अध्याय-1 संख्याओं की समझ

1.1 भूमिका

हम अपने स्कूल के बच्चों की संख्या, गाँव में रहने वाले व्यक्तियों की संख्या को गिन सकते हैं। वस्तुओं को गिनना अब हमारे लिए सरल है। हम वस्तुओं की संख्याओं को संख्यांकों (Numerals) द्वारा निरूपित कर सकते हैं तथा संख्या नामों (Number names) का प्रयोग करके संख्याओं से संबंधित सूचनाएँ भी दे सकते हैं।

हम संख्याओं का अनेक स्थितियों में प्रयोग करते हैं। संख्याएँ प्रत्यक्ष वस्तुओं को गिनने, वस्तुओं का कौन-सा संग्रह (Collection) बड़ा है, और कौन-सा संग्रह छोटा है, में इस्तेमाल होती हैं। ये वस्तुओं को पहले, दूसरे, तीसरे इत्यादि क्रम में व्यवस्थित करने में भी सहायता करती हैं।

अब आप भी पाँच ऐसी स्थितियों के बारे में सोचिए जहाँ आप संख्याओं का प्रयोग करते हैं।

हम संख्याओं के साथ कार्य करने का आनंद प्राप्त कर चुके हैं। हम इनके साथ योग, व्यवकलन (घटाने), गुणा और भाग की संक्रियाएँ भी कर चुके हैं। हम संख्या अनुक्रमों (Sequences) में प्रतिरूपों (Patterns) को देख चुके हैं और संख्याओं के साथ अनेक रुचिपूर्ण कार्य कर चुके हैं। आइए उनका दोहराव कर आगे कदम बढ़ाएँ।

1.2 संख्याओं की तुलना

आइए देखें कि क्या हमें याद है कि दी गई संख्याओं में कौन-सी संख्या सबसे बड़ी है?

(i) 85, 356, 8765, 78964 — मैं सबसे बड़ी हूँ

(ii) 1805, 1850, 8501, 8051, 8510 — मैं सबसे बड़ी हूँ

अपने दोस्तों में चर्चा कीजिए और पता कीजिए कि किसी संख्या समूह में वे सबसे बड़ी संख्या किस प्रकार ज्ञात करते हैं? क्या आप इसके लिए कोई नियम बना सकते हैं?

स्वयं करके देखिए

क्या आप ज्ञात कर सकते हैं कि प्रत्येक पंक्ति में कौन-सी संख्या सबसे बड़ी और कौन-सी संख्या सबसे छोटी है?

1. 4321, 432, 58, 58672, 540 — उत्तर : 58672 सबसे बड़ी है और 58 सबसे छोटी है।
2. 856, 4325, 36547, 32, 489 — उत्तर : ....
3. 9432, 582, 43, 678, 57892 — उत्तर : ....
4. 87, 943, 5678, 325, 87654 — उत्तर : ....

यहाँ हमने केवल अंकों की संख्या को देखकर ही उत्तर ज्ञात कर लिया। सबसे बड़ी संख्या में अधिकतम पाँच अंक (दस हजार) थे और सबसे छोटी संख्या दो अंकों (दहाइयों) में थी।

इसी प्रकार के पाँच और प्रश्न बनाइए और उन्हें हल करने के लिए अपने मित्रों को दीजिए। हम 5864 और 4783 की तुलना किस प्रकार करते हैं? यहाँ यह अधिक कठिन नहीं है क्योंकि दोनों संख्याओं में अंकों की संख्या समान है, परन्तु 5864 में हजार के स्थान का अंक 4783 के हजार के स्थान के अंक से बड़ा है, इसलिए 4783 से 5864 बड़ी है।

अब बताइए कि कौन-सी संख्या बड़ी है, 5876 या 5745? यहाँ भी दोनों संख्याओं में अंकों की संख्या समान (बराबर) है। साथ ही, दोनों में हजार के स्थान पर समान अंक हैं। अब हम क्या करते हैं? हम अगले अंक अर्थात् सौ के स्थान पर आने वाले अंकों को देखते हैं। 5876 में सौवें स्थान वाला अंक 5745 के सौवें स्थान वाले अंक से बड़ा है। अतः संख्या 5745 से संख्या 5876 बड़ी है।

यदि दोनों संख्याओं में सौ के स्थान वाले अंक भी समान होते तो हम क्या करते?

- **आरोही क्रम / बढ़ते क्रम (Ascending order/Increasing order) :** आरोही या बढ़ते क्रम का अर्थ है, सबसे छोटे से प्रारंभ कर सबसे बड़े तक व्यवस्थित करना। जैसे– 25, 326, 434, 217, 91 संख्याओं के समूह को आरोही क्रम में सजाने पर 25, 91, 217, 326, 434 इस प्रकार होता है।

- **अवरोही क्रम / घटते क्रम (Descending order/Decreasing order) :** अवरोही क्रम या घटते क्रम का अर्थ है सबसे बड़े से प्रारंभ कर सबसे छोटे तक व्यवस्थित करना। जैसे– 256, 127, 629, 39, 91 संख्याओं के समूह को अवरोही क्रम में जमाने पर 629, 256, 127, 91, 39 इस प्रकार होता है।

स्वयं करके देखिए

1. निम्नलिखित संख्याओं को आरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए–

   (a) 589, 9567, 8765, 876

   (b) 9654, 3257, 58305, 9875

2. निम्नलिखित संख्याओं को अवरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए–

   (a) 9000, 8700, 67800, 8735

   (b) 1876, 45321, 89715, 89254

इसी प्रकार आप अपने से अन्य संख्याएँ लेकर उन्हें आरोही / अवरोही क्रम में व्यवस्थित करें।

1.2.3 संख्या 10000 का प्रवेश

हम जानते हैं कि 9 एक अंक की सबसे बड़ी संख्या है। 99 दो अंकों की सबसे बड़ी संख्या है, इसी प्रकार 999 तीन अंकों की सबसे बड़ी संख्या है और चार अंकों की सबसे बड़ी संख्या 9999 है। यदि हम 9999 में 1 जोड़ें, तो क्या प्राप्त होगा?

इस प्रतिरूप को देखिए–

$9 + 1 = 10$

$99 + 1 = 100$

$999 + 1 = 1000$

$9999 + 1 =$ .... ?

हम देखते हैं कि एक अंक की सबसे बड़ी संख्या + 1 = दो अंकों की सबसे छोटी संख्या।

दो अंकों की सबसे बड़ी संख्या + 1 = तीन अंकों की सबसे छोटी संख्या

तीन अंकों की सबसे बड़ी संख्या + 1 = चार अंकों की सबसे छोटी संख्या

इसी प्रकार हम कह सकते हैं कि चार अंकों की सबसे बड़ी संख्या (9999) + 1 = पाँच अंकों की सबसे छोटी संख्या (10000) है। इसे **दस हजार** कहते हैं।

आइए करके देखें

दो अंकों की सबसे छोटी संख्या है ––––

दो अंकों की सबसे बड़ी संख्या है –––––

10 से 99 तक की संख्याएँ दो अंकों की कुल संख्या कितनी है?

अब यदि हम 1 से 99 तक की संख्याओं में से 1 से 9 तक की संख्याएँ, अर्थात् कुल 9 संख्याओं को 99 से घटा दें तो $99 - 9 = 90$

कुल 90 संख्याएँ होंगी।

अतः दो अंकों की कुल संख्या =

दो अंकों की सबसे बड़ी संख्या – एक अंक की सबसे बड़ी संख्या।

तीन अंकों की कुल कितनी संख्याएँ होंगी?

100, 101, 102 .... 999 तक ही तीन अंकों की संख्याएँ होंगी। अर्थात् तीन अंकों की कुल संख्या = तीन अंकों की बड़ी सं०–दो अंकों की बड़ी सं०। यानी 999 – 99 = 900 संख्याएँ होंगी।

उदाहरण-1 : दशमलव पद्धति में 7 अंकों की कुल कितनी संख्याएँ होंगी?

हल : 7 अंकों की सबसे बड़ी संख्या = 9999999

6 अंकों की सबसे बड़ी संख्या = 999999

अतः 7 अंकों की कुल संख्याएँ = 9000000 होंगी।

स्वयं करके देखिए

1. 5 अंकों की कुल कितनी संख्याएँ होंगी?
2. 4 अंकों की कुल कितनी संख्याएँ होंगी?

1.2.4 स्थानीय मान पर पुनर्दृष्टि

हम पिछली कक्षा में चार अंकों तक की संख्याओं में स्थानीय मान की जानकारी प्राप्त कर चुके हैं।

85 का प्रसारित रूप = 8 दहाई + 5 इकाई

= 80 + 5

= 8 X 10 + 5 X 1

385 = 3 सैकड़ा + 8 दहाई + 5 इकाई

= 300 + 80 + 5

$= 3 \times 100 + 8 \times 10 + 5 \times 1$

6385 = 6 हजार + 3 सैकड़ा + 8 दहाई + 5 इकाई

$= 6000 + 300 + 80 + 5$

$= 6 \times 1000 + 3 \times 100 + 8 \times 10 + 5 \times 1$

इसी प्रकार 86385 का प्रसारित रूप

86385 = 8 दस हजार + 6 हजार + 3 सैकड़ा + 8 दहाई + 5 इकाई

$= 80000 + 6000 + 300 + 80 + 5$

$= 8 \times 10000 + 6 \times 1000 + 3 \times 100 + 8 \times 10 + 5 \times 1$

इस प्रकार 86385 को छियासी हजार तीन सौ पचासी पढ़ा जाता है।

पाँच अंकों वाली पाँच और संख्याएँ लिखिए, उन्हें पढ़िए और प्रसारित रूप में लिखिए।

1.2.5 संख्या 100000 का प्रवेश

हम जानते हैं कि पाँच अंकों की सबसे बड़ी संख्या 99999 में 1 जोड़ने पर छः अंकों की सबसे छोटी संख्या प्राप्त होती है। अर्थात् 99999 + 1 = 100000, इसे **एक लाख** पढ़ा जाता है। साथ ही, 10,000 x 10 = 1,00,000

अब हम छः अंकों की संख्याओं का प्रसारित रूप लिख सकते हैं। जैसे–

$3{,}58{,}685 = 3 \times 100000 + 5 \times 10000 + 8 \times 1000 + 6 \times 100 + 8 \times 10 + 5 \times 1$

इस संख्या में इकाई के स्थान पर 5, दहाई के स्थान पर 8, सैकड़ा के स्थान पर 6, हजार के स्थान पर 8, दस हजार के स्थान पर 5 और लाख के स्थान पर 3 है। इस संख्या का नाम तीनं लाख अठावन हजार छः सौ पचासी है।

स्वयं करके देखिए

संख्याओं को पढ़कर उन्हें खाली स्थानों में उनके नाम और प्रसारित रूप लिखिए–

संख्या	संख्या नाम	प्रसारित रूप
80000	अस्सी हजार	8 x 10000
850000	आठ लाख पचास हजार	8 x 100000 + 5 x 10000
85400	------------------	------------------
85460	------------------	------------------
76850	------------------	------------------
946587	------------------	------------------
854965	------------------	------------------
25632	------------------	------------------

1.2.6 आठ अंकों तक की संख्याएँ

निम्न प्रतिरूप को पूरा करें –

9 + 1 = 10

99 + 1 = 100

999 + 1 = 1000

9999 + 1 = 10000

99999 + 1 = ...

999999 + 1 = ...

9999999 + 1 = 1,00,00,000

याद रखिए

1 सौ	= 10 दहाइयाँ		
1 हजार	= 10 सैकड़ा	=	100 दहाइयाँ
1 लाख	= 100 हजार	=	1000 सैकड़ा
1 करोड़	= 100 लाख	=	10,000 हजार

प्रतिरूप से स्पष्ट है कि छः अंकों की सबसे बड़ी संख्या में 1 जोड़ने पर सात अंकों की सबसे छोटी संख्या प्राप्त होती है, जिसे **दस लाख** पढ़ा जाता है। इसी प्रकार सात अंकों की सबसे बड़ी संख्या में 1 जोड़ने पर आठ अंकों की सबसे छोटी संख्या प्राप्त होती है, जिसे **एक करोड़** कहा जाता है।

दैनिक जीवन में हमें विभिन्न परिस्थितियों में बड़ी संख्याओं की आवश्यकता पड़ती है। जब हम अपनी कक्षा के बच्चों की संख्या गिनते हैं तो दो अंकों की होती है, जबकि विद्यालय के सभी बच्चों की संख्या 3 या 4 अंकों में होती है। पता करें आपके पास के शहर में रहने वाले लोगों की संख्या कितने अंकों में हैं?

क्या आप अपने राज्य में रहने वाले लोगों की संख्या जानते हैं? इस संख्या में कितने अंक होंगे?

1.2.7 स्थानीय मान तालिका

संख्याओं को लिखने के लिए नीचे दी गई स्थानीय मान तालिका जिसे भारतीय स्थानीय मान चार्ट कहते हैं का प्रयोग करते हैं–

स्थान	दस करोड़ Ten Crores	करोड़ Crore	दस लाख Ten Lac	लाख Lac	दस हजार Ten Thousand	हजार Thousand	सैकड़ा Hundred	दहाई Ten	इकाई Unit
	100000000	10000000	1000000	100000	10000	1000	100	10	1

बड़ी संख्याओं को पढ़ने और लिखने में उपर्युक्त सारणी बड़ी सहायक होती है। सारणी के अनुसार किसी संख्या को निम्न प्रकार रख सकते हैं–

संख्या	T Cr.	Cr.	T.La	La	T.Th	Th	H	T	U	संख्या नाम
8,56,34,742	----	8	5	6	3	4	7	4	2	आठ करोड़ छप्पन लाख चौंतीस हजार सात सौ बयालीस
85,43,86,297	8	5	4	3	8	6	2	9	7	पचासी करोड़ तैंतालीस लाख छियासी हजार दो सौ संतानवे

आप संख्याओं के प्रसारित रूप लिखने में भी तालिकाओं का प्रयोग कर सकते हैं। उपर्युक्त सारणी में दी गई संख्याओं को प्रसारित कर लिखिए।

1.2.8 अल्पविरामों (commas) का प्रयोग

आपने देखा कि उपर्युक्त तालिकाओं में बड़ी संख्याओं को लिखने में अल्प विरामों का प्रयोग हुआ है जो संख्यांकन की भारतीय पद्धति (Indian system of numeration) है। इस पद्धति में हजारों, लाखों और करोड़ों को प्रदर्शित करने के लिए अल्पविरामों का प्रयोग करते हैं। पहला अल्प विराम सौ के स्थान (दाएँ से चलते हुए तीसरे अंक) के बाद आता है और हजारों को प्रदर्शित करता है। दूसरा अल्प विराम अगले दो अंकों (दाएँ से पाँचवें अंक) के बाद आता है। यह दस हजार के स्थान के बाद आता है और लाखों को प्रदर्शित करता है। तीसरा अल्पविराम अन्य दो अंकों (दाएँ से सातवें अंक) के बाद आता है। यह दस लाख के बाद आता है और करोड़ों को प्रदर्शित करता है।

उदाहरणार्थ– 6,07,02,592, 2,32,42,563, 7,29,04,256

संख्याओं के नाम लिखते समय हम अल्प विरामों का प्रयोग नहीं करते हैं।

ऊपर दी हुई संख्याओं को पढ़ने का प्रयत्न कीजिए। इसी रूप में पाँच और संख्याओं को लिखिए और फिर उन्हें पढ़िए।

1.2.9 अंतर्राष्ट्रीय संख्यांकन पद्धति

संख्यांकन की अंतर्राष्ट्रीय पद्धति में इकाई, दहाई, सौ, हजार और आगे मिलियन (Millions) एवं बिलियन (Billions) का प्रयोग किया जाता है। अल्प विराम दाएँ से प्रत्येक तीसरे अंक के बाद आता है।

उदाहरणार्थ 508, 432, 561 को अंतर्राष्ट्रीय पद्धति में पाँच सौ आठ मिलियन चार सौ बत्तीस हजार पाँच सौ इकसठ पढ़ा जाता है। भारतीय संख्यांकन पद्धति में उक्त संख्या का 50, 84, 32, 561 लिखा जाएगा तथा इसे पचास करोड़ चौरासी लाख बत्तीस हजार पाँच सौ इकसठ पढ़ा जायेगा।

भारतीय संख्यांकन पद्धति के साथ अन्तर्राष्ट्रीय संख्यांकन पद्धति का सम्बन्ध

10 लाख = 1 मिलियन

1 करोड़ = 10 मिलियन

10 करोड़ = 100 मिलियन

1 अरब = 100 करोड़ = 1000 मिलियन = 1 बिलियन

आवर्त	अरब		करोड़		लाख		हजार		सैकड़ा	दहाई	इकाई
भारतीय सांख्यिकी पद्धति में संख्या का स्थान	दस अरब	अरब	दस करोड़	करोड़	दस लाख	लाख	द.	ह.	सै.	द.	इ.
अन्तर्राष्ट्रीय सांख्यिकी पद्धति में संख्या का स्थान	दस बिलियन	एक बिलियन	सौ मिलियन	दस मिलियन	एक मिलियन	सौ हजार	दस हजार	ह.	सै.	द.	इ.

अब बताइए

(1) कितने लाख से एक मिलियन बनता है?

(2) कितने मिलियन से एक करोड़ बनता है?

(3) एक बिलियन कितने मिलियन के बराबर होता है?

(4) एक लाख को अन्तर्राष्ट्रीय पद्धति में क्या कहते हैं?

सारणी में जहाँ एक मिलियन है, वहाँ ठीक ऊपर भारतीय पद्धति में दस लाख है।

क्या आप जानते हैं कि इस समय भारत की जनसंख्या कितनी है? पता करें और अन्तर्राष्ट्रीय संख्यांकन पद्धति में बदलें।

प्रश्नावली – 1.1

1. **रिक्त स्थानों को भरिए–**

(a) 1 लाख = ... दस हजार

(b) 1 मिलियन = ... सौ हजार

(c) 1 करोड़ = ... दस लाख

(d) 1 करोड़ = ... मिलियन

(e) 1 मिलियन = ... लाख

2. **सही स्थानों पर अल्प विराम लगाते हुए संख्यांकों को लिखिए–**

(a) तिहत्तर लाख पचहत्तर हजार तीन सौ सात

(b) नौ करोड़ पाँच लाख इकतालिस

(c) सात करोड़ बावन लाख इक्कीस हजार तीन सौ दो

(d) अट्ठावन मिलियन चार सौ तेइस हजार दो सौ दो

(e) तेइस लाख तीस हजार दस

3. **निम्न संख्याओं को भारतीय संख्यांकन पद्धति एवं अन्तर्राष्ट्रीय संख्यांकन पद्धति दोनों में उपयुक्त स्थानों पर अल्प विराम लगाते हुए लिखिए तथा उनके संख्या नाम भी लिखिए–**

(a) 87595762 (b) 85462283

(c) 99900046 (d) 98432701

1.3 बड़ी संख्याओं का दैनिक जीवन में प्रयोग

पिछली कक्षाओं में, हम लम्बाई के मात्रक या इकाई (unit) के बारे में पढ़ चुके हैं। हमने पेंसिल की लम्बाई, अपनी पुस्तक की लम्बाई-चौड़ाई इत्यादि मापने के लिए सेन्टीमीटर का प्रयोग किया है। हमारे रूलर पर सेन्टीमीटर के चिह्न अंकित होते हैं। परंतु अपने नाखून की लम्बाई मापने के लिए हम पाते हैं कि सेंटीमीटर एक बड़ा मात्रक है। अतः हम एक छोटे मात्रक मिलीमीटर (मिमी) का प्रयोग करते हैं।

(a) 1 सेन्टीमीटर = 10 मिलीमीटर

परन्तु अपनी कक्षा के कमरे की लम्बाई या स्कूल के भवन की लम्बाई मापने के लिए, हम पाते हैं कि सेन्टीमीटर तक बहुत छोटा मात्रक है। अतः इस कार्य के लिए हम मीटर का प्रयोग करते हैं।

(b) 1 मीटर = 100 सेन्टीमीटर = 1000 मिलीमीटर

अब यदि हमें दो शहरों के बीच की दूरियाँ बतानी हो तो मीटर भी एक बहुत छोटा मात्रक होता है। इसके लिए हम एक बड़े मात्रक किलोमीटर (किमी) का प्रयोग करते हैं।

(c) 1 किलोमीटर = 1000 मीटर

स्वयं करके देखिए

1. कितने सेंटीमीटर से 1 किलोमीटर बनता है?
2. यदि आप बाजार में गेहूँ या चावल खरीदने जाते हैं, तो किस मात्रक (इकाई) में चावल-गेहूँ खरीदते हैं? क्या मिर्च या अदरक उसी मात्रक में खरीदते हैं?

आपको याद होगा

1 किलोग्राम = 1000 ग्राम

तथा 1 क्विंटल = 100 किलोग्राम

बीमार पड़ने पर जो दवाई दी जाती है, उसके भार मिलीग्राम (मिग्रा) में होता है। यह बहुत छोटी इकाई है।

1 ग्राम = 1000 मिलीग्राम

250 ग्राम = $\frac{1}{4}$ किलोग्राम (इसे एक पाव भी कहा जाता है।)

स्वयं करके देखिए

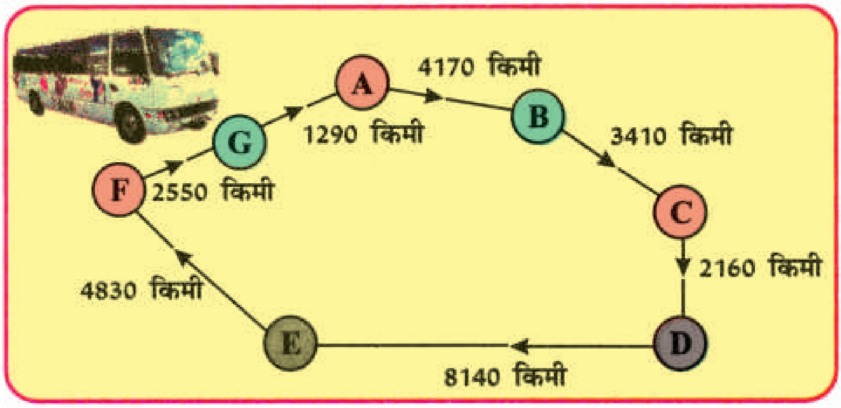
1. दवाई की गोलियों के एक बक्से में 1,00,000 गोलियाँ हैं, जिनमें प्रत्येक का भार 20 मिग्रा है। इस बक्से में रखी सभी गोलियों का कुल भार ग्रामों में कितना है और किलोग्राम में कितना है?

पानी वाली एक साधारण बाल्टी की धारिता प्रायः 20 लीटर होती है। धारिता को लीटर में दर्शाया जाता है, परन्तु कभी-कभी हमें एक छोटे मात्रक की भी आवश्यकता पड़ती है। यह मात्रक मिलीलीटर है। **1 लीटर = 1000 मिलीलीटर**

पता कीजिए आपके घर में आने वाली वस्तुओं में किन-किन की माप मिलीलीटर में होती है?

प्रयास कीजिए

1. एक बस ने अपनी यात्रा प्रारंभ की और 40 किमी/घंटा की चाल से विभिन्न स्थानों पर पहुँची। इस यात्रा को नीचे दर्शाया गया है–



अब ज्ञात कीजिए

(i) A से D तक जाने में बस द्वारा तय की गई कुल दूरी ज्ञात कीजिए।

(ii) D से G तक जाने में बस द्वारा तय की गई कुल दूरी ज्ञात कीजिए।

(iii) बस द्वारा तय की गई कुल दूरी ज्ञात कीजिए।

(iv) C से D तक और D से E तक की दूरियों का अंतर ज्ञात कीजिए।

(v) बस द्वारा निम्नलिखित यात्रा में लगा समय ज्ञात कीजिए–

(a) A से B तक (b) C से D तक

(c) E से G तक (d) कुल यात्रा

2. रमन की दुकान की तालिका नीचे दी गई है–

बेची गई वस्तुएँ	दर	वजन / नग
सेब	60 रु. प्रति किग्रा	2000 किग्रा
संतरा	40 रु. प्रति किग्रा	3004 किग्रा
कंघा	4 रु. प्रति नग	25000 नग
दाँतों का ब्रुश	15 रु. प्रति नग	24050 नग
पेंसिल	4 रु. प्रति नग	32542 नग
अभ्यास पुस्तिका	10 रु. प्रति नग	40002 नग
साबुन की टिकिया	9 रु. प्रति नग	20005 नग

(a) रमन द्वारा बेचे गए सेब और संतरों का कुल भार ज्ञात कीजिए।

(b) सेबों को बेचने से प्राप्त कुल धनराशि ज्ञात कीजिए।

(c) सेबों और संतरों को बेचने से प्राप्त कुल धनराशि ज्ञात कीजिए।

(d) रमन द्वारा प्रत्येक वस्तु को बेचने से प्राप्त धनराशि को दर्शाने वाली एक सारणी बनाइए। धनराशि की इन प्रविष्टियों को अवरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए। वह कौन-सी वस्तु है जिससे रमन को सबसे अधिक धनराशि प्राप्त हुई? यह धनराशि क्या है?

जोड़, घटाव, गुणा और भाग पर हम अनेक प्रश्न कर चुके हैं। यहाँ हम ऐसे कुछ और प्रश्न करेंगे। प्रारंभ करने से पहले निम्नलिखित उदाहरणों को देखिए तथा प्रश्नों के विश्लेषण का अनुसरण कीजिए और देखिए कि इन्हें किस प्रकार हल किया गया है।

उदाहरण-1 : वर्ष 1991 में भागलपुर की जनसंख्या 2, 35,471 थी। वर्ष 2001 में पता चला कि जनसंख्या में 70,958 की वृद्धि हुई। तो बताएँ कि वर्ष 2001 में इस शहर की जनसंख्या क्या थी?

हल : 2001 में शहर की जनसंख्या = 1991 में जनसंख्या + जनसंख्या में वृद्धि

= 2, 35,471 + 70,958

(i)
$$\begin{array}{r} 235471 \\ +70958 \\ \hline 306429 \\ \hline \end{array}$$

सलमा ने किया : 235471 = 200000 + 35000 + 471 तथा 70958

= 70000 + 958

और फिर 200000 + 105000 + 1429 = 306429

तथा मैरी ने किया–

200000 + 35000 + 400 + 71 + 70000 + 900 + 58 = 306429

इस प्रकार 2001 में शहर की जनसंख्या 3,06,429 प्राप्त हुई।

यहाँ तीनों ही विधियाँ सही हैं।

उदाहरण-2 : किसी राज्य में वर्ष 2002-2003 में 7,43,000 साइकिलें बेची गईं। वर्ष 2003-2004 में बेची गई साइकिलों की संख्या 8,00,100 थी। किस वर्ष में अधिक साइकिलें बेची गईं और कितनी अधिक बेची गईं?

हल : स्पष्ट है कि संख्या 8,00,100 संख्या 7,43,000 से अधिक है। अतः, उस राज्य में वर्ष 2003-2004 में वर्ष 2002-2003 से अधिक साइकिलें बेची गईं।

$$\begin{array}{r} 800100 \\ -743000 \\ \hline \text{अतः} \quad 057100 \\ \hline \end{array}$$

वर्ष 2003-2004 में 57,100 साइकिलें अधिक बेची गईं।

जोड़कर उत्तर की जाँच कीजिए–

$$\begin{array}{r} 743000 \\ +57100 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

(उत्तर सही है– हाँ/नहीं)

क्या आप इसे करने के और भी तरीके सोच सकते हैं?

उदाहरण-3 : एक शहर में समाचार पत्र की एक प्रति में 12 पृष्ठ होते हैं। प्रतिदिन इस समाचार पत्र की 11,980 प्रतियाँ छपती हैं, तो बताइए प्रतिदिन कितने पृष्ठ छपते हैं।

हल : प्रत्येक प्रति में 12 पृष्ठ हैं।

इसलिए 11,980 प्रतियों में 12 × 11980 पृष्ठ होंगे।

अतः

$$\begin{array}{r} 11980 \\ \times 12 \\ \hline 23960 \\ +\ 119800 \\ \hline 143760 \\ \hline \end{array}$$

प्रतिदिन सभी प्रतियों के लिए 1,43,760 पृष्ठ छपते हैं।

उदाहरण-4 : पुस्तकों को बनाने के लिए कागज की 75,000 शीट (Sheet) उपलब्ध हैं। प्रत्येक शीट से पुस्तक के 8 पृष्ठ बनते हैं। प्रत्येक पुस्तक में 200 पृष्ठ हैं। उपलब्ध कागज से कितनी पुस्तकें बनाई जा सकती हैं?

हल : प्रत्येक शीट में 8 पृष्ठ बनते हैं। अतः 75,000 शीटों से 8 × 75000 पृष्ठ बनेंगे।

$$\begin{array}{r} 75000 \\ \times \quad 8 \\ \hline 600000 \end{array}$$

इस प्रकार पुस्तकों को बनाने के लिए 6,00,000 पृष्ठ उपलब्ध हैं।

अब, 200 पृष्ठों से एक पुस्तक बनती है।

इसलिए 6,00,000 पृष्ठों से 6,00,000 ÷ 200 पुस्तकें बनेंगी।

अब,

$$\begin{array}{r|l} & 3000 \\ \hline 200 & 600000 \\ & \underline{600} \\ & \quad 000 \\ \end{array}$$

इस प्रकार उपलब्ध कागज से 3000 पुस्तकें बनाई जा सकती हैं।

प्रश्नावली – 1.2

1. किसी स्कूल में चार दिन के लिए एक पुस्तक प्रदर्शनी आयोजित की गई। पहले, दूसरे, तीसरे और अंतिम दिन खिड़की पर क्रमशः 1094, 1812, 2050 और 2751 टिकट बेचे गए। इन चार दिनों में बेचे गए टिकटों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।
2. शेखर एक प्रसिद्ध क्रिकेटर खिलाड़ी है। वह टेस्ट मैचों में अब तक 6980 रन बना चुका है। वह 10,000 रन पूरे करना चाहता है। उसे कितने और रनों की आवश्यकता है?
3. एक चुनाव में, सफल प्रत्याशी ने 5,77,500 मत प्राप्त किए, जबकि उसके निकटतम प्रतिद्वन्द्वी ने 3,48,700 मत प्राप्त किए। सफल प्रत्याशी ने चुनाव कितने मतों से जीता?
4. कीर्ति बुक-स्टोर ने जून के प्रथम सप्ताह में 2,85,891 रु. मूल्य की पुस्तकें बेचीं। इसी माह के दूसरे सप्ताह में 4,00,768 रु. मूल्य की पुस्तकें बेची गईं। दोनों सप्ताहों में कुल मिलाकर कितनी बिक्री हुई? किस सप्ताह में बिक्री अधिक हुई और कितनी अधिक?
5. अंकों 6, 2, 7, 4 और 3 में से प्रत्येक का केवल एक बार प्रयोग करते हुए बनाई जा सकने वाली सबसे बड़ी और सबसे छोटी संख्याएँ लिखिए तथा उन संख्याओं का अंतर ज्ञात कीजिए।

6. एक मशीन औसतन एक दिन में 2,825 पेंच बनाती है। जनवरी 2006 में उस मशीन ने कितने पेंच बनाए?

7. एक व्यापारी के पास 78,592 रु. थे। उसने 40 रेडियो खरीदे, प्रत्येक रेडियो का मूल्य 1200 रु. था। इस खरीददारी के बाद उसके पास कितनी धनराशि शेष रह गई?

8. एक विद्यार्थी ने 7236×56 में 56 के स्थान पर 65 से गुणा कर दिया। उसका उत्तर सही उत्तर से कितना अधिक था? (**संकेत** : दोनों गुणा करना आवश्यक नहीं है)।

9. एक कमीज सीने के लिए 2 मी 15 सेमी कपड़े की आवश्यकता है। 40 मी कपड़े में से कितनी कमीजें सीलाई जा सकती हैं और कितना कपड़ा शेष बच जाएगा?

10. दवाइयों को बक्सों में भरा गया है और ऐसे प्रत्येक बक्से का भार 4 किग्रा 500 ग्रा है। एक वैन, में 800 किग्रा से अधिक का भार नहीं ले जा सकती, ऐसे कितने बक्से लादे जा सकते हैं?

11. किसी विद्यार्थी के घर और स्कूल के बीच की दूरी 1 किमी 875 मी है। प्रत्येक दिन यह दूरी दो बार तय की जाती है। 6 दिन में उस विद्यार्थी द्वारा तय की गई कुल दूरी ज्ञात कीजिए।

12. एक बर्तन में 4 ली 500 मिली दही है। 250 मिली धारिता वाले कितने गिलासों में इसे भरा जा सकता है?

1.4 आकलन

क्या हम विश्वास के साथ कह सकते हैं कि इन समाचारों में जितने व्यक्ति कहे गए हैं वहाँ ठीक उतने ही व्यक्ति थे? उदाहरणार्थ,

(a) क्या स्टेडियम में ठीक 51,000 दर्शक थे?

(b) क्या टेलीविजन पर ठीक 40 मिलियन लोगों ने मैच देखा?

समाचार

1. *भारत और पाकिस्तान के बीच हुए एक हॉकी मैच को जिसे स्टेडियम में 51,000 दर्शकों ने देखा और विश्व भर में 40 मिलियन लोगों ने टेलीविजन पर देखा।*
2. *भारत और बांगलादेश के तटवर्तीय क्षेत्रों में आए एक चक्रवाती तूफान में लगभग 2000 व्यक्तियों की मृत्यु हो गई और 50000 से अधिक घायल हुए।*
3. *रेलवे द्वारा प्रतिदिन 63,000 किलोमीटर से अधिक रेलपथ पर 13 मिलियन से अधिक यात्री यात्रा करते हैं।*

6. एक मशीन औसतन एक दिन में 2,825 पेंच बनाती है। जनवरी 2006 में उस मशीन ने कितने पेंच बनाए?

7. एक व्यापारी के पास 78,592 रु. थे। उसने 40 रेडियो खरीदे, प्रत्येक रेडियो का मूल्य 1200 रु. था। इस खरीददारी के बाद उसके पास कितनी धनराशि शेष रह गई?

8. एक विद्यार्थी ने 7236×56 में 56 के स्थान पर 65 से गुणा कर दिया। उसका उत्तर सही उत्तर से कितना अधिक था? (**संकेत** : दोनों गुणा करना आवश्यक नहीं है)।

9. एक कमीज सीने के लिए 2 मी 15 सेमी कपड़े की आवश्यकता है। 40 मी कपड़े में से कितनी कमीजें सीलाई जा सकती हैं और कितना कपड़ा शेष बच जाएगा?

10. दवाइयों को बक्सों में भरा गया है और ऐसे प्रत्येक बक्से का भार 4 किग्रा 500 ग्रा है। एक वैन, में 800 किग्रा से अधिक का भार नहीं ले जा सकती, ऐसे कितने बक्से लादे जा सकते हैं?

11. किसी विद्यार्थी के घर और स्कूल के बीच की दूरी 1 किमी 875 मी है। प्रत्येक दिन यह दूरी दो बार तय की जाती है। 6 दिन में उस विद्यार्थी द्वारा तय की गई कुल दूरी ज्ञात कीजिए।

12. एक बर्तन में 4 ली 500 मिली दही है। 250 मिली धारिता वाले कितने गिलासों में इसे भरा जा सकता है?

1.4 आकलन

क्या हम विश्वास के साथ कह सकते हैं कि इन समाचारों में जितने व्यक्ति कहे गए हैं वहाँ ठीक उतने ही व्यक्ति थे? उदाहरणार्थ,

(a) क्या स्टेडियम में ठीक 51,000 दर्शक थे?

(b) क्या टेलीविजन पर ठीक 40 मिलियन लोगों ने मैच देखा?

समाचार

1. भारत और पाकिस्तान के बीच हुए एक हॉकी मैच को जिसे स्टेडियम में 51,000 दर्शकों ने देखा और विश्व भर में 40 मिलियन लोगों ने टेलीविजन पर देखा।

2. भारत और बांगलादेश के तटवर्तीय क्षेत्रों में आए एक चक्रवाती तूफान में लगभग 2000 व्यक्तियों की मृत्यु हो गई और 50000 से अधिक घायल हुए।

3. रेलवे द्वारा प्रतिदिन 63,000 किलोमीटर से अधिक रेलपथ पर 13 मिलियन से अधिक यात्री यात्रा करते हैं।

स्पष्टतः, नहीं। शब्द लगभग स्वयं यह दर्शाता है कि व्यक्तियों की संख्याएँ इन संख्याओं के निकटतम थीं। स्पष्ट रूप से, 51000 संख्याओं 50800 या 51300 में से कोई भी संख्या हो सकती है, परन्तु 70000 नहीं होगी। इसी प्रकार, 40 मिलियन का अर्थ 39 मिलियन से अधिक और 41 मिलियन से कुछ कम हो सकता है। परन्तु निश्चित ही इसका अर्थ 50 मिलियन नहीं है।

इसी प्रकार, भारतीय रेलवे द्वारा यात्रा करने वाले यात्रियों की वास्तविक संख्या दी हुई संख्या के बराबर नहीं हो सकती है। परंतु इससे कुछ अधिक या कम हो सकती है। इन उदाहरणों में दी गई संख्याओं को ठीक-ठीक गिनकर (या यथार्थ रूप से) नहीं लिखा गया है, बल्कि ये उस संख्या के बारे में अनुमान देने वाले आकलन (Estimate) हैं।

चर्चा कीजिए कि इनसे क्या सुझाव मिलते हैं।

हम सन्निकट (approximate) मान कहाँ निकालते हैं?

अपने घर पर होने वाले एक बड़े उत्सव की कल्पना कीजिए। पहला काम जो आप करेंगे वह यह होगा कि आप यह पता करेंगे कि आपके घर पर लगभग कितने मेहमान आ सकते हैं।

क्या आप मेहमानों की ठीक (exact) संख्या का विचार लेकर प्रारंभ कर सकते हैं? **व्यावहारिक रूप से यह असंभव है।**

हमारे देश के वित्त मंत्री प्रति वर्ष बजट पेश करते हैं। मंत्री महोदय 'शिक्षा' मद के अंतर्गत कुछ राशि का प्रावधान रखते हैं। क्या यह राशि यथार्थ रूप से सही होगी? यह उस वर्ष देश में शिक्षा पर व्यय होने वाली आवश्यक धनराशि का केवल एक विवेकसंगत अच्छा अनुमान या आकलन (estimate) हो सकता है।

कुछ करें

उन स्थितियों के बारे में सोचिए जहाँ आपको ठीक-ठीक संख्याओं की आवश्यकता पड़ती है तथा इनकी उन स्थितियों से तुलना कीजिए जहाँ आप केवल एक आकलित (estimated) संख्या से ही काम चला लेते हैं। ऐसी स्थितियों के तीन उदाहरण दीजिए।

1.4.1 सन्निकटन द्वारा निकटतम दहाई तक आकलन

			1						2			
259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271

ज्ञात कीजिए कि संख्या 1 और संख्या 2 में से–

(a) कौन-सी संख्या 270 की तुलना में 260 के अधिक समीप हैं।

(b) कौन-सी संख्या 260 की तुलना में 270 के अधिक समीप हैं।

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

पटरी की संख्याओं 10, 17 और 20 के स्थानों को देखिए। क्या संख्या 17, संख्या 10 के अधिक निकट है या 20 के? 17 और 20 के बीच का रिक्त स्थान 17 और 10 के बीच के रिक्त स्थान की तुलना में कम है। इसलिए, हम 17 को निकटतम दहाई तक 20 के रूप में सन्निकटित करते हैं।

अब 12 को लीजिए। यह भी 10 और 20 के बीच स्थित है। परंतु 12, संख्या 20 की तुलना में 10 से अधिक निकट है। इसलिए हम 12 को निकटतम दहाई तक 10 के रूप में सन्निकटित करते हैं। आप 72 को निकटतम दहाई किस पर सन्निकटित करेंगे? यह 70 के निकट है या 80 के निकट, पता कीजिए।

हम देखते हैं कि संख्याएँ 1, 2, 3 और 4, संख्या 10 की तुलना में संख्या 0 के अधिक निकट हैं। इसलिए हम इन्हें 0 के रूप में पिछली दहाई में सन्निकटित करते हैं। संख्याएँ 6,7,8 और 9 संख्या 10 के अधिक निकट हैं। इसलिए हम इन्हें अगली दहाई के रूप में सन्निकटित करते हैं। संख्या 5, संख्याओं 9 और 10 के बराबर की दूरी पर है। यह सामान्य परिपाटी है कि इसे 10 के रूप में सन्निकटित किया जाता है। जैसे– 72 को 70, 76 को 80 तथा 75 को भी 80 में सन्निकटित करेंगे।

प्रयास कीजिए

इन संख्याओं को निकटतम दहाई तक सन्निकटित कीजिए–

19	36	54	43	36	15
61	57	99	215	446	2936

1.4.2 सन्निकटन द्वारा निकटतम सैकड़े तक आकलन

संख्या 520 संख्या 500 के अधिक निकट है या 600 के अधिक निकट है?

520, संख्या 500 के अधिक निकट (समीप) है, इसलिए इसे निकटतम सौ तक 500 के रूप में सन्निकटित किया जाता है।

इसी प्रकार संख्या 889, संख्याओं 800 और 900 के बीच में है। यह 900 के अधिक निकट है। इसलिए, इसे निकटतम सौ तक 900 के रूप में सन्निकटित किया जाता है।

संख्याएँ 1 से 49, संख्या 100 की तुलना में, संख्या 0 के अधिक निकट हैं। इसलिए, इन्हें 0 के रूप में सन्निकटित किया जाता है। 51 से 99 तक की संख्याएँ 0 की तुलना में 100 से अधिक निकट हैं। इसलिए, इन्हें 100 के रूप में सन्निकटित किया जाता है। संख्या 50 संख्याओं 0 और 100 से बराबर दूरी पर है। सामान्य परिपाटी अनुसार, इसे 100 के रूप में सन्निकटित किया जाता है।

जाँच कीजिए कि निम्नलिखित सन्निकटन (सैकड़े तक) सही हैं या नहीं–

841 → 800 ;	9537 → 9500;	49730 → 49700
6546 → 6500 ;	286 → 300 ;	5750 → 5800
168 → 200 ;	149 → 100;	399 → 980

उन्हें सही कीजिए जो गलत हैं।

1.4.3 सन्निकटन द्वारा निकटतम हजार तक आकलन

हम जानते हैं कि 1 से 499 तक की संख्याएँ 1000 की तुलना में 0 के अधिक निकट हैं। इसलिए, इन्हें 0 के रूप में सन्निकटित करते हैं। 501 से 999 तक की संख्याएँ 0 की तुलना में 1000 के अधिक निकट है। इसलिए, इन्हें 1000 के रूप में सन्निकटित किया जाता है। संख्या 500 को भी 1000 के रूप में सन्निकटित किया जाता है।

1. निम्नलिखित सन्निकटनों की जाँच कीजिए और उन्हें सही कीजिए जो गलत हैं–

1873	→	2000;	9537	→	9500
5750	→	5800	65437	→	65000
7805	→	7000;	3498	→	4000

प्रयास कीजिए

तालिका पूरी कीजिए–

संख्या	निकटतम	सन्निकटित रूप
65748	दहाई	....
65748	सौ	....
65748	हजार	....
65748	दस हजार	....

1.4.4 संख्या संक्रियाओं के परिणामों का आकलन

हम संख्याओं को किस प्रकार जोड़ते हैं? हम संख्याओं को एक एल्गोरिद्म (Algorithm) (दी हुई विधि) का चरणबद्ध रूप से प्रयोग करते हुए जोड़ते हैं। हम संख्याओं को यह ध्यान रखते हुए लिखते हैं कि एक ही स्थान (इकाई, दहाई, सौ, इत्यादि) के अंक एक ही स्तंभ (Column) में रहें। उदाहरणार्थ, 3946 + 6579 + 2050 को निम्न रूप में लिखते हैं–

	Th	H	T	O
	3	9	4	6
	6	5	7	9
+	2	0	5	0

फिर हम इकाई वाले स्तंभ की संख्याओं को जोड़ते हैं। यदि आवश्यक हो, तो हम एक उचित संख्या को हासिल के रूप में दहाई के स्थान पर ले जाते हैं, जैसे कि इस स्थिति में है। फिर हम इसी प्रकार दहाई के स्तंभ पूर्ण कर सकते हैं। इस प्रक्रिया में स्पष्टतः समय लगता है।

अनेक स्थितियों में हमें उत्तरों को अधिक तीव्रता से ज्ञात करने की आवश्यकता होती है। उदाहरणार्थ, जब आप किसी मेले या बाजार में कुछ धनराशि लेकर जाते हैं तो आकर्षक वस्तुओं की किस्मों और मात्राओं को देखकर वहाँ आप सोचते हैं कि सभी को खरीद लिया

जाए। आपको तुरन्त यह निर्णय लेने की आवश्यकता होती है कि आप किन-किन वस्तुओं को खरीद सकते हैं। इसके लिए आपको आवश्यक धनराशि का आकलन करने की आवश्यकता पड़ती है जो उन वस्तुओं के मूल्यों का योग होती है जिन्हें आप खरीदना चाहते हैं।

किसी विशेष दिन, एक व्यापारी को दो स्थानों से धनराशि प्राप्त होनी है। एक स्थान से प्राप्त होने वाली धनराशि 13,569 रु. है और अन्य स्थान से प्राप्त होने वाली धनराशि 26,785 रु. है। उसे शाम तक किसी अन्य व्यक्ति को 37,000 रु. देने हैं। वह संख्याओं को उनके निकटतम हजारों तक सन्निकटित करता है और तुरन्त कच्चा या रफ (rough) उत्तर निकाल लेता है। वह खुश हो जाता है कि उसके पास पर्याप्त धनराशि है। क्या आप सोचते हैं कि उसके पास पर्याप्त धनराशि होगी? क्या आप बिना यथार्थ योग किए यह बता सकते हैं?

शीला और मोहन को अपना मासिक बजट बनाना है। उन्हें परिवहन, स्कूल की आवश्यकताओं, किराने का सामान, दूध और कपड़ों पर होने वाले अपने मासिक व्यय के बारे में भी जानकारी है तथा अन्य नियमित व्ययों की भी जानकारी है। इस महीने में उन्हें घूमने भी जाना है और उपहार भी खरीदने हैं। वे इन सभी पर होने वाले व्ययों का आकलन करते हैं और उन्हें जोड़कर देखते हैं कि जो राशि उनके पास है वह पर्याप्त है या नहीं। क्या वे हजारों तक सन्निकटित करेंगे, जैसा कि व्यापारी ने किया था? ऐसी पाँच और स्थितियों के बारे में सोचिए और चर्चा कीजिए, जहाँ हमें योग या अंतरों का आकलन करना पड़ता है। क्या हम इन सभी में एक ही स्थान तक सन्निकट मान ज्ञात करते हैं?

जब आप संख्याओं के परिणामों का आकलन करते हैं तो उसके लिए कोई निश्चित नियम नहीं है। यह विधि इस पर निर्भर करती है कि परिशुद्धता की वांछित मात्रा कितनी है, आकलन कितनी जल्दी चाहिए तथा सबसे महत्त्वपूर्ण बात है कि अनुमानित उत्तर कितना अर्थपूर्ण होगा।

1.4.5 योग अथवा अंतर का आकलन

जैसा कि हमने ऊपर देखा, हम एक संख्या को किसी भी स्थान तक सन्निकटित कर सकते हैं। व्यापारी ने धनराशि को निकटतम हजारों तक सन्निकटित किया और संतुष्ट हो गया कि उसके पास पर्याप्त धनराशि है। इसलिए जब आपको किसी योग अथवा अंतर का आकलन

करना है, तो आपको यह पता होना चाहिए कि आप क्यों सन्निकटित कर रहे हैं और इसलिए किस स्थान तक आपको सन्निकटित करना है। निम्नलिखित उदाहरणों को देखिए–

उदाहरण-1 : 4380 + 15785 का आकलन कीजिए।

हल : हम देखते हैं कि 15785 > 4380 है।

हम निकटतम हजारों तक सन्निकटित करते हैं।

15785 सन्निकटित मान →	16,000
+ 4380 सन्निकटित मान →	+4000
आकलित योग →	20,000

क्या यह विधि काम करती है? आप यथार्थ उत्तर ज्ञात करके जाँच कर सकते हैं कि यह आकलन विवेकपूर्ण है या नहीं।

उदाहरण-2: 4875 – 484 का आकलन कीजिए।

हल :

4875 सन्निकटित मान (हजारों में) →	5,000
–484 सन्निकटित मान → (हजारों में)	–0
आकलित अंतर →	5,000

यह विवेकपूर्ण आकलन नहीं है। यह विवेकपूर्ण क्यों नहीं है? निकटतम आकलन प्राप्त करने के लिए, आइए संख्या को निकटतम सौ तक सन्निकटित करने का प्रयत्न करें।

4875 सन्निकटित मान →	4,900
–484 सन्निकटित मान →	–500
आकलित अन्तर →	4,400

यह एक अच्छा और अधिक अर्थपूर्ण आकलन है।

1.4.6 आकलन करना : गुणनफल

19 × 48 के लिए आकलन क्या है?

19 × 48 का गुणनफल 912 होता है। स्पष्ट है कि यह गुणनफल 1000 से कम है। क्यों? यदि हम 19 का निकटतम दहाई तक मान निकलें, तो हमें 20 प्राप्त होता है और फिर 48 का निकटतम दहाई तक मान निकालें, तो 50 प्राप्त होता है। अब 20 × 50 = 1000 है। संख्या 912, संख्या 1000 के सन्निकट है।

करना है, तो आपको यह पता होना चाहिए कि आप क्यों सन्निकटित कर रहे हैं और इसलिए किस स्थान तक आपको सन्निकटित करना है। निम्नलिखित उदाहरणों को देखिए–

उदाहरण-1 : 4380 + 15785 का आकलन कीजिए।

हल : हम देखते हैं कि 15785 > 4380 है।

हम निकटतम हजारों तक सन्निकटित करते हैं।

15785 सन्निकटित मान →	16,000
+ 4380 सन्निकटित मान →	+4000
आकलित योग →	20,000

क्या यह विधि काम करती है? आप यथार्थ उत्तर ज्ञात करके जाँच कर सकते हैं कि यह आकलन विवेकपूर्ण है या नहीं।

उदाहरण-2: 4875 – 484 का आकलन कीजिए।

हल :

4875 सन्निकटित मान (हजारों में) →	5,000
–484 सन्निकटित मान → (हजारों में)	–0
आकलित अंतर →	5,000

यह विवेकपूर्ण आकलन नहीं है। यह विवेकपूर्ण क्यों नहीं है? निकटतम आकलन प्राप्त करने के लिए, आइए संख्या को निकटतम सौ तक सन्निकटित करने का प्रयत्न करें।

4875 सन्निकटित मान →	4,900
–484 सन्निकटित मान →	–500
आकलित अन्तर →	4,400

यह एक अच्छा और अधिक अर्थपूर्ण आकलन है।

1.4.6 आकलन करना : गुणनफल

19 × 48 के लिए आकलन क्या है?

19 × 48 का गुणनफल 912 होता है। स्पष्ट है कि यह गुणनफल 1000 से कम है। क्यों? यदि हम 19 का निकटतम दहाई तक मान निकलें, तो हमें 20 प्राप्त होता है और फिर 48 का निकटतम दहाई तक मान निकालें, तो 50 प्राप्त होता है। अब 20 × 50 = 1000 है। संख्या 912, संख्या 1000 के सन्निकट है।

सन्निकटन का व्यापक नियम यह है कि प्रत्येक गुणा की जाने वाली संख्या को उसके सबसे बड़े स्थान तक सन्निकटित कीजिए और सन्निकटित संख्याओं को गुणा कर दीजिए।

उदाहरण :72 × 489 का आकलन कीजिए।

489 सन्निकटित होता है 500 (सौ तक सन्निकटित)

72 सन्निकटित होता है 70 (दहाई तक सन्निकटित)

अतः आकलित गुणनफल = 500 × 70 = 35000 है।

स्वयं करके देखिए

निम्नलिखित गुणनफलों का आकलन कीजिए—

(a) 67 × 313 (b) 8 × 795

(c) 898 × 735 (d) 958 × 387

ऐसे ही पाँच और प्रश्न बनाइए और उन्हें हल कीजिए।

आपके लिए आकलनों का एक महत्त्वपूर्ण उपयोग यह है कि आप अपने उत्तरों को जाँच कर सकते हैं। मान लीजिए आपने 37 × 1889 ज्ञात किया है, परंतु आप निश्चित नहीं हैं कि उत्तर सही है या नहीं। इस गुणनफल का एक तुरन्त (जल्दी) प्राप्त होने वाला और विवेकपूर्ण आकलन 40 × 2000 = 80000 है। यदि आपका उत्तर 80000 के निकट है, तो संभवतः आपका उत्तर सही है। दूसरी ओर, यदि वह 8000 या 8,00,000 के निकट है, तो आपके गुणा करने में अवश्य ही कुछ गलती हुई है।

प्रश्नावली – 1.3

1. **व्यापक नियम का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित में से प्रत्येक के योगफल का सन्निकटित मान बताइए—**

   (a) 730 + 998 (b) 796 – 314

   (c) 12,904 + 2888 (d) 28292 – 21496

2. निम्न सवालों में प्रत्येक में एक मोटे तौर पर आकलन और एक निकटतम आकलन (दस तक सन्निकटन) दीजिए–

(a) $439 + 334 + 4317$ (b) $108734 - 47599$

(c) $8325 - 491$ (d) $489348 - 48365$

3. व्यापक नियम का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित संख्याओं के गुणनफलों के आकलन का अनुमान लगाइए–

(a) 578×161 (b) 5281×3491

(c) 1291×592 (d) 9250×29

1.4.7 कोष्ठकों का प्रयोग

मोहन ने बाजार से 7 कलमें खरीदीं जिनका मूल्य 10 रु. प्रति कलम था। उसकी बहन सीमा ने इसी प्रकार की 8 कलमें खरीदीं। उनके द्वारा दी गई कुल धनराशि ज्ञात कीजिए।

रीता ने धनराशि इस प्रकार परिकलित की	शबीना ने धनराशि इस प्रकार परिकलित की
$7 \times 10 + 8 \times 10$	$7 + 8 = 15$
$= 70 + 80$	और 15×10
उत्तर = 150 रु.	उत्तर = 150 रु.

आप देख सकते हैं कि रीता और शबीना के उत्तर प्राप्त करने की विधियों में कुछ अंतर है, परंतु दोनों के उत्तर समान हैं और प्राप्त परिणाम सही है। क्यों?

सीमा ने कहा कि शबीना ने $8+7\times10$ करके उत्तर प्राप्त किया है।

श्याम बताता है कि $8 + 7 \times 10 = 8 + 70 = 78$ है। लेकिन शबीना ने जो उत्तर प्राप्त किया है वह यह नहीं है। बस तीनों विद्यार्थी उलझन में पड़ जाते हैं।

ऐसी स्थितियों में उलझन दूर करने के लिए हम कोष्ठकों (Brackets) का प्रयोग कर सकते हैं। हम कोष्ठकों का प्रयोग करके 7 और 8 को मिलाकर एक समूह बना सकते हैं जो दर्शाएगा कि इस समूह को एक अकेली संख्या समझा जाए। इससे उत्तर इस प्रकार प्राप्त होता है–

$(7+8) \times 10 = 15 \times 10$

यह वही है जो शबीना ने किया है। उसने पहले 7 और 8 को जोड़ा और फिर प्राप्त योग को 10 से गुणा कर दिया।

कोष्ठकों का प्रयोग यह स्पष्ट रूप में हमें बताता है कि पहले कोष्ठकों ( ) के अंदर दी हुई संख्याओं को एक अकेली संख्या के रूप में बदलिए और फिर बाहर दी हुई संक्रियां कीजिए जो यहाँ 10 से गुणा करना है।

स्वयं करके देखिए

1. कोष्ठकों का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए व्यंजक लिखिए–

(a) पाँच और तीन के योग का चार से गुणा।

(b) सोलह और सात के अंतर को चार से भाग।

(c) पैंतालीस को तीन और दो के योग के तिगुने से भाग देना।

2. $(5 + 8) \times 7$ के लिए विभिन्न स्थितियाँ लिखिए।

(ऐसी एक स्थिति है– गीता और रीता ने 7 दिन कार्य किया। गीता 5 घंटे प्रतिदिन कार्य करती है और रीता 8 घंटे प्रतिदिन कार्य करती है। दोनों ने एक सप्ताह में कुल कितने घंटे कार्य किया?)

3. निम्नलिखित के लिए पाँच स्थितियाँ लिखिए जहाँ कोष्ठकों का प्रयोग आवश्यक हो–

(a) $6\ (8-4)$ (b) $(5+3)(8-3)$

1.5 रोमन संख्यांक

अभी तक हम हिंदू-अरेबिक संख्यांकों (Hindu-Arabic Numerals) की पद्धति का ही प्रयोग करते रहे हैं। यह एक मात्र संख्यांक पद्धति नहीं है। संख्यांक लिखने की पुरानी पद्धतियों में से एक पद्धति रोमन संख्यांकों (Roman Numerals) की पद्धति है। यह पद्धति अभी भी अनेक स्थानों पर प्रयोग की जाती है। उदाहरणार्थ, हम घड़ियों में रोमन संख्यांकों का प्रयोग देख सकते हैं। इनका प्रयोग स्कूल की समय-सारणी में कक्षा के लिए भी किया जाता है, इत्यादि।

रोमन संख्यांक

I,	II,	III,	IV,	V,	VI,	VII,	VIII,	IX	X

ये क्रमशः संख्याएँ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 और 10 व्यक्त करते हैं। इसके बाद 11 के लिए XI और 12 के लिए XII, ... 20 के लिए XX का प्रयोग होता है।

इस पद्धति के कुछ अन्य संख्यांक, संगत हिंदू-अरेबिक संख्यांकों के साथ इस प्रकार हैं–

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

(a) यदि किसी संकेत की पुनरावृत्ति होती है तो जितनी बार वह आता है उसका मान उतनी ही बार जोड़ दिया जाता है। अर्थात् II बराबर 2 है, XX बराबर 20, है और XXX बराबर 30 है।

(b) कोई संकेत तीन से अधिक बार नहीं आता है। परंतु संकेतों V, L और D की कभी पुनरावृत्ति नहीं होती है।

(c) यदि छोटे मान वाला कोई संकेत एक बड़े मान वाले संकेत के दाईं ओर जाता है तो बड़े मान में छोटे मान को जोड़ दिया जाता है। जैसे–

VI = 5 + 1 = 6 XII = 10+2 = 12

LXV = 50 + 10 + 5 = 65

(d) यदि छोटे मान वाला कोई संकेत बड़े मान वाले किसी संकेत के बाईं ओर जाता है तो बड़े मान में से छोटे मान को घटा दिया जाता है। जैसे–

IV = 5–1 = 4 IX = 10–1 = 9

XL = 50–10 = 40 XC = 100–10 = 90

(e) संकेतों V,L और D को कभी भी बड़े मान वाले संकेत के बाईं ओर नहीं लिखा जाता है। अर्थात् V,L और D के मानों को कभी भी घटाया नहीं जाता है।

संकेत I को केवल V और X में से घटाया जा सकता है। संकेत X को केवल L, M और C में से ही घटाया जा सकता है।

इन नियमों का पालन करने से हमें प्राप्त होता है–

1	=	I	20	=	XX
2	=	II	30	=	XXX

3	=	III	40	=	XL
4	=	IV	50	=	L
5	=	V	60	=	LX
6	=	VI	70	=	LXX
7	=	VII	80	=	LXXX
8	=	VIII	90	=	XC
9	=	IX	100	=	C
10	=	X			

(a) उपर्युक्त सारणी में छूटी हुई संख्याओं को रोमन पद्धति में लिखिए। जैसे : 11 से 19, 21–29 ...... इत्यादि।

(b) XXXX, VX, IC, XVV ------ इत्यादि नहीं लिखे जाते हैं। क्या आप बता सकते हैं क्यों?

उदाहरण-1 : निम्नलिखित को रोमन संख्यांकों में लिखिए–

(a) 79 (b) 98

हल- (a) 79 = 70 + 9
= (50+10+10) + 9
= (L+X+X) + IX
= LXXIX

(b) 98 = 90 + 8
= (100–10) + 8
= XC + VIII
= XCVIII

प्रयास कीजिए

A. नीचे दी गई संख्याओं को रोमन पद्धति में लिखिए–

(i) 25 (ii) 49 (iii) 92 (iv) 73
(v) 290 (vi) 313 (vii) 173 (viii) 217

B. इन्हें संख्यांकों में लिखिए–

(i) XXIX (ii) XLIX (iii) CCIX (iv) XXXIV
(v) XCV (vi) CCCXL

अध्याय-2 पूर्ण संख्याएँ

भूमिका

जब हम गिनती करते हैं तो हमारे सम्मुख संख्याएं 1, 2, 3, 4, 5, 6,...... एक निश्चित क्रम में प्राकृतिक रूप से आती हैं। हम गिनती की संख्याओं को **प्राकृत संख्याएँ (Natural Number)** कहते हैं, अर्थात् 1, 2, 3, 4, 5, 6 .... प्राकृत संख्याएँ हैं।

अगर आपको 20 से घटते क्रम में संख्या बोलने को कहा जाये तो आप बोलेंगे 20, 19, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 । अगर यह पूछें कि क्या 1 से पहले भी कुछ हो सकता है? प्राकृत संख्याओं में 1 से पहले कोई संख्या नहीं है।

2.1 परवर्ती और पूर्ववर्ती संख्या

आइए एक और बात पर विचार करें। हम प्राकृत संख्या 5 लेते हैं, इसमें 1 जोड़ दें तो हम संख्या 6 पाते हैं। संख्या 6, संख्या 5 के ठीक बाद वाली संख्या है जिसे **परवर्ती या उत्तरवर्ती** (Successor) कहते हैं। इसी प्रकार संख्या 6 के ठीक बाद वाली संख्या 6 + 1 = 7 हुई, 7 की परवर्ती ठीक बाद वाली संख्या 7 + 1 = 8 हुई, अर्थात् किसी संख्या की परवर्ती संख्या उस संख्या में 1 जोड़कर प्राप्त कर लेते हैं।

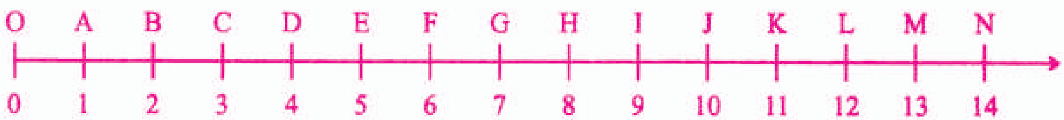
संख्या 5, संख्या 6 से ठीक पहले आती है। हम कहते हैं कि 6 का **पूर्ववर्ती या अनुवर्ती** (Predecessor) 6-1 = 5 है, संख्या 5 की पूर्ववर्ती संख्या 5-1 = 4 है, इसी प्रकार 4 की पूर्ववर्ती संख्या 3, 3 की पूर्ववर्ती संख्या 2 और 2 की पूर्ववर्ती संख्या 1 है। 1 की पूर्ववर्ती संख्या क्या होगी? संभवतः जवाब होगा कुछ नहीं, अर्थात् शून्य (0) यानी 1 की पूर्ववर्ती संख्या 1-1 = 0 होगी। ''0'' शून्य को जब हम प्राकृत संख्या में शामिल कर लेते हैं, तो इस प्रकार प्राप्त संख्याओं के समूह को पूर्ण संख्याओं का समूह कहते हैं। अर्थात् 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 .. .. को **पूर्ण संख्या** कहते हैं।

स्वयं करके देखिए

1. क्या सभी प्राकृतिक संख्याएँ पूर्ण संख्याएँ हैं?
2. क्या सभी पूर्ण संख्याएँ प्राकृत संख्याएँ भी हैं?
3. सबसे छोटी पूर्ण संख्या कौन-सी हैं?
4. 12 की परवर्ती संख्या बताएँ।
5. 990 की परवर्ती संख्या बताएँ।
6. 999 की अनुवर्ती या पूर्ववर्ती संख्या बताएँ।
7. 20 की अनुवर्ती या पूर्ववर्ती संख्या बताएँ।

2.2 संख्या रेखा

पूर्ण संख्याओं के कुछ गुणों की खोज करने के लिए उन्हें एक रेखा जिसे संख्या रेखा कहते हैं पर निरूपित करने की आवश्यकता पड़ती है। हम एक सरल रेखा खींचते हैं और संख्या शून्य (0) के लिए उस पर एक बिन्दु "O" अंकित कर लेते हैं। "O" से आरम्भ करके उसके दाईं ओर बराबर दूरियों पर बिन्दु A, B, C, D....... आदि क्रम से अंकित करते हैं–



इसे **पूर्ण संख्याओं की संख्या रेखा** कहते हैं।

इस प्रकार,

OA = 1 इकाई तो

OA = AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH = HI = IJ = JK = KL = LM = MN = 1 इकाई

OB = OA + AB = 1 + 1 = 2 अर्थात् 2 इकाई। इसी प्रकार OC = 3 इकाई, OD = 4 इकाई।

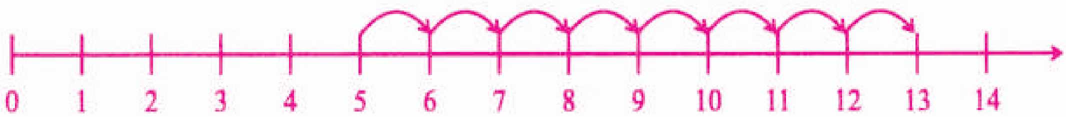
क्योंकि O पूर्ण संख्या शून्य "0" को निरूपित करता है, इसी प्रकार A, B, C, D..... इत्यादि क्रमशः पूर्ण संख्याओं 1, 2, 3, 4, 5 .... इत्यादि को निरूपित करते हैं। उपर्युक्त संख्या रेखा पर हम देखते हैं कि N (14) संख्या रेखा का सीमा बिन्दु नहीं है। संख्या रेखा के अनुदिश दाईं ओर चलते हुए हम आवश्यकतानुसार किसी भी पूर्ण संख्या तक जा सकते हैं। इस प्रकार

हमने पूर्ण संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित किया है।

- संख्या रेखा को देखने से पता चलता है कि बाईं से दाईं ओर संख्याएँ बढ़ती जाती हैं। जैसे– संख्या 8 संख्या 5 से बड़ी है।
- संख्या रेखा से यह भी स्पष्ट है कि दाईं तरफ से बाईं की ओर की संख्याएँ घटती जाती हैं, अर्थात् बाईं तरफ की संख्या दाईं तरफ की संख्या से छोटी है। जैसे– संख्या 3 संख्या 5 से छोटी है।

2.3 संख्या रेखा पर योग (जोड़ना)

संख्या रेखा पर दो संख्याओं का योग दिखाया जा सकता है, जैसे 5 और 8 का योग है–



चूँकि 5 में 8 जोड़ना है इसलिए संख्या रेखा पर संख्या 5 से 8 कदम दाईं ओर बढ़ना है। यानी 5 से एक कदम दाईं ओर 8 बार यानी 13 तक चलते हैं जैसा कि ऊपर दिखाया गया है। आठवें कदम पर संख्या 13 है। इस प्रकार 5 और 8 का योगफल 13 है, अर्थात् $5 + 8 = 13$.

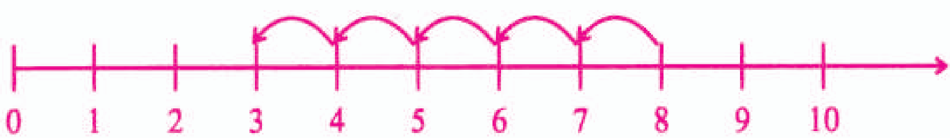
स्वयं करके देखिए

इसी प्रकार संख्या रेखा पर निम्न संख्याओं को दिखाएँ–

5+4, 9+6, 3+5, 2+8, 7+5 और 9+3

2.4 संख्या रेखा पर व्यवकलन (घटाना)

आइए $8 - 5$ को संख्या रेखा पर दिखाएँ।



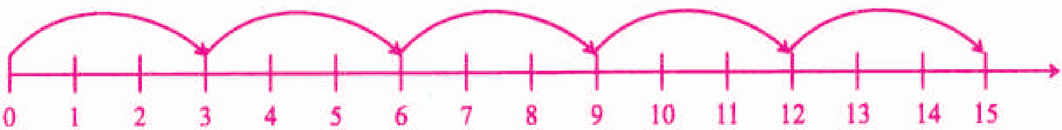
संख्या रेखा के संख्या 8 से 5 कदम बायीं ओर चलने पर संख्या 3 पर पहुँचते हैं, इसलिए 8 और 5 का घटावफल 3 हुआ, अर्थात् $8 - 5 = 3$.

स्वयं करके देखिए

संख्या रेखा का प्रयोग करके 4–3, 9–5, 8–6 और 12–5 का मान ज्ञात करें।

2.5 संख्या रेखा पर गुणन (गुणा)

आइए 3 x 5 ज्ञात करें।



0 से प्रारंभ कीजिए और दाईं ओर एक बार में 3 मात्रकों के बराबर कदम चलिए। ऐसे पाँच कदम चलिए। इस प्रकार चलते हुए हम संख्या 15 पर पहुँचते हैं। अतः 3 और 5 का गुणनफल 15 हुआ अर्थात् 3 x 5 = 15.

प्रश्नावली – 2.1

1. निम्नलिखित के ठीक बाद वाली संख्या बताइए–

   (i) 99999 (ii) 800 (iii) 979 (iv) 1000

2. निम्नलिखित के ठीक पहले वाली संख्या बताइए–

   (i) 100000 (ii) 100 (iii) 8757 (iv) 99

3. सबसे छोटी पूर्ण संख्या कौन-सी है?

4. निम्नलिखित की परवर्ती संख्या (उत्तरवर्ती संख्या) बताइए–

   (i) 54896 (ii) 8765 (iii) 543 (iv) 28 (v) 9999

5. निम्नलिखित की पूर्ववर्ती संख्या (अनुवर्ती संख्या) बताइए–

   (i) 876542 (ii) 99 (iii) 101 (iv) 4567 (v) 100000

6. 50 से 80 के बीच कितनी पूर्ण संख्याएँ हैं, लिखिए।

7. संख्या रेखा के आधार पर बताइए कि निम्नलिखित युग्म संख्या में कौन-सी संख्या बड़ी है?

(a) 503, 530 (b) 1023, 1020 (c) 4384, 5987 (d) 70, 40

2.6 पूर्ण संख्याओं के गुण

निम्न पर विचार करें

8 + 2 = 10, एक पूर्ण संख्या, 6 + 5 = 11, एक पूर्ण संख्या,

0 + 12 = 12, एक पूर्ण संख्या, ... +..................... = ...

अतः दो पूर्ण संख्याओं का योगफल सदैव एक पूर्ण संख्या होती है। इसलिए पूर्ण संख्याओं का संग्रह योग के अंतर्गत संवृत (closed) है। यह पूर्ण संख्याओं के योग का संवृत गुण (closed property) कहलाता है।

निम्न पर विचार करें–

5 x 8 = 40, एक पूर्ण संख्या, 4 x 5 = 20, एक पूर्ण संख्या

3 x 2 = 6, एक पूर्ण संख्या, ... x .... = ...

आप अपने से भी कुछ पूर्ण संख्याओं को लेकर गुणा कर जाँचिए।

अर्थात् दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल सदैव एक पूर्ण संख्या होती है।

क्या पूर्ण संख्याएँ गुणन (गुणा) के अंतर्गत भी संवृत है? आपकी जांच क्या बताती है?

निम्न पर विचार करें–

6 − 3 = 3, एक पूर्ण संख्या, 8 − 9 = ...? एक पूर्ण संख्या नहीं है।

अर्थात् दो पूर्ण संख्याओं का व्यवकलन (घटावफल) एक पूर्ण संख्या हो भी सकती है, और नहीं भी। अतः पूर्ण संख्याएँ व्यवकलन (घटाने) के अंतर्गत संवृत नहीं होती।

इसी प्रकार 12 ÷ 4 = 3, एक पूर्ण संख्या, 7 ÷ 8 = एक पूर्ण संख्या नहीं है।

.... ÷ .... = ...

अर्थात् दो पूर्ण संख्याओं का भागफल एक पूर्ण संख्या हो सकता है, नहीं भी। क्या पूर्ण संख्याएँ विभाजन (भाग) के अंतर्गत संवृत हैं?

संवृत गुण : पूर्ण संख्याओं का संग्रह (निकाय) योग और गुणन के अंतर्गत संवृत होता है पर व्यवकलन और विभाजन के अंतर्गत संवृत नहीं होता।

2.7 शून्य द्वारा विभाजन

एक संख्या से विभाजन (भाग देने) का अर्थ है कि उस संख्या को बार-बार घटाना।

$12 \div 4$ ज्ञात करें।

12		12 में से 4 को कितनी बार घटाने पर हमें 0 मिलेगा? आइए पता करें।
−4	 I	
8		
−4	 II	
4		
−4	 III	अतः $12 \div 4 = 3$
0		

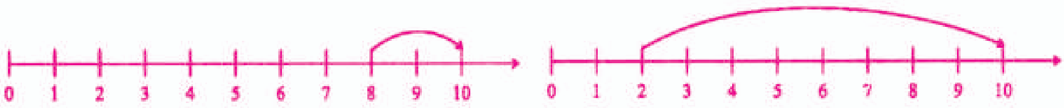
आइए $4 \div 0$ का हल ज्ञात करने का प्रयत्न करते हैं–

4		
−0	 I	प्रत्येक बार घटाने पर हमें 4 पुनः प्राप्त होता है।
4		
−0	 II	क्या यह प्रक्रिया कभी समाप्त होगी? नहीं।
4		
−0	 III	अतः $4 \div 0$ अपरिभाषित है। इसी प्रकार अन्य संख्याओं के साथ भी यह सत्य है।
4		

अतः पूर्ण संख्याओं का शून्य से विभाजन परिभाषित नहीं है।

2.8.1 योग और गुणन की क्रमविनिमेयता (commutative)

(क) 8 + 2 और 2 + 8 पर विचार करें



दोनों से एक ही उत्तर 10 प्राप्त होता है।

इसी प्रकार अन्य संख्या 5 + 2 और 2 + 5 पर विचार करें तो पाएँगे कि दोनों का उत्तर बराबर है।

अतः स्पष्ट है कि

8 + 2 = 2 + 8

और 5 + 2 = 2 + 5

इसी प्रकार का योगफल अन्य संख्याओं के साथ सत्य है।

अतः दो पूर्ण संख्याओं को किसी भी क्रम में जोड़ सकते हैं ।

यह जोड़ का क्रमविनिमेय नियम है।

(ख) 3 X 5 और 5 X 3 पर विचार करें।

3 X 5 = 15 5 X 3 = 15

3 X 5 = 5 X 3

दोनों संख्याओं का गुणनफल बराबर है, इसी प्रकार अन्य संख्याओं के साथ भी सत्य है।

अतः दो पूर्ण संख्याओं का गुणा किसी भी क्रम में कर सकते हैं।

यह गुणा का क्रमविनिमेय नियम है।

पूर्ण संख्याओं के लिए योग और गुणन दोनों ही क्रमविनिमेय है।

स्वयं करें

घटाव और भाग के लिए क्रम विनिमेयता नियम सत्य है या नहीं? कुछ पूर्णांकों के साथ परीक्षण कर पता लगायें।

2.8.2 योग और गुणन की सहचारिता (Associative property)

$(5+2)+4=7+4=11$ और $5+(2+4)=5+6=11$

उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट होता है कि

$(5+2)+4=5+(2+4)$, अत: तीन पूर्णांकों के योग में उन्हें किसी भी क्रम में बारी-बारी से जोड़ा जा सकता है।

इसे योग का साहचर्य या सहचारिता नियम कहते हैं।

पुन: एक अन्य उदाहरण देखें–

$(5 \times 2) \times 4 = 10 \times 4 = 40$ और $5 \times (2 \times 4) = 5 \times 8 = 40$

उपर्युक्त उदाहरण से स्पष्ट होता है कि –

$(5 \times 2) \times 4 = 5 \times (2 \times 4)$, अत: गुणा में पहली दो संख्याओं को गुणा कर तीसरी संख्या से गुणा करें या पहली को शेष दो के गुणनफल से गुणा करें तो कोई अन्तर नहीं आता है। **यह गुणा का साहचर्य नियम है।**

उदाहरण -1 : संख्या 845, 475 और 125 को जोड़िए।

हल : $845 + 475 + 125 = 845 + (475 + 125)$

$= 845 + 600$

$= 1445$

उदाहरण 2 : 12 + 18 + 25 को दो विधियों से ज्ञात कीजिए।

हल : $12 + 18 + 25 = (12 + 18) + 25 = 30 + 25 = 55$

$12 + 18 + 25 = 12 + (18 + 25) = 12 + 43 = 55$

स्वयं करके देखिए

इसे दोनों विधियों (क्रम विनिमेयता और साहचर्य) से जोड़िए–

(a) 12 + 38 + 16 (c) 58 + 28 + 42

(b) 46 + 12 + 4 (d) 25 + 33 + 22

उदाहरण 3 : 14 x 35 को ज्ञात कीजिए।

हल : $14 \times 35 = (7 \times 2) \times 35 = 7 \times (2 \times 35)$

$= 7 \times 70 = 490$

इस उदाहरण में, हमने साहचर्य गुण का उपयोग कर सहजता से उत्तर प्राप्त कर लिया।

उदाहरण 4 : 4 x 185 x 25 को ज्ञात कीजिए।

हल : $4 \times 25 \times 185 = (4 \times 25) \times 185$

$= 100 \times 185 = 18500$

स्वयं करके देखिए

(i) कौन-सा गुणन सरल है और क्यों?

(a) $(6 \times 8) \times 5$ या $6 \times (8 \times 5)$

(b) $(9 \times 5) \times 20$ या $9 \times (5 \times 20)$

(ii) $8 \times 9879 \times 25$

(iii) $4 \times 856 \times 125$

(iv) क्या $(24 \div 6) \div 2 = 24 \div (6 \div 2)$ है?

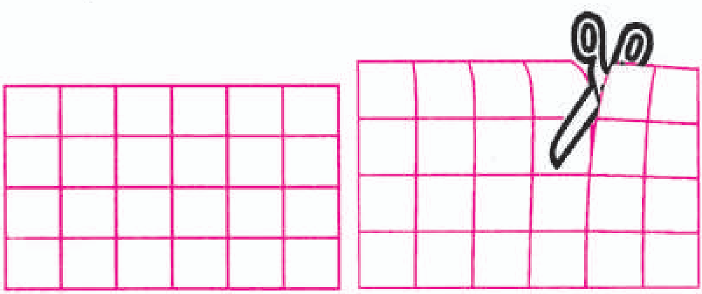
क्या विभाजन के लिए साहचर्य गुण लागू होता है?

2.8.3 योग पर गुणन का वितरण

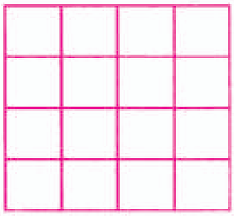
4 से.मी. x 6 से.मी. मापों का एक ग्राफ पेपर लें जिसमें 1 से.मी. x 1 से.मी. मापों वाले वर्ग बने हों।

आपके पास कुल कितने वर्ग हैं?

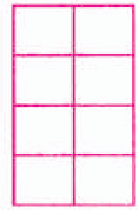
क्या यह संख्या 4 x 6 है?



अब इस कागज को 4 सेमी x 4 सेमी और 4 सेमी x 2 सेमी मापों वाले दो भागों में काट लीजिए, जैसा कि आकृति में दिखाया गया है।



वर्गों की सं. = 4 x 4



वर्गों की सं. = 4 x 2

दोनों भागों में कुल मिलाकर कितने वर्ग हैं?

क्या यह (4 x 4) + (4 x 2) है? इसका अर्थ है कि

4 x 6 = (4 x 4) + (4 x 2) लेकिन 4 x 6 = 4 x (4 + 2)

क्या यह दर्शाता है कि 4 x (4 + 2) = 4 x 4 + 4 x 2

इसी प्रकार, आप पाएँगे कि

8 x (3 + 9) = 8 x 3 + 8 x 9 है।

इसे योग पर गुणन का वितरण (या बंटन) गुण (distributive property) कहते हैं।

स्वयं करके देखिए

इसी प्रकार आप 9 x 32, 7 x 13 में वितरण नियम का उपयोग कर मान ज्ञात कीजिए–

5 x 15 को यदि 5 x (10+5) में बदलकर गुणा किया जाए तो यह सरलता से हल किया जा सकता है।

2.8.4 तत्समक अवयव (योग और गुणन के लिए)

निम्नलिखित सारणी पर विचार करें–

8	+	0	=	8
4	+	0	=	4
0	+	5	=	5
0	+	24	=	24
0	+	.....	=	....

उपर्युक्त सारणी से यह स्पष्ट है कि जब हम किसी संख्या में शून्य (0) जोड़ते हैं तो स्वयं वही पूर्ण संख्या प्राप्त होती है। इसी कारण **शून्य को पूर्ण संख्याओं के योग के लिए तत्समक अवयव (identity element) या तत्समक कहते हैं। शून्य को पूर्ण संख्याओं के लिए योज्य तत्समक (additive identity) भी कहते हैं।**

निम्नलिखित सारणी पर विचार करें–

7	x	1	=	7
8	x	1	=	8
15	x	1	=	15
18	x	1	=	18
---	x	1	=	------

उपर्युक्त सारणी से यह स्पष्ट है कि जब हम किसी संख्या में 1 से गुणा करते हैं तो स्वयं वही पूर्ण संख्या प्राप्त होती है। इसी कारण 1 को पूर्ण संख्याओं के गुणा के लिए तत्समक अवयव या तत्समक कहते हैं। 1 (एक) को पूर्ण संख्याओं के लिए गुणात्मक तत्समक (multiplicative identity) कहते हैं।

प्रश्नावली – 2.2

1. **उपयुक्त क्रम में लगाकर योग ज्ञात कीजिए–**
   (a) 585 + 956 + 15 (b) 1675 + 946 + 325
   (c) 65 + 75 + 35
2. **उपयुक्त क्रम (नियम) लगाकर गुणनफल ज्ञात करें–**
   (a) 4 x 1225 x 25 (b) 4 x 158 x 125
   (c) 4 x 85 x 25 (d) 8 x 29 x 125
3. **निम्नलिखित में प्रत्येक का मान वितरण नियम द्वारा ज्ञात करें–**
   (a) 185 x 5 + 185 x 25 (b) 4 x 18 + 4 x 12
   (c) 54279 x 92 + 8 x 54279 (d) 12 x 8 + 12 x 2
4 उपयुक्त गुणों का प्रयोग करके गुणनफल ज्ञात करें–
   (a) 585 x 806 (b) 2008 x 185
   (c) 854 x 102 (d) 258 x 1008

5. मिलान कीजिए–

	A		B
I	$2 + 8 = 8 + 2$	I	गुणन की क्रमविनिमेयता
II	$8 \times 90 = 90 \times 8$	II	जोड़ की क्रमविनिमेयता
III	$885 \times 145 = 885 \times (100 + 40 + 5)$	III	गुणा का साहचर्य नियम
IV	$5 \times (4 \times 28) = (5 \times 4) \times 28$	IV	योग पर गुणन का वितरण नियम

6. कोई दूध वाला एक होटल वाले को सुबह 45 लीटर दूध देता है और शाम को 55 लीटर दूध देता है। यदि दूध का मूल्य 15 रु. प्रति लीटर है, तो दूध वाले को प्रतिदिन कितनी धनराशि प्राप्त होगी?

2.9 पूर्ण संख्याओं में प्रतिरूप

हम संख्याओं को बिन्दुओं द्वारा प्रारम्भिक आकारों के रूप में व्यवस्थित कर सकते हैं। जो आकार हम लेंगे वे हैं– रेखा, त्रिभुज, आयत एवं वर्ग।

- प्रत्येक संख्या (एक को छोड़कर) एक रेखा के रूप में व्यवस्थित किया जा सकता है। जैसे– संख्या 2 को इस प्रकार दिखाया जा सकता है– • • जब इन दो बिन्दुओं को मिलाते हैं तो हमें एक रेखा मिलती है। इसी प्रकार 3, 4 ...... संख्या में बिन्दु लेकर एक रेखा में रखने पर और मिलाने पर हमें एक रेखा मिलती है। आप किसी भी संख्या में बिन्दु लेकर उन्हें व्यवस्थित रूप में रखकर एक रेखा द्वारा दर्शा सकते हैं।
- कुछ संख्याओं को आयत के रूप में भी दर्शाया जा सकता है। उदाहरणार्थ,

4 → • •
• •

6 → • • •
• • •

8 → • • • •
• • • •

- कुछ संख्याओं, जैसे–4 और 9 को वर्गों के रूप में भी दर्शाया जा सकता है। उदाहरणार्थ,

4 → • •
• •

9 → • • •
• • •
• • •

इसी क्रम में आगे किस संख्या में बिन्दु लेकर आप उन्हें वर्ग के रूप में दर्शा सकते हैं। (यहाँ यह ध्यान देने योग्य बात है कि प्रत्येक वर्ग एक विशेष प्रकार का आयत होता है।)

- कुछ संख्याओं को त्रिभुज के रूप में भी दर्शाया जा सकता है। संख्या 2 के बराबर बिन्दु लेकर किसी भी तरह से व्यवस्थित करने पर हमें त्रिभुज प्राप्त नहीं होता परन्तु यदि हम 3 और 6 बिन्दु लें और उन्हें इस प्रकार व्यवस्थित करें–

तो हमें समद्विबाहु त्रिभुज प्राप्त होगा। इसी प्रतिरूप को आगे बढ़ाकर पता लगाइए कि कितने बिन्दु होने पर हमें अगला समकोण समद्विबाहु त्रिभुज प्राप्त होगा?

अब सारणी को पूरा कीजिए

संख्या	रेखा	आयत	वर्ग	त्रिभुज
2	हाँ	नहीं	नहीं	नहीं
3	हाँ	नहीं	नहीं	हाँ
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				

स्वयं करके देखिए

1. कौन-सी संख्याएँ केवल रेखा के रूप में दर्शाई जा सकती हैं?
2. कौन-सी संख्याएँ आयतों के रूप में दर्शाई जा सकती हैं?

3. कौन-सी संख्याएँ वर्गों के रूप में दर्शाई जा सकती हैं?

4. ऐसी छः संख्याओं के नाम लिखें जिन्हें त्रिभुजों के रूप में दर्शाया जा सकता है।

5. जिन संख्याओं को एक से अधिक रूपों में दिखाया जा सकता है उन्हें लिखिए।

प्रतिरूपों को देखना

प्रतिरूपों को देखने से आपको गणना की प्रक्रियाओं के सरलीकरण के लिए कुछ मार्गदर्शन मिल सकता है।

जैसे–

(a) $225 + 9 = 225 + 10 - 1 = 235 - 1 = 234$

(b) $225 - 9 = 225 - 10 + 1 = 215 + 1 = 216$

(c) $225 + 99 = 225 + 100 - 1 = 325 - 1 = 324$

(d) $225 - 99 = 225 - 100 + 1 = 125 + 1 = 126$

क्या यह प्रतिरूप 9, 99, 999, ... प्रकार की संख्याओं के जोड़ने या घटाने में आपकी सहायता करता है?

इन्हें देखिए

(a) $95 \times 9 = 95 \times (10 - 1)$

(b) $95 \times 99 = 95 \times (100 - 1)$

(c) $95 \times 999 = 95 \times (1000 - 1)$

क्या आपको किसी संख्या को 9, 99, 999 .... के प्रकार की संख्याओं से गुणा करने की एक संक्षिप्त विधि प्राप्त होती है? ऐसी संक्षिप्त विधियाँ आपको अनेक गणनाएँ मौखिक रूप से (मनगणित से) करने में सहायता करती है।

इन्हें भी गौर से देखें और समझें :

(i) $96\times5=96\times\frac{10}{2}=\frac{960}{2}=480$

(ii) $96\times25=96\times\frac{100}{4}=\frac{9600}{4}=2400$

(iii) $96\times125=96\times\frac{1000}{8}=\frac{96000}{8}=12000$

यह प्रतिरूप आपको किसी संख्या को 5 या 25 या 125 से गुणा करने की एक रोचक विधि बताता है।

(आप इन संख्याओं को इसी प्रकार आगे भी बढ़ा सकते हैं।)

इन्हें भी देखें और समझें :

(i) $86\times5=86\times\frac{10}{2}=43\times10=430\times1$

(ii) $86\times15=86\times\frac{30}{2}=43\times30=430\times3$

(iii) $86\times25=86\times\frac{50}{2}=43\times50=430\times5$

(iv) $86\times35=86\times\frac{70}{2}=43\times70=430\times7$

संख्याओं के प्रतिरूप न केवल रोचक होते हैं, बल्कि मौखिक कलन में मुख्यतः उपयोगी होते हैं और संख्याओं के गुणों को भली भाँति समझने में सहायता देते हैं।

प्रश्नावली – 2.3

1. निम्नलिखित में जोड़ का क्रमविनिमेय नियम किसमें है?

(i) $5\times8=8\times5$ (ii) $(2\times3)\times5=2\times(3\times5)$

(iii) $(2+8)+10=(2+8)+10$ (iv) $15+8=8+15$

2. निम्नलिखित के उपयुक्त नियम लिखें–

(i) $8+32=32+8$ (ii) $(2+12)+15=2+(12+15)$

(iii) $8\times(5+4)=8\times5+8\times4$ (iv) $5\times50=50\times5$

3. निम्नलिखित में से किसमें शून्य निरूपित नहीं होगा?

(i) $1+0$ (ii) 0×0 (iii) $\frac{0}{2}$ (iv) $\frac{10-10}{2}$

4. यदि दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल शून्य है तो क्या हम कह सकते हैं कि इनमें से एक या दोनों ही शून्य होने चाहिए? उदाहरण देकर अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

5. यदि दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल 1 है तो क्या हम कह सकते हैं कि इनमें से एक या दोनों ही 1 के बराबर होनी चाहिए? उदाहरण देकर अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

6. वितरण विधि से ज्ञात कीजिए :

(i) 638×101 (ii) 4375×1001 (iii) 734×25

(iv) 3175×125 (v) 608×35

7. निम्नलिखित प्रतिरूपों को समझें और आगे बढ़ायें।

$1\times8+1=9$

$12\times8+2=98$

$123\times8+3=987$

$1234\times8+4=9876$

$---\times8+-=-----$

$---\times8+-=-----$

क्या आप सोच सकते हैं कि यह प्रतिरूप किस आधार पर काम करता है?

(संकेत: $12345 = 11111 + 1111 + 111 + 11 + 1$)

पूर्ण संख्याओं की गणना के कुछ शॉर्टकट

1. गुणनफल एक संख्या जिसमें इकाई 5 हैं का उसी से

जैसे– 45 × 45

चरण–1 : उत्तर की इकाई और दहाई में 5 × 5 = 25 होगा।

गुणनफल होगा | | |2|5|

चरण–2 : सैंकड़े और अधिक के स्थान के लिए संख्या से (दहाई × (दहाई+1) की गणना कर खाली स्थान भरें।

$[4 \times (4+1)] = 4 \times 5 = 20$ |2|0| | |

अतः गुणनफल होगा |2|0|2|5| या 2025

45 × 45 की गणना कर पुष्टि करें।

क्या यह शॉर्टकट 5 इकाई वाली सभी संख्याओं पर लागू होगा?

स्वयं जाँच करें

$25 \times 25 =$ ------------------

$35 \times 35 =$ ------------------

$55 \times 55 =$ ------------------

$85 \times 85 =$ ------------------

$105 \times 105 =$ ----------------

$125 \times 125 =$ ----------------

------------------ आदि

2. गुणनफल दो संख्याओं का जिनके दहाई के अंक बराबर हैं और इकाई के अंकों का जोड़ 10 है।

उदाहरण : 26 × 24

चरण–1 : उत्तर की इकाई और दहाई में दोनों इकाई अंकों का गुणनफल होगा

$6 \times 4 = 24$

अतः गुणनफल होगा | | |2|4|

चरण–2 : सैंकड़े और उससे आगे के स्थानों के लिए संख्या से (दहाई × (दहाई + 1))

$(2 \times (2+1)) = 2 \times 3 = 6$

गुणनफल होगा | |6|2|4| या 624

26 × 24 गणना कर पुष्टि करें। क्या यह शॉर्टकट ऐसे सब संख्याओं के जोड़ों पर लागू होगा जिनकी इकाइयों का जोड़ 10 है और दहाई अंक समान है।

निम्न गुणनफल से इस शॉर्टकट की जाँच कीजिए–

$14 \times 16 =$ ------------------

$38 \times 32 =$ ------------------

$53 \times 57 =$ ------------------

$102 \times 108 \doteq$ ------------------

$317 \times 313 =$ ----------------

$1033 \times 1037 =$ ----------------

------------------ आदि

3. गुणनफल दो संख्याएँ जिनकी दहाई के अंकों का योग 10 है और इकाई अंक बराबर है– जैसे 74 × 34

चरण–1 : इकाई अंक का स्वयं से गुणा कर उत्तर के इकाई और दहाई स्थान पर लिखें।

$4 \times 4 = 16$ तो गुणनफल होगा

		1	6

चरण–2 : सैंकड़े और अधिक स्थान के लिए दहाई अंकों को गुणा कर उसमें इकाई अंक को जोड़ें।

$(7 \times 3) + 4 = 21 + 4 = 25$

गुणनफल होगा

2	5	1	6

या 2516

74 × 34 की गणना कर उत्तर की पुष्टि करें। निम्न गुणनफल से इस शॉर्टकट की जाँच कीजिए:

$2 \times 2 = 04$

$(8 \times 2) + 2 = 18$

$82 \times 22 =$

1	8	0	4

$97 \times 17 =$ ------------------

$46 \times 66 =$ ------------------

------------------ आदि

गणना के ऐसे शॉर्टकट नियम ढूंढ़ना एक रोचक बौद्धिक अभ्यास है। ऐसे शॉर्टकट नियम ढूंढ़ने और सिद्ध करने में बीजगणित सहायक होता है जो आप आगे सीखेंगे।

अध्याय-3 संख्याओं का खेल

3.1 गुणनखंड (अपवर्तक) (Factor) और गुणज (अपवर्त्य) (Multiple)

आइए देखें संख्या 4 किन-किन संख्याओं से पूरी तरह विभाजित होती है, इसे भाग देकर देखें।

1) 4 (4	2) 4 (2	3) 4 (1	4) 4 (1
−4	−4	−3	−4
0	0	1	0
भागफल = 4	भागफल = 2	भागफल = 1	भागफल = 1
शेष = 0	शेष = 0	शेष = 1	शेष = 0

हम संख्या 4 को गुणा के रूप में भी लिख सकते हैं–

$4 = 1 \times 4$; $4 = 2 \times 2$; $4 = 4 \times 1$;

इस प्रकार हम पाते हैं कि 1, 2 और 4 संख्या 4 के पूरे-पूरे विभाजक हैं। अतः ये संख्याएँ 4 के गुणनखंड (factor) हैं। इसी प्रकार आप बताएँ कि संख्या 8 के विभाजक कौने-कौन हैं?

किसी संख्या का गुणनखंड उसका पूरा-पूरा विभाजक होता है।

1, 2 और 4 के पहाड़े में 4 आता है। अतः संख्या 4, संख्या 1, 2 और 4 प्रत्येक का गुणज (multiple) है।

गतिविधि 1

हम वर्ग के बच्चों के संख्यानुसार कार्ड लेते हैं जिस पर 1, 2, 3, 4, 5 .... आदि संख्याएँ लिखी हों और प्रत्येक संख्या कार्ड में एक धागा बाँध देते हैं, जिसे गले से आसानी से लटकाया जा सके। कार्डों को प्रत्येक बच्चों के बीच बाँटकर उसे गले में पहनने को कहें और

फिर उन्हें एक वृत्ताकार गोल घेरे में खड़ा होने के लिए कहें। अब एक बच्चे को बीच में बुलाएँ। माना कि 18 नम्बर की कार्ड वाला बच्चा बीच में आया। फिर बच्चों से कहेंगे कि वे बच्चे भी बीच में आएँ जिनका नम्बर कार्ड इस नम्बर कार्ड को पूरी-पूरी विभाजित करता है, बच्चों के नम्बर कार्डों से बीच में आए नम्बर को विभाजित करने वाली संख्या को श्यामपट्ट पर नोट करवाएँ। इस प्रकार संख्या 18 को पूर्ण रूप से विभाजित करने वाली संख्या होगी – 1, 2, 3, 6, 9 और 18। ये सारी संख्याएँ 18 की गुणनखंड हैं। अब तालिका बनवाएँ–

संख्या	गुणनखण्ड
18	1, 2, 3, 6, 9, 18
12	
25	

- सोचिए और बताइए ऐसी कौन-सी संख्या है जिस संख्या वाले बच्चे को बीच में बुलाने पर एक भी अन्य बच्चा घेरे के बीच में न आए?

गतिविधि 2

यह खेल दो व्यक्तियों, मान लीजिए A और B द्वारा खेला जा सकता है। आप नीचे दिए गए कार्डों के समान संख्या कार्डों को फर्श या टेबल पर फैला लें।

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49
50						

चरण :

(a) निर्णय लीजिए कि पहले कौन खेलेगा A या B ?

(b) मान लीजिए A पहले खेलता है। वह मेज से एक कार्ड उठाता है और अपने निकट रख लेता है। मान लीजिए इस कार्ड पर 28 लिखा है।

(c) खिलाड़ी B अब वे सभी कार्ड उठाता है जिन पर A के कार्ड पर लिखी संख्या (अर्थात् 28) के गुणनखंड लिखे हैं और उन्हें अपने निकट एक ढेर में रख देता है।

(d) फिर खिलाड़ी B मेज पर रखे कार्डों में से एक कार्ड उठाता है। अब मेज पर बचे कार्डों से A वे सभी कार्ड उठाता है जिन पर B के कार्ड की संख्या के गुणनखंड लिखे हैं।

(e) यह खेल तब तक जारी रहता है, जब तक कि सभी कार्ड न उठा लिए जाएँ।

(f) A अपने पास रखे कार्डों पर लिखी संख्याओं को जोड़ता है और B भी अपने पास रखे कार्डों पर लिखी संख्याओं को जोड़ता है। जिस खिलाड़ी का योग अधिक होगा उसे ही जीता हुआ माना जाएगा। कार्डों की संख्या को बढ़ाकर इस खेल को और अधिक रोचक बनाया जा सकता है।

इस खेल को अपने मित्र के साथ खेलिए। क्या आप इस खेल को जीतने की कोई विधि ज्ञात कर सकते हैं?

स्वयं करके देखिए और निष्कर्ष निकालिए–

8 के कुछ गुणज (multiple) दिए हैं– 8,16,24 .... आगे आप लिखिए।

इसी तरह 6 के 5 गुणज लिखिए।

आप पाते हैं कि किसी संख्या का सबसे छोटा गुणज वह संख्या स्वयं भी होती है।

इसी प्रकार 15 के विभिन्न गुणनखण्ड हैं 3 x 5, 15 x 1

अतः संख्या 1, 3, 5, 15, संख्या 15 के गुणनखण्ड हैं। इसी प्रकार आप 20 के विभिन्न गुणनखण्ड लिखिए।

क्या आप ऊपर दिए गए उदाहरणों के आधार पर कह सकते हैं कि किसी संख्या का सबसे बड़ा गुणनखण्ड वह संख्या स्वयं होती है? हाँ/नहीं

क्या कोई ऐसी संख्या है जो प्रत्येक संख्या के गुणनखण्ड के रूप में आती है।

$6 = 1 \times 6$

$7 = 1 \times 7$

$12 = 1 \times 12$

क्या .हम कह सकते हैं कि 1 प्रत्येक संख्या का गुणनखण्ड है? हाँ/नहीं अन्य संख्याओं के लिए उसे जाँचिए।

जब हम $18 = 2 \times 9$ लिखते हैं, तो हम कहते हैं कि 2 और 9, संख्या 18 के गुणनखण्ड हैं। हम यह भी कहते हैं कि 18, संख्या 2 और 9 का गुणज है $\underbrace{2 \times 9}_{\text{गुणनखण्ड}} = 18 \rightarrow$ गुणज

इसी तरह आप 20 के गुणनखण्ड लिखिए। यह भी बताइए कि 20 किन-किन संख्याओं का गुणज है?

हम यह कह सकते हैं कि एक संख्या अपने प्रत्येक गुणनखण्ड का एक गुणज होती है।

ऊपर दिए गए उदाहरणों के आधार पर निम्न कथनों की जाँच कीजिए–

1. एक संख्या के गुणनखण्डों (**Factor**) की संख्या निश्चित (परिमित) होती है।

हाँ/नहीं

कारण --

2. किसी संख्या के गुणज (**Multiple**) की संख्या भी निश्चित (परिमित) होती है।

हाँ/नहीं

कारण --

सम्पूर्ण संख्याएँ (Perfect Number)

जैसे– 6 के सभी गुणनखंड = 1, 2, 3 और 6 हैं।

इनके गुणनखंडों का योगफल = 1 + 2 + 3 + 6 = 12 = 2 x 6 अर्थात् 6 के सभी गुणनखंडों का योगफल 6 का दोगुना है।

पुनः 28 के सभी गुणनखंड = 1, 2, 4, 7, 14 और 28 हैं।

इनके गुणनखंडों का योगफल = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56 = 2 x 28 अर्थात् 28 के सभी गुणनखंडों का योगफल 28 का दोगुना है।

वह संख्या जिसके सभी गुणनखंडों का योगफल उस संख्या का दोगुना हो, एक सम्पूर्ण संख्या (Perfect number) कहलाती है। यहाँ 6 और 28 सम्पूर्ण संख्याएँ हैं।

स्वयं करें

क्या 12 एक सम्पूर्ण संख्या है?

3.2 भाज्य, (संयुक्त संख्या) और अभाज्य संख्या (रूढ़ सं०)

संख्या	गुणनखंड (अपवर्तक)
1	1
2	1, 2
3	1, 3
4	1, 2, 4
5	1, 5
6	1, 2, 3, 6
7	1, 7
8	1, 2, 4, 8
9	1, 3, 9
...	....

उपर्युक्त सारणी को देखने से पता चलता है कि तीन तरह की संख्याएँ हैं। वे संख्याएँ :

(i) जिनका केवल एक गुणनखण्ड होता है।

(ii) जिनके केवल दो गुणनखण्ड होते हैं।

(iii) जिनके दो से अधिक गुणनखण्ड होते हैं।

निष्कर्ष

- जिनका केवल एक गुणनखंड है वह 1 है।

  यह न तो भाज्य है और न अभाज्य।

- जिनके केवल दो गुणनखंड हैं वे संख्याएँ हैं–

  2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 .... इन संख्याओं को **अभाज्य संख्या (Prime number)** कहते हैं।

- जिनके दो से अधिक गुणनखंड होते हैं वे संख्याएँ हैं : 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16 .... इन संख्याओं को **संयुक्त (Composite) संख्या** कहते हैं।

अभाज्य संख्याओं को छाँटने की एक सरल विधि यूनानी गणितज्ञ इरेटोसथीन्स (Eratosthenes) ने तीसरी शताब्दी ई.पू. ज्ञात की। उसकी यह विधि इरेटोसथीन्स की छलनी (Sieve of Eratosthenes) कहलाती है। पहले हम 1 से 100 तक के धन पूर्णांकों की सारणी बनाते हैं जैसा आगे दिया गया है।

हम 1 को काट देते हैं क्योंकि हम जानते हैं कि 1 न तो भाज्य संख्या है और न अभाज्य। अब हम 2 पर गोला लगाते हैं और 2 के प्रत्येक गुणज अर्थात् 4, 6, 8 .... इत्यादि को काट देते हैं जैसा कि आगे किया जा रहा है–

अगली संख्या जो नहीं काटी गई है, 3 है। अतः 3 के प्रत्येक गुणज अर्थात् 6, 9, 12, 15 .... इत्यादि को काट देते हैं।

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

हम यह क्रिया तब तक जारी रखते हैं, जब तक कि प्रत्येक संख्या या तो कट जाए या उस पर गोला लग जाए।

सारणी में गोले वाली सभी संख्याएँ अभाज्य संख्याएँ हैं। 1 को छोड़कर काट दी गई सभी संख्याएँ संयुक्त संख्याएँ हैं।

3 और 5 के बीच केवल एक भाज्य संख्या 4 है, 5 और 7 के बीच केवल एक भाज्य संख्या 6 है। 11 और 13 के बीच केवल एक भाज्य संख्या है वह है 12। इस प्रकार की अभाज्य संख्याओं के जोड़े को जिनके बीच केवल एक ही भाज्य संख्या हो, अभाज्य युग्म (जुड़वाँ अभाज्य) (Twins prime) कहते हैं।

स्वयं करें

1 और 100 के बीच सभी अभाज्य युग्मों को लिखें।

उदाहरण 1 : 42 के सभी गुणनखंडों को ज्ञात करें।

हल : हम देखते हैं कि

42 = 1 x 42, 42 = 2 x 21, 42 = 3 x 14, 42 = 6 x 7, 42 = 7 x 6

यहाँ रुक जाइए, क्योंकि 6 और 7 पहले ही आ चुका है। इस प्रकार 42 के सभी गुणनखंड 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42 हैं।

उदाहरण 2 : 81 के गुणनखंड ज्ञात करें।

हल : 81 = 1 X 81, 81 = 3 X 27, 81 = 9 X 9

क्योंकि दोनों गुणनखंड (9) समान हैं। इस प्रकार वांछित गुणनखंड 1, 3, 9, 27, 81 है।

उदाहरण 3 : क्या 12, 8736 का गुणनखंड है?

हल : यदि 12, संख्या 8736 का एक गुणनखण्ड है तो 8736 में 12 का भाग पूरा-पूरा जाना चाहिए–

12) 8736 (728
–84
33
-24
96
–96
0

क्योंकि शेष 0 है अर्थात् 8736 संख्या 12 से पूर्णतः विभाजित है। इसलिए 12, संख्या 8736 का एक गुणनखंड है।

प्रश्नावली – 3.1

1. 15 के सभी गुणनखंड लिखें।
2. 64 के सभी गुणनखंड लिखे।
3. **निम्न में प्रत्येक के सभी गुणनखंड लिखें–**

    (i) 36 (ii) 45 (iii) 78 (iv) 125 (v) 144

4. 14 के गुणज लिखें।
5. 18 के गुणज लिखें।
6. **निम्न में प्रत्येक के पहले पाँच गुणज लिखें–**

    (i) 4 (ii) 12 (iii) 30 (iv) 24 (v) 50

7. सबसे छोटी अभाज्य संख्या बताएँ।
8. सम अभाज्य संख्या बताएँ।
9. तीन अभाज्य युग्म का उदाहरण दें।
10. **निम्न में कौन-कौन सी अभाज्य संख्या है–**

    (a) 23 (b) 28 (c) 42 (d) 9 (e) 31

11. सबसे छोटी संयुक्त संख्या बताएँ।
12. 100 से कम 5 क्रमागत संयुक्त संख्याएँ लिखिए जिनके बीच कोई अभाज्य संख्या न हो।
13. किसी संख्या के इकाई स्थान पर 5 है। यदि वह संख्या 150 और 200 के बीच की हो तो वह संयुक्त होगी अथवा अभाज्य?
14. 10 से बड़ी किसी संख्या के अभाज्य होने के लिए उसके इकाई स्थान पर कौन-कौन से अंक हो सकते हैं?
15. क्या कोई ऐसी भी संख्या है, जिसका कोई गुणनखंड न हो?
16. 1 और 100 के बीच सिर्फ दो सम्पूर्ण संख्याएँ हैं, वे कौन-कौन सी हैं?

17. **निम्न में प्रत्येक संख्या को दो विषम अभाज्य संख्या के योग के रूप में लिखें–**

(i) 32 (ii) 40 (iii) 56 (iv) 80 (v) 100

18. 16 से छोटी सभी अभाज्य और संयुक्त संख्याएँ अलग-अलग लिखिए।

19. क्या 1729 अभाज्य संख्या है?

20. **निम्नलिखित में जो सत्य हो उसके आगे (✓) सत्य का चिह्न और जो गलत हो उसके आगे (x) गलत का चिह्न लगाएँ–**

(i) वह संख्या जिसका केवल एक अपवर्तक होता है, वह संख्या 1 है।

(ii) सबसे छोटी सम अभाज्य संख्या 2 है।

(iii) सबसे छोटी संयुक्त संख्या 6 है।

(iv) दो अभाज्य संख्याओं का योग सम होता है।

(v) 2 को छोड़कर किन्हीं भी दो अभाज्य संख्या का योगफल सम संख्या होती है।

(vi) सभी सम संख्याएँ संयुक्त संख्या है।

(vii) तीन विषम संख्याओं का योगफल विषम संख्या होती है।

(viii) दो सम संख्याओं का योगफल सदैव सम संख्या होती है।

3.3 विभाज्यता की जाँच

क्या संख्या 54, संख्या 2 से पूर्णतः विभाजित है? आइए 54 में 2 से भाग देकर देखें।

$$
\begin{array}{r}
2\,)\,54\,(27 \\
\underline{-4} \\
14 \\
\underline{-14} \\
0
\end{array}
$$

क्या 9876548, संख्या 2 से विभाजित है? आइए भाग देकर देखें।

$$
\begin{array}{r}
4938274 \\
2\overline{)9876548} \\
\underline{-8} \\
18 \\
\underline{-18} \\
07 \\
\underline{6} \\
16 \\
\underline{-16} \\
05 \\
\underline{-4} \\
14 \\
\underline{-14} \\
08 \\
\underline{-8} \\
\underline{0}
\end{array}
$$

अतः संख्या 9876548 संख्या 2 से पूर्णतः विभाजित है।

परन्तु उपर्युक्त भाग की क्रिया द्वारा विभाज्यता की जाँच करने में अधिक श्रम एवं समय लगता है और इसकी जाँच के लिए बहुत-सी सरल विधियाँ उपलब्ध हैं, जिनसे शीघ्र जाँच की जा सकती है कि कोई संख्या कुछ अन्य संख्याओं से पूर्णतः विभाज्य है या नहीं। केवल संख्या के अंकों की जाँच करके हम निश्चित रूप से कह सकते हैं कि वह संख्या इनमें से किस संख्या से विभाज्य है। आइए जाँच के इन नियमों का यहाँ संक्षेप में जिक्र करते हैं–

1. **2 से विभाज्यता–** 10, 12, 14, 16, 18 इन संख्याओं को देखिए, ये दो से पूर्णतः विभाजित हैं, इनके इकाई के अंक 0, 2, 4, 6 और 8 हैं। अतः जिस संख्या का इकाई का अंक 0, 2, 4, 6 और 8 हो, वे संख्याएँ 2 से पूर्णतः विभाजित होती हैं।

2. **3 से विभाज्यता–** दी गई संख्या के अंकों का योगफल 3 से पूर्णतः विभाजित है तो दी गई संख्या भी 3 से पूर्णतः विभाजित होगी। जैसे– संख्या 8745 संख्या 3 से विभाज्य है, क्योंकि 8 + 7 + 4 + 5 = 24, 3 से पूर्णतः विभाज्य है।

3. **4 से विभाज्यता–** संख्या के दहाई और इकाई के अंकों से बनी संख्या यदि 4 से पूर्णतः विभाज्य है तो दी गई संख्या भी 4 से पूर्णतः विभाजित होगी। जैसे – संख्या 5832, संख्या 4 से पूर्णतः विभाज्य है, क्योंकि इस संख्या के दहाई और इकाई से बनी संख्या 32 है, जो 4 से विभाज्य है। दी गई संख्या के दहाई और इकाई का अंक शून्य हो तो वह भी 4 से विभाज्य है। जैसे– 4100 आदि।

4. **5 से विभाज्यता–** दी गई संख्या के इकाई का अंक यदि 0 या 5 हो, तो दी गई संख्या 5 से पूर्णतः विभाज्य होगी। जैसे– 10, 105 आदि।

5. **6 से विभाज्यता–** 6 का अभाज्य गुणनखंड = 2 x 3 है। अतः दी गई संख्या यदि 2 और 3 दोनों से विभाज्य है तो दी गई संख्या 6 से भी पूर्णतः विभाज्य होगी। जैसे– संख्या 8556, संख्या 2 और 3 दोनों से विभाज्य है।

6. **8 से विभाज्यता –** दी गई संख्या के सैकड़ा, दहाई और इकाई के अंक यदि शून्य हो अथवा सैकड़ा, दहाई और इकाई के अंकों से बनी संख्या 8 से विभाज्य हो तो दी गई संख्या भी 8 से विभाज्य होगी। जैसे–

   58000, 8 से विभाज्य है क्योंकि सैकड़ा, दहाई और इकाई के अंक शून्य है। 58928 यह संख्या 8 से विभाज्य है, क्योंकि सैकड़ा, दहाई और इकाई से बनी संख्या 928 है, जो 8 से विभाज्य है।

7. **9 से विभाज्यता –** दी गई संख्या के अंकों का योगफल यदि 9 से विभाजित हो तो दी गई संख्या भी 9 से पूर्णतः विभाज्य होगी। जैसे– 549, 9 से विभाज्य है, क्योंकि 5 + 4 + 9 = 18 जो 9 से पूर्णतः विभाज्य है।

8. 10 से विभाज्यता – दी गई संख्या के इकाई का अंक शून्य हो, तो वह 10 से विभाज्य है। जैसे– 100, 5000, 8530 आदि।

9. 11 से विभाज्यता– यदि दी गई संख्या के दाएं से विषम स्थानों पर के अंकों का योगफल और सम स्थानों पर के अंकों का योगफल का अंतर यदि शून्य अथवा 11 के गुणज हो, तो दी गई संख्या 11 से विभाज्य होगी। जैसे – 4653 संख्या के

सम स्थान के अंकों का योगफल = 4 + 5 = 9

विषम स्थान के अंकों का योगफल = 6 + 3 = 9

अन्तर = 0

अतः 4653, 11 से पूर्णतः विभाज्य है। पुनः संख्या 8293846

विषम स्थान यानी पहला, तीसरा, पाँचवाँ, सातवाँ आदि के अंकों का योगफल 8 + 9 + 8 + 6 = 31

सम स्थानों के अंकों का योगफल 2 + 3 + 4 = 9

अन्तर = 22

यहाँ 22, 11 के गुणज है अतः 8293846, 11 से विभाज्य है।

3.4 विभाज्यता के कुछ सामान्य गुण

गुण 1 – हम जानते हैं कि 84 विभाज्य है 12 से, क्योंकि 84 = 12 x 7 तथा 12 = 3 x 4 इसलिए 84, 3 से भी विभाज्य होना चाहिए और है भी, क्योंकि 84 = 3 x 28 इसी प्रकार 84, 4 से भी विभाज्य होना चाहिए और है भी, क्योंकि 84 = 4 x 21, यह बात सभी संख्याओं के लिए सत्य है। अतः यदि एक संख्या दूसरी से विभाज्य है, तो वह दूसरी संख्या के सभी गुणनखंडों से भी विभाज्य होती है।

गुण 2 – हम जानते हैं कि

2 गुणनखंड है 36 का, क्योंकि 36 = 2 X 18

3 गुणनखंड है 36 का, क्योंकि 36 = 3 X 12

2 X 3, अर्थात् 6 गुणनखंड है 36 का, क्योंकि 36 = 6 X 6 । इसकी जाँच अन्य उदाहरण से भी कर सकते हैं और सत्य हैं।

अतः यदि कोई संख्या दो या अधिक सह-अभाज्य (Co-prime numbers) संख्याओं में प्रत्येक से विभाज्य हो तो वह संख्या, उनके गुणनफल से भी विभाज्य है।

टिप्पणी – वैसी दो संख्याएँ, जिनका सार्वगुणनखंड सिर्फ 1 हो तो वे दोनों युग्म संख्याएँ **सह-अभाज्य संख्या (Co-prime numbers)** कहलाती हैं। जैसे–

4 और 17 सह-अभाज्य है, क्योंकि

4 का गुणनखंड = 1, 2, 4

17 का गुणनखंड = 1, 17

सार्वगुणनखंड (Common factor) = 1

गुण – 3

24 और 12, 6 से विभाज्य है, क्योंकि 24 = 6 X 4

12 = 6 X 2

तो 24 + 12 = 36 संख्या 6 से विभाज्य है, क्योंकि 36 = 6 X 6 एक और उदाहरण देखें 42 और 49, 7 से विभाज्य है, क्योंकि

42 = 7 X 6 और 49 = 7 X 7

तो 42 + 49 = 91 भी 7 से विभाज्य है, क्योंकि

91 = 7 X 13

निष्कर्ष – यदि दी हुई दो संख्याएँ किसी संख्या से विभाज्य हों, तो इन संख्याओं का योग भी उस संख्या से विभाज्य होगा।

गुण 4 – अब इन उदाहरण को देखें –

60 और 45, 15 से विभाज्य हैं, क्योंकि

60 = 15 X 4

45 = 15 X 3

अब इन संख्याओं का अन्तर 60-45 = 15, जो 15 से विभाज्य है, यह अन्य के लिए भी सत्य है।

अतः यदि दी हुई दो संख्याएँ किसी संख्या से विभाज्य हों तो इन संख्याओं का अन्तर भी उस संख्या से विभाज्य है।

3.5 सार्वगुणनखंड (Common factor) और सार्वगुणज (Common multiple)

(a) आइए हम एक उदाहरण लेते हैं –

12 और 24 के गुणनखंड क्या हैं?

12 के गुणनखंड = 1, 2, 3, 4, 6, और 12

24 के गुणंनखंड = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 और 24

संख्या 12 और 24 दोनों में मिलने वाले गुणनखंड = 1, 2, 3, 4, 6 और 12 हैं। इन गुणखंडों को **उभयनिष्ठ** या **सार्वगुणनखंड** कहते हैं।

पुनः एक और उदाहरण लेते हैं–

(b) 32, 12 और 16 के गुणनखंडों पर विचार करते हैं।

32 के गुणनखंड = 1, 2, 4, 8, 16 और 32

12 के गुणनखंड = 1, 2, 3, 4, 6 और 12

16 के गुणनखंड = 1, 2, 4, 8 और 16

32, 12, और 16 तीनों संख्याओं में मिलने वाले गुणनखंड हैं– 1, 2 और 4

अतः 32, 12 और 16 के सार्वगुणनखंड = 1, 2 और 4 हैं।

(c) 8 और 15 के सार्वगुणनखंड पर विचार करें–

8 के गुणनखंड = 1, 2, 4 और 8

15 के गुणनखंड = 1, 3, 5 और 15

8 और 15 के सार्वगुणनखंड = 1

ऐसे बहुत से जोड़े हैं जिनका सार्वगुणनखंड केवल 1 होता है, इस प्रकार के युग्म संख्या को **सह-अभाज्य (Co-prime) संख्या** कहते हैं, जैसे– 3 और 5, 4 और 9 आदि।

आइए अब संख्याओं के सार्वगुणज को देखें।

(a) 4 और 5 के गुणजों को गौर से देखें।

4 का गुणज = 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40 ....

5 का गुणज = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45 ....

संख्या 4 और 5 के वैसे गुणज जो दोनों में मिलते हैं – 20, 40 ....

अतः संख्या 4 और 5 के सार्वगुणज 20, 40 .... हैं।

(b) 3, 4 और 9 के गुणजों पर विचार करें।

3 के गुणज = 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36 ....

4 के गुणज = 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40 ....

9 के गुणज = 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72 ....

3, 4 और 9 के वैसे गुणज हैं जो तीनों में हैं– 36 ....

अतः 3, 4 और 9 के सार्वगुणज = 36, 72 ....