स्वयं करके देखिए

1. निम्न का सार्वगुणनखंड ज्ञात करें –

(a) 8, 12 (b) 9, 27 और 12

2. निम्न का सार्वगुणज ज्ञात करें –

(a) 4, 16 (b) 12, 16 और 18

3. सहभाज्य संख्याओं का तीन उदाहरण दें।

हम गुणनखंड तथा अभाज्य संख्याओं के बारे में पहले से ही जानते हैं। आइए हम 24 के गुणनखंडों पर विचार करें।

$$24 = 2 \times 12 \qquad 24 = 3 \times 8 \qquad 24 = 4 \times 6$$

$$= 2 \times 2 \times 6 \qquad = 3 \times 2 \times 4 \qquad = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \qquad = 3 \times 2 \times 2 \times 2$$

24 के उपर्युक्त सभी गुणनखंडों में अंत में हम एक ही गुणनखंडन 2 x 2 x 2 x 3 पर पहुँचते हैं। इन गुणनखंडन में सिर्फ 2 और 3 ही गुणनखण्ड हैं और ये अभाज्य संख्याएँ हैं। किसी संख्या का इस प्रकार का गुणनखंडन **अभाज्य गुणनखंडन (Prime factorisation)** कहलाता है। दूसरे शब्दों में कोई गुणनखंडन अभाज्य होता है, यदि उसके सभी गुणनखंड अभाज्य हों।

उदाहरण : 360 अभाज्य गुणनखण्ड ज्ञात करें।

हल :

$$\begin{array}{r|l} 2 & 360 \\ \hline 2 & 180 \\ \hline 2 & 90 \\ \hline 3 & 45 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline & 1 \end{array}$$

360 का अभाज्य गुणनखंडन = 2 x 2 x 2 x 3 x 3 x 5 हैं।

(अतः विभाज्यता का नियम लगाकर हम किसी भी संख्या का अभाज्य गुणनखंडन आसानी से प्राप्त कर लेते हैं।)

प्रश्नावली – 3.2

1. विभाज्यता की जाँच के नियमों का प्रयोग करते हुए पता कीजिए कि निम्नलिखित संख्याओं में से कौन-सी संख्याएँ 2 से, 3 से, 4 से, 5 से, 6 से, 8 से, 9 से, 10 से और 11 से विभाज्य हैं? सिर्फ हाँ या नहीं में जवाब दें।

संख्या	विभाज्य हैं								
	2 से	3 से	4 से	5 से	6 से	8 से	9 से	10 से	11 से
124									
286									
546									
15864									
428428									
333333									
429714									
54685									
45600									

2. विभाज्यता की जाँच के नियमों के प्रयोग द्वारा ज्ञात करें कि निम्नलिखित संख्याओं में कौन-सी संख्या 2 से, 3 से, 5 से और 9 से विभाजित हैं?

(i) 126 (ii) 672 (iii) 990

(iv) 2050 (v) 2856 (vi) 406839

3. विभाज्यता की जाँच के नियमों के प्रयोग द्वारा बताएँ कौन-सी संख्याएँ 4 से और 8 से विभाज्य हैं?

(i)	512	(ii)	12159	(iii)	4096
(iv)	14540	(v)	21084	(vi)	31795012

4. निम्न संख्याओं की 6 से विभाज्यता की जाँच करें–

(i)	12583	(ii)	639210	(iii)	546534

5. निम्न में कौन-सा कथन सत्य है–

(i) यदि कोई संख्या 3 से विभाज्य है तो वह 9 से भी विभाज्य होगी।

(ii) यदि कोई संख्या 9 से विभाज्य है तो वह 3 से भी विभाज्य होगी।

(iii) सभी संख्याएँ जो 18 से विभाज्य होती है वह 3 और 6 दोनों से विभाज्य होगी।

(iv) सभी संख्याएँ जो 8 से विभाज्य है 4 से भी विभाज्य होती है।

(v) जो संख्या 9 और 10 दोनों से विभाज्य है वह 90 से भी विभाज्य होती है।

(vi) यदि कोई संख्या दी हुई दो संख्याओं के योग को पूर्ण विभाजित करती है तो वह उन दोनों संख्याओं को अलग-अलग भी पूर्ण विभाजित करती है।

(vii) दो सह-अभाज्य संख्याओं में कम-से-कम एक अभाज्य संख्या होनी चाहिए।

(viii) दो क्रमागत विषम संख्याओं का योग सदैव 4 से विभाज्य होता है।

6. 8, 24 व 32 का अभाज्य गुणनखंडन ज्ञात करें।

7. निम्नलिखित का सार्वगुणनखंड बताएँ–

(a)	4, 32	(b)	8, 32, 42	(c)	14, 56, 28

8. निम्न का गुणज निकालें–

(a)	8, 10	(b)	4, 12	(c)	3, 5, 8

9. निम्न का सार्वगुणज बताएँ–

(a) 4, 14 (b) 8, 24 (c) 6, 21 और 27

10. निम्नलिखित का अभाज्य गुणनखंडन ज्ञात करें–

(a) 540 (b) 440 (c) 420

3.6 महत्तम समापवर्तक (म.स.) (Highest common factor) या (HCF) –

इसे महत्तम सार्वभाजक (Greatest common divisor) या (GCD) भी कहा जाता है। आइए हम सबसे पहले अपवर्तक विधि द्वारा 18 और 24 का म.स. (HCF) ज्ञात करें।

18 के अपवर्तक = 1, 2, 3, 6, 9 और 18

24 के अपवर्तक = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

18 और 24 में उभयनिष्ठ (सार्व) अपवर्तक = 1, 2, 3, 6

इसमें सबसे बड़ा उभयनिष्ठ अपवर्तक 6 है। अतः महत्तम समापवर्तक = 6

स्वयं करके देखिए

निम्न का म.स. ज्ञात करें –

(i) 28, 30 (ii) 9, 24, 36 (iii) 12, 15, 18 (iv) 50, 60, 80

इस प्रकार, दो या अधिक संख्याओं का म.स. उन संख्याओं का महत्तम (सबसे बड़ी) उभयनिष्ठ अपवर्तक होता है।

अब अभाज्य गुणनखंडन विधि से दी हुई संख्याओं का महत्तम समापवर्तक ज्ञात करेंगे।

विधि – सबसे पहले हम दी हुई संख्याओं का अभाज्य गुणनखंडन करते हैं। तब प्रत्येक उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखंड का गुणनफल ज्ञात कर लेते हैं, जो म० स० कहलाता है।

इस उदाहरण को देखें–

24 और 36 का म.स. अभाज्य गुणनखंडन द्वारा इस प्रकार ज्ञात करते हैं।

24 और 28 का अभाज्य गुणनखंडन–

इस प्रकार $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

$28 = 2 \times 2 \times 7$

24 और 28 का सार्वगुणनखंड = 2, 2

अतः 24 और 28 का म.स. = 2 x 2 = 4 है

.... और उदाहरण देखें–

24, 32 और 36 का म.स. अभाज्य गुणनखंड विधि से ज्ञात करते हैं।

इस प्रकार, $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

$32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 24 \\ \hline 2 & 12 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 32 \\ \hline 2 & 16 \\ \hline 2 & 8 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 36 \\ \hline 2 & 18 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline & 1 \end{array}$$

24, 32 और 36 में सार्व अभाज्य गुणनखंड = 2, 2

महत्तम समापवर्तक = 2 x 2 = 4

टिप्पणी : सह-अभाज्य संख्या जैसे– 8 और 15 का म.स.

8 का अभाज्य गुणनखंड = 2 x 2 x 2

15 का अभाज्य गुणनखंड = 3 x 5, चूँकि इन गुणनखंडों में 1 को छोड़कर कोई अन्य सार्वगुणनखंड नहीं है, इसलिए 8 और 15 का म.स. 1 होगा।

प्रश्नावली – 3.3

1. निम्नलिखित संख्याओं के म.स. (अभाज्य गुणनखंड द्वारा) ज्ञात करें –

(a) 24, 36 (b) 40, 60 (c) 20, 50

(d) 4, 12 (e) 12, 72, 84 (f) 70, 105, 175

(g) 91, 112, 49

2. निम्न का म.स. क्या है?

(a) दो क्रमागत संख्याएँ (b) दो क्रमागत सम संख्याएँ

(c) दो क्रमागत विषम संख्याएँ

3. निम्न का म.स. (अभाज्य गुणनखंड द्वारा) ज्ञात करें –

(a) 4 और 15 (b) 8 और 9 (c) 4 और 13

3.7 महत्तम समापवर्तक (भाग विधि द्वारा)

उदाहरण–1. 12 और 32 का म.स. भाग विधि द्वारा इस प्रकार करते हैं–

```
12 ) 32 ( 2
     -24
      8 ) 12 ( 1
          -8
           4 ) 8 ( 2
              -8
               0
```

म.स. = 4

(अंतिम विभाजक जिससे भाज्य पूर्णतः विभाजित हो जाता है, दी गई संख्याओं का महत्तम समापवर्तक होता है।)

कार्य विधि

सबसे पहले दो संख्याओं के बीच भाग करते हैं, बड़ी संख्या में छोटी संख्या से भाग करते हैं, इस प्रकार जो शेष प्राप्त होता है, उससे फिर पहले विभाजक को भाग करते हैं और दूसरा शेष प्राप्त करते हैं, पुनः दूसरे विभाजक को दूसरे शेष से भाग करते हैं। यह क्रिया उस समय तक दुहराते हैं जब तक अंतिम शेष शून्य प्राप्त न हो जाए। इस क्रिया का अंतिम विभाजक दी हुई संख्याओं का म.स. होता है। जैसा कि ऊपर दिखाया जा चुका है।

उदाहरण–2 : 120, 380, 160 का म.स. भाग विधि द्वारा निकालें –

हल :

120) 380 (3
−360
20) 120 (6
− 120
0

अब 20 और 160 का म.स. निकालें

20) 160 (8
−160
0

अतः म.स. = 20

अतः तीन संख्याओं का म.स. ज्ञात करने की विधि इस प्रकार है–

(i) उनमें से पहले किसी दो का म.स. प्राप्त करते हैं।

(ii) फिर (i) में प्राप्त म.स. तथा तीसरी संख्या का म.स. ज्ञात करते हैं।

(iii) (ii) में प्राप्त म.स. तीनों दी हुई संख्याओं का अभीष्ट म.स. है। जैसा कि उदाहरण द्वारा बताया जा चुका है।

उदाहरण- 3 : वह बड़ी-से-बड़ी संख्या ज्ञात करें, जिससे यदि 280 और 1245 को भाग करें तो क्रमशः 4 और 3 शेष बचेंगे।

हल : जब कोई संख्या 280 को विभाजित करती है तो 4 शेष बचता है। अतः (280–4) = 276 उस संख्या से पूर्णतया विभाजित होगी। इसी प्रकार (1445-3) = 1442 भी उस संख्या से पूर्णतया विभाजित होगी।

अतः अभीष्ट संख्या 276 तथा 1442 का म.स. होगा।

276) 1242 (4
−1104
138) 276 (2
276
0

म.स. = 138

अतः अभीष्ट संख्या = 138

उदाहरण 4 : एक गोष्ठी में हिन्दी, अंग्रेजी तथा गणित में भाग लेने वालों की संख्या क्रमशः 60, 84 और 108 है। उनके बैठने के लिए कम-से-कम कितने कमरे चाहिए यदि प्रत्येक कमरे में एक ही विषय के व्यक्ति बैठें और उनकी संख्या भी समान हो?

हल : प्रत्येक कमरे में बैठने वाले व्यक्तियों की संख्या 60, 84 और 108 का म.स. होगी।

60, 84 और 108 का म.स. = 12 है।

अतः प्रत्येक कमरे में बैठने वालों की अधिकतम संख्या 12 है।

कमरों की संख्या जिनकी आवश्यकता पड़ेगी $= \frac{60+84+108}{12} = 21$

प्रश्नावली – 3.4

1. निम्न का म.स. अभाज्य गुणनखंडन विधि से ज्ञात करें–

(i)	81, 117	(ii)	18, 48	(iii)	27, 63
(iv)	36, 84	(v)	70, 140, 210	(vi)	12, 45, 75
(vii)	120, 144, 204	(viii)	106, 159, 265	(ix)	625, 3125, 15625

2. निम्न का म.स. भाग विधि से ज्ञात करें–

(i)	300, 450	(ii)	442, 1261	(iii)	252, 576
(iv)	935, 1320	(v)	1624, 522, 1276	(vi)	2241, 8217, 747

3. 65610 विभाज्य है 27 से, 65610 की दो निकटतम संख्याएँ ज्ञात करें जो 27 से विभाज्य हों।

4. किन्हीं दो क्रमागत-संख्याओं का म.स. क्या होगा?

5. दो छोटे टैंकरों में क्रमश : 85 और 68 लीटर पेट्रोल आता है। उस मापने वाले बर्तन की अधिकतम धारिता ज्ञात करें जिससे प्रत्येक टैंकर का पेट्रोल पूरा पूरा मापा जा सके।

6. वह बड़ी-से-बड़ी संख्या ज्ञात करें जिससे 389, 436 और 542 को भाग देने पर क्रमशः 4, 7 और 3 शेष बचे।

7. एक विद्यालय की कक्षा 6, 7, 8 में क्रमशः 220, 116 और 132 छात्र हैं। इनके बराबर-बराबर बच्चे के समूह में अधिक-से-अधिक कितने छात्र होंगे?

8. एक आयताकार फर्श की लम्बाई 20 मी 16 सेमी और चौड़ाई 15 मी 60 सेमी है। इसको समान वर्गाकार टाइलें लगाकर पक्का करना है। ज्ञात करें कि इसके लिए कम-से-कम कितनी टाइलें चाहिए?

लघुतम समापवर्त्य (ल.स.) (Lowest common multiple) (LCM)

हम जानते हैं कि **दो या अधिक संख्याओं का लघुतम समापवर्त्य (ल.स.) वह छोटी-से-छोटी संख्या है, जो दी हुई प्रत्येक संख्या का गुणज है।**

अपवर्त्य विधि

12 का अपवर्त्य (गुणज) = 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96 ....

9 का अपवर्त्य (गुणज) = 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72 ....

12 और 9 का सम अपवर्त्य (सार्वगुणज) = 36, 72 ....

12 और 9 के गुणजों में सबसे छोटा (लघुतम) समापवर्त्य 36, अतः 12 और 9 का लघुतम समापवर्त्य = 36

स्वयं करके देखिए

उदाहरण–1 : निम्न का ल.स. अपवर्त्य (गुणज) विधि से करें–

(a) 8, 16 (b) 12, 18, 24

(c) 20, 30, 40, 50 (d) 15, 24, 32, 36

अब हम लोग अभाज्य गुणनखंडन द्वारा दो या अधिक संख्याओं का ल.स. पर विचार करें।

उदाहरण–2 : 12, 18 और 24 का ल.स. ज्ञात करें।

सर्वप्रथम हम प्रत्येक संख्या का अभाज्य गुणनखंडन करते हैं, जो इस प्रकार है–

24 = 2 x 2 x 2 x 3 →2 तीन बार, 3 एक बार

12 = 2 x 2 x 3 →2 दो बार, 3 एक बार

18 = 2 x 3 x 3 →2 एक बार, 3 दो बार

ल.स. = 2 x 2 x 2 x 3 x 3 = 72

इन संख्याओं में अधिक बार आए अभाज्य गुणनखंडों का गुणनफल ही उनका अभीष्ट ल.स. होता है। स्पष्ट है कि दो या अधिक संख्याओं का अभाज्य गुणनखंड विधि से ल.स. (LCM) ज्ञात करने के लिए पहले हम प्रत्येक संख्या का अभाज्य गुणनखंडन करते हैं। तब हम उन सब विभिन्न अभाज्य गुणन को उतनी बार लेकर जितनी बार वह उनमें से किसी संख्या के अभाज्य गुणनखंडन में अधिक-से-अधिक सम्मिलित है, गुणा कर लेते हैं।

उदाहरण–3 : 16, 24, 36 का ल.स. ज्ञात करें।

हल : 16 = 2 x 2 x 2 x 2 2 चार बार

24 = 2 x 2 x 2 x 3 2 तीन बार, 3 एक बार

36 = 2 x 2 x 3 x 3 2 दो बार, 3 दो बार

ल.स. = इनमें सबसे अधिक बार आए अभाज्य गुणनखंडों का गुणनफल

= 2 x 2 x 2 x 2 x 3 x 3 = 144

प्रश्नावली – 3.5

1. **निम्नलिखित का ल.स. अभाज्य गुणनखंडन विधि से करें–**

(a)	16, 36	(b)	14, 28	(c)	32, 36
(d)	50, 60	(e)	160, 120	(f)	32, 42
(g)	15, 18, 21	(h)	24, 32, 36	(i)	9, 12, 18
(j)	9, 12, 18, 21	(k)	12, 16, 24, 30		

आइए ल.स. निकालने की एक अन्य विधि पर विचार करते हैं, जिसे भाग विधि कहते हैं।

उदाहरण–1

16, 24 और 36 का ल.स. भाग विधि से ज्ञात करें।

हल :

2	16, 24, 36
2	8, 12, 18
2	4, 6, 9
3	2, 3, 9
	2, 1, 3

ल.स. = 2 x 2 x 2 x 3 x 2 x 3 = 144

प्रक्रिया

1. सर्वप्रथम इन संख्याओं में सबसे छोटी अभाज्य संख्या से भाग करते हैं और हम यह भी देखते हैं कि दी गई संख्याओं में कम-से-कम दो संख्याओं में भाग लगे अन्यथा अन्य दूसरी वांछित अभाज्य संख्या से भाग करेंगे, जो संख्या उस वांछित संख्या से पूरी-पूरी विभाजित होती है, उसका भागफल उसके नीचे लिखते जाते हैं और जो संख्या उस वांछित संख्या से विभाजित नहीं होती है, उस संख्या को उसी के नीचे ही वैसा-का-वैसा रख दिया जाता है।
2. यह तब तक जारी रखते हैं जब तक कि कम-से-कम दो संख्या उससे कटती रहें।
3. जब उस वांछित अभाज्य संख्या से भाग नहीं लगे तब दूसरी वांछित अभाज्य संख्या लेते हैं और ऊपर की तरह की प्रक्रिया अपनाते हैं, यही क्रिया तब तक करते रहते हैं, जब तक कि संख्या पूरी तरह विभाज्य न हो जाय। जब हम आश्वस्त हो जाएँ कि

अब संख्याएँ किसी भी वांछित अभाज्य संख्या से विभाज्य नहीं होती है तब अंत में सभी वांछित अभाज्य संख्याओं का गुणनफल प्राप्त करते हैं और यही गुणनफल उन संख्याओं का अभीष्ट ल.स. होता है।

उदाहरण 2 :

वह छोटी-से-छोटी संख्या ज्ञात करें जिसे 15, 18, 24, 36 से भाग देने पर प्रत्येक दशा में 4 शेष बचे।

हल :

2	15, 18, 24, 36
2	15, 9, 12, 18
3	15, 9, 6, 9
3	5, 3, 2, 3
5	5, 1, 2, 1
2	1, 1, 2, 1
	1, 1, 1, 1

ल.स. $= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 2 = 360$

अतः अभीष्ट सं. $= 360 + 4 = 364$

म.स. (HCF) तथा ल.स. (LCM) के गुण

1. दी हुई संख्याओं का म.स. उन संख्याओं में किसी से भी बड़ा नहीं होता।
2. दी हुई संख्याओं का ल.स. उनमें से किसी भी संख्या से छोटा नहीं होता।
3. दो सह-अभाज्य (Co-prime numbers) संख्याओं का म.स. 1 होता है।
4. स्पष्टतया, दो या अधिक सह-अभाज्य संख्याओं का ल.स. उन सब का गुणनफल होता है।
5. यदि कोई संख्या मान लें a किसी दूसरी संख्या, मान ले b का गुणनखंड है तो a और b का म.स. a तथा उनका ल.स. b होता है।
6. दो या अधिक संख्याओं का म.स. उन संख्याओं में प्रत्येक को पूर्ण विभाजित करता है और प्रत्येक दी हुई संख्या अपने ल.स. को पूर्ण विभाजित करती है। इसलिए इनका म.स. उनके ल.स. का गुणनखंड होता है।

म.स. और ल.स. में संबंध

एक उदाहरण लेते हैं– हम दो संख्याएँ 48 और 60 लें और उसका म.स. और ल.स. निकालें।

48 और 60 का म.स. = 12

48 और 60 का ल.स. = 240

म.स. और ल.स. का गुणनफल = 12 x 240 = 2880

दी हुई संख्याओं 48 और 60 का गुणनफल = 48 x 60 = 2880

अब एक और संख्या युग्म 24 और 36 पर विचार करें।

24 और 36 का म.स. = 12

24 और 36 का ल.स. = 72

म.स. और ल.स. का गुणनफल = 12 x 72 = 864

संख्याएँ 24 और 36 का गुणनफल = 24 x 36 = 864

प्रत्येक दशा में हम देखते हैं कि म.स. और ल.स. का गुणनफल दोनों संख्याओं के गुणनफल के बराबर है अर्थात् **म.स. x ल.स. = पहली संख्या x दूसरी संख्या**

इससे निकले सूत्र नीचे दिए जाते हैं : –

$$\text{म.स.} = \frac{\text{पहली संख्या} \times \text{दूसरी संख्या}}{\text{ल.स.}}$$

$$\text{ल.स.} = \frac{\text{पहली संख्या} \times \text{दूसरी संख्या}}{\text{म.स.}}$$

$$\text{पहली संख्या} = \frac{\text{म.स.} \times \text{ल.स.}}{\text{दूसरी संख्या}}$$

$$\text{दूसरी संख्या} = \frac{\text{म.स.} \times \text{ल.स.}}{\text{पहली संख्या}}$$

उदाहरण–1 : दो संख्याओं का ल.स. 72 और म.स. 12 है तथा एक संख्या 36 है तो दूसरी संख्या बताएँ।

हल : म.स. x ल.स. = पहली संख्या x दूसरी संख्या

12 x 72 = 36 x दूसरी संख्या

$$\text{दूसरी संख्या} = \frac{\overset{2}{\cancel{72}}\times 12}{\cancel{36}} = 2 \times 12 = 24$$

उदाहरण–2 : किसी दिन, दिल्ली से मेरठ की बसें 40 मिनट के अन्तराल से और मेरठ से दिल्ली की बसें 45 मिनट के अन्तराल से चलती हैं। यदि विपरीत दिशा से आने वाली दो बसें किसी विशेष पुल से 10:15 सुबह में गुजरती हों तो वह जल्दी-से-जल्दी उसके बाद उस पुल से किस समय गुजरेंगी।

हल : जल्दी-से-जल्दी जिस समय वे बसें मिलेंगी वह 40 और 45 का ल.स. (मिनटों में) 10:15 सुबह में जोड़ने पर प्राप्त होंगे।

40 और 45 का ल.स. = 360

इसलिए, दोनों बसें उस पुल से दोबारा 360 मिनट बाद एक साथ गुजरेंगी अर्थात् 10:15 सुबह के 6 घंटे बाद।

अतः दोनों बसें फिर एक साथ उस पुल से 4:15 शाम में गुजरेंगी।

प्रश्नावली – 3.6

1. निम्न संख्याओं का ल.स. भाग विधि द्वारा ज्ञात करें–

(i)	18, 28	(ii)	32, 40	(iii)	24, 36
(iv)	12, 36, 48	(v)	25, 20, 15, 45	(vi)	8, 5
(vii)	6, 15, 18, 30, 36	(viii)	180, 384, 144		
(ix)	112, 168, 266	(x)	240, 420, 660		

2. नीचे दिए गये प्रत्येक संख्या युग्म के लिए सिद्ध करें कि उनका गुणनफल उनके म.स. और ल.स. के गुणनफल के समान (बराबर) है–

(i) 24, 34 (ii) 36, 42 (iii) 25, 40 (iv) 15, 45

3. दो संख्याओं का म.स. 6 और ल.स. 36 तथा एक संख्या 18 तो दूसरी संख्या ज्ञात करें।

4. दो संख्याओं का म.स. 16 और उनका गुणनफल 6400 है। उसका ल.स. ज्ञात करें।

5. दो संख्याओं का म.स. और ल.स. क्रमशः 13 और 1989 है। यदि उनमें से एक संख्या 117 हो तो दूसरी संख्या ज्ञात करें।

6. वह छोटी-से-छोटी संख्या ज्ञात करें जिसको 25, 40 और 60 से भाग करने पर 7 शेष बचे।

7. तीन व्यक्ति एक सुबह सैर को निकले। उनकी पग दूरी क्रमशः 80 से.मी. 85 से.मी. तथा 90 से.मी. है। ज्ञात करें कि चलने के स्थान से कितनी दूरी पर उनके पग फिर एक साथ पड़ेंगे।

8. 10000 के निकटतम वह संख्या ज्ञात करें जो 2, 3, 4, 5, 6 और 7 से पूरी-पूरी विभाजित हो सके।

9. 100000 के निकटतम उससे बड़ी संख्या ज्ञात करें जो 8, 15 और 21 से पूरी-पूरी विभाजित हो सके।

10. एक सड़क के साथ-साथ तार के खम्भे 220 मीटर की दूरी पर लगे हैं और उसी सड़क के साथ-साथ पत्थर के ढेर 300 मीटर की समान दूरी पर लगे हैं। यदि पहले ढेर पहले खम्भे के साथ ही है तो उससे कितनी दूरी पर दूसरी ढेर और खम्भे के एक साथ लगी होगी?

टिप्पणी : 1729 एक ऐसी लघुतम संख्या है, जिन्हें दो घनों के योग के रूप में दो विभिन्न ढंगों से व्यक्त कर सकते हैं। जैसे एक 12^3+1^3 और दूसरा $10^3 + 9^3$। इस संख्या (1729) का पता हमारे गणितज्ञ रामानुजन ने किया था, जिसे रामानुजन संख्या कहते हैं।

अध्याय-4 पूर्णांक

भूमिका

आपने कारगिल युद्ध के समय भारतीय सैनिकों को 14000 फीट ऊँचाई पर भी रहते हुए सुना होगा। उन्हें इतनी सर्दी में भी अपने देश के लिए वहाँ रहना पड़ा। क्या आपको मालूम है कि जनवरी के महीने में कारगिल हिल का औसत तापमान शून्य से भी 40°C नीचे रहता है। इसे हम –40°C लिख सकते हैं। अब निम्नलिखित स्थानों के तापमान को + या – चिह्न से निरूपित कीजिए–

(a) उदयपुर का औसत तापमान शून्य से 39°C ऊपर की ओर ....

(b) बोधगया का तापमान शून्य से 26°C ऊपर की ओर ....

(c) लेह का औसत तापमान **जनवरी** में शून्य से 14°C नीचे की ओर ....

(d) कारगिल शहर का औसत तापमान **जनवरी** में शून्य से 13°C नीचे की ओर.....

रामू दो कि.ग्रा. दाल लेने बाजार जाता है। उसके पास 30 रुपये हैं। दुकानदार दाल का भाव 18 रुपये प्रति कि.ग्रा. बताता है। इसका मतलब 2 कि.ग्रा. का मूल्य 36 रुपये होगा। किन्तु रामू के पास 30 रुपये हैं। वह 30 रुपये दुकानदार को देता है और कहता है कि 6 रुपये उधार रहे। अब यदि हम पूछें कि रामू के पास कितने बचे तो क्या हम कह सकते हैं कि उसके पास शून्य रुपये बचे? क्यों नहीं?

क्योंकि अब यदि रामू के पास दो रुपये आते हैं तो उन्हें वह दुकानदार को देगा और तब भी उस पर 4 रुपये का उधार रहेगा। यदि उसके पास शून्य रुपये होते तो 2 रुपये मिलने पर उसके पास 2 रुपये हो जाते।

अब सोचने की बात यह है कि हम इन 4 रुपयों को किस प्रकार दिखाएँ? रामू उन 4 रु. के उधार को याद रखने के लिए अपनी डायरी में 4 लिख देता है, पर कैसे पता चले कि 4 रु. लेने हैं या देने हैं? क्या हम इस उधार राशि के लिए कोई चिह्न बना सकते हैं?

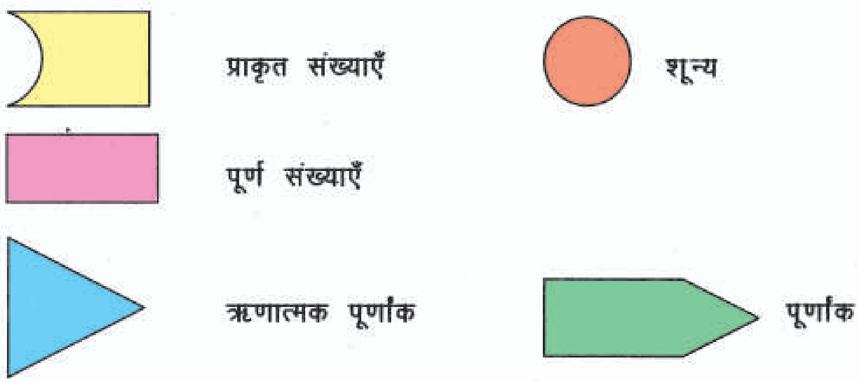
इस प्रकार की समस्या को दूर करने के लिए एक अलग प्रकार की संख्या की परिकल्पना की गई जिसे ऋणात्मक संख्या कहते हैं।

4.1 पूर्णांक

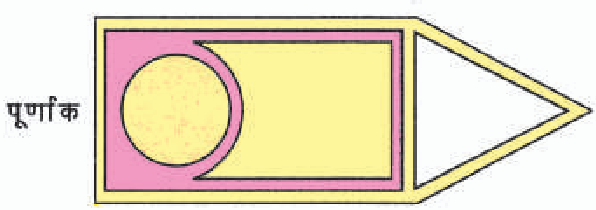
जैसा कि आप पहले पढ़ चुके हैं कि प्राकृत संख्याएँ 1, 2, 3, 4 ...... हैं।

यदि हम प्राकृत संख्याओं के संग्रह में शून्य को सम्मिलित कर लेते हैं, तो हमें संख्याओं का एक नया संग्रह प्राप्त होता है। इन संख्याओं को **पूर्ण संख्याएँ** कहते हैं। इस प्रकार 0, 1, 2, 3, 4 ..... पूर्ण संख्याएँ हैं।

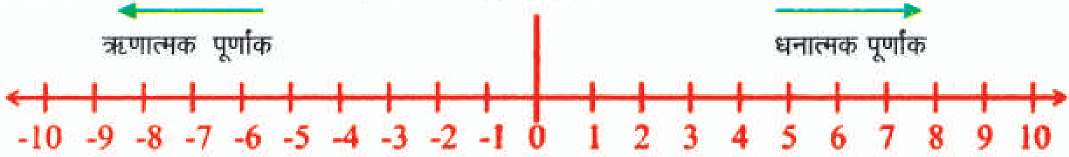
अब हमें ज्ञात हो गया है कि कुछ स्थितियों को दर्शाने के लिए ऋणात्मक संख्याओं की भी आवश्यकता होती है। जैसे −1, −2, −3, −4, −5 ....। यदि हम पूर्ण संख्याओं और इन ऋणात्मक संख्याओं को मिला लें तो हमें संख्याओं का एक नया संग्रह प्राप्त होगा, जिसे पूर्णांक कहते हैं जो −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 1, 2, 3 .... है। संख्याओं के इस संग्रह में 1, 2, 3 .... धनात्मक पूर्णांक कहलाते हैं और −1, −2, −3 .... ऋणात्मक पूर्णांक कहलाते हैं। आइए इसे निम्न आकृतियों द्वारा समझने का प्रयत्न करें। मान लीजिए ये आकृतियाँ अपने सम्मुख लिखी संख्याओं या उनके संग्रह को निरूपित करती हैं।



तब पूर्णांकों के संग्रह को निम्नलिखित आरेख से समझा जा सकता है, जिसमें पिछली सभी संख्याएँ और उनके संग्रह सम्मिलित हैं।

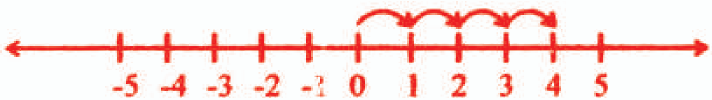


4.1.1 संख्या रेखा पर पूर्णांकों का निरूपण



एक रेखा खींचिए और उस पर समान दूरी पर कुछ बिन्दु अंकित कीजिए, जैसा कि ऊपर आकृति में दिखाया गया है। इनमें से एक बिन्दु को शून्य से अंकित कीजिए। शून्य के दाईं ओर के बिन्दु धनात्मक पूर्णांक हैं और इन्हें +1, +2, +3 इत्यादि या केवल 1, 2, 3 इत्यादि से अंकित किया गया है। शून्य के बाईं ओर के बिन्दु ऋणात्मक पूर्णांक हैं और इन्हें –1, –2, –3 इत्यादि से अंकित किया गया है।

नीचे की रेखा पर +4 अंकित करने के लिए हम शून्य के दाईं ओर 4 कदम (1 बिन्दु को 1 कदम मान लीजिए) चलते हैं।



इसी प्रकार –2 अंकित करने के लिए, हम शून्य के बाईं ओर 2 बिन्दु चलते हैं।

स्वयं करके देखिए

संख्या रेखा पर –4, 3, –5, 6 और –1 को अंकित कीजिए।

इसी प्रकार की अन्य स्थितियाँ, जहाँ हम इन चिह्नों का प्रयोग करते हैं, आगे दी गई हैं।

जैसे-जैसे हम नीचे जाते हैं, ऊँचाई कम होती जाती है। जैसे– समुद्र तल के स्तर से नीचे की गहराई को हम एक ऋणात्मक संख्या से व्यक्त कर सकते हैं और समुद्र तल से ऊपर की ऊँचाई को एक धनात्मक संख्या से व्यक्त कर सकते हैं। समुद्र के तल की ऊँचाई शून्य है।

कारगिल और लेह का तापमान कई बार शून्य (0°C) से नीचे चला जाता है। इस तापमान को (–) चिह्न से निरूपित किया जाता है।

उदाहरणार्थ– लेह का फरवरी माह का औसत तापमान 0° से 12°C नीचे रहने पर तापमान को –12°C लिखा जाता है।

स्वयं करके देखिए

निम्नलिखित को उचित चिह्न के साथ लिखिए–

(a) चंपारण समुद्र तल से 100 मी ऊँचाई पर है ....

(b) कोलकाता का औसत तापमान 0° से 32°C ऊपर ....

(c) कुट्टनड़ (केरल) समुद्र तल से 2.20 मी नीचे ....

(d) कारगिल हिल का औसत तापमान 0° से 40°C नीचे ....

4.1.2 पूर्णांकों की क्रमबद्धता

I

I मेढ़क : बादल घुमड़ रहे हैं। लगता है वर्षा आने वाली हैं, अब कुएँ में पानी आएगा।

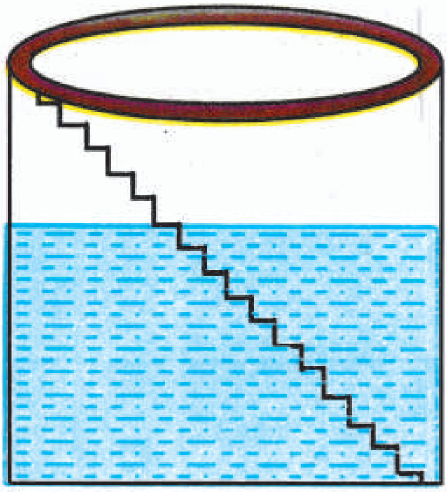
II मेढ़क : जब कुएँ में पानी आएगा तो हमें ऊपर की सीढ़ी पर बैठकर बात करनी होगी।

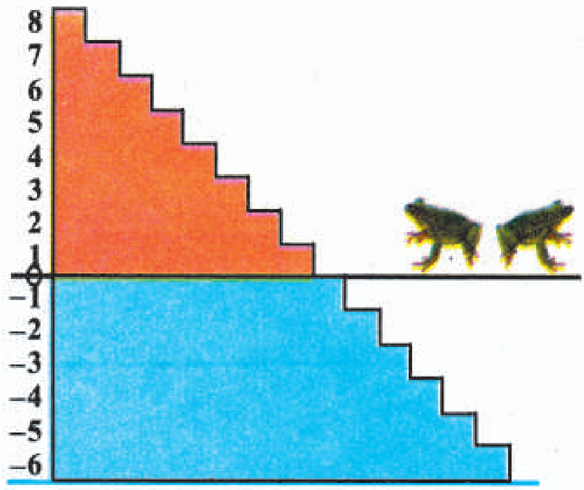
I मेढ़क : ऊपर कौन-सी सीढ़ी पर बैठेंगे, यह तो वर्षा पर निर्भर करेगा। क्या हम कुएँ में चढ़े पानी को नाप सकेंगे?

II मेढ़क : हम इस सीढ़ी पर शून्य लगाकर इससे ऊपर वाली सीढ़ियों को क्रमशः 1, 2, 3. .. आदि संख्या लिख देंगे तब हम बता सकेंगे कि कुएँ में कितना पानी आया।

I मेढ़क : और हम नीचे वाली सीढ़ियों को –1, –2, –3 ... लिखेंगे तो गर्मी में हुई पानी की कमी का भी हिसाब रखा जा सकेगा।

II मेढ़क : आओ चलो, सीढ़ियों पर मान लिख देते हैं।





मेढ़क I : अब यदि पानी चढ़ता है तो हमें उतनी ही सीढ़ियाँ ऊपर जाना होगा।

मेढ़क II : हाँ, और यदि घटेगा तो हमें सीढ़ियाँ नीचे जाना होगा।

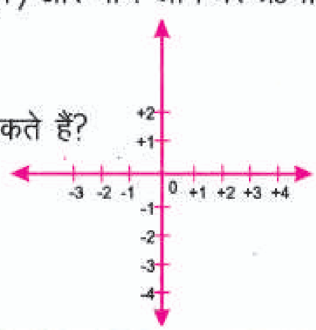
मेढ़क I : लेकिन गर्मी में जब पानी "–1" पर है तब क्या वहाँ "–2" से ज्यादा पानी होगा?

मेढ़क II : कुएँ की सबसे निचली सीढ़ी से ऊपर गिनते जाओ और बताओ कि –1 कितनी सीढ़ी पर आता है।

मेढ़क I : –2 तो पाँचवीं सीढ़ी पर तथा –1 छठी सीढ़ी पर है। इसका मतलब –1 का मान –2 से ज्यादा है।

मेढ़क II : इस प्रकार किसी जगह को यदि शून्य मान लें तो उसके बाएँ चलने पर संख्याओं में ऋणात्मक चिह्न (–) और दाएँ चलने पर धनात्मक चिह्न (+), तथा ऊपर जाने पर धनात्मक चिह्न (+) और नीचे जाने पर ऋणात्मक चिह्न (–) संख्या पर लगता है।

मेढ़क I : तो क्या हम इसे इस प्रकार लिख सकते हैं?



मेढ़क II : हाँ, बिल्कुल

मेढ़क I : अब समझा।

प्रयास कीजिए

आप भी मेढ़कों की बातचीत के आधार पर =, <, > का चिह्न लगाइए–

(i) 0 $\square$ –1 (iv) 50 $\square$ 70

(ii) –5 $\square$ 5 (v) –1 $\square$ 100

(iii) 100 $\square$ 100 (vi) –53 $\square$ –5

आइए, अब पुनः उन पूर्णांकों को देखें जो एक संख्या रेखा पर निरूपित किए गए हैं। हम जानते हैं कि 7 > 4 होता है। और ऊपर खींची गई संख्या रेखा से हम देखते हैं कि संख्या 7 संख्या 4 के दाईं ओर स्थित है।

इसी प्रकार, 4 > 0। संख्या 4, संख्या 0 के दाईं ओर स्थित है। अब चूँकि संख्या 0 संख्या – 3 के दाईं ओर स्थित है इसलिए 0 > –3 है। पुनः संख्या– 3 संख्या– 8 के दाईं ओर स्थित है। इसलिए –3 > –8 है।

इस प्रकार, हम देखते हैं कि संख्या रेखा पर जब हम दाईं ओर चलते हैं तो संख्या का मान बढ़ता है और जब हम बाईं ओर चलते हैं तो संख्या का मान घटता है।

अतः पूर्णांकों के संग्रह को ...., –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5.... लिखा जा सकता है।

इस प्रकार हम निष्कर्ष निकालते हैं कि–

(a) प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक, प्रत्येक ऋणात्मक पूर्णांक से बड़ा होता है।

(b) शून्य प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक से छोटा होता है।

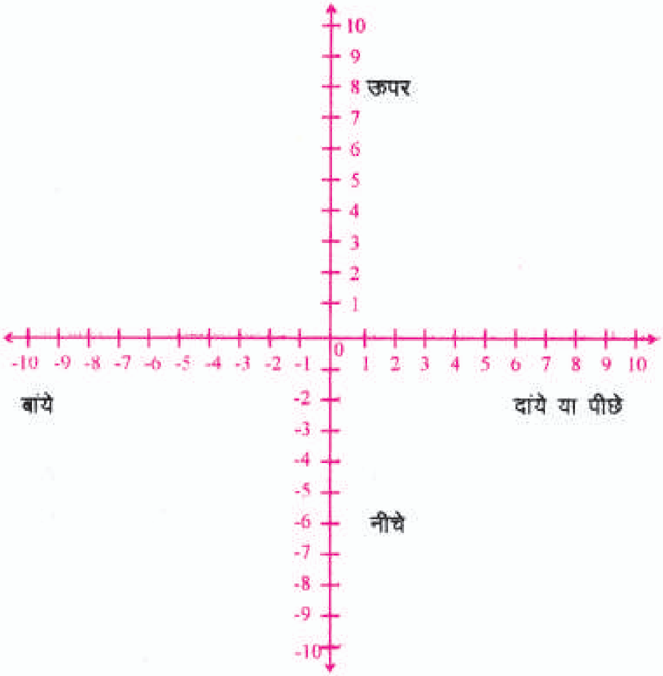
(c) शून्य प्रत्येक ऋणात्मक पूर्णांक से बड़ा होता है।

(d) शून्य न तो ऋणात्मक पूर्णांक है न ही धनात्मक पूर्णांक।

(e) कोई संख्या शून्य से जितनी अधिक ऊपर होगी वह शून्य से उतनी ही बड़ी होगी।

(f) कोई संख्या शून्य से जितनी अधिक नीचे होगी वह शून्य से उतनी ही छोटी होगी।

"यदि इन मानों को संख्या रेखा पर देखें तो संख्या रेखा पर शून्य के दाईं ओर बढ़ती हुई संख्याएँ होंगी एवं शून्य के बाईं ओर घटती हुई संख्याएँ होंगी"।



स्वयं करके देखिए

संख्या रेखा देखकर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

(a) –1 और –2 के बीच में कौन-सी पूर्णांक संख्याएँ स्थित हैं?

(b) –10 और –2 के बीच में कौन-सी पूर्णांक संख्याएँ स्थित हैं? इनमें से कौन-सी सबसे बड़ी है और कौन-सी पूर्णांक संख्या सबसे छोटी है?

(c) –3 पर एक मेढ़क बैठा हुआ है। –9 पर बैठे दूसरे मेढ़क के पास पहुँचने के लिए उसे किस दिशा में और कितनी सीढ़ियाँ चलनी होंगी?

(d) यदि हम संख्या –6 के ऊपर 4 कदम चलें, तो किस संख्या पर पहुँच जाएँगे?

प्रश्नावली – 4.1

1. निम्नलिखित में प्रयुक्त हुई संख्याओं को उचित चिह्न लगाकर पूर्णांकों के रूप में लिखिए–

   (a) पारा शून्य से 4°C नीचे है।

   (b) एक हवाई जहाज भूमि से एक हजार पाँच सौ मीटर की ऊँचाई पर उड़ रहा है।

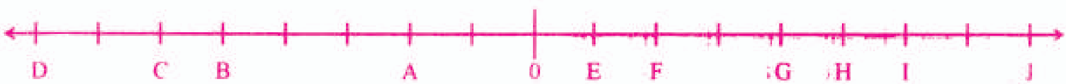
   (c) यदि 5 कदम पूरब की दिशा में चली दूरी को + 5 से व्यक्त करें तो 5 कदम पश्चिम क़ी दिशा में चली दूरी को किस पूर्णांक से व्यक्त करेंगे?

   (d) बैंक खाते में 500 रु. जमा कराना।

2. निम्नलिखित संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित कीजिए–

   (a) –1 (b) +5 (c) –4 (d) +7 (e) –8

3. नीचे दिए गए चित्र में एक संख्या रेखा को दिखाया गया है, जो पूर्णांकों को निरूपित करती है।



इस रेखा को देखते हुए निम्न बिन्दुओं के स्थान ज्ञात कीजिए–

   (a) यदि बिन्दु D पूर्णांक –8 है, तो + 8 वाला बिन्दु कौन-सा है?

   (b) बिन्दु B एक ऋणात्मक पूर्णांक है या धनात्मक पूर्णांक।

   (c) बिन्दु C और E के संगत पूर्णांक लिखिए।

   (d) इस संख्या रेखा पर अंकित बिन्दुओं में से किसका मान सबसे कम है?

   (e) सभी बिन्दुओं को उनके मानों के घटते क्रम में लिखिए।

4. निम्नलिखित युग्मों में, कौन-सी संख्या, संख्या रेखा पर दाईं ओर स्थित है?

   (a) 3, 7 (b) –5, –7 (c) 2, –2

   (d) –12, 11 (e) –5, –8 (f) 1, 0

5. नीचे दिए हुए युग्म पूर्णांकों के बीच के सभी पूर्णांक (बढ़ते हुए क्रम में) लिखिए–

(a) 1 और –8 (b) –6 और 6

(c) –9 और –15 (d) –30 और –21

6. (a) –25 से छोटे चार ऋणात्मक पूर्णांक लिखिए।

(b) –8 से बड़े पाँच ऋणात्मक पूर्णांक लिखिए।

7. निम्नलिखित कथनों के लिए सत्य और असत्य लिखिए–

(a) संख्या रेखा पर शून्य के बाईं ओर ऋणात्मक संख्याएँ होती हैं।

(b) संख्या रेखा पर दाहिनी ओर की संख्या उसके बाईं ओर की संख्या से छोटी होती है।

(c) सबसे छोटा पूर्णांक – 1 है

(d) –28 पूर्णांक –25 से बड़ा है।

8. एक संख्या रेखा खींचिए और निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

(a) यदि हम –5 के बाईं ओर 5 कदम चलें, तो हम किस संख्या पर पहुँच जाएँगे?

(b) यदि हम +2 के दाईं ओर 4 कदम चलें तो हम किस संख्या पर पहुँच जाएँगे?

(c) यदि हम संख्या रेखा पर –7 पर हैं, तो –15 पर पहुँचने के लिए हमें किस दिशा में चलना चाहिए?

(d) यदि हम संख्या रेखा पर –4 पर हैं तो +3 पर पहुँचने के लिए हमें किस दिशा में चलना चाहिए?

9. पानी के जमाव बिन्दु को शून्य (0°C) से दर्शाया जाता है। यदि माउन्ट आबू का तापमान जमाव बिन्दु से 2°C कम है तो उसे हम –2°C लिख सकते हैं।

अब निम्न प्रश्नों के उत्तर दें–

(a) सर्दियों में यदि कश्मीर का तापमान जमाव बिन्दु से 7°C कम हो, तो उसे कैसे लिखेंगे?

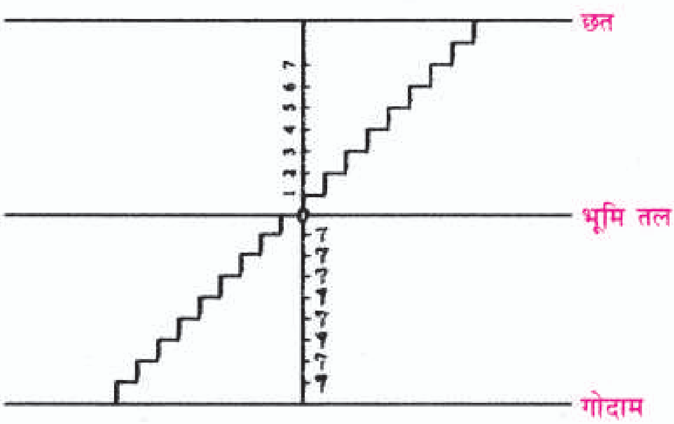
(b) प्रत्येक युग्मों में कम तापमान पर गोला लगाइए :

(a) 20°C या 26°C (b) 0°C या –4°C

(c) –3°C या -1°C (d) –8°C या –12°C

4.1.3 पूर्णांकों का योग

सिद्धार्थ ने छत पर जाने के लिए सीढ़ियों की संख्या को धनात्मक पूर्णांक माना और नीचे गोदाम में जाने के लिए सीढ़ियों की संख्या को ऋणात्मक पूर्णांक माना तथा भूमि तल से 0 माना। उन्होंने मोहन को भूमितल से ऊपर तथा नीचे वाली सीढ़ियों पर चलने को कहा



तथा प्रत्येक के लिए गणितीय कथन भी लिखा।

(a) भूमि तल से 16 सीढ़ी ऊपर चलिए। (+16)

(b) भूमि तल से 8 सीढ़ी नीचे चलिए। (–8)

(c) भूमि तल से 6 सीढ़ी नीचे चलिए और फिर वहाँ से 3 सीढ़ी और ऊपर चलिए। (–6) + (+3)

(d) भूमि तल से 4 सीढ़ी नीचे चलिए और वहाँ से 2 सीढ़ी और नीचे चलिए। (–4) + (–2)

स्वयं प्रयास कीजिए

नीचे दिए गए कथनों के लिए गणितीय कथन लिखिए–

(a) भूमि तल से 5 सीढ़ी नीचे चलिए और फिर वहाँ से 12 सीढ़ी ऊपर चलिए।

(b) भूमि तल से 4 सीढ़ी ऊपर चलिए और फिर वहाँ से 6 सीढ़ी नीचे चलिए।

(c) भूमि तल से 7 सीढ़ी नीचे चलिए एवं फिर वहाँ से 8 सीढ़ी ऊपर चलिए।

सिद्धार्थ ने मोहन के चलने के अनुसार संख्या लिखने का प्रयास किया–

(a) $-5 + 12 = -17$ (b) $4 - 6 = 2$ (c) $-7 + 8 = 1$

सिद्धार्थ ने कुछ गलतियाँ की हैं। क्या आप उसके उत्तरों की जाँच कर सकते हैं और गलतियों को सही कर सकते हैं?

स्वयं करके देखिए

आप भी एक संख्या रेखा बनाइए एवं इस तरह के प्रश्न स्वयं बनाइए एवं उन्हें हल करने के लिए अपने साथियों को दीजिए।

प्रश्नावली – 4.2

1. संख्या रेखा का प्रयोग करते हुए वह पूर्णांक ज्ञात कीजिए जो–

(a) 5 से 3 अधिक है (b) –5 से 5 अधिक है

(c) 2 से 6 कम है (d) –2 से 3 कम है

2. संख्या रेखा का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित योग ज्ञात कीजिए–

(a) $9 + (-6)$ (b) $5 + (-11)$

(c) $(-1) + (-7)$ (d) $(-5) + 10$

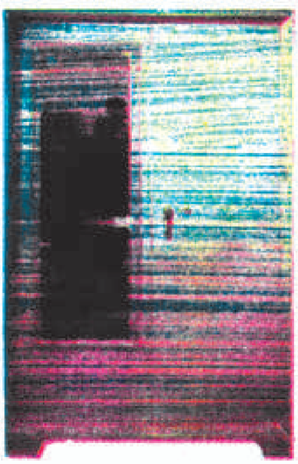
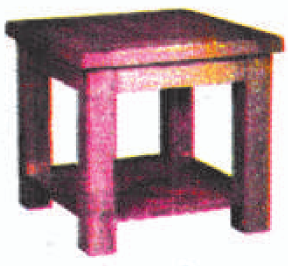
(e) $(-1) + (-2) + (-3)$ (f) $(-2) + 8 + (-4)$

अध्याय-5 आधारभूत ज्यामितीय जानकारियाँ

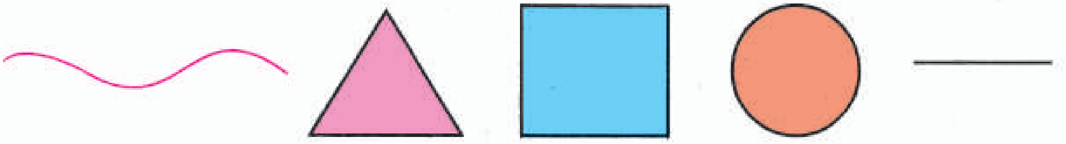
भूमिका

प्राचीनकाल से ही हमारे ऋषि-मुनियों ने विभिन्न आकृतियों के यज्ञ कुण्डों का निर्माण किया। आर्यभट्ट, युक्लिड तथा उमर खैय्याम आदि गणितज्ञों ने भी रैखिक आकृतियों के गुण, आकार तथा एक दूसरे के साथ संबंधों का अध्ययन किया है। ज्यामिति शब्द की उत्पत्ति यूनानी शब्द जिओमीट्रोन से हुई है, जियो (Geo) का अर्थ है 'भूमि' और मीट्रोन का अर्थ है 'मापना'। अतः इसका अर्थ हुआ 'भूमि का मापन'। आज कला, वास्तुकला, इंजीनियरिंग, मापन, कपड़ों के डिजाइन आदि में ज्यामिति के ज्ञान का प्रभाव देखा जा सकता है। वस्तुओं के आकार में, चीजों के डिजाइन में और ढाँचों में ज्यामितीय आकारों को देखा जा सकता है।

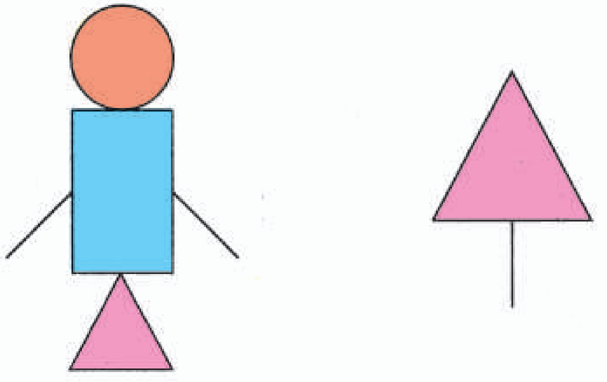
नीचे दी गई वस्तुओं के चित्र को देखिए और इनमें आयत, वर्ग, वृत्त, त्रिभुज आदि जैसे ज्यामितीय आकारों को ढूँढ़िए।


कुछ करें

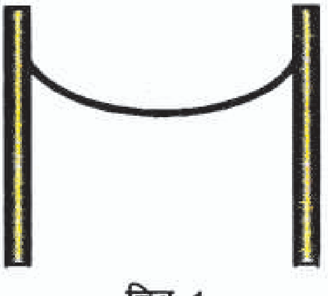


इन आकृतियों की सहायता से कुछ चित्र बनाइए। जैसे–

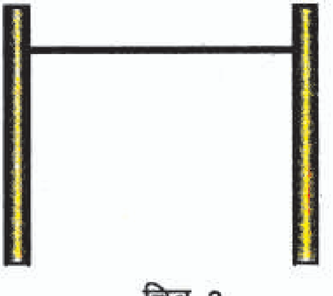


प्रकृति में दिखाई देने वाली विभिन्न प्रकार की वस्तुओं का जब हम रेखाचित्र बनाते हैं तो इसमें हमें सीधी एवं घुमावदार रेखाओं का प्रयोग करना पड़ता है। इन आकृतियों को हम **रैखिक आकृति** कहते हैं।

नीचे के चित्र को ध्यान से देखिए तथा बताइए कि कौन-सी रेखा आपको घुमावदार रेखा लगती है तथा कौन-सी सीधी रेखा?



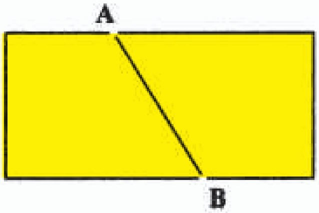
चित्र 1



चित्र 2

यदि आपको वृत्त और चौकोर का रेखाचित्र खींचने को कहा जाए तो आप वृत्त कैसी रेखा से बनाएँगे? इसी प्रकार एक चौकोर या वर्ग बनाने के लिए आप कैसी रेखा का इस्तेमाल करेंगे? सीधी रेखा को **सरल रेखा** तथा घुमावदार रेखा को **वक्र रेखा** कहते हैं।

5.1 रेखाखंड (Line Segment)



अपनी कॉपी का कागज लीजिए तथा उसको मोड़िए और फिर उसे खोल लीजिए। आपको कागज के टुकड़े पर जो निशान दिखाई देता है वह आपको एक रेखाखंड का एहसास कराता है। इसके दो अंत बिन्दु A और B है। इसी प्रकार पुस्तक का किनारा रेखाखंड को निरूपित करता है।

धागा

रेखाखंड के कुछ उदाहरण इन चित्रों में हैं–

स्वयं कीजिए

1. आप अपने आस-पास से रेखाखंड के कुछ उदाहरण ढूँढ़िए तथा उनके नाम लिखिए।
2. चित्र को ध्यान से देखिए। बिन्दु A पर एक चूहा है तथा बिन्दु B पर रोटी का एक टुकड़ा। चूहा चार रास्तों से उस रोटी तक पहुँच सकता है। आपको यह बताना है कि चूहा किस रास्ते से सबसे पहले रोटी तक पहुँचेगा और क्यों?

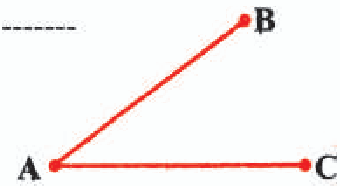
आपने देखा कि तीसरे रास्ते से चूहा सबसे पहले रोटी तक पहुँचेगा। यह AB के बीच सबसे छोटी दूरी है। हम कह सकते हैं कि दो बिन्दु A और B के बीच की सबसे छोटी दूरी AB रेखाखंड को दर्शाती है। इसे $\overline{AB}$ या $\overline{BA}$ से व्यक्त किया जाता है। बिन्दु A तथा B इस रेखाखंड के अंत बिन्दु हैं।

कुछ करें

(1) रेखाखंडों के नाम लिखिए–

----

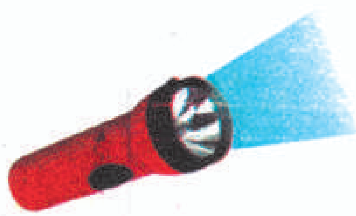
(2) दी गई आकृति में रेखाखंडों के नाम बताएँ। क्या A प्रत्येक रेखाखंड का एक अंत बिंदु है?



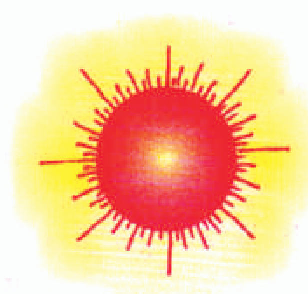
किरण (Ray)

कल्पना कीजिए कि AB रेखाखंड को B बिन्दु से आगे एक दिशा में बिना किसी अंत के आगे बढ़ाया गया है। यह एक किरण है। किरण के कुछ उदाहरण निम्न हो सकते हैं–

मोमबत्ती से निकली किरणें



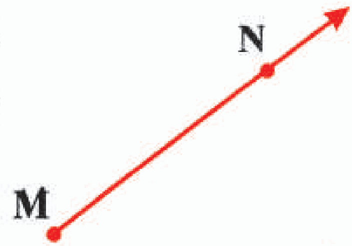
टार्च से निकली प्रकाश की किरणें



सूर्य की किरणें

किरण एक बिन्दु से आरम्भ होती है तथा एक दिशा में ही बिना किसी अंत के बढ़ती जाती है। किरण जिस बिन्दु से आरम्भ होती है, वह उसका **'प्रारम्भिक बिन्दु'** कहलाता है।

दाईं ओर किरण की आकृति दी हुई है। इसका प्रारम्भिक बिन्दु M है। N इस किरण पर स्थित कोई अन्य बिन्दु है। इस किरण को हम $\overrightarrow{MN}$ से व्यक्त करते हैं।



सोचें और बताएँ

यदि $\overrightarrow{AB}$ एक किरण है तो

(क) इसका प्रारम्भिक बिन्दु क्या है?

(ख) क्या बिन्दु B इसी किरण पर स्थित है?

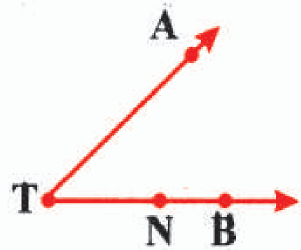
(ग) क्या हम कह सकते हैं कि B इस किरण का प्रारम्भिक बिन्दु है?

कुछ करें

(1) आकृति में दी गई किरणों के नाम लिखिए।

(2) क्या T आरम्भिक बिन्दु है?

(3) क्या N आरम्भिक बिन्दु है?



रेखा (Line)

जब रेखाखंड $\overline{MN}$ को N से आगे तथा दूसरी ओर M से आगे बिना किसी अंत के लगातार बढ़ाते जाएँ तो क्या होगा?

ऐसा करने पर नयी आकृति का न तो कोई प्रारम्भ होगा न अंत। इससे हमें एक रेखा का उदाहरण प्राप्त होगा। रेखा का न तो कोई आद्य (प्रारम्भिक) बिन्दु होता है और न ही कोई अन्त बिन्दु। इस पर असंख्य बिन्दु होते हैं, परंतु रेखा की स्थिति और झुकाव निश्चित करने हेतु हमें कम-से-कम दो बिन्दुओं का निर्धारण करना पड़ता है जो उस रेखा के गमन की दिशा का निर्धारण करते हैं। रेखा को अंग्रेजी में छोटे अक्षरों से भी व्यक्त करते हैं जैसे– रेखा $\overleftrightarrow{MN}$ को l से व्यक्त किया जा सकता है।

$\overleftrightarrow{MN}$ – MN रेखा है, जो दोनों तरफ बढ़ती है।

$\overrightarrow{MN}$ – MN किरण है जो N दिशा की ओर बढ़ती है।

$\overline{MN}$ – MN रेखाखंड है जिसका एक सिरा M और दूसरा N है

क्या आप कह सकते हैं कि किरण रेखा का ही एक भाग है?

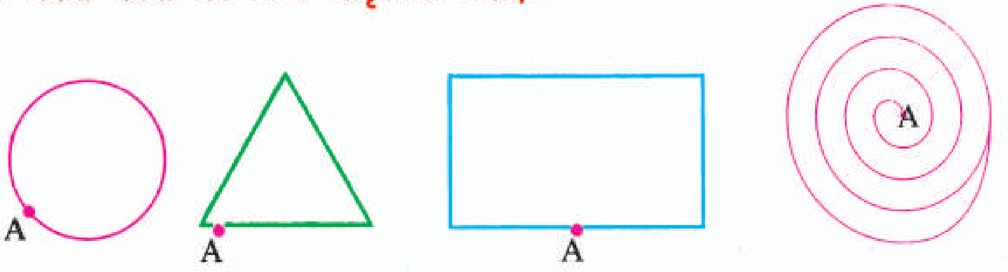
कुछ करें

सही पर (✓) का निशान लगाएँ–

एक रेखा में अंत बिन्दु होते हैं	:	एक/दो/कोई नहीं
एक रेखाखंड में अंत बिन्दु होते हैं	:	एक/दो/कोई नहीं
एक किरण में अंत बिन्दु होते हैं	:	एक/दो/कोई नहीं

5.2 खुली एवं बंद आकृति

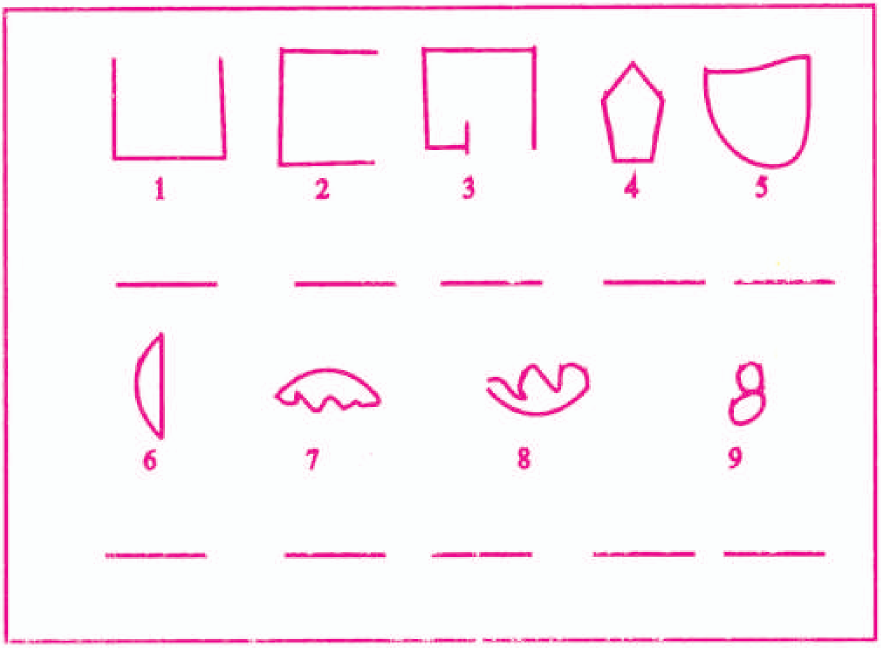
आप अपनी कॉपी पर निम्न आकृतियाँ बनाएँ–



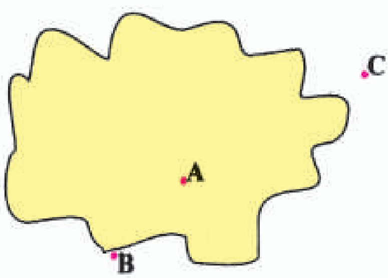
ऊपर दी हुई आकृतियों में बिन्दु A पर अपनी पेंसिल रख आकृति की रेखा के सहारे चलना आरम्भ करें। जिन आकृतियों में जिस बिंदु से आरम्भ किया पुनः उसी बिन्दु पर पहुँच जाएँ ऐसी आकृतियाँ बंद आकृतियाँ हैं। जिन आकृतियों को बनाते समय प्रारंभिक बिन्दु और अंतिम बिन्दु अलग थे, वे आकृतियाँ खुली आकृतियाँ कहलाती हैं। जैसे– पहली तीन आकृतियों में किसी भी बिन्दु से प्रारम्भ करने पर अंत में आप किसी भी बिन्दु पर दोबारा चलें तो क्या पुनः प्रारंभिक बिन्दु पर पहुँच जाते हैं? इसकी जाँच कीजिए।

सोचें और बताएँ

कौन-सी आकृति बंद है और कौन खुली?



5.3 एक आकृति में स्थितियाँ

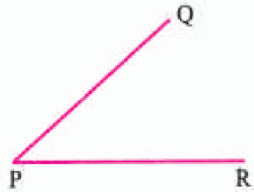


वक्र रेखा की सहायता से एक बंद आकृति बनाएँ तथा उस आकृति के अंदर एक बिन्दु A, वक्र रेखा की परिसीमा पर एक बिन्दु B तथा बंद आकृति के बाहर एक बिन्दु C लें।

आपके द्वारा बनाई गई आकृति का एक नमूना दाईं ओर दिखाया गया है। यहाँ बिन्दु A वक्र अभ्यंतर में यानी अंदर के भाग में, बिन्दु B वक्र की परिसीमा यानी वक्र के सतह पर तथा C बिन्दु वक्र के बहिर्भाग यानी बाहर के भाग में स्थित है। वक्र के अभ्यंतर तथा उसकी परिसीमा को मिलाकर वक्र का क्षेत्र कहा जाता है।

प्रश्नावली – 5.1

(1) नीचे दिए गए रेखाखंड का नाम बताइए–

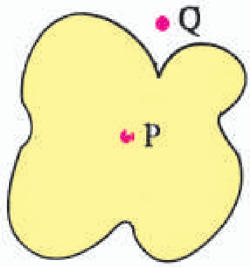


(2) किरण के स्रोतों के उदाहरण बताइए।

(3) निम्नलिखित को अक्षर संकेत में दर्शाइए–

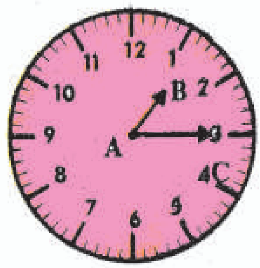
रेखाखंड, किरण, रेखा

(4) बिन्दु P और Q की स्थिति बताइए कि ये किस भाग में हैं?



5.4 कोण

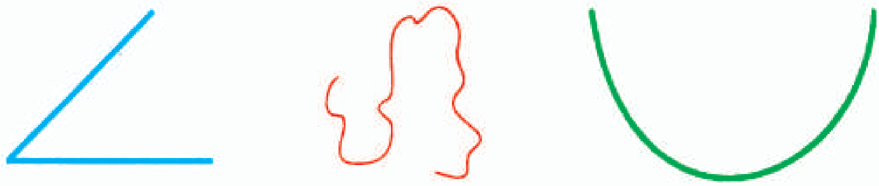
जब दो सरल रेखाएँ अथवा किरणें एक बिन्दु पर मिलती अथवा काटती हैं तो उन रेखाओं के बीच के घुमाव अथवा झुकाव को कोण कहते हैं।



उदाहरण के लिए हम घड़ी के घंटा एवं मिनट की सुइयों को दो किरण $\overrightarrow{AB}$ तथा $\overrightarrow{AC}$ मानें, तो हम देखते हैं कि इन दोनों किरणों में एक उभयनिष्ठ बिन्दु A है तथा किरण $\overrightarrow{AB}$ एवं $\overrightarrow{AC}$ एक कोण बना रही है। A इस कोण का प्रारम्भिक बिन्दु है जिसे हम कोण का **शीर्ष** कहते हैं तथा $\overrightarrow{AB}$ एवं $\overrightarrow{AC}$ इस कोण को बनाने वाली **भुजाएँ** हैं। इस प्रकार एक प्रारम्भिक/आद्य बिन्दु से खींची गई दो किरणों से बनने वाली आकृति **कोण** है।

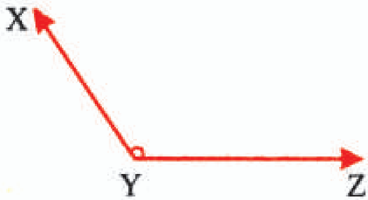
कुछ करें

(1) बताइए किस चित्र में कोण दिख रहा है?



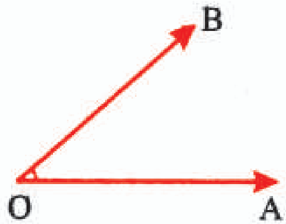
1 2 3

(2) चित्र देखकर नाम बताइए–



शीर्ष ----------

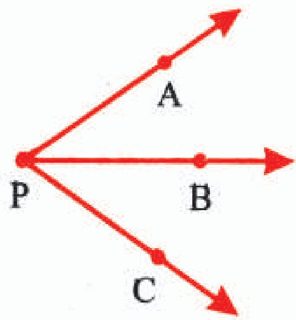
कोण बनाने वाली भुजाएँ --------



कोण का नाम पढ़ते समय शीर्ष का स्थान ठीक बीच में रखते हैं। यहाँ दिए गए कोण का नाम कोण AOB या कोण BOA है। दोनों नामों में शीर्ष 'O' बीच में है। इसमें OA की दिशा से OB की दिशा जाने में कितना घुमाव हुआ है यह कोण AOB बताता है। कोण को संकेत में $\angle$ लिखते हैं जब केवल एक ही कोण हो तब $\angle AOB$ या $\angle BOA$ के लिए $\angle O$ भी उपयोग में लाया जा सकता है। अतः केवल शीर्ष द्वारा भी दर्शाया जा सकता है।

संलग्न आकृति को देखिए। इस कोण का क्या नाम है? क्या हम इसे $\angle P$ कहेंगे?

$\angle P$ से हमारा क्या तात्पर्य होगा? इसे $\angle P$ कहने से क्या भ्रम हो सकता है?

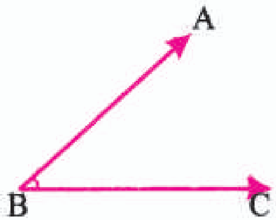
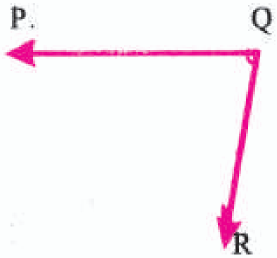
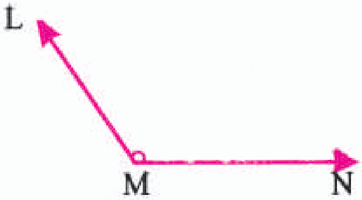


क्या यहाँ पर एक कोण को केवल उसके शीर्ष द्वारा नामांकित करना सहायक होगा? क्यों?

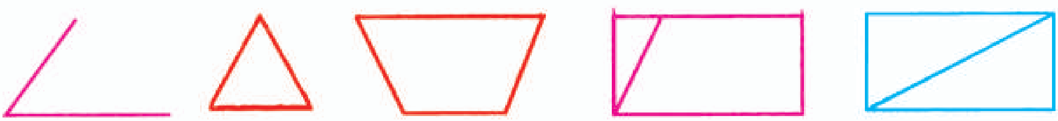
$\angle P$ का अर्थ यहाँ $\angle APB$ या $\angle CPB$ या $\angle APC$ हो सकता है। इसलिए यहाँ और अधिक सूचना की आवश्यकता है। ध्यान दीजिए कि कोण को लिखते समय उसके शीर्ष के अक्षर को सदैव बीच में लिखा जाता है।

प्रश्नावली – 5.2

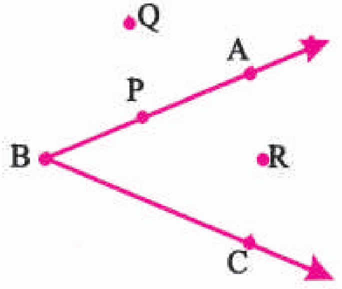
1. नीचे दी गई तालिका को पूरा कीजिए–

कोण	शीर्ष	कोण बनाने वाली भुजाएँ	कोण का नाम
			
			
			

2 नीचे की आकृतियों में बनने वाले कोणों की संख्या बताइए–

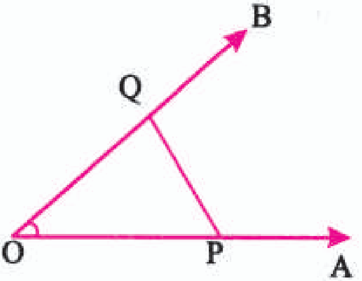


3. चित्र देखकर बताइए कि बिन्दु P, Q तथा R कोण के किस भाग में स्थित हैं?

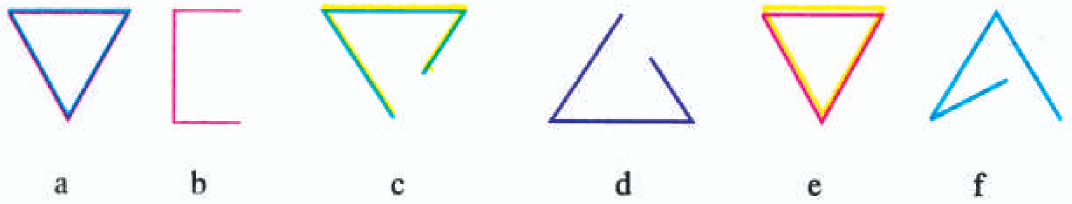


5.5 त्रिभुज

क्रियाकलाप–2 : एक कोण AOB की रचना कीजिए। अब इस कोण को बनाने वाली भुजा OA पर एक बिन्दु P तथा दूसरी भुजा OB पर एक बिन्दु Q लीजिए। बिन्दु P और Q को स्केल से मिलाइए। बताइए कि बनने वाली आकृति बंद आकृति है या खुली? इस आकृति में कुल कितनी भुजाएँ हैं?



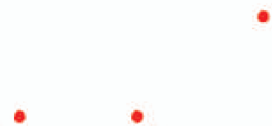
स्पष्टतः आपका उत्तर होगा बनने वाली आकृति OPQ एक बंद आकृति है तथा इसमें कुल तीन भुजाएँ OP, PQ तथा QO हैं। आइए कुछ आकृतियों पर विचार करें।



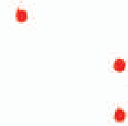
ये सभी आकृतियाँ तीन भुजाओं से बनी हैं तथा आकृति a एवं e बंद आकृतियाँ हैं। ये तीन रेखाखण्डों से बनी बंद आकृतियाँ हैं। अतः इन्हें **त्रिभुज** कहते हैं।

क्रियाकलाप–3 : आगे प्रत्येक चित्र में तीन-तीन बिन्दु दिए गए हैं। क्या इन तीन बिन्दुओं को रेखाखंड द्वारा मिलाकर आप त्रिभुज बना सकते हैं?

चित्र–1



चित्र–2



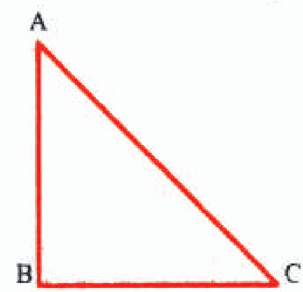
चित्र–3

आप चित्र–1 और चित्र–2 के बिन्दुओं को आपस में मिलाकर त्रिभुज तो बना लेते हैं परन्तु चित्र–3 में तीनों बिन्दु एक सरल रेखा में है जिन्हें जोड़ा जाए तो एक सरल रेखा हमें प्राप्त होती है। अतः तीन असंरेखीय बिन्दुओं को एक दूसरे से मिलाने पर जो बंद आकृति बनती है वही त्रिभुज है।

5.5.1 त्रिभुज के भाग

त्रिभुज ABC में कुल कितने कोण शीर्ष और भुजाएँ हैं? नाम बताइए।

यहाँ कुल 3 कोण हैं $\angle ABC$, $\angle BCA$ तथा $\angle CAB$ और शीर्ष भी तीन B,C तथा A हैं। और AB, BC, CA त्रिभुज ABC की तीन भुजाएँ होंगी। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि एक त्रिभुज में –



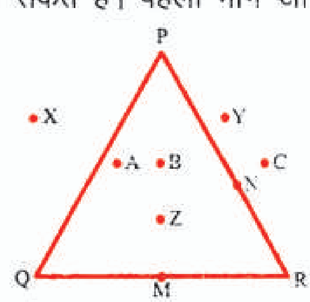
3 शीर्ष होते हैं।

3 भुजाएँ होती हैं।

3 कोण होते हैं।

5.5.2 त्रिभुज का अन्तःभाग तथा बहिर्भाग

किसी तल पर बने त्रिभुज में बिन्दु तीन भागों में रखे जा सकते हैं। पहला भाग जो त्रिभुज के भीतर है, त्रिभुज का **अन्तःभाग**। दूसरा भाग जो त्रिभुज पर है **परिसीमा भाग** और तीसरा जो त्रिभुज के बाहर स्थित है, त्रिभुज का **बहिर्भाग** कहा जाता है। यहाँ A, B तथा Z त्रिभुज के अन्तःभाग में हैं, M, N बिन्दु त्रिभुज पर हैं तथा बिन्दु X, Y तथा C त्रिभुज के बहिर्भाग में स्थित हैं।



कुछ करें

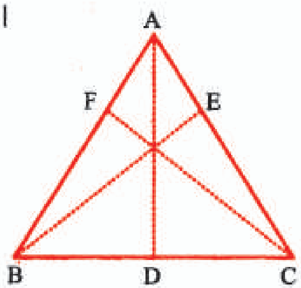
(1) त्रिभुज ABC बनाकर उसके अन्तःभाग को छायांकित करें।

(2) बिन्दु P और Q को इस प्रकार दर्शाएँ कि वे उसके बहिर्भाग में रहें।

(3) बिन्दु M को त्रिभुज पर दर्शाइए।

5.5.3 त्रिभुज के शीर्ष लंब एवं माध्यिका

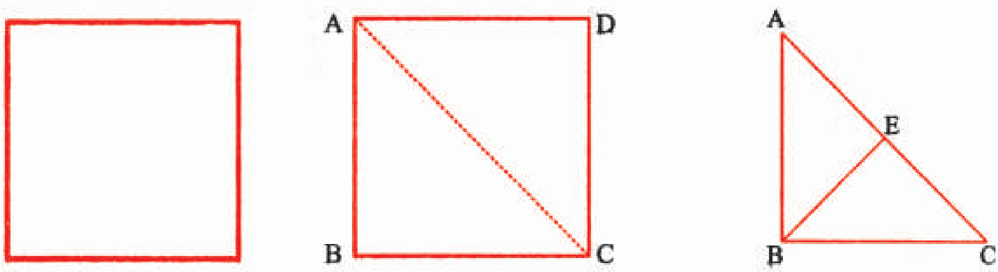
ABC एक त्रिभुज है जिसमें शीर्ष A से सामने की भुजा BC पर डाला गया लम्ब AD है। AD को शीर्षलम्ब भी कहते हैं। इसी प्रकार शीर्ष B से AC पर तथा शीर्ष C से AB पर शीर्ष लम्ब डाला गया है। यह तीनों त्रिभुज के शीर्ष लंब है। इनकी लम्बाई हर त्रिभुज में समान नहीं होती।



त्रिभुज में 3 शीर्ष लंब होते हैं जो एक ही बिन्दु पर गुजरते हैं, यह बिन्दु त्रिभुज का लम्ब केन्द्र कहलाता है।

क्रियाकलाप–4

कागज का वर्गाकार टुकड़ा लीजिए तथा उसके एक कोण को उसके सामने के कोण पर रखकर मोड़िए। इस मुड़ी हुए जगह से कागज को फाड़िए। अब आपको दो त्रिभुज प्राप्त होते हैं। कागज के बने त्रिभुज के शीर्षों को A, B, C और A, C, D नाम दीजिए। अब त्रिभुज के तीन शीर्षों में से एक शीर्ष C को उठाकर दूसरे शीर्ष A के ऊपर रखकर कागज को मोड़िए। इस प्रकार त्रिभुज की एक भुजा दो समान भागों में बँट जाएगी।



जो बिन्दु भुजा को दो भागों में बाँटता है उसे त्रिभुज के तीसरे शीर्ष B से जोड़ दें। इस प्रकार प्राप्त रेखा BE त्रिभुज ABC की माध्यिका कहलाती है। यह हम त्रिभुज की तीनों भुजाओं के साथ कर सकते हैं।

त्रिभुज की तीनों माध्यिकाएँ एक ही बिन्दु से गुजरती हैं तथा यह बिन्दु त्रिभुज का केन्द्रक कहलाता है।

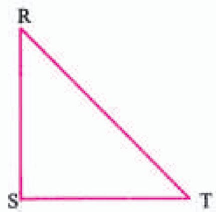
अब आप अलग-अलग आकार के त्रिभुज बनाइए तथा तीनों भुजाओं की माध्यिका बनाकर केन्द्रक चिह्नित कीजिए।

प्रश्नावली – 5.3

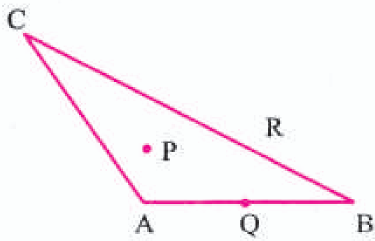
(1) दिए गए चित्र में कौन त्रिभुज है और क्यों?

(2) त्रिभुज में कितने शीर्ष, कितनी भुजाएँ एवं कितने कोण होते हैं?

(3) त्रिभुज RST में शीर्ष, कोण और भुजा के नाम लिखिए।



(4) आकृति में त्रिभुज CAB के अन्तःभाग, बहिर्भाग और त्रिभुज पर स्थित बिन्दु बताइए।



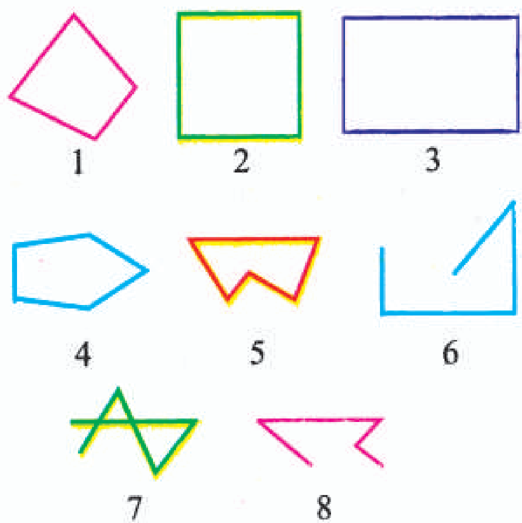
(5) (i) त्रिभुज के शीर्ष से भुजा पर डाला गया लंब त्रिभुज की ———— कहलाती है।

(ii) त्रिभुज के शीर्ष से भुजा के मध्य बिन्दु को मिलाने वाली रेखा त्रिभुज की ———— कहलाती है।

(iii) त्रिभुज में माध्यिकाएँ जिस बिन्दु पर काटती हैं उसे ———— कहते हैं।

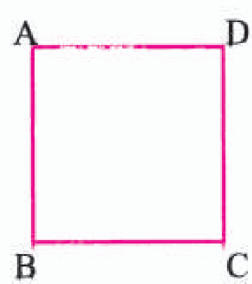
5.6 चतुर्भुज

अपने आस-पास हम बहुत सारी चौकोर आकृतियाँ जैसे पुस्तक-कॉपी का एक पेज, खेल मैदान, पतंग आदि देखते हैं। नीचे बनी आकृतियों में से ऐसी ही चौकोर आकृतियों को छाँटिए–



आपके द्वारा छाँटी गई आकृतियाँ 1, 2 और 3 चतुर्भुज हैं क्योंकि ये चार भुजाओं से बनी बंद आकृति हैं। चतुर्भुज चार भुजाओं से घिरी एक बंद आकृति है।

चतुर्भुज ABCD को देखिए। इसमें चार कोण हैं– $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle DAB$ तथा $\angle CDA$। इसमें B, C, D तथा A चार शीर्ष हैं तथा चार भुजाएँ AB, BC, CD तथा DA हैं।



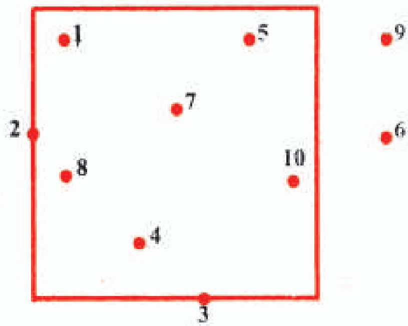
क्रियाकलाप–5

एक चतुर्भुजाकार खेल के मैदान में कुछ खिलाड़ी खेल रहे हैं। यहाँ खिलाड़ियों को बिन्दुओं से दिखाया गया है। आपको बताना है–

(क) कौन-कौन से खिलाड़ी मैदान के अंदर हैं?

(ख) कौन-कौन से खिलाड़ी मैदान के बाहर हैं?

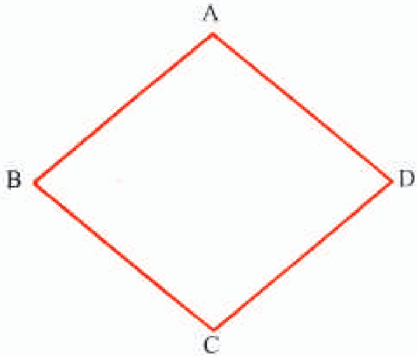
(ग) कौन-कौन से खिलाड़ी मैदान की सीमा रेखा पर हैं?



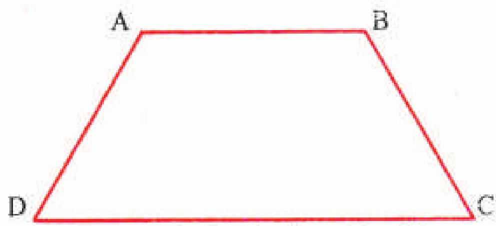
यहाँ खिलाड़ी संख्या 1, 4, 5, 7, 8, 10 अन्तःभाग में तथा खिलाड़ी संख्या 6, 9 बहिर्भाग में और खिलाड़ी संख्या 2, 3 मैदान की सीमा पर हैं।

5.6.1 चतुर्भुज की भुजाएँ

चतुर्भुज की भुजा AB तथा BC दिए गए चतुर्भुज की दो संलग्न भुजाएँ हैं। यह दोनों भुजाएँ बिन्दु B पर मिलती हैं। ये चतुर्भुज की आसन्न भुजाएँ हैं। आसन्न भुजाएँ एक शीर्ष पर एक दूसरे को काटती हैं। चतुर्भुज ABCD की शेष आसन्न भुजाओं के नाम BC एवं CD, CD एवं DA तथा DA एवं AB हैं।

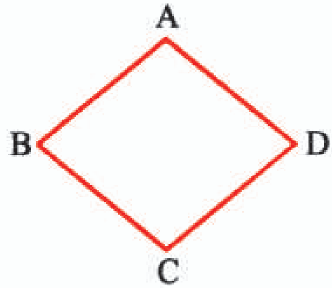


जब चतुर्भुज की भुजाएँ एक दूसरे को किसी बिन्दु पर नहीं काटें या एक दूसरे से नहीं मिलें तब वे सम्मुख भुजाएँ कहलाती हैं। यहाँ AB और CD सम्मुख भुजाएँ हैं। सोचें एक चतुर्भुज में सम्मुख भुजाओं के कितने जोड़े होंगे?

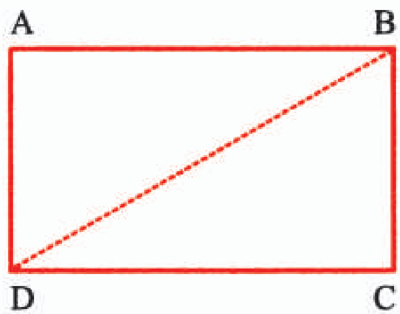


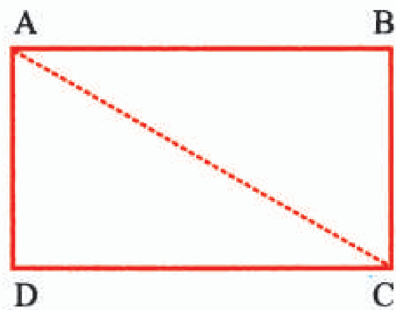
कुछ करें

दिए गए चतुर्मज में आसन्न भुजाओं और सम्मुख भुजाओं के युग्म बताइए–



5.6.2 चतुर्भुज के विकर्ण





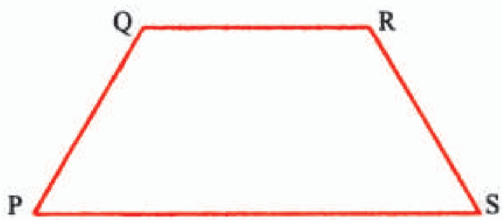
एक चतुर्भुज को दो त्रिभुजों में बाँटने के लिए B बिन्दु को D बिन्दु से या A बिन्दु को C बिन्दु मिलाते हैं। अर्थात् दो सम्मुख शीर्षों को एक रेखाखंड से मिलाने पर चतुर्भुज दो त्रिभुज में बँट जाता है। ये रेखाखंड चतुर्भुज के **विकर्ण** कहलाते हैं। अतः चतुर्भुज ABCD में दो विकर्ण AC तथा BD हैं।

प्रश्नावली – 5.4

(1) एक चतुर्भुज बनाइए और उसमें भुजा, कोण एवं शीर्षों के नाम बताइए।

(2) दिए गए चतुर्भुज में बिन्दु M बहिर्भाग में, बिन्दु N अन्तःभाग में तथा बिन्दु P को चतुर्भुज पर दशाईए।

(3) दिए गए चतुर्भुज में आसन्न भुजाओं एवं सम्मुख भुजाओं के युग्म बताइए।

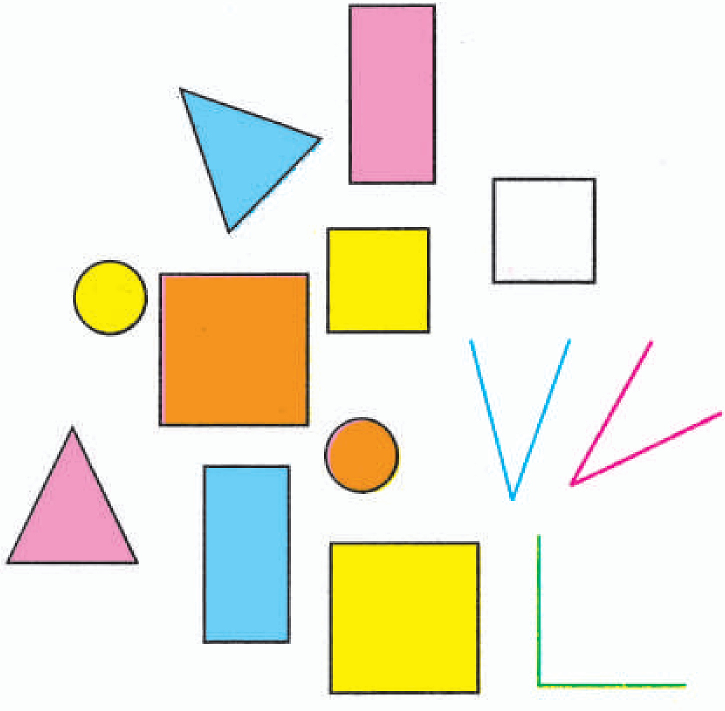


(4) स्वयं से एक चतुर्भुज बनाइए और उसके विकर्ण खींचिए।

अध्याय-6 सरल आकृतियों की समझ

कुछ करें

नीचे के चित्रों में समान आकार की आकृतियों को पेंसिल से मिलाइए–



आपने एक समान आकृतियों को कैसे पहचाना?

इन आकृतियों का मिलान करने हेतु उनके आकार एवं साइज (लम्बाई, चौड़ाई ....) को ध्यान में रखा।

आप अपने आस-पास बहुत सारी वस्तुओं को देखते हैं। ये सभी विभिन्न साइज (मापों) की होती हैं। इनके साइज की तुलना कैसे करें?

6.1 रेखाखंड की माप

रेखाखंड के प्रयोग से आपने कई आकृतियाँ बनाई हैं। त्रिभुज में तीन तथा चतुर्भुज में चार रेखाखंडों का प्रयोग किया है। कई बार आकृतियों को खींचते समय हम विभिन्न माप के रेखाखंडों का प्रयोग करते हैं। हर रेखाखंड की एक निश्चित माप होती है, रेखाखंड की माप अद्वितीय होती है जिसे हम **रेखाखंड की लम्बाई** कहते हैं। दो रेखाखंडों की तुलना आप उनकी लम्बाई के आधार पर कर सकते हैं।

बताइए कौन-सी रेखाखंड बड़ी है? इसका पता आपने कैसे किया?

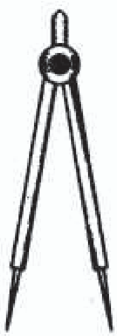
यह तो देखने से ही पता चल जाता है कि रेखाखंड $\overline{AB}$ रेखाखंड $\overline{CD}$ से बड़ी है। दोनों की लम्बाई में काफी अन्तर है। ऐसी परिस्थिति जिसमें रेखाखण्डों की लम्बाई में काफी फर्क है से ही उनमें अंतर जान सकते हैं।

दूसरे उदाहरण में रेखाखंड $\overline{PQ}$ तथा $\overline{RS}$ की लम्बाइयों का अंतर इतना स्पष्ट नहीं है, अतः अनुमान लगाकर या अवलोकन से उनकी तुलना करना मुश्किल है। बताइए $\overline{PQ}$ और $\overline{RS}$ की तुलना आप कैसे करेंगे? आइए $\overline{PQ}$ और $\overline{RS}$ की लम्बाई मापें।

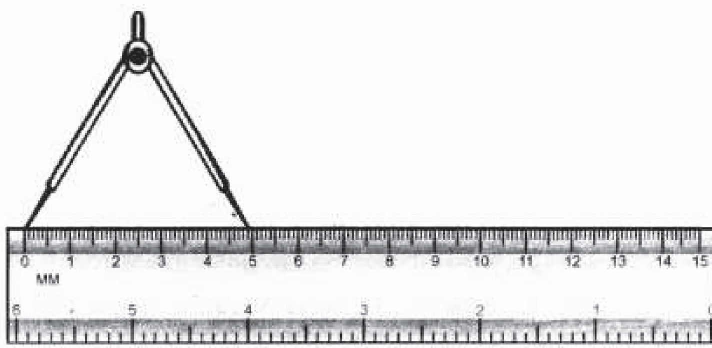
हमारे ज्यामिति बक्सा में स्केल होता है। इसकी सहायता से रेखा की लम्बाई माप सकते हैं। स्केल से रेखाखंड की लम्बाई मापने के लिए रेखाखंड PQ के P बिन्दु पर स्केल का शून्य रखकर रेखाखंड के Q बिन्दु पर स्केल जिस चिह्न पर हो उसे पढ़िए, यही रेखाखंड PQ

की माप होगी। उसी प्रकार हम रेखाखंड RS को मापकर दोनों रेखाखण्डों के बीच तुलना कर सकते हैं।

स्केल और डिवाइडर द्वारा रेखाखण्ड की तुलना करना



डिवाइडर



सबसे पहले हम डिवाइडर का फैलाव करते हैं तथा उसके एक नुकीले भाग को P पर रखते हैं तथा दूसरे नुकीले भाग को Q पर रखते हैं। पुनः डिवाइडर के फैलाव में बिना कोई परिवर्तन किए उसके एक नुकीले भाग को स्केल के शून्य पर रखते हैं तथा दूसरा नुकीला भाग स्केल के जिस चिह्न पर पड़ता है उसको पढ़ लेते हैं। यही रेखाखंड PQ की लम्बाई होती है। इसी प्रकार रेखाखंड RS की लम्बाई ज्ञात करके दोनों रेखाखंडों की तुलना करते हैं।

स्केल पर अंकित चिह्न बराबर-बराबर भागों में बँटे होते हैं। प्रत्येक बड़े भाग की लम्बाई 1 सेमी है। प्रत्येक 1 सेंटीमीटर को 10 छोटे-छोटे बराबर भागों में विभाजित किया गया है।

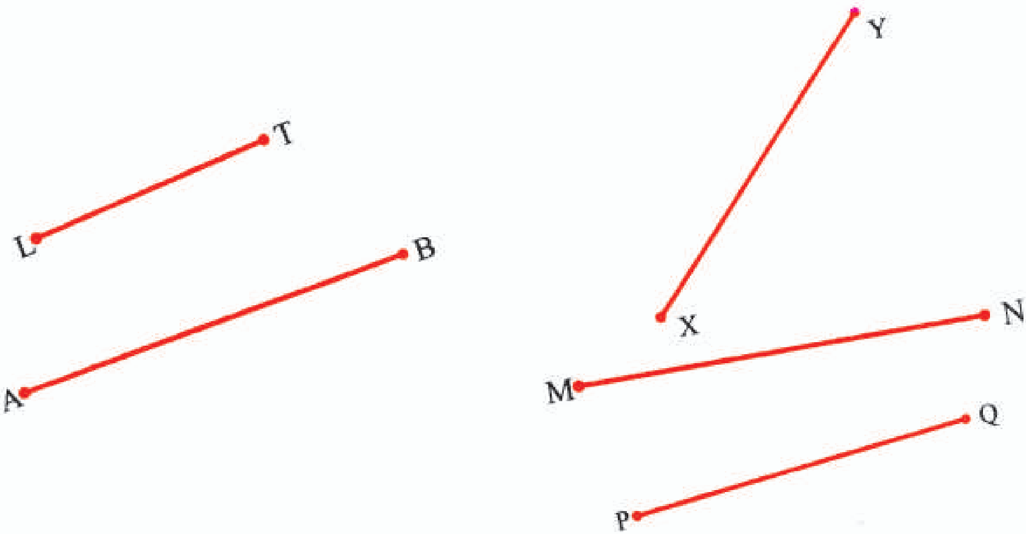
1 छोटा भाग = 1 मिलीमीटर

इसी तरह स्केल के दूसरी ओर भी बराबर-बराबर भाग बँटे हैं जो 1 इंच की दूरी को दर्शाते हैं। आमतौर पर रेखा को सेमी में ही मापा जाता है।

कुछ करें

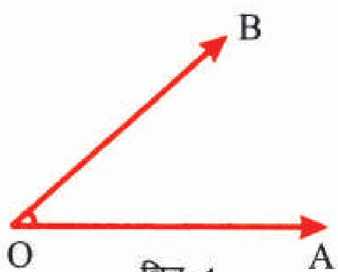
1. स्केल की सहायता से अपने कलम की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

2. निम्न रेखाखंडों के नाम उनकी लम्बाई के बढ़ते क्रम में सजाएँ।



बढ़ता क्रम ---

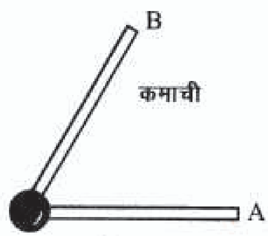
6.2 कोणों की माप



चित्र–1

आप यह जान चुके हैं कि जब दो किरणों का आरम्भिक बिन्दु एक होता है तो उन किरणों के बीच का फैलाव कोण है। यहाँ AOB एक कोण है। इसी तरह आप अपने चारों ओर अनेक वस्तुओं को घूमते हुए अथवा एक वस्तु दूसरी वस्तु पर झुकी हुई देखते हैं। दरवाजा खोलने पर वह अपने कब्जों पर घूमता है। घड़ी की सुइयाँ घूमती रहती हैं। इस प्रकार दैनिक जीवन में हम झुकाव और घुमाव के रूप में कोण को देखते हैं।

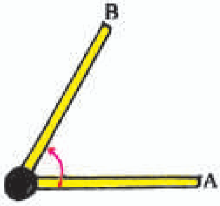
क्रियाकलाप–1



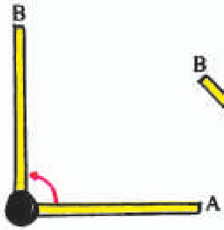
चित्र–2

बाँस की दो कमाचियाँ लीजिए। दोनों कमाचियों के एक-एक सिरे को मिलाकर उस पर एक पिन दिए गए चित्र के अनुसार गाड़ दीजिए। अब कमाची A को स्थिर रखते हुए कमाची B को घुमाइए।

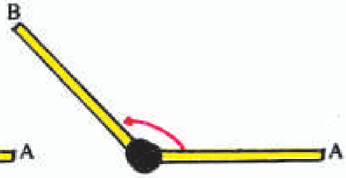
जैसे-जैसे कमाची B ज्यादा घूमती है, दोनों कमाचियों के बीच के कोण का मान बढ़ता जाता है। इस प्रकार हम कह सकते हैं कोण बनाने वाली दोनों भुजाओं के बीच जैसे-जैसे फैलाव बढ़ेगा उनके बीच के कोण का मान भी बढ़ेगा।



चित्र–3



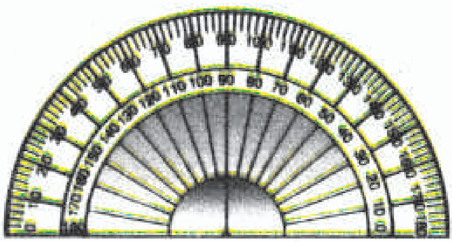
चित्र–4



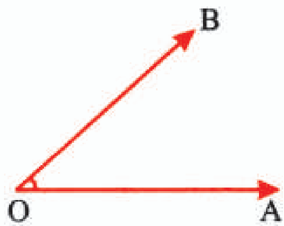
चित्र–5

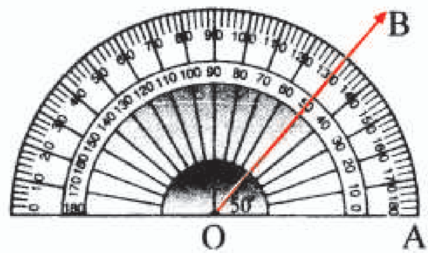
क्या आप ऊपर के चित्रों में सबसे बड़े कोण को बता सकते हैं? यहाँ चित्र 5 में बना कोण सबसे बड़ा है क्योंकि इसकी कोण बनाने वाली भुजाओं में सबसे ज्यादा फैलाव देखा जा सकता है। लेकिन चित्र-2 एवं चित्र-3 में कौन-सा कोण बड़ा है? इसके लिए आपको इन दोनों कोणों की माप करनी होगी। सोचें कोणों की माप कैसे की जा सकती है? जिस तरह रेखाखंड की माप स्केल से की गई, क्या उसी तरह से कोणों की माप की जा सकती है?

कोणों की माप चाँद या प्रोटेक्टर की सहायता से की जा सकती है। आइए जानें चाँद या प्रोटेक्टर क्या है?



प्रोटेक्टर या चाँद एक पारदर्शी उपकरण है जो अर्द्धवृत्ताकार होता है तथा उसके अर्द्ध गोलाकार भाग में ऊपर बाएँ से दाएँ 0° से 180° तक के तथा नीचे दाएँ से बाएँ 0° से 180° तक के चिह्न लगे होते हैं। जिस प्रकार स्केल में समान दूरी पर भाग किए होते हैं, इसी प्रकार चाँद में अर्द्ध वृत्त के घुमाव पर समान झुकाव में भाग बँटे होते हैं। इस घुमाव की इकाई डिग्री में मापी जाती है। आइए इसकी मदद से $\angle AOB$ की माप ज्ञात करें।

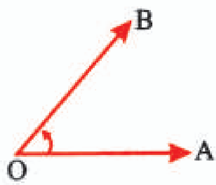


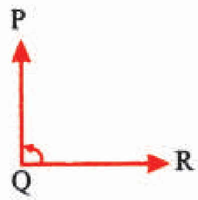


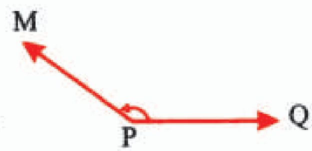
∠AOB की माप प्रोटेक्टर या चाँद की सहायता से करने के लिए ∠AOB के शीर्ष 'O' पर चाँद के केन्द्र को इस प्रकार रखेंगे कि चाँद की 0° – 180° रेखा कोण की भुजा OA पर पड़े। अब OB रेखा चाँद के जिस बिन्दु पर पड़े वहाँ के माप को पढ़ेंगे। यहाँ रेखा OB चाँद पर बिन्दु 50° एवं 130° से गुजर रही है। चूँकि कोण का घुमाव दाएँ से बाएँ है, अतः दाएँ से बाएँ शून्य से 50° तक पढ़ेंगे। इस प्रकार कोण ∠AOB की माप 50° हुआ।

कुछ करें

चाँद या प्रोटेक्टर की सहायता से दिए गए कोण की माप ज्ञात कीजिए तथा कोण का सांकेतिक नाम भी लिखिए।



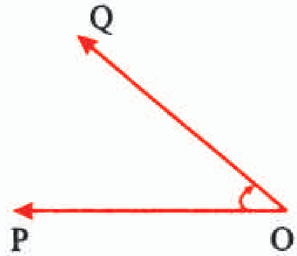




________ ________ ________

क्रियाकलाप–2

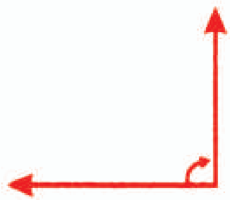
इस कोण को चाँद से मापें।



यहाँ आधार रेखा PO है जिसका शीर्ष O दाएँ हैं। अतः चाँद पर जब O को पर रखते हैं तब OP के सम्मुख 0^0 को पढ़ते हैं। अतः बाहर वाले डिग्री मापों को पढ़ते हैं या OQ भुजा 40^0 पर पड़ रही है। अतः $\angle POQ = 40^0$

कुछ करें

रेखाखंड का नाम अक्षर से निरूपित कीजिए। कोण को मापकर कोण के मान ज्ञात कीजिए।

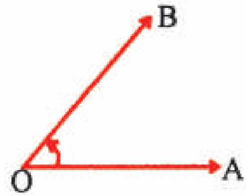


ऊपर आपने कोणों की माप करते समय यह देखा कि कोण विभिन्न माप के होते हैं। क्या कोणों को उनकी माप के आधार पर नाम भी दिया जा सकता है? आइए कुछ कोणों के प्रकार पर विचार करें।

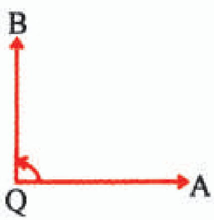
कोणों के प्रकार

नीचे दिए गए कोणों को देखें। इनकी माप लगभग कितनी हो सकती है, सोचें और लिखें।

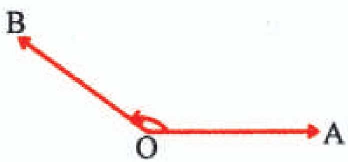
कोण की माप



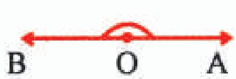
कोण की माप



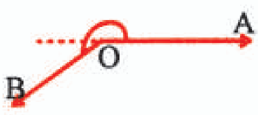
कोण की माप



कोण की माप



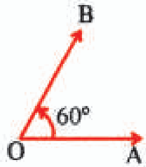
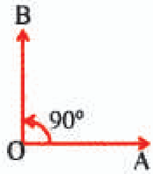
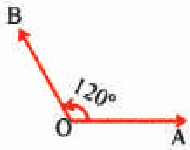
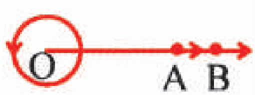
कोण की माप



कोण की माप

कोण की माप

यह सभी अलग-अलग प्रकार के कोण हैं। इन्हें अब इनके गुणों के आधार पर सारणीबद्ध करते हैं।

कोण का नाम	कोण का चित्र	कोण का विवरण
शून्यकोण		जिस कोण की माप शून्य हो। कोण बनाने वाली दोनों किरणें एक-दूसरे पर चढ़ी हैं। घूर्णन शून्य है।
न्यूनकोण		जिस कोण की माप 0° से लेकर 90° के बीच हो पर 90° से कम हो। जैसे– 10°, 25°, 45°, 60°, 75° आदि।
समकोण		जिस कोण की माप 90° हो, तथा कोण बनाने वाली किरणें एक दूसरे पर लम्बवत् हों।
अधिककोण		जिस कोण की माप 90° से ज्यादा पर 180° से कम हो। जैसे– 95°, 120°, 135°, 150°, 175° आदि।
सरलकोण या ऋजुकोण		जिस कोण की माप 180° हो। इसमें कोण बनाने वाली दोनों किरणें एक सरल रेखा बनाती हैं। यहाँ B शून्य के दूसरी ओर है।
प्रतिवर्ती या पुनर्युक्तकोण		जिस कोण की माप 180° से ज्यादा तथा 360° से कम हो।
पूर्णकोण		जिस कोण की माप 360° हो। इसमें कोण बनाने वाली किरण OB एक पूर्ण चक्कर लगाने के बाद किरण OA के ऊपर चढ़ जाती है। इसमें और शून्य कोण की स्थिति में कोई अंतर नहीं है।

प्रश्नावली – 6

1. इन्हें परिभाषित करें और प्रत्येक के लिए अधिक से अधिक उदाहरण सोचें।

न्यूनकोण : ....

....

समकोण : ....

....

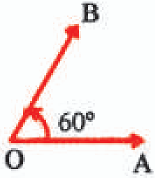
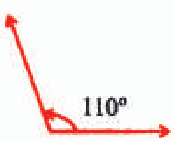
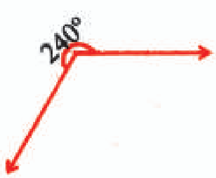
अधिककोण : ....

पुनर्युक्तकोण : ....

....

2. मिलान करें–

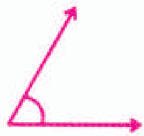
सारणी I

कोण का चित्र	कोण का नाम
I 	I. अधिककोण
II. 	II. पुनर्युक्तकोण
III. 	III. न्यूनकोण

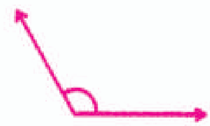
सारणी II

कोण का नाम	माप
न्यूनकोण	180°
अधिककोण	90°
शून्यकोण	360°
समकोण	255°
ऋजुकोण	45°
पूर्णकोण	155°
पुनर्युक्तकोण	0°

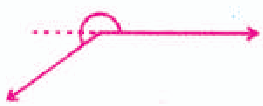
3. नीचे दिए गए कोणों को मापें और उनके नाम लिखें–



____

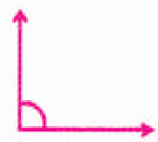


____



____

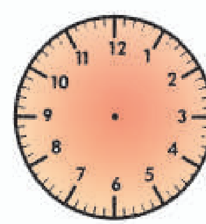
____



____

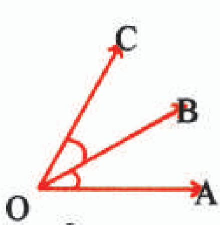
4. स्केल और चाँद (प्रोटेक्टर) की सहायता से 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135° का कोण बनाइए तथा रेखाखंड को अक्षर से निरूपित करके कोण का नाम भी दीजिए।

5. घड़ी में मिनट की सुई 15 मिनट में कितनी घूर्णन करती है? इसका अंश माप कितना है? यह सुई 10 मिनट में कितने अंश का कोण और घूम जाएगी? दी गई घड़ी में कोण बनाकर ज्ञात कीजिए।

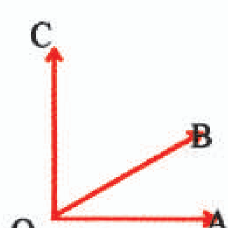


6.3 कोणों के विशेष युग्म

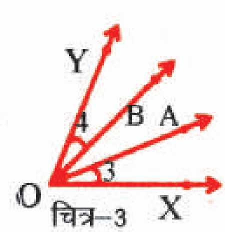
बहुत से कोण युग्म विशेष गुण वाले होते हैं। इन युग्मों के कई ऐसे गुण होते हैं जिनसे हमें ज्यामिति के अध्ययन में मदद मिलती है। ऐसे कुछ युग्मों का हम यहाँ अध्ययन करेंगे।



चित्र–1



चित्र–2



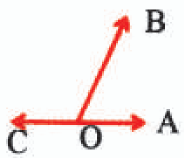
चित्र–3

पीछे के चित्रों में एक शीर्ष पर दो या दो से अधिक कोण बने हैं। चित्र–1 में कोण ∠AOB और ∠BOC बनाने वाली भुजाओं में एक भुजा OB उभयनिष्ठ है तथा शेष दोनों भुजाएँ OB के दोनों तरफ हैं। इस प्रकार बने दो कोण जिनमें एक भुजा उभयनिष्ठ हो और जो एक ही शीर्ष पर बने हों **संलग्न कोण** अथवा **आसन्न कोण** कहलाते हैं।

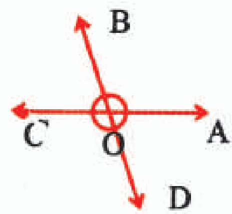
इसी प्रकार चित्र–2 में कोण ∠AOB और ∠BOC को देखकर बताएँ। क्या ये आसन्न कोण हैं?

क्या चित्र–3 में बने कोण ∠XOA और ∠BOY आसन्न कोण कहे जा सकते हैं?

नहीं क्योंकि इनके शीर्ष तो एक हैं पर उनमें कोई भुजा उभयनिष्ठ नहीं है।



चित्र–4



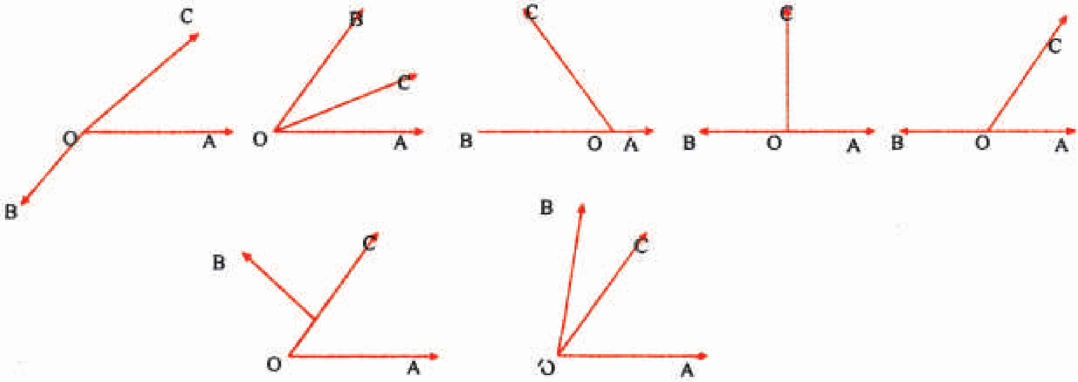
चित्र–5

चित्र-4 में दो संलग्न कोणों का योग 180° है। ऐसे कोणों का जोड़ा **रेखीय युग्म** कहलाता है। यहाँ कोण बनाने वाली भुजाएँ OA तथा OC एक दूसरे के विपरीत हैं तथा OB उभयनिष्ठ है।

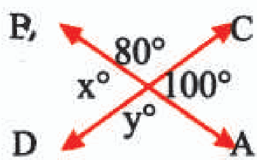
चित्र-5 में चार कोण बने हैं, जो दो रेखीय युग्म बना रहे हैं। इन कोणों को **शीर्षाभिमुख कोण** कहते हैं। अगर आप इसके चारों को मापकर देखेंगे तो इन कोणों के आमने-सामने का जोड़ा बराबर मिलेगा। चित्र में ∠AOB = ∠COD तथा ∠BOC = ∠AOD ।

कुछ करें

1. नीचे दिए गए चित्रों में सभी आसन्न कोण युग्मों और रेखीय कोण युग्मों को पहचानिए–



2. नीचे दिए गए चित्र में क्या दोनों कोण रेखीय युग्म का निर्माण कर रहे हैं। यदि हाँ तो कैसे?

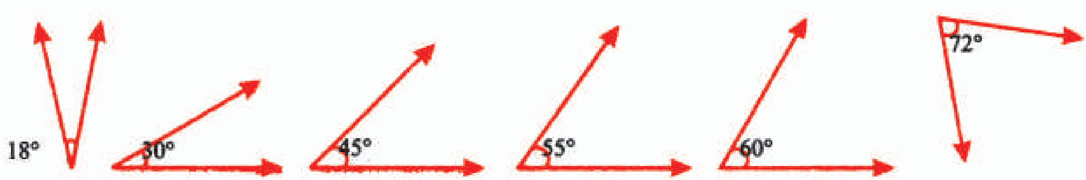


x = ____ y = ____

कारण ____

6.4 पूरक कोण

दो कोण जिनकी अंश मापों का योग 90° हो, **पूरक या कोटिपूरक** कोण कहलाते हैं, जैसे– 30° और 60° के कोण अथवा 18° और 72° के कोण।

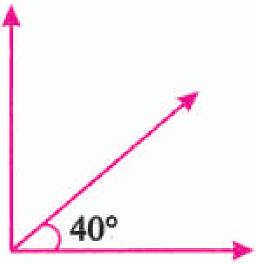


दिए गए चित्रों में कौन-से कोण पूरक कोण के युग्म बनाते हैं?

पूरक कोणों के एक युग्म में एक कोण दूसरे का पूरक कहलाता है। जैसे– 40^0 के कोण का पूरक है = (90-40) = 50^0 का कोण।

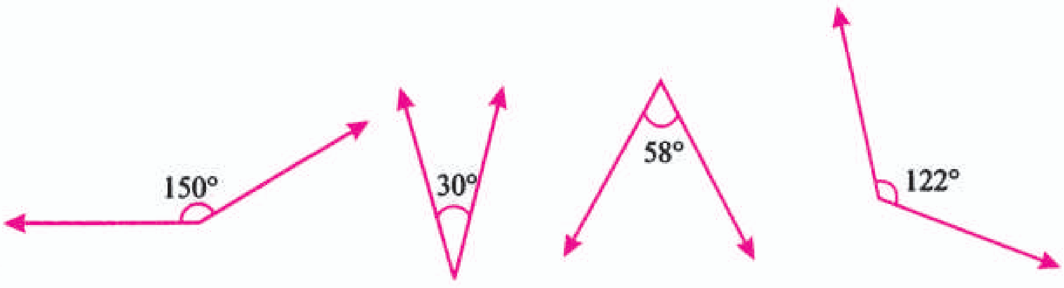
दो पूरक कोणों का आसन्न कोण होना आवश्यक नहीं। लेकिन दो कोण यदि आसन्न कोण भी हैं और पूरक कोण भी, तब वे मिलकर एक समकोण बनाते हैं।

बगल में दिए गए चित्र में पूरक कोण युग्म दिया गया है यदि इसमें एक कोण $\angle 40^0$ हो तो दूसरा कोण क्या होगा?



6.5 संपूरक कोण

दो कोण जिनके अंश मापों का योग 180^0 हो, **संपूरक कोण** या **ऋजुपूरक कोण** कहलाते हैं। जैसे– 30^0 और 150^0 के कोण अथवा 58^0 और 122^0 के कोण।



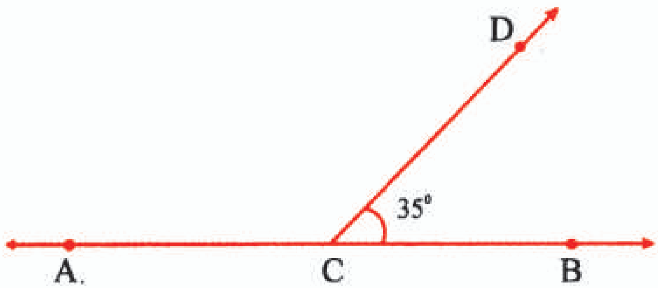
आकृति

संपूरक कोण के युग्म में एक कोण दूसरे का संपूरक कहलाता है; जैसे 40^0 के कोण का संपूरक कोण है 180-40 = 140^0 का कोण।

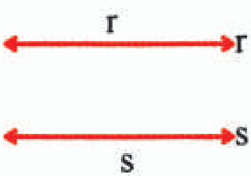
तथा 112^0 के कोण का संपूरक कोण है = 180-112 = 68^0 का कोण।

दो संपूरक कोणों का आसन्न कोण होना आवश्यक नहीं। लेकिन दो कोण यदि संपूरक भी हैं तथा आसन्न भी तब वे मिलकर एक सरल कोण बनाएँगे और वे रेखीय युग्म भी होंगे।

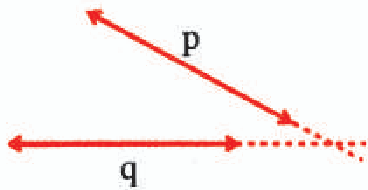
नीचे दिए गए रेखीय युग्म में ∠ACD की माप बताइए।



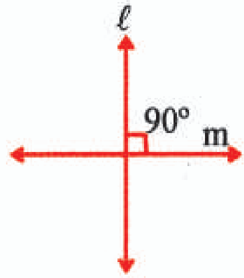
6.6 रेखाओं का प्रतिच्छेदन



चित्र–1



चित्र–2



चित्र–3

चित्र-1 को देखें। यहाँ रेखा r और s को यदि आप आगे बढ़ाते जाएँ तो क्या ये कभी आपस में मिलेंगी?

अब जरा इनके बीच की लम्बवत् दूरी को अलग-अलग बिन्दुओं पर मापिए।

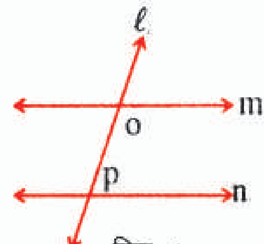
क्या यह सदैव एक समान आती है?

अतः ऐसी रेखाएँ जिनके बीच की लम्बवत् दूरी सदैव समान रहे या ऐसी रेखाएँ जो दोनों सिरों से बढ़ाने पर कभी न मिलें **समांतर रेखाएँ** कहलाती हैं।

चित्र-2 में आप देख रहे हैं कि जब रेखा p और q को आगे बढ़ाया गया तो वे एक दूसरे को काटती हैं? वे रेखाएँ जो किसी बिन्दु पर एक-दूसरे को काटें **प्रतिच्छेदी रेखाएँ** कहलाती हैं। रेखाओं का प्रतिच्छेदन अलग-अलग झुकाव पर हो सकता है।

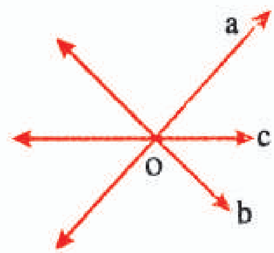
चित्र-3 यहाँ रेखा ℓ और m प्रतिच्छेदी रेखाएँ हैं। यहाँ रेखा ℓ का m पर झुकाव 90° का है। अतः इसको **लम्बवत् रेखा** कहते हैं।

बगल के चित्र-4 को ध्यान से देखिए। रेखा ℓ, रेखा m तथा n को दो अलग-अलग बिन्दु o तथा p पर काटती है, यहाँ रेखा ℓ, रेखा m तथा n की **तिर्यक् छेदी रेखा** कहलाती है।



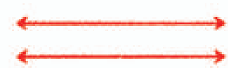
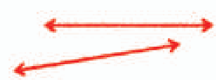
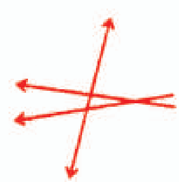
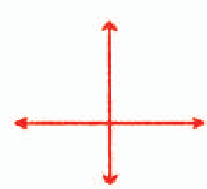
चित्र–4

चित्र–5 में रेखा a, रेखा b और c को O बिन्दु पर काटती है, पर यह रेखा b और c की तिर्यक् छेदी रेखा नहीं है। क्योंकि तिर्यक् छेदी रेखा होने के लिए रेखाओं का अलगं-अलग बिन्दुओं पर प्रतिच्छेदन (काटना) जरूरी है। अतः रेखा a रेखा b और c की तिर्यक् छेदी रेखा नहीं है।



चित्र–5

1. मिलान करें

तिर्यक् छेदी रेखा	
लम्बवत् रेखाएँ	
समांतर रेखाएँ	
प्रतिच्छेदी रेखाएँ	

आपने रेल की पटरी, अपने कमरे की दीवारों, किताब के पृष्ठ के किनारों में लम्बवत् और समान्तर रेखाओं के उदाहरण देखे होंगे।

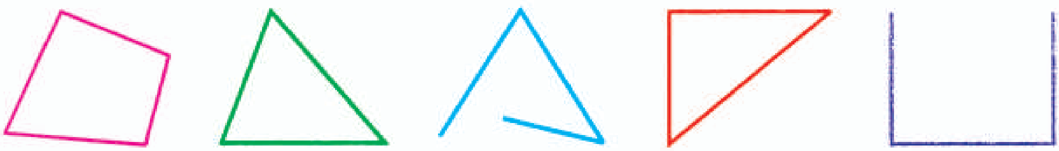
2. ऐसे ही अन्य उदाहरण बताइए–

समांतर रेखाओं के उदाहरण : ....

लम्बवत् रेखाओं के उदाहरण : ....

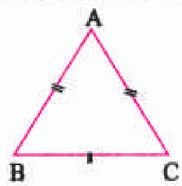
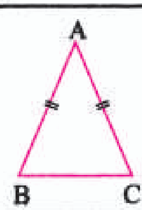
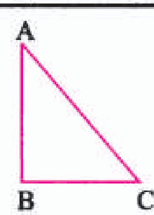
6.7 त्रिभुज

नीचे कुछ आकृतियाँ बनी हैं। इनमें से कौन-कौन सी आकृतियाँ त्रिभुज हैं? उन्हें (✓) करें।

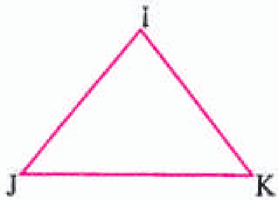


त्रिभुज तीन भुजाओं से घिरी एक बंद आकृति है। इसमें तीन भुजाएँ एवं तीन कोण होते हैं। आपने विभिन्न आकार के त्रिभुजों को देखा होगा।

नीचे बने त्रिभुजों को देखें। भुजाओं के आधार पर त्रिभुज तीन प्रकार के होते हैं।

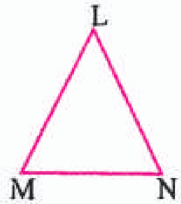
समबाहु त्रिभुज	ऐसा त्रिभुज जिसकी तीनों भुजाएँ बराबर लम्बाई की हों।	
समद्विबाहु त्रिभुज	ऐसा त्रिभुज जिसकी दो भुजाएँ बराबर लम्बाई की हों।	
विषमबाहु त्रिभुज	ऐसा त्रिभुज जिसकी तीनों भुजाएँ अलग-अलग लम्बाई की हों।	

तीनों प्रकार के त्रिभुज पहचानकर उनके नाम अंकित कीजिए–



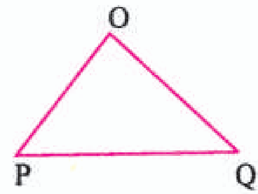
चित्र–1

____



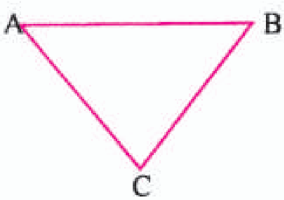
चित्र–2

____



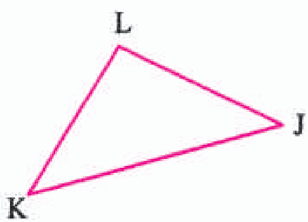
चित्र–3

____



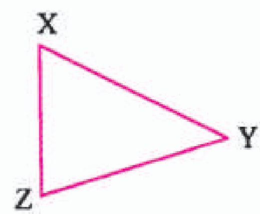
चित्र–4

____



चित्र–5

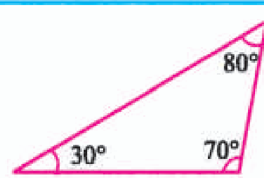
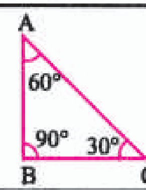
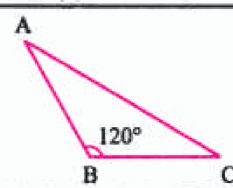
____



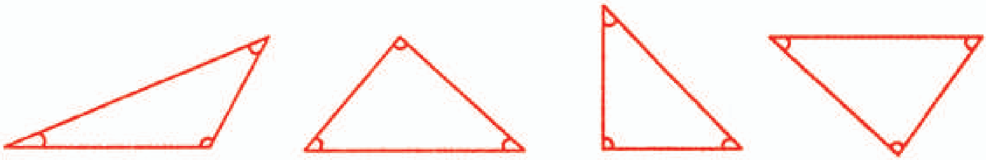
चित्र–6

____

कोणों के आधार पर त्रिभुजों का वर्गीकरण

त्रिभुज का नाम	त्रिभुज का विवरण	त्रिभुज का चित्र
न्यूनकोण त्रिभुज	ऐसा त्रिभुज जिसके तीनों कोण न्यूनकोण हों यानी 90° से कम हों।	
समकोण त्रिभुज	ऐसा त्रिभुज जिसका एक कोण समकोण हो यानी 90° का हो।	
अधिककोण त्रिभुज	ऐसा त्रिभुज जिसका एक कोण अधिककोण हो यानी 90° से बड़ा हो।	

1. नीचे दिए गए त्रिभुजों को कोणों के आधार पर वर्गीकृत कीजिए–



2. एक विषमबाहु, एक समद्विबाहु और एक समबाहु त्रिभुज बनाएँ।

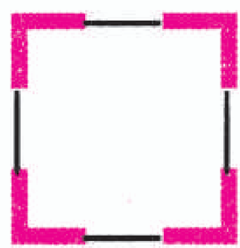
3. एक न्यूनकोण, एक समकोण और एक अधिककोण त्रिभुज बनाएँ।

6.8 चतुर्भुज के प्रकार

गतिविधि

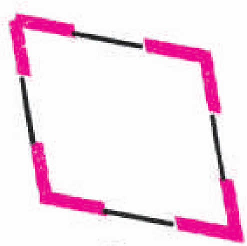
इस खेल हेतु आपको अलग-अलग लम्बाई की बाँस की कमाचियों एवं साइकिल के ट्यूब में उपयोग की जाने वाली वॉल्व ट्यूब की आवश्यकता होगी।

क्रियाकलाप–1



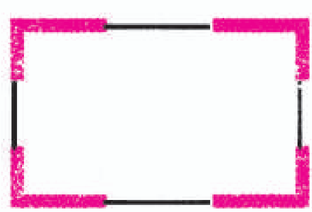
चित्र–1

समान लम्बाई की चार कमाचियाँ एवं 4 वॉल्व-ट्यूब लीजिए। एक वॉल्व-ट्यूब में दोनों ओर एक-एक कमाची इस प्रकार घुसाइए कि ट्यूब के अंदर दोनों कमाची एक दूसरे से सट जाए। फिर इसी प्रकार दूसरे वॉल्व-ट्यूब में भी दो कमाचियों को लगाएँ। अब चारों कमाचियों को चित्र-1 के अनुसार आपस में जोड़ें। बताइए यह कैसी आकृति बनी? इस प्रकार बनी आकृति में चारों भुजाएँ तथा कोण बराबर दिखाई दे रहे हैं और सभी कोण 90^0 के हैं। अतः यह एक वर्ग है। अब इसके दो शीर्षों को चित्र के अनुसार अँगूठे से थोड़ा दबाएँ। आपको चित्र–2 की आकृति मिलती है। यहाँ सभी भुजाएँ तो समान हैं परन्तु सभी कोण समान नहीं हैं। इस आकृति को **समचतुर्भुज** कहते हैं।



चित्र–2

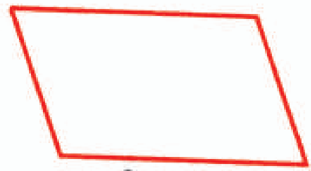
क्रियाकलाप–2



चित्र–3

अलग-अलग लम्बाई की दो कमाचियाँ लीजिए। इन दोनों के बराबर की एक-एक और कमाची लीजिए। अलग-अलग लम्बाई वाली एक-एक कमाची को वॉल्व-ट्यूब से जोड़िए। इस

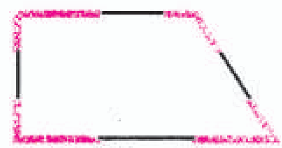
प्रकार प्राप्त दोनों जोड़ों को आपस में वॉल्व-ट्यूब से जोड़िए। आपको चित्र-3 की आकृति प्राप्त होगी। इसमें आमने-सामने की भुजाएँ समान लम्बाई की हैं तथा सभी कोण समान और 90° के हैं। यह **आयत** है। अब इसके दो शीर्षों को चित्रानुसार दबाइए। बनी आकृति की आमने सामने की भुजा बराबर तथा समांतर है। यह **समांतर चतुर्भुज** है।



चित्र–4

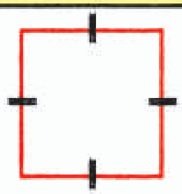
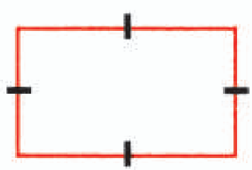
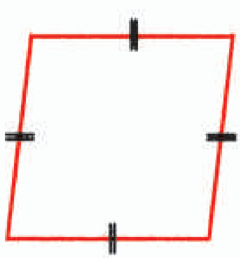
क्रियाकलाप–3

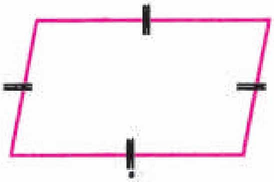
असमान लम्बाई की चार कमाचियों को वॉल्व-ट्यूब की सहायता से चित्र-5 के अनुसार आपस में जोड़िए। प्राप्त आकृति की चारों भुजाएँ असमान लम्बाई की हैं, परंतु आमने-सामने की भुजाओं के जोड़े में से एक जोड़ा समांतर है। यह **समलंब चतुर्भुज** है।



चित्र–5

प्राप्त चतुर्भुजों की सारणी

चित्र	नाम	विवरण
	वर्ग	चारों भुजाएँ बराबर, चारों कोण बराबर यानी 90°
	आयत	आमने-सामने की भुजाएँ बराबर तथा समांतर। चारों कोण बराबर यानी 90°
	समचतुर्भुज	चारों भुजाएँ बराबर, आमने-सामने की भुजाएँ समांतर तथा सम्मुख कोण बराबर।

	समांतर चतुर्भुज	आमने-सामने की भुजाएँ बराबर तथा समांतर। आमने-सामने के कोण अर्थात् सम्मुख कोण बराबर।
	समलंब चतुर्भुज	आमने-सामने की भुजाओं के जोड़े में एक जोड़ा समांतर।

कुछ करें

सही कथन के लिए (✓) तथा गलत कथन के लिए x का चिह्न लगाएँ। गलत को सही करके लिखें।

(क) आयत के चारों कोण बराबर होते हैं।

(ख) समचतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज है।

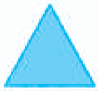
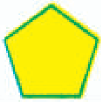
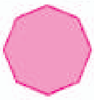
(ग) समांतर चतुर्भुज की चारों भुजाएँ बराबर होती हैं।

(घ) सभी आयत एक समांतर चतुर्भुज है।

(ङ) समलंब चतुर्भुज में आमने-सामने की भुजाएँ समांतर होती हैं।

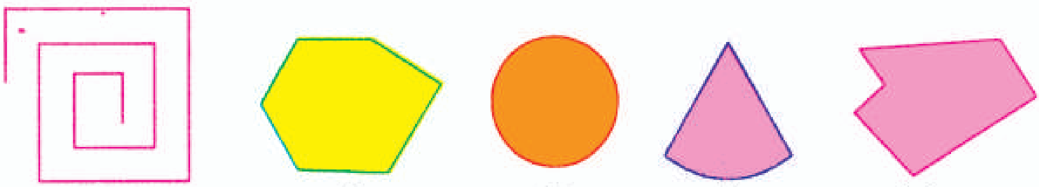
6.9 बहुभुज

ऊपर के चित्रों को ध्यान से देखिए। ये सभी बंद आकृतियाँ हैं तथा रेखाखंडों से बनी हैं। ऐसी आकृतियाँ बहुभुज कहलाती हैं। बहुभुजों को उनकी [illegible]

चित्र	भुजाओं की संख्या
	त्रिभुज
	चतुर्भुज
	पंचभुज
	षड्भुज
	अष्टभुज

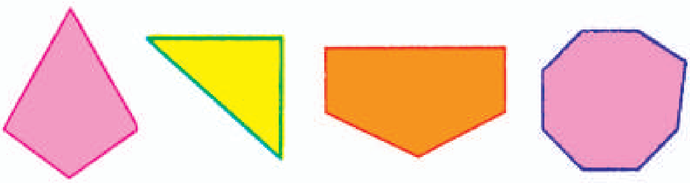
कुछ करें

1. प्रकृति से बहुभुज के पाँच उदाहरण ढूंढकर लिखें।
2. नीचे दी गई आकृतियों में से बहुभुज आकृतियों को छाँटें–

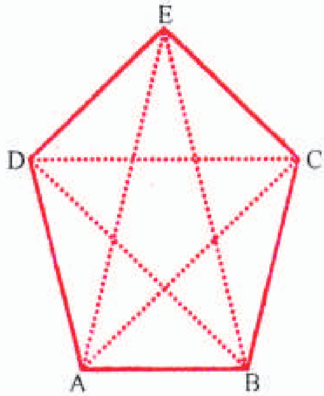


(a) (b) (c) (d) (e)

3. नीचे दिए गए बहुभुज का नामकरण करें–



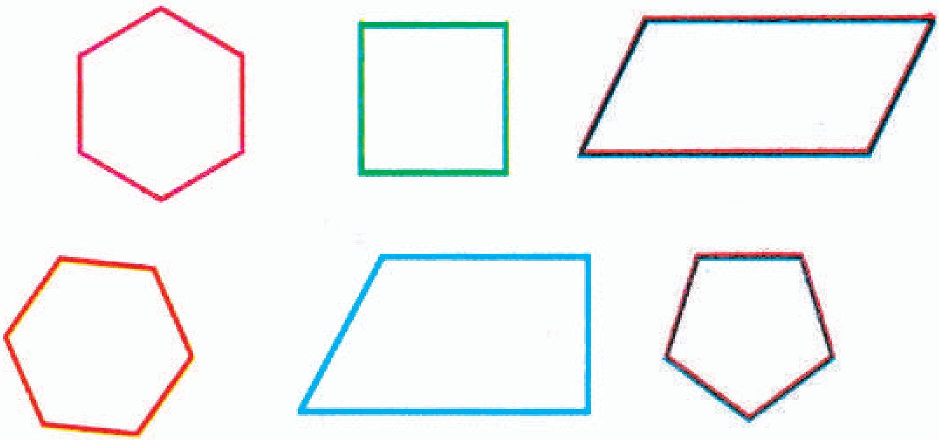
6.9.1 बहुभुज के विकर्ण



दी गई आकृति को देखिए। यह एक पंचभुज है। इस पंचभुज के शीर्ष A, B, C, D तथा E हैं। इसमें शीर्ष A तथा शीर्ष B आसन्न शीर्ष हैं क्योंकि यह शीर्ष एक ही भुजा AB के अन्त बिन्दु हैं। कोई दो शीर्ष लीजिए जो आसन्न नहीं हैं। ऐसे शीर्षों को मिलाने से बने रेखाखंड **बहुभुज के विकर्ण** (Diagonals) कहलाते हैं। पंचभुज में रेखाखंड $\overline{AC}$, $\overline{AE}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$ और $\overline{DC}$ बहुभुज के विकर्ण हैं।

कुछ करें

1. **निम्नलिखित बहुभुज आकृतियों में विकर्ण को खींचिए तथा विकर्ण को नामांकित कीजिए–**



अध्याय-7 भिन्न

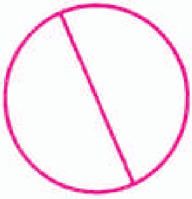
भूमिका

सोनू, सकीला, रेशमा और सुग्रीव चारों खाना खा रहे थे। टिफिन खोलने पर उसमें कुल 10 पूड़ियाँ निकलीं। अब इन चारों के बीच 10 पूड़ियों को बराबर-बराबर कैसे बाँटा जाए।

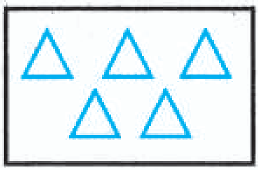
इसके लिए रेशमा ने पहले सबको दो-दो पूड़ियाँ दीं। अब शेष बची दो पूड़ियों को बाँटना था। उसने दोनों पूड़ियों को आधे-आधे हिस्से में बाँटकर चार टुकड़े बनाए। हर एक को एक हिस्सा दे दिया। इस प्रकार सभी को दो पूरी और एक आधी पूड़ी मिली।

स्वयं करके देखिए

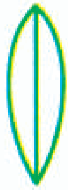
निम्न आकृतियों के नीचे लिखी गई संख्या के अनुसार उपयुक्त भाग को पेंसिल से छायांकित कीजिए–



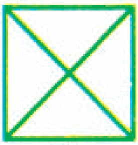
$\frac{1}{2}$ भाग



$\frac{3}{5}$ भाग

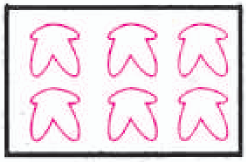


$\frac{1}{2}$ भाग

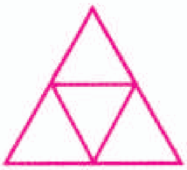


$\frac{1}{4}$ भाग

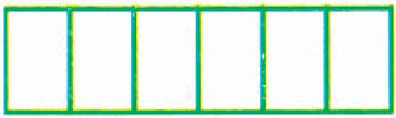
$\frac{1}{3}$ भाग



$\frac{5}{6}$ भाग



$\frac{3}{4}$ भाग



$\frac{2}{6}$ भाग

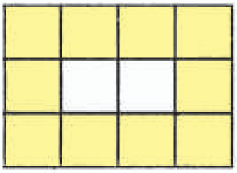
7.2 भिन्न

एक सम (उचित) भिन्न का अर्थ है किसी एक समूह का अथवा एक क्षेत्र (Region) अथवा वस्तु का हिस्सा। $\frac{5}{8}$ एक सम (उचित) भिन्न है। हम इसे पाँच बटे आठ अथवा पाँच-अठांश (Five-eigth) पढ़ते हैं। इस भिन्न $\frac{5}{8}$ में किसी एक पूर्ण को 8 बराबर भागों में बाँटा गया है और उसमें से "5" भाग ले लिए गए हैं। यहाँ 5 अंश (Numerator) और 8 हर (Denominator) कहलाता है।

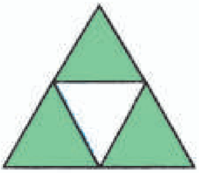
भिन्न $\frac{4}{9}$ का अंश और हर बताइए। यह भी बताइए कि वस्तु कितने बराबर भागों में बाँटी

प्रश्नावली – 7.1

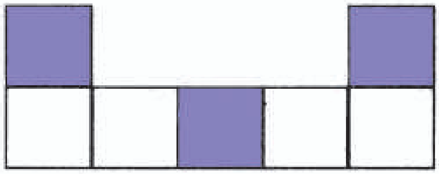
1. छायांकित भाग को निरूपित करने वाली भिन्न लिखिए–



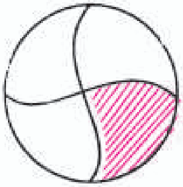
(i)



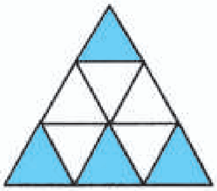
(ii)



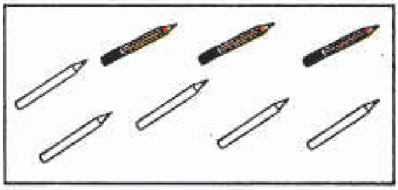
(iii)



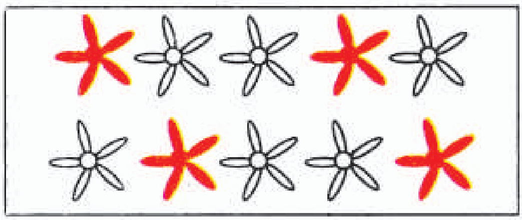
(iv)



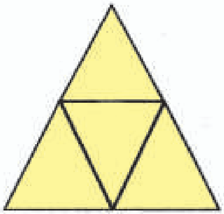
(v)



(vi)

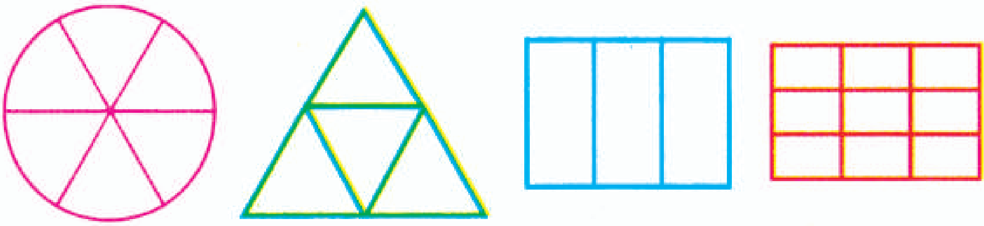


(vii)

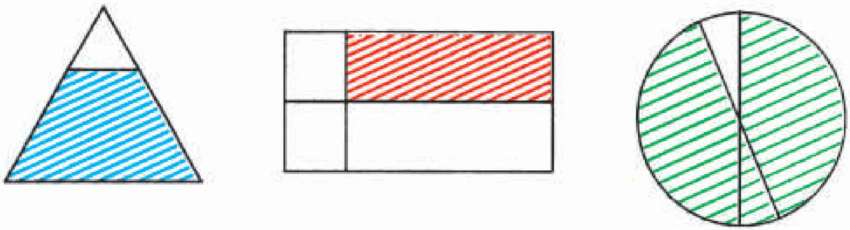


(viii)

2. दी गई भिन्न के अनुसार, भागों को छायांकित कीजिए–

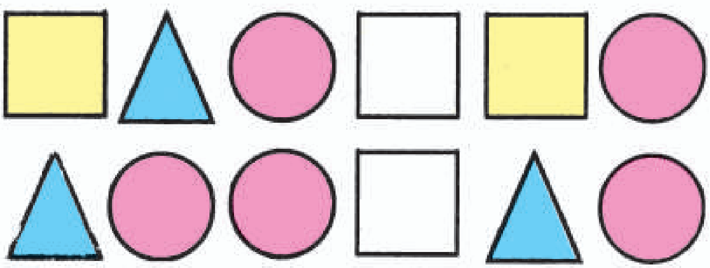


3. **नीचे कुछ आकृतियाँ बनी हुई हैं। क्या आकृतियों के नीचे लिखी भिन्न संख्याएँ, आकृतियों के रँगे हुए हिस्से को दर्शा रही हैं? क्यों या क्यों नहीं?**



$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$

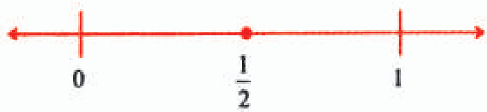
4. 6 घंटे एक दिन का कौन-सा हिस्सा है?
5. 2 दिन, एक सप्ताह का कौन-सा हिस्सा है?
6. सोनू, सलमा और आर्या मिलकर दो सैंडविच खरीदते हैं– एक सब्जी वाला और दूसरा जैम (Jam) वाला।
   (a) तीनों उन्हें किस प्रकार बाँटें कि प्रत्येक को बराबर मिले?
   (b) प्रत्येक को एक सैंडविच का कौन-सा भाग मिलेगा?
7. विवेक को 12 प्रश्न हल करने थे। उसने अब तक 8 प्रश्न हल कर लिए। उसने प्रश्नों का कितना भाग कर लिया है?
8. 5 से 15 तक की प्राकृत संख्याएँ लिखिए। इनमें कुल कितनी अभाज्य संख्याएँ हैं? यह 5 से 15 तक कुल संख्याओं का कौन-सा हिस्सा है?
9. **नीचे बनी आकृतियों में गोल, चौकोर और तिकोन कुल आकृतियों के कौन-कौन से भाग (भिन्न) को दर्शाते हैं?**



7.3 संख्या रेखा पर भिन्न

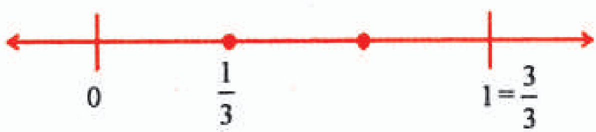
आप किसी संख्या रेखा पर पूर्ण संख्याओं 0, 1, 2, 3, 4, 5 .... को दर्शाना जानते हैं। अब हम भिन्नों को संख्या रेखा पर दर्शाना सीखते हैं।

हम जानते हैं कि $\frac{1}{2}$, ऐसी संख्या है जो 0 से बड़ी और 1 से छोटी है। इसलिए यह 0 से 1 के बीच में ही होगी। इसलिए हम 0 और 1 के बीच की दूरी को दो बराबर भागों में विभाजित करते हैं और एक भाग से $\frac{1}{2}$ को दर्शाते हैं। (चित्र–1)



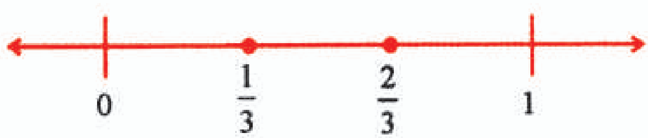
चित्र–1

इसी प्रकार $\frac{1}{3}$ को दर्शाने के लिए हम 0 और 1 के बीच की दूरी को 3 बराबर भागों में विभाजित करते हैं और एक भाग से $\frac{1}{3}$ को दर्शाते हैं। (चित्र–2)



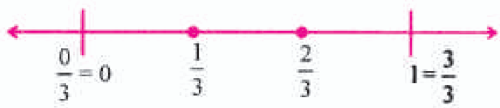
चित्र–2

क्या हम इस संख्या रेखा पर $\frac{2}{3}$ को दर्शा सकते हैं? $\frac{2}{3}$ का अर्थ है 3 बराबर भागों में से 2 भाग।



चित्र–3

इसी प्रकार $\frac{0}{3}$ को कहाँ दिखाएँ? यहाँ कोई हिस्सा नहीं लिया गया है। अतः इसे संख्या रेखा पर बिन्दु 0 से दर्शाया जा सकता है। $\frac{3}{3}$ एक पूर्ण है, इसलिए इसे संख्या रेखा पर बिंदु 1 से दर्शाया जा सकता है।



चित्र–4

स्वयं करके देखिए

1. संख्या रेखा पर $\frac{1}{12}, \frac{0}{12}, \frac{6}{12}$ और $\frac{12}{12}$ को दर्शाइए।
2. क्या आप संख्या रेखा पर 0 और 1 के बीच किसी अन्य संख्या को दर्शा सकते हैं? ऐसी पाँच भिन्न संख्याएँ संख्या रेखा पर दर्शाइए।
3. 0 और 1 के बीच कितनी भिन्न है?

7.4 सम भिन्न (Proper fraction)

आप अलग-अलग संख्या रेखाओं पर $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{9}{10}, \frac{0}{3}, \frac{5}{8}$ दर्शाइए। क्या इनमें से कोई भी भिन्न 1 के दाईं ओर है? नहीं ये सभी भिन्न 1 के बाईं ओर स्थित हैं, क्योंकि ये 1 से छोटी हैं। जो भिन्न संख्या एक पूर्ण (Whole) के भाग को निरूपित करती है, सम भिन्न (Proper fraction) कहलाती है। एक सम भिन्न में अंश सदैव हर से छोटा होता है।

स्वयं करके देखिए

1. संकेत '>', '<' या '=' का प्रयोग करके, रिक्त स्थानों को भरिए–

(a)	$\frac{4}{4}\square 1$	(b)	$\frac{1}{2}\square 1$	(c)	$1\square\frac{7}{8}$
(d)	$\frac{3}{5}\square 1$	(e)	$\frac{0}{6}\square 0$	(f)	$\frac{101}{101}\square 1$

2. एक भिन्न को देखकर आप कैसे बता सकते हैं कि यह भिन्न–

(a) 1 से छोटी है? (b) 1 के बराबर है?

3. एक सम भिन्न लीजिए, जिसके अंश और हर का योग 10 हो, जैसे– $\frac{3}{7}$ । आप इस प्रकार की कितनी और सम भिन्न बना सकते हैं?

7.5 विषम भिन्न और मिश्रित भिन्न (संख्याएँ)

मोनू के पास पाँच सेब हैं जिसे वह अपने दोस्तों के साथ बराबर-बराबर बाँटकर खाना चाहता है। वे चारों आपस में पाँच सेबों को किस प्रकार बाँट सकते हैं?

रमीला : हम सभी एक-एक पूरा सेब और पाँचवें सेब का एक-चौथाई ले सकते हैं।

मोनू श्यामू रमीला रागिनी

रागिनी- परन्तु हम प्रत्येक सेब को चार बराबर भागों में भी बाँट सकते हैं और प्रत्येक सेब का एक-चौथाई ले सकते हैं।

मोनू श्यामू रमीला रागिनी

नोनू– दोनों तरीकों से प्रत्येक को बराबर भाग ही मिलेगा और वह है, 5 चतुर्थांश (quarters) अथवा पाँच बटे 4 । चूँकि 4 चतुर्थांशों से एक पूर्ण बनता है, इसलिए हम चार भागों को जोड़कर एक पूरा सेब बना लेते हैं। एक भाग और रह जाएगा यानी कह सकते हैं कि हममें से प्रत्येक को एक पूर्ण और एक चतुर्थांश (चौथाई) मिलेगा। इसे हम $\frac{5}{4}$ लिख सकते हैं। $\frac{5}{4}$ में अंश, हर से बड़ा है।

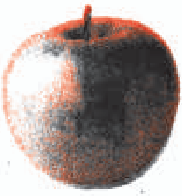
वे भिन्न जिनमें अंश हर से बड़ा होता है **विषम भिन्न (Improper fraction)** कहलाते हैं।

इसी प्रकार $\frac{3}{2}, \frac{12}{5}, \frac{16}{7}$ प्रत्येक विषम भिन्न हैं।

हर 5 वाली पाँच विषम भिन्न लिखिए।

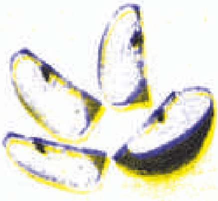
नोनू– इस भाग को लिखने की कोई अन्य विधि क्या है?

श्यामू – रमीला की विधि में प्रत्येक साथी का हिस्सा (भाग) एक पूर्ण और एक चौथाई मिल कर बना है।



यह 1 है

(एक)



इनमें से प्रत्येक $\frac{1}{4}$

(एक चौथाई)

हमने रँगा भाग लिया है जो कि $1 + \frac{1}{4}$ है, जिसे $1\frac{1}{4}$ भी लिखा जाता है। $1\frac{1}{4}$ जैसी भिन्न **मिश्रित भिन्न (Mixed fraction)** कहलाती है। एक मिश्रित भिन्न में एक भाग पूर्ण होता है और एक भाग भिन्न होता है।

आपको मिश्रित संख्याएँ अपने आस-पास कहाँ-कहाँ मिलती हैं? कुछ उदाहरण दीजिए।

7.5.1 विषम भिन्न को मिश्रित भिन्न (संख्या) में व्यक्त करना

इसके लिए हम अंश को हर से भाग देकर भागफल और शेषफल प्राप्त करते हैं, फिर संख्या को भागफल$\frac{\text{शेषफल}}{\text{भाजक}}$ के रूप में लिखते हैं। यही विषम भिन्न का मिश्रित संख्या (भिन्न) रूप है।

उदाहरण–1 : निम्न को मिश्रित संख्याओं के रूप में व्यक्त कीजिए–

(a) $\frac{17}{4}$ (b) $\frac{11}{3}$ (c) $\frac{27}{5}$ (d) $\frac{7}{3}$

हल : (a) $\frac{17}{4}$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 4\overline{)17} \\ \underline{16} \\ \underline{01} \end{array}$$

अर्थात् इसमें 4 पूर्ण और $\frac{1}{4}$ अधिक है। यानी यह $4\frac{1}{4}$

(b) $\frac{11}{3}$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 3\overline{)11} \\ \underline{9} \\ \underline{2} \end{array}$$

अर्थात् 3 पूर्ण और $\frac{2}{3}$ अधिक या $3\frac{2}{3}$

प्रश्न (c) और (d) को आप स्वयं हल करें।

7.5.2 मिश्रित भिन्न को विषम भिन्न में बदलना

अब हमें उलटा करना है। यानी यह पता करना है कि पूर्णों से कितने बराबर भाग बनेंगे।

(a) जैसे $2\frac{3}{4}$ में दो पूर्ण हैं और $\frac{3}{4}$ और है। यानी $2+\frac{3}{4}$ है।

यह हुआ $\frac{(2\times4)+3}{4}=\frac{11}{4}$

(b) $7\frac{1}{9}=\frac{(7\times9)+1}{9}=\frac{64}{4}$

(c) $5\frac{3}{7}=\frac{(5\times7)+3}{7}=\frac{38}{7}$

प्रश्नावली – 7.2

1. संख्या रेखाएँ खींचिए और उन पर निम्नलिखित को बिंदु रूप में दर्शाइए–

(a) $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{4}{4}$ (b) $\frac{1}{8},\frac{2}{8},\frac{3}{8},\frac{7}{8}$ (c) $\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{8}{5},\frac{4}{5}$

2. निम्नलिखित को मिश्रित भिन्न के रूप में व्यक्त कीजिए–

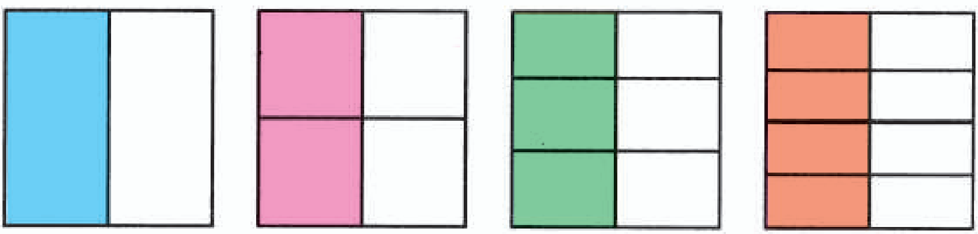
(a) $\frac{20}{3}$ (b) $\frac{11}{5}$ (c) $\frac{17}{7}$ (d) $\frac{19}{6}$ (e) $\frac{35}{9}$

3. निम्नलिखित को विषम भिन्नों के रूप में व्यक्त कीजिए–

(a) $7\frac{3}{4}$ (b) $5\frac{6}{7}$ (c) $2\frac{5}{7}$ (d) $10\frac{3}{5}$ (e) $9\frac{3}{7}$

7.6 तुल्य भिन्न (Equivalent fractions)

नीचे $\frac{1}{2},\frac{2}{4},\frac{3}{6},\frac{6}{12}$ का चित्रात्मक निरूपण किया गया है।



अगर हम इन चित्रों को एक दूसरे पर रखें, तो रँगे भाग बराबर (तुल्य) होंगे। क्या आप यह देख पा रहे हैं? यहाँ $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}$ सभी तुल्य भिन्न हैं। ये एक पूर्ण के समान भाग निरूपित करती हैं। ऐसी भिन्न **तुल्य भिन्न** कहलाती है।

तुल्य भिन्न एक पूर्ण का समान (तुल्य) भाग क्यों निरूपित करती है? सोचिए।

हम देखते हैं कि $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2}$ है।

इसी प्रकार $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3}$

तथा $\frac{1}{2} = \frac{4}{8} = \frac{1 \times 4}{2 \times 4}$

स्पष्ट है **किसी भिन्न की तुल्य भिन्न ज्ञात करने के लिए, आप उसके अंश और हर को एक समान शून्येतर संख्या (शून्य को छोड़कर) जैसे– 1, 2 .... से गुणा कर सकते हैं।**

$\frac{1}{3}$ की समतुल्य भिन्न है : $\frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2}{6}$ है। और समतुल्य भिन्न हैं $\frac{3}{9}, \frac{4}{12}$

क्या आप इससे सहमत हैं? कारण सहित स्पष्ट कीजिए।

स्वयं करके देखिए

1. प्रत्येक की पाँच तुल्य भिन्न ज्ञात कीजिए–

(i) $\frac{2}{5}$ (ii) $\frac{4}{9}$

उदाहरण–2 : $\frac{2}{5}$ के तुल्य ऐसे भिन्न ज्ञात कीजिए जिसका अंश 6 है।

हल : हम जानते हैं कि 2 x 3 = 6 है। अर्थात् हमें दी हुई भिन्न के अंश और हर को 3 से गुणा करना होगा।

इस प्रकार $\frac{2}{5} = \frac{2 \times 3}{5 \times 3} = \frac{6}{15}$

अतः वांछित तुल्य भिन्न $\frac{6}{15}$ है।

उदाहरण–3 : $\frac{15}{35}$ की तुल्य भिन्न ज्ञात कीजिए जिसका हर 7 हो

हल : हमारी संख्या $\frac{15}{35} = \frac{\square}{7}$

हरों को देखने से स्पष्ट है कि 35 ÷ 5 = 7 है। अतः $\frac{15}{35}$ के अंश और हर को 5 से भाग देंगे तो हमें प्राप्त होगा $\frac{15}{35} = \frac{15 \div 5}{35 \div 5} = \frac{3}{7}$

रोचक तथ्य

सारणी को पूरा करें और तथ्य ढूँढ़ें–

तुल्य भिन्न	पहली के अंश और दूसरी के हर का गुणनफल	दूसरी के अंश और पहली के हर का गुणनफल	क्या गुणनफल समान हैं?
$\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$	1 x 9 = 9	3 x 3 = 9	हाँ
$\frac{1}{4} = \frac{4}{16}$			
$\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$			
$\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$			

तुल्य भिन्नों के युग्मों में पहली के अंश और दूसरी के हर का गुणनफल दूसरी के अंश और पहली के हर के गुणनफल बराबर होते हैं। ये दोनों गुणनफल **कैंची गुणनफल (Cross products)** कहलाते हैं।

क्या आप इस नियम से तुल्य भिन्नों के छूटे अंश/हर ज्ञात कर सकते हैं?

उदाहरण–4 : $\frac{2}{9}$ के तुल्य वह भिन्न ज्ञात कीजिए जिसका हर 63 है।

हल : हमें प्राप्त है : $\frac{2}{9}=\frac{\square}{63}$

इसके लिए, $9 \times \square = 2 \times 63$ होगा

$= 2 \times 9 \times 7 = 14 \times 9$

तुलना करने पर $\square = 14$ अतः $\frac{2}{9}=\frac{14}{63}$ है।

7.6.1 भिन्न का सरलतम रूप (Simplest form)

एक भिन्न $\frac{12}{18}$ लें। इसके तुल्य एक ऐसी भिन्न प्राप्त करने का प्रयत्न करें जिसके अंश और हर में 1 के अतिरिक्त कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड न हो।

$\frac{12}{18}=\frac{12 \div 2}{18 \div 2}=\frac{6}{9}$ क्योंकि 12 और 18 दोनों 2 से विभाज्य हैं। परन्तु 6 और 9 में भी 1 के अतिरिक्त अन्य उभयनिष्ठ गुणनखंड हैं।

अतः $\frac{6}{9}=\frac{6 \div 3}{9 \div 3}=\frac{2}{3}$

इस प्रकार $\frac{2}{3}$ वांछित भिन्न है, क्योंकि 2 और 3 में 1 के अतिरिक्त कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।

इस प्रकार, **जब एक भिन्न के अंश और हर में 1 के अतिरिक्त कोई अन्य उभयनिष्ठ गुणनखण्ड न हो, तो वह सरलतम रूप (Simplest form) या न्यूनतम रूप (Lowest form) कहा जाता है।**

सबसे छोटा रास्ता

उदाहरण : भिन्न $\frac{18}{12}$ लें। 18 और 12 दोनों 6 के गुणक हैं।

अतः $\frac{18 \div 6}{12 \div 6} = \frac{3}{2}$

क्या आप ऐसी दो और समतुल्य भिन्न ज्ञात कर सकते हैं?

मजे की बात

नीचे की तुल्य भिन्नों में अंक 1 से 9 तक एक बार प्रयोग किए गए हैं।

$$\frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{58}{174}$$

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{79}{158}$$

स्वयं करके देखिए

1. निम्न भिन्नों को सरलतम रूप में लिखिए–

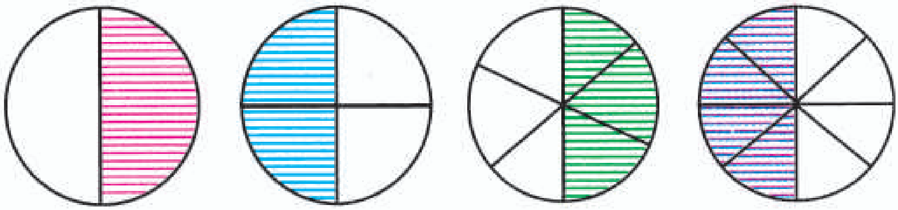
(i) $\frac{36}{54}$ (ii) $\frac{36}{24}$ (iii) $\frac{17}{51}$

2. क्या $\frac{49}{64}$ अपने सरलतम रूप में है?

प्रश्नावली – 7.3

1. प्रत्येक चित्र में छायांकित भागों के लिए भिन्न लिखिए। क्या ये सभी तुल्य भिन्न हैं? क्यों?

(a)



(b)