

Code No. 7018

For Scheme-I Candidates only

Second Year – March 2015

Time : 2½ Hours
Cool-off time : 15 Minutes

Part – III

MATHEMATICS (SCIENCE)

Maximum : 80 Scores

General Instructions to Candidates :

- There is a ‘cool-off time’ of 15 minutes in addition to the writing time of 2½ hrs.
- You are not allowed to write your answers nor to discuss anything with others during the ‘cool-off time’.
- Use the ‘cool-off time’ to get familiar with questions and to plan your answers.
- Read questions carefully before answering.
- All questions are compulsory and only internal choice is allowed.
- When you select a question, all the sub-questions must be answered from the same question itself.
- Calculations, figures and graphs should be shown in the answer sheet itself.
- Malayalam version of the questions is also provided.
- Give equations wherever necessary.
- Electronic devices except non-programmable calculators are not allowed in the Examination Hall.

നിർദ്ദേശങ്ങൾ :

- നിർദ്ദിഷ്ട സമയത്തിന് പുറമെ 15 മിനിറ്റ് ‘കൂൾ ഓഫ് ടെസ്റ്റ്’ ഉണ്ടായിരിക്കും. ഈ സമയത്ത് ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം എഴുതാനോ, മറ്റൊളവരുമായി ആശയവിനിമയം നടത്താനോ പാടില്ല.
- ഉത്തരങ്ങൾ എഴുതുന്നതിന് മുമ്പ് ചോദ്യങ്ങൾ ശ്രദ്ധാപൂർവ്വം വായിക്കണം.
- എല്ലാ ചോദ്യങ്ങൾക്കും ഉത്തരം എഴുതണം.
- ഒരു ചോദ്യനും ഉത്തരമെഴുതാൻ തെരഞ്ഞെടുത്തു കഴിഞ്ഞാൽ ഉപചോദ്യങ്ങളും അതേ ചോദ്യനും നിന്ന് തന്നെ തെരഞ്ഞെടുക്കേണ്ടതാണ്.
- കണക്ക് കുടലുകൾ, ചിത്രങ്ങൾ, ശ്രാവനകൾ എന്നിവ ഉത്തരപേപ്പിൽ തന്നെ ഉണ്ടായിരിക്കണം.
- ചോദ്യങ്ങൾ മലയാളത്തിലും നൽകിയിട്ടുണ്ട്.
- ആവശ്യമുള്ള സമലാത് സമവാക്യങ്ങൾ കൊടുക്കണം.
- പ്രോഗ്രാമുകൾ ചെയ്യാനാകാത്ത കാൽക്കൗലറ്ററുകൾ ഒഴികെയുള്ള ഒരു ഇലക്ട്രോണിക് ഉപകരണവും പരീക്ഷാഹാളിൽ ഉപയോഗിക്കുവാൻ പാടില്ല.

1. (a) Choose the correct statement related to the matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (Score : 1)

- (i) $A^3 = A, B^3 \neq B$
- (ii) $A^3 \neq A, B^3 = B$
- (iii) $A^3 = A, B^3 = B$
- (iv) $A^3 \neq A, B^3 \neq B$

- (b) If $M = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, then verify the equation $M^2 - 10M + 11I_2 = 0$. (Scores : 2)

- (c) Inverse of the matrix $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (Scores : 3)

2. Prove that $\begin{vmatrix} 1 & x & x^3 \\ 1 & y & y^3 \\ 1 & z & z^3 \end{vmatrix} = (x+y+z)(x-y)(y-z)(z-x)$ (Scores : 3)

OR

- Prove that $\begin{vmatrix} 1! & 2! & 3! \\ 2! & 3! & 4! \\ 3! & 4! & 5! \end{vmatrix} = 4!$ (Scores : 3)

3. Solve the system of Linear equations

$$x + 2y + z = 8$$

$$2x + y - z = 1$$

$$x - y + z = 2$$

(Scores : 3)

4. (a) What is the minimum number of ordered pairs to form a non-zero reflexive relation on a set of n elements ? (Score : 1)

- (b) On the set \mathbb{R} of real numbers, S is a relation defined as

$$S = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x + y = xy\}.$$

Find $a \in \mathbb{R}$ such that 'a' is never the first element of an ordered pair in S . Also find $b \in \mathbb{R}$ such that 'b' is never the second element of an ordered pair in S . (Scores : 2)

- (c) Consider the function $f(x) = \frac{3x+4}{x-2}; x \neq 2$. Find a function $g(x)$ on a suitable domain such that $(gof)(x) = x = (fog)(x)$. (Scores : 2)

1. (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ എന്നീ മാട്രിക്സുകളെ സംഖ്യാഗണിച്ച് ശരിയായതു തെരഞ്ഞെടുക്കുക.
 (i) $A^3 = A$, $B^3 \neq B$ (ii) $A^3 \neq A$, $B^3 = B$
 (iii) $A^3 = A$, $B^3 = B$ (iv) $A^3 \neq A$, $B^3 \neq B$ (സ്കോർ : 1)
- (b) $M = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, മാട്രിക്സ് $M^2 - 10M + 11I_2 = 0$ എന്ന സമവാക്യം പാലിക്കുന്നുവെന്നു പരിശോധിക്കുക. (സ്കോർസ് : 2)
- (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ എന്ന മാട്രിക്സിൽ ഇൻവോർഡ് കാണുക. (സ്കോർസ് : 3)
2. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^3 \\ 1 & y & y^3 \\ 1 & z & z^3 \end{vmatrix} = (x+y+z)(x-y)(y-z)(z-x)$ എന്നു തെളിയിക്കുക. (സ്കോർസ് : 3)
- അലൈറ്റിൽ
- $\begin{vmatrix} 1! & 2! & 3! \\ 2! & 3! & 4! \\ 3! & 4! & 5! \end{vmatrix} = 4!$ എന്നു തെളിയിക്കുക. (സ്കോർസ് : 3)
3. $x + 2y + z = 8$
 $2x + y - z = 1$
 $x - y + z = 2$
 എന്നീ ലീനിയർ ഇക്കോഷ്ടനുകളുടെ സിസ്റ്റം നിർഖാരണം ചെയ്യുക. (സ്കോർസ് : 3)
4. (a) n അംഗങ്ങളുള്ള ഒരു ഗണത്തിൽ ശുന്നമല്ലാത്ത ഒരു റിഫ്ലക്സീവ് റിലോഷൻ നിർവ്വചിക്കാൻ ഏറ്റവും ചുരുങ്ങിയത് എത്ര ക്രമ ജോധികൾ വേണം? (സ്കോർ : 1)
- (b) \mathbb{R} എന്ന രേഖാഭാഗ സംവ്യൂകളുടെ ഗണത്തിൽ
 $S = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x + y = xy\}$
 എന്ന റിലോഷൻ നിർവ്വചിച്ചിട്ടുണ്ട്.
 എത്രയും ക്രമ ജോധിയിലും ഒന്നാമതെത്ത് അംഗമാവാൻ പറ്റാത്ത ഒരു $a \in \mathbb{R}$ കണ്ണെടുത്തുക. അതുപോലെ എത്രയും ക്രമ ജോധിയിലും രണ്ടാമതെത്ത് അംഗമാവാൻ പറ്റാത്ത ഒരു $b \in \mathbb{R}$ കണ്ണെടുത്തുക. (സ്കോർസ് : 2)
- (c) $f(x) = \frac{3x+4}{x-2}; x \neq 2$ എന്ന ഫംഗ്ഷൻ പരിഗണിക്കുക.
 $(gof)(x) = x = (fog)(x)$ ആവുന്ന വിധത്തിൽ അനുയോജ്യമായ ഒരു മണഡലത്തിൽ
 $g(x)$ എന്ന ഫംഗ്ഷൻ കണ്ണെടുത്തുക. (സ്കോർസ് : 2)

5. (a) What is the value of $\sin^{-1}(\sin 160^\circ)$?
 (i) 160°
 (ii) 70°
 (iii) -20°
 (iv) 20° (Score : 1)
- (b) Prove that $2 \tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{7} = \tan^{-1} \frac{31}{17}$ (Scores : 3)
6. (a) Find a and b if the function

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & -2 \leq x < 0 \\ a \cdot 2^x & 0 \leq x \leq 1 \\ b + x & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

 is a continuous function on $[-2, 2]$ (Scores : 3)
- (b) How many of the functions $f(x) = |x|$, $g(x) = |x|^2$ and $h(x) = |x|^3$ are not differentiable at $x = 0$?
 (i) 0
 (ii) 1
 (iii) 2
 (iv) 3 (Score : 1)
7. Find $\frac{dy}{dx}$ if
 (a) $x^3 + 2x^2y + 3xy^2 + 4y^3 = 5$ (Scores : 2)
 (b) $x = 2 \cos^3\theta$, $y = 2 \sin^3\theta$ (Scores : 2)
 (c) $y = \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$; $-1 \leq x \leq 1$ (Scores : 2)
8. (a) Which of the following functions is always increasing ?
 (i) $x + \sin 2x$
 (ii) $x - \sin 2x$
 (iii) $2x + \sin 3x$
 (iv) $2x - \sin x$ (Score : 1)
- (b) The radius of a cylinder increases at a rate of 1 cm/s and its height decreases at a rate of 1 cm/s. Find the rate of change of its volume when the radius is 5 cm and the height is 15 cm. (Scores : 2)
 If the volume should not change even when the radius and height are changed, what is the relation between the radius and height ? (Score : 1)
- (c) Write the equation of tangent at $(1, 1)$ on the curve $2x^2 + 3y^2 = 5$ (Scores : 2)

9. Integrate the following :

(a) $\frac{x-1}{x+1}$ (Score : 1)

(b) $\frac{\sin x}{\sin(x-a)}$ (Scores : 2)

(c) $\frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}$ (Scores : 3)

10. (a) What is the value of $\int_0^1 x(1-x)^9 dx$?

(i) $\frac{1}{10}$ (Score : 1)

(ii) $\frac{1}{11}$ (Scores : 2)

(iii) $\frac{1}{90}$ (Scores : 3)

(iv) $\frac{1}{110}$ (Score : 1)

(b) Find $\int_0^1 (2x+3) dx$ as the limit of a sum. (Scores : 3)

11. Consider the functions :

$$f(x) = |x| - 1 \text{ and } g(x) = 1 - |x|$$

(a) Sketch their graphs and shade the closed region between them. (Scores : 2)

(b) Find the area of their shaded region. (Scores : 2)

12. (a) Consider the family of all circles having their centre at the point (1, 2). Write the equation of the family. (Score : 1)

Write the corresponding differential equation. (Score : 1)

(b) Write the integrating factor of the differential equation

$$\cos x \frac{dy}{dx} + y = \sin x ; 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \quad (\text{Scores : 2})$$

9. പുവാട കൊടുത്തിട്ടുള്ളവ ഇൻഡഗ്രോ ചെയ്യുക :

(a) $\frac{x-1}{x+1}$

(സ്കോർ : 1)

(b) $\frac{\sin x}{\sin(x-a)}$

(സ്കോർസ് : 2)

(c) $\frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}$

(സ്കോർസ് : 3)

10. (a) $\int_0^1 x(1-x)^9 dx$ -നേരി വിലയെത്ര ?

(i) $\frac{1}{10}$

(ii) $\frac{1}{11}$

(iii) $\frac{1}{90}$

(iv) $\frac{1}{110}$

(സ്കോർ : 1)

(b) $\int_0^1 (2x+3) dx$ എന്നത് ഒരു തുകയുടെ ലിമിറ്റ് ആയി കണ്ടതുക. (സ്കോർസ് : 3)

11. $f(x) = |x| - 1$, $g(x) = 1 - |x|$ എന്നീ ഫംഗഷനുകൾ പരിഗണിക്കുക.

(a) ഇവയുട ശ്രാഹ്നകൾ വരച്ച് അവയ്ക്കിടയിലുള്ള ഭാഗം ഷേഡ് ചെയ്യുക.

(സ്കോർസ് : 2)

(b) ഷേഡ് ചെയ്ത ഭാഗത്തിനേരി പരപ്പളവ് (area) കാണുക.

(സ്കോർസ് : 2)

12. (a) (1, 2) എന്ന ബിന്ദു കേന്ദ്രമായി വരുന്ന വൃത്തങ്ങളുടെ ഫാമിലി പരിഗണിക്കുക.

ഈ ഫാമിലിയുടെ സമവാക്യം എഴുതുക. (സ്കോർ : 1)

ഈ സമവാക്യത്തിനുയോജ്യമായ ഡിഫറൻഷ്യൽ ഇക്കോഷണൽ എഴുതുക.

(സ്കോർ : 1)

(b) $\cos x \frac{dy}{dx} + y = \sin x$; $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ എന്ന ഡിഫറൻഷ്യൽ ഇക്കോഷണൽ ഇൻഡഗ്രോഡിങ്സ് ഫാക്റ്റർ കാണുക.

(സ്കോർസ് : 2)

13. (a) If \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} , \bar{d} respectively are the position vectors representing the vertices A, B, C, D of a parallelogram, then write \bar{d} in terms of \bar{a} , \bar{b} and \bar{c} . **(Score : 1)**
- (b) Find the projection vector of $\bar{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ along the vector $\bar{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$. **(Scores : 2)**
Also write \bar{b} as the sum of a vector along \bar{a} and a vector perpendicular to \bar{a} . **(Score : 1)**
- (c) Find the area of a parallelogram for which the vectors $2\hat{i} + \hat{j}$ and $3\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$ are adjacent sides. **(Scores : 2)**

OR

- (a) Write the magnitude of a vector \bar{a} in terms of dot product. **(Score : 1)**
- (b) If \bar{a} , \bar{b} and $\bar{a} + \bar{b}$ are unit vectors, then prove that the angle between \bar{a} and \bar{b} is $\frac{2\pi}{3}$. **(Scores : 2)**
- (c) If $2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ and $m\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ are perpendicular to each other, then find m. **(Score : 1)**
Also find the area of the rectangle having these two vectors as sides. **(Scores : 2)**

14. (a) Write the Cartesian equation of the straight line through the point (1, 2, 3) and along the vector $3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$. **(Score : 1)**
- (b) Write a general point on this straight line. **(Score : 1)**
- (c) Find the point of intersection of this straight line with the plane $2x + 3y - z + 2 = 0$. **(Scores : 2)**
- (d) Find the distance from (1, 2, 3) to the plane $2x + 3y - z + 2 = 0$. **(Score : 1)**

15. Consider the linear inequalities

$$2x + 3y \leq 6, 2x + y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0.$$

- (a) Mark the feasible region. **(Scores : 2)**
- (b) Maximise the function $z = 4x + 5y$ subject to the given constraints. **(Scores : 2)**

13. (a) $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ എന്നിവ ത്യാക്കുമെങ്കിൽ A, B, C, D-യുടെ ശീർഷങ്ങളുടെ പൊസിഷൻ വെക്ടറുകളാണെങ്കിൽ $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ എന്നിവ ഉപയോഗിച്ച് \bar{d} എഴുതുക. (സ്കോർ : 1)
- (b) $\bar{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ എന്ന വെക്ടറിന്റെ ഭിംഗിൽ $\bar{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ എന്ന വെക്ടറിന്റെ പ്രോജക്ഷൻ വെക്ടർ കാണുക. (സ്കോർസ് : 2)
- കൂടാതെ \bar{a} യുടെ ഭിംഗിലുള്ളതും \bar{a} യുടെ ലംബമായതുമായ രണ്ടു വെക്ടറുകളുടെ തുകയായി \bar{b} എഴുതുക. (സ്കോർ : 1)
- (c) $2\hat{i} + \hat{j}, 3\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$ എന്നീ വെക്ടറുകൾ സമീപ വശങ്ങളായി വരുന്ന ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ വിസ്തീരണം കാണുക. (സ്കോർസ് : 2)
- അല്ലെങ്കിൽ
- (a) \bar{a} എന്ന ഒരു വെക്ടറിന്റെ മാണിറ്റുഡ് ഡോട്ട് പ്രോഡക്റ്റ് ഉപയോഗിച്ച് എഴുതുക. (സ്കോർ : 1)
- (b) $\bar{a}, \bar{b}, \bar{a} + \bar{b}$ എന്നിവ യുണിറ്റ് വെക്ടറുകളാണെങ്കിൽ \bar{a}, \bar{b} എന്നിവയ്ക്കിടയിലെ കോൺ $\frac{2\pi}{3}$ ആണെന്നു തെളിയിക്കുക. (സ്കോർസ് : 2)
- (c) $2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}, m\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ എന്നിവ പരസ്പരം ലംബങ്ങളായാൽ m -ന്റെ വില കാണുക.
- (സ്കോർ : 1)
- ഈ രണ്ടു വെക്ടറുകൾ വശങ്ങളായ ചതുരത്തിന്റെ വിസ്തീരണം കാണുക.
- (സ്കോർസ് : 2)
14. (a) (1, 2, 3) എന്ന ബിന്ദുവിലുടെ കടന്നു പോകുന്നതും $3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ എന്ന വെക്ടറിന്റെ ഭിംഗിലുള്ളതുമായ രേഖയുടെ കാർണ്ണോഫ്രീഡ് ഇകോഷൻ എഴുതുക. (സ്കോർ : 1)
- (b) ഈ രേഖയിലെ ഒരു പൊതു ബിന്ദു എഴുതുക. (സ്കോർ : 1)
- (c) ഈ രേഖ $2x + 3y - z + 2 = 0$ എന്ന തലവുമായി സംഗമിക്കുന്ന ബിന്ദു കാണുക.
- (സ്കോർസ് : 2)
- (d) (1, 2, 3) എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നും $2x + 3y - z + 2 = 0$ എന്ന തലത്തിലേയ്ക്കുള്ള അകലം കാണുക. (സ്കോർ : 1)
15. $2x + 3y \leq 6, 2x + y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$ എന്നീ ഇനീക്കാളിറ്റികൾ പരിഗണിക്കുക.
- (a) ഇവയ്ക്കനുയോജ്യമായ ഫീസിബിൾ റീജിയൻ അടയാളപ്പെടുത്തുക.
- (സ്കോർസ് : 2)
- (b) തന്നിട്ടുള്ള നിബന്ധനകൾക്ക് വിധേയമായി $z = 4x + 5y$ എന്ന ഫംഗ്ഷൻ മാക്സിമേസ് ചെയ്യുക.
- (സ്കോർസ് : 2)

16. In a factory, there are two machines A and B producing toys. They respectively produce 60 and 80 units in one hour. A can run a maximum of 10 hours and B a maximum of 7 hours a day. The cost of their running per hour respectively amounts to 2,000 and 2,500 rupees. The total duration of working these machines cannot exceed 12 hours a day. If the total cost cannot exceed ₹ 25,000 per day and the total daily production is at least 800 units, then formulate the problem mathematically. (Scores : 2)

17. (a) For two independent events A and B, which of the following pair of events need not be independent?

- (i) A', B'
- (ii) A, B'
- (iii) A', B
- (iv) $A - B, B - A$

(Score : 1)

(b) If $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.7$ and $P(A \cup B) = 0.9$, then find $P\left(\frac{A}{B}\right)$ and $P\left(\frac{B}{A}\right)$. (Scores : 3)

18.

X =	1	2	3	4	5
$P(X =)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	p

The probability distribution of a random variable X taking values 1, 2, 3, 4, 5 is given

- (a) Find the value of P (Score : 1)
 - (b) Find the mean of X (Score : 1)
 - (c) Find the variance of X (Scores : 2)
-

18	X =	1	2	3	4	5
	P(X =)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	p

1, 2, 3, 4, 5 എന്നീ വിലക്കളുകുന്ന റാൻഡം വേരുബ്സ് X-ൽ പ്രോബസിലിറ്റി ഡിസ്ട്രിബ്യൂഷൻ പട്ടികയിൽ തന്നിട്ടുണ്ട്.

- (a) P-യുടെ വില കാണുക. (സ്കോർ : 1)
 (b) X-ൻ മീൻ കാണുക. (സ്കോർ : 1)
 (c) X-ൻ വേദനകൾ കാണുക. (സ്കോർ : 2)