम्न लेना है।
- (ii) एक इलेक्ट्रिक पर जाते सम्च, प्रत्येक साथी के लिए केवल एक ही फल खरीदा जाना है, तो, रु० कीरा रा कल खरीदें।

**उदाहरण-10.** नीना और मंदू को उनकी परीक्षा की लिए दी गई है। परीक्षा में 10 – 10 अंकों के दर्ज हैं। इस परीक्षा में उनके प्राप्तांक हैं—

प्रश्नों की क्रमांक	1	2	3	4	5
मीना का प्राप्तांक	10	8	9	8	7
मंदू का प्राप्तांक	4	7	10	10	10

परीक्षा को कागियाँ प्राप्त होने पर मीना और मंदू दोनों आप—आपने प्रदर्शन पर च्छा द्युख किया। मीना ने कहा मेरा औसत प्राप्तांक  $-\frac{42}{5} = 8.4$  है। मंदू ने कहा मैं औसत प्राप्तांक  $-\frac{41}{5} = 8.2$  है।

व्याख्या मीना का औसत प्राप्तांक नंदू के औसत प्राप्तांक से अधिक था, इसलिए मीना का कहना शुरू के प्रदर्शन में मंदू की दुलगा में उसका प्रदर्शन अच्छा रहा है। परन्तु मंदू इससे सहमत नहीं था उसने दोनों के प्राप्तांकों को उत्तम क्रम में रखा और मध्य प्राप्तांक इस प्रकार प्राप्त किया—

मीना का प्राप्तांक	7	8	8	9	10
मंदू का प्राप्तांक	4	7	10	10	10

नंदू कहना शुरू के उत्तम सबसे मध्य का प्राप्तांक 10 है, जो कि मीना के सबसे मध्य के प्राप्तांक 8थांत् 8 से अधिक है। इसलिए परीक्षा में उसके प्रदर्शन जो उत्तम नन्हा जाना चाहिए।

परन्तु मीना उसके 8 के बाहर नहीं थी। मीना को अपने लक्षण रे साझगता कराने के लिए मंदू ने एक अन्य युक्ति अपनाई, जो निम्न थी—

मीना का प्राप्तांक	7	8	8	9	10
मंदू का प्राप्तांक	4	7	10	10	10

नंदू ने बताया कि उसने 10 अंक अधिक बर (2 बार) प्राप्त किए हैं, जबकि मीना ने 8 अंक अधिक 6 र (2 बार) प्राप्त किए हैं। अपि परीक्षा में उसका प्रदर्शन उत्तम रहा है।

गहली स्थिति में नीना ने जो औसत प्राप्तांक प्राप्त किया था वह है — माध्य (Mean) — मध्य प्राप्तांक निकालो। नंदू ने अपने चारों अंकों की गिया 2 वह है — माध्यक (Median) या मास्टिक।

अपनी दूसरी युक्ति ने मंदू ने अधिक बार उचित अंक प्राप्त करने की बात कही थी कहै—  
बहुलक (Mode)

ये जीनों के लिए एक राष्ट्रीय केन्द्रीय प्रतीक का मापक (Measure) है।

## प्रश्नावली 4.2

- एक क्रिकेट मैच में खिलाड़ियों द्वारा बनाए गए रन इस प्रकार हैं—  
6, 15, 120, 50, 100, 80, 10, 15, 8, 10, 15  
इन आंकड़ों के बारे में क्या कही जिए। क्या ये जीनों से रणनीति है?
- गणित की एक परीक्षा में, 15 विद्यार्थियों द्वारा (25 पूर्णांक में से) प्राप्त किए गए अंक निम्नलिखित हैं—  
19, 25, 23, 20, 9, 10, 15, 10, 5, 16, 25, 20, 24, 12, 20  
इन आंकड़ों के बहुलक और माध्यम ज्ञात कीजिए। क्या ये समान हैं?
- निम्नलिखित आंकड़ों के बहुलक और माध्यम ज्ञात कीजिए—  
38, 42, 25, 37, 45, 50, 32, 43, 43, 40, 36, 38, 43, 38, 47  
क्या इसके लिए आंकड़ा बहुलक है?
- एक टीम ने फुटबॉल के 10 गेंदों में निम्नलिखित गोल किए—  
2, 3, 4, 5, 0, 1, 3, 3, 1, 3  
इन गोलों के माध्यम आंकड़ा और बहुलक इतने कीजिए।
- व्हाइपर कि निम्नलिखित कथन सत्य है अथवा असत्य—
  - नम्बर प्रत्येक प्रेक्षण से बड़ा होता है।
  - नम्बर प्रत्येक प्रेक्षण से छोटा होता है।
  - नम्बर सबसे बड़े और सबसे छोटे प्रेक्षणों बीच में रिहृत होता है।
  - दो संख्याओं का नम्बर लदेव लगाके बीच में लिखत होता है।
  - नम्बर दिर हुए आंकड़ों में से एक संख्या हा स्वल्पता है।
  - बहुलक सदेव आंकड़ों में से होनी है।
  - नम्बर आंकड़ों में से सदेव एक संख्या होता है।
  - आंकड़े 3, 4, 0 का माध्य 4 है।

## 4.8 दंड आरेख

अब हम ऑक्ज़ों के आलेखीय निरूपण (Graphical Representation) की ओर अपना ध्यान लगाते करें। आलेख, एक चित्र ऑक्ज़ों का चित्रां द्वारा प्रदर्शन है। दंडेखों द्वारा प्रदर्शन समझने में बहुत आसान हता है। हमने पिछली कक्षाओं में भी विनिंग प्रकरण के आलेखों के बारे में कुछ चर्चा के थे।

- एक चित्रालेख (Pictograph) : संकेतों का प्रयोग

करते हुए जॉफ़र्डों का विशेष निरूपण—

- नवं के महीने में फिरानी पेंसेल की बिक्री हुई?
- पिंसा + होने में पेंसेल की हिकी अधिक हुई?
- किन नहींनां में पेंसिल की बिक्री तरह हुई?

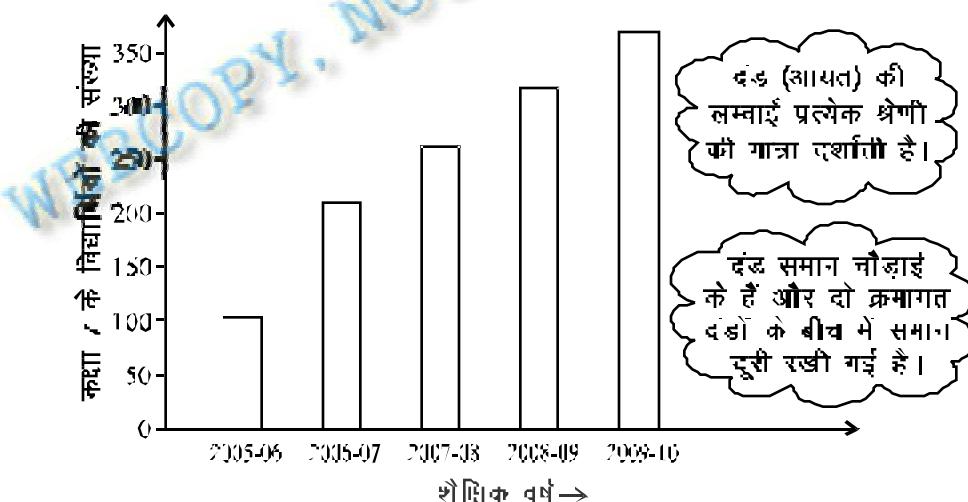
### रासाणी—4.6

$\square = 500$  पेंसिल ली बेक्री

जनवरी	$\square \square$
फरवरी	$\square \square \square$
मार्च	$\square \square$
अप्रैल	$\square \square \square \square$
मई	$\square \square \square$

- एक दंड आलेख (Bar Graph)

हम जानते हैं कि दंड आलेख समान चौड़ाई के दंडों (Bar) द्वारा संख्याओं (ऑक्ज़ों) का प्रतिशोध (प्रतिकार) है, जिसमें दंडों की लम्बाई (लंचाइयाँ) कनरा समूह माने के समानुभाव होती है।



### निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए—

- इस दंड आलेख द्वारा क्या सूचना दी गई है?
- किस वर्ष विद्यार्थियों की संख्या अधिकरण है?
- किस वर्ष में विद्यार्थियों की संख्या में अधिकतम वृद्धि हुई?
- किस वर्ष विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात की गयी है?

#### 4.8.1 दंड आलेख बनाना (Construction of Bar Graphs)

आइए अब हम एक सत्रहरण लेकर इसके लिए एक दंड आलेख ग्राफ पर पर किस प्रकार बनाया जाता है।

**उदाहरण—11.** एक बार में टिभेन्न घरों में लगाए गए पौधों की संख्या निम्नलिखित है—

वर्ष	2006	2007	2008	2009
पौधों की संख्या	3000	2000	4000	5000

इन डेटाओं से दंड आलेख बनायें।

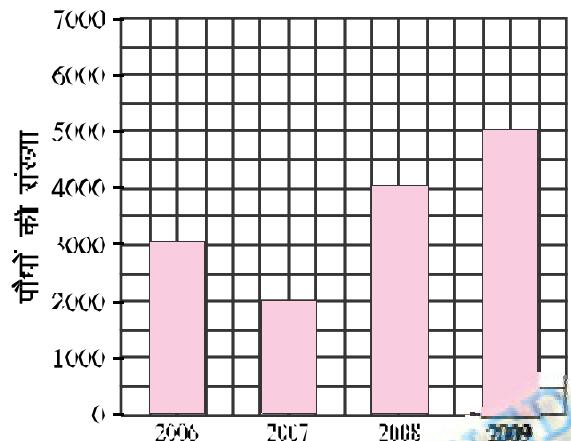
**हल :** हम इन आँकड़ों का दंड आलेख निम्नलिखित रूपों में बनाते हैं—

- एक ग्राफ पर यह तारों पर समान लाइन रेखाएँ खींचते हैं, जिनमें से एक छैतिज (चौड़ी) तथा त्रुटी चम्पायर (खड़ी) हो।
- यह छैतिज अथवा पर तारों (तारों) को देखते हैं। रेखाएँ के लिए यह सभी दंड समान चौड़ाई के होते हैं और उनके बीच सामान दूरी बनाते रहते हैं। दंड की चौड़ाई इन प्रकार जानी चाहिए कि सभी चर्च (चर्च) को दिखाया जा सके।
- यह उपर्युक्त अक्ष पर पौधों की संख्या (वासवार्क) को देखते हैं। यह अक्ष पर एक इकाई लगावाइंसों किटने ऐकाएँ के लिए उपर्युक्त करना है, इस के लिए एक उपर्युक्त एमाना चुनते हैं। इस आँकड़ों में सबसे बड़ा मन 5000 है, तो उक्ते को 5000 से कुछ अधिक पर समाप्त करते हैं।
- साथ ही, अक्ष पर जान वे जोनों को प्रयोग करते हुए हैं। उक्ते को इस प्रकार चुनेंग, ताकि 0 और 5000 के बीच को लम्बाई न तो अधिक छाटी और न ही अधिक बड़ी हो। यहाँ हम 1 इकाई = 1000 पौधे लेते हैं।
- अब हम इन ये उक्ते (1 इकाई = 1000 पौधे) के अनुसार निम्न दण्डों की लम्बाई जाते रहते हैं—

सर्व शिक्षा : 2013-14 (निःशुल्क)

इस प्रकार ग्राफ पेर पर समन यौजाई के 4 दण्ड निम्न प्रलाप बनते हैं।  
(व. अपि 4.4)

वर्ष	दण्ड की ऊँचाई
2006	$\frac{1}{1000} \times 3000 = 3$ इकाई
2007	$\frac{1}{1000} \times 2000 = 2$ इकाई
2008	$\frac{1}{1000} \times 4000 = 4$ इकाई
2009	$\frac{1}{1000} \times 5000 = 5$ इकाई



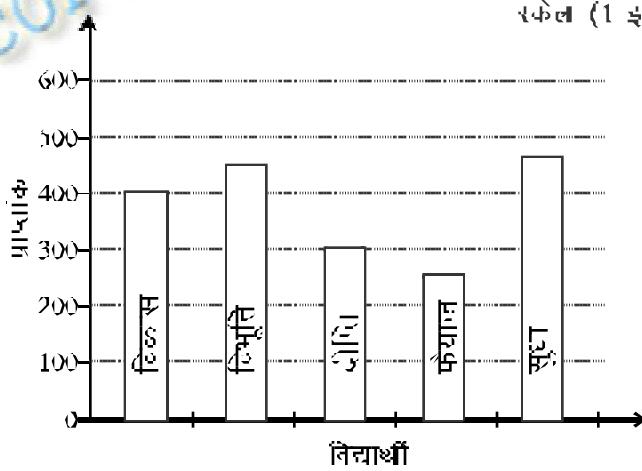
आकृति 4.4

**उदाहरण-12.** निनालिखित 3<sup>rd</sup> लड़े एक कक्षा के पांच विद्यार्थियों द्वारा (500 में से) प्राप्त किए गए कुल अंकों को दर्शते हैं। इन एक रेट लालेला द्वारा फ्रॉटेट कीजे।

विद्यार्थी	विषयस	विज्ञ	दीन्दि	फैयाज	सुधा
प्राप्तांक	400	450	300	250	460

**हल** हम 1 इकाई = 100 अंक लेते हैं। (यदि हम 1 इकाई से 10 अंक को निरूपित करें तो क्या कठिनाई होगी)

रेट (1 इकाई = 100 अंक)



आकृति 4.5

#### 4.8.2 दोहरे दंड आलेख खीचना

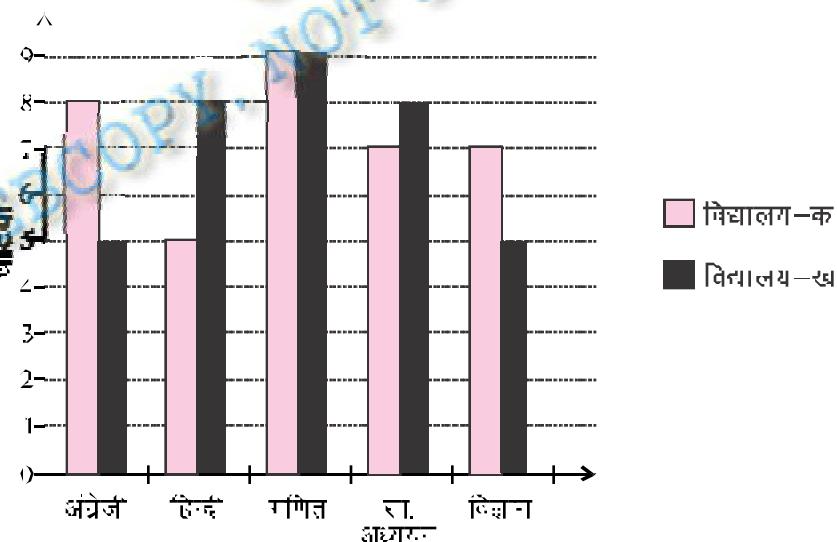
नीचे दो रूपूलों में विभिन्न विषयों के दिए जानेवाले कालांशों (धनियों) का ऑफला दिया गया है। इस पर विचार कीजिए—

विद्यालय-क	
विषय	कालांश
अंग्रेजी	8
हिन्दू	5
गणित	9
सा. अध्ययन	7
विज्ञान	7

विद्यालय-ख	
विषय	कालांश
अंग्रेजी	5
हिन्दू	8
गणित	9
सा. अध्ययन	8
विज्ञान	5

इनके अलग-अलग दंड उल्लेख छोड़कर हन लड़ जानकारियाँ ग्राफ्ट या सकते हैं। ऐसे पैरें रूपूलों में लघुकरण कालांश किस विषय को दिए जाते हैं या प्रत्येक रूपूल में किस विषय को रखा जाता कालांश दिए जाते हैं आदि। परन्तु एक ऐसा विषय में यिस रूपूल में कालांश अधिक हैं जैसे प्रश्नों का उत्तर देने के लिए हन दोहरा दंड आलेख खीचने।

अर्थात् जब हनों जौक़ों के दो समूहों की पुलना करने की उपयोगता होती है, तो दोहरे दंड आलेख (Double Bar Graphs) खीचते हैं।



आकृति 4.6

सर्व शिक्षा : 2013-14 (निःशुल्क)

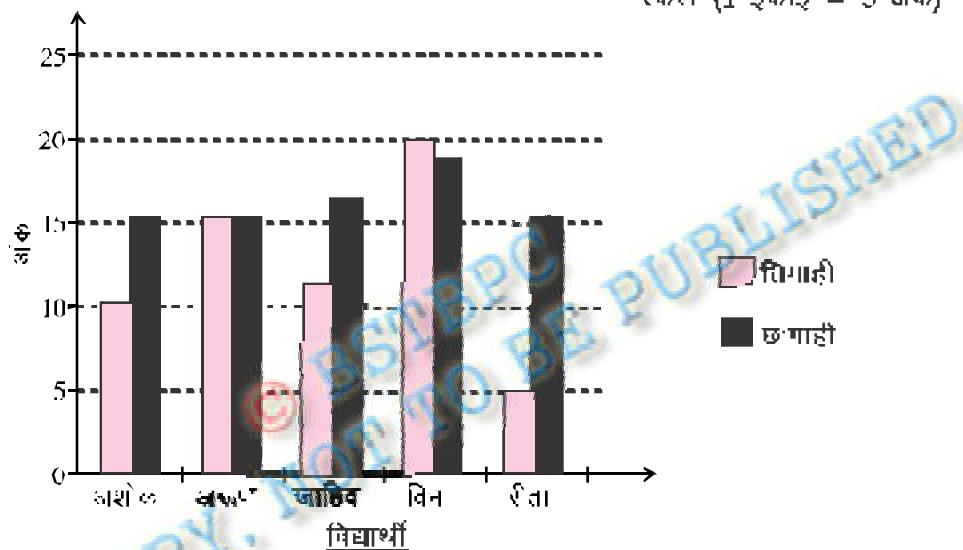
**उदाहरण—13.** निम्न की अध्यापिका 5 कक्षों वालों द्वारा तिमाही परीक्षा में पूर्णांक 25 में से प्राप्त किए ए हॉकों के निम्न रूप में दर्शाई गई है।

विद्यार्थी	अक्षोक्ता	ल-कृष्ण	जाहिद	तिवा	शीता
तिमाही	10	15	12	20	5
छागाही	15	15	16	18	15

इन अंकों से बोहर दण्ड अलेख चीचिए।

हल :

रक्केल (1 इकाई = 5 अंक)



आकृति 4.7

**दर्शों को देखकर अब आप निम्न प्रश्नों का उत्तर दीजिए :-**

- किस विद्यार्थी का प्रदर्शन तिमाही की तुलना में छमाही में ज्यादा रह?
- किस विद्यार्थी की त्रिमाही तिमाही और छमाही में 5 मान रहा?
- किस विद्यार्थी ने तिगाही के अपहरण छगाही में अच्छा प्रदर्शन नहीं किया?
- कितना विद्यार्थी ने छमाही परीक्षा में 15 अंक से ऊंची उम्मीद प्राप्त किया?

क्या आप कुछ अन्य स्थितियों के बारे में बता सकते हैं, जहाँ आप जाहरे दृढ़ आलख का ग्रयोग कर सकते हैं?

## स्नायर करके देखिए

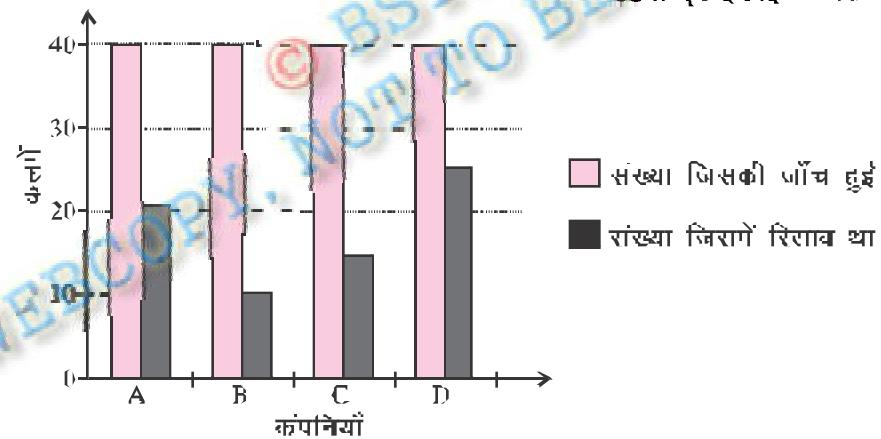
1. यां 2006 से 2010 में अंग्रेजी और हिन्दी की पुस्तकों की बिक्री नीचे दी गई है।

वर्ष	2006	2007	2008	2009	2010
अंग्रेजी	250	300	350	520	620
हिन्दी	400	425	500	550	600

इक लोहर दंड शीर्षिए और निम्नलिखित प्रश्नों का उत्तर दीजिए।

- (a) क्या आप कह सकते हैं कि अंग्रेजी की पुस्तकों के 2006 में बोनी से वृद्धि हुई है? इसके पीछे का तर्क दीजिए।
- (b) क्या वर्ष 2007 से 2008 की पुस्तकों की बिक्री का उत्तर न्यूनतम् है?
- (c) क्लेस वर्ष दानां न्यूनतम् की पुस्तकों की बिक्री का उत्तर अधिकतम् है?
2. यह दुड़ दंड आलख विनिज्जन कंपनियां द्वारा बनाई गई वॉल पेन की जीवन के लिए लिए गए एक संक्षेप का दर्शाता है। इनमें से प्रत्येक कंपनी ने यह दाखिल किया कि उनके डैल पेन रिसारो नहीं है।

उत्तर (1 इकाई = 10 करोड़)



आकृति 4.8

- (a) प्रत्येक कंपनी के लिए रिसावली कलमों की संख्या, कुल कलमों की संख्या कौन-र हिसाब से थी?
- (b) क्लेस कनानी की कलनां वेहतर हैं?

### प्रश्नावली 4.3

1. आकृति 4.9 में एक दंड आलेख का प्रयोग कर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

- किस लाइनी के र इकेल अधिक लोकप्रिय है?
- कितने विद्यार्थियों की पसंद P लाइनी की साइकिल हैं?
- कितने कगानी की साइकिल सबसे कम लोकप्रिय हैं?



2. निम्न सारणी में एक विद्यालय के 2006 से 2010 तक प्रत्येक वर्ष वार्षिक खेलों में भाग लेने वाले खिलाड़ियों की संख्या दी गई है। इन आँकड़ों को एक दंड आलेख द्वारा निरूपित कीजिए।

वर्ष	2006	2007	2008	2009	2010
खिलाड़ियों की संख्या	160	280	200	400	320

- दंडालेख बनाने के लिए आप क्या करना चाहते हैं।
- निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए—**
  - किस वर्ष में खिलाड़ियों की संख्या अधिकतम है और किस वर्ष में न्यूनतम है?
  - वर्ष 2006 के खिलाड़ियों की संख्या का वर्ष 2010 के खिलाड़ियों की संख्या से अनुपात इतना कौनसे।

3. एक विद्यार्थी के प्रथम सत्र और द्वितीय सत्र का प्रदर्शन दिया हुआ है (100 में से)। इन औंकड़ों का एक दोहरा दंड आलेख बनाए और दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए—

विषय	गोप्ता	गांगेनी	गणित	सा. विज्ञान	विज्ञान
प्रथम सत्र	60	70	80	84	76
द्वितीय सत्र	80	65	95	85	80

- (i) विद्यार्थी ने अपना किस विषय में सबसे उचिक चुनौती किया है?
- (ii) सबसे कन सुधार किस विषय में हुआ?
- (iii) क्या किसी विषय में प्रदर्शन नीच गिर है?

4. एक फल विक्रेता ने किन्हीं दो विनों में फलों की विक्री (kg में) का त्रुटनामिक सारणी बनाया। आप इन्हें बोहरे यंड आलेख में विस्तार स्थापित करें। आप इन्हें बोहरे यंड आलेख में विस्तार स्थापित करें। आप इन्हें बोहरे यंड आलेख में विस्तार स्थापित करें।

फल	अन	सेब	संसरे	गोपीना	केल	तरबूज
सोमवार	35	29	12	20	18	38
मंगलवार	26	34	8	25	16	35

- (i) कौन-सा फल अधिक लोकप्रिय है?
- (ii) इस दंड आलेख से क्या निष्कर्ष निकलते हैं?

5. एक कॉलोनी में लगातार दो वर्षों में विभिन्न नदों पर खर्च निम्नलिखित है—

मद	2008 (हजार रु० में)	2009 (हजार रु० में)
जल आपूर्ति	25	30
विकिस्ता	30	35
सुखा	50	70
दोड	10	20
विद्युत	35	35

### **एक उपयुक्त स्पेल युगकर एक दोहरा दंड आलेख खींचिए य प्रश्नों का उत्तर दीजिए।**

- (i) किस मद मे पैछले वर्ष की अपेक्षा सबसे अधिक छव्वे किया गया?
  - (ii) किस मद ने दोनों घरों में बराबर खड़े हुए?
  - (iii) 2008 मे बिहु और रोड पर कुल किला लघे हुआ?
  - (iv) किस वर्ष का छव्वे अधिक रहा?
6. इस उद्धाय के प्रश्न मे, दोहरे टिभिन्न नम्रों के न्यूनतम और उचिकतम तप्पानों के ऊपरांक (सारणी 4.1) के लीजिए। इन ऊपरांक का एक दोहरा दंड आलेख खींच कर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :
- (i) जिस नगर के न्यूनतम और उचिकतम तप्पा का अंतर राखरे अधिक है?
  - (ii) कौन-रा नगर राखरे गये है, और कौन-रा न-र राखरे छाड़ा है?
  - (iii) ऐसे दो नगरों के नगर लिखिए, जिसमे से एक का अधिकतम तप्पान दूरे के न्यूनतम तप्पान ताप्पान से कम है।
  - (iv) उस नगर का न्यूनतम लिखिए जिसके न्यूनतम और उचिकतम तप्पानों का अंतर सबसे कम है।

### **4.9 रांयोग और प्राणिकता**

उमे गापने देनिक जीवन मे इस प्रकार के कठन सुनने को निलते रहते हैं :

- (i) **खाज वर्षा होने की रामावना (या रांयोग) नहीं है।**
- (ii) **भरत विश्व का उत्तेगा।**
- (iii) **सूर्य पश्चिम से निकलता है।**
- (iv) **एक पासे को जंकने पर ४ अर्घना।**
- (v) **एक किलोग्राम की शंखेश २ किलोग्राम सज्जे अधिक होती।**
- (vi) **छोटे पश्चर के जगह छोड़ा पश्चर अमेक जगह होतेगा।**
- (vii) **भरत अगली टस्ट शूंखला उत्तेगा।**
- (viii) **विष्णुरे परीक्ष में ठोप करें।**

उपर्युक्त कथनों के बारे में आप क्या कहेंगे? यहाँ पश्चिम से सूर्द का निकलना असंभव है, एक पारे को फेंकने पर ४ आना भी संभव नहीं है। इसके विवरीत कथन (v) और (vi) का होना निश्चित (Certain) है। दूसरी ओर कथन (i), (ii), (vii) और (viii) ही भी र कथा हैं और नहीं भी हो सकते हैं। तो गों ही संभव है। हाँ या न होने के संयोग (Chance) है।

#### 4.9.1 संयोग

जब आप एक स्टिकफे ले उछलते हैं, तो क्या आप उदैव इसकी सही भविष्यती कर सकते हैं कि किसी (Head) आप के ले या पट (Tail)? आप १० बार एक रुपरे के उछलकर उसमें प्रति होनेवाले परिणाम एवं अपनी गविष्यवाणी के निम्न सारणी में लिखिए—

**सारणी-4.7**

उछल संख्या	भविष्यवाणी	परिणाम
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		
6.		
7.		
8.		
9.		
10.		

क्या आप इसमें कोई ऐचर्न देखते हैं? प्रत्येक उछल के बाद अपको क्या जाता होता है? आप देखते कि ये प्रेक्षण लाइ स्पष्ट प्रतिरूप (Pattern) नहीं दर्शाते हैं। निन्म सारणी को देखिए—

**सारणी-4.8**

उछल संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
परिणाम	H	T	H	H	H	T	T	T	T	T	T
उछल संख्या	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
परिणाम	H	H	T	T	H	H	H	H	T	H	H

उल्ला सारणी नामेपा और नवीत के 22 उछालों से प्राप्त प्रेदाणों का है। यह II – Head (विपरीत) T = Tail (पूर्व) है। अर्थ है, यद्यों चिपा और नद के आने का लोई निश्चया पैदन्त नहीं है। यह संयोग (Chance) की बात है कि एक तिशेष उछाल में चिपा २ पूर्व में से लोई एक हो सकता है।

### स्वयं करके दख्खिए

- एक सेवके लो 125 बार उछालिए और ज्ञात कीजिए कि कितनी बार चित आया तथा कितनी बार पट?
- एक पास लो 100 बार करकिए तथा परिणाम ला रिलॉड करें। ज्ञात कीजिए कि 1, 2, 3, 4, 5 और 6 कितनी-कितनी बार आए हैं?
- पिभूते ने एक पसे को 250 बार फेंका और निम्नलिखित सारणी प्राप्त की:

### सारणी-4.9

पासे की संख्या	मिलान	प्राप्तम्भारता
1		33
2		40
3		47
4		52
5		40
6		38

इन आंकड़ों के लिए एक दंड आलय बनाओ। इन परिणामों से प्राप्त निष्कर्ष बता है ? बताओ।

### 4.9.2 प्राप्तिकर्ता

जब एक सिक्के को उछाला जाता है, तो आपको व्या संन्य परिणाम प्राप्त होते हैं ? निःरादेह, विपरीत (Head) या पूर्व (Tail)। इर ब्रकार चिपा और पूर्व के उछालने के दो प्रैग्य (Outcomes) हैं तथा परिणाम के आने का संयोग (Chance) एक ही है। अर्थात् दोनों ही परिणाम के सम्भावनाएँ बरबर हीं। अतः ये सम्भावनाएँ (Equally Likely) गठनारें हैं। एक चित प्राप्त करने की संभावना १ परिणाम नं से १ है अर्थात्  $\frac{1}{2}$  है।

अब उद्दे अप एक घसे (Die) को फेंके, तो क्या आप प्राप्त छोनेवाली संख्या की पांचवें संख्याएँ कह सकते हैं? लूडो (Ludo) वा 'रॉफ और रौढ़ी' के लिए खेल बेलरे राजा, 5 अन्ते अह अनश्व गाहा होय, कि नपरान्द संख्या प्राप्त हो। लेकिन क्या राधैत आपकी याहत मुझी होयी है?

अब एक घर लौंगे रु. ऊरे 150 बार फेंकिए तथा प्राप्त परिणामों को निम्न रासगी में वरिष्ठ—

#### सारणी—4.10

पासे पर लिखित संख्या	मिलान विह Tally Mark	संख्या कितनी बर प्राप्त हुई (मात्रा ८८)
1		
2		
3		
4		
5		
6		

फेंक कर प्रत्येक परिणाम के लिए चयनकृत खाने ने मिलान विह जैसे 3 अन्ते पर 3 के रामगुण लाए रहे। इस प्रक्रिया को 150 बार करिए तथा प्रत्येक परिणाम की रासगी {कुल संख्या} ज्ञात कीजिए। इन संख्याओं के आधार नर एक दंड के लेख बनाइए तथा निम्न प्रश्नों के उत्तर प्राप्त कीजिए—

1. परिणाम 1, 2, 3, 4, 5 और 6 में से कौन सा अंटे बार है?
2. सबसे बड़े परिणाम और सबसे छाट परिणाम ज्ञा आत्म व्याप्ति है?

अब एक पासे लो एक बार फेंकन जर 1, 2, 3, 4, 5 या 6 परिणाम प्राप्त होगा। इस प्रकार छह स्म संभापित परिणाम है। तो हम लगाते हैं कि 1, 2, 3, 4, 5 और 6 ने से प्रत्येक के उन्ने को प्राप्तिकता  $\frac{1}{6}$  है।

जैसे— (i) 5 अन्ते को प्राप्तिकता  $\frac{1}{6} \leftarrow 5$  देने वाले परिणामों की संख्या  
 $6 \leftarrow$  समप्राप्तिक परिणामों की संख्या

$$(ii) \quad 8 \text{ उंचे को प्रायिकता } \frac{0 \leftarrow 8 \text{ ऊंचे गाले परिणामों की संख्या}}{6 \leftarrow \text{सार्वजनिक जरिनामों की संख्या}}$$

स्पष्ट है कि कई संभावनाएँ गाले घटना की प्रायिकता 0 और 1 के बीच नहीं हती है। जिनके घटित होने का कोई संयोग या संभावना नहीं है, उनकी प्रायिकता 0 होती है तथा जिनके निश्चित रूप से घटित होने हैं, उनकी प्रायिकता 1 होती है।

### प्रश्नावली—4.4

1. बताओ कि निम्नलिखित में से किसका होना निश्चित है, किसका होना असंभव है तथा कौन हो भी सकता है, नहीं भी हो सकता है।
  - (i) डिमुज बनाने पर तीन शीर्ष बनेंगे।
  - (ii) एक रोबो को उछालने पर पड़ जायेगा।
  - (iii) एक रेल्ले को उछलने पर, डिमुज एवं पद्म दोनों आयेगा।
  - (iv) एक परो को फेंकने पर उत्तर आएगा।
  - (v) कल बादल होंगे।
  - (vi) यह गैर भारत जीतेगा।
2. एक-एक पर्चे पर 1 से 8 तक संख्याएँ लिखी दुड़े हैं। उन्हें एक बोक्स ने रखकर उच्छी प्रकार से निला दिया जाता है। बॉक्स के ऊपर से बिन देखे एक नवीनी निकली जाती है जो निम्न की प्रायिकता तया है?
  - (i) रांग 5 प्राप्त करना।
  - (ii) 1 अंक की एक रांग्या प्राप्त करना।
  - (iii) 5 से छोटे एक रांग्या प्राप्त करना।
  - (iv) 5 से बड़ी एक रांग्या प्राप्त करना।
3. शनी और शुक्री में जैन पहले गाना गायेगी, इसका निर्णय करने के लिए एक रिकॉर्ड लगा जा चहा है। रिकॉर्ड के पहले गाने की प्रायिकता क्या है?

## हमने सीखा

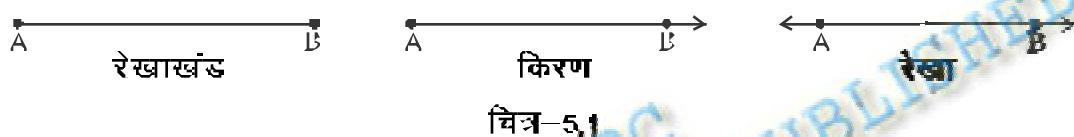
1. ऑक्डों (Data) का इकट्ठा लग से पहले, हमने यह जाना लेगा चाहिए कि हम इनका उपयोग कैसे करेंगे।
2. एकत्रित किए गए ऑक्डों को एक उपयुक्त सारणी के रूप में संगठित किए जाने की आवश्यकता होती है, ताकि ये वारलपा से एवं मध्याने के बोयां हों और इनकी व्याख्या की जा सके।
3. प्रतिनिधि - न एक ऐसी संख्या है, जो दिए हुए प्रेक्षणों के समूह (या ऑक्डों) के अवलम्बनीय अलिक्षणों (केन्द्रीय प्रत्यूति) को दर्शाता है।
4. औरात एक ऐसी संख्या है, जो प्रेक्षणों (Observations) या ऑक्डों (Data) के एक समूह के केन्द्रीय प्रत्यूति को दर्शाती है। यह सबसे अधिक तथा जबसे कम मूल्य (Value) के ऑक्डों के बीच में होता है।
5. प्रेक्षणों के उच्चतम एवं निम्नतम गानां के अंतर से, होंगे प्रेक्षणों का फ़्लॉप (Range) का एक अनुमान लग जाता है।
6. नम्यक भी एल ग्राकार का प्रतिनिधि मान है। यह सबसे मान को दर्शाता है, जो व्रेक्षण के नम्य (वीच) ने होता है (हमें आसोजी या असोजी छाँट में व्यवस्थित करने के बाद) अर्थात् आधे प्रेक्षण इसके कम पर होते हैं और अधे प्रेक्षण इसके नीचे होते हैं।
7. बहुलक प्रेक्षणों के एक समूह में यह प्रेक्षण होता है, जो सबसे अधिक बर जाता है।
8. आलोक (Graph), एकत्रित ऑक्डों वा चित्रों द्वारा प्रिक्षण (Representation) है। दंड आलोक (Bar Graph) ऑक्डों का सामान वौझाई वाले दंडों (जायती) द्वारा एक विश्रीय निरूपण है।
9. दोहरा कुंडल व लेख, प्रेक्षणों के दो समूहों को युलना करने में सहायता है।
10. हमें कैप्टन दीनिक जीवन में ऐसी स्थिरेट मिलती है—(i) जो निश्चित रूप से होती है। (ii) जिसके होने संभव नहीं है। (iii) जो होने की संभवी है, नहीं हो हो सकती। सिराके घटिया होने को कोई संभव (Chance) नहीं है, उनकी प्रायिकता (Probability) 0 होती है। जिनको निश्चित रूप से घटिया होने है उनके प्रायिकता 1 होती है। कई संभावनाओं वाले होना वो ग्राहिकता 0 और 1 के होचे में होते हैं।

## अध्याय-5

# ज्यामितीय आकृतियों की समझ

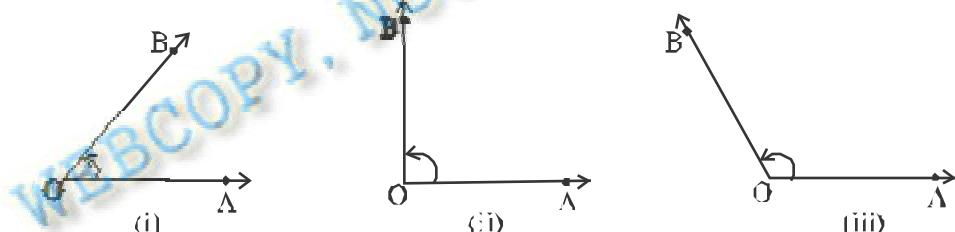
### 5.1 गूणिका

उभी तक हमने सीखा है कि एक रेखाखंड का उंत बिन्दु हते हैं। यदि हम उगल एक उंत बिन्दु को उसी दिशा में अपरिनित रूप में बढ़ाते हैं तो हमें किरण प्राप्त होती है तथा उसके दोनों ओर बिन्दुओं को लम्बने-जप्तने दिशा में अपरिमित बढ़ते हैं तो हमें रेखा प्राप्त होती है।



इनमें  $\overrightarrow{AB}$  रेखाखंड,  $\overrightarrow{AB}$  किरण तथा  $\overleftrightarrow{AB}$  रेखा को दिक्षिण गया है।

हम यह भी सीखते दूँ कि जब कोई किरण एक बिन्दु पर गोली या काढ़ी है तो उन किरणों के बीच के बीच या झुकाव को कोण कहते हैं।

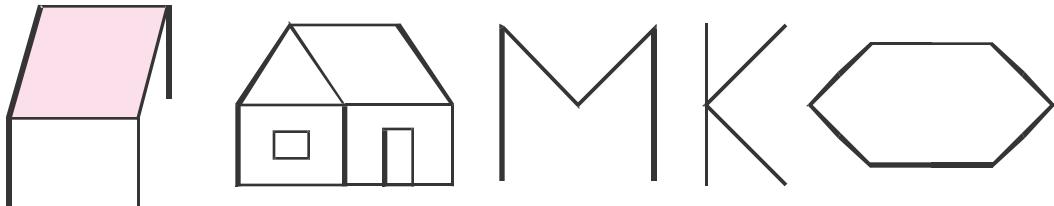


अपर के चित्र में  $\overrightarrow{OA}$  तथा  $\overrightarrow{OB}$  एक शीर्ष बिन्दु 'O' पर गोलका  $\angle AOB$  बना रही है। चित्र (i) में न्यूनकोण, चित्र (ii) में समकोण तथा चित्र (iii) में अधिक कोण को दर्शाया गया है जहाँ  $\overrightarrow{OB}$  का झुकाव  $\overrightarrow{OA}$  पर बासावते दिशा दर्जी घड़ी की चुम्बकीय दिशा नं 3-4 बढ़त जा रहा है। कोणों के इसी झुकाव की माप हम प्रटेक्टर की सहायता से करते हैं। कोण  $AOB$  की माप को हम  $m\angle AOB$  लिखते हैं।

इस पाठ में आ॒ विभिन्न के॑ शृंग के बारे में सीखेंगे।

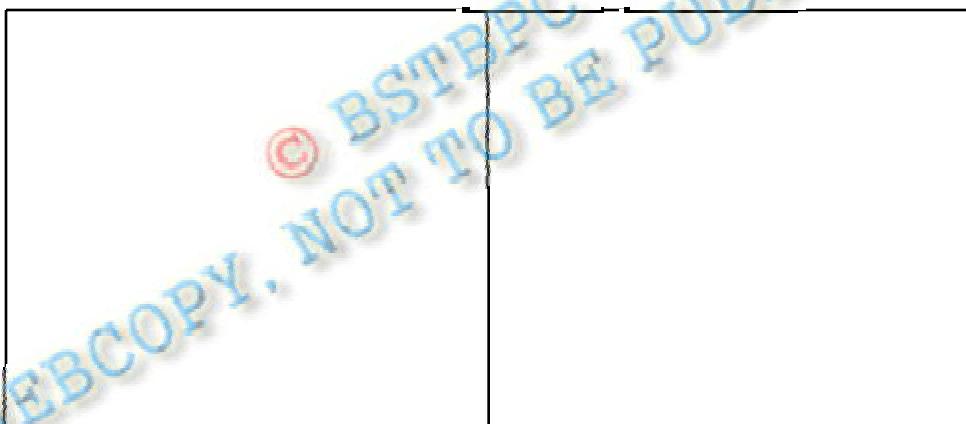
### कुछ करें

- विक्रों में बनने वाले विभिन्न कोणों को पहचानिए तथा उन पर गोल घेरा लगाइए-



चित्र-5.3

- नीचे के खाने में कोई ऐसी दो आकृतियाँ बनाइए, जिसमें न्यूनकोण, समकोण तथा अधिककोण का प्रयोग हुआ हो।

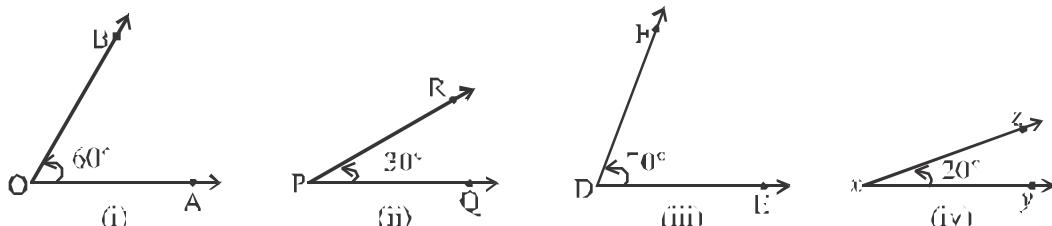


- प्रत्येक आकृति के नीचे उनका नाम लिखिए कि वह क्या है: रेखा/किरण/रेखाखण्ड/न्यूनकोण/समकोण/अधिककोण।

<td><td><td><td><td></td></td></td></td></td>	<td><td><td><td></td></td></td></td>	<td><td><td></td></td></td>	<td><td></td></td>	<td></td>	

## 5.1 कोणों का युग्म

### 5.1.1 **ijd dksk ; k dksVi jd dksk ; k yEcijd dksk** (Complementary angle)



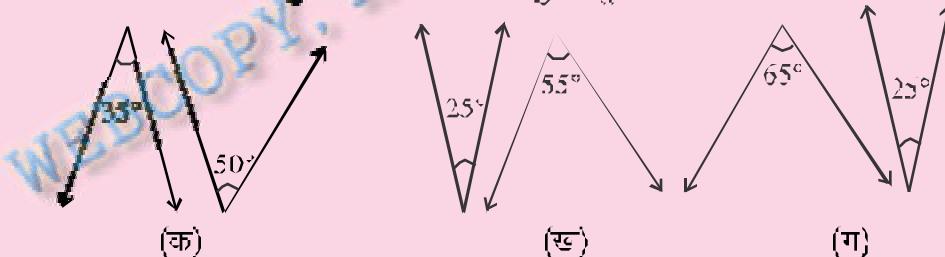
ચિત્ર-5.4

किंहीं दो कोणों ली माप को एक साथ मिलाकर देखें। चित्र 5.4 के (i) एवं (ii) में उने कोण की माप  $= 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$  तथा (iii) एवं (iv) में उन काण की माप  $= 70^\circ + 20^\circ = 90^\circ$

यहाँ कोणों के युग्म घानी जाड़ की मात्र आगरा ने मिलकर  $90^\circ$  है। कोणों का रेसा जोड़ा जिनको मापो ला जोड़  $90^\circ$  हो पूरक कोण (Complementary Angle) कहलाता है तथा युग्म के दोनों कोण  $90^\circ$  दूर से के पूरक कहलते हैं। ~~सिवाय 3.4~~ में कोण (i), कोण (ii) एवं  $60^\circ$  है। इसी बात कोण (iii), कोण (iv) का प्रस्तुत है।

## स्वयं करके देखिए

1. दिरंगर लाणों के युग्मों में से कौन-सा युग्म गुरक कोण है?



सित्र-5.5

$$(4) \quad 35^\circ + 50^\circ = 85^\circ$$

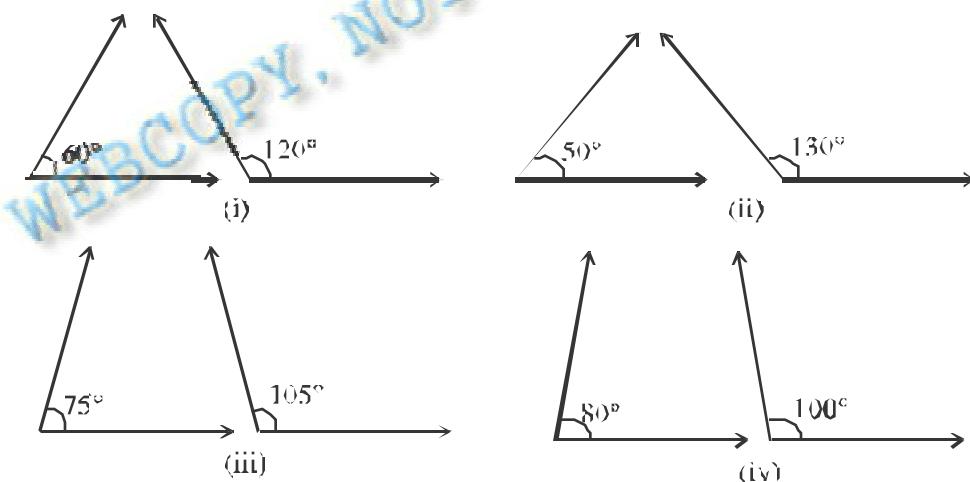
(d) ----- (e) -----

एक कोण नहीं है।

2. दिए ए कोणों के पूरक की मात्रा ना छह—
- $40^\circ$  के लोण का पूरक  $= 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$
  - $55^\circ$  के कण का पूरक = .....
  - $15^\circ$  के कण का पूरक = .....
  - $78^\circ$  के कण का पूरक = .....
3. दो कोण एक दूसरे का पूरक होने यदि वे दोनों—
- न्यूनकोण हैं
  - एककोण हैं
  - अधिककोण हैं
4. दो कोण एक-दूसरे के पूरक हैं यदि उनके बीच का अंतर  $30^\circ$  हो तो दोनों कोण की मात्रा होती है—

### 5.1.2 लाइन लेस्क ; कृतज्ञद कोण (Supplementary angle)

मीठे बने कोणयुग्मों पर धितर कीजिए तथा सरणी को पूरा कीजिए—



चैप्टर-5.6

### रासणी

कोणों का युग्म	युग्म के पहले कोण की माप	युग्म के दूसरे कोण की माप	युग्म के दोनों कोणों की मापों का योग
(i)	$60^\circ$	$120^\circ$	$180^\circ$
(ii)			
(iii)			
(iv)			

रासणी से स्पष्ट है कि कोण ले प्रत्यक्ष युग्म याने जड़ के लिए की नामों का योग  $180^\circ$  है। कोण के ऐसे जोड़ा संपूरक कोण (Supplementary Angle) जड़ताते हैं। युग्म के दोनों कोण एक-दूसरे के संपूरक कहलाते हैं। रासणी में दूसरा (ii)  $45^\circ$  कोण,  $120^\circ$  के कोण का संपूरक है तथा  $120^\circ$  का कोण  $60^\circ$  के कोण का संपूरक है।

**शोधिए :** क्य  $50^\circ$  के कोण का संपूरक  $130^\circ$  है?

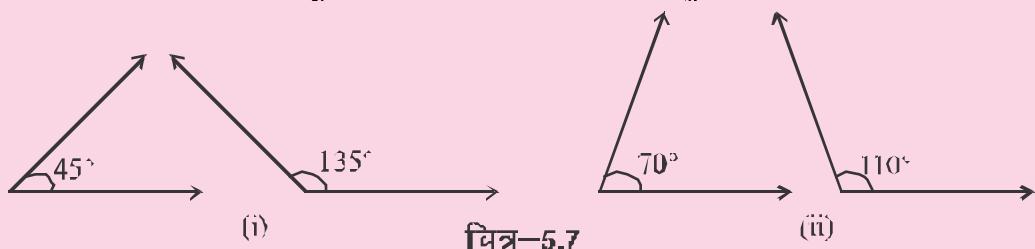
$80^\circ$  का संपूरक  $100^\circ$  ही क्यों है?

### रवयं करके देखिए

- यदि लोणों का युग्म संपूरक कोण हो, तब नीचे के लिए में से कोन स्तर कहने हैं तथा कौन उच्चत्व?

  - युग्म के सोनो क्लेप न्हूनकोप हो सकत हैं (असत्य)
  - युग्म के सोने कोप तम्कोण हो सकत हैं ( )
  - युग्म ले दोनों कोप अधिकलेण तथा दूसरा न्हूनकोप हो सकत है ( )
  - युग्म ले एक कोण अधिकलेण तथा दूसरा न्हूनकोप हो सकत है ( )

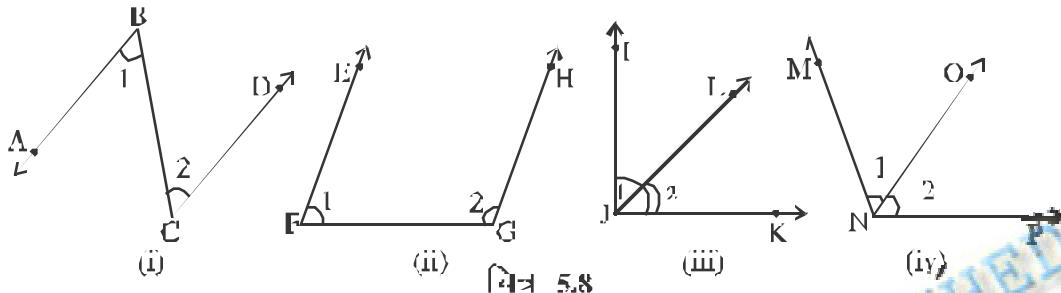
- नीचे कोणों के दो युग्म पिछे गढ़ते हैं, उनमें कौन संपूरक कोण है? बताओ—



3. निम्नलिखित कोणों में से प्रत्येक के संपूरक का बहुडर—

- |                  |       |                  |       |
|------------------|-------|------------------|-------|
| (i) $75^\circ$   | ..... | (ii) $125^\circ$ | ..... |
| (iii) $80^\circ$ | ..... | (iv) $90^\circ$  | ..... |

**5.1.3 आरान्त कोण :** आइए अब चित्र-5.5 में के दो दोषों पर धेनार करें—



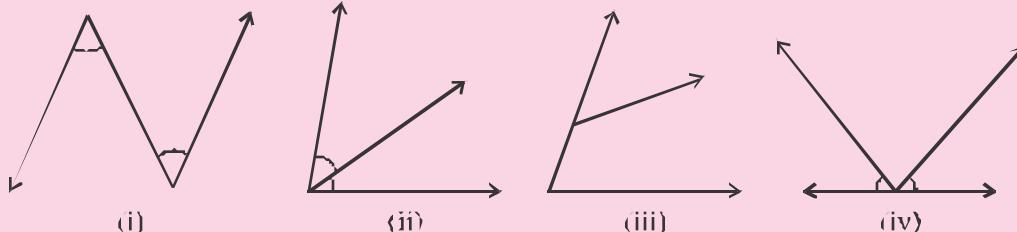
चित्र 5.8

चित्र के दोषी कोण दोषों में के बनाने वाले भूजों से रोक सुजा उभयनिष्ठ है। चित्र (i) एवं चित्र (ii) में दो शीर्ष हैं उबलि चित्र (iii) एवं चित्र (iv) में एक ही शीर्ष है। चित्र (iii) में कोण बनाने वाले दो सुजाएँ JI तथा JL उभयनिष्ठ सुजा JK के एक ही तरफ हैं, जबकि चित्र (iv) में ऊपर बनाने वाली सुजाएँ NM तथा NP उभयनिष्ठ सुजा NO के एक-एक तरफ हैं। चित्र (iv) में बन व्यष्ट आरान्त कोण (Adjacent Angle) है। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि कोणों का ऐसा दोष जिसमें दोनों कोण इस प्रकार राखें हैं कि

- (i) उनका शीर्ष उभयनिष्ठ है।
- (ii) काग बनाने वाली भूजों से से एक सुजा उभयनिष्ठ है, तथा
- (iii) काग बनाने वाली दो भूजाएँ उभयनिष्ठ नहीं हैं, एवं उभयनिष्ठ सुजा के एक-एक तरफ हैं। आसन्न कोण उभलाता है।

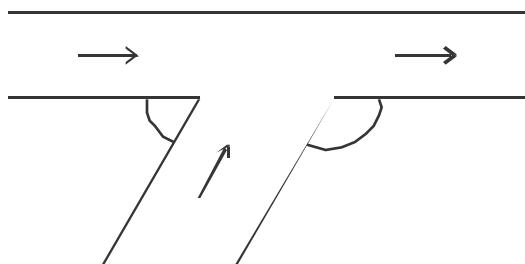
### स्वयं करके देखिए

निम्न चित्रों में से कोन आरान्त कोणों का दोष बनते हैं?



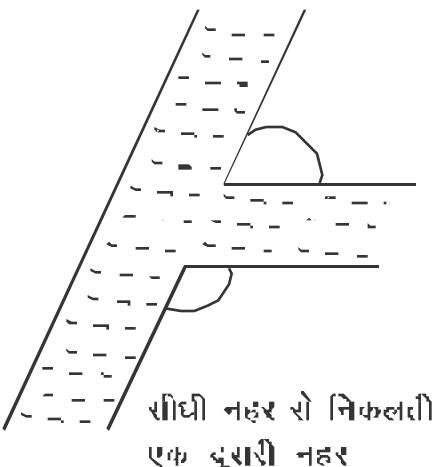
चित्र-5.9

### 5.1.4 रेखिक युग्म:



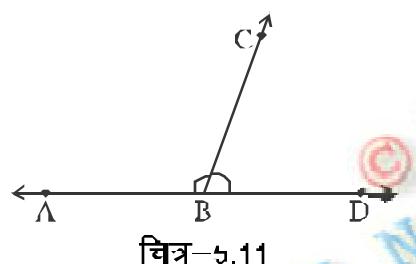
रीढ़ी शाङ्क में मिलती  
एक दूरारी शाङ्क

चित्र-5.10



रीढ़ी नहर से निकलती  
एक दूरारी नहर

ऊपर के दोनों चित्र आसन्न काटों के उदाहरण हैं। यहाँ इन घाने वाली भुजाओं से से एक भुजा उन्नयनिष्ठ है तथा शब्द दार्त द्वारा दुजाएँ उभयनिष्ठ भुजाएँ हैं। एक-एक तरफ इस प्रकार हैं जो एक दूरारे के ठीक पिपरीति दिश में हैं तथा एक रीढ़ी रेखा बना रही हैं।

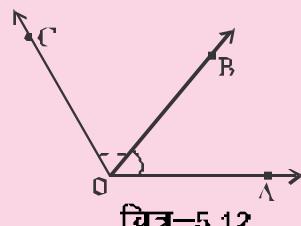


चित्र-5.11

वीक उसी प्रकार चित्र-5.11 में  $\angle ABC$  तथा  $\angle DBC$  आपस में मिलकर एक आसन्न कोण बना रहे हैं तथा  $AB$  एवं  $BD$  एक सरल रेखा बना रही हैं। इरान्न काटों का ऐसा युग्म रेखिक युग्म कहलता है। अर्थात् आग कहु सकते हैं कि जब आसन्न कोणों का यन्  $180^\circ$  है तब वे रेखिक युग्म बनते हैं।

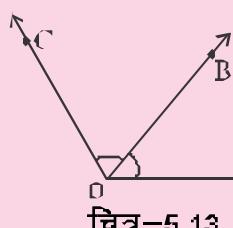
### स्वयं करके वैसिध

1. चित्र-5.12 का देखकर बताइए—  $\angle AOB$  तथा  $\angle BOC$  एक रेखिक युग्म बनते हैं।



चित्र-5.12

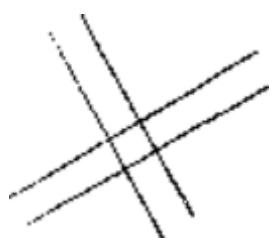
2. (a) क्या  $\angle AOB$  तथा  $\angle BOC$  आपस में मिलकर रेखिक युग्म बनाते हैं यदि हैं तो कैरे, नहीं तो ल्यो?



चित्र-5.13

- (b) रेखिक युग्म के कोण होते हैं : (i) चूरक (ii) सांगूरक।  
(c)  $\angle AOB$  तथा  $\angle BOC$  आपस में मिलकर रेखिक युग्म बनते हैं यदि  $\angle AOB 75^\circ$  है तो  $\angle BOC$  की माप बताइए।

### 5.1.5 प्रतिच्छेदी रेखाएँ



वौराहे पर एक दूसरे को  
काटती राखती



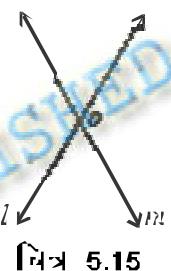
गुलेल



अंग्रेजी वर्णमाला का  
24 वाँ अक्षर

चित्र-5.10

इन चित्रों को ध्यान से देखने पर आप इनमें एक स्थानत ढाँड़ सकते हैं कि इनमें रेखाएँ एक दूसरे के एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती हैं या लाटती हैं। चित्र 5.15 में  $l$  और  $m$  दो रेखाएँ हैं तथा एक दूसरे को  $O$  बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती हैं।  $O$  बिन्दु इनमें उभयानेश्च है। इसी इन दोनों रेखाओं का प्रतिच्छेदन बिन्दु कहलाते हैं। या  $l$  वा  $m$  प्रतिच्छेदी रेखाएँ कहलाती हैं।



चित्र-5.15

### कुछ करें

चित्र 5.16 गे लकड़ाइए—

1. प्रतिच्छेदन बिन्दु —

2. प्रतिच्छेदी रेखाएँ —

3. ऐंगिक युग्म के कोण होते हैं?

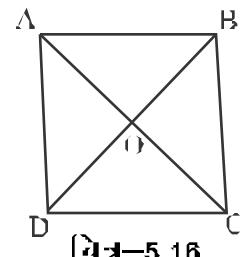
(i) शांपूरक (ii) मूरक

4. रेखा  $l$  वा  $m$  को जागे पीछे लकड़ाइए। क्या ये आमरा में एक दूसरे को काटती हैं। यदि लाटती हैं तो किसने बिन्दु पर काटती है?

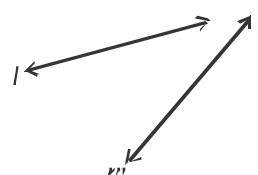
5. दो लोण आपस में निलकर ऐंगिक युग्म बनाते हैं तो दोनों लोण का सकार है—

(i) अद्युत्तमी (ii) अधिकम

(iii) शाधेककोण (iv) इक न्यूनकोण इक अधिककोण



चित्र-5.16



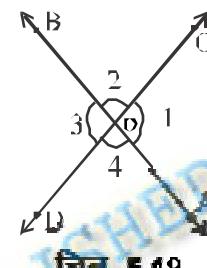
चित्र-5.17

### 5.1.6 अध्याधर समुख कोण (Vertically opposite angle)



चित्र 5.18

चित्र-5.18 ने एक सरल रेखा को एक दूसरे सरल रेखा काट रही है। अगर इस स्मान को हम दो रेखाओं द्वारा देखना चाहें तो वह वित्र-5.19 के रूप में होगी जिसमें  $\overleftrightarrow{AB}$  और  $\overleftrightarrow{CD}$  दो रेखाएँ एक दूसरे को  $O$  बिंदु पर काट रही हैं। इसमें चार कोण बन रहे हैं। इनमें  $\angle 1$  तथा  $\angle 3$  एवं  $\angle 2$  तथा  $\angle 4$  लम्बांभार समुख कोण के बुना हैं। आइए अब इन कोणों की सम्पर्कता बिन्दु पर किया जाए।  $\angle 1$  एवं  $\angle 2$  मिलकर एक शीर्षक युग्म बनाते हैं।



चित्र 5.19

$$\text{तब, } \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ \quad \therefore \angle 1 = 180^\circ - \angle 2 \quad \text{(i)}$$

जैसी प्रकार  $\angle 2$  एवं  $\angle 3$  मिलकर एक शीर्षक युग्म बनाते हैं।

$$\text{तब, } \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ \quad \therefore \angle 3 = 180^\circ - \angle 2 \quad \text{(ii)}$$

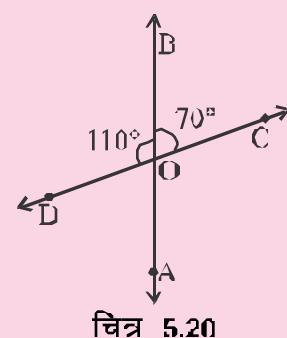
समीकरण (i) और (ii) से हम पाते हैं कि  $\angle 1 = \angle 3$

इस प्रकार हम दिया गया है  $\angle 2 = \angle 4$

हम कह सकते हैं कि दो दो सरल रेखाएँ एक दूसरे को काटती हैं तो उन्हींने लम्बांभार समुख कोणों के दो युग्म बनाते हैं तथा प्रत्येक युग्म के दोनों कोण समान मात्र होते हैं।

#### स्वयं करके देखिए

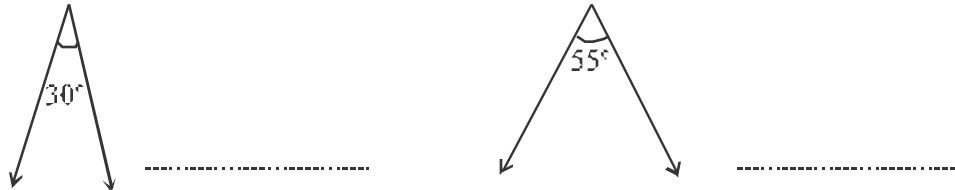
- वित्र-5.20 में  $\overleftrightarrow{AB}$  और  $\overleftrightarrow{CD}$  एक दूसरे को  $O$  बिंदु पर काटते हैं।  $\angle BOC=70^\circ$  तथा  $\angle BOD=110^\circ$  हैं तब  $\angle AOC$  एवं  $\angle AOD$  के माप बताइए।
- आपने आस-पास स लम्बांभार समुख कोण के दोनों कोण समान मात्र होते हैं।



चित्र 5.20

## प्रश्नावली 5.1

1. नीचे दिये गये कोणों का पूरक छोंद की सहायता से बनाइए-



2. निम्न कोणों का पूरक ज्ञात कीजिए-

(i)  $35^\circ$       (ii)  $54^\circ$       (iii)  $15^\circ$       (iv)  $78^\circ$

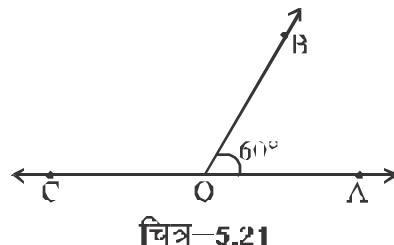
3. निम्न कोणों के संपूरक ज्ञात कीजिए-



4. एक कोण तथा उसके पूरक की माप समान है दोनों की माप बताइए।

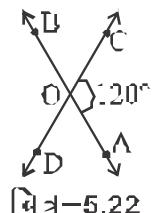
5. संपूरक कोणों के युग्म में यदि एक कोण न्यूनकोण है तो उसका संपूरक अधिक कोण होगा या न्यूनकोण? कारण सहित बताइए।

6. संलग्न चित्र में  $\angle AOB$  तथा  $\angle BOC$  एक अधिक युग्म बना रहे हैं। यदि  $\angle AOB=60^\circ$  हो तब  $\angle BOC$  की माप क्या क्या होगी?



चित्र-5.21

7. संलग्न चित्र में  $\angle AOC=120^\circ$  है, तब  $\angle BOC$ ,  $\angle BOD$  तथा  $\angle AOD$  का मान ज्ञात कीजिए।



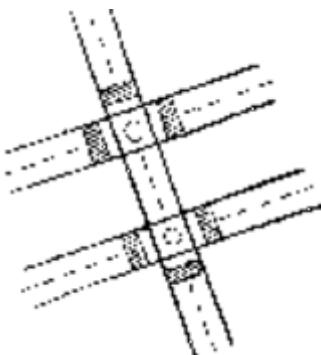
चित्र-5.22

## 5.2 त्रियक रेखा के गुण

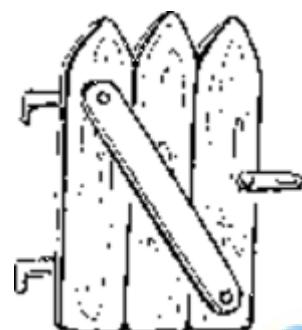
### 5.2.1. त्रियक छेदी रेखाएँ



दो रेलवे लाइन को पार करती एक दूसरी रेलवे लाइन



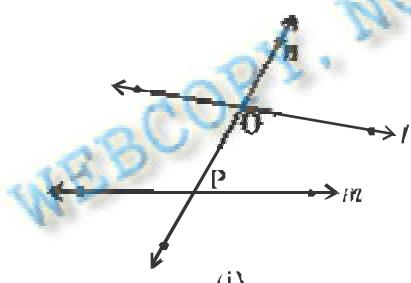
दो सदृकों को पार करती एक सदृक



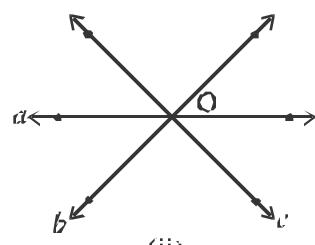
दरवाजे के तीन पटरियों को जोड़ती त्रियक पटरियाँ

चित्र 5.23

नायुक चित्र ला ध्यन, मे बताने पर आप गाते हैं कि यहाँ एक रेखा जो या दो से अधिक रेखाओं को भिन्न-भिन्न रेखाओं पर प्रतिलिप्त करती है। ऐसी रेखाएँ **त्रियक छेदी रेखाएँ** कहलाती हैं।



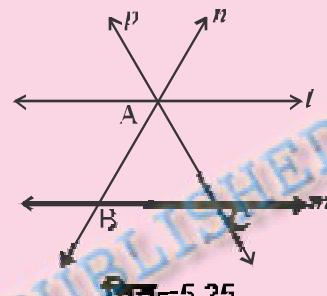
चित्र-5.24



यहाँ चित्र-5.24 के (i) में  $l$  और  $m$  जो रेखाएँ हैं जिन्हें इन  $n$  रेखा  $O$  तथा  $P$  द्वारा पर प्रतिलिप्त कर रखी हैं, उन्होंने  $n$  एक त्रियक छेदी रेखा है। (ii) में  $a$  और  $b$  दो रेखाएँ हैं जिन्हें  $c$  एक रेखा ही द्वारा  $O$  पर काटती है यह एक रेखा नहीं है, वही तीनों रेखाएँ  $a, b$  तथा  $c$  एक ही द्विन्दु 'O' से प्रुग्रह रहे हैं। एक द्विन्दु से प्रुग्रहने वाली रेखाएँ संगामी रेखाएँ कहलाती हैं।

## रवयं करके देखिए

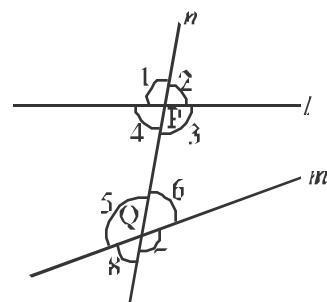
1. तथा  $m$  दो रेखाओं के लिए कितनी त्रियंक रखाएँ चाहीं ज्ञ सकती हैं?
2.  $l, m$  तथा  $n$  तीन रेखाओं के लिए रेखा  $p$  एक त्रियंक रेखा है। बताइए यहाँ कितने प्रतिक्षेप भिन्न हैं?
3. अपने आरा-पारा से ऐसी कुछ उदाहरण दीजिए जिनमें आप त्रियंक रेखा देख पाएं।
4. रासान्न विन को ध्यान से देखिए तथा निम्न प्रश्नों के उपरां दीजिए—
  - (i) क्या रेखा  $p$  रेखा  $l$  तथा  $m$  के लिए त्रियंक रेखा है?
  - (ii) क्या रेखा  $p$  रेखा  $l, m$  तथा  $n$  के लिए त्रियंक रेखा है?
  - (iii) रेखा  $p, n$  तथा  $l$  कैसी रखाएँ हैं? त्रियंक, समान्तर या संगामी?



चित्र-5.25

### 5.2.2 त्रियंक रेखा द्वारा दो दर्शावां को छाड़ने से बनने वाले कोण संगत कोण—

चित्र 5.26 नं. 1 एक त्रियंक रेखा है जो इन  $m$  दो रेखाओं के दो भिन्न भिन्न  $P$  और  $Q$  पर काटती है। इस प्रकार  $m$  और  $l$  प्रतिच्छेदी रेखाएँ हैं। इस प्रलार बनने वाले चार कोणों को  $\angle 1, \angle 2, \angle 3$  तथा  $\angle 4$  से दर्शाया गया है। ऊरी प्रकार  $n$  और  $m$  प्रतिच्छेदी रेखाएँ हैं तथा उनके प्रतिच्छेदन बिन्दु पर  $m$ -ने वाले वार कोण  $\angle 5, \angle 6, \angle 7, \angle 8$  हैं। ऊरी प्रकार कह सकते हैं कि  $m$  त्रियंक रेखा द्वारा रखाएँ तथा  $m$  का कानून सु कुर और कण बनाते हैं। त्रियंक रेखा के बार्थी और बनने वाले कोण  $\angle 1, \angle 4, \angle 5, \angle 8$  हैं तथा त्रियंक रेखा के दार्थी और बनने वाले कोण  $\angle 2, \angle 3, \angle 6, \angle 7$  हैं। ऊरी प्रकार  $l$  और  $m$  रेखा के ऊपर और नीचे भी चर-चार कोण बन रहे हैं। त्रियंक रेखा  $n$  के बार्थी या दार्थी तरफ  $l$  के ऊपर या नीचे और  $m$  के ऊपर या नीचे बना कोण युग्म क्रमशः संगत कोणों का युग्म कहलाता है। ऊपर के चित्र में  $\angle 1$  तथा  $\angle 5, \angle 2$  तथा  $\angle 6, \angle 4$  तथा  $\angle 8$  तथा  $\angle 3$  तथा  $\angle 7$  संगत कोण के युग्म हैं।

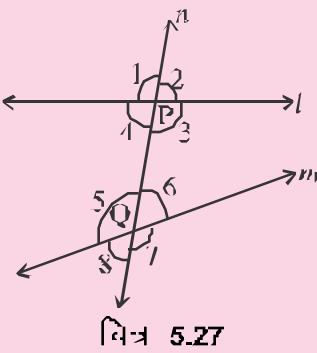


चित्र 5.26

### स्नाय करके देखिए

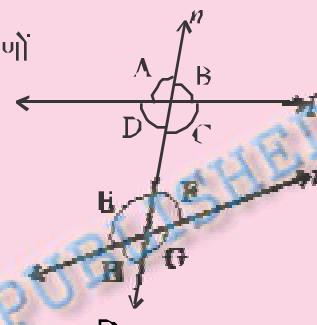
1. वै-5.27 में देखकर रास्ते कोणों के बर्तनों युग्मों को लिखिए-

- (i) \_\_\_\_\_ और \_\_\_\_\_
- (ii) \_\_\_\_\_ और \_\_\_\_\_
- (iii) \_\_\_\_\_ और \_\_\_\_\_
- (iv) \_\_\_\_\_ और \_\_\_\_\_



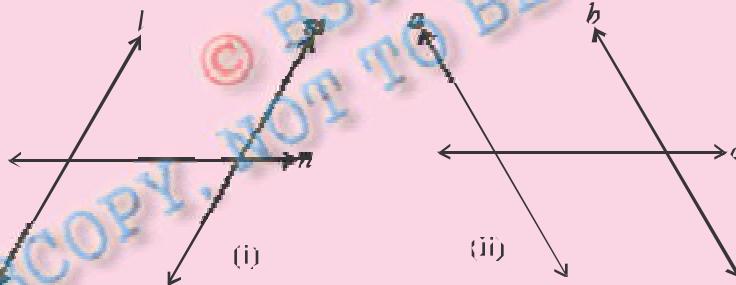
वित्र-5.27

2. वै-5.28 में देखकर रेखा n के बारी और बने रास्ते कोणों के युग्मों के नाम लिखिए।



वित्र-5.28

3. चित्र-5.29 में कर्णों का नामित कर सारणी में संगत लग्न युग्मों को लिखिए।

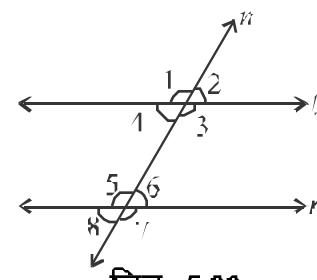


वित्र-5.29

### 5.2.3 एकान्तर कोण

रेखा l और m का तिर्यक रेखा n द्वारा उनहोंने गठित है। प्रतिच्छदन बिन्दु पर बगे कर्णों को चित्र-5.30 में देखाय गया है।  $\angle 3$  और  $\angle 5$  तथा  $\angle 4$  और  $\angle 6$  द्वितीय रेखा के दोनों तरफ के अन्तर कोणों का युग्म है जो आगाम में संलग्न नहीं है। ये अन्तर कोणों के युग्म हैं।

इसी प्रकार  $\angle 2$  और  $\angle 8$  तथा  $\angle 1$  और  $\angle 7$  भी बाह्य एकान्तर कोण हैं।

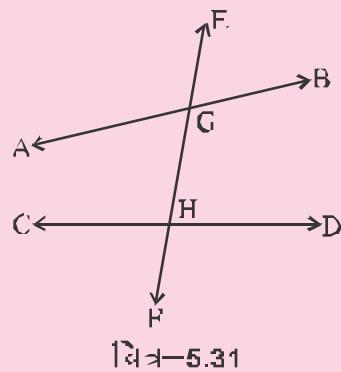
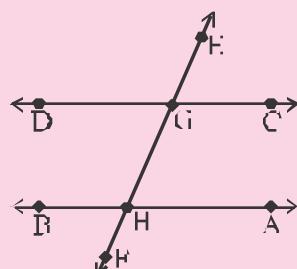


चित्र-5.30

### स्वयं करके देखिए

1. चित्र-5.31 में व्याय एकान्तर कोण तथा अन्तः एकान्तर कोणों का युग्म जो छॉटकर लिखिए—

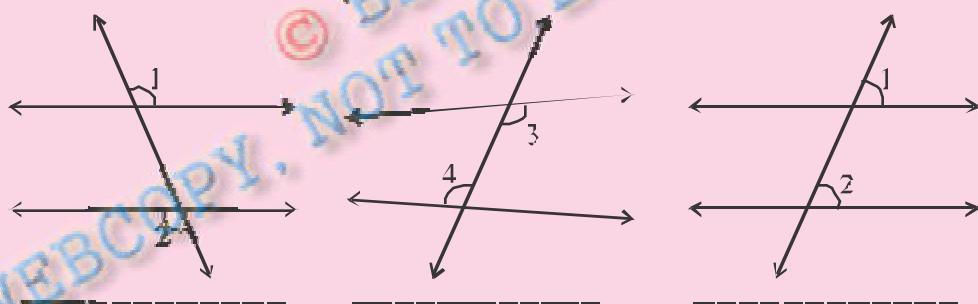
- (i) व्याय एकान्तर कोण
- (ii) अन्तः एकान्तर कोण



2. चित्र-5.32 में संगत कोणों तथा एकान्तर कोणों के युग्म लिखिए।

चित्र-5.32

3. दर्शाइ गए के 3 युग्म के पहलानीय तत्त्वपूर्वक दोनों से कोण युग्म हैं। राख फोर्म अन्तः एकान्तर कोण या व्याय एकान्तर कोण?

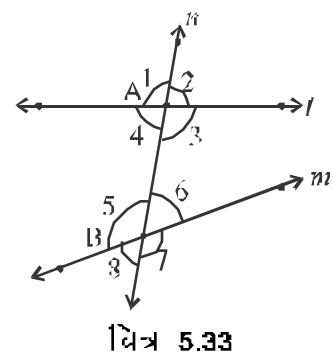


#### 5.2.4 बाह्य एवं अन्तः कोण (Exterior & interior angle)

यद्यपि A त्रियक रेखा द्वारा l और m द्वे रेखाओं को छिन्न A एवं B पर काटने से कुल 8 कोण बनते हैं। यद्यपि रेखा l तथा m के बाहर की ओर बनने वाले कोण बाह्यकोण तथा रेखा l और m के अन्दर की ओर बनने वाले का अन्तःकोण कहलते हैं।

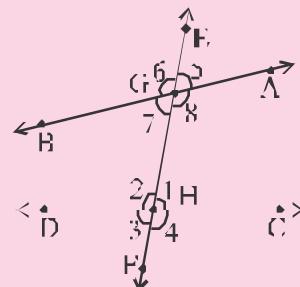
$$\text{बाह्यकोण} = \angle 1, \angle 2, \angle 7 \text{ तथा } \angle 8$$

$$\text{अन्तःकोण} = \angle 3, \angle 4, \angle 5 \text{ तथा } \angle 6$$



### स्वयं करके देखिए

- बहुधारोगों के नाम लिखिए।
- छातारोगों के नाम लिखिए।

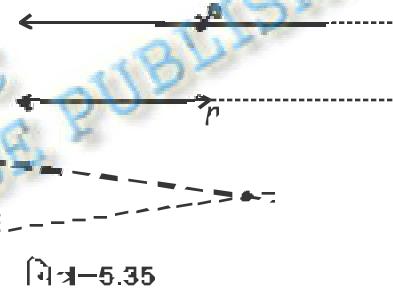


चित्र-5.34

### 5.3 समांतर रेखाओं के गुण

#### 5.3.1 समांतर रेखाएँ (Parallel lines)

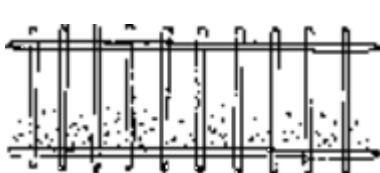
किसी तल नं खींची गई दो रेखाओं गर विचार करें। यदि दोनों उन्हें इन रेखाओं को उसीमेत बढ़ाया जाये तो उन पर हैं या तो  $2\angle 4$  ए ए  $5\angle 7$  दूर दूर ए ए इन्दु पर मिलते हैं या पिछे छोड़ और उन्हें नहीं मिलते। जो रेखाएँ आपस में मिलती हैं तो प्रतिच्छेदी रेखाएँ हैं तथा जो आपस में कभी नहीं मिलतीं समांतर रेखाएँ कहलाती हैं। यदि तब ज्ञान समांतर रेखाएँ हैं तो इसे  $m/p$  द्वारा प्रदर्शित करते हैं।



चित्र-5.35



नदी या नहर का दो किनारा



रेलमें लाइन के दो रेल

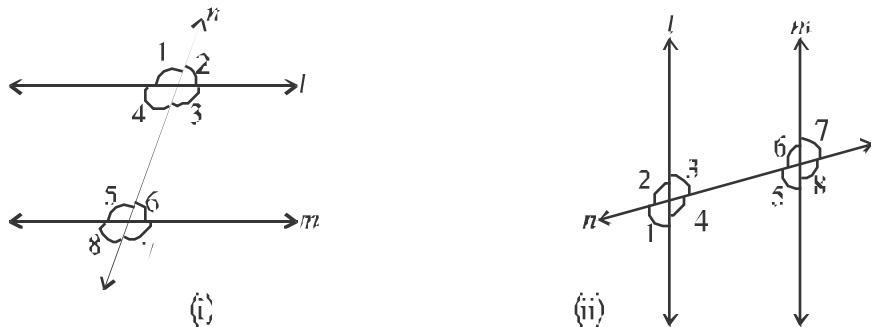


पुराव के आगने—सामने के दो किनारे

चित्र-5.36

### 5.3.2 समांतर रेखाओं की त्रियक रेखा-

1 सैर  $m$  दो र मान र रेखाएँ हैं जिनको एक त्रियक रेखा काटती है। इस प्रकार बने 8 कोणों के गाप को त्रियक रेखा की रहाये से निम्न सारणी के अनुसार-



विनि-5.37

चेत्र	$\angle 1$	$\angle 2$	$\angle 3$	$\angle 4$	$\angle 5$	$\angle 6$	$\angle 7$	$\angle 8$
(i)								
(ii)								

यहाँ इन पाते हैं कि  $\angle 1 = \angle 4$ ,  $\angle 2 = \angle 5$ ,  $\angle 3 = \angle 7$  तथा  $\angle 4 = \angle 8$  यानी संगत कोणों के बीच र मान गाप की है।

फिर  $\angle 1 = \angle 2$ ,  $\angle 2 = \angle 3$ ,  $\angle 3 = \angle 5$  तथा  $\angle 4 = \angle 6$

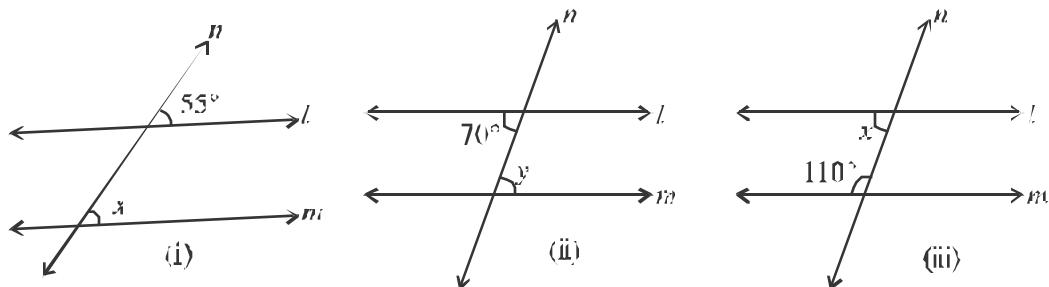
अनी एकान्तर कोणों के बाह्य एवं अन्तर्बीन र मान गाप जो है। फिर  $\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$  वा  $\angle 3 + \angle 6 = 180^\circ$  यानी त्रियक रेखा के एक ओर के अन्तर कोणों के बीच सम्पूरक यानी  $180^\circ$  है।

इस प्रकार हग इस नीतिये पर पहुँचते हैं कि दो लान्तर रेखाओं को एक त्रियक रेखा काटती है तब

- (i) संगत कोणों के प्रत्येक कुण्डों के कोणों की र मान होती है।
- (ii) एकान्तर कोणों के ब्रत्यल सुन में लणों के माप समान होती है।
- (iii) त्रियक रेखा के एक ही ओर के अन्तर कोणों का योग  $180^\circ$  यानी सम्पूरक हाल है।

रवय करके देखिए

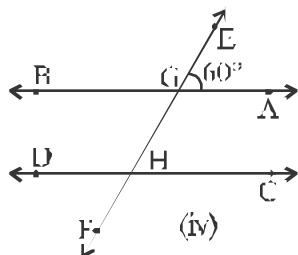
नीचे दिए गए चित्रों में  $l \parallel m$  हो तो अज्ञात कोणों के माप ज्ञात कीजिए।



$$\angle x = \dots$$

$$\angle y = \dots$$

$$\angle z = \dots$$



$$\angle BGH = \dots$$

$$\angle DHF = \dots$$

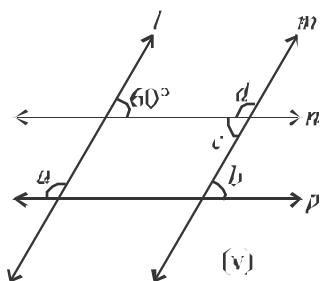
$$\angle GHC = \dots$$

$$a = \dots$$

$$b = \dots$$

$$c = \dots$$

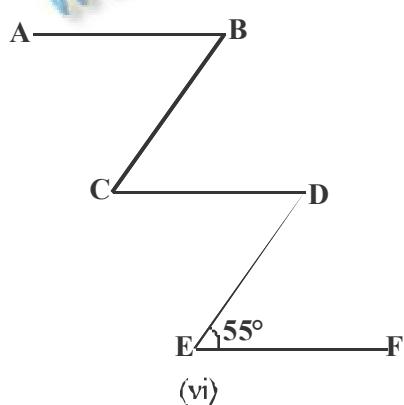
$$d = \dots$$



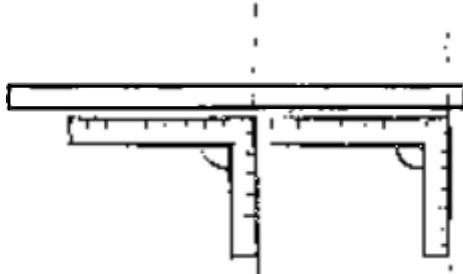
$$\angle B = \dots$$

$$\angle C = \dots$$

$$\angle D = \dots$$



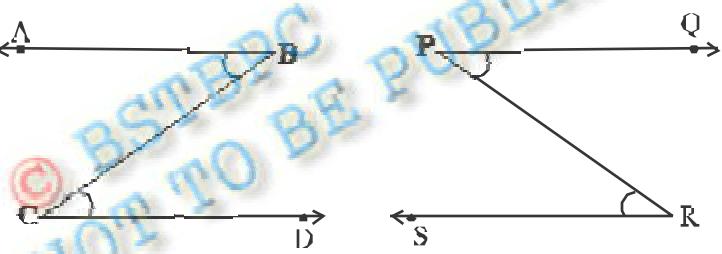
### 5.3.3. रामानूर रेखाओं की जाँच-



वित्र-5.38

आइए अब निवार करें। कि जब दो रेखाएँ दी हुई हों, तब वे समान्तर हैं या नहीं, इसकी जाँच कैसे हो। दैनिक जीवन में हमने अव्सर सनन्तर रेखाओं की उत्त्वयक्ता पड़ती रहती है। नक्शा बनाने वाले, भैरवी, बढ़ी अनार विन 5.38 में दिखायी गयी दरकुँझे का प्रयोग करते आपको दिखाइ पड़ जायगा। यहाँ वे रेखाओं को सनन्तर करने के लिए दो L को त्वकेल जर रखकर संगत कोण लो बचावर करते हैं। अतएव हन सकत हैं—

“जब दो रेखाओं को टोककर रेखा इस प्रकार काटे कि सभी कोणों के युग्म रामान हों तब रेखाएँ रामान होती हैं। इब वित्र-5.39 पर निवार कीजिए। इसमें Z की रोधी एवं उल्पान आकृति बन रहे हैं। इन आकृतियों ने  $AB \parallel CD$  तथा  $PQ \parallel SR$  दिलहै पड़ रही है, एसा अतः समान्तर कोणों के बचावर होने के कारण हो रहा है। अतः इस बह कह राफ़े हैं कि वादे दो रेखाएँ को एक टोककर रेखा आकृती है तथा एकान्तर कोणों के युग्म समान हं तब रेखाएँ सनन्तर होती हैं।”

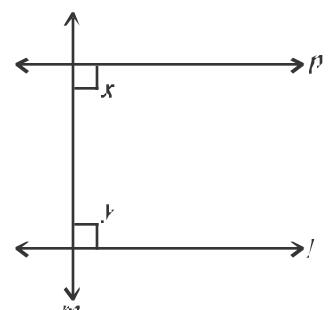


वित्र-5.39

### कुछ करें

**प्र० १** रेखा  $l$  लीजिए। निवार  $l$  के लालवत् एक रेखा  $m$  रखें। अब एक दूसरी रेखा  $p$  इस प्रकार ऊंचिर कि वह  $m$  के लन्ववत् हो। यहाँ रेखा  $p$  तथा  $l$ , रेखा  $m$  गर लम्ब है। दोनों रेखाएँ सनन्तर हैं त्वं कि  $\angle x - \angle y = 180^\circ$ .

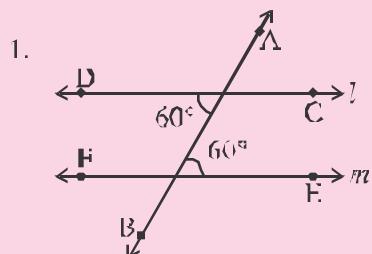
इस प्रकार हम कह सकत हैं कि जब दो रेखाओं को इत्यंक रेखा इस प्रकार काटे कि तियंक रेखा के एक ही ओर दोने लंबों के ज्याएँ  $180^\circ$  हो, तब दोनों रेखाएँ रामान होंगी।



वित्र-5.40

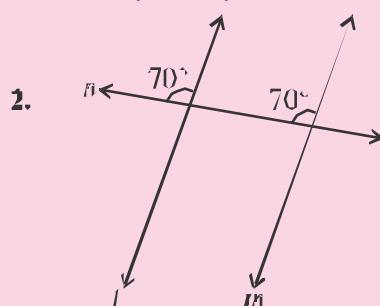
### स्वयं करके देखिए

नीचे देए ए त्रिभूमि बताइए रेखाएँ  $l$  व  $m$  नाम नार हैं या नहीं र ये में कोरा भी हैं।



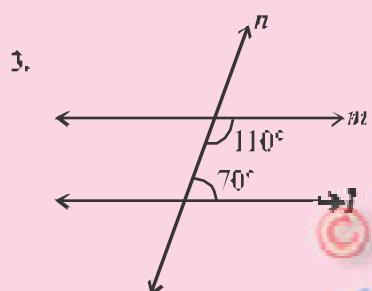
उ॒ / नहीं

करपा—



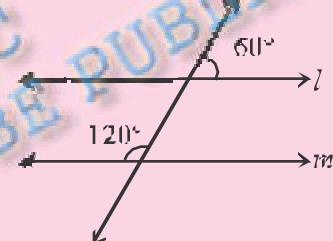
उ॒ / नहीं

करपा—



उ॒ / नहीं

करपा—



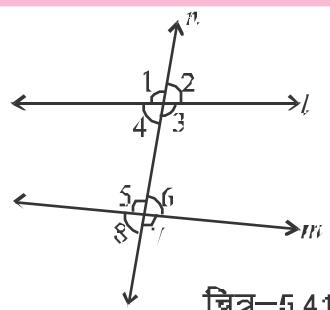
उ॒ / नहीं

करपा—

### प्रश्नावली-5.2

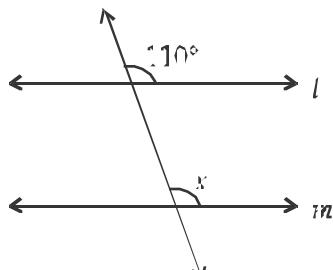
#### चित्र में बताइए—

- संगत कोणों व युग्मां के नाम।
- उत्तर एकात्तर कोणों के युग्मां के नाम।
- बहु उकात्तर कोणों के युग्मां के नाम।
- तियंक रेखा के एक ही ओर व अन्तः लाणों का नाम।

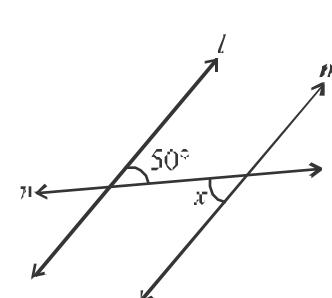


चित्र-5.41

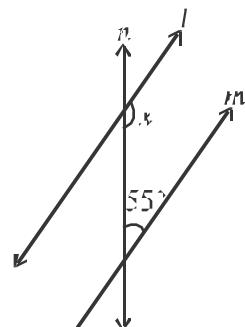
5.  $l \parallel m$ , तब  $x$  की मात्रा होड़ए।



(i)



(ii)

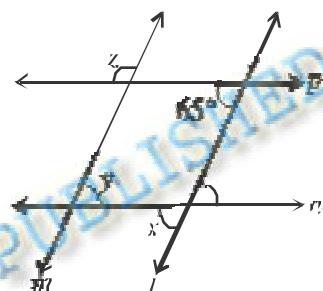


(iii)

6. चित्र-5.42 में  $l \parallel m$  तथा  $p \parallel n$

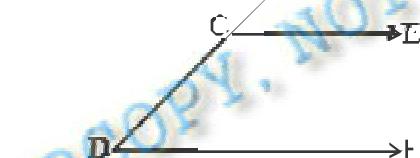
तब  $\angle x$  तथा  $\angle y$  का मान ज्ञात कीजिए।

7. चित्र-5.42 में  $l$  का नाम क्या होगा? तथा इसमें अनन्त वाली रेखाओं के प्रकार का होगा? क्या बताइए।



चित्र-5.42

8.



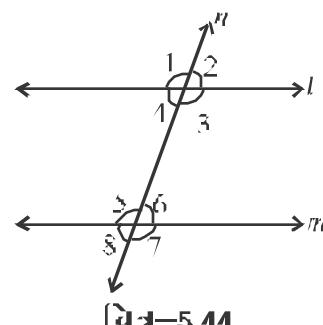
चित्र-5.43

चित्र-5.43 में  $AB \parallel CE$  तथा  $CE \parallel DF$  तब  $\angle B = 45^\circ$  तब  $\angle C$  तथा  $\angle D$  का मान ज्ञात करें। क्या  $AB \parallel DF$  यदि हों तो क्यों?

9.

चित्र-5.44 में  $l$  और  $m$  तो रेखाओं को  $n$  से इसके रेखा काटती है तब

- (i) किन-किन कानूनों के विवर होन पर  $l \parallel m$  होगा?
- (ii) चित्र-5.44 में  $\angle 1 + \angle 5 = 180^\circ$  है। तब व्या  $l \parallel m$  होगा?



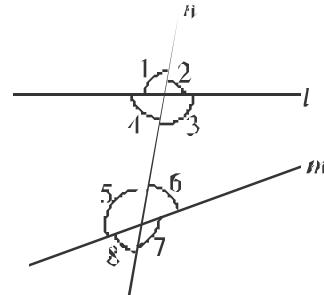
## हमने सीखा

- दो कोणों की  $< 90^\circ$  हो तो वे दोनों गोलकर पूरक कोण युग्म तथा अलग-अलग आगस में एक दूसरे के पूरक कहलाते हैं।
- कोण का रेसा युग्म जोन के मानों का योग  $180^\circ$  हो, संपूरक कोण कहलाते हैं। युग्म के दोनों कोण एक दूसरे के संपूरक कहलाते हैं।
- कोण का रेसा युग्म जोन में दोनों काग इस प्रकार तंत्रज्ञ हैं कि लगाक शीर्ष सभ्यनिष्ठ हो, कोण बनाने पाले दुजाओं में से एक भूजा उन्नयनिष्ठ है तथा कोण बनाने वाली जो युजाएँ उत्तमानेष्ट नहीं हैं, वे उत्तमानेष्ट युजा के  $100-105^\circ$  हैं, आरान् कोण कहलाते हैं।
- जब दो कोणों का योग  $180^\circ$  हो तब वे ऐसिएक युग्म बनते हैं।
- जब दो जरल रेखाएँ एक दूसरे को काटती हैं तो लक्ष्यभूर सम्मुख कोणों का दो युग्म बनता है तथा प्रत्येक युग्म के दोनों काग समान नज के होते हैं।
- एक रेखा दो या दो से अधिक रेखाओं के भिन्न-भिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेदित करती है, तिर्यक रेखा कहलाती है।

एक बिन्दु से हालर गुजरन वाली सभी रेखाएँ समानों रेखाएँ कहलाती हैं।

तिर्यक रेखा छापा दे रेखाओं को काटने से

- संगत कोणों का जार जोड़  $\angle 2 + \angle 6, /1$   
एवं  $\angle 5, \angle 4$  एवं  $\angle 3, \angle 7$  बनते हैं।
  - एकान्तर कोण का तो जोड़  $\angle 3 + \angle 5$  या  $/1 + /6$  बनते हैं।
  - एकान्तर बाह्य कण का तो जोड़  $/1 + /7$ , तथा  $/2 + /8$  बनते हैं।
- जब दो समान्तर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा काटती है तब
    - संगत काग के ब्रत्यज युग्मों ने कोणों की माप जमान होती है।
    - एकान्तर कोणों के प्रत्येक युग्म में कोणों की माप समान होती है।
    - तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अन्तः कोणों का योग  $180^\circ$  होता है।
  - दो रेखाएँ समान्तर होंगी, यदि और केवल यदि
    - संगत कोण बराबर हों
    - एकान्तर कोण बराबर हों तथा
    - एक ही ओर के अंतः कोणों का योगफल  $180^\circ$  हो।

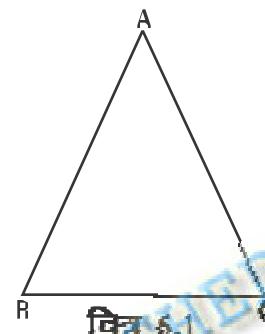


## अध्याय-6

# त्रिभुज और उसके गुण

### गूणिका

पिछली कक्षा नं हनन त्रिभुज के बारे में जड़ा है। हमें रेखा तंत्रों से यहाँ सरल आकृति त्रिभुज है। त्रिभुज ने हीन शीर्ष तीन भुजें तथा तीन कोण होते हैं। वित्र 6.1 में  $\triangle ABC$  एक त्रिभुज है तथा  $A, B$  तथा  $C$  शीर्ष हैं।  $AB, BC$  तथा  $CA$  भुजें हैं, तथा  $\angle ABC, \angle BCA, \angle CAB$  तीन कोण हैं। शीर्ष  $A$  के सामने ली भुजा  $BC$  तथा  $AC$  के सामने का कोण  $\angle BAC$  है।



हम त्रिभुजों का लगकी भुजा एवं कोण का साधारण द्वारा यांत्रिक तरीके से भी उद्घयन कर सकते हैं। भुजा के आधार पर त्रिभुज के तीन प्रकार होते हैं जैसा त्रिभुज, समचिह्नित तथा विषनबाहु त्रिभुज। उस प्रकार कोण के आधार पर त्रिभुज तीन प्रकार होते हैं, न्यूनकोण, ऋणकोण तथा अद्वितीयकोण त्रिभुज।

### प्रयास कीजिए

- वित्र 6.2 में त्रिभुज  $DEF$  के शीर्ष, भुजा एवं कोण के नाम लिखें।

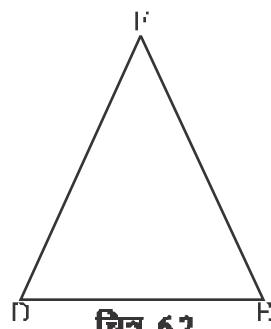
---

---

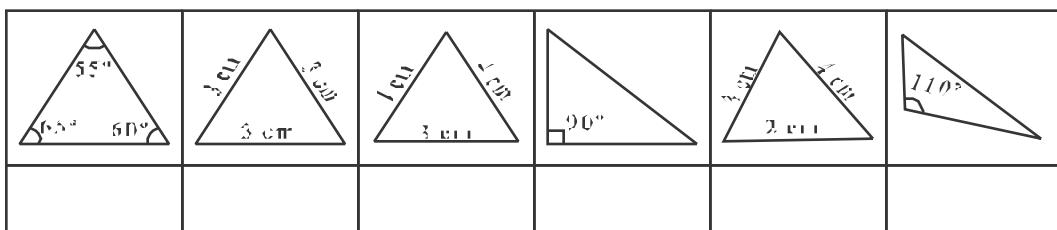
---

- वित्र 6.2 के सामने याली भुजा के नाम बताइए।

---

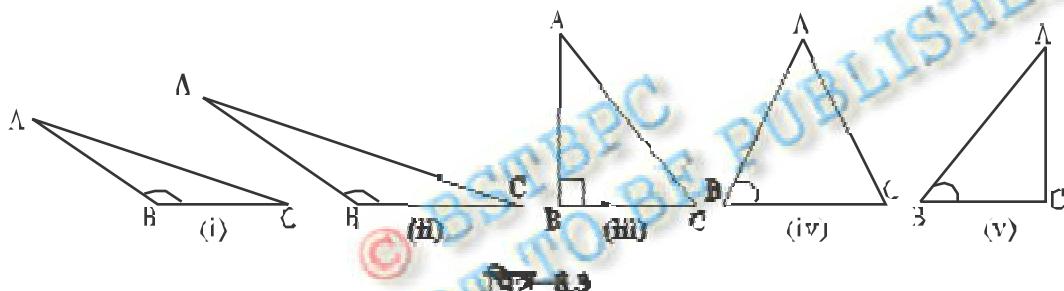


3. नीचे दिए गए प्रत्येक त्रिभुज के नीचे लिखिए कि वह कौनसा त्रिभुज है? (समबाहु, समद्विबाहु, समकोण, चूनकोण, अधिककोण या विषमबाहु)



### 6.1 त्रिभुज के कोणों के योग का नियम

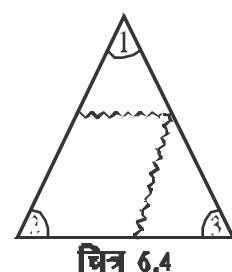
नीचे बने त्रिभुजों के कोण का मान जो दरिख़—



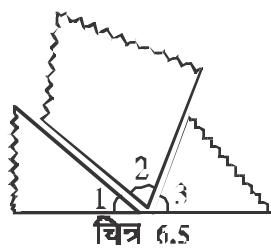
उमर के चित्र नं त्रिभुज ABC में ∠B की नप का घटते हुए दिखाया गया है। हम पाते हैं कि जैसे जैसे ∠B का मान घट रहा है वैसे-वैसे ∠A और ∠C का मान बढ़ रहा है। अर्थात् त्रिभुज में यीनों कोणों का घटना या बढ़ना किसी एक नियम के लिए लेता है तथा त्रिभुज के कोणों का यौगिकी नियम जो बहु होता है। आइए इसके सौखने की कोशिश करें।

### कुछ करें

आपने नोट बुक पर एक त्रिभुज बनाइ अब परकर के साहायता से त्रिभुज के तीन कोणों को रान-डिज्या वाली वापों से पर्शिये। तथा उन पर चित्र नं 1, 2 तथा 3 अंकित करें। अब त्रिभुज के तीन तुकड़ों में इस प्रकार कागिए कि ग्रहण तुल्य नं त्रिभुज का एक-एक कोण हो।

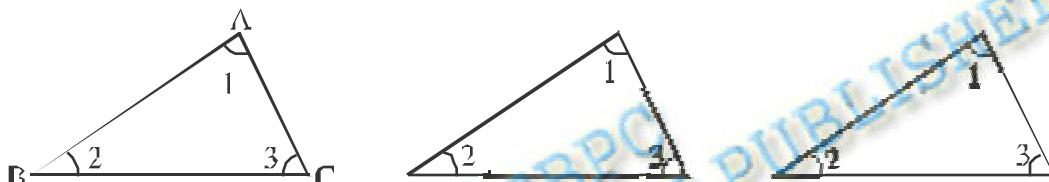


अब तीनों दुम्बाओं में बने कोण को इस प्रकार रो व्यवस्थित कीजिए। कि उनके शीर्ष एक रूप से एक बिन्दु पर रहे (चित्र 6.5)। यहाँ  $\angle 1$ ,  $\angle 2$  और  $\angle 3$  मिलकर एक सरल रेखा बनाते हैं तथा उसमें त्रिज्या वाले चारों से दर्शाये गए छान एक सरल रेखे पर व्यवस्थित होते हैं। यूँकि एक सरल रेखा पर उन सम्मुख कोणों का योग वो समाके है कि उसका अन्तर हो। है और यूँकि एक रमणीय  $90^\circ$  अतः वो समाके है  $= 180^\circ$  अपि  $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ । इस प्रकार हम निष्कर्ष निलंबन करते हैं कि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग  $180^\circ$  होता है। आइए इस निष्कर्ष को हम एक अन्य तरीके से भी जानने की कोशिश करें।



चित्र 6.5

इस तथ्य को आप एक अन्य विधि द्वारा भी देख सकते हैं। किसी  $\triangle ABC$  के तीन प्रतिलिपि बनाइए (चित्र 6.6)।



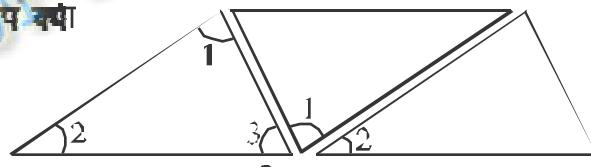
चित्र 6.6

इन तीनों लो अलूते 6.7 की भीड़ मिलाकर तीक से देखिए।

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$  के बारे में आप क्या

अवल लग करते हैं?

(क्या आप यहाँ तीक कोण संबंधित गुण भी देख पत्ते हैं?)



चित्र 6.7

फुट करें

अपनी अभ्यन्तरीय पुस्तिका में कोई तीन त्रिभुज, जैसे  $\triangle ABC$ ,  $\triangle PQR$  तथा  $\triangle XYZ$  लियें। इन त्रिभुजों के प्रत्येक कोण की मात्रा एक कोण गापक द्वारा गापकर जाए कीजिए। इन तीनों को तालिका 6.8 में द्वारा प्रकार लिखिए।

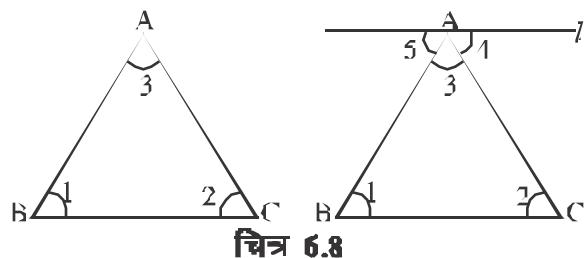
$\triangle$ का नाम	$\angle$ कोणों की माप			तीनों कोणों की मापों का योग
$\triangle ABC$	$m\angle A =$	$m\angle B =$	$m\angle C =$	$m\angle A + m\angle B + m\angle C =$
$\triangle PQR$	$m\angle P =$	$m\angle Q =$	$m\angle R =$	$m\angle P + m\angle Q + m\angle R =$
$\triangle XYZ$	$m\angle X =$	$m\angle Y =$	$m\angle Z =$	$m\angle X + m\angle Y + m\angle Z =$

**प्रयत्न:** त्रिभुज के तीनों कोणों की मात्रा का योग  $180^\circ$  होकर है। इस रख्य को सर प्रिय करने के लिए हम इन तीनों कोणों का उपयोग करें।

**दिया है—**  $\triangle ABC$  के तीन कोण

$\angle 1, \angle 2$  तथा  $\angle 3$  हैं। (विन 6.8)

दिखाना है:  $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$



शीर्ष A से गुज़ बढ़ी के समान्तर रेखा / खींची

**उपपत्ति**      **चरण**      **कारण**

(i)                   $\angle 1 = \angle 5$        $\overline{BC}$  तथा AB एक तिर्यक रखा है। अतः एकान्तर कोण समान होने चाहिए।

(ii)                   $\angle 2 = \angle 4$        $\overline{BC}$  तथा AC एक तिर्यक रेखा है। अतः एक नार कोण समान होने चाहिए।

$$\begin{aligned} & \text{(i) + (ii)} \\ & \angle 1 + \angle 2 - \angle 5 + \angle 4 \\ & \angle 1 + \angle 2 - \angle 3 = \angle 5 + \angle 4 + \angle 3 \\ & \qquad \qquad \qquad = 180^\circ \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{दोनों पक्षों में } \angle 3 \text{ जोड़ने पर} \\ \angle 3, \angle 4, \angle 5 \text{ एक रखा पर बने} \\ \text{कोण हैं तथा एक रेखा पर बने} \\ \text{कोणों का योग } 180^\circ \text{ होता है।} \end{array}$$

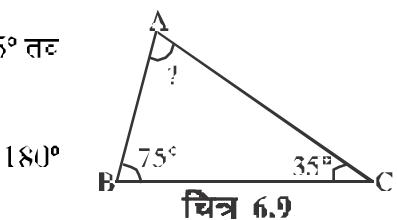
**अर्थात्** त्रिभुज के तीनों कोणों का योग  $180^\circ$  याने दो सम्मोहन का बराबर होता है।

**उदाहरण—1.** दिए गए त्रिभुज में  $\angle B = 75^\circ, \angle C = 35^\circ$  तब  $\angle A$  के माप ज्ञात कीजिए।

हम जानते हैं कि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग  $180^\circ$  होता है, अतः  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

$$\text{या, } \angle A + 75^\circ + 35^\circ = 180^\circ$$

$$\text{या, } \angle A + 110^\circ = 180^\circ$$

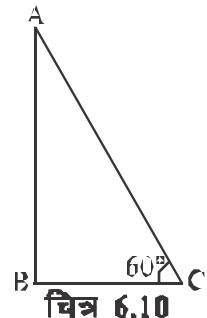


$$\text{या, } \angle A = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$

**उदाहरण-2.** दिए गए चित्र में  $\triangle ABC$  एक समकोण त्रिभुज है जिसमें कोण B समकोण है तथा कोण C का माप  $60^\circ$  है। कोण A का माप छात जीजिए।

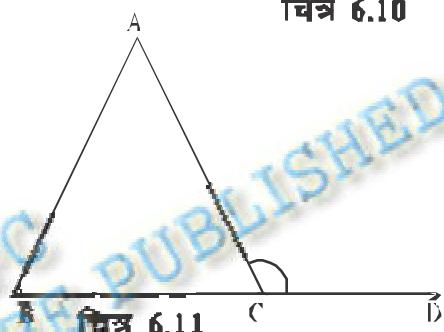
समकोण त्रिभुज ABC में

$$\begin{aligned} \angle A + \angle B + \angle C &= 180^\circ \\ \Rightarrow \angle A + 90^\circ + 60^\circ &= 180^\circ \quad (\because \angle B = 90^\circ) \\ \Rightarrow \angle A + 150^\circ &= 180^\circ \\ \Rightarrow \angle A &= 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ \\ \text{अतः } \angle A &= 30^\circ \end{aligned}$$



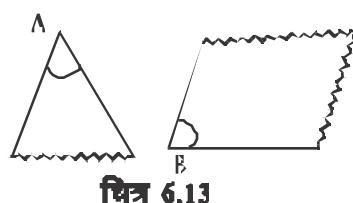
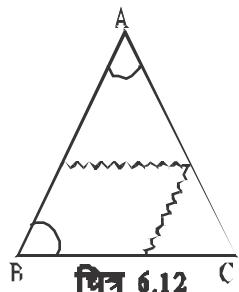
## 6.2 बाह्य कोण, अन्तर्वल्लभ कोण

चित्र 6.11 में त्रिभुज ABC में BC भुज के C के दिशे में D बिन्दु तक बढ़ाया गया है। इस C बिन्दु पर बना कोण  $\angle ACD$  किंवुज के बाह्य भाग में बना लगता है। ऐसे बाह्य कोण अन्य त्रिभुजों को बढ़ाकर भी प्राप्त किया जा सकता है।



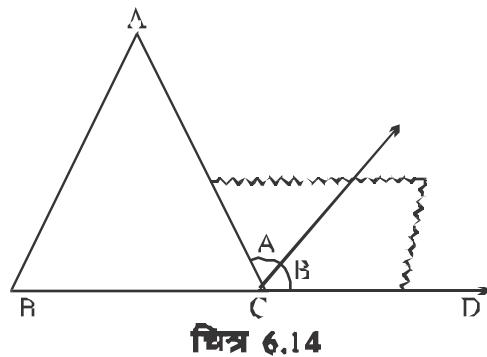
अतः  $\angle ACD$  त्रिभुज ABC के बाह्य C पर बना एक बाह्य कोण बनता है। यहाँ  $\triangle ABC$  के तीनों कोणों में  $\angle C$  बाह्य कोण  $\angle ACD$  के बाह्य भूज कोण है,  $\angle A$  व  $\angle B$  बाह्य कोण से दूर रिक्त कोण है जो त्रिभुज के आन्तरिक कोणों में है। इस C पर बाह्य कोण के लिए  $\angle C$  संलग्न अन्तर्वल्लभ कोण तथा  $\angle A$  रवं  $\angle B$  समगुण अन्तर्वल्लभ कोण है।

आइए अब बाह्य कोण रवं अन्तर्वल्लभ कोणों नं संबंध को देखें। एक दूसिंह पर त्रिभुज  $\triangle ABC$  का दूसरा कोण (चित्र 6.12) उब ट्रिसिंह चेनर को इस तरह को हिस्सों में बाँटिए कि  $\angle A$  उक हिस्से पर तथा  $\angle B$  दूसरे हिस्से पर हो, (चित्र 6.13)



अब  $\angle A$  और  $\angle B$  को संलग्न कर  $\angle ACD$  पर लेखें। क्या ये दोनों कोण  $\angle ACD$  को पूरी तरह ढ़क लेते हैं? चित्र 6.14 को देखने से यह पत्ता चलता है कि  $\angle A$  और  $\angle B$  एक साथ निलकर  $\angle ACD$  को पूरी तरह ढ़क लेते हैं।

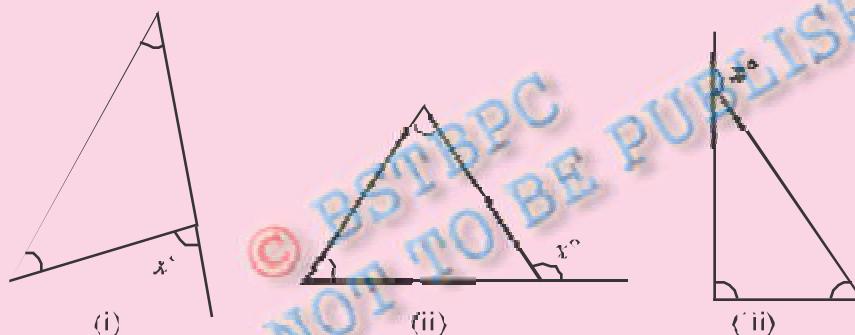
तब  $m\angle ACD = m\angle A + m\angle B$  यानी किसी त्रिभुज का बाह्य कोण अपने दोनों सम्मुख अन्तः कोणों के उत्तर ले परावर होता है।



चित्र 6.14

### स्वयं करके देखिए

नीचे दिए गए त्रिभुजों में दिए गये हवा का व संगत अन्तः अधिगुण कोणों को न पैदा करने के लिए तथा  $x$  का मान ज्ञात कीजिए।

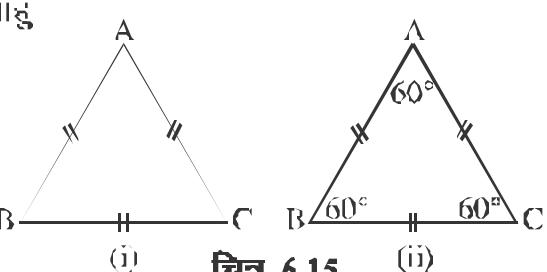


### त्रिभुज के कोण व मुण्ड में संबंध:

(i) विशेष त्रिभुज: समबाहु तथा रागद्विवाहु

एक त्रिभुज, जिसकी तीनों मुख्यकोणों की माप समान हो, समबाहु त्रिभुज कहलाता है।

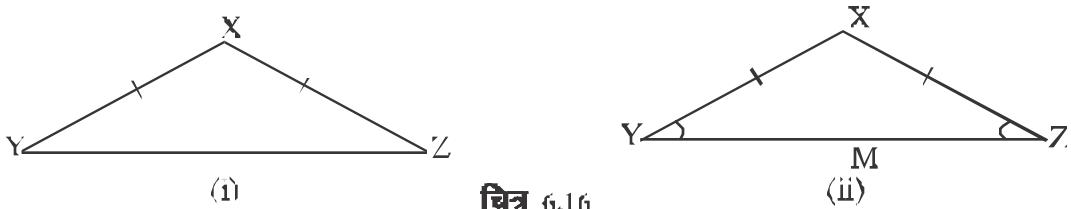
एक समबाहु त्रिभुज ABC (चित्र 6.15) बनाइए। इसके प्रतिरूप उनी हीसी नाप का एक और  $60^\circ$  का त्रिभुज कामगिरी से बनाएं। वहले त्रिभुज के रिक्त सभी हुए हर वर दूसरा त्रिभुज इसे ढ़कते हुए रखें। दूसरा त्रिभुज जहल को पूरी तरह ढ़क लेता है। दूसरे त्रिभुज का एहले त्रिभुज पर किसी भी तरह दुमाकर रखें, तो दोनों त्रिभुज फिर भी एक दूसरे का ढ़क लते हैं। क्या आगे देख पाते हैं कि



चित्र 6.15

यदि त्रिभुज की तीनों भुजाएँ रामान माप की हैं तब तीनों कोण के समान नाम के ही होते हैं। हम निष्कर्ष निकालते हैं कि रामशाह त्रिभुज में (i) तीनों भुजाएँ रामान माप की होंगी हैं। (ii) ग्रस्यक काण की नप 60° होती है।

एक त्रिभुज, जिसकी दो भुजाओं की माप समान हों, एक समद्विबाहु त्रिभुज कहलाता है।

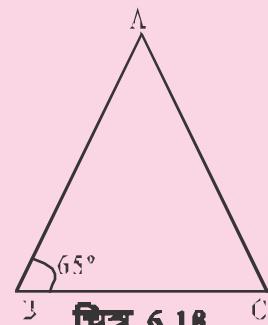
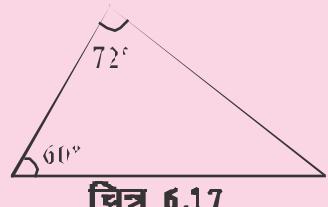


कामज़ ने दृष्टिकोण से इक समद्विबाहु त्रिभुज XYZ का देखा, जिसमें भुजा XY = भुजा XZ है (आकृति 6.16)। इसे इस प्रकार गोडिय चित्र में इसके शीर्ष Y पर आधारित हो। अब शीर्ष X से गुजराने वाली रेखा XM इस त्रिभुज का समनित अक्ष है। अब देखते हैं कि  $\angle Y$  और  $\angle Z$  एक दूसरे का नुपर्त्य ढंग लेते हैं। XY और XZ त्रिभुज की सभी भुजाएँ कहलाती हैं। YZ अधार,  $\angle Y$  तथा  $\angle Z$  आधार कोण कहलाते हैं जो परस्पर समान होते हैं।

इस प्रकार हम निष्कर्ष निकालते हैं कि समद्विबाहु त्रिभुज में (i) दो भुजाएँ बराबर लंबाई की होंगी हैं। (ii) रामान भुजाओं के सामने का कोण रामान होता है।

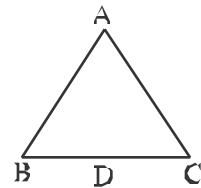
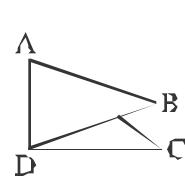
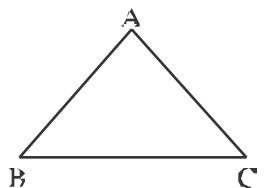
### स्वयं करके देखिए

- एक समकोण त्रिभुज के एक न्यूनकोण 42° है तो दूसरे न्यूनकोण की माप क्या होगी?
- चित्र 6.17 में त्रिभुज के एक बाण की माप 60° तथा दूसरे कोण की माप 72° है तब तीसरे काण की नाम द्याते।
- एक त्रिभुज की तीनों कोणों में अनुपात 3 : 4 : 5 है। कोणों की नप इत कीजिए।
- एक रामकोण त्रिभुज का दोनों न्यूनकोण रामान है, दोनों न्यूनकोणों की माप बताइए।
- चित्र 6.18 में  $AB = AC$  तथा  $\angle ABC = 65^\circ$  तब त्रिभुज के शेष दोनों कोणों की माप बताइए।



### 6.3 त्रिभुज की गणिकाएँ

कागज के दुखड़े से एक त्रिभुज ABC कटिए।



चित्र 6.19

इस जे शीर्ष B को शीर्ष C पर रखकर नेंछे। जिसमें BCभुजा को ये बदलने में बाँध यह है कि Dविन्दु को त्रिभुज ABC के मध्य बिन्दु के रूप में देखाया यह है। अब शीर्ष A रे Dलो मिलाया गया यही त्रिभुज की माणिका है। व्या आप AB एवं ACभुजा पर जी नाणिका छोंच सकते हैं? हाँ, खींच सकते हैं त्रिभुज में कुल ३ माणिकाएँ होती हैं जो त्रिभुज के तीनों रेषों से जाम्ने वाली भुजाओं पर खींची जा सकती है।

त्रिभुज नं किसी भुजा के मध्य बिन्दु लो समुख शीर्ष रे भिजाने वाली रेखा ही त्रिभुज की माणिका है। तीनों माणिकाएँ उक दूसर को जिस बिन्दु पर जाती हैं वह बिन्दु त्रिभुज का केन्द्रक कहलाता है।

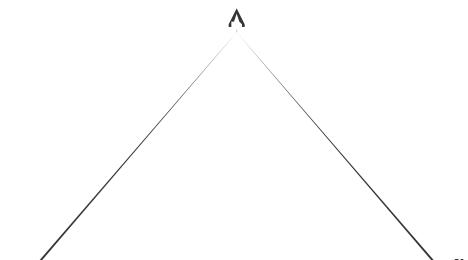
#### कुछ करें

एक त्रिभुज में तीनों माणिकाएँ सम्भिल तथा बांधे-

- व्या तीनों माणिकाएँ जैसी होती है यनी एक ही बिन्दु स गुजारती है?
- व्या एक माणिका पूर्णिमा त्रिभुज के अन्दर होती है, तो आपके अनुसार वह राष्ट्र नड़ी ढां तो उस स्थिति को देखान के लिए एक आकृति लेंचिए।

### 6.4 त्रिभुज के शीर्षलग्न

त्रिभुज क आकर वाले एक गते को लगतल जानें पर सेधा खझा करें। उसके लैंचई लेतगी है? यह लैंचई रेष A स भुजा  $\overline{BC}$  तक के दूरी है। (चित्र 6.20) शीर्ष A स भुजा  $\overline{BC}$  तक उनेक रेखाखंड लोये जा सकते हैं, (चित्र 6.21)। इन्हों स त्रिभुज की लैंचई कौन-जी रेखाखंड प्रदर्शित करती ह?



चित्र 6.20

एक रेखाखण्ड जो शीर्ष A से त्रिभुज की BC तक और उस पर लंबता होता है, त्रिभुज की ऊँचाई होती है।

रेखखण्ड AL त्रिभुज का एक शीर्षलन्ब है। इसेंतत्व वा एक उत्त बिन्दु, त्रिभुज के एक शीर्ष पर और दूसरा उत्त बिन्दु समुच्च भुजा छानने वाले रेखा पर रिहर होता है। प्रत्येक शीर्ष से एक शीर्षलन्ब ऊँचा रहता है।

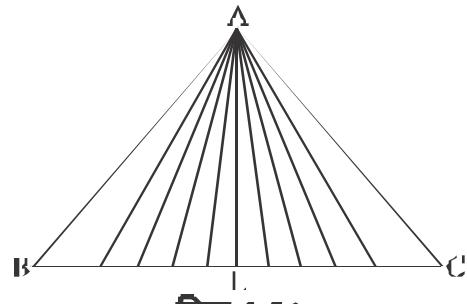
चित्र 6.21 को देखिए त्रिभुज ABC में शीर्ष A से भुजा BC पर अनेक रेखाखंड खोचे गये हैं। स्थिर सभसे छोटे लम्बाई का रेखाखंड क्या होगा?

AL शीर्ष A से BC भुजा पर खोचे गये विनिम्न लम्बाई के रेखाखण्डों में सभसे छोटा रेखाखंड है। AL शीर्ष A से भुजा BC पर आला या लम्ब है।

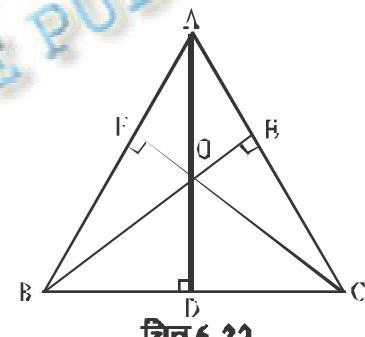
AL ही त्रिभुज ABC के शीर्षलन्ब है इसी त्रिभुज के ऊँचाई सी कहते हैं। इस प्रकार त्रिभुज में एक से जास्ते ली भुज पर एक-एक लम्ब खींचा जा सकता है जो शीर्ष लंब है।

एक त्रिभुज में हीन शीर्षलन्ब छोटे हैं। प्रत्येक शीर्ष से सामने की भुज पर एक-एक लम्ब खींचा जा सकता है जो शीर्ष लंब है।

चित्र 6.22 में AD, BE तथा CF त्रिभुज ABC के तीन शीर्षलंब हैं। यीनों शीर्षलंब एक बिन्दु पर मिल रहे हैं यह बिन्दु ही त्रिभुज का लम्ब केन्द्र है।



चित्र 6.21



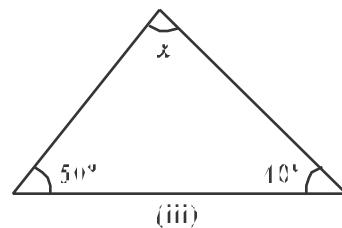
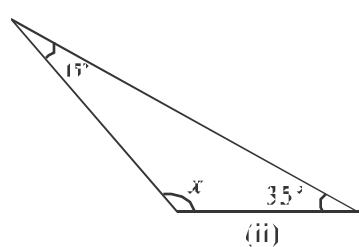
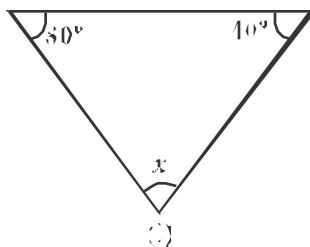
चित्र 6.22

### स्वयं करके देखिए

- एक त्रिभुज ने कितने शीर्षलंब छोटे हैं?
- क्या किसी त्रिभुज में नास्यिका और शीर्षलंब एक रेखाखंड हो सकता है?
- नियुज के शीर्षलंब का एक अंतर्विन्दु नियुज के शीर्ष पर होता है। इस दूरात अंतर्विन्दु कहाँ होगा?
- क्या किसी त्रिभुज के दो भुजाएँ उसका शीर्षलंब हो सकती हैं यदि हाँ तो उस त्रिभुज कैसा होगा?

## प्रश्नावली 6.1

### 1. $x$ का मान ज्ञात कीजिए।



2. एक रेखाओं नियुज का एक अन्दूनकोण  $35^\circ$  है तो दूसरे अन्दूनकोण का मान बताइए।

3. एक समद्वय त्रिभुज के तीनों लांबां की माप क्या होती है?

### 4. चित्र 6.23 के आधार पर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए

(i)  $y$  का मान बताइए।

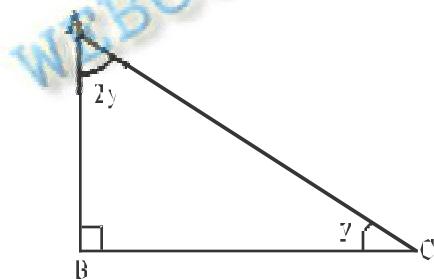
(ii) नियुज का उकाल बताइए।



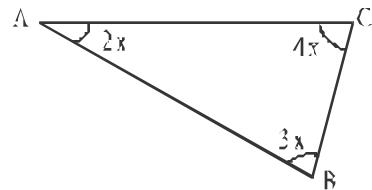
5. एक त्रिभुज का पहला कोण दूसरे कोण से  $20^\circ$  का अपरिवर्तन है तथा दूसरा कोण तीसरे कोण के अपरिवर्तन है। इस त्रिभुज को आव व्याप्ति दंग?

नीचे दिए गए नियुजों में अक्षात कोणों के माप ज्ञात कीजिए—

6.



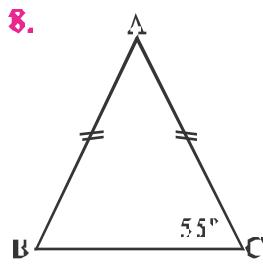
7.



$$\angle A = \dots$$

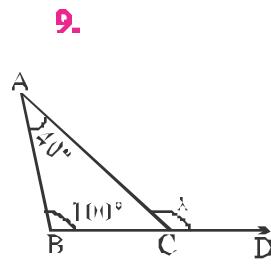
$$\angle B = \dots$$

$$\angle C = \dots$$

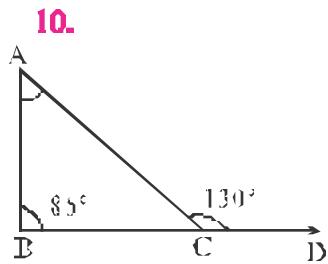


$$\angle A = \dots$$

$$\angle B = \dots$$

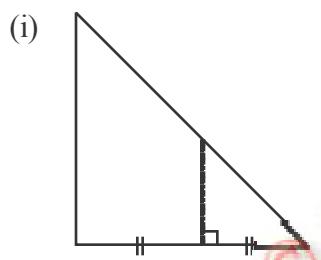


$$x = \dots$$



$$\angle A = \dots$$

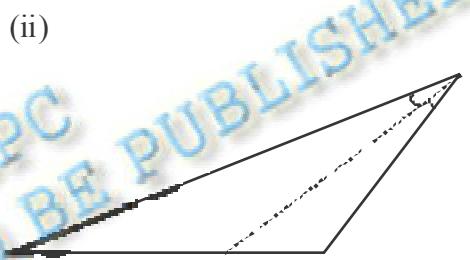
11. नीचे दिए गए त्रिभुजों के अन्दर दर्शायी गई खण्डित रेखाओं (Dotted Lines) के नाम लिखिए। साथ में कारण भी दीजिए।



रेखा का नाम : आधार पर लम्ब समद्विभाजक

कारण : क्योंकि यह आधार को दो बराबर

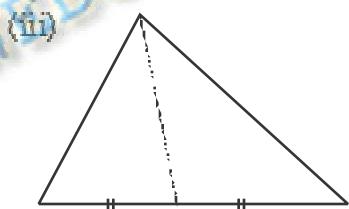
भागों में विभाजित है तथा आधार पर लम्ब है।



रेखा का नाम : छोण समाहेभाजक

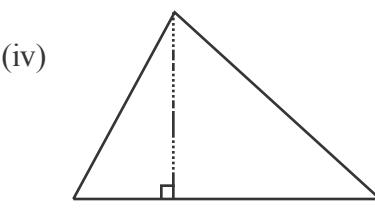
कारण :

-----



रेखा का नाम :

कारण :



रेखा का नाम :

कारण :

12. एक ऐसा त्रिभुज (कच्चा वित्र) बनाइए, जिसके एक शीर्ष से खींचा गया लम्ब, त्रिभुज के बाहर स्थित हो।  
आपने कैसा त्रिभुज बनाया? न्यूनकोण त्रिभुज, समकोण त्रिभुज, अधिककोण त्रिभुज या अन्य?
13. नीचे एक बहु समद्विबाहु त्रिभुज ABC बनाइए, जिसमें  $AB = AC$  हो। इस त्रिभुज में निम्न रेखाएँ बनाइए।
- (i) कोण A के लिए समद्विभाजक
  - (ii) शीर्ष A के सामने खींची गुज घर लग
  - (iii) शीर्ष A के लिए नीली भुजा की अधिक लम्ब बनाइए,
- (i) क्या ये सभी रेखाएँ अलग-अलग हैं? या नहीं?
- (ii) इन रेखाओं को क्या विशेषता है?
14. एक त्रिभुज में किसी एक कोण को समद्विभाजक देख। उस कोण के सामने की भुज पर लम्ब भी है। बताओ, त्रिभुज किस प्रकार का होगा? कैसे पता लगाया?
15. नीचे दी गई सारणी में खाली स्थान भरिए—

क्र.	Δ का नाम	भुजा की माप	कोण की माप	शेष कोणों की माप
1.	$\Delta ABC$	$AB=AC$	$\angle B=50^\circ$	$\angle C=\dots\dots\dots, \angle A=\dots\dots\dots$
2.	$\Delta PQR$	$PQ=PR$	$\angle R=\dots\dots\dots$	$\angle P=\dots\dots\dots, \angle Q=45^\circ$
3.	$\Delta DEF$	$DE=DF$	$\angle E=\dots\dots\dots$	$\angle D=84^\circ, \angle F=\dots\dots\dots$
4.	$\Delta LMN$	$LM=MN=NL$	$\angle L=\dots\dots\dots$	$\angle M=\dots\dots\dots, \angle N=\dots\dots\dots$

## 6.5 त्रिभुज अरागिका गुण

चित्र 6.24 नं एक त्रिज्ञाकार रूप के बाहर की तरफ से रखता है। इस सास्ते से संबंधित कुछ प्रश्नों के लिए सास्ते में दीजिए।

आप खड़े हैं	आपको चाना है	जाने के सरपे की ल.		छोटा सरपा
		पहला रास्ता	दूसरा रास्ता	
बिन्दु A पर	बिन्दु B पर	AB	AC + CB	AB
बिन्दु B पर	बिन्दु C पर			
बिन्दु C पर	बिन्दु A पर			

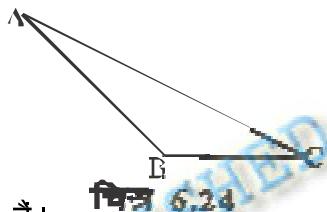
यहाँ निम्नाकार खेल के ६ हरे की रास्ते के रास्ते के बरे में आपने देखा है-

$$AC + CB > AB$$

$$BA + AC > BC$$

$$CB + BA > CA$$

यहाँ AB, BC तथा CA इस त्रिभुजाकार खेत की भुजाएँ हैं।



चित्र 6.24

### कुछ करें

1 cm. से लक्ज 10 cm. लम्बाई की गाँठ की दस कमायियों हीलिए। अब इन कमायियों ने लगें तीन कमायियों लक्ज त्रिभुज बनाने का प्रयास कीजिए तथा सारणी को पूरा कीजिए—

प्रयासों की संख्या	पहले कमायी की लम्बाई	दूसरे कमायी की लम्बाई	तीसरी व दूसरी कमायी की लम्बाई का योग	तीसरे कमायी की लम्बाई	वह त्रिभुज बना पा सके हैं
I					
II					
III					
IV					

इन प्रयासों ने उपरोक्त देख के आप उन्हें तीन कमायियों से त्रिभुज बना पा सके हैं जिनमें ट्रिकॉडो की लम्बाई का एक तीरदूर का दो गुण है।

**VR%** त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं की लम्बाई का योगफल तीसरी भुजा से बड़ी होती है।

**उदाहरण :** जो भुजाओं के पाप्र क्रमांक 2 c.m., 3 c.m. तथा 6 c.m. है, क्या इन जो भुजाओं से त्रिभुज बनना संभव है?

$$यहाँ 2\text{cm} + 2\text{cm} < 6\text{cm}$$

यानी दो भुजाओं का याग तीसरी से कम है, इसलिए इन हीन भुजाओं से त्रिभुज बनाया संभव नहीं है।

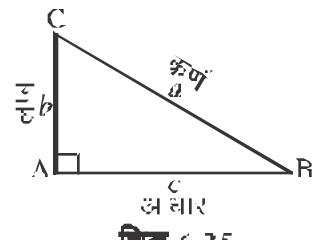
### स्वयं करके देखिए

1. बताइए, दी नहीं भुजाओं की मात्र से कौन-कौन से त्रिभुज बनाया संभव है?
- |                        |                       |
|------------------------|-----------------------|
| (i) 1cm., 3cm., 6cm.   | (ii) 4cm., 8cm., 9cm. |
| (iii) 3cm., 5cm., 8cm. | (iv) 3cm., 4cm., 5cm. |

### 6.6 पाइथागोरस प्रमेय

पाइथागोरस एक यूनानी वृत्तिकारी थे। उनका जन्म 6ठी शताब्दी ईसा पूर्व में हुआ। उन्होंने अमर्कोण त्रिभुज की भुजाओं की लम्बाईयों के बीच जांच नियमित करने शुरू किया। एक प्रमेय का अत्यापन किया जिसे पाइथागोरस प्रमेय के नाम के जागा जाता है। इस प्रमेय के अमरकष्ट एक अन्य प्रमेय के बारे में आरंभिक गणितज्ञ बैधायन ने 1000 ईसा पूर्व जानकारी दी। ऐसा माना जाता है कि 2000 ईसा पूर्व मिश्र एवं बेबीलोन के गिवाकियों को अमर्कोण त्रिभुज की भुजाओं के बीच के जंबंद के बारे में पता था। यूक्लिड ने 300 ईसा पूर्व अपने प्रसिद्ध ग्रंथ Theelement में इस प्रमेय को अत्यापित किया। आज इस पाइथागोरस प्रमेय के बारे में विकास भी जानेंगे।

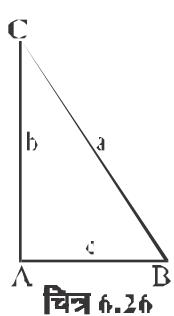
**समकोण त्रिभुज—** कोण के आधार पर 'त्रिभुज' को नर्मांकृत करते समय हम ने देखा है कि जिस त्रिभुज का एक कोण  $90^\circ$  हो वह सगकार्य त्रिभुज कहलता है। सगकार्य त्रिभुज की भुजाओं को विशेष नाम दिया जाता है। समकार्य के समगे दो भुज को कण (Hypotenuse) कहते हैं जो कि तीन भुजाओं में से एक दो भुजा होती है। अन्य दो भुजाओं को त्रिभुज के पाय (Legs) के रूप में उनको हैं इनमें से एक को सामार (Base) तथा दूसरा को लम्ब (Perpendicular) कहा जाता है।



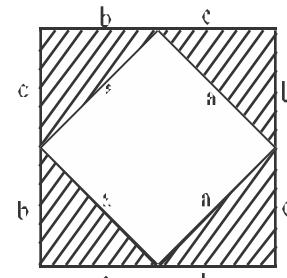
चित्र 6.25

## कृष्ट करें

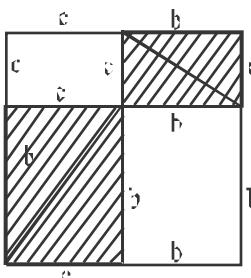
किसी भी माप का एक समक्षण त्रिभुज बनाइए तथा सस्ल और 7 प्रतिरूप लंबें। इस प्रकार आप आपके पास एक ही माप के आठ त्रिभुज हैं। इन सभी त्रिभुजों में कर्ण के a दो अन्य भवय के b वा c हैं।



चित्र 6.26



चित्र 6.27



अब एक समान माप के तीन वर्ग बनाइए जिनकी कुलाओं की नज़ b+c के बराबर हों। अब 4 त्रिभुज को पहले दर्जे में तथा 4 त्रिभुज को दूसरे वर्ग में चित्र 6.27 के अनुसार स्थापित कीजिए। अब आप जानते हैं कि दोनों वर्ग समान क्षेत्रफल के हैं तथा उनमें रखें जाने वाले त्रिभुजों के एक समान हैं ताकि

पहले दर्जे का अन्तर्विदित क्षेत्र = दूसरे वर्ग का अन्तर्विदित क्षेत्र

$$a^2 - b^2 + c^2$$

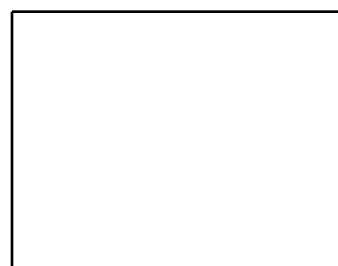
अतः हम कह सकते हैं कि समकोण त्रिभुज में कर्ण पर बना वर्ग अन्य दो शुल्काओं पर वर्गों के योग के बराबर छागा है। यहै पाइथागोरस प्रमेय है।

## स्वयं कीजिए

चित्रनं शाप के दोनों समानकोण त्रिभुज बनाइए तथा उनके कुल अर्धों की जापकर उन सारणी को पूरा कीजिए।



त्रिभुज-1



त्रिभुज-2



त्रिभुज-3

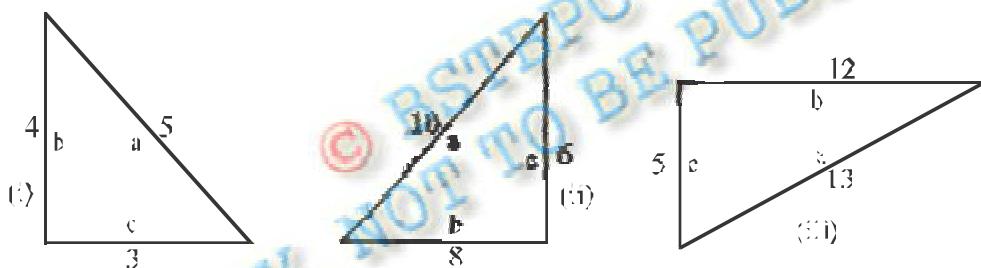
### रासणी

त्रिभुज का नाम	कर्ण की गाप (a)	प्रथम पाद भुजा की गाप (b)	द्वितीय पाद भुजा की गाप (c)	$a^2$	$b^2$	$c^2$	$b^2 + c^2$	फला
1.								
2.								
3.								

यहाँ सारणी में हगने देखा ले सगकोग त्रिभुज में  $a^2 = b^2 + c^2$

अब यह साधारण त्रिभुज ने कर्ण वा वर्ग अन्य दो भुजाओं के वर्ग के योग के बराबर होता है।

### 2. आइए अब निम्न त्रिभुजों पर विचार करें।

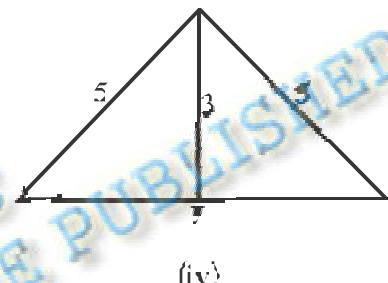
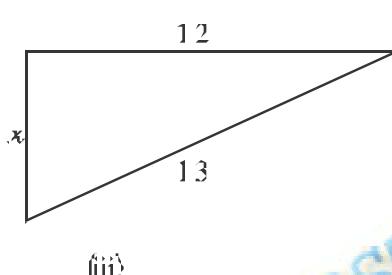
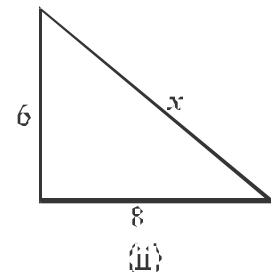
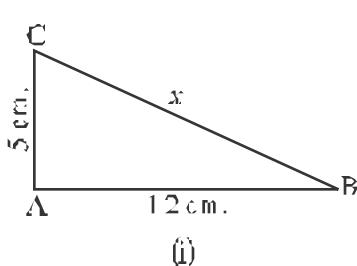


चित्र 6.28

चित्र 6.28 ने दो तीन त्रिभुजों के भुजाओं के मान के उधार जर निम्न सारणी को जूरा करिए।

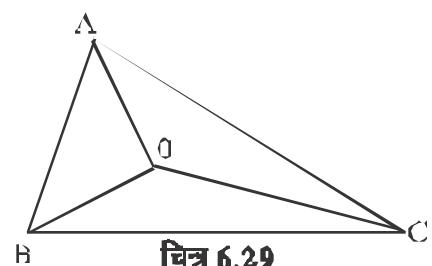
त्रिभुज का नाम	$a^2$	$b^2$	$c^2$	$b^2 + c^2$	फला $a^2 = b^2 + c^2$	भुजा a के रासायन के कोण की गाप	त्रिभुज का प्रकार
(i)							
(ii)							
(iii)							

3. एक त्रिभुज की भुजाएँ 6 cm, 8 cm तथा 10 cm लंबी हैं। निर्धारित कीजिए कि क्या वह समकोण त्रिभुज है।
4. नीचे दिये गये समकोण त्रिभुजों में अक्षात् भुजाओं का माप ज्ञात कीजिए:



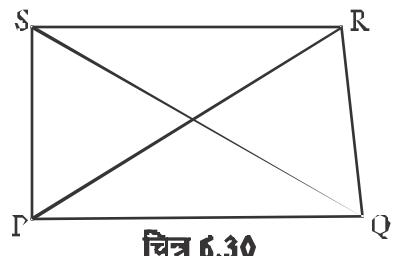
### प्रश्नावली 6.2

1. नीचे तीन संख्याओं का समूह दिया गया है बताइए कौन सा समूह त्रिभुज की भुजाओं को प्रदर्शित करता है?
- (i) (3, 4, 5)      (ii) (2, 3, 4)      (iii) (1, 2, 3)      (iv) (1, 3, 5)
2. चित्र 6.29 में O बिन्दु त्रिभुज ABC के अन्दर स्थित है, तो बताइए नीचे दिए गए कथनों में कौन सत्य है तथा कौन असत्य?
- (i)  $AO - OB < AB$   
 (ii)  $AO + OC > AC$   
 (iii)  $BO + OC = BC$



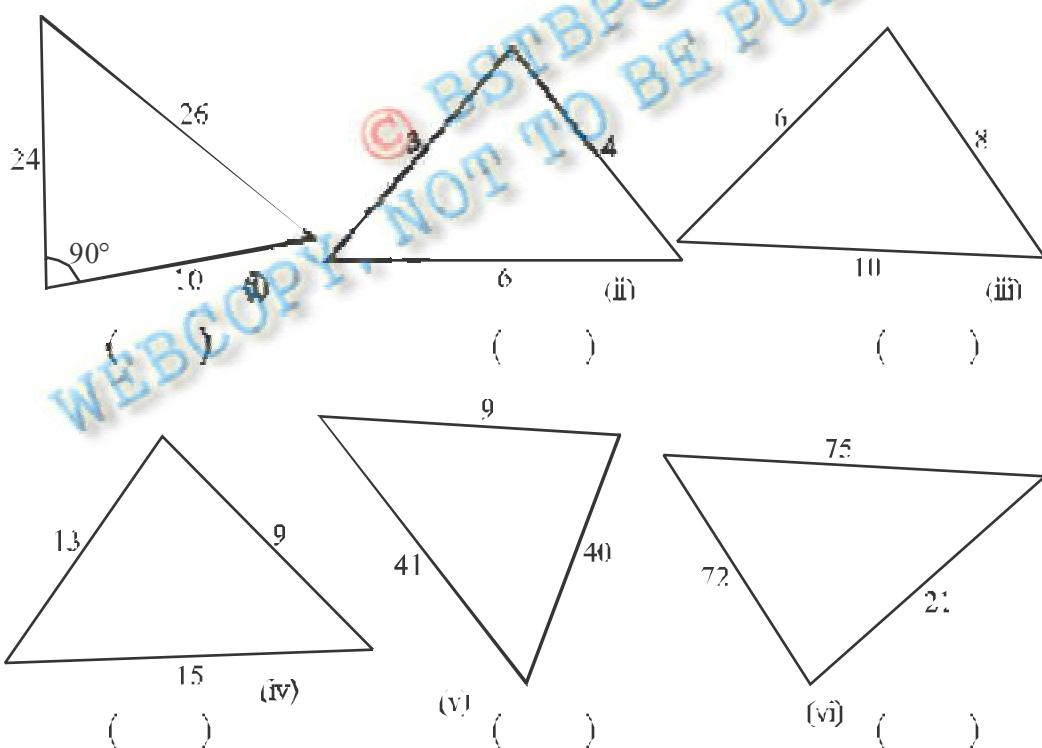
3. चित्र 6.30 में PQRS एक क्षेत्रफल है तो  
दिखाइए कि

$$PQ + QR + RS - SP > PR + SQ$$

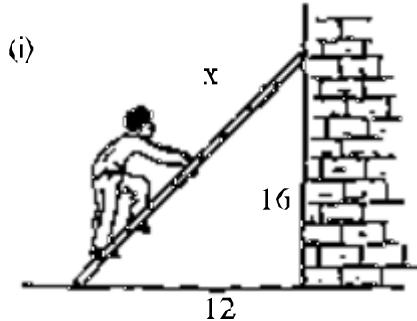


चित्र 6.30

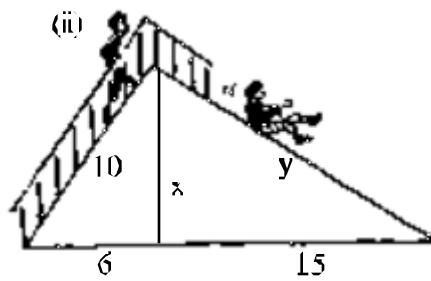
4. एक त्रिभुज की दो भुजाओं की लम्बाई, तथा 14 सेमी. है। इस त्रिभुज की तीसरी भुज की लम्बाई एवं अधिकतम माप की जीवा क्या होगी?
5.  $\triangle ABC$  एक त्रिभुज है जिसका  $\angle A$  समकोण है यदि  $AB = 10$  सेमी.,  $AC = 2\angle$  सेमी. तब कर्ण  $BC$  का मान ल्य होगा?
6. नीचे दिए गए त्रिभुजों में से कौन-कौन से त्रिभुज समकोण त्रिभुज है? उनके नीचे सही का निशान (✓) लगाइए। साथ ही समकोण त्रिभुजों का जो कोण समकोण है, उसे  $90^\circ$  लिखकर इंगित कीजिए।



**7. नीचे दी गई परिस्थितियों में 'x' व 'y' का मान निकालिए।**



$$x = \underline{\hspace{2cm}}$$



$$x = \underline{\hspace{2cm}}, y = \underline{\hspace{2cm}}$$

### हमने सीखा

- त्रिभुज में तीन भुजाएँ तीन लण तथा तीन शीर्ष हत हैं।
- (i) त्रिगुण के तीन कोणों का योग द संगलोष्य वर्ती  $180^\circ$  होता है।  
(ii) किसी भी त्रिभुज में एक से अधिक कोण समकोण वा अधिक कोण नहीं हो सकते।
- सनबाहु त्रिभुज की तीनों भुजाएँ आपस में बराबर होती हैं।
- साइड्स हु त्रिभुज की तीन भुजाएँ बराबर होती हैं, तर रागान गुजारे के सामने के कोण में आपस न में बराबर होते हैं।
- त्रिगुण गे किसी गुजार के बद्य छिन्दु को जन्मगुरु शीर्ष से गेलन वाली रेखा नियमिका कहती है। त्रिभुज में तीन नियमिकाएँ हती हैं। तीनों नियमिकाएँ एक छिन्दु पर निलकती हैं जिसे त्रिभुज का केन्द्रक कहते हैं।
- किसी त्रिभुज के एक शीर्ष से उसक चक्कु छुज पर खेंचे गए लन्ध को त्रिभुज का एक शीर्षलंघ कहते हैं। त्रिभुज में तीन शीर्षलंघ होते हैं। तीनों शीर्षलंघ एक छिन्दु पर निलकते हैं तर जिन्हें त्रिभुज का लंभ कहते हैं।
- किसी त्रिभुज में दो भुजाओं की लन्धाई का योग तीसरी भुजा की लन्धाई से ज्यादा होता है।
- रानके 1. त्रिभुज में कर्तव्य बने वर्ग शेष दोनों दुजनों पर बने कर्तव्य के योग के बराबर होता है। यह ट्रिगोन वाक्य नोसा त्रिगोन के न ग रो ज ना जा है।
- यदि किसी त्रिभुज में तीन भुजाओं की लन्धाई का कर्तव्य शेष दोनों दुजनों के लान्धाई के वर्ग के योग के बराबर हो, तर तह त्रिभुज राकोण त्रिभुज होगा।

## अध्याय-7

# सर्वांगसमता

### गृहिणी

पायल जापने पुल्लक ने रखे सिक्कों की गिनेसी कर रहे थे। उन्हें उसके छेदों शाई पल्लव वहाँ पहुँचा तथा उसको निन्मे में नदर करने लगा। पायल ने उसे सिक्कों का छाँटने का निर्देश दिया। इसी बीच पायल का उस्ती मौन न किसी काम से अपने पास छूला लैया। कार्य छल्ने कर पायल जब शापस अपने ३ हजार के नारा लौटी पी वह यह देखकर आश्चर्यचित्त हुई कि पल्लव ने सिक्कों को उहाँ छाँट रो छाँटने का तरीका पूछा। पल्लव ने कहा कि मैंने सिक्कों का एक के लिए एक रखकर देखा औ सिक्के शापस में एक दूसरे को गुरी तरह ढक रह रहे उन्हें एक जाथ रखा।

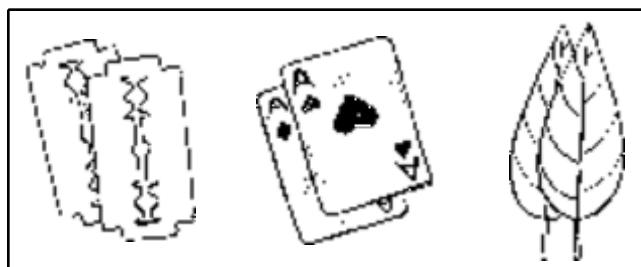
आप भी उपर आस-पास में इसी प्रकार पूर्णतः एक दूसरे को ढकना वाली वस्तुओं को खोजें।



वित्र-7.1

### 7.1 सर्वांगसम जाकूबी एवं सर्वांगसमता

एक जैसे दो छलेड़ लीजिए। दोनों को एक दूसरे के पूरी तरह एक लेते हैं। एक ही आकार में जाश के दो परे लीजिए। एक परे को दूरार के लिए रखिए। आप यांगे दोनों छलेड़ एवं ताश के गत एक दूसरे को पूरी तरह से ढक लेते हैं। इसलिए अर्थ है दोनों पत्ते एक छलेड़ एक ही आकार एवं गाप की हैं। ऐसी वस्तुएं सर्वांगसम कहलाती हैं तथा दो वस्तुओं के सर्वांगसम होने



वित्र-7.2

का संबंध समांगसमता कहलाती है। एक ले उपर एक वक्तु रखलें समांगसमता शर्त करने की यह विधि अध्यारोपण विधि (Super position) कहलाती है।

दो आकृतियों की समांगसमता को हम चिन्ह  $\cong$  से दिखाते हैं। यदि A और B दो आकृतियाँ समांगसम हैं तब हम  $A \cong B$  लेखते हैं।

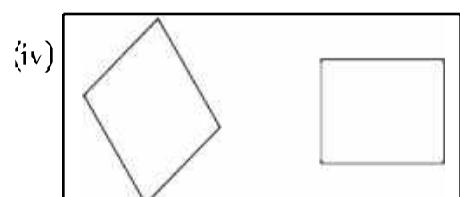
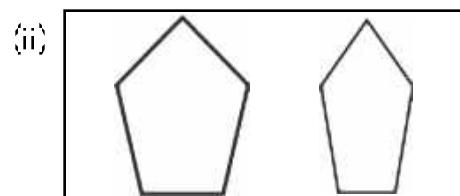
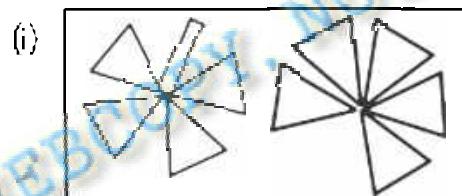
### कुछ करें

#### 1. किन्हीं दो वस्तुओं के नाम लिखो, जो

(a) एक-दूसरे के पूर-पूर ढकती हैं \_\_\_\_\_

(b) एक-दूसरे का पूँछ-पूँछ नहीं ढकती हैं \_\_\_\_\_

2. अपनी कॉपी के पेज के नीचे कई लगाएं और जिस पेज के नीचे लाप्ने कार्बन लगा कर, उस पेज पर कोई आकृति बनाइए। अब यहाँपर कार्बन के नीचे लाले पेज पर बगी आकृति लारी पज़ यह बनी आकृति के समांगसम है या नहीं।
3. नीचे कुछ आकृतियों के जोड़े दिए गए हैं। बताओ कि ये समांगसम (congruent) हैं या नहीं?

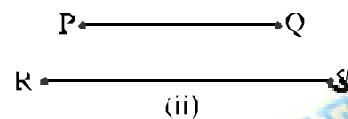
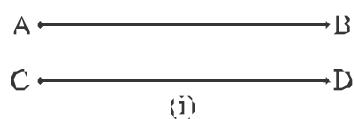


## 7.2 ज्यामितीय आकृतियों की सर्वांगसमता

जिस एकारण ऐसे वेदों के उत्तरान्तरे आकार और माप में परिवर्तन किये गिना। ऐसे जनह से उत्तर कर दूसरे जगह रखकर हनन सर्वांगसमता की जाँच करें; उसी प्रकार ज्यामितीय आकृतियों को भी एक के ऊपर दूसरी रखकर जाँच कर सकते हैं। परन्तु ध्यान रहे उनके आकार (माप) व शालूति में चरिष्टतंग नहीं कर सकते हैं। उद्देश्य अब कुछ ज्यामितीय आकृतियों की सर्वांगसमता के बारे में विवर करें।

### 7.2.1 रेखाखण्डों की सर्वांगसमता

**नीचे दिए गए रेखाखण्डों के दो जोड़ों को देखिए:**



चित्र-7.3

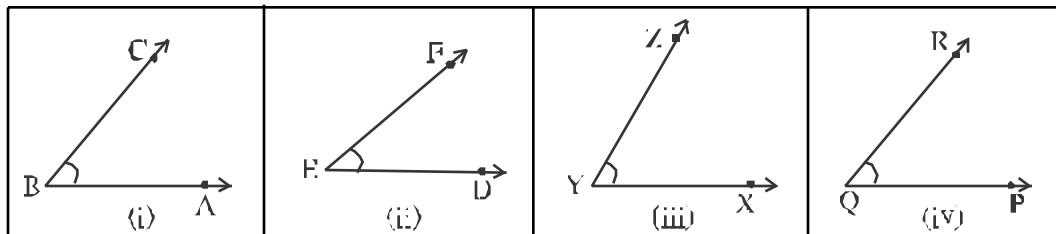
दोनों जोड़ों में एक रेखाखण्ड को ट्रैना पैटर्न पर ट्रैस किये तथा दूसरे वर रखकर देखिए कौन-सा जोड़ा सर्वांगसम है?

आप देखेंगे कि पहला जोड़ा सर्वांगसम है जबकि दूसरा नहीं। इनकी लगाई को नपिर। किस जोड़े की लम्बाई समान है? यही क्रियाकलाप कुछ और रेखाखण्ड के जोड़ों के साथ करके देखिए।

यदि दो रेखाखण्डों की लम्बाई समान है हो ये सर्वांगसम होंगे। उसी प्रलाप यदि दो रेखाखण्ड रूप सान हों तो उनकी लम्बाई भी समान होंगी।

सर्व चित्र 7.3 में  $\overline{AB} = \overline{CD}$  एवं  $\overline{AB} \neq \overline{CD}$

### 7.2.2 कोणों की सर्वांगसमता



चित्र-7.4

विन्दे 7.4 में चार कोणों को देखिए, वे पिछिने नपों के हैं। (i) में बने कोण के द्विरोधी पैर पर द्वे कोणों की जिम्मेदारी पिछे की ओर ले जाए गये कोण से बाहरी हैं (ii), (iii) एवं (iv) में उनके द्वारा दूसरे कोण के प्रयास की जाए—दूसरे कोण को छलने के लिए सबसे बहले बिन्दु A को D पर तक  $\overline{BA}$  को  $\overline{BD}$  पर रखिए तथा बताइए कि  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  पर उच्च? इसी प्रकार अन्य दो कोणों (iii) व (iv) पर भी छलने की कोशिश कीजिए।  $\angle ABC$  व  $\angle PQR$  के पूरी तरह से ढक लिया। अर्थात्  $\angle ABC$  एवं  $\angle PQR$  समांगर हैं। अहां लगाने देख कि  $\angle ABC$ ,  $\angle DCE$  व या  $\angle XYZ$  के नहीं उके पक्ष मानने  $\angle ABC$ ,  $\angle DCE$  व  $\angle XYZ$  के समांगर हाँ नहीं हैं। समांगर हाँ कोण  $\angle ABC$  व  $\angle PQR$  की गाप वीरगान है। इसे उन द्वा प्रकार भी लेख सकते हैं  $\angle ABC \cong \angle PQR$

और  $m\angle ABC = m\angle PQR$

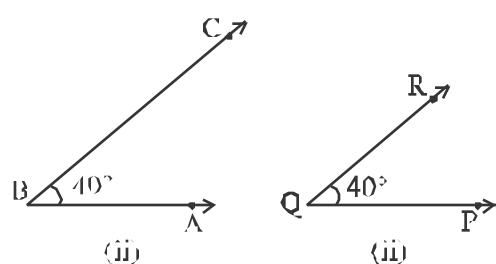
हन कह सकत हैं कि दो कोणों ली माप यदि समान हो तो व आपस में समांगसम छोड़ हैं अथवा यदि दो कोण समांगसम हो तो उनकी नप समान होती है।

अब उपर ऐसे कोणों का जोड़ा बना सकते हैं जिनके नाम ब्रह्माकृष्णनहीं फेर भी वे समांगर हों।

अद्दृ ३८ विन्दे-7.5 में बने कोणों पर विचार करें।

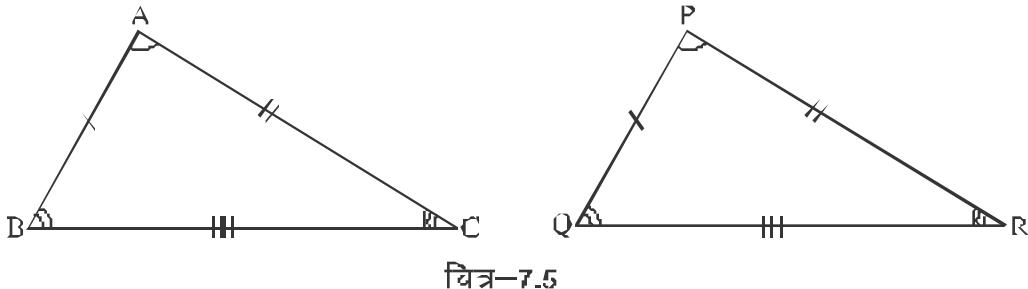
$\angle PQR$  का जब  $\angle ABC$  पर अपारोपित करते हैं तब किरण  $\overrightarrow{QP}$ , किरण  $\overrightarrow{BA}$  पर उपर लिए  $\overrightarrow{QR}$ , किरण  $\overrightarrow{BC}$  पर उक्त है, परन्तु किरण  $\overrightarrow{QR}$ , किरण  $\overrightarrow{BC}$  को पूरी तरह नहीं ढक गयी है तथा किरण  $\overrightarrow{BC}$  ज्यादा लम्बी प्रतीत होती है, इसके उच्चार पर हम उह लक्षण के कि  $\angle ABC$ ,  $\angle PQR$  से छोटा है।

परन्तु  $\overrightarrow{BC}$  के उपर कोण की दिशा को बताकर है, लम्बाई को नहीं। यहाँ केवल ली गाप रगान है अतः  $\angle ABC$ ,  $\angle PQR$  के समांगसम हो अर्थात्  $\angle ABC = \angle PQR$ । अतः कोणों की रवै—समता लेता हुनके नपों की समानता पर निर्भर नहीं है।



विन्दे-7.5

### 7.2.3 त्रिभुजों की सर्वांगसमता



चित्र-7.6 में बने दोनों त्रिभुज को प्यान से देखें। ये दोनों त्रिभुज समान आकार तथा समान आकृति के हैं।  $\triangle ABC$  के द्विरेत्र पैकड़ पर द्विरेत्र के  $\triangle PQR$  पर अद्यारोपित कीजिए। या  $\triangle ABC$  तथा  $\triangle PQR$  के द्वारा लो अपरा में पूरी तरह उभे लो हैं? यदि हैं तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं। इरे इरे प्रकार लेखेंगे:

$$\triangle ABC \underset{\text{सर्वांगसम}}{\approx} \triangle PQR$$

यहाँ  $\triangle ABC$  को  $\triangle PQR$  पर अद्यारोपित करते समय आपने शीर्ष P के ऊपर शीर्ष A, शीर्ष Q के ऊपर शीर्ष B तथा शीर्ष R के ऊपर शीर्ष C को छोड़ दा। जिसस  $\angle P$  पर  $\angle A$ ,  $\angle Q$  पर  $\angle B$ ,  $\angle R$  पर  $\angle C$  अद्यारोपित हुए हुआ त्रिभुज  $\overline{PQ}$  पर गुजा  $\overline{AB}$ , गुजा  $\overline{QR}$  पर दुजा  $\overline{BC}$  तथा भुजा  $\overline{RP}$  पर भुजा  $\overline{CA}$  अद्यारोपित हो चुके। दो सभी शीर्ष, कोण व दुजाएं दोनों त्रिभुजों के संतुत भाग हैं इसी तरह निम्न प्रकार दर्शाते हैं—

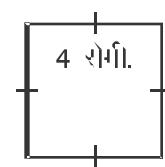
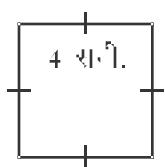
संतुत शीर्ष **A** और P, B और Q, C और R

संतुत कोण  $\angle A$  और  $\angle P$ ,  $\angle B$  और  $\angle Q$ ,  $\angle C$  और  $\angle R$

संतुत गुजा  $\overline{AB}$  और  $\overline{PQ}$ ,  $\overline{BC}$  और  $\overline{QR}$ ,  $\overline{CA}$  और  $\overline{RP}$

यदि दो त्रिभुज सर्वांगसम हो तो उनके संतुत भाग सब उत्तेज हैं।

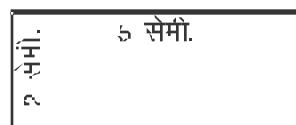
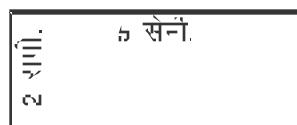
### 7.2.4 दो वर्गों की सर्वांगसमता



सभी वर्ग अकार में एक ही तरह के हत हैं। दोनों की साफ़ का निर्धारण उनकी भुजा की लम्बाई से होता है। अतः दो वर्ग आपस में एक दूसरे को पूरी तरह तभी ढलगा जब दोनों की भुजा समान माप की होगी। चित्र-7.7 में दोनों वर्गों की भुजाएँ समान माप जी हैं। अतः दोनों वर्ग सर्वांगसम होंगे यदि उनकी भुजाएँ समान माप की हों।

अतः दो वर्ग सर्वांगसम होंगे यदि उनकी भुजाएँ समान माप की हों।

#### 7.2.5 दो आयतों की सर्वांगसमता

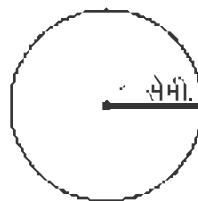
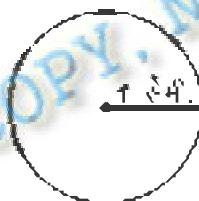


चित्र-7.8

आयत के आकार एवं माप का निर्धारण उनकी लम्बाई एवं ऊँचाई से होता है। यदि दो आयतों की लम्बाई एवं ऊँचाई बराबर हो तो वे एक दूसरे के पूरी से छक लेंगे। यानि ये आकार एवं माप में ऐसी समान हैं। चित्र 7.8 में दोनों आयत की लम्बाई एवं ऊँचाई समान हैं ये उनका एक दूसरे को पूरी तरह से छक लेते हैं। अतः दोनों आयत सर्वांगसम हैं। इस प्रकार इन दोनों आयतों की दोनों लम्बाई एवं ऊँचाई समान होंगी जब उनकी लम्बाई एवं ऊँचाई समान माप की हो।

अतः दो आयत सर्वांगसम होंगे यदि उनकी लम्बाई एवं ऊँचाई समान माप की हों।

#### 7.2.6 दो वृत्तों की सर्वांगसमता



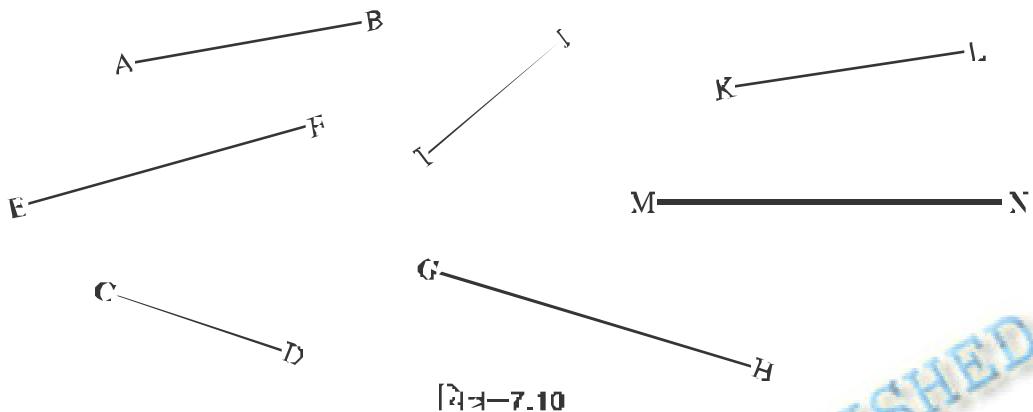
चित्र-7.9

सभी वृत्त का राखान होते हैं। उनकी 1 से का निर्धारण डिल्या जो होता है। इस वृत्त की डिल्या लिटनी ज्यादा हार्गी उसका मान भी उतना ही ज्यादा होगा। यहां चित्र 7.9 में दो समान वृत्त बाले वृत्त हैं। यदि पहले वृत्त को देस कर, दूसरे पर उच्चारोपित किया जाये तो दोनों एक दूसरे को पूरी तरह से छक लेंगे। अतः दोनों वृत्त सर्वांगसम हैं।

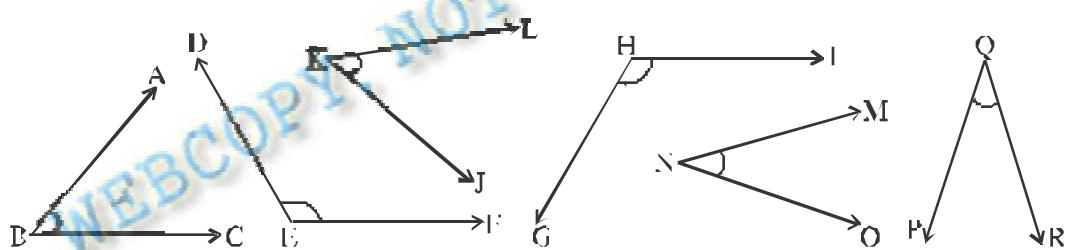
nksoor | okxI e gkxs ; fn mudh f=T; k cjkcj gkA

## प्रश्नावली – 7.1

1. (i) चित्र-7.10 में सर्वागसम रेखा कोंणों को छाँटिए। (आप ट्रेस करके देखें)



- (ii) सर्वागसम रेखाओं को गांभिए। उनके माप के बारे में आप क्या कह सकते हैं?
2. (i) नीचे दिए गए चित्रों में सर्वागसम कोणों को छाँटिए— (कोणों को ट्रेस कर पता करें)

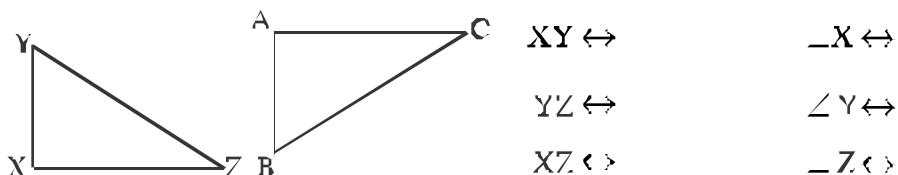


चित्र-7.11

- (ii) इनों से सर्वागसम कोणों को गांभिए। आप उनके माप के बारे में क्या कह सकते हैं?
3.  $\angle ABC = 62^\circ$  और  $\angle DEF$  सर्वागसम हैं। यदि  $\angle ABC = 62^\circ + 15^\circ 70^\circ$  हो तो  $\angle DEF$  की माप क्या होगी?

4. नीचे दिए गए सर्वांगसम त्रिभुजों के प्रत्येक जोड़े में संगत भुजाएँ य संगत कोण बताइए।

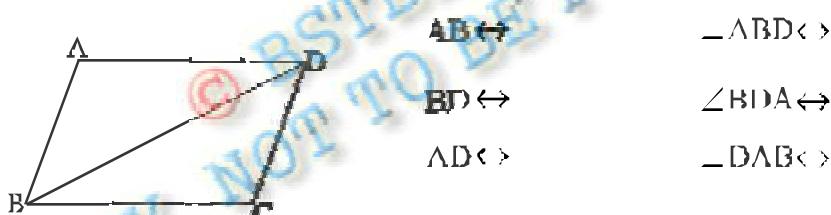
(i)  $\Delta XYZ \cong \Delta ABC$  भुजा कोण



(ii)  $\Delta ABC = \Delta ABD$  कोण



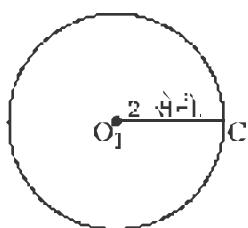
(iii)  $\Delta ABD \cong \Delta CDB$  कोण



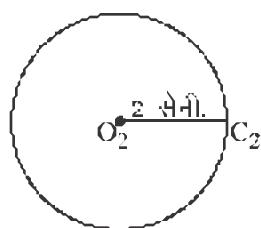
5. दो वर्ष जिनकी भुजाएँ राशि है, क्या के राशि राशि होंगे?

6. एक आयत की लम्बाई 10 रोपी, तथा वैदृश्य 8 रोपी, है तथा दूसरे आयत की लम्बाई 12 रोपी, तथा वैदृश्य 8 रोपी, है, दोनों आयत को 8 वर्ग राशि करने हेतु उन्हें आयत की लम्बाई को कितना बढ़ाना होगा।

7. चित्र-7.12 में बने वो वृत्त क्या सर्वांगसम होंगे, यदि हाँ तो क्यों?



चित्र-7.12



### 7.3 दो त्रिभुजों के सर्वांगसम होने की शर्तें

जब दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं तो उनके संगत भुजाएँ एवं संतुलित कोण आपस में बराबर होते हैं। उसी प्रकार दो त्रिभुजों के संगत भुजाएँ एवं संतुलित कोण आपस में बराबर हैं। दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

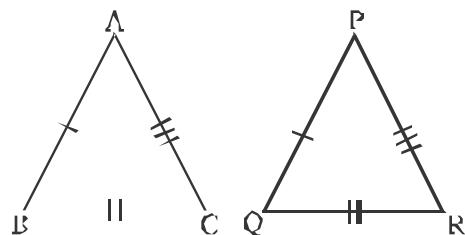
दित्र-7.13 में दो त्रिभुज ABC एवं PQR दिये

गये हैं जो सर्वांगसम हैं—

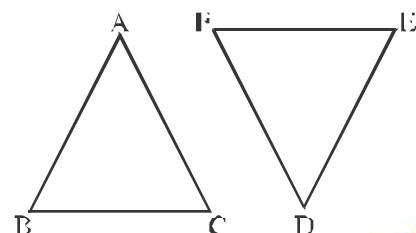
तब  $\overline{AB} = \overline{PQ}$ ,  $\overline{BC} = \overline{QR}$ ,  $\overline{AC} = \overline{PR}$

तथा  $\angle A = \angle P$ ,  $\angle B = \angle Q$ ,  $\angle C = \angle R$

और  $\angle CAB = \angle RPQ$  होगा।



चित्र-7.13



चित्र-7.14

उसी प्रकार दित्र-7.14 में  $\overline{AB} = \overline{DE}$ ,

$\overline{BC} = \overline{EF}$ ,  $\overline{CA} = \overline{FD}$ ,

$\angle A = \angle D$ ,  $\angle B = \angle E$ ,  $\angle C = \angle F$

तथा  $\angle CAB = \angle FDE$  है

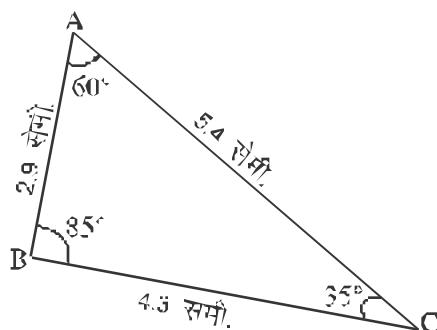
तब  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

इस प्रकार दो त्रिभुजों में सर्वांगसमता के लिए आवश्यक अवयवों में दोनों त्रिभुजों के तीनों कोण एवं तीनों भुजाएँ शामिल हैं।

सोधियु रेखाएँ, चोण, घण, आयत एवं दृति के समान दो त्रिभुज की सर्वांगसमता दिखाने के लिए त्रिभुज के सभी 6 अवयवों में समानता देखने से गोपनीय या कुछ अवयवों से लग पड़ जाएगा। आइये इसे करके देखें।

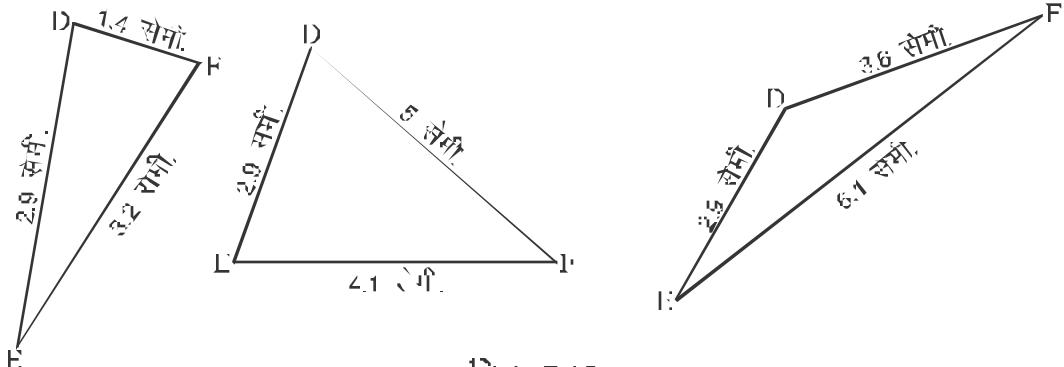
#### कुछ करें

यहाँ दित्र-7.15 में एक त्रिभुज बनाया जाया है तथा उसके सभी 6 अवयवों (तीन भुजाएँ तीन कोण) की मात्रा के बीच तुलना गयी है। अपनी नारी-वारी से इनके नाम को लेकर देखें कि लम्ह से लम्ह कितने अवयवों की समानता के बाद उसके सर्वांगसम एक त्रिभुज बनाया जा सकता है।



चित्र-7.15

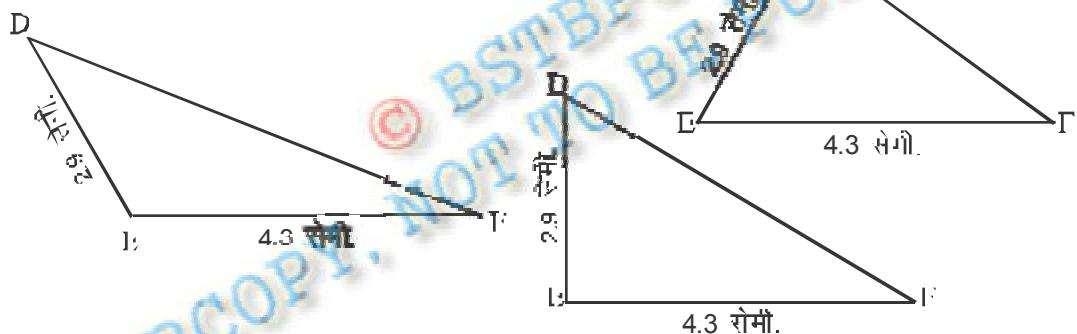
### 1. एक भुजा की माप बराबर लेकर



चित्र-7.16

चित्र-7.16 जै तरह इस प्रकार जे त्रिभुज बनाये जा सकते हैं जो चित्र 7.15 में बने  $\triangle ABC$  के समांगस्म हों आवश्यक नहीं हैं।

### 2. दो भुजाओं की माप बराबर लेकर

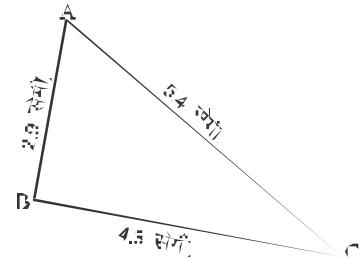


चित्र-7.17

यहाँ भी कई प्रकार के त्रिभुज बनाये जा सकते हैं जो चित्र 7.15 में बने  $\triangle ABC$  के समांगस्म हों आवश्यक नहीं हैं।

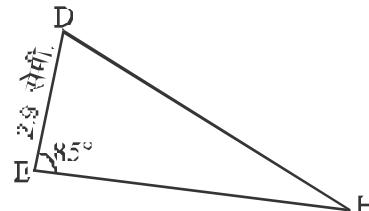
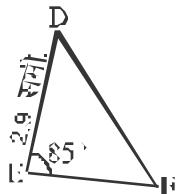
### 3. तीनों भुजाएं बराबर लेकर

चित्र-7.18 ने इस प्रकार का केवल ५० ही त्रिभुज बनाया जा सकता है जो आकार एवं नाम में चित्र 7.15 में बने  $\triangle ABC$  के ठर दर होगा। अतः यह समांगस्म त्रिभुज होगा। यह भुजा-भुज-भुज (SSS) प्रतिवंदि कहलाते हैं।



चित्र-7.18

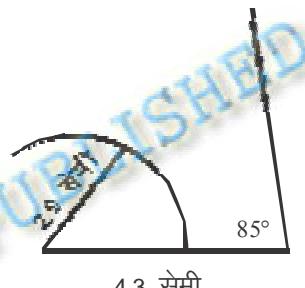
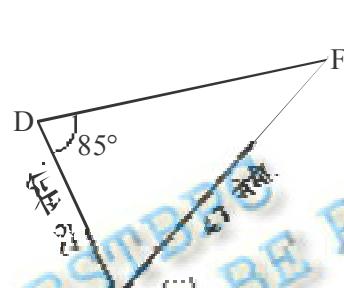
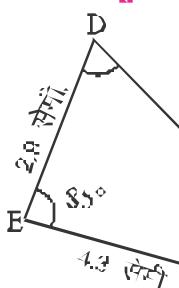
4. एक भुजा एवं एक कोण की माप बराबर लेकर



चित्र-7.19

इस स्थिति ने भी कह त्रिभुज बनाये जा सकते हैं कि  $\triangle ABC$  के समांगतम हैं यह आवश्यक नहीं।

5. दो गुजाएँ एवं एक कोण बराबर लेकर



(i)

(ii)

4.3 सेमी.

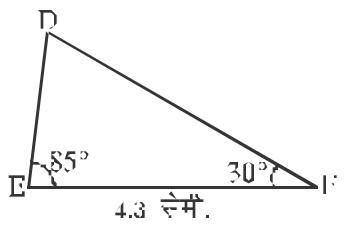
(iii)

त्रिभुज नहीं बन सका।

यदि दो भुजा और काफ़ी एक कोण बराबर होते हैं तब जरूरते नहीं है कि बनने वाला त्रिभुज समांगतम हो सके। परन्तु जब दो भुजा एवं उनके बीच बनने वाला को एक त्रिभुज बनाया जाता है तब बनने वाला त्रिभुज राविगतम होता है, जैसा कि 7.20 के (i) में बनाया गया है जो चित्र 7.15 में बने  $\triangle ABC$  के बराबर है यह भुजा-कोण-भुजा (SSA) प्रतिबंध कालजाता है।

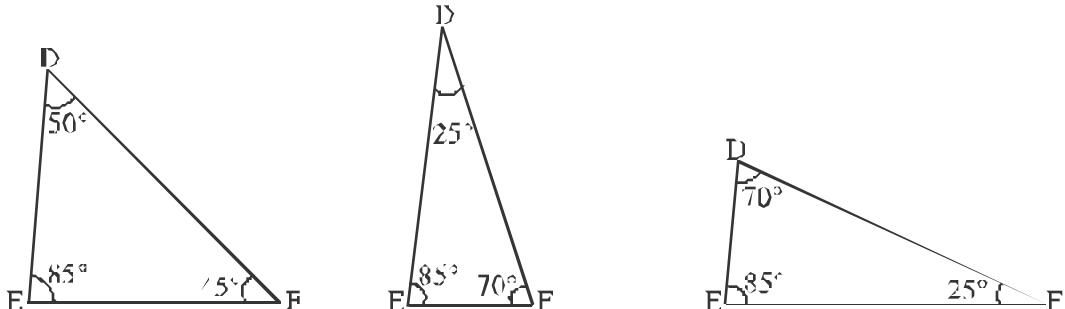
6. एक भुजा एवं दो कोण बराबर हो

इसके अनुसार जितने भी त्रिभुज बनने उन सबका आकार एवं रूप होंगे 7.21 में दो त्रिभुज की तरह ही होगा और इस प्रकार बना त्रिभुज  $\triangle ABC$  के समांगतम होगा। यह लोप-भुजा-कोण ( $\Delta S\Delta$ ) प्रक्रिया कहलाता है।



चित्र-7.21

### 7. एक कोण की माप बराबर रखकर

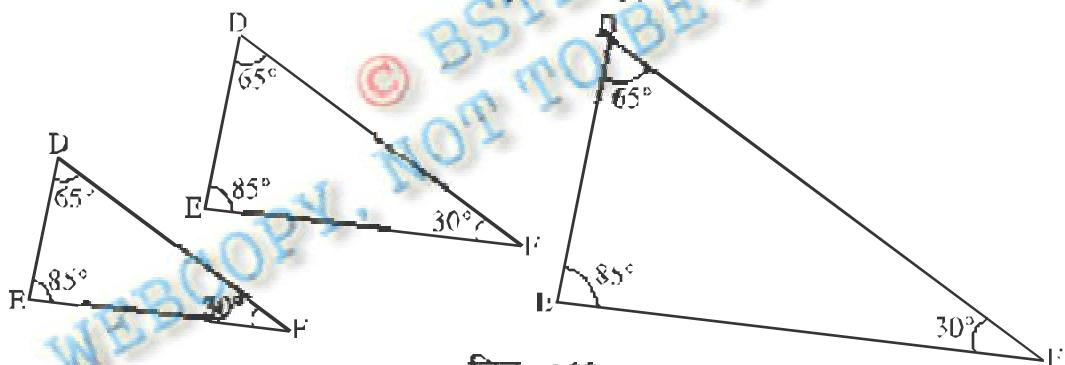


चित्र-7.22

यहाँ नी कई ग्रन्ति ल त्रिभुज बनव जा राकत हैं जो चित्र 7.15 में बने  $\triangle ABC$  के सर्वांगसम नहीं हैं।

### 8. nksकोणों की माप बराबर रखकर

पूँके ना उ नरो हैं कि दो त्रिभुजों में दो कोण प्रत्येक  $65^\circ$  रखने पर त्रिक्षेत्र अनेआन तरबर हो जाता है। इसलिए दो कोण की माप बराबर रखने का अर्थ आने अन तेन काम की माप बराबर रखना हो जाता है।



चित्र-7.23

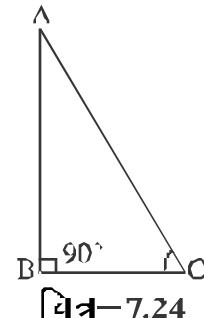
यहाँ भी कई प्रकार के लाण बनाये जा सकत हैं जो त्रिक्षेत्र में हैं  $\triangle ABC$  के समान हैं परन्तु आकर में समान नहीं हैं। अतः वे सर्वांगसम नहीं हैं।

### 9. रामकोण त्रिभुजों में सर्वांगरामता।

दो रामकोण त्रिभुजों के रिखे में सर्वांगरामता को व्यायोग्य निश्चय करना होता है। ऐसे त्रिभुजों में, जमकोण गहल स ही बराबर होते हैं। अतः सर्वांगसमता ग्रतिक्षेत्र आतान हो जाता है।

यदि आप एक  $\triangle ABC$  बना सकते हैं जिसमें  $\angle B = 90^\circ$  हो (चित्र-7.24 में दिखाया गया) यदि:

- केवल  $\angle B$   $BC$  के पास हो?
- केवल  $\angle C$  इन्हें हो?
- $\angle A$  और  $\angle C$  के पास हो?
- गुण  $AB$  और  $BC$  इन्हें हो?
- कण  $AC$  और  $AB$  या  $BC$  में से एक भुजा इन्हें हो?



चित्र-7.24

इनकी आकृतियाँ बनाने का प्रयास कीजिए। आप देखें कि (iv) और (v) ट्रिभुज बनाने में आपकी सहायता लगते हैं। परंतु स्थिरी (iv) व धारणात्मक SAS प्रतिबंध होते हैं। इनमें (v) कुछ नहीं है। यह निन्हें प्रतिबंध की ओर अप्रवर तरह है।

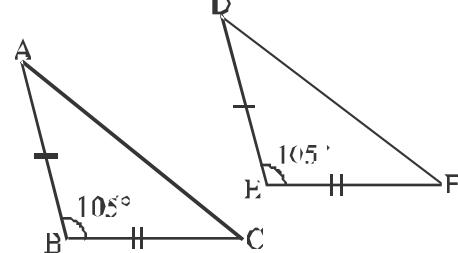
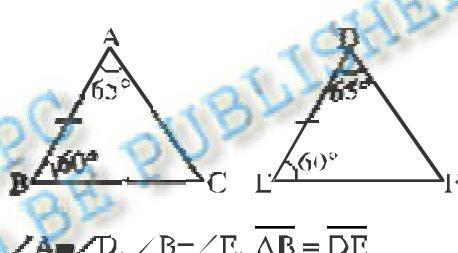
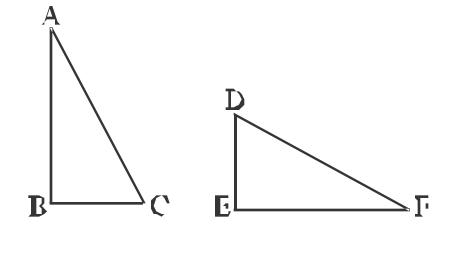
### RHS सर्वांगसमता प्रतिबंध

यदि एक सुमेलन के अंतर्गत, किसी समकोण ट्रिभुज का कण और एक भुजा क्रमशः किसी दूसरे समकोण ट्रिभुज के कण और एक भुजा के बराबर हो, तो वे ट्रिभुज सर्वांगसन होते हैं।

उम्मीद है कि इस RHS सर्वांगसमता क्यों कहते हैं? इसके बारे में सोचें।

जल्दी की नौ गतिशीलियों के साझाएँ पर इस दो ट्रिभुजों के सर्वांगसम होने के प्रतिबंधों को लगानी निम्नता तरीके से सारणीकृत कर सकते हैं।

क्र. नं.	दो ट्रिभुजों के सर्वांगसम होने का प्रतिबंध	प्रतिबंध की शर्त	प्रतिबंध का उदाहरण
1.	भुजा-भुजा-भुजा (SSS) प्रतिबंध	यदि एक ट्रिभुज की तीनों भुजाएं दूसरे ट्रिभुज की तीनों भुजाओं की समाप के बराबर हो तब वो ट्रिभुज सर्वांगसन हो।	<p style="text-align: center;"><math>\overline{AB} - \overline{DE}</math>, <math>\overline{BC} - \overline{EF}</math>, <math>\overline{AC} - \overline{DF}</math></p> <p style="text-align: center;"><math>\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF</math></p>

2.	<b>त्रिज्ञा-कोण-त्रिज्ञा</b> <b>(SAS)</b> <b>प्रतीक्षण</b>	यदि एक त्रिभुज के दो भुजाएँ तथा उनके संतर्गत बने कोण, दूसरे त्रिभुज के दो भुजाएँ तथा उनके अन्तर्गत बने कोण के बराबर हो तो दोनों त्रिभुज समानगत होंगे।	 <p> <math>\overline{AB} = \overline{DE}</math>, <math>\overline{BC} = \overline{EF}</math>  <math>\angle B = \angle E</math> तथा <math>\Delta ABC \cong \Delta DEF</math> </p>
3.	<b>कोण-त्रिज्ञा-कोण</b> <b>(ASA)</b> <b>प्रतीक्षण</b>	यदि एक त्रिभुज के तो लोण एवं संगत भुजा दूसरे त्रिभुज के तो काप एवं संगत भुजा के बराबर हो तो दोनों त्रिभुज समानगत होंगे।	 <p> <math>\angle A = \angle D</math>, <math>\angle B = \angle E</math>, <math>\overline{AB} = \overline{DE}</math>  तथा <math>\Delta ABC \cong \Delta DEF</math> </p>
4.	<b>समकोण-कर्ण</b> <b>-त्रिज्ञा</b> <b>(RHS)</b> <b>प्रतीक्षण</b>	दो रागलोण त्रिभुजों में से एक त्रिभुज का कर्ण एवं एक भुजा, दूसरे त्रिभुज के कर्ण एवं कोई एक अन्य भुजा के बराबर हो तो दोनों त्रिभुज समानगत होंगे।	 <p> <math>\angle B = \angle E = 90^\circ</math>  <math>\overline{AC} = \overline{DF}</math>, <math>\overline{BC} = \overline{EF}</math>  <math>\Delta ABC \cong \Delta DEF</math> </p>

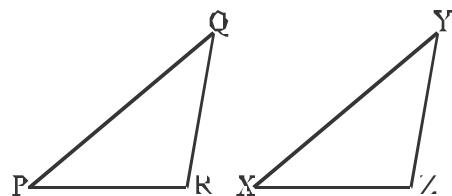
## प्र० १। वली—7.2

१. निम्न में आप कौन से सर्वांगसम प्रतिबंधों का प्रयोग करेंगे?

(i) दिया है

$$PQ = XY, QR = YZ, PR = XZ$$

इसलिए  $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$

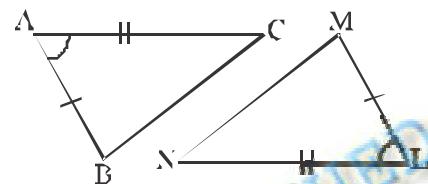


(ii) दिया है

$$AB = LM, AC = NL$$

$$\angle BAC = \angle MNL$$

इसलिए  $\Delta ABC \cong \Delta LMN$



(iii)  $MN = PQ$

$$\angle MON = \angle POQ$$

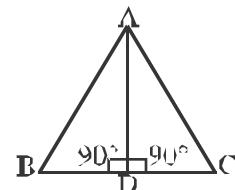
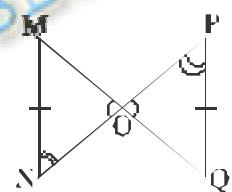
$$\angle ONM = \angle OPQ$$

(iv)  $\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$

$$AD = AD$$

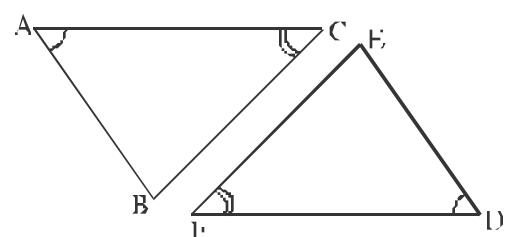
$$AB = AC$$

इसलिए  $\Delta ABD \cong \Delta ACD$

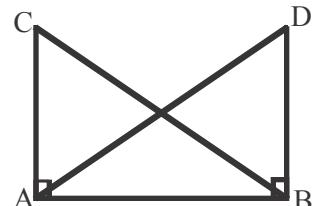


२. वित्र में बने दो त्रिभुज  $\Delta ABC$  और  $\Delta DEF$  आपस में सर्वांगसमता दर्शाते हैं, तो निम्न चरणों के लिए रिक्त स्थान में कारण भरिए।

	क्रण	कारण
(i)	$AC = FD$	
(ii)	$\angle BAC = \angle EDF$	
(iii)	$\angle ACB = \angle EFD$	



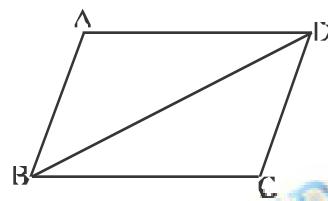
3. देए गए चित्र में एक आधर AB पर बने दो त्रिभुज ABC तथा ADB हैं। यहाँ  $AC=BD$ ,  $BC=AD$  तब ज्ञान कौन-सा कठिन सत्य है।



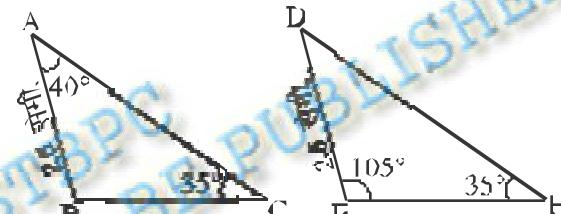
(i)  $\triangle ABC \cong \triangle ABD$       (ii)  $\triangle ABC \cong \triangle ADB$

(iii)  $\triangle ABC \cong \triangle BAD$

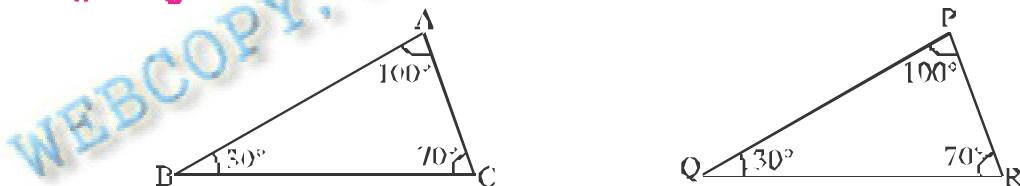
4. देए गए चित्र ने दिखाइ कि क्या  $\triangle ABD \cong \triangle BDC$  (आप भुजाओं के माप सजलते हैं)



5. देए गए चित्र में  $\triangle ABC$  में  $\angle A=10^\circ$ ,  $\angle C=35^\circ$  तथा भुज  $AB = 2.5$  सेमी. है, तथा  $\triangle DEF$  में  $\angle F=35^\circ$ ,  $\angle E=105^\circ$  एवं भुज  $DE = 2.5$  सेमी. हो तो क्या इन दोनों त्रिभुजों के बारे में  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$  हैं?

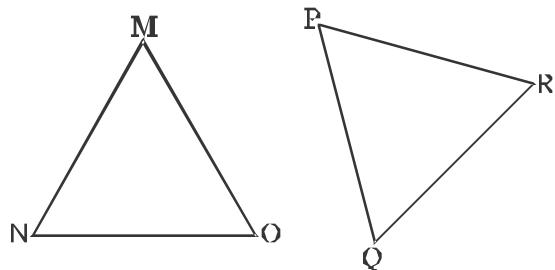


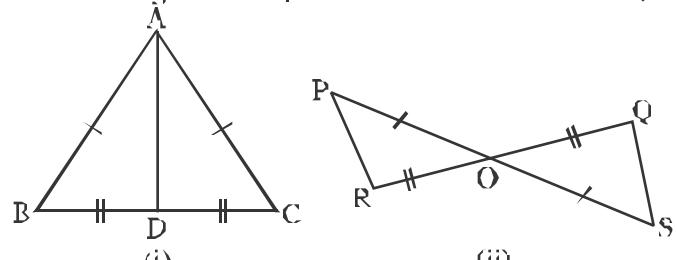
6. (i) भुजाओं को भागकर लिखिए—



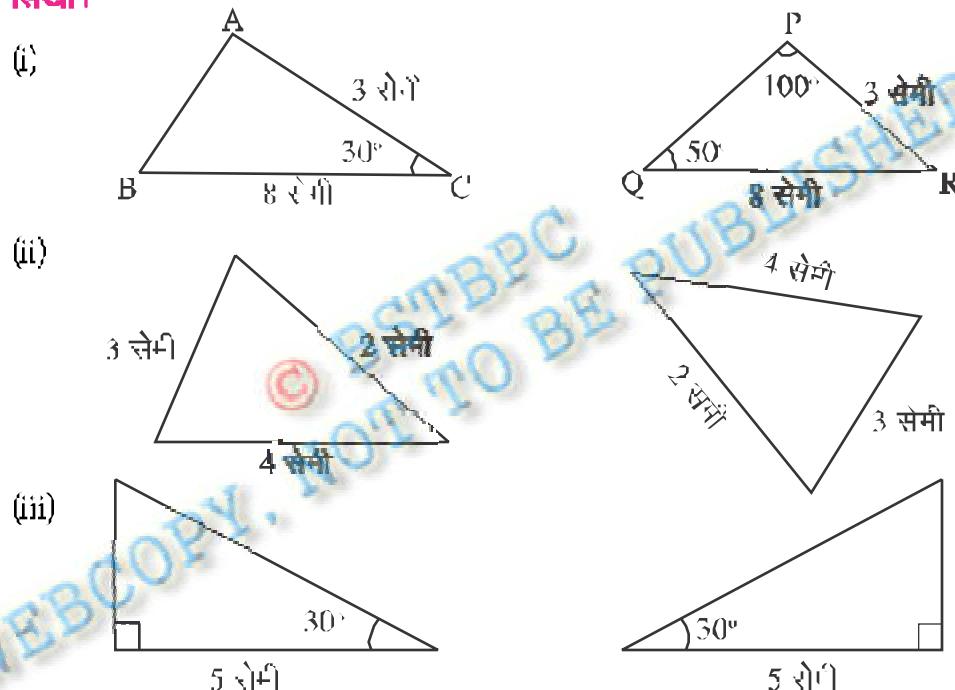
- (ii) नीचे दिए गए समान माप की भुजाओं वाले त्रिभुजों के कोणों को मापिए।

आप यी इसी प्रकार एक ही माप द संगत का वाल त्रिभुज शाफ्टी कंपनी न बनाइए व बताइए जो दोनों में से कोन से त्रिभुज सदैव लायींगर ग्राहक होते हैं?

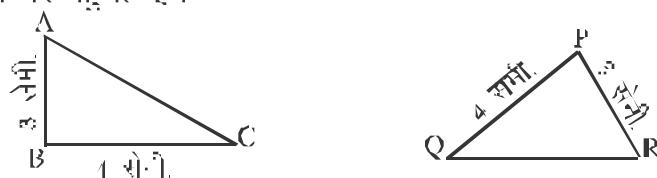


7. नीचे दी गई आकृतियों में सर्वांगसम त्रिभुजों के जोड़े पहचानकर लिखो। उसनें से एक नियुक्त कर दीजाएँ ।  
 कोण राशि उनके समान  
 हुआए त काण सर्वांगसम  
 त्रिभुज में स छाँटकर  
 लिखो ।
- 
- (i) (ii)

8. नीचे कुछ सर्वांगसम त्रिभुजों के जोड़े दिए गए हैं। ये किस नियम से सर्वांगसम हैं, लिखो।

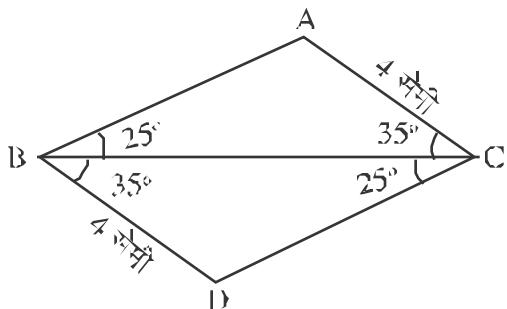


9. नीचे दी गई त्रिभुज दिए गए हैं, देखकर बनाओ क्या ये सर्वांगसम हैं? हाँ/ नहीं।  
 अपने उत्तर का कारण भी दो। (दोगों त्रिभुजों की सभी हुआए व लोण नाप।) इससे तुम किस निष्कर्ष पर पहुँचते हो?

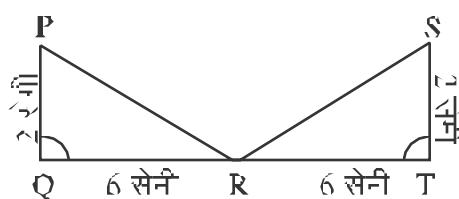


10. नीचे दिए गए प्रत्येक वित्र में त्रिभुजों के समांगसम होने की जाँच करो और उनके समांगसम होने या न होने का कारण भी लिखो।

(i) क्या  $\triangle ABC \cong \triangle CDB$ ?



(ii) क्या  $\triangle RPQ \cong \triangle RST$ ?



### हमने सीखा

- दो आकृतियाँ जब आकर एवं नप में समान होती हैं तो समांगसम होती है।
- दो रमान लम्बाई के ऐलाइंड गोप्ता में समांगसम होते हैं।
- दो कोण समांगर होने वाले कोण के समान नाप के होते हैं।
- दो कोण रमान होते हैं, यदि उनकी मुख्य रमान लम्बाई जी होते हैं।
- दो आयत समांगसम होते हैं यदि उनकी लम्बाई एवं बैठाई के प्रति गोप्ता में बराबर हो।
- दो इकाई समांगर में होते हैं, यदि

  - (i) उनकी ही इकाई आणस नं बराबर हो। (SSS)
  - (ii) यदि दो भुज एवं एवं बीच का कोण दूसरे त्रिभुज की तदनुरूपी दो भुजाएँ एवं उनके उन्हाँगत काग के बराबर हो। (SAS)
  - (iii) यदि दो कोण इस अनुरूप हुआ दूर से त्रिभुज के दो कोण एवं अनुरूप भुजा के बराबर हो। (ASA)
  - (iv) दो समकाग त्रिभुज समांगसम होते हैं यदि उक त्रिभुज का क्षण और एक भुजा दूसरे त्रिभुज के कर्पा एवं एक भुजा के बराबर हो। (RHS)

क्र० ४८

## अध्याय-8

## घातांक

### 8.1 गूणिका

आग सभी जानते हैं कि शतरंज के खेल का अधिकर भारत में हुआ था। इससे बुझ़ी एक मज़दार कहानी इस प्रकार है— जब यहाँ के राजा को पहले चला कि बुद्धिमत्तापूर्ण इस खेल का लिए एक उन्हें के राज्य का १०८ विहान है, तो जापिष्ठारक के द्वालालर जा ने कहा— “मैं पुराने दूर अनुष्ठानिक लिए पुराने कुररकार देना चाहता हूँ।” यह सुनकर विहान ने उपन्यास से छुका दिया।

राजा न कहा— न तर पर एक वर्ष धन हैं। मैं तुम्हारी कोई नी हड्डा यादी कर सकता हूँ। नन्हे जा तुम्हारी इच्छा हो, डरो मत।

विहान न कहा— राजा, उपली बास्ता भावन है। आप बुझे शतरंज के गहल घर (खान) ले लिए गए हैं जो एक दिन दिलाने की आज्ञा है। दूसरे घर के लिए २ दिन दिलाने के, तीसरे घर के लिए ५, बौथे घर के लिए १२, चौथे घर के लिए १६, चूँठे घर के लिए ३२.....

पर करो...., राजा ने ब्रोडीत छोकर ढेरी बैठ में रोक दिया।

पुराने दूरकार के पूरे ६४ चर्चे के लिए जाने निल ज हैं। हर घर में दाने की राशि प्रथम घर से पुरानी दानी आसिर, वही तुम्हारी शर्त है ना, परन्तु यह ज न हो तो भी इस शेषी इनाम गांगवार तुम मरी सदाशता का अप्पान कर रह हा।

**वया हृषि हत् सकते हैं कि चौसठवें खाने गें राजा को गहूँ के कितने दान हेने रहेंगे?**

गणना हुत बली होते जा रही है लकिन गजादर बात यह है कि यहै २ बा २ के स्थ वार-वार गुणा करना पड़ रहा है, जैस—

पहले घर में दाना : 1

दूसरे घर में दाने : 2

तीसरे घर में दाने :  $2 \times 2$

वैधे धर में दाने	:	$2 \times 2 \times 2$
पॉक्वें धर में द ने	:	$2 \times 2 \times 2 \times 2$
उत्तर्ये धर में दाना	:	$2 \times 2 \times \dots \dots 5$ बार
.....	:	.....
.....	:	.....

इसी प्रकार,

$$\text{वैश्वर्ये धर में द ना} : 2 \times 2 \times \dots \dots 63 \text{ बार}$$

निश्चिन्ता ही यह रास्ता छहूँ बड़ी नहीं, पर क्या उपर कहानी के ऊपर जाना नहीं चाहेगे? क्या शाजा अविष्कारक को यह हँनाना दे सकता?

आविष्कारक को 9223372036854775809 दाने द्वारा को देने पड़ने के लिए पूरी पूरी की जगीन पर उन्नर गहूँ की खती की जाए तब भी इतनी गहूँ नहीं मिलगी। अब आप यही सामिर यह है गा एक बहुत बड़ी संख्या?

$2 \times 2 \times \dots \dots 63$  बार करना पर कितनी बड़ी संख्या प्राप्त होगी? तब किसी संख्या ने उसी संख्या स्वार-बार गुणा करने की प्रक्रिया को लिखने का कोइ और तरीक नहीं है?

## 8.2 घातांक या घात (Exponent or Power)

कड़ा के सभी अधिकारी यही सौच रहे थे कि किसी रेंजे जा उसी राशि के साथ गुणा करने की प्रक्रिया का प्रयोग क्यों में लैर लाने कीदा गया है?

राजीव रसोदा ने लिखा— “हम शेवफल निकालने में इलई को सेनी  $\times$  सेनी रोगी लिखते हैं। इसी उकार आधुनि निकाले रागम भी इलई को रोगी  $\times$  रोगी  $\times$  रोगी — सेनी<sup>3</sup> लिखते हैं। तब इसी प्रकार  $2 \times 2 \times 2$  को  $2^3$  नहीं लिखा जा सकता?”

राजीव ने किसी रेंजे को उसी राशि से बार-बार गुणा करने को संक्षिप्त गैर लिखन का ठीक तरीका सुझाया। क्या अब  $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$  ज्ञान संक्षेप में लिख सकते हैं?

जिस प्रकार  $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^6$  है।

उसी प्रकार  $a \times a \times a \times a \times a \times a = a^6$

तथा  $x \times x \times x \times x = x^4$  होता है।

आप ने किसी रेति का उसी रेति के संघ बार-बार गुण को संकेत में लिखें:

- (i)  $x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x$  = .....
- (ii)  $r \times r \times r \times r \times r$  = .....
- (iii)  $17 \times 17 \times 17$  = .....
- (iv)  $101 \times 101 \times 101 \times 101 \times 101$  = .....

किसी संख्या का उसी संख्या के स्थान बार-बार गुण को आग संकेत में लिखना सीख दुक्ह है। इस राशिएँ रूप को हम धारीय संज्ञेतन भी कहते हैं। आइए, देखें ‘के इनके फिरा तरह ऐ बढ़ा जाता है—

यहाँ  $10^3$  वे  $10^0$  आधार (Base) वे  $3$  धारांक (Exponent or Index) कहताहै।

$10^3$  इसे  $10$  के ऊपर घात 3 बढ़ा जाता है। अर्थात् “ $10$  की तीर रेट पव” सी कहते हैं।  $10^3$  के 1000 का धातव्यीय रूप (Exponential Form) कहा जाता है। अर्थात् 1000 को दृष्टांकों वा प्रयोग करके संक्षिप्त रूप ( $10^3$ ) में लिखा जाता है।

कुछ धाताओं के विशेष नाम भी हैं।

जैसे —  $5^2$  जो 5 के ऊपर घात 2 है, इसे 5 का दर्ग (5 Squared) भी पढ़ा जाता है।

$5^3$  जो 5 के ऊपर घात 3 है, इसे 5 का छठा (5 Cubed) भी पढ़ा जाता है।

### रवयं करके देखिए

नीदे हिते व्यजकों के आधार एवं घात को उनके सानने दिए गए स्थानों में लेखिए:

$3^2$  में आधार — 3 और घात — 5

$7^3$  में आधार — ..... और घात — .....

$8^4$  में आधार — ..... और घात — .....

$p^4$  में आधार — ..... और घात — .....

$x^5$  में आधार — ..... और घात — .....

अब इन सनझा चुके हांते कि दृष्टीय रूप में लिखने का गास्तविक नदरश्ट लिस्ट बहुत बड़े राशि के संदर्भ रूप में लिखना है।

जैसे सूर्य से पृथ्वी की दूरी 150000000 किलोमीटर है जो इक हजार बड़ी राशि है इसे निम्न प्रकार से लिख सकते हैं-

$$150000000 \text{ कि.मी.} = 15 \times 10 = 15 \times 10^8 \text{ कि.मी.}$$

विशृणु ऊपर को संक्षिप्त रूप में लिखना तो आप भी सकते हैं। अब हमें वास्तविक ऊपर को विशृणु रूप में लिखिए-

$$1. \quad a^5 = a \times a \times a \times a \times a$$

$$2. \quad 3^6 =$$

$$3. \quad 5^5 =$$

$$4. \quad r^7 =$$

$$5. \quad 2^9 =$$

रहीम का यह समझ नं नहीं आ रहा आ के बहु 2<sup>m</sup> का विशृणु रूप में कैसे लिखे क्योंके m का लोड़ निश्चित मान नहीं है। क्या आपके पास रहीम की समस्या का जवाब है?

पहले ही जानो क्योंकि कि शतरंज के 64 खेतों में राजा जै 2 × 2 × 2 × .....63 बार उच्चात् 2<sup>63</sup> दाने गेहूँ के देने हो।

उत्तरी प्रकार,

$$2^m = 2 \times 2 \times 2 \times ..... m \text{ बार लिख सकते हैं।}$$

इसी प्रकार इन  $x^m$  और  $y^m$  के निम्न प्रकार से लिख सकते हैं—

$$x^m = x \times x \times x \times ..... m \text{ बार, और}$$

$$y^m = y \times y \times ..... m \text{ बार लिख सकते हैं।}$$

फिरी संख्या का धारालीका रूप उसके जभाज्ञ गुणनखण्डों की छतों के गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है। उदाहरण यह : 1000 = 2×2×2×5×5×5 (जभाज्ञ गुणनखण्ड) = 2<sup>3</sup>×5<sup>3</sup> (अन्त्य गुणनखण्ड की छतों के गुणनफल बला रूप)

**उदाहरण-1.** 64 को 2 ली बात का रूप गें लिखें।

**हल :**  $64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

अतः हम कह सकते हैं कि  $64 = 2^6$

**उदाहरण-2.**  $8^3$  और  $2^8$  में कौन बड़ा है?

हल :  $8^3 = 8 \times 8 \times 8 = 64$

$$2^8 = 2 \times 2 = 256 \text{ है। } \text{ इतने } 2^8 > 8^3$$

**उदाहरण-3.** (i) का नन ज्ञात कीजिए।

$$(i) = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1 \text{ (वर्त्तव में, } 1 \text{ को कोइं भी घात } 1 \text{ के बराबर होती है।)}$$

**उदाहरण-4.** निम्नलिखित संख्याओं को उभाज्य गुणनखंडों की घातों के गुणांक के रूप में व्यक्त कीजिए—

(i)	$144$	(ii)	$216$
(i)	$144 = 72 \times 2$	(ii)	$216 = 108 \times 2$
	$= 36 \times 2 \times 2$		$= 54 \times 2 \times 2$
	$= 18 \times 2 \times 2 \times 2$		$= 27 \times 2 \times 2 \times 2$
	$= 9 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$		$= 9 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2$
	$= 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$		$= 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2$
	$= 3^2 \times 2^4$ (प्राप्ति नहीं)		$= 3^3 \times 2^3$ (प्राप्ति नहीं)

आधार तथा तमक पूर्णांक भी हो सकते हैं—

$$\text{जैसे } (-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8 \text{ है।}$$

$$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = 16 \text{ है।}$$

स्पष्ट है आधार ऋणात्मक पूर्णांक हगे पर, उब घात विषम संख्या हो तो मान ऋणात्मक प्राप्त हुता है। तथा उब घात सम संख्या हु तो मान धनात्मक प्राप्त संख्या होती है।

**उदाहरण-5.** निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए।

- (i)  $(-1)^5$       (ii)  $(-1)$       (iii)  $(-10)$       (iv)  $(-5)^3$

हल : (i)  $(-1)^5 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$

(ii)  $(-1)^4 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = +1$

(iii)  $(-10)^4 = (-10) \times (-10) \times (-10) \times (-10) = 100 \times (-10) \times (-10) = 100 \times 100 = 10000$

(iv)  $(-5)^3 = (-5) \times (-5) \times (-5) = 25 \times (-5) = -125$

## प्रश्नावली—8.1

1. निम्नलिखित को धारांकीय रूप में व्यक्त कीजिए—

(i)  $5 \times 5 \times 5 \times 5$

(ii)  $c \times c \times c$

(iii)  $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

(iv)  $6 \times 6 \times b \times b$

(v)  $a \times a \times b \times b \times b \times d$

2. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए—

(i)  $3^1$

(ii)  $6^4$

(iii)  $9^1$

(iv)  $5^4$

(v)  $4^4$

3. निम्नलिखित संख्याओं में से प्रत्येक को धारांकीय संकरण (रूप) में व्यक्त कीजिए—

(i) 343

(ii) 512

(iii) 720

(iv) 3125

4. निम्नलिखित में से प्रत्येक भें छोन रखा है—

(i)  $4^1$  या  $3$

(ii)  $2^1$  या  $5^1$

(iii)  $2^1$  या  $8^1$

(iv)  $100^1$  या  $2^{10}$

5. निम्नलिखित में से प्रत्येक जो उनके अनाव्य गुणनखंडों की धारों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) ~~1200~~

(ii) 720

(iii) 1080

(iv) 2250

(v) 3600

6. सरल कीजिए—

(i)  $3 \times 10^3$

(ii)  $7^2 \times 3^2$

(iii)  $(-1)^1 \times 7^2$

(iv)  $0 \times 10^3$

(v)  $3^1 \times 2^2$

(vi)  $3^2 \times 10^4$

7. सरल कीजिए—

(i)  $(-3)^3$

(ii)  $(-1) \times (-2)^1$

(iii)  $(-4)^2 \times (-3)^2$

(iv)  $(-2)^3 \times (-10)^4$

(v)  $(-5)^2 \times (2)^1$

### 8. निम्न संख्याओं की तुलना कीजिए—

- (i)  $5 \times 10^7$ ;  $4 \times 10^9$       (ii)  $2.6 \times 10^{12}$ ;  $9.6 \times 10^8$   
 (iii)  $2.7 \times 10^{-1}$ ;  $3.0 \times 10^{15}$       (vi)  $7.0008 \times 10^{15}$ ;  $2.009 \times 10^{20}$

### 9. निम्नलिखित को घातांकीय रूप में लिखिए—

- (i)  $\frac{8}{729}$       (ii)  $\frac{81}{343}$       (iii)  $\frac{243}{1024}$

### 8.3 घातांकों के नियम

#### 8.3.1 एक ही आधार वाली घातों का गुणन

आगे जानते हैं कि  $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$  होता है। इसमें 2 के गुणकों का अलग-अलग समूह बनाकर कई प्रकार से लिख सकते हैं। जैसे—

$$\begin{aligned} 2^5 &= 2 \times (2 \times 2 \times 2 \times 2) &= 2^1 \times 2^4 \\ 2^5 &= (2 \times 2) (2 \times 2 \times 2) &= 2^2 \times 2^3 \\ 2^5 &= (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2) &= 2^3 \times 2^2 \\ 2^5 &= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times 2 &= 2^4 \times 2^1 \end{aligned}$$

यहाँ  $2^5$  को 2 के आधार वाले व्यंजकों में कई प्रकार से लिखा गया है। आप योग्य ही दिए गए घातीय व्यंजकों को समूह आधार वाले दो व्यंजकों के गुणांक ले रूप में हिस्थिए और घातों का योगफल प्राप्त कीजिए—

क्र.	घातीय व्यंजक	विस्तृत रूप में लिखकर दो समूहों में बाँटना (समूह अपनी इच्छा से बनाइए)	प्रत्येक समूह को घातीय व्यंजक के रूप में लिखिए	घातों का योगफल
1.	$a^7$	$a \times a \times a \times a \times a \times a \times a$	$a^4 \times a^3$	$4 + 3 = 7$
2.	$x^5$			
3.	$y^9$			
4.	$27^7$			
5.	$7^{12}$			

उपर दीय व्यंजकों के बेसोंसे रूप को देखें। तथा ने वे दिए हुए रैल स्थानों को पूरा करें—

$$a^7 = a^3 \times \boxed{a^3}$$

$$x^5 = x^3 \times \boxed{\quad}$$

$$y^{10} = y \times \boxed{\quad}$$

$$27^7 = 27^4 \times \boxed{\quad}$$

$$7^{12} = 7^8 \times \boxed{\quad}$$

क्या दो स्मान आधार वाले राशियों का गुण करना पर उन राशियों के घातों का गुणनफल वाली रैखि के घात से काङ्ग सम्भव है?

आइए देखें कि स्मान आधार वाली घातीय व्यंजकों का गुण करने होता है—

$$x^1 \times x^4 = x \times x \times x \times x \times x \times x \times x = x^7 = x^{3+4}$$

$$x^5 \times x^3 = x \times x = x^8 = x^{5+3}$$

$$y^{19} \times y^{21} = (y \times y \times \dots \text{ 19 बार } ) \times (y \times y \times \dots \text{ 21 बार })$$

क्या आप बता सकते हैं कि उपर  $y$  के साथ कितनी बार गुण होता? गुणनफल में  $y$  का पदा होता?

$y$  का  $y$  के साथ  $19 + 21 = 40$  बार गुण हो रहा है।

अतः गुणनफल  $y^{40}$  होगा।

अतः हन कह सकते हैं कि जब दो स्मान आधार वाले घातीय राशियों का गुण होता है, तो गुणनफल में आधार चक्री रूप है तथा घात उपर में जुड़ जाते हैं।

अतः

$$3^m \times 3^n = 3^{(m+n)} = 3^{12}$$

क्या आप  $x^m \times x^n$  का गुणनफल इसी रूप होता है?

$x^m \times x^n = x \times x \times \dots \text{ m बार } \text{ और } n \text{ बार अलगत } (m-n) \text{ बार गुण हो रहा है।}$

अतः  $x^m \times x^n = x^{m+n}$  (नियम-1)

### स्पष्ट करके देखिए

(i)  $3^3 \times 3^4 = \boxed{3^7}$

(ii)  $(-12)^2 \times (-12)^6 = \boxed{-12^8}$

$$(iii) h' \times h = h^{\square}$$

$$(iv) c^0 \times c^{20} = c^{\square}$$

$$(v) p^3 \times p^2 = p^{\square}$$

$$(vi) a^3 \times a^2 \times a^7 = a^{\square}$$

### 8.3.2 एक ही आधार वाली घातों का विभाजन

पाठेगा न गोनू जे गुला, सगान आधार वली घातीय राशियाँ को गुणा करना है हाने सीख लिय, सनन आधार वली घातीय राशियाँ का भाग कैस करेगे?

ननू ने कह, चला करक देखत हैं।

$$\frac{2}{2^5} - \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = 2 \times 2 = 2^2$$

रीना और जगाल ने भी इसी प्रकार ल सवाल हल किएः—

$$(i) \frac{3^5}{3^2} - \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3} = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$$

$$(ii) \frac{7^6}{7^3} - \frac{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7}{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7} = 7 \times 7 \times 7 = 7^3$$

पाठेगा ने राष्ट्रीय छलों को देखकर साथियों से कहा 'के जिस उत्तर दो सगान आधार वाली घातीय राशियाँ का गुणा करने पर बहुत जुड़ते हैं उसी प्रकार दो सगान आधार वाली घातीय राशियों में भाग किया जाने पर उसे ले घातांक में से हर का घातांक घटा देते हैं।

जैसे—  $2^4 \div 2^2$  के भागफल का घट  $7 - 5 = 2$  होता है,  $3^4 : 3^2$  के भागफल का घट  $5 - 2 = 3$  एवं  $7^6 \div 7^3$  के भागफल जो घात  $9 - 6 = 3$  है। अथोत्

$\frac{a^m}{a^n}$  के भागफल का घट  $m-n$  हुगा।

$$\text{अर्थात् } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (\text{नियन-2})$$

उन्होनू ने कहा "यह तो दीक्ष है पर यादें अंश और हर की जांच करना आरंभ है तो व्या हाग? चला हल करक देख, जैसे—

$$\frac{7^5}{7^3} = 7^{-2} = 7^0$$

$$\text{परन्तु } \frac{7^5}{7^3} = \frac{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7}{7 \times 7 \times 7} - 1 \quad \therefore 7^0 - 1$$

जैसे  $\frac{p^n}{p^m} = 1$  होगा। परन्तु यहाँ से

$$\frac{p^n}{p^m} = p^{n-m} = p^0$$

$$p^0 = 1 \quad (\text{नियन्त्रण})$$

जहाँ  $p \neq 0$

अब यहाँ निम्न संख्याओं पर विचार करें।

$$\frac{1}{5^2} = \frac{5^0}{5^2} = 5^{0-2} = 5^{-2} \quad (5^0 = 1 \text{ हो})$$

$$\frac{1}{6^3} = \frac{6^0}{6^3} = 6^{0-3} = 6^{-3} \quad (6^0 = 1 \text{ हो})$$

$$\frac{1}{4^9} = \frac{4^0}{4^9} = 4^{0-9} = 4^{-9} \quad (4^0 = 1 \text{ हो})$$

इन प्रश्नों का अवलोकन करते हुए क्योंकि यहाँ धारौदर संख्याओं में हर के अंश के स्थान पर ले जाए तब उनके घात के विकल्प लाक हो जाते हैं, इसीसे यहि हमारे पास

$$\frac{1}{a^4} \text{ हो तब}$$

$$\frac{1}{a} - \frac{a^0}{a^1} - a^{0-4} - a^{-4} \text{ होगा}$$

$$\text{यदि } \frac{1}{a^m} \text{ हो तब}$$

$$\frac{1}{a^m} = \frac{a^0}{a^m} = a^{0-m} = a^{-m}$$

$$\text{अतः } \frac{1}{a^m} = a^{-m}$$

परन्तु यही अंश के दूर के ले जाए तो क्या होगा, जैसे हमने ७५८ उद्दरण्में देखा है।

$\frac{1}{7^2} = 7^0$  या  $\frac{1}{a^{-1}} = a^4$  या  $a^m - \frac{1}{a^{-m}}$  इसका मतलब यह है कि जब घातांकों में अंश को दूर में ले जाएंगे तब गी घात का चिह्न बदल जाएगा।

### स्वयं करके देखिए

$$(i) \quad 10^8 \div 10^3 = 10^{\square}$$

$$(ii) \quad 9^8 \div 9^7 = 9^{\square}$$

$$(iii) \quad 21^{11} : 21^{13} = 21^{\square}$$

$$(iv) \quad b^{10} : b^5 = b^{\square}$$

$$(v) \quad d^{100} \div d^{60} = d^{\square}$$

### 8.3.3 एक धारा की धारा लेना

निम्न उदाहरणों पर ध्यान दें—

(i)  $(2^3)^2$  को सरल कीजिए—

**हल :**  $(2^3)^2 = 2^3 \times 2^3$

$= 2^{3+3}$  (चूंकि  $a^m \times a^n = a^{m+n}$  है।)

$= 2^6$

$= 2^{3+3}$

(ii)  $(3^4)^3$  को सरल कीजिए—

**हल:**  $(3^4)^3 = 3^4 \times 3^4$

$= 3^{4+4}$

$= 3^8$

$= 3^{4+4}$

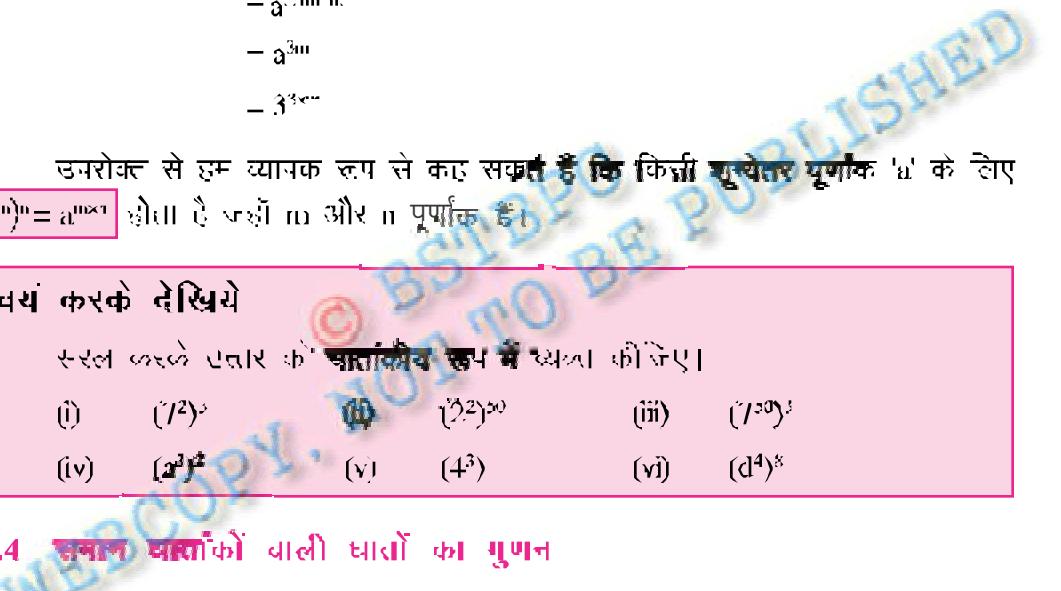
(iii)  $(a^m)^3 = a^m \times a^m \times a^m$

$= a^{m+m+m}$

$= a^{3m}$

$= 3^{m+m+m}$

उपरोक्त से हम व्यापक रूप से कह सकते हैं कि किसी गुणेतर गुणक 'a' के लिए

$$(a^m)^n = a^{mn}$$
 हो। (i) में जहाँ m और n पूर्णांक हैं।
 

### स्थान क्रमके देखिये

सरल करके उत्तर के सामान्य रूप में ज्ञात कीजिए।

(i)  $(7^2)^3$

(ii)  $(7^2)^{20}$

(iii)  $(7^2)^3$

(iv)  $(2^2)^4$

(v)  $(4^2)$

(vi)  $(d^4)^3$

### 8.3.4 समान घटाऊकों वाली धाराओं का गुणन

निम्न उदाहरणों पर ध्यान दें—

(i)  $2^4 \times 3^3$  को सरल कीजिए।

$$2^4 \times 3^3 = (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3)$$

$= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$

$= 6 \times 6 \times 6 \times 6$

$= 6^4$

यहाँ आधर 6, 2 और 3 का गुणफल है।

(ii)  $4^3 \times 3^3$  को सरल कीजिए।

$$\begin{aligned}4^3 \times 3^3 &= (4 \times 4 \times 4) \times (3 \times 3 \times 3) \\&= (4 \times 3) \times (4 \times 3) \times (4 \times 3) \\&= 12 \times 12 \times 12 \\&= 12^3\end{aligned}$$

यहाँ 12 आधार 4 और 3 का मुग्धनकल है।

(iii)  $3^2 \times a^3$  को सरल कीजिए।

$$\begin{aligned}3^2 \times a^3 &= (3 \times 3 \times 3) \times (a \times a \times a) \\&= (3 \times a) \times (3 \times a) \times (3 \times a) \\&= (3a)^3 \quad (\text{यहाँ } 3 \times a = (3a)^3)\end{aligned}$$

(iv)  $a^3 \times b^3$  को सरल कीजिए।

$$\begin{aligned}a^3 \times b^3 &= (a \times a \times a) \times (b \times b \times b) \\&= (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b) \\&= (ab)^3 \quad (\text{यहाँ } a \times b = ab \text{ है})\end{aligned}$$

व्यापक रूप में, किसी शूष्क (Non-Zero) पूर्णांक के लिए  $a \times b^n = (ab)^n$  होता है। यहाँ  $n$  एक पूर्णांक है।

**उदाहरण—6.** निम्नलिखित गद्दों को चातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए—

(i)  $(5 \times 4)^3$       (ii)  $(4a)^5$       (iii)  $(-3n)^3$

**हल :** (i)  $(5 \times 4)^3 = (5 \times 4) \times (5 \times 4) \times (5 \times 4)$   
 $= (5 \times 5 \times 5) \times (4 \times 4 \times 4)$   
 $= 5^3 \times 4^3$

(ii)  $(4a)^5 = 4a \times 4a \times 4a \times 4a \times 4a$   
 $= (4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4) \times (a \times a \times a \times a \times a)$   
 $= 4^5 \times a^5$

$$\begin{aligned}
 \text{(iii)} \quad (-3n)^3 &= (-3 \times n)^3 \\
 &= (-3 \times n)(-3 \times n)(-3 \times n) \\
 &= (-3 \times -3 \times -3) \times (n \times n \times n) \\
 &= -3^3 \times n^3
 \end{aligned}$$

### स्वयं करके देखिए

$a^3 \times b^3 = (ab)^3$  का लाइन में लिख लिये।

- |                          |                            |                        |
|--------------------------|----------------------------|------------------------|
| (i) $5^3 \times 2^3$     | (ii) $3^2 \times b^2$      | (iii) $a^2 \times c^2$ |
| (iv) $4^6 \times (-2)^6$ | (v) $(-2^4) \times (-3)^4$ | (vi) $(ab)^3$          |
| (vii) $(-2p)^4$          | (viii) $(2c)^1$            | (ix) $(2 \times 3)^5$  |

### 8.3.5 परिमेय संख्याओं की घातें

परिमेय संख्याओं के छुड़ घातों पर विचार करिए।

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{5}{7}\right)^4 &= \frac{5}{7} \times \frac{5}{7} \times \frac{5}{7} \times \frac{5}{7} \\
 &= \frac{5 \times 5 \times 5 \times 5}{7 \times 7 \times 7 \times 7} = \frac{5^4}{7^4} \\
 \left(-\frac{3}{11}\right)^5 &= (-1)^5 \times \left(\frac{3}{11}\right)^5 \\
 &= -1 \times \frac{3}{11} \times \frac{3}{11} \times \frac{3}{11} \times \frac{3}{11} \times \frac{3}{11} = -1 \times \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11} \\
 &= -1 \times \frac{3^5}{11^5} = -\frac{3^5}{11^5}
 \end{aligned}$$

### 8.3.6 रागान भारतीयों वाली भार्ती रो विगाजन

निन्हें उदाहरणों पर स्थान दें।

$$\text{(i)} \quad \frac{3^5}{5^5} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{5 \times 5 \times 5 \times 5} = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \left(\frac{3}{5}\right)^5$$

$$(iii) \quad \frac{a^s}{b^s} = \frac{a \times a \times a \times a \times a}{b \times b \times b \times b \times b} = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^s$$

ज्यापक रूप में,  $a^m + b^n = \frac{a^m}{b^n} - \left(\frac{a}{b}\right)^n$  जहाँ,  $a$  और  $b$  कोइ दो शून्यतर पूर्णांक हैं।

तथा  $m$  और  $n$  एक पूर्णांक हैं।

**उदाहरण—८.** निम्न का विस्तार में कीजिए :

$$(i) \quad \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$(ii) \quad \left(\frac{-2}{5}\right)^4$$

$$(iii) \quad \left(\frac{p}{q}\right)^s$$

$$\text{हल : } (i) \quad \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{2 \times 2 \times 2}{3 \times 3 \times 3}$$

$$(ii) \quad \left(\frac{-2}{5}\right)^4 = \frac{(-2)^4}{5^4} = \frac{(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)}{5 \times 5 \times 5 \times 5}$$

$$(iii) \quad \left(\frac{p}{q}\right)^s = \frac{p^s}{q^s} = \frac{p \times p \times p \times p \times p}{q \times q \times q \times q \times q}$$

#### 8.4 विविध उदाहरण

**उदाहरण—९.**  $(5^2) \times 3$  और  $(5^2)^3$  नं बड़ कौन है।

$$\text{हल : } (5^2) \times 3 = 5 \times 5 \times 3 \quad (5^2 \text{ का } 3 \text{ से गुणा})$$

$$= 75$$

$$(5^2)^3 = 5^2 \times 5^2 \times 5^2 \quad (5^2 \text{ का लघुं स 3 बार गुणा})$$

$$= 15625$$

$$\text{अतः } (5^2)^3 > (5^2) \times 3$$

**उदाहरण—9.**  $9 \times 9 \times 9$  के लिए आधार 3 लेते हुए, इसे एकांकीय रूप में लिखें।

$$\text{प्रश्न से}, \quad 9 \times 9 \times 9 = 9^3 = (3^2)^3 \quad 3^{2 \times 3} \quad (\because (a^m)^n = a^{mn})$$

$$= 3^6$$

**उदाहरण—10.** राल कीचिए और उत्तर को चातांकीय रूप में लिखें।

- (i)  $\left(\frac{3}{3^2}\right) \times 3$       (ii)  $2^3 \times 2^2 \times 5^4$       (iii)  $\left\{(2^3)^2 \times 5^6\right\} \times 3^5$   
 (iv)  $8^2 + 2^3$       (v)  $(3^2 \times 3) : 3^1$

**हल :** (i)  $\left(\frac{3}{3^2}\right) \times 3^7 = (3^{7-2}) \times 3^4 \quad \left(\because \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\right)$

$$= 3^5 \times 3$$

$$= 3^{5+1} \quad (\because a^m \times a^n = a^{m+n})$$

$$= 3^6$$

(ii)  $2^3 \times 2^2 \times 5^4 = (2^3 \times 2^2) \times 5^4$

$$= 2^5 \times 5^4 \quad (\because a^m \times a^n = a^{m+n})$$

$$= (2 \times 5)^5 \quad (\because a^m \times b^n = (ab)^{m+n})$$

$$= 10^5$$

(iii)  $\left\{(2^3)^2 \times 5^6\right\} \times 3^5$

$$= (2^6 \times 5^6) \times 3^5 \quad (\because (a^m)^n = a^{mn})$$

$$= \left\{(10)^6 \times 3^5\right\} \quad (\because a^m \times b^n = (ab)^{m+n})$$

$$= (10 \times 3)^5$$

$$= (30)^5$$

$$(iv) \quad 8^2 : 2^3$$

$$\therefore 8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$$

$$\therefore 8^2 = (2^3)^2$$

$$\therefore 8^2 : 2^3 = (2^3)^2 : 2^3$$

$$= 2^6 : 2^3$$

$$= 2^{6-3} = 2^3$$

$$(v) \quad (3^2 \times 3^2) : 3^3$$

$$= (3^{2+2}) : 3^3 \quad (a^m \times a^n = a^{m+n})$$

$$= 3^5 : 3^3 \quad (a^m : a^n = a^{m-n})$$

$$= 3^{5-3} = 3^2$$

**उदाहरण—11.** सरल करिए।

$$(i) \quad \frac{2^3 \times 3^4 \times 4}{3 \times 32}$$

$$(ii) \quad \frac{2 \times 3^4 \times 2^5}{9 \times 4^2}$$

$$(iii) \quad \frac{12 \times 9^2 \times 4}{6^3 \times 8^2 \times 27}$$

$$(iv) \quad 2^3 \times a^3 \times 5a^4$$

$$(v) \quad \frac{4^5 \times a^4 b^3}{4^6 \times a^3 b^2}$$

$$(vi) \quad \frac{2^3 \times a^3}{a^3 \times a^3}$$

$$\text{हल : } (i) \quad \frac{2^3 \times 3^4 \times 4}{3 \times 32} = \frac{2^3 \times 3^4 \times 2^3}{3 \times 2^5} \quad (\because 4 = 2^2, 32 = 2^5)$$

$$= \frac{2^{3+2} \times 3^4}{3 \times 2^5} = \frac{2^4 \times 3^4}{3 \times 2^5}$$

$$= 2^{4-5} \times 3^{4-1} = 2^0 \times 3^3$$

$$= 1 \times 27 = 27$$

$$(ii) \quad \frac{2 \times 3 \times 2^3}{9 \times 4^2}$$

$$\frac{2 \times 3^4 \times 2^5}{3^2 \times (2^2)^2}$$

$$= \frac{2 \times 2^5 \times 3^4}{3^2 \times 2^{2 \times 2}}$$

$$= \frac{2^{1+5} \times 3^4}{2^4 \times 3^2}$$

$$= \frac{2^6 \times 3^4}{2^4 \times 3^2}$$

$$= 2^{6-4} \times 3^{4-2}$$

$$= 2^2 \times 3^2$$

$$4 \times 9$$

$$= 36$$

$$\begin{array}{lll}
 \text{(iii)} & \frac{12^4 \times 9^5 \times 2}{6^2 \times 8^2 \times 27} & - \frac{(2^2 \times 3)^4 \times (3^2)^5 \times 2^2}{(2 \times 3)^3 \times (2^2)^7 \times 3^3} \\
 & = \frac{2^8 \times 2^4 \times 3^7 \times 3^5}{2^3 \times 2^6 \times 3^1 \times 3^3} & = \frac{(2^2)^4 \times 3^4 \times 3^{2 \cdot 3} \times 2^2}{2^3 \times 3^3 \times 2^{3 \cdot 2} \times 3^3} \\
 & = 2^{10-9} \times 3^{10-1} & = 2^1 \times 3^4 \\
 & & = 2 \times 81 \\
 & & = 162
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{lll}
 \text{(iv)} & 2^5 \times a^3 \times 5a & \text{(v)} \quad \frac{4^5 \times a^5 b^4}{4^2 \times a^5 b^2} \\
 & = 2^5 \times a^5 \times 5 \times a^1 & = 4^{5-2} \times a^{5-5} \times b^{4-2} \\
 & = 2^5 \times 5 \times a^3 \times a^4 & = 4^0 \times a^0 \times b^2 \\
 & = 8 \times 5 \times a^{3+1} & = 1a^3 b \\
 & = 40a^4 & = a^3 b
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{lll}
 \text{(vi)} & \frac{2^8 \times a^5}{2^4 \times a^3} & = \frac{2^8 \times a^5}{(2^2)^2 \times a^2} = \frac{2^8 \times a^4}{2^4 \times a^2} \\
 & = 2^{8-6} \times a^{5-2} & = 4a^2
 \end{array}$$

## प्रश्नावली—8.2

1. सरल कीजिए और उत्तर को घातांकीय रूप में लिखिए:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(i)} \quad 7^2 \times 7^4 \times 7^3 & \text{(ii)} \quad 3^{10} + 3^6 & \text{(iii)} \quad d^2 \times d^3 \\
 \text{(iv)} \quad 5^3 \times 5^2 & \text{(v)} \quad (5^3)^2 + 5^3 & \text{(vi)} \quad 3^5 \times 5^5 \\
 \text{(vii)} \quad a^4 \times b^4 & \text{(viii)} \quad (2^5 + 2^0) \times 2^1 & \text{(ix)} \quad 9^3 : 9^2
 \end{array}$$

2. सरल कीजिए और घातांकीय रूप में उत्तर लिखिए:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(i)} \quad \frac{2^3 \times 3^4 \times 4}{3^2 \times 32} & \text{(ii)} \quad \left[ (5^2)^2 \times 5^2 \right] : 5^4 & \text{(iii)} \quad 25^2 : 5^4
 \end{array}$$

$$(iv) 3^c - 4^e + 5^b$$

$$(v) 3^b \times 4^e \times 5^c$$

$$(vi) (4^b + 5^e) \times 2^b$$

$$(vii) \frac{11^b \times 13^e \times 3}{39 \times 11^2}$$

$$(viii) \frac{5^e}{5^e \times 5^3}$$

$$(ix) (3^e \times 3)^b$$

$$(x) \frac{5^e \times a^5}{25^e \times a^3}$$

**3. अभाज्य गुणनखंडों की घातों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए :**

$$(i) 1152$$

$$(ii) 64 \times 81$$

$$(iii) 540$$

$$(iv) 2^7 \times 48 \times 72$$

$$(v) 9 \times 6 \times 15 \times 4$$

**4. नीचे दिए गए कथनों में सही/गलत छोटिए तथा अपने उत्तर का कारण भी दीजिए।**

$$(i) 10^9 = (1000)^9$$

$$(ii) 4^e \times 3^2 = 12^e$$

$$(iii) 2^5 = 5^2$$

$$(iv) 10 \times 10^e = 100^e$$

**5. सरल कीजिए :**

$$(i) \frac{(3^2)^5 \times 5^3}{9^4 \times 5^2}$$

$$(ii) \frac{9^2 \times 3^3 \times a^6}{3^7 \times a^4}$$

$$(iii) \frac{5^e \times 10^5 \times 25}{5^f \times 6^e}$$

## 8.5 दशमलव संख्या पद्धति

इस जानकारी है कि—

$$56832 = 5 \times 10000 + 6 \times 1000 + 8 \times 100 + 3 \times 10 + 2 \times 1$$

इस इसी (१० की) घात का प्रयोग करते हुए धनकीय रूप में निम्न प्रकार लिख सकते हैं—

$$56832 = 5 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 2 \times 10^0$$

ध्यान देंजिए  $10000 = 10^4$ ,  $1000 = 10^3$ ,  $100 = 10^2$ ,  $10 = 10^1$  तथा  $1 = 10^0$  है।

यहाँ १० के घातक से एक—एक घात हुए ० तक आ जाते हैं।

### 8.6 बड़ी संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त करना

निम्नलिखित प्रतीक्षण (Pattern) को देखिए—

1.  $14335 = 1433.5 \times 10 = 1433.5 \times 10^1$
2.  $14335 = 143.35 \times 100 = 143.35 \times 10^2$
3.  $14335 = 14.335 \times 1000 = 14.335 \times 10^3$
4.  $14335 = 1.4335 \times 10000 = 1.4335 \times 10^4$
5.  $14335 = .14335 \times 100000 = .14335 \times 10^5$

उपरोक्त सभी ने चौथा रूप संख्या के मानक रूप (standard form) है। जब किसी संख्या को  $1.0$  एवं  $9.9$  द्वारा इसके बीच की एक दशमलव संख्या और  $10$  की घात के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जाता है, तो संख्या के इस रूप को मानक रूप कहते हैं।

उपर के तीसरे रूप की संख्या  $14335 = 14.335 \times 1000 = 14.335 \times 10^3$  मानक रूप में है? नहीं क्योंकि  $14.335 > 1.0$  एवं  $9.9$  व्याप्ति इसके बीच की केरो भी दशमलव संख्या नहीं है। अब क्या  $.14335 \times 10^5$  मानक रूप में है? नहीं क्योंकि  $.14335 < 1.0$  एवं  $9.9$  व्याप्ति इसके बीच की किसी भी दशमलव संख्या से।

ध्यान दीजिए  $14335$  को  $14335 \times 1000$  या  $.14335 \times 100000$  और  $14.335 \times 10^3$  या  $.14335 \times 10^5$  के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। परन्तु यह  $14335$  का मानक रूप नहीं है।

हमारी आकृति गंगा के झंकर से कूदँ ले दूरी अधिकता—

$300,000,000,000,000,000$  मी. को  $3.0 \times 10^{14}$  मी. के रूप में लिखा जा सकता है।

इसी प्रकार पृथ्वी का व्यामान

$$= 5,976,000,000,000,000,000,000,000 \text{ किमी}.$$

$$= 5.976 \times 10^{24}$$

व्याप्ति आप इस हत रूप सहन्त है कि पढ़ने, जाइन और तुरना करने की दृष्टि से मानक रूप ने लिखी यह संख्या उस 25 अंकों की संख्या की आपके बहुत अधिक तरल या सुनिधानन्द है?

अब यूरोप ग्रह का व्यामान

$$= 86,800,000,000,000,000,000,000,000 \text{ किमी}.$$

$$8.68 \times 10^{25} \text{ किमी. है।}$$

अब, उपरोक्ता देनों संख्याओं में केवल 10 की ६ चौं की तुलना करके ही आप यह कह सकते हैं कि यूरोपरा इह का व्यापार पृथ्वी से अधिक है।

**उदाहरण—12.** निम्नलिखित राशि जो को प्राकृति में लिखा जाए।

$$(i) \ 725.34 \quad (ii) \ 956,230 \quad (iii) \ 434,000 \quad (iv) \ 800,403,000$$

हल: (i)  $725.34 = 7.2534 \times 100 = 7.2534 \times 10^1$

$$(ii) \ 956230 = 9.56230 \times 100000 = 9.5623 \times 10^5$$

$$(iii) \ 434000 = 4.34000 \times 100000 = 4.34 \times 10^5$$

$$(iv) \ 800403000 = 8.00403 \times 100000000 = 8.00403 \times 10^9$$

लिपर क उदाहरण से साधा है कि किसी संख्या को गान्त रूप में व्यवत्त लिख समय 10 का घातांक गिरा प्रकार से प्राप्त कर सकत हैं।

स्वप्रथम, दशनलव विन्दु से बाईं ओर के अंकों की संख्या गिनते हैं। दशनलव विन्दु नहीं रहा पर बेन्दु जै कल्पना संख्या के दाँड़े सिर पर कह छूत हैं।

फिर प्राप्त संख्या नं से 1 घटाकर जो प्राप्त होता है, वही 10 का घातांक होता है।

उदाहरण (1) में संख्या 725.34 है, इसमें दशनलव के बाईं तरफ तीन अंक हैं अतः 10 की घात  $3-1=2$  होगा।

$$\text{अतः } 725.34 = 7.2534 \times 10^1$$

इसी प्रकार उदाहरण (2) में संख्या 956230 में ५ एं रिरे पर दशनलव की कल्पना करने पर दशनलव के बाईं तरफ कुल 6 अंक हैं अतः 10 की ६ चौं =  $6-1=5$  होगा।

$$\text{अतः } 956230 = 9.5623 \times 10^5$$

### प्रश्नावली—8.3

1. **निम्नलिखित संख्याओं को विस्तारित रूप में लिखिए—**

$$(i) 389505 \quad (ii) 2005183 \quad (iii) 230829 \quad (iv) 30079 \quad (v) 8324750$$

2. **निम्नलिखित विस्तारित रूपों में से प्रत्येक के लिए संख्या ज्ञात कीजिए—**

$$(i) \ 9 \times 10^4 + 5 \times 10^3 - 0 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 4 \times 10^0$$

$$(ii) \ 7 \times 10^5 + 8 \times 10^4 - 1 \times 10^3 + 7 \times 10^2$$

(iii)  $6 \times 10^5 - 5 \times 10^5 + 7 \times 10^6$

(iv)  $8 \times 10^5 - 3 \times 10^5 + 8 \times 10^6$

**3. निम्नलिखित संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त कीजिए—**

(i) 7,00,00,000

(ii) 8,000,000

(iii) 416,000,000

(iv) 456,234

(v) 9634.21

(vi) 72439.62

**4. निम्नलिखित कथनों में प्रकट होने वाली संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त कीजिए—**

(i) पृथ्वी का व्यास 12756000 मी. है।

(ii) बी 2001 में भारत की जनसंख्या 1,027,000,000 थी।

(iii) रुपये का व्यास 1,400,000,000 मी. है।

(iv) निर्वाच रथान में प्रकाश की वाल (या वेग) 300,000,000 मी./से. है।

(v) रौपर गंडल 12,000,000,000 वर्ष पुराना आकाशित किया गया है।

(vi) एक आकाश नंगा में वैस्तवन 100,000,000,000 तारे हैं।

(vii) आकाश नंगा के गम्य से सूर्य की दूरी 300,000,000,000,000,000 मी. अंकलेता की गई है।

(viii) 1.8 ग्राम चालो पानी के ५० हूंद में 60,230,000,000,000,000,000,000 अनुकूल होते हैं।

(ix) गृह्यी नं 1,353,000,000 किमी.<sup>2</sup> सनुव्र जलत है।

**5. निम्नलिखित कथनों में प्रकट होने वाली दूरियों को मानक रूप में व्यक्त करके घटते क्रम में सजायें।**

(i) सूर्य और शनि ग्रह के दीच की दूरी 1,433, 500,000,000 मी. है।

(ii) शनि और दुर्ग्रह ग्रहों के दीच की दूरी 1,439,000,000,000 मी. है।

(iii) सूर्य और गृह्यी के दीच की दूरी 149,600,000,000 मी. है।

(iv) गृह्यी और चन्द्रमा के दीच की दूरी 384,000,000 मी. है।

## हमने सीखा

1. बड़ी राश्यों को दरांकों के प्रयोग से एकले राशियों में लेते हैं, जिसमें बड़ी राशियों को पढ़ने, राशि ज्ञान, तुलना करने और उन वर्ग राशियाएँ करने में रास्ता व सुविधाओं का होता है।
2. राशि  $100000 = 10^5$  या  $10$  के उपर धातु  $5$  पढ़ा जाता है। इस अंगी कहते हैं कि  $10$  की पौँचदीं चात  $100000$  है। यह  $10$  आधार है तथा  $5$  इसका घातक है।
3. धारांकीय रूप में राशियाएँ त्रुटि नियमों का उल्लंघन करती है, जो इस उकाई है— किन्हें शून्यतर पूर्णाकों  $a$  और  $b$  तथा पूर्ण राशियों  $m$  और  $n$  के लिए,
  - (i)  $a^n \times a^m = a^{n+m}$
  - (ii)  $a^n \div a^m = a^{n-m}, m > n$
  - (iii)  $(a^n)^m = a^{nm}$
  - (iv)  $a^n \times b^m = (ab)^{m+n}$
  - (v)  $a^n \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-m}$
  - (vi)  $a^0 = 1$
  - (vii)  $(-1)^{\text{बहु संख्या}} = 1$   
 $(-1)^{\text{मिळी राश्य}} = -1$

क्र०४

## अध्याय-9

# बीजीय व्यंजक

### 9.1 गृणिका

हम  $x - 3$ ,  $y - 5$ ,  $1x - 5$ ,  $10y - 5$ , इत्यादि उस सरल बीजीय व्यंजकों से परिचित हो चुके हैं। लक्ष-6 में, हमने देखा था कि ये व्यंजक किस प्रकार नाइट्रिट और सनस्यातां को एक सूख्यपरिस्थिति प्रदान करने में राहायिक होते हैं। हम तारतम्य करते वाले अध्याय में भी व्यंजकों के उच्चेक उदाहरणों को देख चुके हैं।

बीजगणित में व्यंजकों (Expressions) को एक लंबायां अवधारणा माना जाता है। यह अध्याय बीजीय व्यंजकों से रांबड़ है। इस अध्याय में हम अव्ययन करेंगे कि बीजीय व्यंजक किस प्रकार बनते हैं, इनके प्रकार संयोजित किया (निलापित) जाता है, इनके मान हा केरो ज्ञात कर सकते हैं तथा इनका किस प्रकार उपयोग किया जा सकता है।

### 9.2 बीजीय व्यंजक

पिछले कक्षा में हमने देखा कि क्षेत्र चर एवं अवर को रांबोजित (निलापित) कर बढ़ा व्यंजक बनाया था है। हम ऐसे अव्ययों को बनाने के लिए चर एवं अवर को जोड़, घटाव, गुणा एवं भाग संक्रियाओं द्वारा संयोजित किया जाता है। जैसे—

उदाहरण-(a)  $x+1$  ने चर  $x$  में 1 जोड़कर  $x+1$  प्राप्त किया रखा है।

(b)  $x-1$  ने चर  $x$  में 1 घटाकर  $x-1$  प्राप्त किया रखा है।

(c)  $2x+1$  अचर 2 में चर  $x$  से गुणा करके  $2x$  बनाया गया है किर  $2x$  में 1 जोड़कर  $2x+1$  बनाया गया है।

अतः हम कह सकते हैं कि  $x+1$ ,  $x-1$  एवं  $2x+1$  बीजीय व्यंजक हैं।

#### 9.2.1 बीजीय व्यंजक के पद:

एक व्यंजक  $9x + 7$  एवं विचार कीजिए। इस बनाने के लिए पहले  $x$  एवं 9 का गुणा करके  $9x$  बनाया गया है फिर  $9x$  ने 7 को जड़ देता गया है।

व्यंजक  $3x^2 + 7y$  ने  $3$ ,  $x$  और  $x^2$  को गुणा करके  $3x^2$  बनाया गया है फिर 7 को  $y$  से गुणा करके  $7y$  बनाया गया है जौर अंत में  $3x^2$  के  $7y$  से जुड़कर  $3x^2 + 7y$  व्यंजक बनाया गया है। एक अन्य उदाहरण लें  $7xy - 3x^2$ , इस व्यंजक में क्या किया गया है?

इस त्रिकोण का नाम यह है कि किसी व्यंजक के छोटे-छोटे भाग होते हैं जो अलग से बनाये जाते हैं फिर आपर ने ने छोटे-छोटे भाग उत्तर दिये जाते हैं और व्यंजक बन जाता है। व्यंजक के ए छोटे-छोटे भाग ए उट्टर अलग से बनाये जाते हैं और फिर जाड़ दिये जाते हैं, व्यंजक के पद कहलाते हैं। उपरोक्त पहले उदाहरण में  $9x^2$  एवं 7 दो पद हैं, दूसरे उदाहरण में  $3x^2$  एवं  $7y$  पद हैं और तीसरे उदाहरण में  $7xy$  एवं  $(-3x^2)$  पद हैं।

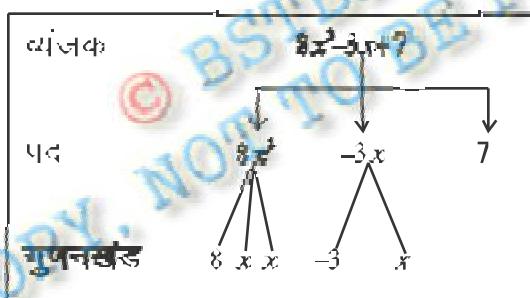
आड़े कुछ करके देखें

व्यंजक	पद
$9x^2 - 2x - 3$	$9x^2, 2x, -3$
$6x^2$	
$8x - 7y$	
6	
0	
$7(x-y)+9$	

### 9.2.2 पद के गुणनखंड:

हमने देखा कि  $(4x^2 - 7xy)$  में दो पद हैं  $4x^2$  और  $-7xy$ । पद  $/x^2: 4, x$  और  $x$  का गुणनफल है। यह  $4, x$  और  $x$  पद  $4x^2$  का गुणनखंड है। अतः इस जाते हैं कि कोई पद अपने गुणनखंडों का उपानुसाल होता है।

व्यंजक के पदों का उपानुसाल हाँ। रोक के लिये मेघ आऐ विश्व के द्वारा विद्या र करो हैं।



### प्रयास कीजिए

व्यंजक	पद	पद के गुणनखंड	घर	अधर
$3x^2 + 2xy - 9y^2$	$3x^2, 2xy, 9y^2$	$3x^2 = 3 \times x \times x$ $2xy = 2 \times x \times y$ $9y^2 = 9 \times y \times y$	$x, y$	3, 2, 9
$11x^2 - 7x + 5$				
$a^2 - b^2$				

### 9.2.3 गुणांक

हमने देखा कि व्यंजक के पद के उनके गुणनखंड के गुणनकल के रूप में लिख सकते हैं। आपने यह  $x^2$  देखा कि पद के गुणनखंड कोई अचर हो रहा है तथा उसके अलावा कोई बीजीय वर्ष हो सकता है जैसे  $9xyz$  एक पद है जिसका गुणनखंड  $9 \times x \times y \times z$  है। इसमें 9 अचर है और शेष  $x^2 \times y \times z$  है। इसी पद के राखात्मक ( $\text{अव्यक्त}$ ) गुणनखंड को पद के राखात्मक गुणांक वा केनल गुणांक कहते हैं। इसे शेष बीजीय पदों का गुणांक भी कहते हैं। जैसे  $-9xyz$  में  $xyz$  का गुणांक 9 है।  $-8x^2y^2z^2$  का गुणांक -8 है।

मिस्री पद का गुणांक 1 हो तो पद लिखते समय उसे नहीं लिखा जाता है। जैसे  $-1x^2$ ,  $1y$  के  $x^2$ ,  $y$  लिख जाते हैं। लेकिन यदि गुणांक -1 हो तो उसे केवल (-) चिन्ह, (-) के साथ दिखाया जाता है। जैसे  $-1x$  वा  $-x$  लिखते हैं।

### 9.2.4 समान एवं असमान पद

जब चरों के बीजीय गुणनखंड एक जैसे हों, तो वे पद समान पद (Like Terms) कहलते हैं। जब चरों के बीजीय गुणनखंड अभिन्न-निन्म हों, तो वे असमान पद (Unlike Terms) कहलते हैं। ऐसे— व्यंजक  $2xy - 3x + 5xy - 4$ , में पदों  $2xy$  और  $5xy$  को देखिए।  $2xy$  के गुणनखंड  $2, x$  और  $y$  है।  $5xy$  के गुणनखंड  $5, x$  और  $y$  हैं। इस प्रकार, इनके बीजीय गुणनखंड एक ही हैं और इसीलिए ये समान पद हैं। इसके विपरीत, पदों  $2xy$  और  $-3x$  में भिन्न-भिन्न बीजीय गुणनखंड हैं; ये असमान पद हैं। इसी प्रकार, पद  $2xy$  और  $4$  उसमान पद हैं। साथ ही,  $-3x$  और  $4$  भी असमान पद हैं।

### 9.2.5 व्यंजकों के प्रकार

- एकपदी व्यंजक**— वैसे व्यंजक जैसमें केवल एक पद हो एकादी व्यंजक कहलाता है। जैसे—  $9x$ ,  $3x^2$ ,  $y$ ,  $8xy$ ,  $8$ ,  $0$ ,  $3(x+y)$  आदि।
- द्विपदी व्यंजक**— वैसे व्यंजक जैसमें केवल दो पद होते हैं, द्विपदी व्यंजक कहलाते हैं। जैसे—  $3x+2y$ ,  $x^2-y$ ,  $a^2-ab$  आदि।
- त्रिपदी व्यंजक**— वैसे व्यंजक जैसमें केवल तीन पद होते हैं त्रिपदी व्यंजक कहलाते हैं। जैसे—  $9x^2-3x+2$ ,  $x-y+z$  आदि।
- बहुपद व्यंजक**— सानान्यतः वैसे व्यंजक जैसमें एक या एक से अधिक पद होते हैं। बहुपद कहलाते हैं।

**उदाहरण-1.** पेड़ आरेख बिधे द्वारा (a)  $(3x-4)$  तथा (b)  $2x^2-4$  का गुणनखंड ज्ञात करें।

**हल :**

$$\begin{array}{c} \text{पेड़ आरेख } 3x-4 \\ \text{पद } 3x \quad -4 \\ \text{गुणनखंड } 3 \quad x \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{पेड़ आरेख } 2x^2-4 \\ \text{पद } 2x^2 \quad -4 \\ \text{गुणनखंड } 2 \quad x \quad x \end{array}$$

**उदाहरण-2.**  $9xyz - 3$  के  $x, xy, xyz, 9yz, 9xz, 9yz$  के बीच फ्रैमिंग कीजिए।

**हल :**

$$\begin{array}{c} \text{पेड़ आरेख } 9xyz + 3 \\ \text{पद } 9xyz \quad 3 \\ \text{गुणनखंड } 9 \quad x \quad y \quad z \end{array}$$

- (a)  $x$  का गुणांक =  $x$  को छोड़कर शेष पद =  $9yz$
- (b)  $xy$  का गुणांक =  $xy$  को छोड़कर इष्ट पद =  $9z$
- (c)  $xyz$  का गुणांक =  $xyz$  को छोड़कर शेष पद =  $3$
- (d)  $9xy$  को बुनियो =  $9yz$  को छोड़कर शेष पद =  $z$
- (e)  $9xz$  का गुणांक =  $9xz$  को छोड़कर शेष पद =  $y$
- (f)  $9yz$  का गुणांक =  $9yz$  को छोड़कर शेष पद =  $x$

**उदाहरण-3.** कारप में से बताइए कि पदों के निम्नलिखित सम्मों के लौट-फैन से युग्म रूपानि पदों के हैं तथा कॉम-फैन से सुम असमान पदों के हैं—

- (i)  $3ab, 3b$       (ii)  $3a, -21b$       (iii)  $17a, -6a$       (iv)  $3^2 b, 2ab^2$

**हल :**

क्र.	पद युग्म	गुणनखंड	बीजीय गुणनखंड	समान/असमान	कारण
(i)	$3ab, 3b$	$3 \times a \times b$	निच-भिन-	असमान	$\therefore a$ नहीं पद में नहीं है
(ii)	$3a, -21b$	$3 \times a$	निच-भिन-	असमान	बीजीय गुण नहीं है तथा भिन-भिन है
(iii)	$17a, -6a$	$17 \times a$	सन्त	सन्त	दोनों बीजीय गुणाखंड सन्त
(iv)	$3a^2b, 3ab^2$	$3 \times a \times a \times b$	निच-भिन-	असमान	चर तो एक जोस्ते है किन्तु उनकी घातें असमान हैं।

**उदाहरण-4.** निम्नलिखित व्यंजकों में से एकपदी, द्विपदी, त्रिपदी व्यंजकों को अलग करें।

$$6x+9, \quad x+y+1, \quad 9x, \quad 8x^2 + 7x + 2, \quad 2, \quad -5x-y, \quad 4-x, \quad 4-x^2, \quad 8y^2, \quad 2xy,$$

$$3x^2y-1$$

**हल :** एकपदी व्यंजक =  $9x, 2, 8y^2, 2xy$

द्विपदी व्यंजक =  $6x+9, -5x-y, 4-x, 4-x^2, 3x^2y-1$

त्रिपदी व्यंजक =  $x+y+1, 8x^2+7x+2$

### प्रश्नावली-9.1

**1. निम्नलिखित व्यंजकों में से चर एवं अचर राशियाँ ज्ञात करें।**

- (a)  $5x+2$       (b)  $2ab+1$       (c)  $2x^2y-1+2x$   
 (d)  $m^2-n^2-1$       (e)  $9x^2yz$

**2. निम्नांकित व्यंजकों के पदों को पहचानिए।**

- (a)  $x^2+2x+1$       (b)  $8x^2+11ab-2b^2$       (c)  $9p^2-4q$   
 (d)  $a^2b^2-9$       (e)  $5ab-3b$

उपर्युक्त प्रश्न में देए गये सभी व्यंजकों के पदों का युग्मन्त्व देख आरेह लिखि से प्राप्त करें। प्रत्येक स्थिति में वे भी बताइये कि व्यंजक का निर्गम कैसे किया ज्या है?

**3.  $12x^2y$  ने (i)  $x^2y$ , (ii)  $x$  तथा  $y$  का गुणक बताइए।**

**4. निम्नांकित पद युग्मों में से समान पदों के समूह लिखिए-**

$$9x^2y, 8xy^2, 3ab, -7ba, 7ab^2, -4b^2, 7a, 7, 11a, -11a^2, 2xy, -2xy, 8ab, -2a, -2, 1, -x, 3x, 8x, 8$$

**5. नीचे दी गई स्थितियों में चरों, अचरों और गणितीय संक्रियाओं का प्रयोग करते हुए शीर्षीय व्यंजक प्राप्त कीजिए। यह भी बताइये कि बना व्यंजक एकपदी है या त्रिपदी?**

- (a)  $x$  के दुगुने से  $y$  का  
 (b)  $a$  में दबाव से गुणक के 3 घटाया गया है तभी जिस दबाव में  $a$  का दीन गुणा होता है।

- (c)  $m$  वाले  $n$  के मूलफल का तीन गुण  
 (d)  $a$  का स्वयं से गुणा करके  $b$  से गुणा किया गया और इसमें  $a$  का सात गुण घटाकर उसमें 6 का जोड़ा गया है।  
 (e)  $a^2$  के तीन गुण नं  $a$  का दो गुण घटाकर गया है।

### 9.3 बीजीय व्यंजकों पर संक्रियाएँ

अपना के वास जल्द के तीन डिल्स हैं, यदि प्रत्येक डिल्स में 2 कलम हों तो कलन की संख्या =  $2 + 2 + 2$

$$= 2 \times 3 = 3 \times 2 = 6$$

$$= 2 \times 3 = 3 \times 2 = 6$$

$$= 2 \times 3 = 3 \times 2 = 6$$

यदि डिल्स की संख्या 5 हो तो कलमों की कुल

$$\begin{aligned} \text{संख्या} &= 2 + 2 + 2 + 2 + 2 \\ &= 2 \times 5 \\ &= 10 \end{aligned}$$

यदि डिल्स की संख्या  $n$  हो तो कलमों की

$$\begin{aligned} \text{कुल संख्या} &= 2 + 2 + 2 + \dots n \text{ बार} \\ &= 2 \times n \\ &= 2n \quad \because (2n \text{ का अनुभव } 2 \times n) \end{aligned}$$

इसी प्रकार यदि एक डिल्स में  $n$  कलम हों तो 8 डिल्स में कलमों की कुल संख्या =  $8n$

अब यदि प्रत्येक डिल्स में  $n$  कलम वाले 3 डिल्स एवं प्रत्येक डिल्स में  $n$  कलम वाले 8 डिल्स के कुल कलमों को जोड़ा जा दी तो

$$\begin{aligned} \text{कुल कलमों की संख्या} &= 3n + 8n \\ &= (n + n + n) + (n - n + n + n + n - n + n + n) \\ &= 11n \end{aligned}$$

यहाँ सनन ५बो ३n एवं ४n को जोड़ने पर ये कल ११n आता है। यद्दें ३n का ३, ४n का ४ ऐसे योगफल ११n का गुणांक ११ है। इस देखते हैं कि यद्दें के गुणांकों का जोड़ (३+४), योगफल के गुणांक ११ के बराबर होत है, इससे यह स्पष्ट होता है कि बीजीय लंबाल के योगफल में सनन यद्दों के गुणांक आपस में चुम्ह जाते हैं। इसी प्रकार बीजीय व्यंजक के घटाने में सनन यद्दों के गुणांक घट जाते हैं। जैसे—  $7x$  में से  $3x$  घटाने के लिए  $7x$  के गुणांक ७ में से  $3x$  के गुणांक ३ को घटाकर जाये ताकि यद्दों के बीजीय गुणनखंड के साथ हित हो जाए। यानी  $7x - 3x = 4x$

मिस्री घट को घट ने का अर्थ होता है उत्तराके योज्य व्यापारीलोग का जोड़ना। यद्दों हन कह सकते हैं कि घटना सामान्यतः दोहने की ही क्रिया है।

**उदाहरण—5.** (i)  $7x$  ने  $-3x$  का घटावं (ii)  $-7x$  से  $-3x$  को घटावं

**हल :**  $7x - (-3x)$   
 $\because -1 \times (-3) = 3$   
 $= 7x + 3x$   
 $= 10x$

**हल :**  $-7x - (-3x)$   
 $= -7x + 3x$   
 $(\because -1 + 3 = 2)$   
 $= -4x$   
 $(-3x \text{ का योज्य व्यापारीलोग } -13x \text{ है})$

(iii)  $-7x$  में  $-3x$  का घटावं |

(iv)  $8x, -3x, 7x$  को जाहिर |

**हल :**  $-7x + (-3x)$   
 $\because + 1 \times (-3) = -3$   
 $= -7x - 3x$   
 $\because -7 - 3 = -10$   
 $= -10x$

**हल :**  $8x - (-3x) + 7x$   
 $= 8x + 3x + 7x$   
 $= 8x + 7x - 3x$   
 $= 15x - 3x$   
 $= 12x$

(v)  $-12m, 6m, -7m$  एवं  $4m$  का जाहिर |

**हल :**  $-12m - 6m + (-7m) + 4m$   
 $= -12m + 6m - 7m + 4m$   
 $= -12m - 7m + 6m + 4m$   
 $= -19m + 10m$   
 $= -9m$   $(\because -12m - 7m = -19m)$   
 $(6m - 4m = 2m)$

अभी तक हमने सामान पदों वाले व्यंजकों के जोड़ एवं घटाव को जाना। अब जरा बढ़ाए गए रुज़न के ८x + ३ गायें एवं २ भैंस हो, शौकत के गारा ४ गायें एवं ५ भैंस हों तो, रुज़न एवं शौकत के पास छुल जानवरों की संख्या

$$\begin{aligned}
 \text{रुज़ना के जानवर} &= \text{शौकत के जानवर} \\
 = (3 \text{ गायें} + 2 \text{ भैंस}) &= (4 \text{ गायें} + 5 \text{ भैंस}) \\
 - 3 \text{ गायें} + 2 \text{ भैंस} &= 4 \cdot 1 \text{ गायें} - 5 \text{ भैंस} \\
 - 3 \text{ गायें} - 4 \text{ गायें} &= 2 \text{ भैंस} + 5 \text{ भैंस} \\
 = 7 \text{ गायें} + 7 \text{ भैंस}
 \end{aligned}$$

यह लक्ष्य है कि रुज़न एवं शौकत के पास छुल 14 जानवर हैं जिनमें 7 गाय एवं 7 भैंस हैं। हम यह नहीं कह सकते कि उनके गास 14 गढ़ हैं या 14 भैंस हैं।

इस उदाहरण से यह स्पष्ट होता है कि उड़ना एवं घटने की क्रिया जमान पदों की वीज ही हत्ती है। असमान पद छाप पर उड़ना एवं घटाग या द्वितीय पदों या जोड़ के चिह्न द्वारा घटाव के विट के साथ लिखते हैं।

- वीजीय व्यंजकों को लोड़ने—घटाने,
- 1. सामान एवं अराना एवं पदों की पहचान करते हैं।
- 2. समान पदों को उनके चिह्न के साथ एक साथ लिखते हैं।
- 3. सामान्य पूर्णांकों की तरह उन समान पदों को एक राध जड़ते हैं।
- 4. फिर यदि एक द्वा व्यंजक असम न पढ़ दवते हैं तो उन्हें उनके पूर्णांक ले विट के साथ संतोषित कर लिख देते हैं।

**उदाहरण ५)**  $5x + 6y$  में  $8x + 9y$  को जोड़ें।

**हल :**  $(5x + 6y) + (8x + 9y)$

$$\begin{aligned}
 &= 5x + 6y - 8x + 9y \\
 &- 5x + 8x - 6y + 9y \quad (\text{समान पदों को एक समान लिखकर पुनर्व्यवस्थित किया गया}) \\
 &= 13x + 15y \quad \text{हल ग्राह्य हुआ।}
 \end{aligned}$$

इन व्यंजकों को हग सामान्य रूप से वाले जोड़ों की तरह भी उड़न सकते हैं। इसके लिए हन व्यंजकों को एक के नीचे एक करके इस प्रलापर रूपत है कि  $\frac{5x - 6y}{8x - 9y}$  समान पद एक हो स्थित में हो।

(ii)  $7ab + 4a - a + 8ba$  के जोड़ें।

**हल :**  $(7ab + 4a) + (a - 8ba)$   
 $= 7ab + 4a + a + 8ba$   
 $= 7ab - 4a + a + 8ab \quad (\because ab = a \times b = b \times a = ba)$   
 $= 7ab - 8ab + 4a + a \quad (a = 1a)$   
 $= 15ab - 5a$

**दूसरी पिण्ड,**

$$\begin{array}{ccc} 7ab + 4a & 7ab + 4a & 7ab + 4a \\ \underline{a + 8ba} & \text{या} & \underline{8ba + a} \\ & \text{या} & \underline{8ab + a} \\ & & 15ab + 5a \end{array}$$

(iii)  $13m^2 - 4xy$  ने  $12xy + 4m^2$  को घटाये।

**हल :**  $(13m^2 - 4xy) - (12xy + 4m^2)$   
 $= 13m^2 - 4xy - 12xy - 4m^2 \quad [\because \text{कोष्ठक के पहले त्रैण चेहरे } | \text{ कोष्ठक } \\ \text{खलाने पर प्रत्येक पद में -1 से गुणा } \\ \text{होता है जिससे पदों के चिह्न बदल जाते हैं।]$   
 $= 13m^2 - 4m^2 - 12xy - 4xy$   
 $= 9m^2 - 16xy$

**दूसरी पिण्ड :**  $\frac{13m^2 - 4xy}{4m^2 + 12xy}$

|मेहर बदलने वाला

(iv)  $3x - y + 6$  में  $x - y$  खलायें।

**हल :**  $(3x - y + 6) - (x - y)$   
 $= 3x - y + 6 - x + y \quad [\because \text{फ्रैक्षन के पहले अंश निह है इसलिए } \\ \text{अंशों का खलाने पर पदों के चिह्न बदल देये।]$   
 $= 3x - x - y + y + 6$   
 $= 2x + 6 \quad (-y + y = 0)$

(v)  $3a + 4b - 7 \neq 8a^2 + 4b^2$  के जोड़े।

**हल :**  $(3a - 4b - 7) - (8a^2 + 4b^2)$   
 $= 3a + 4b - 7 + 8a^2 - 4b^2$   
 $= 3a - 4b - 7 + 8a^2 + 4b^2 = 8a^2 + 4b^2 + 3a - 4b - 7$

यहाँ दोनों लंजकों में कोई पद समान नहीं है। अतः संखेका के बाद पदों की संख्या बढ़ जाती है।

## प्रश्नावली-9.2

### 1. निम्नलिखित व्यंजकों को जोड़ें—

- |  |                                 |
|--|---------------------------------|
| (a) $6ab - 4b + 7ba$                                   | (b) $8x^2y - 4x^2y$             |
| (c) $x$ एवं $y - 1$                                    | (d) $x - y, y - z$ एवं $z - x$  |
| (e) $3ab - b$ एवं $3b - ab$                            | (f) $x^2 - y^2$ एवं $y^2 - x^2$ |
| (g) $a^2 + 2ab + b^2$ एवं $a^2 - 2ab + b^2$            |                                 |
| (h) $a^2b + ab + a^2b^2$ एवं $-ab + 2ba + 2a^2b^2$     |                                 |
| (i) $3x + 11$ एवं $5x - 7$                             |                                 |
| (j) $x^2 - y^2 - 1, y^2 - 1 - x^2$ एवं $1 - x^2 - y^2$ |                                 |

### 2. घटाइये—

- |  |                                    |
|--|------------------------------------|
| (a) $3a^2$ में से $-a^2$                           | (b) $a^2 + b^2$ में से $a^2 - b^2$ |
| (c) $a^2 + 2ab + b^2$ में से $a^2 - 2ab + b^2$     |                                    |
| (d) $b(3 - a)$ में से $a(b - 3)$                   |                                    |
| (e) $3xy - 2x^2 - 2y^2$ में से $5x^2 - 7xy - 5y^2$ |                                    |

### 3. सरल करें—

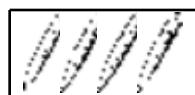
- (a)  $4xy - 7x^2y - 6xy + 2yz^2 - 4y^2z - 3yz^2$   
 (b)  $a^2 + ab + b^2 + a^2 + b^2 - ab + 3$

### 4. $x^2 + y^2$ प्राप्त करने के लिए $2x^2 + y^2 - 3$ में क्या जोड़ें।

5.  $a+b+c$  प्राप्त करने के लिए  $7a-8b$  में क्या घटाना चाहिए।
6. यदि सुनील ने  $a$  रु. की दर से 5 कलम  $b$  रु. की दर से 7 पेसिलें एवं पुनः  $a$  रु. की दर से 10 कलमें एवं  $b$  रु. की दर से 3 पेसिलें खरीदीं तो उसने कुल कलम एवं पेसिल खरीदने में कितने रुपये खर्च किये?

#### 9.4 बीजीय व्यंजकों का गुण

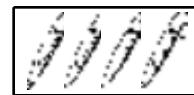
आलिनी के पत्त 3 डिब्बे हैं प्रत्येक  $\text{₹ } 2$  कलम है तो कुल कलमों की संख्या क्या होगी?



$$= 4$$



$$= 4$$



$$= 4$$

$$= 3 \times 4$$

डिब्बे की संख्या  $\times$  प्रत्येक डिब्बे में कलमों की संख्या

यदि शालिनी ले पास डिब्बों की संख्या  $x$  हो एवं प्रत्येक डिब्बे में  $y$  कला हो तो कुल कलम  $= x \times y$

$$= xy$$

पुनः यदि मान ले कि शालिनी के पास  $2x$  डिब्बे हैं एवं प्रत्येक डिब्बे में  $3y$  कला है तो कुल कला  $= 2x \times 3y$

$$= 2 \times 3 \times x \times y$$

$$= 6xy$$

परं यदि मान ले कि शालिनी के पास  $2m$  डिब्बे हैं एवं प्रत्येक डिब्बे में  $3m$  कलम हो तो कुल कला  $= 2m \times 3m$

$$= 2 \times 3 \times m \times m$$

$$= 6m^2$$

इस प्रकार हमने देखा कि व्यंजकों का गुण यास्तर ने उनके वदों का गुण हता है जिसमें वदों के गुणांकों का गुण अपने में एवं वर्णों का गुण आपस में लोगा है।

- अब आप रोचिए कि हम दीजीय व्यंजकों के द्वारा का उपयोग कौन कहो-लगाए करते हैं?

## आइए कुछ करें

नीचे दिये गए व्यंजकों के गुणानुसार पैटर्न के आधार पर रिक्त स्थानों में इन्हें—

क्र.	प्रथम व्यंजक	द्वितीय व्यंजक	प्रथम व्यंजक × द्वितीय व्यंजक	द्वितीय व्यंजक × प्रथम व्यंजक	गुणनफल
1.	$x$	$y$	$x \times y$	$y \times x$	$xy$
2.	$x$	5			
3.	$a$	$2a$			
4.	$-3$	$3m$			

उपर्युक्त उदाहरण के ऊपर वर हैं। यह साधा ऐसे ही के व्यंजकों का गुणनफल के लिए ही लाभान्वयन है। इसने गुणा के सामान्य नियमों का वालन होता है।

व्यंजकों के गुणा करते समय यूनिकों के गुणों की नियम विधि पर ध्यान दिया जाना चाहिए।

(i) यदि दोन पूर्णांकों को उन पूर्णांक से गुणा करने पर उन पूर्णांक प्राप्त होते हैं—

$$(+a) \times (+b) = +ab$$

(ii) यदि दोन पूर्णांक के बीच पूर्णांक से गुणा करने पर उन पूर्णांक प्राप्त होता है—

$$(+a) \times (-b) = -ab$$

(iii) ऋण पूर्णांक को ऋण पूर्णांक से गुणा करने पर उन पूर्णांक प्राप्त होता है।

यदि गुणवाली व्यंजक है, तो  $(-a) \times (-b) = -ab$

पहले व्यंजक के प्रत्येक वद से दूसरे व्यंजक के प्रत्येक वद में गुण किया जाना चाहिए।

$a \times (b+c)$  है तो  $a$  से व्यंजक  $(b+c)$  के जाने पद,  $b$  एवं  $c$  से गुण किया जाना चाहिए।

**उदाहरण—7.** गुणा करें—

- (a)  $a$  एवं  $(b+c)$  का
- (b)  $a$  एवं  $(b-c)$  का
- (c)  $-3m$  एवं  $(-6m-7n)$  का
- (d)  $xy$  एवं  $(9+8x)$  का
- (e)  $-x$  एवं  $(4x-y)$  का

**हल :** (a)  $(a) \times (b + c) = a \times b + a \times c$   
 $= ab + ac$

(b)  $(a) \times (b - c) = a \times b - a \times c$   
 $= ab - ac$

(c)  $(-3m) \times (-6m - 7n) = (-3m) \times (-6m) - (-3m) \times 7n$   
 $= -18m^2 - 21mn$   
 $= 18m^2 + 21mn$

(d)  $(xy) \times (9 + 8x) = xy \times 9 + xy \times 8x$   
 $= 9xy + 8x^2y$

(e)  $(-x) \times (4x - y) = (-x) \times (4x) - (-x) \times y$   
 $= -4x^2 + xy$

### प्रश्नावली—9.3

#### 1. नीचे दिए गए बीजीय व्यंजकों का गुण कीजिए।

- |  |                               |
|--|-------------------------------|
| (a) $(7a + 2b)(a + 4b)$                    | (b) $(x - 6)(4x - 9)$         |
| (c) $(5x - 1)(3y - 0)$                     | (d) $(a^3 - b^3)(a - b)$      |
| (e) $(0.7x - 0.2y)(1.5x - 3y)$             | (f) $(3a^2 + 5a - 9)(3a - 9)$ |
| (g) $(x - y)(x - y)$                       | (h) $(x^2 - 5x + 8)(x^2 + 3)$ |
| (i) $(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y)(x - y)$ | (j) $(3pq - 3q)(3q - pq)$     |

#### 2 सरल करें।

- |  |
|--|
| (a) $(a + b)(a - b) + (a - b)(a^2 + ab - b^2)$ |
| (b) $a^3 - b^3 - (a - b)(a^2 - ab + b^2)$      |
| (c) $m^2 - n^2 - (m - n)(m + n)$               |
| (d) $(2a + 5b)(3b - 4a) - (7a + 3b)(2a + b)$   |

## हमने सीखा

1. अग्रात संख्या के उकार संक्षेप में द्वारा लिख जाते हैं जिन्हें चर कहते हैं। चरों के मान बदल सकते हैं।
2. अवरों के मान निश्चिक होते हैं।
3. वर्ते, अवरों या दरों के मापितीय रॉफ़िक्स और ग्रीजीय व्यंजक द्वारा किये जाते हैं।
4. ग्रीजीय व्यंजक पदों से निलकर बने होते हैं जो वर एवं उकार के मापितीय रॉफ़िक्सों के द्वारा बने होते हैं।
5. पदों के सार्वभौमिक गुण नखंड के पद का गुणांक कहते हैं।
6. यांत्रे पदों का ग्रीजीय गुणानखंड राशी हो तो वे राशी पद होते हैं।
7. यांत्रे पदों का ग्रीजीय गुणानखंड ऊरगान हो तो वे ऊरगान पद होते हैं।
8. ग्रीजीय व्यंजक में पदों की संख्या के आधार पर इन्हें छोड़पद, द्विपद, त्रिपद या बहुपद के उकार में बांधा जाता है।
9. व्यंजक को बहुपद भी कहते हैं।
10. जिन व्यंजकों गं एक चर द्वारा ही दो एक चर वाले व्यंजक लहजाते हैं, जिन व्यंजकों गं दो चर हट हैं वे तो चर वाले व्यंजक होते हैं।
11. दो समान पदों का जोड़ (या घटाव) एक अन्य समान पद होता है जिसका गुणांक उन सनान पदों के गुणांकों का जोड़ (या घटाव) के बराबर होता है।
12. असमान पदों का जोड़ते (या घटाते) सनय उन्हें वैसे ही छोड़ दिया जाता है।  
**जैसे—**  $3x + 2y = 3x + 2y$
13. जब हम दो या उचित व्यंजकों को जोड़ते ही उटाते हैं तो उससे ये हम उनके राशीनपदों को जोड़ते या घटाते हैं एवं उसमान पदों को ज्यों का जोड़ देते हैं।
14. व्यंजकों के गुणा में वर्तों के वर्तों के साथ एवं अवरों का अवर के साथ गुणा करते हैं।
15. यांत्रे किसी दो का उकार के साथ गुणा हो तो उन्हें उपरोक्त में गुण विधि के साथ लिख देते हैं जैसे  $2 \times x = 2x$ ।

गोल

## अध्याय-10

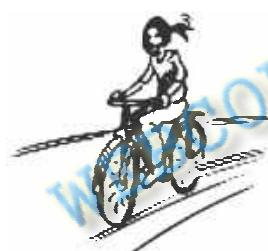
# राशियों की तुलना



3 मीटर



9 मीटर



15 किमी./घंटा



60 किमी./घंटा

साइकिल एवं स्कूटर की चालों का अनुपात 1: 4 है।

### प्रयास कीजिए

- रवीन्द्र एवं किशोर द्वारा गणित में प्राप्त अंक क्रमशः 65 एवं 62 हैं। इनके अंकों का अनुपात बताइए?
- 5:7 का व्युत्क्रम अनुपात क्या होगा?

**उदाहरण-1 :** एक बक्से की लम्बाई 2 मीटर एवं चौड़ाई 80 सेमी. है। इसकी लम्बाई एवं चौड़ाई में अनुपात ज्ञात कीजिए।

**हल:** पहले दोनों राशियों को एक ही इकाई में लिखते हैं।

$$\text{अतः } 2 \text{ मीटर} = 2 \times 100 \text{ सेमी.} = 200 \text{ सेमी.}$$

$$\text{इस प्रकार लम्बाई : चौड़ाई} = 200 \text{ सेमी.} : 80 \text{ सेमी.}$$

$$\boxed{\text{ध्यान रहे कि तुलना करते समय दोनों राशियों की इकाइयाँ भी समान होनी चाहिए।}} \quad = \frac{200}{80} = \frac{5}{2} = 5:2$$

**उदाहरण-2 :** यदि प्रवीण की ऊँचाई 150 सेमी. तथा गुंजन की ऊँचाई 60 सेमी. है तब उनकी ऊँचाइयों का अनुपात क्या होगा?

**हल :** प्रवीण की ऊँचाई : गुंजन की ऊँचाई = 150 सेमी. : 60 सेमी.

$$= \frac{150}{60} = \frac{5}{2} \text{ (दोनों पदों में 30 से भाग देने पर)}$$

यदि उपर्युक्त दोनों उदाहरणों पर ध्यान दें तो आप पायेंगे कि दो विभिन्न स्थितियों में तुलना करने पर एक ही अनुपात भी मिल सकता है।

**अनुपात का सरलतम रूप (Simplest form of ratio):** अनुपात का सरलतम रूप तब होता है जबकि इसके पूर्व एवं उत्तर दोनों पदों में इन्हें विभाजित करने वाली कोई उभयनिष्ठ संख्या न हो।

**उदाहरण-3 :** 36 तथा 24 में क्या अनुपात है? इसका सरल अनुपात ज्ञात कीजिए।

**हल:** 36 तथा 24 में अनुपात = 36:24

36 तथा 24 का महत्तम समापवर्तक हेतु क्रिया

$$\text{म.स.} = 2 \times 2 \times 3 = 12 \quad 2 \Big| 36, 24$$

$$\text{सरल अनुपात हेतु} \quad 2 \Big| 18, 12 \\ 3 \Big| 9, 6 \\ 3, 2$$

$$(36 \div 12) : (24 \div 12) = 3:2$$

$$\text{सरल अनुपात} = 3:2$$

**सरलतम अनुपात प्राप्त करने के लिए अनुपात के दोनों पदों में इनके महत्तम समापवर्तक का भाग देते हैं। प्राप्त भागफल का अनुपात सरलतम अनुपात होता है।**

## 10.2 तुल्य अनुपात

विभिन्न अनुपातों की भी आपस में तुलना की जा सकती है, जिससे यह पता चल सके कि वे तुल्य हैं अथवा नहीं। ऐसा करने के लिए हमें अनुपातों को पहले भिन्नों के रूप में लिखना पड़ता है और फिर उन्हें समान हर वाली भिन्नों में बदलकर उनकी तुलना करते हैं। यदि ये भिन्ने समान हैं तब हम कहते हैं कि दिये हुए अनुपात तुल्य हैं।

**उदाहरण-4 :** क्या अनुपात  $2 : 3$  अनुपात  $3 : 5$  के तुल्य हैं?

**हल:** जाँच करने के लिए, हमें देखना होगा कि क्या  $\frac{2}{3} = \frac{3}{5}$  है?

$$\text{हम पाते हैं } \frac{2}{3} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{10}{15} \quad \text{तथा } \frac{3}{5} = \frac{3 \times 3}{5 \times 3} = \frac{9}{15}$$

$$\text{हम देखते हैं कि } \frac{10}{15} > \frac{9}{15} \text{ है। अर्थात् } \frac{2}{3} > \frac{3}{5} \text{ है।}$$

अतः अनुपात  $2 : 3$  अनुपात  $3 : 5$  के तुल्य नहीं हैं।

**उदाहरण-5 :** क्या अनुपात  $5 : 6$  अनुपात  $25 : 30$  के तुल्य हैं?

**हल:** जाँच करने के लिए, हमें देखना होगा कि क्या  $\frac{5}{6} = \frac{25}{30}$  है?

$$\text{हम पाते हैं } \frac{5}{6} = \frac{5 \times 5}{6 \times 5} = \frac{25}{30} \quad \text{तथा } \frac{25}{30} = \frac{25 \times 1}{30 \times 1} = \frac{25}{30}$$

$$\text{हम देखते हैं कि } \frac{25}{30} = \frac{25}{30} \text{ है। अर्थात् } \frac{5}{6} = \frac{25}{30} \text{ है।}$$

अतः अनुपात  $5 : 6$  अनुपात  $25 : 30$  के तुल्य हैं।

**समानुपात (Proportion) :** इलेश ने एक आदमी का चित्र बनाया लेकिन इस चित्र में गड़बड़ी हुई। इसमें आदमी का सिर, धड़ की अपेक्षा अधिक बड़ा दिख रहा है। हम जानते हैं कि आदमी के सिर व उसके धड़ के चित्र में एक निश्चित अनुपात होता है वही अनुपात उसके चित्र में भी नजर आना चाहिए। अर्थात् चित्र का सिर व धड़ वास्तविक आदमी के सिर व धड़ के समानुपात में होना चाहिए।



$$\text{अर्थात् } \frac{\text{आदमी के सिर का आकार}}{\text{उसके धड़ का आकार}} = \frac{\text{चित्र में सिर का आकार}}{\text{चित्र में धड़ का आकार}}$$

ऐसा होने पर ही सही अनुपात में चित्र बनेगा।

अभी हमने देखा है कि दो अनुपात तुल्य भी हो सकते हैं। दो अनुपात यदि तुल्य हों तो वे एक समानुपात बनाते हैं।

आइए इसका एक उदाहरण लेते हैं—

यदि 10 कुर्सियों का मूल्य 3000 रुपये हैं तथा इसी प्रकार की 12 कुर्सियों का मूल्य 3600 रुपये हैं तो,

$$\text{कुर्सियों की संख्या में अनुपात} = 10:12 \text{ या } 5:6$$

$$\text{कुर्सियों के मूल्यों में अनुपात} = 3000:3600 \text{ या } 5:6$$

स्पष्ट है कि  $10:12 = 3000 : 3600$

अर्थात् कुर्सियों की संख्या में वही अनुपात है जो उनके मूल्यों में अनुपात है।

**यदि दो अनुपात परस्पर बराबर होते हैं तो उन्हें समानुपात कहते हैं। संख्याओं को समानुपात में होने पर दो अनुपातों के बीच :: चिह्न रखते हैं।**

अर्थात् यदि  $a:b$  तथा  $c:d$  आपस में बराबर हैं तो  $a:b = c:d$  को समानुपात कहते हैं।  $a,b,c$  तथा  $d$  को समानुपाती संख्याएँ (Numbers in Proportion) कहते हैं। संख्याओं को समानुपात में रखने पर  $a:b :: c:d$  लिखा जाता है। इन चारों पदों में पहला ( $a$ ) तथा चौथा ( $d$ ) पदों को बाह्य पद (Extreme Term) कहते हैं। दूसरे ( $b$ ) तथा तीसरे ( $c$ ) पदों को अंतः या मध्य पद (Middle Term) कहते हैं।

$$\text{यदि } a:b :: c:d \text{ हैं तो } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

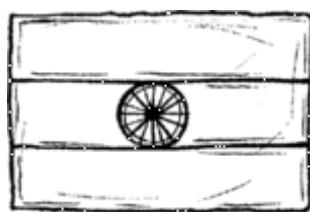
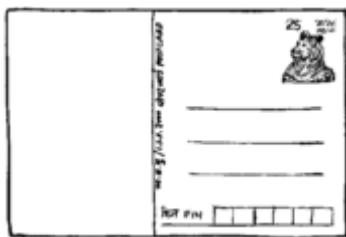
या  $a \times d = b \times c$  अर्थात् बाह्य पदों का गुणनफल = मध्य पदों का गुणनफल

यदि  $ad \neq bc$  तो  $a,b,c$  और  $d$  समानुपात में नहीं कहे जाते हैं।

वास्तविक जीवन में समानुपातों के व्यापक उपयोग ऐकिक नियम, नक्शा का चित्रांकन, समानुपातिक चित्रांकन इत्यादि में किया जाता है।

क्या आप जानते हैं कि राष्ट्रीय झंडे, पोस्टकार्ड इत्यादि लम्बाई एवं चौड़ाई के एक निश्चित अनुपात में ही बनाये जाते हैं, वह अनुपात अलग-अलग देशों के लिए भिन्न हो सकता

हैं ऐसा इसलिए क्योंकि जब सही अनुपात में कोई चित्र बनाया जाता है तभी वह देखने में मोहक एवं आकर्षक लगता है।



चित्र-10.2

हमने कक्षा-6 में एकिक विधि द्वारा प्रश्न हल करना सीखा है। इस विधि द्वारा पहले हम अनेक से एक और फिर वांछित संख्या के लिए मान ज्ञात करते हैं। आइए हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

**उदाहरण-6 :** यदि 6 बल्बों की कीमत 78 रु. है, तो ऐसी ही 9 बल्बों की कीमत क्या होगा?

**हल:** इसे राजेश व सुनील ने अलग-अलग तरीकों से हल किया-

**प्रथम विधि : (राजेश)**

$$\text{चूंकि } 6 \text{ बल्बों \ की कीमत} = 78 \text{ रु.}$$

$$\text{अतः } 1 \text{ बल्ब की कीमत} = \frac{78}{6}$$

$$\text{अतः, } 9 \text{ बल्बों की कीमत} = \frac{78}{6} \times 9 = 117 \text{ रु.}$$

**दूसरी विधि : (सुनील)**

कीमत	78	$x$
बल्बों की संख्या	6	9

माना कि 9 बल्बों की कीमत  $x$  रु. है।

$$\text{तो } 78 : x :: 6 : 9 \quad \text{या, } \frac{78}{x} = \frac{6}{9} \quad \text{या, } 78 \times 9 = 6 \times x$$

$$\text{या, } \frac{78 \times 9}{6} = x \quad \text{या, } x = 117 \text{ रु.}$$

अतः 9 बल्बों की कीमत = 117 रु.

दूसरी विधि में पहले समानुपात बनाकर फिर एक समीकरण प्राप्त किया और हल निकाला। पहली विधि में पहले 1 वस्तु की कीमत निकालकर फिर वांछित वस्तुओं की कीमत ज्ञात की। इस प्रकार इसमें ऐकिक विधि का प्रयोग किया गया।

आइए, एक अन्य उदाहरण लेते हैं :-

**उदाहरण-7 :** एक मजदूर 15 दिनों में 1815 रु. कमाता है। यदि वह 8 दिनों तक ही काम करना चाहे तो उसे कितनी मजदूरी प्राप्त होगी?

**हल:** **पहली विधि:** चूँकि 15 दिनों की मजदूरी = 1815 रु.

$$\text{अतः } 1 \text{ दिन की मजदूरी} = \frac{1815}{15} = 121 \text{ रु.}$$

$$\text{अतः } 8 \text{ दिनों की मजदूरी} = 121 \times 8 \text{ रु.} = 968 \text{ रु.}$$

**दूसरी विधि :**

मजदूरी (रु. में)	1815	$x$
दिनों की संख्या	15	8

माना कि मजदूरी  $x$  रु. है

$$\text{तो } 1815:x::15:8 \Rightarrow \frac{1815}{x} = \frac{15}{8} \Rightarrow 1815 \times 8 = x \times 15$$

$$\Rightarrow \frac{1815 \times 8}{15} = x \Rightarrow x = 968 \text{ रु.}$$

### प्रश्नावली-10.1

#### 1. अनुपात ज्ञात कीजिए—

- (a) 3 किग्रा. का 600 ग्रा. से। (b) 2 घंटे का 30 मिनट से।
- (c) 340 सेमी. का 4 मीटर से। (d) 75 रुपये का 200 पैसे से।

#### 2. निम्नलिखित अनुपातों का सरलतम रूप लिखिए—

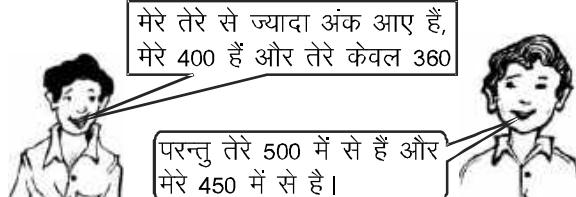
- (a) 45:60 (b) 144:84 (c) 184:12

3. उपेन्द्र का वेतन 42000 रु. प्रतिमाह है और वह प्रतिमाह 6000 रु. आयकर में जमा करते हैं। ज्ञात कीजिए—
- आय का आयकर के साथ अनुपात
  - आयकर का आय के साथ अनुपात
  - क्या ये दोनों अनुपात तुल्य हैं?
4. एक रिबन (Ribbon) की लम्बाई 10 मीटर एवं इसकी चौड़ाई 25 सेमी. है। निम्न का अनुपात ज्ञात कीजिए—
- लम्बाई का चौड़ाई के साथ
  - चौड़ाई का लम्बाई के साथ
  - क्या दोनों अनुपात तुल्य हैं?
5. निम्नलिखित अनुपातों का दो तुल्य अनुपात ज्ञात कीजिए—
- 3:7
  - 4:9
6. यदि किसी समानुपात के प्रथम तीन पद 3, 5 तथा 12 है तो चौथा पद ज्ञात कीजिए।
7. यदि  $3:x::9:15$  हो तो  $x$  का मान ज्ञात कीजिए।
8. बाजार में केले 18 रु. प्रति दर्जन बिक रहे हैं, तो 10 केलों का मूल्य क्या होगा?
9. मिठाई बनाने में चीनी और खोये का अनुपात 3:7 रखा जाये तो 12 किग्रा. चीनी की मिठाई बनाने हेतु कितने खोये की आवश्यकता होगी?
10. एक मोटरसाइकिल 2 ली. में 120 किमी. दूरी तय करता है। बताइए 300 किमी. दूर तक जाने में कितने लीटर पेट्रोल की आवश्यकता होगी?
11. एक मकान का 4 माह का किराया 10,000 रुपये हैं तो पूरे वर्ष का किराया बताइए।

### 10.3 प्रतिशतता (Percentage)

अभिषेक व अनवर के आज परीक्षाफल आये हैं। वे दोनों अपना परीक्षाफल देखकर बात करते हैं।

	अभिषेक	अनवर
पूर्णांक	500	450
प्राप्तांक	400	360



आप बताइए किसका परीक्षाफल अच्छा रहा?

दोनों अनवर की बड़ी बहन शबनम के पास जाते हैं। शबनम ने कहा बिना कुल अंक देखे इस तरह तुलना नहीं की जा सकती है।

इसमें हम पूर्णांकों के एक समान आधार पर प्राप्तांकों की तुलना करनी होगी। आधार समान करने के लिए हमने ऐकिक नियम भी पढ़ा है।

$$\text{अनवर के } 1 \text{ में से प्राप्त अंक} = \frac{360}{450}$$

$$\text{अनवर के } 500 \text{ में से प्राप्त अंक} = \frac{360}{450} \times 500 = 400$$

इस प्रकार दोनों के अंकों की एक समान आधार 500 पर तुलना करने पर हमें पता चला कि दोनों का परीक्षाफल समान हैं।

इस प्रकार तुलना करने के लिए आधार रूप में 100, 1000, 10000 या किसी भी अन्य सुविधाजनक संख्या का प्रयोग कर सकते हैं।

पुनः अभिषेक के 500 में से प्राप्त अंक = 400

अभिषेक के 1 में से प्राप्त अंक

$$\text{अभिषेक के } 100 \text{ में से प्राप्त अंक} = \frac{400}{500} \times 100 = 80$$

∴ अन्वर के 450 में से प्राप्त अंक = 360

$$\text{अनवर के } 1 \text{ में से प्राप्त अंक} = \frac{360}{450}$$

$$\text{अनवर के } 100 \text{ में से प्राप्त अंक} = \frac{360}{450} \times 100 = 80$$

इस प्रकार दोनों के 100 में से प्राप्त अंक क्रमशः 80, 80 हैं।

इस प्रकार तुलना करने के लिए यदि समान आधार 100 लेते हैं तब इसे प्रतिशत कहते हैं।

"प्रतिशत एक भिन्न है जिसका हर सदा 100 रहता है और अंश प्रतिशत की संख्या होती है।"

प्रतिशत को संकेत में % द्वारा प्रदर्शित करते हैं। जैसे — 50 प्रतिशत का अर्थ है प्रत्येक 100 में 50। इसे संकेत में 50% लिखते हैं। इसका भिन्न रूप  $\frac{50}{100}$  है तथा इसको दशमलव में 0.5 लिखते हैं। इस प्रकार "प्रतिशत को साधारण भिन्न या दशमलव के रूप में भी प्रकट किया जा सकता है।"

### 10.3.1 भिन्न संख्याओं को प्रतिशत में बदलना—

भिन्न संख्याओं में हर कोई भी संख्या हो सकती है। उनकी तुलना करने के लिए हमें उनके हरों को समान करना पड़ता है, और देख चुके हैं कि जब उनमें प्रत्येक का हर 100 हो तो तुलना करना ज्यादा आसान होता है यानी हम भिन्नों को प्रतिशत में बदल रहे हैं। आइए अब हम कुछ भिन्नों को प्रतिशत में बदलने का प्रयत्न करें।

**उदाहरण—8.**  $\frac{3}{5}$  को प्रतिशत रूप में लिखिए।

$$\text{हल : } \frac{3}{5} \text{ का प्रतिशत रूप} = \frac{3}{5} \times \frac{100}{100} = \frac{3 \times 20}{100} = \frac{60}{100} = 60\%$$

**उदाहरण—9.** किसी कक्षा के 32 विद्यार्थियों में से 8 अनुपस्थित हैं। अनुपस्थित विद्यार्थियों का प्रतिशत क्या है? विद्यार्थियों की प्रतिशत उपस्थिति भी ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल : कक्षा के कुल विद्यार्थियों की संख्या} = 32$$

$$\text{अनुपस्थित विद्यार्थियों की संख्या} = 8$$

$$\text{अनुपस्थित विद्यार्थियों का प्रतिशत} = \left( \frac{8}{32} \times 100 \right)\% = \frac{1}{4} \times 100$$

$$= \frac{100}{4} = 25\%$$

$$\text{अथवा, उपस्थित विद्यार्थियों का प्रतिशत} = 100 - \text{अनुपस्थित विद्यार्थियों का प्रतिशत}$$

$$= (100 - 25)\% = 75\%$$

### प्रयास कीजिए

1. निम्नलिखित भिन्नों को प्रतिशत में बदलिए।

$$(i) \frac{8}{25} \quad (ii) 5\frac{1}{4} \quad (iii) \frac{4}{4} \quad (iv) \frac{49}{50}$$

2. एक दुकान में विभिन्न आकारों के निम्नलिखित जोड़े जूते उपलब्ध हैं—

आकार	2	3	4	5	6
जूतों की संख्या	20	30	28	14	8

प्रत्येक आकारों में उपलब्ध जूते का प्रतिशत क्या है?

### 10.3.2 दशमलव भिन्न को प्रतिशत में बदलना—

आइए कुछ उदाहरण लें—

**उदाहरण—10.** दिए गए दशमलव को प्रतिशत में बदलिए—

$$(a) 0.49 \quad (b) 3.75 \quad (c) 0.009$$

हल : (a)  $0.49 = \frac{0.49 \times 100}{100} = \frac{49}{100} = 49\%$

$$(b) 3.75 = \frac{3.75 \times 100}{100} = \frac{375}{100} = 375\%$$

$$(c) 0.009 = \frac{0.009 \times 100}{100} = \frac{0.9}{100} = 0.9\%$$

अतः स्पष्ट है कि यदि कोई दशमलव का प्रतिशत में बदलना हो तो हर को 100 रखते हुए दशमलव को भिन्न में बदलते हैं।

### स्वयं करके देखिए

निम्नलिखित दशमलवों को प्रतिशत में बदलिए।

$$(a) 0.33 \quad (b) 4.5 \quad (c) 6.75$$

10.3.3 प्रतिशत को साधारण भिन्न या दशमलव में बदलना—

अभी तक हमने साधारण या दशमलव भिन्न को प्रतिशत में बदला। सोचिए क्या हम इसके विपरीत किसी प्रतिशत को साधारण या दशमलव भिन्न में बदल सकते हैं।

आइए कृष्ण उदाहरण लेकर देखें—

**उदाहरण-11.** निम्न प्रतिशत को साधारण भिन्न में बदलिए-

- (a) 75%      (b) 20%      (c)  $3\frac{1}{5}\%$

**हल :** (a)  $75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

$$(c) \quad 3\frac{1}{5}\% = \frac{16}{5}\% = \frac{16}{5 \times 100} = \frac{4}{125}$$

हमने देखा कि एक प्रतिशत को भिन्न में बदलते समय संख्या का हर 100 रखते हुए लिखते हैं और इस भिन्न का लघुतम रूप प्राप्त करते हैं।

**उदाहरण-13.** प्रतिशत को दशमलव में बदलिए-

- (a) 40%  (b)  $12\frac{1}{5}\%$  (c) 10.2%

$$\text{हल : } (a) \quad 40\% = \frac{40}{100} = 0.40$$

$$(b) \quad 12\frac{1}{5}\% = 12.2\% = \frac{12.2}{100} = 0.122$$

$$(c) \quad 10.2\% = \frac{10.2}{100} = 0.102$$

स्पष्ट है कि प्रतिशत को भिन्न में बदलते समय सर्वप्रथम हर को 100 रखते हैं और तब इस भिन्न के अंश को 100 से भाग देकर दशमलव में बदलते हैं।

#### 10.3.4 अनमान के साथ मनोरंजन

प्रतिशत्ता एक दिए गए क्षेत्रफल के किसी भाग का अनुमान लगाने में भी सहायता करती है।

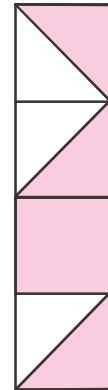
### आइए, कुछ उदाहरण लें

- (a) हमें दी गई आकृति में पूर्ण आकृति का कितना भाग छायांकित है, ज्ञात करना है। इसके लिए सबसे पहले भिन्न से छायांकित भाग की प्रतिशतता ज्ञात कर लेते हैं।

$$\text{चित्र में } \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1+1+2+1}{8} = \frac{5}{8}$$

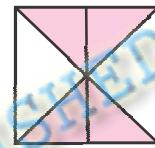
$$\text{तथा } \frac{5}{8} = \left( \frac{5}{8} \times 100 \right) \% = \frac{500}{8} \% = 62.5 \% \text{ इस प्रकार } 62.50 \% \text{ छायांकित}$$

भाग है।



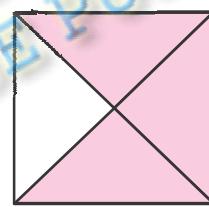
- (b) चित्र से स्पष्ट है कि पूर्ण आकृति का आधा भाग छायांकित है।

$$\text{अतः } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 100 \% = 50 \% \quad \text{इस प्रकार } 50 \% \text{ छायांकित भाग है।}$$



### प्रयास कीजिए

निम्न चित्रों में रंगीन भाग आकृति के कुल क्षेत्र का कितना प्रतिशत हिस्सा है।



(i)



(ii)

### 10.4 प्रतिशतता के उपयोग

10.4.1 अभी तक हमने यह देखा कि तुलना करने के लिए प्रतिशत कितना उपयोगी है। हमने साधारण एवं दशमलव भिन्नों को प्रतिशत में बदलना भी सीखा। अब निम्न कथनों पर विचार कीजिए—

- शिवम् अपनी आय का 10% बचत करता है।
- जहाँगीर को प्रत्येक पुस्तक बेचने पर 15% का लाभ मिलता है।
- बिहार राज्य की विकास दर 11% पहुँच चुकी है।
- बाजार में खादी वस्त्रों पर 25% की छूट दी गई है।

इन प्रत्येक कथनों से आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

सर्व शिक्षा : 2013-14 (नि:शुल्क)

पहले कथन में हमारा तात्पर्य है 100 में से 10 भाग तथा इसे हम लिखते हैं  $\frac{10}{100}$ ।

इसका अर्थ है कि शिवम अर्जित किए गए प्रत्येक 100 रु. में से 10 रु. बचाता है। इसी प्रकार आप भी अन्य कथनों के अर्थ लगाइए।

#### 10.4.2 प्रतिशतता से संख्या ज्ञात करना—

आइए एक उदाहरण लें—

**उदाहरण—13.** वर्ग VII के 60 बच्चों के सर्वेक्षण से पता चला कि 30% मध्याह्न भोजन के समय चावल—कढ़ी खाना पसंद करते हैं। तो कितने बच्चों को चावल—कढ़ी खाना पसंद है।

**हल :** वर्ग VII में बच्चों की कुल संख्या 60 है। इनमें से 30% चावल कढ़ी भोजन पसंद करते हैं। कक्षा के अनुपम एवं राखी ने ऐसे बच्चों की संख्या ज्ञात करने के निम्न तरीकों का प्रयोग किया।

##### अनुपम

$$100 \text{ में से चावल कढ़ी भोजन करने वालों की संख्या} = 30$$

$$\therefore 1 \text{ में से चावल कढ़ी भोजन करने वालों की संख्या} = \frac{30}{100}$$

$$\text{अतः } 60 \text{ में से चावल कढ़ी भोजन करने वालों की संख्या} = \frac{30}{100} \times 60 = 18$$

##### राखी

$$60 \text{ का } 30 \text{ प्रतिशत अतः} = 60 \times 30\%$$

$$= 60 \times \frac{30}{100}$$

$$= \frac{60 \times 30}{100} = 18$$

इस प्रकार 60 बच्चों में से 18 बच्चे चावल—कढ़ी भोजन करना पसंद करते हैं।

ऊपर के उदाहरण को ध्यान से देखने पर पता चलता है कि अनुपम ने बच्चों की संख्या ज्ञात करने के लिए ऐकिक विधि का प्रयोग किया। जबकि राखी ने सर्वप्रथम दिए गए प्रतिशत को साधारण भिन्न में बदला है। फिर उसने दी गई राशि को इस साधारण भिन्न से गुणा कर अभीष्ट संख्या प्राप्त की है। आप भी इन विधियों का प्रयोग कर निम्न प्रश्नों को हल करें।

### Lo; adjds nf[k,

1. (a) 400 का 8% (b) 350 का 20% (c) 40 का 40%
2. दक्ष पूरे वर्ष में 240 दिन चलने वाली पाठशाला में 80% उपस्थित रहा, तो ज्ञात कीजिए कि वह कितने दिन पाठशाला गया?

**उदाहरण—14.** शुभम अपने पिताजी की मासिक आय का 15% बचत करके 450 रुपये जमा कर लेता है। ज्ञात कीजिए कि शुभम के पिताजी की मासिक आय क्या थी?

**हल :** इन प्रश्नों का हल कक्षा में निकालने के लिए शिवम एवं हिना प्रयास करते हैं। आइए देखें दोनों ने शुभम के पिताजी की मासिक आय कैसे ज्ञात किया?

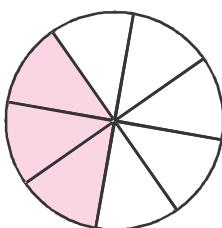
शिवम	हिना
वास्तविक आय का 15% = 450 रु.	$\therefore 15\text{रु. की बचत प्रत्येक } 100\text{रु. पर होती है।}$
माना कि वास्तविक आय $x$ रु. है।	तब 1 रु. की बचत होगी $\frac{100}{15}$
अतः $x$ का 15% = 450	तब 450 रु. पर बचत होगी
अर्थात् $x \times \frac{15}{100} = 450$	$\frac{100}{15} \times 450 = 3000 \text{ रु.}$
या, $x = \frac{450 \times 100}{15} = 3000$	
अतः $x = 3000$ रु.	

### प्रश्नावली—10.2

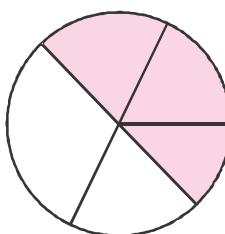
1. दी गई भिन्न संख्याओं को प्रतिशत में बदलिए।
  - (a)  $\frac{3}{10}$  (b)  $\frac{2}{5}$  (c)  $\frac{3}{5}$  (d)  $\frac{5}{8}$  (e)  $\frac{7}{12}$
2. दी गई दशमलव भिन्नों को प्रतिशत में बदलिए।
  - (a) 0.45 (b) 1.25 (c) 3.2 (d) 0.375
3. दिए गए प्रतिशत को साधारण व दशमलव भिन्नों में बदलिए और अपने उत्तर को सरलतम रूप में लिखिए।
  - (a) 25% (b) 18% (c)  $12\frac{3}{4}\%$  (d) 60%

4. नीचे दिए गए चित्रों का कितना प्रतिशत भाग छायांकित है?

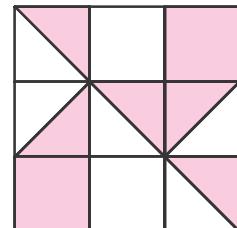
(a)



(b)



(c)



5. एक व्यक्ति की मासिक आय 7000 रु. है तथा वह 1400 रु. प्रतिमाह बचाता है तो वह अपनी आय का कितना प्रतिशत वह खर्च करता है ?
6. एक आदमी अपनी आय का चौथाई भाग भोजन पर, 15% शिक्षा पर तथा 22% किराया पर खर्च करता है। यदि वह 266 रु. बचाता है तो उसकी आय क्या है ?
7. एक शहर की जनसंख्या प्रतिवर्ष 5% बढ़ जाती है। यदि उसकी वर्तमान जनसंख्या 5,14,700 है तो अगले वर्ष इसकी जनसंख्या क्या होगी ?
8. किसी विद्यालय के छात्र संघ के निर्वाचन में अध्यक्ष पद के लिए दो छात्रों में सीधी टक्कर थी। यदि विजयी छात्रा को कुल 55% वोट मिले और वह 70 मतों से विजयी हुआ तो कुल कितने वैध मत पड़े और पराजित प्रत्याशी को कितने वोट मिले ?
9. एक कुर्सी और एक टेबल दोनों की कुल कीमत 2800 रु. है। यदि कुर्सी की कीमत टेबल की कीमत से 40% कम है तो कुर्सी की कीमत बताइए।

#### 10.4.3 अनुपातों से प्रतिशत

कभी—कभी किसी वस्तु या राशि के भाग अनुपात के रूप में दिए होते हैं और हमें उन्हें प्रतिशत के रूप में बदलना पड़ता है। आइए हम एक उदाहरण लेते हैं—

**उदाहरण-15.** गुंजन ने बताया कि खीर बनाने के लिए 1 भाग चावल की मात्रा, 2 भाग चीनी एवं 10 भाग दूध की आवश्यकता होती है। खीर के ऐसे मिश्रण में चावल, चीनी एवं दूध का प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

**हल :** मिश्रण को अनुपात रूप में इस प्रकार लिखा जाएगा।

$$\text{चावल} : \text{चीनी} : \text{दूध} = 1 : 2 : 10$$

अब कुल भाग =  $1 + 2 + 10 = 13$  अर्थात् मिश्रण में  $\frac{1}{13}$  भाग चावल  $\frac{2}{13}$  भाग चीनी

एवं  $\frac{10}{13}$  भाग दूध है।

अतः चावल का प्रतिशत होगा  $\frac{1}{13} \times 100 = \frac{100}{13} = 7\frac{9}{13}\%$

चीनी का प्रतिशत होगा  $\frac{2}{13} \times 100 = \frac{200}{13} = 15\frac{5}{13}\%$

दूध का प्रतिशत होगा  $\frac{10}{13} \times 100 = \frac{1000}{13} = 76\frac{12}{13}\%$

**उदाहरण—16.** यदि 500 रु. को रवि, मुकेश एवं सुरेश में इस प्रकार बाँटे कि रवि को दो भाग मुकेश को तीन भाग एवं सुरेश की पाँच भाग मिले। इस बँटवारे में प्रत्येक को कितना धन मिला तथा उनका प्रतिशत कितना था?

**हल :** प्रत्येक के भाग को अनुपात रूप इस प्रकार लिखा जाएगा।

रवि : मुकेश :	सुरेश
2 : 3 :	5

सभी भागों का योग  $2 + 3 + 5 = 10$

कुल राशि में प्रत्येक का प्रतिशत

रवि को मिला  $\frac{2}{10} \times 100 = 20\%$

मुकेश को मिला  $\frac{3}{10} \times 100 = 30\%$

सुरेश को मिला  $\frac{5}{10} \times 100 = 50\%$

प्रत्येक को मिली राशि

रवि को मिला  $\frac{2}{10} \times 500$  रु. = 100 रु.

मुकेश को मिला  $\frac{3}{10} \times 500$  रु. = 150 रु.

सुरेश को मिला  $\frac{5}{10} \times 500$  रु. = 250 रु.

### स्वयं कीजिए

- यदि किसी त्रिभुज के कोणों में अनुपात  $2 : 3 : 5$  है तब उसके प्रत्येक कोण की माप क्या होगी?
- 20 वस्तुओं को मोनू एवं सोनू में इस प्रकार बाँटिए कि उन्हें कुल का क्रमशः 30% एवं 70% मिले।

#### 10.4.4 बढ़त या घटत प्रतिशत रूप में

कभी—कभी हमें किसी राशि में हुई बढ़त या घटत को प्रतिशत रूप में ज्ञात कर समझना ऐसे समझने से अधिक उपयुक्त दिखता है।

उदाहरण के लिए यदि किसी शहर की जनसंख्या 2,20,000 से बढ़कर 2,42,000 हो गई तब ऐसी स्थिति में जनसंख्या की वृद्धि को प्रतिशत के रूप में समझना अधिक आसान होता है जैसे यह कहें कि प्रदेश की जनसंख्या 10% बढ़ गई। किसी राशि के बढ़ने या घटने को कुल राशि के प्रतिशत के रूप में गणना करने के लिए आइए एक उदाहरण लें—

**उदाहरण—17.** बढ़त या घटत का प्रतिशत ज्ञात करें, यदि

- (a) किसी कमीज का मूल्य 280 रु. से घटकर 250 रु हो जाता है।
- (b) प्रवीण को जाँच परीक्षा में अंक 40 से बढ़कर 70 हो जाता है।

**हल :** (a) कमीज का सही मूल्य = 280 रु.

कमीज का घटा मूल्य = 250 रु.

मूल्य में कमी =  $(280 - 250)$  रु. = 30 रु.

$$\text{मूल्य में प्रतिशत कमी} = \frac{\text{मूल्य में कमी}}{\text{आधार मूल्य}} \times 100$$

$$= \frac{30}{280} \times 100 = \frac{300}{28} = \frac{75}{7} = 10\frac{5}{7}\%$$

अतः घटने का प्रतिशत  $10\frac{5}{7}\%$  है।

(b) प्राप्तांक में बढ़त =  $70 - 40 = 30$

$$\text{प्राप्तांक में प्रतिशत बढ़त} = \frac{\text{बढ़ा हुआ प्राप्तांक}}{\text{प्रारंभ का प्राप्तांक}} \times 100$$

$$= \frac{30}{40} \times 100 = 75\%$$

अर्थात् प्राप्तांक में 75% की वृद्धि हुई।

### स्वयं करके देखिए

1. किसी शहर की जनसंख्या वर्ष 2005 में 7,00,000 (सात लाख) थी जो कि वर्ष 2010 में 10,00,000 (दस लाख) हो गई। तो जनसंख्या में हुई बढ़त प्रतिशत में ज्ञात कीजिए।
2. किसी विद्यालय के एक विद्यार्थी की फीस 200 रु. प्रतिमाह से बढ़ाकर 250 रु. प्रतिमाह कर देता है। फीस में हुई बढ़त प्रतिशत में ज्ञात कीजिए।
3. किसी देश में पिछले 10 वर्षों में अशिक्षितों की संख्या 125 लाख से घटकर 100 लाख रह गई। घटने का प्रतिशत कितना रहा?

### 10.5 किसी वस्तु से संबंधित मूल्य अर्थात् क्रय तथा विक्रय मूल्य

हमें अपने दैनिक जीवन में अनेक बार वस्तुओं को खरीदने या बेचने की आवश्यकता पड़ती है। एक दुकानदार वस्तुओं को थोक विक्रेता (Whole Seller) के यहाँ से खरीदकर लाता है और कुछ अधिक मूल्य लेकर वह ग्राहक को वस्तुएँ देता है। वस्तुओं को थोक विक्रेता के यहाँ से अपने दुकान तक लाने में उसे वस्तुओं का माल ढोने या कर चुकाने इत्यादि पर भी व्यय करना पड़ता है। आइए, दैनिक जीवन में प्रयोग होने वाले कुछ कथनों को समझने का प्रयत्न करें।

- (i) एक साइकिल 2000 रु. में दुकानदार द्वारा खरीदा गया और 50 रु. रिक्षा भाड़ लगाकर उसे अपने दुकान में लाया फिर उसे 2550 रु. में ग्राहक को बेच दिया।
- (ii) एक फल के दुकानदार ने एक टोकरी सेब 500 रु. में खरीदा और उसे 390 रु. में बेच दिया।

अब पहले कथन पर विचार करते हैं। क्या आप बता सकते हैं कि दुकानदार द्वारा साइकिल खरीदने में कितना मूल्य अदा किया गया? निश्चित रूप से दुकानदार द्वारा साइकिल खरीदने में अदा किया मूल्य =  $(2000 + 50)$  रु. = 2050 रु.

जिस मूल्य पर कोई वस्तु खरीदी जाती है। वह उसका क्रय मूल्य (Cost Price) कहलाता है। इसे संक्षिप्त में क्र. मू. (C.P) लिखा जाता है। वस्तुओं को खरीदने के लिए क्रयमूल्य के अतिरिक्त जो भी व्यय करना पड़ता है यह सभी उपरिव्यय कहलाते हैं और वस्तु के क्रय मूल्य का ही भाग बन जाते हैं।

अतः वस्तु का वास्तविक क्रय मूल्य = क्रय मूल्य + उपरिव्यय

जिस मूल्य पर कोई वस्तु बेची जाती है, वह उसका विक्रय मूल्य (Selling Price) कहलाता है और उसे संक्षिप्त में वि. मू. (S.P) लिखा जाता है।

सर्व शिक्षा : 2013-14 (नि:शुल्क)

अब स्पष्ट है कि साइकिल का क्रय मूल्य 2050 रु. एवं विक्रय मूल्य 2550 रु. है। इसी प्रकार सेब का क्रय मूल्य 500 रु. एवं विक्रय मूल्य 390 रु. है।

ऊपर के कथनों पर गौर करने के बाद स्पष्ट है कि जहाँ साइकिल का क्रय मूल्य से विक्रय मूल्य अधिक है वही सेब का क्रय मूल्य से विक्रय मूल्य कम है।

अतः यदि किसी वस्तु का विक्रय मूल्य उस वस्तु के क्रय मूल्य से अधिक हो तो (बेचने वाले को) लाभ होता है।

यदि क्रय मूल्य < विक्रय मूल्य

$$\text{तब लाभ (Profit)} = \text{विक्रय मूल्य} - \text{क्रय मूल्य}$$

यदि किसी वस्तु का विक्रय मूल्य उस वस्तु के क्रय मूल्य से कम हो तो (बेचने वाले की) हानि होता है।

यदि क्रय मूल्य > विक्रय मूल्य

$$\text{तब हानि (Loss)} = \text{क्रय मूल्य} - \text{विक्रय मूल्य}$$

यदि किसी वस्तु का विक्रय मूल्य उस वस्तु के क्रय मूल्य के बराबर हो तो (बेचने वाले को) ना लाभ तथा ना हानि होता है।

यदि क्रय मूल्य = विक्रय मूल्य हो तब ना लाभ तथा ना हानि होगी।

#### 10.5.1 लाभ या हानि, प्रतिशत में

लाभ या हानि को प्रतिशत रूप में भी ज्ञात किया जा सकता है। हमें यह ध्यान में रखना होगा कि लाभ या हानि की गणना सदैव वास्तविक क्रय मूल्य पर ही करते हैं।

आइए उपर्युक्त उदाहरणों में हम प्रतिशत लाभ या प्रतिशत हानि भी ज्ञात कर सकते हैं।

(i) साइकिल का क्रय मूल्य = 2050 रु.

साइकिल का विक्रय मूल्य = 2550 रु.

लाभ = विक्रय मूल्य – क्रय मूल्य

= (2550 – 2050) रु.

= 500 रु.

प्रतिशत लाभ के लिए रश्मि एवं आलोक ने निम्न विधियाँ काम में ली।

रश्मि	आलोक
$\text{लाभ प्रतिशत} = \frac{\text{लाभ}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100$ $= \frac{500}{2050} \times 100$	$\therefore 2050 \text{ रु. पर } 500 \text{ रु. का लाभ होता है।}$ $\therefore 1 \text{ रु. पर लाभ } \frac{500}{2050} \text{ रु.}$
$\text{अतः लाभ \%} = 24\frac{16}{41}\%$	$\text{अतः } 100 \text{ रु. पर लाभ} = \frac{500}{2050} \times 100$
	$\text{अतः लाभ \%} = 24\frac{16}{41}\%$
(ii) इसी प्रकार आप दूसरे प्रश्न में भी हानि प्रतिशत ज्ञात कर सकते हैं। यहाँ क्रय मूल्य = 500 रु.      विक्रय मूल्य = 390 रु. अतः हानि = क्रय मूल्य – विक्रय मूल्य = 500 रु. – 390 रु. = 110 रु.	

रश्मि	आलोक
$\text{हानि प्रतिशत} = \frac{\text{हानि}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100$ $= \frac{110}{500} \times 100$	$500 \text{ रु. पर हानि} = 110 \text{ रु.}$
$= 22\%$	$\text{अतः } 100 \text{ रु. पर हानि}$ $= \frac{110}{500} \times 100 = 22\%$
	$\text{अतः हानि प्रतिशत } 22 \text{ है।}$

**उदाहरण—18.** रामू ने एक पुरानी मोटरसाइकिल 12000 रु. में खरीदी और उसकी मरम्मत इत्यादि में 3000 रु. व्यय किए। उसने यह मोटरसाइकिल 18500 रु. में बेच दी। उसका लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

**हल :** पहला तरीका— मोटरसाइकिल का क्रय मूल्य = 12000 रु.  
मरम्मत पर व्यय = 3000 रु.

सर्व शिक्षा : 2013-14 (नि:शुल्क)

$$\text{वास्तविक क्रय मूल्य} = (12000 + 3000) \text{ रु.} = 15000 \text{ रु.}$$

$$\text{मोटरसाइकिल का विक्रय मूल्य,} = 18500 \text{ रु.}$$

$$\text{यहाँ वि. मू.} > \text{क्र. मू.}$$

$$\text{अतः लाभ} = \text{वि. मू.} - \text{क्र. मू.} = 18500 \text{ रु.} - 15000 \text{ रु.} = 3500 \text{ रु.}$$

$$\text{लाभ \%} = \frac{3500}{15000} \times 100 \% = 23\frac{1}{3} \%$$

**हल :** दूसरा तरीका—

$$15000 \text{ रु. पर लाभ होता है} = 3500 \text{ रु.}$$

$$1 \text{ रुपये पर लाभ होगा} = \frac{3500}{15000}$$

$$\text{तो } 100 \text{ रुपये पर लाभ होगा} = \frac{3500}{15000} \times 100 \% = 23\frac{1}{3} \%$$

**उदाहरण—19.** एक व्यापारी ने एक किवण्टल गेहूँ 1200 रु. में खरीदा। पानी में भीग जाने के कारण उसे 9 रु. प्रति किलोग्राम के भाव से गेहूँ बचना पड़ा। ज्ञात कीजिए उसे कितने प्रतिशत लाभ या हानि हुई।

$$\text{हल : यहाँ 1 किवण्टल (100 कि. ग्रा.) गेहूँ का क्रय मूल्य} = 1200 \text{ रु.}$$

$$100 \text{ कि. ग्रा. गेहूँ का विक्रय मूल्य,} = 100 \times 9 = 900 \text{ रु.}$$

$$\text{यहाँ वि. मू.} < \text{क्र. मू.}$$

**पहला तरीका:**

$$\text{अतः हानि} = \text{क्रय मूल्य} - \text{विक्रय मूल्य}$$

$$= 1200 - 900 = 300 \text{ रु.}$$

$$\text{हानि \%} = \frac{\text{हानि}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100$$

$$= \frac{300 \times 100}{1200} = 25$$

$$\text{हानि \%} = 25\%$$

**दूसरा तरीका:**

$$1200 \text{ रुपये पर हानि होती है} = 300$$

$$1 \text{ रुपये पर हानि होगी} = \frac{300}{1200}$$

$$100 \text{ रुपये पर हानि} = \frac{300}{1200} \times 100$$

$$= 25\%$$

**उदाहरण-20.** एक व्यापारी 1 टिन तेल 780 रुपये में खरीदता है। वह उसे प्रति लीटर किस भाव से बेचे कि उसे पूरे में 20% का लाभ हो? (1 टिन में 15 लीटर तेल आता है।)

**हल :** पहला तरीका—

$$\begin{aligned} \text{यहाँ } 1 \text{ टिन तेल का क्रय मूल्य} &= 780 \text{ रु.} \\ \text{लाभ} &= 20\% \\ \text{अतः लाभ } 780 \text{ रु. का } 20\% &= \frac{780 \times 20}{100} = 156 \text{ रु.} \\ \text{विक्रय मूल्य} &= \text{क्रय मूल्य} + \text{लाभ} \\ &= 780 \text{ रु.} + 156 \text{ रु.} = 936 \text{ रु.} \\ \text{अतः } 1 \text{ टिन तेल का विक्रय मूल्य} &= 936 \text{ रु.} \\ \text{अर्थात् } 15 \text{ लीटर तेल का विक्रय मूल्य} &= 936 \text{ रु.} \\ \text{विक्रय मूल्य प्रति लीटर} &= 936 \div 15 = 62.40 \text{ रु. प्रति लीटर} \end{aligned}$$

**हल :** दूसरा तरीका—

$$\begin{aligned} 20\% \text{ लाभ का अर्थ है} \\ 100 \text{ रु क्रय मूल्य है तो लाभ} &= 20 \text{ रुपये} \\ \text{अतः विक्रय मूल्य} &= 100 + 20 = 120 \text{ रुपये} \\ \text{जब क्रय मूल्य} = 100 \text{ रु., तब विक्रय मूल्य} &= 120 \text{ रु.} \\ \text{जब क्रय मूल्य} = 1 \text{ रु., तब विक्रय मूल्य} &= \frac{120}{100} \text{ रु.} \\ \text{जब क्रय मूल्य} = 780 \text{ रु., तब विक्रय मूल्य} &= \frac{120}{100} \times 780 \text{ रु.} = 936 \text{ रु.} \\ \text{विक्रय मूल्य प्रति लीटर} = 936 \div 15 &= 62.40 \text{ रु. प्रति लीटर} \end{aligned}$$

**उदाहरण-21.** एक टेलिविजन को 9000 रुपये में बेचने पर 10 प्रतिशत की हानि होती है। उसे कितने रुपये में बेचा जाए कि 15 प्रतिशत लाभ हो जाए?

**हल :** पहला तरीका— हानि = क्रय मूल्य का 10%

विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य – हानि

$$= \text{क्रय मूल्य} - \text{क्रय मूल्य का } 10\% = \text{क्रय मूल्य} - \text{क्रय मूल्य} \times \frac{10}{100}$$

$$\text{या, } 9000 = \text{क्रय मूल्य} - \text{क्रय मूल्य} \times \frac{1}{10} \quad \left| \begin{array}{l} \text{अतः } 15\% \text{ लाभ } \times 10000 \text{ का } 15 \\ \times 10000 \text{ का } \frac{15}{100} \\ \times 1500 \text{ रु} \\ \therefore 15\% \text{ लाभ के लिए विवर } \\ \times 10000 + 1500) \text{ रु} \\ \times 11500 \text{ रु} \end{array} \right.$$

$$\text{या, } 9000 = \left(1 - \frac{1}{10}\right) \text{ क्रय मूल्य}$$

$$\text{या, } 9000 = \left(\frac{9}{10}\right) \text{ क्रय मूल्य}$$

$$\therefore \text{क्रय मूल्य} = 9000 \times \frac{10}{9} = 10,000 \text{ रु.}$$

**हल :** दूसरा तरीका—

$$\text{टेलीविजन का विक्रय मूल्य} = 9000 \text{ रु.}$$

$$\% \text{ हानि} = 10\%$$

$$\text{माना कि टेलीविजन का क्रय मूल्य} = 100 \text{ रु. हो}$$

$$(10\% \text{ हानि पर बेचने पर}) \text{ प्रथम विक्रय मूल्य} = 100 - 10 = 90 \text{ रु.}$$

$$\text{जब विक्रय मूल्य } 90 \text{ रु. हो तो क्रय मूल्य} = 100 \text{ रु.}$$

$$\text{जब विक्रय मूल्य } 1 \text{ रु. हो तो क्रय मूल्य} = \frac{100}{90}$$

$$\text{जब विक्रय मूल्य } 9000 \text{ रु. हो तो क्रय मूल्य} = \frac{100}{90} \times 9000 = 10000 \text{ रु.}$$

$$\% \text{ लाभ} = 15\%$$

$$\text{अतः लाभ} = 10,000 \text{ का } 15\% = 10000 \times \frac{15}{100} = 1500 \text{ रु.}$$

$$15\% \text{ लाभ के लिए विक्रय मूल्य} = 10,000 + 1500 = 11,500 \text{ रु.}$$

अतः  $15\% \text{ लाभ कमाने के लिए दुकानदार को टेलीविजन } 11,500 \text{ रु. में बेचनी चाहिए।}$

## प्रश्नावली 10.3

**1. निर्देशानुसार रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए—**

क्र.सं.	क्रय मूल्य	विक्रय मूल्य	लाभ या हानि (रु. में)	लाभ या हानि (%) में
(i)	420 रु.	450 रु.	लाभ = 30 रु.	लाभ % = $7\frac{1}{7}\%$
(ii)	700 रु.	679 रु.		
(iii)	300 रु.	324 रु.		
(iv)	110 रु.	88 रु.		

**2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए—**

क्र.सं.	क्रय मूल्य	हानि/लाभ	विक्रय मूल्य	लाभ या हानि प्रतिशत में
(i)	1200 रु.	90 रु. लाभ	1290 रु.	लाभ % = $7\frac{1}{2}\%$
(ii)	500 रु.	25 रु. लाभ		
(iii)	630 रु.	70 रु. हानि		
(iv)	400 रु.	40 रु. हानि		

**3. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:**

क्र.सं.	विक्रय मूल्य (रु. में)	लाभ/हानि (रु. में)	क्रय मूल्य (रु. में)	लाभ या हानि (% में)
(i)	1500	हानि 350	$1500 + 350 = 1850$	$18\frac{34}{37}\%$ हानि
(ii)	1400	लाभ 280		
(iii)	950	हानि 50		
(iv)	375	लाभ 25		

4. एक वस्तु का क्रय मूल्य 80 रु. है और वह वस्तु 25% के लाभ पर बेची गई तो लाभ और विक्रय मूल्य बताइए।
5. कोई मशीन 7% की हानि पर 837 रु. में बेची गई तो उसका क्रय मूल्य निकालिए।
6. किसी वस्तु की 72 रु. में बेचने से 10% की हानि होती है। बताइए कि उस वस्तु को कितने में बेचने 20% का लाभ होगा?
7. एक रेडियो को 880 रु. में बेचने से 10% लाभ होता है तो बताइए कि यदि उसे 760 रु. में बेचा जाय तो बेचने वाला कितने प्रतिशत के लाभ या हानि में रहेगा?
8. एक कुर्सी 20% हानि पर 240 रु. में बिकती है। यदि विक्रय मूल्य 10% बढ़ जाए तो बताइए कि कितने प्रतिशत की हानि होगी ?
9. एक व्यापारी ने 1 रुपये के 5 की दर से 1000 नींबू खरीदकर एक रुपये के 4 की दर से बेच दिया तो उसका लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिए।
10. एक दुकानदार ने दो साइकिलें 1100 रु. प्रति साइकिल के हिसाब से बेची। एक पर उसे 10% का लाभ एवं दूसरे पर उसे 20% की हानि हुई। बताइए उसे लाभ हुआ कि नहीं? लाभ या हानि प्रतिशत में ज्ञात कीजिए।

## 10.6 उधार दिए गए धन पर शुल्क अर्थात् साधारण ब्याज

दैनिक जीवन में हमें घरेलू खर्च के लिए व्यवसाय को बढ़ाने के लिए या अन्य कई कार्यों के लिए कुछ अतिरिक्त धन की आवश्यकता होती है। इसके लिए हमें बैंक या अन्य व्यक्तियों से धन उधार लेना पड़ता है। उधार लिए गए धन को **मूलधन** (Principal) कहते हैं।

यह धन, वापस करने से पहले ऋण प्राप्त करने वाले व्यक्ति द्वारा कुछ समय तक इसका उपयोग किया जाता है। अतः एक निश्चित अवधि तक धन को उपयोग में लाने के बदले कुछ अतिरिक्त धन बैंक या उधार देने वाले व्यक्तियों को देना होता है। उधार लिए गए धन के उपयोग के बदले जो अतिरिक्त धन चुकाना पड़ता है, यह अतिरिक्त धन **ब्याज** (Interest) कहलाता है।

एक निश्चित अवधि के बाद आपको मूलधन और ब्याज दोनों को मिलाकर पूरा धन, ऋण प्राप्त करने वाले को वापस करना होता है जिसे **मिश्रधन** कहते हैं।

$$\text{अर्थात् मिश्रधन} = \text{मूलधन} + \text{ब्याज}$$

ब्याज एक निश्चित दर पर परिकलित किया जाता है जो प्रायः प्रत्येक 100 रु. के लिए एक वर्ष के लिए निर्धारित होता है। इसे इस प्रकार लिखा जा सकता है, 8 प्रतिशत प्रतिवर्ष या 8 प्रतिशत वार्षिक।

8 प्रतिशत वार्षिक का अर्थ है कि प्रत्येक 100 रु. पर प्रतिवर्ष 8 रु. ब्याज के रूप में अतिरिक्त देने होंगे।

आइए एक उदाहरण लेकर देखें कि ब्याज की गणना कैसे की जाती है।

**उदाहरण—22.** सुरेश 5500 रु. का ऋण, कृषि कार्य हेतु 5% वार्षिक की दर से ब्याज पर लेते हैं। ज्ञात कीजिए कि एक वर्ष बाद उसे कुल कितना धन वापस करना होगा।

$$\text{हल : उधार ली गई राशि} = 5500 \text{ रु.}$$

$$\text{ब्याज की दर} = 5 \text{ प्रतिशत प्रतिवर्ष}$$

इसका अर्थ है कि यदि वह 100 रु. उधार लेता है तब उसे एक वर्ष बाद 5 रु. ब्याज के रूप में भी देने होंगे।

$$\text{अतः } 5500 \text{ रु. के उधार पर उसे 1 वर्ष बाद देने होंगे : } \frac{5}{100} \times 5500 \text{ रु.} = 275 \text{ रु.}$$

अर्थात् एक वर्ष बाद उसे ब्याज मिलाकर मिश्रधन देना होगा

$$= 5500 \text{ रु.} + 275 \text{ रु.} = 5775 \text{ रु.}$$

एक वर्ष का ब्याज ज्ञात करने के लिए हम एक संबंध या सूत्र भी प्राप्त कर सकते हैं।

यदि हम मूलधन को  $P$  से तथा दर  $R\%$  वार्षिक को  $R$  से प्रदर्शित करते हैं तो हमें प्रत्येक 100 रु. के लिए एक वर्ष का  $R$  रु. ब्याज देना होगा।

अतः  $P$  रु. उधार लेने पर एक वर्ष का ब्याज  $I$  होगा।

$$I = \frac{R \times P}{100} = \frac{P \times R}{100}$$

### 10.6.1 अनेक वर्षों के लिए ब्याज

अगर धन एक वर्ष से अधिक समय के लिए उधार लिया जाता है तब ब्याज की भी उतने समय के लिए गणना की जाती है जितने समय के लिए धन रखा गया है। उदाहरण के लिए यदि सुरेश वही धन उसी दर पर 2 वर्ष बाद वापस करता तब उसे ब्याज भी दुगुना अर्थात् 275

सर्व शिक्षा : 2013-14 (नि:शुल्क)

पहले वर्ष के लिए तथा 275 दूसरे वर्ष के लिए। मूलधन वही रहता है, बदलता नहीं और ब्याज भी प्रत्येक वर्ष के लिए समान ही रहता है। इस प्रकार को साधारण ब्याज कहते हैं। जिस प्रकार वर्षों की संख्या बढ़ती जाती है उसी प्रकार ब्याज की राशि, भी।

उदाहरण के लिए –3 वर्षों के लिए 100 रु. 12% प्रतिशत वार्षिक दर से उधार लेने पर 3 वर्षों बाद ब्याज देना होगा

$$12 + 12 + 12 = 3 \times 12 = 36 \text{ रु.}$$

हम एक वर्ष से अधिक समय के लिए साधारण ब्याज ज्ञात करने के लिए सूत्र प्राप्त कर सकते हैं।

ऊपर हम देख चुके हैं कि  $P$  रु. मूलधन के लिए  $R\%$  वार्षिक की दर से 1 वर्ष बाद ब्याज देना होता है  $\frac{R \times P}{100}$

अतः  $T$  वर्षों के लिए दिया गया, साधारण ब्याज ( $I$ ) होगा:

$$I = \frac{T \times R \times P}{100} = \frac{P \times R \times T}{100} \quad \text{या} \quad \frac{PRT}{100}$$

और  $T$  वर्षों बाद मिश्रधन  $A$  होगा  $A = P + I$

## Lo; adjdsnf[k,

### 1. सारणी में दिए गए रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए

क्र.सं.	मूलधन	ब्याज	मिश्रधन
1.	625 रु.	125 रु.	750 रु.
2.	350 रु.	.....	700 रु.
3.	3200 रु.	320 रु.	.....
4.	.....	1750.00	2895.00

### 2. साधारण ब्याज की गणना कीजिए –

- मूलधन 4000 रु., दर 6%, समय 3 वर्ष
- मूलधन 900 रु., दर 5.5%, समय 4 वर्ष

### 3. मिश्रधन की गणना कीजिए –

- (i) मूलधन 4000 रु., दर 5%, समय 2 वर्ष
- (ii) मूलधन 1000 रु., दर 7.25%, समय 8 माह
- (iii) मूलधन 1500 रु., दर 6.5%, समय 146 दिन

10.6.2 मूलधन, दर तथा समय की गणना

साधारण ब्याज के प्रश्नों में मूलधन (P), दर (R) एवं समय (T) ज्ञात होने पर हम ब्याज (I) की गणना करते हैं। अब यदि इन चार राशियों में से कोई तीन का मान ज्ञात हो तो क्या चौथी राशि का मान ज्ञात कर सकते हैं?

आइए एक उदाहरण पर विचार करते हैं।

**उदाहरण-23.** एक व्यक्ति ने बैंक से 1800 रु. उधार लिया। कुछ दिन बाद वह बैंक में जाता है तो उसे बताया गया कि मूलधन के अतिरिक्त उसे 324 रु. और देना पड़ेगा। यदि ब्याज दर 6% हो तो वह व्यक्ति कितने दिन बाद बैंक गया था?

**हल :** यहाँ मूलधन (P) = 1800 रु.

दर (R) = 6 %

ब्याज (I) = 324 रु.

समय = ?

$$\text{हमें मालूम है, साधारण ब्याज (I)} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$$

$$324 = \frac{1800 \times 6 \times \text{समय}}{100}$$

$$\text{समय} = \frac{324}{18 \times 6} = 3 \text{ वर्ष}$$

सर्व शिक्षा : 2013-14 (नि:शुल्क)

**उदाहरण-24.** अनवर ने एजाज से 5000 रु. उधार लिया। 2 वर्ष पश्चात् उसने 6225 रु. देकर एजाज से अपना हिसाब कर दिया। ब्याज की दर ज्ञात कीजिए।

**हल :** यहाँ मूलधन = 5000 रु. मिश्रधन = 6225 रु. समय = 2 वर्ष

यहाँ साधारण ब्याज नहीं दिया गया है परन्तु मिश्रधन दिया गया है इसलिए पहले ब्याज की गणना करनी चाहिए।

$$\text{साधारण ब्याज} = \text{मिश्रधन} - \text{मूलधन}$$

$$= 6225 - 5000 = 1225 \text{ रु.}$$

$$\text{ब्याज} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$$

पहला तरीका

$$1225 = \frac{5000 \times \text{दर} \times 2}{100}$$

$$1225 = 100 \times \text{दर}$$

$$\text{दर} = \frac{1225}{100}$$

$$= 12.25\%$$

दूसरा तरीका

$$\text{दर} = \frac{\text{ब्याज} \times 100}{\text{मूलधन} \times \text{समय}}$$

$$\text{दर} = \frac{1225 \times 100}{5000 \times 2}$$

$$= 12.25\%$$

**उदाहरण-25.** 10 % वार्षिक गणना पर किस धन का 26 मार्च 2009 से 19 अगस्त 2009 तक का ब्याज 140 रु. होगा?

**हल :** यहाँ दर = 10%, ब्याज = 140 रु.

मार्च	अप्रैल	मई	जून	जुलाई	अगस्त	कुल
5	30	31	30	31	19	146

समय = 146 दिन =  $146/365$  वर्ष =  $2/5$  वर्ष मार्च - 05 दिन (26 मार्च को छोड़कर)

$$\begin{aligned} \text{मूलधन} &= \frac{\text{साधारण ब्याज} \times 100}{\text{दर} \times \text{समय}} \\ &= \frac{140 \times 100}{10 \times \frac{2}{5}} = \frac{140 \times 100 \times 5}{10 \times 2} = 3500 \text{ रु.} \end{aligned}$$

**उदाहरण—26.** कितने समय में 550 रुपये 10 प्रतिशत वार्षिक साधारण ब्याज की दर से 660 रु. हो जाएंगे।

**हल :** यहाँ मूलधन = 550 रु., मिश्रधन = 660 रु., दर = 10 % समय = ?

$$\begin{aligned} \text{ब्याज} &= \text{मिश्रधन} - \text{मूलधन} \\ &= 660 - 550 = 110 \text{ रु.} \\ \text{समय} &= \frac{\text{ब्याज} \times 100}{\text{दर} \times \text{समय}} \\ &= \frac{110 \times 100}{10 \times 550} = 2 \text{ वर्ष} \end{aligned}$$

### Q; adjds nf[k,

1. किसी धन का 12.5 प्रतिशत वार्षिक दर से 4 वर्ष का ब्याज 250 रु. है। तो वह धन ज्ञात कीजिए।
2. कितने प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से 600 रु. 3 वर्षों में 744 रु. हो जाएगा?
3. कितने समय में कोई धन 10 प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से दुगुना हो जाएगा?

### प्रश्नावली—10.4

1. 750 रु. का 9 % वार्षिक ब्याज की दर से 6 वर्षों का ब्याज ज्ञात कीजिए तथा मिश्रधन भी निकालिए।
2. 500 रु. का 1 रु. 50 पैसे प्रति सैकड़े प्रतिमाह की दर से 15 महीने का ब्याज ज्ञात करें।

3. कितने प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से कोई मूलधन 4 वर्षों में अपना सवा गुना हो जाएगा?
4. कितने प्रतिशत ब्याज की दर से 450 रु. तीन वर्षों में 504 रु. हो जाएगा?
5. यदि कोई मिश्रधन 5 वर्षों में मूलधन का  $5/4$  हो जाता है तो ब्याज की दर ज्ञात कीजिए।
6. कितने वर्षों में 5% वार्षिक ब्याज की दर से 600 रु. का मिश्रधन 700 रु. हो जाएगा?
7. कितने समय में  $6\frac{1}{2}\%$  वार्षिक ब्याज की दर से कोई धन दुगुना हो जाएगा?
8. 12% वार्षिक ब्याज की दर से कौन सा धन 5 वर्षों में 400 रु. हो जाएगा?
9. कितना धन 5% वार्षिक ब्याज की दर से 8 वर्षों में 560 रु. हो जाएगा?
10. कितने धन का 6% वार्षिक ब्याज की दर से 2.5 वर्ष में वही ब्याज होगा जो 400 रु. का 5 वार्षिक ब्याज की दर से 3 वर्षों में होगा?

### हमने सीखा

1. अपने दैनिक जीवन में हमें प्रायः दो राशियों के बीच तुलना करनी पड़ती है। ये राशियाँ ऊँचाई, भार, वेतन, प्राप्ताक आदि हो सकती हैं।
2. दो राशियाँ a और b की तुलना करने पर हम इसे अनुपात रूप में a : b लिखते हैं।
3. दो अनुपातों की तुलना उन्हें समान हर वाली भिन्नों से बदलकर की जा सकती हैं। यदि दोनों समान हर वाली भिन्न समान है तब हम कहते हैं कि दोनों अनुपात भी तुल्य अनुपात हैं।
4. यदि दो अनुपात तुल्य है तब उनके चारों पद एक समानुपात बनाते हैं। उदाहरण के लिए दो अनुपात a : b एवं c : d तुल्य हैं। अतः a,b,c तथा d समानुपात में हैं।
5. तुलना करने की एक विधि प्रतिशत भी है। भिन्न जिनके हर 100 होते हैं उनके अंश प्रतिशत प्रकट करते हैं। प्रतिशत का अर्थ होता है प्रत्येक सौ पर। उदाहरण के लिए  $5/100$  को 5% भी कहा जाता है।
6. भिन्नों को प्रतिशत में बदला जा सकता है तथा प्रतिशत को भिन्नों में। दशमलव भिन्न को भी प्रतिशत में बदला जा सकता है तथा प्रतिशत को दशमलव में बदला जा सकता है।

7. प्रतिशत के हमारे दैनिक में व्यापक उपयोग हैं।
- (i) जब हमें किसी राशि का प्रतिशत ज्ञात हो तो हम वह सम्पूर्ण राशि ज्ञात कर सकते हैं।
  - (ii) यदि हमें किसी राशि के भागों में अनुपात दिया हो तो हम उन्हें प्रतिशत में भी बदल सकते हैं।
  - (iii) किसी राशि का घटना या बढ़ना भी प्रतिशत में दर्शाया जा सकता है।
  - (iv) किसी वस्तु का क्रय मूल्य में हुए लाभ या हानि को भी प्रतिशत में दर्शाया जा सकता है।
  - (v) उधार लिए गए धन पर ब्याज परिकलन के लिए उसकी दर प्रतिशत में ही दी जाती है।
8. (i) किसी अनुपात को प्रतिशत में बदलने के लिए अनुपात को भिन्न के रूप में बदलते हैं।
- (ii) किसी अनुपात को प्रतिशत में बदलने के लिए भिन्न को 100 से गुणा करके प्रतिशत का चिह्न (%) इसके साथ लगाकर गणना करते हैं।

## अध्याय-11

# सरल समीकरण

### 11.1 बौद्धिक खेल

अंजू आफसाना, मुनताज एवं मुकर छप्टे घग्गी कक्ष में साठियों के स्थ इक ऐक-खेल खेल रहे थे। खेल में अंजू ने गुपाजी रो कोई रास्ता देखने को कहा। सोची हुई संख्या में 5 रु गुणा करके गुणनफल में 4 जोड़ा और परिणाम बताने को लहा।

मुनताज न कहा परिणम 29 है।  
अंजू ने दूसरा जवाब कि सोची गई संख्या 1 है। गुपाजी ने लहा गैने 5 ही दिया था।

गुपाजी और वह के सभी छात्र आपको बताकिए रह गए और रोने ले लिए कि कि अंजू जादू उन्हीं है? आखिर अंजू में मुनताज के गन गें रोची गई रास्ता को लैरे जान लिया? आफसाना का कुछ शंका हुआ। उसने अंजू से लहा मैंगे एक ओर संख्या 5 ची है, उसे बता दो। अंजू ने बड़ी दृष्टियाँ दौड़ाई। और परिणाम जानना चाहा। आफसाना न लहा परिणाम 154 है। अंजू ने गुणन करा सोची गई संख्या 30 है।

प्रत्येक ल्याते यह जनना चाहता था कि आखिर अंजू ने सोची गई संख्या को कैसे इस चर लिया। क्य आप वहा जानते हैं अंजू ने अशाक रास्ता (सोची गई रास्ता) को कैरे इस किया।

आइये हम इसी साज़ने का प्रयास करें।

गुपाजी ने कोई रास्ता सोची लो रास्ता 1, 2, 3..... गें रो कुछ भी हो जाए तो है। वह संख्या हमें ज्ञात नहीं है। अतः एसे संख्या के लिए हन एक चर ( $x$ ) लेने हैं (चर के लिए हम कोई अक्षर संलग्न ले सकते हैं)। अब  $x$  ने 5 से गुण छरल 4 जोड़ने पर प्रप्त व्यंजक ( $5x+4$ ) है, जो 29 के बराबर है।



$$\text{लक्ष्य} \quad 5x + 4 = 29$$

माना  $(5x+4)$  का मान यदि 1 हो। तो

$$\text{बंजक} = 5 \times 1 + 4$$

$$= 5 + 4$$

$$= 9$$

यदि  $x = 2$  तो बंजक  $= 5 \times 2 + 4 = 14$

यदि  $x = 3$  तो बंजक  $5 \times 3 + 4 = 19$

यदि  $x = 4$  तो बंजक  $= 5 \times 4 + 4 = 24$

यदि  $x = 5$  तो बंजक  $= 5 \times 5 + 4 = 29$

अतः सबत यरिखिति न हम देखत हैं कि प्रत्येक अल्प  $x$  के नन के लिए परिणाम अल्प आता है और तुमताज के द्वारा सेवी गई संख्या 5 के लिए परिणाम 29 है द्वेषा। संभवत वह ऐल फैलो समय अंजुने इन परिणामों का जल्द छोड़ न सकता होगा। हमने केवल दो बंजक 5x + 4 एवं 29 देखे हैं और ने आपस में वितरण भी है। ऐसे दो बंजक जिनके बीच एक बर  $(-)$  का छिह हता है समीकरण कहलाता है। समीकरण में यिह के दाईं ओर के बंजक को समीकरण का दायঁ पक्ष (Left Hand Side) एवं याडिन और के बंजक को समीकरण का दायঁ पक्ष (Right Hand Side) कहलाता है। यदि LHS एवं RHS के बीच बर बर  $(-)$  के अलापा कोइ अन्य वेट हो तो वह समीकरण नहीं होता है। जैसे—  $5x - 4 < 29$  यह समीकरण नहीं है। समीकरण के लिए अन्य अधिकारियों वाले बहुत जाते हैं कि दोनों पक्षों में ए किसी पक्ष में एक अज्ञात चालि अवश्य होनी चाहिए। समीकरण के RHS एवं LHS को आपस में बदल देने पर समीकरण वहै रहत है। जैसे—  $5x + 4 = 29$  यह  $29 = 5x + 1$

## 11.2 सक चर वाले (रैखिक) समीकरण

इस प्रकार देखते हैं कि रैखिकरण वालाव में बंजकों के बरों पर एक इच्छा है और चर के विवर नाम के लिए समीकरण के दोनों पक्ष आपस में बदलते होते हैं। इन बंजक बनाना जानत हैं शाइये बंजकों का कुछ शर्त स नोडकर समीकरण बनाते हैं।

१. एक संख्या का 6 गुना 30 है।

यदि मान लें कि वह संख्या  $x$  है तो

$$\text{संख्या का } 6 \text{ गुना} = 6x$$

$$\text{संख्या का } 6 \text{ गुना } 30 \text{ के बर बर है}$$

$$\text{अतः } 6x = 30 \quad (\text{यह एक समीकरण हुआ})$$

2. किसी संख्या का दोगुना उस संख्या के 5 गुण से 21 कम है।

यदि मान ले कि संख्या  $x$  है तो

$$\text{संख्या का } 2 \text{ गुना} = 2x, \quad \text{संख्या का } 5 \text{ गुण} = 5x$$

$$\text{संख्या के } 5 \text{ गुना से } 21 \text{ कम} = 5x - 21$$

संख्या का दो गुना यानी  $2x$ , संख्या के 5 गुणी से 21 कम के बराबर है।

$$\text{अतः } 2x = 5x - 21 \text{ (इस एक समीकरण है।)}$$

### आइये कुछ समीकरण जार्जें

- (a) किसी संख्या का तिहाई 17 के बराबर है।
- (b) सुनील की पत्तेनन्ह उम्र उसके 2 साल पहले के उब्र की तिगुनी है।
- (c) अजुन एवं उसके भाइ के उम्र का योग 23 है। यदि अजुन की उम्र 10 है तो उसके भाई की उम्र को  $m$  मानो तो कथन को समीकरण में लिखिये।
- जिन समीकरणों में एक वर्ष छहमासी है वह एक चर वाला समीकरण कहलाता है, या तीन वर्ष होने पर वह दो वा तीन चर वाला समीकरण कहलाता है।

### 11.3 रामीकरण के हल

आइये हाँ। तुम सुमित्राज के लक्षाहरण के लें। तुम ताज के द्वारा लोची। इस संख्या को  $x$  नगरे पर बना समीकरण  $5x + 4 = 29$  है। यह समीकरण  $x - 1$  के लिए L.H.S.  $\neq$  R.H.S.

$$\therefore \text{LHS} = 5 \times 1 + 4 = 9$$

$$\text{RHS} = 29$$

इसके लिए  $x = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29$

LHS / RHS है?

किन्तु  $x = 5$  के लिए  $\text{LHS} = 5x + 4 = 5 \times 5 + 4$

$$= 25 + 4$$

$$= 29$$

$$= \text{RHS}$$

यानी  $x - 5$  के लिए दोनों पक्ष बराबर हैं। अतः  $x$  के ऐसे मान ज्ञानके लिए समीकरण का ६ अर्थ पक्ष एवं दायाँ पक्ष बराबर होता है रागीकरण का हल होता है।

रागीकरण का हल, रागीकरण के वर्तों की रूख्या एवं उनके धार पर वी निर्भर करता है।

एक भरत वाले रागीकरण में चर का महत्वा नात १ है। ऐसे रागीकरण के ऐसिक समीकरण भी कहते हैं। अतः यह साप्त हाता है कि उज्जाहरण में रैखिक समीकरण का हल निकलकर मुनहज कद्वारा सोची गई संख्या का पत्ता लगा लिया।

### प्र२नावली—11.1

- संजू और कैलाश कंचे खेल रहे थे। संजू के पास  $x$  कंचे थे जबकि कैलाश के पास उसके बुगुने से ५ अधिक थे।

$$\text{संजू के कंचे} = x$$

$$\text{कैलाश के कंचे} = 2x + 5$$

वताइट—

- यदि संजू के पास ५ कंचे हो तो कैलाश के यास कितने कंचे होंगे?
- यदि संजू के ६ कंचे हो तो कैलाश के कंचों की संख्या क्या होगी?
- यदि संजू के १७ कंचे हों तो कैलाश के कंचों की संख्या क्या होगी?
- यदि कैलाश के पास २३ कंच हों तो संजू के कंचों की संख्या क्या होगी?
- यदि कैलाश के यास ५५ कंच हों तो संजू के पास कितने कंचे होंगे?
- इन स्थलों को करण के बाद तुन क्या निकल सकते हैं?

- निम्न में जो समीकरण है, उस पर धेरा लगाइये।

$$x + 2 = 5$$

$$3x$$

$$x - 5$$

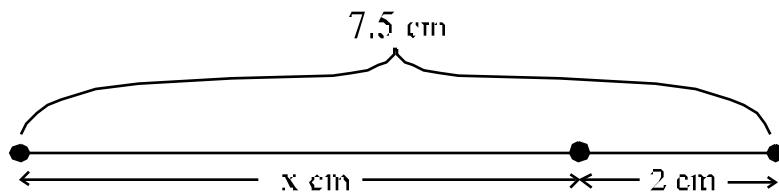
$$x^{-2} + 5$$

$$4y - x$$

$$4x - 5 > 50$$

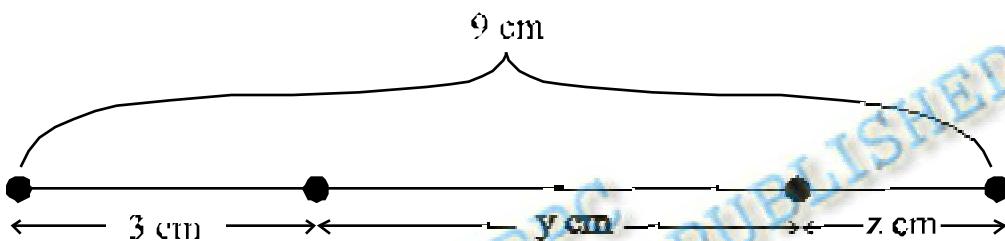
**3. एक विकल्प पर सही का निशान (✓) लगाइये।**

(i)



दिए गए रेखाखण्ड के लम्बाई में से कौन होगी?

- (a)  $x - 2$
- (b)  $x + 2$
- (c)  $7.5$
- (d)  $x - 7.5$
- (e)  $x + 7.5$
- (f)  $7.5 - x$

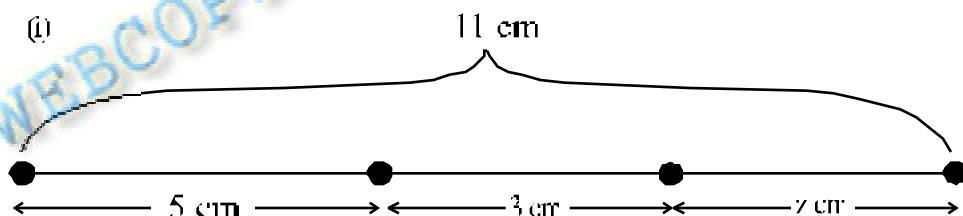


(ii) उपर्युक्त चित्र के आधार पर बताइये निम्न में से कौन सा सम्बन्ध सही है?

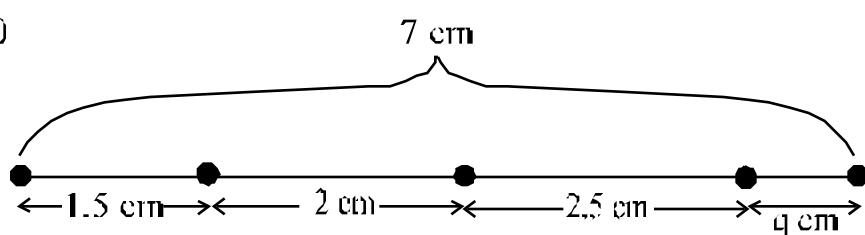
- (a)  $3 + y - z = 9$
- (b)  $3 + y + z > 9$
- (c)  $3 + y + z < 9$
- (d)  $3 + y + z = 9$

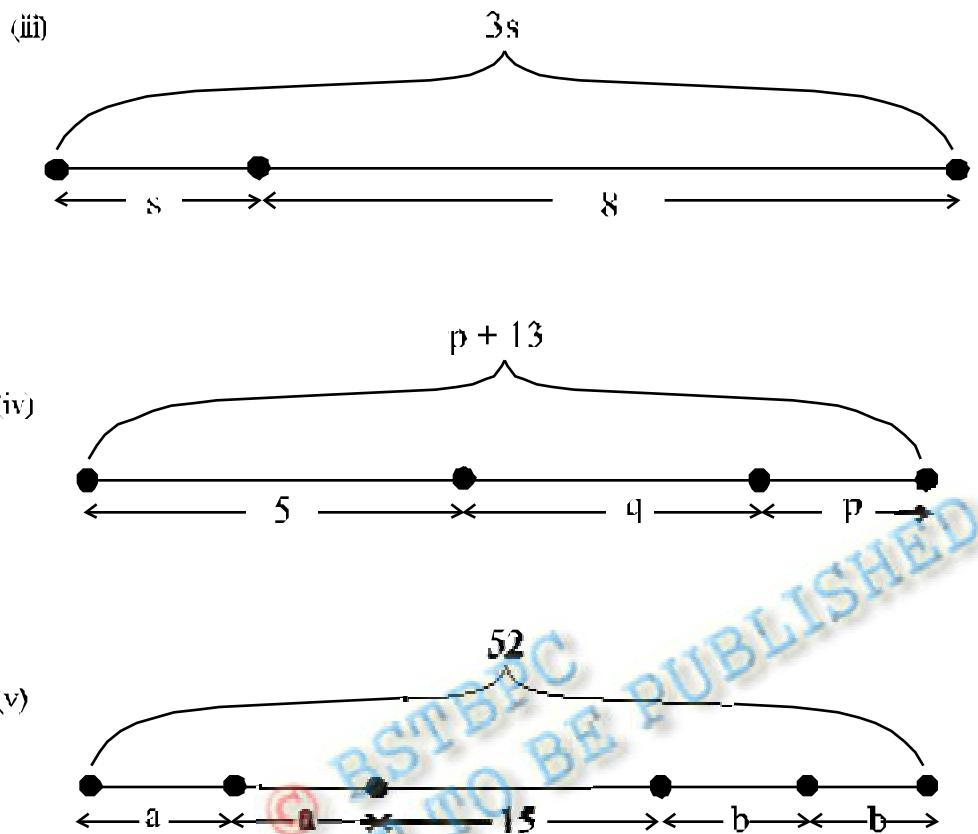
**4. नीचे दिए गए स्थानों के लिए संपूर्ण समीकरण बनाइये।**

(i)



(ii)





### 5. निम्न कथनों के समीकरण रूप में लिखिये।

- किसी संख्या नं 6 उड़ने पर 37 प्राप्त होत है।
- किसी संख्या नं 9 उड़ने पर 25 प्राप्त होत है।
- किसी संख्या  $\frac{a}{b}$  बढ़ाना पर  $\frac{a+b}{b}$  प्राप्त होता है।
- किसी संख्या के द्विगुण में से 1 का करने पर 13 प्राप्त होता है।
- किसी संख्या के पाँचवें भाग में से 5 घटाने पर 35 प्राप्त होता है।
- किसी संख्या के एक शिराई हेतु 10 जोड़ने से द्वितीय संख्या प्राप्त होती है।

6. नीचे दिए गए समीकरणों के सामने दिए गए  $x$  के मान से समीकरण संतुष्ट है अथवा नहीं लिखिये।

$x = 5$

है / नहीं

(i)  $x + 2 = 7$        $x = 5$       \_\_\_\_\_

(ii)  $\frac{7x}{2} = 21$        $x = 8$       \_\_\_\_\_

(iii)  $2x - 3 = 19$        $x = 4$       \_\_\_\_\_

(iv)  $\frac{5x - 2}{4} = 2$        $x = 2$       \_\_\_\_\_

आपने साथियों से चर्चा भी कीजिए कि  $x$  के केस मान से समीकरण संतुष्ट होता है।

7. सारणी में दिए गए मान से निम्न समीकरण उल कीजिये तथा इसाइये कि किस मान के लिए समीकरण के दोनों पक्ष बराबर हैं?

$$x - 2 = 3x - 8$$

$x$ का मान	बायाँ पक्ष $x - 2$	दायाँ पक्ष $3x - 8$
0		
1		
2		
3		

$x =$  \_\_\_\_\_

8. समीकरण के सामने दिए  $x$  के विभिन्न मान समीकरण में रख कर जाँच कीजिये कि सही हल क्या है और उस पर गोला लगाइये।

(i)  $3x - 1 = -4$        $\rightarrow$   $x = -1, 0, -1, 2$

(ii)  $4x = -12$        $\rightarrow$   $x = -3, -2, -3, 1$

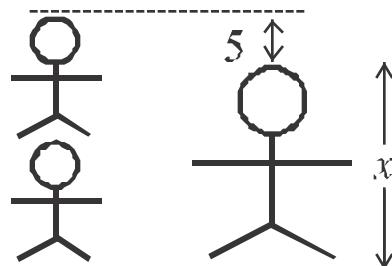
(iii)  $\frac{3x - 1}{2} = 1$        $\rightarrow$   $x = -1, -5, -4, 1$

$$(iv) \quad 9x - 9 \rightarrow x = 1, -1, 2, 3$$

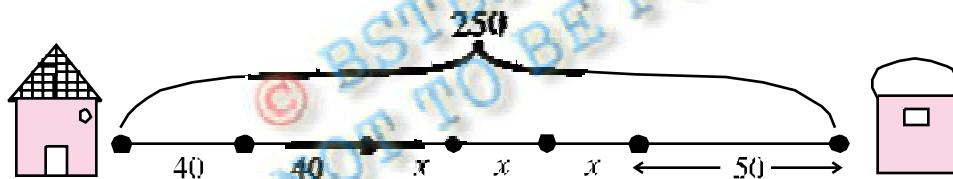
$$(v) \quad -2x + 5 = 13 \rightarrow x = 1, -1, 2, -2$$

### 9. नीचे दी गई परिस्थितियों के लिए उपयुक्त समीकरण बनाइये

- (i) नेशु का कद 80 रोपी है। उसकी पाठाजी उत्तक कद के दुगुने रु 5 तरीका है।



- (ii) सरोज के घर से डाकघर की दूरी 250 मीटर है। वह अपनी साइकिल पर घर से डाकघर के लिए गिरजाते हैं। प्रथम के 2 मिनट तक वह अपनी साइकिल 40 मीटर प्रति एवं अगले 3 मिनट सुक 5 मीटर प्रति मिनट की गति से बढ़ती है। इसके बाद भी 50 मीटर की दूरी बचती है।



### 10. निम्न समीकरण को कथन रूप में लिखिये—

$$(i) \quad x - 5 = 7 \quad (ii) \quad x + 2 = 3 \quad (iii) \quad 2x = 4$$

$$(iv) \quad \frac{x}{3} = 5 \quad (v) \quad \frac{x+1}{8} = 5$$

### 11.4 एक समीकरण को हल करना या हल ज्ञात करना

आइये हम गी जानने का प्रयत्न करें कि कौन से अंजुने अंजुने ज्ञात रखना हापि कर सकिये। समीकरण का हल ज्ञात करने के लिए निनलिखित तथ्यों का ध्यान न रखना चाहिए। इस

- (i) राष्ट्रीय लाल साड़ी का पर दिवार कींजेए—

$$7 - 4 = 2 + ?$$

इस सत्य है क्योंकि दोनों पक्षों का मान बराबर है अथात् दोनों ओर छल करने पर 3 प्राप्त होता है।

आइए दोनों पक्षों में 5 जोड़पे हैं। तब कोई अन्तर पड़े?

$$7 - 4 - 5 = 2 - 1 + 5$$

$$6 \stackrel{?}{=} 6 \quad 7 - 4 - 5 = 2 - 1 + 5$$

याहॉ पक्ष  $2 - 1 - 5 = 8$

निःसंदेह कोइं अंतर नहीं अचूकि समीकरण भी एक समेका है है तथा चम्ले ही जीव पद ऐसी न किसी राशि के चम्लिपि कहते हैं। अतः समीकरण का दोनों पक्षों में हा राशि संख्या जोड़ या बरा राखे हैं, इससे वरिष्ठ प्रगतिरा नहीं होते हैं।

(ii) क्या दोनों ओर गुणा करने से अन्तर पड़ेगा?

$$(7 - 4) \times 2 = (2 - 1) \times 2$$

बद्य पक्ष  $3 \times 2 = 6$ , दद्य पक्ष  $3 \times 2 = 6$ , स्पष्ट है गुणा करने से भी अन्तर नहीं आया, इस परामर्श करके देखें। अतः समीकरण में राश्य के अलावा कोई अन्य राश्या नहीं होने वक्षे में गुण या  $\times$ , के राखते हैं। इससे समीकरण के दोनों पक्षों का नन समान ही रहता है।

मान लेंजिए हम नियन का प्राप्तन नहीं करते और निना—भिना संख्या जोड़ते हैं तब क्या होगा—

$$7 - 4 + 3 = 2 + 1 + 5$$

बद्य पक्ष  $= 7 - 4 + 3 - 3 - 3 = 6$  एवं दद्य पक्ष  $2 + 1 - 5 + 3 + 5 = 8$   
जो कि बराबर नहीं है। अतः अल्प—अल्प राश्या नहीं जोड़ राखते।

इस एक तरफ जोड़ य दूसरी तरफ घटा कर सकते हैं, जाँच कीजिए।

और इस प्रकार जिस पर का न ज्ञात करना है उसको वरातन योह के एक रूप करते हैं।

उपर्युक्त निधि के साथ सालेखर हा अंजू द्वारा किये गये लल के देखें।

अंजू के समग्रे एक समीकरण है  $5x - 4 = 29$

समीकरण के दोनों पक्षों में से हा 4 बरा ते हैं।

इस प्रकार नया बायें पक्ष  $= 5x + 4 - 4 = 5x$

$$\text{नया दर्थों पदा} = 29 - 4 = 25$$

दोनों पदों में सामान राशि घटाई गई है। अतः नया राशीकरण  $5x = 25$

अब दोनों पदों में 5 से भाग करेंगे।

$$\text{इस प्रकार नया राशीकरण} \quad 5x : 5 = 25 : 5$$

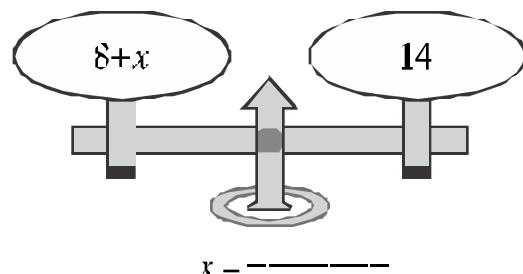
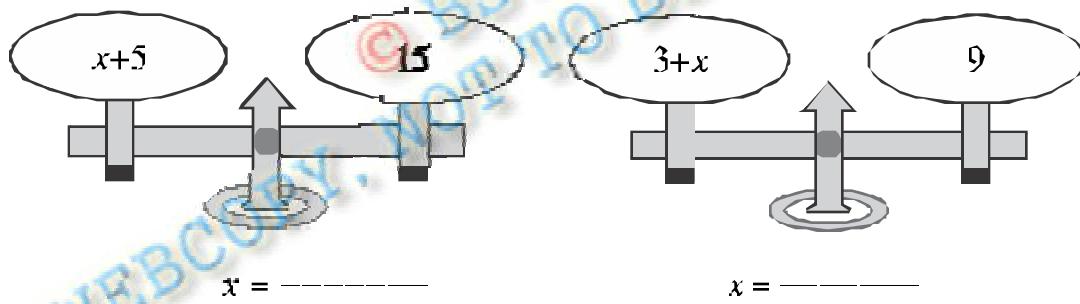
$$\therefore x = 5$$

(क्योंकि दोनों पदों में शून्य के अलावा सभी राशि 5 से भाग किया गया है।)

यही अइ प्रारंभिक गुणाले ने रोब रखी थी। अंजू ने इसे एक राशीकरण बनाया तथा उपर्युक्त विधि से उसका हल ज्ञात किया। वह आप अब यह बता सकते हैं कि उसे किसी न गरिमामें 69 बताया हो तो उसका हमार सोची नहीं संख्या क्या होगी?

### प्रश्नावली-11.2

1. तुला संतुलन में है तो  $x$  का भार बताओ?



2.  $x + 5 = 8$



अगर हमें  $x$  का नाम पता करना है, तो क्या करेंगे?



हम उतनी ही संख्या दोनों पक्षों में जोड़ेंगे/घटाएँगे कि एक तरफ केवल चर और दूसरी तरफ केवल अंचर राशि ही शेष रहे।

$$x + 5 - 5 = 8 - 5 \quad \text{अर: } x = 0 + 3 \quad \text{अर: } x = \underline{\hspace{2cm}}$$

नीचे यिए समीकरण को हल कीजिये—

(i)  $x - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}$

(ii)  $x - 8 = 2$

(iii)  $x - 1 = 5$

(iv)  $x + 3 = -5$

3.



लेकिन अगर समीकरण इस रूप में हुआ तो?

$$\frac{x}{3} - 6$$

(i) आप बताइये, लैप्ल एक तरफ वर र.शि बनाने के लिए क्या करेंगे?

\_\_\_\_\_

(ii) समीकरण का हल करने पर  $x$  का मान क्या होगा?

\_\_\_\_\_

हमें चर राशि का मान चाहिए तो दोनों पक्षों में 3 से गुणा कर देंगे।



**4.** कॉलम 'अ' में दिए गए समीकरणों को हल करने के लिए कॉलम 'ब' में दी गई फिस संक्रिया को अपनाएँगे? सही मिलान कीजिये—

कॉलम 'अ'

कॉलम 'ब'

(i)  $x - 5 = 7$

दोनों पक्षों में 3 से जुटा।

(ii)  $x + 2 = 3$

दोनों पक्षों में 4 से जुटा।

(iii)  $2x = 4$

दोनों पक्षों में ₹ 2 घटाना।

(iv)  $\frac{x}{3} = 5$

दोनों पक्षों में 5 बोढ़ना।

(v)  $\frac{x}{8} = 2$

दोनों पक्षों में 2 का गुणा।

**5. (अ)** नीचे दिए गए समीकरणों को हल कीजिए व रिक्त स्थान भरिए—

(i)  $\frac{x}{4} = 2$

$\therefore 4 \times \frac{x}{4} = 2 \times 4$

$\therefore x = \underline{\hspace{2cm}}$

(ii)  $3x = 15$

$\frac{3x}{3} = \frac{15}{3}$

$\therefore x = \underline{\hspace{2cm}}$

(iii)  $9x = 15$

$\therefore x = \underline{\hspace{2cm}}$

(iv)  $\frac{l}{2} = 7$

$\therefore l = \underline{\hspace{2cm}}$

(v)  $\frac{l-5}{2} = 3$

$\frac{l-5}{2} \times 2 = 3 \times 2$

$l + 5 = 6$

$l = \underline{\hspace{2cm}}$

(२) समीकरणों को हल कीजिए—

(i)  $3x + 4 = 10$

(ii)  $\frac{5x + 10}{4} = 20$

(iii)  $\frac{3x - 8}{2} = 2$

6. बायीं ओर लिखे समीकरण का एक चरण हल कर बायीं ओर लिखा गया है। परन्तु ये ऊपर नीचे हो गए हैं। आप सही जोड़े मिलाइये—

(i)  $3x + 5 = -5$

(a)  $x = \left( \frac{-7}{5} \right) \times \frac{1}{5}$

(ii)  $5x - 7 = 2$

(b)  $x = \frac{9}{3}$

(iii)  $\frac{x}{5} = 2$

(c)  $5x = 2 + 7$

(iv)  $3x = 9$

(d)  $x + 3 = 3 \times 5$

(v)  $3 = 9x$

(e)  $x - 3 = \frac{9}{3}$

(vi)  $5x = \frac{-7}{5}$

(f)  $3x = -5 - 5$

(vii)  $3(x - 3) = 9$

(g)  $y^2 = (-6) \left( \frac{4}{3} \right)$

(viii)  $\frac{3}{x} = 7$

(h)  $3 = 7 \times x$

(ix)  $\frac{3y^2}{4} = -6$

(i)  $\frac{3}{9} = x$

(x)  $\frac{x-1}{5} = 3$

(j)  $x = 2 \times 5$

अब हन एसे समीकरणों को हल करने की कोशिश करते हैं जिनमें हनें दो संकेताएँ फैले ही आवश्यकता होती है, जैसे— निम्न उपायों को पेलें—

(a)  $3p - 10 = 5$       (b)  $2q - 6 = 0$       (c)  $\frac{3p}{10} - 6$

(d)  $2y + \frac{5}{2} - \frac{37}{2}$       (e)  $\angle = 5(p - 2)$

**हल :** (a)  $3p - 10 = 5$

दोनों पक्षों में 10 जोड़े हैं। (ज्योंकि हाँ यह को हल तय करना है।)

नया समीकरण  $3p - 10 + 10 = 5 + 10$

या,  $3p = 15$

अब दोनों पक्षों में 3 रो भाग करते हैं (ज्योंकि हमें चर को अकेला करना है।)

$$\frac{3p}{3} = \frac{15}{3}$$

या  $p = 5$ , यह समीकरण का उत्तर है।

(b)  $2q - 6 = 0$

दोनों पक्षों में 6 जोड़ने पर  $2q - 6 + 6 = 0 + 6$

या  $2q = 6$

या  $\frac{2q}{2} = \frac{6}{2}$  (दोनों तरफ 2 से भाग देना पर)

या  $q = 3$  (इह रासायनिक हल है।)

(c)  $\frac{3p}{10} - 6$

या  $\frac{3p}{10} \times 10 - 6 \times 10$  (दोनों तरफ 10 से भाग फैले दें।)

व)  $3p = 60$

ग)  $\frac{3p}{3} = \frac{60}{3}$  (दोनों ओर 3 से भाग करने पर)

घ)  $p = 20$  (इस समीकरण का हल है)

(d)  $2y - \frac{5}{2} - \frac{37}{2}$

घ)  $2y - \frac{5}{2} - \frac{5}{2} = \frac{37}{2} - \frac{5}{2}$  (दोनों पक्षों में  $\frac{5}{2}$  घटाना जरूरी)

व)  $2y - \frac{37-5}{2} - \frac{32}{2} = 16$

ग)  $2y = 16$

घ)  $\frac{2y}{2} = \frac{16}{2}$  (दोनों पक्षों में 2 से भाग करना जरूरी)

घ)  $y = 8$  (इस समीकरण का हल है।)

(e)  $4 = 5(p-2)$

घ)  $5(p-2) = 4$  (दोनों पक्षों का पराम्पर बदलने पर)

घ)  $\frac{5(p-2)}{5} = \frac{4}{5}$  (दोनों पक्षों में 5 से भाग करने पर)

घ)  $p-2 = \frac{4}{5}$

घ)  $p-2 + 2 = \frac{4}{5} + 2$  (दोनों पक्षों में 2 जोड़ने पर)

घ)  $p = \frac{4}{5} + 2 = \frac{4+10}{5} = \frac{14}{5}$  (इस समीकरण का हल है।)

## 11.5 समीकरण के छल की जाँच

हमना यदि किसी ज्ञानीकरण का छल ज्ञात किया है तो यह सूत्र संदर्भ बना रहता है कि यह सती है या नहीं। इसकी जाँच के लिए हम छल की स्वत्ता की जाँच कर सकते हैं। हम जानते हैं कि समीकरण के छल में दो के जगह वर या नन (छल) रख कर उन्हें कैदा लगा देते हैं। यदि उस नन के लिए दोनों दायाँ पक्ष बराबर हैं तो वह का वह नन समीकरण का छल होता है।

**उदाहरण—1.**  $3p - 10 = 5$  तो  $p = 5$  के लिए

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= 3 \times 5 - 10 \\ &= 15 - 10 \\ &= 5 \end{aligned} \quad \text{RHS} = 5$$

अतः  $x = 5$  ऐसे गए समीकरण का छल सत्त्व है।

**उदाहरण—2.**  $\frac{2}{5}(m + 10) = 2m + 3$

हल पहली विधि

$$4 \quad \frac{2}{5}(m + 10) = 2m + 3$$

$$4 \quad \frac{2}{5}m + \frac{2}{5} \times 10 = 2m + 3 \quad (\text{दोनों पक्षों में } \frac{2}{5} \text{ को घटा दिया गया})$$

$$4 \quad \frac{2}{5}m + 4 = 2m + 3$$

$$4 \quad \frac{2}{5}m + 4 - \frac{2}{5}m = 2m + 3 - \frac{2}{5}m \quad (\text{दोनों पक्षों में } \frac{2}{5}m \text{ घटाया गया})$$

$$4 \quad 4 - 2m - \frac{2}{5}m + 3$$

$$4 \quad 4 - \frac{10m - 2m}{5} + 3$$

$$4 \quad 4 = \frac{8m}{5} + 3$$

य  $4 - 3 - \frac{8m}{5} + 3 - 3$  (दोनों पक्षों में से 3 हटाने पर)

य  $1 = \frac{8m}{5}$

य  $1 \times 5 = \frac{8m}{5} \times 5$  (दोनों पक्षों में 5 से गुणा करने पर)

य  $5 = 8m$

व  $\frac{5}{8} = \frac{8m}{8}$  (दोनों पक्षों में 8 से भाग देने पर)

व  $\frac{5}{8} = m$

व  $m = \frac{5}{8}$  (दोनों पक्षों का अपरिवर्तन होता है)

[दोनों पक्षों का अपरिवर्तन होता है]

**दूसरी विधि :**  $\frac{2}{5}(m+10) = 2m+3$

य  $\frac{2}{5}m + \frac{2}{5} \times 10 = 2m+3$  (बर्द्दू पक्ष में लोटक हटाने पर)

व  $\frac{2}{5}m + 4 = 2m+3$  (उमान पद ( $m$ ) की एक पक्ष में छोड़ते हैं,  $2m$  की एक बदलने पर या दोनों ओर  $2m$  छोड़ताना)

य  $\frac{2}{5}m - 2m = 3 - 4$

व  $\frac{2}{5}m - 2m = -1$  (1 का पक्ष बदलने पर के दोनों ओर 1 घटाने पर)

य  $\frac{2m - 10m}{5} = -1$

या  $2m - 10m = -1 \times 5$  (5 का पक्ष बदलने पर अर्थात् दोनों ओर 5 से गुण करने कर)

$$\text{या } -8m = -5$$

$$\text{या } m = \left( -5 \times \frac{1}{-8} \right) \quad (-8 \text{ का पक्ष बदलने पर अर्थात् दोनों ओर } -8 \text{ का गान करने पर})$$

$$\text{या } m = \frac{5}{8} \quad (\text{समीकरण का इला})$$

### समीकरण की जाँच

$\text{LHS} = -\frac{2}{5}(m - 10)$ $= -\frac{2}{5}\left(\frac{5}{8} + 10\right)$ $= \frac{2}{5}\left(\frac{5 + 80}{8}\right)$ $= \frac{2}{5} \times \frac{85}{8}$ $= \frac{17}{4}$	$\text{RHS} = 2m + 3$ $= 2 \times \frac{5}{8} + 3$ $= \frac{10}{8} + 3$ $= \frac{10 + 24}{8}$ $= \frac{34}{8} = \frac{17}{4}$
---	---

अतः  $m = \frac{5}{8}$  के विशेष दोनों बहुओं का गान स्वगत हैं अतः इस समीकरण का गान  $\frac{5}{8}$  है।

### 11.6 स्थानहारिक समस्याओं को हल करने में समीकरण का अनुप्रयोग

अब तक हमने सरल समीकरण का हल करना सीख लिया है। हमने यह भी जान लिया कि दिए गय लक्षण का अनुसार अनुन न किस प्रकार समीकरण बनाए और उसका इल निकाल कर रानी को देंगे जैसे प्रश्न-पर आधारित समीकरण का हल देखें।

**उदाहरण-3.** 64 रु. को 10 रु. वे भागों में बांटिए कि बड़ा भाग छोटे भाग का तीन गुना हो।

**हल :** नना कि बड़ा भाग x रु.

छोटा भाग  $64 - x$  रु.

प्रश्न से, बड़ा भाग छोटे भाग का तीन गुना है।

$$\text{अतः } x = 3 \times (64 - x)$$

$$\text{या } x = 192 - 3x$$

$$\text{या } x + 3x = 192 \quad (3x \text{ का पहले बदलने पर})$$

$$\text{या } 4x = 192$$

$$\text{या } x = \frac{192}{4} \quad (4x = 192 \text{ है अतः उसे बदलने पर वह नाजिक के रूप में आ जायगा। वास्तव में यह क्रिया दहनों तक 4 से भाग लेने के समान है।)$$

$$\text{या } x = 48$$

$$\text{तो भाग } x = 48$$

$$\text{इति हि } 64 - x = 64 - 48 = 16$$

अभेष्ट भाग 48 रु. एवं 16 रु. हैं।

**उदाहरण-4.** पिता, पुत्र एवं पुत्री का उम्र का योग 120 है। पिता का उम्र, पुत्र एवं पुत्री के उम्र के योग के बराबर है एवं पुत्री का उम्र पुत्र के उम्र का आधा है तो तीनों की उम्र अलग-अलग शाकी करें।

**हल :** नना कि पुत्र का उम्र  $x$  है।

$$\text{पुत्री की उम्र } \frac{x}{2} \quad (\text{पुत्र के उम्र की आधी})$$

$$\text{पुत्र एवं पुत्री के उम्र का योग } = x + \frac{x}{2}$$

प्रश्न से,

$$\text{पिता की उम्र } = x + \frac{x}{2}$$

तीनों के उम्र का योग

$$\text{या } \frac{x}{2} + x + x + \frac{x}{2} = 120$$

य  $\frac{x}{2} - \frac{x}{2} + 2x = 120$

य  $x + 2x = 120$

$$\left( \because \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x \right)$$

य  $3x = 120$

य  $x = \frac{120}{3}$

य  $x = 40$

पूर्ण रूपी धन =  $40 \text{ रुपूर्ण}$

पूर्णी की राशि  $= \frac{x}{2} = \frac{40}{2} = 20 \text{ रुपूर्ण}$

पिछा की राशि  $= x - \frac{x}{2} = 40 + \frac{40}{2} = 40 + 20 = 60 \text{ रुपूर्ण}$

**सदाहरण-5.** एक व्यक्ति ने अपने धन का आधा नाग पत्ती को,  $\frac{1}{4}$  भाग पुत्री को,  $\frac{1}{5}$  भाग पुत्र को तथा शेष 20,000 रु. जैसे लेगवाने के लिए एक समेति को दन में दे दिए। उस व्यक्ति के पास कुल कितना धन था?

**हल :** नाम के उपरे पास कुल धन  $x$  है।

$$\text{पत्ती का धन} = x \text{ का आधा} = x \times \frac{1}{2} = \frac{x}{2}$$

$$\text{पुत्री का धन} = x \text{ का } \frac{1}{4} = x \times \frac{1}{4} = \frac{x}{4}$$

$$\text{पुत्र का धन} = x \text{ का } \frac{1}{5} = x \times \frac{1}{5} = \frac{x}{5}$$

राशि  $\Rightarrow$  धन = 20,000 रु.

कुल धन = राशि के बागे का रूप

य  $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} + 20,000$

या  $x - \frac{x}{2} - \frac{x}{4} - \frac{x}{5} = 20,000$  ( $\frac{x}{2}, \frac{x}{4}, \frac{x}{5}$  का पद बराबर)

या  $\frac{20x - 10x - 5x - 4x}{20} = 20,000$

या  $\frac{20x - 19x}{20} = 20,000$

या  $\frac{x}{20} = 20,000$

या  $x = 20,000 \times 20 = 4,00,000$  रु.

अतः कुल धन = 4,00,000 रु.

### प्रश्नावली—11.3

निम्नलिखित समीकरण का हल करें एवं प्राप्त डल का जैब करें।

1.  $\frac{x}{3} - \frac{x}{5} = -2$

2.  $\frac{3x+2}{3} = \frac{17}{6}$

3.  $x - 4 = 4(129-x)$

4.  $\frac{x-19}{5} = 8$

5.  $\frac{x}{2} + 6 = \frac{x}{3} + \frac{2x}{7}$

6.  $\frac{2y-1}{3} = \frac{y-2}{2}$

7.  $10 - 4 - 3(x+2) =$

8.  $4x - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - x$

9.  $3(x+1) - 2(x+1) = 10$

10.  $5(5x+2) = 40$

11.  $\frac{x-19}{5} = 8$

12.  $\frac{5x}{2} - 7 = \frac{11}{2}$

13. यीन लग वारे पूर्ण कों का योग 21 है तो उन्हें पूर्ण के ज्ञात कीजिए।

14. तीन क्रम में उन्हें वाली दिप्पम संख्याएँ का योग 39 है तो वे संख्यायें ज्ञात कीजिए।

15. किसी सनद्वितीय त्रिभुज ला रहीं लग  $50^\circ$  का है तो त्रिभुज ल शेष दानों छोणों की नह बताइये।

16. किसी आधुनिक के लम्बाई एवं चौड़ाई के अनुपात  $3 : 2$  है। यदि आधुनिक परिमिति 90 नीटर है तो उसकी लम्बाई एवं चौड़ाई ज्ञात कीजिये।

17. सालगा की 65 उराके दिना के उत्तर के एक त्रिभाई से 5 वर्ष का है। यदि सालगा की उम्र 20 वर्ष है तो उत्तर के उम्र का उत्तर ज्ञात करें।

18. विक्रम ने 8 कुर्सी एवं 2 मेंज खरीदने नं कुल 2900 रु. खर्च किय। यदि 1 नंज की कैमत 450 रु. है तो 8 कुर्सी के कौमत इत लीजिए।
19. दे पूरफ कोणों के अंतर  $20^\circ$  है तो दोनों कोण ज्ञात करें।
20. कोइ फोग अपने पूरक लोण का एक वैथाश है तो कोण का मान ज्ञात करें।
21. एक वर्गीचे में आम ल गेड़, अमलूद के पड़ों से 43 कन है। यदि उस वर्गीचे में दगों मिल जरु कुल 123 गेड़ हो तो दोनों प्रकर के पड़ों की अलग—अलग संख्या बताए।
22. एक व्यक्ति के 55 उराके पुत्रों के उम्र 0 वर्षेन्मान है, 16 वर्ष बाद वह 55नी पुत्रों के सम्र के दुगुना हो जायेग। पुत्रों की उम्र ज्ञात लीजिए।

## हमने सीखा

1. एक समीकरण अंडाक क चरं गर एक ग्राहिक्ष्म हता है जिसमें चर ल मज्ज के लिए सनीकरण के दोनों पक्षों ल लिए सनीकरण के दोनों पक्षों का मान समान छोना चाहिए।
2. ४५ ०० वह गान जिसके लिए सामीकरण  $x^2 + y^2 = 1$  है अर्थात् यार्थी व यार्थी पक्ष वर वर होत हैं समीकरण का हल या नुल कहलाता है।
3. सामीकरण के दोनों पक्षों के पदलने पर समीकरण नहीं पदलता है।
4. सनीकरण के दोनों पक्षों में समान संख्या (या चर) को जोड़ने पर सनीकरण नहीं पदलता है।
5. किसी सनीकरण के दोनों पक्षों में सूक्ष्म के अलावा किसी इन्य संख्या स (या चर स) गुणा या भर अन्तर पर समीकरण नहीं बदलता है।
6. उपर्युक्त नियमों का सहयोग कर हर सामीकरण के एक पटे में उस पृष्ठ कर सकते हैं जिससे चर का मान ज्ञात जरु सनीकरण का हल निकाला जा सक।
7. पदों के स्थानापन (पद का पक्ष परिवर्तन) द्वारा अरानी रो हा सामीकरण को हल करने की प्रक्रिया में आगे बढ़ते हैं।
8. किसी पद का गुणांक या भाजक पदा परिवर्तन के बद क्रनशः भाजक इयं गुणांक में बदल जाता है। उनके विषय नहीं बदलते।
9. संख्या पहलियां लो हल करने के लिए उहल कठनानुसार समीकरण बनाते हैं एवं उसका हल ज्ञात जरते हैं।
10. सनीकरण में चर का मन रखकर सनीकरण के हल को जारी की जा सकती है।

३०४

## अध्याय-12

# परिमेय संख्याएँ

### 12.1 गूणिका

हमने प्राकृत संख्या, पूर्ण संख्या, पूर्णांक और भिन्न संख्याओं के बारे में जाना है।

भिन्न संख्याएँ ने हम लोगों ने स्थानीय अन्तर्काल लघ पर ही विचार किया। भिन्न के बारे में हम आनंद हैं कि  $\frac{\text{अंश}}{\text{हर}}$  रूप में लिखी रखने को भिन्न संख्या कहते हैं जिसमें अंश सूचिया कोई भी भगात्मक पूर्णांक है तक है परन्तु हर सदैव एक भगात्मक पूर्णांक भी छोड़ा जाता है।

इस अध्याय में हम ऐसी संख्याएँ के बारे में भी जानेंगे जिनका उदाहरण हर भगात्मक पूर्णांक भी हो सकता है। इस अध्याय ने हम संख्या पद्धति का और टिप्पोर करेंगे जिसमें हम प्राकृतका न अपार तरीकों के रूप में उनकी जांच में जाकियाँ सीखेंगे।

### 12.2 परिमेय संख्या

हमने पूर्णांक संख्या ने दैया है कि किसी वस्तु के मूल्य में 50 रुपये वृद्धि को +50 से व्यक्त किया जा सकता है तो 50 रुपये को -50 से व्यक्त किया जा सकता है, इसी प्रकार किसी स्थान से दार्ढी और की दूरी 10 किमी. को +10 से जो दार्ढी और की दूरी 10 किमी. -10 से व्यक्त किया जा सकता है।

इसी प्रकार की इनके विविध गिनतीका संख्याएँ भी होती हैं। जैसे—हम रासुद तल रे उपर 800 मीटर की ऊँचाई को किमी. में व्यक्त करने पर  $\frac{800}{1000}$  किमी. =  $\frac{4}{5}$  किमी.

होता है। जैसे  $\frac{1}{5}$  किमी. से व्यक्त किया जाता है। क्या हम रासुद तल रे में 800 मी. की

दूरी को किमी. में व्यक्त कर रखते हैं? क्य कि 800 मीटर तल से नीचे  $\frac{1}{5}$  किमी. की ऊँचाई को

$\frac{-4}{5}$  मीटर व्यक्त करते हैं? अब हम देखते हैं कि  $\frac{-4}{5}$  ने कि एक पूर्णांक है और न ही एक

मिन्न। इसी संख्याओं के समेलित करने के लिए हमें संख्या पद्धति के विस्तृत करने की आवश्यकता है। ये जाइए हम एक नये प्रकार की संख्या एवं विवर करते हैं, जिसे परिमेय संख्या कहते हैं।

अर्थात् ऐसी संख्या जो  $\frac{p}{q}$  के रूप में हो जहाँ  $p$  और  $q$  पूर्णांक हैं, लेकिन  $q \neq 0$  हो

तो  $\frac{p}{q}$  को परिमेय संख्या कहते हैं, जिसनं  $p$  अंश तथा  $q$  हर कहलाता है।

$\frac{-4}{15}$  एल परिमेय संख्या है, इसमें उन्नर की संख्या -1 को अंश तथा नीचे की संख्या 15 का हर कहते हैं।

क्या सभी प्राकृत संख्या परिमेय संख्या हैं?

हाँ, (क्योंकि सभी प्राकृत संख्या के  $\frac{p}{q}$  के रूप में लिखा जा सकता है।

जैसे—  $1 = \frac{1}{1}, 2 = \frac{2}{1}, \dots$  आदि)

क्या सभी पूर्ण संख्या परिमेय संख्या हैं?

हाँ, (क्योंकि सभी पूर्ण संख्या के  $\frac{p}{q}$  के रूप में लिखा जा सकता है।

जैसे—  $0 = \frac{0}{1}, 1 = \frac{1}{1}, 2 = \frac{2}{1}, \dots$  आदि)

क्या सभी यूर्धीक वरिन्य संख्या हैं?

हाँ, (क्योंकि सभी दूषांक का  $\frac{p}{q}$  के रूप में लिखा जा सकता है।

जैसे—  $\dots -3 = \frac{-3}{1}, -2 = \frac{-2}{1}, -1 = \frac{-1}{1}, 0 = \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \dots$  आदि)

क्या सभी नेचा वरिन्य संख्या हैं?

हाँ, (क्योंकि सभी मिन्न  $\frac{p}{q}$  के रूप में हैं)

क्या  $\frac{5}{0}$  एक परिमेय संख्या है ?

नहीं, (क्योंकि इस शून्य है)

क्या 0 एक नियन्त्र संख्या है ?

हाँ क्योंकि इस  $\frac{0}{1}$  के लिए में निख सकते हैं।

### 12.3 समतुल्य परिमेय संख्याएँ

एक नियन्त्र संख्या को उलग-अलग अंशों और दूरों का प्रयोग करते हुए लिख जा सकता है।

परिमेय संख्या  $\frac{-5}{8}$  कर चैवार करें :-

$$\frac{-5}{8} = \frac{-5 \times 2}{8 \times 2} = \frac{-10}{16}, \text{ इन देखते हैं कि } \frac{-5}{8} \text{ बहुत हो जा } \frac{-10}{16} \text{ है।}$$

$$\text{साथ ही, } \frac{-5}{8} = \frac{-5 \times 3}{8 \times 3} = \frac{-15}{24}, \text{ अतः } \frac{-5}{8} \text{ बहुत हो जा } \frac{-15}{24} \text{ है।}$$

$$\text{पुनः } \frac{-5}{8} = \frac{-5 \times -4}{8 \times -4} = \frac{20}{-32}, \text{ अतः } \frac{-5}{8} \text{ बहुत हो जा } \frac{20}{-32} \text{ है।}$$

$$\text{इस प्रकार } \frac{-5}{8} = \frac{-10}{16} = \frac{-15}{24} = \frac{20}{-32} \text{ है।}$$

**अथवा** ऐसी परिमेय संख्याएँ जो परस्पर बराबर हों एवं दूसरे के समतुल्य या तुल्य (Equivalent) परिमेय कही जाती हैं।

[Note : इसी परिमेय संख्या का सन्तुल्य भिन्न ग्राहक लिए परिमेय संख्या के अंश और हर नं समान (शून्य को छोड़कर) संख्या से गुणा या भाग करते हैं, जैसा कि ऊन्नर बताया गया है।]

$$\text{परं } \frac{5}{-7} = \frac{-5}{7} \text{ है ? } \text{ पूँछो } \frac{5}{-7} = \frac{5 \times \boxed{\phantom{0}}}{-7 \times \boxed{\phantom{0}}} = \frac{-5}{7} \quad \text{अथवा } \frac{5}{-7} = \frac{5 + \boxed{\phantom{0}}}{-7 + \boxed{\phantom{0}}} = \frac{-5}{7}$$

अपरं  $\frac{5}{-7}$  और  $\frac{-5}{7}$  दोनों एक दूसरे के बराबर हैं। अर्थात्  $\frac{5}{-7} = \frac{-5}{7}$  होगी।

ऐसे  $\frac{5}{-7}$  को  $-\frac{5}{7}$ ,  $\frac{-5}{7}$  को  $-\frac{5}{7}$  इत्यादि लिखते हैं।

### स्वयं करके देखिए

परिमेय संख्या	$\frac{5}{4}$	$-\frac{8}{9}$	$\frac{7}{-8}$	$\frac{7}{9}$
धनात्मक परिमेय संख्याएँ	$\frac{10}{8}, \frac{15}{12}, \frac{20}{16}, \frac{25}{20}$			

ग्रन्थिलिखित पर विचार जरूर-

$$\frac{12}{9}, \frac{20}{12}, \frac{25}{18}, \frac{15}{-8}, \frac{-5}{12}, \frac{-6}{7}$$

$\frac{12}{9}, \frac{20}{12}, \frac{25}{18}$  धनात्मक परिमेय संख्याएँ हैं।  $\frac{15}{-8}, \frac{-5}{12}, \frac{-6}{7}$  ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ हैं।

अतः स्पष्ट है कि किसी परिमेय संख्या का अंक और हर दोनों धनात्मक हो तो भगात्मक परिमेय संख्या कहलाते हैं। और यदि किसी परिमेय संख्या का अंक और हर दोनों रो कोई एक ऋणात्मक पूर्णांक हो तो ऐसी परिमेय संख्या ऋणात्मक परिमेय संख्या कहलाती है।

यदा  $\frac{-3}{-5}$  एक ऋणात्मक परिमेय संख्या है?

हम जानते हैं कि  $\frac{-3}{-5} = \frac{-3 \times -1}{-5 \times -1} = \frac{3}{5}$  होता है। अतः  $\frac{-3}{-5}$  एक धनात्मक परिमेय संख्या है।

[Note : यदि परिमेय संख्या का अंक और हर दोनों धनात्मक पूर्णांक जो शा दनों ऋणात्मक पूर्णांक हो तो वह धनात्मक परिमेय संख्या कहलाती है।]

सुविभा जी टूर्सिट से गरिनेट संख्याओं को लगल सरलतम रूप में संकिया की जाती है। परिमेय संख्या का यह सरलतम रूप निम्न अंक व हर में काढ़े रार्ब्युणनखंड न हो तथा हर धन त्वक हो। यदि है तो उसा रार्ब्युणनखंड से ये नों अंक व हर में भाग देलक्ष रारलपान रूप प्राप्त करते हैं। इस प्रकार परिमेय संख्याओं का मानक रूप प्राप्त होता है जैसे :

$$\frac{\cancel{\Box} \cancel{\Box} -3}{\cancel{\Box} \cancel{\Box} 4} \text{ आदि।}$$

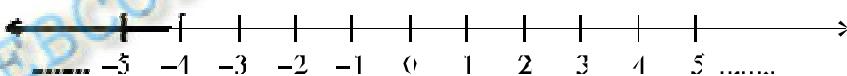
### स्वयं करके देखिए

निम्नलिखित परिनय संख्या में कौन ऋणात्मक है, कौन धनात्मक और कौन न धनात्मक न ऋणात्मक सही लॉलम् ने निशान (✓) लगाइए।

परिनय संख्या	ऋणात्मक परिनय	धनात्मक परिनय	न धनात्मक न ऋणात्मक
$\frac{15}{18}$			
$\frac{-40}{27}$			
$\frac{-28}{-17}$			
$\frac{56}{-19}$			
$\frac{0}{5}$			
0			

### 12.4 परिगेय संख्याओं का संख्या रेखा पर निरूपण

आइए संख्या रेखा को बताएँ—

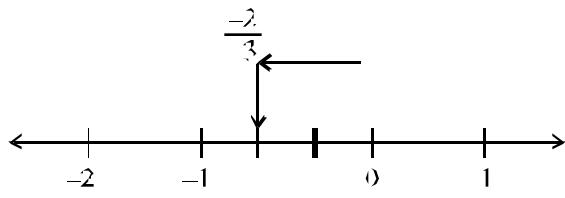


संख्या रेखा में शून्य के दो ओर बनार का पूर्णांक है जिन्हें – निह के रूप लिखते हैं और शून्य के दो ओर ऋणात्मक पूर्णांक है जिन्हें – चिन्ह ल स्थ लिखते हैं। संख्या रेखा नर हन लगाने पूर्व की कहाने न मिनों ल निरूपण को देखा है।

आइए अब हनलोग संख्या रेखा नर परिनय संख्याओं को निरूपित करं।

एक परिगेय संख्या  $\frac{-2}{3}$  को संख्या रेखा पर निरूपित करें। यूके  $\frac{-2}{3}$  अपात्मक परिगेय संख्या है, इस लिए इसके स्थान '0' (शून्य) के बायें ओर होगा।  $\frac{-2}{3}$  संख्या ऐसे कि

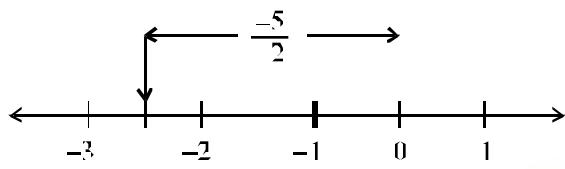
'0' और -1 के बीच होगी। अतः 0 और -1 के बीच '0' न बराबर लंब करते हैं। पिछे '0' शून्य की तरफ से दूसरे लंब पर  $-\frac{2}{3}$  का स्थान होगा।



**उदाहरण-1.**  $-\frac{5}{2}$  को संख्या रेखा पर दर्शाइए।

**हल :** ऐसे जानते हैं  $-\frac{5}{2}, -2\frac{1}{2}$

अतः  $-\frac{5}{2}$  का स्थान '0' से वार्षी



और (ऋणात्मक पूर्णांक तरफ) -2 और -3 के बीच ही इसे संख्या रेखा पर इस प्रकार दर्शाया जाता है।

-2 और -3 के बीच का स्थान का जो बराबर भागों में बांटते हैं वयोंके अंश 1 है, जैसे कि उपर के चित्र से समझे। इसी प्रकार अब एक संख्या का संख्या रेखा पर दिखाया जा सकता है।

रीना ने  $-\frac{5}{2}$  को संख्या-रेखा पर दिखाने के लिए निम्न कार्य किए : -

- (i) अंश चिह्न अर्थात् 5 ई ओव।
- (ii) हर 2 अर्थात् इकाई के दो हिस्से।
- (iii) अंश का अर्थात् एको-दोनों 5 टुकड़े।

वया अपने  $\frac{2}{3}$  के संख्या रेखा पर दर्शाएँ।

### स्वयं करके देखिए

निम्न को संख्या-रेखा पर दिखाएँ

- (i)  $-\frac{5}{2}$  (ii)  $-\frac{7}{2}$  (iii)  $\frac{5}{3}$  (iv)  $-\frac{4}{3}$  (v)  $\frac{2}{5}$

## 12.5 परिमेय संख्याओं की तुलना

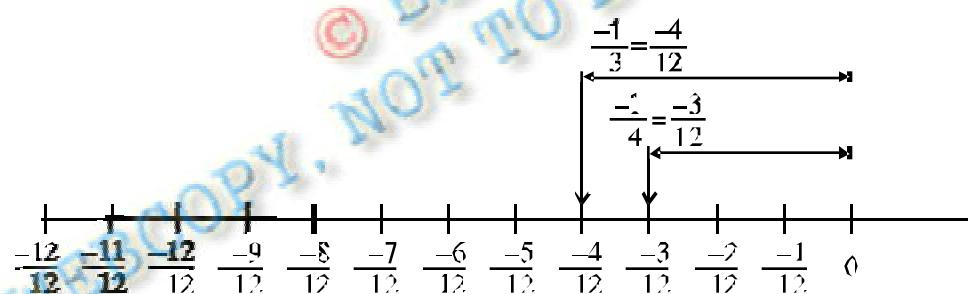
हमने देखा है कि दो पूँछों द्वारा दो भिन्नों की तुलना किस प्रकार की जाती है तथा यह भी कि इनमें लोग बड़ा और कौन छटा है। आइए उब इन लोग दो परिमेय संख्याओं की तुलना पर ध्यान दें।

$\frac{5}{4}$  और  $\frac{6}{11}$  जैसी दो ध्यानपूर्ण परिमेय संख्याओं की तुलना अंतिम प्रकार की जा सकती है, जैसा कि इन भिन्नों की स्थिति के लिए पहले ही कर दिये गए हैं।

आइए दो ऋणात्मक परिमेय संख्याओं की तुलना संख्या रेखा पर देखें—

एम लोगों ने पूर्णांक संख्याओं की तुलना के सदर्ने ने देखा है कि संख्या-रेखा पर दायी तरफ की पूँछ वार्षीय तरफ ली गूणांक से बड़ी होती है। उसी प्रकार  $\frac{-1}{2}$  और  $\frac{-1}{3}$  को संख्या रेखा पर निरूपित करके पहचान की जा सकती है। दोनों की ऐसी दूल्हा परिमेय संख्या निम्न जिनके हर साथ हैं। जैसे—

$$\text{फिर, } -\frac{1}{4} = -\frac{1 \times 3}{4 \times 3} = -\frac{3}{12} \text{ और } -\frac{1}{3} = -\frac{1 \times 4}{3 \times 4} = -\frac{4}{12}$$



वैसे के  $-\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}$  से संख्या रेखा पर दर्थी तरक देखा है। अतः  $-\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}$  से बड़ा होगा।

इस प्रकार 5, 5 के बाद है तरह -8, -5 के बाद है।

यदि  $\frac{1}{3} > \frac{1}{6}$  है, परंतु  $-\frac{1}{3} < -\frac{1}{6}$

हम भिन्नों के अन्तर्गत अध्ययन से यह जानते हैं कि  $\frac{1}{2} < \frac{1}{3}$  है। स्थ ही संख्या रेखा

से हन्त  $\frac{-1}{4}$  व  $\frac{-1}{3}$  के लिए क्या प्राप्त किया? क्या यह इसका ठीक विपरीत नहीं था।

आप देखते हैं कि  $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$  है, तरंतु  $-\frac{1}{3} < -\frac{1}{4}$  है।

क्या आप  $-\frac{3}{4}$  और  $-\frac{2}{3}$  तथा  $-\frac{1}{2}$  और  $-\frac{1}{5}$  के लिए भी इसी प्रकार का परिणाम देखते हैं?

ऐसों को बाद आता है कि लगाने पूर्वीकों में पढ़ा था कि  $4 > 3$  है, तरंतु  $-4 < -3$  है;  $5 > 2$  है, तरंतु  $-5 < -2$  इत्यादि।

— अध्यात्मिक परिग्रेध संख्याओं के युग्मों की स्थिति यीक इसी प्रकार है। दो ऋणात्मक परिमित संख्याओं की तुलना उसके के लिए, हम लगकी तुलना उनके विषयों को छाड़ते हुए करते हैं और बाद में उत्तमेका (inequality) ल चिह्न के सहित कर (बदल) देते हैं।

उत्तमाहरणार्थ,  $-\frac{7}{5}$  और  $-\frac{5}{3}$ , जो तुलना करने के लिए पहले हन  $\frac{7}{5}$  और  $\frac{5}{3}$  की तुलना करते हैं।

हमें  $\frac{7}{5} < \frac{5}{3}$  ग्राह करता है और इससे हम निष्कर्ष निकालते हैं कि  $-\frac{7}{5} > -\frac{5}{3}$  है।

ऐसे गाँव युग्म और लोनिंग और किर जनकी तुलना कीजिए।

**सौन पक्का है—**  $-\frac{3}{8}$  या  $-\frac{2}{7}$ ,  $-\frac{4}{3}$  या  $-\frac{3}{2}$

एक अध्यात्मिक और धन याक परिग्रेध संख्या की तुलन सुरक्षित है। संख्या देखा पर, एक अध्यात्मिक परिग्रेध संख्या शून्य के बाई और रिस्ट दोनों है (१२-५७ धनात्मक परिग्रेध संख्या शून्य के दाईं ओर स्थित होती है। अतः, एक ऋणात्मक परिग्रेध संख्या सदैव एक छात्मक परिग्रेध संख्या से छाटी होती है।

इसी त्रिकार  $\frac{-2}{7} < \frac{1}{2}$  है।

**उदाहरण-2.**  $\frac{-5}{6}$  और  $\frac{-4}{5}$  की तुलना लीजिए।

**हल :** सर्वप्रथम चिह्न के बिना तुलना करते हैं।

$$\frac{5}{6} \text{ और } \frac{4}{5}$$

6 और 5 के लगभग  $6 \times 5 = 30$

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \times 5}{6 \times 5} = \frac{25}{30}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \times 6}{5 \times 6} = \frac{24}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{25}{30} > \frac{24}{30} \quad \text{यानी } 25 > 24$$

$$\Rightarrow \frac{5}{6} > \frac{4}{5}$$

अब  $\frac{-5}{6}$  और  $\frac{-4}{5}$  के सिद्ध असमिका के चिह्न को छल्ला कर देते हैं।

$$\therefore \frac{-5}{6} < \frac{-4}{5}$$

एक उन्नतम् परिमेय संख्या जैसा ताक परिमेय संख्या रे बड़ी होती है।

जैसे:  $\frac{5}{4} > -\frac{8}{5}$

$\frac{-4}{-5}$  और  $\frac{-7}{-8}$  की तुलना ले लिए गहल उन्हें मानक रूप में बदलो और इस उनकी तुलना करे।

दो परिमेय संख्याओं जी तुलना के लिए एक अन्य विधि पर विवर करें-

**उदाहरण-3.**  $-\frac{5}{4}$  और  $-\frac{2}{3}$  की तुलना करें।

**हल :**  $-\frac{5}{4}$  और  $-\frac{2}{3}$  का लक्षण असौं है।

### कार्यविधि :

- ⇒ ग्रेटर पद के हर का लगभग निकालते हैं।
- ⇒ ग्रेटर पद के हर के लगभग सूत्र के बराबर करते हैं।
- ⇒ इस प्रकार राह रिस ग्रेटर हो जाती है।
- ⇒ ऐसे दोनों परिमेय संख्याओं की तुलना कर छेदा या गुणन ग्राह करते हैं।

i.  $-5 \times 3$  और  $-2 \times 4$   $-15$  और  $-8$

$$\Rightarrow -15 < -8 \quad \text{तो} \quad \frac{-5}{4} < -\frac{2}{3}$$

### Ques 10; adjdsnf[k,

तीनों विधि से निम्नलिखित वृत्त तुलना करें।

(i)  $\frac{-3}{5}$  और  $\frac{-3}{10}$  (ii)  $-\frac{5}{8}$  और  $-\frac{3}{1}$

**उदाहरण-4.**  $\frac{-1}{2}, \frac{-2}{3}, \frac{3}{-4}$  और  $\frac{-2}{-3}$  ज आरोही क्रम (बढ़ते क्रम) में लिखें।

**हल :** सबसे पहल दी गयी परिमेय संख्याओं को मानक रूप में लिखें।

मानक रूप :-  $\frac{-1}{2}, \frac{-2}{3}, \frac{-3}{4}, \frac{2}{3}$  हरें 2, 3, 4, 3 का LCM से = 12

उपर करने पर,  $\frac{-6}{12}, \frac{-8}{12}, \frac{-9}{12}, \frac{8}{12}$

$$\therefore \frac{-9}{12} < \frac{-8}{12} < \frac{-6}{12} < \frac{8}{12} \quad \text{तो} \quad -\frac{3}{4} < -\frac{2}{3} < \frac{-1}{2} < \frac{-2}{-3}$$

### Ques 10; adjdsnf[k,

$-\frac{2}{3}, \frac{5}{-8}, \frac{-7}{-6}$  को अवरोही क्रम (बढ़ते क्रम) में लिखें।

## 12. दो परिमेय संख्याओं के बीच की परिमेय संख्याएँ

निम्नलिखित पर गौद करें—

5 और 12 के बीच पूर्णांक संख्याएँ हैं 6, 7, 8, 9, 10, 11

-3 और 3 के बीच पूर्णांक संख्याएँ हैं : -2, -1, 0, 1, 2

इब हाँ किसी दो परिमेय संख्याओं के बीच की परिमेय संख्या ज्ञात करत हैं।

**उदाहरण-5.** नना कि  $\frac{-3}{10}$  और  $\frac{7}{10}$  के बीच की परिमेय संख्या मालूम करनी है, हमें पता है कि  $\frac{-3}{10}$  तथा  $\frac{7}{10}$  के बीच ने कम-से-कम 9 परिमेय संख्याएँ तो हैं दी

$\frac{-2}{10}, \frac{-1}{10}, \frac{0}{10}, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{5}{10}, \frac{6}{10}$  क्योंकि  $-3$  तथा  $7$  के बीच 9 पूँछी हैं। यह क्या  $\frac{-3}{10}$  तथा  $\frac{7}{10}$  के बीच और गीणीय संख्याएँ हैं?

$$\text{देखते हैं जैसे } \frac{-3}{10} = \frac{-3 \times 5}{10 \times 5} = \frac{-15}{50}; \quad \text{इसी प्रकार } \frac{7}{10} = \frac{7 \times 5}{10 \times 5} = \frac{35}{50}$$

$$\text{अब } \frac{-15}{50} \text{ और } \frac{35}{50} \text{ के बीच की परिमेय संख्याएँ हैं : } -\frac{14}{50} < \frac{-13}{50} < \frac{-12}{50} < \dots < \frac{34}{50}$$

अब और अधिक संख्याएँ शार करने के लिए हम  $\frac{-3}{10}$  और  $\frac{7}{10}$  को  $\frac{100}{100}$  तो पूँछ कर और अधिक परिमेय संख्याएँ इतने कर सकते हैं।

**Ques:** adjdsnf[k,

$$-\frac{4}{5} \text{ व } \frac{3}{5} \text{ जीवीय संख्याएँ के बीच में 7 परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।$$

**उदाहरण-6.**  $\frac{2}{5}$  और  $\frac{5}{6}$  के बीच की परिमेय संख्याएँ लिखिए।

$$\text{हल : पहले हमके द्वारा समान लकड़ते हैं } \frac{2}{5} = \frac{2 \times 6}{5 \times 6} = \frac{12}{30}, \quad \frac{5}{6} = \frac{5 \times 5}{6 \times 5} = \frac{25}{30}$$

अतः इनके बीच की परिमेय संख्याएँ जॉडी जा सकती हैं—

$$\frac{13}{30} < \frac{14}{30} < \frac{15}{30} < \frac{16}{30} < \dots < \frac{24}{30}$$

अंशों के अन्तर को जौर अधिक बढ़ा कर उनके बीच में जौर अधिक परिनेय संख्याएँ लिखें जा सकती हैं।

$$\text{तो } -\frac{12}{30} = \frac{12 \times 2}{30 \times 2} = \frac{24}{60};$$

$$\frac{25}{30} = \frac{25 \times 2}{30 \times 2} = \frac{50}{60}$$

अब  $\frac{24}{60}$  और  $\frac{50}{60}$  के बीच जौन अंडिल रांझा है। इसकी जा सकती है। जैसे—

$$\frac{25}{60} < \frac{26}{60} < \frac{27}{60} < \dots < \frac{49}{60}$$

इसी प्रकार इसके समूह के बढ़ाकर, उनके बीच जानना परिसेय संख्याएँ ज्ञात की जा सकती हैं।

**उदाहरण—7.**  $-2 \text{ और } -1$  के बीच जीन परिसेय संख्याएँ लिखें।

**हल :** आइए  $-1$  और  $-2$  को हर 5 वाली परिसेय संख्याओं के रूप में लिखें।

$$\text{इस ग्रन्ति } -1 = \frac{-1}{1} = \frac{-1 \times 5}{1 \times 5} = \frac{-5}{5};$$

$$-2 = \frac{-2}{1} = \frac{-2 \times 5}{1 \times 5} = \frac{-10}{5}$$

$$\text{अतः } \frac{-10}{5} < \frac{-9}{5} < \frac{-8}{5} < \frac{-7}{5} < \frac{-6}{5} < \frac{-5}{5} \quad \text{या,} \quad -2 < \frac{-9}{5} < \frac{-8}{5} < \frac{-7}{5} < \frac{-6}{5} < -1$$

$-2$  और  $-1$  के बीच ~~सीमा परिसेय संख्याएँ~~  $\frac{-9}{5}, \frac{-8}{5}, \frac{-7}{5}$  होंगे।

[ **Note—2** और  $-1$  के बीच ~~इसी प्रकार सामान्य परिसेय संख्याएँ ज्ञात कर सकते हैं। ]~~

### स्वयं करके देखिए

निम्नलिखित लंबीच की गरिनट संख्या इत्त करें।

$$(i) \quad \frac{1}{2} \text{ और } \frac{1}{4} \qquad (ii) \quad \frac{-5}{8} \text{ और } \frac{7}{16}$$

**12.7** दो संख्याओं के बीच की परिसेय संख्याओं को नाय ज्ञात करके भी पता कर सकते हैं।

अध्याय—4 में इमने पढ़ा है कि दो संख्याओं का नाय उन दो संख्याओं के बीच में होता है। निम्न उदाहरण पर ध्यान दीजिए:

संख्या  $\frac{1}{4}$  और  $\frac{3}{4}$  के बीच परिनट संख्या इत्त कीजिए—

हल : मध्य  $= \frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}{2} = \frac{1+3}{2 \times 2} = \frac{4}{8}$  यूके मध्य  $\frac{4}{8}$  देनों संख्याओं  $\frac{1}{4}$  व  $\frac{3}{4}$  के बीच होगा।

$$\text{दूसरी परिमेय संख्या } \frac{1}{4}, \frac{4}{8} \text{ का मध्य} = \frac{-\frac{1}{4} + \frac{4}{8}}{2} = \frac{2 - 1}{8 \times 2} = \frac{1}{16}$$

$$\text{तीसरी परिमेय संख्या } \frac{4}{8} \text{ व } \frac{6}{16} \text{ का मध्य} = \frac{\frac{4}{8} + \frac{6}{16}}{2} = \frac{8+6}{16 \times 2} = \frac{14}{32}$$

इसी प्रकार अन्य परिमेय संख्याएँ निकाला जा सकता है। इह निकाली गयी पहली परिमेय संख्या को दी गयी तूसरी परिमेय संख्या के साथ इसी ग्राहार की क्रिया कर आगे परिमेय संख्याएँ निकाला जा सकता है।

$$\frac{\frac{3}{4} + \frac{4}{8}}{2} = \frac{6+4}{8 \times 2} = \frac{10}{16}, \quad \frac{\frac{4}{8} + \frac{10}{16}}{2} = \frac{8+10}{16 \times 2} = \frac{18}{32}, \quad \frac{\frac{10}{16} + \frac{18}{32}}{2} = \frac{20+18}{32 \times 2} = \frac{38}{64}$$

इसी त्रिकार अन्य परिमेय संख्याएँ निकाली जा सकती है। चाना कि  $a$  और  $b$  दो परिमेय संख्या हैं तो उनके बीच की परिमेय संख्या  $= \frac{ak+b}{k+1}$ ; जहाँ  $k$  = प्राकृत संख्याएँ

### स्वगत करके देखिए

निन्मलिखित के बीच की छह परिमेय संख्या माध्य दिखि से ज्ञात कीजिए।

$$(i) \quad \frac{1}{2} \text{ और } \frac{3}{4} \quad (ii) \quad \frac{-1}{4} \text{ और } \frac{3}{8}$$

### प्रश्नावली-12.1

#### 1. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं के बीच चार परिमेय संख्याएँ लिखिए :

$$(i) \quad -3 \text{ और } -1 \quad (ii) \quad -2 \text{ और } 0 \quad (iii) \quad -1 \text{ और } 0$$

$$(iv) \quad \frac{-4}{5} \text{ और } \frac{2}{5} \quad (v) \quad \frac{-4}{5} \text{ और } \frac{-5}{7} \quad (vi) \quad \frac{-1}{2} \text{ और } \frac{2}{3}$$

2. निम्नलिखित प्रत्येक प्रतिलिप में पौंच और परिमेय संख्याएँ लिखिए :

(i)  $\frac{-1}{2}, \frac{-2}{4}, \frac{-3}{6}, \dots$

(ii)  $\frac{-2}{5}, \frac{-4}{10}, \frac{-6}{15}, \dots$

(iii)  $\frac{-8}{9}, \frac{-16}{18}, \frac{-24}{27}, \dots$

(iv)  $\frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{3}{12}, \dots$

3. नीचे दी गयी परिमेय संख्याओं में प्रत्येक के लिए पौंच समतुल्य परिमेय संख्या लिखिए।

(i)  $\frac{1}{8}$

(ii)  $\frac{-2}{3}$

(iii)  $\frac{-5}{9}$

4.  $\frac{-5}{12}$  की चार ऐसी समतुल्य परिमेय संख्या लिखिए, जिसका वर क्रमशः 80, 84, 108 और -24 हो।

5. परिमेय संख्या  $\frac{-8}{11}$  के शुल्य परिमेय संख्याएँ लिखें, जिसका अंश निम्नलिखित हो—

(i) -24

(ii) 40

(iii) 72

(iv) -96

(v) -120

6. निम्नलिखित परिमेय संख्या को संख्या रेखा पर निरूपित करें—

(i)  $\frac{4}{5}$

(ii)  $\frac{-4}{5}$

(iii)  $\frac{5}{8}$

(iv)  $\frac{-8}{3}$

(v)  $-2\frac{1}{2}$

7. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को सरलतम रूप में लिखिए—

(i)  $\frac{-24}{32}$

(ii)  $\frac{-55}{22}$

(iii)  $\frac{-45}{72}$

(iv)  $\frac{-4}{-5}$

(v)  $\frac{5}{-4}$

8. निम्नलिखित वर्गाकार खानों में उपयुक्त चिह्नों ( $>$ ,  $<$ ,  $=$ ) को भरिए—

(i)  $\frac{-5}{4} \square \frac{2}{5}$

(ii)  $\frac{2}{7} \square \frac{-1}{5}$

(iii)  $\frac{-4}{-7} \square \frac{1}{2}$

(iv)  $\frac{-8}{11} \square \frac{-24}{33}$

(v)  $\frac{-3}{8} \square \frac{-5}{8}$

(vi)  $\frac{1}{-2} \square \frac{-1}{2}$

9. निम्नलिखित को आरोही क्रम में लिखें—

(i)  $\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{-5}{4}$

(ii)  $\frac{-5}{8}, \frac{-3}{8}, \frac{-1}{8}, \frac{1}{8}$

(iii)  $\frac{1}{3}, \frac{-2}{9}, \frac{-5}{4}$

(iv)  $-2, 0, \frac{-2}{15}, \frac{7}{15}, \frac{-7}{11}$

### 10. निम्नलिखित को अवरोधी क्रम में लिखें-

(i)  $\frac{15}{28}, \frac{-17}{28}, \frac{-1}{28}, \frac{5}{28}$  (ii)  $\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-5}{6}, \frac{4}{-3}$  (iii)  $\frac{1}{2}, \frac{-2}{3}, \frac{-3}{4}, \frac{-5}{-6}$

(iv)  $\frac{-5}{6}, \frac{-8}{9}, \frac{-11}{12}, \frac{1}{6}$

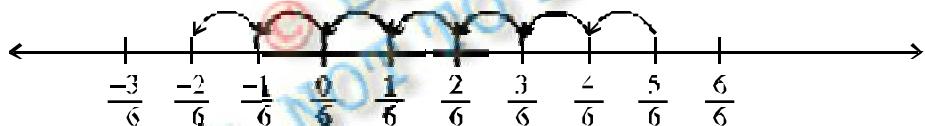
### 12.8 परिमेय संख्याओं पर संक्रियाएँ

आप जानते हैं कि यूणिक रूप से दिनों के क्रेत्र प्रकार जैवि, इटाया, गुणा और भागिन्या जाता है, आइए इन आष्ट्र सूत्र संक्रियाओं को परिमेय संख्याओं के लिए रखें।

#### 12.8.1 परिमेय संख्याओं का योग

आइए हम परिमेय संख्याओं  $\frac{5}{6}$  और  $\frac{-7}{6}$  का योगफल संख्या-खेत्र से प्राप्त करें हैं।

हम  $\frac{5}{6} - \frac{-7}{6}$  ज्ञात करें।



दो क्रमागत अंकों के बीच ली दूरी  $\frac{1}{6}$  है। अतः  $\frac{5}{6} + \frac{-7}{6}$  जोड़ने का अर्थ है

कि  $\frac{5}{6}$  के बायीं ओर 7 कदम बढ़ें। तब जहाँ पहुँचते हैं? तब  $\frac{-2}{6}$  पर पहुँचते हैं।

अतः  $\frac{5}{6} + \left(\frac{-7}{6}\right) = \frac{-2}{6}$  है।

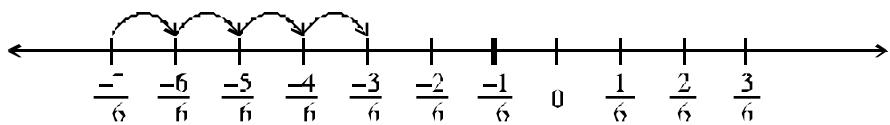
आइए, इसे दूसरी विधि से करने का प्रयास करते हैं।

$$\frac{5}{6} + \left(\frac{-7}{6}\right) = \frac{5 + (-7)}{6} = \frac{-2}{6}$$

हमें कही उत्तर प्रपा होता है।

(रिमेय वा योग लर्न के लिए लक्षक हर स्मार्ट होने चाहिए।)

इसी प्रकार  $\frac{-7}{6}$ ,  $\frac{4}{6}$  को निम्नलिखित रूप में दिखाया जा सकता है।



हमें क्या प्राप्त होता है ?

$$\text{संष्ट द्द } \frac{-7}{6} + \frac{4}{6} - \frac{-3}{6}$$

$$\text{ਦੂਜੀ ਤਿਥਿ ਦੇ ਲੋੜਾਂ : } \frac{-7}{6} + \frac{1}{6} = \frac{-7 - 1}{6} = \frac{-8}{6} \quad \text{ਹੋ ਵਹੀ ਅੱਖ ਪਾ ਹੋ।}$$

इस प्रकार हम दख्त हैं कि सनन हर वाली परिमेय संख्याओं का जोड़ समय छुप हर को बहुत रुक्त हुए अंशों को जोड़ दते हैं।

$$\text{Ex 16.11 - 8. } \frac{-4}{5} - \left( \frac{-7}{5} \right) = \frac{-4 - (-7)}{5} = \frac{-4 + 7}{5} = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$\text{उदाहरण-9. } \frac{2}{9} + \frac{7}{9} \left( -\frac{5}{9} \right) = \frac{2+7+(-5)}{9} = \frac{9+(-5)}{9} = \frac{4}{9}$$

**उदाहरण-10.** निम्नलिखित का मान ज्ञात करें :  $\frac{5}{8} + \frac{3}{4} - \frac{7}{16}$

$$\text{हल : } \frac{5}{8} + \frac{3}{4} + \frac{-7}{16}$$

$$= \frac{5 \times 2 - 3 \times 1 + (-7) \times 1}{16}$$

$$-\frac{10 - 12 + (-7)}{16}$$

$$-\frac{22}{16} \frac{(-7)}{16} - \frac{15}{16}$$

中華書局影印

यदि इस असमान हो, तो उन्हें सन्तुष्ट करने के लिए हरों का ल० रा० ज्ञान करतो हैं। प्रत्येक वद के ल.रा. के अनुराग र गहर बनाते हैं। इसके लिए प्रत्येक वद के हर से ल.स. में या वते हैं तथा ग्राह आगाम लो प्रत्येक संगत वद के उंश से उपा करते हैं। इस प्रकार पाप्त समझ पूछो क्या योगफल द्वात करते हैं।

सर्वप्रथम ल ० स ० नेक्टर हैं। सभी पदों में इर लो ल ० ज्ञ के बराबर कहते हैं।

$$\frac{5}{8} \times \frac{2}{2} - \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{-7}{16};$$

$$\frac{10}{16} + \frac{12}{16} - \frac{-7}{16};$$

$$\frac{10+12-7}{16} = \frac{22-7}{16}$$

### इन्हें देखिए

$$\frac{-3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{-3+3}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\text{साथ है } \frac{5}{4} + \left( \frac{-3}{4} \right) = \frac{5-(-3)}{4} = \frac{5+3}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{-3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \left( \frac{-3}{4} \right)$$

### स्वयं करके देखिए

राशि रेखा पर दिख ये:

$$(i) \quad \frac{-1}{2}, \frac{5}{2} \quad (ii) \quad \frac{5}{4}, \frac{-3}{4}$$

अतः परिमेय संख्याओं में भी ये ज्या प्रतिलोम का गुण देता है। इनमें  $\frac{-3}{4}$  का योज्य

प्रतिलोम  $\frac{3}{4}$  है तथा  $\frac{3}{4}$  का योज्य प्रतिलोम  $\frac{-3}{4}$  है।

### स्वयं करके देखिए

परिमेय संख्या	$\frac{-5}{20}$	$\frac{-8}{16}$	$\frac{4}{6}$
योज्य प्रतिलोम			

### 12.8.2 परिमेय संख्याओं का व्यवकलन (घटाना)

हम इन्हों और पूर्ण संख्याओं के व्यवकलन के बारे ने यहाँ ऊरु कर दिये हैं। यहाँ परिमेय संख्याओं के व्यवकलन की विधि लिखी गई है।

आइए हम निम्न पूर्णांक संख्या के बीच का घटान करते हैं—

$$5 - 3 = 5 + (-3) = 2$$

$$5 - (-3) = 5 + (3)$$

अतः स्पष्ट है कि लेसे पूर्णांक संख्या का घटान ला तत्कां सस्त योज्य प्रतिलोम को जोड़ना है।

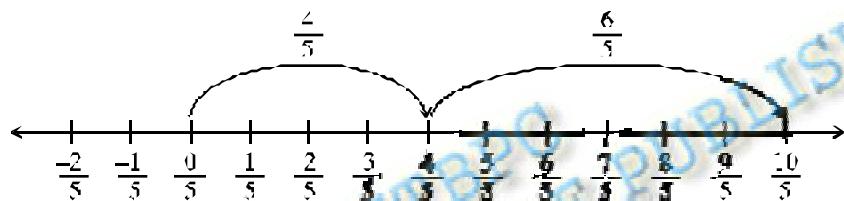
आद्य परिमेय संख्याओं के संबंध में विवर करते हैं –

$$\frac{4}{5} \text{ ने से } \frac{-6}{5} \text{ के घटाएँ}$$

हल :  $\frac{4}{5} - \left( \frac{-6}{5} \right)$

$$\begin{aligned} &= \frac{4}{5} + \frac{6}{5} \quad \left( \because \frac{-6}{5} \text{ का योज्य प्रतिलोम } \frac{6}{5} \right) \\ &= \frac{10}{5} \end{aligned}$$

अब हमें राश्य रेखा पर देखें –



दो प्राकृतिक संख्याएँ के बीच की दूरी  $\frac{1}{5}$  है। अब  $\frac{4}{5}$  वे  $\frac{-6}{5}$  को घटाने के अर्थ है

कि  $\frac{4}{5}$  ने  $\frac{-6}{5}$  के योज्य प्रतिलोम  $\left(\frac{6}{5}\right)$  का उठाना है। जैसा कि संख्या रेखा से लिया है –

$$\frac{4}{5} - \left( \frac{-6}{5} \right) = \frac{4}{5} + \left( \frac{6}{5} \right) = \frac{10}{5}$$

**उदाहरण-11.**  $\frac{5}{8}$  ने से  $\frac{-7}{8}$  को घटाएँ।

हल :  $\frac{5}{8} - \left( \frac{-7}{8} \right) = \frac{5}{8} + \frac{7}{8}$  (ज्योकि  $\frac{-7}{8}$  का योज्य प्रतिलोम  $\frac{7}{8}$  है)

$$\frac{5+7}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

उदाहरण-12.  $\frac{-5}{4} \text{ तथा } \frac{-3}{8}$  को जोड़ें।

हल : 4, 8 का लcm = 8

अब प्रत्यक्ष पद के द्वारा का लcm सम (8) के बराबर करते हैं।

( $\because$  परिणाम के हर को बराबर करने के बाद ही जाँच / घटय जाता है।)

$$\begin{aligned} \therefore \frac{-5}{4} - \frac{-5 \times 2}{4 \times 2} - \frac{-10}{8}, \quad \frac{-3}{8} = \frac{-3 \times 1}{8 \times 1} = \frac{-3}{8} \\ \frac{-5}{4} - \left( \frac{-3}{8} \right) = \frac{-10}{8} + \frac{3}{8} \quad (\because \frac{-3}{8} \text{ का द्वज्य ग्रन्तिलोन } \frac{3}{8} \text{ है।}) \\ -\frac{-10+3}{8} = \frac{-7}{8} \text{ Ans.} \end{aligned}$$

उदाहरण-13.  $\frac{-2}{9} - \left( \frac{-5}{18} \right) + \frac{7}{6}$

हल :  $\frac{2}{9} - \left( \frac{-5}{18} \right) + \frac{7}{6}$

$$\frac{-2}{9} + \frac{5}{18} - \frac{7}{6} \quad (\text{प्रत्येक विए के 6 के बले पद का योज्य प्रत्येक लिखकर तब किया जाता है।})$$

9, 18, 6 का लcm = 18 मिनों को 3456 में जगते हैं।

$$= \frac{-2 \times 2}{9 \times 2} - \frac{5 \times 1}{18 \times 1} + \frac{7 \times 3}{6 \times 3} = \frac{-4}{18} + \frac{5}{18} + \frac{21}{18}$$

$$= \frac{-4+5+21}{18} = \frac{-1+26}{18} = \frac{22}{18} = \frac{11}{9} = 1\frac{2}{9}$$

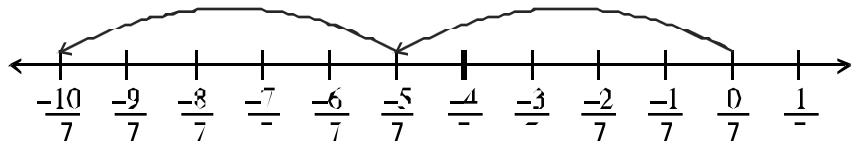
### स्वयं करके देखिए

(i)  $\frac{9}{7} - \left( \frac{-5}{12} \right) \quad$  (ii)  $\frac{5}{18} - \left( \frac{-7}{24} \right)$

### 12.3. परिणाम संख्याओं का गुणन (Multiplication of Rational Numbers):

हमने उद्याय 2 में भिन्न संख्याओं का गुणन सीखा था।

आइए, वरिष्ठ संख्या  $\frac{-5}{7}$  और 2 के गुणनफल यही  $\left( \frac{-5}{7} \times 2 \right)$  पर विचार करें।



$$\frac{-5}{7} \times 2 \text{ का मूल्य है } \frac{-5}{7} \text{ से बार अर्थात् } \left( \frac{-5}{7} \right) - \left( \frac{-5}{7} \right) = \frac{-5}{7} - \frac{5}{7}$$

अतः  $\frac{-5}{7}$  पर खड़े होकर लौट और  $\frac{5}{7}$  चलना अर्थात्  $\frac{-10}{7}$

$$\text{आदूए हाँ दूसरी प्रकार से ज्ञात करें :- } \frac{-5}{7} \times 2 = \frac{-5 \times 2}{7} = \frac{-10}{7}$$

इस प्रकार हाँ उसी परिणय तत्व पर पड़ते हैं। अतः हाँ देखते हैं कि इस परिणय संख्या को एक इनालक गूणांक ज गुण करना गर अंश को गूणांक से गुजार कर देते हैं तथा इस को घटाए रखते हैं।

$$\text{मिन को देखें :- } \frac{-5}{8} \times -3 = \frac{-5 \times -3}{8} = \frac{15}{8}$$

इस इस प्रकार भी इन लिया जा सकता है।

$$\frac{-5}{8} \times \frac{-3}{1} \quad (\text{यही } -3 = \frac{-3}{1} \text{ लिया जा सकता है})$$

$$\frac{-5 \times -3}{8 \times 1} = \frac{15}{8}$$

$$\text{इसी प्रकार } \frac{-8}{7} \times -4 = \frac{-8}{7} \times \frac{-4}{1} = \frac{-8 \times -4}{7 \times 1} = \frac{32}{7} \text{ है।}$$

अतः उपर्युक्त ऐकान्तों के अन्दर पर इन ज्ञात करते हैं कि  $\frac{-11}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{-11 \times 3}{5 \times 4} = \frac{-33}{20}$

है।

$$\text{मिन को देखें :- } \frac{-2}{5} \times \frac{3}{10} \times \frac{-3}{4} = \frac{-2 \times 3 \times -3}{5 \times 10 \times 4} = \frac{18}{200} = \frac{9}{100}$$

### कार्यविधि—

1. परिसेय संख्याओं के संतुलन का नुमा नमूद है।
2. परिसेय संख्याओं के हरों का गुण करते हैं।
3. अभीष्ट नुमानम्  $\frac{\text{अंशों का नुमानम्}}{\text{हरों का गुणनफल}}$

### रवयं कीजिए

गिमालिंगित का नुमानफल ज्ञात करें।

$$(i) \frac{-11}{7} \times 4 \quad (ii) \frac{-1}{5} \times \frac{-8}{11}$$

### 12.8.4 परिसेय संख्याओं का भाग

उम्मे भेना संख्याओं का व्युत्कर्ष के बारे में देखा है।  $\frac{5}{4}$  का व्युत्कर्ष क्या है? यह  $\frac{4}{5}$  है। यह अवधारपा परिसेय संच्चातं का व्युत्कर्मों के लिए भी लान् है। इस प्रकार  $\frac{-5}{4}$  का व्युत्कर्म  $\frac{4}{-5}$  या  $\frac{-4}{5}$  हाना तथा  $\frac{-8}{9}$  का व्युत्कर्म  $\frac{-9}{8}$  या  $\frac{9}{-8}$  होगा।

आइए निम्नलिखित को देखें— यह जानते हैं कि  $4 \times 5 = 20$

इसे दो पारीके रे भाग के सम्बन्ध में लिखा जा सकता है :—  $20 : 4 = 5$  या  $20 \div 5 = 4$

$$\begin{aligned} & \rightarrow \frac{20}{4} = 5 & \left| \begin{array}{c} \frac{20}{5} = 4 \\ 20 \times \frac{1}{5} = 4 \end{array} \right. \\ & \Rightarrow 20 \times \frac{1}{4} = 5 \end{aligned}$$

स्पष्टतर फ्रेशनों से निष्ठा निकलता है कि भाज्य नं भाजक से भाग करते हैं तो भागक से ग्राहक होते हैं तथा भाज्य में भाजक के व्युत्कर्म से नुपा करते हैं तो भाजक के ही व्युत्कर्म संख्या प्राप्त होता है। इतः स्पष्ट होता है कि भाग की क्रिया नुपा के लिए विदला दी जाती है।

$$\text{आइए इसे देखें} - \frac{-25}{14} : \frac{7}{5} = \frac{-25}{14} \times \frac{5}{7} \quad (\because \frac{7}{5} \text{ का व्युत्कर्म } \frac{5}{7} \text{ है})$$

$$= \frac{-125}{98} \text{ Ans.}$$

निन्न पर विवार करें—

$$(i) \frac{-5}{4} : \frac{-5}{4} = \frac{-5}{4} \times \frac{4}{-5} = \frac{-20}{-20} = 1$$

उत्तर: एक अर्थ उद्दहरण सतत है—

$$(ii) \frac{-20}{8} : \frac{-20}{8} = \frac{-20}{8} \times \frac{8}{-20} = 1$$

अतः उपर्युक्त उद्दहरणों से स्पष्ट होता है कि किसी परिनय संख्या में उसे परिमेय संख्या से भाग करते हैं तो नगण्य उद्देश्य प्रप्त होता है अथवा किसी संख्या का उसके भूक्ता रो मूलनकल भी राहें। तोहा है।

निन्न को देखें और इसके लिए—

$$\frac{-15}{8} : \frac{4}{7} : \frac{-2}{5} \quad (iii), \quad \frac{-15}{8} \times \frac{7}{4} \times \frac{-5}{2} = \frac{-15 \times 7 \times -5}{8 \times 4 \times 2} = \frac{525}{64}$$

### स्वयं करके देखिए

शा. १ कीजिए—

$$(i) \frac{-11}{7} \times 4 \quad (ii) \frac{-4}{5} \times \frac{-8}{11}$$

## प्रश्नावली—12.2

### 1. नीचे दी गई परिमेय संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए—

$$(i) \frac{15}{4} + \frac{5}{4}$$

$$(ii) \frac{13}{5} + \left( \frac{-2}{5} \right)$$

$$(iii) \frac{-8}{15} - \frac{-16}{30}$$

$$(iv) \frac{-3}{2} + \left( \frac{-3}{4} \right)$$

$$(v) \frac{-8}{19} + \frac{3}{76}$$

$$(vi) \frac{5}{4} - \left( \frac{-3}{8} \right) - \frac{5}{6}$$

$$(vii) \frac{-8}{-2} + 0$$

$$(viii) -2\frac{1}{2} + \left( -3\frac{1}{2} \right)$$

### 2. ज्ञात करें—

$$(i) \frac{5}{2} - \frac{7}{4}$$

$$(ii) \frac{5}{8} - \left( \frac{-4}{5} \right)$$

$$(iii) \frac{-12}{13} - \frac{5}{26}$$

$$(iv) \frac{-8}{3} - \frac{7}{6}$$

$$(v) -2\frac{1}{2} - 4$$

$$(vi) 5 - \frac{1}{2} - \left( \frac{-3}{4} \right)$$

### 3. गुणनफल ज्ञात कीजिए—

(i)  $\frac{12}{17} \times 5$

(ii)  $\frac{8}{7} \times -2$

(iii)  $\frac{-5}{4} \times \frac{7}{3}$

(iv)  $\frac{-25}{16} \times \frac{2}{3}$

(v)  $\frac{-4}{5} \times \frac{-3}{5}$

(vi)  $\frac{-15}{18} \times \frac{5}{6} \times \frac{21}{5}$

### 4. निम्नलिखित का भान ज्ञात करें—

(i)  $\frac{-5}{4} : 2$

(ii)  $\frac{-12}{9} \div \left( \frac{-2}{6} \right)$

(iii)  $\frac{19}{21} \div \left( \frac{-3}{38} \right)$

(iv)  $-5 : \left( \frac{-25}{7} \right)$

(v)  $\frac{-27}{5} : \left( \frac{-54}{10} \right)$

(vi)  $\frac{-1}{2} : \frac{2}{3}$

(vii)  $\frac{-5}{4} \div \frac{15}{8} \div \frac{7}{16}$

(viii)  $\frac{5}{16} \div \frac{-20}{32} + \frac{4}{13} + \frac{1}{2}$

## 12.9 परिमेय संख्याओं का दशमलव निरूपण

### 12.9.1 रांगा दशमलव

हमना ज्ञाना कि  $\frac{p}{q}$  लक्षण की संख्याएँ जहाँ  $q \neq 0$  एवं  $p, q$  पूर्णांक हैं, परिमेय संख्याएँ

फूहलाती हैं।  $\frac{p}{q}$  का अर्थ है कि  $q$  का  $p$  के बराबर अभिपूर्ण  $\frac{p}{q}$  कह संख्या है जो  $p$  के  $q$  से विभाजित करने पर प्राप्त होती है।

अब  $\frac{5}{8}$  परिमेय संख्या का अर्थ है 5 के छवें भाग, यह 5 के 8 से विभाजित करने पर प्राप्त होती है—

अतएव  $\frac{5}{8} = 0.625$

$$\begin{array}{r} 0.625 \\ 8 \overline{) 50} \\ 48 \\ \hline 20 \\ 16 \\ \hline 40 \\ 40 \\ \hline 0 \end{array}$$

आइए, एक और उदाहरण लेते हैं—

$$\begin{array}{r} 2.25 \\ \hline 4) 09 \\ 08 \\ \hline 10 \\ 08 \\ \hline 20 \\ 20 \\ \hline 00 \end{array}$$

अतः उनके उदाहरण को समझ लेता है कि परिमेय संख्या  $\frac{5}{8}$  और  $\frac{9}{4}$  को प्रकार 0.625 और 2.25 के रूप में निरूपित किया जा सकता है, जिसे दशमलव निरूपण कहते हैं।

### Ques: adjdsnf[k]

निम्नलिखित परिमेय संख्याएँ को दशमलव में निरूपित करें—

- (i)  $\frac{5}{6}$
- (ii)  $\frac{19}{4}$
- (iii)  $\frac{20}{3}$
- (iv)  $\frac{15}{8}$
- (v)  $\frac{16}{9}$

#### 12.9.2 असांत दशमलव

इन उदाहरणों पर गौरव करें।

$\frac{16}{3}$  और  $\frac{17}{4}$  को दशमलव में निरूपित करते हैं।

$\begin{array}{r} 5.333... \\ \hline 3) 16 \\ -15 \\ \hline 10 \\ -06 \\ \hline 10 \\ -09 \\ \hline 10 \\ \times 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 4.25 \\ \hline 4) 17 \\ -16 \\ \hline 10 \\ -08 \\ \hline 20 \\ -20 \\ \hline 00 \end{array}$
---	---

उपर्युक्त उदाहरण लो दख्ता से पता चलता है कि परिमिय संख्या  $\frac{16}{3}$  का दशमलव

सर्व शिक्षा : 2013-14 (निःशुल्क)

निरूपण 5.333... होता है, किर ये 6 पूरी तरह 3 से विभाजित नहीं हो पता है। इसे उन्नत तक पढ़ें देखें तो यो गाम की क्रिया पूरी नहीं होती है। अतः इस उकार के दशमलव निरूपण को असांत दशगलव कहते हैं।

परियोग रखा  $\frac{17}{4}$  का दशमलव निरूपण 4.25 है। जो युक्त है परन्तु यानि की क्रिया पूरी हो जाती है। इसे उन्नत दशमलव कहते हैं।

### Lo; adjdsnf[k,

निम्नलिखित में से असांत निरूपण वाली परिमेय संख्या छाँटिएँ :

- (i)  $\frac{1}{6}$
- (ii)  $\frac{24}{9}$
- (iii)  $\frac{31}{11}$
- (iv)  $\frac{31}{4}$
- (v)  $\frac{5}{8}$

### 12.9.3 असांत आवर्ती दशमलव का निरूपण—

$$(i) \quad \begin{array}{r} 1 \\ 7 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0.14285714\dots \\ -7 \\ \hline 30 \\ -20 \\ \hline 28 \\ -20 \\ \hline 14 \\ -10 \\ \hline 4 \\ -4 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$(ii) \quad \begin{array}{r} 2 \\ 9 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0.222\dots \\ -18 \\ \hline 20 \\ -18 \\ \hline 2 \\ -2 \\ \hline 0 \end{array}$$

अतः  $\frac{2}{9} = 0.222\dots$  उसांत दरमलव है।

अतः  $\frac{1}{7} = 0.14285714\dots$  उसांत दरमलव है।

उपर्युक्त उदाहरणों ले देखने से पता चलता है कि दशनलय के बाद का अंक या अंक

रामूँह पे लुराय जा रहा है वह किया अनंत तक बलती है। इनमें भाग की छोटी कभी नहीं होती है। दूसे एक या एक से अधिक टंकों के रामूँह के मुन्ह वृति बास-बार होती है इसलिए इन्हें असंत आवर्ती दशालव संख्याएँ भी कहते हैं।

दशमलव के बाद यदि संख्याएँ के अंक दोहराए जाते हैं तब जो अंक दोहराये जाते हैं उनके ऊपर “-” या (.) का चिह्न लगा देते हैं। ऐसे—

$$\frac{1}{7} = 0.14285714\dots = 0.\overline{142857} \quad \text{या} \quad 0.1\overline{42857}$$

$$\frac{2}{9} = 0.222\dots = 0.\overline{2}$$

### Lo; adjdsnf[k,

निन का असांत आवर्ती दशालव को संकेतिक रूप में लिखें—

$$(i) \quad \frac{2}{11} = 0.1818\dots$$

$$(ii) \quad \frac{1}{6} = 0.1\overline{666\dots}$$

$$(iii) \quad \frac{7}{13} = 0.5384615\dots$$

### 12.94 निम्नलिखित उदाहरणों को अकाल से देखें

$\frac{5}{8}, \frac{24}{25}, \frac{3}{10}, \frac{9}{4}, \frac{17}{4}$  इनका दशमलव निरूपण सांत है।

$\frac{16}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{2}{11}, \frac{7}{13}, \frac{1}{15}$  इनका दशमलव निरूपण असांत है।

(इन परिशेष संख्याओं का हल ऊनर के उदाहरणों में लिखा है।)

गिन सांत भिन्न के द्वारों के अन्त्य गुणाखाल दखें—

उपरावत सांत दशालव निरूपण के भिन्नों के हरों ला अभज्य गुण छग्ड हैं—

$$8 = 2 \times 2 \times 2$$

$$25 = 5 \times 5$$

$$10 = 2 \times 5$$

$$4 = 2 \times 2$$

इन दोनों के ज्ञानी अन्तर्ज्य तुग्गखण्ड का तो 5 या 2 का दोनों हैं।

क्या लोहे ऐरी रात दशमलव रांझा आप सोबत राकरो हैं तेहर की परिमेय रांझा (र रल्यू रूप) के हर में 2 या 5 के अलाना और कोई गुणनखंड है?

उपर्युक्त उदाहरणों ने सात दशनलव के परिमेय रांझाओं के हरां के अभाज्य गुणनखंडों को देखने से पता चलता है कि इनके अभाज्य गुणनखंड नं 2 या 5 या दोनों हैं।

पुनः उपर्युक्त उदाहरण में उत्तम दशनलव के परिमेय संख्याओं के हरां के अन्तर्ज्य गुणनखंड हैं—

$$3 = 3 \times 1$$

$$7 = 7 \times 1$$

$$6 = 2 \times 3$$

$$11 = 1 \times 11$$

$$13 = 1 \times 13$$

$$15 = 3 \times 5$$

इनके अभाज्य गुणनखंड में 2 या 5 के अतिरिक्त अन्य अभाज्य गुणनखंड भी हैं।

अतः स्पष्ट है कि जिन परिमेय संख्याओं के हरां के अभाज्य तुग्गखंडों ने सिर्फ 2 या 5 या दोनों हो तो उस परिमेय संख्या का दशमलव निरूपण संत दशनलव निरूपण होता है। तथा जिन परिमेय रांझाओं के हरां के अभाज्य गुणनखंडों में 2 वा 5 के अलांसेहा अन्य अन्तर्ज्य रांझाएं भी हैं तो उस परिमेय रांझे का दशमलव निरूपण अरांत दशमलव निरूपण होता है।

### संख्या करके देखिए

निम्न में जिन वरिन्दर संख्याओं जो दशमलव निरूपण संत हैं उनके किन परिमेय संख्याओं जो असंत हैं।

(इनके अभाज्य गुणनखंड के आधार पर छाँटाएं)

- (i)  $\frac{16}{125}$
- (ii)  $\frac{1}{15}$
- (iii)  $\frac{5}{18}$
- (iv)  $\frac{11}{8}$
- (v)  $\frac{4}{9}$

$\frac{-5}{4}$  को दशमलव में निरूपित करें।

$\frac{-5}{4}$  का दशमलव निरूपण के लिए एहते  $\frac{5}{4}$  का दशमलव निरूपण करते हैं।

$$\begin{array}{r} 1.25 \\ 4) \overline{5} \\ \underline{-4} \\ 10 \\ \underline{-8} \\ 20 \\ \underline{-20} \\ \times \times \end{array} \quad \text{या, } \frac{5}{4} = 1.25 \\ \text{अतः } \frac{-5}{4} = -1.25$$

इसी प्रकार अन्य त्रिमात्रक संख्याओं का दशमलव निरूपण करते हैं।

आइए निम्न उदाहरणों को देखें—

$$0.24 = \frac{0.24 \times 100}{100} = \frac{24}{100} = \frac{6}{25}$$

$$2.235 = \frac{2.235 \times 1000}{1000} = \frac{2235}{1000} = \frac{447}{200}$$

$$2.4 = \frac{2.4 \times 10}{10} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$$

$$4.625 = \frac{4.625 \times 1000}{1000} = \frac{4625}{1000} = \frac{37}{8}$$

उपर्युक्त उदाहरणों से यह स्पष्ट है कि यदि दशमलव संख्याओं के परिमेय संख्या में परिवर्तित करने के लिए संख्या के डर में 1 के बाद इसने शून्य लिखे हैं तो वह ने दशमलव के बाद संख्या एं हैं जो कि रो दशमलव है। देखें परिमेय संख्याएं प्राप्त हो जाएँगी। तो—

$$5.426 = \frac{5426}{1000}$$

$$5.24 = \frac{524}{100}$$

### रवर्य कीजिए

नीचे दी गई दशमलव संख्याओं को परिमेय संख्याओं में बदलिए—

- (i) 2.18    (ii) 7.326    (iii) 8.35    (iv) 0.2548

आइए निम्न उदाहरण को देखें—

**उदाहरण—14.**  $0.\overline{4}$  का परिनिय संख्या के रूप में लिखें।

**हल :** न ना  $x = 0.\overline{4}$

$$\text{या } x = 0.444\ldots \quad (\text{i})$$

दोनों पक्षों में 10 से गुणा करने पर

$$10x = 4.\overline{44} \quad (\text{ii})$$

समीकरण (ii) से समीकरण (i) का घटने पर

$$10x = 4.444$$

$$\begin{array}{r} x = 0.444 \\ \hline 9x = 4 \end{array}$$

$$\therefore x = \frac{4}{9}$$

$$\text{अतः } 0.\overline{4} = \frac{4}{9}$$

**उदाहरण—15.**  $0.\overline{345}$  का परिनिय संख्या के रूप में लिखें।

**हल :** न ना  $\Rightarrow x = 0.\overline{345}$

$$\text{या, } x = 0.345345345\ldots \quad (\text{i})$$

दोनों पक्षों में 1000 से गुणा करने पर

$$1000x = 345.345345345\ldots \quad (\text{ii})$$

समीकरण (ii) में दोनों पक्षों (i) के बराबर हैं

$$1000x = 345.345345345\ldots$$

$$\begin{array}{r} x = 0.345345345\ldots \\ \hline 999x = 345 \end{array}$$

**कार्य विधि—** उपर्युक्त उदाहरणों को हल करने के लिए निम्न टिप्पी अपनाएं।

- (a) दो गई दशा वल संख्या को  $x$  के विवर मना
- (b) दशमलव के बाद जिस अंक की पुनरावृत्ति हो जाए है, उसे दो या तीन तार लिखें हैं। इसे सार्वकरण (i) कहते हैं।
- (c) पुनरावृत्ति वाले अंकों (आवर्तिलों) को गिनकर 1 के बाद लितने

$$\therefore x = \frac{345}{999}$$

$$\text{अतः } 0.\overline{345} = \frac{345}{999} = \frac{115}{333}$$

हे छून्हा लालकर दोनों पद्धति में गुणा करते ही तथा इसे समीकरण (ii) लिखते हैं।

(i) समीकरण (ii) ने से समीकरण  
(i) को घटाकर  $x$  का मान बताया जाता है।

~~इस~~ असांत आवर्ति दशमलव का सन्निकट परिमेय प्राप्त होता है।

निम्न सदाहरणों को देखें—

**उदाहरण—16.**  $4.3\overline{25}$  के परिमेय संख्या में परिवर्तन करें—

हल : न.ना  $\Rightarrow x = 4.3\overline{25}$

$$\text{या } x = 4.32555\dots \text{ (i)}$$

दोनों पद्धति में 100 से गुणा करने पर (1 के बाद उत्तरांश शून्य देते हैं जिसना दशनलब के बाद उनाहार्थीक है और उसे जो दोनों पद्धति में गुणा करते हैं)

$$100x = 432.555\dots \text{ (ii)}$$

पुनः समीकरण (i) में 1000 से गुणा करने पर

$$1000x = 4325.555\dots \text{ (iii)}$$

समीकरण (ii) में से समीकरण (iii) को घटाने पर

$$\begin{array}{r} 1000x = 4325.555 \\ 100x = 432.555 \\ \hline 900x = 4325 - 432 \end{array}$$

$$x = \frac{4325 - 432}{900}$$

$$\text{अतः } 4.3\overline{25} = \frac{4325 - 432}{900} = \frac{3893}{900}$$

**उदाहरण—17.**  $0.1\overline{523}$  का परिमेय संख्या में परिवर्तित करें।

हल : न.ना  $\Rightarrow x = 0.1\overline{523}$

या  $x = 0.15232323\dots$  (i)

दोनों पक्षों ने 100 से गुणा कर

$100x = 15.232323\dots$  (ii)

पुनः 2 गीजरप (i) में 10000 से गुणा करने पर

$10000x = 1523.232323\dots$  (iii)

सनीकरण (iii) में से सामीकरण (ii) के छोड़ने पर

$$10000x = 1523.232323$$

$$\frac{100x}{9900} = \frac{15.232323}{9900}$$

$$9900x = 1523 - 15$$

$$x = \frac{1523 - 15}{9900} = \frac{1508}{9900} = \frac{377}{2475}$$

$$\text{अतः } 0.1\overline{523} = \frac{1523 - 15}{9900} = \frac{377}{2475}$$

### कार्यविधि-

1. सबसे पहले दी दी दशमलव आवृत्तक संख्या के  $x$  का ना।
2. दशमलव के बाद अवृत्तक को दो चा तीन भाग लिखे हैं। इसे समीकरण (i) मानते हैं।
3. दशमलव के बाद आए अनावृत्त को गिनकर उतना इन्ह 1 (एक) कर डालकर समीकरण (i) के दोनों पक्षों में गुणा कर लिखते हैं, इस सनीकरण (ii) मानते हैं।
4. पुनः दशमलव के 6 दो आए छुल अंकों {आवृत्त के छोड़ अनावृत्त} को गिनकर उतना 1 (एक) कर डालकर समीकरण (i) के दोनों पक्षों में गुणा कर लिखते हैं। इस समीकरण (iii) नामते हैं।
5. अपरिवाप्त सनीकरण (iii) में से 2 गीजरप (ii) को घटा कर  $x$  का मान ज्ञात करते हैं।

लपटुंगत उदाहरणों से स्पष्ट होता है कि आवृत्तक वल दशमलव संख्या का संक्षेप में अध्यक शीघ्र परिवर्तन संख्या में परिणत छलों के लिए दी गयी आवृत्तक दशमलव संख्या को बिना आवृत्तक छिप के रूप में दशलव के उत्तरांख्या को लिखते हैं, फिर उसाने से पूर्णक और अनावृत्त को रे बनी राखता को घटाकर उसके बदूद में जिसना आवृत्तक है उतना उ और दशमलव के दोहिने तराव जितना अनावृत्तक है उतना 0 (शून्य) लिखत है।

$$\text{तो } 4.32\overline{56} = \frac{43256 - 432}{9900} = \frac{42824}{9900}$$

$$5.4\bar{2} = \frac{542 - 54}{90} = \frac{488}{90}$$

### रवयं कौनिए

निम्नलिखित को परिमेय संख्याओं में रूपीकृत करें।

- (i)  $4.3\bar{8}\bar{6}$       (ii)  $0.3\overline{256}$       (iii)  $5.84\overline{65}$

इन्हें पहले विस्तार से परिमेय संख्या नं बदलें तिर संखेप टिक्की से परिगण्य संख्या नं बदलें।

### प्रश्नावली—12.3

1. निम्नलिखित को दशमलव में बदलिए।

- (i)  $\frac{5}{4}$       (ii)  $\frac{8}{7}$       (iii)  $\frac{15}{16}$       (iv)  $\frac{25}{24}$

2. निम्नलिखित दशमलव संख्या को परिमेय संख्या में बदलें।

- (i)  $4.32$       (ii)  $12.\overline{32}$       (iii)  $5.486$       (iv)  $2.8\bar{4}2$

3. निम्न को दशमलव में बदलें।

- (i)  $\frac{-5}{8}$       (ii)  $\frac{-25}{16}$

4. निम्न भिन्न संख्याओं को दशमलव में बदले जिन बताइए कि कौन—कौन सांत दशमलव है और कौन—कौन असांत दशमलव है।

- (i)  $\frac{5}{3}$       (ii)  $\frac{7}{6}$       (iii)  $\frac{8}{5}$       (iv)  $\frac{17}{24}$       (v)  $\frac{15}{8}$

5. निम्नलिखित को परिमेय संख्या के रूप में विस्तार से लिखिये—

- (i)  $4.\overline{32}$       (ii)  $5.3\overline{456}$       (iii)  $8.2\bar{4}$       (iv)  $0.\bar{2}$

**6. निम्न को परिमेय संख्या के रूप में संकेत में लिखें—**

- (i)  $5.1\bar{3}\bar{6}$     (ii)  $12.\overline{325}$     (iii)  $9.3\bar{8}\overline{65}$     (iv)  $0.\overline{325}$

**7. निम्न असांत दशमलव संख्या को संकेत में लिखें।**

- (i)  $1.3151515\dots$     (ii)  $82.325555\dots$   
 (iii)  $0.2543543543\dots$     (iv)  $2.32145145145\dots$

### हमारे रीति

- प्रैरिया राज्य के जिसे  $\frac{p}{q}$  के रूप में व्यक्त की जा सके, जहाँ  $p$  और  $q$  पूर्णांक हैं तथा  $q \neq 0$  है, परिमेय राश्या कहलाती है। जैसे :  $\frac{-7}{9}, \frac{3}{4}, \frac{5}{2}, \sqrt{4}$  इत्यादि परिमेय राश्य हैं।
- राष्ट्रीय भाकृत राश्याएँ, राष्ट्रीय पूर्ण संख्या, सभी पूर्णांक राश्याएँ और राष्ट्रीय निम्न राश्य हैं।
- सभी परिमेय संख्याएँ निम्न संख्याएँ नहीं हैं।
- किसी भी परिमेय संख्या में कठोर की संख्या को अंश तथा नीचे की संख्या को हर कहते हैं। जैसे  $\frac{-5}{8}$  में अंश  $-5$ , हर  $-8$  है।
- यदि परिमेय संख्या का अंश और हर दोनों धनात्मक पूर्णांक हो अथवा दोनों अधारात्मक पूर्णांक हो, तो वह परिमेय संख्या, धनात्मक परिमेय संख्या कहलाती है। जैसे—  $\frac{5}{4}, \frac{-4}{-9}$  आदि।
- यदि परिमेय संख्या का अंश और हर दोनों में एक कोई एक अधारात्मक पूर्णांक हो तो वह परिमेय संख्या, अधारात्मक परिमेय राश्य कहलाती है। जैसे—  $\frac{-12}{5}, \frac{7}{-4}$  आदि।

7. यदि किसी परिमेय संख्या के अंश और हर को एक इन्वर्टर पूर्वक से गुण किए जाय या भाग देना जाए तो फिर एक परिमेय संख्या प्राप्त होती है, जो वी तुझे परिमेय संख्या के युल्य समतुल्य परिमेय संख्या कही जाती है। जैसे :  $\frac{-9}{5} = \frac{-9 \times 2}{5 \times 2} = \frac{-18}{10}$  है। उत्तर कहते हैं कि  $\frac{-18}{10}$  संख्या  $\frac{-9}{5}$  का एक समतुल्य परिमेय संख्या है। साथ ही,  $\frac{-18}{10} = \frac{-18 \div 2}{10 \div 2} = \frac{-9}{5}$  है, तो  $\frac{-9}{5}$  संख्या  $\frac{-18}{10}$  का लम्बतुल्य परिमेय संख्या है।
8. संख्या 0 न हो धनात्मक परिमेय है और न ही एक ऋणात्मक परिमेय संख्या है।
9. एक परिमेय संख्या को अपने मानक रूप (समन्वय रूप) & Standard form में दर्शाया जाता है, जब उत्तक हर भनात्मक गूणीक होता अंश और हर में कोई सार्वगुणनखंड न हो। जैसे :  $\frac{-5}{4}, \frac{2}{7}$  इनके मानक रूप में हैं।
10. दो परिमेय संख्याओं के बीच असमिकाय परिमेय संख्याएँ दी जाती हैं।
11. दो परिमेय संख्याओं के बीच की परिमेय संख्या निकालने के तरीके की सीधी।
12. सनन हर वाली दो परिमेय संख्याओं के योग इत करने के लिए उनके अंशों को जड़ा जात है तथा हर दोनों इक्कर योगफल इत किया जाता है। भिन्न-भिन्न हरों वाली दो परिमेय संख्याओं के जड़े होने के लिए पहले दोनों हरों का लब स० जाह किया जाता है और फिर दोनों परिमेय संख्याओं को लब स० जाह के बराबर रामान है वली दो समतुल्य परिमेय संख्याओं में छेदकर जोड़ लिया जाता है। जैसे :
- $$\frac{-5}{2} + \frac{6}{4} = \frac{-10}{4} + \frac{6}{4} = \frac{-10+6}{4} = \frac{-4}{4} = -1 \text{ है। इन } 2 \text{ और } 4 \text{ के लब } 80 - 4 = 4 \text{ है।}$$
13. दो परिमेय संख्याओं का व्यवकलन करने के लिए हम इताइं जानेवाली परिमेय संख्या का योज्ज्ञ प्रतिलिपि को अन्त वरिनय संख्या में जोड़ते हैं। जैसे—
- $$\frac{6}{7} - \frac{5}{14} - \frac{6}{7} - \left( \frac{-5}{14} \right) - \frac{12 + (-5)}{14} - \frac{7}{14} - \frac{1}{2} \text{ है।}$$
14. दो परिमेय संख्याओं का गुण के लिए अंशों को अंशों के साथ तथा हरों को हरों के

राशि गुणा कर अग्रीज. गुणनफल =  $\frac{\text{उंची का गुणनफल}}{\text{दूरी का गुणनफल}}$  प्राप्त होते हैं। हैरो—

$$\frac{-5}{4} \times \frac{-2}{3} = \frac{-5 \times -2}{4 \times 3} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

15. एक परिमेय संख्या को एक अन्य शून्योत्तर परिमेय संख्या से भाग देने के लिए, हम उसकी परिमेय संख्या को अन्य परिमेय संख्या के व्युत्कृश से भाग देते हैं। इस प्रकार

$$\text{से परिनिय संख्याओं वा अर्थात् भनाफल प्राप्त कर लते हैं। जैसे: } \frac{-15}{8} \div \frac{30}{24} = \frac{-15}{8} \times \frac{24}{30}$$

$$= \frac{-3}{2}.$$

16. दशमलव संख्याएँ को दशमलव में निरूपण।  
 17. दशमलव संख्या के परिमेय संख्या में निरूपण।  
 18. रासां दशमलव एवं अरासां दशमलव की जानकारी।  
 19. असांत आवर्ती दशमलव संख्या को सांकेतिक आवर्ती निरूपण उसे— 4.23545454... को सांकेतिक रूप तं 2.2354 किए जाता है।  
 20. जित परिमेय संख्या के हरी का दशमलव गुणनखंड सिकं 2 या 5 हो त उस परिमेय संख्या का दशमलव निरूपण सांत दशमलव निरूपण होता है।  
 21. जित परिमेय संख्या के हरी का अभाय गुणनखंड 2 या 5 के अतिरिक्त अन्य अभाय संख्याएँ भी हैं त उस परिमेय संख्या का दशमलव निरूपण करांत दशमलव निरूपण होता है।  
 22. ब्रह्मात्मक परिनेट संख्या का दशमलव निरूपण।  
 23. असांत आवर्ती दशमलव (Recurring Decimal number) को परिनेट संख्या में निरूपण (विशुद्ध रूप से तथा संशोध रूप से)।

## गोल

## अध्याय-13

# ज्यामितीय आकृतियों की एचना

### मूलिका

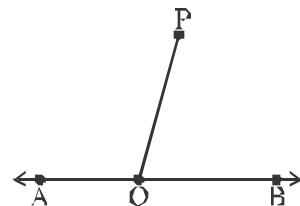
अब तक आप ट्रिभिन् ड कूपीयों एवं आकारों से परेवेत हुए हैं। कुछ आकृतियों को रचना जिनमें ऐलखंड खींचना तथा उन्हें सगड़ियों लिपि करना, लगवट् रेखा खींचना, कोण बनाना, कण समद्विभागित करना तथा वृत्त उन्दि की रचना करना आप सीख चुके हैं। इस अध्ययन में हम एक रेखा के समान्तर रेखा छींचने एवं बिभिन्न त्रिभुजों की रचना प्रकार एवं स्केल ले सकता है।

**13.1** दी गई रेखा के बहु स्थिति किसी बिन्दु से उस रेखा के समान्तर दूसरी रेखा खींचना।

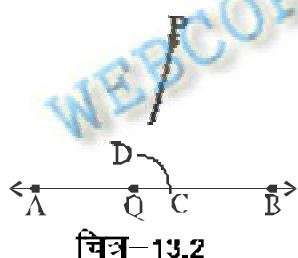
$\overleftrightarrow{AB}$  एक सरल रेखा है। इस सरल रेखा  $\overleftrightarrow{AB}$  से बाहर स्थित एक बिन्दु P दिया गया है। अब इसी P बिन्दु से गुजरती  $\overleftrightarrow{AB}$  के समान्तर एक सरल रेखा खींचनी है।

रचना के वरण—

वरण-1 : ऐलखंड  $\overleftrightarrow{AB}$  पर चोर्ड बिन्दु Q दृष्टि रखा।  
इसे P बिन्दु से खींचा।

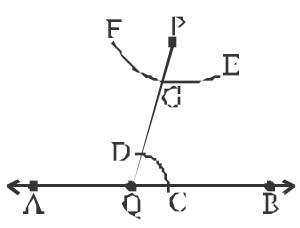


चित्र-13.1



चित्र-13.2

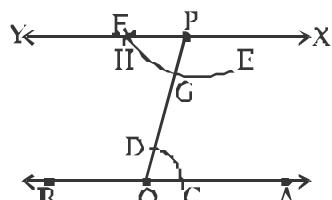
वरण-2 : बिन्दु Q को केन्द्र नियक  
लिरी गी त्रिज्या का चाप खींचें।  
यह चाप रेखा  $\overleftrightarrow{AB}$  का जहाँ काटता  
है उसे C तथा  $\overleftrightarrow{PQ}$  को जहाँ काट  
उसे D ना दृष्टि रखें।



चित्र-13.3

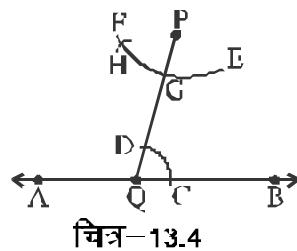
वरण-3 : अब P बिन्दु को केन्द्र मानते हुए उसी त्रिज्या का एक वाप EF खींचें। यह वाप  $\overleftrightarrow{PQ}$  को ऐसा बिन्दु पर काटता है जहाँ G नग दृष्टि।

**वरण-४ :**  $CD \parallel XY$  की लम्बाई के बहुत रुप वापि G बिन्दु को केन्द्र न हो (स्फीक्सर छाया में) खोचिए जो EF रेखा को जिस बिन्दु पर छाटे उसे H नम दीजिए।



चित्र-13.5

**चरण-५ :** इब पर H जो छेत्र द्वारा एक रखा  $XY$  खोचिए। (धेत्र-13.5) दें।  $\angle PQA = \angle QPY$  जो अंतःएकांतर कोण है तथा हाँ जानते हैं कि जब अंतःएकांतर बनाए गये बनाए गये होते हैं तो रेखाएँ समान्तर होती हैं, अतः  $AB \parallel XY$



चित्र-13.4

### कृष्ण करें

1. धेत्र-13.5 में P बिन्दु से गुजरने वाली कुछ और रेखाओं के लिये। अतः रेखा  $XY$  के अंतिरेख आपने क्या और कोई और रेखा लियी जो  $AB$  के समान्तर है, यदि नहीं तो  $XY$  के अंतिरेख P बिन्दु से गुजरने वाली रेखाएँ रेखा  $AB$  के लिए कैसी रेखाएँ होंगी?
2. ऊपर की व्यापार में एकांतर अंतर्कोण के अलावा और कौन कौन कोण बनाकर  $AB$  के समान्तर रेखा लिये सकते हैं?

### प्रश्नावली-13.1

1. R,  $\overline{MN}$  रेखा के बाहर ऐसा एक बिन्दु है। R से गुजरती  $\overline{MN}$  के समान्तर एक दूसरी रेखा लियें।
2. प्रश्नावली-13.1 के अनुसार एक रेखा  $AB$  पर 4 सेन्टी. मीटर भुजा BC के समान्तर एक रखा खोचिए।
3. L एक रेखा लियें। इसके A बिन्दु पर m एक लम्बवर्ती रेखा लियें।  $m$  के लिये किसी B पर एक लम्बवर्ती रेखा n लियें, जो इसके बाहर ओर  $n$  रेखा L के समान्तर है यदि हाँ तो कैसे?
4. AB एक रेखा लियें। AB से 5 सेन्टी. मीटर एक लम्बवर्ती रेखा CD लियें जो AB के समान्तर हो।

## 13.2 त्रिगुज की रचना

रचना का गोलाने पढ़ा है कि त्रिभुज के कोइ दो अवधार शास्त्र होने पर समांग त्रिभुज बनाया जा सकता है। इस अनुच्छेद में हाँ उनीं प्रतिवेदनों के साथ त्रिभुज की रचना करेंगे। एहले एक बार उन्हें तुनः लड़ कर दें—

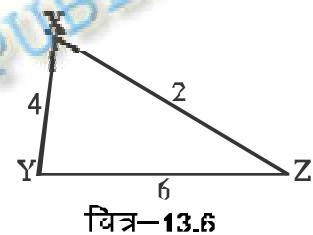
- त्रिभुज की तीनों भुजाओं की लम्बाई (SSS प्रतिवेदन)
- दो भुजाओं की लम्बाई व साक ठीक ला कर (SAS प्रतिवेदन)
- एक भुजा और उस वर बनने वाले दोनों कोण (ASA प्रतिवेदन)
- समकोण त्रिभुज में कर्ण प कोइ उच्च एक भुजा (RHS प्रतिवेदन)

उम्मे यह भी दखा दें कि इन प्रतिवेदनों के उत्तिरिक्त अन्य प्रतिवेदनों ने एक उद्वितीय रचना त्रिभुज नहीं बना सकता है। अझै इन्हें अवधारणाओं के आधार पर त्रिभुज की रचना करेंगे।

### 13.2.1 एक त्रिभुज की रचना जब तीनों भुजाओं की लम्बाईयाँ दी गई हों। (SSS प्रतिवेदन)

**उदाहरण—1.** एक त्रिभुज  $XYZ$  की रचना कीजिए जिसमें  $XY = 4$  सेमी.,  $YZ = 6$  सेमी. परं  $XZ = 7$  सेमी. दिया गया है।

**हल :** वरण—1 : वहले हाँ दी गई भागों के सापार पर एक एक आकृति खींचते हैं।



चित्र—13.6

चित्र—13.7 वरण—2 : 6 सेमी. लम्बाई का एक रेखांशु खींचें।

वरण—3 : दूसरे रेखांशु के दूसरे विन में

$X, Y$  से 4 सेमी. दूर हो अपर  $Y$

को केन्द्र नन्दा 4 सेमी. त्रिज्य ला चाप खींचिए।  $X$

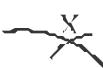
विन्दु इसी चाप लर कहीं स्थित हुगा।  $X$  विन्दु चाप

पर लहों स्थित है इसका पता लगाने हेतु अपरे चरण



चित्र—13.8

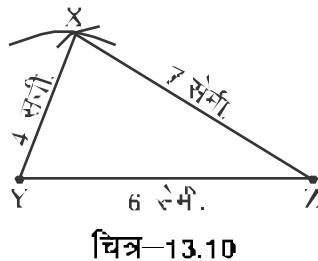
की ओर बढ़ें।



चित्र—13.9

वरण—4 :  $X$  विन्दु इसा वप पर लहो है, इसले परा करने हेतु  $Z$  को केन्द्र गानकर 7 सेमी. के चाप खींचें (किंविके विन्दु  $X$ ,

$Z$  से 7 सेमी. दूर है) जो पूर्व नं बन चाप क एक विन्दु जर प्रतिच्छेद करेगा। यही  $X$  विन्दु है।



चित्र-13.10

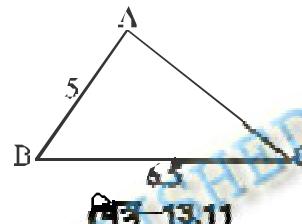
वरण-5 : अब बिन्दु X को छापाशः Y रें Z से मिलाए। यह अधीक्ष त्रिभुज XYZ है।

(SSS प्रतीक्ष के अनुरूप त्रिभुज की रचना कर्त्ता साध्य हमें यह हमेशा ज्ञान रखना होगा कि किसी त्रिभुज में दो भुजाओं की लम्बाई का योग हमेशा तीसरी भुज से ज्यदा होता है, इन्थी त्रिभुज की रचन संभव नहीं है।

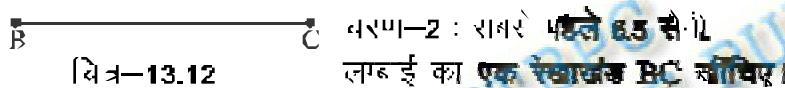
### 13.2.2 जब दो भुजाएँ एवं उनके बीच के कोण की माप ज्ञात हो (SAS प्रतीक्ष)

**उदाहरण-2.** एक त्रिभुज ABC की रचना करें जब AB = 5 सेमी, BC = 6.5 सेमी, तथा  $\angle B = 75^\circ$  दिया है।

**हल :** चरण-1 : सर्वग्रन्थ एक रेख बनाएँ।



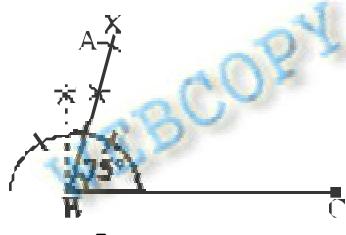
चित्र-13.11



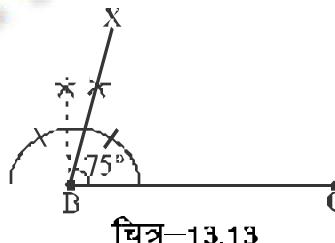
चित्र-13.12

वरण-2 : राशि 5 से 6.5 से। लाइन का एक रेखाखण्ड BC सीधा।

वरण-3 : फिर रेखाखण्ड के B बिन्दु पर  $75^\circ$  का कोण बनाते हैं। त्रिभुज का A बिन्दु कोण बनाने वाली इसी भुज BX पर स्थित होगा।



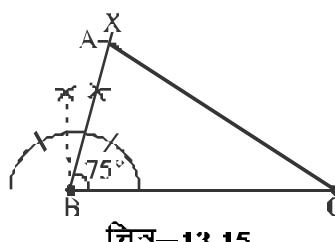
चित्र-13.14



चित्र-13.13

चरण-4 : कोण बनाने वाली इस भुज पर स्थित बिन्दु A का प्ता लगाने के लिए B को केन्द्र नान कर 6 सेमी. ला वाप लीया। ऐसे BX के जिस बिन्दु पर काटा है वही बिन्दु A है।

वरण-5 : बिन्दु A को बिन्दु C से मिलाए। इस त्रिकार अधीक्ष त्रिभुज ABC बना।



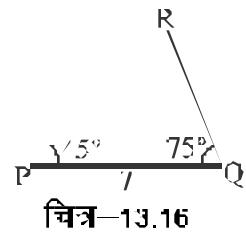
चित्र-13.15

13.2.3 त्रिभुज की रचना जब उसके दो कोण एवं उनके बीच की गुजारी पाय दी गई है। ( $\Delta S\Delta$  प्रतिक्रिया)

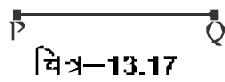
**उदाहरण-3** एक त्रिभुज PQR की रचना कीजिए जहाँ  $\overline{PQ} = 7$  सेमी,  $\angle P = 45^\circ$  तथा  $\angle Q = 75^\circ$  हो।

त्रिभुज PQR की रचना के निम्न चरण हो सकते हैं—

**चरण-1** : एक सफे चिन बनाए।



चित्र-13.16



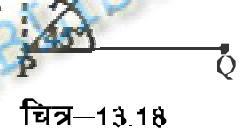
चित्र-13.17

**चरण-2** : 7 सेमी. की लम्बाई का एक रेशु लगाए।

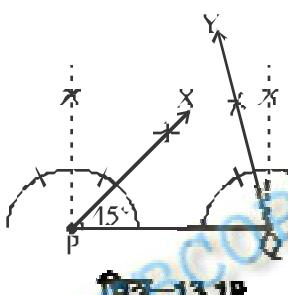
$\overline{PQ}$  लींगिय।

चित्र-13.16

**चरण-3** : रेशुखंड  $PQ$  के P बिन्दु पर  $45^\circ$  का कोण बनाइए। काग यान वाली किरण  $\overrightarrow{PX}$  पर फी बिन्दु R लगाए।

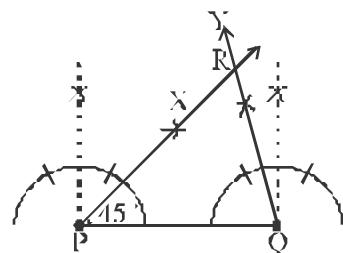


चित्र-13.18



चित्र-13.19

**चरण-4** :  $PQ$  रेशुखंड के Q बिन्दु पर  $75^\circ$  का कोण बनाइए। कोण बनावाली किरण  $\overrightarrow{QY}$  पर ही बिन्दु R लेखत होना।



चित्र-13.20

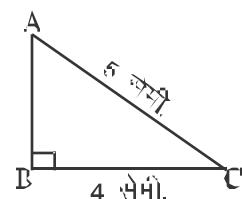
**चरण-5** : R बिन्दु कोण 6-ने वाली दोनों रेशणों पर स्थित है अर्थात् यह उनके प्रत्येक छोड़ पर स्थित है। प्रत्येक बिन्दु ग्रात्त करने के लिए  $\overrightarrow{PX}$  और  $\overrightarrow{QY}$  को आपसीकरतानुसार बढ़ाइए। उनका प्रतिच्छेद बिन्दु ही R है। इस प्रकार अन्तिम त्रिभुज PQR की रचना पूर्ण हो।

13.2.4 एक समकोण त्रिभुज की रचना जिसमें उसके कथा एवं समकोण बनाने वाली किसी एक भुजा की लाई दी हो। (RHS प्रक्रिया)

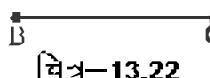
**उदाहरण-4.** एक समकोण  $\triangle ABC$  की रचना कीजिए जिसमें  $\angle B$  समकाण है तथा समकाण बनाने वाली दो भुजाओं में से एक  $BC = 4$  सेमी. तथा कथा  $AC = 5$  सेमी. है।

समकाण  $\triangle ABC$  की रचना के निम्न चरण हो सकते हैं।

चरण-1 : पहले हम देख गए गाँपों के आधार पर एक  $50^\circ$  आकृति बनाते हैं।



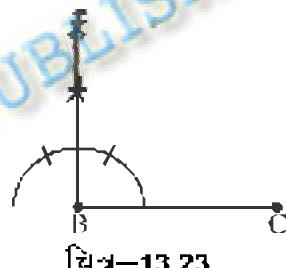
चित्र-13.21



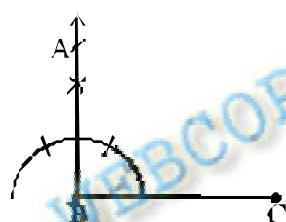
चरण-2 : 4 रोपी. का एक रेखांक BC लंबाई।

चित्र-13.22

चरण-3 : रेखांक BC के B निम्न पर  $50^\circ$  का कोण बनाइए। काग बनाने वाले इसी भुजा पर त्रिभुज का A बिन्दु स्थित होगा।

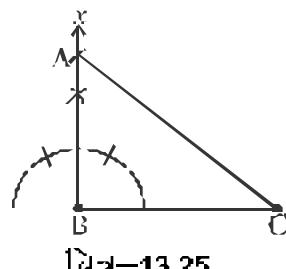


चित्र-13.23



चित्र-13.24

चरण-4 : अब C बिन्दु को केन्द्र मानकर  $\angle AC$  = 5 सेमी. का एक वाप डीविए। वृत्त के A बिन्दु इसी वाप पर कहीं स्थित होग। अर्थात् इह वाप एवं समकोण बनाने वाले रेख BX के प्रतिच्छेद बिन्दु पर होना।



चित्र-13.25

## प्रश्नावली — 13.2

1. एक विमुज  $\triangle ABC$  की रचना कीजिए जिसमें मुजा  $AB = 5$  सेमी., मुजा  $BC = 4$  सेमी. तथा मुजा  $AC = 5$  सेमी. हो।
2. एक विमुज  $\triangle ABC$  की रचना कीजिए जिसमें मुजा  $BC = CA = 5$  सेमी. तथा  $AB = 6$  सेमी. हो।
3. एक त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी तीन मुजाएँ  $5.5$  सेमी. हैं।
4. एक त्रिभुज  $PQR$  की रचना कीजिए जिसमें  $\angle R=30^\circ$  मुजा  $QR = 4$  सेमी. तथा  $RP = 5$  सेमी. हो।
5.  $\triangle ABC$  त्रिभुज की रचना कीजिए जिसमें मुजा  $AB = AC = 6$  सेमी. हो तथा  $\angle BAC=60^\circ$  हो।
6. एक त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी दो मुजाएँ ब्रह्माण्ड 7 सेमी. एवं 5 सेमी. हों तथा उनके बीच का काग  $120^\circ$  हो।
7. विमुज  $\triangle ABC$  की रचना कीजिए जिसमें  $\angle B=\angle C=40^\circ$  हो मुजा  $BC = 5$  सेमी. हो।
8. विमुज  $\triangle PQR$  की रचना कीजिए जिसमें  $\angle P=40^\circ$ ,  $\angle Q=60^\circ$  तथा मुजा  $PQ = 7$  सेमी. हो।
9. त्रिभुज  $XYZ$  की रचना कीजिए जहाँ  $\angle X=30^\circ$ ,  $\angle Y=40^\circ$  एवं मुजा  $XY = 7$  सेमी. हो।
10. विमुज  $\triangle ABC$  की रचना कीजिए जिसकी मुजा  $BC = 6$  सेमी. तथा कोण  $\angle B = 60^\circ$ ,  $\angle C=60^\circ$  हो।
11. विमुज  $\triangle DEF$  की रचना कीजिए जिसमें  $\angle D=45^\circ$ ,  $\angle E=45^\circ$  तथा  $DE = 10$  सेमी. हो।
12. एक ऐसो रगकोण विमुज की रचना कीजिए जिसका कर्ण 5 सेमी. हो तथा रगकोण मनाने वाली दो मुजाएँ गे रो एक की लंबाई 3 सेमी. हो।
13. संगलेण त्रिभुज  $\triangle PQR$  बनाये जिसमें कर्ण  $PQ = 10$  सेमी.,  $QR = 6$  सेमी.।

4. समक्षण त्रिभुज  $\triangle ABC$  की रचना कीजिए जिसमें सभी कोण हनने वाली ताओं भुजाओं की लम्बाई 6 सेमी. एवं 8 सेमी. हैं।
5. एक लम्बविवाह समक्षण त्रिभुज की रचना कीजिए जिसमें सभी भुजाओं की लम्बाई 6 सेमी. है।
6.  $\triangle ABC$  की रचना करें जिसमें  $\angle A = \angle B = \angle C$  एवं  $AB = BC = CA$  सेमी.।

## हमने सीखा

इस अध्याय में हमने शैगाना (स्केल) और परामर्श की राहायता रे द्वारा रचनाओं की गिरियों का अध्ययन किया है।

1. किसी रेखा के बाहर स्थित किसी निर्दिश रेखा रे के रूपान्तरण रेखा लंबाई के लिए सनन एकान्तर कोणों की अवधारणा का उपयोग किया है।
2. त्रिभुजों की रचना में हमने त्रिभुजों की सर्वांगसमता की संकलना का अध्ययन इन से संपर्क किया है। संकलनाएँ निम्नान्त हैं।
  - (i) **SSS** : त्रिभुज की सीन भुजाओं की लम्बाई दो हुई है।
  - (ii) **SAS** : किन्हीं दो भुजाओं को लम्बाई और इन भुजाओं वे नद्य स्थित कोण का माप दिया हुआ है।
  - (iii) **ASA** : दो कोणों की माप उनके मध्य स्थित भुज की लम्बाई दो हुई है।
  - (iv) **RHS** : समकोण त्रिभुज के कपां एवं ओष दो भुजाओं में से एक भुज की लम्बाई दो हुई है।

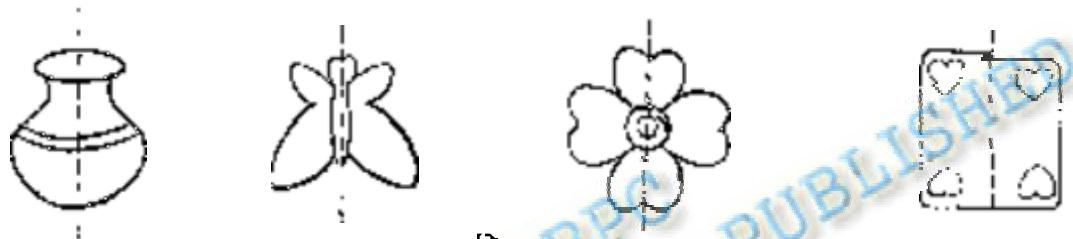
३०८

## अध्याय-14

# समसिति

### गूणिका

आपने ३ रा-८ रा हम ६हुं रासी वरपुओं को देखे हैं। इन वरपुओं में से हमें ज्यामिति दिखाई नहीं है, क्योंकि इनांक हैं = कई तारतम्यता व संतुलित अनुग्रात हम देख पाते हैं। दिखायी नहीं वाली लुँग आकृतियां को ३-४ चित्र तंख्या 14.1 में देखिए।



कित्त-14.1

इन आकृतियों को नीक गोलों गोल खींची गई रेखा के गरितः गोला उट या काना जाये तो दोनों हिस्से एक दूसरे को पूरी तरह से ढंक लेते हैं। इन आकृतियों को हम समसित आकृति कहते हैं। समसित आकृतियों तथा समसिति के बारे में निछली कक्षा में इनका जाना है। इस अध्ययन में हम वरापर्तीन समसिति द्वारा घूर्णन समसिति के बारे में रीखेंगे।

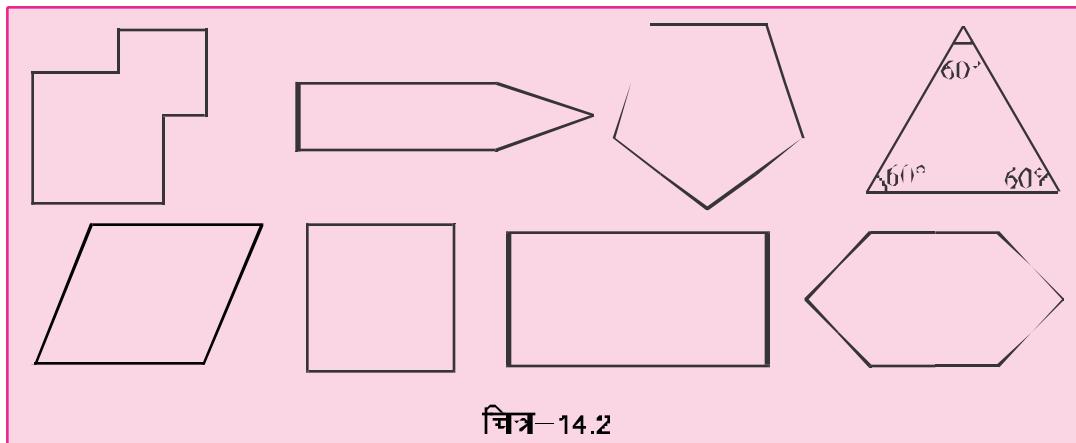
### 14.1 रेखिक समसिति

कित्त-14.1 में आपने लगानी देखी, यह रेखिक समसिति है। इन चित्रों में एक ऐसी सरल रेखा है जिसके उन्नुदिश आकृतियों को मङ्ग से आकृति के दर्गों भान संपत्ती हा जाते हैं।

#### कुछ करें

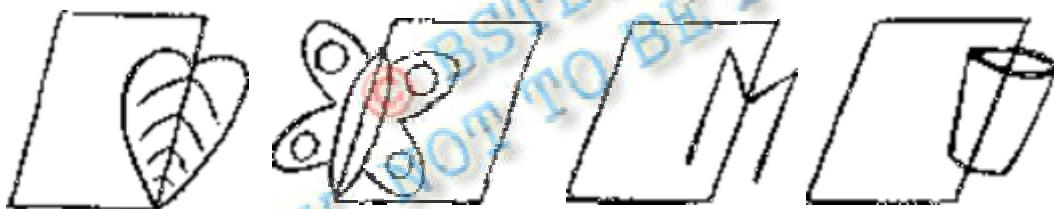
नीचे बने चिनों में रा गोली अद्य कोने-





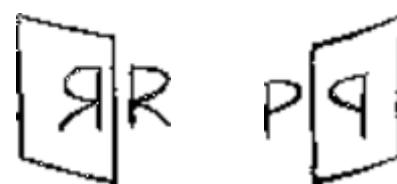
## 14.2 परावर्तन रागगिति

एक सम्पूर्ण दर्पण लीजिए। तथा उसके सामने चेन्निन पस्तुओं को बाहे-बाहे से रखें। आप यार्डेंगे वस्तुओं का प्रतिरिक्षण दर्पण में कैसा रहा है। युध बनने वाले प्रतिरिक्षण का छविलोकन चित्र रास्ता 14.3 में केंद्रित है।



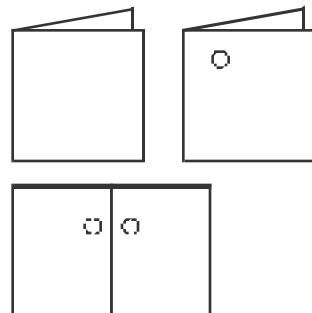
चित्र में आधा हिरण्या दर्पण के रूप में है तथा इसका दर्पण में दोनों के गिलने रूप के पूरा होने का आकर मिलता है। यह परावर्तन समिति है। दर्पण प्रतिरिक्षण में आला भाग है तथा दर्पण का किनारा सममिति अह ल रूप में है। इस प्रकार रेखिक सममिति को उद्घाटन का दर्पण प्रतिरिक्षण से निकट का संबंध है। दर्पण रेखा इनमें एक सममिति रेखा ज्ञात करने में सहायता करती है।

चित्र-14.4 में R और P का दर्पण परावर्तन विळाया गया है। यहाँ आँकड़े के दर्पण परावर्तन में पारंपरिकता एवं अभिमुख्य में दायें-बायें परिवर्तन हो जाता है।

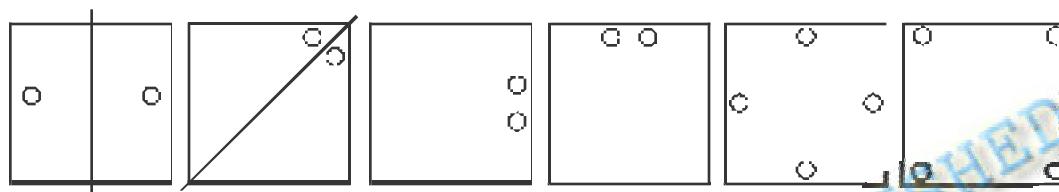


## कुछ करें

चौकोर सादा कागज लोडिए। उसे बीच से चित्र नं देखाए अनुसर मालें। अब कागज में एक छेद जीजिए। उब कर्ज को उलिया कागज का नेह सामिन रखा है। उब कर्ज में बन भेद सामिन आकृति के रूप में है। आइए इस तरह बने अन्य छेद की हुई आकृतियों नं समनित रखा ढूँढ़ने क प्रयास करें।

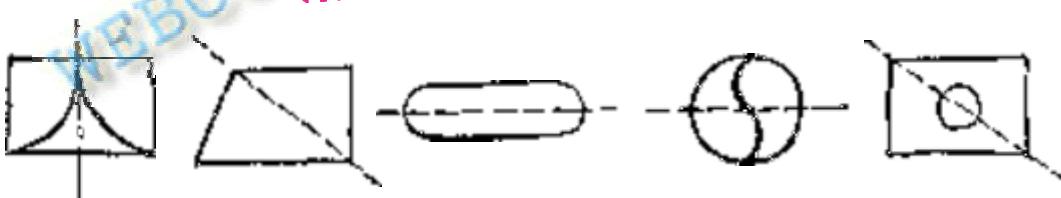


चित्र-14.5

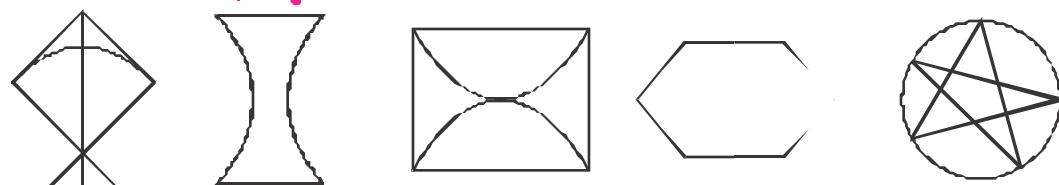


## प्रश्नावली-14.1

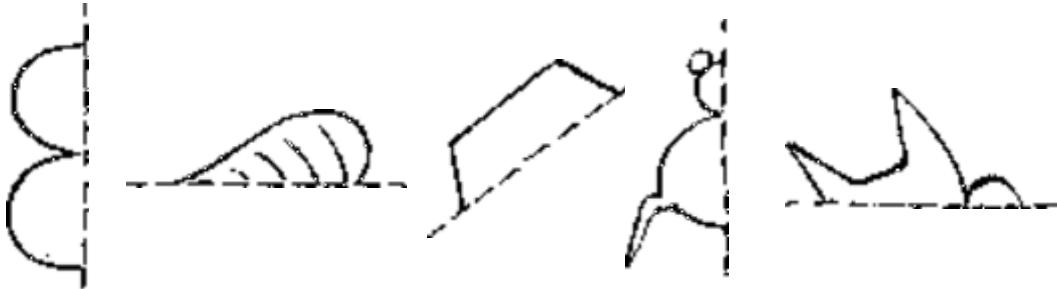
- नीचे दी गई आकृति में जो बिंदु रेखा दर्शायी गई है, वह उस आकृति की सममित रेखा है या नहीं? बताइए।



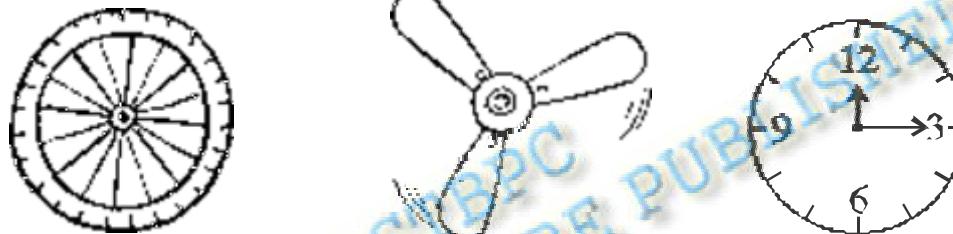
- नीचे दी गई आकृति में सममित रेखा स्थिति।



3. नीचे दी अवूरी आकृति को सममित रेखा के अनुदिश पूरा कीजिए।



### 14.3 घूर्णन सममिति



क्रि. 14.4

घड़ी की सुइयाँ, राइफ़ेल का पठिला तथा ऐप रो लगे बल्लों आदि को आप तब गतिशील कहते हैं जब वे चूमती हैं या घूर्णन करते हैं। कुछ वस्तुओं में यह घूर्णन दर्जों तरफ हाता है, लेकिं घड़ी की सुइयाँ में यह केवल एक दिशा में होता है। घड़ी की सुइयाँ, लिस दिशा नं चूमती हैं यह घड़ी जो दिश में (जिहिगवर्त) घूर्णन करता है। शेष घूर्णनों को घड़ी की विपरीत दिशा में (वानवर्त) घूर्णन कहते हैं। राइफ़ेल का पठिला दोनों दिशों में घूर्णन करता है।

### स्वयं से करें

1. घड़ी की जिए नं घूर्णन के तीन उदाहरण दीजिए।
- 

2. घड़ी की विपरीत दिशा में घूर्णन के हीन उदाहरण दीजिए।
-

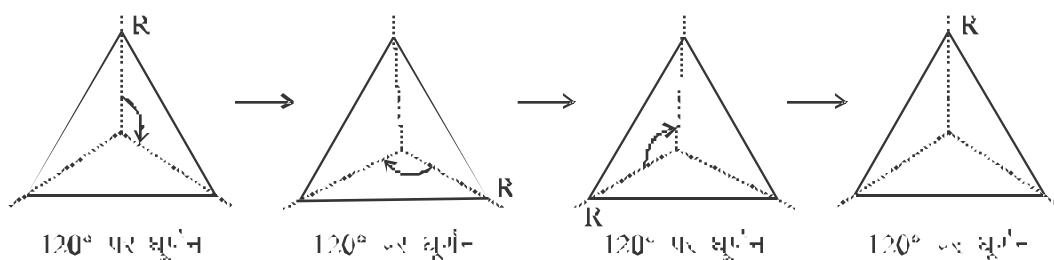
सोचिए। जाइकिल का पहिया, घड़ी ली सूझ्याँ जैसी उस्तुएँ धूर्ण करते हैं तो क्या उनके आकर एवं माप में कोई परिवर्तन है? नहीं। उ लाल लौर मास में परिवर्तन है, बिना नरम हरे निश्चय हिंदू के बारे वृषभ वृषभ है। यह निश्चय बिंदु धूर्णन का केंद्र कहलाता है। धूर्णन ल हौलन घूरा गये कोण का नूर्णन कोण कहते हैं। नीच घड़ी गें घंट ले जुई द्वारा केंद्र पर भिन्नत की जुई ल साढ़ बगो बले कोण वा दिखाया गया है।

घड़ी की स्थिति					
समय	12 बजे अपर ह	3 बजे अपर ह	6 बजे अपर ह	9 बजे अपर ह	12बजे पूरा
दोनों सुईयों के बीच का कोण एवं क्रम	$0^\circ$ क्रम-1	$90^\circ$ क्रम-2	$180^\circ$ क्रम-3	$270^\circ$ क्रम-3	$360^\circ$ क्रम-4

यहाँ हारा वाया दखते हैं। 12 बजे अपराह्न से 12 बजे पूर्णि के बीच हड्डों ली रुइट के बीच ली खिटे समान है तथा बाजों परिस्थि एक समर्पित आकृति बनाती हैं, इस घटना समेत कहते हैं। घड़ी नं घंट की सुई पूरे अवधेर में चार स्थितियों नं दिख इन हैं 90°, 180°, 270°, 360° के के जैसे पर धुमाने या छुर्णने के बाद वह पुनः वहले ऐसी दिखने लगती है। अप्रैल कहते हैं कि शब्द में छुर्णने दा गिरि है।

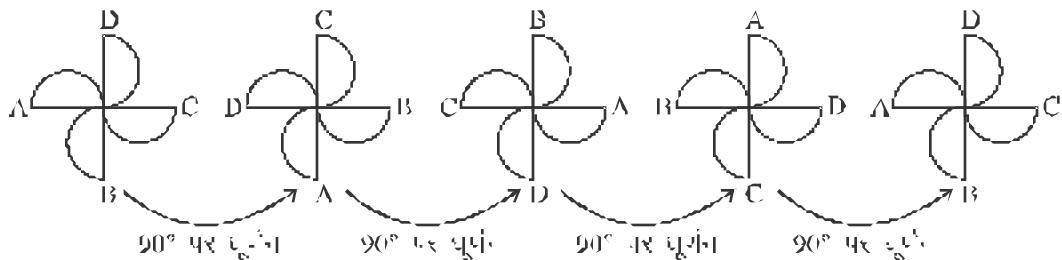
## धूपन के असर विवरण

**समयानुक्रमित ज्युज** के लिए (दक्षिणाधर्म धूर्ण) एक पूर चक्कर में त्रिभुज तीन बार आगनी प्रारम्भिक स्थिति में आत्म है इसे तीन कठन का धूर्ण कहते हैं। चौके त्रिभुज अपनी प्रारम्भिक स्थिति से  $120^\circ$  दूरमें के बाद दूनः अपनी पहले धाली स्थिति में आ जाता। दूनः के दूरः दूरी  $120^\circ$  धूर्ण के  $120^\circ$  है।



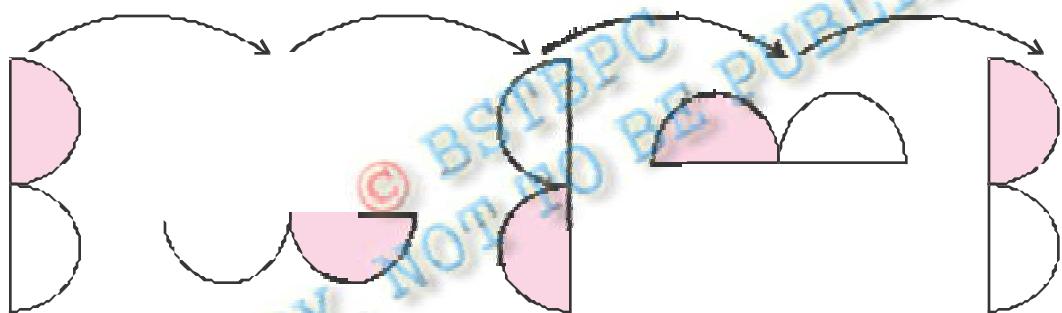
सर्व शिक्षा : 2013-14 (निःशुल्क)

वक्री का धूर्णन— वक्री को देखें। वक्री नापने एक धूर्णन में जार बार लापने प्रारंभिक अवस्था में आती है तभी प्रत्येक  $90^\circ$  घर तह अपनी पहले गाली अवस्था में आती है। अत चक्री का धूर्णन लेण  $90^\circ$  है।



### स्वयं कीजिए

B का धूर्णन की प्रिश्ना, धूर्णन कोण व धूर्णन क्रम बताइए—



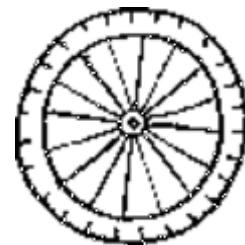
फलों के अनुप्रस्थ काढ वालायात रांकेता पहिया आदि ऐ वी धूर्णन समिति को देखिए।



फल का अनुप्रस्थ काढ



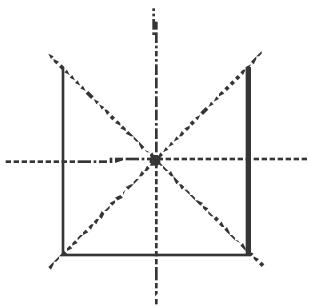
राडिक रांकेता



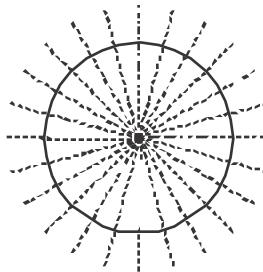
पहिया

#### 14.4 रैखिक सममिति और घूर्णन सममिति में संबंध

विभिन्न प्रकार के आकरण इंवं सममिति को हम देखते आ रह हैं। चुछे आकरण में रैखिक सममिति तो कुछ ने घूर्णन सममिति तो कुछ में रैखिक तथा घूर्णन दोनों प्रकार की सममिति होती है।



उपर वर्ती में रैखिक एवं घूर्णन दोनों प्रकार की सममिति है।

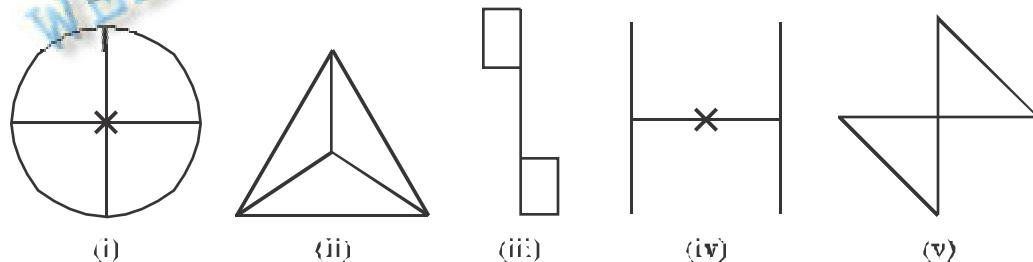


दूसरी में अपरिणीत रूप से घूर्णन सममिति एवं रैखिक सममिति है। केंद्र के परिधि जाँच प्रत्येक कोण के लिए एक घूर्णन सममिति है जाया प्रत्येक व्यास एक रैखिक सममिति है।

इस प्रकार रैखिक एवं घूर्णन सममिति में इन संबंध स्पष्ट कर सकते हैं।

#### प्रश्नावली – 14.2

- नीचे दी आकृतियों में से किन में घूर्णन सममिति का क्रम एक से अधिक है?



- दो वैसी आकृतियों के नाम बताइए, जिसमें रैखिक सममिति और क्रम 1 से अधिक की घूर्णन सममिति दोनों ही है।

3. यदि किसी आकृति की दो दो से अधिक समांमेता रेखाएँ हों, तो क्या यह आवश्यक है कि उसमें क्रम 1 से अधिक की घूणन रानीमेता होगा?
4. ऐसे चतुभुजों के गान बताइए जिसमें रेखिक समांमेता और लम 1 से अधिक की घूणन समांमेता दोनों हो।
5. किसी आकृति का सर्वके परिमाण  $60^\circ$  के कार्य तर घूणन पर वह उसकी प्रभाविक स्थिति नैसी दिखाई पड़ते हैं। और किन-लिए कार्य के लिए इसे स्थिति बनायी?

## हमने शीखा।

1. समांमेता आकृतियों के टीक बीच खीची गई रखा जा परितः मोड़ने या काढ़ने पर प्राप्त दोगों द्विस्त उक दूसर जा पूरे तरह ढँग लेत है। खोंची गई रखा समांमेता अब कहल ती है।
2. दर्शन परावर्तन से भी रखिक समांमेता प्राप्त होते हैं, जिसमें दर्शन का किनारा समांमेता अवधि का कर्य लगता है। दर्शन परावर्तन में प्राप्त परावर्तन या बायें-बायें अभिमुखों का ध्यान रखना होता है।
3. यदि घूणन के बाद वस्तु स्थिति के अनुसार पहले जैसी ही स्थिति रहती है तो हम कहते हैं कि उसने पूरी समांमेता है। जिस दिन्दु के परित वस्तु घूणन करते हैं वह घूणन का केन्द्र कहलता है। जिस कौप पर वस्तु घूनती है, उसे घूणन का कोप कहते हैं। पूरे वर्कर का कर्त्ता  $360^\circ$  का घूणन, आधा वर्कर का कर्त्ता  $180^\circ$  का घूणन, एक चैथाई चक्रकर जा कर  $90^\circ$  का घूणन है।
4. घूणन अब बड़ी की सूर्द के बलने की पिशा में हो तो दिन वह अन्धा बानाता होता है।
5. एक पूरे चक्रम से एक वस्तु जितनी बर स्थिति के अनुसार, जहल जैसी ही दिखाई देती है, वह संख्या उस घूणन सामांमेता का क्रम कहलती है। एक वर्ग की घूणन सामांमेता का क्रम 4 है तभ्या एक ता 6 मुनिषुज की घूणन सामांमेता का क्रम 3 है।

४०८