

## 4. गणित

### 1. भूमिका

माध्यमिक स्तर पर गणित एक महत्वपूर्ण विषय है जिसके शिक्षण के उद्देश्यों के निम्नलिखित महत्वपूर्ण आयाम हो सकते हैं:

- एक प्रभावशाली नागरिक के रूप में तथा दैनन्दिन क्रियाकलापों एवं कार्यों का सकुशल निर्वाहन करने हेतु गणित के विभिन्न अवबोधों, उसकी अवधारणाओं एवं कलाओं से अवगत होने का अवसर प्रदान करना।
- उन व्यवसायों/रोजगारों के लिए तैयार करना, जिनमें माध्यमिक/उच्चतर माध्यमिक स्तर के उपरान्त गणित पठन-पाठन की आवश्यकता नहीं होती, अथवा
- माध्यमिक स्तरोपरान्त उच्चतर गणित शिक्षण हेतु मार्गदर्शक के रूप में।

हमारे देश में माध्यमिक स्तर के पश्चात् बच्चे प्रधानतः चार-पाँच प्रकार के कैरियर बिन्दु चुन सकते हैं। अतः गणित-शिक्षण के द्वारा उन्हें प्रोत्साहित करते हुए तर्क-शक्ति, गणितीय हल एवं अन्तर्ज्ञान तथा गणितीय समझ विकसित करने की आवश्यकता है।

प्रस्तुत पाठ्यक्रम के निम्न में निम्न महत्वपूर्ण बिन्दु प्रभावशाली रहे हैं—

- मात्र बोझ कम करने के उद्देश्य से उपयोगी विषयवस्तु को पाठ्यक्रम से हटाया जाना उचित नहीं है
- उपयोगी विषयवस्तु को सरल से जटिल क्रम की ओर जाते हुए निम्न कक्षा से उच्च कक्षा तक शिक्षण की व्यवस्था की गई है।
- गणित को सरल और सुलभ बनाने के लिए पढ़े गए विषयों पर आधारित क्रियाकलाप करवाए जाएँगे।
- विषयवस्तु की अनावश्यक आवृत्ति से बचा गया है, फिर भी, गणित में अभ्यास के महत्व को देखते हुए एक ही विषयवस्तु को दो या तीन वर्षों तक लगातार पढ़ाया गया है।
- गणित अनिवार्य विषय के रूप में सभी छात्रों के लिए उपयोगी है इसलिए विषय के अंतर्गत आने वाले विभिन्न क्षेत्रों की शिक्षा दी जाएगी।
- सामान्य जीवन में व्यावसायिक गणित की उपयोगिता को देखते हुए इसे नवम वर्ग तक पढ़ाया जाएगा।
- विद्यालय शिक्षा के पश्चात् छात्र विभिन्न स्तरों पर होनेवाली परीक्षाओं में सफलता प्राप्त करें, इसलिए कई नई विषयवस्तुओं को जोड़ा गया है जबकि कुछ विषयवस्तुओं, जो पहले के पाठ्यक्रम में थीं, को हटा दिया गया है।

पाठ्यक्रम में शामिल विषय इस प्रकार है।

1. संख्या-पद्धति
2. बीजगणित
3. व्यावसायिक गणित
4. त्रिकोणमिति
5. संगणना एवं प्रायिगता
6. क्षेत्रमिति
7. नियामक ज्यामिति
8. ज्यामिति

2. उद्देश्य—इस स्तर पर चुनी गई विषय-वस्तुओं से संबंधित निम्न व्यावहारगत उद्देश्यों की पूर्ति की आपेक्षाएँ हैं:

छात्र

- सामाजिक जीवन में समस्याओं को गणितीय भाषा में/सूत्र में निरूपित कर सकेंगे,

- संगत तथा असंगत समीकरणों का अंतर शब्दों में और आलेख द्वारा व्यक्त कर सकेंगे,
- अंकड़ों का संकलन एवं विश्लेषण के आधार पर नए अनुमान निकाल सकेंगे,
- उनमें मापन की कुशलता आयेगी तथा वे विभिन्न आकृतियों का क्षेत्रफल एवं आयतन से संबंधित समस्या का निदान दूँढ़ पाएंगे।
- छात्र अपने व्यवसाय तथा व्यापार से संबंधित समस्याओं का हल करने में सक्षम होंगे,
- ऊँचाई और दूरी से संबंधित प्रश्नों का हल निकाल सकेंगे,
- यूकिलिड ज्यामिति का प्रयोग जानेंगे तथा इस आधार पर विभिन्न व्यावहारिक समस्याओं का समाधान करेंगे और
- नियामक ज्यामिति के अंगरेत किसी पिण्ड की स्थिति का गणितीय निरूपण कर पाएंगे।

**3. शिक्षण विधि**—विभिन्न शिक्षण कौशलों जैसे—उद्दीपन कौशल, प्रश्न पूछने का कौशल, श्याम पट कौशल, प्रस्तावना कौशल, उद्वेरण कौशल इत्यादि का उपयोग करते हुए शिक्षक छात्रों के साथ चर्चा एवं व्याख्या करते हुए सहभागिता के द्वारा व्यावहारिक उद्देश्य की प्राप्ति के लिए प्रयास करेंगे। इस क्रम में विभिन्न सहायक सामग्री का उपयोग किया जाएगा तथा स्थानीय स्तर पर सामग्री का उपयोग किया जाएगा तथा स्थानीय स्तर पर सामग्रियों का निर्माण किया जाएगा। शिक्षक विषयवस्तु के आधार पर सहगमी क्रियाओं एवं प्रोजेक्ट कार्यों में छात्रों की मदद करेंगे।

**4. शिक्षण सामग्री**—पाठ्यपुस्तक, शिक्षक संदर्शिका, चार्ट, मॉडल, फिल्म सॉफ्टवेयर इत्यादि।

### 5. पाठ्यक्रम संरचना एवं परीक्षा का ढाँचा

#### वर्ग IX

इकाई की क्रम संख्या	उपविषय	मुख्य बिन्दु	बिन्दुवार निर्धारित अंक
I	संख्या पद्धति	वास्तविक संख्या	10
II	बीजगणित	बहुपद दो चर वाले रैखिक समीकरण	20
III	व्यावसायिक गणित	शेयर एवं लाभांश, बट्टा, चक्रवृद्धि व्याज, किस्तों में भुगतान	15
IV	नियामक ज्यामिति	नियामक ज्यामिति	10
V	ज्यामिति	यूकिलिड की ज्यामिति रेखाएँ एवं कोण त्रिभुज चतुर्भुज क्षेत्रफल वृत्त बनावट	25
VI	क्षेत्रमिति	क्षेत्रफल पृष्ठ क्षेत्रफल	10
VII	सांख्यिकी	सांख्यिकी सहायक पाठ	10

## पाठ्यक्रम

### इकाई—I संख्या पद्धति

#### 1. वास्तविक संख्याएँ (18 घंटियाँ)

- संख्या रेखा पर प्राकृतिक संख्याओं, पूर्णांकों एवं परिमेय संख्याओं के निरूपण का पुनरावलोकन। निरन्तर आवर्धन (Successive Magnification) विधि द्वारा सांत एवं असांत आवर्ती दशमलवों का संख्या रेखा पर निरूपण। असांत अनावर्ती दशमलवों के उदाहरण जैसे  $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ , इत्यादि। अपरिमेय संख्याओं का अस्तित्व जैसे  $\sqrt{2}, \sqrt{3}$  एवं उनका निरूपण। [प्रत्येक वास्तविक संख्या का संख्या रेखा के एक और केवल एक बिन्दु द्वारा निरूपण एवं संख्या रेखा के प्रत्येक बिन्दु का एक और केवल एक वास्तविक संख्या होने की संकेतिक पहचान] किसी धनात्मक वास्तविक संख्या  $x$  का वर्गमूल  $\sqrt{x}$  का अस्तित्व (दृश्य प्रमाणों पर बल)। करणी एवं करणी के नियमों का आरभिक ज्ञान। किसी वास्तविक संख्या के  $n$ वें मूल की परिभाषा। पूर्णधात वाले घातांकों के नियमों का पुनरावलोकन। धनात्मक वास्तविक आधारवाले परिमेय घातांक।
- $\frac{1}{a+b\sqrt{x}}$  &  $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$  (पूर्णांक  $a, b$  एवं प्राकृतिक संख्या  $x, y$ ) के प्रकार की वास्तविक संख्याओं का परिमेयीकरण।

### इकाई—II बीजगणित

#### 1. बहुपद (20 घंटियाँ)

66



- एक चरवाले बहुपदों की परिभाषा, उनके गुणांक, पद एवं शून्य बहुपदों का ज्ञान। बहुपद की श्रेणी, स्थिर, रैखिक एवं द्विघात, त्रिघात बहुपद। एकपद, द्विपद, त्रिपद। विभाजक एवं गुणज। बहुपद/ समीकरण के शून्य/मूल। शेष प्रमेय एवं गुणनखण्ड प्रमेय का कथन एवं प्रमाण।  $ax^2 + bx + c$  का गुणनखण्ड जहाँ  $a \neq 0$  एवं  $a, b, c$  वास्तविक संख्याएँ हैं। त्रिघात बहुपदों का गुणनखण्ड (विभाजक प्रमेय प्रयोग करते हुए)।
- बीजगणितीय व्यंजक एवं तादात्म्यों का पुनरावलोकन। प्रमुख तादात्म्यों का ज्ञान जैसे :

  - $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx,$
  - $(x \pm y)^3 = x^3 \pm y^3 \pm 3xy(x \pm y)$
  - $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)$



एवं उनके प्रयोग से बहुपदों का गुणनखण्ड निकालना। साधारण व्यंजक जिन्हें इन तादात्म्यों के रूप में व्यक्त किया जा सके।

#### 2. दो चर वाले रैखिक समीकरण (10 घंटियाँ)



- एक चरवाले रैखिक समीकरणों का पुनरावलोकन। दो चरवाले रैखिक समीकरणों का परिचय। प्रमाणित करना कि दो चरवाले समीकरणों के अंकगणितीय हल होते हैं एवं उन्हें वास्तविक संख्याओं के क्रमिक युग्म के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, उन्हें अंकित किया जा सकता है जो एक सीधी रेखा पर पड़ते हैं। व्यावहारिक समस्याएँ (अनुपात एवं समानुपात सहित) एवं उनका बीजगणितीय एवं आलेखीय हल। बहुपदों का लघुतम समापवर्त्य एवं महत्तम समापवर्तक (बीजगणितीय अनुप्रयोगों सहित)।

### इकाई—III व्यावसायिक गणित (10 घंटियाँ)



- बट्टा, शेयर एवं लाभांश, चक्रवृद्धि ब्याज और किस्तों में भुगतान।

## इकाई—IV नियामक ज्यामिति

### 1. नियामक ज्यामिति (5 घंटियाँ)

- कार्तिय समतल, एक बिन्दु के नियामक, नियामक समतल से जुड़े शब्दों एवं पदों की जानकारी, प्रत्युक्त चिह्न, समतल पर बिन्दुओं का अंकन, उदाहरण-स्वरूप रैखिक समीकरणों के आलेख,  $\frac{x}{A} + \frac{y}{B} = 1$  जैसे रैखिक समीकरण।

## इकाई—V ज्यामिति

### 1. यूक्सिलड की ज्यामिति की भूमिका : (6 घंटियाँ)

- इतिहास : यूक्सिलड एवं भारत में ज्यामिति, यूक्सिलड की विधि यथा अवलोकित घटनाओं का गणितीय प्रकटीकरण एवं उनकी परिभाषाएँ—सामान्य/स्पष्ट चिह्न। स्वयं सिद्ध/उपपत्तियाँ एवं प्रमेय। प्रमेय एवं स्वयंसिद्धों के आपसी संबंधों की मौलिक जानकारी।

### 2. रेखाएँ एवं कोण (12 घंटियाँ)

- (उत्प्रेरण) : किसी रेखा पर पड़नेवाली किरण से बननेवाले आसन्न कोणों का योगफल  $180^\circ$  होता है एवं इसका विलोम।
- (सिद्ध करना) : यदि दो रेखाएँ एक दूसरे को काटती हैं तो समुख कोण बराबर होते हैं।
- (उत्प्रेरण) : दो समानान्तर रेखाओं को एक तिर्यक-रेखा के काटने पर बननेवाले एकान्तर कोण, आसन्न कोण, संगत कोण, अन्तःकोणों पर आधारित परिणाम।
- (उत्प्रेरण) : एक रेखा के समानान्तर सारी रेखाएँ आपस में समानान्तर होती हैं।
- (सिद्ध करना) : किसी त्रिभुज के सभी कोणों का योगफल  $180^\circ$  होता है।
- (सिद्ध करना) : किसी त्रिभुज की एक भुजा बढ़ाने पर बननेवाला बहिर्कोण दोनों अन्तःकोणों के योग के बराबर होता है।

67

### 3. त्रिभुज (18 घंटियाँ)

- (उत्प्रेरण) : (भुजा-कोण-भुजा) सर्वांगसमता
- (सिद्ध करना) : कोण-भुजा-कोण सर्वांगसमता
- (सिद्ध करना) : भुजा-भुजा-भुजा पर सर्वांगसमता
- (सिद्ध करना) : समकोण त्रिभुज पर सर्वांगसमता
- (सिद्ध करना) : किसी त्रिभुज के समान भुजाओं के आसन्न कोण बराबर होते हैं।
- (सिद्ध करना) : किसी त्रिभुज में समान कोणों की सामनेवाली भुजाएँ आपस में बराबर होती हैं।
- (सिद्ध करना) : किसी त्रिभुज में सबसे बड़ी भुजा के सामने का कोण सबसे बड़ा होता है एवं छोटी भुजा के सामने का कोण सबसे छोटा होता है।
- (सिद्ध करना) : किसी त्रिभुज में दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है।

### 4. चतुर्भुज (10 घंटियाँ)

- (सिद्ध करना) : किसी समानान्तर चतुर्भुज का विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में बाँटता है।
- (सिद्ध करना) : किसी चतुर्भुज में
  - समुख भुजाएँ बराबर होती हैं एवं इसका विलोम
  - समुख कोण बराबर होते हैं एवं इसका विलोम

- (iii) दोनों विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं
- (iv) कोई चतुर्भुज एक समानान्तर चतुर्भुज होता है यदि और केवल यदि भुजाओं के दोनों युग्म समानान्तर एवं बराबर होते हैं।
- (v) किसी त्रिभुज में दो भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं को जोड़नेवाली रेखाखण्ड तीसरे भुजा के समानान्तर होती है एवं विलोम

#### 5. क्षेत्रफल (4 घंटियाँ)

##### 1. क्षेत्रफल के ज्ञान का पुनरावलोकन

आयत का क्षेत्रफल

- (a) (सिद्ध करना) : एक ही आधार एवं दो समानान्तर रेखाओं के बीच बने दो समानान्तर चतुर्भुजों का क्षेत्रफल समान होता है।
- (b) (सिद्ध करना) : एक ही आधार एवं दो समानान्तर रेखाओं के बीच बने दो त्रिभुजों का क्षेत्रफल बराबर होता है।

#### 6. वृत्त (15 घंटियाँ)

- उदाहरणों द्वारा किसी वृत्त की त्रिज्या, परिधि, व्यास, जीवा, चाप, वृत्तखण्ड, केन्द्र पर बनी कोणों की परिभाषाएँ स्पष्ट करना।
  - (i) (सिद्ध करना) : किसी वृत्त में दो समान जीवाओं से बने केन्द्र पर के कोण बराबर होते हैं।
  - (ii) (सिद्ध करना) : किसी वृत्त के केन्द्र से किसी जीवा पर डाला गया लम्ब उसे समद्विभाजित करता है एवं विलोम।  
किसी वृत्त के केन्द्र से गुजरनेवाली रेखा, जो किसी जीवा को समद्विभाजित करती है, जीवा पर लम्ब होती है।
  - (iii) (सिद्ध करना) : किन्हीं तीन असरेख बिन्दुओं से होकर एक और केवल एक वृत्त खींचा जा सकता है।
  - (iv) (सिद्ध करना) : किसी वृत्त (अथवा सर्वांगसम वृत्त) की समान जीवाएँ केन्द्र से समदूरत्व पर होती हैं एवं विलोम।
  - (v) (सिद्ध करना) : एक वृत्त में किसी चाप से बने केन्द्र पर का कोण उसी चाप से बने केन्द्र पर के कोण का दुगुना होता है।
  - (vi) (सिद्ध करना) : वृत्त के एक ही खण्ड में बने कोण समान होते हैं।
  - (vii) (सिद्ध करना) : यदि दो बिन्दुओं को जोड़नेवाला रेखाखण्ड एक ही तरफ के दो अन्य बिन्दुओं पर समान कोण बनाता हो तो चारों बिन्दु एक ही वृत्त पर आधारित होते हैं।
  - (viii) (सिद्ध करना) : चक्रीय चतुर्भुज में आमने-सामने के काणों का योग  $180^\circ$  होता है।

#### 7. बनावट (10 घंटियाँ)

- 1. किसी रेखाखण्ड के समद्विभाजकों की बनावट,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $45^\circ$  के कोणों की बनावट, समबाहु त्रिभुज की बनावट।
- 2. एक ऐसे त्रिभुज की बनावट जिसका आधार, दो अन्य भुजाओं का योग/अन्तर एवं एक आधार कोण दिया गया हो।
- 3. एक ऐसे त्रिभुज की बनावट जिसकी परिमिति एवं दोनों आधार कोण दिए गए हों।



## इकाई—VI क्षेत्रमिति (14 घंटियाँ)

### 1. क्षेत्रफल (4 घंटियाँ)

- हेरॉन फर्मूला की सहायता से किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालना (विना प्रमाण) एवं इसकी सहायता से किसी चतुर्भुज का क्षेत्रफल निकालना।
- किसी त्रिभुज के क्षेत्रफल की गणना के विभिन्न सूत्र (विना प्रमाण हेरॉन सूत्र सहित)
- किसी चतुर्भुज का क्षेत्रफल निकालना।

### 2. पृष्ठ क्षेत्रफल एवं मान (10 घंटियाँ)

- घन, घनाभ, गोला, अर्धगोला, समकोणीय बेलन, समकोणीय शंकु का पृष्ठ क्षेत्रफल एवं आयतन।

## इकाई—VII सांखिकी

### सांखिकी (8 घंटियाँ)

- सांखिकी की भूमिका, आँकड़ों का संग्रह एवं प्रस्तुतीकरण (तालिकारूपी वर्गीकृत/अवर्गीकृत), दण्डालेख (Bar graph), हिस्टोग्राम (आधार की विभिन्न लम्बाइयाँ लेकर), बारम्बारता बहुभुज, आँकड़ों का गुणात्मक विवरण, संग्रहित आँकड़ों के लिए प्रस्तुतीकरण की सही विधि को चुनना, माध्य, माध्यिका एवं बहुलक (अवर्गीकृत आँकड़ों के लिए)।

## इकाई (सहायक)—VIII

69

### (क) गणितीय प्रमाण (8 घंटियाँ)

कथन क्या है? वैध गणितीय कथन; स्वयंसिद्ध/प्रमेय (axiom/postulate)—परिचित उदाहरणों के माध्यम से इनकी व्याख्या; स्वयंसिद्ध, कान्जेक्चर एवं प्रमेय में अन्तर। 'प्रमाण' की अवधारणा, समझ एवं इसकी प्रकृति यथा— प्रमाणों की निगमन (Deductive) प्रकृति, उनकी मान्यताएँ, परिकल्पनाएँ (Hypothesis) एवं तार्किक व्याख्याएँ (logical arguments), तथा प्रमाण-लेखन। अंकगणित, बीजगणित एवं ज्यामिति के विभिन्न परिणामों का उपयोग करते हुए प्रमाणों की निगमन प्रकृति का चित्रण, प्रमाण एवं सत्यापन में अन्तर। सत्यापनों के कुछ उदाहरण जो गलत निष्कर्षों तक पहुँचाते हैं। किसी कथन को गलत प्रमाणित करने का अर्थ एवं प्रति-उदाहरण (counter-example)।

### (ख) गणितीय मॉडल से परिचय (7 घंटियाँ)

गणितीय मॉडल (Model) की अवधारणा। पूर्व कक्षाओं में हल की गई समस्याओं की समीक्षा एवं मॉडल बनाने में उनका उपयोग। गणितीय मॉडलिंग (Modelling) के उद्देश्य एवं विस्तृत स्तरों पर इनकी चर्चा, यथा—वास्तविक जीवन की परिस्थितियाँ, परिकल्पनाओं का समावेश, उपयुक्त मॉडल का निर्धारण, समकक्ष गणितीय समस्याओं का हल निकालना, निष्कर्षों का विश्लेषण एवं वास्तविक-जीवन में उनकी विवेचना एवं मॉडलों की वैधता। अनुपात, समानुपात एवं प्रतिशत से समुचित उदाहरण प्रस्तुत किए जाएँ।

### (ग) गणितज्ञों की जीवनी

पाइथागोरस एवं आर्कमिडीज की संक्षिप्त जीवनी एवं कुछ महत्वपूर्ण योगदान।