സ്റ്റാൻഡേർഡ് X

ഗണിതം

ഭാഗം - I

കേരളസർക്കാർ
പൊതുവിദ്യാഭ്യാസവകുപ്പ്

സംസ്ഥാന വിദ്യാഭ്യാസ ഗവേഷണ പരിശീലന സമിതി, കേരളം
2019

ദേശീയഗാനം

ജനഗണമന അധിനായക ജയഹേ
ഭാരത ഭാഗ്യവിധാതാ,
പഞ്ചാബസിന്ധു ഗുജറാത്ത മറാഠാ
ദ്രാവിഡ ഉത്ക്കല ബംഗാ,
വിന്ധ്യഹിമാചല യമുനാഗംഗാ,
ഉച്ഛല ജലധിതരംഗാ,
തവശുഭനാമേ ജാഗേ,
തവശുഭ ആശിഷ മാഗേ,
ഗാഹേ തവ ജയ ഗാഥാ
ജനഗണമംഗലദായക ജയഹേ
ഭാരത ഭാഗ്യവിധാതാ.
ജയഹേ, ജയഹേ, ജയഹേ,
ജയ ജയ ജയ ജയഹേ!

പ്രതിജ്ഞ

ഇന്ത്യ എന്റെ രാജ്യമാണ്. എല്ലാ ഇന്ത്യക്കാരും എന്റെ സഹോദരീ സഹോദരന്മാരാണ്.

ഞാൻ എന്റെ രാജ്യത്തെ സ്നേഹിക്കുന്നു; സമ്പൂർണവും വൈവിധ്യപൂർണവുമായ അതിന്റെ പാരമ്പര്യത്തിൽ ഞാൻ അഭിമാനം കൊള്ളുന്നു.

ഞാൻ എന്റെ മാതാപിതാക്കളെയും ഗുരുക്കന്മാരെയും മുതിർന്നവരെയും ബഹുമാനിക്കും.

ഞാൻ എന്റെ രാജ്യത്തിന്റെയും എന്റെ നാട്ടുകാരുടെയും ക്ഷേമത്തിനും ഐശ്വര്യത്തിനും വേണ്ടി പ്രയത്നിക്കും.

പ്രിയപ്പെട്ട കുട്ടികളേ,

അളവുകളുടെയും അവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധങ്ങളുടെയും പഠനമാണ് ഗണിതശാസ്ത്രത്തിന്റെ ഒരു പ്രധാന ഭാഗം. അതുകൊണ്ടുതന്നെ ഭൗതികശാസ്ത്രങ്ങളിലും സാമൂഹ്യശാസ്ത്രങ്ങളിലുമെല്ലാം ഇത്തരം ബന്ധങ്ങൾ കൃത്യമായി അവതരിപ്പിക്കാൻ ഗണിതം ആവശ്യമായിവരുന്നു. അളവുകളെ കേവലസംഖ്യകളായും വസ്തുക്കളെ ജ്യാമിതീയരൂപങ്ങളായും കണ്ടു തുടങ്ങുമ്പോൾ, ഗണിതത്തിന്റെ ആശയതലം രൂപപ്പെടുന്നു. സംഖ്യാബന്ധങ്ങൾ ബീജഗണിതവാക്യങ്ങളാകുന്നു. വസ്തുക്കളുടെ കാര്യകാരണബന്ധം, ആശയങ്ങളുടെ യുക്തിയുക്തതയായി വളരുന്നു, ഗണിതതത്വങ്ങൾ രൂപപ്പെടുന്നു. ഇവ കൂടുതൽ ഫലപ്രദമായ പ്രയോഗങ്ങളിലേക്കു നയിക്കുന്നു. ഗണിതതത്വങ്ങളുടെയും അവയുടെ പ്രയോഗങ്ങളുടെയും പ്രാഥമിക പാഠങ്ങളാണ് ഇവിടെ അവതരിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നത്.

വിഷമകരമായ ഗണിതക്രിയകൾ ചെയ്യുന്നതും സങ്കീർണങ്ങളായ ജ്യാമിതീയരൂപങ്ങൾ വരയ്ക്കുന്നതുമെല്ലാം ഇക്കാലത്ത് കമ്പ്യൂട്ടറുകൾ ഉപയോഗിച്ചാണ്. കാര്യക്ഷമമായി കമ്പ്യൂട്ടർ ഉപയോഗിക്കാൻ ഗണിതം ആവശ്യമാണുതാനും. കമ്പ്യൂട്ടറുകൾക്ക് ഗണിതപഠനത്തിലും മറിച്ചുമുള്ള സ്വാധീനം പല പാഠങ്ങളിലും സൂചിപ്പിച്ചിട്ടുണ്ട്. ജിയോജിബ്ര എന്ന ജ്യാമിതീയപ്രോഗ്രാമും പൈഥൺ എന്ന കമ്പ്യൂട്ടർ ഭാഷയും ഉപയോഗിക്കുന്നതിന്റെ ഉദാഹരണങ്ങൾ ഉൾപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്. ഇവ ഉപയോഗിച്ചുള്ള കൂടുതൽ പഠനവിഭവങ്ങൾ സമഗ്രപോർട്ടൽ, ക്യൂ.ആർ. കോഡ് എന്നിവ മുഖേന ലഭ്യമാണ്.

സ്നേഹാശംസകളോടെ,

ഡോ. ജെ. പ്രസാദ്
ഡയറക്ടർ, എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി.

സംസ്ഥാന വിദ്യാഭ്യാസ ഗവേഷണ പരിശീലന സമിതി
വിദ്യാഭവൻ, പൂജപ്പുര, തിരുവനന്തപുരം 695 012

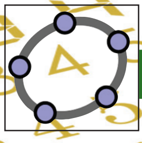
Prepared by :
State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Poojappura, Thiruvananthapuram 695 012, Kerala

Website : www.scertkerala.gov.in
E-mail : scertkerala@gmail.com
Phone : 0471-2341883, Fax : 0471-2341869
Typesetting and Layout : SCERT
Printed at : KBPS, Kakkanad, Kochi-30
© Department of Education, Government of Kerala

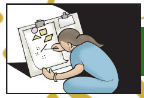
ഉള്ളടക്കം

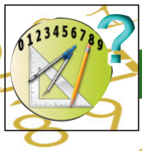
1. സമാന്തരശ്രേണികൾ 7
2. വൃത്തങ്ങൾ 37
3. സാധ്യതകളുടെ ഗണിതം 69
4. രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യങ്ങൾ 79
5. ത്രികോണമിതി 99
6. സൂചകസംഖ്യകൾ 125

ഈ പുസ്തകത്തിൽ സൗകര്യത്തിനായി
ചില ചിഹ്നങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നു.


ഐ.സി.റ്റി. സാധ്യത

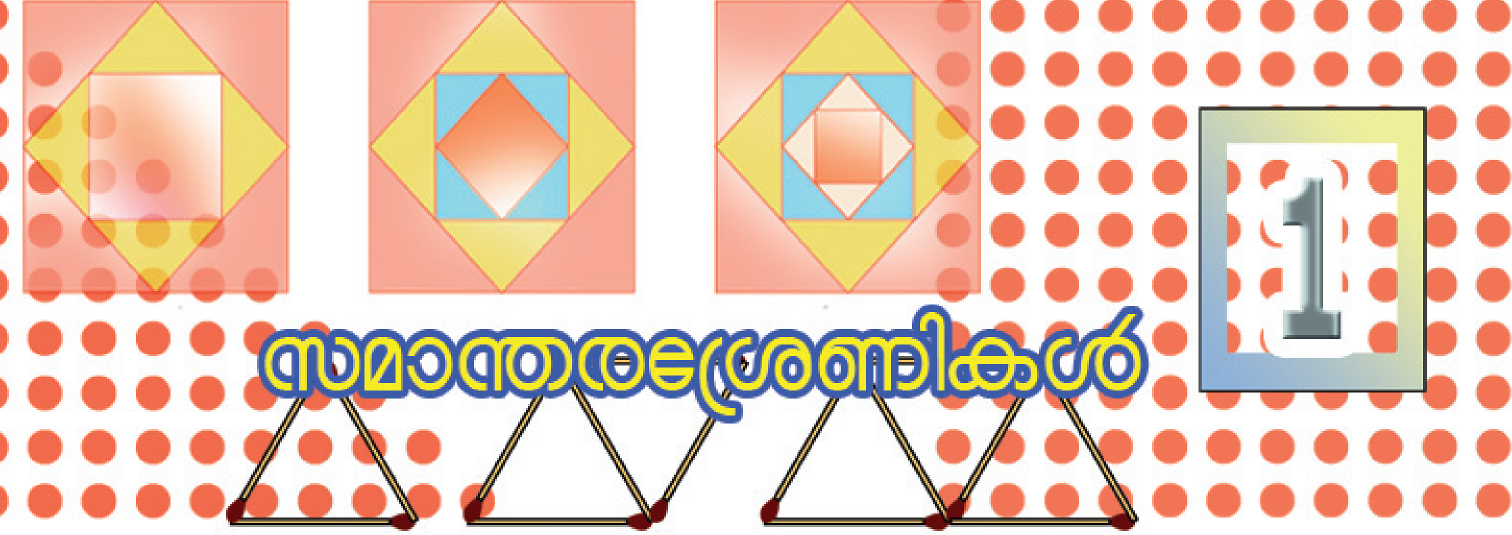
കണക്ക് ചെയ്തു നോക്കാം


ഗവേഷണം



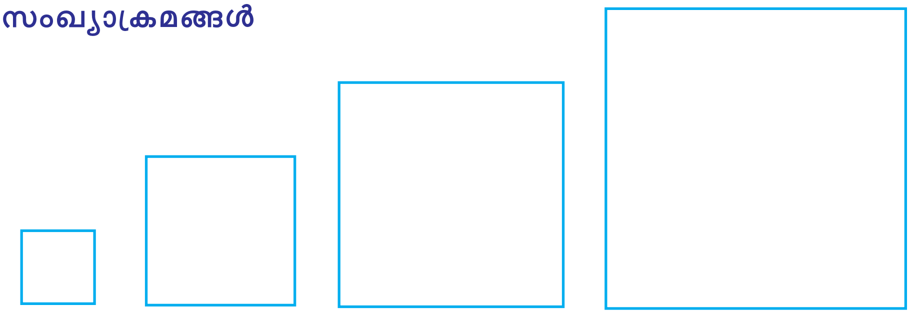
ചർച്ചചെയ്യാം

എൻ.എസ്.ക്യൂ.എഫ്.



1 സമാന്തരശ്രേണികൾ

സംഖ്യാക്രമങ്ങൾ



ചിത്രത്തിലെ സമചതുരങ്ങൾ നോക്കൂ, അവയുടെ ചുറ്റളവ് എത്രയാണ്? പരപ്പളവോ?

വശങ്ങളുടെ നീളം

1 സെ.മീ., 2 സെ.മീ., 3 സെ.മീ., 4 സെ.മീ., ...

എന്നിങ്ങനെ തുടരുമ്പോൾ, ചുറ്റളവ്

4 സെ.മീ., 8 സെ.മീ., 12 സെ.മീ., 16 സെ.മീ., ...

എന്നു തുടരുന്നു; പരപ്പളവ്

1 ച.സെ.മീ., 4 ച.സെ.മീ., 9 ച.സെ.മീ., 16 ച.സെ.മീ., ...

എന്നും.

സംഖ്യകൾ മാത്രമായി പറഞ്ഞാലോ?

വശങ്ങളുടെ നീളം

1, 2, 3, 4, ...

എന്നിങ്ങനെ എണ്ണൽസംഖ്യകൾ ക്രമമായി എഴുതുന്നതുതന്നെ. ചുറ്റളവ്

4, 8, 12, 16, ...

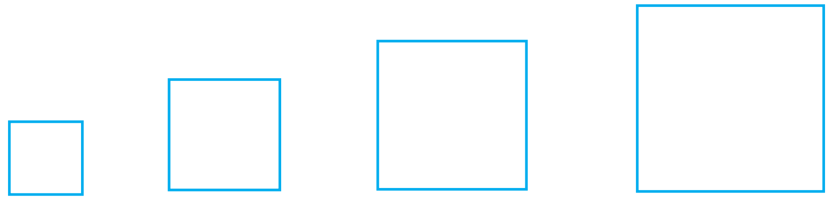
എന്നിങ്ങനെ നാലിന്റെ ഗുണിതങ്ങളുടെ ക്രമം; പരപ്പളവ്,

1, 4, 9, 16, ...

എന്ന പൂർണവർഗങ്ങളുടെ ക്രമം.

ഇവയുടെ വികർണങ്ങളുടെ നീളമോ? എഴുതിനോക്കൂ.

വശങ്ങളുടെ നീളം ഒരു സെന്റിമീറ്റർ വീതം കൂട്ടുന്നതിനുപകരം അര സെന്റിമീറ്റർ വീതം കൂട്ടിയാലോ?

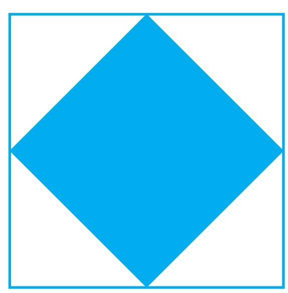


1 സെ.മീ. $1\frac{1}{2}$ സെ.മീ. 2 സെ.മീ. $2\frac{1}{2}$ സെ.മീ.

വശം	1,	$1\frac{1}{2}$,	2,	$2\frac{1}{2}$,	...
ചുറ്റളവ്	4,	6,	8,	10,	...
പരപ്പളവ്	1,	$2\frac{1}{4}$,	4,	$6\frac{1}{4}$,	...
വികർണം	$\sqrt{2}$,	$\frac{3}{2}\sqrt{2}$,	$2\sqrt{2}$,	$\frac{5}{2}\sqrt{2}$,	...

ഇതുപോലെ ഏതെങ്കിലും നിയമമനുസരിച്ച് ഒന്നാമത്തേത്, രണ്ടാമത്തേത്, മൂന്നാമത്തേത്, ... എന്നിങ്ങനെ ക്രമമായി എഴുതുന്ന ഒരു കൂട്ടം സംഖ്യകളെ, **സംഖ്യാശ്രേണി (number sequence)** എന്നാണ് പറയുന്നത്.

സമചതുരങ്ങളുപയോഗിച്ചുതന്നെ മറ്റൊരു ശ്രേണിയുണ്ടാക്കാം; വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം ഒരു മീറ്ററായ ഒരു സമചതുരം സങ്കൽപ്പിക്കുക. വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാൽ മറ്റൊരു സമചതുരം കിട്ടും.



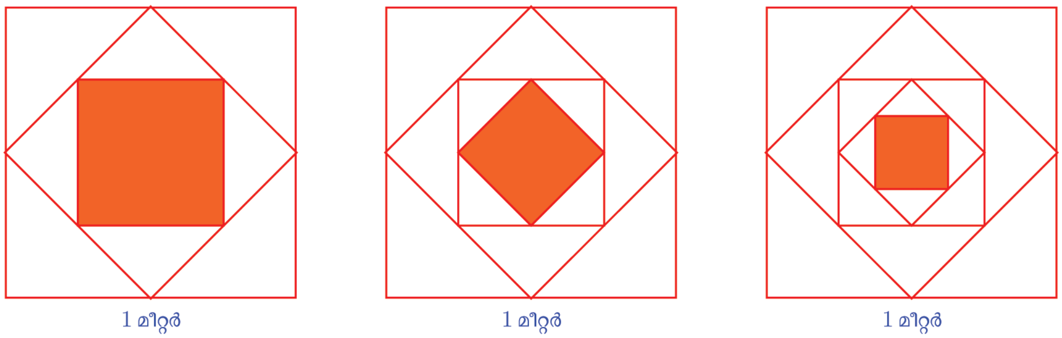
1 മീറ്റർ

ഈ ചെറിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

അതിന്റെ വികർണം ഒരു മീറ്ററാണ്; സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, വികർണത്തിന്റെ വർഗത്തിന്റെ പകുതിയാണല്ലോ (എട്ടാംക്ലാസിലെ **ചതുർഭുജപ്പരപ്പ്** എന്ന പാഠത്തിൽ, **സമഭുജസാമാന്തരികം** എന്ന ഭാഗം)

അപ്പോൾ ചെറിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് അര ചതുരശ്രമീറ്റർ.

ഇതു തുടർന്നാൽ ഓരോ തവണയും പരപ്പളവ് പകുതിയാകും, ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന സംഖ്യാശ്രേണിയെന്താണ്?



$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$$

ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിൽനിന്നും ശ്രേണികൾ ഉണ്ടാക്കാം; ഉയരത്തിൽനിന്ന് താഴോട്ടിടുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ വേഗം നിരന്തരം കൂടിക്കൊണ്ടിരിക്കുമല്ലോ. t സെക്കന്റ് ആകുമ്പോഴുള്ള വേഗം v മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്നെടുത്താൽ

$$v = 9.8t$$

എന്നാണ് സമയ-വേഗ സമവാക്യം.

t സെക്കന്റ് സമയംകൊണ്ട് സഞ്ചരിച്ച ദൂരം s മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ,

$$s = 4.9t^2$$

എന്നാണ് സമയ-ദൂര സമവാക്യം.

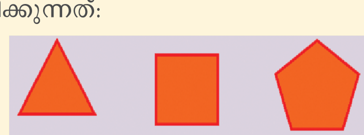
അപ്പോൾ ഇതുപയോഗിച്ച് രണ്ടു ശ്രേണികളുണ്ടാക്കാം.

സമയം	1,	2,	3,	4,	...
വേഗം	9.8,	19.6,	29.4,	39.2,	...
ദൂരം	4.9,	19.6,	44.1,	78.4,	...

ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിൽ നിന്നുതന്നെ മറ്റൊരു ഉദാഹരണമാകാം. ഇരുമ്പിന്റെ സാന്ദ്രത 7.8 ഗ്രാം/ഘനസെന്റിമീറ്ററാണ്. അതായത്, 1 ഘനസെന്റിമീറ്റർ വ്യാപ്തമുള്ള ഇരുമ്പുസമചതുരക്കട്ടയ്ക്ക് 7.8 ഗ്രാം ഭാരമുണ്ടാകും. അപ്പോൾ വശങ്ങളുടെ നീളം 1 സെന്റിമീറ്റർ, 2 സെന്റിമീറ്റർ, 3 സെന്റിമീറ്റർ എന്നിങ്ങനെയായ ഇരുമ്പുസമചതുരക്കട്ടകളുടെ വ്യാപ്തങ്ങൾ 1 ഘനസെന്റിമീറ്റർ, 8 ഘനസെന്റിമീറ്റർ, 27 ഘനസെന്റിമീറ്റർ എന്നിങ്ങനെയും, ഭാരം 7.8 ഗ്രാം, 62.4 ഗ്രാം, 210.6 ഗ്രാം എന്നിങ്ങനെയുമാണ്. സംഖ്യാശ്രേണികളായി എഴുതിയാൽ

പലതരം ശ്രേണികൾ

കൂട്ടം, നിര എന്നെല്ലാം അർഥം വരുന്ന സംസ്കൃതപദമാണ് "ശ്രേണി". ഗണിതത്തിൽ ഈ വാക്കുപയോഗിക്കുന്നത്, ഒന്നാമത്തേത്, രണ്ടാമത്തേത് എന്നിങ്ങനെ കൃത്യമായ സ്ഥാനങ്ങളിൽ ക്രമീകരിച്ചിരിക്കുന്നവയെ സൂചിപ്പിക്കാനാണ്. ഇങ്ങനെ ക്രമീകരിക്കുന്നത് സംഖ്യകൾ തന്നെ ആവണമെന്നില്ല. ഉദാഹരണമായി, ബഹുഭുജങ്ങളുടെ ഒരു ശ്രേണിയാണ് ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്:



ബഹുപദങ്ങളുടെ ഒരു ശ്രേണിയാകാം:

$$1+x, 1+x^2, 1+x^3, \ldots$$

ഒരു ഭാഷയിലെ പദങ്ങളെ അക്ഷരമാലാക്രമത്തിൽ അടുക്കുന്നതും ഒരു ശ്രേണിതന്നെ.

വശം	1,	2,	3,	...
വ്യാപ്തം	1,	8,	27,	...
ഭാരം	7.8,	62.4,	210.6,	...

അളവുകളല്ലാതെ കേവലസംഖ്യകളുടെ സവിശേഷതകൾ ഉപയോഗിച്ചും ശ്രേണികൾ ഉണ്ടാക്കാം. ഉദാഹരണമായി, അഭാജ്യസംഖ്യകൾ വലുപ്പമനുസരിച്ച് ക്രമമായി എഴുതിയാൽ

2, 3, 5, 7, 11, 13, ...

എന്നു തുടരുന്ന ശ്രേണി കിട്ടും.

$\frac{21}{37}$ എന്ന ഭിന്നസംഖ്യയുടെ ദശാംശരൂപത്തിലെ അക്കങ്ങൾ സ്ഥാനക്രമത്തിൽ എഴുതിയാൽ

5, 6, 7, 5, 6, 7, 5, 6, 7, ...

എന്ന ശ്രേണിയാകും.

ഇതുതന്നെ π എന്ന സംഖ്യയിലായാൽ

3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, ...

എന്ന ശ്രേണി കിട്ടും.

ഒരു ശ്രേണിയെത്തന്നെ പലതരത്തിൽ വിവരിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, 1 ൽ അവസാനിക്കുന്ന എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി,

1, 11, 21, 31, ...

ഇതിനെത്തന്നെ 10 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 1 ശിഷ്ടം കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളുടെ ശ്രേണിയെന്നും പറയാം.

?

(1) സമഭുജത്രികോണം, സമചതുരം, സമപഞ്ചഭുജം എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന ജ്യാമിതീയരൂപങ്ങളുടെ ശ്രേണിയിൽനിന്ന് ചുവടെപ്പറയുന്ന സംഖ്യാശ്രേണികൾ ഉണ്ടാക്കുക.

വശങ്ങളുടെ എണ്ണം 3, 4, 5, ...

അകക്കോണുകളുടെ തുക

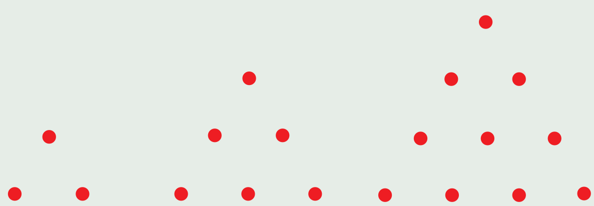
പുറംകോണുകളുടെ തുക

ഒരു അകക്കോണിന്റെ അളവ്

ഒരു പുറംകോണിന്റെ അളവ്

(2) പൊട്ടുകളടുക്കി ത്രികോണങ്ങളുണ്ടാക്കാം.

ഓരോ ത്രികോണത്തിലുമുള്ള പൊട്ടുകളുടെ എണ്ണം എഴുതുക.



തുടർന്നുള്ള മൂന്നു ത്രികോണങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കാൻ വേണ്ട പൊട്ടുകളുടെ എണ്ണം കണക്കാക്കുക.

(3) 3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 1 ശിഷ്ടം വരുന്ന എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെയും, 2 ശിഷ്ടം വരുന്ന എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെയും ശ്രേണികൾ എഴുതുക.

(4) 1, 6 എന്നീ അക്കങ്ങളിൽ അവസാനിക്കുന്ന എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി എഴുതുക. ഈ ശ്രേണിയെ മറ്റു രണ്ടുതരത്തിൽ വിവരിക്കുക.

(5) 1000 ലിറ്റർ വെള്ളമുള്ള ഒരു ടാങ്കിൽനിന്നും ഓരോ സെക്കന്റിലും 5 ലിറ്റർ വെള്ളം വീതം പുറത്തേക്കൊഴുകുന്നു.
ഓരോ സെക്കന്റിലും ടാങ്കിൽ മിച്ചമുള്ള വെള്ളം എത്രയാണ്? ഒരു ശ്രേണിയായി എഴുതുക.

ശ്രേണികളുടെ ബീജഗണിതം

വശങ്ങളുടെ നീളം 1 സെ.മീ., 2 സെ.മീ., 3 സെ.മീ., ... എന്നിങ്ങനെയായ സമചതുരങ്ങളുടെ ചുററളവുകൾ ക്രമമായെടുത്താൽ

$$4, 8, 12, \ldots$$

എന്ന ശ്രേണി കിട്ടുമെന്നു കണ്ടല്ലോ.

ഒരു ശ്രേണിയിലെ സംഖ്യകളെ അതിലെ **പദങ്ങൾ (terms)** എന്നാണ് പറയുന്നത്.

അപ്പോൾ മുകളിലെഴുതിയ ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങൾ 4, 8, 12, ... എന്നിങ്ങനെയാണ്. കുറേക്കൂടി വ്യക്തമായി പറഞ്ഞാൽ, ഒന്നാം പദം 4, രണ്ടാം പദം 8, മൂന്നാം പദം 12, ...

ഇക്കാര്യം ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

സ്ഥാനം	1,	2,	3,	...
പദം	4,	8,	12,	...

ഇതിലെ 5-ാം പദം എത്രയാണ്? 20-ാം പദമോ?

ഇവിടെ സ്ഥാനവും പദവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്താണ്?

ശ്രേണിയിലെ ഓരോ പദവും, സ്ഥാനത്തിന്റെ നാലു മടങ്ങാണ്.

അൽപം ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ച് ഇതുതന്നെ ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

ശ്രേണിയിലെ n-ാം പദം $4n$

ഒരു ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളെ സ്ഥാനക്രമത്തിൽ അക്ഷരങ്ങളുപയോഗിച്ച് എഴുതുന്നത് $x_1, x_2, x_3, \ldots$ അല്ലെങ്കിൽ $y_1, y_2, y_3, \ldots$ എന്നൊക്കെയാണ്. ഇതനുസരിച്ച്, മുകളിലെഴുതിയ ശ്രേണീനിയമം വീണ്ടും ചുരുക്കാം.

$$x_n = 4n$$

ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച്, ഒരു നിശ്ചിത വര വശമായ ബഹുഭുജങ്ങളുടെ ശ്രേണി വരയ്ക്കാം.

A, B എന്ന രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയതിനുശേഷം, Input Bar ൽ

Sequence [Polygon [A, B, n], n, 3, 10]

എന്ന നിർദ്ദേശം കൊടുത്താൽ മതി. n എന്ന സംഖ്യ, 3 മുതൽ 10 വരെ മാറ്റുക, അതിനൊപ്പം AB ഒരു വശമായി n വശങ്ങളുള്ള സമബഹുഭുജം വരയ്ക്കുക എന്നാണ് ഈ നിർദ്ദേശത്തിന്റെ അർഥം.

ബഹുഭുജങ്ങൾ ഓരോന്നായി വരയ്ക്കാൻ m എന്ന പേരിലൊരു Integer Slider ഉണ്ടാക്കി, വരയ്ക്കാനുള്ള നിർദ്ദേശം ഇങ്ങനെ മാറ്റുക.

Sequence [Polygon [A, B, n + 2], n, 1, m]

Slider നീക്കി m എന്ന സംഖ്യ 1, 2, 3, ... എന്നിങ്ങനെ മാറ്റുന്നതിനനുസരിച്ച്, 3, 4, 5, വശങ്ങളുള്ള സമബഹുഭുജങ്ങൾ വരയ്ക്കുക എന്നാണ് ഇതിന്റെയർഥം.

ഇതിൽ n + 2 നുപകരം 2n എന്നെഴുതിയാൽ, ഏതുതരം ബഹുഭുജങ്ങളാണ് കിട്ടുക?

2n + 1 ആക്കിയാലോ?

ഇതിൽ n ആയി 1, 2, 3, ... എന്നീ തുടർച്ചയായ എണ്ണൽസംഖ്യകളെടുക്കുമ്പോൾ,

$$x_1 = 4$$
$$x_2 = 8$$
$$x_3 = 12$$
$$\dots$$

എന്നിങ്ങനെ ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളെല്ലാം കിട്ടും.

ശ്രേണിയിലെ 100-ാം പദം

$$x_{100} = 400$$

എന്നു നേരിട്ടു കണക്കാക്കുകയുമാവാം.

ചുറ്റളവിനു പകരം പരപ്പളവെടുത്താൽ കിട്ടുന്ന ശ്രേണി ഇങ്ങനെയാണ്.

$$1, 4, 9, 16, \dots$$

ഇതിൽ, സ്ഥാനവും പദവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്താണ്?

ഓരോ പദവും സ്ഥാനത്തിന്റെ വർഗമാണ്.

ബീജഗണിതത്തിൽ പറഞ്ഞാലോ?

$$x_n = n^2$$

ഈ സമചതുരങ്ങളുടെ വികർണങ്ങളുടെ നീളവും ഒരു ശ്രേണിയായി എഴുതാമല്ലോ. അതിന്റെ ബീജഗണിതരൂപം എന്താണ്? എഴുതി നോക്കൂ.

വശങ്ങളുടെ നീളം അര സെന്റിമീറ്റർ വീതം കൂട്ടി ശ്രേണികളുണ്ടാക്കിയത് നോക്കാം.

വശം	1,	$1\frac{1}{2}$,	2,	$2\frac{1}{2}$,	...
ചുറ്റളവ്	4,	6,	8,	10,	...
പരപ്പളവ്	1,	$2\frac{1}{4}$,	4,	$6\frac{1}{4}$,	...
വികർണം	$\sqrt{2}$,	$\frac{3}{2}\sqrt{2}$,	$2\sqrt{2}$,	$\frac{5}{2}\sqrt{2}$,	...

വശങ്ങളുടെ നീളത്തിന്റെ ബീജഗണിതരൂപം എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

അതിന് ആദ്യം ഈ ശ്രേണിയെ ഇങ്ങനെ എഴുതിനോക്കാം.

$$1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \dots$$

ഇതിൽ പൂർണസംഖ്യകളും ഭിന്നസംഖ്യകളുമുണ്ട്. ഭിന്നസംഖ്യകളുടെയെല്ലാം ഛേദം 2 ആണ്. പൂർണസംഖ്യകളെയും ഛേദം 2 ആയ ഭിന്നസംഖ്യകളായി എഴുതിയാലോ?

$$\frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}, \frac{7}{2}, \ldots$$

അംശങ്ങളുടെ ശ്രേണി

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$$

ഇതിന്റെ ബീജഗണിതരൂപമെന്താണ്? എഴുതിനോക്കൂ.

അപ്പോൾ വശങ്ങളുടെ നീളത്തിന്റെ ശ്രേണി, ബീജഗണിതരൂപത്തിൽ എങ്ങനെയെഴുതാം?

n-ാം ചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം s_n എന്നെഴുതിയാൽ

$$s_n = \frac{n+1}{2}$$

ചുറ്റളവുകളുടെ ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപമോ?

വശത്തിന്റെ നീളത്തെ നാലുകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണല്ലോ ചുറ്റളവ്. അപ്പോൾ ചുറ്റളവുകളുടെ ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം

$$p_n = 4 \times \frac{1}{2}\ (n+1) = 2\ (n+1)$$

ഉദാഹരണമായി, ഈ ശ്രേണിയിലെ 25-ാം സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം

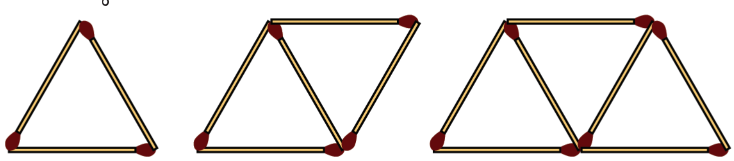
$$s_{25} = \frac{1}{2} \times (25+1) = 13$$

50-ാം സമചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്

$$p_{50} = 2 \times (50+1) = 102$$

ഇതുപോലെ പരപ്പളവുകളുടെ ശ്രേണിയുടെയും, വികർണങ്ങളുടെ ശ്രേണിയുടെയും ബീജഗണിതരൂപം എഴുതിനോക്കൂ.

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം:



ഒരു ത്രികോണമുണ്ടാക്കാൻ മൂന്നു തീപ്പെട്ടിക്കോല്, രണ്ടെണ്ണമുണ്ടാക്കാൻ അഞ്ചു കോല്, മൂന്നെണ്ണത്തിന് ഏഴു കോല്.

ഇങ്ങനെ നാലു ത്രികോണമുണ്ടാക്കാൻ എത്ര കോലു വേണം?

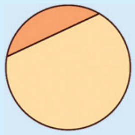
അഞ്ചു ത്രികോണമുണ്ടാക്കാനോ?

ആദ്യത്തെ ത്രികോണമുണ്ടാക്കാൻ മൂന്നു കോല് വേണം, തുടർന്ന് ഓരോ ത്രികോണം ഉണ്ടാക്കാനും രണ്ടുകോല് വീതം മതി. അങ്ങനെ കോലുകളുടെ എണ്ണം

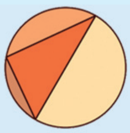
$$3, 5, 7, 9, 11, \ldots$$

എന്ന ശ്രേണിയായി എഴുതാം.

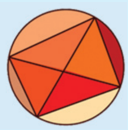
വൃത്തവിഭജനം



ഒരു വൃത്തത്തിൽ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെടുത്ത് ഒരു വര കൊണ്ട് യോജിപ്പിച്ചാൽ, അത് വൃത്തത്തെ രണ്ടു ഭാഗങ്ങളാക്കുമല്ലോ:



വൃത്തത്തിലെ മൂന്നു ബിന്ദുക്കളെടുത്തു യോജിപ്പിച്ചാൽ, നാലു ഭാഗങ്ങളാകും:



നാലു ബിന്ദുക്കളെടുത്ത് എല്ലാ ജോടികളേയും യോജിപ്പിച്ചാലോ?

ബിന്ദുക്കൾ അഞ്ചായാൽ?

ആറു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാൽ എത്ര ഭാഗങ്ങളാകുമെന്നാണ് പ്രതീക്ഷിക്കുന്നത്? ഇതു ശരിയാണോ എന്നു വരച്ചു നോക്കൂ.

10 ത്രികോണമുണ്ടാക്കാൻ എത്ര കോലുവേണം?

ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന് 3 കോല്, ബാക്കി 9 ത്രികോണത്തിനു 2 വീതം, $9 \times 2 = 18$; ആകെ $3 + 18 = 21$

100 ത്രികോണമുണ്ടാക്കാൻ എത്ര കോലു വേണം?

$$3 + (99 \times 2) = 201$$

ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചു പറഞ്ഞാലോ?

n ത്രികോണങ്ങളുണ്ടാക്കാൻ വേണ്ട കോലുകളുടെ എണ്ണം എങ്ങനെ എഴുതാം?

ആദ്യത്തെ ത്രികോണമുണ്ടാക്കാൻ 3 കോലും, ബാക്കി $n - 1$ ത്രികോണമുണ്ടാക്കാൻ $2(n - 1) = 2n - 2$ കോലും ;

ആകെ വേണ്ട കോല് $3 + 2n - 2 = 2n + 1$

അതായത്, n ത്രികോണമുണ്ടാക്കാൻ വേണ്ട കോലുകളുടെ എണ്ണം

$$x_n = 2n + 1$$

ഇതാണ് 3, 5, 7, ... എന്നിങ്ങനെ 3 നോട് 2 കൂട്ടി തുടരുന്ന ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം. ഇതിൽനിന്ന്, 500 ത്രികോണമുണ്ടാക്കാൻ എത്ര കോലുവേണമെന്ന് എളുപ്പം കണക്കാക്കാമല്ലോ.

$$x_{500} = (2 \times 500) + 1 = 1001$$

ഒരു ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം കണ്ടുപിടിച്ചുകഴിഞ്ഞാൽ, അതിലെ സംഖ്യകൾ കണക്കാക്കാൻ കമ്പ്യൂട്ടർ ഉപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, വശങ്ങളുടെ നീളം 1 സെ.മീ, 2 സെ.മീ, 3 സെ.മീ, ... എന്നിങ്ങനെയായ ഇരുമ്പു സമചതുരക്കട്ടകളുടെ ഭാരം ക്രമമായെഴുതുന്ന ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം

$$x_n = 7.8n^3$$

ഇത്തരം നൂറു കട്ടകളുടെ ഭാരം ക്രമമായി എഴുതിക്കിട്ടാൻ, പൈഥൻ ഭാഷയിൽ (python3)

```
for n in range (1,101):
    print (7.8*n**3)
```

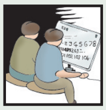
എന്നെഴുതിയാൽ മതി. ഇതുതന്നെ `weights.py` എന്ന പേരിൽ ഒരു പ്രോഗ്രാമായി എഴുതി

```
python3.2 weights.py > weights.txt
```

എന്ന നിർദ്ദേശം കൊടുത്താൽ ഈ സംഖ്യകൾ ക്രമമായി weights.txt എന്ന file ൽ എഴുതിക്കിട്ടുകയും ചെയ്യും.

ഒരു ശ്രേണിയിലെ സംഖ്യകൾ ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ചും കണ്ടുപിടിക്കാം. 1, 4, 9, ... എന്നിങ്ങനെ വർഗസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ പത്ത് സംഖ്യകൾ കിട്ടാൻ Sequence (n^2, n,1, 10) എന്ന് Input Bar ൽ കൊടുത്താൽ മതി. m എന്ന പേരിൽ ഒരു Integer സ്ലൈഡർ ഉണ്ടാക്കി Sequence (n^2, n, 1, m) എന്നു കൊടുത്താൽ m മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് ശ്രേണിയിലെ സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം മാറും.

2, 4, 8, ... എന്ന ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം 2^n ആണല്ലോ. ഈ ശ്രേണി കിട്ടാൻ Sequence (2^n, n, 1, m) എന്നു നൽകിയാൽ മതി.



(1) ചുവടെപ്പറയുന്ന സംഖ്യാശ്രേണികൾ ഓരോന്നിന്റെയും ബീജഗണിതരൂപം എഴുതുക.

(i) ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി

(ii) 3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 1 ശിഷ്ടം വരുന്ന എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി

(iii) 1 ൽ അവസാനിക്കുന്ന എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി

(iv) 1 ലോ 6 ലോ അവസാനിക്കുന്ന എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി

(2) സമഭുജത്രികോണം, സമചതുരം, സമപഞ്ചഭുജം എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന ജ്യാമിതീയരൂപങ്ങളുടെ അകക്കോണുകളുടെ തുക, പുറംകോണുകളുടെ തുക, ഒരു അകക്കോണിന്റെ അളവ്, ഒരു പുറംകോണിന്റെ അളവ് എന്നീ ശ്രേണികളുടെ ബീജഗണിതരൂപം എഴുതുക.

(3) ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ

6YB3GX

ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചുകിട്ടുന്ന ചെറിയ ത്രികോണം വെട്ടിമാറ്റിയതാണ് ആദ്യത്തെ ചിത്രം. ഇതിലെ മൂന്നു ചുവന്ന ത്രികോണങ്ങളിൽനിന്നും ഇതുപോലെ നടുവിലെ ത്രികോണം വെട്ടിമാറ്റിയതാണ് രണ്ടാമത്തെ ചിത്രം. ഈ ക്രിയ ഒരിക്കൽകൂടി ചെയ്തതാണ് മൂന്നാം ചിത്രം.

(i) ഓരോ ചിത്രത്തിലും എത്ര ചുവന്ന ത്രികോണങ്ങളുണ്ട്?

(ii) ഒന്നും വെട്ടിമാറ്റാത്ത മുഴുവൻ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 1 എന്നെടുത്ത്, ഓരോ ചിത്രത്തിലെയും ഒരു ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

(iii) ഓരോ ചിത്രത്തിലെയും ചുവന്ന ത്രികോണങ്ങളുടെ ആകെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

(iv) ഇങ്ങനെ തുടർന്നാൽ കിട്ടുന്ന ഈ മൂന്നു ശ്രേണികളുടെയും ബീജഗണിതരൂപം എഴുതുക.

സമാന്തരശ്രേണികൾ

വശങ്ങളുടെ നീളം 1, 2, 3, 4, ... ആയ സമചതുരങ്ങളുടെ ചുറ്റളവുകൾ കണക്കാക്കിയപ്പോൾ

4, 8, 12, 16, ...

എന്ന ശ്രേണി കിട്ടി. ഇവിടെ വശങ്ങളുടെ നീളം 1 വീതം കൂടുന്നതിനാൽ, ചുറ്റളവ് 4 വീതം കൂടുന്നു. വശങ്ങളുടെ നീളം $1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, \ldots$ എന്നെടുത്താലോ?

വശങ്ങളുടെ നീളം $\frac{1}{2}$ വീതം കൂടുന്നതിനാൽ, ചുറ്റളവ് $4 \times \frac{1}{2} = 2$ വീതം കൂടുന്നു. കിട്ടുന്ന ശ്രേണി

4, 6, 8, 10, ...

ഇനി തീപ്പെട്ടിക്കോലുകൾകൊണ്ട് ത്രികോണങ്ങളുണ്ടാക്കിയ കണക്കു നോക്കൂ. ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന് 3 കോല്; തുടർന്നുള്ള ഓരോ ത്രികോണത്തിനും 2 വീതം കൂടുന്നു. അങ്ങനെ 3 ൽ നിന്നു തുടങ്ങി, വീണ്ടും വീണ്ടും 2 കൂട്ടി

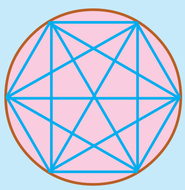
3, 5, 7, 9, ...

എന്ന ശ്രേണി കിട്ടുന്നു.

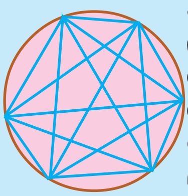
ഒരു സംഖ്യയിൽനിന്നു തുടങ്ങി, ഒരേ സംഖ്യ തന്നെ വീണ്ടും വീണ്ടും കൂട്ടി കിട്ടുന്ന ശ്രേണിയ്ക്ക്, സമാന്തരശ്രേണി (arithmetic sequence) എന്നാണ് പേര്.

നിഗമനങ്ങളിലെ അപകടം

വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചു കിട്ടുന്ന ഭാഗങ്ങളെക്കുറിച്ച്, **വൃത്തവിഭജനം** എന്ന ഭാഗത്തു കണ്ടല്ലോ. ബിന്ദുക്കളുടെ എണ്ണം 2, 3, 4, 5 എന്നിങ്ങനെയാകുമ്പോൾ, ഭാഗങ്ങളുടെ എണ്ണം 2, 4, 8, 16 എന്നു കിട്ടും. ബിന്ദുക്കൾ 6 എണ്ണമാകുമ്പോഴോ? 32 എന്നാകും ഊഹം. വരച്ചു നോക്കിയാലോ?



ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ അകലത്തിലാണെങ്കിൽ 30 ഭാഗം അല്ലെങ്കിൽ 31 ഭാഗം.



ഏതായാലും, പരമാവധി 31 ഭാഗം. പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, വൃത്തത്തിലെ n ബിന്ദുക്കൾ പരസ്പരം യോജിപ്പിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന പരമാവധി ഭാഗങ്ങളുടെ എണ്ണം

$$\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)+\frac{1}{2}n(n-1)+1$$

ആണെന്നു തെളിയിക്കാൻ കഴിയും. ഈ ബീജഗണിതവാചകത്തിലും 2^{n-1} എന്ന വാചകത്തിലും $n = 1, 2, 3, 4, 5$ എന്നീ സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്നത്, 1, 2, 4, 8, 16 എന്നീ സംഖ്യകൾ തന്നെയാണെന്നതാണ് രസകരം. $n = 6$ മുതൽ, രണ്ടു വാചകത്തിൽ നിന്നും കിട്ടുന്ന സംഖ്യകൾ വ്യത്യസ്തമാകും.

രണ്ടാമത്തെ ചതുരക്കണക്കിലെ വശങ്ങളുടെ നീളം

$$1,\ 1\frac{1}{2},\ 2,\ 2\frac{1}{2}, \ldots$$

എന്ന ശ്രേണിയിലാണല്ലോ. ഇതുമൊരു സമാന്തരശ്രേണി തന്നെ. 1 ൽ നിന്നു തുടങ്ങി, $\frac{1}{2}$ ആവർത്തിച്ചു കൂട്ടുന്നു.

ബഹുഭുജങ്ങളുടെ പുറംകോണുകളുടെ തുകയായി കിട്ടുന്ന ശ്രേണി

360, 360, 360, ...

എന്നാണല്ലോ. ഇതും സമാന്തരശ്രേണിയാണ്. 360 ൽ നിന്നു തുടങ്ങുന്നു. വീണ്ടും വീണ്ടും 0 കൂട്ടുന്നു എന്നും പറയാമല്ലോ.

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം.

ഒരു നേർവരയിലൂടെ 10 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്മേൽ സഞ്ചാരത്തിന്റെ എതിർദിശയിൽ നിശ്ചിതബലം പ്രയോഗിച്ച്, ഓരോ സെക്കന്റിലും 2 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന നിരക്കിൽ വേഗം കുറയ്ക്കുന്നു. ഓരോ സെക്കന്റ് കഴിയുമ്പോഴുമുള്ള വേഗം

10, 8, 6, ...

എന്ന ശ്രേണിയിലാണല്ലോ.

ഇവിടെ 10 ൽ നിന്ന് 2 തുടരെ കുറച്ചാണ് ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങൾ കിട്ടുന്നത്. ഇതും ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയായാണ് കണക്കാക്കുന്നത്. ഇത്തരം ശ്രേണികളെയും ഉൾക്കൊള്ളാൻ, ഒന്നുകിൽ സമാന്തരശ്രേണിയുടെ നിർവചനത്തിൽ

"ഒരേ സംഖ്യ തുടരെ കൂട്ടുക" എന്നതിനെ "ഒരേ സംഖ്യ തുടരെ കൂട്ടുകയോ തുടരെ കുറയ്ക്കുകയോ ചെയ്യുക" എന്നു മാറ്റാം. അല്ലെങ്കിൽ "2 കുറയ്ക്കുക എന്നാൽ, −2 കൂട്ടുക" എന്ന് ഗണിതഭാഷയിലൂടെ ന്യായീകരിക്കാം.

സമാന്തരശ്രേണികളെ മറ്റൊരു തരത്തിലും വിവരിക്കാം. ഇത്തരമൊരു ശ്രേണിയിൽ, ഏതു സ്ഥാനത്തെയും പദത്തിൽനിന്ന് തൊട്ടു മുന്നിലുള്ള പദത്തിലെത്താൻ ഒരേ സംഖ്യയാണല്ലോ കൂട്ടേണ്ടത്. അപ്പോൾ ഏതു പദത്തിൽനിന്നും തൊട്ടുപുറകിലെ പദം കുറച്ചാൽ കിട്ടുന്നത് ഈ സംഖ്യതന്നെയാണ്.

ഏതു പദത്തിൽ നിന്നും തൊട്ടുപുറകിലെ പദം കുറച്ചാൽ ഒരേ സംഖ്യതന്നെ കിട്ടുന്ന ശ്രേണിയാണ് സമാന്തരശ്രേണി.

ഒരു പദത്തിൽനിന്ന് തൊട്ടുപുറകിലെ പദം കുറച്ചു കിട്ടുന്ന ഈ സ്ഥിരവ്യത്യാസത്തെ സമാന്തരശ്രേണിയുടെ **പൊതുവ്യത്യാസം (common difference)** എന്നാണ് പറയുന്നത്.

പലപ്പോഴും സമാന്തരശ്രേണിയാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുന്നത്, പദവ്യത്യാസം സ്ഥിരമാണോ എന്നു നോക്കിയാണ്. ഉദാഹരണമായി, 3 ന്റെ ഗുണിതങ്ങൾ നോക്കൂ:

$$3, 6, 9, \ldots$$

3 ന്റെ അടുത്തടുത്ത രണ്ടു ഗുണിതങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം 3 തന്നെയാണല്ലോ. അപ്പോൾ ഇത് പൊതുവ്യത്യാസം 3 ആയ ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയാണ്.

ഇനി ഈ ഗുണിതങ്ങളോരോന്നിനോടും 1 കൂട്ടിയാലോ?

$$4,\ 7,\ 10, \ldots$$

എന്ന ശ്രേണി കിട്ടും.

ഇതും 3 പൊതുവ്യത്യാസമായ സമാന്തരശ്രേണി തന്നെ.

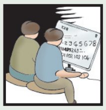
ഇനി 3 ന്റെ കൃതികളുടെ ശ്രേണി നോക്കൂ:

$$3,\ 9,\ 27, \ldots$$

$9 - 3 = 6$ ഉം $27 - 9 = 18$ ഉം; അതായത്, അടുത്തടുത്ത പദങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം ഒരേ സംഖ്യയല്ല.

ഇതൊരു സമാന്തരശ്രേണിയുമല്ല.

ഇനി ഇതുവരെ കണ്ട ശ്രേണികളെല്ലാം ഒന്നുകൂടി നോക്കി, അവയിലെ സമാന്തരശ്രേണികൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.



(1) ചുവടെപ്പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ശ്രേണികളോരോന്നും സമാന്തരശ്രേണിയാണോ എന്നു തീരുമാനിക്കുക. കാരണം എഴുതണം. സമാന്തരശ്രേണിയാണെങ്കിൽ, പൊതുവ്യത്യാസവും എഴുതണം.

(i) ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി

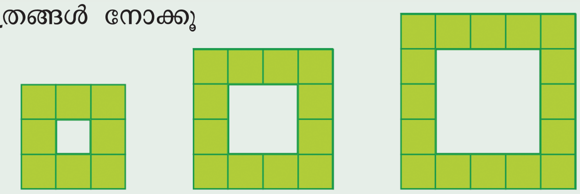
(ii) ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി

(iii) ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ പകുതിയായ ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി

(iv) 2 ന്റെ കൃതികളുടെ ശ്രേണി

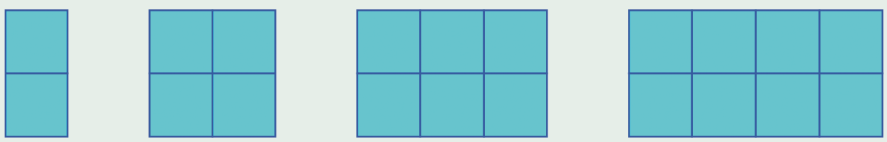
(v) എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ വ്യുൽക്രമങ്ങളുടെ ശ്രേണി

(2) ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ



ഇങ്ങനെ തുടർന്നാൽ കിട്ടുന്ന ചിത്രങ്ങളിലെ നിറം കൊടുത്ത ചെറുസമചതുരങ്ങളുടെ എണ്ണം സമാന്തരശ്രേണിയാണോ? എന്തുകൊണ്ട്?

(3) ചുവടെയുള്ള ചിത്രങ്ങൾ നോക്കുക.



(i) ഓരോ ചതുരത്തിലും എത്ര ചെറിയ സമചതുരങ്ങളുണ്ട്?

(ii) എത്ര വലിയ സമചതുരങ്ങളുണ്ട്?

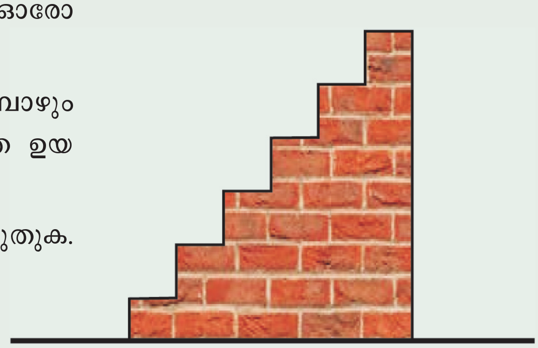
(iii) ആകെ എത്ര സമചതുരങ്ങളുണ്ട്?

ഇങ്ങനെ തുടർന്നാൽ കിട്ടുന്ന ഓരോ ശ്രേണിയും സമാന്തരശ്രേണിയാണോ?

(4) ചിത്രത്തിലെ പടിക്കെട്ടിൽ ആദ്യ പടിയുടെ ഉയരം 10 സെന്റിമീറ്റർ; പിന്നീടുള്ള ഓരോ പടിക്കും 17.5 സെന്റിമീറ്റർ.

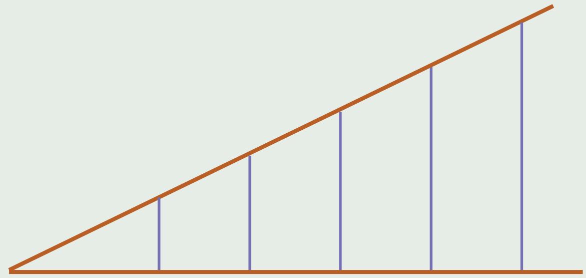
(i) ഒരാൾ ഓരോ പടി കയറുമ്പോഴും അയാൾ തറയിൽനിന്ന് എത്ര ഉയരത്തിലായിരിക്കും?

(ii) ഈ ഉയരങ്ങളുടെ ശ്രേണി എഴുതുക.



(5) ചിത്രത്തിൽ ഒരേ അകലം ഇട വിട്ടാണ് താഴത്തെ വരയ്ക്ക് ലംബങ്ങൾ വരച്ചിരിക്കുന്നത്.

ഇങ്ങനെ തുടരുന്ന ലംബങ്ങളുടെ നീളം സമാന്തരശ്രേണിയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.



(6) ഒരു ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം

$$x_n = n^3 - 6n^2 + 13n - 7$$

ഇത് സമാന്തരശ്രേണിയാണോ?

സ്ഥാനവും പദവും

1, 11 എന്നീ സംഖ്യകൾ ആദ്യത്തെയും രണ്ടാമത്തെയും പദങ്ങളായി ഒരു സമാന്തരശ്രേണി ഉണ്ടാക്കാമോ?

എളുപ്പമല്ലേ? 1 ൽ നിന്ന് 11 ൽ എത്താൻ 10 കൂട്ടണം. തുടർന്നും 10 തന്നെ കൂട്ടിക്കൊണ്ടിരുന്നാൽ സമാന്തരശ്രേണി ആകും.

1, 11, 21, 31, ...

അപ്പോൾ മറ്റൊരു ചോദ്യം : 1, 11 എന്നീ സംഖ്യകൾ ആദ്യത്തെയും മൂന്നാമത്തെയും പദങ്ങളായി ഒരു സമാന്തരശ്രേണി ഉണ്ടാക്കാമോ?

ഇങ്ങനെയൊരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ പൊതുവ്യത്യാസം എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

1 നോട് പൊതുവ്യത്യാസം കൂട്ടിയതാണ് രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ; അതു നമുക്കറിയില്ല. ഒരിക്കൽകൂടി പൊതുവ്യത്യാസം കൂട്ടിയാൽ മൂന്നാമത്തെ സംഖ്യയായ 11 കിട്ടണം.

അതായത്, 1 നോട് പൊതുവ്യത്യാസത്തിന്റെ രണ്ടുമടങ്ങ് കൂട്ടുമ്പോഴാണ് 11 കിട്ടേണ്ടത്.

അപ്പോൾ പൊതുവ്യത്യാസത്തിന്റെ രണ്ടുമടങ്ങ് 10; പൊതുവ്യത്യാസം 5

ഇനി ശ്രേണി എഴുതാമല്ലോ.

1, 6, 11, 16, 21, ...

3-ാം പദം 37 ഉം, 7-ാം പദം 73 ഉം ആയ സമാന്തരശ്രേണിയോ?

ശ്രേണിയും ശിഷ്ടവും

ഇരട്ടസംഖ്യകളായ 2, 4, 6, ... ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയാണ്. ഒറ്റസംഖ്യകളായ 1, 3, 5, ... ഉം സമാന്തരശ്രേണിയാണ്. രണ്ട് ശ്രേണികളുടേയും പൊതുവ്യത്യാസം 2 തന്നെ.

2 കൊണ്ടു പൂർണമായി ഹരിക്കാൻ കഴിയുന്ന (അഥവാ, ശിഷ്ടം 0 ആയ) എണ്ണൽസംഖ്യകളാണല്ലോ, ഇരട്ട സംഖ്യകൾ; ശിഷ്ടം 1 വരുന്നവ ഒറ്റസംഖ്യകളും.

ഇതുപോലെ 3 കൊണ്ട് എണ്ണൽ സംഖ്യകളെ ഹരിക്കുമ്പോൾ ശിഷ്ടം 0, 1, 2 വരുന്ന മൂന്നു സമാന്തര ശ്രേണികൾ ഉണ്ടാക്കാം. ഇവയുടെയെല്ലാം പൊതുവ്യത്യാസം എന്താണ്?

ഹരിക്കുന്നത് 4 കൊണ്ടാണെങ്കിലോ?

ഇനി മറിച്ചു ചിന്തിക്കാം. പദങ്ങളെല്ലാം എണ്ണൽസംഖ്യകളായ ഒരു ശ്രേണി എടുത്താൽ, ഏതു രണ്ടു പദങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസവും പൊതുവ്യത്യാസത്തിന്റെ ഗുണിതമാണ്; അതിനാൽ, ഈ പദങ്ങളെ പൊതുവ്യത്യാസം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടങ്ങൾ തുല്യമാണ് (എന്തുകൊണ്ട്?)

3-ാം പദത്തിൽനിന്ന് 7-ാം പദത്തിലെത്താൻ പൊതുവ്യത്യാസം 7 − 3 = 4 തവണ കൂട്ടണം. കൂട്ടിയ സംഖ്യ 73 − 37 = 36

അപ്പോൾ, പൊതുവ്യത്യാസത്തിന്റെ 4 മടങ്ങ്, 36; പൊതുവ്യത്യാസം 36 ÷ 4 = 9

ആദ്യപദം എങ്ങനെ കണക്കാക്കും?

3-ാം പദത്തിൽനിന്ന് രണ്ടുതവണ പൊതുവ്യത്യാസം കുറയ്ക്കണം, അതായത് $37 - (2 \times 9) = 19$

ഇനി ശ്രേണി ആദ്യം മുതൽ എഴുതാമല്ലോ:

$$19, 28, 37, \ldots$$

ഈ ശ്രേണിയിലെ 25-ാം പദം എങ്ങനെ കണക്കാക്കും?

പല വഴികളുണ്ട്

3-ാം പദത്തിനോട് പൊതുവ്യത്യാസത്തിന്റെ $(25 - 3) = 22$ മടങ്ങ് കൂട്ടാം:

$$37 + (22 \times 9) = 235$$

2-ാം പദത്തിനോട് പൊതുവ്യത്യാസത്തിന്റെ $(25 - 2) = 23$ മടങ്ങ് കൂട്ടാം:

$$28 + (23 \times 9) = 235$$

1-ാം പദത്തിനോട് പൊതുവ്യത്യാസത്തിന്റെ $(25 - 1) = 24$ മടങ്ങ് കൂട്ടാം:

$$19 + (24 \times 9) = 235$$

ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ, ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ രണ്ടു പദങ്ങളും അവയുടെ പദസ്ഥാനങ്ങളും അറിഞ്ഞാൽ ശ്രേണി മുഴുവൻ കണക്കാക്കാം. അതിനു പയോഗിക്കുന്ന തത്വം എന്താണ്?

സമാന്തരശ്രേണിയിൽ ഏതു രണ്ടു പദങ്ങളുടെയും വ്യത്യാസം, അവയുടെ സ്ഥാനങ്ങളുടെ വ്യത്യാസവും പൊതുവ്യത്യാസവും തമ്മിലുള്ള ഗുണനഫലമാണ്.

ഇത് മറ്റൊരുതരത്തിലും പറയാം:

സമാന്തരശ്രേണിയിൽ പദവ്യത്യാസം, സ്ഥാനവ്യത്യാസത്തിന് ആനുപാതികമാണ്; ആനുപാതികസ്ഥിരം പൊതുവ്യത്യാസവും.

ഒരു സംഖ്യ ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ പദമാണോ എന്നു പരിശോധിക്കാനും ഈ തത്വം ഉപയോഗിക്കാം.

ശ്രേണീ നിയമം

3, 5, 7, ... എന്ന ശ്രേണിയിലെ അടുത്ത പദം എന്താണ്?

ഇവിടെ സമാന്തരശ്രേണി എന്നു പറഞ്ഞിട്ടില്ലല്ലോ. അപ്പോൾ അടുത്ത പദം 9 തന്നെ ആകണമെന്നില്ല. ഉദാഹരണമായി, ഉദ്ദേശിച്ചത് ഒറ്റസംഖ്യകളായ അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണിയാണെങ്കിൽ, അടുത്ത പദം 11 ആണ്.

എന്താണിതിന്റെ ഗുണപാഠം? കുറേ സംഖ്യകൾ ക്രമമായി എഴുതിയതിൽ നിന്ന്, ശ്രേണിയിലെ തുടർന്നുള്ള പദങ്ങൾ കൃത്യമായി പറയാൻ കഴിയില്ല. ശ്രേണി ഉണ്ടാക്കാൻ ഉപയോഗിച്ച നിയമം, അല്ലെങ്കിൽ ശ്രേണി ഉണ്ടാകുന്ന സന്ദർഭം വ്യക്തമാക്കിയാലേ, തുടർന്നുള്ള പദങ്ങളെന്തെന്ന് പറയാൻ സാധിക്കൂ.

ഈ ശ്രേണികൾ നോക്കൂ:

$$x_n = 2n - 1$$
$$x_n = n^2 - n + 1$$
$$x_n = n^3 - 3n^2 + 4n - 1$$

എല്ലാറ്റിലും ആദ്യത്തെ രണ്ടു പദങ്ങൾ 1, 3 തന്നെയല്ലേ?

ഉദാഹരണമായി നേരത്തെ എഴുതിയ സമാന്തരശ്രേണി നോക്കാം;

19, 28, 37, ...

ഇതിലെ ഏതു രണ്ടു പദങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസവും പൊതുവ്യത്യാസമായ 9 ന്റെ ഗുണിതമാണല്ലോ. മറിച്ച്, ഏതെങ്കിലും ഒരു സംഖ്യയും ശ്രേണിയിലെ ഒരു പദവും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം 9 ന്റെ ഗുണിതമായാലോ?

ഉദാഹരണമായി 1000 എന്ന സംഖ്യയും, ഈ ശ്രേണിയിലെ ആദ്യപദമായ 19 ഉം തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം $1000 - 19 = 981$. ഇത് 9 ന്റെ ഗുണിതമാണ് $(981 = 109 \times 9)$. അപ്പോൾ ആദ്യപദമായ 19 ന്റെ കൂടെ പൊതുവ്യത്യാസത്തിന്റെ 109 മടങ്ങ് കൂട്ടുമ്പോഴാണ് 1000 കിട്ടുന്നത്. അതിനാൽ 1000 ഈ ശ്രേണിയിലെ 110-ാം പദമാണ്.

100 മുതലുള്ള 10 ന്റെ ഏതു കൃതിയും 19, 28, 37, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ പദമാണോ?

(1) ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഓരോ സമാന്തരശ്രേണിയിലും ചില സംഖ്യകൾ എഴുതിയിട്ടില്ല. അവയുടെ സ്ഥാനം ◯ കൊണ്ടു സൂചിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. ഈ സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) 24, 42, ◯, ◯, ... (ii) ◯, 24, 42 , ◯, ...

(iii) ◯, ◯, 24, 42, ... (iv) 24, ◯, 42, ◯, ...

(v) ◯, 24, ◯, 42, ... (vi) 24, ◯, ◯, 42, ...

(2) ചില സമാന്തരശ്രേണികളിലെ രണ്ടു നിശ്ചിതസ്ഥാനത്തുള്ള പദങ്ങൾ ചുവടെ തന്നിട്ടുണ്ട്. ഓരോ ശ്രേണിയുടെയും ആദ്യത്തെ അഞ്ചു പദങ്ങൾ എഴുതുക.

(i) 3-ാം പദം 34; 6-ാം പദം 67

(ii) 3-ാം പദം 43; 6-ാം പദം 76

(iii) 3-ാം പദം 2; 5-ാം പദം 3

(iv) 4-ാം പദം 2; 7-ാം പദം 3

(v) 2-ാം പദം 5; 5-ാം പദം 2

(3) ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ 5-ാം പദം 38 ഉം 9-ാം പദം 66 ഉം; 25-ാം പദം എന്താണ്?

(4) 13, 24, 35 എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിൽ 101 ഒരു പദമാണോ? 1001 ആയാലോ?

(5) 7 കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ 3 ശിഷ്ടം വരുന്ന മൂന്നക്കസംഖ്യകൾ എത്രയുണ്ട്?

(6) തന്നിരിക്കുന്ന സമചതുരത്തിൽ, ഓരോ വരിയിലും ഓരോ നിരയിലും സമാന്തരശ്രേണി ആകുന്നവിധത്തിൽ ഒഴിഞ്ഞ കളങ്ങളിൽ സംഖ്യകൾ എഴുതുക.

1, 4, 28, 7 എന്നീ സംഖ്യകൾക്ക് പകരം മറ്റേതെങ്കിലും നാല് സംഖ്യകൾ എഴുതിയാലോ?

1			4
7			28

(7) പട്ടികയിൽ ചില സമാന്തരശ്രേണികളും, ഓരോ ശ്രേണിയുടെയും നേരെ രണ്ടു സംഖ്യകളും എഴുതിയിട്ടുണ്ട്. സംഖ്യകളോരോന്നും അതത് ശ്രേണിയിൽ ഉണ്ടാകുമോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

ശ്രേണി	സംഖ്യ	ഉണ്ട്/ഇല്ല
11, 22, 33, ...	123	
	132	
12, 23, 34, ...	100	
	1000	
21, 32, 43, ...	100	
	1000	
$\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \ldots$	3	
	4	
$\frac{3}{4}, 1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}, \ldots$	3	
	4	

സമാന്തരശ്രേണികളുടെ ബീജഗണിതം

ഇനി ചില സമാന്തരശ്രേണികളുടെ ബീജഗണിതരൂപം നോക്കാം. ആദ്യം

$$19, 28, 37, \ldots$$

എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയാകാം. ഇതിലെ ഏതു സ്ഥാനത്തെയും പദം കണക്കാക്കാൻ, ഒന്നാം സ്ഥാനവുമായുള്ള സ്ഥാനവ്യത്യാസം, പൊതുവ്യത്യാസമായ 9 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, ഒന്നാം പദമായ 19 നോട് കൂട്ടണം. ഉദാഹരണമായി, ഇതിലെ 15-ാം പദത്തിന് ഒന്നാം സ്ഥാനവുമായുള്ള സ്ഥാനവ്യത്യാസം $15 - 1 = 14$; അപ്പോൾ 15-ാം പദം കണക്കാക്കാൻ ആദ്യപദമായ 19 നോട് പൊതുവ്യത്യാസമായ 9 ന്റെ 14 മടങ്ങ് കൂട്ടിയാൽ മതി.

$$15\text{-ാം പദം } 19 + (14 \times 9) = 145$$

ഇരുപതാം പദമോ?

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ, n എന്ന ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യ എടുത്താലും, n-ാം പദം

$$19 + (n - 1) \times 9 = 9n + 10$$

അതായത്, ഈ ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം

$$x_n = 9n + 10$$

ഇനി

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \ldots$$

എന്ന സമാന്തരശ്രേണി ആയാലോ?

ആദ്യത്തെ കണക്കിലെപ്പോലെ ആലോചിച്ചാൽ, n-ാം പദം

$$\frac{1}{2} + (n - 1) \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}n + \frac{1}{4}$$

അതായത്, ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം

$$x_n = \frac{1}{4}(n + 1)$$

ആദ്യത്തെ ശ്രേണിയിൽ, സ്ഥാനസംഖ്യയായ n നെ 9 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, 10 കൂട്ടുന്നു; രണ്ടാമത്തെ ശ്രേണിയിൽ, $\frac{1}{4}$ കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, $\frac{1}{4}$ കൂട്ടുന്നു.

ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയും ഈ രൂപത്തിലാണോ?

ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യപദം f എന്നും, പൊതുവ്യത്യാസം d എന്നും എടുത്താൽ, അതിലെ n-ാം പദം

$$f + (n - 1)\, d = dn + (f - d)$$

അതായത്, n നെ d എന്ന സംഖ്യ കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, $f - d$ എന്ന സംഖ്യ കൂട്ടുക.

അപ്പോൾ ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും നിശ്ചിതസ്ഥാനത്തെ പദം, സ്ഥാനസംഖ്യയെ പൊതുവ്യത്യാസം കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, ഒരു നിശ്ചിതസംഖ്യ കൂട്ടിയതാണ്. അതായത്, ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും ബീജഗണിതരൂപം

$$x_n = an + b$$

മറിച്ച്, $x_n = an + b$ എന്ന ഏതു ശ്രേണിയും സമാന്തരശ്രേണിയാകുമോ?

ഇതിലെ അടുത്തടുത്ത ഏതു രണ്ടു പദവും $an + b$, $a(n + 1) + b$ എന്നതായിരിക്കുമല്ലോ; ഇവയുടെ വ്യത്യാസം

$$a(n + 1) + b - (an + b) = a$$

അതായത്, അടുത്തടുത്തുള്ള ഏതു രണ്ടു പദങ്ങളുടെയും വ്യത്യാസം a തന്നെ ആണ്.

അതിനാൽ ഇതൊരു സമാന്തരശ്രേണിയാണ്.

ജിയോജിബ്രയിൽ A എന്നൊരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തി

Sequence [Circle [A, n], n, 1, 10]

എന്ന നിർദേശം കൊടുത്താൽ, A കേന്ദ്രവും, ആരം 1 മുതൽ 10 വരെയുള്ള എണ്ണൽ സംഖ്യകളും ആയ വൃത്തങ്ങൾ കിട്ടും. വൃത്തങ്ങളുടെ എണ്ണം മാറ്റാൻ, m എന്ന ഒരു integer slider ഉണ്ടാക്കി, നിർദേശം മാറ്റിയാൽ മതി.

Sequence [Circle [A , n], n, 1, m]

ഇനി ഇതിലെ n നു പകരം 2n എന്നോ 2n + 1 എന്നോ മാറ്റി, ആരങ്ങൾ ഇരട്ടസംഖ്യകളോ, ഒറ്റസംഖ്യകളോ മാത്രമാക്കാം.

Min = 0 ആയി a, b എന്ന രണ്ടു Slider ഉണ്ടാക്കി നിർദേശം

Sequence [Circle [A , an + b], n, 1, m]

എന്നാക്കിയാൽ, a, b മാറ്റി, ആരങ്ങൾ പല സമാന്തരശ്രേണിയിലാക്കാം.

ഒരു സമഷഡ്ഭുജം വരച്ച്, അതിന്റെ മൂലകളിലെല്ലാം ഇത്തരം വൃത്തശ്രേണികൾ വരച്ചു നോക്കൂ.

m എന്ന ഒരു integer സ്ലൈഡറും a, b എന്നിങ്ങനെ രണ്ട് സ്ലൈഡറുകളും നിർമിച്ച് Sequence (an + b, n, 1, m) എന്ന input നൽകിയാൽ a, b ഇവ മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് വ്യത്യസ്ത സമാന്തരശ്രേണികൾ കിട്ടും. m മാറ്റി പദങ്ങളുടെ എണ്ണവും മാറ്റാം.

ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും ബീജഗണിതരൂപം

$$x_n = an + b$$

എന്നാണ്; ഇതിൽ a, b നിശ്ചിതസംഖ്യകളാണ്. മറിച്ച് ഈ രൂപത്തിലുള്ള ഏത് ശ്രേണിയും സമാന്തരശ്രേണിയാണ്.

$x_n = an + b$ എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിൽ, പൊതുവ്യത്യാസം a ആണെന്നും കാണാം. ആദ്യത്തെ പദമോ?

ഇതുപയോഗിച്ച്, ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം എളുപ്പത്തിൽ കണ്ടുപിടിക്കാം. ഉദാഹരണമായി $\frac{1}{2}$ ൽ നിന്നു തുടങ്ങി, തുടർച്ചയായി $\frac{1}{3}$ കൂട്ടിക്കിട്ടുന്ന സമാന്തരശ്രേണി നോക്കാം:

$$\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \ldots$$

പൊതുവ്യത്യാസം $\frac{1}{3}$ ആയതിനാൽ ഇതിന്റെ ബീജഗണിതരൂപം $\frac{1}{3}n + b$ എന്നാണ്. ഇതിൽ $n = 1$ എന്നെടുത്താൽ, ആദ്യപദം $\frac{1}{3} + b$ അപ്പോൾ

$$\frac{1}{3} + b = \frac{1}{2}$$

എന്നും അതിൽ നിന്ന്

$$b = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

എന്നും കാണാം. ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം

$$\frac{1}{3}n + \frac{1}{6}$$

എന്നും കിട്ടും.

ഈ ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം ഭിന്നസംഖ്യയായി ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$x_n = \frac{2n+1}{6}$$

ഇതിൽ നിന്ന് മറ്റു ചില കാര്യങ്ങളും മനസ്സിലാക്കാം. ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന ഭിന്ന സംഖ്യകളുടെയെല്ലാം അംശം ഒറ്റസംഖ്യയും, ഛേദം 6 ഉം ആണ്. ഒറ്റസംഖ്യകൾക്കൊന്നും 2 ഘടകമല്ല; അതിനാൽ 6 ഉം ഘടകമല്ല. അപ്പോൾ ശ്രേണിയിലെ ഒരു പദവും എണ്ണൽസംഖ്യ അല്ല.

മറ്റൊരു രീതിയിൽ പറഞ്ഞാൽ, ഈ ശ്രേണിയിൽ എണ്ണൽസംഖ്യകളൊന്നുമില്ല. $\frac{1}{2}$ ൽ തുടങ്ങി, $\frac{1}{4}$ വീതം കൂട്ടിക്കിട്ടുന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലോ?

(1) ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ 8-ാം പദം 12 ഉം, 12-ാം പദം 8 ഉം ആണ്. ഈ ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം എന്താണ്?

(2) എട്ടാംക്ലാസ്സിലെ പക്ഷിക്കണക്ക് (**സമവാക്യങ്ങൾ** എന്ന പാഠം) അൽപമൊന്നുമാറ്റി ഇങ്ങനെയാക്കാം.

പക്ഷി പറഞ്ഞു.

"ഞങ്ങളും, ഞങ്ങളോളവും, ഞങ്ങളിൽ പകുതിയും, അതിൽ പകുതിയും ഒന്നും ചേർന്നാൽ ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യയാകും"

പക്ഷികളുടെ എണ്ണമാകാവുന്ന സംഖ്യകൾ വലുപ്പക്രമത്തിൽ എഴുതുക. എണ്ണം ഇതിലെ ഓരോ സംഖ്യയാകുമ്പോഴും പക്ഷി പറഞ്ഞ തുകയും ക്രമമായെഴുതുക.

ഈ രണ്ടു ശ്രേണികളുടെയും ബീജഗണിതരൂപം കണ്ടുപിടിക്കുക.

(3) ആദ്യപദം $\frac{1}{3}$ ഉം, പൊതുവ്യത്യാസം $\frac{1}{6}$ ഉം ആയ സമാന്തരശ്രേണിയിൽ എല്ലാ എണ്ണൽസംഖ്യകളും ഉണ്ട് എന്ന് തെളിയിക്കുക.

(4) ആദ്യപദം $\frac{1}{3}$ ഉം, പൊതുവ്യത്യാസം $\frac{2}{3}$ ഉം ആയ സമാന്തരശ്രേണിയിൽ എല്ലാ ഒറ്റസംഖ്യകളും ഉണ്ട് എന്നും ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യയും ഇല്ല എന്നും തെളിയിക്കുക.

(5) 4, 7, 10, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളുടെയെല്ലാം വർഗങ്ങൾ ഈ ശ്രേണിയിൽ തന്നെ ഉണ്ട് എന്നു തെളിയിക്കുക.

(6) 5, 8, 11, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിൽ പൂർണവർഗങ്ങളൊന്നും ഇല്ല എന്നു തെളിയിക്കുക.

(7) $\frac{11}{8}, \frac{14}{8}, \frac{17}{8}, \ldots$ എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ പൂർണസംഖ്യാപദങ്ങളുടെ ശ്രേണി എഴുതുക. ഇത് സമാന്തരശ്രേണി ആണോ?

തുകകളും പദങ്ങളും

അടുത്തടുത്ത മൂന്നു എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ തുകയെക്കുറിച്ച് ഏഴാംക്ലാസിൽ കണ്ടത് ഓർമയുണ്ടോ? (**സംഖ്യകളും ബീജഗണിതവും** എന്ന പാഠത്തിലെ **മൂന്നു സംഖ്യകൾ** എന്ന ഭാഗം)

$$1 + 2 + 3 = 6 = 3 \times 2$$
$$2 + 3 + 4 = 9 = 3 \times 3$$
$$3 + 4 + 5 = 12 = 3 \times 4$$

എന്നിങ്ങനെ അടുത്തടുത്ത മൂന്നു എണ്ണൽസംഖ്യകൾ കൂട്ടിയാൽ, നടുവിലെ സംഖ്യയുടെ മൂന്നു മടങ്ങു കിട്ടുമെന്ന് കണ്ടിട്ടുണ്ട്; തുടർന്ന്, അടുത്തടുത്തുള്ള അഞ്ച് എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ തുക, നടുവിലെ സംഖ്യയുടെ അഞ്ചു മടങ്ങാണെന്നും കണ്ടു (**മറ്റൊരുമാർഗം** എന്ന ഭാഗം).

എന്തുകൊണ്ടാണ് ഇങ്ങനെയെന്നും ബീജഗണിതത്തിലൂടെ മനസ്സിലാക്കാം: അടുത്തടുത്ത മൂന്ന് എണ്ണൽസംഖ്യകളിൽ നടുവിലെ സംഖ്യ x എന്നെടുത്താൽ, ആദ്യത്തെ സംഖ്യ $x - 1$, അവസാനസംഖ്യ $x + 1$. ഇവയുടെ തുകയോ?

$$(x - 1) + x + (x + 1) = 3x$$

സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം അഞ്ചായാൽ,

$$(x - 2) + (x - 1) + x + (x + 1) + (x + 2) = 5x$$

ഇവിടെ വേറൊരു വഴിക്കും ചിന്തിക്കാം: അടുത്തടുത്ത എണ്ണൽസംഖ്യകൾക്കു പകരം, അടുത്തടുത്ത ഇരട്ടസംഖ്യകളായാലോ?

$$2+4+6 = 12 = 3\times 4$$
$$4+6+8 = 18 = 3\times 6$$
$$6+8+10 = 24 = 3\times 8$$
....

അഞ്ച് ഇരട്ടസംഖ്യകളായാലോ? ഒറ്റസംഖ്യകൾക്കും ഇതു ശരിയാണോ? എന്നെല്ലാം ആലോചിക്കാം.

തുടർച്ചയായ എണ്ണൽസംഖ്യകൾ, ഇരട്ടസംഖ്യകൾ, ഒറ്റസംഖ്യകൾ ഇവയെല്ലാം സമാന്തരശ്രേണികളല്ലേ? അപ്പോൾ ഇപ്പറഞ്ഞതെല്ലാം പൊതുവെ സമാന്തര ശ്രേണികൾക്കും ശരിയാകുമോ എന്നാലോചിക്കാമല്ലോ?

ഏതെങ്കിലും ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ അടുത്തടുത്ത മൂന്നു പദങ്ങളുടെ തുക നോക്കാം. നടുവിലെ പദം x എന്നെടുക്കാം. അപ്പുറത്തുമിപ്പുറത്തുമുള്ള പദങ്ങൾ എഴുതാൻ പൊതുവ്യത്യാസം എന്തെന്നറിയണം. പൊതുവ്യത്യാസം y എന്നെടുത്താൽ, ആദ്യത്തെ സംഖ്യ $x - y$, മൂന്നാമത്തെസംഖ്യ $x + y$.

മൂന്നു സംഖ്യകളുടെയും തുക

$$(x-y) + x + (x+y) = 3x$$

അപ്പോൾ

> ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയിലെയും അടുത്തടുത്ത മൂന്നു പദങ്ങളുടെ തുക നടുവിലെ പദത്തിന്റെ മൂന്നു മടങ്ങാണ്.

ഉദാഹരണമായി, ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങളുടെ തുക 12 എന്നറിഞ്ഞാൽ, രണ്ടാമത്തെ പദം 4 എന്നു കണക്കാക്കാം. മറിച്ച്, ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ രണ്ടാമത്തെ പദം 10 എന്നറിഞ്ഞാൽ ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങളുടെ തുക 30 എന്നും കണക്കാക്കാം.

ഇതുപോലെ ഏതെങ്കിലും സമാന്തരശ്രേണിയിലെ തുടർച്ചയായ അഞ്ചു പദങ്ങൾ കൂട്ടിയാലോ? ഏഴു പദങ്ങളായാലോ? ഈ ചിന്തകളിലൂടെ കിട്ടുന്ന പൊതുതത്വം എന്താണ്?

ഇനി ഈ കണക്കു നോക്കൂ: ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ പദം 10 ഉം ആദ്യത്തെ അഞ്ചു പദങ്ങളുടെ തുക 250 ഉം ആണ്. ശ്രേണി കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

ആദ്യത്തെ അഞ്ചു പദങ്ങളുടെ തുക 250 ആയതിനാൽ, മൂന്നാമത്തെ (നടുവിലെ) പദം 50 എന്നു കണക്കാക്കാമല്ലോ (എങ്ങനെ?) ഒന്നാം പദം 10 ഉം മൂന്നാം പദം 50 ഉം ആയതിനാൽ, പൊതുവ്യത്യാസം 20 എന്നു കണക്കാക്കാം. അപ്പോൾ ശ്രേണി 10, 30, 50, ... എന്നു കാണാം.

അടുത്തടുത്ത മൂന്നു പദങ്ങളുടെ തുകയെ സംബന്ധിച്ച് മറ്റൊരു കാര്യംകൂടി കാണാം: ആദ്യപദവും നടുവിലെ പദവും മൂന്നാം പദവും കൂട്ടിയപ്പോൾ, നടുവിലെ പദത്തിന്റെ മുന്നു മടങ്ങായി; അപ്പോൾ ആദ്യപദവും അവസാന

പദവും മാത്രം കൂട്ടിയാൽ നടുവിലെ പദത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാകണ്ടേ? (ഒരു സംഖ്യയും അതിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങും ചേർന്നതാണല്ലോ മൂന്നു മടങ്ങ്)

ഇത് മറ്റൊരുതരത്തിൽ പറയാം

ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയിലെയും അടുത്തടുത്ത മൂന്നു പദങ്ങളെടുത്താൽ ആദ്യപദത്തിന്റെയും അവസാനപദത്തിന്റെയും തുകയുടെ പകുതിയാണ് നടുവിലെ പദം.

അടുത്തടുത്ത അഞ്ചു പദങ്ങളിൽ ആദ്യത്തെയും അവസാനത്തെയും കൂട്ടിയാലോ? രണ്ടാമത്തെയും നാലാമത്തെയും പദങ്ങളായാലോ?

ഇതുപോലെ അടുത്തടുത്ത ഏഴു പദങ്ങളിൽ, നടുക്കുനിന്ന് ഇരുവശത്തും ഒരേ അകലത്തിലുള്ള പദങ്ങളുടെ ജോടികൾ കൂട്ടിനോക്കൂ.

ഇതുവരെ പദങ്ങളുടെ എണ്ണം ഒറ്റസംഖ്യ ആയിട്ടാണ് എടുത്തത്. ഇരട്ടസംഖ്യ ആയാലോ?

ഏതെങ്കിലുമൊരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ തുടർച്ചയായ നാലു പദങ്ങളെടുത്തു നോക്കാം. ഉദാഹരണമായി, 5, 8, 11, 14 ഇതിൽ നടുക്ക് എന്നു പറയാൻ ഒരു പദം ഇല്ലാത്തതിനാൽ, ആദ്യം കണ്ട പൊതുതത്വം പോലെ ഒന്നും പറയാൻ കഴിയില്ല. രണ്ടാമതു ചെയ്തതുപോലെ, ആദ്യത്തെയും അവസാനത്തെയും പദങ്ങളുടെ ജോടിയും, രണ്ടാമത്തെയും മൂന്നാമത്തെയും പദങ്ങളുടെ ജോടിയും കൂട്ടി നോക്കാം: $5 + 14 = 8 + 11$

ആറു പദങ്ങളായാലോ? ഏതൊക്കെ ജോടികളുടെ തുകകളാണ് തുല്യമാകുന്നത്?

ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയെയും പൊതുവെ $an + b$ എന്ന രൂപത്തിൽ എഴുതാമല്ലോ. ഇതിലെ നാലാമത്തെയും അഞ്ചാമത്തെയും പദങ്ങൾ എന്തൊക്കെയാണ്? അവയുടെ തുകയോ?

$$(4a + b) + (5a + b) = 9a + 2b$$

ഇതേ തുക കിട്ടുന്ന മറ്റു രണ്ടു പദങ്ങൾ പറയാമോ?

9 നെ $2 + 7$ എന്നും എഴുതാമല്ലോ. അപ്പോൾ രണ്ടാമത്തെയും ഏഴാമത്തെയും പദങ്ങളുടെ തുക എന്താണ്?

ഇതേ തുക കിട്ടുന്ന മറ്റൊരു ജോടി?

ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ അഞ്ചാമത്തെയും പത്താമത്തെയും പദങ്ങളുടെ തുക കിട്ടുന്ന മറ്റു രണ്ടു സ്ഥാനങ്ങൾ പറയാമോ?

ഇതിൽനിന്നെല്ലാം കിട്ടുന്ന പൊതുതത്വം എന്താണ്?

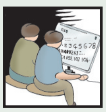
> ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ഏതെങ്കിലും രണ്ടു ജോടി സ്ഥാനങ്ങളുടെ തുക തുല്യമാണെങ്കിൽ, ആ സ്ഥാനങ്ങളിലെ പദങ്ങളുടെ തുകയും തുല്യമായിരിക്കും.

ഇനി ഈ കണക്കു നോക്കൂ: ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ പദം 5 ഉം ആദ്യത്തെ ആറു പദങ്ങളുടെ തുക 105 ഉം ആണ്. ശ്രേണി കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

ആദ്യത്തെ ആറു പദങ്ങളെ ഒരേ തുക വരുന്ന മൂന്നു ജോടികളാക്കാമല്ലോ.

- ഒന്നാമത്തെയും ആറാമത്തെയും
- രണ്ടാമത്തെയും അഞ്ചാമത്തെയും
- മൂന്നാമത്തെയും നാലാമത്തെയും

ആറു പദങ്ങളും ഒരുമിച്ചു കൂട്ടിയാൽ 105; അപ്പോൾ ഓരോ ജോടിയുടെയും തുക $105 \div 3 = 35$ എന്നു കണക്കാക്കാം. ഒന്നാമത്തെയും ആറാമത്തെയും പദങ്ങളുടെ തുക ഇതാണ്. ഒന്നാമത്തെ സംഖ്യ 5 എന്നു പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്. ഇതിൽനിന്ന് ആറാംപദം 30 എന്നു കിട്ടും. ആദ്യത്തെയും ആറാമത്തെയും പദങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് മറ്റു പദങ്ങളെല്ലാം കണക്കാക്കാമല്ലോ.



(1) ആദ്യത്തെ 5 പദങ്ങളുടെ തുക 30 ആകുന്ന മൂന്നു സമാന്തരശ്രേണികൾ എഴുതുക.

(2) ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ആദ്യപദം 1 ഉം, ആദ്യത്തെ 4 പദങ്ങളുടെ തുക 100 ഉം ആണ്. ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ നാലു പദങ്ങൾ കണക്കാക്കുക.

(3) ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ അടുത്തടുത്ത ഏതു നാലു പദങ്ങളെടുത്താലും രണ്ടറ്റത്തുമുള്ള പദങ്ങളുടെ തുക, നടുക്കുള്ള രണ്ടു പദങ്ങളുടെ തുകയാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

(4) ആദ്യത്തെ 4 പദങ്ങളുടെ തുക 100 ആയ നാല് സമാന്തരശ്രേണികൾ എഴുതുക.

(5) ചുവടെ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ഓരോ സമാന്തരശ്രേണിയിലെയും ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങൾ എഴുതുക.

(i) ആദ്യപദം 30; ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങളുടെ തുക 300

(ii) ആദ്യപദം 30; ആദ്യത്തെ നാലു പദങ്ങളുടെ തുക 300

(iii) ആദ്യപദം 30; ആദ്യത്തെ അഞ്ചു പദങ്ങളുടെ തുക 300

(iv) ആദ്യപദം 30; ആദ്യത്തെ ആറു പദങ്ങളുടെ തുക 300

(6) ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ അഞ്ചു പദങ്ങളുടെ തുക 150 ഉം ആദ്യത്തെ പത്തു പദങ്ങളുടെ തുക 550 ഉം ആണ്.

(i) ശ്രേണിയുടെ മൂന്നാം പദം എന്താണ്?

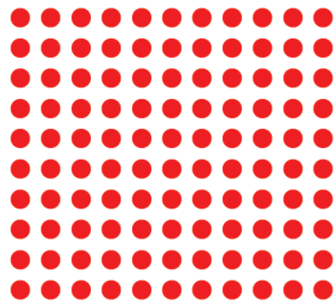
(ii) എട്ടാം പദം എന്താണ്?

(iii) ശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങൾ എന്തൊക്കെയാണ്?

(7) ഒരു പഞ്ചഭുജത്തിന്റെ കോണുകൾ സമാന്തരശ്രേണിയിലാണ്. അതിലെ ഏറ്റവും ചെറിയ കോണിന്റെ വലുപ്പം 36° യിൽ കൂടുതലാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

തുകകൾ

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ.



ചിത്രത്തിൽ ആകെ എത്ര പൊട്ടുകളുണ്ട്?

ഓരോന്നായി എണ്ണേണ്ട കാര്യമില്ലല്ലോ. ഓരോ വരിയിലും 11, അങ്ങനെ 10 വരികൾ; ആകെ $10 \times 11 = 110$

ഈ ത്രികോണത്തിൽ എത്ര പൊട്ടുകളുണ്ട്?

ഓരോ വരിയായി എണ്ണിയെടുക്കാം:

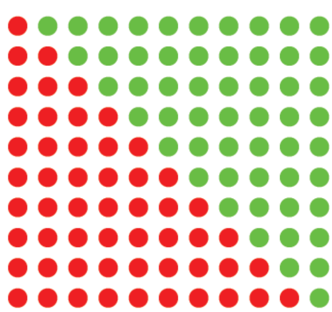
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

ഇതിനും എളുപ്പവഴി വല്ലതുമുണ്ടോ?

ഇതിനെ ചതുരമാക്കിയാലോ?

അതിന് ഇതുപോലെ മറ്റൊരു ത്രികോണമുണ്ടാക്കുക.

ഇത് തലകീഴായി, ആദ്യത്തെ ത്രികോണവുമായി ഇങ്ങനെ ചേർത്തുവയ്ക്കുക.



നിയമത്തിന്റെ ഭാഷ

ഒരു ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളെല്ലാം കണ്ടുപിടിക്കണമെങ്കിൽ, ശ്രേണിയുടെ നിയമം വ്യക്തമാക്കണമെന്നു കണ്ടല്ലോ. ഈ നിയമം ബീജഗണിതത്തിൽപ്പറയുന്ന ഉദാഹരണങ്ങളും കണ്ടു. എന്നാൽ, ചില ശ്രേണികളുടെ നിയമം ബീജഗണിതരൂപത്തിലെഴുതാൻ കഴിയില്ല. ഉദാഹരണമായി, $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$ എന്നു തുടരുന്ന അഭാജ്യ സംഖ്യകളുടെ ശ്രേണിയിലെ ഒരു നിശ്ചിതസ്ഥാനത്തെ പദം കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ഒരു ബീജഗണിതവാചകം ഇതുവരെ കണ്ടുപിടിച്ചിട്ടില്ല.

അതുപോലെ, π യുടെ ദശാംശരൂപത്തിൽ വരുന്ന $3, 1, 4, 1, 5, 9, \ldots$ എന്ന ശ്രേണിയിലേയും ഒരു നിശ്ചിതസ്ഥാനത്തെ പദം കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ബീജഗണിതവാചകമൊന്നുമില്ല. ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ, ശ്രേണിയുടെ നിയമം, സാധാരണ ഭാഷയിൽ പറയാനേ നിവൃത്തിയുള്ളൂ.

ഈ ചതുരത്തിൽ, നേരത്തെ കണ്ടതുപോലെ, $10 \times 11 = 110$ പൊട്ടുകളുണ്ട്. ഒരു ത്രികോണത്തിലോ? 110 ന്റെ പകുതി 55

ചിത്രമുപയോഗിച്ച് ചെയ്തത് സംഖ്യകൾ മാത്രമുപയോഗിച്ചും എഴുതാം.

$$s = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

എന്നെടുക്കാം. തുക തിരിച്ചെഴുതിയാൽ

$$s = 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

ഒരേ സ്ഥാനത്തുള്ള സംഖ്യകൾ കൂട്ടിയാലോ?

$$2s = 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11$$

അപ്പോൾ

$$s = \frac{1}{2} \times 10 \times 11 = 55$$

ഇതുപോലെ 1 മുതൽ 100 വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകളും കൂട്ടിയെടുക്കാമല്ലോ.

$$s = 1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100$$

$$s = 100 + 99 + 98 + \ldots + 3 + 2 + 1$$

ഒരേ സ്ഥാനത്തുള്ള സംഖ്യകൾ കൂട്ടിയാൽ

$$\begin{aligned} 2s &= \overbrace{101 + 101 + 101 + \ldots + 101 + 101 + 101 + 101}^{100 \text{ എണ്ണം}} \\ &= 100 \times 101 \end{aligned}$$

ഇതിൽ നിന്ന്

$$s = \frac{1}{2} \times 100 \times 101 = 5050$$

100 നു പകരം ഏതു എണ്ണൽസംഖ്യ ആയാലും, ഇതേ രീതിയിൽ തുക കണ്ടുപിടിക്കാം. അതായത്,

ഒന്നു മുതലുള്ള തുടർച്ചയായ കുറേ എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ തുക, അവസാന സംഖ്യയുടെയും അതിനടുത്ത എണ്ണൽസംഖ്യയുടെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയാണ്.

ബീജഗണിതഭാഷയിൽപ്പറഞ്ഞാൽ

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ഇതുപയോഗിച്ച്, മറ്റു സമാന്തരശ്രേണികളിലെ പദങ്ങളുടെ തുകയും കണക്കാക്കാം.

ഉദാഹരണമായി 2, 4, 6, ..., 100 എന്നിങ്ങനെയുള്ള ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെ തുക നോക്കാം. എണ്ണൽസംഖ്യകളെ 2 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു കിട്ടുന്നവയാണല്ലോ ഇരട്ടസംഖ്യകൾ. അപ്പോൾ

ഒരു ഗണിതകഥ

ഗൗസ് എന്ന ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനെക്കുറിച്ച് കേട്ടിട്ടില്ലേ? നന്നേ ചെറുപ്പത്തിൽത്തന്നെ ഗണിതത്തിൽ ഇദ്ദേഹം അസാധാരണമായ കഴിവു പ്രകടിപ്പിച്ചിരുന്നുവത്രെ. അതിനെക്കുറിച്ചൊരു കഥയുണ്ട്.

ഗൗസിനു പത്തു വയസ്. ക്ലാസിലെ അധ്യാപകൻ, കുട്ടികളെ അടക്കിയിരുത്താനായി, ഒന്നു മുതൽ നൂറു വരെയുള്ള സംഖ്യകളെല്ലാം കൂട്ടി തുക കാണാൻ പറഞ്ഞു. വളരെപ്പെട്ടെന്നുതന്നെ കൊച്ചു ഗൗസ് ഉത്തരം പറഞ്ഞു: 5050. ഇങ്ങനെ വിശദീകരിക്കുകയും ചെയ്തു: 1 ഉം 100 ഉം 101; അതുപോലെ 2 ഉം 99 ഉം 101; ഇങ്ങനെ 50 ജോടികൾ. ആകെ തുക
$50 \times 101 = 5050$

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 100 = 2\,(1 + 2 + 3 + \cdots + 50)$$

എന്നെഴുതാം. ഇതിൽ

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 50 = \frac{1}{2} \times 50 \times 51$$

എന്നു കണ്ടല്ലോ. ഇതിൽ നിന്ന്

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 100 = 2 \times \frac{1}{2} \times 50 \times 51 = 2550$$

എന്നു കണക്കാക്കാം.

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ, ആദ്യത്തെ n ഇരട്ടസംഖ്യകൾ

$$2, 4, 6, \ldots, 2n$$

ഇവയുടെ തുക

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = 2\,(1 + 2 + 3 + \cdots + n) = n\,(n + 1)$$

ഇതുപോലെ 3 ന്റെ ആദ്യത്തെ n ഗുണിതങ്ങളുടെ തുക കണക്കാക്കി നോക്കൂ.

ആദ്യത്തെ n ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ തുക എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

ആദ്യം ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി ബീജഗണിതരൂപത്തിലെഴുതാം.

$$x_n = 2n - 1$$

ഇതിൽ $n = 1, 2, 3, \ldots$ എന്നിങ്ങനെ ക്രമമായെടുത്താൽ, ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി കിട്ടും. അപ്പോൾ ഈ ശ്രേണി ഇങ്ങനെയെഴുതാം.

$$x_1 = (2 \times 1) - 1$$
$$x_2 = (2 \times 2) - 1$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = (2 \times n) - 1$$

ഇവയെല്ലാം മുകളിൽ നിന്ന് താഴോട്ട് കൂട്ടിയാലോ?

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= ((2 \times 1) + (2 \times 2) + \cdots + (2 \times n)) - \overbrace{(1 + 1 + \ldots + 1)}^{n \text{ എണ്ണം}} \\ &= 2\,(1 + 2 + \cdots + n) - n \end{aligned}$$

ഇതിൽ

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

എന്നത് ഉപയോഗിച്ചാൽ

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 2 \times \frac{n\,(n+1)}{2} - n = n^2$$

എന്നു കാണാം.

അതായത്, 1 മുതൽ തുടർച്ചയായ ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ തുക, സംഖ്യകളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ വർഗമാണ്.

ഇത് ഏഴാം ക്ലാസിൽ, **വർഗവും വർഗമൂലവും** എന്ന പാഠത്തിലെ **പൂർണ വർഗങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗത്ത് കണ്ടതാണല്ലോ. ഇപ്പോളതിന്റെ ഗണിതപരമായ തെളിവുമായി.

ഇതുപോലെ ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും തുക കണക്കാക്കാം.

ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയും

$$x_n = an + b$$

എന്ന രൂപത്തിലാണല്ലോ. ഇതിലെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക കണക്കാക്കാൻ, $n = 1, 2, 3, \ldots$ എന്നെഴുതി, കൂട്ടാം.

$$x_1 = a + b$$

$$x_2 = 2a + b$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = na + b$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = (a + 2a + \cdots + na) + \overbrace{(b + b + \ldots + b)}^{n \text{ എണ്ണം}}$$

$$= a(1 + 2 + \cdots + n) + nb$$

$$= a\frac{n(n+1)}{2} + nb$$

ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം

$$\boldsymbol{x_n = an + b}$$

ആണെങ്കിൽ, അതിലെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a\frac{n(n+1)}{2} + bn}$$

ഉദാഹരണമായി

$$1, 4, 7, \ldots$$

എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ 100 പദങ്ങളുടെ തുക കണ്ടുപിടിക്കുന്നത് നോക്കാം. ഈ ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം

$$x_n = 3n - 2$$

അപ്പോൾ 100 പദങ്ങളുടെ തുക

$$3 \times \frac{100 \times 101}{2} + ((-2) \times 100) = 14950$$

വർഗങ്ങളുടെ തുക

$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ എന്ന സർവസമവാക്യം കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഇതുപോലെ

$$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

എന്നതും ഒരു സർവസമവാക്യമാണ്.

ഇതിൽ നിന്ന്, x ഏതു സംഖ്യയായാലും

$$(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$$

എന്നു കാണാം. ഇതിൽ $x = 1, 2, 3, \ldots, n$ എന്നെടുത്തു കൂട്ടിയാൽ

$$(n+1)^3 - 1 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)$$
$$+ 3(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n$$

എന്നു കിട്ടും. അതായത്

$$n^3 + 3n^2 + 3n$$
$$= 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + \frac{3}{2}n(n+1) + n$$

അപ്പോൾ

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$$
$$= \frac{1}{3}\left(n^3 + 3n^2 + 3n - \frac{3}{2}n(n+1) - n\right)$$

ഈ സമവാക്യത്തിലെ വലതുഭാഗം ലഘൂകരിച്ച്,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

എന്നാക്കാം.

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ, ഈ ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക

$$3 \times \frac{n(n+1)}{2} - 2n = \frac{1}{2}(3n^2 - n)$$

സമാന്തരശ്രേണിയുടെ തുക മറ്റൊരു രീതിയിലും കണക്കാക്കാം. അതിന് തുകയുടെ ബീജഗണിതരൂപം അൽപം മാറ്റിയെഴുതാം.

$$a\frac{n(n+1)}{2} + bn = \frac{1}{2}n\,(a(n+1) + 2b)$$

$$= \frac{1}{2}n\,((an+b) + (a+b))$$

ഇതിൽ $an+b$ എന്നത്, ശ്രേണിയുടെ n-ാംപദമായ x_n ഉം, $a+b$ എന്നത്, ശ്രേണിയുടെ 1-ാം പദമായ x_1 ഉം ആണല്ലോ. അപ്പോൾ

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{1}{2}n\,(x_n + x_1)$$

സാധാരണഭാഷയിൽ പറഞ്ഞാൽ

ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ തുടർച്ചയായ കുറേ പദങ്ങളുടെ തുക, ആദ്യത്തേയും അവസാനത്തേയും പദങ്ങളുടെ തുകയെ പദങ്ങളുടെ എണ്ണം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതിന്റെ പകുതിയാണ്.

ഇതനുസരിച്ച് 1, 4, 7, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ 100 പദങ്ങളുടെ തുക കണക്കാക്കാൻ, ആദ്യം 100-ാം പദം കണക്കാക്കുക.

$$1 + (99 \times 3) = 298$$

ഇനി ആദ്യത്തെ 100 പദങ്ങളുടെ തുക

$$\frac{1}{2} \times 100 \times (298 + 1) = 14950$$

ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുകയ്ക്ക് പൊതുവായ ഒരു ബീജഗണിതരൂപമുണ്ട്. ഇതു കാണാൻ, തുക ഇങ്ങനെയെഴുതാം.

$$a\frac{n(n+1)}{2} + nb = \frac{1}{2}an^2 + \left(\frac{1}{2}a + b\right)n$$

ഇതിൽ $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}a + b$ എന്നിവ ശ്രേണിയുമായി ബന്ധപ്പെട്ട നിശ്ചിത സംഖ്യകളാണല്ലോ. അപ്പോൾ തുക, n^2 നെയും n നെയും നിശ്ചിതസംഖ്യകൾകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് കൂട്ടിയതാണ്.

ഒരു ശ്രേണിയിലെ സംഖ്യകളുടെ തുക കാണാൻ sum എന്ന നിർദേശം ഉപയോഗിക്കാം.

L = Sequence (n^2, n, 1, 10) എന്ന് input നിർദേശം കൊടുത്താൽ L എന്ന പേരിൽ ആദ്യത്തെ പത്ത് വർഗസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി ലഭിക്കും. sum(L) എന്ന നിർദേശം കൊടുത്താൽ ഈ സംഖ്യകളുടെ തുക കിട്ടും. sum (n^2, n, 1, 10) എന്ന് നിർദേശം നേരിട്ട് കൊടുത്താലും മതി. 5, 8, 11, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ 20 പദങ്ങളുടെ തുക കിട്ടാൻ sum (3n+2, n, 1, 20) എന്നു കൊടുത്താൽ മതി. ഈ ശ്രേണിയുടെ 10 മുതൽ 20 വരെയുള്ള സംഖ്യകളുടെ തുകയാണ് വേണ്ടതെങ്കിൽ sum(3n+2, n, 10, 20) എന്നു കൊടുക്കണം.

അതായത്, ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും തുകയുടെ ബീജഗണിതരൂപം $pn^2 + qn$ എന്നാണ്.

ഉദാഹരണമായി, 3, 10, 17, ... എന്നു തുടരുന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം $7n - 4$ എന്നു കാണാൻ വിഷമമില്ല. ഇതിലെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുകയോ?

$$7 \times \frac{n(n+1)}{2} - 4n = \frac{1}{2}(7n^2 - n)$$

വിസ്തരിച്ചു പറഞ്ഞാൽ, $\frac{1}{2}(7n^2 - n)$ എന്ന ബീജഗണിതവാചകത്തിൽ, $n = 1$ എന്നെടുത്താൽ, നമ്മുടെ സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യപദമായ 3 കിട്ടും, $n = 2$ എന്നെടുത്താൽ, ഈ ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ രണ്ടു പദങ്ങളുടെ തുകയായ 13 കിട്ടും; $n = 3$ എന്നെടുത്താൽ, ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങളുടെ തുകയായ 30 കിട്ടും.

അപ്പോൾ മറിച്ചൊരു ചോദ്യം: ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക $3n^2 + n$ ആണ്. ശ്രേണി കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

ശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ പദം എന്താണ്?

അതിന് തുകയുടെ ബീജഗണിതരൂപത്തിൽ $n = 1$ എന്നെടുത്താൽ മതി, അതായത്, $(3 \times 1^2) + 1 = 4$ ആണ് ആദ്യപദം.

ഇനി തുകയുടെ ബീജഗണിതരൂപമായ $3n^2 + n$ ൽ $n = 2$ എന്നെടുത്താലോ?

ആദ്യത്തെ രണ്ടു പദങ്ങളുടെ തുക കിട്ടും. അതായത്, $(3 \times 2^2) + 2 = 14$ ആണ് ആദ്യത്തെ രണ്ടു പദങ്ങളുടെ തുക. ആദ്യത്തെ പദം 4 എന്നു കണ്ടല്ലോ, അപ്പോൾ രണ്ടാമത്തെ പദം $14 - 4 = 10$. ഇനി ശ്രേണി എഴുതാമല്ലോ: 4, 10, 16, ... ഇതിന്റെ ബീജഗണിതരൂപം $6n - 2$ എന്നു കണക്കാക്കാനും വിഷമമില്ല.

ഇത് മറ്റൊരു രീതിയിലും പറയാം

4, 10, 16, ...

എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപമാണ്

$$x_n = 6n - 2$$

ഇതിലെ ആദ്യപദം, ആദ്യത്തെ രണ്ടു പദങ്ങളുടെ തുക, ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങളുടെ തുക എന്നിങ്ങനെ കണക്കാക്കിയാൽ

4, 14, 30, ...

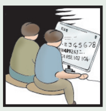
എന്ന മറ്റൊരു ശ്രേണി കിട്ടുമല്ലോ. അതിന്റെ ബീജഗണിതരൂപമാണ്

$$y_n = 3n^2 + n$$

ഒരു ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം അറിയാമെങ്കിൽ, അതിലെ തുടർച്ചയായ കുറേ പദങ്ങളുടെ തുക കാണാൻ പൈഥൺ ഭാഷയിലെ sum ഉപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, ആദ്യത്തെ നൂറു പൂർണവർഗങ്ങളുടെ തുക കണക്കാക്കാൻ

```
sum(x**2 for x in range(1,101))
```

എന്നെഴുതിയാൽ മതി.



(1) ചുവടെയുള്ള ഓരോ സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും ആദ്യത്തെ 25 പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.

(i) 11, 22, 33, ... (ii) 12, 23, 34, ...

(iii) 21, 32, 43, ... (iv) 19, 28, 37, ...

(v) 1, 6, 11, ...

(2) 6, 10, 14, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ 20 പദങ്ങളുടെ തുകയും അടുത്ത 20 പദങ്ങളുടെ തുകയും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം എത്രയാണ്?

(3) 6, 10, 14, ..., എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും 15, 19, 23, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും ആദ്യത്തെ 20 പദങ്ങളുടെ തുകകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം കണക്കാക്കുക.

(4) ഒമ്പതിന്റെ ഗുണിതങ്ങളായ എല്ലാ മൂന്നക്കസംഖ്യകളുടെയും തുക കണ്ടുപിടിക്കുക.

(5) ചില സമാന്തരശ്രേണികളിലെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നു. ഓരോ ശ്രേണിയുടെയും n-ാം പദം കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $n^2 + 2n$ (ii) $2n^2 + n$

(iii) $n^2 - 2n$ iv) $2n^2 - n$

v) $n^2 - n$

(6) ചുവടെയുള്ള സമാന്തരശ്രേണികളുടെ തുകകൾ, മനസിൽ കണക്കാക്കുക.

(i) $51 + 52 + 53 + ... + 70$

(ii) $1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} + ... + 12\frac{1}{2}$

(iii) $\frac{1}{2} + 1 + 1\frac{1}{2} + 2 + 2\frac{1}{2} + ... + 12\frac{1}{2}$

(7) 16, 24, 32, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ കുറെ പദങ്ങളുടെ തുകയുടെ കൂടെ 9 കൂട്ടിയാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യ പൂർണ വർഗമാണെന്ന് സമർഥിക്കുക.

(8)

1			
2	3		
4	5	6	
7	8	9	10

....

....

(i) മുകളിലെഴുതിയ സംഖ്യാക്രമത്തിലെ അടുത്ത രണ്ടു വരികൾ എഴുതുക.

(ii) 10-ാം വരിയിലെ ആദ്യത്തെയും അവസാനത്തെയും സംഖ്യകൾ എഴുതുക.

(iii) ആദ്യത്തെ പത്തുവരികളിലെ സംഖ്യകളുടെ തുക കാണുക.

(9)

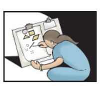
4			
7	10		
13	16	19	
22	25	28	31

....

....

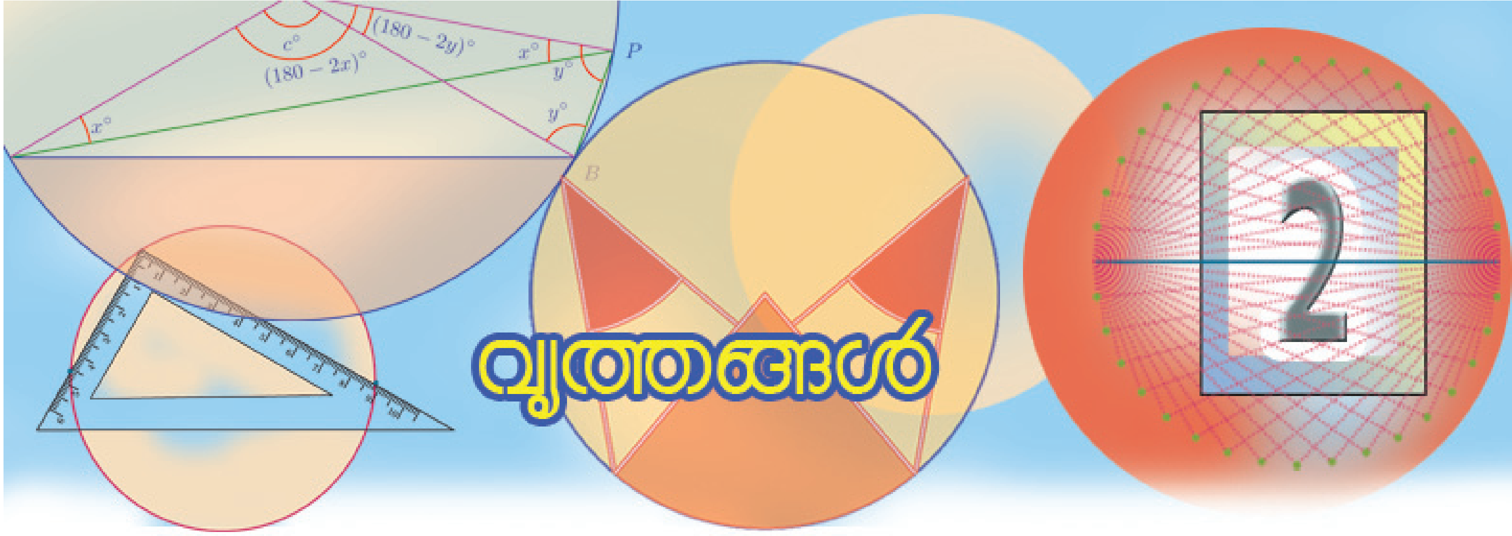
....

മുകളിലെഴുതിയ സംഖ്യാക്രമത്തിലെ അടുത്ത രണ്ട് വരികൾ എഴുതുക. 20-ാം വരിയിലെ ആദ്യത്തെയും അവസാനത്തെയും സംഖ്യകൾ എഴുതുക.



ഗവേഷണം

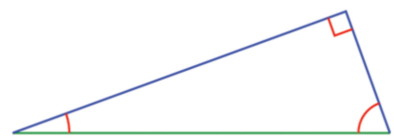
- ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളുടെ കൃതികളെല്ലാം അതിലെതന്നെ പദങ്ങളായ സമാന്തരശ്രേണികൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.
- ആദ്യത്തെ പദം മുതൽ തുടർച്ചയായ എത്ര പദങ്ങൾ കൂട്ടിയാലും, പൂർണവർഗങ്ങൾ കിട്ടുന്ന സമാന്തരശ്രേണികൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.



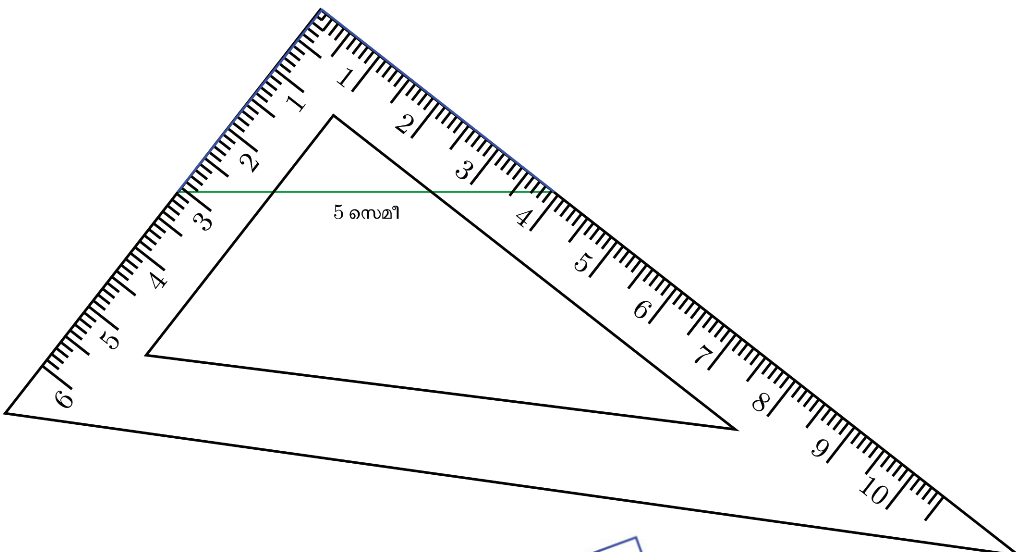
2 വൃത്തങ്ങൾ

ഒരു മട്ടത്രികോണം വരയ്ക്കണം. കർണം 5 സെന്റിമീറ്റർ വേണം. ലംബവശങ്ങൾ എന്തുമാകാം. എങ്ങനെയെല്ലാം വരയ്ക്കാം?

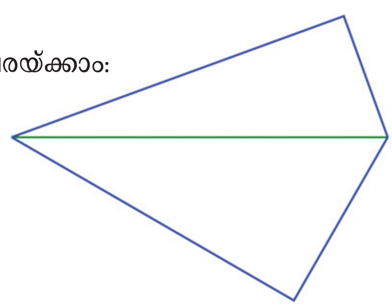
5 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ വര വരയ്ക്കുക. അതിന്റെ ഒരറ്റത്ത് ഇഷ്ടമുള്ള ഒരു കോണും, മറ്റേ അറ്റത്ത്, 90° യിൽ നിന്നു ഇതു കുറച്ച കോണും വരച്ച്, ത്രികോണമാക്കാം:



മട്ടം ഉപയോഗിച്ചും വരയ്ക്കാം: മട്ടമൂല മുകളിൽ വരുന്നവിധം, അതിന്റെ അരികുകൾ രണ്ടും വരയുടെ രണ്ടറ്റത്തും ചേർത്തുവച്ച് ശ്രമിച്ചുനോക്കൂ:



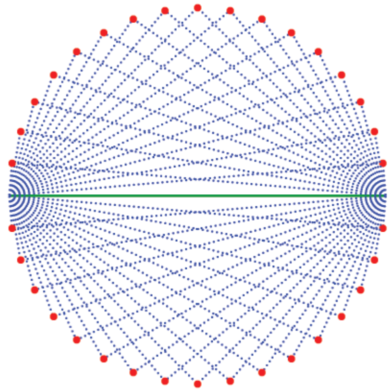
വരയുടെ ചുവട്ടിലും വരയ്ക്കാം:



6YTUK8

ഇത്തരം കുറേ ത്രികോണങ്ങൾ വരച്ച്, അവയുടെ മൂന്നാം മൂലകൾ മാത്രം നോക്കൂ:

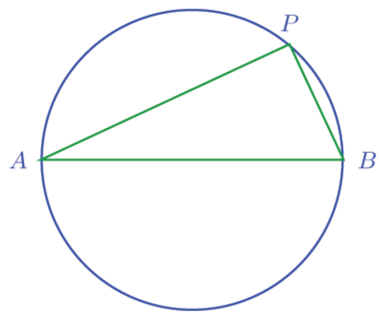
എന്തുകൊണ്ടാണ് ഇവയെല്ലാം ഒരു വൃത്തത്തിലായത്? ആലോചിച്ചു നോക്കാം.



മട്ടത്രികോണങ്ങളിലൂടെ വൃത്തമുണ്ടായിവരുന്നത്, ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ചു ഭംഗിയായി കാണാം. ആദ്യം Segment with Given Length ഉപയോഗിച്ച് 5 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ വര വരയ്ക്കുക. ഇനി 0 മുതൽ 180 വരെ 5 ഇടവിട്ട് മാറുന്ന a എന്ന Angle Slider ഉണ്ടാക്കുക. Angle with Given Size ഉപയോഗിച്ച്, വരയുടെ ഇടതറ്റത്ത് a° അളവിൽ counter clockwise ആയും, വലത് $(90 - a)^\circ$ അളവിൽ clockwise ആയും, കോണുകൾ ഉണ്ടാക്കുക. ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ വരയുടെ അറ്റങ്ങളുമായി Line ഉപയോഗിച്ച് യോജിപ്പിക്കുക. ഈ വരകൾ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുവും വരയുടെ അറ്റങ്ങളും യോജിപ്പിച്ച് ത്രികോണമുണ്ടാക്കുക. ത്രികോണത്തിന്റെ മുകളിലത്തെ വരകൾക്കും, മുകളിലെ മൂലയ്ക്കും Trace On കൊടുത്ത്, Slider ന് Animation On കൊടുക്കുക.

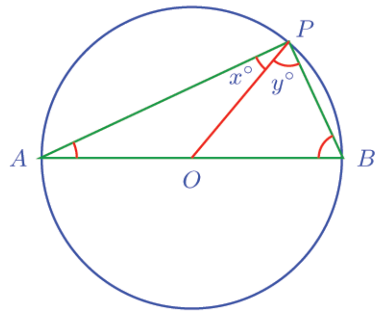
മട്ടവും വൃത്തവും

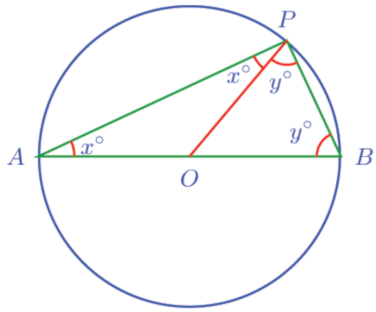
വൃത്തത്തിലെ ഒരു വ്യാസത്തിന്റെ രണ്ടറ്റങ്ങൾ, വൃത്തത്തിലെ മറ്റൊരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാലുണ്ടാകുന്ന കോണിനെക്കുറിച്ച് എട്ടാം ക്ലാസിൽ **തുല്യത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിന്റെ അവസാനം ചർച്ച ചെയ്തത് ഓർമയുണ്ടോ?



P യിലെ കോൺ മട്ടമാണെന്ന് തെളിയിച്ചത് എങ്ങനെയാണ്?

P യും, വൃത്തകേന്ദ്രം O യും യോജിപ്പിക്കുക. ഇപ്പോൾ P യിലെ കോൺ രണ്ടായി മുറിഞ്ഞു:





ചിത്രത്തിലെ ഇടതും വലതുമുള്ള ചെറിയ ത്രികോണങ്ങൾ AOP യും BOP യും സമ പാർശ്വത്രികോണങ്ങളാണ് (കാരണം?). അപ്പോൾ A യിലെ കോൺ $x°$ യും B യിലെ കോൺ $y°$ യും ആണ്.

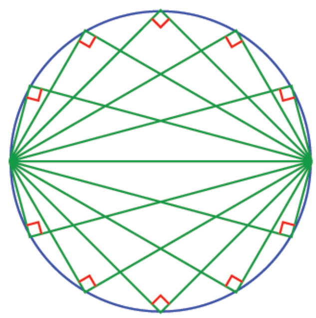
ABP എന്ന വലിയ ത്രികോണത്തിലെ കോണുകളുടെ തുക $180°$ ആയതിനാൽ

$$x + y + (x + y) = 180$$

എന്നു കിട്ടും. ഇതിൽ നിന്ന്

$$x + y = 90$$

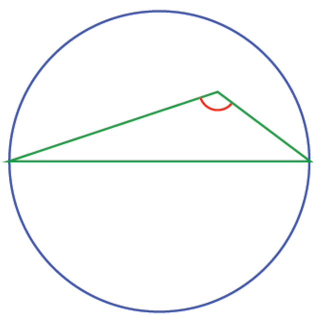
എന്നു കാണാം.



വൃത്തത്തിലെ ഒരു വ്യാസത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ, വൃത്തത്തിലെ മറ്റേതൊരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാലും കിട്ടുന്നത് മട്ടകോണാണ്.

ഇതൽപം ചുരുക്കി ഇങ്ങനെയും പറയാം:

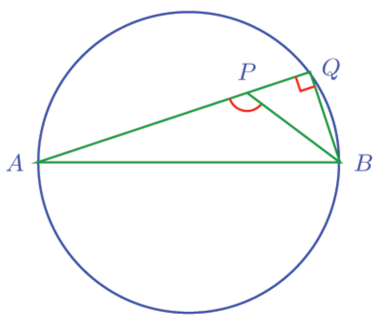
അർധവൃത്തത്തിലെ കോൺ മട്ടമാണ്.



ഇവിടെ മറ്റൊരു കാര്യം കൂടി നോക്കാം. വ്യാസത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ വൃത്തത്തിലെ തന്നെ ഒരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിക്കുമ്പോഴാണ് മട്ടകോൺ കിട്ടിയത്. വൃത്തത്തിനകത്തെ ഒരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാലോ?

6Z3QLV

ഒരു വശം നീട്ടി, വൃത്തത്തിൽ മുട്ടിക്കുക; ആ ബിന്ദു, വ്യാസത്തിന്റെ മറ്റേ അറ്റവുമായി യോജിപ്പിക്കുക:

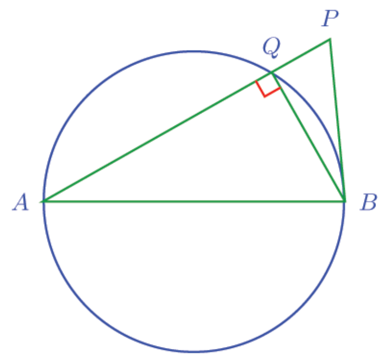


ഇപ്പോൾ ΔPQB യിൽ P യിലെ പുറംകോണാണ് APB. ഇത്, ത്രികോണത്തിലെ Q വിലേയും, B യിലേയും അകക്കോണുകളുടെ തുകയാണല്ലോ.

ഇതിൽ Q വിലെ കോൺ മട്ടമായതിനാൽ, $\angle APB$ മട്ടത്തേക്കാൾ കൂടുതലാണെന്നു കിട്ടിയില്ലേ?

ഇനി വൃത്തത്തിനു പുറത്ത് ഒരു ബിന്ദു ആയാലോ?

ഇപ്പോൾ ΔPQB യിൽ, $\angle QPB$ യാണ് അകക്കോൺ; മട്ടകോണായ AQB പുറംകോണും. അപ്പോൾ $\angle APB = \angle QPB$ മട്ടത്തേക്കാൾ ചെറുതാണെന്നു വന്നില്ലേ?

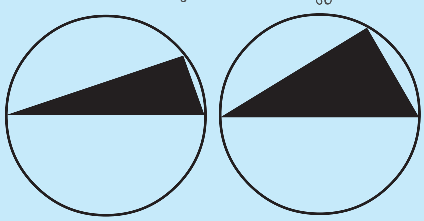


ഇനി, ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ ഏതോ ഒരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചപ്പോൾ മട്ടകോൺ കിട്ടിയെന്നു കരുതുക. ഈ ബിന്ദു, വൃത്തത്തിനകത്താകില്ല (അകത്തെ ബിന്ദുക്കൾക്കെല്ലാം ഈ കോൺ മട്ടത്തേക്കാൾ കൂടുതലല്ലേ?); വൃത്തത്തിനു പുറത്തുമല്ല (പുറത്തെ ബിന്ദുക്കൾക്കെല്ലാം ഈ കോൺ മട്ടത്തേക്കാൾ കുറവാണല്ലോ). അതിനാൽ ഈ ബിന്ദു വൃത്തത്തിൽത്തന്നെയാണ്.

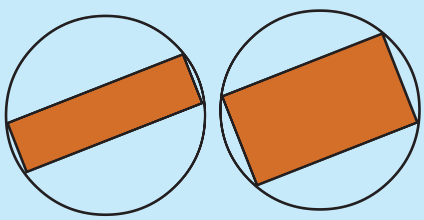
6ZCLNI

സമചതുരവിശേഷം

വൃത്തത്തിലെ വിവിധ ബിന്ദുക്കൾ ഏതെങ്കിലും വ്യാസത്തിന്റെ രണ്ടറ്റങ്ങളുമായി യോജിപ്പിച്ച്, വ്യത്യസ്ത മട്ടത്രികോണങ്ങളുണ്ടാക്കാമല്ലോ:



ഇവയിൽ ഏറ്റവും കൂടുതൽ പരപ്പളവ്, മുകളിലെ ബിന്ദു ഏതു സ്ഥാനത്തെടുക്കുമ്പോഴാണ്? അപ്പോൾ മറ്റൊരു ചോദ്യം: നാലു മൂലകളും വൃത്തത്തിലായ പലപല ചതുരങ്ങൾ വരയ്ക്കാം.



ഇവയിൽ ഏറ്റവും കൂടുതൽ പരപ്പളവുള്ള ചതുരത്തിന്റെ സവിശേഷത എന്താണ്?

അപ്പോൾ എന്തു കിട്ടി?

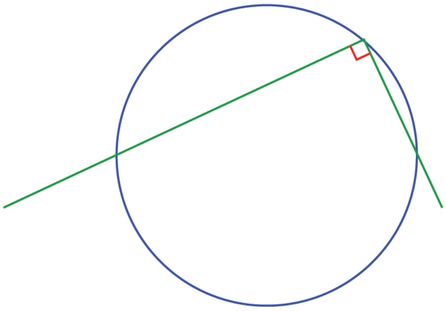
> **വൃത്തത്തിലെ ഒരു വ്യാസത്തിന്റെ രണ്ടറ്റത്തുനിന്ന് വരയ്ക്കുന്ന വരകൾ പരസ്പരം ലംബമാണെങ്കിൽ അവ കൂട്ടിമുട്ടുന്നത് വൃത്തത്തിലായിരിക്കും.**

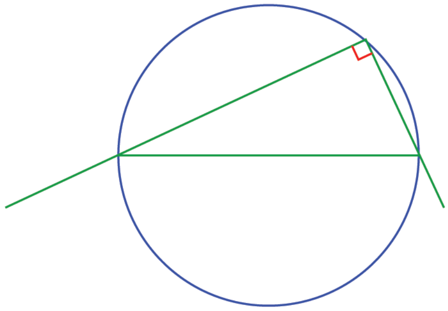
ഈ വാക്യം അൽപം മാറ്റി വൃത്തം അവസാനമാക്കാം.

> **ഒരു വരയുടെ രണ്ടറ്റത്തുനിന്ന് പരസ്പരം ലംബമായി വരയ്ക്കുന്ന വരകളെല്ലാം ആ വര വ്യാസമായ വൃത്തത്തിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു.**

മട്ടത്രികോണങ്ങളുടെ മൂന്നാം മൂലകൾ ചേർത്ത്, ആദ്യം വരച്ച ചിത്രത്തിൽ വൃത്തം കിട്ടിയത് എന്തുകൊണ്ടാണെന്നു മനസിലായില്ലേ?

ഇനി വൃത്തത്തിലെ ഏതൊരു ബിന്ദുവിൽനിന്നും പരസ്പരം ലംബമായി രണ്ടു വരകൾ വരച്ചാൽ, അവ വൃത്തത്തെ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസമാകുമോ?





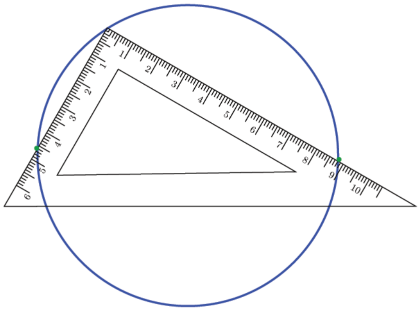
ഇപ്പോൾ ഒരു മട്ടത്രികോണവും അതിന്റെ പരിവൃത്തവുമായി. മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തകേന്ദ്രം കർണത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവാണെന്ന് ഒമ്പതാംക്ലാസിൽ പഠിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ? (**സമാന്തരവരകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **ത്രികോണഭാഗം** എന്നതിലെ രണ്ടാമത്തെ കണക്ക്)

അപ്പോൾ താഴത്തെ വര വ്യാസമാണ്.

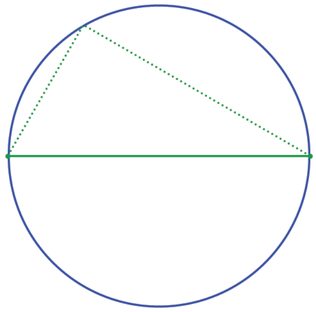
ഇനി, ഈ തത്വങ്ങളുടെ ഒരു പ്രയോഗം നോക്കാം:

വളയോ, പാത്രത്തിന്റെ അടപ്പോ ഉപയോഗിച്ചു വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ഒരു മാർഗം, ഒമ്പതാം ക്ലാസിൽ കണ്ടത് ഓർമയുണ്ടോ?

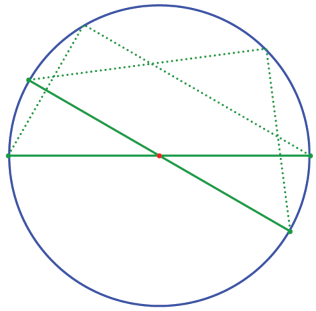
മറ്റൊരു മാർഗമുണ്ട്. ഒരു മട്ടമൂല വൃത്തത്തിൽ വച്ച്, മട്ടത്തിന്റെ വശങ്ങൾ വൃത്തത്തെ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന സ്ഥാനങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക.



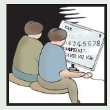
ഇവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസമാണല്ലോ.



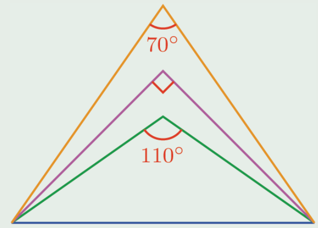
ഇനി വൃത്തത്തിലെ മറ്റൊരു സ്ഥാനത്ത് മട്ടം വച്ച്, ഒരു വ്യാസവും കൂടി വരച്ചാൽ, അവ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന സ്ഥാനമാണ് വൃത്തകേന്ദ്രം:



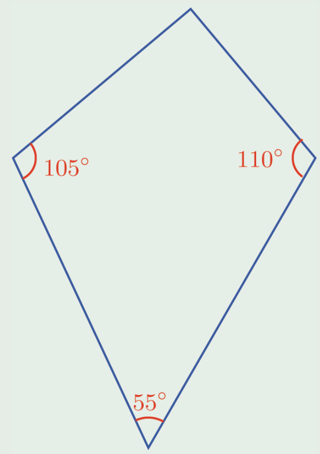
A കേന്ദ്രമായി ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അതിൽ B, C എന്നിങ്ങനെ രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. Ray ഉപയോഗിച്ച് B യിൽ നിന്ന് C യിലൂടെ ഒരു വര വരയ്ക്കുക. B യിൽ കൂടി BC യ്ക്ക് ലംബം വരയ്ക്കുക. ഈ വര വൃത്തവുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു D അടയാളപ്പെടുത്തുക. CD യോജിപ്പിച്ച് നോക്കൂ. ഇത് വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസമാണോ? B, C എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ.



(1) ചിത്രത്തിലെ ത്രികോണങ്ങളുടെ താഴത്തെ വശം വ്യാസമായി ഒരു വൃത്തം വരച്ചാൽ, ഓരോ ത്രികോണത്തിന്റെയും മേൽമൂല വൃത്തത്തിനകത്തോ, പുറത്തോ, വൃത്തത്തിൽത്തന്നെയോ എന്നു കണ്ടുപിടിക്കുക.

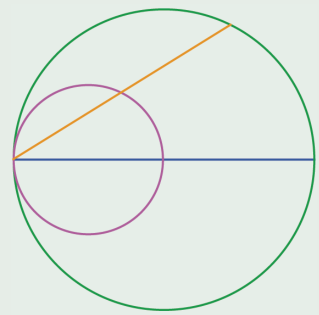


(2) ചിത്രത്തിലെ ചതുർഭുജത്തിന്റെ ഓരോ വികർണവും വ്യാസമായി വൃത്തം വരച്ചാൽ, ആ വികർണത്തിലല്ലാത്ത എതിർമൂലകൾ വൃത്തത്തിനകത്തോ, പുറത്തോ, വൃത്തത്തിൽത്തന്നെയോ എന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുക.

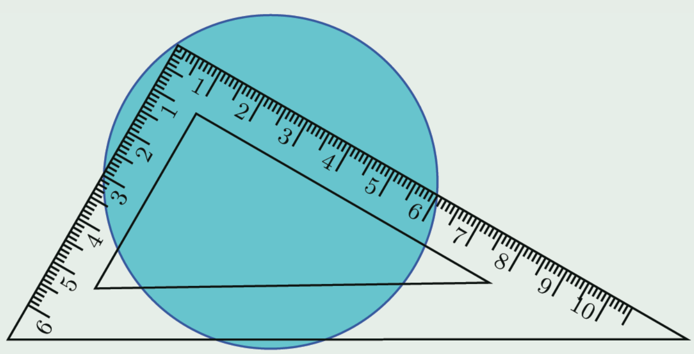


(3) വശങ്ങളുടെ നീളം 5 സെന്റിമീറ്റർ, 12 സെന്റിമീറ്റർ, 13 സെന്റിമീറ്റർ ആയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഓരോ വശവും വ്യാസമായി വൃത്തം വരച്ചാൽ, മൂന്നാം മൂല വൃത്തത്തിന്റെ എവിടെയായിരിക്കുമെന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുക.

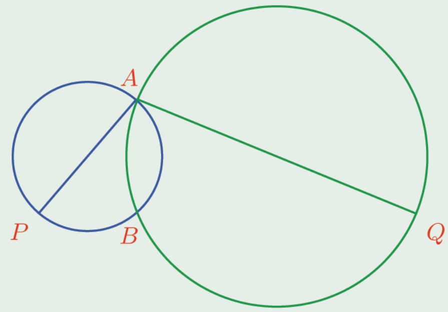
(4) ചിത്രത്തിൽ ഒരു വര വ്യാസമായി ഒരു വൃത്തവും, വരയുടെ പകുതി വ്യാസമായി ഒരു ചെറുവൃത്തവും വരച്ചിരിക്കുന്നു. വൃത്തങ്ങൾ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ വലിയ വൃത്തത്തിൽ വരയ്ക്കുന്ന ഏതു ഞാണിനെയും ചെറിയ വൃത്തം സമഭാഗം ചെയ്യുമെന്ന് തെളിയിക്കുക.



(5) ചിത്രത്തിലെ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവും പരപ്പളവും രണ്ടു ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾക്ക് കൃത്യമായി, കാൽക്കുലേറ്റർ ഉപയോഗിച്ച് കണക്കാക്കുക.



(6) ചിത്രത്തിലെ രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ പരസ്പരം മുറിച്ചു കടക്കുന്ന സ്ഥാനങ്ങളാണ് A യും, B യും. A യിലൂടെയുള്ള വ്യാസങ്ങളുടെ മറ്റേ അറ്റങ്ങളാണ്, P യും Q വും:

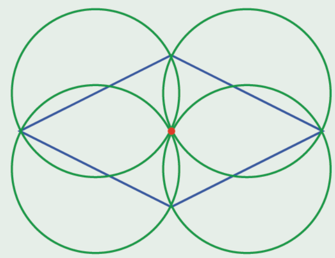


(i) P, B, Q എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ വരയിലാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

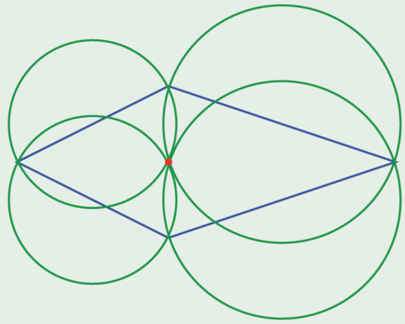
(ii) PQ എന്ന വര, വൃത്തകേന്ദ്രങ്ങൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയ്ക്ക് സമാന്തരമാണെന്നും, PQ വിന്റെ നീളം, ആ വരയുടെ നീളത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണെന്നും തെളിയിക്കുക.

(7) ഒരു സമപാർശ്വത്രികോണത്തിന്റെ തുല്യമായ വശങ്ങൾ വ്യാസങ്ങളായി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തങ്ങൾ മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിൽ കൂടി കടന്നു പോകും എന്ന് തെളിയിക്കുക.

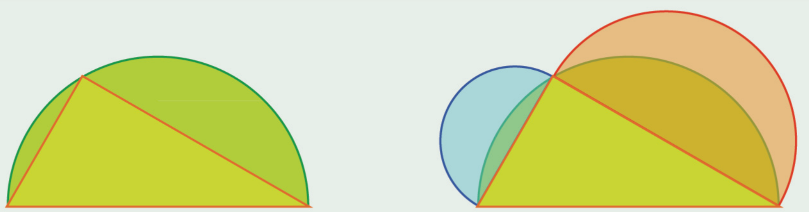
(8) ഒരു സമഭുജസാമാന്തരികത്തിന്റെ നാലു വശങ്ങളും വ്യാസമായി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തങ്ങളെല്ലാം പൊതുവായ ഒരു ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകും എന്നു തെളിയിക്കുക.



ചിത്രത്തിലേതുപോലെ സമീപവശങ്ങൾ തുല്യമായ ഏതു ചതുർഭുജത്തിലും ഇതു ശരിയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.



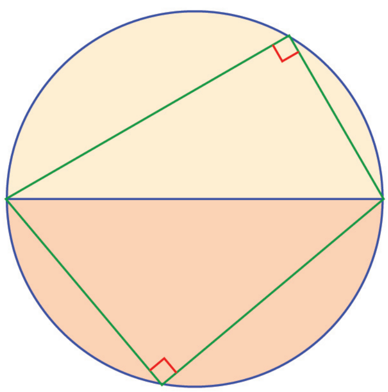
(9) ഒരു അർധവൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവും, വ്യാസത്തിന്റെ രണ്ടറ്റങ്ങളും ചേർത്ത് ഒരു ത്രികോണം വരച്ചു. തുടർന്ന്, ത്രികോണത്തിന്റെ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങൾ വ്യാസമായി അർധവൃത്തങ്ങളും വരച്ചു.



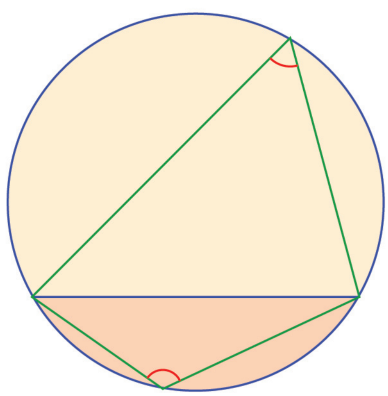
രണ്ടാം ചിത്രത്തിലെ നീലയും ചുവപ്പുമായ ചന്ദ്രക്കലകളുടെ പരപ്പളവുകൾ കൂട്ടിയാൽ, ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കിട്ടുമെന്ന് തെളിയിക്കുക.

ഞാണും കോണും ചാപവും

വൃത്തത്തിന്റെ ഏതു വ്യാസവും അതിനെ രണ്ടു തുല്യ ഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു; ഏതു ഭാഗത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവുമായി വ്യാസത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ചാലും മട്ടകോൺ കിട്ടുന്നു.

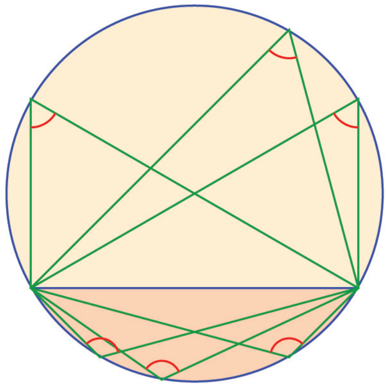


വ്യാസമല്ലാതെ മറ്റേതെങ്കിലും ഞാണായാലോ?

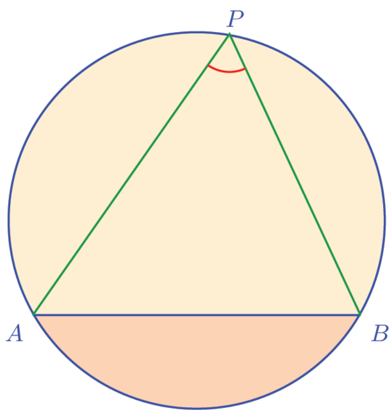


ഭാഗങ്ങൾ തുല്യമല്ല, കോണുകൾ മട്ടവുമല്ല.

എന്നാൽ ഇവിടെയും ഒരേ ഭാഗത്തുള്ള കോണുകളെല്ലാം തുല്യമാണോ?

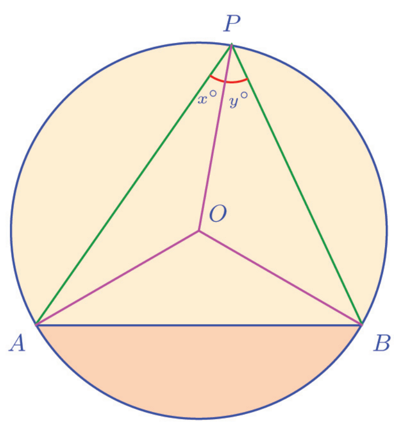


നമുക്ക് നോക്കാം. ആദ്യം മുകളിലെ ഒരു കോൺ പരിശോധിക്കാം:

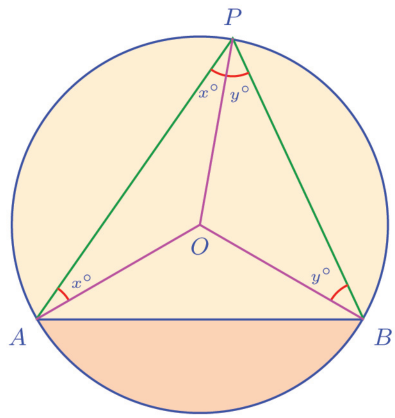


A കേന്ദ്രമായി ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അതിൽ B, C, D എന്നിങ്ങനെ മൂന്ന് ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. BC, CD, BD ഇവ യോജിപ്പിക്കുക. ∠D അടയാളപ്പെടുത്തി, D യുടെ സ്ഥാനം വൃത്തത്തിലൂടെ മാറ്റി നോക്കൂ. കോണളവിന് എന്താണ് സംഭവിക്കുന്നത്? B, C ഇവയുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ. ∠D എപ്പോഴാണ് മട്ടമാകുന്നത്? മട്ടത്തിനേക്കാൾ കൂടുതലും കുറവും ആകുന്നത് എപ്പോഴെല്ലാം?

വ്യാസത്തിന്റെ കാര്യത്തിൽ ചെയ്തതുപോലെ, വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദു P യെ, വൃത്തകേന്ദ്രം O യുമായി യോജിപ്പിക്കാം. ഈ വര P യിലെ കോണിനെ മുറിച്ചുണ്ടാക്കുന്ന ഭാഗങ്ങളുടെ അളവുകൾ x°, y° എന്നെടുക്കാം. ഇവിടെ വൃത്തകേന്ദ്രം ഞാണിൽത്തന്നെ അല്ലാത്തതിനാൽ, OA, OB ഇവയും യോജിപ്പിക്കാം.

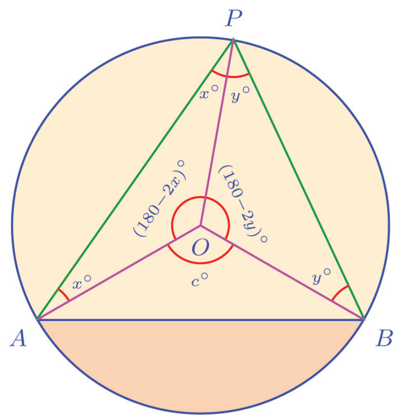


വ്യാസത്തിന്റെ കാര്യത്തിലെന്നപോലെ ഇതിലും OAP, OBP ഇവ സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങളാണല്ലോ. അപ്പോൾ A യിലെയും B യിലെയും കോണുകളുടെ ഒരു ഭാഗം എഴുതാം:



ഇവിടെ പണ്ടത്തെപ്പോലെ ഈ സമപാർശ്വ ത്രികോണങ്ങൾ ചേർന്ന് ഒറ്റ ത്രികോണമാകുന്നില്ല; അതിനാൽ ത്രികോണത്തിലെ കോണുകളുടെ തുക എടുക്കുന്ന പഴയ സൂത്രം ഫലിക്കില്ല.

പകരം O യുടെ ചുറ്റുമുള്ള കോണുകൾ എഴുതി നോക്കാം:



ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ $\angle AOB = c°$ എന്നെടുത്താൽ,

$$(180 - 2x) + (180 - 2y) + c = 360$$

എന്നു കാണാം. ഇതിൽ നിന്ന്

$$2(x + y) = c$$

എന്നും തുടർന്ന്

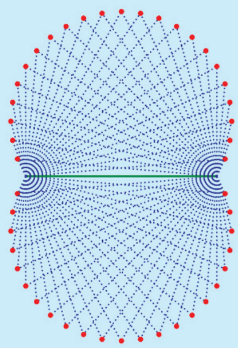
$$\angle APB = (x + y)° = \frac{1}{2}c°$$

എന്നും കിട്ടും.

ഇവിടെ ശ്രദ്ധിക്കേണ്ട കാര്യം, A, B ഇവ ഉറപ്പിച്ച ശേഷം, P യുടെ സ്ഥാനം മാറ്റുമ്പോൾ, x, y ഇവ മാറുമെങ്കിലും, c മാറുന്നില്ല.

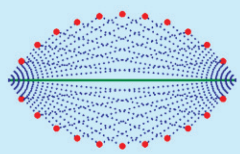
വൃത്തവിദ്യ

ഒരു വരയുടെ മുകളിലും താഴെയും ഒരേ വലുപ്പമുള്ള കോണുകൾ വരച്ച ചിത്രം നോക്കൂ:



മുകളിലും താഴെയും $60°$ എടുത്താണ് ഇവിടെ വരച്ചത്.

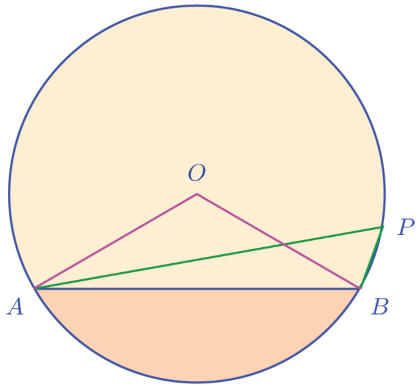
$120°$ എടുത്തപ്പോൾ ഇങ്ങനെയും:



മുകളിൽ $60°$ ഉം, താഴെ $120°$ എടുത്തു നോക്കൂ. ഒരു മുഴുവൻ വൃത്തം കിട്ടുന്നില്ലേ? എന്തുകൊണ്ടാണിത്?

മുകളിൽ $30°$ കോണുകളാണ് എടുത്തതെങ്കിൽ, മുഴുവൻ വൃത്തമാകാൻ, താഴെ എടുക്കേണ്ട കോൺ എത്രയാണ്?

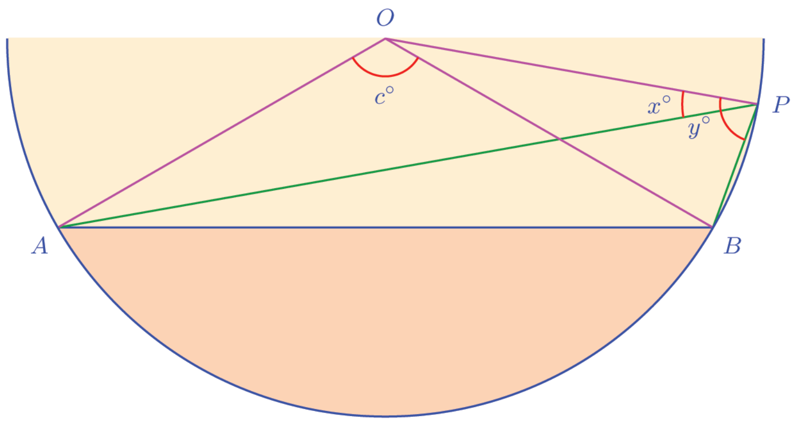
അപ്പോൾ P യുടെ സ്ഥാനം, AB യുടെ മുകളിൽ വൃത്തത്തിൽ എവിടെ ആയാലും $\angle APB = \frac{1}{2}c°$ എന്നുതന്നെ കിട്ടുമോ?



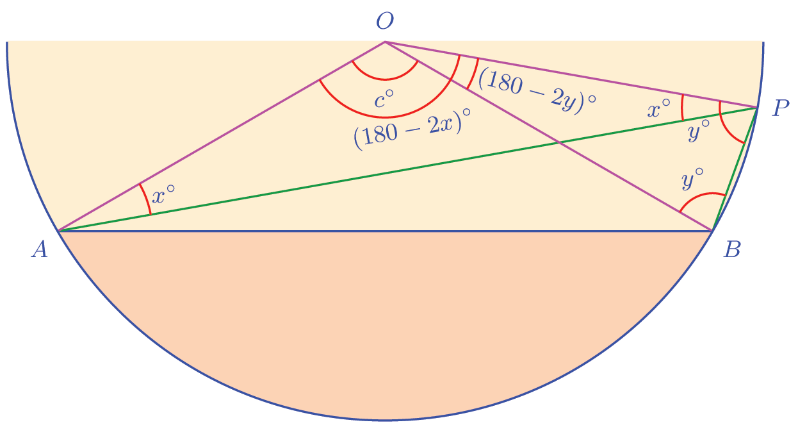
ഇങ്ങനെ ആയാലോ?

നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ $\angle APO = x°$ എന്നും $\angle BPO = y°$ എന്നുമെടുക്കാം.

കോണുകൾ വ്യക്തമായി കാണാൻ ചിത്രത്തിന്റെ വേണ്ട ഭാഗം വലുതാക്കാം.



OAP, OBP ഇവ സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങളാണെന്ന കാര്യം ഉപയോഗിച്ച്, നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ മറ്റു കോണുകൾ എഴുതാം.



P യിലെ കോണുകളിൽ നിന്ന്

$$\angle APB = (y - x)°$$

എന്നു കാണാം; O യിലെ കോണുകളിൽ നിന്ന്

$$c = (180 - 2x) - (180 - 2y) = 2(y - x)$$

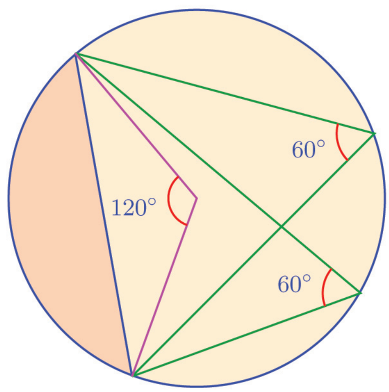
എന്നും കാണാം. അപ്പോൾ വീണ്ടും

$$\angle APB = \frac{1}{2} c°$$

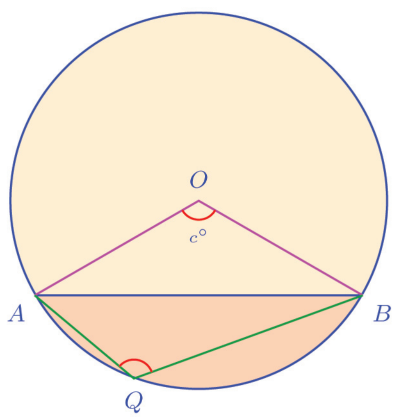
എന്നുതന്നെ കിട്ടും.

അതായത്, വ്യാസമല്ലാത്ത ഒരു ഞാണിന്റെ അറ്റങ്ങൾ വലിയ വൃത്തഭാഗത്തിലെ ഏതു ബിന്ദുവുമായും യോജിപ്പിച്ചുണ്ടാക്കുന്ന കോൺ, അവ കേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിച്ചുണ്ടാക്കുന്ന കോണിന്റെ പകുതിയാണ്:

ഉദാഹരണമായി ഈ ചിത്രം നോക്കൂ.



ഇനി വൃത്തത്തിന്റെ ചെറിയഭാഗത്തെ കോണുകൾ നോക്കാം:



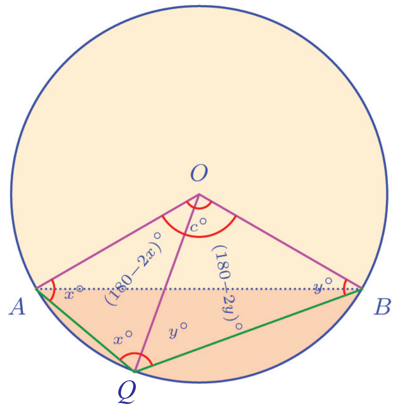
A കേന്ദ്രമായി വരയ്ക്കുന്ന ഒരു വൃത്തത്തിൽ B, C, D എന്നിങ്ങനെ മൂന്ന് ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

B, C എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ A യുമായും D യുമായും യോജിപ്പിക്കുക.

∠BDC, ∠BAC ഇവ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ രണ്ട് കോണളവുകൾ തമ്മിൽ എന്താണ് ബന്ധം?

B, C, D എന്നിവയുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ.

OQ യോജിപ്പിച്ചാൽ ഇവിടെയും രണ്ടു സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങൾ കിട്ടും. അപ്പോൾ നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ കോണുകൾ എഴുതാം.



O യിലെ കോണുകൾ നോക്കിയാൽ

$$c = (180 - 2x) + (180 - 2y)$$

എന്നു കാണാം. ഇതിൽനിന്ന്

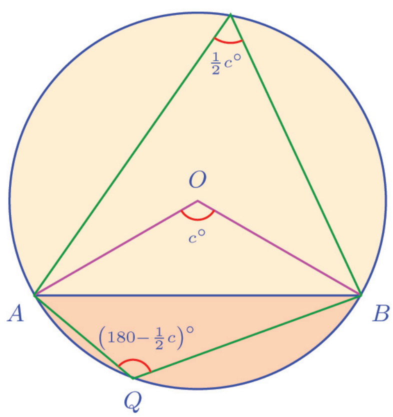
$$2(x + y) = 360 - c$$

എന്നും തുടർന്ന്

$$\angle AQB = (x + y)^\circ = \left(180 - \frac{1}{2}c\right)^\circ$$

എന്നും കിട്ടും.

ഇനി വൃത്തത്തിന്റെ രണ്ടു ഭാഗങ്ങളിലെ കോണും, കേന്ദ്രത്തിലെ കോണുമെല്ലാം ഒന്നിച്ചു നോക്കാം:

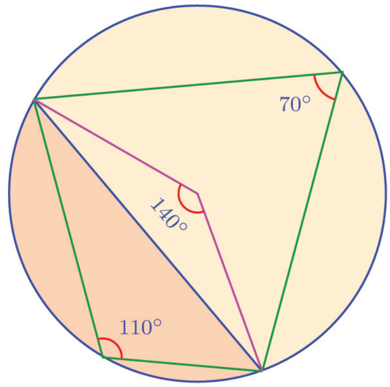


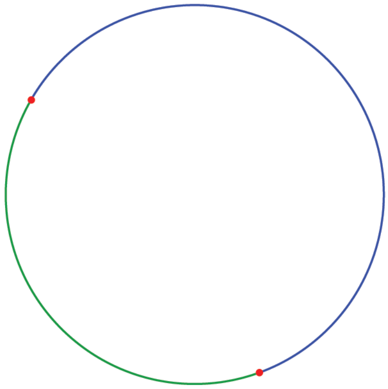
6ZLHQ6

വ്യാസമല്ലാത്ത ഒരു ഞാൺ വൃത്തത്തെ ഒരു വലിയ ഭാഗവും ഒരു ചെറിയ ഭാഗവുമായി മുറിക്കുന്നു. വലിയ ഭാഗത്തിലെ ഏതു ബിന്ദുവുമായും ഞാണിന്റെ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ചു കിട്ടുന്ന കോൺ, അവ വൃത്തകേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിച്ചു കിട്ടുന്ന കോണിന്റെ പകുതിയാണ്; ചെറിയ ഭാഗത്തിലെ ഏതു ബിന്ദുവുമായും ഞാണിന്റെ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ചു കിട്ടുന്ന കോൺ, കേന്ദ്രത്തിലെ കോണിന്റെ പകുതി 180° യിൽ നിന്നു കുറച്ചതാണ്.

ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ, ഒരു ഞാൺ കേന്ദ്രത്തിലുണ്ടാക്കുന്ന കോൺ അറിയാമെങ്കിൽ, ആ ഞാൺ അതിന്റെ ഇരുഭാഗത്തുമുണ്ടാക്കുന്ന കോണുകളെല്ലാം കണക്കാക്കാം.

ഉദാഹരണമായി, കേന്ദ്രത്തിൽ $140°$ കോൺ ഉണ്ടാക്കുന്ന ഞാൺ, വലിയ വൃത്തഭാഗത്തിൽ $\frac{1}{2} \times 140° = 70°$ കോണും, ചെറിയ ഭാഗത്ത് $180° - \left(\frac{1}{2} \times 140°\right) = 110°$ കോണുമാണ് ഉണ്ടാക്കുന്നത്:



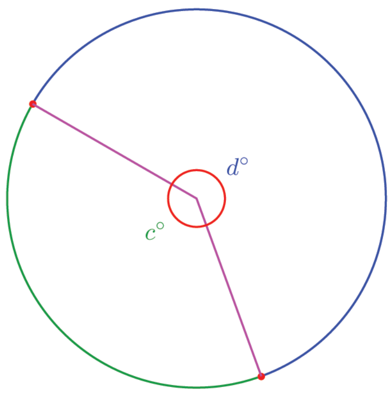


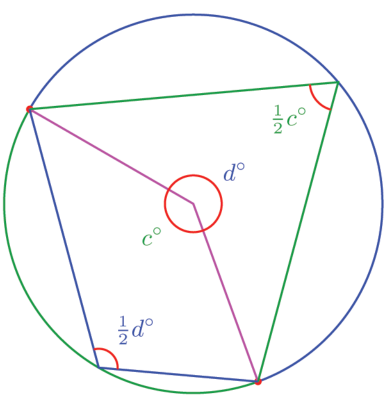
വൃത്തത്തിലെ ചാപങ്ങളുടെ കേന്ദ്രകോണിനെക്കുറിച്ച് ഒമ്പതാം ക്ലാസിൽ പഠിച്ചല്ലോ. അതുപയോഗിച്ചും മുകളിലെഴുതിയ തത്വം പറയാം.

വൃത്തത്തിലെ ഏതു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളും അതിനെ രണ്ടു ചാപങ്ങളായി ഭാഗിക്കുന്നു.

ഇവയിൽ ഓരോ ചാപത്തിനെയും മറ്റേ ചാപത്തിന്റെ **മറുചാപം (alternate arc)** എന്നോ **പൂരകചാപം (complementary arc)** എന്നോ വിളിക്കാം. ഇവയുടെ കേന്ദ്രകോണുകൾ $c°$, $d°$ എന്നെടുത്താൽ

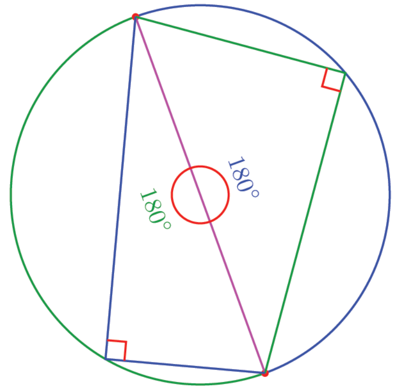
$$c + d = 360$$





ഇനി വൃത്തത്തിൽ ആദ്യമെടുത്ത രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ ഓരോ ചാപത്തിലെയും ഒരു ബിന്ദുവുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകൾ നോക്കാം. നേരത്തെ കണ്ടതനുസരിച്ച്, വലിയ ചാപത്തിലുണ്ടാക്കുന്ന കോൺ $\frac{1}{2}c°$; ചെറിയ ചാപത്തിലുണ്ടാക്കുന്ന കോൺ.

$$\left(180 - \frac{1}{2}c\right)° = \frac{1}{2}(360 - c)° = \frac{1}{2}d°$$



വൃത്തത്തിൽ എടുക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ ഒരു വ്യാസത്തിന്റെ അറ്റങ്ങളാണെങ്കിലോ? ചിത്രം ഇങ്ങനെയാകും:

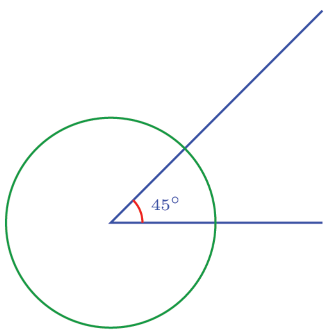
അപ്പോൾ വൃത്തത്തിലെ ഏതു ചാപത്തെക്കുറിച്ചും ഇങ്ങനെ പറയാം:

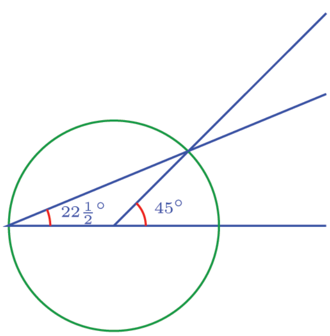
വൃത്തത്തിലെ ഏതു ചാപവും കേന്ദ്രത്തിലുണ്ടാക്കുന്ന കോണിന്റെ പകുതിയാണ് മറുചാപത്തിലുണ്ടാക്കുന്ന കോൺ.

ഒരു ചാപം മറുചാപത്തിലുണ്ടാക്കുന്ന കോണുകളെല്ലാം തുല്യമാണെന്നും ഇതിൽനിന്നു കിട്ടുന്നുണ്ട്; കൂടാതെ ആദ്യത്തെ ചിത്രത്തിൽ $\frac{1}{2}d^\circ = \left(180 - \frac{1}{2}c\right)^\circ$ എന്നത് വീണ്ടുമോർത്താൽ, ഇരുചാപങ്ങളിലെയും കോണുകളുടെ തുക 180° എന്നും കാണാം. തുക 180° ആയ ഒരു ജോടി കോണുകളെ പൊതുവെ **അനുപൂരകകോണുകൾ (supplementary angles)** എന്നു പറയാറുണ്ട്. അപ്പോൾ ഈ കാര്യങ്ങൾ ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

വൃത്തത്തിലെ ഒരു ചാപം, മറുചാപത്തിലുണ്ടാക്കുന്ന കോണുകളെല്ലാം തുല്യമാണ്; അതേ ചാപത്തിലും മറുചാപത്തിലുമുണ്ടാക്കുന്ന ഏതു ജോടി കോണുകളും അനുപൂരകമാണ്.

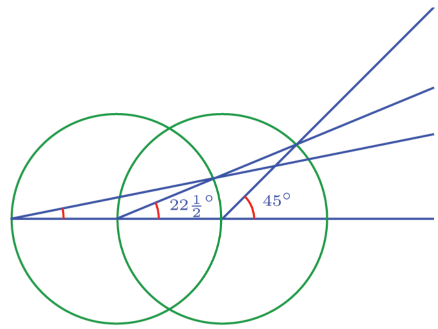
കോണുകൾ പകുതിയാക്കാൻ ഈ തത്വം ഉപയോഗിക്കാം. ചിത്രം നോക്കൂ:





കോണിന്റെ മൂലയാണ് വൃത്തകേന്ദ്രം. ഇനി കോണിന്റെ താഴത്തെ വര നീട്ടി വൃത്തത്തിൽ മുട്ടുന്ന ബിന്ദുവും, കോണിന്റെ മുകളിലെ വര വൃത്തത്തെ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദുവും യോജിപ്പിച്ചാൽ പകുതിക്കോണായി.

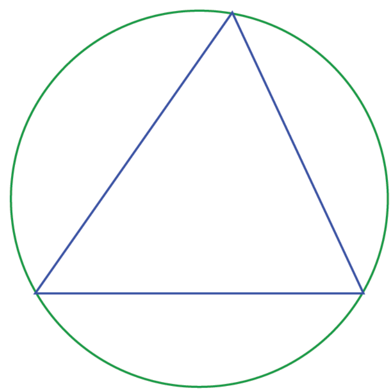
ഇങ്ങനെതന്നെ വീണ്ടും വരച്ചാലോ?

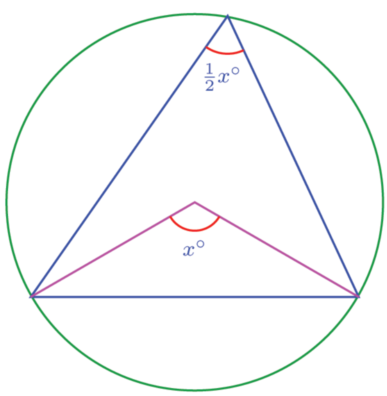


ചിത്രത്തിലെ മൂന്നാമത്തെ കോണിന്റെ അളവെത്രയാണ്?

നിശ്ചിത കോണുകളും, നിശ്ചിത പരിവൃത്തവുമുള്ള ത്രികോണം വരയ്ക്കാനും ഈ തത്വം ഉപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, കോണുകൾ $30°$, $70°$, $80°$ എന്നിവയും, പരിവൃത്ത ആരം 2.5 സെന്റിമീറ്ററും ആയ ത്രികോണം വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം.

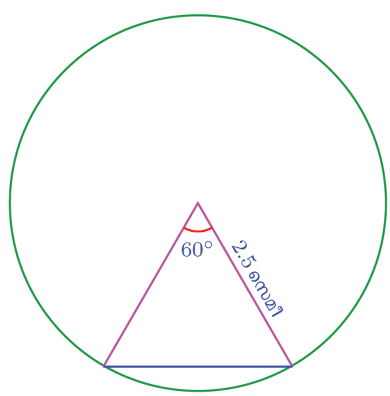
ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നു വശങ്ങളും പരിവൃത്തത്തിന്റെ ഞാണുകളാണല്ലോ.



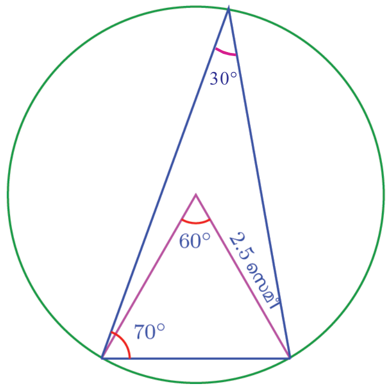


അപ്പോൾ ഓരോ വശവും പരിവൃത്തകേന്ദ്രത്തിലുണ്ടാക്കുന്ന കോണിന്റെ പകുതിയാണ്, ത്രികോണത്തിൽ ആ വശത്തിനെതിരെയുള്ള കോൺ.

അപ്പോൾ നമുക്കു വേണ്ട ത്രികോണം വരയ്ക്കാൻ, ആദ്യം 2.5 സെന്റിമീറ്റർ ആരത്തിൽ വൃത്തം വരച്ച്, അതിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ $60°$ കോൺ വരയ്ക്കുക; അതിന്റെ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ചാൽ, ത്രികോണത്തിന്റെ $30°$ കോണിനെതിരെയുള്ള വശമായി.

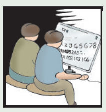


ഇനി ഈ വശത്തിന്റെ ഒരറ്റത്ത് 70° കോൺ വരച്ച്, അതിന്റെ മുകൾവശം വൃത്തത്തിൽ മുട്ടിക്കുക. ഈ ബിന്ദു ആദ്യവശത്തിന്റെ മറ്റേ അറ്റവുമായി യോജിപ്പിച്ചാൽ ഉദ്ദേശിച്ച ത്രികോണമായി.

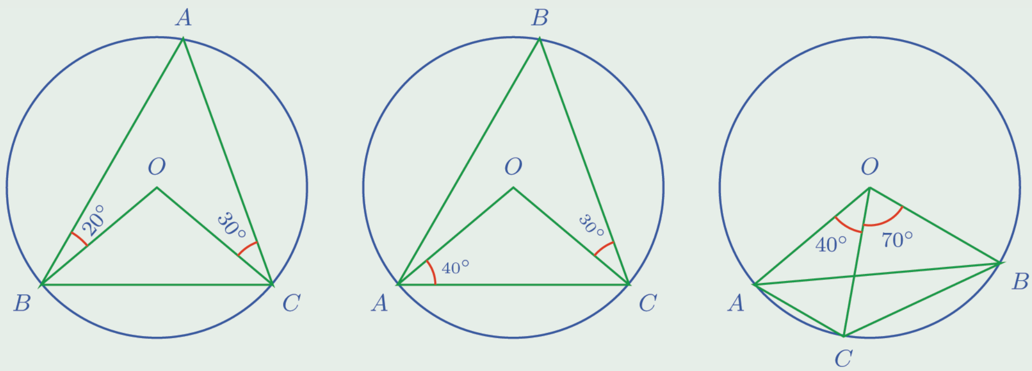


ഈ ത്രികോണത്തിലെ മൂന്നാമത്തെ കോൺ 80° തന്നെയല്ലേ? (കാരണം?)

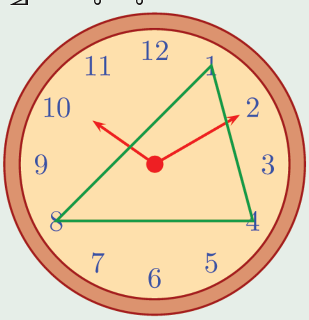
ഇതിൽനിന്ന് ഒരു കാര്യം മനസിലാക്കാം: ഒരേ കോണുകളുള്ള അനേകം ത്രികോണങ്ങൾ വരയ്ക്കാം; പരിവൃത്തത്തിന്റെ ആരവുംകൂടി നിശ്ചയിച്ചാൽ, ത്രികോണ നിശ്ചയം മുഴുവനായി.



(1) ചുവടെയുള്ള ചിത്രങ്ങളിലെല്ലാം O വൃത്തകേന്ദ്രവും A, B, C വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കളുമാണ്. ഓരോന്നിലും ABC, OBC എന്നീ ത്രികോണങ്ങളിലെ കോണുകളെല്ലാം കണക്കാക്കുക.



(2) ചിത്രത്തിൽ ഒരു ക്ലോക്കിലെ 1, 4, 8 എന്നീ സംഖ്യകൾ യോജിപ്പിച്ച് ഒരു ത്രികോണം വരച്ചിരിക്കുന്നു:



ഈ ത്രികോണത്തിലെ കോണുകൾ കണക്കാക്കുക.

ക്ലോക്കിലെ സംഖ്യകൾ യോജിപ്പിച്ച് എത്ര സമഭുജത്രികോണങ്ങളുണ്ടാക്കാം?

(3) ചുവടെ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ഓരോ കണക്കിലും ഒരു വൃത്തവും അതിലൊരു ചാപവും വരച്ച് വൃത്തത്തെ രണ്ടു ഭാഗങ്ങളാക്കണം. ഭാഗങ്ങൾ ചോദ്യത്തിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന പോലെയാകണം:

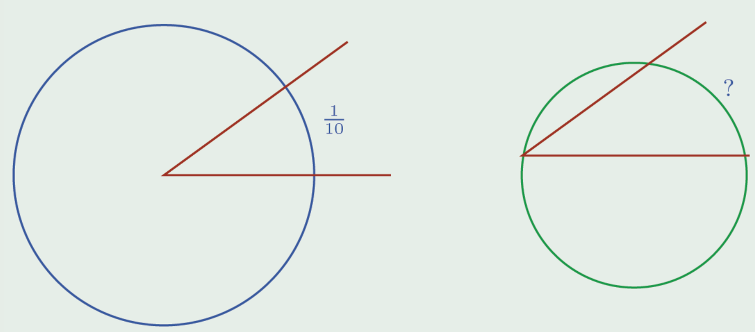
(i) ഒരു ഭാഗത്തിലെ കോണുകളെല്ലാം $80°$

(ii) ഒരു ഭാഗത്തിലെ കോണുകളെല്ലാം $110°$

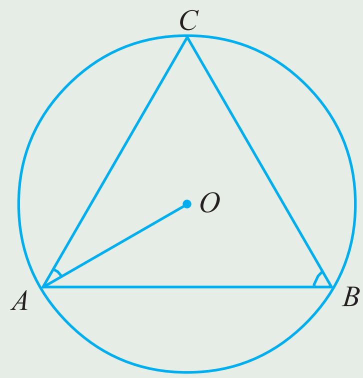
(iii) ഒരു ഭാഗത്തെ കോണുകളെല്ലാം, മറുഭാഗത്തെ കോണുകളുടെ പകുതി

(iv) ഒരു ഭാഗത്തെ കോണുകളെല്ലാം, മറുഭാഗത്തെ കോണുകളുടെ ഒന്നര മടങ്ങ്

(4) ഒരു കമ്പി രണ്ടായി മടക്കി, അതിന്റെ മൂല ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ വച്ചപ്പോൾ, വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{10}$ ഭാഗം അതിനുള്ളിൽപ്പെട്ടു: ഇതേ കമ്പിയുടെ മൂല, ഏതെങ്കിലും വൃത്തത്തിൽ ചേർത്തുവച്ചാൽ, ആ വൃത്തത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ് അതിനുള്ളിലുണ്ടാകുക?

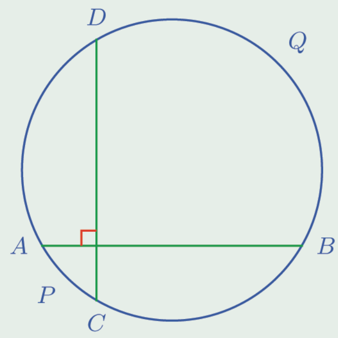


(5) ചിത്രത്തിൽ O വൃത്തകേന്ദ്രവും A, B, C അതിലെ ബിന്ദുക്കളുമാണ്. $\angle OAC + \angle ABC = 90°$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

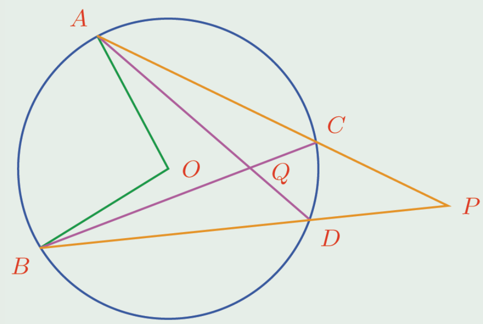


(6) പരിവൃത്ത ആരം 3 സെന്റിമീറ്ററും, രണ്ടു കോണുകൾ $32\frac{1}{2}°$, $37\frac{1}{2}°$ യുമായ ത്രികോണം വരയ്ക്കുക.

(7) ചിത്രത്തിൽ, AB, CD ഇവ പരസ്പരം ലംബമായ ഞാണുകളാണ്. APC, BQD എന്നീ ചാപങ്ങൾ ചേർത്തുവച്ചാൽ, വൃത്തത്തിന്റെ പകുതിയാകും എന്നു തെളിയിക്കുക.

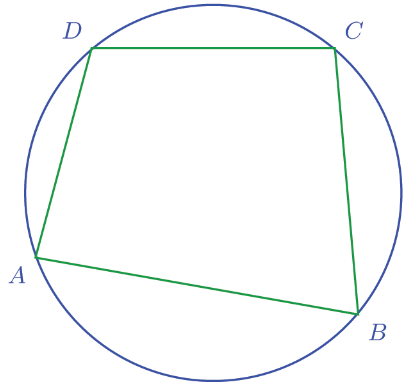


(8) ചിത്രത്തിൽ A, B, C, D എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ, O കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തിലാണ്. AC, BD എന്നീ വരകൾ നീട്ടിയത്, P യിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു; AD, BC എന്നീ വരകൾ Q വിൽ മുറിച്ചു കടക്കുന്നു. AB എന്ന ചെറിയ ചാപം O യിലുണ്ടാക്കുന്ന കോൺ, P യിലും Q വിലും ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകളുടെ തുകയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.



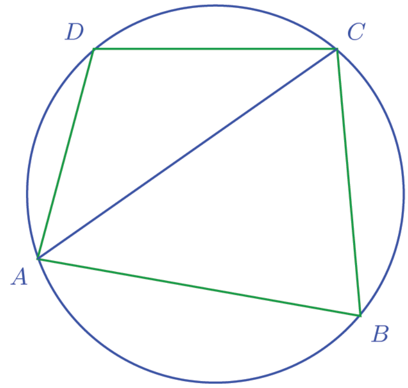
വൃത്തവും ചതുർഭുജവും

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



A, B, C, D എന്നീ മൂലകളിലെ കോണുകൾ തമ്മിലെന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ?

AC യോജിപ്പിച്ചുനോക്കൂ:



ഒരു വൃത്തത്തിലെ നാലു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചുകൊണ്ട് ഒരു ചതുർഭുജം വരയ്ക്കുക. (Polygon ഉപയോഗിക്കുക) Angle ഉപയോഗിച്ച് ചതുർഭുജത്തിനുള്ളിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്ത് എല്ലാ കോണുകളും അടയാളപ്പെടുത്തുക. കോണുകൾ തമ്മിലെന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ? ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ.

ഇപ്പോൾ B യിലേയും D യിലേയും കോണുകൾ, AC എന്ന ഞാൺ വൃത്തത്തെ മുറിച്ചുണ്ടാകുന്ന രണ്ടു ഭാഗങ്ങളിലുമുള്ള കോണുകളാണ്. അതിനാൽ അവ അനുപൂരകവുമാണ്.

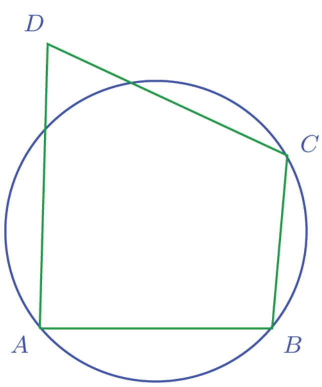
ഇതുപോലെ, BD വരച്ചുനോക്കിയാൽ A യിലേയും C യിലേയും കോണുകൾ അനുപൂരകമാണെന്നും കിട്ടും.

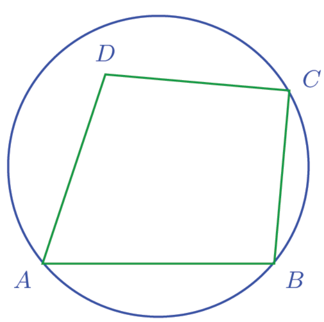
അപ്പോൾ പൊതുവേ എന്തു പറയാം?

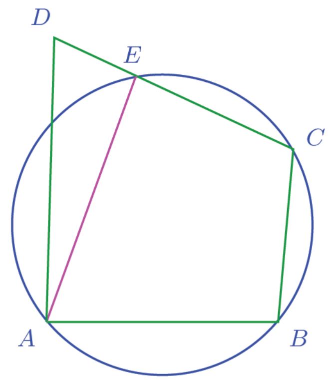
ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ മൂലകളെല്ലാം ഒരു വൃത്തത്തിലാണെങ്കിൽ, അതിന്റെ എതിർകോണുകൾ അനുപൂരകമാണ്.

മറിച്ചു പറഞ്ഞാൽ ശരിയാകുമോ? അതായത്, ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർകോണുകൾ അനുപൂരകമാണെങ്കിൽ, അതിന്റെ നാലു മൂലകളിൽക്കൂടിയും കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുമോ? ഇതിന് ഉത്തരം പറയാൻ, ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ നാലു മൂലകളും വൃത്തത്തിലാക്കാൻ പറ്റുമോ എന്നു പ്രായോഗികമായി കണ്ടുപിടിക്കുന്നത് എങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം.

ചതുർഭുജത്തിന്റെ മൂന്നു മൂലകളിൽക്കൂടി ഏതായാലും വൃത്തം വരയ്ക്കാമല്ലോ. (ഒരു വരയിലല്ലാത്ത ഏതു മൂന്നു ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടിയും വൃത്തം വരയ്ക്കാമെന്ന് ഒമ്പതാം ക്ലാസിൽ കണ്ടത് ഓർമയില്ലേ?) ഇനി നാലാമത്തെ മൂല; അത് ഈ വൃത്തത്തിൽത്തന്നെയാണെങ്കിൽ കാര്യം കഴിഞ്ഞു. പക്ഷേ ഈ മൂല ചിലപ്പോൾ വൃത്തത്തിനു പുറത്താകാം. അല്ലെങ്കിൽ വൃത്തത്തിനകത്താകാം.







ആദ്യത്തെ ചിത്രം നോക്കാം. വൃത്തം CD യെ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന ബിന്ദു E യും A യും യോജിപ്പിച്ചാൽ, വൃത്തത്തിനകത്തൊരു ചതുർഭുജമായി:

ഇപ്പോൾ A, B, C, E ഇവയെല്ലാം ഒരു വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കളായതിനാൽ,

(1) $$\angle B + \angle AEC = 180°$$

ഇനി **മട്ടവും വൃത്തവും** എന്ന ഭാഗത്തിൽ, വൃത്തത്തിനകത്തും പുറത്തുമുള്ള ബിന്ദുക്കളെക്കുറിച്ചുള്ള ചർച്ചയിലേതുപോലെ,

$$\angle AEC = \angle EAD + \angle D$$

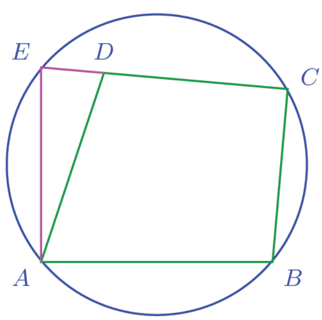
എന്നും, അതിനാൽ

(2) $$\angle D < \angle AEC$$

എന്നും കാണാമല്ലോ. ഇവിടെ (1), (2) എന്ന് അടയാളപ്പെടുത്തിയ ബന്ധങ്ങളുടെ അർഥം ആലോചിച്ചാൽ,

$$\angle B + \angle D < 180°$$

എന്നു കാണാൻ വിഷമമില്ല. ഇനി രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ, CD നീട്ടി, അതു വൃത്തത്തെ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന ബിന്ദു E യും A യും യോജിപ്പിക്കാം:



ഇതിൽ

(3) $$\angle B + \angle E = 180°$$

എന്നു കാണാം. കൂടാതെ ΔEAD യിൽ നിന്ന്

$$\angle ADC = \angle E + \angle EAD$$

എന്നും. അതിനാൽ

(4) $$\angle ADC > \angle E$$

എന്നും കാണാം.

(3), (4) എന്നീ ബന്ധങ്ങളിൽ നിന്ന്

$$\angle B + \angle ADC > 180°$$

എന്നു കാണാമല്ലോ.

ഒരു വൃത്തത്തിൽ A, B, C എന്നിങ്ങനെ മൂന്ന് ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. വൃത്തത്തിന് പുറത്ത് D എന്ന ബിന്ദുവും അടയാളപ്പെടുത്തുക. Polygon ഉപയോഗിച്ച് ABCD എന്ന ചതുർഭുജം വരച്ച് എല്ലാ കോണുകളും അടയാളപ്പെടുത്തുക. D യുടെ സ്ഥാനം വൃത്തത്തിലാകുമ്പോൾ $\angle D, \angle B$ ഇവയുടെ തുക 180° ആകുമെന്ന് കണ്ടല്ലോ. D യുടെ സ്ഥാനം വൃത്തത്തിന് പുറത്താകുമ്പോഴോ? D യുടെ സ്ഥാനം വൃത്തത്തിൽനിന്ന് അകലുന്തോറും ഈ തുകയ്ക്ക് എന്താണ് സംഭവിക്കുന്നത്? D വൃത്തത്തിനകത്താകുമ്പോഴോ?

അപ്പോൾ എന്താണ് കണ്ടത്?

ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ മൂന്നു മൂലകളിൽക്കൂടി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തത്തിനു പുറത്താണ് നാലാമത്തെ മൂലയെങ്കിൽ, ആ മൂലയിലേയും, എതിർമൂലയിലേയും കോണുകളുടെ തുക 180° യേക്കാൾ കുറവാണ്; അകത്താണെങ്കിൽ, തുക 180° യേക്കാൾ കൂടുതലും.

(നാലാമത്തെ മൂല വൃത്തത്തിൽത്തന്നെയാണെങ്കിൽ, ഈ തുക 180° തന്നെയായിരിക്കുമെന്ന് നേരത്തെ കണ്ടല്ലോ)

ഇനി $ABCD$ എന്ന ചതുർഭുജത്തിൽ $\angle B + \angle D = 180°$ ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. A, B, C ഇവയിൽക്കൂടിയുള്ള വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

D വൃത്തത്തിനു പുറത്താകുമോ? പുറത്താണെങ്കിൽ, $\angle B, \angle D$ ഇവയുടെ തുക 180° യേക്കാൾ കുറവാണല്ലോ. അപ്പോൾ വൃത്തത്തിനു പുറത്തല്ല.

D അകത്താണോ? അകത്താണെങ്കിൽ $\angle B, \angle D$ ഇവയുടെ തുക 180° യേക്കാൾ കൂടുതലാകണമല്ലോ. അപ്പോൾ വൃത്തത്തിനു അകത്തുമല്ല.

പുറത്തും അകത്തുമല്ലാത്തതുകൊണ്ട്, D വൃത്തത്തിൽത്തന്നെയാണ്.

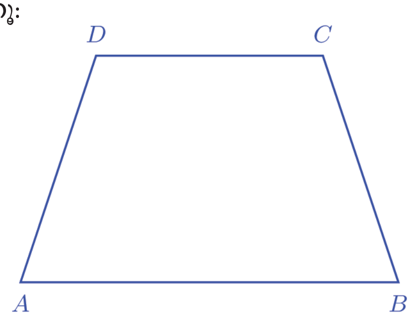
അതായത്,

ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർകോണുകൾ അനുപൂരകമാണെങ്കിൽ അതിന്റെ നാലു മൂലകളിൽക്കൂടിയും കടന്നുപോകുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കാം.

നാലു മൂലകളിൽക്കൂടിയും കടന്നുപോകുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുന്ന ചതുർഭുജം എന്നതിനെ ചുരുക്കി **ചക്രീയചതുർഭുജം (cyclic quadrilateral)** എന്നാണ് പറയുന്നത്. ഇപ്പോൾ കണ്ടതനുസരിച്ച്, എതിർകോണുകൾ അനുപൂരകമായ ചതുർഭുജങ്ങളാണ് ചക്രീയചതുർഭുജങ്ങൾ.

ചതുരങ്ങളെല്ലാം ചക്രീയചതുർഭുജങ്ങളാണല്ലോ. സമപാർശ്വലംബകങ്ങളും ചക്രീയചതുർഭുജങ്ങൾ തന്നെ.

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



$ABCD$ ഒരു സമപാർശ്വലംബകമാണ്. അപ്പോൾ

$$\angle A = \angle B$$

മാത്രമല്ല, AB യും CD യും സമാന്തരമായതിനാൽ

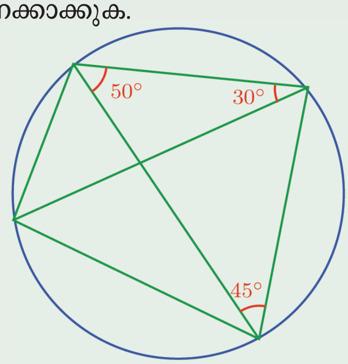
$$\angle A + \angle D = 180^\circ$$

ഈ രണ്ടു സമവാക്യങ്ങളിൽ നിന്ന്

$$\angle B + \angle D = 180^\circ$$

എന്നു കാണുമല്ലോ. അതായത് $ABCD$ ചക്രീയചതുർഭുജമാണ്.

(1) ചിത്രത്തിലെ ചതുർഭുജത്തിന്റെ കോണുകളും, വികർണങ്ങൾക്കിടയിലെ കോണുകളും കണക്കാക്കുക.

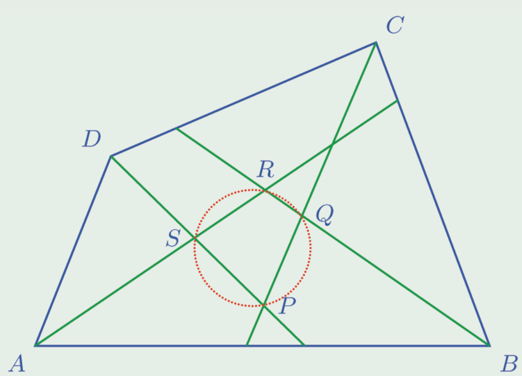


(2) ഒരു ചക്രീയചതുർഭുജത്തിലെ ഏതു മൂലയിലെയും പുറംകോൺ എതിർമൂലയിലെ അകക്കോണിനു തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(3) ചതുരമല്ലാത്ത സാമാന്തരികങ്ങളൊന്നും ചക്രീയമല്ലെന്നു തെളിയിക്കുക.

(4) സമപാർശ്വമല്ലാത്ത ലംബകങ്ങളൊന്നും ചക്രീയമല്ലെന്നു തെളിയിക്കുക.

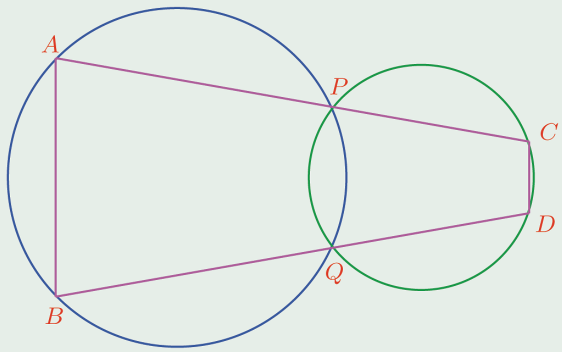
(5) ചിത്രത്തിൽ $ABCD$ എന്ന ചതുർഭുജത്തിന്റെ അടുത്തടുത്ത കോണുകളുടെ സമഭാജികൾ പരസ്പരം മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളാണ് P, Q, R, S



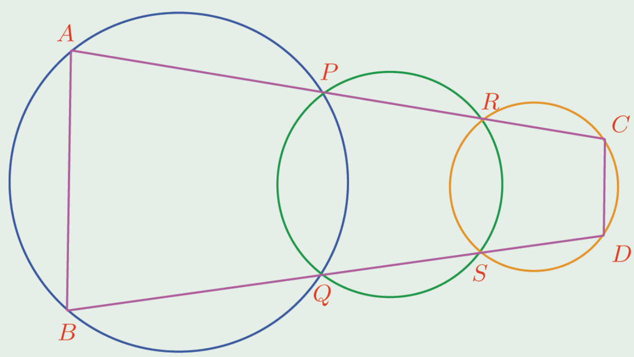
$PQRS$ ചക്രീയചതുർഭുജമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

ജിയോജിബ്രയിൽ ഒരു ചതുർഭുജം വരച്ച് അതിന്റെ കോണുകളുടെ സമഭാജികൾ വരയ്ക്കുക. അടുത്തടുത്തുള്ള കോണുകളുടെ സമഭാജികൾ പരസ്പരം മുറിച്ച് കടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തി അവ മൂലകളായി വരുന്ന ചതുർഭുജം വരയ്ക്കുക. ഈ ചതുർഭുജം ചക്രീയമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക. ഇതിനായി Circle through 3 Points ഉപയോഗിച്ച് ചതുർഭുജത്തിന്റെ മൂന്നു മൂലകളിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക; അത് നാലാമത്തെ മൂലയിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നുണ്ടോ എന്ന് നോക്കിയാൽ മതി. ആദ്യം വരച്ച ചതുർഭുജത്തിന്റെ മൂലകൾ മാറ്റി അതിനെ സമാന്തരികം, ചതുരം, സമചതുരം, സമപാർശ്വലംബകം എന്നീ രൂപങ്ങളാക്കി, ഉള്ളിൽ വരുന്ന ചതുർഭുജത്തിന്റെ പ്രത്യേകത നോക്കൂ. (ഇതിനായി Grid ഉപയോഗിക്കാം).

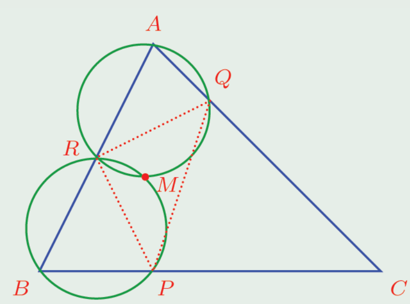
(6) i) ചിത്രത്തിലെ വൃത്തങ്ങൾ, P, Q എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ മുറിച്ചു കടക്കുന്നു. ഈ ബിന്ദുക്കളിലൂടെയുള്ള രണ്ട് വരകൾ, വൃത്തങ്ങളുമായി A, B, C, D എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു. AC, BD എന്നീ വരകൾ സമാന്തരമല്ല. ഈ വരകൾക്ക് ഒരേ നീളമാണെങ്കിൽ, $ABDC$ ചക്രീയചതുർഭുജമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.



ii) ചിത്രത്തിലെ ഇടതും വലതും വൃത്തങ്ങൾ നടുവിലെ വൃത്തത്തിനെ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളാണ് P, Q, R, S; ഇവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരകൾ ഇടതും വലതും വൃത്തങ്ങളുമായി A, B, C, D എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു. $ABDC$ ചക്രീയചതുർഭുജമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.



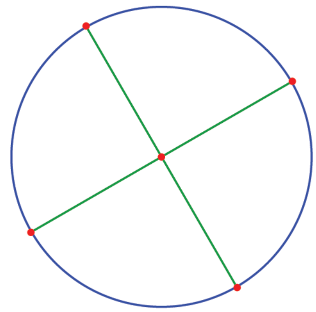
(7) ചിത്രത്തിൽ ABC എന്ന ത്രികോണത്തിലെ BC, CA, AB എന്നീ വശങ്ങളിൽ P, Q, R അടയാളപ്പെടുത്തി, AQR, PBR എന്നീ ത്രികോണങ്ങളുടെ പരിവൃത്തങ്ങൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു. ഈ വൃത്തങ്ങൾ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുവാണ് M. CPQ എന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തവും Mൽക്കൂടി കടന്നുപോകുമെന്ന് തെളിയിക്കുക.



രണ്ടു ഞാണുകൾ

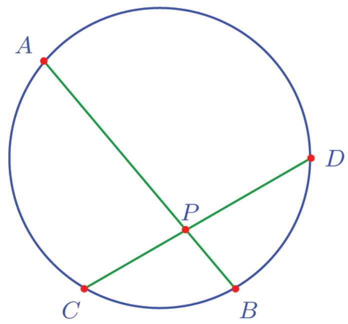
വൃത്തത്തിലെ ഏതു രണ്ടു വ്യാസവും, കേന്ദ്രത്തിലൂടെ മുറിച്ചുകടക്കുന്നു.

മുറിച്ചു കിട്ടുന്ന നാലുഭാഗങ്ങളുടെയും നീളം ആരത്തിനു തുല്യവുമാണ്.

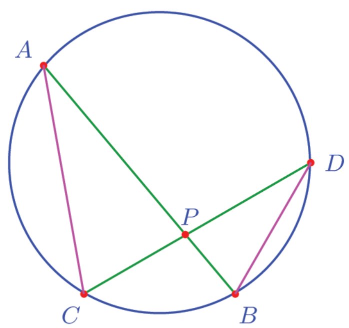


വ്യാസമല്ലാത്ത രണ്ടു ഞാണുകൾ വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ മുറിച്ചുകടക്കുമ്പോഴോ?

ചിത്രം നോക്കൂ.



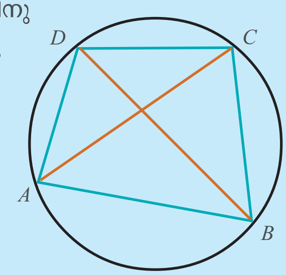
ഭാഗങ്ങളൊന്നും തുല്യമല്ല. എങ്കിലും അവ തമ്മിൽ ചില ബന്ധങ്ങളുണ്ട്. അതു കാണാൻ AC യും BD യും യോജിപ്പിക്കാം.



ഇപ്പോൾ BC എന്ന ചെറുചാപം, മറുചാപത്തിലെ A യിലും D യിലും ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകൾ തുല്യമാണ്; അതുപോലെ AD എന്ന ചെറുചാപം, മറുചാപത്തിലെ B യിലും C യിലും ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകൾ തുല്യമാണ്.

ടോളമി സിദ്ധാന്തം

ചക്രീയചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർവശജോടികളുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ തുക, വികർണങ്ങളുടെ ഗുണനഫലത്തിനു തുല്യമാണ് എന്നു കാണാം. അതായത് $ABCD$ എന്ന ചതുർഭുജം ചക്രീയമാണെങ്കിൽ



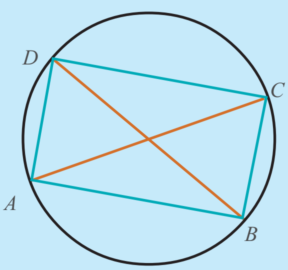
$$(AB \times CD) + (AD \times BC) = AC \times BD$$

മറിച്ച്, ഏതെങ്കിലും ചതുർഭുജത്തിൽ ഇതു ശരിയാണെങ്കിൽ, ആ ചതുർഭുജം ചക്രീയമാണ്. ടോളമി സിദ്ധാന്തം (Ptolemy's Theorem) എന്നാണ് ഇതറിയപ്പെടുന്നത്.

ചതുരം ചക്രീയമാണല്ലോ. ചതുരത്തിൽ എതിർവശങ്ങൾ തുല്യവുമാണ്; വികർണങ്ങളും തുല്യമാണ്. അപ്പോൾ $ABCD$ ചതുരമാണെങ്കിൽ, ഈ സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച്

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

ഇത് പൈഥാഗറസ് സിദ്ധാന്തമല്ലേ?



അതായത് PAC, PDB എന്നീ ത്രികോണങ്ങളിലെ കോണുകളെല്ലാം തുല്യമാണ്; അതിനാൽ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധവും തുല്യമാണ്.

അപ്പോൾ

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$$

ഇത് ഗുണനരൂപത്തിൽ ഇങ്ങനെയെഴുതാം

$$PA \times PB = PC \times PD$$

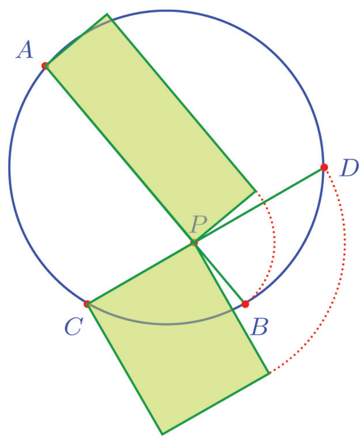
ഇതിൽ PA, PB ഇവ AB എന്ന ഞാണിന്റെ ഭാഗങ്ങളും PC, PD ഇവ CD എന്ന ഞാണിന്റെ ഭാഗങ്ങളുമാണല്ലോ. അപ്പോൾ ഇക്കാര്യം ഇങ്ങനെ പറയാം:

ഒരു വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ഞാണുകൾ വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ മുറിച്ചു കടക്കുമ്പോൾ, രണ്ടു ഞാണുകളുടെയും ഭാഗങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ഗുണനഫലം തുല്യമാണ്.

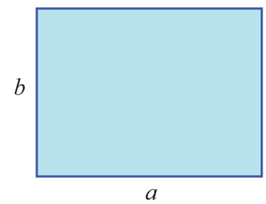
രണ്ടു നീളങ്ങളുടെ ഗുണനഫലത്തെ പരപ്പളവായി പറയാമല്ലോ. അപ്പോൾ ഈ തത്വത്തെ ജ്യാമിതീയമായി ഇങ്ങനെ പറയാം:

ഒരു വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ഞാണുകൾ വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ മുറിച്ചു കടക്കുമ്പോൾ, ഓരോ ഞാണിന്റെയും ഭാഗങ്ങൾ വശങ്ങളായ ചതുരങ്ങൾക്ക് ഒരേ പരപ്പളവാണ്.

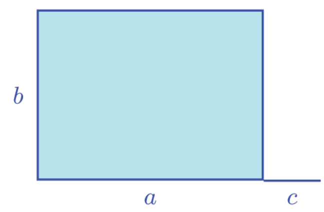
6ZVDRT



പരപ്പളവിനെ സംബന്ധിക്കുന്ന ചില കണക്കുകൾ ഇതുപയോഗിച്ച് ചെയ്യാം. ഉദാഹരണമായി, ഈ ചതുരം നോക്കുക:



ഇതിന്റെ നീളം അൽപം കൂട്ടി, പരപ്പളവ് മാറാതെ മറ്റൊരു ചതുരം വരയ്ക്കണം.

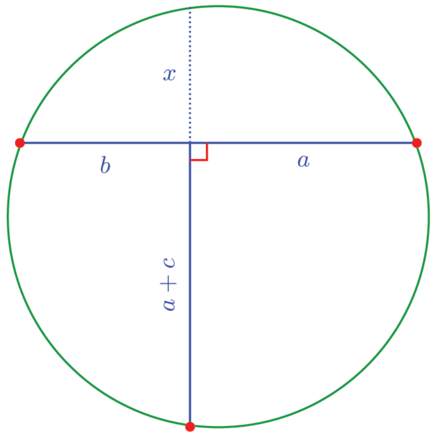


ഈ പ്രശ്നം, ബീജഗണിതഭാഷയിൽ ഇങ്ങനെ പറയാം.

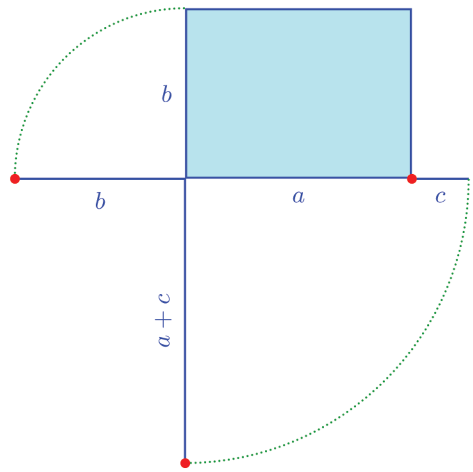
$(a + c)\,x = ab$ ആകുന്ന x കണ്ടുപിടിക്കുക.

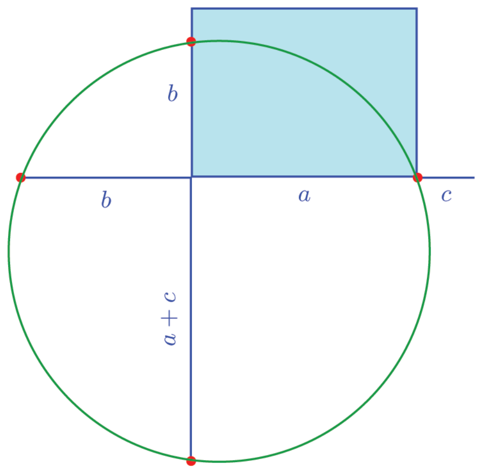
മുകളിലെഴുതിയ ജ്യാമിതീയതത്വം ഉപയോഗിച്ചാലോ?

ഇത്തരമൊരു ചിത്രം വരച്ചാൽ മതി.



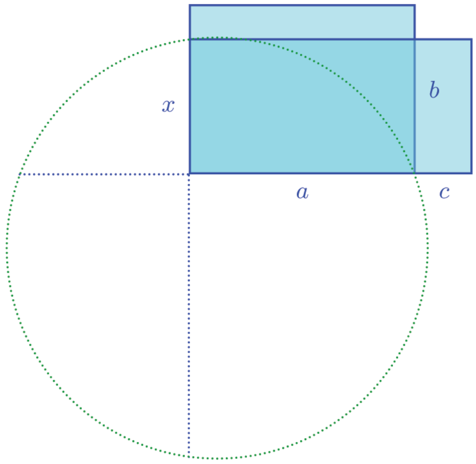
അപ്പോൾ ആദ്യം, ചതുരത്തിന്റെ താഴത്തെ വശം b നീളം ഇടത്തോട്ടും, ഇടത്തെ വശം $a + c$ നീളം താഴോട്ടും നീട്ടുക.





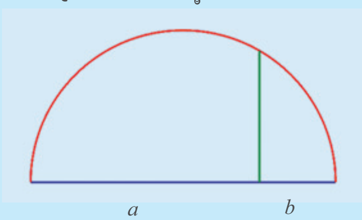
ഇനി ചിത്രത്തിലെ മൂന്നു ചുവന്ന കുത്തുകളിൽക്കൂടിയുള്ള വൃത്തം വരയ്ക്കുക. (ത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തം വരയ്ക്കാൻ അറിയാമല്ലോ?)

ഈ വൃത്തം ചതുരത്തിന്റെ ഇടതുവശത്തെ മുറിച്ചുകിട്ടുന്ന ഭാഗമാണ് പുതിയ ചതുരത്തിന്റെ വീതി.



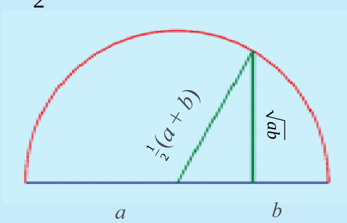
ജ്യാമിതി, ബീജഗണിതം, സംഖ്യകൾ

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



ലംബത്തിന്റെ ഉയരം എത്രയാണ്? അത് x എന്നെടുത്താൽ $ab = x^2$ എന്നും, അങ്ങനെ $x = \sqrt{ab}$ എന്നും കാണാം.

ഈ അർധവൃത്തത്തിന്റെ ആരം എത്രയാണ്? വ്യാസം $a + b$ ആയതിനാൽ, ആരം $\frac{1}{2}(a+b)$



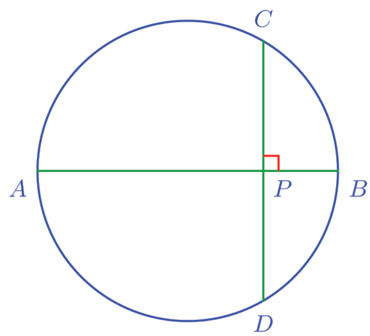
ചിത്രത്തിൽ, ആരം ലംബത്തെക്കാൾ വലുതാണല്ലോ. ഇവ തുല്യമാകുന്ന സന്ദർഭമുണ്ടോ?

അപ്പോൾ എന്തു കിട്ടി?

വ്യത്യസ്തമായ ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകൾ a, b എടുത്താലും

$$\frac{1}{2}(a+b) > \sqrt{ab}$$

ഞാണുകളുടെ ഭാഗങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള പൊതുതത്വത്തിന്റെ ഒരു സവിശേഷ സന്ദർഭവും ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടതുണ്ട്. ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ, AB വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസവും, CD അതിനു ലംബമായ ഞാണുമാണ്.



വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നുള്ള ലംബം ഞാണിനെ സമഭാഗം ചെയ്യുമെന്നതിനാൽ, ഇവിടെ $PC = PD$ ആണ്. അപ്പോൾ നേരത്തെ കണ്ട ബന്ധം ഇങ്ങിനെയാകും.

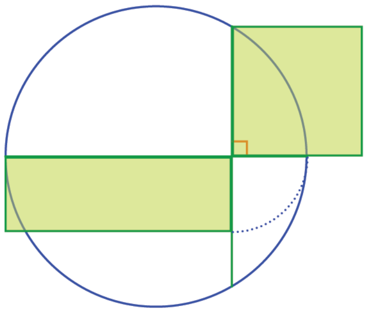
$$PA \times PB = PC^2$$

അതായത്,

വൃത്തത്തിലെ ഒരു വ്യാസത്തിനെ അതിനു ലംബമായ ഒരു ഞാൺ മുറിയ്ക്കുന്ന ഭാഗങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം, ഞാണിന്റെ പകുതിയുടെ വർഗമാണ്.

ജ്യാമിതീയഭാഷയിൽ പറഞ്ഞാലോ?

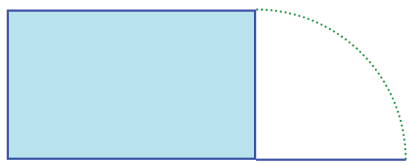
വൃത്തത്തിലെ ഒരു വ്യാസത്തിനെ അതിനു ലംബമായ ഒരു ഞാൺ മുറിയ്ക്കുന്ന ഭാഗങ്ങൾ വശങ്ങളായ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, ഞാണിന്റെ പകുതി വശമായ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിനു തുല്യമാണ്.



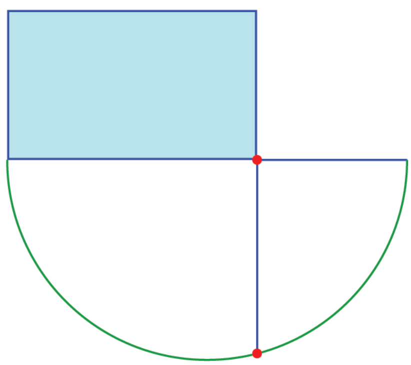
7159TG

ഒരു ചതുരത്തിനെ അതേ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരമാക്കാൻ ഈ തത്വം ഉപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, ഈ ചതുരം നോക്കുക.

ഇതേ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കാൻ, ആദ്യം ചതുരത്തിന്റെ താഴത്തെ വശം, വലതുവശം കൂടി കൂട്ടി നീട്ടുക.

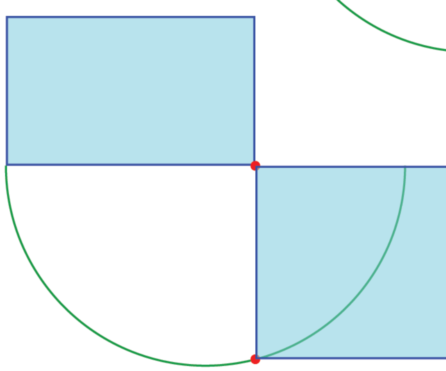


ഇനി താഴത്തെ വര വ്യാസമായി ഒരു അർധവൃത്തം താഴെ വരയ്ക്കുക; ചതുരത്തിന്റെ വലതുവശം താഴോട്ട് നീട്ടി, അർധവൃത്തവുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന സ്ഥാനം അടയാളപ്പെടുത്തുക.



ഈ വരയാണ് സമചതുരത്തിന്റെ വശം (കാരണം?)

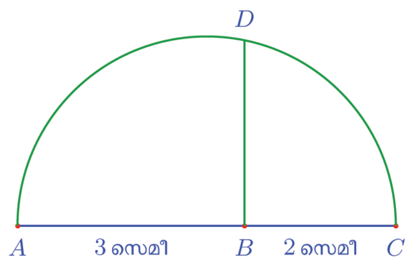
നിശ്ചിത പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കാനും ഈ മാർഗം ഉപയോഗിക്കാം.



ഉദാഹരണമായി 6 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള ഒരു സമചതുരം വരയ്ക്കുന്നത് എങ്ങനെയെന്ന് നോക്കാം.

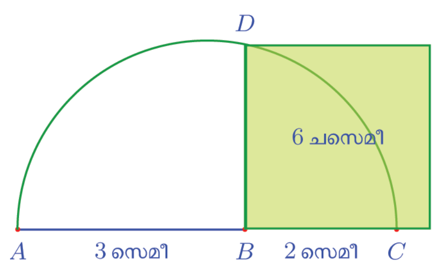
$6 = 3 \times 2$ ആയതിനാൽ, വശങ്ങളുടെ നീളം 3 സെന്റിമീറ്റർ, 2 സെന്റിമീറ്റർ ആയ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം വരച്ചാൽ മതി. അതിന് ഈ ചതുരം വരയ്ക്കണമെന്നില്ല. ഈ നീളത്തിൽ വരകൾ വരച്ചാൽ മതി.

ഇനി AC വ്യാസമായി അർധവൃത്തം വരച്ച് B യിൽ കൂടി AC ക്ക് ലംബമായി വരയ്ക്കുന്ന വര ഈ അർധവൃത്തവുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു D അടയാളപ്പെടുത്തുക.



നേരത്തെ കണ്ട തത്വമനുസരിച്ച് $BD^2 = AB \times BC = 6$ ആയതിനാൽ

BD വശമായി വരയ്ക്കുന്ന സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 6 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ ആണ്.



ഇവിടെ BD യുടെ നീളം $\sqrt{6}$ സെന്റിമീറ്റർ ആണല്ലോ.

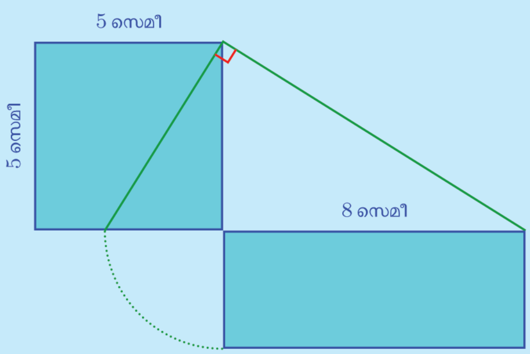
അപ്പോൾ അഭിന്നക നീളമുള്ള ചില വരകൾ വരയ്ക്കാനും ഈ തത്വം ഉപയോഗിക്കാം.

സമചതുരത്തിൽനിന്നു ചതുരത്തിലേക്ക്

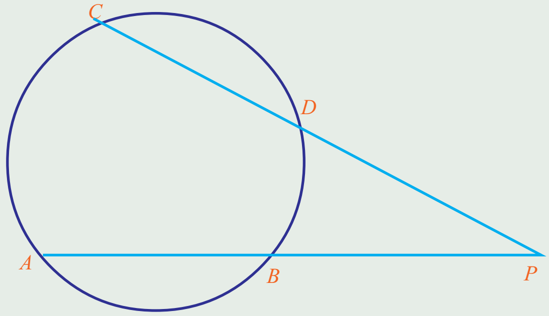
ചതുരത്തിനു തുല്യപരപ്പളവുള്ള ചതുരവും സമചതുരവും വരയ്ക്കുന്നത് കണ്ടുവല്ലോ. മറിച്ച് ഒരു സമചതുരത്തിന് തുല്യപരപ്പുള്ള ചതുരം എങ്ങനെ നിർമിക്കാം എന്നു ആലോചിക്കാം.

5 സെന്റിമീറ്റർ വശമുള്ള സമചതുരത്തിനു തുല്യമായ പരപ്പുള്ളതും ഒരു വശം 8 സെന്റിമീറ്ററുമായ ഒരു ചതുരം എങ്ങനെ വരയ്ക്കാം എന്നു നോക്കാം.

സമചതുരം വരച്ച് താഴെയുള്ള വശം വരയ്ക്കേണ്ട ചതുരത്തിന്റെ നീളമായ 8 സെന്റിമീറ്റർകൂടി നീട്ടി വരയ്ക്കുക. ഇതിന്റെ അറ്റം സമചതുരത്തിന്റെ മേൽമൂലയുമായി യോജിപ്പിച്ച് ഈ വരയ്ക്ക് ആ മൂലയിൽ ലംബം വരയ്ക്കാം. ഈ ലംബം സമചതുരത്തിന്റെ താഴത്തെ വശത്തിൽ മുറിക്കുന്ന കഷണമായിരിക്കും ചതുരത്തിന്റെ മറ്റേ വശം. (കാരണം?)



(1) ചിത്രത്തിൽ വൃത്തത്തിലെ AB, CD എന്നീ ഞാണുകൾ നീട്ടി P എന്ന ബിന്ദുവിൽ മുട്ടിച്ചിരിക്കുന്നു.



(i) AC, BD ഇവ യോജിപ്പിച്ചു കിട്ടുന്ന APC, PBD എന്നീ ത്രികോണങ്ങളുടെ കോണുകൾ തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(ii) $PA \times PB = PC \times PD$ എന്നു തെളിയിക്കുക

(iii) $PB = PD$ ആണെങ്കിൽ $ABDC$ എന്ന ചതുർഭുജം സമപാർശ്വലംബകമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

(2) 5 സെന്റിമീറ്റർ നീളവും 4 സെന്റിമീറ്റർ വീതിയുമുള്ള ചതുരം വരയ്ക്കുക.

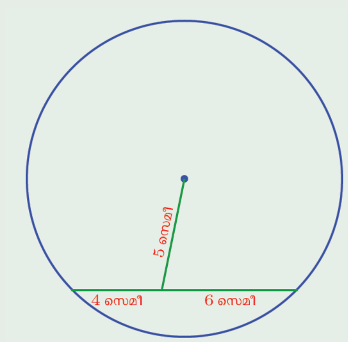
(i) ഇതേ പരപ്പളവും, നീളം 6 സെന്റിമീറ്ററുമായ ചതുരം വരയ്ക്കുക.

(ii) ഇതേ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കുക.

(3) 15 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കുക.

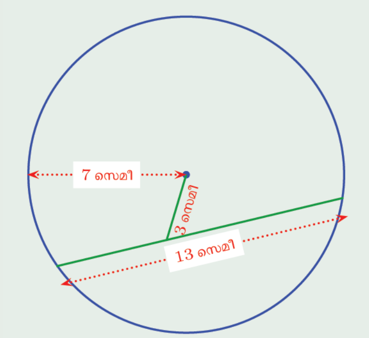
(4) 5 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള ഒരു സമചതുരം മൂന്നു വ്യത്യസ്ത രീതികളിൽ വരയ്ക്കുക. (പൈഥാഗറസ് സിദ്ധാന്തം ഓർക്കുക)

(5) ചിത്രത്തിൽ വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലൂടെയുള്ള ഒരു വര, ഒരു ഞാണിനെ രണ്ടായി ഭാഗിക്കുന്നു:

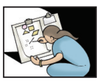


വൃത്തത്തിന്റെ ആരം എത്രയാണ്?

(6) ചിത്രത്തിൽ വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽനിന്നുള്ള ഒരു വര, വൃത്തത്തിലെ ഒരു ഞാണുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്നു.



ഞാണിന്റെ രണ്ടു ഭാഗങ്ങളുടെയും നീളം എത്രയാണ്?



ഗവേഷണം

- മൂലകളെല്ലാം ഒരു വൃത്തത്തിലും, വശങ്ങളുടെ എണ്ണം ഇരട്ടസംഖ്യയുമായ ബഹുഭുജങ്ങളുടെ കോണുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്താണ്?

സാധ്യതകളുടെ ഗണിതം

സാധ്യതകളും സംഖ്യകളും

ഒരു ചെപ്പിൽ പത്തു മുത്തുകളുണ്ട്, ഒമ്പതെണ്ണം കറുത്തതും, ഒരെണ്ണം മാത്രം വെളുത്തതും, ഇതിൽ നിന്ന് (നോക്കാതെ) ഒരു മുത്തെടുത്താൽ...

മിക്കവാറും കറുപ്പാകും, അല്ലേ? വെളുത്തതായിക്കൂടായ്കയില്ല.

മറ്റൊരു ചെപ്പിൽ എട്ടു കറുത്ത മുത്തും, രണ്ടു വെളുത്ത മുത്തും, ഇതിൽ നിന്ന് നോക്കാതെ ഒരെണ്ണമെടുത്താലോ?

അപ്പോഴും എടുക്കുന്ന മുത്ത് മിക്കവാറും കറുത്തതുതന്നെയാകാനാണ് വഴി. മൂന്നാമതൊരു ചെപ്പിൽ അഞ്ചു കറുത്തതും അഞ്ചു വെളുത്തതും. ഇതിൽനിന്നൊരു മുത്തെടുത്താലോ? കറുത്തതാകാം, വെളുത്തതാകാം എന്നല്ലാതെ കൂടുതലൊന്നും പറയാനില്ല, അല്ലേ?

ഇതെല്ലാം മറ്റൊരുതരത്തിൽ പറയാം; ആദ്യത്തെ ചെപ്പിൽനിന്നും രണ്ടാമത്തെ ചെപ്പിൽനിന്നും കറുത്തത് കിട്ടാനാണ് കൂടുതൽ സാധ്യത, മൂന്നാമത്തെ ചെപ്പിൽനിന്നാണെങ്കിൽ, കറുപ്പാകാനും വെളുപ്പാകാനും ഒരേ സാധ്യതയാണ്.

ചെപ്പും മുത്തും വച്ചൊരു കളിയാകാം; ഒരു ചെപ്പിൽ അഞ്ചു കറുത്ത മുത്തും, അഞ്ചു വെളുത്ത മുത്തും; മറ്റൊന്നിൽ ആറു കറുത്ത മുത്തും നാലു വെളുത്ത മുത്തും. ഏതെങ്കിലുമൊരു ചെപ്പിൽനിന്നൊരു മുത്തെടുക്കണം. കറുത്തതായാൽ കളി ജയിച്ചു. ഏതു ചെപ്പിൽനിന്നെടുക്കുന്നതാണ് നല്ലത്?

രണ്ടാമത്തെ ചെപ്പിലാണ് കറുത്ത മുത്തുകൾ കൂടുതലുള്ളത്, അപ്പോൾ അതിലല്ലേ കറുത്തതു കിട്ടാൻ സാധ്യത കൂടുതൽ?

രണ്ടാം ചെപ്പിൽനിന്നൊരു കറുത്ത മുത്തെടുത്ത് ഒന്നാം ചെപ്പിലിട്ടാലോ? ചെപ്പുകൾക്കുള്ളിലെ കാര്യങ്ങൾ ഇങ്ങനെയാകും.

ഒന്നാം ചെപ്പ്	:	6 കറുത്തത് 5 വെളുത്തത്
രണ്ടാം ചെപ്പ്	:	5 കറുത്തത് 4 വെളുത്തത്

ഇനി കളിയിൽ ജയിക്കാൻ ഏതു ചെപ്പിൽനിന്നെടുക്കുന്നതാണ് നല്ലത്?

ഇപ്പോൾ ഒന്നാം ചെപ്പിലാണ് കറുത്ത മുത്തു കൂടുതൽ, കറുപ്പു കിട്ടാൻ കൂടുതൽ സാധ്യതയും ഇതിലാണോ?

മൊത്തമായി ആലോചിച്ചുനോക്കാം; ഒന്നാം ചെപ്പിൽ മൊത്തം 11 മുത്ത്, അതിൽ 6 കറുത്തത്. അതായത്, മൊത്തം മുത്തിന്റെ $\frac{6}{11}$ ഭാഗം കറുത്തത്.

രണ്ടാം ചെപ്പിലോ? മൊത്തം മുത്തിന്റെ $\frac{5}{9}$ ഭാഗമാണ് കറുത്തത്.

$\frac{6}{11}$, $\frac{5}{9}$ ഇവയിലേതാണു വലുത്?

$\frac{5}{9}$ അല്ലേ?

അതായത്, രണ്ടാം ചെപ്പിലാണ് കൂടുതൽ ഭാഗം കറുത്തത്, അപ്പോൾ രണ്ടാം ചെപ്പിൽനിന്നുതന്നെ എടുക്കുന്നതല്ലേ ഇപ്പോഴും നല്ലത്?

മറ്റൊരുതരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ, രണ്ടാം ചെപ്പിൽനിന്നാണ് കറുത്ത മുത്തു കിട്ടാൻ കൂടുതൽ സാധ്യത, അൽപംകൂടി കടന്ന്, ഒന്നാം ചെപ്പിൽനിന്ന് കറുത്ത മുത്തു കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത $\frac{6}{11}$, രണ്ടാം ചെപ്പിൽനിന്ന് കറുത്ത മുത്തു കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത $\frac{5}{9}$ എന്നെല്ലാം പറയാം.

വെളുത്ത മുത്തു കിട്ടാനുള്ള സാധ്യതയോ? ഒന്നാം ചെപ്പിൽ നിന്ന് $\frac{5}{11}$, രണ്ടാം ചെപ്പിൽനിന്ന് $\frac{4}{9}$; ഇതിൽ വലുതേതാണ്? അപ്പോൾ വെളുത്ത മുത്തു കിട്ടിയാലാണ് ജയമെങ്കിൽ, ഏതു ചെപ്പിൽനിന്ന് എടുക്കുന്നതാണ് നല്ലത്? ഈ കണക്കിലെ സാധ്യതകളെല്ലാം ഇങ്ങനെ പട്ടികയാക്കാം.

		ഒന്നാം ചെപ്പ്		രണ്ടാം ചെപ്പ്	
		കറുപ്പ്	വെളുപ്പ്	കറുപ്പ്	വെളുപ്പ്
ആദ്യം	എണ്ണം	5	5	6	4
	സാധ്യത	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$
പിന്നീട്	എണ്ണം	6	5	5	4
	സാധ്യത	$\frac{6}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}$

ഒരു ചോദ്യവുമാകാം. തുടക്കത്തിലും, മുത്തു മാറ്റിയിട്ടതിനു ശേഷവും രണ്ടാം ചെപ്പിൽനിന്നുതന്നെയാണ് കറുത്ത മുത്തു കിട്ടാൻ കൂടുതൽ സാധ്യതയെന്നു കണ്ടു.

ഈ സാധ്യതതന്നെ ആദ്യമോ പിന്നീടോ കൂടുതൽ?

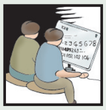
മറ്റൊരു കണക്കുനോക്കാം:

1 മുതൽ 25 വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകൾ ഓരോന്നും ഓരോ കടലാസുകഷണത്തിലെഴുതി, ഒരു പെട്ടിയിലിട്ടു. ഇതിൽ നിന്ന് ഒരു കടലാസ് എടുത്തു. കടലാസിലെ സംഖ്യ ഇരട്ടസംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

ആകെയുള്ള 25 സംഖ്യകളിൽ 13 എണ്ണം ഒറ്റയും, 12 എണ്ണം ഇരട്ടയുമാണല്ലോ. അപ്പോൾ, ഇരട്ടസംഖ്യയാകാനുള്ള സാധ്യത $\frac{12}{25}$

ഒറ്റസംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യതയോ? ഈ പെട്ടിയിൽനിന്നുതന്നെ മൂന്നിന്റെ ഗുണിതം കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്? ആറിന്റെ ഗുണിതമോ?

?



(1) ഒരു പെട്ടിയിൽ 6 കറുത്ത പന്തും, 4 വെളുത്ത പന്തും. ഇതിൽനിന്നൊരു പന്തെടുത്താൽ, അത് കറുത്തതാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്? വെളുത്തതാകാനോ?

(2) ഒരു സഞ്ചിയിൽ 3 ചുവന്ന പന്തും, 7 പച്ച പന്തുമുണ്ട്. മറ്റൊരു സഞ്ചിയിൽ 8 ചുവന്ന പന്തും, 7 പച്ച പന്തും.

(i) ആദ്യത്തെ സഞ്ചിയിൽനിന്നൊരു പന്തെടുത്താൽ, അതു ചുവന്നതാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

(ii) രണ്ടാമത്തെ സഞ്ചിയിൽ നിന്നെടുത്താലോ?

(iii) രണ്ടു സഞ്ചിയിലെയും പന്തുകൾ ഒരു സഞ്ചിയിലാക്കി അതിൽനിന്നൊരു പന്തെടുത്താൽ, അതു ചുവന്നതാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

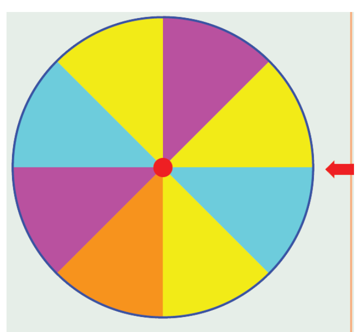
(3) ഒരാളോട് ഒരു രണ്ടക്കസംഖ്യ പറയാൻ ആവശ്യപ്പെടുന്നു. പറയുന്ന സംഖ്യ പൂർണവർഗമാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

(4) ഒന്നു മുതൽ അമ്പതു വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകൾ ഓരോന്നും ഓരോ കടലാസു കഷണങ്ങളിലെഴുതി, ഒരു പെട്ടിയിലിട്ടിട്ടുണ്ട്. ഇതിൽനിന്നൊരു കടലാസെടുക്കണം. അതിനുമുമ്പ്, കിട്ടാൻ പോകുന്ന സംഖ്യയെക്കുറിച്ച് അഭാജ്യസംഖ്യ എന്നോ അഞ്ചിന്റെ ഗുണിതം എന്നോ ഒരു ഊഹവും പറയണം. ഏത് ഊഹം പറയുന്നതാണ് നല്ലത്? എന്തുകൊണ്ട്?

(5) ഒരു സഞ്ചിയിൽ 3 ചുവന്ന മുത്തുകളും 7 പച്ച മുത്തുകളുമുണ്ട്. മറ്റൊരു സഞ്ചിയിൽ ചുവന്ന മുത്തുകളും പച്ച മുത്തുകളും ഓരോന്ന് കൂടുതലാണ്. ചുവന്ന മുത്ത് കിട്ടാൻ സാധ്യത കൂടുതൽ ഏത് സഞ്ചിയിൽ നിന്ന് എടുക്കുന്നതാണ്?

ജ്യാമിതീയ സാധ്യത

പല നിറങ്ങളുള്ള ഒരു വട്ടം, കറങ്ങാൻ പാകത്തിൽ ഒരു പലകയിൽ തറച്ചിരിക്കുന്നു.

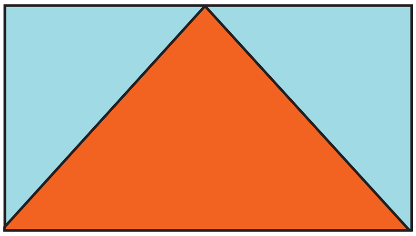


വട്ടം കറങ്ങി നിൽക്കുമ്പോൾ, പലകയിലെ അമ്പടയാളത്തിനു നേരെ മഞ്ഞനിറം വരാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

വട്ടം കറങ്ങി നിൽക്കുമ്പോൾ, അമ്പടയാളത്തിനു നേരെ വട്ടത്തിന്റെ എട്ടു ഭാഗങ്ങളിൽ ഏതും വരാം. അതിൽ മൂന്നെണ്ണമാണ് മഞ്ഞ. അപ്പോൾ, മഞ്ഞ വരാനുള്ള സാധ്യത $\frac{3}{8}$.

ഇതുപോലെ മറ്റു നിറങ്ങൾ ഓരോന്നും വരാനുള്ള സാധ്യത കണക്കാക്കി നോക്കൂ.

മറ്റൊരു കണക്കുനോക്കാം: കട്ടിക്കടലാസിൽ ഒരു ചതുരം വെട്ടിയെടുത്ത്, അതിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവും, എതിർവശത്തിന്റെ മൂലകളും ചേർത്തൊരു ത്രികോണം വരയ്ക്കുന്നു.



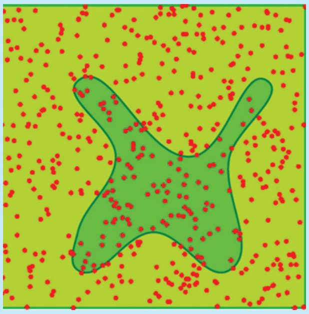
ഈ ചതുരത്തിൽ കണ്ണടച്ച് ഒരു കുത്തിട്ടാൽ, അത് ചുവന്ന ത്രികോണത്തിനകത്താകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

ത്രികോണത്തിനും ചതുരത്തിനും ഒരേ പാദവും ഒരേ ഉയരവുമല്ലേ? അപ്പോൾ ചതുരത്തിന്റെ പകുതിയാണ് ത്രികോണം.

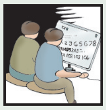
അതായത്, ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ $\frac{1}{2}$ ഭാഗമാണ് ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്. കുത്ത് ത്രികോണത്തിനകത്താകാനുള്ള സാധ്യതയും $\frac{1}{2}$ തന്നെ.

പരപ്പളവും സാധ്യതയും

സങ്കീർണമായ രൂപങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് ഏകദേശമായി കണ്ടുപിടിക്കാൻ സാധ്യതയുടെ ഗണിതം ഉപയോഗിക്കാം. ഒരു നിശ്ചിത സമചതുരത്തിനകത്ത് ഈ രൂപം വരയ്ക്കണം. എന്നിട്ട്, പ്രത്യേകിച്ചൊരു ക്രമമോ ചിട്ടയോ ഇല്ലാതെ ചിത്രത്തിൽ കുത്തുകളിടണം.

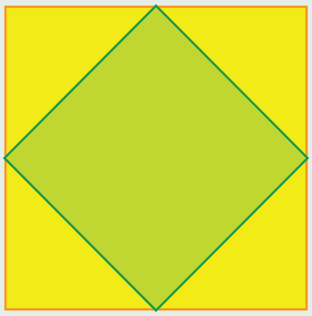


നമുക്കാവശ്യമായ രൂപത്തിനകത്തു വീണ കുത്തുകളുടെ എണ്ണത്തെ ആകെ കുത്തുകളുടെ എണ്ണം കൊണ്ടു ഹരിച്ചുകിട്ടുന്ന സംഖ്യ, ഈ രൂപത്തിന്റെ പരപ്പളവിനെ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവുകൊണ്ടു ഹരിച്ചു കിട്ടുന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായിരിക്കും. കുത്തുകളുടെ എണ്ണം വർധിക്കുന്തോറും ഇതു കൂടുതൽ കൃത്യമാകുകയും ചെയ്യും. ഈ ജ്യാമിതീയ ക്രിയയും, സംഖ്യകളുടെ ക്രിയയും കമ്പ്യൂട്ടർ ഉപയോഗിച്ച് വേഗം ചെയ്യാം. മോണ്ടികാർലോ രീതി (Monte Carlo method) എന്നാണ് ഇതിന്റെ പേര്.

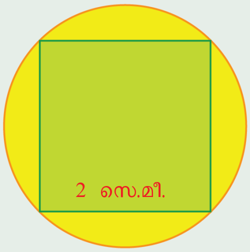


ചുവടെയുള്ള ഓരോ ചിത്രത്തിലും പച്ച നിറമുള്ള ഭാഗത്തിന്റെ വിശദീകരണം പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്. ചിത്രത്തിൽ കണ്ണടച്ചൊരു കുത്തിട്ടാൽ, അത് പച്ച ഭാഗത്തിലാകാനുള്ള സാധ്യത കണക്കാക്കുക.

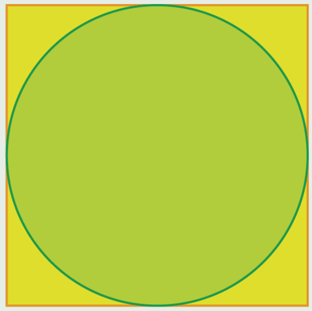
(1) ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ നാലു വശങ്ങളുടെയും മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച സമചതുരം.



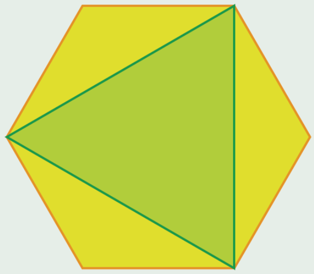
(2) മൂലകളെല്ലാം ഒരു വൃത്തത്തിലായി വരച്ച സമചതുരം.



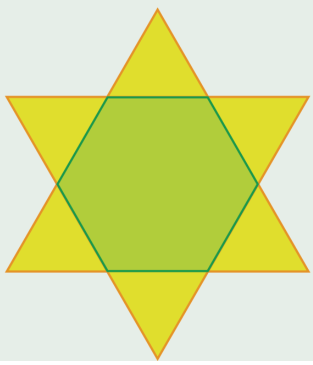
(3) ഒരു സമചതുരത്തിനകത്ത് കൃത്യമായി ചേർന്നിരിക്കുന്ന വൃത്തം.



(4) സമഷഡ്ഭുജത്തിലെ ഒന്നിടവിട്ട മൂലകൾ ചേർത്തു വരച്ച ത്രികോണം.



(5) രണ്ടു സമഭുജത്രികോണങ്ങൾക്കിടയിൽ രൂപപ്പെടുന്ന സമഷഡ്ഭുജം.

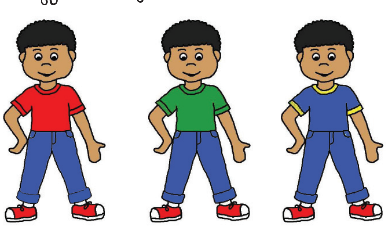


ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അതിൽ മൂന്ന് ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇവ മൂലകളായിവരുന്ന ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. (Polygon Tool ഉപയോഗിക്കണം). കണ്ണടച്ചുകൊണ്ട് വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ തൊട്ടാൽ അത് ത്രികോണത്തിനുള്ളിലാവാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്? (ത്രികോണത്തിന്റെ പേര് t1 എന്നും വൃത്തത്തിന്റെ പേര് c എന്നുമാണെങ്കിൽ സാധ്യത കണക്കാക്കാൻ Input ൽ Area(t1)/Area(c) എന്ന് നൽകിയാൽ മതി). ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ മാറ്റി നോക്കൂ, തൊടുന്നത് ത്രികോണത്തിനകത്താവാനുള്ള സാധ്യത ഏറ്റവും കൂടുതലാവുന്നത് എപ്പോഴാണ്? ഏറ്റവും കുറവാകുന്നതോ? (സാധ്യത, കൂടുതൽ ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾക്ക് കൃത്യമായി കാണുന്നതിന് Options→ Rounding എന്നതിൽ ദശാംസ്ഥാനങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂട്ടി നോക്കിയാൽ മതി).

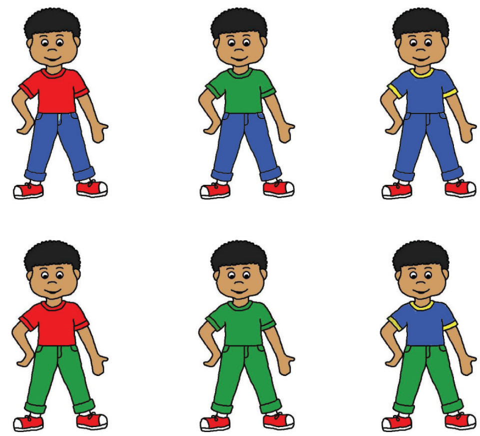
ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. n എന്ന പേരിൽ ഒരു Integer Slider നിർമിച്ച്, മൂലകളെല്ലാം വൃത്തത്തിലാകത്തക്കവിധം n വശങ്ങളുള്ള ഒരു സമബഹുഭുജം വരയ്ക്കുക (A വൃത്തകേന്ദ്രവും B വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവുമായാൽ, Angle with Given Size ഉപയോഗിച്ച് B യിലും A യിലും ക്രമമായി ക്ലിക്കു ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ കോണളവ് $(360/n)^{\circ}$ എന്ന് നൽകുക. പുതിയ ബിന്ദു B′ ലഭിക്കും. BB′ ഒരു വശമായി വരത്തക്കവിധം Regular Polygon ഉപയോഗിച്ച് സമബഹുഭുജം വരയ്ക്കാം). കണ്ണടച്ചുകൊണ്ട് വൃത്തത്തിനകത്ത് തൊട്ടാൽ അത് ബഹുഭുജത്തിനകത്താവാനുള്ള സാധ്യത കണക്കാക്കുക. ബഹുഭുജത്തിന്റെ പേര് poly1 എന്നും വൃത്തത്തിന്റെ പേര് c എന്നുമാണെങ്കിൽ Area(poly1)/Area(c) എന്ന് Input നൽകിയാൽ മതി. സാധ്യത ഏറ്റവും കുറവാകുന്നത് എപ്പോഴാണ്? വശങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂടുമ്പോൾ സാധ്യതയ്ക്ക് എന്ത് സംഭവിക്കുന്നു?

ജോടികൾ

അലക്കിത്തേച്ചതെല്ലാം നോക്കിയപ്പോൾ, ജോണിക്ക് ഒരു നീലപ്പാന്റ്സും, ചുവപ്പും പച്ചയും നീലയുമായി മൂന്നു ഷർട്ടും കിട്ടി. എങ്ങനെയെല്ലാം ഒരുങ്ങാം, ജോണി ആലോചിച്ചു.



ഒന്നുകൂടി തിരഞ്ഞപ്പോൾ ഒരു പച്ചപ്പാന്റ്സും കിട്ടി. അപ്പോളിനി ഇത് ഓരോ ഷർട്ടിന്റെ കൂടെയുമിട്ട്, മൂന്നുതരത്തിൽ കൂടി ആകാമല്ലോ, ജോണി കണക്കു കൂട്ടി.



അങ്ങനെ ആറു വ്യത്യസ്ത രീതിയിൽ ജോണിക്ക് ഒരുങ്ങാം. ഇതിൽ എത്ര എണ്ണത്തിലാണ് പാന്റ്സും ഷർട്ടും ഒരേ നിറമാകുന്നത്?

അപ്പോൾ ജോണി, ഒരേ നിറത്തിലുള്ള ഷർട്ടും പാന്റ്സും ഇടാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ അല്ലേ?

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം. ഒരു പെട്ടിയിൽ 1, 2, 3, 4 എന്നിങ്ങനെ സംഖ്യകളെഴുതിയ നാലു കടലാസുകഷണങ്ങളും; മറ്റൊരു പെട്ടിയിൽ 1, 2 എന്നീ സംഖ്യകളെഴുതിയ രണ്ടു കടലാസുകഷണങ്ങളും. രണ്ടിൽ നിന്നും ഓരോ കടലാസെടുത്തു കിട്ടുന്ന സംഖ്യാജോടികൾ ഏതൊക്കെയാകാം?

ആദ്യത്തെ പെട്ടിയിൽ നിന്ന് 1 എന്നെടുത്താൽ, രണ്ടാമത്തെ പെട്ടിയിൽ 1, 2. ഇവ ഓരോന്നും ചേർത്ത് രണ്ടു ജോടികൾ, ഇവയെ (1, 1), (1, 2) എന്നെഴുതാം.

ഇതുപോലെ ഒന്നാമത്തെ പെട്ടിയിൽനിന്ന് ഓരോ സംഖ്യകളുമെടുത്ത്, കിട്ടാവുന്ന സംഖ്യാജോടികളെല്ലാം എഴുതിയാലോ?

(1, 1), (1, 2)
(2, 1), (2, 2)
(3, 1), (3, 2)
(4, 1), (4, 2)

ആകെ 8 ജോടികൾ

ഒരു പ്രശ്നം

പ്രസിദ്ധ ശാസ്ത്രജ്ഞനായ ഗലീലിയോ, ചൂതുകളിക്കാരനായ ഒരു സുഹൃത്ത് ഉന്നയിച്ച പ്രശ്നത്തെക്കുറിച്ചു പറയുന്നുണ്ട്. മൂന്നു പകിട ഒന്നിച്ചുരുട്ടുമ്പോൾ, തുകയായി 9 കിട്ടുന്നതും 10 കിട്ടുന്നതും, ആറു വിധത്തിലാണ് എന്നയാൾ കണക്കാക്കി.

	9	10
1.	1+2+6	1+3+6
2.	1+3+5	1+4+5
3.	1+4+4	2+2+6
4.	2+2+5	2+3+5
5.	2+3+4	2+4+4
6.	3+3+3	3+3+4

എന്നാൽ അനുഭവത്തിൽ, 10 ആണ് 9 നേക്കാൾ കൂടുതൽ വരുന്നത്. ഇതെന്തുകൊണ്ടാണെന്നാണ് ചോദ്യം.

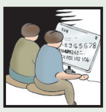
ഇതിൽ 1, 2, 6 എന്നെടുത്തിരിക്കുന്നത്, ഏതോ ഒരു പകിടയിൽ 1, മറ്റൊന്നിൽ 2, മൂന്നാമത്തേതിൽ 6 എന്നാണല്ലോ. ഇതിനുപകരം ആദ്യത്തെ പകിടയിൽ 1, രണ്ടാമത്തെ പകിടയിൽ 2, മൂന്നാമത്തെ പകിടയിൽ 6 എന്നതിനെമാത്രം (1, 2, 6) എന്ന ത്രയമുപയോഗിച്ചു സൂചിപ്പിക്കുക, ആദ്യത്തെ പകിടയിൽ 1, രണ്ടാമത്തെ പകിടയിൽ 6, മൂന്നാമത്തെ പകിടയിൽ 2, എന്നതിനെ (1, 6, 2) എന്ന ത്രയമുപയോഗിച്ചു സൂചിപ്പിക്കുക. (1, 2, 6), (1, 6, 2), (2, 1, 6), (2, 6, 1), (6, 1, 2), (6, 2, 1) എന്നീ ആറു വ്യത്യസ്ത ത്രയങ്ങൾ 9 തുകയായി കിട്ടുന്ന വിധത്തിൽ എടുക്കണം എന്നാണ് ഗലീലിയോയുടെ ഉത്തരം. മറ്റു ത്രയങ്ങളേയും ഇതുപോലെ വിസ്തരിച്ചെഴുതിയാൽ, 9 കിട്ടുന്നത് 25 രീതിയിലും, 10 കിട്ടുന്നത് 27 രീതിയിലുമാണെന്നും ഗലീലിയോ വ്യക്തമാക്കുന്നു. (ചെയ്തു നോക്കൂ)

ഇതിൽ എത്രയെണ്ണത്തിലാണ് രണ്ടും ഒറ്റസംഖ്യകളാകുന്നത്?

(1, 1), (3, 1) എന്ന രണ്ടു ജോടികളിൽ മാത്രമല്ലേ? അപ്പോൾ ഈ രണ്ടു പെട്ടികളിൽ ഓരോന്നിൽ നിന്നും ഓരോ കടലാസെടുത്താൽ, രണ്ടും ഒറ്റ സംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യത $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

ഇതുപോലെ രണ്ടും ഇരട്ടസംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യത കണക്കാക്കാമോ? ഏതെങ്കിലുമൊരു സംഖ്യ ഒറ്റയും, മറ്റേ സംഖ്യ ഇരട്ടയും ആകാനുള്ള സാധ്യതയോ? രണ്ടും ഒരേ സംഖ്യയാകാനുള്ള സാധ്യതയോ?

?



(1) രജനിക്ക് പച്ച, നീല, ചുവപ്പ് എന്നീ നിറങ്ങളിൽ കല്ലുമാലയും കമ്മലുമുണ്ട്. എത്ര രീതികളിൽ രജനിക്ക് മാലയും കമ്മലുമണിയാം? ഒരു ദിവസം രജനി ഒരേ നിറമുള്ള മാലയും കമ്മലും അണിയാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്? വ്യത്യസ്ത നിറമുള്ളതോ?

(2) ഒരു പെട്ടിയിൽ 1, 2, 3, 4 എന്നീ സംഖ്യകളെഴുതിയ നാലു കടലാസുകഷണങ്ങളും മറ്റൊരു പെട്ടിയിൽ 1, 2 എന്നെഴുതിയ രണ്ടു കടലാസുകഷണങ്ങളുമുണ്ട്. ഓരോ പെട്ടിയിൽ നിന്നും ഓരോ കടലാസെടുത്താൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളുടെ തുക ഒറ്റ സംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്? തുക ഇരട്ടസംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യതയോ?

(3) ഒരു പെട്ടിയിൽ 1, 2, 3, 4 എന്നീ സംഖ്യകളെഴുതിയ നാലു കടലാസുകഷണങ്ങളും, മറ്റൊരു പെട്ടിയിൽ 1, 2, 3 എന്നെഴുതിയ മൂന്നു കടലാസുകഷണങ്ങളുമുണ്ട്. ഒരോ പെട്ടിയിൽ നിന്നും ഓരോ കടലാസെടുത്താൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം ഒറ്റസംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്? ഗുണനഫലം ഇരട്ടസംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യതയോ?

(4) അക്കങ്ങൾ രണ്ടും 1, 2, 3 ഇവയിൽ ഏതെങ്കിലും ആയ രണ്ടക്ക സംഖ്യകളിൽ ഒരെണ്ണമെടുത്താൽ,

(i) രണ്ടക്കങ്ങളും തുല്യമാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

(ii) അക്കങ്ങളുടെ തുക 4 ആകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

(5) രണ്ടുപേർ തമ്മിലുള്ള ഒരു കളി. ഓരോരുത്തരും ഒറ്റസംഖ്യവേണോ, ഇരട്ടസംഖ്യവേണോ എന്ന് ആദ്യം തീരുമാനിക്കണം. രണ്ടുപേരും ഒരു കൈയിലെ കുറെ വിരലുകൾ ഒരുമിച്ചുയർത്തുന്നു. ആകെ വിരലുകളുടെ എണ്ണം ഒറ്റസംഖ്യയാണെങ്കിൽ, അത് ആദ്യമേ എടുത്തയാൾ ജയിച്ചു; ഇരട്ടസംഖ്യയാണെങ്കിൽ, അതെടുത്തയാളും. ഈ കളിയിൽ ആദ്യം ഒറ്റസംഖ്യ എടുക്കുന്നതാണോ, ഇരട്ടസംഖ്യ എടുക്കുന്നതാണോ നല്ലത്?

കൂടുതൽ ജോടികൾ

വീണ്ടും രണ്ടു പെട്ടികൾ, ഒന്നിൽ 1 മുതൽ 10 വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകളെഴുതിയ പത്തു കടലാസുകഷണങ്ങൾ, രണ്ടാമത്തേതിൽ 1 മുതൽ 5 വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകളെഴുതിയ അഞ്ചു കടലാസുകഷണങ്ങൾ, പതിവുപോലെ രണ്ടിൽനിന്നും ഓരോ കടലാസെടുക്കുന്നു. രണ്ടും ഒറ്റസംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള വഴി എളുപ്പമാണ്, ആകെ എത്ര സംഖ്യാജോടികൾ സാധ്യമാണെന്നു കണക്കാക്കുക, അവയിൽ എത്രയെണ്ണം നമുക്കു വേണ്ട രീതിയിൽ രണ്ടും ഒറ്റ സംഖ്യയാണെന്നു നോക്കുക, രണ്ടാമത് കിട്ടിയ സംഖ്യയെ ആദ്യം കിട്ടിയ സംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ സാധ്യതയായി.

പറയുന്നതുപോലെ എളുപ്പമാണോ ചെയ്യുന്നത്? എല്ലാ സംഖ്യാജോടികളും എഴുതി എണ്ണുക അത്ര രസമുള്ള കാര്യമല്ലല്ലോ.

ചിന്തിച്ചുനോക്കാം. ആദ്യത്തെ സംഖ്യ പത്തെണ്ണത്തിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്നാകാം, രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ അഞ്ചെണ്ണത്തിൽ ഏതെങ്കിലുമൊന്നും, അപ്പോൾ ആദ്യത്തെ സംഖ്യ 1 ആകുന്ന എത്ര ജോടികളുണ്ട്? ആദ്യത്തെ സംഖ്യ 2 ആകുന്ന ജോടികളോ?

ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ ആദ്യത്തെ സംഖ്യ നിശ്ചയിച്ചുകഴിഞ്ഞാൽ, രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ മാറ്റി 5 ജോടികളുണ്ടാക്കാം. ആദ്യത്തെ സംഖ്യതന്നെ 10 തരത്തിലാകാം. അപ്പോൾ മൊത്തം സംഖ്യാജോടികളെ ഇങ്ങനെ സങ്കൽപ്പിക്കാം.

5 എണ്ണം (→), 10 എണ്ണം (↓)

(1, 1)	(1, 2)	...	(1, 5)
(2, 1)	(2, 2)	...	(2, 5)
...	...	...	...
...	...	...	...
(10, 1)	(10, 2)	...	(10, 5)

ഈ 50 ജോടികളിൽ എത്ര എണ്ണത്തിലാണ് രണ്ടും ഒറ്റസംഖ്യകളാവുന്നത്? അതിന്, ആദ്യത്തെ സംഖ്യ 1, 3, 5, 7, 9 എന്നീ 5 എണ്ണത്തിലൊന്നാകണം. രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ 1, 3, 5 എന്നീ 3 എണ്ണത്തിലൊന്നും. ആദ്യത്തെ 5 സംഖ്യകൾ ഓരോന്നിനോടും രണ്ടാമത്തെ 3 സംഖ്യകൾ ഓരോന്നു ചേർത്ത് ആകെ എത്ര ജോടികളുണ്ടാക്കാം?

സാധ്യതയും ആവൃത്തിയും

സാധാരണ ഒരു നാണയം കുറേ തവണ എറിയുമ്പോൾ, തലയോ വാലോ (Head or Tail) വീഴുന്നതിന്റെ എണ്ണം ഏതാണ്ടു തുല്യമായിരിക്കും. എന്നാൽ, നാണയം ഉണ്ടാക്കുന്നതിലെ അപാകത കൊണ്ടോ മറ്റോ, ചിലപ്പോൾ തലവശം വീഴാൻ സാധ്യത കൂടുതലായി എന്നു വരാം. ഇതെങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

നാണയം ആവർത്തിച്ച് എറിയുമ്പോൾ ഓരോ വശവും വീഴുന്നതിന്റെ എണ്ണം, പകുതിയിൽ നിന്ന് വല്ലാതെ മാറിയിട്ടുണ്ടെങ്കിലാണ് ഇത്തരമൊരു സംശയം ഉണ്ടാകേണ്ടത്. അപ്പോൾ കൂടുതൽ തവണ എറിഞ്ഞ് ഓരോ വശവും വീഴുന്നതിന്റെ എണ്ണം വെവ്വേറെ പട്ടികപ്പെടുത്തുകയാണ് രീതി. ഉദാഹരണമായി ഈ പട്ടിക നോക്കുക.

ഏറ്	തല	വാൽ
10	6	4
100	58	42
1000	576	424
10000	5865	4135

ഇതിൽ നിന്ന് തലയുടെ സാധ്യത 0.6 എന്നും, വാലിന്റെ സാധ്യത 0.4 എന്നും എടുക്കുന്നതാണ്, രണ്ടും 0.5 എന്നെടുക്കുന്നതിനേക്കാൾ ശരി എന്നു കാണാമല്ലോ. ഇത്തരം കണക്കുകൂട്ടലുകൾ കൂടുതൽ കൃത്യമാക്കാനുള്ള ഗണിത രീതികൾ, സാധ്യതാസിദ്ധാന്തം (Probability theory) എന്ന ഗണിതശാഖയുടെ തുടർന്നുള്ള പഠനത്തിൽ കാണാം.

5×3 അല്ലേ? (വേണമെങ്കിൽ വരിയും നിരയുമായി സങ്കൽപിച്ചു നോക്കൂ) അപ്പോൾ ഈ പെട്ടികളിൽ നിന്ന് രണ്ടും ഒറ്റസംഖ്യകളായി കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത $\frac{15}{50} = \frac{3}{10}$. ഇതുപോലെ, രണ്ടും ഇരട്ടസംഖ്യകളാകാനുള്ള സാധ്യതയും, ഒന്ന് ഒറ്റയും മറ്റേത് ഇരട്ടയും ആകാനുള്ള സാധ്യതയും കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

ഒരു കണക്കു കൂടി, ഒരു കുട്ടയിൽ 50 മാങ്ങയുണ്ട്, അതിൽ 20 എണ്ണം പഴുത്തിട്ടില്ല, മറ്റൊരു കുട്ടയിൽ 40 മാങ്ങയുണ്ട്, 15 എണ്ണം പഴുത്തിട്ടില്ല. ഓരോ കുട്ടയിൽ നിന്നും ഓരോ മാങ്ങയെടുത്താൽ, രണ്ടും പഴുത്തതാകാനുള്ള സാധ്യത എത്രയാണ്?

ഓരോ കുട്ടയിൽ നിന്നും ഒരു മാങ്ങ വീതം എത്ര വ്യത്യസ്ത രീതികളിൽ എടുക്കാം? (വേണമെങ്കിൽ, ഓരോ കുട്ടയിലേയും മാങ്ങകൾ ഓരോ വരിയിൽ നിരത്തി വച്ചിരിക്കുന്നതായി സങ്കൽപ്പിക്കാം, ഇവയിലെല്ലാം ഓരോ സംഖ്യ എഴുതിയിരിക്കുന്നതായും സങ്കൽപ്പിക്കാം)

അപ്പോൾ ആകെ രണ്ടു മാങ്ങകളെടുക്കുന്നത് $50 \times 40 = 2000$ രീതികളിലാവാം. ഇതിലെത്ര ജോടികൾ രണ്ടും പഴുത്തതാകും? ആദ്യത്തെ കുട്ടയിൽ, $50 - 20 = 30$ പഴുത്ത മാങ്ങയുണ്ട്, രണ്ടാമത്തെ കുട്ടയിൽ $40 - 15 = 25$ എണ്ണം പഴുത്തതാണ്.

ആദ്യത്തെ കുട്ടയിലെ ഓരോ പഴുത്ത മാങ്ങയും, രണ്ടാമത്തെ കുട്ടയിലെ ഒരോ പഴുത്ത മാങ്ങയുമായി ജോടിയാക്കിയാൽ ആകെ $30 \times 25 = 750$ ജോടി. അപ്പോൾ രണ്ടും പഴുത്തതാകാനുള്ള സാധ്യത $\frac{750}{2000} = \frac{3}{8}$. ഇതുപോലെ രണ്ടും പച്ചയാകാനുള്ള സാധ്യത കണക്കാക്കിനോക്കൂ.

ഒരെണ്ണമെങ്കിലും പഴുത്തതാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

ഒരെണ്ണമെങ്കിലും പഴുത്തതാകണം എന്നാൽ ഒരു പഴുത്തതും ഒരു പച്ചയും; അല്ലെങ്കിൽ രണ്ടും പഴുത്തത്, ഇതിൽ ഒരെണ്ണം പഴുത്തത് എന്നത് തന്നെ രണ്ടു രീതിയിൽ കിട്ടും;

ഒന്നാമത്തേത് പഴുത്തത്, രണ്ടാമത്തേത് പച്ച.

അല്ലെങ്കിൽ

ഒന്നാമത്തേത് പച്ച, രണ്ടാമത്തേത് പഴുത്തത്.

അതായത്, ഒന്ന് മാത്രം പഴുത്ത ജോടികൾ ആകെ

$$\begin{aligned}(30 \times 15) + (20 \times 25) &= 450 + 500 \\ &= 950\end{aligned}$$

രണ്ടും പഴുത്തത് 750 ജോടി എന്ന് കണ്ടുപിടിച്ചിട്ടുണ്ട്. രണ്ടും കൂടി എടുത്താൽ ഒരെണ്ണമെങ്കിലും പഴുത്തതുള്ള ജോടികൾ ആകെ

അനിശ്ചിതത്വത്തിന്റെ അളവ്

ഓരോ ദിവസവും സൂര്യൻ ഉദിക്കുന്ന സമയവും, അസ്തമിക്കുന്ന സമയവും കലണ്ടറിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത് ശ്രദ്ധിച്ചിട്ടുണ്ടോ? കൃത്യമായ ചില ഗണിതനിയമങ്ങളനുസരിച്ചു ഭൂമിയും സൂര്യനുമെല്ലാം ചലിക്കുന്നതുകൊണ്ടാണ് ഇതെല്ലാം കണക്കാക്കാൻ പറ്റുന്നത്.

ഇതുപോലെതന്നെ മഴക്കാലവും വേനൽക്കാലവുമെല്ലാം ഏതു മാസങ്ങളിലാണെന്നും കണക്കു കൂട്ടാം. പക്ഷേ വേനൽക്കാലത്ത് പെട്ടെന്നൊരു മഴ വരുന്നത് മുൻകൂട്ടി കണക്കാക്കാൻ കഴിഞ്ഞില്ല എന്നു വരും. മഴയെ സ്വാധീനിക്കുന്ന ഘടകങ്ങളുടെ പെരുപ്പവും, അവ തമ്മിലുള്ള പരസ്പരബന്ധങ്ങളുടെ സങ്കീർണതയുമാണ് ഇത്തരം പ്രവചനങ്ങൾ വിഷമമാക്കുന്നത്.

സാഹചര്യങ്ങളുടെ ഗണിതപരമായ വിശകലനത്തിലൂടെ സാധ്യതകൾ കണക്കുകൂട്ടാം. അതുകൊണ്ടുതന്നെയാണ് ദൈനംദിന അന്തരീക്ഷസ്ഥിതിയെക്കുറിച്ചുള്ള പ്രവചനങ്ങൾ, സാധ്യതകളായി പറയുന്നത്. അപ്രതീക്ഷിതമായി സാഹചര്യങ്ങളിലുണ്ടാകുന്ന മാറ്റങ്ങളാണ് ഈ പ്രവചനങ്ങളെ ചിലപ്പോൾ തെറ്റിക്കുന്നതും.

യാതൊരു ശാസ്ത്രീയമായ അടിസ്ഥാനവുമില്ലാതെ, കൃത്യമെന്നപോലെ നടത്തുന്ന പ്രവചനങ്ങളേക്കാൾ, ഇത്തരം സാധ്യതാ പ്രവചനങ്ങൾക്ക് വിശ്വാസ്യത കൂടുമെന്ന് ശരിയായി നോക്കിയാൽ കാണുകയും ചെയ്യാം.

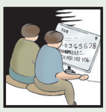
$$950 + 750 = 1700$$

അതിനാൽ ഒരെണ്ണമെങ്കിലും പഴുത്തതാകാനുള്ള സാധ്യത $\frac{1700}{2000} = \frac{17}{20}$ എന്ന് കണക്കാക്കാം.

ഇതുതന്നെ ഇങ്ങനെയും ആലോചിക്കാം: ഒരെണ്ണമെങ്കിലും പഴുത്തതാകുക എന്നാൽ രണ്ടും പച്ചയാകാൻ പറ്റില്ല. ആകെ സാധ്യമാകുന്ന 2000 ജോടികളിൽ, രണ്ടും പച്ചയായത് $20 \times 15 = 300$ ആണല്ലോ.

മിച്ചമുള്ള $2000 - 300 = 1700$ ജോടികളിലെല്ലാം ഒന്നെങ്കിലും പഴുത്തതാകണം. അതായത്, ഒന്നെങ്കിലും പഴുത്തതാകാനുള്ള സാധ്യത $\frac{1700}{2000} = \frac{17}{20}$.

?



(1) 10 A ക്ലാസിൽ 30 ആൺകുട്ടികളും, 20 പെൺകുട്ടികളുമുണ്ട്. 10 B ക്ലാസിൽ 15 ആൺകുട്ടികളും, 25 പെൺകുട്ടികളും. ഓരോ ക്ലാസിൽനിന്നും ഒരു കുട്ടിയെ തിരഞ്ഞെടുക്കണം.

(i) രണ്ടും പെൺകുട്ടികളാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

(ii) രണ്ടും ആൺകുട്ടികളാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

(iii) ഒരു ആൺകുട്ടിയും ഒരു പെൺകുട്ടിയുമാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

(iv) ഒരാൺകുട്ടിയെങ്കിലും ആകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

(2) ഒരാളോട് ഒരു രണ്ടക്കസംഖ്യ പറയാനാവശ്യപ്പെടുന്നു.

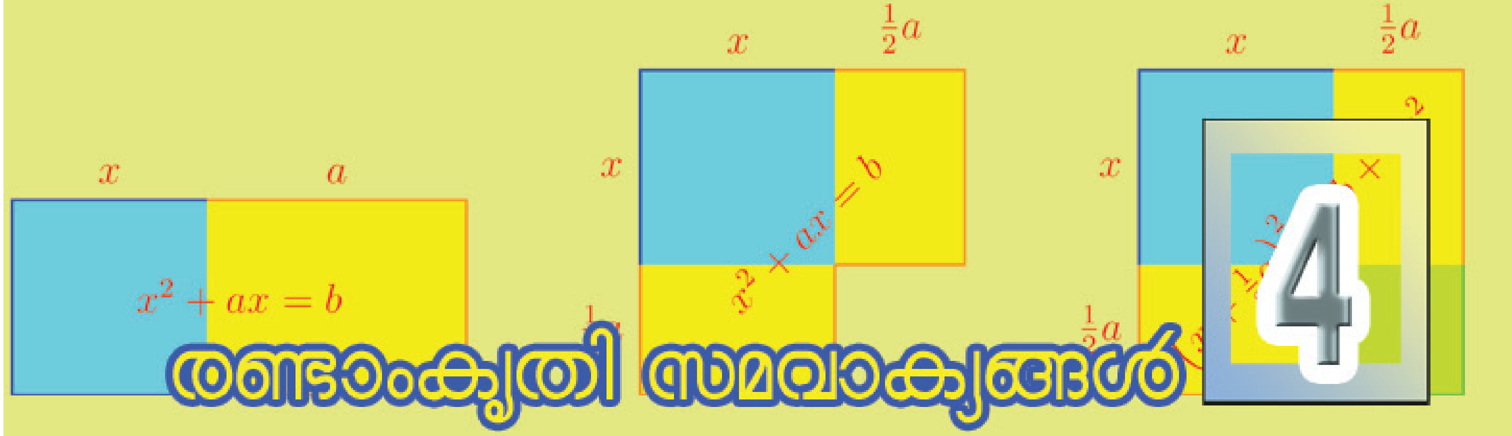
(i) ഇതിലെ രണ്ടക്കങ്ങളും തുല്യമാകാനുള്ള സാധ്യത എത്രയാണ്?

(ii) ആദ്യത്തെ അക്കം, രണ്ടാമത്തെ അക്കത്തേക്കാൾ വലുതാകാനുള്ള സാധ്യത എത്രയാണ്?

(iii) ആദ്യത്തെ അക്കം, രണ്ടാമത്തെ അക്കത്തേക്കാൾ ചെറുതാകാനുള്ള സാധ്യത എത്രയാണ്?

(3) രണ്ടക്കസംഖ്യകളെല്ലാം വെവ്വേറെ കടലാസുകഷണങ്ങളിലെഴുതി ഒരു പെട്ടിയിൽ ഇട്ടിരിക്കുന്നു. ഇതിൽ നിന്ന് ഒരു കടലാസെടുത്താൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യയിലെ അക്കങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം അഭാജ്യസംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യതയെന്താണ്? രണ്ടക്കസംഖ്യകൾക്കുപകരം മൂന്നക്കസംഖ്യകളായാലോ?

(4) 1 മുതൽ 6 വരെയുള്ള സംഖ്യകൾ എഴുതിയിട്ടുള്ള രണ്ടു പകിടകൾ ഒന്നിച്ചുരുട്ടുന്നു. ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളുടെ തുക ഏതൊക്കെ സംഖ്യകളാകാം? ഏറ്റവും കൂടുതൽ സാധ്യതയുള്ള തുക എന്താണ്?



4 രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യങ്ങൾ

വർഗപ്രശ്നങ്ങൾ

ഒരു കണക്കിൽനിന്നു തുടങ്ങാം:

> ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം 1 മീറ്റർ കൂട്ടി വലുതാക്കിയപ്പോൾ, ചുറ്റളവ് 36 മീറ്റർ ആയി. ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം എത്രയായിരുന്നു?

പുതുക്കിയ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശം $36 \div 4 = 9$ മീറ്റർ; അപ്പോൾ പഴയ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശം $9 - 1 = 8$ മീറ്റർ എന്ന് എളുപ്പത്തിൽ കണ്ടുപിടിക്കാം.

ചോദ്യം ഇങ്ങനെയായാലോ?

> ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം 1 മീറ്റർ കൂട്ടി വലുതാക്കിയപ്പോൾ, പരപ്പളവ് 36ചതുരശ്രമീറ്ററായി. ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം എത്രയായിരുന്നു?

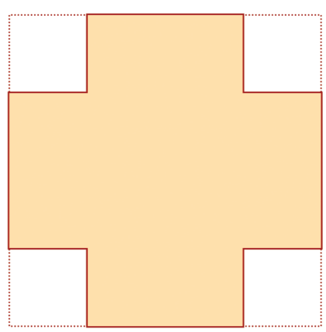
പുതുക്കിയ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ്?

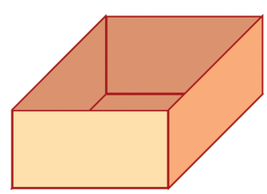
6 മീറ്റർ, അല്ലേ?

അപ്പോൾ ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശം $6 - 1 = 5$ മീറ്റർ

ഇനി ഈ കണക്ക് നോക്കൂ:

സമചതുരാകൃതിയിലുള്ള കട്ടിക്കടലാസിന്റെ നാലു മൂലകളിൽനിന്നും ഓരോ ചെറിയ സമചതുരം മുറിച്ചുമാറ്റി, മേലോട്ടു മടക്കി, ഒരു പെട്ടി ഉണ്ടാക്കണം. പെട്ടിയുടെ ഉയരം 5 സെന്റിമീറ്ററും, ഉള്ളളവ് $\frac{1}{2}$ ലിറ്ററും വേണം.

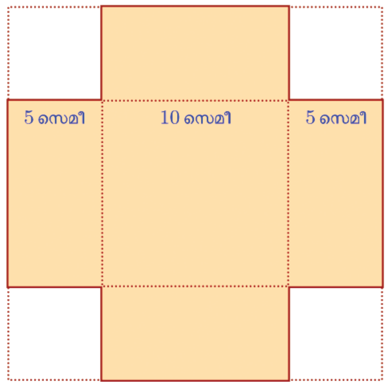




ആദ്യം എടുക്കേണ്ട സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം എന്തായിരിക്കണം?

പെട്ടിയുടെ ഉള്ളളവ്, പാദപരപ്പളവിന്റെയും ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണല്ലോ. ഈ കണക്കിൽ, ഉള്ളളവ് $\frac{1}{2}$ ലിറ്ററാണ്. അതായത്, 500 ഘനസെന്റിമീറ്റർ. ഉയരം 5 സെന്റിമീറ്റർ.

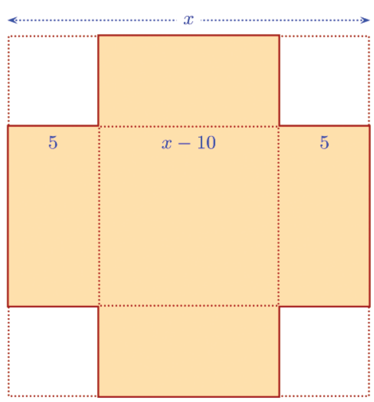
അപ്പോൾ പെട്ടിയുടെ പാദപരപ്പളവ് $500 \div 5 = 100$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ. പാദം ഒരു സമചതുരമായതിനാൽ (കാരണം?) അതിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം 10 സെന്റിമീറ്റർ.



ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തിന്റെ ഓരോ വശത്തിൽ നിന്നും $2 \times 5 = 10$ സെന്റിമീറ്റർ കുറച്ചാണ് ഈ സമചതുരം കിട്ടിയത്.

അപ്പോൾ ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തിന്റെ വശം $10 + 10 = 20$ സെന്റിമീറ്റർ.

ഇങ്ങനെ പുറകോട്ട് ആലോചിക്കുന്നതിനുപകരം, ആദ്യം നേരേ ആലോചിച്ച് പ്രശ്നം ബീജഗണിത രൂപത്തിലാക്കാം. ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം x സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, പെട്ടിയുടെ പാദം $(x - 10)$ സെന്റിമീറ്റർ വശമുള്ള സമചതുരമാണെന്നു കാണാം.



പെട്ടിയുടെ ഉയരം 5 സെന്റിമീറ്റർ ആയതിനാൽ, ഉള്ളളവ് $5(x - 10)^2$ ഘനസെന്റിമീറ്റർ.

അപ്പോൾ കണക്കിന്റെ ബീജഗണിതരൂപം ഇങ്ങനെയാകും:

$5(x - 10)^2 = 500$ ആകണമെങ്കിൽ, x എന്ന സംഖ്യ എന്തായിരിക്കണം?

തുടർന്ന് ഇങ്ങനെ പുറകോട്ടാലോചിക്കാം:

- $5(x-10)^2 = 500$ ആകണമെങ്കിൽ, $(x-10)^2 = 500 \div 5 = 100$ ആകണം.
- $(x-10)^2 = 100$ ആകണമെങ്കിൽ, $x - 10 = \sqrt{100} = 10$ ആകണം.
- $x - 10 = 10$ ആകണമെങ്കിൽ, $x = 10 + 10 = 20$ ആകണം.

ഈ കണക്കുകൾ ബീജഗണിതത്തിലാക്കിയോ അല്ലാതെയോ ചെയ്യുക.

(1) ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം 2 മീറ്റർ കുറച്ച് ചെറുതാക്കിയപ്പോൾ, പരപ്പളവ് 49 ചതുരശ്രമീറ്ററായി. ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എത്ര മീറ്ററായിരുന്നു?

(2) സമചതുരാകൃതിയായ ഒരു മൈതാനത്തിനു ചുറ്റും 2 മീറ്റർ വീതിയിൽ ഒരു പാതയുണ്ട്. മൈതാനവും പാതയും ചേർന്ന സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, 1225 ചതുരശ്രമീറ്ററാണ്. മൈതാനത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

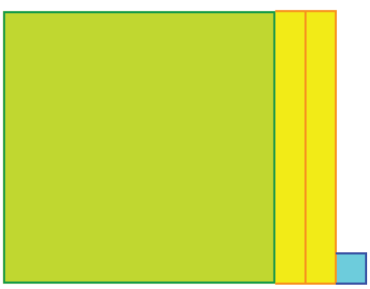
(3) 2, 5, 8, ... എന്നു തുടരുന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ എത്രാമത്തെ പദത്തിന്റെ വർഗമാണ് 2500?

n എന്ന പേരിൽ ഒരു integer സ്ലൈഡർ നിർമിച്ച് (3n - 1)^2 എന്ന input നിർദേശം കൊടുക്കാം. n മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് 2, 5, 8, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളുടെ വർഗങ്ങൾ കിട്ടും.

(4) വാർഷികമായി കൂട്ടുപലിശ കണക്കാക്കുന്ന ഒരു പദ്ധതിയിൽ 2000 രൂപ നിക്ഷേപിച്ചു. രണ്ടു വർഷം കഴിഞ്ഞപ്പോൾ 2205 രൂപയായി. പലിശനിരക്ക് എത്ര ശതമാനമാണ്?

വർഗത്തികവ്

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



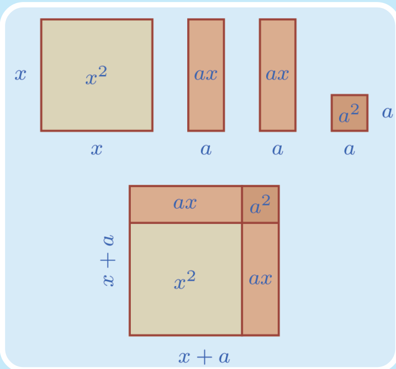
പച്ച നിറത്തിലൊരു സമചതുരവും, അതേ ഉയരമുള്ള രണ്ടു മഞ്ഞച്ചതുരങ്ങളും, നില നിറത്തിലൊരു ചെറുസമചതുരവും ചേർത്തു വച്ചിരിക്കുന്നു. രണ്ടു മഞ്ഞച്ചതുരങ്ങളുടെ വീതിയും, നീല സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളവുമെല്ലാം 1 മീറ്ററാണ്; ചിത്രത്തിന്റെ ആകെ പരപ്പളവ് 100 ചതുരശ്രമീറ്ററും.

ജ്യാമിതീയ വർഗം

x, a ഏതു സംഖ്യകളായാലും,

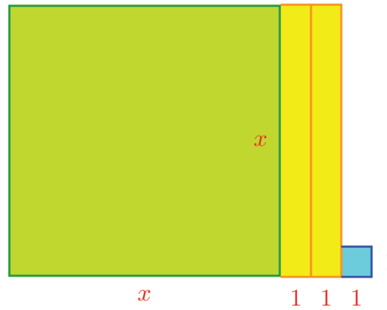
$$x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2$$

എന്നു കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. x, a അധിസംഖ്യകളാണെങ്കിൽ, ഇക്കാര്യത്തിന് ഒരു ജ്യാമിതീയരൂപം കൊടുക്കാം:



പച്ച സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം കണ്ടുപിടിക്കണം.

നേരിട്ടാലോചിച്ചു കണക്കാക്കാൻ വിഷമമാണ്, അല്ലേ?



ബീജഗണിതം പരീക്ഷിക്കാം. പച്ച സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം x മീറ്റർ എന്നെടുക്കാം:

ആകെ പരപ്പളവ് ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാം:

$$x^2 + x + x + 1 = x^2 + 2x + 1$$

ആകെ പരപ്പളവ് 100 ചതുരശ്രമീറ്റർ എന്നു പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്; അപ്പോൾ പ്രശ്നം ഇങ്ങനെ ബീജഗണിതത്തിലാക്കാം:

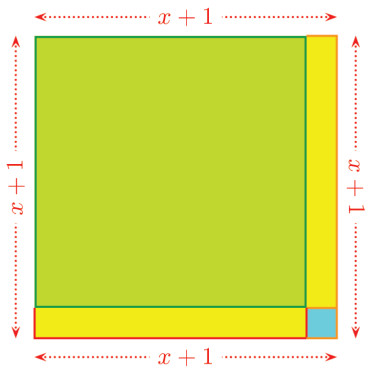
$x^2 + 2x + 1 = 100$ ആണെങ്കിൽ x എന്താണ്?

$x^2 + 2x + 1$ എന്ന രൂപം പരിചയമുണ്ടോ?

എട്ടാംക്ലാസിലെ **സർവസമവാക്യങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

എന്നു കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ.



ചിത്രത്തിലെ ചതുരങ്ങൾ മാറ്റിയടുക്കിയും ഇതു കാണാം.

അപ്പോൾ പ്രശ്നം മാറ്റിയെഴുതാം:

$(x + 1)^2 = 100$ ആണെങ്കിൽ x എന്താണ്?

ഇനി, $x + 1 = 10$ എന്നും, അങ്ങനെ $x = 9$ എന്നും കാണാമല്ലോ.

അതായത്, പച്ച സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം 9 മീറ്ററാണ്.

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം:

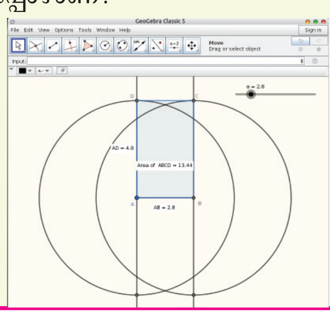
ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വലിയ വശത്തിന് ചെറിയ വശത്തേക്കാൾ 2 മീറ്റർ നീളം കൂടുതലാണ്. അതിന്റെ പരപ്പളവ് 224 ചതുരശ്രമീറ്റർ. വശങ്ങളുടെ നീളം എന്താണ്?

ആദ്യം പ്രശ്നത്തെ ബീജഗണിതത്തിലാക്കാം. ചെറിയ വശത്തിന്റെ നീളം x മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, വലിയ വശത്തിന്റെ നീളം $x + 2$ മീറ്റർ;

പരപ്പളവ് $x(x + 2) = x^2 + 2x$ ചതുരശ്രമീറ്റർ.

71E5V4

വലിയവശം ചെറിയ വശത്തേക്കാൾ 2 കൂടുതലായ ചതുരങ്ങൾ ജിയോജിബ്രയുടെ സഹായത്താൽ വരക്കാം. ഇതിനായി min = 0 ആയ a എന്ന സ്ലൈഡർ ഉണ്ടാക്കുക. നീളം a ആയി ഒരു വര AB വരച്ചശേഷം അതിന്റെ അറ്റങ്ങളിൽക്കൂടി AB യ്ക്കു ലംബങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. A, B ഇവ കേന്ദ്രങ്ങളായി ആരം a + 2 വരത്തക്കവിധം വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. ഓരോ വൃത്തവും ലംബങ്ങളുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ C, D അടയാളപ്പെടുത്തുക. Polygon ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ABCD എന്ന ചതുരം വരയ്ക്കുക. ഇനി വരകളും വട്ടങ്ങളും മറച്ചു വയ്ക്കാം. ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് അടയാളപ്പെടുത്തുക. സ്ലൈഡറിന്റെ വില മാറ്റി നോക്കൂ. പരപ്പളവ് 224 ആകുന്നത് എപ്പോഴാണ്?



ഇനി ചതുരപ്രശ്നം, ബീജഗണിതപ്രശ്നമാക്കാം:

$x^2 + 2x = 224$ ആണെങ്കിൽ x എന്താണ്?

ഇനിയെന്തു ചെയ്യും?

ആദ്യത്തെ പ്രശ്നം ഒന്നുകൂടി നോക്കൂ; അതിൽ $x^2 + 2x + 1$ നെ $(x + 1)^2$ എന്നു മാറ്റിയെഴുതിയാണ് മുന്നോട്ട് പോയത്. ഈ പ്രശ്നത്തിൽ $x^2 + 2x$ മാത്രമേയുള്ളൂ.

1 കൂട്ടിയാൽപ്പോരേ?

അപ്പോൾ ഇങ്ങനെ തുടരാം:

- $x^2 + 2x = 224$ ആണെങ്കിൽ $x^2 + 2x + 1 = 224 + 1 = 225$
- അതായത് $(x + 1)^2 = 225$
- $(x + 1)^2 = 225$ ആണെങ്കിൽ $x + 1 = \sqrt{225} = 15$
- $x + 1 = 15$ ആണെങ്കിൽ $x = 14$

അങ്ങനെ ചതുരത്തിന്റെ ചെറിയ വശം 14 മീറ്റർ എന്നു കിട്ടി. അപ്പോൾ വലിയ വശം $14 + 2 = 16$ മീറ്റർ.

ഈ ചോദ്യം തന്നെ അൽപമൊന്നു മാറ്റി ഇങ്ങനെ ആക്കിയാലോ?

> ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വലിയ വശത്തിന് ചെറിയ വശത്തേക്കാൾ 20 മീറ്റർ നീളം കൂടുതലാണ്. അതിന്റെ പരപ്പളവ് 224 ചതുരശ്രമീറ്റർ. വശങ്ങളുടെ നീളം എന്താണ്?

ബീജഗണിതരൂപം ഇങ്ങനെ മാറും:

$x^2 + 20x = 224$ ആണെങ്കിൽ x എന്താണ്?

ഇവിടെയും 1 കൂട്ടിയാൽ സമവാക്യത്തിന്റെ വലതുവശത്തെ സംഖ്യ $225 = 15^2$ ആകും; പക്ഷേ, ഇടതുവശം $x^2 + 20x + 1$ എന്നാണാകുന്നത്. ഇതിനെ $(x + a)^2$ എന്ന രൂപത്തിലാക്കാൻ പറ്റുമോ? $x^2 + 20x$ നെ വർഗരൂപത്തിലാക്കുന്നതെങ്ങനെ?

a ആയി ഏതു സംഖ്യ എടുത്താലും

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

എന്നറിയാം.

നമ്മുടെ പ്രശ്നത്തിൽ, പൊതുവായ സമവാക്യത്തിലെ $2ax$ ന്റെ സ്ഥാനത്ത് $20x$ ആണ്.

അപ്പോൾ, a ആയി 10 എടുത്തു നോക്കിയാലോ?

$$(x + 10)^2 = x^2 + 20x + 100$$

നമ്മുടെ പ്രശ്നത്തിൽ $x^2 + 20x = 224$ ആണ്. ഇപ്പോൾ കണ്ടതനുസരിച്ച് 100 കൂട്ടി തുടരാം.

വ്യത്യസ്തമാർഗം

$x(x + 20) = 224$ എന്ന സമവാക്യം പരിഹരിക്കാൻ മറ്റൊരു മാർഗമുണ്ട്. $x + 20$ നെ $(x + 10) + 10$ എന്നും, x നെ $(x + 10) - 10$ എന്നും എഴുതാം. അപ്പോൾ

$$x(x + 20) = \left((x + 10) - 10\right)\left((x + 10) + 10\right)$$
$$= (x + 10)^2 - 10^2$$

തുടങ്ങിയ സമവാക്യം

$$(x + 10)^2 - 100 = 224$$

എന്നാകും. ഇതിൽ നിന്ന്

$$(x + 10)^2 = 324$$

എന്നെഴുതി നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ x കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ.

ഈ രീതിയിൽ $x^2 + 10x = 3000$ എന്ന സമവാക്യം പരിഹരിക്കാമോ എന്നു നോക്കൂ.

$$x^2 + 20x = 224$$
$$x^2 + 20x + 100 = 324$$
$$(x + 10)^2 = 324$$
$$x + 10 = \sqrt{324} = 18$$
$$x = 8$$

അങ്ങനെ ഈ ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾ 8 മീറ്ററും, 28 മീറ്ററുമാണെന്നു കണക്കാക്കാം.

സമചതുരം വീണ്ടും!

20 സെന്റിമീറ്റർ ചുറ്റളവുള്ള പലപല ചതുരങ്ങളിൽ, വശത്തിന്റെ നീളം 5 സെന്റിമീറ്ററായ സമചതുരത്തിനാണ് ഏറ്റവും കൂടുതൽ പരപ്പളവ് എന്നറിയാമല്ലോ.

ഇതു മറ്റൊരു രീതിയിലും കാണാം. ഇത്തരത്തിലൊരു ചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം x എന്നെടുത്താൽ, പരപ്പളവ്,

$$p(x) = x(10 - x) = 10x - x^2 = -(x^2 - 10x)$$

ഇത്തരം ചതുരങ്ങളുടെയെല്ലാം പരപ്പളവ്, ഈ ബഹുപദത്തിൽ നിന്നു കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ. വർഗം തികച്ച്,

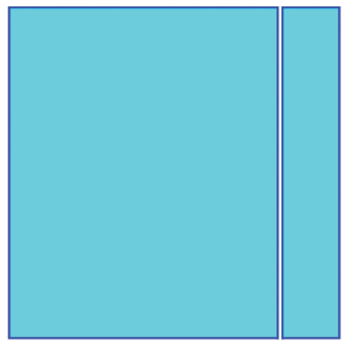
$$p(x) = -\left((x-5)^2 - 25\right) = 25 - (x-5)^2$$

എന്നെഴുതാം. ഇതിൽ x ആയി ഏതു സംഖ്യ എടുത്താലും $(x - 5)^2$ ന്യൂനസംഖ്യയാകില്ല; അതിനാൽ $p(x)$ എന്ന സംഖ്യ 25 നേക്കാൾ കൂടുതലാകില്ല. $x = 5$ എന്നെടുത്താൽ, $p(x) = 25$ എന്നു കിട്ടുകയും ചെയ്യും.

ഇത് ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് ചെയ്താലോ? ചുറ്റളവ് 20 ആയ ചതുരങ്ങൾ വരയ്ക്കാൻ min = 0, max = 10 വരത്തക്കവിധം ഒരു സ്ലൈഡർ a നിർമിക്കുക. വശങ്ങളുടെ നീളം a, 10 − a ആയ ചതുരം വരയ്ക്കുക. ഇതിന്റെ പരപ്പളവ് അടയാളപ്പെടുത്തുക. a യുടെ വില മാറ്റി നോക്കൂ. പരപ്പളവ് ഏറ്റവും കൂടുതൽ ആകുന്നത് എപ്പോഴാണ്?

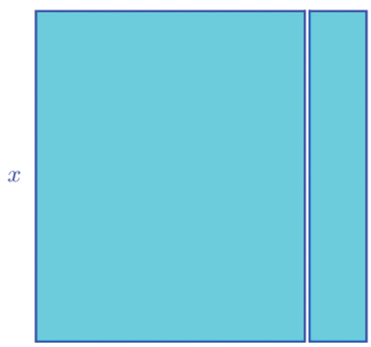
വേറൊരു ചതുരക്കണക്ക്:

ഒരു സമചതുരത്തിൽ നിന്ന് 2 മീറ്റർ വീതിയുള്ള ഒരു കഷണം മുറിച്ചുമാറ്റുന്നു;



മിച്ചമുള്ള ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 99 ചതുരശ്രമീറ്റർ. സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എത്രയാണ്?

സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം x മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, മിച്ചമുള്ള ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം x മീറ്റർ, $(x - 2)$ മീറ്റർ എന്നാകും:



അപ്പോൾ മിച്ചമുള്ള ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

$x(x - 2) = x^2 - 2x$ ചതുരശ്രമീറ്റർ

പ്രശ്നം ഇങ്ങനെയാകും:

$x^2 - 2x = 99$ ആണെങ്കിൽ x എന്താണ്?

$x^2 + 2x$ നെപ്പോലെ $x^2 - 2x$ നെയും വർഗരൂപത്തിലാക്കാൻ പറ്റുമോ?

എട്ടാം ക്ലാസിലെ മറ്റൊരു സമവാക്യം ഓർത്തുനോക്കൂ:

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

ഇനി പ്രശ്നത്തിലെ x കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ:

$$x^2 - 2x = 99$$

$$x^2 - 2x + 1 = 100$$

$$(x - 1)^2 = 100$$

$$x - 1 = 10$$

$$x = 11$$

സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം 11 മീറ്റർ.

ഈ കണക്കുനോക്കൂ:

> ചുറ്റളവ് 100 മീറ്ററും, പരപ്പളവ് 525 ചതുരശ്രമീറ്ററുമായ ഒരു ചതുരം ഉണ്ടാക്കണം. അതിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എന്തായിരിക്കണം?

ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ തുക 50 മീറ്ററാണല്ലോ. അപ്പോൾ, ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം x മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, മറ്റേ വശത്തിന്റെ നീളം $(50 - x)$ മീറ്റർ; പരപ്പളവ് $x(50 - x) = 50x - x^2$ ചതുരശ്രമീറ്റർ. അപ്പോൾ പ്രശ്നം ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

> $50x - x^2 = 525$ ആകണമെങ്കിൽ x എന്താകണം?

ഇടതു ഭാഗം $x^2 - 50x$ ആയിരുന്നുവെങ്കിൽ, നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ തുടരാമായിരുന്നു. അതിന് സമവാക്യം അൽപം മാറ്റിയെഴുതാം. $50x$ എന്ന സംഖ്യയിൽ നിന്ന് x^2 കുറച്ചാൽ 525 കിട്ടണമെങ്കിൽ, തിരിച്ചു കുറച്ചാൽ അതിന്റെ ന്യൂനമായ -525 കിട്ടണമല്ലോ. അപ്പോൾ പ്രശ്നം ഇങ്ങനെയാക്കാം.

> $x^2 - 50x = -525$ ആകണമെങ്കിൽ x എന്താകണം?

ഇനി $x^2 - 50x$ നോട് ഒരു സംഖ്യകൂട്ടി വർഗരൂപത്തിലാക്കണം. കൂട്ടേണ്ട സംഖ്യ എന്താണ്?

$$(x - 25)^2 = x^2 - 50x + 625$$

ഇനി നമ്മുടെ പ്രശ്നം ഇങ്ങനെ പരിഹരിക്കാം:

$$x^2 - 50x = -525$$

$$x^2 - 50x + 625 = -525 + 625 = 100$$

കൂട്ടിയും കുറച്ചും

ചുറ്റളവ് 100 മീറ്ററും, പരപ്പളവ് 525 ചതുരശ്രമീറ്ററുമായ ചതുരം കണ്ടുപിടിക്കാൻ മറ്റൊരു മാർഗമുണ്ട്.

ഈ ചതുരത്തിന്റെ നീളത്തിന്റെയും വീതിയുടെയും തുക 50 മീറ്റർ ആയതിനാൽ നീളം $(25 + x)$ മീറ്റർ എന്നും വീതി $(25 - x)$ മീറ്റർ എന്നും എടുക്കാമല്ലോ. അപ്പോൾ പരപ്പളവ് $(25 - x)(25 + x) = 625 - x^2$ ചതുരശ്രമീറ്റർ

ഇനി x ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാം

$625 - x^2 = 525$

$x^2 = 100$

$x = 10$

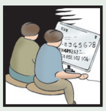
ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾ

$25 - 10 = 15$ മീറ്റർ,

$25 + 10 = 35$ മീറ്റർ

$$(x - 25)^2 = 100$$
$$x - 25 = 10$$
$$x = 35$$

അതായത്, ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾ 35 മീറ്ററും 15 മീറ്ററും.



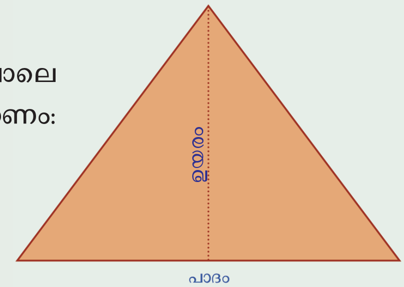
(1) അടുത്തടുത്ത രണ്ടു ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ കൂടെ 1 കൂട്ടിയാൽ 289 കിട്ടും. സംഖ്യകൾ ഏതൊക്കെയാണ്?

(2) 6 ന്റെ അടുത്തടുത്ത രണ്ടു ഗുണിതങ്ങളുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ കൂടെ 9 കൂട്ടിയാൽ 729 കിട്ടും. സംഖ്യകൾ ഏതൊക്കെയാണ്?

(3) 5, 7, 9, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലുള്ള ആദ്യത്തെ എത്ര സംഖ്യകൾ കൂട്ടിയാലാണ് 140 കിട്ടുക?

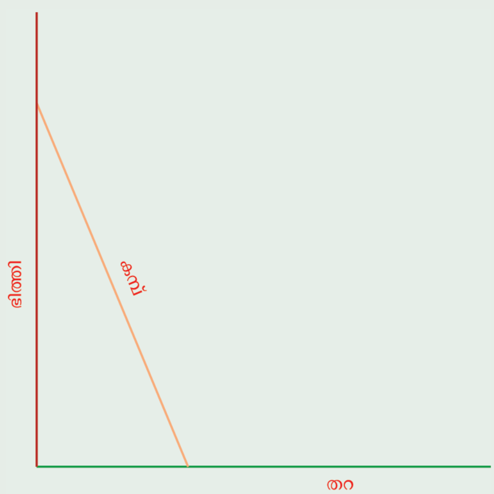
(4) 9, 11, 13, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ കുറച്ച് പദങ്ങളുടെ തുകയും 16 ഉം കൂട്ടിയപ്പോൾ 256 കിട്ടി. എത്ര പദങ്ങളാണ് കൂട്ടിയത്?

(5) ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ ഒരു സമപാർശ്വത്രികോണം ഉണ്ടാക്കണം:

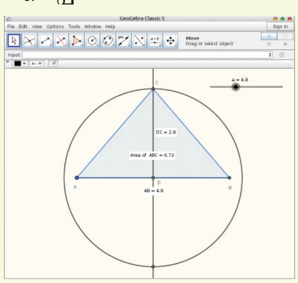


ഉയരം, പാദത്തെക്കാൾ 2 മീറ്റർ കുറവാകണം; പരപ്പളവ് 12 ചതുരശ്ര മീറ്ററുമാകണം. ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എന്തായിരിക്കണം?

(6) 2.6 മീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു കമ്പ് ചുവരിൽവച്ചിരിക്കുന്നു. കമ്പിന്റെ ചുവട് ഭിത്തിയിൽ നിന്ന് 1 മീറ്റർ അകലെയാണ്. കമ്പിന്റെ താഴത്തെ അറ്റം ചുവരിൽനിന്ന് അല്പം മുന്നോട്ടു നീക്കിയപ്പോൾ, മുകളറ്റം അത്രയും തന്നെ താഴോട്ട് നീങ്ങി. എത്ര ദൂരമാണ് മുന്നോട്ട് നീക്കിയത്?



a എന്ന പേരിൽ min = 10 ആയ ഒരു സ്ലൈഡർ ഉണ്ടാക്കി, നീളം a ആയ ഒരു വര വരച്ച് അതിന്റെ മധ്യബിന്ദുവും ലംബസമഭാജിയും അടയാളപ്പെടുത്തുക. മധ്യബിന്ദു കേന്ദ്രമായി ആരം a − 2 ആയ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. വൃത്തം ലംബസമഭാജിയുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തി ത്രികോണം പൂർത്തിയാക്കുക. ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് അടയാളപ്പെടുത്തുക. സ്ലൈഡറിന്റെ വില മാറ്റി നോക്കൂ. പരപ്പളവ് 12 ആകുന്നത് എപ്പോഴാണ്?



രണ്ട് ഉത്തരം

വേഗവും ദൂരവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തെക്കുറിച്ചുള്ള ചില കാര്യങ്ങൾ പഠിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഒരു നേർവരയിലൂടെ ഒരേ വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന വസ്തു എത്ര ദൂരം സഞ്ചരിച്ചു എന്നു കണക്കാക്കാൻ, വേഗത്തെ സമയംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ മതി. ഇക്കാര്യം ബീജഗണിതസമവാക്യമായി എഴുതാം. ഒരു നേർവരയിലൂടെ u മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന ഒരേ വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന വസ്തു t സെക്കന്റുകൊണ്ട് സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം s മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ

$$s = ut$$

ഇനി വേഗം മാറുന്നുണ്ടെങ്കിലോ? ഉദാഹരണമായി, നേരെ മേൽപ്പോട്ടെറിയുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ വേഗം ഓരോ സെക്കന്റിലും 9.8 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന നിരക്കിൽ കുറയുമെന്ന് കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. അപ്പോൾ ഓരോ സെക്കന്റിലും സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരവും കുറഞ്ഞുകൊണ്ടിരിക്കും. ഇങ്ങനെ ദൂരം മാറുന്നതിനുമൊരു കണക്കുണ്ട്. മേൽപ്പോട്ടെറിഞ്ഞ വേഗം u മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്നും, t സെക്കന്റിൽ തുടങ്ങിയ സ്ഥാനത്തുനിന്നുള്ള അകലം s മീറ്റർ എന്നും എഴുതിയാൽ

$$s = ut - 4.9t^2$$

ഇനി നേരെ മേലോട്ടെറിയുന്നതിനു പകരം, ചരിഞ്ഞ ഒരു പ്രതലത്തിലൂടെ മേലോട്ട് ഉരുട്ടുകയാണു ചെയ്യുന്നതെങ്കിൽ, വേഗം കുറയുന്നതിന്റെ നിരക്ക് 9.8 നേക്കാൾ ചെറിയസംഖ്യ ആയിരിക്കും. u മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന വേഗത്തിൽ തുടങ്ങി ഓരോ സെക്കന്റിലും a മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന നിരക്കിൽ വേഗം കുറയുന്നുവെന്നു കരുതുക. t സെക്കന്റ് കഴിയുമ്പോൾ, തുടങ്ങിയ സ്ഥാനത്തുനിന്നുള്ള അകലം s മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ

$$s = ut - \frac{1}{2}at^2$$

ഉദാഹരണമായി, ചരിച്ചുവച്ച ഒരു പലകയിലൂടെ 16 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന വേഗത്തിൽ മേലോട്ടുരുട്ടുന്ന ഒരു പന്തിന്റെ വേഗം ഓരോ സെക്കന്റിലും 8 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന നിരക്കിൽ കുറയുന്നുവെന്നു കരുതുക. t സെക്കന്റിൽ, തുടങ്ങിയ സ്ഥാനത്തിൽനിന്നുള്ള അകലം s മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ

$$s = 16t - \frac{1}{2} \times 8 \times t^2 = 16t - 4t^2$$

ഇതുപയോഗിച്ച്, ഏതു സമയത്തും തുടങ്ങിയ സ്ഥാനത്തുനിന്ന് എത്ര അകലെയാണ് എന്നു കണക്കാക്കാം:

സമയം :	1	2	3
അകലം :	12	16	12

രണ്ടാമത്തെ സെക്കന്റിൽ അകലം കൂടി, മൂന്നാം സെക്കന്റിൽ കുറഞ്ഞു. ഇതെന്തുകൊണ്ടാണ്?

16 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന വേഗത്തിൽ തുടങ്ങി, ഓരോ സെക്കന്റിലും 8 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന നിരക്കിൽ വേഗം കുറയുന്നതിനാൽ, 2 സെക്കന്റ്

71N1HR

ആകുമ്പോൾ വേഗം 0 ആകും; തുടർന്നുള്ള സമയം പന്ത് കീഴോട്ടുരുളാൻ തുടങ്ങും. നാലാം സെക്കന്റിൽ തുടങ്ങിയ സ്ഥാനത്തുനിന്നുള്ള അകലം കണക്കാക്കി നോക്കൂ:

സമയം	:	1	2	3	4
അകലം	:	12	16	12	0

അതായത്, നാലാം സെക്കന്റിൽ പന്തു തുടങ്ങിയ സ്ഥാനത്തുതന്നെ തിരിച്ചെത്തും.

ഈ പട്ടികയനുസരിച്ച്, ഓരോ സമയത്തെയും അകലം കണ്ടുപിടിക്കാം. മറിച്ച് ഒരു നിശ്ചിത അകലത്തെത്താനുള്ള സമയം കണക്കാക്കുന്നതെങ്ങനെ?

ഉദാഹരണമായി,

> ഏതു സമയത്താണ്, തുടങ്ങിയ സ്ഥാനത്തുനിന്ന് പന്ത്, 15 മീറ്റർ അകലെയാകുന്നത്?

അത് കണക്കാക്കാൻ $16t - 4t^2 = 15$ ആകുന്ന t കണ്ടുപിടിക്കണം. മുമ്പ് ചെയ്തതുപോലെ ഈ സമവാക്യം മാറ്റിയെഴുതാം:

$$4t^2 - 16t = -15$$

ഇതിൽ t^2 ന്റെ ഗുണകം 4 ആണല്ലോ. ആദ്യം അത് 1 ആക്കണം (ഇതുവരെ ചെയ്ത കണക്കുകളിലെല്ലാം അങ്ങനെ ആയിരുന്നല്ലോ). അതിന് 4 കൊണ്ടു ഹരിക്കണം.

$$t^2 - 4t = \frac{-15}{4}$$

ഇനി, മുമ്പു ചെയ്തതുപോലെ, t യുടെ ഗുണകത്തിന്റെ പകുതിയുടെ വർഗം 4 കൂട്ടി, വർഗരൂപത്തിലാക്കി, തുടരാം:

$$t^2 - 4t + 4 = 4 - \frac{15}{4} = \frac{1}{4}$$

$$(t-2)^2 = \frac{1}{4}$$

$$t - 2 = \frac{1}{2}$$

$$t = 2\frac{1}{2}$$

min = 0, increment = 0.01 ആകത്തക്കവിധം t എന്ന പേരിൽ ഒരു സ്ലൈഡർ നിർമിക്കുക. input ൽ s = 16t - 4t^2 എന്നു നൽകുക. t മാറുന്നതനുസരിച്ച് ആദ്യം s കൂടുന്നതായും പിന്നീട് കുറയുന്നതായും കാണാം. s ഏറ്റവും കൂടുന്നത് എപ്പോഴാണ്? s എന്ന സംഖ്യ 15 ആകുന്നത് എപ്പോഴാണ്?

അപ്പോൾ $2\frac{1}{2}$ സെക്കന്റിൽ, തുടങ്ങിയ സ്ഥാനത്തുനിന്ന് 15 മീറ്റർ അകലെയായിരിക്കും.

ഇവിടെ മറ്റൊരു കാര്യമുണ്ട്. നേരത്തെ പറഞ്ഞതുപോലെ, 2 സെക്കന്റ് കഴിഞ്ഞാൽ പന്ത് താഴോട്ടുരുളാൻ തുടങ്ങും. അപ്പോൾ $2\frac{1}{2}$ സെക്കന്റ് എന്നത്, മടക്കയാത്രയിൽ 15 മീറ്റർ അകലെയെത്തുന്ന സമയമാണ്. മേലോട്ടുള്ള ആദ്യയാത്രയിലും ഈ സ്ഥാനത്തുകൂടി കടന്നുപോകേണ്ടേ? അതെപ്പോഴാണ്?

2 സെക്കന്റ് കഴിഞ്ഞ് $\frac{1}{2}$ സെക്കന്റുകൂടി ആകുമ്പോഴാണ് മടക്കയാത്രയിൽ 15 മീറ്റർ അകലെയാകുന്നത്. $\frac{1}{2}$ സെക്കന്റ് മുമ്പോ? $1\frac{1}{2}$ സെക്കന്റിൽ പന്ത് മേലോട്ടുള്ള യാത്രയിൽത്തന്നെയാണല്ലോ. ഈ സമയത്ത്, തുടങ്ങിയ സ്ഥല ത്തുനിന്ന് എത്ര അകലെയായിരിക്കും?

സമയ-ദൂര സമവാക്യത്തിൽ $t = 1\frac{1}{2}$ എന്നെടുത്താൽ ഈ ദൂരം കിട്ടും:

$$\left(16 \times 1\frac{1}{2}\right) - 4 \times \left(1\frac{1}{2}\right)^2 = 24 - \left(4\times2\frac{1}{4}\right) = 24 - 9 = 15$$

അതായത്, $1\frac{1}{2}$ സെക്കന്റിൽ മേലോട്ടുള്ള യാത്രയിൽ 15 മീറ്റർ അകലെ യെത്തും; നേരത്തെ കണ്ടതുപോലെ $2\frac{1}{2}$ സെക്കന്റിൽ താഴോട്ടുള്ള യാത്ര യിൽ ഇതേ അകലത്തിലേക്ക് മടങ്ങിയെത്തും.

$16t - 4t^2 = 15$ ആകാൻ t എന്താകണമെന്നു കണക്കാക്കിയപ്പോൾ $t = 1\frac{1}{2}$ എന്ന രണ്ടാമത്തെ ഉത്തരം കിട്ടാത്തത് എന്തുകൊണ്ടാണ്?

$t = 2\frac{1}{2}$ എന്ന ഉത്തരം കിട്ടിയ വഴികൾ ഒന്നുകൂടി നോക്കാം. അതിലൊരി ടത്ത് $(t-2)^2 = \frac{1}{4}$ ആകണമെങ്കിൽ $t - 2 = \frac{1}{2}$ എന്നെടുത്തല്ലോ. ഒരു സംഖ്യ യുടെ വർഗം $\frac{1}{4}$ ആണെങ്കിൽ, സംഖ്യ $\frac{1}{2}$ എന്ന് മാത്രമെടുത്തത് ശരിയാണോ? വർഗം $\frac{1}{4}$ ആയ സംഖ്യ $\frac{1}{2}$ മാത്രമാണോ?

$-\frac{1}{2}$ ന്റെ വർഗം എന്താണ്?

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

അപ്പോൾ ഒരു സംഖ്യയുടെ വർഗം $\frac{1}{4}$ എന്നു കിട്ടിയാൽ, സംഖ്യ $\frac{1}{2}$ അല്ലെ ങ്കിൽ $-\frac{1}{2}$ എന്നേ പറയാൻ കഴിയൂ.

അതിനാൽ, നമ്മുടെ കണക്കിൽ,

$$(t-2)^2 = \frac{1}{4}$$

എന്നതിൽനിന്ന്

$$t - 2 = \frac{1}{2} \text{ അല്ലെങ്കിൽ } t - 2 = -\frac{1}{2}$$

എന്നേ പറയാൻ കഴിയൂ. ഇതിൽ $t - 2 = \frac{1}{2}$ എന്നെടുത്താൽ, ആദ്യം കണ്ടു

പിടിച്ചതുപോലെ $t = 2\frac{1}{2}$ എന്നു കിട്ടും. $t - 2 = -\frac{1}{2}$ എന്നെടുത്താൽ, രണ്ടാമതു കണ്ടുപിടിച്ചതുപോലെ $t = 1\frac{1}{2}$ എന്നും കിട്ടും.

അപ്പോൾ മറ്റൊരു ചോദ്യം: ഇതുവരെ ചെയ്ത കണക്കുകളിലെല്ലാം ഇങ്ങനെ ന്യൂനവർഗമൂലവും എടുത്തിരുന്നെങ്കിൽ മറ്റൊരുത്തരം കൂടി കിട്ടുമായിരുന്നോ?

ഉദാഹരണമായി, നേരത്തെ ചെയ്ത ഒരു ചതുരക്കണക്കു നോക്കാം: വലിയ വശത്തിന് ചെറിയ വശത്തേക്കാൾ 2 മീറ്റർ കൂടുതൽ നീളവും, പരപ്പളവ് 224 ചതുരശ്രമീറ്ററുമായ ചതുരം.

ഇതിന്റെ വശങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കാൻ ചെറിയ വശത്തിന്റെ നീളം x മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ $(x + 1)^2 = 225$ എന്നു കിട്ടുമെന്നു കണ്ടു. തുടർന്ന് $x + 1 = 15$ എന്നെടുത്ത്, ചെറിയ വശത്തിന്റെ നീളം 14 മീറ്റർ എന്നു കണക്കാക്കി.

ബീജഗണിതം മാത്രം നോക്കിയാൽ $x + 1 = -15$ എന്നും ആകാം;

അതായത്, $x = -16$

പക്ഷേ ഈ കണക്കിൽ x ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളമായതിനാൽ അതൊരു അധിസംഖ്യയാണ്. അപ്പോൾ $x = -16$ എന്ന ഉത്തരം ചതുരക്കണക്കിനു പറ്റിയതല്ല.

നേരത്തെ ചെയ്ത മറ്റൊരു ചതുരക്കണക്കു നോക്കാം: ചുറ്റളവ് 100 മീറ്ററും, പരപ്പളവ് 525 ചതുരശ്രമീറ്ററുമായ ചതുരം.

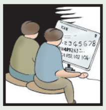
ഇതിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം x മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ $(x - 25)^2 = 100$ എന്നു കിട്ടും. ഇതിൽനിന്ന്, $x - 25 = 10$ എന്നെടുത്ത്, ഒരു വശം 35 മീറ്റർ, മറ്റെ വശം $50 - 35 = 15$ മീറ്റർ എന്നു കണക്കാക്കി.

ന്യൂനവർഗമൂലം എടുത്താലോ? $x - 25 = -10$ എന്നും, ഇതിൽ നിന്ന് $x = 15$ എന്നും കിട്ടും. അതായത്, ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം 15 മീറ്റർ, മറ്റേ വശത്തിന്റെ നീളം $50 - 15 = 35$ മീറ്റർ എന്നും കിട്ടും.

അപ്പോൾ ഈ കണക്കിൽ രണ്ടു വർഗമൂലങ്ങളിൽ ഏതെടുത്താലും ഒരേ ചതുരം തന്നെയാണ് കിട്ടുന്നത്.

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ, ഒരു പ്രായോഗികപ്രശ്നത്തെ ബീജഗണിതസമവാക്യമാക്കി, ഗണിതപരമായി മാത്രം ആലോചിക്കുമ്പോൾ, ഒന്നിൽ കൂടുതൽ ഉത്തരങ്ങൾ കിട്ടിയെന്നിരിക്കും. ഇവയിൽ ചിലതു മാത്രമോ, എല്ലാം തന്നെയോ, തുടങ്ങിയ പ്രായോഗികപ്രശ്നത്തിന് യോജിച്ചതല്ലെന്നും വരാം.

അപ്പോൾ സാധാരണയായി ബീജഗണിതരീതിയിൽ എല്ലാ ഉത്തരങ്ങളും കണ്ടുപിടിക്കുകയും, തുടർന്ന് ഇവയിൽ നിന്ന് സന്ദർഭത്തിന് യോജിച്ചവ മാത്രം എടുക്കുകയുമാണ് പതിവ്.



(1) ഒരു സംഖ്യയും, അതിനോടു 2 കൂട്ടിയതും തമ്മിൽ ഗുണിച്ചപ്പോൾ 168 കിട്ടി. സംഖ്യകൾ എന്തൊക്കെയാണ്?

(2) തുക 4 ഉം, ഗുണനഫലം 2 ഉം ആയ രണ്ടു സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(3) 99, 97, 95, ... എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ എത്ര പദങ്ങൾ കൂട്ടിയാലാണ് 900 കിട്ടുന്നത്?

(4) 28 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു കമ്പി വളച്ച് ഒരു ചതുരമുണ്ടാക്കണം.

(i) വികർണത്തിന്റെ നീളം 8 സെന്റിമീറ്ററായി ചതുരമുണ്ടാക്കാൻ കഴിയുമോ?

(ii) വികർണത്തിന്റെ നീളം 10 സെന്റിമീറ്ററായി ഉണ്ടാക്കാൻ കഴിയുമോ?

(iii) വികർണത്തിന്റെ നീളം 14 സെന്റിമീറ്റർ ആയാലോ?

ഉണ്ടാക്കാൻ കഴിയുന്ന ചതുരങ്ങളുടെ വശങ്ങളുടെ നീളം കണക്കാക്കുക.

സമവാക്യങ്ങളും ബഹുപദങ്ങളും

$p(x) = 4x^2 + 24x + 11$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽ, x ആയി പല സംഖ്യകൾ എടുക്കുമ്പോൾ $p(x)$ ആയി പല സംഖ്യകൾ കിട്ടുന്നു. ഉദാഹരണമായി,

$$p(1) = 4 + 24 + 11 = 39$$

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = \left(4 \times \frac{1}{4}\right) + \left(24 \times \frac{1}{2}\right) + 11 = 1 + 12 + 11 = 24$$

$$p(-1) = 4 - 24 + 11 = -9$$

മറിച്ച്, $p(x)$ ആയി ഒരു നിശ്ചിതസംഖ്യ കിട്ടാൻ x ആയി എന്തു സംഖ്യ എടുക്കണം എന്നും ചോദിക്കാം. ഉദാഹരണമായി,

$p(x) = 4x^2 + 24x + 11$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽ, $p(x) = 0$ എന്നു കിട്ടാൻ x ആയി ഏത് സംഖ്യ എടുക്കണം?

ഈ ചോദ്യം അൽപംകൂടി ലഘൂകരിച്ച്, ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

$4x^2 + 24x = -11$ ആകണമെങ്കിൽ x എന്ന സംഖ്യ എന്തായിരിക്കണം?

ഇത്തരം കണക്കുകൾ ധാരാളം ചെയ്തു കഴിഞ്ഞല്ലോ.

അൽപം ചരിത്രം

രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യങ്ങൾ പരിഹരിക്കാൻ വർഗം തികയ്ക്കുന്ന രീതിയ്ക്ക് ഏറെ പഴക്കമുണ്ട്. ഏതാണ്ട് ബി.സി. 1500 ൽ തന്നെ ബാബിലോണിയക്കാർ, ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട പ്രശ്നങ്ങളിൽ ഈ രീതി പ്രയോഗിച്ചിരിക്കുന്നതു കാണാം.

എന്നാൽ ഇന്നത്തെപ്പോലെ പ്രശ്നങ്ങളെ ബീജഗണിത സമവാക്യങ്ങളാക്കുന്ന രീതിയൊന്നും അന്നില്ലായിരുന്നു. (ഈ രീതിയ്ക്ക് ഏറിയാൽ അഞ്ഞൂറു വർഷത്തെ പഴക്കമേയുള്ളൂ.) പ്രശ്നങ്ങളും, അവയുടെ പരിഹാരമാർഗങ്ങളുമെല്ലാം സാധാരണ ഭാഷയിലാണ് പറഞ്ഞിരുന്നത്. ജ്യാമിതീയപ്രശ്നങ്ങളാകുമ്പോൾ, പരിഹാരമാർഗങ്ങളും ജ്യാമിതീയഭാഷയിൽത്തന്നെ ആയിരുന്നു.

അതായത്, ബീജഗണിതരീതികളുടെ ജ്യാമിതീയരൂപങ്ങളായി നാം ഇന്നവതരിപ്പിക്കുന്ന പലതും, ചരിത്രപരമായി നോക്കിയാൽ, ഈ ബീജഗണിതരീതികളുടെ ആദിരൂപമാണ്.

x കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന്റെ ഘട്ടങ്ങൾ ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

x^2 ന്റെ ഗുണകം 1 ആക്കുക: $x^2 + 6x = -\frac{11}{4}$

x ന്റെ ഗുണകത്തിന്റെ പകുതിയുടെ വർഗം കൂട്ടുക

: $x^2 + 6x + 9 = -\frac{11}{4} + 9$

വർഗമായി എഴുതുക : $(x + 3)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$

വർഗമൂലമെടുക്കുക : $x + 3 = \frac{5}{2}$

അല്ലെങ്കിൽ

$x + 3 = -\frac{5}{2}$

x കണക്കാക്കുക : $x = \frac{5}{2} - 3 = -\frac{1}{2}$

അല്ലെങ്കിൽ

$x = -\frac{5}{2} - 3 = -5\frac{1}{2}$

അതായത്, $p(x) = 0$ എന്നു കിട്ടാൻ $x = -\frac{1}{2}$ എന്നോ $x = -5\frac{1}{2}$ എന്നോ എടുക്കണം.

ഇനി $p(x) = 1$ ആകുന്ന x കണ്ടുപിടിക്കണമെങ്കിലോ?

$p(x) = 1$ എന്നതിനെ $p(x) - 1 = 0$ എന്നെഴുതാമല്ലോ; അതായത്,

$$4x^2 + 24x + 10 = 0$$

$4x^2 + 24x + 10$ എന്ന ബഹുപദത്തെ $q(x)$ എന്നെഴുതിയാൽ, ഈ പ്രശ്നം ഇങ്ങനെയാകും.

> $q(x) = 4x^2 + 24x + 10$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽ, $q(x) = 0$ എന്നു കിട്ടാൻ x ആയി എന്തു സംഖ്യ എടുക്കണം?

ആദ്യത്തെ കണക്കിലെപ്പോലെ മുന്നോട്ടു പോകാം:

$$4x^2 + 24x + 10 = 0$$

$$4x^2 + 24x = -10$$

$$x^2 + 6x = -\frac{5}{2}$$

$$x^2 + 6x + 9 = 9 - \frac{5}{2} = \frac{13}{2}$$

$$(x + 3)^2 = \frac{13}{2}$$

$$x + 3 = \sqrt{\frac{13}{2}} \text{ അല്ലെങ്കിൽ } -\sqrt{\frac{13}{2}}$$

$$x = -3 + \sqrt{\frac{13}{2}} \text{ അല്ലെങ്കിൽ } -3 - \sqrt{\frac{13}{2}}$$

$-3 + \sqrt{\frac{13}{2}}$ അല്ലെങ്കിൽ $-3 - \sqrt{\frac{13}{2}}$ എന്നതിനെ ചുരുക്കി $-3 \pm \sqrt{\frac{13}{2}}$ എന്നാണ് എഴുതുന്നത്. അതായത് $p(x) = 1$ എന്നു കിട്ടാൻ $x = -3 \pm \sqrt{\frac{13}{2}}$ എന്നതിലെ ഏതെങ്കിലുമൊരു സംഖ്യ എടുക്കണം.

ഇനി ഒരു രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദത്തിൽ നിന്ന് 0 കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഖ്യ കണ്ടുപിടിക്കുന്ന പൊതുവായ മാർഗം ബീജഗണിതരീതിയിൽ എഴുതി നോക്കാം. ഏതു രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദത്തിനെയും

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

എന്നെഴുതാമല്ലോ. ഇതിൽ $p(x) = 0$ ആകുന്ന x കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ഘട്ടങ്ങൾ നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

- $ax^2 + bx + c = 0$ എന്നതിനെ മാറ്റിയെഴുതുക

$$ax^2 + bx = -c$$

- x^2 ന്റെ ഗുണകം 1 ആക്കുക

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

- x ന്റെ ഗുണകമായ $\frac{b}{a}$ യുടെ പകുതിയുടെ വർഗം കൂട്ടുക

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

- വർഗമായി എഴുതുക

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

- വർഗമൂലമെടുക്കുക

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- x കണക്കാക്കുക

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

വികർണക്കണക്ക്

രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യങ്ങൾ പരിഹരിക്കാൻ മാത്രമല്ല, വർഗമൂലങ്ങളുടെ ഏകദേശവിലകൾ കാണാനും, വർഗം തികയ്ക്കുന്ന രീതി പണ്ടേ ഉപയോഗിച്ചിരുന്നതായി കാണാം.

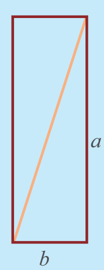
ഉദാഹരണമായി വീതി കുറഞ്ഞ, ഉയരം കൂടിയ ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വികർണം കണ്ടുപിടിക്കുന്ന രീതി, പുരാതന ബാബിലോണിലെ ഒരു കളിമൺ പലകയിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്നത്, ഇങ്ങനെയാണ്.

വീതിയുടെ വർഗത്തിനെ ഉയരം കൊണ്ടു ഹരിച്ച്, അതിന്റെ പകുതി ഉയരത്തോട് കൂട്ടുക.

ഇത്, ഇന്നത്തെ രീതിയിൽ എഴുതിയാൽ

$$\sqrt{a^2 + b^2} \approx a + \frac{b^2}{2a}$$

എന്നാകും.



ഇതിന്റെ യുക്തിയും ഇന്നത്തെ രീതിയിൽ കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

അതായത്
$p(x) = ax^2 + bx + c$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽ, $p(x) = 0$ എന്നു കിട്ടാൻ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

എന്നെടുക്കണം

ഇതൽപം ചുരുക്കിയെഴുതാം:

$ax^2 + bx + c = 0$ ആകണമെങ്കിൽ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ആകണം

നേരത്തെ ചെയ്ത പല കണക്കുകളിലും, ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള പല ഘട്ടങ്ങളെ ഒരുമിച്ചെടുത്ത് ഒറ്റവരിയിൽ ഉത്തരമെഴുതാൻ ഇതുപയോഗിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി **രണ്ട് ഉത്തരം** എന്ന ഭാഗത്തിലെ ആദ്യത്തെ കണക്കിൽ, തുടങ്ങിയ സ്ഥാനത്തു നിന്ന് 15 മീറ്റർ അകലെയെത്തുന്ന സമയമാണ് കണക്കാക്കേണ്ടത്. t സെക്കന്റിൽ അകലം $16t - 4t^2$ ആണെന്നു കണ്ടു. അപ്പോൾ $16t - 4t^2 = 15$ ആകാൻ t എതു സംഖ്യയായിരിക്കണം എന്നതാണ് പ്രശ്നം. അതായത്,

$4t^2 - 16t + 15 = 0$ ആകണമെങ്കിൽ t എന്തായിരിക്കണം?

ഇതു കണ്ടുപിടിക്കാൻ, മുകളിലെഴുതിയ പൊതുതത്വത്തിൽ a, b, c ആയി $4, -16, 15$ എന്നീ സംഖ്യകൾ എടുത്താൽ മതി:

$$t = \frac{-(-16) \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \times 4 \times 15}}{2 \times 4}$$

$$t = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 240}}{8}$$

$$= \frac{16 \pm \sqrt{16}}{8}$$

അതായത്,

$$t = \frac{16 \pm 4}{8} = \frac{5}{2} \text{ അല്ലെങ്കിൽ } \frac{3}{2}$$

ഇതിൽ നിന്ന്, നേരത്തെ കണ്ടതുപോലെ $t = 2\frac{1}{2}$ അല്ലെങ്കിൽ $1\frac{1}{2}$ എന്നു കിട്ടും.

ഇനി ഈ കണക്ക് നോക്കുക:

30 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന വേഗത്തിൽ ഒരു കല്ല് നേരെ മുകളിലോട്ടെറിയുന്നു. t സെക്കന്റിൽ നിലത്തുനിന്നുള്ള ഉയരം s മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, s, t ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം

$$s = 30t - 4.9t^2$$

എന്നാണ്. ഏതു സമയത്താണ് കല്ല് നിലത്തുനിന്ന് 20 മീറ്റർ ഉയരത്തിലാകുന്നത്?

ഇവിടെ $30t - 4.9t^2 = 20$ ആകുന്ന t ആണ് കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത്. മറ്റൊരുതരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ, പ്രശ്നം ഇതാണ്:

$4.9t^2 - 30t + 20 = 0$ ആകണമെങ്കിൽ t എന്തായിരിക്കണം?

മുമ്പു ചെയ്തതുപോലെ ഒറ്റവരിയിൽ

$$t = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 4 \times 4.9 \times 20}}{9.8}$$

എന്നെഴുതാം. ഇതു കണക്കാക്കാൻ കാൽക്കുലേറ്ററോ, കമ്പ്യൂട്ടറോ ഉപയോഗിക്കുന്നതാണ് സൗകര്യം. അങ്ങനെ രണ്ടു ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾക്ക് കൃത്യമായി

$$t \approx 5.36 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } 0.76$$

എന്നു കണക്കാക്കാം.

ഇതിൽ 0.76 സെക്കന്റ് എന്നത്, മേലോട്ടുള്ള യാത്രയിൽ 20 മീറ്റർ ഉയരത്തിലെത്തുന്ന സമയവും, 5.36 സെക്കന്റ് എന്നത്, താഴോട്ടുള്ള യാത്രയിൽ 20 മീറ്റർ ഉയരത്തിലെത്തുന്ന സമയവുമാണ്.

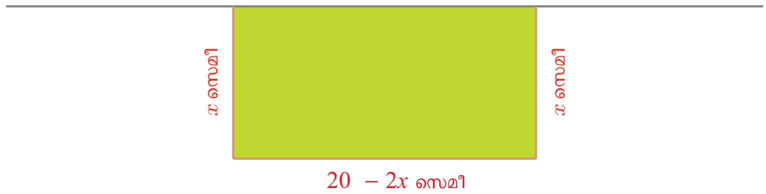
ഈ കണക്കു നോക്കൂ.

20 മീറ്റർ നീളമുള്ള കയറുകൊണ്ട് നിലത്ത് ഒരു ചതുരമുണ്ടാക്കണം; ചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശം ഒരു മതിലും:

ചതുരത്തിന് 50 ചതുരശ്രമീറ്റർ പരപ്പളവ് വേണം. ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എന്തൊക്കെയായിരിക്കണം?

ചതുരത്തിന്റെ ഇടതും വലതുമുള്ള വശങ്ങളുടെ നീളം x മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, താഴത്തെ വശത്തിന്റെ നിളം $20 - 2x$ മീറ്റർ, പരപ്പളവ് $x(20 - 2x) = 2x(10 - x)$ ചതുരശ്രമീറ്റർ.

a എന്ന പേരിൽ ഒരു സ്ലൈഡർ ഉണ്ടാക്കുക. വശങ്ങളുടെ നീളം $a, 20 - 2a$ ആയ ഒരു ചതുരം വരച്ച് അതിന്റെ പരപ്പളവ് അടയാളപ്പെടുത്തുക. a മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് പരപ്പളവ് മാറുന്നത് നോക്കൂ. പരപ്പളവ് 50 ആകുന്നത് എപ്പോഴാണ്? പരപ്പളവ് 50 നേക്കാൾ കൂട്ടാൻ കഴിയുന്നുണ്ടോ?



അപ്പോൾ കണക്കിന്റെ ബീജഗണിതരൂപം ഇതാണ്:

$2x(10 - x) = 50$ ആകണമെങ്കിൽ x എന്താകണം?

ആദ്യം സമവാക്യം ലഘൂകരിച്ച് ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

അതായത്,

$$(x - 5)^2 = 0$$

വർഗം പൂജ്യമാണെങ്കിൽ, സംഖ്യയും പൂജ്യംതന്നെ. അതായത്, $x - 5 = 0$, അഥവാ $x = 5$.

അപ്പോൾ ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾ 5 മീറ്ററും, $20 - 10 = 10$ മീറ്ററും.

വശങ്ങൾ മാറ്റി പരപ്പളവ് അൽപം കൂട്ടാൻ പറ്റുമോ? 1 ചതുരശ്രമീറ്ററെങ്കിലും?

$$2x(10 - x) = 51$$

$$2x^2 - 20x + 51 = 0$$

സൂത്രവാക്യം പ്രയോഗിച്ചാൽ,

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 408}}{4} = \frac{20 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

എന്താണിതിന്റെയർഥം? ന്യൂനസംഖ്യകൾക്കൊന്നും വർഗമൂലമില്ലല്ലോ (അധിസംഖ്യയായാലും, ന്യൂനസംഖ്യയായാലും, വർഗം അധിസംഖ്യതന്നെയല്ലേ?)

ഈ സമവാക്യത്തിന് പരിഹാരമില്ല എന്നാണ് ഇതിന്റെ അർഥം. മറ്റൊരു തരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ, x ആയി ഏതു സംഖ്യയെടുത്താലും $2x^2 - 20x + 51$ എന്ന സംഖ്യ 0 ആവില്ല.

സൂത്രവാക്യം പ്രയോഗിക്കുന്നതിനുപകരം, വർഗം തികയ്ക്കുന്ന രീതിയിൽ തുടർന്നിരുന്നെങ്കിൽ, ഇങ്ങനെയാകുമായിരുന്നു:

മതിലും കയറും

നിശ്ചിത നീളമുള്ള ഒരു കയറുകൊണ്ട് പല ചതുരങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കാം. അത്തരമൊരു ചതുരത്തിനുള്ളിലെ പരപ്പളവ് ഏറ്റവും കൂടുതലാകുന്നത് സമചതുരമാകുമ്പോഴാണെന്നും കണ്ടു (**വീണ്ടും സമചതുരം എന്ന ഭാഗം**).

ചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശമായി ഒരു മതിൽ എടുക്കാമെങ്കിലോ? കയറിന്റെ നീളം a എന്നും ചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം x എന്നുമെടുത്താൽ, മറ്റേ വശത്തിന്റെ നീളം $a - 2x$; ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

$$p(x) = x(a - 2x) = ax - 2x^2$$

ഈ ബഹുപദം ഇങ്ങനെ മാറ്റിയെഴുതാം

$$p(x) = 2\left(\frac{1}{16}a^2 - \left(x - \frac{1}{4}a\right)^2\right)$$

x ആയി പല സംഖ്യകളെടുക്കുമ്പോൾ $p(x)$ ആയി കിട്ടുന്ന ഏറ്റവും വലിയ സംഖ്യ $2 \times \frac{1}{16}a^2 = \frac{1}{8}a^2$ ആണെന്ന് (സമചതുരക്കണക്കിലെപ്പോലെ) കാണാം. ഈ സംഖ്യ കിട്ടുന്നതാകട്ടെ $x = \frac{1}{4}a$ എന്നെടുക്കുമ്പോഴും. അപ്പോൾ ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾ $\frac{1}{4}a$, $\frac{1}{2}a$ എന്നും കിട്ടും. അതായത്, ഈ കണക്കിൽ, വലിയ വശം, ചെറിയ വശത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങായ ചതുരത്തിനാണ് ഏറ്റവും കൂടുതൽ പരപ്പളവ്.

$$x^2 - 10x + 25\frac{1}{2} = 0$$

$$x^2 - 10x + 25 = -\frac{1}{2}$$

$$(x - 5)^2 = -\frac{1}{2}$$

ഒരു സംഖ്യയുടെയും വർഗം ന്യൂനമല്ലാത്തതിനാൽ, ഈ സമവാക്യം ശരിയാകുന്ന സംഖ്യയൊന്നുമില്ലെന്ന് ഈ ഘട്ടത്തിൽ തിരിച്ചറിയാം.

ചതുരക്കണക്കിലേക്ക് തിരിച്ചു വരാം. പരപ്പളവ് 51 ചതുരശ്രമീറ്റർ ആക്കാൻ കഴിയില്ല എന്നാണ് ഇതുവരെ പറഞ്ഞതിന്റെ ചുരുക്കം. ഇതുപോലെതന്നെ ആലോചിച്ചാൽ, പരപ്പളവ് 50 ചതുരശ്രമീറ്ററിൽനിന്ന് അൽപംപോലും കൂട്ടാൻ കഴിയില്ല എന്നു കാണാം.

(1) ഒരു ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 42 മീറ്ററും, അതിന്റെ വികർണം 15 മീറ്ററുമാണ്. അതിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എന്താണ്?

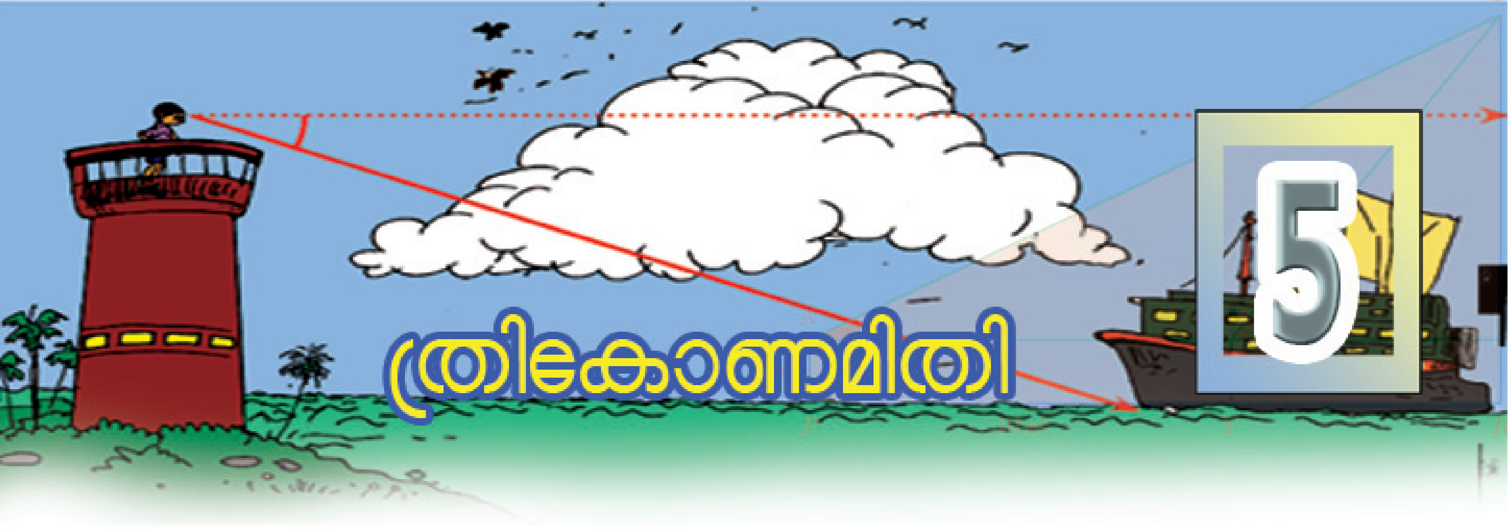
(2) 1 മുതലുള്ള തുടർച്ചയായ എണ്ണൽസംഖ്യകൾ എത്ര വരെ കൂട്ടിയാലാണ് 300 കിട്ടുക?

(3) ഏതു സംഖ്യയുടെ കൂടെ 1 കൂട്ടിയാലാണ് സംഖ്യയുടെ വർഗം കിട്ടുക?

(4) നിശ്ചിത ചുറ്റളവും പരപ്പളവുമുള്ള ചതുരം നിർമിക്കാനുള്ള പ്രശ്നത്തെ സമവാക്യമാക്കിയപ്പോൾ, ചുറ്റളവ് 42 നുപകരം, 24 എന്നു തെറ്റായി എഴുതിപ്പോയി. ചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം 10 എന്നു കിട്ടുകയും ചെയ്തു. പ്രശ്നത്തിലെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്? ശരിയായ പ്രശ്നത്തിലെ ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എത്രയാണ്?

min = 0, max = 21 ആയി a എന്ന സ്ലൈഡർ ഉണ്ടാക്കുക. ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം a യും, മറ്റേ വശത്തിന്റെ നീളം 21 – a യും ആയി ഒരു ചതുരം വരയ്ക്കുക. ഇതിന്റെ ഒരു വികർണം വരച്ച് നീളം അടയാളപ്പെടുത്തുക. a മാറ്റുമ്പോൾ വികർണത്തിന്റെ നീളം മാറുന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക. എപ്പോഴാണ് വികർണത്തിന്റെ നീളം 15 ആകുന്നത്? വികർണത്തിന്റെ നീളം എപ്പോഴെങ്കിലും 14 ആകുന്നുണ്ടോ? വികർണത്തിന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ നീളം എത്രയാണ്? അത് കൃത്യമായി കണക്കാക്കാമോ?

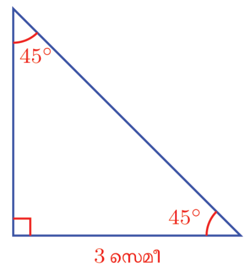
(5) ഒരു രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യം പകർത്തിയെഴുതിയപ്പോൾ, x ഇല്ലാത്ത പദം -24 നുപകരം 24 എന്നെഴുതിപ്പോയി. ഉത്തരം കിട്ടിയത് 4, 6. ശരിയായ പ്രശ്നത്തിന്റെ ഉത്തരം എന്തൊക്കെയാണ്?



5 ത്രികോണമിതി

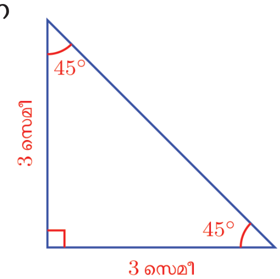
കോണുകളും വശങ്ങളും

ഈ ത്രികോണം നോക്കൂ:



ഇതിലെ മറ്റു വശങ്ങളുടെ നീളമെന്താണ്?

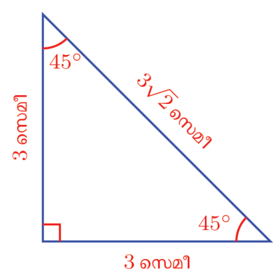
തുല്യമായ കോണുകൾക്കെതിരെയുള്ള വശങ്ങളും തുല്യമാണെന്നറിയാം അപ്പോൾ, വലതുവശത്തെ 45° കോണിനെതിരെയുള്ള ലംബവശത്തിന്റെയും നീളം 3 സെന്റിമീറ്റർ തന്നെ



ഇനി കർണമോ?

പൈഥാഗറസ് തത്വമനുസരിച്ച്, കർണത്തിന്റെ വർഗം, $3^2 + 3^2 = 18$

അപ്പോൾ കർണം, $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ സെന്റിമീറ്റർ.



(9-ാം ക്ലാസിലെ **പുതിയസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠം)

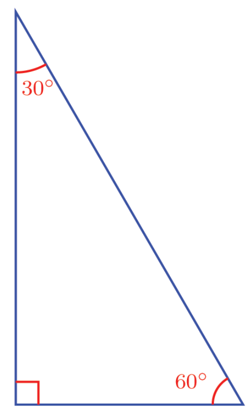
ഇനി താഴത്തെ വശം അൽപം കൂട്ടി 5 സെന്റിമീറ്ററാക്കി ഇത്തരമൊരു ത്രികോണം വരച്ചാലോ? വശങ്ങളുടെ നീളം എന്താകും?

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, ഇത്തരമൊരു ത്രികോണത്തിൽ ഒരു ലംബവശത്തിന്റെ നീളം എന്തായാലും, അതുതന്നെയാണ് മറ്റേ ലംബവശത്തിന്റെയും നീളം; കർണത്തിന്റെ നീളം, ഈ നീളത്തിന്റെ $\sqrt{2}$ മടങ്ങാണ്.

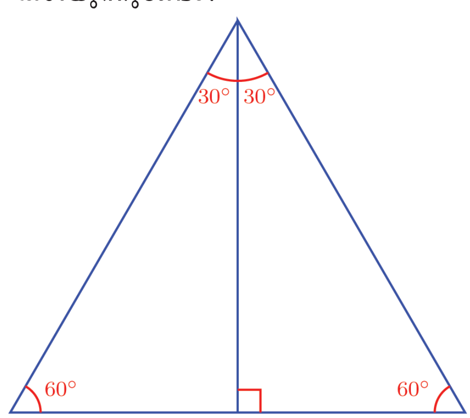
ഇക്കാര്യം അംശബന്ധത്തിന്റെ ഭാഷയിൽ ചുരുക്കിപ്പറയാം:

കോണുകൾ 45°, 45°, 90° ആയ ഏതു ത്രികോണത്തിന്റെയും വശങ്ങൾ $1 : 1 : \sqrt{2}$ എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്.

ഇനി ഈ ത്രികോണം നോക്കൂ:



ഇതിനെ ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ പകുതിയായി കാണാൻ കഴിയുന്നുണ്ടോ?



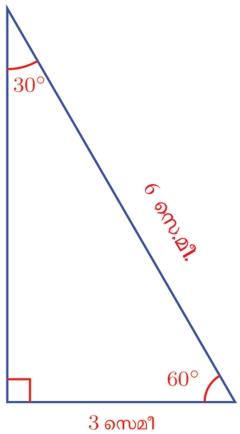
ഈ സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശം 6 സെന്റിമീറ്ററായതിനാൽ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളും അതു തന്നെ. അപ്പോൾ നമ്മുടെ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണത്തിന്റെ നീളവുമായി:

ഭൂമിയും മാനവും

ത്രികോണങ്ങളിലെ കോണുകളുടെ അളവും, വശങ്ങളുടെ നീളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള പഠനമാണ് ത്രികോണമിതി (trigonometry).

ചരിവിന്റെയും വിരിവിന്റെയും തിരിവിന്റെയുമെല്ലാം അളവായിട്ടാണ് കോണളവുകൾ ഉപയോഗിക്കപ്പെടുന്നതെന്നു കണ്ടിട്ടുണ്ട്. ചരിത്രത്തിൽ ചരിവിന്റെ അളവുകൾ ആദ്യം വരുന്നത് ഭൂമിയിലെ പലതരം നിർമാണങ്ങളിലാണ്; തിരിവിന്റെ അളവുകൾ, ആകാശഗോളങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള പഠനത്തിലും.

ഭൂമിയിലെ ആവശ്യങ്ങൾക്കുവേണ്ടിത്തന്നെയാണ് ആദ്യകാല വാനശാസ്ത്രപഠനങ്ങളും നടന്നത്. ഭക്ഷണോല്പാദനം, അതായത് കൃഷി, കാലാവസ്ഥയെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നു. കാലാവസ്ഥയെ നിയന്ത്രിക്കുന്ന ഒരു ഘടകം, സൂര്യനു ചുറ്റുമുള്ള ഭൂമിയുടെ കറക്കമാണ്. ഇത് ശരിയായി അറിയണമെങ്കിൽ, മറ്റു ഗ്രഹങ്ങളുടെയും, നക്ഷത്രങ്ങളുടെയുമെല്ലാം സ്ഥാനം നിശ്ചയിക്കാനറിയണം. പ്രാചീന കാർഷിക സംസ്കാരങ്ങളിലെല്ലാം വാനശാസ്ത്രം ഒരു പ്രധാന പഠനവിഷയമായത് ഇതുകൊണ്ടാണ്. അതിനാകട്ടെ ഗണിതം, വിശേഷിച്ചും ജ്യാമിതി, അത്യാവശ്യമാണുതാനും.



മൂന്നാമത്തെ വശമോ?

$$\sqrt{6^2-3^2} = \sqrt{(6+3)(6-3)} = \sqrt{9\times 3} = 3\sqrt{3} \text{ സെ.മീ.}$$

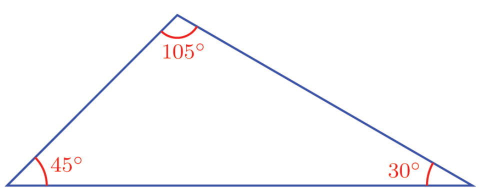
താഴത്തെ വശം 2 സെന്റിമീറ്ററായി കുറച്ച്, ഇത്തരമൊരു ത്രികോണം വരച്ചാലോ?

കർണം 4 സെന്റിമീറ്ററാകും; മൂന്നാമത്തെ വശം $2\sqrt{3}$ സെന്റിമീറ്ററും.

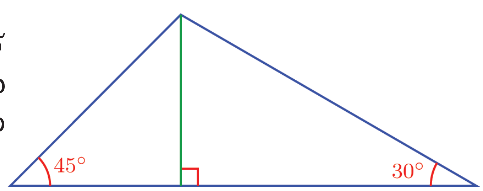
അപ്പോൾ ഇത്തരം ത്രികോണങ്ങളിലെല്ലാം ഏറ്റവും ചെറിയ വശത്തിന്റെ 2 മടങ്ങാണ് ഏറ്റവും വലിയ വശം; ഇടത്തരം വശം $\sqrt{3}$ മടങ്ങും.

കോണുകൾ 30°, 60°, 90° ആയ ഏതു ത്രികോണത്തിന്റെയും വശങ്ങൾ $1 : \sqrt{3} : 2$ എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്.

ഈ രണ്ടുതരം ത്രികോണങ്ങളുപയോഗിച്ച്, മട്ടമല്ലാത്ത ചില ത്രികോണങ്ങളുടെയും വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം കണക്കാക്കാം. ഉദാഹരണമായി ഈ ത്രികോണം നോക്കുക:

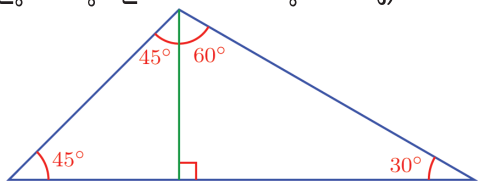


മുകളിലെ മൂലയിൽനിന്ന് താഴത്തെ വശത്തേക്ക് ലംബം വരച്ചാൽ, ഇതിനെ രണ്ടു മട്ടത്രികോണമാക്കാമല്ലോ:

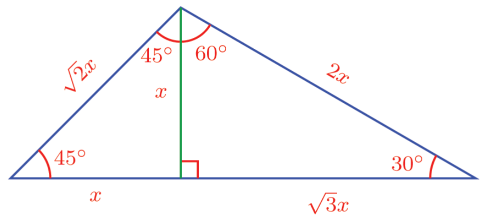


ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ $1:\sqrt{3}:2$ എന്ന അംശബന്ധത്തിലായാൽ അതിന്റെ കോണുകൾ 30°, 60°, 90° ആയിരിക്കുമോ? ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് പരിശോധിച്ച് നോക്കാം. ആദ്യം വശങ്ങൾ $1:\sqrt{3}:2$ എന്ന അംശബന്ധത്തിലുള്ള ത്രികോണങ്ങൾ വരയ്ക്കാം. ഇതിനായി Min = 0 വരത്തക്കവിധം ഒരു സ്ലൈഡർ a ഉണ്ടാക്കുക. Segment with Given Length ഉപയോഗിച്ച് ഒരു ബിന്ദുവിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ വരയുടെ നീളം a* sqrt (3) എന്ന് നൽകുക ($a\sqrt{3}$ എന്നാണിതിനർഥം). ഈ വരയുടെ ഒരറ്റം കേന്ദ്രമായി ആരം a ആയ ഒരു വൃത്തവും മറ്റേ അറ്റം കേന്ദ്രമായി ആരം 2a ആയ മറ്റൊരു വൃത്തവും വരയ്ക്കുക. ഈ വൃത്തങ്ങൾ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുവും വരയുടെ അറ്റങ്ങളും മൂലകളായ ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ അടയാളപ്പെടുത്തി നോക്കൂ. a മാറ്റി നോക്കൂ. കോണുകൾക്ക് എന്തു സംഭവിക്കുന്നു. ഇതേ രീതിയിൽ, വശങ്ങൾ $2 : \sqrt{5}+1 : \sqrt{5}+1$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ വരത്തക്കവിധം ത്രികോണങ്ങൾ വരച്ച് കോണുകൾ അളന്ന് നോക്കൂ.

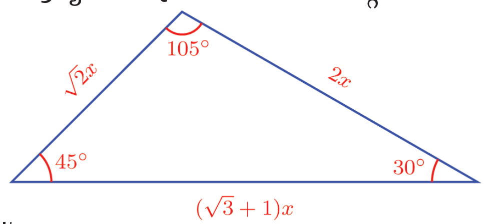
ഈ മട്ടത്രികോണങ്ങളുടെ മുകളിലെ കോണുകൾ എന്താണ്?



വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം കണക്കാക്കാൻ രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങളുടെയും പൊതുവായ വശത്തിന്റെ നീളം x എന്നെടുത്താൽ, നേരത്തെ കണ്ട അംശബന്ധങ്ങളുപയോഗിച്ച് മറ്റു വശങ്ങളുടെ നീളം x ന്റെ മടങ്ങുകളായി എഴുതാം:



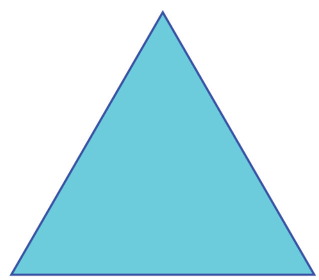
അപ്പോൾ ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ ഇങ്ങനെയാണ്:



അതായത്,

ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം $\sqrt{2} : 2 : \sqrt{3}+1$

ത്രികോണങ്ങളിലെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം ഉപയോഗിച്ച്, അവയുടെ മറ്റു ചില അളവുകളും കണക്കാക്കാം. ഉദാഹരണമായി, തന്നിരിക്കുന്ന സമഭുജത്രികോണം നോക്കുക.

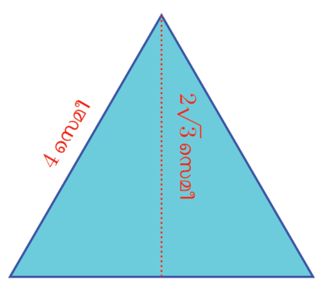


ഇതിൽ ഒരു മൂലയിൽനിന്ന് എതിർവശത്തേക്കുള്ള ലംബത്തിന്റെ നീളം, $2\sqrt{3}$ സെന്റിമീറ്റർ എന്നു കണക്കാക്കാമല്ലോ.

ഇതുപയോഗിച്ച്, ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

$\frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ ച.സെ.മീ.

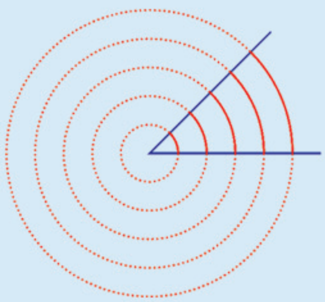
എന്നു കാണാം.



ഡിഗ്രി അളവ്

ഒരു കോണിന്റെ അളവ് 45° എന്നാൽ എന്താണർത്ഥം?

ഈ അളവുള്ള ഒരു കോണിന്റെ ശീർഷം കേന്ദ്രമായി പലപല വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കാം; അവയിലെല്ലാം ഈ കോണിനുള്ളിൽപ്പെടുന്ന ചാപങ്ങളുടെ നീളവും പലതാണ്;

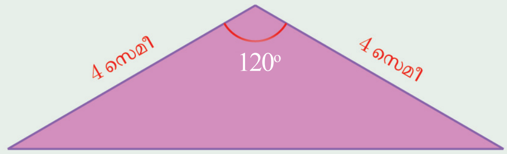


പക്ഷേ ഈ ചാപങ്ങളോരോന്നും അതതു വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{8}$ ഭാഗമാണെന്നതിൽ മാറ്റമില്ല. ഈ $\frac{1}{8}$ നെ 360 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണ് 45.

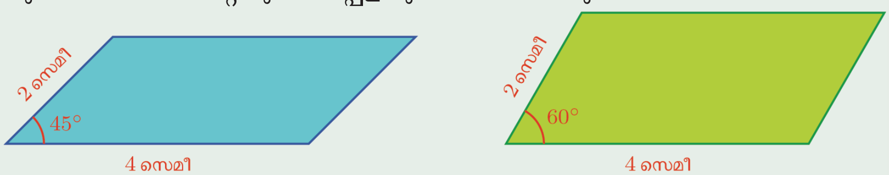
കോണിന്റെ അളവ് 60° ആയാലോ? ശീർഷം കേന്ദ്രമായി വരയ്ക്കുന്ന ഏതു വൃത്തത്തിന്റെയും $\frac{1}{6}$ ഭാഗമാണ് കോണിനുള്ളിൽപ്പെടുക. അതിനെ 360 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണ് 60.

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ, ഏതു കോണിന്റേയും ഡിഗ്രി അളവ് എന്നത് അതിന്റെ ശീർഷം കേന്ദ്രമായി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തത്തിൽ, കോണിനുള്ളിൽപ്പെടുന്ന ചാപത്തിന്റെ നീളത്തെ മൊത്തം വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവുകൊണ്ടു ഹരിച്ച്, 360 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു കിട്ടുന്ന സംഖ്യയാണ്.

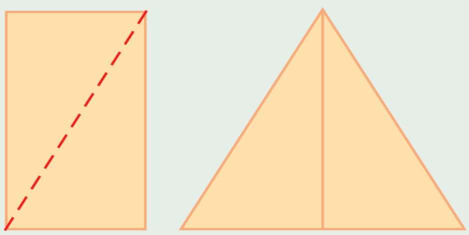
(1) ഇവിടെ വരച്ചിരിക്കുന്ന ത്രികോണത്തിൽ, മുകളിലെ മൂലയിൽനിന്ന് താഴത്തെ വശത്തേക്കുള്ള ലംബദൂരം എത്രയാണ്? ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?



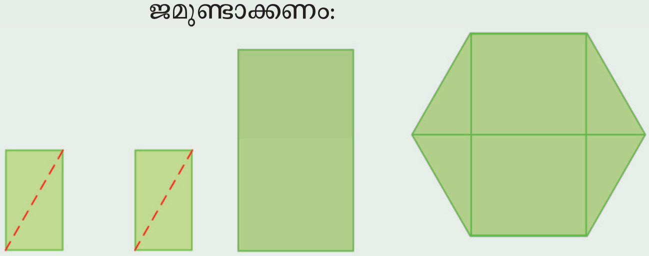
(2) ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന സാമാന്തരികങ്ങൾ ഓരോന്നിലും, താഴത്തെയും മുകളിലത്തെയും വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലം കണക്കാക്കുക. ഓരോന്നിന്റെയും പരപ്പളവും കണക്കാക്കുക:



(3) ഒരു ചതുരപ്പലക വികർണത്തിലൂടെ മുറിച്ച്, ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ മാറ്റിയടുക്കി, ഒരു സമഭുജത്രികോണമുണ്ടാക്കണം. ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ 50 സെന്റിമീറ്ററുമാകണം. ചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും എത്രയായിരിക്കണം?



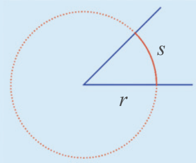
(4) രണ്ടു ചതുരങ്ങൾ വികർണത്തിലൂടെ മുറിച്ചു ത്രികോണങ്ങളാക്കി, മറ്റൊരു ചതുരത്തോടു ചേർത്തുവച്ച് ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ ഒരു സമഷഡ്ഭുജമുണ്ടാക്കണം:



ഷഡ്ഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം 30 സെന്റിമീറ്റർ ആകണമെങ്കിൽ ചതുരങ്ങളുടെ നീളവും വീതിയും എത്രയായിരിക്കണം?

കോണിനു മറ്റൊരളവ്

ഒരു കോണിന്റെ ഡിഗ്രി അളവെന്നാൽ എന്താണെന്നു കണ്ടല്ലോ: ഒരു കോണിന്റെ മൂല കേന്ദ്രമാക്കി പല വലിപ്പത്തിലുള്ള വൃത്തങ്ങൾ വരച്ചാൽ അവയുടെ ചുറ്റളവും കോണിനുള്ളിലെ ചാപത്തിന്റെ നീളവും മാറുമെങ്കിലും വൃത്തത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ് ചാപമെന്നത് മാറുന്നില്ല. അതായത്, ചിത്രത്തിലെ s ഉം r ഉം മാറുമെങ്കിലും, $\frac{s}{2\pi r}$ മാറുന്നില്ലെന്നും, അതിനെ 360 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണ് ഡിഗ്രി അളവെന്നും പറഞ്ഞു. അതായത്, കോണിന്റെ ഡിഗ്രി അളവ് $= \frac{s}{2\pi r} \times 360$. ഇതിലെ s, r ഇവ മാറിയാലും 2π, 360 എന്നീ സംഖ്യകൾ മാറുന്നില്ലല്ലോ. അപ്പോൾ കോണളക്കാൻ $\frac{s}{r}$ എടുത്താൽപ്പോരേ?



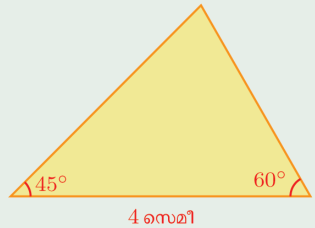
ഈ അളവിനെയാണ് കോണിന്റെ റേഡിയൻ (radian) അളവ് എന്നു പറയുന്നത്. അതായത്, മുകളിലെ ചിത്രത്തിൽ,

കോണിന്റെ റേഡിയൻ അളവ് $= \frac{s}{r}$.

ഡിഗ്രി അളവിനെ സൂചിപ്പിക്കാൻ $^\circ$ എന്ന ചിഹ്നമാണല്ലോ ഉപയോഗിക്കുന്നത്. റേഡിയൻ അളവിനെ സൂചിപ്പിക്കാൻ rad എന്നാണ് എഴുതുന്നത്.

ഈ ആശയം ആദ്യമായി അവതരിപ്പിച്ചത്, പതിനെട്ടാംനൂറ്റാണ്ടിൽ ഇംഗ്ലണ്ടിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന റോജർ കോട്സ് (Roger Cotes) എന്ന ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനാണ്. റേഡിയൻ എന്ന പേരു കൊടുത്തത്, പത്തൊമ്പതാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ഇംഗ്ലണ്ടിലെ ജെയിംസ് തോംസൺ (James Thomson) എന്ന ഭൗതികശാസ്ത്രജ്ഞനും.

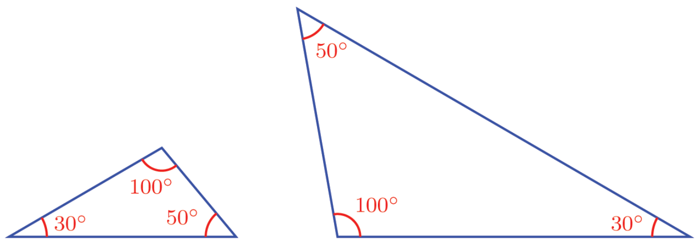
(5) ചിത്രത്തിലെ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.



പുതിയ കോണളവുകൾ

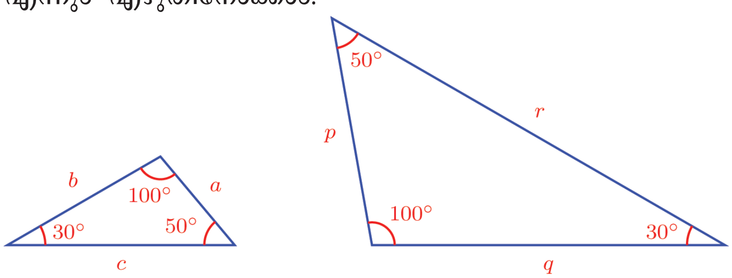
ചില ത്രികോണങ്ങളുടെ കോണുകളിൽനിന്ന് അവയുടെ വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം കണക്കാക്കിയല്ലോ. ഏതു ത്രികോണത്തിലും ഇതുപോലെ കോണുകൾ, വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം നിശ്ചയിക്കുമോ?

ഒരു ഉദാഹരണത്തിലൂടെ ചോദ്യം വ്യക്തമാക്കാം; ഈ ത്രികോണങ്ങൾ നോക്കൂ:



രണ്ടു ത്രികോണത്തിലും ഒരേ കോണുകളാണ്; അപ്പോൾ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം തന്നെയാണോ വലിയ ത്രികോണത്തിലും?

ചെറിയ ത്രികോണത്തിൽ വശങ്ങളുടെ നീളം, വലുപ്പക്രമത്തിൽ a, b, c എന്നും, വലിയ ത്രികോണത്തിൽ p, q, r എന്നും എഴുതിനോക്കാം:



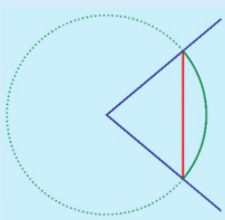
രണ്ടു ത്രികോണത്തിലെയും തുല്യമായ കോണുകൾക്കെതിരെയുള്ള വശങ്ങളുടെ ജോടികളുടെ നീളം ഒരേ തോതിലാണ് മാറുന്നതെന്ന് ഒമ്പതാംക്ലാസിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ.

അതായത് a, b, c എന്നീ സംഖ്യകളുടെ ഒരേ മടങ്ങാണ് p, q, r എന്നീ സംഖ്യകൾ. ഈ മടങ്ങ് k എന്നെടുത്താൽ,

$$p = ak \qquad q = bk \qquad r = ck$$

നേർവഴി?

ഡിഗ്രി അളവായാലും, റേഡിയൻ അളവായാലും, കോണിന്റെ വലിപ്പം സൂചിപ്പിക്കാൻ ഉപയോഗിക്കുന്നത് ഒരു ചാപത്തിന്റെ നീളത്തെയാണല്ലോ. അതിനുപകരം ഞാണിന്റെ നീളം ഉപയോഗിച്ചുള്ള കണക്കുകൂട്ടലുകളാണ്, ബി.സി. രണ്ടാം നൂറ്റാണ്ടിൽ, ഗ്രീസിലെ ഹിപ്പാർക്കസ് (Hipparchus) എന്ന വാനശാസ്ത്രജ്ഞൻ നടത്തിയത്.



വ്യത്യസ്ത കേന്ദ്രകോണുകളുള്ള ഞാണുകളുടെ നീളങ്ങൾ കാണിക്കുന്ന ഒരു വലിയ പട്ടിക ഇദ്ദേഹം എഴുതിയിട്ടുള്ളതായി പിൽക്കാലത്തെ പല ഗണിതകാരന്മാരും പറയുന്നുണ്ടെങ്കിലും, അതു കണ്ടു കിട്ടിയിട്ടില്ല. ഏ.ഡി. രണ്ടാം നൂറ്റാണ്ടിൽ, ഈജിപ്റ്റിലെ ക്ലോഡിയസ് ടോളമി (Claudius Ptolemy) ഇത്തരത്തിൽ ഒരു പട്ടിക ഉണ്ടാക്കിയത് കിട്ടിയിട്ടുണ്ട്. ഇതിൽ, ആരം 60 ആയ ഒരു വൃത്തത്തിൽ $\frac{1}{2}^\circ$ ഇടവിട്ട്, 180° വരെയുള്ള കേന്ദ്രകോൺ ഉണ്ടാക്കുന്ന ഞാണുകളുടെ നീളം വളരെ കൃത്യമായി അദ്ദേഹം കണക്കുകൂട്ടിയിട്ടുണ്ട്.

എന്നു പറയാം; അംശബന്ധത്തിന്റെ ഭാഷയിൽ

$$a : b : c = p : q : r$$

എന്നും പറയാം.

അതായത്,

ഒരേ കോണുകളുള്ള ത്രികോണങ്ങൾ പല വലുപ്പത്തിൽ വരച്ചാൽ, വശങ്ങളുടെ നീളം മാറുമെങ്കിലും അവ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം മാറുന്നില്ല.

മറ്റൊരുതരത്തിൽപ്പറഞ്ഞാൽ,

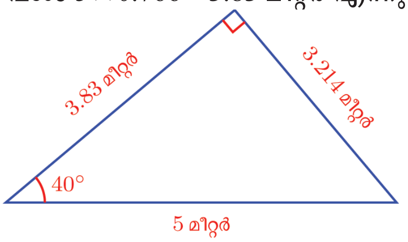
ഒരു ത്രികോണത്തിലെ കോണുകൾ, അതിലെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം നിശ്ചയിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണമായി, നേരത്തെ കണ്ടതനുസരിച്ച്, കോണുകൾ 30°, 60°, 90° ആയ ഏത് ത്രികോണത്തിലും വശങ്ങൾ $1 : \sqrt{3} : 2$ എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്. മറ്റു ചില കോണുകളുള്ള ത്രികോണങ്ങളിലും വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം കണക്കാക്കിയല്ലോ.

പൊതുവേ കോണുകളിൽനിന്ന് വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം കണക്കാക്കുക അത്ര എളുപ്പമല്ല. എന്നാൽ വളരെക്കാലം മുമ്പുതന്നെ ഗണിതകാരന്മാർ എല്ലാ മട്ടത്രികോണങ്ങളിലും ഈ അംശബന്ധങ്ങൾ കണക്കാക്കാനുള്ള മാർഗങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുകയും, അങ്ങനെ കണക്കാക്കിയ സംഖ്യകൾ പ്രത്യേക രീതിയിൽ പട്ടികയാക്കുകയും ചെയ്തിട്ടുണ്ട്.

ഉദാഹരണമായി, ഒരു കോൺ 40° ആയ മട്ടത്രികോണത്തിൽ കർണത്തിന്റെ ഏകദേശം 0.6428 ഭാഗമാണ് ഈ കോണിനെ തിരെയുള്ള വശമെന്നും, 0.7660 ഭാഗമാണ് മറ്റേ ലംബവശമെന്നും ഇത്തരം പട്ടികകളിൽ നിന്നു കാണാം.

അപ്പോൾ കർണം 5 മീറ്ററും ഒരു കോൺ 40° യും ആയ മട്ടത്രികോണത്തിൽ ഈ കോണിനെതിരെയുള്ള വശം മില്ലിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമായെടുത്താൽ $5 \times 0.6428 = 3.214$ മീറ്റർ എന്നും മൂന്നാമത്തെ വശം $5 \times 0.766 = 3.83$ മീറ്റർ എന്നും കണക്കാക്കാം:

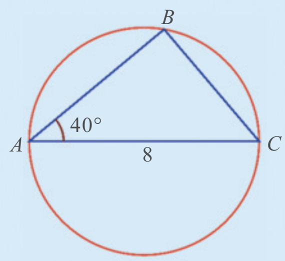


ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കുന്ന സംഖ്യകൾക്ക് പ്രത്യേക പേരുകളുമുണ്ട്. ഇപ്പോൾ കണ്ട കണക്കിൽ 0.6428 എന്ന സംഖ്യ 40° കോണിന്റെ എതിർവശം കർണത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണെന്നു കാണിക്കുന്ന സംഖ്യയാണല്ലോ. ഇതിനെ 40° കോണിന്റെ സൈൻ (sine of 40°) എന്നാണ് പറയുന്നത്; $\sin 40^\circ$ എന്നെഴുതും.

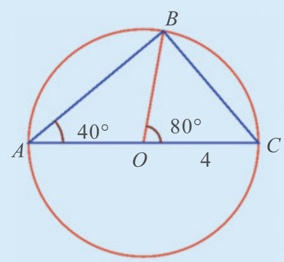
പഴയ രീതി

ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണവും, ഒരു കോണും അറിയാമെങ്കിൽ, ടോളമിയുടെ ഞാൺപട്ടിക ഉപയോഗിച്ച്, ലംബവശങ്ങളുടെ നീളം കണ്ടുപിടിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി, കർണം 8 ഉം ഒരു കോൺ 40° ഉം ആയ ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം കണ്ടുപിടിക്കണമെന്നു കരുതുക. ഹിപ്പാർക്കസും, ടോളമിയും ചെയ്യുന്നത്, ഇത്തരം ഒരു ത്രികോണം ഒരു വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ സങ്കൽപിക്കുകയാണ്:



ഇതിന്റെ മട്ടമൂലയിലേക്ക് ആരം വരച്ചാൽ ഇങ്ങനെ ഒരു ചിത്രം കിട്ടും.



ഇനി പട്ടിക ഉപയോഗിച്ച്, ആരം 1 ആയ വൃത്തത്തിലെ 80° കേന്ദ്രകോൺ ഉണ്ടാക്കുന്ന ഞാണിന്റെ നീളം കണ്ടുപിടിക്കണം. ഇതിനെ 4 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ, ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളമായി; മറ്റേ വശത്തിന്റെ നീളം പൈഥാഗറസ് സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കാം.

71HHYE

രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ 0.766 എന്നത് 40° കോണിന്റെ രണ്ടാമത്തെ വശത്തെ (ഇതിനെ ഈ കോണിന്റെ സമീപവശം എന്നാണ് പറയുന്നത്) കർണത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണെന്നു കാണിക്കുന്ന സംഖ്യയാണ്. ഇതിനെ 40° യുടെ കോസൈൻ (cosine of 40°) എന്നു പറയുകയും, $\cos 40^\circ$ എന്നു ചുരുക്കിയെഴുതുകയും ചെയ്യും.

അതായത്,

$$\sin 40^\circ \approx 0.6428$$

$$\cos 40^\circ \approx 0.7660$$

കോൺ	sin	cos
35°	0.5736	0.8192
36°	0.5878	0.8090
37°	0.6018	0.7986
38°	0.6157	0.7880
39°	0.6293	0.7771
40°	0.6428	0.7660

ഇങ്ങനെ 1° ഇടവിട്ടുള്ള കോണുകളുടെയെല്ലാം സൈനും കോസൈനും പട്ടികപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്. അതിന്റെ ചെറിയൊരുഭാഗമാണ് പട്ടികയിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്:

(മുഴുവൻ പട്ടിക പാഠഭാഗത്തിന്റെ അവസാനം ചേർത്തിട്ടുണ്ട്)

ഈ പട്ടികയിൽനിന്ന്

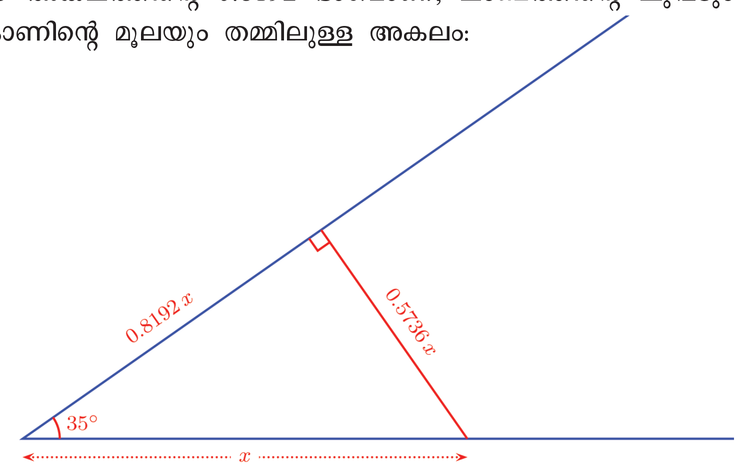
$$\sin 35^\circ \approx 0.5736$$

$$\cos 35^\circ \approx 0.8192$$

എന്നെല്ലാം കാണാം.

ഈ സംഖ്യകളെ മറ്റൊരുതരത്തിൽ വിശദീകരിക്കാം:

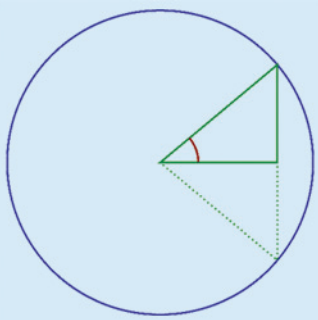
35° വലുപ്പമുള്ള ഒരു കോണിന്റെ ഒരു വശത്തിലെ ഏതെങ്കിലുമൊരു ബിന്ദുവിൽനിന്ന് മറ്റേ വശത്തേയ്ക്ക് ലംബം വരയ്ക്കുന്നുവെന്നു കരുതുക. കോണിന്റെ മൂലയിൽനിന്ന് ഈ ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലത്തിന്റെ 0.5736 ഭാഗമാണ് ലംബത്തിന്റെ നീളം; ഈ അകലത്തിന്റെ 0.8192 ഭാഗമാണ്, ലംബത്തിന്റെ ചുവടും കോണിന്റെ മൂലയും തമ്മിലുള്ള അകലം:



40° കോണാണെങ്കിൽ ഈ നീളങ്ങൾ നേരത്തെ കണ്ടതുപോലെ, 0.6428 ഭാഗവും, 0.766 ഭാഗവുമായിരിക്കും.

അര ഞാൺ

ടോളമിയുടെ പട്ടികയുപയോഗിച്ച്, ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു കോണിനെതിരെയുള്ള വശം കണ്ടുപിടിക്കാൻ കോണിനെ ഇരട്ടിപ്പിക്കുകയും, ഞാണിനെ പകുതിയാക്കുകയും വേണം. ഇതൊഴിവാക്കാൻ, ഓരോ കോണും, അതിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങായ കോണിന്റെ പകുതി ഞാണും, ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന പട്ടിക ഉണ്ടാക്കിയാൽ മതി.



ഏ.ഡി. അഞ്ചാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ഭാരതത്തിൽ രചിക്കപ്പെട്ട *സൂര്യസിദ്ധാന്തം* എന്ന ജ്യോതിശ്ശാസ്ത്ര ഗ്രന്ഥത്തിൽ ഇത്തരം ഒരു പട്ടിക കാണാം. ഇക്കാലത്തുതന്നെ ഭാരതത്തിലെ പ്രസിദ്ധ ജ്യോതിശ്ശാസ്ത്രജ്ഞനായ ആര്യഭടൻ രചിച്ച *ആര്യഭടീയം* എന്ന ഗ്രന്ഥത്തിലും ഇത്തരം പട്ടികകൾ ഉപയോഗിച്ചുള്ള ക്രിയകൾ കാണാം. ഈ കോണളവിനെ അദ്ദേഹം *അർധജ്യാ* എന്നാണ് വിളിക്കുന്നത്. ഞാണിന്, സംസ്കൃതത്തിൽ *ജ്യാ* എന്നാണ് പറയുന്നത് എന്ന് ഒമ്പതാം ക്ലാസ്സിലെ '**വൃത്തങ്ങൾ**' എന്ന പാഠത്തിലെ **ഞാണും ചരടും** എന്ന ഭാഗത്ത് പറഞ്ഞിട്ടുണ്ടല്ലോ?

ഇങ്ങനെ നോക്കുമ്പോൾ, സൈനും കോസൈനും കോണുകളുടെ വലുപ്പത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യകളാണെന്നു കാണാം.

രണ്ടുതരം മട്ടത്രികോണങ്ങളെക്കുറിച്ച് ആദ്യം കണ്ട കാര്യങ്ങൾ ഇനി സൈനും കോസൈനുമായി എഴുതാം:

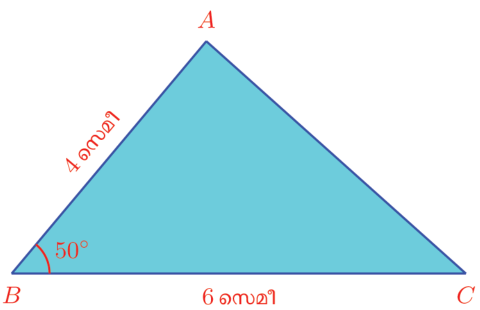
726T12

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

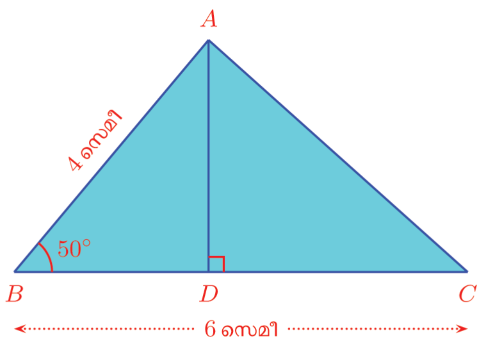
$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \qquad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

സൈനും കോസൈനും ഉപയോഗിച്ചുള്ള ചില കണക്കുകൾ നോക്കാം.

ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കണം:



അതിന് A യിൽ നിന്നും BC യിലേക്ക് ലംബം വരയ്ക്കാം:



ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

$$\frac{1}{2} \times BC \times AD = \frac{1}{2} \times 6 \times AD = 3 \times AD$$

ഇതിൽ AD എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

ചിത്രത്തിലെ ABD എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽനിന്ന്

$$AD = AB \times \sin 50^\circ = 4 \sin 50^\circ$$

ഇനി പട്ടികയിൽനിന്ന്

പേരു വന്ന വഴി

ആര്യഭടൻ, കോണിന്റെ *അർധജ്യാ* എന്നു വിളിച്ചിരുന്ന അളവു തന്നെയാണ് ഇന്നു sin എന്ന പേരിൽ ഉപയോഗിക്കപ്പെടുന്നത്. ഈ പേരു വന്നതിന്റെ കഥ ഇങ്ങനെയാണ്.

ആര്യഭടൻ തന്നെ പിൽക്കാലത്ത്, *അർധ* എന്ന വിശേഷണം ഉപേക്ഷിച്ച്, *ജ്യാ* എന്നു മാത്രമാണ് ഉപയോഗിക്കുന്നത്. ഏ.ഡി ഏഴാം നൂറ്റാണ്ടുമുതലുള്ള കാലത്ത്, അറബ് രാജ്യങ്ങളിലെ ഭരണാധികാരികൾ, ഗ്രീസിലേയും ഭാരതത്തിലേയും പ്രധാന ശാസ്ത്രഗ്രന്ഥങ്ങളെല്ലാം അറബിഭാഷയിലേക്ക് പരിഭാഷപ്പെടുത്തുന്നത് പ്രോത്സാഹിപ്പിച്ചിരുന്നു. *ആര്യഭടീയം* വിവർത്തനം ചെയ്തവർ, *ജ്യാ* എന്ന പദം വലിയ മാറ്റമൊന്നും വരുത്താതെ *ജിബ* എന്നുപയോഗിച്ചു. പ്രാചീന അറബ് ഗ്രന്ഥങ്ങളിൽ സ്വരചിഹ്നങ്ങൾ എഴുതാറില്ലാത്തതിനാൽ, ഇത് എഴുതുന്നത് *ജ്ബ്* എന്നു മാത്രമായിരുന്നു.

പിൽക്കാലത്ത്, ഏ.ഡി. പതിമൂന്നാം നൂറ്റാണ്ടോടെ, ഈ അറബ് ഗ്രന്ഥങ്ങളെല്ലാം യൂറോപ്പിലെത്തുകയും, ലാറ്റിനിലേക്ക് വിവർത്തനം ചെയ്യപ്പെടുകയുമുണ്ടായി. *ജ്ബ്* എന്ന് അറബിയിൽ എഴുതിയിരുന്നത്, *ജൈബ്* എന്ന വാക്കാണെന്ന് അവർ തെറ്റിദ്ധരിച്ചു. ഈ വാക്കിന് അറബിയിൽ, വളവ്, മടക്ക് എന്നെല്ലാമാണ് അർത്ഥം. ഈ അർത്ഥം വരുന്ന ലാറ്റിൻ വാക്കായ sinus എന്നു പരിഭാഷപ്പെടുത്തി. കാലക്രമത്തിൽ, ഇതു ലോപിച്ച് sine എന്നു മാത്രമായി.

കോടിജ്യാ എന്നു ആര്യഭടൻ വിളിച്ചിരുന്ന അളവ് cosine എന്നുമായി.

സൈൻ, കോസൈൻ അളവുകൾ

ജിയോജിബ്രയിൽ, നീളം 1 ആയി AB എന്ന വര വരയ്ക്കുക. ഒരു Angle സ്ലൈഡർ α ഉണ്ടാക്കുക. Angle with Given Size ഉപയോഗിച്ച് B, A ഇവയിൽ ക്രമമായി ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ കോണളവായി α എന്ന് കൊടുക്കുക. പുതിയ ഒരു ബിന്ദു B′ കിട്ടും. AB′ യോജിപ്പിക്കുക. B യിലൂടെ AB′ ന് ലംബം വരച്ച് അത് AB′ മായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു C അടയാളപ്പെടുത്തുക. ത്രികോണം ABC വരച്ചതിനു ശേഷം AB′ മറച്ചുവയ്ക്കാം. ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം അടയാളപ്പെടുത്തുക. കോണളവ് മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് വശങ്ങളുടെ നീളം മാറുന്നത് കാണാമല്ലോ. ഇതിൽ BC യുടെ നീളം കോണളവിന്റെ sin അളവും AC യുടെ നീളം cos അളവുമാണ് (എന്തുകൊണ്ട്?) ഇതുപയോഗിച്ച് sine, cosine അളവുകളുടെ ഒരു പട്ടിക ഉണ്ടാക്കുക. sine, cosine സംഖ്യകൾ പരമാവധി എത്രവരെയാകാം?

കോണുകളുടെ സൈൻ, കൊസൈൻ വിലകൾ കാണാൻ ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിക്കാം. Input Bar ൽ sin (30°) എന്നു കൊടുത്താൽ sin 30° കിട്ടും. ഇതുപോലെ കോസൈൻ സംഖ്യകളും കാണാം. (30° എന്നത് ലഭിക്കാൻ 30 എന്നു ടൈപ്പു ചെയ്തശേഷം Input Bar ന്റെ വലത്തെ അറ്റത്തുള്ള α ചിഹ്നത്തിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്ത് ° എന്നതിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്താൽ മതി)

$\sin 50^\circ \approx 0.7660$

എന്നു കിട്ടും. അപ്പോൾ

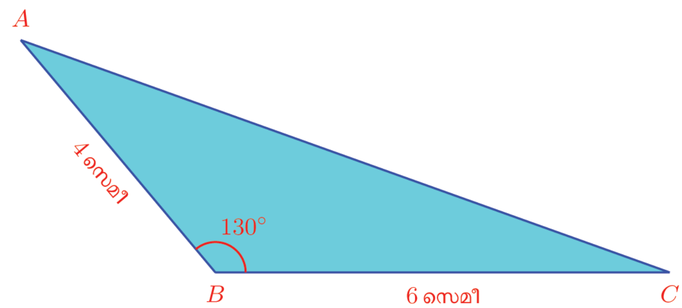
$AD \approx 4 \times 0.7660 = 3.064$

ഇനി പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ

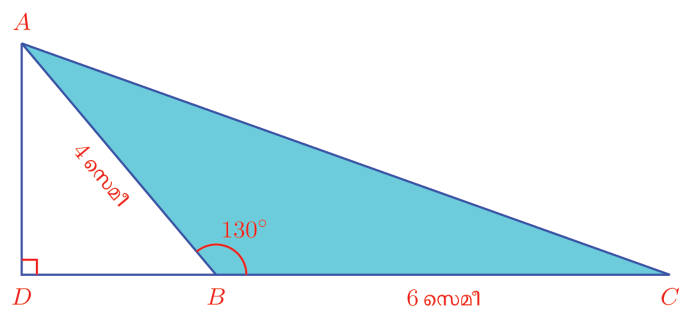
$$3 \times AD = 3 \times 3.064 \approx 9.19$$

അതായത്, പരപ്പളവ് ഏകദേശം 9.19 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

ഈ കണക്കിൽ, B യിലെ കോൺ 50° ക്കുപകരം 130° ആക്കിയാലോ?

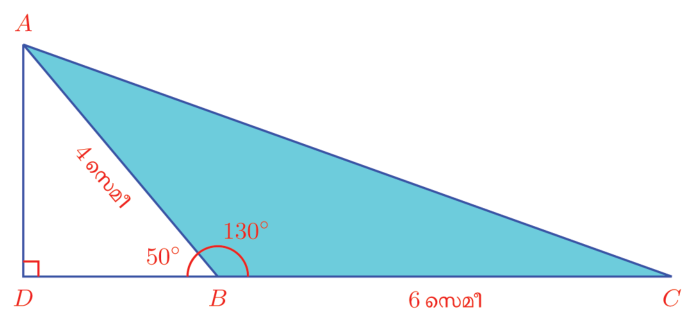


ഇതിൽ A യിൽനിന്ന് BC യിലേക്കുള്ള ലംബം, ത്രികോണത്തിന്റെ പുറത്താണ്.



ഈ ലംബത്തിന്റെ ഉയരം എങ്ങനെ കണക്കാക്കും?

ADB എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിലെ $\angle ABD = 50^\circ$ ആണല്ലോ.

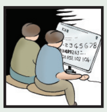


അപ്പോൾ ആദ്യത്തെ കണക്കിലെപ്പോലെ

$$AD = AB \sin 50^\circ = 4 \times 0.766 = 3.064$$

എന്നുതന്നെ കിട്ടും. പരപ്പളവും പഴയതുതന്നെ.

പടം വരയ്ക്കാതെ പട്ടിക നോക്കാതെ $\sin 1^\circ$, $\cos 1^\circ$, $\sin 2^\circ$, $\cos 2^\circ$ എന്നീ സംഖ്യകളെ വലുപ്പക്രമത്തിൽ എഴുതുക.



(1) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം 8 സെന്റിമീറ്റർ, 10 സെന്റിമീറ്റർ. അവയ്ക്കിടയിലെ കോൺ 40°. ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക. ഇതേ വശങ്ങളും അവയ്ക്കിടയിലെ കോൺ 140° യും ആയ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

(2) ഒരു സമഭുജസാമാന്തരികത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം 5 സെന്റിമീറ്ററും, അതിലെ ഒരു കോൺ 100° യുമാണ്. അതിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

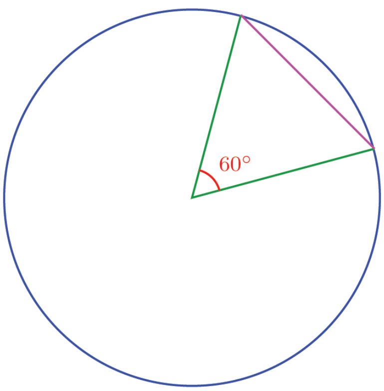
(3) ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം 8 സെന്റിമീറ്ററും 12 സെന്റിമീറ്ററും ആണ്. ഇവയ്ക്കിടയിലെ കോൺ 50° യും. അതിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

(4) 5 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു വരയുടെ ഒരറ്റത്ത് 50° കോണും, മറ്റേ അറ്റത്ത് 65° കോണും വരച്ച് ഒരു ത്രികോണമുണ്ടാക്കി. അതിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

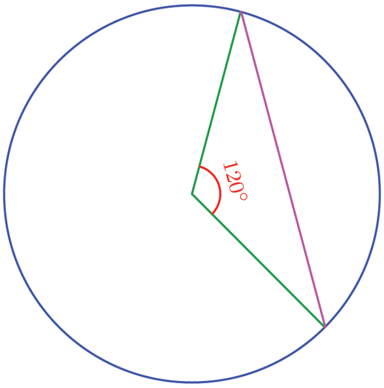
(5) ഒരു വശം 8 സെന്റിമീറ്ററും അതിലെ ഒരു കോൺ 40° യും ആയി ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കണം. 40° കോണിനെതിരെയുള്ള വശത്തിന്റെ നീളം ചുരുങ്ങിയത് എത്ര സെന്റിമീറ്റർ ആകണം?

ത്രികോണവും വൃത്തവും

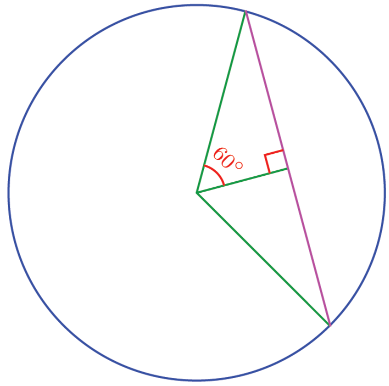
വൃത്തത്തിലെ ഒരു ചാപത്തിന്റെ നീളം കേന്ദ്രകോൺ ഉപയോഗിച്ചു കണക്കാക്കാം. ഞാണിന്റെ നീളമോ? ഉദാഹരണമായി ഒരു വൃത്തത്തിൽ കേന്ദ്രകോൺ 60° ആയ ഞാണിന്റെ നീളം, ആരത്തിനു തുല്യമാണെന്ന് എളുപ്പം കാണാം:



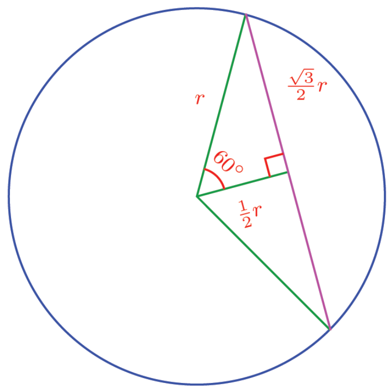
കേന്ദ്രകോൺ 120° ആയ ഞാണിന്റെ നീളമോ?



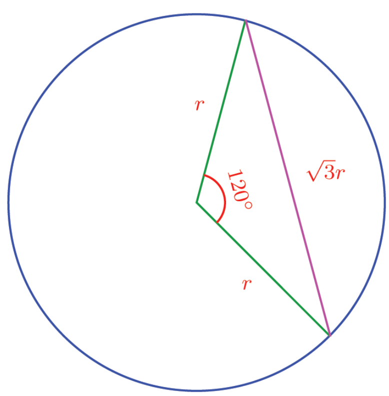
ഇതു കണക്കാക്കാൻ, കേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് ഞാണിലേക്ക് ലംബം വരയ്ക്കണം; അത് ഞാണിനെയും, കേന്ദ്രകോണിനെയും സമഭാഗം ചെയ്യുമല്ലോ (കാരണം?)



ആരവും അര ഞാണും ലംബവും ചേർന്നുണ്ടാക്കുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ 30°, 60° , 90°. അപ്പോൾ ആരത്തിന്റെ നീളം r എന്നെടുത്താൽ, ലംബത്തിന്റെ നീളം $\frac{1}{2}\ r$ എന്നും, അര ഞാണിന്റെ നീളം $\frac{\sqrt{3}}{2}r$ എന്നും കാണാം:

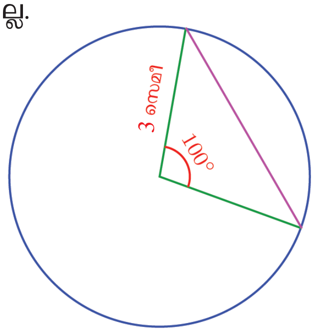


അപ്പോൾ കേന്ദ്രകോൺ 120° ആയ ഞാണിന്റെ നീളം, ആരത്തിന്റെ $\sqrt{3}$ മടങ്ങാണ്:

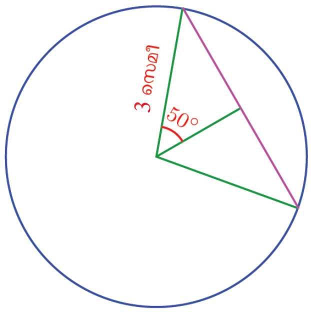


കേന്ദ്രകോൺ ഇരട്ടിക്കുമ്പോൾ ചാപം ഇരട്ടിക്കുമെന്ന് പഠിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ. പക്ഷേ ഞാൺ ഇരട്ടിക്കുന്നില്ല എന്നതു ശ്രദ്ധിക്കുക. അതായത്, കേന്ദ്രകോണും, ഞാണും മാറുന്നത് ഒരേ തോതിലല്ല.

ഈ ചിത്രത്തിലെ ഞാണിന്റെ നീളം കണക്കാക്കുന്നതെങ്ങനെ?



നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ, വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് ഞാണിലേക്കു ലംബം വരച്ച് കേന്ദ്രകോണിനെയും ഞാണിനെയും പകുതിയാക്കാം.



മുകളിലെ മട്ടത്രികോണത്തിൽ കർണത്തിന്റെ $\sin 50^\circ$ ഭാഗമാണല്ലോ എതിർവശം. പട്ടികയിൽനിന്ന്

$$\sin 50^\circ \approx 0.7660$$

അപ്പോൾ ഞാണിന്റെ പകുതി, $3 \times 0.766 = 2.298$ സെ.മീ.

എന്നു കാണാം; മുഴുവൻ ഞാണിന്റെ നീളം

$$2 \times 2.298 = 4.596 \approx 4.6 \text{ സെ.മീ.}$$

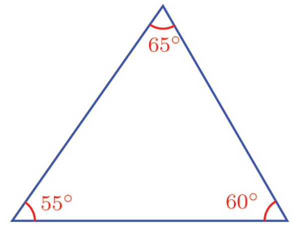
ഏതു ഞാണിന്റെയും നീളം കേന്ദ്രകോണിൽനിന്നു കണ്ടുപിടിക്കാൻ ഈ രീതി ഉപയോഗിക്കാം. ഞാണിന്റെ നീളം കണ്ടുപിടിക്കാൻ എന്തെല്ലാമാണു ചെയ്തത്?

കേന്ദ്രകോണിന്റെ പകുതിയുടെ സൈനിനെ ആരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചപ്പോൾ ഞാണിന്റെ പകുതി കിട്ടി. അതിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങെടുത്തപ്പോൾ മുഴുവൻ ഞാണും കിട്ടി.

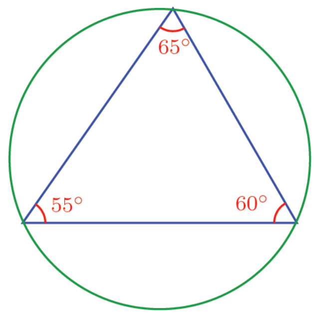
ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഏതു ഞാണിന്റെയും നീളം കേന്ദ്രകോണിന്റെ പകുതിയുടെ സൈനിനെ ആരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണ്

മറ്റൊരു രീതിയിൽപ്പറഞ്ഞാൽ, വൃത്തത്തിലെ ഒരു ഞാണിന്റെ നീളം അതിന്റെ കേന്ദ്രകോണിന്റെ പകുതിയുടെ സൈനിനെ വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം കൊണ്ട് ഗുണിച്ചതാണ്.

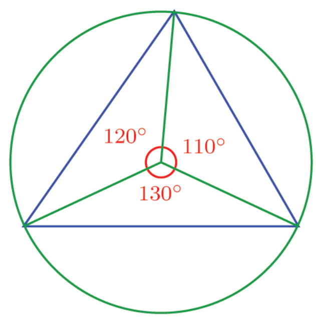
ഇക്കാര്യം ഉപയോഗിച്ച് ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകളിൽനിന്ന് വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം കണക്കാക്കാം. ഉദാഹരണമായി, ഈ ത്രികോണം നോക്കൂ:



ത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തം വരച്ചാൽ, വശങ്ങളെല്ലാം വൃത്തത്തിന്റെ ഞാണുകളാവുമല്ലോ.

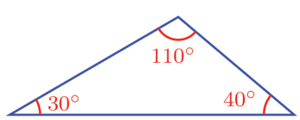


ഓരോ ചാപത്തിന്റെയും കേന്ദ്രകോൺ, ത്രികോണത്തിൽ അതിനെതിരെയുള്ള കോണിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങുമാണ് (**വൃത്തങ്ങൾ** എന്ന പാഠം ഓർക്കുക).

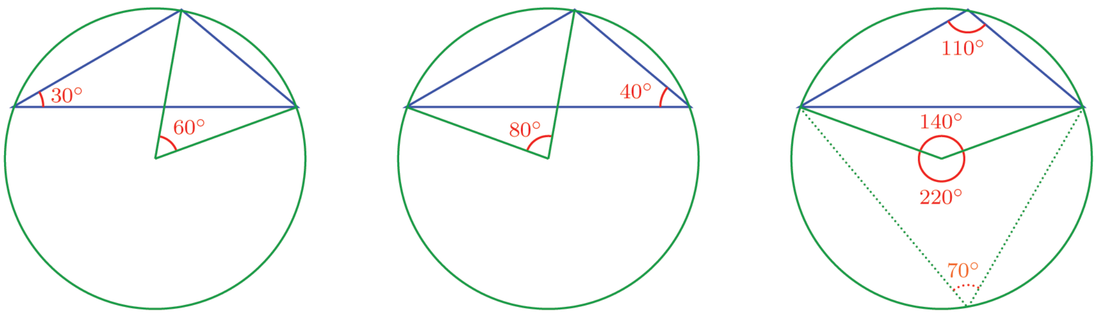


അപ്പോൾ, പരിവൃത്ത ആരം r എന്നെടുത്താൽ, ഞാണുകളുടെ നീളം $2r \sin 55^\circ$, $2r \sin 60^\circ$, $2r \sin 65^\circ$; ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം $\sin 55^\circ : \sin 60^\circ : \sin 65^\circ$. സൈൻ പട്ടികയിൽനിന്ന് ഇവ കണ്ടുപിടിക്കുകയുമാവാം. ഇതിൽ 55°, 60°, 65° എന്നത് ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ തന്നെയാണെന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക.

ത്രികോണം ഇങ്ങനെയായാലോ?



പരിവൃത്തവും, ഞാണുകളായ വശങ്ങളുടെ കേന്ദ്രകോണുകളും ഇങ്ങനെയാകും.

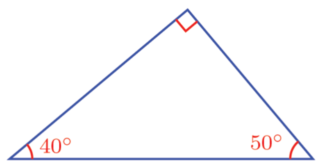


(**വൃത്തങ്ങൾ** എന്ന പാഠം ഒന്നുകൂടി ഓർക്കുക)

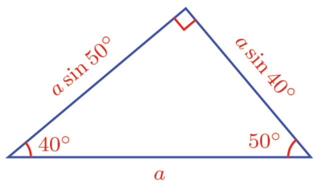
അപ്പോൾ ആദ്യത്തെ കണക്കിലെപ്പോലെ പരിവൃത്ത ആരം r എന്നെടുത്താൽ, ഞാണുകളുടെ, അതായത് ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം $2r \sin 30°$, $2r \sin 40°$, $2r \sin 70°$ എന്നിങ്ങനെയാകും; അംശബന്ധം $\sin 30° : \sin 40° : \sin 70°$

ഇതിൽ $30°$, $40°$ എന്നിവ ത്രികോണത്തിലെ രണ്ടു കോണുകളും $70°$ എന്നത്, മൂന്നാമത്തെ കോണായ $110°$ യുടെ അനുപൂരകകോണും ആണെന്നു ശ്രദ്ധിക്കുക.

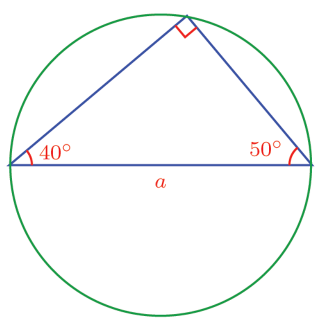
ഇനി മട്ടത്രികോണമായാലോ?



ഇതിന്റെ കർണത്തിന്റെ നീളം a എന്നെടുത്താൽ, മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം കണക്കാക്കാമല്ലോ.



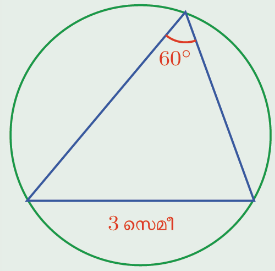
പരിവൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസവും a തന്നെ എന്നും കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ:



ഇവിടെ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം $1 : \sin 40° : \sin 50°$ എന്നതും ശ്രദ്ധിക്കുക.

(1) ഒരു ത്രികോണവും അതിന്റെ പരിവൃത്തവുമാണ് ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്:

വൃത്തത്തിന്റെ ആരം എത്ര സെന്റിമീറ്ററാണ്?

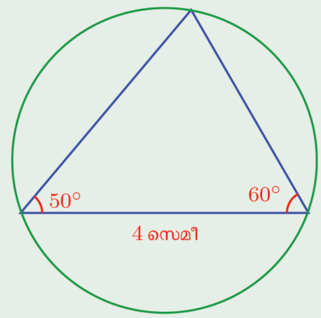


(2) വശങ്ങളുടെ നീളം 8 സെന്റിമീറ്ററായ സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്ത ആരം എത്ര സെന്റിമീറ്ററാണ്?

(3) ചിത്രത്തിൽ ഒരു ത്രികോണവും അതിന്റെ പരിവൃത്തവും കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

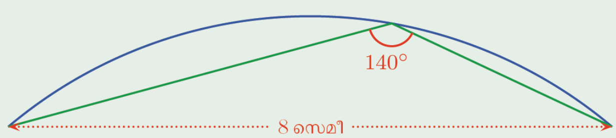
(i) വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം കണക്കാക്കുക.

(ii) ത്രികോണത്തിന്റെ മറ്റു വശങ്ങളുടെ നീളം കണക്കാക്കുക.



(4) 5 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു വരയുടെ അറ്റങ്ങളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കണം. വരയുടെ ഒരു വശത്തുള്ള വൃത്തഭാഗത്തിലെ കോൺ 80° ആയിരിക്കുകയും വേണം. വൃത്തത്തിന്റെ ആരം എത്രയായെടുക്കണം?

(5) ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ഭാഗമാണ് ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.



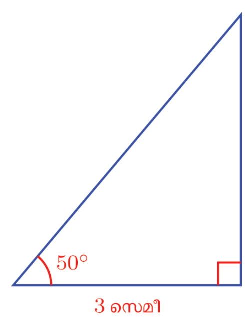
വൃത്തത്തിന്റെ ആരം എത്ര സെന്റിമീറ്ററാണ്?

(6) ഒരു സമപഞ്ചഭുജത്തിന്റെ മൂലകളെല്ലാം 15 സെന്റിമീറ്റർ ആരമായ വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കളാണ്. ആ സമപഞ്ചഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം കണക്കാക്കുക.

മറ്റൊരളവ്

ഒരു മട്ടത്രികോണം വരയ്ക്കണം. ചെറുവശങ്ങളിലൊന്നിന്റെ നീളം 3 സെന്റിമീറ്റർ. അതിന്മേലുള്ള ഒരു കോൺ 50°.

വരയ്ക്കാൻ വിഷമമില്ല, അല്ലേ? ഇതിന്റെ രണ്ടാം ചെറുവശത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ്?

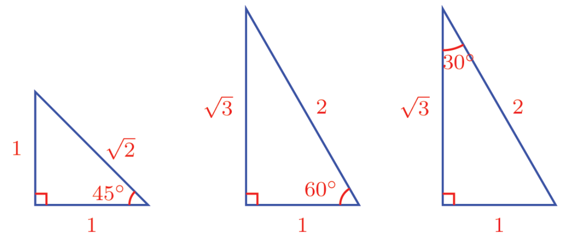


പട്ടികനോക്കി cos 50º കണ്ടുപിടിച്ചാൽ, കർണം കണ്ടുപിടിക്കാം, തുടർന്ന് കർണത്തെ sin 50º കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് മൂന്നാം വശവും കണ്ടുപിടിക്കാം.

കുറച്ചുകൂടി എളുപ്പത്തിൽ ഇതു ചെയ്യാൻ മറ്റൊരു പട്ടിക ഉപയോഗിക്കാം. മട്ടത്രികോണങ്ങളിൽ, ഒരു കോണിന്റെ എതിർവശത്തെ സമീപവശം കൊണ്ടു ഹരിച്ചുകിട്ടുന്ന സംഖ്യകളുടെ പട്ടിക.

ഈ സംഖ്യയെ കോണിന്റെ ടാൻജെന്റ് (tangent) എന്നാണ് പറയുന്നത്. ചുരുക്കി tan എന്നാണ് എഴുതുന്നത്.

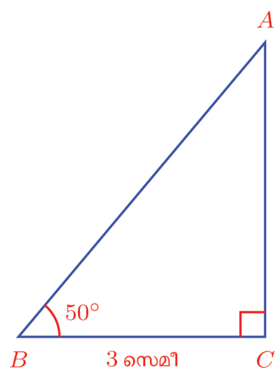
ഉദാഹരണമായി നാം നേരത്തെ കണ്ട ചില ത്രികോണങ്ങൾ നോക്കാം.



tan 45º = 1 $\qquad$ tan 60º = $\sqrt{3}$ $\qquad$ tan 30º = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

മറ്റൊരു തരത്തിൽപ്പറഞ്ഞാൽ മട്ടത്രികോണത്തിലെ ഒരു ചെറുകോണിന്റെ എതിർവശം, സമീപവശത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗമോ, മടങ്ങോ ആണെന്നു കാണിക്കുന്ന സംഖ്യയാണ് കോണിന്റെ ടാൻ.

നമ്മുടെ പ്രശ്നത്തിലേക്കു മടങ്ങാം:



ഇപ്പോൾ പറഞ്ഞതനുസരിച്ച്,

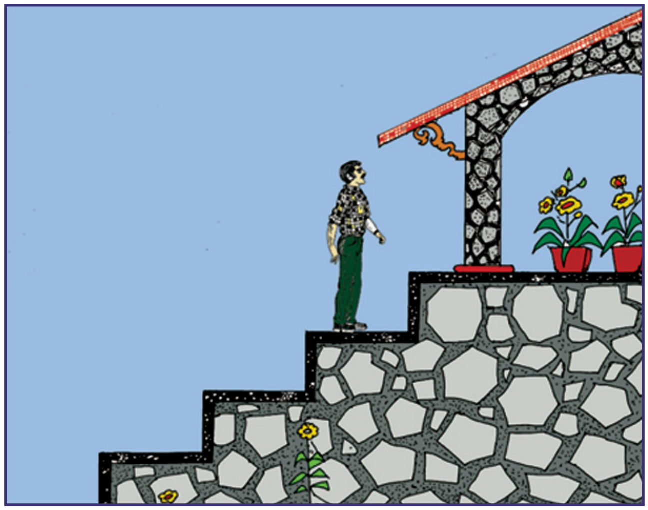
$$AC = BC \times \tan 50^\circ$$

ഇനി പടവും പട്ടികയും ഉപയോഗിച്ച് AC കണക്കാക്കാം.

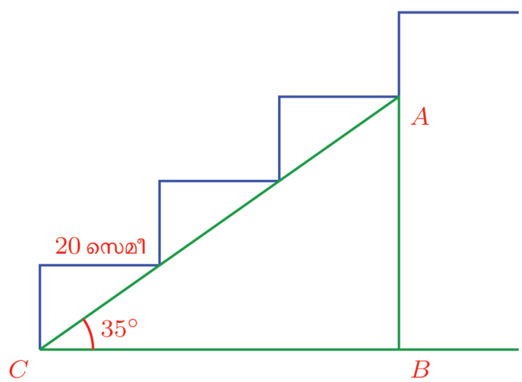
$$AC = 3 \times 1.1918 = 3.5754 \approx 3.6 \text{ സെ.മീ.}$$

കോണിന്റെ tan അളവുപയോഗിക്കുന്ന ഒരു സന്ദർഭം നോക്കൂ.

ചിത്രത്തിലെ ആൾ നിൽക്കുന്നത്, എത്ര ഉയരത്തിലാണെന്നു കണ്ടുപിടിക്കണം.



പടിക്കെട്ടിന്റെ അളവുകൾ ഇങ്ങനെയാണ്.



കണ്ടുപിടിക്കേണ്ട ഉയരം AB യാണല്ലോ.

ചിത്രത്തിൽ നിന്ന്

$$AB = BC \times \tan 35^\circ$$

ഇതിൽ

$$\tan 35^\circ \approx 0.7002$$

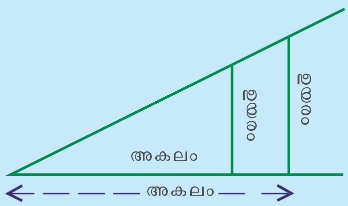
എന്ന് പട്ടികയിൽനിന്നു കിട്ടും. BC യുടെ നീളമോ?

ഈ ചിത്രത്തിൽ നിന്നു BC യുടെ നീളം 60 സെന്റിമീറ്ററാണെന്നു കാണാം:

ചരിവിന്റെ അളവ്

വൃത്തത്തെ 360 സമഭാഗങ്ങളാക്കി കോണളക്കുന്നത് പ്രാചീന ബാബിലോണിയക്കാരുടെ രീതിയാണ്. അതിന് വാനശാസ്ത്രവുമായാണ് ബന്ധം. ഏതാണ്ട് ബി.സി മൂന്നാം നൂറ്റാണ്ടുമുതൽ ബാബിലോണിയയിൽ ഈ രീതി ഉപയോഗിച്ചിരുന്നതായി കാണാം. ഇതാണ് ഇന്നത്തെ ഡിഗ്രി അളവ്.

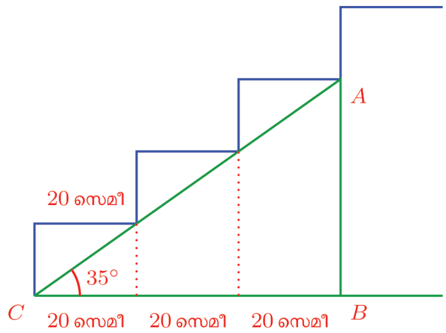
എന്നാൽ ഭൂമിയിലെ നിർമാണങ്ങളിൽ, ചരിവളക്കാൻ മറ്റൊരു രീതിയാണ് ഉപയോഗിച്ചിരുന്നത്. ഈ ചിത്രം നോക്കുക:



ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ, കോണിന്റെ വ്യത്യസ്ത സ്ഥാനങ്ങളിൽ അകലവും ഉയരവും മാറുമെങ്കിലും, ഉയരത്തെ അകലംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ, ഒരേ സംഖ്യതന്നെ കിട്ടുമല്ലോ. (കാരണം?) ഓരോ കോണിനും, അതിന്റെ വലുപ്പമനുസരിച്ച്, ഈ സംഖ്യ മാറുകയും ചെയ്യും. ഈ സംഖ്യയെയാണ്, ചരിവിന്റെ അളവായി എടുത്തിരുന്നത്.

പുരാതന ഈജിപ്റ്റിലെ ആഹ്മോസ് പപ്പൈറസിൽ ഇത്തരം ചില കണക്കുകൂട്ടലുകൾ കാണാം. സമചതുരസ്തൂപികകളിൽ, പാദവും ഒരു മുഖവും തമ്മിലുള്ള ചരിവാണ് ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കിയിരിക്കുന്നത്.

പുരാതന ബാബിലോണിയായിലെ ഒരു കളിമൺ പലകയിൽ, പലപല മട്ടത്രികോണങ്ങളിൽ, കർണത്തെ മറ്റൊരു വശംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽകിട്ടുന്ന സംഖ്യകൾ പട്ടികപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നതും കാണാം.



അപ്പോൾ

$AB = BC \times \tan 35^\circ \approx 60 \times 0.7002 \approx 42.01$

അതായത്, ഉയരം ഏകദേശം 42 സെന്റിമീറ്ററാണ്.

മറ്റളവുകൾ

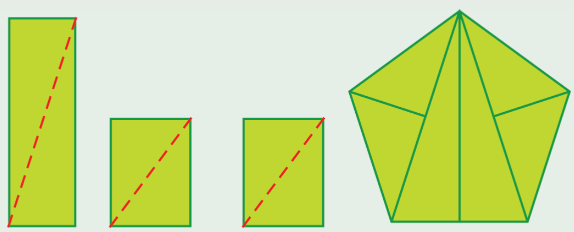
ഒരു കോൺ ഉൾപ്പെടുന്ന മട്ടത്രികോണം വരച്ച്, അതിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം തമ്മിൽ പല രീതികളിൽ ഹരിച്ചു sin, cos, tan എന്നീ അളവുകൾ ഉണ്ടാക്കുന്നതു കണ്ടു. വശങ്ങൾ തമ്മിൽ വേറെയും ഹരണം ബാക്കിയുണ്ടല്ലോ. അവയ്ക്കും ത്രികോണമിതിയിൽ പേരുകളുണ്ട്.

ഒരു കോണിന്റെ sin, cos എന്നിവയുടെ വ്യുൽക്രമങ്ങൾക്ക്, കോസീക്കന്റ് (cosecant), സീക്കന്റ് (secant) എന്നിങ്ങനെയാണ് പേരുകൾ; tan ന്റെ വ്യുൽക്രമത്തിന്, കോടാൻജെന്റ് (cotangent) എന്നും. ഇവയെ ചുരുക്കി, cosec, sec, cot എന്നിങ്ങനെയാണ് എഴുതുന്നത്.

(1) ഒരു സമഭുജസാമാന്തരികത്തിന്റെ ഒരു കോൺ 50° ആണ്; വലിയ വികർണം 5 സെന്റിമീറ്ററും. അതിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

(2) മതിലിന്മേൽ ഒരു ഏണി ചാരി വച്ചിരിക്കുന്നു. ഏണിയുടെ ചുവട് മതിലിൽ നിന്ന് 2 മീറ്റർ അകലെയാണ്. ഏണിയും തറയുമായുള്ള കോൺ 40° യും. ഏണിയുടെ മുകളറ്റം, തറയിൽ നിന്ന് എത്ര ഉയരത്തിലാണ്?

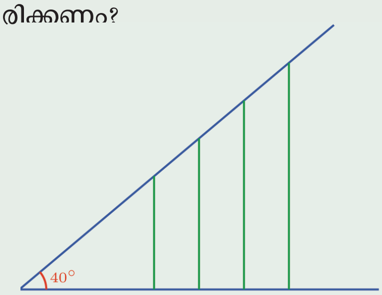
(3) മൂന്നു ചതുരങ്ങൾ വികർണത്തിലൂടെ മുറിച്ചു ത്രികോണങ്ങളാക്കി, ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ ചേർത്തുവച്ച്, ഒരു സമപഞ്ചഭുജമുണ്ടാക്കണം.



പഞ്ചഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം 30 സെന്റിമീറ്റർ ആകണമെങ്കിൽ, ചതുരങ്ങളുടെ നീളവും വീതിയും എത്രയായിരിക്കണം?

(4) ചിത്രത്തിലെ കുത്തനെയുള്ള വരകൾ ഒരേ അകലം ഇടവിട്ടാണ് വരച്ചിരിക്കുന്നത്.

അവയുടെ ഉയരങ്ങൾ സമാന്തരശ്രേണിയിലാണെന്നു തെളിയിക്കുക. പൊതുവ്യത്യാസം എത്രയാണ്?



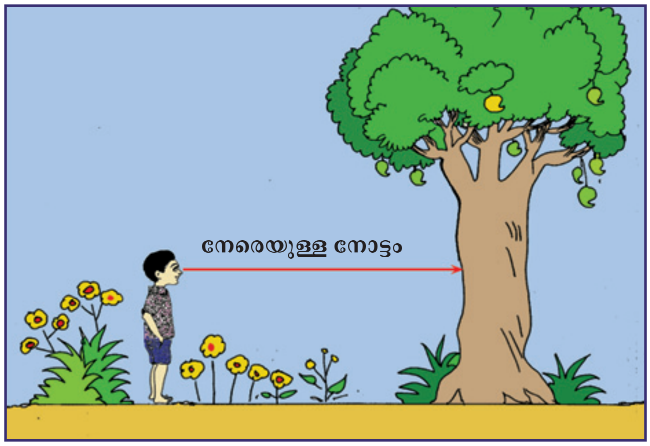
(5) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശം 6 സെന്റിമീറ്ററും അതിലെ രണ്ടു കോണുകൾ 40° യും 65° യും ആണ്. ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

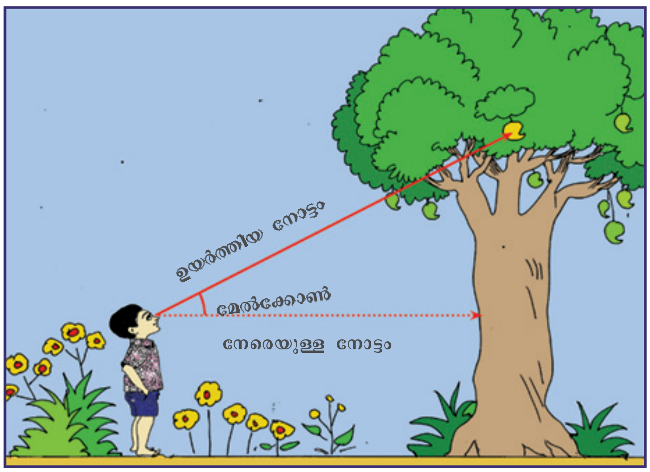
അകലങ്ങളും ഉയരങ്ങളും

നമ്മേക്കാൾ ഉയരത്തിലുള്ളവ കാണാൻ, തല അൽപം ഉയർത്തണമല്ലോ. ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ.

ടാൻ അളവുകൾ

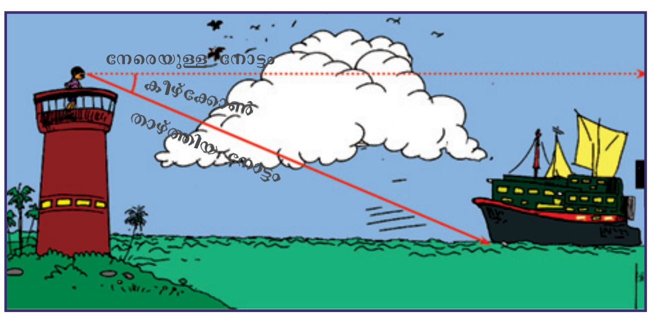
സൈൻ, കോസൈൻ പോലെ ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് ടാൻ കാണുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് നോക്കാം. നീളം 1 ആയി AB എന്ന വരയും B യിലൂടെ AB യ്ക്ക് ലംബവും വരയ്ക്കുക. ഒരു Angle Slider α ഉണ്ടാക്കുക. Angle with Given Size ഉപയോഗിച്ച് B, A ഇവയിൽ ക്രമമായി ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ കോണളവായി α എന്നു കൊടുക്കുക. പുതിയ ഒരു ബിന്ദു B' ലഭിക്കും. A, B' ഇവയിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വര വരച്ച് അത് B യിൽ വരച്ച ലംബവുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു C അടയാളപ്പെടുത്തുക. ABC എന്ന ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. ഇനി ആവശ്യമില്ലാത്ത വരകളും ബിന്ദുക്കളും മറച്ച് വയ്ക്കാം. BC യുടെ നീളം അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇത് $\angle A$ യുടെ ടാൻ അളവാണ് (എന്തുകൊണ്ട്?) ടാൻ അളവ് എത്രവരെയാകാം?





സാധാരണയായി നമ്മുടെ നോട്ടത്തിന്റെ പാത നിലത്തിനു സമാന്തരമാണ്, ഉയരത്തിലുള്ളവയെ നോക്കുമ്പോൾ, ഇത് മേൽപ്പോട്ടുയരും. ഈ രണ്ടു വരകൾ തമ്മിലുള്ള കോണിനെ മേൽക്കോൺ (angle of elevation) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഇതുപോലെ ഉയരത്തിൽ നിൽക്കുമ്പോൾ താഴെയുള്ളവയെ കാണാൻ, നോട്ടം താഴ്ത്തേണ്ടിവരുമല്ലോ.



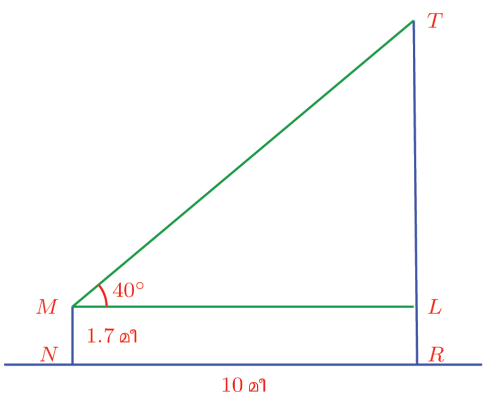
ഇങ്ങനെയുണ്ടാകുന്ന കോണിനെ കീഴ്ക്കോൺ (angle of depression) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഇത്തരം കോണുകൾ അളക്കുന്നത് ക്ലൈനോമീറ്റർ (clinometer) എന്ന ഉപകരണം ഉപയോഗിച്ചാണ്. നേരിട്ടളക്കാൻ കഴിയാത്ത അകലങ്ങളും ഉയരങ്ങളുമെല്ലാം ക്ലൈനോമീറ്ററുപയോഗിച്ചു കോണളന്നും, സൈനും കോസും ടാനും ഉപയോഗിച്ചു കണക്കുകൂട്ടിയുമാണ് കണ്ടുപിടിക്കുന്നത്.

ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ നോക്കാം.

> ഒരു മരത്തിന്റെ ചുവട്ടിൽ നിന്ന് 10 മീറ്റർ അകലെ നിൽക്കുന്ന ഒരാൾ, മരത്തിന്റെ മുകളറ്റം 40° മേൽക്കോണിൽ കാണുന്നു. അയാളുടെ ഉയരം, 1.7 മീറ്ററാണ്. മരത്തിന് എന്തു പൊക്കമുണ്ട്?

ചിത്രത്തിൽ MN എന്ന വര നോക്കുന്ന ആളിനേയും, TR മരത്തിനേയുമാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.



ചിത്രത്തിൽ നിന്ന് (പട്ടികയും ഉപയോഗിച്ച്),

$$TL = ML \tan 40^\circ \approx 10 \times 0.8391 = 8.391$$

എന്നു കാണാം. അപ്പോൾ

$$TR = TL + LR = TL + MN \approx 8.391 + 1.7 = 10.091$$

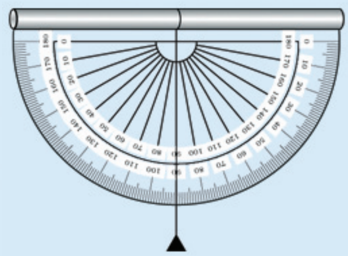
അതായത്, മരത്തിന്റെ ഉയരം ഏകദേശം 10.09 മീറ്ററാണ്.

മറ്റൊരു കണക്ക്:

> 1.8 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരാൾ 25 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരു ലൈറ്റ് ഹൗസിന്റെ മുകളിൽനിന്ന് നോക്കിയപ്പോൾ, 35° കീഴ്ക്കോണിൽ ഒരു കപ്പൽ കണ്ടു. അത് ലൈറ്റ്ഹൗസിന്റെ ചുവട്ടിൽനിന്ന് എത്ര അകലെയാണ്?

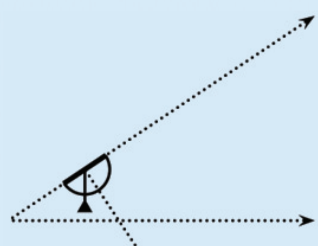
ക്ലൈനോമീറ്റർ

മേൽക്കോണും കീഴ്ക്കോണും അളക്കാനുള്ള ക്ലൈനോമീറ്റർ എന്ന ഉപകരണത്തിന്റെ ഒരു ലഘുരൂപം നമുക്കും ഉണ്ടാക്കാം.

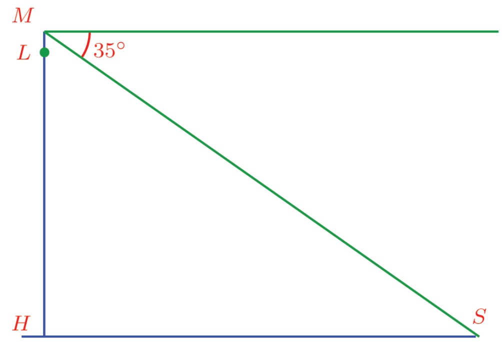


ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ ഒരു കോൺമാപിനിയുടെ നേർഭാഗത്ത് ഒരു കുഴൽ ഉറപ്പിക്കുക. ഇതിൽനിന്ന്, കോൺമാപിനിയുടെ നടുക്കുകൂടി വലിഞ്ഞു കിടക്കുന്നതരത്തിൽ, അറ്റത്ത് ഒരു ചെറിയ ഭാരം തൂക്കിയ ചരട് കെട്ടിയിടുക.

ഒരു മരത്തിന്റെയോ കെട്ടിടത്തിന്റെയോ മുകളറ്റം, കുഴലിലൂടെ നോക്കാൻ കോൺമാപിനി ചരിച്ചുയർത്തണം. താഴത്തെ ഭാരം കാരണം, ചരട് അപ്പോഴും തറയ്ക്കു ലംബമായിരിക്കും. ചരടിനും കോൺ മാപിനിയിലെ 90° വരയ്ക്കും ഇടയിലുള്ള കോണാണ്, ഈ നോട്ടത്തിന്റെ മേൽക്കോൺ.



ഒരു ചിത്രം വരയ്ക്കാം:



ഇതിൽ LH ലൈറ്റ്ഹൗസും, ML അതിനു മുകളിൽ നിൽക്കുന്നയാളുമാണ് S ആണു കപ്പൽ.

കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത് HS

പറഞ്ഞിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളനുസരിച്ച്

$$MH = ML + LH = 25 + 1.8 = 26.8$$

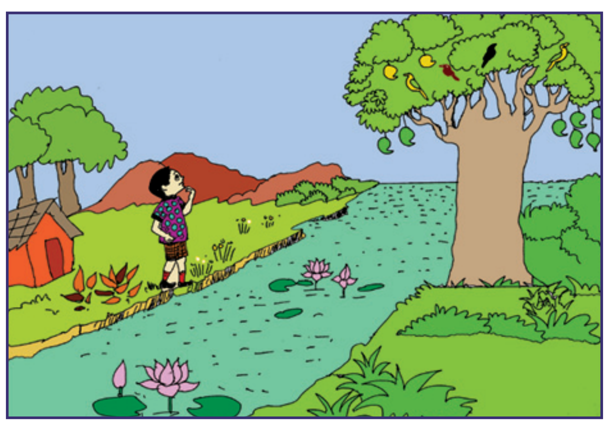
കൂടാതെ $\angle HMS = 55^\circ$

അപ്പോൾ MHS എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽ നിന്ന്

$$HS = MH \tan 55^\circ \approx 26.8 \times 1.4281 \approx 38.27$$

അതായത്, ലൈറ്റ്ഹൗസിന്റെ ചുവട്ടിൽനിന്ന് ഏകദേശം 38.27 മീറ്റർ അകലെയാണ് കപ്പൽ.

ഒരു കണക്കുകൂടി: ഒരു തോടിനരികത്ത് നിൽക്കുന്ന ഒരു കുട്ടി, അക്കരയോടു ചേർന്നു നിൽക്കുന്ന ഒരു മരത്തിന്റെ മുകളറ്റം 70° മേൽക്കോണിൽ കണ്ടു. 10 മീറ്റർ പുറകോട്ടു മാറി നോക്കിയപ്പോൾ, അത് 25° മേൽക്കോണിലാണ് കണ്ടത്. കുട്ടിയുടെ ഉയരം 1.5 മീറ്റർ. തോടിന്റെ വീതിയും, മരത്തിന്റെ ഉയരവും കണക്കാക്കണം.



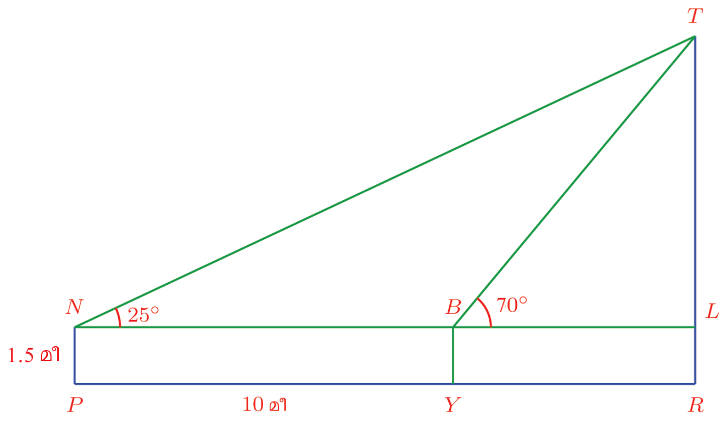
ചരിവും വിരിവും

കോണുകളെ വിരിവിന്റെ അളവുകളായി കാണുന്ന ആവശ്യങ്ങളിൽ നിന്നാണ് sin, cos എന്നീ അളവുകളുണ്ടായതെന്ന് കണ്ടല്ലോ. ചരിവിന്റെ അളവായി കോണിനെ കാണുന്ന രീതിയെ ഇതുമായി ബന്ധപ്പെടുത്തുമ്പോഴാണ് tan ഉണ്ടാകുന്നത്. (ഉയരത്തെ അകലം കൊണ്ടു ഹരിച്ചു ചരിവളക്കുന്ന പഴയ രീതി തന്നെയാണല്ലോ അതിന്റെ നിർവചനം)

ഏ.ഡി. ഒമ്പതാംനൂറ്റാണ്ടിലെ അഹമ്മദ് ഇബിൻ അബ്ദുള്ള അൽ മൊർവാസി എന്ന അറബ് ഗണിതകാരനാണ് ഇത്തരമൊരു ബന്ധം അവതരിപ്പിച്ചതും, tan ന്റെ ഒരു പട്ടിക ഉണ്ടാക്കിയതും.

ഇതിന് tangent എന്ന പേരു വന്നത് പതിനാറാം നൂറ്റാണ്ടിലാണ്.

ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ TR മരം, BY കുട്ടി ആദ്യം നിന്ന സ്ഥാനം, NP കുട്ടിയുടെ പുതിയ സ്ഥാനം.



കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത്, YR ഉം, TR ഉം. ചിത്രത്തിൽനിന്ന്

$$YR = BL \qquad TR = TL + LR = TL + 1.5$$

ആയതിനാൽ, BL ഉം, TL ഉം കണ്ടുപിടിച്ചാൽ മതി.

$$BL = x \qquad TL = y$$

എന്നെടുത്താൽ BTL എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽ നിന്ന്

$$y = x \tan 70^\circ \approx 2.7475x$$

എന്നും, NTL എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽ നിന്ന്

$$y = (x + 10) \tan 25^\circ \approx 0.4663\,(x + 10) = 0.4663x + 4.663$$

എന്നും കിട്ടും. അപ്പോൾ

$$2.7475x \approx 0.4663x + 4.663$$

എന്നാകുമല്ലോ. ഇതിൽനിന്ന്

$$x \approx \frac{4.663}{2.2812} \approx 2.044$$

എന്ന് (കാൽക്കുലേറ്റർ ഉപയോഗിച്ച്) കണ്ടുപിടിക്കാം. ഇതുപയോഗിച്ച്

$$y \approx 2.7475 \times 2.044 \approx 5.616$$

എന്നും കാണാം അതായത്, തോടിന്റെ വീതി ഏകദേശം 2.04 മീറ്ററും, മരത്തിന്റെ ഉയരം ഏകദേശം 5.62 + 1.5 = 7.12 മീറ്ററുമാണ്.

(1) സൂര്യൻ 40° മേൽക്കോണിൽ കാണപ്പെടുമ്പോൾ, ഒരു മരത്തിന്റെ നിഴലിന്റെ നീളം 18 മീറ്ററാണ്. മരത്തിന്റെ ഉയരം എത്രയാണ്?

(2) സൂര്യൻ 35° മേൽക്കോണിൽ കാണപ്പെടുമ്പോൾ ഒരു മരത്തിന്റെ നിഴലിന്റെ നീളം 10 മീറ്ററാണ്. സൂര്യൻ 25° മേൽക്കോണിൽ കാണപ്പെടുമ്പോൾ അതേ മരത്തിന്റെ നിഴലിന്റെ നീളം എത്രയായിരിക്കും?

(3) ഒരു വൈദ്യുതിത്തൂണിന്റെ മുകളറ്റത്തു നിന്ന് രണ്ട് ഇരുമ്പ് കമ്പികൾ ഇരുദിശകളിലേക്കും തറയിൽ വലിച്ച് കെട്ടിയിരിക്കുന്നു. കമ്പികളുടെ ചുവടുകൾ തറയുമായുണ്ടാക്കുന്ന കോണുകൾ 55° യും 40° യുമാണ്. കൂടാതെ കമ്പികളുടെ ചുവടുകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം 25 മീറ്ററും. തൂണിന്റെ ഉയരമെത്രയാണ്?

(4) പണിതുകൊണ്ടിരിക്കുന്ന ഒരു കെട്ടിടത്തിന്റെ മുകൾഭാഗം, 1.5 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരു കുട്ടി 30° മേൽക്കോണിൽ കണ്ടു. 10 മീറ്റർകൂടി ഉയർത്തി, കെട്ടിടം പണിതീർത്തപ്പോൾ, അയാൾ അതേ സ്ഥാനത്തു നിന്ന് 60° മേൽക്കോണിലാണ് മുകൾഭാഗം കണ്ടത്. കെട്ടിടത്തിന്റെ ഉയരം എത്രയാണ്?

(5) ഒരു ഗോപുരത്തിന്റെ ചുവട്ടിൽ നിൽക്കുന്ന 1.75 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരാൾ, 40 മീറ്റർ അകലെയുള്ള ഒരു കുന്നിന്റെ മുകളറ്റം 60° മേൽക്കോണിൽ കണ്ടു. ഗോപുരത്തിന്റെ മുകളിൽ നിന്നും നോക്കിയപ്പോൾ, അത് 50° മേൽക്കോണിലാണ് കണ്ടത്. കുന്നിന്റെയും, ഗോപുരത്തിന്റേയും ഉയരം കണക്കാക്കുക.

(6) 1.8 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരാൾ, ഒരു ടെലിഫോൺ ടവറിന്റെ മുകളിൽ നിന്നു നോക്കുമ്പോൾ, 10 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരു കെട്ടിടത്തിന്റെ മുകളറ്റം 40° കീഴ്ക്കോണിലും അതിന്റെ ചുവട് 60° കീഴ്ക്കോണിലും കണ്ടു. ടവറിന്റെ ഉയരം എത്രയാണ്? അത് കെട്ടിടത്തിൽ നിന്ന് എത്ര അകലെയാണ്?

ഗവേഷണം

- സമബഹുഭുജങ്ങളുടെ ചുറ്റളവിനും പരപ്പളവിനും പരിവൃത്ത ആരവുമായുള്ള ബന്ധം കണക്കാക്കുക.
- sin ഉപയോഗിച്ച് π യോട് അടുത്തടുത്തുവരുന്ന ഒരു ശ്രേണി കണ്ടുപിടിക്കുക.

ഭൂമാപനം

പത്തൊമ്പതാം നൂറ്റാണ്ടിന്റെ തുടക്കത്തിൽ ഭാരതത്തിന്റെ ഭൂമാപനം നടത്താനുള്ള ഒരു പദ്ധതി ബ്രിട്ടീഷ് ഭരണാധികാരികൾ തയാറാക്കി. ത്രികോണമിതീയ ബൃഹത് ഭൂമാപനം (The Great Trigonometric Survey) എന്ന പേരിൽ അറിയപ്പെടുന്ന ഇത് ആയിരക്കണക്കിന് ആളുകളുടെ സഹായത്തോടെ, നൂറോളം വർഷങ്ങൾകൊണ്ടാണ് പൂർത്തിയായത്.

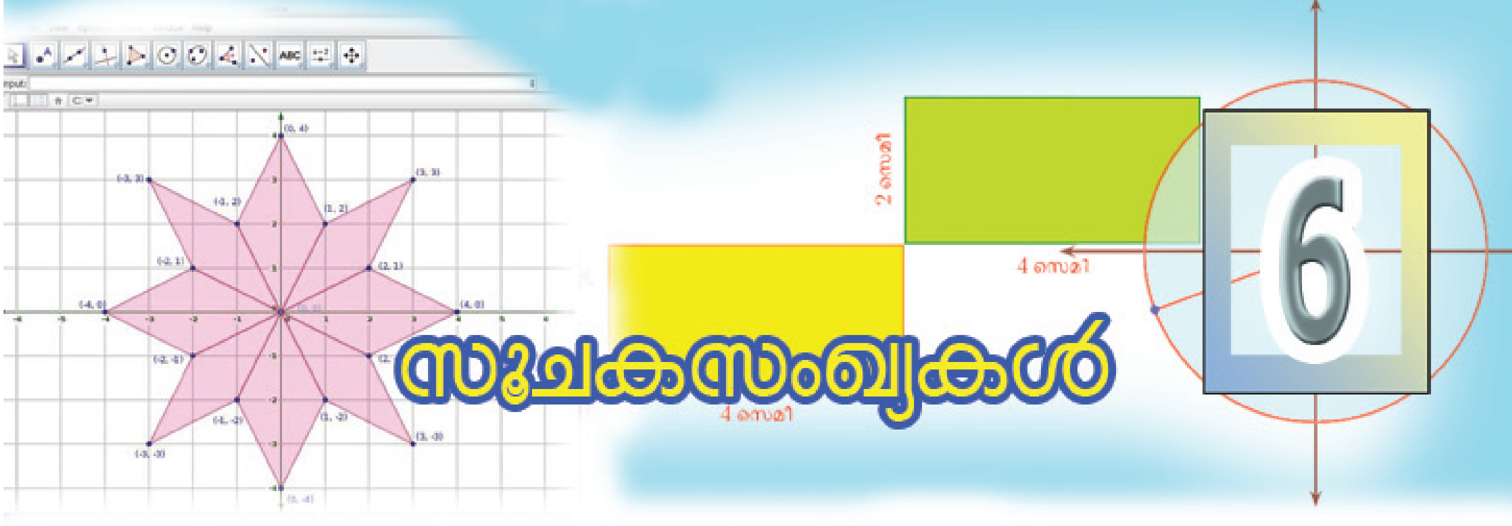
1831-ൽ ഈ പദ്ധതിയിലെ ഗണിതവിഭാഗം കൈകാര്യം ചെയ്യാൻ നിയമിച്ചത്, കൊൽക്കത്തയിലെ രാധാനാഥ് സിക്ദർ എന്ന പതിനെട്ടു വയസ്സുള്ള വിദ്യാർഥിയെ ആയിരുന്നു.

കോണുകളുടെ അളവുകളിൽനിന്ന് ത്രികോണമിതി ഉപയോഗിച്ചാണ് ഉയരങ്ങളും അകലങ്ങളും സിക്ദർ കണക്കു കൂട്ടിയിരുന്നത്. ഇവ വളരെ ദൂരെയാകുമ്പോൾ ഭൂമിയുടെ വളവും, പ്രകാശരശ്മികളുടെ ഭ്രംശവുമെല്ലാം ഉണ്ടാക്കുന്ന വ്യത്യാസങ്ങളും കണക്കിലെടുത്തിരുന്നു. താപം ഒരു ഡിഗ്രി മാറുമ്പോൾ, നീളമളക്കാൻ ഉപയോഗിച്ചിരുന്ന നൂറടി ലോഹച്ചങ്ങലയിൽ 0.007 ഇഞ്ച് വ്യത്യാസമുണ്ടാകുന്നു എന്നു പോലും പരീക്ഷണങ്ങളിലൂടെ കണക്കാക്കിയിരുന്നു.

പാഠപുസ്തകങ്ങളിൽ നിന്ന് പ്രായോഗിക ഗണിതത്തിലേക്ക് പെട്ടെന്നുള്ള മാറ്റമാണ് സിക്ദറിന്റെ ജീവിതകഥ. വിദ്യാലയത്തിൽ പഠിച്ച കണക്കും ഭൗതികശാസ്ത്രവും എല്ലാം തൊഴിലിൽ ഭംഗിയായി ഉപയോഗിച്ചു എന്നതാണ് അദ്ദേഹത്തിന്റെ വിജയം.

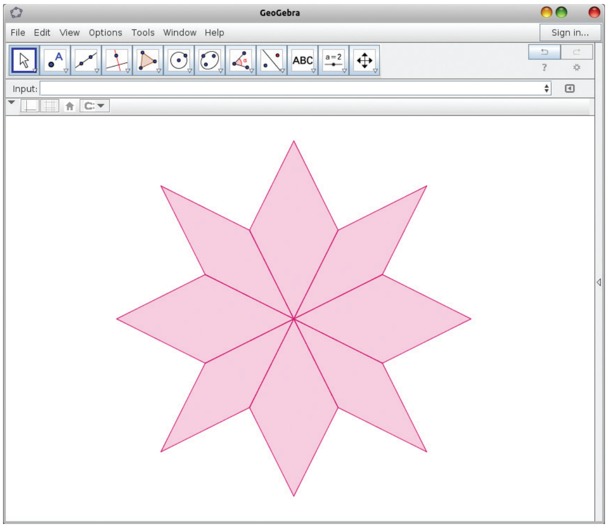
ത്രികോണമിതി അളവുകൾ

കോൺ	sin	cos	tan	കോൺ	sin	cos	tan
0°	0.0000	1.0000	0.0000	46°	0.7193	0.6947	1.0355
1°	0.0175	0.9998	0.0175	47°	0.7314	0.6820	1.0724
2°	0.0349	0.9994	0.0349	48°	0.7431	0.6891	1.1106
3°	0.0523	0.9986	0.0524	49°	0.7547	0.6561	1.1504
4°	0.0698	0.9976	0.0699	50°	0.7660	0.6428	1.1918
5°	0.0872	0.9962	0.0875	51°	0.7771	0.6293	1.2349
6°	0.1045	0.9945	0.1051	52°	0.7880	0.6157	1.2799
7°	0.1219	0.9925	0.1228	53°	0.7986	0.6018	1.3270
8°	0.1392	0.9903	0.1405	54°	0.8090	0.5878	1.3764
9°	0.1564	0.9877	0.1584	55°	0.8192	0.5736	1.4281
10°	0.1736	0.9848	0.1763	56°	0.8290	0.5592	1.4826
11°	0.1908	0.9816	0.1944	57°	0.8387	0.5446	1.5399
12°	0.2079	0.9781	0.2126	58°	0.8480	0.5299	1.6003
13°	0.2250	0.9744	0.2309	59°	0.8572	0.5150	1.6643
14°	0.2419	0.9703	0.2493	60°	0.8660	0.5000	1.7321
15°	0.2588	0.9659	0.2679	61°	0.8746	0.4848	1.8040
16°	0.2756	0.9613	0.2867	62°	0.8829	0.4695	1.8807
17°	0.2924	0.9563	0.3057	63°	0.8910	0.4540	1.9626
18°	0.3090	0.9511	0.3249	64°	0.8988	0.4384	2.0503
19°	0.3256	0.9455	0.3443	65°	0.9063	0.4226	2.1445
20°	0.3420	0.9397	0.3640	66°	0.9135	0.4067	2.2460
21°	0.3584	0.9336	0.3839	67°	0.9205	0.3907	2.3559
22°	0.3746	0.9272	0.4040	68°	0.9272	0.3746	2.4751
23°	0.3907	0.9205	0.4245	69°	0.9336	0.3584	2.6051
24°	0.4067	0.9135	0.4452	70°	0.9397	0.3420	2.7475
25°	0.4226	0.9063	0.4663	71°	0.9455	0.3256	2.9042
26°	0.4384	0.8988	0.4877	72°	0.9511	0.3090	3.0777
27°	0.4540	0.8910	0.5095	73°	0.9563	0.2924	3.2709
28°	0.4695	0.8829	0.5317	74°	0.9613	0.2756	3.4874
29°	0.4848	0.8746	0.5543	75°	0.9659	0.2588	3.7321
30°	0.5000	0.8660	0.5774	76°	0.9703	0.2419	4.0108
31°	0.5150	0.8572	0.6009	77°	0.9744	0.2250	4.3315
32°	0.5299	0.8480	0.6249	78°	0.9781	0.2079	4.7046
33°	0.5446	0.8387	0.6494	79°	0.9816	0.1908	5.1446
34°	0.5592	0.8290	0.6745	80°	0.9848	0.1736	5.6713
35°	0.5736	0.8192	0.7002	81°	0.9877	0.1564	6.3138
36°	0.5878	0.8090	0.7265	82°	0.9903	0.1392	7.1154
37°	0.6018	0.7986	0.7536	83°	0.9925	0.1219	8.1443
38°	0.6157	0.7880	0.7813	84°	0.9945	0.1045	9.5144
39°	0.6293	0.7771	0.8098	85°	0.9962	0.0872	11.4301
40°	0.6428	0.7660	0.8391	86°	0.9976	0.0698	14.3007
41°	0.6561	0.7547	0.8693	87°	0.9986	0.0523	19.0811
42°	0.6691	0.7431	0.9004	88°	0.9994	0.0349	28.6363
43°	0.6820	0.7314	0.9325	89°	0.9998	0.0175	57.2900
44°	0.6947	0.7193	0.9657	90°	1.0000	0.0000	....
45°	0.7071	0.7071	1.0000				



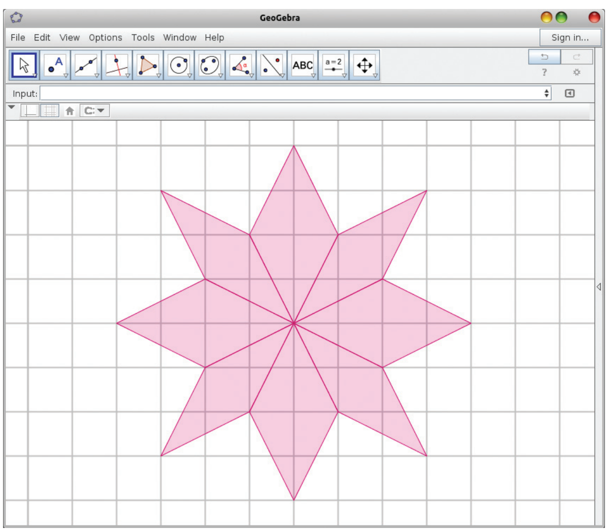
6 സൂചകസംഖ്യകൾ

ജിയോജിബ്രയിൽ വരച്ച ഒരു ചിത്രം നോക്കൂ.



എങ്ങനെയാണിതു വരച്ചത്?

വരയ്ക്കാനുപയോഗിച്ച പലതും, വരച്ചതിനുശേഷം ഒളിപ്പിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഈ ചിത്രം നോക്കൂ.



ആദ്യം സമചതുരക്കളങ്ങൾ വരച്ച്, അവയിൽ ചിലതിന്റെയെല്ലാം മൂലകൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയാണ് ഈ ചിത്രം വരച്ചത്.

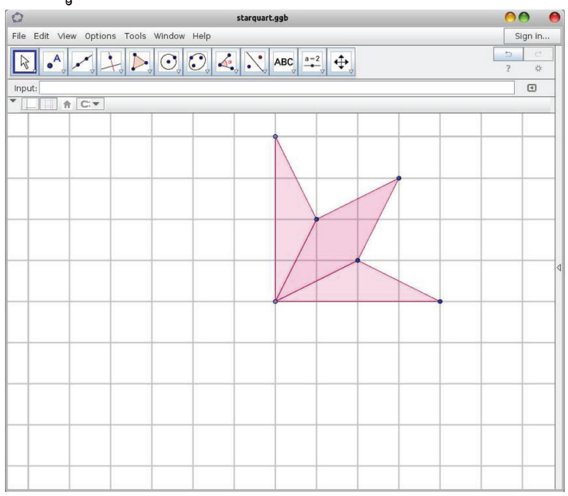
ഇങ്ങനെ ചെറുസമചതുരങ്ങളായി ഭാഗിച്ചു കാണാൻ ജിയോജിബ്രയിലെ Grid ഉപയോഗിക്കണം

ഇനി ഈ ചിത്രം വലുതാക്കി കടലാസിൽ വരയ്ക്കണമെങ്കിലോ?

ആദ്യം ഇതുപോലെ നെടുകെയും കുറുകെയും വരകൾ വരച്ചു ചെറുസമചതുരങ്ങളുണ്ടാക്കി, വേണ്ട മൂലകൾ യോജിപ്പിച്ചാൽ മതി.

ആവശ്യമുള്ള എല്ലാ മൂലകളും ഓരോന്നായി അടയാളപ്പെടുത്താതെ തന്നെ ഈ ചിത്രം വരയ്ക്കാൻ ഒരു സൂത്രപ്പണിയുണ്ട്.

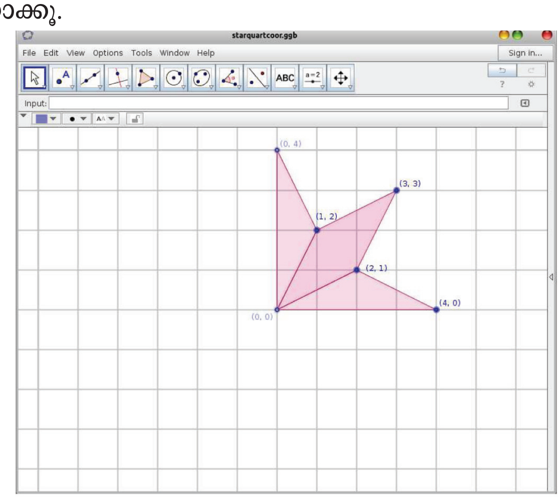
ഈ ചിത്രം നോക്കൂ.



ഈ രൂപം ഇടതും വലതും മേലും കീഴും മറിച്ചു വച്ചാൽ, ആദ്യത്തെ നക്ഷത്രമാവില്ലേ?

ഒരു ചിത്രത്തെ തിരിച്ചും മറിച്ചും വരയ്ക്കാൻ GeoGebra യിൽ Reflect ഉപയോഗിക്കാം.

ചതുരക്കളങ്ങളുടെ മൂലകൾ കൃത്യമായി അടയാളപ്പെടുത്താനും വഴിയുണ്ട്. ഈ ചിത്രം നോക്കൂ.

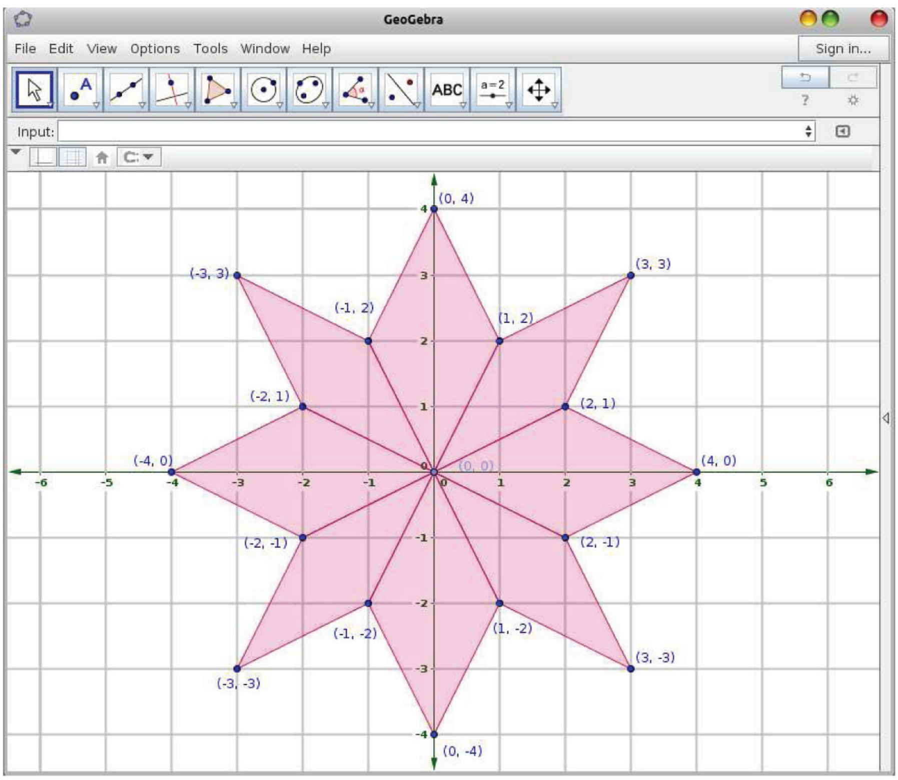


ചിത്രത്തിന്റെ മൂലകളിലെല്ലാം ഒരു ജോടി സംഖ്യകൾ കണ്ടില്ലേ? എന്താണ് ഇവയുടെ അർഥം?

ഉദാഹരണമായി (2, 1) എന്നടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന മൂല നോക്കൂ. നക്ഷത്രത്തിന്റെ നടുക്കുനിന്ന് 2 കളം വലത്തും, 1 കളം മേലോട്ടും നീങ്ങിയാണ് ഈ മൂല.

ജിയോജിബ്രയിൽ Point എടുത്ത് എവിടെയും ക്ലിക്ക് ചെയ്ത് ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്താം. കൃത്യസ്ഥാനത്ത് ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്താൻ Input Bar ൽ മേൽപ്പറഞ്ഞതുപോലെ അതിന്റെ സംഖ്യാജോടികൾ എഴുതുകയാണ് കുറേക്കൂടി നല്ല മാർഗം.

നക്ഷത്രചിത്രത്തിന്റെ എല്ലാ മൂലകൾക്കും ഇതുപോലെ സംഖ്യാജോടികളെഴുതാം:



ചിത്രത്തിന്റെ ഇടതു മുകൾഭാഗം നോക്കൂ. ഇവിടെയുള്ള സംഖ്യാജോടികളിലെല്ലാം ആദ്യത്തെ സംഖ്യ ന്യൂനമാണെന്ന് കണ്ടോ?

നടുക്കുനിന്ന് ഇടത്തോട്ടുള്ള അകലങ്ങൾ ന്യൂനസംഖ്യയായി എടുക്കുകയാണ് പതിവ്. ഇടതും വലതും സംഖ്യാപരമായി വേർതിരിച്ചുകാണാനുള്ള ഒരു രീതിയാണിത് (ഒമ്പതാംക്ലാസിലെ സംഖ്യാരേഖ ഓർക്കുക).

ഇതുപോലെതന്നെ നടുക്കുനിന്ന് താഴോട്ടുള്ള ഭാഗങ്ങളിൽ, രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ ന്യൂനമായി എടുത്തിരിക്കുന്നതും കണ്ടില്ലേ?

അപ്പോൾ ഇങ്ങനെ ബിന്ദുക്കളെ സംഖ്യാജോടികൾകൊണ്ട് അടയാളപ്പെടുത്തുമ്പോൾ ആദ്യത്തെ സംഖ്യ വലതോ ഇടതോ ഉള്ള അകലത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു; രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ, മേൽ-കീഴ് അകലങ്ങളെയാണ് കാണിക്കുന്നത്. ഇടതും കീഴും അകലങ്ങൾ ന്യൂനസംഖ്യകളായി എടുക്കുകയും വേണം.

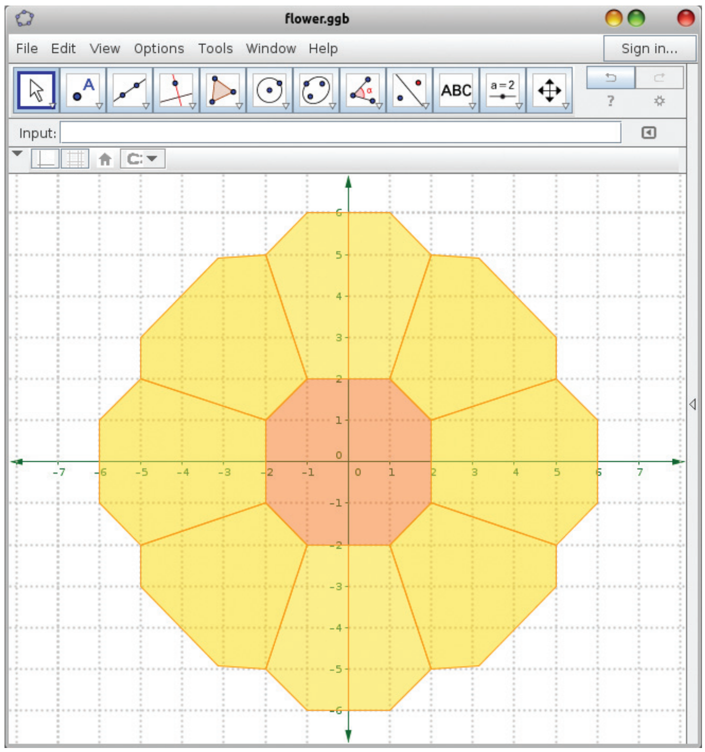
ഈ സംഖ്യകൾ എളുപ്പം കാണാൻ, ചിത്രത്തിൽ നടുക്കുനിന്ന് നെടുകെയും കുറുകെയും രണ്ടു വരകളിൽ അകലങ്ങൾ എഴുതിയിട്ടുമുണ്ട്.

ജിയോജിബ്രയിൽ ഈ വരകൾ കാണാൻ Axes ഉപയോഗിക്കണം.

ഇനി ഈ നക്ഷത്രം കടലാസിൽ പകർത്താമല്ലോ. ശ്രമിച്ചു നോക്കൂ.

ജിയോജിബ്രയിൽ വരച്ച മറ്റൊരു ചിത്രം.

72FP2P



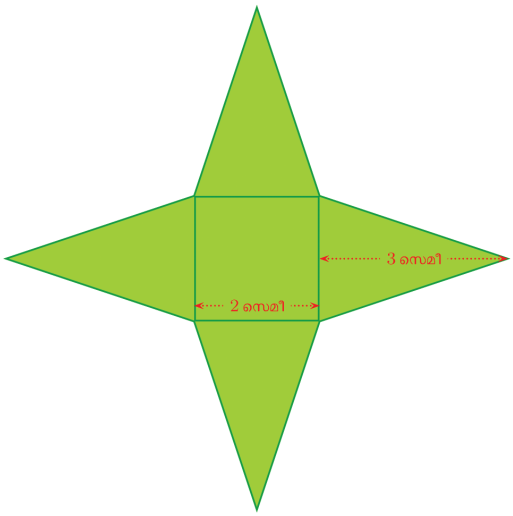
ഇതിലെ മൂലകളെയെല്ലാം ഇതുപോലെ സംഖ്യാജോടികൾകൊണ്ട് അടയാളപ്പെടുത്താമോ? എന്നിട്ടത് കടലാസിൽ വരച്ചു നോക്കൂ.

ജിയോജിബ്രയിൽ സംഖ്യാജോടികൾ ഉപയോഗിച്ച് കുത്തുകളിടാൻ Input Bar ൽ അവ ഓരോന്നായി കൊടുത്താൽ മതി. ഈ കുത്തുകൾ മൂലകളായുള്ള ബഹുഭുജം വരയ്ക്കാൻ. Polygon എന്നു കൊടുക്കണം. ഉദാഹരണമായി, Input Bar ൽ ഇങ്ങനെ നിർദ്ദേശം കൊടുത്തു നോക്കൂ

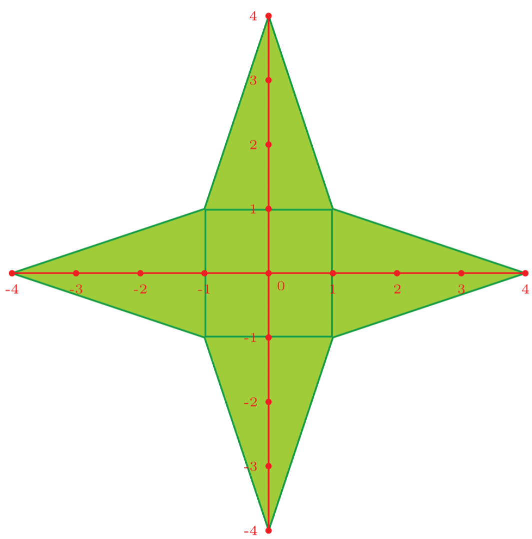
Polygon [(-1, -1), (1, -1), (1, 1), (-1, 1)]

സ്ഥാനങ്ങളും സംഖ്യകളും

ഇതുപോലൊരു രൂപം കടലാസിൽ വരയ്ക്കണം.



ആദ്യം മൂലകളെല്ലാം സംഖ്യാജോടികൾ ഉപയോഗിച്ച് അടയാളപ്പെടുത്തിയാലോ? അതിന് കളങ്ങൾ വരയ്ക്കണമെന്നില്ല. ചിത്രത്തിന്റെ നടുവിലൂടെ വിലങ്ങനെയും കുത്തനെയും രണ്ടു വരകൾ വരച്ച്, രണ്ടിലും ഒരു സെന്റിമീറ്റർ ഇടവിട്ട് അകലങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയെന്നു കരുതുക.

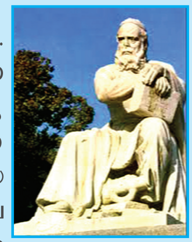


മൂലകളുടെയെല്ലാം സംഖ്യാജോടികൾ എഴുതാമോ?

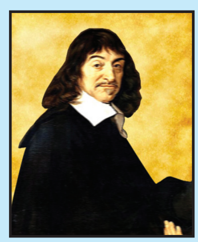
സമചതുരത്തിന്റെ വലതു മുകളിലെ മൂല, നടുക്കുനിന്ന് 1 സെന്റിമീറ്റർ വലത്തും, അവിടെനിന്ന് 1 സെന്റിമീറ്റർ മുകളിലുമാണ്. അപ്പോൾ അതിന്റെ സംഖ്യാജോടി (1, 1).

അൽപം ചരിത്രം

ബി.സി. ഇരുനൂറാമാണ്ടിൽത്തന്നെ, അപ്പൊളോണിയസ് എന്ന ഗ്രീക്ക് ഗണിതകാരൻ, ചില ജ്യാമിതീയപ്രശ്നങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം കാണാൻ ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനങ്ങളെ സംഖ്യകൾകൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കുന്ന രീതി ഉപയോഗിച്ചിട്ടുണ്ട്; നിശ്ചിത രേഖകളിൽ നിന്നുള്ള അകലങ്ങളാണ് ഇത്തരം സംഖ്യകൾ.

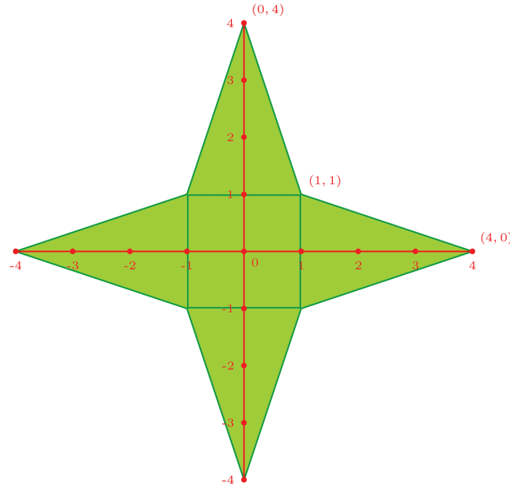


തുടർന്ന് എ.ഡി. പതിനൊന്നാം നൂറ്റാണ്ടിൽ പേർഷ്യയിലെ, ഗണിതകാരനും കവിയുമായ ഒമർ ഖയ്യാം, ചില ബീജഗണിത പ്രശ്നങ്ങളെ ജ്യാമിതീയ പ്രശ്നങ്ങളാക്കി മാറ്റാൻ, സംഖ്യാജോടികളെ ബിന്ദുക്കളാക്കി വരയ്ക്കുന്ന രീതി ഉപയോഗിച്ചിട്ടുണ്ട്.



ജ്യാമിതിയും, ബീജഗണിതവുമായുള്ള ഈ ബന്ധം ചിട്ടയായ ഒരു ഗണിതശാഖയായി വളർന്നത്, പതിനേഴാം നൂറ്റാണ്ടിൽ, ഫ്രാൻസിലെ തത്വചിന്തകനായ റെനെ ദേക്കാർത് (Rene Descartes) "ജ്യാമിതി" എന്ന പ്രബന്ധം പ്രസിദ്ധീകരിച്ചതിൽപ്പിന്നെയാണ്.

ഇനി ചിത്രത്തിന്റെ വലതറ്റമോ? നടുക്കുനിന്ന് 4 സെന്റിമീറ്റർ വലത്ത്, മേലോട്ടോ കീഴോട്ടോ നീങ്ങിയിട്ടില്ല. അപ്പോൾ അതിന്റെ സംഖ്യാജോടി (4, 0) എന്നെഴുതാം. ഏറ്റവും മുകളറ്റത്തിന്റെ കാര്യം മറിച്ചാണ്; നടുവിൽ നിന്ന് വലതോ ഇടതോ നീങ്ങാതെ, നേരെ 4 സെന്റിമീറ്റർ മുകളിൽ. അതിന്റെ സംഖ്യാജോടി (0, 4) എന്നും എഴുതാം.

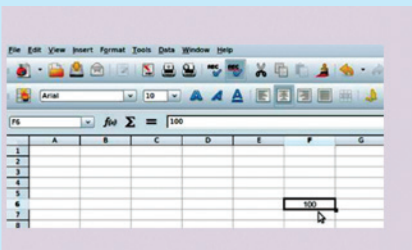


ഇതുപോലെ, മറ്റു മൂലകളുടെയും സംഖ്യാജോടികൾ എഴുതാമല്ലോ. ഇടത്തേയ്ക്കും താഴേയ്ക്കും അകലങ്ങൾ ന്യൂനസംഖ്യകളായാണ് എടുക്കുന്നത് എന്നോർക്കണം.

പട്ടികയിലെ സ്ഥാനം

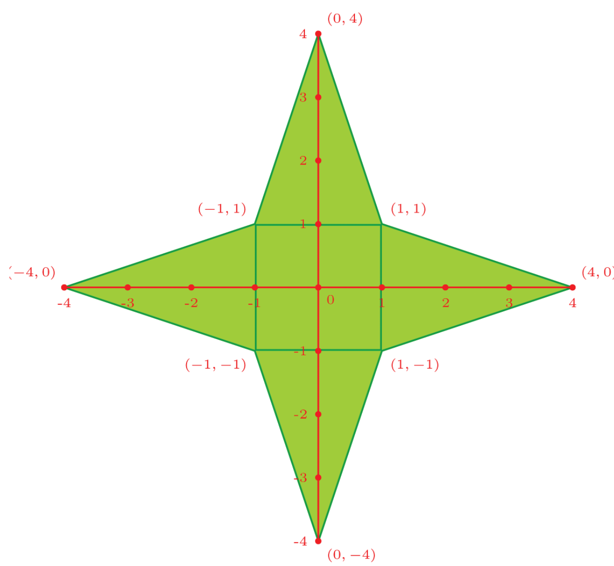
ഒരു പട്ടികയിൽ, വരിയിലും നിരയിലുമായി കുറേ കളങ്ങൾ ഉണ്ടാകുമല്ലോ. ഒരു നിശ്ചിത കളത്തിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നതെങ്ങനെയാണ്?

Open office calc പോലെയുള്ള സ്പ്രെഡ്ഷീറ്റുകൾ പരിചയമുണ്ടല്ലോ. അവയിലെങ്ങനെയാണ് വ്യത്യസ്ത കളങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത്?



പട്ടികയുടെ ഇടതുവശത്ത്, മുകളിൽ നിന്നു താഴോട്ടായി 1, 2, 3, ... എന്നിങ്ങനെയുള്ള സംഖ്യകൾ കൊണ്ടു വരികളേയും, പട്ടികയുടെ മുകളിൽ ഇടത്തുനിന്ന് വലത്തോട്ട് A, B, C, ... എന്നീ അക്ഷരങ്ങൾകൊണ്ടു നിരകളേയും അടയാളപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്. ഇതു രണ്ടും ഉപയോഗിച്ച് ഏതു കളത്തേയും സൂചിപ്പിക്കാമല്ലോ.

ഉദാഹരണമായി, മുകളിലെ ചിത്രത്തിൽ 100 എന്നെഴുതിയിരിക്കുന്നത്, F6 എന്ന കളത്തിലാണ്.



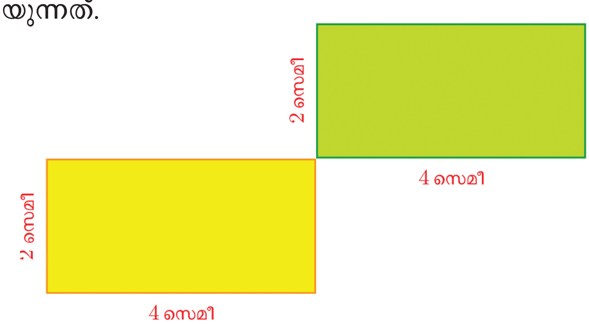
ഇനി ഈ ചിത്രം നോട്ടുബുക്കിൽ വരച്ചു നോക്കൂ.

ഈ ചിത്രം ജിയോജിബ്രയിൽ വരയ്ക്കുക

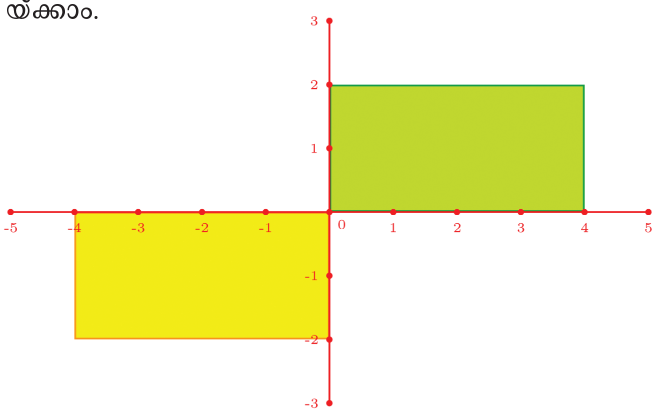
ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനം അടയാളപ്പെടുത്താനായി ഇങ്ങനെ പരസ്പരം ലംബമായി വരയ്ക്കുന്ന രണ്ടു വരകൾക്ക്, സൂചകാക്ഷങ്ങൾ (axes of co-ordinates) എന്നാണ് പേര്; വിലങ്ങനെയുള്ള വര x അക്ഷം (x axis) കുത്തനെയുള്ള വര y അക്ഷം (y axis).

അക്ഷങ്ങൾ വരച്ചു കഴിഞ്ഞാൽ, ഏത് ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനവും സംഖ്യാജോടിയായി എഴുതാം. ഈ സംഖ്യകളെ ബിന്ദുവിന്റെ **സൂചകസംഖ്യകൾ (co-ordinates)** എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഒരു ചിത്രം വരയ്ക്കാൻ, അക്ഷങ്ങൾ എവിടെയും, എങ്ങനെയും വരയ്ക്കാം. (പരസ്പരം ലംബമാകണമെന്നു മാത്രം) ഉദാഹരണമായി ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

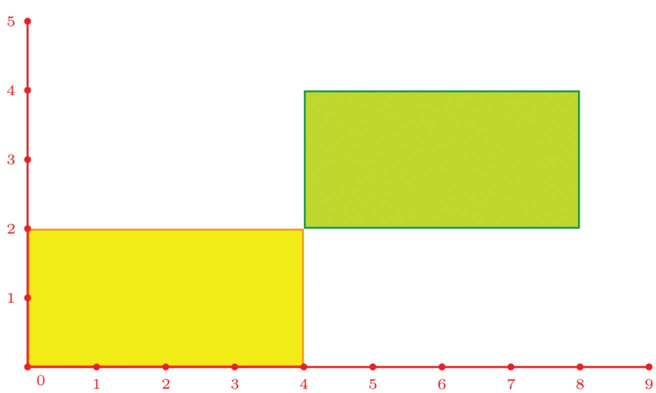


അക്ഷങ്ങൾ ഇങ്ങനെ വരയ്ക്കാം.



രണ്ടു ചതുരങ്ങളുടെയും മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്തെല്ലാമാണ്?

ഇനി അക്ഷങ്ങൾ ഇങ്ങനെ വരച്ചാലോ?



ഭൂവിഭജനം

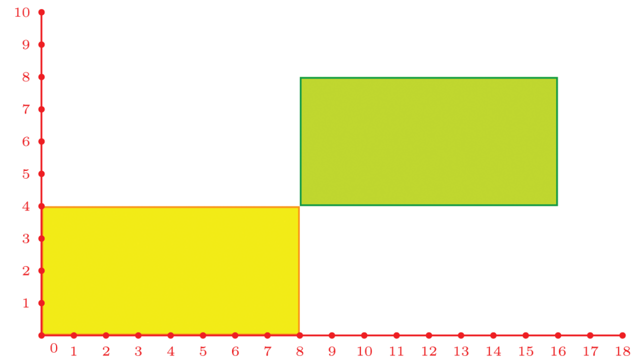
ഭൂമി സ്വയം തിരിയുന്നുണ്ടല്ലോ. ഏതു ഗോളം തിരിയുമ്പോഴും, അതിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ അനങ്ങാതെയിരിക്കും. അവയാണ് ധ്രുവങ്ങൾ (poles). അവയെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖയാണ്, തിരിയുന്നതിന്റെ അക്ഷം (axis of rotation). ഗോളത്തിൽ വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തങ്ങളിൽ, കേന്ദ്രം ഗോളത്തിന്റേതുതന്നെ ആയവയാണ് വൻവൃത്തങ്ങൾ. രണ്ടു ധ്രുവങ്ങളിൽ നിന്നും തുല്യ ദൂരത്തിലുള്ള വൻവൃത്തമാണ്, ഭൂമധ്യരേഖ (equator). അതിനു സമാന്തരമായ വൃത്തങ്ങളാണ് അക്ഷാംശ രേഖകൾ (lines of latitude)

ധ്രുവങ്ങളിൽക്കൂടി വരയ്ക്കുന്ന വൻ വൃത്തങ്ങളാണ് രേഖാംശരേഖകൾ (lines of longitude or meridians). ഇവയിൽ, ഇംഗ്ലണ്ടിലെ ഗ്രീൻവിച്ച് എന്ന സ്ഥലത്തുകൂടി കടന്നുപോകുന്നതിനെ പ്രധാന രേഖാംശരേഖയായി എടുത്തിരിക്കുന്നു. (prime meridian)

ഈ അക്ഷങ്ങളനുസരിച്ച്, മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്തൊക്കെയാണ്?

അക്ഷങ്ങൾ വരച്ചു കഴിഞ്ഞാൽ, അവയിൽ ഒരേ അകലം ഇടവിട്ട് കുത്തുകളിടണം. അകലം ഒരു സെന്റിമീറ്റർ തന്നെ ആകണമെന്നില്ല. സൗകര്യംപോലെ ഏതകലവുമാകാം.

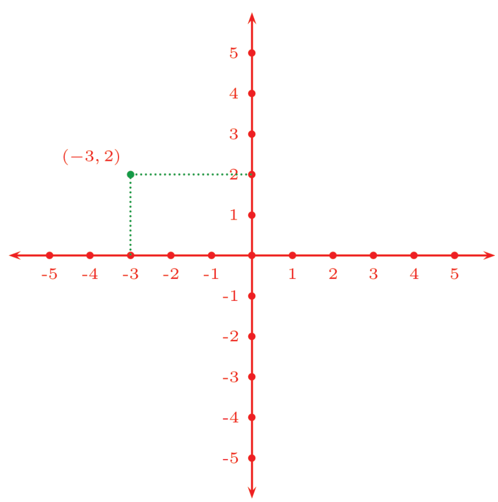
ഉദാഹരണമായി, അര സെന്റിമീറ്റർ ഇടവിട്ട് കുത്തുകളിട്ടാൽ, മുകളിലത്തെ ചിത്രം ഇങ്ങനെയാകും.



ഇപ്പോൾ മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്തായി?

അക്ഷങ്ങളും വരച്ച്, അകലങ്ങളും അടയാളപ്പെടുത്തിക്കഴിഞ്ഞാൽ, സൂചകസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ച് ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുന്നതെങ്ങനെ?

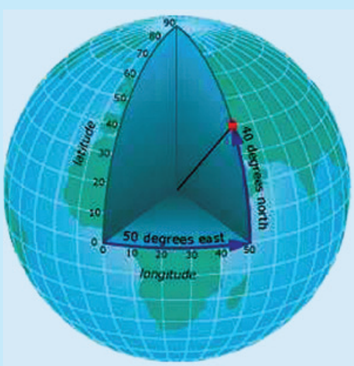
ഉദാഹരണമായി, സൂചകസംഖ്യകൾ $(-3, 2)$ ആയ ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുന്നത് നോക്കൂ:



x അക്ഷത്തിൽ -3 അടയാളപ്പെടുത്തിയ സ്ഥാനത്തുനിന്നും, y അക്ഷത്തിൽ 2 അടയാളപ്പെടുത്തിയ സ്ഥാനത്തുനിന്നും വരയ്ക്കുന്ന ലംബങ്ങൾ കൂട്ടിമുട്ടുന്നതാണ് $(-3, 2)$ സൂചകസംഖ്യകളായ ബിന്ദു.

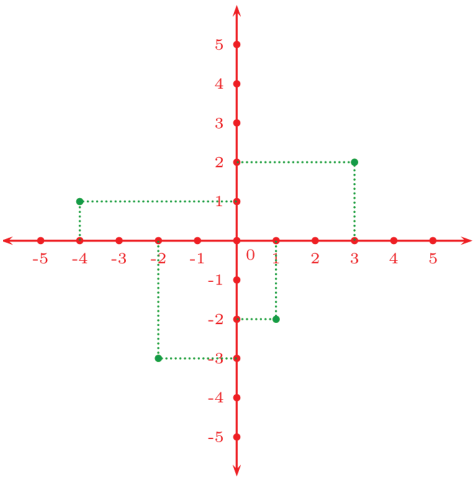
ഭൂസ്ഥാനങ്ങൾ

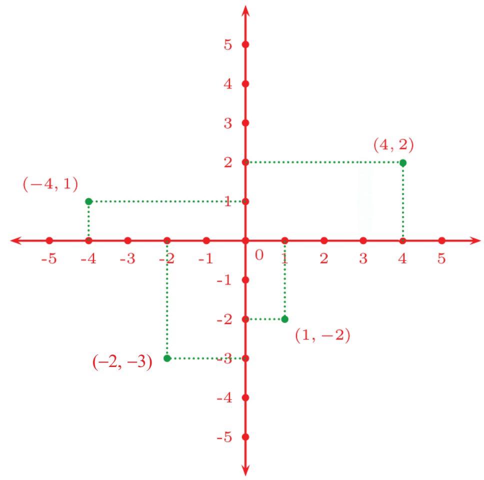
ഭൂമധ്യരേഖയും ഗ്രീൻവിച്ച് രേഖയും സന്ധിക്കുന്ന ഒരു ബിന്ദുവും, അതിനെ ഭൂമിയുടെ കേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയും സങ്കൽപ്പിക്കുക. ഈ ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് മറ്റൊരു അക്ഷാംശരേഖയിലെത്താൻ, വടക്കോട്ടോ തെക്കോട്ടോ നീങ്ങണം; അതിനനുസരിച്ച്, ബിന്ദുവിനെ ഭൂകേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖ മുകളിലോട്ടോ, താഴോട്ടോ ഒരു നിശ്ചിതകോൺ തിരിയണം. ഇത്തരം കോണുകൾ ഉപയോഗിച്ചാണ് അക്ഷാംശരേഖകളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. (വടക്ക്, തെക്ക് എന്നി വിശേഷണങ്ങൾകൂടി ഉപയോഗിക്കും.) ഇനി നമ്മുടെ ആദ്യത്തെ ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് മറ്റൊരു രേഖാംശരേഖയിലേക്കു മാറണമെങ്കിലോ? കിഴക്കോ, പടിഞ്ഞാറോ മാറണം; അതിനനുസരിച്ച്, വരയും വലത്തോട്ടോ ഇടത്തോട്ടോ ഒരു നിശ്ചിത കോൺ തിരിയണം. ഈ കോണുകളാണ് രേഖാംശരേഖകളുടെ സൂചകങ്ങൾ.



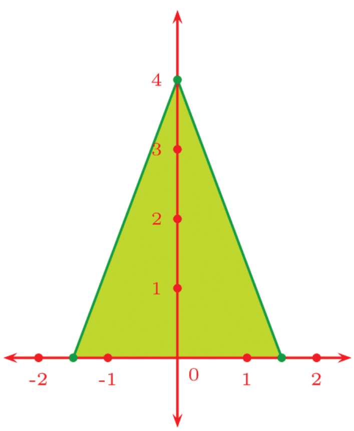
72PK4C

മറിച്ച്, അടയാളപ്പെടുത്തിയ ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാൻ, ബിന്ദുവിൽനിന്ന് x അക്ഷത്തിലേക്കും y അക്ഷത്തിലേക്കും ലംബങ്ങൾ വരച്ചാൽ മതി.





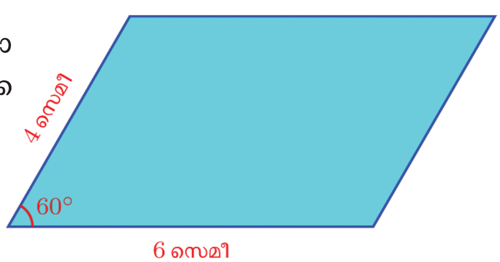
സൂചകസംഖ്യകൾ പൂർണസംഖ്യകൾ തന്നെയാകണമെന്നുണ്ടോ? ഉദാഹരണമായി പാദം 3 സെന്റിമീറ്ററും ഉയരം 4 സെന്റിമീറ്ററുമായ ഒരു സമപാർശ്വത്രികോണം വരയ്ക്കാൻ, ചുവടെക്കാണുന്നതുപോലെയും അക്ഷങ്ങളെടുക്കാം.



ഇതിൽ പാദത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിലൂടെയാണ് അക്ഷങ്ങൾ വരച്ചിരിക്കുന്നത്.

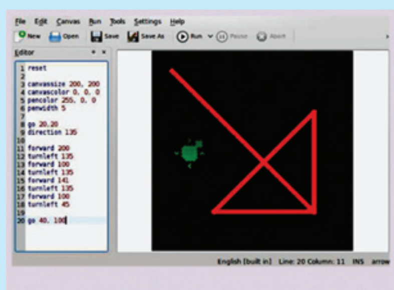
ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്തൊക്കെയാണ്?

ഇനി ഈ സാമാന്തരികം വരയ്ക്കണമെങ്കിലോ?



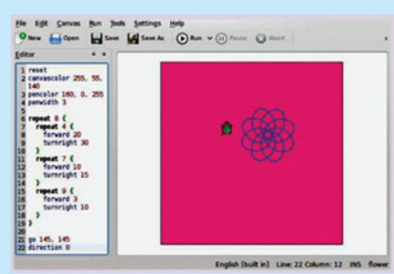
കമ്പ്യൂട്ടർ ചിത്രങ്ങൾ

ജ്യാമിതീയരൂപങ്ങളും മറ്റും കമ്പ്യൂട്ടറിൽ വരയ്ക്കാനുള്ള ലളിതമായ ഒരു പ്രോഗ്രാമാണ് ലിനക്സിലെ KTurtle. വിവിധ സ്ഥാനങ്ങളെ സംഖ്യകൾകൊണ്ടു സൂചിപ്പിച്ചുകൊണ്ടാണ് ഇതിൽ ചിത്രങ്ങൾ വരയ്ക്കുന്നത്.



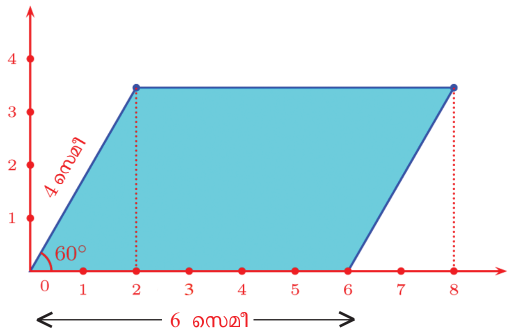
ചിത്രത്തിൽ ഇടതുവശത്തു കാണുന്നത് ചിത്രം വരയ്ക്കാനായി ഉപയോഗിച്ച കോഡ് ആണ്.

അൽപം ശ്രമിച്ചാൽ കുറേക്കൂടി സങ്കീർണമായ ചിത്രങ്ങളും ഇതിൽ വരയ്ക്കാം.



അക്ഷങ്ങൾ ഇങ്ങനെ വരയ്ക്കാം.

ജിയോജിബ്രയിൽ a എന്ന പേരിൽ ഒരു സ്ലൈഡർ നിർമിക്കുക. Input Bar ൽ (a, 0) എന്ന് നൽകുക. സ്ലൈഡർ നിരക്കി a മാറ്റി നോക്കൂ. ഈ ബിന്ദു സഞ്ചരിക്കുന്ന പാത ഏതാണ്? ഇതുപോലെ (a, 2), (a, −1), (0, a), (3, a), (−2, a) എന്നിങ്ങനെയുള്ള ബിന്ദുക്കളെടുത്ത് a മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് ഓരോ ബിന്ദുവും സഞ്ചരിക്കുന്ന പാതയുടെ പ്രത്യേകത എന്തെന്ന് നോക്കുക. ബിന്ദുവിന് Trace On കൊടുത്തു നോക്കൂ.



കോണുകൾ 30°, 60°, 90° ആയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം അറിയാമല്ലോ. അപ്പോൾ മുകളിലെ ഇടതുമൂലയുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ $\left(2, 2\sqrt{3}\right)$.

വലതു മൂലയുടെയോ?

സൂചകസംഖ്യകൾ $\left(2, 2\sqrt{3}\right)$ ആയ ബിന്ദു കിട്ടാൻ ജിയോജിബ്രയുടെ Input Bar ൽ (2, 2sqrt (3)) എന്നു കൊടുത്താൽ മതി.

അക്ഷങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ചിത്രങ്ങൾ വരയ്ക്കുമ്പോൾ x അക്ഷം $X'X$ എന്നും (ഇടത്തുനിന്നു വലത്തോട്ട്) y അക്ഷം (മുകളിൽനിന്നും താഴോട്ട്) YY' എന്നുമാണ് അടയാളപ്പെടുത്തുന്നത്. ഇവ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന സ്ഥാനം O എന്നും ഈ ബിന്ദുവിനെ ആധാരബിന്ദു (origin) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

(1) ചുവടെപ്പറയുന്നവ കണ്ടുപിടിക്കുക:

(i) x അക്ഷത്തിലെ ഏതു ബിന്ദുവിന്റേയും y സൂചകസംഖ്യ

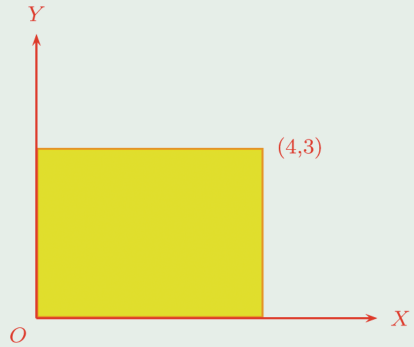
(ii) y അക്ഷത്തിലെ ഏതു ബിന്ദുവിന്റേയും x സൂചകസംഖ്യ

(iii) ആധാരബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ

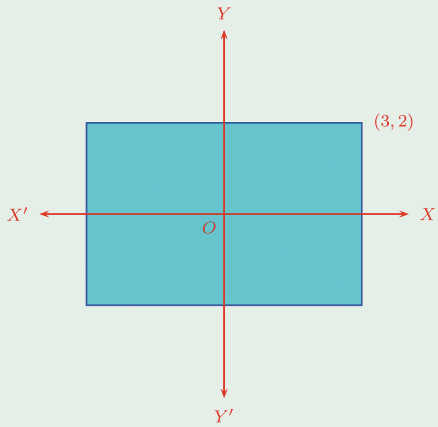
(iv) (0, 1) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ x അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വരയിലെ ഏതു ബിന്ദുവിന്റെയും y സൂചകസംഖ്യ

(v) (1, 0) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ y അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വരയിലെ ഏതു ബിന്ദുവിന്റെയും x സൂചകസംഖ്യ

(2) ചിത്രത്തിലെ ചതുരത്തിന്റെ മറ്റു മൂന്നു മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

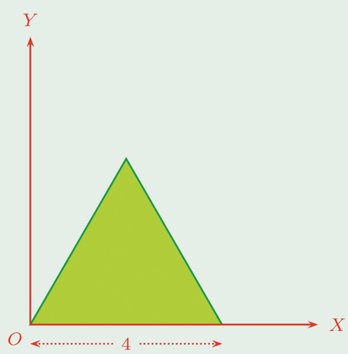


(3) ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിലെ ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമാണ്. ആധാരബിന്ദു ചതുരത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവാണ്.



ചതുരത്തിന്റെ മറ്റു മൂന്നു മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്താണ്?

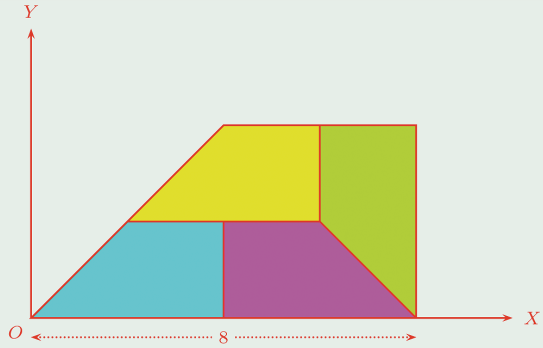
(4) ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ചിത്രമാണ് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്.



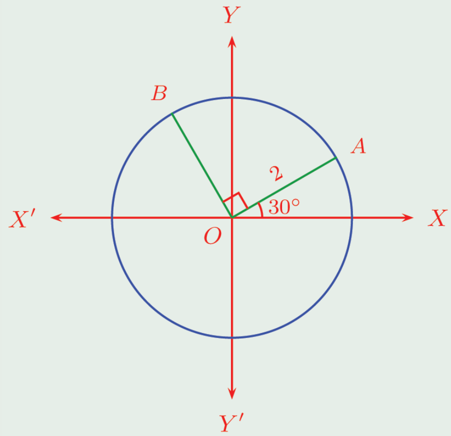
ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളുടെയെല്ലാം സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(5) തുല്യമായ നാലു ലംബകങ്ങൾ ചേർന്നൊരു വലിയ ലംബകം.

എല്ലാ ലംബകങ്ങളുടെയും മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക. ഈ ചിത്രം ജിയോജിബ്രയിൽ വരയ്ക്കുക.



(6) ചിത്രത്തിലെ വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം ആധാരബിന്ദുവും, *A*, *B* വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കളുമാണ്.



A, *B* എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കുക.

ജിയോജിബ്രയിലെ Input Bar ൽ

Sequence [(a, a + 1), a, 0, 5]

എന്ന് കൊടുത്തു നോക്കൂ. a ആയി 0 മുതൽ 5 വരെയുള്ള പൂർണസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ച് (a, a + 1) എന്ന രൂപത്തിലുള്ള എല്ലാ ബിന്ദുക്കളും അടയാളപ്പെടുത്താനുള്ള നിർദേശമാണിത്. അതായത്, (0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ.

നിർദേശങ്ങളിൽ ചെറിയ ഒരു മാറ്റം വരുത്തി

Sequence [(a, a + 1), a, 0, 5, 0.5]

എന്നാക്കി നോക്കൂ. ഇവിടെ a ആയി എടുക്കുന്നത്, പൂജ്യത്തിൽ തുടങ്ങി 0.5 വീതം കൂട്ടിക്കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളാകണം എന്നതാണ് അവസാനം 0.5 എന്ന് കൊടുക്കുന്നതുകൊണ്ട് ഉദ്ദേശിക്കുന്നത്. (1 വീതമാണ് കൂട്ടേണ്ടതെങ്കിൽ പ്രത്യേകിച്ച് ഒന്നും പറയേണ്ടതില്ല). അപ്പോൾ (0, 1), (0.5, 1.5), (1, 2), ..., എന്നിങ്ങനെ (5, 6) വരെയുള്ള ബിന്ദുക്കളാണ് കിട്ടുന്നത്.

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഓരോ നിർദേശത്തിൽനിന്നും കിട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ സവിശേഷതകൾ ചർച്ച ചെയ്യുക.

Sequence [(a, 0), a, 0, 5, 0.5]

Sequence [(a, 2a), a, –3, 4, 0.25]

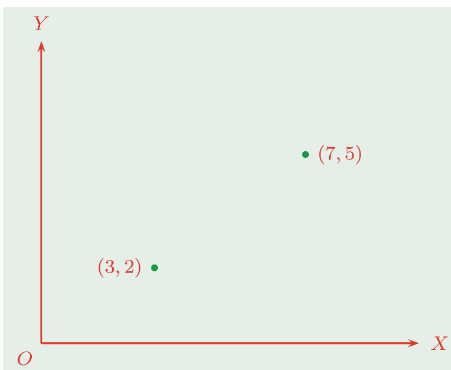
Sequence [(a, a^2), a, –3, 3, 0.2]

Sequence [(a, $-a^2$), a, –3, 3, 0.2]

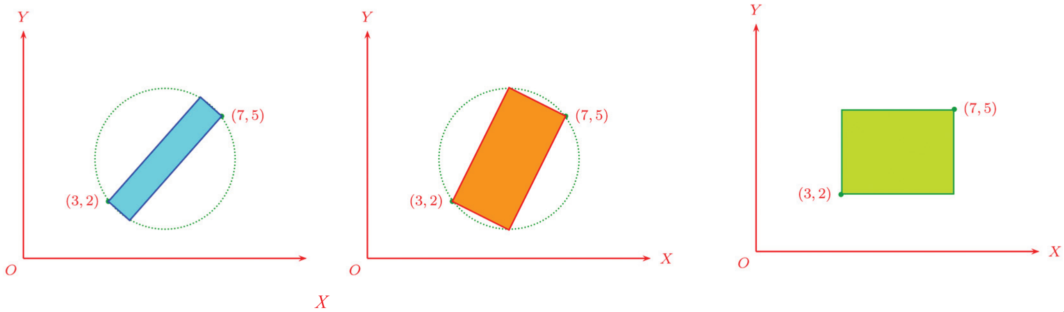
Sequence [(a^2, a), a, –4, 4, 0.1]

ചതുരക്കണക്കുകൾ

ചിത്രം നോക്കൂ.



ചിത്രത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ എതിർമൂലകളായ ഒരു ചതുരം വരയ്ക്കണം. എത്ര വേണമെങ്കിലും വരയ്ക്കാമല്ലോ:

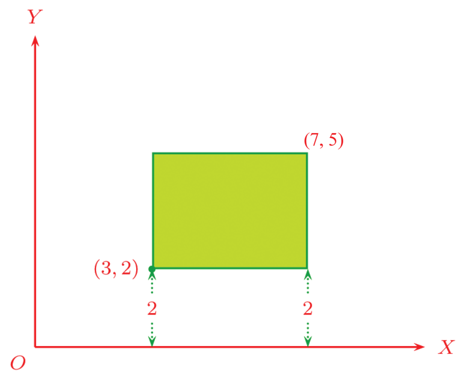


ഇവയിൽ ഒന്നിനു മാത്രമാണ് അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായ വശങ്ങളുള്ളത്.

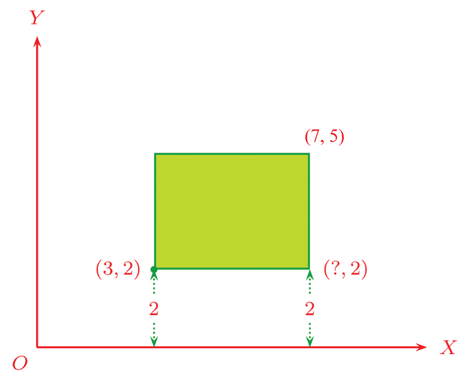
ഈ ചതുരത്തിന്റെ മറ്റു രണ്ടു മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്താണ്?

അതിന് ചിത്രം അൽപംകൂടി വിശദമാക്കാം. താഴത്തെ ഇടതുമൂലയുടെ y സൂചകസംഖ്യ 2 ആയതിനാൽ x അക്ഷത്തിൽ നിന്ന് അതിലേക്കുള്ള ഉയരം 2 ആണ്.

താഴത്തെ വശം x അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായതിനാൽ, ഈ വശത്തിന്റെ മറ്റേ മൂലയും ഇതേ ഉയരത്തിലാണ്.



അതായത് ഈ മൂലയുടെയും y സൂചകസംഖ്യ 2 തന്നെ.



ഇതിന്റെ x സൂചകസംഖ്യ കണ്ടുപിടിക്കാൻ, മുകളിലെ വലതുമൂല നോക്കുക. ഇതിന്റെ x സൂചകസംഖ്യ 7 ആയതിനാൽ, y അക്ഷത്തിൽ നിന്ന് ഈ മൂലയിലേക്കുള്ള അകലം 7 ആണ്.

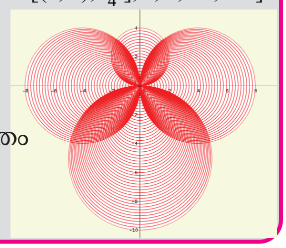
വൃത്തചിത്രങ്ങൾ

Input Bar ൽ circle [(1, 3), 2] എന്നെഴുതിയാൽ, ജിയോജിബ്രയിൽ കേന്ദ്രം (1, 3) എന്ന ബിന്ദുവും ആരം 2 ഉം ആയ വൃത്തം കിട്ടും.

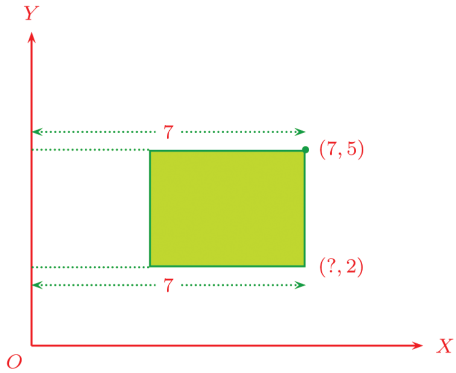
Sequence [circle [(a, 0), 1], a, 0, 5, 0.2] എന്ന നിർദേശം നൽകിയാൽ (0, 0), (0.2, 0), (0.4, 0), ..., (5, 0) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ കേന്ദ്രമായി, ആരം 1 ആയ വൃത്തങ്ങളും കിട്ടും. ഇതുപോലെ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഓരോ നിർദ്ദേശവും നൽകിയാൽ കിട്ടുന്ന ചിത്രങ്ങൾ മനസ്സിൽ കാണാൻ ശ്രമിച്ചു നോക്കൂ. അതിനു ശേഷം ജിയോജിബ്രയിൽ ചെയ്തു നോക്കാം.

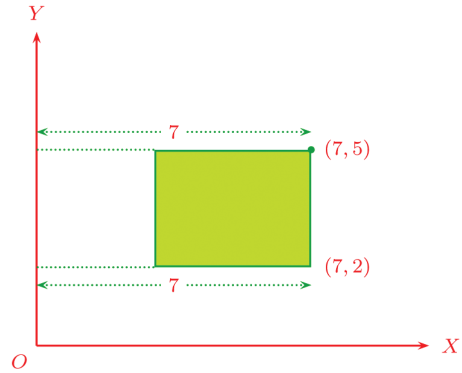
- Sequence [circle [(a, 0), a], a, 0, 10, 0.1]
- Sequence [circle [(a, 0), $\frac{a}{4}$], a, 0, 10, 0.1]

ആവശ്യമായ നിർദേശങ്ങൾ നൽകി ഈ ചിത്രം വരയ്ക്കുക.

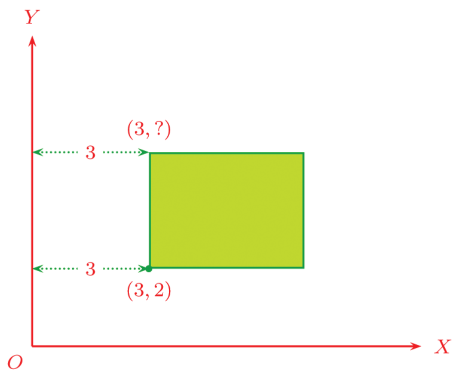


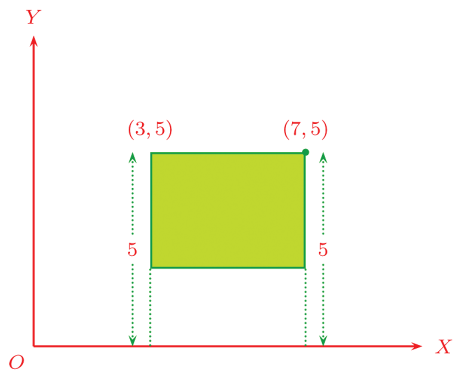
ചതുരത്തിന്റെ വലതുവശം, y അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായതിനാൽ, ഈ വശത്തിലെ മറ്റേ മൂലയും ഇതേ അകലത്തിലാണ്; അതായത്, അതിന്റെ x സൂചകസംഖ്യയും 7 തന്നെ.





ഇതുപോലെ ചതുരത്തിന്റെ ഇടതു-മേൽ മൂലയും കണ്ടുപിടിക്കാം





ചതുരത്തിന്റെ നാലു മൂലകളുടെയും സൂചകസംഖ്യകൾ ഒരുമിച്ചു നോക്കൂ:

സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിച്ച മാർഗവും ഒന്നുകൂടി നോക്കൂ. ഉപയോഗിച്ച തത്വമെന്താണ്?

x അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായി നീങ്ങുമ്പോൾ y സൂചകസംഖ്യ മാറുന്നില്ല; y അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായി നീങ്ങുമ്പോൾ x സൂചകസംഖ്യ മാറുന്നില്ല.

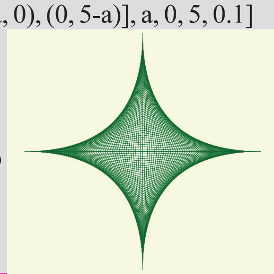
ജിയോജിബ്രയിൽ

Segment [(2, –1), (3, 5)]

എന്ന നിർദ്ദേശം കൊടുത്താൽ (2,–1), (3, 5) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരക്കഷണം കിട്ടും. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന നിർദേശങ്ങൾ തരുന്ന വരകളുടെ പ്രത്യേകതകൾ ചർച്ച ചെയ്യുക.

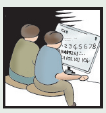
- Sequence [segment [(a, 0), (a, 3)], a, 0, 5, 0.2]
- Sequence [segment [(a, 0), (a, a)], a, 0, 5, 0.2]
- Sequence [segment [(0, 3), (a, 0)], a, –4, 4, 0.1]
- Sequence [segment [(a, 0), (0, a)], a, –3, 3, 0.2]
- Sequence [segment [(a, 0), (0, 5-a)], a, 0, 5, 0.1]

ആവശ്യമായ നിർദേശങ്ങൾ കൊടുത്ത് ഈ ചിത്രം വരയ്ക്കുക.

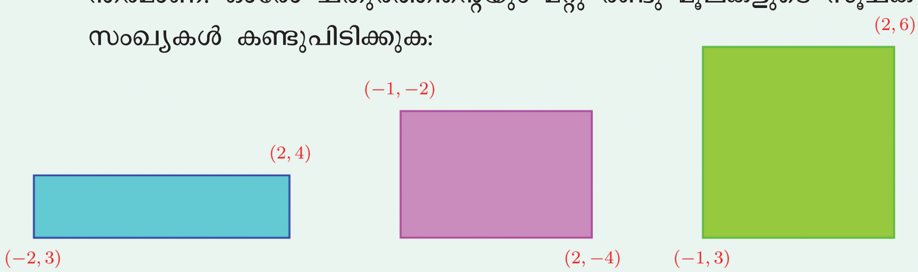


വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്കു സമാന്തരമായ മറ്റൊരു ചതുരം നോക്കൂ:

ഇതിന്റെ മറ്റു രണ്ടു മൂലകളുടെ സൂചക സംഖ്യകൾ എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?



(1) ചുവടെയുള്ള ചതുരങ്ങളുടെയെല്ലാം വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമാണ്. ഓരോ ചതുരത്തിന്റെയും മറ്റു രണ്ടു മൂലകളുടെ സൂചക സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക:



(2) അക്ഷങ്ങൾ വരയ്ക്കാതെ ചുവടെപ്പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ ജോടികൾ, ഇടതു-വലതു, മേൽ-കീഴ് സ്ഥാനങ്ങൾ ശരിയായി അടയാളപ്പെടുത്തുക. വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായും, ഈ ബിന്ദുക്കൾ എതിർമൂലകളായും വരയ്ക്കുന്ന ചതുരങ്ങളുടെ മറ്റു മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

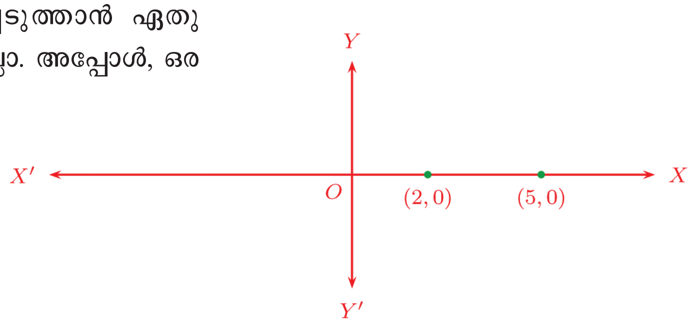
i) (3, 5), (7, 8) ii) (6, 2), (5, 4)

iii) (−3, 5), (−7, 1) iv) (−1, −2), (−5, −4)

അകലങ്ങൾ

അക്ഷങ്ങളിൽ അകലങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്താൻ ഏതു നീളവും ഏകകമായെടുക്കാമെന്നു കണ്ടല്ലോ. അപ്പോൾ, ഒരക്ഷത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം, ഈ ഏകകത്തിന്റെ മടങ്ങായി മാത്രമേ പറയാൻ കഴിയൂ.

ഉദാഹരണമായി x അക്ഷത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ നോക്കൂ.



അച്ചടിഭാഷ

കമ്പ്യൂട്ടർ ഉപയോഗിച്ചുള്ള അച്ചടിയിൽ, ഒരു പേജിലെ അക്ഷരങ്ങളും ചിത്രങ്ങളുമെല്ലാം അതതിന്റെ സ്ഥാനത്ത് വരയ്ക്കാനുപയോഗിക്കുന്ന ഒരു ഭാഷയാണ് Post Script. ഒരു പേജിലെ വിവിധ സ്ഥാനങ്ങളെ സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ചു സൂചിപ്പിക്കുകയാണ് ഇതിൽ ചെയ്യുന്നത്.

ഒരു ഉദാഹരണം നോക്കാം. ലിനക്സിലെ gedit പോലെയുള്ള ഒരു text editor തുറന്ന് ചുവടെപ്പറയുന്ന വരികൾ എഴുതുക.

```
newpath
20 20 moveto
40 20 lineto
40 40 lineto
20 40 lineto
closepath
fill
showpage
```

ഇത് പോസ്റ്റ്സ്ക്രിപ്റ്റ് ഭാഷയാണ്. ഇതിലൂടെ വരച്ചതെന്താണെന്നു കാണാൻ. gv എന്ന പ്രോഗ്രാം ഉപയോഗിക്കാം. അതിന്, ഈ ഫയൽ test.ps എന്ന പേരിൽ സേവ് ചെയ്യുക. ഒരു ടെർമിനൽ തുറന്ന് gv test.ps എന്ന ആജ്ഞ കൊടുത്താൽ ഒരു വെളുത്ത സ്ക്രീനിൽ, ഇടത്തു താഴെ മൂലയിൽ ഒരു കറുത്ത സമചതുരം കാണാം.

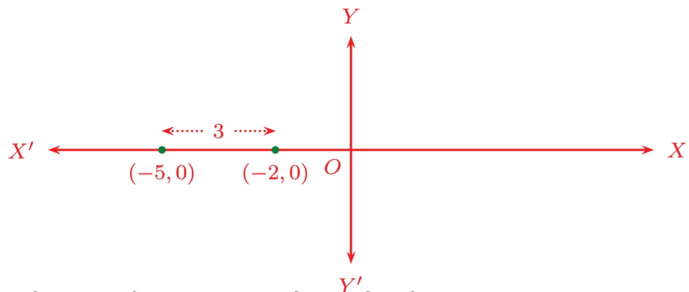
ഇവിടെ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്ന സംഖ്യാജോടികളെല്ലാം, പേജിന്റെ ഇടതു വശത്തുനിന്നും, താഴത്തെ വശത്തുനിന്നും, അതിലെ വിവിധ സ്ഥാനങ്ങളിലേക്കുള്ള അകലമാണ്. നീളത്തിന്റെ ഏകകം, അച്ചടിയിൽ സാധാരണ ഉപയോഗിക്കുന്ന പോയിന്റ് (point) ആണ്. ഒരു പോയിന്റ് എന്നത് ഏതാണ്ട് 0.035 സെന്റിമീറ്ററാണ്.

മിക്ക ഡി.ടി.പി ആപ്ലിക്കേഷനുകളുടേയും പുറകിൽ അദൃശ്യമായി പ്രവർത്തിക്കുന്നത് പോസ്റ്റ്സ്ക്രിപ്റ്റ് ഭാഷയാണ്.

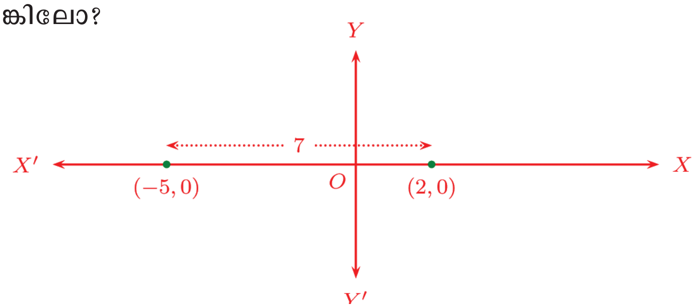
ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്ന് ആദ്യത്തെ ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലം, ഈ ഏകകത്തിന്റെ 2 മടങ്ങ്; രണ്ടാമത്തെ ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലം ഏകകത്തിന്റെ 5 മടങ്ങ്. ഇത് ചുരുക്കി, ആധാരബിന്ദുവിൽനിന്ന് ആദ്യത്തെ ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലം 2 എന്നും, രണ്ടാമത്തെ ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലം 5 എന്നുമാണ് സാധാരണയായി പറയുന്നത്.

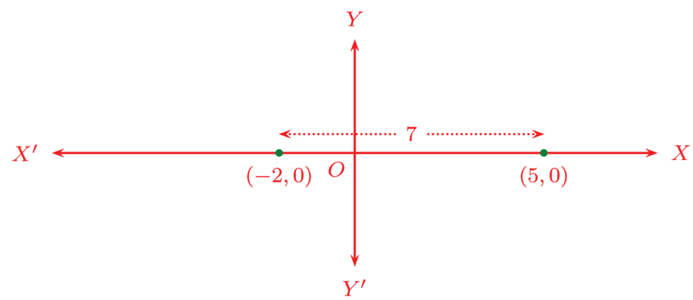
അപ്പോൾ ഈ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം $5 - 2 = 3$

ബിന്ദുക്കൾ ഇങ്ങനെയായാലോ?



ബിന്ദുക്കൾ ആധാരബിന്ദുവിന്റെ ഇരുവശത്തുമാണെങ്കിലോ?





x അക്ഷത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലത്തെക്കുറിച്ച് എന്തു പറയാം?

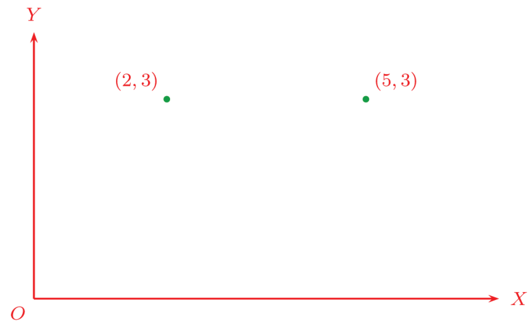
ഒമ്പതാംക്ലാസിൽ, ഒരു വരയിലെ ബിന്ദുക്കളെ സംഖ്യകൾകൊണ്ട് അടയാളപ്പെടുത്തിയതും, രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം കണക്കാക്കിയതും ഓർത്തുനോക്കൂ.

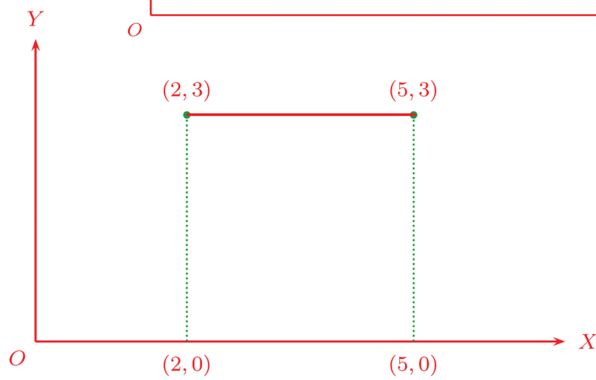
സൂചകസംഖ്യകൾ $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$ ആയ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം $|x_1 - x_2|$.

ഇതുപോലെ, y അക്ഷത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം പറയാമോ?

ഇനി ഈ ബിന്ദുക്കൾ നോക്കൂ:

ഇവ തമ്മിലുള്ള അകലം, ഈ ബിന്ദുവിൽനിന്നും x അക്ഷത്തിലേയ്ക്ക് വരയ്ക്കുന്ന ലംബങ്ങളുടെ ചുവടുകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം തന്നെയല്ലേ? (എന്തുകൊണ്ട്?)





പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ

> ഒരേ y സൂചകസംഖ്യ ഉള്ള ബിന്ദുക്കളെല്ലാം, x അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായ ഒരു വരയിലാണ്; അത്തരം രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം, അവയുടെ x സൂചകസംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസമാണ്.

ഇതുപോലെ ഒരേ x സൂചകസംഖ്യകളുള്ള ബിന്ദുക്കളെക്കുറിച്ചും പറയാമല്ലോ:

> ഒരേ x സൂചകസംഖ്യ ഉള്ള ബിന്ദുക്കളെല്ലാം, y അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായ ഒരു വരയിലാണ്; അത്തരം രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം, അവയുടെ y സൂചകസംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസമാണ്.

ബീജഗണിത ഭാഷയിൽ പറഞ്ഞാൽ,

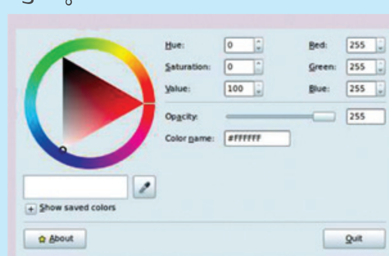
> സൂചകസംഖ്യകൾ (x_1, y), (x_2, y) ആയ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം $|x_1 - x_2|$
>
> സൂചകസംഖ്യകൾ (x, y_1), (x, y_2) ആയ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം $|y_1 - y_2|$

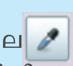
x സൂചകസംഖ്യകളും y സൂചകസംഖ്യകളും വ്യത്യസ്തമായ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

നിറങ്ങളും സംഖ്യകളും

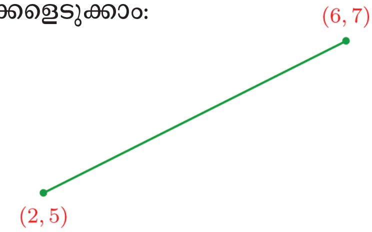
കമ്പ്യൂട്ടറിൽ സ്ക്രീനിലെ സ്ഥാനങ്ങളെ മാത്രമല്ല, നിറങ്ങളേയും സംഖ്യകൾ കൊണ്ടുതന്നെയാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. പല അളവുകളിൽ ചുവപ്പ്, പച്ച, നീല എന്നീ നിറങ്ങൾ കലർത്തിയാണ് സ്ക്രീനിൽ വിവിധ നിറങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കുന്നത്.

ലിനക്സിലെ Gcolor2 ഉപയോഗിച്ച് ഇതു പെട്ടെന്നു മനസിലാക്കാം.

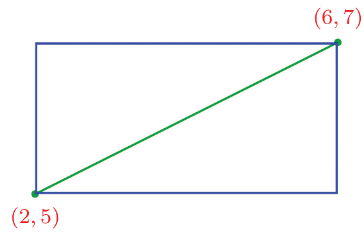


ഇതിലെ  ൽ ക്ലിക് ചെയ്തതിനുശേഷം, സ്ക്രീനിലെ ഏതെങ്കിലും ഭാഗത്തു ക്ലിക് ചെയ്താൽ, ആ സ്ഥാനത്തെ നിറത്തിന്റെ RGB സംഖ്യകൾ കിട്ടും.

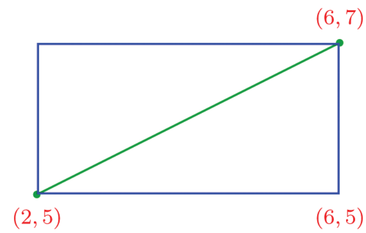
ഉദാഹരണമായി (2, 5), (6, 7) എന്നീ ബിന്ദുക്കളെടുക്കാം:



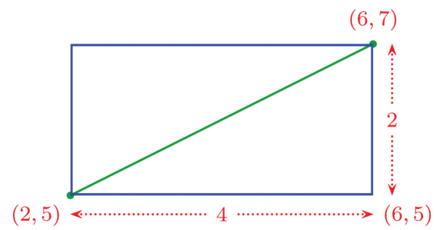
ഇവ തമ്മിലുള്ള അകലം കണക്കാക്കാൻ ഇവ എതിർമൂലകളും, വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്കു സമാന്തരവുമായ ചതുരം വരയ്ക്കാം:



ഈ ചതുരത്തിന്റെ വികർണമാണ് നമുക്കു വേണ്ടത്. അതു കണക്കാക്കാൻ, ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം കണ്ടുപിടിച്ചാൽ മതി, അതിന്, ചതുരത്തിന്റെ താഴത്തെ മറ്റേ മൂല എഴുതാം:



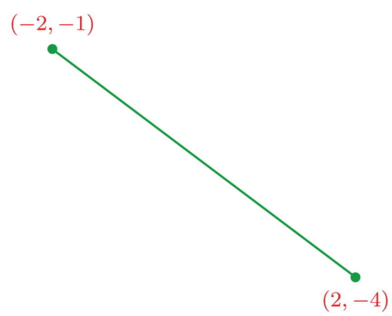
ഇതിൽ നിന്ന് ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം കണക്കാക്കാമല്ലോ:



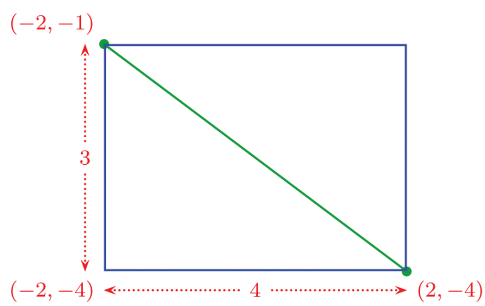
ഇനി പൈഥാഗറസ് സിദ്ധാന്തമുപയോഗിച്ച്, നമുക്കു വേണ്ട നീളം കണക്കാക്കാം:

$$\sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

ബിന്ദുക്കൾ ഇങ്ങനെയായാലോ?



ഇതിലും, ചതുരം വരച്ച്, നീളം കണ്ടുപിടിക്കാം:

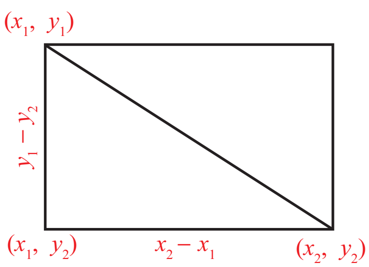


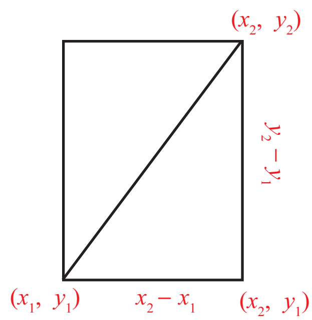
അപ്പോൾ നമുക്കു വേണ്ട അകലം

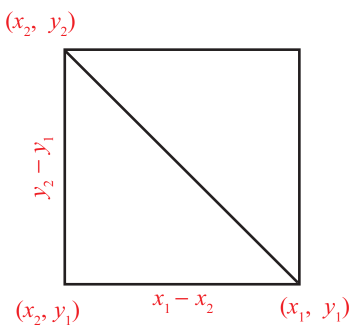
$$\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

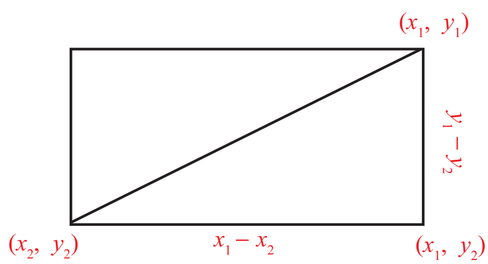
x സൂചകസംഖ്യകളും, y സൂചകസംഖ്യകളും വ്യത്യസ്തമായ ഏതു രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലവും ഇങ്ങനെ ചതുരം വരച്ചു കണ്ടുപിടിക്കാം. (ഏതെങ്കിലും സൂചകസംഖ്യകൾ തുല്യമാണെങ്കിൽ, ഇങ്ങനെയൊരു ചതുരം തന്നെ ഇല്ലല്ലോ).

പൊതുവായി ഇത്തരം രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ (x_1, y_1), (x_2, y_2) എന്നെടുക്കാം. ഇവ എതിർമൂലകളായും, വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്കു സമാന്തരമായും ഒരു ചതുരം വരയ്ക്കാം. മറ്റ് രണ്ട് മൂലകൾ (x_1, y_2), (x_2, y_1) എന്നു കാണാം.









ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം $|x_1 - x_2|$, $|y_1 - y_2|$ എന്നും കണക്കാക്കാം. അപ്പോൾ ആദ്യത്തെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം.

$$\sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2}$$

ഏതു സംഖ്യയുടെയും അതിന്റെ കേവലമൂല്യത്തിന്റെയും വർഗം ഒന്നുതന്നെയാണെന്ന് ഒമ്പതാംക്ലാസിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. അപ്പോൾ ഈ അകലം

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

ഇതിൽ $y_1 = y_2$ എന്നെടുത്താൽ

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2} = |x_1 - x_2|$$

എന്നു കിട്ടും; $x_1 = x_2$ എന്നെടുത്താൽ

$$\sqrt{(y_1 - y_2)^2} = |y_1 - y_2|$$

എന്നും കിട്ടും.

അപ്പോൾ, ഏതെങ്കിലും സൂചകസംഖ്യകൾ തുല്യമായാലും, അകലം ഈ രീതിയിൽ എഴുതാം.

സൂചകസംഖ്യകൾ $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ആയ ഏതു രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുമുള്ള അകലം

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

ഉദാഹരണമായി, സൂചകസംഖ്യകൾ $(4, -2), (-3, -1)$ ആയ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം

$$\sqrt{(4-(-3))^2 + (-2-(-1))^2} = \sqrt{7^2 + (-1)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

സൂചകസംഖ്യകൾ $(-2, 1)$ എന്ന ബിന്ദുവും ആധാരബിന്ദുവുമായുള്ള അകലമോ?

$$\sqrt{(-2-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5}$$

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ,

സൂചകസംഖ്യകൾ (x, y) ആയ ബിന്ദുവും, ആധാരബിന്ദുവും തമ്മിലുള്ള അകലം

$$\sqrt{x^2 + y^2}$$

ഇനി ഈ കണക്കു നോക്കൂ:

സൂചകസംഖ്യകൾ $(-1, 2), (3, 5), (9, -3)$ ആയ ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ വരയിലാണോ?

മൂന്നു ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ വരയിലാണെങ്കിൽ, അവയിൽ ഈരണ്ടെണ്ണം തമ്മിലുള്ള അകലങ്ങളിലെ ഏറ്റവും വലുത്, മറ്റ് രണ്ട് അകലങ്ങളുടെ തുകയായിരിക്കണം.

കണക്കിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന മൂന്നു ബിന്ദുക്കൾ A, B, C എന്നു പേരിടാം. അപ്പോൾ,

$$AB = \sqrt{(-1-3)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

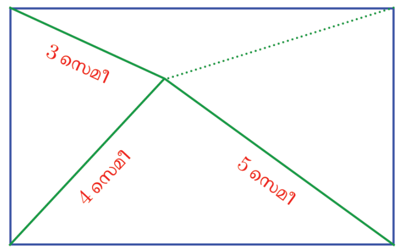
$$BC = \sqrt{(3-9)^2 + ((5-(-3))^2} = \sqrt{36+64} = 10$$

$$AC = \sqrt{(-1-9)^2 + ((2-(-3))^2} = \sqrt{100+25} = 5\sqrt{5}$$

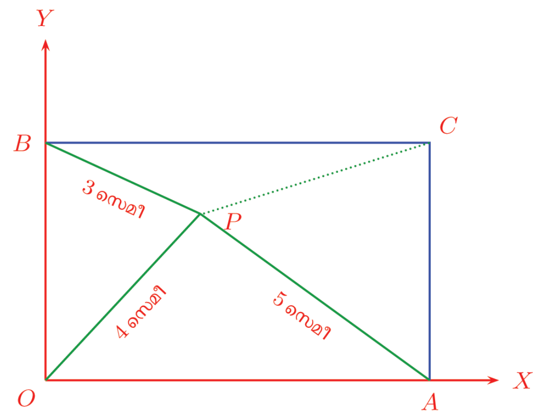
ഇവയിൽ ഏറ്റവും വലുത് AC (അതെങ്ങനെ കിട്ടി?) ഇനി AB, BC ഇവയുടെ നീളം കൂട്ടിയാൽ 15; ഇത് AC യുടെ നീളമല്ല. അപ്പോൾ A, B, C ഒരേ വരയിലുമല്ല.

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം:

ഒരു ചതുരത്തിനകത്തെ ബിന്ദുവിൽനിന്ന് ചതുരത്തിന്റെ അടുത്തടുത്ത മൂന്നു മൂലകളിലേക്കുള്ള അകലം 3 സെന്റിമീറ്റർ, 4 സെന്റിമീറ്റർ, 5 സെന്റിമീറ്റർ എന്നിങ്ങനെയാണ്. നാലാമത്തെ മൂലയിലേക്കുള്ള അകലം എന്താണ്?

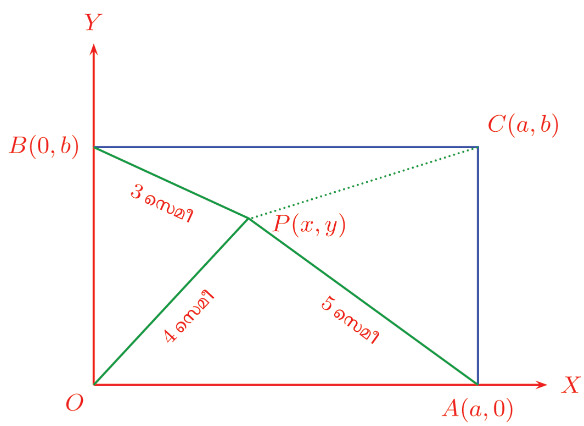


ഒരു ചിത്രം വരയ്ക്കാം.



ചതുരത്തിന്റെ താഴത്തെ ഇടതുമൂല ആധാരബിന്ദുവായും, അതിലൂടെയുള്ള രണ്ടു വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങളായും എടുക്കാം:

ചിത്രത്തിൽ, A എന്ന ബിന്ദു x അക്ഷത്തിലായതിനാൽ, അതിന്റെ y സൂചകസംഖ്യ 0 ആണ്; അതിന്റെ x സൂചകസംഖ്യ a എന്നെടുത്താൽ, A യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ $(a, 0)$.



ഇതുപോലെ B യുടെ y സൂചകസംഖ്യ b എന്നെടുത്താൽ, അതിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ $(0, b)$. അപ്പോൾ C യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ (a, b) ആകണം.

P യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ (x, y) എന്നെടുക്കാം:

ഇനി അറിയാവുന്ന നീളങ്ങളുടെ വർഗങ്ങൾ സൂചകസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ചെഴുതാം:

$$x^2 + (y - b)^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 = 16$$

$$(x - a)^2 + y^2 = 25$$

നമുക്ക് കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത് PC ആണല്ലോ; അതിന്റെ വർഗം

$$(x - a)^2 + (y - b)^2$$

മുകളിലെഴുതിയ മൂന്നു സമവാക്യങ്ങളിൽനിന്ന് ഇത് കണക്കാക്കാൻ പറ്റുമോ?

അക്കൂട്ടത്തിലെ ആദ്യത്തെയും മൂന്നാമത്തേയും സമവാക്യങ്ങളിൽനിന്ന്

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + x^2 + y^2 = 34$$

എന്നു കണക്കാക്കാം. രണ്ടാമത്തെ സമവാക്യം അനുസരിച്ച്,

$x^2 + y^2 = 16$ ആണല്ലോ

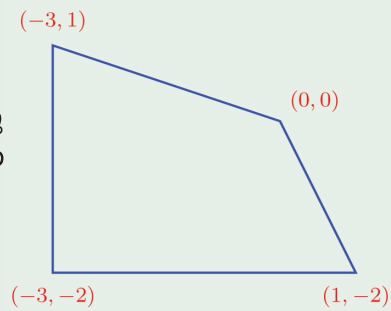
അപ്പോൾ

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + 16 = 34$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 18$$

അപ്പോൾ PC യുടെ നീളം $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ സെന്റിമീറ്റർ.

(1) ചിത്രത്തിലെ ചതുർഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെയും വികർണങ്ങളുടെയും നീളം കണക്കാക്കുക.



(2) (2, 1), (3, 4), (– 3, 6) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാൽ, ഒരു മട്ടത്രികോണം കിട്ടുമെന്ന് തെളിയിക്കുക.

(3) ആധാരബിന്ദു കേന്ദ്രവും, ആരം 10 ഉം ആയി ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുന്നു.

(i) സൂചകസംഖ്യകൾ (6, 9), (5, 9), (6, 8) ആയ ബിന്ദുക്കൾ ഈ വൃത്തത്തിനകത്തോ, പുറത്തോ, വൃത്തത്തിൽത്തന്നെയോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

(ii) ഈ വൃത്തത്തിലെ 8 ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എഴുതുക.

(4) കേന്ദ്രത്തിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ (1, 1) ഉം, ആരം $\sqrt{2}$ ഉം ആയ വൃത്തം x അക്ഷത്തെ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെയും, y അക്ഷത്തെ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെയും സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(5) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ (1, 2), (2, 3), (3, 1) എന്നീ ബിന്ദുക്കളാണ്. ഇതിന്റെ പരിവൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രവും ആരവും കണ്ടുപിടിക്കുക.

കുറിപ്പുകൾ

കുറിപ്പുകൾ

കുറിപ്പുകൾ

ഭാരതത്തിന്റെ ഭരണഘടന

ഭാഗം IV ക

മൗലിക കർത്തവ്യങ്ങൾ

51 ക. മൗലിക കർത്തവ്യങ്ങൾ - താഴെപ്പറയുന്നവ ഭാരതത്തിലെ ഓരോ പൗരന്റെയും കർത്തവ്യം ആയിരിക്കുന്നതാണ്:

(ക) ഭരണഘടനയെ അനുസരിക്കുകയും അതിന്റെ ആദർശങ്ങളെയും സ്ഥാപനങ്ങളെയും ദേശീയപതാകയെയും ദേശീയഗാനത്തെയും ആദരിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ഖ) സ്വാതന്ത്ര്യത്തിനുവേണ്ടിയുള്ള നമ്മുടെ ദേശീയസമരത്തിന് പ്രചോദനം നൽകിയ മഹനീയാദർശങ്ങളെ പരിപോഷിപ്പിക്കുകയും പിൻതുടരുകയും ചെയ്യുക;

(ഗ) ഭാരതത്തിന്റെ പരമാധികാരവും ഐക്യവും അഖണ്ഡതയും നിലനിർത്തുകയും സംരക്ഷിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ഘ) രാജ്യത്തെ കാത്തുസൂക്ഷിക്കുകയും ദേശീയ സേവനം അനുഷ്ഠിക്കുവാൻ ആവശ്യപ്പെടുമ്പോൾ അനുഷ്ഠിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ങ) മതപരവും ഭാഷാപരവും പ്രാദേശികവും വിഭാഗീയവുമായ വൈവിധ്യങ്ങൾക്കതീതമായി ഭാരതത്തിലെ എല്ലാ ജനങ്ങൾക്കുമിടയിൽ, സൗഹാർദവും പൊതുവായ സാഹോദര്യമനോഭാവവും പുലർത്തുക. സ്ത്രീകളുടെ അന്തസ്സിന് കുറവു വരുത്തുന്ന ആചാരങ്ങൾ പരിത്യജിക്കുക;

(ച) നമ്മുടെ സംസ്കാരസമന്വയത്തിന്റെ സമ്പന്നമായ പാരമ്പര്യത്തെ വിലമതിക്കുകയും നിലനിറുത്തുകയും ചെയ്യുക;

(ഛ) വനങ്ങളും തടാകങ്ങളും നദികളും വന്യജീവികളും ഉൾപ്പെടുന്ന പ്രകൃത്യാ ഉള്ള പരിസ്ഥിതി സംരക്ഷിക്കുകയും അഭിവൃദ്ധിപ്പെടുത്തുകയും ജീവികളോട് കാരുണ്യം കാണിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ജ) ശാസ്ത്രീയമായ കാഴ്ചപ്പാടും മാനവികതയും, അന്വേഷണത്തിനും പരിഷ്കരണത്തിനും ഉള്ള മനോഭാവവും വികസിപ്പിക്കുക;

(ഝ) പൊതുസ്വത്ത് പരിരക്ഷിക്കുകയും ശപഥം ചെയ്ത് അക്രമം ഉപേക്ഷിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ഞ) രാഷ്ട്രം യത്നത്തിന്റെയും ലക്ഷ്യപ്രാപ്തിയുടെയും ഉന്നതതലങ്ങളിലേക്ക് നിരന്തരം ഉയരത്തക്കവണ്ണം വ്യക്തിപരവും കൂട്ടായതുമായ പ്രവർത്തനത്തിന്റെ എല്ലാ മണ്ഡലങ്ങളിലും ഉൽകൃഷ്ടതയ്ക്കുവേണ്ടി അധ്വാനിക്കുക.

(ട) ആറിനും പതിനാലിനും ഇടയ്ക്ക് പ്രായമുള്ള തന്റെ കുട്ടിക്കോ തന്റെ സംരക്ഷണയിലുള്ള കുട്ടികൾക്കോ, അതതു സംഗതി പോലെ, മാതാപിതാക്കളോ രക്ഷാകർത്താവോ വിദ്യാഭ്യാസത്തിനുള്ള അവസരങ്ങൾ ഏർപ്പെടുത്തുക.

സൈബർ സുരക്ഷയെക്കുറിച്ച് അറിയൂ...

ഇന്റർനെറ്റിന്റെയും സോഷ്യൽ നെറ്റ്‌വർക്കിംഗ് സൈറ്റുകളുടെയും ഉപയോഗത്തെക്കുറിച്ച് നമുക്ക് അറിയാം. ആശയവിനിമയത്തിനും വിനോദത്തിനും അറിവുനേടുന്നതിലുമെല്ലാം ഇവയുടെ അനന്തസാധ്യത നാം നേരിട്ടറിഞ്ഞിട്ടുള്ളതാണല്ലോ.

എന്നാൽ കുറച്ചു കാലമായി വിദ്യാർഥികളും കൗമാരക്കാരുമായ ചിലരെങ്കിലും സോഷ്യൽ മീഡിയയുടെ ചൂഷിതവലയത്തിൽപ്പെടുന്നതായി നാം കാണുന്നു. ഇത്തരത്തിൽ ഇരകളാകുന്നതിൽ നിന്നും സ്വയം രക്ഷനേടുന്നതിനും സംരക്ഷിതരാകുന്നതിനും ഓരോരുത്തർക്കും കഴിയേണ്ടതുണ്ട്. ഇതിനായി ഓൺലൈൻ പ്രവർത്തനങ്ങളിൽ ഏർപ്പെടുമ്പോൾ ചില സുരക്ഷാമാർഗ്ഗങ്ങൾ നാം സ്വീകരിക്കേണ്ടതായിട്ടുണ്ട്.

⏩ സോഷ്യൽ നെറ്റ്‌വർക്കിംഗ് സൈറ്റുകൾ അപകടകാരികളാകുന്നതെപ്പോൾ?

- *ഒരാളുടെ സ്വകാര്യവിവരങ്ങളെല്ലാം പോസ്റ്റ് ചെയ്യുകയോ ഷെയർ ചെയ്യുകയോ ചെയ്യുമ്പോൾ; പ്രത്യേകിച്ച് ഫോൺ നമ്പർ, അഡ്രസ്, സ്ഥലം, ഫോട്ടോകൾ തുടങ്ങിയവ.*
- *ഒരാളുടെ പ്രൊഫൈൽ കണ്ട് അയാളെ വിശ്വസിക്കുമ്പോൾ; മിക്കപ്പോഴും നൽകിയിട്ടുള്ള പ്രൊഫൈൽ വ്യാജവും അസത്യവുമായിരിക്കും.*
- *ചാറ്റിന്റെ സ്നാപ്ഷോട്ടുകൾ, ഫോട്ടോകൾ, വീഡിയോകൾ എന്നിവ സേവ് ചെയ്യുന്നതും ഭാവിയിൽ അത് ബ്ലാക്മെയിലിംഗിനും ഭീഷണിക്കും ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ.*
- *ഒരാളുടെ വ്യക്തിത്വം കളങ്കപ്പെടുത്താനുദ്ദേശിച്ച് തെറ്റായ വിവരങ്ങൾ, കമന്റുകൾ, പോസ്റ്റുകൾ, ഫോട്ടോകൾ എന്നിവയിലൂടെ സൈബർഭീഷണി ഉയർത്തുമ്പോൾ.*
- *കുട്ടികളെ വലയിലാക്കി ഇരകളാക്കുന്നതിന് മുതിർന്നവരും കഴുകൻകണ്ണുള്ളവരുമായ നിരവധി പേർ സമൂഹത്തിലുണ്ട്.*

⏩ സുരക്ഷിതമായ സോഷ്യൽ നെറ്റ്‌വർക്കിംഗിനുള്ള നിർദേശങ്ങൾ

- *നിങ്ങളുടെ വ്യക്തിപരമായ വിവരങ്ങൾ വ്യക്തിപരമായി സൂക്ഷിക്കുക.*
- *നിങ്ങളുടെ* Private Settings, Customize *ചെയ്യുക. മറ്റുള്ളവർക്ക് നിങ്ങളുടെ* Basic Info *മാത്രം കാണാൻ അവസരം നൽകുക.*
- *നിങ്ങളുടെ സുഹൃത്തുക്കളെ അറിയുക എന്നതിൽ മാത്രം ചുരുക്കുക. ഓൺലൈൻ സുഹൃത്തുക്കളെ വിശ്വസിക്കരുത്. സന്ദർശനം മാത്രമായി ചുരുക്കുക.*
- *നിങ്ങൾക്ക് ഇഷ്ടമില്ലാത്ത പോസ്റ്റുകൾ കണ്ടാൽ അത്തരം പോസ്റ്റുകൾ ലഭിക്കുന്നതിലുള്ള അതൃപ്തി നിങ്ങളുടെ സുഹൃത്തിനോട് തുറന്നു പറയുക.*
- *നിങ്ങളെ തിരിച്ചറിയാൻ കഴിയുന്ന തരത്തിലുള്ള സ്വകാര്യവിവരങ്ങൾ പോസ്റ്റ് ചെയ്യാതിരിക്കുക.*
- *ശക്തിയുള്ള പാസ്‌വേർഡുകൾ ഉപയോഗിക്കുക. അവ നിങ്ങളുടെ സുഹൃത്തുക്കൾക്ക് ഷെയർ ചെയ്യാതിരിക്കുക.*
- *നിങ്ങളുടെ ചിത്രങ്ങൾ, ഇ-മെയിൽ വിവരങ്ങൾ മുതലായവ മറ്റുള്ളവർക്ക് ഷെയർ ചെയ്യാതിരിക്കുക.*
- *നിങ്ങളുടെ സ്വകാര്യ സന്ദേശങ്ങൾ സ്വകാര്യമായി വയ്ക്കുക. ഒരിക്കൽ പോസ്റ്റ് ചെയ്താൽ അത് പ്രസിദ്ധമാകും.*

സൈബർസുരക്ഷയ്ക്കുള്ള ചില പ്രധാന ഫോൺ നമ്പരുകൾ

ക്രൈം സ്റ്റോപ്പർ - 1090

സൈബർ സെൽ - 9497975998

ചൈൽഡ് ഹെൽപ്പ്‌ലൈൻ - 1098/1517

കൺട്രോൾ റൂം - 100

പുകയിലയെ പ്രതിരോധിക്കാം

ലഹരി വസ്തുക്കൾ സങ്കീർണമായ സാമൂഹ്യപ്രശ്നങ്ങൾ സൃഷ്ടിക്കുന്നു. ആരോഗ്യം, സംസ്കാരം, സമ്പത്ത്, പഠനം, മനുഷ്യബന്ധങ്ങൾ എന്നിവയെല്ലാം തകർത്തെറിയുന്ന ലഹരിവസ്തുക്കളെ കണിശമായും വർജിക്കണം.

ലോകത്ത് പത്തിലൊരാൾ എന്ന ക്രമത്തിൽ പ്രതിവർഷം അമ്പതുലക്ഷത്തോളം പേരുടെ മരണത്തിന് കാരണമാകുന്ന അതീവ മാരകമായ ലഹരിപദാർഥമാണ് പുകയില. പുകയിലയുടെ ഉപയോഗം പ്രധാനമായും രണ്ടു രീതിയിലാണ്.

- പുകവലി (Tobacco smoking)
- പുകരഹിത പുകയില ഉപയോഗം (Use of smokeless tobacco)

പുകയിലയിൽ ഒട്ടേറെ ദോഷകരവും മാരകവുമായ രാസവസ്തുക്കൾ അടങ്ങിയിക്കുന്നു.

നിക്കോട്ടിൻ, ടാർ, ബെൻസോപൈറീൻ, കാർബൺമോണോക്സൈഡ്, ഫോർമാൽഡിഹൈഡ്, ബെൻസീൻ, ഹൈഡ്രജൻ സയനൈഡ്, കാഡ്മിയം, അമോണിയ, പ്രൊപ്പലീൻ ഗ്ലൈക്കോൾ എന്നിവ അവയിൽ ചിലതാണ്.

പുകയിലയുടെ ദോഷഫലങ്ങൾ

- വിട്ടുമാറാത്ത ചുമ
- രക്തചംക്രമണം, രക്തസമ്മർദം എന്നിവയിലുണ്ടാകുന്ന പ്രശ്നങ്ങൾ
- ഹൃദ്രോഗം
- നാവ്, വായ, തൊണ്ട, സ്വനപേടകം, ശ്വാസകോശം, അന്നനാളം, ആമാശയം, പാൻക്രിയാസ്, കരൾ എന്നിവയെ ബാധിക്കുന്ന ക്യാൻസർ
- ശ്വാസകോശരോഗങ്ങളായ ക്ഷയം, ബ്രോങ്കൈറ്റിസ്, എംഫിസീമ, ക്രോണിക് ഒബ്സ്ട്രക്റ്റീവ് പൾമനറി ഡിസീസ് തുടങ്ങിയവ
- വായ്ക്കുള്ളിലെ രോഗങ്ങളായ പെരിയോഡോൺഡൈറ്റിസ്, പല്ലുകളിലെ നിറം മാറ്റം, പോടുകൾ, വായ്നാറ്റം, അണുബാധ തുടങ്ങിയവ
- പുകവലി ലൈംഗിക-പ്രത്യുൽപ്പാദനശേഷി കുറയ്ക്കുന്നു. പുകവലിക്കാരായ സ്ത്രീകളിൽ ഗർഭസ്ഥശിശുക്കളുടെ ആരോഗ്യക്കുറവിനും ഇത് കാരണമാകുന്നു.

പുകവലിക്കുന്നവരുമായുള്ള സാമീപ്യംമൂലം പുകവലിക്കാത്തവരും പുക ശ്വസിക്കാനിടവരുന്നതാണ് നിഷ്ക്രിയ പുകവലി (Passive smoking).
ഇത് ഏറെ അപകടകരമാണ്.

ഇന്ത്യയിൽ 14 ശതമാനം പേർ പുകവലിക്കാരും 26 ശതമാനം പേർ പുകരഹിത പുകയില ഉപയോഗിക്കുന്നവരുമാണ്. അഞ്ച് ശതമാനം പേർ പുകവലിയും പുകരഹിത പുകയിലയും ശീലമാക്കിയവരാണ്.

നാം ഇതിനെ വേണ്ട രീതിയിൽ പ്രതിരോധിക്കേണ്ടതില്ലേ?