സ്റ്റാൻഡേർഡ് VIII

ഗണിതം

ഭാഗം - 2

കേരളസർക്കാർ
വിദ്യാഭ്യാസവകുപ്പ്

സംസ്ഥാന വിദ്യാഭ്യാസ ഗവേഷണ പരിശീലന സമിതി (SCERT), കേരളം
2016

KT-509-1/Maths-8(M) Vol-2

ദേശീയഗാനം

ജനഗണമന അധിനായക ജയഹേ
ഭാരത ഭാഗ്യവിധാതാ,
പഞ്ചാബസിന്ധു ഗുജറാത്ത മറാഠാ
ദ്രാവിഡ ഉത്ക്കല ബംഗാ,
വിന്ധ്യഹിമാചല യമുനാഗംഗാ,
ഉച്ഛല ജലധിതരംഗാ,
തവശുഭനാമേ ജാഗേ,
തവശുഭ ആശിഷ മാഗേ,
ഗാഹേ തവ ജയ ഗാഥാ
ജനഗണമംഗലദായക ജയഹേ
ഭാരത ഭാഗ്യവിധാതാ.
ജയഹേ, ജയഹേ, ജയഹേ,
ജയ ജയ ജയ ജയഹേ!

പ്രതിജ്ഞ

ഇന്ത്യ എന്റെ രാജ്യമാണ്. എല്ലാ ഇന്ത്യക്കാരും എന്റെ സഹോദരീ സഹോദരന്മാരാണ്.

ഞാൻ എന്റെ രാജ്യത്തെ സ്നേഹിക്കുന്നു; സമ്പൂർണവും വൈവിധ്യപൂർണവുമായ അതിന്റെ പാരമ്പര്യത്തിൽ ഞാൻ അഭിമാനം കൊള്ളുന്നു.

ഞാൻ എന്റെ മാതാപിതാക്കളെയും ഗുരുക്കന്മാരെയും മുതിർന്നവരെയും ബഹുമാനിക്കും.

ഞാൻ എന്റെ രാജ്യത്തിന്റെയും എന്റെ നാട്ടുകാരുടെയും ക്ഷേമത്തിനും ഐശ്വര്യത്തിനും വേണ്ടി പ്രയത്നിക്കും.

Prepared by :
State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Poojappura, Thiruvananthapuram 695 012, Kerala

Website : www.scertkerala.gov.in
E-mail : scertkerala@gmail.com
Phone : 0471-2341883, Fax : 0471-2341869
Typesetting and Layout : SCERT
First Edition : 2015, Reprint : 2016
Printed at : KBPS, Kakkanad, Kochi-30
© Department of Education, Government of Kerala

പ്രിയപ്പെട്ട കുട്ടികളേ,
ഗണിതത്തിന്റെ ലോകത്ത്
നാം കുറെയേറെ സഞ്ചരിച്ച് കഴിഞ്ഞു
അന്വേഷണങ്ങളും കണ്ടെത്തലുകളും തുടരാം
ഇനിയും ഗണിതത്തിൽ നമുക്ക് മുന്നോട്ട്
പോകേണ്ടതുണ്ട്
സംഖ്യകളുടെ വിശാലമായ ലോകത്തേക്ക്
ജ്യാമിതിയുടെ യുക്തികൾ തേടി
ബീജഗണിതത്തിന്റെ പുതിയ തലങ്ങളിലേക്ക്
അന്വേഷണം തുടരാം.

സ്നേഹാശംസകളോടെ,

ഡോ. ജെ. പ്രസാദ്
ഡയറക്ടർ
എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി.

പാഠപുസ്തക രചന

ശില്പശാലയിൽ പങ്കെടുത്തവർ

ടി.പി. പ്രകാശൻ
ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്. വാഴക്കാട്
മലപ്പുറം

ഉണ്ണികൃഷ്ണൻ എം.വി.
ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്. കുമ്പള
കാസറഗോഡ്

നാരായണൻ കെ.
ബി.എ.ആർ.എച്ച്.എസ്.എസ്. ബൊവിക്കാനം
കാസറഗോഡ്

മോഹനൻ സി.
ജി.എച്ച്.ആർ.എച്ച്.എസ്.എസ്.
അങ്ങാടിക്കൽ സൗത്ത്, ചെങ്ങന്നൂർ

ഉബൈദുള്ള കെ.സി.
എസ്.ഒ.എച്ച്.എസ്.എസ്. അരീക്കോട്
മലപ്പുറം

വിജയകുമാർ ടി.കെ.
ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്. ചെർക്കള
കാസറഗോഡ്

ടി. ശ്രീകുമാർ
ജി.ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്.
കരമന, തിരുവനന്തപുരം

വി.കെ. ബാലഗംഗാധരൻ
ജി.എം.എച്ച്.എസ്.എസ്.
കാലിക്കറ്റ് യൂണിവേഴ്സിറ്റി കാമ്പസ്
മലപ്പുറം

നാരായണനുണ്ണി
ഡയറ്റ്, പാലക്കാട്

എബ്രഹാം കുര്യൻ
സി.എച്ച്.എസ്.എസ്. പോത്തുകല്ല്
നിലമ്പൂർ

സുനിൽകുമാർ വി.പി.
ജനത എച്ച്.എസ്.എസ്. വെഞ്ഞാറമൂട്

കൃഷ്ണപ്രസാദ്
പി.എം.എസ്.എ. എച്ച്.എസ്.എസ്.
ചാപ്പനങ്ങാടി, മലപ്പുറം

കവർ

രാകേഷ് പി. നായർ

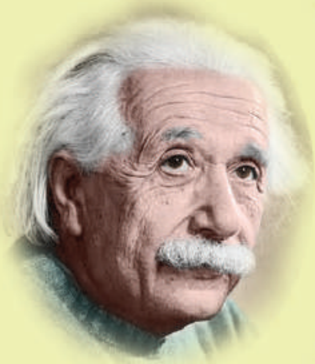
വിദഗ്ധൻ

ഡോ.ഇ. കൃഷ്ണൻ
റിട്ട. പ്രൊഫ., യൂണിവേഴ്സിറ്റി കോളേജ്
തിരുവനന്തപുരം

അക്കാദമിക് കോർഡിനേറ്റർ

സുജിത് കുമാർ ജി.
റിസർച്ച് ഓഫീസർ, എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി.

സംസ്ഥാന വിദ്യാഭ്യാസ ഗവേഷണ പരിശീലന സമിതി (SCERT)
വിദ്യാഭവൻ, പൂജപ്പുര, തിരുവനന്തപുരം 695 012



ഉള്ളടക്കം

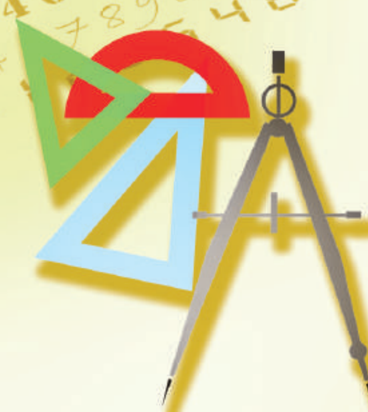
6 ചതുർഭുജങ്ങളുടെ നിർമിതി 103-128

7 അംശബന്ധം 129-142

8 ചതുർഭുജപ്പരപ്പ് 143-162

9 ന്യൂനസംഖ്യകൾ 163-180

10 സ്ഥിതിവിവരക്കണക്ക് 181-192



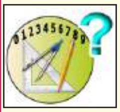
ഈ പുസ്തകത്തിൽ സൗകര്യത്തിനായി ചില ചിഹ്നങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നു.

ഐ.സി.റ്റി. സാധ്യത

കണക്ക് ചെയ്തുനോക്കാം

പ്രോജക്ട്

തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ



ചർച്ച ചെയ്യാം

6

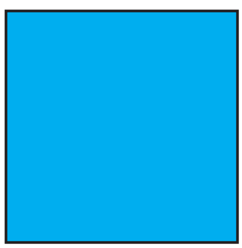
ചതുർഭുജങ്ങളുടെ നിർമിതി

തരംതിരിവ്

പലതരം ചതുർഭുജങ്ങളെക്കുറിച്ച് പഠിച്ചല്ലോ. അവയുടെ പ്രത്യേകതകൾ എന്തെല്ലാമെന്ന് ഒന്നുകൂടി നോക്കാം.

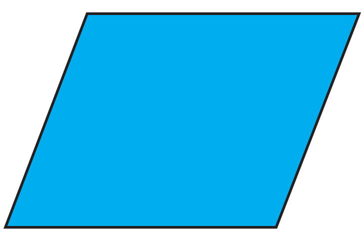
ചതുരം (rectangle)

- എതിർവശങ്ങൾ തുല്യം
- എതിർവശങ്ങൾ സമാന്തരം
- കോണുകളെല്ലാം മട്ടം
- വികർണങ്ങൾ തുല്യം
- വികർണങ്ങൾ പരസ്പരം സമഭാജികൾ



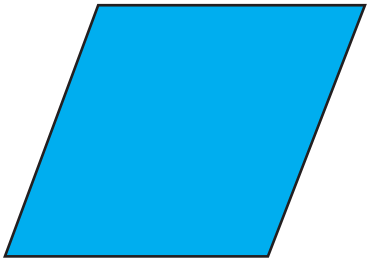
സമചതുരം (square)

- വശങ്ങളെല്ലാം തുല്യം
- എതിർവശങ്ങൾ സമാന്തരം
- കോണുകളെല്ലാം മട്ടം
- വികർണങ്ങൾ തുല്യം
- വികർണങ്ങൾ പരസ്പരം ലംബസമഭാജികൾ



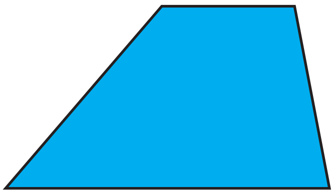
സാമാന്തരികം (parallelogram)

- എതിർവശങ്ങൾ തുല്യം
- എതിർവശങ്ങൾ സമാന്തരം
- വികർണങ്ങൾ പരസ്പരം സമഭാജികൾ
- എതിർകോണുകൾ തുല്യം
- ഒരേ വശത്തിലെ കോണുകളുടെ തുക 180°



സമഭുജസാമാന്തരികം
(rhombus)

- വശങ്ങളെല്ലാം തുല്യം
- എതിർവശങ്ങൾ സമാന്തരം
- വികർണങ്ങൾ പരസ്പരം ലംബസമഭാജികൾ
- എതിർകോണുകൾ തുല്യം
- ഒരേ വശത്തിലെ കോണുകളുടെ തുക 180°



ലംബകം (trapezium)

- ഒരു ജോടി എതിർവശങ്ങൾ മാത്രം സമാന്തരം
- സമാന്തരമല്ലാത്ത വശങ്ങളിൽ ഓരോന്നിലെയും കോണുകളുടെ തുക 180°

സമപാർശ്വലംബകം
(isosceles trapezium)

- ഒരു ജോടി എതിർവശങ്ങൾ മാത്രം സമാന്തരം
- സമാന്തരമല്ലാത്ത എതിർവശങ്ങൾ തുല്യം
- വികർണങ്ങൾ തുല്യം
- സമാന്തരവശങ്ങളിൽ ഓരോന്നിലെയും കോണുകൾ തുല്യം
- തുല്യവശങ്ങളിൽ ഓരോന്നിലെയും കോണുകളുടെ തുക 180°

സമചതുരങ്ങൾ

മട്ടം ഉപയോഗിച്ച്, പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന അളവുകളിൽ ചതുരവും സമചതരവുമെല്ലാം വരയ്ക്കാൻ അഞ്ചാംക്ലാസിൽ പഠിച്ചു. ഓർമ പുതുക്കാൻ ഒരു സമചതുരം വരയ്ക്കാം. വശങ്ങളുടെ നീളം 4 സെന്റിമീറ്ററായ സമചതുരം വരച്ചു നോക്കൂ.

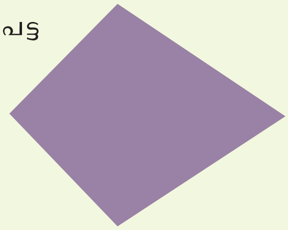
കോമ്പസ് ഉപയോഗിച്ച് ലംബം വരയ്ക്കുന്ന രീതി **തുല്യ ത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടല്ലോ. അപ്പോൾ മട്ടമില്ലാതെയും ചതുരം വരയ്ക്കാം. അങ്ങനെയും ഒരു സമചതുരം വരയ്ക്കൂ.

വശത്തിന്റെ നീളത്തിനു പകരം, വികർണത്തിന്റെ നീളമാണ് നിശ്ചയിക്കുന്നതെങ്കിലോ?

പറക്കാത്ത പട്ടം

പട്ടം പറപ്പിച്ചിട്ടുണ്ടോ?

സാധാരണ പട്ടത്തിന്റെ ആകൃതി എന്താണ്?



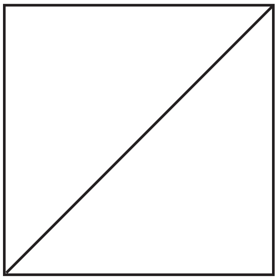
ഇതും ഒരു ചതുർഭുജം തന്നെ.

ഇതിലെ രണ്ടു ജോടി സമീപവശങ്ങൾ തുല്യമാണ്.

ഇത്തരം ചതുർഭുജങ്ങൾക്കെല്ലാം പൊതുവായി പട്ടം (kite) എന്നു തന്നെയാണ് ജ്യാമിതിയിലും പേര്.

ഉദാഹരണമായി, വികർണത്തിന്റെ നീളം 5 സെന്റിമീറ്ററായ സമചതുരം എങ്ങനെ വരയ്ക്കും?

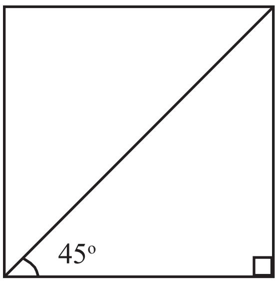
വെറുതെ ഒരു സമചതുരവും വികർണവും വരച്ചുനോക്കൂ:



വികർണം സമചതുരത്തിനെ രണ്ട് ത്രികോണങ്ങളാക്കുന്നു. ഈ ത്രികോണങ്ങളിലെ കോണുകളുടെ അളവ് പറയാമോ?

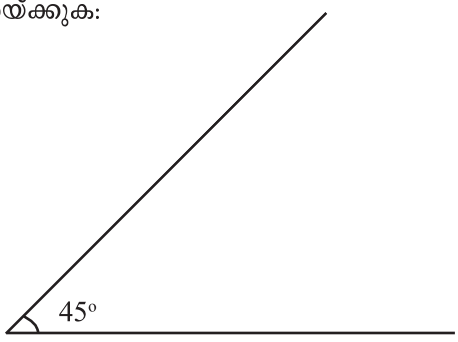
രണ്ടിലും ഒരു കോൺ മട്ടമാണ്. രണ്ടും സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങളുമാണല്ലോ.

അപ്പോൾ മറ്റ് രണ്ട് കോണുകൾ 45°. (അതെങ്ങനെ?)

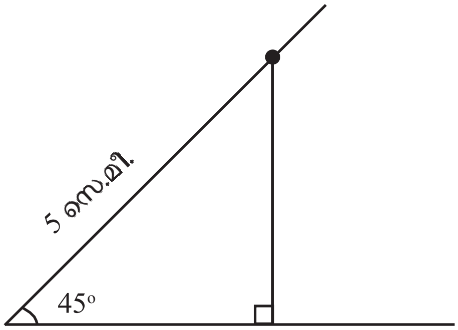


ഇനി നേരത്തെ പറഞ്ഞതുപോലെ 5 സെന്റിമീറ്റർ വികർണമായ സമചതുരം വരച്ചുകൂടേ?

ആദ്യം വിലങ്ങനെ ഒരു വരയും, അതിന്റെ ഒരറ്റത്ത് 45° ചരിവിൽ മറ്റൊരു വരയും വരയ്ക്കുക:

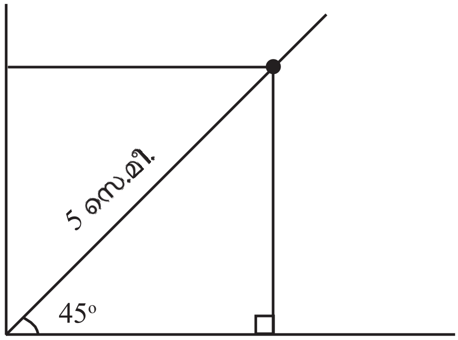


ചരിഞ്ഞ വരയിൽ 5 സെന്റിമീറ്റർ അടയാളപ്പെടുത്തി, ആ സ്ഥാനത്തു നിന്ന് ചുവട്ടിലെ വരക്ക് ലംബം വരയ്ക്കുക.



(ഈ സ്ഥാനത്ത് ചരിഞ്ഞ വരയുമായി 45° കോൺ വരച്ചും ഇങ്ങനെ ലംബം വരയ്ക്കാം).

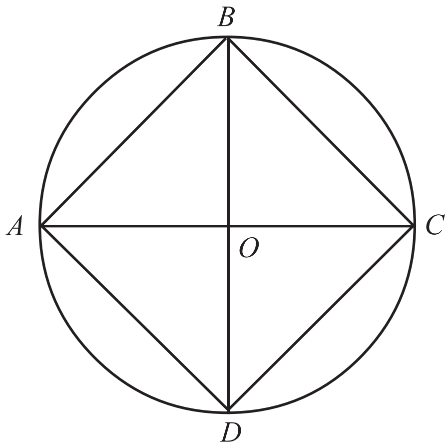
ഇനി രണ്ട് മൂലകളിലൂടെ ലംബം വരച്ച്, സമചതുരം മുഴുവനാക്കാം:



പുറത്തേയ്ക്ക് നീണ്ടു നിൽക്കുന്ന വരകൾ മായ്ച്ച്, ചിത്രം വ്യത്തിയാക്കുകയും ചെയ്യാം.

മറ്റൊരു രീതിയിലും സമചതുരം വരയ്ക്കാം.

ഒരു വൃത്തവും, പരസ്പരം ലംബമായ രണ്ടു വ്യാസങ്ങളും വരയ്ക്കുക. അവയുടെ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിക്കുക:



OAB, *OBC*, *OCD*, *ODA*, എന്നീ നാല് ത്രികോണങ്ങൾ തുല്യമാണ്.

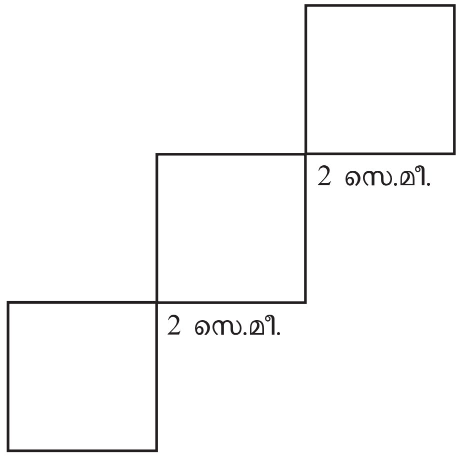
അപ്പോൾ *ABCD* എന്ന ചതുർഭുജത്തെക്കുറിച്ച് എന്ത് പറയാം?

5 സെന്റിമീറ്റർ വികർണമുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കാൻ മറ്റൊരു മാർഗം കിട്ടിയില്ലേ?

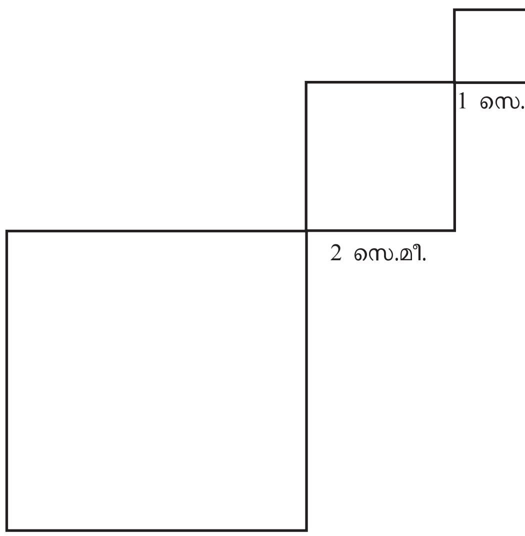
2.5 സെന്റിമീറ്റർ ആരമുള്ള വൃത്തം വരച്ച്, രണ്ട് ലംബവ്യാസങ്ങൾ വരച്ചു നോക്കൂ.

ചുവടെയുള്ള സമചതുരചിത്രങ്ങൾ നോട്ടുബുക്കിൽ വരയ്ക്കാമോ?

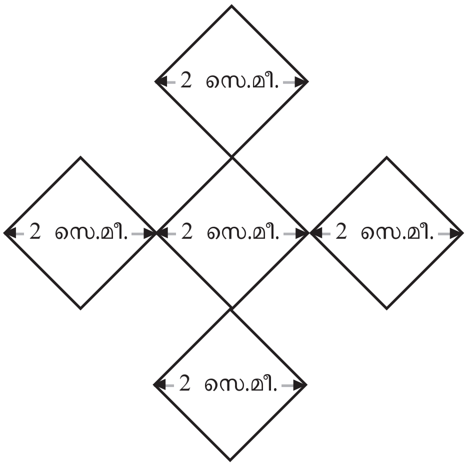
(1)



(2)



(3)



ചതുരങ്ങൾ

നീളവും വീതിയും പറഞ്ഞാൽ ചതുരം വരയ്ക്കാനറിയാമല്ലോ.

8 സെന്റിമീറ്റർ നീളവും 5 സെന്റിമീറ്റർ വീതിയുമുള്ള ഒരു ചതുരം വരയ്ക്കുക.

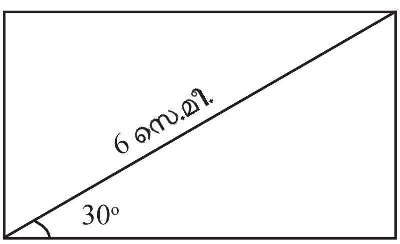
വികർണത്തിന്റെ നീളം പറഞ്ഞാൽ ചതുരം വരയ്ക്കാമോ?

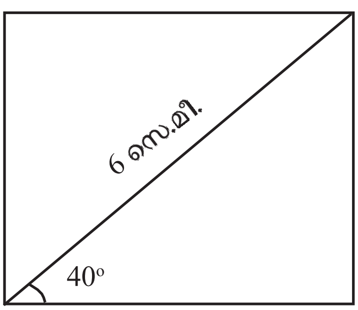
ഉദാഹരണമായി, വികർണം 6 സെന്റിമീറ്ററായ ചതുരം വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെ?

നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ സമചതുരം വരയ്ക്കാം. സമചതുരമല്ലാത്ത ഒരു ചതുരം, വികർണം 6 സെന്റിമീറ്ററായി വരയ്ക്കാമോ?

സമചതുരത്തെപ്പോലെ, മറ്റ് ചതുരങ്ങളിൽ വശവും വികർണവുമായുള്ള കോൺ 45° തന്നെ ആകണമെന്നില്ല.

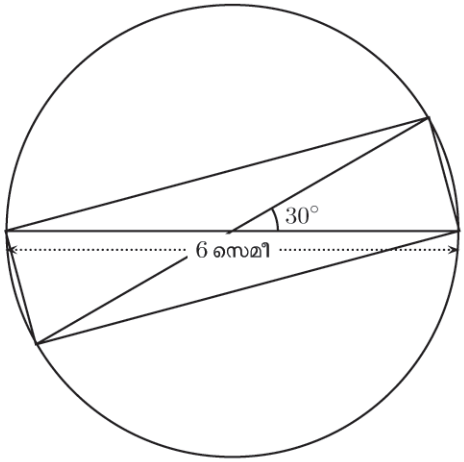
അപ്പോൾ വികർണം 6 സെന്റിമീറ്ററായ പല ചതുരങ്ങൾ വരയ്ക്കാം:

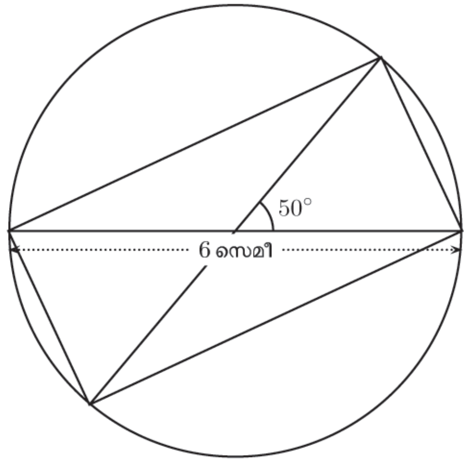




സമചതുരം വരച്ചതുപോലെ ആദ്യം കോണും പിന്നെ ലംബങ്ങളുമായി, ഈ ചതുരങ്ങൾ നോട്ടുബുക്കിൽ വരയ്ക്കുക.

വൃത്തം വരച്ചും നിശ്ചിത വികർണമുള്ള ചതുരങ്ങൾ വരയ്ക്കാം. സമചതുരമല്ലാത്ത ചതുരങ്ങളിൽ, വികർണങ്ങൾ പരസ്പരം ലംബമല്ലാത്തതിനാൽ, ഏതു രണ്ട് വ്യാസങ്ങളെടുത്തും ചതുരം വരയ്ക്കാം.

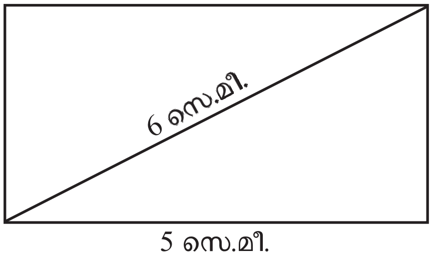




ഇതുപോലെ വികർണം 5 സെന്റിമീറ്ററും, അവയുടെ ഇടയിലെ കോൺ 40° ഉം ആയ ചതുരം വരയ്ക്കാമോ?

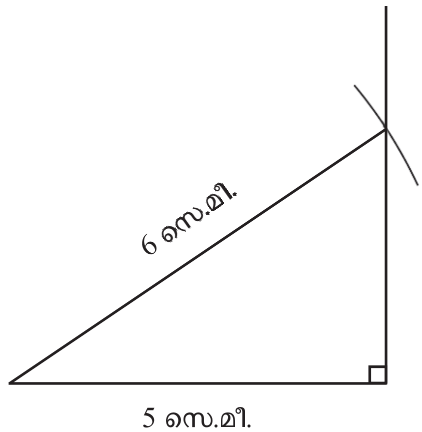
മറ്റൊരു ചോദ്യം: ഒരു വശം 5 സെന്റിമീറ്ററും, വികർണം 6 സെന്റിമീറ്ററുമായ ചതുരം വരയ്ക്കാമോ?

ഈ ചതുരത്തെക്കുറിച്ച് ഏകദേശ ധാരണ കിട്ടാൻ, ഇപ്പറഞ്ഞ അളവുകളൊന്നുമെടുക്കാതെ വെറുതെ ഒരു ചതുരം വരച്ച്, ഈ അളവുകൾ എഴുതിനോക്കാം:



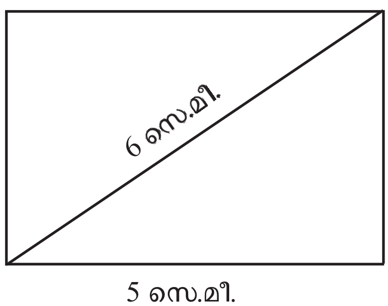
വികർണം ചതുരത്തെ ഭാഗിച്ചുണ്ടാകുന്ന ഒരു മട്ടത്രികോണം ആദ്യം വരച്ചാലോ?

കർണം 6 സെന്റിമീറ്ററും, മറ്റൊരു വശം 5 സെന്റിമീറ്ററുമായ മട്ടത്രികോണം വരയ്ക്കണം.



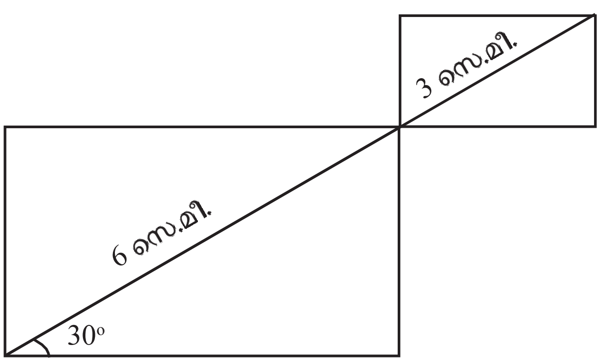
അങ്ങനെ നമുക്കു വേണ്ട ചതുരത്തിന്റെ പകുതിയായി.

മുകളിലത്തെ പകുതിയും വരച്ച്, ചതുരം മുഴുവനാക്കാം:



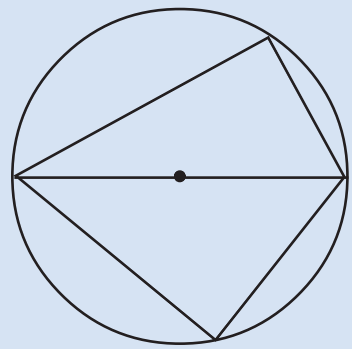
ചുവടെയുള്ള ചിത്രങ്ങൾ നോട്ടുബുക്കിൽ വരയ്ക്കുക.

(1)



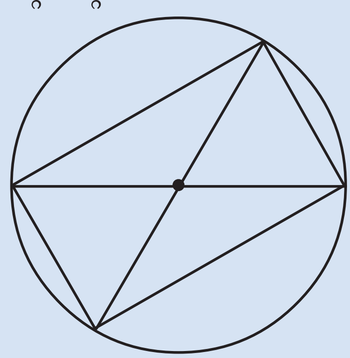
ചതുരം വൃത്തത്തിലും

ഒരു വൃത്തവും അതിന്റെ ഒരു വ്യാസവും വരയ്ക്കുക. വൃത്തത്തിന്റെ ഇരു പകുതിയിലും ഓരോ ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തി, വ്യാസത്തിന്റെ അറ്റങ്ങളുമായി യോജിപ്പിക്കുക.



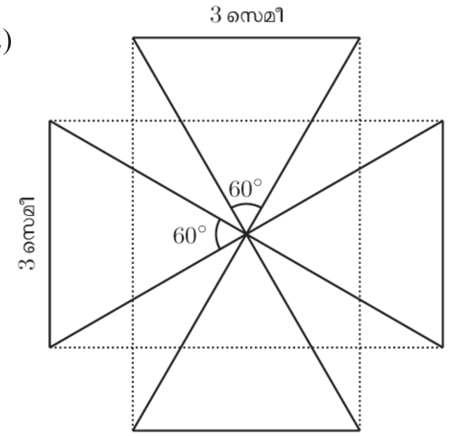
ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന ചതുർഭുജം ചതുരമാകണമെന്നില്ല. എന്നാൽ വ്യാസത്തിനിരുവശത്തുമുള്ള രണ്ട് കോണുകളും മട്ടകോണുകളാണ്. (എന്തുകൊണ്ട്?) മറ്റേ രണ്ടുകോണുകളോ?

ചിത്രത്തിലെ മട്ടമൂലകൾ മറ്റൊരു വ്യാസത്തിന്റെ അറ്റത്തായാലോ?

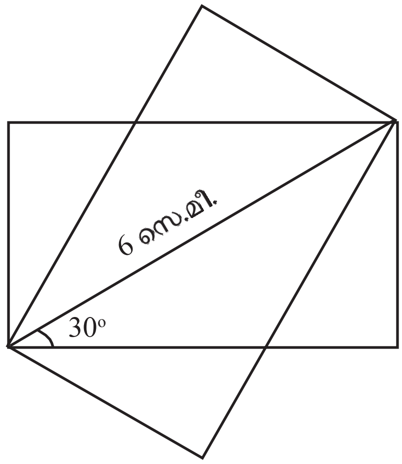


നാല് മൂലകളും മട്ടമൂലകളായി. അതായത് ചതുർഭുജം ചതുരമായി.

(2)



(3)



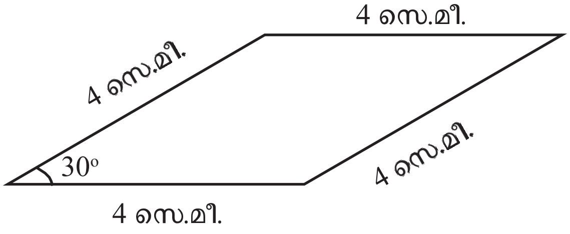
(ചതുരങ്ങൾ തുല്യമായിരിക്കണം)

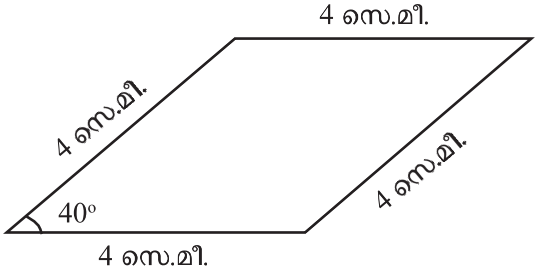
സാമാന്തരികങ്ങൾ

വശങ്ങളുടെ നീളം 4 സെന്റിമീറ്ററായ സമഭുജസാമാന്തരികം വരയ്ക്കാമോ?

സമചതുരവും ഒരു സമഭുജസാമാന്തരികമാണല്ലോ. അതു വരയ്ക്കാൻ എളുപ്പവുമാണ്. സമചതുരമല്ലാത്ത സമഭുജസാമാന്തരികമോ?

അടുത്തടുത്ത വശങ്ങൾ ലംബമാകണമെന്നില്ല. അതിനാൽ ഏത് കോണെടുത്തും വരയ്ക്കാം:



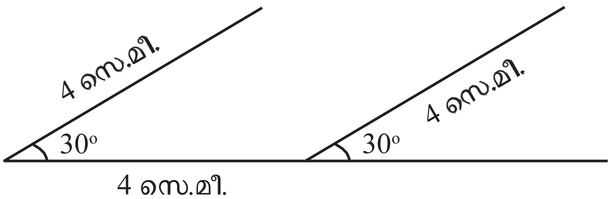


ആദ്യത്തെ ചിത്രം നോട്ടുബുക്കിൽ വരയ്ക്കാമോ?

പല രീതിയിൽ വരയ്ക്കാം.

ആദ്യം 4 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ ഒരു വരയും, അതിന്റെ ഇടത്തേ അറ്റത്ത് 30° ചരിവിൽ 4 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ മറ്റൊരു വരയും വരയ്ക്കുക. വരകളുടെ മറ്റേ അറ്റങ്ങളിലൂടെ സമാന്തരവരകൾ വരയ്ക്കുക.

അല്ലെങ്കിൽ 4 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ വിലങ്ങനെ ഒരു വര വരച്ച്, രണ്ടറ്റത്തും 30° ചരിവിൽ, 4 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരകൾ വരയ്ക്കുക.



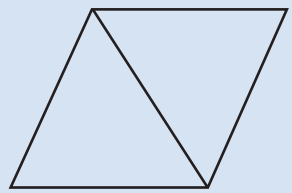
ഇനി ചരിഞ്ഞ വരകളുടെ മുകളറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ചാൽ മതിയല്ലോ. (പുറത്തേക്ക് നീണ്ടുനിൽക്കുന്ന ഭാഗം മായ്ച്ചുകളയുകയും ചെയ്യാം).

ഇതുപോലെ, കോൺ 40° ആയ സമഭുജസാമാന്തരികവും വരയ്ക്കുക.

സമചതുരത്തിലെപ്പോലെ, സമഭുജസാമാന്തരികത്തിന്റെ വികർണങ്ങൾ തുല്യമല്ല. രണ്ടു വികർണങ്ങളുടെയും നീളം പറഞ്ഞാൽ സമഭുജസാമാന്തരികം വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെ?

സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങൾ

ഒരു സമഭുജസാമാന്തരികത്തിന്റെ ഒരു വികർണം വരച്ചാൽ അത് രണ്ട് സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങളാകും. ഇവ തുല്യവുമാണ്:



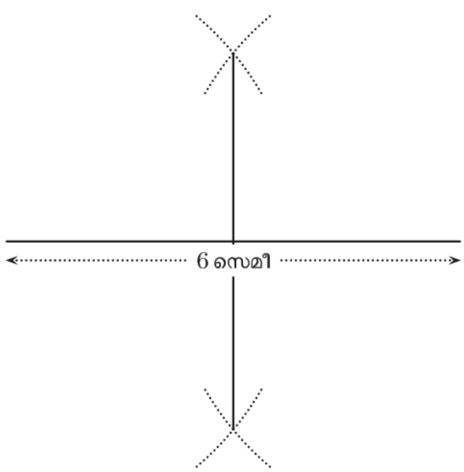
അപ്പോൾ വശങ്ങളും ഒരു വികർണവും പറഞ്ഞാൽ സമഭുജസാമാന്തരികം വരയ്ക്കുന്നതിന് വികർണത്തിനിരുവശത്തും സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങൾ വരച്ചാൽ മതി. വികർണവും വശങ്ങൾക്ക് തുല്യമായാലോ?

ഉദാഹരണമായി, വികർണങ്ങളുടെ നീളം 6 സെന്റിമീറ്റർ 4 സെന്റിമീറ്റർ ആയ സമഭുജസാമാന്തരികം വരയ്ക്കണം.

വികർണങ്ങൾ പരസ്പരം ലംബസമഭാജികളാണെന്ന കാര്യം ഓർത്താൽ ഇതെളുപ്പമായി.

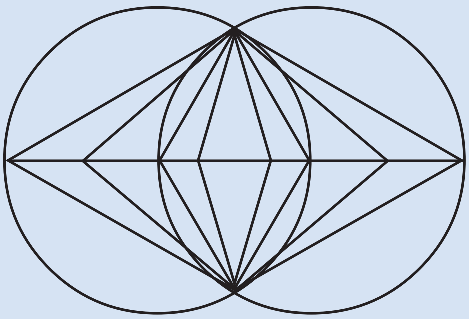
ആദ്യം 6 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ ഒരു വര വരച്ച്, അതിന്റെ ലംബസമഭാജി വരയ്ക്കുക.

ഇനി ഈ ലംബസമഭാജിയുടെ നടുവിൽനിന്ന് മുകളിലും താഴെയും 2 സെന്റിമീറ്റർ അടയാളപ്പെടുത്തി, ആദ്യത്തെ വരയുടെ രണ്ടറ്റങ്ങളുമായി യോജിപ്പിച്ചാൽ ഉദ്ദേശിച്ച സമഭുജസാമാന്തരികമായി.

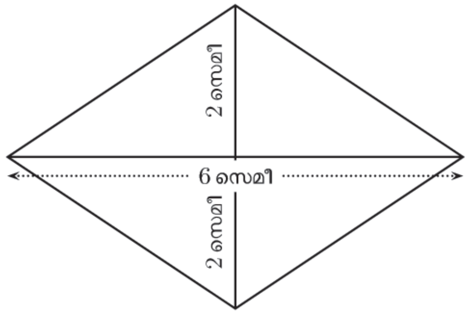


വൃത്തവും സമഭുജസാമാന്തരികവും

ഒരു വര വരച്ച് അതിന്റെ അറ്റങ്ങൾ കേന്ദ്രങ്ങളായി ഒരേ വലിപ്പത്തിൽ രണ്ട് വൃത്തങ്ങൾ വരക്കുക. ആദ്യം വരച്ച വര നീട്ടി വരച്ച് വൃത്തങ്ങളുമായി കൂട്ടിമുട്ടിക്കുക. വികർണം ഈ വരയിൽ വരത്തക്ക രീതിയിൽ പല സമഭുജസാമാന്തരികങ്ങൾ വരയ്ക്കാം.

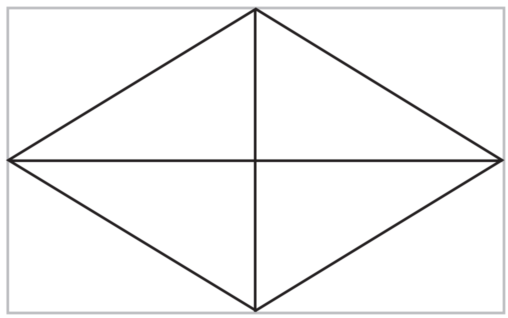


ചിത്രത്തിൽ കാണുന്ന നാല് സമഭുജസാമാന്തരികങ്ങളുടെയും ഒരു വികർണം ഒരു വരയിലല്ലേ?



മറ്റെതെങ്കിലും രീതിയിൽ ഈ സമഭുജസാമാന്തരികം വരയ്ക്കാമോ?

ഈ ചിത്രം നോക്കു:



ഒരു ചതുരത്തിനുള്ളിൽ സമഭുജസാമന്തരികം വരയ്ക്കുന്നത് എങ്ങനെയാണ്?

1) വികർണങ്ങളുടെ നീളം 5.5 സെന്റിമീറ്ററും 3 സെന്റിമീറ്ററുമായ ഒരു സമഭുജസാമാന്തരികം നോട്ടുബുക്കിൽ വരയ്ക്കുക.

2) വികർണങ്ങളുടെ നീളം 5.5 സെന്റിമീറ്ററും 3.5 സെന്റിമീറ്ററുമായ മറ്റൊരു സമഭജുസാമാന്തരികവും വരയ്ക്കുക.

ചില അളവുകൾ നിശ്ചയിച്ച്, സമഭുജമല്ലാത്ത സാമാന്തരികം വരയ്ക്കാം. ഉദാഹരണമായി, ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

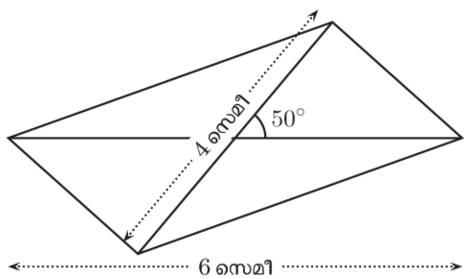
സമഭുജസാമാന്തരികം വരച്ചതുപോലെ ആദ്യം വശങ്ങളുടെ നീളം 6 സെന്റിമീറ്റർ, 3 സെന്റിമീറ്റർ ആയ 50° കോണും, പിന്നീട് അതിന്റെ അറ്റങ്ങ

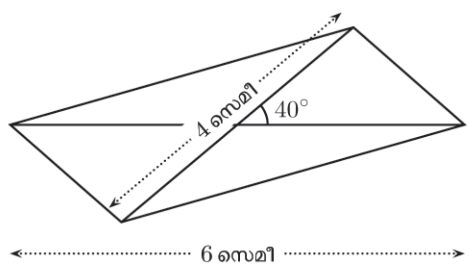
ളിൽനിന്ന് സമാന്തരവരകളും വരയ്ക്കാം; അല്ലെങ്കിൽ, 6 സെന്റിമീറ്റർ വരയുടെ രണ്ടറ്റത്തും 50° ചരിവിൽ 3 സെന്റിമീറ്റർ വര വരച്ച്, അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിക്കാം.

വരച്ച് നോക്കൂ.

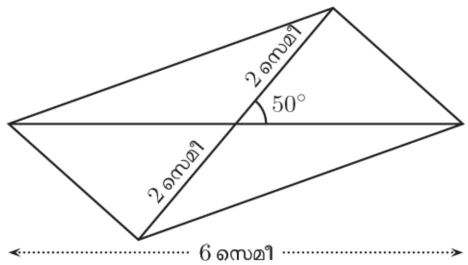
വശങ്ങൾ ഇതേ നീളത്തിലും, ചരിവ് 60° യുമായ ഒരു സാമാന്തരികവും വരയ്ക്കുക.

വശങ്ങളുടെ നീളം തുല്യമല്ലാത്ത സാമാന്തരികങ്ങളിലും വികർണങ്ങൾ പരസ്പരം സമഭാഗം ചെയ്യും; പക്ഷേ ലംബമല്ല. അതിനാൽ ഒരേ വികർണങ്ങളുള്ള പല സാമാന്തരികങ്ങൾ വരയ്ക്കാം. ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ:





സമഭുജസാമാന്തരികം വരച്ചതുപോലെതന്നെ ഇവ വരയ്ക്കാം. ആദ്യത്തെ ചിത്രം വരയ്ക്കാൻ 6 സെന്റിമീറ്റർ വികർണത്തിന്റെ ലംബസമഭാജി വരയ്ക്കുന്നതിനു പകരം, മധ്യബിന്ദുവിലൂടെ 50° ചരിവിൽ രണ്ടാമത്തെ വികർണം വരയ്ക്കണമെന്നുമാത്രം:

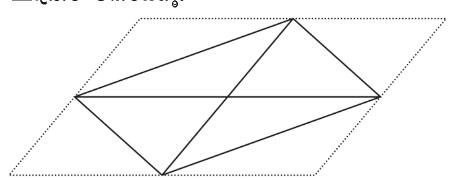


ഇതുപോലെ രണ്ടാമത്തെ ചിത്രം നോട്ടുബുക്കിൽ വരയ്ക്കുക.

സാമാന്തരികത്തിന്റെ വികർണങ്ങൾ പൊതുവെ തുല്യമല്ലാത്തതിനാൽ, ഒരു വശത്തിന്റെയും ഒരു വികർണത്തിന്റെയും നീളം മാത്രം പറഞ്ഞാൽ, അതിനെക്കുറിച്ചുള്ള മുഴുവൻ വിവരങ്ങളായില്ല (ചതുരത്തിന് ഇവ മതിയായിരുന്നു എന്നോർക്കുക).

മറ്റൊരു രീതി

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

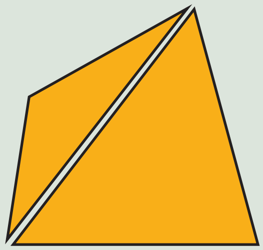


പുറത്തെ സാമാന്തരികത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളവും, അകത്തെ സാമാന്തരികത്തിന്റെ വികർണങ്ങളുടെ നീളവും തമ്മിലെന്താണ് ബന്ധം? കോണുകൾ തമ്മിലോ?

അകത്തെ സാമാന്തരികത്തിന്റെ മൂലകൾക്ക് പുറത്തെ സാമാന്തരികത്തിന്റെ വശങ്ങളുമായി എന്താണ് ബന്ധം? വികർണങ്ങളുടെ നീളവും അവയ്ക്കിടയിലെ കോണും പറഞ്ഞാൽ, സാമാന്തരികം വരയ്ക്കുന്നതിന് മറ്റൊരു മാർഗം കിട്ടിയില്ലേ?

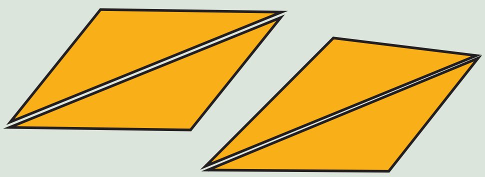
ത്രികോണങ്ങളും ചതുർഭുജങ്ങളും

ഏതു ചതുർഭുജത്തിനേയും ഒരു വികർണം വരച്ച്, രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളാക്കാമല്ലോ:



തിരിച്ചുപറഞ്ഞാൽ, ഒരു ജോടി വശങ്ങളുടെ നീളം തുല്യമായ ഏതു രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ചും ഒരു ചതുർഭുജം ഉണ്ടാക്കാം.

ചേർത്തുവയ്ക്കുന്ന ത്രികോണങ്ങൾ തുല്യമാണെങ്കിൽ സാമാന്തരികമോ പട്ടമോ ഉണ്ടാക്കാം:

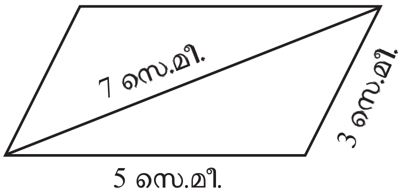


ഇതുപോലെ പലതരം ചതുർഭുജങ്ങളുണ്ടാക്കാൻ ചേർത്തുവയ്ക്കുന്ന ത്രികോണങ്ങൾക്ക് എന്തെന്തു സവിശേഷതകളാണ് വേണ്ടതെന്ന് കണ്ടുപിടിക്കൂ.

രണ്ട് വശങ്ങളുടെയും ഒരു വികർണത്തിന്റെയും നീളം പറഞ്ഞാലോ?

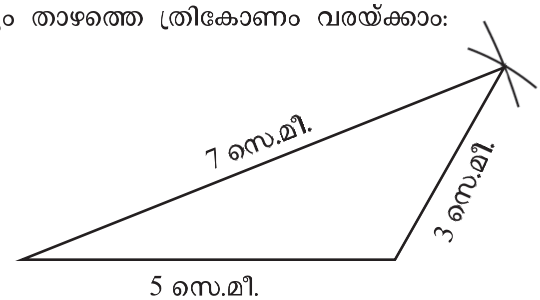
ഉദാഹരണമായി, വശങ്ങൾ 5 സെന്റിമീറ്റർ, 3 സെന്റിമീറ്റർ, ഒരു വികർണം 7 സെന്റിമീറ്റർ. ഈ അളവുകളിൽ സാമാന്തരികം വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെ?

ആദ്യം വെറുതെയൊരു ചിത്രം വരച്ച്, ഈ അളവുകൾ എഴുതിവയ്ക്കാം:

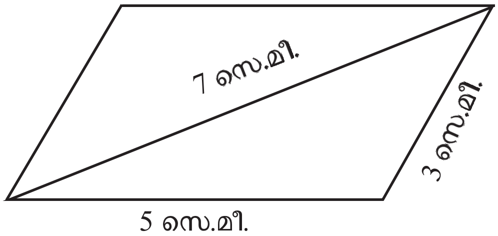


ചതുരം വരച്ചതുപോലെ, മുകളിലും താഴെയുമുള്ള ത്രികോണങ്ങൾ വെവ്വേറെ വരച്ചാലോ?

ആദ്യം താഴത്തെ ത്രികോണം വരയ്ക്കാം:



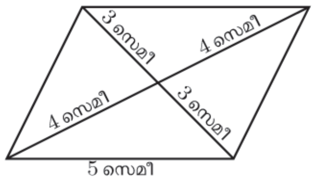
ഇനി സമാന്തരവരകളോ വൃത്തഭാഗങ്ങളോ വരച്ച്, നാലാം മൂലയും കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ.



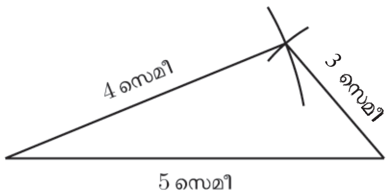
രണ്ട് വശങ്ങളും ഒരു വികർണവും പറയുന്നതിനുപകരം, മറിച്ചായാലോ?

ഉദാഹരണമായി, ഒരു വശം 5 സെന്റിമീറ്റർ, വികർണങ്ങൾ 6 സെന്റിമീറ്റർ, 8 സെന്റിമീറ്റർ എന്നീ അളവുകളിൽ സാമാന്തരികം വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെ?

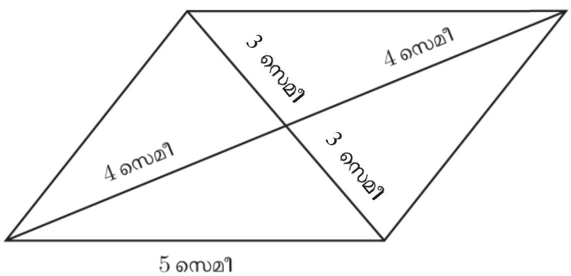
വെറുതെ ഒരു ചിത്രം വരച്ച്, ഈ അളവുകൾ എഴുതിനോക്കൂ. വികർണങ്ങൾ പരസ്പരം സമഭാഗം ചെയ്യുമെന്നതിനാൽ അളവുകൾ ഇങ്ങനെ എഴുതാം:



ആദ്യം ചുവടെയുള്ള വശവും, വികർണങ്ങളുടെ പകുതിയും ചേർന്ന ത്രികോണം വരയ്ക്കാം:



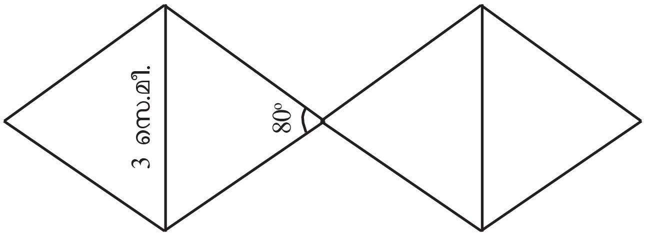
ഇനി മുകളിലെ വരകൾ ഇരട്ടിച്ച്, സാമാന്തരികം മുഴുവനാക്കാമല്ലോ:



ഇതുപോലെ ഒരു വശം 6.5 സെന്റിമീറ്ററും, വികർണങ്ങൾ 8 സെന്റിമീറ്ററും 7 സെന്റിമീറ്ററുമായ സാമാന്തരികം വരച്ചു നോക്കൂ.

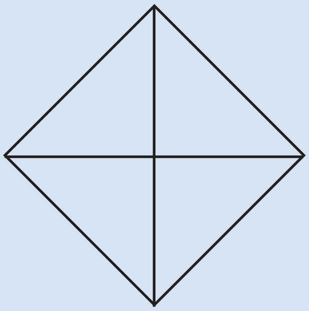
ഈ ചിത്രങ്ങൾ വരയ്ക്കുക.

1) തുല്യമായ രണ്ട് സമഭുജസാമാന്തരികങ്ങൾ.

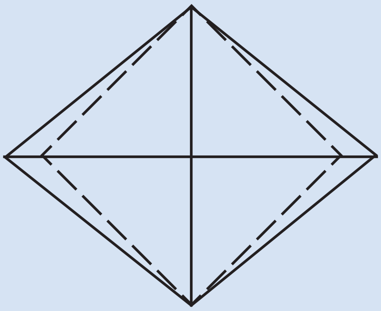


ലംബവികർണങ്ങൾ

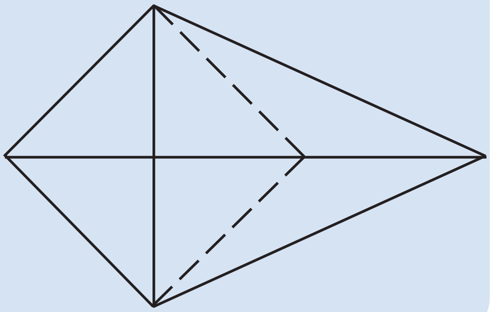
ഒരേ നീളമുള്ള രണ്ട് വരകൾ പരസ്പരം ലംബ സമഭാജികളായി വരയ്ക്കുക. ഇവയുടെ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ച് വരച്ചാൽ സമചതുരമായി:



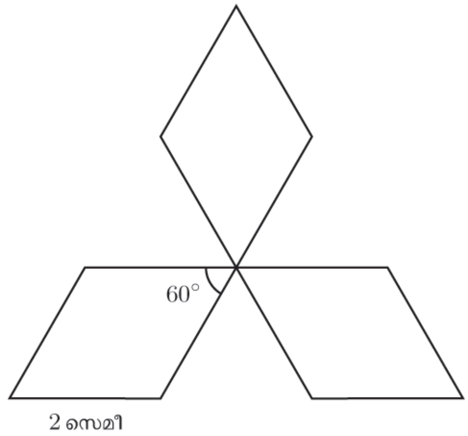
ഇനി ആദ്യം വരച്ച വരകളിൽ ഒന്ന് ഇരുഭാഗത്തേക്കും ഒരേ പോലെ നീട്ടുക. ഇവയുടെ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന രൂപം എന്താണ്?



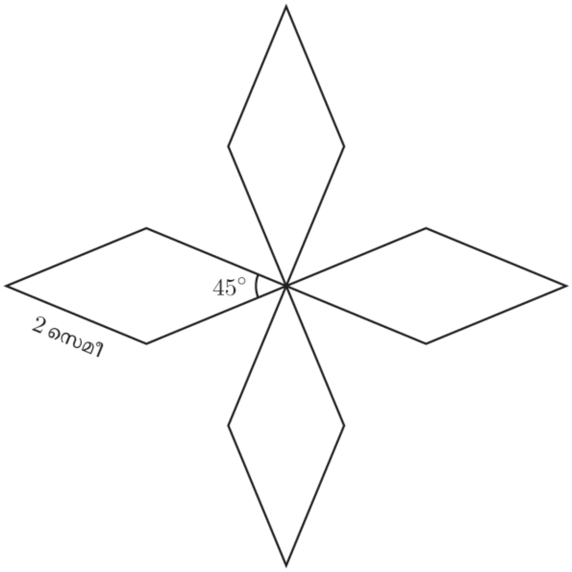
ആദ്യ ചിത്രത്തിലെ ഒരു വര ഇരുവശത്തേക്കും നീട്ടുന്നതിന് പകരം ഒരു വശത്തേക്ക് മാത്രമാണ് നീട്ടുന്നതെങ്കിലോ? കിട്ടുന്ന രൂപം എന്താണ്?



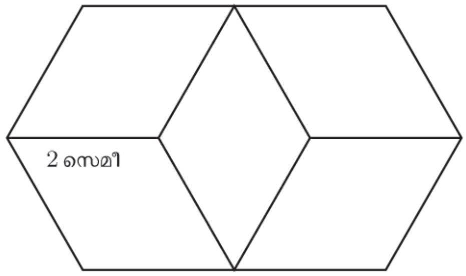
2) തുല്യമായ മൂന്ന് സമഭുജസാമാന്തരികങ്ങൾ:



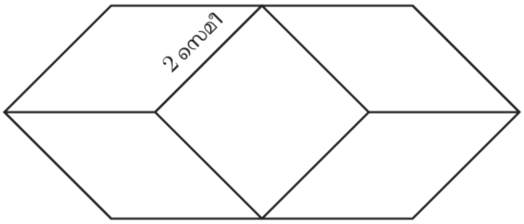
3) തുല്യമായ നാല് സമഭുജസാമാന്തരികങ്ങൾ:



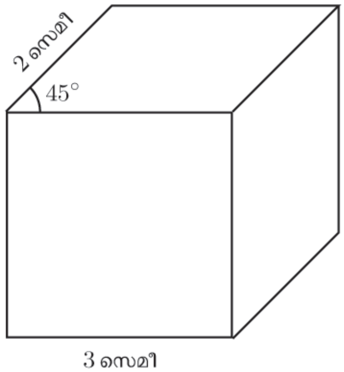
4) തുല്യമായ അഞ്ച് സമഭുജസാമാന്തരികങ്ങൾ:



5) ഒരു സമചതുരത്തിന് ചുറ്റും നാല് സമഭുജസാമാന്തരികങ്ങൾ:

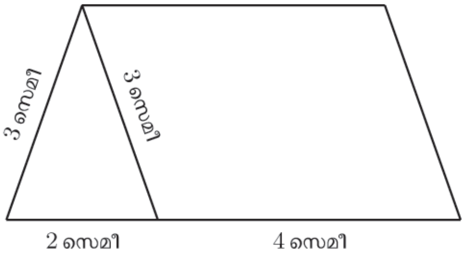


6) ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ രണ്ട് വശങ്ങളിൽ സാമാന്തരികങ്ങൾ:



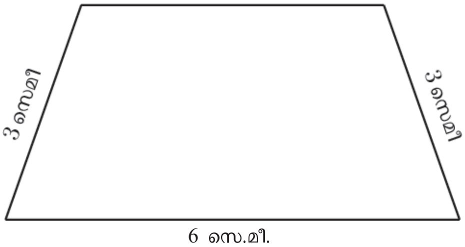
ലംബകങ്ങൾ

ഒരു സമപാർശ്വത്രികോണവും, ഒരു സാമാന്തരികവും ചേർന്ന രൂപമാണ് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്:



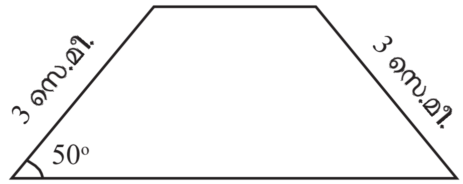
ഈ രൂപം വരച്ച് നോക്കൂ.

ഇടയിലെ വര മായ്ച്ചു കളഞ്ഞാൽ കിട്ടുന്ന രൂപമെന്താണ്?



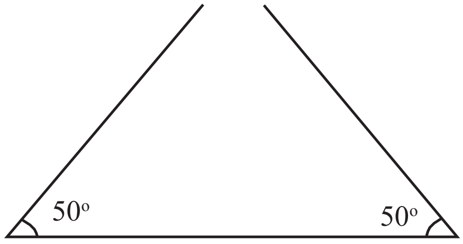
അടുത്തടുത്ത രണ്ട് വശങ്ങളുടെ നീളം 6 സെന്റിമീറ്റർ, 3 സെന്റിമീറ്റർ. അവയുടെ ഇടയിലെ കോൺ 50°. ഈ അളവുകളിൽ സാമാന്തരികം മുമ്പ് വരച്ചിട്ടുണ്ട്.

ഇതേ അളവിൽ സമപാർശ്വലംബകം വരയ്ക്കാമോ?

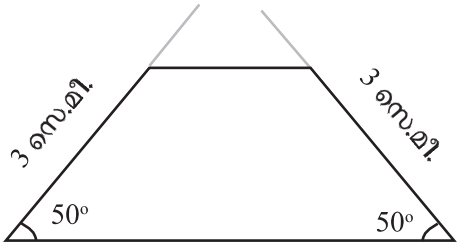


സമപാർശ്വലംബകമായതിനാൽ, താഴത്തെ വരയിലെ വലതുകോണും 50° തന്നെ.

അപ്പോൾ 6 സെന്റിമീറ്റർ വര വരച്ച്, രണ്ടറ്റത്തും 50° കോണുകൾ വരച്ച് തുടങ്ങാം:



ഈ രണ്ട് വരകളിലും 3 സെന്റിമീറ്റർ അടയാളപ്പെടുത്തി, അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ചാൽ ലംബകമായി:

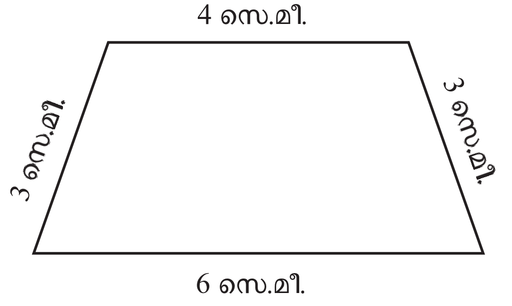


(മുകളിലത്തെ വശം താഴത്തെ വശത്തിന് സമാന്തരം തന്നെയാണെന്ന് തെളിയിക്കാമോ?)

വശങ്ങളുടെ നീളം ഇതുതന്നെയായും, കോൺ 60° ആയും സമപാർശ്വലംബകം വരച്ചു നോക്കൂ.

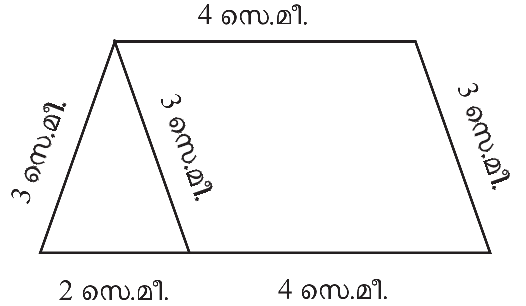
കോണിനുപകരം, നാലാമത്തെ വശത്തിന്റെ നീളമാണ് നിശ്ചയിക്കുന്നതെങ്കിലോ?

ഉദാഹരണമായി ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ലംബകം എങ്ങനെ വരയ്ക്കും?

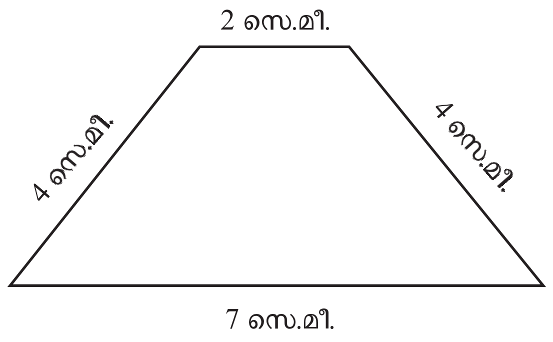


ഈ ചിത്രം നേരത്തെ വരച്ചതു തന്നെയല്ലേ?

സമപാർശ്വത്രികോണവും സാമാന്തരികവും ചേർത്താണ് വരച്ചത്:



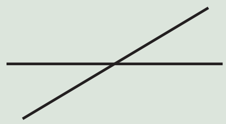
ഇതുപോലെ ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന സമപാർശ്വലംബകം നോട്ടുബുക്കിൽ വരയ്ക്കാമോ?



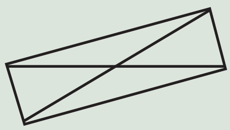
ആദ്യം ത്രികോണവും, പിന്നെ സാമാന്തരികവുമാണ് വരയ്ക്കേണ്ടത്:

വികർണവിശേഷം

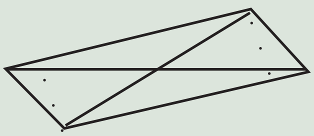
ഒരേ നീളമുള്ള രണ്ടു വരകൾ പരസ്പരം സമഭാജികളായി, എന്നാൽ ലംബമല്ലാതെ വരയ്ക്കുക.



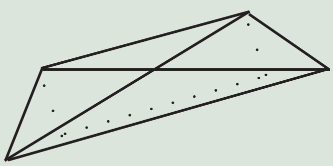
ഇവയുടെ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ചാൽ എന്തു തരം ചതുർഭുജമാണ് കിട്ടുന്നത്?

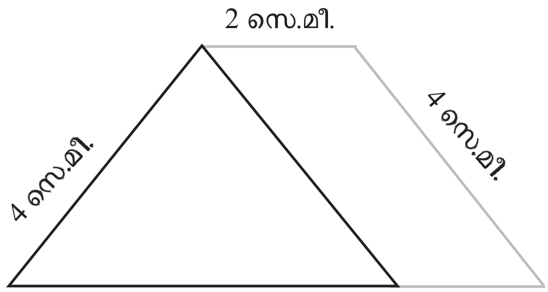


ഇനി മുമ്പു ചെയ്തതുപോലെ ഒരു വരയുടെ നീളം ഇരുവശത്തും ഒരുപോലെ നീട്ടി, അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ചാലോ?



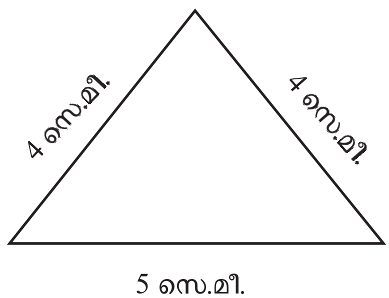
ഇനി ആദ്യത്തെ ചിത്രത്തിൽ ഒരു വര ഇരുവശത്തേക്കും ഒരുപോലെ നീട്ടുന്നതിനുപകരം വിലങ്ങനെയുള്ള വര വലത്തേക്കും ചരിഞ്ഞ വര താഴത്തേക്കും ഒരേപോലെ നീട്ടി അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ചാലോ?



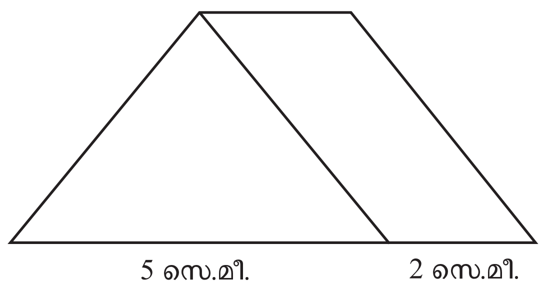


ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശം $7 - 2 = 5$ സെന്റിമീറ്റർ; വലതുവശമോ?

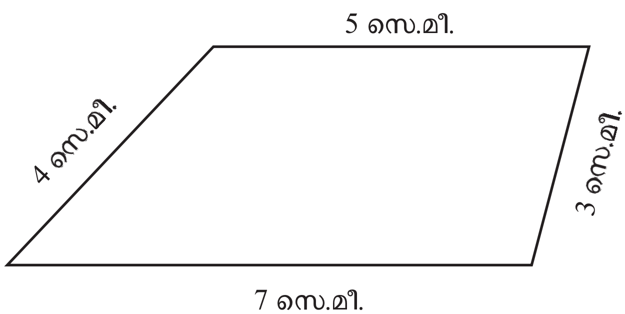
അപ്പോൾ, വശങ്ങൾ 5 സെന്റിമീറ്റർ, 4 സെന്റിമീറ്റർ, 4 സെന്റിമീറ്ററായ ത്രികോണം വരയ്ക്കണം.



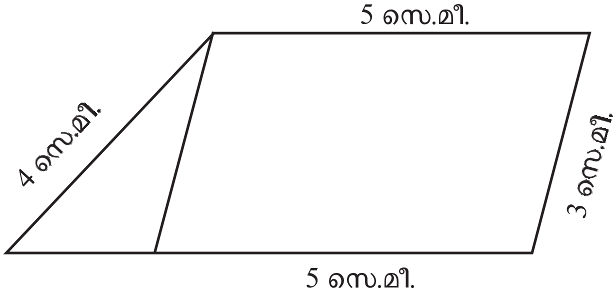
ഇനി താഴത്തെ വര നീട്ടിയും, സമാന്തരവരകൾ വരച്ചും, ലംബകമാക്കാം:



സമപാർശ്വമല്ലാത്ത ലംബകവും ഇങ്ങനെ വരയ്ക്കാം; എല്ലാ വശങ്ങളുടെയും നീളം വേണം. ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



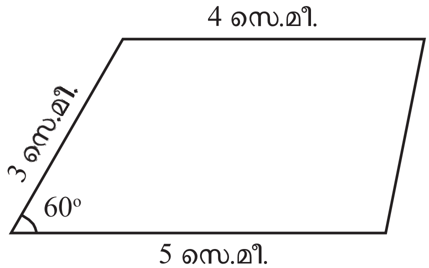
ഇതിനെയും ത്രികോണവും സാമാന്തരികവുമായി ഭാഗിക്കാമല്ലോ:



ത്രികോണത്തിന്റെ മറ്റു രണ്ട് വശങ്ങളുടെ നീളമെന്താണ്?

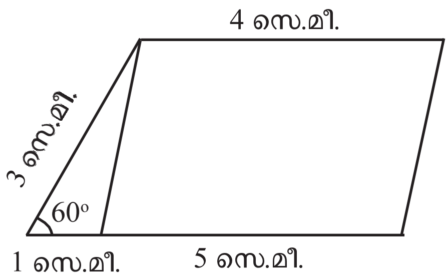
അപ്പോൾ ആദ്യം 2 സെന്റിമീറ്റർ, 4 സെന്റിമീറ്റർ, 3 സെന്റിമീറ്റർ വശങ്ങളുള്ള ത്രികോണം വരച്ചശേഷം, മുമ്പ് ചെയ്തതുപോലെ ലംബകമാക്കാം. വരച്ച് നോക്കൂ.

നാല് വശങ്ങൾക്കുപകരം, മൂന്ന് വശങ്ങളും ഒരു കോണുമാണ് നിശ്ചിത അളവുകളിൽ വേണ്ടതെങ്കിലോ?

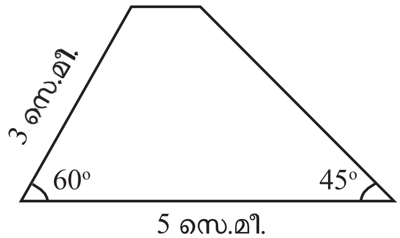


അളവുകൾ ചിത്രത്തിലേതുപോലെയാണെങ്കിൽ വരയ്ക്കാൻ വിഷമമില്ല.

നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ ആദ്യമൊരു ത്രികോണവും പിന്നെയൊരു സാമാന്തരികവുമായി വരയ്ക്കാം.



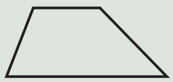
ഇനി രണ്ട് വശങ്ങളും രണ്ടു കോണുകളുമായാലോ?



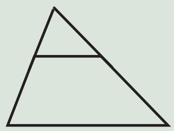
ആദ്യം 5 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ വര വരച്ച്, ഇടതുവശത്ത് 60° ചരിവിലും, വലതുവശത്ത് 45° ചരിവിലും വരകൾ വരയ്ക്കുക; ഇടതുവരയിൽ 3 സെന്റിമീറ്റർ അടയാളപ്പെടുത്തി, താഴത്തെ വരയ്ക്ക് സമാന്തരമായി വര വരയ്ക്കുക. ചെയ്തുനോക്കൂ. (ഇടതു വശത്തിന്റെ മുകളറ്റത്ത് 120° കോൺ വരച്ചും സമാന്തരവര വരയ്ക്കാം)

ലംബകവും ത്രികോണവും

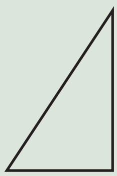
ഒരു ലംബകം വരയ്ക്കുക.



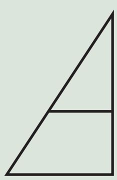
ഇതിന്റെ സമാന്തരമല്ലാത്ത എതിർവശങ്ങൾ നീട്ടിയാൽ കൂട്ടിമുട്ടുമല്ലൊ. അപ്പോൾ ത്രികോണമായി.



ഇനി ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കാം



ഇതിലെ ഒരു വശത്തിനു സമാന്തരമായി ത്രികോണത്തിനുള്ളിൽ ഒരു വര വരയ്ക്കൂ.

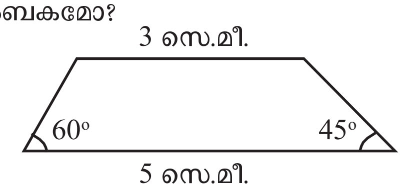


മുകളിലത്തെ രണ്ടു വരകൾ മായ്ച്ചു കളയുക. ഒരു ലംബകം കിട്ടിയില്ലേ?

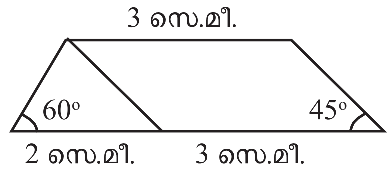
സമപാർശ്വലംബകത്തിൽ നിന്ന് തുടങ്ങിയാൽ കിട്ടുന്നത് ഏതു തരം ത്രികോണമാണ്?

മറിച്ച്, സമപാർശ്വത്രികോണത്തെ ഇങ്ങനെ മുറിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ലംബകത്തിന്റെ സവിശേഷത എന്താണ്?

ഈ ലംബകമോ?



നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ, ത്രികോണവും സാമാന്തരികവുമായി ഭാഗിച്ചാലോ?

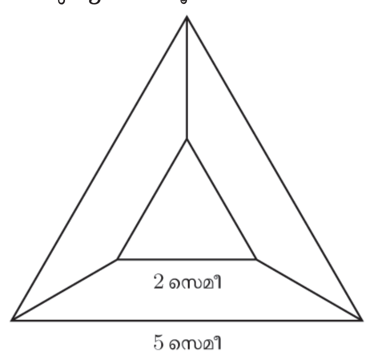


ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശവും, അതിന്റെ ഒരറ്റത്തുള്ള കോണും അറിയാം; മറ്റേ അറ്റത്തുള്ള കോണോ?

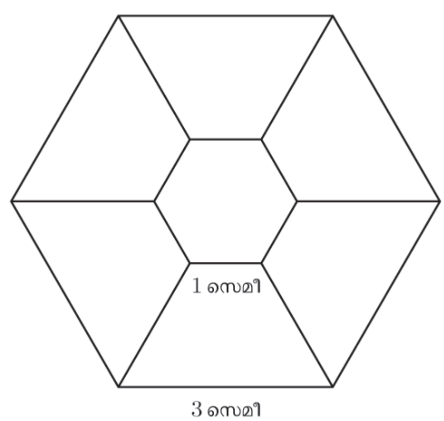
ഇനി ത്രികോണവും, തുടർന്ന് ലംബകവും വരയ്ക്കാമല്ലോ.

ചുവടെയുള്ള ചിത്രങ്ങൾ വരയ്ക്കുക.

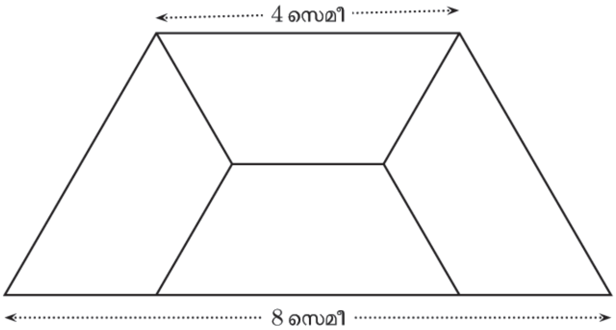
1) തുല്യമായ മൂന്ന് സമപാർശ്വലംബകങ്ങൾ:



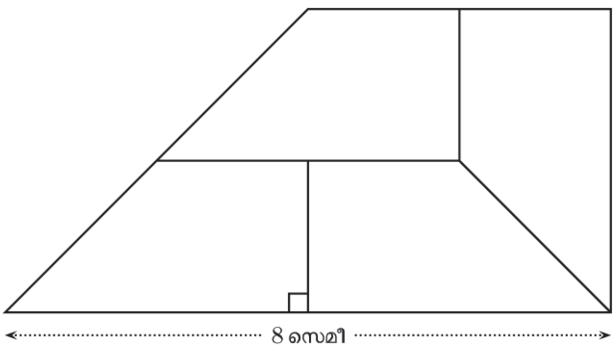
2) തുല്യമായ ആറ് സമപാർശ്വലംബകങ്ങൾ:



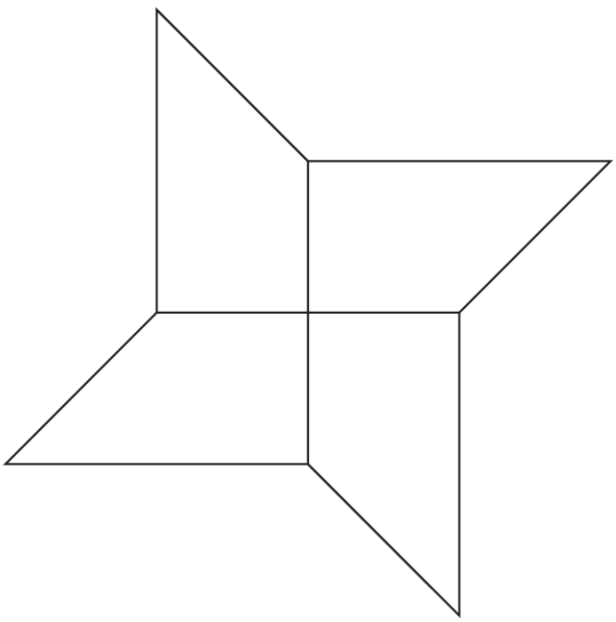
3) തുല്യമായ നാല് സമപാർശ്വലംബകങ്ങൾ:



4) തുല്യമായ മറ്റു നാല് ലംബകങ്ങൾ.

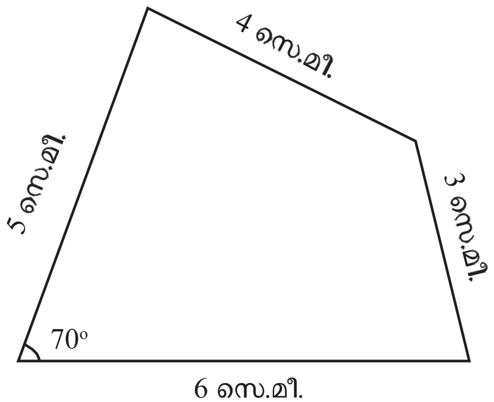


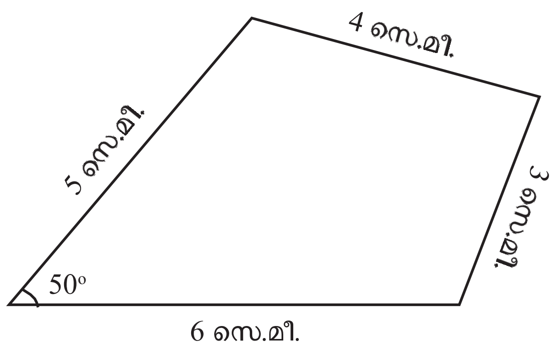
5) മുൻകണക്കിലെ ലംബകങ്ങളുടെ മറ്റൊരടുക്ക്:



ചതുർഭുജങ്ങൾ

ഇനി സവിശേഷതകളൊന്നുമില്ലാത്ത സാധാരണ ചതുർഭുജങ്ങൾ വരച്ചുനോക്കാം. വശങ്ങളുടെ നീളം ഒന്നായാലും രണ്ട് ചതുർഭുജങ്ങൾ തുല്യമാകണമെന്നില്ല. അതുകൊണ്ടുതന്നെ ഒരേ വശങ്ങളുള്ള വ്യത്യസ്ത ചതുർഭുജങ്ങൾ വരയ്ക്കാം. ഈ ചതുർഭുജങ്ങൾ നോക്കൂ:

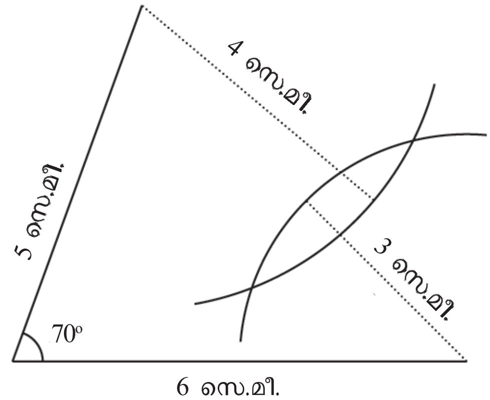




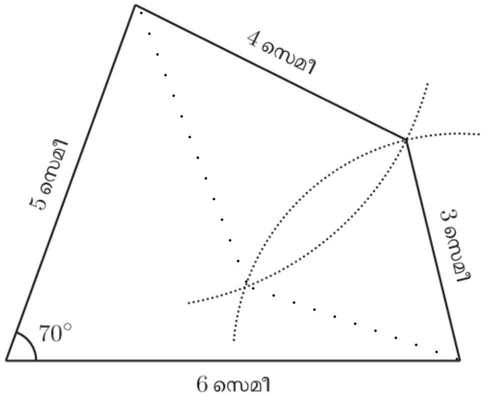
ഈ ചതുർഭുജങ്ങൾ നോട്ടുബുക്കിൽ വരയ്ക്കാമോ?

ആദ്യത്തേത് വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് നോക്കാം. 6 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ വര വരച്ച്, അതിന്റെ ഇടത്തെ അറ്റത്ത് 70° ചരിവിൽ, 5 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വര വരയ്ക്കുക. ഇപ്പോൾ ചതുർഭുജത്തിന്റെ മൂന്ന് മൂലകളായി. നാലാമത്തെ മൂല എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

അത് മുകളിലത്തെ മൂലയിൽനിന്ന് 4 സെന്റിമീറ്ററും, വലത്തേ മൂലയിൽനിന്ന് 3 സെന്റിമീറ്ററും അകലെയാണ്. അതായത്, ഈ മൂലകൾ കേന്ദ്രമായും, ഈ നീളങ്ങൾ ആരമായും വരയ്ക്കുന്ന രണ്ട് വൃത്തങ്ങളിലുമുള്ള ബിന്ദുവാണ് നാലാമത്തെ മൂല.



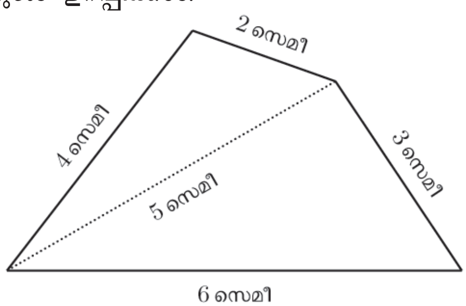
ഈ വൃത്തങ്ങൾ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന ഒരു ബിന്ദു എടുത്താൽ ഉദ്ദേശിക്കുന്ന ചതുർഭുജം കിട്ടും:



(മറ്റേ ബിന്ദു എടുത്താൽ കിട്ടുന്ന കുഴിഞ്ഞ ചതുർഭുജം കണക്കിലെടുക്കാറില്ലല്ലോ).

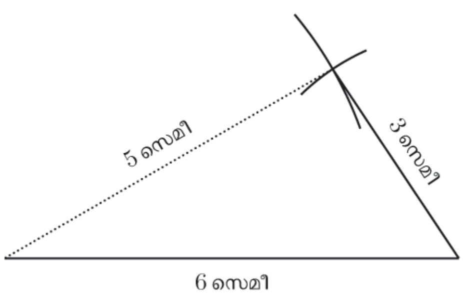
ഇതുപോലെ, കോൺ 50° ആയ രണ്ടാമത്തെ ചതുർഭുജവും നോട്ടുബുക്കിൽ വരച്ചുനോക്കൂ.

നാല് വശങ്ങളും ഒരു കോണും പറയുന്നതിനുപകരം, നാല് വശങ്ങളും ഒരു വികർണവും പറഞ്ഞാലും ചതുർഭുജം ഉറപ്പിക്കാം:



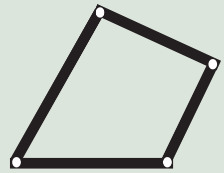
ഇതെങ്ങനെ വരയ്ക്കും?

ആദ്യം താഴത്തെ ത്രികോണം വരയ്ക്കാം:



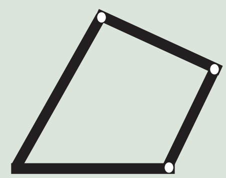
ചതുർഭുജസ്ഥിരത

വീതി കുറഞ്ഞ നാലു പ്ലാസ്റ്റിക് കഷണങ്ങളോ, കട്ടിക്കടലാസുകഷണങ്ങളോ 3, 4, 5, 6 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ മുറിച്ചെടുക്കുക. മൊട്ടുസൂചിയോ മുള്ളാണിയോ ഉപയോഗിച്ച് ഇവയുടെ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ച് ഒരു ചതുർഭുജമുണ്ടാക്കുക.

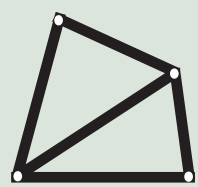


ഇത് വിടർത്തിയും ചുരുക്കിയും പല ചതുർഭുജങ്ങളാക്കാമല്ലോ. വശങ്ങളുടെ നീളം മാറുന്നുമില്ല.

ഇനി ഒരു മൂലയിലെ സൂചി മാറ്റി, ആ രണ്ടു കഷണങ്ങളുടെ അറ്റങ്ങൾ പശ തേച്ച് നന്നായി ഒട്ടിക്കുക. ഈ ചതുർഭുജത്തെ ചുരുക്കാനോ വിടർത്താനോ പറ്റുന്നുണ്ടോ?

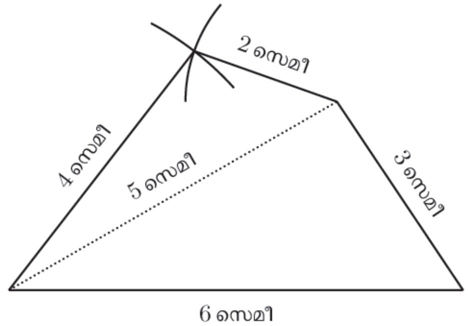


രണ്ടു കഷണങ്ങളുടെ അറ്റങ്ങൾ ഒട്ടിക്കുന്നതിനു പകരം, അഞ്ചാമതൊരു കഷണം കുറുകെ ഘടിപ്പിച്ചാലോ?

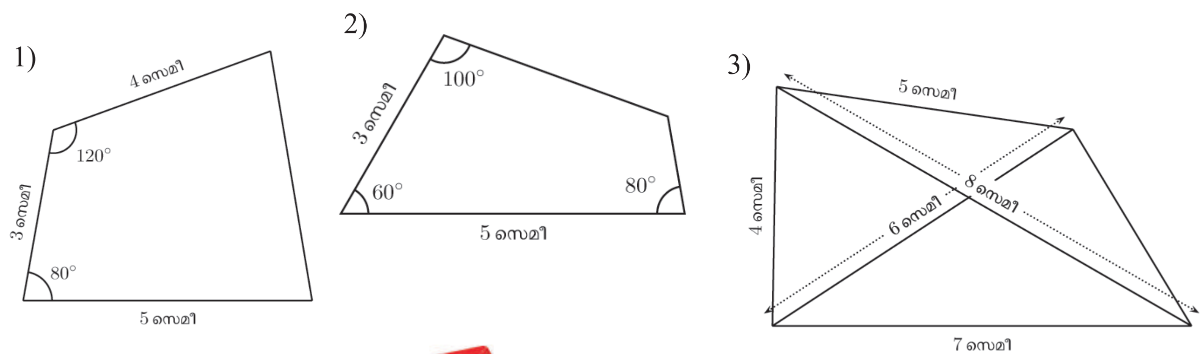


ഇപ്പോഴും അനക്കാൻ കഴിയുന്നുണ്ടോ?

ഇനി രണ്ടാമത്തെ ത്രികോണവും വരച്ചാൽ ചതുർഭുജമായി:



ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ചതുർഭുജങ്ങൾ വരയ്ക്കുക.

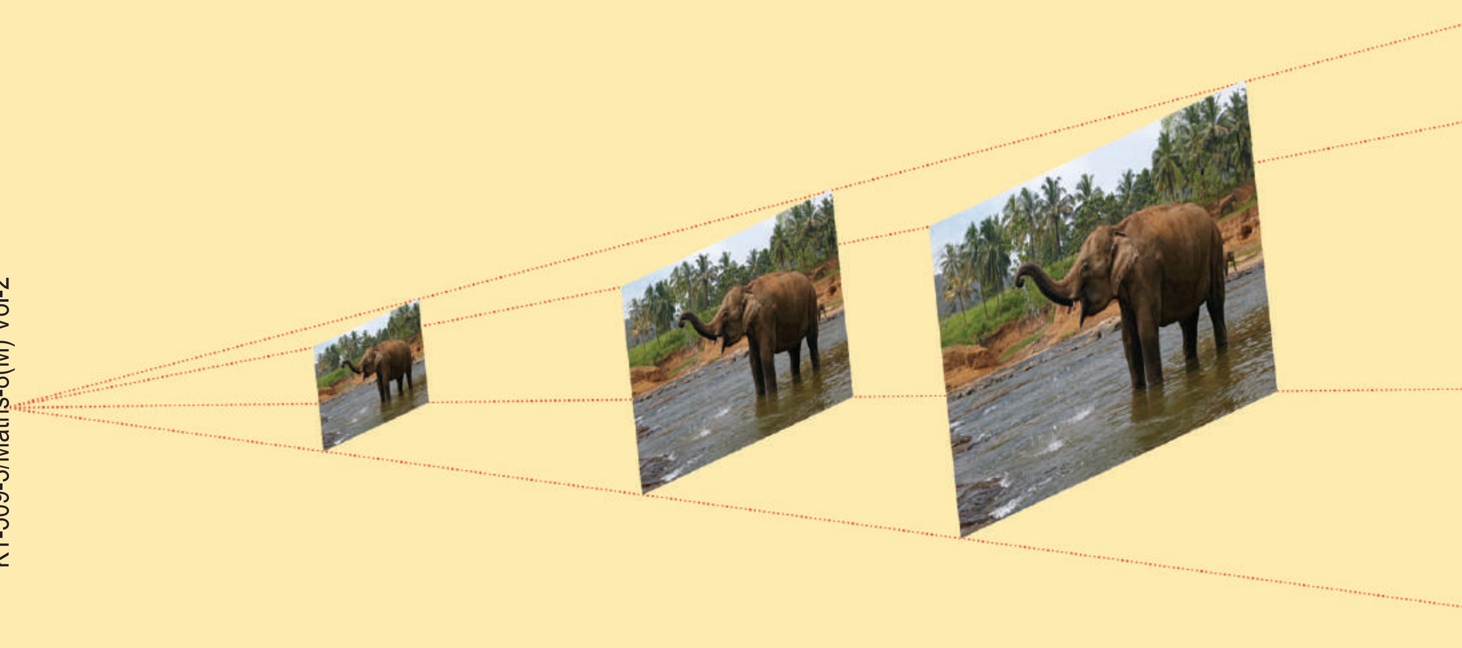


തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്
• വിവിധ രീതികളിൽ സമചതുരം വരയ്ക്കുന്നതിനുള്ള മാർഗം വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• വിവിധ രീതികളിൽ ഒരു ചതുരം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുന്നു.			
• ഒരു സാമാന്തരികം വരയ്ക്കാനാവശ്യമായ വിവിധ അളവുകൾ കണ്ടെത്തുന്നു.			
• പറഞ്ഞ അളവുകളിൽ സാമാന്തരികം വരയ്ക്കുന്നു.			
• ഒരു ലംബകം വരയ്ക്കാനാവശ്യമായ അളവുകൾ കണ്ടെത്തുന്നു.			
• പറഞ്ഞ അളവുകളിൽ ലംബകം വരയ്ക്കുന്ന രീതി വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• ഏതൊരു ചതുർഭുജം വരയ്ക്കുന്നതിനും ആവശ്യമായ അളവുകൾ നിശ്ചയിക്കുന്നു.			

7

അംശബന്ധം



KT-509-3/Maths-8(M) Vol-2

ഭാഗങ്ങളുടെ ബന്ധം

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

AB എന്ന വരയെ അഞ്ചു സമഭാഗങ്ങളാക്കിയിരിക്കുന്നു.

ആദ്യത്തെ മൂന്നുഭാഗം ചേർന്നതിനെ AP എന്നു വിളിച്ചാൽ AP, BP എന്നീ വരകളുടെ നീളം തമ്മിലുള്ള ബന്ധം എങ്ങനെയെല്ലാം പറയാം?

- AP, BP ഇവയ്ക്ക് AB യുമായുള്ള ബന്ധം
  - AB യുടെ $\frac{3}{5}$ ഭാഗമാണ് AP
  - AB യുടെ $\frac{2}{5}$ ഭാഗമാണ് BP
- AP യും, BP യും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം
  - AP യുടെ $\frac{2}{3}$ ഭാഗമാണ് BP
  - BP യുടെ $\frac{3}{2}$ മടങ്ങാണ് AP
- AP, BP ഇവയ്ക്ക് 2, 3 എന്നീ എണ്ണൽസംഖ്യകളുമായുള്ള ബന്ധം
  - AP യുടെ 2 മടങ്ങും, BP യുടെ 3 മടങ്ങും തുല്യമാണ്.
  - AP യുടെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗവും, BP യുടെ $\frac{1}{2}$ ഭാഗവും തുല്യമാണ്; ഈ നീളത്തിന്റെ 3 മടങ്ങാണ് AP; 2 മടങ്ങാണ് BP

ഇക്കാര്യമെല്ലാം ചേർത്ത്, എങ്ങനെ പറയാം?

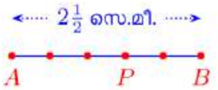
AP, BP എന്നീ നീളങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 3 : 2.

ഇവിടെ AB യുടെ ശരിയായ നീളം എന്താണെന്നു പറഞ്ഞിട്ടില്ലല്ലോ. ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ ഇത് 5 സെന്റിമീറ്ററാണ്:

അപ്പോൾ AP യുടെ നീളം 3 സെന്റിമീറ്റർ, BP യുടെ നീളം 2 സെന്റിമീറ്റർ, AB യുടെ നീളം ഇരട്ടിച്ചാലോ?

AP യുടെ നീളം $3 \times 2 = 6$ സെന്റിമീറ്ററും BP യുടെ നീളം $2 \times 2 = 4$ സെന്റിമീറ്ററും ആകും. പക്ഷേ മുകളിലെഴുതിയ ബന്ധങ്ങളൊന്നും മാറിയിട്ടില്ലല്ലോ.

AB യുടെ നീളം പകുതിയാക്കിയാലോ?



$AP = 3 \times \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$ സെന്റിമീറ്റർ, $BP = 2 \times \frac{1}{2} = 1$ സെന്റിമീറ്റർ.

എന്നാലും പഴയ ബന്ധങ്ങൾക്ക് മാറ്റമില്ല.

ഇനി രണ്ടു നീളങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $3 : 5$ എന്നു പറഞ്ഞാലോ?

ശരിയായ നീളങ്ങൾ എന്താണെന്ന് പറയാൻ കഴിയില്ല. അത് 3 സെന്റിമീറ്ററും 5 സെന്റിമീറ്ററും തന്നെ ആവാം; അല്ലെങ്കിൽ

6 സെന്റിമീറ്റർ, 10 സെന്റിമീറ്റർ

$1\frac{1}{2}$ സെന്റിമീറ്റർ, $2\frac{1}{2}$ സെന്റിമീറ്റർ

6 മീറ്റർ, 10 മീറ്റർ

എന്നിങ്ങനെ പലതുമാവാം.

ഇതൊന്നുമല്ലെങ്കിൽ ഏതോ ഒരു ചരടുകൊണ്ട് അളന്നപ്പോൾ, ആദ്യത്തേതിന്റെ നീളം 3 ചരട്, രണ്ടാമത്തേതിന്റെ നീളം 5 ചരട് എന്ന് കിട്ടിയതാവാം.

എന്തായാലും, ആദ്യത്തേത് ഏതോ ഒരു നിശ്ചിത നീളത്തിന്റെ 3 മടങ്ങും, രണ്ടാമത്തേത് അതേ നീളത്തിന്റെ 5 മടങ്ങും ആണെന്നു പറയാം.

അൽപം ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ച്, ഈ നിശ്ചിത നീളം x സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, ആദ്യത്തെ നീളം $3x$ സെന്റിമീറ്റർ, രണ്ടാമത്തെ നീളം $5x$ സെന്റിമീറ്റർ എന്ന് പൊതുവായി പറയാം.

അംശബന്ധവും രസതന്ത്രവും

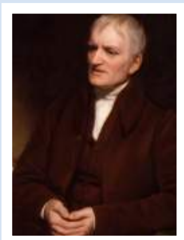
രസതന്ത്രത്തിൽ പദാർഥങ്ങളെ മൂലകങ്ങൾ എന്നും സംയുക്തങ്ങൾ എന്നും തരം തിരിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ.

ഏതു സംയുക്തത്തിലും അതിലടങ്ങുന്ന മൂലകങ്ങളുടെ ദ്രവ്യമാനം (mass) ഒരു നിശ്ചിത അംശബന്ധത്തിലായിരിക്കുമെന്ന് പതിനെട്ടാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ജോസഫ് പ്രൂസ്റ്റ് എന്ന ശാസ്ത്രജ്ഞൻ കണ്ടെത്തി.

ഉദാഹരണമായി കോപ്പർ കാർബണേറ്റിൽ എപ്പോഴും കാർബണിന്റെ ദ്രവ്യമാനത്തിന്റെ 5.3 മടങ്ങ് കോപ്പറും, കാർബണിന്റെ 4 മടങ്ങ് ഓക്സിജനും ആയിരിക്കും എന്ന് പരീക്ഷണങ്ങളിലൂടെ അദ്ദേഹം കണ്ടെത്തി.

മൂലകങ്ങളുടെ തീരെ ചെറിയ കണികകൾ സങ്കല്പിച്ചാൽ ഇത്തരം താരതമ്യം എണ്ണൽ സംഖ്യകളിലൂടെ ആവാം എന്ന ചിന്തയാകണം, പരമാണു എന്ന ആശയത്തിലേക്ക് നയിച്ചത്. പത്തൊമ്പതാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ജോൺ ഡാൽട്ടൻ എന്ന ശാസ്ത്രജ്ഞനാണ് ഇത്തരം ഒരു സിദ്ധാന്തം അവതരിപ്പിച്ചത്.

ഡാൽട്ടന്റെ സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച് മൂലകങ്ങളുടെ തീരെ ചെറിയ കണികകളായ പരമാണുക്കൾ (atoms) ചേർന്നാണ് സംയുക്തങ്ങൾ ഉണ്ടാകുന്നത്. ഏതു സംയുക്തത്തിലും അതിലെ വിവിധ മൂലകങ്ങളുടെ പരമാണുക്കളുടെ എണ്ണം ഒരു നിശ്ചിത അംശബന്ധത്തിലാണ്.



മറ്റളവുകളുടെ അംശബന്ധത്തിലും ഇതു പറയാം; ഉദാഹരണമായി, രണ്ടു കുപ്പികളുടെ ഉള്ളളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 3 : 5 എന്നാൽ, ഏതോ ഒരു പാത്രമെടുത്ത് രണ്ടും നിറച്ചപ്പോൾ, ആദ്യത്തേത് നിറയാൻ 3 തവണയും, രണ്ടാമത്തേതു നിറയാൻ 5 തവണയും ഒഴിക്കേണ്ടി വന്നു എന്നു പറയാം.

അളവ് പാത്രത്തിൽ x മില്ലിലിറ്റർ വെള്ളം കൊള്ളും എന്നെടുത്താൽ, ആദ്യത്തെ കുപ്പിയിൽ $3x$ മില്ലിലിറ്ററും, രണ്ടാമത്തെ കുപ്പിയിൽ $5x$ മില്ലിലിറ്ററും വെള്ളം കൊള്ളും എന്നു പൊതുവായി പറയാം.

ഒരു ക്ലാസിലെ ആൺകുട്ടികളുടെയും പെൺകുട്ടികളുടെയും എണ്ണം, 3 : 5 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണെന്നു പറഞ്ഞാലോ?

ശരിയായ എണ്ണം 30 ഉം 50 ഉം ആണെങ്കിൽ, 10 കുട്ടികൾ വീതമുള്ള 3 കൂട്ടമായി ആൺകുട്ടികളെയും 5 കൂട്ടമായി പെൺകുട്ടികളെയും കാണാം.

ശരിയായ എണ്ണം 15 ഉം 25 ഉം ആണെങ്കിൽ, 5 കുട്ടികൾ വീതമുള്ള 3 കൂട്ടമായി ആൺകുട്ടികളെയും 5 കൂട്ടമായി പെൺകുട്ടികളെയും കാണാം.

ഏതായാലും, ഒരേ എണ്ണം കുട്ടികളുള്ള 3 കൂട്ടമായി ആൺകുട്ടികളെയും 5 കൂട്ടമായി പെൺകുട്ടികളെയും കാണാം.

മൂലകബന്ധം

ജീവൻ നിലനിർത്താൻ വേണ്ട ഘടകങ്ങളിൽ പ്രധാനപ്പെട്ടതാണ് ജലം. മനുഷ്യശരീരത്തിൽ ഏറ്റവും കൂടുതൽ അടങ്ങിയിരിക്കുന്ന പദാർഥവും ജലം തന്നെ. ഈ ജലത്തിൽ ഹൈഡ്രജൻ, ഓക്സിജൻ എന്നീ മൂലകങ്ങളാണ് അടങ്ങിയിരിക്കുന്നത്. ഈ മൂലകങ്ങൾ ഏത് അളവിലാണ് ജലത്തിൽ അടങ്ങിയിരിക്കുന്നതെന്ന് അറിയാമോ?

ഒരു ജലതന്മാത്രയിൽ 2 ഹൈഡ്രജൻ ആറ്റങ്ങളും 1 ഓക്സിജൻ ആറ്റവുമാണുള്ളത്. അതായത്, രസതന്ത്രത്തിൽ ജലത്തിന്റെ ചുരുക്കെഴുത്ത് H_2O. അതായത്, ജലത്തിൽ ഹൈഡ്രജന്റെയും ഓക്സിന്റെയും അംശബന്ധം 2 : 1.

നാം ഉപയോഗിക്കുന്ന കറിയുപ്പിൽ അടങ്ങിയിരിക്കുന്ന മൂലകങ്ങൾ സോഡിയവും (Na) ക്ലോറിനും (Cl) ആണ്. ഇവയുടെ അളവുകൾ തുല്യമാണ്. അതായത്, ഇവ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 1 : 1. കറിയുപ്പിന്റെ ചുരുക്കെഴുത്ത് NaCl.

ഒരു കൂട്ടത്തിലെ കുട്ടികളുടെ എണ്ണം x എന്നെടുത്താൽ, ആൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണം $3x$ പെൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണം $5x$.

ഈ ഉദാഹരണങ്ങളിൽ നിന്നെല്ലാം കാണുന്ന പൊതുതത്വം എന്താണ്?

രണ്ടളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $a : b$ ആണെങ്കിൽ, ആദ്യത്തെ അളവ് ax ഉം രണ്ടാമത്തെ അളവ് bx ഉം ആകുന്ന x എന്നൊരു അളവുണ്ട്.

ഇനി ഏഴാം ക്ലാസിൽ ചെയ്ത ഒരു കണക്കു നോക്കൂ: (**അംശബന്ധം** എന്ന പാഠത്തിലെ **ഭാഗക്കണക്ക്**)

24 മീറ്റർ ചുറ്റളവുള്ള ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വീതിയും നീളവും 3 : 5 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്. വീതിയും നീളവും എത്ര മീറ്ററാണ്?

എങ്ങനെയാണ് ഇതു ചെയ്തത്?

ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് മറ്റൊരു രീതിയിലും കണക്കാക്കാം. വീതിയും നീളവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 3 : 5 ആയതിനാൽ, വീതി $3x$ മീറ്റർ, നീളം $5x$ മീറ്റർ എന്നെടുക്കാം. x കണ്ടുപിടിക്കാൻ, കണക്കിൽ പറഞ്ഞിട്ടുള്ള ചുറ്റളവ് ഉപയോഗിക്കാം.

വീതിയും നീളവും $3x$ മീറ്റർ, $5x$ മീറ്റർ ആയതിനാൽ, ചുറ്റളവ്,

$$2(3x + 5x) = 16x \text{ മീറ്റർ}$$

ഇത് 24 മീറ്റർ എന്നു പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്. അപ്പോൾ $16x = 24$; അതിൽനിന്ന്

$$x = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$$

ഇനി വീതിയും നീളവും കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ:

$$\text{വീതി} = 3 \times \frac{3}{2} \text{ മീറ്റർ} = 4\frac{1}{2} \text{ മീറ്റർ}$$

$$\text{നീളം} = 5 \times \frac{3}{2} \text{ മീറ്റർ} = 7\frac{1}{2} \text{ മീറ്റർ}$$

മറ്റൊരു കണക്ക്:

> ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വീതിയും നീളവും 4 : 7 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്; നീളം, വീതിയേക്കാൾ 15 മീറ്റർ കൂടുതലാണ്. വീതിയും നീളവും എത്ര മീറ്ററാണ്?

പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന അംശബന്ധമനുസരിച്ച്, നീളവും വീതിയും കൂട്ടിയതിന്റെ $\frac{4}{11}$ ഭാഗമാണ് വീതി; $\frac{7}{11}$ ഭാഗം നീളവും.

അപ്പോൾ നീളവും വീതിയും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം, അവയുടെ തുകയുടെ $\frac{7}{11} - \frac{4}{11} = \frac{3}{11}$ ഭാഗമാണ്. ഈ വ്യത്യാസം 15 മീറ്ററാണെന്നു പറഞ്ഞിട്ടുണ്ടല്ലോ. അപ്പോൾ 15 ന്റെ $\frac{11}{3}$ മടങ്ങാണ് നീളത്തിന്റെയും വീതിയുടെയും തുക; അതായത്,

$$15 \text{ മീറ്റർ} \times \frac{11}{3} = 55 \text{ മീറ്റർ}$$

ഇനി നീളവും വീതിയും കണക്കാക്കാം:

$$\text{നീളം} = 55 \times \frac{7}{11} = 35 \text{ മീറ്റർ}$$

$$\text{വീതി} = 35 - 15 = 20 \text{ മീറ്റർ}$$

ആദ്യത്തെ കണക്കിലെപ്പോലെ ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ചും ചെയ്യാം. വീതി $4x$, നീളം $7x$ എന്നെടുക്കാം.

ഇതനുസരിച്ച്, നീളം വീതിയേക്കാൾ $7x - 4x = 3x$ സെന്റിമീറ്റർ കൂടുതലാണ്; ഇത് 15 മീറ്ററാണെന്നു പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്. അപ്പോൾ $3x = 15$ എന്നും, അതിൽനിന്ന് $x = 5$ എന്നും കിട്ടുമല്ലോ.

ഇനി വീതിയും നീളവും കണക്കാക്കാം:

$$\text{വീതി} = 4 \times 5 \text{ മീറ്റർ} = 20 \text{ മീറ്റർ}$$

$$\text{നീളം} = 7 \times 5 \text{ മീറ്റർ} = 35 \text{ മീറ്റർ}$$

മധുരിക്കുന്ന അംശബന്ധം

പഞ്ചസാരയിൽ ഏതെല്ലാം മൂലകങ്ങളാണുള്ളത് എന്നറിയാമോ?

കാർബൺ, ഹൈഡ്രജൻ, ഓക്സിജൻ ഇവ ഓരോന്നും പല അളവുകളുകളിലാണുള്ളത്. 12 കാർബൺ ആറ്റവും, 22 ഹൈഡ്രജൻ ആറ്റവും, 11 ഓക്സിജൻ ആറ്റവും അടങ്ങിയതാണ് പഞ്ചസാരയുടെ ഒരു തന്മാത്ര. അതായത്, പഞ്ചസാരയിലെ കാർബൺ, ഹൈഡ്രജൻ, ഓക്സിജൻ എന്നിവയുടെ അംശബന്ധം 12 : 22 : 11. പഞ്ചസാര തന്മാത്രയുടെ ചുരുക്കെഴുത്ത് $C_{12}H_{22}O_{11}$. പഞ്ചസാര ചൂടാക്കിയാൽ എന്താണ് സംഭവിക്കുക? കാരണം എന്താണ്?

ഒരു കണക്കുകൂടി:

ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വീതിയും നീളവും 4 : 5 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്. അതിന്റെ പരപ്പളവ് 320 ചതുരശ്രമീറ്റർ. വീതിയും നീളവും എത്ര മീറ്ററാണ്?

വീതി $4x$ മീറ്റർ, നീളം $5x$ മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, പരപ്പളവ്

$$4x \times 5x = 20x^2 \text{ ചതുരശ്രമീറ്റർ}$$

ഇത് 320 ചതുരശ്രമീറ്റർ എന്നറിയാവുന്നതിനാൽ

$$20x^2 = 320$$

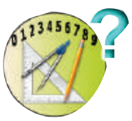
x^2 എന്ന സംഖ്യയുടെ 20 മടങ്ങ് 320 എന്നല്ലേ ഇതിന്റെ അർഥം? അപ്പോൾ ഈ സംഖ്യ $320 \div 20 = 16$; അതായത്

$$x^2 = 16$$

വർഗം 16 ആയ സംഖ്യ 4 ആണല്ലോ. അതിനാൽ $x = 4$

$$\text{വീതി } 4 \times 4 \text{ മീറ്റർ} = 16 \text{ മീറ്റർ}$$

$$\text{നീളം } 5 \times 4 \text{ മീറ്റർ} = 20 \text{ മീറ്റർ}$$



ഈ കണക്കിൽ വീതി 4 മീറ്റർ, നീളം 5 മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, പരപ്പളവ് 20 ചതുരശ്രമീറ്റർ; കണക്കിൽ പറഞ്ഞ പരപ്പളവ് ഇതിന്റെ 16 മടങ്ങാണ്. അപ്പോൾ വീതി 4 മീറ്ററിന്റെ 16 മടങ്ങും, നീളം 5 മീറ്ററിന്റെ 16 മടങ്ങും, എന്നു കണക്കാക്കിയാൽ ശരിയാകാത്തത് എന്തുകൊണ്ടാണ്?

1) ഒരു സമബഹുഭുജത്തിന്റെ അകക്കോണിന്റെയും പുറംകോണിന്റെയും അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 7 : 2 ആണ്. ഓരോ കോണും എത്രയാണ്? ഈ ബഹുഭുജത്തിന് എത്ര വശങ്ങളുണ്ട്?

2) ഒരു ക്ലാസിലെ പെൺകുട്ടികളുടെയും ആൺകുട്ടികളുടെയും എണ്ണം 7 : 5 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്. ആൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണത്തേക്കാൾ 8 കൂടുതലാണ് പെൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണം. ക്ലാസ്സിൽ എത്ര പെൺകുട്ടികളും, എത്ര ആൺകുട്ടികളുമുണ്ട്?

3) നീലയും മഞ്ഞയും ചായങ്ങൾ 2 : 5 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ കലർത്തി പുതിയ നിറമുണ്ടാക്കി. നീലച്ചായത്തേക്കാൾ 6 ലിറ്റർ കൂടുതലാണ് മഞ്ഞച്ചായം. ഓരോന്നും എത്ര ലിറ്ററാണ് എടുത്തത്?

4) നാലു മട്ടത്രികോണങ്ങൾ; എല്ലാറ്റിലും ലംബവശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം 3 : 4 ആണ്. ഓരോ ത്രികോണത്തെക്കുറിച്ചും മറ്റൊരു വിവരംകൂടി ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം കണക്കാക്കുക.

i) ലംബവശങ്ങളുടെ നീളം തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം 24 മീറ്റർ

ii) കർണം 24 മീറ്റർ

iii) ചുറ്റളവ് 24 മീറ്റർ

iv) പരപ്പളവ് 24 ചതുരശ്രമീറ്റർ

മാറുന്ന ബന്ധങ്ങൾ

ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നീളം 6 സെന്റിമീറ്റർ, വീതി 4 സെന്റിമീറ്റർ; അപ്പോൾ നീളവും വീതിയും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 3 : 2

നീളം 2 സെന്റിമീറ്റർ കൂട്ടി, ചതുരം വലുതാക്കിയാലോ? നീളവും വീതിയും 8 സെന്റിമീറ്റർ, 4 സെന്റിമീറ്റർ; അംശബന്ധം 2 : 1

മറിച്ചൊരു ചോദ്യം:

> ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 3 : 2; നീളം 2 സെന്റിമീറ്റർ കൂട്ടി ചതുരം വലുതാക്കിയപ്പോൾ, ഈ അംശബന്ധം 5 : 3 ആയി. ആദ്യത്തെ ചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും എത്രയായിരുന്നു?

ആദ്യത്തെ ചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 3 : 2 ആയതിനാൽ, ശരിക്കുള്ള നീളവും വീതിയും $3x$ സെന്റിമീറ്റർ, $2x$ സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുക്കാം.

നീളം 2 സെന്റിമീറ്റർ കൂട്ടിയപ്പോൾ, ഇവ $3x + 2$ സെന്റിമീറ്റർ, $2x$ സെന്റിമീറ്റർ എന്നാകും. ഇവ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 5 : 3 എന്നാണ് പറഞ്ഞിരിക്കുന്നത്. ഈ വിവരം ഉപയോഗിച്ച് x എന്ന സംഖ്യ എന്താണെന്നു കണ്ടുപിടിക്കണം.

രണ്ടളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 5 : 3 എന്നു പറഞ്ഞാൽ, അവയിൽ വലുതിന്റെ 3 മടങ്ങും, ചെറുതിന്റെ 5 മടങ്ങും തുല്യമാണെന്നും അർഥമുണ്ടല്ലോ.

നമ്മുടെ കണക്കിൽ, വലിയ നീളം $3x + 2$ സെന്റിമീറ്റർ, ചെറിയ നീളം $2x$ സെന്റിമീറ്റർ; അപ്പോൾ ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം

$$3(3x + 2) = 5 \times 2x$$

ഇത് ചുരുക്കി, ഇങ്ങനെയെഴുതാം;

$$9x + 6 = 10x$$

ഇതിൽ നിന്ന് $x = 6$ എന്നു കാണാമല്ലോ (എങ്ങനെ?)

അങ്ങോട്ടും ഇങ്ങോട്ടും

ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും 33 സെന്റിമീറ്റർ, 1 സെന്റിമീറ്റർ. മറ്റൊരു ചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും 11 സെന്റിമീറ്റർ, 6 സെന്റിമീറ്റർ.ഈ ചതുരങ്ങളുടെ ചുറ്റളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്? പരപ്പളവുകൾ തമ്മിലോ? ഇങ്ങനെ ബന്ധപ്പെടുന്ന മറ്റു ജോടിചതുരങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

അതായത്, തുടങ്ങിയ ചതുരത്തിന്റെ നീളം 18 സെന്റിമീറ്റർ, വീതി 12 സെന്റിമീറ്റർ.

ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 3 : 2. നീളം എത്രയെങ്കിലും കൂട്ടി, ഈ അംശബന്ധം 4 : 3 ആക്കാൻ കഴിയുമോ? 5 : 3 ആക്കാൻ കഴിയുമോ?

മറ്റൊരു ചോദ്യം:

ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 3 : 2. നീളത്തിന്റെ പകുതികൂടി കൂട്ടി ചതുരം വലുതാക്കി. വലിയ ചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?

ആദ്യത്തെ ചതുരത്തിൽ, നീളത്തിന്റെ $\frac{2}{3}$ ഭാഗമാണ് വീതി; നീളത്തിനോട് അതിന്റെ പകുതികൂടി കൂട്ടിയാൽ, നീളം ഇപ്പോഴുള്ളതിന്റെ $1\frac{1}{2}$ മടങ്ങാകും. അപ്പോൾ ചോദ്യം $\frac{2}{3}$ ന്റെ എത്ര മടങ്ങാണ് $1\frac{1}{2}$ എന്നാകും.

$$1\frac{1}{2} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2}$$
$$= \frac{9}{4}$$

അതായത്, പുതുക്കിയ ചതുരത്തിൽ, വീതിയുടെ $\frac{9}{4}$ മടങ്ങാണ് നീളം; അതിനാൽ നീളവും വീതിയും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 9 : 4.

ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ചും ഈ കണക്ക് ചെയ്യാം: ആദ്യത്തെ ചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും $3x$ സെന്റിമീറ്റർ, $2x$ സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുത്തു തുടങ്ങാം. അപ്പോൾ നീളത്തിന്റെ പകുതി $1\frac{1}{2}x$ സെന്റിമീറ്റർ; ഇതു കൂട്ടുമ്പോൾ, നീളം $4\frac{1}{2}x$ സെന്റിമീറ്റർ. വീതി $2x$ സെന്റിമീറ്റർതന്നെ. ഇവ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $4\frac{1}{2} : 2$ എന്നു വേണമെങ്കിൽ പറയാം; എണ്ണൽസംഖ്യകളായി പറഞ്ഞാൽ 9 : 4.

അംശബന്ധവും പരപ്പളവും

ഒരേ ചുറ്റളവുള്ള രണ്ടു ചതുരങ്ങളിൽ ഒന്നിന്റെ നീളവും വീതിയും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 2 : 1. രണ്ടാമത്തേതിന്റെ നീളവും വീതിയും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 3 : 2. ഏതിനാണ് പരപ്പളവ് കൂടുതൽ?

ചുറ്റളവ് തുല്യമായതിനാൽ വീതിയുടെയും നീളത്തിന്റെയും തുക തുല്യമാണ്. ഇത് s സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ ആദ്യത്തെ ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾ $\frac{1}{3}s$, $\frac{2}{3}s$ സെന്റിമീറ്റർ.

അതിനാൽ പരപ്പളവ് $\frac{2}{9}s^2$ ച.സെ.മീ.

രണ്ടാമത്തെ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവോ?

$$\frac{2}{5}s \times \frac{3}{5}s = \frac{6}{25}s^2 \text{ ച.സെ.മീ.}$$

$\frac{2}{9}$, $\frac{6}{25}$ ഇവയിൽ വലുതേതാണ്?

$$\frac{2}{9} < \frac{6}{25}.$$

അപ്പോൾ രണ്ടാമത്തെ ചതുരത്തിനാണ് കൂടുതൽ പരപ്പളവ്.

ഇനി ഇതേ ചുറ്റളവും വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം 1 : 3 ഉം ആയ ചതുരമെടുത്താലോ?

ഏതിനാണ് പരപ്പളവ് കൂടുതൽ?

ഈ ചതുരങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളവും വീതിയും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം കണ്ടുപിടിച്ചു നോക്കൂ. വ്യത്യാസവും പരപ്പളവും തമ്മിലെന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ?

1) ഒരു ദ്രാവകത്തിൽ, ആസിഡും വെള്ളവും 4 : 3 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്. 10 ലിറ്റർ ആസിഡ് കൂടി ഒഴിച്ചപ്പോൾ, ഇത് 3 : 1 എന്ന അംശബന്ധത്തിലായി. ഇപ്പോൾ ദ്രാവകത്തിൽ എത്ര ലിറ്റർ ആസിഡും വെള്ളവും ഉണ്ട്?

2) രണ്ട് കോണുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 1 : 2 ആണ്. ചെറിയ കോൺ 6^o കൂട്ടുകയും, വലിയ കോൺ 6^o കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്തപ്പോൾ അംശബന്ധം 2 : 3 ആയി. ആദ്യത്തെ കോണുകൾ എത്ര ഡിഗ്രിയാണ്?

3) ഒരു ചതുരത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങൾ 4 : 5 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്.
   i) ചെറിയ വശത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗം കൂട്ടി അതിനെ സമചതുരമാക്കാം?
   ii) വലിയ വശത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗം കുറച്ച് അതിനെ സമചതുരമാക്കാം?

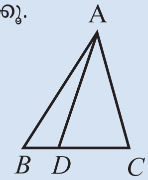
4) രണ്ടളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 3 : 5 ആണ്.
   i) ചെറിയ അളവ് മാത്രം നാലുമടങ്ങാക്കിയാൽ, അംശബന്ധം എന്താകും?
   ii) ചെറിയ അളവ് രണ്ടു മടങ്ങാക്കുകയും, വലിയ അളവ് പകുതിയാക്കുകയും ചെയ്താൽ, അംശബന്ധം എന്താകും?

5) i) രണ്ടു കുപ്പികളുടെ ഉള്ളളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 3 : 4 ആണ്. ചെറിയ കുപ്പി രണ്ടു തവണയും, വലിയ കുപ്പി ഒരു തവണയും നിറച്ച് ഒരു പാത്രത്തിലൊഴിച്ചു. ചെറിയ കുപ്പി രണ്ടു തവണ നിറച്ചും വലിയ കുപ്പി പകുതി നിറച്ചും മറ്റൊരു പാത്രത്തിലൊഴിച്ചു. പാത്രങ്ങളിലെ വെള്ളത്തിന്റെ അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എത്രയാണ്?
   ii) മുകളിലെ കണക്കിൽ, കുപ്പികളുടെ അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 4 : 7 ആയാലോ?

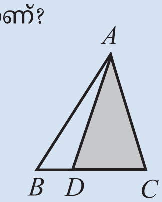
6) ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വീതിയും നീളവും 2 : 3 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്. ഇതിനേക്കാൾ വീതി 1 സെന്റിമീറ്ററും നീളം 3 സെന്റിമീറ്ററും കുറവായ മറ്റൊരു ചതുരത്തിന്റെ അംശബന്ധം 3 : 4 ആണ്. രണ്ട് ചതുരങ്ങളുടെയും വീതിയും നീളവും കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരപ്പളവുകളുടെ ബന്ധം

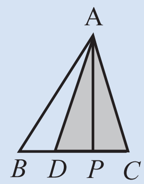
ചിത്രം നോക്കൂ.



ഇതിലെ ABD, ACD എന്നീ ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?



A യിൽ നിന്ന് BC യിലേയ്ക്ക് ലംബം വരയ്ക്കുക



ഈ ലംബത്തിന്റെ നീളം h എന്നെടുത്താൽ

ΔABD യുടെ പരപ്പളവ്

$$\frac{1}{2}\ h \times BD$$

ΔACD യുടെ പരപ്പളവ്

$$\frac{1}{2}\ h \times CD$$

അപ്പോൾ

$$\frac{\Delta ABD \text{ യുടെ പരപ്പളവ്}}{\Delta ACD \text{ യുടെ പരപ്പളവ്}} = \frac{BD}{CD}$$

അതായത്, ഈ പരപ്പളവുകളുടെ അംശബന്ധം BD, CD എന്നീ നീളങ്ങളുടെ അംശബന്ധം തന്നെയാണ്.

അപ്പോൾ, ഒരു ത്രികോണത്തെ ഒരേ പരപ്പളവുള്ള രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിക്കുന്നതെങ്ങനെ?

ഒരു ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പ്, രണ്ടാമത്തെ ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പിന്റെ ഇരട്ടിയാകണമെങ്കിലോ?

മുന്നളവുകൾ

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

AB എന്ന വരയെ 11 സമഭാഗങ്ങളാക്കിയിരിക്കുന്നു. ഇതിൽ

2 ഭാഗങ്ങൾ ചേർന്നത്, *AP*

5 ഭാഗങ്ങൾ ചേർന്നത്, *PQ*

4 ഭാഗങ്ങൾ ചേർന്നത്, *QB*

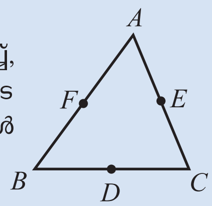
ഈ കഷണങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധങ്ങൾ, ഭാഗവും മടങ്ങുമായും എങ്ങനെയെല്ലാം പറയാം?

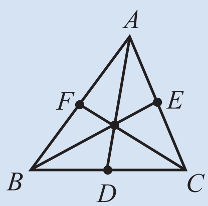
- *AP, PQ, QB* ഇവയ്ക്കെല്ലാം *AB* യുമായുള്ള ബന്ധം
  - *AB* യുടെ $\frac{2}{11}$ ഭാഗമാണ് *AP*
  - *AB* യുടെ $\frac{5}{11}$ ഭാഗമാണ് *PQ*
  - *AB* യുടെ $\frac{4}{11}$ ഭാഗമാണ് *QB*
- *AP, PQ, QB* ഇവ ജോടികളായെടുത്താലുള്ള ബന്ധം
  - *AP* യുടെ $\frac{5}{2}$ മടങ്ങാണ് *PQ*; *PQ* ന്റെ $\frac{2}{5}$ ഭാഗമാണ് *AP*
  - *PQ* ന്റെ $\frac{4}{5}$ ഭാഗമാണ് *QB*; *QB* യുടെ $\frac{5}{4}$ മടങ്ങാണ് *PQ*
  - *QB* യുടെ $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ഭാഗമാണ് *AP*, *AP* യുടെ $\frac{4}{2} = 2$ മടങ്ങാണ് *QB*
- *AP, PQ, QB* ഇവയ്ക്ക് 2, 5, 4 എന്നീ സംഖ്യകളുമായുള്ള ബന്ധം.
  - *AP* യുടെ 5 മടങ്ങും, *PQ* ന്റെ 2 മടങ്ങും തുല്യമാണ്. *PQ* യുടെ 4 മടങ്ങും, *QB* യുടെ 5 മടങ്ങും തുല്യമാണ്.

    AP യുടെ 2 മടങ്ങ് *QB* യ്ക്ക് തുല്യമാണ്.
  - *AP* യുടെ $\frac{1}{2}$ ഭാഗവും *PQ* ന്റെ $\frac{1}{5}$ ഭാഗവും *QB* യുടെ $\frac{1}{4}$ ഭാഗവും തുല്യമാണ്. ഈ നീളത്തിന്റെ 2 മടങ്ങ് *AP*, 5 മടങ്ങ് *PQ*, 4 മടങ്ങ് *QB*

ത്രികോണമധ്യം

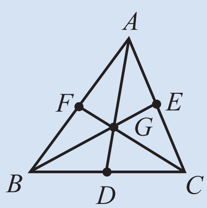
ഒരു ത്രികോണം വരച്ച്, അതിന്റെ വശങ്ങളുടെയെല്ലാം മധ്യബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക:





ഇനി ഈ മധ്യബിന്ദുക്കൾ ഓരോന്നിനേയും എതിർശീർഷവുമായി യോജിപ്പിക്കുക:

ഈ വരകളെ ത്രികോണത്തിന്റെ മധ്യമരേഖകൾ (medians) എന്നാണ് പറയുന്നത്. ഈ മൂന്നു മധ്യമരേഖകളും ത്രികോണത്തിനകത്തെ ഒരു ബിന്ദുവിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്നില്ലേ?



ഈ ബിന്ദുവിന് ത്രികോണത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദു (centroid) എന്നാണ് പേര്.

ഈ ബിന്ദു മധ്യമരേഖകളെയെല്ലാം 2 : 1 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ് ഭാഗിക്കുന്നത്. അതായത്, നമ്മുടെ ചിത്രത്തിൽ

$$\frac{AG}{GD} = \frac{BG}{GE} = \frac{CG}{GF} = 2$$

ഈ ബിന്ദുവിന് മറ്റൊരു പ്രത്യേകത കൂടിയുണ്ട്. ഇതുപോലൊരു ചിത്രം കാർഡ്ബോർഡിൽ വരച്ച് വെട്ടിയെടുക്കൂ. ഈ ബിന്ദുവിൽ പെൻസിൽമുന വച്ച് ത്രികോണത്തെ ചായാതെ, ചരിയാതെ നിർത്താം.

അതായത് ത്രികോണത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദു, അതിന്റെ ഗുരുത്വാകർഷണകേന്ദ്രം (centre of gravity) ആണ്.

രണ്ടളവുകളുടെ കാര്യത്തിലെന്നപോലെ ഇവിടെയും ഇതെല്ലാം ചേർത്ത്, *AP, PQ, QB* ഇവ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 2 : 5 : 4 എന്നു പറയാം.

അപ്പോൾ ഏതെങ്കിലും മൂന്ന് അളവുകളുടെ അംശബന്ധം 3 : 4 : 2 എന്നു പറഞ്ഞാൽ, ഏതോ ഒരു അളവിന്റെ 2 മടങ്ങാണ് ഇവയിലെ ഏറ്റവും ചെറിയ അളവ്; 4 മടങ്ങാണ് ഏറ്റവും വലിയ അളവ്, 3 മടങ്ങാണ്, ഇടത്തരം അളവ് എന്നു മനസ്സിലാക്കാം.

ബീജഗണിതഭാഷയിൽ പറഞ്ഞാൽ,

മൂന്നളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $a : b : c$ ആണെങ്കിൽ, ആദ്യത്തെ അളവ് ax ഉം രണ്ടാമത്തെ അളവ് bx ഉം മൂന്നാമത്തെ അളവ് cx ഉം ആകുന്ന x എന്നൊരു അളവുണ്ട്.

ഈ കണക്ക് നോക്കൂ:

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 3 : 5 : 7 ആണ്. അതിന്റെ ചുറ്റളവ് 45 സെന്റിമീറ്ററും. വശങ്ങളുടെ നീളം എന്താണ്?

മട്ടത്രികോണങ്ങൾ

3 സെന്റിമീറ്റർ, 4 സെന്റിമീറ്റർ, 5 സെന്റിമീറ്റർ വശങ്ങളുള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ പ്രത്യേകത എന്താണ്?

$3^2 + 4^2 = 5^2$ ആയതിനാൽ ഇതൊരു മട്ടത്രികോണമാണ്.

വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങളെല്ലാം ഇരട്ടിച്ചാലോ? അപ്പോൾ കിട്ടുന്ന ത്രികോണവും മട്ടത്രികോണമാകുമോ?

$6^2 + 8^2 = 10$ എന്നതും ശരിയാണ്.

അതായത്, വശങ്ങൾ ഇരട്ടിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ത്രികോണവും മട്ടത്രികോണം തന്നെ.

വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ x മടങ്ങാക്കിയാലോ?

$(3x)^2 + (4x)^2 = 9x^2 + 16x^2 = 25x^2 = (5x)^2$

അതായത്, $3x$, $4x$, $5x$ വശങ്ങളുള്ള ത്രികോണവും മട്ടത്രികോണമാണ്.

ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ, വശങ്ങളുടെ നീളം 3 : 4 : 5 ആയ എല്ലാ ത്രികോണങ്ങളും മട്ടത്രികോണമാണ്.

വശങ്ങളുടെ നീളം 5 : 12 : 13 ആയ ത്രികോണങ്ങൾ മട്ടത്രികോണമാകുമോ?

അളവുകളുടെ അംശബന്ധം 3 : 5 : 7 എന്നതിന്റെ അർഥം, ഈ അളവുകൾ അവയുടെ തുകയുടെ $\frac{3}{15}, \frac{5}{15}, \frac{7}{15}$ ഭാഗം എന്നാണ്. ഈ കണക്കിൽ നീളങ്ങളുടെ തുക, ചുറ്റളവാണ്; അതായത്, 45 സെന്റിമീറ്റർ. അപ്പോൾ വശങ്ങളുടെ നീളം,

$$45 \text{ സെന്റിമീറ്റർ} \times \frac{3}{15} = 9 \text{ സെന്റിമീറ്റർ}$$

$$45 \text{ സെന്റിമീറ്റർ} \times \frac{5}{15} = 15 \text{ സെന്റിമീറ്റർ}$$

$$45 \text{ സെന്റിമീറ്റർ} \times \frac{7}{15} = 21 \text{ സെന്റിമീറ്റർ}$$

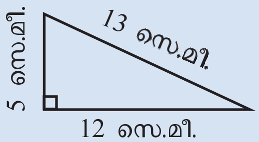
എന്നിങ്ങനെ കണക്കാക്കാം.

ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ചും ഇതു ചെയ്യാം. വശങ്ങളുടെ നീളം $3x$ സെന്റിമീറ്റർ, $5x$ സെന്റിമീറ്റർ, $7x$ സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുക്കാം. അപ്പോൾ ചുറ്റളവ് $15x$ സെന്റിമീറ്റർ.

ചുറ്റളവ് 45 സെന്റിമീറ്റർ, എന്നു പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്. അതിനാൽ $15x = 45$ എന്നും, $x = 3$ എന്നും കാണാം. അതായത്, വശങ്ങളുടെ നീളം $3 \times 3 = 9$ സെന്റിമീറ്റർ, $5 \times 3 = 15$ സെന്റിമീറ്റർ, $7 \times 3 = 21$ സെന്റിമീറ്റർ.

ത്രികോണയോഗം

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ 5 സെന്റിമീറ്റർ, 12 സെന്റിമീറ്റർ, 13 സെന്റിമീറ്റർ എന്നിവയാണ്. ഇതൊരു മട്ടത്രികോണമാണല്ലോ.



വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം 3 : 4 : 5 ആയ ഏതെങ്കിലും ഒരു ത്രികോണം ഈ ത്രികോണത്തിനോട് ചേർത്ത് വെച്ച് വലിയൊരു ത്രികോണം ഉണ്ടാക്കാൻ പറ്റുമോ? ഇങ്ങനെ ചേർത്ത് വയ്ക്കാവുന്ന ഇത്തരം എത്ര ത്രികോണങ്ങളുണ്ട്? അവയുടെ വശങ്ങളുടെ നീളം എന്തെല്ലാമാണ്?

ഏതെങ്കിലും ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 3 : 5 : 8 ആകുമോ?

മറ്റൊരുതരം കണക്ക് നോക്കാം:

ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ, *AB, BC* ഇവ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 2 : 3 ഉം *BC, CA* ഇവ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 4 : 5 ഉം ആണ്. മൂന്നു വശങ്ങളും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?

AB, *BC* ഇവ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 2 : 3 എന്നതിന്റെ അർഥം *AB* യുടെ നീളം *BC* യുടെ $\frac{2}{3}$ ഭാഗം എന്നാണ്.

BC, *CA* ഇവ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 4 : 5 എന്നതിന്റെ അർഥം, *CA* യുടെ നീളം *BC* യുടെ $\frac{5}{4}$ മടങ്ങ് എന്നാണ്.

അപ്പോൾ *BC* യുടെ നീളം കൊണ്ടളന്നാൽ, *AB* യുടെ നീളം $\frac{2}{3}$, *BC* യുടെ നീളം 1, *CA* യുടെ നീളം $\frac{5}{4}$.

ഇനി *BC* യുടെ $\frac{1}{12}$ ഭാഗം കൊണ്ടാണ് അളക്കുന്നതെങ്കിലോ? എല്ലാ നീളവും 12 മടങ്ങാകും.

അതായത്, *AB* യുടെ നീളം $\frac{2}{3} \times 12 = 8$, *BC* യുടെ നീളം 12. *CA* യുടെ നീളം $\frac{5}{4} \times 12 = 15$.

നീളങ്ങളുടെ അംശബന്ധം $8 : 12 : 15$

ഇത് ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചും ചെയ്യാം.

ഏതോ ഒരു നീളത്തിന്റെ 2 മടങ്ങ് *AB* യും 3 മടങ്ങ് *BC* യുമാണെന്നാണ് ആദ്യം പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന അംശബന്ധത്തിന്റെ അർഥം. രണ്ടാമത്തെ അംശബന്ധത്തിന്റെ അർഥമോ?

കോൺക്രീറ്റിലെ കൂട്ട്

കോൺക്രീറ്റ് മിശ്രിതം തയാറാക്കുന്നതിന് ഒരു ചാക്ക് സിമന്റിന് രണ്ട് ചാക്ക് മണൽ എന്ന കണക്കിനും, ഒരു ചാക്ക് മണലിന് രണ്ടു ചാക്ക് കരിങ്കൽക്കഷണങ്ങൾ എന്ന കണക്കിനുമാണ് എടുക്കാറ്. ഒരു ചാക്ക് സിമന്റിന് എത്ര ചാക്ക് കരിങ്കൽക്കഷണങ്ങൾ വേണം? രണ്ടു ചാക്ക് മണലിന് നാല് ചാക്ക് കരിങ്കൽക്കഷണങ്ങൾ വേണ്ടിവരുമല്ലോ. അതായത്, ഒരു ചാക്ക് സിമന്റിന് രണ്ടു ചാക്ക് മണലും, നാലു ചാക്ക് കരിങ്കൽക്കഷണങ്ങളും വേണം.

ഇത് ഇങ്ങനെ പറയാം.

സിമന്റും മണലും തമ്മിലും, മണലും കരിക്കൽക്കഷണങ്ങളും തമ്മിലും അംശബന്ധം 1 : 2 തന്നെയാണ്. രണ്ടാമത്തെ അംശബന്ധം 2 : 4 എന്നു മാറ്റിയെഴുതിയാൽ, സിമന്റും മണലും, കരിങ്കൽക്കഷണങ്ങളും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 1 : 2 : 4 എന്ന് എളുപ്പം കാണാം.

ഒരു നീളത്തിന്റെ 4 മടങ്ങ് BC യും 5 മടങ്ങ് CA യും. ഈ രണ്ട് കൊച്ചു നീളങ്ങൾ കൊണ്ടളക്കുമ്പോൾ BC യുടെ നീളം വ്യത്യസ്തമായതിനാൽ ഈ നീളങ്ങളും വ്യത്യസ്ത മാണ്. ഇവയെ x സെന്റിമീറ്റർ, y സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ

$AB = 2x$ സെന്റിമീറ്റർ, $BC = 3x$ സെന്റിമീറ്റർ

$BC = 4y$ സെന്റിമീറ്റർ, $CA = 5y$ സെന്റിമീറ്റർ

$3x, 4y$ എന്നിങ്ങനെ രണ്ടു തരത്തിലെഴുതിയതും BC യുടെ നീളം തന്നെ ആയതിനാൽ, $3x = 4y$

$$y = \frac{3}{4}x$$

അപ്പോൾ

$$CA = 5y \text{ സെ.മീ.} = 5 \times \frac{3}{4}x \text{ സെ.മീ.} = \frac{15}{4}x \text{ സെ.മീ.}$$

ഇനി

$$AB = 2x \text{ സെ.മീ.}$$
$$BC = 3x \text{ സെ.മീ.}$$
$$CA = \frac{15}{4}x \text{ സെ.മീ.}$$

എന്നു കണക്കാക്കാം. ഇവ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $2 : 3 : \frac{15}{4}$. എണ്ണൽസംഖ്യകൾ മാത്രമുപയോഗിച്ച്, ഇത് $8 : 12 : 15$ എന്നെഴുതാം.

മറ്റൊരു ചിന്ത

AB, BC ഇവ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $2 : 3$ എന്നതിന്റെ അർഥം, BC യുടെ $\frac{2}{3}$ ഭാഗമാണ് AB എന്നാണല്ലോ. BC, CA ഇവ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $4 : 5$ എന്നതിനർഥം, BC യുടെ $\frac{5}{4}$ മടങ്ങാണ് CA എന്നും.

മറ്റൊരു വിധത്തിൽപ്പറയാം. BC യുടെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗം കൊണ്ടളന്നാൽ AB യുടെ നീളം 2; BC യുടെ $\frac{1}{4}$ ഭാഗം കൊണ്ടന്നാൽ CA യുടെ നീളം 5. അപ്പോൾ BC യുടെ $\frac{1}{12}$ ഭാഗം കൊണ്ടളന്നാലോ? AB യുടെ നീളം 8; CA യടെ നീളം 15, BC യുടെ നീളം 12. അതായത്, AB, BC, CA ഇവ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $8 : 12 : 15$.

1) ജോണി 50000 രൂപയും, ജലീൽ 40000 രൂപയും, ജയൻ 20000 രൂപയും മുടക്കി ഒരു കൂട്ടുകച്ചവടം തുടങ്ങി. ഒരു മാസം കഴിഞ്ഞപ്പോൾ കിട്ടിയ 3300 രൂപ ലാഭം, മുടക്കുമുതലിന്റെ അംശബന്ധത്തിൽ വീതിച്ചു. ഓരോരുത്തർക്കും എത്ര രൂപ കിട്ടി?

2) മൂന്ന് ജലസംഭരണികളുടെ ഉള്ളളവ് തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 2 : 3 : 5 ആണ്. ഏറ്റവും ചെറുതിൽ 2500 ലിറ്റർ വെള്ളം കൊള്ളും, മറ്റ് രണ്ടെണ്ണത്തിൽ എത്ര ലിറ്റർ വീതം വെള്ളം കൊള്ളും?

3) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ 1 : 3 : 5 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്. ഓരോ കോണും എത്രയാണ്?

4) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ പുറംകോണുകൾ 5 : 6 : 7 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്. ഈ കോണുകളുടെ അളവുകളെന്താണ്?

കോണുകളുടെ അംശബന്ധം

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 1 : 2 : 3. കോണുകൾ എന്തൊക്കെയാണ്? അംശബന്ധം 2 : 3 : 5 ആയാലോ? 5 : 7 : 12 ആയാലോ? ഈ ത്രികോണങ്ങൾക്കെല്ലാം പൊതുവായി എന്തെങ്കിലും സവിശേഷതയുണ്ടോ? അംശബന്ധത്തിലെ സംഖ്യകൾക്കോ?

5) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം 2 : 3 : 4; ഏറ്റവും വലിയ വശം, ഏറ്റവും ചെറിയ വശത്തേക്കാൾ 20 സെന്റിമീറ്റർ കൂടുതലാണ്. ഓരോ വശത്തിന്റേയും നീളം കണ്ടുപിടിയ്ക്കുക.

6) ഒരു പെട്ടിയിൽ മൂന്നു നിറത്തിലുള്ള മുത്തുകളുണ്ട്. കറുത്ത മുത്തുകളുടെയും വെളുത്ത മുത്തുകളുടെയും എണ്ണം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം, 3 : 5; വെളുത്ത മുത്തുകളുടെയും ചുവന്ന മുത്തുകളുടെയും എണ്ണം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം, 2 : 3. മൂന്നു നിറത്തിലുള്ള മുത്തുകളുടെയും എണ്ണം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?

7) ഒരു ചതുരക്കട്ടയുടെ വീതിയും, നീളവും, ഉയരവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 3 : 2 : 5; അതിന്റെ വ്യാപ്തം 3750 ഘന സെന്റിമീറ്റർ. നീളവും വീതിയും ഉയരവും കണക്കാക്കുക.

തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്
• രണ്ടളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധത്തെ ഭാഗങ്ങളായും മടങ്ങുകളായും വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• രണ്ട് അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധവും, അതിലെ ഒരളവും ഉപയോഗിച്ച് രണ്ടാമത്തെ അളവ് കണക്കാക്കുന്നു.			
• രണ്ട് അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധവും, അവ തമ്മിലുള്ള മറ്റേതെങ്കിലും ഒരു ബന്ധവും കിട്ടിയാൽ ഓരോ അളവും കണക്കാക്കുന്ന രീതി വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• മൂന്നളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധത്തെ പലതരത്തിൽ വ്യാഖ്യാനിക്കുന്നു.			
• മൂന്നളവുകളിൽ രണ്ടെണ്ണം വീതമുള്ള അംശബന്ധം ഉപയോഗിച്ച് മൂന്നളവുകളും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം കണ്ടെത്തുന്നതിനുള്ള മാർഗം വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• മൂന്നളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധവും, ഏതെങ്കിലും രണ്ടെണ്ണം തമ്മിലുള്ള മറ്റേതെങ്കിലും ബന്ധവും കിട്ടിയാൽ ഓരോ അളവും കണ്ടെത്തുന്നു.			

8

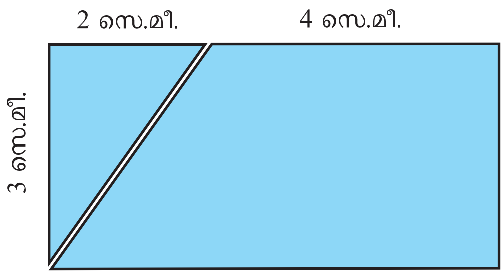
ചതുർഭുജപരപ്പ്

ഒരേ പരപ്പ്

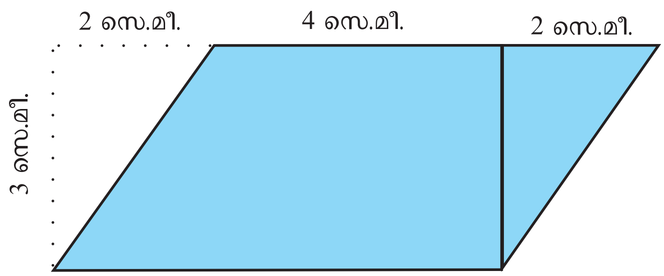
ഈ ചതുരം നോക്കൂ:

ഇതിന്റെ പരപ്പളവ് എന്താണ്?

ഇനി ഈ ചതുരം കട്ടിക്കടലാസിൽ വെട്ടിയെടുക്കുക. ചുവടെ കാണുന്നതുപോലെ, ഇടതുവശത്തുനിന്ന് ഒരു ത്രികോണം വെട്ടി മാറ്റുക:



ഈ ത്രികോണം വലതുവശത്തേക്ക് ചേർത്തുവച്ചാലോ?



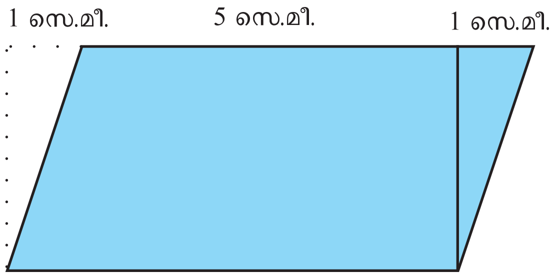
ഇപ്പോഴൊരു സാമാന്തരികമായി (ഇതു സാമാന്തരികംതന്നെയാണെന്ന് തെളിയിക്കാമോ?)

ഈ സാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എന്താണ്?

ചതുരത്തിൽനിന്ന് ഒന്നും വെട്ടിക്കളഞ്ഞില്ലല്ലോ; മാറ്റിവച്ചതല്ലേയുള്ളൂ?

അപ്പോൾ സാമാന്തരികത്തിന്റെയും പരപ്പളവ് 18 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ തന്നെയാണ്.

മുകളിൽ 2 സെന്റിമീറ്റർ എടുത്ത് മുറിക്കുന്നതിനുപകരം, 1 സെന്റിമീറ്റർ ആയാലോ?



പരപ്പളവ് മാറിയോ?

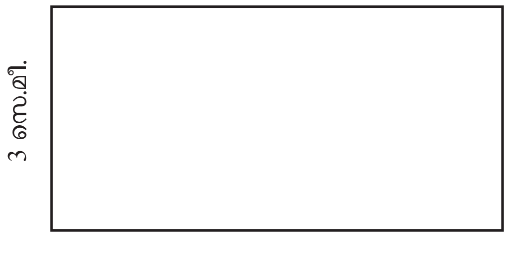
3 സെന്റിമീറ്ററെടുത്ത് മുറിച്ചാലോ?

ഇങ്ങനെ വരയ്ക്കുന്ന സാമാന്തരികങ്ങളുടെയെല്ലാം പരപ്പളവ് 18 ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്ററാണ്; ഒരു വശം 6 സെന്റിമീറ്ററാണ്; മറ്റേ വശം വ്യത്യസ്തമാണ്.

അപ്പോഴൊരു ചോദ്യം:

> വശങ്ങളുടെ നീളം 6 സെന്റിമീറ്ററും, 4 സെന്റിമീറ്ററും, പരപ്പളവ് 18 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററുമായ സാമാന്തരികം വരയ്ക്കാമോ?

ആദ്യം നേരത്തെ കണ്ട ചതുരംതന്നെ വരയ്ക്കാം:



മാറുന്ന പരപ്പളവ്

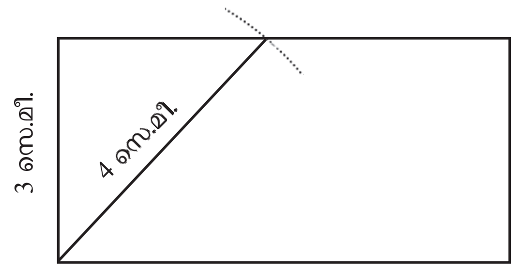
5 സെന്റിമീറ്റർ നീളവും 3 സെന്റിമീറ്റർ വീതിയുമുള്ള ഒരു ചതുരം വരയ്ക്കുക.

ഇനി വശങ്ങൾ അല്പം ചരിച്ച് ഇതേ അളവുകളിൽ ഒരു സാമാന്തരികം വരയ്ക്കുക.

പരപ്പളവ് കൂടിയോ? കുറഞ്ഞോ?

നമുക്ക് വേണ്ട സാമാന്തരികത്തിന്റെ രണ്ടാമത്തെ വശം 4 സെന്റിമീറ്ററാണ്; അതിന്, താഴത്തെ മൂലയിൽനിന്ന് 4 സെന്റിമീറ്റർ ആരത്തിൽ ഒരു വൃത്ത

ഭാഗം വരച്ച്, മുകളിലത്തെ വശത്തിനെ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന സ്ഥാനം അടയാളപ്പെടുത്തുക; ഈ സ്ഥാനവും താഴത്തെ മൂലയും യോജിപ്പിച്ച് ഒരു വര വരയ്ക്കുക:

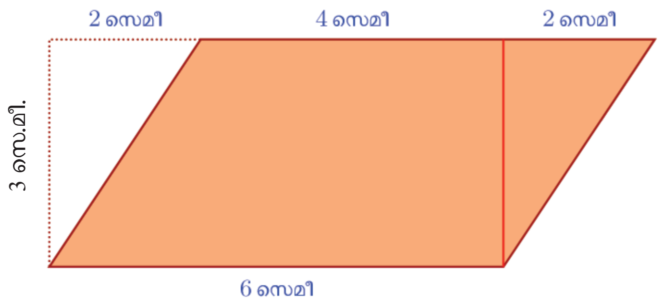


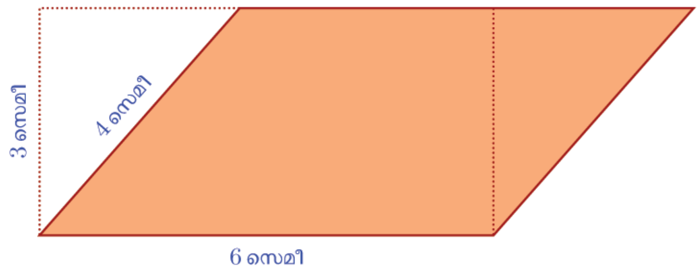
ഇനി താഴത്തെ വശത്തിന്റെ മറ്റേ മൂലയിൽനിന്ന് ഈ വരയ്ക്ക് സമാന്തരമായി വര വരച്ച്, മുകളിലത്തെ വശം നീട്ടി മുട്ടിച്ചാൽ മതി.

ഇതുപോലെ, വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം 6 സെന്റിമീറ്ററും, പരപ്പളവ് 18 സെന്റിമീറ്ററുമായ സമഭുജസാമാന്തരികം വരയ്ക്കുക.

സാമാന്തരികങ്ങൾ

ഒരു വശം 6 സെന്റിമീറ്ററും, പരപ്പളവ് 18 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററുമായ കുറേ സാമാന്തരികങ്ങൾ വരച്ചല്ലോ.



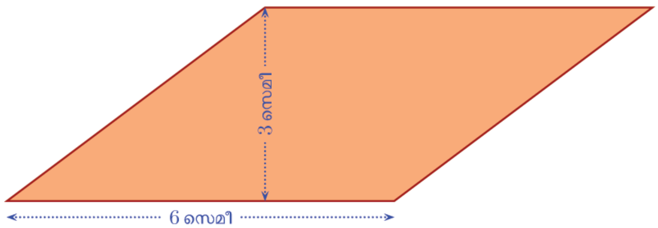


ഇവയിലെല്ലാം രണ്ടാമത്തെ വശം വ്യത്യസ്തമാണ്; പക്ഷേ മാറാത്തതായി മറ്റൊരളവുണ്ട്.

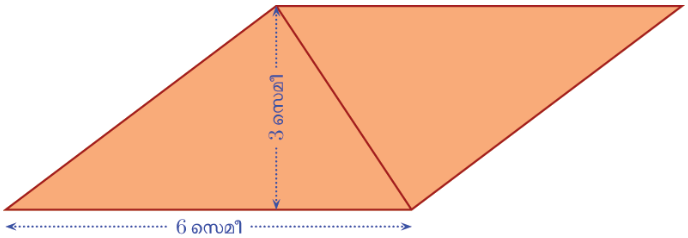
എല്ലാറ്റിലും താഴത്തെയും മുകളിലെയും വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലം 3 സെന്റിമീറ്റർ തന്നെയല്ലേ?

അപ്പോൾ, ഒരു ജോടി സമാന്തരവശങ്ങളുടെ നീളം 6 സെന്റിമീറ്ററും, അവ തമ്മിലുള്ള അകലം 3 സെന്റിമീറ്ററുമായ എല്ലാ സാമാന്തരികങ്ങളുടെയും പരപ്പളവ് 18 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ തന്നെയാണോ?

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ.



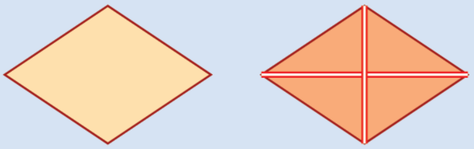
ഒരു വികർണം വരച്ച്, ഇതിനെ രണ്ട് തുല്യത്രികോണങ്ങളാക്കാം:



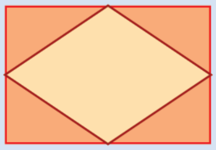
താഴത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എന്താണ്?

ഇരട്ടിപ്പരപ്പ്

ഒരേപോലെയുള്ള രണ്ടു സമഭുജസാമാന്തരികങ്ങൾ മുറിച്ചെടുത്ത് ഒരെണ്ണം വികർണങ്ങളിലൂടെ മുറിയ്ക്കുക.



ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന നാലു ത്രികോണങ്ങൾ മുറിയ്ക്കാത്ത സമഭുജസാമാന്തരികത്തിന്റെ ചുറ്റുമായി ചുവടെകാണുന്നതുപോലെ വെയ്ക്കുക:



ഇപ്പോൾ കിട്ടിയ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവും ഒരു സമഭുജസാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവും തമ്മിലെന്താണ് ബന്ധം?

ഈ ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എന്താണ്?

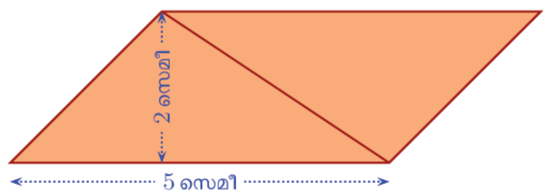
ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം 6 സെന്റിമീറ്ററും, എതിർമൂലയിൽനിന്നുള്ള അകലം 3 സെന്റിമീറ്ററും ആയതിനാൽ, പരപ്പളവ് $\frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$ ചതുരശ്രസെന്റി മീറ്റർ.

മറ്റേ ത്രികോണത്തിനും ഇതേ പരപ്പളവ് തന്നെയാണല്ലോ (എന്തു കൊണ്ട്?)

അപ്പോൾ സാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 18 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

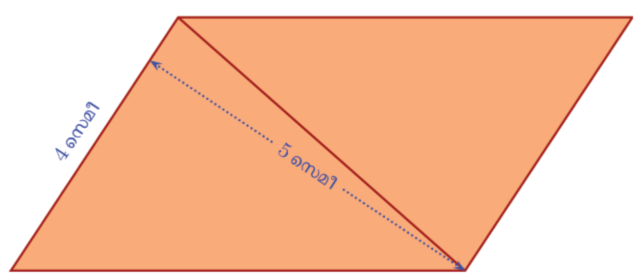
ഇതുപോലെ, ചുവടെ വരച്ചിരിക്കുന്ന സാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവെത്ര യാണ്?

നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ വികർണം വരച്ച് രണ്ട് ത്രികോണങ്ങളാക്കാം:



5 ന്റെയും 2 ന്റെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയാണ് ഓരോ ത്രികോണത്തിന്റെയും പരപ്പളവ്. അപ്പോൾ സാമ ന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, ഈ ഗുണനഫലമാണ്; അതായ ത്, $5 \times 2 = 10$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

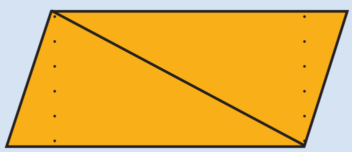
അളവുകൾ ഇങ്ങനെ ആയാലോ?



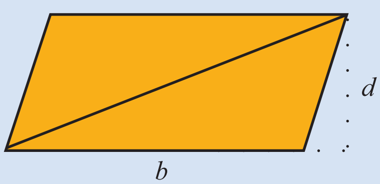
രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെയും ഒരു വശം 4 സെന്റിമീറ്റർ, എതിർമൂലയിൽനി ന്നുള്ള അകലം 5 സെന്റിമീറ്റർ; ഓരോന്നിന്റെയും പരപ്പളവ്, 4×5 ന്റെ പകുതി; സാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $4 \times 5 = 20$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

വലിയ വികർണം

സമാന്തരികത്തിന്റെ ചെറിയ വികർണം വരച്ച് രണ്ട് തുല്യത്രികോണങ്ങളാക്കി പര പ്പളവ് കണ്ടതുപോലെ, രണ്ടാമത്തെ വികർണം വരച്ചും പരപ്പളവ് കാണാം.



ഈ വലിയ വികർണം വരച്ചാലും രണ്ട് തുല്യത്രികോണങ്ങൾ കിട്ടും. താഴത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണാൻ മുകളിലെ വലതു മൂലയിൽനിന്ന് താഴത്തെ വര നീട്ടി വരച്ചതിലേക്ക് ലംബം വരച്ചാൽ മതി.



അതായത്, ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, $\frac{1}{2} bd$

സാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

$$2 \times \frac{1}{2} bd = bd$$

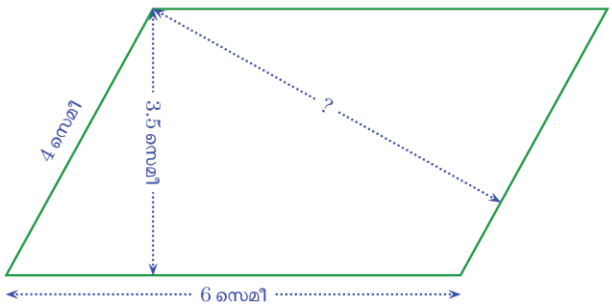
ഏതു സാമാന്തരികത്തിന്റെയും പരപ്പളവ് ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാമല്ലോ.

സാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, ഒരു വശത്തിന്റെയും എതിർവ ശത്തേക്കുള്ള അകലത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണ്.

വശങ്ങളുടെ നീളം 5 സെന്റിമീറ്ററും, 6 സെന്റിമീറ്ററും, പരപ്പളവ് 35 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററുമായ സാമാന്തരികം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുമോ?

വശങ്ങളുടെ നീളം 6 സെന്റിമീറ്ററും 5 സെന്റിമീറ്ററുമായ പല സാമാന്തരികങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് എത്ര വരെയാകാം? ഏറ്റവും കൂടുതൽ പരപ്പളവുള്ള സാമാന്തരികത്തിന്റെ പ്രത്യേകത എന്താണ്?

മറ്റൊരു കണക്ക്. ഈ സാമാന്തരികം നോക്കൂ:



ഇതിന്റെ ഇടതും വലതും വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലം എന്താണ്?

താഴത്തെ വശം 6 സെന്റിമീറ്ററും, മുകളിലെ വശത്തേക്കുള്ള അകലം 3.5 സെന്റിമീറ്ററും ആയതിനാൽ, സാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $6 \times 3.5 = 21$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

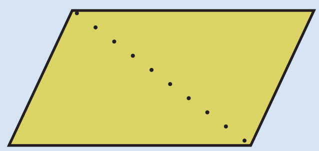
ഇടതു വശം 4 സെന്റിമീറ്റർ ആയതിനാൽ, വലതുവശത്തേക്കുള്ള അകലത്തിനെ 4 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാലും പരപ്പളവായ 21 ചതുരശ്രമീറ്റർ കിട്ടണം. അപ്പോൾ, വലതുവശത്തേക്കുള്ള അകലം $21 \div 4 = 5.25$ സെന്റിമീറ്റർ.

1) വശങ്ങളുടെ നീളം 5 സെന്റിമീറ്ററും, 6 സെന്റിമീറ്ററും, പരപ്പളവ് 25 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററുമായ സാമാന്തരികം വരയ്ക്കുക.

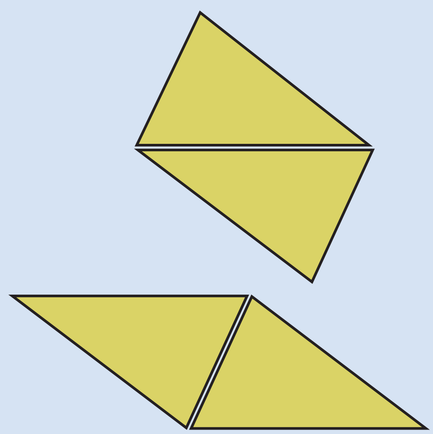
2) പരപ്പളവ് 25 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററും, ചുറ്റളവ് 24 സെന്റിമീറ്ററുമായ ഒരു സാമാന്തരികം വരയ്ക്കുക.

പരപ്പളവ് മാറാതെ

ചുവടെ കൊടുത്ത സാമാന്തരികം നോക്കൂ.

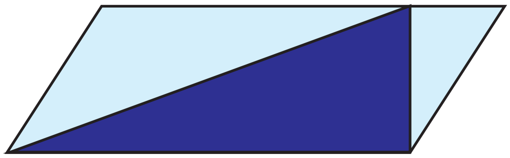


വികർണത്തിലൂടെ മുറിച്ചു മാറ്റി സമാന്തര വശങ്ങൾ ചേർത്ത് വച്ച് ഉണ്ടാക്കിയ പുതിയ സാമാന്തരികങ്ങൾ നോക്കൂ:



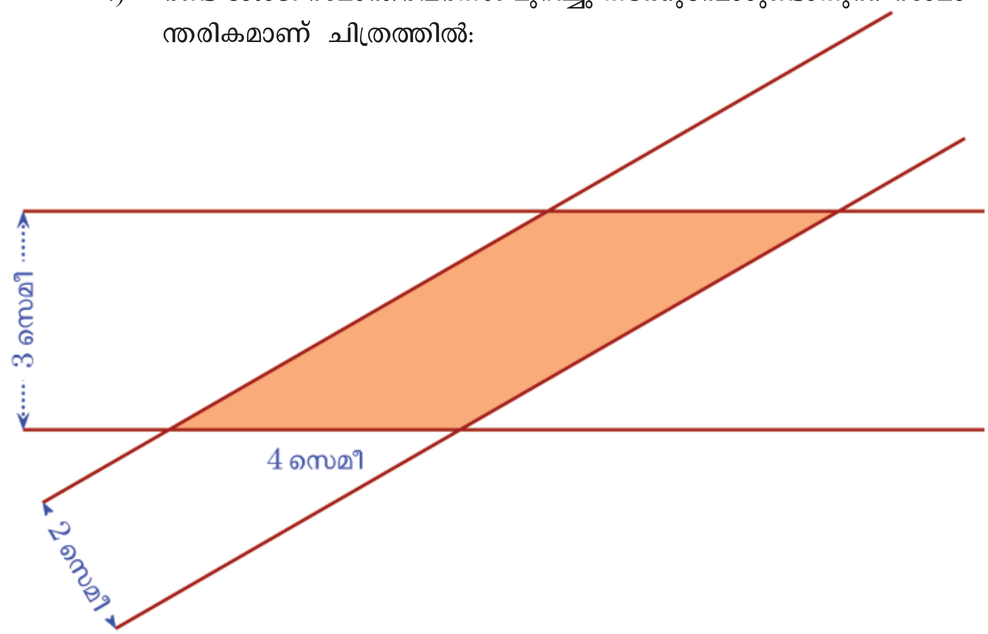
ഈ സാമാന്തരികങ്ങളുടെ വശങ്ങളും വികർണവും ആദ്യത്തെതിന്റെ ഒരു വികർണവും വശങ്ങളുമായി എങ്ങനെ ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു? മറ്റേ വികർണത്തിലൂടെ മുറിച്ച് മാറ്റിവച്ചാലോ?

3) ചിത്രത്തിൽ ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ താഴത്തെ രണ്ട് മൂലകൾ, മുകൾവശത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു.



ചിത്രത്തിലെ നീല നിറമുള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, സാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ്?

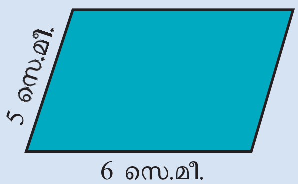
4) രണ്ട് ജോടി സമാന്തരവരകൾ മുറിച്ചു കടക്കുമ്പോഴുണ്ടാകുന്ന സാമാന്തരികമാണ് ചിത്രത്തിൽ:



സാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എന്താണ്? ചുറ്റളവോ?

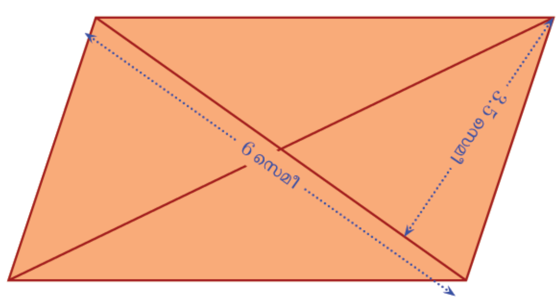
മാറാത്ത പരപ്പളവ്

വരകളുടെ നീളം 5 സെന്റിമീറ്ററും, 6 സെന്റിമീറ്ററുമായ ഒരു സാമാന്തരികം വരയ്ക്കുക.



താഴെയും മുകളിലുമുള്ള വശങ്ങളുടെ നീളവും പരപ്പളവും മാറാതെ, ഇടതും വലതുമുള്ള വശങ്ങൾ 10 സെന്റിമീറ്ററായി മറ്റൊരു സാമാന്തരികം വരയ്ക്കണം. എങ്ങനെ വരയ്ക്കും?

5) ചുവടെ വരച്ചിരിക്കുന്ന സാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

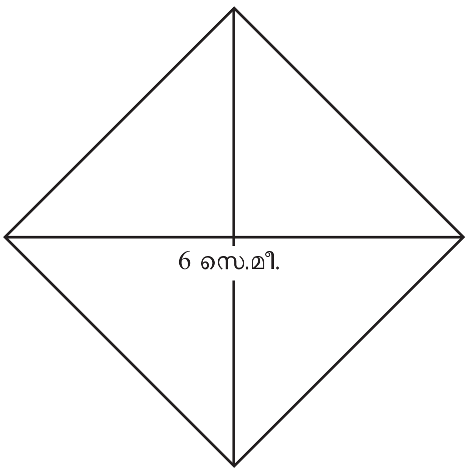


വികർണങ്ങളുടെ നീളം 6 സെന്റിമീറ്ററും, 4 സെന്റിമീറ്ററും ആയ സാമാന്തരികങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് എത്ര വരെയാകാം? ഏറ്റവും കൂടുതൽ പരപ്പളവുള്ള സാമാന്തരികത്തിന്റെ പ്രത്യേകത എന്താണ്?

സമഭുജസാമാന്തരികം

വശങ്ങളുടെ നീളം പറഞ്ഞാൽ സമചതുരം വരയ്ക്കാം; വികർണങ്ങളുടെ നീളം പറഞ്ഞാലും സമചതുരം വരയ്ക്കാം.

വികർണങ്ങൾ 6 സെന്റിമീറ്ററായ സമചതുരം വരയ്ക്കുക.



രണ്ടു ജോടി സമാന്തരവശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലവും ഒന്നുതന്നെയായ സാമാന്തരികത്തിന്റെ പ്രത്യേകതയെന്ത്?

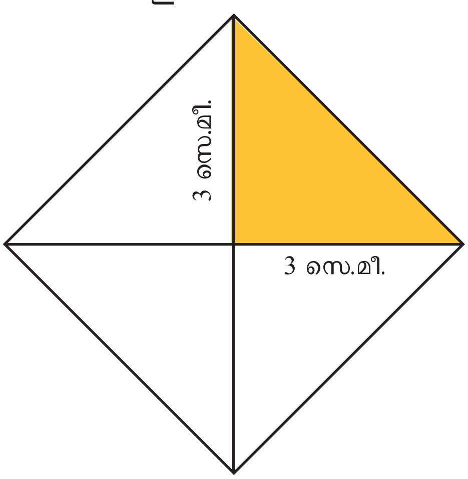
ഇതിന്റെ പരപ്പളവ് എന്താണ്?

സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, വശത്തിന്റെ വർഗമാണെന്നറിയാം; പക്ഷേ, ഈ സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം കണ്ടുപിടിക്കുക എളുപ്പമല്ല. പകരം ഇങ്ങനെ ആലോചിക്കാം.

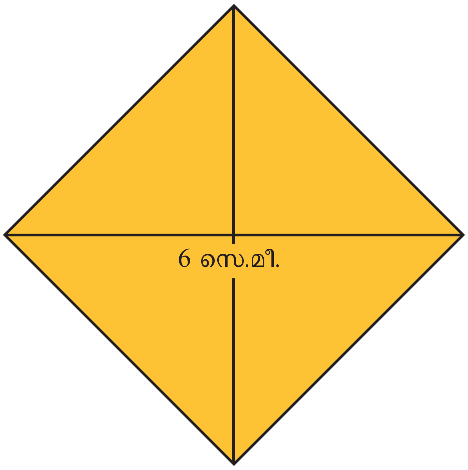
തുല്യമായ നാല് സമപാർശ്വമട്ടത്രികോണങ്ങൾ ചേർന്നതാണ് ഈ സമചതുരം.

ത്രികോണങ്ങളുടെയെല്ലാം ലംബവശങ്ങളുടെ നീളം 3 സെന്റിമീറ്റർ.

അപ്പോൾ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $\frac{1}{2} \times 3 \times 3 = 4\frac{1}{2}$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.



മൊത്തം സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, $4 \times 4\frac{1}{2} = 18$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.



ഇതുപോലെ, വികർണങ്ങൾ 5 സെന്റിമീറ്ററായ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എന്താണ്?

ലംബവശങ്ങൾ $2\frac{1}{2}$ സെന്റിമീറ്ററായ നാലു സമപാർശ്വമട്ടത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകളുടെ തുക; അതായത്,

$$4 \times \frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2} = \frac{25}{2} = 12\frac{1}{2} \text{ ച.സെ.മീ.}$$

ഇതിന്റെ പൊതുവായ തത്വം അറിയാൻ, അൽപം ബീജഗണിതം ഉപയോഗിക്കാം. വികർണങ്ങളുടെ നീളം d എന്നെടുത്താൽ, നാലു സമപാർശ്വമട്ടത്രികോണങ്ങളുടെയും ലംബവശങ്ങളുടെ നീളം, $\frac{1}{2}d$.

ഒരു സമപാർശ്വമട്ടത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}d \times \frac{1}{2}d = \frac{1}{8}d^2$$

സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്,

$$4 \times \frac{1}{8}d^2 = \frac{1}{2}d^2$$

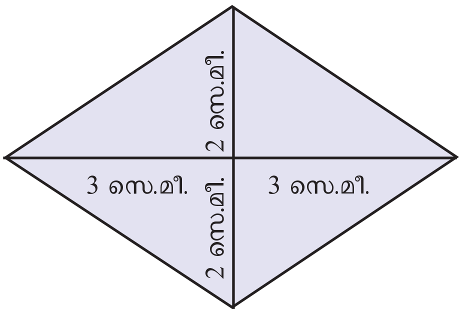
സാധാരണഭാഷയിൽ പറഞ്ഞാൽ,

സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് വികർണത്തിന്റെ വർഗത്തിന്റെ പകുതിയാണ്.

ഇതനുസരിച്ച് 8 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കാൻ, വികർണം എത്രയെടുക്കണം? വരച്ചു നോക്കൂ.

സമചതുരമല്ലാത്ത, സമഭുജസാമാന്തരികത്തിനെയും വികർണങ്ങൾ നാല് മട്ടത്രികോണങ്ങളാക്കുന്നുണ്ട് (സമ പാർശ്വമല്ലെന്ന് മാത്രം). അപ്പോൾ ഏതു സമഭുജസാമാ ന്തരികത്തിന്റെയും പരപ്പളവ് ഇങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി, വികർണങ്ങൾ 6 സെന്റിമീറ്ററും 4 സെന്റി മീറ്ററും ആയ സമഭുജസാമാന്തരികം നോക്കാം:



സമഭുജസാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവ്,

$$4 \times \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 12 \text{ ച.സെ.മീ.}$$

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ, വികർണങ്ങളുടെ നീളം d_1, d_2 ആയ സമഭുജസാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവ്,

$$4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} d_1 \times \frac{1}{2} d_2 = \frac{1}{2} d_1 d_2$$

അതായത്,

സമഭുജസാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, വികർണങ്ങളുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയാണ്.

ഉദാഹരണമായി, വികർണങ്ങളുടെ നീളം 5 സെന്റിമീറ്ററും, 4 സെന്റിമീറ്ററുമായ സമഭുജസാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, 10 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

1) $4\frac{1}{2}$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കുക.

2) 9 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരമല്ലാത്ത സമഭുജ സാമാന്തരികം വരയ്ക്കുക.

3) ഒരു സമഭുജസാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, 216 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററും, ഒരു വികർണം 24 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. അതിന്റെ ചുവടെപ്പറയുന്ന അളവുകൾ കണക്കാക്കുക.

   i) രണ്ടാമത്തെ വികർണത്തിന്റെ നീളം

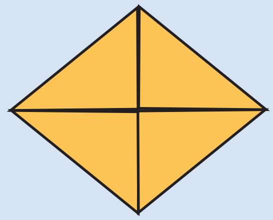
   ii) വശത്തിന്റെ നീളം

   iii) ചുറ്റളവ്

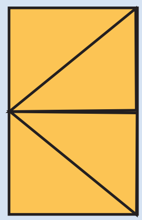
   iv) സമാന്തരവശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലം

സമഭുജസാമാന്തരികവും ചതുരവും

ഒരു സമഭുജസാമാന്തരികം വരച്ച് അതിന്റെ രണ്ട് വികർണങ്ങളും വരയ്ക്കുക.



ഇനി വികർണങ്ങളിലൂടെ മുറിച്ച് നാലു ത്രികോണങ്ങളാക്കുക. ഇവയെ ഒരു ചതുരമായി മാറ്റിയടുക്കാം.

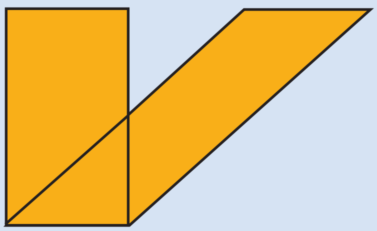


ഈ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, സമഭുജസാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവ് തന്നെയാണല്ലോ. ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളും, സമഭുജ സാമാന്തരികത്തിന്റെ വികർണങ്ങളും തമ്മിലെന്താണ് ബന്ധം?

അപ്പോൾ സമഭുജസാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവും വികർണങ്ങളുടെ നീളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം എന്താണ്?

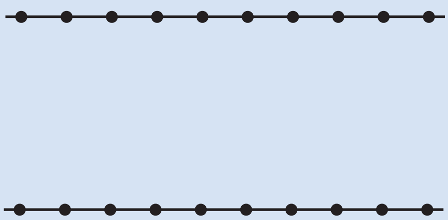
ചതുരം ചരിഞ്ഞാലും

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

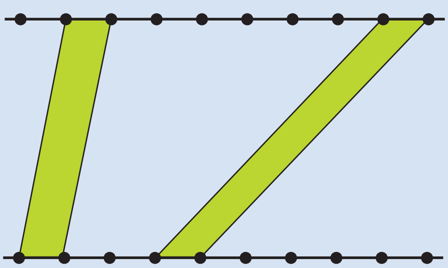


ഇതിലെ ചതുരത്തിനും സാമാന്തരികത്തിനും ഒരേ പരപ്പളവാണെന്ന് തെളിയിക്കുമോ?

സമാന്തരമായ രണ്ടു വര വരച്ച്, രണ്ടിലും ഒരേ ഇട വിട്ട് കുത്തുകളിടുക:



താഴത്തെ വരയിലെ അടുത്തടുത്തുള്ള ഏതെങ്കിലും രണ്ടു കുത്തുകളും, മുകളിലത്തെ വരയിലെ അടുത്തടുത്തുള്ള ഏതെങ്കിലും രണ്ടു കുത്തുകളും യോജിപ്പിച്ച് പല ചതുർഭുജങ്ങളുണ്ടാക്കാമല്ലോ.



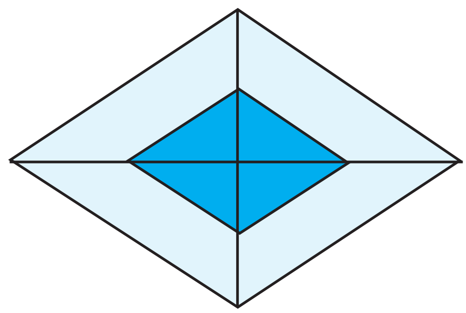
ഇവയെല്ലാം സാമാന്തരികങ്ങളാണോ? ഇവയുടെയെല്ലാം പരപ്പളവിനെക്കുറിച്ച് എന്തു പറയാം?

4) 68 മീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു കയറുകൊണ്ട് നിലത്തൊരു സമഭുജസാമാന്തരികമുണ്ടാക്കി. ഇതിന്റെ രണ്ട് എതിർമൂലകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം 16 മീറ്ററാണ്.

   i) മറ്റ് രണ്ട് എതിർമൂലകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം എത്ര മീറ്ററാണ്?

   ii) കയർ വളച്ചെടുത്ത സ്ഥലത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്ര ചതുരശ്രമീറ്ററാണ്?

5) ചിത്രത്തിൽ, ഒരു സമഭുജസാമാന്തരികത്തിന്റെ വികർണങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച്, ചെറിയൊരു ചതുർഭുജം വരച്ചിരിക്കുന്നു.



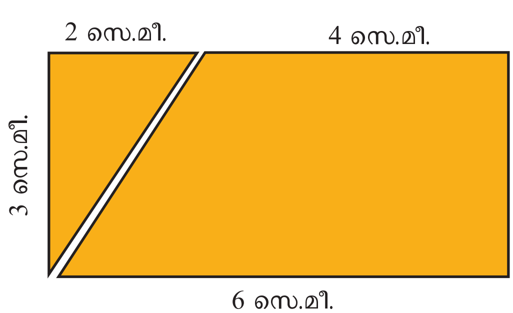
   i) ഈ ചതുർഭുജം സമഭുജസാമാന്തരികമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

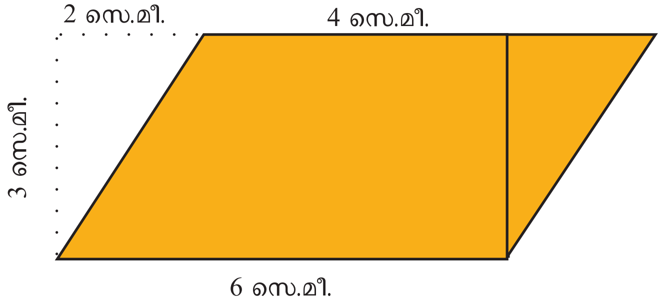
   ii) ചെറിയ സമഭുജസാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, 3 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററാണ്. വലിയ സമഭുജസാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എന്താണ്?

6) വശങ്ങൾ 6 സെന്റിമീറ്ററും 4 സെന്റിമീറ്ററുമായ ഒരു ചതുരത്തിനുള്ളിൽ നിർമിക്കാവുന്ന ഏറ്റവും വലിയ സമഭുജസാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

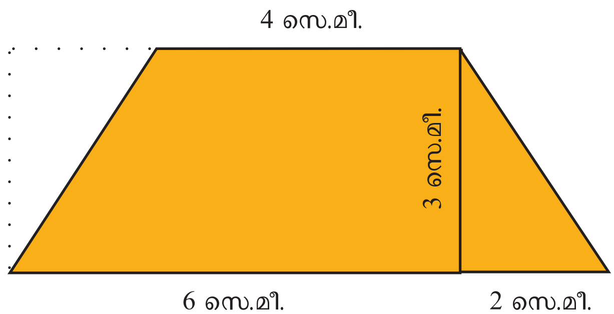
സമപാർശ്വലംബകം

ചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തുനിന്ന് ത്രികോണം വെട്ടിമാറ്റി മറുവശത്തുവച്ച് സാമാന്തരികം ഉണ്ടാക്കിയല്ലോ.





ത്രികോണം വലതുവശത്ത് മറിച്ചുവച്ചാൽ എന്താണ് കിട്ടുന്നത്?



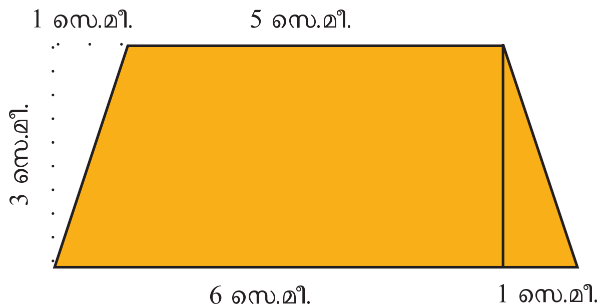
ഈ സമപാർശ്വലംബകത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് തന്നെയാണ്, അതായത്, 18 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

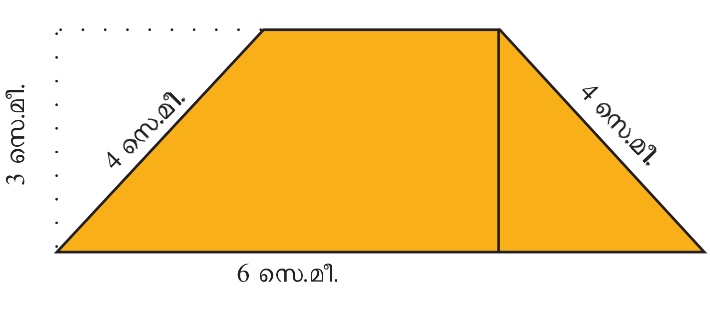
ഇതിന്റെ മറ്റ് ഏതൊക്കെ അളവുകളറിയാം?

സമാന്തരവശങ്ങളുടെ നീളം എന്തൊക്കെയാണ്?

അവ തമ്മിലുള്ള അകലമോ?

സാമാന്തരികത്തിൽ ചെയ്തതുപോലെ, പല ത്രികോണങ്ങൾ മുറിച്ചു നോക്കാം:





ഈ സമപാർശ്വലംബകങ്ങളുടെയെല്ലാം പരപ്പളവ് 18 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ തന്നെയാണ്.

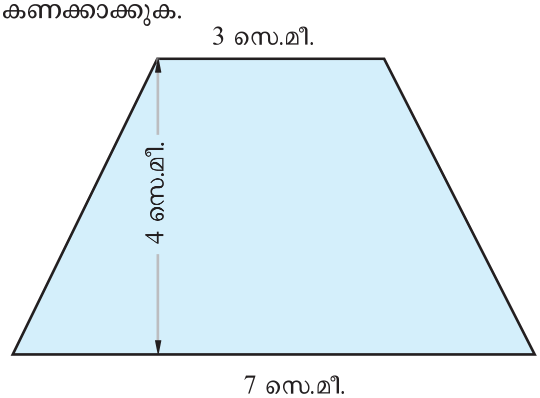
ഓരോന്നിലും, ചതുരത്തിന്റെ മുകളറ്റം അൽപം കുറച്ചു; താഴത്തെ വശം അത്രതന്നെ കൂട്ടി. മറ്റൊരു തരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ, എല്ലാറ്റിലും സമാന്തരവശങ്ങളുടെ തുക, ചതുരത്തിന്റേതുതന്നെയാണ്, അതായത്, 12 സെന്റിമീറ്റർ.

1) 7 സെന്റിമീറ്റർ നീളവും, 4 സെന്റിമീറ്റർ വീതിയുമുള്ള ചതുരം വരയ്ക്കുക. ഇതേ പരപ്പളവുള്ള സമപാർശ്വലംബകങ്ങൾ ചുവടെ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന അളവുകളിൽ വരയ്ക്കുക.

   i) സമാന്തരവശങ്ങളുടെ നീളം 9 സെന്റിമീറ്റർ, 5 സെന്റിമീറ്റർ

   ii) സമാന്തരമല്ലാത്ത വശങ്ങളുടെ നീളം 5 സെന്റിമീറ്റർ

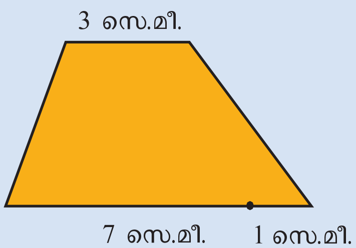
2) ചുവടെ വരച്ചിരിക്കുന്ന സമപാർശ്വലംബകത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.



3) ഒരു സമപാർശ്വലംബകത്തിന്റെ സാമാന്തരവശങ്ങളുടെ നീളം 8 സെന്റിമീറ്റർ, 14 സെന്റിമീറ്റർ, തുല്യവശങ്ങളുടെ നീളം 5 സെന്റിമീറ്റർ. അതിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

എങ്ങനെ വരയ്ക്കും?

ഈ ലംബകം നോക്കൂ:

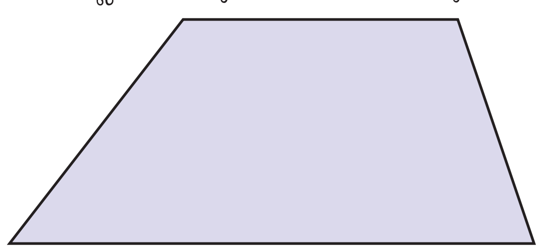


ഇതിന്റെ താഴത്തെ വശത്തിന്റെ നീളം 1 സെന്റിമീറ്റർ കുറച്ച് മറ്റൊരു ലംബകം വരയ്ക്കണം. പരപ്പളവ് മാറരുത്.

വരയ്ക്കാമോ?

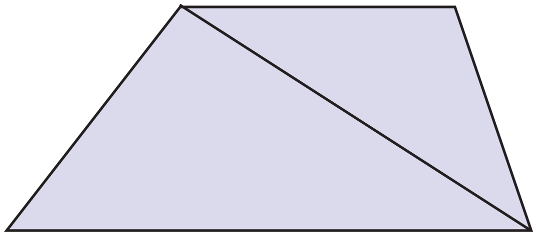
ലംബകം

സമപാർശ്വമല്ലാത്ത ഒരു ലംബകം നോക്കൂ.

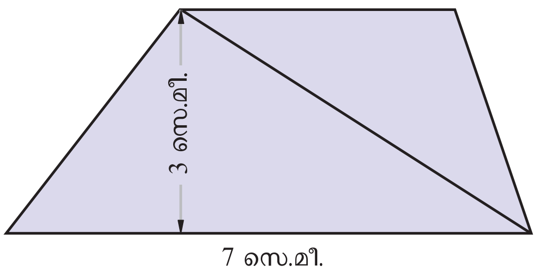


ഇതിന്റെ പരപ്പളവ് എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

സാമാന്തരികത്തിൽ ചെയ്തതുപോലെ, ഒരു വികർണം വരച്ച്, രണ്ട് ത്രികോണങ്ങളാക്കി ഭാഗിക്കാം:



താഴത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാൻ, താഴത്തെ വശത്തിന്റെ നീളവും, എതിർമൂലയിലേക്കുള്ള അകലവും വേണം:

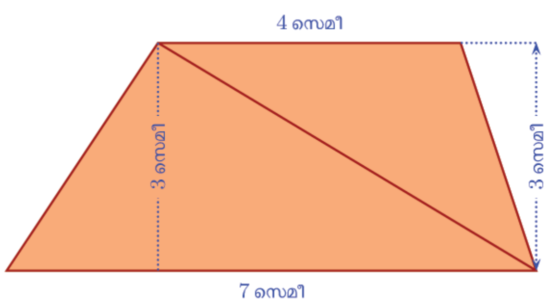


അപ്പോൾ ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്,

$$\frac{1}{2} \times 7 \times 3 = 10\frac{1}{2} \text{ ച.സെ.മീ.}$$

ഇനി മുകളിലത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവോ?

അതിന് മുകളിലത്തെ വശത്തിന്റെ നീളവും, എതിർമൂലയിൽനിന്നുള്ള അകലവും അളക്കണം. താഴത്തെയും മുകളിലെയും വശങ്ങൾ സമാന്തരമായതിനാൽ, ഈ അകലം 3 സെന്റിമീറ്റർ തന്നെയാണ്.

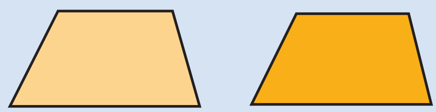


മുകളിലെ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്,

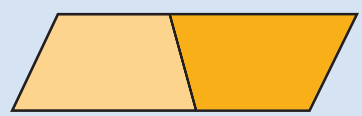
$$\frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6 \text{ ച.സെ.മീ.}$$

മറ്റൊരു രീതി

തുല്യമായ രണ്ടു ലംബകങ്ങൾ വെട്ടിയെടുക്കുക.



ഒരു ലംബകം തലതിരിച്ച്, മറ്റേ ലംബകവുമായി ഇങ്ങനെ ചേർത്തുവയ്ക്കുക:

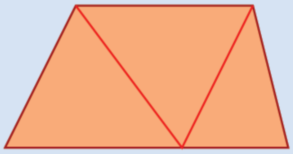


ഇപ്പോൾ ഒരു സാമാന്തരികമായി (എന്തുകൊണ്ട്?). ഇതിന്റെ മുകളിലെയും താഴെയുമുള്ള വശങ്ങൾ, ലംബകത്തിന്റെ സമാന്തരവശങ്ങൾ ചേർത്തുവച്ചതാണ് ഉയരം, ലംബകത്തിന്റെ ഉയരംതന്നെ.

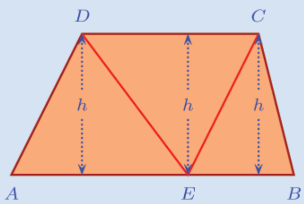
അപ്പോൾ, സാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, ലംബകത്തിന്റെ സമാന്തരവശങ്ങളുടെ തുകയുടെയും, ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണ്. ലംബകത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, ഈ ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയും.

ലംബകവും ത്രികോണങ്ങളും

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ.



ഒരു ലംബകത്തെ മൂന്ന് ത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിച്ചിരിക്കുന്നു. ലംബകത്തിന്റെ പരപ്പളവ് ഈ ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവിന്റെ തുകയാണല്ലോ.



ഈ ത്രികോണങ്ങൾക്കെല്ലാം ഒരേ ഉയരമാണ്.

അപ്പോൾ ലംബകത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

$$\left(\frac{1}{2}\times h\times AE\right)+\left(\frac{1}{2}\times h\times EB\right)+\left(\frac{1}{2}\times h\times CD\right)$$

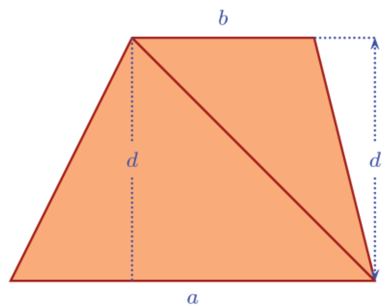
$$=\frac{1}{2}\times h(AE+EB+CD)$$

$$=\frac{1}{2}\times h(AB+CD)$$

ലംബകത്തിന്റെ പരപ്പളവ് ഈ രണ്ട് ത്രികോണങ്ങളുടെയും പരപ്പളവുകളുടെ തുകയാണ്. അതായത്, $16\frac{1}{2}$ ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്റർ.

ഇതു കണക്കാക്കാൻ ലംബകത്തിന്റെ ഏതൊക്കെ അളവുകളാണ് ഉപയോഗിച്ചത്?

ഈ കണക്കിന്റെ പൊതുവായ രീതി മനസിലാക്കാൻ, ഒരു ലംബകത്തിന്റെ സമാന്തരവശങ്ങളുടെ നീളം a, b എന്നും, അവ തമ്മിലുള്ള അകലം d എന്നും എടുത്തുനോക്കാം.



ചിത്രത്തിൽ താഴത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $\frac{1}{2}ad$ യും, മുകളിലെ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $\frac{1}{2}bd$ യും ആണല്ലോ. അപ്പോൾ ലംബകത്തിന്റെ പരപ്പളവ്,

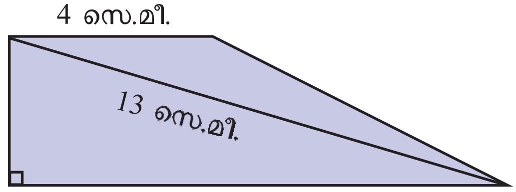
$$\frac{1}{2}ad + \frac{1}{2}bd = \frac{1}{2}(a+b)d$$

ബീജഗണിതം ഒഴിവാക്കി സാധാരണഭാഷയിൽ പറഞ്ഞാലോ?

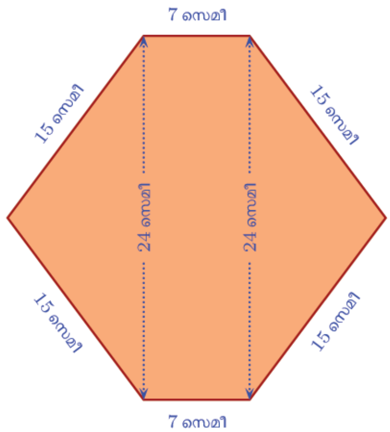
ലംബകത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, സമാന്തരവശങ്ങളുടെ തുകയുടെയും അവ തമ്മിലുള്ള അകലത്തിന്റെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയാണ്.

1) ഒരു ലംബകത്തിന്റെ സമാന്തരവശങ്ങളുടെ നീളം 30 സെന്റിമീറ്ററും, 10 സെന്റിമീറ്ററും. അവ തമ്മിലുള്ള അകലം 20 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. അതിന്റെ പരപ്പളവ് എന്താണ്?

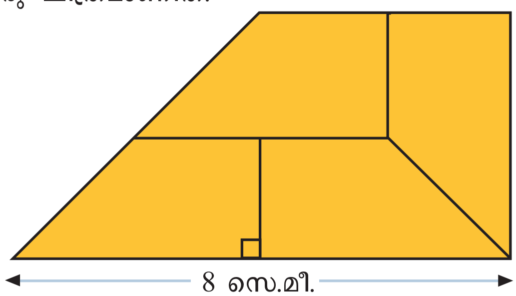
2) ചിത്രത്തിലെ ലംബകത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.



3) ചിത്രത്തിലെ ഷഡ്ഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.



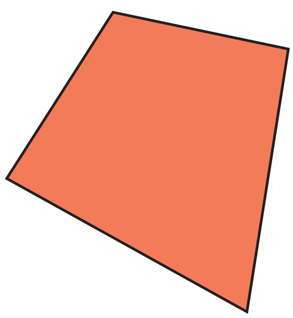
4) **ചതുർഭുജങ്ങളുടെ നിർമിതി** എന്ന പാഠത്തിൽ വരച്ച ഒരു ചിത്രമാണിത്.



നാലു ലംബകങ്ങളും ചേർന്ന വലിയ ലംബകത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എന്താണ്?

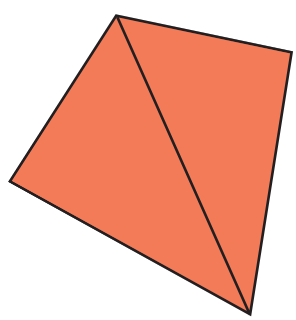
ചതുർഭുജം

ചിത്രത്തിലെ ചതുർഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

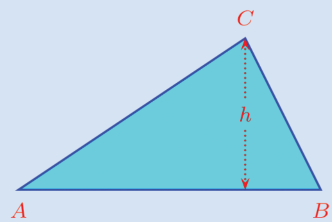


ഒരു വികർണം വരച്ച് രണ്ട് ത്രികോണങ്ങളാക്കിയാലോ?

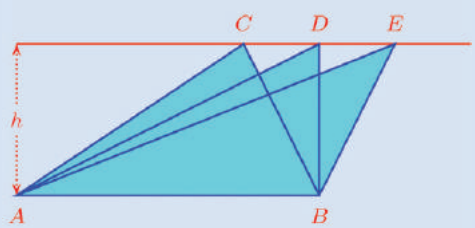
വികർണത്തിന്റെ നീളം അറിയാമെങ്കിൽ ഈ ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് കാണാൻ ഏത് അളവുകൾകൂടി വേണം?



മാറാത്ത പരപ്പും മാറുന്ന ചുറ്റളവും

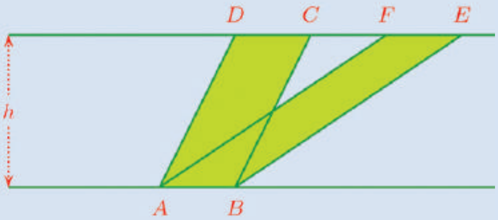


ചിത്രത്തിൽ ΔABC യുടെ പരപ്പളവ് $\frac{1}{2} \times AB \times h$ ആണല്ലോ. AB യ്ക്ക് സമാന്തരമായ ഒരു വരയിലൂടെ C യെ ചലിപ്പിച്ചാൽ ത്രികോണം മാറും.



ΔABC, ΔABD, ΔABE എന്നിവയ്ക്കെല്ലാം മൂന്നാം മൂലയിൽ നിന്നും AB യിലേക്കുള്ള ഉയരം h ആയതിനാൽ പരപ്പളവ് ഒന്നുതന്നെയാണ്. പക്ഷേ ഇവയുടെ ചുറ്റളവുകൾ വ്യത്യസ്തമാണെന്ന് കാണുമ്പോൾ തന്നെ അറിയാം. ചുറ്റളവ് ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ത്രികോണത്തിന്റെ പ്രത്യേകത എന്താണ്?

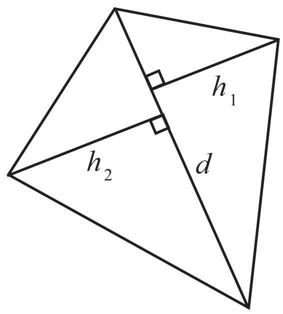
കുറഞ്ഞ ചുറ്റളവ്



ചിത്രത്തിൽ $ABCD$ എന്ന സാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $AB \times h$ ആണല്ലോ. CD എന്ന വശത്തെ AB ക്ക് സമാന്തരമായ EF എന്ന സ്ഥാനത്തേക്ക് മാറ്റിയാലും പരപ്പളവ് $AB \times h$ തന്നെ. CD യുടെ സ്ഥാനം മുകളിലെ വരയിൽ എവിടെയായാലും പരപ്പളവ് മാറുന്നില്ല. എന്നാൽ ചുറ്റളവ് മാറുന്നു. ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ചുറ്റളവുള്ള സാമാന്തരികത്തിന്റെ പ്രത്യേകത യെന്താണ്?

ഇതുപോലെ പരപ്പളവ് മാറാതെ ലംബകത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് മാറ്റാമോ? ഇവയിൽ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ചുറ്റളവുള്ള ലംബകത്തിന്റെ പ്രത്യേകത എന്താണ്?

എതിർമൂലകളിൽനിന്നും ഈ വികർണത്തിലേക്കുള്ള അകലങ്ങൾ കൂടി അറിഞ്ഞാൽ മതി. വികർണങ്ങളുടെ നീളം d എന്നും ഈ അകലങ്ങൾ h_1, h_2 എന്നെടുത്താൽ ചതുർഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

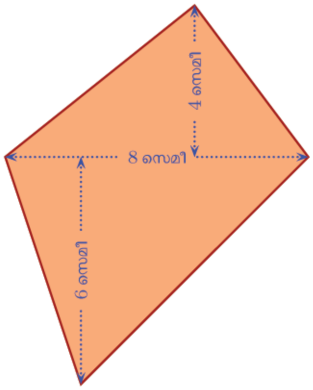


$$\frac{1}{2}dh_1 + \frac{1}{2}dh_2 = \frac{1}{2}d(h_1 + h_2)$$

ഇത് സാധാരണഭാഷയിൽ പറഞ്ഞാലോ?

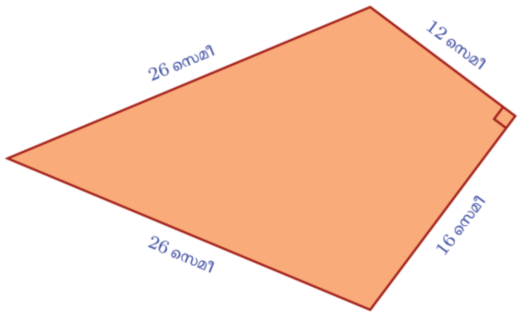
ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവ് ഒരു വികർണത്തിന്റെയും എതിർമൂലകളിൽനിന്ന് ആ വികർണത്തിലേക്കുള്ള അകലങ്ങളുടെ തുകയുടെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയാണ്.

1) ചിത്രത്തിലെ ചതുർഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

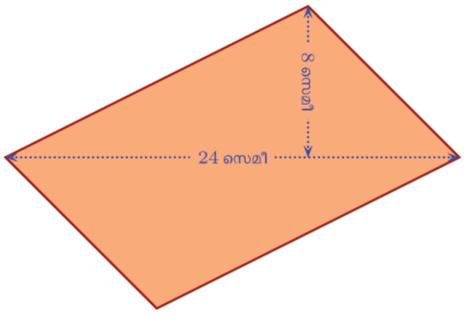


2) വികർണങ്ങൾ പരസ്പരം ലംബമായ ചതുർഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, വികർണങ്ങളുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

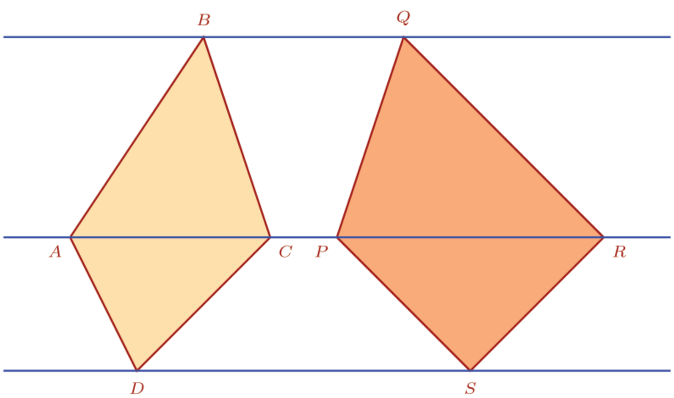
3) ചിത്രത്തിലെ ചതുർഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.



4) ചിത്രത്തിലെ സമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.



5) ചിത്രത്തിലെ നീലവരകൾ മൂന്നും സമാന്തരമാണ്:



ABCD, *PQRS* എന്നീ ചതുർഭുജങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം *AC*, *PR* എന്നീ വികർണങ്ങളുടെ നീളം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

i) പരപ്പളവുകൾ തുല്യമാകണമെങ്കിൽ, വികർണങ്ങളുടെ നീളം എങ്ങനെയായിരിക്കണം?

ii) 15 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള, സാമാന്തരികമോ ലംബകമോ അല്ലാത്ത, രണ്ടു ചതുർഭുജങ്ങൾ വരയ്ക്കുക.

തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്
• ഒരു ചതുരത്തിൽനിന്ന്, അതേ പരപ്പളവുള്ള പല സാമാന്തരികങ്ങൾ വരയ്ക്കാനുള്ള മാർഗം വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• സാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള മാർഗങ്ങൾ മനസിലാക്കുന്നു.			
• സമഭുജസാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, വികർണങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള മാർഗം മനസിലാക്കുന്നു.			
• നിശ്ചിത പരപ്പളവുള്ള സമഭുജസാമാന്തരികങ്ങൾ വരയ്ക്കുന്നു.			
• ചതുരത്തിൽനിന്ന്, അതേ പരപ്പളവുള്ള സമപാർശ്വലംബകം വരയ്ക്കാനുള്ള മാർഗം വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• ഏതു ചതുർഭുജത്തിന്റെയും പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള പൊതുവായ മാർഗം മനസിലാക്കുന്നു.			

9

ന്യൂനസംഖ്യകൾ

+	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
5	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
1	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
0	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
-1	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
-2	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
-3	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
-4	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
-5	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0

×	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
5	-25	-20	-15	-10	-5	0	5	10	15	20	25
4	-20	-16	-12	-8	-4	0	4	8	12	16	20
3	-15	-12	-9	-6	-3	0	3	6	9	12	15
2	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10
1	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5
-2	10	8	6	4	2	0	-2	-4	-6	-8	-10
-3	15	12	9	6	3	0	-3	-6	-9	-12	-15
-4	20	16	12	8	4	0	-4	-8	-12	-16	-20
-5	25	20	15	10	5	0	-5	-10	-15	-20	-25

പഴയ കണക്കുകൾ

പൂജ്യത്തിനേക്കാൾ താഴെയുള്ള താപനിലകളെ സൂചിപ്പിക്കാൻ ന്യൂന സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കുന്ന രീതി ഏഴാംക്ലാസിൽ കണ്ടില്ലേ? വെള്ളമുറഞ്ഞ് മഞ്ഞായി കട്ടപിടിക്കുന്ന താപനിലയെ ആണ് 0°C, അഥവാ പൂജ്യം ഡിഗ്രി സെൽഷ്യസ്, എന്നെടുത്തിരിക്കുന്നത്. അതിലും തണുപ്പേറിയ അവസ്ഥയെ കുറിക്കാൻ –1°C, –20.5°C എന്നെല്ലാം ഉപയോഗിക്കേണ്ടി വരുന്നു.

അളവുകളും സംഖ്യകളും

പലതരം അളവുകളെ സൂചിപ്പിക്കാനാണ് മനുഷ്യർ സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാക്കിയത്. ആടുമാടുകളെ മേച്ചു നടന്നിരുന്ന പുരാതനകാലത്ത്, കൂട്ടുകാരുടെയും, കാലിക്കൂട്ടങ്ങളുടെയുമൊക്കെ എണ്ണമറിയാൻ, മനുഷ്യർക്ക് എണ്ണൽസംഖ്യകൾ മാത്രം മതിയായിരുന്നു.

കൃഷി തുടങ്ങുന്നതോടെയാണ് നീളം, ഭാരം, സമയം മുതലായവ അളക്കേണ്ട ആവശ്യമുണ്ടായത്. ഇത്തരം കാര്യങ്ങൾ അളക്കാൻ ഒരു ഏകകം വേണം. ഉദാഹരണമായി, ഇന്നത്തെ കാലത്ത് നീളമളക്കാൻ മീറ്റർ, ഭാരമളക്കാൻ കിലോഗ്രാം, സമയമളക്കാൻ സെക്കന്റ് എന്നിങ്ങനെയുള്ള ഏകകങ്ങളാണ് ഉപയോഗിക്കുന്നത്. ഏകകത്തെക്കാൾ ചെറിയ അളവുകൾ സൂചിപ്പിക്കാനാണ് ഭിന്നസംഖ്യകൾ ഉണ്ടാക്കിയത്.

ചില കളികളിൽ പോയിന്റ് സൂചിപ്പിക്കാനും, ചില പരീക്ഷകളിൽ മാർക്കിടാനുമെല്ലാം ന്യൂനസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കുന്നതും കണ്ടു. ഇവയുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ, ചില കണക്കുകൂട്ടലുകളും കണ്ടു.

ഉദാഹരണമായി

$$3 - 7 = -(7 - 3) = -4$$

$$2 - 5\frac{1}{2} = -\left(5\frac{1}{2} - 2\right) = -3\frac{1}{2}$$

എന്നെല്ലാം കണക്കാക്കാം. ഈ ക്രിയകളുടെ പൊതുതത്വം ഏഴാം ക്ലാസിൽ ഇങ്ങനെ പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്:

> ഏതു രണ്ടു അധിസംഖ്യകളെടുത്താലും, ചെറുതിൽനിന്നു വലുതു കുറയ്ക്കുക എന്നതിന്റെ അർഥം, വലുതിൽനിന്ന് ചെറുത് കുറച്ചു കിട്ടുന്നതിന്റെ ന്യൂനമെടുക്കുക എന്നാണ്. ഇത് ബീജഗണിതത്തിൽ എഴുതിയാൽ

x, y എന്ന ഏതു രണ്ട് അധിസംഖ്യകളെടുത്താലും

$x < y$ ആണെങ്കിൽ $x - y = -(y - x)$

ഇതുപോലെ,

$$-3 + 7 = 7 - 3 = 4$$

$$-2 + 5\frac{1}{2} = 5\frac{1}{2} - 2 = 3\frac{1}{2}$$

എന്നിങ്ങനെയുള്ള കണക്കുകളും കണ്ടു.

ഈ ക്രിയകളുടെ പൊതുതത്വം ഇങ്ങനെയാണ്:

> ഏതു രണ്ടു അധിസംഖ്യകളെടുത്താലും ഒന്നിന്റെ ന്യൂനത്തിനോട് രണ്ടാമത്തേത് കൂട്ടുക എന്നതിന്റെ അർഥം, രണ്ടാമത്തേതിൽനിന്ന് ആദ്യത്തേത് കുറയ്ക്കുക എന്നാണ്.

അതായത്,

x, y എന്ന ഏതു രണ്ട് അധിസംഖ്യകളെടുത്താലും

$-x + y = y - x$

ഇവ രണ്ടുംകൂടി ഉപയോഗിച്ച്

$$-7 + 3 = 3 - 7 = -4$$

$$-5\frac{1}{2} + 2 = 2 - 5\frac{1}{2} = -3\frac{1}{2}$$

എന്നെല്ലാം കണക്കാക്കാം.

കൂടാതെ,

$$-3 - 7 = -(3 + 7) = -10$$

$$-2 - 5\frac{1}{2} = -\left(2 + 5\frac{1}{2}\right) = -7\frac{1}{2}$$

എന്നും നാം കണ്ടിട്ടുണ്ട്.

എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ ക്രിയകൾ

രണ്ടു കൂട്ടങ്ങൾ ഒന്നിച്ചെടുത്താൽ ആകെ എത്രയെണ്ണമുണ്ടാകും എന്ന കണക്കുകൂട്ടലിൽനിന്നാണ് എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ സങ്കലനം എന്ന ക്രിയ ഉണ്ടാകുന്നത്. ഒരേപോലെയുള്ള കുറേ വസ്തുക്കൾ എണ്ണിയെടുക്കാൻ, അവയെ ഒരേയെണ്ണമുള്ള കൂട്ടങ്ങളാക്കുന്നതിന്റെ സൗകര്യം തിരിച്ചറിഞ്ഞപ്പോഴാണ്, ആവർത്തനസങ്കലനം എന്ന ആശയം ഉണ്ടായതും, അതിനെ ഗുണനമെന്നു പേരിട്ടു വിളിച്ചതും. ഉദാഹരണമായി, തേങ്ങയും മറ്റും എണ്ണിയെടുക്കുമ്പോൾ, ഈരണ്ടായോ മുമ്മൂന്നായോ എണ്ണിയതിനു ശേഷം, രണ്ടുകൊണ്ടോ മൂന്നുകൊണ്ടോ ഗുണിച്ചെടുക്കുന്ന പതിവുണ്ട്.

ഈ ക്രിയകളുടെ പൊതുതത്വം കണ്ടുകഴിഞ്ഞു:

> ഏതു രണ്ടു അധിസംഖ്യകളെടുത്താലും ഒന്നിന്റെ ന്യൂനത്തിൽനിന്ന് രണ്ടാമത്തേത് കുറയ്ക്കുക എന്നതിന്റെ അർഥം, ഈ അധിസംഖ്യകളുടെ തുകയുടെ ന്യൂനമെടുക്കുക എന്നാണ്.

ബീജഗണിതത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ,

x, y എന്ന ഏതു രണ്ട് അധിസംഖ്യകളെടുത്താലും

$-x - y = -(x + y)$.

മുകളിൽപ്പറഞ്ഞ തത്വങ്ങളുപയോഗിച്ച് ഇവ കണക്കാക്കുക:

i)	$5 - 10$	ii)	$-10 + 5$
iii)	$-5 - 10$	iv)	$-5 - 5$
v)	$-5 + 5$	vi)	$-\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}$
vii)	$-\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2}$	viii)	$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

ന്യൂനവേഗം

ന്യൂനസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കുന്നതുകൊണ്ട് ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിലും ചില സൗകര്യങ്ങളുണ്ട്. ഏഴാം ക്ലാസിൽ കണ്ട ഇത്തരമൊരു ഉദാഹരണം വീണ്ടും നോക്കാം. (**ന്യൂനസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **വേഗക്കണക്ക്, ന്യൂനവേഗങ്ങൾ** എന്നീ ഭാഗങ്ങൾ)

ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ ക്രിയകൾ

ഏകകത്തേക്കാൾ ചെറിയ രണ്ടു നീളമോ ഭാരമോ ചേർത്തുവച്ചതിന്റെ അളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക എന്ന ആവശ്യമാണ്, ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ സങ്കലനം എന്ന ഗണിത ക്രിയയിലേക്ക് നയിച്ചത്. ഏകകത്തിന്റെ ചെറിയൊരു ഭാഗമെടുത്ത്, അതിന്റെയും ഒരു ഭാഗം കണക്കാക്കുന്നതാണ്, ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ ഗുണനം. ഇത് എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ ഗുണനം പോലെ ആവർത്തനസങ്കലനമല്ല. അതായത്, ഗണിതത്തിൽ ഒരേ പേരിലുള്ള (ഒരേ ചിഹ്നം ഉപയോഗിച്ചെഴുതുന്ന) ക്രിയകൾക്ക്, സാഹചര്യങ്ങളനുസരിച്ച് അർത്ഥം മാറും.

നിലത്തു നിന്ന് മുകളിലേക്കെറിയുന്ന ഒരു വസ്തു, കുറേ മുകളിലേക്കുയർന്നതിനുശേഷം താഴോട്ട് വീഴുമെന്നത് ഒരു സാധാരണ അനുഭവമാണ്. ഇതിനൊരു കണക്കുണ്ട്. നേരെ മുകളിലേക്കെറിയുകയാണെങ്കിൽ, ഓരോ സെക്കന്റിലും 9.8 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന തോതിൽ വേഗം കുറയും; അങ്ങനെ കുറഞ്ഞുകുറഞ്ഞ്, വേഗമേ ഇല്ലാതാകുമ്പോൾ താഴോട്ടു വീഴാൻ തുടങ്ങും. ഈ വീഴ്ചയിൽ ഓരോ സെക്കന്റിലും 9.8 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന തോതിൽ വേഗം കൂടിക്കൊണ്ടിരിക്കും.

49 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് വേഗത്തിൽ മുകളിലേക്ക് ഒരു വസ്തു എറിഞ്ഞാൽ 1 സെക്കന്റ് കഴിയുമ്പോൾ വസ്തുവിന്റെ വേഗം = $49 - 9.8 = 39.2$ മീറ്റർ/സെക്കന്റ് ആകും.

2 സെക്കന്റ് കഴിയുമ്പോൾ $49 - 2 \times 9.8 = 29.4$ മീറ്റർ/സെക്കന്റ്.

5 സെക്കന്റ് ആകുമ്പോൾ, വേഗം $49 - (5 \times 9.8) = 0$ ആകും. തുടർന്നങ്ങോട്ട്, താഴേയ്ക്കാണ് യാത്ര; വേഗം പഴയ തോതിൽത്തന്നെ കൂടും.

അപ്പോൾ, എറിഞ്ഞ് 7 സെക്കന്റ് കഴിയുമ്പോൾ വേഗം എന്താകും? 5 സെക്കന്റായപ്പോൾ വേഗം പൂജ്യമായി. ഇനിയുള്ള 2 സെക്കന്റ് താഴോട്ടാണ് യാത്ര. ഈ വേഗം $2 \times 9.8 = 19.6$ മീറ്റർ/സെക്കന്റ്.

എറിഞ്ഞ് 9 സെക്കന്റ് കഴിയുമ്പോഴുള്ള വേഗമോ?

ഈ യാത്രാവിവരണം ബീജഗണിതത്തിലാക്കാം.

എറിഞ്ഞുകഴിഞ്ഞ് t സെക്കന്റ് ആകുമ്പോൾ വേഗമെന്താണ്?

അഞ്ചു സെക്കന്റ് വരെ, കുറയുന്ന വേഗത്തോടെ മേലോട്ടാണ് യാത്ര. അതായത്, $t < 5$ ആണെങ്കിൽ, വേഗം $49 - 9.8t$ മീറ്റർ/സെക്കന്റ്

അഞ്ചു സെക്കന്റാകുമ്പോൾ, വേഗം പൂജ്യം; അതിനു ശേഷമുള്ള ഓരോ സെക്കന്റിലും കൂടുന്ന വേഗത്തോടെ കീഴോട്ടുള്ള യാത്ര. അതായത്, $t > 5$ എങ്കിൽ, $(t - 5)$ സെക്കന്റ് കീഴോട്ടാണ് യാത്ര. അപ്പോൾ വേഗം $9.8\,(t - 5) = 9.8t - 49$ മീറ്റർ/സെക്കന്റ്.

അപ്പോൾ t സെക്കന്റിലെ വേഗം v മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്നെടുത്താൽ, v യും t യും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ഇങ്ങനെ പലതായെഴുതേണ്ടിവരും:

$$v = \begin{cases} 49 - 9.8t, & t < 5 \text{ ആണെങ്കിൽ} \\ 0, & t = 5 \text{ ആണെങ്കിൽ} \\ 9.8t - 49, & t > 5 \text{ ആണെങ്കിൽ} \end{cases}$$

കീഴോട്ടുള്ള വേഗങ്ങളെ ന്യൂനസംഖ്യകളായി എഴുതിയാലോ?

ഉദാഹരണമായി 8 സെക്കന്റിലെ വേഗം കണ്ടുപിടിക്കാൻ, മുകളിലെ സമവവാക്യത്തിന്റെ മൂന്നാമത്തെ ഭാഗമാണ് ഉപയോഗിക്കേണ്ടത്. അതിൽ നിന്ന്, വേഗം $(9.8 \times 8) - 49 = 29.4$ മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന് കിട്ടും.

ഈ വേഗം താഴോട്ടായതിനാൽ, -29.4 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്നെഴുതാം.

ഇനി ഈ സമവാക്യത്തിന്റെ ആദ്യ ഭാഗമായ $49 - 9.8t$ എന്നതിൽ $t = 8$ എന്നെടുത്താൽ $v = 49 - (9.8 \times 8) = -29.4$ മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്നു തന്നെ കിട്ടും.

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ ഈ രീതിയിൽ വേഗത്തെ ന്യൂനസംഖ്യകളായും എഴുതിയാൽ, സമയവും വേഗവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം.

$$v = 49 - 9.8t$$

എന്ന ഒറ്റ സമവാക്യത്തിൽ ഒതുക്കാം.

ഇതിൽ മറ്റൊരു സൗകര്യവുമുണ്ട് – വേഗം അധിസംഖ്യയോ, ന്യൂനസംഖ്യയോ എന്നതിൽനിന്ന്, യാത്ര മേലോട്ടാണോ കീഴോട്ടാണോ എന്നും മനസിലാക്കാം.

ഗണിതലോകം

ഗ്രഹങ്ങളുടെ ഭ്രമണവും മറ്റും കണക്കാക്കാൻ വാനശാസ്ത്രകാരന്മാർ പണ്ടുകാലം മുതൽതന്നെ പലതരം ഗണിതക്രിയകൾ ഉപയോഗിച്ചിരുന്നു. എന്നാൽ ചലനത്തെയും ഊർജ്ജത്തെയും സംബന്ധിക്കുന്ന പൊതുവായ തത്വങ്ങൾ രൂപീകരിക്കാനും ഗണിതം ഉപയോഗിക്കാമെന്ന ചിന്ത പ്രബലമാകുന്നത്, പതിനാലാം നൂറ്റാണ്ടിൽ യൂറോപ്പിലാണ്.

ഇതിന്റെ തുടർച്ചയായിട്ടാണ്, പതിനേഴാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ഇറ്റലിയിലെ ഗലിലെയോ ഗലിലൈ, ഉയരത്തുനിന്നു പതിക്കുന്ന വസ്തു സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം, സമയത്തിന്റെ വർഗത്തിന്റെ നിശ്ചിത മടങ്ങാണ് എന്നും മറ്റും കണ്ടുപിടിക്കുന്നത്.

ഗണിതവും ഭൗതികശാസ്ത്രവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ഇങ്ങനെയാണ് അദ്ദേഹം പറഞ്ഞത്:

> പ്രപഞ്ചമെന്ന മഹാഗ്രന്ഥത്തിലാണ് തത്വചിന്തകൾ എഴുതപ്പെട്ടിരിക്കുന്നത്. അതു മനസ്സിലാക്കാൻ അത് എഴുതിയിരിക്കുന്ന ഭാഷ അറിയണം; ഗണിതത്തിന്റെ ഭാഷയിലാണ് അതു രചിച്ചിരിക്കുന്നത്.

98 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് വേഗത്തിൽ നേരെ മേലോട്ടെറിയുന്ന വസ്തുവിന്റെ ഓരോ സെക്കന്റിലുമുള്ള സഞ്ചാര വേഗം കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ഒരു സമവാക്യം എന്താണ്? ഈ വസ്തു എത്ര സെക്കന്റുകൊണ്ടാണ് ഏറ്റവും മുകളിലെത്തുന്നത്? 13 സെക്കന്റ് ആകുമ്പോൾ വസ്തുവിന്റെ വേഗം എത്രയാണ്? സഞ്ചരിക്കുന്നത് മുകളിലേക്കോ, താഴേക്കോ?

പുതിയ കൂട്ടലും കുറയ്ക്കലും

$v = 49 - 9.8t$ എന്നതിൽ

$t = 3$ എന്നെടുക്കുമ്പോൾ $v = 19.6$ എന്നും,

$t = 5$ എന്നെടുക്കുമ്പോൾ $v = 0$ എന്നും,

$t = 7$ എന്നെടുക്കുമ്പോൾ $v = -19.6$ എന്നും കിട്ടുന്നു.

ഇവിടെ t ആയി വ്യത്യസ്ത സംഖ്യകളെടുക്കുമ്പോൾ v ആയി അധിസംഖ്യയും, പൂജ്യവും, ന്യൂനസംഖ്യയുമെല്ലാം കിട്ടുന്നു.

ഏതു തരത്തിലുള്ള സംഖ്യയും v എന്ന ഒരക്ഷരം കൊണ്ടാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

ഇത് ബീജഗണിതത്തിലെ പൊതുവായ ഒരു രീതിയാണ്. അധിസംഖ്യകളെയും ന്യൂനസംഖ്യകളെയുമെല്ലാം, ചിഹ്നമൊന്നുമില്ലാതെയാണ് അക്ഷരങ്ങൾ കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. അപ്പോൾ x, y എന്നിങ്ങനെയുള്ള അക്ഷരങ്ങൾ, സന്ദർഭത്തിനനുസരിച്ച്, അധിസംഖ്യകളായും ന്യൂനസംഖ്യകളായും എടുക്കുകയാണ് പതിവ്.

ഇനി ഈ സമവാക്യം നോക്കുക:

$$z = x + y$$

ഇതിൽ $x = -10, y = 3$ എന്നെടുത്താൽ, നേരത്തെ കണ്ടതനുസരിച്ച്,

$$z = -10 + 3 = -7$$

ഇതുപോലെ

$x = -3, y = 10$ എന്നെടുത്താൽ,

$$z = -3 + 10 = 7$$

$x = 10, y = -3$ എന്നെടുത്താലോ?

$$z = 10 + (-3)$$

ഇതിനെന്താണ് അർഥം?

രണ്ട് അധിസംഖ്യകൾ കൂട്ടുമ്പോൾ, ഏതും ആദ്യമെടുക്കാമല്ലോ. ഈ തത്വം ഇവിടെയും ശരിയാകണമെങ്കിൽ,

$$10 + (-3) = -3 + 10$$

എന്ന് അർഥം കൽപിക്കണം.

അതായത്,

$$z = 10 + (-3) = -3 + 10 = 10 - 3 = 7$$

ഇതുപോലെ, $x = 8, y = -2$ എന്നെടുത്ത് കണക്കാക്കൂ

$x = -10, \ y = -3$ എന്നെടുത്താലോ?

$$z = -10 + (-3)$$

നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ -3 കൂട്ടുക എന്നത് 3 കുറയ്ക്കുക എന്നെടുത്താൽ

$$z = -10 + (-3) = -10 - 3 = -13.$$

$x = -5$ ഉം $y = -6$ ഉം ആയാലോ?

ഈ രീതിയിൽ

$$7 + (-5) = 7 - 5 = 2$$

$$-7 + (-5) = -7 - 5 = -12$$

എന്നെല്ലാം കണക്കാക്കാം.

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ

ഒരു അധിസംഖ്യയുടെ ന്യൂനം കൂട്ടുക എന്നതിന്റെ അർഥം, ആ അധിസംഖ്യ കുറയ്ക്കുക എന്നാണ്

ഇതുപോലെ കുറയ്ക്കലിനും അർഥം കൊടുക്കണം. ഉദാഹരണമായി ഈ സമവാക്യം നോക്കുക:

$$z = x - y$$

ഇതിൽ $x = 10, y = 3$ എന്നെടുത്താൽ,

$$z = 10 - 3 = 7$$

$x = 3, y = 10$ എന്നെടുത്താൽ,

$$z = 3 - 10 = -7$$

$x = 10, y = -3$ എന്നെടുത്താലോ?

$$z = 10 - (-3)$$

ഒരു അധിസംഖ്യയുടെ ന്യൂനം കുറയ്ക്കുന്നത് ഇതുവരെ കണ്ടിട്ടില്ലല്ലോ. എന്താണിതിന്റെ അർഥം?

ഇങ്ങനെ ആലോചിക്കാം: $10 - 3$ എന്നതിന്റെ ഒരർത്ഥം, 3 നോട് ഏതു സംഖ്യകൂട്ടിയാൽ 10 കിട്ടും എന്നാണല്ലോ. അതായത്, $3 + 7 = 10$; ആയതിനാൽ $10 - 3 = 7$

ഇതനുസരിച്ച്, $10 - (-3)$ എന്നതിന്റെ അർഥം, -3 നോട് ഏതു സംഖ്യകൂട്ടിയാൽ 10 കിട്ടും എന്നാകും.

-3 നോട് 3 കൂട്ടിയാൽ 0 ആകും; 10 ആകാൻ ഇനിയുമൊരു 10 കൂട്ടണം; ആകെ $10 + 3 = 13$ കൂട്ടണം. ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ

$$10 - (-3) = 10 + 3 = 13$$

അതായത്, 10 ൽനിന്നും -3 കുറയ്ക്കുക എന്നതിന്, 10 നോട് 3 കൂട്ടുക എന്നാണ് അർഥം കൊടുക്കുന്നത്.

ഇതുപോലെ, $x = -10, y = -3$ എന്നെടുത്താലോ?

$$z = -10 - (-3)$$

ഇവിടെയും −3 കുറയ്ക്കുക എന്നതിനെ 3 കൂട്ടുക എന്നെടുത്താൽ

$$z = -10 + 3 = -7$$

ഈ രീതിയനുസരിച്ച്

$$7 - (-5) = 7 + 5 = 12$$

$$15 - (-8) = 15 + 8 = 23$$

$$-7 - (-5) = -7 + 5 = -2$$

$$-15 - (-8) = -15 + 8 = -7$$

എന്നെല്ലാം കണക്കാക്കാം.

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ

ഒരു അധിസംഖ്യയുടെ ന്യൂനം കുറയ്ക്കുക എന്നതിന്റെ അർഥം, ആ അധിസംഖ്യ കൂട്ടുക എന്നാണ്.

നിർവചനങ്ങൾ

ഒരു വാക്കിന്റെയോ, ആശയത്തിന്റെയോ വിശദീകരണത്തെയാണ് നിർവചനം എന്നു പറയുന്നത്. ഉദാഹരണമായി,

ഷഡ്പദമെന്നാൽ ആറുകാലുള്ള ജീവിയാണ് എന്നത്, ജീവശാസ്ത്രത്തിലെ ഒരു നിർവചനമാണ്.

ഇതുപോലെ, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ എന്നതിന്റെ അർഥം,

$\frac{1}{2}$ ന്റെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗമെന്നാണ്

എന്നത് ഗണിതത്തിലെ ഒരു നിർവചനമാണ്. ഇതിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിലാണ് $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ എന്നു കണക്കാക്കുന്നത്.

ഈ നിർവചനമനുസരിച്ച്,

$$0 - (-3) = 0 + 3 = 3$$

$0 - 3$ നെ -3 എന്നെഴുതുന്നതുപോലെ $0 - (-3)$ നെ $-(-3)$ എന്നുമെഴുതാം. അതായത്

$$-(-3) = 0 - (-3) = 0 + 3 = 3$$

$-(-(-3))$ ആയാലോ?

$-(-3) = 3$; അപ്പോൾ $-(-(-3)) = -3$

ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ

ഒരു സംഖ്യയുടെ ന്യൂനത്തിന്റെ ന്യൂനം ആ സംഖ്യ തന്നെയാണ്

അതായത്,

x ഏത് സംഖ്യയായലും, $-(-x) = x$

1) x ആയി പല അധിസംഖ്യകളും, ന്യൂനസംഖ്യകളും, പൂജ്യവും എടുത്ത് $x + 1$, $x - 1$, $1 - x$ ഇവ കണക്കാക്കുക. ചുവടെപ്പറയുന്ന സമവാക്യങ്ങൾ എല്ലാ സംഖ്യകൾക്കും ശരിയാകുന്നുണ്ടോ എന്നു രിശോധിക്കുക.

i) $(1 + x) + (1 - x) = 2$ ii) $x - (x - 1) = 1$

iii) $1 - x = -(x - 1)$

2) x, y ആയി പലസംഖ്യകളെടുത്ത് $x + y, x - y$ ഇവ കണക്കാക്കുക. പലതരം സംഖ്യകൾക്കെല്ലാം ചുവടെപ്പറയുന്ന സമവാക്യങ്ങൾ ശരിയാകുന്നുണ്ടോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

i) $(x + y) - x = y$

ii) $(x + y) - y = x$

iii) $(x - y) + y = x$

ഉപയോഗങ്ങൾ

ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്ന് ഒരേ ദിശയിൽ കുറേ ദൂരവും, തുടർന്ന് അതേ ദിശയിലോ, എതിർദിശയിലോ കുറേ ദൂരവും സഞ്ചരിക്കുന്നത് സങ്കൽപ്പിക്കുക. അവസാനം, തുടങ്ങിയ സ്ഥാനത്തിന്റെ എവിടെയെത്തി എന്നാണ് കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത്. പല രീതിയിൽ ഇങ്ങനെ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഉദാഹരണങ്ങൾ ഒരു പട്ടികയായി എഴുതാം:

ആദ്യ സഞ്ചാരം	രണ്ടാം സഞ്ചാരം	അവസാന സ്ഥാനം
5 മീറ്റർ വലത്	3 മീറ്റർ വലത്	8 മീറ്റർ വലത്
3 മീറ്റർ വലത്	5 മീറ്റർ വലത്	
5 മീറ്റർ വലത്	3 മീറ്റർ ഇടത്	2 മീറ്റർ വലത്
3 മീറ്റർ ഇടത്	5 മീറ്റർ വലത്	
5 മീറ്റർ ഇടത്	3 മീറ്റർ വലത്	
3 മീറ്റർ വലത്	5 മീറ്റർ ഇടത്	
5 മീറ്റർ ഇടത്	3 മീറ്റർ ഇടത്	
3 മീറ്റർ ഇടത്	5 മീറ്റർ ഇടത്	

വലത്, ഇടത് എന്നീ വിശേഷണങ്ങൾ ഒഴിവാക്കാൻ, വലത്തോട്ട് സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരമെല്ലാം അധിസംഖ്യകളായും, ഇടത്തോട്ട് സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരങ്ങളെല്ലാം ന്യൂനസംഖ്യയായും എഴുതിയാലോ?

ആദ്യ സഞ്ചാരം	രണ്ടാം സഞ്ചാരം	അവസാന സ്ഥാനം
5 മീറ്റർ	3 മീറ്റർ	8 മീറ്റർ
3 മീറ്റർ	5 മീറ്റർ	8 മീറ്റർ
5 മീറ്റർ	–3 മീറ്റർ	2 മീറ്റർ
–3 മീറ്റർ	5 മീറ്റർ	2 മീറ്റർ
–5 മീറ്റർ	3 മീറ്റർ	–2 മീറ്റർ
3 മീറ്റർ	–5 മീറ്റർ	–2 മീറ്റർ
–5 മീറ്റർ	–3 മീറ്റർ	–8 മീറ്റർ
–3 മീറ്റർ	–5 മീറ്റർ	–8 മീറ്റർ

ഈ പട്ടികയിലെ ഓരോ വരിയിലും അവസാനത്തെ സംഖ്യ, ആദ്യത്തെ രണ്ടു സംഖ്യകൾ കൂട്ടിയതുതന്നെയല്ലേ?

അപ്പോൾ ഈ രീതിയിൽ അധിസംഖ്യകളും ന്യൂനസംഖ്യകളുമായി ദൂരം എഴുതിയാൽ, അവസാനസ്ഥാനം കണ്ടുപിടിക്കാൻ, ആദ്യത്തെ രണ്ടു ദൂരങ്ങൾ കൂട്ടിയാൽ മതി.

ഉദാഹരണമായി, 23 മീറ്റർ ഇടത്തോട്ടും 15 മീറ്റർ വലത്തോട്ടും സഞ്ചരിച്ചു എന്നു പറഞ്ഞാൽ, സ്ഥാനമാറ്റം

$$-23 + 15 = -8$$

അതായത്, തുടങ്ങിയ സ്ഥാനത്തുനിന്ന് 8 മീറ്റർ ഇടത്ത്.

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, ഈ രീതിയിൽ ആദ്യം x മീറ്ററും, പിന്നീട് y മീറ്ററുമാണ് സഞ്ചരിക്കുന്നതെങ്കിൽ, സ്ഥാനമാറ്റം കണ്ടുപിടിക്കാൻ

$$z = x + y$$

എന്ന ഒറ്റ സമവാക്യം മതി.

ന്യൂനസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കാതെ, ഇടതും വലതുമായി ദൂരങ്ങൾ പറയുകയാണെങ്കിൽ, പൊതുവായി സ്ഥാനമാറ്റം എഴുതാൻ എത്ര സമവാക്യങ്ങൾ വേണ്ടിവരുമെന്ന് ആലോചിച്ചു നോക്കൂ.

പലദൂരം ഒരുവാക്യം

ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്നു തുടങ്ങി കുറേ ദൂരം ഒരേ ദിശയിലും, തുടർന്ന് കുറെ ദൂരം അതേ ദിശയിലോ എതിർ ദിശയിലോ സഞ്ചരിക്കുന്ന വസ്തുവിന്റെ അവസാന സ്ഥാനം, ന്യൂനസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കാതെ ബീജഗണിതത്തിലെഴുതിയാലോ?

ആദ്യം സഞ്ചരിച്ച ദൂരം x, രണ്ടാമത് സഞ്ചരിച്ച ദൂരം y, അവസാന സ്ഥാനം z അകലെ എന്നെടുക്കാം. x, y ഇവ രണ്ടും ഒരേ ദിശയിലാണെങ്കിൽ $z = x + y$ എന്നെഴുതാം.

x വലത്തോട്ടും, y ഇടത്തോട്ടുമായാലോ? $x > y$ ആണെങ്കിൽ $z = x - y$ വലത്ത്, $x < y$ ആണെങ്കിൽ $z = y - x$ ഇടത്ത് എന്നിങ്ങനെ പറയേണ്ടി വരും.

x ഇടത്തോട്ടും y വലത്തോട്ടും ആയാലോ?

ബീജഗണിതത്തിൽ, അധിസംഖ്യകളെയും ന്യൂനസംഖ്യകളെയും ഒരുപോലെ അക്ഷരങ്ങൾകൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കുന്നതിന് മറ്റു ചില സൗകര്യങ്ങളുമുണ്ട്. നേരത്തെ കണ്ട ഒരു പൊതുതത്വം നോക്കുക:

> ഏതു രണ്ടു അധിസംഖ്യകളെടുത്താലും ചെറുതിൽനിന്നു വലുത് കുറയ്ക്കുക എന്നാൽ, വലുതിൽ നിന്ന് ചെറുത് കുറച്ച് കിട്ടുന്നതിന്റെ ന്യൂനമെടുക്കുക എന്നാണ് അർഥം

x, y എന്ന ഏതു രണ്ടു അധിസംഖ്യകളെടുത്താലും
$x < y$ ആണെങ്കിൽ $x - y = -(y - x)$

ഇതിൽ $x < y$ അല്ലെങ്കിലോ?

ഉദാഹരണമായി $x = 7, y = 3$ എന്നെടുത്താൽ

$$x - y = 7 - 3 = 4$$

$$y - x = 3 - 7 = -4$$

$$-(y - x) = -(-4) = 4$$

അപ്പോൾ $x - y = -(y - x)$.

ഇതുപോലുള്ള മറ്റു ജോടി സംഖ്യകൾ എടുത്തു പരിശോധിച്ചുനോക്കൂ. $x - y = -(y - x)$ എന്നത് ശരിയല്ലേ?

ഇനി ഇതിൽ x, y അധിസംഖ്യകൾതന്നെ ആകണമെന്നുണ്ടോ? ഉദാഹരണമായി, $x = 8, y = -3$ എന്നെടുത്താൽ

$$x - y = 8 - (-3) = 11$$

$$y - x = -3 - 8 = -11$$

$$-(y - x) = -(-11) = 11$$

$x - y = -(y - x)$ എന്നത് ഇതിലും ശരിയാണല്ലോ.

അധിസംഖ്യകളും ന്യൂനസംഖ്യകളുമായ മറ്റു ജോടികൾ പരിശോധിച്ചു നോക്കൂ. ഇത് ശരിയാകുന്നില്ലേ? അപ്പോൾ നേരത്തെ പറഞ്ഞ പൊതുതത്വം എല്ലാ സംഖ്യാജോടികൾക്കും ബാധകമാണ്.

ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകളെടുത്താലും ഒന്നിൽനിന്നു മറ്റൊന്നു കുറയ്ക്കുന്നത്, മറിച്ചു കുറയ്ക്കുന്നതിന്റെ ന്യൂനമാണ്

x, y എന്ന ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകളെടുത്താലും
$x - y = -(y - x)$

ഇനി രണ്ടാമത്തെ പൊതുതത്വം നോക്കാം:

ഒരു അധിസംഖ്യയുടെ ന്യൂനത്തോട് ഒരു അധിസംഖ്യ കൂട്ടുക എന്നതിന്റെ അർഥം രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യയിൽനിന്ന് ആദ്യസംഖ്യ കുറയ്ക്കുക എന്നാണ്.

അതായത്,

x, y ഏത് രണ്ട് അധിസംഖ്യകളെടുത്താലും $-x + y = y - x$.

ഇത് എല്ലാ സംഖ്യകൾക്കും (അധിസംഖ്യകൾക്കും ന്യൂനസംഖ്യകൾക്കും) ശരിയാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി, $x = -7$, $y = 3$ എന്നെടുത്താൽ

$$-x + y = -(-7) + 3 = 10$$

$$y - x = 3 - (-7) = 3 + 7 = 10$$

അപ്പോൾ,

$$-x + y = y - x$$

$x = -8$, $y = -5$ എന്നായാലോ?

$$-x + y = -(-8) + (-5) = 8 + (-5)$$

$$= 8 - 5 = 3$$

$$y - x = -5 - (-8) = -5 + 8$$

$$= 8 - 5 = 3$$

ഇവിടെയും

$$-x + y = y - x$$

മറ്റ് ജോടികൾ എടുത്ത് പരിശോധിച്ച് നോക്കൂ.

ഈ തത്വം എല്ലാ സംഖ്യകൾക്കും ശരിയാണെന്ന് കാണാം.

അപ്പോൾ നാം കണ്ട തത്വം ഇങ്ങനെ മാറ്റിയെഴുതാം.

ഏതു സംഖ്യയുടെയും ന്യൂനത്തോട് ഒരു സംഖ്യ കൂട്ടുന്നതും രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യയിൽ നിന്ന് ആദ്യസംഖ്യ കുറയ്ക്കുന്നതും തുല്യമാണ്.

x, y എന്ന ഏത് രണ്ട് സംഖ്യകളെടുത്താലും

$$-x + y = y - x.$$

മൂന്നാമതായി കണ്ട തത്വം എന്താണ്?

ഏതു രണ്ട് അധിസംഖ്യകളെടുത്താലും ഒന്നിന്റെ ന്യൂനത്തിൽനിന്ന് രണ്ടാമത്തേത് കുറയ്ക്കുക എന്നതിന്റെ അർഥം, ഈ അധിസംഖ്യകളുടെ തുകയുടെ ന്യൂനം എടുക്കുക എന്നാണ്.

ഇതിന്റെ ബീജഗണിതരൂപം എന്താണ്?

ഈ സമവാക്യം എല്ലാത്തരം സംഖ്യകൾക്കും ശരിയാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കൂ.

1) ചുവടെയുള്ളവ സർവസമവാക്യങ്ങൾ ആണോയെന്ന് പരിശോധിക്കുക. ഓരോന്നിലും, $x = 1, 2, 3, 4, 5$ എന്നെടുക്കുമ്പോഴും, $x = -1, -2, -3, -4, -5$ എന്നെടുക്കുമ്പോഴും കിട്ടുന്ന സംഖ്യാക്രമങ്ങൾ എഴുതുക.

i) $-x + (x + 1) = 1$ ii) $-x + (x + 1) + (x + 2) - (x + 3) = 0$

iii) $-x - (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) = 4$

2) x, y, z ആയി പല അധിസംഖ്യകളും ന്യൂനസംഖ്യകളും എടുത്ത്, $x + (y + z)$ ഉം $(x + y) + z$ ഉം കണക്കാക്കുക. എല്ലാറ്റിലും $x + (y + z) = (x + y) + z$ എന്ന സമവാക്യം ശരിയാകുന്നുണ്ടോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

പുതിയ ഗുണനം

ഒരു വരയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്ന ബിന്ദുവിനെക്കുറിച്ചുതന്നെ വീണ്ടും ആലോചിക്കാം. ഇത്തവണ വേഗവും കൂടി കണക്കിലെടുക്കാം. ഒരേ വേഗത്തിലാണ് യാത്രയെങ്കിൽ, ഒരു നിശ്ചിതസമയത്ത് തുടങ്ങിയ സ്ഥാനത്തുനിന്നുള്ള ദൂരം കണക്കാക്കാൻ വേഗത്തെ സമയം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ മതി. ഉദാഹരണമായി, വേഗം 10 മീറ്റർ/സെക്കന്റ്. 3 സെക്കന്റ് കൊണ്ട് 30 മീറ്റർ അകലെയാകും.

തുടങ്ങിയ സ്ഥാനത്തുനിന്ന് വലത്തോ, ഇടത്തോ സഞ്ചരിക്കാമല്ലോ. നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ വലത്തെ ദൂരങ്ങളെ അധിസംഖ്യകളായും, ഇടത്തെ ദൂരങ്ങളെ ന്യൂനസംഖ്യകളായും എഴുതാം.

വേഗം 10 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്നുതന്നെ എടുക്കാം. യാത്ര തുടങ്ങി t സെക്കന്റ് ആയപ്പോൾ എത്തുന്നത്, തുടങ്ങിയ സ്ഥാനത്തുനിന്ന് s മീറ്റർ അകലെയാണ് എന്നു പൊതുവായി പറഞ്ഞാൽ s, t ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം എന്താണ്?

യാത്ര വലത്തോട്ടാണെങ്കിൽ $s = 10t$ മീറ്റർ, ഇടത്തോട്ടാണെങ്കിൽ $s = -10t$ മീറ്റർ എന്നു രണ്ടായി പറയേണ്ടിവരും.

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ, v മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന വേഗത്തിൽ വലത്തോട്ട് സഞ്ചരിക്കുന്നതെങ്കിൽ $s = vt$ മീറ്റർ, ഇതേ വേഗത്തിൽ ഇടത്തോട്ടാണ് സഞ്ചരിക്കുന്നതെങ്കിൽ $s = -vt$ മീറ്റർ.

വലത്തോട്ടുള്ള വേഗം അധിസംഖ്യയായും, ഇടത്തോട്ടുള്ള വേഗം ന്യൂനസംഖ്യയായും എടുത്താൽ, രണ്ടിനും പൊതുവായി

$$s = vt$$

എന്നു പറയാൻ കഴിയുമോ?

ഉദാഹരണമായി, ഇടത്തോട്ടാണ് യാത്ര എന്നു കരുതുക. 2 സെക്കന്റ് കൊണ്ട് എത്തുന്നത് 20 മീറ്റർ ഇടത്താണ്.

ഇപ്പോൾ പറഞ്ഞതനുസരിച്ച്, $v = -10$ മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്നും $s = -20$ മീറ്റർ എന്നുമെടുക്കണം. അപ്പോൾ $s = vt$ എന്ന സമവാക്യം ശരിയാകണമെങ്കിൽ

$$(-10) \times 2 = -20$$

എന്നെടുക്കണം.

ഇതുപോലെ,

$$(-5) \times 8 = -40$$
$$(-1) \times 1 = -1$$
$$-\frac{1}{2} \times 4 = -2$$
$$\left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$$

എന്നെല്ലാമാണ് അർഥം.

അപ്പോൾ മറ്റൊരു ചോദ്യം: $5 \times (-8)$ എന്നാലെന്താണ് അർഥം?

അധിസംഖ്യകൾ തമ്മിൽ ഗുണിക്കുമ്പോൾ, ഏതു ക്രമത്തിലെടുത്താലും ഫലം ഒന്നുതന്നെയല്ലേ? ഉദാഹരണമായി $5 \times 8 = 8 \times 5 = 40$

ന്യൂനസംഖ്യകളിലും ഇതു ശരിയാകാനായി $5 \times (-8) = (-8) \times 5$ എന്നെടുക്കണം.

അതായത്,

$$5 \times (-8) = (-8) \times 5 = -40$$
$$1 \times (-1) = (-1) \times 1 = -1$$
$$\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

എന്നെല്ലാമാണ് അർഥം കൊടുക്കുന്നത്.

ഇതനുസരിച്ച്

$$3 \times (-5) = -(3 \times 5) = -15$$
$$(-3) \times 5 = -(3 \times 5) = -15$$

എന്നെല്ലാം കണക്കാക്കാം.

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ,

ഒരു അധിസംഖ്യയുടേയും ഒരു അധിസംഖ്യയുടെ ന്യൂനത്തിന്റെയും ഗുണനഫലം എന്നതിന്റെ അർഥം, ആ അധിസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ ന്യൂനം എന്നാണ്.

x, y എന്ന ഏത് രണ്ട് അധിസംഖ്യകളെടുത്താലും

$$(-x)\ y = x\ (-y) = -(xy)$$

സമയദൂരങ്ങളുടെ ഉദാഹരണം അൽപം മാറ്റി നോക്കാം. ഒരു വരയിലൂടെ ഒരേ വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ബിന്ദുവിനെ, യാത്രയിലെ ഏതോ ഒരു ഘട്ടം മുതലാണ് നോക്കിത്തുടങ്ങിയത് എന്നു കരുതുക. അപ്പോഴത്തെ സ്ഥാനം സൗകര്യത്തിനായി, O എന്നെടുക്കാം. 10 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന വേഗത്തിൽ ഇടത്തുനിന്ന് വലത്തേക്കാണ് യാത്ര എന്നും കരുതുക. നോക്കിത്തുടങ്ങി, 2 സെക്കന്റ് കഴിഞ്ഞാൽ O ൽ നിന്ന് 20 മീറ്റർ വലത്താണ് ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനം. നോക്കിത്തുടങ്ങിയതിന് 2 സെക്കന്റ് മുമ്പോ?

ഇനി യാത്ര വലത്തു നിന്ന് ഇടത്തേക്കാണെങ്കിലോ? നോക്കി തുടങ്ങുന്നതിന് 2 സെക്കന്റ് ശേഷം വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനം എവിടെയാണ്? 2 സെക്കന്റിന് മുമ്പോ?

വേഗം	സമയം	ദൂരം
10 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് വലത്തോട്ട്	2 സെക്കന്റിനുശേഷം	20 മീറ്റർ വലത്ത്
10 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് വലത്തോട്ട്	2 സെക്കന്റിനു മുമ്പ്	20 മീറ്റർ ഇടത്ത്
10 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് ഇടത്തോട്ട്	2 സെക്കന്റിനുശേഷം	20 മീറ്റർ ഇടത്ത്
10 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് ഇടത്തോട്ട്	2 സെക്കന്റിനു മുമ്പ്	20 മീറ്റർ വലത്ത്

വലത്തോട്ടുള്ള വേഗവും ദൂരവും അധികസംഖ്യകളായും, ഇടത്തോട്ടുള്ളവ ന്യൂനസംഖ്യകളായും എഴുതിയാലോ?

വേഗം	സമയം	ദൂരം
10 മീറ്റർ/സെക്കന്റ്	2 സെക്കന്റിനുശേഷം	20 മീറ്റർ
10 മീറ്റർ/സെക്കന്റ്	2 സെക്കന്റിനു മുമ്പ്	–20 മീറ്റർ
–10 മീറ്റർ/സെക്കന്റ	2 സെക്കന്റിനുശേഷം	–20 മീറ്റർ
–10 മീറ്റർ/സെക്കന്റ്	2 സെക്കന്റിനു മുമ്പ്	20 മീറ്റർ

സമയത്തിന്റെ കാര്യത്തിലും ശേഷം, മുമ്പ് എന്നീ വിശേഷണങ്ങൾ ഒഴിവാക്കാൻ, നോക്കിയതിനുശേഷമുള്ള സമയത്തെ അധികസംഖ്യയായും, മുമ്പുള്ള സമയത്തെ ന്യൂനസംഖ്യയായും എഴുതിയാലോ.?

v (മീറ്റർ/സെക്കന്റ്)	t (സെക്കന്റ്)	s (മീറ്റർ)
10	2	20
10	– 2	– 20
– 10	2	– 20
–10	– 2	20

ഇതിലും സമയവും വേഗവും ദൂരവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം എല്ല സന്ദർഭങ്ങളിലും

$$s = vt$$

എന്ന ഒറ്റ സമവാക്യമായി എഴുതാമോ?

അധിസംഖ്യകളുടെയും ന്യൂനസംഖ്യകളുടെയും ഗുണനത്തിന്റെ നിർവചനമനുസരിച്ച്, പട്ടികയിലെ ആദ്യത്തെ മൂന്ന് വരിയിലും ഇതു ശരിയാണ്. അവസാന വരിയിലോ?

$v = -10,\ t = -2$ എന്നെടുത്താൽ

$$vt = (-10) \times (-2)$$

ന്യൂനഗുണനം

ന്യൂനസംഖ്യകളുടെ ഗുണനം എന്ന ആശയം ആദ്യമായി അവതരിപ്പിച്ചത്, എ.ഡി. ഏഴാംനൂറ്റാണ്ടിൽ ഭാരതത്തിലെ ബ്രഹ്മഗുപ്തനാണ്. അദ്ദേഹത്തിന്റെ ബ്രഹ്മസ്ഫുടീയ സിദ്ധാന്തം എന്ന ഗ്രന്ഥത്തിലാണ് ഇത് വിവരിച്ചിരിക്കുന്നത്. ഒരു സംഖ്യയും അതിന്റെ വർഗവും ഉൾപ്പെടുന്ന പ്രശ്നങ്ങളെയും അവ പരിഹരിക്കാനുള്ള മാർഗങ്ങളും ഒരേ രീതിയിൽ എഴുതാൻ വേണ്ടിയാണ്, ന്യൂനസംഖ്യയെ ന്യൂനസംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിക്കുമ്പോൾ അധിസംഖ്യയായി എടുക്കണമെന്നും മറ്റുമുള്ള നിർവചനങ്ങൾ അദ്ദേഹം അവതരിപ്പിച്ചത്.

രണ്ടു ന്യൂനസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം എന്താണെന്ന് ഇതുവരെ പറഞ്ഞില്ലല്ലോ.

ഇവിടെ $s = 20$ ആണ്. അപ്പോൾ $s = vt$ എന്ന സമവാക്യം ശരിയാകണമെങ്കിൽ,

$$(-10) \times (-2) = 20$$

എന്നെടുക്കണം.

ഇതുപോലെ,

$$(-3) \times (-4) = 12$$

$$(-5) \times (-8) = 40$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}$$

എന്നെല്ലാമാണ് അർഥം. പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ

രണ്ട് അധിസംഖ്യകളുടെ ന്യൂനങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം എന്നതിന്റെ അർഥം ആ അധിസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം എന്താണ്.

x, y എന്ന ഏത് രണ്ട് അധിസംഖ്യകളെടുത്താലും $(-x)(-y) = xy$

1) x, y, z ആയി പല അധിസംഖ്യകളും ന്യൂനസംഖ്യകളും എടുത്ത് $(x + y) z$ ഉം $xz + yz$ ഉം കണക്കാക്കുക. എല്ലാറ്റിലും $(x + y) z = xz + yz$ എന്ന സമവാക്യം ശരിയാകുന്നുണ്ടോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

2) ചുവടെയുള്ള സമവാക്യങ്ങളിലെല്ലാം x ആയി പറഞ്ഞിട്ടുള്ള സംഖ്യകൾ എടുക്കുമ്പോൾ, y ആയി കിട്ടുന്ന സംഖ്യ കണ്ടുപിടിക്കുക.

   i) $y = x^2, x = -5, x = 5$ ii) $y = x^2 + 3x + 2, x = -2$

   iii) $y = x^2 + 5x + 4, x = -2, x = -3$

   iv) $y = x^3 + 1, \ x = -1$

   v) $y = x^3 + x^2 + x + 1, x = -1$

3) P എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നു തുടങ്ങി ഒരു വരയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്ന വസ്തുവിന്റെ വിവിധ സമയങ്ങളിലെ സ്ഥാനം കണക്കാക്കാൻ, സമയം t സെക്കന്റ് എന്നും, P യിൽ നിന്നുള്ള അകലം s മീറ്ററെന്നും എടുക്കുന്നു. ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം $s = 12t - 2t^2$ എന്നും കണക്കാക്കിയിട്ടുണ്ട്. ഇതിൽ P യിൽ നിന്ന് വലത്തോട്ടുള്ള അകലം അധിസംഖ്യയായും ഇടത്തോട്ടുള്ള അകലം ന്യൂനസംഖ്യയായുമായാണ് എടുത്തിരിക്കുന്നതത്.

   i) സമയം 6 സെക്കന്റ് ആകുന്നതുവരെ വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനം P യുടെ ഇടതോ, വലതോ?

ii) 6 സെക്കന്റ് ആകുമ്പോൾ, സ്ഥാനം എവിടെയാണ്?

iii) 6 സെക്കന്റ് കഴിഞ്ഞാലോ?

(ഇതിൽ $12t - 2t^2 = 2t(6 - t)$ എന്നെഴുതുന്നതാണ് സൗകര്യം)

4) എണ്ണൽസംഖ്യകളെയും, അവയുടെ ന്യൂനങ്ങളെയും പൂജ്യത്തെയും ചേർത്ത് പൊതുവായി പൂർണസംഖ്യകൾ എന്നു പറയാം. $x^2 + y^2 = 25$ എന്ന സമവാക്യം ശരിയാകുന്ന എത്ര ജോടി പൂർണസംഖ്യകൾ ഉണ്ട്?

ന്യൂനഹരണം

അധിസംഖ്യകളിലെല്ലാം ഹരണം എന്ന ക്രിയയ്ക്ക് അർഥം കൊടുക്കുന്നത്, ഗുണനത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിലാണല്ലോ. ഉദാഹരണമായി $6 \div 2$ എന്നതിന്റെ അർഥം, 2 നെ ഏതു സംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ 6 കിട്ടും എന്നാണ്. അതായത് $2 \times 3 = 6$ ആയതിനാൽ $6 \div 2 = 3$ എന്നു പറയുന്നു.

ഇതുപോലെ $\frac{3}{4} \times 2 = 1\frac{1}{2}$ ആയതിനാൽ $1\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = 2$ എന്നു പറയുന്നു. (ആറാംക്ലാസ്സിലെ **ഭാഗവും മടങ്ങും** എന്ന പാഠത്തിലെ **ഭിന്നഹരണം** എന്ന ഭാഗം)

അപ്പോൾ $(-6) \div 2$ എന്നതിന്റെ അർഥം, 2 നെ ഏതുസംഖ്യ കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ -6 കിട്ടും എന്നാണ്.

2 നെ -3 കൊണ്ട് ഗുണിക്കുമ്പോഴാണല്ലോ -6 കിട്ടുന്നത്.

ആയതിനാൽ $(-6) \div 2 = -3$ എന്നെഴുതാം.

-15 നെ 3 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാലോ?

$6 \div (-2)$ ആയാലോ?

-2 നെ ഏതു സംഖ്യ കൊണ്ട് ഗുണിക്കുമ്പോഴാണ് 6 കിട്ടുന്നത്?

അപ്പോൾ $6 \div (-2) = -3$.

$20 \div (-5)$ എന്താണ്?

$(-6) \div (-2)$ കണക്കാക്കാമോ?

ബീജഗണിതത്തിൽ പൊതുവേ, $x \div y$ എന്നതിനെ $\frac{x}{y}$ എന്നാണ് എഴുതുന്നത്. അപ്പോൾ

$$z = \frac{x}{y}$$

എന്ന സമവാക്യത്തിൽ

$x = -6, y = 2$ എന്നെടുത്താൽ $z = -3$

$x = 6, y = -2$ എന്നെടുക്കാൻ $z = -3$

$x = -6, y = -2$ എന്നെടുത്താൽ $z = 3$

-1 ന്റെ കൃതികൾ

$$(-1)^2 = (-1) \times (-1) = 1$$
$$(-1)^3 = (-1)^2 \times (-1) = 1 \times (-1) = -1$$
$$(-1)^4 = (-1)^3 \times (-1) = (-1) \times (-1) = 1$$
$$(-1)^5 = (-1)^4 \times (-1) = 1 \times (-1) = -1$$

എന്താണ് കാണുന്നത്? കുറെക്കൂടി കൃതികൾ കണക്കാക്കി നോക്കൂ. കൃത്യങ്കം ഇരട്ടസംഖ്യയാണെങ്കിൽ 1 ഉം, ഒറ്റസംഖ്യയാണെങ്കിൽ -1 ഉം കിട്ടുന്നില്ലേ?

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ ഏത് സംഖ്യ n എടുത്താലും

$$(-1)^n = \begin{cases} 1, & n \text{ ഇരട്ടസംഖ്യയാണെങ്കിൽ} \\ -1, & n \text{ ഒറ്റസംഖ്യയാണെങ്കിൽ} \end{cases}$$

വർഗമൂലം

25 ന്റെ വർഗമൂലം എത്രയാണ്?

$$5 \times 5 = 25$$

അതിനാൽ 25 ന്റെ വർഗമൂലമാണ് 5.

$$(-5) \times (-5) = 25$$

എന്നതും ഇപ്പോൾ കണ്ടു. അതായത്, −5 ഉം 25 ന്റെ വർഗമൂലം തന്നെയാണ്.

ഇതുപോലെ പൂജ്യമല്ലാത്ത ഏതു പൂർണ വർഗത്തിനും രണ്ടു വർഗമൂലങ്ങളുണ്ട്. അതിൽ ഒന്ന് അധിസംഖ്യയും, രണ്ടാമത്തേത് ആദ്യത്തേതിന്റെ ന്യൂനവും.

ഇവയിലെ അധിസംഖ്യയായ വർഗമൂലത്തേയാണ് $\sqrt{\ }$ ചിഹ്നം കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

ഉദാഹരണമായി: $\sqrt{25} = 5$

രണ്ടാമത്തെ വർഗമൂലമായ −5, അപ്പോൾ $-\sqrt{25}$ ആണല്ലോ.

1) $y = \frac{1}{x}$ എന്ന സമവാക്യത്തിൽ x ആയി $-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{5}$ എന്നീ സംഖ്യകൾ എടുക്കുമ്പോൾ y ആയി കിട്ടുന്ന സംഖ്യകൾ കണക്കാക്കുക.

2) $y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$ എന്ന സമവാക്യത്തിൽ $x = -2$ എന്നെടുക്കുമ്പോഴും $x = -\frac{1}{2}$ എന്നെടുക്കുമ്പോഴും y ആയി കിട്ടുന്ന സംഖ്യകൾ കണക്കാക്കുക.

3) $z = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$ എന്ന സമവാക്യത്തിൽ, x, y ആയി ചുവടെപ്പറയുന്ന സംഖ്യകളെടുക്കുമ്പോൾ z ആയി കിട്ടുന്ന സംഖ്യകൾ കണക്കാക്കുക.

i. $x = 10, y = -5$ ii. $x = -10, y = 5$

iii. $x = -10, y = -5$ iv. $x = 5, y = -10$

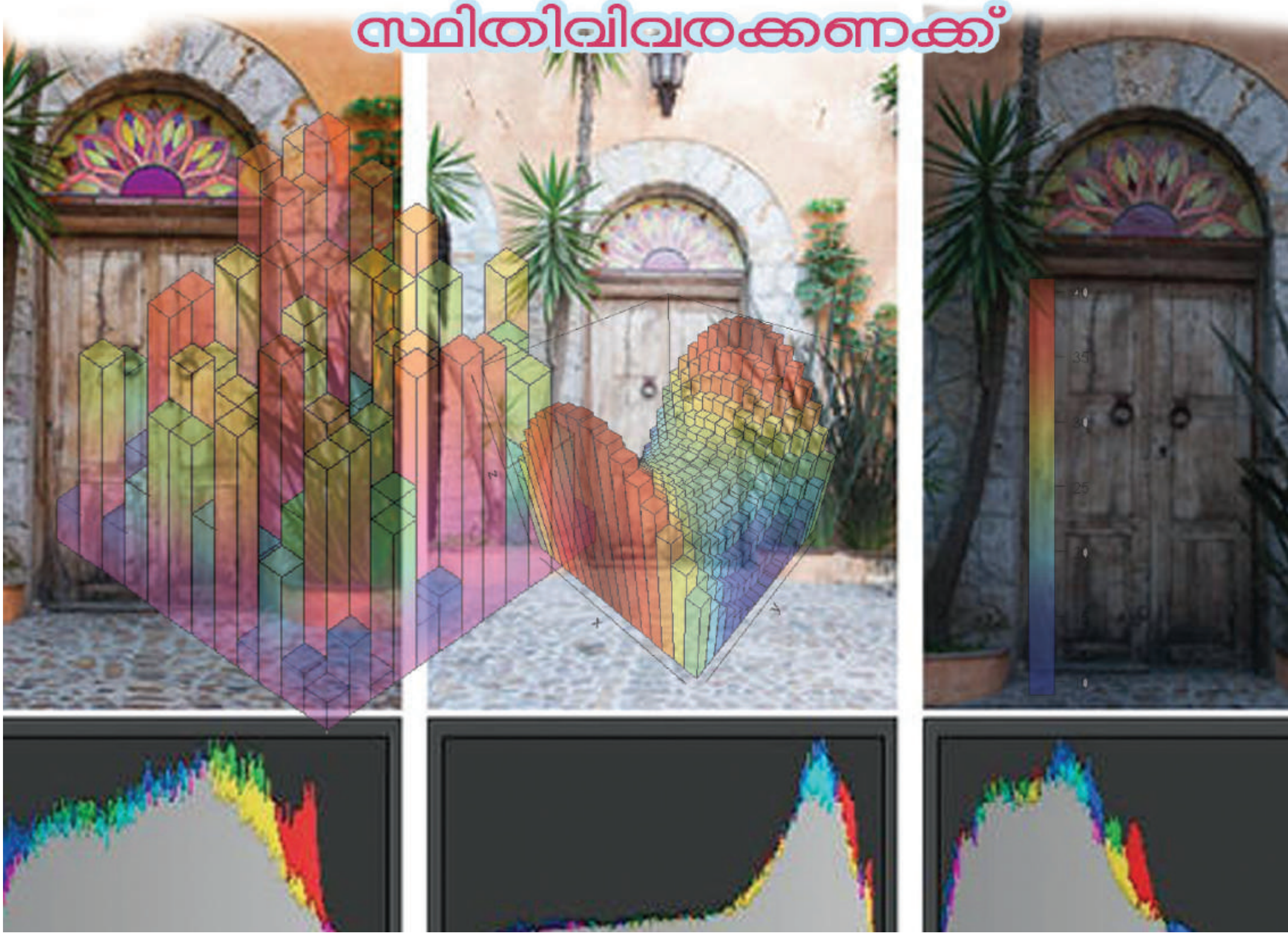
v. $x = -5, y = 10$

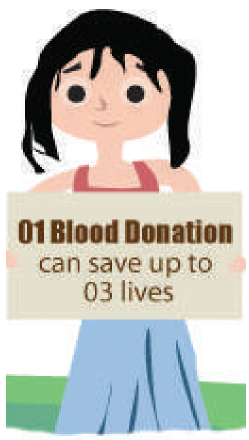
തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്
• ബീജഗണിതത്തിൽ അധിസംഖ്യകളേയും, ന്യൂനസംഖ്യകളേയും ചിഹ്നം ചേർക്കാതെ അക്ഷരങ്ങളായി എഴുതുന്ന രീതിയും, അതിന്റെ സൗകര്യവും മനസിലാക്കുന്നു.			
• അധിസംഖ്യകളേയും ന്യൂനസംഖ്യകളേയും ഒരുമിച്ചെടുക്കുമ്പോൾ സങ്കലനം, വ്യവകലനം എന്നീ ക്രിയകൾക്ക് പുതിയ നിർവചനങ്ങൾ ആവശ്യമാണെന്നു തിരിച്ചറിയുകയും, ഈ നിർവചനങ്ങൾ മനസിലാക്കുകയും ചെയ്യുന്നു.			
• ന്യൂനസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കുന്ന ചില സന്ദർഭങ്ങളിൽ ഗുണനം നിർവചിക്കേണ്ട ആവശ്യം തിരിച്ചറിയുകയും, ഈ നിർവചനം മനസിലാക്കുകയും ചെയ്യുന്നു.			
• അധിസംഖ്യകളിലെന്നപോലെ, ന്യൂനസംഖ്യകളിലും ഹരണമെന്നത് ഗുണിതത്തിന്റെ വിപരീതമാണെന്നു മനസിലാക്കുന്നു.			
• ബീജഗണിതവാചകങ്ങളിലെ അക്ഷരങ്ങളെ അധിസംഖ്യകളായും ന്യൂനസംഖ്യകളായും എടുത്ത് ലഘൂകരിക്കാൻ കഴിയുന്നു.			

10

സ്ഥിതിവിവരക്കണക്ക്





പട്ടികപ്പെടുത്തൽ

സ്കൂളിലെ 8 എ ക്ലാസ്സിൽ 40 കുട്ടികളുണ്ട്. ഹെൽത്ത് ക്ലബ്ബിന്റെ ആഭിമുഖ്യത്തിൽ ഓരോരുത്തരുടെയും രക്തഗ്രൂപ്പ് നിശ്ചയിച്ചത് ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

O+	B+	O+	AB+	AB−	B−
O+	AB−	AB+	AB+	B−	AB+
A+	O+	O+	O+	O+	A+
O−	A+	A+	O+	O+	O+
B+	B+	A+	A+	B+	O+
AB+	A+	B+	B+	O+	A+
B−	O+	O+	B+		

i) O− രക്തഗ്രൂപ്പിലുള്ള എത്ര കുട്ടികളുണ്ട്?

ii) B− രക്തഗ്രൂപ്പിലുള്ള എത്ര കുട്ടികളുണ്ട്?

iii) O+ രക്തഗ്രൂപ്പിലുള്ള എത്ര കുട്ടികളുണ്ട്?

iv) ഏത് രക്തഗ്രൂപ്പിലുള്ളവരാണ് ഏറ്റവും കൂടുതൽ?

v) ഏത് രക്തഗ്രൂപ്പിലുള്ളവരാണ് ഏറ്റവും കുറവ്?

ഒന്നാമത്തെ ചോദ്യത്തിന് ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കാൻ O− രക്തഗ്രൂപ്പ് മാത്രം എണ്ണിയാൽ മതി. രണ്ടാമത്തേതിന് B−ഉം മൂന്നാമത്തേതിന്

O^+ ഉം എണ്ണിയാൽ മതി.

നാലാമത്തേതിനോ?

എല്ലാം വെവ്വേറെ എണ്ണേണ്ടി വരും അല്ലേ?

ഇവിടെ ഓരോ ഇനത്തിലും എത്ര പേരുണ്ടെന്ന് ആദ്യമേ കണക്കാക്കി വയ്ക്കുന്നതാണ് സൗകര്യം.

ഗ്രൂപ്പ്	എണ്ണം
A+	8
B+	7
AB+	5
O+	14
B−	3
AB−	2
O−	1

ഈ പട്ടിക നോക്കി അവസാനത്തെ രണ്ടു ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കുക.

മറ്റൊരു കണക്ക്.

ഒരു ക്ലാസ്സിലെ കുട്ടികൾക്ക് പരീക്ഷയ്ക്ക് ലഭിച്ച സ്കോറുകൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു:

8	7	6	3	8	8	7	7	6
7	9	7	6	8	7	2	6	7
10	6	7	3	9	5	4	5	4
4	4	5	8	10	8	8	9	7
7	6	8	8	7	4	5	9	8

i) കൂടുതൽ കുട്ടികൾക്ക് ലഭിച്ച സ്കോർ ഏതാണ്?

ii) 8 ഉം 8 ൽ കൂടുതലും സ്കോർ ലഭിച്ച എത്ര കുട്ടികളുണ്ട്?

iii) എത്ര കുട്ടികൾക്ക് 8 ൽ കുറവ് സ്കോർ കിട്ടി?

iv) 10 സ്കോർ കിട്ടിയ എത്ര കുട്ടികളുണ്ട്?

നേരത്തേ ഉണ്ടാക്കിയതു പോലെ ഒരു പട്ടിക ഇവിടേയും ഉണ്ടാക്കാം.

ഓരോ സ്കോറും എത്ര തവണ ആവർത്തിച്ചിട്ടുണ്ട് എന്നാണല്ലോ കാണേണ്ടത്.

ഇവിടെ ഏറ്റവും ചെറിയ സ്കോർ 2 ഉം വലിയ സ്കോർ 10 ഉം ആണ്.

2 മുതൽ 10 വരെയുള്ള സംഖ്യകൾ ഒരു നിരയിൽ എഴുതി ഓരോന്നും എത്ര തവണ ആവർത്തിച്ചിട്ടുണ്ടെന്ന് നോക്കൂ. അഞ്ചാം ക്ലാസ്സിൽ പരിചയപ്പെട്ട അടയാളരീതി തന്നെ ഉപയോഗിക്കാം.

സ്കോർ	**അടയാളം**	**കുട്ടികളുടെ എണ്ണം**
2	|	1
3	||	2
4	𝍸	5
5	||||	4
6	𝍸 |	6
7	𝍸 𝍸 |	11
8	𝍸 𝍸	10
9	||||	4
10	||	2
ആകെ		45

ഇനി പട്ടിക നോക്കി നേരത്തെ ചോദിച്ച എണ്ണങ്ങളെല്ലാം കണ്ടുപിടിക്കാൻ എളുപ്പമല്ലേ?

പട്ടികയിൽ, 2 ഒരു തവണ, 3 രണ്ട് തവണ, 7 പതിനൊന്ന് തവണ എന്നിങ്ങനെ ഓരോ സ്കോറും എത്ര തവണ എന്നാണല്ലോ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്. ഇത്തരം പട്ടികകളിൽ ഓരോന്നും എത്ര തവണ ആവർത്തിക്കുന്നു എന്നതിനെ പൊതുവെ ആവൃത്തി (frequency) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഇത്തരത്തിലുള്ള പട്ടികയെ ആവൃത്തിപ്പട്ടിക (frequency table) എന്നും പറയുന്നു.

1) ഒരു ഗ്രാമത്തിലെ 50 കുടുംബങ്ങളിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

8	6	9	4	4	2	6	5	4	3
7	3	3	2	3	7	6	3	2	5
5	13	9	9	7	4	4	5	4	3
3	7	2	3	3	10	8	6	6	4
2	4	5	4	3	8	7	5	6	3

ആവൃത്തി പട്ടിക തയാറാക്കി ചുവടെയുള്ള ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കുക.

i) രണ്ട് അംഗങ്ങൾ മാത്രമുള്ള എത്ര കുടുംബങ്ങൾ ഉണ്ട്?

ii) നാലോ അതിൽ കുറവോ അംഗങ്ങളുള്ള എത്ര കുടുംബങ്ങൾ ഉണ്ട്?

iii) പത്തോ അതിൽ കൂടുതലോ അംഗങ്ങളുള്ള എത്ര കുടുംബങ്ങൾ ഉണ്ട്?

iv) എത്ര അംഗങ്ങളുള്ള കുടുംബമാണ് ഏറ്റവും കൂടുതൽ?

2) 8 B ക്ലാസ്സിൽ 44 കുട്ടികളുണ്ട്. ഓരോ കുട്ടിയും എത്ര കിലോമീറ്റർ അകലെ നിന്നാണ് വരുന്നതെന്ന് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

6	2	7	12	1	9	2	6
5	7	3	4	1	5	4	4
5	8	6	5	2	5	9	5
11	12	1	9	2	14	4	7
9	6	6	7	3	2	6	3
4	7	9	3				

ആവൃത്തി പട്ടിക തയാറാക്കി ചുവടെയുള്ള ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരമെഴുതുക.

i) കൃത്യം ഒരു കിലോമീറ്റർ അകലത്തിൽ നിന്നും വരുന്ന എത്ര കുട്ടികളുണ്ട്?

ii) 5 കിലോമീറ്ററിൽ കൂടുതൽ ദൂരത്ത് നിന്ന് വരുന്ന എത്ര കുട്ടികളുണ്ട്?

iii) 5 കിലോമീറ്ററിനും 10 കിലോമീറ്ററിനും ഇടയിൽ നിന്ന് വരുന്ന എത്ര കുട്ടികളുണ്ട്?

vi) 10 കിലോമീറ്ററിൽ കൂടുതൽ അകലെ നിന്ന് വരുന്ന എത്ര കുട്ടികളുണ്ട്?

3) ഒരു ക്ലാസ് പരീക്ഷയിൽ 35 കുട്ടികൾക്ക് ലഭിച്ച സ്കോർ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

15	10	18	11	19	16	15	17	14	18	13	15
17	16	15	14	15	17	14	15	13	16	11	11
16	20	13	12	10	16	17	13	12	14	12	

ആവൃത്തി പട്ടിക തയാറാക്കി ചുവടെയുള്ള ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കുക.

i) 20 സ്കോർ ലഭിച്ച എത്ര കുട്ടികൾ ഉണ്ട്?

ii) 10 നും 15 നും ഇടയിൽ സ്കോർ ലഭിച്ച എത്ര കുട്ടികൾ ഉണ്ട്?

iii) 10 ൽ കുറവ് സ്കോർ ലഭിച്ച എത്ര കുട്ടികൾ ഉണ്ട്?

iv) ഏറ്റവും കൂടുതൽ കുട്ടികൾക്ക് ലഭിച്ച സ്കോർ എന്താണ്?

മറ്റൊരു രൂപം

ഒരു ക്രിക്കറ്റ് കളിക്കാരൻ 50 ഏകദിനമത്സരങ്ങളിൽ നേടിയ റൺ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

50	0	49	60	100	68	27	48	15	65	101	45	2
52	25	18	29	53	72	90	32	81	28	104	35	49
2	60	87	71	38	102	35	71	68	20	10	30	55
47	21	35	12	20	11	27	43	38	40	48		

i) അയാൾ എത്ര സെഞ്ചറികൾ നേടി?

ii) എത്ര അർധസെഞ്ചറികൾ നേടി?

iii) 50 കുറഞ്ഞ റൺസ് നേടിയ എത്ര കളികളുണ്ട്?

ഇവിടെ കളിക്കാരൻ നേടിയ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ റൺ പൂജ്യവും ഏറ്റവും കൂടിയത് 104 ഉം ആണല്ലോ.

ഇതുവരെ ചെയ്തതുപോലെയുള്ള പട്ടിക തയാറാക്കാൻ 0 മുതൽ 104 വരെയുള്ള സംഖ്യകൾ ആദ്യനിരയിൽ എഴുതേണ്ടി വരും. എന്നാൽ എല്ലാ സംഖ്യകളും ഇവിടെ ആവശ്യമില്ല. ഇങ്ങനെയുള്ള പട്ടികയിൽ നിന്ന് കളിക്കാരന്റെ പ്രകടനത്തെ കുറിച്ച് പൊതുധാരണ ഉണ്ടാക്കാനും കഴിയില്ല.

മറ്റൊരു രീതിയിൽ പട്ടിക തയാറാക്കാം.

റൺസ് ഓരോന്നായി ഒരു നിരയിൽ എഴുതുന്നതിനു പകരം സെഞ്ചുറി (100 ഉം, 100 ൽ കൂടുതലും), അർധസെഞ്ചുറി (50 - 99) അർധസെഞ്ചുറിയിൽ കുറവ് (50 ൽ കുറവ്) എന്നിവ ഓരോ വിഭാഗമായി എടുത്ത് പട്ടിക ഉണ്ടാക്കാം.

വിഭാഗം	അടയാളം	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം
0 - 49	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |	31
50 - 99	𝍸 𝍸 𝍸	15
100 ഉം അതിന് മുകളിലും	||||	4

പട്ടികകൾ

വിവരങ്ങളുടെ ശേഖരണത്തിൽ നിന്നു ശരിയായ നിഗമനങ്ങൾ രൂപീകരിക്കാൻ, അവയെ ചിട്ടപ്പെടുത്തേണ്ടതുണ്ട്. ഇങ്ങനെ ചിട്ടപ്പെടുത്താനുള്ള ഒരു മാർഗമാണ്, അവയെ വർഗീകരിച്ച് പട്ടികയാക്കുക എന്നത്. സ്ഥിതിവിവരക്കണക്കിൽ സാധാരണയായി ഉപയോഗിക്കുന്ന ഒന്നാണ് ആവൃത്തി പ്പട്ടിക.

ഇങ്ങനെ പട്ടികപ്പെടുത്തുമ്പോൾ, ചില വിവരങ്ങൾ നഷ്ടപ്പെടുന്നുണ്ട്. ഉദാഹരണമായി, വരുമാനത്തെക്കുറിച്ച് ശേഖരിച്ച മൊത്തം വിവരങ്ങളെ വിഭാഗങ്ങളാക്കി, ഓരോ വിഭാഗത്തിലുള്ളവരുടേയും എണ്ണം മാത്രം അവതരിപ്പിക്കുമ്പോൾ, ഇതിലെ ഓരോരുത്തരുടേയും യഥാർത്ഥ വരുമാനം എന്താണെന്നുള്ളത് കാണാൻ കഴിയില്ല.

പക്ഷേ, ഇത്തരമൊരു പട്ടികയിൽനിന്ന്, വ്യത്യസ്ത വരുമാനങ്ങളുള്ളവരുടെ വിതരണത്തെക്കുറിച്ച് പൊതുവായ ധാരണകൾ കിട്ടുന്നു. ഇതാകട്ടെ, ചിട്ടപ്പെടുത്താത്ത മൊത്തം വിവരശേഖരത്തിൽ നിന്നു കിട്ടുന്നുമില്ല.

ഈ പട്ടിക നോക്കി നേരത്തെ ചോദിച്ച ചോദ്യങ്ങൾക്ക് എളുപ്പത്തിൽ ഉത്തരം പറയാമല്ലോ?

കളിക്കാരന്റെ പ്രകടനം അല്പംകൂടി വിശകലനം ചെയ്യണമെങ്കിലോ?

- 10 ൽ കുറവ് റൺസ് നേടിയ എത്ര മത്സരങ്ങളുണ്ട്?
- 90 നും 100 നും ഇടയിൽ റൺസ് നേടിയ എത്ര മത്സരങ്ങളുണ്ട്?
- 40 നും 50 നും ഇടയിൽ റൺസ് നേടിയ എത്ര മത്സരങ്ങളുണ്ട്?

എന്നിങ്ങനെ കണക്കാക്കേണ്ടിവരുമ്പോൾ സൗകര്യപ്രദമായ വിധത്തിൽ വിഭാഗങ്ങളാക്കി പട്ടിക തയാറാക്കണം.

0 മുതൽ 9 വരെ, 10 മുതൽ 19 വരെ, 20 മുതൽ 29 വരെ എന്നിങ്ങനെ വിഭാഗങ്ങളാക്കി ഓരോന്നിലും എത്ര വീതം വരുന്നു എന്ന് കണക്കാക്കാം.

വിഭാഗം	അടയാളം	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം
0 – 9	||||	4
10 – 19	𝍸 |	6
20 – 29	𝍸 ||	7
30 – 39	𝍸 ||	7
40 – 49	𝍸 ||	7
50 – 59	|||| |	6
60 – 69	|||	3
70 – 79	|||	3
80 – 89	|||	3
90 – 99	|	1
100 – 109	|||	3
ആകെ		50

നേരത്തെ കൊടുത്ത ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഇനി എളുപ്പം ഉത്തരം പറയാമല്ലോ.

മറ്റൊരു സന്ദർഭം നോക്കാം.

സ്കൂളിലെ ആരോഗ്യക്ലബിലെ അംഗങ്ങളുടെ ഭാരം (കിലോഗ്രാമിൽ) ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

38	$37\frac{1}{2}$	$40\frac{1}{2}$	59	48	48	$37\frac{1}{2}$
58	50	$54\frac{1}{2}$	39	40	$40\frac{1}{2}$	49
32	43	45	53	37	44	51
$50\frac{1}{2}$	$32\frac{1}{2}$	46	55	36	$44\frac{1}{2}$	47
$42\frac{1}{2}$	33					

ആവൃത്തിപ്പട്ടിക ഉണ്ടാക്കണം.

30 – 34, 35 – 39, 40 – 44, 45 – 49 എന്നിങ്ങനെ വിഭാഗങ്ങളെടുത്താൽ ശരിയാകുമോ?

ഉദാഹരണമായി $44\frac{1}{2}$ ഭാരം ഏത് വിഭാഗത്തിലാണ് എടുക്കുക?

വിഭാഗങ്ങളെ 30 – 35, 35 – 40, 40 – 45 എന്നിങ്ങനെ

വിഭജനരീതി

വിവരങ്ങൾക്ക് ഒതുക്കം കിട്ടാനും, അതുവഴി അവയെക്കുറിച്ചുള്ള പൊതുവായ ധാരണകൾ എളുപ്പമാക്കാനും വേണ്ടിയാണല്ലോ അവയെ വിഭജിച്ച് പട്ടികയാക്കുന്നത്. ഇങ്ങനെ ചെയ്യുമ്പോൾ, ചില വിവരങ്ങൾ നഷ്ടപ്പെടുമെന്നും കണ്ടു. വളരെച്ചെറിയ വിസ്താരമുള്ള കുറേ വിഭാഗങ്ങളാക്കിയാൽ ഇത്തരം നഷ്ടം കുറയ്ക്കാം; പക്ഷേ പട്ടികയ്ക്ക് ഒതുക്കമുണ്ടാകില്ല. മറിച്ച്, വലിയ വിസ്താരമുള്ള കുറച്ചു വിഭാഗങ്ങൾ മാത്രമാക്കിയാൽ, വിവരങ്ങളുടെ അവതരണം ചുരുങ്ങികിട്ടും; പക്ഷേ, ധാരണകളൊന്നും തന്നെ രൂപീകരിക്കാൻ കഴിയാത്തവിധം, വിവരങ്ങൾ നഷ്ടമാകും.

ഉദാഹരണമായി, വരുമാനവിവരങ്ങൾ പട്ടികയാക്കുമ്പോൾ, 1 രൂപ ഇടവിട്ടുള്ള വിഭാഗങ്ങളാക്കിയാലോ? ശേഖരിച്ച വിവരങ്ങളെല്ലാം പട്ടികയിലുണ്ടാകും; പക്ഷേ ചുരുക്കൽ ഒട്ടുംതന്നെ നടന്നിട്ടില്ല. മറിച്ച്, ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വരുമാനം മുതൽ ഏറ്റവും കൂടിയ വരുമാനം വരെയുള്ള ഒറ്റ വിഭാഗമാക്കിയാലോ? പട്ടിക ഏറ്റവും ചുരുങ്ങും; പൊതുവായ നിഗമനങ്ങളൊന്നും സാധ്യമാവുകയുമില്ല.

എടുക്കാം. അപ്പോൾ $44\frac{1}{2}$ എന്ന അളവ് 40 – 45 എന്ന വിഭാഗത്തിൽ വരുമല്ലോ. 40 എന്ന അളവ്, 35 – 40 അല്ലെങ്കിൽ 40 – 45 എന്നിവയിൽ ഏത് വിഭാഗത്തിൽ ഉൾപ്പെടുത്തണം? സാധാരണയായി 40 – 45 എന്ന വിഭാഗത്തിലാണ് 40 നെ ഉൾപ്പെടുത്തുന്നത്. ഇതുപോലെ 45 എന്ന അളവ് 45 – 50 എന്ന വിഭാഗത്തിലാണ് ഉൾപ്പെടുത്തുന്നതും.

ഇനി ആവൃത്തിപ്പട്ടിക ഉണ്ടാക്കാമല്ലോ.

വിഭാഗം	അടയാളം	ആവൃത്തി
30 – 35		
35 – 40		
40 – 45		
45 – 50		
50 – 55		
55 – 60		

1) 40 പട്ടണങ്ങളിൽ ഒരു ദിവസത്തെ ഉയർന്ന താപനില (ഡിഗ്രി സെൽഷ്യസിൽ) തന്നിരിക്കുന്നു. ആവൃത്തി പട്ടിക ഉണ്ടാക്കുക.

41	23	32	40	25	30	38	47	40	39
26	31	37	32	36	41	30	25	27	30
29	40	38	36	43	37	28	27	32	36
38	36	33	32	28	27	23	26	28	31

2) ശാരീരികക്ഷമതാ പരിശോധനയിൽ പങ്കെടുത്ത 45 ആളുകളുടെ ഉയരം സെന്റിമീറ്ററിൽ തന്നിരിക്കുന്നു. ആവൃത്തിപ്പട്ടിക ഉണ്ടാക്കുക.

160	145	168	156	168.4	170	163	177	143	175	169	154
163	176	160.3	164	150	168	166	148	154	159	164.5	
165	155	148.2	158	174	169	168	165	170	141	172.7	
179	167	171	159	167	171	165	171	167	162	171	

ഉയരം	അടയാളം	എണ്ണം
140 – 145		
145 – 150		

പുതിയൊരു ചിത്രം

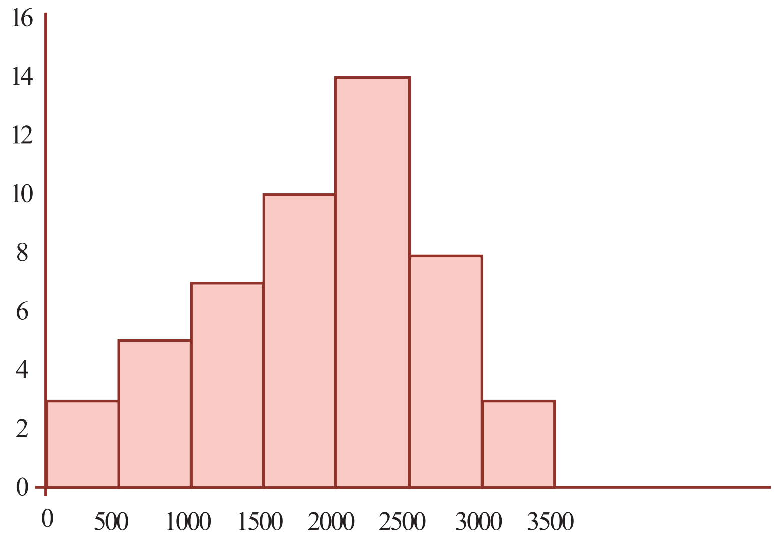
സംഖ്യാപരമായ വിവരങ്ങളെ ചതുരച്ചിത്രങ്ങളായും വൃത്തച്ചിത്രങ്ങളായും അവതരിപ്പിക്കാൻ അറിയാമല്ലോ.

ഇനി ആവൃത്തിപ്പട്ടികയിലെ വിവരങ്ങളെ ചിത്രമാക്കുന്നത് എങ്ങനെയെന്ന് നോക്കാം.

50 കുടുംബങ്ങൾ ഒരു ദിവസം ഉപയോഗിക്കുന്ന വെള്ളത്തിന്റെ അളവാണ് ചുവടെയുള്ള പട്ടികയിൽ:

വെള്ളത്തിന്റെ അളവ് (ലിറ്ററിൽ)	കുടുംബങ്ങളുടെ എണ്ണം
0 – 500	3
500 – 1000	5
1000 – 1500	7
1500 – 2000	10
2000 – 2500	14
2500 – 3000	8
3000 – 3500	3
ആകെ	50

പട്ടികയിലെ വിവരങ്ങളെ ചിത്രീകരിച്ചത് നോക്കൂ.



വിഭാഗങ്ങളെ വിലങ്ങനെയുള്ള വരയിലും ആവൃത്തിയെ കുത്തനെയുള്ള വരയിലുമാണ് അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നത്. ചതുരത്തിന്റെ വീതി ഓരോ വിഭാഗത്തിന്റെ വലിപ്പത്തെയും ഉയരം ആവൃത്തിയെയും സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഇത്തരത്തിൽ വരയ്ക്കുന്ന ചിത്രമാണ് ആവൃത്തി ചതുരം (histogram).

1) ഒരു ദീർഘദൂര ഓട്ടമത്സരത്തിൽ ഓടിയെത്താൻ 30 കുട്ടികൾ എടുത്ത സമയം ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. ആവൃത്തി ചതുരം വരയ്ക്കുക.

സമയം - മിനിട്ടിൽ	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം
10 – 13	2
13 – 16	5
16 – 19	12
19 – 22	8
22 – 25	3

2) ഒരു പ്രദേശത്തെ 60 കുടുംബങ്ങളുടെ ദിവസവരുമാനത്തിന്റെ പട്ടിക ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

ദിവസ വരുമാനം (രൂപയിൽ)	കുടുംബങ്ങളുടെ എണ്ണം
200 – 250	3
250 – 300	7
300 – 350	15
350 – 400	20
400 – 450	9
450 – 500	6

ആവൃത്തി ചതുരം വരയ്ക്കുക.

3) ജൂൺ, ജൂലൈ മാസങ്ങളിൽ ലഭിച്ച മഴയുടെ വിവരങ്ങളാണ് ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്. ഈ വിവരങ്ങളുടെ ആവൃത്തി ചതുരം വരയ്ക്കുക.

മഴ (മി.മീ.)	ദിവസങ്ങൾ
10 – 20	4
20 – 30	6
30 – 40	9
40 – 50	15
50 – 60	10
60 – 70	8
70 – 80	5
80 – 90	3
90 – 100	1

4) 25 സ്ത്രീകളും 23 പുരുഷന്മാരും ഓട്ടമത്സരം പൂർത്തിയാക്കാനെടുത്ത സമയം ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. സ്ത്രീകളെയും പുരുഷന്മാരെയും സംബന്ധിക്കുന്ന ആവൃത്തി ചതുരങ്ങൾ വെവ്വേറെ വരയ്ക്കുക.

സമയം	എണ്ണം	
സെക്കന്റിൽ	സ്ത്രീകൾ	പുരുഷന്മാർ
30 – 40	2	3
40 – 50	6	7
50 – 60	8	5
60 – 70	5	5
70 – 80	4	3

5) ഒരു ക്ലാസിലെ 45 കുട്ടികളുടെ ഭാരം കിലോഗ്രാമിൽ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

41, 31, 48, 34, 75, 39, 45, 41, 55

52, 40, 57, 43, 61, 47, 64, 56, 47

41, 59, 46, 67, 45, 64, 48, 52, 58

53, 64, 59, 43, 50, 62, 54, 68, 59

69, 57, 57, 53, 52, 56, 61, 55, 69

ആവൃത്തിപ്പട്ടിക തയാറാക്കി ആവൃത്തി ചതുരം വരയ്ക്കുക.

തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്
• തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളെ ഒന്നൊന്നായെടുത്തു ആവൃത്തിപ്പട്ടികയായി എഴുതുന്നു.			
• തന്നിരിക്കുന്ന വിവരങ്ങളെ വിഭാഗങ്ങളാക്കി ആവൃത്തിപ്പട്ടിക തയാറാക്കുന്നു.			
• ആവൃത്തിപ്പട്ടിക തയാറാക്കുമ്പോൾ വിഭാഗങ്ങളാക്കുന്നതിന്റെ ആവശ്യം വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• ആവൃത്തിപ്പട്ടികയിലെ വിവരങ്ങളെ ആവൃത്തി ചതുരത്തിലൂടെ അവതരിപ്പിക്കുന്നു.			