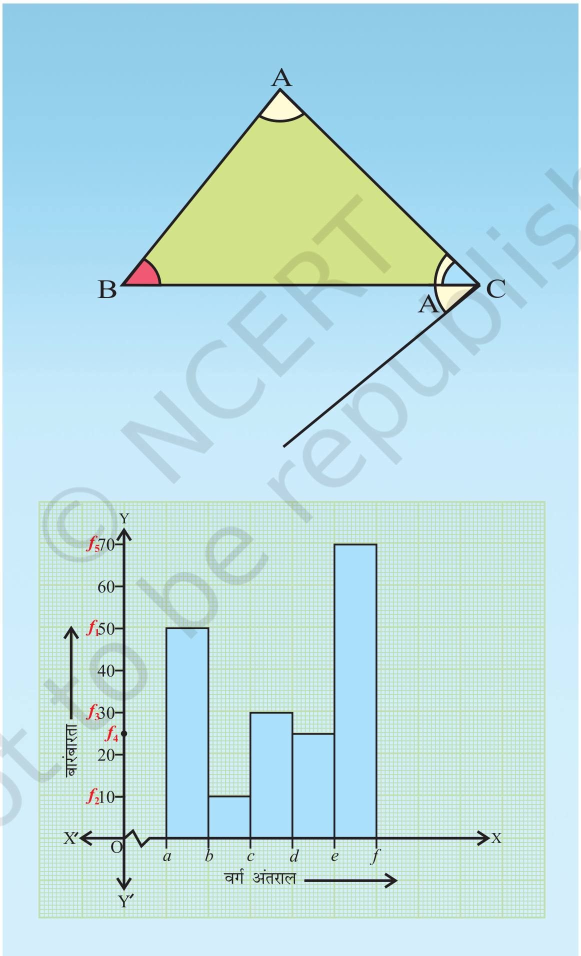
कक्षा 9 के लिए
क्रियाकलाप



Mathematics is one of the most important cultural components of every modern society. Its influence a other cultural element has been so fundamental and wide-spread as to warrant the statement that her "most modern" ways of life would hardly have been possibly without mathematics. Appeal to such obvious examples as electronics ratio, television, computing machines, and space travel. So substantiate this statement is unnecessary : the elementary art of calculating is evidence enough. Imagine trying to g et through three day without using numbers in some fashion or other!

– R.L. Wilder

क्रियाकलाप 1

उद्देश्य

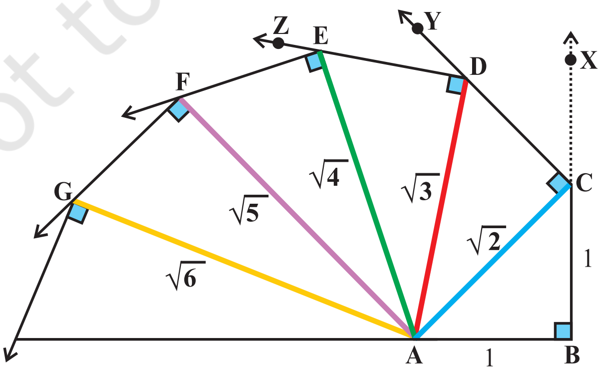
एक वर्गमूल सर्पिल बनाना

आवश्यक सामग्री

रंगीन धागे, चिपकाने वाला पदार्थ (गोंद), ड्राइंगपिन, कीलें, ज्यामिति बॉक्स, स्कैच पेन, मार्कर, प्लाईवुड का एक टुकड़ा।

रचना की विधि

1. एक 30 cm × 30 cm विमाओं वाला प्लाईवुड का टुकड़ा लीजिए।
2. 2 सेमी = 1 इकाई मानते हुए, एक इकाई लंबाई का एक रेखाखंड AB खींचिए।
3. सेट स्क्वायर (या परकार) का प्रयोग करते हुए, AB पर लंब BX खींचिए।
4. BX से, BC=1 इकाई काटिए तथा AC को मिलाइए।
5. AC की लंबाई के बराबर एक नीले धागे और गोंद का प्रयोग करते हुए, इस धागे को AC के अनुदिश चिपकाइए ।
6. AC को आधार मानकर और सेट स्क्वायर (या परकार) का प्रयोग करते हुए, AC पर लंब CY खींचिए।
7. CY में से CD=1 इकाई काट लीजिए तथा AD को मिलाइए।



आकृति 1

8. AD की लंबाई के बराबर एक नारंगी धागे और गोंद का प्रयोग करते हुए, इस धागे को AD के अनुदिश चिपकाइए।

9. AD को आधार लेकर तथा सेट-स्क्वायर (या परकार) का प्रयोग करते हुए, AD पर DZ लंब खींचिए।

10. DZ में से DE=1 इकाई काटिए तथा AE को मिलाइए।

11. AE की लंबाई के बराबर एक हरे रंग के धागे को गोंद की सहायता से AE के अनुदिश चिपकाइए (देखिए आकृति 1)। इसी प्रक्रिया को पर्याप्त संख्या में बार-बार दोहराइए। यह एक वर्गमूल सर्पिल कहलाता है।

प्रदर्शन

1. आकृति से, $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ अर्थात $AC = \sqrt{2}$ है।

   $AD^2 = AC^2 + CD^2 = 2 + 1 = 3$ अर्थात् $AD = \sqrt{3}$ है।

2. इसी प्रकार, हम अन्य लंबाइयाँ AE, AF, AG, ... क्रमशः $\sqrt{4}$ या 2, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$,... के रूप में प्राप्त करते हैं।

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा-

AC = ..., AD = ..., AE = ..., AF = , AG = ...

$\sqrt{2}$ = AC = ... (लगभग)

$\sqrt{3}$ = AD = ... (लगभग)

$\sqrt{4}$ = AE = ... (लगभग)

$\sqrt{5}$ = AF = ... (लगभग)

अनुप्रयोग

इस क्रियाकलाप के माध्यम से, हम अपरिमेय संख्याओं के अस्तित्व को स्पष्ट कर सकते हैं।

क्रियाकलाप 2

उद्देश्य

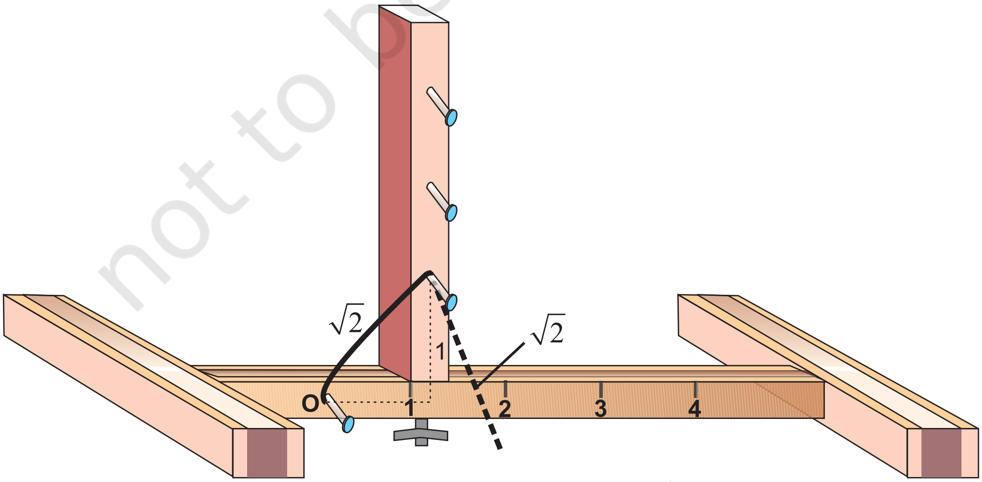
संख्या रेखा पर कुछ अपरिमेय संख्याओं को निरूपित करना।

आवश्यक सामग्री

लकड़ी की दो घनाभाकार पट्टियाँ, धागे, कीलें, हथौड़ा, एक पैमाने (स्केल) की दो फोटो प्रतिलिपियाँ, ढिबरी सहित पेंच, गोंद, कटर।

रचना की विधि

1. लकड़ी की पट्टियों में से एक की ऊपरी सतह पर एक सीधी झिरी बनाइए। इसी पट्टी के लंबवत झिरी पर, दूसरी लकड़ी की पट्टी को इसकी निचली सतह पर एक पेंच की सहायता से लगाइए ताकि वह झिरी के अनुदिश स्वतंत्र रूप से चलायमान रह सके (देखिए आकृति 1)।
2. इन दोनों पट्टियों में से प्रत्येक पर स्केल की एक फोटो प्रतिलिपि चिपकाइए, जैसा कि आकृति 1 में दर्शाया गया है।
3. दोनों पट्टियों पर, O से प्रारंभ करते हुए, एक-एक इकाई की दूरी पर आकृति में दर्शाए अनुसार कीलें लगाइए।
4. क्षैतिज पट्टी पर O पर लगी कील पर एक धागा बाँधिए।



आकृति 1

14/04/18

प्रदर्शन

1. क्षैतिज स्केल पर '1' इकाई लीजिए तथा निचली सतह पर एक पेंच की सहायता से 1 पर लांबिक लकड़ी की पट्टी लगाइए।
2. धागे के दूसरे सिरे को लांबिक पट्टी पर इकाई '1' से बाँधिए।
3. लांबिक पट्टी पर इकाई '1' से धागे को हटाइए तथा उसे क्षैतिज पट्टी पर रखिए, ताकि वह क्षैतिज पट्टी पर बिंदु P, $\sqrt{2}$ को निरूपित करे (देखिए आकृति 1)।

   इसी प्रकार, $\sqrt{3}$ को निरूपित करने के लिए, लांबिक लकड़ी की पट्टी को $\sqrt{2}$ पर लगाइए तथा ऊपर वाली प्रक्रिया को दोहराइए। $\sqrt{a}$, $a > 1$ को निरूपित करने के लिए, लांबिक स्केल (पट्टी) को $\sqrt{a-1}$ पर लगाइए तथा ऊपर की भाँति $\sqrt{a}$ प्राप्त करने के लिए आगे की प्रक्रिया कीजिए।

प्रेक्षण

$a - 1 =$ .... $\sqrt{a} =$ ....

अनुप्रयोग

यह क्रियाकलाप कुछ अपरिमेय संख्याओं, जैसे कि $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}$, ... को संख्या रेखा पर निरूपित करने में सहायता कर सकता है।

टिप्पणी

आप लांबिक पट्टी को क्षैतिज पट्टी पर 3 पर रखकर तथा धागे के दूसरे सिरे को ऊर्ध्वाधर पट्टी पर 2 से बाँध कर भी $\sqrt{13}$ को ज्ञात कर सकते हैं। ऐसा कुछ इस प्रकार की अन्य संख्याओं के लिए भी किया जा सकता है

क्रियाकलाप 3

उद्देश्य

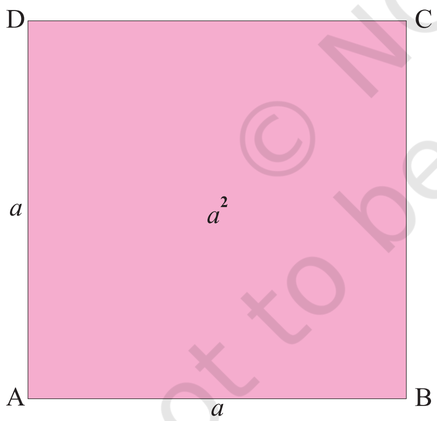
बीजीय सर्वसमिका
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
को सत्यापित करना।

आवश्यक सामग्री

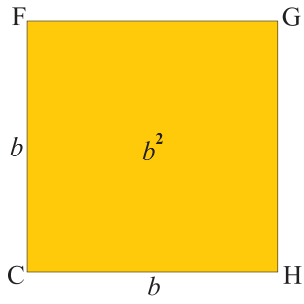
ड्रॉइंग शीट, कार्ड बोर्ड, सेलोटेप, रंगीन काग़ज़, कटर और पटरी (रूलर)।

रचना की विधि

1. एक ड्रॉइंग शीट / कार्ड बोर्ड में से a इकाई लंबाई की भुजा वाला एक वर्ग काटकर निकाल लीजिए और उसका नाम वर्ग ABCD रखिए (देखिए आकृति 1)।
2. एक ड्रॉइंग शीट / कार्ड बोर्ड में से b इकाई लंबाई की भुजा वाला एक वर्ग काटकर निकाल लीजिए और उसका नाम वर्ग CHGF रखिए (देखिए आकृति 1)।



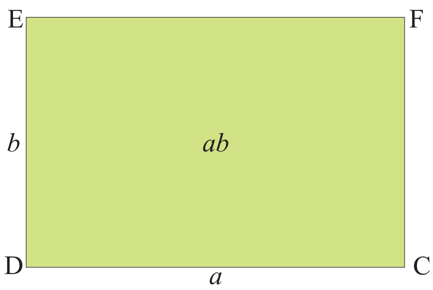
आकृति 1



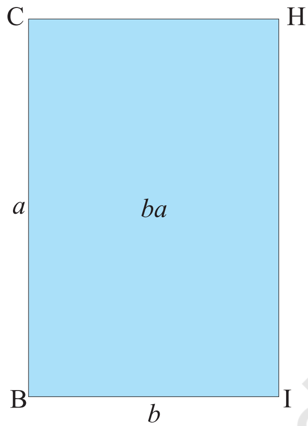
आकृति 2

3. एक ड्रॉइंग शीट / कार्ड बोर्ड में से a इकाई लंबाई और b इकाई चौड़ाई वाला एक आयत काटकर निकाल लीजिए और उसका नाम आयत DCFE रखिए (देखिए आकृति 3)।

14/04/18



आकृति 3

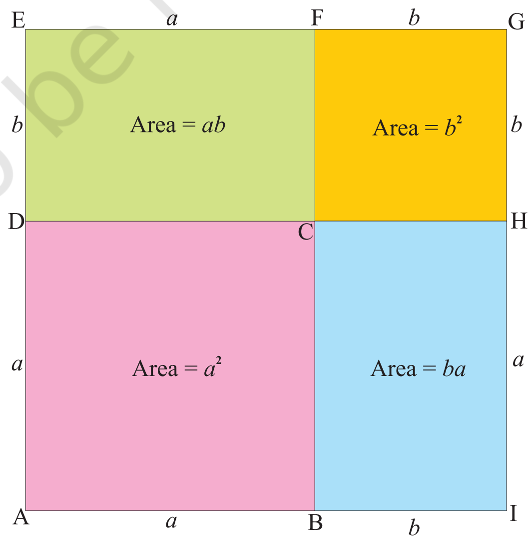


आकृति 4

4. एक ड्रॉइंग शीट / कार्ड बोर्ड में से b इकाई लंबाई और a इकाई चौड़ाई वाला एक अन्य आयत काटकर निकाल लीजिए और उसका नाम आयत BIHC रखिए (देखिए आकृति 4)।
5. इन चारों कट-आउट आकृतियों का कुल क्षेत्रफल

= वर्ग ABCD का क्षेत्रफल + वर्ग CHGF का क्षेत्रफल + आयत DCFE का क्षेत्रफल + आयत BIHC का क्षेत्रफल

$= a^2 + b^2 + ab + ba = a^2 + b^2 + 2ab$



आकृति 5

6. इन चारों चतुर्भुजों को सेलोटेप की सहायता से, आकृति 5 में दर्शाए अनुसार जोड़िए।

प्रदर्शन

स्पष्टतः AIGE भुजा $(a+b)$ का एक वर्ग है। अतः, इसका क्षेत्रफल $(a+b)^2$ है। घटक एककों का संयोजित क्षेत्रफल

$= a^2 + b^2 + ab + ab$

$= a^2 + b^2 + 2ab$

इस प्रकार, बीजीय सर्वसमिका $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ सत्यापित हो जाती है। यहाँ क्षेत्रफल वर्ग इकाई में हैं।

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

	$a =$ ....,	$b =$ ....,	$(a+b) =$ ....,
अतः,	$a^2 =$ ....,	$b^2 =$ ....,	$ab =$ ....
	$(a+b)^2 =$ ....,		$2ab =$ ....

इसलिए, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ है।

इस सर्वसमिका का सत्यापन a और b के विभिन्न मान लेकर किया जाता है।

अनुप्रयोग

इस सर्वसमिका का प्रयोग निम्नलिखित के लिए किया जा सकता है–

1. दो सुविधाजनक संख्याओं के योग के रूप में व्यक्त किसी संख्या का वर्ग परिकलित करना।
2. कुछ बीजीय व्यंजकों को सरल करना / के गुणनखंड करना।

क्रियाकलाप 4

उद्देश्य

बीजीय सर्वसमिका

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

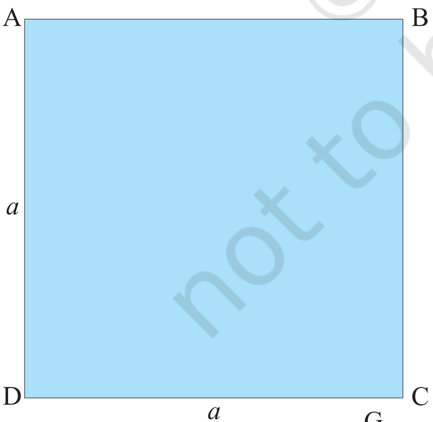
को सत्यापित करना।

आवश्यक सामग्री

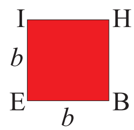
ड्रॉइंग शीट, कार्ड बोर्ड, रंगीन काग़ज़, कैंची, रूलर और गोंद।

रचना की विधि

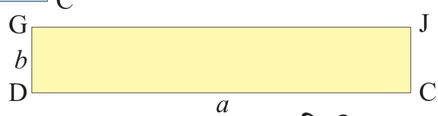
1. एक ड्रॉइंग शीट / कार्ड बोर्ड में से a इकाई की भुजा वाला एक वर्ग ABCD काटकर निकाल लीजिए (देखिए आकृति 1)।
2. एक ड्रॉइंग शीट / कार्ड बोर्ड में से b इकाई की भुजा वाला एक वर्ग EBHI काटकर निकाल लीजिए($b<a$) (देखिए आकृति 2)।
3. एक ड्रॉइंग शीट / कार्ड बोर्ड में से a इकाई लंबाई और b इकाई चौड़ाई का एक आयत GDCJ काटकर निकाल लीजिए (देखिए आकृति 3)।
4. एक ड्रॉइंग शीट / कार्ड बोर्ड में से a इकाई लंबाई और b इकाई चौड़ाई का एक आयत IFJH काटकर निकाल लीजिए (देखिए आकृति 4)।



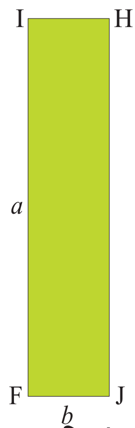
आकृति 1



आकृति 2



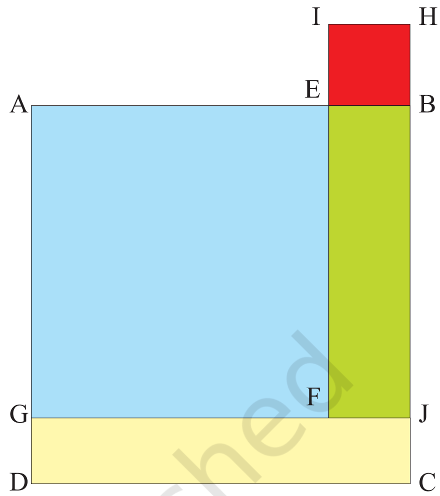
आकृति 3



आकृति 4

5. इन कटआउटों को आकृति 5 में दर्शाए अनुसार व्यवस्थित कीजिए।

प्रदर्शन



आकृति 5

वर्ग ABCD का क्षेत्रफल = a^2,

वर्ग EBHI का क्षेत्रफल = b^2

आयत GDCJ का क्षेत्रफल = ab,

आयत IFJH का क्षेत्रफल = ab

आकृति 5 से, वर्ग AGFE का क्षेत्रफल = AG × GF = $(a - b)\ (a - b) = (a - b)^2$

अब, वर्ग AGFE का क्षेत्रफल = वर्ग ABCD का क्षेत्रफल + वर्ग EBHI का क्षेत्रफल – आयत IFJH का क्षेत्रफल – आयत GDCJ का क्षेत्रफल

$= a^2 + b^2 - ab - ab$

$= a^2 - 2ab + b^2$

यहाँ, क्षेत्रफल वर्ग इकाई में हैं।

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

a = ..., b = ...

अत:, $(a - b)$ = ..., a^2 = ..., b^2= ...., $(a - b)^2$ = ...,

ab = ..., $2ab$ = ...

इसलिए, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

अनुप्रयोग

इस सर्वसमिका का प्रयोग निम्नलिखित के लिए किया जा सकता है–

1. दो सुविधाजनक संख्याओं के अंतर के रूप में व्यक्त किसी संख्या का वर्ग परिकलित करना।
2. कुछ बीजीय व्यंजकों को सरल करना/के गुणनखंड करना।

14/04/18

क्रियाकलाप 5

उद्देश्य

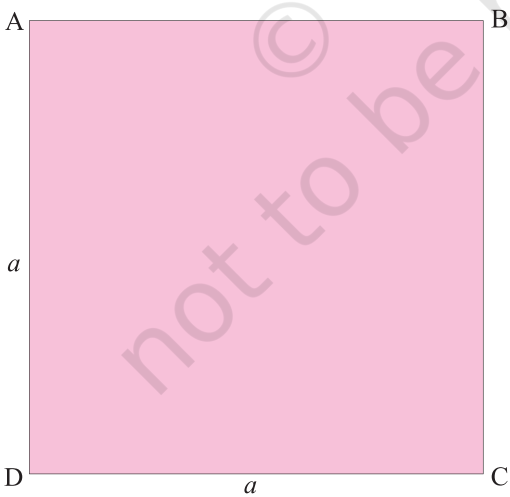
बीजीय सर्वसमिका $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ को सत्यापित करना।

आवश्यक सामग्री

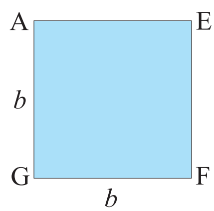
ड्रॉइंग शीट, कार्ड बोर्ड, रंगीन काग़ज़, कैंची, स्कैच पेन, रूलर, पारदर्शक शीट, गोंद।

रचना की विधि

1. एक सुविधाजनक साइज़ का एक कार्ड बोर्ड लीजिए और उस पर एक रंगीन काग़ज़ चिपकाइए।
2. एक ड्रॉइंग शीट में से भुजा a इकाई का एक वर्ग ABCD काटकर निकाल लीजिए (देखिए आकृति 1)।
3. एक अन्य ड्रॉइंग शीट में से, भुजा b ($b < a$) इकाई का एक वर्ग AEFG काटकर निकाल लीजिए (देखिए आकृति 2)।
4. इन वर्गों को आकृति 3 में दर्शाए अनुसार व्यवस्थित कीजिए।



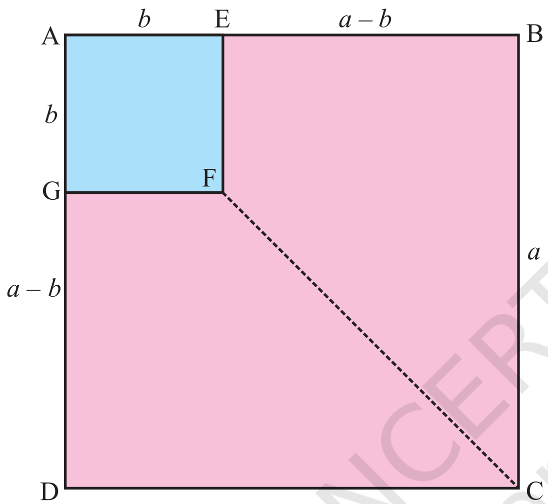
आकृति 1



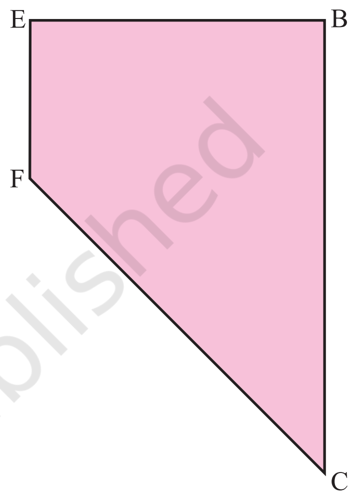
आकृति 2

14/04/18

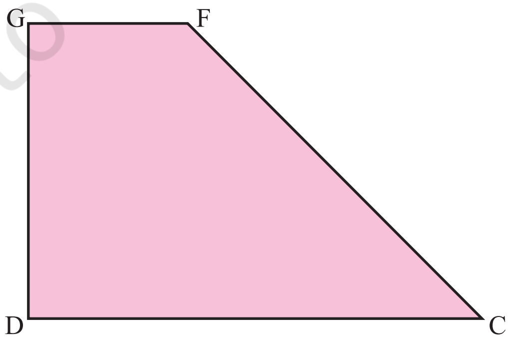
5. स्कैच पेन की सहायता से, F को C से मिलाइए। एक पारदर्शक शीट की सहयता से EBCF और GFCD के सर्वांगसम समलंब काटकर निकाल लीजिए तथा इनके नाम क्रमशः EBCF और GFCD रखिए (देखिए आकृतियां 4 और 5)।



आकृति 3

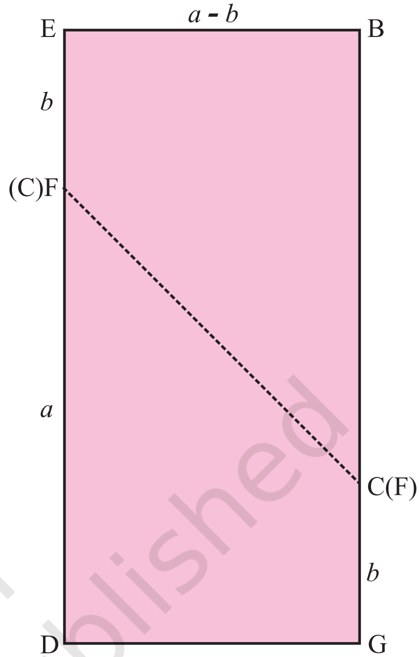


आकृति 4



आकृति 5

6. इन समलंबों को आकृति 6 में दर्शाए अनुसार व्यवस्थित कीजिए।



आकृति 6

प्रदर्शन

वर्ग ABCD का क्षेत्रफल $= a^2$

वर्ग AEFG का क्षेत्रफल $= b^2$

आकृति 3 में,

आयत ABCD का क्षेत्रफल – आयत AEFG का क्षेत्रफल = समलंब EBCF का क्षेत्रफल + समलंब GFCD का क्षेत्रफल

= आयत EBGD का क्षेत्रफल (आकृति 6)

$= ED \times DG$

इस प्रकार, $a^2 - b^2 = (a+b)\ (a-b)$

यहाँ क्षेत्रफल वर्ग इकाई में है।

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

$a =$ ...., $b =$ ....,

अत:, $(a+b) =$ ...., $a^2 =$ ...., $b^2 =$ ....,$(a-b) =$ ....,

$a^2-b^2 =$ ...., $(a+b)\ (a-b) =$ ....

इसलिए , $a^2-b^2 = (a+b)\ (a-b)$ है।

अनुप्रयोग

इस सर्वसमिका का प्रयोग निम्नलिखित को ज्ञात करने में किया जा सकता है–

1. दो वर्गों का अंतर।
2. दो संख्याओं से संबद्ध कुछ गुणनफल।
3. बीजीय व्यंजकों का सरलीकरण और गुणनखंडन।

क्रियाकलाप 6

उद्देश्य

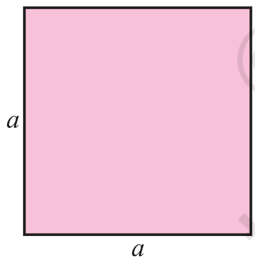
बीजीय सर्वसमिका
$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$
को सत्यापित करना।

आवश्यक सामग्री

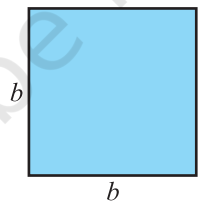
हार्ड बोर्ड,गोंद, रंगीन कागज़, सफ़ेद काग़ज़।

रचना की विधि

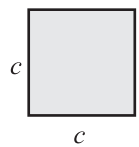
1. एक सुविधाजनक साइज़ का हार्ड बोर्ड लीजिए और उस पर एक सफ़ेद काग़ज़ चिपकाइए।
2. एक रंगीन काग़ज़ में से भुजा a इकाई का एक वर्ग काटकर निकाल लीजिए।
3. एक रंगीन काग़ज़ में से भुजा b इकाई का एक वर्ग काटकर निकाल लीजिए (देखिए आकृति 2)।
4. एक रंगीन काग़ज़ में से भुजा c इकाई का एक वर्ग काटकर निकाल लीजिए (देखिए आकृति 3)।
5. रंगीन काग़ज़ों में से ही दो आयत विमाओं $a \times b$ वाले, दो आयत विमाओं $b \times c$ वाले तथा दो आयत विमाओं $c \times a$ वाले काटकर निकाल लीजिए (देखिए आकृति 4)।



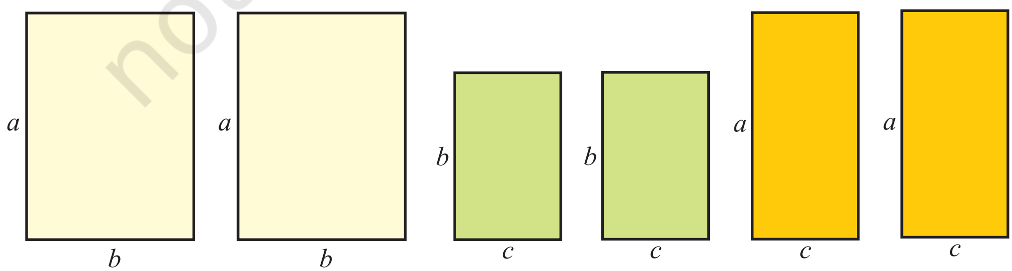
आकृति 1



आकृति 2

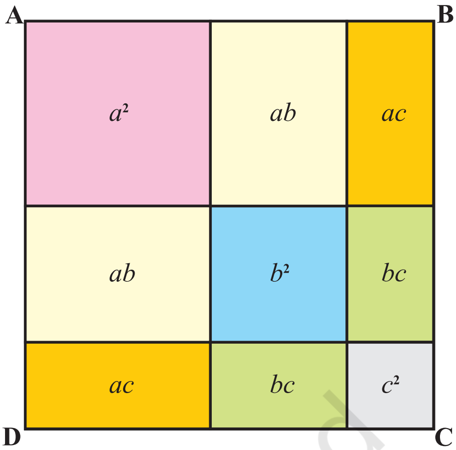


आकृति 3



आकृति 4

6. इन वर्गों और आयतों को आकृति 5 में दर्शाए अनुसार व्यवस्थित कीजिए।



आकृति 5

प्रदर्शन

आकृति 5 में, वर्गों और आयतों को व्यवस्थित करने पर, एक वर्ग ABCD प्राप्त होता है, जिसकी भुजा की लंबाई $(a+b+c)$ है।

वर्ग ABCD का क्षेत्रफल $= (a+b+c)^2$

अत:, $(a+b+c)^2$ = आकृति 1 से आकृति 4 तक में दर्शाए गए सभी वर्गों और आयतों के क्षेत्रफलों का योग

$= a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

यहाँ, क्षेत्रफल वर्ग इकाई में हैं।

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

$a =$ ...., $b =$ ...., $c =$ ....,

अत:, $a^2 =$ ...., $b^2 =$ ...., $c^2=$.............., $ab=$ ....,

$bc=$.............., $ca =$ ...., $2ab =$ ...., $2bc=$ ....,

$2ca=$ ...., $a+b+c =$ ...., $(a+b+c)^2 =$ ....

अत:, $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 +c^2 +2ab + 2bc + 2ca$

अनुप्रयोग

इस सर्वसमिका का निम्नलिखित के लिए प्रयोग किया जा सकता है–

1. बीजीय व्यंजकों का सरलीकरण / गुणनखंडन।
2. तीन सुविधाजनक संख्याओं के योग के रूप में व्यक्त संख्या का वर्ग ज्ञात करना।

क्रियाकलाप 7

उद्देश्य

बीजीय सर्वसमिका

$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$

को सत्यापित करना।

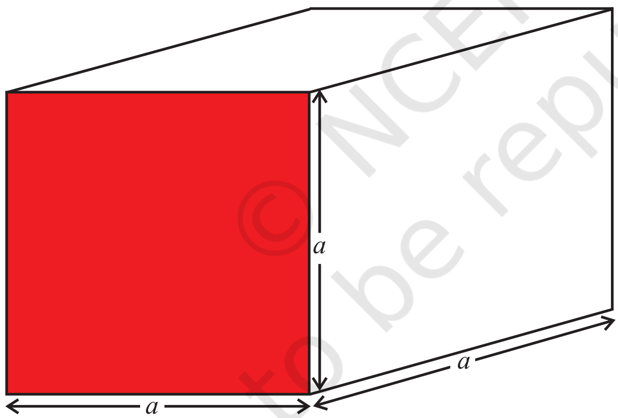
आवश्यक सामग्री

एक्रिलिक शीट, रंगीन काग़ज़, चिकना काग़ज़, आरी, स्कैच पेन, गोंद, सेलोटेप।

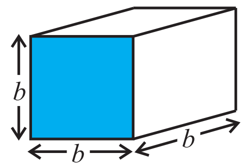
रचना की विधि

1. एक्रिलिक शीट और सेलोटेप गोंद का प्रयोग करते हुए, भुजा a इकाई का एक घन बनाइए तथा एक और घन भुजा b इकाई $(b < a)$ का बनाइए (देखिए आकृतियाँ 1 और 2)।

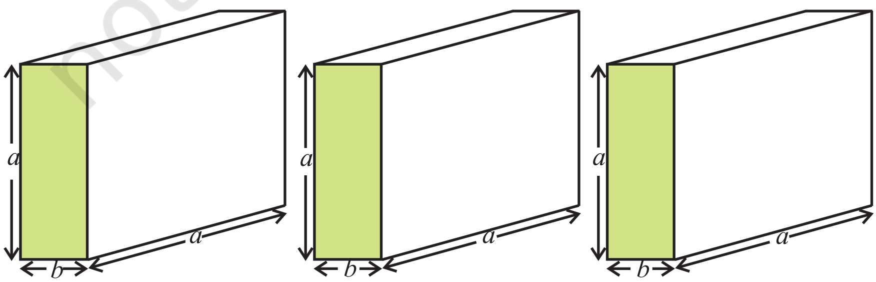
2. इसी प्रकार, तीन घनाभ विमाओं $a \times a \times b$ तथा तीन घनाभ विमाओं $a \times b \times b$ के बनाइए (देखिए आकृति 3 और आकृति 4)।



आकृति 1

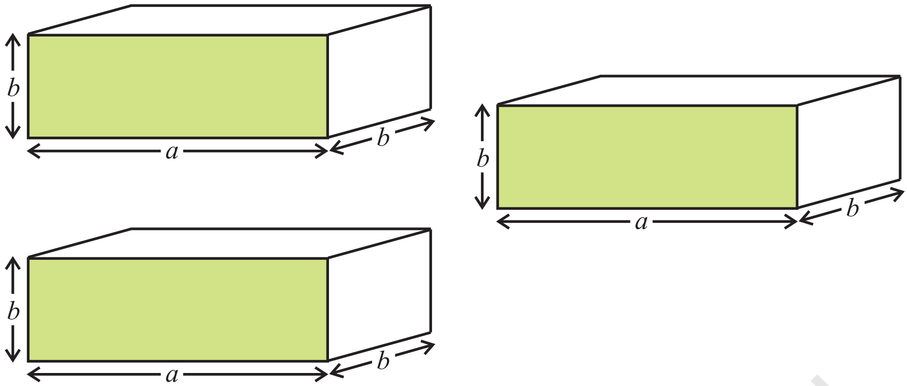


आकृति 2



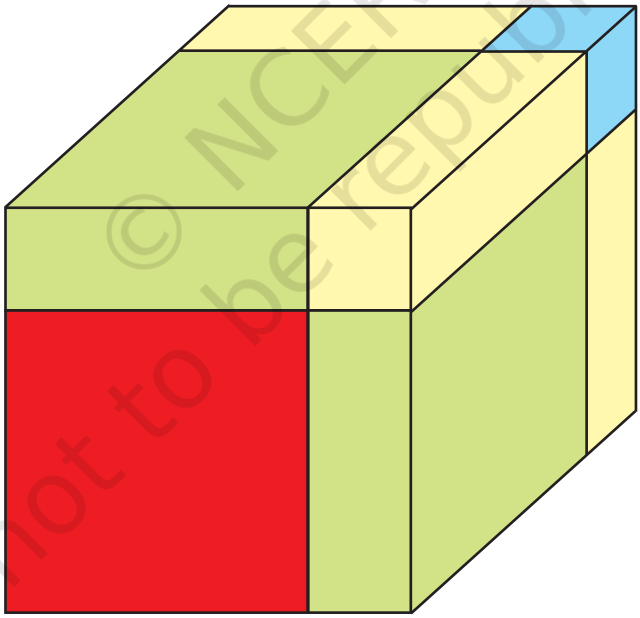
आकृति 3

14/04/18



आकृति 4

3. आकृति 5 में दर्शाए अनुसार, इन घन और घनाभों को व्यवस्थित कीजिए।



आकृति 5

प्रदर्शन

भुजा a वाले घन का आयतन $= a \times a \times a = a^3$,

भुजा b वाले घन का आयतन $= b \times b \times b = b^3$,

विमाओं $a \times a \times b$ वाले घनाभ का आयतन $= a^2b$, ऐसे तीन घनाभों का आयतन $= 3a^2b$ है।

विमाओं $a \times b \times b$ वाले घनाभ का आयतन$= ab^2$, ऐसे तीन घनाभों का आयतन $= 3ab^2$ है।

आकृति 5 में प्राप्त ठोस आकृति भुजा $(a + b)$ का एक घन है। इसका आयतन $= (a + b)^3$

अतः, $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$

यहाँ आयतन घन इकाई में हैं।

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

$a =$ ...., $b =$ ....,

अतः, $a^3 =$ ...., $b^3 =$ ...., $a^2b =$ ....,

$3a^2b =$ ...., $ab^2 =$ ...., $3ab^2 =$ ...., $(a+b)^3 =$ ....,

अतः, $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$

अनुप्रयोग

इस सर्वसमिका का प्रयोग निम्नलिखित के लिए किया जा सकता है–

1. दो सुविधाजनक संख्याओं के योग के रूप में व्यक्त किसी संख्या का घन परिकलित करना।
2. बीजीय व्यंजकों का सरलीकरण और गुणनखंडन करना।

क्रियाकलाप 8

उद्देश्य

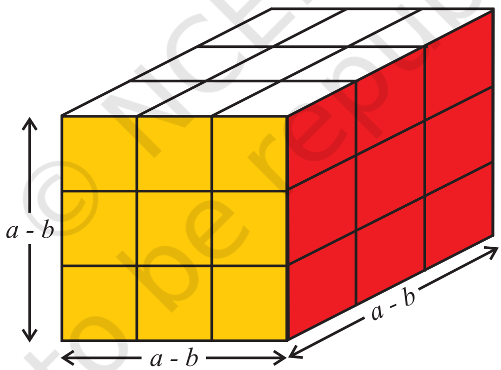
बीजीय सर्वसमिका $(a–b)^3=a^3–b^3–3(a–b)\ ab$ को सत्यापित करना।

आवश्यक सामग्री

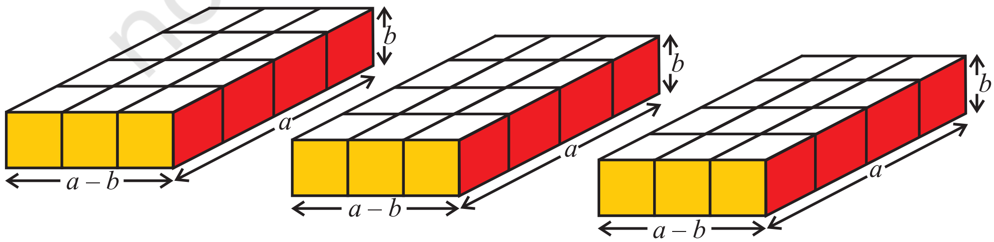
एक्रिलिक शीट, रंगीन काग़ज़, आरी, स्कैच पेन, गोंद, सेलोटेप।

रचना की विधि

1. एक्रिलिक शीट और सेलोटेप/गोंद का प्रयोग करते हुए, भुजा $(a – b)$ इकाई $(a > b)$ का एक घन बनाइए (देखिए आकृति 1)।
2. एक्रिलिक शीट और सेलोटेप/गोंद का प्रयोग करते हुए, विमाओं $(a – b) \times a \times b$ वाले तीन घनाभ बनाइए तथा भुजा b इकाई वाला एक घन बनाइए (देखिए आकृति 2 और आकृति 3)।
3. इन घनों और घनाभों को आकृति 4 में दर्शाए अनुसार व्यवस्थित कीजिए।

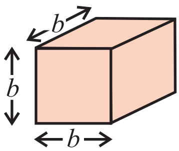


आकृति 1

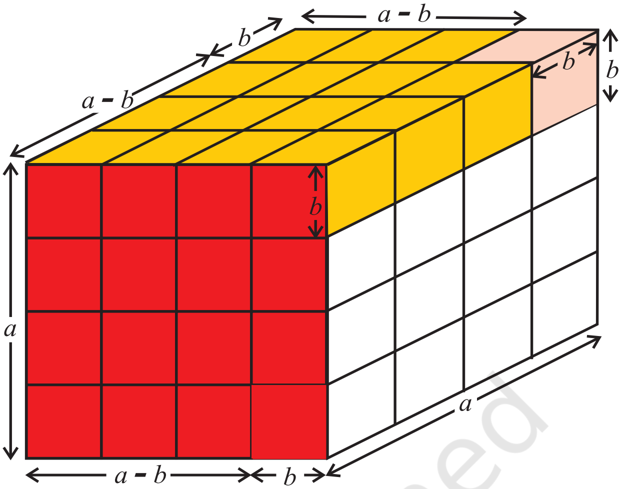


आकृति 2

14/04/18



आकृति 3



आकृति 4

प्रदर्शन

आकृति 1 में, भुजा $(a - b)$ इकाई वाले घन का आयतन $= (a- b)^3$

आकृति 2 में, एक घनाभ का आयतन $= (a-b)\, ab$

आकृति 2 में, तीनों घनाभों का आयतन $= 3\,(a-b)\, ab$

आकृति 3 में, भुजा b इकाई वाले घन का आयतन $= b^3$

आकृति 4 में प्राप्त ठोस का आयतन

$$= (a-b)^3 + (a-b)\, ab + (a-b)\, ab + (a - b)\, ab + b^3$$

$$= (a-b)^3 + 3(a-b)\, ab + b^3 \qquad (1)$$

साथ ही, आकृति 4 में प्राप्त ठोस भुजा a वाला एक घन भी है।

अतः, इसका आयतन $= a^3$ (2)

(1) और (2) से,

$$(a-b)^3 + 3(a-b)\, ab + b^3 = a^3$$

या $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3\,(a-b)\, ab$

यहाँ, आयतन घन इकाई में है।

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

$a =$ ...., $b =$ ...., $a–b =$ ....,

अतः, $a^3 =$ ...., $ab =$ ....,

$b^3 =$ ...., $ab(a–b) =$ ....,

$3ab\ (a–b) =$ ...., $(a–b)^3 =$ ....,

अतः, $(a–b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a–b)$ है।

अनुप्रयोग

इस सर्वसमिका का प्रयोग निम्नलिखित के लिए किया जा सकता है–

1. दो सुविधाजनक संख्याओं के अंतर के रूप में व्यक्त किसी संख्या का घन परिकलित करना।
2. बीजीय व्यंजकों का सरलीकरण और गुणनखंडन करना।

टिप्पणी

इस सर्वसमिका को $(a–b)^3=a^3–3ab(a–b)–b^3$ के रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है।

क्रियाकलाप 9

उद्देश्य

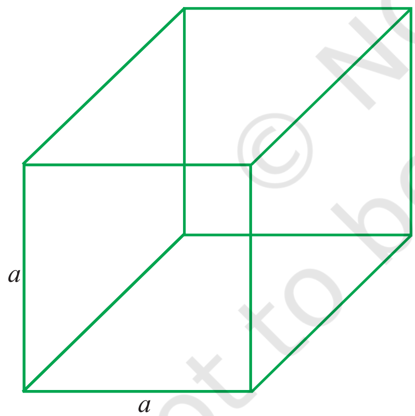
बीजीय सर्वसमिका $a^3+b^3=(a+b)\ (a^2-ab+b^2)$ को सत्यापित करना।

आवश्यक सामग्री

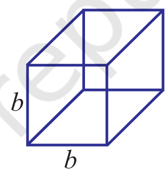
एक्रिलिक शीट, चिकना काग़ज़, आरी, गोंद, सेलोटेप, रंगीन काग़ज़, स्कैच पेन।

रचना की विधि

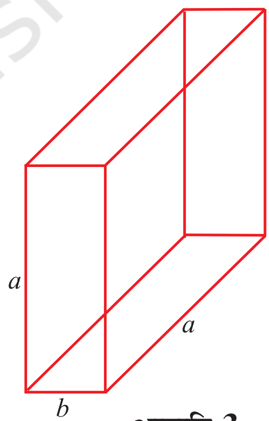
1. एक्रिलिक शीट और सेलोटेप / गोंद का प्रयोग करते हुए, भुजा a इकाई का एक घन बनाइए तथा भुजा b इकाई का एक अन्य घन बनाइए, जैसा कि आकृतियों 1 और 2 में दर्शाया गया है।
2. विमाओं $a \times a \times b$ का एक घनाभ बनाइए (देखिए आकृति 3)।
3. विमाओं $a \times b \times b$ का एक घनाभ बनाइए (देखिए आकृति 4)।



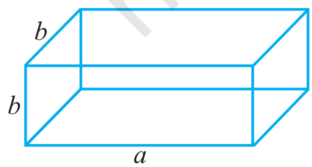
आकृति 1



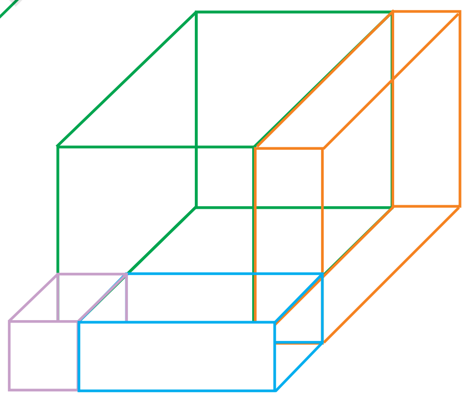
आकृति 2



आकृति 3

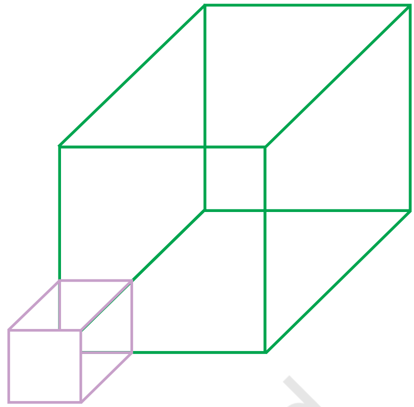


आकृति 4



आकृति 5

4. इन घनों और घनाभों को आकृति 5 में दर्शाए अनुसार व्यवस्थित कीजिए।



आकृति 6

प्रदर्शन

आकृति 1 में घन का आयतन = a^3
आकृति 2 में घन का आयतन = b^3
आकृति 3 में घनाभ का आयतन = a^2b
आकृति 4 में घनाभ का आयतन = ab^2
आकृति 5 में प्राप्त ठोस का आयतन
$= a^3+b^3 + a^2b + ab^2$

$= (a+b)\ (a^2 + b^2)$

आकृति 5 में प्राप्त ठोस में से आयतनों a^2b और ab^2 वाले घनाभों को हटाने पर, अर्थात $ab(a+b)$ को हटाने पर, हमें आकृति 6 में दर्शाया ठोस प्राप्त होता है।

आकृति 6 में प्राप्त ठोस का आयतन $= a^3 + b^3$

अतः
$$a^3 + b^3 = (a+b)\ (a^2 + b^2) - ab\ (a + b)$$
$$= (a+b)\ (a^2 + b^2 - ab)$$

यहाँ, आयतन घन इकाई में है।

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

$a =$ ...., $b =$ ....,
अतः, $a^3 =$ ...., $b^3 =$ ...., $(a+b) =$ ...., $(a+b)a^2 =$ ....,
$(a+b)\ b^2 =$ ....,$a^2b =$ ...., $ab^2 =$ ....,
$ab\ (a+b) =$ ....,
अतः, $a^3 + b^3 = (a + b)\ (a^2 + b^2 - ab)$

अनुप्रयोग

इस सर्वसमिका का प्रयोग बीजीय व्यंजकों के गुणन और गुणनखंडन में किया जा सकता है।

क्रियाकलाप 10

उद्देश्य

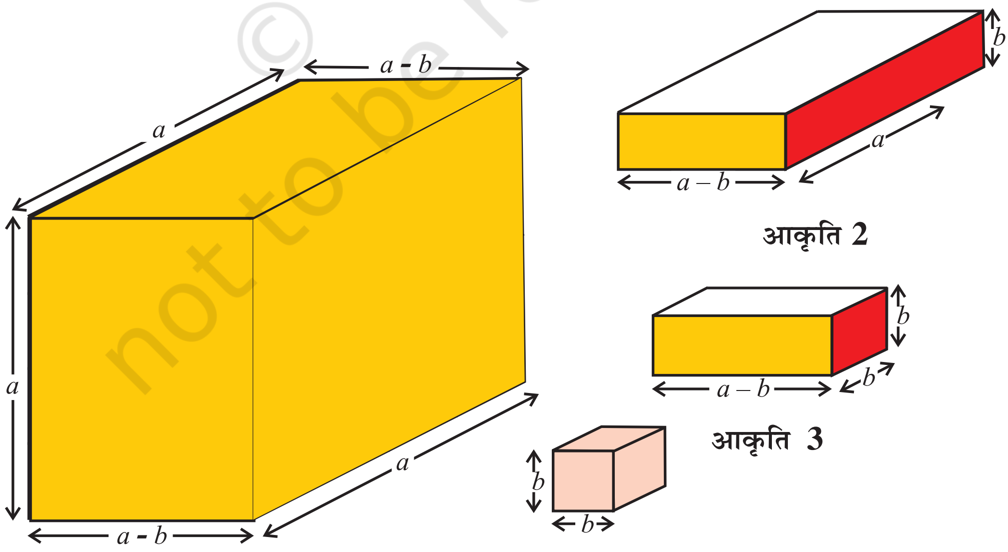
बीजीय सर्वसमिका $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ को सत्यापित करना।

आवश्यक सामग्री

एक्रिलिक शीट, चिकना काग़ज़, कैंची, गोंद, सेलोटेप, रंगीन काग़ज़, कटर, स्कैच पेन।

रचना की विधि

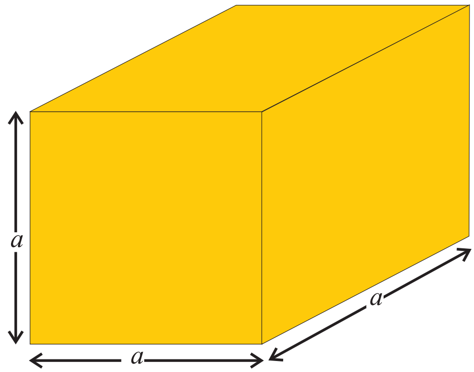
1. एक्रिलिक शीट और गोंद/सेलोटेप का प्रयोग करते हुए विमाओं $(a-b) \times a \times a$ $(b < a)$ वाला एक घनाभ बनाइए जैसा आकृति 1 में दर्शाया गया है।
2. एक्रिलिक शीट और गोंद/सेलोटेप का प्रयोग करते हुए, विमाओं $(a-b) \times a \times b$ वाला एक अन्य घनाभ बनाइए, जैसा आकृति 2 में दर्शाया गया है।
3. एक अन्य घनाभ विमाओं $(a-b) \times b \times b$ वाला बनाइए, जैसा आकृति 3 में दर्शाया गया है।
4. एक्रिलिक शीट और गोंद/सेलोटेप का प्रयोग करते हुए, विमाओं $b \times b \times b$ का एक घन बनाइए, जैसा आकृति 4 में दर्शाया गया है।



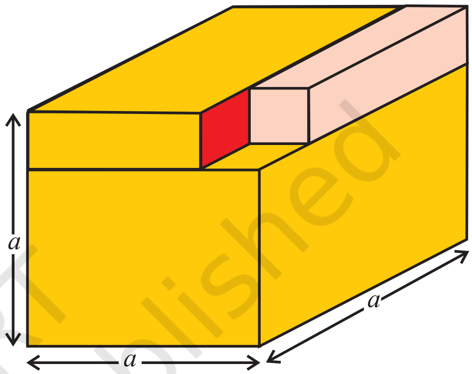
आकृति 1

आकृति 4

5. ऊपर चरणों 1,2, 3 और 4 में बनाए गए घनों और घनाभों को आकृति 5 में दर्शाए गए ठोस प्राप्त करने के लिए व्यवस्थित कीजिए। यह ठोस आयतन a^3 घन इकाई वाला एक घन है।



आकृति 5



आकृति 6

प्रदर्शन

आकृति 1 में घनाभ का आयतन $= (a–b) \times a \times a$ घन इकाई

आकृति 2 में घनाभ का आयतन $= (a–b) \times a \times b$ घन इकाई

आकृति 3 में घनाभ का आयतन $= (a–b) \times b \times b$ घन इकाई

आकृति 4 में घन का आयतन $= b^3$ घन इकाई

आकृति 5 में घन का आयतन $= a^3$ घन इकाई

आकृति 5 के ठोस में से b^3 घन इकाई वाले एक घन को हटाने पर, हमें आकृति 6 में दर्शाया ठोस प्राप्त होता है।

आकृति 6 में ठोस का आयतन $= (a–b)\ a^2 + (a–b)\ ab + (a–b)\ b^2$

$$= (a–b)\ (a^2 + ab + b^2)$$

अत:, $$a^3 – b^3 = (a – b)(a^2 + ab + b^2)$$

14/04/18

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

$a =$ ...., $b =$ ....,

अतः, $a^3 =$ ...., $b^3 =$ ...., $(a–b) =$ ...., $ab =$ ....,

$a^2 =$ ...., $b^2 =$ ....

अतः, $a^3 - b^3 = (a - b)\,(a^2 + ab + b^2)$

अनुप्रयोग

इस सर्वसमिका का प्रयोग बीजीय व्यंजकों के सरलीकरण और गुणनखंडन करने में किया जा सकता है।