गणित भाग –II

इयत्ता दहावी

भारताचे संविधान

भाग ४ क

नागरिकांची मूलभूत कर्तव्ये

अनुच्छेद ५१ क

मूलभूत कर्तव्ये – प्रत्येक भारतीय नागरिकाचे हे कर्तव्य असेल की त्याने –

(क) प्रत्येक नागरिकाने संविधानाचे पालन करावे. संविधानातील आदर्शांचा, राष्ट्रध्वज व राष्ट्रगीताचा आदर करावा.

(ख) स्वातंत्र्याच्या चळवळीला प्रेरणा देणाऱ्या आदर्शांचे पालन करावे.

(ग) देशाचे सार्वभौमत्व, एकता व अखंडत्व सुरक्षित ठेवण्यासाठी प्रयत्नशील असावे.

(घ) आपल्या देशाचे रक्षण करावे, देशाची सेवा करावी.

(ङ) सर्व प्रकारचे भेद विसरून एकोपा वाढवावा व बंधुत्वाची भावना जोपासावी. स्त्रियांच्या प्रतिष्ठेला कमीपणा आणतील अशा प्रथांचा त्याग करावा.

(च) आपल्या संमिश्र संस्कृतीच्या वारशाचे जतन करावे.

(छ) नैसर्गिक पर्यावरणाचे जतन करावे. सजीव प्राण्यांबद्दल दयाबुद्धी बाळगावी.

(ज) वैज्ञानिक दृष्टी, मानवतावाद आणि जिज्ञासूवृत्ती अंगी बाळगावी.

(झ) सार्वजनिक मालमत्तेचे जतन करावे. हिंसेचा त्याग करावा.

(ञ) देशाची उत्तरोत्तर प्रगती होण्यासाठी व्यक्तिगत व सामूहिक कार्यात उच्चत्वाची पातळी गाठण्याचा प्रयत्न करावा.

(ट) ६ ते १४ वयोगटातील आपल्या पाल्यांना पालकांनी शिक्षणाच्या संधी उपलब्ध करून द्याव्यात.

शासन निर्णय क्रमांक : अभ्यास-२११६/(प्र.क्र.४३/१६) एसडी-४ दिनांक २५.४.२०१६ अन्वये स्थापन करण्यात आलेल्या समन्वय समितीच्या दिनांक २९.१२.२०१७ रोजीच्या बैठकीमध्ये हे पाठ्यपुस्तक सन २०१८-१९ या शैक्षणिक वर्षापासून निर्धारित करण्यास मान्यता देण्यात आली आहे.

गणित

भाग II

इयत्ता दहावी

महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ, पुणे - ४११ ००४.

4JDZ3Y

आपल्या स्मार्टफोनवरील DIKSHA App द्वारे पाठ्यपुस्तकाच्या पहिल्या पृष्ठावरील Q. R. Code द्वारे डिजिटल पाठ्यपुस्तक व प्रत्येक पाठामध्ये असलेल्या Q. R. Code द्वारे त्या पाठासंबंधित अध्ययन अध्यापनासाठी उपयुक्त दृकश्राव्य साहित्य उपलब्ध होईल.

प्रथमावृत्ती : 2018
दुसरे पुनर्मुद्रण : 2021

© महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ पुणे – ४११ ००४.

महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळाकडे या पुस्तकाचे सर्व हक्क राहतील. या पुस्तकातील कोणताही भाग संचालक, महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ यांच्या लेखी परवानगीशिवाय उद्धृत करता येणार नाही.

गणित विषयतज्ज्ञ समिती

डॉ. मंगला नारळीकर (अध्यक्ष)
डॉ. जयश्री अत्रे (सदस्य)
श्री. विनायक गोडबोले (सदस्य)
श्रीमती प्राजक्ती गोखले (सदस्य)
श्री. रमाकांत सरोदे (सदस्य)
श्री. संदीप पंचभाई (सदस्य)
श्रीमती पूजा जाधव (सदस्य)
श्रीमती उज्ज्वला गोडबोले (सदस्य-सचिव)

गणित विषय – राज्य अभ्यासगट सदस्य

श्रीमती जयश्री पुरंदरे	श्रीमती तरुबेन पोपट
श्री. राजेंद्र चौधरी	श्री. प्रमोद ठोंबरे
श्री. रामा व्हन्याळकर	डॉ. भारती सहस्रबुद्धे
श्री. आण्णापा परीट	श्री. वसंत शेवाळे
श्री. अन्सार शेख	श्री. प्रताप काशिद
श्री. श्रीपाद देशपांडे	श्री. मिलिंद भाकरे
श्री. सुरेश दाते	श्री. ज्ञानेश्वर माशाळकर
श्री. उमेश रेळे	श्री. गणेश कोलते
श्री. बन्सी हावळे	श्री. संदेश सोनावणे
श्रीमती रोहिणी शिर्के	श्री. सुधीर पाटील
श्री. प्रकाश झेंडे	श्री. प्रकाश कापसे
श्री. लक्ष्मण दावणकर	श्री. रवींद्र खंदारे
श्री. श्रीकांत रत्नपारखी	श्रीमती स्वाती धर्माधिकारी
श्री. सुनिल श्रीवास्तव	श्री. अरविंदकुमार तिवारी
श्री. अन्सारी अब्दुल हमीद	श्री. मल्लेशाम बेथी
श्रीमती सुवर्णा देशपांडे	श्रीमती आर्या भिडे

मुखपृष्ठ व संगणकीय आरेखन
श्री. संदीप कोळी, चित्रकार, मुंबई

अक्षरजुळणी
गणित विभाग, पाठ्यपुस्तक मंडळ, पुणे

प्रमुख संयोजक
उज्ज्वला श्रीकांत गोडबोले
प्र. विशेषाधिकारी गणित,
पाठ्यपुस्तक मंडळ, पुणे.

निर्मिती
सच्चितानंद आफळे
मुख्य निर्मिती अधिकारी
संजय कांबळे
निर्मिती अधिकारी
प्रशांत हरणे
सहायक निर्मिती अधिकारी

कागद
७० जी.एस.एम.क्रीमवोव्ह

मुद्रणादेश
N/PB/2019-20/50,000

मुद्रक
SHIVANAND PRINTERS, SANGLI

प्रकाशक
विवेक उत्तम गोसावी, नियंत्रक
पाठ्यपुस्तक निर्मिती मंडळ,
प्रभादेवी, मुंबई २५

भारताचे संविधान

उद्देशिका

आम्ही, भारताचे लोक, भारताचे एक सार्वभौम समाजवादी धर्मनिरपेक्ष लोकशाही गणराज्य घडविण्याचा व त्याच्या सर्व नागरिकांस:

सामाजिक, आर्थिक व राजनैतिक **न्याय;**
विचार, अभिव्यक्ती, विश्वास, श्रद्धा
व उपासना यांचे **स्वातंत्र्य;**
दर्जाची व संधीची **समानता;**

निश्चितपणे प्राप्त करून देण्याचा
आणि त्या सर्वांमध्ये व्यक्तीची प्रतिष्ठा
व राष्ट्राची एकता आणि एकात्मता
यांचे आश्वासन देणारी **बंधुता**
प्रवर्धित करण्याचा संकल्पपूर्वक निर्धार करून;

आमच्या संविधानसभेत
आज दिनांक सव्वीस नोव्हेंबर, १९४९ रोजी
याद्वारे हे संविधान अंगीकृत आणि अधिनियमित करून स्वत:प्रत अर्पण करीत आहोत.

राष्ट्रगीत

जनगणमन–अधिनायक जय हे
भारत–भाग्यविधाता ।
पंजाब, सिंधु, गुजरात, मराठा,
द्राविड, उत्कल, बंग,
विंध्य, हिमाचल, यमुना, गंगा,
उच्छल जलधितरंग,
तव शुभ नामे जागे, तव शुभ आशिस मागे,
गाहे तव जयगाथा,
जनगण मंगलदायक जय हे,
भारत–भाग्यविधाता ।
जय हे, जय हे, जय हे,
जय जय जय, जय हे ।।

प्रतिज्ञा

भारत माझा देश आहे. सारे भारतीय माझे बांधव आहेत.

माझ्या देशावर माझे प्रेम आहे. माझ्या देशातल्या समृद्ध आणि विविधतेने नटलेल्या परंपरांचा मला अभिमान आहे. त्या परंपरांचा पाईक होण्याची पात्रता माझ्या अंगी यावी म्हणून मी सदैव प्रयत्न करीन.

मी माझ्या पालकांचा, गुरुजनांचा आणि वडीलधाऱ्या माणसांचा मान ठेवीन आणि प्रत्येकाशी सौजन्याने वागेन.

माझा देश आणि माझे देशबांधव यांच्याशी निष्ठा राखण्याची मी प्रतिज्ञा करीत आहे. त्यांचे कल्याण आणि त्यांची समृद्धी ह्यांतच माझे सौख्य सामावले आहे.

प्रस्तावना

विद्यार्थी मित्रांनो,

दहावीच्या वर्गात तुमचे स्वागत!

गणित भाग I आणि गणित भाग II ही पुस्तके यावर्षी तुम्हांला अभ्यासायची आहेत.

गणित भाग II मध्ये भूमिती, त्रिकोणमिती, निर्देशक भूमिती व महत्त्वमापन ही मुख्य क्षेत्रे आहेत. तुम्हांला या वर्षी नववीपर्यंत ओळख करून दिलेल्या घटकांचाच थोडा अधिक अभ्यास करायचा आहे. त्यांचा व्यवहारात होणारा उपयोग दिलेल्या उदाहरणांतून स्पष्ट होईल. जेथे नवा भाग, सूत्रे किंवा उपयोजन आहे, तेथे सुलभ स्पष्टीकरण दिले आहे. प्रत्येक प्रकरणात नमुन्याची सोडवलेली उदाहरणे, सरावासाठी उदाहरणे आहेतच, शिवाय प्रज्ञावान विद्यार्थ्यांसाठी काही आव्हानात्मक प्रश्न तारांकित करून दिले आहेत. काही विद्यार्थ्यांना दहावीनंतर गणिताचा अभ्यास करायचा नसला, तरी गणितातील मूलभूत संकल्पना त्यांना समजाव्यात, तसेच इतर क्षेत्रात काम करताना आवश्यक ते गणित वापरता यावे, असे ज्ञान त्यांना या पुस्तकातून मिळेल. 'अधिक माहितीसाठी' या शीर्षकाखाली दिलेला मजकूर, ज्या विद्यार्थ्यांना दहावीनंतरही गणिताचा अभ्यास करून त्यात प्रावीण्य मिळवण्याची इच्छा आहे, त्यांना उपयोगी पडेल, म्हणून अशा विद्यार्थ्यांनी तो जरूर अभ्यासावा. सगळे पुस्तक एकदा तरी वाचून व समजून घ्यावे.

ॲपच्या माध्यमातून क्यू. आर. कोडद्वारे प्रत्येक पाठासंबंधी अधिक उपयुक्त दृक्-श्राव्य साहित्य आपणांस उपलब्ध होईल. त्याचा अभ्यासासाठी निश्चित उपयोग होईल.

दहावीची परीक्षा महत्त्वाची मानली जाते. या गोष्टीचा ताण न घेता चांगला अभ्यास करून मनासारखे यश मिळवण्यासाठी तुम्हांला शुभेच्छा!

(डॉ. सुनिल मगर)
संचालक
महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व
अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ, पुणे.

पुणे
दिनांक : १८ मार्च २०१८, गुढीपाडवा
भारतीय सौर दिनांक : २७ फाल्गुन १९३९

इयत्ता १० वी गणित भाग II अभ्यासक्रमातून खालील क्षमता विद्यार्थ्यांमध्ये विकसित होतील.

क्षेत्र	घटक	क्षमता विधाने
1. **भूमिती**	1.1 समरूप त्रिकोण 1.2 वर्तुळ	• समरूप त्रिकोणांचे गुणधर्म, एकरूप त्रिकोणांचे गुणधर्म व पायथागोरसचे प्रमेय यांचा उपयोग करून उदाहरणे सोडवता येणे. • समरूप त्रिकोणांची रचना करता येणे. • वर्तुळाच्या जीवेचे व स्पर्शिकेचे गुणधर्म यांचा उपयोग करता येणे. • वर्तुळाच्या स्पर्शिकांची रचना करता येणे.
2. **निर्देशक भूमिती**	2.1 निर्देशक भूमिती	• दोन बिंदूंमधील अंतर काढता येणे. • रेषाखंडाच्या विभाजक बिंदूचे निर्देशक काढता येणे. • रेषेचा चढ काढता येणे.
3. **महत्त्वमापन**	3.1 पृष्ठफळ व घनफळ	• वर्तुळकंसाची लांबी काढता येणे. • वर्तुळपाकळीचे व वर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ काढता येणे. • दिलेल्या त्रिमितीय आकारांचे पृष्ठफळ आणि घनफळ काढता येणे.
4. **त्रिकोणमिती**	4.1 त्रिकोणमिती	• त्रिकोणमितीय नित्यसमानता वापरून उदाहरणे सोडवता येणे. • झाडाची उंची काढणे, नदीच्या पात्राची रुंदी काढणे अशा स्वरूपाच्या समस्यांसाठी त्रिकोणमितीचा उपयोग करता येणे.

शिक्षकांसाठी सूचना

प्रथम पुस्तकाचे सखोल वाचन करून ते समजून घ्यावे. विविध घटकांचे स्पष्टीकरण करणे व सूत्रांचा पडताळा घेणे या महत्त्वाच्या गोष्टींसाठी कृतींची मदत घ्यावी.

प्रात्यक्षिकांतूनही मूल्यमापन करायचे आहे. त्यासाठीही कृती वापरता येतात. विद्यार्थ्यांना स्वतंत्र विचार करण्यास उत्तेजन द्यावे. एखादे उदाहरण वेगळ्या परंतु तर्कशुद्ध पद्धतीने सोडवणाऱ्या विद्यार्थ्यांना खास शाबासकी द्यावी.

भूमितीतील प्रमेयांची विधाने लक्षात ठेवून त्यांचे उपयोजन करून उदाहरणे सोडवण्याचे कौशल्य विकसित करण्यासाठी पुस्तकातील कृतींखेरीज आणखी कृती तयार करता येतील.

प्रात्यक्षिकांची यादी (नमुना)

(1) पुठ्ठ्याचा एक त्रिकोणी तुकडा कापून घ्या. टेबलावर मेणबत्ती किंवा लहान दिवा लावा. भिंत व दिवा/मेणबत्ती यांमध्ये त्रिकोण धरा. त्याच्या सावलीचे निरीक्षण करा. सावली व मूळ त्रिकोण समरूप आहेत का ते ठरवा. (मूळचा त्रिकोण व त्याची सावली परस्परांशी समरूप असण्यासाठी कोणती खबरदारी घ्याल?)

(2) एकसारख्या मापाचे दोन काटकोन त्रिकोण कापून घ्या. त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूंना दोन्ही बाजूने A, B, C अशी नावे द्या. त्यांपैकी एका काटकोन त्रिकोणात कर्णावर शिरोलंब काढा. लंबपादास 'D' नाव द्या. एक त्रिकोण लंबावर कापून दोन लहान काटकोन त्रिकोण मिळवा. तीनही काटकोन त्रिकोण कोणत्या एकास एक संगतीने एकमेकांशी समरूप होतात ते लिहा.

(3) एक वर्तुळ काढा. त्याच्या अंतर्भागात, बाह्यभागात व वर्तुळावर प्रत्येकी एक, असे तीन बिंदू घ्या. या प्रत्येक बिंदूतून वर्तुळाला किती स्पर्शिका काढता येतील याची सारणी तयार करा. सारणीत कच्च्या आकृत्या काढून दाखवा.

(4) 'दोन बिंदूतून असंख्य वर्तुळे काढता येतात' हे दर्शवण्यासाठी, दिलेल्या दोन बिंदूतून कमीत कमी पाच वेगवेगळी वर्तुळे काढा.

(5) वर्तुळाचे गुणधर्म पडताळून पाहण्यासाठी उपयोगी पडेल असा खिळे बसवलेला जिओबोर्ड घ्या. रबरबँड वापरून खालीलपैकी कोणत्याही एका प्रमेयासाठी जिओबोर्डवर आकृती तयार करा.

(i) अंतर्लिखित कोनाचे प्रमेय (ii) स्पर्शिका-छेदिका कोनाचे प्रमेय

(iii) विरुद्ध वृत्तखंडातील कोनाचे प्रमेय

(6) एक वर्तुळ व एक कोनाची प्रतिकृती घेऊन वेगवेगळ्या स्थितींतील अंतर्खंडित कंस तयार करा. त्या आकृत्या वहीत काढा.

(7) एका कोनाचे चार समान भाग करा. कंपास व पट्टीचा वापर करा.

(8) एक चंचूपात्र घ्या. त्याची उंची व तळाची त्रिज्या मोजा. त्यावरून त्यात किती पाणी मावेल, ते सूत्राने काढा. ते पाण्याने भरून त्याचे आकारमान मोजपात्राच्या साहाय्याने मोजा. दोन्ही उत्तरांवरून निष्कर्ष काढा.

(9) शंकूछेदाच्या आकाराचा एक कागदी पेला घ्या. त्याच्या तळाची व वरील वर्तुळाकाराची त्रिज्या मोजा. पेल्याची उंची मोजा. त्या पेल्यात किती पाणी मावेल, ते सूत्रावरून काढा. तो पाण्याने पूर्ण भरून त्या पाण्याचे आकारमान मोजा. पाण्याचे आकारमान व सूत्राने काढलेले घनफळ यांची तुलना करून सूत्राचा पडताळा घ्या.

(10) जाड पुठ्ठ्याचे दोन समरूप त्रिकोण कापून घ्या. त्यांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर (i) त्यांच्या परिमितींच्या वर्गांच्या प्रमाणात आहे का, किंवा (ii) त्यांच्या मध्यगांच्या वर्गांच्या प्रमाणात आहे का हे प्रत्यक्ष मोजमाप करून ठरवा.

अनुक्रमणिका

प्रकरण		पृष्ठे
1.	समरूपता	1 ते 29
2.	पायथागोरसचे प्रमेय	30 ते 46
3.	वर्तुळ	47 ते 90
4.	भौमितिक रचना	91 ते 99
5.	निर्देशक भूमिती	100 ते 123
6.	त्रिकोणमिती	124 ते 139
7.	महत्त्वमापन	140 ते 163
•	उत्तरसूची	164 ते 168

1 समरूपता

चला, शिकूया.

- दोन त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर
- प्रमाणाचे मूलभूत प्रमेय
- प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयाचा व्यत्यास
- त्रिकोणाच्या कोन दुभाजकाचा गुणधर्म
- तीन समांतर रेषा व छेदिका यांच्यामुळे झालेल्या आंतरछेदांचे गुणोत्तर
- त्रिकोणाच्या समरूपतेच्या कसोट्या
- समरूप त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणधर्म

जरा आठवूया.

आपण गुणोत्तर व प्रमाण यांचा अभ्यास केला आहे. a आणि b या दोन संख्यांचे गुणोत्तर $\frac{m}{n}$ आहे, हेच विधान a आणि b या दोन संख्या $m:n$ या प्रमाणात आहेत असेही लिहितात.

या संकल्पनेसाठी आपण सामान्यपणे धन वास्तव संख्यांचा विचार करतो. आपल्याला हे माहीत आहे की रेषाखंडांची लांबी आणि एखाद्या आकृतीचे क्षेत्रफळ या धन वास्तव संख्या असतात .

आपल्याला त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाचे सूत्र माहीत आहे.

त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2}$ पाया $\times$ उंची

जाणून घेऊया.

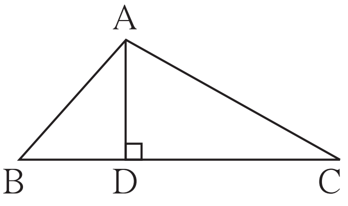
दोन त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर (Ratio of areas of two triangles)

कोणत्याही दोन त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर काढू.

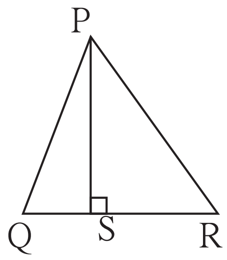
उदाहरण. Δ ABC चा BC हा पाया आहे व AD ही उंची आहे.

Δ PQR चा QR हा पाया आहे व PS ही उंची आहे.

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times AD}{\frac{1}{2} \times QR \times PS}$$



आकृती 1.1



आकृती 1.2

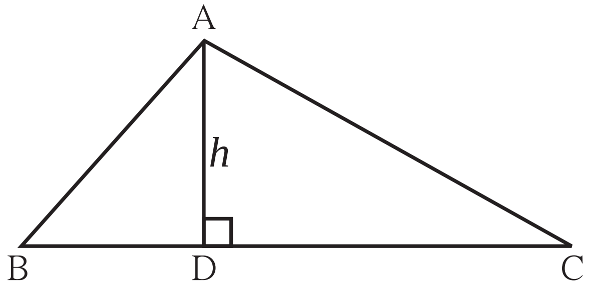
$$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{BC \times AD}{QR \times PS}$$

यावरून, दोन त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर हे त्यांच्या पाया व संगत उंची यांच्या गुणाकारांच्या गुणोत्तराएवढे असते.

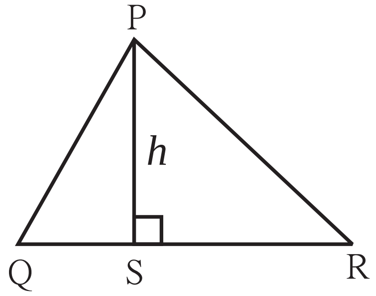
एका त्रिकोणाचा पाया b_1 व उंची h_1 आणि दुसऱ्या त्रिकोणाचा पाया b_2 व उंची h_2 असेल तर त्यांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर $= \frac{b_1 \times h_1}{b_2 \times h_2}$

या दोन त्रिकोणांच्या संबधात काही अटी घालून पाहू.

अट 1 : दोन्ही त्रिकोणांची उंची समान असेल, तर –



आकृती 1.3



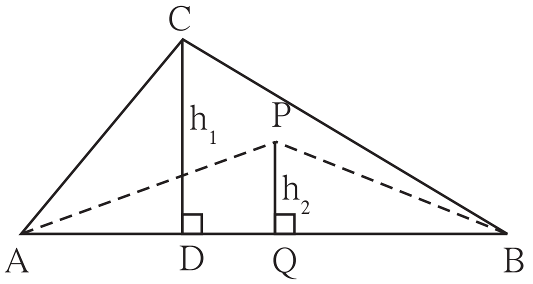
आकृती 1.4

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{BC \times h}{QR \times h} = \frac{BC}{QR}$$

$$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{b_1}{b_2}$$

गुणधर्म : समान उंची असलेल्या त्रिकोणांची क्षेत्रफळे त्यांच्या संगत पायांच्या प्रमाणात असतात.

अट 2 : दोन्ही त्रिकोणांचा पाया समान असेल तर –



आकृती 1.5

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta APB)} = \frac{AB \times h_1}{AB \times h_2}$$

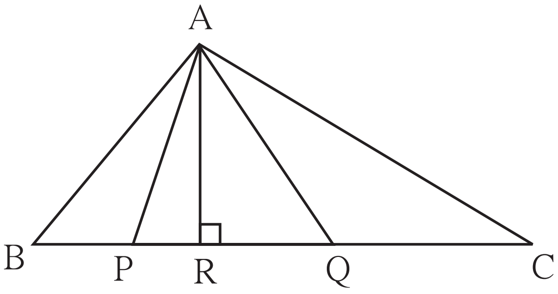
$$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta APB)} = \frac{h_1}{h_2}$$

गुणधर्म : समान लांबीच्या पायांच्या दोन त्रिकोणांची क्षेत्रफळे त्यांच्या संगत उंचीच्या प्रमाणात असतात.

कृती :

खालील रिकाम्या चौकटी योग्य प्रकारे भरा.

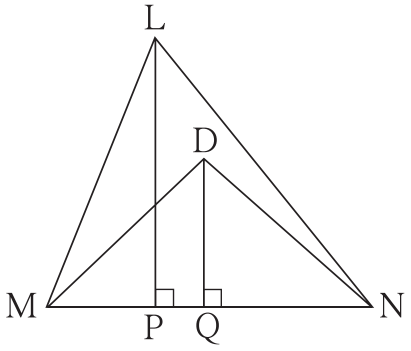
(i)



आकृती 1.6

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta APQ)} = \frac{\square \times \square}{\square \times \square} = \frac{\square}{\square}$$

(ii)



आकृती 1.7

$$\frac{A(\Delta LMN)}{A(\Delta DMN)} = \frac{\square \times \square}{\square \times \square} = \frac{\square}{\square}$$

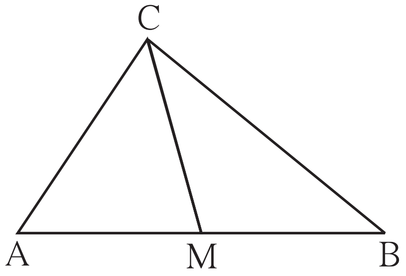
(iii) बिंदू M हा रेख AB चा मध्यबिंदू आहे.

रेख CM ही Δ ABC ची मध्यगा आहे.

$$\therefore \frac{A(\Delta AMC)}{A(\Delta BMC)} = \frac{\square}{\square}$$

$$= \frac{\square}{\square} = \square$$

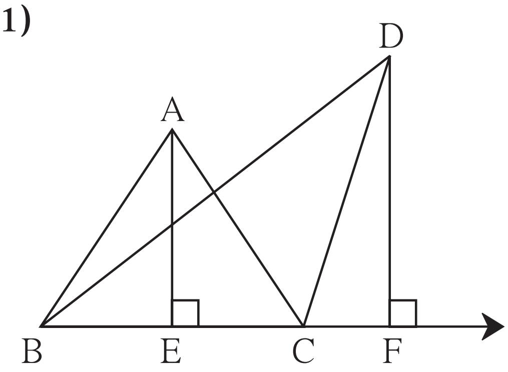
कारण लिहा.



आकृती 1.8

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1)



आकृती 1.9

शेजारील आकृतीत,

रेख AE $\perp$ रेख BC, रेख DF $\perp$ रेषा BC

AE = 4, DF = 6 तर $\dfrac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DBC)}$ काढा.

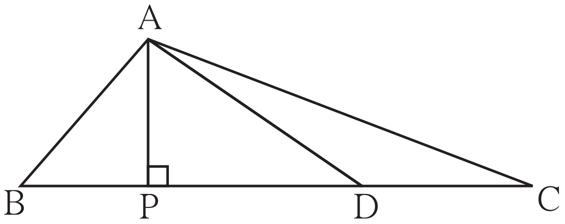
उकल : $\dfrac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DBC)} = \dfrac{AE}{DF}$ .... पाया समान, म्हणून क्षेत्रफळे उंचीच्या प्रमाणात

$$= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

उदा. (2) Δ ABC च्या BC बाजूवर D बिंदू असा आहे, की DC = 6, BC = 15.

A(Δ ABD) : A(Δ ABC) आणि A(Δ ABD) : A(Δ ADC) काढा.

उकल : Δ ABD, Δ ADC, Δ ABC या तिन्ही त्रिकोणांचा A हा समाईक शिरोबिंदू आहे व त्यांचा पाया एका रेषेत आहे म्हणून या तीनही त्रिकोणांची उंची समान आहे.



आकृती 1.10

BC = 15, DC = 6 $\therefore$ BD = BC − DC = 15 − 6 = 9

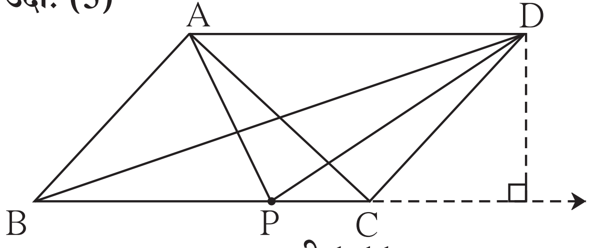
$$\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ABC)} = \frac{BD}{BC}$$ .... उंची समान, म्हणून क्षेत्रफळे पायांच्या प्रमाणात

$$= \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ADC)} = \frac{BD}{DC}$$ .... उंची समान, म्हणून क्षेत्रफळे पायांच्या प्रमाणात

$$= \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

उदा. (3)



आकृती 1.11

□ ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे. P हा बाजू BC वरील कोणताही एक बिंदू आहे. तर समान क्षेत्रफळांच्या त्रिकोणांच्या दोन जोड्या शोधा.

उकल : □ ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे.

$\therefore$ AD || BC व AB || DC

Δ ABC व Δ BDC विचारात घ्या.

हे त्रिकोण दोन समांतर रेषेमध्ये काढले आहेत. त्यामुळे समांतर रेषांमधील अंतर ही त्या दोन्ही त्रिकोणांची उंची होईल.

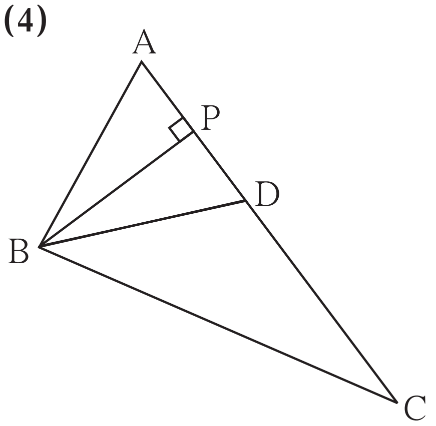
Δ ABC व Δ BDC चा BC हा पाया समान असून उंचीही समान आहे.

म्हणून A(Δ ABC) = A(Δ BDC)

Δ ABC व Δ ABD चा AB हा पाया समान असून त्यांची उंची सुद्धा समान आहे.

$\therefore$ A(Δ ABC) = A(Δ ABD)

उदा. (4)



आकृती 1.12

शेजारील आकृतीत Δ ABC च्या AC या बाजूवर D बिंदू असा आहे की AC = 16, DC = 9, $BP \perp AC$, तर खालील गुणोत्तरे काढा.

i) $\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ABC)}$ ii) $\frac{A(\Delta BDC)}{A(\Delta ABC)}$

iii) $\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta BDC)}$

उकल : Δ ABC च्या बाजू AC वर P व D बिंदू आहेत. म्हणून Δ ABD, Δ BDC, Δ ABC, Δ APB यांचा B हा सामाईक शिरोबिंदू विचारात घेतला तर त्यांच्या AD, DC, AC, AP या बाजू एका रेषेत आहेत. या सर्व त्रिकोणांची उंची समान आहे. म्हणून त्या त्रिकोणांची क्षेत्रफळे त्यांच्या पायांच्या प्रमाणात आहेत. AC = 16, DC = 9

$\therefore$ AD = 16 − 9 = 7

$\therefore \frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ABC)} = \frac{AD}{AC} = \frac{7}{16}$ . . . . (समान उंचीचे त्रिकोण)

$\frac{A(\Delta BDC)}{A(\Delta ABC)} = \frac{DC}{AC} = \frac{9}{16}$ . . . . (समान उंचीचे त्रिकोण)

$\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta BDC)} = \frac{AD}{DC} = \frac{7}{9}$ . . . . (समान उंचीचे त्रिकोण)

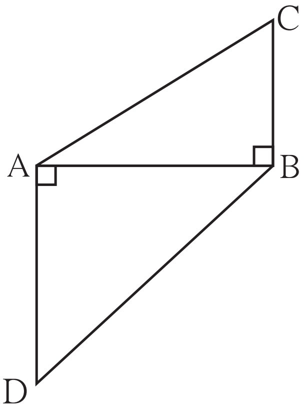
हे लक्षात ठेवूया.

- दोन त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर हे त्या त्रिकोणांच्या पाया व संगत उंची यांच्या गुणाकारांच्या गुणोत्तराएवढे असते.
- समान उंचीच्या त्रिकोणांची क्षेत्रफळे त्यांच्या संगत पायांच्या प्रमाणात असतात.
- समान पायांच्या त्रिकोणांची क्षेत्रफळे त्यांच्या संगत उंचींच्या प्रमाणात असतात.

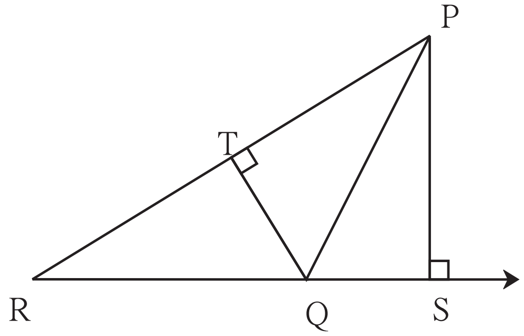
सरावसंच 1.1

1. एका त्रिकोणाचा पाया 9 आणि उंची 5 आहे. दुसऱ्या त्रिकोणाचा पाया 10 आणि उंची 6 आहे, तर त्या त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर काढा.

2. दिलेल्या आकृती 1.13 मध्ये BC $\perp$ AB, AD $\perp$ AB, BC = 4, AD = 8 तर $\dfrac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta ADB)}$ काढा.



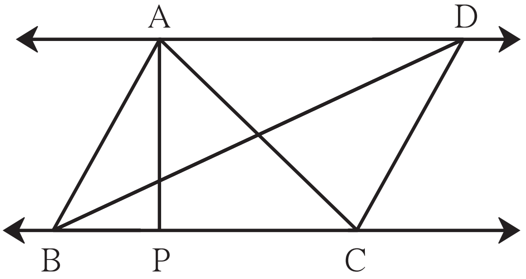
आकृती 1.13



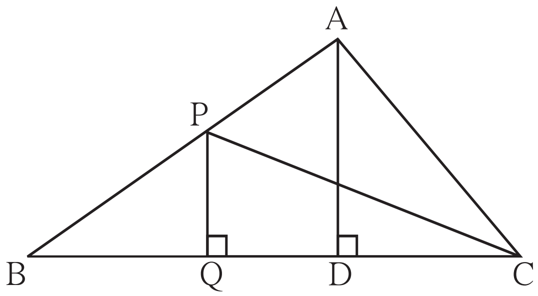
आकृती 1.14

3. शेजारील आकृती 1.14 मध्ये रेख PS $\perp$ रेख RQ रेख QT $\perp$ रेख PR. जर RQ = 6, PS = 6, PR = 12 तर QT काढा.

4. शेजारील आकृतीत AP $\perp$ BC, AD $\parallel$ BC, तर A(Δ ABC) : A(Δ BCD) काढा.



आकृती 1.15



आकृती 1.16

5. शेजारील आकृतीत, PQ $\perp$ BC, AD $\perp$ BC तर खालील गुणोत्तरे लिहा.

i) $\dfrac{A(\Delta PQB)}{A(\Delta PBC)}$ ii) $\dfrac{A(\Delta PBC)}{A(\Delta ABC)}$

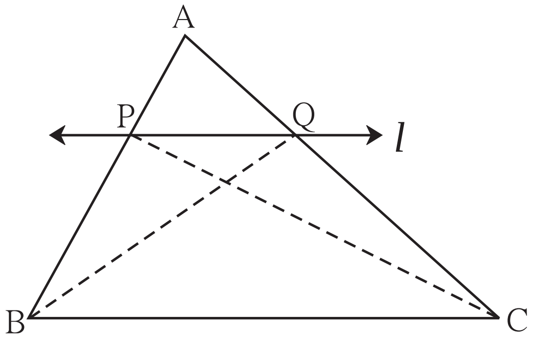
iii) $\dfrac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta ADC)}$ iv) $\dfrac{A(\Delta ADC)}{A(\Delta PQC)}$

जाणून घेऊया.

प्रमाणाचे मूलभूत प्रमेय (Basic Proportionality Theorem)

प्रमेय : **त्रिकोणाच्या एका बाजूला समांतर असणारी रेषा त्याच्या उरलेल्या बाजूंना भिन्न बिंदूंत छेदत असेल, तर ती रेषा त्या बाजूंना एकाच प्रमाणात विभागते.**

पक्ष : Δ ABC मध्ये रेषा $l \parallel$ रेख BC
आणि रेषा l ही बाजू AB ला P मध्ये
व बाजू AC ला Q मध्ये छेदते.



आकृती 1.17

साध्य : $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AQ}{QC}$

रचना : रेख PC व रेख BQ काढा.

सिद्धता : Δ APQ व Δ PQB हे समान उंचीचे त्रिकोण आहेत.

$\therefore \dfrac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQB)} = \dfrac{AP}{PB}$ .... (क्षेत्रफळे पायांच्या प्रमाणात) ..... (I)

तसेच $\dfrac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQC)} = \dfrac{AQ}{QC}$ .... (क्षेत्रफळे पायांच्या प्रमाणात) ..... (II)

Δ PQB व Δ PQC यांचा रेख PQ हा समान पाया आहे. रेख PQ $\parallel$ रेख BC

म्हणून Δ PQB व Δ PQC यांची उंची समान आहे.

$\therefore A(\Delta PQB) = A(\Delta PQC)$ .... (III)

$\therefore \dfrac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQB)} = \dfrac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQC)}$ .... [(I), (II) आणि (III)] वरून

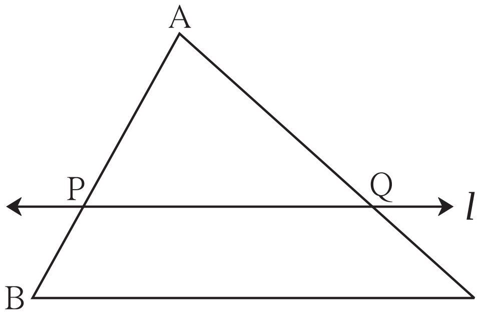
$\therefore \dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AQ}{QC}$ .... [(I) व (II)] वरून

प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयाचा व्यत्यास (converse of B.P.T.)

प्रमेय : **एखादी रेषा जर त्रिकोणाच्या दोन भुजांना भिन्न बिंदूंत छेदून एकाच प्रमाणात विभागत असेल, तर ती रेषा उरलेल्या बाजूला समांतर असते.**

आकृती 1.18 मध्ये जर रेषा l ही Δ ABC च्या बाजू AB आणि बाजू AC ला अनुक्रमे P आणि Q बिंदूत छेदते आणि $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AQ}{QC}$ तर रेषा $l \parallel$ रेख BC.

या प्रमेयाची सिद्‌धता अप्रत्यक्ष पद्‌धतीने देता येते.



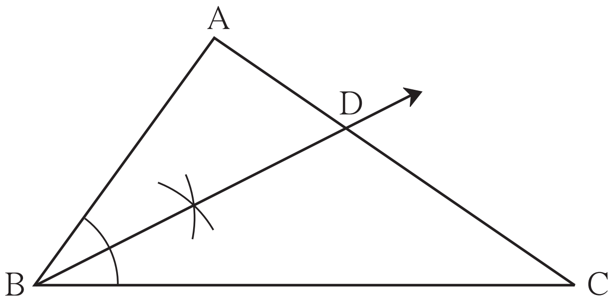
आकृती 1.18

कृती :

- Δ ABC हा कोणताही एक त्रिकोण काढा.
- त्रिकोणाचा ∠ B दुभागा. तो AC ला जेथे छेदतो त्याला D नाव द्या.
- बाजू मोजून लिहा.

  AB = ☐ सेमी   BC = ☐ सेमी

  AD = ☐ सेमी   DC = ☐ सेमी



आकृती 1.19

- $\frac{AB}{BC}$ व $\frac{AD}{DC}$ ही गुणोत्तरे काढा.
- दोन्ही गुणोत्तरे जवळ जवळ सारखी आहेत, हे अनुभवा.
- याच त्रिकोणाचे इतर कोन दुभागा व वरीलप्रमाणे गुणोत्तरे काढा. ती गुणोत्तरेही समान येतात हे अनुभवा.

जाणून घेऊया.

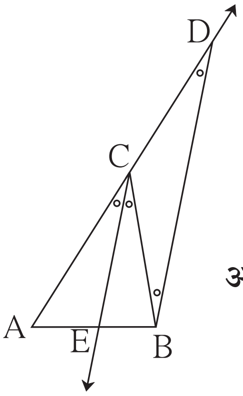
त्रिकोणाच्या कोनदुभाजकाचे प्रमेय (Theorem of an angle bisector of a triangle)

प्रमेय : **त्रिकोणाच्या कोनाचा दुभाजक त्या कोनासमोरील बाजूला उरलेल्या बाजूंच्या लांबींच्या गुणोत्तरात विभागतो.**

पक्ष : Δ ABC च्या ∠ C चा दुभाजक रेख AB ला E बिंदूत छेदतो.

साध्य : $\frac{AE}{EB} = \frac{CA}{CB}$

रचना : बिंदू B मधून, किरण CE ला समांतर रेषा काढा, ती वाढवलेल्या AC ला बिंदू D मध्ये छेदते.



आकृती 1.20

सिद्धता : किरण CE || किरण BD व रेषा AD ही छेदिका

$\therefore \angle ACE \cong \angle CDB$ .... (संगत कोन)...(I)

आता BC ही छेदिका घेऊन

$\angle ECB \cong \angle CBD$ .... (व्युत्क्रम कोन)...(II)

परंतु $\angle ACE \cong \angle ECB$ .... (पक्ष)...(III)

$\therefore \angle CBD \cong \angle CDB$ .... [विधान (I), (II) आणि (III) वरून]

Δ CBD मध्ये, बाजू CB $\cong$ बाजू CD .... (एकरूप कोनासमोरील बाजू)

$\therefore$ CB = CD ...(IV)

आता, Δ ABD मध्ये, रेख EC || बाजू BD .... (रचना)

$\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{AC}{CD}$ .... (प्रमाणाचे मूलभूत प्रमेय)...(V)

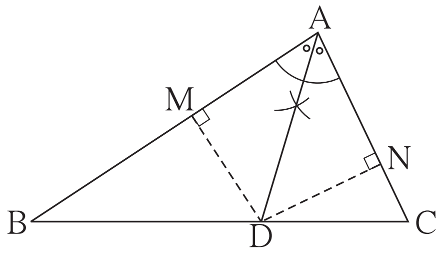
$\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{AC}{CB}$ .... [विधान (IV) आणि (V) वरून]

अधिक माहितीसाठी :

वरील प्रमेयाची सिद्धता दुसऱ्या प्रकारे तुम्ही लिहा.

त्यासाठी आकृती 1.21 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे Δ ABC काढा आणि DM $\perp$ AB आणि DN $\perp$ AC काढा.

(1) समान उंचीच्या त्रिकोणांची क्षेत्रफळे त्यांच्या संगत पायांच्या प्रमाणात असतात,

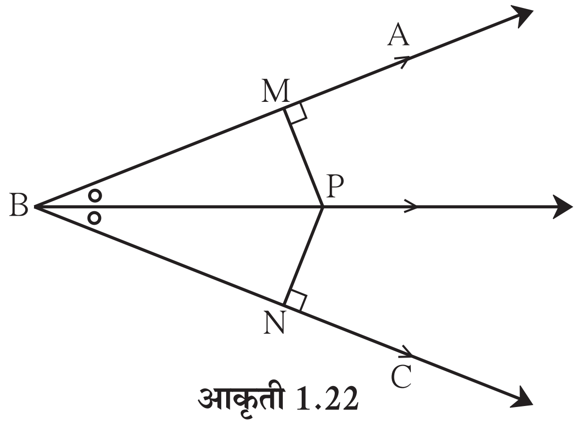


आकृती 1.21

आणि

(2) कोनदुभाजकावरील प्रत्येक बिंदू हा कोनाच्या भुजांपासून समदूर असतो,

या गुणधर्मांचा उपयोग करा.



आकृती 1.22

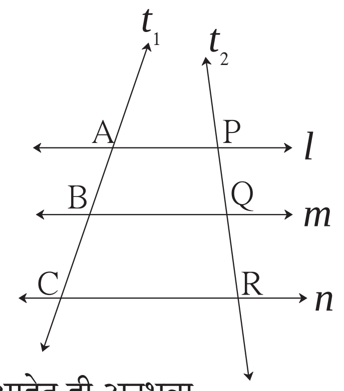
त्रिकोणाच्या कोनदुभाजकाच्या प्रमेयाचा व्यत्यास (Converse of angle bisector of triangle)

Δ ABC च्या बाजू BC वर जर बिंदू D असा असेल, की $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$, तर किरण AD हा $\angle$ BAC चा दुभाजक असतो.

तीन समांतर रेषा व त्यांच्या छेदिका यांचा गुणधर्म
(Property of three parallel lines and their transversal)

कृती :

- तीन समांतर रेषा काढा.
- त्यांना l, m, n अशी नावे द्या.
- t_1 व t_2 या दोन छेदिका काढा.
- t_1 या छेदिकेवरील आंतरछेद AB व BC आहेत.
- t_2 या छेदिकेवरील आंतरछेद PQ व QR आहेत.
- $\frac{AB}{BC}$ व $\frac{PQ}{QR}$ ही गुणोत्तरे काढा. ती जवळपास सारखी आहेत ही अनुभवा.



आकृती 1.23

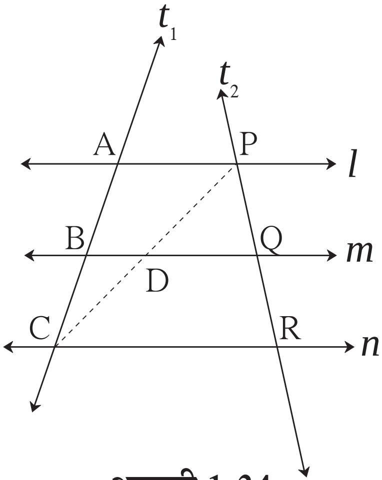
प्रमेय : **तीन समांतर रेषांनी एका छेदिकेवर केलेल्या आंतरछेदांचे गुणोत्तर हे त्या रेषांनी दुसऱ्या कोणत्याही छेदिकेवर केलेल्या आंतरछेदांच्या गुणोत्तराएवढे असते.**

पक्ष : रेषा l || रेषा m || रेषा n

t_1 व t_2 या त्यांच्या छेदिका आहेत.

t_1 ही छेदिका त्या रेषांना अनुक्रमे A, B, C या बिंदूंत छेदते. t_2 ही छेदिका या रेषांना अनुक्रमे P, Q, R या बिंदूंत छेदते.

साध्य : $\frac{AB}{BC} = \frac{PQ}{QR}$



आकृती 1.24

सिद्धता : रेख PC काढला. हा रेषाखंड रेषा m ला D बिंदूत छेदतो.

Δ ACP मध्ये, BD || AP

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{PD}{DC}$. . . . . (I) (प्रमाणाचे मूलभूत प्रमेय)

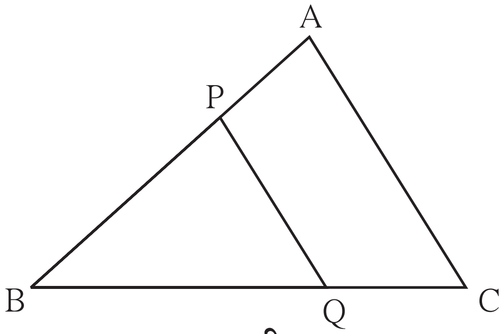
Δ CPR मध्ये DQ || CR

$\therefore \frac{PD}{DC} = \frac{PQ}{QR}$. . . . . (II) (प्रमाणाचे मूलभूत प्रमेय)

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{PD}{DC} = \frac{PQ}{QR}$. . . . . . (I) व (II) वरून.

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{PQ}{QR}$

हे लक्षात ठेवूया.



आकृती 1.25

(1) प्रमाणाचे मूलभूत प्रमेय

Δ ABC मध्ये जर B-P-A ; B-Q-C आणि रेख PQ || रेख AC असेल

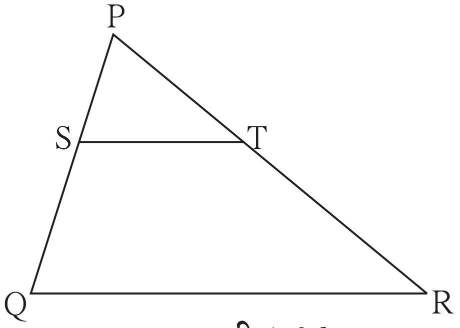
तर $\frac{BP}{PA} = \frac{BQ}{QC}$

(2) प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयाचा व्यत्यास

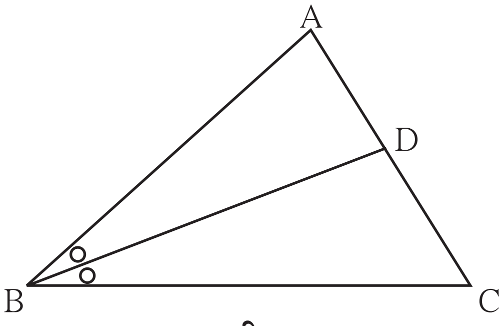
Δ PQR मध्ये जर P-S-Q ; P-T-R

आणि $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$

तर रेख ST || रेख QR.



आकृती 1.26



आकृती 1.27

(3) त्रिकोणाच्या कोनदुभाजकाचे प्रमेय

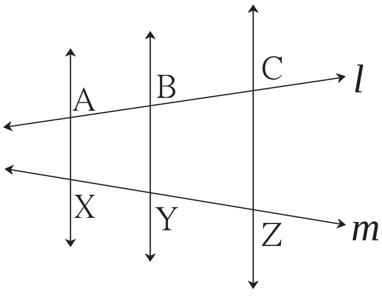
Δ ABC च्या $\angle$ ABC चा BD हा दुभाजक असेल आणि जर A-D-C,

तर $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$

(4) तीन समांतर रेषा व त्यांच्या छेदिका यांचा गुणधर्म

जर रेषा AX || रेषा BY || रेषा CZ आणि रेषा l व रेषा m या छेदिका त्यांना अनुक्रमे A, B, C व X, Y, Z मध्ये छेदत असतील

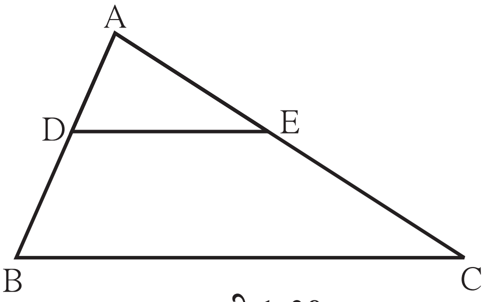
तर $\frac{AB}{BC} = \frac{XY}{YZ}$



आकृती 1.28

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) Δ ABC मध्ये DE || BC (आकृती 1.29)
जर DB = 5.4 सेमी, AD = 1.8 सेमी
EC = 7.2 सेमी तर AE काढा.



आकृती 1.29

उकल : Δ ABC मध्ये DE || BC

$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ..... (प्रमाणाचे मूलभूत प्रमेय)

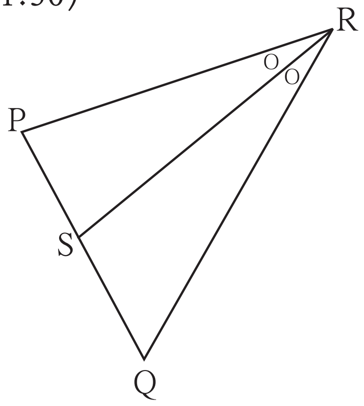
$\therefore \frac{1.8}{5.4} = \frac{AE}{7.2}$

$\therefore$ AE $\times$ 5.4 = 1.8 $\times$ 7.2

$\therefore$ AE = $\frac{1.8 \times 7.2}{5.4}$ = 2.4

AE = 2.4 सेमी

उदा. (2) Δ PQR मध्ये रेख RS हा $\angle$R चा दुभाजक आहे. (आकृती 1.30)
जर PR = 15, RQ = 20, PS = 12
तर SQ काढा.



आकृती 1.30

उकल : Δ PRQ मध्ये रेख RS हा $\angle$R चा दुभाजक आहे.

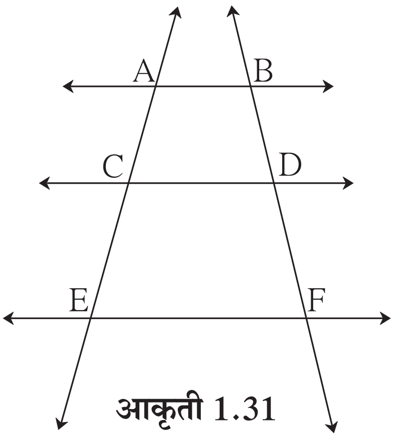
$\frac{PR}{RQ} = \frac{PS}{SQ}$ . . . . . . (कोनदुभाजकाचा गुणधर्म)

$\frac{15}{20} = \frac{12}{SQ}$

SQ = $\frac{12 \times 20}{15}$ = 16

$\therefore$ SQ = 16

कृती :



आकृती 1.31

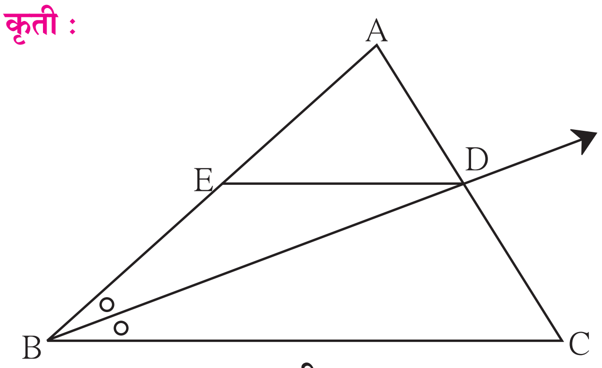
दिलेल्या आकृती 1.31 मध्ये AB || CD || EF
जर AC = 5.4, CE = 9, BD = 7.5 तर चौकटी योग्य प्रकारे भरून DF काढा.

उकल : AB || CD || EF

$\frac{AC}{\square} = \frac{\square}{DF}$ . . . . . ($\square$)

$\frac{5.4}{9} = \frac{\square}{DF}$ $\therefore$ DF = $\square$

कृती :



आकृती 1.32

Δ ABC मध्ये किरण BD हा $\angle$ ABC चा दुभाजक आहे. A-D-C रेख DE || बाजू BC, A-E-B, तर सिद्ध करा की, $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EB}$

सिद्धता : Δ ABC मध्ये किरण BD हा $\angle$ B चा दुभाजक आहे.

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$ .... (कोन दुभाजकाचे प्रमेय) .... (I)

Δ ABC मध्ये DE || BC

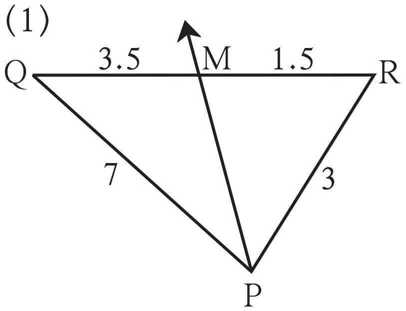
$\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC}$ .... (. . . . .) .... (II)

$\frac{AB}{\square} = \frac{\square}{EB}$ .... (I) व (II) वरून

सरावसंच 1.2

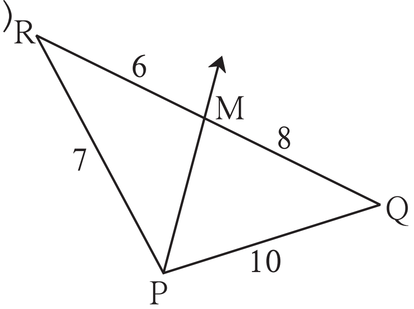
1. खाली काही त्रिकोण आणि रेषाखंडांच्या लांबी दिल्या आहेत. त्यांवरून कोणत्या आकृतीत किरण PM हा $\angle$ QPR चा दुभाजक आहे ते ओळखा.

(1)



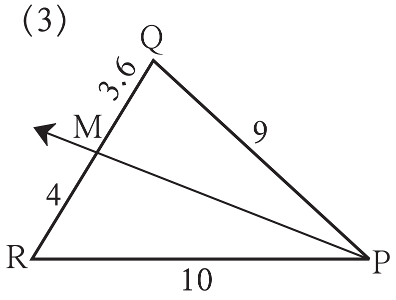
आकृती 1.33

(2)



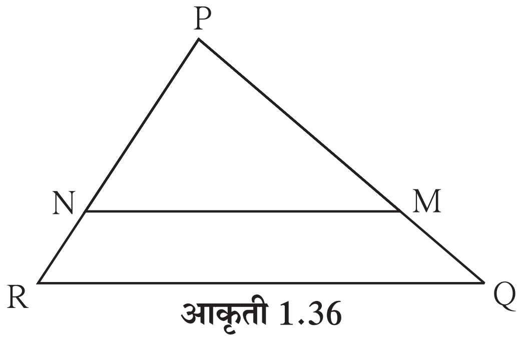
आकृती 1.34

(3)



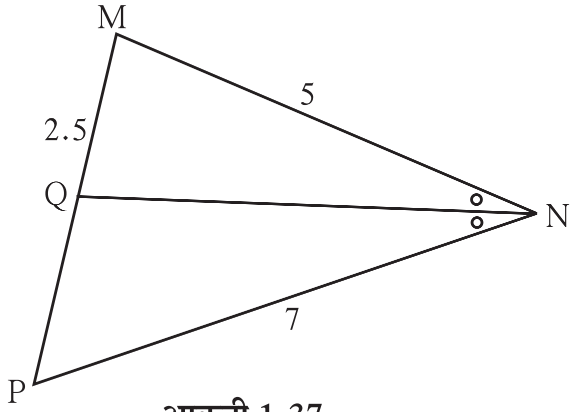
आकृती 1.35

2. जर Δ PQR मध्ये PM = 15, PQ = 25, PR = 20, NR = 8 तर रेषा NM ही बाजू RQ ला समांतर आहे का? कारण लिहा.

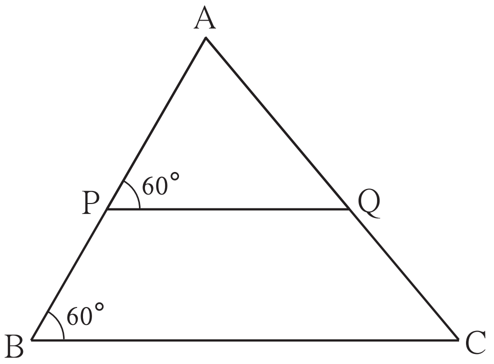


आकृती 1.36

3. Δ MNP च्या $\angle$ N चा NQ हा दुभाजक आहे. जर MN = 5, PN = 7, MQ = 2.5 तर QP काढा.



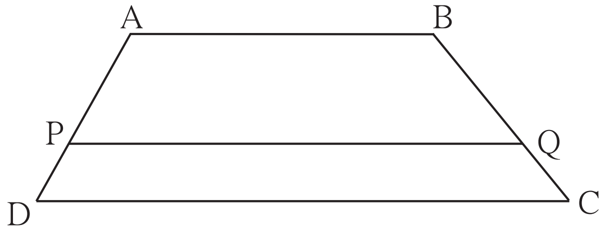
आकृती 1.37



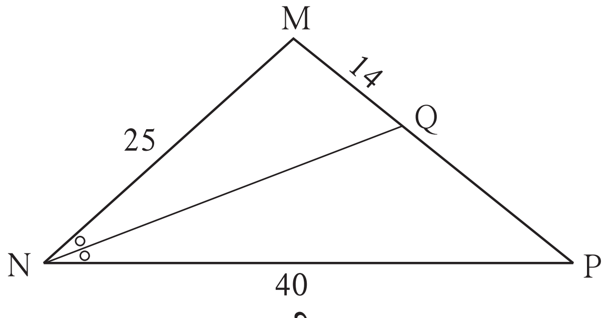
आकृती 1.38

4. आकृतीत काही कोनांची मापे दिली आहेत त्यावरून दाखवा, की $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$

5. समलंब चौकोन ABCD मध्ये, बाजूAB || बाजूPQ || बाजूDC, जर AP = 15, PD = 12, QC = 14 तर BQ काढा.



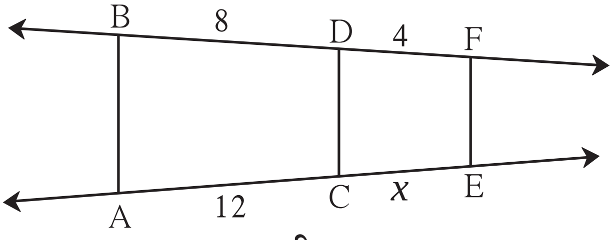
आकृती 1.39



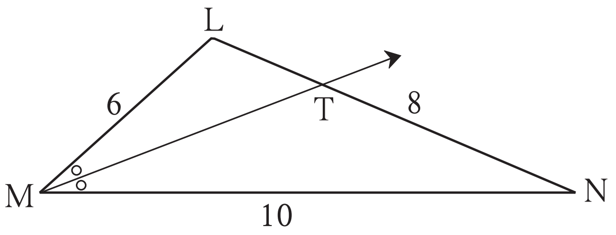
आकृती 1.40

6. आकृती 1.40 मध्ये दिलेल्या माहितीवरून QP काढा.

7. आकृती 1.41 मध्ये जर AB || CD || FE तर x ची किंमत काढा व AE काढा.



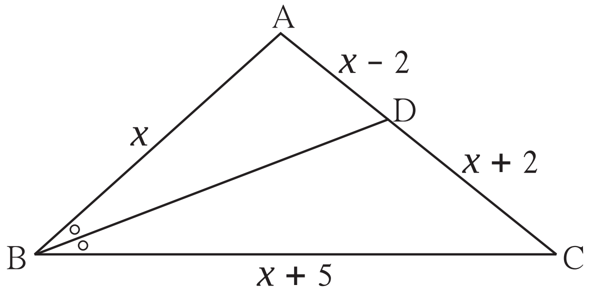
आकृती 1.41



आकृती 1.42

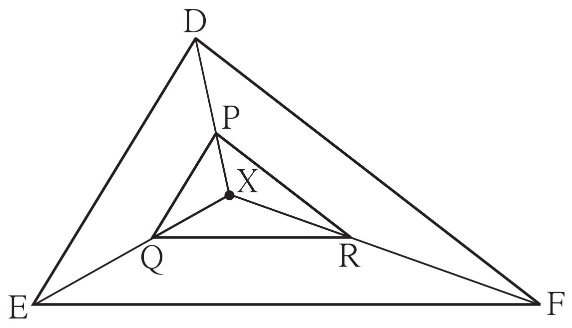
8. Δ LMN मध्ये किरण MT हा ∠ LMN चा दुभाजक आहे.

जर LM = 6, MN = 10, TN = 8 तर LT काढा.



आकृती 1.43

9. Δ ABC मध्ये रेख BD हा ∠ ABC चा दुभाजक आहे, जर AB = x, BC = x + 5, AD = x – 2, DC = x + 2 तर x ची किंमत काढा.



आकृती 1.44

10. शेजारील आकृती 1.44 मध्ये त्रिकोणाच्या अंतर्भागात X हा एक कोणताही बिंदू आहे. बिंदू X हा त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूंशी जोडला आहे. तसेच रेख PQ || रेख DE, रेख QR || रेख EF तर रेख PR || रेख DF हे सिद्ध करण्यासाठी खालील चौकटी पूर्ण करा.

सिद्धता : Δ XDE मध्ये PQ || DE .... $\square$

$\therefore \dfrac{XP}{\square} = \dfrac{\square}{QE}$ .... (I) (प्रमाणाचे मूलभूत प्रमेय)

Δ XEF मध्ये QR || EF .... $\square$

$\therefore \dfrac{\square}{\square} = \dfrac{\square}{\square}$ ....(II) $\square$

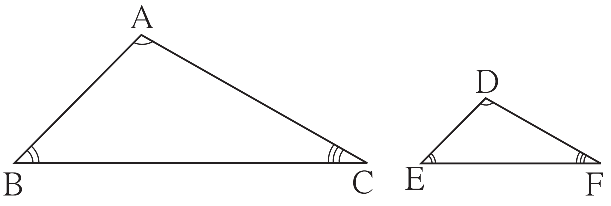
$\therefore \dfrac{\square}{\square} = \dfrac{\square}{\square}$ .... विधान (I) व (II) वरून

∴ रेख PR || रेख DF .... (प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयाचा व्यत्यास)

11★. Δ ABC मध्ये AB = AC, ∠ B व ∠ C चे दुभाजक बाजू AC व बाजू AB यांना अनुक्रमे बिंदू D व E मध्ये छेदतात. तर सिद्ध करा, की रेख ED || रेख BC.

जरा आठवूया.

समरूप त्रिकोण (Similar triangles)



आकृती 1.45

Δ ABC व Δ DEF मध्ये जर $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$

आणि $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

तर Δ ABC व Δ DEF हे त्रिकोण समरूप असतात.

Δ ABC व Δ DEF समरूप आहेत हे $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ असे लिहितात.

जाणून घेऊया.

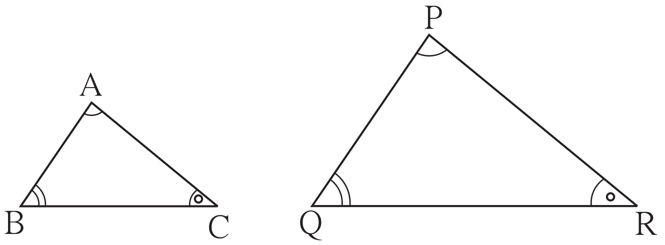
त्रिकोणांच्या समरूपतेच्या कसोट्या (Tests for similarity of triangles)

दोन त्रिकोण समरूप असण्यासाठी त्यांच्या तिन्ही संगत बाजू प्रमाणात असणे आणि तिन्ही संगत कोन एकरूप असणे आवश्यक असते; परंतु या सहा अटींपैकी तीन विशिष्ट अटींची पूर्तता झाल्यास उरलेल्या अटींची पूर्तता आपोआप होते; म्हणजे दोन त्रिकोण समरूप होण्यासाठी तीनच विशिष्ट अटी पुरेशा असतात. या तीन अटी तपासून दोन त्रिकोण समरूप आहेत का हे ठरविता येते. अशा पुरेशा अटींचा समूह म्हणजेच समरूपतेच्या कसोट्या होत. म्हणून दोन त्रिकोण समरूप आहेत का हे ठरवण्यासाठी त्या विशिष्ट अटी तपासणे पुरेसे असते.

समरूपतेची कोकोको कसोटी (AAA test for similarity of triangles)

दोन त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूंमधील दिलेल्या एकास एक संगतीनुसार होणारे संगत कोन जर एकरूप असतील तर ते त्रिकोण समरूप असतात.

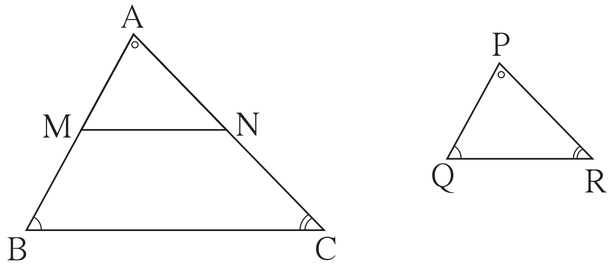
Δ ABC व Δ PQR मध्ये ABC $\leftrightarrow$ PQR या संगतीत जर $\angle A \cong \angle P$, $\angle B \cong \angle Q$, $\angle C \cong \angle R$, तर $\Delta ABC \sim \Delta PQR$.



आकृती 1.46

अधिक माहितीसाठी :

कोकोको कसोटीची सिद्धता



आकृती 1.47

पक्ष : Δ ABC व Δ PQR मध्ये,

$\angle A \cong \angle P$, $\angle B \cong \angle Q$,

$\angle C \cong \angle R$.

साध्य : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

सिद्धता : Δ ABC हा Δ PQR पेक्षा मोठा आहे असे मानू. मग AB वर बिंदू M, AC वर बिंदू N असा घ्या की, AM = PQ आणि AN = PR. त्यावरून $\Delta AMN \cong \Delta PQR$ हे दाखवा.

त्यावरून MN || BC दाखवता येते.

आता प्रमाणाचे मूलभूत प्रमेय वापरून, $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$

म्हणजेच, $\frac{MB}{AM} = \frac{NC}{AN}$ .... (व्यस्त करून)

$\frac{MB + AM}{AM} = \frac{NC + AN}{AN}$ .... (योग क्रिया करून)

$\therefore \frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$

$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$. त्याचप्रमाणे $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ हे दाखविता येईल.

$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$ $\quad \therefore \Delta ABC \sim \Delta PQR$

समरूप त्रिकोणांची कोको कसोटी (AA test for similarity of triangles)

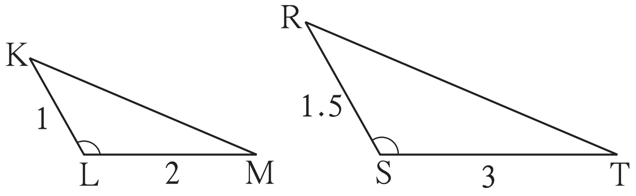
शिरोबिंदूंच्या एखाद्या एकास एक संगतीनुसार एका त्रिकोणाचे दोन कोन जर दुसऱ्या त्रिकोणाच्या दोन संगत कोनांशी एकरूप असतील, तर पहिल्या त्रिकोणाचा उरलेला कोन हा दुसऱ्या त्रिकोणाच्या उरलेल्या कोनाशी एकरूप असतो हे आपल्याला माहीत आहे, म्हणजेच एका त्रिकोणाचे दोन कोन दुसऱ्या त्रिकोणाच्या दोन संगत कोनांशी एकरूप असतील तरीही ही अट दोन त्रिकोण समरूप होण्यासाठी पुरेशी असते.

यावरून, एका त्रिकोणाचे दोन कोन दुसऱ्या त्रिकोणाच्या दोन कोनांशी एकरूप असतील, तर ते दोन त्रिकोण समरूप असतात.

या गुणधर्माला समरूपतेची कोको कसोटी म्हणतात.

समरूपतेची बाकोबा कसोटी (SAS test for similarity of triangles)

दोन त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूंच्या एखाद्या एकास एक संगतीनुसार त्यांच्या संगत बाजूंच्या दोन जोड्या एकाच प्रमाणात असतील आणि त्या बाजूंनी समाविष्ट केलेले कोन एकरूप असतील, तर ते दोन त्रिकोण समरूप असतात.



आकृती 1.48

उदाहरणार्थ, जर Δ KLM व Δ RST मध्ये

$\angle KLM \cong \angle RST$

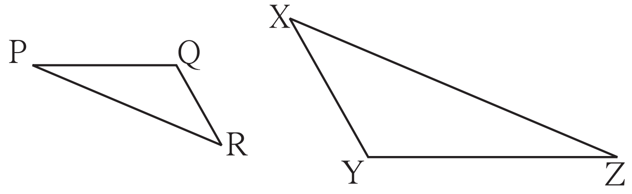
$$\frac{KL}{RS} = \frac{LM}{ST}$$

तर $\Delta KLM \sim \Delta RST$

समरूपतेची बाबाबा कसोटी (SSS test for similarity of triangles)

दोन त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूमधील एखाद्या एकास एक संगतीत जेव्हा एका त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजू दुसऱ्या त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजूंशी एकाच प्रमाणात असतात तेव्हा ते त्रिकोण समरूप असतात.

समरूपतेच्या या गुणधर्माला बाबाबा कसोटी म्हणतात.



आकृती 1.49

उदाहरणार्थ, जर Δ PQR व Δ XYZ मध्ये जर,

$$\frac{PQ}{YZ} = \frac{QR}{XY} = \frac{PR}{XZ}$$

तर $\Delta PQR \sim \Delta ZYX$

समरूप त्रिकोणांचे गुणधर्म :

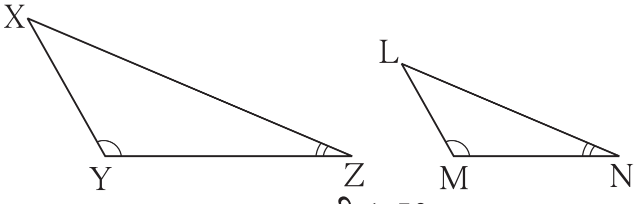
(1) $\Delta ABC \sim \Delta ABC$ – परावर्तनता (Reflexivity)

(2) जर $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ तर $\Delta DEF \sim \Delta ABC$ – सममितता (Symmetry)

(3) जर $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ आणि $\Delta DEF \sim \Delta GHI$ तर $\Delta ABC \sim \Delta GHI$ – संक्रामकता (Transitivity)

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) Δ XYZ मध्ये $\angle Y = 100^\circ$, $\angle Z = 30^\circ$, Δ LMN मध्ये $\angle M = 100^\circ$, $\angle N = 30^\circ$, तर Δ XYZ व Δ LMN हे समरूप आहेत काय?, असतील तर कोणत्या कसोटीनुसार?



आकृती 1.50

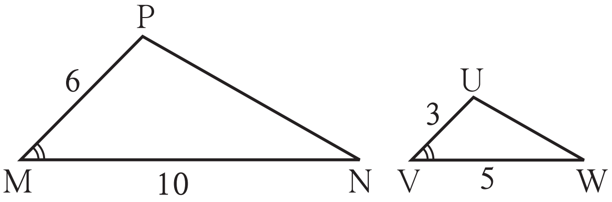
उकल : Δ XYZ व Δ LMN मध्ये,

$\angle Y = 100°$, $\angle M = 100°$ $\therefore \angle Y \cong \angle M$

$\angle Z = 30°$, $\angle N = 30°$ $\therefore \angle Z \cong \angle N$

$\therefore \Delta XYZ \sim \Delta LMN$ .... (कोको कसोटीनुसार)

उदा. (2) आकृती 1.51 मध्ये दिलेल्या माहितीवरून त्रिकोण समरूप आहेत का? असतील तर कोणत्या कसोटीनुसार?



आकृती 1.51

उकल : Δ PMN व Δ UVW मध्ये

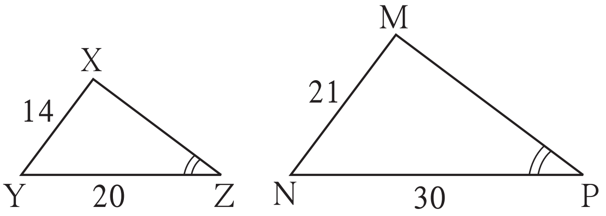
$\frac{PM}{UV} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}, \frac{MN}{VW} = \frac{10}{5} = \frac{2}{1}$

$\therefore \frac{PM}{UV} = \frac{MN}{VW}$

आणि $\angle M \cong \angle V$ .... (पक्ष)

$\therefore \Delta PMN \sim \Delta UVW$ .... (समरूपतेची बाकोबा कसोटी)

उदा. (3) आकृती 1.52 मध्ये दिलेल्या माहितीवरून त्रिकोण समरूप आहेत असे म्हणता येईल का? म्हणता येत असेल तर कोणत्या कसोटीनुसार ?



आकृती 1.52

उकल : Δ XYZ व Δ MNP मध्ये

$\frac{XY}{MN} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$,

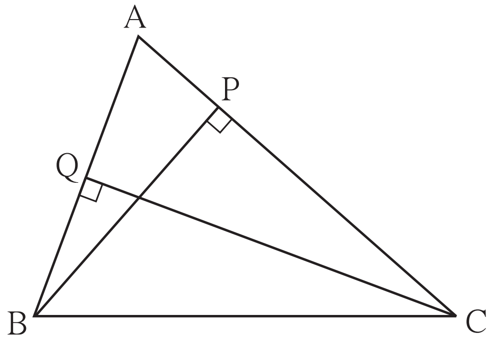
$\frac{YZ}{NP} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

$\therefore \frac{XY}{MN} = \frac{YZ}{NP}$

$\angle Z \cong \angle P$ दिले आहे. परंतु $\angle Z$ व $\angle P$ हे प्रमाणात असलेल्या बाजूंनी समाविष्ट केलेले कोन नाहीत.

$\therefore \Delta$ XYZ व Δ MNP हे समरूप आहेत असे म्हणता येणार नाही.

उदा. (4) शेजारील आकृतीमध्ये $BP \perp AC$, $CQ \perp AB$, A – P – C, A – Q – B , तर Δ APB व Δ AQC समरूप दाखवा.



आकृती 1.53

उकल : Δ APB व Δ AQC मध्ये

$\angle APB = \square^\circ$ (I)

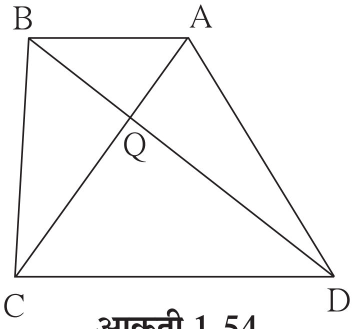
$\angle AQC = \square^\circ$ (II)

$\therefore \angle APB \cong \angle AQC$ .... (I) आणि (II) वरून

$\angle PAB \cong \angle QAC$ .... ($\square$)

$\therefore \Delta APB \sim \Delta AQC$ ..... (कोको कसोटी)

उदा. (5) जर चौकोन ABCD चे कर्ण Q बिंदूत छेदत असतील आणि 2QA = QC आणि 2QB = QD. तर DC = 2AB दाखवा.



आकृती 1.54

पक्ष : 2QA = QC

2QB = QD

साध्य : CD = 2AB

सिद्धता : $2QA = QC \therefore \frac{QA}{QC} = \frac{1}{2}$ .... (I)

$2QB = QD \therefore \frac{QB}{QD} = \frac{1}{2}$ .... (II)

$\therefore \frac{QA}{QC} = \frac{QB}{QD}$ .... (I) व (II) वरून

Δ AQB व Δ CQD मध्ये

$\frac{QA}{QC} = \frac{QB}{QD}$ .... (सिद्ध केले)

$\angle AQB \cong \angle DQC$ .... (परस्पर विरुध्द कोन)

$\therefore \Delta AQB \sim \Delta CQD$ .... (समरूपतेची बाकोबा कसोटी)

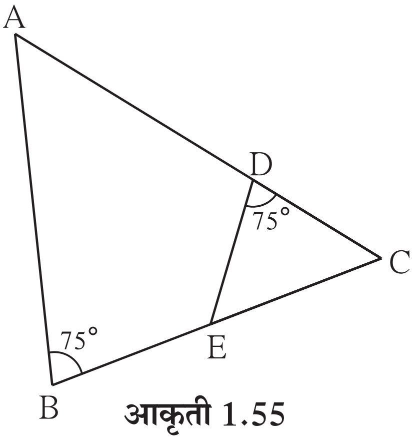
$\therefore \frac{AQ}{CQ} = \frac{QB}{QD} = \frac{AB}{CD}$ .... (संगत बाजू प्रमाणात)

परंतु $\frac{AQ}{CQ} = \frac{1}{2} \quad \therefore \frac{AB}{CD} = \frac{1}{2}$

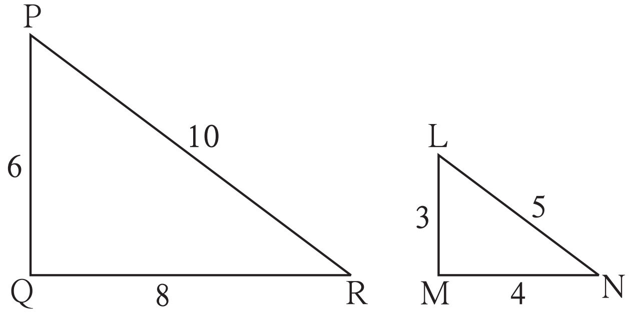
$\therefore 2AB = CD$

सरावसंच 1.3

1. आकृती 1.55 मध्ये $\angle ABC = 75°$, $\angle EDC = 75°$ तर कोणते दोन त्रिकोण कोणत्या कसोटीनुसार समरूप आहेत? त्यांची समरूपता योग्य एकास एक संगतीत लिहा.



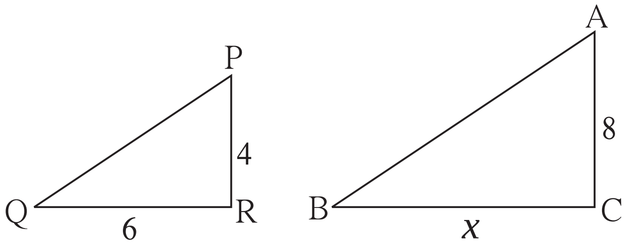
आकृती 1.55



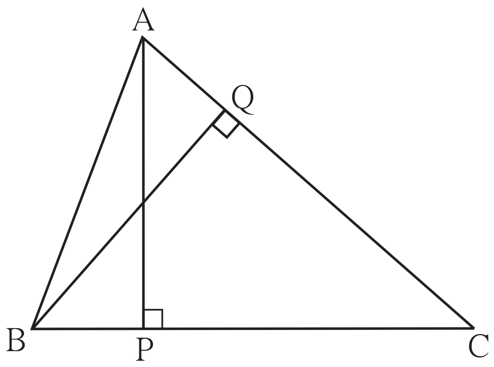
आकृती 1.56

2. आकृती 1.56 मधील त्रिकोण समरूप आहेत का? असतील तर कोणत्या कसोटीनुसार ?

3. आकृती 1.57 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे 8 मीटर व 4 मीटर उंचीचे दोन खांब सपाट जमिनीवर उभे आहेत. सूर्यप्रकाशाने लहान खांबाची सावली 6 मीटर पडते, तर त्याच वेळी मोठ्या खांबाची सावली किती लांबीची असेल?



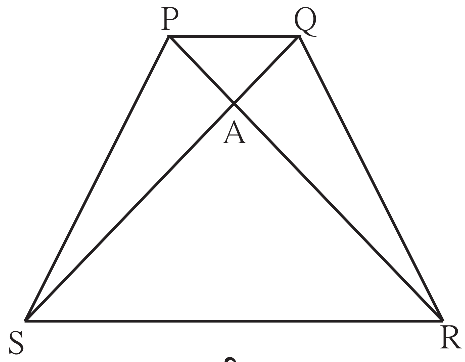
आकृती 1.57



आकृती 1.58

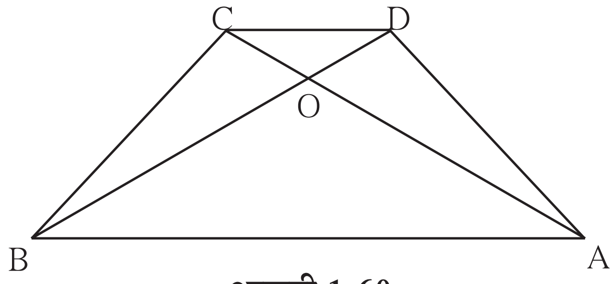
4. ΔABC मध्ये $AP \perp BC$, $BQ \perp AC$ B- P-C, A-Q - C तर, $\Delta CPA \sim \Delta CQB$ दाखवा. जर AP = 7, BQ = 8, BC = 12 तर AC काढा.

5. आकृतीत समलंब चौकोन PQRS मध्ये, बाजू PQ || बाजू SR, AR = 5AP, AS = 5AQ तर सिद्ध करा, SR = 5PQ



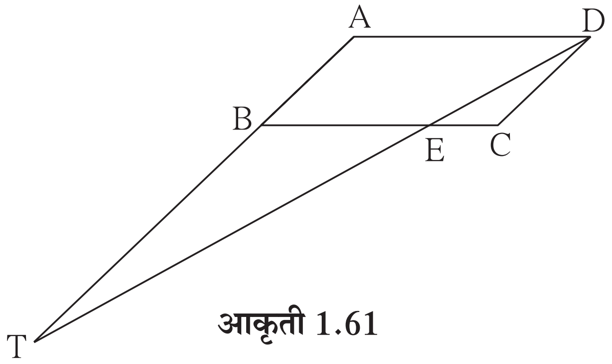
आकृती 1.59

6. समलंब चौकोन ABCD मध्ये, (आकृती 1.60) बाजू AB || बाजू DC कर्ण AC व कर्ण BD हे परस्परांना O बिंदूत छेदतात. AB = 20, DC = 6, OB = 15 तर OD काढा.



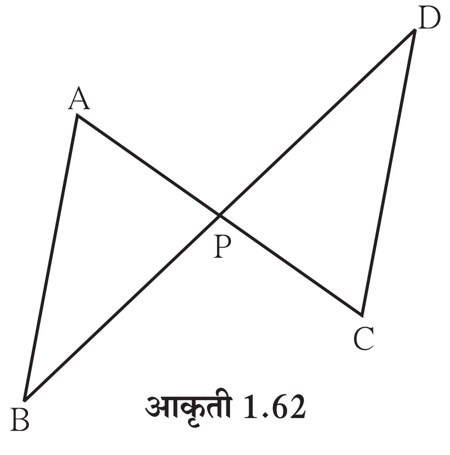
आकृती 1.60

7. □ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे. बाजू BC वर E हा एक बिंदू आहे, रेषा DE ही किरण AB ला T बिंदूत छेदते. तर DE × BE = CE × TE दाखवा.



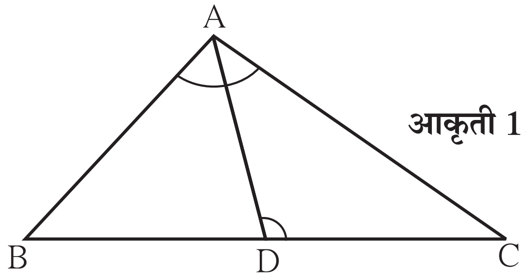
आकृती 1.61

8. आकृतीत रेख AC व रेख BD परस्परांना P बिंदूत छेदतात आणि $\frac{AP}{CP} = \frac{BP}{DP}$ तर सिद्ध करा, $\Delta ABP \sim \Delta CDP$



आकृती 1.62

9. आकृतीत Δ ABC मध्ये बाजू BC वर D हा बिंदू असा आहे, की ∠ BAC = ∠ ADC तर सिद्ध करा, $CA^2 = CB \times CD$

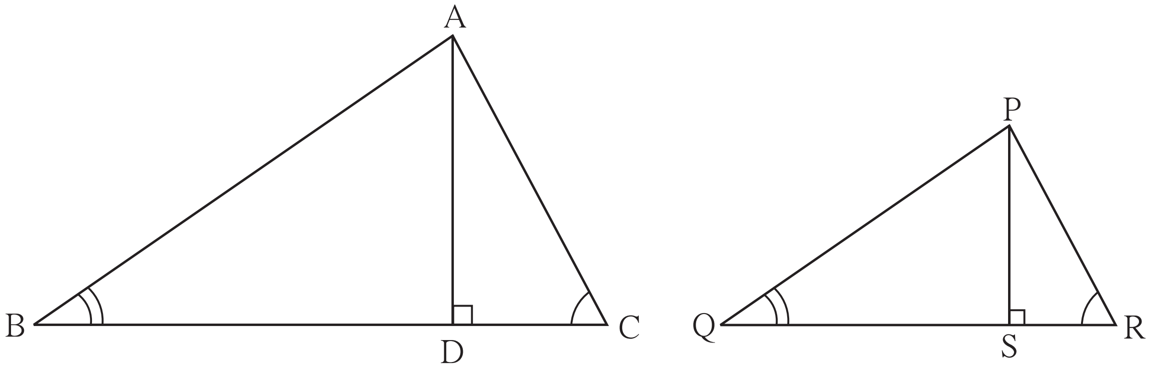


आकृती 1.63

जाणून घेऊया.

समरूप त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे प्रमेय (Theorem of areas of similar triangles)

प्रमेय : **जर दोन त्रिकोण समरूप असतील तर त्यांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर हे त्यांच्या संगत भुजांच्या वर्गांच्या गुणोत्तराएवढे असते.**



आकृती 1.64

पक्ष : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, $AD \perp BC$, $PS \perp QR$

साध्य : $\dfrac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \dfrac{AB^2}{PQ^2} = \dfrac{BC^2}{QR^2} = \dfrac{AC^2}{PR^2}$

सिद्धता : $\dfrac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \dfrac{BC \times AD}{QR \times PS} = \dfrac{BC}{QR} \times \dfrac{AD}{PS}$ .... (I)

ΔABD व ΔPQS मध्ये

$\angle B = \angle Q$ .... (पक्ष)

$\angle ADB = \angle PSQ = 90^\circ$

$\therefore$ कोको कसोटीनुसार $\Delta ABD \sim \Delta PQS$

$\therefore \dfrac{AD}{PS} = \dfrac{AB}{PQ}$ .... (II)

परंतु $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

$\therefore \dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{AC}{PR}$ .... (III)

(II) व (III) वरून

$\dfrac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \dfrac{BC}{QR} \times \dfrac{AD}{PS} = \dfrac{BC}{QR} \times \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{BC^2}{QR^2} = \dfrac{AB^2}{PQ^2} = \dfrac{BC^2}{QR^2}$

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, A (Δ ABC) = 16 , A (Δ PQR) = 25 तर $\frac{AB}{PQ}$ या गुणोत्तराची किंमत काढा.

उकल : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{AB^2}{PQ^2}$ ....(समरूपत्रिकोणांच्याक्षेत्रफळांचेगुणोत्तरसंगतबाजूंच्या वर्गांच्या गुणोत्तराएवढे असते.)

$\therefore \frac{16}{25} = \frac{AB^2}{PQ^2}$ $\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{4}{5}$ .... (वर्गमुळे घेऊन)

उदा. (2) दोन समरूप त्रिकोणांच्या संगत भुजांचे गुणोत्तर 2:5 आहे , लहान त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ 64 चौसेमी असेल तर मोठ्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ किती ?

उकल : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ मानू.

Δ ABC हा लहान त्रिकोण व Δ PQR हा मोठा त्रिकोण आहे, असे मानू.

$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{(2)^2}{(5)^2} = \frac{4}{25}$ .... (समरूप त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांची गुणोत्तरे)

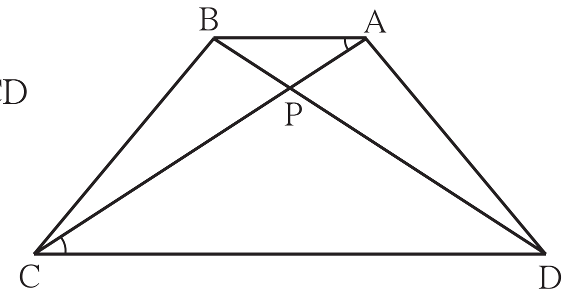
$\therefore \frac{64}{A(\Delta PQR)} = \frac{4}{25}$

$4 \times A(\Delta PQR) = 64 \times 25$

$A(\Delta PQR) = \frac{64 \times 25}{4} = 400$

$\therefore$ मोठ्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ = 400 चौसेमी

उदा. (3) समलंब चौकोन ABCD मध्ये बाजू AB || बाजू CD, कर्ण AC व कर्ण BD हे एकमेकांना P मध्ये छेदतात, तर सिद्ध करा $\frac{A(\Delta APB)}{A(\Delta CPD)} = \frac{AB^2}{CD^2}$



आकृती 1.65

उकल : समलंब चौकोन ABCD मध्ये बाजू AB || बाजू CD

Δ APB व ΔCPD मध्ये

$\angle PAB \cong \angle PCD$ ..... (व्युत्क्रम कोन)

$\angle APB \cong \angle CPD$ ..... (परस्पर विरुद्ध कोन)

$\therefore \Delta APB \sim \Delta CPD$ ..... (कोको कसोटी)

$\frac{A(\Delta APB)}{A(\Delta CPD)} = \frac{AB^2}{CD^2}$ .... (समरूप त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे प्रमेय)

सरावसंच 1.4

1. दोन समरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजूंचे गुणोत्तर 3 : 5 आहे, तर त्यांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर काढा.

2. Δ ABC ~ Δ PQR आणि AB : PQ = 2:3, तर खालील चौकटी पूर्ण करा.

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{AB^2}{\square} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{\square}{\square}$$

3. Δ ABC ~ Δ PQR, A (Δ ABC) = 80, A(Δ PQR) = 125, तर खालील चौकटी पूर्ण करा.

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta \ldots)} = \frac{80}{125} = \frac{\square}{\square} \qquad \therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{\square}{\square}$$

4. Δ LMN ~ Δ PQR, 9 × A (ΔPQR) = 16 × A (ΔLMN) जर QR = 20 तर MN काढा.

5. दोन समरूप त्रिकोणांची क्षेत्रफळे 225 चौसेमी व 81 चौसेमी आहेत. जर लहान त्रिकोणाची एक बाजू 12 सेमी असेल तर मोठ्या त्रिकोणाची संगत बाजू काढा.

6. Δ ABC व Δ DEF हे दोन्ही समभुज त्रिकोण आहेत. A (ΔABC) : A (Δ DEF) = 1 : 2 असून AB = 4 तर DE ची लांबी काढा .

7. आकृती 1.66 मध्ये रेख PQ || रेख DE, A (Δ PQF) = 20 एकक, जर PF = 2 DP आहे, तर A($\square$ DPQE) काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

A(Δ PQF) = 20 एकक, PF = 2 DP, DP = x मानू. ∴ PF = 2x

DF = DP + $\square$ = $\square$ + $\square$ = 3x

Δ FDE व Δ FPQ मध्ये

$\angle$ FDE ≅ $\angle$ $\square$ (संगत कोन)

$\angle$ FED ≅ $\angle$ $\square$ (संगत कोन)

∴ Δ FDE ~ Δ FPQ .... (कोको कसोटी)

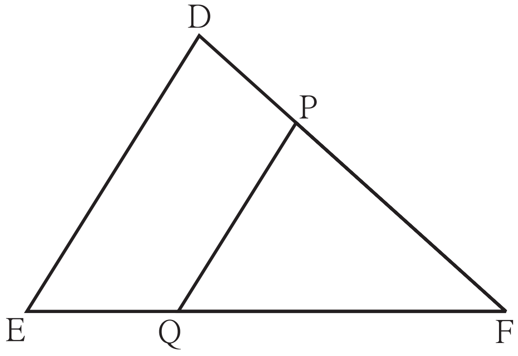
$$\therefore \frac{A(\Delta FDE)}{A(\Delta FPQ)} = \frac{\square}{\square} = \frac{(3x)^2}{(2x)^2} = \frac{9}{4}$$

$$A(\Delta FDE) = \frac{9}{4} A(\Delta FPQ) = \frac{9}{4} \times \square = \square$$

A($\square$ DPQE) = A(Δ FDE) – A(Δ FPQ)

= $\square$ – $\square$

= $\square$



आकृती 1.66

1. खालील उपप्रश्नांची पर्यायी उत्तरे दिली आहेत त्यांपैकी अचूक पर्याय निवडा.

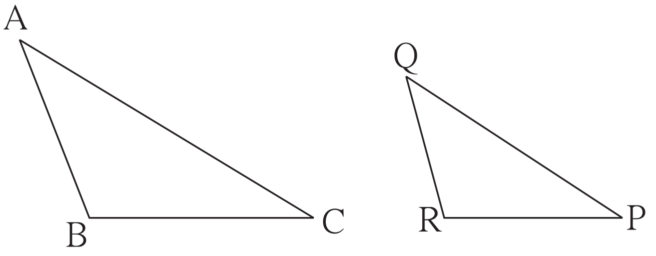
(1) जर Δ ABC व Δ PQR मध्ये एका एकास एक संगतीत $\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{PR} = \frac{CA}{PQ}$ तर खालीलपैकी सत्य विधान कोणते ?

(A) Δ PQR ~ Δ ABC

(B) Δ PQR ~ Δ CAB

(C) Δ CBA ~ Δ PQR

(D) Δ BCA ~ Δ PQR

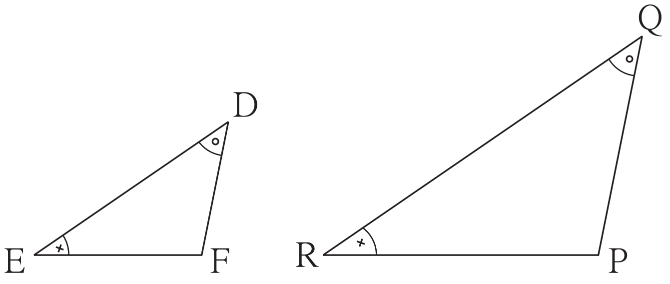


आकृती 1.67

(2) जर Δ DEF व Δ PQR मध्ये, $\angle D \cong \angle Q$, $\angle R \cong \angle E$, तर खालीलपैकी असत्य विधान कोणते ?

(A) $\frac{EF}{PR} = \frac{DF}{PQ}$ (B) $\frac{DE}{PQ} = \frac{EF}{RP}$

(C) $\frac{DE}{QR} = \frac{DF}{PQ}$ (D) $\frac{EF}{RP} = \frac{DE}{QR}$



आकृती 1.68

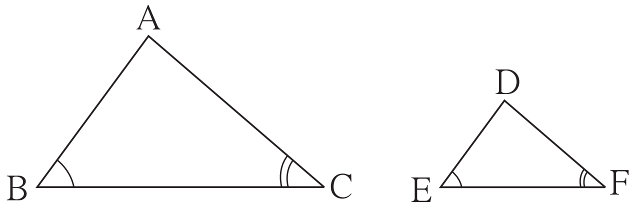
(3) Δ ABC व Δ DEF मध्ये $\angle B = \angle E$, $\angle F = \angle C$ आणि AB = 3 DE, तर त्या दोन त्रिकोणांबाबत सत्य विधान कोणते ?

(A) ते एकरूप नाहीत आणि समरूपही नाहीत.

(B) ते समरूप आहेत पण एकरूप नाहीत.

(C) ते एकरूप आहेत आणि समरूपही आहेत.

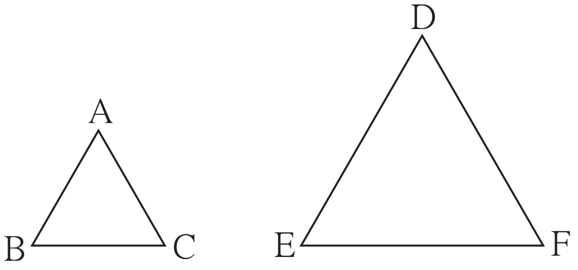
(D) वरीलपैकी एकही विधान सत्य नाही.



आकृती 1.69

(4) Δ ABC व Δ DEF हे दोन्ही समभुज त्रिकोण आहेत, A(ΔABC) : A(ΔDEF) = 1 : 2 असून AB = 4 आहे तर DE ची लांबी किती ?

(A) $2\sqrt{2}$ (B) 4 (C) 8 (D) $4\sqrt{2}$

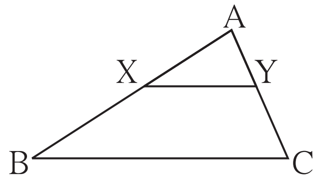


आकृती 1.70

(5) आकृती 1.71 मध्ये रेख XY || रेख BC तर खालील पैकी कोणते विधान सत्य आहे ?

(A) $\frac{AB}{AC} = \frac{AX}{AY}$ (B) $\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{AC}$

(C) $\frac{AX}{YC} = \frac{AY}{XB}$ (D) $\frac{AB}{YC} = \frac{AC}{XB}$



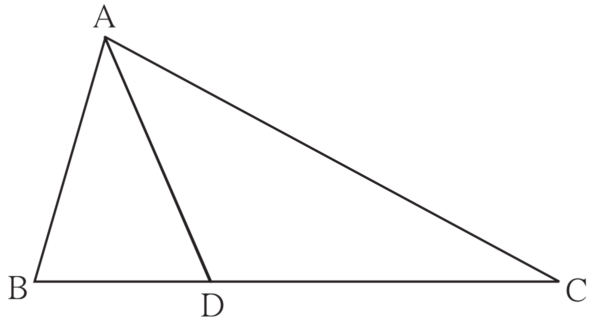
आकृती 1.71

2. Δ ABC मध्ये B – D – C आणि BD = 7, BC = 20 तर खालील गुणोत्तरे काढा.

(1) $\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ADC)}$

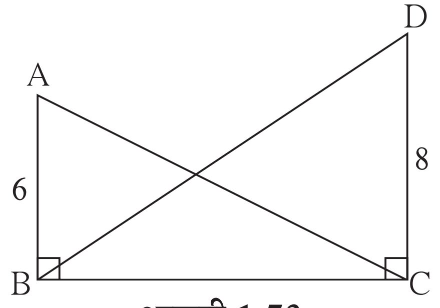
(2) $\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ABC)}$

(3) $\frac{A(\Delta ADC)}{A(\Delta ABC)}$



आकृती 1.72

3. समान उंचीच्या दोन त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर 2 : 3 आहे, लहान त्रिकोणाचा पाया 6 सेमी असेल तर मोठ्या त्रिकोणाचा संगत पाया किती असेल?

4. 

आकृती 1.73

आकृती 1.73 मध्ये $\angle ABC = \angle DCB = 90^\circ$

AB = 6, DC = 8

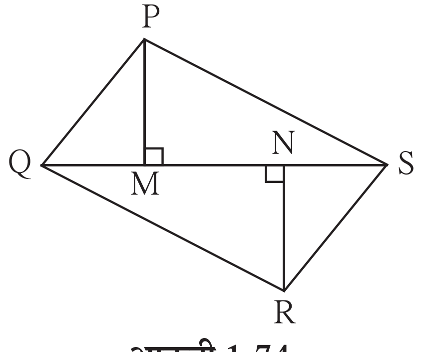
तर $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DCB)}$ = किती ?

5. आकृती 1.74 मध्ये PM = 10 सेमी

A(Δ PQS) = 100 चौसेमी

A(ΔQRS) = 110 चौसेमी

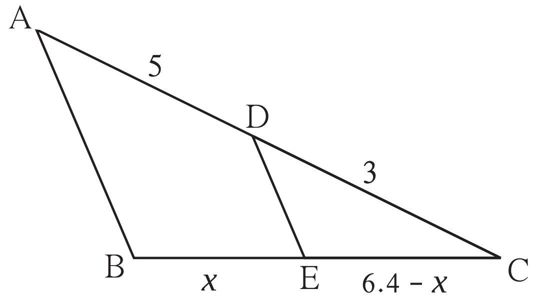
तर NR काढा.



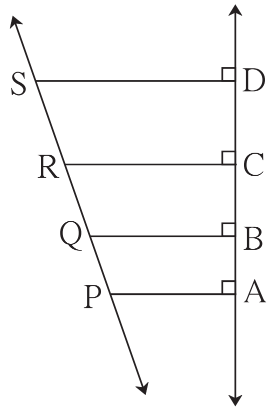
आकृती 1.74

6. Δ MNT ~ Δ QRS बिंदू T पासून काढलेल्या शिरोलंबाची लांबी 5 असून बिंदू S पासून काढलेल्या शिरोलंबाची लांबी 9 आहे, तर $\frac{A(\Delta MNT)}{A(\Delta QRS)}$ हे गुणोत्तर काढा.

7. आकृती 1.75 मध्ये A – D – C व B – E – C . रेख DE || बाजू AB. जर AD = 5, DC = 3, BC = 6.4 तर BE काढा.



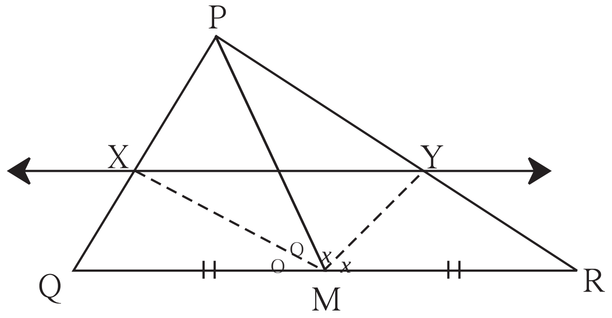
आकृती 1.75



आकृती 1.76

8. आकृती 1.76 मध्ये, रेख PA, रेख QB, रेख RC व रेख SD हे रेषा AD ला लंब आहेत. AB = 60, BC = 70, CD = 80, PS = 280, तर PQ, QR, RS काढा.

9. Δ PQR मध्ये रेख PM ही मध्यगा आहे. $\angle$PMQ व $\angle$PMR चे दुभाजक बाजू PQ व बाजू PR ला अनुक्रमे X आणि Y बिंदूत छेदतात, तर सिद्ध करा XY || QR.



आकृती 1.77

सिद्धतेतील रिकाम्या जागा भरून सिद्धता पूर्ण करा.

Δ PMQ मध्ये किरण MX हा $\angle$PMQ चा दुभाजक आहे.

$\therefore \dfrac{\square}{\square} = \dfrac{\square}{\square}$ .... (I) (कोनदुभाजकाचे प्रमेय)

Δ PMR मध्ये किरण MY हा $\angle$PMR चा दुभाजक आहे.

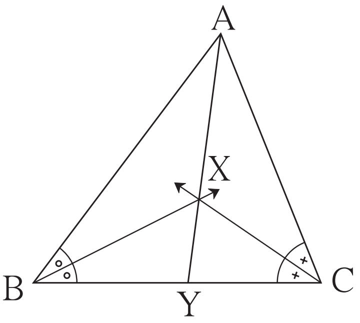
$\therefore \dfrac{\square}{\square} = \dfrac{\square}{\square}$ .... (II) (कोनदुभाजकाचे प्रमेय)

परंतु $\dfrac{MP}{MQ} = \dfrac{MP}{MR}$ .... (M हा QR चा मध्य म्हणजेच MQ = MR)

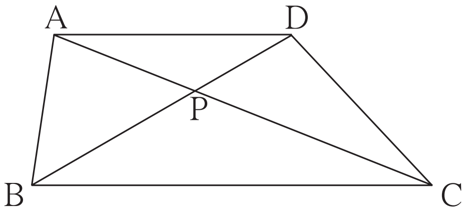
$\therefore \dfrac{PX}{XQ} = \dfrac{PY}{YR}$

$\therefore$ XY || QR .... (प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयाचा व्यत्यास)

10★. आकृती 1.78 मध्ये Δ ABC च्या $\angle$ B व $\angle$ C चे दुभाजक एकमेकांना X मध्ये छेदतात, रेषा AX ही बाजू BC ला Y मध्ये छेदते जर AB = 5, AC = 4, BC = 6 तर $\frac{AX}{XY}$ ची किंमत काढा.



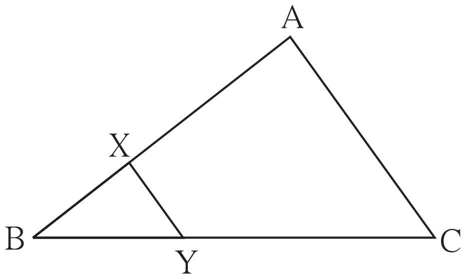
आकृती 1.78



आकृती 1.79

11. $\square$ ABCD मध्ये रेख AD || रेख BC. कर्ण AC आणि कर्ण BD परस्परांना बिंदू P मध्ये छेदतात. तर दाखवा की $\frac{AP}{PD} = \frac{PC}{BP}$

12. आकृती 1.80 मध्ये XY || बाजू AC.
जर 2AX = 3BX आणि XY = 9 तर
AC ची किंमत काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.



आकृती 1.80

कृती : 2AX = 3BX $\therefore \frac{AX}{BX} = \frac{\square}{\square}$

$\frac{AX+BX}{BX} = \frac{\square + \square}{\square}$ .... (योग क्रिया करून)

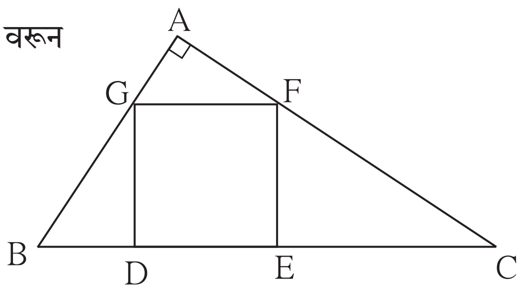
$\frac{AB}{BX} = \frac{\square}{\square}$ .... (I)

Δ BCA ~ Δ BYX .... (समरूपतेची $\square$ कसोटी)

$\therefore \frac{BA}{BX} = \frac{AC}{XY}$ .... (समरूप त्रिकोणाच्या संगत बाजू)

$\therefore \frac{\square}{\square} = \frac{AC}{9}$ $\therefore$ AC = $\square$ ....(I) वरून

13★. Δ ABC मध्ये $\angle$ A = 90°. $\square$ DEFG या चौरसाचे D व E हे शिरोबिंदू बाजू BC वर आहेत. बिंदू F हा बाजू AC वर आणि बिंदू G हाबाजू AB वर आहे. तर सिद्ध करा. $DE^2 = BD \times EC$ (Δ GBD व Δ CFE हे समरूप दाखवा. GD = FE = DE याचा उपयोग करा.)



आकृती 1.81

2 पायथागोरसचे प्रमेय

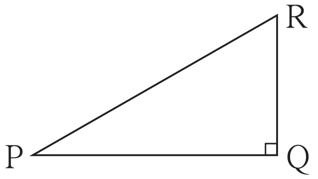
चला, शिकूया.

- पायथागोरसचे त्रिकुट
- भूमितीमध्याचे प्रमेय
- पायथागोरसच्या प्रमेयाचे उपयोजन
- समरूपता आणि काटकोन त्रिकोण
- पायथागोरसचे प्रमेय
- अपोलोनियसचे प्रमेय

जरा आठवूया.

पायथागोरसचे प्रमेय :

काटकोन त्रिकोणात कर्णाचा वर्ग हा इतर दोन बाजूंच्या वर्गांच्या बेरजेइतका असतो.



आकृती 2.1

Δ PQR मध्ये $\angle$ PQR = 90°

$l(PR)^2 = l(PQ)^2 + l(QR)^2$

हेच आपण $PR^2 = PQ^2 + QR^2$ असे लिहू.

Δ PQR च्या PQ, QR व PR या बाजूंच्या लांबी अनुक्रमे r, p आणि q या अक्षरांनी दाखविण्याचाही संकेत आहे. त्यानुसार, आकृती 2.1 च्या संदर्भात पायथागोरसचे प्रमेय $q^2 = p^2 + r^2$ असेही लिहिता येईल.

पायथागोरसचे त्रिकुट :

नैसर्गिक संख्यांच्या त्रिकुटामध्ये जर एका संख्येचा वर्ग हा इतर दोन संख्यांच्या वर्गांच्या बेरजेइतका असेल तर त्याला पायथागोरसचे त्रिकुट म्हणतात.

उदाहरणार्थ :(11, 60, 61) या संख्यांच्या त्रिकुटामध्ये,

$11^2 = 121$, $60^2 = 3600$, $61^2 = 3721$ आणि $121 + 3600 = 3721$

या ठिकाणी मोठ्या संख्येचा वर्ग हा इतर दोन संख्यांच्या वर्गांच्या बेरजेइतका आहे.

$\therefore$ 11, 60, 61 हे पायथागोरसचे त्रिकुट आहे.

तसेच (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17), (24, 25, 7) ही देखील पायथागोरसची त्रिकुटे आहेत, हे पडताळा.

पायथागोरसच्या त्रिकुटांतील संख्या कोणत्याही क्रमाने लिहिता येतात.

अधिक माहितीसाठी :

पायथागोरसची त्रिकुटे मिळवण्याचे सूत्र :

जर a, b, c या नैसर्गिक संख्या असतील आणि $a > b$, तर $[(a^2 + b^2),(a^2 - b^2),(2ab)]$ हे पायथागोरसचे त्रिकुट असते.

$(a^2 + b^2)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4$ .... (I)

$(a^2 - b^2)^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4$ .... (II)

$(2ab)^2 = 4a^2b^2$ .... (III)

$\therefore$ (I), (II) व (III) वरून, $(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$

$\therefore [(a^2 + b^2), (a^2 - b^2), (2ab)]$ हे पायथागोरसचे त्रिकुट आहे.

हे त्रिकुट, पायथागोरसची वेगवेगळी त्रिकुटे मिळवण्यासाठी सूत्र म्हणून वापरता येते.

उदाहरणार्थ, $a = 5$ आणि $b = 3$ घेतल्यास,

$a^2 + b^2 = 34$, $a^2 - b^2 = 16$ आणि $2ab = 30$.

(34, 16, 30) हे पायथागोरसचे त्रिकुट आहे, हे तुम्ही पडताळून पाहा.

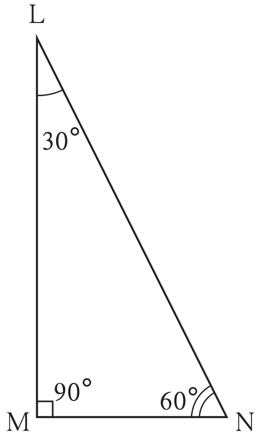
a आणि b साठी विविध नैसर्गिक संख्या घेऊन सूत्राच्या आधारे पायथागोरसची 5 त्रिकुटे तयार करा.

मागील इयत्तेत आपण $30° - 60° - 90°$ आणि $45° - 45° - 90°$ हे कोन असणाऱ्या काटकोन त्रिकोणांचे गुणधर्म पाहिले आहेत.

(I) कोनांची मापे $30°-60°-90°$ असणाऱ्या त्रिकोणाचा गुणधर्म

काटकोन त्रिकोणाचे लघुकोन 30° व 60° असतील, तर 30° मापाच्या कोनासमोरील बाजू कर्णाच्या निम्मी असते व 60° मापाच्या कोनासमोरील बाजू कर्णाच्या $\frac{\sqrt{3}}{2}$ पट असते.

आकृती 2.2 पाहा. Δ LMN मध्ये, $\angle L = 30°$, $\angle N = 60°$, $\angle M = 90°$



आकृती 2.2

$\therefore$ 30° कोनासमोरील बाजू = MN = $\frac{1}{2} \times LN$

60° कोनासमोरील बाजू = LM = $\frac{\sqrt{3}}{2} \times LN$

जर LN = 6 सेमी तर MN व LM काढू.

$MN = \frac{1}{2} \times LN$

$= \frac{1}{2} \times 6$

$= 3$ सेमी

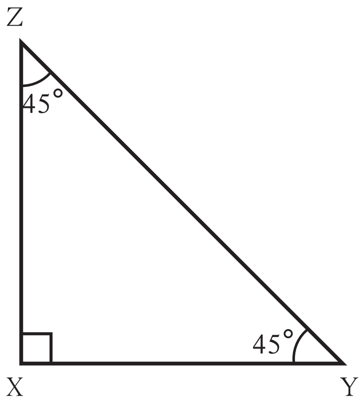
$LM = \frac{\sqrt{3}}{2} \times LN$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6$

$= 3\sqrt{3}$ सेमी

(II) कोनांची मापे $45^\circ-45^\circ-90^\circ$ असणाऱ्या त्रिकोणाचा गुणधर्म

काटकोन त्रिकोणाचे लघुकोन 45° व 45° मापाचे असतील तर काटकोन करणारी प्रत्येक बाजू ही कर्णाच्या $\frac{1}{\sqrt{2}}$ पट असते .



आकृती 2.3

आकृती 2.3 पाहा. Δ XYZ मध्ये,

$$XY = \frac{1}{\sqrt{2}} \times ZY$$

$$XZ = \frac{1}{\sqrt{2}} \times ZY$$

जर $ZY = 3\sqrt{2}$ सेमी तर XY आणि XZ काढू.

$$XY = XZ = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 3\sqrt{2}$$

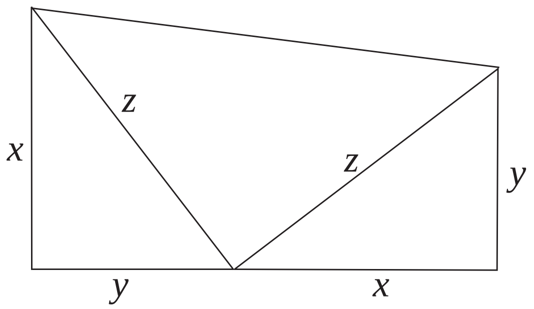
$\therefore$ XY = XZ = 3 सेमी

पायथागोरसचे प्रमेय इयत्ता 7 वी मध्ये क्षेत्रफळाच्या सहाय्याने अभ्यासले आहे. त्यामध्ये आपण चार काटकोन त्रिकोण व एक चौरस यांच्या क्षेत्रफळांचा उपयोग केला होता. याच प्रमेयाची सिद्‌धता आपण थोड्या वेगळ्या प्रकारेही देऊ शकतो.

कृती :

आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे दोन एकरूप काटकोन त्रिकोण घ्या. त्यांच्या कर्णांच्या लांबीएवढ्या दोन भुजा असलेला एक समद्विभुज काटकोन त्रिकोण घ्या. हे तीन काटकोन त्रिकोण जोडून समलंब चौकोन तयार करा.

समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ × (समांतर बाजूंच्या लांबीची बेरीज) × उंची ; या सूत्राचा उपयोग करून त्याचे क्षेत्रफळ तिन्ही त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांच्या बेरजेबरोबर लिहून पायथागोरसचे प्रमेय सिद्‌ध करा.



आकृती 2.4

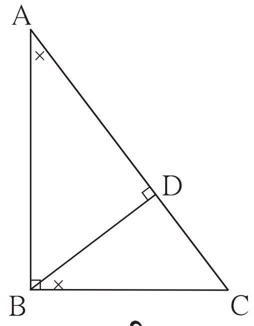
जाणून घेऊया.

आता आपण पायथागोरसच्या प्रमेयाची सिद्धता समरूप त्रिकोणांच्या आधारे देणार आहोत.

ही सिद्धता देण्यासाठी आवश्यक असणारे काटकोन त्रिकोणाचे समरूपतेसंबंधीचे गुणधर्म अभ्यासू.

समरूपता आणि काटकोन त्रिकोण (Similarity and right angled triangle)

प्रमेय : **काटकोन त्रिकोणात कर्णावर टाकलेल्या शिरोलंबामुळे जे त्रिकोण तयार होतात ते मूळ काटकोन त्रिकोणाशी व परस्परांशी समरूप असतात.**



आकृती 2.5

पक्ष : Δ ABC मध्ये $\angle ABC = 90^\circ$,

रेख BD $\perp$ रेख AC, A-D-C

साध्य : $\Delta ADB \sim \Delta ABC$

$\Delta BDC \sim \Delta ABC$

$\Delta ADB \sim \Delta BDC$

सिद्धता : Δ ADB आणि Δ ABC मध्ये

$\angle DAB \cong \angle BAC$ ...(सामाईक कोन)

$\angle ADB \cong \angle ABC$ ...(90° कोन)

$\Delta ADB \sim \Delta ABC$ ...(को को कसोटी)...(I)

तसेच, Δ BDC आणि Δ ABC मध्ये

$\angle BCD \cong \angle ACB$ ...(सामाईक कोन)

$\angle BDC \cong \angle ABC$ ...(90° कोन)

$\Delta BDC \sim \Delta ABC$ ...(को को कसोटी)..(II)

$\therefore$ $\Delta ADB \sim \Delta BDC$ विधान (I) व (II) वरून ...(III)

$\therefore$ $\Delta ADB \sim \Delta BDC \sim \Delta ABC$ विधान (I), (II) व (III) वरून..... संक्रामकता

भूमितीमध्याचे प्रमेय (Theorem of geometric mean)

काटकोन त्रिकोणात, कर्णावर काढलेला शिरोलंब, त्या शिरोलंबामुळे होणाऱ्या कर्णाच्या दोन भागांचा भूमितीमध्य असतो.

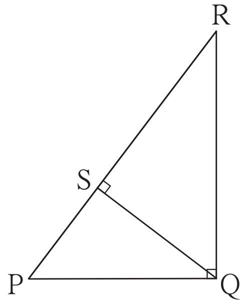
सिद्धता : काटकोन त्रिकोण PQR मध्ये रेख QS $\perp$ कर्ण PR

$\Delta QSR \sim \Delta PSQ$ .... (काटकोन त्रिकोणांची समरूपता)

$$\therefore \quad \frac{QS}{PS} = \frac{SR}{SQ}$$

$$\therefore \quad \frac{QS}{PS} = \frac{SR}{QS}$$

$$QS^2 = PS \times SR$$

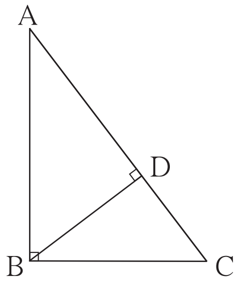


आकृती 2.6

$\therefore$ शिरोलंब QS हा रेख PS आणि रेख SR यांचा 'भूमितीमध्य' आहे.

पायथागोरसचे प्रमेय (Theorem of Pythagoras)

काटकोन त्रिकोणात कर्णाचा वर्ग हा इतर दोन बाजूंच्या वर्गांच्या बेरजेइतका असतो.



आकृती 2.7

पक्ष : Δ ABC मध्ये, $\angle ABC = 90^\circ$

साध्य : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

रचना : बिंदू B मधून बाजू AC वर रेख BD लंब काढला. A-D-C

सिद्धता : काटकोन Δ ABC मध्ये रेख BD $\perp$ कर्ण AC ..... (रचना)

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta ADB \sim \Delta BDC$ ..... (काटकोन त्रिकोणाची समरूपता)

$\Delta ABC \sim \Delta ADB$

$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DB} = \frac{AC}{AB}$ – संगतभुजा

$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$

$AB^2 = AD \times AC$ .... (I)

तसेच, $\Delta ABC \sim \Delta BDC$

$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{BC}{DC} = \frac{AC}{BC}$ – संगतभुजा

$\therefore \frac{BC}{DC} = \frac{AC}{BC}$

$BC^2 = DC \times AC$ .... (II)

(I) व (II) यांची बेरीज करून

$AB^2 + BC^2 = AD \times AC + DC \times AC$

$= AC\,(AD + DC)$

$= AC \times AC$ .... (A-D-C)

$\therefore AB^2 + BC^2 = AC^2$

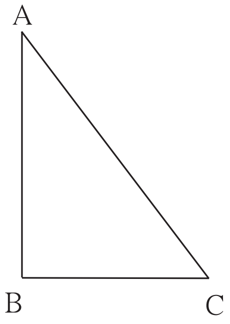
$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2$

पायथागोरसच्या प्रमेयाचा व्यत्यास (Converse of Pythagoras' theorem)

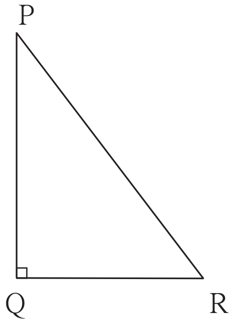
एखाद्या त्रिकोणातील एका बाजूचा वर्ग हा इतर दोन बाजूंच्या वर्गांच्या बेरजेइतका असेल, तर तो त्रिकोण काटकोन त्रिकोण असतो.

पक्ष : Δ ABC मध्ये, $AC^2 = AB^2 + BC^2$

साध्य : $\angle ABC = 90^\circ$



आकृती 2.8



आकृती 2.9

रचना : Δ PQR असा काढा की, AB = PQ, BC = QR , $\angle$ PQR = 90°.

सिद्धता : Δ PQR मध्ये, $\angle$ Q = 90°

$PR^2 = PQ^2 + QR^2$ .... (पायथागोरसच्या प्रमेयावरून)

$= AB^2 + BC^2$ .... (रचना)

$= AC^2$ .... (पक्ष)

$\therefore PR^2 = AC^2$,

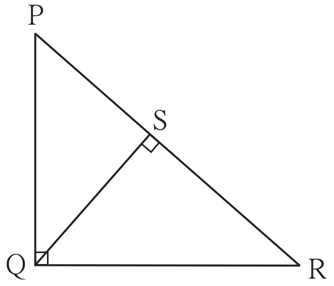
$\therefore PR = AC$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta PQR$ .... (बाबाबा कसोटी)

$\therefore \angle ABC = \angle PQR = 90°$

हे लक्षात ठेवूया.

(1) (a) समरूपता आणि काटकोन त्रिकोण



आकृती 2.10

Δ PQR मध्ये $\angle$ Q = 90° , रेख QS $\perp$ रेख PR येथे $\Delta PQR \sim \Delta PSQ \sim \Delta QSR$ अशा रीतीने आकृतीमध्ये तयार होणारे सर्व काटकोन त्रिकोण परस्परांशी समरूप असतात.

(b) भूमितीमध्याचे प्रमेय :

वरील आकृतीत $\Delta PSQ \sim \Delta QSR$

$\therefore QS^2 = PS \times SR$

$\therefore$ रेख QS हा रेख PS व रेख SR या रेषाखंडाचा भूमितीमध्य आहे.

(2) पायथागोरसचे प्रमेय :

काटकोन त्रिकोणात कर्णाचा वर्ग हा इतर दोन बाजूंच्या वर्गांच्या बेरजेइतका असतो.

(3) पायथागोरसच्या प्रमेयाचा व्यत्यास :

एखाद्या त्रिकोणातील एका बाजूचा वर्ग हा त्या त्रिकोणाच्या उरलेल्या दोन बाजूंच्या वर्गांच्या बेरजेइतका असेल तर तो त्रिकोण काटकोन त्रिकोण असतो.

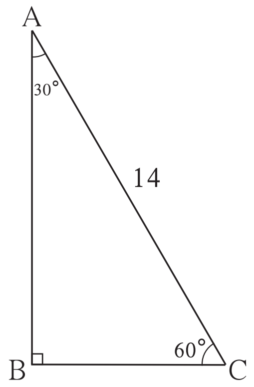
याशिवाय आणखी एक गुणधर्म खूप उपयोगी आहे. तोही लक्षात ठेवूया.

(4) काटकोन त्रिकोणात एक बाजू कर्णाच्या निम्मी असेल तर त्या बाजूच्या समोरील कोन 30° असतो.

हा गुणधर्म 30°-60°-90° प्रमेयाचा व्यत्यास आहे.

उदा. (1) आकृती 2.11 पाहा. Δ ABC मध्ये $\angle$ B= 90°, $\angle$ A= 30°, AC=14 तर AB व BC काढा.

उकल :



आकृती 2.11

Δ ABC मध्ये,

$\angle B = 90°, \angle A = 30°, \therefore \angle C = 60°$

30°- 60°- 90° च्या प्रमेयानुसार,

$BC = \frac{1}{2} \times AC$

$BC = \frac{1}{2} \times 14$

$BC = 7$

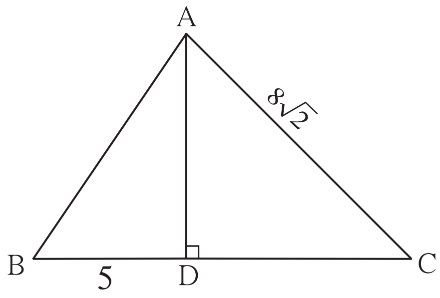
$AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times AC$

$AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 14$

$AB = 7\sqrt{3}$

उदा. (2) आकृती 2.12 पाहा. Δ ABC मध्ये रेख AD $\perp$ रेख BC, $\angle$ C = 45°, BD = 5 आणि AC = $8\sqrt{2}$, तर AD आणि BC काढा.

उकल :



आकृती 2.12

Δ ADC मध्ये,

$\angle$ ADC = 90°, $\angle$ C = 45°, $\therefore$ $\angle$ DAC = 45°

$AD = DC = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 8\sqrt{2}$ ... (45°−45°−90° च्या प्रमेयानुसार)

$\therefore$ DC = 8 $\therefore$ AD = 8

BC = BD + DC

= 5 + 8

= 13

उदा. (3) आकृती 2.13 मध्ये $\angle$ PQR = 90°, रेख QN $\perp$ रेख PR, PN = 9, NR = 16 तर QN काढा.

उकल : Δ PQR मध्ये, रेख QN $\perp$ रेख PR

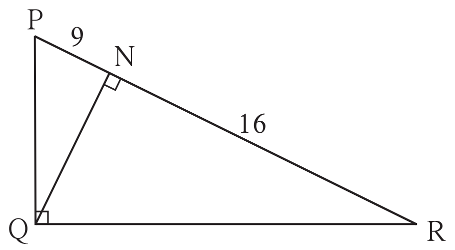
$\therefore QN^2 = PN \times NR$ .... (भूमितीमध्याचे प्रमेय)

$\therefore QN = \sqrt{PN \times NR}$

$= \sqrt{9 \times 16}$

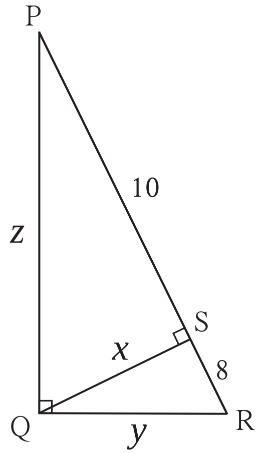
$= 3 \times 4$

$= 12$



आकृती 2.13

उदा. (4) आकृती 2.14 पाहा. Δ PQR मध्ये $\angle$ PQR = 90°, रेख QS $\perp$ रेख PR तर x, y, z च्या किमती काढा.



आकृती 2.14

उकल : Δ PQR मध्ये, $\angle$ PQR = 90°, रेख QS $\perp$ रेख PR

$QS = \sqrt{PS \times SR}$ .... (भूमितीमध्याचे प्रमेय)

$= \sqrt{10 \times 8}$

$= \sqrt{5 \times 2 \times 8}$

$= \sqrt{5 \times 16}$

$= 4\sqrt{5}$

$\therefore\ x = 4\sqrt{5}$

Δ QSR मध्ये, $\angle$ QSR = 90°

$\therefore\ QR^2 = QS^2 + SR^2$

$= (4\sqrt{5})^2 + 8^2$

$= 16 \times 5 + 64$

$= 80 + 64$

$= 144$

$\therefore\ QR = 12$

Δ PSQ मध्ये, $\angle$ QSP = 90°

$\therefore\ PQ^2 = QS^2 + PS^2$

$= (4\sqrt{5})^2 + 10^2$

$= 16 \times 5 + 100$

$= 80 + 100$

$= 180$

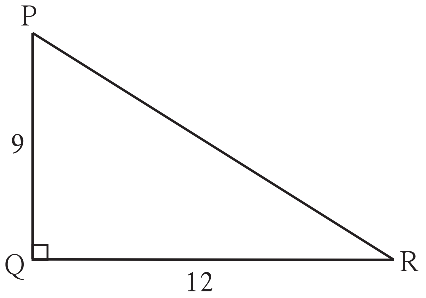
$= 36 \times 5$

$\therefore\ PQ = 6\sqrt{5}$

यावरून, $x = 4\sqrt{5}$, $y = 12$, $z = 6\sqrt{5}$

उदा. (5) काटकोन त्रिकोणात काटकोन करणाऱ्या बाजू 9 सेमी व 12 सेमी आहेत तर त्या त्रिकोणाचा कर्ण काढा.

उकल : Δ PQR मध्ये, $\angle$ Q = 90°



आकृती 2.15

$PR^2 = PQ^2 + QR^2$ (पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार)

$= 9^2 + 12^2$

$= 81 + 144$

$\therefore\ PR^2 = 225$

$\therefore\ PR = 15$

त्रिकोणाचा कर्ण = 15 सेमी

उदा. (6) Δ LMN मध्ये $l = 5$, $m = 13$, $n = 12$ तर Δ LMN हा काटकोन त्रिकोण आहे किंवा नाही ते ठरवा. (l, m, n, या अनुक्रमे $\angle$ L, $\angle$ M आणि $\angle$ N यांच्या समोरील बाजू आहेत.)

उकल : $l = 5$, $m = 13$, $n = 12$

$l^2 = 25$, $m^2 = 169$, $n^2 = 144$

$\therefore m^2 = l^2 + n^2$

$\therefore$ पायथागोरसच्या प्रमेयाच्या व्यत्यासानुसार Δ LMN हा काटकोन त्रिकोण आहे.

उदा. (7) आकृती 2.16 पाहा. Δ ABC मध्ये, रेख AD $\perp$ रेख BC, तर सिद्ध करा :

$AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$

उकल : पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार Δ ADC मध्ये,

$AC^2 = AD^2 + CD^2$

$\therefore AD^2 = AC^2 - CD^2$ ... (I)

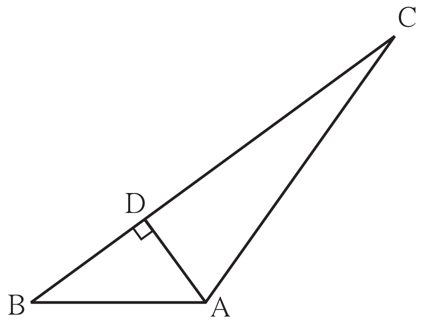
Δ ADB मध्ये,

$AB^2 = AD^2 + BD^2$

$\therefore AD^2 = AB^2 - BD^2$ ... (II)

$\therefore AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2$ .... [(I) आणि (II) वरून]

$\therefore AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$



आकृती 2.16

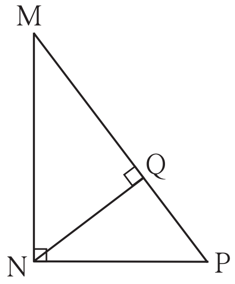
सरावसंच 2.1

1. खालील त्रिकुटांपैकी पायथागोरसची त्रिकुटे कोणती आहेत हे सकारण लिहा.

(1) (3, 5, 4) (2) (4, 9, 12) (3) (5, 12, 13)

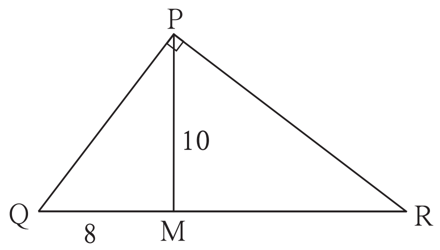
(4) (24, 70, 74) (5) (10, 24, 27) (6) (11, 60, 61)

2. आकृती 2.17 मध्ये $\angle$ MNP = 90°, रेख NQ $\perp$ रेख MP, MQ = 9, QP = 4 तर NQ काढा.



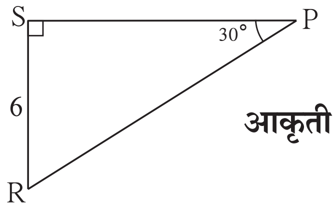
आकृती 2.17

3. आकृती 2.18 मध्ये $\angle$ QPR = 90°, रेख PM $\perp$ रेख QR आणि Q-M-R, PM = 10, QM = 8 यावरून QR काढा.

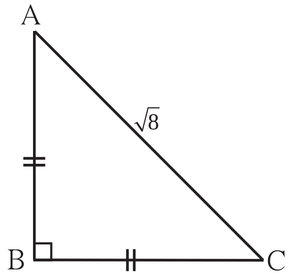


आकृती 2.18

4. आकृती 2.19 मधील Δ PSR मध्ये दिलेल्या माहितीवरून RP आणि PS काढा.



आकृती 2.19



आकृती 2.20

5. आकृती 2.20 मध्ये दिलेल्या माहितीवरून AB आणि BC काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

AB = BC .... $\boxed{}$

$\therefore \angle BAC = \boxed{}$

$\therefore AB = BC = \boxed{} \times AC$

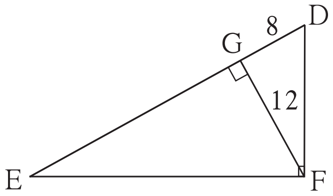
$= \boxed{} \times \sqrt{8}$

$= \boxed{} \times 2\sqrt{2}$

$= \boxed{}$

6. एका चौरसाचा कर्ण 10 सेमी आहे तर त्याच्या बाजूची लांबी व परिमिती काढा.

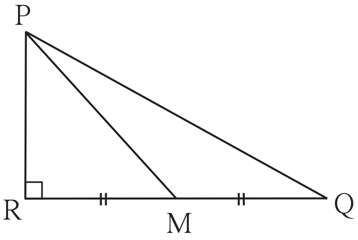
7. आकृती 2.21 मध्ये $\angle DFE = 90°$, रेख FG $\perp$ रेख ED. जर GD = 8, FG = 12, तर (1) EG (2) FD आणि (3) EF काढा.



आकृती 2.21

8. एका आयताची लांबी 35 सेमी व रुंदी 12 सेमी आहे तर त्या आयताच्या कर्णाची लांबी काढा.

9★. आकृती 2.22 मध्ये M हा बाजू QR चा मध्यबिंदू आहे. $\angle PRQ = 90°$ असेल तर सिद्ध करा, $PQ^2 = 4PM^2 - 3PR^2$



आकृती 2.22

10★. रस्त्याच्या दुतर्फा असलेल्या इमारतीच्या भिंती एकमेकींना समांतर आहेत. 5.8 मी लांबीच्या शिडीचे एक टोक रस्त्यावर ठेवले असता तिचे वरचे टोक पहिल्या इमारतीच्या 4 मीटर उंच असलेल्या खिडकीपर्यंत टेकते. त्याच ठिकाणी शिडी ठेवून रस्त्याच्या दुसऱ्या बाजूस वळविल्यास तिचे वरचे टोक दुसऱ्या इमारतीच्या 4.2 मीटर उंच असलेल्या खिडकीपर्यंत येते, तर रस्त्याची रुंदी काढा.

जाणून घेऊया.

पायथागोरसच्या प्रमेयाचे उपयोजन

पायथागोरसच्या प्रमेयामध्ये काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण आणि काटकोन करणाऱ्या बाजू यांचा परस्पर संबंध म्हणजेच काटकोनासमोरील बाजू आणि इतर दोन बाजूंमधील संबंध सांगितला आहे.

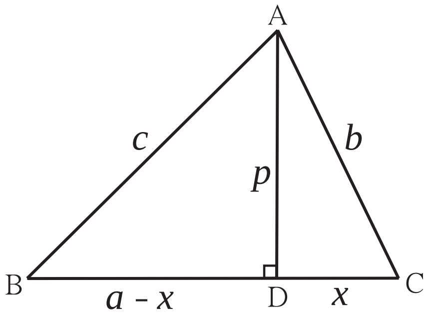
त्रिकोणातील लघुकोनासमोरील बाजूचा इतर दोन बाजूंशी असलेला संबंध तसेच विशालकोनासमोरील बाजूंचा इतर दोन बाजूंशी असलेला संबंध पायथागोरसच्या प्रमेयाने ठरविता येतो.हे संबंध खालील उदाहरणांतून समजून घ्या.

उदा.(1) Δ ABC मध्ये, $\angle$ C हा लघुकोन आहे, रेख AD $\perp$ रेख BC तर सिद्ध करा :

$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \times DC$

दिलेल्या आकृतीमध्ये, $AB = c$, $AC = b$, $AD = p$, $BC = a$, $DC = x$ मानू.

$\therefore BD = a - x$



आकृती 2.23

Δ ADB मध्ये, पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार

$c^2 = (a-x)^2 + \square$

$c^2 = a^2 - 2ax + x^2 + \square$ .... (I)

Δ ADC मध्ये, पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार

$b^2 = p^2 + \square$

$p^2 = b^2 - \square$ .... (II)

(II) मधील p^2 ची किंमत, (I) मध्ये ठेवून,

$c^2 = a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - x^2$

$\therefore c^2 = a^2 + b^2 - 2ax$

$\therefore AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \times DC$

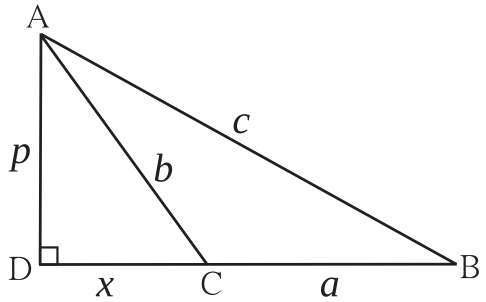
उदा.(2) Δ ABC मध्ये, $\angle$ ACB हा विशालकोन आहे, रेख AD $\perp$ रेख BC, तर सिद्ध करा :

$AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC \times CD$

समजा $AD = p$, $AC = b$, $AB = c$,

$BC = a$, $DC = x$ मानू.

$DB = a + x$



आकृती 2.24

Δ ADB मध्ये, पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार,

$c^2 = (a + x)^2 + p^2$

$c^2 = a^2 + 2ax + x^2 + p^2$ .... (I)

तसेच Δ ADC मध्ये,

$$b^2 = x^2 + p^2$$

$$\therefore \quad p^2 = b^2 - x^2 \qquad \text{..........} \ (II)$$

$\therefore$ (I) मध्ये (II) मधील p^2 ची किंमत घालून,

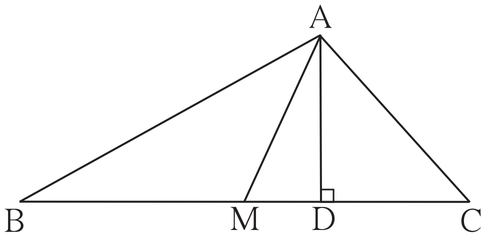
$$c^2 = a^2 + 2ax + x^2 + b^2 - x^2$$

$$= a^2 + 2ax + b^2$$

$\therefore$ $AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC \times CD$

अपोलोनियसचे प्रमेय (Appollonius' Theorem)

Δ ABC मध्ये, बिंदू M हा बाजू BC चा मध्यबिंदू असेल, तर $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$



आकृती 2.25

पक्ष : Δ ABC मध्ये M हा बाजू BC चा मध्यबिंदू आहे.

साध्य : $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$

रचना : रेख AD $\perp$ रेख BC काढला.

सिद्‌धता : जर रेख AM हा रेख BC ला लंब नसेल, तर $\angle$ AMB आणि $\angle$ AMC यांपैकी एक विशालकोन आणि दुसरा लघुकोन असतो.

आकृतीमध्ये $\angle$ AMB विशालकोन आणि $\angle$ AMC हा लघुकोन आहे.

वरील उदाहरण (1) व उदाहरण (2) वरून,

$AB^2 = AM^2 + MB^2 + 2BM \times MD$ ..... (I)

आणि $AC^2 = AM^2 + MC^2 - 2MC \times MD$

$\therefore$ $AC^2 = AM^2 + MB^2 - 2BM \times MD$ ($\because$ BM = MC) ....(II)

$\therefore$ (I) व (II) यांची बेरीज करून,

$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$

जर रेख AM $\perp$ बाजू BC तर या प्रमेयाची सिद्‌धता तुम्ही लिहा.

या उदाहरणावरून त्रिकोणाच्या बाजू आणि मध्यगा यांचा परस्परसंबंध समजतो.

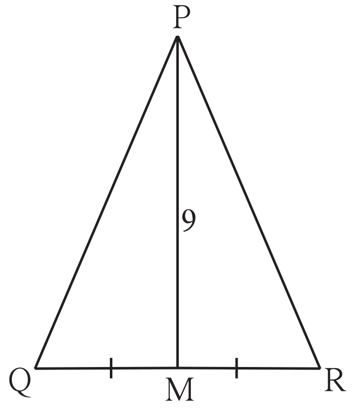
यालाच 'अपोलोनियसचे प्रमेय' म्हणतात.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा.(1) Δ PQR मध्ये, रेख PM ही मध्यगा आहे. PM = 9 आणि $PQ^2 + PR^2 = 290$, तर QR काढा.

उकल : Δ PQR मध्ये, रेख PM ही मध्यगा आहे.

M हा रेख QR चा मध्यबिंदू आहे.



आकृती 2.26

$QM = MR = \frac{1}{2}QR$

$PQ^2 + PR^2 = 2PM^2 + 2QM^2$ (अपोलोनियसच्या प्रमेयानुसार)

$290 = 2 \times 9^2 + 2QM^2$

$290 = 2 \times 81 + 2QM^2$

$290 = 162 + 2QM^2$

$2QM^2 = 290 - 162$

$2QM^2 = 128$

$QM^2 = 64$

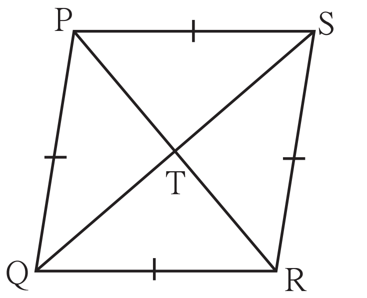
$QM = 8$

$\therefore \quad QR = 2 \times QM$

$= 2 \times 8$

$= 16$

उदा.(2) समभुज चौकोनाच्या बाजूंच्या वर्गांची बेरीज त्याच्या कर्णांच्या वर्गांच्या बेरजेइतकी असते, हे सिद्ध करा.



आकृती 2.27

पक्ष : □ PQRS हा समभुज चौकोन असून कर्ण PR आणि SQ एकमेकांना T या बिंदूत छेदतात.

साध्य : $PS^2 + SR^2 + QR^2 + PQ^2 = PR^2 + QS^2$

सिद्धता : समभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांना दुभागतात.

$\therefore$ अपोलोनियसच्या प्रमेयानुसार,

$PQ^2 + PS^2 = 2PT^2 + 2QT^2$ .... (I)

$QR^2 + SR^2 = 2RT^2 + 2QT^2$ .... (II)

$\therefore$ (I) व (II) यांची बेरीज करून,

$PQ^2 + PS^2 + QR^2 + SR^2 = 2(PT^2 + RT^2) + 4QT^2$

$\therefore PS^2 + SR^2 + QR^2 + PQ^2 = 2(PT^2 + PT^2) + 4QT^2$ .... (RT = PT)

$= 4PT^2 + 4QT^2$

$= (2PT)^2 + (2QT)^2$

$= PR^2 + QS^2$

(हे उदाहरण पायथागोरसच्या प्रमेयाचा उपयोग करूनही सोडविता येईल.)

सरावसंच 2.2

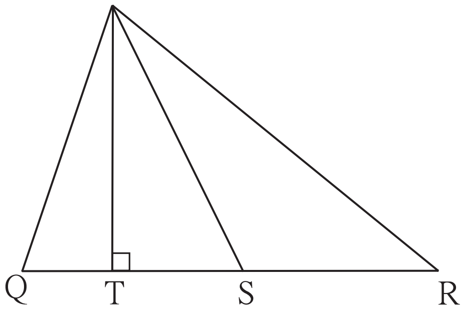
1. Δ PQR मध्ये, बिंदू S हा बाजू QR चा मध्यबिंदू आहे, जर PQ = 11, PR = 17, PS = 13 असेल तर QR ची लांबी काढा.

2. Δ ABC मध्ये, AB = 10, AC = 7, BC = 9 तर बिंदू C मधून बाजू AB वर काढलेल्या मध्यगेची लांबी किती?

3. आकृती 2.28 मध्ये रेख PS ही Δ PQR ची मध्यगा आहे आणि PT $\perp$ QR तर सिद्ध करा,

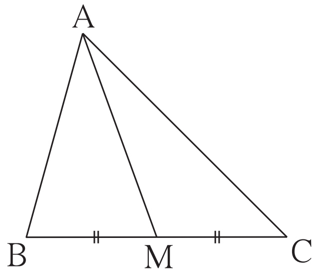
   (1) $PR^2 = PS^2 + QR \times ST + \left(\frac{QR}{2}\right)^2$

   (2) $PQ^2 = PS^2 - QR \times ST + \left(\frac{QR}{2}\right)^2$



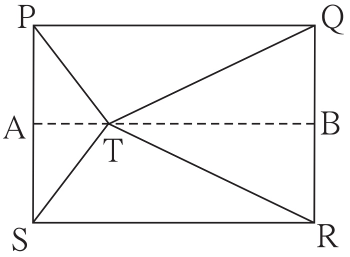
आकृती 2.28

4. आकृती 2.29 मध्ये, Δ ABC च्या बाजू BC चा बिंदू M हा मध्यबिंदू आहे. जर $AB^2 + AC^2 = 290$ सेमी, AM = 8 सेमी, तर BC काढा.



आकृती 2.29

5★. आकृती 2.30 मध्ये दाखविल्यानुसार T हा बिंदू आयत PQRS च्या अंतर्भागात आहे, तर सिद्ध करा, $TS^2 + TQ^2 = TP^2 + TR^2$
(आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे A–T–B असा रेख AB || बाजू SR काढा.)



आकृती 2.30

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 2

1. खालील बहुपर्यायी प्रश्नांच्या दिलेल्या उत्तरांपैकी अचूक पर्याय निवडा.

   (1) खालीलपैकी कोणते पायथागोरसचे त्रिकुट आहे ?

   (A) (1, 5, 10) (B) (3, 4, 5) (C) (2, 2, 2) (D) (5, 5, 2)

   (2) काटकोन त्रिकोणात काटकोन करणाऱ्या बाजूंच्या वर्गांची बेरीज 169 असेल, तर त्याच्या कर्णाची लांबी किती?

   (A) 15 (B) 13 (C) 5 (D) 12

(3) खालीलपैकी कोणत्या तारखेतील संख्या हे पायथागोरसचे त्रिकुट आहे?

(A) 15/08/17 (B) 16/08/16 (C) 3/5/17 (D) 4/9/15

(4) बाजूंच्या लांबी a, b, c असलेल्या त्रिकोणामध्ये जर $a^2 + b^2 = c^2$ असेल तर तो कोणत्या प्रकारचा त्रिकोण असेल?

(A) विशालकोन त्रिकोण (B) लघुकोन त्रिकोण (C) काटकोन त्रिकोण (D)समभुज त्रिकोण

(5) एका चौरसाचा कर्ण $10\sqrt{2}$ सेमी असल्यास त्याची परिमिती .... असेल.

(A) 10 सेमी (B) $40\sqrt{2}$ सेमी (C) 20 सेमी (D) 40 सेमी

(6) एका काटकोन त्रिकोणात कर्णावरील शिरोलंबामुळे कर्णाचे 4 सेमी व 9 सेमी लांबीचे दोन भाग होतात, तर त्या शिरोलंबाची लांबी किती?

(A) 9 सेमी (B) 4 सेमी (C) 6 सेमी (D) $2\sqrt{6}$ सेमी

(7) काटकोन त्रिकोणामध्ये काटकोन करणाऱ्या बाजू 24 सेमी व 18 सेमी असतील तर त्याच्या कर्णाची लांबी .... असेल.

(A) 24 सेमी (B) 30 सेमी (C) 15 सेमी (D) 18 सेमी

(8) Δ ABC मध्ये, AB = $6\sqrt{3}$ सेमी, AC = 12 सेमी आणि BC = 6 सेमी तर $\angle$ A चे माप किती?

(A) 30° (B) 60° (C) 90° (D) 45°

2. खालील उदाहरणे सोडवा.

(1) एका समभुज त्रिकोणाची बाजू $2a$ आहे, तर त्याची उंची काढा.

(2) 7 सेमी, 24 सेमी, 25 सेमी बाजू असलेला त्रिकोण काटकोन त्रिकोण होईल का? सकारण लिहा.

(3) आयताच्या बाजू 11 सेमी व 60 सेमी असतील, तर त्याच्या कर्णाची लांबी काढा.

(4) एका काटकोन त्रिकोणामध्ये काटकोन करणाऱ्या बाजू 9 सेमी व 12 सेमी आहेत, तर त्या त्रिकोणाच्या कर्णाची लांबी काढा.

(5) समद्विभुज काटकोन त्रिकोणाची बाजू x आहे, तर त्याच्या कर्णाची लांबी काढा.

(6) Δ PQR मध्ये; PQ = $\sqrt{8}$, QR = $\sqrt{5}$, PR = $\sqrt{3}$; तर Δ PQR हा काटकोन त्रिकोण आहे का? असल्यास त्याचा कोणता कोन काटकोन आहे?

3. Δ RST मध्ये, $\angle$ S = 90°, $\angle$ T = 30°, RT = 12 सेमी तर RS व ST काढा.

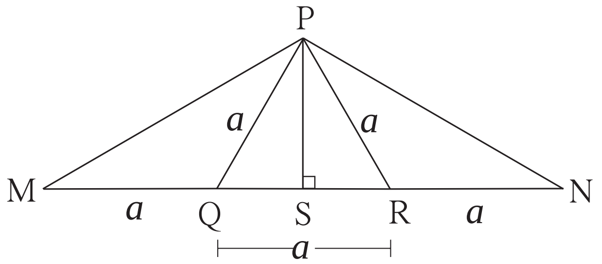
4. आयताचे क्षेत्रफळ 192 चौसेमी असून त्याची लांबी 16 सेमी आहे, तर आयताच्या कर्णाची लांबी काढा.

5★. एका समभुज त्रिकोणाची उंची $\sqrt{3}$ सेमी आहे, तर त्या त्रिकोणाच्या बाजूची लांबी व परिमिती काढा.

6. Δ ABC मध्ये रेख AP ही मध्यगा आहे. जर BC = 18, $AB^2 + AC^2 = 260$ तर AP काढा.

7*. Δ ABC हा समभुज त्रिकोण आहे. पाया BC वर P बिंदू असा आहे की PC = $\frac{1}{3}$ BC, जर AB = 6 सेमी तर AP काढा.

8. आकृती 2.31 मध्ये, M-Q-R-N. दिलेल्या माहितीवरून सिद्‌ध कराः
$PM = PN = \sqrt{3} \times a$

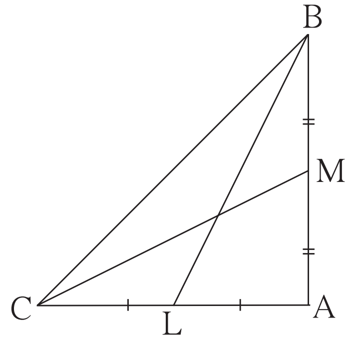


आकृती 2.31

9. सिद्‌ध कराः समांतरभुज चौकोनाच्या कर्णांच्या वर्गांची बेरीज ही त्या चौकोनाच्या बाजूंच्या वर्गांच्या बेरजेबरोबर असते.

10. प्रणाली आणि प्रसाद एकाच ठिकाणावरून पूर्व आणि उत्तर दिशेला सारख्या वेगाने निघाले.दोन तासांनंतर त्यांच्यामधील अंतर $15\sqrt{2}$ किमी असेल तर त्यांचा ताशी वेग काढा.

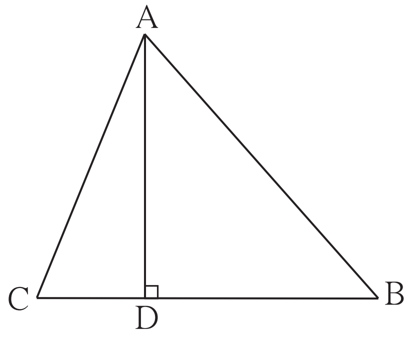
11*. Δ ABC मध्ये $\angle$ BAC = 90°, रेख BL व रेख CM या Δ ABC च्या मध्यगा आहेत, तर सिद्‌ध करा :
$4(BL^2 + CM^2) = 5\ BC^2$



आकृती 2.32

12. एका समांतरभुज चौकोनाच्या लगतच्या दोन बाजूंच्या वर्गांची बेरीज 130 चौसेमी असून त्याच्या एका कर्णाची लांबी 14 सेमी आहे तर त्याच्या दुसऱ्या कर्णाची लांबी किती ?

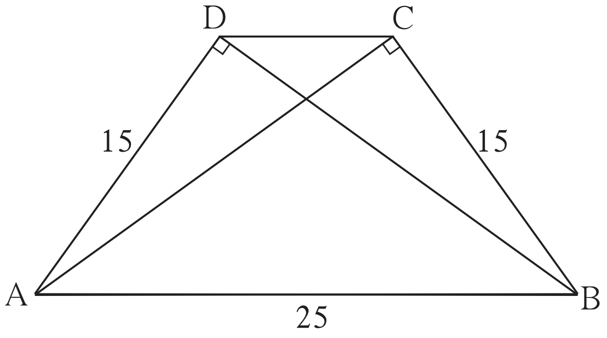
13. Δ ABC मध्ये रेख AD $\perp$ रेख BC आणि DB = 3CD, तर सिद्‌ध करा :
$2AB^2 = 2AC^2 + BC^2$



आकृती 2.33

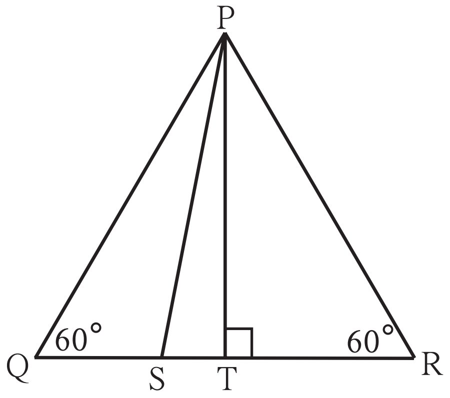
14*. समद्विभुज त्रिकोणामध्ये एकरूप बाजूंची लांबी 13 सेमी असून त्याचा पाया 10 सेमी आहे, तर त्या त्रिकोणाच्या मध्यगासंपातापासून पायाच्या समोरील शिरोबिंदूपर्यंतचे अंतर काढा.

15. समलंब चौकोन ABCD मध्ये,
रेख AB $\parallel$ रेख DC
रेख BD $\perp$ रेख AD,
रेख AC $\perp$ रेख BC,
जर AD = 15, BC = 15 आणि AB = 25
असेल तर A($\square$ ABCD) किती ?



आकृती 2.34

16★. आकृतीमध्ये Δ PQR हा समभुज त्रिकोण असून बिंदू S हा रेख QR वर अशा प्रकारे आहे की, $QS = \frac{1}{3}$ QR तर सिद्‌ध करा; $9\ PS^2 = 7\ PQ^2$



आकृती 2.35

17★. रेख PM ही Δ PQR ची मध्यगा आहे. जर PQ = 40, PR = 42 आणि PM = 29, तर QR काढा.

18. रेख AM ही Δ ABC ची मध्यगा आहे. जर AB = 22, AC = 34, BC = 24, तर बाजू AM ची लांबी काढा.

ICT Tools or Links

इंटरनेटवरून 'Story on the life of Pythagoras' ची माहिती मिळवा. Slide show तयार करा.

AJHR79

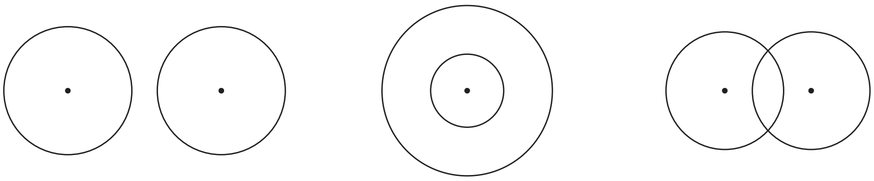
3 वर्तुळ

चला, शिकूया.

- एका, दोन, तीन बिंदूतून जाणारी वर्तुळे
- स्पर्शवर्तुळे
- अंतर्लिखित कोन व अंतर्खंडित कंस
- स्पर्शिका छेदिका कोनाचे प्रमेय
- वृत्तछेदिका व स्पर्शिका
- वर्तुळकंस
- चक्रीय चौकोन
- जीवांच्या छेदनांचे प्रमेय

जरा आठवूया.

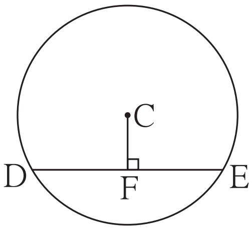
वर्तुळ या आकृतीसंबंधीच्या केंद्र, त्रिज्या, व्यास, जीवा, अंतर्भाग, बाह्यभाग या संज्ञांचा चांगला परिचय तुम्हाला झाला आहे. एकरूप वर्तुळे, समकेंद्री वर्तुळे व छेदणारी वर्तुळे या संज्ञा आठवा.



एकरूप वर्तुळे   समकेंद्री वर्तुळे   छेदणारी वर्तुळे

इयत्ता नववीत अभ्यासलेले जीवांचे गुणधर्म पुढील कृतींच्या सहाय्याने आठवा.

कृती I : सोबतच्या आकृतीत केंद्र C असलेल्या वर्तुळाची रेख DE ही जीवा आहे. रेख CF $\perp$ जीवा DE. जर वर्तुळाचा व्यास 20 सेमी आणि DE = 16 सेमी असेल, तर CF = किती ?



आकृती 3.1

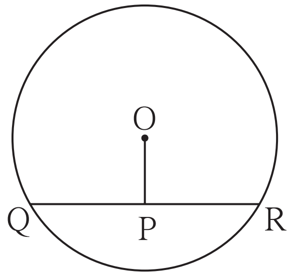
हा प्रश्न सोडविण्यासाठी उपयोगी पडणारी प्रमेये आणि गुणधर्म आठवून लिहा.

(1) वर्तुळकेंद्रातून जीवेवर काढलेला लंब ____________

(2) ____________

(3) ____________

हे गुणधर्म वापरून प्रश्न सोडवा.



आकृती 3.2

कृती II : सोबतच्या आकृतीत केंद्र O असलेल्या वर्तुळाची रेख QR ही जीवा आहे. बिंदू P हा जीवा QR चा मध्यबिंदू आहे. जर QR = 24, OP = 10 तर वर्तुळाची त्रिज्या काढा.

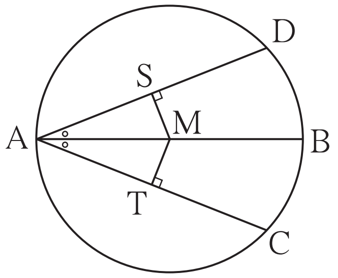
हा प्रश्न सोडविण्यासाठी उपयोगी पडणारी प्रमेये लिहा.

(1) ____________________

(2) ____________________

या प्रमेयांचा उपयोग करून उदाहरण सोडवा.

कृती III : आकृतीत वर्तुळकेंद्र M आणि
रेख AB हा व्यास आहे.
रेख MS $\perp$ जीवा AD
रेख MT $\perp$ जीवा AC
$\angle DAB \cong \angle CAB$.
तर सिद्ध करा; जीवा AD $\cong$ जीवा AC.



आकृती 3.3

हा प्रश्न सोडविण्यासाठी खालीलपैकी कोणते प्रमेय वापराल ?

(1) वर्तुळाच्या दोन जीवा वर्तुळकेंद्रापासून समदूर असतील, तर त्या समान लांबीच्या असतात.

(2) एकाच वर्तुळाच्या एकरूप जीवा वर्तुळकेंद्रापासून समदूर असतात.

याशिवाय त्रिकोणांच्या एकरूपतेची खालीलपैकी कोणती कसोटी उपयोगी पडेल ?

(1) बाकोबा, (2) कोबाको, (3) बाबाबा, (4) कोकोबा, (5) कर्णभुजा.

योग्य ती कसोटी आणि प्रमेय वापरून सिद्धता लिहा.

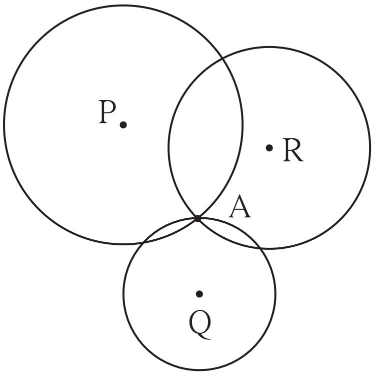
जाणून घेऊया.

एका, दोन, तीन बिंदूंतून जाणारी वर्तुळे

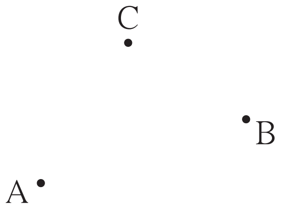
सोबतच्या आकृतीत, एका प्रतलात बिंदू A दाखविला आहे. केंद्रबिंदू P, Q, R असणारी तीनही वर्तुळे A या बिंदूतून जातात. बिंदू A मधून जाणारी आणखी किती वर्तुळे असतील असे तुम्हाला वाटते ?

तुमचे उत्तर 'कितीही' किंवा 'असंख्य' असे असेल, तर ते बरोबर आहे.

एकाच बिंदूतून जाणारी असंख्य वर्तुळे असतात.



आकृती 3.4

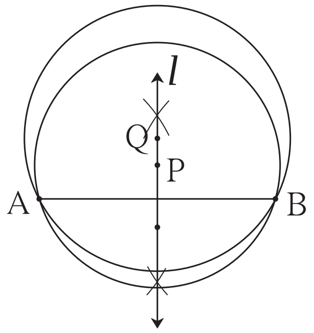


सोबतच्या आकृतीतील A आणि B या दोन भिन्न बिंदूंतून जाणारी किती वर्तुळे असतील?

A, B, C या तिन्ही बिंदूंतून जाणारी किती वर्तुळे असतील? पुढे दिलेल्या कृतींतून काही उत्तर मिळते का पाहा.

आकृती 3.5

कृती I : बिंदू A आणि बिंदू B यांना जोडणारा रेख AB काढा. या रेषाखंडाची लंबदुभाजक रेषा l काढा. रेषा l वरील बिंदू P हे केंद्र आणि PA त्रिज्या घेऊन वर्तुळ काढा. हे वर्तुळ बिंदू B मधूनही जाते, हे पाहा. याचे कारण शोधा. (लंबदुभाजक रेषेचा गुणधर्म आठवा.)



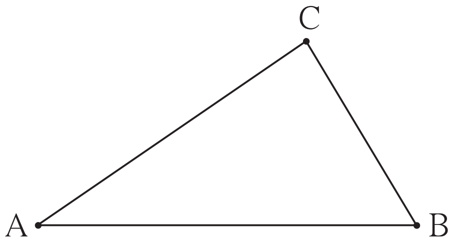
आकृती 3.6

रेषा l चा Q हा आणखी एक बिंदू घेऊन, केंद्र Q आणि त्रिज्या QA घेऊन काढलेले वर्तुळही बिंदू B मधून जाईल का ? विचार करा.

बिंदू A आणि बिंदू B मधून जाणारी आणखी किती वर्तुळे काढता येतील ? त्यांच्या केंद्रबिंदूंची स्थाने कोठे असतील ?

कृती II : नैकरेषीय बिंदू A, B, C काढा. या तिन्ही बिंदूंतून जाणारे वर्तुळ काढण्यासाठी काय करावे लागेल ? या तिन्ही बिंदूंतून जाणारे वर्तुळ काढा.

याच तीन बिंदूंतून जाणारे आणखी एक वर्तुळ काढता येईल का ? विचार करा.



आकृती 3.7

कृती III : एकरेषीय असलेले D, E, F हे बिंदू काढा. या तिन्ही बिंदूंतून जाणारे वर्तुळ काढण्याचा प्रयत्न करा. असे वर्तुळ काढता येत नसेल, तर ते का काढता येत नाही याचा विचार करा.

हे लक्षात ठेवूया.

(1) एका बिंदूतून जाणारी असंख्य वर्तुळे असतात.

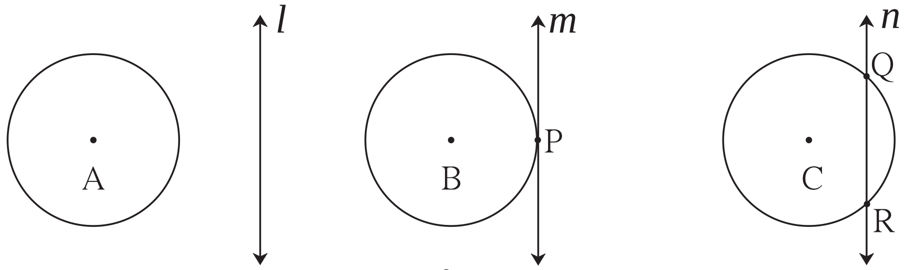
(2) दोन भिन्न बिंदूंतून जाणारी असंख्य वर्तुळे असतात.

(3) तीन नैकरेषीय बिंदूंतून जाणारे एक आणि एकच वर्तुळ असते.

(4) तीन एकरेषीय बिंदूंतून जाणारे एकही वर्तुळ नसते.

जाणून घेऊया.

वृत्तछेदिका आणि स्पर्शिका (Secant and tangent)



आकृती 3.8

आकृतीमध्ये, रेषा l व वर्तुळ यांच्यामध्ये एकही सामाईक बिंदू नाही.

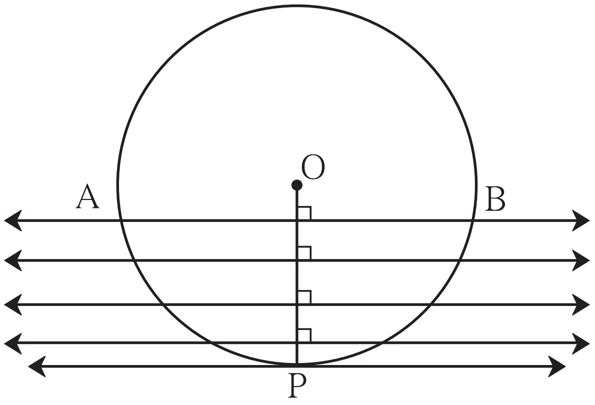
रेषा m व वर्तुळ यांच्यामध्ये बिंदू P हा एकच सामाईक बिंदू आहे. येथे m ही वर्तुळाची स्पर्शिका आहे व बिंदू P हा स्पर्शबिंदू आहे असे म्हणतात.

रेषा n व वर्तुळ यांना दोन सामाईक बिंदू आहेत. Q व R हे रेषा व वर्तुळ यांचे छेदनबिंदू आहेत व रेषा n ही वृत्तछेदिका आहे असे म्हणतात.

वर्तुळाच्या स्पर्शिकेचा एक महत्त्वाचा गुणधर्म एका कृतीतून समजून घ्या.

कृती :

केंद्र O असलेले एक पुरेसे मोठे वर्तुळ काढा. त्या वर्तुळाची रेख OP ही एक त्रिज्या काढा. या त्रिज्येला लंब असणारी एक रेषा काढा. ही रेषा आणि वर्तुळ यांच्या छेदनबिंदूंना A व B नावे द्या. कल्पना करा, की रेषा AB ही बिंदू O कडून बिंदू P कडे अशी सरकत आहे की तिची आधीची स्थिती नव्या स्थितीला समांतर राहील; म्हणजेच सरकलेली रेषा AB आणि त्रिज्या यांतील कोन काटकोनच राहील.



आकृती 3.9

हे घडताना बिंदू A आणि B वर्तुळावरून परस्परांच्या जवळ जवळ येऊ लागतील. सरते शेवटी ते बिंदू P मध्ये सामावले जातील.

या स्थितीत रेषा AB ची नवी स्थिती ही वर्तुळाची स्पर्शिका होईल, परंतु त्रिज्या OP आणि रेषा AB ची नवी स्थिती यांतील कोन मात्र काटकोनच राहील.

यावरून लक्षात येते, की वर्तुळाच्या कोणत्याही बिंदूतून जाणारी स्पर्शिका तो बिंदू जोडणाऱ्या त्रिज्येला लंब असते. ह्या गुणधर्माला 'स्पर्शिका – त्रिज्या प्रमेय' म्हणतात.

स्पर्शिका - त्रिज्या प्रमेय (Tangent theorem)

प्रमेय : **वर्तुळाच्या कोणत्याही बिंदूतून जाणारी स्पर्शिका, तो बिंदू केंद्राशी जोडणाऱ्या त्रिज्येला लंब असते.**
हे प्रमेय अप्रत्यक्ष पद्धतीने सिद्ध करता येते.

अधिक माहितीसाठी :

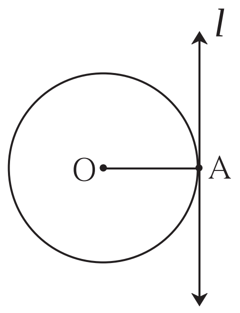
पक्ष : केंद्र O असलेल्या वर्तुळाला रेषा l ही बिंदू A मध्ये स्पर्श करते. रेख OA ही त्रिज्या आहे.

साध्य : रेषा $l \perp$ त्रिज्या OA.

सिद्धता : समजा, रेषा l ही रेख OA ला लंब नाही.

समजा बिंदू O मधून l वर OB हा लंब टाकला.

साहजिकच बिंदू B हा बिंदू A पेक्षा भिन्न असला पाहिजे. (आकृती 3.11 पाहा.)



आकृती 3.10

रेषा l वर बिंदू C असा घेता येईल, की A-B-C आणि BA = BC.

आता, Δ OBC आणि Δ OBA यांमध्ये,

रेख BC $\cong$ रेख BA .... (रचना)

$\angle$ OBC $\cong$ $\angle$OBA .... (प्रत्येक काटकोन)

रेख OB $\cong$ रेख OB

$\therefore$ Δ OBC $\cong$ Δ OBA .... (बाकोबा कसोटी)

$\therefore$ OC = OA

परंतु रेख OA ही त्रिज्या आहे, म्हणून

रेख OC ही सुद्धा त्रिज्या होईल.

$\therefore$ बिंदू C हा वर्तुळावर असेल.

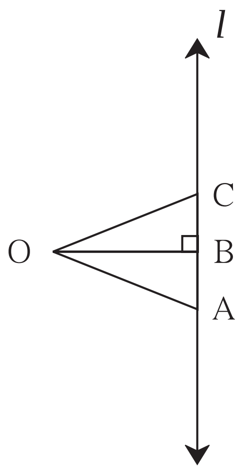
म्हणजे रेषा l ही वर्तुळाला A आणि C या दोन बिंदूत छेदेल.

हे विधान पक्षाशी विसंगत आहे. कारण रेषा l स्पर्शिका आहे.

म्हणजे रेषा l वर्तुळाला एकाच बिंदूत छेदते. .... (पक्ष)

$\therefore$ रेषा l ही त्रिज्या OA ला लंब नाही, हे असत्य आहे.

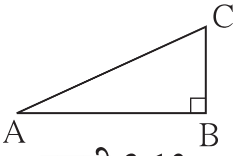
$\therefore$ रेषा $l \perp$ त्रिज्या OA.



आकृती 3.11

जरा आठवूया.

आपण शिकलेल्या कोणत्या प्रमेयाचा उपयोग करून काटकोन त्रिकोणात कर्ण ही सर्वात मोठी बाजू असते हे सिद्ध करता येईल ?

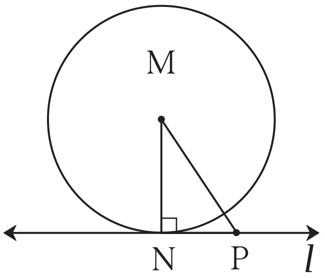


आकृती 3.12

जाणून घेऊया.

स्पर्शिका-त्रिज्या प्रमेयाचा व्यत्यास (Converse of tangent theorem)

प्रमेय : **वर्तुळाच्या त्रिज्येच्या बाह्यटोकातून जाणारी आणि त्या त्रिज्येला लंब असणारी रेषा त्या वर्तुळाची स्पर्शिका असते.**



आकृती 3.13

पक्ष : रेख MN ही केंद्र M असलेल्या वर्तुळाची त्रिज्या आहे. बिंदू N मधून जाणारी रेषा l ही त्रिज्या MN ला लंब आहे.

साध्य : रेषा l ही त्या वर्तुळाची स्पर्शिका आहे.

सिद्धता : रेषा l चा P हा N खेरीज दुसरा कोणताही बिंदू घेतला. रेख MP काढला.

आता, Δ MNP मध्ये $\angle$ N हा काटकोन आहे.

$\therefore$ रेख MP हा कर्ण आहे.

$\therefore$ रेख MP > रेख MN.

$\therefore$ बिंदू P हा वर्तुळावर असणे शक्य नाही.

म्हणजे रेषा l चा N खेरीज इतर कोणताही बिंदू वर्तुळावर नाही.

$\therefore$ रेषा l ही वर्तुळाला N या एकाच बिंदूत छेदते.

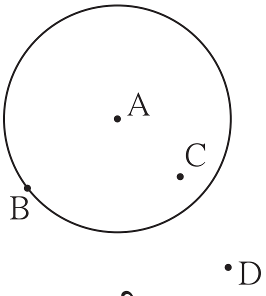
$\therefore$ रेषा l ही त्या वर्तुळाची स्पर्शिका आहे.

चला, चर्चा करूया.

केंद्र A असणाऱ्या वर्तुळावरील B हा एक बिंदू दिला आहे. या वर्तुळाची बिंदू B मधून जाणारी स्पर्शिका काढावयाची आहे.

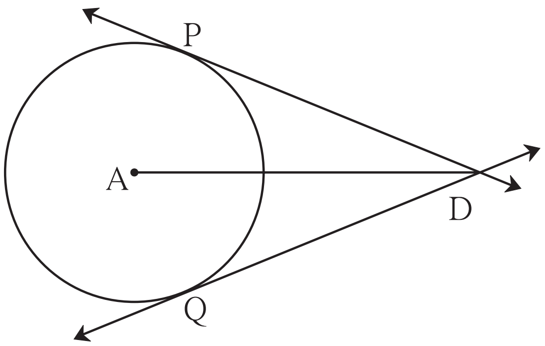
B या बिंदूतून जाणाऱ्या असंख्य रेषा असतात. त्यांपैकी कोणती रेषा या वर्तुळाची स्पर्शिका असेल ? ती कशी काढता येईल ?

बिंदू B मधून जाणाऱ्या एकापेक्षा जास्त स्पर्शिका असू शकतील का ?



आकृती 3.14

वर्तुळाच्या अंतर्भागातील C या बिंदूतून त्या वर्तुळाला स्पर्शिका काढता येतील का?



आकृती 3.15

वर्तुळाच्या बाह्यभागातील D या बिंदूतून जाणाऱ्या त्या वर्तुळाच्या स्पर्शिका असू शकतील का? असल्यास अशा किती स्पर्शिका असतील?

चर्चेतून तुमच्या लक्षात आलेच असेल, की आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे वर्तुळाच्या बाह्यभागातून त्या वर्तुळाला दोन स्पर्शिका काढता येतील.

सोबतच्या आकृतीत रेषा DP आणि रेषा DQ या स्पर्शिका, केंद्र A असलेल्या वर्तुळाला बिंदू P आणि बिंदू Q मध्ये स्पर्श करतात.

रेख DP आणि रेख DQ यांना स्पर्शिकाखंड म्हणतात.

स्पर्शिकाखंडाचे प्रमेय (Tangent segment theorem)

प्रमेय : **वर्तुळाच्या बाह्यभागातील बिंदूपासून त्या वर्तुळाला काढलेले स्पर्शिकाखंड एकरूप असतात.**

शेजारील आकृतीच्या आधारे पक्ष आणि साध्य ठरवा.

त्रिज्या AP आणि AQ काढून या प्रमेयाची खाली दिलेली सिद्धता रिकाम्या जागा भरून पूर्ण करा.

सिद्धता : Δ PAD आणि Δ QAD यांमध्ये,

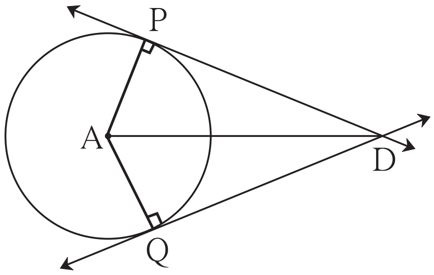
बाजू PA $\cong$ __________ (एकाच वर्तुळाच्या त्रिज्या)

बाजू AD $\cong$ बाजू AD __________

$\angle APD = \angle AQD = 90^\circ$ ...... (स्पर्शिकेचे प्रमेय)

$\therefore$ Δ PAD $\cong$ Δ QAD __________

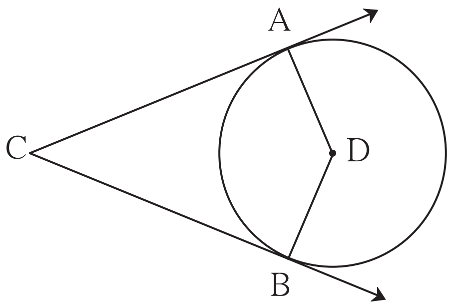
$\therefore$ बाजू DP $\cong$ बाजू DQ __________



आकृती 3.16

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) दिलेल्या आकृतीत, केंद्र D असलेले वर्तुळ $\angle ACB$ च्या बाजूंना बिंदू A आणि B मध्ये स्पर्श करते. जर $\angle ACB = 52^\circ$, तर $\angle ADB$ चे माप काढा.



आकृती 3.17

उकल : चौकोनाच्या चारही कोनांच्या मापांची बेरीज 360° असते.

$\therefore \angle ACB + \angle CAD + \angle CBD + \angle ADB = 360^\circ$

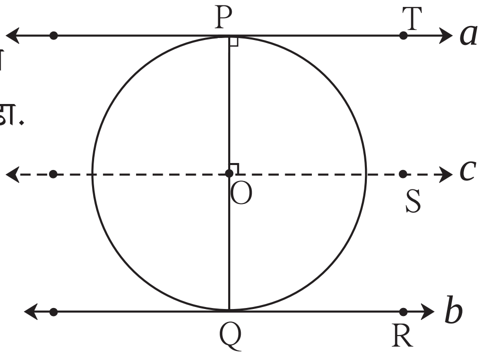
$\therefore 52^\circ + 90^\circ + 90^\circ + \angle ADB = 360^\circ$ .... स्पर्शिका-त्रिज्या प्रमेय

$\therefore \angle ADB + 232^\circ = 360^\circ$

$\therefore \angle ADB = 360^\circ - 232^\circ = 128^\circ$

उदा. (2) रेषा a आणि रेषा b ह्या केंद्र O असणाऱ्या वर्तुळाच्या समांतर स्पर्शिका वर्तुळाला अनुक्रमे बिंदू P व Q मध्ये स्पर्श करतात, तर रेख PQ हा त्या वर्तुळाचा व्यास आहे हे सिद्ध करा.

सिद्धता : बिंदू O मधून रेषा a ला समांतर रेषा c काढा.
रेषा a, c, b यांवर अनुक्रमे बिंदू T, S, R आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे घ्या. त्रिज्या OP आणि त्रिज्या OQ काढा.



आकृती 3.18

आता, $\angle OPT = 90^\circ$ ..... स्पर्शिका -त्रिज्या प्रमेय

$\therefore$ $\angle SOP = 90^\circ$..... (अंतर्कोन गुणधर्म) .... (I)

आता, रेषा $a \parallel$ रेषा c ..... (रचना)

रेषा $a \parallel$ रेषा b ..... (पक्ष)

रेषा $b \parallel$ रेषा c

आता, $\angle OQR = 90^\circ$ ..... स्पर्शिका -त्रिज्या प्रमेय

$\therefore$ $\angle SOQ = 90^\circ$.....(अंतर्कोन गुणधर्म) .... (II)

$\therefore$ (I) व (II) वरून,

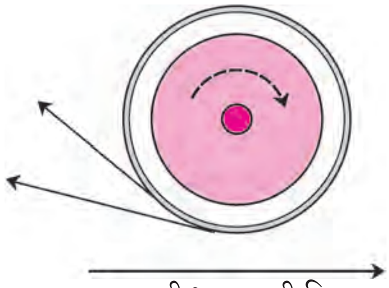
$\angle SOP + \angle SOQ = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$\therefore$ किरण OP आणि किरण OQ हे विरुद्ध किरण आहेत.

$\therefore$ बिंदू P, O, Q एकरेषीय आहेत.

$\therefore$ रेख PQ हा वर्तुळाचा व्यास आहे.

पावसाळ्यात थोडे पाणी साठलेल्या रस्त्यावरून मोटार सायकल जात असताना तिच्या मागील चाकावरून उडणाऱ्या पाण्याच्या धारा तुम्ही पाहिल्या असतील. त्या धारा वर्तुळाच्या स्पर्शिकांप्रमाणे दिसतात हे तुमच्या लक्षात आले असेल. त्या धारा तशाच का असतात याची माहिती तुमच्या विज्ञान शिक्षकाकडून घ्या.


चाकाची धावण्याची दिशा

फिरणाऱ्या भुईचक्रातून उडणाऱ्या ठिणग्या, सुरीला धार लावताना उडणाऱ्या ठिणग्या यांचे निरीक्षण करा.त्याही स्पर्शिकांप्रमाणेच दिसतात का?

हे लक्षात ठेवूया.

(1) स्पर्शिका-त्रिज्या प्रमेय : वर्तुळाच्या कोणत्याही बिंदूतून जाणारी स्पर्शिका, तो बिंदू केंद्राशी जोडणाऱ्या त्रिज्येला लंब असते.

(2) स्पर्शिका-त्रिज्या प्रमेयाचा व्यत्यास : वर्तुळाच्या त्रिज्येच्या बाह्यटोकातून जाणारी आणि त्या त्रिज्येला लंब असणारी रेषा त्या वर्तुळाची स्पर्शिका असते.

(3) वर्तुळाच्या बाह्यभागातील बिंदूपासून त्या वर्तुळाला काढलेले स्पर्शिकाखंड एकरूप असतात.

सरावसंच 3.1

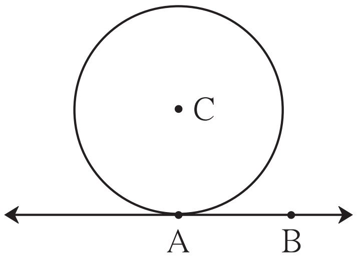
1. सोबतच्या आकृतीत, केंद्र C असलेल्या वर्तुळाची त्रिज्या 6 सेमी आहे. रेषा AB या वर्तुळाला बिंदू A मध्ये स्पर्श करते. या माहितीवरून खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या.

   (1) $\angle$CAB चे माप किती अंश आहे? का?

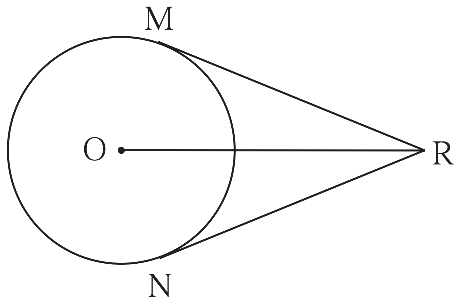
   (2) बिंदू C हा रेषा AB पासून किती अंतरावर आहे? का?

   (3) जर d(A,B)= 6 सेमी, तर d(B,C) काढा.

   (4) $\angle$ABC चे माप किती अंश आहे? का?



आकृती 3.19



आकृती 3.20

2. शेजारील आकृतीत, केंद्र O असलेल्या वर्तुळाच्या बाह्यभागातील R या बिंदूपासून काढलेले RM आणि RN हे स्पर्शिकाखंड वर्तुळाला बिंदू M आणि N मध्ये स्पर्श करतात.

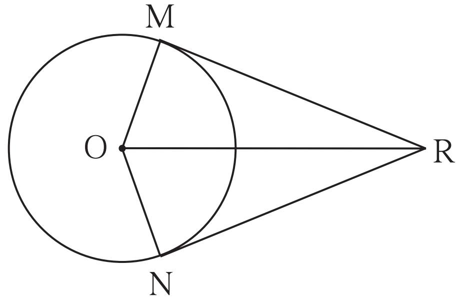
   जर OR = 10 सेमी व वर्तुळाची त्रिज्या 5 सेमी असेल तर –

   (1) प्रत्येक स्पर्शिकाखंडाची लांबी किती?

   (2) $\angle$MRO चे माप किती?

   (3) $\angle$MRN चे माप किती?

3. रेख RM आणि रेख RN हे केंद्र O असलेल्या वर्तुळाचे स्पर्शिकाखंड आहेत, तर रेख OR हा $\angle$MRN आणि $\angle$MON या दोन्ही कोनांचा दुभाजक आहे, हे सिद्ध करा.



आकृती 3.21

4. त्रिज्या 4.5 सेमी असलेल्या वर्तुळाच्या दोन स्पर्शिका परस्परांना समांतर आहेत. तर त्या स्पर्शिकांतील अंतर किती हे सकारण लिहा.

ICT Tools or Links

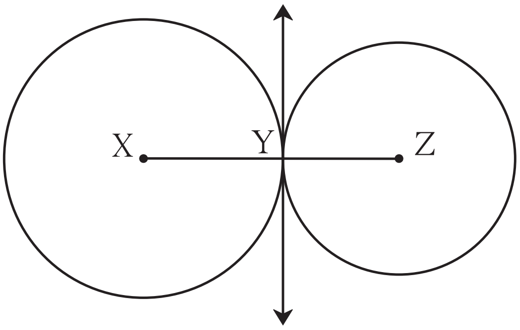
संगणकावर जिओजिब्रा या सॉफ्टवेअरच्या साहाय्याने वर्तुळ व वर्तुळाच्या बाह्यभागातील बिंदूतून स्पर्शिका काढून स्पर्शिकाखंड एकरूप आहेत याचा पडताळा घ्या.

जाणून घेऊया.

स्पर्श वर्तुळे (Touching circles)

कृती I :

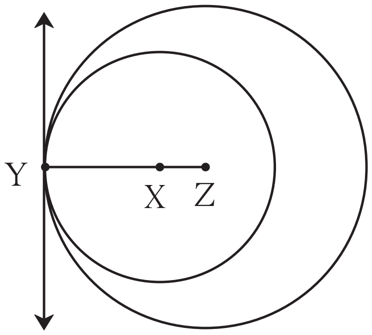
आकृती 3.22 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे, X-Y-Z हे एकरेषीय बिंदू काढा.
केंद्र X व त्रिज्या XY घेऊन वर्तुळ काढा.
केंद्र Z व त्रिज्या YZ घेऊन दुसरे वर्तुळ काढा.
ही दोन वर्तुळे Y या एकाच बिंदूत एकमेकांना छेदतात हे अनुभवा.
बिंदू Y मधून रेख XZ ला लंबरेषा काढा. ही रेषा दोन्ही वर्तुळांची सामाईक स्पर्शिका आहे हे लक्षात घ्या.



आकृती 3.22

कृती II :

आकृती 3.23 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे Y-X-Z हे एकरेषीय बिंदू काढा.
केंद्र Z आणि त्रिज्या ZY घेऊन वर्तुळ काढा.
केंद्र X आणि त्रिज्या XY घेऊन वर्तुळ काढा.
दोन्ही वर्तुळे Y या एकाच बिंदूत छेदतात हे अनुभवा.
बिंदू Y मधून रेख YZ ला लंबरेषा काढा. ही रेषा दोन्ही वर्तुळांची सामाईक स्पर्शिका आहे हे लक्षात घ्या.



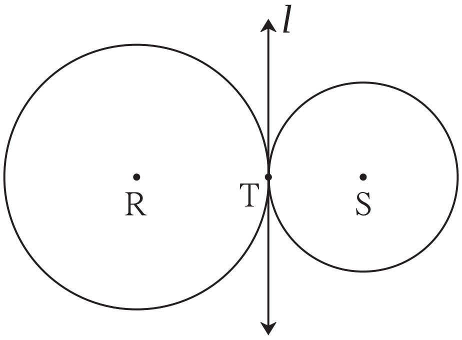
आकृती 3.23

वरील कृतींतून तुमच्या लक्षात आले असेल, की दोन्ही आकृत्यांतील वर्तुळे एकाच प्रतलात आहेत आणि एकमेकांना एकाच बिंदूत छेदतात. अशा वर्तुळांना एकमेकांना स्पर्श करणारी वर्तुळे किंवा **स्पर्शवर्तुळे** म्हणतात.

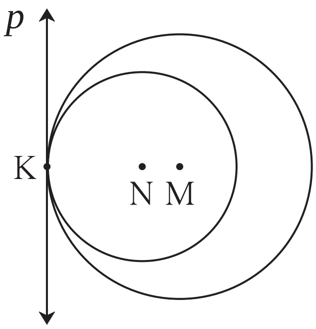
स्पर्शवर्तुळांची व्याख्या पुढीलप्रमाणे करता येते.

एका प्रतलातील दोन वर्तुळे त्याच प्रतलातील एका रेषेला एकाच बिंदूत छेदत असतील, तर त्यांना स्पर्शवर्तुळे म्हणतात. ती रेषा दोन्ही वर्तुळांची सामाईक स्पर्शिका असते.

दोन्ही वर्तुळे व रेषा यांच्यातील सामाईक बिंदूला **सामाईक स्पर्शबिंदू** म्हणतात.



आकृती 3.24



आकृती 3.25

आकृती 3.24 मध्ये, केंद्र R व S असणारी वर्तुळे रेषा l ला T या एकाच बिंदूत छेदतात. म्हणून ती दोन्ही स्पर्शवर्तुळे असून रेषा l ही त्यांची सामाईक स्पर्शिका आहे. ह्या आकृतीतील वर्तुळे **बाह्यस्पर्शी** आहेत.

आकृती 3.25 मधील वर्तुळे **अंतर्स्पर्शी** असून रेषा p ही त्यांची सामाईक स्पर्शिका आहे.

विचार करूया

(1) आकृती 3.24 मधील वर्तुळांप्रमाणे परस्परांना स्पर्श करणाऱ्या वर्तुळांना बाह्यस्पर्शी वर्तुळे का म्हणतात?

(2) आकृती 3.25 मधील वर्तुळांप्रमाणे एकमेकांना स्पर्श करणाऱ्या वर्तुळांना अंतर्स्पर्शी वर्तुळे का म्हणतात?

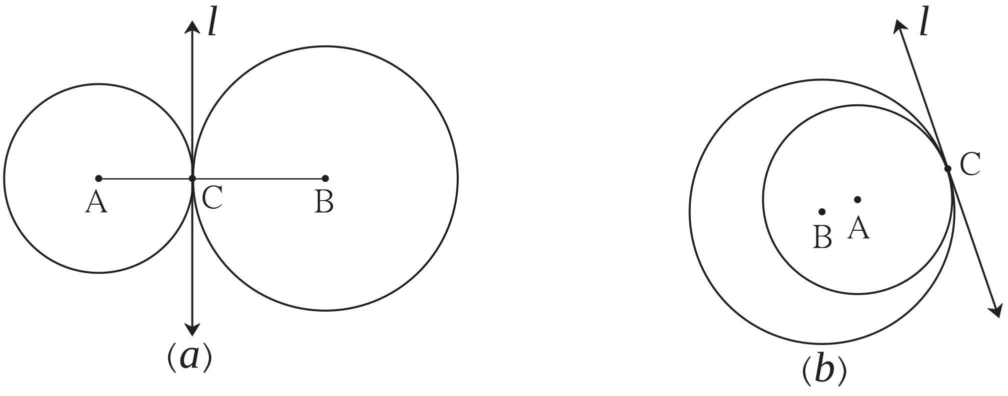
(3) आकृती 3.26 मध्ये, केंद्र A व B असणाऱ्या वर्तुळांच्या त्रिज्या अनुक्रमे 3 सेमी व 4 सेमी असतील तर–

(i) आकृती 3.26 (a) मध्ये d(A,B) किती असेल?

(ii) आकृती 3.26 (b) मध्ये d(A,B) किती असेल?

स्पर्शवर्तुळांचे प्रमेय (Theorem of touching circles)

प्रमेय : परस्परांना स्पर्श करणाऱ्या वर्तुळांचा स्पर्शबिंदू त्या वर्तुळांचे केंद्रबिंदू जोडणाऱ्या रेषेवर असतो.



आकृती 3.26

पक्ष : केंद्र A व B असणाऱ्या वर्तुळांचा स्पर्शबिंदू C आहे.

साध्य : बिंदू C हा रेषा AB वर आहे.

सिद्धता : समजा, रेषा l ही स्पर्शवर्तुळांची बिंदू C मधून जाणारी सामाईक स्पर्शिका आहे.

रेषा $l \perp$ रेख AC, रेषा $l \perp$ रेख BC. $\therefore$ रेख AC व रेख BC हे रेषा l ला लंब आहेत.

बिंदू C मधून रेषा l ला एकच लंब रेषा काढता येते. $\therefore$ C, A, B एकरेषीय आहेत.

हे लक्षात ठेवूया.

(1) परस्परांना स्पर्श करणाऱ्या वर्तुळांचा स्पर्शबिंदू, त्या वर्तुळांचे केंद्रबिंदू जोडणाऱ्या रेषेवर असतो.

(2) बाह्यस्पर्शी वर्तुळांचा केंद्रांतील अंतर त्यांच्या त्रिज्यांच्या बेरजेएवढे असते.

(3) अंतर्स्पर्शी वर्तुळांच्या केंद्रांतील अंतर त्यांच्या त्रिज्यांतील फरकाएवढे असते.

सरावसंच 3.2

1. दोन अंतर्स्पर्शी वर्तुळांच्या त्रिज्या अनुक्रमे 3.5 सेमी व 4.8 सेमी आहेत, तर त्यांच्या केंद्रांतील अंतर किती आहे ?

2. बाह्यस्पर्शी असलेल्या दोन वर्तुळांच्या त्रिज्या अनुक्रमे 5.5 सेमी व 4.2 सेमी असतील तर त्यांच्या केंद्रांतील अंतर किती असेल ?

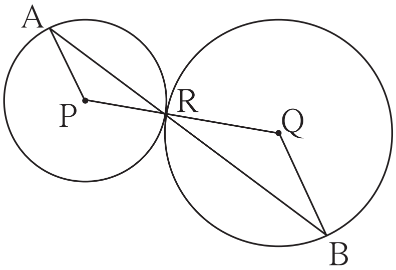
3. त्रिज्या अनुक्रमे 4 सेमी आणि 2.8 सेमी असणारी, (i) बाह्यस्पर्शी (ii) अंतर्स्पर्शी, वर्तुळे काढा.

4. आकृती 3.27 मध्ये, केंद्र P आणि Q असलेली वर्तुळे परस्परांना बिंदू R मध्ये स्पर्श करतात. बिंदू R मधून जाणारी रेषा त्या वर्तुळांना अनुक्रमे बिंदू A व बिंदू B मध्ये छेदते. तर –

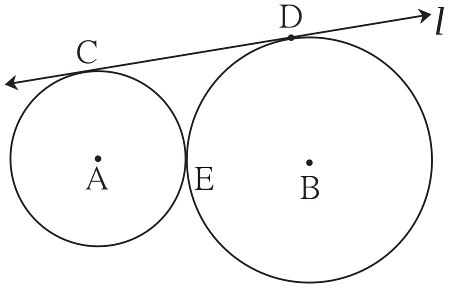
(1) रेख AP || रेख BQ हे सिद्ध करा.

(2) Δ APR ~ Δ RQB हे सिद्ध करा.

(3) जर $\angle$ PAR चे माप 35° असेल, तर $\angle$ RQB चे माप ठरवा.



आकृती 3.27

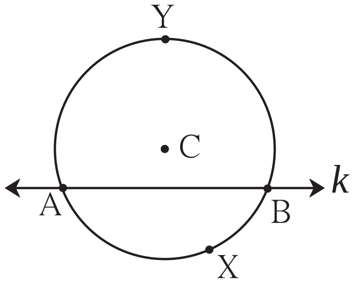


आकृती 3.28

5. आकृती 3.28 मध्ये, केंद्र A व B असणारी वर्तुळे परस्परांना बिंदू E मध्ये स्पर्श करतात. रेषा l ही त्यांची सामाईक स्पर्शिका त्यांना अनुक्रमे C व D मध्ये स्पर्श करते. जर वर्तुळांच्या त्रिज्या अनुक्रमे 4 सेमी व 6 सेमी असतील, तर रेख CD ची लांबी किती असेल ?

जरा आठवूया.

वर्तुळकंस (Arc of a circle)



आकृती 3.29

वृत्तछेदिकेमुळे वर्तुळाचे दोन भागांत विभाजन होते. यांपैकी कोणताही एक भाग आणि वृत्तछेदिकेचे वर्तुळावरील बिंदू यांनी मिळून होणाऱ्या आकृतीला **वर्तुळकंस** म्हणतात.

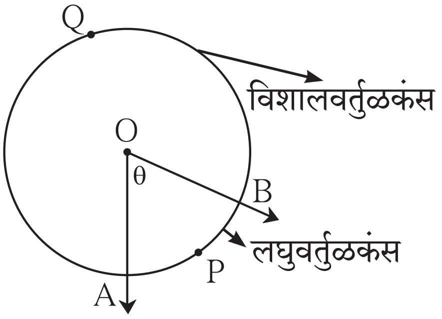
वर्तुळ आणि वृत्तछेदिका यांच्या छेदनबिंदूंना कंसांचे अंत्यबिंदू किंवा कंसांची टोके म्हणतात.

आकृती 3.29 मध्ये, वृत्तछेदिका k मुळे, केंद्र C असलेल्या वर्तुळाचे AYB आणि AXB हे दोन कंस तयार झाले आहेत.

वृत्तछेदिकेच्या ज्या बाजूला वर्तुळकेंद्र असते त्या बाजूच्या कंसाला **विशालकंस** आणि विरुद्ध बाजूच्या कंसाला **लघुकंस** म्हणतात. आकृती 3.29 मध्ये कंस AYB हा विशालकंस आणि कंस AXB हा लघुकंस आहे. एखाद्या वर्तुळकंसाचे नाव तीन अक्षरे वापरून लिहिल्याने तो नेमका समजतो, परंतु काही संदिग्धता निर्माण होत नसेल तर लघुकंसाचे नाव त्याचे अंत्यबिंदू दर्शवणाऱ्या दोन अक्षरांनी लिहितात. उदाहरणार्थ, आकृती 3.29 मधील कंस AXB हा कंस AB असाही लिहितात.

आपण कंसाचे नाव लिहिण्यासाठी हीच पद्धत वापरणार आहोत.

केंद्रीय कोन (Central angle)



आकृती 3.30

ज्या कोनाचा शिरोबिंदू वर्तुळकेंद्रावर असतो. त्या कोनाला **केंद्रीय कोन** म्हणतात.

आकृती 3.30 मध्ये केंद्र O असलेले वर्तुळ असून $\angle$ AOB हा केंद्रीय कोन आहे.

वृत्तछेदिकेप्रमाणेच केंद्रीय कोनामुळेसुद्धा वर्तुळाचे दोन कंसांत विभाजन होते.

कंसाचे माप (Measure of an arc)

काही वेळा दोन कंसांची तुलना करण्याची गरज पडते. त्यासाठी कंसाच्या मापाची व्याख्या पुढीलप्रमाणे ठरवलेली आहे.

(1) लघुकंसाचे माप त्याच्या संगत केंद्रीय कोनाच्या मापाएवढे असते.

आकृती 3.30 मध्ये केंद्रीय $\angle$ AOB चे माप θ आहे. म्हणून लघुकंस APB चे माप θ हेच आहे.

(2) विशालकंसाचे माप = 360° – संगत लघुकंसाचे माप.

आकृती 3.30 मध्ये विशालकंस AQB चे माप = 360° – कंस APB चे माप = $360^\circ - \theta$

(3) अर्धवर्तुळकंसाचे माप, म्हणजेच अर्धवर्तुळाचे माप 180° असते.

(4) पूर्ण वर्तुळाचे माप 360° असते.

जाणून घेऊया.

कंसांची एकरूपता (Congruence of arcs)

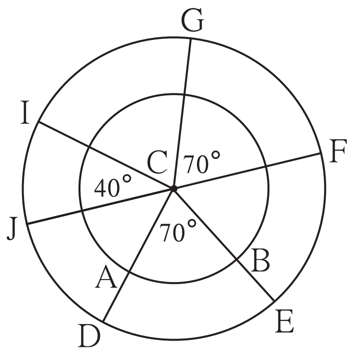
जेव्हा दोन प्रतलीय आकृत्या एकमेकींशी तंतोतंत जुळतात, तेव्हा त्या आकृत्या एकमेकींशी एकरूप आहेत, असे म्हणतात.एकरूपतेच्या या संकल्पनेच्या आधारे समान मापांचे कोन एकरूप असतात हे आपल्याला माहीत आहे.

त्याचप्रमाणे दोन कंसांची मापे समान असतील तर ते दोन कंस एकरूप असतील का?

या प्रश्नाचे उत्तर पुढील कृती करून शोधा.

कृती :

आकृती 3.31 मध्ये दर्शवल्याप्रमाणे केंद्र C असणारी दोन वर्तुळे काढा. $\angle$ DCE आणि $\angle$ FCG हे समान मापांचे कोन काढा. या कोनांच्या मापापेक्षा वेगळे माप असणारा $\angle$ ICJ काढा.



आकृती 3.31

$\angle$ DCE च्या भुजा आतील वर्तुळाला छेदल्यामुळे मिळणाऱ्या कंसाला AB नाव द्या.

कंसाच्या मापाच्या व्याख्येवरून, कंस AB आणि कंस DE यांची मापे समान आहेत, हे लक्षात आले का? हे कंस परस्परांशी तंतोतंत जुळतील का? निश्चितच नाही जुळणार.

आता C-DE; C-FG आणि C-IJ या वर्तुळपाकळ्या कापून वेगळ्या करा. त्या एकमेकींशी जुळवून DE, FG आणि IJ यांपैकी कोणते कंस परस्परांशी जुळतात हे पाहा.

या कृतीवरून, दोन कंस एकरूप होण्यासाठी 'त्यांची मापे समान असणे' पुरेसे नाही, हे लक्षात आले का?

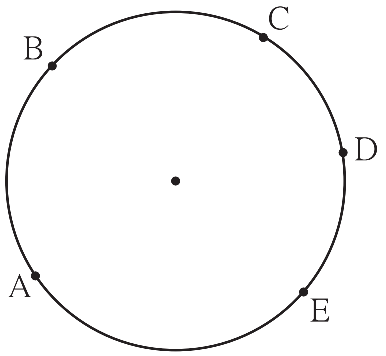
दोन कंस एकरूप असण्यासाठी आणखी कोणती अट पूर्ण होणे आवश्यक आहे असे तुम्हांला वाटते?

वरील कृतीवरून लक्षात येते, की –

दोन कंसांच्या त्रिज्या आणि त्यांची मापे समान असतात, तेव्हा ते दोन कंस परस्परांशी एकरूप असतात.

'कंस DE व कंस GF एकरूप आहेत' हे चिन्हाने कंस DE $\cong$ कंस GF असे दर्शवतात.

कंसांच्या मापांच्या बेरजेचा गुणधर्म (Property of sum of measures of arcs)



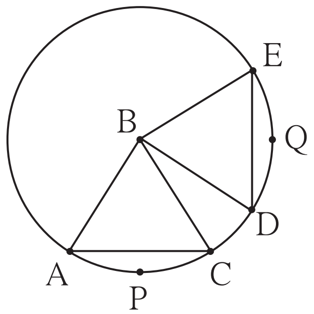
आकृती 3.32

आकृती 3.32 मध्ये A, B, C, D, E हे एकाच वर्तुळाचे बिंदू आहेत. या बिंदूंमुळे अनेक कंस तयार झाले आहेत. यांपैकी कंस ABC आणि कंस CDE यांमध्ये C हा एक आणि एकच बिंदू सामाईक आहे. म्हणून कंस ABC आणि कंस CDE यांच्या मापांची बेरीज कंस ACE च्या मापाएवढी होते.

m(कंस ABC) + m(कंस CDE) = m(कंस ACE)

परंतु कंस ABC आणि कंस BCE यांमध्ये एकापेक्षा अधिक बिंदू [कंस BC चे सर्व] सामाईक आहेत. म्हणून कंस ABC आणि कंस BCE यांच्या मापांची बेरीज कंस ABE च्या मापाएवढी नसते.

प्रमेय : एकाच वर्तुळाच्या (किंवा एकरूप वर्तुळांच्या) एकरूप कंसांच्या संगत जीवा एकरूप असतात.



आकृती 3.33

पक्ष : केंद्र B असलेल्या वर्तुळात कंस APC ≅ कंस DQE

साध्य : जीवा AC ≅ जीवा DE

सिद्धता : (रिकाम्या जागा भरून सिद्धता पूर्ण करा.)

ΔABC आणि Δ DBE यांमध्ये,

बाजू AB ≅ बाजू DB .....(......................)

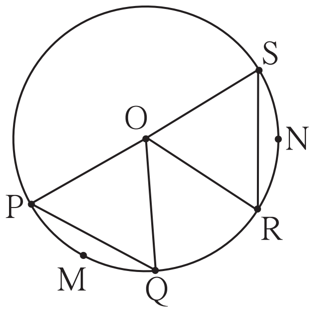
बाजू .... ≅ बाजू .....(......................)

$\angle$ ABC ≅ $\angle$ DBE .....(एकरूप कंसांची व्याख्या)

$\therefore$ Δ ABC ≅ Δ DBE ..... (......................)

$\therefore$ जीवा AC ≅ जीवा DE .....(......................)

प्रमेय : एकाच वर्तुळाच्या (किंवा एकरूप वर्तुळांच्या) एकरूप जीवांचे संगत कंस एकरूप असतात.



आकृती 3.34

पक्ष : रेख PQ आणि रेख RS ह्या केंद्र O असलेल्या वर्तुळाच्या एकरूप जीवा आहेत.

साध्य : कंस PMQ ≅ कंस RNS

पुढील विचार लक्षात घेऊन सिद्धता लिहा. दोन कंस एकरूप असण्यासाठी त्यांच्या त्रिज्या आणि मापे समान असावी लागतात. कंस PMQ आणि कंस RNS हे एकाच वर्तुळाचे कंस असल्याने त्यांच्या त्रिज्या समान

आहेत. त्या कंसांची मापे, म्हणजे त्यांच्या संगत केंद्रीय कोनांची मापे होत. हे केंद्रीय कोन मिळण्यासाठी त्रिज्या OP, OQ, OR आणि OS काढाव्या लागतील. त्या काढल्यावर तयार होणारे Δ OPQ आणि Δ ORS हे एकरूप आहेत ना?

वरील दोन्ही प्रमेये तुम्ही एकरूप वर्तुळांसाठी सिद्ध करा.

विचार करूया

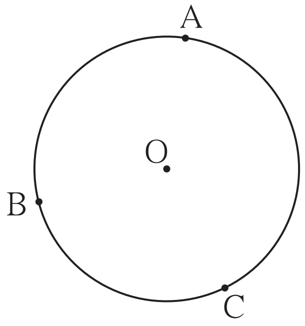
- वरील दोनपैकी पहिल्या प्रमेयात कंस APC आणि कंस DQE हे लघुकंस एकरूप मानले आहेत. त्यांचे संगत विशालकंस एकरूप मानूनही हे प्रमेय सिद्ध करता येईल का?
- दुसऱ्या प्रमेयात एकरूप जीवांचे संगत विशालकंसही एकरूप होतात का? जीवा PQ आणि जीवा RS हे व्यास असतानाही हे प्रमेय सत्य असते का?

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) केंद्र O असलेल्या वर्तुळाचे A, B, C हे तीन बिंदू आहेत.

(i) या तीन बिंदूंमुळे तयार होणाऱ्या सर्व कंसांची नावे लिहा.

(ii) कंस BC आणि कंस AB यांची मापे अनुक्रमे 110° आणि 125° असतील तर राहिलेल्या सर्व कंसांची मापे लिहा.



आकृती 3.35

उकल : (i) कंसांची नावे –

कंस AB, कंस BC, कंस AC, कंस ABC, कंस ACB, कंस BAC

(ii) कंस ABC चे माप = कंस AB चे माप + कंस BC चे माप

$= 125^\circ + 110^\circ = 235^\circ$

कंस AC चे माप = 360° – कंस ABC चे माप

$= 360^\circ - 235^\circ = 125^\circ$

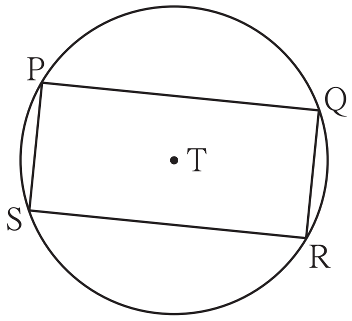
त्याचप्रमाणे कंस ACB चे माप = $360^\circ - 125^\circ = 235^\circ$

आणि कंस BAC चे माप = $360^\circ - 110^\circ = 250^\circ$

उदा. (2) आकृती 3.36 मध्ये केंद्र T असलेल्या वर्तुळात आयत PQRS अंतर्लिखित केला आहे. तर दाखवा की –

(i) कंस PQ ≅ कंस SR

(ii) कंस SPQ ≅ कंस PQR



आकृती 3.36

उकल : □ PQRS हा आयत आहे.

∴ जीवा PQ ≅ जीवा SR .... (आयताच्या संमुख बाजू)

∴ कंस PQ ≅ कंस SR ...... (एकरूप जीवांचे संगत कंस)

जीवा PS ≅ जीवा QR ..... (आयताच्या संमुख बाजू)

∴ कंस SP ≅ कंस QR ..... (एकरूप जीवांचे संगत कंस)

∴ कंस SP आणि कंस QR यांची मापे समान आहेत.

आता, कंस SP आणि कंस PQ यांच्या मापांची बेरीज

= कंस PQ आणि कंस QR यांच्या मापांची बेरीज

∴ कंस SPQ चे माप = कंस PQR चे माप

∴ कंस SPQ ≅ कंस PQR

हे लक्षात ठेवूया.

(1) ज्या कोनाचा शिरोबिंदू वर्तुळकेंद्रावर असतो त्या कोनाला केंद्रीय कोन म्हणतात.

(2) कंसाच्या मापाची व्याख्या – (i) लघुकंसाचे माप त्याच्या संगत केंद्रीय कोनाच्या मापाएवढे असते.
(ii) विशालकंसाचे माप = 360° – संगत लघुकंसाचे माप. (iii) अर्धवर्तुळकंसाचे माप 180° असते.

(3) दोन वर्तुळकंसांच्या त्रिज्या आणि मापे समान असतात तेव्हा ते कंस एकरूप असतात.

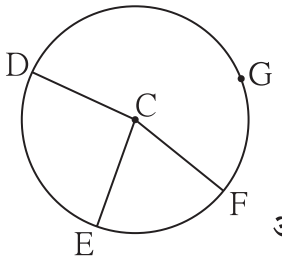
(4) एकाच वर्तुळाच्या कंस ABC आणि कंस CDE यांमध्ये जेव्हा C हा एकच बिंदू सामाईक असतो, तेव्हा
m(कंस ABC) + m(कंस CDE) = m(कंस ACE)

(5) एकाच वर्तुळाच्या (किंवा एकरूप वर्तुळांच्या) एकरूप कंसांच्या संगत जीवा एकरूप असतात.

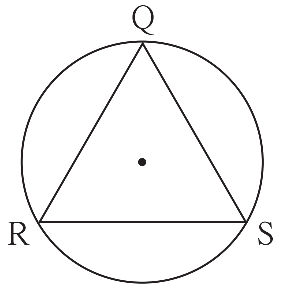
(6) एकाच वर्तुळाच्या (किंवा एकरूप वर्तुळांच्या) एकरूप जीवांचे संगत कंस एकरूप असतात.

सरावसंच 3.3

1. आकृती 3.37 मध्ये, केंद्र C असलेल्या वर्तुळावर G, D, E आणि F हे बिंदू आहेत. ∠ ECF चे माप 70° आणि कंस DGF चे माप 200° असेल, तर कंस DE आणि कंस DEF यांची मापे ठरवा.



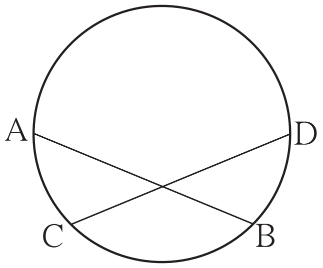
आकृती 3.37



आकृती 3.38

2★. आकृती 3.38 मध्ये Δ QRS समभुज आहे.
तर दाखवा की –
(1) कंस RS $\cong$ कंस QS $\cong$ कंस QR
(2) कंस QRS चे माप 240° आहे.

3. आकृती 3.39 मध्ये,
जीवा AB $\cong$ जीवा CD,
तर सिद्ध करा –
कंस AC $\cong$ कंस BD



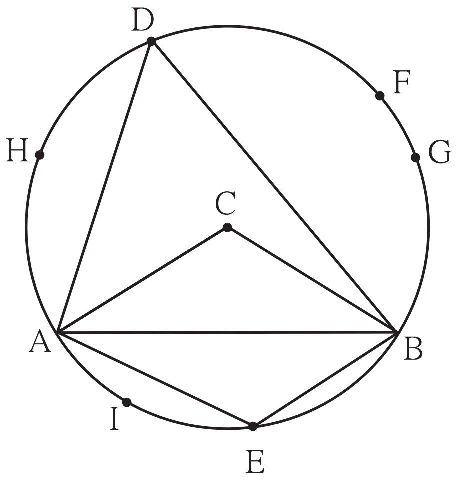
आकृती 3.39

जाणून घेऊया.

वर्तुळ आणि बिंदू, वर्तुळ आणि रेषा (स्पर्शिका) यांचा परस्परसंबंध असणारे काही गुणधर्म आपण पाहिले. आता वर्तुळ आणि कोन यांसंबंधीचे काही गुणधर्म आपण पाहू. यांतील काही गुणधर्म आधी कृतींतून माहीत करून घेऊ.

कृती I :

केंद्र C असलेले एक पुरेसे मोठे वर्तुळ काढा. आकृती 3.40 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे त्याची जीवा AB काढा. केंद्रीय कोन ACB काढा. जीवा AB मुळे झालेल्या विशालकंसावर बिंदू D आणि लघुकंसावर बिंदू E हे कोणतेही बिंदू घ्या.



आकृती 3.40

(1) $\angle$ADB आणि $\angle$ACB मोजा. त्यांच्या मापांची तुलना करा.

(2) $\angle$ADB आणि $\angle$AEB मोजा. आलेल्या मापांची बेरीज करून पाहा.

(3) कंस ADB वर F, G, H असे आणखी काही बिंदू घ्या. ∠AFB, ∠AGB, ∠AHB, ... यांची मापे मोजा. या मापांची ∠ADB च्या मापाशी आणि परस्परांशी तुलना करा.

(4) कंसAEB वर I हा आणखी एक कोणताही बिंदू घ्या. ∠ AIB मोजून त्याच्या मापाची ∠ AEB च्या मापाशी तुलना करा.

या कृतीतून तुम्हांला आलेले अनुभव असे असतील –

(1) ∠ ACB चे माप ∠ ADB च्या मापाच्या दुप्पट आहे.

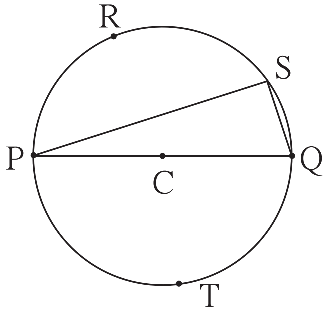
(2) ∠ ADB आणि ∠ AEB यांच्या मापांची बेरीज 180° आहे.

(3) ∠ AHB, ∠ ADB, ∠ AFB, ∠ AGB या सर्वांची मापे समान आहेत.

(4) ∠ AEB आणि ∠ AIB यांची मापे समान आहेत.

कृती II :

आकृती 3.41 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे केंद्र C असलेले पुरेसे मोठे वर्तुळ काढा. रेख PQ हा त्याचा कोणताही व्यास काढा. या व्यासामुळे तयार झालेल्या दोन्ही अर्धवर्तुळांवर R,S,T असे काही बिंदू घ्या. ∠ PRQ, ∠ PSQ, ∠ PTQ मोजा. यांतील प्रत्येक कोन काटकोन आहे हे अनुभवा.



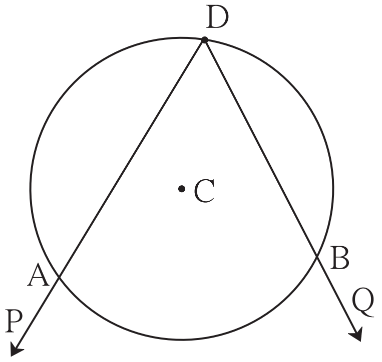
आकृती 3.41

वरील कृतींतून तुम्हांला आढळलेले गुणधर्म म्हणजे वर्तुळ आणि कोन यांसबंधीची प्रमेये आहेत. या प्रमेयांच्या सिद्धता आता आपण पाहू. त्यासाठी आधी काही संज्ञांची ओळख करून घ्यावी लागेल.

अंतर्लिखित कोन (Inscribed angle)

आकृती 3.42 मध्ये केंद्र C असलेले एक वर्तुळ आहे. ∠ PDQ चा शिरोबिंदू D या वर्तुळावर आहे. कोनाच्या भुजा DP आणि DQ वर्तुळाला अनुक्रमे A आणि B मध्ये छेदतात. अशा कोनाला वर्तुळात किंवा कंसात अंतर्लिखित केलेला कोन म्हणतात.

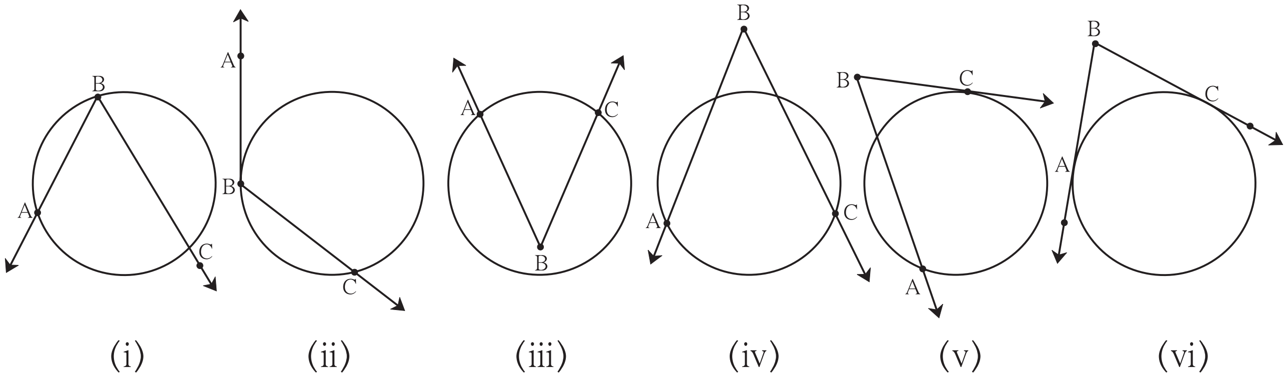
आकृती 3.42 मध्ये ∠ ADB हा कंस ADB मध्ये अंतर्लिखित आहे.



आकृती 3.42

अंतर्खंडित कंस (Intercepted arc)

पुढील आकृती 3.43 मधील (i) ते (vi) या सर्व आकृत्यांचे निरीक्षण करा.



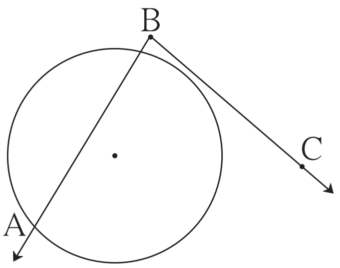
आकृती 3.43

प्रत्येक आकृतीतील $\angle$ ABC च्या अंतर्भागात येणाऱ्या वर्तुळकंसाला $\angle$ ABC ने अंतर्खंडित केलेला कंस म्हणतात. अंतर्खंडित कंसाचे अंत्यबिंदू हे वर्तुळ आणि कोन यांचे छेदन बिंदू असतात. कोनाच्या प्रत्येक बाजूवर कंसाचा एक अंत्यबिंदू असणे आवश्यक असते.

आकृती 3.43 मधील (i), (ii) व (iii) या आकृत्यांमध्ये कोनांनी प्रत्येकी एकच कंस अंर्खंडित केला आहे; तर (iv), (v) व (vi) मध्ये प्रत्येक कोनाने दोन कंस अंतर्खंडित केले आहेत.

आकृती (ii) व (v) मध्ये कोनाची एक भुजा आणि (vi) मध्ये कोनाच्या दोन्ही भुजा वर्तुळाला स्पर्श करतात, हेही लक्षात घ्या.

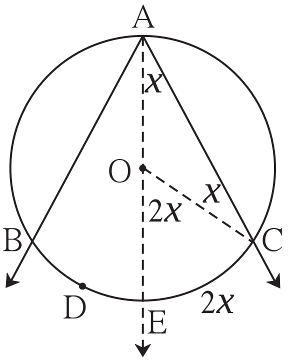
आकृती 3.44 मधील कंस हा अंतर्खंडित कंस नाही. कारण कोनाच्या BC या भुजेवर कंसाचा एकही अंत्यबिंदू नाही.



आकृती 3.44

अंतर्लिखित कोनाचे प्रमेय (Inscribed angle theorem)

प्रमेय : वर्तुळात अंतर्लिखित केलेल्या कोनाचे माप त्याने अंतर्खंडित केलेल्या कंसाच्या मापाच्या निम्मे असते.



आकृती 3.45

पक्ष : केंद्र O असलेल्या वर्तुळात, $\angle$BAC हा कंस BAC मध्ये अंतर्लिखित केला आहे. त्या कोनामुळे कंस BDC अंतर्खंडित झाला आहे.

साध्य : $\angle BAC = \frac{1}{2}\, m$(कंस BDC)

रचना : किरण AO काढला. वर्तुळाला तो बिंदू E मध्ये छेदतो. त्रिज्या OC काढली.

सिद्धता : Δ AOC मध्ये.

बाजू OA $\cong$ बाजू OC ...... (एकाच वर्तुळाच्या त्रिज्या)

$\therefore$ $\angle OAC = \angle OCA$ ..... (समद्विभुज त्रिकोणाचे प्रमेय)

$\angle OAC = \angle OCA = x$ मानू. ...... (I)

आता, $\angle EOC = \angle OAC + \angle OCA$ .... (त्रिकोणाच्या बाह्यकोनाचे प्रमेय)

$= x^\circ + x^\circ = 2x^\circ$

परंतु $\angle EOC$ हा केंद्रीय कोन आहे.

$\therefore$ m(कंस EC) $= 2x^\circ$ .... (कंसाच्या मापाची व्याख्या) ..... (II)

$\therefore$ (I) व (II) वरून.

$\angle OAC = \angle EAC = \frac{1}{2}$ m(कंस EC) ..... (III)

याप्रमाणेच, त्रिज्या OB काढून, $\angle EAB = \frac{1}{2}$ m(कंस BE) हे सिद्ध करता येईल...... (IV)

$\therefore$ $\angle EAC + \angle EAB = \frac{1}{2}$ m(कंस EC) $+ \frac{1}{2}$ m(कंस BE) .... (III) व (IV) वरून

$\therefore$ $\angle BAC = \frac{1}{2}$ [m(कंस EC) + m(कंस BE)]

$= \frac{1}{2}$ [m(कंसBEC)] $= \frac{1}{2}$ [m(कंस BDC)] ..... (V)

लक्षात घ्या, की वर्तुळात अंतर्लिखित केलेला कोन आणि वर्तुळकेंद्र यांसंबंधी तीन शक्यता संभवतात. वर्तुळकेंद्र कोनाच्या भुजेवर असेल, अंतर्भागात असेल किंवा बाह्यभागात असेल. यांपैकी पहिल्या दोन शक्यता (III) व (V) मध्ये सिद्ध झाल्या. आता राहिलेली तिसरी शक्यता विचारात घेऊ.

आकृती 3.46 मध्ये,

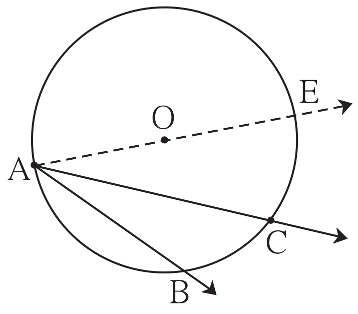
$\angle BAC = \angle BAE - \angle CAE$

$= \frac{1}{2}$ m(कंस BCE) $- \frac{1}{2}$ m(कंस CE)

...... (III) वरून

$= \frac{1}{2}$ [m(कंस BCE) $-$ m(कंस CE)]

$= \frac{1}{2}$ [m(कंस BC)] ...... (VI)



आकृती 3.46

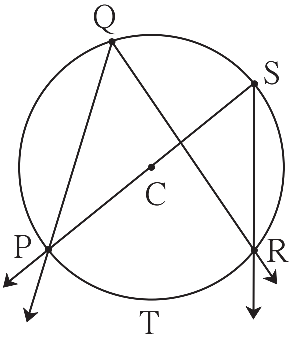
या प्रमेयाचे विधान पुढीलप्रमाणे सुद्धा लिहितात.

वर्तुळकंसाने वर्तुळाच्या कोणत्याही बिंदूशी अंतरित (subtended) केलेल्या कोनाचे माप त्याच कंसाने वर्तुळकेंद्राशी अंतरित केलेल्या कोनाच्या मापाच्या निम्मे असते.

या प्रमेयाच्या पुढील उपप्रमेयांची विधानेही या परिभाषेत लिहिता येतील.

अंतर्लिखित कोनाच्या प्रमेयाची उपप्रमेये (Corollaries of inscribed angle theorem)

1. एकाच कंसात अंतर्लिखित झालेले सर्व कोन एकरूप असतात.



आकृती 3.47

आकृती 3.47 च्या आधारे पक्ष आणि साध्य लिहा.

पुढील प्रश्नांचा विचार करून सिद्धता लिहा.

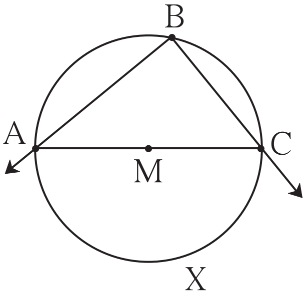
(1) $\angle$ PQR ने कोणता कंस अंतर्खंडित केला आहे ?

(2) $\angle$ PSR ने कोणता कंस अंतर्खंडित केला आहे ?

(3) अंतर्लिखित कोनाचे माप आणि त्याने अंतर्खंडित केलेल्या कंसाचे माप यांतील संबंध कसा असतो ?

2. अर्धवर्तुळात अंतर्लिखित झालेला कोन काटकोन असतो.

सोबतच्या आकृती 3.48 च्या आधारे या प्रमेयाचे पक्ष, साध्य आणि सिद्धता लिहा.



आकृती 3.48

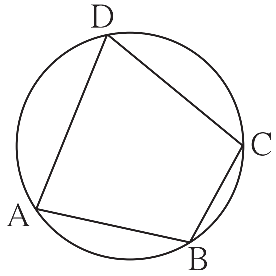
चक्रीय चौकोन (Cyclic quadrilateral)

चौकोनाचे चारही शिरोबिंदू एकाच वर्तुळावर असतील तर त्या चौकोनाला चक्रीय चौकोन म्हणतात.

चक्रीय चौकोनाचे प्रमेय (Theorem of cyclic quadrilateral)

प्रमेय : चक्रीय चौकोनाचे संमुख कोन परस्परांचे पूरककोन असतात.

पुढे दिलेल्या सिद्धतेतील रिकाम्या जागा भरून सिद्धता पूर्ण करा.



आकृती 3.49

पक्ष : $\square$ [ ] हा चक्रीय आहे.

साध्य : $\angle$ B + $\angle$ D = [ ]

[ ] + $\angle$ C = 180°

सिद्धता : $\angle$ ADC हा अंतर्लिखित कोन असून त्याने कंस ABC अंतर्खंडित केला आहे.

$\therefore \angle ADC = \frac{1}{2}$ [ ] .... (I)

तसेच [ ] हा अंतर्लिखित कोन असून त्याने कंस ADC अंतर्खंडित केला आहे.

$\therefore$ $\square$ = $\frac{1}{2}$ m(कंस ADC) ..... (II)

$\therefore$ $\angle$ADC + $\square$ = $\frac{1}{2}$ $\square$ + $\frac{1}{2}$ m(कंस ADC) ..... [(I) व (II) वरून]

= $\frac{1}{2}$ [$\square$ + m(कंस ADC)]

= $\frac{1}{2}$ $\times$ 360° .... [कंस ABC आणि कंस ADC मिळून पूर्ण वर्तुळ होते.]

= $\square$

त्याचप्रमाणे $\angle$A + $\angle$C = $\square$ हे सिद्ध करता येईल.

चक्रीय चौकोनाच्या प्रमेयाचे उपप्रमेय (Corollary of cyclic quadrilateral theorem)

प्रमेय : चक्रीय चौकोनाचा बाह्यकोन त्याच्या संलग्न कोनाच्या संमुख कोनाशी एकरूप असतो.

या प्रमेयाची सिद्धता तुम्ही लिहा.

विचार करूया

वरील प्रमेयात $\angle$ B + $\angle$ D = 180° हे सिद्ध केल्यावर उरलेल्या संमुख कोनांच्या मापांची बेरीजही 180° आहे, हे अन्य प्रकारे सिद्ध करता येईल का?

चक्रीय चौकोनाच्या प्रमेयाचा व्यत्यास (Converse of cyclic quadrilateral theorem)

प्रमेय : चौकोनाचे संमुख कोन पूरक असतील तर तो चौकोन चक्रीय असतो.

हे प्रमेय अप्रत्यक्ष पद्धतीने सिद्ध करता येते. तुम्ही प्रयत्न करा.

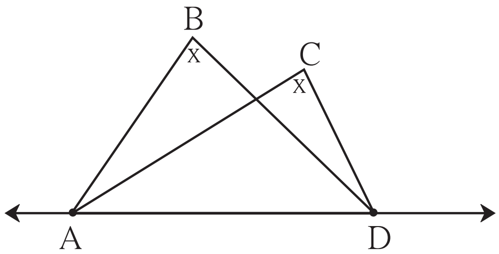
वरील व्यत्यासावरून आपल्या असे लक्षात येते, की चौकोनाचे संमुख कोन जर पूरक असतील तर त्या चौकोनाचे परिवर्तुळ असते.

प्रत्येक त्रिकोणाचे एक परिवर्तुळ असते, हे आपल्याला माहीत आहे, परंतु प्रत्येक चौकोनाचे परिवर्तुळ असतेच असे नाही, हे तुम्ही अनुभवा.

कोणती अट पूर्ण झाली असता चौकोनाचे परिवर्तुळ असते, म्हणजेच चौकोनाचे शिरोबिंदू एकाच वर्तुळावर असतात हे वरील प्रमेयाने आपल्याला समजते.

आणखी एका वेगळ्या परिस्थितीत चार नैकरेषीय बिंदू चक्रीय असतात. हे पुढील प्रमेयात सांगितले आहे.

प्रमेय : **रेषेचे दोन भिन्न बिंदू, त्या रेषेच्या एकाच बाजूला असणाऱ्या दोन भिन्न बिंदूंशी एकरूप कोन निश्चित करत असतील, तर ते चार बिंदू एकाच वर्तुळावर असतात.**



आकृती 3.50

पक्ष : बिंदू B व C हे रेषा AD च्या एकाच बाजूला आहेत. $\angle ABD \cong \angle ACD$

साध्य : बिंदू A, B, C, D एकाच वर्तुळावर आहेत. (म्हणजेच □ ABCD चक्रीय आहे.)

याची देखील अप्रत्यक्ष सिद्धता देता येते.

विचार करूया

वरील प्रमेय कोणत्या प्रमेयाचा व्यत्यास आहे ?

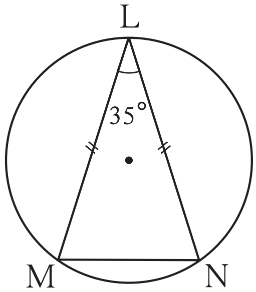
सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) आकृती 3.51 मध्ये, जीवा LM ≅ जीवा LN

$\angle L = 35^\circ$ तर

(i) m(कंस MN) = किती ?

(ii) m(कंस LN) = किती ?



आकृती 3.51

उकल : (i) $\angle L = \frac{1}{2}$ m(कंस MN) ...... (अंतर्लिखित कोनाचे प्रमेय)

$\therefore\ 35 = \frac{1}{2}$ m(कंस MN)

$\therefore\ 2 \times 35 =$ m(कंस MN) $= 70^\circ$

(ii) m(कंस MLN) $= 360^\circ -$ m(कंस MN) ...... (कंसाच्या मापाची व्याख्या)

$= 360^\circ - 70^\circ = 290^\circ$

आता, जीवा LM ≅ जीवा LN

∴ कंस LM ≅ कंस LN

परंतु m(कंस LM) + m(कंस LN) = m(कंस MLN) $= 290^\circ$ ..... (कंसाच्या बेरजेचा गुणधर्म)

m(कंस LM) = m(कंस LN) $= \frac{290^\circ}{2} = 145^\circ$

किंवा, (ii) जीवा LM ≅ जीवा LN

$\therefore\ \angle M = \angle N$ ...... (समद्विभुज त्रिकोणाचे प्रमेय)

$\therefore\ 2\angle M = 180^\circ - 35^\circ = 145^\circ$

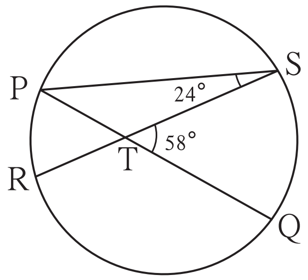
$\therefore\ \angle M = \frac{145^\circ}{2}$

$\therefore$ m(कंस LN) = $2 \times \angle M$ .... (अंतर्लिखित कोनाचे प्रमेय)

$= 2 \times \frac{145^\circ}{2}$

$= 145^\circ$

उदा. (2) आकृती 3.52 मध्ये, जीवा PQ आणि जीवा RS एकमेकींना बिंदू T मध्ये छेदतात.



आकृती 3.52

(i) जर $\angle STQ = 58^\circ$ आणि $\angle PSR = 24^\circ$, तर m(कंस SQ) काढा.

(ii) $\angle STQ = \frac{1}{2}$ [m(कंस PR) + m(कंस SQ)] हे पडताळून पाहा.

(iii) जीवा PQ आणि जीवा RS यांमधील कोनाचे माप कोणतेही असले तरी $m\angle STQ = \frac{1}{2}$ [m(कंस PR) + m(कंस SQ)] हे सिद्ध करा.

(iv) या उदाहरणात सिद्ध होणारा गुणधर्म शब्दांत लिहा.

उकल: (i) $\angle SPQ = \angle SPT = 58^\circ - 24^\circ = 34^\circ$ .... (त्रिकोणाच्या बाह्यकोनाचे प्रमेय)

m(कंस QS) = $2\,\angle SPQ = 2 \times 34^\circ = 68^\circ$

(ii) m(कंस PR) = $2\,\angle PSR = 2 \times 24^\circ = 48^\circ$

आता, $\frac{1}{2}$ [m(कंस PR) + m(कंस SQ)] = $\frac{1}{2}\,[48 + 68]$

$= \frac{1}{2} \times 116 = 58^\circ$

$= \angle STQ$

(iii) या गुणधर्माच्या सिद्धतेतील रिकाम्या चौकटी भरून ती पूर्ण करा.

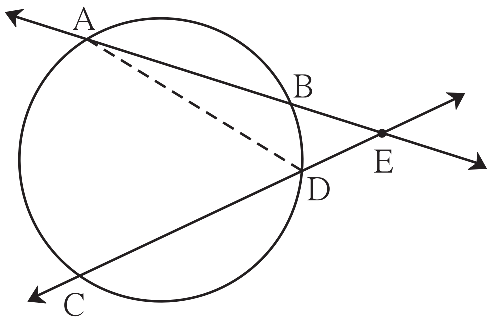
$\angle STQ = \angle SPQ +$ ☐ .... (त्रिकोणाच्या बाह्यकोनाचे प्रमेय)

$= \frac{1}{2}$ m(कंस SQ) + ☐ .... (अंतर्लिखित कोनाचे प्रमेय)

$= \frac{1}{2}$ [☐ + ☐]

(iv) वर्तुळाच्या जीवा एकमेकींना वर्तुळाच्या अंतर्भागात छेदत असतील तर त्या जीवांमधील कोनाचे माप, त्या कोनाने अंतर्खंडित केलेला कंस आणि त्याच्या विरुद्ध कोनाने अंतर्खंडित केलेला कंस, यांच्या मापांच्या बेरजेच्या निम्मे असते.

उदा. (3) वर्तुळाच्या जीवांना सामावणाऱ्या रेषा वर्तुळाच्या बाह्यभागात छेदत असतील तर त्या रेषांमधील कोनाचे माप, त्या कोनाने अंतर्खंडित केलेल्या कंसांच्या मापांच्या फरकाच्या निम्मे असते, हे सिद्ध करा.



आकृती 3.53

पक्ष : वर्तुळाच्या जीवा AB आणि जीवा CD त्या वर्तुळाच्या बाह्यभागात बिंदू E मध्ये छेदतात.

साध्य : $\angle AEC = \frac{1}{2}[m(\text{कंस } AC) - m(\text{कंस } BD)]$

रचना : रेख AD काढला.

सिद्धता : या गुणधर्माची सिद्धता, वरील उदा. (2) मध्ये दिलेल्या सिद्धतेप्रमाणेच देता येते. त्यासाठी Δ AED चे कोन, त्या त्रिकोणाचाबाह्यकोन इत्यादी विचारात घ्या आणि सिद्धता लिहून काढा.

हे लक्षात ठेवूया.

(1) वर्तुळात अंतर्लिखित केलेल्या कोनाचे माप, त्याने अंतर्खंडित केलेल्या कंसाच्या मापाच्या निम्मे असते.

(2) वर्तुळाच्या एकाच कंसात अंतर्लिखित केलेले कोन एकरूप असतात.

(3) अर्धवर्तुळात अंतर्लिखित केलेला कोन काटकोन असतो.

(4) चौकोनाचे चारही शिरोबिंदू एकाच वर्तुळावर असतील तर त्या चौकोनाला चक्रीय चौकोन म्हणतात.

(5) चक्रीय चौकोनाचे संमुख कोन पूरक असतात.

(6) चक्रीय चौकोनाचा बाह्यकोन त्याच्या संलग्न-संमुख कोनाशी एकरूप असतो.

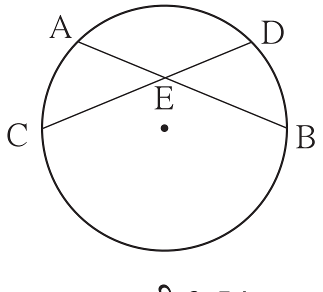
(7) चौकोनाचे संमुख कोन परस्परपूरक असतील तर तो चौकोन चक्रीय असतो.

(8) रेषेचे दोन भिन्न बिंदू, त्या रेषेच्या एकाच बाजूला असणाऱ्या दोन भिन्न बिंदूंशी एकरूप कोन निश्चित करत असतील, तर ते चार बिंदू एकाच वर्तुळावर असतात.

(9) सोबतच्या आकृती 3.54 मध्ये,

(i) $\angle AEC = \frac{1}{2}[m(\text{कंस } AC) + m(\text{कंस } DB)]$

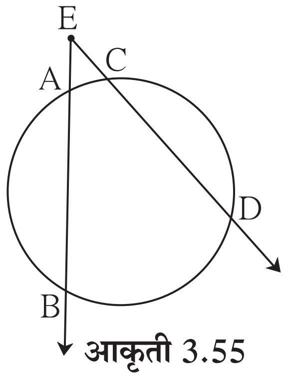
(ii) $\angle CEB = \frac{1}{2}[m(\text{कंस } AD) + m(\text{कंस } CB)]$



आकृती 3.54

(10) सोबतच्या आकृती 3.55 मध्ये,

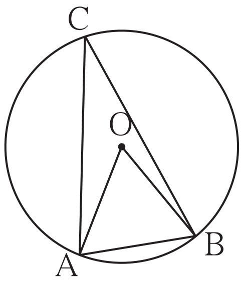
$$\angle BED = \frac{1}{2}\ [m(\text{कंस BD}) - m(\text{कंस AC})]$$



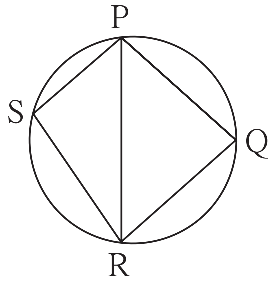
आकृती 3.55

सरावसंच 3.4

1. आकृती 3.56 मध्ये, केंद्र O असलेल्या वर्तुळाच्या जीवा AB ची लांबी वर्तुळाच्या त्रिज्येएवढी आहे. तर (1) $\angle$AOB (2) $\angle$ACB (3) कंस AB आणि (4) कंस ACB यांची मापे काढा.



आकृती 3.56



आकृती 3.57

2. आकृती 3.57 मध्ये, $\square$ PQRS हा चक्रीय आहे. बाजू PQ $\cong$ बाजू RQ. $\angle$PSR = 110°, तर

(1) $\angle$PQR = किती ?

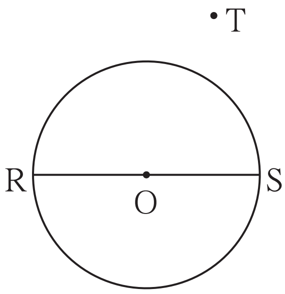
(2) m(कंस PQR) = किती ?

(3) m(कंस QR) = किती ?

(4) $\angle$PRQ = किती ?

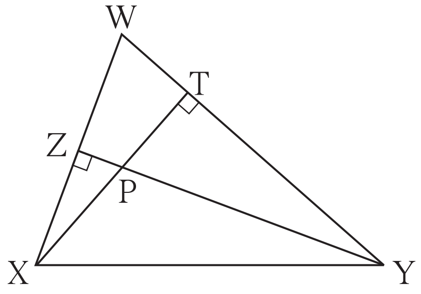
3. चक्रीय $\square$MRPN मध्ये, $\angle R = (5x - 13)^\circ$ आणि $\angle N = (4x + 4)^\circ$, तर $\angle$R आणि $\angle$N यांची मापे ठरवा.

4. आकृती 3.58 मध्ये रेख RS हा केंद्र O असलेल्या वर्तुळाचा व्यास आहे. बिंदू T हा वर्तुळाच्या बाह्य-भागातील बिंदू आहे. तर दाखवा, की $\angle$RTS हा लघुकोन आहे.



आकृती 3.58

5. कोणताही आयत हा चक्रीय चौकोन असतो हे सिद्ध करा.



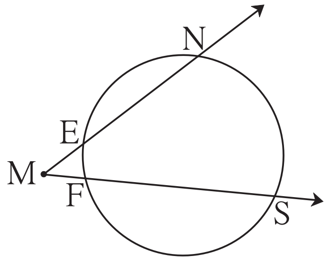
आकृती 3.59

6. आकृती 3.59 मध्ये, रेख YZ आणि रेख XT हे Δ WXY चे शिरोलंब बिंदू P मध्ये छेदतात तर सिद्ध करा,

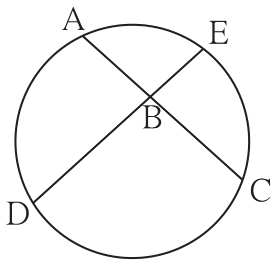
(1) □ WZPT हा चक्रीय आहे.

(2) बिंदू X, Z, T, Y एकाच वर्तुळावर आहेत.

7. आकृती 3.60 मध्ये m(कंस NS) = 125°, m(कंस EF) = 37°, तर ∠NMS चे माप काढा.



आकृती 3.60



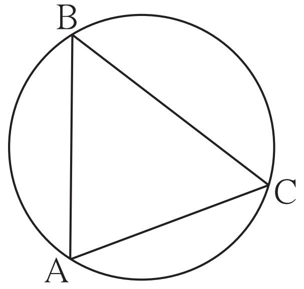
आकृती 3.61

8. आकृती 3.61 मध्ये जीवा AC आणि जीवा DE बिंदू B मध्ये छेदतात. जर ∠ABE = 108° आणि m(कंस AE) = 95° तर m(कंस DC) काढा.

जाणून घेऊया.

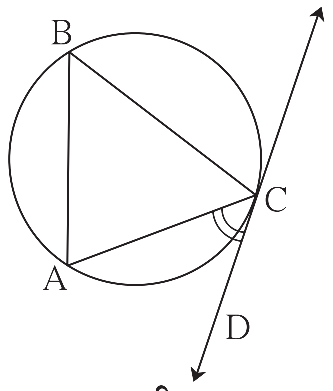
कृती :

एक पुरेसे मोठे वर्तुळ काढा. आकृती 3.62 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे या वर्तुळाची रेख AC ही एक जीवा काढा. वर्तुळावर B हा कोणताही बिंदू घ्या. ∠ABC हा अंतर्लिखित कोन काढा. ∠ABC चे माप मोजा व नोंदवून ठेवा.



आकृती 3.62

आता, आकृती 3.63 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे त्याच वर्तुळाची रेषा CD ही स्पर्शिका काढा. ∠ACD चे माप मोजा.



आकृती 3.63

$\angle$ACD चे माप, $\angle$ABC च्या मापाएवढेच आहे. असे तुम्हांला आढळेल.

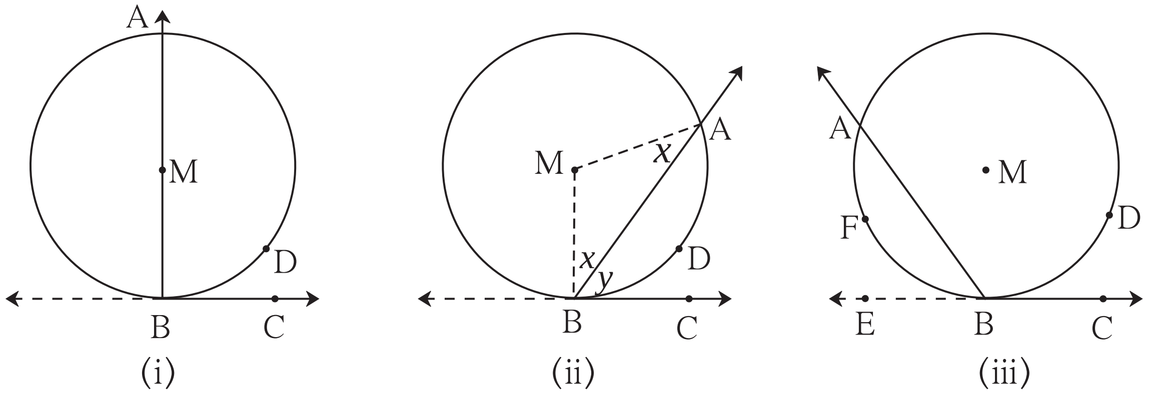
$\angle ABC = \frac{1}{2}$ m(कंस AC) हे तुम्हांला माहीत आहे.

यावरून $\angle$ACD चे माप सुद्धा (कंस AC) च्या मापाच्या निम्मे आहे हा निष्कर्ष मिळतो.

वर्तुळाच्या स्पर्शिकेचा हाही एक महत्त्वाचा गुणधर्म आहे. तो आपण आता सिद्ध करू.

स्पर्शिका-छेदिका कोनाचे प्रमेय (Theorem of angle between tangent and secant)

प्रमेय : **शिरोबिंदू वर्तुळावर असलेल्या कोनाची एक भुजा वर्तुळाची स्पर्शिका असेल आणि दुसरी भुजा वर्तुळाला आणखी एका बिंदूत छेदत असेल, तर त्या कोनाचे माप त्याने अंतर्खंडित केलेल्या कंसाच्या मापाच्या निम्मे असते.**



आकृती 3.64

पक्ष : $\angle$ ABC चा शिरोबिंदू केंद्र M असलेल्या वर्तुळावर आहे. त्याची भुजा BC वर्तुळाला स्पर्श करते आणि भुजा BA वर्तुळाला बिंदू A मध्ये छेदते. कंस ADB हा $\angle$ ABC ने अंतर्खंडित केला आहे.

साध्य : $\angle ABC = \frac{1}{2}$ m(कंसADB)

सिद्धता : या प्रमेयाची सिद्धता, तीन शक्यता विचारात घेऊन द्यावी लागेल.

(1) आकृती 3.64 (i) प्रमाणे वर्तुळकेंद्र M हे $\angle$ ABC च्या एका भुजेवर असल्यास,

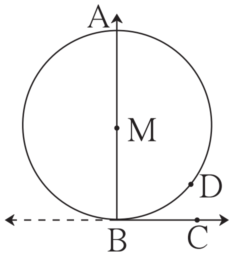
$\angle ABC = \angle MBC = 90^\circ$ ..... (स्पर्शिकेचे प्रमेय).....(I)

कंस ADB हे अर्धवर्तुळ आहे.

$\therefore$ m(कंस ADB) = 180° ..... (कंसाच्या मापाची व्याख्या).....(II)

(I) व (II) वरून

$\angle ABC = \frac{1}{2}$ m(कंसADB)



आकृती 3.64(i)

(2) आकृती 3.64 (ii) प्रमाणे केंद्र M हे $\angle$ ABC च्या बाह्यभागात असल्यास,

त्रिज्या MA आणि त्रिज्या MB काढू.

आता, $\angle MBA = \angle MAB$ ..... (समद्विभुज त्रिकोणाचे प्रमेय)

तसेच, $\angle MBC = 90^\circ$ ..... (स्पर्शिकेचे प्रमेय) ..... (I)

$\angle$ MBA = $\angle$ MAB = x, $\angle$ ABC = y मानू.

$\angle$ AMB = 180 − $(x + x)$ = 180 − $2x$

$\angle$ MBC = $\angle$ MBA + $\angle$ ABC = $x + y$

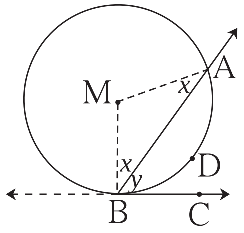
$\therefore x + y = 90°$ $\qquad \therefore 2x + 2y = 180°$

Δ AMB मध्ये $2x$ + $\angle$ AMB = 180°

$\therefore 2x + 2y = 2x + \angle$ AMB

$\therefore 2y = \angle$ AMB

$\therefore y = \angle \text{ABC} = \frac{1}{2}\angle \text{AMB} = \frac{1}{2}\ m$(कंस ADB)



आकृती 3.64(ii)

(3) तिसऱ्या शक्यतेबाबत खाली दिलेली सिद्धता आकृती 3.64 (iii) च्या आधारे, तुम्ही पूर्ण करा.

किरण $\square$ हा किरण BC चा विरुद्ध किरण काढला.

आता, $\angle\text{ABE} = \frac{1}{2}\ m(\square)$ ...... (2) मध्ये सिद्ध.

$180 - \square = \angle$ABE ..... (रेषीय जोडीतील कोन)

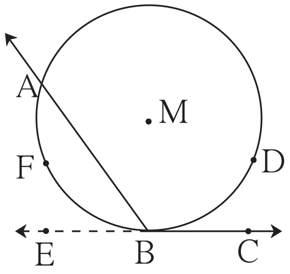
$\therefore 180 - \square = \frac{1}{2}\ m$(कंस AFB)

$= \frac{1}{2}\ [360 - m(\square)]$

$\therefore 180 - \angle\text{ABC} = 180 - \frac{1}{2}\ m$(कंस ADB)

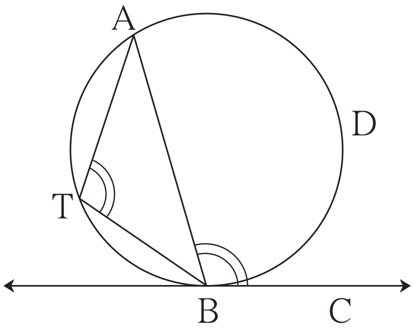
$\therefore -\angle\text{ABC} = -\frac{1}{2}\ m(\square)$

$\therefore \angle\text{ABC} = \frac{1}{2}\ m$(कंस ADB)



आकृती 3.64(iii)

स्पर्शिका – छेदिका कोनाच्या प्रमेयाचे पर्यायी विधान



आकृती 3.65

आकृतीत AB ही वृत्तछेदिका आणि BC स्पर्शिका आहे. कंस ADB हा $\angle$ ABC ने अंतर्खंडित केलेला कंस आहे. जीवा AB वर्तुळाचे दोन कंसांत विभाजन करते. दोन्ही कंस परस्परांचे विरुद्ध कंस असतात. आता कंस ADB च्या विरुद्ध कंसावर T बिंदू घेतला. वरील प्रमेयावरून,

$\angle$ ABC = $\frac{1}{2}\ m$ (कंस ADB) = $\angle$ ATB.

$\therefore$ वर्तुळाची स्पर्शिका व स्पर्शबिंदूतून काढलेली जीवा यांतील कोन त्या कोनाने अंतर्खंडित केलेल्या कंसाच्या विरुद्ध कंसात अंतर्लिखित केलेल्या कोनाएवढा असतो.

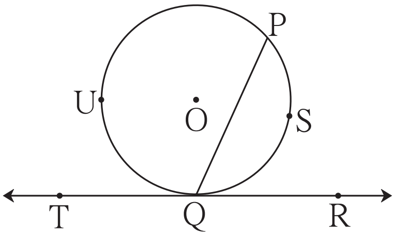
स्पर्शिका–छेदिका कोनांच्या प्रमेयाचा व्यत्यास

वर्तुळाच्या जीवेच्या एका अंत्यबिंदूतून जाणारी एक रेषा काढली असता, त्या रेषेने त्या जीवेशी केलेल्या कोनाचे माप त्या कोनाने अंतर्खंडित केलेल्या कंसाच्या मापाच्या निम्मे असेल, तर ती रेषा त्या वर्तुळाची स्पर्शिका असते.

आकृती 3.66 मध्ये,

जर $\angle PQR = \frac{1}{2}\ m$(कंस PSQ) असेल,

[किंवा $\angle PQT = \frac{1}{2}\ m$(कंस PUQ) असेल,]



आकृती 3.66

तर रेषा TR ही वर्तुळाची स्पर्शिका असते. या व्यत्यास प्रमेयाचा उपयोग, वर्तुळाला स्पर्शिका काढण्याच्या एका रचनेसाठी होतो. या प्रमेयाची अप्रत्यक्ष सिद्धता देता येते.

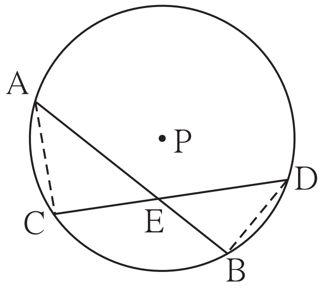
जीवांच्या अंतर्छेदनाचे प्रमेय (Theorem of internal division of chords)

एकाच वर्तुळाच्या दोन जीवा जेव्हा वर्तुळाच्या अंतर्भागात छेदतात, तेव्हा एका जीवेच्या झालेल्या दोन भागांच्या लांबींचा गुणाकार हा दुसऱ्या जीवेच्या दोन भागांच्या लांबींच्या गुणाकाराएवढा असतो.

पक्ष : केंद्र P असलेल्या वर्तुळाच्या जीवा AB आणि जीवा CD, वर्तुळाच्या अंतर्भागात बिंदू E मध्ये छेदतात.

साध्य : $AE \times EB = CE \times ED$

रचना : रेख AC आणि रेख DB काढले.



आकृती 3.67

सिद्धता : Δ CAE आणि Δ BDE मध्ये,

$\angle AEC \cong \angle DEB$ ..... (विरुद्ध कोन)

$\angle CAE \cong \angle BDE$ ..... (एकाच वर्तुळकंसात अंतर्लिखित कोन)

$\therefore \Delta CAE \sim \Delta BDE$ ..... (को– को समरूपता कसोटी)

$\therefore \frac{AE}{DE} = \frac{CE}{BE}$ ..... (समरूप त्रिकोणांच्या संगत भुजा)

$\therefore AE \times EB = CE \times ED$

विचार करूया.

आकृती 3.67 मध्ये रेख AC आणि रेख DB काढून आपण प्रमेय सिद्ध केले. त्याऐवजी रेख AD आणि रेख CB काढून हे प्रमेय सिद्ध करता येईल का?

अधिक माहितीसाठी

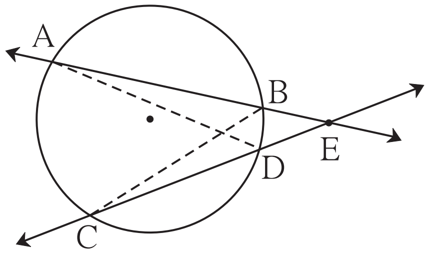
आकृती 3.67 मधील AB या जीवेचे बिंदू E मुळे AE आणि EB हे दोन भाग झाले आहेत. रेख AE आणि रेख EB या लगतच्या बाजू असणारा आयत काढला, तर AE × EB हे त्या आयताचे क्षेत्रफळ असेल. तसेच CE × ED हे जीवा CD च्या दोन भागांनी होणाऱ्या आयताचे क्षेत्रफळ असेल. आपण AE × EB = CE × ED हे सिद्ध केले.

म्हणून हे प्रमेय वेगळ्या शब्दांत पुढीलप्रमाणेही मांडतात.

एकाच वर्तुळाच्या दोन जीवा वर्तुळाच्या अंतर्भागात छेदत असतील, तर एका जीवेच्या दोन भागांनी होणाऱ्या आयताचे क्षेत्रफळ हे दुसऱ्या जीवेच्या दोन भागांनी होणाऱ्या आयताच्या क्षेत्रफळाएवढे असते.

जीवांच्या बाह्यछेदनाचे प्रमेय (Theorem of external division of chords)

एकाच वर्तुळाच्या AB आणि CD या जीवांना सामावणाऱ्या वृत्तछेदिका परस्परांना वर्तुळाच्या बाह्यभागातील बिंदू E मध्ये छेदत असतील, तर AE × EB = CE × ED.



आकृती 3.68

प्रमेयाचे वरील विधान व आकृतीच्या आधारे पक्ष व साध्य तुम्ही ठरवा.

रचना : रेख AD आणि रेख BC काढले.

रिकाम्या जागा भरून सिद्धता पूर्ण करा.

सिद्धता : Δ ADE आणि Δ CBE मध्ये,

$\angle$ AED ≅ ☐ .... (सामाईक कोन)

$\angle$ DAE ≅ $\angle$ BCE .... (☐)

$\therefore \Delta$ ADE ~ ☐ .... (☐)

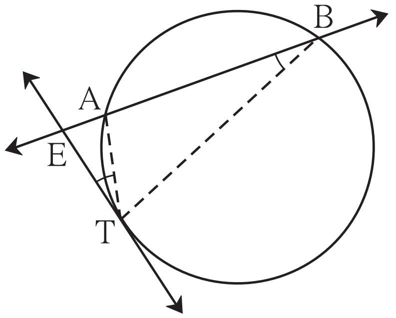
$\therefore \dfrac{(AE)}{\square} = \dfrac{\square}{\square}$ .... (समरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू)

$\therefore$ ☐ = CE × ED

स्पर्शिका छेदिका रेषाखंडांचे प्रमेय (Tangent secant segments theorem)

वर्तुळाच्या बाह्यभागातील E ह्या बिंदूतून काढलेली वृत्तछेदिका वर्तुळाला बिंदू A व B मध्ये छेदत असेल आणि त्याच बिंदूतून जाणारी स्पर्शिका वर्तुळाला बिंदू T मध्ये स्पर्श करत असेल, तर $EA \times EB = ET^2$

प्रमेयाचे वरील विधान लक्षात घेऊन पक्ष आणि साध्य ठरवा.



आकृती 3.69

रचना : रेख TA आणि रेख TB काढले.

सिद्धता : Δ EAT आणि Δ ETB मध्ये,

$\angle AET \cong \angle TEB$ .... (समाईक कोन)

$\angle ETA \cong \angle EBT$.. (स्पर्शिका-छेदिका प्रमेय)

$\therefore \Delta EAT \sim \Delta ETB$ ..... (को-को समरूपता)

$\therefore \frac{ET}{EB} = \frac{EA}{ET}$ ..... (समरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू)

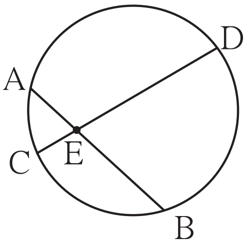
$\therefore EA \times EB = ET^2$

हे लक्षात ठेवूया.

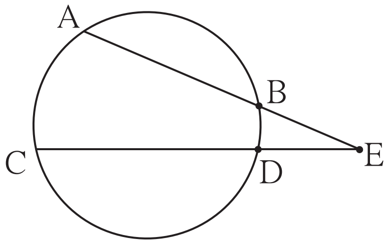
(1) आकृती 3.70 नुसार,

$AE \times EB = CE \times ED$

या गुणधर्माला जीवा अंतर्छेदनाचे प्रमेय म्हणतात.



आकृती 3.70



आकृती 3.71

(2) आकृती 3.71 नुसार,

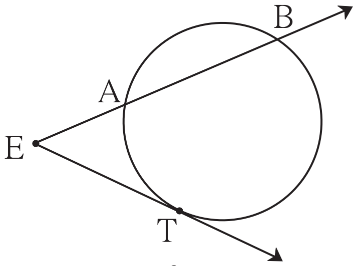
$AE \times EB = CE \times ED$

या गुणधर्माला जीवा बाह्यछेदनाचे प्रमेय म्हणतात.

(3) आकृती 3.72 नुसार,

$EA \times EB = ET^2$

या गुणधर्माला स्पर्शिका-छेदिका रेषाखंडांचे प्रमेय म्हणतात.



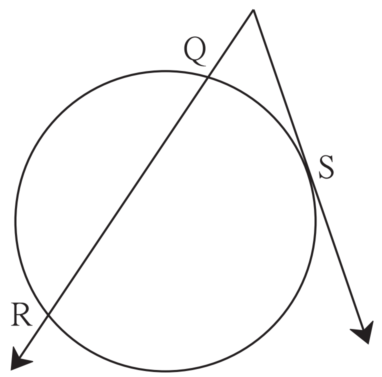
आकृती 3.72

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) आकृती 3.73 मध्ये, रेख PS हा स्पर्शिकाखंड आहे. रेषा PR ही वृत्तछेदिका आहे.

जर PQ = 3.6,

QR = 6.4 तर PS काढा.



आकृती 3.73

उकल : $PS^2 = PQ \times PR$ .... (स्पर्शिका छेदिका रेषाखंडाचे प्रमेय)

$= PQ \times (PQ + QR)$

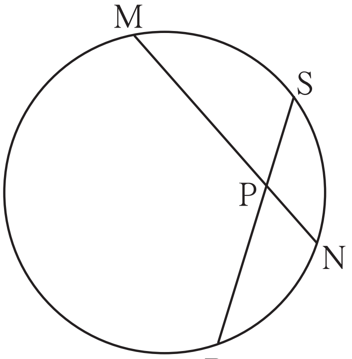
$= 3.6 \times [3.6 + 6.4]$

$= 3.6 \times 10$

$= 36$

$\therefore PS = 6$

उदा. (2) आकृती 3.74 मध्ये, जीवा MN आणि जीवा RS परस्परांना बिंदू P मध्ये छेदतात. जर PR = 6, PS = 4, MN = 11 तर PN काढा.



आकृती 3.74

उकल : जीवांच्या अंतर्छेदनाच्या प्रमेयावरून,

$PN \times PM = PR \times PS$... (I)

PN = x मानू. $\therefore PM = 11 - x$

या किमती (I) मध्ये मांडून,

$x(11 - x) = 6 \times 4$

$\therefore\ 11x - x^2 - 24 = 0$

$\therefore\ x^2 - 11x + 24 = 0$

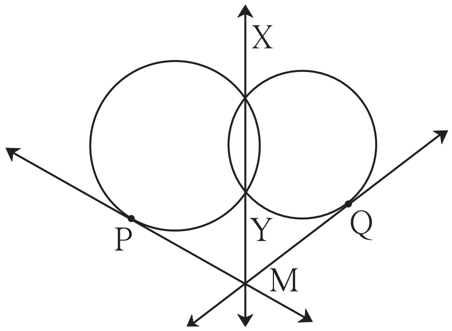
$\therefore\ (x - 3)(x - 8) = 0$

$\therefore\ x - 3 = 0$ किंवा $x - 8 = 0$

$\therefore\ x = 3$ किंवा $x = 8$

$\therefore$ PN = 3 किंवा PN = 8

उदा. (3) आकृती 3.75 मध्ये, दोन वर्तुळे एकमेकांना बिंदू X व Y मध्ये छेदतात. रेषा XY वरील बिंदू M मधून काढलेल्या स्पर्शिका त्या वर्तुळांना बिंदू P व Q मध्ये स्पर्श करतात. तर सिद्ध करा, रेख PM $\cong$ रेख QM.



आकृती 3.75

सिद्धता : रिकाम्या जागा भरून सिद्धता लिहा.

रेषा MX ही दोन्ही वर्तुळांची सामाईक .... आहे.

$\therefore PM^2 = MY \times MX$ ..... (I)

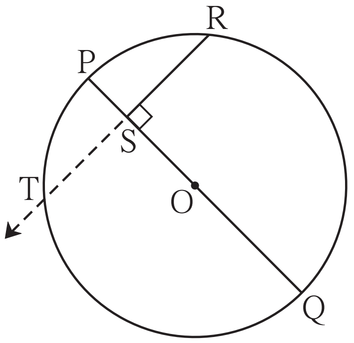
तसेच .... = ... × .... , (स्पर्शिका-छेदिका रेषाखंडाचे प्रमेय) ..... (II)

$\therefore$ (I) व (II) वरून ...... = QM^2

$\therefore$ PM = QM

रेख PM $\cong$ रेख QM

उदा. (4)



आकृती 3.76

आकृती 3.76 मध्ये, रेख PQ हा केंद्र O असलेल्या वर्तुळाचा व्यास आहे. बिंदू R हा वर्तुळावरील कोणताही बिंदू आहे.

रेख RS $\perp$ रेख PQ.

तर सिद्ध करा - SR हा PS आणि SQ यांचा भूमितीमध्य आहे.

[म्हणजेच $SR^2 = PS \times SQ$]

उकल : पुढे दिलेल्या पायऱ्यांनी सिद्धता लिहा.

(1) किरण RS काढा. तो वर्तुळाला ज्या बिंदूत छेदेल त्या बिंदूला T हे नाव द्या.

(2) RS = TS दाखवा.

(3)जीवांच्या अंतर्छेदनाचे प्रमेय वापरून समानता लिहा.

(4) RS = TS वापरून साध्य सिद्ध करा.

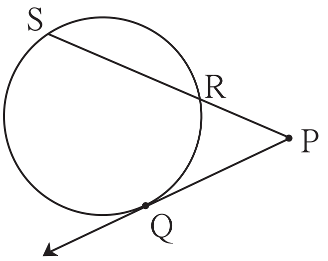
विचार करूया.

(1) वरील आकृती 3.76 मध्ये रेख PR आणि रेख RQ काढल्यास Δ PRQ कोणत्या प्रकारचा होईल?

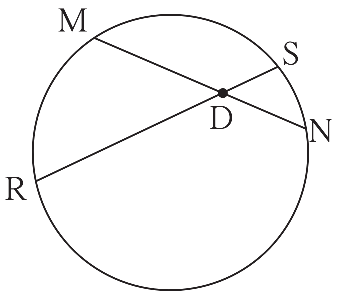
(2) वरील उदा. (4) मध्ये सिद्ध केलेला गुणधर्म याआधीही वेगळ्या रीतीने सिद्ध केला आहे का?

सरावसंच 3.5

1. आकृती 3.77 मध्ये, बिंदू Q हा स्पर्शबिंदू आहे.
जर PQ = 12, PR = 8,
तर PS = किती? RS = किती?



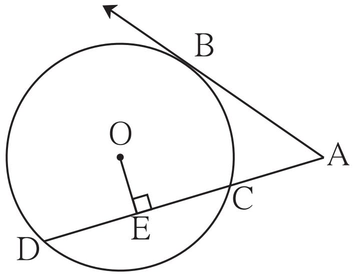
आकृती 3.77



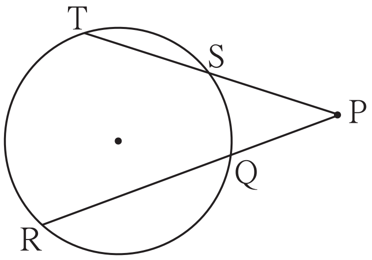
आकृती 3.78

2. आकृती 3.78 मध्ये, जीवा MN आणि RS एकमेकींना बिंदू D मध्ये छेदतात.
(1) जर RD = 15, DS = 4,
MD = 8 तर DN = किती?
(2) जर RS = 18, MD = 9,
DN = 8 तर DS = किती?

3. आकृती 3.79 मध्ये, बिंदू B हा स्पर्शबिंदू आणि बिंदू O वर्तुळकेंद्र आहे.
रेख OE ⊥ रेषा AD, AB = 12,
AC = 8, तर (1) AD (2) DC
आणि (3) DE काढा.



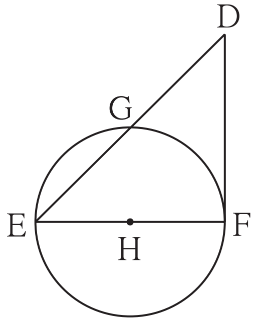
आकृती 3.79



आकृती 3.80

4. आकृती 3.80 मध्ये, जर PQ = 6,
QR = 10, PS = 8
तर TS = किती ?

5. आकृती 3.81 मध्ये, रेख EF हा व्यास आणि रेख DF हा स्पर्शिकाखंड आहे. वर्तुळाची त्रिज्या r आहे. तर सिद्‌ध करा –
DE × GE = $4r^2$



आकृती 3.81

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 3

1. पुढील प्रत्येक उपप्रश्नासाठी चार पर्यायी उत्तरे दिली आहेत. त्यांपैकी अचूक पर्याय निवडा.

(1) त्रिज्या अनुक्रमे 5.5 सेमी आणि 3.3 सेमी असलेली दोन वर्तुळे परस्परांना स्पर्श करतात. त्यांच्या केंद्रातील अंतर किती सेमी आहे?

(A) 4.4 (B) 8.8 (C) 2.2 (D) 8.8 किंवा 2.2

(2) परस्परांना छेदणाऱ्या दोन वर्तुळांपैकी प्रत्येक वर्तुळ दुसऱ्या वर्तुळाच्या केंद्रातून जाते. जर त्यांच्या केंद्रांतील अंतर 12 सेमी असेल, तर प्रत्येक वर्तुळाची त्रिज्या किती सेमी आहे?

(A) 6 (B) 12 (C) 24 (D) सांगता येणार नाही

(3) 'एक वर्तुळ एका समांतरभुज चौकोनाच्या सर्व बाजूंना स्पर्श करते, तर तो समांतरभुज चौकोन .... असला पाहिजे', या विधानातील रिकाम्या जागी योग्य शब्द लिहा.

(A) आयत (B) समभुज चौकोन (C) चौरस (D) समलंब चौकोन

(4) एका वर्तुळाच्या केंद्रापासून 12.5 सेमी अंतरावरील एका बिंदूतून त्या वर्तुळाला काढलेल्या स्पर्शिकाखंडाची लांबी 12 सेमी आहे. तर त्या वर्तुळाचा व्यास किती सेमी आहे?

(A) 25 (B) 24 (C) 7 (D) 14

(5) एकमेकांना बाहेरून स्पर्श करणाऱ्या दोन वर्तुळांना जास्तीत जास्त किती सामाईक स्पर्शिका काढता येतील?

(A) एक (B) दोन (C) तीन (D) चार

(6) केंद्र O असलेल्या वर्तुळाच्या कंस ACB मध्ये $\angle$ACB अंतर्लिखित केला आहे. जर $m\angle ACB = 65^\circ$ तर m(कंस ACB) = किती?

(A) 65° (B) 130° (C) 295° (D) 230°

(7) एका वर्तुळाच्या जीवा AB आणि CD परस्परांना वर्तुळाच्या अंतर्भागात बिंदू E मध्ये छेदतात. जर (AE) = 5.6, (EB) = 10, (CE) = 8 तर (ED) = किती?

(A) 7 (B) 8 (C) 11.2 (D) 9

(8) चक्रीय $\square$ ABCD मध्ये, कोन $\angle$ A च्या मापाची दुप्पट ही $\angle$C च्या मापाच्या तिप्पटी एवढी आहे. तर $\angle$C चे माप किती?

(A) 36 (B) 72 (C) 90 (D) 108

(9)★ एकाच वर्तुळावर बिंदू A, B, C असे आहेत, की m(कंस AB) = m(कंस BC) = 120°, दोन्ही कंसात B शिवाय एकही बिंदू सामाईक नाही. तर Δ ABC कोणत्या प्रकारचा आहे?

(A) समभुज त्रिकोण (B) विषमभुज त्रिकोण

(C) काटकोन त्रिकोण (D) समद्विभुज त्रिकोण

(10) रेख XZ व्यास असलेल्या वर्तुळाच्या अंतर्भागात Y हा एक बिंदू आहे. तर खालीलपैकी किती विधाने सत्य आहेत ?

(i) $\angle XYZ$ हा लघुकोन असणे शक्य नाही.

(ii) $\angle XYZ$ हा काटकोन असणे शक्य नाही.

(iii) $\angle XYZ$ हा विशालकोन आहे.

(iv) $\angle XYZ$ च्या मापासंबंधी निश्चित विधान करता येणार नाही.

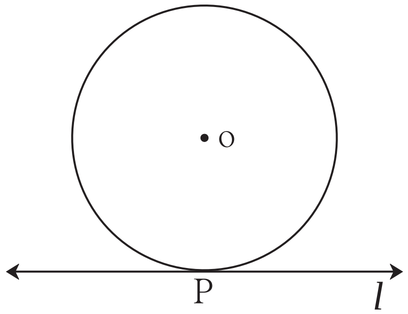
(A) फक्त एक (B) फक्त दोन (C) फक्त तीन (D) सर्व

2. बिंदू O केंद्र असलेल्या वर्तुळाला रेषा l बिंदू P मध्ये स्पर्श करते. जर वर्तुळाची त्रिज्या 9 सेमी असेल, तर खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

(1) $d(O, P)$ = किती ? का ?

(2) जर $d(O, Q) = 8$ सेमी असेल. तर बिंदू Q चे स्थान कोठे असेल ?

(3) $d(O,R)=15$ सेमी असेल तर बिंदू R ची किती स्थाने रेषा l वर असतील ? ते बिंदू P पासून किती अंतरावर असतील ?



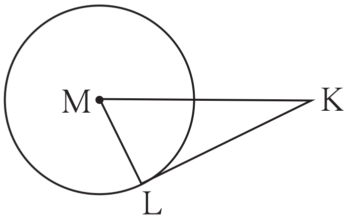
आकृती 3.82

3. सोबतच्या आकृतीत, बिंदू M वर्तुळकेंद्र आणि रेख KL हा स्पर्शिकाखंड आहे.

जर MK = 12, KL = $6\sqrt{3}$ तर

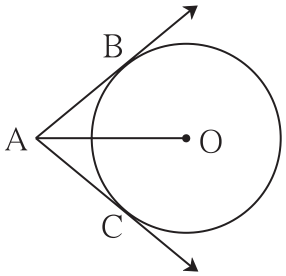
(1) वर्तुळाची त्रिज्या काढा.

(2) $\angle K$ आणि $\angle M$ यांची मापे ठरवा.

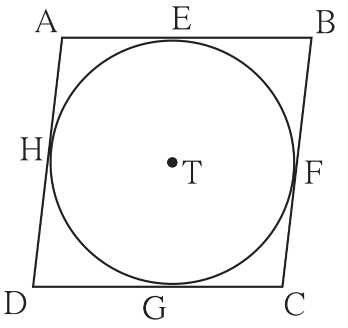


आकृती 3.83

4. आकृती 3.84 मध्ये, बिंदू O वर्तुळकेंद्र आणि रेख AB व रेख AC हे स्पर्शिकाखंड आहेत. जर वर्तुळाची त्रिज्या r असेल आणि $l(AB) = r$ असेल, तर □ ABOC हा चौरस होतो, हे दाखवा.



आकृती 3.84



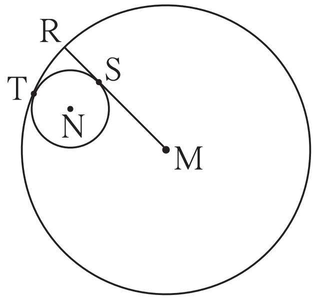
आकृती 3.85

5. आकृती 3.85 मध्ये, समांतरभुज □ ABCD हा केंद्र T असलेल्या वर्तुळाभोवती परिलिखित केला आहे. (म्हणजे त्या चौकोनाच्या बाजू वर्तुळाला स्पर्श करतात.) बिंदू E, F, G आणि H हे स्पर्शबिंदू आहेत. जर AE = 4.5 आणि EB = 5.5, तर AD काढा.

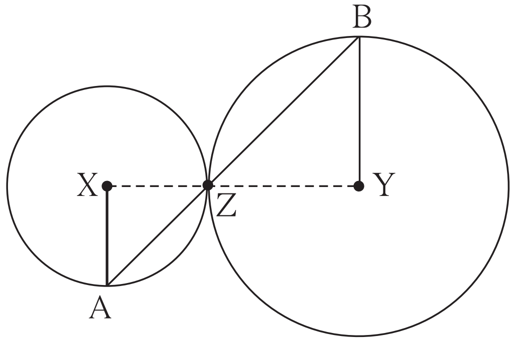
6. आकृती 3.86 मध्ये, केंद्र N असलेले वर्तुळ केंद्र M असणाऱ्या वर्तुळाला बिंदू T मध्ये स्पर्श करते. मोठ्या वर्तुळाची त्रिज्या लहान वर्तुळाला बिंदू S मध्ये स्पर्श करते. जर मोठ्या व लहान वर्तुळांच्या त्रिज्या अनुक्रमे 9 सेमी व 2.5 सेमी असतील तर खालील प्रश्नांची उत्तरे शोधा आणि त्यांवरून MS : SR हे गुणोत्तर काढा.

(1) MT = किती ? (2) MN = किती ?

(3) $\angle$NSM = किती ?



आकृती 3.86



आकृती 3.87

7. सोबतच्या आकृतीत, केंद्र X आणि Y असलेली वर्तुळे परस्परांना बिंदू Z मध्ये स्पर्श करतात. बिंदू Z मधून जाणारी वृत्तछेदिका त्या वर्तुळांना अनुक्रमे बिंदू A व बिंदू B मध्ये छेदते. तर सिद्ध करा, त्रिज्या XA || त्रिज्या YB. खाली दिलेल्या सिद्धतेतील रिकाम्या जागा भरून पूर्ण सिद्धता लिहून काढा.

रचना : रेख XZ आणि .... काढले.

सिद्धता : स्पर्शवर्तुळांच्या प्रमेयानुसार, बिंदू X, Z, Y हे .... आहेत.

∴ $\angle$ XZA ≅ .... विरुद्ध कोन

$\angle$ XZA = $\angle$ BZY = a मानू ..... (I)

आता, रेख XA ≅ रेख XZ .... (..........)

∴ $\angle$ XAZ = ... = a .... (समद्विभुज त्रिकोणाचे प्रमेय) (II)

तसेच रेख YB ≅ .... (..........)

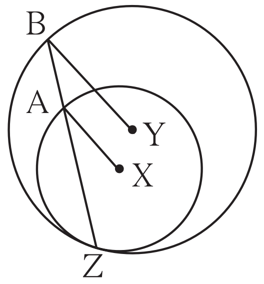
∴ $\angle$ BZY = ... = a .... (..........) (III)

$\therefore$ (I), (II) व (III) वरून,

$\angle$ XAZ = ...

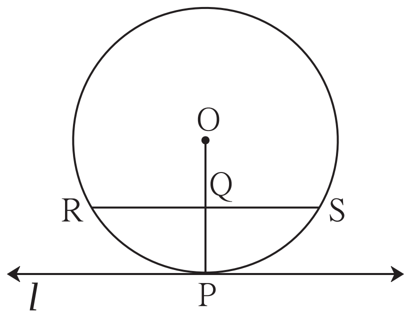
$\therefore$ त्रिज्या XA || त्रिज्या YB .... (..........)

8. आकृती 3.88 मध्ये, केंद्र X व Y असणारी अंतर्स्पर्शी वर्तुळे बिंदू Z मध्ये स्पर्श करतात. रेख BZ ही मोठ्या वर्तुळाची जीवा लहान वर्तुळाला बिंदू A मध्ये छेदते.
तर सिद्ध करा – रेख AX || रेख BY.



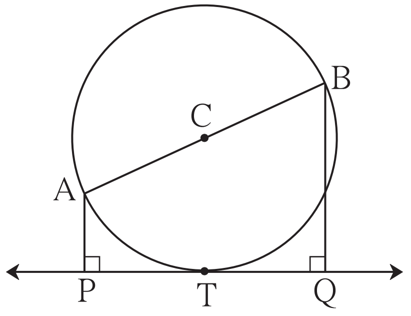
आकृती 3.88

9. शेजारील आकृतीत, रेषा l ही केंद्र O असलेल्या वर्तुळाला बिंदू P मध्ये स्पर्श करते. बिंदू Q हा त्रिज्या OP चा मध्यबिंदू आहे. बिंदू Q ला सामावणारी जीवा RS || रेषा l.
जर RS 12 सेमी असेल, तर वर्तुळाची त्रिज्या काढा.



आकृती 3.89

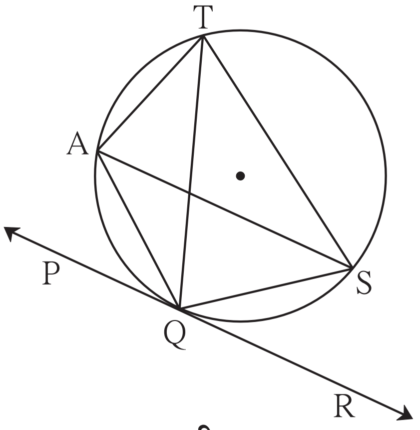
10★. आकृती 3.90 मध्ये, केंद्र C असलेल्या वर्तुळाचा रेख AB हा व्यास आहे. वर्तुळाची स्पर्शिका PQ वर्तुळाला बिंदू T मध्ये स्पर्श करते.
रेख AP $\perp$ रेषा PQ आणि रेख BQ $\perp$ रेषा PQ.
तर सिद्ध करा – रेख CP $\cong$ रेख CQ.



आकृती 3.90

11★. प्रत्येकी 3 सेमी त्रिज्येची, केंद्र A, B व C असणारी तीन वर्तुळे अशी काढा, की प्रत्येक वर्तुळ इतर दोन वर्तुळांना स्पर्श करेल.

12★. वर्तुळाचे कोणतेही तीन बिंदू एकरेषीय नसतात, हे सिद्ध करा.



आकृती 3.91

13. आकृती 3.91 मध्ये रेषा PR वर्तुळाला बिंदू Q मध्ये स्पर्श करते. या आकृतीच्या आधारे खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

(1) $\angle$TAQ आणि $\angle$TSQ यांच्या मापांची बेरीज किती?

(2) $\angle$AQP शी एकरूप असणारे कोन कोणते ?

(3) $\angle$QTS शी एकरूप असणारे कोन कोणते?

(4) जर $\angle TAS = 65°$, तर $\angle$TQS आणि कंस TS यांची मापे सांगा.

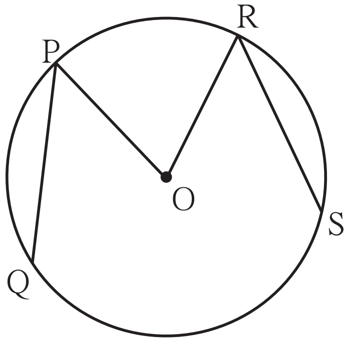
(5) जर $\angle AQP = 42°$ आणि $\angle SQR = 58°$, तर $\angle$ATS चे माप काढा.

14. सोबतच्या आकृतीत, केंद्र O असलेल्या वर्तुळाच्या रेख PQ आणि रेख RS या एकरूप जीवा आहेत. जर $\angle POR = 70°$ आणि m(कंस RS) = 80°, तर –

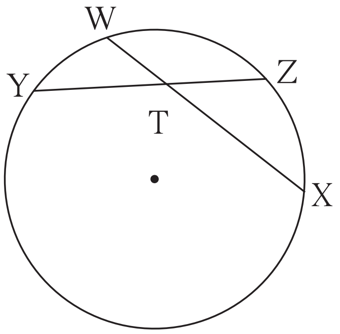
(1) m(कंस PR) किती?

(2) m(कंस QS) किती?

(3) m(कंस QSR) किती?



आकृती 3.92



आकृती 3.93

15. आकृती 3.93 मध्ये, m(कंस WY) = 44°, m(कंस ZX) = 68°, तर

(1) $\angle$ZTX चे माप ठरवा.

(2) WT = 4.8, TX = 8.0, YT = 6.4 तर TZ = किती?

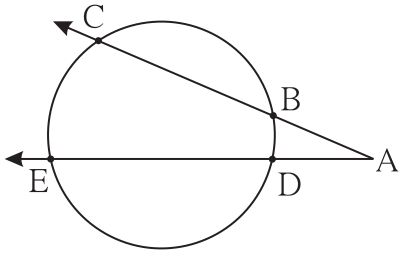
(3) WX = 25, YT = 8, YZ = 26, तर WT = किती?.

16. आकृती 3.94 मध्ये,

(1) m(कंस CE) = 54°,
m(कंस BD) = 23°, तर ∠CAE = किती ?

(2) AB = 4.2, BC = 5.4,
AE = 12.0 तर AD = किती ?

(3) AB = 3.6, AC = 9.0,
AD = 5.4 तर AE = किती ?



आकृती 3.94

17. शेजारी दिलेल्या आकृतीत, जीवा EF || जीवा GH. तर सिद्ध करा, जीवा EG ≅ जीवा FH .
पुढे दिलेल्या सिद्धतेतील रिकाम्या जागा भरा आणि सिद्धता लिहा.

सिद्धता : रेख GF काढला.

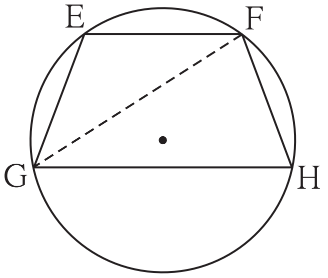
∠ EFG = ∠ FGH .... [ ] (I)

∠ EFG = [ ] (अंतर्लिखित कोनाचे प्रमेय) (II)

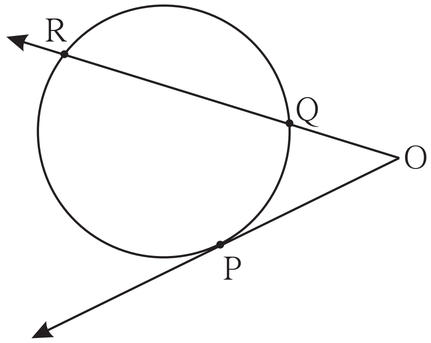
∠ FGH = [ ] (अंतर्लिखित कोनाचे प्रमेय) (III)

∴ m (कंस EG) = [ ] [(I), (II) व (III) वरून]

जीवा EG ≅ जीवा FH ....([ ])



आकृती 3.95



आकृती 3.96

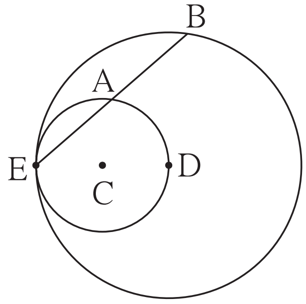
18. शेजारच्या आकृतीत बिंदू P हा स्पर्शबिंदू आहे.

(1) m(कंस PR) = 140,
∠ POR = 36° तर
m(कंस PQ) = किती ?

(2) OP = 7.2, OQ = 3.2,
OR = किती ? QR = किती ?

(3) OP = 7.2, OR = 16.2, तर
QR = किती ?

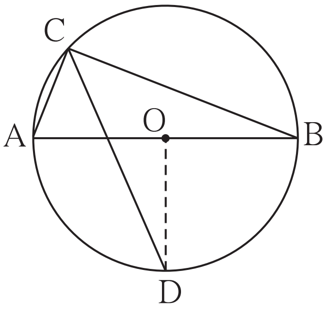
19. सोबतच्या आकृतीत, केंद्र C असलेले वर्तुळ केंद्र D असलेल्या वर्तुळाला बिंदू E मध्ये आतून स्पर्श करते. बिंदू D हा आतील वर्तुळावर आहे. बाहेरील वर्तुळाची जीवा EB ही आतील वर्तुळाला बिंदू A मध्ये छेदते.
तर सिद्ध करा, की रेख EA ≅ रेख AB.



आकृती 3.97

20. आकृती 3.98 मध्ये, रेख AB हा केंद्र O असलेल्या वर्तुळाचा व्यास आहे. अंतर्लिखित कोन ACB चा दुभाजक वर्तुळाला बिंदू D मध्ये छेदतो. तर रेख AD ≅ रेख BD हे सिद्ध करा.

पुढे दिलेल्या सिद्धतेतील रिकाम्या जागा भरून ती पूर्ण करा आणि लिहा.



आकृती 3.98

सिद्धता : रेख OD काढला.

$\angle$ ACB = ☐ (अर्धवर्तुळात अंतर्लिखित कोन)

$\angle$ DCB = ☐ (रेख CD हा $\angle$ C चा दुभाजक)

m(कंस DB) = ☐ (अंतर्लिखित कोनाचे प्रमेय)

$\angle$ DOB = ☐ (कंसाच्या मापाची व्याख्या) (I)

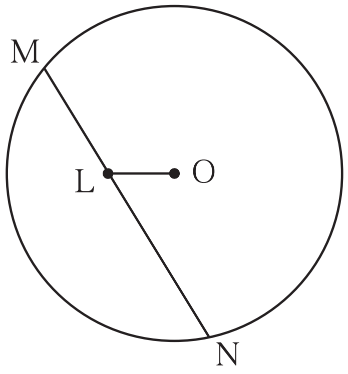
रेख OA ≅ रेख OB .... ☐ (II)

∴ रेषा OD ही रेख AB ची ☐ रेषा आहे. (I) व (II) वरून

∴ रेख AD ≅ रेख BD

21. सोबतच्या आकृतीत रेख MN ही केंद्र O असलेल्या वर्तुळातील जीवा आहे.

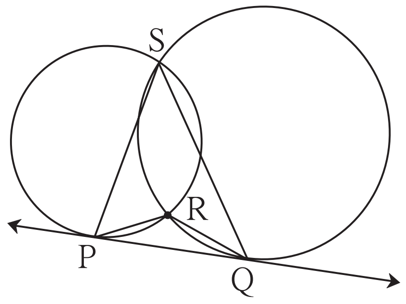
MN = 25, जीवा MN वर बिंदू L असा आहे की ML = 9 आणि d(O,L) = 5 तर या वर्तुळाची त्रिज्या किती असेल?



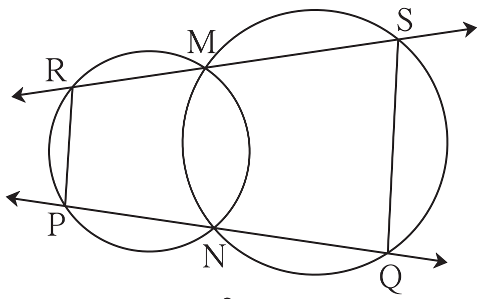
आकृती 3.99

22★. आकृती 3.100 मध्ये दोन वर्तुळे परस्परांना बिंदू S व R मध्ये छेदतात. त्यांची रेषा PQ ही सामाईक स्पर्शिका त्यांना बिंदू P व Q मध्ये स्पर्श करते, तर सिद्ध करा –

$\angle$ PRQ + $\angle$ PSQ = 180°



आकृती 3.100

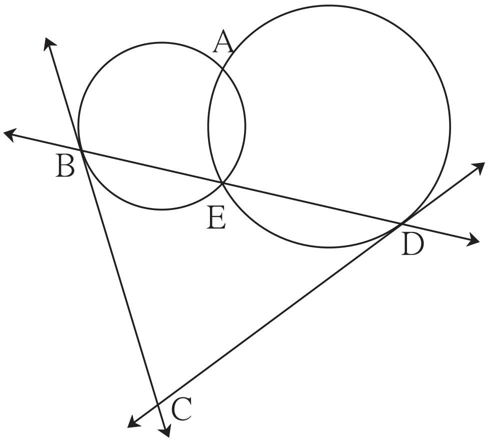


आकृती 3.101

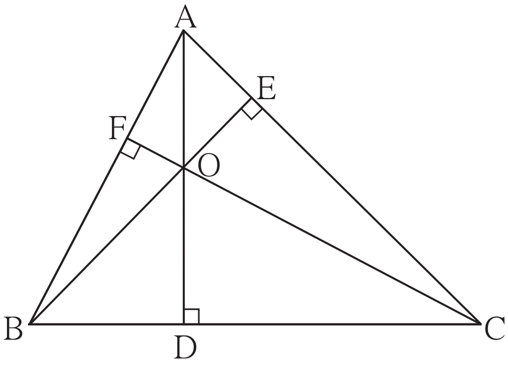
23★. आकृती 3.101 मध्ये, दोन वर्तुळे एकमेकांना बिंदू M व N मध्ये छेदतात. बिंदू M व N मधून काढलेल्या वृत्तछेदिका बिंदू R व S मध्ये, आणि बिंदू P व Q मध्ये छेदतात. तर रेख PR || रेख QS, हे सिद्ध करा.

24★. दोन वर्तुळे परस्परांना बिंदू A व E मध्ये छेदतात. बिंदू E मधून काढलेली त्यांची सामाईक वृत्तछेदिका वर्तुळांना बिंदू B व D मध्ये छेदते. बिंदू B व D मधून काढलेल्या स्पर्शिका एकमेकींना बिंदू C मध्ये छेदतात.

सिद्ध करा : □ ABCD चक्रीय आहे.



आकृती 3.102



आकृती 3.103

25★. Δ ABC मध्ये, रेख AD $\perp$ बाजू BC, रेख BE $\perp$ बाजू AC, रेख CF $\perp$ बाजू AB. बिंदू O हा शिरोलंबसंपात आहे. तर बिंदू O हा Δ DEF चा अंतर्मध्य होतो, हे सिद्ध करा.

ICT Tools or Links

जिओजेब्राच्या सहाय्याने विविध वर्तुळे काढा.
त्यांमध्ये जीवा व स्पर्शिका काढून गुणधर्म तपासा.

4 भौमितिक रचना

चला, शिकूया.

- समरूप त्रिकोणाची रचना
  - ✻ दोन समरूप त्रिकोणांपैकी एका त्रिकोणाच्या बाजू आणि दुसऱ्या त्रिकोणाच्या संगत बाजू यांचे गुणोत्तर दिले असता दुसरा त्रिकोण काढणे.
    - (i) एकही शिरोबिंदू सामाईक नसताना.
    - (ii) एक शिरोबिंदू सामाईक असताना.
- वर्तुळाची स्पर्शिका काढणे.
  - ✻ वर्तुळाला वर्तुळावरील बिंदूतून स्पर्शिका काढणे.
    - (i) वर्तुळकेंद्राचा उपयोग करून.
    - (ii) वर्तुळकेंद्राचा उपयोग न करता.
  - ✻ वर्तुळाला त्याच्या बाहेरील बिंदूतून स्पर्शिका काढणे.

जरा आठवूया.

खालील रचना आपण आधीच्या इयत्तांमध्ये शिकलो आहोत. त्या रचनांची उजळणी करा.

- दिलेल्या रेषेला तिच्या बाहेरील बिंदूतून समांतर रेषा काढणे.
- दिलेल्या रेषाखंडाचा लंबदुभाजक काढणे.
- त्रिकोणाच्या बाजू व कोन यांपैकी पुरेसे घटक दिले असता त्रिकोण काढणे.
- दिलेल्या रेषाखंडाचे दिलेल्या संख्येएवढे समान भाग करणे.
- दिलेल्या रेषाखंडाचे दिलेल्या गुणोत्तरात विभाजन करणे.
- दिलेल्या कोनाशी एकरूप असलेला कोन काढणे.

इयत्ता नववीत तुम्ही शाळेच्या परिसराचा नकाशा तयार करण्याचा उपक्रम केला आहे. एखादी इमारत बांधण्यापूर्वी त्या इमारतीचा आराखडा तयार करतात. शाळेचा परिसर आणि त्याचा नकाशा, इमारत आणि तिचा आराखडा परस्परांशी समरूप असतात. भूगोल, वास्तुशास्त्र, यंत्रशास्त्र इ. क्षेत्रांमध्ये समरूप आकृत्या काढण्याची गरज असते. त्रिकोण ही सर्वांत साधी बंदिस्त आकृती आहे. म्हणून दिलेल्या त्रिकोणाशी समरूप त्रिकोण कसा काढता येतो, हे पाहूया.

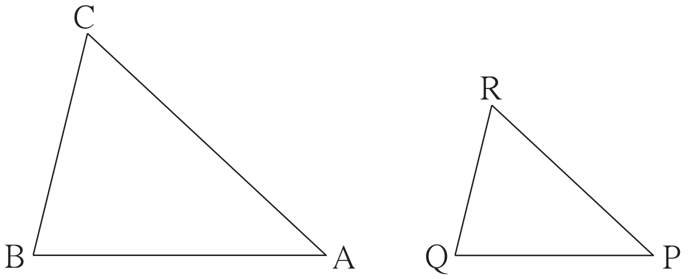
जाणून घेऊया.

समरूप त्रिकोणाची रचना

एका त्रिकोणाच्या बाजू दिल्या असता, त्याच्याशी समरूप असणारा आणि गुणोत्तराची अट पूर्ण करणारा त्रिकोण काढणे.

दोन समरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू एकाच प्रमाणात असतात आणि त्यांचे संगत कोन एकरूप असतात. याचा उपयोग करून दिलेल्या त्रिकोणाशी समरूप असणारा त्रिकोण काढता येतो.

उदा. (1) Δ ABC ~ Δ PQR, Δ ABC मध्ये AB = 5.4 सेमी, BC = 4.2 सेमी, AC = 6.0 सेमी. AB: PQ = 3:2 तर Δ ABC आणि Δ PQR काढा.



आकृती 4.1
कच्ची आकृती

प्रथम दिलेल्या मापांचा Δ ABC काढा.

Δ ABC आणि Δ PQR समरूप आहेत.

$\therefore$ त्यांच्या संगत बाजू एकाच प्रमाणात आहेत.

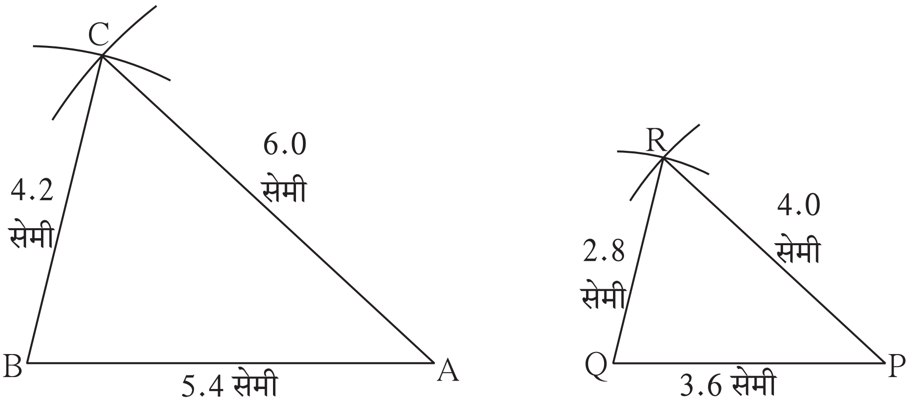
$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} = \frac{3}{2} \quad \dots\dots\dots\dots \text{(I)}$$

AB, BC, AC या बाजूंच्या लांबी माहीत असल्याने वरील समीकरणांवरून PQ, QR, PR या बाजूंच्या लांबी मिळतील.

समीकरण [I] वरून

$$\frac{5.4}{PQ} = \frac{4.2}{QR} = \frac{6.0}{PR} = \frac{3}{2}$$

$\therefore$ PQ = 3.6 सेमी, QR = 2.8 सेमी आणि PR = 4.0 सेमी



आकृती 4.2

Δ PQR च्या सर्व बाजूंच्या लांबी माहीत झाल्याने आपण त्या त्रिकोणाची रचना करू.

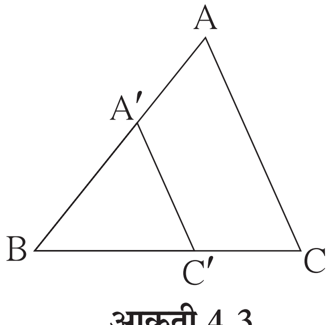
अधिक माहितीसाठी

काही वेळा, दिलेल्या त्रिकोणाशी समरूप असणारा जो त्रिकोण काढावयाचा आहे, त्याच्या बाजू मोजपट्टीने मोजून काढता येण्यासारख्या नसतात. अशावेळी, दिलेल्या रेषाखंडाचे 'दिलेल्या संख्येएवढे भाग करणे' या रचनेचा उपयोग करून त्रिकोणाच्या बाजू काढता येतात.

उदाहरणार्थ. बाजू AB ची लांबी $\frac{11.6}{3}$ सेमी असेल, तर 11.6 सेमी लांबीच्या रेषाखंडाचे 3 समान भाग करून AB रेषाखंड काढता येईल.

उदा. (1) मधील रचनेत दिलेल्या व काढावयाच्या त्रिकोणांत सामाईक शिरोबिंदू नव्हता. एक शिरोबिंदू सामाईक असेल तर त्रिकोण रचना पुढील उदाहरणात दाखवल्याप्रमाणे करणे सोयीचे असते.

उदा.(2) Δ ABC हा कोणताही एक त्रिकोण काढा.
Δ ABC शी समरूप असणारा Δ A′BC′ असा काढा की AB : A′B = 5:3



आकृती 4.3
कच्ची आकृती

विश्लेषण : B, A, A′ हे तसेच B, C, C′ हे एकरेषीय घेऊ.

$\Delta ABC \sim \Delta A'BC'$ $\therefore$ $\angle ABC = \angle A'BC'$

$$\frac{AB}{A'B} = \frac{BC}{BC'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{5}{3}$$

$\therefore$ Δ ABC च्या बाजू Δ A′BC′ च्या संगत बाजूंपेक्षा मोठ्या असणार.

$\therefore$ रेख BC चे 5 समान भाग केले तर त्यांतील तीन भागांएवढी रेख BC′ ची लांबी असेल.

Δ ABC काढून रेख BC वरील बिंदू B पासून तीन भागांएवढ्या अंतरावरील बिंदू हा बिंदू C′ असला पाहिजे. बिंदू C′ मधून रेख AC ला समांतर काढलेली रेषा, रेख BA ला ज्या बिंदूत छेदेल तो बिंदू A′ असेल.

$$\frac{BA'}{BA} = \frac{BC'}{BC} = \frac{3}{5} \text{ म्हणजेच, } \frac{BA}{BA'} = \frac{BC}{BC'} = \frac{5}{3}$$ .... व्यस्त क्रिया करून

रचनेच्या पायऱ्या:

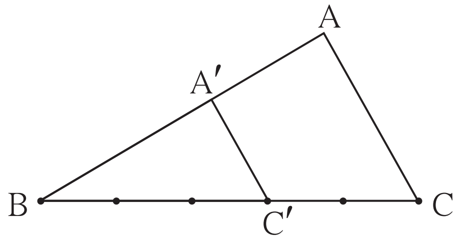
(1) Δ ABC हा कोणताही एक त्रिकोण काढा.

(2) रेख BC चे पाच समान भाग करा.

(3) बिंदू B पुढील तिसऱ्या बिंदूस C′ नाव द्या.
$\therefore BC' = \frac{3}{5} BC$

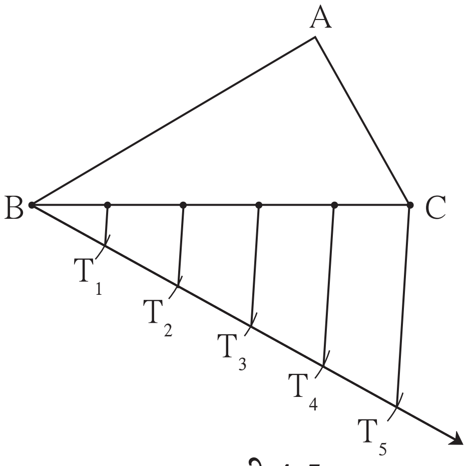
(4) आता C′ मधून रेख CA ला समांतर रेषा काढा. ती रेख AB ला जेथे छेदते, त्या बिंदूला A′ नाव द्या.

(5) Δ ABC शी समरूप असणारा Δ A′BC′ हा इष्ट त्रिकोण आहे.



आकृती 4.4

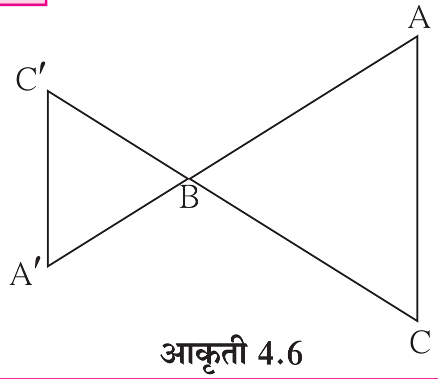
टीप : BC चे पाच समान भाग करताना, रेषा BC च्या ज्या बाजूला A आहे त्याच्या विरुद्ध बाजूला B मधून एक किरण काढून असे भाग करणे सोयीचे असते.
त्या किरणावर $BT_1 = T_1T_2 = T_2T_3 = T_3T_4 = T_4T_5$ असे समान भाग घ्या.
T_5C जोडा व T_1, T_2, T_3, T_4, मधून रेख T_5C ला समांतर रेषा काढा.



आकृती 4.5

विचार करूया.

समरूप त्रिकोण काढण्यासाठी सोबतच्या आकृतीत दाखवल्याप्रमाणेही Δ A′BC′ काढता येईल.
या आकृतीप्रमाणे Δ A′BC′ काढावयाचा असेल तर रचनेच्या पायऱ्यांत कोणता बदल करावा लागेल?



आकृती 4.6

उदा.(3) Δ ABC शी समरूप असणारा Δ A′BC′ असा काढा, की AB : A′B = 5:7

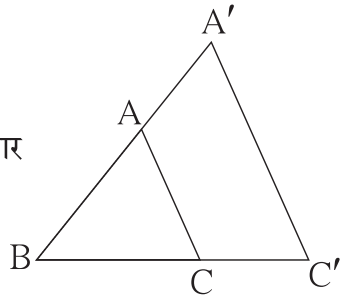
विश्लेषण : बिंदू B, A, A′ तसेच बिंदू B, C, C′ एकरेषीय घेऊ.

Δ ABC ~ Δ A′BC′ आणि AB : A′B = 5:7

$\therefore$ Δ ABC च्या बाजू Δ A′BC′ च्या संगत बाजूंपेक्षा लहान असणार

तसेच $\angle ABC \cong \angle A'BC'$

या बाबी विचारात घेऊन कच्ची आकृती काढू.



आकृती 4.7

कच्ची आकृती

आता $\frac{BC}{BC'} = \frac{5}{7}$

$\therefore$ रेख BC चे 5 समान भाग केले तर त्यांतील एका भागाच्या 7 पट रेख BC′ ची लांबी असेल.

$\therefore$ Δ ABC काढून रेख BC चे पाच समान भाग करू. बिंदू C′ हा किरण BC वर B पासून सात भाग अंतरावर असेल.

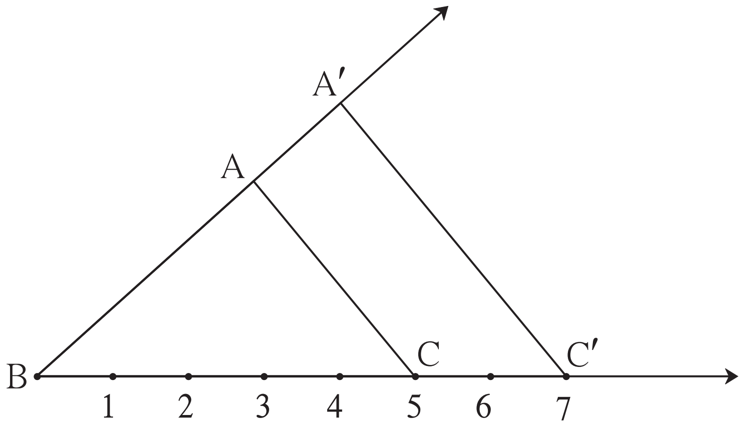
प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयानुसार, बिंदू C′ मधून बाजू AC ला समांतर रेषा काढली तर ती वाढवलेल्या किरण BA ला ज्या बिंदूत छेदते, तो A′ हा बिंदू असेल. रेख A′C′ काढून Δ A′BC′ हा अपेक्षित त्रिकोण मिळेल.

रचनेच्या पायऱ्या :

(1) Δ ABC हा कोणताही एक त्रिकोण काढा.

(2) रेख BC चे 5 समान भाग करा. किरण BC वर बिंदू C′ असा घ्या, की रेख BC′ ची लांबी रेख BC च्या एका भागाच्या सात पट असेल.

(3) रेख AC ला C′ मधून समांतर रेषा काढा. ती रेषा किरण BA ला जेथे छेदते, त्या बिंदूला A′ हे नाव द्या. Δ A′BC′ हा Δ ABC शी समरूप असलेला इष्ट त्रिकोण आहे.



आकृती 4.8

सरावसंच 4.1

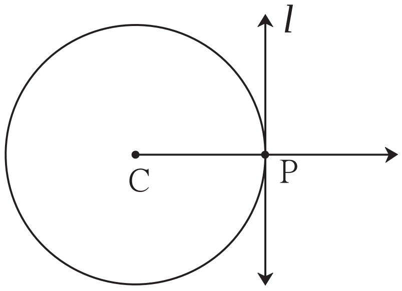
1. Δ ABC ~ Δ LMN , Δ ABC असा काढा, की AB = 5.5 सेमी, BC = 6 सेमी, CA = 4.5 सेमी आणि $\frac{BC}{MN} = \frac{5}{4}$ तर Δ ABC व Δ LMN काढा.
2. Δ PQR ~ Δ LTR, Δ PQR मध्ये PQ = 4.2 सेमी, QR = 5.4 सेमी, PR = 4.8 सेमी आणि $\frac{PQ}{LT} = \frac{3}{4}$ तर Δ PQR व Δ LTR काढा.
3. Δ RST ~ Δ XYZ, Δ RST मध्ये RS = 4.5 सेमी, $\angle$ RST = 40°, ST = 5.7 सेमी आणि $\frac{RS}{XY} = \frac{3}{5}$ तर Δ RST व Δ XYZ काढा.
4. Δ AMT ~ Δ AHE, Δ AMT मध्ये AM = 6.3 सेमी, $\angle$ TAM = 50°, AT = 5.6 सेमी आणि $\frac{AM}{AH} = \frac{7}{5}$ तर Δ AHE काढा.

जाणून घेऊया.

दिलेल्या वर्तुळाला त्यावरील बिंदूतून स्पर्शिका काढणे

(i) वर्तुळ केंद्राचा उपयोग करून.

विश्लेषण :



आकृती 4.9

समजा केंद्र C असलेल्या वर्तुळावरील P बिंदूतून जाणारी, रेषा l ही स्पर्शिका काढायची आहे.

त्रिज्येच्या बाह्यटोकाशी काढलेली लंबरेषा ही त्या वर्तुळाची स्पर्शिका असते या गुणधर्माचा उपयोग करू. समजा त्रिज्या CP काढली तर रेख CP $\perp$ रेषा l म्हणजे त्रिज्या CP ला बिंदू P मधून जाणारी लंब रेषा काढली की, ती अपेक्षित स्पर्शिका होईल.

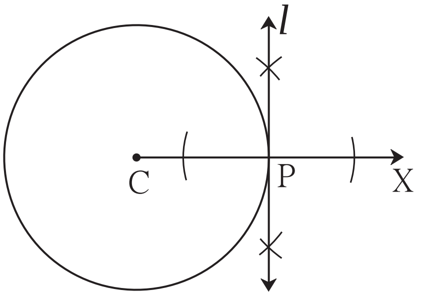
रेषेवरील दिलेल्या बिंदूतून जाणाऱ्या, त्या रेषेला लंब असणाऱ्या रेषेची रचना येथे करावी लागेल.म्हणून सोयीसाठी किरण CP काढून रेषा l ची रचना करू.

रचनेच्या पायऱ्या :

(1) केंद्र C असलेले एक वर्तुळ काढा, त्यावर P हा एक बिंदू घ्या.

(2) किरण CP काढा.

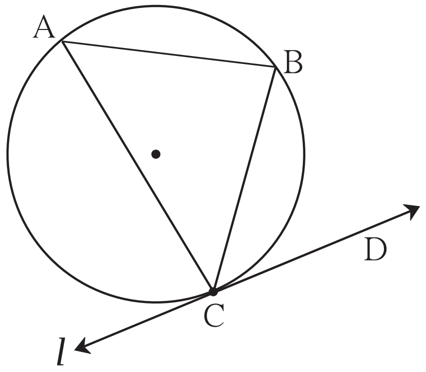
(3) बिंदू P मधून किरण CX ला लंब रेषा l काढा. रेषा l ही, P बिंदूतून जाणारी वर्तुळाची अपेक्षित स्पर्शिका आहे.



आकृती 4.10

ii) वर्तुळ केंद्राचा उपयोग न करता.

उदाहरण : कोणत्याही त्रिज्येचे एक वर्तुळ काढा. त्यावर C हा कोणताही एक बिंदू घ्या. वर्तुळ केंद्राचा उपयोग न करता, बिंदू C मधून जाणारी त्या वर्तुळाची स्पर्शिका काढा.



आकृती 4.11

विश्लेषण:

समजा, आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे रेषा l ही बिंदू C मधून जाणारी स्पर्शिका आहे. रेख CB ही जीवा आणि $\angle$ CAB हा अंतर्लिखित कोन काढला. स्पर्शिका-छेदिका कोनाच्या प्रमेयानुसार $\angle CAB \cong \angle BCD$.

स्पर्शिका छेदिका कोनाच्या प्रमेयाच्या व्यत्यासानुसार,

जर $\angle CAB \cong \angle BCD$, तर रेषा l ही वर्तुळाची स्पर्शिका असते.

म्हणून रेख CB ही वर्तुळाची जीवा आणि $\angle CAB$ हा अंतर्लिखित कोन काढू. $\angle BCD$ या कोनाची रचना अशी करू ,की $\angle BCD \cong \angle BAC$.

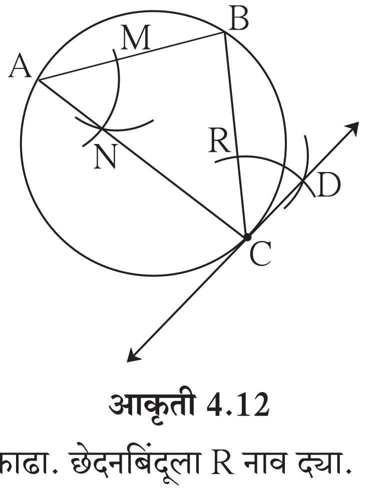
रेषा CD ही दिलेल्या वर्तुळाच्या बिंदू C मधून जाणारी त्या वर्तुळाची स्पर्शिका असेल.

रचनेच्या पायऱ्या:

(1) एक वर्तुळ काढा. वर्तुळावर C हा कोणताही एक बिंदू घ्या.

(2) जीवा CB आणि अंतर्लिखित $\angle CAB$ काढा.

(3) कंपासमध्ये सोयिस्कर त्रिज्या घेऊन आणि बिंदू A केंद्र घेऊन $\angle BAC$ च्या भुजांना बिंदू M व बिंदू N मध्ये छेदणारा कंस काढा.



आकृती 4.12

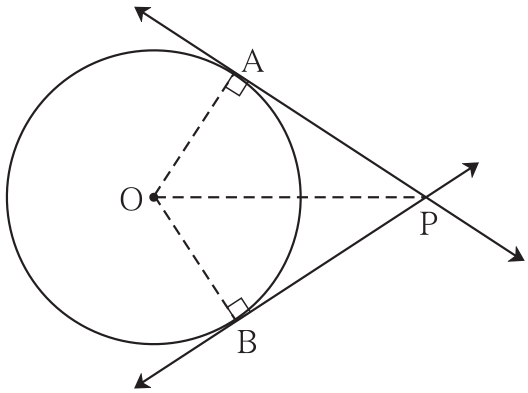
(4) तीच त्रिज्या आणि केंद्र C घेऊन, जीवा CB ला छेदणारा कंस काढा. छेदनबिंदूला R नाव द्या.

(5) कंपासमध्ये MN एवढी त्रिज्या घ्या. केंद्र R घेऊन आधी काढलेल्या कंसाला छेदणारा आणखी एक कंस काढा. त्या छेदनबिंदूला D नाव द्या. रेषा CD काढा.रेषा CD ही वर्तुळाची स्पर्शिका आहे.

(वरील आकृतीत $\angle$ MAN $\cong$ $\angle$ BCD याचे कारण ध्यानात घ्या. रेषाखंड MN व रेषाखंड RD काढल्यास बाबाबा कसोटीनुसार Δ MAN $\cong$ Δ RCD. $\therefore$ $\angle$ MAN $\cong$ $\angle$ BCD)

दिलेल्या वर्तुळाला त्याबाहेरील दिलेल्या बिंदूतून स्पर्शिका काढणे.

विश्लेषण :



आकृती 4.13

समजा, आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे केंद्र O असलेल्या वर्तुळाच्या बाह्यभागात बिंदू P आहे.बिंदू P मधून काढलेल्या स्पर्शिका या वर्तुळाला बिंदू A आणि बिंदू B मध्ये स्पर्श करतात. बिंदू A आणि बिंदू B यांची वर्तुळावरील स्थाने निश्चित करता आली, तर स्पर्शिका PA आणि PB काढता येतील. कारण त्रिज्या OA आणि OB काढल्या तर

त्रिज्या OA $\perp$ रेषा PA आणि त्रिज्या OB $\perp$ रेषा PB.

Δ OAP व Δ OBP हे काटकोन त्रिकोण असून, OP त्या दोन्हींचा कर्ण आहे. रेख OP व्यास असणारे वर्तुळ काढले तर ते केंद्र O असणाऱ्या वर्तुळाला ज्या बिंदूंत छेदेल, ते A आणि B असतील. कारण अर्धवर्तुळात अंतर्लिखित केलेला कोन काटकोन असतो.

रचनेच्या पायऱ्या:

(1) केंद्र O असलेले कोणत्याही त्रिज्येचे एक वर्तुळ काढा.

(2) वर्तुळाच्या बाह्यभागात P हा एक बिंदू घ्या.

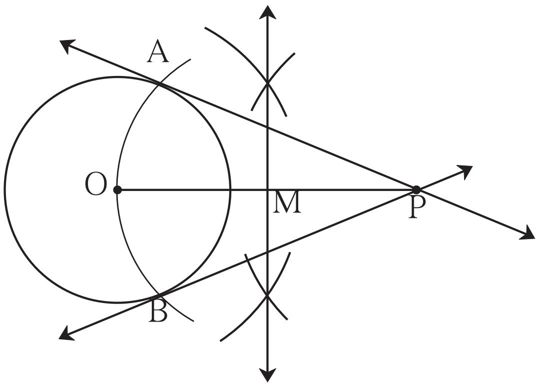
(3) रेख OP काढा. रेख OP चा लंबदुभाजक काढून मध्यबिंदू M मिळवा.

(4) केंद्र M व त्रिज्या OM घेऊन वर्तुळ कंस काढा.

(5) हा वर्तुळकंस दिलेल्या वर्तुळाला A आणि B बिंदूत छेदतो.

(6) रेषा PA व रेषा PB काढा.

रेषा PA व रेषा PB ह्या वर्तुळाच्या अपेक्षित स्पर्शिका आहेत.



आकृती 4.14

सरावसंच 4.2

1. केंद्र P व त्रिज्या 3.2 सेमी असलेल्या वर्तुळाला त्यावरील M बिंदूतून स्पर्शिका काढा.
2. 2.7 सेमी त्रिज्या असलेले वर्तुळ काढा. या वर्तुळाला त्यावरील बिंदूतून स्पर्शिका काढा.
3. 3.6 सेमी त्रिज्येचे वर्तुळ काढा. या वर्तुळाला त्यावरील कोणत्याही बिंदूतून वर्तुळकेंद्र विचारात न घेता स्पर्शिका काढा.
4. 3.3 सेमी त्रिज्येचे वर्तुळ काढा.त्यामध्ये 6.6 सेमी लांबीची जीवा PQ काढा. बिंदू P व बिंदू Q मधून वर्तुळाला स्पर्शिका काढा. स्पर्शिकांबाबत तुमचे निरीक्षण नोंदवा.

5. 3.4 सेमी त्रिज्येचे वर्तुळ काढा.त्यामध्ये 5.7 सेमी लांबीची जीवा MN काढा. बिंदू M व बिंदू N मधून वर्तुळाला स्पर्शिका काढा.

6. P केंद्र व 3.4 सेमी त्रिज्या घेऊन एक वर्तुळ काढा. वर्तुळ केंद्रापासून 5.5 सेमी अंतरावर Q बिंदू घ्या. Q बिंदूतून वर्तुळाला स्पर्शिका काढा.

7. 4.1 सेमी त्रिज्या घेऊन एक वर्तुळ काढा. वर्तुळ केंद्रापासून 7.3 सेमी अंतरावरील बिंदूतून स्पर्शिका काढा.

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 4

1. योग्य पर्याय निवडा :

(1) वर्तुळावरील दिलेल्या बिंदूतून वर्तुळाला काढता येणाऱ्या स्पर्शिकांची संख्या .... असते.

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

(2) वर्तुळाबाहेरील बिंदूतून वर्तुळाला जास्तीत जास्त .... स्पर्शिका काढता येतात.

(A) 2 (B) 1 (C) एक आणि एकच (D) 0

(3) जर $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, $\frac{AB}{PQ} = \frac{7}{5}$ तर ....

(A) Δ ABC मोठा असेल. (B) Δ PQR मोठा असेल.

(C) दोन्ही त्रिकोण समान असतील. (D) निश्चित सांगता येणार नाही.

2. केंद्र O असलेले 3.5 सेमी त्रिज्येचे वर्तुळ काढा. वर्तुळ केंद्रापासून 5.7 सेमी अंतरावर बिंदू P घ्या. P बिंदूमधून वर्तुळाची स्पर्शिका काढा.

3. कोणतेही एक वर्तुळ काढा. त्यावर A हा बिंदू घेऊन त्यामधून वर्तुळाची स्पर्शिका वर्तुळकेंद्राचा उपयोग न करता काढा.

4. 6.4 सेमी व्यासाचे वर्तुळ काढा. वर्तुळकेंद्रापासून व्यासाएवढ्या अंतरावर बिंदू R घ्या. या बिंदूतून वर्तुळाच्या स्पर्शिका काढा.

5. केंद्र P असलेले वर्तुळ काढा. 100° मापाचा एक लघुकंस AB काढा. बिंदू A व बिंदू B मधून वर्तुळाला स्पर्शिका काढा.

6. केंद्र E असलेले 3.4 सेमी त्रिज्येचे वर्तुळ काढा. वर्तुळावर F बिंदू घ्या. बिंदू A असा घ्या, कि E-F-A आणि FA = 4.1 सेमी. बिंदू A मधून वर्तुळाला स्पर्शिका काढा.

7. जर $\Delta ABC \sim \Delta LBN$, Δ ABC मध्ये AB = 5.1 सेमी, $\angle B = 40^\circ$, BC = 4.8 सेमी, $\frac{AC}{LN} = \frac{4}{7}$ तर Δ ABC व Δ LBN काढा.

8. Δ PYQ असा काढा की, PY = 6.3 सेमी, YQ = 7.2 सेमी, PQ = 5.8 सेमी. Δ XYZ हा Δ PYQ शी समरूप त्रिकोण असा काढा की, $\frac{YZ}{YQ} = \frac{6}{5}$.

❑❑❑

AKFIRJ

5 निर्देशक भूमिती

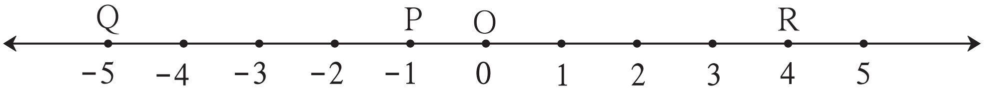
चला, शिकूया.

- अंतराचे सूत्र
- विभाजनाचे सूत्र
- रेषेचा चढ

जरा आठवूया.

संख्यारेषेवरील दोन बिंदूंतील अंतर कसे काढतात हे आपल्याला माहीत आहे.

P,Q आणि R बिंदूंचे निर्देशक अनुक्रमे −1,−5 आणि 4 आहेत तर रेख PQ,रेख QR यांची लांबी काढा.



आकृती 5.1

बिंदू A आणि B यांचे निर्देशक x_1 आणि x_2 असतील, आणि $x_2 > x_1$ असेल तर

रेषाखंड AB ची लांबी = d(A,B) = $x_2 - x_1$

आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे बिंदू P,Q आणि R यांचे निर्देशक अनुक्रमे −1,−5 आणि 4 आहेत.

$\therefore$ d(P, Q) = (−1)−(−5) = −1 + 5 = 4

आणि d(Q, R) = 4 − (−5) = 4 + 5 = 9

हीच संकल्पना वापरून आपण XY प्रतलातील,एकाच अक्षावर असणाऱ्या दोन बिंदूंतील अंतर काढू.

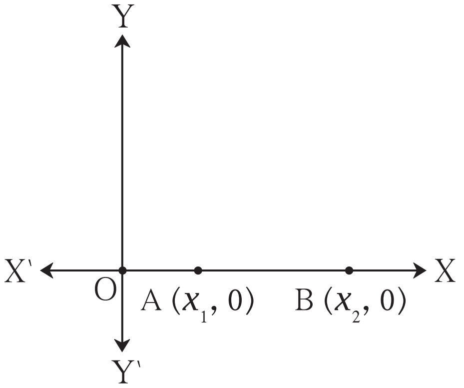
जाणून घेऊया.

(1) **एकाच अक्षावरील दोन बिंदूतील अंतर काढणे.**

एकाच अक्षावरील दोन बिंदू म्हणजे एकाच संख्यारेषेवरील दोन बिंदू होत. X अक्षावरील बिंदूंचे निर्देशक (2, 0), $(\frac{-5}{2}, 0)$, (8, 0) असे, तर Y अक्षावरील बिंदूंचे निर्देशक (0, 1), $(0, \frac{17}{2})$, (0, −3) असे असतात, हे ध्यानात घ्या.

X अक्षाचा ऋण निर्देशक दाखवणारा भाग किरण OX′ आहे व Y अक्षाचा ऋण निर्देशक दाखवणारा भाग किरण OY′ आहे.

i) X-अक्षावरील दोन बिंदूंतील अंतर काढणे.

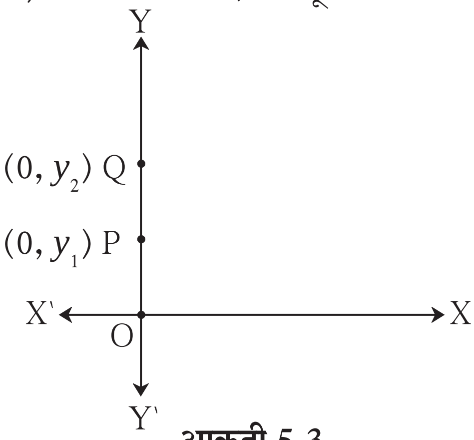


आकृती 5.2

वरील आकृतीत,
A(x_1, 0) आणि B(x_2, 0) हे दोन बिंदू X- अक्षावर असे आहेत की, $x_2 > x_1$

$\therefore$ d(A, B) = $x_2 - x_1$

ii) Y-अक्षावरील दोन बिंदूंतील अंतर काढणे.

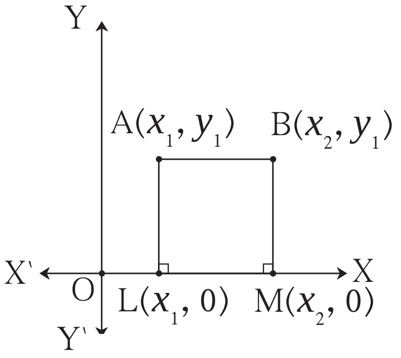


आकृती 5.3

वरील आकृतीत,
P(0, y_1) आणि Q(0, y_2) हे दोन बिंदू Y- अक्षावर असे आहेत की, $y_2 > y_1$

$\therefore$ d(P,Q) = $y_2 - y_1$

2) दोन बिंदूंना जोडणारा XY प्रतलातील रेषाखंड एखाद्या अक्षाला समांतर असेल तर त्या दोन बिंदूंतील अंतर काढणे.



आकृती 5.4

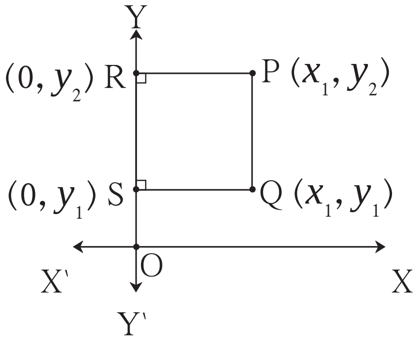
i) आकृतीत रेख AB हा X- अक्षाला समांतर आहे. म्हणून बिंदू A व बिंदू B चे y निर्देशक समान आहेत.
रेख AL आणि रेख BM हे X-अक्षावर लंब काढा.

$\therefore$ □ ABML हा आयत आहे.

$\therefore$ AB = LM

परंतु, LM = $x_2 - x_1$

$\therefore$ d(A,B) = $x_2 - x_1$



आकृती 5.5

ii) आकृतीत रेख PQ हा Y- अक्षाला समांतर आहे. म्हणून बिंदू P व बिंदू Q चे x निर्देशक समान आहेत.
रेख PR आणि रेख QS हे Y-अक्षावर लंब काढा.

$\therefore$ □ PQSR हा आयत आहे.

$\therefore$ PQ = RS

परंतु, RS = $y_2 - y_1$

$\therefore$ d(P,Q) = $y_2 - y_1$

कृती :

आकृतीमध्ये रेख AB || Y-अक्ष आणि रेख CB || X-अक्ष असून A, C बिंदूंचे निर्देशक दिले आहेत.

AC काढण्यासाठी खालील चौकटी भरा.

Δ ABC हा काटकोन त्रिकोण आहे.

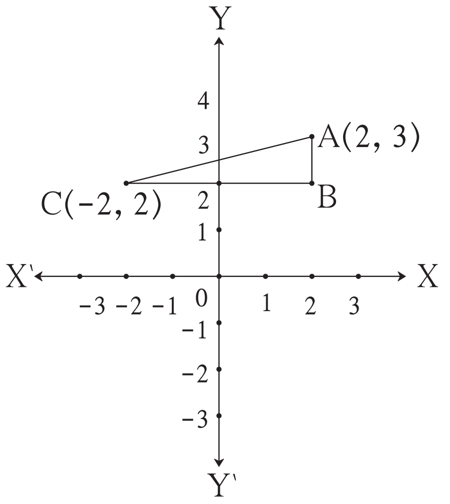
पायथागोरसच्या प्रमेयावरून,

$(AB)^2 + (BC)^2 = \square$

AB, BC शोधण्यासाठी बिंदू B चे निर्देशक काढू.

CB || X- अक्ष $\therefore$ B चा y निर्देशक = $\square$

BA || Y- अक्ष $\therefore$ B चा x निर्देशक = $\square$



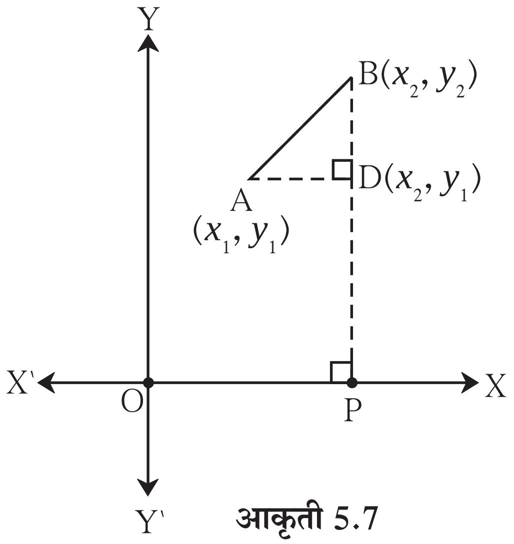
आकृती 5.6

AB = $\boxed{3} - \square = \square$ BC = $\square - \square = \boxed{4}$

$\therefore$ AC^2 = $\square + \square = \square$ $\therefore$ AC = $\boxed{\sqrt{17}}$

जाणून घेऊया.

अंतराचे सूत्र(Distance formula)



आकृती 5.7

आकृती 5.7 मध्ये, A(x_1, y_1) आणि B(x_2, y_2) हे XY प्रतलातील कोणतेही दोन बिंदू आहेत.

बिंदू B मधून BP हा X-अक्षावर लंब काढा तसेच बिंदू A मधून AD हा रेख BP वर लंब काढा.

रेख BP हा Y-अक्षाला समांतर आहे.

$\therefore$ बिंदू D चा x निर्देशक x_2 आहे.

रेख AD हा X-अक्षाला समांतर आहे.

$\therefore$ बिंदू D चा y निर्देशक y_1 आहे.

$\therefore$ AD = d(A, D) = $x_2 - x_1$,

BD = d(B, D) = $y_2 - y_1$

Δ ABD या काटकोन त्रिकोणात, $AB^2 = AD^2 + BD^2$

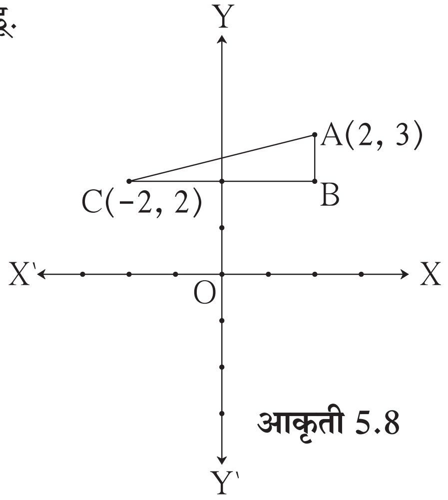
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\therefore AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

या निष्कर्षाला अंतराचे सूत्र असे म्हणतात.

हे लक्षात घ्या की, $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

मागील कृतीत आपण रेख AC ची लांबी काढण्यासाठी AB, BC या लांबी काढून पायथागोरसचे प्रमेय वापरले. आता अंतराचे सूत्र वापरून आपण त्याच रेषाखंडांच्या लांबी काढू.



आकृती 5.8

A(2, 3) आणि C(−2, 2) हे दिले आहे.

A(x_1, y_1) आणि C(x_2, y_2) मानू.

$x_1 = 2, y_1 = 3, x_2 = -2, y_2 = 2$

$$AC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(-2-2)^2 + (2-3)^2}$$

$$= \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2}$$

$$= \sqrt{16+1}$$

$$= \sqrt{17}$$

रेख AB || Y−अक्ष आणि रेख BC || X−अक्ष.

∴ बिंदू B चे निर्देशक (2, 2) आहेत.

$$\therefore AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{0+1} = 1$$

$$BC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-2-2)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 0} = 4$$

आकृती 5.1 मधील P व Q या बिंदूतील अंतर (−1) - (−5) = 4; असे आपण काढले होते. त्याच बिंदूंचे निर्देशक प्रतलात (−1, 0) व (−5, 0) हे असणार. अंतराचे वरील सूत्र वापरून P व Q मधील अंतर तेवढेच येईल, हे पडताळून पाहा.

हे लक्षात ठेवूया.

- आरंभबिंदू O चे निर्देशक (0, 0) असतात. म्हणून बिंदू P चे निर्देशक (x, y) असतील तर d(O, P) = $\sqrt{x^2 + y^2}$.
- P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2) हे दोन बिंदू XY प्रतलावर असतील तर

  d(P, Q) = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

  म्हणजेच, $PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) P(−1, 1), Q(5, −7) या दोन बिंदूंतील अंतर काढा.

उकल : $P(x_1, y_1)$ आणि $Q(x_2, y_2)$ मानू.

$x_1 = -1,\quad y_1 = 1,\quad x_2 = 5,\quad y_2 = -7$

अंतराचे सूत्रानुसार $d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$= \sqrt{[5-(-1)]^2 + [(-7)-1]^2}$

$= \sqrt{(6)^2 + (-8)^2}$

$= \sqrt{36+64}$

$d(P, Q) = \sqrt{100} = 10$

∴ बिंदू P आणि Q मधील अंतर 10

उदा. (2) A(−3, 2), B(1, −2) आणि C(9, −10) हे बिंदू एकरेषीय आहेत हे दाखवा.

उकल : जर d(A, B); d(B, C) आणि d(A, C) यांपैकी दोन अंतरांची बेरीज तिसऱ्या अंतराएवढी असेल, तरच बिंदू A, B, C एकरेषीय असतील.

∴ d(A, B), d(B, C) आणि d(A, C) काढू.

बिंदू A चे निर्देशक	बिंदू B चे निर्देशक	अंतराचे सूत्र
(−3, 2)	(1, −2)	$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
(x_1, y_1)	(x_2, y_2)	

∴ $d(A, B) = \sqrt{[1-(-3)]^2 + [(-2)-2]^2}$ .... (अंतराच्या सूत्रावरून)

$= \sqrt{(1+3)^2 + (-4)^2}$

$= \sqrt{16+16}$

$= \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ ....(I)

$d(B, C) = \sqrt{(9-1)^2 + (-10+2)^2}$

$= \sqrt{64+64} = 8\sqrt{2}$ ....(II)

आणि $d(A, C) = \sqrt{(9+3)^2 + (-10-2)^2}$

$= \sqrt{144+144} = 12\sqrt{2}$ ....(III)

$4\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$ .... (I), (II) आणि (III) वरून

∴ d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)

∴ A, B, C हे बिंदू एकरेषीय आहेत.

उदा. (3) P(6, -6), Q(3, -7) आणि R(3, 3) हे बिंदू एकरेषीय आहेत का ते ठरवा.

उकल : $PQ = \sqrt{(6-3)^2+(-6+7)^2}$ .... (अंतराचे सूत्र वापरून)

$= \sqrt{(3)^2+(1)^2} = \sqrt{10}$ .... (I)

$QR = \sqrt{(3-3)^2+(-7-3)^2}$

$= \sqrt{(0)^2+(-10)^2} = \sqrt{100}$ .... (II)

$PR = \sqrt{(3-6)^2+(3+6)^2}$

$= \sqrt{(-3)^2+(9)^2} = \sqrt{90}$ .... (III)

(I), (II) आणि (III) वरून $\sqrt{10}$, $\sqrt{100}$ आणि $\sqrt{90}$ यांपैकी $\sqrt{100}$ ही सर्वांत मोठी संख्या आहे.

$(\sqrt{100})$ आणि $(\sqrt{10}+\sqrt{90})$ या संख्या समान आहेत का ते पाहू.

यासाठी $(\sqrt{100})^2$ आणि $(\sqrt{10}+\sqrt{90})^2$ यांची तुलना करा.

त्यावरून तुमच्या लक्षात येईल $(\sqrt{10}+\sqrt{90}) > (\sqrt{100})$ $\therefore PQ + PR \neq QR$

$\therefore$ P(6, -6), Q(3, -7) आणि R(3, 3) हे बिंदू एकरेषीय नाहीत.

उदा. (4) (1, 7), (4, 2), (-1, -1) आणि (-4, 4) हे चौरसाचे शिरोबिंदू आहेत, हे दाखवा.

उकल : जेव्हा चौकोनाच्या सर्व भुजा समान लांबीच्या आणि कर्ण समान लांबीचे असतात तेव्हा तो चौकोन चौरस असतो. $\therefore$ सर्व बाजूंच्या लांबी व कर्णांच्या लांबी अंतराच्या सूत्रावरून काढू.

समजा, A(1, 7), B(4, 2), C(-1, -1) आणि D(-4,4) हे दिलेले बिंदू आहेत.

$AB = \sqrt{(1-4)^2+(7-2)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

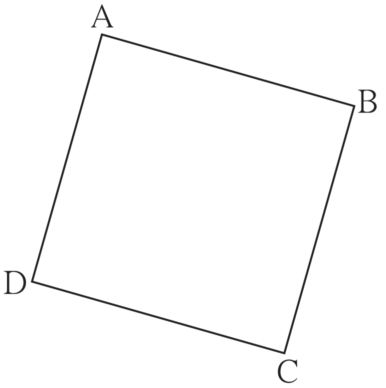
$BC = \sqrt{(4+1)^2+(2+1)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$

$CD = \sqrt{(-1+4)^2+(-1-4)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

$DA = \sqrt{(1+4)^2+(7-4)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$

$AC = \sqrt{(1+1)^2+(7+1)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$

$BD = \sqrt{(4+4)^2+(2-4)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$



आकृती 5.9

$\therefore AB = BC = CD = DA$ आणि $AC = BD$

यावरून असे दिसते की, चौकोनाच्या चारही बाजूंची लांबी समान आहे तसेच दोन्ही कर्ण AC व BD यांची लांबी समान आहेत.

$\therefore$ (1,7), (4,2), (–1,–1) आणि (–4,4) या शिरोबिंदूंनी तयार झालेला चौकोन चौरस आहे.

उदा. (5) Y– अक्षावरील अशा बिंदूचे निर्देशक शोधा, की जो M (–5,–2)आणि N(3,2) पासून समान अंतरावर आहे.

उकल : समजा, Y- अक्षावरील बिंदू $P(0, y)$हा बिंदू M व N पासून समान अंतरावर आहे.

$$\therefore PM = PN \qquad \therefore PM^2 = PN^2$$

$$\therefore [0-(-5)]^2 + [y-(-2)]^2 = (0-3)^2 + (y-2)^2$$

$$\therefore 25 + (y+2)^2 = 9 + y^2 - 4y + 4$$

$$\therefore 25 + y^2 + 4y + 4 = 13 + y^2 - 4y$$

$$\therefore 8y = -16 \quad \therefore y = -2$$

$\therefore$ M (–5, –2) आणि N (3, 2) या बिंदूंपासून समान अंतरावर असणाऱ्या Y– अक्षावरील बिंदूचे निर्देशक (0, –2) आहेत.

उदा. (6) A(–3, –4), B(–5, 0), C(3, 0) हे Δ ABC चे शिरोबिंदू आहेत. Δ ABC च्या परिकेंद्राचे निर्देशक शोधा.

उकल : समजा, बिंदू $P(a, b)$ हा Δ ABC चे परिकेंद्र आहे. $\therefore$ P हा बिंदू A, B, C पासून समदूर आहे.

$$\therefore PA^2 = PB^2 = PC^2 \text{ .... (I)} \qquad \therefore PA^2 = PB^2$$

$$(a+3)^2 + (b+4)^2 = (a+5)^2 + (b-0)^2$$

$$\therefore a^2 + 6a + 9 + b^2 + 8b + 16 = a^2 + 10a + 25 + b^2$$

$$\therefore -4a + 8b = 0$$

$$\therefore a - 2b = 0 \text{ .... (II)}$$

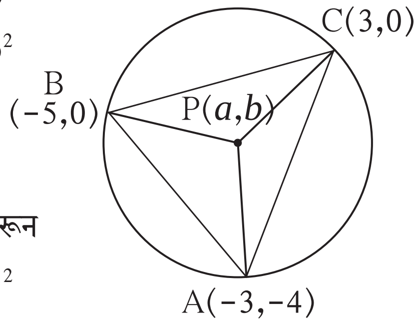
तसेच $PA^2 = PC^2$ .... (I) वरून

$$\therefore (a+3)^2 + (b+4)^2 = (a-3)^2 + (b-0)^2$$

$$\therefore a^2 + 6a + 9 + b^2 + 8b + 16 = a^2 - 6a + 9 + b^2$$

$$\therefore 12a + 8b = -16$$

$$\therefore 3a + 2b = -4 \text{ .... (III)}$$



आकृती 5.10

समीकरण (II) आणि (III) सोडवून $a = -1$, $b = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ परिकेंद्राचे निर्देशक $(-1, -\frac{1}{2})$ आहेत.

उदा. (7) बिंदू (x, y) हा $(7, 1)$ आणि $(3, 5)$ यांच्यापासून समदूर असेल तर $y = x-2$ दाखवा.

उकल : समजा, P (x, y) हा बिंदू A$(7, 1)$ आणि B$(3, 5)$ यांच्यापासून समदूर आहे.

$$\therefore AP = BP$$

$$\therefore AP^2 = BP^2$$

$$\therefore (x - 7)^2 + (y - 1)^2 = (x - 3)^2 + (y - 5)^2$$

$$\therefore x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25$$

$$\therefore - 8x + 8y = -16$$

$$\therefore x - y = 2$$

$$\therefore y = x - 2$$

उदा. (8) बिंदू A $(2,-2)$ आणि बिंदू B $(-1, y)$ यांतील अंतर 5 आहे, तर y ची किंमत काढा.

उकल : $\therefore AB^2 = [(-1) - 2]^2 + [y - (-2)]^2$ .... अंतराच्या सूत्रावरून

$\therefore 5^2 = (-3)^2 + (y + 2)^2$

$\therefore 25 = 9 + (y + 2)^2$

$\therefore 16 = (y + 2)^2$

$\therefore y + 2 = \pm\sqrt{16}$

$\therefore y + 2 = \pm 4$

$\therefore y = 4 - 2$ किंवा $y = -4 - 2$

$\therefore y = 2$ किंवा $y = -6$

$\therefore y$ ची किंमत 2 किंवा -6 आहे.

सरावसंच 5.1

1. खाली दिलेल्या बिंदूंच्या प्रत्येक जोडीतील अंतर काढा.

   (1) A(2, 3), B(4, 1) (2) P(−5, 7), Q(−1, 3) (3) R(0, −3), S$(0, \frac{5}{2})$

   (4) L(5, −8), M(−7, −3) (5) T(−3, 6), R(9, −10) (6) W$(\frac{-7}{2}, 4)$, X(11, 4)

2. खालील बिंदू एकरेषीय आहेत की नाहीत हे ठरवा.

   (1) A(1, −3), B(2, −5), C(−4, 7) (2) L(−2, 3), M(1, −3), N(5, 4)

   (3) R(0, 3), D(2, 1), S(3, −1) (4) P(−2, 3), Q(1, 2), R(4, 1)

3. X- अक्षावरील असा बिंदू शोधा की जो बिंदू A(−3, 4) आणि B(1, −4) यांच्यापासून समदूर आहे.

4. P(−2, 2), Q(2, 2) आणि R(2, 7) हे काटकोन त्रिकोणाचे शिरोबिंदू आहेत, हे पडताळून पाहा.

5. P(2, −2), Q(7, 3), R(11, −1) आणि S (6, −6) हे शिरोबिंदू असलेला चौकोन समांतरभुज आहे हे दाखवा.

6. A(−4, −7), B(−1, 2), C(8, 5) आणि D(5, −4) हे ABCD या समभुज चौकोनाचे शिरोबिंदू आहेत हे दाखवा.

7. जर बिंदू L(x, 7) आणि M(1, 15) यातील अंतर 10 असेल, तर x ची किंमत काढा.

8. A(1, 2), B(1, 6), C($1 + 2\sqrt{3}$, 4) हे समभुज त्रिकोणाचे शिरोबिंदू आहेत हे दाखवा.

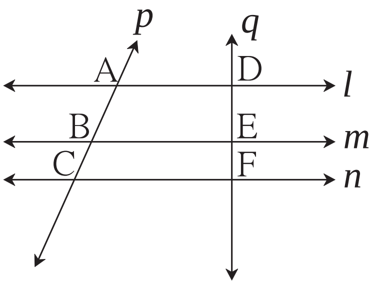
जरा आठवूया.

तीन समांतर रेषांच्या आंतरछेदांचा गुणधर्म :

आकृतीत रेषा $l \parallel$ रेषा $m \parallel$ रेषा n,

रेषा p व q या छेदिका आहेत.

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$



आकृती 5.11

जाणून घेऊया.

रेषाखंडांचे विभाजन (Division of a line segment)

आकृती 5.12

आकृतीत, AP = 6 आणि PB = 10.

$$\therefore \frac{AP}{PB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

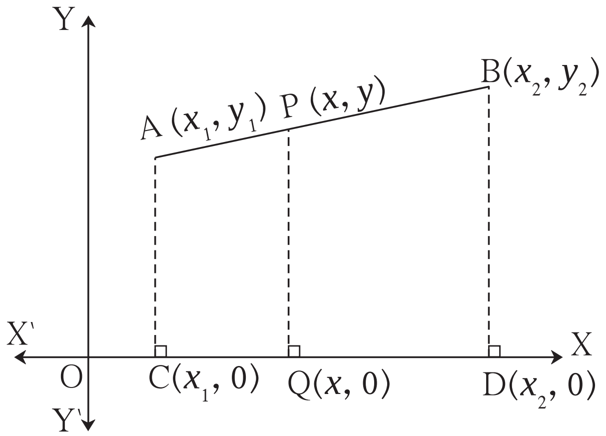
हेच वेगळ्या शब्दांत 'बिंदू P हा रेख AB चे 3:5 या गुणोत्तरात विभाजन करतो', असे म्हणतात.

जेव्हा एखाद्या रेषाखंडावरील बिंदू त्याच रेषाखंडाचे दिलेल्या गुणोत्तरात विभाजन करतो तेव्हा त्या विभाजन करणाऱ्या बिंदूचे निर्देशक कसे काढतात ते पाहू.

जाणून घेऊया.

विभाजनाचे सूत्र (Section formula)

आकृती 5.13 मध्ये, XY प्रतलातील रेख AB वरील बिंदू P, रेख AB चे $m : n$ या गुणोत्तरात विभाजन करतो.



आकृती 5.13

A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) आणि P(x, y) मानू.

रेख AC, रेख PQ आणि रेख BD हे X–अक्षावर लंब रेषाखंड काढले.

$\therefore$ C(x_1, 0); Q (x, 0)

आणि D (x_2, 0).

$\therefore$ CQ = $x - x_1$
आणि QD = $x_2 - x$ } .... (I)

तसेच रेख AC || रेख PQ || रेख BD.

$\therefore$ तीन समांतर रेषांच्या आंतरछेदांच्या गुणधर्माने, $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{CQ}{QD} = \dfrac{m}{n}$

आता, CQ = $x - x_1$ आणि QD = $x_2 - x$ .... (I) वरून

$$\therefore \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}$$

$$\therefore n(x - x_1) = m(x_2 - x)$$

$$\therefore nx - nx_1 = mx_2 - mx$$

$$\therefore mx + nx = mx_2 + nx_1$$

$$\therefore x(m + n) = mx_2 + nx_1$$

$$\therefore x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$$

याचप्रमाणे बिंदू A, P आणि B मधून Y– अक्षावर लंब काढून वरील प्रमाणेच कृती करून आपल्याला $y = \dfrac{my_2 + ny_1}{m + n}$ मिळेल.

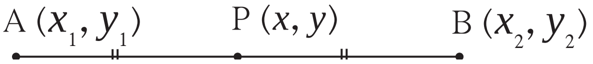
$\therefore$ बिंदू A(x_1, y_1) आणि B(x_2, y_2) यांना जोडणाऱ्या रेख AB चे $m : n$ या गुणोत्तरात विभाजन करणाऱ्या बिंदूचे निर्देशक $\left(\dfrac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \dfrac{my_2 + ny_1}{m + n}\right)$ असतात.

रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूचे सूत्र (Mid-point formula)

$A(x_1, y_1)$ आणि $B(x_2, y_2)$ हे दोन बिंदू असून बिंदू $P(x, y)$ हा रेख AB चा मध्यबिंदू असेल, तर

$m = n$ आता विभाजन सूत्रानुसार,

x व y च्या किमती लिहू.



आकृती 5.14

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$

$$= \frac{mx_2 + mx_1}{m+m} \quad \because \ m = n$$

$$= \frac{m(x_1 + x_2)}{2m}$$

$$= \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$$

$$= \frac{my_2 + my_1}{m+m} \quad \because \ m = n$$

$$= \frac{m(y_1 + y_2)}{2m}$$

$$= \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$\therefore$ P या मध्यबिंदूचे निर्देशक $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ हे आहेत. यालाच **मध्यबिंदूचे सूत्र** असे म्हणतात.

आपण मागील इयत्तेत दोन परिमेय संख्या a आणि b संख्यारेषेवर दाखवून, त्यांना जोडणाऱ्या रेषाखंडाचा $\frac{a+b}{2}$ हा मध्यबिंदू असतो हे दाखवले होते. तो निष्कर्ष म्हणजे आता मिळालेल्या सूत्राचा विशिष्ट प्रकार आहे. हे लक्षात घ्या.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा.(1) जर A(3,5) आणि B(7,9) असून बिंदू Q रेख AB चे 2:3 या गुणोत्तरात विभाजन करत असेल, तर Q बिंदूचे निर्देशक काढा.

उकल : दिलेल्या उदाहरणात $(x_1, y_1) = (3, 5)$

आणि $(x_2, y_2) = (7, 9)$ मानू.

तसेच, $m : n = 2:3$

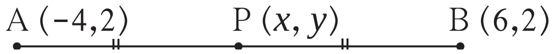
रेषाखंडाच्या विभाजनाच्या सूत्रानुसार,

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n} = \frac{2\times7+3\times3}{2+3} = \frac{23}{5} \qquad y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n} = \frac{2\times9+3\times5}{2+3} = \frac{33}{5}$$

$\therefore$ बिंदू Q चे निर्देशक $\left(\frac{23}{5}, \frac{33}{5}\right)$

उदा.(2) A(−4,2) B(6,2) या रेषाखंडांचा बिंदू P हा मध्यबिंदू आहे. तर P बिंदूचे निर्देशक काढा.

उकल :



आकृती 5.15

$(-4, 2) = (x_1, y_1)$; $(6, 2) = (x_2, y_2)$ आणि बिंदू P चे निर्देशक (x, y) मानू.

∴ मध्यबिंदूच्या सूत्रानुसार,

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-4+6}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2+2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

∴ मध्यबिंदू P चे निर्देशक (1,2) येतील.

जरा आठवूया.

आपल्याला माहीत आहे की, त्रिकोणाच्या मध्यगा एकसंपाती असतात.
संपातबिंदू (centroid) मध्यगेचे 2:1 या गुणोत्तरात विभाजन करतो.

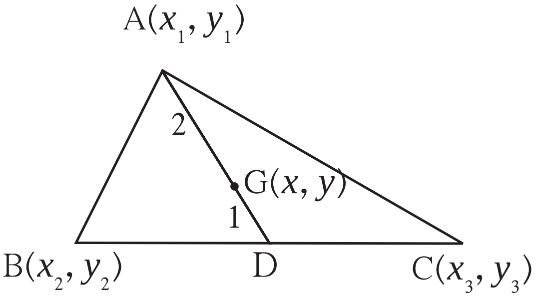
जाणून घेऊया.

मध्यगासंपातबिंदूचे सूत्र (Centroid formula)

त्रिकोणाच्या तिन्ही शिरोबिंदूंचे निर्देशक दिले असता विभाजन सूत्राचा वापर करून मध्यगासंपातबिंदूचे निर्देशक कसे काढता येतात ते आपण पाहू.

समजा, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ हे Δ ABC चे शिरोबिंदू असून रेख AD ही Δ ABC ची मध्यगा आहे. बिंदू $G(x, y)$ हा त्या त्रिकोणाचा मध्यगासंपातबिंदू आहे.

बिंदू D हा रेख BC चा मध्यबिंदू आहे.



आकृती 5.16

$\therefore$ बिंदू D चे निर्देशक $x = \dfrac{x_2 + x_3}{2}$, $y = \dfrac{y_2 + y_3}{2}$ .... रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूच्या सूत्रानुसार

बिंदू G(x, y) हा Δ ABC चा मध्यगासंपातबिंदू आहे. $\therefore$ AG : GD = 2 : 1

$\therefore$ रेषाखंडाच्या विभाजनसूत्रानुसार,

$$x = \frac{2\left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right) + 1 \times x_1}{2+1} = \frac{x_2 + x_3 + x_1}{3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$y = \frac{2\left(\frac{y_2 + y_3}{2}\right) + 1 \times y_1}{2+1} = \frac{y_2 + y_3 + y_1}{3} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

म्हणजेच, शिरोबिंदू (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) असलेल्या त्रिकोणाच्या मध्यगासंपातबिंदूचे निर्देशक

$\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ असतात.

यालाच **मध्यगासंपातबिंदूचे सूत्र** म्हणतात.

हे लक्षात ठेवूया.

- विभाजनाचे सूत्र

  (x_1, y_1) आणि (x_2, y_2) या दोन भिन्न बिंदूंना जोडणाऱ्या रेषाखंडाचे $m : n$ या गुणोत्तरात विभाजन करणाऱ्या बिंदूचे निर्देशक $\left(\dfrac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$ असतात.

- मध्यबिंदूचे सूत्र

  (x_1, y_1) आणि (x_2, y_2) या दोन भिन्न बिंदूंना जोडणाऱ्या रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूचे निर्देशक $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$ असतात.

- मध्यगासंपातबिंदूचे सूत्र

  (x_1, y_1), (x_2, y_2) आणि (x_3, y_3) हे त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूचे निर्देशक असतील तर मध्यगासंपातबिंदूचे निर्देशक $\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ असतात.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) A(−7,4) आणि B(−6,−5) असून बिंदू T हा रेख AB चे 7:2 या गुणोत्तरात विभाजन करतो, तर T बिंदूचे निर्देशक काढा.

उकल : समजा, T चे निर्देशक (x, y) आहेत.

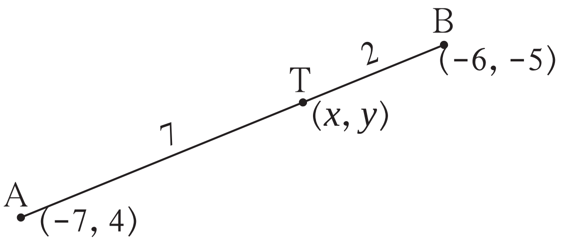
∴ रेषाखंडाच्या विभाजनाच्या सूत्रानुसार,

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n} = \frac{7\times(-6)+2\times(-7)}{7+2}$$

$$= \frac{-42-14}{9} = \frac{-56}{9}$$

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n} = \frac{7\times(-5)+2\times(4)}{7+2}$$

$$= \frac{-35+8}{9} = \frac{-27}{9} = -3$$



आकृती 5.17

∴ T बिंदूचे निर्देशक $\left(\frac{-56}{9}, -3\right)$ येतील.

उदा. (2) बिंदू P(−4, 6) हा A(−6, 10) आणि B(r, s) यांना जोडणाऱ्या रेषाखंडाला 2:1 या गुणोत्तरात विभागतो, तर बिंदू B चे निर्देशक काढा.

उकल : रेषाखंड विभाजनाच्या सूत्रानुसार

$$-4 = \frac{2\times r + 1\times(-6)}{2+1}$$

$$\therefore \quad -4 = \frac{2r-6}{3}$$

$$\therefore \quad -12 = 2r - 6$$

$$\therefore \quad 2r = -6$$

$$\therefore \quad r = -3$$

$$6 = \frac{2\times s + 1\times 10}{2+1}$$

$$\therefore \quad 6 = \frac{2s+10}{3}$$

$$\therefore \quad 18 = 2s + 10$$

$$\therefore \quad 2s = 8$$

$$\therefore \quad s = 4$$

∴ बिंदू B चे निर्देशक (−3, 4) आहेत.

उदा. (3) A(15,5), B(9,20) आणि P(11,15) असून A−P−B. तर बिंदू P हा रेख AB चे कोणत्या गुणोत्तरात विभाजन करतो, ते काढा.

उकल : बिंदू P(11,15) रेख AB चे $m : n$ या गुणोत्तरात विभाजन करतो, असे मानू.

∴ विभाजनाच्या सूत्रानुसार,

$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$

$\therefore\ 11 = \frac{9m + 15n}{m+n}$

$\therefore\ 11m + 11n = 9m + 15n$

$\therefore\ 2m = 4n$

$\therefore\ \frac{m}{n} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1}$

$\therefore$ विभाजन गुणोत्तर 2 : 1 आहे.

> यांप्रमाणे y – निर्देशकांच्या किमती घालून येणारे गुणोत्तर किती येते ते काढा. तुमचा निष्कर्ष लिहा.

उदा. (4) बिंदू A (2,−2) आणि B(−7,4) यांना जोडणाऱ्या रेषाखंडाचे त्रिभाजन करणाऱ्या बिंदूंचे निर्देशक काढा.

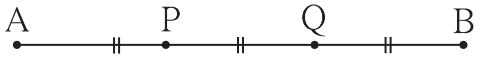
(रेषाखंडावरील जे दोन बिंदू त्या रेषाखंडाचे तीन समान भाग करतात, त्या बिंदूंना त्या रेषाखंडाचे त्रिभाजक बिंदू म्हणतात.)

उकल : समजा, बिंदू P आणि Q हे बिंदू A आणि बिंदू B यांना जोडणाऱ्या रेषाखंडाचे त्रिभाजक बिंदू आहेत. म्हणजेच बिंदू P आणि Q मुळे रेख AB चे तीन समान भाग होतात.

AP = PQ = QB .... (I)

$\frac{AP}{PB} = \frac{AP}{PQ+QB} = \frac{AP}{AP+AP} = \frac{AP}{2AP} = \frac{1}{2}$ .... (I) वरून

बिंदू P रेख AB चे 1:2 या गुणोत्तरात विभाजन करतो.



आकृती 5.18

P चा x निर्देशक $= \frac{1\times(-7)+2\times 2}{1+2} = \frac{-7+4}{3} = \frac{-3}{3} = -1$

P चा y निर्देशक $= \frac{1\times 4+2\times(-2)}{1+2} = \frac{4-4}{3} = \frac{0}{3} = 0$

तसेच Q बिंदू रेख AB चे 2:1 या गुणोत्तरात विभाजन करतो. म्हणजे $\frac{AQ}{QB} = \frac{2}{1}$

Q चा x निर्देशक $= \frac{2\times(-7)+1\times 2}{2+1} = \frac{-14+2}{3} = \frac{-12}{3} = -4$

Q चा y निर्देशक $= \frac{2\times 4+1\times -2}{2+1} = \frac{8-2}{3} = \frac{6}{3} = 2$

$\therefore$ रेषाखंडाच्या त्रिभाजक बिंदूंचे निर्देशक (−1, 0), (−4, 2) आहेत.

अधिक माहितीसाठी :

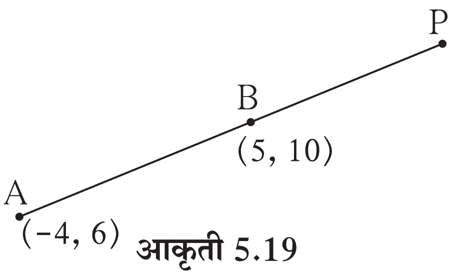
A आणि B या बिंदूंना जोडणाऱ्या रेषाखंडाचे बाह्यविभाजन कसे करतात पाहा.

A(–4, 6), B(5, 10) असे बिंदू असतील तर AB रेषाखंडाचे 3:1 या गुणोत्तरामध्ये बाह्यविभाजन करणाऱ्या बिंदू P चे निर्देशक कसे काढता येतात ते पाहा.

$\frac{AP}{PB} = \frac{3}{1}$ म्हणजे AP, PB पेक्षा मोठी असून A–B–P आहे.

$\frac{AP}{PB} = \frac{3}{1}$ म्हणजेच AP = 3k, BP = k, तर AB = 2k

$$\therefore \frac{AB}{BP} = \frac{2}{1}$$



आकृती 5.19

आता बिंदू B हा रेषाखंड AP चे 2 : 1 या गुणोत्तरात विभाजन करतो.

A व B चे निर्देशक दिले असता P चे निर्देशक काढायला आपण शिकलो आहोत.

सरावसंच 5.2

1. जर P बिंदू हा A(–1,7) आणि B(4,–3) यांना जोडणाऱ्या रेषाखंडाचे 2 : 3 या गुणोत्तरात विभाजन करत असेल तर P बिंदूचे निर्देशक काढा.
2. खालील प्रत्येक उदाहरणात रेख PQ चे a : b या गुणोत्तरात विभाजन करणाऱ्या A या बिंदूचे निर्देशक काढा.
   (1) P(–3, 7), Q(1, –4), a : b = 2 : 1
   (2) P(–2, –5), Q(4, 3), a : b = 3 : 4
   (3) P(2, 6), Q(–4, 1), a : b = 1 : 2
3. P–T–Q असून, बिंदू T(–1, 6) हा बिंदू P(–3, 10) आणि बिंदू Q(6, –8) यांना जोडणाऱ्या रेषाखंडाला कोणत्या गुणोत्तरात विभागतो ?
4. रेख AB हा वर्तुळाचा व्यास असून बिंदू P हे केंद्र आहे. A(2, –3)आणि P (–2, 0) असल्यास B बिंदूचे निर्देशक काढा.
5. बिंदू A(8, 9) आणि B(1, 2) यांना जोडणाऱ्या रेख AB चे P(k, 7) हा बिंदू कोणत्या गुणोत्तरात विभाजन करतो ते काढा आणि k ची किंमत काढा.
6. (22, 20) आणि (0, 16) यांना जोडणाऱ्या रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूचे निर्देशक काढा.
7. खाली त्रिकोणांचे शिरोबिंदू दिलेले आहेत. प्रत्येक त्रिकोणाच्या मध्यगासंपातबिंदूचे निर्देशक काढा.
   (1)(–7, 6), (2, –2), (8, 5)
   (2) (3, –5), (4, 3), (11, –4)
   (3) (4, 7), (8, 4), (7, 11)

8. Δ ABC चा G हा मध्यगासंपात आहे. A, B व G यांचे निर्देशक अनुक्रमे (–14, –19), (3, 5) आणि (–4, –7) आहेत. तर C बिंदूचे निर्देशक काढा.

9. मध्यगासंपात G (1, 5) असलेल्या त्रिकोणाचे A (h, –6), B (2, 3) आणि C (–6, k) शिरोबिंदू आहेत, तर h आणि k ची किंमत काढा.

10. बिंदू A (2, 7) आणि B(–4, –8) यांना जोडणाऱ्या रेख AB चे त्रिभाजन करणाऱ्या बिंदूंचे निर्देशक काढा.

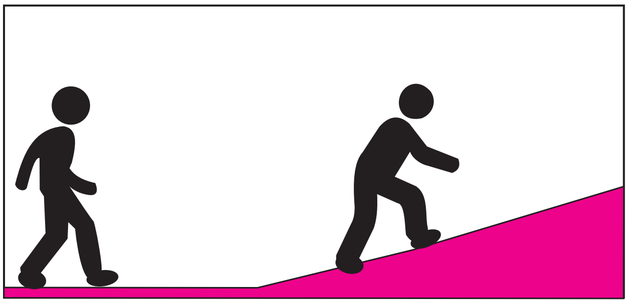
11. A (–14, –10), B(6, –2) असलेल्या रेख AB चे चार एकरूप रेषाखंडांत विभाजन करणाऱ्या बिंदूंचे निर्देशक काढा.

12. A (20, 10), B(0, 20) असलेल्या रेख AB चे पाच एकरूप रेषाखंडांत विभाजन करणाऱ्या बिंदूंचे निर्देशक काढा.

जाणून घेऊया.

रेषेचा चढ (Slope of a line)

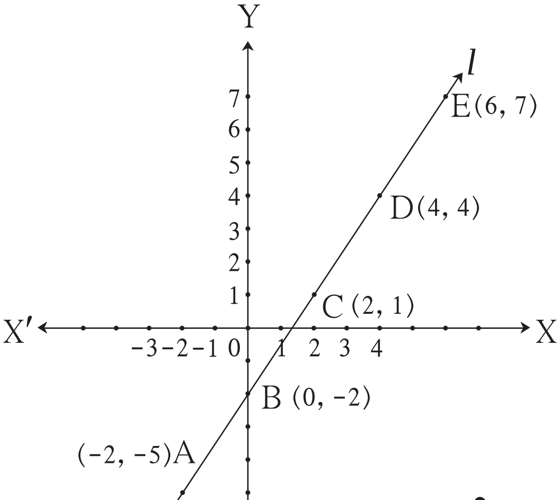
आपण सपाट जमिनीवर चालतो, तेव्हा श्रम करावे लागत नाहीत. चढावर चढताना थोडे श्रम करावे लागतात, माणसाला दम लागू शकतो. चढाच्या रस्त्यावरून जाताना गुरूत्वाकर्षण बलाच्या विरुद्ध काम करावे लागते, हे आपण विज्ञानात पाहिले आहे.



प्रतलीय निर्देशक भूमितीत रेषेचा चढ ही एक महत्त्वाची संकल्पना आहे. खाली दिलेल्या कृतीतून ही संकल्पना समजून घेऊ.

कृती I :

सोबतच्या आकृतीत A(–2, –5), B(0,–2), C(2,1), D(4,4), E(6,7) हे रेषा l चे बिंदू आहेत. या निर्देशकांचा वापर करून तयार केलेल्या पुढील सारणीचे निरीक्षण करा.



आकृती 5.20

अ. क्र.	पहिला बिंदू	दुसरा बिंदू	पहिल्या बिंदूचे निर्देशक (x_1, y_1)	दुसऱ्या बिंदूचे निर्देशक (x_2, y_2)	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
1	C	E	(2, 1)	(6, 7)	$\frac{7-1}{6-2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$
2	A	D	(-2, -5)	(4, 4)	$\frac{4-(-5)}{4-(-2)} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$
3	D	A	(4, 4)	(-2, -5)	$\frac{-5-4}{-2-4} = \frac{-9}{-6} = \frac{3}{2}$
4	B	C	--	--	--
5	C	A	--	--	--
6	A	C	--	--	--

सारणीतील उरलेल्या चौकटी भरून सारणी पूर्ण करा. याप्रमाणे रेषा l वरील बिंदूंच्या आणखी काही जोड्या घ्या आणि प्रत्येक जोडीसाठी $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ हे गुणोत्तर काढा.

या कृतीतून लक्षात येते की, l रेषेच्या (x_1, y_1) आणि (x_2, y_2) या कोणत्याही दोन बिंदूंसाठी $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ हे गुणोत्तर स्थिर आहे.

रेषा l चे (x_1, y_1) आणि (x_2, y_2) हे कोणतेही दोन बिंदू असतील, तर $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ह्या स्थिर गुणोत्तराला रेषा l चा चढ म्हणतात.

रेषेचा चढ सामान्यपणे m या अक्षराने दाखवतात.

$$\therefore \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

कृती II : आकृतीत रेषा l, t आणि n व त्यांवरील काही बिंदू दिले आहेत. त्यावरून त्या रेषांचे चढ काढा.

तुमच्या लक्षात येईल की,

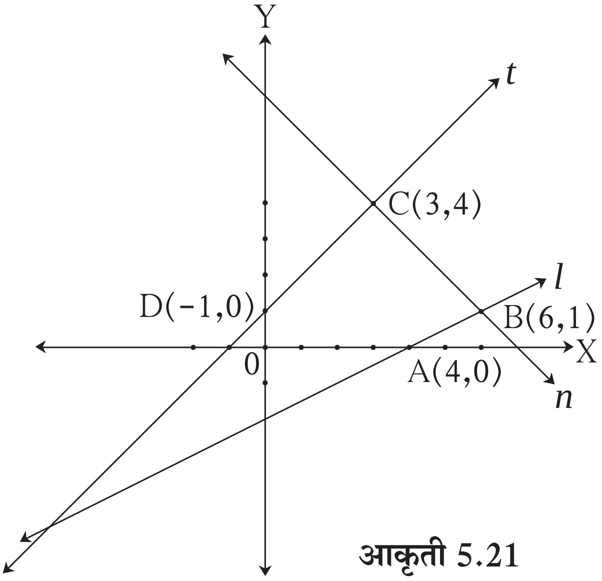
(1) रेषा l आणि रेषा t यांचे चढ धन आहेत.

(2) रेषा n चा चढ ऋण आहे.

(3) रेषा t चा चढ, रेषा l च्या चढापेक्षा जास्त आहे.

(4) X- अक्षाच्या धन दिशेशी लघुकोन करणाऱ्या l व t या रेषांचे चढ धन आहेत.

(5) X- अक्षाच्या धन दिशेशी विशालकोन करणाऱ्या n या रेषेचा चढ ऋण आहे.



आकृती 5.21

X–अक्ष, Y–अक्ष आणि अक्षांना समांतर रेषांचे चढ.

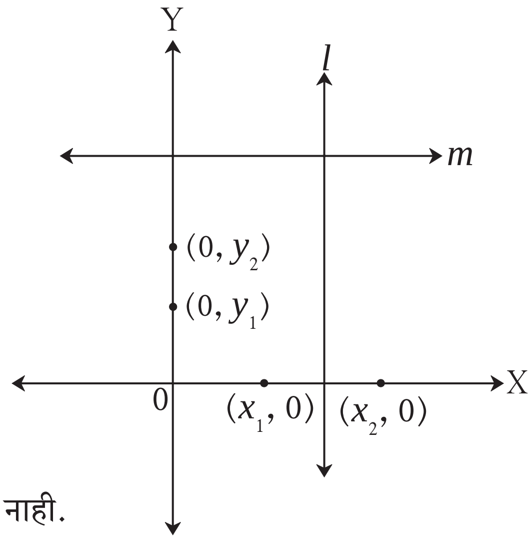
आकृती 5.22 मध्ये, $(x_1, 0)$ आणि $(x_2, 0)$ हे X- अक्षाचे दोन बिंदू आहेत.

$$\text{X- अक्षाचा चढ} = \frac{0 - 0}{x_2 - x_1} = 0$$

तसेच, $(0, y_1)$ आणि $(0, y_2)$ हे Y- अक्षाचे दोन बिंदू आहेत.

$$\text{Y- अक्षाचा चढ} = \frac{y_2 - y_1}{0 - 0} = \frac{y_2 - y_1}{0},$$

परंतु 0 ने भागता येत नसल्याने Y- अक्षाचा चढ ठरविता येत नाही.



आकृती 5.22

याप्रमाणेच रेषा m सारख्या X- अक्षाला समांतर असलेल्या कोणत्याही रेषेचा चढ काढून पाहा. तो शून्य येईल. तसेच, रेषा l सारख्या Y- अक्षाला समांतर असलेल्या रेषेचा चढ ठरविता येत नाही, असे दिसेल.

रेषेचा चढ – त्रिकोणमितीतील गुणोत्तर वापरून

आकृती 5.23 मध्ये, $P(x_1, y_1)$ आणि $Q(x_2, y_2)$ हे रेषा l वरील दोन बिंदू आहेत.

रेषा l ही X अक्षाला T बिंदूत छेदते.

रेख QS $\perp$ X- अक्ष, रेख PR $\perp$ रेख QS $\therefore$ रेख PR $\parallel$ रेख TS .... संगत कोन कसोटी

$\therefore$ QR $= y_2 - y_1$ आणि PR $= x_2 - x_1$

$\therefore \quad \frac{QR}{PR} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ .... (I)

रेषा TQ ही X- अक्षाशी θ कोन करते.

$\therefore \quad \frac{QR}{PR} = \tan\theta$ .... (II)

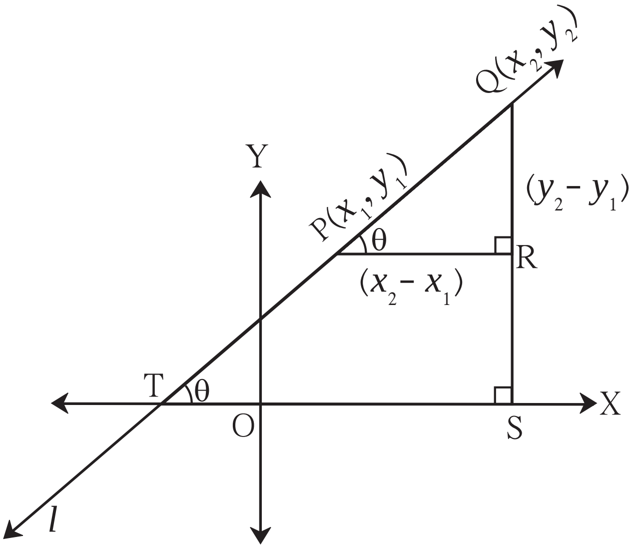
$\therefore$ (I) व (II) वरून, $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan\theta$

$\therefore \quad m = \tan\theta$

आता रेख PR || रेख TS, छेदिका रेषा l

$\therefore \quad \angle QPR = \angle QTS$ .... संगतकोन

यावरून, रेषेने X-अक्षाच्या धन दिशेशी केलेल्या कोनाचे **टॅन** गुणोत्तर म्हणजे त्या रेषेचा चढ होय, अशीही चढाची व्याख्या करता येते.



आकृती 5.23

दोन रेषांचा चढ समान असतो तेव्हा त्या रेषा X- अक्षाच्या धन दिशेशी समान मापाचे कोन करतात.

$\therefore$ त्या दोन रेषा समांतर असतात.

समांतर रेषांचा चढ (Slope of parallel lines)

कृती :

आकृती 5.24 मध्ये रेषा l आणि रेषा t या दोन्ही रेषांनी X- अक्षाच्या धन दिशेशी केलेला कोन θ आहे.

$\therefore$ रेषा l || रेषा t .... संगत कोन कसोटी

रेषा l वरील बिंदू A(-3, 0) आणि बिंदू B(0, 3) विचारात घ्या. रेषा AB चा चढ काढा.

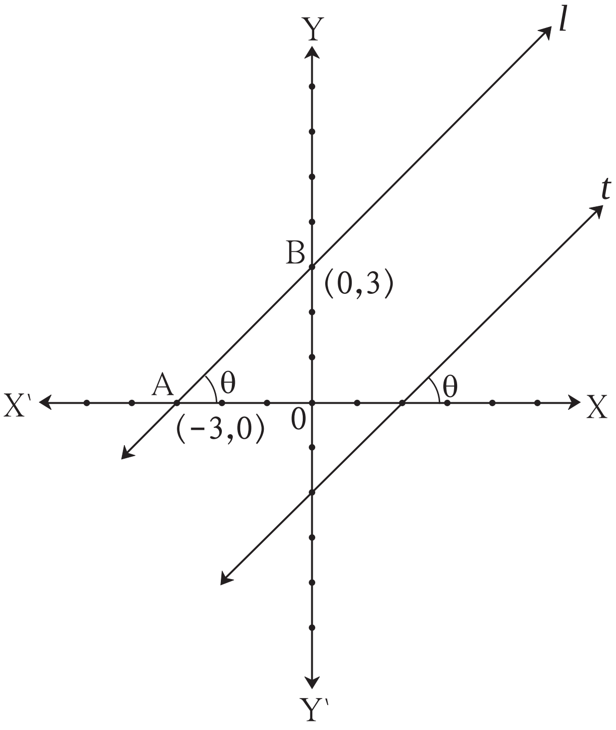
रेषा AB चा चढ $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$= \frac{\square - \square}{\square - \square} = \frac{\square}{\square}$

$= \square$

याचप्रमाणे रेषा t वरील सोयिस्कर बिंदू घेऊन तिचा चढ काढा.

यावरून समांतर रेषांचे चढ समान असतात याचा पडताळा तुम्ही घेऊ शकाल.



आकृती 5.24

या ठिकाणी $\theta = 45^\circ$ आहे.

चढ, $m = \tan\theta$ हे वापरूनही दोन्ही समांतर रेषांचे चढ समान येतात हे पडताळून पाहा.

याप्रमाणे $\theta = 30^\circ$, $\theta = 60^\circ$ घेऊन समांतर रेषांचे चढ समान असतात याचा पडताळा घ्या.

हे लक्षात ठेवूया.

X- अक्षाचा किंवा X- अक्षाला समांतर रेषेचा चढ शून्य असतो.

Y- अक्षाचा किंवा Y- अक्षाला समांतर रेषेचा चढ ठरविता येत नाही.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) A (-3, 5), आणि B (4, -1) या बिंदूतून जाणाऱ्या रेषेचा चढ काढा.

उकल : समजा, $x_1 = -3$, $x_2 = 4$, $y_1 = 5$, $y_2 = -1$

$$\therefore \text{ रेषा AB चा चढ } = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-5}{4-(-3)} = \frac{-6}{7}$$

उदा. (2) P(-2, 3), Q(1, 2), R(4, 1) हे बिंदू एकरेषीय आहेत हे दाखवा.

उकल : P(-2, 3), Q(1, 2) आणि R(4, 1) हे दिलेले बिंदू आहेत.

$$\text{रेषा PQ चा चढ } = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-3}{1-(-2)} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{रेषा QR चा चढ } = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-2}{4-1} = -\frac{1}{3}$$

रेषा PQ आणि रेषा QR चा चढ समान आहे.

पण बिंदू Q दोन्ही रेषांवर आहे.

$\therefore$ बिंदू P, Q, R हे एकरेषीय आहेत.

उदा. (3) जर P(k, 0) आणि Q(-3, -2),हे दोन बिंदू जोडणाऱ्या रेषेचा चढ $\frac{2}{7}$ असेल, तर k ची किंमत काढा.

उकल : P(k, 0) आणि Q(-3, -2)

$$\text{रेषा PQ चा चढ } = \frac{-2-0}{-3-k} = \frac{-2}{-3-k}$$

रेषा PQ चा चढ $\frac{2}{7}$ दिला आहे.

$$\therefore \frac{-2}{-3-k} = \frac{2}{7} \qquad \therefore k = 4$$

उदा. (4) A (6, 1), B (8, 2), C (9, 4) आणि D (7, 3) हे □ ABCD चे शिरोबिंदू असतील तर □ ABCD समांतरभुज चौकोन आहे हे दाखवा.

उकल : तुम्हास माहीत आहे की, रेषेचा चढ = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

रेषा AB चा चढ = $\frac{2-1}{8-6} = \frac{1}{2}$ .... (I)

रेषा BC चा चढ = $\frac{4-2}{9-8} = 2$ .... (II)

रेषा CD चा चढ = $\frac{3-4}{7-9} = \frac{1}{2}$ .... (III)

रेषा DA चा चढ = $\frac{3-1}{7-6} = 2$ .... (IV)

रेषा AB चा चढ = रेषा CD चा चढ .... (I) व (III) वरून

$\therefore$ रेषा AB || रेषा CD

रेषा BC चा चढ = रेषा DA चा चढ .... (II) व (IV) वरून

$\therefore$ रेषा BC || रेषा DA

म्हणजेच चौकोनाच्या संमुख भुजांच्या दोन्ही जोड्या परस्परांना समांतर आहेत.

$\therefore$ □ ABCD समांतरभुज चौकोन आहे.

सरावसंच 5.3

1. रेषांनी X-अक्षाच्या धन दिशेशी केलेले कोन दिले आहेत, त्यावरून त्या रेषांचे चढ काढा.

   (1) 45° (2) 60° (3) 90°

2. खाली दिलेल्या बिंदूतून जाणाऱ्या रेषांचे चढ काढा.

   (1) A (2, 3) आणि B (4, 7) (2) P (–3, 1) आणि Q (5, –2)

   (3) C (5, –2) आणि D (7, 3) (4) L (–2, –3) आणि M (–6, –8)

   (5) E(–4, –2) आणि F (6, 3) (6) T (0, –3) आणि S (0, 4)

3. खालील बिंदू एकरेषीय आहेत की नाहीत, हे ठरवा.

   (1) A(–1, –1), B(0, 1), C(1, 3) (2) D(–2, –3), E(1, 0), F(2, 1)

   (3) L(2, 5), M(3, 3), N(5, 1) (4) P(2, –5), Q(1, –3), R(–2, 3)

   (5) R(1, –4), S(–2, 2), T(–3, 4) (6) A(–4, 4), K(–2, $\frac{5}{2}$), N(4, –2)

4. A (1, –1),B (0, 4),C (–5, 3) हे त्रिकोणाचे शिरोबिंदू आहेत, तर प्रत्येक बाजूचा चढ काढा.

5. A (–4, –7),B (–1, 2), C (8, 5) आणि D (5, –4) हे ABCD या समांतरभुज चौकोनाचे शिरोबिंदू आहेत, हे दाखवा.

6. $R(1, -1)$ आणि $S(-2, k)$ असून RS या रेषेचा चढ -2 असेल तर k ची किंमत काढा.

7. $B(k, -5)$ आणि $C(1, 2)$ या रेषेचा चढ 7 असेल तर k ची किंमत काढा.

8. $P(2, 4)$, $Q(3, 6)$, $R(3, 1)$ आणि $S(5, k)$ असून रेषा PQ ही रेषा RS ला समांतर आहे, तर k ची किंमत काढा.

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 5

1. योग्य पर्याय निवडून रिकाम्या जागा भरा.

(1) रेख AB, हा Y-अक्षाला समांतर असून A बिंदूचे निर्देशक (1,3) आहेत तर, B बिंदूचे निर्देशक .... असू शकतील.

(A)(3,1) (B)(5,3) (C)(3,0) (D)(1,-3)

(2) खालीलपैकी .... हा बिंदू X- अक्षावर आरंभबिंदूच्या उजवीकडे आहे.

(A)(-2,0) (B)(0,2) (C)(2,3) (D)(2,0)

(3) (-3,4) या बिंदूचे आरंभबिंदूपासून अंतर ...... आहे.

(A)7 (B) 1 (C) 5 (D)-5

(4) एका रेषेने X- अक्षाच्या धन दिशेशी 30° चा कोन केला आहे, म्हणून त्या रेषेचा चढ .... आहे.

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) $\sqrt{3}$

2. खालील बिंदू एकरेषीय आहेत की नाहीत, ते ठरवा

(1) A (0,2) , B (1,-0.5), C (2,-3)

(2) P (1, 2) , Q $(2, \frac{8}{5})$, R $(3, \frac{6}{5})$

(3) L (1,2) , M (5,3) , N (8,6)

3. P (0,6) आणि Q (12,20) यांना जोडणाऱ्या रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूचे निर्देशक काढा.

4. A (3,8) आणि B (-9,3) या बिंदूंना जोडणाऱ्या रेषाखंडाला Y- अक्ष कोणत्या गुणोत्तरात विभाजित करतो ?

5. X-अक्षावरील असा बिंदू शोधा की जो P(2,-5) आणि Q(-2,9) पासून समदूर असेल.

6. खालील बिंदूंतील अंतरे काढा.

(1) A $(a, 0)$, B $(0, a)$ (2) P (-6, -3), Q (-1, 9) (3) R $(-3a, a)$, S $(a, -2a)$

7. एका त्रिकोणाचे शिरोबिंदू A (-3,1), B (0,-2) आणि C (1,3) आहेत, तर त्या त्रिकोणाच्या परिकेंद्राचे निर्देशक काढा.

8. खालील बिंदूंना जोडणारे रेषाखंड त्रिकोण तयार करू शकतील का? त्रिकोण तयार झाल्यास त्याचा बाजूंवरून होणारा प्रकार सांगा.

(1) L (6,4) , M (−5,−3) , N (−6,8)

(2) P (−2,−6) , Q (−4,−2), R (−5,0)

(3) A ($\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$), B ($-\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$), C ($-\sqrt{6}$, $\sqrt{6}$)

9. जर P (−12,−3) आणि Q (4, k) या बिंदूतून जाणाऱ्या रेषेचा चढ $\frac{1}{2}$ असेल, तर k ची किंमत काढा.

10. A(4, 8) आणि B(5, 5) या बिंदूंना जोडणारी रेषा, C(2,4) आणि D(1,7) या बिंदूंना जोडणाऱ्या रेषेला समांतर आहे हे दाखवा.

11. P(1,−2), Q(5,2), R(3,−1), S(−1,−5) हे समांतरभुज चौकोनाचे शिरोबिंदू आहेत, हे दाखवा.

12. जर P(2,1), Q(−1,3), R(−5,−3) आणि S(−2,−5) तर □ PQRS हा आयत आहे हे दाखवा.

13. A (−1, 1), B (5, −3) आणि C (3, 5) हे शिरोबिंदू असलेल्या त्रिकोणाच्या मध्यगांच्या लांबी काढा.

14★. जर D (−7, 6), E (8, 5)आणि F (2, −2) हे त्रिकोणाच्या बाजूंचे मध्यबिंदू असतील, तर त्या त्रिकोणाच्या मध्यगा संपातबिंदूचे निर्देशक काढा.

15. A(4, −1), B(6, 0), C(7, −2) आणि D(5, −3) हे चौरसाचे शिरोबिंदू आहेत हे दाखवा

16. A(7, 1), B(3, 5) आणि C(2, 0) शिरोबिंदू असलेल्या त्रिकोणाच्या परिवर्तुळाच्या केंद्राचे निर्देशक आणि परिवर्तुळाची त्रिज्या काढा.

17. जर A(4,−3) आणि B(8,5), तर रेख AB चे 3:1 या गुणोत्तरात विभाजन करणाऱ्या बिंदूचे निर्देशक काढा.

18★. A(−4, −2), B(−3, −7) C(3, −2) आणि D(2, 3) हे बिंदू क्रमाने जोडले तर तयार होणाऱ्या ABCD या चौकोनाचा प्रकार लिहा.

19★. रेख AB वरील बिंदू P, Q, R व S यांच्यामुळे त्या रेषाखंडाचे पाच एकरूप भाग होतात.
जर A-P-Q – R-S-B आणि Q(12, 14), S(4, 18) ; तर A, P, R आणि B चे निर्देशक काढा.

20. P (6,−6), Q (3,−7) आणि R (3,3) यांतून जाणाऱ्या वर्तुळाच्या केंद्राचे निर्देशक काढा.

21★. समांतरभुज चौकोनाच्या तीन शिरोबिंदूंचे निर्देशक A (5,6), B (1,−2) आणि C (3,−2) असतील तर चौथ्या बिंदूच्या निर्देशकांच्या शक्य त्या सर्व जोड्या काढा.

22. A (1,7), B (6,3) C (0,−3) आणि D (−3,3) हे शिरोबिंदू असलेला एक चौकोन आहे. त्या चौकोनाच्या प्रत्येक कर्णाचा चढ काढा.

4KPEC7

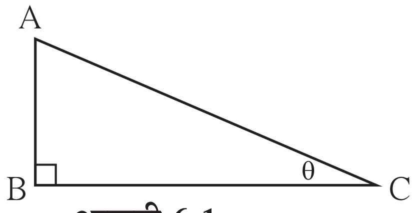
6 त्रिकोणमिती

चला, शिकूया.

- त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे
- त्रिकोणमितीय नित्यसमानता
- उन्नतकोन व अवनत कोन
- उंची व अंतरे यांवरील उदाहरणे

जरा आठवूया.

1. सोबतच्या आकृतीवरून रिकाम्या जागा भरा.



आकृती 6.1

$\sin\theta = \frac{\square}{\square}$, $\cos\theta = \frac{\square}{\square}$,

$\tan\theta = \frac{\square}{\square}$

2. पुढील गुणोत्तरांमधील संबंध पूर्ण करा.

(i) $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \square$ (ii) $\sin\theta = \cos(90 - \square)$

(iii) $\cos\theta = \sin(90 - \square)$ (iv) $\tan\theta \tan(90 - \theta) = \square$

3. पुढील समीकरण पूर्ण करा.

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \square$

4. पुढील त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांच्या किमती लिहा.

(i) $\sin 30^\circ = \frac{1}{\square}$ (ii) $\cos 30^\circ = \frac{\square}{\square}$ (iii) $\tan 30^\circ = \frac{\square}{\square}$

(iv) $\sin 60^\circ = \frac{\square}{\square}$ (v) $\cos 45^\circ = \frac{\square}{\square}$ (vi) $\tan 45^\circ = \square$

इयत्ता नववीमध्ये आपण लघुकोनाची काही त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे अभ्यासली आहेत. यावर्षी लघुकोनाचीच आणखी काही त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे आपण अभ्यासणार आहोत.

जाणून घेऊया.

कोसेक, सेक आणि कॉट गुणोत्तरे (cosec, sec and cot ratios)

कोनाच्या साइन गुणोत्तराच्या व्यस्त गुणोत्तराला कोसीकँट (cosecant) गुणोत्तर म्हणतात.

ते थोडक्यात cosec असे लिहितात. $\therefore$ $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

तसेच कोसाइन आणि टँजंट गुणोत्तरांच्या व्यस्त गुणोत्तरांना अनुक्रमे सीकँट (secant) आणि कोटँजंट (cotangent) गुणोत्तरे म्हणतात; आणि ती थोडक्यात अनुक्रमे sec आणि cot अशी लिहितात.

$\therefore$ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ आणि $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

आकृती 6.2 मध्ये,

$$\sin\theta = \frac{AB}{AC}$$

$$\therefore \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\frac{AB}{AC}} = \frac{AC}{AB}$$

म्हणजेच, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{संमुख बाजू}}$

$$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\therefore \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{AB}{BC}}$$

$$\cot\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{लगतची बाजू}}{\text{संमुख बाजू}}$$

$$\cos\theta = \frac{BC}{AC}$$

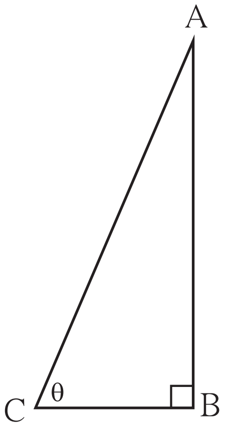
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{BC}{AC}} = \frac{AC}{BC}$$

म्हणजेच, $\sec\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लगतची बाजू}}$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ हे तुम्हाला माहीत आहे.

$$\therefore \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\therefore \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$



आकृती 6.2

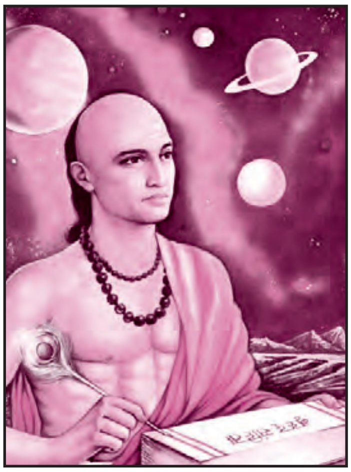
हे लक्षात ठेवूया.

त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांमधील परस्परसंबंध

cosec, sec आणि cot या गुणोत्तरांच्या व्याख्यांवरून,

- $\frac{1}{\sin\theta} = \text{cosec}\ \theta \quad \therefore \sin\theta \times \text{cosec}\ \theta = 1$
- $\frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta \quad \therefore \cos\theta \times \sec\theta = 1$
- $\frac{1}{\tan\theta} = \cot\theta \quad \therefore \tan\theta \times \cot\theta = 1$

अधिक माहितीसाठी



थोर भारतीय गणिती आर्यभट यांचा जन्म इ.स. 476 मध्ये कुसुमपूर येथे झाला. हे स्थान सध्याच्या बिहारमधील पाटणा या शहराजवळ होते. त्यांनी अंकगणित, बीजगणित आणि भूमिती या गणिताच्या शाखांत भरीव कार्य केले. 'आर्यभटीय' या ग्रंथात अनेक गणिती निष्कर्ष त्यांनी सूत्ररूपात लिहून ठेवले आहेत. उदाहरणार्थ,

(1) अंकगणिती श्रेढीतील n वे पद काढण्याचे आणि पहिल्या n पदांच्या बेरजेचे सूत्र

(2) $\sqrt{2}$ ची किंमत काढण्याचे सूत्र

(3) π या संख्येची 3.1416 ही चार दशांश स्थळांपर्यंत बरोबर असेलली किंमत, इत्यादी.

खगोलशास्त्राच्या अभ्यासात त्यांनी त्रिकोणमितीचा वापर केला आणि ***ज्या गुणोत्तर*** (sine ratio) ही संकल्पना प्रथमच वापरली.

जगातील गणिताच्या त्यांच्या काळातील ज्ञानाचा विचार करता त्यांची गणितातील कामगिरी उत्तुंग होती. त्यामुळे त्यांच्या ग्रंथाचा प्रसार संपूर्ण भारतात, तसेच अरबस्तानामार्फत युरोपमध्येही झाला होता.

पृथ्वी स्थिर असून सूर्य, चंद्र व तारे विशिष्ट क्रमाने पृथ्वीभोवती फिरतात असेच त्याकाळच्या सर्व निरीक्षकांचे मत होते. परंतु नावेतून जाणाऱ्याला काठावरील झाडे व वस्तू उलट दिशेला जात असल्याचा भास होतो, तसाच भास सूर्य, तारे इत्यादींबाबत पृथ्वीवरील लोकांना होतो; म्हणजे पृथ्वी भ्रमण करते असे आर्यभटीयात लिहिले आहे.

19 एप्रिल 1975 या दिवशी भारताने आपला पहिला उपग्रह अवकाशात प्रक्षेपित केला. या उपग्रहाला 'आर्यभट' हे नाव देऊन देशाने या श्रेष्ठ गणितीचा यथोचित गौरवच केला.

✻ 0°,30°,45°,60° आणि 90° मापाच्या कोनांच्या त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांची सारणी.

त्रिकोणमितीय गुणोत्तर	कोनाचे माप (θ)				
	0°	30°	45°	60°	90°
sin θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan θ	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	ठरवता येत नाही
cosec θ $= \frac{1}{\sin\theta}$	ठरवता येत नाही	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
sec θ $= \frac{1}{\cos\theta}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	ठरवता येत नाही
cot θ $= \frac{1}{\tan\theta}$	ठरवता येत नाही	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

जाणून घेऊया.

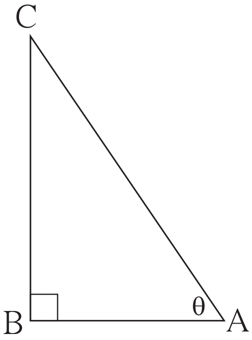
त्रिकोणमितीय नित्यसमानता (Trigonometrical identities)

सोबतच्या आकृती 6.3 मध्ये Δ ABC या काटकोन त्रिकोणात, $\angle B = 90°$

(i) $\sin\theta = \frac{BC}{AC}$ (ii) $\cos\theta = \frac{AB}{AC}$

(iii) $\tan\theta = \frac{BC}{AB}$ (iv) $\text{cosec}\,\theta = \frac{AC}{BC}$

(v) $\sec\theta = \frac{AC}{AB}$ (vi) $\cot\theta = \frac{AB}{BC}$



आकृती 6.3

तसेच, पायथागोरसच्या सिद्धांतानुसार,

$BC^2 + AB^2 = AC^2$ . . . . .(I)

समीकरण (I) च्या दोन्ही बाजूंस AC^2 ने भागून

$$\frac{BC^2 + AB^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2}$$

$\therefore \dfrac{BC^2}{AC^2} + \dfrac{AB^2}{AC^2} = 1$

$\therefore \left(\dfrac{BC}{AC}\right)^2 + \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2 = 1$

$\therefore (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$ .... [$(\sin\theta)^2$ हे $\sin^2\theta$ असे आणि $(\cos\theta)^2$ हे $\cos^2\theta$ असे लिहितात.]

$\mathbf{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$ .... (II)

आता समीकरण (II) च्या दोन्ही बाजूंस $\sin^2\theta$ ने भागून

$\dfrac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} + \dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \dfrac{1}{\sin^2\theta}$

$\mathbf{1 + \cot^2\theta = cosec^2\theta}$ .... (III)

तसेच, समीकरण (II) च्या दोन्ही बाजूंस $\cos^2\theta$ ने भागून

$\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$\mathbf{1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta}$ .... (IV)

समीकरण (II), (III), व (IV) या मूलभूत त्रिकोणमितीय नित्यसमानता आहेत.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) जर $\sin\theta = \dfrac{20}{29}$ असेल तर $\cos\theta$ ची किंमत काढा.

उकल : **रीत I**

आपणास माहीत आहे की

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\left(\dfrac{20}{29}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$

$\dfrac{400}{841} + \cos^2\theta = 1$

$\cos^2\theta = 1 - \dfrac{400}{841}$

$= \dfrac{441}{841}$

दोन्ही बाजूंची वर्गमुळे घेऊन.

$\therefore \cos\theta = \dfrac{21}{29}$

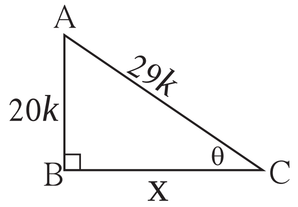
रीत II

$\sin\theta = \dfrac{20}{29}$

आकृतीवरून $\sin\theta = \dfrac{AB}{AC}$

$\therefore AB = 20k$ व $AC = 29k$

$BC = x$ मानू.



आकृती 6.4

पायथागोरसच्या सिद्धांताने

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

$(20k)^2 + x^2 = (29k)^2$

$400k^2 + x^2 = 841k^2$

$x^2 = 841k^2 - 400k^2$

$= 441k^2$

$\therefore x = 21k$

$\therefore \cos\theta = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{21k}{29k} = \dfrac{21}{29}$

उदा. (2) जर $\sec\theta = \frac{25}{7}$ तर $\tan\theta$ ची किंमत काढ़ा.

उकल : **रीत I**

आपणास माहीत आहे की,

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

$\therefore \quad 1 + \tan^2\theta = \left(\frac{25}{7}\right)^2$

$\therefore \quad \tan^2\theta = \frac{625}{49} - 1$

$= \frac{625-49}{49}$

$= \frac{576}{49}$

$\therefore \quad \tan\theta = \frac{24}{7}$

रीत II

आकृतीवरून,

$\sec\theta = \frac{PR}{PQ}$

$\therefore \quad PQ = 7k,\ PR = 25k$

पायथागोरसच्या प्रमेयाने,

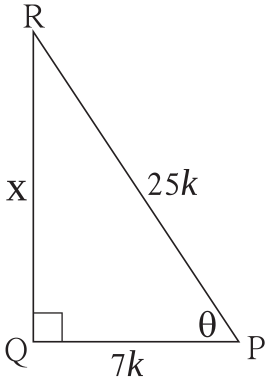
$PQ^2 + QR^2 = PR^2$

$\therefore \quad (7k)^2 + QR^2 = (25k)^2$

$\therefore \quad QR^2 = 625k^2 - 49k^2 = 576k^2$

$\therefore \quad QR = 24k$

आता, $\tan\theta = \frac{QR}{PQ} = \frac{24k}{7k} = \frac{24}{7}$



आकृती 6.5

उदा. (3) जर $5\sin\theta - 12\cos\theta = 0$ असेल तर $\sec\theta$ आणि $\mathrm{cosec}\theta$ च्या किंमत काढा.

उकल : $5\sin\theta - 12\cos\theta = 0$

$\therefore\ 5\sin\theta = 12\cos\theta$

$\therefore\ \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{12}{5}$

$\therefore\ \tan\theta = \frac{12}{5}$

आपणास माहीत आहे की,

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

$\therefore 1 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \sec^2\theta$

$\therefore\ 1 + \frac{144}{25} = \sec^2\theta$

$\therefore\ \frac{25+144}{25} = \sec^2\theta$

$\therefore\ \sec^2\theta = \frac{169}{25}$

$\therefore\ \sec\theta = \frac{13}{5}$

$\therefore \cos\theta = \frac{5}{13}$

आता, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\therefore\ \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$\therefore \sin^2\theta = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2$

$= 1 - \frac{25}{169}$

$= \frac{144}{169}$

$\therefore\ \sin\theta = \frac{12}{13}$

$\therefore\ \mathrm{cosec}\theta = \frac{13}{12}$

उदा. (4) $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ तर $\frac{1-\sec\theta}{1+\text{cosec}\,\theta}$ ची किंमत काढा.

उकल : **रीत I**

$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\therefore \sec\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\therefore \sin^2\theta + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$

$\therefore \sin^2\theta = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$\therefore \sin\theta = \frac{1}{2}$ $\therefore \text{cosec}\,\theta = 2$

$$\therefore \frac{1-\sec\theta}{1+\text{cosec}\,\theta} = \frac{1-\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+2}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-2}{3\sqrt{3}}$$

रीत II

$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ हे माहीत आहे.

$\therefore \theta = 30^\circ$

$\therefore \sec\theta = \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\text{cosec}\,\theta = \text{cosec}\,30^\circ = 2$

$$\therefore \frac{1-\sec\theta}{1+\text{cosec}\,\theta} = \frac{1-\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+2}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-2}{3\sqrt{3}}$$

उदा. (5) दाखवा की, $\sec x + \tan x = \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$

उकल : $\sec x + \tan x = \frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}$

$$= \frac{1+\sin x}{\cos x}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin x)(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin x)(1+\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$$

उदा. (6) पुढील समीकरणांतून θ चे निरसन करा.

$x = a \cot\theta - b \operatorname{cosec}\theta$

$y = a \cot\theta + b \operatorname{cosec}\theta$

उकल :

$x = a \cot\theta - b \operatorname{cosec}\theta$ .... (I)

$y = a \cot\theta + b \operatorname{cosec}\theta$ .... (II)

समीकरण (I) व (II) यांची बेरीज करून.

$x + y = 2a \cot\theta$

$\therefore \cot\theta = \dfrac{x+y}{2a}$ .... (III)

समीकरण (II) मधून (I) वजा करून,

$y - x = 2b \operatorname{cosec}\theta$

$\therefore \operatorname{cosec}\theta = \dfrac{y-x}{2b}$ .... (IV)

आता, $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

$$\therefore \left(\frac{y-x}{2b}\right)^2 - \left(\frac{y+x}{2a}\right)^2 = 1$$

$$\therefore \frac{(y-x)^2}{4b^2} - \frac{(y+x)^2}{4a^2} = 1$$

किंवा $\left(\dfrac{y-x}{b}\right)^2 - \left(\dfrac{y+x}{a}\right)^2 = 4$

सरावसंच 6.1

1. जर $\sin\theta = \dfrac{7}{25}$ तर $\cos\theta$ व $\tan\theta$ च्या किमती काढा.

2. जर $\tan\theta = \dfrac{3}{4}$ तर $\sec\theta$ व $\cos\theta$ च्या किमती काढा.

3. जर $\cot\theta = \dfrac{40}{9}$ तर $\operatorname{cosec}\theta$ व $\sin\theta$ च्या किमती काढा.

4. जर $5\sec\theta - 12\operatorname{cosec}\theta = 0$ असेल तर $\sec\theta$, $\cos\theta$ व $\sin\theta$ च्या किमती शोधा.

5. जर $\tan\theta = 1$ तर $\dfrac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta}$ ची किंमत काढा.

6. सिद्‌ध करा.

   (1) $\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \cos\theta = \sec\theta$

   (2) $\cos^2\theta(1 + \tan^2\theta) = 1$

(3) $\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sec\theta - \tan\theta$

(4) $(\sec\theta - \cos\theta)(\cot\theta + \tan\theta) = \tan\theta \sec\theta$

(5) $\cot\theta + \tan\theta = \operatorname{cosec}\theta \sec\theta$

(6) $\dfrac{1}{\sec\theta - \tan\theta} = \sec\theta + \tan\theta$

(7) $\sin^4\theta - \cos^4\theta = 1 - 2\cos^2\theta$

(8) $\sec\theta + \tan\theta = \dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

(9) जर $\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta} = 2$ तर दाखवा की $\tan^2\theta + \dfrac{1}{\tan^2\theta} = 2$

(10) $\dfrac{\tan A}{(1+\tan^2 A)^2} + \dfrac{\cot A}{(1+\cot^2 A)^2} = \sin A \cos A$

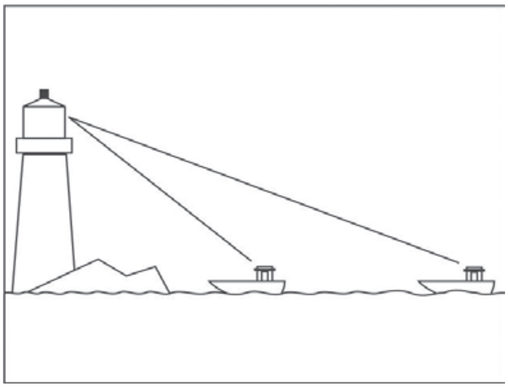
(11) $\sec^4 A(1 - \sin^4 A) - 2\tan^2 A = 1$

(12) $\dfrac{\tan\theta}{\sec\theta - 1} = \dfrac{\tan\theta + \sec\theta + 1}{\tan\theta + \sec\theta - 1}$

जाणून घेऊया.

त्रिकोणमितीचे उपयोजन (Application of trigonometry)

बरेचदा आपल्याला मनोऱ्याची, इमारतीची किंवा झाडाची उंची, तसेच जहाजाचे दीपगृहापासूनचे अंतर किंवा नदीच्या पात्राची रुंदी इत्यादी जाणावी लागतात. ही अंतरे आपण प्रत्यक्षात मोजू शकत नाही परंतु त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांचा उपयोग करून उंची किंवा अंतरे ठरवू शकतो.



आकृती 6.6

उंची किंवा अंतरे ठरविण्यासाठी, दिलेली माहिती दर्शविणारे कच्चे चित्र आपण आधी तयार करू. झाडे, टेकड्या, मनोरे अशा वस्तू जमिनीला लंब आहेत, हे दाखवण्यासाठी आपण आकृतीत लंब रेषाखंडांचा उपयोग करू. आपण निरीक्षकाची उंची लक्षात घेणार नाही, सामान्यपणे निरीक्षकाची दृष्टी क्षितिजसमांतर आहे असे मानू.

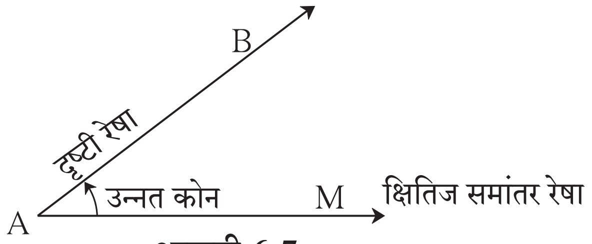
प्रथम आपण काही संबधित संज्ञांचा अभ्यास करू

(i) दृष्टीरेषा (Line of vision) :

बिंदू 'A' या ठिकाणी उभा असलेला निरीक्षक बिंदू 'B' कडे पाहत असेल तर रेषा AB ला दृष्टी रेषा म्हणतात.

(ii) उन्नतकोन (Angle of elevation) :

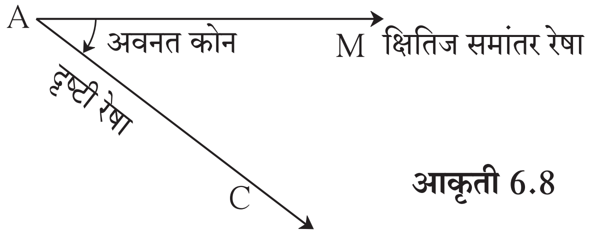
AM ही निरीक्षकाची सामान्य दृष्टीरेषा क्षितिज - समांतर आहे. निरीक्षण करण्याचा बिंदू B, हा A च्या तुलनेत अधिक उंचीवर असेल तर AB ही दृष्टीरेषा, रेषा AM शी जो कोन करते तो उन्नत कोन असतो. आकृतीत $\angle$ MAB हा उन्नत कोन आहे.



आकृती 6.7

(iii) अवनत कोन (Angle of depression) :

निरीक्षण करण्याचा बिंदू C हा रेषा AM या क्षितीजसमांतर रेषेच्या खाली असेल तर AC ही दृष्टीरेषा, रेषा AM शी अवनत कोन करते. आकृतीत $\angle$ MAC हा अवनत कोन आहे.



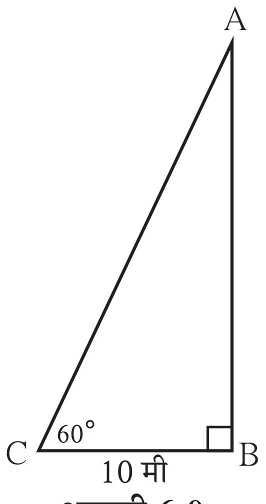
आकृती 6.8

जेव्हा आपण क्षितीज समांतर रेषेच्या वरच्या दिशेला पाहतो तेव्हा होणारा कोन उन्नतकोन असतो.
जेव्हा आपण क्षितीज समांतर रेषेच्या खालच्या दिशेला पाहतो तेव्हा होणारा कोन अवनतकोन असतो.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) एका झाडाच्या बुंध्यापासून 10 मी. अंतरावर असणाऱ्या निरीक्षकास झाडाच्या शेंड्याकडे पाहताना 60°मापाचा उन्नत कोन करावा लागतो. तर झाडाची उंची किती ? ($\sqrt{3}$ = 1.73)

उकल : आकृती 6.9 मध्ये C बिंदूजवळ निरीक्षक असून AB हे झाड आहे.



आकृती 6.9

AB = h = झाडाची उंची.

निरीक्षकाचे झाडापासूनचे अंतर BC = 10 मी.

आणि उन्नत कोन $(\theta)\angle BCA = 60^\circ$

आकृतीवरुन, $\tan\theta = \frac{AB}{BC}$ .... (I)

$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ .... (II)

$\therefore \frac{AB}{BC} = \sqrt{3}$ .... (I) व (II) वरून

$\therefore AB = BC\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$

$\therefore AB = 10 \times 1.73 = 17.3$ मी

$\therefore$ झाडाची उंची 17.3 मी. आहे.

उदा. (2) 40 मी उंच इमारतीच्या छतावरून, त्या इमारतीपासून काही मीटर अंतरावर उभ्या केलेल्या स्कूटरकडे पाहताना 30° मापाचा अवनतकोन होतो, तर ती स्कूटर इमारतीपासून किती दूर उभी आहे? ($\sqrt{3} = 1.73$)

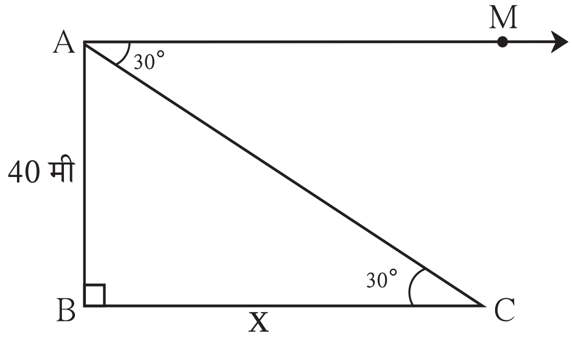
उकल : आकृती 6.10 मध्ये रेख AB ही इमारत आहे. इमारती पासून 'x' मी अंतरावर 'C' या ठिकाणी स्कूटर उभी आहे.

आकृतीत A या ठिकाणी निरीक्षक आहे.

AM ही क्षितीज समांतर रेषा आहे.

$\angle$ MAC हा अवनत कोन आहे.

$\angle$ MAC व $\angle$ ACB हे व्युत्क्रम कोन एकरूप आहेत, हे लक्षात घ्या.



आकृती 6.10

आकृतीवरुन, $\tan 30^\circ = \frac{AB}{BC}$

$\therefore \quad \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{40}{x}$

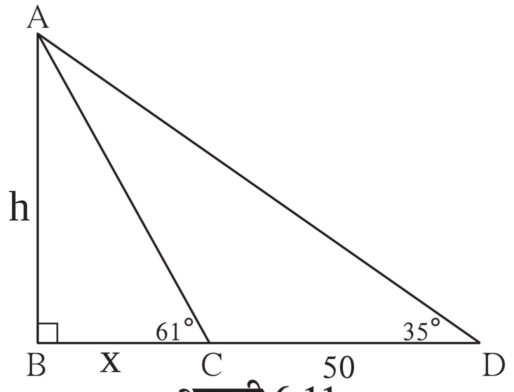
$\therefore \quad x = 40\sqrt{3}$

$= 40 \times 1.73$

$= 69.20$ मी.

$\therefore$ ती स्कूटर इमारतीपासून 69.20 मी. अंतरावर उभी आहे.

उदा. (3) नदीच्या पात्राची रुंदी काढण्यासाठी एका माणसाने पात्राच्या एका काठावरून विरुद्ध काठावर असणाऱ्या मनोऱ्याच्या वरच्या टोकाकडे पाहिले असता 61° मापाचा उन्नतकोन होतो. त्याच रेषेत नदीच्या पात्रापासून 50 मी अंतर मागे जाऊन पुन्हा मनोऱ्याच्या वरच्या टोकाकडे पाहिले असता 35° मापाचा उन्नत कोन होतो, तर नदीपात्राची रुंदी आणि मनोऱ्याची उंची काढा. ($\tan 61^\circ \approx 1.8$, $\tan 35^\circ \approx 0.7$)



आकृती 6.11

उकल : रेख AB पैलतीरावरील मनोरा दाखवतो. 'A' हे मनोऱ्याचे टोक असून रेख BC नदीच्या पात्राची रुंदी दाखवतो.

मनोऱ्याची उंची h मी व नदी पात्राची रुंदी x मी मानू.

आकृतीवरून $\tan 61^\circ = \frac{h}{x}$

$$\therefore\ 1.8 = \frac{h}{x}$$

$h = 1.8 \times x$

$10h = 18x$ .... (I)..... 10 ने गुणून

काटकोन Δ ABD मध्ये,

तसेच, $\tan 35 = \dfrac{h}{x + 50}$

$$0.7 = \frac{h}{x + 50}$$

$\therefore\quad h = 0.7\ (x + 50)$

$\therefore\quad 10h = 7\ (x + 50)$ .... (II)

[(I) व (II) वरून]

$18x = 7(x + 50)$

$\therefore\ 18x = 7x + 350$

$\therefore\ 11x = 350$

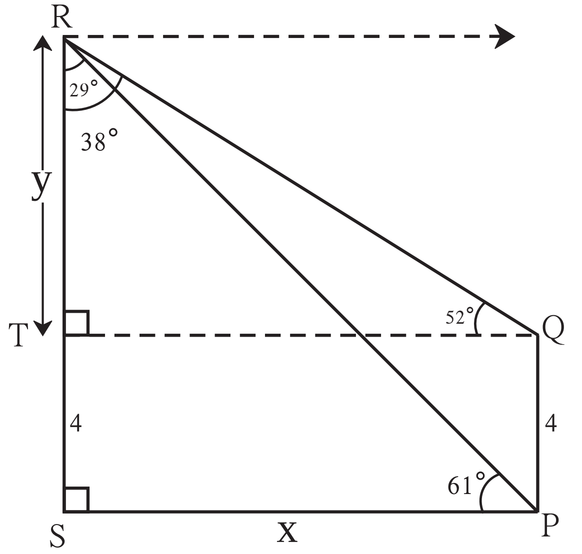
$\therefore\quad x = \dfrac{350}{11} = 31.82$

आता, $h = 1.8x = 1.8 \times 31.82$

$= 57.28$ मी.

$\therefore$ पात्राची रुंदी = 31.82 मी. मनोऱ्याची उंची = 57.28 मी.

उदा. (4) रोशनी घराच्या दारात उभी होती. घरापासून थोड्या अंतरावरील झाडाच्या शेंड्यावर एक गरूड बसलेला तिला दिसला, तेव्हा तिच्या दृष्टीचा उन्नतकोन 61° होता. तो आणखी नीट दिसावा म्हणून ती घराच्या 4 मीटर उंचीवर असलेल्या गच्चीवर गेली. तेथून पाहताना तिच्या दृष्टीचा उन्नत कोन 52° होता. तर तो गरूड जमिनीपासून किती उंचीवर होता? (उत्तर जवळच्या पूर्णांकापर्यंत काढा.)



आकृती 6.12

($\tan 61^\circ = 1.80$, $\tan 52^\circ = 1.28$, $\tan 29^\circ = 0.55$, $\tan 38^\circ = 0.78$)

उकल : समजा, आकृती 6.12 मध्ये PQ हे घर आणि SR हे झाड आहे. गरुडाचे स्थान R पाशी आहे.

रेख QT $\perp$ रेख RS काढला.

$\therefore$ $\square$ TSPQ हा आयत आहे.

SP = x मानू. TR = y मानू.

आता, Δ RSP मध्ये, $\angle$ PRS = $90^\circ - 61^\circ = 29^\circ$

तसेच, Δ RTQ मध्ये, $\angle$ QRT = $90^\circ - 52^\circ = 38^\circ$

$\therefore \tan \angle PRS = \tan 29^\circ = \frac{SP}{RS}$

$\therefore 0.55 = \frac{x}{y+4}$

$\therefore x = 0.55(y + 4)$ .... (I)

तसेच, $\tan \angle QRT = \frac{TQ}{RT}$

$\therefore \tan 38^\circ = \frac{x}{y}$ .... [$\because$ SP = TQ = x]

$\therefore 0.78 = \frac{x}{y}$

$\therefore x = 0.78y$ .... (II)

$\therefore 0.78y = 0.55(y + 4)$ .... (I) व (II) वरून

$\therefore 78y = 55(y + 4)$

$\therefore 78y = 55y + 220$

$\therefore 23y = 220$

$\therefore y = 9.565 = 10$ (जवळच्या पूर्णांकापर्यंत)

$\therefore RS = y + 4 = 10 + 4 = 14$

$\therefore$ गरूड जमिनीपासून 14 मीटर उंचीवर होता.

उदा. (5) वादळामुळे एक झाड मोडले आणि झाडाचा शेंडा जमिनीवर टेकला. मोडलेला भाग जमिनीशी 30° चा कोन करतो. झाडाचा शेंडा आणि बुंधा यांमधील अंतर 10 मी असल्यास झाडाची उंची काढा.

उकल : समजा, आकृती 6.13 मध्ये AB या झाडाचा शेंडा 'A' आहे. वादळामुळे झाड 'C' या ठिकाणी मोडल्यामुळे D या ठिकाणी शेंडा टेकला.

$\angle$ CDB = 30°, BD = 10 मी, BC = x मी

CA= CD = y मी

काटकोन Δ CDB मध्ये,

$$\tan 30^\circ = \frac{BC}{BD}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{10}$$

$$x = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

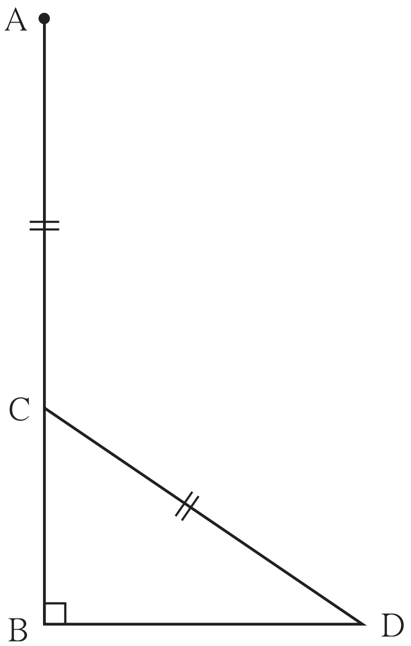
$$y = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

$$x + y = \frac{10}{\sqrt{3}} + \frac{20}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{30}{\sqrt{3}}$$

$$x + y = 10\sqrt{3}$$

झाडाची उंची $10\sqrt{3}$ मी आहे.



आकृती 6.13

सरावसंच 6.2

1. एक व्यक्ती एका चर्चपासून 80 मी अंतरावर उभी आहे. त्या व्यक्तीने चर्चच्या छताकडे पाहिले असता 45° मापाचा उन्नत कोन होतो, तर चर्चची उंची किती?

2. दीपगृहावरून एका जहाजाकडे पाहताना 60° मापाचा अवनत कोन होतो. जर दीपगृहाची उंची 90 मी असेल तर ते जहाज दीपगृहापासून किती अंतरावर आहे? ($\sqrt{3} = 1.73$)

3. 12 मी रुंदीच्या रस्त्याच्या दुतर्फा समोरासमोर दोन इमारती आहेत. त्यांपैकी एकीची उंची 10 मी असून तिच्या छतावरून दुसरीच्या छताकडे पाहिले असता उन्नत कोन 60° मापाचा होतो, तर दुसऱ्या इमारतीची उंची किती?

4. 18 मी व 7 मी उंचीचे खांब जमिनीवर उभे आहेत. त्यांच्या वरच्या टोकांना जोडणाऱ्या तारेची लांबी 22 मी आहे, तर त्या तारेने क्षितीज समांतर पातळीशी केलेल्या कोनाचे माप काढा.

5. वादळामुळे एक झाड मोडले आणि झाडाचा शेंडा जमिनीवर टेकला. मोडलेला भाग जमिनीशी 60° चा कोन करतो. झाडाचा शेंडा आणि बुंधा यांमधील अंतर 20 मी असल्यास झाडाची उंची काढा.

6. एक पतंग उडताना जमिनीपासून 60 मी लंबउंचीपर्यंत पोहचतो. पतंगाच्या दोऱ्याचे टोक जमिनीवर बांधले तेव्हा जमीन व दोरा यांच्या मध्ये 60° मापाचा कोन तयार होतो. दोरा कोठेही वाकलेला नाही असे गृहीत धरून दोऱ्याची लांबी काढा. ($\sqrt{3} = 1.73$)

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 6

1. दिलेल्या पर्यांयापैकी प्रश्नाच्या उत्तराचा अचूक पर्याय निवडा.

(1) $\sin\theta \ \ \text{cosec}\theta$ = किती ?

(A) 1 (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\sqrt{2}$

(2) cosec45° ची किंमत खालीलपैकी कोणती ?

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(3) $1 + \tan^2\theta$ = किती ?

(A) $\cot^2\theta$ (B) $\text{cosec}^2\theta$ (C) $\sec^2\theta$ (D) $\tan^2\theta$

(4) जेव्हा आपण क्षितीजसमांतर रेषेच्या वरच्या दिशेने पाहतो, तेव्हा .... कोन होतो.

(A)उन्नत कोन (B)अवनत कोन (C) शून्य (D)रेषीय

2. जर $\sin\theta = \frac{11}{61}$ तर नित्यसमानतेचा उपयोग करून $\cos\theta$ ची किंमत काढा.

3. जर $\tan\theta = 2$, तर इतर त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांच्या किमती काढा.

4. जर $\sec\theta = \frac{13}{12}$, तर इतर त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांच्या किमती काढा.

5. सिद्‌ध करा.

(1) $\sec\theta\,(1 - \sin\theta)\,(\sec\theta + \tan\theta) = 1$

(2) $(\sec\theta + \tan\theta)\,(1 - \sin\theta) = \cos\theta$

(3) $\sec^2\theta + \text{cosec}^2\theta = \sec^2\theta \times \text{cosec}^2\theta$

(4) $\cot^2\theta - \tan^2\theta = \text{cosec}^2\theta - \sec^2\theta$

(5) $\tan^4\theta + \tan^2\theta = \sec^4\theta - \sec^2\theta$

(6) $\frac{1}{1-\sin\theta} + \frac{1}{1+\sin\theta} = 2\sec^2\theta$

(7) $\sec^6x - \tan^6x = 1 + 3\sec^2x \times \tan^2x$

(8) $\frac{\tan\theta}{\sec\theta+1} = \frac{\sec\theta-1}{\tan\theta}$

(9) $\frac{\tan^3\theta-1}{\tan\theta-1} = \sec^2\theta + \tan\theta$

(10) $\frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$

6. एक मुलगा एका इमारतीपासून 48 मीटर अंतरावर उभा आहे. त्या इमारतीच्या वरच्या टोकाकडे पाहताना त्या मुलाला 30° मापाचा उन्नतकोन करावा लागतो, तर त्या इमारतीची उंची किती ?

7. दीपगृहावरून एका जहाजाकडे पाहताना निरीक्षकाला 30° मापाचा अवनत कोन करावा लागतो. जर दीपगृहाची उंची 100 मी असेल तर ते जहाज दीपगृहापासून किती अंतरावर आहे ?

8. 15 मी रुंदीच्या रस्त्याच्या दुतर्फा समोरासमोर दोन इमारती आहेत. त्यांपैकी एकीची उंची 12 मी असून तिच्या छतावरुन दुसरीच्या छताकडे पाहिले असता उन्नत कोन 30° चा होतो, तर त्या इमारतीची उंची किती ?

9. अग्निशामकदलाच्या वाहनावर बसवलेली शिडी जास्तीत जास्त 70° मापाच्या कोनातून उचलता येते. त्यावेळी तिची अधिकात अधिक लांबी 20 मी असते.शिडीचे वाहनावरील टोक जमिनीपासून 2 मी उंचीवर आहे. तर शिडीचे दुसरे टोक जमिनीपासून जास्तीत जास्त किती उंचीवर पोहोचवता येईल ? ($\sin 70^\circ \approx 0.94$)

10★. आकाशात उडत असलेल्या विमानाच्या चालकाने विमानतळावर विमान उतरविण्यास सुरूवात करताना 20° मापाचा अवनत कोन केला, तेव्हा विमानाचा सरासरी वेग ताशी 200 किमी होता. ते विमान 54 सेकंदांत विमान तळावर उतरले. विमान तळावर उतरण्यास वळण्याच्या क्षणी ते विमान जमिनीपासून किती उंचीवर होते ? ($\sin 20^\circ \approx 0.342$)

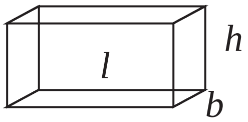
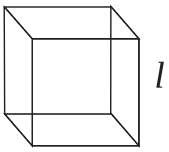
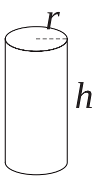
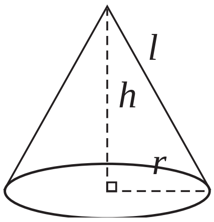
7 महत्त्वमापन

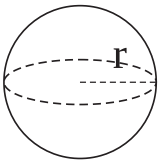
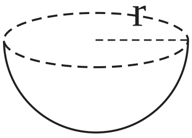
चला, शिकूया.

- विविध घनाकृतींच्या पृष्ठफळ व घनफळावर आधारित संमिश्र उदाहरणे.
- वर्तुळकंस – वर्तुळकंसाची लांबी.
- वर्तुळ पाकळीचे क्षेत्रफळ.
- वर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ.

जरा आठवूया.

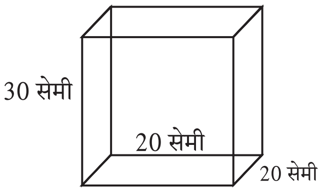
मागील इयत्तांमध्ये आपण काही त्रिमितीय आकृत्यांच्या पृष्ठफळांचा व घनफळांचा अभ्यास केलेला आहे. त्यासाठी लागणारी सूत्रे आठवू या.

क्र.	त्रिमितीय आकृती	सूत्रे
1 .	इष्टिकाचिती 	उभ्या पृष्ठांचे पृष्ठफळ $= 2h\,(l + b)$ एकूण पृष्ठफळ $= 2\,(lb + bh + hl)$ इष्टिकाचितीचे घनफळ $= lbh$
2 .	घन 	घनाचे उभे पृष्ठफळ $= 4l^2$ घनाचे एकूण पृष्ठफळ $= 6l^2$ घनाचे घनफळ $= l^3$
3 .	वृत्तचिती 	वृत्तचितीचे वक्रपृष्ठफळ $= 2\pi rh$ वृत्तचितीचे एकूण पृष्ठफळ $= 2\pi r\,(r + h)$ वृत्तचितीचे घनफळ $= \pi r^2 h$
4 .	शंकू 	शंकूची तिरकस उंची $(l) = \sqrt{h^2 + r^2}$ शंकूचे वक्रपृष्ठफळ $= \pi rl$ शंकूचे एकूण पृष्ठफळ $= \pi r\,(r + l)$ शंकूचे घनफळ $= \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$

क्र.	त्रिमितीय आकृती	सूत्रे
5.	गोल 	गोलाचे पृष्ठफळ = $4\pi r^2$ गोलाचे घनफळ = $\frac{4}{3}\pi r^3$
6.	अर्धगोल 	अर्धगोलाचे वक्रपृष्ठफळ = $2\pi r^2$ भरीव अर्धगोलाचे एकूण पृष्ठफळ = $3\pi r^2$ अर्धगोलाचे घनफळ = $\frac{2}{3}\pi r^3$

खालील उदाहरणे सोडवा.

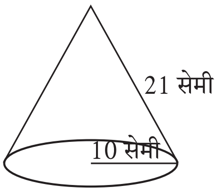
उदा.(1)



आकृती 7.1

शेजारच्या आकृतीत 30 सेमी उंची, 20 सेमी लांबी, व 20 सेमी रुंदीचा तेलाचा डबा आहे. त्यात किती लीटर तेल मावेल? (1 लीटर = 1000 सेमी^{3})

उदा.(2)



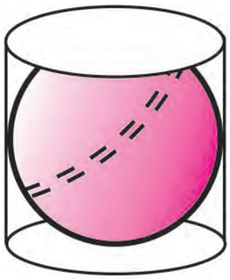
आकृती 7.2

बाजूच्या आकृतीत विदूषकाची टोपी आणि टोपीची मापे दाखवली आहे. ती टोपी तयार करण्यासाठी किती कापड लागेल?

विचार करूया.

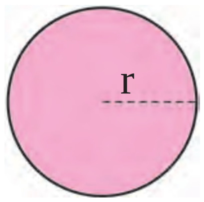
शेजारील आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे एका वृत्तचितीच्या आत एक गोल आहे. गोल वृत्तचितीच्या तळाला, वरच्या पृष्ठभागाला आणि वक्रपृष्ठाला स्पर्श करतो. वृत्तचितिच्या तळाची त्रिज्या r असेल तर

1. गोलाची त्रिज्या आणि वृत्तचितीची त्रिज्या यांचे गुणोत्तर काय आहे?
2. वृत्तचितीचे वक्रपृष्ठफळ आणि गोलाचे वक्रपृष्ठफळ यांचे गुणोत्तर काय आहे ?
3. वृत्तचितीचे घनफळ आणि गोलाचे घनफळ यांचे गुणोत्तर काय आहे?

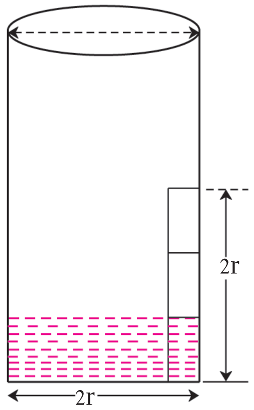


आकृती 7.3

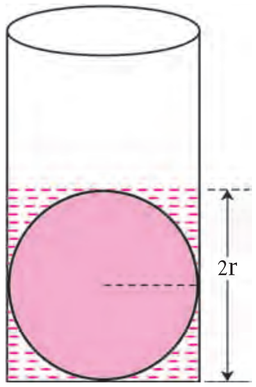
कृती :



आकृती 7.4



आकृती 7.5



आकृती 7.6

वरील आकृत्यांत दाखवल्याप्रमाणे एक चेंडू आणि चेंडूच्या त्रिज्येएवढीच (r) त्रिज्या असलेले एक चंचुपात्र घ्या. चंचुपात्राच्या व्यासाएवढ्या ($2r$) लांबीची एक कागदी पट्टी घ्या. तिच्या लांबीचे तीन समान भाग करणाऱ्या दोन रेघा पट्टीवर काढा. ती पट्टी चंचुपात्राला त्याच्या तळापासून उभी चिकटवा. चंचुपात्रात कागदी पट्टीच्या खालून पहिल्या भागापर्यंत पाणी भरा. नंतर चेंडू चंचुपात्रात तळाला टेकेपर्यंत सावकाश बसवा. चंचुपात्रातील पाण्याची पातळी कुठपर्यंत वाढली आहे, हे पाहा.

पाण्याची पातळी कागदी पट्टीच्या पूर्ण उंचीपर्यंत आलेली दिसेल.

या निरीक्षणावरून चेंडूच्या घनफळाचे सूत्र कसे मिळते हे समजून घ्या.

चंचुपात्र वृत्तचिती आकाराचे आहे. म्हणून चंचुपात्राच्या 2r एवढ्या उंचीपर्यंतच्या भागाचे घनफळ, वृत्तचितीच्या घनफळाच्या सूत्राने मिळेल. हे घनफळ V मानू.

$\therefore\ V = \pi \times r^2 \times 2r = 2\pi r^3$

परंतु V = चेंडूचे घनफळ + आधी भरलेल्या पाण्याचे घनफळ

= चेंडूचे घनफळ + $\frac{1}{3} \times 2\pi r^3$

$\therefore$ चेंडूचे घनफळ $= V - \frac{1}{3} \times 2\pi r^3$

$= 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3$

$= \dfrac{6\pi r^3 - 2\pi r^3}{3} \qquad = \dfrac{4\pi r^3}{3}$

$\therefore$ गोलाच्या घनफळाचे सूत्र; $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ असे मिळते.

(ह्या सूत्राचा उपयोग करून, आकृती 7.3 च्या संदर्भातील प्रश्न क्रमांक 3 चे उत्तर आता तुम्ही काढू शकाल.)

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) एका वृत्तचिती आकाराच्या पाण्याच्या टाकीची त्रिज्या 2.8 मी आणि उंची 3.5 मी आहे. तर त्या टाकीमध्ये किती लीटर पाणी मावेल? एका व्यक्तीला रोज सरासरी 70 लीटर पाणी लागते, तर पूर्ण भरलेल्या टाकीतील पाणी रोज किती व्यक्तींना पुरेल? ($\pi = \frac{22}{7}$)

उकल : त्रिज्या (r) = 2.8 मीटर, उंची (h) = 3.5 मीटर, $\pi = \frac{22}{7}$

पाण्याच्या टाकीची धारकता = वृत्तचिती आकाराच्या टाकीचे घनफळ.

$= \pi r^2 h$

$= \frac{22}{7} \times 2.8 \times 2.8 \times 3.5$

= 86.24 मी^{3}

= 86.24 × 1000 लीटर ($\because$ 1मी^{3} = 1000 लीटर)

= 86240.00 लीटर

$\therefore$ टाकीमध्ये 86240 लीटर पाणी मावेल.

70 लीटर पाणी रोज एका व्यक्तीला पुरेसे असते.

$\therefore$ पूर्ण भरलेल्या टाकीतील पाणी $\frac{86240}{70}$ = 1232 व्यक्तींना पुरेल.

उदा. (2) 30 सेमी त्रिज्येचा एक भरीव गोल वितळवून त्यापासून 10 सेमी त्रिज्या व 6 सेमी उंची असणाऱ्या भरीव वृत्तचिती तयार केल्या, तर किती वृत्तचिती तयार होतील?

उकल : गोलाची त्रिज्या r = 30 सेमी

वृत्तचितीची त्रिज्या R = 10 सेमी

वृत्तचितीची उंची H = 6 सेमी

समजा n वृत्तचिती तयार होतील.

$\therefore$ गोलाचे घनफळ = n × एका वृत्तचितीचे घनफळ

$\therefore$ वृत्तचितींची संख्या = n = $\frac{\text{गोलाचे घनफळ}}{\text{एका वृत्तचितीचे घनफळ}}$

$$= \frac{\frac{4}{3}\pi (r)^3}{\pi (R)^2 H}$$

$$= \frac{\frac{4}{3}\times(30)^3}{10^2 \times 6} \qquad = \frac{\frac{4}{3}\times 30\times 30\times 30}{10\times 10\times 6} \quad = 60$$

$\therefore$ एकूण 60 वृत्तचिती तयार होतील .

उदा. (3) सर्कसच्या तंबूचा खालचा भाग वृत्तचिती आकाराचा व त्याच्या वरचा भाग शंकूच्या आकाराचा आहे. तंबूच्या तळाचा व्यास 48 मी असून वृत्तचिती भागाची उंची 15 मी आहे. तंबूची एकूण उंची 33 मी असल्यास तंबूस लागणाऱ्या कापडाचे क्षेत्रफळ व तंबूतील हवेचे घनफळ काढा.

उकल : तंबूची एकूण उंची 33 मी आहे.

वृत्तचिती भागाची उंची = H मानू. H = 15 मी आहे.

$\therefore$ शंक्वाकृती भागाची लंब उंची h = (33−15) = 18 मी राहील.

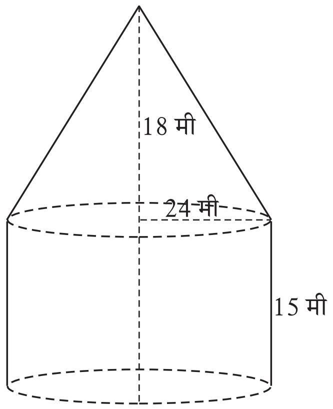
शंकूची तिरकस उंची (l) = $\sqrt{r^2 + h^2}$

$= \sqrt{24^2 + 18^2}$

$= \sqrt{576 + 324}$

$= \sqrt{900}$

l = 30 मी



आकृती 7.7

सर्कसच्या तंबूस लागणारे कापड = वृत्तचिती भागाचे वक्रपृष्ठफळ + शंक्वाकृती भागाचे वक्रपृष्ठफळ

$= 2\pi rH + \pi rl$

$= \pi r\,(2H + l)$

$= \frac{22}{7} \times 24\,(2 \times 15 + 30)$

$= \frac{22}{7} \times 24 \times 60$

= 4525.71 चौमी.

तंबूतील हवेचे घनफळ = वृत्तचिती भागाचे घनफळ + शंक्वाकृती भागाचे घनफळ

$= \pi r^2H + \frac{1}{3}\pi r^2h$

$= \pi r^2 \left(H + \frac{1}{3}h\right)$

$= \frac{22}{7} \times 24^2\,(15 + \frac{1}{3} \times 18)$

$= \frac{22}{7} \times 576 \times 21$

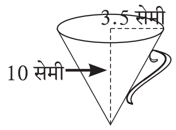
= 38,016 घमी

तंबूस लागणारे कापड = 4525.71 चौमी

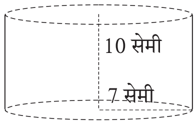
तंबूतील हवेचे घनफळ = 38016 घमी

सरावसंच 7.1

1. एका शंकूच्या तळाची त्रिज्या 1.5 सेमी असून त्याची लंब उंची 5 सेमी आहे, तर त्या शंकूचे घनफळ काढा.
2. 6 सेमी व्यास असलेल्या गोलाचे घनफळ काढा.
3. एका लंबवृत्तचितीच्या तळाची त्रिज्या 5 सेमी व उंची 40 सेमी असेल तर तिचे एकूण पृष्ठफळ काढा.
4. एका गोलाची त्रिज्या 7 सेमी असेल तर त्याचे वक्रपृष्ठफळ काढा.
5. धातूच्या एका इष्टिकाचितीची लांबी, रुंदी आणि उंची अनुक्रमे 44 सेमी, 21 सेमी आणि 12 सेमी आहे. ती वितळवून 24 सेमी उंचीचा शंकू तयार केला. तर शंकूच्या तळाची त्रिज्या काढा.
6.



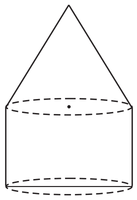
आकृती 7.8
पाण्याचा शंक्वाकृती जग



आकृती 7.9
वृत्तचिती आकाराचे भांडे

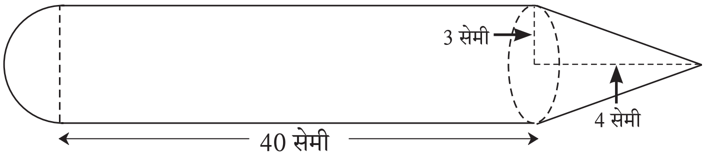
आकृती 7.8 व 7.9 मधील भांड्यांची मापे पाहा. त्यावरून वृत्तचिती आकाराच्या भांड्यात किती जग भरून पाणी मावेल हे काढा.

7. वृत्तचिती व शंकू समान तळाचे आहेत. वृत्तचितीवर शंकू ठेवला. वृत्तचिती भागाची उंची 3 सेमी असून तळाचे क्षेत्रफळ 100 चौसेमी आहे. जर संपूर्ण घनाकृतीचे घनफळ 500 घसेमी असेल तर संपूर्ण घनाकृतीची उंची काढा.



आकृती 7.10

8. शेजारील चित्रात दिलेल्या माहितीवरून; अर्धगोल, वृत्तचिती व शंकूपासून तयार झालेल्या खेळण्याचे एकूण पृष्ठफळ काढा.



आकृती 7.11

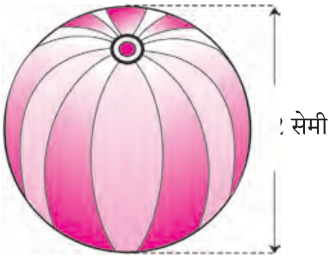
9. आकृती 7.12 मध्ये वृत्तचिती आकाराच्या चपट्या गोळ्यांचे 10 सेमी लांबीचे एक वेष्टन आहे. एका गोळीची त्रिज्या 7 मिमी आणि उंची 5 मिमी असल्यास अशा किती गोळ्या त्या वेष्टनात मावतील?

आकृती 7.12

10. आकृती 7.13 मध्ये मुलांचे एक खेळणे आहे. ते एक अर्धगोल व एक शंकू यांच्या सहाय्याने केले आहे. आकृतीत दर्शविलेल्या मापांवरून खेळण्याचे घनफळ व पृष्ठफळ काढा. ($\pi = 3.14$)

आकृती 7.13

11. आकृतीत दाखविलेल्या बीच बॉलचे पृष्ठफळ व घनफळ काढा.



आकृती 7.14

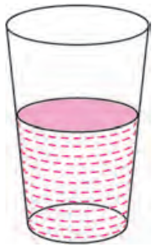
12. आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे एका वृत्तचिती आकाराच्या ग्लासमध्ये पाणी आहे व त्यामध्ये एक धातूची 2 सेमी व्यासाची गोळी बुडालेली आहे. तर पाण्याचे घनफळ काढा.

आकृती 7.15

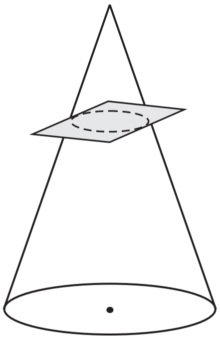
जाणून घेऊया.

शंकूछेद (frustum of the cone)

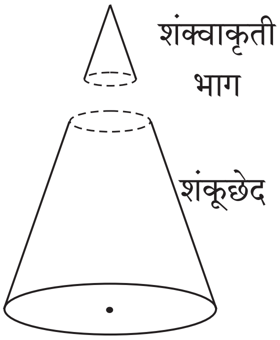
आपण पाणी पिण्यासाठी निमुळत्या पेल्याचा (ग्लासचा) वापर करतो. ह्या पेल्याचा आकार, तसेच त्यातील पाण्याचा आकार हे शंकूछेदाचे आकार आहेत.



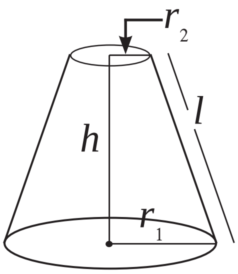
आकृती 7.16



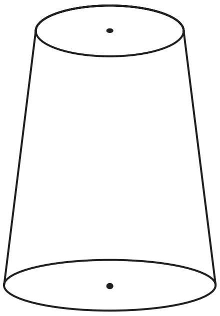
आकृती 7.17
शंकू कापताना



आकृती 7.18
शंकू कापल्यानंतर
वेगळे झालेले दोन भाग



आकृती 7.19
शंकूछेद



आकृती 7.20
पालथा ठेवलेला ग्लास

आकृतीमध्ये एक शंकू पालथा ठेवलेला दाखविलेला आहे. या शंकूचा त्याच्या तळाला समांतर असा छेद घेतला. त्यामुळे झालेल्या दोन भागांपैकी एका भागाचा आकार शंकूचाच आहे. राहिलेल्या भागाला शंकूछेद (frustum) म्हणतात.

शंकूप्रमाणेच शंकूछेदाचेही पृष्ठफळ व घनफळ काढता येते. त्यासाठी पुढील सूत्रांचा वापर आपण करणार आहोत.

हे लक्षात ठेवूया.

h = शंकूछेदाची उंची, l = शंकूछेदाची तिरकस उंची,

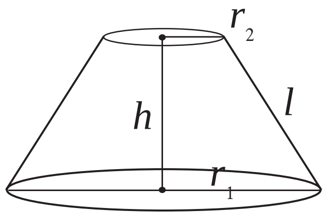
r_1 व r_2 = शंकूछेदाच्या वर्तुळाकार बाजूंच्या त्रिज्या ($r_1 > r_2$)

शंकूछेदाची तिरकस उंची $= l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

शंकूछेदाचे वक्रपृष्ठफळ $= \pi l\,(r_1 + r_2)$

शंकूछेदाचे एकूण पृष्ठफळ $= \pi l\,(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$

शंकूछेदाचे घनफळ $= \frac{1}{3}\pi h\,(r_1^2 + r_2^2 + r_1 \times r_2)$



आकृती 7.21

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) एका शंकूछेदाच्या आकाराच्या बादलीची उंची 28 सेमी आहे. बादलीच्या दोन्ही वर्तुळाकार बाजूंच्या त्रिज्या 12 सेमी व 15 सेमी आहेत. तर बादलीमध्ये किती लीटर पाणी मावेल? ($\pi = \frac{22}{7}$)

उकल : बादलीच्या वर्तुळाकार बाजूंच्या त्रिज्या r_1 = 15 सेमी, r_2 = 12 सेमी

बादलीची उंची h = 28 सेमी

बादलीची धारकता = शंकूछेदाचे घनफळ

$$= \frac{1}{3}\pi h\,(r_1^2 + r_2^2 + r_1 \times r_2)$$

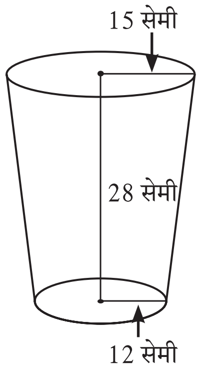
$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 28\,(15^2 + 12^2 + 15 \times 12)$$

$$= \frac{22 \times 4}{3} \times (225 + 144 + 180)$$

$$= \frac{22 \times 4}{3} \times 549$$

$$= 88 \times 183$$

$$= 16104 \text{ सेमी}^3 = 16.104 \text{ लीटर}$$



आकृती 7.22

बादलीमध्ये 16.104 लीटर पाणी मावेल.

उदा. (2) शंकूछेदाच्या वर्तुळाकार भागांच्या त्रिज्या 14 सेमी आणि 8 सेमी आहेत. जर शंकूछेदाची उंची 8 सेमी असेल तर पुढील किमती काढा. ($\pi = 3.14$)

i) शंकूछेदाचे वक्रपृष्ठफळ ii) शंकूछेदाचे एकूण पृष्ठफळ iii) शंकूछेदाचे घनफळ .

उकल : येथे त्रिज्या r_1 = 14 सेमी , r_2 = 8 सेमी, उंची h = 8 सेमी

शंकूछेदाची तिरकस उंची $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

$$l = \sqrt{8^2 + (14-8)^2}$$

$$l = \sqrt{64 + 36} = 10 \text{ सेमी}$$

शंकूछेदाचे वक्रपृष्ठफळ $= \pi(r_1 + r_2)\, l$

$= 3.14 \times (14 + 8) \times 10$

$= 690.8$ चौसेमी

शंकूछेदाचे एकूण पृष्ठफळ $= \pi(r_1 + r_2)l + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$

$= 3.14 \times 10\,(14 + 8) + 3.14 \times 14^2 + 3.14 \times 8^2$

$= 690.8 + 615.44 + 200.96$

$= 690.8 + 816.4$

$= 1507.2$ चौसेमी

शंकूछेदाचे घनफळ $= \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 \times r_2)$

$= \frac{1}{3} \times 3.14 \times 8\,(14^2 + 8^2 + 14 \times 8)$

$= 3114.88$ घसेमी

सरावसंच 7.2

1. 30 सेमी उंची असलेल्या शंकूछेदाच्या आकाराच्या पाण्याच्या बादलीच्या वर्तुळाकार बाजूंच्या त्रिज्या 14 सेमी व 7 सेमी असल्यास बादलीमध्ये किती लीटर पाणी मावेल? (1 लीटर = 1000 घसेमी)

2. शंकूछेदाच्या वर्तुळाकार भागांच्या त्रिज्या 14 सेमी व 6 सेमी आहेत व त्याची उंची 6 सेमी असल्यास पुढील किमती काढा. ($\pi = 3.14$)
   (1) शंकूछेदाचे वक्रपृष्ठफळ. (2) शंकूछेदाचे एकूण पृष्ठफळ. (3) शंकूछेदाचे घनफळ .

3. आकृती 7.23 मध्ये एका शंकूछेदाच्या वर्तुळाकार पायांचे परीघ अनुक्रमे 132 सेमी व 88 सेमी आहेत व उंची 24 सेमी आहे. तर त्या शंकूछेदाचे वक्रपृष्ठफळ काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा. ($\pi = \frac{22}{7}$)

परीघ$_1$ $= 2\pi r_1 = 132$

$r_1 = \frac{132}{2\pi} = \boxed{}$ सेमी

परीघ$_2$ $= 2\pi r_2 = 88$

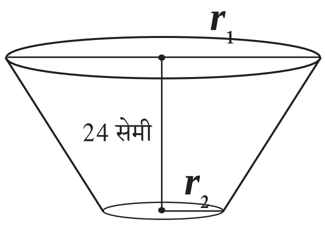
$r_2 = \frac{88}{2\pi} = \boxed{}$ सेमी

शंकूछेदाची तिरकस उंची $= l$

$l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

$l = \sqrt{\boxed{}^2 + \boxed{}^2}$

$l = \boxed{}$ सेमी



आकृती 7.23

शंकूछेदाचे वक्रपृष्ठफळ = $\pi(r_1 + r_2)l$

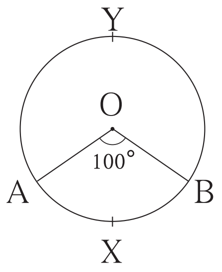
= $\pi \times$ ☐ $\times$ ☐

= ☐ चौसेमी

जरा आठवूया.

सोबतच्या आकृतीवरून सारणी पूर्ण करा.

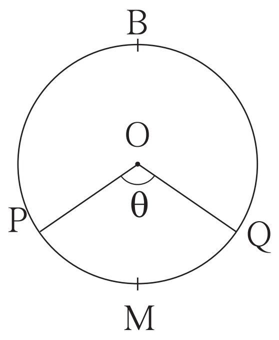
कंसाचा प्रकार	कंसाचे नाव	कंसाचे माप
लघुवर्तुळकंस	कंस AXB	....
....	कंस AYB	....



आकृती 7.24

जाणून घेऊया.

वर्तुळपाकळी (Sector of a circle)



आकृती 7.25

आकृतीमधील केंद्रीय कोनामुळे वर्तुळक्षेत्राचे दोन भागांत विभाजन झालेले आहे. या प्रत्येक भागाला वर्तुळपाकळी म्हणतात.

वर्तुळाच्या दोन त्रिज्या आणि त्यांची टोके जोडणाऱ्या वर्तुळकंसाने मर्यादित केलेल्या भागास वर्तुळपाकळी म्हणतात.

आकृतीमध्ये O –PMQ आणि O-PBQ या दोन वर्तुळपाकळ्या आहेत.

लघु वर्तुळपाकळी (Minor sector) :

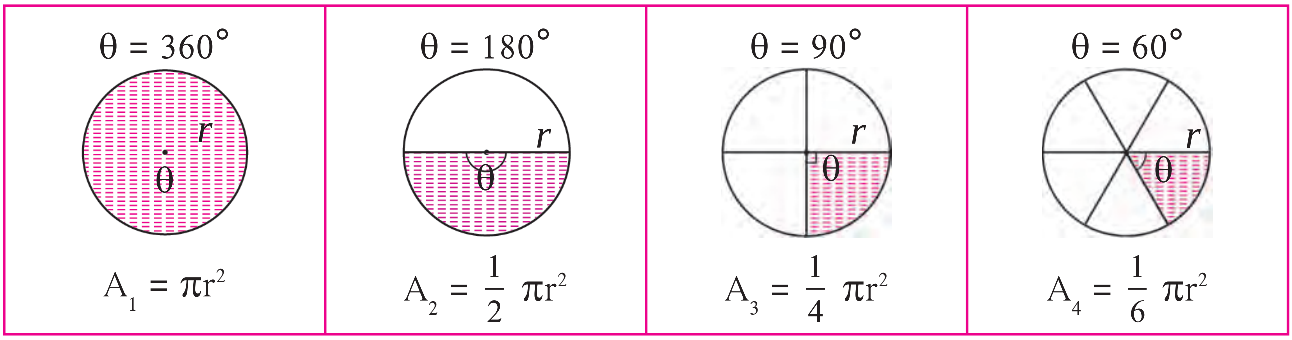
दोन त्रिज्या व त्यांच्या संगत लघुकंसाने मर्यादित केलेल्या पाकळीस लघुवर्तुळपाकळी असे म्हणतात. आकृतीमध्ये O–PMQ ही लघुवर्तुळपाकळी आहे.

विशाल वर्तुळपाकळी (Major sector) :

दोन त्रिज्या व संगत विशालकंसाने मर्यादित केलेल्या पाकळीस विशालवर्तुळपाकळी असे म्हणतात. आकृतीमध्ये O-PBQ ही विशालवर्तुळपाकळी आहे.

वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ (Area of a sector)

खालील आकृत्यांत दाखवल्याप्रमाणे समान त्रिज्या असलेल्या वर्तुळांच्या छायांकित भागांच्या क्षेत्रफळांचे निरीक्षण करा व खालील सारणी पूर्ण करा.



आकृती 7.26

वर्तुळाच्या केंद्रीय कोनाचे माप = 360° = पूर्ण कोन

वर्तुळाचा केंद्रीय कोन = 360° , वर्तुळाचे क्षेत्रफळ = πr^2			
वर्तुळ पाकळी	वर्तुळपाकळीच्या कंसाचे माप	$\frac{\theta}{360}$	वर्तुळ पाकळीचे क्षेत्रफळ A
A_1	360°	$\frac{360}{360}=1$	$1 \times \pi r^2$
A_2	180°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \times \pi r^2$
A_3	90°	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \times \pi r^2$
A_4	60°	....	....
A	θ	$\frac{\theta}{360}$	$\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

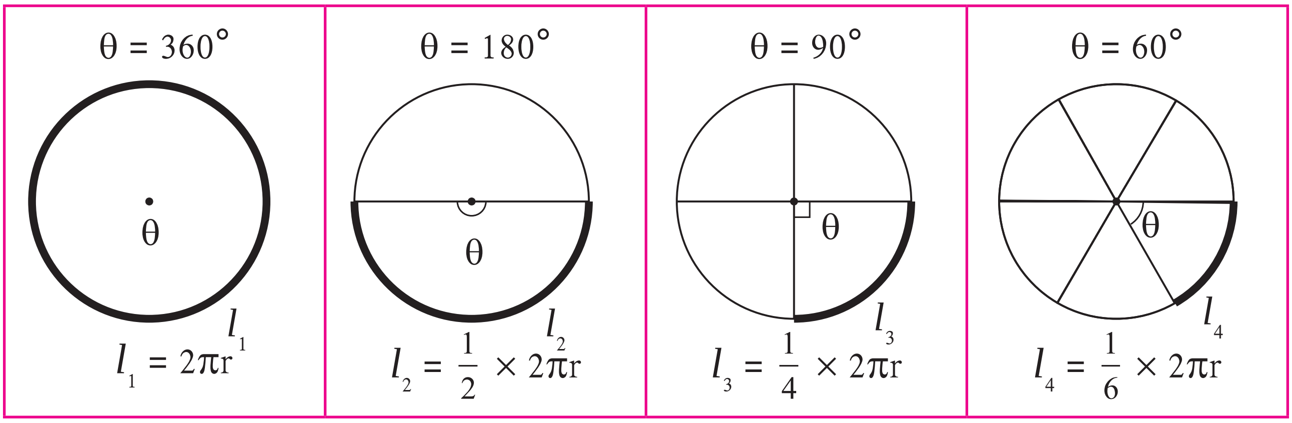
सारणीवरून लक्षात येते की, वर्तुळाच्या क्षेत्रफळास $\frac{\theta}{360}$ ने गुणल्यास, कंसाचे माप θ असलेल्या वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ मिळते. हे सूत्ररूपात पुढीलप्रमाणे लिहिता येते.

$$\text{वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ (A)} = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

या सूत्रावरून $\frac{A}{\pi r^2} = \frac{\theta}{360}$; म्हणजेच $\frac{\text{वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ}}{\text{वर्तुळाचे क्षेत्रफळ}} = \frac{\theta}{360}$

वर्तुळकंसाची लांबी (Length of an arc)

खाली दाखवल्याप्रमाणे समान त्रिज्या असलेल्या वर्तुळांच्या ठळक केलेल्या वर्तुळकंसांच्या लांबींचे निरीक्षण करा व खालील सारणी पूर्ण करा.



आकृती 7.27

वर्तुळाचा परीघ = $2\pi r$			
वर्तुळकंसांची लांबी	वर्तुळकंसाचे माप (θ)	$\frac{\theta}{360}$	वर्तुळकंसाची लांबी (l)
l_1	360°	$\frac{360}{360} = 1$	$1 \times 2\pi r$
l_2	180°	$\frac{180}{360} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \times 2\pi r$
l_3	90°	$\frac{90}{360} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \times 2\pi r$
l_4	60°	....	....
l	θ	$\frac{\theta}{360}$	$\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

वरील आकृतीबंधावरून लक्षात येते की, वर्तुळाच्या परिघाला $\frac{\theta}{360}$ ने गुणल्यास, कंसाचे माप θ असलेल्या वर्तुळकंसाची लांबी मिळते. हेच सूत्ररुपात पुढीलप्रमाणे लिहिता येते.

वर्तुळकंसांची लांबी (l) = $\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

या सूत्रावरून,

$$\therefore \frac{l}{2\pi r} = \frac{\theta}{360}$$

$$\frac{\text{वर्तुळकंसाची लांबी}}{\text{परीघ}} = \frac{\theta}{360}$$

वर्तुळकंसाची लांबी आणि वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ यांतील संबंध

वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ $A = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$ I

तसेच वर्तुळकंसाची लांबी $(l) = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

$$\therefore \frac{\theta}{360} = \frac{l}{2\pi r} \quad .... \text{II}$$

$$A = \frac{l}{2\pi r} \times \pi r^2$$ .... I व II वरून

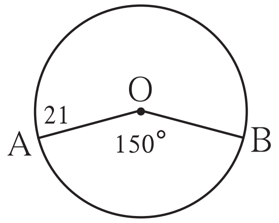
$$A = \frac{1}{2}\, l r = \frac{lr}{2}$$

$$\therefore \text{ वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ } = \frac{\text{वर्तुळकंसाची लांबी} \times \text{त्रिज्या}}{2}$$

तसेच $\quad \frac{A}{\pi r^2} = \frac{l}{2\pi r} = \frac{\theta}{360}$

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) 21 सेमी त्रिज्या असलेल्या वर्तुळपाकळीच्या कोनाचे माप 150° असल्यास वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ व संगत वर्तुळकंसाची लांबी काढा.



आकृती 7.28

उकल : येथे $r = 21$सेमी, $\theta = 150$, $\pi = \frac{22}{7}$

वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ $(A) = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$$= \frac{150}{360} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$$

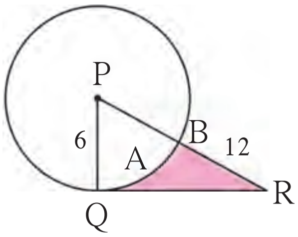
$= \frac{1155}{2}$ सेमी^{2} $\quad$ = 577.5 सेमी^{2}

वर्तुळकंसाची लांबी $= l = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

$$= \frac{150}{360} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 21$$

= 55 सेमी

उदा. (2) आकृतीमध्ये, वर्तुळाचे केंद्र P आणि वर्तुळाची त्रिज्या 6 सेमी आहे. रेख QR ही वर्तुळाची स्पर्शिका आहे. PR = 12 सेमी असल्यास छायांकित भागाचे क्षेत्रफळ काढा. ($\sqrt{3}$ = 1.73)



आकृती 7.29

उकल : वर्तुळाच्या स्पर्शबिंदूतून काढलेली त्रिज्या स्पर्शिकेला लंब असते.

$\therefore$ Δ PQR मध्ये, $\angle PQR = 90°$, PQ = 6 सेमी, PR = 12 सेमी

$\therefore PQ = \frac{PR}{2}$

जर काटकोन त्रिकोणाची एक बाजू कर्णाच्या निम्म्या लांबीची असेल तर त्या बाजूसमोरील कोनाचे माप 30° असते.

$\therefore \angle R = 30°$ आणि $\angle P = 60°$

30°-60°-90° प्रमेयाने, $QR = \frac{\sqrt{3}}{2} \times PR = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 12 = 6\sqrt{3}$

$QR = 6\sqrt{3}$ सेमी

$\therefore A(\Delta PQR) = \frac{1}{2} QR \times PQ$

$= \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} \times 6$

$= 18\sqrt{3} = 18 \times 1.73$

= 31.14 सेमी^{2}

वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ = $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$\therefore A(P\text{-}QAB) = \frac{60}{360} \times 3.14 \times 6^2$

$= \frac{1}{6} \times 3.14 \times 6 \times 6 = 3.14 \times 6$

= 18.84 सेमी^{2}

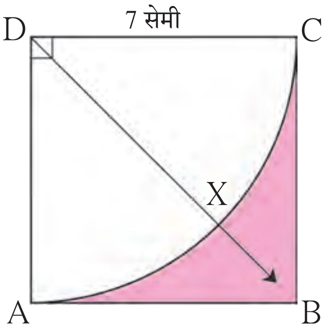
छायांकित भागाचे क्षेत्रफळ = A(Δ PQR) - A(P-QAB)

= 31.14 - 18.84

= 12.30 सेमी^{2}

छायांकित भागाचे क्षेत्रफळ = 12.30 सेमी^{2}

उदा. (3) दिलेल्या आकृतीत, ABCD या चौरसाची प्रत्येक बाजू 7 सेमी आहे. बिंदू D हे केंद्र मानून DA त्रिज्येने काढलेली वर्तुळपाकळी D - AXC आहे, तर छायांकित भागाचे क्षेत्रफळ काढण्यासाठी रिकाम्या चौकटी भरून उदाहरण पूर्ण करा.



आकृती 7.30

उकल :

चौरसाचे क्षेत्रफळ = [ ] (सूत्र)

= [ ]

= 49 चौसेमी

वर्तुळपाकळी (D- AXC) चे क्षेत्र = [ ] (सूत्र)

$= \frac{[\ ]}{360} \times \frac{22}{7} \times [\ ]$

= 38.5 चौसेमी

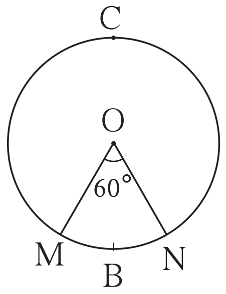
रेखांकित भागाचे क्षेत्रफळ = [ ] चे क्षेत्रफळ − [ ] चे क्षेत्रफळ

= [ ] चौसेमी − [ ] चौसेमी

= [ ] चौसेमी

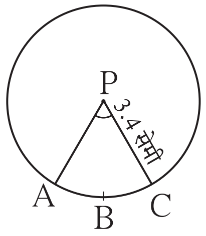
सरावसंच 7.3

1. वर्तुळाची त्रिज्या 10 सेमी आहे. वर्तुळकंसाचे माप 54° असल्यास त्या कंसाने मर्यादित केलेल्या वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ काढा. (π =3.14)
2. एका वर्तुळकंसाचे माप 80° आणि त्रिज्या 18 सेमी आहे, तर त्या वर्तुळकंसाची लांबी शोधा. (π =3.14)
3. वर्तुळपाकळीची त्रिज्या 3.5 सेमी असून तिच्या वर्तुळकंसाची लांबी 2.2 सेमी आहे, तर वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ काढा.
4. वर्तुळाची त्रिज्या 10 सेमी आहे , त्याच्या एका वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ 100 चौसेमी आहे, तर तिच्या संगत विशाल वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ काढा. (π =3.14)
5. 15 सेमी त्रिज्या असलेल्या एका वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ 30 चौसेमी असेल तर संबंधित वर्तुळकंसाची लांबी काढा.
6. शेजारील आकृतीत वर्तुळाची त्रिज्या 7 सेमी आहे आणि m(कंस MBN)= 60°
   तर (1) वर्तुळाचे क्षेत्रफळ काढा .
   (2) A(O − MBN) काढा.
   (3) A(O − MCN) काढा.

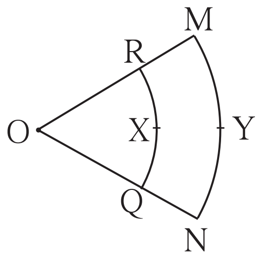


आकृती 7.31

7. 3.4 सेमी त्रिज्या असलेल्या वर्तुळपाकळीची परिमिती 12.8 सेमी आहे तर वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ काढा.



आकृती 7.32



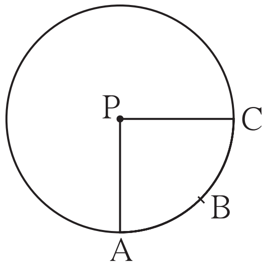
आकृती 7.33

8. आकृतीमध्ये, बिंदू O हे वर्तुळपाकळीचे केंद्र आहे. $\angle ROQ = \angle MON = 60^\circ$, OR = 7 सेमी, OM = 21 सेमी, तर कंस RXQ व कंस MYN ची लांबी काढा. ($\pi = \frac{22}{7}$)

9. आकृतीत A(P–ABC) = 154 चौसेमी आणि वर्तुळाची त्रिज्या 14 सेमी असेल, तर

(1) $\angle$ APC चे माप काढा.

(2) कंस ABC ची लांबी काढा.



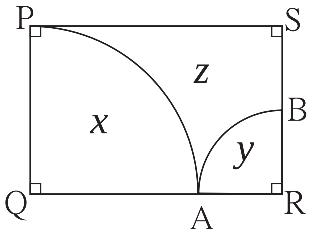
आकृती 7.34

10. वर्तुळपाकळीची त्रिज्या 7 सेमी आहे. जर वर्तुळपाकळीच्या कंसांची मापे पुढीलप्रमाणे असतील, तर त्या वर्तुळपाकळ्यांची क्षेत्रफळे काढा.

(1) 30° (2) 210° (3) 3 काटकोन

11. लघुवर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ 3.85 चौसेमी व संगत केंद्रीय कोनाचे माप 36° असल्यास त्या वर्तुळाची त्रिज्या काढा.

12. आकृतीत □ PQRS हा आयत असून PQ = 14 सेमी, QR = 21 सेमी, तर आकृतीत दाखविलेल्या x, y आणि z या प्रत्येक भागाचे क्षेत्रफळ काढा.



आकृती 7.35

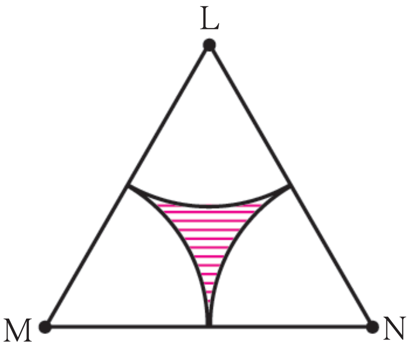
13. Δ LMN हा समभुज त्रिकोण आहे.LM = 14 सेमी. त्रिकोणाचा प्रत्येक शिरोबिंदू केंद्रबिंदू मानून व 7 सेमी त्रिज्या घेऊन आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे तीन वर्तुळपाकळ्या काढल्या. त्यावरून,

(1) A (Δ LMN) = ?

(2) एका वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ काढा.

(3) तीन वर्तुळपाकळ्यांचे एकूण क्षेत्रफळ काढा.

(4) रेखांकित भागाचे क्षेत्रफळ काढा.

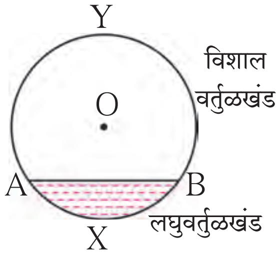


आकृती 7.36

जाणून घेऊया.

वर्तुळखंड (segment of a circle)

वर्तुळखंड म्हणजे जीवा व संगत वर्तुळकंस यांनी मर्यादित केलेला भाग होय.



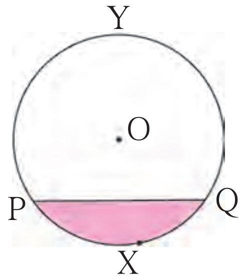
आकृती 7.37

लघुवर्तुळखंड : जीवा व लघुवर्तुळकंस यांनी मर्यादित केलेल्या भागास लघुवर्तुळखंड म्हणतात. आकृतीत वर्तुळखंड AXB हा लघुवर्तुळखंड आहे.

विशालवर्तुळखंड : जीवा व विशाल वर्तुळकंस यांनी मर्यादित केलेल्या भागास विशाल वर्तुळखंड म्हणतात. आकृतीत वर्तुळखंड AYB हा विशाल वर्तुळखंड आहे.

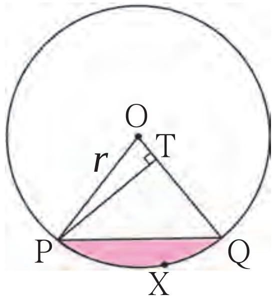
अर्धवर्तुळखंड : व्यासामुळे तयार होणाऱ्या वर्तुळखंडाला अर्धवर्तुळखंड म्हणतात.

वर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ (Area of a Segment)



आकृती 7.38

आकृतीमध्ये PXQ हा लघुवर्तुळखंड आहे. तर वर्तुळखंड PYQ हा विशालवर्तुळखंड आहे.



आकृती 7.39

लघुवर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ कसे काढता येईल ?

वर्तुळकेंद्र O पासून OP व OQ या दोन त्रिज्या काढू. तुम्हाला वर्तुळपाकळी O-PXQ चे क्षेत्रफळ काढता येते. तसेच Δ OPQ चे क्षेत्रफळही काढता येते. वर्तुळपाकळीच्या क्षेत्रफळातून त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ वजा केले की वर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ मिळेल.

वर्तुळखंड PXQ चे क्षेत्रफळ = वर्तुळपाकळी (O – PXQ) चे क्षेत्रफळ – Δ OPQ चे क्षेत्रफळ

$$= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 - \Delta \text{ OPQ चे क्षेत्रफळ} \text{ ---------- (I)}$$

आकृतीत Δ OPQ मध्ये, रेख PT हा बाजू OQ वर टाकलेला लंब आहे.

काटकोन Δ OTP मध्ये, $\sin\theta = \frac{PT}{OP}$

$\therefore$ PT = OP $\times$ sin θ

PT = r sin θ ($\because$ OP = r)

Δ OPQ चे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ $\times$ पाया $\times$ उंची

$= \frac{1}{2} \times OQ \times PT$

$= \frac{1}{2} \times r \times r \sin \theta$

$= \frac{1}{2} \times r^2 \sin \theta$ ---------------- (ii)

(I) व (II) वरून,

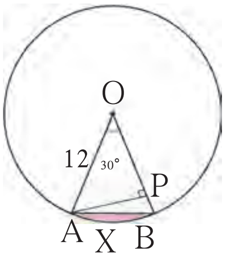
वर्तुळखंड PXQ चे क्षेत्रफळ = $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sin \theta$

$= r^2 \left[\frac{\pi\theta}{360} - \frac{\sin\theta}{2} \right]$

(आपण लघुकोनांचीच साइन गुणोत्तरे शिकलो आहोत. म्हणून θ हे माप 90° किंवा त्यापेक्षा कमी असतानाच हे सूत्र वापरता येईल, हे लक्षात घ्या.)

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) आकृतीत $\angle AOB = 30^\circ$, OA = 12 सेमी तर लघुवर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ काढा. (π = 3.14 घ्या.)



आकृती 7.40

रीत I :

$r = 12, \theta = 30^\circ, \pi = 3.14$

वर्तुळपाकळी O–AXB चे

क्षेत्रफळ = $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$= \frac{30}{360} \times 3.14 \times 12^2$

$= 3.14 \times 12$

= 37.68 चौसेमी

$A(\Delta OAB) = \frac{1}{2} r^2 \times \sin \theta$

$= \frac{1}{2} \times 12^2 \times \sin 30$

$= \frac{1}{2} \times 144 \times \frac{1}{2}$

.....($\because$ sin 30 = $\frac{1}{2}$)

= 36 चौसेमी

वर्तुळखंड AXB चे क्षेत्रफळ = वर्तुळपाकळी (O – AXB) चे क्षेत्रफळ – A(Δ OAB)

= 37.68 – 36

= 1.68 चौसेमी

रीत II :

$$\text{वर्तुळखंड AXB चे क्षेत्रफळ} = r^2\left[\frac{\pi\theta}{360} - \frac{\sin\theta}{2}\right]$$

$$= 12^2\left[\frac{3.14\times 30}{360} - \frac{\sin 30}{2}\right]$$

$$= 144\left[\frac{3.14}{12} - \frac{1}{2\times 2}\right]$$

$$= \frac{144}{4}\left[\frac{3.14}{3} - 1\right]$$

$$= 36\left[\frac{3.14-3}{3}\right]$$

$$= \frac{36}{3}\times 0.14 = 12 \times 0.14$$

= 1.68 चौसेमी.

उदा. (2) P केंद्र असलेल्या वर्तुळाची त्रिज्या 10 सेमी आहे. जीवा AB ने वर्तुळकेंद्राशी काटकोन केलेला असल्यास लघुवर्तुळखंडाचे व विशालवर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ काढा. (π = 3.14)

उकल : r = 10 सेमी, θ = 90, π = 3.14

$$\text{वर्तुळपाकळीचे क्षेत्र} = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$= \frac{90}{360} \times 3.14 \times 10^2$$

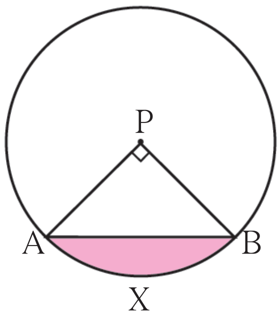
$$= \frac{1}{4} \times 314$$

= 78.5 चौसेमी

$$A(\Delta APB) = \frac{1}{2} \times \text{पाया} \times \text{उंची}$$

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 10$$

= 50 चौसेमी



आकृती 7.41

लघुवर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ = वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ – त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ

= 78.5 – 50

= 28.5 चौसेमी

विशालवर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ = वर्तुळाचे क्षेत्रफळ − लघुवर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ

$= 3.14 \times 10^2 - 28.5$

$= 314 - 28.5$

$= 285.5$ चौसेमी

उदा. (3) 14 सेमी त्रिज्या असलेल्या वर्तुळात एक सुसम षट्कोन अंतर्लिखित केलेला असल्यास षट्कोनाच्या बाहेरील व वर्तुळाच्या आतील भागाचे क्षेत्रफळ काढा. ($\pi = \frac{22}{7}$, $\sqrt{3} = 1.732$)

उकल : सुसम षट्कोनाची बाजू = सुसम षट्कोनाच्या परिवर्तुळाची त्रिज्या

$\therefore$ सुसम षट्कोनाची बाजू = 14 सेमी

सुसम षट्कोनाचे क्षेत्रफळ $= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\text{बाजू})^2$

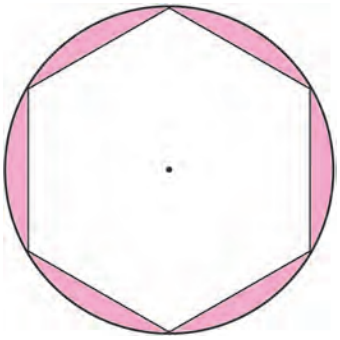
$= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 14^2$

$= 509.208$ चौसेमी

वर्तुळाचे क्षेत्रफळ $= \pi r^2$

$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14$

$= 616$ चौसेमी



आकृती 7.42

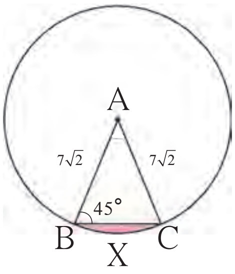
षट्कोनाच्या बाहेरील व वर्तुळाच्या आतील भागाचे क्षेत्रफळ = वर्तुळाचे क्षेत्र. − सुसम षट्कोनाचे क्षेत्र.

$= 616 - 509.208$

$= 106.792$ चौसेमी

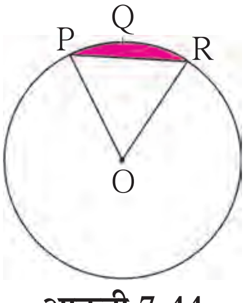
सरावसंच 7.4

1. आकृतीमध्ये A केंद्र असलेल्या वर्तुळात $\angle ABC = 45^\circ$, $AC = 7\sqrt{2}$ सेमी, तर वर्तुळखंड BXC चे क्षेत्रफळ काढा. ($\pi = 3.14$, $\sqrt{2} = 1.41$)



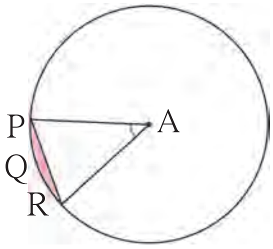
आकृती 7.43

2. आकृती 7.44 मध्ये O हे वर्तुळकेंद्र आहे. m(कंस PQR) = 60°, OP = 10 सेमी, तर छायांकित भागाचे क्षेत्रफळ काढा. ($\pi = 3.14$, $\sqrt{3} = 1.73$)



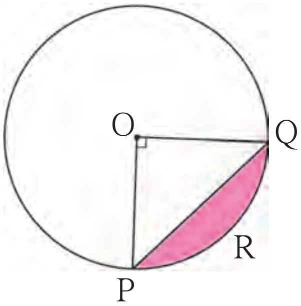
आकृती 7.44

3. A केंद्र असलेल्या वर्तुळात $\angle PAR = 30°$ AP = 7.5 तर, वर्तुळखंड PQR चे क्षेत्रफळ काढा. (π = 3.14)



आकृती 7.45

4. केंद्र O असलेल्या वर्तुळात PQ ही जीवा आहे. $\angle POQ = 90°$, आणि छायांकित भागाचे क्षेत्रफळ 114 चौसेमी आहे, तर वर्तुळाची त्रिज्या काढा. (π = 3.14)



आकृती 7.46

5. 15 सेमी त्रिज्या असलेल्या वर्तुळाची PQ ही जीवा वर्तुळाच्या केंद्राशी 60° चा कोन करते. त्या जीवेमुळे झालेल्या विशालवर्तुळखंड आणि लघुवर्तुळखंड यांची क्षेत्रफळे काढा. (π = 3.14, $\sqrt{3}$ = 1.73)

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 7

1. **खाली दिलेल्या पर्यायांमधून अचूक पर्याय निवडा.**

(1) जर वर्तुळाचा परीघ व वर्तुळाचे क्षेत्रफळ यांचे गुणोत्तर 2:7 असेल तर वर्तुळाचा परीघ किती?

(A) 14π (B) $\frac{7}{\pi}$ (C) 7π (D) $\frac{14}{\pi}$

(2) 44 सेमी लांबी असलेल्या वर्तुळकंसाचे माप 160° असेल तर त्या वर्तुळाचा परीघ किती?

(A) 66 सेमी (B) 44 सेमी (C) 160 सेमी (D) 99 सेमी

(3) कंसाचे माप 90° आणि त्रिज्या 7 सेमी असलेल्या वर्तुळपाकळीची परिमिती काढा.

(A) 44 सेमी (B) 25 सेमी (C) 36 सेमी (D) 56 सेमी

(4) तळाची त्रिज्या 7 सेमी व उंची 24 सेमी असलेल्या शंकूचे वक्रपृष्ठफळ किती?

(A) 440 सेमी^{2} (B) 550 सेमी^{2} (C) 330 सेमी^{2} (D) 110 सेमी^{2}

(5) 5 सेमी त्रिज्येच्या वृत्तचितीचे वक्रपृष्ठफळ 440 सेमी^{2} असल्यास त्या वृत्तचितीची उंची किती?

(A) $\frac{44}{\pi}$ सेमी (B) 22π सेमी (C) 14π सेमी (D) $\frac{22}{\pi}$ सेमी

(6) एक शंकू वितळवून त्याच्या तळाच्या त्रिज्येएवढ्याच त्रिज्येची वृत्तचिती तयार केली. जर वृत्तचितीची उंची 5 सेमी असेल तर शंकूची उंची किती?

(A) 15 सेमी (B) 10 सेमी (C) 18 सेमी (D) 5 सेमी

(7) 0.01 सेमी बाजू असलेल्या घनाचे घनफळ किती घसेमी?

(A) 1 (B) 0.001 (C) 0.0001 (D) 0.000001

(8) एक घनमीटर घनफळ असलेल्या घनाच्या बाजूची लांबी किती?

(A) 1 सेमी (B) 10 सेमी (C) 100 सेमी (D) 1000 सेमी

2. एका शंकूछेदाच्या आकाराच्या कपडे धुण्याच्या टबची उंची 21 सेमी आहे. टबच्या दोन्ही वर्तुळाकार बाजूंच्या त्रिज्या 20 सेमी व 15 सेमी आहेत. तर टबमध्ये किती लीटर पाणी मावेल? ($\pi = \frac{22}{7}$)

3★. प्लॅस्टिकच्या 1 सेमी त्रिज्येच्या लहान गोळ्या वितळवून वृत्तचिती आकाराची नळी तयार केली. नळीची जाडी 2 सेमी उंची 90 सेमी व बाह्यत्रिज्या 30 सेमी असेल तर त्या नळीसाठी किती गोळ्या वितळवल्या असतील?

4. लांबी 16 सेमी, रुंदी 11 सेमी व उंची 10 सेमी असलेल्या धातूच्या इष्टिकाचितीपासून ज्याची जाडी 2 मिमी आहे व व्यास 2 सेमी आहे अशी काही नाणी तयार केली, तर किती नाणी तयार होतील?

5. एका रोलरचा व्यास 120 सेमी आणि लांबी 84 सेमी आहे. एक मैदान एकदा सपाट करण्यासाठी रोलरचे 200 फेरे पूर्ण होतात. तर 10 रुपये प्रति चौरस मीटर या दराने ते मैदान सपाट करण्याचा एकूण खर्च काढा.

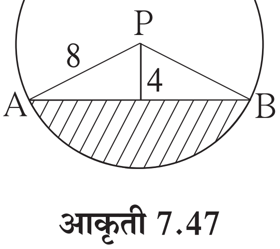
6. व्यास 12 सेमी व जाडी 0.01 मीटर असलेला एक धातूचा पोकळ गोल आहे. तर त्या गोलाच्या बाहेरील भागाचे पृष्ठफळ काढा व धातूची घनता 8.88 ग्रॅम प्रति घनसेंटिमीटर असल्यास त्या गोलाचे वस्तुमान काढा.

7. एका लंबवृत्तचितीच्या आकाराच्या बादलीचा तळाचा व्यास 28 सेमी व उंची 20 सेमी आहे. ही बादली वाळूने पूर्ण भरली आहे. त्या बादलीतील वाळू जमिनीवर अशा रीतीने ओतली, की वाळूचा शंकू तयार होईल. वाळूच्या शंकूची उंची 14 सेमी असेल तर शंकूच्या तळाचे क्षेत्रफळ काढा.

8. एका धातूच्या गोळ्याची त्रिज्या 9 सेमी आहे. तो गोल वितळवून 4 मिमी व्यासाची धातूची तार काढली, तर त्या तारेची लांबी किती मीटर असेल?

9. 6 सेमी त्रिज्या असलेल्या एका वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ 15π सेमी^{2} आहे, तर त्या पाकळीच्या कंसाचे माप काढा व वर्तुळकंसाची लांबी काढा.

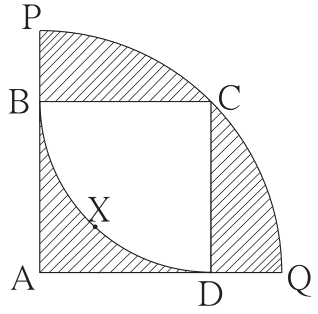
10.



आकृती 7.47

आकृतीत P हा वर्तुळाचा केंद्र असून रेख AB ही जीवा आहे. PA = 8 सेमी आणि जीवा AB वर्तुळकेंद्रापासून 4 सेमी अंतरावर असेल, तर रेखांकित भागाचे क्षेत्रफळ काढा. ($\pi = 3.14$, $\sqrt{3} = 1.73$)

11. वर्तुळपाकळी A–PCQ मध्ये $\square$ ABCD हा चौरस आहे. C – BXD या पाकळीची त्रिज्या 20 सेमी असेल तर रेखांकित भागाचे क्षेत्रफळ काढण्यासाठी खालील कृती करा.



आकृती 7.48

उकल : चौरस ABCD ची बाजू = वर्तुळपाकळी C – BXD ची त्रिज्या = $\square$ सेमी

चौरसाचे क्षेत्रफळ = बाजू^{2} = $\square^2$ = $\square$ ..... (I)

चौरसातील रेखांकित भागाचे क्षेत्रफळ

= चौरस ABCD चे क्षेत्रफळ – वर्तुळपाकळी C – BXD चे क्षेत्रफळ

$$= \square - \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$= \square - \frac{90}{360} \times \frac{3.14}{1} \times \frac{400}{1}$$

$$= \square - 314$$

$$= \square$$

मोठ्या वर्तुळपाकळीची त्रिज्या = चौरस ABCD च्या कर्णाची लांबी

$= 20\sqrt{2}$

मोठ्या वर्तुळपाकळीतील चौरसाबाहेरील रेखांकित भागाचे क्षेत्रफळ

= वर्तुळपाकळी A – PCQ चे क्षेत्रफळ – चौरस ABCD चे क्षेत्रफळ

= A(A – PCQ) – A($\square$ ABCD)

$$= \left(\frac{\theta}{360} \times \pi \times r^2\right) - \square^2$$

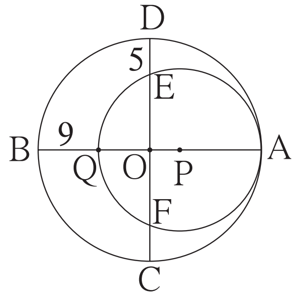
$$= \frac{90}{360} \times 3.14\,(20\sqrt{2})^2 - (20)^2$$

$$= \square - \square$$

$$= \square$$

$\therefore$ रेखांकित भागाचे एकूण क्षेत्रफळ = 86 + 228 = 314 चौसेमी

12.



आकृती 7.49

O आणि P केंद्र असलेली वर्तुळे बिंदू A मध्ये आतून स्पर्श करतात. जर, BQ = 9, DE = 5, तर वर्तुळाच्या त्रिज्या शोधण्यासाठी खालील कृती करा.

उकल : मोठ्या वर्तुळाची त्रिज्या R मानू.

लहान वर्तुळाची त्रिज्या r मानू.

OA, OB, OC आणि OD या मोठ्या वर्तुळाच्या त्रिज्या

$\therefore$ OA = OB = OC = OD = R

PQ = PA = r

OQ = OB − BQ = $\square$

OE = OD − DE = $\square$

P केंद्र असलेल्या वर्तुळात दोन जीवांच्या आंतरविभाजनाच्या गुणधर्मानुसार

$OQ \times OA = OE \times OF$

$\square \times R = \square \times \square \quad (\because OE = OF)$

$R^2 - 9R = R^2 - 10R + 25$

R = $\square$

AQ = 2r = AB − BQ

2r = 50 − 9 = 41

r = $\square$ = $\square$

उत्तरसूची

प्रकरण 1 समरूपता

सरावसंच 1.1

1. $\frac{3}{4}$ 2. $\frac{1}{2}$ 3. 3 4. 1:1 5. (1) $\frac{BQ}{BC}$, (2) $\frac{PQ}{AD}$, (3) $\frac{BC}{DC}$, (4) $\frac{DC \times AD}{QC \times PQ}$

सरावसंच 1.2

1. (1) दुभाजक आहे. (2) दुभाजक नाही. (3) दुभाजक आहे.

2. $\frac{PN}{NR} = \frac{PM}{MQ} = \frac{3}{2}$, म्हणून रेषा NM || बाजू RQ 3. QP = 3.5 5. BQ = 17.5

6. QP = 22.4 7. x = 6 ; AE = 18 8. LT = 4.8 9. x = 10

10. पक्ष, XQ, PD, पक्ष, $\frac{\boxed{XR}}{\boxed{RF}} = \frac{\boxed{XQ}}{\boxed{QE}}$, प्रमाणाचे मूलभूत प्रमेय, $\frac{\boxed{XP}}{\boxed{PD}} = \frac{\boxed{XR}}{\boxed{RF}}$

सरावसंच 1.3

1. Δ ABC ~ Δ EDC कोको कसोटी 2. Δ PQR ~ Δ LMN ; बाबाबा समरूपता कसोटीनुसार

3. 12 मीटर 4. AC = 10.5 6. OD = 4.5

सरावसंच 1.4

1. क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर = 9 : 25 2. $\boxed{PQ^2}$, $\frac{\boxed{4}}{\boxed{9}}$ 3. $\boxed{A(\Delta PQR)}$, $\frac{16}{25}$, $\frac{4}{5}$

4. MN = 15 5. 20 सेमी 6. $4\sqrt{2}$

7. $\boxed{PF}$; $\boxed{x}$ + $\boxed{2x}$; $\boxed{\angle FPQ}$; $\boxed{\angle FQP}$; $\frac{DF^2}{PF^2}$; $\boxed{20}$; $\boxed{45}$; $\boxed{45}$ − $\boxed{20}$; $\boxed{\text{25 चौरस एकक}}$

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 1

1. (1) (B), (2) (B), (3) (B), (4) (D), (5) (A)

2. $\frac{7}{13}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{13}{20}$ 3. 9 सेमी 4. $\frac{3}{4}$ 5. 11 सेमी 6. $\frac{25}{81}$ 7. 4

8. PQ = 80, QR = $\frac{280}{3}$, RS = $\frac{320}{3}$ 9. $\frac{\boxed{PM}}{\boxed{MQ}} = \frac{\boxed{PX}}{\boxed{XQ}}$, $\frac{\boxed{PM}}{\boxed{MR}} = \frac{\boxed{PY}}{\boxed{YR}}$,

10. $\frac{AX}{XY} = \frac{3}{2}$ 12. $\frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}$, $\frac{\boxed{3}+\boxed{2}}{\boxed{2}}$, $\frac{\boxed{5}}{\boxed{3}}$, $\boxed{\text{को-को}}$, $\frac{\boxed{5}}{3}$, $\boxed{15}$

प्रकरण 2 पायथागोरसचे प्रमेय

सरावसंच 2.1

1. पायथागोरसची त्रिकुटे ; (1), (3), (4), (6) 2. NQ = 6 3. QR = 20.5

4. RP = 12, PS = $6\sqrt{3}$ **5.** $\boxed{\text{पक्ष}}$, $\boxed{45^\circ}$, $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$, $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$, $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$, $\boxed{2}$

6. बाजू = $5\sqrt{2}$ सेमी, परिमिती = $20\sqrt{2}$ सेमी **7.** (1) 18 (2) $4\sqrt{13}$ (3) $6\sqrt{13}$ **8.** 37 सेमी

10. 8.2 मी.

सरावसंच 2.2

1. 12 **2.** $2\sqrt{10}$ **4.** 18 सेमी

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 2

1. (1) (B), (2) (B), (3) (A), (4) (C), (5) (D), (6) (C), (7) (B), (8) (A).

2. (1) $a\sqrt{3}$, (2) काटकोन त्रिकोण होईल. (3) 61 सेमी, (4) 15 सेमी, (5) $x\sqrt{2}$, (6) $\angle$ PRQ.

3. RS = 6 सेमी, ST = $6\sqrt{3}$ सेमी **4.** 20 सेमी **5.** बाजू = 2 सेमी, परिमिती = 6 सेमी

6. 7 **7.** AP = $2\sqrt{7}$ सेमी **10.** 7.5 किमी / तास **12.** 8 सेमी **14.** 8 सेमी

15. 192 चौरस एकक **17.** 58 **18.** 26

प्रकरण 3 वर्तुळ

सरावसंच 3.1

1. (1) 90°, स्पर्शिका त्रिज्या प्रमेय (2) 6 सेमी ; कारण लंबांतर (3) $6\sqrt{2}$ सेमी (4) 45°

2. (1) $5\sqrt{3}$ सेमी (2) 30° (3) 60° **4.** 9 सेमी

सरावसंच 3.2

1. 1.3 सेमी 2. 9.7 सेमी **4.** (3) 110° **5.** $4\sqrt{6}$ सेमी

सरावसंच 3.3

1. m(कंस DE) = 90°, m(कंस DEF) = 160°

सरावसंच 3.4

1. (1) 60° (2) 30° (3) 60° (4) 300° **2.** (1) 70° (2) 220° (3) 110° (4) 55°

3. $\angle$R = 92°; $\angle$N = 88° **7.** 44° **8.** 121°

सरावसंच 3.5

1. PS = 18; RS = 10, **2.** (1) 7.5 (2) 12 किंवा 6

3. (1) 18 (2) 10 (3) 5 **4.** 4

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 3

1. (1) D (2) B (3) B (4) C (5) B (6) D (7) A (8) B (9) A (10) C.

2. (1) 9 सेमी (2) वर्तुळाच्या अंतर्भागात (3) 2 बिंदू, 12 सेमी

3. (1) 6 (2) $\angle$K = 30°; $\angle$M = 60° **5.** 10 **6.** (1) 9 सेमी (2) 6.5 सेमी

(3) 90° ; MS : SR = 2 : 1   **9.** $4\sqrt{3}$ सेमी

13. (1) 180° (2) $\angle AQP \cong \angle ASQ \cong \angle ATQ$

(3) $\angle QTS \cong \angle SQR \cong \angle SAQ$ (4) 65°, 130° (5) 100° **14.**(1) 70°

(2) 130° (3) 210° **15.** (1) 56° (2) 6   (3) 16 किंवा 9   **16.** (1) 15.5°

(2) 3.36   (3) 6   **18.** (1) 68° (2) OR = 16.2, QR = 13 (3) 13   **21.** 13

प्रकरण 4 भौमितिक रचना

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 4

1. (1) C   (2) A   (3) A

प्रकरण 5 निर्देशक भूमिती

सरावसंच 5.1

1. (1) $2\sqrt{2}$ (2) $4\sqrt{2}$ (3) $\frac{11}{2}$ (4) 13   (5) 20   (6) $\frac{29}{2}$

2. (1) एकरेषीय आहेत. (2) एकरेषीय नाहीत.   (3) एकरेषीय नाहीत.   (4) एकरेषीय आहेत.

3. $(-1, 0)$ **7.** 7 किंवा -5

सरावसंच 5.2

1. (1, 3)   **2.** (1) $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ (2) $\left(\frac{4}{7}, -\frac{11}{7}\right)$ (3) $\left(0, \frac{13}{3}\right)$ **3.** 2:7   **4.** $(-6, 3)$

5. 2:5, $k = 6$ **6.** (11, 18)   **7.** (1) (1, 3)   (2) $(6, -2)$ (3) $\left(\frac{19}{3}, \frac{22}{3}\right)$

8. $(-1, -7)$ **9.** $h = 7$, $k = 18$ **10.** (0, 2) ; $(-2, -3)$

11. $(-9, -8)$, $(-4, -6)$, $(1, -4)$ **12.** (16, 12), (12, 14), (8, 16), (4, 18)

सरावसंच 5.3

1. (1) 1   (2) $\sqrt{3}$ (3) चढ ठरवता येत नाही.

2. (1) 2   (2) $-\frac{3}{8}$ (3) $\frac{5}{2}$ (4) $\frac{5}{4}$ (5) $\frac{1}{2}$ (6) चढ ठरवता येत नाही.

3. (1) एकरेषीय आहेत. (2) एकरेषीय आहेत.   (3) एकरेषीय नाहीत.   (4) एकरेषीय आहेत.
(5) एकरेषीय आहेत. (6) एकरेषीय आहेत.

4. -5; $\frac{1}{5}$; $-\frac{2}{3}$ 6. $k = 5$ 7. $k = 0$ 8. $k = 5$

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 5

1. (1) D   (2) D   (3) C   (4) C

2. (1) एकरेषीय आहेत.   (2) एकरेषीय आहेत.   (3) एकरेषीय नाहीत.   **3.** (6, 13)   **4.** 3:1

5. $(-7, 0)$ 6. (1) $a\sqrt{2}$ (2) 13 (3) $5a$ 7. $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

8. (1) हो, विषमभुज त्रिकोण (2) नाही. (3) हो, समभुज त्रिकोण 9. $k = 5$

13. 5, $2\sqrt{13}$, $\sqrt{37}$ 14. (1, 3) 16. $\left(\frac{25}{6}, \frac{13}{6}\right)$, त्रिज्या = $\frac{13\sqrt{2}}{6}$ 17. (7, 3)

18. समांतरभुज चौकोन 19. A(20, 10), P(16, 12), R(8, 16), B(0, 20). 20. (3, –2)

21. (7, 6) व (3, 6) 22. 10 व 0

प्रकरण 6 त्रिकोणमिती

सरावसंच 6.1

1. $\cos\theta = \frac{24}{25}$; $\tan\theta = \frac{7}{24}$ 2. $\sec\theta = \frac{5}{4}$; $\cos\theta = \frac{4}{5}$

3. $\text{cosec}\theta = \frac{41}{9}$; $\sin\theta = \frac{9}{41}$ 4. $\sec\theta = \frac{13}{5}$; $\cos\theta = \frac{5}{13}$; $\sin\theta = \frac{12}{13}$

5. $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \text{cosec}\theta} = \frac{1}{2}$

सरावसंच 6.2

1. चर्चची उंची 80 मीटर
2. जहाजाचे दीपगृहापासूनचे अंतर 51.60 मीटर
3. दुसऱ्या इमारतीची उंची $(10 + 12\sqrt{3})$ मीटर
4. तारेने क्षितिज समांतर पातळीशी केलेला कोन $30°$
5. झाडाची उंची $(40 + 20\sqrt{3})$ मीटर
6. पतंगाच्या दोऱ्याची लांबी 69.20 मीटर

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 6

1. (1) A (2) B (3) C (4) A

2. $\cos\theta = \frac{60}{61}$ 3. $\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $\text{cosec}\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $\sec\theta = \sqrt{5}$; $\cot\theta = \frac{1}{2}$

4. $\sin\theta = \frac{5}{13}$; $\cos\theta = \frac{12}{13}$; $\text{cosec}\theta = \frac{13}{5}$; $\tan\theta = \frac{5}{12}$; $\cot\theta = \frac{12}{5}$

6. इमारतीची उंची $16\sqrt{3}$ मीटर

7. जहाजाचे दीपगृहापासून अंतर $\frac{100\sqrt{3}}{3}$ मीटर

8. इमारतीची उंची $(12 + 15\sqrt{3})$ मीटर

9. शिडीचे दुसरे टोक जमिनीपासून जास्तीत जास्त 20.80 मीटर उंच असेल.

10. विमान जमिनीपासून जास्तीत जास्त 1026 मीटर उंचीवर होते.

प्रकरण 7 महत्वमापन

सरावसंच 7.1

1. 11.79 घसेमी 2. 113.04 घसेमी 3. 1413 चौसेमी (π = 3.14 घेऊन) 4. 616 चौसेमी
5. 21 सेमी 6. 12 जग 7. 9 सेमी 8. 273π चौसेमी 9. 20 गोळ्या
10. 94.20 घसेमी, 103.62 चौसेमी 11. 5538.96 चौसेमी, 38772.72 घसेमी
12. 1468.67π घसेमी

सरावसंच 7.2

1. 10.780 लीटर 2. (1) 628 चौसेमी (2) 1356.48 चौसेमी (3) 1984.48 घसेमी

सरावसंच 7.3

1. 47.1 चौसेमी 2. 25.12 सेमी 3. 3.85 चौसेमी 4. 214 चौसेमी 5. 4 सेमी
6. (1) 154 चौसेमी (2) 25.7 चौसेमी (3) 128.3 चौसेमी 7. 10.2 चौसेमी
8. 7.3 सेमी ; 22 सेमी 9. (1) 90° (2) 22 सेमी
10.(1) 12.83 चौसेमी (2) 89.83 चौसेमी (3) 115.5 चौसेमी 11. 3.5 सेमी
12. x = 154 चौसेमी ; y = 38.5 चौसेमी ; z = 101.5 चौसेमी
13. (1) 84.87 चौसेमी (2) 25.67 चौसेमी (3) 77.01 चौसेमी (4) 7.86 चौसेमी

सरावसंच 7.4

1. 3.92 चौसेमी 2. 9.08 चौसेमी 3. 0.65625 चौएकक 4. 20 सेमी
5. 20.43 चौसेमी ; 686.07 चौसेमी

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 7

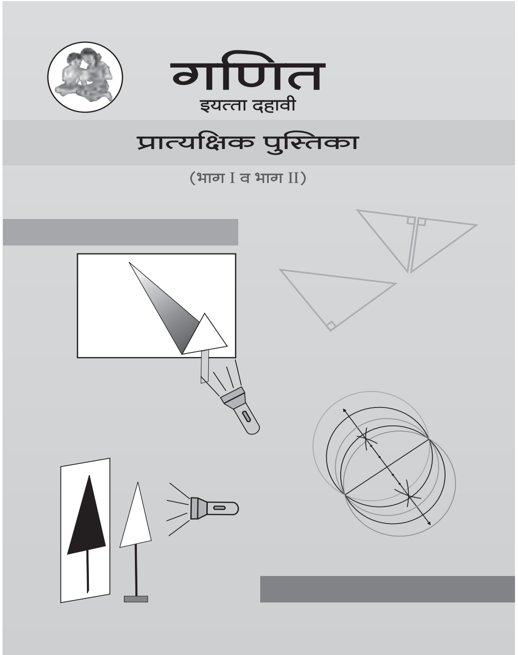
1. (1) A, (2) D, (3) B, (4) B, (5) A, (6) A, (7) D, (8) C.
2. 20.35 लीटर 3. 7830 गोळ्या 4. 2800 नाणी ($\pi = \frac{22}{7}$ घेऊन) 5. 6336 रुपये
6. 452.16 चौसेमी ; 3385.94 ग्रॅम 7. 2640 चौसेमी 8. 243 मीटर
9. 150°; 5π सेमी 10. 39.28 चौसेमी

इयत्ता १० वी प्रात्यक्षिक पुस्तिका

गणित (भाग I व भाग II)

मराठी माध्यम

मूल्य ५४ रूपये



- शासनमान्य अभ्यासक्रम व पाठ्यपुस्तकावर आधारित.
- मूल्यमापन योजनेनुसार सर्व पाठांवर आधारित प्रात्यक्षिकांचा समावेश.
- विविध कृती, चित्रे, आकृत्या इत्यादींनी युक्त.
- आशयावर आधारित काही उदाहरणांचा समावेश.
- कृतीयुक्त उदाहरणांचा समावेश.
- सरावासाठी अधिकचे प्रश्न व उत्तर लिखाणासाठी स्वतंत्र जागा

प्रात्यक्षिक नोंदवह्या पाठ्यपुस्तक मंडळाच्या विभागीय भांडारांमध्ये विक्रीसाठी उपलब्ध आहेत.

(१) महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक भांडार व वितरण केंद्र, सेनापती बापट मार्ग, पुणे ४११००४, ☎ २५६५९४६५ (२) महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक भांडार व वितरण केंद्र, पी - ४१, औद्योगिक वसाहत, मुंबई-बंगलोर महामार्गावर, सकाळ कार्यालयासमोर, कोल्हापूर ४१६१२२ ☎ २४६८५७६ (३) महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक भांडार व वितरण केंद्र, १० उद्योग नगर, एस. व्ही. रोड, गोरेगाव, पश्चिम मुंबई ४०० ०६२ ☎ २८७७१८४२ (४) महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक भांडार व वितरण केंद्र, सिडको प्लॉट नं. १४, डब्ल्यू सेक्टर १२, वावंजा रोड, न्यू पनवेल, जि. रायगड, पनवेल ४१० २०६ ☎ २७४६२६४६५ (५) महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक भांडार व वितरण केंद्र, लेखानगर जवळ, प्लॉट नं. २४, 'माघ' सेक्टर, सिडको, नवीन मुंबई-आग्रा रोड, नाशिक ४२२००९ ☎ २३९१५११ (६) महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक भांडार व वितरण केंद्र, एम आय डी सी शेड क्रमांक २ व ३, रेल्वे स्टेशनजवळ, औरंगाबाद ४३१ ००१ ☎ २३३२१७१ (७) महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक भांडार व वितरण केंद्र, रवींद्रनाथ टागोर सायन्स कॉलेजसमोर, महाराजा बाग रोड, नागपूर ४४० ००१ ☎ २५४७७१६/२५२३०७८ (८) महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक भांडार व वितरण केंद्र, प्लॉट नं, एफ ९१, एम आय डी सी, लातूर ४१३५३१ ☎ २२०९३० (९) महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक भांडार व वितरण केंद्र, शांकुतल कॉलनी, व्ही. एम. व्ही. कॉलेजमागे, अमरावती ४४४ ६०४ ☎ २५३०९६५

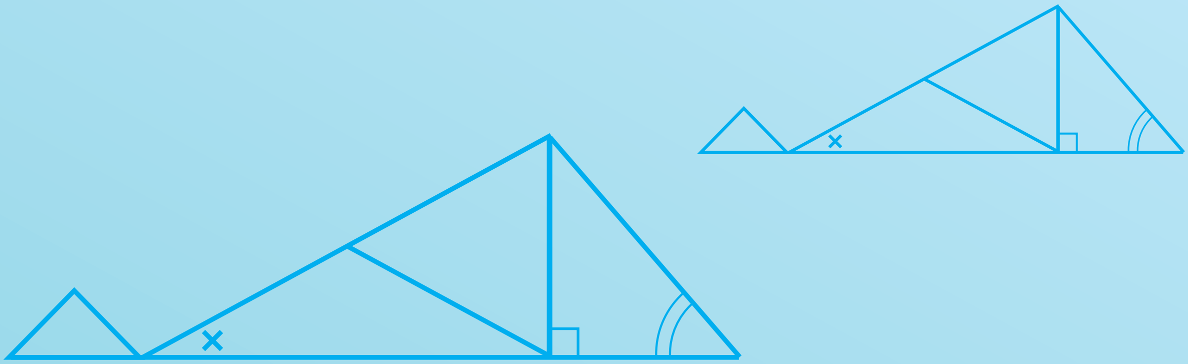
महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ

पाठ्यपुस्तक मंडळ, बालभारती मार्फत इयत्ता १ ली ते १२ वी ई-लर्निंग साहित्य (Audio-Visual) उपलब्ध...

- शेजारील Q.R.Code स्कॅन करून ई-लर्निंग साहित्य मागणीसाठी नोंदणी करा.
- Google play store वरून ebalbharati app डाऊनलोड करून ई लर्निंग साहित्यासाठी मागणी नोंदवा.

www.ebalbharati.in, www.balbharati.in

ebalbharati



महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व
अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ,
पुणे–४११००४.

₹ ७७.००