സ്റ്റാൻഡേർഡ് VII

ഗണിതം

ഭാഗം - 1

കേരളസർക്കാർ
വിദ്യാഭ്യാസവകുപ്പ്

സംസ്ഥാന വിദ്യാഭ്യാസ ഗവേഷണ പരിശീലന സമിതി (SCERT), കേരളം
2016

KT-427/1 Maths 7(M) Vol-I

ദേശീയഗാനം

ജനഗണമന അധിനായക ജയഹേ
ഭാരത ഭാഗ്യവിധാതാ,
പഞ്ചാബസിന്ധു ഗുജറാത്ത മറാഠാ
ദ്രാവിഡ ഉത്ക്കല ബംഗാ,
വിന്ധ്യഹിമാചല യമുനാഗംഗാ,
ഉച്ഛ്വല ജലധിതരംഗാ,
തവശുഭനാമേ ജാഗേ,
തവശുഭ ആശിഷ മാഗേ,
ഗാഹേ തവ ജയ ഗാഥാ
ജനഗണമംഗലദായക ജയഹേ
ഭാരത ഭാഗ്യവിധാതാ.
ജയഹേ, ജയഹേ, ജയഹേ,
ജയ ജയ ജയ ജയഹേ!

പ്രതിജ്ഞ

ഇന്ത്യ എന്റെ രാജ്യമാണ്. എല്ലാ ഇന്ത്യക്കാരും എന്റെ സഹോദരീ സഹോദരന്മാരാണ്.

ഞാൻ എന്റെ രാജ്യത്തെ സ്നേഹിക്കുന്നു; സമ്പൂർണവും വൈവിധ്യപൂർണവുമായ അതിന്റെ പാരമ്പര്യത്തിൽ ഞാൻ അഭിമാനം കൊള്ളുന്നു.

ഞാൻ എന്റെ മാതാപിതാക്കളെയും ഗുരുക്കന്മാരെയും മുതിർന്നവരെയും ബഹുമാനിക്കും.

ഞാൻ എന്റെ രാജ്യത്തിന്റെയും എന്റെ നാട്ടുകാരുടെയും ക്ഷേമത്തിനും ഐശ്വര്യത്തിനും വേണ്ടി പ്രയത്നിക്കും.

Prepared by :
State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Poojappura, Thiruvananthapuram 695 012, Kerala

Website : www.scertkerala.gov.in
E-mail : scertkerala@gmail.com
Phone : 0471-2341883, Fax : 0471-2341869
Typesetting and Layout : SCERT
First Edition : 2014, Reprint : 2016
Printed at : KBPS, Kakkanad, Kochi
© Department of Education, Government of Kerala

പ്രിയപ്പെട്ട കുട്ടികളേ,

ഗണിതത്തിൽ കുറേയേറെകാര്യങ്ങൾ
നാം മനസ്സിലാക്കി.
ഇനി അതിന്റെ ഉയർന്ന തലങ്ങളിലേക്ക്
നാം കടക്കുകയാണ്;
സംഖ്യാപ്രത്യേകതകൾ നിറഞ്ഞ
അങ്കഗണിതത്തിന്റെ ലോകത്തേക്ക്,
ജ്യാമിതിയുടെയും ബീജഗണിതത്തിന്റെയും
പുതിയ തലങ്ങളിലേക്ക്,
ഗണിതത്തിന്റെ യുക്തി തിരിച്ചറിയാനും
പുതിയ കണ്ടെത്തലുകൾ നടത്താനും.

ആത്മവിശ്വാസത്തോടെ മുന്നോട്ടു പോകാം.

സ്നേഹാശംസകളോടെ,

ഡോ. പി. എ. ഫാത്തിമ
ഡയറക്ടർ
എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി.

പാഠപുസ്തക രചന

ശില്പശാലയിൽ പങ്കെടുത്തവർ

അനിൽകുമാർ എം.കെ.
എച്ച്.എസ്.എ. എസ്.കെ.എം.ജെ.എച്ച്.
എസ്.എസ്, വയനാട്

അരുൺലാൽ എം.ജെ.
യു.പി.എസ്.എ. എ.യു.പി.എസ്.
എരമംഗലം, കോഴിക്കോട്

കുഞ്ഞബ്ദുള്ള എം.
യു.പി.എസ്.എ., മുയിപ്പോത്ത് എം.യു.
പി.എസ്., കോഴിക്കോട്

തുളസീധരൻ പിള്ള കെ.ജി.
പി.ഡി. ടീച്ചർ, ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്
കരുകോൺ, കൊല്ലം

ബാലഗംഗാധരൻ വി.കെ.
ജി.എം.എച്ച്.എസ്.എസ്, കാലിക്കറ്റ്
യൂണിവേഴ്സിറ്റി ക്യാമ്പസ്, മലപ്പുറം

മണികണ്ഠൻ കെ.ഒ.വി.
യു.പി.എസ്.എ, പാട്ടിയമ്മ. എ.യു.പി.എസ്,
കണ്ണൂർ

രാജേഷ് കെ.പി.
ലക്ചറർ, ഡയറ്റ്, കണ്ണൂർ

രാമാനുജം ആർ.
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി, എം.എൻ.കെ.എം.ജി.എച്ച്.
എസ്.എസ്, പുലാപ്പറ്റ, പാലക്കാട്

സുനിൽകുമാർ വി. പി.
എച്ച്.എസ്.എ., ജനത എച്ച്.എസ്.എസ്
തേമ്പാംമൂട്, തിരുവനന്തപുരം

വിദഗ്ധർ

ഡോ. കൃഷ്ണൻ ഇ.
പ്രൊഫസർ (റിട്ട.), യൂണിവേഴ്സിറ്റി കോളേജ്, തിരുവനന്തപുരം

ഡോ. വിജയകുമാർ എ.
പ്രൊഫസർ, കൊച്ചി സർവകലാശാല, കൊച്ചി

ചിത്രകാരൻ

ധനേശൻ എം.വി.
എ.വി.എസ്.ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്, കരിവള്ളൂർ, കണ്ണൂർ

അക്കാദമിക് കോഡിനേറ്റർ

ഡോ. ലിഡ്സൺരാജ് ജെ.
റിസർച്ച് ഓഫീസർ, എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി.

സംസ്ഥാന വിദ്യാഭ്യാസ ഗവേഷണ പരിശീലന സമിതി (SCERT)
വിദ്യാഭവൻ, പൂജപ്പുര, തിരുവനന്തപുരം 695 012

ഉള്ളടക്കം

1. കോണുകൾ ചേരുമ്പോൾ......................... 7

2. സമാന്തരവരകൾ................................... 13

3. മാറുന്ന സംഖ്യകളും മാറാത്ത ബന്ധങ്ങളും.. 35

4. ആവർത്തന ഗുണനം 49

5. ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 67

6. വർഗവും വർഗമൂലവും 79

7. വേഗത്തിന്റെ കണക്ക്..........................89

ഈ പുസ്തകത്തിൽ സൗകര്യത്തിനായി ചില ചിഹ്നങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നു.

ICTസാധ്യത

കണക്ക് ചെയ്തുനോക്കാം

പ്രോജക്ട്

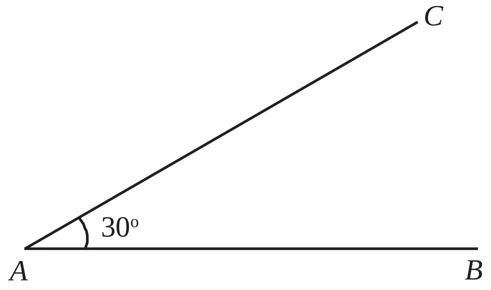
തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

1

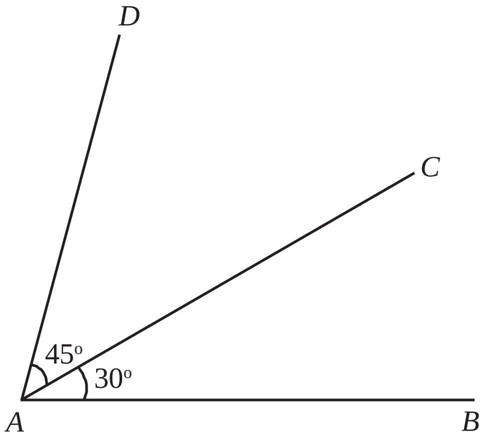
കോണുകൾ ചേരുമ്പോൾ

കോണുകൾ ചേരുമ്പോൾ

ഇതുപോലൊരു കോൺ വരയ്ക്കൂ.



ഇതിനു മുകളിൽ ഒരു കോൺ കൂടി ഇങ്ങനെ വരയ്ക്കണം.



ഇപ്പോൾ A യിൽ എത്ര കോണായി?

$\angle CAB$ = ...

$\angle DAC$ = ...

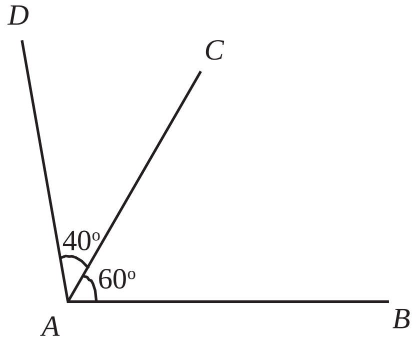
ഇനിയുമൊരു വലിയ കോണുണ്ടല്ലോ. അതിന്റെ അളവെത്രയാണ്?

$\angle DAB$ = ...

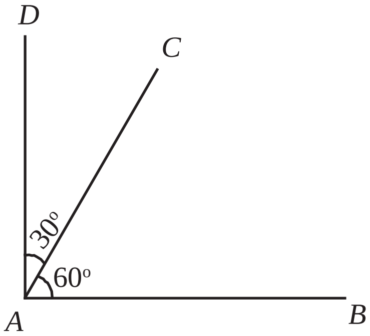
എങ്ങനെ കണക്കാക്കി?

$\angle DAB = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$

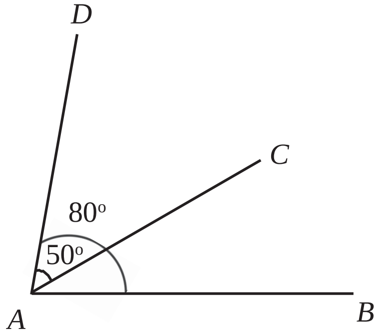
ഇനിയുള്ള ചിത്രങ്ങളിൽ രണ്ടു കോണുകൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്, മൂന്നാമത്തെ കോൺ തുകയായോ വ്യത്യാസമായോ എഴുതി കണക്കാക്കുക.



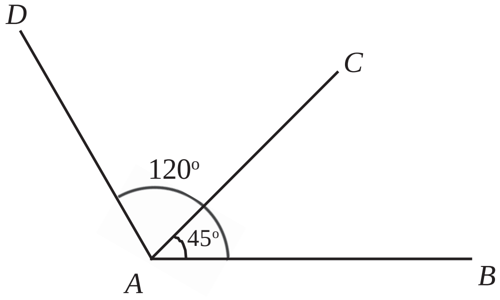
$\angle DAB$ = ... + ... = ...



$\angle DAB$ = ... + ... = ...



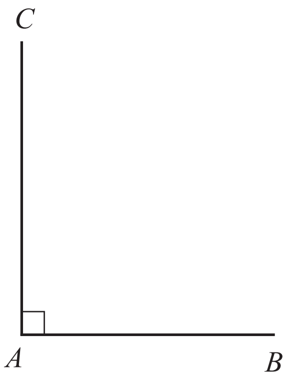
$\angle CAB$ = ... − .... = ...



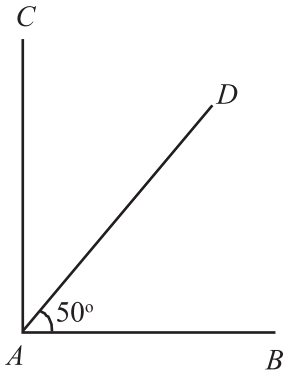
$\angle DAC$ = ... − .... = ...

ഇരുവശങ്ങൾ

ചുവടെക്കാണുന്നതുപോലെ ഒരു വരയും അതിനൊരു ലംബവും വരയ്ക്കുക.



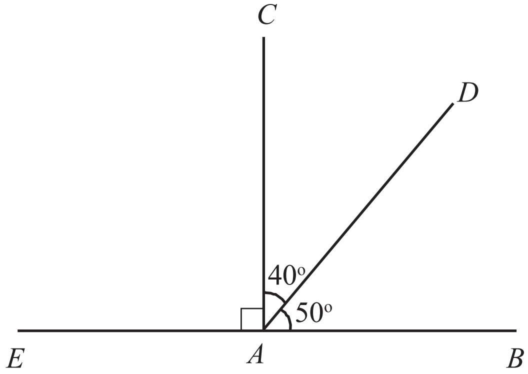
ഇനി അതിനുള്ളിൽ മറ്റൊരു കോൺ ഇങ്ങനെ വരയ്ക്കുക.



$\angle DAC$ യുടെ അളവെത്രയാണ്?

$\angle DAC$ = ... – .... = ...

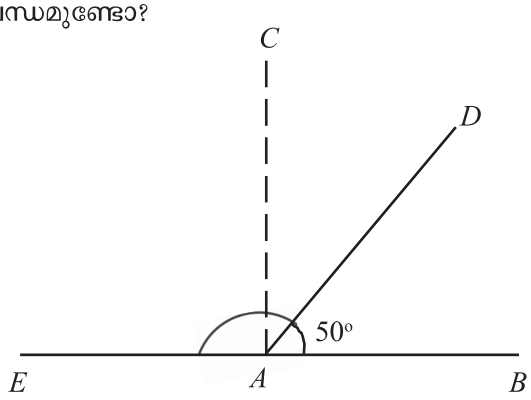
ഇനി AB അൽപ്പം ഇടത്തേക്ക് നീട്ടിയാലോ?



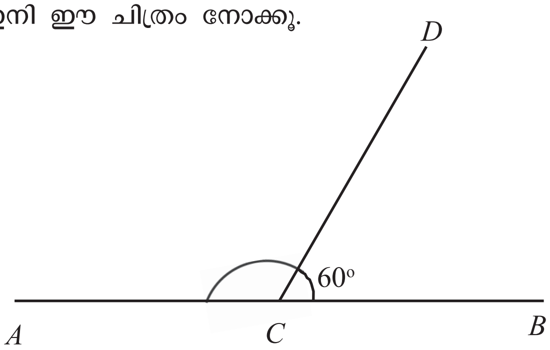
$\angle DAE$ യുടെ അളവെത്രയാണ്?

$\angle DAE$ = ... + ... = ...

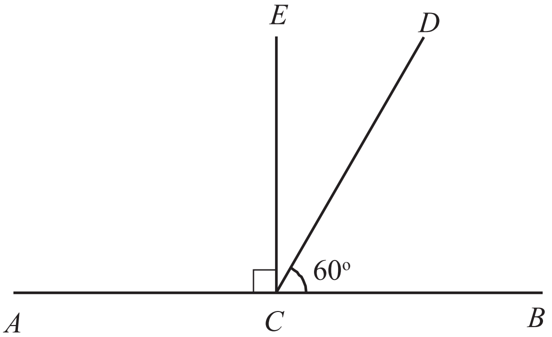
$\angle DAB$ യും $\angle DAE$ യും തമ്മിലെന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ?



ഇനി ഈ ചിത്രം നോക്കൂ.



$\angle DCA$ യുടെ അളവ് കണക്കാക്കാമോ? C യിൽക്കൂടി ഒരു ലംബം വരച്ച് ഈ കോണിനെ രണ്ടാക്കിയാലോ?

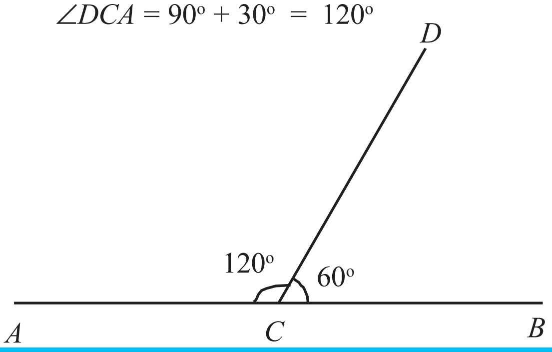


$\angle DCE$ യുടെ അളവെത്രയാണ്?

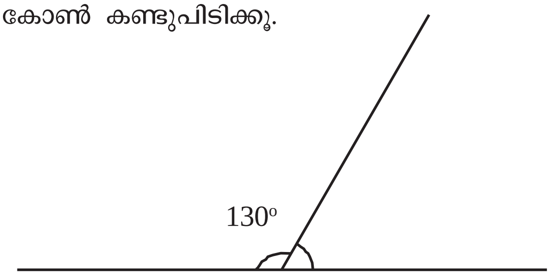
അപ്പോൾ $\angle DCA$ യുടെ അളവോ?

$\angle DCE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

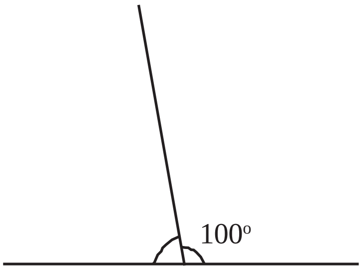
$\angle DCA = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$

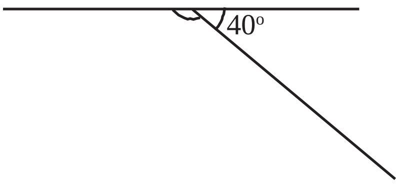


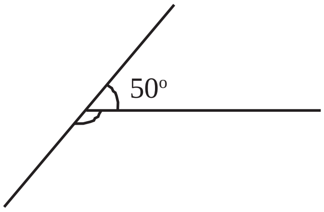
ഇതുപോലെ ഈ ചിത്രത്തിലെ വലതുവശത്തെ കോൺ കണ്ടുപിടിക്കൂ.

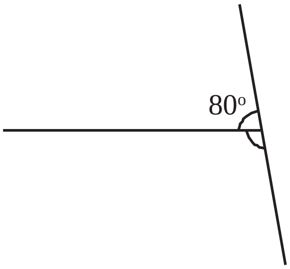


ചുവടെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചിത്രങ്ങളിലെല്ലാം രണ്ടു വരകൾ ചേർന്ന് ഇരുവശത്തുമുണ്ടാകുന്ന കോണുകൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്. അവയിൽ ഒന്നിന്റെ അളവും ചിത്രത്തിലുണ്ട്. മറ്റേ കോണിന്റെ അളവ് കണക്കാക്കി ചിത്രത്തിൽ എഴുതുക.









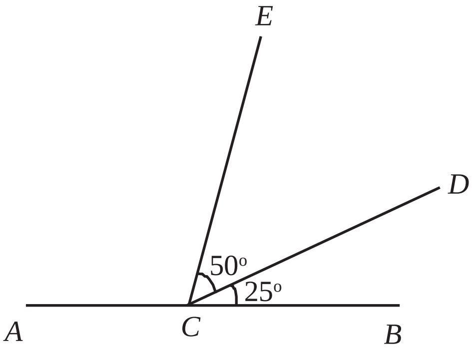
ഇതിലെല്ലാം കാണുന്നതെന്താണ്?

ഒരു വരയിൽനിന്ന് മറ്റൊരു വര വരച്ചാൽ ഇരുവശത്തുമുണ്ടാകുന്ന കോണുകളുടെ തുക 180° ആണ്.

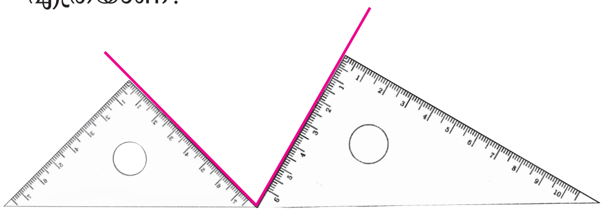
ഇങ്ങനെയുണ്ടാകുന്ന ഒരു ജോടി കോണുകളെ രേഖീയജോടി (linear pair) എന്നു പറയാറുണ്ട്.

കണ്ടുപിടിക്കാം

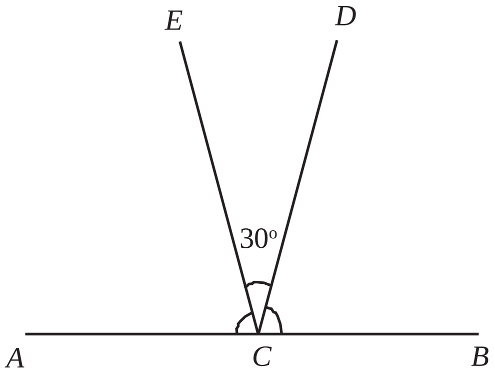
- ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ $\angle ACE$ എത്രയാണ്?



- ചിത്രത്തിലെ വരകൾക്കിടയിലുള്ള കോൺ എത്രയാണ്?

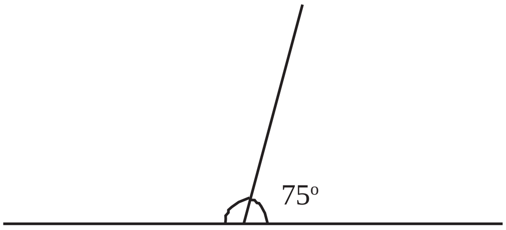


- ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ $\angle ACD = \angle BCE$ ആണ്. ഇവയുടെ അളവുകൾ കണ്ടുപിടിയ്ക്കുക.

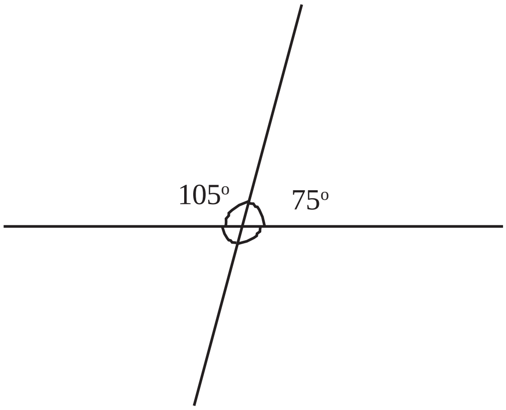


മുറിച്ചുകടന്നാൽ

ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിലെ ഇടതുവശത്തെ കോണിന്റെ അളവെത്രയാണ്?



മുകളിലെ വരയെ താഴോട്ട് നീട്ടിയാലോ?

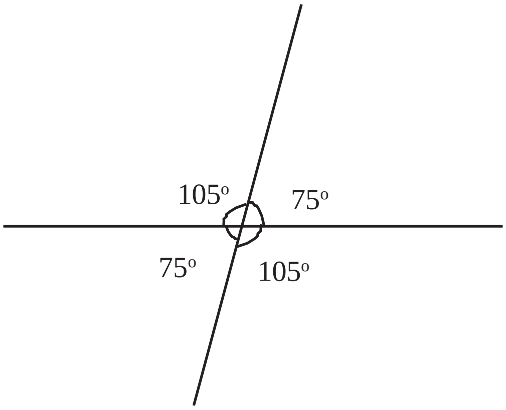


ഇപ്പോൾ ചുവട്ടിൽ രണ്ടു കോണുകൾ കൂടിയായി. എന്താണ് അവയുടെ അളവുകൾ?

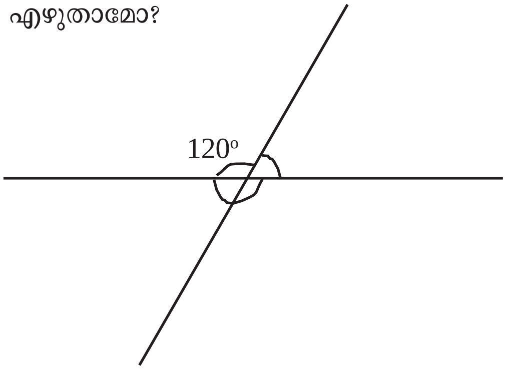
ചരിഞ്ഞ വരയുടെ ഇടതുവശത്തെ മുകളിലും താഴെയുമുള്ള കോണുകൾ ഒരു രേഖീയജോടി ആണല്ലോ.

അതുപോലെ വലതുവശത്തുമുണ്ടൊരു രേഖീയ ജോടി.

ഇനി കോണുകളെല്ലാം പറയാമോ.



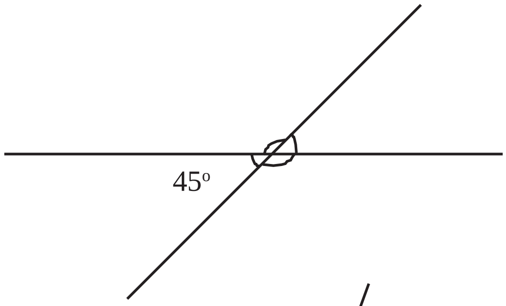
ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിലും രണ്ടു വരകൾ അങ്ങോട്ടുമിങ്ങോട്ടും മുറിച്ചു കടക്കുന്നുണ്ട്. ചിത്രത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന മറ്റു മൂന്നു കോണുകൾ എഴുതാമോ?

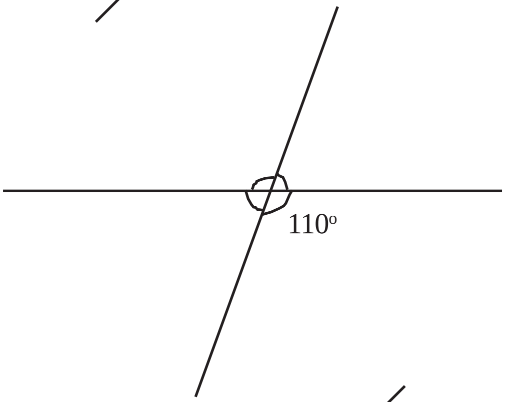


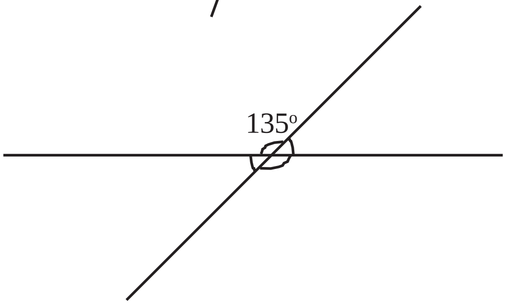
ഇതിലെല്ലാം കാണുന്നതെന്താണ്?

> ഒരു വരയെ മറ്റൊരു വര മുറിച്ചുകടക്കുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന നാലു കോണുകളിൽ അടുത്തടുത്തുള്ളവയുടെ തുക 180° ആണ്. എതിരേയുള്ളവ തുല്യവും.

ഇനി ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന കോണുകൾ കണക്കാക്കി എഴുതാമോ?

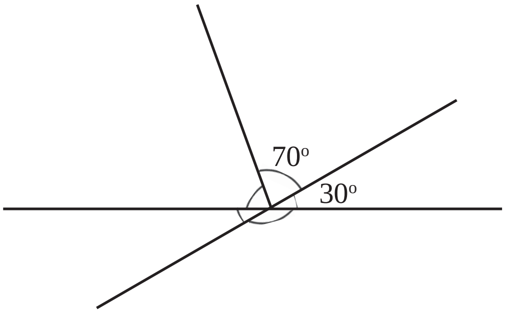


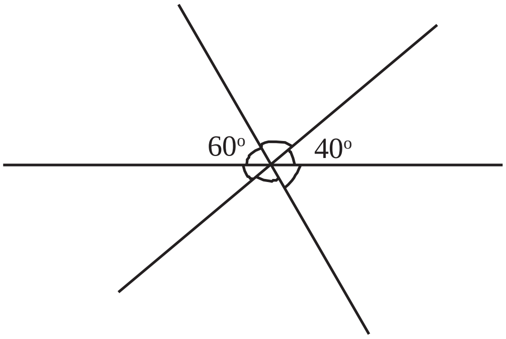


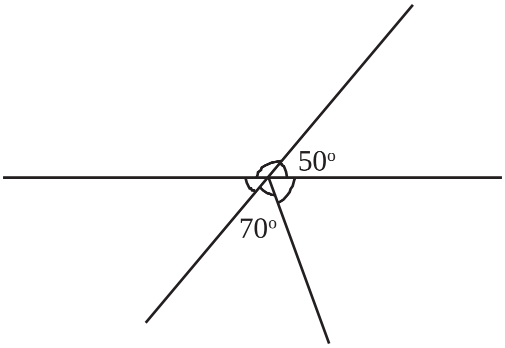


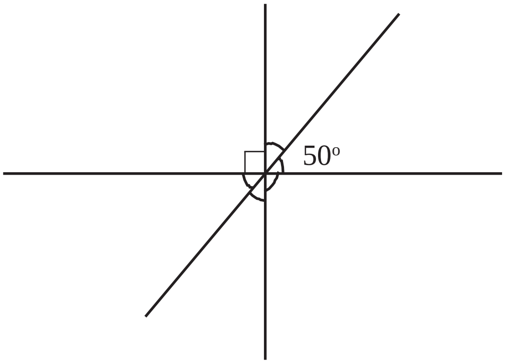
ചെയ്തുനോക്കാം

ഓരോ ചിത്രത്തിലും ചില കോണുകളുടെ അളവുകൾ തന്നിരിക്കുന്നു. മറ്റു കോണുകളുടെ അളവുകൾ കണ്ടുപിടിച്ച് എഴുതുക.







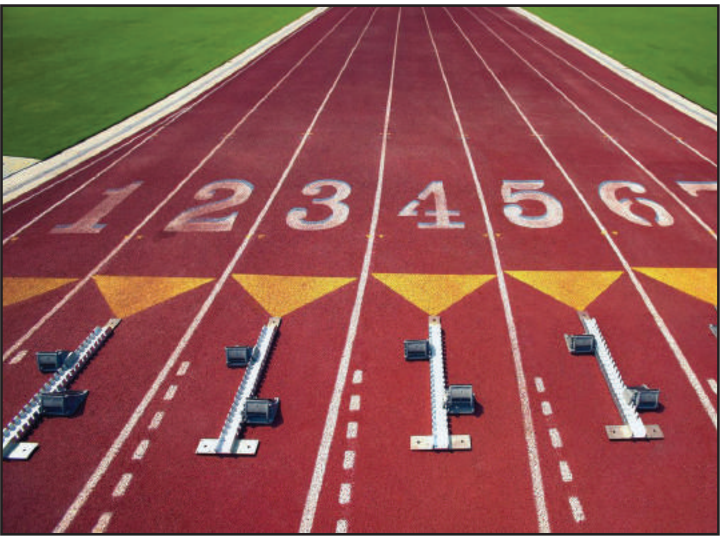


തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്
• ജ്യാമിതിയുമായി ബന്ധപ്പെട്ട് നേടിയ ആശയങ്ങൾ പുതിയ സന്ദർഭങ്ങളിൽ പ്രയോഗിക്കുന്നു.			
• കോണുകളുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ആശയങ്ങളിൽനിന്ന് രേഖീയജോടി, എതിർകോൺ എന്നീ ആശയങ്ങൾ വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• കോണുകളുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ധാരണകൾ ഉപയോഗപ്പെടുത്തി പ്രശ്നപരിഹരണം നടത്തുന്നു.			

2

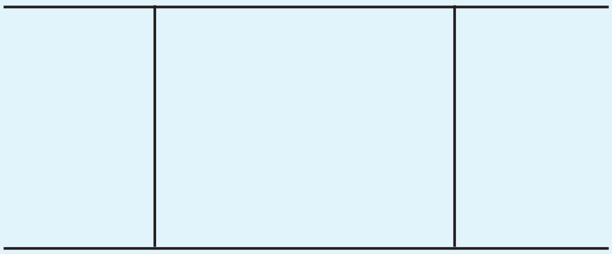
സമാന്തരവരകൾ

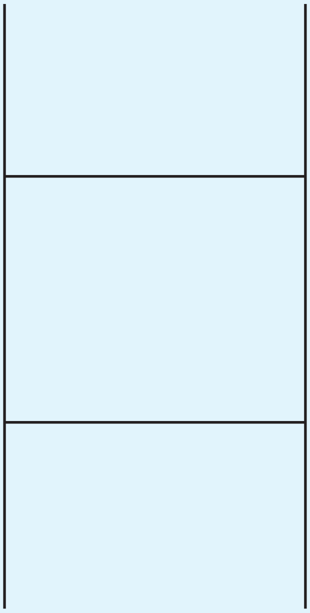


രണ്ടുതരം വരകൾ

ഏതു രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാലും ഒരു വര കിട്ടും. മറിച്ച്, ഏതു രണ്ടു വരകളും ഒരു ബിന്ദുവിൽ കൂട്ടിമുട്ടുമോ?

ഒരു ചതുരത്തിന്റെ ഒരു ജോടി എതിർവശങ്ങൾ നീട്ടിയാലോ?

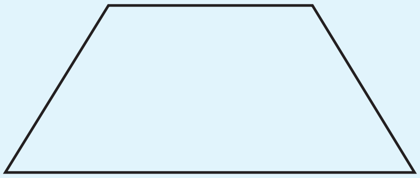




എത്ര നീട്ടിയാലും കൂട്ടിമുട്ടുമോ?

എന്തുകൊണ്ട്?

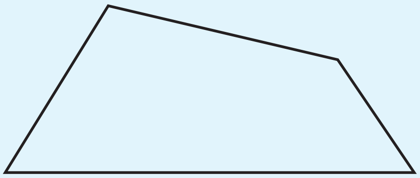
ചുവടെയുള്ള ചതുർഭുജം നോക്കൂ.



മുകളിലും താഴെയുമുള്ള വശങ്ങൾ നീട്ടിയാൽ കൂട്ടിമുട്ടുമോ?

ഇടതും വലതുമുള്ള വശങ്ങൾ നീട്ടിയാലോ?

ചതുർഭുജം ഇങ്ങനെയായാലോ?



ഏതെങ്കിലും എതിർവശങ്ങൾ നീട്ടിയാൽ കൂട്ടിമുട്ടുമോ?

എന്തുകൊണ്ട്?

ഒരേ അകലം പാലിക്കുന്ന, ഒരിക്കലും കൂട്ടിമുട്ടാത്ത വരകളെ സമാന്തരവരകൾ (parallel lines) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

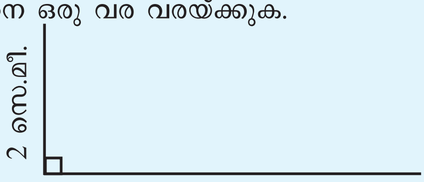
ഒരേ അകലം

ചതുരം വരയ്ക്കാൻ അറിയാമല്ലോ.

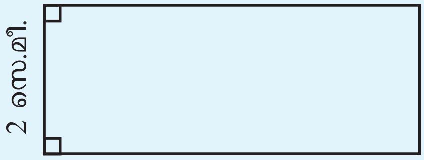
5 സെന്റിമീറ്റർ നീളവും 2 സെന്റിമീറ്റർ വീതിയുമുള്ള ചതുരം വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെ?

പല രീതിയിൽ വരയ്ക്കാമല്ലോ.

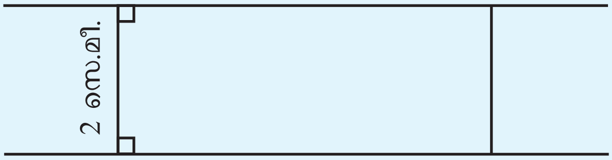
ആദ്യം 5 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ വിലങ്ങനെ ഒരു വര വരച്ച് അതിന്റെ ഒരറ്റത്ത് 2 സെന്റിമീറ്റർ ഉയരത്തിൽ കുത്തനെ ഒരു വര വരയ്ക്കുക.



ഇനി കുത്തനെയുള്ള വരയുടെ അറ്റത്തുനിന്ന് 5 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ ലംബം വരയ്ക്കുക. ഈ വരയുടെ അറ്റവും ആദ്യത്തെ വരയുടെ അറ്റവും ചേർത്തു വരച്ചാൽ ചതുരമായി.

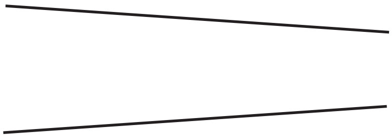


ഇതിന്റെ മുകളിലും താഴെയുമുള്ള വശങ്ങൾ നീട്ടിയാൽ 2 സെന്റിമീറ്റർ അകലം പാലിക്കുന്ന സമാന്തരവരകൾ കിട്ടുമല്ലോ.



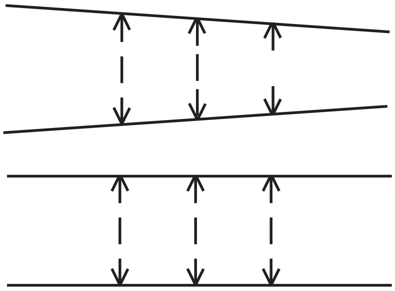
അകലം

ഈ വരകൾ നീട്ടിയാൽ കൂട്ടിമുട്ടുമോ?



ഇങ്ങനെ ആയാലോ?

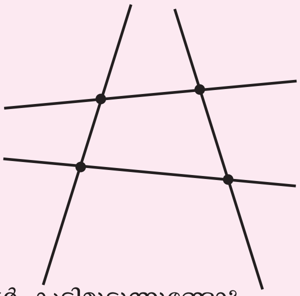
രണ്ടു ചിത്രത്തിലും വരകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം നോക്കൂ.



അപ്പോൾ സമാന്തരമായ വരകൾ തമ്മിലുള്ള അകലത്തെക്കുറിച്ച് എന്തു പറയാം?

സമാന്തരം എന്ന വാക്കിന്റെ അർഥം തന്നെ തുല്യവ്യത്യാസം (സമം = തുല്യം, അന്തരം = വ്യത്യാസം) അഥവാ, ഒരേ അകലം എന്നാണ്.

ജിയോജിബ്രയിൽ ഒരു ചതുർഭുജം വരയ്ക്കുക. Line through two points ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ചതുർഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങൾ നീട്ടുക.



വശങ്ങൾ കൂട്ടിമുട്ടുന്നുണ്ടോ?

Move ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ചതുർഭുജത്തിന്റെ മൂലകൾ മാറ്റി നോക്കൂ. വശങ്ങൾ നീട്ടിയ വരകൾ കൂട്ടിമുട്ടാതാകുന്നത് എപ്പോഴാണ്?

ലംബവും സമാന്തരവും

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ.

വിലങ്ങനെയുള്ള വരയ്ക്ക് ലംബമായ വരകൾ നോക്കൂ.

അവ സമാന്തരമാണോ?

ഇനി ഈ ചിത്രം നോക്കൂ.

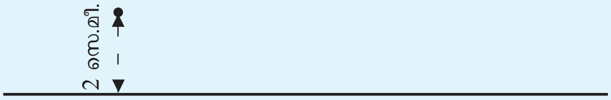
വിലങ്ങനെയുള്ള വരയ്ക്ക് ലംബം വരച്ച്, കുത്തനെയുള്ള ആ വരയ്ക്ക് വീണ്ടും ലംബം വരച്ചിരിക്കുന്നു.

വിലങ്ങനെയുള്ള വരകൾ സമാന്തരമാണോ?

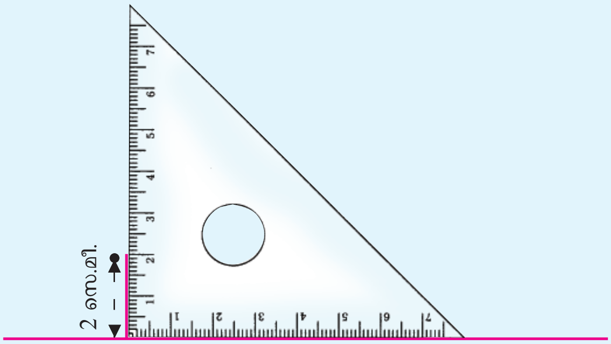
ഒരു വരയ്ക്ക് ലംബമായും സമാന്തരമായും വരകൾ വരയ്ക്കാൻ ജിയോജിബ്രയിൽ പ്രത്യേകം ടൂളുകളുണ്ട്. ആദ്യം ഒരു വര വരച്ച് അതിലൊരു കുത്തിടുക. Perpendicular line ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് വരയിലും കുത്തിലും ക്ലിക്ക് ചെയ്താൽ ഈ കുത്തിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വരയ്ക്ക് ലംബമായ ഒരു വര ലഭിക്കും. കുത്തിന്റെ സ്ഥാനം വരയുടെ പുറത്താണെങ്കിലും ഇങ്ങനെ വരയ്ക്കാം. ഇങ്ങനെ വരച്ച ലംബത്തിന് വീണ്ടും ഒരു ലംബം വരച്ചു നോക്കൂ.

ഒരു വരയ്ക്ക് സമാന്തരമായി മറ്റൊരു വര വരയ്ക്കാൻ Parallel line ടൂളാണ് ഉപയോഗിക്കുന്നത്. വരയുടെ പുറത്തായി ഒരു കുത്തിടുക. ടൂളുപയോഗിച്ച് വരയിലും കുത്തിലും ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക. സമാന്തരമായൊരു വര ലഭിക്കും. Move ടൂളിന്റെ സഹായത്താൽ കുത്തിന്റെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ. കുത്തിന്റെ സ്ഥാനം ആദ്യം വരച്ച വരയിലാകുമ്പോൾ എന്താണ് സംഭവിക്കുന്നത്?

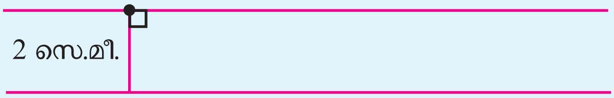
അപ്പോൾ ഒരു വരയും അതിൽനിന്ന് 2 സെന്റിമീറ്റർ അകലെ ഒരു ബിന്ദുവുമെടുത്താൽ ആ ബിന്ദുവിലൂടെ വരയ്ക്ക് സമാന്തരമായ വര വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെ?



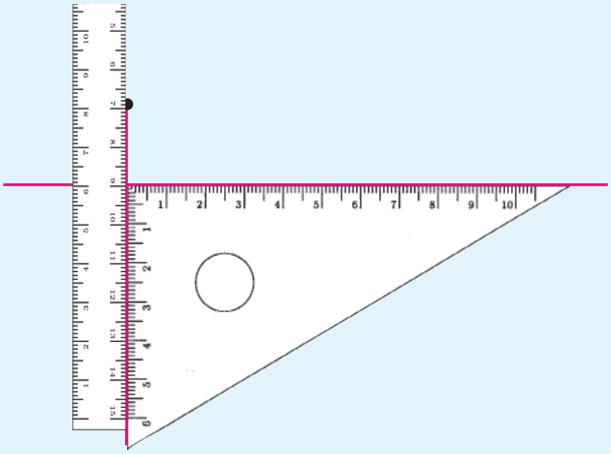
ആദ്യം ബിന്ദുവിലൂടെ വരയ്ക്ക് ലംബം വരയ്ക്കണം.



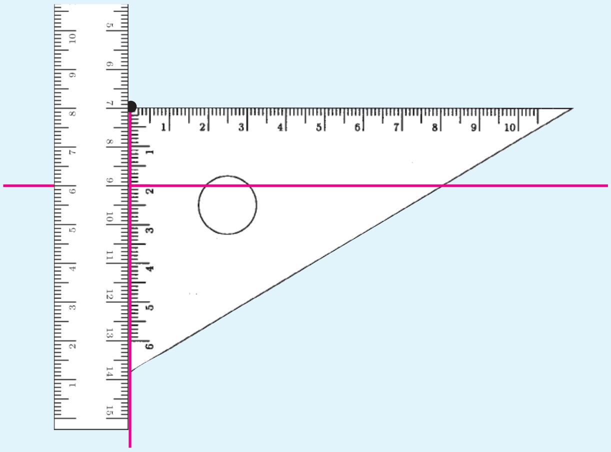
പിന്നെ ഈ ലംബത്തിനു ലംബം വരയ്ക്കണം



ആദ്യത്തെ വരയ്ക്കു ലംബം വരയ്ക്കുന്നതിനു പകരം സ്കെയിൽ പിടിച്ചാലും മതി.



ഇനി മട്ടം മുകളിലേക്ക് മാറ്റി, മട്ടമൂല ബിന്ദുവിലെത്തിച്ചാൽ സമാന്തരവര വരയ്ക്കാം.



ഇനി ബിന്ദു വരയുടെ താഴെയായാലോ?

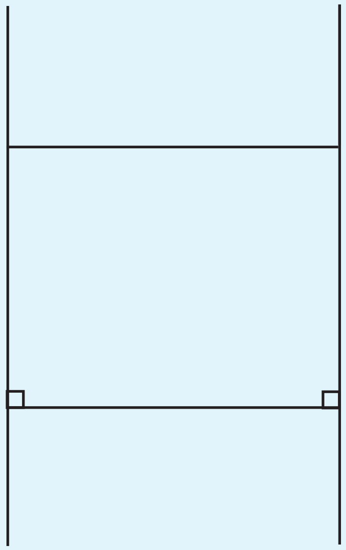
ഇവിടെ കണ്ട കാര്യങ്ങളെന്താണ്?

ഏതു വരയ്ക്കും അതിലല്ലാത്ത ഏതു ബിന്ദുവിലൂടെയും സമാന്തരവര വരയ്ക്കാം.

ഒരു വരയ്ക്ക് അതിലല്ലാത്ത ഒരു ബിന്ദുവിലൂടെ എത്ര സമാന്തരവരകൾ വരയ്ക്കാം?

ഒരേ ദിശ

ചതുരത്തിന്റെ എതിർവശങ്ങൾ സമാന്തരമാണ്.

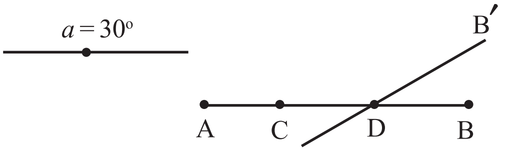


ഇത് മറ്റൊരു തരത്തിൽ പറയാം.

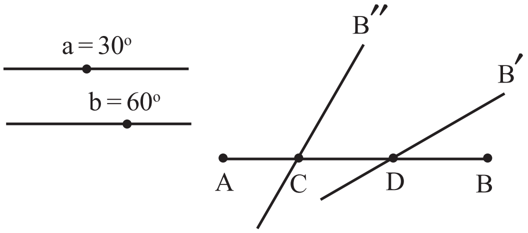
ഒരു വരയ്ക്കു ലംബമായി രണ്ടു വരകൾ വരച്ചാൽ അവ സമാന്തരമാണ്.

ജിയോജിബ്രയിൽ *AB* എന്ന വര വരച്ച് അതിൽ *C*, *D* എന്നിങ്ങനെ രണ്ട് കുത്തുകളിടുക.

ഇനി Slider ടൂൾ എടുത്ത് ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ Angle എന്നതിനു നേരെയുള്ള ചെറിയ വൃത്തത്തിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക. Name ആയി a എന്ന് ടൈപ്പ് ചെയ്യുക. തുടർന്ന് Apply യിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക. Angle with given size ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് B യിലും പിന്നെ D യിലും ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക. ഇപ്പോൾ വരുന്ന ജാലകത്തിൽ Angle എന്നതിന് താഴെയായി a എന്ന് ടൈപ്പ് ചെയ്ത് OK യിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക. ഇപ്പോൾ B′ എന്ന പേരിൽ ഒരു ബിന്ദു ലഭിക്കും. D, B′ എന്നീ കുത്തുകൾ യോജിപ്പിച്ച് ഒരു വര വരയ്ക്കുക.



ഇനി b എന്ന പേരിൽ ഒരു സ്ലൈഡർ കൂടി നിർമിക്കുക. Angle with given size ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് B, C എന്നിവയിൽ ക്രമമായി ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ Angle എന്നതിന് b എന്ന് നൽകി OK യിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക. പുതുതായി ലഭിക്കുന്ന B″ എന്ന ബിന്ദു C യോട് യോജിപ്പിച്ച് വരയ്ക്കുക.

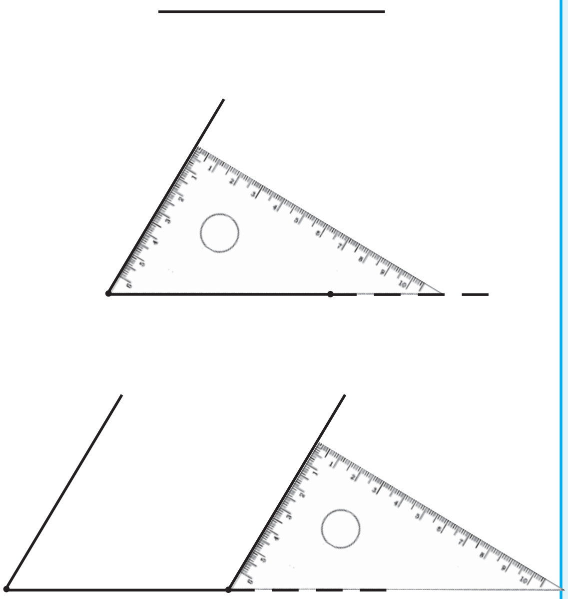


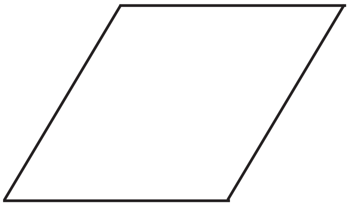
Move ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് a, b എന്നിവയുടെ വില മാറ്റി നോക്കൂ. വരകൾക്ക് എന്താണു സംഭവിക്കുന്നത്? അവ എപ്പോഴാണ് കൂട്ടിമുട്ടാതാകുന്നത്?

ഒരു സ്ലൈഡർ മാത്രം നിർമിച്ച് C യിലും D യിലും ഒരേ കോൺ വരുന്നതുപോലെ ഈ പ്രവർത്തനം ചെയ്തുനോക്കൂ.

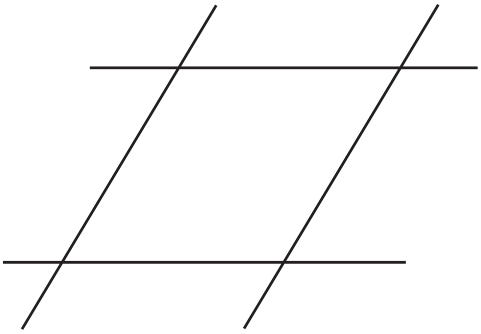
ചതുരമല്ലെങ്കിലും

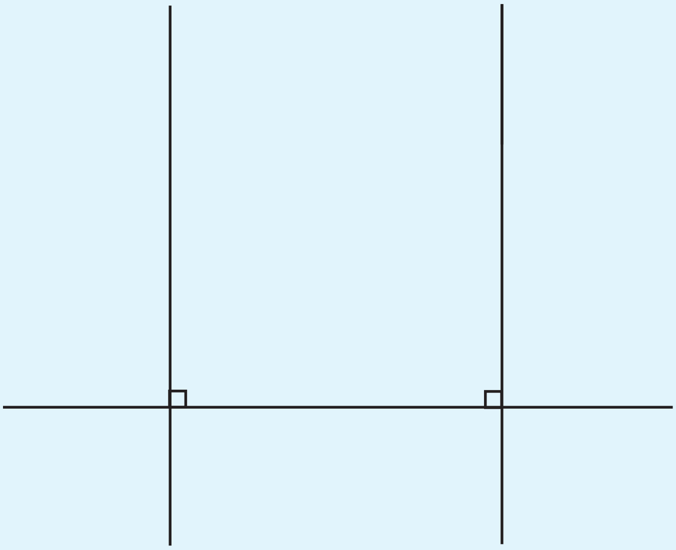
മട്ടം ഉപയോഗിച്ച് ചതുരം വരയ്ക്കാൻ അറിയാമല്ലോ. മട്ടമൂലയ്ക്കു പകരം വേറൊരു മൂല ഉപയോഗിച്ചു വരച്ചാലോ?



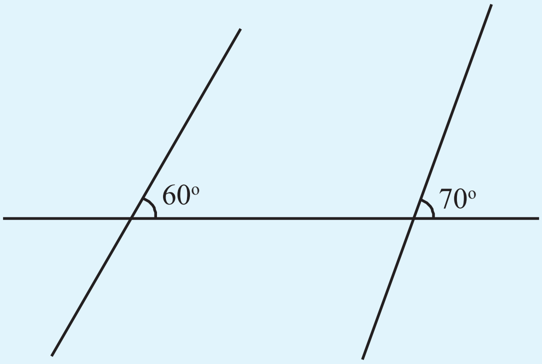


ഇതിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ജോടി എതിർവശങ്ങൾ നീട്ടിയാൽ കൂട്ടിമുട്ടുമോ?





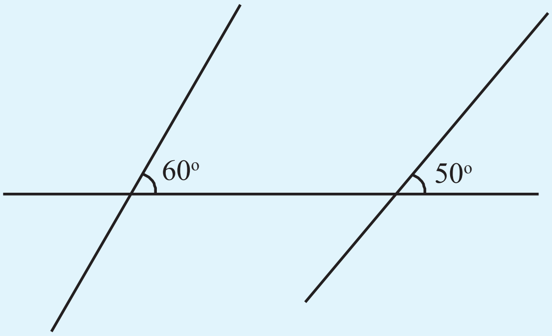
ഇനി, ഈ ചിത്രം നോക്കൂ.



ഇവ സമാന്തരമാണോ?

വരകൾ മുകളിലേക്ക് നീട്ടിയാൽ എന്തു സംഭവിക്കും?

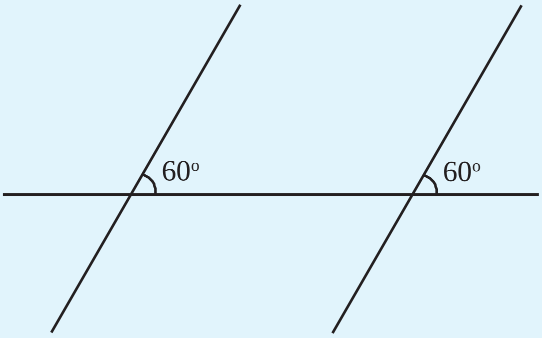
ഇങ്ങനെയായാലോ?



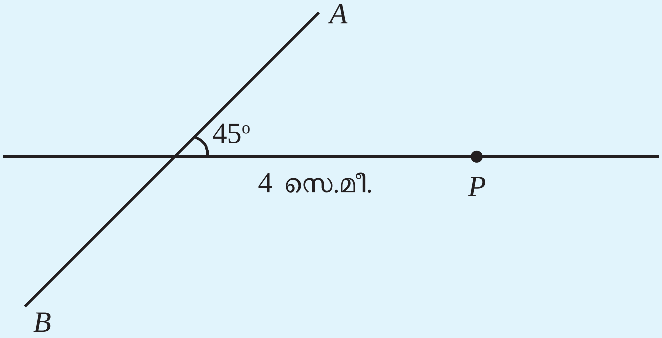
വരകൾ മുകളിലേക്ക് നീട്ടിയാൽ കൂട്ടിമുട്ടുമോ?

താഴോട്ട് നീട്ടിയാലോ?

കൂട്ടിമുട്ടാതിരിക്കാൻ, വലതുവശത്തെ വരയുടെ ചരിവ് എത്ര ഡിഗ്രി ആക്കണം?



ഇനി ചുവടെക്കാണുന്നതുപോലെയുള്ള ഒരു ചിത്രം നിങ്ങളുടെ നോട്ടുപുസ്തകത്തിൽ വരയ്ക്കുക.



P യിൽക്കൂടി *AB* യ്ക്ക് സമാന്തരമായി ഒരു വര വരയ്ക്കാനുള്ള എളുപ്പമാർഗം എന്താണ്?

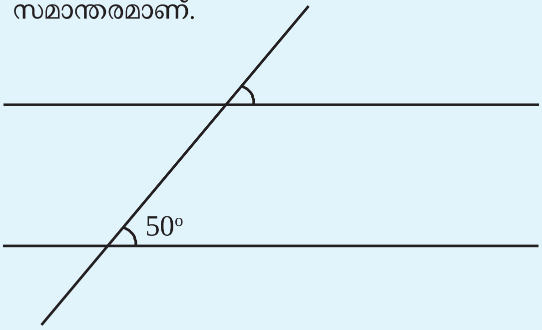
ചുവടെ വരച്ചിരിക്കുന്ന ചതുർഭുജത്തിന്റെ രണ്ടു ജോടി എതിർവശങ്ങളും സമാന്തരമാണ്.

ഈ ചതുർഭുജം ഇതേ അളവുകളിൽ വരയ്ക്കാമോ?

എതിർവശങ്ങൾ സമാന്തരമായ ഇത്തരം ചതുർഭുജത്തിന് സാമാന്തരികം (parallelogram) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

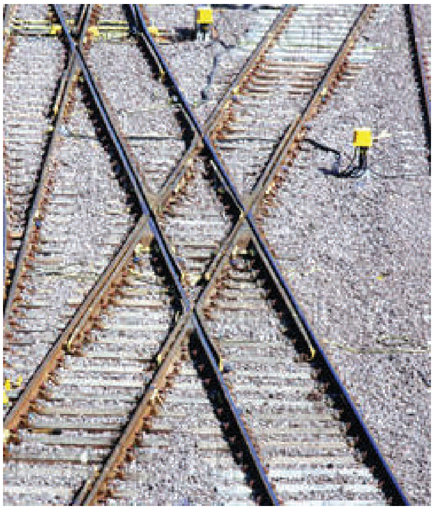
സമാന്തരതയും കോണുകളും

ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിലെ മുകളിലും താഴെയുമുള്ള വരകൾ സമാന്തരമാണ്.

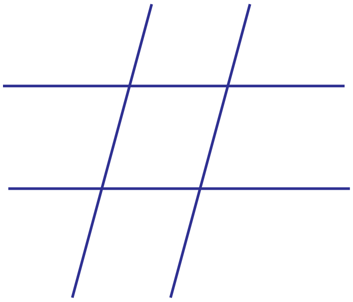


മുകളിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന കോൺ എത്രയാണ്?

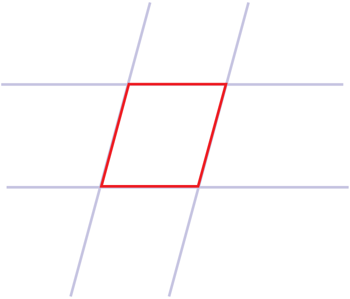
സമാന്തരങ്ങൾ ഖണ്ഡിക്കുമ്പോൾ



ഒരു ജോടി സമാന്തരവരകൾ വരയ്ക്കുക. അവയെ മുറിച്ചുകൊണ്ട് മറ്റൊരു ജോടി സമാന്തരവരകൾ വരയ്ക്കുക.



ഇവയുടെ ഇടയിലുണ്ടായ രൂപം നോക്കൂ.

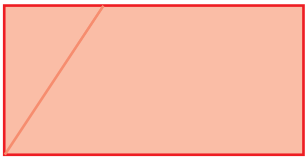


ഈ രൂപത്തിന്റെ പേരെന്താണ്?

ചതുരവും സാമാന്തരികവും

കാർഡ്ബോർഡിൽ ഒരു ചതുരം വെട്ടിയെടുക്കുക.

ഇനി താഴത്തെ മൂലയിൽക്കൂടി ചരിച്ചു വെട്ടി, ചുവടെക്കാണുന്നതുപോലെ ഒരു ത്രികോണം മുറിച്ചെടുക്കുക.

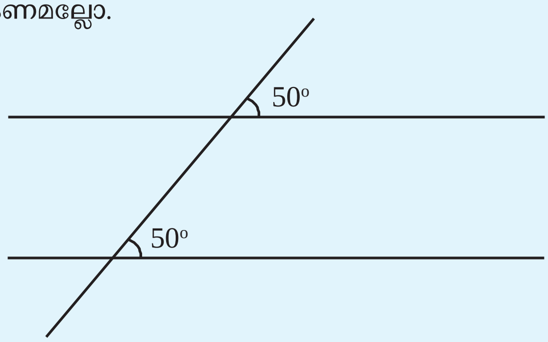


ഈ ത്രികോണം, അടുത്ത ചിത്രത്തിലേതുപോലെ മറുവശത്ത് ചേർത്തു വച്ചാലോ?

ഇതു സാമാന്തരികമാണോ?

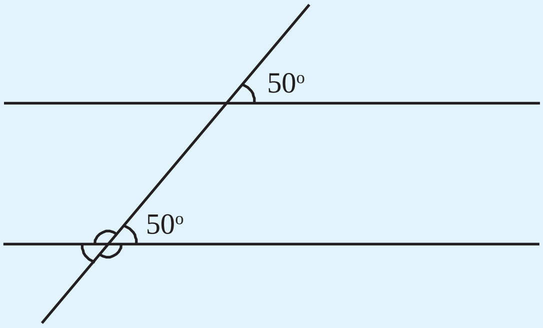
എന്തുകൊണ്ട്?

സമാന്തരവരകൾ മറ്റേതൊരു വരയുമായി ഒരേ ചരിവിൽ ആകണമല്ലോ.

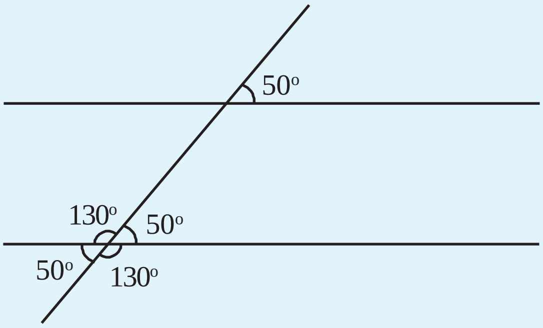


ചിത്രത്തിൽ വേറെയും കോണുകളുണ്ട്. അവയെല്ലാം കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

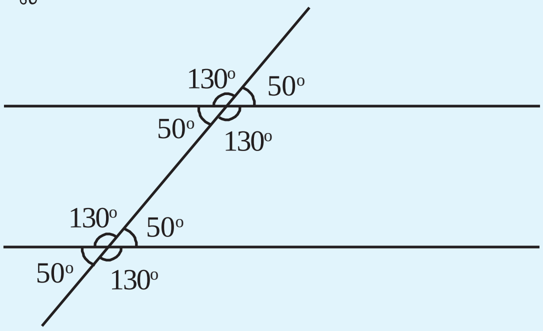
ആദ്യം ചുവടെയുള്ള മറ്റു മൂന്നു കോണുകൾ നോക്കൂ.



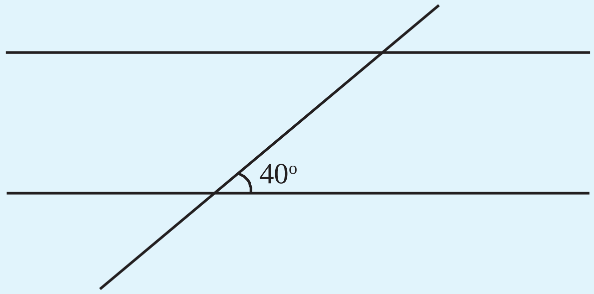
രണ്ടു വരകൾ മുറിച്ചുകടക്കുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന നാലു കോണുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധങ്ങൾ എന്തെല്ലാമാണ്?



ഇതുപോലെ ചിത്രത്തിലെ മുകളിലെ കോണുകളും എഴുതാമല്ലോ.



ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിലും മുകളിലും താഴെയും സമാന്തരവരകളാണ്.

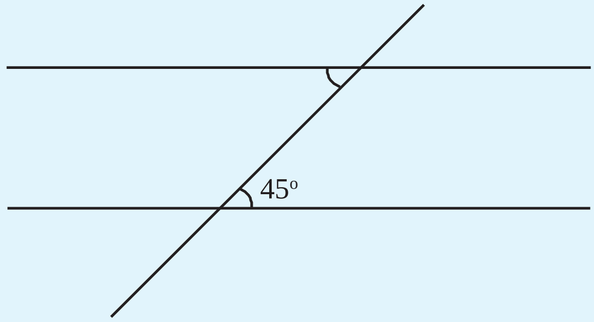


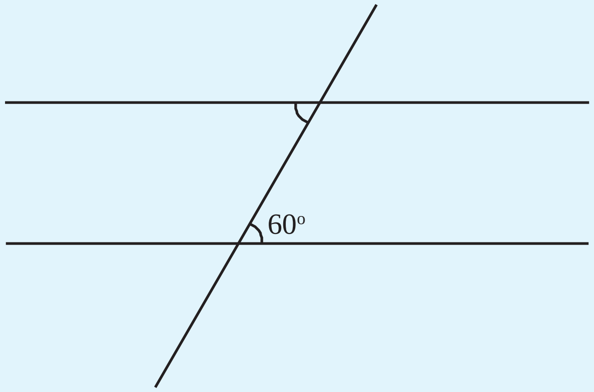
ചിത്രത്തിൽ മറ്റ് ഏഴു കോണുകളുടെയും അളവുകൾ എഴുതുക.

ഇവിടെ കണ്ട കാര്യം ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

> സമാന്തരമായ രണ്ടു വരകൾ മറ്റേതൊരു വരയുമായും ഒരേപോലെയുള്ള കോണുകളാണ് ഉണ്ടാക്കുന്നത്.

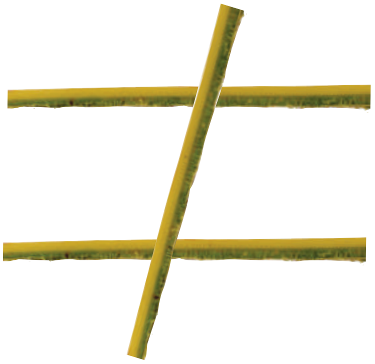
ചുവടെയുള്ള ചിത്രങ്ങളിൽ സമാന്തരമായ വരകളും അവയെ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന മൂന്നാമതൊരു വരയുമുണ്ട്. ഓരോ ചിത്രത്തിലും ഒരു കോണിന്റെ അളവ് എഴുതിയിട്ടുണ്ട്. മറ്റൊരു കോൺ അടയാളപ്പെടുത്തിയിട്ടുമുണ്ട്. ഈ കോൺ കണ്ടുപിടിച്ച് ചിത്രത്തിൽ എഴുതുക.



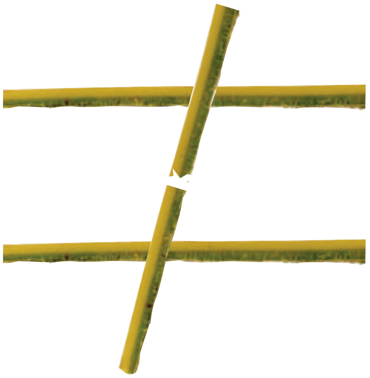


മാറാത്ത രൂപം

രണ്ട് ഈർക്കിൽ കഷണങ്ങൾ സമാന്തരമായി വയ്ക്കുക. ഇതിന് കുറുകെ മറ്റൊരു ഈർക്കിൽ വച്ച് നന്നായി ഒട്ടിക്കുക.



ഇനി ഈ രൂപം നടുക്കുവച്ച് ഒടിച്ച് രണ്ടു ഭാഗമാക്കുക.



ഒരു ഭാഗം മറ്റൊരു ഭാഗത്തിന്റെ മേൽ വച്ചു നോക്കുക. കോണുകൾ കൃത്യമായി ചേർന്നിരിക്കുന്നില്ലേ?

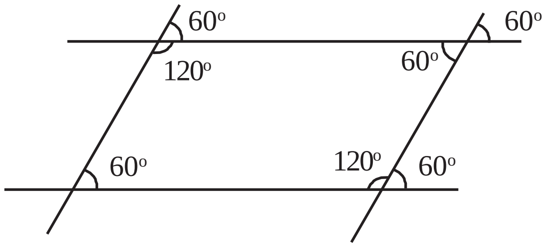
സാമാന്തരികത്തിലെ കോണുകൾ

ഒരു ചതുരത്തിലെ കോണുകളെല്ലാം മട്ടമാണല്ലോ.

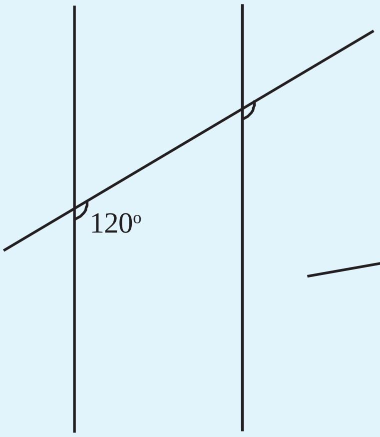
സാമാന്തരികത്തിലോ?

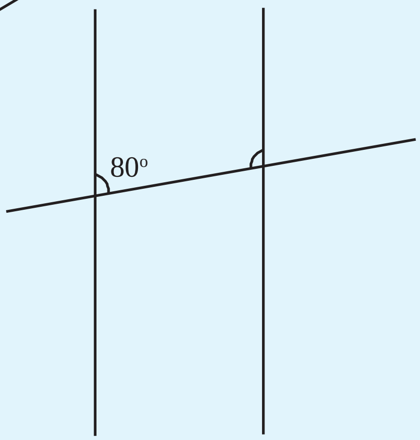
ആദ്യത്തെ സാമാന്തരികത്തിലെ മറ്റു കോണുകൾ കണ്ടുപിടിക്കൂ.

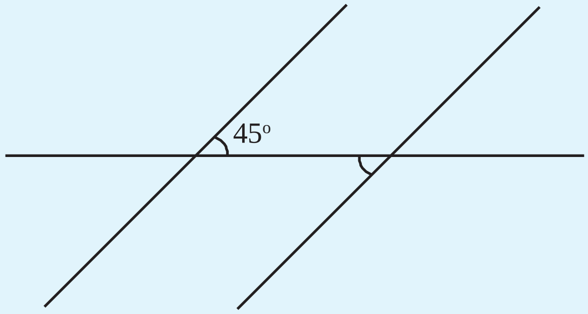
വശങ്ങളെല്ലാം നീട്ടി വരച്ചുനോക്കൂ.



ഇതുപോലെ രണ്ടാമത്തെ സാമാന്തരികത്തിലെ കോണുകൾ കണ്ടുപിടിക്കാം.

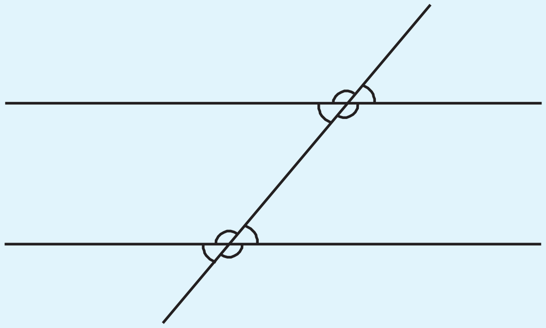






കോൺ പൊരുത്തങ്ങൾ

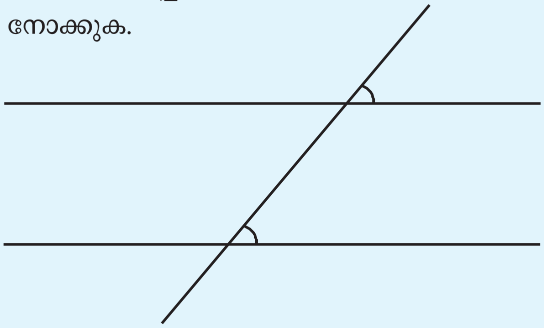
സമാന്തരമായ രണ്ടു വരകളെ മറ്റൊരു വര മുറിച്ചുകടക്കുമ്പോൾ എട്ടു കോണുകൾ ഉണ്ടാകുന്നുണ്ട്.



ചിത്രത്തിൽ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന വരയുമായി താഴത്തെ വര ഉണ്ടാക്കുന്ന നാലു കോണുകളും മുകളിലെ വര ഉണ്ടാക്കുന്ന നാലു കോണുകളുമുണ്ട്.

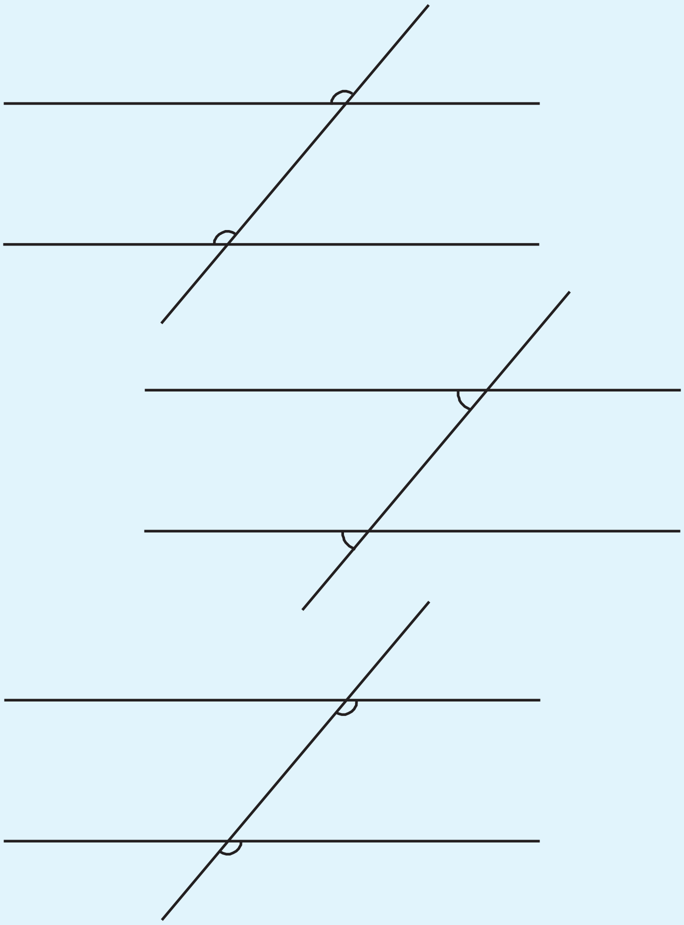
താഴെനിന്നും മുകളിൽനിന്നും ഓരോ കോൺ വീതമെടുത്ത് പല ജോടികളുണ്ടാക്കാം. ചില ജോടികളിലെ കോണുകൾ തുല്യമാണ്. അല്ലാത്തവ അനുപൂരകവും.

തുല്യമായ ജോടികൾ നോക്കാം. ഇവയെ സൗകര്യത്തിനായി രണ്ടായി തരംതിരിച്ചിട്ടുണ്ട്. ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന ഒരു ജോടി കോണുകൾ നോക്കുക.



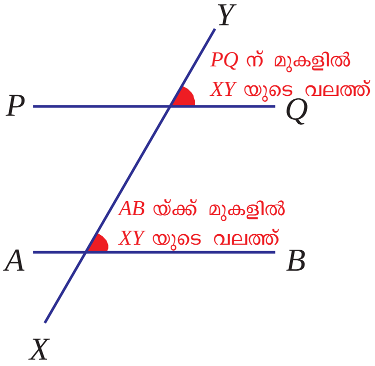
ഇതിൽ ചുവടെയുള്ള കോൺ വിലങ്ങനെയുള്ള വരയുടെ മുകളിലും ചരിഞ്ഞ വരയുടെ വലതുവശത്തുമാണ്. മുകളിലെ കോണും അതിലെ വിലങ്ങനെയുള്ള വരയുടെ മുകളിലും ചരിഞ്ഞ വരയുടെ വലതുവശത്തുമാണ്.

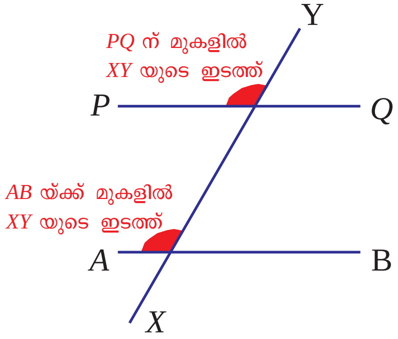
ഇതുപോലെ ചുവട്ടിലും മുകളിലും ഒരേ സ്ഥാനത്തുവരുന്ന മറ്റു മൂന്നു ജോടികൾ കൂടിയുണ്ട്.

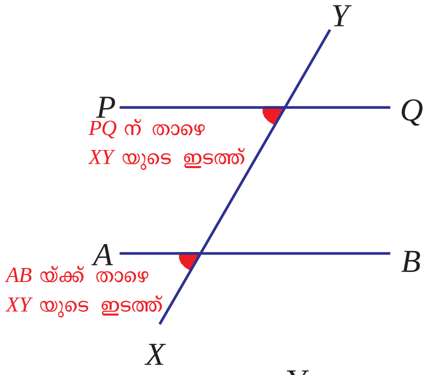


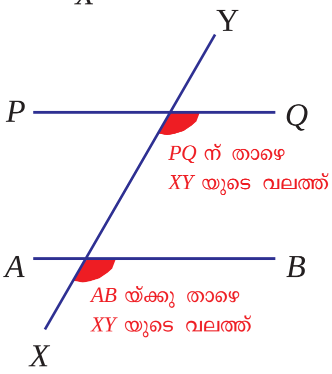
സ്ഥാനമനുസരിച്ചുള്ള ഇത്തരമൊരു ജോടിയിലെ കോണുകളെ സമാനകോണുകൾ (corresponding angles) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

സമാനകോണുകൾ



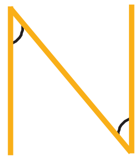






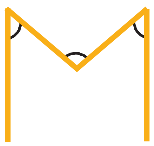
അക്ഷരക്കോണുകൾ

ഇംഗ്ലീഷിലെ N എന്ന അക്ഷരം വലുതാക്കി വരയ്ക്കൂ.



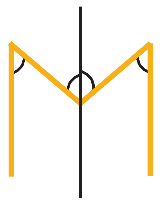
ഇതിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന കോണുകൾ തമ്മിൽ എന്താണ് ബന്ധം?

ഇനി M എന്ന അക്ഷരം നോക്കൂ.

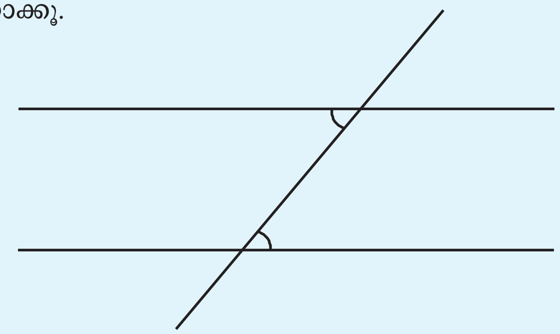


അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന മൂന്നു കോണുകൾ തമ്മിൽ എന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ?

നടുവിലൂടെ കുത്തനെ മറ്റൊരു വര വരച്ചാലോ?



തുല്യമായ കോണുകളെത്തന്നെ മറ്റൊരു തരത്തിൽ ജോടി ചേർക്കാം. ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിലെ കോണുകൾ നോക്കൂ.

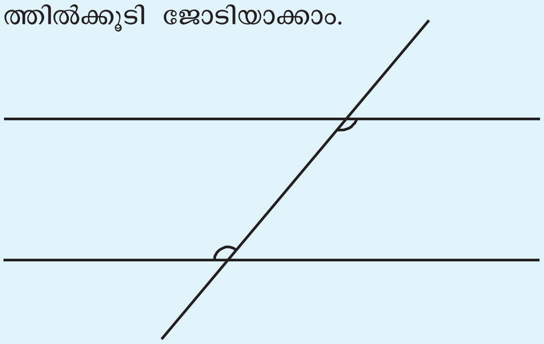


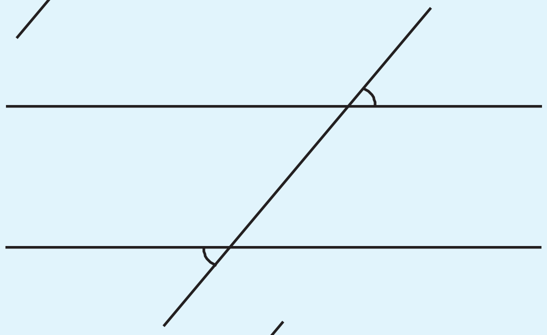
ചുവടെയുള്ള കോൺ, വിലങ്ങനെയുള്ള വരയുടെ മുകളിലും ചരിഞ്ഞ വരയുടെ വലത്തുമാണ്.

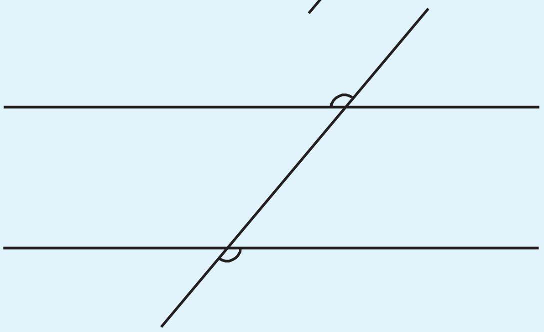
മുകളിലെ കോണോ?

വിലങ്ങനെയുള്ള വരയുടെ താഴെ ചരിഞ്ഞ വരയുടെ ഇടത്ത്.

ഇതുപോലെ സ്ഥാനം തികച്ചും വിപരീതമായി മൂന്നു വിധത്തിൽക്കൂടി ജോടിയാക്കാം.

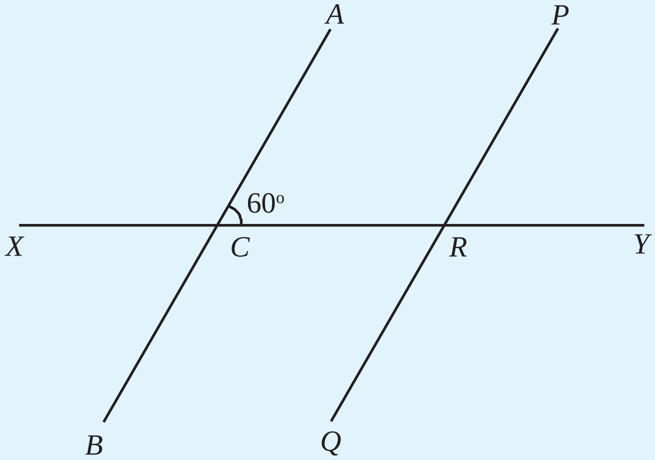






സ്ഥാനം വിപരീതമായ ഇത്തരമൊരു ജോടിയിലെ കോണുകളെ മറുകോണുകൾ (alternate angles) എന്നു പറയുന്നു.

ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ രണ്ടു സമാന്തരവരകൾക്കും മുറിക്കുന്ന വരയ്ക്കും പേരിട്ടിട്ടുണ്ട്. ഒരു കോണിന്റെ അളവും എഴുതിയിട്ടുണ്ട്. സമാനകോണുകളുടെയും മറു കോണുകളുടെയും ജോടികളുടെയെല്ലാം പേരും അളവും എഴുതി പട്ടിക പൂർത്തിയാക്കുക.



സമാനകോണുകൾ	
പേരുകൾ	അളവ്
$\angle ACY$, $\angle PRY$	60°

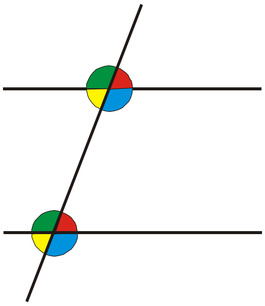
മറുകോണുകൾ	
പേരുകൾ	അളവ്
$\angle ACY$, $\angle QRX$	60°

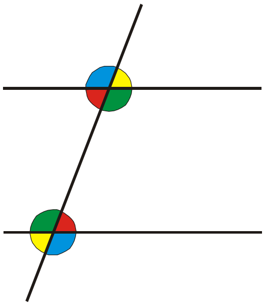
ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ,

രണ്ടു സമാന്തരവരകളെ മറ്റൊരു വര മുറിക്കുമ്പോൾ ഒരു വരയുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന നാലു കോണുകളിൽ നിന്നും രണ്ടാമത്തെ വരയുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന നാലു കോണുകളിൽ നിന്നും ഓരോന്നു വീതമെടുത്ത് പല തരത്തിൽ ജോടികൾ ഉണ്ടാക്കാം. ഇവയിൽ എട്ടു ജോടികളിലെ കോണുകൾ തുല്യമാണ്. കോണുകളുടെ സ്ഥാനങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ നാലു ജോടിക ളിലെ കോണുകളെ സമാനകോണുകളെന്നും മറ്റു നാലു ജോടികളിലെ കോണുകളെ മറുകോണുകൾ എന്നും പറയുന്നു.

സമാനവും വിപരീതവും

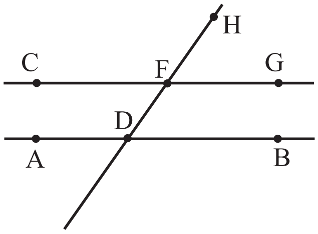
ചുവടെയുള്ള ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ.
ആദ്യത്തെ ചിത്രത്തിൽ സമാനകോണുക ളുടെ ജോടികൾക്ക് ഒരേ നിറം കൊടുത്തിരി ക്കുന്നു.
രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിലോ?



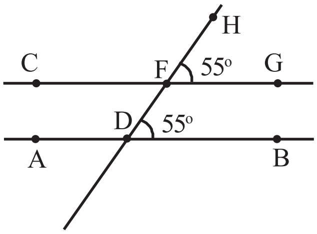


മുകളിലും താഴെയുമുള്ള കോണുകളിൽ ഒരേ നിറം കൊടുത്തിരിക്കുന്ന കോണുകൾ തമ്മിൽ എന്താണ് ബന്ധം?

ജിയോജിബ്രയിൽ AB എന്ന വരയും അതിന് സമാന്തരമായി C യിലൂടെ മറ്റൊരു വരയും വരയ്ക്കുക. ഈ വരകളിൽ D, F എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തി അവ യോജിപ്പിച്ച് ഒരു വര വരയ്ക്കുക. G, H എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ചിത്രത്തിലേതുപോലെ അടയാളപ്പെടുത്തുക.



ഇനി Angle ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് G, F, H എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ക്രമമായി ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക. അതുപോലെ B, D, F എന്നിവയിലും ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക. ഇപ്പോൾ ഈ കോണുകളുടെ അളവ് എത്രയെന്ന് കാണാം.



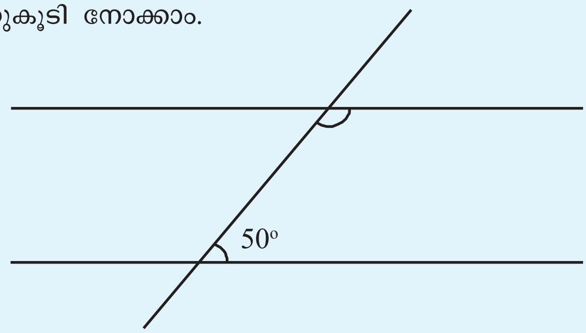
Move ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് F ന്റെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ.

F, D എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ വരുന്ന മറ്റു കോണുകളും ഇതുപോലെ അടയാളപ്പെടുത്തി നോക്കൂ.

ഇനി കോണുകൾക്കു നിറം കൊടുക്കാം. ഇതിനായി കോണിന്റെ ചിഹ്നത്തിൽ Right click ചെയ്യുമ്പോൾ വരുന്ന ഒരു ജാലകത്തിൽ നിന്ന് Object properties തിരഞ്ഞെടുക്കുക. ഇതിൽ Color ൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്ത് ആവശ്യമുള്ള നിറം തിരഞ്ഞെടുക്കുക. ഇങ്ങനെ ഒരേ അളവുള്ള കോണുകൾക്ക് ഒരേ നിറം കൊടുക്കൂ.

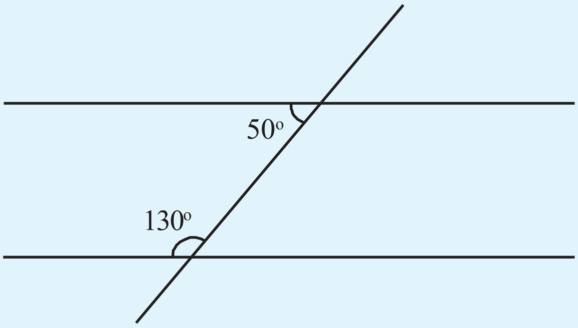
അനുപൂരകങ്ങൾ

രണ്ടു സമാന്തരവരകളെ മറ്റൊരു വര മുറിക്കുന്ന ചിത്രം ഒന്നുകൂടി നോക്കാം.



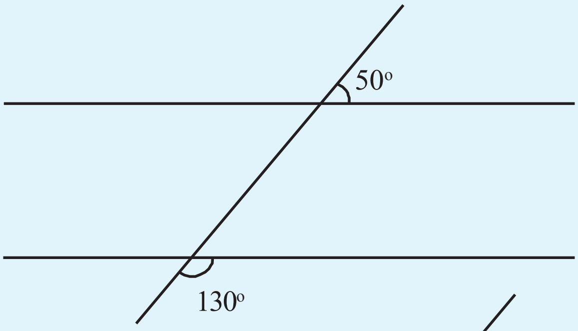
ചിത്രത്തിൽ മുകളിലെ വരയിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന കോണിന്റെ അളവ് എത്രയാണ്?

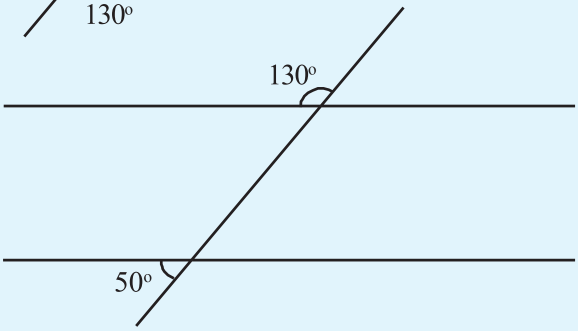
ചരിഞ്ഞ വരയുടെ ഇടതുവശത്തും ഇതുപോലെ അനുപൂരകമായ ഒരു ജോടി കോണുകൾ ഉണ്ടല്ലോ.



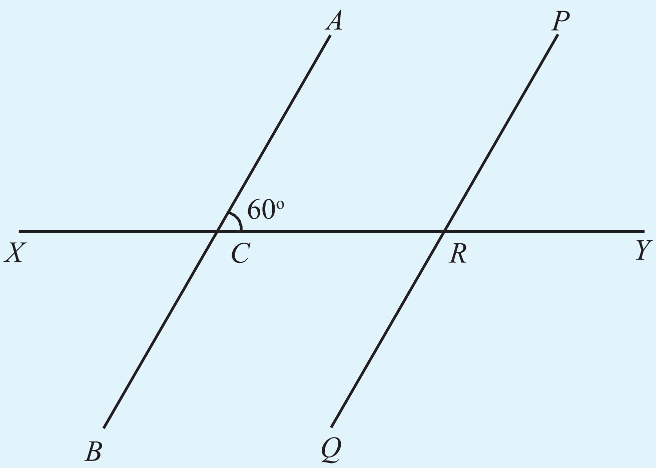
ഈ രണ്ടു ജോടികളിലെയും കോണുകളെ ആന്തരസഹകോണുകൾ (co-interior angles) എന്നാണു പറയുന്നത്.

ഇതുപോലെ അനുപൂരകമായ ബാഹ്യസഹകോണുകളുടെ (co-exterior angles) രണ്ടു ജോടികളുമുണ്ട്.





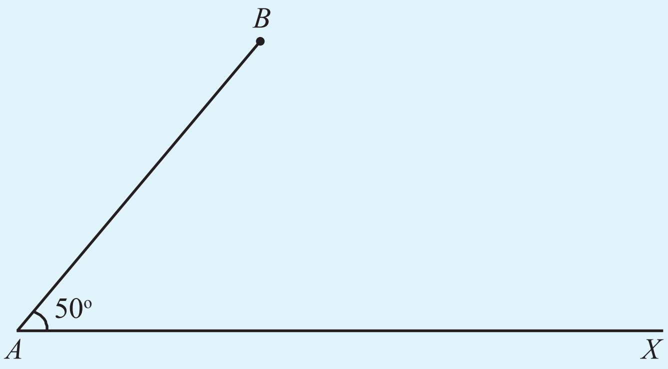
ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ AB, PQ എന്നീ സമാന്തരവരകളെ XY എന്ന വര മുറിച്ചുകടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളാണ് C, R എന്നിവ. ചിത്രത്തിലെ ആന്തരസഹകോണുകളുടെയും ബാഹ്യസഹകോണുകളുടെയും ജോടികൾ കണ്ടുപിടിച്ച് പേരുകളും അളവുകളും ചുവടെ എഴുതുക.



ആന്തരസഹകോണുകൾ	ബാഹ്യസഹകോണുകൾ

സമാന്തരവരകളും ത്രികോണവും

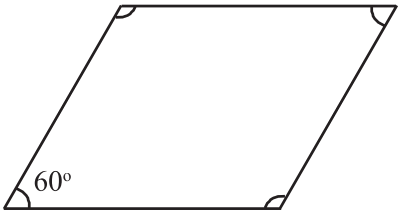
ഈ ചിത്രം നോക്കൂ.



B യിൽ നിന്നു തുടങ്ങുന്ന ഒരു വര AX ന് സമാന്തരമായി വരയ്ക്കണം.

സാമാന്തരികകോണുകൾ

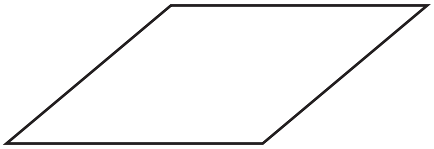
ഈ സാമാന്തരികം നോക്കൂ.



ഇതിലെ മറ്റു മൂന്നു കോണുകളുടെ അളവുകൾ എഴുതാമോ?

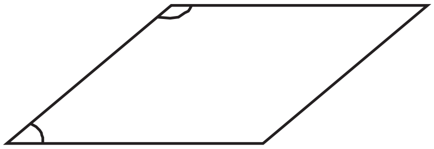
നാലു കോണുകളുടെയും തുക എന്താണ്?

ഇനി ഈ സാമാന്തരികം നോക്കൂ.

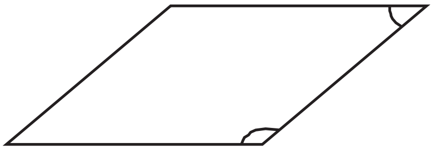


കോണുകളൊന്നും എഴുതിയിട്ടില്ല.

ഇടതുവശത്ത് മുകളിലും താഴെയുമുള്ള കോണുകളുടെ തുക എത്രയാണ്?



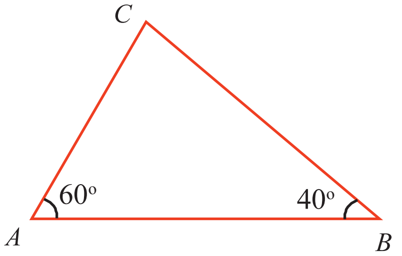
വലതുവശത്ത് മുകളിലും താഴെയുമുള്ള കോണുകളുടെ തുകയോ?



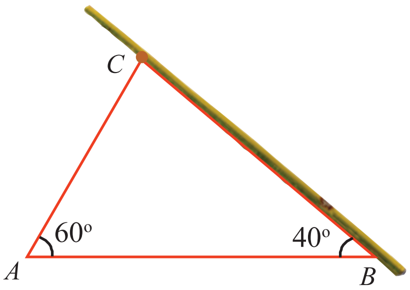
അപ്പോൾ നാലു കോണുകളുടെയും തുകയോ?

ത്രികോണവും സമാന്തരവരകളും

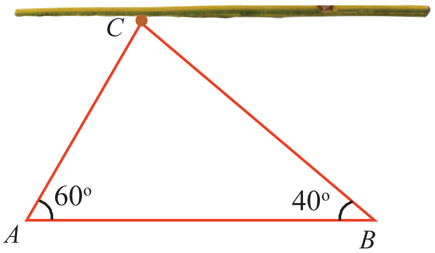
ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ കാർഡ്ബോർഡിൽ ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കുക.



ഇനി നീളമുള്ള ഒരു ഈർക്കിലെടുത്ത് *BC* എന്ന വശത്തോട് ചേർത്തു വച്ച് *C* യിൽ ഒരു സൂചി കുത്തി ഉറപ്പിക്കുക.



ഈർക്കിൽ മുകളിലേക്ക് കറക്കി *AB* യ്ക്ക് സമാന്തരമാക്കുക.



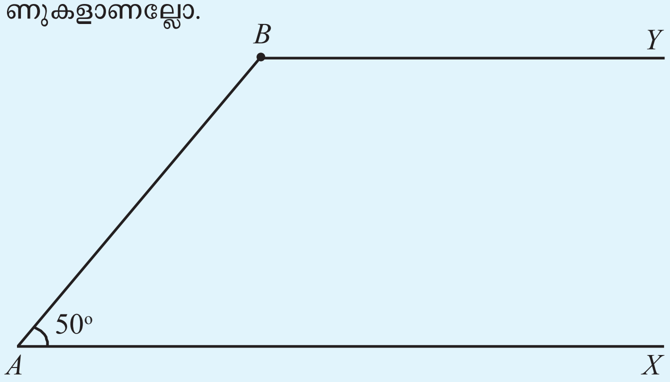
ഇപ്പോൾ ഈർക്കിൽ *BC* യുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ എത്രയാണ്?

AC യുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണോ?

അപ്പോൾ ത്രികോണത്തിൽ *C* യിലെ കോൺ എത്രയാണ്?

എങ്ങനെ വരയ്ക്കാം?

A യിലെ കോണും *B* യിലെ കോണും ആന്തരസഹകോണുകളാണല്ലോ.

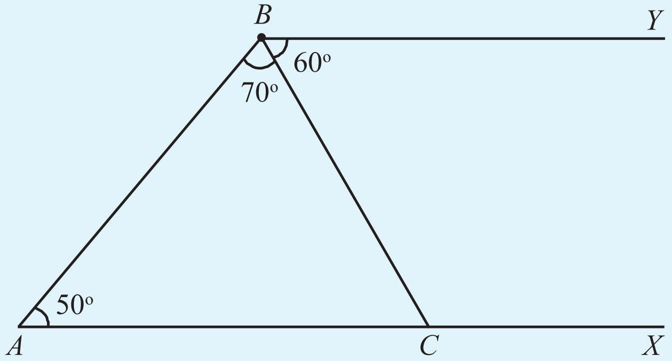


നോട്ടുപുസ്തകത്തിൽ ഈ ചിത്രം വരച്ചുനോക്കൂ.

ഇനി അതേ ചിത്രത്തിൽ *B* യിൽ നിന്ന് ഒരു വര ചരിച്ചു വരയ്ക്കണം. *AB* യുമായുള്ള കോൺ 70° ആവാം.

ഈ വര *AX* ന് സമാന്തരമല്ലല്ലോ.

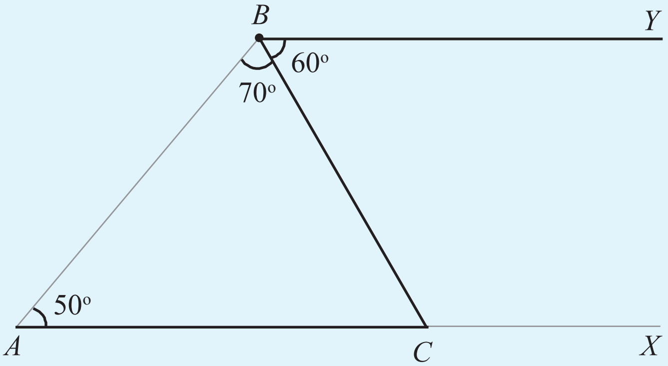
അത് *AX* മായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുവിനെ *C* എന്നു വിളിയ്ക്കാം.



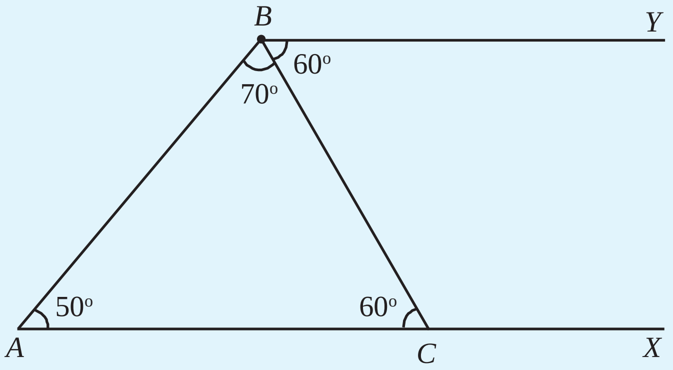
ഇപ്പോൾ *ABC* ഒരു ത്രികോണമാണ്.

അതിലെ *A*, *B* എന്നീ മൂലകളിലെ കോണുകളുടെ അളവുകൾ അറിയാം, *C* യിലെ കോൺ എത്രയാണ്?

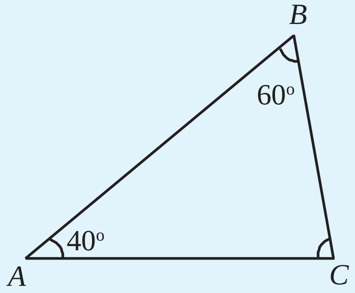
AC, *BY* എന്നിവ സമാന്തരമാണ്. ഈ വരകളും *BC* എന്ന വരയും മാത്രം ശ്രദ്ധിക്കൂ.



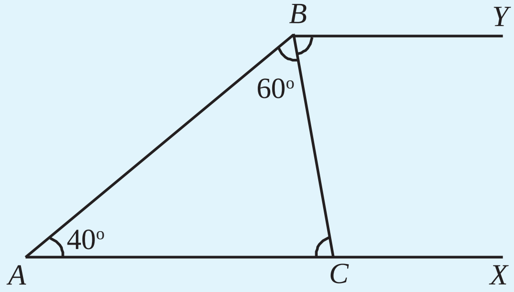
$\angle ACB$, $\angle CBY$ എന്നിവ മറുകോണുകളാണല്ലോ.



ഇനി ചുവടെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ത്രികോണത്തിൽ C യിലെ കോൺ കണ്ടുപിടിക്കാം.



ആദ്യത്തെ ചിത്രത്തിലെപ്പോലെ AC നീട്ടുകയും അതിനു സമാന്തരമായി B യിൽ നിന്ന് ഒരു വര വരയ്ക്കുകയും ചെയ്താലോ?



$\angle ACB$ കണ്ടുപിടിക്കണം, ഇത് $\angle CBY$ ക്ക് തുല്യമാണ്. എന്തുകൊണ്ട്?

$\angle CBY$ കണ്ടുപിടിക്കാൻ $\angle ABY$ അറിഞ്ഞാൽ മതി. അതും $\angle A$ ഉം ആന്തരസഹകോണുകളാണ്.

അപ്പോൾ,

$$\angle ABY = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$$

ഇതിൽനിന്ന്,

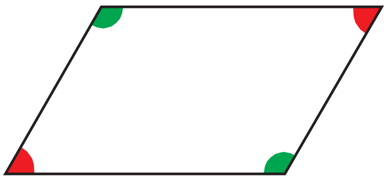
$$\angle CBY = 140^\circ - 60^\circ = 80^\circ$$

അങ്ങനെ,

$$\angle ACB = \angle CBY = 80^0$$

സാമാന്തരികവും ത്രികോണവും

ചുവടെ വരച്ചിരിക്കുന്ന സാമാന്തരികം നോക്കൂ.

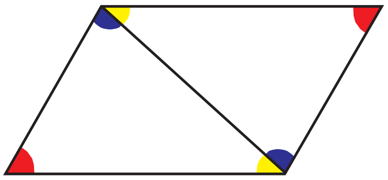


ചുവന്ന നിറത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന കോണുകൾ തമ്മിൽ എന്താണു ബന്ധം?

പച്ചനിറത്തിലുള്ള കോണുകൾ തമ്മിലോ?

വ്യത്യസ്ത നിറങ്ങളുള്ള കോണുകളോ?

ഇനി ഈ സാമാന്തരികത്തിലെ രണ്ട് എതിർമൂലകൾ യോജിപ്പിക്കുക. അപ്പോൾ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളായി.



നീലനിറം കൊടുത്തിരിക്കുന്ന കോണുകൾ തമ്മിൽ എന്താണു ബന്ധം?

മഞ്ഞനിറമുള്ള കോണുകൾ തമ്മിലോ?

അപ്പോൾ വ്യത്യസ്ത നിറങ്ങളുള്ള മൂന്നു കോണുകളെടുത്തു കൂട്ടിയാൽ എന്തുകിട്ടും?

ഓരോ ത്രികോണത്തിലെയും മൂന്നു കോണുകളുടെ തുക എത്രയാണ്?

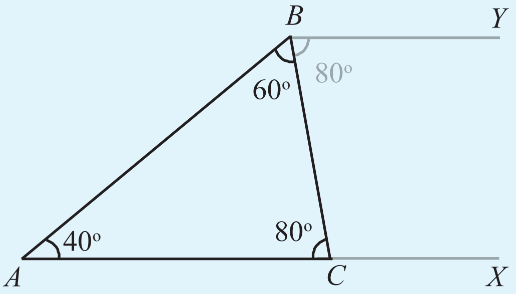
തത്ത്വവും തെളിവും

എല്ലാ ത്രികോണങ്ങളിലും മൂന്നു കോണുകളുടെ തുക 180° ആണെന്ന് എങ്ങനെ തീരുമാനിക്കും? കുറേ ത്രികോണങ്ങൾ വരച്ച് ഓരോന്നിന്റെയും കോണുകൾ അളന്നു കൂട്ടിനോക്കിയാൽ മതിയോ? ഇക്കൂട്ടത്തിലില്ലാത്ത ഒരു ത്രികോണത്തിലും കോണുകളുടെ തുക 180° തന്നെയാണെന്ന് എങ്ങനെ പറയാൻ കഴിയും?

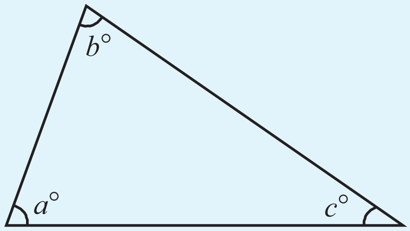
ഏതു ത്രികോണത്തിലും ഒരു മൂലയിലൂടെ എതിർവശത്തിനു സമാന്തരമായി ഒരു വര വരയ്ക്കാം. സമാന്തരവരകൾ ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണത്തിലെ കോണുകളുടെ തുക 180° ആണെന്നു കാണാം.

ഇങ്ങനെ ചെയ്യുന്നതിലൂടെ പലകാര്യങ്ങളും സാധിക്കുന്നുണ്ട്.

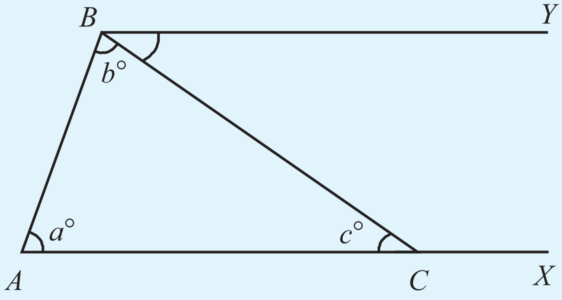
- ത്രികോണം മാറിയാലും, ഇവിടെ പറയുന്ന വാദങ്ങൾ മാറുന്നില്ല. അതിനാൽ അവയിലൂടെ സ്ഥാപിക്കുന്ന വസ്തുതയും എല്ലാ ത്രികോണങ്ങളിലും ശരിയാണ്.
- സമാന്തരവരകളെ സംബന്ധിക്കുന്ന തത്ത്വങ്ങൾ പെട്ടെന്നു തിരിച്ചറിയാം. ത്രികോണങ്ങളുടെ കോണുകളുടെ തുക 180° ആണെന്ന് തിരിച്ചറിയാൻ എളുപ്പമല്ല. ലളിതമായ തത്ത്വങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് സങ്കീർണമായ തത്ത്വങ്ങൾ സ്ഥാപിക്കുന്നതിന്റെ ഒരു ഉദാഹരണമാണിത്.
- സമാന്തരവരകൾ ഉപയോഗിച്ച് ഒരു കാര്യത്തിൽനിന്ന് മറ്റൊന്ന് എന്ന രീതിയിൽ വാദങ്ങൾ കോർത്തിണക്കുമ്പോൾ, ത്രികോണത്തിലെ കോണുകളുടെ തുക 180° ആണെന്ന തത്ത്വം മാത്രമല്ല, അത് എന്തുകൊണ്ടാണെന്നും വ്യക്തമാകുന്നു.



ഇനി ഈ ത്രികോണം നോക്കുക.



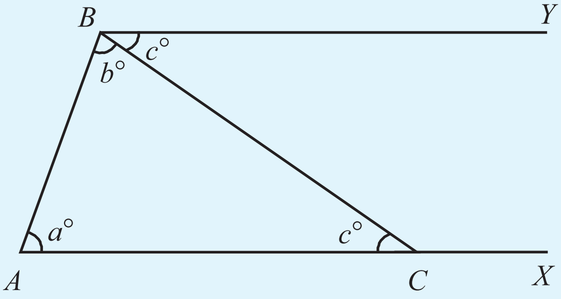
കോണുകളുടെ അളവുകൾ a, b, c എന്നീ അക്ഷരങ്ങൾകൊണ്ടാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം എന്താണ്? പഴയപോലെ സമാന്തരവരകൾ വരയ്ക്കാം.



ചിത്രത്തിൽനിന്ന്

$$\angle CBY = \angle ACB = c^\circ$$

എന്നു കാണാം.



ഈ ചിത്രത്തിൽ നിന്ന്

$$\angle A + \angle ABY = 180^\circ$$

അതായത്,

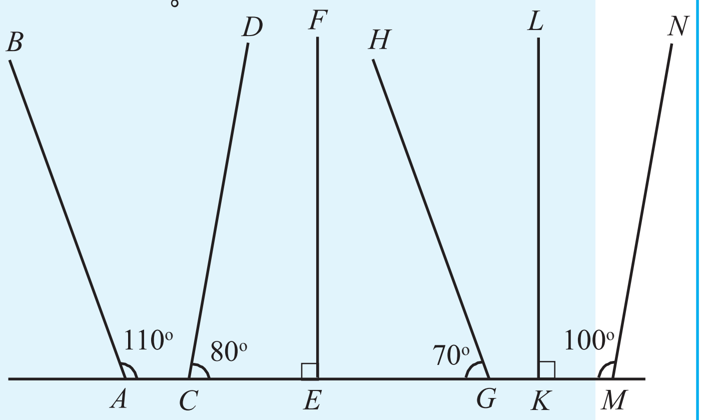
$$a+b+c \ = 180^{\circ}$$

ഇതിൽനിന്ന് എന്തു മനസ്സിലായി?

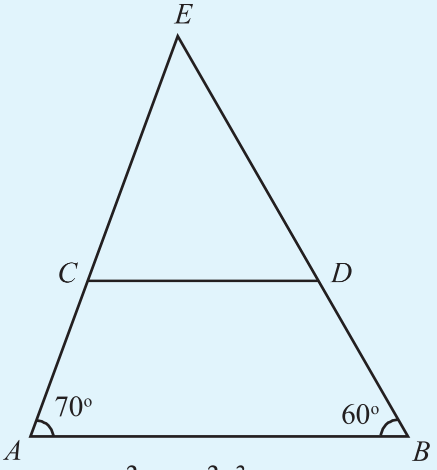
> ഏതു ത്രികോണത്തിലെയും കോണുകളുടെ തുക 180° ആണ്.

ചെയ്തുനോക്കാം

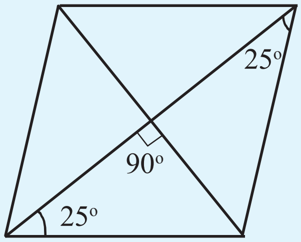
- ചിത്രത്തിലെ വരകളിൽ സമാന്തരങ്ങളായ ജോടികൾ കണ്ടെത്തുക.



- ചിത്രത്തിൽ AB യും CD യും സമാന്തരമാണ്. ചിത്രത്തിലെ എല്ലാ കോണുകളും കണക്കാക്കുക.

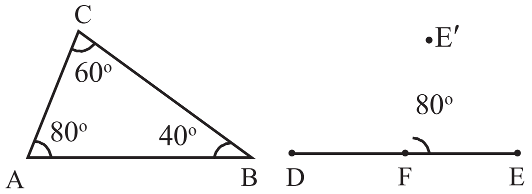


- ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ വികർണങ്ങൾ അതിനെ നാലു ത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിച്ചിരിക്കുന്നു. ഓരോ ത്രികോണത്തിന്റെയും എല്ലാ കോണുകളും കണക്കാക്കുക.



മാറാത്ത ബന്ധം

ജിയോജിബ്രയിൽ Polygon ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണം ABC നിർമിക്കുക. Angle ടൂൾ എടുത്ത് ത്രികോണത്തിനുള്ളിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്താൽ ത്രികോണത്തിന്റെ കോണളവുകൾ കാണാൻ കഴിയും.



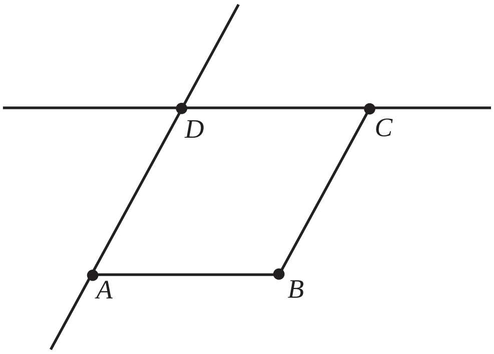
ഇനി DE എന്ന വര വരച്ച് അതിൽ ഒരു കുത്ത് F ഇടുക. Angle with given size ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് E യിലും F ലും ക്രമമായി ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക. വരുന്ന ജാലകത്തിൽ Angle ആയി α എന്നു നൽകി OK ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക. ഇപ്പോൾ പുതിയ ഒരു ബിന്ദു E' ലഭിക്കും. ഇതേ ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് E', F ഇവയിൽ ക്രമമായി ക്ലിക്ക് ചെയ്ത് Angle β എന്ന് നൽകുക. പുതിയ ഒരു ബിന്ദു E'' ലഭിക്കും. E'', F എന്നിവയിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്ത് Angle γ എന്നും നൽകുക. പുതിയ ഒരു ബിന്ദു E''' ലഭിക്കും. FE', FE'' എന്നീ വരകൾ വരയ്ക്കുക. ഇങ്ങനെ ലഭിക്കുന്ന ചിത്രത്തിൽ $\angle EFE' = \angle A$; $\angle E'\ FE'' = \angle B$; $\angle E''\ FE''' = \angle C$ ആയിരിക്കും. രണ്ടു ചിത്രങ്ങളിലെയും ഒരേ അളവുകളുള്ള കോണുകൾക്ക് ഒരേ നിറം നൽകുക.

Move ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് കോണുകൾ മാറ്റി നോക്കൂ. വലതുവശത്തെ ചിത്രത്തിലും ഓരോ കോണിനും മാറ്റം വരുന്നില്ലേ? ഇവിടെ മാറാതെ നിൽക്കുന്നത് എന്താണ്?

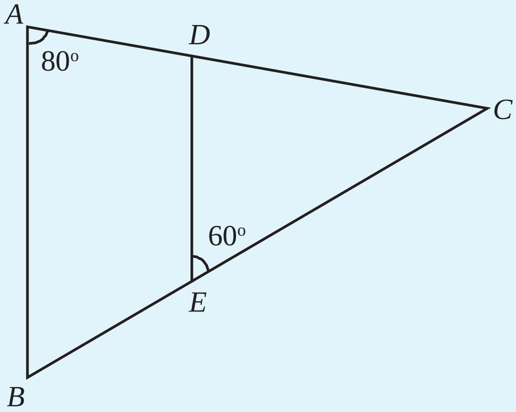
സാമാന്തരികം വരയ്ക്കാം

ജിയോജിബ്രയിൽ ഒരു സാമാന്തരികം വരയ്ക്കാം.

AB, *BC* എന്നീ വരകൾ വരയ്ക്കുക Parallel line ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് *AB* യ്ക്കു സമാന്തരമായി *C* യിലൂടെയും *BC* യ്ക്കു സമാന്തരമായി *A* യിലൂടെയും വരകൾ വരയ്ക്കുക. ഈ വരകൾ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു *D* അടയാളപ്പെടുത്തുക. Polygon ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് സാമാന്തരികം *ABCD* പൂർത്തിയാക്കുക. ആവശ്യമില്ലാത്ത വരകൾ മറയ്ക്കാം.

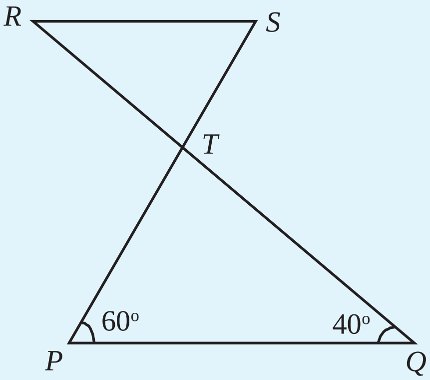


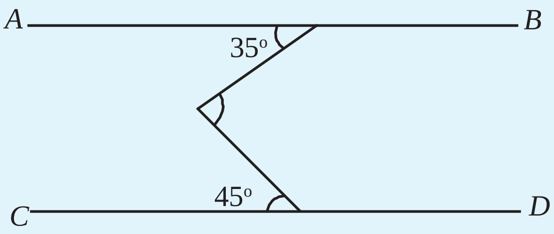
AB എന്ന വരയിൽ Right click ചെയ്ത് വരുന്ന ജാലകത്തിൽ Trace on എന്നതിനു നേരെ ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക. ഇതുപോലെ *BC* എന്ന വരയുടെയും Trace on നൽകുക. ഇനി Move ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് സാമാന്തരികത്തിനുള്ളിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്തു പിടിച്ചുകൊണ്ട് നേരെ മുകളിലേക്ക് ഉയർത്തി നോക്കൂ. എന്താണ് കിട്ടുന്നത്?

- 

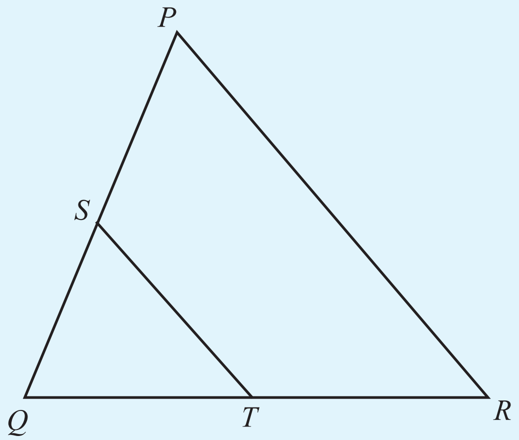
  ചിത്രത്തിൽ *AB* യും *DE* യും സമാന്തരമാണ്. രണ്ട് ത്രികോണങ്ങളിലെയും എല്ലാ കോണുകളും കണക്കാക്കുക.

- ചിത്രത്തിൽ *PQ* വും *RS* ഉം സമാന്തരമാണ്. ചിത്രത്തിലെ മറ്റു കോണുകൾ കണക്കാക്കുക.

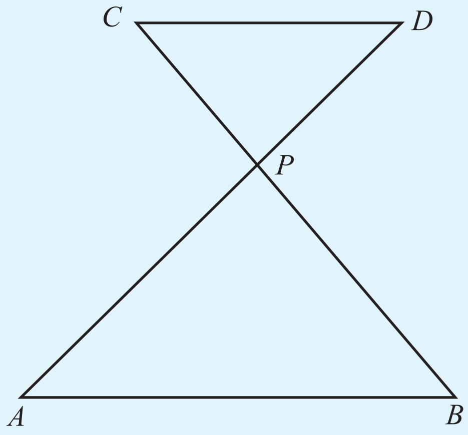


- 

  ചിത്രത്തിൽ *AB* യും *CD* യും സമാന്തരമാണ്. മൂന്നാമത്തെ കോൺ കണക്കാക്കുക.

- 

ചിത്രത്തിൽ PR ഉം ST യും സമാന്തരമാണ്. വലിയ ത്രികോണത്തിലെയും ചെറിയ ത്രികോണത്തിലെയും കോണുകളുടെ അളവുകൾ തമ്മിൽ എന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ?

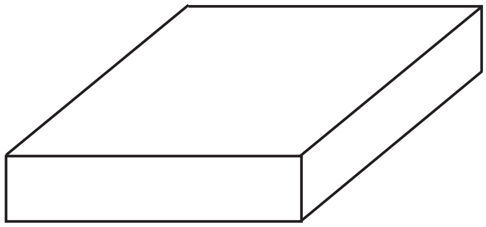
- 

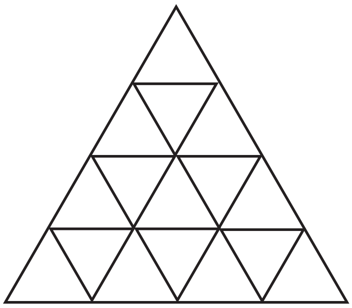
AB യും CD യും സമാന്തരമാണ്. വലിയ ത്രികോണത്തിലെയും ചെറിയ ത്രികോണത്തിലെയും കോണുകളുടെ അളവുകൾ തമ്മിൽ എന്താണു ബന്ധം?

- AB എന്ന വര വരച്ച് അതിന് സമാന്തരമായി CD എന്ന മറ്റൊരു വര വരയ്ക്കുക. ഈ രണ്ടു വരകളെയും മുറിച്ചുകടക്കുന്ന EF എന്ന വര വയ്ക്കുക. EF എന്ന വര AB, CD എന്നീ വരകളെ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ M, N എന്നിവയാണ്. ഇപ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന കോണുകളിൽ ഒന്ന് അളന്നെഴുതുക. മറ്റു കോണുകളുടെ അളവുകൾ അളന്നു നോക്കാതെ എഴുതുക. ചിത്രത്തിലെ സമാനകോണുകൾ, മറുകോണുകൾ, സഹകോണുകൾ എന്നിവകളുടെ ജോടികളെല്ലാം എഴുതുക.

ചിത്രങ്ങൾ വരയ്ക്കുക

ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് ചുവടെയുള്ള ചിത്രങ്ങൾ വരച്ചുനോക്കൂ.





വലിയ ത്രികോണം വരയ്ക്കാൻ Regular Polygon ടൂൾ ഉപയോഗിക്കാം.

തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്
• തുല്യ അകലത്തിലുള്ള വരകളെന്ന നിലയിൽ സമാന്തരവരകളെ വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• ചരിവ്/ലംബം എന്നിവയുമായി ബന്ധപ്പെടുത്തി സമാന്തരവരകളെ വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• വിവിധ രീതികളിൽ സമാന്തരവരകൾ വരയ്ക്കാനും ഇവ സമാന്തരമാണെന്ന് സമർഥിക്കാനും കഴിയുന്നു.			
• സമാന്തരവരകളെ മാതൃകകൾ തയാറാക്കി വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• രണ്ടു സമാന്തരവരകളെ ഒരു വര മുറിച്ചു കടക്കുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന ഒരു കോൺ തന്നാൽ മറ്റുള്ളവ കണ്ടെത്തുന്ന രീതി സമർഥിക്കുന്നു.			
• സമാന്തരവരകളുടെ പ്രത്യേകതകൾ വിശദീകരിക്കുന്നതിന് ഐ.സി.ടി. സാധ്യതകൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു.			
• സമാന്തരവരകളിലെ സമാനകോണുകൾ, മറുകോണുകൾ, സഹകോണുകൾ എന്നിവയുടെ പ്രത്യേകതകൾ വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• ത്രികോണത്തിലെ കോണളവുകളുടെ തുക 180° ആണ് എന്ന് യുക്തിപൂർവ്വം സമർഥിക്കുന്നു.			

3

മാറുന്ന സംഖ്യകളും മാറാത്ത ബന്ധങ്ങളും

മാറാത്ത ബന്ധങ്ങൾ

പല വലുപ്പത്തിൽ സമചതുരം വരയ്ക്കാം. വശങ്ങളുടെ നീളം മാറുന്നതനുസരിച്ച് ചുറ്റളവും മാറും. എന്നാൽ എല്ലാ സമചതുരങ്ങളിലും ചുറ്റളവ്, വശത്തിന്റെ നീളത്തിന്റെ നാലു മടങ്ങ് തന്നെയാണ്. പരപ്പളവ്, വശത്തിന്റെ നീളത്തെ അതുകൊണ്ടുതന്നെ ഗുണിച്ചതും.

ഇങ്ങനെ അളവുകൾ മാറുമ്പോഴും, അവ തമ്മിലുള്ള ചില ബന്ധങ്ങൾ മാറാതിരിക്കുന്ന അനേകം സന്ദർഭങ്ങളുണ്ട്. ഉദാഹരണമായി, ഇരുമ്പു കൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ പല വസ്തുക്കൾ എടുത്താൽ, അവയുടെ വ്യാപ്തവും ഭാരവും വ്യത്യസ്തമായിരിക്കും. എന്നാൽ ഭാരത്തെ വ്യാപ്തം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 7.8 എന്ന ഒരേ സംഖ്യ തന്നെ കിട്ടും. ഇതിനെയാണ് ഇരുമ്പിന്റെ സാന്ദ്രത എന്നു പറയുന്നത്. ഇരുമ്പിനു പകരം ചെമ്പു കൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ വസ്തുക്കളിലെല്ലാം ഭാരത്തെ വ്യാപ്തംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്നത് 8.9 ആണ്. ഇതാണ് ചെമ്പിന്റെ സാന്ദ്രത.

ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ, അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള മാറാത്ത ബന്ധത്തെ അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. ഉദാഹരണമായി, ഇരുമ്പുകൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഭാരം w എന്നും വ്യാപ്തം v എന്നുമെടുത്താൽ

$$w = 7.8v$$

എന്നെഴുതാം. ഇരുമ്പിനു പകരം ചെമ്പാണെങ്കിൽ, ഈ ബന്ധം

$$w = 8.9v$$

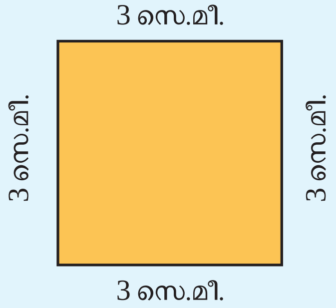
എന്നാകും. പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഭാരം w, വ്യാപ്തം v, അതുണ്ടാക്കിയിരിക്കുന്ന പദാർഥത്തിന്റെ സാന്ദ്രത d എന്നെടുത്താൽ, ഈ അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള പൊതുവായ ബന്ധം

$$w = dv$$

എന്നെഴുതാം.

അളവുകളുടെ ബന്ധങ്ങൾ

ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം 3 സെന്റിമീറ്ററാണ്. അതിന്റെ ചുറ്റളവ് എത്രയാണ്?



വശത്തിന്റെ നീളം 5 സെന്റിമീറ്റർ ആയാലോ?

ഏതു സമചതുരത്തിന്റെയും ചുറ്റളവ്, ഒരു വശത്തിന്റെ നീളത്തിന്റെ നാലു മടങ്ങാണല്ലോ. ഇക്കാര്യം അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ചുരുക്കിയെഴുതിയത് ഓർമയുണ്ടോ?

സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളത്തെ s എന്ന അക്ഷരം കൊണ്ടും ചുറ്റളവിനെ p എന്ന അക്ഷരംകൊണ്ടും സൂചിപ്പിച്ചാൽ,

$$p = 4 \times s$$

എന്നെഴുതാം. ഇങ്ങനെ അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം എഴുതുമ്പോൾ $\times$ എന്ന ഗുണന ചിഹ്നം എഴുതാറില്ലെന്നും (അതിന്റെ കാരണവും) നമുക്കറിയാം. അപ്പോൾ ഏതു സമചതുരത്തിന്റെയും വശത്തിന്റെ നീളമായ s ഉം ചുറ്റളവായ p ഉം തമ്മിലുള്ള ബന്ധം

$$p = 4s$$

എന്നെഴുതാം.

സമചതുരത്തിനു പകരം ചതുരമായാലോ?

രണ്ടു വ്യത്യസ്ത വശങ്ങളുടെ നീളം അറിയാമെങ്കിൽ ചുറ്റളവ് എങ്ങനെ കണക്കാക്കും?

വശങ്ങളുടെ നീളം l, b എന്നും ചുറ്റളവ് p എന്നുമെടുത്താൽ p, l, b എന്നിവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം എങ്ങനെ എഴുതും?

ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളവും പരപ്പളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം അക്ഷരങ്ങളുപയോഗിച്ച് എങ്ങനെ ചുരുക്കിയെഴുതും?

സംഖ്യാബന്ധങ്ങൾ

ഈ കണക്കുകൾ നോക്കൂ:

$$1 + 2 = 3$$
$$2 + 3 = 5$$
$$3 + 4 = 7$$

അടുത്തടുത്ത എണ്ണൽസംഖ്യകളാണ് കൂട്ടുന്നത്. ഇനി ഈ കണക്കുകൾ നോക്കൂ:

$$(2 \times 1) + 1 = 3$$
$$(2 \times 2) + 1 = 5$$
$$(2 \times 3) + 1 = 7$$

എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ രണ്ടു മടങ്ങിനോട് ഒന്നു കൂട്ടുന്നു.

രണ്ടു കണക്കുകളിലും അവസാനം ഒരേ സംഖ്യകൾ കിട്ടുന്നത് എന്തുകൊണ്ടാണ്?

ഏതെങ്കിലുമൊരു എണ്ണൽസംഖ്യയെടുത്ത്, ആദ്യം പറഞ്ഞ ക്രിയകൾ ചെയ്തുനോക്കാം. ഉദാഹരണമായി, 7 എടുത്തു നോക്കാം; അടുത്ത സംഖ്യ 8; തുക

$$7 + 8 = 15$$

ഇതിലെ 8 നെ 7 + 1 എന്നെഴുതിയാലോ?

$$7 + 7 + 1 = (2 \times 7) + 1 = 15$$

എന്നു കാണാം. ഇതിൽ 7 ന് പകരം ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യ എടുത്താലും ഇതുപോലെ തന്നെ എഴുതാം. അതായത്

> ഏതെങ്കിലും എണ്ണൽസംഖ്യ എടുത്ത് അതിനടുത്ത എണ്ണൽസംഖ്യ കൂട്ടിയാലും ആദ്യത്തെ സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങിനോട് ഒന്നു കൂട്ടിയാലും, ഒരേ സംഖ്യ തന്നെ കിട്ടും.

ഇവിടെ എണ്ണൽസംഖ്യ തന്നെ വേണമെന്നുണ്ടോ?

ഉദാഹരണമായി അര എന്ന ഭിന്നസംഖ്യയിൽനിന്നു തുടങ്ങാം. അതിനടുത്ത സംഖ്യ എന്നു പറയുന്നതിൽ അർഥമില്ല. അതിനോട് ഒന്നു കൂട്ടിയ സംഖ്യ എന്നുപറയാം: അതായത് അരയും ഒന്നും ഒന്നര; അരയും ഒന്നരയും കൂട്ടിയാൽ രണ്ട്.

മറിച്ച്, അരയുടെ രണ്ടു മടങ്ങ് ഒന്ന്; അതിനോട് ഒന്നു കൂട്ടിയാൽ രണ്ട്. അതായത്

$$\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + 1\right) = \left(2 \times \frac{1}{2}\right) + 1$$

അളവുകളും സംഖ്യകളും

പലതരം അളവുകളെ സൂചിപ്പിക്കാനും അവ തട്ടിച്ചുനോക്കാനുമാണ് മനുഷ്യർ സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാക്കിയത്. ഉദാഹരണമായി, “വലിയൊരു സംഘം ആളുകൾ” എന്നു പറയുന്നതിനു പകരം, “നൂറുപേരുടെ സംഘം” എന്നു പറയുമ്പോൾ കാര്യങ്ങൾ കുറേക്കൂടി വ്യക്തമാകുന്നു. അതുപോലെ “കുറേ ദൂരം നടന്നു” എന്നതിനു പകരം “രണ്ടര കിലോമീറ്റർ നടന്നു” എന്ന് കുറേക്കൂടി കൃത്യമായി പറയാം.

നീളവും ഭാരവും സമയവുമെല്ലാം ഉപകരണങ്ങളുപയോഗിച്ച് നേരിട്ട് അളക്കുന്നവയാണ്; പരപ്പളവും വ്യാപ്തവും സാന്ദ്രതയുമെല്ലാം നേരിട്ടളക്കുകയല്ല, കണക്കുകൂട്ടിയെടുക്കുകയാണ് ചെയ്യുന്നത്. അതിന് സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ചുള്ള ക്രിയകൾ വേണ്ടിവരുന്നു. ഉദാഹരണമായി, ചതുരക്കട്ടയുടെ വ്യാപ്തം കണ്ടുപിടിക്കാൻ, നീളവും വീതിയും ഉയരവുമെല്ലാം അളന്ന് അങ്ങനെ കിട്ടുന്ന സംഖ്യകൾ തമ്മിൽ ഗുണിക്കണം.

ക്രമേണ അളവുകളുമായി ബന്ധപ്പെട്ടല്ലാതെ സംഖ്യകളുടെതന്നെ ക്രിയകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധങ്ങളെക്കുറിച്ചും മനുഷ്യർ ആലോചിച്ചു തുടങ്ങി. ഉദാഹരണമായി,

> ഒരു ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് കണ്ടുപിടിക്കാൻ ഓരോ വശത്തിന്റെയും നീളം അളന്ന് കൂട്ടുന്നതിനു പകരം, രണ്ടു വ്യത്യസ്ത വശങ്ങളുടെ നീളമളന്ന് അവയുടെ തുകയുടെ രണ്ടു മടങ്ങ് കണക്കാക്കിയാൽ മതി

എന്നു കണ്ടെത്തിയതിന്റെ തുടർച്ചയാണ്,

> രണ്ടു സംഖ്യകളെ രണ്ടുകൊണ്ട് വെവ്വേറെ ഗുണിച്ചു കൂട്ടുന്നതിനുപകരം, സംഖ്യകളുടെ തുകയെ രണ്ടുകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ മതി.

എന്ന പൊതുവായ സംഖ്യാതത്ത്വം.

കാലമേറെക്കഴിഞ്ഞപ്പോൾ ഇതുതന്നെ അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച്

$$2x + 2y = 2(x + y)$$

എന്നു ചുരുക്കിയെഴുതുന്ന ഗണിതഭാഷയും നാം നിർമിച്ചു.

സംഖ്യാതത്ത്വങ്ങൾ

സംഖ്യകളുടെ ക്രിയകളെക്കുറിച്ചുള്ള പൊതുവായ കാര്യങ്ങൾ അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചു ചുരുക്കിയെഴുതാം എന്നു പറഞ്ഞല്ലോ. ഉദാഹരണമായി,

ഏതു സംഖ്യയോടും 0 കൂട്ടിയാൽ, ആ സംഖ്യ തന്നെ കിട്ടും.

ഈ കാര്യം

x എന്ന ഏതു സംഖ്യ എടുത്താലും

$$x + 0 = x$$

എന്നു ചുരുക്കിയെഴുതാം. ഇതുപോലെ

രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുക കണ്ടുപിടിക്കാൻ ഏതു ക്രമത്തിലും കൂട്ടാം

എന്നതിന്റെ ചുരുക്കെഴുത്താണ്.

x, y എന്ന ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകൾ എടുത്താലും

$$x + y = y + x$$

ഇതുപോലെ ലളിതവും സ്വാഭാവികവുമായുള്ള പൊതുതത്ത്വങ്ങൾ ഇങ്ങനെ ചുരുക്കിയെഴുതേണ്ട ആവശ്യമില്ല. എന്നാൽ,

ഏതെങ്കിലും സംഖ്യ എടുത്ത് ഒന്നു കൂട്ടിയത് കൂട്ടിയാലും രണ്ടു മടങ്ങിനോട് ഒന്നു കൂട്ടിയാലും, ഒരേ സംഖ്യതന്നെ കിട്ടും.

എന്നു വിസ്തരിച്ചു പറയുന്നതിനേക്കാൾ സൗകര്യം

x എന്ന ഏതു സംഖ്യ എടുത്താലും

$$x + (x + 1) = 2x + 1$$

എന്നു പറയുന്നതാണ്.

ഇവിടെ മറ്റൊരു കാര്യം ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടതുണ്ട്. ഇത്തരം ചുരുക്കെഴുത്തുകൾ ഓർത്തുവയ്ക്കാൻ എളുപ്പമാണ്. പക്ഷേ, അവ ആവശ്യമനുസരിച്ച് ഉപയോഗിക്കണമെങ്കിൽ അവയുടെ അർഥം വ്യക്തമായി മനസ്സിലാക്കണം.

മടക്കുകുട കൊണ്ടുനടക്കാൻ സൗകര്യമാണെങ്കിലും, തുറക്കാൻ അറിയില്ലെങ്കിൽ നനയേണ്ടിവരുമല്ലോ!

ഏതു ഭിന്നസംഖ്യയിൽനിന്നു തുടങ്ങിയാലും ഇപ്പറഞ്ഞ കണക്കുകൂട്ടൽ ശരിയാണ്. അപ്പോൾ മുകളിലെഴുതിയ കാര്യം അൽപ്പം കൂടി വികസിപ്പിക്കാം:

ഏതെങ്കിലും സംഖ്യ എടുത്ത് ഒന്നു കൂട്ടിയത് കൂട്ടിയാലും രണ്ടു മടങ്ങിനോട് ഒന്നു കൂട്ടിയാലും, ഒരേ സംഖ്യതന്നെ കിട്ടും.

സംഖ്യകളെ സംബന്ധിക്കുന്ന പൊതുവായ ഇക്കാര്യം അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ചുരുക്കിയെഴുതാം. അതിന് തുടങ്ങുന്ന സംഖ്യയെ x എന്നെടുക്കാം. അതിനോട് ഒന്നു കൂട്ടിയത് $x + 1$; ഇവ തമ്മിൽ കൂട്ടിയതിനെ $x + (x + 1)$ എന്നെഴുതാം. ഇനി x ന്റെ രണ്ടു മടങ്ങ് $2x$. അതിനോട് 1 കൂട്ടിയത് $2x + 1$. അപ്പോൾ സംഖ്യകളെക്കുറിച്ച് നാം കണ്ടുപിടിച്ച പൊതുവായ കാര്യം ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

x ഏതു സംഖ്യ ആയാലും $x + (x + 1) = 2x + 1$

സംഖ്യകളെ സംബന്ധിക്കുന്ന കാര്യങ്ങൾ അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ചുരുക്കിയെഴുതുന്ന രീതിയാണ് ബീജഗണിതം (*algebra*).

ചെറിയൊരു ഉദാഹരണം നോക്കാം: ഒരു സംഖ്യയോട് മറ്റൊരു സംഖ്യ കൂട്ടി; പിന്നെ കൂട്ടിയ സംഖ്യ കുറച്ചു. ഇപ്പോൾ എന്തായി? പഴയ സംഖ്യതന്നെ തിരിച്ചു കിട്ടി.

ആദ്യത്തെ സംഖ്യ x എന്നും കൂട്ടിയ (പിന്നീട് കുറച്ച) സംഖ്യ y എന്നുമെടുത്താൽ, സംഭവിച്ച കാര്യം ബീജഗണിത രീതിയിൽ ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

x, y ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകൾ എടുത്താലും, $(x + y) - y = x$

ഇവിടെ പറഞ്ഞത് എല്ലാ സംഖ്യകൾക്കും ബാധകമായ ഒരു പൊതുതത്ത്വമാണെന്ന് പ്രത്യേകം ശ്രദ്ധിക്കണം. ഏതെങ്കിലും ചില സംഖ്യകൾക്കുമാത്രം ശരിയാകുന്ന കാര്യങ്ങൾ പൊതുതത്ത്വങ്ങളല്ല. ഉദാഹരണമായി $2 + 2$ ഉം 2×2 ഉം 4 തന്നെ. പക്ഷേ, $x + x = x \times x$ എന്നത് ഒരു പൊതുതത്ത്വമല്ല (2നു പകരം 3 എടുത്താൽ ഇത് ശരിയാകില്ലല്ലോ).

ഇനി ചുവടെപ്പറയുന്ന ഓരോ ക്രിയയും പല സംഖ്യകൾ എടുത്ത് ചെയ്തു നോക്കൂ. ഉത്തരമായി കിട്ടുന്ന സംഖ്യയെ മറ്റൊരു തരത്തിൽ വിവരിക്കുക. ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന ഓരോ ബന്ധത്തെയും പൊതുവായ ഒരു തത്ത്വമായി സാധാരണ ഭാഷയിൽ എഴുതുക. അത് ബീജഗണിതരീതിയിൽ (അക്ഷരങ്ങളുപയോഗിച്ച്) എഴുതുക:

- ഒരു സംഖ്യയും അതിനോട് രണ്ട് കൂട്ടിയതും തമ്മിൽ കൂട്ടുക.
- ഒരു സംഖ്യയോട് ഒന്നു കൂട്ടി, രണ്ടു കുറയ്ക്കുക.
- ഒരു സംഖ്യയിൽനിന്ന് മറ്റൊരു സംഖ്യ കുറച്ച്, കുറച്ച സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങ് കൂട്ടുക.
- ഒരു സംഖ്യയോട് അതിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങ് കൂട്ടുക.
- അടുത്തടുത്ത രണ്ട് എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ തുകയിൽ നിന്ന് 1 കുറയ്ക്കുക.
- അടുത്തടുത്ത രണ്ട് ഒറ്റ സംഖ്യകളുടെ തുകയിൽനിന്ന് അവയുടെ ഇടയിൽവരുന്ന ഇരട്ടസംഖ്യ കുറയ്ക്കുക.
- ഒരു സംഖ്യയോട് മറ്റൊരു സംഖ്യ കൂട്ടി ആദ്യ സംഖ്യ കുറയ്ക്കുക.
- ഒരു സംഖ്യയും അതിനോട് മറ്റൊരു സംഖ്യ കൂട്ടിക്കിട്ടുന്ന സംഖ്യയും തമ്മിൽ കൂട്ടുക.
- ഒരു സംഖ്യയുടെ അഞ്ചു മടങ്ങിൽനിന്ന് ആ സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങ് കുറയ്ക്കുക.
- ഒരു സംഖ്യയുടെ രണ്ടുമടങ്ങും ആ സംഖ്യയുടെ മൂന്നു മടങ്ങും കൂട്ടുക.

എങ്ങനെ കൂട്ടിയാലും...

38 + 25 + 75 എത്രയാണ്?

ക്രമമായി കൂട്ടാം:

$$38 + 25 = 63$$
$$63 + 75 = 138$$

ഇങ്ങനെയും കൂട്ടാം:

$$25 + 75 = 100$$
$$38 + 100 = 138$$

രണ്ടാമതു പറഞ്ഞതുപോലെ കൂട്ടാൻ കടലാസും പേനയും വേണ്ടല്ലോ.

ഇനി ഈ കണക്കു ശ്രമിച്ചുനോക്കൂ:

$$29 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}$$

ആദ്യം ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകൾ കൂട്ടുന്നതാണ് എളുപ്പം?

ഈ രണ്ടു കണക്കുകളിലും കണ്ടതെന്താണ്?

മൂന്നു സംഖ്യകളുടെ തുക കണ്ടുപിടിക്കാൻ, ആദ്യത്തെ രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുക കണ്ടുപിടിച്ച്, മൂന്നാമത്തേതിനോട് കൂട്ടാം. അല്ലെങ്കിൽ അവസാനത്തെ രണ്ടു സംഖ്യ

ക്രിയ രണ്ട്, ഫലം ഒന്ന്

ഒരു സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങിനോട് ഒന്നു കൂട്ടുക എന്നത് ഒരു ഗണിതക്രിയയാണ്; ഈ ക്രിയ ചെയ്താൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യ അതിന്റെ ഫലവും. ഉദാഹരണമായി, 3 എന്ന സംഖ്യയെടുത്ത് ഈ ക്രിയ ചെയ്താൽ 7 എന്ന ഫലം കിട്ടും. ക്രിയ ചെയ്യുന്നത് 10 എന്ന സംഖ്യയിലാണെങ്കിൽ, ഫലം 21.

ഒരു സംഖ്യയോട് ഒന്നു കൂട്ടി, ആ തുകയെ സംഖ്യയോട് കൂട്ടുക എന്നത് മറ്റൊരു ക്രിയയാണ്. ഉദാഹരണമായി 4 എന്ന സംഖ്യയിൽ ഈ ക്രിയ ചെയ്താൽ, ഫലം $4 + (4 + 1) = 9$.

ഒരേ സംഖ്യയിൽ ഈ രണ്ടു ക്രിയകൾ ചെയ്താലും ഫലം ഒന്നുതന്നെയാണ്. ഇക്കാര്യമാണ് ബീജഗണിതരീതിയിൽ

$$x + (x + 1) = 2x + 1$$

എന്നു ചുരുക്കിയെഴുതുന്നത്. ഇതിൽ ആദ്യമെഴുതിയ $x + (x + 1)$ എന്നത്, ഒരു സംഖ്യയും അതിനോട് ഒന്നു കൂട്ടിയതും തമ്മിൽ കൂട്ടുക എന്ന ക്രിയയാണ്. രണ്ടാമതെഴുതിയ $2x + 1$ എന്നത്, സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങിനോട് ഒന്നു കൂട്ടുക എന്ന ക്രിയയും. ഈ രണ്ടു ക്രിയകളുടെയും ഫലം തുല്യമാണെന്നാണ് സമചിഹ്നം കാണിക്കുന്നത്.

ഇതുപോലെ രണ്ടു സംഖ്യകളിൽ ഓരോന്നിന്റെയും രണ്ടു മടങ്ങ് കണ്ടുപിടിച്ച് അവ കൂട്ടുക എന്ന ക്രിയയെ ബീജഗണിതരീതിയിൽ $2x + 2y$ എന്നെഴുതാം. രണ്ടു സംഖ്യകൾ കൂട്ടി അതിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങ് എടുക്കുക എന്ന ക്രിയയുടെ ബീജഗണിത രൂപമാണ് $2(x + y)$. ഒരേ ജോടി സംഖ്യകളിൽ ഈ രണ്ടു ക്രിയകളും ചെയ്താൽ ഫലം ഒന്നുതന്നെയാണ് എന്ന പൊതുതത്ത്വത്തിന്റെ ബീജഗണിതരൂപമാണ്

$$2x + 2y = 2(x + y)$$

ഇതുപോലെ, പ്രത്യക്ഷത്തിൽ വ്യത്യസ്തമായ ക്രിയകൾ ഫലത്തിൽ ഒന്നുതന്നെയാണ് എന്നു പറയുകയാണ് സംഖ്യകളെ സംബന്ധിക്കുന്ന പല പൊതുതത്ത്വങ്ങളും.

അങ്കഗണിതവും ബീജഗണിതവും

സംഖ്യകളെക്കുറിച്ചുള്ള പഠനങ്ങളെ പൊതുവേ അങ്കഗണിതം എന്നാണ് പറയുന്നത്; അക്ഷരങ്ങളുപയോഗിച്ച് ഇവയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് ബീജഗണിതവും.

അങ്കഗണിതത്തിൽ 3 + 7 എന്നെഴുതുന്നത് മൂന്നും ഏഴും കൂട്ടുക എന്ന ക്രിയയെ സൂചിപ്പിക്കാനാണ്. കൂട്ടിക്കിട്ടുന്ന തുക, അഥവാ ഈ സംഖ്യകൾ കൂട്ടുക എന്ന ക്രിയയുടെ ഫലം പത്ത്. ക്രിയയും ഫലവും ചേർത്ത്

$$3 + 7 = 10$$

എന്നെഴുതുന്നു.

ബീജഗണിതത്തിൽ, രണ്ടു സംഖ്യകൾ കൂട്ടുക എന്ന ക്രിയയെ $x + y$ എന്നെഴുതാം. കൂട്ടിക്കിട്ടുന്ന തുകയെ എങ്ങനെയെഴുതും? സംഖ്യകളറിയാതെ തുക കണ്ടുപിടിക്കാൻ കഴിയില്ലല്ലോ. അപ്പോൾ തുകയെയും $x + y$ എന്നുതന്നെ എഴുതാനേ കഴിയുകയുള്ളൂ.

എന്നാൽ,

> ഒരു സംഖ്യയെ അതിനോടുതന്നെ കൂട്ടിയതാണ് സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങ്.

എന്ന വസ്തുതയെ ബീജഗണിതരീതിയിൽ

$$x + x = 2x$$

എന്നെഴുതാം.

ഇവിടെ മറ്റൊരു കാര്യം ശ്രദ്ധിക്കണം. മേൽപ്പറഞ്ഞത് ഒരു തത്ത്വമല്ല, രണ്ടു മടങ്ങ് (രണ്ടു കൊണ്ടുള്ള ഗുണനം) എന്ന ക്രിയയുടെ വിശദീകരണം അഥവാ നിർവചനമാണ്.

കളുടെ തുക ആദ്യത്തേതിനോട് കൂട്ടാം. ഇതു മറ്റൊരു തരത്തിലും പറയാം:

> ഒരു സംഖ്യയോട് രണ്ടു സംഖ്യകൾ ഒന്നിനുശേഷം മറ്റൊന്നായി കൂട്ടുന്നതിനു പകരം, ഈ രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുക കൂട്ടിയാൽ മതി.

ക്രിയകൾ ചെയ്യുന്ന ക്രമം പ്രത്യേകമായി കാണിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, ആദ്യത്തെ കണക്ക് ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

$$(38 + 25) + 75 = 38 + (25 + 75)$$

രണ്ടാമത്തെ കണക്ക് ഇങ്ങനെയും:

$$\left(29 + \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3} = 29 + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)$$

അപ്പോൾ മൂന്നു സംഖ്യകൾ കൂട്ടുന്നതിന്റെ പൊതുതത്ത്വം ബീജഗണിതരീതിയിൽ ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

> x, y, z എന്ന ഏതു സംഖ്യകളെടുത്താലും
>
> $$(x + y) + z = x + (y + z)$$

ഇനി 36 + 25 + 64 ആണ് കണക്കാക്കേണ്ടതെങ്കിലോ?

36 ഉം 64 ഉം ആദ്യം കൂട്ടുകയല്ലേ എളുപ്പം? ഇവിടെ ചെയ്തതെന്താണ്?

25 + 64 നു പകരം 64 + 25 എന്നെഴുതി മൊത്തം തുക (36 + 64) + 25 എന്നാക്കി.

അതായത് സംഖ്യകൾ കൂട്ടുന്നത് ഏതു ക്രമത്തിലുമാകാം.

ഇനി ചുവടെപ്പറയുന്ന കണക്കുകൾ മനസ്സിൽ ചെയ്യാമോ എന്നു നോക്കൂ:

- 49 + 125 + 75
- 347 + 63 + 37
- 88 + 72 + 12
- $\frac{1}{4} + 1\frac{3}{4} + 2$
- 15.5 + 0.25 + 0.75
- 8.2 + 3.6 + 6.4

കൂട്ടലും കുറയ്ക്കലും

മൂന്നു സംഖ്യകൾ കൂട്ടുന്നതിന്റെ പൊതുതത്ത്വം കണ്ടല്ലോ. തുടരെ കൂട്ടുന്നതിനു പകരം, തുടരെ കുറച്ചാലോ?

ഈ കണക്കു നോക്കൂ.

ഉണ്ണിയുടെ കൈയിൽ 500 രൂപയുണ്ട്. അതിൽ 150 രൂപ അപ്പുവിനു കൊടുത്തു. അൽപ്പം കഴിഞ്ഞ് 50 രൂപ അബു കടം വാങ്ങി. ഇപ്പോൾ ഉണ്ണിയുടെ കൈയിൽ എത്ര രൂപയുണ്ട്?

അപ്പുവിനു കൊടുത്തു കഴിഞ്ഞപ്പോൾ മിച്ചം

$$500 - 150 = 350 \text{ രൂപ.}$$

പിന്നീട് അബുവിനും കൊടുത്തു കഴിഞ്ഞപ്പോൾ

$$350 - 50 = 300 \text{ രൂപ.}$$

മറ്റൊരു വഴിക്കും ആലോചിക്കാം. ആകെ ചെലവായത്

$$150 + 50 = 200 \text{ രൂപ.}$$

മിച്ചമുള്ളത്

$$500 - 200 = 300 \text{ രൂപ.}$$

അതായത്, ഈ ക്രിയ $(500 - 150) - 50$ എന്നു ചെയ്താലും $500 - (150 + 50)$ എന്നു ചെയ്താലും ഒരേ സംഖ്യയാണ് കിട്ടുക.

ഇതുപോലെ

$$(218 - 20) - 80$$

മനസ്സിൽ കണക്കുകൂട്ടാമോ?

ഇവിടെ കണ്ടത് പൊതുവായി എങ്ങനെ പറയാം?

ഒരു സംഖ്യയിൽനിന്ന് രണ്ടു സംഖ്യകൾ ഒന്നിനു ശേഷം മറ്റൊന്നായി കുറയ്ക്കുന്നതിനു പകരം, ഈ രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുക കുറച്ചാൽ മതി.

ബീജഗണിതരീതിയിലായാലോ?

x, y, z എന്ന ഏതു സംഖ്യകളെടുത്താലും

$$(x - y) - z = x - (y + z)$$

രണ്ടു സംഖ്യകൾ തുടരെ കൂട്ടുകയോ കുറയ്ക്കുകയോ ചെയ്യുന്നതിനു പകരം, ഒരു സംഖ്യ കൂട്ടുകയും മറ്റൊരു സംഖ്യ കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്താലോ?

ഈ കണക്കു നോക്കൂ:

ക്ലാസ് തുടങ്ങിയപ്പോൾ 38 കുട്ടികളുണ്ടായിരുന്നു. അൽപ്പം വൈകി 5 കുട്ടികൾ കൂടി എത്തി. കുറച്ചു കഴിഞ്ഞപ്പോൾ 3 കുട്ടികൾ ഗണിത ക്ലബ്ബിന്റെ യോഗത്തിനു പോയി. ഇപ്പോൾ ക്ലാസിൽ എത്ര പേരുണ്ട്?

സംഭവങ്ങൾ നടന്ന ക്രമത്തിൽ കണക്കുകൂട്ടാം. 5 കുട്ടികൾ കൂടി വന്നപ്പോൾ

$$38 + 5 = 43$$

വ്യത്യാസത്തിന്റെ വ്യത്യാസം

മൂന്നു സംഖ്യകൾ കൂട്ടുന്നത് സ്വാഭാവികമായി ചെയ്യാമെന്നതുകൊണ്ട് അതിന്റെ ബീജഗണിത രൂപമായ

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

എന്നത് പ്രത്യേകിച്ച് ഓർത്തുവയ്ക്കേണ്ടതില്ല. ചില സന്ദർഭങ്ങളിൽ ഇതുപയോഗിച്ചാൽ ക്രിയ എളുപ്പമാകുമെന്നു മാത്രം. ഉദാഹരണമായി $29 + 37 + 63$ എന്ന തുക കണക്കാക്കുമ്പോൾ, $37 + 63 = 100$ എന്നത് പെട്ടെന്നു കാണാൻ കഴിഞ്ഞാൽ, ആകെ തുക 129 എന്നു മനക്കണക്കായി പറയാം. (സംഖ്യകൾ തന്നിരിക്കുന്ന ക്രമത്തിൽ കൂട്ടാൻ ചിലപ്പോൾ കടലാസും പേനയും വേണ്ടിവരും).

എന്നാൽ കുറയ്ക്കുന്ന കാര്യത്തിൽ അൽപ്പം സൂക്ഷിക്കണം. ഉദാഹരണമായി

$$(10 - 3) - 2$$

എന്നതിന്റെ അർഥം, 10 ൽ നിന്ന് 3 കുറച്ച്, അങ്ങനെ കിട്ടുന്ന 7 ൽ നിന്ന് 2 കുറയ്ക്കണമെന്നാണ്. അതായത്, ഈ ക്രിയകളുടെ ഫലം 5.

$$10 - (3 - 2)$$

എന്നായാലോ? ആദ്യം 3 ൽ നിന്ന് 2 കുറയ്ക്കണം. അങ്ങനെ കിട്ടുന്ന 1 എന്ന സംഖ്യ 10 ൽ നിന്നു കുറയ്ക്കണം. അപ്പോൾ ഫലം $10 - 1 = 9$.

അതായത്, ഈ ക്രിയകളിൽനിന്നു കിട്ടുന്നത് വ്യത്യസ്ത ഫലങ്ങളാണ്. എന്നാൽ $(10 - 3) - 2$ എന്ന ക്രിയയുടെയും $10 - (3+2)$ എന്ന ക്രിയയുടേയും ഫലം 5 തന്നെയാണ്. ഇതിന്റെ പൊതുതത്ത്വം

$$(x - y) - z = x - (y + z)$$

അഥവാ,

ഒന്നിനുശേഷം മറ്റൊന്നു കുറയ്ക്കുന്നതിനു പകരം തുക കുറച്ചാൽ മതി

എന്ന് ഓർക്കുകയും വേണം.

തത്ത്വവും പ്രയോഗവും

$25 + 20 - 15$ എന്ന കണക്കു ചെയ്യുമ്പോൾ, ആദ്യം കൂട്ടുകയും പിന്നെ കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്ത് $45 - 15 = 30$ എന്നു ഫലം കണ്ടുപിടിക്കാം. അല്ലെങ്കിൽ ആദ്യം കുറച്ച് പിന്നെ കൂട്ടി $25 + 5 = 30$ എന്നും കണ്ടുപിടിക്കാം.

എന്നാൽ $25 + 10 - 15$ എന്ന കണക്കിൽ, ആദ്യം കുറയ്ക്കാൻ കഴിയില്ലെന്നു കാണാൻ വിഷമമില്ല.

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, ഇതുപോലുള്ള ക്രിയകൾ സംഖ്യകളിൽ ചെയ്യുമ്പോൾ ചില ക്രിയകൾ ചെയ്യാൻ കഴിയില്ല എന്നത് കാണുമ്പോൾ തന്നെ മനസ്സിലാകും. എന്നാൽ ഇവയെക്കുറിച്ചുള്ള പൊതുതത്ത്വങ്ങൾ അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് എഴുതുമ്പോൾ അവ ശരിയാകുന്നതിനുള്ള നിബന്ധനകൾ കൂടി പറയേണ്ടതുണ്ട്. അതുകൊണ്ടാണ്

$$(x + y) - z = x + (y - z)$$

എന്നെഴുതുമ്പോൾ $y > z$ എന്ന നിബന്ധന കൂടി ചേർക്കുന്നത്.

3 കുട്ടികൾ പോയപ്പോൾ

$$43 - 3 = 40$$

സംഭവങ്ങളെക്കുറിച്ച് മൊത്തത്തിൽ ആലോചിച്ചാൽ, ഇങ്ങനെയും കണക്കുകൂട്ടാം: 5 കുട്ടികൾ വരുകയും 3 കുട്ടികൾ പോവുകയും ചെയ്തു. അപ്പോൾ ക്ലാസിൽ കൂടുതലായുള്ളവർ

$$5 - 3 = 2$$

ആദ്യമുണ്ടായിരുന്നത് 38 കുട്ടികൾ. അപ്പോൾ ആകെ

$$38 + 2 = 40$$

അതായത്, ഒരു സംഖ്യ കൂട്ടുകയും മറ്റൊന്ന് കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്യുന്നതിനു പകരം, ആദ്യത്തെ സംഖ്യയിൽനിന്ന് രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ കുറച്ചത് കൂട്ടിയാൽ മതി. ഉദാഹരണമായി,

$$(108 + 25) - 15 = 108 + (25 - 15) = 118$$

ഇവിടെ ഒരു കാര്യം ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടതുണ്ട്. ഇങ്ങനെ കണക്കുകൂട്ടാൻ, കൂട്ടുന്ന സംഖ്യ കുറയ്ക്കുന്ന സംഖ്യയേക്കാൾ വലുതായിരിക്കണം. ഉദാഹരണമായി ഈ കണക്കു നോക്കുക:

$$25 + 10 - 15$$

ഇതു കണക്കാക്കാൻ ആദ്യം 10 ൽ നിന്ന് 15 കുറയ്ക്കാൻ കഴിയില്ലല്ലോ.

അപ്പോൾ ഇക്കാര്യം ബീജഗണിതരീതിയിൽ ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

> x, y, z എന്ന ഏതു സംഖ്യകളെടുത്താലും
> $y > z$ ആണെങ്കിൽ
> $$(x + y) - z = x + (y - z)$$

ഇവയെല്ലാം ഉപയോഗിച്ച്, ചുവടെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന കണക്കുകൾ മനസ്സിൽ ചെയ്യുക:

- $(135 - 73) - 27$
- $\left(37 - 1\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}$
- $(298 - 4.5) - 3.5$
- $(128 + 79) - 29$
- $(298 + 4.5) - 3.5$
- $\left(149 + 3\frac{1}{2}\right) - 2\frac{1}{2}$

കുറച്ചു കൂട്ടുമ്പോൾ

ഈ കണക്കു നോക്കൂ.

ഗോപുവിന്റെ പണപ്പെട്ടിയിൽ 110 രൂപയുണ്ട്. പേന വാങ്ങാൻ 15 രൂപയെടുത്തു. 10 രൂപയ്ക്ക് പേന കിട്ടി.

മിച്ചം വന്ന 5 രൂപ വീണ്ടും പെട്ടിയിലിട്ടു. ഇപ്പോൾ പെട്ടിയിൽ എത്ര രൂപയുണ്ട്?

ഗോപു ചെയ്ത മുറയ്ക്ക് കണക്കുകൂട്ടാം:

15 രൂപ എടുത്തുകഴിഞ്ഞപ്പോൾ പെട്ടിയിൽ

$$110 - 15 = 95 \text{ രൂപ.}$$

5 രൂപ തിരിച്ചിട്ടപ്പോൾ

$$95 + 5 = 100 \text{ രൂപ.}$$

കാര്യങ്ങളെല്ലാം കഴിഞ്ഞ ശേഷം ഇങ്ങനെയും ആലോചിക്കാം: 15 രൂപ എടുത്തു; 5 രൂപ തിരിച്ചിട്ടു. എന്നു പറഞ്ഞാൽ പെട്ടിയിൽ കുറവു വന്നത്

$$15 - 5 = 10 \text{ രൂപ.}$$

ഇപ്പോൾ പെട്ടിയിലുള്ളത്

$$110 - 10 = 100 \text{ രൂപ.}$$

ആദ്യം ചെയ്ത ക്രിയകളെ $(110 - 15) + 5$ എന്നും രണ്ടാമത്തെ ക്രിയകളെ $110 - (15 - 5)$ എന്നും എഴുതിയാൽ, മേൽപ്പറഞ്ഞ കണക്കുകൂട്ടൽ ഇങ്ങനെയാകും.

$$(110 - 15) + 5 = 110 - (15 - 5)$$

അതായത്, ഒരു സംഖ്യ കുറയ്ക്കുകയും മറ്റൊന്ന് കൂട്ടുകയും ചെയ്യുന്നതിനു പകരം, ആദ്യത്തെ സംഖ്യയിൽനിന്ന് രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ കുറച്ചത് കുറച്ചാൽ മതി. ഉദാഹരണമായി,

$$(29 - 17) + 7 = 29 - (17 - 7) = 19$$

കുറയ്ക്കുകയും കൂട്ടുകയും ചെയ്യുന്ന ക്രിയകളെല്ലാം ഇങ്ങനെ ചെയ്യാൻ പറ്റുമോ?

$$(29 - 7) + 17$$

എന്ന കണക്കിൽ ഇങ്ങനെ മാറ്റിയെഴുതി ചെയ്യാൻ പറ്റുമോ?

അപ്പോൾ ഈ ക്രിയാമാറ്റം ബീജഗണിതരീതിയിൽ ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

> x, y, z എന്ന ഏതു മൂന്നു സംഖ്യകളെടുത്താലും
> $y > z$ ആണെങ്കിൽ
>
> $$(x - y) + z = x - (y - z)$$

ഇതുപയോഗിച്ചും ചില മനക്കണക്കുകളാകാം:

- $(135 - 73) + 23$
- $\left(38 - 8\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$
- $(19 - 6.5) + 5.5$
- $135 - (35 - 18)$
- $4.2 - (3.2 - 2.3)$

കുറയ്ക്കുന്നത് കുറഞ്ഞാൽ

ഈ കണക്കുകൾ നോക്കൂ:

$$10 - 9 = 1$$
$$10 - 8 = 2$$
$$10 - 7 = 3$$
$$10 - 6 = 4$$

കുറയ്ക്കുന്ന സംഖ്യ കുറയുമ്പോൾ കുറച്ചു കിട്ടുന്ന സംഖ്യ കൂടുന്നതു കണ്ടില്ലേ?

കുറയുന്നതിന്റെ കണക്കെന്താണ്?

കുറയ്ക്കുന്നത് ഒന്നു കുറയുമ്പോൾ കുറച്ചു കിട്ടുന്നത് ഒന്നു കൂടും; കുറയ്ക്കുന്നത് രണ്ടു കുറയ്ക്കുമ്പോൾ കുറച്ചു കിട്ടുന്നത് രണ്ടു കൂടും.

ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ,

> കുറയ്ക്കുന്നത് കുറയുമ്പോൾ, കുറച്ചു കിട്ടുന്നത് കൂടും; കുറയ്ക്കുന്നത് എത്ര കുറഞ്ഞോ, അത്രതന്നെ കുറച്ചു കിട്ടുന്നത് കൂടും.

ഇതു ബീജഗണിതത്തിലാക്കിയാലോ?

> x, y എന്ന രണ്ടു സംഖ്യകളെടുത്താൽ, x ൽ നിന്ന് y കുറച്ചത്, $x - y$

ഇനി z എന്ന മറ്റൊരു സംഖ്യയെടുത്താൽ, $y - z$ എന്ന സംഖ്യ y യെക്കാൾ z കുറവാണ്. അപ്പോൾ $x - (y - z)$ എന്ന സംഖ്യ, $x - y$ യേക്കാൾ z കൂടുതലാണ്. അതായത്

$$x - (y - z) = (x - y) + z$$

തുകയും വ്യത്യാസവും

രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുകയും വ്യത്യാസവും കൂട്ടുമ്പോൾ എന്താണ് സംഭവിക്കുന്നത്?

സംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസമെന്നത്, അവയിലെ വലിയ സംഖ്യയിൽനിന്ന് ചെറിയ സംഖ്യ കുറച്ചതാണ്; തുകയെന്നത്, വലിയ സംഖ്യയോട് ചെറിയ സംഖ്യ കൂട്ടിയതാണ്.

ഉദാഹരണമായി, സംഖ്യകൾ 3, 7 എന്നെടുത്താൽ, തുക $7 + 3$, വ്യത്യാസം $7 - 3$. ക്രിയകൾ ചെയ്ത് ഇവയെ 10, 4 എന്നെഴുതാതെ, തുകയുടെയും വ്യത്യാസത്തിന്റെയും തുക എഴുതിയാലോ?

$$(7+3)+(7-3)$$

ഇതിൽ വലിയ സംഖ്യയായ 7 രണ്ടു തവണ കൂട്ടുന്നുണ്ട്. ചെറിയ സംഖ്യയായ 3 ഒരു തവണ കൂട്ടുകയും ഒരു തവണ കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്യുന്നുണ്ട്. അപ്പോൾ ക്രിയകളുടെ ഫലം $7 + 7 = 14$ എന്നു കാണാം.

അതായത്, ക്രിയകളുടെ ക്രമമൊന്നു മാറ്റിയാൽ, മുകളിലത്തെ തുകയെ

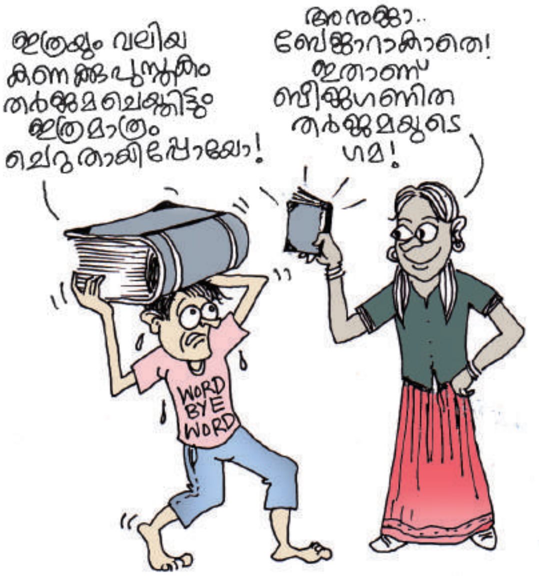
$$(7+3)+(7-3)=(7+7)+(3-3)=14$$

എന്നു കാണാം.

ഇക്കാര്യമാണ് ഒരു പൊതുതത്ത്വമായി ബീജഗണിതരീതിയിൽ

$$(x+y)+(x-y)=(x+x)+(y-y)=2x$$

എന്നെഴുതുന്നത്.



തുകയും വ്യത്യാസവും

ഇടയ്ക്കിടെ ചില പുതിയ കണ്ടുപിടിത്തങ്ങളുമായാണ് അതുല്യ ക്ലാസിൽ വരുന്നത്. അന്നൊരു പുതിയ വിദ്യയുമായാണ് രംഗപ്രവേശം: "ഏതെങ്കിലും രണ്ടു സംഖ്യകൾ മനസ്സിൽ വിചാരിച്ച്, അവയുടെ തുകയും വ്യത്യാസവും പറഞ്ഞാൽ, വിചാരിച്ച സംഖ്യകൾ ഞാൻ പറയാം!"

"തുക 10, വ്യത്യാസം 2" - തുടങ്ങിയത് റഹീം ആണ്.

"സംഖ്യകൾ 6, 4" - നിസ്സാരമട്ടിൽ അതുല്യ പറഞ്ഞു.

"തുക 16, വ്യത്യാസം 5" - കുസൃതിയായ ജെസ്സിയുടെ വെല്ലുവിളി.

അൽപ്പമൊന്ന് ആലോചിച്ചതിനുശേഷം അതുല്യ പറഞ്ഞു: "പറ്റിക്കാൻ നോക്കണ്ട; സംഖ്യകൾ $10\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$."

അതുല്യ എങ്ങനെയാണ് സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിച്ചത്?

ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകളുടെയും തുകയും വ്യത്യാസവും ഉപയോഗിച്ച് സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുന്നതെങ്ങനെ?

സംഖ്യകൾ x, y എന്നെടുക്കാം. അപ്പോൾ തുക $x + y$. വലിയ സംഖ്യ x എന്നെടുത്താൽ, വ്യത്യാസം $x - y$. ഇവ ഉപയോഗിച്ച് x, y എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കണം.

$x + y$ ൽ നിന്ന് x കിട്ടാൻ y കുറച്ചാൽ മതി.

$$(x + y) - y = x$$

പക്ഷേ, y അറിയില്ലല്ലോ.

ഒരു x കൂടി കൂട്ടിയാലോ?

$$(x + y) - y + x = x + x = 2x$$

y കുറച്ച് x കൂട്ടുന്നതും x കൂട്ടി y കുറയ്ക്കുന്നതും ഒന്നുതന്നെയല്ലേ?

$$(x + y) + (x - y) = 2x$$

എന്താണ് ഇതിന്റെ അർഥം?

തുകയും വ്യത്യാസവും കൂട്ടിയാൽ, വലിയ സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങ് കിട്ടും.

ഉദാഹരണമായി, റഹീം പറഞ്ഞ തുക 10 ഉം വ്യത്യാസം 2 ഉം എന്നാണ്. ഇവ കൂട്ടിയാൽ 12. ഇത് വലിയ സംഖ്യ

യുടെ രണ്ടു മടങ്ങാണ്. അപ്പോൾ വലിയ സംഖ്യ 6; ചെറിയ സംഖ്യ $10 - 6 = 4$.

ഇനി ജെസ്സി പറഞ്ഞതു നോക്കാം: തുക 16, വ്യത്യാസം 5, ഇവയുടെ തുക 21. അപ്പോൾ വലിയ സംഖ്യ, ഇതിന്റെ പകുതി $10\frac{1}{2}$, ചെറിയ സംഖ്യ $16 - 10\frac{1}{2} = 5\frac{1}{2}$.

അതുല്യയുടെ സൂത്രം പിടികിട്ടിയില്ലേ?

ഇവിടെ മറ്റൊരു കാര്യം കൂടി നോക്കാം. തുകയിൽനിന്ന് വ്യത്യാസം കുറച്ചാലോ?

$$
\begin{aligned}
(x + y) - (x - y) &= (x + y) - x + y \\
&= x + y - x + y \\
&= x - x + y + y \\
&= 2y
\end{aligned}
$$

ഇതിന്റെ അർഥം എന്താണ്?

തുകയിൽനിന്ന് വ്യത്യാസം കുറച്ചാൽ, ചെറിയ സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങ് കിട്ടും.

ഉദാഹരണമായി, റഹീമിന്റെ സംഖ്യകളെടുത്താൽ, തുക 10, വ്യത്യാസം 2. അപ്പോൾ ചെറിയ സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങ് $10 - 2 = 8$; ചെറിയ സംഖ്യ, ഇതിന്റെ പകുതി 4.

ചില സംഖ്യകളുടെ തുകയും വ്യത്യാസവും ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

- തുക 12, വ്യത്യാസം 8
- തുക 140, വ്യത്യാസം 80
- തുക 23, വ്യത്യാസം 11
- തുക 20, വ്യത്യാസം 5

കൂട്ടലും ഗുണിക്കലും

ഒരു സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങും ആ സംഖ്യയുടെ മൂന്നു മടങ്ങും കൂട്ടിയാൽ സംഖ്യയുടെ അഞ്ചു മടങ്ങ് കിട്ടുമെന്നു കണ്ടില്ലേ. (**സംഖ്യാബന്ധങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗത്തിലെ അവസാനത്തെ കണക്ക്). ഇപ്പറഞ്ഞതിന്റെ ബീജഗണിതരൂപം എന്താണ്?

x എന്ന ഏതു സംഖ്യ എടുത്താലും

$$2x + 3x = 5x$$

പല വഴികൾ

ഈ കണക്ക് നോക്കൂ.

> ഒരു പുസ്തകത്തിനും പേനയ്ക്കും കൂടി വില 16 രൂപയാണ്. പുസ്തകത്തിന്റെ വില പേനയേക്കാൾ 10 രൂപ കൂടുതലാണ്. ഓരോന്നിന്റെയും വില എത്രയാണ്?

പുസ്തകവും പേനയുമെല്ലാം മാറ്റിവച്ച്, ഇവയുടെ വിലകൾ വെറും സംഖ്യകളായി നോക്കിയാൽ ഈ പ്രശ്നം ഇങ്ങനെയാകും:

രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുക 16, വ്യത്യാസം 10 സംഖ്യകൾ ഏതൊക്കെയാണ്?

വലിയ സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങ് $16 + 10 = 26$; വലിയ സംഖ്യ 13. അപ്പോൾ ചെറിയസംഖ്യ $16 - 13 = 3$. അതായത്, പുസ്തകത്തിന്റെ വില 13 രൂപ, പേനയുടെ വില 3 രൂപ.

മറ്റൊരു രീതിയിലും ആലോചിക്കാം. ഒരു പുസ്തകവും ഒരു പേനയും വാങ്ങിയപ്പോൾ 16 രൂപ. പകരം രണ്ടു പുസ്തകമാണു വാങ്ങുന്നതെങ്കിലോ?

പുസ്തകത്തിന് പേനയേക്കാൾ 10 രൂപ കൂടുതലല്ലേ? അപ്പോൾ 10 രൂപ കൂടുതൽ കൊടുക്കണം; അതായത്, $10 + 16 = 26$ രൂപ കൊടുക്കണം.

ഇത് രണ്ടു പുസ്തകത്തിന്റെ വിലയാണ്. അപ്പോൾ ഒരു പുസ്തകത്തിന്റെ വില 13 രൂപ.

കലണ്ടർ കണക്ക്

കലണ്ടറിലെ ഒരു മാസമെടുത്ത്, ഒരു സമചതുരത്തിനുള്ളിൽ വരുന്ന നാലു സംഖ്യകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക:

ഞായർ	തിങ്കൾ	ചൊവ്വ	ബുധൻ	വ്യാഴം	വെള്ളി	ശനി
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		

ഇവ നാലും കൂട്ടിയാൽ $8 + 9 + 15 + 16 = 48$. ഇതിനെ നാലുകൊണ്ട് ഹരിച്ച് നാലു കുറച്ചു നോക്കൂ: ആദ്യത്തെ സംഖ്യയായ 8 കിട്ടിയില്ലേ. ഇതുപോലെ മറ്റു നാലു സംഖ്യകളെടുത്തുനോക്കൂ.

എന്തുകൊണ്ടാണിത്?

ആദ്യത്തെ സംഖ്യ x എന്നെടുത്താൽ, അടയാളപ്പെടുത്തിയ സംഖ്യകൾ ഇങ്ങനെയാണ്:

x	$x+1$
$x+7$	$x+8$

ഇവയുടെ തുക

$$x + (x+1) + (x+7) + (x+8) = 4x + 16.$$

ഇതിനെ ഇങ്ങനെ മാറ്റിയെഴുതാം:

$$\begin{aligned} 4x + 16 &= (4 \times x) + (4 \times 4) \\ &= 4(x+4) \end{aligned}$$

അതായത് ആദ്യത്തെ സംഖ്യയോട് 4 കൂട്ടി, പിന്നെ 4 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണ് തുക. അപ്പോൾ ആദ്യത്തെ സംഖ്യ തിരിച്ചു കിട്ടാൻ, 4 കൊണ്ടു ഹരിച്ച്, പിന്നെ 4 കുറച്ചാൽ മതി.

ഇത് മറ്റൊരു തരത്തിലും പറയാം:

> ഒരു സംഖ്യയെ 2 കൊണ്ടും 3 കൊണ്ടും വെവ്വേറെ ഗുണിച്ചു കൂട്ടുന്നതിനു പകരം 5 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ മതി.

ഉദാഹരണമായി

$$(2 \times 16) + (3 \times 16) = 5 \times 16 = 80$$

ഇതിൽ 2, 3 എന്നതിനു പകരം മറ്റു സംഖ്യകളായാലോ? ഈ കണക്കു നോക്കുക.

ഗണിതസമ്മേളനത്തിലെ ചർച്ചകൾ നടക്കുന്നത് രണ്ടു മുറികളിലാണ്. ഒരു മുറിയിൽ 40 പേരും മറ്റേ മുറിയിൽ 35 പേരുമാണുള്ളത്. ചായയോടൊപ്പം എല്ലാവർക്കും 2 ബിസ്കറ്റ് വീതം കൊടുക്കണം. ആകെ എത്ര ബിസ്കറ്റ് വേണം?

ആദ്യത്തെ മുറിയിലുള്ള 40 പേർക്ക് വേണ്ട ബിസ്കറ്റ്

$$40 \times 2 = 80$$

രണ്ടാമത്തെ മുറിയിലെ 35 പേർക്ക് വേണ്ട ബിസ്കറ്റ്

$$35 \times 2 = 70$$

ആകെ വേണ്ട ബിസ്കറ്റ്

$$80 + 70 = 150$$

മറ്റൊരു രീതിയിലും ആലോചിക്കാം. രണ്ടു മുറിയിലും കൂടി ആകെയുള്ളവർ

$$40 + 35 = 75$$

അപ്പോൾ ആകെ വേണ്ട ബിസ്കറ്റ്

$$75 \times 2 = 150$$

ഇവിടെ എന്താണു കണ്ടത്? 40 കൊണ്ടും 35 കൊണ്ടും 2 നെ വെവ്വേറെ ഗുണിച്ചു കൂട്ടുന്നതിനു പകരം, അവയുടെ തുകയായ 75 നെ 2 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ മതി.

ഭിന്നസംഖ്യകൾ കൊണ്ടുള്ള ഗുണനത്തിലും ഇതു ശരിയാണ്. ഉദാഹരണമായി, 4 ന്റെ പകുതിയും 6 ന്റെ പകുതിയും കൂട്ടിയാൽ $2 + 3 = 5$; തുകയായ 10 ന്റെ പകുതി എടുത്താലും 5 തന്നെ.

ഇതിലെല്ലാം കാണുന്ന പൊതുവായ ബന്ധം എന്താണ്?

രണ്ടു സംഖ്യകളെ ഒരേ സംഖ്യ കൊണ്ട് വെവ്വേറെ ഗുണിച്ച് കൂട്ടിയാലും സംഖ്യകളുടെ തുകയെ ഗുണിച്ചാലും ഫലം ഒന്നു തന്നെ.

ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ, (ഒരേ സംഖ്യകൊണ്ട്) ഗുണിച്ചു കൂട്ടുന്നതും കൂട്ടി ഗുണിക്കുന്നതും ഒന്നുതന്നെ.

ബീജഗണിതരീതിയിൽ പറഞ്ഞാലോ?

> x, y, z എന്ന ഏതു സംഖ്യകളെടുത്താലും
>
> $$xz + yz = (x + y)z.$$

കൂട്ടുന്നതിനു പകരം കുറയ്ക്കുകയാണെങ്കിലോ?

> രണ്ടു സംഖ്യകളെ ഒരു സംഖ്യകൊണ്ട് വെവ്വേറെ ഗുണിച്ച് കുറച്ചാലും, ആദ്യത്തെ സംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസത്തെ മൂന്നാമത്തെ സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിച്ചാലും ഫലം ഒന്നുതന്നെ.

ബീജഗണിതരീതിയിൽ പറഞ്ഞാൽ

> x, y, z എന്ന ഏതു സംഖ്യകളെടുത്താലും
>
> $$xz - yz = (x - y)z.$$

ഇനി ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കൂ:

- $(63 \times 12) + (37 \times 12)$
- $\left(15 \times \frac{3}{4}\right) + \left(5 \times \frac{3}{4}\right)$
- $\left(\frac{1}{3} \times 20\right) + \left(\frac{2}{3} \times 20\right)$
- $(65 \times 11) - (55 \times 11)$
- $\left(2\frac{1}{2} \times 23\right) - \left(1\frac{1}{2} \times 23\right)$
- $(13.5 \times 40) - (3.5 \times 40)$

ചെയ്തുനോക്കാം

- താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചതുരത്തിൽ, ഒരു സമചതുരത്തിൽ വരുന്ന ഏതെങ്കിലും 9 സംഖ്യകളെടുക്കുക. അവയുടെ തുകയും സമചതുരത്തിന്റെ മധ്യത്തിലുള്ള സംഖ്യയും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം വിശദീകരിക്കുക. ഈ ബന്ധം ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് സമർഥിക്കുക.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

ഇനി 25 സംഖ്യകൾ ഉള്ള സമചതുരങ്ങൾ എടുത്തുനോക്കൂ.

മറ്റൊരു കലണ്ടർ കണക്ക്

കലണ്ടറിൽ നാലു സംഖ്യകളുടെ സമചതുരത്തിനു പകരം, ഒമ്പതു സംഖ്യകളുടെ സമചതുരം എടുത്തുനോക്കൂ:

ഞായർ	തിങ്കൾ	ചൊവ്വ	ബുധൻ	വ്യാഴം	വെള്ളി	ശനി
			1	2	3	4
5	6	7	(8)	(9)	(10)	11
12	13	14	(15)	(16)	(17)	18
19	20	21	(22)	(23)	(24)	25
26	27	28	29	30		

ഇവയുടെ തുക 144. ഇത് 16 ന്റെ 9 മടങ്ങാണ്. ഇതുപോലുള്ള മറ്റു സമചതുരങ്ങളിലും ഇതു ശരിയാണോ എന്നു നോക്കൂ.

ഇത് എന്തുകൊണ്ടാണ് എന്നറിയാൻ, നടുവിലെ സംഖ്യ x എന്നെടുക്കാം. അപ്പോൾ സമചതുരത്തിലെ മറ്റു ചില സംഖ്യകൾ ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

	$x - 7$	
$x - 1$	x	$x + 1$
	$x + 7$	

$x - 8$	$x - 7$	$x - 6$
$x - 1$	x	$x + 1$
$x + 6$	$x + 7$	$x + 8$

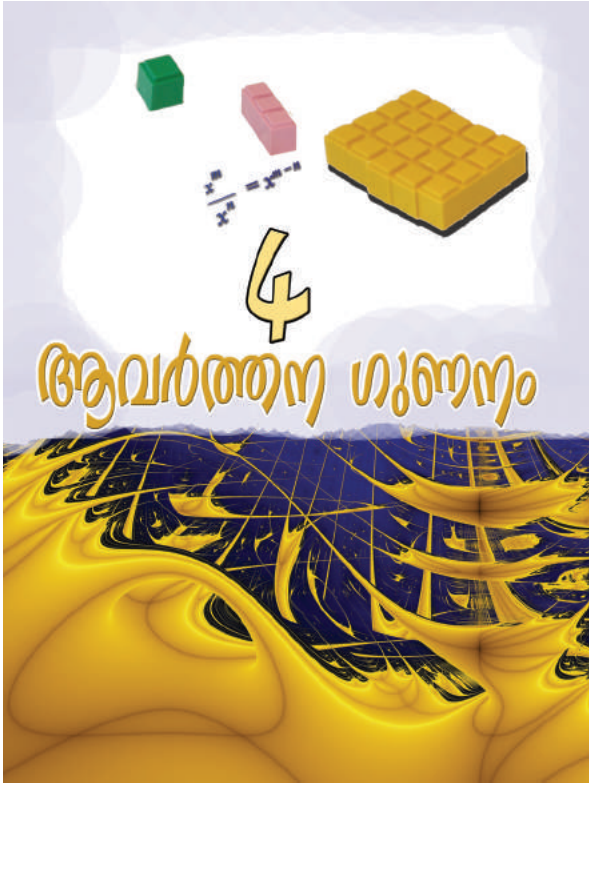
ഇതിലെ $x - 8$, $x + 8$ എന്നിങ്ങനെയുള്ള ജോടികൾ ശ്രദ്ധിച്ചാൽ, ക്രിയകളൊന്നും ചെയ്യാതെ തന്നെ തുക $9x$ ആണെന്നു കാണാം. അതായത്, നടുവിലെ സംഖ്യയുടെ 9 മടങ്ങ്.

തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്
• സംഖ്യാക്രിയകളിലെ പൊതുതത്ത്വങ്ങൾ കണ്ടെത്തുന്നു.			
• ക്രിയകളിലെ പൊതുതത്ത്വങ്ങളെ ഭാഷാ രൂപത്തിൽ എഴുതുന്നു.			
• സംഖ്യാബന്ധങ്ങളും ക്രിയാതത്ത്വങ്ങളും അക്ഷരങ്ങളുപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.			
• ക്രിയകൾ എളുപ്പമാക്കാൻ പൊതുതത്ത്വങ്ങൾ പ്രയോഗിക്കുന്നു.			

4

ആവർത്തന ഗുണനം



ഗുണനവും വലുപ്പവും

ഒരു പഴയ കഥയാണ്. ഒരു ധനികൻ സഹായം ചോദിച്ചു വന്നയാളോട് പറഞ്ഞു. "ഒന്നുകിൽ ഓരോ ദിവസവും ആയിരം രൂപ വീതം മുപ്പതു ദിവസം തരാം; അല്ലെങ്കിൽ ആദ്യത്തെ ദിവസം ഒരു പൈസ, രണ്ടാമത്തെ ദിവസം രണ്ടു പൈസ, മൂന്നാമത്തെ ദിവസം നാലുപൈസ എന്നിങ്ങനെ ഓരോ ദിവസവും ഇരട്ടിയാക്കി മുപ്പതു ദിവസം തരാം. ഏതാണ് വേണ്ടത്?"

ഏതാണ് നല്ലത്?

നമുക്ക് നോക്കാം.

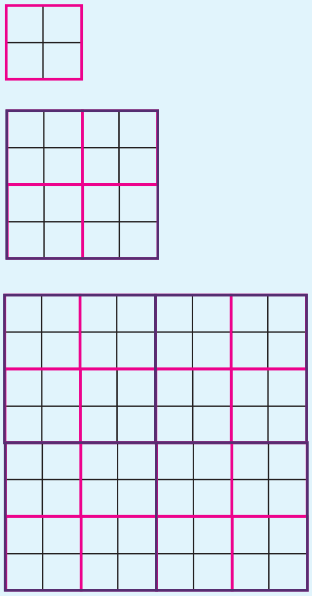
അദ്യത്തെ രീതിയിലാണെങ്കിൽ 30 ദിവസം കൊണ്ട് 30000 രൂപ കിട്ടും. രണ്ടാമത്തെ രീതിയിലാണെങ്കിലോ?

1 + 2 + 4 + 8 + 16 + ...

എന്നിങ്ങനെ 30 സംഖ്യകൾ കൂട്ടിക്കിട്ടുന്ന അത്രയും പൈസ. ഇത് എത്രയാകുമെന്നോ? 1073741823 പൈസ. അതായത് ഒരുകോടിയിലധികം രൂപ!

ഗുണിച്ച് ഗുണിച്ച്

ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ:



ഒന്നാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ എത്ര കളങ്ങളുണ്ട്?

രണ്ടാമത്തെയും മൂന്നാമത്തെയും ചിത്രങ്ങളിലോ?

ഇതേ രീതിയിൽ വരച്ചാൽ അടുത്ത ചിത്രത്തിൽ എത്ര കളങ്ങളുണ്ടാകും?

ഇതിനെ ഈ രീതിയിൽ കാണാം:

ഒന്നാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ നാലു ചെറിയ സമചതുരങ്ങൾ ചേർന്ന സമചതുരം. ഇത്തരം നാലു സമചതുരങ്ങൾ ചേർന്നതാണ് രണ്ടാമത്തെ ചിത്രം.

അങ്ങനെ അതിൽ $4 \times 4 = 16$ ചെറിയ സമചതുരങ്ങൾ.

രണ്ടാമത്തെ സമചതുരം പോലുള്ള നാലു സമചതുരങ്ങൾ ചേർന്നതാണ് മൂന്നാമത്തെ ചിത്രം.

അപ്പോൾ അതിൽ $16 \times 4 = 64$ ചെറിയ സമചതുരങ്ങൾ.

അടുത്ത സമചതുരത്തിലോ?

ആകെ $64 \times 4 = 256$ ചെറുസമചതുരങ്ങൾ.

ഇക്കാര്യം ഇങ്ങനെയും പറയാം:

ചെറുസമചതുരങ്ങളുടെ എണ്ണം

ഒന്നാം ചിത്രത്തിൽ 4

രണ്ടാം ചിത്രത്തിൽ 4×4

മൂന്നാം ചിത്രത്തിൽ $4 \times 4 \times 4$

അപ്പോൾ 10-ാം ചിത്രത്തിലോ?

$$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$$

ഇതിനെ ഇങ്ങനെ വിസ്തരിച്ചെഴുതാതെ ചുരുക്കി 4^{10} എന്നാണ് എഴുതുന്നത്. വായിക്കുന്നതോ, "നാല് കൃതി പത്ത്" ("4 raised to 10") എന്നും. ഗുണിച്ചു നോക്കിയാൽ ഈ സംഖ്യ 1048576 എന്നു കാണാം.

ഇനി ചിത്രങ്ങളിലെ സമചതുരങ്ങളുടെ എണ്ണം $4, 4^2, 4^3, \ldots$ എന്നിങ്ങനെയാണ് എന്നും, അങ്ങനെ ഇരുപതാം ചിത്രത്തിൽ 4^{20} കളങ്ങൾ, നൂറാം ചിത്രത്തിൽ 4^{100} കളങ്ങൾ എന്നുമെല്ലാം പറയാനും എഴുതാനും എളുപ്പമല്ലേ. ഈ സംഖ്യകൾ കണക്കുകൂട്ടി കണ്ടുപിടിക്കാൻ ബുദ്ധിമുട്ടാകുമ്പോൾ കമ്പ്യൂട്ടർ ഉപയോഗിക്കുകയുമാവാം.

ഇവിടെ നമ്മൾ കണ്ട $4, 4^2, 4^3, 4^4, \ldots$ എന്നിവയെ നാലിന്റെ കൃതികൾ (powers of 4) എന്നാണു പറയുന്നത്.

4^2 എന്നത് 4 ന്റെ രണ്ടാം കൃതി, 4^3 എന്നത് 4 ന്റെ മൂന്നാം കൃതി എന്നിങ്ങനെ.

4 എന്നതിനെ ആവശ്യമെങ്കിൽ 4^1 എന്നെഴുതാം. അപ്പോൾ 4 ന്റെ ഒന്നാം കൃതിയാണ് 4 എന്നും പറയാം.

4^3 ലെ 3 നെ കൃത്യങ്കം (exponent) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഒരു സംഖ്യയുടെ രണ്ടാം കൃതിയെ അതിന്റെ വർഗമെന്നും (square) മൂന്നാം കൃതിയെ ഘനം (cube) എന്നും വിളിക്കാറുണ്ട്.

കൃതീകരണം

ആവർത്തിച്ചു കൂട്ടുന്നതിനെ ഗുണനം എന്ന ക്രിയയായി പറയുന്നതുപോലെ ആവർത്തിച്ചു ഗുണിക്കുന്ന ക്രിയയെ കൃതീകരണം (exponentiation) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ കൂടി നോക്കാം.

മൂന്നിന്റെ കൃതികൾ ഏതൊക്കെയാണ്?

$3^1, 3^2, 3^3, \ldots$ ഇവ എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

$$3^1 = 3$$

$$3^2 = 3 \times 3 = 9$$

$$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 9 \times 3 = 27$$

എന്നിങ്ങനെ ഓരോന്നായി ഗുണിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കാം.

3^6 കണ്ടുപിടിക്കണമെങ്കിലോ? ഇങ്ങനെ ഒന്നിനുശേഷം മറ്റൊന്നായി കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിനു പകരം കുറച്ചുകൂടി എളുപ്പത്തിൽ കണ്ടുപിടിക്കാൻ വഴിയുണ്ടോ എന്നു നോക്കാം.

$$3^6 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

ഓരോന്നായി ഗുണിക്കുന്നതിനു പകരം മൂന്നു വീതം ഗുണിച്ചാൽ

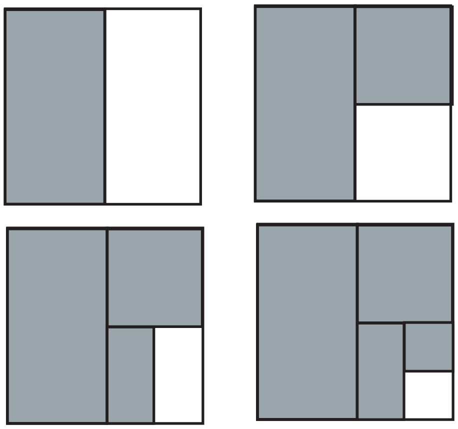
കൃതീകരണം

സങ്കലനം, വ്യവകലനം, ഗുണനം, ഹരണം എന്നീ നാലു ക്രിയകളാണല്ലോ നാം സാധാരണയായി ഗണിതത്തിൽ ഉപയോഗിക്കുന്നത്. അഞ്ചാമത്തെ ക്രിയയാണ് കൃതീകരണം (exponentiation). എണ്ണൽസംഖ്യകൾ കൊണ്ടുള്ള ഗുണനം, ആവർത്തനസങ്കലനം ആണെന്നതുപോലെ, കൃതീകരണം ആവർത്തനഗുണനമാണ്.

മറ്റു ക്രിയകൾ എഴുതുമ്പോൾ സംഖ്യകൾക്കിടയിൽ ഒരു ചിഹ്നം (+, −, ×, ÷) ഉപയോഗിക്കുന്നതുപോലെ കൃതീകരണം എന്ന ക്രിയയ്ക്ക് ചിഹ്നമൊന്നുമില്ല. ഗുണിക്കപ്പെടുന്ന സംഖ്യയുടെ വലത്തു മുകളിൽ, എത്ര പ്രാവശ്യം ഗുണിക്കുന്നു എന്നു കാണിക്കുന്ന സംഖ്യ അൽപ്പം ചെറുതായി എഴുതുകയാണ് രീതി.

ഉദാഹരണമായി $4 \times 4 \times 4 = 4^3$

കൃതികളുടെ തുക



ഓരോ ചിത്രത്തിലും നിറം കൊടുത്തിരിക്കുന്നത് വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ്?

ഒന്നാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ $\frac{1}{2}$ ഭാഗം

രണ്ടാമത്തേതിലോ?

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

മറ്റൊരു രീതിയിലും കാണാം.

കറുപ്പിക്കാത്തത് $\frac{1}{4}$ ഭാഗം.

അപ്പോൾ കറുപ്പിച്ചത്

$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ ഭാഗം.

ഇവിടെ എന്താണു കണ്ടത്?

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4}$$

ഇതുപോലെ മൂന്നാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ നിന്നും

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1 - \frac{1}{8}$$

നാലാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ നിന്നും

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 1 - \frac{1}{16}.$$

ഇങ്ങനെ ഇനിയും മുന്നോട്ടു പോകാമല്ലോ. കൃതികൾ ഉപയോഗിച്ച് എഴുതിയാൽ

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = 1 - \frac{1}{2^3}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} = 1 - \frac{1}{2^4}.$$

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}$ എന്നിങ്ങനെ കുറേ കൃതികളുടെ തുക, 1 ൽനിന്ന് അവസാനകൃതി കുറച്ചതാണ്.

$$3^6 = (3 \times 3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3)$$
$$= 27 \times 27$$
$$= 729$$

ഇനി 2^9 കാണണമെങ്കിലോ?

$$2^9 = (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2)$$
$$= 16 \times 32$$
$$= 512$$

മറ്റേതെങ്കിലും രീതിയിൽ ഇതു കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

ഇനി ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള കൃതികൾ കണ്ടുപിടിക്കൂ.

- 2^6
- 3^8
- 4^4
- 2^9
- 10^6
- 1^{10}
- 100^4
- 0^{20}

പത്തിന്റെ കൃതികൾ

10 ന്റെ കൃതികൾ എന്തൊക്കെയാണ്?

10, 10^2, 10^3, ... എന്നിങ്ങനെയല്ലേ.

ഇവ കണ്ടുപിടിക്കണമെങ്കിലോ?

$$10^2 = 10 \times 10 = 100$$
$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$$

10^8 എത്രയാണ്?

ഇതുപോലെ 20 ന്റെ കൃതികൾ കണ്ടുപിടിക്കാം.

20^4 എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

$$20^4 = 20 \times 20 \times 20 \times 20$$
$$= (2 \times 10) \times (2 \times 10) \times (2 \times 10) \times (2 \times 10)$$
$$= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (10 \times 10 \times 10 \times 10)$$
$$= 16 \times 10000 = 160000$$

$2^4 \times 5^5$ എത്രയാണ്?

ഇതിനെ $(2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5)$

എന്നെഴുതാം.

ഒന്നു മാറ്റി എഴുതിയാൽ

$$(2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times 5$$
$$= 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 5$$
$$= 10^4 \times 5 = 50000$$

100^3 എത്രയാണ്?

$$100^3 = 100 \times 100 \times 100$$

ഇതിനെ $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$ എന്നെഴുതിയാൽ

$$100^3 = 10^6$$
$$= 1000000$$

ഇനി ഈ ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ.

- നൂറ്, ആയിരം, പതിനായിരം, ലക്ഷം, പത്തുലക്ഷം, കോടി- ഇവയെല്ലാം 10 ന്റെ കൃതികളായി എഴുതുക.
- ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന കൃതികൾ കണക്കാക്കുക.
  - 30^4
  - 50^5
  - 200^3

സ്ഥാനവില

3675 എന്നതിനെ സ്ഥാനവില അനുസരിച്ച് എങ്ങനെയാണ് പിരിച്ചെഴുതുന്നത്?

$$(3 \times 1000) + (6 \times 100) + (7 \times 10) + 5$$

പത്തിന്റെ കൃതികൾ ഉപയോഗിച്ച് ഇതിനെ

$$(3 \times 10^3) + (6 \times 10^2) + (7 \times 10) + 5$$

എന്നും എഴുതാം.

ഇതുപോലെ ചുവടെയുള്ള സംഖ്യകൾ പിരിച്ചെഴുതൂ.

- 4321
- 732
- 1221
- 60504

ദശാംശരൂപത്തിലുള്ള സംഖ്യകളായാലോ?

362.574 നെ എങ്ങനെ പിരിച്ചെഴുതും?

$$362.574 = (3 \times 100) + (6 \times 10) + 2 + \left(5 \times \frac{1}{10}\right) + \left(7 \times \frac{1}{100}\right) + \left(4 \times \frac{1}{1000}\right)$$

ഇതിനെ

$$(3 \times 10^2) + (6 \times 10) + 2 + \left(5 \times \frac{1}{10}\right) + \left(7 \times \frac{1}{10^2}\right) + \left(4 \times \frac{1}{10^3}\right)$$

എന്നെഴുതാമല്ലോ.

ഇതുപോലെ ഈ സംഖ്യകളെ പിരിച്ചെഴുതിനോക്കൂ.

- 437.54
- 23.005
- 4567
- 201

ഘടകക്രിയ

ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യയെയും അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതാമല്ലോ.

ഉദാഹരണമായി 72 എടുത്താൽ

$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$ എന്നെഴുതാം.

കൃതികൾ ഉപയോഗിച്ചെഴുതിയാൽ

$$72 = 2^3 \times 3^2.$$

മറ്റൊരു തുക

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1 - \frac{1}{8}$$

എന്നു കണ്ടല്ലോ. ഇതിന്റെ രണ്ടുവശത്തും 8 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ

$$8\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = 8\left(1 - \frac{1}{8}\right)$$

അതായത്,

$$\left(8 \times \frac{1}{2}\right) + \left(8 \times \frac{1}{4}\right) + \left(8 \times \frac{1}{8}\right) = 8 - \left(8 \times \frac{1}{8}\right)$$
$$4 + 2 + 1 = 8 - 1$$

ഇതുപോലെ $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 1 - \frac{1}{16}$ എന്നതിന്റെ രണ്ടുവശത്തും 16 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ

$$8 + 4 + 2 + 1 = 16 - 1$$

ക്രമമൊന്ന് മാറ്റി എഴുതിയാൽ

$$1 + 2 + 4 = 8 - 1$$
$$1 + 2 + 4 + 8 = 16 - 1$$

അതായത്

$$2 + 4 = 8 - 2$$
$$2 + 4 + 8 = 16 - 2$$

കൃതികളാക്കി എഴുതിയാൽ

$$2 + 2^2 = 2^3 - 2$$
$$2 + 2^2 + 2^3 = 2^4 - 2$$

ഇങ്ങനെ ഇനിയും മുന്നോട്ട് പോകുമല്ലോ.

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ $2, 2^2, 2^3$ എന്നിങ്ങനെ കൃതികളുടെ തുക, അടുത്ത കൃതിയിൽനിന്ന് 2 കുറച്ചതാണ്.

സംഖ്യകൾ ശാസ്ത്രത്തിൽ

ശാസ്ത്രത്തിൽ പലപ്പോഴും വളരെ വലിയ സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കേണ്ടിവരും. ഉദാഹരണത്തിന്, ഭൂമിയും സൂര്യനും തമ്മിലുള്ള ശരാശരി ദൂരം 149000000 കിലോമീറ്ററാണ്. ഈ സംഖ്യ ശാസ്ത്രസമ്പ്രദായത്തിൽ (scientific notation) എഴുതുന്നത് 1.49×10^8 എന്നാണ്. ഇതുപോലെ പ്രകാശം ഒരു വർഷം കൊണ്ടു സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം എകദേശം 9.46×10^{17} കിലോമീറ്റർ എന്നാണ് കണക്കാക്കിയിരിക്കുന്നത്.

ഈ ദൂരത്തെ ഒരു പ്രകാശവർഷം എന്നാണ് പറയുക. നക്ഷത്രങ്ങളിലേക്കും മറ്റുമുള്ള അകലം സൂചിപ്പിക്കുമ്പോൾ പ്രകാശവർഷത്തിലാണ് പറയാറുള്ളത്. ഭൂമിയോട് ഏറ്റവും അടുത്ത നക്ഷത്രം സൂര്യനാണല്ലോ, അതു കഴിഞ്ഞാൽ അടുത്ത നക്ഷത്രം പ്രോക്സിമ സെന്റോറി (Proxima centauri) ആണ്. ഈ നക്ഷത്രത്തിലേക്കുള്ള ഏകദേശ ദൂരം 4.22 പ്രകാശവർഷമാണ്. അതായത് ഏകദേശം 3.99×10^{18} കിലോമീറ്റർ. ഇത് മറ്റൊരു വിധത്തിൽ പറയാം. ഈ നക്ഷത്രത്തിൽനിന്നുള്ള പ്രകാശരശ്മികൾ ഭൂമിയിലെത്താൻ നാലു വർഷത്തിലധികം എടുക്കും. അതായത്, ഇന്നു ഭൂമിയിൽനിന്ന് നാം കാണുന്നത് ഈ നക്ഷത്രത്തിന്റെ നാലിലധികം വർഷങ്ങൾക്കു മുമ്പുള്ള അവസ്ഥയാണ്. അപ്പോൾ ഈ നക്ഷത്രം നശിച്ചുകഴിഞ്ഞാലും നാലിലധികം വർഷം നാം അതിന്റെ പ്രകാശരശ്മികൾ കണ്ടുകൊണ്ടിരിക്കും!

ഇതുപോലെ 1000 നെ എങ്ങനെയെഴുതാം?

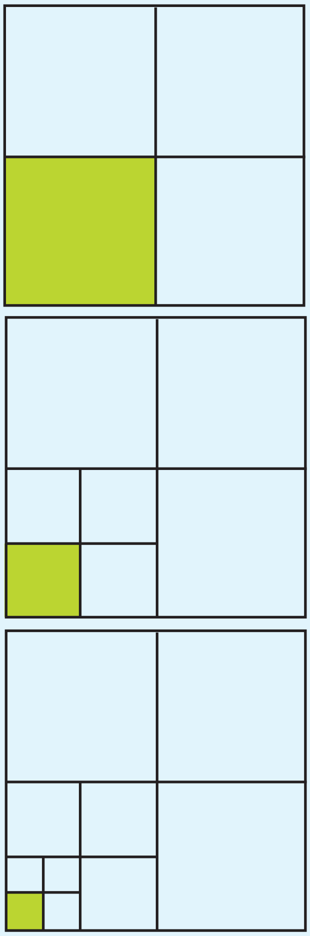
$$1000 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$$
$$= 2^3 \times 5^3$$

ഇനി ചുവടെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സംഖ്യകളെ ഇതുപോലെ അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ കൃതികളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതിനോക്കൂ.

- 36
- 225
- 500
- 784
- 750
- 625
- 1024

ഭിന്നകൃതികൾ

ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ.



ഒന്നാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ സമചതുരത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ് നിറം നൽകിയിരിക്കുന്നത്?

രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിലോ?

$\frac{1}{4}$ ന്റെ $\frac{1}{4}$ ഭാഗം.

അതായത്

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \text{ ഭാഗം.}$$

മൂന്നാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ ഇതിന്റെയും $\frac{1}{4}$ ഭാഗം.

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{64} \text{ ഭാഗം.}$$

ഇത് മൂന്ന് $\frac{1}{4}$ കൾ തമ്മിൽ ഗുണിച്ചതാണല്ലോ.

ഈ രീതിയിൽ തുടർന്നാൽ, അടുത്ത ചിത്രത്തിലെ എത്ര ഭാഗം നിറം നൽകണം?
അഞ്ചാമത്തെ ചിത്രത്തിലോ?

അഞ്ച് $\frac{1}{4}$ കൾ തമ്മിൽ ഗുണിക്കണം.

ഇതിനെ $\left(\frac{1}{4}\right)^5$ എന്നു ചുരുക്കിയെഴുതാം.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$$
$$= \frac{1}{4\times4\times4\times4\times4}$$
$$= \frac{1}{4^5}$$
$$= \frac{1}{64\times16}$$
$$= \frac{1}{1024}$$

അതായത്, അഞ്ചാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ മൊത്തം ചതുരത്തിന്റെ $\frac{1}{1024}$ ഭാഗം മാത്രമാണ് നിറം നൽകേണ്ടത്.

ഏതു ഭിന്നസംഖ്യയുടെയും ആവർത്തിച്ചുള്ള ഗുണനത്തെ ഇതുപോലെ കൃതിയായി എഴുതാം. ഉദാഹരണമായി

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5}$$
$$= \frac{3\times3\times3}{5\times5\times5} = \frac{3^3}{5^3}$$
$$= \frac{27}{125}$$

ഒരുദാഹരണം കൂടി നോക്കാം.

$$\left(2\frac{2}{5}\right)^3 = \left(\frac{12}{5}\right)^3$$
$$= \frac{12}{5} \times \frac{12}{5} \times \frac{12}{5}$$

പ്രോജക്ട്

അവസാനത്തെ അക്കം

10 ന്റെ എല്ലാ കൃതികളുടെയും അവസാന അക്കം 0 ആണല്ലോ. 5 ന്റെ കൃതികളുടെയെല്ലാം അവസാന അക്കമോ?

6 ന്റെ കൃതികളായാലോ?

4 ന്റെ കൃതികൾ നോക്കുക. അവസാന അക്കം എല്ലാ കൃതികൾക്കും ഒരുപോലെയാണോ?

അവസാന അക്കം ഏതൊക്കെയാണ്?

ഇതുപോലെ മറ്റ് ഒരക്കസംഖ്യകളുടെ കൃതികൾ പരിശോധിച്ചുനോക്കൂ.

ഒരു ചോദ്യം കൂടി: 2^{100}ന്റെ അവസാന അക്കം എന്താണ്?

കൂടുമോ? കുറയുമോ?

2 ന്റെ കൃതികളായ 2, 4, 8, 16,... എന്നിവ വളരെ വേഗം വലുതാകുന്നത് കണ്ടു. മറ്റു സംഖ്യകളുടെ കൃതികളും ഇതുപോലെ വലുതായിക്കൊണ്ടിരിക്കുമോ?

$\frac{1}{2}$ ന്റെ കൃതികൾ എടുത്താലോ? $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ ഇവ ചെറുതായിച്ചെറുതായി വരുകയാണ്.

$\frac{2}{3}$ ന്റെ കൃതികളായാലോ?

$\frac{3}{2}$ ന്റെ കൃതികളോ?

എങ്ങനെയുള്ള സംഖ്യകൾക്കാണ് കൃതികൾ വലുതായിക്കൊണ്ടിരിക്കുന്നത്? എങ്ങനെയുള്ള സംഖ്യകൾക്കാണ് അവ ചെറുതായിക്കൊണ്ടിരിക്കുന്നത്?

1 ന്റെ കൃതികളോ?

$$= \frac{1728}{125} = 13\frac{103}{125}$$

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന കൃതികൾ ഇതുപോലെ കണ്ടുപിടിക്കൂ.

- $\left(\frac{2}{3}\right)^5$
- $\left(\frac{3}{5}\right)^4$
- $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$
- $\left(2\frac{1}{2}\right)^3$

ദശാംശകൃതികൾ

$(1.2)^2$ എത്രയാണ്?

$$(1.2)^2 = 1.2 \times 1.2 = 1.44$$

ഇതുപോലെ $(1.5)^3$ കണ്ടുപിടിക്കൂ.

$(0.2)^4$ എത്രയാണ്?

$2^4 = 16$ എന്നറിയാമല്ലോ.

0.2 എന്നതിനെ $\frac{2}{10}$ എന്നെഴുതാം. അപ്പോൾ,

$$(0.2)^4 = \left(\frac{2}{10}\right)^4 = \frac{2^4}{10^4} = \frac{16}{10000} = 0.0016$$

ഇത് മനക്കണക്കായി ചെയ്യാവുന്നതല്ലേയുള്ളൂ.

$(0.3)^3$ എത്രയാണെന്ന് മനക്കണക്കായി പറയാമോ?

3^3 എത്രയാണ്?

$(0.3)^3$ ൽ എത്ര ദശാംശസ്ഥാനമുണ്ടാകും?

$12^3 = 1728$ ആണ്. ഇതിൽനിന്ന് $(1.2)^3$, $(0.12)^3$ എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

ഇതുപോലെ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന കൃതികൾ കണ്ടുപിടിക്കൂ.

- $(1.1)^3$
- $(0.02)^5$
- $(0.1)^6$

$16^3 = 4096$ ആണ് ഇതുപയോഗിച്ച് ചുവടെയുള്ള കൃതികൾ കണ്ടുപിടിക്കൂ.

- $(1.6)^3$
- $(0.16)^3$
- $(0.016)^3$

ഗുണനനിയമം

ഒരു സംഖ്യയുടെതന്നെ രണ്ടു ഗുണിതങ്ങളുടെ തുകയെ അതേ സംഖ്യയുടെ മറ്റൊരു ഗുണിതമായി എഴുതാൻ നമുക്കറിയാം:

$$(3 \times 2) + (5 \times 2) = (3 + 5) \times 2 = 8 \times 2$$

എന്തുകൊണ്ടാണിത് ശരിയാകുന്നത്?

$$3 \times 2 = 2 + 2 + 2$$

$$5 \times 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2$$

അപ്പോൾ

$$\begin{aligned}(3 \times 2) + (5 \times 2) &= (2 + 2 + 2) + (2 + 2 + 2 + 2 + 2)\\ &= 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2\\ &= 8 \times 2\end{aligned}$$

ഇതുപോലെ കൃതികളുടെ ഗുണനഫലം കണ്ടുപിടിക്കാം. ഉദാഹരണമായി $2^3 \times 2^5$ നോക്കാം.

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2$$

$$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

അപ്പോൾ

$$\begin{aligned}2^3 \times 2^5 &= (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2)\\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2\\ &= 2^8\end{aligned}$$

ഇവിടെ 2 നു പകരം മറ്റേതെങ്കിലും സംഖ്യയുടെ മൂന്നാം കൃതിയും അഞ്ചാം കൃതിയുമാണ് ഗുണിക്കുന്നതെങ്കിലോ?

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5 &= \left(\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\right)\\ &= \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^8\end{aligned}$$

നമ്മൾ എടുക്കുന്ന സംഖ്യയെ x എന്ന അക്ഷരം കൊണ്ട് സൂചിപ്പിച്ചാലോ?

$$\begin{aligned}x^3 \times x^5 &= (x \times x \times x) \times (x \times x \times x \times x \times x)\\ &= x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x = x^8\end{aligned}$$

ഗുണിതങ്ങളും കൃതികളും

m ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യയും x ഏതെങ്കിലും ഒരു സംഖ്യയും (എണ്ണൽസംഖ്യയോ ഭിന്നസംഖ്യയോ) ആണെങ്കിൽ mx അഥവാ $m \times x$ ന്റെ അർഥം m എണ്ണം x കൂട്ടുക എന്നാണല്ലോ. x^m എന്നതിന്റെ അർഥം m എണ്ണം x ഗുണിക്കുക എന്നും.

ഒരേ സംഖ്യയുടെ എണ്ണൽസംഖ്യകൾകൊണ്ടുള്ള ഗുണിതങ്ങൾ കൂട്ടുന്നതിന്റെയും, കൃതികൾ ഗുണിക്കുന്നതിന്റെയും നിയമങ്ങൾ നോക്കൂ:

$$mx + nx = (m + n)x$$

$$x^m \times x^n = x^{m+n}$$

ഒരു സംഖ്യയെ ഭിന്നസംഖ്യകൊണ്ടും ഗുണിക്കാം - അത് ആവർത്തനസങ്കലനമല്ലെന്നു മാത്രം. അതനുസരിച്ച് m, n എന്നിവ ഭിന്നസംഖ്യകളായാലും $mx + nx = (m + n)x$ എന്നതു ശരിയാണ്. എന്നാൽ n എന്നത് ഭിന്നസംഖ്യ ആണെങ്കിൽ x^n എന്നതിന് തൽക്കാലം അർഥമൊന്നുമില്ലല്ലോ.

രണ്ടിന്റെ ഗുണിതങ്ങളും കൃതികളും

രണ്ടിന്റെ കൃതികളെല്ലാം ഇരട്ടസംഖ്യകളാണ്. പക്ഷേ ഇരട്ടസംഖ്യകളെല്ലാം രണ്ടിന്റെ കൃതികളല്ലല്ലോ. ഉദാഹരണമായി 6 ഇരട്ടസംഖ്യയാണ്, 2 ന്റെ കൃതിയല്ല, എന്നാൽ

$$6 = 2 + 4 = 2^1 + 2^2$$

ഇതുപോലെ

$$10 = 2 + 8 = 2^1 + 2^3$$

$$12 = 4 + 8 = 2^2 + 2^3$$

$$14 = 2 + 4 + 8 = 2^1 + 2^2 + 2^3$$

ഇങ്ങനെ ഇരട്ടസംഖ്യകളെയെല്ലാം രണ്ടിന്റെ കൃതികളുടെ തുകയായി എഴുതാമോ എന്നു നോക്കൂ.

ഉദാഹരണമായി, 100 നെ 2 ന്റെ കൃതികളുടെ തുകയായി എഴുതുന്നതെങ്ങനെ?

2 ന്റെ കൃതികൾ ഓരോന്നായി പരിശോധിച്ചാൽ $2^6 = 64$ എന്നത് 100 നേക്കാൾ കുറവാണെന്നും $2^7 = 128$ എന്നത് 100 നേക്കാൾ വലുതാണെന്നും കാണാം.

$$100 = 2^6 + 36$$

എന്നെഴുതാം. ഇനി $2^5 = 32 < 36$ എന്നും

$$2^6 = 64 > 36$$

എന്നും കാണാം.

അപ്പോൾ $\quad 36 = 2^5 + 4 = 2^5 + 2^2$

എന്നെഴുതാം. അതായത്,

$$100 = 2^6 + 2^5 + 2^2$$

ഇതുപോലെ, 150 നെ 2 ന്റെ കൃതികളുടെ തുകയായി എഴുതിനോക്കൂ.

ഇനി കൃത്യങ്കങ്ങൾ 3 നും 5 നും പകരം മറ്റേതെങ്കിലും സംഖ്യകളായാലോ?

$$x^2 \times x^4 = (x \times x) \times (x \times x \times x \times x)$$
$$= x \times x \times x \times x \times x \times x$$
$$= x^6$$

കൃത്യങ്കങ്ങളെയും പൊതുവായി m, n എന്നീ അക്ഷരങ്ങൾ കൊണ്ട് സൂചിപ്പിച്ചാലോ?

$$x^m \times x^n = \underbrace{(x \times x \times x \times \ldots \times x)}_{m \text{ എണ്ണം}} \times \underbrace{(x \times x \times x \times \ldots \times x)}_{n \text{ എണ്ണം}}$$
$$= \underbrace{(x \times x \times x \times \ldots \times x)}_{m + n \text{ എണ്ണം}}$$
$$= x^{m+n}$$

ഇപ്പോൾ നാം കണ്ട പൊതുതത്ത്വം എന്താണ്? ബീജഗണിതരീതിയിൽപ്പറഞ്ഞാൽ

> x ഏതു സംഖ്യ ആയാലും m, n ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യകൾ ആയാലും
> $x^m \times x^n = x^{m+n}$.

ഇത് സാധാരണഭാഷയിലെങ്ങനെ പറയും?

ഇതിൽ രണ്ടു കാര്യങ്ങളുണ്ട്.

> (i) ഒരേ സംഖ്യയുടെ രണ്ടു കൃതികളുടെ ഗുണനഫലം ആ സംഖ്യയുടെതന്നെ കൃതിയാണ്
> (ii) ഗുണനഫലത്തിന്റെ കൃത്യങ്കം സംഖ്യയുടെ കൃത്യങ്കങ്ങളുടെ തുകയാണ്.

ഇതുപയോഗിച്ച് ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കൂ.

- 2^5 നെ 2^3 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ 2ന്റെ എത്രാമത്തെ കൃതി കിട്ടും?
- $10^2 \times 10^5$ എന്ന സംഖ്യയുടെ സാധാരണഭാഷയിലെ പേരെന്താണ്?
- 2^{10} ന്റെ രണ്ടു മടങ്ങ് 2 ന്റെ എത്രാമത്തെ കൃതിയാണ്?
- 2^{10} നോട് എത്ര കൂട്ടിയാൽ 2^{11} കിട്ടും?
- 3^{10} നോട് എത്ര കൂട്ടിയാൽ 3^{11} കിട്ടും?
- 2 ന്റെ കുറേ കൃതികളുടെ പട്ടികയാണിത്:

2^1	2	2^6	64	2^{11}	2048
2^2	4	2^7	128	2^{12}	4096
2^3	8	2^8	256	2^{13}	8192
2^4	16	2^9	512	2^{14}	16384
2^5	32	2^{10}	1024	2^{15}	32768

ഇത് ഉപയോഗിച്ച് ഈ ഗുണനഫലങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കൂ.

- 16×64
- 64×256
- 32×512
- 128×256

ഹരണനിയമം

ഒരേ സംഖ്യയുടെ രണ്ടു കൃതികളുടെ ഗുണനഫലം കണ്ടുപിടിച്ചതുപോലെ, ഹരണഫലം കണ്ടുപിടിക്കാനും എന്തെങ്കിലും സൂത്രം ഉണ്ടോ?

ഉദാഹരണമായി $4^5 \div 4^2$ എത്രയാണ്?

ഗുണനനിയമമനുസരിച്ച്

$$4^5 = 4^2 \times 4^3$$

അപ്പോൾ 4^5 നെ 4^2 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ എന്തുകിട്ടും?

$$4^5 \div 4^2 = 4^3$$

ഇതുപോലെ $5^7 \div 5^3$ എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

5^7 നെ 5^3 ന്റെ ഗുണിതമായി എങ്ങനെ എഴുതും?

$$5^7 = 5^3 \times \ldots\ldots..$$

ഇതിൽനിന്ന്

$$5^7 \div 5^3 = \ldots\ldots..$$

ഇനി $8^{23} \div 8^{16}$ ആണെങ്കിലോ?

8^{23} കിട്ടാൻ 8^{16} നെ എത്ര കൊണ്ട് ഗുണിക്കണം?

അതിന് 16 നെ 23 ആക്കാൻ എത്ര കൂട്ടണമെന്ന് കണ്ടുപിടിച്ചാൽപ്പോരേ?

$$23 - 16 = 7$$

അപ്പോൾ

$$8^{23} = 8^{16} \times 8^7$$

ഇനി $8^{23} \div 8^{16}$ കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ.

ഇതുതന്നെ ഭിന്നസംഖ്യയുടെ കൃതികളിലും ചെയ്യാം.

ഉദാഹരണമായി $\left(\frac{2}{3}\right)^{16}$ നെ $\left(\frac{2}{3}\right)^{9}$ കൊണ്ട് ഹരിച്ചാലോ?

നേരത്തേ ചെയ്തതുപോലെ

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{16} = \left(\frac{2}{3}\right)^{9} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{7}$$

എന്നെഴുതിയാൽ

രണ്ടിന്റെ കൃതികളും ഒറ്റസംഖ്യകളും

ഇരട്ടസംഖ്യകളെയെല്ലാം 2 ന്റെ കൃതികളുടെ തുകയായി എഴുതാമെന്നു കണ്ടല്ലോ. ഒന്നൊഴിച്ചുള്ള ഏത് ഒറ്റസംഖ്യയും ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യയോട് 1 കൂട്ടിയതാണ്. അപ്പോൾ ഒറ്റസംഖ്യകളെ 2 ന്റെ കൃതികളുടെയും 1 ന്റെയും തുകയായി എഴുതാം.

ഉദാഹരണമായി, 25 നെ ഇങ്ങനെ എഴുതാൻ ആദ്യം

$$25 = 24 + 1$$

എന്നെഴുതാം. ഇനി മുമ്പു ചെയ്തതുപോലെ 24 നെ 2 ന്റെ കൃതികളുടെ തുകയായി എഴുതാം.

$$24 = 16 + 8 = 2^4 + 2^3$$

അപ്പോൾ

$$25 = 2^4 + 2^3 + 1$$

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ, ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യയെയും $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots$ എന്നിങ്ങനെയുള്ള സംഖ്യകളിൽ ചിലതിന്റെ തുകയായി എഴുതാം.

കുറയ്ക്കലും ഹരിക്കലും

ഒരു സംഖ്യയുടെതന്നെ ഗുണിതങ്ങൾ കൂട്ടുന്നതിന്റെ തത്ത്വം പോലെത്തന്നെ കുറയ്ക്കുന്നതിന്റേയും തത്ത്വം കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. കുറയ്ക്കുന്നത് വലിയ സംഖ്യയിൽ നിന്നായിരിക്കണമെന്നു മാത്രം. ഇതിന് സമാനമായ തത്ത്വം കൃതികളുടെ ഹരണത്തിനുമുണ്ട്. ഹരിക്കപ്പെടുന്നത് വലിയ കൃതി ആയിരിക്കണമെന്നുമാത്രം.

അതായത് m, n എന്നീ എണ്ണൽസംഖ്യകളിൽ $m > n$ ആണെങ്കിൽ, ഏതു സംഖ്യ x എടുത്താലും.

$$mx - nx = (m - n)x.$$

ഗുണിതങ്ങൾക്കു പകരം കൃതികളായാലോ?

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

ഈ തത്ത്വത്തിൽ $x \neq 0$ എന്നും കൂടി പറയേണ്ടിവരും.

സങ്കലനത്തിന്റെ കാര്യത്തിൽ പറഞ്ഞതുപോലെത്തന്നെ m, n എന്നിവ എണ്ണൽസംഖ്യകളല്ലെങ്കിലും ഇവിടെപ്പറഞ്ഞ വ്യവകലനതത്ത്വം ശരിയാണ്.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{16} \div \left(\frac{2}{3}\right)^{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^{7}$$

എന്നു കാണാം.

ഇനി ഒരു സംഖ്യയുടെ ഏതെങ്കിലും കൃതിയെ അതിനേക്കാൾ ചെറിയ ഒരു കൃതികൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ എന്തുകിട്ടും എന്നു പൊതുവായി നോക്കാം:

സംഖ്യയെ x എന്നെടുക്കാം. ക്രിയ ഹരണമായതിനാൽ x പൂജ്യമാകരുത്. വലിയ കൃത്യങ്കം m എന്നും ചെറിയ കൃത്യങ്കം n എന്നും എടുക്കാം. ഇനി $x^m \div x^n$ എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

n നെ m ആക്കാൻ എത്ര കൂട്ടണം?

അപ്പോൾ

$$x^m = x^n \times x^{m-n}$$

ഇതിൽനിന്ന്

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

എന്നു കാണാമല്ലോ. അതായത്,

> x പൂജ്യമല്ലാത്ത ഏതു സംഖ്യ ആയാലും m, n ഇവ $m > n$ ആയ ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യകൾ ആയാലും
>
> $$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

ഗുണനത്തിന്റെ നിയമം പോലെ ഇത് സാധാരണഭാഷയിൽപ്പറയാമോ?

ഇനി ഈ ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കൂ.

- 2^5 നെ 2^3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 2 ന്റെ എത്രാമത്തെ കൃതി കിട്ടും?
- $10^9 \div 10^4$ എന്ന സംഖ്യ എന്താണ്?
- 2^{10} ന്റെ പകുതി 2 ന്റെ എത്രാമത്തെ കൃതിയാണ്?
- 2 ന്റെ കുറേ കൃതികളുടെ പട്ടിക ഉണ്ടാക്കിയല്ലോ (പേജ് 58). അത് ഉപയോഗിച്ച് ഈ ഹരണഫലങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കൂ.
  - $64 \div 16$
  - $512 \div 32$
  - $1024 \div 128$
  - $16384 \div 2048$
- $2^8 \times \frac{1}{2^3}$ എത്രയാണ്?
- 7^6 നെ എന്തുകൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ 7^2 കിട്ടും?

മറ്റൊരു ഹരണം

കഴിഞ്ഞ ചോദ്യങ്ങളിൽ അവസാനത്തേതിന് തൊട്ടുമുമ്പുള്ള ചോദ്യം നോക്കുക.

$$2^8 \times \frac{1}{2^3} = 2^8 \div 2^3 = 2^5$$

എന്നു കണ്ടല്ലോ.

ഇതിൽനിന്ന്

$$2^5 \div 2^8 = \frac{1}{2^3}$$

എന്നു കിട്ടുമല്ലോ.

ഇതുപോലെ മുകളിലെ അവസാന ചോദ്യത്തിൽനിന്ന് $7^2 \div 7^6$ കണ്ടുപിടിക്കൂ.

$$7^6 \times \frac{1}{7^4} = 7^2$$

ഇതിൽനിന്ന്

$$7^2 \div 7^6 = \frac{1}{7^4}$$

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ

> x പൂജ്യമല്ലാത്ത ഏതു സംഖ്യ ആയാലും m, n എന്നിവ $m < n$ ആയ ഏതു രണ്ട് എണ്ണൽസംഖ്യ ആയാലും
>
> $$\frac{x^m}{x^n} = \frac{1}{x^{n-m}}$$

ഇനി ചുവടെയുള്ള ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കൂ:

- ലഘൂകരിക്കുക
  - $\frac{2^5 \times 2^3}{2^4}$
  - $\frac{3^7}{3^2 \times 3^4}$
  - $\frac{5^2 \times 5^4}{5^5 \times 5^4}$
  - $\frac{8^2 \times 8^7}{8^6 \times 8^3}$
  - $\frac{4^3 \times 4^5}{4^2 \times 4^4}$
  - $\frac{10^4 \times 10^5}{10^6 \times 10^7}$
- 5^6 നെ 5^{10} കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ $\frac{1}{5}$ ന്റെ ഏതു കൃതി കിട്ടും?
- 10^8 നെ 10^{12} കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യയുടെ ദശാംശരൂപം എന്താണ്?
- $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ നെ $\left(\frac{1}{2}\right)^8$ കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന എണ്ണൽ സംഖ്യ ഏതാണ്?
- $(0.25)^6$ നെ ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യ കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാലാണ് $(0.25)^4$ കിട്ടുക?

ഹരിക്കലും കുറയ്ക്കലും

ഭിന്നസംഖ്യകളും കൂടി ഉപയോഗിച്ചാൽ ചെറിയ സംഖ്യയെ വലിയസംഖ്യ കൊണ്ടും ഹരിക്കാം- ഫലം ഭിന്നസംഖ്യ ആയിരിക്കുമെന്നുമാത്രം. അതുകൊണ്ട്, ചെറിയ കൃതിയെ വലിയ കൃതി കൊണ്ട് ഹരിക്കുന്നതിനെക്കുറിച്ചും ആലോചിക്കാം.

$$m < n \text{ ആണെങ്കിൽ } \frac{x^m}{x^n} = \frac{1}{x^{n-m}}$$

ഇതിന് സമാനമായ ഒരു തത്ത്വം ഗുണിതങ്ങളിൽ ഇല്ല. ചെറിയ സംഖ്യയിൽനിന്ന് വലിയ സംഖ്യ കുറയ്ക്കാൻ തൽക്കാലം കഴിയില്ലല്ലോ.

കിഴിക്കണക്ക്

100 ഒറ്റരൂപാ നാണയങ്ങൾ പല കിഴികളിലായി കെട്ടിവയ്ക്കണം. ഇതിൽനിന്ന് നൂറു രൂപ വരെയുള്ള എത്ര രൂപ വേണമെങ്കിലും കിഴിയൊന്നും അഴിക്കാതെ എടുക്കാൻ കഴിയണം. സാധിക്കുമോ?

ഒരു കിഴിയിൽ ഒരേയൊരു നാണയം മാത്രം ഇടുക. ഇനി 2 ന്റെ കൃതികളായ 2, 4, 8 എന്നിങ്ങനെ നാണയങ്ങളിട്ട് കിഴികളുണ്ടാക്കണം.

$$1+2+4+8+16+32=64-1=63$$

ബാക്കിവരുന്ന $100-63=37$ നാണയങ്ങൾ ഒറ്റകിഴിയാക്കണം.

ഇനി ആവശ്യമുള്ള തുക 68 ൽ കുറവാണെങ്കിൽ 2 ന്റെ കൃതികളും വേണമെങ്കിൽ 1 ഉം ഉപയോഗിച്ചെടുക്കാം. ഉദാഹരണമായി, 35 രൂപയാണ് വേണ്ടതെങ്കിൽ

$35=32+2+1$ എന്നെടുക്കാം.

63 ൽ കൂടുതലാണെങ്കിലോ?

ഉദാഹരണമായി, 65 രൂപ കിട്ടാൻ ആദ്യം 37 ന്റെ കിഴി എടുക്കുക. ഇനി വേണ്ടത് $65-37=28$ രൂപ. ഇത്

$$28=16+8+4$$

എന്നെടുക്കാമല്ലോ.

- 3 ന്റെ കൃതികളുടെ പട്ടിക തയാറാക്കുക. (3^{10} വരെ) പട്ടിക ഉപയോഗിച്ച് ഈ ക്രിയകൾ ചെയ്യുക.
  - 81×9
  - 729×81
  - $6561 \div 243$
  - 243×81
  - $2187 \div 9$
  - $59049 \div 729$

കൃതിയുടെ കൃതി

64 നെ ഏതെങ്കിലും ഒരു സംഖ്യയുടെ കൃതിയായി എഴുതാമോ?

എങ്ങനെയെല്ലാം എഴുതാം?

$$2^6 = 64$$
$$4^3 = 64$$
$$8^2 = 64$$
$$64^1 = 64$$

ഇതുപോലെ 3^{12} നെ മറ്റു സംഖ്യകളുടെ കൃതിയായി എഴുതൂ.

$$3^{12} = 3^6 \times 3^6 = (729) \times (729) = (729)^2$$

മറ്റൊരു വിധത്തിലും എഴുതാം.

$$3^{12} = 3^8 \times 3^4 = (3^4 \times 3^4) \times 3^4 = 81 \times 81 \times 81 = (81)^3$$

ഇനിയുമൊരു രീതിയുണ്ട്:

$$3^{12} = 3^6 \times 3^6 = (3^3 \times 3^3) \times (3^3 \times 3^3) = 27 \times 27 \times 27 \times 27 = (27)^4$$

ഇനി മറ്റേതെങ്കിലും രീതിയിൽ എഴുതാൻ കഴിയുമോ? ശ്രമിച്ചുനോക്കൂ.

മുകളിൽ കണ്ടതിൽ $3^6 \times 3^6$ എന്നതിന്റെ അർഥമെന്താണ്?

രണ്ട് 3^6 കൾ തമ്മിൽ ഗുണിച്ചതല്ലേ? ഇതിനെ ചുരുക്കി $(3^6)^2$ എന്നെഴുതാം.

ഇനി $(3^6)^2 = 3^6 \times 3^6$

$= 3^{6+6}$

$= 3^{6 \times 2}$

$= 3^{12}$

ഇതുപോലെ $3^4 \times 3^4 \times 3^4$ എന്നതിനെ $(3^4)^3$ എന്നെഴുതാമല്ലോ. അപ്പോൾ

$$(3^4)^3 = 3^4 \times 3^4 \times 3^4$$

$$= 3^{4+4+4}$$

$$= 3^{4 \times 3}$$

$$= 3^{12}$$

ഇതുപോലെ

$$(4^2)^3 = 4^2 \times 4^2 \times 4^2$$

$$= 4^{2 \times 3}$$

$$= 4^6$$

$$(5^4)^6 = 5^{4 \times 6}$$

$$= 5^{24}$$

എന്നെല്ലാം എഴുതാം.

ഇനി ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയാകാം.

$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^3$ എന്നതിന്റെ അർഥമെന്താണ്?

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

അതായത്,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2+2+2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3\times 2} = \left(\frac{2}{3}\right)^6$$

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ x ഒരു സംഖ്യയും m, n എന്നിവ എണ്ണൽസംഖ്യകളും ആണെങ്കിൽ

$$(x^m)^n = \underbrace{x^m \times x^m \times \ldots \times x^m}_{n \text{ എണ്ണം}}$$

$$= x^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ എണ്ണം}}}$$

$$= x^{nm}$$

$$= x^{mn}$$

പ്രോജക്ട്

ചില എണ്ണൽസംഖ്യകളെ തുടർച്ചയായ എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ തുകയായി എഴുതാം. ഉദാഹരണമായി,

$$3 = 1 + 2$$

$$7 = 3 + 4$$

$$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 7 + 8$$

എന്നാൽ ചില എണ്ണൽസംഖ്യകളെ ഇങ്ങനെ എഴുതാൻ കഴിയില്ല. ഉദാഹരണമായി, 4 നെ ഇങ്ങനെ എഴുതാനാവില്ല.

തുടർച്ചയായ എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ തുകയായി എഴുതാൻ കഴിയാത്ത സംഖ്യകൾക്ക് എന്തെങ്കിലും പ്രത്യേകതയുണ്ടോ?

20 വരെയുള്ള സംഖ്യകൾ എടുത്തു പരിശോധിച്ചു നോക്കൂ.

അനഘസംഖ്യകൾ

6 ന്റെ ഘടകങ്ങൾ 1, 2, 3, 6.

ഇവയിൽ 6 ഒഴികെയുള്ളവയുടെ തുക

$$1 + 2 + 3 = 6$$

ഇനി 28 ന്റെ ഘടകങ്ങൾ നോക്കാം.

$$28 = 2^2 \times 7$$

അപ്പോൾ 28 ന്റെ ഘടകങ്ങൾ

1	2	2^2
7	2×7	$2^2\times7$

ഇവയിൽ 28 ഒഴികെയുള്ളവയുടെ തുക

$$1 + 2 + 2^2 + 7 + (2\times7) = 7 + 7 + 14 = 28$$

ഇനി,

$$2^4 \times 31 = 16\times31 = 496$$

എന്ന സംഖ്യയുടെ ഘടകങ്ങൾ നോക്കൂ.

31 അഭാജ്യസംഖ്യയായതിനാൽ ഘടകങ്ങൾ

1	2	2^2	2^3	2^4
31	2×31	$2^2\times31$	$2^3\times31$	$2^4\times31$

ഇവയിൽ ആദ്യത്തെ വരിയിലെ ഘടകങ്ങളുടെ തുക

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 2^5 - 1 = 31$$

(**മറ്റൊരു തുക** എന്ന ഭാഗം നോക്കുക.)

രണ്ടാമത്തെ വരിയിൽ $2^4\times31$ ഒഴികെയുള്ള ഘടകങ്ങളുടെ തുക

$$(1 + 2 + 2^2 + 2^3)\times31 = (2^4 - 1)\times31 = (2^4\times31) - 31$$

അപ്പോൾ $2^4 \times 31$ ഒഴികെയുള്ള ഘടകങ്ങളുടെയെല്ലാം തുക

$$31 + (2^4\times31) - 31 = 2^4\times31 = 496$$

ഇത്തരം സംഖ്യകളെ അനഘസംഖ്യകൾ (perfect numbers) എന്നാണു പറയുന്നത്.

അതായത്,

> x എന്ന ഏതു സംഖ്യയും m, n എന്നീ ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യകളും എടുത്താൽ
>
> $$(x^m)^n = x^{mn}$$

ഇനി ചുവടെയുള്ളവ ഒറ്റ കൃതിയായി എഴുതാമല്ലോ.

- $(4^2)^3$
- $(3^3)^2 \times 9^4$
- $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^4$
- $(2^3)^4 \times 2^6$

ചുവടെയുള്ള ഓരോ സംഖ്യയും വിവിധ സംഖ്യകളുടെ കൃതികളായി എഴുതുക.

- 3^8
- 4^6
- 2^{15}
- 5^{12}

ഘടകങ്ങൾ

32 ന്റെ ഘടകങ്ങൾ ഏതൊക്കെയാണ്?

$$1, 2, 4, 8, 16, 32$$

1 ഒഴികെ ബാക്കി ഘടകങ്ങളെല്ലാം രണ്ടിന്റെ കൃതികളല്ലേ. അപ്പോൾ 32 ന്റെ ഘടകങ്ങൾ.

$$1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$$

81 ന്റെ ഘടകങ്ങളോ?

$$81 = 3^4$$

അപ്പോൾ ഘടകങ്ങൾ

$$1, 3, 3^2, 3^3, 3^4$$

ഇനി 72 ന്റെ ഘടകങ്ങൾ ഏതൊക്കെയെന്ന് കണ്ടുപിടിക്കാം.

$$72 = 2^3 \times 3^2$$

ഘടകങ്ങൾ ചിട്ടയായി എഴുതിനോക്കാം.

ആദ്യം 1 ഉം പിന്നെ 2 ന്റെ കൃതികളായ ഘടകങ്ങളും എഴുതാം.

$$1, 2, 2^2, 2^3$$

ഇവ ഓരോന്നിനെയും 3 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ മറ്റ് നാലു ഘടകങ്ങൾ കിട്ടും.

$$3, 2\times3, 2^2\times3, 2^3\times3$$

ആദ്യത്തെ ഘടകങ്ങളോരോന്നിനെയും 3 നു പകരം 3^2 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ ഇനിയും നാലു ഘടകങ്ങൾ കിട്ടും.

$$3^2, 2\times3^2, 2^2\times3^2, 2^3\times3^2$$

ഇനി ഏതെങ്കിലും ഘടകമുണ്ടോ?

ഇതുപോലെ 200 ന്റെ ഘടകങ്ങൾ എഴുതിയാലോ?

$$200 = 8 \times 25 = 2^3 \times 5^2$$

ഘടകങ്ങൾ ക്രമമായി ഇങ്ങനെ എഴുതാമല്ലോ:

1	2	2^2	2^3
5	2×5	$2^2 \times 5$	$2^3 \times 5$
5^2	2×5^2	$2^2 \times 5^2$	$2^3 \times 5^2$

240 ന്റെ ഘടകങ്ങളായാലോ?

$$240 = 16 \times 15 = 2^4 \times 3 \times 5$$

ഘടകങ്ങൾ ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

1	2	2^2	2^3	2^4
3	2×3	$2^2 \times 3$	$2^3 \times 3$	$2^4 \times 3$
5	2×5	$2^2 \times 5$	$2^3 \times 5$	$2^4 \times 5$
3×5	$2 \times 3 \times 5$	$2^2 \times 3 \times 5$	$2^3 \times 3 \times 5$	$2^4 \times 3 \times 5$

ഇതുപോലെ ചുവടെയുള്ള ഓരോ സംഖ്യയുടെയും ഘടകങ്ങളെല്ലാം കണ്ടുപിടിക്കുക.

- 64
- 125
- 48
- 45
- 105

ചെയ്തുനോക്കാം

- $2^x = 128$ ആണ് 2^{x+1} കണ്ടുപിടിക്കുക.
- $3^x = 729$ ആണ് 3^{x-1} കണ്ടുപിടിക്കുക.
- $3^x, 3^{x+1}, 3^{x-1}, 3^x + 1$ എന്നിവയിൽ ഇരട്ടസംഖ്യ ഏതാണ്?
- 6^{10} ന്റെ ഒന്നിന്റെ സ്ഥാനത്തെ അക്കം എന്തായിരിക്കും?
- $5^6 \times \frac{1}{5^x} = \frac{1}{5^{10}}$ എന്നു കിട്ടണമെങ്കിൽ x എന്തായിരിക്കണം?
- ലഘൂകരിക്കുക.
  - $\frac{3^5 \times 3^6}{3^4 \times 3^4}$
  - $\frac{4^7 \times 4^8}{4^2 \times (4^3)^5}$
  - $\frac{(6^4)^2 \times (6^5)^3}{(6^2)^2 \times (6^4)^5}$

പ്രോജക്ട്

32	=	2^5	ഘടകങ്ങളുടെ എണ്ണം	6
81	=	3^4	ഘടകങ്ങളുടെ എണ്ണം	5
72	=	$2^3 \times 3^2$	ഘടകങ്ങളുടെ എണ്ണം	12

ഇതുപോലെ ഏതാനും സംഖ്യകളെ അഭാജ്യ ഘടകങ്ങളുടെ കൃതിയായി എഴുതുക. അവയുടെ ഘടകങ്ങളുടെ എണ്ണവും എഴുതുക.

ഘടകങ്ങളുടെ എണ്ണം കണ്ടുപിടിച്ചത് എങ്ങനെയാണ്?

കൃത്യങ്കമായി വരുന്ന സംഖ്യകളും ഘടകങ്ങളുടെ എണ്ണവും തമ്മിൽ എന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ?

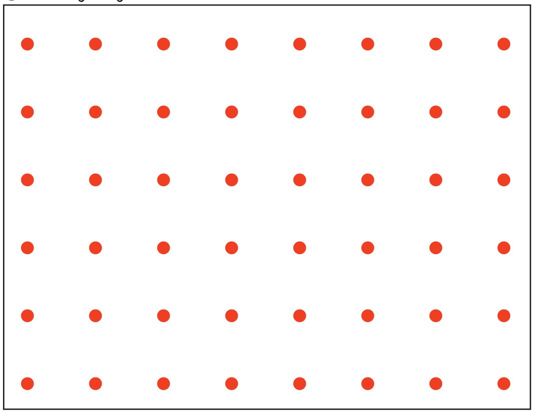
തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്
• ആവർത്തനഗുണനത്തിന്റെ ക്രിയാരൂപമായി കൃതീകരണത്തെ വ്യാഖ്യാനിക്കാനും വിശദീകരിക്കാനും കഴിയുന്നു.			
• ക്രിയാരീതികൾ പ്രയോജനപ്പെടുത്തി കൃത്യങ്കനിയമങ്ങൾ സമർഥിക്കുന്നു.			
• പ്രശ്നങ്ങൾ പരിഹരിക്കുന്നതിനും ക്രിയകൾ എളുപ്പത്തിൽ ചെയ്യുന്നതിനും കൃത്യങ്കനിയമങ്ങൾ പ്രയോജനപ്പെടുത്തുന്നു.			
• വലിയസംഖ്യകളെ വ്യാഖ്യാനിക്കുന്നതിന് കൃത്യങ്കം പ്രയോജനപ്പെടുത്തുന്നു. ഇത്തരം വ്യാഖ്യാനങ്ങൾ ഫലപ്രദമായി അവതരിപ്പിക്കുന്നു.			
• എണ്ണൽസംഖ്യകളെയും ദശാംശസംഖ്യകളെയും 10 ന്റെ കൃതികളുപയോഗിച്ച് സ്ഥാനവിലകളെ അടിസ്ഥാനമാക്കി വ്യാഖ്യാനിക്കുന്നു.			
• കൃതികളുമായി ബന്ധപ്പെട്ട സംഖ്യാബന്ധങ്ങൾ യുക്തിപൂർവം സമർഥിക്കുന്നു.			

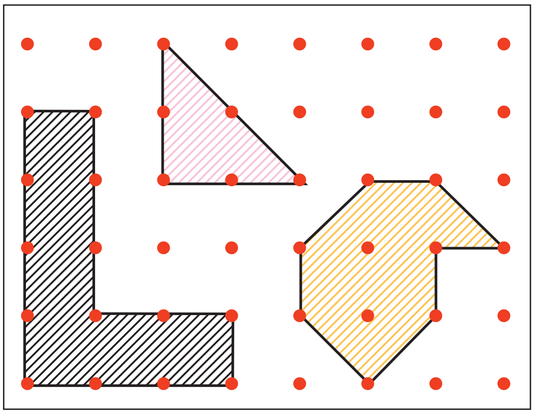
5

ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ ഒരു സെന്റിമീറ്റർ ഇട വിട്ട് വിലങ്ങനെയും കുത്തനെയും കുത്തുകളിട്ടിരിക്കുന്നു.



ചുവടെയുള്ള ചിത്രങ്ങളിൽ നിറം നൽകിയ രൂപങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?



ഇനി മുകളിലെ ചതുരത്തിൽ കുത്തുകൾ പല തരത്തിൽ യോജിപ്പിച്ച് രൂപങ്ങൾ വരച്ചുനോക്കൂ. ഓരോന്നിന്റെയും പരപ്പളവും കണ്ടുപിടിക്കുക.

ജിയോജിബ്രയിലെ ഗ്രിഡ് ഉപയോഗിച്ചും ഈ പ്രവർത്തനം ചെയ്യാം. Polygon ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ഗ്രിഡിലെ വരകൾ ചേരുന്ന സ്ഥാനങ്ങളിലെ ബിന്ദുക്കളിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്ത് വിവിധ രൂപങ്ങൾ വരയ്ക്കാം.

ഇങ്ങനെ വരയ്ക്കുന്ന രൂപങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക. ഉത്തരം ശരിയാണോയെന്ന് നിങ്ങൾക്ക് പരിശോധിക്കാം. ഇതിനായി Area ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് രൂപത്തിനുള്ളിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്താൽ മതി.

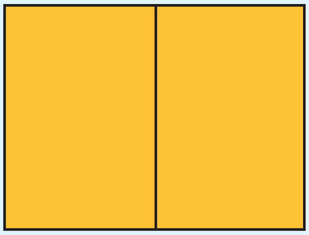
പകുതിയാക്കാം

4 സെന്റിമീറ്റർ നീളവും 3 സെന്റിമീറ്റർ വീതിയുമുള്ള ചതുരം കടലാസിൽ വരച്ച് മുറിച്ചെടുക്കുക.

3 സെ.മീ.

4 സെ.മീ.

ഇതിൽ ചുവടെ കാണുന്നതുപോലെ കൃത്യം നടുക്കായി ഒരു വര വരയ്ക്കുക.



3 സെ.മീ.

4 സെ.മീ.

ഇപ്പോൾ രണ്ടു ചതുരങ്ങളുണ്ട്. ഓരോന്നിന്റെയും പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

പകുതിയാണെന്നു കാണാൻ മടക്കിനോക്കിയാൽപ്പോരേ?

അതായത്,

ചെറിയ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് = വലിയ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ പകുതി

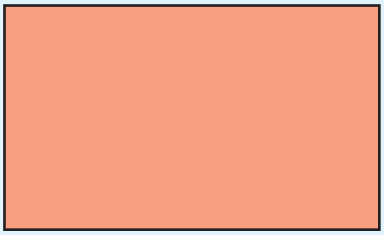
$= \frac{1}{2} \times 12$

= 6 ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്റർ

മറ്റേതെങ്കിലും തരത്തിൽ പരപ്പളവ് പകുതിയാക്കാമോ?

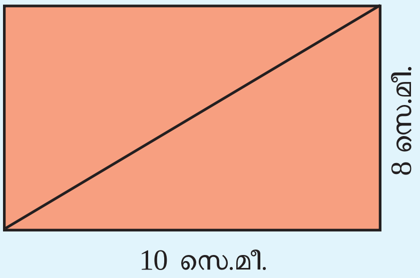
മറ്റൊരു പകുതി

വശങ്ങളുടെ നീളം 10 സെന്റിമീറ്ററും 8 സെന്റിമീറ്ററുമായ ചതുരം വരച്ച് മുറിച്ചെടുക്കുക.



8 സെ.മീ.

10 സെ.മീ.



ചതുരത്തിന്റെ കോണോടുകോൺ ചേർത്ത് ഒരു വര വരയ്ക്കുക.

ചതുരം രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളായി.

ഇവയുടെ പരപ്പളവുകൾ തുല്യമാണോ?

മുമ്പു ചെയ്തതുപോലെ മടക്കിനോക്കിയാൽ ശരിയാകുമോ?

മുറിച്ചെടുത്താലോ?

രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളും ചേർത്തുവച്ച് നോക്കൂ.

അപ്പോൾ ത്രികോണങ്ങൾ ഓരോന്നിന്റെയും പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

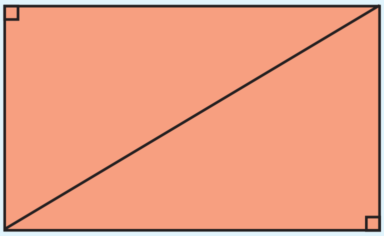
ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ

പരപ്പളവ് = ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ പകുതി

$= \frac{1}{2} \times 10 \times 8$

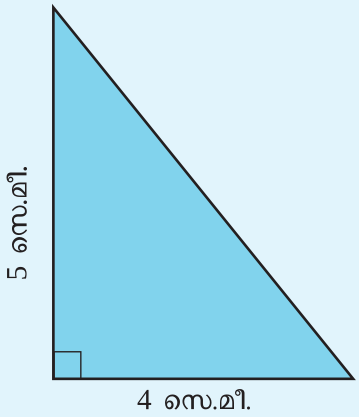
= 40 ച.സെ.മീ.

ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന ത്രികോണങ്ങളുടെ കോണുകൾ ശ്രദ്ധിച്ചോ?



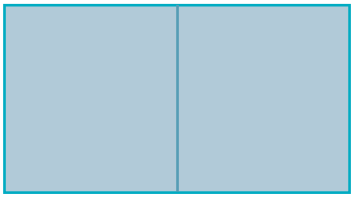
ഒരു കോൺ മട്ടമായ ത്രികോണത്തിന് *മട്ടത്രികോണം* (right angled triangle) എന്നാണു പേര്.

ചിത്രത്തിലെ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

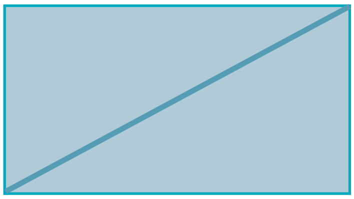


പല പകുതികൾ

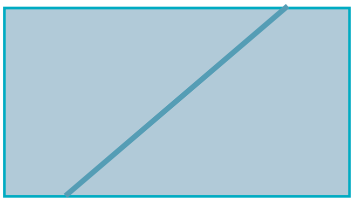
ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നടുവിലൂടെ വിലങ്ങനെയോ കുറുകെയോ മുറിച്ച് പകുതി പരപ്പളവുള്ള ചതുരങ്ങളാക്കാം.



കോണോടുകോൺ മുറിച്ച് പകുതി പരപ്പളവുള്ള ത്രികോണങ്ങളാക്കാം.



നടുവിലൂടെ ചരിച്ചു വരച്ചാലോ?

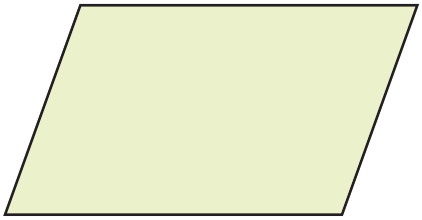


പകുതി പരപ്പളവുള്ള രണ്ടു ചതുർഭുജങ്ങൾ കിട്ടിയില്ലേ?

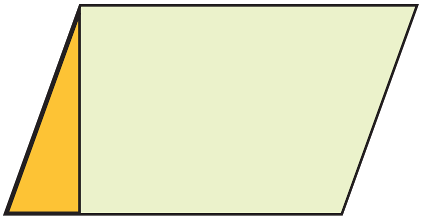
ഒരു ജോടി എതിർവശങ്ങൾ മാത്രം സമാന്തരമായ ചതുർഭുജത്തിന് *ലംബകം* (trapezium) എന്നാണു പേര്.

സാമാന്തരികവും ചതുരവും

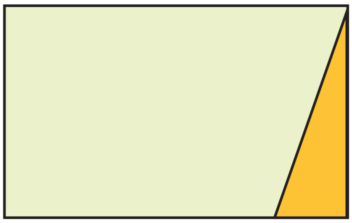
ചിത്രത്തിൽ കാണുന്ന സാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എങ്ങനെ കണക്കാക്കാം?



ഈ സാമാന്തരികത്തിൽനിന്നു ചുവടെ കാണുന്ന രീതിയിൽ ഒരു മട്ടത്രികോണം മുറിച്ചു മാറ്റുക.



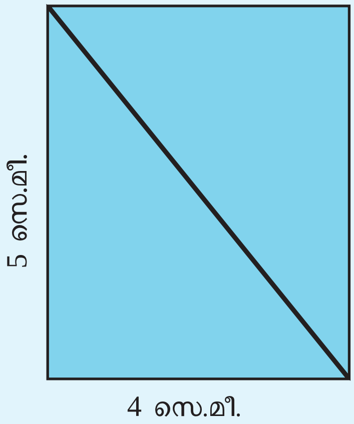
ഈ ത്രികോണത്തെ ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നവിധത്തിൽ വലതുഭാഗത്ത് ചേർത്തു വച്ചാലോ?



ഇപ്പോൾ ഒരു ചതുരമായല്ലോ.

അതിന്റെ പരപ്പളവ്, സാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവ് തന്നെയല്ലേ?

ഒരുപോലെയുള്ള രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങൾ കടലാസിൽ വെട്ടിയെടുത്ത് ചുവടെക്കാണുന്നതുപോലെ ചേർത്തു വച്ച് നോക്കൂ.



ഈ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് ഇതിന്റെ പകുതിയാണല്ലോ.

മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $= \frac{1}{2} \times 4 \times 5$

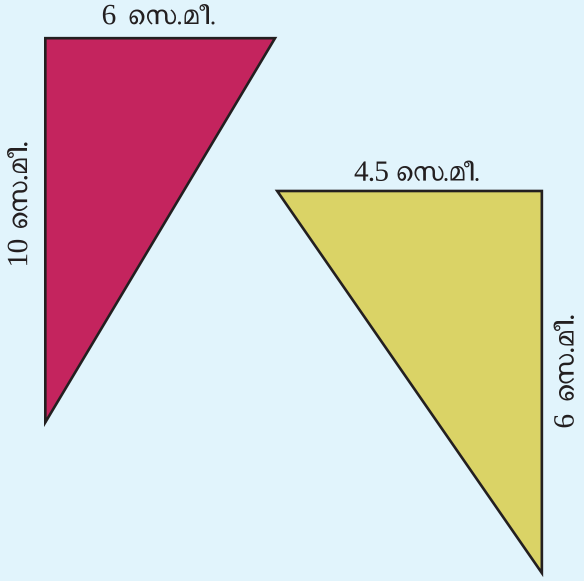
$= 10$ ച.സെ.മീ.

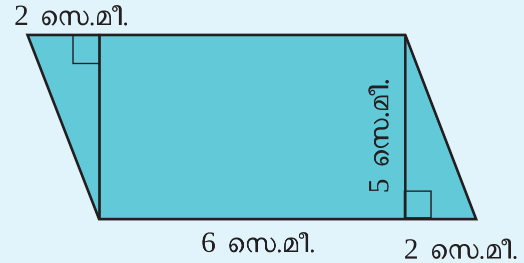
ഇതിൽ 4, 5 എന്നിവ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങളുടെ നീളമാണ്.

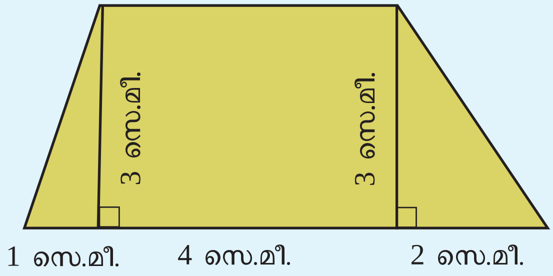
അപ്പോൾ ഏതു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെയും പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള മാർഗമായി:

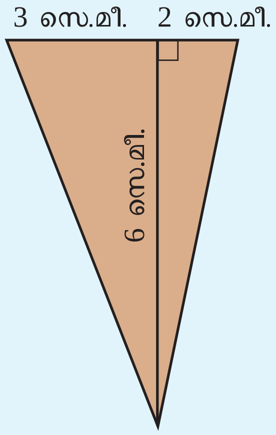
ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, ലംബവശങ്ങളുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയാണ്.

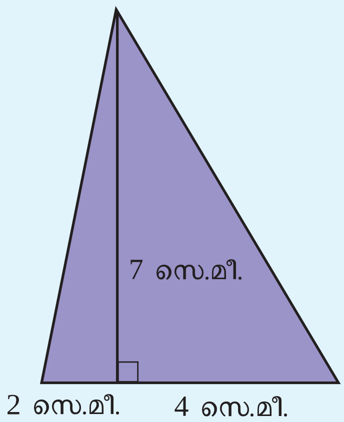
ചുവടെയുള്ള രൂപങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് കാണുക.







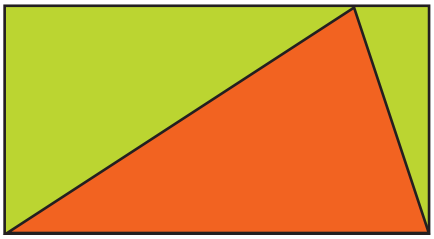




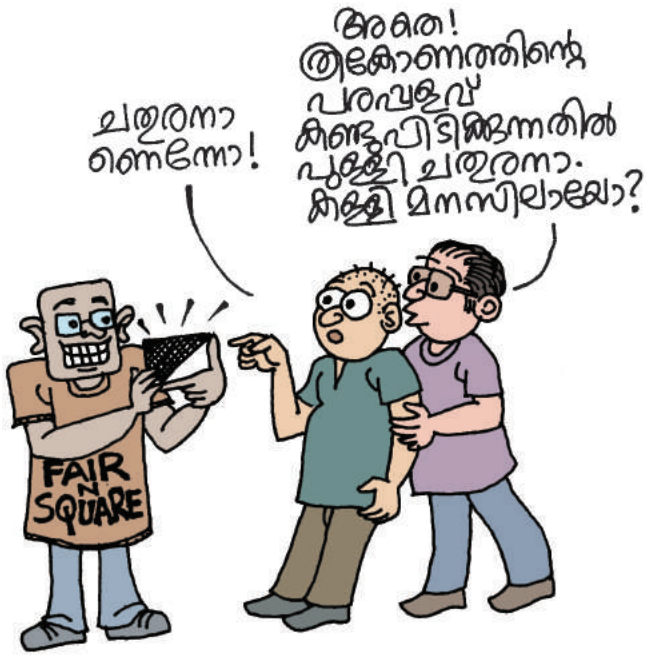
- ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 96 ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്റർ ആണ്. ലംബവശങ്ങളിലൊന്നിന്റെ നീളം 16 സെന്റിമീറ്റർ. മറ്റേ വശത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ്?
- ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങൾ 12 സെന്റിമീറ്റർ, 15 സെന്റിമീറ്റർ ആണ്. അതേ പരപ്പളവുള്ള മറ്റൊരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങളിലൊന്നിന്റെ നീളം 18 സെന്റിമീറ്റർ ആണ്. മറ്റേ ലംബവശത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ്?

ചതുരവും ത്രികോണവും

ചിത്രത്തിലെ ചുവന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ്?

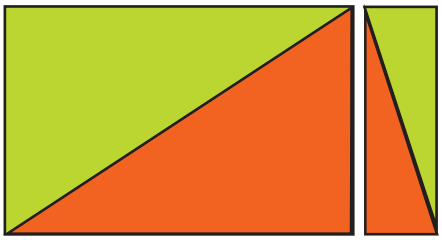


ഉത്തരം അടുത്ത പേജിലുണ്ട്. പേജ് മറിക്കുന്നതിനുമുമ്പ് അൽപ്പം ആലോചിച്ചുനോക്കൂ:



ചതുരവും ത്രികോണവും

ചതുരത്തെ ചുവടെ കാണുന്നതുപോലെ രണ്ടു ചെറിയ ചതുരങ്ങളാക്കിയാലോ?

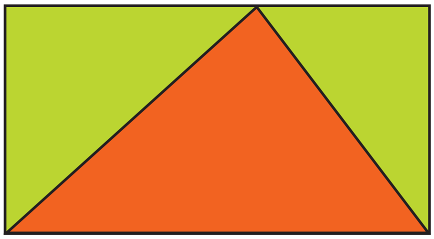


ഓരോ ചെറിയ ചതുരത്തിലുമുള്ള ചുവന്ന മട്ട ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് ആ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ പകുതിയാണ്. അപ്പോൾ ഈ രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങളുടെയും പരപ്പളവുകൾ കൂട്ടിയാൽ ആദ്യത്തെ വലിയ ചതുരത്തിന്റെ പകുതി പരപ്പളവായില്ലേ.

ഈ രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങളും ചേർന്നതാണല്ലോ ആദ്യത്തെ വലിയ ത്രികോണം.

അപ്പോൾ ആദ്യ ചിത്രത്തിലെ ചുവന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ പകുതിയാണ്.

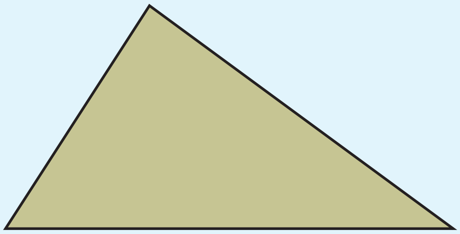
ത്രികോണം ഇങ്ങനെ വരച്ചാലോ?



ജിയോജിബ്രയിൽ ഒരു ചതുരം വരയ്ക്കുക. ഇതിന്റെ മുകളിലെ വരയിൽ ഒരു കുത്തിടുക. Polygon ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. ഇതിന് ചുവപ്പു നിറം കൊടുക്കൂ. Area ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക. മുകളിലെ കുത്തിന്റെ സ്ഥാനം മാറ്റിനോക്കൂ. പരപ്പളവിനെന്താണു സംഭവിക്കുന്നത്?

മറ്റു ത്രികോണങ്ങൾ

ഈ ത്രികോണം നോക്കൂ.

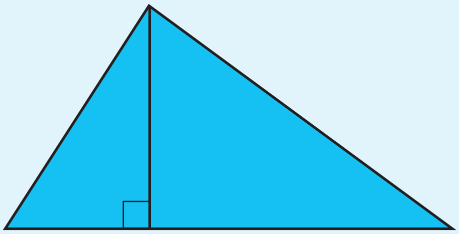


ഇതിന്റെ കോണുകളൊന്നും മട്ടമല്ല.

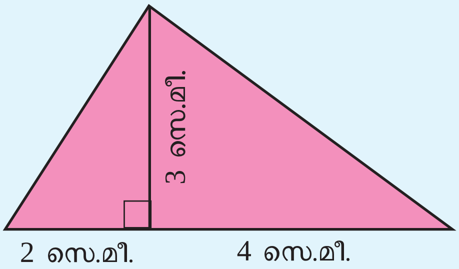
പരപ്പളവ് എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

ഇതിനെ രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിക്കാമോ?

മുമ്പു ചെയ്ത കണക്കുകളെല്ലാം ഒന്നുകൂടി നോക്കുക.



അപ്പോൾ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കാൻ ഏതെല്ലാം വരകളുടെ നീളം അളക്കണം?



പരപ്പളവ് $= \left(\frac{1}{2}\times 2\times 3\right) + \left(\frac{1}{2}\times 4\times 3\right)$

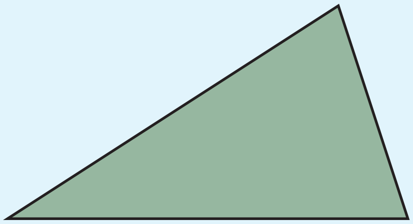
$= 3 + 6$

$= 9$ ച.സെ.മീ.

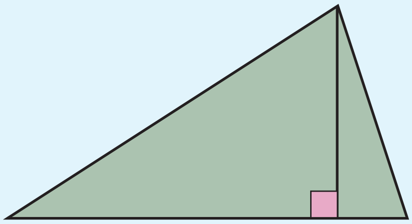
ഇങ്ങനെ ഏതു ത്രികോണത്തിന്റെയും പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കാം.

ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള പൊതുവായ മാർഗം എന്താണ്?

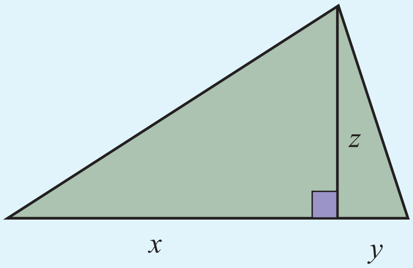
ഈ ത്രികോണം നോക്കൂ.



പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കാൻ, ആദ്യം മുകളിൽ നിന്നൊരു ലംബം വരച്ച് രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങളാക്കുക.



ഇനി ചില നീളങ്ങൾ അളക്കണം. അവയെ തൽക്കാലം അക്ഷരങ്ങളുപയോഗിച്ച് എഴുതാം.



ഇനി പരപ്പളവ് എങ്ങനെ എഴുതും?

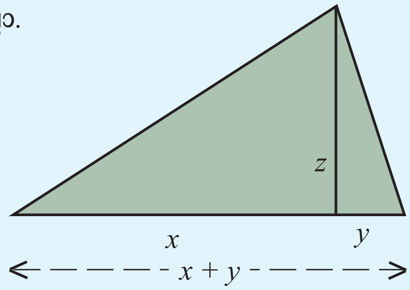
രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകളുടെ തുക

$$= \left(\frac{1}{2} \times x \times z\right) + \left(\frac{1}{2} \times y \times z\right)$$

$$= \frac{1}{2} xz + \frac{1}{2} yz$$

$$= \frac{1}{2} (x + y) z$$

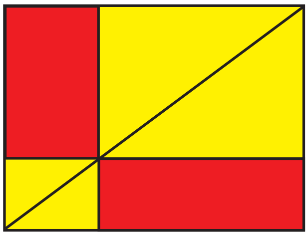
ഇതിൽ $x + y$ എന്നത് താഴത്തെ വശത്തിന്റെ നീളമാണല്ലോ.



ജിയോജിബ്രയിൽ രണ്ടു സമാന്തരവരകൾ വരയ്ക്കുക. അകലം 3 യൂണിറ്റ് ആകണം. താഴത്തെ വരയിൽ 4 യൂണിറ്റ് അകലത്തിലായി D, F എന്നിങ്ങനെ രണ്ടു കുത്തുകളിടുക. മുകളിലെ വരയിൽ G എന്ന ഒരു കുത്തും അടയാളപ്പെടുത്തുക. Polygon ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണം DEF വരയ്ക്കുക. ഈ ത്രികോണത്തന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്? നിങ്ങളുടെ ഉത്തരം ശരിയാണോ എന്ന് Area ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് പരിശോധിച്ചു നോക്കൂ. ഇനി G യുടെ സ്ഥാനം മാറ്റിനോക്കൂ. പരപ്പളവിന് മാറ്റം വരുന്നുണ്ടോ?

ചതുരത്തിലെ ചതുരങ്ങൾ

ഈ ചിത്രത്തിലെ ചതുരം നോക്കൂ.

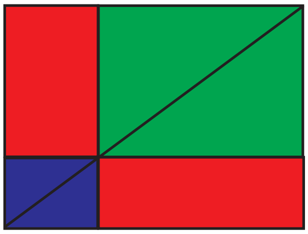


ഇതിലെ ചുവന്ന ചതുരങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ തമ്മിലെന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ?

പേജ് മറിച്ച് ഉത്തരം നോക്കുന്നതിനുമുമ്പ് ഒന്നാലോചിച്ചുനോക്കൂ:

ചതുരത്തിലെ ചതുരങ്ങൾ

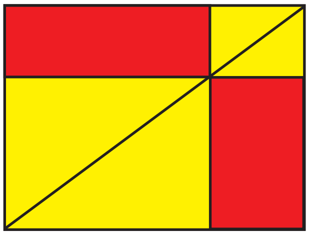
വലിയ ചതുരത്തിന്റെ വികർണം അതിനെ ഒരേ പരപ്പളവുള്ള രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങളാക്കുന്നു; ഈ മട്ടത്രികോണത്തിലോരോന്നും, അതിനുള്ളിലെ ചുവന്ന ചതുരവും രണ്ടു കൊച്ചു മട്ടത്രികോണങ്ങളും ചേർന്നതാണ്.



ചിത്രത്തിലെ ഒരേ നിറമുള്ള മട്ടത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് തുല്യമാണല്ലോ.

അപ്പോൾ രണ്ടു ചുവന്ന ചതുരങ്ങളുടെയും പരപ്പളവ് തുല്യമാണ്.

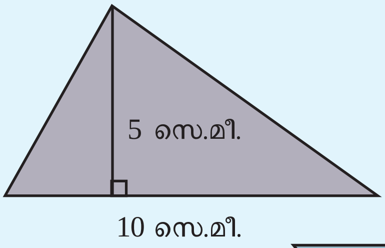
വികർണത്തിലെ മറ്റേതെങ്കിലും സ്ഥാനത്തുകൂടി ചതുരങ്ങൾ വരച്ചാലോ?

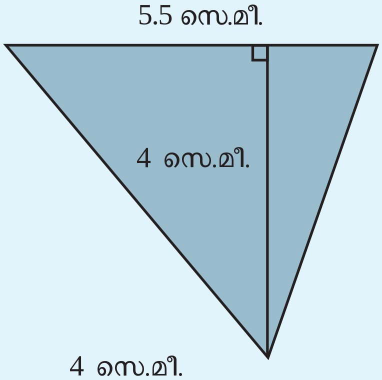


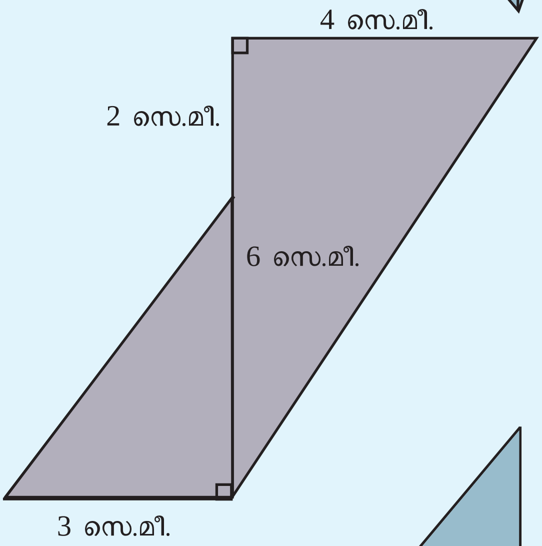
അപ്പോൾ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എങ്ങനെ എഴുതാം?

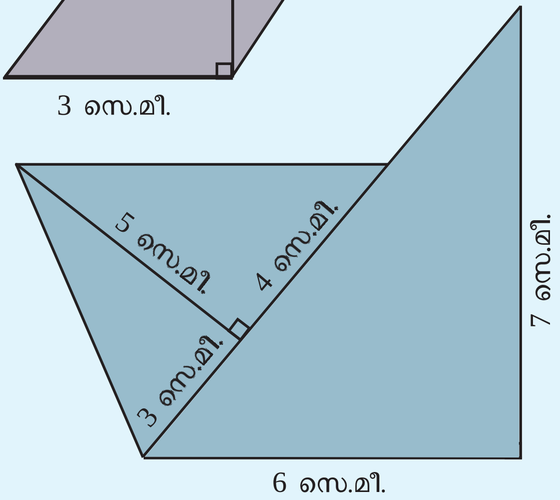
ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, ഏതെങ്കിലും വശത്തിന്റെയും വശത്തിന്റെ എതിർമൂലയിൽ നിന്നുള്ള ലംബത്തിന്റെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയാണ്.

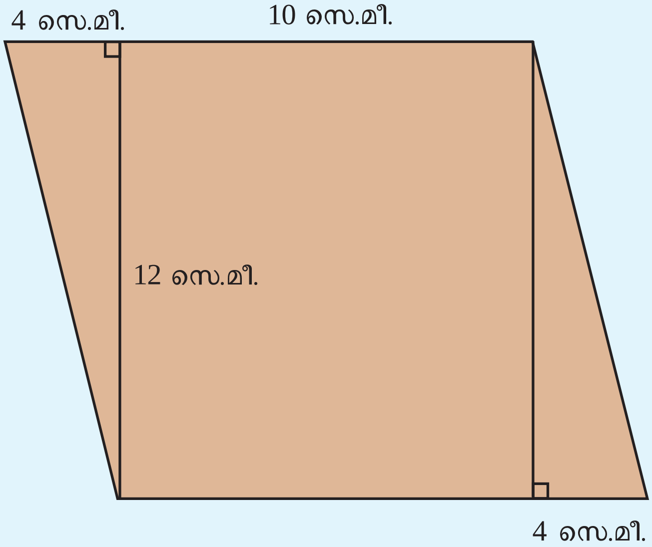
ചുവടെയുള്ള രൂപങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് കാണുക:





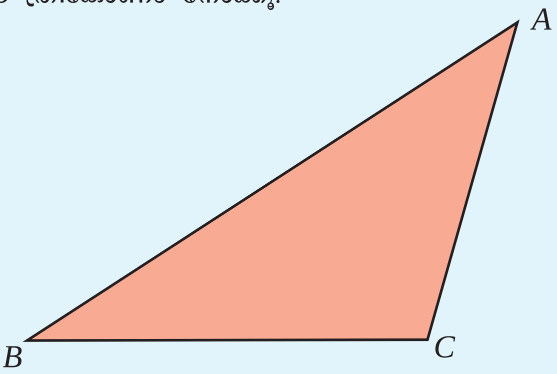






മറ്റൊരു ത്രികോണം

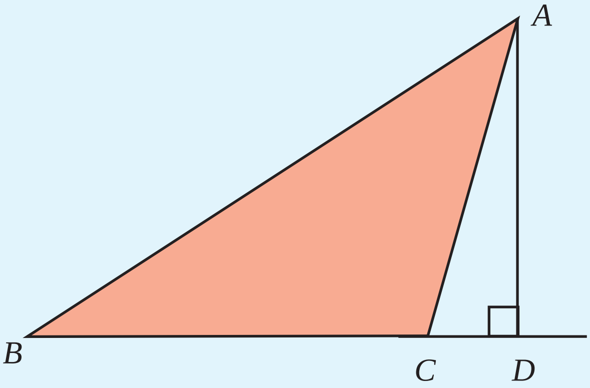
ഈ ത്രികോണം നോക്കൂ.



ഇതിന്റെ പരപ്പളവ് എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

A യിൽ നിന്ന് BC യിലേക്ക് ലംബം വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെ?

BC വലത്തേക്കു നീട്ടിയാലോ?

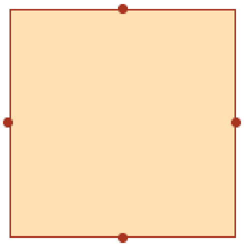


ഇനി ΔABC യുടെ പരപ്പളവ് എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

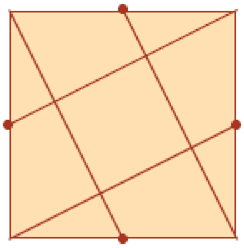
ΔABD യിൽ നിന്ന് ΔACD മാറ്റിയാൽ ΔABC കിട്ടുമല്ലോ.

സമചതുരഭാഗം

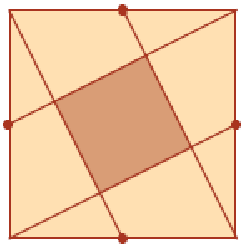
ഒരു സമചതുരം വരച്ച് അതിന്റെ വശങ്ങളുടെയെല്ലാം കൃത്യം മധ്യത്തിൽ ഓരോ കുത്തിടുക.



ഇനി ഈ കുത്തുകളും സമചതുരത്തിന്റെ മൂലകളും ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ യോജിപ്പിക്കുക.



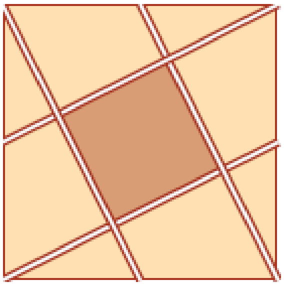
നടുവിൽ ഒരു സമചതുരം കിട്ടിയില്ലേ?



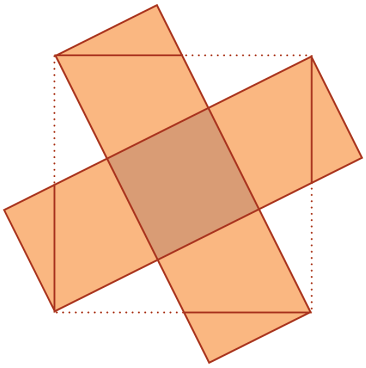
ഇതിന്റെ പരപ്പളവ് ആദ്യത്തെ വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ്?

സമചതുരഭാഗം

ഇതുപോലെ ഒരു ചിത്രം കടലാസിൽ വെട്ടിയെടുക്കുക.

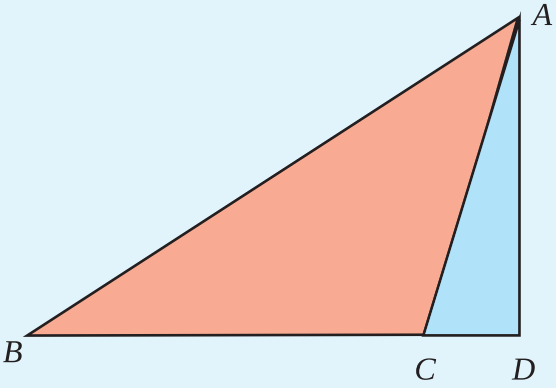


ഇനി ഇതിലെ ത്രികോണങ്ങളെയെല്ലാം ചുവടെ കാണുന്നതുപോലെ സ്ഥാനം മാറ്റി വയ്ക്കുക. ഇപ്പോൾ തുല്യവലുപ്പമുള്ള അഞ്ചു സമചതുരങ്ങൾ കിട്ടി.



ഇതിൽനിന്ന് നടുവിലത്തെ സമചതുരം വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ $\frac{1}{5}$ ഭാഗമാണെന്നു കാണാം.

ΔABD മട്ടത്രികോണമാണ്.



ΔABD യുടെ പരപ്പളവ് $= \frac{1}{2} \times BD \times AD$

ΔACD യും മട്ടത്രികോണമാണല്ലോ.

ΔACD യുടെ പരപ്പളവ് $= \frac{1}{2} \times CD \times AD$

ഇനി ΔABC യുടെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കാം.

ΔABC യുടെ പരപ്പളവ്

$=$ ΔABD യുടെ പരപ്പളവ് $-$ ΔACD യുടെ പരപ്പളവ്

$$= \frac{1}{2} \times BD \times AD - \frac{1}{2} \times CD \times AD$$

$$= \frac{1}{2} \times (BD - CD) \times AD$$

ചിത്രത്തിൽനിന്ന്

$$BD - CD = BC$$

അപ്പോൾ

ΔABC യുടെ പരപ്പളവ് $= \frac{1}{2} \times (BD - CD) \times AD$

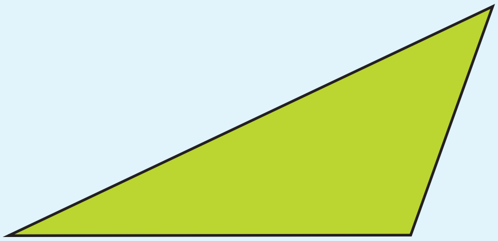
$$= \frac{1}{2} \times BC \times AD$$

BC, AD എന്നിവ അളന്ന് പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കൂ.

ഇതിൽ AD എന്നത് BC യിൽ നിന്നുള്ള ഉയരം തന്നെയാണ്.

അപ്പോൾ ഇത്തരം ത്രികോണത്തിന്റെയും പരപ്പളവ് ഒരു വശത്തിന്റെയും അതിൽ നിന്നുള്ള ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിതന്നെയാണ്.

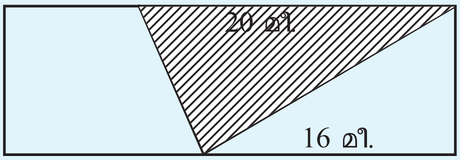
ഈ ത്രികോണം നോക്കൂ.



ആവശ്യമുള്ള നീളങ്ങൾ അളന്ന് ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക.

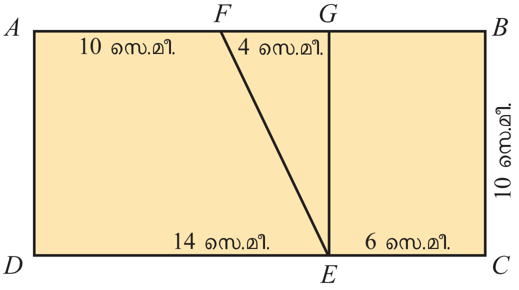
ചെയ്തുനോക്കാം

ചതുരാകൃതിയായ ഒരു സ്ഥലത്തിന് 30 മീറ്റർ നീളവും 10 മീറ്റർ വീതിയും ഉണ്ട്. ഇതിനകത്ത് ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെയുള്ള ത്രികോണാകൃതിയായ ഒരു സ്ഥലം വാഴക്കൃഷി ചെയ്യുന്നതിനായി വേർതിരിച്ചിരിക്കുന്നു.



- ഈ ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?
- വാഴക്കൃഷി ചെയ്യുന്ന സ്ഥലത്തിന്റെ വലതുഭാഗത്തെ ത്രികോണാകൃതിയായ സ്ഥലത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്ര?
- വാഴക്കൃഷി ചെയ്യുന്ന സ്ഥലത്തിന്റെ ഇടതുഭാഗത്തെ നിൽക്കുന്ന ലംബകത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?
- ΔABC യിൽ $\angle B = 90°$, BC യുടെ നീളം 8 സെന്റിമീറ്ററും പരപ്പളവ് 48 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററുമാണ്. ഈ ത്രികോണത്തിലെ BC എന്ന വശത്തിന്റെ നീളം D യിലേക്ക് 6 സെന്റിമീറ്റർ നീട്ടുന്നു. AD യോജിപ്പിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ΔADC യുടെ പരപ്പളവെന്ത്?

ലംബകമായാൽ



$ABCD$ ഒരു ചതുരമാണ്; EFG ഒരു മട്ടത്രികോണവും. $AFED$, $ECBF$ എന്നീ ലംബകങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

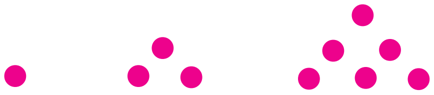
പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്
• മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടെത്തുന്നതിനുള്ള മാർഗം വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എന്ന ആശയം ഉപയോഗിച്ച് ഏതൊരു ത്രികോണത്തിന്റെയും പരപ്പളവ് കണ്ടെത്താമെന്ന് സമർഥിക്കുന്നു.			
• ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട പ്രശ്നങ്ങൾ പരിഹരിക്കുന്നു.			

6

വർഗവും വർഗമൂലവും

ത്രികോണസംഖ്യകൾ

ത്രികോണാകൃതിയിൽ പൊട്ടുകളിട്ടിരിക്കുന്നത് നോക്കൂ:



ഓരോ ത്രികോണത്തിലും എത്ര പൊട്ടുകളുണ്ട്?

1, 3, 6

അടുത്ത ത്രികോണത്തിൽ എത്ര പൊട്ടുകളുണ്ടാകും?

ഇത്തരം സംഖ്യകളെ ത്രികോണസംഖ്യകൾ (triangular numbers) എന്നാണു പറയുന്നത്.

ആദ്യത്തെ ത്രികോണസംഖ്യ 1.

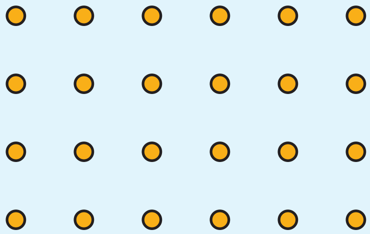
അടുത്ത ത്രികോണസംഖ്യ $1 + 2 = 3$.

അതിനടുത്തത് $1 + 2 + 3 = 6$.

പത്താമത്തെ ത്രികോണസംഖ്യ ഏതാണ്?

വരിയും നിരയും

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ.



വരിയും നിരയുമായി ചതുരാകൃതിയിൽ കുറേ പൊട്ടുകൾ.

ആകെ എത്ര പൊട്ടുകൾ?

പൊട്ടുകളെല്ലാം ഒരോന്നായി എണ്ണിയാണോ കണക്കാക്കിയത്?

24 പൊട്ടുകൾ വേറെ ഏതെങ്കിലും രീതിയിൽ ചതുരമാക്കാമോ?

ഇവയിലേതെങ്കിലും സമചതുരമാണോ?

എത്ര പൊട്ടുകൾ കൂടിയുണ്ടെങ്കിൽ സമചതുരമുണ്ടാക്കാം?

എത്ര പൊട്ടുകൾ മാറ്റിയാൽ സമചതുരമാക്കാം?

സമചതുരമാക്കാൻ കഴിയുന്ന എണ്ണങ്ങളുടെ സവിശേഷത എന്താണ്?

ഇങ്ങനെ സമചതുരാകൃതിയിൽ ക്രമീകരിക്കാൻ കഴിയുന്ന സംഖ്യകളാണ് സമചതുരസംഖ്യകൾ.

വർഗങ്ങൾ

36 എന്ന സംഖ്യയെ രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലമായി എങ്ങനെയെല്ലാം എഴുതാം?

2×18, 3×12, 4×9, എന്നെല്ലാം പിരിച്ചെഴുതാം.

$36 = 6 \times 6$ എന്നും എഴുതാം.

ഇത് ചുരുക്കി

$36 = 6^2$ എന്നെഴുതാം എന്നും കണ്ടിട്ടുണ്ട്.

6 നെ 6 കൊണ്ടു തന്നെ ഗുണിച്ചത്, അഥവാ 6 ന്റെ 2-ാം കൃതിയാണ് 36.

ഇതിനെ മറ്റൊരു രീതിയിലും പറയാം.

6 ന്റെ വർഗമാണ് 36.

അപ്പോൾ 5 ന്റെ വർഗമോ?

പൂർണവർഗങ്ങൾ

1, 4, 9, 16, ... എന്നിങ്ങനെയാണ് എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങൾ.

ഇവയെ പൂർണവർഗങ്ങൾ (perfect squares) എന്നാണു പറയുന്നത്.

16 കഴിഞ്ഞാൽ അടുത്ത പൂർണവർഗം ഏതാണ്?

എന്തുകൊണ്ടാണ് 20 പൂർണവർഗമല്ലാത്തത്?

പൂർണവർഗങ്ങളുടെ ക്രമം മറ്റൊരു രീതിയിൽ നോക്കാം.

1 ൽ നിന്ന് 4 ലെത്താൻ 3 കൂട്ടണം.

4 ൽ നിന്ന് 9 ൽ എത്താനോ?

ഇത് മറ്റൊരുതരത്തിൽപ്പറയാം:

$$4 - 1 = 3$$

$$9 - 4 = 5$$

$$16 - 9 = 7$$

ഇവയെല്ലാം ഒറ്റസംഖ്യകളല്ലേ?

അപ്പോൾ അടുത്തടുത്ത പൂർണവർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം ഒറ്റസംഖ്യയാണ്.

മറ്റൊരു രീതിയിലും പറയാം:

$$4 = 1 + 3$$

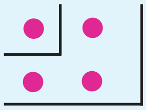
$$9 = 4 + 5 = 1 + 3 + 5$$

$$16 = 9 + 7 = 1 + 3 + 5 + 7$$

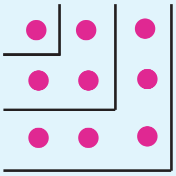
ഇതിലെല്ലാം കാണുന്നതെന്താണ്?

ഒന്നു മുതലുള്ള ഒറ്റസംഖ്യകൾ തുടർച്ചയായി കൂട്ടിയാൽ പൂർണവർഗങ്ങൾ കിട്ടും.

ഇത് ചിത്രരൂപത്തിലും കാണാം.



1 + 3 = 4



1 + 3 + 5 = 9

ഇങ്ങനെ ഒറ്റസംഖ്യകൾ കൂട്ടി, 20 വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങൾ എഴുതൂ.

$$1^2 = 1$$

$$2^2 = 1 + 3 = 4$$

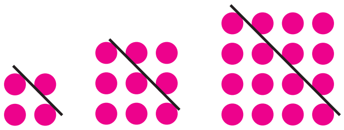
$$3^2 = 4 + 5 = 9$$

$$4^2 = 9 + 7 = 16$$

എന്നിങ്ങനെ തുടർന്നാൽ മതി.

ചതുരവും ത്രികോണവും

ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ:



ഓരോ സമചതുരത്തെയും രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളാക്കിയിട്ടുണ്ട്.

ഈ കണ്ടത് സംഖ്യകളായി എഴുതിനോക്കാം:

$$4 = 1 + 3$$

$$9 = 3 + 6$$

$$16 = 6 + 10$$

ഇതു തുടർന്നും ശരിയാണോ എന്നു നോക്കൂ.

എന്തു കിട്ടി?

1 കഴിഞ്ഞുള്ള പൂർണവർഗങ്ങൾ (സമചതുരസംഖ്യകൾ) എല്ലാം അടുത്തടുത്ത രണ്ടു ത്രികോണസംഖ്യകളുടെ തുകയാണ്.

ഏഴാമത്തെയും എട്ടാമത്തെയും ത്രികോണസംഖ്യകളുടെ തുക എത്രയാണ്?

കൂടിയും കുറഞ്ഞും

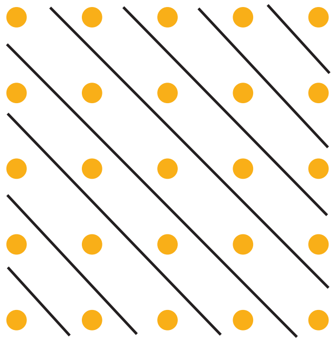
$1 = 1$

$4 = 1+2+1$

$9 = 1+2+3+2+1$

$16 = 1+2+3+4+3+2+1$

ഈ രീതിയിൽ മറ്റു പൂർണവർഗങ്ങളെയും എഴുതിനോക്കൂ.



1 മുതൽ തുടർച്ചയായ കുറേ ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ തുകയും സംഖ്യകളുടെ എണ്ണവും തമ്മിൽ എന്താണു ബന്ധം?

1 മുതൽ തുടർച്ചയായ 30 ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ തുക എത്രയാണ്?

പത്തിന്റെ കളി

10 ന്റെ വർഗം 100 ആണ്. 100 ന്റെ വർഗമോ?

1000 ന്റെ വർഗത്തിൽ 1 കഴിഞ്ഞ് എത്ര പൂജ്യമുണ്ടാകും?

10000 ന്റെ വർഗത്തിലോ?

വർഗമാകുമ്പോൾ പൂജ്യങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിന് എന്തു സംഭവിക്കുന്നു?

അപ്പോൾ 10, 100, 1000, 10000, ... എന്നിങ്ങനെയുള്ള സംഖ്യകളിൽ പൂർണവർഗങ്ങളെ എങ്ങനെ തിരിച്ചറിയും?

ലക്ഷം ഒരു പൂർണവർഗമാണോ?

പത്തുലക്ഷമോ?

ഇനി 20, 200, 2000 എന്നിവയുടെ വർഗങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

400000000 പൂർണവർഗമാണോ?

ഒരു പൂജ്യം കൂടി ചേർത്താലോ?

ഇനി കുറേ ചോദ്യങ്ങളാകാം. എല്ലാം മനസ്സിൽത്തന്നെ കണക്കുകൂട്ടാമല്ലോ.

- ചുവടെയുള്ള സംഖ്യകളുടെ വർഗം കണ്ടുപിടിക്കുക:
  - 30
  - 400
  - 7000
  - 6×10^{25}
- ചുവടെയുള്ള സംഖ്യകളിലെ പൂർണവർഗങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.
  - 2500
  - 36000
  - 1500
  - 9×10^{7}
  - 16×10^{24}

അടുത്ത വർഗം

21 ന്റെ വർഗം എത്രയാണ്?

ഗുണിക്കാൻ വരട്ടെ.

20 ന്റെ വർഗം 400 ആണല്ലോ. അപ്പോൾ 21 ന്റെ വർഗം കിട്ടാൻ 400 നോട് ഒരു ഒറ്റസംഖ്യ കൂട്ടിയാൽ മതി.

ഏത് ഒറ്റസംഖ്യ?

ആദ്യം മുതൽ നോക്കാം.

$$2^2 = 1^2 + 3 = 1^2 + (1 + 2)$$

$$3^2 = 2^2 + 5 = 2^2 + (2 + 3)$$

$$4^2 = 3^2 + 7 = 3^2 + (3 + 4)$$

$$5^2 = 4^2 + 9 = 4^2 + (4 + 5)$$

എന്നെല്ലാം എഴുതാമല്ലോ. ഈ രീതിയിൽ തുടർന്നാൽ, 21^2 എങ്ങനെ എഴുതാം?

$$21^2 = 20^2 + (20 + 21)$$

അതായത്,

$$21^2 = 400 + 41 = 441$$

ഇനി പഴയതുപോലെ

$$22^2 = 441 + 43 = 484$$

എന്നെല്ലാം തുടരാം.

101 ന്റെ വർഗം എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

$$100^2 = 10000$$

ഇനി എന്തുകൂടി കൂട്ടണം?

$$100 + 101 = 201$$

അപ്പോൾ

$$101^2 = 10000 + 201 = 10201$$

- ഇതുപോലെ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സംഖ്യകളുടെ വർഗം കണക്കാക്കുക.
  - 51
  - 61
  - 121
  - 1001
- 90 മുതൽ 100 വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ വർഗം കണ്ടുപിടിക്കുക.

ഭിന്നവും വർഗവും

ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയെ അതുകൊണ്ടുതന്നെ ഗുണിച്ചുകിട്ടുന്നതിനെയും വർഗം എന്നുതന്നെ പറയാം.

$\frac{3}{4}$ ന്റെ വർഗം എന്താണ്?

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3\times3}{4\times4} = \frac{9}{16}$$

അതായത്

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} = \frac{3^2}{4^2}$$

അപ്പോൾ ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെ വർഗം കണ്ടുപിടിക്കാൻ അംശത്തിന്റെയും ഛേദത്തിന്റെയും വർഗങ്ങൾ വെവ്വേറെ കണ്ടുപിടിച്ചാൽ മതി.

വർഗവ്യത്യാസം

$$2^2 = 1^2 + (1+2)$$

$$3^2 = 2^2 + (2+3)$$

$$4^2 = 3^2 + (3+4)$$

എന്നെല്ലാം കണ്ടല്ലോ.

ഇത് മറ്റൊരു രീതിയിലും എഴുതാം.

$$2^2 - 1^2 = 1+2$$

$$3^2 - 2^2 = 2+3$$

$$4^2 - 3^2 = 3+4$$

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ, അടുത്തടുത്ത രണ്ട് എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം സംഖ്യകളുടെ തുകയാണ്.

ഇനി ഈ കണക്കുകൾ നോക്കൂ:

$$3^2 - 1^2 = 9 - 1 = 8$$

$$4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$$

$$5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$$

ഒന്നിടവിട്ട സംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസവും സംഖ്യകളുടെ തുകയും തമ്മിലെന്താണ് ബന്ധം?

പ്രോജക്ട്

അവസാനത്തെ അക്കം

1 മുതൽ 10 വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങളുടെ അവസാന അക്കം മാത്രം നോക്കുക.

1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0

ഇനി 11 മുതൽ 20 വരെയുള്ള സംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങളുടെ അവസാന അക്കം നോക്കൂ.

ഇതേ ക്രമം തന്നെയാണോ?

മറ്റൊരു കാര്യം നോക്കാം. ഏതെങ്കിലും പൂർണ വർഗത്തിന്റെ അവസാന അക്കം 2 ആകുമോ?

അവസാന അക്കമായി വരാത്തത് ഏതൊക്കെയാണ്?

അപ്പോൾ 2637 എന്ന സംഖ്യ പൂർണവർഗമാണോ?

ഒരു സംഖ്യ പൂർണവർഗമല്ല എന്ന് തീരുമാനിക്കാൻ അവസാനത്തെ അക്കം മാത്രം നോക്കിയാൽ മതി.

അവസാന അക്കം മാത്രം നോക്കി ഒരു സംഖ്യ പൂർണവർഗമാണെന്നു പറയാൻ പറ്റുമോ?

ഇനി ഈ ചോദ്യങ്ങൾ മനക്കണക്കായി ചെയ്യാമല്ലോ.

- ചുവടെയുള്ള സംഖ്യകളുടെ വർഗം കണ്ടുപിടിക്കുക.
  - $\frac{2}{3}$
  - $\frac{1}{5}$
  - $\frac{7}{3}$
  - $1\frac{1}{2}$
- ചുവടെയുള്ള സംഖ്യകളിൽ ഏതൊക്കെയാണ് ഭിന്ന സംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങൾ?
  - $\frac{4}{15}$
  - $\frac{8}{9}$
  - $\frac{16}{25}$
  - $2\frac{1}{4}$
  - $4\frac{1}{9}$
  - $\frac{8}{18}$

ദശാംശവർഗങ്ങൾ

0.5 ന്റെ വർഗം എത്രയാണ്?

$5^2 = 25$ ആണെന്നറിയാം. 0.5×0.5 എന്ന ഗുണനഫലത്തിൽ എത്ര ദശാംശസ്ഥാനം ഉണ്ടാകണം?

എന്തുകൊണ്ട്?

$0.5 = \frac{5}{10}$ ആണല്ലോ.

ഇതുപോലെ 0.05 ന്റെ വർഗം കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

കുറേ എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങൾ കണ്ടുപിടിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ. അതുപയോഗിച്ച് 1.5 ന്റെ വർഗം എത്രയാണെന്ന് പറയാമോ?

0.15 ന്റെയോ?

ഈ ചോദ്യങ്ങളും മനക്കണക്കായി ചെയ്യാമല്ലോ.

- ചുവടെയുള്ള സംഖ്യകളുടെ വർഗം കണ്ടുപിടിക്കുക.
  - 1.2
  - 0.12
  - 0.013
- ചുവടെയുള്ള സംഖ്യകളിൽ വർഗമായി എഴുതാൻ കഴിയുന്ന സംഖ്യകൾ ഏതൊക്കെയാണ്?
  - 2.5
  - 0.25
  - 0.0016
  - 14.4
  - 1.44

വർഗഗുണനം

$5^2 \times 4^2$ എത്രയാണ്?

$5^2 \times 4^2 = 25 \times 16 = \ldots\ldots\ldots$

ഇത് കുറേക്കൂടി എളുപ്പത്തിൽ ചെയ്യാം:

$$\begin{aligned} 5^2 \times 4^2 &= 5 \times 5 \times 4 \times 4 \\ &= (5 \times 4) \times (5 \times 4) \\ &= 20 \times 20 \\ &= 400 \end{aligned}$$

ഇതുപോലെ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ക്രിയകൾ മനസ്സിൽ ചെയ്ത് ഉത്തരം പറയൂ.

- $5^2 \times 8^2$
- $2.5^2 \times 4^2$
- $(1.5)^2 \times (0.2)^2$

ഇവിടെയെല്ലാം നാം ഉപയോഗിച്ച തത്ത്വം എന്താണ്?

> രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങളുടെ ഗുണനഫലവും ഈ സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ വർഗവും തുല്യമാണ്.

ബീജഗണിതത്തിൽപ്പറഞ്ഞാലോ?

> x, y ഏതു സംഖ്യകൾ ആയാലും
> $x^2y^2 = (xy)^2$

സംഖ്യകൾ മൂന്നെണ്ണമായാലോ?

വർഗഘടകം

30 നെ അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലമായി എങ്ങനെ എഴുതും?

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$

അപ്പോൾ 900 നെ എങ്ങനെ ഘടകക്രിയ ചെയ്യും?

$$900 = 30^2 = (2 \times 3 \times 5)^2 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$$

ഇതുപോലെ $24 = 2^3 \times 3$ എന്നതും $24^2 = 576$ എന്നതും ഉപയോഗിച്ച്

$$576 = 24^2 = (2^3 \times 3)^2 = (2^3)^2 \times 3^2 = 2^6 \times 3^2$$

എന്ന് ഘടകക്രിയ ചെയ്യാമല്ലോ.

ചുവടെയുള്ള ഓരോ സംഖ്യയെയും അതിന്റെ വർഗത്തെയും അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ കൃതികളുടെ ഗുണനമായി എഴുതാമോ?

- 35
- 45
- 72
- 36
- 49

വർഗങ്ങളിലെ അഭാജ്യഘടകങ്ങളുടെ കൃത്യങ്കങ്ങൾക്ക് എന്തെങ്കിലും സവിശേഷത ഉണ്ടോ?

തിരിച്ചുപറഞ്ഞാൽ

ഒരു സമചതുരം വരയ്ക്കണം. അതിന്റെ പരപ്പളവ് 9 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ ആയിരിക്കണം.

എങ്ങനെ വരയ്ക്കും?

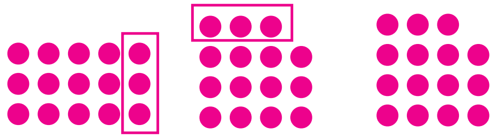
സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് വശത്തിന്റെ വർഗമാണല്ലോ.

ചതുരവും സമചതുരവും

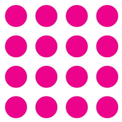
ചിത്രം നോക്കൂ:

ചതുരത്തിൽ കുറേ പൊട്ടുകൾ. ഇവ വേറെ രീതിയിൽ അടുക്കാമോ? ഒരു സമചതുരമുണ്ടാക്കാമോ?

ഇങ്ങനെ മാറ്റിനോക്കൂ.



സമചതുരമാക്കാൻ ഇനി എത്ര പൊട്ടു വേണം?



ആദ്യത്തെ ചതുരത്തിൽ എത്ര പൊട്ടുകളുണ്ടായിരുന്നു? ഇപ്പോഴത്തെ സമചതുരത്തിലോ?

ഇവിടെ കണ്ടതെന്താണ്?

$$4^2 = (3 \times 5) + 1$$

ഈ സൂത്രം എല്ലാ ചതുരങ്ങൾക്കും സാധിക്കുമോ?

ഇവിടെ ഉപയോഗിച്ച സംഖ്യകൾ 3, 4, 5 എന്നിങ്ങനെയാണല്ലോ.

അപ്പോൾ ഇത് സാധിക്കണമെങ്കിൽ ആദ്യത്തെ ചതുരത്തിലെ വരിയിലും നിരയിലുമുള്ള പൊട്ടുകളുടെ എണ്ണം എങ്ങനെയായിരിക്കണം?

ഇക്കാര്യം സംഖ്യകളായി എഴുതിയാലോ?

$$2^2 = (1 \times 3) + 1$$
$$3^2 = (2 \times 4) + 1$$
$$4^2 = (3 \times 5) + 1$$

ഇത് തുടർന്നുനോക്കൂ.

അപ്പോൾ പരപ്പളവ് 9 ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്ററാകാൻ വശത്തിന്റെ നീളം എത്രയാകണം?

ഇതുപോലെ 169 ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കാൻ വശത്തിന്റെ നീളം എത്രയായി എടുക്കണം?

അതിന് ഏതു സംഖ്യയുടെ വർഗമാണ് 169 എന്നു കണ്ടുപിടിക്കണം. നേരത്തേ ഉണ്ടാക്കിയ വർഗപ്പട്ടിക നോക്കിയാൽ $13^2 = 169$ എന്നു കാണാം. അപ്പോൾ വശങ്ങളുടെ നീളം 13 സെന്റിമീറ്റർ ഉള്ള സമചതുരം വരച്ചാൽ മതി.

ഇവിടെ ഒരു സംഖ്യ ഏതു സംഖ്യയുടെ വർഗമാണെന്ന് കണ്ടുപിടിച്ചു. ഈ ക്രിയക്ക് വർഗമുലം കണ്ടുപിടിക്കുക എന്നാണു പറയുന്നത്.

അതായത് 13 ന്റെ വർഗമാണ് 169 എന്നതിനെ തിരിച്ചു പറയുന്നത് 169 ന്റെ വർഗമൂലമാണ് 13 എന്നാണ്. (169 is the square of 13 and 13 is the square root of 169).

13 ന്റെ വർഗമാണ് 169 എന്നതിനെ

$$13^2 = 169$$

എന്നു ചുരുക്കി എഴുതുന്നതുപോലെ 169 ന്റെ വർഗമൂലമാണ് 13 എന്നതിനെ ചുരുക്കി എഴുതുന്നത്

$$\sqrt{169} = 13$$

എന്നാണ്.

(വർഗമൂലം എടുക്കുക എന്ന ക്രിയയെ $\sqrt{}$ എന്ന ചിഹ്നം കൊണ്ടാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്).

ഇതുപോലെ 5 ന്റെ വർഗമാണ് 25 എന്ന കാര്യം 25 ന്റെ വർഗമൂലമാണ് 5 എന്നും പറയാം. ചുരുക്കി എഴുതിയാൽ

$$5^2 = 25$$

$$\sqrt{25} = 5$$

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ

x, y എന്ന രണ്ടു സംഖ്യകളിൽ $x^2 = y$ ആണെങ്കിൽ $\sqrt{y} = x$

ഇനി ചുവടെയുള്ള സംഖ്യകളുടെയെല്ലാം വർഗമൂലം കണ്ടുപിടിക്കൂ. (വർഗപ്പട്ടിക ഉപയോഗിക്കാം)

- 100
- 256
- $\frac{1}{4}$
- $\frac{16}{25}$
- 1.44
- 0.01

പൂർണവർഗത്തിന്റെ വർഗമൂലം

784 ഒരു പൂർണവർഗം ആണ്. ഇതിന്റെ വർഗമൂലം എന്താണ്?

784 എന്ന സംഖ്യ 400, 900 എന്നീ പൂർണവർഗങ്ങൾക്കിടയിലാണ് 400 ന്റെ വർഗമൂലം 20 ഉം. 900 ന്റേത് 30 ഉം ആണെന്ന് നമുക്കറിയാം.

അതുകൊണ്ട് 784 ന്റെ വർഗമൂലം 20 നും 30 നും ഇടയിലാണ്. 784 ന്റെ ഒന്നിന്റെ സ്ഥാനത്ത് 4 ആയതുകൊണ്ട് അതിന്റെ വർഗമുലത്തിന്റെ ഒന്നിന്റെ സ്ഥാനത്ത് 2 അല്ലെങ്കിൽ 8 ആയിരിക്കും. അതായത് $\sqrt{784}$ എന്നത് 22 അല്ലെങ്കിൽ 28 ആകണം.

784 എന്ന സംഖ്യ 400 നേക്കാൾ 900 നോടാണ് കൂടുതൽ അടുത്തു നിൽക്കുന്നത്. അതുകൊണ്ട് $\sqrt{784} = 28$ ആണ്. ഇനി 28 ന്റെ വർഗം കണ്ടുനോക്കൂ.

ഇതുപോലെ 1369, 2116, 2209 എന്നിവയുടെ വർഗമൂലം കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

വർഗമൂലഘടകം

1225 ന്റെ വർഗമൂലം എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

വർഗങ്ങളുടെ ഗുണനഫലവും വർഗമായതിനാൽ 1225 നെ വർഗങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതിയാലും മതി.

അതിന് 1225 നെ അഭാജ്യഘടകങ്ങളായി എഴുതിനോക്കൂ.

$$1225 = 5^2 \times 7^2$$

വർഗങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം, ഗുണനഫലത്തിന്റെ വർഗമായതിനാൽ

$$5^2 \times 7^2 = (5 \times 7)^2 = 35^2$$

അപ്പോൾ $1225 = 35^2$

ഇതിൽനിന്ന് $\sqrt{1225} = 35$

മറ്റൊരു ഉദാഹരണം നോക്കാം: $\sqrt{3969}$ കണ്ടുപിടിക്കണം.

മുമ്പു ചെയ്തതുപോലെ 3969 നെ അഭാജ്യഘടകങ്ങളാക്കാം.

$$3969 = 3^2 \times 3^2 \times 7^2$$

$$= (3 \times 3 \times 7)^2$$

ഇതിൽനിന്ന് $\sqrt{3969} = 3 \times 3 \times 7 = 63$

എന്നു കിട്ടും.

ഇനി താഴെ കൊടുത്തവയുടെ വർഗമൂലം കാണുക.

- 256
- 2025
- 441
- 9216
- 1089
- 15625
- 1936
- 3025
- 12544

ചെയ്തുനോക്കാം

- സമചതുരാകൃതിയായ ഒരു സ്ഥലത്തിന് 1024 ചതുരശ്ര മീറ്റർ പരപ്പളവാണുള്ളത്. ഇതിന്റെ ഒരു വശത്തിന് എത്ര മീറ്റർ നീളമുണ്ട്?
- ഒരു പന്തലിൽ 625 കസേരകൾ വരിയായും നിരയായും ഇട്ടിരിക്കുന്നു. വരികളുടെയും നിരകളുടെയും എണ്ണം തുല്യമാണ്. ഇതിൽ ഒരു വരിയിൽനിന്നും ഒരു നിരയിൽ നിന്നും മുഴുവൻ കസേരകളും മാറ്റി. എത്ര കസേരകളാണ് മാറ്റിയത്? ബാക്കി എത്ര കസേരകളുണ്ട്?
- 1 മുതൽ തുടർച്ചയായി കുറേ ഒറ്റസംഖ്യകൾ കൂട്ടിയപ്പോൾ 5184 എന്നു കിട്ടി. എത്രവരെയുള്ള ഒറ്റസംഖ്യകളാണ് കൂട്ടിയത്?
- തുടർച്ചയായ രണ്ട് എണ്ണൽസംഖ്യകളും അവയിൽ ആദ്യത്തേതിന്റെ വർഗവും കൂട്ടിയപ്പോൾ 5329 കിട്ടി. സംഖ്യകൾ ഏതൊക്കെയാണ്?

പ്രോജക്ട്

അക്കത്തുക

16 ഒരു പൂർണവർഗമാണല്ലോ. ഇതിലെ അക്കങ്ങൾ 1 ഉം 6 ഉം കൂട്ടിയാൽ 7 കിട്ടും.

അടുത്ത പൂർണവർഗമായ 25 ന്റെ അക്കങ്ങൾ കൂട്ടിയാലും 7 തന്നെ.

36 ന്റെ അക്കങ്ങൾ കൂട്ടിയാൽ 9.

7 ന്റെ വർഗമായ 49 ന്റെ അക്കങ്ങൾ കൂട്ടിയാൽ 13; ഇതിലെ അക്കങ്ങൾ വീണ്ടും കൂട്ടിയാൽ 4.

ഇങ്ങനെ 1 മുതലുള്ള പൂർണവർഗങ്ങളുടെ അക്കങ്ങളുടെ തുക എഴുതിനോക്കൂ. (തുക ഒറ്റസംഖ്യയാകുന്നതുവരെ തുടരണം).

പൂർണവർഗത്തിന്റെ ഇങ്ങനെയുള്ള അക്കത്തുകയുടെ പ്രത്യേകത എന്താണ്?

3324 പൂർണവർഗമാണോ?

തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്
• സമചതുരസംഖ്യകളുടെ പ്രത്യേകതകൾ വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• സമചതുരസംഖ്യകൾക്ക് ത്രികോണസംഖ്യകളുമായുള്ള ബന്ധം വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• വർഗം, പൂർണവർഗം എന്നിവ ഉദാഹരണസഹിതം വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• ഒരു സംഖ്യയുടെ വർഗം കണ്ടെത്തുന്നു.			
• വർഗസംഖ്യകളുടെ പ്രത്യേകതകൾ യുക്തിസഹിതം സമർഥിക്കുന്നു.			
• വാചികമായ പ്രസ്താവനകളെ '$\sqrt{}$' എന്ന ചിഹ്നം ഉപയോഗിച്ചും തിരിച്ചും പറയുന്നു.			
• ഒരു പൂർണവർഗത്തിന്റെ വർഗമൂലം കണക്കാക്കുന്നതിനുള്ള രീതികൾ വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• പൂർണവർഗത്തിന്റെ പ്രത്യേകതകൾ ഉദാഹരണസഹിതം വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• വർഗമൂലം, സംഖ്യാബന്ധങ്ങൾ എന്നിവ ഉപയോഗിച്ച് പ്രായോഗികപ്രശ്നങ്ങൾ പരിഹരിക്കുന്നു.			

7

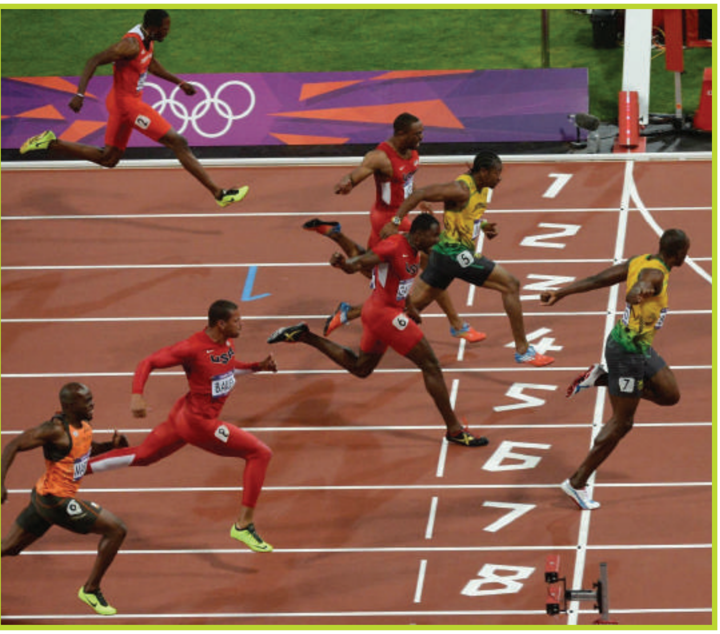
വേഗത്തിന്റെ കണക്ക്

ഒളിംപിക്സ്

2012 ലണ്ടൻ ഒളിംപിക്സിലെ പുരുഷന്മാരുടെ 100 മീറ്റർ ഓട്ടമത്സരത്തിൽ ആദ്യ 5 സ്ഥാനത്തെത്തിയവരുടെ സമയം നോക്കൂ.

ക്രമ. നം.	പേര്	സമയം (സെക്കന്റ്)
1.	ഉസൈൻ ബോൾട്ട്	9.63
2.	യോഹാൻ ബ്ലേക്ക്	9.75
3.	ജസ്റ്റിൻ ഗാറ്റ്ലിൻ	9.79
4.	ടൈസൺ ഗേ	9.80
5.	റിയാൻ ബെയ്‌ലി	9.88

100 മീറ്റർ ഓടാൻ നിങ്ങൾ എത്ര സമയമെടുക്കും?



ആരാണ് കേമൻ?

"സ്കൂളിലെ ഏറ്റവും നല്ല ഓട്ടക്കാരനെ കണ്ടെത്തണം. എന്താണ് വഴി?"

ടീച്ചർ ചോദിച്ചു.

"എല്ലാവരും 100 മീറ്റർ ഓടിനോക്കിയാൽ പോരേ?"

രാജി ചോദിച്ചു.

രഘു പറഞ്ഞതിങ്ങനെ.

"എല്ലാവരും 1 മിനിറ്റ് ഓടിനോക്കിയാലും മതിയല്ലോ."

പരീക്ഷിക്കാൻ എല്ലാവരും ഗ്രൗണ്ടിലെത്തി.

ആദ്യം എല്ലാവരും 100 മീറ്റർ ഓടി.

മികച്ച ഓട്ടക്കാർ ഇവരാണ്.

ക്രമ നമ്പർ	പേര്	സമയം
1.	ശ്യാം	16 സെക്കന്റ്
2.	ജോയ്	18 സെക്കന്റ്
3.	രഘു	18 സെക്കന്റ്
4.	മുസ്തഫ	17 സെക്കന്റ്

മൽസരത്തിൽ ആരാണ് ജയിച്ചത്?

രഘു പറഞ്ഞതുപോലെ മൽസരം നടത്താൻ എളുപ്പമാണോ?

കായികമേള

കോഴിക്കോട്ടു നടക്കുന്ന കായികമേളയിൽ പങ്കെടുക്കാൻ രഘുവും കൂട്ടുകാരും യാത്ര ചെയ്തത് ബസ്സിലാണ്. രാവിലെ 7 മണിക്ക് യാത്ര തുടങ്ങി, 150 കി.മീ. സഞ്ചരിച്ച് 10 മണിക്കാണ് എത്തിച്ചേർന്നത്. യാത്രയിലുടനീളം വാഹനം സഞ്ചരിച്ചത് ഒരേ വേഗത്തിലാകണമെന്നുണ്ടോ?

ആദ്യത്തെ ഒരു മണിക്കൂറിൽ 40 കിലോമീറ്റർ, അടുത്ത ഒരു മണിക്കൂറിൽ 60 കിലോമീറ്റർ, അവസാനത്തെ ഒരു മണിക്കൂറിൽ 50 കിലോമീറ്റർ എന്നിങ്ങനെയാകാം.

ഇങ്ങനെയുള്ള സന്ദർഭങ്ങളിൽ ശരാശരി കണക്കാക്കിയത് ഓർമയുണ്ടോ?

ഇവിടെ ആകെ സഞ്ചരിച്ചത് 150 കിലോമീറ്റർ ആണല്ലോ.

സഞ്ചരിക്കാനെടുത്ത സമയമോ?

അപ്പോൾ ഒരു മണിക്കൂറിൽ ശരാശരി $\frac{150}{3} = 50$ കിലോമീറ്റർ സഞ്ചരിച്ചുവെന്നു പറയാം.

മറ്റൊരു രീതിയിലും പറയാം. ബസ്സിന്റെ ശരാശരി വേഗം മണിക്കൂറിൽ 50 കിലോമീറ്റർ. ഇത് 50 കി.മീ/മണിക്കൂർ എന്നാണ് എഴുതുന്നത്.

ശരാശരി വേഗം

സ്കൂൾ കലോത്സവത്തിൽ പങ്കെടുക്കാനാണ് സലീനയും ബീനയും കോഴിക്കോട്ടെത്തിയത്. ജീപ്പിലാണ് സലീന യുടെ യാത്ര. 90 കി.മീ. യാത്രചെയ്യാൻ 2 മണിക്കൂർ എടുത്തു. കാറിലാണ് ബീന യാത്രചെയ്തത്. 150 കി.മീ. യാത്ര ചെയ്യാൻ 3 മണിക്കൂറെടുത്തു. ഏതു വാഹനമാണ് കൂടുതൽ വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിച്ചത്?

ജീപ്പിൽ യാത്രചെയ്തത് എത്ര ദൂരമാണ്? 90 കി.മീ.

അതിനെത്ര സമയമെടുത്തു? 2 മണിക്കൂർ.

ജീപ്പിന്റെ ശരാശരിവേഗം എത്രയാണ്?

$$\frac{90}{2} = 45 \text{ കി.മീ./മണിക്കൂർ}$$

ഇതുപോലെ കാറിന്റെ ശരാശരി വേഗം കണക്കാക്കാമോ? കാർ സഞ്ചരിച്ചത് 150 കി.മീ. ആണല്ലോ.

അതിനെടുത്ത സമയമോ?

കാറിന്റെ ശരാശരി വേഗം = ...

ഏതു വാഹനത്തിനാണ് ശരാശരി വേഗം കൂടുതൽ?

ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കൂ.

- സുധീർ സഞ്ചരിച്ച തീവണ്ടി 3 മണിക്കൂർകൊണ്ട് 240 കിലോമീറ്റർ ഓടിയാണ് തിരുവനന്തപുരത്ത് എത്തിയത്. രമേശ് യാത്രചെയ്ത തീവണ്ടി 120 കിലോമീറ്റർ സഞ്ചരിക്കുന്നതിന് 2 മണിക്കൂർ എടുത്തു. ശരാശരി വേഗം കൂടുതൽ ഏതു തീവണ്ടിക്കാണ്? എത്ര കൂടുതൽ?
- തീവണ്ടിയിൽ 360 കിലോമീറ്റർ ദൂരം യാത്രചെയ്യാൻ 4 മണിക്കൂർ 30 മിനിറ്റ് എടുത്തു. തീവണ്ടിയുടെ ശരാശരി വേഗം എത്രയാണ്?

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം.

52 കി.മീ. /മണിക്കൂർ ശരാശരി വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ബസ്സിൽ 6 മണിക്കൂർ കൊണ്ട് എത്ര ദൂരം യാത്രചെയ്യാം?

ശരാശരി ഒരു മണിക്കൂറിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം 52 കി.മീ. ആയതിനാൽ

6 മണിക്കൂർ കൊണ്ട് യാത്ര ചെയ്യുന്ന ദൂരം

$= 52 \times 6 = 312$ കി.മീ.

ഇതേ വേഗത്തിൽ 520 കിലോമീറ്റർ യാത്ര ചെയ്യാൻ എത്ര സമയം വേണം?

- ജോയിയുടെ യാത്രയുടെ വിവരങ്ങൾ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. വിട്ടുപോയ കളങ്ങൾ പൂർത്തിയാക്കുക.

സഞ്ചരിച്ച വാഹനം	സഞ്ചരിച്ച ദൂരം	സമയം	ശരാശരി വേഗം
ട്രെയിൻ	....	4 മണിക്കൂർ	60 കി.മീ./മ
കാർ	120 കി.മീ.	2 മണിക്കൂർ	....
വിമാനം	5040 കി.മീ.	....	840 കി.മീ./മ

- ശ്യാമയ്ക്ക് 2 മണിക്കാണ് പരീക്ഷ ആരംഭിക്കുന്നത്. 50 കിലോമീറ്റർ ദൂരം ബസ്സിലും 175 കിലോമീറ്റർ തീവണ്ടിയിലും യാത്ര ചെയ്താണ് പരീക്ഷാകേന്ദ്രത്തിലെത്തേണ്ടത്. ബസ്സിന്റെ ശരാശരി വേഗം 20.കി.മീ./മണിക്കൂറും തീവണ്ടിയുടെ ശരാശരി വേഗം 50 കി.മീ./മണിക്കൂറും ആണ്. 1 മണിക്കൂർ മുമ്പു തന്നെ പരീക്ഷാകേന്ദ്രത്തിൽ എത്തിച്ചേരണമെങ്കിൽ ശ്യാമ എത്ര മണിക്ക് വീട്ടിൽനിന്നു പുറപ്പെടണം.

സമയം കുറയ്ക്കാൻ

രാവിലെ 6 മണിക്ക് എറണാകുളത്തു നിന്ന് പുറപ്പെട്ട ഒരു ബസ് ഉച്ചയ്ക്ക് 12 മണിക്ക് തിരുവനന്തപുരത്തെത്തുന്നു. ബസ്സിന്റെ ശരാശരി വേഗം 40 കി.മീ./മണിക്കൂർ ആണ്. ബസ് അതേ സമയത്തുതന്നെ പുറപ്പെട്ട് 1 മണിക്കൂർ നേരത്തെ എത്തണമെങ്കിൽ ശരാശരി വേഗം എത്ര കൂട്ടണം?

ആകെ സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം എത്രയാണ്?

1 മണിക്കൂർ കുറച്ചാൽ യാത്രയ്ക്കു വേണ്ട സമയം എത്രയാണ്?

1 മണിക്കൂർ നേരത്തേ എത്താൻ ശരാശരി വേഗം എത്രയായിരിക്കണം.

ഭൂമിയുടെ വേഗം

നാം എപ്പോഴെങ്കിലും അനങ്ങാതിരുന്നിട്ടുണ്ടോ? നമ്മെയെല്ലാം വഹിക്കുന്ന ഭൂമി നിരന്തരം കറങ്ങുന്നുണ്ടല്ലോ; സ്വയം തിരിയുകയും സൂര്യനെ ചുറ്റിത്തിരിയുകയും. ഭൂമി സ്വയം കറങ്ങുന്നത് ഏതാണ്ട് 1700 കി.മീ./മണിക്കൂർ വേഗത്തിലാണ്. സൂര്യനെ ചുറ്റിക്കറങ്ങുന്നത് ഏതാണ്ട് 100000 കി.മീ. /മണിക്കൂർ വേഗത്തിലും.

റെയിൽവേ സ്റ്റേഷനിലേക്ക്

അബു രാവിലെ 7 മണിക്ക് ബസ്സിൽ കയറി. സാധാരണ യായി ബസ് ശരാശരി 30 കി.മി/മണിക്കൂർ വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിച്ച് 11 മണിക്ക് റെയിൽവേ സ്റ്റേഷനിൽ എത്താറുണ്ട്. എന്നാൽ മഴ കാരണം ബസ് ശരാശരി 20 കി.മീ./മണിക്കൂർ വേഗത്തിലാണ് സഞ്ചരിച്ചത്. അബു 9 മണിക്ക് ബസ്സിൽ നിന്നിറങ്ങി ഒരു കാറിൽ 11 മണിക്കു തന്നെ റെയിൽവേ സ്റ്റേഷനിൽ എത്തി. കാറിന്റെ ശരാശരി വേഗം എത്രയായിരുന്നു?

യാത്ര തുടങ്ങിയ സ്ഥലത്തു നിന്ന് റെയിൽവേ സ്റ്റേഷനിലേക്ക് ആകെ എത്ര ദൂരമാണുള്ളത്?

ആദ്യത്തെ 2 മണിക്കൂർ കൊണ്ട് യാത്ര ചെയ്ത ദൂരം എത്രയാണ്?

അപ്പോൾ കാറിൽ എത്ര ദൂരം സഞ്ചരിച്ചു?

അതിനെത്ര സമയമെടുത്തു?

ഇനി കാറിന്റെ ശരാശരി വേഗം കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ.

വേഗത്തിന്റെ ശരാശരിയും ശരാശരി വേഗവും

ഒരു വാഹനം യാത്രയുടെ ആദ്യത്തെ 120 കിലോമീറ്റർ ദൂരം ശരാശരി 30 കി.മീ./മണിക്കൂർ വേഗത്തിലും അടുത്ത 120 കിലോമീറ്റർ 20 കി.മീ./മണിക്കൂർ വേഗത്തിലുമാണ് സഞ്ചരിച്ചത്. മുഴുവൻ യാത്രയിലെ ശരാശരി വേഗം എത്രയാണ്?

വേഗങ്ങളുടെ ശരാശരിയെടുത്താൽ

$$\frac{30+20}{2} = 25 \text{ കി.മീ./മണിക്കൂർ.}$$

ഈ രീതിയിൽ കണ്ടുപിടിച്ചാൽ ശരിയാണോ?

ശരിയായ കണക്കെന്താണ്?

ശരാശരി വേഗം കണക്കാക്കാൻ ആകെ യാത്രചെയ്ത ദൂരത്തെ അതിനെടുത്ത സമയം കൊണ്ട് ഹരിക്കുകയല്ലേ വേണ്ടത്?

30.കി.മീ./മണിക്കൂർ ശരാശരി വേഗത്തിൽ 120 കി.മീ. സഞ്ചരിക്കാൻ വേണ്ട സമയം $\frac{120}{30} = 4$ മണിക്കൂർ.

20 കി.മീ./മണിക്കൂർ ശരാശരി വേഗത്തിൽ 120 കി.മീ. സഞ്ചരിക്കാൻ വേണ്ട സമയം

$$= \frac{120}{20} = 6 \text{ മണിക്കൂർ}$$

സമയത്തിന്റെ വില

സാധാരണയായി സമയം കണക്കാക്കാൻ നാം ഉപയോഗിക്കുന്ന ഏറ്റവും ചെറിയ ഏകകം സെക്കന്റാണല്ലോ. സെക്കന്റിനേക്കാൾ ചെറിയ ഏകകങ്ങളും ഉപയോഗിക്കാറുണ്ട്. മൈക്രോസെക്കന്റും നാനോ സെക്കന്റും ഉദാഹരണങ്ങളാണ്. ഒരു സെക്കന്റിന്റെ പത്തുലക്ഷത്തിൽ ഒരു ഭാഗമാണ് മൈക്രോസെക്കന്റ്. മൈക്രോ സെക്കന്റിന്റെ $\frac{1}{1000}$ ഭാഗമാണ് നാനോ സെക്കന്റ്.

പി.ടി. ഉഷയ്ക്ക് ഒളിംപിക്സിൽ മെഡൽ നഷ്ടപ്പെട്ടത് സെക്കന്റിന്റെ എത്ര അംശത്തിനാണെന്നറിയാമോ?

വിവിധ ജീവികളുടെ സഞ്ചാരവേഗം നോക്കൂ.

ക്രമ. നം.	പേര്	കി.മീ./മണിക്കൂർ
1	ചീറ്റപ്പുലി	112
2	കുതിര	70
3	കുറുക്കൻ	65
4	സിംഹം	80
5	ആന	40
6	സീബ്ര	64

ആകെ യാത്രയ്ക്കെടുത്ത സമയം 4 + 6 = 10 മണിക്കൂർ

ആകെ സഞ്ചരിച്ച ദൂരം = 240 കി.മീ.

ശരാശരി വേഗം = 24 കി.മീ./മണിക്കൂർ

തീവണ്ടിയും ബസ്സും

റഹീം 350 കിലോമീറ്റർ തീവണ്ടിയിലും 150 കിലോമീറ്റർ ദൂരം ബസ്സിലും സഞ്ചരിച്ചു. തീവണ്ടിയുടെ ശരാശരി വേഗം 70 കി.മീ./മണിക്കൂർ ആയിരുന്നു. ബസ്സിൽ സഞ്ചരിച്ചത് 5 മണിക്കൂറാണ്. മുഴുവൻ യാത്രയുടെ ശരാശരി വേഗം എത്രയാണ്?

രത്നഗിരിയിലേക്ക്

പവിഴമലയിൽനിന്നു 360 കി.മീ. അകലെയാണ് രത്നഗിരി. ഗോപികയും കുടുംബവും പവിഴമലയിൽനിന്നും രത്നഗിരിയിലേക്ക് കാറിൽ പുറപ്പെട്ടു. 60 കി.മീ./മണിക്കൂർ ആയിരുന്നു ശരാശരി വേഗം. 40 കി.മീ./മണിക്കൂർ ആയിരുന്നു മടക്കയാത്രയിലെ ശരാശരി വേഗം. ആകെ യാത്രയിലെ ശരാശരി വേഗം എത്രയാണ്?

ഈ കണക്കിൽ ദൂരം 360 കി.മീ. എന്നതിനു പകരം 180 കി.മീ. ആയാലോ?

ആകെ യാത്രയിലെ ശരാശരി വേഗം മാറുന്നുണ്ടോ?

ദൂരം പറയാതെ

ബാബു കൂട്ടുകാരനെ കാണാൻ മാനന്തവാടിയിലേക്ക് പോയി. ബസ്സിലാണ് യാത്ര. ശരാശരി 40 കി.മീ./മണിക്കൂർ വേഗത്തിലാണ് ബസ് സഞ്ചരിച്ചത്. തിരിച്ചു വന്നത് കാറിലായിരുന്നു. ശരാശരി വേഗം 60 കി.മീ./മണിക്കൂർ ആണ്. ആകെ യാത്രയുടെ ശരാശരി വേഗം എത്രയാണ്?

ആകെ യാത്രയുടെ ശരാശരി വേഗം കണ്ടുപിടിക്കാൻ ആകെ സഞ്ചരിച്ച ദൂരത്തെ യാത്രയ്ക്കെടുത്ത സമയം കൊണ്ട് ഹരിക്കണം. ദൂരം എത്രയാണെന്ന് അറിയില്ല.

ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ ദൂരം ഏതെടുത്താലും ശരാശരി വേഗത്തിൽ മാറ്റം വരില്ല എന്ന് മുമ്പൊരു കണക്കിൽ കണ്ടല്ലോ?

ദൂരം 120 കി.മീ. ആണെന്ന് കരുതിയാലോ?

ആകെ സഞ്ചരിച്ച ദൂരം 240 കി.മീ.

ആദ്യയാത്രയുടെ സമയം എത്രയാണ്? $\frac{120}{40} = 3$ മണിക്കൂർ

മടക്കയാത്രയുടെ സമയം $\frac{120}{60} = 2$ മണിക്കൂർ.

എങ്കിൽ ആകെ യാത്രയുടെ ശരാശരി വേഗം

$$= \frac{240}{5} = 48 \text{ കി.മീ./മണിക്കൂർ.}$$

ഇനി ദൂരം 240 കി.മീ ആണെങ്കിലോ?

ആകെ യാത്രയുടെ ശരാശരി വേഗം കണ്ടെത്താമല്ലോ.

സൈക്കിൾ യാത്ര

- അമ്മാവന്റെ വീട്ടിലേക്ക് ജോണി 15 കി.മീ./മണിക്കൂർ വേഗത്തിൽ സൈക്കിളിൽ പോയി. തിരിച്ചു വന്നത് 10 കി.മീ./മണിക്കൂർ വേഗത്തിലാണ്. ആകെ യാത്ര യുടെ ശരാശരി വേഗം എത്രയാണ്?

സെക്കന്റിലായാലോ?

ഒരു വാഹനം 72 കി.മി./മണിക്കൂർ ശരാശരി വേഗത്തി ലാണ് സഞ്ചരിക്കുന്നത്. 1 സെക്കന്റിൽ ഈ വാഹനം ശരാ ശരി എത്രദൂരം മുന്നോട്ടുപോകും?

ഒരു മണിക്കൂർ എന്നാൽ 60 മിനിറ്റ്. ഒരു കിലോമീറ്ററെ ന്നാൽ 1000 മീറ്റർ.

അപ്പോൾ 60 മിനിറ്റുകൊണ്ട് ശരാശരി 72000 മീറ്റർ സഞ്ച രിക്കും.

1 മിനിറ്റുകൊണ്ട് സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം $= \frac{72000}{60} = 1200$ മീറ്റർ

1 സെക്കന്റുകൊണ്ട് സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം $= \frac{1200}{60} = 20$ മീറ്റർ

വാഹനത്തിന്റെ ശരാശരി വേഗം 20 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്നും പറയാം.

15 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് വേഗത്തിൽ ഓടുന്ന ഒരു വാഹന ത്തിന്റെ വേഗം ഒരു മണിക്കൂറിൽ എത്രയായിരിക്കുമെന്ന് കണക്കാക്കിനോക്കൂ.

ഇനി ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കൂ.

- ഒരു തീവണ്ടി 36 കി.മീ./മണിക്കൂർ വേഗത്തിൽ സഞ്ച രിക്കുന്നു. 3 മിനിറ്റു കൊണ്ട് ഈ തീവണ്ടി എത്ര ദൂരം സഞ്ചരിക്കും?
- 180 മീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു തീവണ്ടി ഒരു പോസ്റ്റ് കട ന്നുപോകാൻ 9 സെക്കന്റ് എടുക്കുന്നു. എങ്കിൽ തീവ ണ്ടിയുടെ വേഗം മണിക്കൂറിൽ എത്രയാണ്?

അമിതവേഗം

90 കി.മീ./മണിക്കൂർ വേഗത്തിൽ ഓടുന്ന ഒരു വാഹനം ഒരു മിനിറ്റിൽ എത്ര ദൂരം ഓടും?

$$\frac{90}{60} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} \text{ കി.മീ.}$$

ഒരു സെക്കന്റിലോ?

$1\frac{1}{2}$ കി.മീ. എന്നാൽ 1500 മീറ്ററാണല്ലോ?

$$\frac{1500}{60} = \frac{75}{3} = 25 \text{ മീ.}$$

അപ്പോൾ വണ്ടിയോടിക്കുന്നയാൾ ബ്രേക്ക് ചവി ട്ടാൻ ഒരു സെക്കന്റ് വൈകിയാലോ?

വാഹനം 25 മീറ്റർ സഞ്ചരിച്ചിട്ടുണ്ടാവും.

റോഡപകടങ്ങൾ

ഓരോ ദിവസവും നിരവധി റോഡപകടങ്ങൾ ഉണ്ടാകുന്നു. ഇതിന്റെ പ്രധാന കാരണങ്ങൾ അമിതവേഗവും അശ്രദ്ധയോടെ വണ്ടി ഓടിക്കുന്നതും ആണ്. എത്രയെത്ര ജീവനുകളാണ് റോഡപകടങ്ങളിൽ നഷ്ടമാകുന്നത്! അമിത വേഗം നിയന്ത്രിക്കുന്നതിന് വലിയ വാഹനങ്ങളിൽ 'വേഗപ്പൂട്ട്' ഘടിപ്പിക്കണമെന്നു നിബന്ധനയുണ്ട്. ഇതു ഘടിപ്പിച്ച വാഹനങ്ങൾക്ക് ഒരു നിശ്ചിത വേഗത്തിൽ കൂടുതൽ സഞ്ചരിക്കാൻ കഴിയില്ല.

നാം ഓരോരുത്തരും റോഡ് നിയമങ്ങൾ അനുസരിക്കാൻ തയാറായാൽ അപകടങ്ങൾ കുറയ്ക്കാൻ കഴിയും.

ചെയ്തുനോക്കാം

- ഒരു കാർ 15 മിനിറ്റ് സമയം 36 കി.മീ./മണിക്കൂർ ശരാശരി വേഗത്തിലും പിന്നീടുള്ള 15 മിനിറ്റ് 60 കി.മീ./മണിക്കൂർ ശരാശരി വേഗത്തിലുമാണ് സഞ്ചരിക്കുന്നത്. കാർ എത്ര ദൂരം സഞ്ചരിച്ചു എന്നു കണക്കാക്കുക.
- രാമുവും സലീമും അയൽക്കാരാണ്. രണ്ടു പേരും തിരുവനന്തപുരത്തേക്ക് സ്വന്തം വാഹനങ്ങളിലാണ് യാത്രചെയ്തത്. രാമുവിന്റെ കാർ തിരുവനന്തപുരത്തേക്ക് പോകുമ്പോൾ 30 കി.മീ./മണിക്കൂർ ശരാശരി വേഗത്തിലും തിരിച്ച് 50 കി.മീ./മണിക്കൂർ ശരാശരി വേഗത്തിലുമാണ് സഞ്ചരിച്ചത്. സലീം രണ്ടുഭാഗത്തേക്കും ശരാശരി 40 കി.മീ./മണിക്കൂർ വേഗത്തിലാണ് യാത്ര ചെയ്തത്. രണ്ടുപേരും ഒരേ ദൂരമാണ് യാത്രചെയ്തതെങ്കിൽ കുറഞ്ഞ സമയംകൊണ്ട് യാത്ര ചെയ്തത് ആരാണ്?
- ഒരേ ദിശയിൽ സമാന്തരട്രാക്കുകളിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന രണ്ടു തീവണ്ടികളുടെ വേഗം യഥാക്രമം 50 കി.മീ./മണിക്കൂർ, 100 കി.മീ./മണിക്കൂർ എന്നിങ്ങനെയാണ്. ആദ്യ തീവണ്ടി പുറപ്പെട്ട് രണ്ടു മണിക്കൂറിന് ശേഷമാണ് രണ്ടാമത്തെ തീവണ്ടി പുറപ്പെട്ടത്. എത്ര ദൂരം കഴിയുമ്പോഴാണ് രണ്ടു തീവണ്ടികളും ഒപ്പമെത്തുന്നത്?
- 125 മീറ്റർ നീളമുള്ള തീവണ്ടി 90 കി.മീ./മണിക്കൂർ വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. ഈ തീവണ്ടി 175 മീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു പാലം കടന്നുപോകാൻ എത്ര സമയം എടുക്കും?

തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്
• ജീവിതസന്ദർഭങ്ങളിൽ ശരാശരി വേഗം എന്ന ആശയം പ്രയോജനപ്പെടുത്തി പ്രശ്നപരിഹരണം നടത്തുന്നു.			
• ദൂരം, സമയം, വേഗം എന്നിവയുടെ പരസ്പരബന്ധം സമർഥിക്കുന്നു.			
• യൂണിറ്റുകൾ സന്ദർഭോചിതമായി മാറ്റി പ്രശ്നപരിഹരണം നടത്തുന്നു.			