ગણિત ભાગ-I

ધોરણ - નવમું

ભારતનું સંવિધાન

ભાગ ૪ ક

નાગરિકોના મૂળભૂત કર્તવ્યો

અનુચ્છેદ ૫૧ ક

મૂળભૂત કર્તવ્ય - ભારતના પ્રત્યેક નાગરિકનું એ કર્તવ્ય છે કે તેણે -

(ક) દરેક નાગરિકે સંવિધાનનું પાલન કરવું. સંવિધાનના આદર્શો, રાષ્ટ્રધ્વજ અને રાષ્ટ્રગીતનો આદર કરવો.

(ખ) સ્વાતંત્ર્ય ચળવળની પ્રેરણા આપનારા આદર્શોનું પાલન કરવું.

(ગ) દેશના સાર્વભૌમત્વ, એકતા અને અખંડતા સુરક્ષિત રાખવા પ્રયત્નશીલ રહેવું.

(ઘ) આપણા દેશનું રક્ષણ કરવું, દેશની સેવા કરવી.

(ઙ) દરેક પ્રકારના ભેદભાવને ભૂલીને એકતા અને બંધુત્વની ભાવના વિકસાવવી. સ્ત્રીઓના સન્માનને ઠેસ પહોંચાડનારી પ્રથાઓનો ત્યાગ કરવો.

(ચ) આપણી સંમિશ્ર સંસ્કૃતિના વારસાનું જતન કરવું.

(છ) નૈસર્ગિક પર્યાવરણનું જતન કરવું. સજીવ પ્રાણીઓ પ્રત્યે દયાભાવ રાખવો.

(જ) વૈજ્ઞાનિક દૃષ્ટિ, માનવતાવાદ અને જિજ્ઞાસાવૃત્તિ કેળવવી.

(ઝ) સાર્વજનિક માલમત્તાનું જતન કરવું. હિંસાનો ત્યાગ કરવો.

(ઞ) દેશની ઉત્તરોત્તર પ્રગતિ માટે વ્યક્તિગત તેમજ સામૂહિક કાર્યમાં ઉત્તમતા-શ્રેષ્ઠતાનું સ્તર જાળવી રાખવાનો પ્રયત્ન કરવો.

(ટ) ૬થી ૧૪ વય જૂથના બાળકોને તેમના વાલીએ શિક્ષણની તક પૂરી પાડવી.

શાસન નિર્ણય ક્રમાંક : અભ્યાસ - 2116/(પ્ર.ક્ર.43/16) એસડી-4 દિનાંક 25-4-2016 અન્વયે સ્થાપિત થયેલ સમન્વય સમિતિની દિનાંક 3-3-2017 રોજની બેઠકમાં આ પાઠ્યપુસ્તક નિર્ધારિત કરવાની માન્યતા આપવામાં આવી છે.

ગણિત

ભાગ-I

ધોરણ - નવમું

મહારાષ્ટ્ર રાજ્ય પાઠ્યપુસ્તક નિર્મિતિ અને અભ્યાસક્રમ સંશોધન મંડળ, પુણે - 411 004.

તમારાં સ્માર્ટફોનમાં DIKSHA App દ્વારા પાઠ્યપુસ્તકનાં પહેલા પાનાં પરનાં Q.R. Codeથી ડિઝીટલ પાઠ્યપુસ્તક અને દરેક પાઠમાં આપેલા Q.R. Codeથી તે સંબંધિત પાઠનાં અધ્યયન – અધ્યાપન માટે ઉપયોગી દૃશ્ય-શ્રાવ્ય સાહિત્ય ઉપલબ્ધ થશે.

636KDH

પ્રથમાવૃત્તિ : 2017
પુનર્મુદ્રણ : 2021

© **મહારાષ્ટ્ર રાજ્ય પાઠ્યપુસ્તક નિર્મિતિ અને અભ્યાસક્રમ સંશોધન મંડળ, પુણે 411 004.**

મહારાષ્ટ્ર રાજ્ય પાઠ્યપુસ્તક નિર્મિતિ અને અભ્યાસક્રમ સંશોધન મંડળ પાસે આ પુસ્તકના બધાં હક રહેશે. આ પુસ્તકનો કોઈપણ ભાગ સંચાલક, મહારાષ્ટ્ર રાજ્ય પાઠ્યપુસ્તક નિર્મિતિ અને અભ્યાસક્રમ સંશોધન મંડળની લેખિત પરવાનગી વગર છાપી શકાશે નહિ.

ગણિત વિષયતજ્ઞ સમિતિ

ડૉ. મંગલા નારળીકર (અધ્યક્ષ)
ડૉ. જયશ્રી અત્રે (સદસ્ય)
શ્રી. રમાકાંત સરોદે (સદસ્ય)
શ્રી. દાદાસો સરડે (સદસ્ય)
શ્રી. સંદીપ પંચભાઈ (સદસ્ય)
શ્રીમતી લતા ટિળેકર (સદસ્ય)
શ્રીમતી ઉજ્જવલા ગોડબોલે (સદસ્ય, સચિવ)

સંયોજક : ઉજ્જવલા શ્રીકાંત ગોડબોલે
પ્ર.વિશેષાધિકારી, ગણિત વિભાગ
પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, પુણે.

મુખપૃષ્ઠ અને સજાવટ : ધનશ્રી મોકાશી
સંગણકીય આલેખન : સંદીપ કોળી, મુંબઈ.
અક્ષર ગૂંથણી : સમર્થ ગ્રાફિક્સ, 522, નારાયણ પેઠ, પુણે-30.

ગણિત વિષય – રાજ્ય અભ્યાસમંડળના સદસ્ય

શ્રીમતી પૂજા જાધવ
શ્રી. ગણેશ કોલતે
શ્રી. રામા વ્હન્યાળકર
શ્રીમતી સુવર્ણા દેશપાંડે
શ્રી. ઉમેશ રેળે
શ્રી. આણ્ણાપા પરીટ
શ્રી. શ્રીપાદ દેશપાંડે
શ્રી. રાજેન્દ્ર ચૌધરી
શ્રી. ચંદન કુલકર્ણી
શ્રીમતી અનિતા જાવે
શ્રીમતી બાગેશ્રી ચવ્હાણ
શ્રી. કલ્યાણ કડેકર
શ્રી. સંદેશ સોનવણે
શ્રી. સુજિત શિંદે
ડૉ. હનુમંત જગતાપ
શ્રી. પ્રતાપ કાશિદ
શ્રી. કાશિરામ બાવિસાને
શ્રી. પપ્પુ ગાડે
શ્રી. અન્સાર શેખ
શ્રી. પ્રમોદ ઠોંબરે
શ્રી. પ્રકાશ ઝેંડે
શ્રી. બન્સી હાવળે
શ્રી. શ્રીકાંત રત્નપારખી
શ્રી. સૂર્યકાંત શહાણે
શ્રી. સુરેશ દાતે
શ્રી. પ્રકાશ કાપસે
શ્રી. સલીમ હાશ્મી
શ્રીમતી આર્યા ભિડે
શ્રી. મિલિંદ ભાકરે
શ્રી. જ્ઞાનેશ્વર માશાળકર
શ્રી. લક્ષ્મણ દાવણકર
શ્રી. સુધીર પાટીલ
શ્રી. રાજારામ બંડગર
શ્રીમતી રોહિણી શિર્કે
શ્રી. સાગર સકુડે
શ્રી. પ્રદીપ ગોડસે
શ્રી. રવિન્દ્ર ખંદારે

શ્રીમતી પ્રાજક્તી ગોખલે (નિમંત્રિત સદસ્ય)
શ્રી. વિ. દિ. ગોડબોલે (નિમંત્રિત સદસ્ય)
શ્રીમતી તરૂબેન પોપટ (નિમંત્રિત સદસ્ય)

ભાષાંતર : **શ્રીમતી તરૂબેન પોપટ, ધીરેન મનસુખલાલ દોશી, ધર્મિકા ધીરેન દોશી**

ભાષાંતર સંયોજક : **કેતકી નિતેશ જાની**
વિશેષાધિકારી,
ગુજરાતી વિભાગ
પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, પુણે.

નિર્મિતિ : **શ્રી. સચ્ચિદાનંદ આફળે**
મુખ્ય નિર્મિતિ અધિકારી
સંજય કાંબળે
નિર્મિતિ અધિકારી
પ્રશાંત હરણે
સહાયક નિર્મિતિ અધિકારી

કાગળ : 70 જી.એસ.એમ. ક્રીમવ્હોવ્હ
મુદ્રણાદેશ : N/PB/2017-18/15,000
મુદ્રક : RUNA GRAPHICS, PUNE

પ્રકાશક

શ્રી. વિવેક ઉત્તમ ગોસાવી, નિયંત્રક
પાઠ્યપુસ્તક નિર્મિતિ મંડળ,
પ્રભાદેવી, મુંબઈ - 25.

ભારતનું સંવિધાન

આમુખ

અમે ભારતના લોકો ભારતને એક સાર્વભૌમ સમાજવાદી
બિનસાંપ્રદાયિક લોકતંત્રાત્મક પ્રજાસત્તાક તરીકે સંસ્થાપિત
કરવાનો
તથા તેના સર્વ નાગરિકોને :
સામાજિક, આર્થિક અને રાજકીય ....ન્યાય
વિચાર, અભિવ્યક્તિ, માન્યતા,
ધર્મ અને ઉપાસનાની ....સ્વતંત્રતા
દરજ્જા અને તકની ....સમાનતા
પ્રાપ્ત થાય તેમ કરવાનો
અને તેઓ સર્વમાં
વ્યક્તિનું ગૌરવ અને રાષ્ટ્રની
એકતા અને અખંડતા સુદૃઢ કરે એવી ....બંધુતા
વિકસાવવાનો
ગંભીરતાપૂર્વક સંકલ્પ કરીને

અમારી સંવિધાનસભામાં ૨૬ નવેમ્બર, ૧૯૪૯ના રોજ
આથી આ સંવિધાન અપનાવી, તેને અધિનિયમિત કરી
અમને પોતાને અર્પિત કરીએ છીએ.

રાષ્ટ્રગીત

જનગણમન – અધિનાયક જય હે
ભારત – ભાગ્યવિધાતા.
પંજાબ, સિંધુ, ગુજરાત, મરાઠા,
દ્રાવિડ, ઉત્કલ, બંગ,
વિંધ્ય, હિમાચલ, યમુના, ગંગા,
ઉચ્છલ જલધિતરંગ,
તવ શુભ નામે જાગે, તવ શુભ આશિષ માગે,
ગાહે તવ જયગાથા.
જનગણ મંગલદાયક જય હે,
ભારત – ભાગ્યવિધાતા.
જય હે, જય હે, જય હે,
જય જય જય, જય હે.

પ્રતિજ્ઞા

ભારત મારો દેશ છે. બધા ભારતીયો મારાં ભાઈબહેન છે.

હું મારા દેશને ચાહું છું અને તેના સમૃદ્ધ અને વૈવિધ્યપૂર્ણ વારસાનો મને ગર્વ છે. હું સદાય તેને લાયક બનવા પ્રયત્ન કરીશ.

હું મારાં માતાપિતા, શિક્ષકો અને વડીલો પ્રત્યે આદર રાખીશ અને દરેક જણ સાથે સભ્યતાથી વર્તીશ.

હું મારા દેશ અને દેશબાંધવો પ્રત્યે વફાદારી રાખવાની પ્રતિજ્ઞા લઉં છું. તેમનાં કલ્યાણ અને સમૃદ્ધિમાં જ મારું સુખ સમાયેલું છે.

પ્રસ્તાવના

વિદ્યાર્થીમિત્રો,

ધોરણ નવનાં વર્ગમાં તમારું સ્વાગત !

પ્રાથમિક શિક્ષણનો અભ્યાસક્રમ પૂરો કરીને તમે માધ્યમિક સ્તરે અભ્યાસની શરૂઆત કરી રહ્યાં છો. આઠમા ધોરણ સુધી ગણિતના અભ્યાસ માટે એક જ પાઠ્યપુસ્તક હતું. હવે ગણિત ભાગ I અને ગણિત ભાગ II એવા બે પાઠ્યપુસ્તકોનો તમારે અભ્યાસ કરવાનો છે.

ગણિત ભાગ I ના પાઠ્યપુસ્તકમાં સંખ્યાજ્ઞાન, બીજગણિત ઉપરાંત વ્યાવહારિક ગણિત, અર્થનિયોજન અને માહિતીનું વ્યવસ્થાપન આ ક્ષેત્રના ઘટકોનો અભ્યાસ થશે. આ ભાગ વિદ્યાર્થીઓને અનેક ક્ષેત્રમાં ઉપયોગી થશે. બીજગણિત અને આંકડાશાસ્ત્રની સંકલ્પના ઉચ્ચ શિક્ષણના અભ્યાસનો પાયો છે.

આ પાઠ્યપુસ્તકમાં સંકલ્પના સમજી શકાય તે માટે અનેક કૃતિઓ આપી છે. આ કૃતિઓ તમારે કરવાની છે. ઈન્ટરનેટની મદદથી પુસ્તકમાંની સંકલ્પનાની વધુ માહિતી અને ઉદાહરણો મેળવવાના છે. પાઠ્યપુસ્તકનું ઝીણવટ ભર્યું વાંચન, કૃતિયુક્ત અધ્યયન અને પ્રૅકટિસ આ ત્રિસૂત્રની મદદથી ગણિતની યાત્રા આનંદદાયક રીતે પાર પાડશો એમાં લેશમાત્ર શંકા નથી.

ચાલો તો પછી ! શિક્ષક, વાલી, મિત્રો, ઇન્ટરનેટ આ બધાનો સાથ લઈને ગણિતનો અભ્યાસ કરીએ. આ અભ્યાસ માટે તમને અનેક શુભેચ્છાઓ !

(ડૉ. સુનિલ મગર)
સંચાલક
મહારાષ્ટ્ર રાજ્ય પાઠ્યપુસ્તક નિર્મિતિ
અને અભ્યાસક્રમ સંશોધન મંડળ, પુણે.

પુણે
તા. : ૨૮ એપ્રિલ ૨૦૧૭, અખાત્રીજ
ભારતીય સૌર દિનાંક : ૮ વૈશાખ ૧૯૩૯

ધોરણ-નવમું ગણિત ભાગ I અભ્યાસક્રમ વિદ્યાર્થીઓમાં નીચેની ક્ષમતા વિકસિત થશે.

ક્ષેત્ર	ઘટક	ક્ષમતા વિધાનો
1. સંખ્યાજ્ઞાન	1.1 ગણ	● સંખ્યા પ્રણાલિમાં ગણ અને ઉપગણ નક્કી કરતાં આવડે . ● સાન્ત અને અનંત ગણ ઓળખતાં આવડે ● ગણ દર્શાવવા માટે વૅન આકૃતિનો ઉપયોગ કરતાં આવડે.
	1.2 વાસ્તવિક સંખ્યા અને વર્ગકરણી	● સંખ્યારેખા વિષયક ઉદાહરણો તૈયાર કરતાં આવડે. ● સંખ્યારેખા પરના દરેક બિંદુ સાથે સંબંધિત એક વાસ્તવિક સંખ્યા હોય છે તે સમજે. ● વર્ગકરણી ઓળખે અને તેના પર ગાણિતિક ક્રિયા કરતાં આવડે.
2. બીજગણિત	2.1 બહુપદી	● બહુપદી એટલે શું તે સમજે અને તેના પરની ગાણિતિક ક્રિયાઓ કરતાં આવડે.
	2.2 બે ચલવાળા રેખિક સમીકરણો	● બે ચલનો ઉપયોગ કરીને શાબ્દિક ઉદાહરણો ઉકેલતાં આવડે.
3. વ્યાવહારિક ગણિત	3.1 અર્થનિયોજન	● વિવિધ પ્રકારની કર આકારણી (ગણતરી) સમજતા અને કર આકારણી કરતાં આવડે. ● પગારદારોના આવકવેરાની ગણતરી કરતાં આવડે.
	3.2 ગુણોત્તર પ્રમાણ	● સમાન ગુણોત્તરના સિધ્ધાંતનો ઉપયોગ કરતાં આવડે. ● સમપ્રમાણ અને વ્યસ્તપ્રમાણ પર આધારિત ઉદાહરણો ઉકેલતાં આવડે.
4. માહિતીનું વ્યવસ્થાપન (આંકડાશાસ્ત્ર)	4.1 આવૃત્તિ વિતરણ	● વર્ગીકૃત અને અવર્ગીકૃત આવૃત્તિ વિતરણ કોઠો તૈયાર કરતાં આવડે. ● સંચિત આવૃત્તિ કોઠો તૈયાર કરતાં આવડે.
	4.2 કેન્દ્રીય પ્રવૃત્તિના પરિમાણો	● આપેલી સામગ્રી પરથી કેન્દ્રીય પ્રવૃત્તિના પરિમાણો શોધી તેનો ઉપયોગ કરતાં આવડે.

શિક્ષકો માટે સૂચના

ધોરણ નવના ગણિત ભાગ - I પાઠ્યપુસ્તકમાં આવેલી મૂળભૂત સંકલ્પનાઓ, મૂર્તથી અમૂર્તિકરણની દૃષ્ટિએ વિકસાવેલા સંબોધ, અર્થશાસ્ત્ર સંબંધિત સંકલ્પનાઓ, આંકડાશાસ્ત્રનો વિસ્તાર આ સર્વ બાબતોનો શિક્ષકોએ ઝીણવટભર્યો અને ઊંડાણથી અભ્યાસ કરવો. વર્ગમાં અધ્યાપન કરતી વખતે પ્રાત્યક્ષિકો, કૃતિઓ, ચર્ચા, પ્રશ્નોત્તરો, સામૂહિક ઉપક્રમો જેવી અનેક પધ્ધતિ વાપરવી અપેક્ષિત છે. તે માટે શિક્ષકોએ પાઠ્યપુસ્તકનું ધ્યાનપૂર્વક વાંચન કરી તેમાંની વિવિધ કૃતિઓ વિદ્યાર્થીઓ પાસેથી કરાવી લેવી. તે સાથે તેવી અનેક બીજી કૃતિઓ તૈયાર કરવા પ્રયત્ન કરવો.

ગણિતમાં ફકત ગણતરી કરતાં તેમાંની મૂળ સંકલ્પના/સંબોધની વિચારશક્તિને પ્રોત્સાહન મળે તેવા વિવિધ ઉદાહરણોનો પાઠ્યપુસ્તકમાં સમાવેશ કર્યો છે. એવા જ અનેક ઉદાહરણો શિક્ષકો અને વિદ્યાર્થીઓએ મળીને તૈયાર કરવા. પાઠ્યપુસ્તકમાં આવ્હાનાત્મક ઉદાહરણો તારાંકિત કરીને આપ્યાં છે. વિદ્યાર્થીઓએ અલગ વિચાર કરીને પણ તર્કશુધ્ધ રીતે ઉદાહરણ ઉકેલ્યું હોય તો શિક્ષકોએ તેને પ્રોત્સાહન આપવું.

મૂલ્યમાપન કરતી વખતે મુક્ત પ્રશ્નો અને કૃતિપત્રિકાનો વિચાર શિક્ષકોએ કરવો અપેક્ષિત છે. આવી મૂલ્યમાપન પધ્ધતિ વિકસાવવાનો શિક્ષકોએ પ્રયત્ન કરવો.

પાઠ્યપુસ્તકમાં નમૂના પ્રાત્યક્ષિકોની યાદી આપેલી છે. તે સિવાય તમે પોતે અનેક પ્રાત્યક્ષિકો તૈયાર કરી શકો છો. પાઠ્યપુસ્તકમાં આપેલી વિવિધ કૃતિઓ આ પ્રાત્યક્ષિકોમાં અંતર્ભૂત છે. તે પણ વિદ્યાર્થીઓ પાસે કરાવવા. તેના પર આધારિત મૂલ્યમાપન પધ્ધતિનો ઉપયોગ આગળના અભ્યાસના ક્ષમતા-વિકસન માટે જરૂર થશે. એવી અમોને આશા છે.

નમૂના પ્રાત્યક્ષિકોની યાદી

(1) આપણા વર્ગના બધા વિદ્યાર્થીઓને ગણ, એ જ સાર્વત્રિક ગણ માનીને ખો-ખો, કબડ્ડી જેવી કોઈપણ બે રમત રમતાં વિદ્યાર્થીઓનાં ગણ વૅન આકૃતિ દ્વારા દર્શાવવા.

(2) સંખ્યારેખા પર $2 + \sqrt{3}$, $5 - \sqrt{2}$ વગેરે સંખ્યાઓ દર્શાવવી.

(3) ત્રણ કે ચાર ઘાતવાળી બહુપદીને રેખિક બહુપદી વડે ભાગવાની જુદી જુદી રીત વાપરી, દર વખતે જવાબ એક જ આવે છે ને? તે ચકાસવું.

(4) આવકવેરો ભરતી વ્યક્તિનું વિવરણપત્ર (વાર્ષિક આવક, રોકાણ વગેરે બાબતો) આપેલું હોય, તે પરથી તેને ભરવાં પડતાં આવકવેરાની ગણતરી કરવી.

(5) આપેલી સંખ્યાત્મક માહિતી પરથી વર્ગીકૃત આવૃત્તિ વિતરણ કોઠો તૈયાર કરવો.

(6) સહજ રીતે મળતાં દવાના પાકિટ ઉપરની માહિતી પરથી તેમાંના ઘટક દ્રવ્યોનું શતમાનમાં પ્રમાણ શોધવું.

(7) એકાદ આવ્હાનાત્મક શાબ્દિક ઉદાહરણ બે ચલનો ઉપયોગ કરીને ઉકેલવું.

અનુક્રમણિકા

પ્રકરણ		પૃષ્ઠ ક્ર.
1.	ગણ	1 થી 18
2.	વાસ્તવિક સંખ્યા	19 થી 35
3.	બહુપદી	36 થી 56
4.	ગુણોત્તર અને પ્રમાણ	57 થી 79
5.	બે ચલવાળા રેખિક સમીકરણો	80 થી 92
6.	અર્થનિયોજન	93 થી 107
7.	આંકડાશાસ્ત્ર	108 થી 128
•	ઉત્તરસૂચિ	129 થી 136

1 ગણ

ચાલો શીખીએ.

- ગણ : ઓળખ
- ગણના પ્રકાર
- વૅન આકૃતિ
- સમાન ગણ-ઉપગણ
- સાર્વત્રિક ગણ, પૂરક ગણ
- છેદ ગણ, યોગ ગણ
- ગણમાંના ઘટકોની સંખ્યા

યાદ કરીએ.

નીચેના ચિત્રો જુઓ. તેમાં તમારા પરિચિત વસ્તુસમૂહો આપ્યાં છે.

				1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...
ફુલોનો ગુચ્છો	ચાવીનો ઝૂડો	પક્ષીઓનું ઝુંડ	નોટબુકની થપ્પી	સંખ્યાઓનો સમૂહ

ઉપરના દરેક વસ્તુ-સમૂહો માટે આપણે વિશિષ્ટ શબ્દ વાપરીએ છીએ. આ બધાં ઉદાહરણોમાં સમૂહના ઘટકો નિશ્ચિત અને ખાતરીપૂર્વક કહી શકાય છે. તેથી વસ્તુઓના આવા સમૂહને 'ગણ' કહે છે.

હવે આ સમૂહ જુઓ. 'ગામનાં આનંદી બાળકો', 'વર્ગના હોંશિયાર વિદ્યાર્થીઓ' આ બન્ને ઉદાહરણમાં 'આનંદી' અને 'હોંશિયાર' આ શબ્દોનો અર્થ સાપેક્ષ છે. એટલે કે 'આનંદી વૃત્તિ' અને 'હોંશિયાર' નો નિશ્ચિત અર્થ ખાતરીપૂર્વક કહી શકાય નહિ. તેથી આ સમૂહોને 'ગણ' કહેવાય નહીં.

હવે નીચેના કેટલાંક ઉદાહરણો જુઓ. તેમાંના કયા સમૂહોને 'ગણ' કહી શકાય તે કહો.

(1) અઠવાડિયાના સાત વાર

(2) એક વર્ષના મહિના

(3) વર્ગના હોંશિયાર વિદ્યાર્થીઓ

(4) પ્રથમ 10 પ્રાકૃતિક સંખ્યા

(5) મહારાષ્ટ્રના મજબૂત ગઢ અને કિલ્લા

(6) આપણી સૂર્યમાળાના ગ્રહો

જાણી લઈએ.

ગણ (Sets)

જે સમૂહના ઘટકો નિશ્ચિત હોય અને ખાતરીપૂર્વક કહી શકાય તેવા સમૂહોને 'ગણ' કહે છે.

ગણને નામ આપવા માટે સામાન્ય રીતે A, B, C, ..., Z પૈકી અંગ્રેજી કેપીટલ વર્ણાક્ષરો વપરાય છે.

ગણના ઘટકો દર્શાવવા માટે a, b, c,... પૈકી અંગ્રેજી નાના વર્ણાક્ષરો (small letters) વપરાય છે.

'a ગણ A નો ઘટક છે' તે '$a \in A$' એમ લખાય છે. અને 'a ગણ A નો ઘટક નથી' તે '$a \notin A$' એમ લખાય છે.

હવે આપણે સંખ્યાગણ જોઈએ.

N = { 1, 2, 3, . . .} આ પ્રાકૃતિક સંખ્યાગણ (Set of natural numbers) છે.

W = {0, 1, 2, 3, . . .} આ પૂર્ણ સંખ્યાગણ (Set of whole numbers) છે.

I = {..., –3, –2, –1, 0, 1, 2, ...} આ પૂર્ણાંક સંખ્યાગણ (Set of integers) છે.

Q એ સંમેય સંખ્યાગણ (Set of rational numbers) છે.

R એ વાસ્તવિક સંખ્યાગણ (Set of real numbers) છે.

ગણ લખવાની પદ્ધતિ

ગણ લખવાની બે પદ્ધતિઓ છે.

(1) યાદી પદ્ધતિ (Listing method or roster method)

આ પદ્ધતિમાં ગણના બધા ઘટકો 'છગડિયા કૌંસમાં' લખાય છે. દરેક ઘટક જુદો છે તે દર્શાવવા ઘટકોની વચ્ચે 'અલ્પવિરામ' મૂકાય છે. અહીં ઘટકોનો ક્રમ મહત્ત્વનો નથી પણ બધા ઘટકો દર્શાવવા જરૂરી છે.

દા.ત. 1 થી 10 સુધીની વિષમ સંખ્યાઓનો ગણ ધારો કે A છે.

તો, A = {3, 5, 7, 9} અથવા A = {7, 3, 5, 9}

કોઈ એક ઘટક એકથી વધારે વખત આવે તો પણ તે એક જ વખત લખાય છે. દા.ત. remember શબ્દમાં e અક્ષર ત્રણ વખત r, m બે વખત આવે છે છતાં તેનો ગણ {r, e, m, b} આવશે.

(2) ગુણધર્મ પદ્ધતિ (Rule method or set builder form)

આ પદ્ધતિમાં ઘટકોની યાદી ન લખતાં, સામાન્ય ઘટક 'ચલ' વડે દર્શાવીને તેના પછી ઊભી લીટી કરી પછી ચલનો ગુણધર્મ લખવામાં આવે છે.

ઉદા. $A = \{x \mid x \in N, 1 < x < 10\}$ નું વાંચન 'A ગણ એવા x ઘટકોનો ગણ છે કે, x એ 1 અને 10 ની વચ્ચે આવતી પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે' એમ કહેવામાં આવે છે.

ઉદા. B = { x | x એ 1 થી 10 ની વચ્ચે આવતી મૂળ સંખ્યા છે.} ગણ B માં 1 થી 10 ની વચ્ચે આવતી બધી મૂળ સંખ્યાઓનો સમાવેશ થશે તેથી {2, 3, 5, 7} એમ યાદીની રીતે લખાય છે.

Q એ સંમેય સંખ્યાનો ગણ આ પ્રમાણે લખાય છે.

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in I, q \neq 0 \right\}$$

આ ગણનું વાંચન 'Q' એ $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાંની એવી સંખ્યાઓનો ગણ છે કે, જ્યાં p એ કોઈપણ પૂર્ણાંક સંખ્યા અને q એ શૂન્યેતર પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.

નમૂના ઉદાહરણો : નીચેના દરેક ઉદાહરણોમાંના ગણ બન્ને પધ્ધતિથી લખ્યાં છે.

ગુણધર્મ પધ્ધતિ	યાદી પધ્ધતિ
A = { x| x એ DIVISION શબ્દમાંના અક્ષરો છે.}	A = {D, I, V, S, O, N}
B = { y | y એ એવી સંખ્યા છે કે $y^2 = 9$}	B = { −3, 3}
C = {z | z એ 5 ની ગુણક (ઘડિયો) અને 30 કરતાં નાની સંખ્યા છે. }	C = { 5, 10, 15, 20, 25}

ઉદા. : આપેલા કોઠામાંની ખાલી જગ્યા યોગ્ય રીતે પૂરો.

યાદી પધ્ધતિ	ગુણધર્મ પધ્ધતિ
A = { 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14}	A = {x|x એ 15 થી નાની સમ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.}
....	B = { x|x એ 1 થી 20 માં આવતી પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા છે.}
C = { a, e, i, o, u}	....
....	D = { y| y આ ઇંદ્રધનુષના રંગ છે.}
....	P = {x |x એ પૂર્ણાંક સંખ્યાગણ આ પ્રમાણે છે કે, $-3 < x < 3$}
M = {1, 8, 27, 64, 125,......}	M ={x |x એ ધન પૂર્ણાંકના ઘન છે.}

મહાવરાસંગ્રહ 1.1

(1) નીચેના ગણ યાદીની રીતે લખો.

(i) સમ પ્રાકૃતિક સંખ્યાનો ગણ
(ii) 1 થી 50 વચ્ચેની સમ મૂળ સંખ્યાનો ગણ
(iii) બધી ઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યાનો ગણ
(iv) સંગીતના સાત મૂળ સ્વરોનો ગણ

(2) નીચે ચિહ્નમાં આપેલાં વિધાનો શબ્દમાં લખો.

(i) $\frac{4}{3} \in Q$ (ii) $-2 \notin N$ (iii) P = {p | p આ વિષમ સંખ્યા છે.}

(3) કોઈપણ બે ગણ યાદીની રીતે અને તેને જ ગુણધર્મની રીતે લખો.

(4) નીચેના ગણ યાદીની રીતે લખો.

(i) ભારતીય સૌરવર્ષના બધા મહિનાઓનો ગણ.

(ii) 'COMPLEMENT' શબ્દમાંના અક્ષરોનો ગણ.

(iii) માનવીની બધી જ્ઞાનેંદ્રિયોઓનો ગણ.

(iv) 1 થી 20 વચ્ચેની મૂળ સંખ્યાઓનો ગણ

(v) પૃથ્વી પર આવેલા ખંડનો ગણ.

(5) નીચેના ગણ ગુણધર્મની રીતે લખો.

(i) A = { 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100}

(ii) B = { 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48}

(iii) C = {S, M, I, L, E}

(iv) D = {રવિવાર, સોમવાર, મંગળવાર, બુધવાર, ગુરૂવાર, શુક્રવાર, શનિવાર}

(v) X = {a, e, t}

જાણી લઈએ.

ગણના પ્રકાર (Types of sets)

ગણનું નામ	વ્યાખ્યા	ઉદાહરણ
એક ઘટક ગણ (Singleton Set)	જે ગણમાં ફક્ત એક જ ઘટક (સભ્ય) હોય તેને 'એક ઘટક ગણ' કહે છે.	A = {2} A સમ મૂળ સંખ્યાનો ગણ છે.
ખાલી ગણ (Null Set) (Empty Set)	જે ગણમાં આપેલા ગુણધર્મ ધરાવતો એક પણ ઘટક ન હોય તેને ખાલી ગણ (રિક્ત ગણ) કહે છે. { } અથવા ϕ (ફાય) આ ચિહ્નને દર્શાવાય છે.	B = {x|x એ 2 અને 3 વચ્ચે આવતી પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.} ∴ B = { } અથવા ϕ
સાન્ત ગણ (Finite Set)	જે ગણ ખાલી છે અથવા જે ગણમાં ઘટકોની સંખ્યા મર્યાદિત છે અને ગણી શકાય છે તેને 'સાન્ત ગણ' કહે છે.	C = {p| p એ 1 થી 22 ની વચ્ચે આવતી 4 વડે વિભાજ્ય સંખ્યા છે.} C = {4, 8, 12, 16, 20}
અનંત ગણ (Infinite Set)	જે ગણમાં ઘટકોની સંખ્યા અમર્યાદિત (અગણિત) છે અને ઘટકોની સંખ્યા નિશ્ચિત કહી શકાય નહિ તેને 'અનંત ગણ' કહે છે.	N = {1, 2, 3, . . . }

ઉદા.: આપેલાં ગણ યાદીની રીતે લખી તેનું સાન્ત અને અનંત ગણમાં વર્ગીકરણ કરો.

(i) $A = \{x \mid x \in N$ અને x વિષમ સંખ્યા છે.$\}$ (ii) $B = \{x \mid x \in N$ અને $3x - 1 = 0\}$

(iii) $C = \{x \mid x \in N$ અને x એ 7 વડે વિભાજ્ય સંખ્યા છે.$\}$

(iv) $D = \{(a, b) \mid a, b \in W, a + b = 9\}$ (v) $E = \{x \mid x \in I, x^2 = 100\}$

(vi) $F = \{(a, b) \mid a, b \in Q, a + b = 11\}$

ઉકેલ : (i) $A = \{x \mid x \in N$ અને x એ વિષમ સંખ્યા છે.$\}$

$A = \{1, 3, 5, 7, ...\}$ આ અનંત ગણ છે.

(ii) $B = \{x \mid x \in N$ અને $3x - 1 = 0\}$

$3x - 1 = 0 \quad \therefore 3x = 1 \quad \therefore \quad x = \frac{1}{3}$

પરંતુ $\frac{1}{3} \notin N \quad \therefore B = \{ \quad \} \quad \therefore$ B એ સાન્તગણ છે.

(iii) $C = \{x \mid x \in N$ અને x એ 7 વડે વિભાજ્ય સંખ્યા છે.$\}$

$C = \{7, 14, 21, . . . \}$ આ અનંત ગણ છે.

(iv) $D = \{(a , b) \mid a, b \in W, a + b = 9\}$

આપણે a અને b ની એવી જોડીઓ શોધીએ કે a, b પૂર્ણ સંખ્યાઓ હોય અને a + b = 9 થાય. અહીં પ્રથમ a અને પછી b ની કિંમત, એ પ્રમાણે ક્રમિક જોડીઓનો ગણ D યાદીની રીતે નીચે પ્રમાણે લખી શકાય છે.

$D = \{(0, 9), (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (7, 2), (8, 1), (9, 0)\}$

આ ગણના ઘટકોની સંખ્યા નિશ્ચિત છે અને જોડીઓની સંખ્યા ગણી શકાય છે.

$\therefore$ D ગણ એ સાન્તગણ છે.

(v) $E = \{x \mid x \in I, x^2 = 100\}$

$E = \{-10, 10\}$. $\quad \therefore$ E એ સાન્તગણ છે.

(vi) $F = \{(a, b) \mid a, b \in Q, a + b = 11\}$

$F = \{(6, 5), (3, 8), (3.5, 7.5), (-15, 26), . . .\}$ આવી અસંખ્ય જોડીઓ મળે છે.

$\therefore$ F અનંત ગણ છે.

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

સંખ્યાના N, W, I, Q, R આ બધા અનંત ગણ છે.

જાણી લઈએ.

સમાન ગણ (Equal sets)

ગણ A નો દરેક ઘટક ગણ B માં અને ગણ B નો દરેક ઘટક. ગણ A માં હોય તો તેને 'સમાન ગણ' કહે છે. 'A અને B સમાન ગણ છે' તે ચિહ્નમાં A = B લખાય છે.

ઉદા. (1) A = { x | x એ 'listen' શબ્દમાંના અક્ષર છે.} ∴ A = { l, i, s, t, e, n}

B = { y | y એ 'silent' શબ્દમાંના અક્ષર છે.} ∴ B = { s, i, l, e, n, t}

અહીં A અને B ના ઘટકોનો ક્રમ જુદો છે પણ ઘટકો સમાન છે. એટલે જ, A અને B એ સમાન ગણ છે. એટલે જ, A = B છે.

ઉદા. (2) A = {x | x = 2n, $n \in$ N, $0 < x \leq 10$}, A = {2, 4, 6, 8, 10}

B = { y | y એ સમસંખ્યા છે, $1 \leq y \leq 10$}, B = {2, 4, 6, 8, 10}

∴ A અને B એ સમાન ગણ છે.

હવે નીચેના ગણનો વિચાર કરીએ.

C = {1, 3, 5, 7} D = { 2, 3, 5, 7}

C અને D સમાન ગણ છે એમ કહી શકાય કે? ના.

કારણ $1 \in C$, $1 \notin D$, $2 \in D$, $2 \notin C$

એટલે કે C અને D સમાન ગણ નથી. એટલે જ, $C \neq D$

ઉદા. (3) જો A = {1, 2, 3} અને B = { 1, 2, 3, 4}તો $A \neq B$ છે તે ચકાસો.

ઉદા. (4) A = {x | x એ મૂળસંખ્યા અને $10 < x < 20$} અને B = {11, 13, 17, 19}

અહીં A = B છે તેની ખાતરી કરો.

મહાવરાસંગ્રહ 1.2

(1) નીચેના પૈકી સમાન ગણ કયા અને કયા સમાન નથી તે સકારણ લખો.

A = { x | $3x - 1 = 2$}

B = { x | x પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે પણ x મૂળ કે સંયુક્ત સંખ્યા નથી.}

C = {x | $x \in$ N, $x < 2$}

(2) A અને B સમાન ગણ છે સકારણ લખો.

A = સમ હોય તેવી મૂળ સંખ્યા B = {x | $7x - 1 = 13$}

(3) નીચેના પૈકી 'ખાલી ગણ' કયા તે સકારણ લખો.

(i) A = { a | a શૂન્યથી નાની પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.}

(ii) B = {x | $x^2 = 0$} (iii) C = { x | $5x - 2 = 0$, $x \in$ N}

(4) નીચેના પૈકી સાન્ત ગણ અને અનંત ગણ કયા? તે સકારણ લખો.

(i) A = { $x \mid x < 10$, x એ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.}

(ii) B = {$y \mid y < -1$, y એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.}

(iii) C = તમારી શાળાના ધોરણ 9 ના વિદ્યાર્થીઓનો ગણ.

(iv) તમારા ગામના રહેવાસીઓનો ગણ.

(v) પ્રયોગશાળામાંના સાધનોનો ગણ.

(vi) પૂર્ણ સંખ્યાઓનો ગણ

(vii) સંમેય સંખ્યાઓનો ગણ.

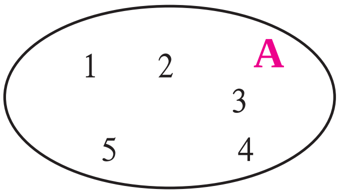
જાણી લઈએ.

વૅન આકૃતિ (Venn diagrams)

ગણ દર્શાવવા માટે બંધ આકૃતિઓનો ઉપયોગ પ્રથમ વખત બ્રિટિશ તર્કશાસ્ત્રી 'જહૉન વૅન' દ્વારા થયો. જુદા જુદા ગણ વચ્ચેના સંબંધ સમજવા માટે અને ગણ પર આધારિત ઉદાહરણો ઉકેલવા માટે વૅનઆકૃતિનો (વૅન-ચિત્ર) ઉપયોગ થાય છે. વૅન આકૃતિ દ્વારા ગણ કેવી રીતે દર્શાવાય છે તે નીચેના ઉદાહરણો પરથી સમજીએ.

ઉદા. A = { 1, 2, 3, 4, 5}

નીચે ગણ A ની વૅન આકૃતિ દર્શાવી છે.

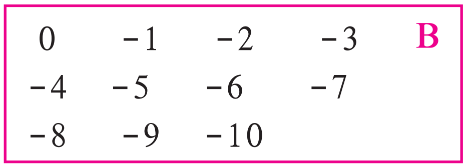


1834-1923

તર્કશાસ્ત્ર અને સંભાવના આ વિષયોને ગણિતનું રૂપ આપવાનું કામ સૌ પ્રથમ 'જહૉન વૅને' કર્યુ. તેમનું પ્રસિદ્ધ પુસ્તક "લોજીક ઑફ ચાન્સ (Logic of Chance) છે."

B = {$x \mid -10 \leq x \leq 0$, x પૂર્ણાંક}

બાજુની ' વૅન આકૃતિ' ગણ B દર્શાવે છે.



ઉપગણ (પેટા ગણ - Subset)

જો A અને B બે એવા ગણ હોય કે, ગણ B નો દરેક ઘટક, ગણ A નો પણ ઘટક હોય તો ગણ B ને ગણ A નો ઉપગણ કહે છે. તે ચિહ્નમાં $B \subseteq A$ અને તેનું વાંચન 'B ઉપગણ A' અથવા 'B એ A નો ઉપગણ છે' એમ કરાય છે.

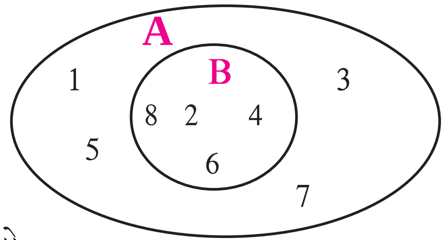
ઉદા.(1) A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

B = {2, 4, 6, 8}

B નો દરેક ઘટક A નો પણ ઘટક છે.

તેથી $B \subseteq A$.

આ માહિતી વૅન આકૃતિ દ્વારા કેવી રીતે દર્શાવી છે તે જુઓ.



કૃતિ : વર્ગમાંના વિદ્યાર્થીઓનો ગણ અને તે જ વર્ગમાંના 'તરતા આવડે છે' એવા વિદ્યાર્થીઓનો ગણ વૅન આકૃતિ વડે દર્શાવ્યો છે.

તે જ પ્રમાણે નીચેના ઉપગણો માટે વૅન આકૃતિ દોરો.

(1) (i) વર્ગના વિદ્યાર્થીઓનો ગણ.

(ii) વર્ગમાંના સાયકલ ચલાવતાં વિદ્યાર્થીઓનો ગણ.

(2) નીચે કેટલાંક ફળોનો એક ગણ આપેલો છે. તે પરથી નીચેના ઉપગણ લખો.

{જામફળ, સંતરું, કેરી, ફણસ, ચીકુ, જાંબુ, સીતાફળ, પપૈયું, કરવંદા}

નીચેના ઉપગણ વૅન આકૃતિ વડે દર્શાવો

(i) એક બી હોય તેવા ફળો (ii) અનેક બી હોય તેવા ફળો

કેટલાંક વધુ ઉપગણ જોઈએ.

ઉદા. (2) N = પ્રાકૃતિક સંખ્યાગણ. I = પૂર્ણાંક સંખ્યા ગણ.

અને $N \subseteq I$, કારણ બધી પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ છે જ.

ઉદા. (3) P = { x | x એ 25 નું વર્ગમૂળ છે.} $S = \{ y \mid y \in I, -5 \leq y \leq 5\}$

ગણ P યાદીની રીતે લખીએ. $P = \{-5, 5\}$

ગણ S યાદીની રીતે લખીએ. $S = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

અહીં P નો દરેક ઘટક ગણ S માં છે.

$\therefore P \subseteq S$

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

(i) દરેક ગણ પોતાના ઉપગણ હોય છે. એટલે જ, $A \subseteq A$

(ii) ખાલી ગણ એ બધા ગણનો ઉપગણ હોય છે. એટલે જ, $\phi \subseteq A$

(iii) જો $A = B$ તો $A \subseteq B$ અને $B \subseteq A$

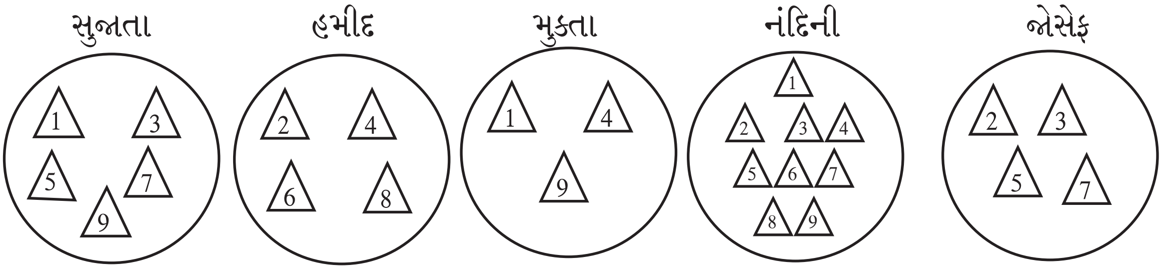
(iv) જો $A \subseteq B$ અને $B \subseteq A$ તો $A = B$

ઉદા. $A = \{ 1, 3, 4, 7, 8\}$ આ ગણના બધા ઉપગણ લખો.

જેમ કે, $P = \{ 1, 3\}$, $T = \{4, 7, 8\}$, $V = \{1, 4, 8\}$, $S = \{1, 4, 7, 8\}$

અહીં અનેક ઉપગણ (પેટાગણ) તૈયાર કરી શકાય છે. તેમાંથી કોઈપણ 5 ઉપગણ લખો.

કૃતિ : દરેક વિદ્યાર્થીને કાગળના સરખા આકારના 9 ત્રિકોણ અને એક થાળી આપવી. ત્રિકોણ પર 1 થી 9 સુધીની સંખ્યાઓ લખવી. હવે દરેક પોતાની થાળીમાં સંખ્યા લખેલાં ત્રિકોણ મૂકવા કહો. તેથી દરેકની પાસે થાળીમાં તૈયાર થયેલો 'ઉપગણ' છે. દા.ત.



સુજાતા, હમીદ, મુક્તા, નંદિની અને જોસેફની થાળીઓમાં કઈ કઈ સંખ્યાઓ દેખાય છે તે જુઓ. પ્રત્યેક જણે કયો વિચાર કરીને સંખ્યાઓ પસંદ કરી છે તે ઓળખો અને દરેક ગણ ગુણધર્મની રીતે અને યાદીની રીતે લખો.

ચાલો, ચર્ચા કરીએ.

ઉદા. નીચે કેટલાંક ગણ આપેલાં છે.

$A = \{ \ldots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$ $B = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$C = \{\ldots, -12, -6, 0, 6, 12, 18\ldots\}$ $D = \{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots\}$

$I = \{ \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

તે પરથી નીચેના કયા વિધાનો સત્ય છે તેની ચર્ચા કરો.

(i) A એ B, C, D દરેક ગણનો ઉપગણ છે. (ii) B એ ઉપરના બધા ગણનો ઉપગણ છે.

જાણી લઈએ.

સાર્વત્રિક ગણ (વિશ્વ ગણ)(Universal set)

આપણે જે ગણોનો વિચાર કરવાના છીએ તે બધા ગણોનો સમાવેશ કરે તેવો એક મોટો ગણ નિશ્ચિત કરીએ તેને **સાર્વત્રિક ગણ (વિશ્વ ગણ)** કહે છે. સાર્વત્રિક ગણમાં ન આવતા સભ્યોનો વિચાર કરવાનો નહિ. આ નિશ્ચિત કરેલાં ગણનાં, બાકીના ગણ ઉપગણ બને છે.

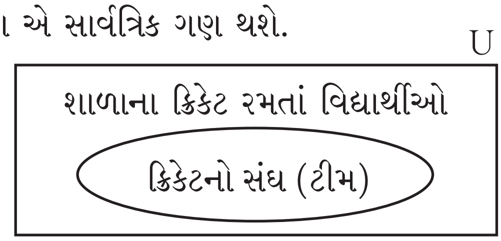
ઉદા. **(1)** ધારો કે શાળામાં ધોરણ 9 ના સતત ગેરહાજર રહેતાં વિદ્યાર્થીઓનો અભ્યાસ કરવો છે. તેથી તે ગણ શાળાના ધોરણ 9 ના બધા જ વિદ્યાર્થીઓનો ગણ સાર્વત્રિક ગણ લઈ શકાશે અથવા શાળાના બધાં જ વિદ્યાર્થીઓનો ગણ સાર્વત્રિક ગણ તરીકે લઈ શકાશે.

હવે બીજું ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદા. (2) આપણી શાળાના ક્રિકેટ રમતાં ખેલાડીઓમાંથી 15 ખેલાડીઓનો એક સંઘ (ટીમ) પસંદ કરવાનો છે. તો શાળાના ક્રિકેટ રમતાં બધા વિદ્યાર્થીઓનો ગણ એ સાર્વત્રિક ગણ થશે.

તેમાંથી 15 ખેલાડીઓનો સંઘ (ટીમ) એ સાર્વત્રિક ગણનો ઉપગણ થશે.

સાર્વત્રિક ગણ સામાન્ય રીતે 'U' વડે દર્શાવાય છે.

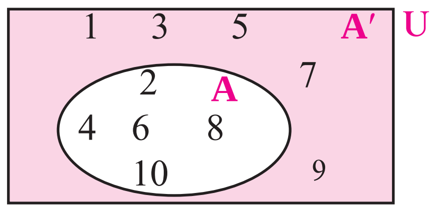


નોંધ : વૅન આકૃતિમાં સાર્વત્રિક ગણ દર્શાવવા માટે લંબચોરસ દોરવામાં આવે છે.

પૂરક ગણ (Complement of a set)

ધારો કે, U સાર્વત્રિક ગણ છે. જો $B \subseteq U$, તો ગણ B માં ન હોય પરંતુ U માં હોય તેવા ઘટકોના ગણને B નો પૂરકગણ કહે છે. ગણ B નો પૂરકગણ B' અથવા B^C એમ લખાય છે.

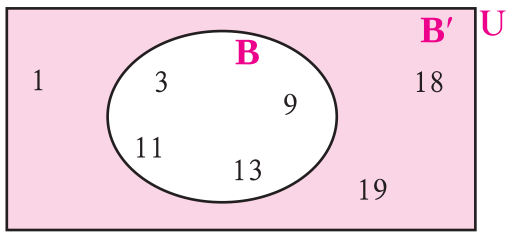
$\therefore$ $B' = \{x \mid x \in U$, અને $x \notin B\}$ એ રીતે B' નું વર્ણન કરી શકાય.



ઉદા. (1) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$\therefore A' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$



ઉદા. (2) ધારો $U = \{1, 3, 9, 11, 13, 18, 19\}$

$B = \{3, 9, 11, 13\}$

$\therefore B' = \{1, 18, 19\}$

હવે $(B')'$ શોધો. તે પરથી શું તારણ કાઢશો?

$(B')'$ ગણ એટલે B'માં ન હોય પરંતુ U માં હોય તેવા ઘટકોનો ગણ.

$(B')' = B$ છે કે?

આ માહિતી વૅન આકૃતિ પરથી સમજી લો.

પૂરક ગણનો પૂરક ગણ એટલે જ આપેલો ગણ હોય છે.

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

પૂરક ગણના ગુણધર્મો

(i) A અને A' માં એક પણ સામાન્ય ઘટક હોતો નથી.

(ii) $A \subseteq U$ અને $A' \subseteq U$

(iii) સાર્વત્રિક ગણનો પૂરક ગણ ખાલી ગણ હોય છે. $U' = \phi$

(iv) ખાલી ગણનો પૂરક ગણ સાર્વત્રિક ગણ હોય છે. $\phi' = U$

મહાવરાસંગ્રહ 1.3

(1) જો A = $\{a, b, c, d, e\}$, B = $\{c, d, e, f\}$, C = $\{b, d\}$, D = $\{a, e\}$ તો નીચેના પૈકી કયા વિધાનો સત્ય અને કયા વિધાનો અસત્ય છે તે સકારણ લખો.

(i) $C \subseteq B$ (ii) $A \subseteq D$ (iii) $D \subseteq B$ (iv) $D \subseteq A$ (v) $B \subseteq A$ (vi) $C \subseteq A$

(2) 1 થી 20 સુધીની પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ સાર્વત્રિક ગણ તરીકે લઈ તેમાં નીચેનાં ગણ X અને Y વૅન આકૃતિ દ્વારા દર્શાવો.

(i) X = $\{x \mid x \in N$, અને $7 < x < 15\}$

(ii) Y = $\{y \mid y \in N$, y એ 1 થી 20 વચ્ચેની મૂળ સંખ્યાઓ છે.$\}$

(3) U = $\{1, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, P = $\{1, 3, 7, 10\}$

તો (i) U, P અને P' વૅન આકૃતિ દ્વારા દર્શાવો. (ii) $(P')' = P$ છે તે ચકાસો.

(4) જો A = $\{1, 3, 2, 7\}$ તો A ગણના કોઈપણ ત્રણ ઉપગણ લખો.

(5) (i) નીચેના પૈકી કયા ગણ, કયા કયા ગણના ઉપગણ છે તે લખો.

P એ પુણેના રહેવાસીનો ગણ છે. M એ મધ્યપ્રદેશના રહેવાસીઓનો ગણ છે.

I એ ઇંદોરના રહેવાસીઓનો ગણ છે. B એ ભારતના રહેવાસીઓનો ગણ છે.

H એ મહારાષ્ટ્રના રહેવાસીઓનો ગણ છે.

(ii) ઉપર (i) માં આપેલા ગણ માટે કયો ગણ બાકીના ગણો માટે સાર્વત્રિક ગણ લઈ શકાય?

(6*) નીચેના ગણ માટે કયો સંખ્યાગણ, સાર્વત્રિક ગણ તરીકે લઈ શકાશે?

(i) A = 5 ના ઘડિયામાં આવતી સંખ્યાઓનો ગણ.

B = 7 ના ઘડિયામાં આવતી સંખ્યાઓનો ગણ.

C = 12 ના ઘડિયામાં આવતી સંખ્યાઓનો ગણ.

(ii) P = 4 ના ઘડિયામાં આવતી પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો ગણ. T = બધી સમ-વર્ગ સંખ્યાઓનો ગણ.

(7) વર્ગના બધા વિદ્યાર્થીઓનો ગણ સાર્વત્રિક ગણ માનીએ. ગણિતમાં 50% કે તેથી અધિક ગુણ મેળવનારા વિદ્યાર્થીઓનો ગણ A માનીએ તો A નો પૂરકગણ લખો.

જાણી લઈએ.

ગણ પરની ક્રિયાઓ

બે ગણોનો છેદ ગણ (Intersection of two sets)

ધારો કે A અને B બે ગણ છે. A અને B ગણમાંના સામાન્ય ઘટકોના ગણને, A અને B ગણનો છેદગણ કહે છે. જે '$A \cap B$' એમ લખાય છે 'A છેદ B' એમ વંચાય છે.

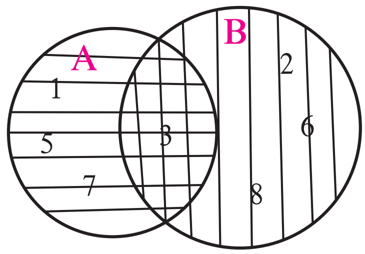
$\therefore$ $A \cap B = \{x \mid x \in A$ **અને** $x \in B\}$

ઉદા. **(1)** A = { 1, 3, 5, 7} B = { 2, 3, 6, 8}

હવે વૅન આકૃતિ દોરીએ.

A અને B ગણમાં સામાન્ય ઘટક 3 છે.

$\therefore A \cap B = \{3\}$



ઉદા. **(2)** A = {1, 3, 9, 11, 13} B = {1, 9, 11}

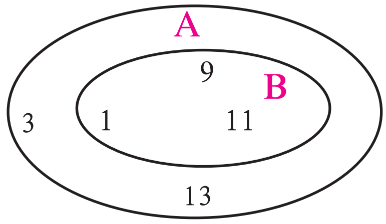
ગણ A અને ગણ B માં 1, 9, 11 સામાન્ય ઘટકો છે.

$\therefore A \cap B = \{1, 9, 11\}$ પરંતુ, B = {1, 9, 11}

$\therefore A \cap B = B$

અહીં B એ A ગણનો ઉપગણ છે.

$\therefore$ જો $B \subseteq A$ તો $A \cap B = B$. તેમજ જો $A \cap B = B$, તો $B \subseteq A$



આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

છેદગણના ગુણધર્મો

(1) $A \cap B = B \cap A$ (2) જો $A \subseteq B$ તો $A \cap B = A$

(3) જો $A \cap B = B$ તો $B \subseteq A$ (4) $A \cap B \subseteq A$ અને $A \cap B \subseteq B$

(5) $A \cap A' = \phi$ (6) $A \cap A = A$ (7) $A \cap \phi = \phi$

કૃતિ : જુદા-જુદા ઉદાહરણો લઈને ઉપરના ગુણધર્મો ચકાસો.

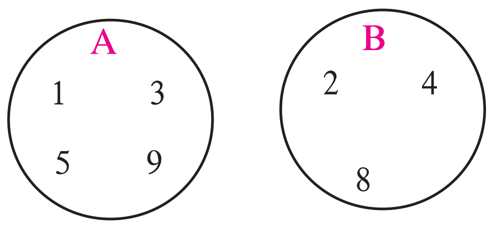
જાણી લઈએ.

વિયુક્ત ગણ (વિભક્ત ગણ, વિભિન્ન ગણ) (Disjoint sets)

માનો કે, A = { 1, 3, 5, 9}

અને B = {2, 4, 8} આ બે ગણ આપ્યા છે.

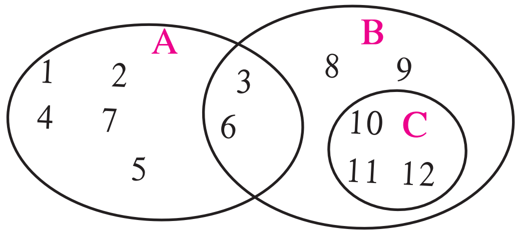
ગણ A અને B માં એક પણ ઘટક સામાન્ય નથી એટલે કે બન્ને ગણ ભિન્ન છે (જુદા છે) તેથી તેમને 'વિયુક્ત ગણ' કે 'વિભક્ત ગણ' કહે છે. તેની વૅન આકૃતિ જુઓ.



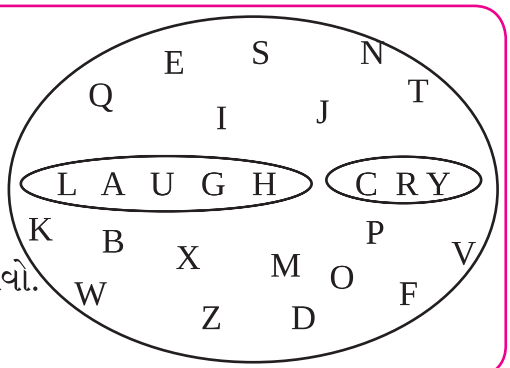
કૃતિ I :

અહીં A, B, C ગણ વૅન આકૃતિ વડે દર્શાવ્યા છે.

તે પૈકી કયા બે ગણ વિયુક્ત ગણ છે તે લખો.



કૃતિ II : અંગ્રેજી અક્ષરોનો ગણ સાર્વત્રિક ગણ છે. એમ સમજીને તેમાંના અંગ્રેજી અક્ષરો પૈકી ધારોકે LAUGH શબ્દના અક્ષરોનો એક ગણ છે અને CRY શબ્દના અક્ષરોનો બીજો ગણ છે. આ બન્ને વિયુક્ત ગણ છે. તેમનો છેદગણ ખાલી ગણ છે તે અનુભવો. આ રીતે અન્ય ગણ તૈયાર કરો.



બે ગણોનો યોગગણ (Union of two sets)

ધારો કે, A અને B બે ગણ છે. આ બન્ને ગણના ઘટકો મળીને તૈયાર થતાં ગણને A અને B ગણનો યોગગણ કહે છે. તે $A \cup B$ એમ લખાય છે અને '**A યોગ B**' એમ વંચાય છે.

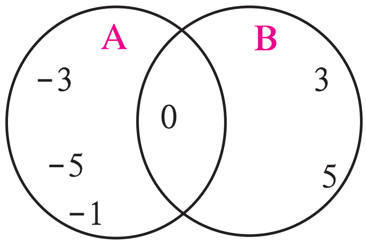
$\mathbf{A \cup B} = \{x \mid x \in A$ **અથવા** $x \in B\}$

ઉદા. (1) $A = \{-1, -3, -5, 0\}$

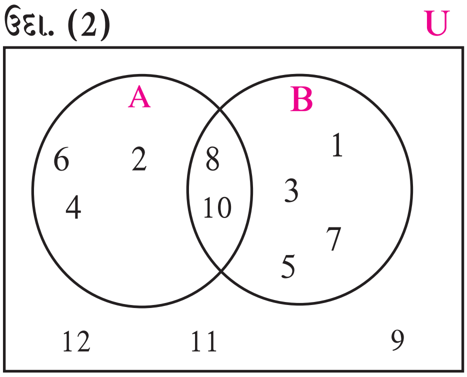
$B = \{0, 3, 5\}$

$A \cup B = \{-3, -5, 0, -1, 3, 5\}$

ધ્યાનમાં લો કે, $A \cup B = B \cup A$



ઉદા. (2)



આપેલી વૅન આકૃતિ પરથી નીચેના ગણ યાદીની રીતે લખો.

(i) U (ii) A (iii) B (iv) $A \cup B$ (v) $A \cap B$

(vi) A' (vii) B' (viii) $(A \cup B)'$ (ix) $(A \cap B)'$

ઉકેલ : $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

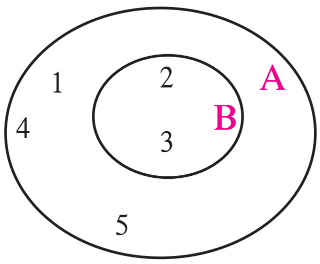
$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 8, 10\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$ $A \cap B = \{8, 10\}$

$A' = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 12\}$ $B' = \{2, 4, 6, 9, 11, 12\}$

$(A \cup B)' = \{9, 11, 12\}$ $(A \cap B)' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12\}$

ઉદા. (3)



$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $B = \{2, 3\}$

પરથી દોરેલી વૅન આકૃતિ જુઓ.

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

ગણ A અને ગણ $A \cup B$ માં સમાન ઘટકો છે

તેથી, જો $B \subseteq A$ તો $A \cup B = A$

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

યોગગણનાં ગુણધર્મો

(1) $A \cup B = B \cup A$

(2) જો $A \subseteq B$ તો $A \cup B = B$

(3) $A \subseteq A \cup B,\ B \subseteq A \cup B$

(4) $A \cup A' = U$

(5) $A \cup A = A$

(6) $A \cup \phi = A$

જાણી લઈએ.

ગણમાંના ઘટકોની સંખ્યા (Number of elements in a set)

ધારો કે A = {3, 6, 9, 12,15} આપેલો ગણ છે તેમાં 5 ઘટકો છે.

A ગણમાંના ઘટકોની સંખ્યા n (A) એમ દર્શાવાય છે.

$\therefore\ n(A) = 5$

ધારો કે B = { 6, 12, 18, 24, 30, 36} $\therefore\ n(B) = 6$

યોગગણ અને છેદગણમાંના ઘટકોની સંખ્યા

ઉપર આપેલાં ગણ A અને ગણ B માટે,

$n(A) + n(B) = 5 + 6 = 11$ ----(I)

$A \cup B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 24, 30, 36\}$ $\therefore\ n(A \cup B) = 9$--------(II)

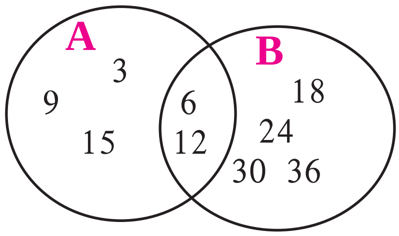
$A \cap B$ શોધીએ. એટલે કે ગણ A અને ગણ B સામાન્ય ઘટકો જોઈએ.

$A \cap B = \{6, 12\}$ $\therefore\ n(A \cap B) = 2$--------(III)

ધ્યાનમાં લો કે, n (A) અને n (B) ગણતી વખતે $A \cap B$ માં આવતાં ઘટકો બે વાર ગણાયા હતા.

તેથી $n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 5 + 6 - 2 = 9$ તેમજ $n(A \cup B) = 9$

(I), (II) અને (III) પરથી,



$\therefore\ n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

ઉપરના નિયમનો વૅન આકૃતિ પરથી તાળો મેળવો.

$n(A) =$ ☐ , $n(B) =$ ☐

$n(A \cup B) =$ ☐ , $n(A \cap B) =$ ☐

$\therefore\ n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

એટલે જ કે, $n(A) + n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B)$

હવે, A = {1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13}   B = {1, 2, 4, 6, 8, 12, 13}

આ ગણ લઈને ઉપરના નિયમનો તાળો મેળવો.

જાણી લઈએ.

ગણ પર આધારિત શાબ્દિક ઉદાહરણો

ઉદા. એક વર્ગમાં 70 વિદ્યાર્થીઓ છે તે પૈકી 45 વિદ્યાર્થીઓને ક્રિકેટ ગમે છે. 52 વિદ્યાર્થીઓને ખો-ખો ગમે છે. એવો એકપણ વિદ્યાર્થી નથી, જેને બેમાંથી એકપણ રમત ગમતી ન હોય. તો ક્રિકેટ અને ખો-ખો આ બન્ને રમત ગમતી હોય તેવા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ : આ ઉદાહરણ આપણે બે રીતે ઉકેલીએ.

રીત I : વર્ગમાં કુલ વિદ્યાર્થીઓ = 70

ક્રિકેટ ગમે છે તે વિદ્યાર્થીઓ માટે ગણ A અને ખો-ખો ગમે છે તેમના માટે ગણ B માનીએ.

દરેકને ક્રિકેટ અથવા ખો-ખો પૈકી એક રમત તો ગમે જ છે.

ક્રિકેટ કે ખો-ખો ગમે તેવા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા = $n(A \cup B)$

$\therefore \quad n(A \cup B) = 70$

ક્રિકેટ અને ખો-ખો બન્ને રમત ગમે છે તેવા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા = $n(A \cap B)$

$n(A) = 45, \qquad n(B) = 52$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ તે આપણે જાણીએ છીએ.

$\therefore \quad n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$

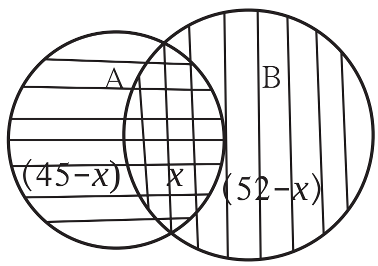
$= 45 + 52 - 70 = 27$

$\therefore$ બન્ને રમતો ગમતી હોય તેવા વિદ્યાર્થીઓ 27, ક્રિકેટ ગમે તેવા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા 45 છે.

$\therefore$ ફક્ત ક્રિકેટ ગમે તેવા વિદ્યાર્થીઓ = 45 − 27 = 18

$A \cap B$ એ બન્ને રમત ગમે છે તેવા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા છે. $\therefore \quad n(A \cap B) = 27$

રીત II : આપેલી માહિતીની વૅન આકૃતિ દોરીને પણ ઉકેલ શોધી શકાય છે. બન્ને રમતો રમતાં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા નીચે પ્રમાણે છે.



$n(A \cap B) = x$ માનીએ. $n(A) = 45$, $n(B) = 52$,

$n(A \cup B) = 70$ તે આપણે જાણીએ છીએ.

$\therefore n(A \cap B) = x = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$

$= 45 + 52 - 70 = 27$

વૅન આકૃતિ પરથી ફક્ત ક્રિકેટ ગમે તેવા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા $= 45 - 27$

$= 18$

મહાવરાસંગ્રહ 1.4

(1) જો $n(A) = 15$, $n(A \cup B) = 29$, $n(A \cap B) = 7$ તો $n(B) =$ કેટલા?

(2) એક છાત્રાલયમાં 125 વિદ્યાર્થીઓ રહે છે. તેમાંથી 80 વિદ્યાર્થીઓ ચા પીવે છે. 60 વિદ્યાર્થીઓ કૉફી પીવે છે અને 20 વિદ્યાર્થીઓ ચા અને કૉફી બન્ને પીવે છે. તો એક પણ પેય (પીણું) ન લેતાં હોય તેવા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા શોધો.

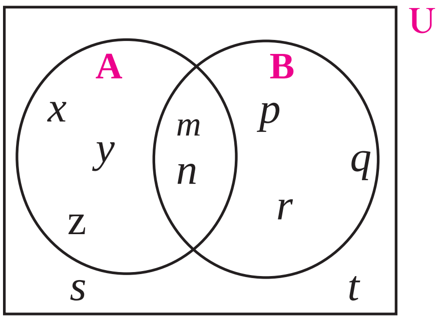
(3) એક સ્પર્ધા-પરીક્ષામાં 50 વિદ્યાર્થીઓ અંગ્રેજીમાં અને 60 વિદ્યાર્થીઓ ગણિતમાં ઉત્તીર્ણ થયા. 40 વિદ્યાર્થીઓ બન્ને વિષયમાં ઉત્તીર્ણ થયા. કોઈપણ વિદ્યાર્થી બન્ને વિષયમાં અનુત્તીર્ણ નથી તો કુલ વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા શોધો.

(4*) એક શાળામાં ધોરણ - 9 ના 220 વિદ્યાર્થીઓના શોખનું સર્વેક્ષણ કર્યુ. તેમાં 130 વિદ્યાર્થીઓએ ગિરિભ્રમણ અને 180 વિદ્યાર્થીઓએ આકાશ-દર્શનનો શોખ છે એમ જણાયું. 110 વિદ્યાર્થીઓએ ગિરિભ્રમણ અને આકાશદર્શન આ બન્ને શોખ છે એમ જણાયું. તો કેટલા વિદ્યાર્થીઓને બન્નેમાંથી એક પણ શોખ નથી? કેટલા વિદ્યાર્થીઓને ફક્ત ગિરિભ્રમણનો શોખ છે? કેટલા વિદ્યાર્થીઓને ફક્ત આકાશદર્શનનો શોખ છે?

(5) બાજુની વૅન આકૃતિ પરથી નીચેના ગણ લખો.

(i) A (ii) B (iii) $A \cup B$ (iv) U

(v) A' (vi) B' (vii) $(A \cup B)'$



સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 1

(1) નીચેના પ્રશ્નો માટે આપેલા પર્યાયો પૈકી યોગ્ય પર્યાય શોધો.

(i) $M = \{1, 3, 5\}$, $N = \{2, 4, 6\}$, તો $M \cap N =$?

(A) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (B) $\{1, 3, 5\}$ (C) ϕ (D) $\{2, 4, 6\}$

(ii) $P = \{x \mid x$ એ વિષમ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે, $1 < x \le 5\}$ આ ગણ યાદીની રીતે લખો.

(A) $\{1, 3, 5\}$ (B) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (C) $\{1, 3\}$ (D) $\{3, 5\}$

(iii) $P = \{1, 2, \ldots\ldots\ldots, 10\}$ આ નીચેના પૈકી કયા પ્રકારનો ગણ છે?

(A) ખાલી ગણ (B) અનંત ગણ (C) સાન્ત ગણ (D) આ પૈકી એકપણ નહિ.

(iv) $M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ અને $M = \{1, 2, 4\}$ તો નીચેના પૈકી N ગણ કયો?

(A) $\{1, 2, 3\}$ (B) $\{3, 4, 5, 6\}$ (C) $\{2, 5, 6\}$ (D) $\{4, 5, 6\}$

(v) જો $P \subseteq M$, તો $P \cap (P \cup M)$ એટલે નીચેના પૈકી કયો ગણ?

(A) P (B) M (C) $P \cup M$ (D) $P' \cap M$

(vi) નીચેના પૈકી ખાલી ગણ કયો?

(A) સમાંતર રેખાના છેદન બિંદુઓનો ગણ (B) સમ મૂળ સંખ્યાનો ગણ

(C) 30 કરતાં ઓછા દિવસો હોય તેવા અંગ્રેજી મહિનાનો ગણ

(D) $P = \{x \mid x \in I, -1 < x < 1\}$

(2) નીચેના ઉપપ્રશ્નો માટે યોગ્ય પર્યાય શોધો.

(i) નીચેના પૈકી કયા સમૂહો ગણ દર્શાવે છે?

(A) મેઘધનુષના રંગ (B) શાળાના પરિસરમાં આવેલાં ઊંચા ઝાડ

(C) ગામના શ્રીમંત લોકો (D) પુસ્તકમાંના સહેલાં ઉદાહરણો

(ii) $N \cap W$ એ નીચેનાપૈકી કયો?

(A) $\{1, 2, 3, ...\}$ (B) $\{0, 1, 2, 3, ...\}$ (C) $\{0\}$ (D) $\{ \}$

(iii) $P = \{x \mid x$ આ indian શબ્દના અક્ષરો છે.$\}$ તો P ગણ યાદીની રીતે નીચેના પૈકી કયો?

(A) {i, n, d} (B) {i, n, d, a} (C) {i, n, d, a} (D) {n, d, a}

(iv) જો $T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ અને $M = \{3, 4, 7, 8\}$ તો $T \cup M = ?$

(A) $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ (B) $\{1, 2, 3, 7, 8\}$

(C) $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$ (D) $\{3, 4\}$

(3) એક સમૂહના 100 જણામાંથી 72 લોકો અંગ્રેજી અને 43 લોકો ફ્રેન્ચ બોલે છે. આ 100 પૈકી દરેક જણ ઓછામાં ઓછી એક ભાષા તો બોલે જ છે. તો કેટલા જણ ફક્ત અંગ્રેજી બોલે છે? કેટલા જણ ફક્ત ફ્રેન્ચ બોલે છે? કેટલા જણ અંગ્રેજી અને ફ્રેન્ચ બન્ને ભાષા બોલે છે?

(4) પાર્થે વૃક્ષ સંવર્ધન સપ્તાહ દરમિયાન 70 ઝાડ વાવ્યાં. પ્રજ્ઞાએ 90 ઝાડ વાવ્યા. તેમાંથી બન્નેએ મળીને 25 ઝાડ વાવ્યા તો પાર્થ અને પ્રજ્ઞાએ મળીને કુલ કેટલા ઝાડ વાવ્યા હશે?

(5) જો $n(A) = 20$, $n(B) = 28$ અને $n(A \cup B) = 36$ તો $n(A \cap B) = ?$

(6) એક વર્ગમાંના 28 વિદ્યાર્થીઓમાંથી 8 વિદ્યાર્થીઓના ઘરમાં કૂતરો પાળેલો છે. 6 વિદ્યાર્થીઓને ત્યાં ફક્ત બિલાડી પાળેલી છે. 10 વિદ્યાર્થીઓને ઘરે કૂતરો અને બિલાડી બન્ને પાળેલાં છે. તો કેટલા વિદ્યાર્થીઓને ત્યાં કૂતરો અથવા બિલાડી પૈકી કોઈપણ પ્રાણી નથી?

(7) નીચેના દરેક ઉદાહરણમાં આપેલા ગણના છેદગણ વૅન આકૃતિ વડે દર્શાવો.

(i) $A = \{3, 4, 5, 7\}$ $B = \{1, 4, 8\}$

(ii) $P = \{a, b, c, e, f\}$ $Q = \{l, m, n, e, b\}$

(iii) X = $\{x \mid x$ એ 80 અને 100 ની વચ્ચેની મૂળસંખ્યા છે.$\}$

Y = $\{y \mid y$ એ 90 અને 100 ની વચ્ચેની વિષમ સંખ્યા છે $\}$

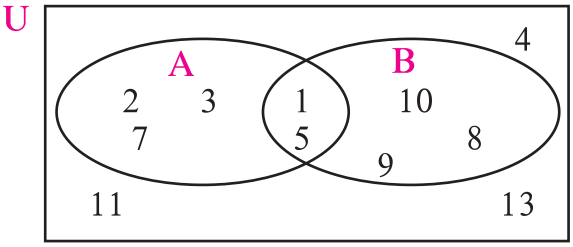
(8) નીચેના ગણો વચ્ચે પરસ્પર ઉપગણ સંબંધ લખો.

X = બધાં ચતુષ્કોણનો ગણ. Y = બધાં સમભુજ ચતુષ્કોણનો ગણ.

S = બધાં ચોરસનો ગણ. T = બધાં સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણનો ગણ.

V = બધાં લંબચોરસનો ગણ.

(9) જો M ગણ એ કોઈપણ એક ગણ હોય, તો $M \cup \phi$ અને $M \cap \phi$ લખો.

(10*) 

બાજુની વૅન આકૃતિ પરથી U, A, B, $A \cup B$ અને $A \cap B$ આ બધા ગણ લખો.

(11) જો $n(A) = 7$, $n(B) = 13$, $n(A \cap B) = 4$, તો $n(A \cup B) = ?$

કૃતિ I : આપેલા ગણ પરથી ખાલી જગ્યામાં ગણના ઘટકો લખો.

U = {1, 3, 5, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15}

A = {1, 11, 13} B = {8, 5, 10, 11, 15} A′ = {........} B′ = {........}

$A \cap B$ = {...........} $A' \cap B'$ = {...............}

$A \cup B$ = {...........} $A' \cup B'$ = {...........}

$(A \cap B)'$ = {...........} $(A \cup B)'$ = {...........}

ચકાસી જુઓ : $(A \cap B)' = A' \cup B'$, $(A \cup B)' = A' \cap B'$

કૃતિ II : તમારી આસપાસના 20 કુટુંબમાંથી નીચેની માહિતી મેળવો.

(i) ગુજરાતી વર્તમાનપત્ર લેનારા કુટુંબની સંખ્યા.

(ii) અંગ્રેજી વર્તમાનપત્ર લેનારા કુટુંબની સંખ્યા.

(iii) અંગ્રેજી અને ગુજરાતી આ બન્ને ભાષાના વર્તમાનપત્ર લેનારા કુટુંબની સંખ્યા.

મળેલી માહિતી વૅન આકૃતિ વડે દર્શાવો.

2 વાસ્તવિક સંખ્યા

ચાલો શીખીએ.

- સંમેય સંખ્યાનાં ગુણધર્મ
- અસંમેય સંખ્યાનાં ગુણધર્મ
- કરણી
- વર્ગકરણીની તુલના
- વર્ગકરણી પરની ક્રિયા
- વર્ગકરણીનું સંમેયીકરણ

યાદ કરીએ.

આગળના ધોરણમાં આપણે પ્રાકૃતિક સંખ્યા, પૂર્ણાંક સંખ્યા અને વાસ્તવિક સંખ્યાનો અભ્યાસ કર્યો છે.

N = પ્રાકૃતિક સંખ્યાનો ગણ = $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

W = પૂર્ણ સંખ્યાનો ગણ = $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

I = પૂર્ણાંક સંખ્યાનો ગણ = $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$

Q = સંમેય સંખ્યાનો ગણ = $\{\frac{p}{q}, \mid p, q \in I, q \neq 0\}$

R = વાસ્તવિક સંખ્યાનો ગણ.

$N \subseteq W \subseteq I \subseteq Q \subseteq R$.

સંમેય સંખ્યા વચ્ચેનો ક્રમ સંબંધ : $\frac{p}{q}$ અને $\frac{r}{s}$ આ સંમેય સંખ્યા હોય છે. $q > 0$, $s > 0$ હોય અને

(i) જો $p \times s = q \times r$ તો $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ (ii) જો $p \times s > q \times r$ તો $\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$

(iii) જો $p \times s < q \times r$ તો $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$

જાણી લઈએ.

સંમેય સંખ્યાનો ગુણધર્મ (Properties of rational numbers)

a, b, c આ સંમેય સંખ્યા હોય તો

ગુણધર્મ	સરવાળો	ગુણાકાર
1. ક્રમનિરપેક્ષતા	$a + b = b + a$	$a \times b = b \times a$
2. સહચર્ય	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
3. અવિકારક	$a + 0 = 0 + a = a$	$a \times 1 = 1 \times a = a$
4. વ્યસ્ત	$a + (-a) = 0$	$a \times \frac{1}{a} = 1 \quad (a \neq 0)$

યાદ કરીએ.

કોઈપણ સંમેય સંખ્યાનું દશાંશ અપૂર્ણાંક રૂપ ખંડિત અથવા અખંડિત આવર્તી હોય છે.

ખંડિત રૂપ	અખંડ આવર્તી રૂપ
(1) $\frac{2}{5} = 0.4$	(1) $\frac{17}{36} = 0.472222... = 0.47\dot{2}$
(2) $-\frac{7}{64} = -0.109375$	(2) $\frac{33}{26} = 1.2692307692307... = 1.2\overline{692307}$
(3) $\frac{101}{8} = 12.625$	(3) $\frac{56}{37} = 1.513513513... = 1.\overline{513}$

જાણી લઈએ.

અખંડ આવર્તી દશાંશ રૂપમાંની સંમેય સંખ્યાને $\frac{p}{q}$ રૂપમાં ફેરવવી.

ઉદા. (1) 0.777.... આ આવર્તી દશાંશ અપૂર્ણાંકનો $\frac{p}{q}$ ના રૂપમાં લખો.

ઉકેલ : ધારો કે, $x = 0.777... = 0.\dot{7}$

$$\therefore \quad 10x = 7.777... = 7.\dot{7}$$

$$\therefore \quad 10x - x = 7.\dot{7} - 0.\dot{7}$$

$$\therefore \quad 9x = 7$$

$$\therefore \quad x = \frac{7}{9}$$

$$\therefore \quad 0.777... = \frac{7}{9}$$

ઉદા. (2) 7.529529529... આ આવર્તી દશાંશ અપૂર્ણાંકનો $\frac{p}{q}$ ના રૂપમાં લખો.

ઉકેલ : ધારો કે, $x = 7.529529... = 7.\overline{529}$

$$\therefore \quad 1000\ x = 7529.529529... = 7529.\overline{529}$$

$$\therefore \quad 1000\ x - x = 7529.\overline{529} - 7.\overline{529}$$

$$\therefore \quad 999\ x = 7522.0 \qquad \therefore \quad x = \frac{7522}{999}$$

$$\therefore \quad 7.\overline{529} = \frac{7522}{999}$$

વિચાર કરીએ.

$2.4\dot{3}$ આ સંખ્યા $\frac{p}{q}$ રૂપમાં કેવી રીતે ફેરવશો?

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

(1) આપેલી સંખ્યામાં દશાંશ ચિહ્ન પછી કેટલા અંક આવર્તી છે તે જોઈને તે પ્રમાણે તે સંખ્યાને 10, 100, 1000 આમાંથી કોઈ યોગ્ય સંખ્યાથી ગુણીએ. ઉદા. $2.\dot{3}$ આ સંખ્યામાં 3 એ એક જ અંક આવર્તી છે. એટલે કે $2.\dot{3}$ આ સંખ્યા $\frac{p}{q}$ ના રૂપમાં લાવવા માટે તેને 10 વડે ગુણીએ.

$1.\overline{24}$ આ સંખ્યામાં 2 અને 4 એ બે અંક આવર્તી છે એટલે કે $1.\overline{24}$ ને 100 વડે ગુણીએ.

$1.\overline{513}$ આ સંખ્યામાં 5, 1 અને 3 એ ત્રણ અંક આવર્તી છે. એટલે કે $1.\overline{513}$ ને 1000 વડે ગુણીએ.

(2) સંમેય સંખ્યાના છેદના મૂળ અવયવ તપાસો, જો તેમાં 2 અને 5 ના સિવાયની મૂળ સંખ્યા નથી તો સંમેય સંખ્યાનું દશાંશ રૂપ ખંડિત હોય છે. 2 અને 5 ના સિવાયની મૂળ સંખ્યાઓ છેદના અવયવ હોય તો તે સંખ્યાનું દશાંશ રૂપ અખંડ આવર્તી હોય છે.

મહાવરાસંગ્રહ 2.1

1. નીચેનામાંથી કઈ સંમેય સંખ્યાનું દશાંશ રૂપ ખંડિત છે અને કઈ સંખ્યાનું દશાંશ રૂપ અખંડ આવર્તી છે તે લખો.

   (i) $\frac{13}{5}$ (ii) $\frac{2}{11}$ (iii) $\frac{29}{16}$ (iv) $\frac{17}{125}$ (v) $\frac{11}{6}$

2. નીચેની સંમેય સંખ્યાઓ દશાંશ રૂપમાં લખો.

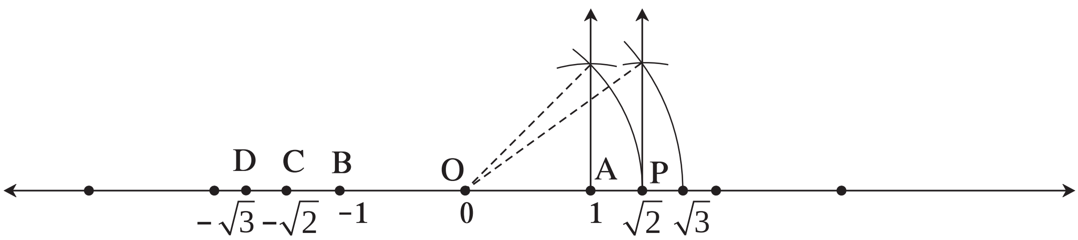
   (i) $\frac{127}{200}$ (ii) $\frac{25}{99}$ (iii) $\frac{23}{7}$ (iv) $\frac{4}{5}$ (v) $\frac{17}{8}$

3. નીચેની સંમેય સંખ્યાને $\frac{p}{q}$ ના રૂપમાં લખો.

   (i) $0.\dot{6}$ (ii) $0.\overline{37}$ (iii) $3.\overline{17}$ (iv) $15.\overline{89}$ (v) $2.\overline{514}$

યાદ કરીએ.

નીચેની સંખ્યારેખા પર બતાવેલ $\sqrt{2}$ અને $\sqrt{3}$ આ સંખ્યા સંમેય નથી, એટલે કે તે અસંમેય છે.



આ સંખ્યારેખા પર OA = 1 એકમ અંતર છે. O ની ડાબી બાજુ B બિંદુ પણ 1 એકમ અંતર પર છે. B બિંદુનો નિર્દેશક –1 છે. P બિંદુનો નિર્દેશક $\sqrt{2}$ છે. તેની વિરુધ્ધ સંખ્યા C બિંદુથી દર્શાવેલી છે. C બિંદુનો નિર્દેશક $-\sqrt{2}$ છે. તે જ પ્રમાણે $\sqrt{3}$ ની વિરુધ્ધ સંખ્યા $-\sqrt{3}$ છે, તે બિંદુ D વડે દર્શાવી છે.

જાણી લઈએ.

અસંમેય અને વાસ્તવિક સંખ્યા (Irrational and real numbers)

'**$\sqrt{2}$ આ સંખ્યા અસંમેય છે**' તે પરોક્ષ સાબિતી આપીને સાબિત કરી શકાય. નીચે આપેલી સાબિતી જુઓ.

ધારો કે, $\sqrt{2}$ સંમેય સંખ્યા છે એમ સમજીએ તો તેને $\frac{p}{q}$ રૂપ આપી શકાય.

અહીં, $\frac{p}{q}$ એ સંમેય સંખ્યાનું સંક્ષિપ્ત રૂપ છે. એટલે કે p અને q માં 1 સિવાય બીજો કોઈ સામાન્ય વિભાજક નથી એમ માનીએ.

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ $\quad\therefore\quad 2 = \frac{P^2}{q^2}$ (બંને બાજુનો વર્ગ કરતાં)

$\therefore\quad 2q^2 = p^2$

$\therefore\quad p^2$ એ સમસંખ્યા છે.

$\therefore\quad p$ પણ સમસંખ્યા છે, એટલે જ 2 એ p નો વિભાજક છે.....(I)

$\therefore\quad p = 2t \qquad \therefore\ p^2 = 4t^2 \qquad t \in I$

$\therefore\quad 2q^2 = 4t^2\ (\because\ p^2 = 2q^2)\quad \therefore\ q^2 = 2t^2\quad \therefore\ q^2$ એ સમસંખ્યા છે. $\therefore\ q$ એ પણ સમસંખ્યા છે.

$\therefore\quad$ 2 એ q નો પણ વિભાજક છે. .... (II)

વિધાન (I) અને (II) પરથી, 2 એ p અને q નો સામાન્ય વિભાજક છે.

જે વિસંગત છે. કારણ કે $\frac{p}{q}$ માં p અને q નો 1 સિવાય બીજો કોઈપણ સામાન્ય વિભાજક નથી.

$\therefore\quad \sqrt{2}$ એ સંમેય સંખ્યા છે એમ સમજવું ખોટું છે. $\quad\therefore\ \sqrt{2}$ એ અસંમેય સંખ્યા છે.

આ જ પધ્ધતિથી $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ વગેરે અસંમેય સંખ્યા છે તે સાબિત કરી શકાય. તે માટે 3 અથવા 5 એ જો 'n' નો વિભાજક હોય તો તે 'n^2' નો પણ વિભાજક હોય છે આ નિયમનો ઉપયોગ કરો.

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ વગેરે આવી સંખ્યા, સંખ્યારેખા પર બતાવી શકાય છે.

જે સંખ્યા સંખ્યારેખા પર બિંદુથી દર્શાવી શકાય તે વાસ્તવિક સંખ્યા છે એમ કહેવાય.

સંખ્યારેખા પરના પ્રત્યેક બિંદુનો નિર્દેશક એ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય છે અને પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા બતાવનાર બિંદુ સંખ્યારેખા પર હોય છે.

આપણને માહિતી છે કે પ્રત્યેક સંમેય સંખ્યા વાસ્તવિક સંખ્યા છે. પરંતુ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{2}$, π, $3+\sqrt{2}$ આ વાસ્તવિક સંખ્યા સંમેય નથી. એટલે જ પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા એ સંમેય હોય જ એવું નથી એ ધ્યાનમાં રાખીએ.

અસંમેય સંખ્યાને દશાંશ રૂપમાં ગોઠવતા

આપણે 2 અને 3 નું વર્ગમૂળ ભાગાકાર પદ્ધતિથી શોધીએ.

2 નું વર્ગમૂળ

	1.41421...
1	2. $\overline{00}$ $\overline{00}$ $\overline{00}$ $\overline{00}$....
+1	-1
24	100
+4	-96
281	400
+ 1	-281
2824	11900
+ 4	-11296
28282	60400
+ 2	- 56564
282841	0383600

$\therefore \sqrt{2} = 1.41421...$

3 નું વર્ગમૂળ

	1.732....
1	3. $\overline{00}$ $\overline{00}$ $\overline{00}$ $\overline{00}$....
+1	-1
27	200
+7	-189
343	1100
+ 3	-1029
3462	007100
+ 2	-6924
3464	0176

$\therefore \sqrt{3} = 1.732...$

અહીં ભાગાકારમાં દશાંશ ચિહ્ન પછીના અંકોની સંખ્યા ક્યારેય અંત આવતો નથી, એટલે જ તે અખંડ રૂપ છે. અહીં કોઈપણ જૂથ અથવા અંક ફરી-ફરીથી આવતો નથી, તે સંખ્યાનું દશાંશ રૂપ અખંડ અનાવર્તી મળે છે.

$\sqrt{2}, \sqrt{3}$ આ સંખ્યા અસંમેય સંખ્યા છે. એટલે જ કે તેના દશાંશ રૂપ 1.4142... અને 1.732... પણ અસંમેય જ સંખ્યા જ છે. **આ પરથી સમજી શકાય કે અખંડ અનાવર્તી દશાંશ રૂપ ધરાવતી સંખ્યા અસંમેય હોય છે.**

સંખ્યા π

કૃતિ I

જાડા કાર્ડબોર્ડ પર જુદી જુદી ત્રિજ્યાના વર્તુળ દોરો. ત્રણ, ચાર વર્તુળાકૃતિની ધારને કાપો. દરેક ધાર પરથી દોરો ફેરવીને પ્રત્યેક વર્તુળાકૃતિની ધારનો વ્યાસ અને પરિઘ માપો. નીચેનો કોઠો પૂર્ણ કરો.

અ.ક્ર.	ત્રિજ્યા	વ્યાસ (d)	પરિઘ (c)	ગુણોત્તર = $\frac{c}{d}$
1	7 સેમી			
2	8 સેમી			
3	5.5 સેમી			

બાજુના કોઠાપરથી $\frac{c}{d}$ નો ગુણોત્તર દરેક વખતે 3.1 ની નજીક આવે છે. એટલે કે અચળ હોય છે એ ધ્યાનમાં આવશે. આ ગુણોત્તર π ચિહ્નથી દર્શાવાય છે.

કૃતિ II

π ની અંદાજે કિંમત શોધવા માટે 11 સેમી, 22 સેમી અને 33 સેમી લંબાઈના તારના ટુકડા લો. દરેક તારમાંથી વર્તુળ તૈયાર કરો. તે વર્તુળોનાં વ્યાસ માપો અને નીચેનો કોઠો પૂર્ણ કરો.

વર્તુળ ક્ર.	પરિઘ	વ્યાસ	પરિઘ અને વ્યાસનો ગુણોત્તર
1	11 સેમી		
2	22 સેમી		
3	33 સેમી		

પરિઘ અને વ્યાસનો ગુણોત્તર $\frac{22}{7}$ ની આસપાસ આવે છે તે ધ્યાનમાં આવે છે. ચકાસી જુઓ.

વર્તુળનો પરિઘ અને વ્યાસનો ગુણોત્તર એ અચળ સંખ્યા છે. તે અસંમેય છે. તે ગુણોત્તર π **ચિહ્નથી** દર્શાવાય છે. π ની અંદાજે કિંમત $\frac{22}{7}$ અથવા 3.14 લેવાય છે.

મહાન ભારતીય ગણિતશાસ્ત્રી આર્યભટ્ટે ઈ.સ. 499 માં π ની કિંમત $\frac{62832}{20000} = 3.1416$ શોધી હતી.

$\sqrt{3}$ અસંમેય છે તે આપણને ખબર છે હવે $2+\sqrt{3}$ એ અસંમેય સંખ્યા છે કે? તે જોઈએ.

ધારો કે $2+\sqrt{3}$ એ સંખ્યા અસંમેય નથી એમ માનીએ, એટલે કે તે સંમેય હોવી જોઈએ.

જો $2+\sqrt{3}$ સંમેય હોય તો $2+\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ છે એમ લઈ શકાય.

$\therefore\ \sqrt{3} = \frac{p}{q} - 2$ એ સમીકરણ મળે છે.

અહીં ડાબી બાજુ અસંમેય સંખ્યા અને જમણી બાજુ સંમેય સંખ્યા છે જે વિસંગત છે.

એટલે જ $2+\sqrt{3}$ એ સંમેય સંખ્યા નથી માટે તે અસંમેય સંખ્યા છે.

તે જ પ્રમાણે $2\sqrt{3}$ પણ અસંમેય છે એ સાબિત કરી શકાય.

બે અપરિમેય સંખ્યાઓનો સરવાળો અને ગુણાકાર સંમેય સંખ્યા હોઈ શકે તે નીચે પ્રમાણે તપાસી જુઓ.

જેમ કે, $2+\sqrt{3}+(-\sqrt{3}) = 2$, $4\sqrt{5} \div \sqrt{5} = 4$, $(3+\sqrt{5}) - (\sqrt{5}) = 3$,

$2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 6$, $\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{10}$, $2\sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{5}$

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

અસંમેય સંખ્યાનાં ગુણધર્મ

(1) સંમેય સંખ્યા અને અસંમેય સંખ્યાનો સરવાળો કે બાદબાકી અસંમેય સંખ્યા હોય છે.

(2) શૂન્યેતર સંમેય સંખ્યા અને અસંમેય સંખ્યાનો ગુણાકાર કે ભાગાકાર પણ અસંમેય સંખ્યા હોય છે.

(3) બે અસંમેય સંખ્યાનો સરવાળો, બાદબાકી, ગુણાકાર કે ભાગાકાર એ માત્ર સંમેય અથવા અસંમેય હોઈ શકે.

જાણી લઈએ.

વાસ્તવિક સંખ્યા વચ્ચે ક્રમ સંબંધનો ગુણધર્મ

1. જો a અને b આ બે વાસ્તવિક સંખ્યા હોય તો તેમની વચ્ચે $a = b$ અથવા $a < b$ અથવા $a > b$ આમાંથી કોઈપણ એક જ સંબંધ હોય છે.

2. જો $a < b$ અને $b < c$ તો $a < c$.

3. જો $a < b$ તો $a + c < b + c$.

4. જો $a < b$ અને $c > 0$ તો $ac < bc$ અને જો $c < 0$ તો $ac > bc$

   સંમેય અને અસંમેય સંખ્યા લઈને ઉપરના નિયમ ચકાસી જુઓ.

ઋણ સંખ્યાનું વર્ગમૂળ

જો $\sqrt{a} = b$ તો $b^2 = a$ તે આપણને ખબર છે.

આ પરથી જો $\sqrt{5} = x$ તો $x^2 = 5$ એ આપણે સમજી શકીએ.

તેમ જ આપણે એ જાણીએ છે કે કોઈપણ વાસ્તવિક સંખ્યાનો વર્ગ હંમેશા ધન ઋણેતર સંખ્યા આવે એટલે **કોઈપણ વાસ્તવિક સંખ્યાનો વર્ગ ક્યારેય ઋણ ન હોય** પરંતુ, $(\sqrt{-5})^2 = -5$ $\therefore$ $\sqrt{-5}$ એ વાસ્તવિક સંખ્યા નથી.

એટલે જ ઋણ વાસ્તવિક સંખ્યાના વર્ગમૂળ વાસ્તવિક સંખ્યા નથી.

મહાવરાસંગ્રહ 2.2

(1) સંખ્યા $4\sqrt{2}$, અસંમેય છે તે સિધ્ધ કરો.

(2) સંખ્યા $3 + \sqrt{5}$, અસંમેય છે તે સિધ્ધ કરો.

(3) સંખ્યા $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, સંખ્યારેખા પર દર્શાવો.

(4) નીચે આપેલી સંખ્યા વચ્ચેની કોઈપણ ત્રણ સંમેય સંખ્યા લખો.

(i) 0.3 અને −0.5 (ii) −2.3 અને −2.33

(iii) 5.2 અને 5.3 (iv) −4.5 અને −4.6

જાણી લઈએ.

ધન સંમેય સંખ્યાનું વર્ગમૂળ (Root of positive rational number)

જો $x^2 = 2$ તો $x = \sqrt{2}$ અથવા $x = -\sqrt{2}$, હોય છે. $\sqrt{2}$ અને $-\sqrt{2}$ બન્ને અસંમેય સંખ્યા જ છે તે આપણે જાણીએ છીએ. $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{8}$, વગેરે સંખ્યાઓ પણ અસંમેય હોય છે.

n ધન પૂર્ણાંક સંખ્યા છે અને $x^n = a$ હોય, તો x ને a નું n − મુ મૂળ છે એમ કહેવાય. આ n − મુ મૂળ સંમેય અથવા અસંમેય હોય છે.

ઉદા. $2^5 = 32$ $\therefore$ 2 એ 32 નું 5−મુ મૂળ સંમેય સંખ્યા છે. પરંતુ $x^5 = 2$ તો $x = \sqrt[5]{2}$ એ અસંમેય સંખ્યા છે.

કરણી (Surds)

આપણે જાણીએ છીએ કે 5 એ સંમેય સંખ્યા છે પરંતુ $\sqrt{5}$ એ સંમેય નથી. જે પ્રમાણે વાસ્તવિક સંખ્યાનું વર્ગમૂળ અથવા ઘનમૂળ સંમેય અથવા અસંમેય હોય શકે તે જ પ્રમાણે n–મુ મૂળ સંમેય અથવા અસંમેય હોય શકે.

જો n એ 1 કરતાં મોટી પૂર્ણાંક સંખ્યા હોય અને a ધન વાસ્તવિક સંખ્યાનું n–મુ મૂળ x થી દર્શાવેલ હોય તો $x^n = a$ અથવા $\sqrt[n]{a} = x$ એમ લખાય છે.

જો a ધન સંમેય સંખ્યા હોય અને a નું n–મુ મૂળ x એ અસંમેય સંખ્યા હોય તો x એ કરણી (અસંમેય મૂળ) છે એમ કહેવાય.

$\sqrt[n]{a}$ એ કરણી સંખ્યા હોય તો '$\sqrt{\ }$' આ **ચિહ્નને કરણી ચિહ્ન** (radical sign) કહેવાય. n આ સંખ્યાને તે **કરણીને ઘાત** (order of the surd) કહેવાય અને a ને **કરણીસ્થ સંખ્યા** (radicand) એમ કહેવાય.

(1) ધારો કે $a = 7$, $n = 3$, તો $\sqrt[3]{7}$ એ કરણી છે. કારણ કે $\sqrt[3]{7}$ એ અસંમેય સંખ્યા છે.

(2) ધારો કે $a = 27$ અને $n = 3$ હોય તો $\sqrt[3]{27} = 3$ એ અસંમેય સંખ્યા નથી એટલે $\sqrt[3]{27}$ એ કરણી નથી.

(3) $\sqrt[3]{8}$ એ કરણી છે કે?

ધારો કે $\sqrt[3]{8} = p$ $\quad$ $p^3 = 8$. $\quad$ કઈ સંખ્યાનો ઘન 8 છે?

આપણે જાણીએ છીએ કે, 2 નો ઘન 8 છે.

$\sqrt[3]{8}$ માં $a = 8$ એ સંમેય સંખ્યા છે. અહીં $n = 3$ એ ધન પૂર્ણાંક સંખ્યા છે. પરંતુ $\sqrt[3]{8}$ આ સંખ્યા અસંમેય નથી, કારણ કે 8 નું ઘનમૂળ 2 છે. $\therefore$ **$\sqrt[3]{8}$ એ કરણી નથી.**

(4) હવે, $\sqrt[4]{8}$ નો વિચાર કરીએ,

અહીં $a = 8$, કરણીનો ઘાત $n = 4$; પરંતુ 8 એ સંખ્યા કોઈપણ સંમેય સંખ્યાનો ચોથો ઘાત નથી.

એટલે જ $\sqrt[4]{8}$ એ અસંમેય સંખ્યા છે. $\therefore$ $\sqrt[4]{8}$ એ કરણી છે.

આપણે ફક્ત ઘાત 2 હોય એટલે કે $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{42}$ વગેરે કરણીનો વિચાર કરવાનો છે.

ઘાત 2 હોય તેવી કરણીને **વર્ગ કરણી (Quadratic surd)** કહેવાય.

કરણીનું સાદુ રૂપ

ક્યારેક કરણી સંખ્યાનું સાદુ રૂપ આપી શકાય. જેમ કે (i) $\sqrt{48} = \sqrt{16\times3} = \sqrt{16}\times\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

(ii) $\sqrt{98} = \sqrt{49\times2} = \sqrt{49}\times\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$,... આ સાદા રૂપમાંની કરણી છે. આ કરણીનું આનાથી વધારે સાદું રૂપ આપી શકાય નહીં.

સજાતીય કરણી (Similar or like surds)

$\sqrt{2}$, $-3\sqrt{2}$, $\frac{4}{5}\sqrt{2}$ આ કેટલીક સજાતીય કરણી છે. જો p અને q એ સંમેય સંખ્યા હોય તો $p\sqrt{a}$, $q\sqrt{a}$ એ સજાતીય કરણી છે એમ કહેવાય. **બે કરણી સજાતીય થવા માટે તેનો ઘાત સમાન હોવો જોઈએ, તેમ જ કરણીસ્થ સંખ્યા પણ સમાન હોવી જોઈએ.**

$\sqrt{45}$ અને $\sqrt{80}$ આ કરણીનો ઘાત 2 છે એટલે જ કે તેમનો ઘાત સમાન છે. પરંતુ કરણીસ્થ સંખ્યા સમાન નથી એટલે જ આ કરણી સજાતીય નથી એવું લાગે છે. આ કરણીને સાદા રૂપમાં ફેરવતાં,

$\sqrt{45} = \sqrt{9\times5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$ અને $\sqrt{80} = \sqrt{16\times5} = \sqrt{16} \times \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

$3\sqrt{5}$ અને $4\sqrt{5}$ હવે આ બન્ને કરણી સજાતીય છે.

એટલે જ કે, $\sqrt{45}$ અને $\sqrt{80}$ સજાતીય કરણી છે.

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

સાદા રૂપમાં કરણીનો ઘાત અને કરણીસ્થ સંખ્યા સમાન હોય તો તે કરણીને **સજાતીય કરણી** કહેવાય.

જાણી લઈએ.

કરણીની સરખામણી (Comparison of surds)

ધારો કે a, b, k એ ધન વાસ્તવિક સંખ્યા છે.

જો $a < b$ તો $ak < bk$ હોય. $\therefore a^2 < ab < b^2$

એટલે જ $a < b$ તો $a^2 < b^2$

આથી ઊલટું $a^2 < b^2$ હોય તો $a = b$, $a > b$ અને $a < b$ પૈકી કઈ શક્યતા યોગ્ય બનશે?

જો $a = b$ તો $a^2 = b^2$, અને જો $a > b$ તો $a^2 > b^2$ મળે છે પરંતુ તે અશક્ય છે.

$\therefore a < b$ છે. એટલે કે, $a^2 < b^2$ તો $a < b$.

અહીં a અને b એ વાસ્તવિક સંખ્યા હોવાથી તે સંમેય સંખ્યા અથવા કરણી સંખ્યા હોવી જોઈએ.

આનો ઉપયોગ કરીને કરણી સંખ્યામાં નાના-મોટાપણું તપાસીએ.

(i) $6\sqrt{2}$, $5\sqrt{5}$

$\sqrt{36} \times \sqrt{2}$ [?] $\sqrt{25} \times \sqrt{5}$

$\sqrt{72}$ [?] $\sqrt{125}$

પરંતુ 72 [<] 125

$\therefore 6\sqrt{2}$ [<] $5\sqrt{5}$

અથવા

$(6\sqrt{2})^2$ [ ] $(5\sqrt{5})^2$,

$72 < 125$

$\therefore 6\sqrt{2}$ [<] $5\sqrt{5}$

(ii) $8\sqrt{3}$, $\sqrt{192}$

$\sqrt{64} \times \sqrt{3}$ [?] $\sqrt{192}$

$\sqrt{192}$ [?] $\sqrt{192}$

પરંતુ 192 [=] 192

$\therefore \sqrt{192}$ [=] $\sqrt{192}$

$\therefore 8\sqrt{3}$ [=] $\sqrt{192}$

(iii) $7\sqrt{2}$, $5\sqrt{3}$

$\sqrt{49} \times \sqrt{2}$ [?] $\sqrt{25} \times \sqrt{3}$

$\sqrt{98}$ [?] $\sqrt{75}$

પરંતુ 98 [>] 75

$\therefore 7\sqrt{2}$ [>] $5\sqrt{3}$

અથવા

$(7\sqrt{2})^2$ [ ] $(5\sqrt{3})^2$,

$98 > 75$

$\therefore 7\sqrt{2}$ [>] $5\sqrt{3}$

સજાતીય કરણી પરની ક્રિયા(Operations on like surds)

સજાતીય કરણી પર સરવાળો, બાદબાકી, ગુણાકાર અને ભાગાકારની ક્રિયા કરી શકાય.

વિચાર કરીએ.

$\sqrt{9+16} \overset{?}{=} \sqrt{9}+\sqrt{16}$

$\sqrt{100+36} \overset{?}{=} \sqrt{100}+\sqrt{36}$

ઉદા. **(1)** સાદુ રૂપ આપો : $7\sqrt{3} + 29\sqrt{3}$

ઉકેલ : $7\sqrt{3} + 29\sqrt{3} = (7 + 29)\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$

ઉદા. **(2)** સાદુ રૂપ આપો : $7\sqrt{3} - 29\sqrt{3}$

ઉકેલ : $7\sqrt{3} - 29\sqrt{3} = (7 - 29)\sqrt{3} = -22\sqrt{3}$

ઉદા. **(3)** સાદું રૂપ આપો : $13\sqrt{8} + \frac{1}{2}\sqrt{8} - 5\sqrt{8}$

ઉકેલ : $13\sqrt{8} + \frac{1}{2}\sqrt{8} - 5\sqrt{8} = \left(13 + \frac{1}{2} - 5\right)\sqrt{8} = \left(\frac{26+1-10}{2}\right)\sqrt{8}$

$= \frac{17}{2}\sqrt{8} = \frac{17}{2}\sqrt{4\times 2}$

$= \frac{17}{2} \times 2\sqrt{2} = 17\sqrt{2}$

ઉદા. **(4)** સાદું રૂપ આપો : $8\sqrt{5} + \sqrt{20} - \sqrt{125}$

ઉકેલ : $8\sqrt{5} + \sqrt{20} - \sqrt{125} = 8\sqrt{5} + \sqrt{4\times 5} - \sqrt{25\times 5}$

$= 8\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 5\sqrt{5}$

$= (8 + 2 - 5)\sqrt{5}$

$= 5\sqrt{5}$

ઉદા. **(5)** કરણીનો ગુણાકાર કરો: $\sqrt{7} \times \sqrt{42}$

ઉકેલ : $\sqrt{7} \times \sqrt{42} = \sqrt{7\times 42} = \sqrt{7\times 7\times 6} = 7\sqrt{6}$ ($7\sqrt{6}$ એ અસંમેય સંખ્યા છે.)

ઉદા. **(6)** કરણીનો ભાગાકાર કરો : $\sqrt{125} \div \sqrt{5}$

ઉકેલ : $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{125}{5}} = \sqrt{25} = 5$ (5 એ સંમેય સંખ્યા છે.)

ઉદા. **(7)** $\sqrt{50} \times \sqrt{18} = \sqrt{25\times 2} \times \sqrt{9\times 2} = 5\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 15 \times 2 = 30$

બે કરણીનો ગુણાકાર અથવા ભાગાકાર સંમેય સંખ્યા હોય શકે. આ ઉપરના ઉદાહરણો (6 અને 7)પરથી ધ્યાનમાં લો.

કરણીનું સંમેયીકરણ (Rationalization of surd)

જો બે કરણીનો ગુણાકાર સંમેય સંખ્યા આવે તો તેમાંથી કોઈપણ એક કરણી બીજી કરણીનો **સંમેયીકરણ ગુણક** (Rationalizing Factor) કહેવાય.

ઉદા. (1) $\sqrt{2}$ આ કરણીને $\sqrt{2}$ વડે ગુણવામાં આવે તો $\sqrt{2\times2} = \sqrt{4}$ મળશે. $\sqrt{4} = 2$ એ સંમેય સંખ્યા છે.

$\therefore$ $\sqrt{2}$ નો સંમેયીકરણ ગુણક $\sqrt{2}$ છે.

ઉદા. (2) $\sqrt{2} \times \sqrt{8}$ નો ગુણાકાર કરો.

$\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$ એ સંમેય સંખ્યા છે.

$\therefore$ $\sqrt{2}$ એ $\sqrt{8}$ નો સંમેયીકરણનો ગુણક છે.

તે જ પ્રમાણે, $8\sqrt{2}$ એ કરણીનો પણ $\sqrt{2}$ એ કરણીનો સંમેયીકરણ ગુણક છે.

કારણ $\sqrt{2} \times 8\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 8 \times 2 = 16$.

$\sqrt{6}$, $\sqrt{16}$ $\sqrt{50}$ આ બધા $\sqrt{2}$ નાં સંમેયીકરણ ગુણક છે તે ચકાસો.

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

આપેલી કરણીના સંમેયીકરણ ગુણક એક નહીં અનેક હોય છે. એકાદ કરણી જો આપેલી કરણીનો સંમેયીકરણ ગુણક હોય તો તેને શૂન્યેતર સંમેય સંખ્યા સાથે ગુણીને આવનારી બધી કરણીઓ પણ આપેલી કરણીનાં સંમેયીકરણ ગુણક જ હોય છે.

ઉદા. (3) $\sqrt{27}$ નો સંમેયીકરણ ગુણક લખો.

ઉકેલ : $\sqrt{27} = \sqrt{9\times3} = 3\sqrt{3}$ $\therefore$ $3\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3 \times 3 = 9$ એ સંમેય સંખ્યા છે.

$\therefore$ $\sqrt{3}$ એ $\sqrt{27}$ કરણીનો સંમેયીકરણ ગુણક છે.

ધ્યાનમાં રાખો કે, $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ એટલે જ $3\sqrt{3} \times 3\sqrt{3} = 9 \times 3 = 27$.

એટલે જ $\sqrt{27}$ એ આપેલ કરણીનો $3\sqrt{3}$ એ પણ સંમેયીકરણ ગુણક છે. આ સિવાય $4\sqrt{3}$, $7\sqrt{3}$ એવા અનેક ગુણકો મળશે. તે બધા પૈકી $\sqrt{3}$ એ સૌથી સાદા રૂપમાં આવતા સંમેયીકરણનો ગુણક છે.

ઉદા. (4) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ના છેદનું સંમેયીકરણ કરો.

ઉકેલ : $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ....અંશ અને છેદને $\sqrt{5}$ વડે ગુણતાં.

ઉદા. (5) $\frac{3}{2\sqrt{7}}$ ના છેદનું સંમેયીકરણ કરો.

ઉકેલ : $\frac{3}{2\sqrt{7}} = \frac{3}{2\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{2\times7} = \frac{3\sqrt{7}}{14}$ (અહીં $2\sqrt{7}$ ને $\sqrt{7}$ વડે ગુણવું પૂરતું છે.)

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

છેદોનું સંમેયીકરણ કરવા માટે સંમેયીકરણ ગુણક ઉપયોગી છે.

કોઈપણ સંખ્યાનાં છેદમાં સંમેય સંખ્યા હોવી સગવડભર્યું છે. છેદોનું સંમેયીકરણ કરવામાં આવે છે.

મહાવરાસંગ્રહ 2.3

(1) નીચેની કરણીનો ઘાત જણાવો.

(i) $\sqrt[3]{7}$ (ii) $5\sqrt{12}$ (iii) $\sqrt[4]{10}$ (iv) $\sqrt{39}$ (v) $\sqrt[3]{18}$

(2) નીચેનામાંથી કઈ સંખ્યા કરણી છે તે જણાવો.

(i) $\sqrt[3]{51}$ (ii) $\sqrt[4]{16}$ (iii) $\sqrt[5]{81}$ (iv) $\sqrt{256}$ (v) $\sqrt[3]{64}$ (vi) $\sqrt{\frac{22}{7}}$

(3) નીચેની જોડીમાંથી કઈ કરણીની જોડી સજાતીય અને કઈ વિજાતીય છે તે ઓળખો.

(i) $\sqrt{52}$, $5\sqrt{13}$ (ii) $\sqrt{68}$, $5\sqrt{3}$ (iii) $4\sqrt{18}$, $7\sqrt{2}$

(iv) $19\sqrt{12}$, $6\sqrt{3}$ (v) $5\sqrt{22}$, $7\sqrt{33}$ (vi) $5\sqrt{5}$, $\sqrt{75}$

(4) નીચેની કરણીને સાદું રૂપ આપો.

(i) $\sqrt{27}$ (ii) $\sqrt{50}$ (iii) $\sqrt{250}$ (iv) $\sqrt{112}$ (v) $\sqrt{168}$

(5) નીચેની સંખ્યા વચ્ચે નાના-મોટાપણું જણાવો.

(i) $7\sqrt{2}$, $5\sqrt{3}$ (ii) $\sqrt{247}$, $\sqrt{274}$ (iii) $2\sqrt{7}$, $\sqrt{28}$

(iv) $5\sqrt{5}$, $7\sqrt{2}$ (v) $4\sqrt{42}$, $9\sqrt{2}$ (vi) $5\sqrt{3}$, 9 (vii) 7, $2\sqrt{5}$

(6) સાદું રૂપ આપો.

(i) $5\sqrt{3} + 8\sqrt{3}$ (ii) $9\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + \sqrt{125}$

(iii) $7\sqrt{48} - \sqrt{27} - \sqrt{3}$ (iv) $\sqrt{7} - \frac{3}{5}\sqrt{7} + 2\sqrt{7}$

(7) ગુણાકાર કરો અને તે સાદા રૂપમાં લખો.

(i) $3\sqrt{12} \times \sqrt{18}$ (ii) $3\sqrt{12} \times 7\sqrt{15}$

(iii) $3\sqrt{8} \times \sqrt{5}$ (iv) $5\sqrt{8} \times 2\sqrt{8}$

(8) ભાગાકાર કરો અને તે સાદા રૂપમાં લખો.

(i) $\sqrt{98} \div \sqrt{2}$ (ii) $\sqrt{125} \div \sqrt{50}$ (iii) $\sqrt{54} \div \sqrt{27}$ (iv) $\sqrt{310} \div \sqrt{5}$

(9) છેદનું સંમેયીકરણ કરો.

(i) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{14}}$ (iii) $\frac{5}{\sqrt{7}}$ (iv) $\frac{6}{9\sqrt{3}}$ (v) $\frac{11}{\sqrt{3}}$

યાદ કરીએ.

આપણને ખબર છે કે,

જો $a > 0, b > 0$ તો $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$; $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$; $\sqrt{a^2} = a$

ગુણાકાર કરો.

ઉદા. (1) $\sqrt{2}(\sqrt{8} + \sqrt{18})$

ઉકેલ :
$$= \sqrt{2\times 8} + \sqrt{2\times 18}$$
$$= \sqrt{16} + \sqrt{36}$$
$$= 4 + 6$$
$$= 10$$

ઉદા. (2) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})$

ઉકેલ :
$$= \sqrt{3}\left(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\right) - \sqrt{2}\left(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\right)$$
$$= \sqrt{3}\times 2\sqrt{3} - \sqrt{3}\times 3\sqrt{2} - \sqrt{2}\times 2\sqrt{3} + \sqrt{2}\times 3\sqrt{2}$$
$$= 2\times 3 - 3\sqrt{6} - 2\sqrt{6} + 3\times 2$$
$$= 6 - 5\sqrt{6} + 6$$
$$= 12 - 5\sqrt{6}$$

જાણી લઈએ.

વર્ગીય કરણીનું દ્વિપદી રૂપ (Binomial quadratic surd)

- $\sqrt{5} + \sqrt{3}$; $\frac{3}{4} + \sqrt{5}$ એ વર્ગ કરણીનું દ્વિપદ રૂપ છે, તેમ જ $\sqrt{5} - \sqrt{3}$; $\frac{3}{4} - \sqrt{5}$ એ પણ કરણીનું દ્વિપદ રૂપ છે.

નીચેના ગુણાકારનો અભ્યાસ કરો.

- $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$
- $(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2 = 5 - 3 = 2$
- $(\sqrt{3} + \sqrt{7})(\sqrt{3} - \sqrt{7}) = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{7})^2 = 3 - 7 = -4$
- $(\frac{3}{2} + \sqrt{5})(\frac{3}{2} - \sqrt{5}) = (\frac{3}{2})^2 - (\sqrt{5})^2 = \frac{9}{4} - 5 = \frac{9-20}{4} = -\frac{11}{4}$

$(\sqrt{5} + \sqrt{3})$ અને $(\sqrt{5} - \sqrt{3})$ આ દ્વિપદ કરણીની જોડીનો ગુણાકાર સંમેય સંખ્યા છે.

આવી દ્વિપદી કરણીની જોડીને **અનુબધ્ધ જોડી** કહેવાય.

દ્વિપદી કરણી અને તેની અનુબધ્ધ જોડી આ બન્ને સંખ્યા એકમેકના સંમેયીકરણ ગુણક હોય છે.

$\sqrt{5} - \sqrt{3}$ અથવા $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ આ બન્ને દ્વિપદ કરણી એ $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ આ દ્વિપદ કરણીની અનુબધ્ધ જોડી છે.

તેમ જ $7 + \sqrt{3}$ ની અનુબધ્ધ જોડી $7 - \sqrt{3}$ છે.

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

દ્વિપદ કરણીની અનુબધ્ધ જોડીના પદોનો ગુણાકાર હંમેશાં સંમેય સંખ્યા આવે છે.

જાણી લઈએ.

છેદોનું સંમેયીકરણ (Rationalization of the denominator)

અનુબધ્ધ દ્વિપદી કરણીનો ગુણાકાર સંમેય હોય છે. આ ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરીને છેદ દ્વિપદ કરણી હોય તેવી સંખ્યાના છેદોનું સંમેયીકરણ કરવામાં આવે છે.

ઉદા.(1) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ આ સંખ્યાના છેદોનું સંમેયીકરણ કરો.

ઉકેલ : $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ આ દ્વિપદ કરણીની અનુબધ્ધ જોડી $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ છે.

$$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{5-3} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$$

ઉદા. (2) $\frac{8}{3\sqrt{2}+\sqrt{5}}$ આ સંખ્યાના છેદનું સંમેયીકરણ કરો.

ઉકેલ : $3\sqrt{2}+\sqrt{5}$ આ દ્વિપદ કરણીની અનુબધ્ધ જોડી $3\sqrt{2}-\sqrt{5}$ છે.

$$\frac{8}{3\sqrt{2}+\sqrt{5}} = \frac{8}{3\sqrt{2}+\sqrt{5}} \times \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}$$

$$= \frac{8\left(3\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}{\left(3\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}$$

$$= \frac{8\times3\sqrt{2}-8\sqrt{5}}{9\times2-5} = \frac{24\sqrt{2}-8\sqrt{5}}{18-5} = \frac{24\sqrt{2}-8\sqrt{5}}{13}$$

મહાવરાસંગ્રહ 2.4

(1) ગુણાકાર કરો.

(i) $\sqrt{3}(\sqrt{7}-\sqrt{3})$ (ii) $(\sqrt{5}-\sqrt{7})\sqrt{2}$ (iii) $(3\sqrt{2}-\sqrt{3})(4\sqrt{3}-\sqrt{2})$

(2) નીચેની સંખ્યાના છેદનું સંમેયીકરણ કરો.

(i) $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$ (ii) $\frac{3}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$ (iii) $\frac{4}{7+4\sqrt{3}}$ (iv) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

જાણી લઈએ.

કેવલમૂલ્ય - નિરપેક્ષ મૂલ્ય (Absolute value)

x એ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય તો x નું કેવલમૂલ્ય (Absolute Value) અથવા સંખ્યારેખા પર શૂન્યથી તેનું અંતર $|x|$ એમ લખાય છે. $|x|$ નું વાંચન x નું કેવલમૂલ્ય અથવા x નું **નિરપેક્ષ મૂલ્ય** એમ થાય છે.

કેવલમૂલ્યની વ્યાખ્યા નીચે પ્રમાણે કરવામાં આવે છે.

જો $x > 0$ તો $|x| = x$ જો x ધન હોય તો x નું કેવલમૂલ્ય x હોય છે.

જો $x = 0$ તો $|x| = 0$ જો x શૂન્ય હોય તો x નું કેવલમૂલ્ય શૂન્ય જ હોય છે.

જો $x < 0$ તો $|x| = -x$ જો x ઋણ હોય તો x નું કેવલમૂલ્ય x ની વિરુધ્ધ સંખ્યા જેટલું હોય છે.

ઉદા. **(1)** $|3| = 3$ $|-3| = -(-3) = 3$ $|0| = 0$

કોઈપણ વાસ્તવિક સંખ્યાનું કેવલમૂલ્ય ઋણ ન હોય.

ઉદા. **(2)** નીચેની કિંમત શોધો.

(i) $|9-5| = |4| = 4$ (ii) $|8-13| = |-5| = 5$

(iii) $|8|-|-3| = 5$ (iv) $|8| \times |4| = 8 \times 4 = 32$

ઉદા. **(3)** છોડો $|x-5| = 2$

ઉકેલ : $|x-5| = 2$

$\therefore x - 5 = +2$ અથવા $x - 5 = -2$

$\therefore x = 2 + 5$ અથવા $x = -2+5$

$\therefore x = 7$ અથવા $x = 3$

મહાવરાસંગ્રહ 2.5

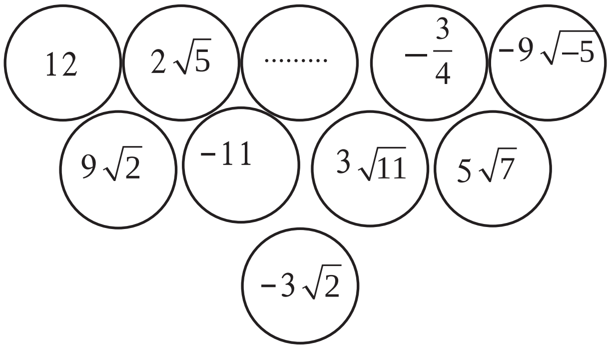
(1) કિંમત શોધો.

i) $|15 - 2|$ (ii) $|4 - 9|$ (iii) $|7| \times |-4|$

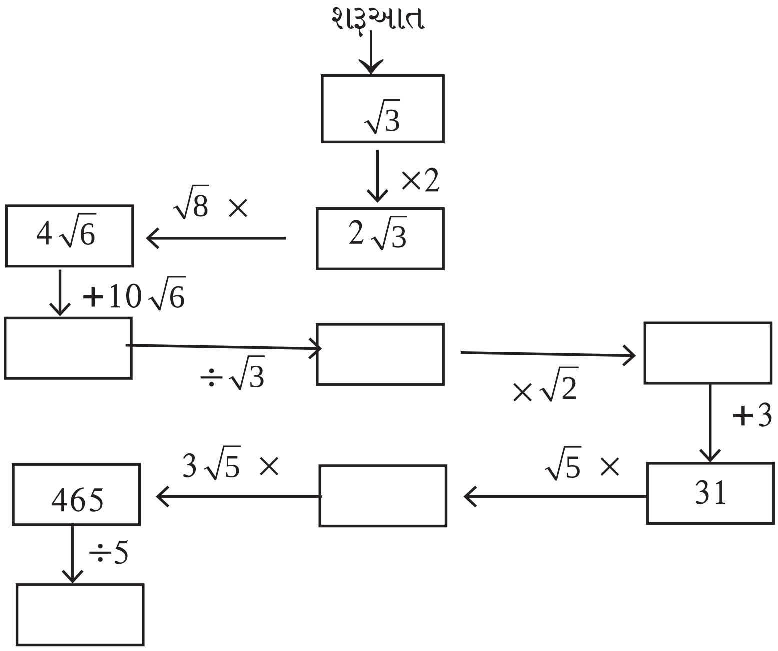
(2) છોડો.

(i) $|3x-5| = 1$ (ii) $|7-2x| = 5$ (iii) $\left|\frac{8-x}{2}\right| = 5$ (iv) $\left|5+\frac{x}{4}\right| = 5$

કૃતિ (I) : બાજુના કાર્ડપર કેટલી વાસ્તવિક સંખ્યા આપેલી છે. તેનો ઉપયોગ કરીને સરવાળો, બાદબાકી, ગુણાકાર અને ભાગાકારના બે-બે ઉદાહરણ તૈયાર કરી ઉકેલો.



કૃતિ (II) :



સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 2

(1) નીચેના પ્રશ્નમાં આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય ઉત્તર દર્શાવતો વિકલ્પ પસંદ કરો.

(i) નીચેનામાંથી અસંમેય સંખ્યા કઈ?

(A) $\sqrt{\frac{16}{25}}$ (B) $\sqrt{5}$ (C) $\frac{3}{9}$ (D) $\sqrt{196}$

(ii) નીચેનામાંથી અસંમેય સંખ્યા કઈ?

(A) 0.17 (B) $1.\overline{513}$ (C) $0.27\overline{46}$ (D) 0.101001000.....

(iii) નીચેનામાંથી કઈ સંખ્યાનું દશાંશરૂપ અખંડ આવર્તી છે?

(A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{3}{16}$ (C) $\frac{3}{11}$ (D) $\frac{137}{25}$

(iv) સંખ્યારેખા પરના દરેક બિંદુ નીચેના પૈકી કઈ સંખ્યાઓ દર્શાવે છે?

(A) પ્રાકૃતિક સંખ્યા (B) અસંમેય સંખ્યા (C) સંમેય સંખ્યા (D) વાસ્તવિક સંખ્યા.

(v) $0.\dot{4}$ આ સંખ્યાનું સંમેય રૂપ ($\frac{p}{q}$ રૂપ) કયું?

(A) $\frac{4}{9}$ (B) $\frac{40}{9}$ (C) $\frac{3.6}{9}$ (D) $\frac{36}{9}$

(vi) જો n એ પૂર્ણ વર્ગ સંખ્યા ન હોય તો $\sqrt{n}$ એ નીચેનામાંથી કઈ સંખ્યા છે?

(A) પ્રાકૃતિક સંખ્યા (B) સંમેય સંખ્યા

(C) અસંમેય સંખ્યા (D) A, B, C આ ત્રણે પર્યાય આવી શકે.

(vii) નીચેનામાંથી કઈ સંખ્યા કરણી નથી?

(A) $\sqrt{7}$ (B) $\sqrt[3]{17}$ (C) $\sqrt[3]{64}$ (D) $\sqrt{193}$

(viii) $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$ આ કરણીનો ઘાત કેટલો?

(A) 3 (B) 2 (C) 6 (D) 5

(ix) $2\sqrt{5}+\sqrt{3}$ આ દ્વિપદ કરણીની અનુબદ્ધ જોડી કઈ?

(A) $-2\sqrt{5}+\sqrt{3}$ (B) $-2\sqrt{5}-\sqrt{3}$ (C) $2\sqrt{3}-\sqrt{5}$ (D) $\sqrt{3}+2\sqrt{5}$

(x) $|12-(13+7)\times 4|$ ની કિંમત કેટલી?

(A) −68 (B) 68 (C) −32 (D) 32.

(2) નીચેની સંખ્યાને $\frac{p}{q}$ રૂપમાં લખો.

(i) 0.555 (ii) $29.\overline{568}$ (iii) 9.315 315 ..... (iv) 357.417417..... (v) $30.\overline{219}$

(3) નીચેની સંખ્યા દશાંશ રૂપમાં લખો.

(i) $\frac{-5}{7}$ (ii) $\frac{9}{11}$ (iii) $\sqrt{5}$ (iv) $\frac{121}{13}$ (v) $\frac{29}{8}$

(4) $5+\sqrt{7}$ આ સંખ્યા અસંમેય છે તે સાબિત કરો.

(5) નીચેની કરણી સાદા રૂપમાં લખો.

(i) $\frac{3}{4}\sqrt{8}$ (ii) $-\frac{5}{9}\sqrt{45}$

(6) નીચેની કરણીનો સૌથી સાદા રૂપમાં હોય તેવો સંમેયીકરણ ગુણક લખો.

(i) $\sqrt{32}$ (ii) $\sqrt{50}$ (iii) $\sqrt{27}$ (iv) $\frac{3}{5}\sqrt{10}$ (v) $3\sqrt{72}$ (vi) $4\sqrt{11}$

(7) સાદું રૂપ આપો.

(i) $\frac{4}{7}\sqrt{147}+\frac{3}{8}\sqrt{192}-\frac{1}{5}\sqrt{75}$ (ii) $5\sqrt{3}+2\sqrt{27}+\frac{1}{\sqrt{3}}$ (iii) $\sqrt{216}-5\sqrt{6}+\sqrt{294}-\frac{3}{\sqrt{6}}$

(iv) $4\sqrt{12}-\sqrt{75}-7\sqrt{48}$ (v*) $2\sqrt{48}-\sqrt{75}-\frac{1}{\sqrt{3}}$

(8) છેદનું સંમેયીકરણ કરો.

(i) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (ii) $\frac{2}{3\sqrt{7}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ (iv) $\frac{1}{3\sqrt{5}+2\sqrt{2}}$ (v) $\frac{12}{4\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

3 બહુપદી

ચાલો શીખીએ.

- બહુપદીની ઓળખ
- બહુપદીની પરની ક્રિયા
- બહુપદીની ઘાત
- સંશ્લેષક ભાગાકાર
- બહુપદીની કિંમત
- શેષ સિધ્ધાંત

ચાલો, ચર્ચા કરીએ.

$p^3 - \frac{1}{2}p^2 + p$; $m^2 + 2n^3 - \sqrt{3}\, m^5$; 6 આ પ્રત્યેક બૈજિક રાશી છે.

શિક્ષક : વિદ્યાર્થી મિત્રો, $p^3 - \frac{1}{2}p^2 + p$, $m^2 + 2n^3 - \sqrt{3}\, m^5$, 6 ના દરેક રાશીના એક પછી એક પદ લો. અને તે પદોના ચલના ઘાતાંક જણાવો.

માધુરી : $p^3 - \frac{1}{2}p^2 + p$ આ રાશીના પદોના ચલના ઘાતાંક અનુક્રમે 3, 2, 1 છે.

વિવેક : સર, $m^2 + 2n^3 - \sqrt{3}\, m^5$ આ રાશીના પદોના ચલનો ઘાતાંક અનુક્રમે 2, 3, 5 છે.

રોહીત : સર, 6 આ રાશીમાં ચલ જ નથી. અહીં $6 = 6 \times 1 = 6 \times x^0$ એમ લખી શકાય એટલે 6 આ બૈજિક રાશીમાં ચલનો ઘાતાંક 0 છે.

શિક્ષક : એટલે ઉપરની સર્વ રાશીમાં ચલનો ઘાતાંક ધનપૂર્ણાંક અથવા શૂન્ય એટલે કે પૂર્ણ સંખ્યા છે.

જે બૈજિક રાશીમાં ચલનો ઘાતાંક પૂર્ણ સંખ્યા હોય છે. તે રાશીને **બહુપદી (polynomial)** એમ કહે છે. 6 એ પણ બહુપદી છે. 6, -7, $\frac{1}{2}$, 0, $\sqrt{3}$ વગેરે અચળ સંખ્યાને **અચળ બહુપદી (સ્થિર બહુપદી-Constant polynomial)** કહે છે.

$\sqrt{y} + 5$ અને $\frac{1}{y} - 3$ એ બહુપદી છે કે?

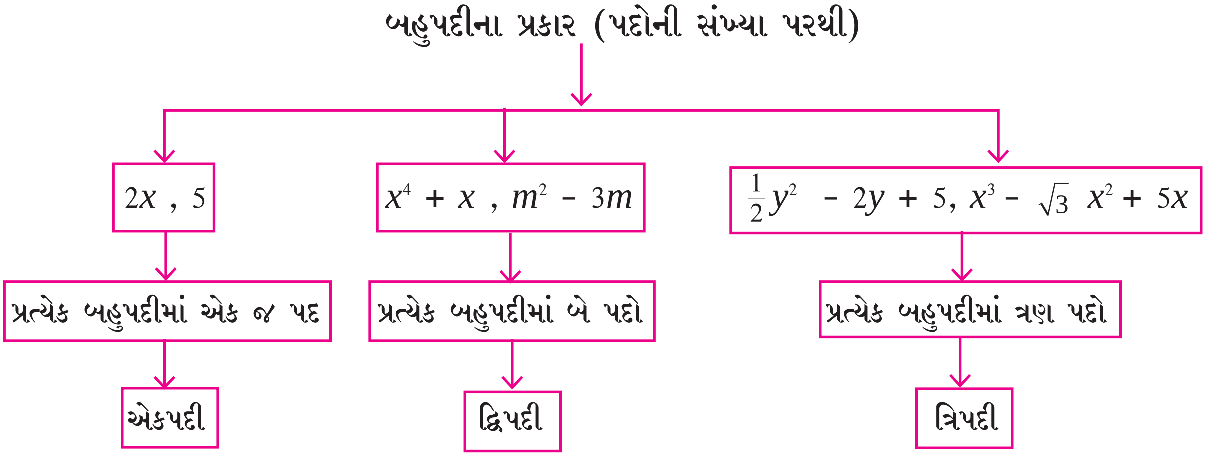
સારા : સર, $\sqrt{y} + 5$ એ બહુપદી નથી. કારણ કે $\sqrt{y} + 5 = y^{\frac{1}{2}} + 5$, આમાં y નો ઘાતાંક $\frac{1}{2}$ છે જે તો પૂર્ણ સંખ્યા નથી.

જૉન : સર, $\frac{1}{y} - 3$ એ પણ બહુપદી નથી. કારણ કે $\frac{1}{y} - 3 = y^{-1} - 3$, આમાં y નો ઘાતાંક -1 છે જે પૂર્ણ સંખ્યા નથી.

શિક્ષક : બહુપદી ન હોય તેવી કોઈપણ પાંચ બૈજિક રાશી લખીને તે બહુપદી શા માટે નથી તેનું સ્પષ્ટીકરણ લખો.

નીચેના બે પ્રશ્નોના ઉત્તરો જુદા જુદા ઉદાહરણો લઈને તેના પર ચર્ચા કરીને શોધો.

- પ્રત્યેક બૈજિક રાશી એ બહુપદી હોય છે?
- પ્રત્યેક બહુપદી એ બૈજિક રાશી હોય છે?



એક ચલની બહુપદી તેના ચલ મુજબ $p(x)$, $q(m)$, $r(y)$ આ પ્રકારે દર્શાવાય છે.

દા.ત. $p(x) = x^3 + 2x^2 + 5x - 3$, $q(m) = m^2 + \frac{1}{2}m - 7$, $r(y) = y^2 + 5$

જાણી લઈએ.

એક ચલવાળી બહુપદીનો ઘાત (Degree of a polynomial in one variable)

શિક્ષક : $2x^7 - 5x + 9$ આ બહુપદીમાં ચલનો સૌથી મોટો ઘાતાંક કયો છે?

જિજા : સર, સૌથી મોટો ઘાતાંક 7 છે.

શિક્ષક : એક ચલવાળી બહુપદીમાં ચલનાં સૌથી મોટા ઘાતાંકને તે **બહુપદીનો ઘાત** કહેવાય. કહો જોઈએ, ઉપરની બહુપદીનો ઘાત કેટલો?

અશોક : સર, $2x^7 - 5x + 9$ આ બહુપદીનો ઘાત 7 છે.

શિક્ષક : '10' આ બહુપદીનો ઘાત કેટલો?

રાધા : $10 = 10 \times 1 = 10 \times x^0$ એટલે બહુપદી '10' નો ઘાત 0 છે.

શિક્ષક : બહુપદી 10 પ્રમાણે આવી **કોઈપણ શૂન્યેતર સ્થિર (અચળ) બહુપદીનો ઘાત 0 હોય છે. શૂન્ય બહુપદીનો ઘાત નિશ્ચિત કરી શકાતો નથી.**

એક કરતાં વધારે ચલવાળી બહુપદીનો ઘાત

આપેલી બહુપદીના દરેક પદોમાં હોય તેટલાં બધાં ચલનાં ઘાતાંકનો જે સરવાળો સૌથી વધારે હોય છે. તે સરવાળાને તે **બહુપદીનો ઘાત** કહેવાય છે.

ઉદા. $3m^3n^6 + 7m^2n^3 - mn$ એ બે ચલવાળી બહુપદી છે. આ બહુપદીનો ઘાત 9 છે. (અહીં ઘાતાંકોનો સરવાળો $3 + 6 = 9$, $2 + 3 = 5$, $1 + 1 = 2$) છે.

કૃતિ I : ચલ x અને ઘાત 5 હોય તેવી એકપદી, દ્વિપદી અને ત્રિપદી પ્રત્યેકનું એક ઉદાહરણ લખો.

એકપદી ☐ દ્વિપદી ☐ ત્રિપદી ☐

કૃતિ II : 5 ઘાત હોય તેવા બે ચલવાળી એક દ્વિપદીનું ઉદાહરણ તૈયાર કરો. ☐

બહુપદીના પ્રકાર (ઘાત પરથી)

એક ચલવાળી બહુપદી

$3x - 1$, $7y$	$2y^2 + y + 1$, $-3x^2$	$x^3 + x^2 + 2x + \sqrt{3}$, $m - m^3$
ઘાત 1	ઘાત 2	ઘાત 3
રેખિક બહુપદી	વર્ગ બહુપદી	ઘન બહુપદી
સામાન્યરૂપ $ax + b$ અહીં a અને b સહગુણક અને $a \neq 0$	સામાન્યરૂપ $ax^2 + bx + c$ અહીં a, b, c સહગુણક અને $a \neq 0$	સામાન્યરૂપ $ax^3 + bx^2 + cx + d$ અહીં a, b, c, d સહગુણક અને $a \neq 0$

બહુપદી : $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ એ x ના ચલવાળી અને ઘાત n હોય તેવી બહુપદી છે.

અહીં a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0 એ સહગુણક છે અને હોય $a_n \neq 0$ ..

બહુપદીનું પ્રમાણરૂપ, સહગુણક રૂપ અને ઘાતાંક રૂપ
(Standard form, co-efficient form and index form of a polynomial)

$p(x) = x - 3x^2 + 5 + x^4$ એ બહુપદી x ના ઘાતાંકના ઉતરતા ક્રમમાં ગોઠવીને $x^4 - 3x^2 + x + 5$ એમ લખી શકાય. આને બહુપદીનું પ્રમાણરૂપ કહે છે. આ બહુપદીમાં x ના ત્રણ ઘાતનું પદ નથી. એટલે જ તે $0x^3$ છે એમ સમજી શકાય. આ પદ લઈ $p(x)$ બહુપદી $x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x + 5$ એ રીતે પણ લખી શકાય આ પ્રકારે ઘાતાંકના ઉતરતા ક્રમે લખેલી બહુપદીને ઘાતાંક રૂપ બહુપદી કહેવાય છે.

કેટલીક વખત બહુપદીના ઘાતાંક રૂપમાં દેખાતું ન હોય તે પદ અધ્યાહાર છે એમ માનીને ફક્ત સહગુણકને ક્રમથી લખાવામાં આવે છે. દા.ત. $x^3 - 3x^2 + 0x - 8$ આ બહુપદીમાં (1, −3, 0, −8) એમ લખી શકાય. આ રૂપને બહુપદીનું **સહગુણક રૂપ** કહેવાય.

(4, 0, −5, 0, 1) આ બહુપદી માટે y ચલનો ઉપયોગ કરતાં $4y^4 + 0y^3 - 5y^2 + 0y + 1$ એમ ઘાતાંક રૂપમાં અને $4y^4 - 5y^2 + 1$ પ્રમાણ રૂપમાં લખી શકાય છે.

ઉદા. $p(m) = 3m^5 - 7m + 5m^3 + 2$

બહુપદીને પ્રમાણ રૂપમાં લખો.	$3m^5 + 5m^3 - 7m + 2$
બહુપદીમાં ન હોય તેવા પદનો શૂન્ય સહગુણક લઈ સમાવિષ્ટ કરો. તે ઘાતાંક રૂપમાં લખો.	$3m^5 + 0m^4 + 5m^3 + 0m^2 - 7m + 2$
આપેલી બહુપદીને સહગુણક રૂપમાં લખો.	(3, 0, 5, 0, − 7, 2)
બહુપદીનો ઘાત લખો.	5

ઉદા. **(1)** $x^3 + 3x - 5$ બહુપદીને સહગુણક રૂપમાં લખો.

ઉકેલ : $x^3 + 3x - 5 = x^3 + 0x^2 + 3x - 5$

$\therefore$ આપેલી બહુપદીના સહગુણક રૂપ (1, 0, 3, − 5)

ઉદા. **(2)** (2, − 1, 0, 5, 6) આ સહગુણક રૂપને બહુપદીને પ્રમાણ રૂપમાં લખો.

ઉકેલ : બહુપદીનું સહગુણક રૂપ (2, − 1, 0, 5, 6)

$\therefore$ ઘાતાંક રૂપમાંની બહુપદી $= 2x^4 - x^3 + 0x^2 + 5x + 6$

એટલે જ પ્રમાણ રૂપમાંની બહુપદી $= 2x^4 - x^3 + 5x + 6$

મહાવરાસંગ્રહ 3.1

1. નીચેની રાશી બહુપદી છે કે તે લખો, સ્પષ્ટીકરણ લખો.

   (i) $y + \frac{1}{y}$ (ii) $2 - 5\sqrt{x}$ (iii) $x^2 + 7x + 9$

   (iv) $2m^{-2} + 7m - 5$ (v) 10

2. નીચેની પ્રત્યેક બહુપદીમાં m^3 નો સહગુણક લખો.

   (i) m^3 (ii) $\frac{-3}{2} + m - \sqrt{3}m^3$ (iii) $\frac{-2}{3}m^3 - 5m^2 + 7m - 1$

3. નીચેની માહિતી પરથી x ચલનો ઉપયોગ કરી પ્રત્યેકની એક બહુપદી લખો.

   (i) ઘાત 7 હોય તેવી એકપદી (ii) ઘાત 35 હોય તેવી દ્વિપદી (iii) ઘાત 8 હોય તેવી ત્રિપદી

4. નીચેની પ્રત્યેક બહુપદીનો ઘાત લખો.

(i) $\sqrt{5}$ (ii) x° (iii) x^2 (iv) $\sqrt{2}m^{10} - 7$ (v) $2p - \sqrt{7}$

(vi) $7y - y^3 + y^5$ (vii) $xyz + xy - z$ (viii) $m^3n^7 - 3m^5n + mn$

5. નીચેની બહુપદીનું રેખિક, વર્ગ અને ઘન બહુપદી આ પ્રકારે વર્ગીકરણ કરો.

(i) $2x^2 + 3x + 1$ (ii) $5p$ (iii) $\sqrt{2}\, y - \frac{1}{2}$

(iv) $m^3 + 7m^2 + \frac{5}{2}m - \sqrt{7}$ (v) a^2 (vi) $3r^3$

6. નીચેની બહુપદીને પ્રમાણ રૂપમાં લખો.

(i) $m^3 + 3 + 5m$ (ii) $- 7y + y^5 + 3y^3 - \frac{1}{2} + 2y^4 - y^2$

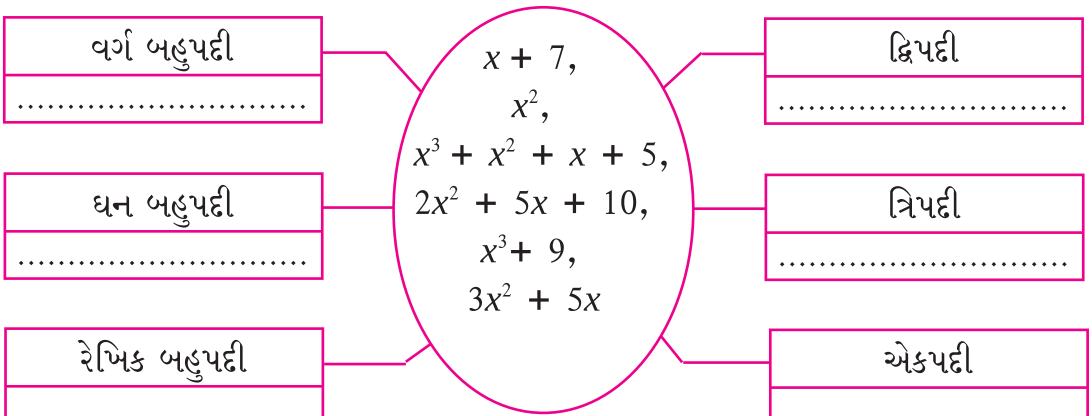
7. નીચેની બહુપદીને સહગુણક રૂપમાં લખો.

(i) $x^3 - 2$ (ii) $5y$ (iii) $2m^4 - 3m^2 + 7$ (iv) $-\frac{2}{3}$

8. નીચેની સહગુણક રૂપમાંની બહુપદીને x ચલનો ઉપયોગ કરીને પ્રમાણ રૂપમાં લખો.

(i) (1, 2, 3) (ii) (5, 0, 0, 0, − 1) (iii) (− 2, 2, − 2, 2)

9. નીચેની કેટલીક બહુપદી આપી છે. તે બહુપદીને આપેલ ચોકઠામાં યોગ્ય ઠેકાણે લખો.



યાદ કરીએ.

(1) બે સરૂપ બૈજિક પદોના સરવાળા અથવા બાદબાકી કરવા એટલે જ કે, તેના સહગુણકોના સરવાળા અથવા બાદબાકી કરવા. જેમ કે, $5m^3 - 7m^3 = (5 - 7)m^3 = -2m^3$

(2) બે બૈજિક પદોના ગુણાકાર અથવા ભાગાકાર કરવા એટલે કે તેના સહગુણકોનાં ગુણાકાર અથવા ભાગાકાર કરવા. અહીં પણ ઘાતાંકનાં નિયમોનો જ ઉપયોગ થાય છે.

જેમ કે, $-4y^3 \times 2y^2z = -8y^5z$; $12a^2b \div 3ab^2 = \frac{4a}{b}$

જાણી લઈએ.

બહુપદી પરની ક્રિયા

બહુપદીના સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર અને ભાગાકાર આ ક્રિયાઓ બૈજિક રાશિ પરની ક્રિયા પ્રમાણે જ કરી શકાય છે.

ઉદા. **(1)** $7a^2 + 5a + 6$ માંથી $5a^2 - 2a$ બાદ કરો.

ઉકેલ : $(7a^2 + 5a + 6) - (5a^2 - 2a)$

$= 7a^2 + 5a + 6 - 5a^2 + 2a$

$= \underline{7a^2 - 5a^2} + \underline{5a + 2a} + 6$ (સરખા પદોને એક સાથે ગોઠવતાં)

$= 2a^2 + 7a + 6$

ઉદા. **(2)** $-2a \times 5a^2 = -10a^3$

ઉદા. **(3)** $(m^2 - 5) \times (m^3 + 2m - 2) = ?$

ઉકેલ : $(m^2 - 5) \times (m^3 + 2m - 2)$

$= m^2 (m^3 + 2m - 2) - 5 (m^3 + 2m - 2)$ } (પહેલી બહુપદીના પ્રત્યેક પદને બીજી બહુપદી સાથે ગુણતાં)

$= m^5 + 2m^3 - 2m^2 - 5m^3 - 10m + 10$

$= m^5 + \underline{2m^3 - 5m^3} - 2m^2 - 10m + 10$ (સરખા પદોને એક સાથે ગોઠવતાં)

$= m^5 - 3m^3 - 2m^2 - 10m + 10$

અહીં ગુણાકારનો ઘાત 5 છે એ ધ્યાનમાં રાખો.

ઉદા. **(4)** $3m^2n + 5mn^2 - 7mn$ અને $2m^2n - mn^2 + mn$ નો સરવાળો કરો.

ઉકેલ : $(3m^2n + 5mn^2 - 7mn) + (2m^2n - mn^2 + mn)$

$= 3m^2n + 5mn^2 - 7mn + 2m^2n - mn^2 + mn$

$= \underline{3m^2n + 2m^2n} + \underline{5mn^2 - mn^2} - \underline{7mn + mn}$ (સરખા પદોને એક સાથે ગોઠવતાં)

$= 5m^2n + 4mn^2 - 6mn$ (સરખા પદોનો સરવાળો કરતાં)

વિચાર કરીએ.

એક બહુપદીનો ઘાત 3 અને બીજી બહુપદીનો ઘાત 5 હોય તો બહુપદીના ગુણાકારનો ઘાત કેટલો હશે ?

ગુણ્ય અને ગુણક બહુપદીનો ઘાત અને તેના ગુણાકારનાં ઘાત વચ્ચે શો સંબંધ હોય છે ?

ઉદા. (5) $(2 + 2x^2) \div (x + 2)$ નો ભાગાકાર કરો અને **ભાજ્ય = ભાજક $\times$ ભાગફળ + શેષ** ના સ્વરૂપમાં ઉત્તર લખો.

ઉકેલ : પ્રથમ $p(x) = 2 + 2x^2$ એ ભાજ્ય બહુપદીને પ્રમાણ રૂપમાં લખતાં.

$\therefore \ 2 + 2x^2 = 2x^2 + 0x + 2$

રીત I :

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x - 4 \\
\hline
x + 2 & 2x^2 + 0x + 2 \\
 & -\,(2x^2 + 4x) \\
\hline
 & -4x + 2 \\
 & -\,(-4x - 8) \\
\hline
 & 10
\end{array}
$$

ભાજ્ય = ભાજક $\times$ ભાગફળ + શેષ

$2 + 2x^2 = (x + 2) \times (2x - 4) + 10$

$q(x)$, ભાજક $= (x + 2)$

$s(x)$, ભાગફળ $= 2x - 4$ અને $r(x)$, શેષ$= 10$

$\therefore \ \mathbf{p(x) = q(x) \times s(x) + r(x)}$.

રીત II : ભાગાકારની રેખિક પદ્ધતિ

$(2x^2 + 2) \div (x + 2)$ નો ભાગાકાર કરો.

$2x^2$ પદ મેળવવા માટે $(x + 2)$ ને $2x$ ને વડે ગુણીને $4x$ બાદ કરતાં

$2x(x+2) - 4x = 2x^2$

$\therefore$ ભાજ્ય $= 2x^2 + 2 = 2x(x+2) - 4x + 2$ ...(I)

હવે $-4x$ એ પદ મેળવવા માટે $(x+2)$ ને -4 ગુણીને 8 ઉમેરતાં,

$-4(x+2) + 8 = -4x$

$\therefore \ (2x^2 + 2) = 2x(x+2) - 4(x+2) + 8 + 2$ ...(I) પરથી

$\therefore \ (2x^2 + 2) = (x + 2)(2x - 4) + 10$

ભાજ્ય = ભાજક $\times$ ભાગફળ + શેષ

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

યુક્લિડનો ભાગાકાર સિધ્ધાંત

જો $s(x)$ અને $p(x)$ આ બે બહુપદી હોય અને $s(x)$ નો ઘાત $p(x)$ ના ઘાત જેટલો કે તેના કરતા વધારે હોય, તેમજ $s(x)$ ને $p(x)$ વડે ભાગતા આવતો ભાગાકાર $q(x)$ હોય તો $s(x) = p(x) \times q(x) + r(x)$. અહીં $r(x)$ નો ઘાત $p(x)$ ના ઘાત કરતા ઓછો હોય છે.

મહાવરાસંગ્રહ 3.2

(1) આપેલ અક્ષર વાપરીને ઉત્તર લખો.

(i) નંદનપુર ગામમાં a ઝાડ છે. ઝાડની સંખ્યા દર વર્ષે b થી વધે છે. તો x વર્ષ પછી તે ગામમાં કેટલા ઝાડ હશે ?

(ii) કવાયત માટે એક હરોળમાં y છોકરા હોય તેવી x હરોળ કરી તો કવાયત માટે કુલ કેટલા છોકરાઓ હાજર હતા ?

(iii) એક દ્વિઅંકી સંખ્યાના એકમ અને દશક સ્થાનના અંક અનુક્રમે m અને n છે તો તે દ્વિઅંકી સંખ્યા દર્શાવતી બહુપદી કઈ?

(2) નીચેની બહુપદીનો સરવાળો કરો.

(i) $x^3 - 2x^2 - 9$; $5x^3 + 2x + 9$

(ii) $-7m^4 + 5m^3 + \sqrt{2}$; $5m^4 - 3m^3 + 2m^2 + 3m - 6$

(iii) $2y^2 + 7y + 5$; $3y + 9$; $3y^2 - 4y - 3$

(3) પહેલી બહુપદીમાંથી બીજી બહુપદી બાદ કરો.

(i) $x^2 - 9x + \sqrt{3}$; $-19x + \sqrt{3} + 7x^2$

(ii) $2ab^2 + 3a^2b - 4ab$; $3ab - 8ab^2 + 2a^2b$

(4) નીચેની બહુપદીનો ગુણાકાર કરો.

(i) $2x$; $x^2 - 2x - 1$ (ii) $x^5 - 1$; $x^3 + 2x^2 + 2$ (iii) $2y + 1$; $y^2 - 2y^3 + 3y$

(5) પહેલી બહુપદીને બીજી બહુપદી વડે ભાગો. અને ઉત્તર 'ભાજ્ય = ભાજક × ભાગફળ + શેષ' ના રૂપમાં લખો.

(i) $x^3 - 64$; $x - 4$ (ii) $5x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2$; $x^2 - x$

(6*) નીચેની માહિતી પદાવલીના રૂપમાં લખો. પદાવલીને સાદું રૂપ આપો.

એક લંબચોરસાકાર ખેતરની લંબાઈ $(2a^2 + 3b^2)$મીટર અને પહોળાઈ $(a^2 + b^2)$મીટર છે. ખેડૂતે ખેતરમાં $(a^2 - b^2)$મીટર બાજુવાળી ચોરસાકૃતિ જગ્યા પર ઘર બાંધ્યું, તો બાકીની જગ્યાનું ક્ષેત્રફળ કેટલું?

કૃતિ : નીચેનો ફકરો વાંચો તે પરથી આપેલા ચોકઠામાં યોગ્ય રાશિ લખો અને ચર્ચા કરો.

શિરળસ ગામમાં ખેતી કરતા ગોવિંદનું 5 એકરનું ખેતર છે. તેના ઘરમાં તેની પત્ની, 2 બાળકો અને તેના વૃદ્ધમાતા છે. તેણે ખેતી માટે બેંકમાંથી એક વરસ માટે દ.વ.દ.સે. 10 ના દરે સવા લાખ રૂપિયા કરજ લીધું. તેણે ખેતરમાં x એકર જમીનમાં સોયાબીન અને y એકર જમીનમાં કપાસ અને તુવેરનો પાક લીધો. ખેતી માટે થયેલો ખર્ચ નીચે મુજબ છે.

બિયારણ માટે તેણે કુલ ₹ 10,000 આપ્યા સોયાબીનના પાક માટે ₹ 2000 x ખાતર અને કિટકનાશક માટે આપ્યા મજૂરી અને ખેડાણ માટે ₹ 4000 x^2 ખર્ચ થયો. કપાસ અને તુવેરના પાક માટે ₹ 8000 y ખાતર અને કિટકનાશક પર ₹ 9000 y^2 ખર્ચ મજૂરી અને ખેડાણ પેટે થયો.

ખેતી માટે થયેલ કુલ ખર્ચ x અને y વાપરીને લખીએ.

$\boxed{}$ + $\boxed{2000\ x}$ + $\boxed{4000\ x^2}$ + $\boxed{8000\ y}$ + $\boxed{}$ રૂપિયા

તેના ખેતરમાં સોયાબીનનું ઉત્પાદન $5x^2$ ક્વિંટલ થયું. જે 2800 રૂ. ક્વિંટલના દરે વેંચાયો. કપાસનું ઉત્પાદન $\frac{5}{3}y^2$ ક્વિંટલ થયું અને 5000 રૂ. ક્વિંટલના દરે વેચાયો.

તુવેરનું ઉત્પાદન $4y$ ક્વિંટલ થયું, જે 4000 રૂ. પ્રતિ ક્વિંટલ વેંચાયો.

દરેક પાકના વેંચાણથી તેને કુલ કેટલા રૂપિયા આવક થઈ?

તે x અને y ની પદાવલિના રૂપમાં લખીશું.

$\boxed{}$ + $\boxed{}$ + $\boxed{}$ રૂપિયા

જાણી લઈએ.

સંશ્લેષક ભાગાકાર પધ્ધતિ (Synthetic Division)

એક બહુપદીને બીજી બહુપદી વડે કેવી રીતે ભાગી શકાય તે આપણે જાણીએ છીએ. હવે આપણે ભાજક બહુપદી $(x + a)$ અથવા $(x - a)$ હોય તો ભાગાકારની સહેલી રીત શીખીએ.

ઉદા. (1) $(3x^3 + 2x^2 - 1)$ બહુપદીને $(x + 2)$ વડે ભાગો.

ઉકેલ : પ્રથમ ભાજ્ય બહુપદીને ઘાતાંકના રૂપમાં લખીને સહગુણક રૂપમાં લખીશું.

ભાજ્યનું ઘાતાંકરૂપ = $3x^3 + 2x^2 + 0x - 1$

$\therefore$ ભાજ્યનું સહગુણક રૂપ = $(3, 2, 0, -1)$

ભાજક બહુપદી = $x + 2$

નીચેના પગથિયા પ્રમાણે સંશ્લેષક પદ્ધતિથી ભાગાકાર કરીએ.

....	પહેલી લાઈન
....	બીજી લાઈન
....	ત્રીજી લાઈન

(1) બાજુમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે એક ઊભી અને એક આડી એમ બે લીટી (રેખા) દોરીએ.

(2) ભાજક $x + 2$ અને 2 ની વિરુધ્ધ સંખ્યા -2 છે.
$\therefore$ પહેલી લાઈનમાં ઊભી રેખાની ડાબી બાજુએ -2 લખીએ.
આડી રેખા પર પહેલી લાઈનમાં ભાજ્ય બહુપદીનું સહગુણક રૂપ લખીએ.

- 2	3	2	0	- 1	પહેલી લાઈન
	↓				
	3				ત્રીજી લાઈન

(3) આડી રેખાની નીચે એટલે કે ત્રીજી લાઈનમાં ભાજ્યનો પહેલો સહગુણક જેમનો તેમ લખીએ.

(4) ત્રીજી લાઈનમાં 3 અને ભાજકના -2 નો ગુણાકાર -6 એ બીજી લાઈનમાં સહગુણક 2 ની નીચે લખીએ. પછી 2 અને -6 નો સરવાળો -4 ત્રીજી લાઈનમાં નીચે લખીએ.

- 2	3	2	0	- 1	
	↓	-6	8	-16	
	3	- 4	8	- 17	શેષ

આ પ્રમાણે ગુણાકાર અને સરવાળો કરીને છેલ્લે સરવાળો કરીને મળેલી સંખ્યા એ ભાગાકારની શેષ હોય છે. અહીં શેષ -17 છે.

(3, $-$ 4, 8) એ ભાગફળનું સહગુણક રૂપ છે.

$\therefore$ ભાગફળ $= 3x^2 - 4x + 8$ અને શેષ $= -17$

$\therefore\ 3x^3 + 2x^2 - 1 = (x + 2)(3x^2 - 4x + 8) - 17$

આ પદ્ધતિને **ભાગાકારની સંશ્લેષક પદ્ધતિ** કહેવાય છે.

આ ભાગાકાર રેખિક પદ્ધતિથી નીચે પ્રમાણે કરી શકાય.

$$\begin{aligned} 3x^3 + 2x^2 - 1 &= 3x^2 (x + 2) - 6x^2 + 2x^2 - 1 \\ &= 3x^2 (x + 2) - 4x^2 - 1 \\ &= 3x^2 (x + 2) - 4x^2 - 8x + 8x - 1 \\ &= 3x^2 (x + 2) - 4x (x + 2) + 8x - 1 \\ &= 3x^2 (x + 2) - 4x (x + 2) + 8x + 16 - 16 - 1 \\ &= 3x^2 (x + 2) - 4x (x + 2) + 8 (x + 2) - 17 \end{aligned}$$

$\therefore\quad 3x^3 + 2x^2 - 1 = (x + 2)(3x^2 - 4x + 8) - 17$

ઉદા. **(2)** $(2y^4 - 3y^3 + 5y - 4) \div (y - 1)$ ભાગાકાર કરો.

ઉકેલ : **સંશ્લેષક પદ્ધતિ :** ભાજ્ય $= 2y^4 - 3y^3 + 5y - 4 = 2y^4 - 3y^3 + 0y^2 + 5y - 4$

ભાજક $= y - 1$અહીં -1 ની વિરુદ્ધ સંખ્યા 1 છે.

1	2	- 3	0	5	- 4	
		2	- 1	- 1	4	
	2	- 1	- 1	4	0	શેષ

ભાગફળનું સહગુણક રૂપ $(2, -1, -1, 4)$ છે.

$\therefore$ ભાગફળ $= 2y^3 - y^2 - y + 4$ અને શેષ $= 0$

રેખિક પદ્ધતિ : $2y^4 - 3y^3 + 5y - 4 = 2y^3(y - 1) + 2y^3 - 3y^3 + 5y - 4$

$= 2y^3(y - 1) - y^2(y - 1) - y^2 + 5y - 4$

$= 2y^3(y - 1) - y^2(y - 1) - y(y - 1) + 4y - 4$

$= 2y^3(y - 1) - y^2(y - 1) - y(y - 1) + 4(y - 1)$

$= (2y^3 - y^2 - y + 4)(y - 1)$

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

સંશ્લેષક ભાગાકાર પદ્ધતિથી ભાગાકાર કરતી વખતે $x + a$ અથવા $x - a$ આ રૂપમાં એટલે કે જે બહુપદીનો ઘાત 1 હોય તેવો જ ભાજક લેવામાં આવે છે.

મહાવરાસંગ્રહ 3.3

1. નીચેના ભાગાકાર સંશ્લેષક પદ્ધતિ અને રેખિક પદ્ધતિથી કરો. ભાગફળ અને શેષ લખો.

(i) $(2m^2 - 3m + 10) \div (m - 5)$ (ii) $(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5) \div (x + 2)$

(iii) $(y^3 - 216) \div (y - 6)$ (iv) $(2x^4 + 3x^3 + 4x - 2x^2) \div (x + 3)$

(v) $(x^4 - 3x^2 - 8) \div (x + 4)$ (vi) $(y^3 - 3y^2 + 5y - 1) \div (y - 1)$

જાણી લઈએ.

બહુપદીની કિંમત (Value of polynomial)

બહુપદીમાં ચલને એકાદી કિંમત આપીએ તો તે પરથી બહુપદીની પણ એક કિંમત મળે છે.

દા.ત. $x + 7$ બહુપદીમાં x માટે '2' મૂકીએ તો, તે બહુપદીની કિંમત $2 + 7 = 9$ મળે છે.

$p(x)$ બહુપદીમાં x ની a કિંમત લેતાં મળતી બહુપદીની કિંમત $p(a)$ વડે દર્શાવાય છે.

ઉદા. **(1)** $p(x) = 2x^2 - 3x + 5$ બહુપદીની કિંમત $x = 2$ લઈને શોધો.

ઉકેલ : બહુપદી $p(x) = 2x^2 - 3x + 5$

આ બહુપદીમાં $x = 2$ મૂકતાં,

$$\therefore\ p(2) = 2 \times 2^2 - 3 \times 2 + 5$$
$$= 2 \times 4 - 6 + 5$$
$$= 8 - 6 + 5$$
$$\therefore\ p(2) = 7$$

ઉદા. **(2)** $y = -2$ હોય તો $p(y) = 2y^3 - 2y + \sqrt{7}$ ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : $p(y) = 2y^3 - 2y + \sqrt{7}$

$$\therefore\ p(-2) = 2 \times (-2)^3 - 2 \times (-2) + \sqrt{7}$$
$$= 2 \times (-8) - 2 \times (-2) + \sqrt{7}$$
$$= -16 + 4 + \sqrt{7}$$
$$= -12 + \sqrt{7}$$

$\therefore$ $y = -2$ હોય તો બહુપદીની કિંમત $-12 + \sqrt{7}$ છે.

ઉદા. **(3)** $p(x) = 2x^2 - x^3 + x + 2$ આ બહુપદી માટે $p(0)$ શોધો.

ઉકેલ : $p(x) = 2x^2 - x^3 + x + 2$

$$\therefore\ p(0) = 2 \times 0^2 - 0^3 + 0 + 2$$
$$= 2 \times 0 - 0 + 0 + 2$$
$$= 2$$

ઉદા. **(4)** જો $m^2 - am + 7$ બહુપદીની કિંમત $m = -1$ લેતા 10 હોય તો a ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : $p(m) = m^2 - am + 7$

$$\therefore\ p(-1) = (-1)^2 - a \times (-1) + 7$$
$$= 1 + a + 7$$
$$= 8 + a$$

પરંતુ $p(-1) = 10$ (આપેલું છે.)

$$\therefore\ 8 + a = 10$$
$$\therefore\ a = 10 - 8$$
$$\therefore\ a = 2$$

મહાવરાસંગ્રહ 3.4

(1) $x = 0$ હોય તો $x^2 - 5x + 5$ બહુપદીની કિંમત શોધો.

(2) જો $p(y) = y^2 - 3\sqrt{2}y + 1$ તો $p(3\sqrt{2})$ શોધો

(3) જો $p(m) = m^3 + 2m^2 - m + 10$ તો $p(a) + p(-a) = ?$

(4) જો $p(y) = 2y^3 - 6y^2 - 5y + 7$ તો $p(2)$ શોધો

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

ચલની એકાદ કિંમત આપી હોય ત્યારે બહુપદીની કિંમત શોધતી વખતે **પ્રત્યેક પદમાં** x ની જગ્યાએ આપેલી કિંમત મૂકીને તે પરથી બહુપદીની કિંમત શોધી શકાય છે.

જાણી લઈએ.

શેષ સિધ્ધાંત (Remainder Theorem)

$p(x)$ આ બહુપદીને $(x + a)$ વડે ભાગતા વધતી શેષ અને બહુપદીમાં x ની $-a$ કિંમત લઈને મળતી તે બહુપદીની કિંમતમાં પરસ્પર સંબંધ હોય છે. આ સંબંધ સમજવા માટે નીચેના ઉદાહરણોનો અભ્યાસ કરો.

ઉદા. $p(x) = (4x^2 - x + 2)$ ને $(x + 1)$ વડે ભાગો.

[અહીં $(x + a)$ એટલે $(x + 1)$ છે તે ધ્યાનમાં રાખો.]

આ ઉદાહરણ બન્ને રીતે ઉકેલીને બતાવ્યું છે. જવાબ તપાસો.

રીત I

ઉકેલ : ભાજ્ય બહુપદી $= 4x^2 - x + 2$

ભાજક બહુપદી $= x + 1$

ભાગફળ $4x - 5$

ભાજક $x + 1$) $4x^2 - x + 2$ ભાજ્ય

$-\ 4x^2 + 4x$
$\quad -\quad -$

$\quad - 5x + 2$

$-\ - 5x - 5$
$\quad +\quad +$

$\quad 7$ શેષ

ભાગફળ $= 4x - 5$ અને શેષ $= 7$ .... (I)

રીત II

આજ ઉદાહરણ સંશ્લેષક ભાગાકાર પધ્ધતિથી કરીએ.

$p(x)$ નું સહગુણક રૂપ $= (4, -1, 2)$

ભાજક બહુપદી $= x + 1$

1 ની વિરુધ્ધ સંખ્યા -1

-1	4	-1	2
		-4	5
	4	-5	7 શેષ

ભાગફળ $= 4x - 5$ શેષ $= 7$

હવે આપણે શેષ અને ભાજ્ય બહુપદીની કિંમત વચ્ચેનો સંબંધ ચકાસીએ.

ભાજ્ય બહુપદી એટલે $4x^2 - x + 2$ ની $x = -1$ લેતા કિંમત શોધીએ.

$p(x) = 4x^2 - x + 2$

$\therefore\ p(-1) = 4 \times (-1)^2 - (-1) + 2$

$= 4 \times 1 + 1 + 2$

$= 4 + 1 + 2$

$= 7$

$\therefore$ $x = -1$ હોય ત્યારે બહુપદી $p(x)$ ની કિંમત 7 છે.. ...... (II)

વિધાન (I) અને (II) પરથી, $p(x) = 4x^2 - x + 2$ આ બહુપદીને $(x + a)$ એટલે કે અહીં $(x + 1)$ વડે ભાગતાં વધતી શેષ, એ $p(x)$ માં $x = -1$ મૂકવાથી મળતી બહુપદી $p(x)$ ની કિંમત એટલે કે $p(-1)$ જેટલી હોય છે.

આના પરથી નીચેનો ગુણધર્મ ધ્યાનમાં આવે છે.

$p(x)$ બહુપદીને $(x + a)$ વડે ભાગતા વધતી **શેષ,** $p(-a)$ જેટલી હોય છે.
એટલે જ $p(x)$ માં $x = -a$ મૂકવાથી મળતી **બહુપદીની કિંમત** જેટલી હોય છે.

આ ગુણધર્મને **શેષ સિધ્ધાંત** કહેવાય છે.

યુક્લિડના ભાગાકારનો નિયમ વાપરીને આ ગુણધર્મ સાબિત કરીએ.

$p(x)$ ને $(x + a)$ વડે ભાગતા,

$p(x) = q(x) \times (x + a) + r(x)$ [$q(x)$ = ભાગફળ, $r(x)$ = શેષ]

જો, $r(x) \neq 0$, તો નિયમ પ્રમાણે $r(x)$ ની ઘાત 1 કરતા ઓછો એટલે કે 0 છે. એટલે જ કે $r(x)$ એ વાસ્તવિક સંખ્યા છે.

$\therefore$ $r(-a)$ એ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા છે.

હવે, $p(x) = q(x) \times (x + a) + r(x)$ ....(I)

માં $x = -a$ કિંમત મૂકતા.

$p(-a) = q(-a) \times (a - a) + r(-a)$

$= q(-a) \times 0 + r(-a)$.........(II)

$\therefore$ $p(-a) = r(-a)$ ....(I) અને (II) પર થી

કૃતિ : નીચેના ઉદાહરણો ચકાસી જુઓ.

(1) $p(x) = 3x^2 + x + 7$ આ બહુપદીને $x + 2$ વડે ભાગી ભાગફળ અને શેષ શોધો.

(2) $x = -2$ મૂકીને $p(x) = 3x^2 + x + 7$ આ બહુપદીની કિંમત શોધો.

(3) હવે ભાગાકારમાં મળતી શેષ $p(-2)$ ની કિંમત જેટલી છે કે?

હજી એક ઉદાહરણ લઈ ઉપર પ્રમાણે ચકાસી જુઓ.

ઉદા. **(1)** $x^4 - 5x^2 - 4x$ આ બહુપદીને $x + 3$ વડે ભાગતા મળતી શેષ શોધો.

ઉકેલ : **શેષ સિધ્ધાંત વડે**

ભાજ્ય બહુપદી $p(x) = x^4 - 5x^2 - 4x$

ભાજક $= x + 3$

$\therefore$ $x = -3$ લેતા,

$\therefore$ $p(x) = x^4 - 5x^2 - 4x$

$p(-3) = (-3)^4 - 5(-3)^2 - 4(-3)$

$= 81 - 45 + 12$

$p(-3) = 48$

સંશ્લેષક ભાગાકાર પધ્ધતિ વડે

પ્રમાણ રૂપ $= x^4 + 0x^3 - 5x^2 - 4x + 0$

સહગુણક રૂપ $= (1, 0, -5, -4, 0)$

-3	1	0	-5	-4	0
		-3	9	-12	48
	1	-3	4	-16	48 શેષ

શેષ $= 48$

ઉદા. **(2)** શેષ સિધ્ધાંતનો ઉપયોગ કરીને $x^3 - 2x^2 - 4x - 1$ આ બહુપદીને $x - 1$ વડે ભાગતા મળતી શેષ શોધો.

ઉકેલ : $p(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 1$

ભાજક $= x - 1$ $\therefore$ $x = 1$ લેતા,

$\therefore$ શેષ સિધ્ધાંત અનુસાર, શેષ $= p(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 - 4 \times 1 - 1$

$= 1 - 2 \times 1 - 4 - 1$

$p(1) = 1 - 2 - 4 - 1 = -6$

$\therefore$ શેષ સિધ્ધાંત અનુસાર શેષ $= -6$

ઉદા. **(3)** જો $t^3 - 3t^2 + kt + 50$ આ બહુપદીને $(t-3)$ વડે ભાગતા શેષ 62 વધે છે. તો k ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : આપેલી બહુપદીને $(t-3)$ વડે ભાગતા શેષ 62 વધે છે.

એટલે ભાજ્ય બહુપદીની કિંમત $t = 3$ લઈને શોધીશું.

$p(t) = t^3 - 3t^2 + kt + 50$

∴ શેષ સિધ્ધાંત અનુસાર

શેષ = $p(3)$ $= 3^3 - 3 \times 3^2 + k \times 3 + 50$

$= 27 - 3 \times 9 + 3k + 50$

$= 27 - 27 + 3k + 50$

$= 3k + 50$

પરંતુ શેષ 62 આપેલી છે.

$\therefore 3k + 50 = 62$

$\therefore 3k = 62 - 50$

$\therefore 3k = 12$

$\therefore k = \frac{12}{3}$

$\therefore k = 4$

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

શેષ સિધ્ધાંત : $p(x)$ એ કોઈપણ બહુપદી હોય અને 'a' એ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય અને જો $p(x)$ ને $(x + a)$ વડે ભાગીએ તો મળતી શેષ $p(-a)$ જેટલી હોય છે.

$p(x) = s(x)\,(x - a) + r(x)$ $\qquad$ $r(x)$ નો ઘાત < 1 અથવા $r(x) = 0$

આ સમીકરણમાં $x = a$ મૂકતાં $p(a) = 0 + r\,(a) = r\,(a)$ મળે છે.

જો $r(a) = 0$ તો $(x - a)$ એ $p(x)$ નો અવયવ છે એ ધ્યાનમાં આવે છે.

જાણી લઈએ.

અવયવ સિધ્ધાંત (Factor Theorem)

જો 21 ને 7 વડે ભાગીએ તો શેષ 0 આવે છે. એટલે આપણે કહીએ છીએ કે, 7 એ 21 નો અવયવ છે.

તે જ પ્રમાણે આપેલ ભાજ્ય બહુપદીને ભાજક બહુપદી વડે ભાગતા શેષ 0 વધે તો ભાજક બહુપદી એ આપેલ બહુપદીનો અવયવ છે એમ કહી શકાય.

ઉદા. **(1)** $p(x) = (x^3 + 4x - 5)$ આ બહુપદીને $(x - 1)$ વડે ભાગતાં મળતી શેષ શોધો. $(x - 1)$ એ $p(x)$ નો અવયવ છે કે નહીં તે નક્કી કરો.

ઉકેલ : $p(x) = x^3 + 4x - 5$

$\therefore p(1) = (1)^3 + 4(1) - 5$

$= 1 + 4 - 5$

$= 0$

અહીં, શેષ સિધ્ધાંત અનુસાર શેષ = 0

∴ $(x - 1)$ એ $p(x)$ બહુપદીને **અવયવ છે.**

ઉદા. **(2)** $p(x) = x^3 + 4x - 5$ આ બહુપદીને $x + 2$ વડે ભાગતાં મળતી શેષ શોધો. $(x + 2)$ એ $p(x)$નો અવયવ છે કે નહીં તે નક્કી કરો.

ઉકેલ : $p(x) = x^3 + 4x - 5$

$\therefore p(-2) = (-2)^3 + 4(-2) - 5$

$= -8 - 8 - 5$

$= -21$

અહીં, શેષ સિધ્ધાંત અનુસાર શેષ -21 વધી.

અહીં, શેષ $\neq 0$

∴ $(x + 2)$ એ $p(x)$ બહુપદીનો **અવયવ નથી.**

કૃતિ : $(x - 1)$ એ $x^3 + 4x - 5$ આ બહુપદીનો અવયવ છે કે નહીં તે ભાગાકાર કરીને અથવા સંશ્લેષક ભાગાકાર કરીને ચકાસી જુઓ.

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

અવયવ સિધ્ધાંત : ધારો કે $p(x)$ એ બહુપદી હોય અને a એ કોઈપણ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય અને જો $p(a) = 0$ હોય તો $(x - a)$ એ $p(x)$ નો અવયવ હોય છે.

એથી ઉલ્ટું $(x - a)$ એ $p(x)$ બહુપદીનો અવયવ હોય તો $p(a) = 0$ હોય છે.

ઉદા. **(1)** અવયવ સિધ્ધાંતનો ઉપયોગ કરીને, $x - 2$ એ $x^3 - x^2 - 4$ આ બહુપદીનો અવયવ છે કે નહીં તે નક્કી કરો.

ઉકેલ : $p(x) = x^3 - x^2 - 4$ ભાજક $= x - 2$

$\therefore\ p(2) = 2^3 - 2^2 - 4 = 8 - 4 - 4 = 0$

$\therefore$ અવયવ સિધ્ધાંત અનુસાર, $(x - 2)$ એ $(x^3 - x^2 - 4)$ આ બહુપદીનો અવયવ છે.

ઉદા. **(2)** જો $(x - 1)$ એ $(x^3 - 2x^2 + mx - 4)$ નો અવયવ હોય તો m ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : $(x - 1)$ એ $p(x)$ નો અવયવ છે. $\therefore\ p(1) = 0$

$p(x) = x^3 - 2x^2 + mx - 4$

$p(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 + m \times 1 - 4 = 0$

$\therefore\ 1 - 2 \times 1 + m - 4 = 0$

$\therefore\ 1 - 2 + m - 4 = 0$ $\therefore\ m - 5 = 0$ $\therefore\ m = 5$

કૃતિ : આપણે ખેતી કરતા ગોવિંદના સંદર્ભમાં ખેતીનો ખર્ચ અને ઉત્પાદન આ બાબતો બહુપદીના રૂપમાં પહેલાં જોઈ છે. તેણે બેંક પાસેથી એક વર્ષ માટે 10% ના વ્યાજથી સવા લાખ રૂપિયાનું કરજ લીધું હતું અને વ્યાજ સાથે પરત કર્યું હતું. બિયારણ માટેનો ખર્ચ 10,000 રૂપિયા, સોયાબીનના પાક માટે ખાતર - કિટકનાશકનો ખર્ચ $2000x$ રૂપિયા અને તેની મજૂરી તથા ખેડાણ પેટે $4000x^2$ રૂપિયા ખર્ચ થયો હતો. કપાસ અને તુવેરના પાક માટે $8000y$ રૂપિયા ખાતર તથા કિટકનાશકના અને $9000y^2$ રૂપિયા મજૂરી માટે અને ખેડાણ પેટે ખર્ચ થયો હતો.

કુલ આવક ₹ $\left(14000x^2 + \frac{25000}{3}y^2 + 16000y\right)$ થઈ હતી.

ચલની કિંમત $x = 2$, $y = 3$ લઈને ગોવિંદની ખેતીનો જમાખર્ચ લખો.

ઉકેલ :

જમા		ખર્ચ	
₹ 1,25,000	રૂપિયા બેંકમાંથી લોન મળી.	₹ 1,37,000	બેંકને વ્યાજસહિત ચૂકવ્યા.
₹	સોયાબીનમાંથી થયેલી આવક	₹	બિયારણ માટે
₹	કપાસમાંથી થયેલી આવક	₹	સોયાબીન ખાતર અને કિટકનાશક
₹	તુવેરની આવક	₹	સોયાબીન મજૂરી અને ખેડાણ
₹	કુલ જમા	₹	કપાસ અને તુવેર : ખાતર અને કિટકનાશક
		₹	કપાસ અને તુવેર : મજૂરી અને ખેડાણ
		₹	કુલ ખર્ચ

તો ગોવિંદને ખર્ચ બાદ જતાં કેટલી રકમ મળી?

મહાવરાસંગ્રહ 3.5

(1) x ની નીચે આપેલી કિંમત લઈને $2x - 2x^3 + 7$ બહુપદીની કિંમત શોધો.

(i) $x = 3$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 0$

(2) નીચેની પ્રત્યેક બહુપદી માટે $p(1)$, $p(0)$ અને $p(-2)$ શોધો.

(i) $p(x) = x^3$ (ii) $p(y) = y^2 - 2y + 5$ (iii) $p(x) = x^4 - 2x^2 - x$

(3) જો $m^3 + 2m + a$ બહુપદીની કિંમત $m = 2$ મૂકતાં 12 છે. તો a ની કિંમત શોધો.

(4) જો $mx^2 - 2x + 3$ બહુપદી માટે $p(-1) = 7$ હોય તો m ની કિંમત શોધો.

(5) નીચેનામાંથી પહેલી બહુપદીને બીજી બહુપદી વડે ભાગતા મળતી શેષ 'શેષ સિધ્ધાંતનો ઉપયોગ કરીને' શોધો.

(i) $(x^2 - 7x + 9)$; $(x + 1)$

(ii) $(2x^3 - 2x^2 + ax - a)$; $(x - a)$

(iii) $(54m^3 + 18m^2 - 27m + 5)$; $(m - 3)$

(6) $y^3 - 5y^2 + 7y + m$ બહુપદીને $y + 2$ વડે ભાગતા શેષ 50 વધે છે. તો m ની કિંમત શોધો.

(7) અવયવ સિધ્ધાંતનો ઉપયોગ કરીને, $x + 3$ એ $x^2 + 2x - 3$ નો અવયવ છે કે તે નક્કી કરો.

(8) જો $x - 2$ એ $x^3 - mx^2 + 10x - 20$ આ બહુપદીનો અવયવ હોય તો m ની કિંમત શોધો.

(9) નીચેના ઉદાહરણમાં $q(x)$ એ $p(x)$ નો અવયવ છે કે નહીં તે અવયવ સિધ્ધાંતની મદદથી નક્કી કરો.

(i) $p(x) = x^3 - x^2 - x - 1$, $q(x) = x - 1$

(ii) $p(x) = 2x^3 - x^2 - 45$, $q(x) = x - 3$

(10) $(x + 1)$ ને $(x^{31} + 31)$ વડે ભાગતા મળતી શેષ શોધો.

(11) $m - 1$ એ $m^{21} - 1$ અને $m^{22} - 1$ આ બહુપદીઓનો અવયવ છે કે નહીં તે જણાવો.

(12*) જો $x - 2$ અને $x - \frac{1}{2}$ આ બન્ને $nx^2 - 5x + m$ બહુપદીના અવયવ હોય તો સાબિત કરો કે, $m = n = 2$.

(13) (i) જો $p(x) = 2 + 5x$ તો $p(2) + p(-2) - p(1)$ શોધો.

(ii) જો $p(x) = 2x^2 - 5\sqrt{3}x + 5$ તો $p(5\sqrt{3})$ શોધો.

યાદ કરીએ.

પાછલા ધોરણમાં આપણે બહુપદીના અવયવ કેવી રીતે પાડવા, તેનો અભ્યાસ કર્યો છે. કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ. **અવયવ પાડો.**

ઉદા. (1) $4x^2 - 25$

ઉકેલ : $= (2x)^2 - (5)^2$

$= (2x + 5)(2x - 5)$

ઉદા. (2) $3x^2 + 7x + 2$

ઉકેલ : $= \underline{3x^2 + 6x} + \underline{x + 2}$

$= 3x(x + 2) + 1(x + 2)$

$= (x + 2)(3x + 1)$

ઉદા. **(3)** $63x^2 + 5x - 2$

$= 63x^2 + 14x - 9x - 2$

$= 7x(9x + 2) - 1(9x + 2)$

$= (9x + 2)(7x - 1)$

ઉદા. **(4)** $6x^2 - 5x - 6$

$= 6x^2 - 9x + 4x - 6$

$= 3x(2x - 3) + 2(2x - 3)$

$= (2x - 3)(3x + 2)$

જાણી લઈએ.

બહુપદીના અવયવ (Factors of polynomials)

કેટલીક વાર આપેલ બહુપદીનું રૂપાંતર $ax^2 + bx + c$ ના રૂપમાં કરતાં તેના અવયવ શોધવા સરળ બને છે.

ઉદા. **(1)** $(y^2-3y)^2 - 5(y^2-3y) - 50$ ના અવયવ પાડો.

ઉકેલ : આપેલ બહુપદીમાં $(y^2-3y) = x$ લેતા,

$\therefore (y^2-3y)^2 - 5(y^2-3y) - 50 = x^2 - 5x - 50$

$= x^2 - 10x + 5x - 50$

$= x(x - 10) + 5(x - 10)$

$= (x - 10)(x + 5)$

$= (y^2-3y - 10)(y^2-3y + 5)$

$= [y^2-5y + 2y - 10](y^2-3y + 5)$

$= [y(y - 5) + 2(y - 5)](y^2-3y + 5)$

$= (y - 5)(y + 2)(y^2-3y + 5)$

ઉદા. **(2)** અવયવ પાડો.

$(x + 2)(x - 3)(x - 7)(x - 2) + 64$

ઉકેલ : $(x + 2)(x - 3)(x - 7)(x - 2) + 64$

$= (x + 2)(x - 7)(x - 3)(x - 2) + 64$

$= (x^2 - 5x - 14)(x^2 - 5x + 6) + 64$

$= (m - 14)(m + 6) + 64$ . . . . ($x^2 - 5x$ માટે m લેતા)

$= m^2 - 14m + 6m - 84 + 64$

$= m^2 - 8m - 20$

$= (m - 10)(m + 2)$

$= (x^2 - 5x - 10)(x^2 - 5x + 2)$ .... m ની જગ્યાએ $x^2 - 5x$ મૂકતાં

મહાવરાસંગ્રહ 3.6

(1) નીચેની બહુપદીના અવયવ પાડો.

(i) $2x^2 + x - 1$ (ii) $2m^2 + 5m - 3$ (iii) $12x^2 + 61x + 77$

(iv) $3y^2 - 2y - 1$ (v) $\sqrt{3}x^2 + 4x + \sqrt{3}$ (vi) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$

(2) નીચેની બહુપદીના અવયવ પાડો.

(i) $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12$ (ii) $(x - 5)^2 - (5x - 25) - 24$

(iii) $(x^2 - 6x)^2 - 8(x^2 - 6x + 8) - 64$ (iv) $(x^2 - 2x + 3)(x^2 - 2x + 5) - 35$

(v) $(y + 2)(y - 3)(y + 8)(y + 3) + 56$

(vi) $(y^2 + 5y)(y^2 + 5y - 2) - 24$

(vii) $(x - 3)(x - 4)^2(x - 5) - 6$

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 3

(1) નીચેના પ્રત્યેક પ્રશ્નો માટે આપેલ પર્યાયપૈકી યોગ્ય પર્યાય પસંદ કરો.

(i) નીચેના પૈકી બહુપદી કઈ છે ?

(A) $\frac{x}{y}$ (B) $x^{\sqrt{2}} - 3x$ (C) $x^{-2} + 7$ (D) $\sqrt{2}x^2 + \frac{1}{2}$

(ii) $\sqrt{7}$ આ બહુપદીનો ઘાત કેટલો ?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) 5 (C) 2 (D) 0

(iii) 0 બહુપદીનો ઘાત કેટલો હોય છે ?

(A) 0 (B) 1 (C) નિશ્ચિત કરી શકાય નહીં. (D) કોઈપણ વાસ્તવિક સંખ્યા.

(iv) $2x^2 + 5x^3 + 7$ આ બહુપદીનો ઘાત કેટલો ?

(A) 3 (B) 2 (C) 5 (D) 7

(v) $x^3 - 1$ આ બહુપદીનું સહગુણક રૂપ કયું ?

(A) (1, − 1) (B) (3, − 1) (C) (1, 0, 0, − 1) (D) (1, 3, − 1)

(vi) $p(x) = x^2 - 7\sqrt{7}x + 3$ તો $p(7\sqrt{7}) = ?$

(A) 3 (B) $7\sqrt{7}$ (C) $42\sqrt{7} + 3$ (D) $49\sqrt{7}$

(vii) $2x^3 + 2x$ આ બહુપદીમાં $x = -1$ હોય તો તેની કિંમત કેટલી ?

(A) 4 (B) 2 (C) − 2 (D) − 4

(viii) $3x^2 + mx$ આ બહુપદીનો $x - 1$ એ અવયવ હોય તો m ની કિંમત કેટલી ?

(A) 2 (B) − 2 (C) − 3 (D) 3

(ix) $(x^2 - 3)(2x - 7x^3 + 4)$ નો ગુણાકાર કરીને મળતી બહુપદીનો ઘાત કેટલો ?

(A) 5 (B) 3 (C) 2 (D) 0

(x) નીચેના પૈકી રેખિક બહુપદી કઈ ?

(A) $x + 5$ (B) $x^2 + 5$ (C) $x^3 + 5$ (D) $x^4 + 5$

(2) નીચેની બહુપદીનો ઘાત લખો.

(i) $5 + 3x^4$ (ii) 7 (iii) $ax^7 + bx^9$ {a, b એ અચળ સંખ્યા છે.}

(3) નીચેની બહુપદીને પ્રમાણરૂપમાં લખો.

(i) $4x^2+7x^4-x^3-x+9$ (ii) $p+2p^3+10p^2+5p^4-8$

(4) નીચેની બહુપદીને સહગુણક રૂપમાં લખો.

(i) x^4+16 (ii) $m^5+2m^2+3m+15$

(5) નીચેની સહગુણક રૂપની બહુપદીને x ચલ વાપરીને ઘાતાંકના રૂપમાં લખો.

(i) (3, −2, 0, 7, 18) (ii) (6, 1, 0, 7) (iii) (4, 5, −3, 0)

(6) સરવાળો કરો.

(i) $7x^4-2x^3+x+10$; $3x^4+15x^3+9x^2-8x+2$ (ii) $3p^3q+2p^2q+7$; $2p^2q+4pq-2p^3q$

(7) બાદબાકી કરો.

(i) $5x^2-2y+9$; $3x^2+5y-7$ (ii) $2x^2+3x+5$; x^2-2x+3

(8) નીચેના ગુણાકાર કરો.

(i) $(m^3-2m+3)(m^4-2m^2+3m+2)$ (ii) $(5m^3-2)(m^2-m+3)$

(9) $3x^3-8x^2+x+7$ બહુપદીને $(x-3)$ વડે સંશ્લેષક પદ્ધતિથી ભાગો અને શેષ શોધો.

(10) m ની કઈ કિંમત લેતાં $(x+3)$ એ $x^3-2mx+21$ બહુપદીનો અવયવ બનશે?

(11) 2016 સાલના અંતે કોવાડ, વરુડ અને ચિખલી ગામની લોકસંખ્યા અનુક્રમે $5x^2-3y^2$, $7y^2+2xy$ અને $9x^2+4xy$ હતી. 2017 ની શરૂઆતમાં ત્રણેય ગામમાંથી શિક્ષણ અને રોજગાર માટે અનુક્રમે x^2+xy-y^2, $5xy$ અને $3x^2+xy$ માણસો બીજા ગામે ગયા. તો 2017 ના અંતમાં તે ગામોની કુલ લોકસંખ્યા કેટલી રહી હશે ?

(12) $bx^2 + x + 5$ અને bx^3-2x+5 આ બહુપદીને $x-3$ વડે ભાગતા મળતી શેષ અનુક્રમે m અને n હોય અને જો $m - n = 0$ હોય તો b ની કિંમત શોધો.

(13) સાદું રૂપ આપો. $(8m^2+ 3m - 6) - (9m - 7) + (3m^2 - 2m + 4)$

(14) $x^2 + 13x + 7$ માંથી કઈ બહુપદી બાદ કરતા $3x^2 + 5x - 4$ આ બહુપદી મળશે?

(15) $4m + 2n + 3$ આ રાશિમાં કઈ રાશિ ઉમેરતાં $6m + 3n + 10$ રાશિ મળશે?

4 ગુણોત્તર અને પ્રમાણ

6484KH

ચાલો શીખીએ.

- ગુણોત્તર અને પ્રમાણની ઓળખ
- સમાન ગુણોત્તર પરની ક્રિયા
- પરંપરિત પ્રમાણ
- ગુણોત્તરના ગુણધર્મો
- સમાન ગુણોત્તરનો સિધ્ધાંત
- ગુણોત્તરની k-પધ્ધતિ

યાદ કરીએ.

આપણે પાછલા ધોરણમાં ગુણોત્તર અને પ્રમાણનો અભ્યાસ કર્યો છે. તેના પર આધારિત ઉદાહરણો પણ ઉકેલ્યા છે.

ઉદા. વિમલે બનાવેલા રવાના લાડવા સ્વાદિષ્ટ હોય છે. તે 1 વાડકી ઘી, 3 વાડકી રવો અને 2 વાડકી સાકર લઈને લાડવા બનાવે છે.

અહીં રવો અને સાકરનું પ્રમાણ 3:2 અથવા $\frac{3}{2}$ છે.

જો લાડવા માટે 12 વાડકી રવો લઈએ તો સાકર કેટલી લેવી જોઈએ?

સાકર x વાડકી જોઈશે એમ ધારીએ. તે પરથી $\frac{3}{2} = \frac{12}{x}$ $\therefore 3x = 24$ $\therefore x = 8$

એટલે 12 વાડકી રવો લઈએ તો 8 વાડકી સાકર જોઈશે.

આજ ઉદાહરણ જુદી રીતે પણ કરી શકાય.

રવો $3k$ વાડકી હોય ત્યારે સાકર $2k$ વાડકી જોઈએ. કારણ $\frac{3k}{2k} = \frac{3}{2}$

અહીં $3k = 12$ હોય તો $k = 4$ આવે. $\therefore$ $2k = 8$ વાડકી સાકર જોઈશે.

જાણી લઈએ.

ગુણોત્તર અને પ્રમાણ (Ratio and proportion)

બે સંખ્યાના ગુણોતરની સંકલ્પના ત્રણ કે તેથી વધુ સંખ્યા માટે વિસ્તરિત કરી શકાય છે. લાડવાના ઉદાહરણાં ઘી, રવો અને સાકરનું પ્રમાણ 1 : 3 : 2 છે.

જેમાં ઘી અને રવાનું પ્રમાણ 1 : 3 અને રવો તથા સાકરનું પ્રમાણ 3 : 2 છે. આ માહિતી એક જ પ્રમાણમાં આપી છે.

ઘી 1k = k વાડકી, રવો 3k વાડકી અને સાકર 2k વાડકી એમ ધારી શકાય

હવે 12 વાડકી રવો લઈએ તો લાડવા માટે કેટલી વાડકી ઘી અને કેટલી વાડકી સાકર જોઈશે તે શોધી શકાશે.

કારણ 3k = 12 $\therefore$ k = 4 અને 2k = 8 એટલે 4 વાડકી ઘી અને 8 વાડકી સાકર જોઈશે.

આજ સંકલ્પના 4 કે અધિક બાબતોના પ્રમાણ માટે પણ વાપરી શકાય છે.

જો a, b, c, d આ ચાર સંખ્યાઓનું પ્રમાણ 2 : 3 : 7 : 4 હોય તો તે સંખ્યાઓ $2m$, $3m$, $7m$, $4m$ ધારીએ. આપેલી માહિતી વાપરીને m ની કિંમત શોધી શકાશે. દા.ત. અહીં આ ચાર સંખ્યાનો સરવાળો 48 હોય તો તે ચાર સંખ્યા શોધીએ.

$2m + 3m + 7m + 4m = 16m = 48$

$\therefore \quad m = 3$

$\therefore \quad 2m = 6, \; 3m = 9, \; 7m = 21, \; 4m = 12$ આ સંખ્યાઓ મળે છે.

$\therefore$ ઈષ્ટ સંખ્યા 6, 9, 21, 12 છે.

ઉદા. (1) ખાતરના 18 : 18 : 10 આ પ્રકારના મિશ્રણમાં નાઈટ્રોજનના સંયોજનો 18%, ફૉસ્ફરસના સંયોજનો 18% અને પોટેશીયમના સંયોજનો 10% હોય છે. બાકીના ભાગમાં ઇતર પદાર્થો હોય છે. આ પ્રકારના 20 કિલોગ્રામ ખાતરમાં દરેક પ્રકારના સંયોજનોનું દ્રવ્યમાન (દળ) કેટલું હશે ?

ઉકેલ : 20 કિગ્રા ખાતરમાં નાઈટ્રોજનના સંયોજનોનું પ્રમાણ x કિગ્રા ધારીએ.

$$\therefore \quad \frac{18}{100} = \frac{x}{20} \qquad \therefore \quad x = \frac{18 \times 20}{100} = 3.6$$

$\therefore$ નાઈટ્રોજનના સંયોજનોનું દળ 3.6 કિગ્રા હશે.

ફૉસ્ફરસના સંયોજનો પણ 18% છે. $\therefore$ ફૉસ્ફરના સંયોજનોનું દળ 3.6 કિગ્રા હશે.

20 કિગ્રા ખાતરના પોટેશીયમના સંયોજનોનું દ્રવ્યમાન y કિગ્રા ધારતાં,

$\frac{10}{100} = \frac{y}{20} \qquad \therefore y = 2 \qquad$ $\therefore$ પોટેશીયમના સંયોજનોનું દળ 2 કિગ્રા હશે.

સમપ્રમાણ (Direct Variation)

એક કાર 1 લિટર પેટ્રોલમાં 10 કિમી અંતર કાપે છે.

તેથી 20 લિટર પેટ્રોલમાં તે કાર 20 × 10 = 200 કિમી અંતર કાપશે.

તો 40 લિટર પેટ્રોલમાં તે જ કાર 40 × 10 = 400 કિમી અંતર કાપશે.

આ માહિતી કોઠો દોરીને આ પ્રમાણે લખીએ.

પેટ્રોલ : x લિટર	1	20	40	
અંતર : y કિમી	10	200	400	
$\frac{x}{y}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{20}{200} = \frac{1}{10}$	$\frac{40}{400} = \frac{1}{10}$	$\frac{x}{y} = k$

ગાડીએ વાપરેલું પેટ્રોલ (લિટરમાં) અને તેટલા પેટ્રોલથી કાપેલું અંતર (કિલોમીટરમાં) આ સંખ્યાઓનો ગુણોત્તર અચળ છે માટે તે બે સંખ્યાઓ સમપ્રમાણમાં છે એટલે જ કે, આ બન્ને સંખ્યા પરસ્પર સમચલનમાં બદલાય છે એમ પણ કહે છે.

વ્યસ્તપ્રમાણ (Inverse Variation)

એક મોટરને દર કલાકે 50 કિમી વેગથી 100 કિમી જવા માટે બે કલાક લાગે છે. એક બળદગાડીનો વેગ દર કલાકે 5 કિમી છે, તો તેટલું જ અંતર કાપવા માટે બળદગાડીને 20 કલાક જોઈશે.

∴ વેગ × સમય = અંતર આ સૂત્ર ધ્યાનમાં લઈને ઉપરોક્ત માહિતી કોઠામાં લખીએ.

વાહન	વેગ/કલાકે x	સમય y	$x \times y$	$x \times y = k$
મોટર	50	2	50×2	100
બળદગાડી	5	20	5×20	100

એટલે જ કે વાહનનો વેગ અને પ્રવાસ માટે લાગતો સમય આ બન્નેનો ગુણાકાર અચળ (Constant) હોય છે. આથી તે સંખ્યાઓ વ્યસ્તપ્રમાણમાં છે. એટલે જ કે વ્યસ્તચલનમાં બદલાય છે એમ કહે છે.

યાદ કરીએ.

ગુણોત્તરના ગુણધર્મો (Properties of ratio)

(1) a અને b આ બે સંખ્યાનો ગુણોત્તર $a : b$ અથવા $\frac{a}{b}$ એ લખાય છે. અહીં a ને પૂર્વપદ (પહેલું પદ) અને b ને ઉત્તર પદ (બીજું પદ) કહે છે.

(2) બે સંખ્યાના ગુણોત્તરનું ઉત્તરપદ (બીજું પદ) 100 હોય તો તે ગુણોત્તરને શતમાન કહે છે.

(3) પ્રમાણમાં હોય તેવી બધી જ સંખ્યાને એક જ શૂન્યેતર સંખ્યાથી ગુણીએ કે ભાગીએ તો પણ પ્રમાણ બદલાતું નથી. દા.ત. 3:4 = 6:8 = 9:12 તેમજ 2:3:5 = 8:12:20 એટલે કે, k શૂન્યેતર સંખ્યા હોય, તો

$a : b = ak : bk$ $\qquad$ $a : b : c = ak : bk : ck$

(4) જે સંખ્યાનો ગુણોત્તર શોધવો હોય તે એક જ પ્રકારના માપનમાં હોવા જોઈએ. તેમજ માપનનો એકમ પણ સમાન હોવો જોઈએ.

(5) ગુણોત્તરને 'એકમ' હોતો નથી.

જેમ કે, 2 કિલોગ્રામ અને 300 ગ્રામનો ગુણોત્તર 2:300 ન હોય પરંતુ 2 કિલોગ્રમ = 2000 ગ્રામ તેથી ગુણોત્તર 2000 : 300 એટલે કે 20:3 છે.

ઉદા. (1) સીમા અને રાજશ્રીની ઉંમરનો ગુણોત્તર 3 : 1 છે. રાજશ્રી અને અતુલની ઉંમરનો ગુણોત્તર 2 : 3 તો સીમા, રાજશ્રી અને અતુલની ઉંમરનો ગુણોત્તર શોધો.

ઉકેલ : સીમાની ઉંમર : રાજશ્રીની ઉંમર = 3 : 1 $\qquad$ રાજશ્રીની ઉંમર : અતુલની ઉંમર = 2 : 3

પહેલા ગુણોત્તરનું ઉત્તરપદ અને બીજા ગુણોત્તરનું પૂર્વ પદ સમાન હોવું જોઈએ.

તેથી સળંગ ગુણોત્તર મેળવવા માટે પહેલા ગુણોત્તરના પદને 2 વડે ગુણો. એટલે 3:1 = 6:2 મળશે.

$$\frac{\text{સીમાની ઉંમર}}{\text{રાજશ્રીની ઉંમર}} = \frac{6}{2}, \quad \frac{\text{રાજશ્રીની ઉંમર}}{\text{અતુલની ઉંમર}} = \frac{2}{3}$$

∴ સીમાની ઉંમર : રાજશ્રીની ઉંમર : અતુલની ઉંમરનો ગુણોત્તર 6 : 2 : 3 થશે.

ઉદા. (2) એક લંબચોરસ ખેતરની લંબાઈ 1.2 કિમી અને પહોળાઈ 400 મીટર છે તો તેની લંબાઈનો પહોળાઈ સાથેનો ગુણોત્તર શોધો.

ઉકેલ : અહીં લંબાઈ કિલોમીટર અને પહોળાઈ મીટરમાં છે. ગુણોત્તર માટે બન્નેના એકમો સમાન જોઈએ તેથી કિલોમીટરનું રૂપાંતર મીટરમાં કરીએ.

1.2 કિલોમીટર = 1.2×1000 = 1200 મીટર ∴ 1200 મીટરનું 400 મીટર સાથેનો ગુણોત્તર લઈએ.

∴ અપેક્ષિત ગુણોત્તર = $\frac{1200}{400} = \frac{3}{1}$, એટલે જ 3:1 છે.

ઉદા. (3) મહેશનો દરમહિને થતો ખર્ચ અને તેની આવકનો ગુણોત્તર 3:5 છે. તો તેનો ખર્ચ, આવકના સેંકડે કેટલા છે?

ઉકેલ : ખર્ચનો આવક સાથેનો ગુણોત્તર 3:5 છે. તેનું શતમાનમાં રૂપાંતર કરવું એટલે બીજુ પદ 100 જોઈએ.

$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 20}{5 \times 20} = \frac{60}{100}$ એટલે $\frac{\text{ખર્ચ}}{\text{આવક}} = \frac{60}{100} = 60\%$

∴ મહેશનો ખર્ચ, આવકના 60% જેટલો છે.

ઉદા. (4) એક બાગમાં કેરી અને ચીકુના ઝાડની સંખ્યાનો ગુણોત્તર 2 : 3 છે. જો બાગમાં દરેક પ્રકારના 5 ઝાડ વધારીએ તો તે ગુણોત્તર 5:7 થાય. તો તે બાગમાં કેરી અને ચીકુના કેટલાં ઝાડ છે?

ઉકેલ : શરૂઆતનો ગુણોત્તર 2:3 છે.

∴ બાગમાં કેરીના ઝાડ = $2x$ અને ચીકુના ઝાડ = $3x$ માનીએ.

આપેલી શરત પ્રમાણે, $\frac{2x+5}{3x+5} = \frac{5}{7}$

∴ $14x + 35 = 15x + 25$

∴ $x = 10$

∴ બાગમાં કેરીના ઝાડ = $2x = 2 \times 10 = 20$

અને ચીકુના ઝાડ= $3x = 3 \times 10 = 30$ છે.

ઉદા. (5) બે સંખ્યાનો ગુણોત્તર 5 : 7 છે. જો દરેક સંખ્યામાં 40 ઉમેરીએ તો મળતાં સરવાળાનો ગુણોત્તર 25 : 31 થાય છે તો તે સંખ્યાઓ શોધો.

ઉકેલ : ધારોકે પહેલી સંખ્યા = $5x$ અને બીજી સંખ્યા = $7x$ માનીએ.

આપેલી શરતપ્રમાણે,

$$\frac{5x+40}{7x+40}=\frac{25}{31}$$

$\therefore$ $31(5x + 40) = 25\ (7x + 40)$

$\therefore$ $155x + 1240 = 175x + 1000$

$\therefore$ $1240 - 1000 = 175x - 155x$

$\therefore$ $240 = 20x$

$\therefore$ $x = 12$

$\therefore$ પહેલી સંખ્યા = $5 \times 12 = 60$

$\therefore$ બીજી સંખ્યા = $7 \times 12 = 84$

$\therefore$ આપેલી સંખ્યાઓ 60 અને 84 છે.

મહાવરાસંગ્રહ 4.1

(1) નીચે આપેલી સંખ્યા જોડીની પહેલી સંખ્યાનો બીજી સંખ્યા સાથેનો ગુણોત્તર સંક્ષિપ્ત રૂપમાં લખો.

(i) 72, 60 (ii) 38,57 (iii) 52,78

(2) નીચેની રાશિઓ પૈકી પહેલી રાશિનો બીજી રાશિ સાથેનો ગુણોત્તર શોધો.

(i) 700 રૂપિયા, 308 રૂપિયા (ii) 14 રૂપિયા , 12 રૂપિયા 40 પૈ.

(iii) 5 લિટર, 2500 મિલિલિટર (iv) 3 વર્ષ 4 મહિના , 5 વર્ષ 8 મહિના

(v) 3.8 કિલોગ્રામ, 1900 ગ્રામ (vi) 7 મિનિટ 20 સેકન્ડ, 5 મિનિટ 6 સેકન્ડ,

(3) આપેલ શતમાન સંક્ષિપ્ત ગુણોત્તર રૂપે લખો.

(i) 75 : 100 (ii) 44 : 100 (iii) 6.25% (iv) 52 : 100 (v) 0.64%

(4) એક નાનું ઘર 3 માણસો 8 દિવસમાં બાંધે છે તો તે જ ઘર 6 દિવસમાં બાંધવા કેટલા માણસો જોઈશે?

(5) નીચેના ગુણોત્તરોને શતમાનમાં ફેરવો.

(i) 15 : 25 (ii) 47 : 50 (iii) $\frac{7}{10}$ (iv) $\frac{546}{600}$ (v) $\frac{7}{16}$

(6) આભા અને તેની માતાની ઉંમરનો ગુણોત્તર 2:5 છે. આભાના જન્મ વખતે તેની માતાની ઉંમર 27 વર્ષ હતી. તો આભા અને તેની માતાની હાલની ઉંમર શોધો.

(7) વત્સલા અને હંસાની આજની ઉંમર અનુક્રમે 14 વર્ષ અને 10 વર્ષ છે. કેટલા વર્ષ પછી તેમની ઉંમરનો ગુણોત્તર 5:4 થશે?

(8) શ્રેયા અને તેની માતાની આજની ઉંમરનો ગુણોત્તર 2 : 7 છે. જો 2 વર્ષ પછી તેમની ઉંમરનો ગુણોત્તર 1 : 3 થશે, તો શ્રેયાની આજની ઉંમર શોધો.

જાણી લઈએ.

ગુણોત્તરની તુલના

જો $b > 0, d > 0$ તો $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ આ ગુણોત્તરની તુલના નીચેના નિયમાનુસાર કરવામાં આવે છે.

(i) જો $ad > bc$ તો $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ (ii) જો $ad < bc$ તો $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ (iii) જો $ad = bc$ તો $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

નીચે આપેલ દરેક જોડીના ગુણોત્તર વચ્ચેનો ક્રમસંબંધ નક્કી કરો. (તુલના કરો.)

ઉદા. (1) $\frac{4}{9}, \frac{7}{8}$

ઉકેલ : 4×8 [?] 7×9

$32 < 63$

$\therefore \quad \frac{4}{9} < \frac{7}{8}$

ઉદા. (2) $\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{8}}, \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

ઉકેલ : $\sqrt{13} \times \sqrt{5}$, [?] $\sqrt{8} \times \sqrt{7}$

$\sqrt{65}$ [?] $\sqrt{56}$

$\sqrt{65} > \sqrt{56}$

$\therefore \quad \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{8}} > \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

ઉદા. (3) જો a અને b પૂર્ણાંક સંખ્યા હોય અને $a < b$, $b > 1$ તો $\frac{a-1}{b-1}, \frac{a+1}{b+1}$ આ ગુણોત્તરો વચ્ચેનો ક્રમસંબંધ નક્કી કરો.

ઉકેલ : $a < b \therefore a - 1 < b - 1$

હવે $\frac{a-1}{b-1} - \frac{a+1}{b+1}$ આ બાદબાકીનો વિચાર કરીએ.

$$\frac{a-1}{b-1} - \frac{a+1}{b+1} = \frac{(a-1)(b+1)-(a+1)(b-1)}{(b-1)(b+1)}$$

$$= \frac{(ab-b+a-1)-(ab+b-a-1)}{b^2-1}$$

$$= \frac{ab-b+a-1-ab-b+a+1}{b^2-1}$$

$$= \frac{2a-2b}{b^2-1}$$

$$= \frac{2(a-b)}{b^2-1} \quad \dots\dots\dots \text{(I)}$$

હવે $a < b \quad \therefore a - b < 0$

તે જ પ્રમાણે, $b^2-1 > 0$ કારણ $b > 1$

$\frac{2(a-b)}{b^2-1} < 0 \quad \dots\dots\dots$ (II)

$\frac{a-1}{b-1} - \frac{a+1}{b+1} < 0 \dots$ (I) અને (II) પર થી

$\frac{a-1}{b-1} < \frac{a+1}{b+1}$

ઉદા. (4) જો $a : b = 2 : 1$ અને $b : c = 4 : 1$ તો $\left(\frac{a^4}{32b^2c^2}\right)^3$ આ રાશિની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : $\frac{a}{b} = \frac{2}{1}$ $\therefore a = 2b$ $\frac{b}{c} = \frac{4}{1}$ $\therefore b = 4c$

$a = 2b = 2 \times 4c = 8c$ $\therefore a = 8c$

હવે $a = 8c$, $b = 4c$ મૂકતાં,

$$\left(\frac{a^4}{32b^2c^2}\right)^3 = \left(\frac{(8c)^4}{32 \times 4^2 \times c^2 \times c^2}\right)^3$$

$$= \left[\frac{8 \times 8 \times 8 \times 8 \times c^4}{32 \times 16 \times c^2 \times c^2}\right]^3$$

$$= (8)^3$$

$$\therefore \left(\frac{a^4}{32b^2c^2}\right)^3 = 512$$

મહાવરાસંગ્રહ 4.2

(1) $\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}$ આ ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરીને ખાલી જગ્યામાં યોગ્ય સંખ્યા લખો.

(i) $\frac{5}{7} = \frac{....}{28} = \frac{35}{....} = \frac{....}{3.5}$ (ii) $\frac{9}{14} = \frac{4.5}{....} = \frac{....}{42} = \frac{....}{3.5}$

(2) આપેલાં ગુણોત્તર શોધો.

(i) વર્તુળની ત્રિજ્યાનો તેના પરિઘ સાથેનો ગુણોત્તર.

(ii) r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના પરિઘનો, તેના ક્ષેત્રફળ સાથેનો ગુણોત્તર.

(iii) બાજુ 7 સેમી હોય તેવા ચોરસનો વિકર્ણનો તેની બાજુ સાથેનો ગુણોત્તર.

(iv) લંબાઈ 5 સેમી અને પહોળાઈ 3.5 સેમી હોય તેવા લંબચોરસની પરિમિતિનો, તેના ક્ષેત્રફળ સાથેનો ગુણોત્તર.

(3) નીચે આપેલાં ગુણોત્તરની જોડીઓ વચ્ચે નાના-મોટાપણું નક્કી કરો.

(i) $\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{3}{\sqrt{7}}$ (ii) $\frac{3\sqrt{5}}{5\sqrt{7}}, \frac{\sqrt{63}}{\sqrt{125}}$ (iii) $\frac{5}{18}, \frac{17}{121}$

(iv) $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{48}}, \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{27}}$ (v) $\frac{9.2}{5.1}, \frac{3.4}{7.1}$

(4) (i) □ABCD સમાંતર ભુજ ચતુષ્કોણ છે. તેના $\angle A$ અને $\angle B$ ના માપનો ગુણોત્તર 5 : 4 છે. તો $\angle B$ નું માપ શોધો.

(ii) અલ્બર્ટ અને સલીમની આજની ઉંમરનો ગુણોત્તર 5 : 9 છે. પાંચ વર્ષ પછી તેમની ઉંમરનો ગુણોત્તર 3 : 5 થશે, તો તેમની આજની ઉંમર શોધો.

(iii) એક લંબચોરની લંબાઈ અને પહોળાઈનો ગુણોત્તર 3 : 1 છે, લંબચોરની પરિમિતી 36 સેમી છે. તો તેની લંબાઈ અને પહોળાઈ શોધો.

(iv) બે સંખ્યાનો ગુણોત્તર 31 : 23 છે અને તેમનો સરવાળો 216 છે. તો તે સંખ્યા શોધો.

(v) બે સંખ્યાનો ગુણાકાર 360 છે અને તેમનો ગુણોત્તર 10 : 9 છે તો તે સંખ્યા શોધો.

(5*) જો $a : b = 3 : 1$ અને $b : c = 5 : 1$ તો (i) $\left(\frac{a^3}{15b^2c}\right)^3$ (ii) $\frac{a^2}{7bc}$ આ રાશિઓની કિંમત શોધો.

(6*) $\sqrt{0.04\times0.4\times a} = 0.4\times0.04\times\sqrt{b}$ તો $\frac{a}{b}$ આ ગુણોત્તર શોધો.

(7) $(x + 3) : (x + 11) = (x - 2) : (x + 1)$ તો x ની કિંમત શોધો.

જાણી લઈએ.

સમાન ગુણોત્તર પરની ક્રિયા

સમાનતાના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરીને બે સમાન ગુણોત્તર પર કેટલીક ક્રિયાઓ કરી શકાય છે. તેનો અભ્યાસ કરીએ.

જો a , b, c, d ધનસંખ્યાઓ હોય તો નીચેની ક્રિયાઓ સમજી લઈએ.

(I) વ્યસ્ત ક્રિયા (Invertendo) જો $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ તો $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

જો $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$\therefore\ a\times d = b\times c$

$\therefore\ b\times c = a\times d$

$\therefore\ \frac{b\times c}{a\times c} = \frac{a\times d}{a\times c}$ (બન્ને બાજુ $a \times c$ વડે ભાગતાં)

$\therefore\ \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

$\therefore$ **જો $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ તો $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ આને 'વ્યસ્ત ક્રિયા' કહે છે.**

(II) એકાંતર ક્રિયા (Alternando) જો $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ તો $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

જો $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$\therefore\ a\times d = b\times c$

$\therefore\ \frac{a\times d}{c\times d} = \frac{b\times c}{c\times d}$ (બન્ને બાજુ $c \times d$ વડે ભાગતાં)

$\therefore\ \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

જો $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ તો $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ આને 'એકાંતર ક્રિયા' કહે છે.

(III) યોગ ક્રિયા (Componendo) જો $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ તો $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

જો $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

$\therefore$ $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$ (બન્ને બાજુએ 1 ઉમેરતાં)

$\therefore$ $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

જો $\boldsymbol{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}}$ તો $\boldsymbol{\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}}$ આને 'યોગક્રિયા' કહે છે.

(IV) વિયોગ ક્રિયા (Dividendo) જો $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ તો $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

જો $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

$\therefore$ $\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$ (બન્ને બાજુએથી 1 બાદ કરતાં)

$\therefore$ $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

જો $\boldsymbol{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}}$ તો $\boldsymbol{\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}}$ આને 'વિયોગક્રિયા' કહે છે.

(V) યોગ-વિયોગ ક્રિયા (Componendo-dividendo) જો $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ તો $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$, $a \neq b, c \neq d$

જો $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $\therefore$ $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ (યોગ ક્રિયા કરતાં.) ....(1)

$\therefore$ $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ (વિયોગ ક્રિયા કરતાં.) ....(2)

$\therefore$ $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ (1) અને (2) પર થી.

જો $\boldsymbol{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}}$ તો $\boldsymbol{\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}}$ આને યોગ-વિયોગ ક્રિયા કહે છે.

યોગ ક્રિયા અને વિયોગ ક્રિયાનું સામાન્ય રૂપ

જો $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ તો $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ (યોગ ક્રિયા એક વખત કરી)

$\frac{a+2b}{b}=\frac{c+2d}{d}$ (યોગ ક્રિયા બે વખત કરી)

સામાન્ય રીતે $\frac{a+mb}{b}=\frac{c+md}{d}$ (યોગ ક્રિયા m વખત કરી) ...(I)

તેથી જો $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ તો $\frac{a-mb}{b}=\frac{c-md}{d}$ (વિયોગ ક્રિયા m વખત કરી) ...(II)

અને જો $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ તો $\frac{a+mb}{a-mb}=\frac{c+md}{c-md}$ ...((I) અને (II) પરથી, ભાગાકાર કરીને)

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

- જો $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ તો $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ (વ્યસ્ત ક્રિયા)
- જો $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ તો $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ (યોગ ક્રિયા)
- જો $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ તો $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ (એકાંતર ક્રિયા)
- જો $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ તો $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ (વિયોગ ક્રિયા)
- જો $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ તો $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ (યોગ-વિયોગ ક્રિયા)

ગણેલાં ઉદાહરણો

ઉદા. (1) જો $\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$ તો $\frac{a+7b}{7b}$ = આ ગુણોત્તરની કિંમત શોધો.

રીત I

ઉકેલ : જો $\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$ તો $\frac{a}{5}=\frac{b}{3}=k$, (એકાંતર ક્રિયા કરીને)

$\therefore a = 5k, b = 3k$

$\therefore \frac{a+7b}{7b}=\frac{5k+7\times 3k}{7\times 3k}$

$=\frac{5k+21k}{21k}$

$=\frac{26k}{21k} \quad =\frac{26}{21}$

રીત II

$\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$

$\therefore \frac{a}{7b} = \frac{5}{21}$

$\therefore \frac{a+7b}{7b} = \frac{5+21}{21}$ (યોગ ક્રિયા કરતાં)

$\therefore \frac{a+7b}{7b} = \frac{26}{21}$

ઉદા. (2) જો $\frac{a}{b}=\frac{7}{4}$ તો $\frac{5a-b}{b}$ આ ગુણોત્તરની કિંમત શોધો.

રીત I

ઉકેલ : $\frac{a}{b}=\frac{7}{4}$

$\therefore \frac{a}{7}=\frac{b}{4}$ એકાંતર ક્રિયા કરીને

$\therefore \frac{a}{7}=\frac{b}{4}=m$ ધારીએ.

$\therefore a = 7m, \quad b = 4m$

$\therefore \frac{5a-b}{b} = \frac{5(7m)-4m}{4m}$

$= \frac{35m-4m}{4m}$

$= \frac{31}{4}$

રીત II

$\frac{a}{b}=\frac{7}{4}$

$\therefore \frac{5a}{b}=\frac{5\times 7}{4}$

$=\frac{35}{4}$

$\therefore \frac{5a-b}{b}=\frac{35-4}{4}$ (વિયોગ ક્રિયા કરતાં)

$\therefore \frac{5a-b}{b} = \frac{31}{4}$

ઉદા. (3) જો $\frac{a}{b}=\frac{7}{3}$ તો $\frac{a+2b}{a-2b}$ ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : **રીત I :** ધારીએ $a = 7m, b = 3m$

$\therefore \frac{a+2b}{a-2b} = \frac{7m+2\times 3m}{7m-2\times 3m}$

$= \frac{7m+6m}{7m-6m}$

$= \frac{13m}{m} = \frac{13}{1}$

રીત II : $\frac{a}{b}=\frac{7}{3}$

$\therefore \frac{a}{2b}=\frac{7}{6}$ ...... બન્ને બાજુ $\frac{1}{2}$ વડે ગુણતાં

$\therefore \frac{a+2b}{a-2b}=\frac{7+6}{7-6}$ (યોગ-વિયોગ ક્રિયા કરીને)

$\therefore \frac{a+2b}{a-2b} = \frac{13}{1}$

ઉદા. (4) જો $\frac{a}{3}=\frac{b}{2}$ તો $\frac{5a+3b}{7a-2b}$ ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ :

રીત I

$\frac{a}{3}=\frac{b}{2}$

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{3}{2}$ .... એકાંતર ક્રિયા કરીને

હવે $\frac{5a+3b}{7a-2b}$ ના દરેક પદને b વડે ભાગતાં

$$\frac{\frac{5a}{b}+\frac{3b}{b}}{\frac{7a}{b}-\frac{2b}{b}}=\frac{5\left(\frac{a}{b}\right)+3}{7\left(\frac{a}{b}\right)-2}$$

$$=\frac{5\left(\frac{3}{2}\right)+3}{7\left(\frac{3}{2}\right)-2}$$

$$=\frac{\frac{15}{2}+3}{\frac{21}{2}-2}$$

$$=\frac{15+6}{21-4}$$

$$=\frac{21}{17}$$

રીત II

$\frac{a}{3}=\frac{b}{2}$

$\therefore \frac{a}{3}=\frac{b}{2} = t$ ધારીએ

$\therefore a = 3t$ અને $b = 2t$ આ કિંમત મૂકતાં.

$$\frac{5a+3b}{7a-2b}=\frac{5(3t)+3(2t)}{7(3t)-2(2t)} \quad (t \neq 0)$$

$$=\frac{15t+6t}{21t-4t}$$

$$=\frac{21t}{17t}$$

$$=\frac{21}{17}$$

ઉદા. (5) જો $\frac{x}{y}=\frac{4}{5}$ તો $\frac{4x-y}{4x+y}$ ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ :

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \quad \frac{4x}{y} = \frac{16}{5} \qquad \text{...(બન્ને બાજુ 4 વડે ગુણતાં)}$$

$$\therefore \quad \frac{4x+y}{4x-y} = \frac{16+5}{16-5} \qquad \text{...(યોગ-વિયોગ ક્રિયા કરતાં)}$$

$$\therefore \quad \frac{4x+y}{4x-y} = \frac{21}{11}$$

$$\therefore \quad \frac{4x-y}{4x+y} = \frac{11}{21} \qquad \text{...(વ્યસ્ત ક્રિયા કરતાં)}$$

ઉદા. (6) જો $5x = 4y$ તો $\frac{3x^2+y^2}{3x^2-y^2}$ ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ :

$$5x = 4y$$

$$\therefore \quad \frac{x}{y} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{y^2} = \frac{16}{25} \qquad \text{...(બન્ને બાજુ વર્ગ કરતાં)}$$

$$\therefore \quad \frac{3x^2}{y^2} = \frac{48}{25} \qquad \text{...(બન્ને બાજુ 3 વડે ગુણતાં)}$$

$$\therefore \quad \frac{3x^2+y^2}{3x^2-y^2} = \frac{48+25}{48-25} \qquad \text{...(યોગ-વિયોગ ક્રિયા કરતાં)}$$

$$\therefore \quad \frac{3x^2+y^2}{3x^2-y^2} = \frac{73}{23}$$

જાણી લઈએ.

સમાન ગુણોત્તરના ગુણધર્મનો ઉપયોગ (Use of properties of equall ratios)

કેટલાંક સમીકરણો ઉકેલવા બીજી પદ્ધતિઓ કરતાં 'સમાન ગુણોત્તર પરની ક્રિયા'નો ઉપયોગ કરવો સગવડ ભર્યો છે.

ઉદા. (1) સમીકરણ ઉકેલો. $\frac{3x^2+5x+7}{10x+14}=\frac{3x^2+4x+3}{8x+6}$

ઉકેલ :

$$\frac{3x^2+5x+7}{10x+14}=\frac{3x^2+4x+3}{8x+6}$$

$$\therefore \quad \frac{(6x^2+10x+14)}{10x+14}=\frac{(6x^2+8x+6)}{8x+6} \qquad \text{...(બન્ને બાજુ 2 વડે ગુણતાં)}$$

$\therefore \quad \dfrac{(6x^2+10x+14)-(10x+14)}{10x+14}=\dfrac{(6x^2+8x+6)-(8x+6)}{8x+6}$ ...(વિયોગ ક્રિયા કરતાં)

$\therefore \quad \dfrac{6x^2}{10x+14}=\dfrac{6x^2}{8x+6}$

આ સમીકરણ $x=0$ એ કિંમત માટે સત્ય છે. $\therefore$ $x=0$ આ સમીકરણનો એક ઉકેલ છે.

જો $x \neq 0$ તો $x^2 \neq 0$, $\therefore$ $6x^2$ વડે ભાગતાં, $\dfrac{1}{10x+14}=\dfrac{1}{8x+6}$

$\therefore \quad 8x+6=10x+14$

$\therefore \quad 6-14=10x-8x$

$\therefore \quad -8=2x$

$\therefore \quad x=-4$

$\therefore$ $x=-4$ અથવા $x=0$ આ સમીકરણનાં ઉકેલ છે.

ઉદા. **(2)** ઉકેલો. $\dfrac{\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+7}-\sqrt{x-2}}=\dfrac{5}{1}$

$\dfrac{(\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2})+(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2})-(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-2})}=\dfrac{5+1}{5-1}$ ...(યોગ-વિયોગ ક્રિયા કરતાં)

$\therefore \quad \dfrac{2\sqrt{x+7}}{2\sqrt{x-2}}=\dfrac{6}{4}$

$\therefore \quad \dfrac{\sqrt{x+7}}{\sqrt{x-2}}=\dfrac{3}{2}$

$\therefore \quad \dfrac{x+7}{x-2}=\dfrac{9}{4}$ ...(બન્ને બાજુ વર્ગ કરતાં)

$\therefore \quad 4x+28=9x-18$

$\therefore \quad 28+18=9x-4x$

$\therefore \quad 46=5x$

$\therefore \quad \dfrac{46}{5}=x$

$\therefore \quad x=\dfrac{46}{5}$ આ સમીકરણનો ઉકેલ છે.

કૃતિ

જાડા કાર્ડ પેપરના પાંચ ટુકડા લો. દરેક પર નીચેના પૈકી એક વિધાન લખો.

(i) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ (ii) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (iii) $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bd}$ (iv) $\frac{c}{d} = \frac{c-a}{d-b}$ (v) $\frac{a}{b} = \frac{rc}{rd}$

a, b, c, d ધનસંખ્યાઓ છે અને $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ આપેલું છે તો ઉપરનું દરેક વિધાન ખરું કે ખોટું તે કાર્ડની પાછળ લખો. અસત્ય હોય તો તે માટેનું કારણ લખો.

મહાવરાસંગ્રહ 4.3

(1) જો $\frac{a}{b} = \frac{7}{3}$ તો નીચેની રાશિઓની કિંમત શોધો.

(i) $\frac{5a+3b}{5a-3b}$ (ii) $\frac{2a^2+3b^2}{2a^2-3b^2}$ (iii) $\frac{a^3-b^3}{b^3}$ (iv) $\frac{7a+9b}{7a-9b}$

(2) જો $\frac{15a^2+4b^2}{15a^2-4b^2} = \frac{47}{7}$ તો નીચેની રાશિઓની કિંમત શોધો.

(i) $\frac{a}{b}$ (ii) $\frac{7a-3b}{7a+3b}$ (iii) $\frac{b^2-2a^2}{b^2+2a^2}$ (iv) $\frac{b^3-2a^3}{b^3+2a^3}$

(3) જો $\frac{3a+7b}{3a-7b} = \frac{4}{3}$ તો $\frac{3a^2-7b^2}{3a^2+7b^2}$ ગુણોત્તરની કિંમત શોધો.

(4) નીચેના સમીકરણો ઉકેલો.

(i) $\frac{x^2+12x-20}{3x-5} = \frac{x^2+8x+12}{2x+3}$ (ii) $\frac{10x^2+15x+63}{5x^2-25x+12} = \frac{2x+3}{x-5}$

(iii) $\frac{(2x+1)^2+(2x-1)^2}{(2x+1)^2-(2x-1)^2} = \frac{17}{8}$ (iv*) $\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{x+3}} = \frac{4}{1}$

(v) $\frac{(4x+1)^2+(2x+3)^2}{4x^2+12x+9} = \frac{61}{36}$ (vi) $\frac{(3x-4)^3-(x+1)^3}{(3x-4)^3+(x+1)^3} = \frac{61}{189}$

કૃતિ : નીચે આપેલા ચોકઠામાં a અને b ની કિંમત બદલીને $a : b$ ગુણોત્તરની અન્ય કિંમત મૂકવાથી અનેક ઉદાહરણો તૈયાર કરી શકાશે. જુદી જુદી કિંમતો લઈને જુદા-જુદા ઉદાહરણો તૈયાર કરો અને ઉકેલો.

$\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$

$\frac{5a^2+2b^2}{5a^2-2b^2} =$ -----

$\frac{3a}{4b} =$ -----

$\frac{2a-b}{2a+b} =$ -----

$\frac{a^2+b^2}{b^2} =$ ---

$\frac{a}{2b} =$ -----

જાણી લઈએ.

સમાન ગુણોત્તરનો સિધ્ધાંત (Theorem on equal ratios)

જો $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ તો $\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d}$ આને સમાન ગુણોત્તરનો સિધ્ધાંત કહે છે.

સાબિતી : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ ધારીએ. $\therefore$ $a=bk$ અને $c=dk$

$$\therefore \quad \frac{a+c}{b+d}=\frac{bk+dk}{b+d}=\frac{k(b+d)}{b+d}=k$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$$

આપણને ખબર છે કે, $\frac{a}{b}=\frac{al}{bl}$

$\therefore$ જો $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$, તો $\frac{al}{bl}=\frac{cm}{dm}=\frac{al+cm}{bl+dm}=k$

આ જ રીતે વિચાર કરીને જો $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=........$ (સાંત પદો) અને જો l, m, n આ શૂન્યેતર સંખ્યા હોય તો દરેક ગુણોત્તર = $\frac{al+cm+en+...}{bl+dm+fn+...}$ (સાંત પદો) એ સમાન ગુણોત્તરનાં સિધ્ધાંતનું સામાન્ય રૂપ છે.

વિચાર કરીએ.

એક વ્યાયામ શાળાના શિશુગટમાં 35 છોકરીઓ અને 42 છોકરાઓ છે. બાલગટમાં 30 છોકરીઓ અને 36 છોકરાઓ છે, કિશોરગટમાં 20 છોકરીઓ અને 24 છોકરાઓ છે. તો દરેક ગટમાં છોકરીઓની સંખ્યાનો, છોકરાઓની સંખ્યા સાથેનો ગુણોત્તર કેટલો?

સમૂહ કવાયત માટે ત્રણેય ગટ મેદાનમાં એક સાથે આવ્યા તો તેમાં છોકરીઓની સંખ્યાની છોકરાઓની સંખ્યા સાથેનો ગુણોત્તર કેટલો?

ઉપરના પ્રશ્નોના જવાબ પરથી 'સમાન ગુણોત્તરના સિધ્ધાંતનો' તાળો મળ્યો કે?

ઉદા. **(1)** નીચેના વિધાનમાં ખાલી જગ્યા પૂરો.

(i) $\frac{a}{3}=\frac{b}{7}=\frac{4a+9b}{..........}$ (ii) $\frac{x}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z}{4}=\frac{5x-3y+4z}{...............}$

ઉકેલ : (i) $\frac{a}{3}=\frac{b}{7}=\frac{4a+9b}{4\times3+9\times7}=\frac{4a+9b}{12+63}=\frac{4a+9b}{75}$

(ii) $\frac{x}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z}{4}=\frac{5\times x}{5\times3}=\frac{-3\times y}{-3\times5}=\frac{4\times z}{4\times4}$

$$=\frac{5x}{15}=\frac{-3y}{-15}=\frac{4z}{16}$$

$$=\frac{5x-3y+4z}{15-15+16}$$ ----(સમાન ગુણોત્તરના સિધ્ધાંતથી)

$$=\frac{5x-3y+4z}{16}$$

ઉદા. (2) જો $\frac{a}{(x-2y+3z)}=\frac{b}{(y-2z+3x)}=\frac{c}{(z-2x+3y)}$ અને $x+y+z\neq 0$ તો

દરેક ગુણોત્તર = $\frac{a+b+c}{2(x+y+z)}$ છે તે સાબિત કરો.

ઉકેલ : $\frac{a}{(x-2y+3z)}=\frac{b}{(y-2z+3x)}=\frac{c}{(z-2x+3y)}=k$ માનીએ.

∴ સમાન ગુણોત્તર સિદ્ધાંતથી

$$k=\frac{a+b+c}{(x-2y+3z)+(y-2z+3x)+(z-2x+3y)}$$

$$=\frac{a+b+c}{2x+2y+2z}$$

$$=\frac{a+b+c}{2(x+y+z)}$$

$$\therefore\quad \frac{a}{x-2y+3z}=\frac{b}{y-2z+3x}=\frac{c}{z-2x+3y}=\frac{a+b+c}{2(x+y+z)}$$

ઉદા. (3) જો $\frac{y}{b+c-a}=\frac{z}{c+a-b}=\frac{x}{a+b-c}$ તો $\frac{a}{z+x}=\frac{b}{x+y}=\frac{c}{y+z}$ છે તે સાબિત કરો.

ઉકેલ : પ્રથમ આપેલા ગુણોત્તર પર વ્યસ્ત ક્રિયા કરતાં,

$$\frac{b+c-a}{y}=\frac{c+a-b}{z}=\frac{a+b-c}{x}$$

હવે $\frac{b+c-a}{y}=\frac{c+a-b}{z}=\frac{a+b-c}{x}=k$ માનીએ.

∴ સમાન ગુણોત્તર સિદ્ધાંતથી

$$k=\frac{(c+a-b)+(a+b-c)}{z+x}=\frac{2a}{z+x}\quad .....(I)$$

$$k=\frac{(a+b-c)+(b+c-a)}{x+y}=\frac{2b}{x+y}\quad ....(II)$$

$$k=\frac{(b+c-a)+(c+a-b)}{y+z}=\frac{2c}{y+z}\quad .....(III)$$

$$\therefore\quad \frac{2a}{z+x}=\frac{2b}{x+y}=\frac{2c}{y+z}$$

$$\therefore\quad \frac{a}{z+x}=\frac{b}{x+y}=\frac{c}{y+z}$$

ઉદા. (4) સમીકરણ ઉકેલો : $\frac{14x^2-6x+8}{10x^2+4x+7}=\frac{7x-3}{5x+2}$

ઉકેલ : ઉદાહરણનું નિરીક્ષણ કરતાં એવું દેખાય છે કે, જમણી બાજુના ગુણોત્તરના પૂર્વપદને અને ઉત્તરપદને $2x$ વડે ગુણીએ તો ડાબી બાજુના ગુણોત્તરના દરેકના બે પદ મળે છે. તેથી જમણી બાજુના બન્ને પદોને ઉપર નીચે $2x$ વડે ગુણીએ પણ તે માટે x (એ શૂન્ય નથી) તે નિશ્ચિત કરીએ.

જો $x = 0$ હોય તો $\frac{14x^2-6x+8}{10x^2+4x+7} = \frac{8}{7}$ અને $\frac{7x-3}{5x+2}=\frac{-3}{2}$

$\therefore \frac{8}{7}=\frac{-3}{2}$ આ વિસંગતતા મળે છે.

$\therefore \quad x \neq 0$

જમણી બાજુના બન્ને પદોને $2x$ વડે ગુણીએ.

$$\therefore \quad \frac{14x^2-6x+8}{10x^2+4x+7}=\frac{2x(7x-3)}{2x(5x+2)}=k$$

$$\therefore \quad \frac{14x^2-6x+8}{10x^2+4x+7}=\frac{14x^2-6x}{10x^2+4x}=k$$

$$\therefore \quad \frac{14x^2-6x+8-14x^2+6x}{10x^2+4x+7-10x^2-4x}=\frac{8}{7}=k$$

$$\therefore \quad k=\frac{8}{7}$$

$$\therefore \quad \frac{7x-3}{5x+2}=\frac{8}{7}$$

$$\therefore \quad 49x-21=40x+16$$

$$\therefore \quad 49x-40x=16+21$$

$$\therefore \quad 9x=37 \qquad \therefore x=\frac{37}{9}$$

મહાવરાસંગ્રહ 4.4

(1) નીચેના વિધાનમાં ખાલી જગ્યા પૂરો.

(i) $\frac{x}{7}=\frac{y}{3}=\frac{3x+5y}{.......}=\frac{7x-9y}{......}$ (ii) $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{7}=\frac{a-2b+3c}{......}=\frac{......}{6-8+14}$

(2) $5m-n=3m+4n$ તો નીચેની રાશિઓની કિંમત શોધો.

(i) $\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$ (ii) $\frac{3m+4n}{3m-4n}$

(3) (i) જો $a(y+z) = b(z+x) = c(x+y)$ અને a, b, c પૈકી કોઈપણ બે સંખ્યા સમાન ન હોય

તો $\frac{y-z}{a(b-c)}=\frac{z-x}{b(c-a)}=\frac{x-y}{c(a-b)}$ છે તે બતાવો.

(ii) જો $\frac{x}{3x-y-z}=\frac{y}{3y-z-x}=\frac{z}{3z-x-y}$ અને $x+y+z \neq 0$ દરેક ગુણોત્તરની કિંમત 1 છે.

એમ બતાવો.

(iii) જો $\dfrac{ax+by}{x+y}=\dfrac{bx+az}{x+z}=\dfrac{ay+bz}{y+z}$ અને $x+y+z \neq 0$ તો દરેક ગુણોત્તર $\dfrac{a+b}{2}$ છે, તે સાબિત કરો.

(iv) જો $\dfrac{y+z}{a}=\dfrac{z+x}{b}=\dfrac{x+y}{c}$ તો $\dfrac{x}{b+c-a}=\dfrac{y}{c+a-b}=\dfrac{z}{a+b-c}$ છે તે બતાવો.

(v) જો $\dfrac{3x-5y}{5z+3y}=\dfrac{x+5z}{y-5x}=\dfrac{y-z}{x-z}$ તો દરેક ગુણોત્તર $\dfrac{x}{y}$ છે તે બતાવો.

(4) સમીકરણ ઉકેલો. (i) $\dfrac{16x^2-20x+9}{8x^2+12x+21}=\dfrac{4x-5}{2x+3}$ (ii) $\dfrac{5y^2+40y-12}{5y+10y^2-4}=\dfrac{y+8}{1+2y}$

જાણી લઈએ.

પરંપરિત પ્રમાણ (Continued Proportion)

નીચેના ગુણોત્તરો ધ્યાનમાં લ્યો. 4:12 અને 12:36 આ બન્ને સમાન ગુણોત્તરો છે. આ પ્રમાણમાં '12' સામાન્ય પદ છે. તેથી 4, 12, 36 આ સંખ્યાઓ પરંપરિત પ્રમાણમાં છે એમ કહે છે.

જો $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}$ તો a, b, c આ સંખ્યાઓ પરંપરિત પ્રમાણમાં છે એમ કહે છે.

જો $ac = b^2$, તો બન્ને બાજુએ bc વડે ભાગતાં $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}$ આ સમીકરણ મળે છે.

$\therefore$ $ac = b^2$ હોય, તો a, b, c પરંપરિત પ્રમાણમાં હોય છે.

જો a, b, c પરંપરિત પ્રમાણમાં હોય તો b ને a અને c નો **'ભૌમિતીક મધ્ય'** (Geometric mean) અથવા **'મધ્યમ પ્રમાણ પદ'** (Mean proportional) કહે છે.

આ પરથી ધ્યાનમાં લ્યો કે, નીચેના બધા વિધાનો સમાનાર્થી છે.

$\therefore$ (1) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}$ (2) $b^2 = a\,c$ (3) a, b, c પરંપરિત પ્રમાણમાં છે.

(4) b એ a અને c નો ભૌમિતીક મધ્ય છે. (5) b એ a અને c નું મધ્યમ પ્રમાણ પદ છે.

પરંપરિત પ્રમાણની સંકલ્પના પણ વિસ્તારીત કરી શકાય છે.

જો $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{d}{e}=\dfrac{e}{f}$ તો a, b, c, d, e અને f આ બધી સંખ્યાઓ પરંપરિત પ્રમાણમાં છે, એમ કહેવાય.

ઉદા. (1) x એ 25 અને 4 નું ભૌમિતીક મધ્ય હોય તો x ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : x એ 25 અને 4 નું ભૌમિતીક મધ્ય છે.

$$\therefore\ x^2 = 25 \times 4$$
$$\therefore\ x^2 = 100$$
$$\therefore\ x = 10$$

ઉદા. (2) જો $4\,a^2b$, $8\,ab^2$, p પરંપરિત પ્રમાણમાં હોય તો p ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : આપેલી માહિતીમાં $4\,a^2b$, $8\,ab^2$, p પરંપરિત પ્રમાણમાં છે.

$$\therefore \quad \frac{4a^2b}{8ab^2} = \frac{8ab^2}{p}$$

$$p = \frac{8ab^2 \times 8ab^2}{4a^2b} = 16b^3$$

ઉદા. (3) 7, 12 અને 18 આ દરેક સંખ્યામાંથી કઈ સંખ્યા બાદ કરીએ તો મળતી સંખ્યાઓ પરંપરિત પ્રમાણમાં આવશે?

ઉકેલ : 7, 12 અને 18 આ દરેક સંખ્યામાંથી x બાદ કરતાં મળતી સંખ્યાઓ પરંપરિત પ્રમાણમાં હશે તેમ ધારીએ.
$(7-x)$, $(12-x)$, $(18-x)$ પરંપરિત પ્રમાણમાં છે.

$\therefore \quad (12-x)^2 = (7-x)(18-x)$

$\therefore \quad 144 - 24x + x^2 = 126 - 25x + x^2$

$\therefore \quad -24x + 25x = 126 - 144$

$\therefore \quad x = -18$

તાળો

$(7-x) = 7-(-18) = 25$

$(12-x) = 12-(-18) = 30$

$(18-x) = 18-(-18) = 36$

$30^2 = 900$ અને $25 \times 36 = 900$

25, 30, 36 આ સંખ્યા પરંપરિત પ્રમાણમાં છે.

$\therefore$ 7, 12, 18 માંથી -18 બાદ કરતાં મળતી સંખ્યાઓ પરંપરિત પ્રમાણમાં આવે છે.

k – ની રીત (k –method)

ગુણોત્તરની k – ની રીત ‘સમાન ગુણોત્તર’ પર આધારિત છે એટલે કે પ્રમાણ પર આધારિત પ્રશ્નો ઉકેલવાની સહેલી રીત છે. આ રીતમાં આપેલાં દરેક ગુણોત્તરની કિંમત k માનવામાં આવે છે.

ઉદા. (1) જો $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ તો બતાવો કે, $\frac{5a-3c}{5b-3d} = \frac{7a-2c}{7b-2d}$

ઉકેલ : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ ધારીએ. $\therefore$ $a = bk$, $c = dk$

a અને c ની કિંમત બન્ને બાજુ મૂકતાં.

$$\text{ડાબી બાજુ} = \frac{5a-3c}{5b-3d} = \frac{5(bk)-3(dk)}{5b-3d} = \frac{k(5b-3d)}{(5b-3d)} = k$$

$$\text{જમણી બાજુ} = \frac{7a-2c}{7b-2d} = \frac{7(bk)-2(dk)}{7b-2d} = \frac{k(7b-2d)}{7b-2d} = k$$

$\therefore$ ડાબી બાજુ = જમણી બાજુ.

$$\therefore \frac{5a-3c}{5b-3d} = \frac{7a-2c}{7b-2d}$$

ઉદા. **(2)** જો a, b, c પરંપરિત પ્રમાણમાં હોય તો સાબિત કરો કે , $\frac{(a+b)^2}{ab}=\frac{(b+c)^2}{bc}$

ઉકેલ : a, b, c પરંપરિત પ્રમાણમાં છે તેથી $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=k$ ધારીએ.

$\therefore b = ck, \quad a = bk = ck \times k = ck^2$

a અને b ની કિંમત મૂકતાં.

ડાબી બાજુ $=\frac{(a+b)^2}{ab}=\frac{(ck^2+ck)^2}{(ck^2)(ck)}=\frac{c^2k^2(k+1)^2}{c^2k^3}=\frac{(k+1)^2}{k}$

જમણી બાજુ $=\frac{(b+c)^2}{bc}=\frac{(ck+c)^2}{(ck)c}=\frac{c^2(k+1)^2}{c^2k}=\frac{(k+1)^2}{k}$

$\therefore$ ડાબી બાજુ = જમણી બાજુ. $\quad \therefore \frac{(a+b)^2}{ab}=\frac{(b+c)^2}{bc}$

ઉદા.**(3)** જો a, b, c પરંપરિત પ્રમાણમાં હોય,

તો સાબિત કરો કે $\frac{a}{c}=\frac{a^2+ab+b^2}{b^2+bc+c^2}$

ઉકેલ : a, b, c પરંપરિત પ્રમાણમાં છે. $\therefore \frac{a}{b}=\frac{b}{c}$

ધારો કે, $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\mathrm{k}$ $\quad \therefore b = ck$ અને $a = ck^2$

ડાબી બાજુ $=\frac{a}{c}=\frac{ck^2}{c}=k^2$

જમણી બાજુ $=\frac{a^2+ab+b^2}{b^2+bc+c^2}$

$=\frac{(ck^2)^2+ck^2(ck)+(ck)^2}{(ck)^2+(ck)(c)+c^2}$

$=\frac{c^2k^4+c^2k^3+c^2k^2}{c^2k^2+c^2k+c^2}$

$=\frac{c^2k^2(k^2+k+1)}{c^2(k^2+k+1)}$

$=k^2$

$\therefore$ ડાબી બાજુ = જમણી બાજુ.

$\therefore \frac{a}{c}=\frac{a^2+ab+b^2}{b^2+bc+c^2}$

ઉદા. **(4)** પાંચ સંખ્યાઓ પરંપરિત પ્રમાણમાં છે. તેમાંથી પહેલું પદ 5 અને છેલ્લું પદ 80 છે તો તે સંખ્યાઓ શોધો.

ઉકેલ : ધારોકે, પરંપરિત પ્રમાણમાંની પાંચ સંખ્યાઓ a, ak, ak^2, ak^3, ak^4 છે.

અહીં $a = 5$ અને $ak^4 = 80$

$\therefore 5 \times k^4 = 80$

$\therefore k^4 = 16$

$\therefore k = 2 \quad (\because 2^4 = 16)$

$ak = 5 \times 2 = 10, \qquad ak^2 = 5 \times 4 = 20$

$ak^3 = 5 \times 8 = 40, \qquad ak^4 = 5 \times 16 = 80$

$\therefore$ તે સંખ્યાઓ 5, 10, 20, 40, 80 છે.

મહાવરાસંગ્રહ 4.5

(1) 12, 16 અને 21 આ દરેક સંખ્યામાં કઈ સંખ્યા ઉમેરતાં મળતી સંખ્યાઓ પરંપરિત પ્રમાણમાં હશે ?

(2) $(23-x)$ અને $(19-x)$ નું $(28-x)$ એ મધ્યમ પ્રમાણપદ છે, તો x ની કિંમત શોધો.

(3) ત્રણ સંખ્યાઓ પરંપરિત પ્રમાણમાં છે. તેનું મધ્યમ પ્રમાણપદ 12 છે અને બાકીની બે સંખ્યાઓનો સરવાળો 26 છે. તો તે સંખ્યાઓ શોધો.

(4) જો $(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2$ તો a, b, c આ સંખ્યા પરંપરિત પ્રમાણમાં છે તે સાબિત કરો.

(5) જો $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ અને $a, b, c > 0$ તો સાબિત કરો કે,

(i) $(a + b + c)(b - c) = ab - c^2$ (ii) $(a^2 + b^2)(b^2 + c^2) = (ab + bc)^2$

(iii) $\frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{a+c}{b}$

(6) $\frac{x+y}{x-y}$, $\frac{x^2-y^2}{x^2y^2}$ નું મધ્યમ પ્રમાણપદ શોધો.

કૃતિ : ભૂગોળના પાઠ્યપુસ્તકમાં ભારતનો રાજકીય નકશો જુઓ. તેમાં આપેલાં અંતરનું પ્રમાણ ધ્યાનમાં લ્યો. તે પરથી જુદાં જુદાં શહેરો વચ્ચેનું (સીધી રેખામાં) અંતર શોધો.

જેમ કે, (i) નવી દિલ્હીથી બેંગ્લોર (ii) મુંબઈથી કૉલકત્તા (iii) જયપુરથી ભુવનેશ્વર

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 4

(1) નીચેના પ્રશ્નો માટેના બહુપર્યાયી ઉત્તરોમાંથી સાચો પર્યાય શોધો.

(i) જો 6 : 5 = y : 20 તો y ની કિંમત કઈ?

(A) 15 (B) 24 (C) 18 (D) 22.5

(ii) 1 મિલિમીટરનો 1 સેમી સાથેનો ગુણોત્તર કયો?

(A) 1 : 100 (B) 10 : 1 (C) 1 : 10 (D) 100 : 1

(iii*) જતીન, નિતીન અને મોહસીનની ઉંમર અનુક્રમે 16, 24 અને 36 વર્ષ છે. તો નિતીનની ઉંમરનો મોહસીનની ઉંમર સાથેનો ગુણોત્તર કેટલો ?

(A) 3 : 2 (B) 2 : 3 (C) 4 : 3 (D) 3 : 4

(iv) શુભમ અને અનિલને 3 : 5 ના પ્રમાણમાં 24 કેળા વહેંચ્યા તો શુભમને કેટલા કેળાં મળ્યા?

(A) 8 (B) 15 (C) 12 (D) 9

(v) 4 અને 25 નું મધ્યમ પ્રમાણપદ કયું?

(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12

(2) નીચે આપેલી સંખ્યા જોડીમાં પહેલાનો બીજી સંખ્યા સાથેનો ગુણોત્તર સંક્ષિપ્ત રૂપમાં લખો.

(i) 21, 48 (ii) 36, 90 (iii) 65, 117 (iv) 138, 161 (v) 114, 133

(3) નીચેના ગુણોત્તરો સંક્ષિપ્ત રૂપમાં લખો.

(i) વર્તુળની ત્રિજ્યાનો વ્યાસ સાથેનો ગુણોત્તર.

(ii) એક લંબચોરસની લંબાઈ 4 સેમી અને પહોળાઈ 3 સેમી હોય તો લંબચોરસના વિકર્ણોનો તેની લંબાઈ સાથેનો ગુણોત્તર.

(iii) ચોરસની બાજુ 4 સેમી હોય તો ચોરસની પરિમિતિનો તેના ક્ષેત્રફળ સાથેનો ગુણોત્તર.

(4) નીચેની સંખ્યાઓ પરંપરિત પ્રમાણમાં છે કે નહીં? તે નક્કી કરો.

(i) 2, 4, 8 (ii) 1, 2, 3 (iii) 9, 12, 16 (iv) 3, 5, 8

(5) a, b, c આ ત્રણ સંખ્યાઓ પરંપરિત પ્રમાણમાં છે. જો $a = 3$ અને $c = 27$ હોય તો $b =$ કેટલા?

(6) આપેલા ગુણોત્તરોને શતમાનમાં ફેરવો.

(i) 37 : 500 (ii) $\frac{5}{8}$ (iii) $\frac{22}{30}$ (iv) $\frac{5}{16}$ (v) $\frac{144}{1200}$

(7) પહેલી રાશિનો બીજી રાશિ સાથેનો ગુણોત્તર શોધો.

(i) 1024 MB, 1.2 GB [(1024 MB = 1 GB)]

(ii) 17 રૂપિયા, 25 રૂપિયા 60 પૈસા (iii) 5 ડઝન, 120 નંગ

(iv) 4 ચોરસ મીટર, 800 ચોરસ સેમી (v) 1.5 કિગ્રા, 2500 ગ્રામ

(8) જો $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ તો નીચેની રાશિઓની કિંમત શોધો.

(i) $\frac{4a+3b}{3b}$ (ii) $\frac{5a^2+2b^2}{5a^2-2b^2}$

(iii) $\frac{a^3+b^3}{b^3}$ (iv) $\frac{7b-4a}{7b+4a}$

(9) a, b, c, d પ્રમાણમાં હોય તો, સાબિત કરો કે,

(i) $\frac{11a^2+9ac}{11b^2+9bd} = \frac{a^2+3ac}{b^2+3bd}$

(ii*) $\sqrt{\frac{a^2+5c^2}{b^2+5d^2}} = \frac{a}{b}$

(iii) $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2} = \frac{c^2+cd+d^2}{c^2-cd+d^2}$

(10) a, b, c પરંપરિત પ્રમાણમાં હોય તો, સાબિત કરો કે,

(i) $\dfrac{a}{a+2b}=\dfrac{a-2b}{a-4c}$ (ii) $\dfrac{b}{b+c}=\dfrac{a-b}{a-c}$

(11) સમીકરણ ઉકેલો : $\dfrac{12x^2+18x+42}{18x^2+12x+58}=\dfrac{2x+3}{3x+2}$

(12) જો $\dfrac{2x-3y}{3z+y}=\dfrac{z-y}{z-x}=\dfrac{x+3z}{2y-3x}$ તો દરેક ગુણોત્તર $\dfrac{x}{y}$ છે તે સાબિત કરો.

(13*) જો $\dfrac{by+cz}{b^2+c^2}=\dfrac{cz+ax}{c^2+a^2}=\dfrac{ax+by}{a^2+b^2}$ તો $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ છે તે સાબિત કરો.

5 બે ચલોના રેખિક સમીકરણો

64GZN5

ચાલો શીખીએ.

- બે ચલવાળા રેખિક સમીકરણો
- યુગપત્ સમીકરણો
- યુગપત્ સમીકરણોના ઉકેલની રીતો
- યુગપત્ સમીકરણનાં શાબ્દિક ઉદાહરણો

યાદ કરીએ.

ઉદા. નીચેના સમીકરણો ઉકેલીએ.

(1) $m+3=5$ $\therefore m = \square$

(2) $3y+8=22$ $\therefore y = \square$

(3) $\frac{x}{3}=2$ $\therefore x = \square$

(4) $2p= p+\frac{4}{9}$ $\therefore p = \square$

(5) કઈ સંખ્યામાં 5 ઉમેરતાં 14 મળે?

$\therefore \square + 5 = 14$

$\therefore x + 5 = 14$

$\therefore x = \square$

(6) 8 માંથી કેટલા બાદ કરતાં 2 મળશે?

$\therefore 8 - \square = 2$

$\therefore 8 - y = 2$

$\therefore y = \square$

ઉપરના દરેક સમીકરણમાં ચલનો ઘાતાંક 1 છે. અને એક જ ચલવાળાં છે. આ સમીકરણોને એક ચલવાળાં રેખિક સમીકરણ કહે છે.

જાણી લઈએ.

બે ચલવાળા (દ્વિચલ) રેખિક સમીકરણો (Linear equations in two variables)

જો બે સંખ્યાનો સરવાળો 14 છે એવી સંખ્યા શોધો.

સંખ્યા માટે x અને y ચલ વાપરીને આ ઉદાહરણ સમીકરણ રૂપમાં $x + y = 14$ એમ થાય.

આ બે ચલવાળું રેખિક સમીકરણ છે. અહીં x અને y આ બંને ચલોની અનેક કિંમતો શોધી શકાય છે.

જેમ કે, $9 + 5 = 14$, $7 + 7 = 14$, $8 + 6 = 14$, $4 + 10 = 14$,

$(-1) + 15 = 14$, $15 + (-1) = 14$, $2.6 + 11.4 = 14$, $0 + 14 = 14$,

$100 + (-86) = 14$, $(-100) + (114) = 14$, $\square + \square = 14$, $\square + \square = 14$.

એટલે કે, ઉપરના સમીકરણમાં $(x = 9, y = 5)$, $(x = 7, y = 7)$, $(x = 8, y = 6)$, વગેરે અનેક ઉકેલો મળે છે.

$x = 9, y = 5$ એ ઉકેલ (9, 5) આ ક્રમથી કૌંસમાં લખવાનો સંકેત છે. આ જોડીમાં પહેલી સંખ્યા x ની કિંમત અને બીજી સંખ્યા y ની કિંમત દર્શાવતી હોય છે. $x + y = 14$ આ સમીકરણ સત્ય બતાવવા (9,5), (7,7), (8,6), (4,10), (10,4), (−1,15), (2.6, 11.4),... એમ અનંત ક્રમિક જોડીઓ મળે છે એટલે કે તેના અનંત ઉકેલ છે.

હવે, બીજું ઉદાહરણ જુઓ.

એવી બે સંખ્યા શોધો કે જેની બાદબાકી 2 છે.

મોટી સંખ્યા x અને નાની સંખ્યા y ધારતાં, $x-y = 2$ એ સમીકરણ મળશે.

x અને y કિંમત માટે નીચે પ્રમાણે અનેક સમીકરણ મળશે.

$10 - 8 = 2$, $9 - 7 = 2$, $8 - 6 = 2$, $(-3) - (-5) = 2$, $5.3-3.3=2$,

$15 - 13 = 2$, $100 - 98 = 2$, $\square - \square = 2$, $\square - \square = 2$.

અહીં $x = 10$ અને $y = 8$ આ કિંમત લેતાં (10,8) આ ક્રમિક જોડી સમીકરણનું સમાધાન કરે છે એટલે આ જોડી આ સમીકરણનો ઉકેલ છે. (10, 8) આ જોડી (8, 10) એવી રીતે લખીએ તો ચાલશે નહીં. કારણ (8, 10) નો અર્થ $x = 8, y = 10$ છે. આ કિંમતથી $x-y = 2$ આ સમીકરણનું સમાધાન થશે નહીં. આ પરથી કહી શકાય **કે ક્રમિક જોડીમાંથી સંખ્યાનો ક્રમ મહત્ત્વનો હોય છે, આ બરાબર લક્ષમાં રાખો.**

હવે $x-y = 2$ આ સમીકરણનો ઉકેલ ક્રમિત જોડીના રૂપમાં નીચે પ્રમાણે લખો.

(7, 5), (−2, −4), (0, −2), (5.2, 3.2), (8, 6),... ઇત્યાદી અનંત ઉકેલ છે.

$4m - 3n = 2$ આ સમીકરણનો ઉકેલ શોધો.

તમે આવા ત્રણ જુદા જુદા સમીકરણ તૈયાર કરો અને તેનાં ઉકેલ શોધો.

હવે ઉપર આપેલા પહેલા બે સમીકરણ લો.

$x + y = 14$ I

$x - y = 2$ II

સમીકરણ I નો ઉકેલ (9, 5), (7, 7), (8, 6),...

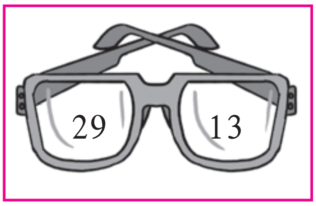
સમીકરણ II નો ઉકેલ (7, 5), (−2, −4), (0, −2), (5.2, 3.2), (8, 6),...

(8, 6) આ ઉકેલ બંને સમૂહમાં સામાન્ય છે. એટલે કે આ જોડી બંને સમીકરણનું સમાધાન કરે છે. એટલે તે બંને સમીકરણનો **સામાન્ય ઉકેલ** છે.

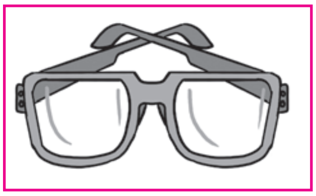
આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

જ્યારે બે ચલવાળાં બે રેખિક સમીકરણોનો એક સાથે વિચાર કરીએ ત્યારે તે સમીકરણને **યુગપત્ સમીકરણો** (Simultaneous equations) કહે છે.

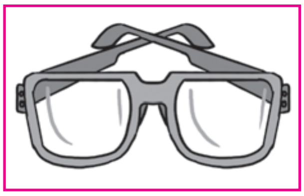
કૃતિ : નીચે આપેલા ચશ્માંના કાચ પર એવી સંખ્યા લખો કે,



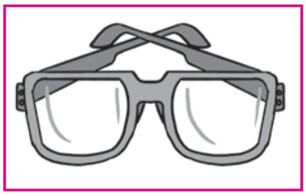
(i) જેનો સરવાળો 42 અને બાદબાકી 16 છે.



(ii) જેનો સરવાળો 37 અને બાદબાકી 11 છે.



(iii) જેનો સરવાળો 54 અને બાદબાકી 20 છે.



(iv) જેનો સરવાળો ... અને બાદબાકી ... છે.

વિચાર કરીએ.

$x + y = 5$ અને $2x + 2y = 10$. આ બે ચલવાળાં બે સમીકરણો છે.

$x + y = 5$ આ સમીકરણોનાં જુદા જુદા પાંચ ઉકેલ શોધો. તેના ઉકેલથી $2x + 2y = 10$ આ સમીકરણનું સમાધાન થાય છે કે તે તપાસો.

આ બંને સમીકરણનું નિરીક્ષણ કરો.

બંને ચલવાળા બે સમીકરણોના ઉકેલ સમાન હોય તે માટે આવશ્યક હોય તેવી શરત શોધી કાઢો.

જાણી લઈએ.

ચલોનો લોપ કરીને યુગપત્ સમીકરણ ઉકેલવાની રીત (Elimination method)

$x + y = 14$ અને $x - y = 2$ યુગપત્ સમીકરણોમાં ચલોની જુદી જુદી કિંમત મૂકીને આપણે ઉકેલીએ પરંતુ દરેક વખતે આ રીતે ઉકેલ શોધવો સહજ નથી. દાખલા તરીકે $2x + 3y = -4$ અને $x - 5y = 11$આ સમીકરણ x અને y ની જુદી જુદી કિંમત આપીને ઉકેલવાનો પ્રયત્ન કરીને જુઓ. આ રીતે ઉકેલ મેળવવો સહેલો નથી તે તમારા ધ્યાનમાં આવશે.

એટલે યુગપત્ સમીકરણ ઉકેલવા માટે જુદી જુદી રીતો વાપરી શકાય. આ રીતમાં બે ચલ પૈકી એક ચલનો લોપ કરીને એક ચલવાળું રેખિક સમીકરણ મેળવવું. તે પરથી ચલની કિંમત શોધીને. તે કિંમત આપેલા બીજા સમીકરણમાં મૂકતાં બીજા ચલની કિંમત મળશે.

આ પદ્ધતિ સમજવા માટે નીચેના ઉદાહરણનો અભ્યાસ કરો.

ઉદા. **(1)** છોડો : $x + y = 14$ અને $x - y = 2$.

ઉકેલ : બંને સમીકરણોનો સરવાળો કરી એક ચલવાળું સમીકરણ મેળવવું.

$$
\begin{array}{rrcl}
 & x + y & = & 14 \quad ....\text{I} \\
+ & x - y & = & 2 \quad ....\text{II} \\
\hline
 & 2x + 0 & = & 16 \\
\therefore & 2x & = & 16 \\
\therefore & x & = & 8
\end{array}
$$

$x = 8$ એ કિંમત સમીકરણ (I) માં મૂકતાં,

$$
\begin{array}{rrcl}
 & x + y & = & 14 \\
\therefore & 8 + y & = & 14 \\
\therefore & y & = & 6
\end{array}
$$

અહીં (8, 6) એ પહેલા સમીકરણોની ઉકેલ છે. એ જ ઉકેલ બીજા સમીકરણમાં મૂકીને ચકાસી જુઓ.

$x - y = 8 - 6 = 2$ સત્ય છે.

(8,6) એ આપેલાં બન્ને સમીકરણનો **સામાન્ય ઉકેલ** છે.

એટલે જ, $x + y = 14$ અને $x - y = 2$ આ યુગપત્ સમીકરણોના (8, 6) એ ઉકેલ છે.

ઉદા. **(2)** માતા અને પુત્રની ઉંમરનો સરવાળો 45 છે. માતાની ઉંમરના બમણા અને પુત્રના ઉંમર બાદ કરવામાં આવે તો ઉત્તર 54 આવે તો તે બંનેની ઉંમર શોધો.

આપેલી માહિતી ચલોનો ઉપયોગ કરીને લખીને, તે ઉદાહરણ ઉકેલવું સરળ પડશે.

ઉકેલ : ધારો કે, માતાની આજની ઉંમર x વર્ષ અને પુત્રની આજની ઉંમર y વર્ષ છે.

પહેલી શરત મુજબ $x + y = 45$ I

બીજી શરત મુજબ, $2x - y = 54$ II

સમીકરણ (I) અને (II) નો સરવાળો કરતાં $3x+0 = 99$

$$
\begin{array}{rrcl}
\therefore & 3x & = & 99 \\
\therefore & x & = & 33
\end{array}
$$

પહેલા સમીકરણમાં $x = 33$ ની કિંમત મૂકતાં,

$$
\begin{array}{rrcl}
\therefore & 33+y & = & 45 \\
\therefore & y & = & 45-33 \\
\therefore & y & = & 12
\end{array}
$$

$x = 33$ અને $y = 12$ એ ઉકેલ બીજા સમીકરણનું સમાધાન કરે છે. આને ચકાસી લો.

માતાની આજની ઉંમર 33 વર્ષ અને પુત્રની આજની ઉંમર 12 વર્ષ છે.

બે ચલવાળા (દ્વિચલ) રેખિક સમીકરણનું સામાન્ય રૂપ

$ax + by + c = 0$ આ સમીકરણમાં a, b, c એ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય છે
તથા a અને b બન્ને એકીસાથે 0 ન હોય તો આ સમીકરણ બે ચલવાળા રેખિક સમીકરણોનું **સામાન્ય રૂપ** હોય છે.

આ સમીકરણમાં બંને ચલોનો ઘાતાંક 1 છે. તેથી આ સમીકરણ રેખિક સમીકરણ છે.

ઉદા. **(1)** નીચેના યુગપત્ સમીકરણ છોડો.

ઉકેલ : $3x + y = 5$ .... (I)

$2x + 3y = 1$ ....(II)

અહીં એક ચલનો લોપ કરવા માટે બંને સમીકરણમાં કોઈપણ ચલનો સહગુણક સમાન અથવા વિરુધ્ધ સંખ્યા નથી. સૌ પ્રથમ તે સમાન કરી લઈએ.

સમીકરણ I ને બંને બાજુને 3 વડે ગુણો. હવે,

$\therefore \quad 3x \times 3 + 3 \times y = 5 \times 3$

$\therefore \quad 9x + 3y = 15$ ....(III)

$2x + 3y = 1$ ....(II)

સમીકરણ III માંથી II બાદ કરતાં, y નો લોપ થશે.

$$\begin{array}{rcl} 9x + 3y & = & 15 \\ \underset{-}{+} 2x \underset{-}{+} 3y & \underset{-}{=} & 1 \\ \hline 7x & = & 14 \end{array}$$

$\therefore \quad x = 2$

સમીકરણ II માં $x = 2$ કિંમત મૂકતાં,

$2x + 3y = 1$

$\therefore \quad 2 \times 2 + 3y = 1$

$\therefore \quad 4 + 3y = 1$

$\therefore \quad 3y = -3$

$\therefore \quad y = -1$

અહીં $(2, -1)$ ઉકેલ બીજા સમીકરણ માટે પણ સત્ય છે. તે ચકાસો.

ઉદા. **(2)** નીચેના યુગપત્ સમીકરણ છોડો.

ઉકેલ : $3x - 4y - 15 = 0$ .... (I)

$y + x + 2 = 0$ ....(II)

બંને સમીકરણનો સ્થિર અંક જમણી બાજુ લેતાં,

$3x - 4y = 15$........(I)

$x + y = -2$ .... (II)

y ચલનો લોપ કરવા માટે સમીકરણ II ને 4 વડે ગુણતાં અને સમીકરણ I માં તે ઉમેરતાં,

$$\begin{array}{rrcl} & 3x - 4y & = & 15 \\ + & 4x + 4y & = & -8 \\ \hline & 7x & = & 7 \end{array}$$

$\therefore \quad x = 1$

સમીકરણ II માં $x = 1$ કિંમત મૂકતાં,

$x + y = -2$

$\therefore \quad 1 + y = -2$

$\therefore \quad y = -2 - 1$

$\therefore \quad y = -3$

$(1, -3)$ એ ઉકેલ છે. આ ઉકેલ સમીકરણ I માટે પણ સત્ય છે તે ચકાસો.

વિચાર કરીએ.

$3x - 4y - 15 = 0$ અને $y + x + 2 = 0$ આ સમીકરણ x ચલનો લોપ કરીને ઉકેલી શકાય કે? ઉકેલ એ જ આવે છે કે? કરીને જુઓ.

જાણી લઈએ.

એક ચલની કિંમત બીજા ચલના રૂપમાં મૂકી ચલનો લોપ કરવો (Substitution method)

ચલનો લોપ કરવાની હજી એક રીત છે. સમીકરણમાંના એક ચલની કિંમત બીજા ચલના રૂપમાં શોધીને તે કિંમત બીજા સમીકરણમાં મૂકી ચલનો લોપ કરી શકાય. આ પદ્ધતિ નીચેના ઉદાહરણ દ્વારા સમજી લઈએ.

ઉદા. **(1)** છોડો : $8x + 3y = 11$; $3x - y = 2$

ઉકેલ : $8x + 3y = 11$.................. (I)

$3x - y = 2$.......................(II)

સમીકરણ (II) પરથી y ની કિંમત x ચલના રૂપમાં શોધવી સહેલી થશે.

$3x - y = 2$

$\therefore \quad 3x - 2 = y$

હવે $y = 3x - 2$ આ કિંમત સમીકરણ (I) માં મૂકતાં.

$8x + 3y = 11$

$\therefore \quad 8x + 3(3x-2) = 11$ ($y = 3x - 2$ મૂકતાં.)

$\therefore \quad 8x + 9x - 6 = 11$

$\therefore \quad 17x - 6 = 11$

$\therefore \quad 17x = 11 + 6 = 17$

$\therefore \quad x = 1$

x ની આ કિંમત $y = 3x - 2$ માં મૂકતાં.

$\therefore \quad y = 3 \times 1 - 2$

$\therefore \quad y = 1$

$\therefore \quad x = 1$ અને $y = 1$

$\therefore \quad (1, 1)$ આ સમીકરણનો ઉકેલ છે.

ઉદા. **(2)** છોડો : $3x - 4y = 16$; $2x - 3y = 10$

ઉકેલ : $3x - 4y = 16$..........(I)

$2x - 3y = 10$.............(II)

સમી. I પર થી x આ ચલની કિંમત y ના રૂપમાં લેતાં.

$3x - 4y = 16$

$\therefore \quad 3x = 16 + 4y$

$\therefore \quad x = \frac{16 + 4y}{3}$

x ની આ કિંમત સમીકરણ (II) માં મૂકતાં.

$2x - 3y = 10$

$\therefore \quad 2\left(\frac{16+4y}{3}\right) - 3y = 10$ (x ની કિંમત y ના રૂપમાં મૂકતાં.)

$\therefore \quad \frac{32 + 8y}{3} - 3y = 10$

$\therefore \quad \frac{32 + 8y - 9y}{3} = 10$

$\therefore \quad 32 + 8y - 9y = 30$

$\therefore \quad 32 - y = 30 \qquad \therefore y = 2$

હવે $y = 2$ ની આ કિંમત સમીકરણ (I) માં મૂકતાં.

$3x - 4y = 16$

$\therefore \quad 3x - 4 \times 2 = 16$

$\therefore \quad 3x - 8 = 16$

$\therefore \quad 3x = 16 + 8$

$\therefore \quad 3x = 24$

$\therefore \quad x = 8$

$\therefore \quad x = 8$ અને $y = 2$

$\therefore \quad (8, 2)$ આ સમીકરણનો ઉકેલ છે.

મહાવરાસંગ્રહ 5.1

(1) x અને y આ ચલનો ઉપયોગ કરી જુદાં જુદાં પાંચ દ્વિચલ રેખિક સમીકરણો લખો.

(2) $x + y = 7$ આ સમીકરણના જુદાં જુદાં પાંચ ઉકેલ શોધો.

(3) નીચેના યુગપત્ સમીકરણો છોડો.

(i) $x + y = 4$; $2x - 5y = 1$

(ii) $2x + y = 5$; $3x - y = 5$

(iii) $3x - 5y = 16$; $x - 3y = 8$

(iv) $2y - x = 0$; $10x + 15y = 105$

(v) $2x + 3y + 4 = 0$; $x - 5y = 11$

(vi) $2x - 7y = 7$; $3x + y = 22$

જાણી લઈએ.

યુગપત્ સમીકરણો પરના શાબ્દિક ઉદાહરણો

શાબ્દિક ઉદાહરણો છોડવતી વખતે આપેલી માહિતી પરથી સમીકરણ તૈયાર કરવુ તે અત્યંત મહત્ત્વનું પગથિયું છે. સમીકરણનો ઉકેલ શોધવાની પ્રણાલી નીચેના પગથિયાં દ્વારા દર્શાવી છે.

પગથિયાં	ઉદાહરણ
શાબ્દિક ઉદાહરણ કાળજીપૂર્વક વાંચી સમજી લો.	બે સંખ્યાનો સરવાળો 36 છે. એક સંખ્યાના આઠ ગણામાંથી 9 બાદ કરતાં બીજી સંખ્યા મળે છે. તો તે સંખ્યાઓ શોધો.
↓	↓
ઉદાહરણમાં આપેલ માહિતીપરથી રાશિ માટે ચલ વાપરો.	પહેલી સંખ્યા = x ધારીએ. બીજી સંખ્યા = y ધારીએ.
↓	↓
ચલ વાપરી ગાણિતિક વિધાન લખો.	સંખ્યાનો સરવાળો 36 $\therefore x + y = 36$ નાની સંખ્યાના 8 ગણા = $8x$ નાની સંખ્યાના 8 ગણા $- 9 = 8x - 9$ $\therefore$ મોટી સંખ્યા = $y = 8x - 9$
↓	↓
યોગ્ય પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરી સમીકરણ છોડો.	$x + y = 36$ + $8x - y = 9$ $\therefore 9x = 45$ $\therefore x = 5$ $\therefore 5 + y = 36$ $\therefore y = 36 - 5$ $\therefore y = 31$
↓	↓
ઉકેલ મેળવો.	$x = 5$, $y = 31$
↓	↓
આવેલ ઉત્તર સમીકરણમાં મૂકી તાળો મેળવો.	$31 + 5 = 36$ ....(I) $31 = 8 \times 5 - 9$ ....(II)
↓	↓
ઉત્તર લખો.	$\therefore$ તે સંખ્યા 5 અને 31 છે.

શાબ્દિક ઉદાહરણો

હવે આપણે વિવિધ પ્રકારના શાબ્દિક ઉદાહરણોનો વિચાર કરશું.

(1) ઉંમરને લગતા ઉદાહરણો

(2) સંખ્યા સાથે સંબંધિત ઉદાહરણો

(3) અપૂર્ણાંક આધારિત ઉદાહરણો

(4) આર્થિક વ્યવહાર પર આધારિત ઉદાહરણો

(5) ભૌમિતિક આકૃતિના ગુણધર્મ પર આધારિત ઉદાહરણો

(6) વેગ, અંતર, સમય પર આધારિત ઉદાહરણો

ઉદા. (1) બે સંખ્યાનો સરવાળો 103 છે. મોટી સંખ્યાને નાની સંખ્યા વડે ભાગતા ભાગફળ 2 આવે અને શેષ 19 વધે છે તો તે સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ : પગથિયું -1 : શાબ્દિક ઉદાહરણ સમજવું

પગથિયું -2: શોધવાની સંખ્યા માટે અક્ષર ધારવા.

તેમજ ભાજ્ય = ભાજક $\times$ ભાગફળ + શેષ આ નિયમ ધ્યાનમાં રાખવો.

મોટી સંખ્યા x ધારો અને નાની સંખ્યા y ધારો.

પગથિયું -3 : આપેલી માહિતી મુજબ સંખ્યાનો સરવાળો = 103

એટલે $x + y = 103$ આ એક સમીકરણ મળ્યું.

મોટી સંખ્યાને નાની સંખ્યા વડે ભાગતાં ભાગફળ 2 અને શેષ 19 વધે છે માટે

$x = 2 \times y + 19$ ...(ભાજ્ય = ભાજક $\times$ ભાગફળ + શેષ)

એટલે $x - 2y = 19$ આ બીજું સમીકરણ મળશે

પગથિયું -4 : હવે તૈયાર કરેલાં સમીકરણોનો ઉકેલ કાઢીએ.

$$x + y = 103 \quad \text{................(I)}$$
$$x - 2y = 19 \quad \text{................(II)}$$

સમીકરણ (I) માંથી સમીકરણ (II) બાદ કરતાં

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 103 \\ x - 2y & = & 19 \\ - \quad + & & - \\ \hline 0 + 3y & = & 84 \\ \therefore \quad y & = & 28 \end{array}$$

પગથિયું - 5 : $x + y = 103$ આ સમીકરણમાં $y = 28$ ની કિંમત મૂકતાં.

$$\therefore \quad x + 28 = 103$$
$$\therefore \quad x = 103 - 28$$
$$\therefore \quad x = 75$$

પગથિયું - 6 : $\therefore$ આપેલી સંખ્યા 75 અને 28 છે.

ઉદા. **(2)** સલિલની ઉંમર સંગ્રામની ઉંમરના અડધા કરતાં 23 વર્ષ વધુ છે. પાંચ વર્ષ પહેલાં તેમની ઉંમરનો સરવાળો 55 વર્ષ હતો તો તેમની હાલની ઉંમર શોધો.

ઉકેલ : સલિલની આજની ઉંમર x ધારતાં અને સંગ્રામની આજની ઉંમર y ધારતાં.

સલિલની ઉંમર સંગ્રામની ઉંમરના અડધાં કરતાં 23 વધુ છે. એટલે $x = \frac{y}{2} + \square$

પાંચ વર્ષ પહેલા સલિલની ઉંમર = $x - 5$.   પાંચ વર્ષ પહેલા સંગ્રામની ઉંમર= $y - 5$

પાંચ વર્ષ પહેલા તેમની ઉંમરનો સરવાળો= 55

$\square + \square = 55$

સમીકરણ છોડી ઉકેલ શોધવો.

$2x = y + 46 \quad \therefore \quad 2x - y = 46$ ....(I)

$(x - 5) + (y - 5) = 55$

$\therefore\ x + y = 65$ ....(II)

સમીકરણ (I) અને (II) નો સરવાળો કરતાં,

$$\begin{aligned} 2x - y &= 46 \\ + \quad x + y &= 65 \\ \hline \therefore \quad 3x &= 111 \\ \therefore \quad x &= 37 \end{aligned}$$

$x = 37$ આ કિંમત સમીકરણ (II) માં મૂકતાં.

$$\begin{aligned} x+y &= 65 \\ \therefore \quad 37 + y &= 65 \\ \therefore \quad y &= 65 - 37 \\ \therefore \quad y &= 28 \end{aligned}$$

સલિલની આજની ઉંમર 37 વર્ષ છે અને સંગ્રામની આજની ઉંમર 28 વર્ષ છે.

ઉદા. **(3)** એક દ્વિઅંકી સંખ્યા તેના અંકોના સરવાળાથી ચાર ગણી છે. તેના અંકોને અદલબદલ કરતાં મળનારી સંખ્યા એ મૂળસંખ્યાના બમણા કરતા 9 જેટલી ઓછી છે તો તે સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ : મૂળસંખ્યાના એકમ સ્થાનનો અંક x અને દશકસ્થાનનો અંક y ધારતાં.

	દશક સ્થાનનો અંક	એકમ સ્થાનનો અંક	સંખ્યા	અંકોનો સરવાળો
મૂળસંખ્યા માટે	y	x	$10y + x$	$y + x$
અંકોની અદલબદલ કરતાં મળનારી સંખ્યા માટે	x	y	$10x + y$	$x + y$

પહેલી શરત મુજબ, $10y + x = 4(y + x)$

$\therefore \quad 10y + x = 4y + 4x$

$\therefore \quad x - 4x + 10y - 4y = 0$

$\therefore \quad -3x + 6y = 0 \qquad \therefore\ -3x = -6y \qquad \therefore\ x = 2y$ .....(I)

બીજી શરત મુજબ, $10x + y = 2(10y + x) - 9$

$\therefore \quad 10x + y = 20y + 2x - 9$

$\therefore \quad 10x - 2x + y - 20y = -9$

$\therefore \quad 8x - 19y = -9$ ....(II)

$\therefore \quad x = 2y$ ....(I)

$x = 2y$ આ કિંમત સમીકરણ (II) માં મૂકતાં.

$16y - 19y = -9$ ....(I)

$\therefore \; -3y = -9$

$\therefore \quad y = 3$

$y = 3$ આ કિંમત સમીકરણ (I) માં મૂકતાં. $x - 2y = 0$

$x - 2 \times 3 = 0 \qquad \therefore \; x - 6 = 0 \qquad \therefore \; x = 6$

મૂળ દ્વિઅંકી સંખ્યા: $10y + x = 10 \times 3 + 6$

$= 36$

ઉદા. **(4)** એક ગામની લોકસંખ્યા 50,000 હતી. એક વર્ષમાં પુરુષોની સંખ્યા 5% વધી અને સ્ત્રીઓની સંખ્યા 3% વધી તેને લીધે આ વર્ષે લોકસંખ્યા 52,020 થઈ. તો ગયા વર્ષે તે ગામમાં કેટલા પુરુષ હતા અને કેટલી સ્ત્રીઓ હતી?

ઉકેલ : આગલા વર્ષે ગામમાંના પુરુષોની સંખ્યા x અને સ્ત્રીઓની સંખ્યા y ધારતા.

પહેલી શરત મુજબ $\Box + \Box = 50000$ ....(I)

પુરુષોની સંખ્યા 5% વધી. પુરુષોની સંખ્યા $\frac{\Box}{\Box}x$ થઈ.

સ્ત્રીઓની સંખ્યા 3% વધી. સ્ત્રીઓની સંખ્યા $\frac{\Box}{\Box}y$ થઈ.

બીજી શરત મુજબ $\frac{\Box}{\Box}x + \frac{\Box}{\Box}y = 52020$

$\Box x + \Box y = 5202000$ ....(II)

સમીકરણ (I) ને 103 વડે ગુણતાં.

$\Box x + \Box y = 5150000$ ....(III)

સમીકરણ (II) માંથી સમીકરણ (III) બાદ કરતાં

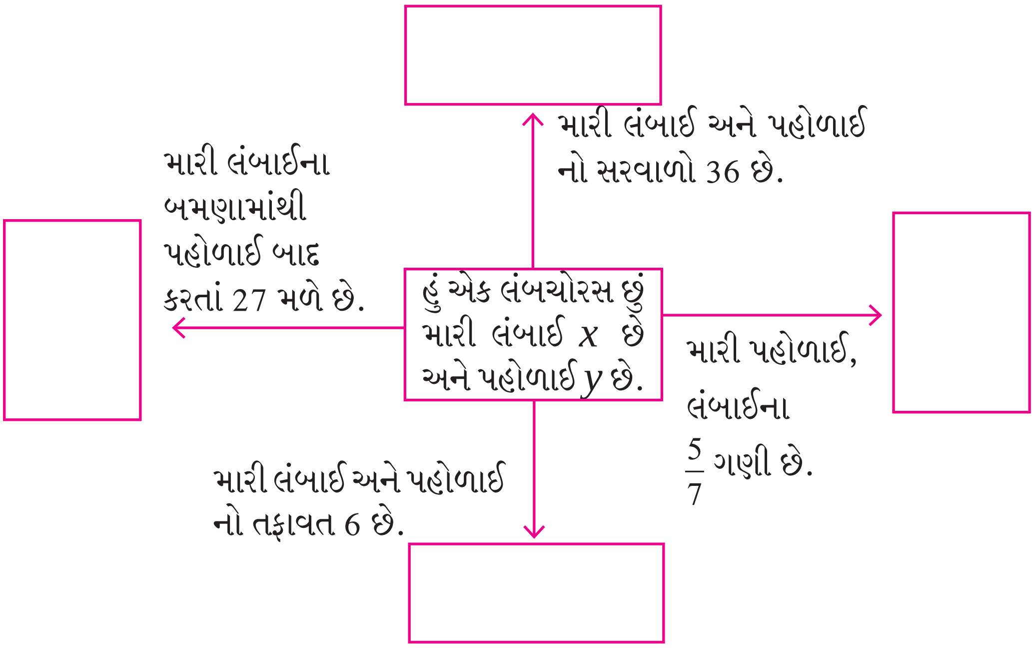
$2x = 5202000 - 5150000$

$2x = 52000$

$\therefore$ પુરુષોની સંખ્યા $= x = \Box \qquad \therefore$ સ્ત્રીઓની સંખ્યા $= y = \Box$

કૃતિ I : નીચે આપેલ આકૃતિમાં તીર પાસે કેટલીક સૂચના આપેલી છે. તેના પરથી મળનાર સમીકરણ તીરની દિશા સામેના ચોકઠામાં લખો. ચોકઠાંમાંથી કોઈ પણ બે સમીકરણો લઈ તે સમીકરણોનો ઉકેલ શોધો. ઉકેલની ચકાસણી કરો.

આમાંથી કોઈપણ બે સમીકરણની એક જોડી એ પ્રમાણે કેટલી જોડીઓ મળશે? તેમના ઉકેલ પર ચર્ચા કરો. (દરેક જોડીનું એક શાબ્દિક ઉદાહરણ તૈયાર થશે.)



મહાવરાસંગ્રહ 5.2

(1) એક પાકિટમાં કેટલીક 5 રૂપિયાંની અને કેટલીક 10 રૂપિયાંની નોટો છે. નોટોની કુલ કિંમત 350 રૂ. છે. 5 રૂ. ની નોટોની સંખ્યા 10 રૂ.ની નોટોની સંખ્યાના બમણા કરતાં 10 જેટલી ઓછી છે. તો 5 રૂપિયાની અને 10 રૂપિયાની કેટલી નોટો હશે?

(2) એક અપૂર્ણાંકનો છેદ, અંશના બમણા કરતાં 1 ઘટે છે. અંશ અને છેદ દરેકમાં 1 ઉમેરતાં અંશ અને છેદનો ગુણોત્તર 3 : 5 થાય છે. તો તે અપૂર્ણાંક શોધો.

(3) પ્રિયંકા અને દીપિકાની ઉંમરનો સરવાળો 34 વર્ષ છે. પ્રિયંકા, દીપિકા કરનાં 6 વર્ષ મોટી છે, તો તેમની ઉંમર શોધો.

(4) એક પ્રાણી સંગ્રહાલયમાં સિંહ અને મોરની કુલ સંખ્યા 50 છે. તેમના પગની કુલસંખ્યા 140 છે. તો પ્રાણી સંગ્રહાલયમાંના સિંહ અને મોરની સંખ્યા શોધો.

(5) હાલમાં સંજયને નોકરીમાં કેટલોક માસિક પગાર મળે છે. દર વર્ષે તેમના પગારમાં નિશ્ચિત રકમની વૃદ્ધિ થાય છે. જો ચાર વર્ષ પછીનો માસિક પગાર 4,500 થયો હોય અને 10 વર્ષ પછી 5,400 રૂ. થયો તો તેમનો શરૂઆતનો પગાર અને વાર્ષિક વધારાની રકમ શોધો.

(6) 3 ખુરશી અને 2 ટેબલની કિંમત 4,500 રૂપિયા છે. 5 ખુરશી અને 3 ટેબલની કિંમત 7,000 રૂ. છે, તો 2 ખુરશી અને 2 ટેબલની કુલ કિંમત શોધો.

(7) એક દ્વિઅંકી સંખ્યાના અંકોનો સરવાળો 9 છે. જો અંકોની અદલબદલ કરીએ તો મળતી સંખ્યા, મૂળ સંખ્યા કરતાં 27 થી વધારે છે. તો તે દ્વિઅંકી સંખ્યા શોધો.

(8*) Δ ABC માં $\angle$ A નું માપ, $\angle$ B અને $\angle$ C ના માપના સરવાળા જેટલું છે. તેમજ $\angle$ B અને $\angle$ C ના માપનો ગુણોત્તર 4:5 છે. તો તે ત્રિકોણના ખૂણાના માપ શોધો.

(9*) એક 560 સેંમી લાંબી દોરીના બે ટુકડા એવી રીતે કરવાના છે કે નાના ટુકડાની લંબાઈના બમણા, મોટા ટુકડાની લંબાઈના $\frac{1}{3}$ ગણા છે. તો મોટા ટુકડાની લંબાઈ શોધો.

(10) એક સ્પર્ધા પરીક્ષામાં 60 પ્રશ્નો પૂછ્યા હતાં. એક સાચા જવાબના 2 ગુણ મળે છે. અને ખોટાં જવાબનો 1 ગુણ કાપવામાં આવે છે. યશવંતે બધા પ્રશ્નો ઉકેલ્યા હતાં. યશવંતને તે પરીક્ષામાં 90 ગુણ મળ્યા તો તેના કેટલાં પ્રશ્નોના જવાબ ખોટા પડ્યાં હશે?

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 5

(1) નીચેના દરેક પ્રશ્નના ઉત્તર માટે યોગ્ય પર્યાય શોધો.

(i) $3x + 5y = 9$ અને $5x + 3y = 7$ તો $x + y$ ની કિંમત કેટલી ?

(A) 2 (B) 16 (C) 9 (D) 7

(ii) લંબચોરસની લંબાઈ અને પહોળાઈ બન્નેમાંથી 5 બાદ કરતાં તેની પરિમિતિ 26 છે. આ માહિતી પરથી તૈયાર થતું સમીકરણ ક્યું ?

(A) $x - y = 8$ (B) $x + y = 8$ (C) $x + y = 23$ (D) $2x + y = 21$

(iii) અજય, વિજય કરતાં 5 વર્ષ નાનો છે. તે બન્નેની ઉંમરનો સરવાળો 25 છે. તો અજયની ઉંમર કેટલી?

(A) 20 (B) 15 (C) 10 (D) 5

(2) નીચેના યુગપત્ સમીકરણો ઉકેલો.

(i) $2x + y = 5$; $3x - y = 5$

(ii) $x - 2y = -1$; $2x - y = 7$

(iii) $x + y = 11$; $2x - 3y = 7$

(iv) $2x + y = -2$; $3x - y = 7$

(v) $2x - y = 5$; $3x + 2y = 11$

(vi) $x - 2y = -2$; $x + 2y = 10$

(3) ચલના સહગુણકો સમાન કરીને નીચેના સમીકરણો ઉકેલો.

(i) $3x - 4y = 7$; $5x + 2y = 3$

(ii) $5x + 7y = 17$; $3x - 2y = 4$

(iii) $x - 2y = -10$; $3x - 5y = -12$

(iv) $4x + y = 34$; $x + 4y = 16$

(4) નીચેના યુગપત્ સમીકરણો ઉકેલો.

(i) $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=4$; $\frac{x}{2}-\frac{y}{4}=1$

(ii) $\frac{x}{3}+5y=13$; $2x+\frac{y}{2}=19$

(iii) $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=13$; $\frac{5}{x}-\frac{4}{y}=-2$

(5*) એક બે અંકી (દ્વિઅંકી) સંખ્યા તેના અંકોના સરવાળાના ચારગણા કરતાં 3 થી મોટી છે. જો તે સંખ્યામાં 18 ઉમેરીએ તો મળતા સરવાળામાં મૂળ સંખ્યાના અંકોની અદલબદલ થતી સંખ્યા મળે છે. તો મૂળ સંખ્યા શોધો.

(6) 8 પુસ્તકો અને 5 પેનની કુલ કિંમત ₹ 420 છે. જ્યારે 5 પુસ્તકો અને 8 પેનની કુલ કિંમત ₹321 છે તો એક પુસ્તક અને બે પેનની કિંમત શોધો.

(7*) બે વ્યક્તિની આવકનો ગુણોત્તર 9:7 છે અને તેમના ખર્ચનો ગુણોત્તર 4:3 છે. જો દરેકની બચત ₹200 હોય તો દરેકની આવક શોધો.

(8*) એક લંબચોરસની લંબાઈ 5 એકમ ઘટાડતાં અને પહોળાઈ 3 એકમ વધારતાં તેનું ક્ષેત્રફળ 9 ચોરસ એકમથી ઘટે છે. જો તેની લંબાઈ 3 એકમ ઓછી કરીને પહોળાઈ 2 એકમ વધારીએ તો તેનું ક્ષેત્રફળ 67 ચોરસ એકમથી વધે છે. તો તે લંબચોરસની લંબાઈ અને પહોળાઈ શોધો.

(9*) એક રસ્તા પર A અને B આ બે ઠેકાણા વચ્ચેનું અંતર 70 કિમી છે. એક કાર A ઠેકાણેથી અને બીજી કાર B ઠેકાણેથી નીકળે છે. જો તે એકજ દિશામાં જતી હોત તો એકબીજાને 7 કલાક પછી મળે છે. પરંતુ વિરૂધ્ધ દિશામાં નીકળે તો 1 કલાક પછી મળે છે. તો તેમનો વેગ શોધો.

(10*) એક દ્વિઅંકી સંખ્યા અને તે સંખ્યાના અંકોને અદલબદલ કરવાથી મળતી સંખ્યાનો સરવાળો 99 છે. તો તે સંખ્યા શોધો.

કૃતિ : અપૂર્ણાંક શોધો.

$\dfrac{\text{અંશ } x}{\text{છેદ } y}$

અપૂર્ણાંકના અંશને 3 વડે ગુણતાં અને છેદમાંથી 3 બાદ કરતાં મળતો અપૂર્ણાંક $\frac{18}{11}$ છે.

↓ સમીકરણ I

$11x - 6y + 18 = 0$

અપૂર્ણાંકનો અંશ 8 થી વધારતાં અને છેદ બમણો કરતાં મળતો અપૂર્ણાંક $\frac{1}{2}$ છે.

↓ સમીકરણ II

$x - y + 8 = 0$

∴ મૂળ અપૂર્ણાંક = $\dfrac{\square}{\square}$

આવેલાં જવાબ પરથી તાળો મેળવો.

◈ ◈ ◈

6 અર્થ-નિયોજન

640VNS

ચાલો શીખીએ.

- અર્થ-નિયોજન ઓળખ
- કર માળખું (રચના)
- બચત અને રોકાણ
- આવકવેરાની ગણતરી

ચાલો, ચર્ચા કરીએ.

અનઘા : આપણે કમ્પ્યુટર વેંચાતુ લેવું છે કે?
મમ્મી : હા, પણ આવતા વર્ષે.
અનઘા : આ વર્ષે કેમ નહિ?
મમ્મી : તેની કિંમત કઈ નાની સૂની નથી.
અનઘા : એટલે પૈસા બચાવવા પડશે, એમ જ ને !
મમ્મી : હા.

આપણી આસપાસ આ પ્રકારના અનેક સંવાદ આપણે સાંભળતા હોઈએ છીએ.

દરેક વ્યક્તિને પોતાની વિવિધ જરૂરિયાતો પૂરી પાડવા માટે પૈસાની જરૂર હોય છે. તેથી વર્તમાનની જરૂરિયાત પૂર્ણ કરી અન્ય જરૂરિયાતો પૂરી પાડવા દરેક જણ પૈસા ભેગા કરે છે. તેને જ આપણે **'બચત'** કહીએ છીએ. આ બચત સુરક્ષિત રહે અને તેમાં સતત વૃદ્ધિ થતી રહે તે માટે આપણે તેને **'થાપણ'** તરીકે મૂકીએ છીએ અથવા ઘર, જમીન વગેરે જેવી સ્થાવર મિલકત ખરીદીએ છીએ. તેને જ 'રોકાણ કરવું' એમ કહે છે.

દરેક રોકાણકાર જરૂર હોય તેટલી જ રકમ ખર્ચે છે અને બાકીની રકમ બચાવે છે. બચત કરેલી રકમનું વિચારપૂર્વક રોકાણ પણ કરે છે આને જ **'અર્થ-નિયોજન'** (Financial planning) કહે છે. **સંપત્તિની વૃદ્ધિ અને સુરક્ષિતતા** આ બે અર્થ-નિયોજનના મહત્ત્વના પ્રયોજન છે.

દરેકના જીવનમાં આવતી અપેક્ષિત અને અનપેક્ષિત ઘટના પ્રસંગે 'નાણાકીય જરૂરિયાત' પૂરી કરવા અર્થ નિયોજન ઉપયોગી બને છે. આવી ઘટનાના કેટલાંક ઉદાહરણો નીચે આપ્યા છે.

અપેક્ષિત ઘટના

(1) બાળકોનું શિક્ષણ અને અન્ય ખર્ચ
(2) વ્યવસાય માટે મૂડી
(3) વાહન ખરીદી
(4) ઘર બાંધકામ કે ખરીદી
(5) ઘડપણ માટે પૂંજી વગેરે...

અનપેક્ષિત ઘટના

(1) કુદરતી આપત્તિ
(2) કુટુંબના સભ્યોની ગંભીર બિમારી
(3) અકસ્માતને કારણે થયેલું નુકસાન
(4) આકસ્મિક મૃત્યુ વગેરે

અર્થ-નિયોજન શા માટે કરવું જોઈએ તેનો જવાબ ઉપરની ઘટના અને અન્ય કારણોમાંથી મળી આવે છે. અર્થ-નિયોજન કરતી વખતે કેટલીક બાબતો ધ્યાનમાં લેવી જરૂરી છે.

જાણી લઈએ.

બચત (Savings)

(1) બચત સુરક્ષિત રહે અને વધતી રહે એ હિતકારક છે. આપણે કરેલી બચતની રકમ બેંકમાં કે પોસ્ટમાં સુરક્ષિત રહે છે. બેંકમાં બચત રાખવાથી, ખાતામાં જમા રકમ 'રોકડરહિત' (cashless) વ્યવહાર કરવા માટે ઉપયોગી પડે છે. આ પ્રકારનાં રોકડરહિત વ્યવહારને કારણે પોતાની પાસે રોકડ રાખવી જરૂરી રહેતી નથી તેથી રકમ ખોવાવાનો કે ચોરાવાનો ભય રહેતો નથી.

(2) આપણા પાસેની રકમ રોકડરૂપે હોય અને તેનું રોકાણ ન કરતાં એમને એમ મૂકી રાખીએ તો તેનું મૂલ્ય સમય સરતાં ઓછું થતું જાય છે. વસ્તુ વેંચાતી લેવાની તે રકમની શક્તિ, એટલે કે પૈસાની ખરીદશક્તિ (Purchasing power) ઓછી થતી જાય છે. (દા.ત. આજે 10 રૂપિયામાં 2 પેન્સિલ મળતી હોય તો વખત જતાં તેટલાં જ રૂપિયામાં 1 પેન્સિલ જ મળશે.) આથી બચત કરીને તેને યોગ્ય જગ્યાએ રોકવી જરૂરી છે.

(3) બચત કરેલી રકમ વ્યવસાય વૃધ્ધિ, નવા ઉદ્યોગો ચાલુ કરવા વગેરે માટે વપરાય તો રાષ્ટ્રીય ઉત્પાદનમાં પણ વધારો થાય છે.

(4) કુલ આવકમાંથી કરેલી બચત. સમાજકાર્યમાં વાપરવાથી તેનો દૂરગામી ફાયદો સહુને થાય છે.

(5) આવશ્યક તેટલો જ ખર્ચ કરીને, મોજશોખ પરનો ખર્ચ બચાવીને શિક્ષણ, વૈદકીય (તબીબી) ઉપચાર, વગેરે માટે બચત કરવી હિતાવહ છે.

ચાલો, ચર્ચા કરીએ.

ઉપરના ચિત્રનું નિરીક્ષણ કરો. બચત અને રોકાણના કેટલાંક માર્ગ ચિત્રમાં દર્શાવ્યા છે તેના પર ચર્ચા કરો. તદ્ઉપરાંત અન્ય કયા માર્ગો છે તેની માહિતી મેળવો અને ચિત્રમાં ખાલી રાખેલી જગ્યામાં લખો.

જાણી લઈએ.

રોકાણ (Investments)

રોકાણના અનેક માર્ગ છે. સામાન્ય રીતે બેંક, પોસ્ટ જેવી આર્થિક વ્યવહાર કરતી સંસ્થામાં રોકાણ કરવાનું સહુ પસંદ કરે છે. કારણ ત્યાં પૈસાની સુરક્ષિતતા વધુ છે. શેઅર્સ, મ્યુચ્યુઅલ ફંડ, વગેરેમાં રોકાણ જોખમભર્યુ છે. કારણ કે જે ઉદ્યોગો માટે આ પૈસા રોકવામાં આવે છે તે ઉદ્યોગોને જો નુકસાન થાય તો કરેલું રોકાણ ઘટી જાય છે. એથી ઊલટું ઉદ્યોગોને ફાયદો થાય તો રોકાણ સુરક્ષિત રહે છે અને લાભાંશ મળે છે.

રોકાણકારે, રોકાણ કરતી વખતે મુખ્ય બે બાબતો ધ્યાનમાં લેવી જોઈએ. એક એટલે જોખમ અને બીજું લાભ અધિક જોખમ ઉઠાવીને અધિક લાભ મેળવી શકાય છે. (High risk, high returns) પરંતુ જોખમ અધિક હોય ત્યાં નુકસાન કે ખોટ પણ વધારે જાય છે એ ધ્યાનમાં લેવું જોઈએ.

આવક અને રોકાણ પર આધારિત ઉદાહરણો નીચે ઉકેલીને આપ્યાં છે તેનો અભ્યાસ કરો.

ઉદા. **(1)** શામજીની 2015-16 ની બધા પ્રકારના કર ભરાયા પછીની વાર્ષિક ચોખ્ખી આવક 6,40,000 રૂપિયા છે. તે દર મહિને વીમાના 2000 રૂપિયાનો હપ્તો ભરે છે. વાર્ષિક આવકનો 20% ભાગ ભવિષ્ય નિર્વાહ નિધીમાં રોકે છે. આકસ્મિક ખર્ચ માટે રૂ. 500 બચાવે છે તો ખર્ચ કરવા માટે તેમની પાસે કેટલા રૂપિયા બાકી રહે છે?

ઉકેલ : (i) શામજીની વાર્ષિક આવક = 6,40,000 રૂપિયા

(ii) વીમા માટેનું નિયોજન = $2000 \times 12 = 24,000$ રૂપિયા

(iii) ભવિષ્ય નિર્વાહ નિધીમાં રોકાણ = $6,40,000 \times \frac{20}{100} = 1,28,000$ રૂપિયા

(iv) આકસ્મિક ખર્ચ માટે કાઢી લીધેલી રકમ = $500 \times 12 = 6000$ રૂપિયા

$\therefore$ કુલ નિયોજીત રકમ= $24,000 + 1,28,000 + 6,000 = 1,58,000$ રૂપિયા

$\therefore$ વર્ષ દરમિયાન ખર્ચ માટે વધતી રકમ = $6,40,000 - 1,58,000 = 4,82,000$ રૂપિયા

ઉદા. **(2)** શ્રી. શાહે 3,20,000 રૂપિયા 10% ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજે 2 વર્ષ માટે બેંકમાં મૂક્યા. તે સાથે જ 2,40,000 રૂપિયા મ્યુચ્યુઅલ ફંડમાં રોક્યા. બજારભાવ પ્રમાણે 2 વર્ષમાં તેમને આ રોકાણના 3,05,000 રૂપિયા મળ્યાં તો તેમને કેટલો ફાયદો થયો? તેમનું કયું રોકાણ વધારે ફાયદાકારક થયું?

ઉકેલ : (i) પ્રથમ ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજે રોકેલ રકમ પરનું વ્યાજ શોધીએ.

ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ = રાશ − મુદ્દલ

એટલે કે, $I = A - P$

$$= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n - P$$

$$= P\left[\left(1+\frac{r}{100}\right)^n - 1\right]$$

$$= 3,20,000\left[\left(1+\frac{10}{100}\right)^2 - 1\right]$$

$$= 3{,}20{,}000\left[(1.1)^2 - 1\right]$$
$$= 3{,}20{,}000\,[1.21 - 1]$$
$$= 3{,}20{,}000 \times 0.21$$
$$= 67{,}200 \text{ રૂપિયા}$$

શ્રી. શાહે 3,20,000 રૂપિયા બૅંકમાં મુકવાથી 67,200 રૂપિયા વ્યાજ મળ્યું.
મળેલું વ્યાજ રોકાણના કેટલા ટકા છે તે શોધીએ ?

સેંકડે વ્યાજ = $\dfrac{100 \times 67200}{3,20,000} = 21$ $\therefore$ બૅંકના રોકાણ પર 21% ફાયદો થયો.

(ii) મ્યુચ્યુઅલ ફંડમાં 2 વર્ષ પછી મળેલી રકમ = 3,05,000 રૂપિયા

$\therefore$ મ્યુચ્યુઅલ ફંડનો લાભાંશ = 3,05,000 – 2,40,000 = 65,000 રૂપિયા

$\therefore$ સેંકડે લાભાંશ = $\dfrac{65000 \times 100}{2,40,000} = 27.08$

મ્યુચ્યુઅલ ફંડના રોકાણ પર 27.08% ફાયદો થયો.
આ પરથી ધ્યાનમાં આવે છે કે, મ્યુચ્યુઅલ ફંડનું રોકાણ વધુ ફાયદાકારક હતું.

ઉદા. (3) કરીમભાઈએ કાચ ઉદ્યોગમાં 4,00,000 રૂપિયા રોક્યા. 2 વર્ષને અંતે તેમને આ વ્યવસાયમાંથી 5,20,000 રૂપિયા મળ્યા. રોકાણની રકમ કાઢી લઈને થયેલો નફો તેમને 3 : 2 ના પ્રમાણમાં અનુક્રમે મુદતી થાપણ (એફ.ડી.) અને શેઅર્સમાં રોક્યા. તો તેમણે દરેક બાબતમાં કેટલા રૂપિયા રોક્યા?

ઉકેલ : કરીમભાઈને 2 વર્ષને અંતે થયેલો નફો = 5,20,000 – 4,00,000 = 1,20,000 રૂપિયા

મુદતી થાપણ તરીકે રોકેલી રકમ = $\dfrac{3}{5} \times 1{,}20{,}000$

$= 3 \times 24{,}000$

$= 72{,}000$ રૂપિયા

શેઅર્સમાં રોકેલી રકમ = $\dfrac{2}{5} \times 1{,}20{,}000$

$= 2 \times 24{,}000$

$= 48{,}000$ રૂપિયા

કરીમભાઈએ મુદતી થાપણમાં 72,000 રૂપિયા અને શેઅર્સમાં 48,000 રૂપિયા રોક્યા.

ઉદા. (4) શ્રી. અનિલની માસિક આવક અને ખર્ચનો ગુણોત્તર 5:4 છે. શ્રી. અમનનો આ ગુણોત્તર 3:2 છે. તે જ પ્રમાણે અમનની માસિક આવકના 4% આવક, અનિલની માસિક આવકના 7% જેટલી છે. જો અનિલની માસિક આવક રૂપિયા 9,600 હોય તો

(i) શ્રી. અમનની માસિક આવક શોધો. (ii) શ્રી. અનિલ અને શ્રી. અમનની બચત શોધો.

ઉકેલ : આપણને ખબર છે કે, બચત = રોકાણ − ખર્ચ

અનિલની આવક અને ખર્ચનો ગુણોત્તર 5 : 4

અનિલની આવક $5x$ રૂપિયા માનીએ.

અનિલનો ખર્ચ $4x$ રૂપિયા માનીએ.

અમનની આવક અને ખર્ચનો ગુણોત્તર 3 : 2

અમનની આવક $3y$ રૂપિયા માનીએ.

અમનનો ખર્ચ $2y$ રૂપિયા માનીએ.

અનિલની માસિક આવક 9600 રૂપિયા એટલે $5x = 9600$ પરથી x શોધીએ.

$\therefore \quad 5x = 9600$

$\therefore \quad x = 1920$

અનિલનો માસિક ખર્ચ = $4x = 4 \times 1920 = 7680$ રૂપિયા

અનિલનો માસિક ખર્ચ 7680 રૂપિયા $\quad \therefore$ અનિલની બચત 1920 રૂપિયા

અમનની માસિક આવકના 4% = અનિલની માસિક આવકના 7% આપી છે.

$$\therefore \quad \frac{4}{100} \times 3y = 9600 \times \frac{7}{100}$$

$$\therefore \quad 12y = 9600 \times 7$$

$$\therefore \quad y = \frac{9600 \times 7}{12} = 5600$$

અમનની માસિક આવક = $3y = 3 \times 5600 = 16,800$ રૂપિયા

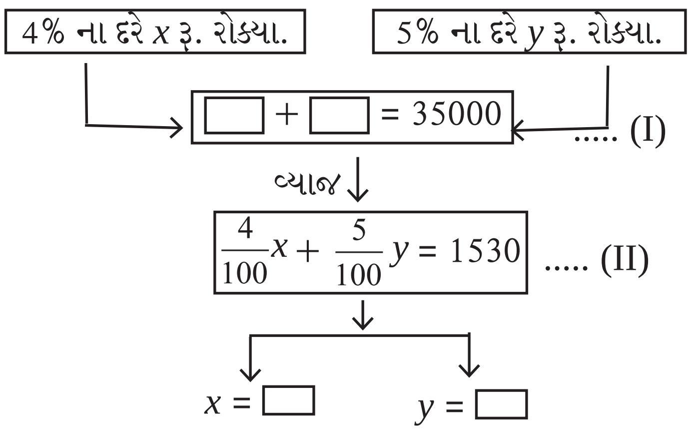
અમનનો ખર્ચ = $2y = 2 \times 5600 = 11,200$ રૂપિયા

$\therefore$ અમનની બચત $16,800 - 11,200 = 5,600$ રૂપિયા

(i) **શ્રી. અમનની માસિક આવક 16,800 રૂપિયા.**

(ii) **શ્રી. અનિલની માસિક બચત 1,920 રૂપિયા. શ્રી. અમનની માસિક બચત 5,600 રૂપિયા**

કૃતિ I : અમિતાએ રૂ. 35,000 માંથી કેટલીક રકમ 4% ના વ્યાજ દરે અને બાકીની રકમ 5% ના વ્યાજ દરે એક વર્ષ માટે રોકી. તેને કુલ વ્યાજ રૂ. 1530 મળ્યું. તો તેણે આ બન્ને દરે રોકેલ રકમ શોધો.



ઉપક્રમ : (1) પાલકોની મદદથી તમારા ઘરનો અઠવાડિયાનો જમા-ખર્ચ લખી કાઢો. તે માટે ખર્ચના પ્રકાર પ્રમાણે સ્તંભ તૈયાર કરો. અનાજ, શિક્ષણ, તબીબી ખર્ચ, પ્રવાસ, કપડાંલત્તા અને ઇતર ખર્ચ વગેરે બાબતોનો વિચાર કરીને બધા ખર્ચ લખો. જમા બાજુએ ખર્ચ માટે મળેલી રકમ, પહેલાંની સિલક અને થયેલી નવી આવક નોંધો.

(2) રજાના દિવસોમાં આખા મહિનાનો જમા-ખર્ચ લખો. પાન ક્ર.52 પર ગોવિંદનો જમા-ખર્ચ જુઓ.

કૃતિ II : ફક્ત વરસાદ આધારિત ખેતી હોય તેવા ખેડૂતોની આવક વધારવા માટે કયા કયા ઉપાય કરી શકાય, આ બાબત વર્ગમાં ચર્ચા કરો. કેટલાંક વિદ્યાર્થીઓએ નીચે પ્રમાણે મત વ્યક્ત કર્યા.

સોહેલ : ખેડૂતોને ફક્ત ખેતીમાંથી ઉત્પન્ન થયેલો માલ વેંચાય ત્યારે જ પૈસા મળે છે. 'તેમાં થયેલો ફાયદો' એજ તેની આખા વરસની આવક હોવાથી તેનું અર્થ-નિયોજન ખૂબજ મહત્ત્વનું છે.

પ્રકાશ : ખેતીનો માલ વેંચતા તેનો યોગ્ય ભાવ મળે તો તેની આવક પણ વધશે.

નર્ગિસ : અર્થશાસ્ત્રનો નિયમ છે કે, એકાદ વસ્તુનો પૂરવઠો તેની માંગણી કરતાં વધારે થાય તો તેની કિંમત ઘટે છે અને કિંમત ઘટે તો આવક પણ ઘટે છે !

રીટા : જો ખેતી માલનું ઉત્પાદન વધારે થાય અને ભાવ ઉતરી જવાનો ભય હોય તો માલનો સંગ્રહ કરવો પડે છે. પછી યોગ્ય સમયે, બજારભાવ વધે ત્યારે સંગ્રહિત માલ વેંચવા કાઢવો.

આઝમ : તે માટે સારા ગોદામ બાંધવા જોઈએ.

રેશ્મા : ખેડૂતોને ઓછા વ્યાજે સહેલાઈથી બેંક લોન મળવી જોઈએ.

વત્સલા : દૂધ વ્યવસાય, મરઘાંપાલન વગેરે ખેતીપૂરક વ્યવસાય કરવાથી અધિક આવક મેળવી શકાય. સિવાય જનાવરોના મળમૂત્રમાંથી ઉત્તમ સેન્દ્રિય ખાતર બને છે.

કુણાલ : ખેતીના માલ પર પ્રક્રિયા કરવાના કારખાના શરૂ કરી શકાય. તેમજ સરબત, જૅમ, અથાણા, શાકભાજીની સૂકવણી, ફળના ગરની સાચવણી કરી, વ્યવસ્થિત પૅકીંગ કરી આખું વરસ વેંચી શકાય નિકાસક્ષમ માલનું ઉત્પાદન વધારવું.

મહાવરાસંગ્રહ 6.1

1. અલકાને દર મહિને મોકલવામાં આવતી રકમમાંથી 90% રકમ તે ખર્ચે છે અને દર મહિને 120 રૂપિયાની બચત કરે છે તો તેને મોકલાતી રકમ શોધો.
2. સુમિતે 50,000 રૂપિયાની મૂડીથી ખાદ્યપદાર્થોનો વ્યવસાય ચાલુ કર્યો. તેમાં પહેલાં વર્ષે તેને 20% ખોટ ગઈ. બાકી રહેલી મૂડીમાંથી બીજા વર્ષે તેણે મીઠાઈનો વ્યવસાય ચાલુ કર્યો તેમાં તેને 5% નફો થયો તો મૂળ મૂડી (રોકાણ) પર કેટલા ટકા નફો થયો કે ખોટ ગઈ? તે શોધો.
3. નિખિલે પોતાની માસિક આવકનો 5% ભાગ બાળકોના શિક્ષણ માટે ખર્ચ કર્યો, 14% ભાગ શેઅર્સમાં રોક્યો. 3% ભાગ બેંકમાં મૂક્યો અને 40% ભાગ રોજિંદા ખર્ચ માટે વાપર્યો, તો રોકાણ અને ખર્ચ બાદ કર્યા પછી તેની પાસે 19,000 રૂપિયા બચે છે. તો તેની માસિક આવક કેટલી હશે?
4. સૈયદભાઈએ પોતાની આવક પૈકી 40,000 રૂપિયા 8% ના દરે ચક્રવૃધ્ધિ વ્યાજે 2 વર્ષ માટે બેંકમાં મૂક્યા. તેમજ શ્રી. ફર્નાંડીસે 1,20,000 રૂપિયા મ્યુચ્યુઅલ ફંડમાં 2 વર્ષ માટે રોક્યા. 2 વર્ષ પછી શ્રી. ફર્નાંડીસને 1,92,000 રૂપિયા મળ્યા તો સૈયદ અને ફર્નાંડીસ પૈકી કોનું રોકાણ વધુ ફાયદાકારક થયું? તે શોધો.
5. સમીરે પોતાની આવકના 3% આવક સમાજહિત માટે દાનમાં આપી અને 90% આવક ખર્ચ કરી. તેની પાસે 1750 રૂપિયા સિલ્લક રહ્યા. તો તેની માસિક આવક શોધો.

ચાલો, ચર્ચા કરીએ.

કર એટલે શું? કયા કયા પ્રકારના કર હોય છે? તે માટેની માહિતી ભેગી કરો. તે સંબંધિત વેબસાઈટ પરથી મેળવો.

ICT Tools or Links	www.incometaxindia.gov.in, www.mahavat.gov.in www.gst.gov.in

જાણી લઈએ.

કર-વેરાની આકારણી (ગણતરી)

રાષ્ટ્રના વિકાસ માટે શાસન વિવિધ યોજના બનાવે છે. આ યોજના કાર્યાન્વિત કરવા શાસનને ખૂબ મોટી રકમની જરૂર પડે છે. અનેક પ્રકારના કર-વેરા દ્વારા આ રકમ મેળવવામાં આવે છે.

કર-વેરાની ઉપયુક્તતા (Utility of taxes)

- પાયાભૂત સુવિધાઓ પૂરી પાડવા માટે.
- વિવિધ કલ્યાણકારી યોજના અમલમાં મૂકવા માટે.
- જુદા જુદા ક્ષેત્રોના વિકાસ માટે અને સંશોધન માટેની યોજના કાર્યાન્વિત કરવા માટે.
- કાયદો અને સુવ્યવસ્થા જાળવવા માટે.
- કુદરતી આપત્તિગ્રસ્ત લોકોને મદદ કરવા માટે.
- રાષ્ટ્ર અને નાગરિકોના સંરક્ષણ માટે વગેરે.

કરના પ્રકાર (Types of taxes)

પ્રત્યક્ષ કર(Direct taxes)	અપ્રત્યક્ષ કર (Indirect taxes)
જે કરનો ભાર સીધો કરદાતા પર પડે તે પ્રત્યક્ષ કર	જે કરનો ભાર સીધો કરદાતા પર પડે નહિ તે અપ્રત્યક્ષ કર
દા.ત. આવકવેરો (આયકર), સંપત્તિવેરો, વ્યવસાય વેરો વગેરે	દા.ત. કેન્દ્રીય વિક્રી કર, મૂલ્યવર્ધિત વેરો, જકાત, કસ્ટમ ડ્યુટી, સેવા વેરો વગેરે.

2017 ની સાલમાં જે પ્રકારે કર આકારવામાં આવે છે તે અનુસાર તેના પ્રકાર ઉપર દર્શાવ્યા છે.

ઉપક્રમ : વિવિધ પ્રકારના કર ભરતાં નોકરવર્ગ અને વ્યાવસાયિક વર્ગ પાસેથી કરવેરા વિષયક માહિતી મેળવો.

જાણી લઈએ.

આવકવેરો (આયકર)(Income tax)

વ્યકિત, સંસ્થા અથવા અન્ય કાયદેસર ઉદ્યોગોની ભારતમાં થતી આવક, આવકવેરા અધિનિયમ અન્વયે નિશ્ચિત મર્યાદાથી વધારે હોય તો તેના પર આવકવેરો (આયકર, પ્રાપ્તિકર) આકારવામાં આવે છે.

આ પ્રકરણમાં આપણે પ્રત્યક્ષ કર પૈકી વ્યક્તિને ભરવો પડતો આવકવેરો જ ધ્યાનમાં લઈશું.

આવકવેરાની આકારણી કેન્દ્ર સરકાર કરે છે. ભારતમાં આવકવેરાની આકારણી બે અધિનિયમો દ્વારા કરવામાં આવે છે.

(1) આવકવેરા કાયદો 1961 જે તારીખ 01.04.1962 થી અસ્તિત્વમાં આવ્યો.

(2) દર વર્ષે સંસદમાં સંમત થતો અર્થવિષયક જોગવાઈનો કાયદો.

દર વરસે સાધારણ રીતે ફેબ્રુઆરી મહિનામાં અર્થમંત્રી, આગામી આર્થિક વર્ષ માટેની જોગવાઈ હોય તેવું અંદાજપત્રક (Budget) રજૂ કરે છે. તેમાં આવકવેરાના દર સૂચવેલાં હોય છે. સંસદે મંજૂર કરેલુ અંદાજપત્રક તે પછીના વર્ષ માટે લાગુ પડે છે.

આવકવેરાના દર પ્રતિવર્ષના અંદાજપત્રકમાં નિશ્ચિત કરવામાં આવે છે.

આવકવેરાને લગતી સંજ્ઞાઓ :

- **કરદાતા** (An assessee): આવકવેરા નિયમાવલિમાં સમાવિષ્ટ નિયમાનુસાર જે વ્યક્તિએ આવકવેરો ભરવો અપેક્ષિત છે તે વ્યક્તિને ‘કરદાતા’ કહે છે.
- **નાણાંકીય વર્ષ** (Financial year) : જે એક વર્ષની સમયાવધિમાં આવક મળે છે તે વર્ષને ‘નાણાંકીય વર્ષ’ કહે છે. આપણા દેશમાં હાલમાં 1 એપ્રિલ થી 31 માર્ચ નાણાંકીય વર્ષ છે.
- **કર-આકારણી વર્ષ** (Assessment year): નાણાંકીય વર્ષ પછી તરત આવતા વર્ષને ‘કર આકારણી વર્ષ’ કહે છે. ચાલુ વર્ષમાં પાછલા નાણાંકીય વર્ષ માટેની કર આકારણી નિર્ધારિત કરવામાં આવે છે.

‘નાણાંકીય વર્ષ’ અને ‘સંબંધિત કર આકારણી વર્ષ’ નીચે પ્રમાણે હોય છે.

નાણાંકીય વર્ષ (Financial Year)	‘સંબંધિત કર આકારણી વર્ષ’ (Assessment Year)
2016-17 એટલે 01-04-2016 થી 31-03-2017	2017-18
2017-18 એટલે 01-04-2017 થી 31-03-2018	2018-19

- **કાયમી ખાતા ક્રમાંક** (PAN) : વ્યક્તિએ અરજી કર્યા પછી આયકર વિભાગ તરફથી વિશિષ્ટ 10 અંકાક્ષરાત્મક નંબર આપવામાં આવે છે. તેને **કાયમી ખાતા ક્રમાંક** એટલે કે, ‘Permanent Account Number (PAN)’ કહે છે. અનેક મહત્ત્વના કાગળપત્રોમાં, દસ્તાવેજોમાં, આર્થિક વ્યવહારમાં PAN આપવો જરૂરી છે.

પૅન કાર્ડનો ઉપયોગ : આયકર વિભાગમાં કર ભરવા માટેના ચલન, કર વિવરણ પત્ર (રીટર્ન ફોર્મ), અન્ય મહત્ત્વના પત્રવ્યવહારમાં PAN લખવો બંધનકારક છે. મોટાં આર્થિક-વ્યવહાર કરતી વખતે PAN લખવો જરૂરી છે. અનેક વખત પૅનકાર્ડનો ઉપયોગ ઓળખના પૂરાવા (Identity proof) ID proof તરીકે થાય છે.

જાણી લઈએ.

આવકવેરાની આકારણી

આવકવેરાની આકારણી આવક પર કરવાની હોવાથી આવકના વિવિધ સ્રોત કયા છે તે જાણવું જરૂરી છે.

આવકના મુખ્યત્વે પાંચ સ્રોત છે :

(1) પગાર દ્વારા થતી આવક (Salary) **(2) ઘર-મિલકતથી થતી આવક (House Property)**

(3) ધંધો અને વ્યવસાયમાંથી થતી આવક (Business or Profession)

(4) મૂડીરોકાણથી થતી આવક (Capital gain) **(5) અન્ય સ્રોતથી થતી આવક (Other sources)**

પગારદાર વ્યક્તિના આવકવેરાની ગણતરી માટેની મહત્ત્વની સંજ્ઞાઓ (બાબતો) :

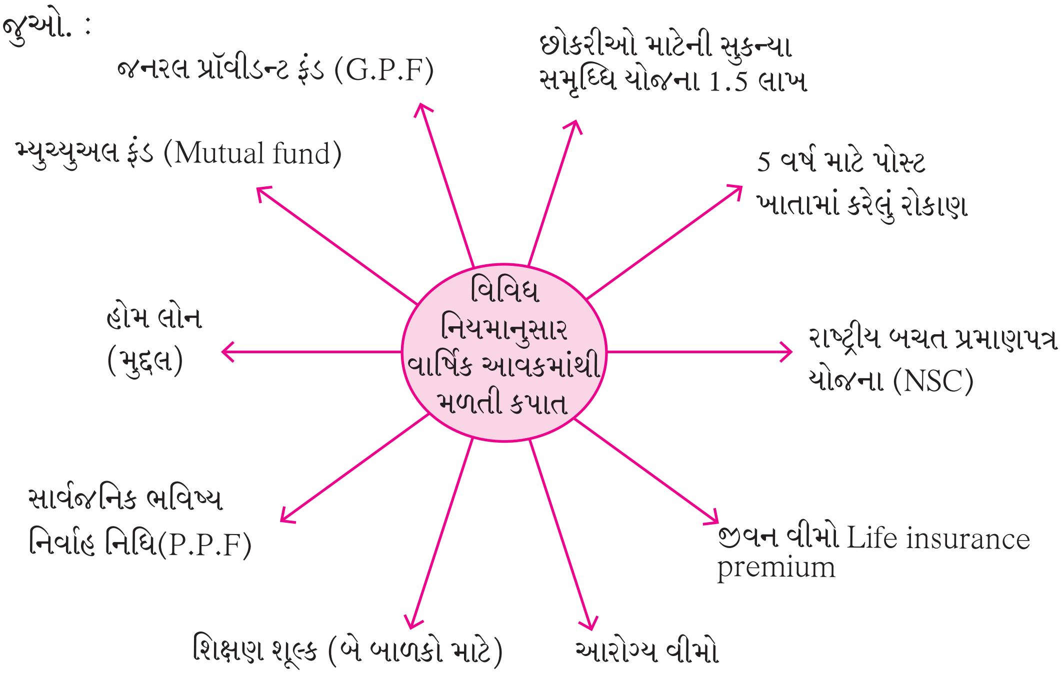
આવકવેરાની ગણતરી માટે કુલ વાર્ષિક આવક ધ્યાનમાં લેવી. આવકવેરા અધિનિયમો હઠળ 80C, 80D, 80G વગેરે કલમ અંતર્ગત વાર્ષિક આવકમાંથી કેટલીક કપાત મળે છે. કપાત લીધા પછી વધેલી આવકને 'કરપાત્ર આવક' કહે છે. આવકવેરાની ગણતરી **'કરપાત્ર રકમ'** પર જ કરવામાં આવે છે.

કર-આકારણીના નિયમો બદલતાં રહે છે તેથી અદ્યતન નિયમ જાણ હોવી જોઈએ.

કરપાત્ર આવકની એક નિશ્ચિત મર્યાદા સુધી આવકવેરો આકારવામાં આવતો નથી. આ રકમને **પ્રાથમિક છૂટની મર્યાદિત રકમ** (Basic exemption limit) કહે છે.

- ખેડૂતોને ખેતીના આવક પર આવકવેરામાંથી છૂટ છે.
- આયકર-કલમ 80 G અન્વયે પંતપ્રધાન, મદદ નિધી, મુખ્યમંત્રી મદદ નિધી, કે માન્યતા પ્રાપ્ત સંસ્થાને આપેલા દાન પર 100% છૂટ મળે છે.
- 80 D કલમ અનુસાર આરોગ્ય વિમાના હપ્તા પર છૂટ આપવામાં આવે છે.
- સામાન્યતઃ કુલ રોકાણ પર 80C કલમાન્વયે વિવિધ પ્રકારના રોકાણપૈકી વધુમાં વધુ 1,50,000 રૂપિયાની છૂટ મળે છે.

2017-18 ના અર્થસંકલ્પ અનુસાર વાર્ષિક કપાત મેળવવા માટે આપેલા રોકાણના પ્રકાર નીચેની આકૃતિમાં દર્શાવ્યા છે તે જુઓ. :



કરદાતાની ઉંમરનુસાર આવકવેરાના દર, દર વર્ષે બજેટમાં નક્કી કરવામા આવે છે.
આવક સ્તર (Slab) પ્રમાણે આવકવેરાના દર દર્શાવતાં કોષ્ટક નીચે આપ્યા છે.

કોષ્ટક I

ઉંમર 60 વર્ષ સુધીની વ્યક્તિઓ માટે			
કરપાત્ર આવકના સ્તર (રૂપિયામાં)	આવકવેરો (આયકર, પ્રાપ્તિકર)	શિક્ષણ ઉપકર	માધ્યમિક અને ઉચ્ચ શિક્ષણ ઉપકર
₹ 2,50,000 સુધી	કરમુક્ત	કરમુક્ત	કરમુક્ત
₹ 2,50,001થી ₹ 5,00,000	5% (કરપાત્ર આવક ઓછા અઢી લાખ પર)	આવકવેરાના 2 %	આવકવેરાના 1 %
₹ 5,00,001 થી ₹ 10,00,000	₹ 12,500 + 20 % (કરપાત્ર આવક ઓછા પાંચ લાખ પર)	આવકવેરાના 2 %	આવકવેરાના 1 %
₹ 10,00,000 થી વધારે	₹ 1,12,500 + 30 % (કરપાત્ર આવક ઓછા દસ લાખ પર)	આવકવેરાના 2 %	આવકવેરાના 1 %
(વાર્ષિક આવક 50 લાખ થી એક કરોડ રૂપિયા સુધી હોય તો આવકવેરાના 10% સરચાર્જ અને વાર્ષિક આવક એક કરોડથી વધારે હોય તો આવકવેરાના 15% સરચાર્જ)			

કૃતિ : ઉપર કોષ્ટક (I) નું નિરીક્ષણ કરીને નીચેના ઉદાહરણમાં આપેલા ચોકઠામાં યોગ્ય સંખ્યા લખો.

ઉદા. • શ્રી. મહેતાની વાર્ષિક આવક સાડા ચાર લાખ રૂપિયા છે. તેમણે આવકમાંથી કપાત મળે તેવી કોઈપણ પ્રકારની બચત કે રોકાણ કર્યું નથી. તો તેમની આવકનો સ્તર કયો? ☐

• તેમને કેટલી રકમ પર કેટલા ટકા આવકવેરો ભરવો પડશે? ₹ ☐ પર ☐ ટકા.

• ઉપકર કઈ રકમ પર ભરવો પડશે? ☐

કોષ્ટક II

વરિષ્ઠ (જ્યેષ્ઠ) નાગરિક (ઉંમર 60 થી 80 વર્ષના માટે)			
કરપાત્ર આવકના સ્તર (રૂપિયામાં)	આવકવેરો (આયકર, પ્રાપ્તિકર)	શિક્ષણ ઉપકર	માધ્યમિક અને ઉચ્ચ શિક્ષણ ઉપકર
₹ 3,00,000 સુધી	કરમુક્ત	કરમુક્ત	કરમુક્ત
₹ 3,00,001 થી ₹ 5,00,000	5 % (કરપાત્ર આવક ઓછા ત્રણ લાખ પર)	આવકવેરાના 2 %	આવકવેરાના 1 %
₹ 5,00,001 થી ₹ 10,00,000	₹ 10,000 + 20 % (કરપાત્ર આવક ઓછા પાંચ લાખ પર)	આવકવેરાના 2 %	આવકવેરાના 1 %
₹ 10,00,000 થી વધારે	₹ 1,10,000 + 30 % (કરપાત્ર આવક ઓછા દસ લાખ પર)	આવકવેરાના 2 %	આવકવેરાના 1 %
(વાર્ષિક આવક 50 લાખ થી એક કરોડ રૂપિયા સુધી હોય તો આવકવેરાના 10% સરચાર્જ અને વાર્ષિક આવક એક કરોડથી વધારે હોય તો આવકવેરાના 15% સરચાર્જ)			

કૃતિ : કોષ્ટક II પરથી નીચેની કૃતિ પૂર્ણ કરો.

ઉદા. શ્રી. પંડીતની ઉંમર 67 વર્ષ છે. તેમની વાર્ષિક આવક ₹ 13,25,000 છે. તો તેમની કરપાત્ર આવક કેટલી થશે? તેમને કેટલો આવકવેરો ભરવો પડશે?

ઉકેલ : ₹ 13,25,000 – ₹ 10,00,000 = ₹ 3,25,000

આવક સ્તર પ્રમાણે 1,10,000 રૂપિયા આવકવેરો ભરવો પડશે તે જ પ્રમાણે, 3,25,000 રૂપિયા પર 30%

એટલે $3,25,000 \times \frac{30}{100} = \square$ રૂપિયા આવકવેરો ભરવો પડશે.

આવકવેરાની કુલ રકમ $\square + \square = \square$

ચૂકવવા પાત્ર આવકવેરાના 2% શિક્ષણ ઉપકર એટલે $\square \times \frac{2}{100} = \square$.

ચૂકવવા પાત્ર આવકવેરાનો 1% માધ્યમિક અને ઉચ્ચ શિક્ષણ ઉપકર એટલે $\square \times \frac{1}{100} = \square$

∴ કુલ આવકવેરો = આવકવેરો + શિક્ષણ ઉપકર + માધ્યમિક અને ઉચ્ચ શિક્ષણ ઉપકર

= $\square + \square + \square$

= ₹ 2,13,725

કોષ્ટક III

અતિ જ્યેષ્ઠ નાગરિક (ઉંમર 80 વર્ષથી વધારે)			
કરપાત્ર આવકના સ્તર (રૂપિયામાં)	આવકવેરો (આયકર, પ્રાપ્તિકર)	શિક્ષણ ઉપકર	માધ્યમિક અને ઉચ્ચ શિક્ષણ ઉપકર
₹ 5,00,000 સુધી	કરમુક્ત	કરમુક્ત	કરમુક્ત
₹ 5,00,001 થી ₹ 10,00,000	20 % (કરપાત્ર આવક ઓછા પાચ લાખ પર)	આવકવેરાના 2 %	આવકવેરાના 1 %
₹ 10,00,000 થી વધારે	₹ 1,00,000 + 30 % (કરપાત્ર આવક ઓછા દસ લાખ પર)	આવકવેરાના 2 %	આવકવેરાના 1 %
(વાર્ષિક આવક 50 લાખ થી એક કરોડ રૂપિયા સુધી હોય તો આવકવેરાના 10% સરચાર્જ અને વાર્ષિક આવક એક કરોડથી વધારે હોય તો આવકવેરાના 15% સરચાર્જ)			

ઉપક્રમ : કલમ 80C, 80G, 80D ની માહિતી મેળવો.
પૅનકાર્ડ જુઓ, તેના પર કઈ માહિતી છે તેની નોંધ કરો.
રોકડરહિત (Cashless – કૅશલેસ) વ્યવહાર માટે વપરાતાં જુદા-જુદા માર્ગની માહિતી મેળવો.

ઉપરોક્ત કોષ્ટકો વાપરીને વ્યક્તિને મળતી વિવિધ કર સવલતોનો ઉપયોગ કરીને આવકવેરાની ગણતરી (Computation of Income) કેવી રીતે કરવી તે આપણે નીચેના ઉદાહરણો પરથી સમજી લઈએ.

ઉદા. **(1)** શ્રી. મ્હાત્રેની ઉંમર 50 વર્ષ છે. તેમની કુલ વાર્ષિક આવક ₹ 12,00,000 છે. શ્રી. મ્હાત્રેએ નીચે પ્રમાણે રોકાણ કર્યું.

(i) વીમાનો હપ્તો : ₹ 90,000 (ii) ભવિષ્ય નિર્વાહ નિધીમાં : ₹ 25,000

(iii) સાર્વજનિક ભવિષ્ય નિર્વાહ નિધી : ₹ 15,000 (iv) રાષ્ટ્રીય બચત પ્રમાણપત્ર યોજનામાં : ₹ 20,000

આ પરથી આવકવેરા માટે માન્ય કપાત, કરપાત્ર આવક અને આવકવેરો શોધો.

ઉકેલ : (1) કુલ વાર્ષિક આવક = 12,00,000 રૂપિયા છે.

(2) 80C નુસાર કુલ રોકાણ

રોકાણ	રકમ (રૂપિયામાં)
(i) વીમાનો હપ્તો	90,000
(ii) ભવિષ્ય નિર્વાહ નિધી	25,000
(iii) સાર્વજનિક ભવિષ્ય નિર્વાહ નિધી	15,000
(iv) રાષ્ટ્રીય બચત પ્રમાણપત્ર યોજના	20,000
કુલ	1,50,000

નિયમ 80C નુસાર આવકવેરા માટે વધુમાં વધુ 1,50,000 રૂપિયાની કપાત માન્ય હોય છે.

(3) ∴ કરપાત્ર આવક = [1] માંની રકમ – [2] માંની રકમ

= 12,00,000 – 1,50,000 = 10,50,000

(4) શ્રી. મ્હાત્રેને ભરવાં પડતાં આવકવેરાની ગણતરી કોષ્ટક (I) વાપરીને કરીએ.

શ્રી. મ્હાત્રેની કરપાત્ર આવક = ₹10,50,000 જે દસ લાખથી વધારે છે.

∴ કોષ્ટક (I) નુસાર આવકવેરો= ₹ 1,12,500 + 30% (કુલ આવક ઓછા દસ લાખ પર 30%)

∴ 10,50,000 – 10,00,000 = 50,000

∴ ચૂકવવા પાત્ર આવકવેરો $= 1,12,500 + 50,000 \times \frac{30}{100}$

$= 1,12,500 + 15,000$

$= 1,27,500$

તે ઉપરાંત આવકવેરા પર 2% શિક્ષણ ઉપકર અને 1% માધ્યમિક અને ઉચ્ચશિક્ષણ ઉપકર ભરવો પડશે.

શિક્ષણ ઉપકર $= 1,27,500 \times \frac{2}{100} = 2550$ રૂપિયા

માધ્યમિક અને ઉચ્ચશિક્ષણ ઉપકર $= 1,27,500 \times \frac{1}{100} = 1275$ રૂપિયા

∴ કુલ આવકવેરો = 1,27,500 + 2550 + 1275 = 1,31,325 રૂપિયા

શ્રી. મ્હાત્રેનો ચૂકવવા પાત્ર (ભરવો પડતો) કુલ આવકવેરો = 1,31,325 રૂપિયા

ઉદા. **(2)** અહમદભાઈ (62 વર્ષ જ્યેષ્ઠ નાગરિક) એક કંપનીમાં નોકરી કરે છે. તેમની કુલ વાર્ષિક આવક ₹ 6,20,000 છે. તેમણે PPF માં ₹ 1,00,000 વીમાનો વાર્ષિક હપ્તો ₹ 80,000 અને મુખ્યમંત્રી નિધીમાં ₹10,000 નો ફાળો આપ્યો તો તેમને કેટલા રૂપિયા આવકવેરો ભરવો પડશે?

ઉકેલ : (1) કુલ વાર્ષિક આવક = 6,20,000 રૂપિયા

(2) કુલ કપાત 80C પ્રમાણે

(i) સાર્વજનિક ભવિષ્ય નિર્વાહ નિધી = 1,00,000 રૂપિયા

(ii) વીમો હપ્તો = 80,000 રૂપિયા

1,80,000 રૂપિયા

(iii) 80 C નુસાર વધુમાં વધુ ₹ 1,50,000 ની કપાત માન્ય.

(3) મુખ્યમંત્રી નિધી (80 G પ્રમાણે કરમુક્ત) = 10000 રૂપિયા.

(4) કરપાત્ર આવક = (1) – [(2) + (3)]

= 6,20,000 – [1,50,000 + 10000]

= 4,60,000 રૂપિયા

કોષ્ટક (II) પ્રમાણે કરપાત્ર આવક ત્રણ લાખથી પાંચ લાખ રૂપિયાના આવક-સ્તરમાં છે.

$\therefore$ ચૂકવવા પાત્ર આવકવેરો = (કરપાત્ર આવક – 3,00,000)$\times \frac{5}{100}$

$= (4,60,000 - 3,00,000)\times \frac{5}{100}$

$= 1,60,000 \times \frac{5}{100}$

= 8000 રૂપિયા

શિક્ષણ ઉપકર, આવકવેરા પર ભરવાનો હોય છે, માટે

શિક્ષણ ઉપકર : $8,000 \times \frac{2}{100}$ = ₹ 160, માધ્યમિક અને ઉચ્ચ શિક્ષણ ઉપકર : $8,000\times \frac{1}{100}$ = ₹ 80

$\therefore$ કુલ આવકવેરો = 8000 + 160 + 80 = ₹ 8,240

$\therefore$ અહમદભાઈને કુલ ₹ 8240 આવકવેરો ભરવો પડશે.

ઉદા. **(3)** શ્રીમતી હિંદુજાની ઉંમર 50 વર્ષ છે. તેમની કરપાત્ર આવક ₹16,30,000 છે તો તેમને કેટલો આવકવેરો ભરવો પડશે?

ઉકેલ : શ્રીમતી હિંદુજાની કરપાત્ર આવક 'દસ લાખ કરતાં વધારેના' આવક સ્તરમાં આવશે.

હવે કોષ્ટક I વાપરીને આવકવેરાની ગણતરી કરીએ.

કોષ્ટક I પ્રમાણે, દસલાખથી વધારેની આવક પર,

આવકવેરો = ₹ 1,12,500 + (કરપાત્ર આવક ઓછા દસ લાખ પર 30%)

કરપાત્ર આવક − દસ લાખ = 16,30,000 − 10,00,000

= 6,30,000 રૂપિયા

કોષ્ટક I પરથી

ચૂકવવા પાત્ર આવકવેરો $= 1,12,500 + 6,30,000 \times \frac{30}{100}$

$= 1,12,500 + 30 \times 6,300$

$= 1,12,500 + 1,89,000$

= 3,01,500 રૂપિયા

તેના પર 1% માધ્યમિક અને ઉચ્ચશિક્ષણ ઉપકર $= \frac{1}{100} \times 3,01,500 =$ ₹ 3015

2% શિક્ષણ ઉપકર $= \frac{2}{100} \times 3,01,500 =$ ₹ 6030

∴ કુલ આવકવેરો $= 3,01,500 + 3015 + 6030$

$= 3,10,545$

∴ ₹ 3,10,545 કુલ આવકવેરો ભરવો પડશે.

મહાવરાસંગ્રહ 6.2

(1) નીચેના કોઠામાં દરેક વ્યક્તિની કરપાત્ર આવક પરથી તેમને આવકવેરો ભરવો પડશે કે નહીં તે લખો.

અ.ક્ર.	વ્યક્તિ	ઉંમર	કરપાત્ર આવક (₹)	આવકવેરો ભરવો પડશે/ભરવો પડશે નહીં
(i)	કુ. નિકિતા	27	₹ 2,34,000	
(ii)	શ્રી. કુલકર્ણી	36	₹ 3,27,000	
(iii)	સૌ. મહેતા	44	₹ 5,82,000	
(iv)	શ્રી. બજાજ	64	₹ 8,40,000	
(v)	શ્રી. ડીસીલ્વા	81	₹ 4,50,000	

(2) શ્રી. કર્તાર સિંગ (ઉંમર 48 વર્ષ) ખાનગી કંપનીમાં નોકરી કરે છે તેમનો માસિક પગાર ₹ 42,000 (ભથ્થા બાદ કર્યા પછી) તેઓ ભવિષ્ય નિર્વાહ નિધીમાં દરમહિને ₹ 3000 રોકે છે. તેમણે ₹ 15,000 ના રાષ્ટ્રીય બચત પ્રમાણપત્રો લીધાં છે. ₹ 12,000 પંતપ્રધાન મદદ નિધીમાં આપ્યા છે. તો તેમનો ચૂકવવા પાત્ર કુલ આવકવેરાની ગણતરી કરો.

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 6

(1) નીચેના દરેક પ્રશ્નના ઉત્તર માટે યોગ્ય પર્યાય શોધો.

(i) આવકવેરાની ગણતરી માટે વિવિધ પ્રકારના રોકાણ પૈકી કલમ 80 C અંતર્ગત વધુમાં વધુ કેટલા રૂપિયા કપાત મળે છે.

(A) દોઢ લાખ રૂપિયા (B) અઢી લાખ રૂપિયા (C) એક લાખ રૂપિયા (D) બે લાખ રૂપિયા

(ii) એક વ્યક્તિએ 2017-18 ની સાલમાં મેળવેલી આવક માટેનું કર આકારણી વર્ષ નીચેના પૈકી કયું?

(A) 2016-17 (B) 2018-19 (C) 2017-18 (D) 2015-16

(2) શ્રી. શેખર તેમની આવકના 60% ખર્ચ કરે છે. બાકી રહેલી આવકમાંથી ₹ 300 અનાથ આશ્રમમાં દાન આપે છે, પછી તેમના પાસે ₹ 3,200 સિલક રહે છે. તો તેમની આવક શોધો.

(3) શ્રી. હીરાલાલે ₹ 2,15,000 મ્યુચ્યુઅલ ફંડમાં રોક્યા. 2 વર્ષ પછી તેના ₹ 3,05,000 મળ્યા. શ્રી રમણીકલાલે ₹ 1,40,000ના ચક્રવૃધ્ધિ વ્યાજે 8% ના દરે 2 વર્ષ માટે બૅંકમાં મૂક્યા. તો દરેકને મળતો સેંકડે નફો શોધો. કોનું રોકાણ વધુ ફાયદાકારક થયું?

(4) એક વ્યક્તિના બચત ખાતામાં વર્ષની શરૂઆતમાં ₹ 24,000 હતા. તેમાં બીજા ₹56,000 ભર્યા. અને બધી રકમ 7.5% ના દરે ચક્રવૃધ્ધિ વ્યાજે મૂકી. તો ત્રણ વરસ પછી કુલ કેટલી રકમ પાછી મળશે?

(5) શ્રી. મનોહરે પોતાની આવકના 20% ભાગ મોટાં દીકરાને અને 30% ભાગ નાના દીકરાને આપ્યો. બાકી રહેલી રકમના 10% રકમ શાળામાં દાન તરીકે આપી. પછી તેમના પાસે ₹ 1,80,000 વધ્યા. તો તેમની આવક શોધો.

(6*) કૈલાસની આવકના 85% જેટલો તેનો ખર્ચ હતો. જ્યારે તેની આવક 36% વધી ત્યારે તેનો ખર્ચ, પહેલાના ખર્ચ કરતાં 40% વધ્યો. તો હવે તેની સેંકડે કેટલી બચત થાય છે? તે શોધો.

(7*) રમેશ, સુરેશ અને પ્રિતીની મળીને કુલ આવક ₹ 8,07,000 છે. તેઓ દરેક જણ તેમની આવકના અનુક્રમે 75%, 80% અને 90% ખર્ચ કરે છે. જો તેમની બચતનો ગુણોત્તર 16 : 17 : 12 હોય તો દરેકની વાર્ષિક આવક શોધો.

(8) નીચે આપેલી વ્યક્તિઓના ચૂકવવા પાત્ર કુલ આવકવેરાની ગણતરી કરો.

(i) શ્રી. કદમની ઉંમર 35 વર્ષ છે. તેમની કરપાત્ર આવક ₹ 13,35,000 છે.

(ii) શ્રી. ખાનભાઈની ઉંમર 65 વર્ષ છે. તેમની કરપાત્ર આવક ₹ 4,50,000 છે.

(iii) કુમારી વર્ષા (ઉંમર 26 વર્ષ) ની કરપાત્ર આવક ₹ 2,30,000 છે.

◈◈◈

ICT Tools or Links

ભારત સરકારની www.incometaxindia.gov.in વેબસાઈટની મુલાકાત લો. ત્યાં incometax calculator ના મેન્યૂ પર ક્લિક કરો. તેમાં તમારા મનથી યોગ્ય રકમ લખીને કાલ્પનિક કપાત લખીને આવકવેરાની ગણતરી કરો.

7 આંકડાશાસ્ત્ર

64ZR0F

ચાલો શીખીએ.

- જોડ (સંયુક્ત) સ્તંભાલેખ
- વિભાજીત સ્તંભાલેખ
- શતમાન સ્તંભાલેખ
- મધ્ય, મધ્યક, બહુલક (અવર્ગીકૃત સામગ્રી માટે)
- પ્રાથમિક અને દુય્યમ સામગ્રી
- વર્ગીકૃત અને અવર્ગીકૃત વિતરણ કોઠો
- સંચિત આવૃત્તિ કોઠો

યાદ કરીએ.

આગળના ધોરણમાં આપણે સાદો અને સંયુક્ત (જોડ) સ્તંભાલેખ કેવી રીતે દોરવો તે જાણ્યું છે. તેમજ વર્તમાનપત્રો, માસિકો, દૂરદર્શન વગેરે માધ્યમોમાં વિવિધ આલેખ જોઈને માહિતી મેળવી છે.

માહિતીની સ્વરૂપ પ્રમાણે તેની યોગ્ય રજૂઆત કરતો આલેખ દોરવો એ મહત્ત્વનું કૌશલ્ય છે.

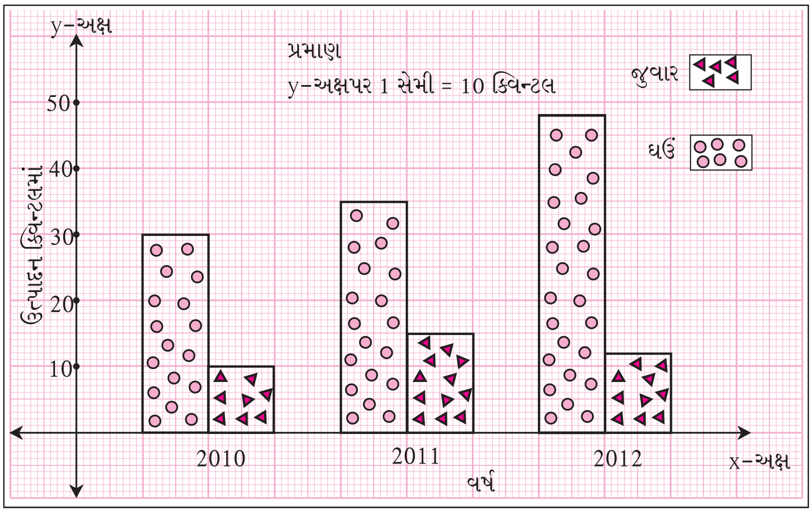
દા.ત. એક ખેડૂતને તેના ખેતરમાં ઘઉં અને જુવારનું ત્રણ વર્ષમાં થયેલું ઉત્પાદન દર્શાવતો સંયુક્ત સ્તંભાલેખ નીચે દોર્યો છે તેના પરથી પૂછેલા પ્રશ્નોના જવાબ લખો.

(i) ત્રણ વર્ષમાં કયા ધાન્યનું ઉત્પાદન સતત વધ્યું છે ?

(ii) 2012 માં 2011 કરતાં જુવારનું ઉત્પાદન કેટલું ઓછું છે ?

(iii) 2010 માં અને 2012 માં ઘઉંનું ઉત્પાદન વચ્ચેનો ફરક કેટલો ?

(iv) આ આલેખમાં આપેલી માહિતી પરથી નીચેનો કોઠો પૂર્ણ કરો.



વર્ષ \ ઉત્પાદન (ક્વિન્ટલ)	ઘઉં	જુવાર	કુલ
....	....	....	....
2011	....	....	....
2012	48	12	60

જાણી લઈએ.

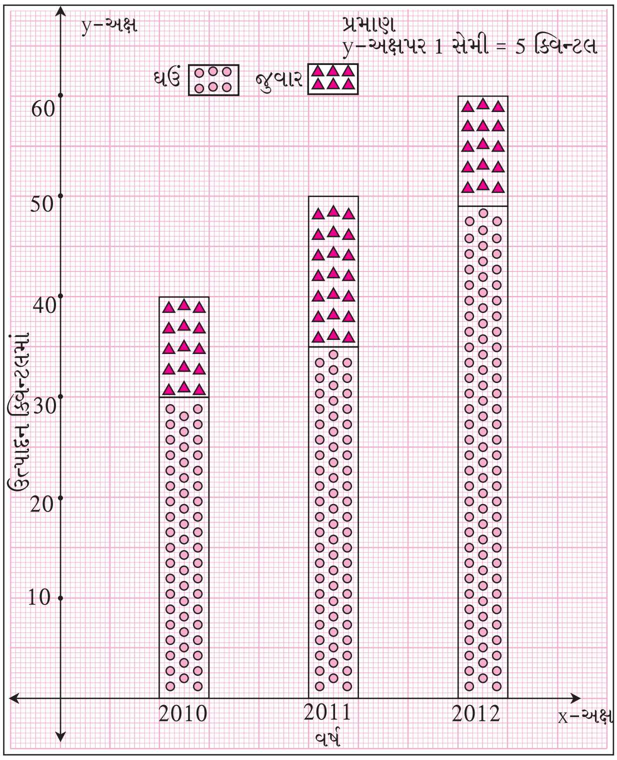
વિભાજીત સ્તંભાલેખ (Sub-divided bar diagram)

સામગ્રીની માહિતીની તુલના દર્શાવતો સ્તંભાલેખ જુદી રીતે પણ કાઢી (દોરી) શકાય છે. તે માટે સામગ્રીમાં એક જ પ્રકારની બે બાબતોનો સરવાળો કરીને, તે પ્રમાણે યોગ્ય પ્રમાણ લઈને સ્તંભ દર્શાવવામાં આવે છે. સ્તંભનાં દરેક બાબત દર્શાવતાં પ્રમાણસર ભાગ કરવામાં આવે છે. હવે વિભાજીત સ્તંભાલેખ કેવી રીતે દોરવો તે જોઈએ. તેને વિભાજીત સ્તંભાલેખ કહે છે.

(i) કુલ ઉત્પાદન જેવડી દરેક સ્તંભની ઊંચાઈ યોગ્ય પ્રમાણ લઈ દર્શાવવી.

(ii) તેમાં ઘઉંનું ઉત્પાદન એ કુલ ઉત્પાદનનો એક ભાગ થશે ત્યાં નિશાની કરવી.

(iii) સ્તંભનો બાકી રહેલો ભાગ જુવારનું ઉત્પાદન દર્શાવશે. તે માટે જુદી નિશાની કરી દર્શાવવું.



આ રીતે બાજુમાં દોરેલો વિભાજીત સ્તંભાલેખ જુઓ.

શતમાન સ્તંભાલેખ (Percentage bar diagram)

ક્યારેક બે બાબતોનું શતમાન કાઢીને કરેલી તુલના વધુ ઉપયોગી બને છે. તે આપણે ભણ્યા છીએ. દા.ત. 2000 રૂપિયા પર 600 રૂ. નફો અને 1500 રૂપિયા પર 510 રૂ. નફો થયો હોય તો 600 રૂ. નફો વધારે દેખાય છે, પણ જો બન્ને નફાનું સેંકડે પ્રમાણ કાઢીએ તો તે અનુક્રમે 30% અને 34% આવે છે એનો અર્થ એ કે, 1500 રૂ.ના રોકાણ પર 510 રૂપિયા નફો થવો અધિક ફાયદાકારક છે તે શતમાન પરથી તરત ધ્યાનમાં આવે છે.

ઉપરના ઉદાહરણ પરથી શતમાનનું મહત્ત્વ તમારા ધ્યાનમાં આવે છે. તેથી આપેલી માહિતીની તુલના અલગ રીતે સમજવા માટે આપેલી સાંખ્યિક માહિતીનું શતમાનમાં રૂપાંતર કરીને જે વિભાજીત સ્તંભાલેખ દોરવામાં આવે છે તેને **શતમાન સ્તંભાલેખ** કહે છે. પહેલાના જ ઉદાહરણની સંખ્યાકીય (સાંખ્યિક) માહિતીનું રૂપાંતર શતમાનમાં કરીને બાજુના કોઠામાં દર્શાવ્યું છે.

વર્ષ	ઘઉંનું ઉત્પાદન ક્વિંટલમાં	જુવારનું ઉત્પાદન ક્વિંટલમાં	કુલ ઉત્પાદનના પ્રમાણમાં ઘઉંનું સેંકડે ઉત્પાદન
2010	30	10	$\frac{30}{40} \times 100 = 75\%$
2011	35	15	$\frac{35}{50} \times 100 = 70\%$
2012	48	12	$\frac{48}{60} \times 100 = 80\%$

આ માહિતી દર્શાવતો સ્તંભાલેખ નીચેના પગથિયાનુસાર દોર્યો છે.

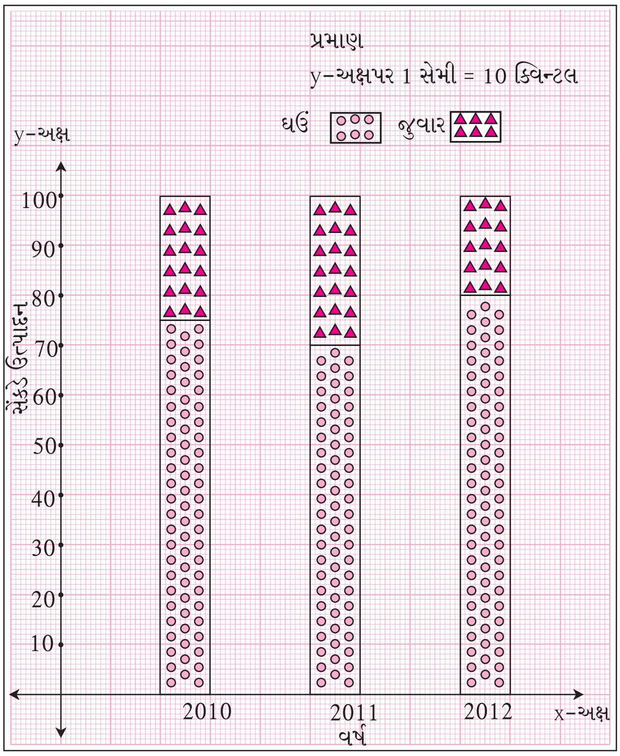
(i) દરેક વર્ષમાં ઘઉં અને જુવારના કુલ ઉત્પાદન પૈકી ઘઉંનું અને જુવારનું સેંકડે ઉત્પાદન શોધ્યું.

(ii) દરેક સ્તંભની ઊંચાઈ Y-અક્ષ પરથી 100 લીધી.

(iii) ઘઉંના ઉત્પાદનનું પ્રમાણ, તેના શતમાનમાં કાઢેલા ઉત્પાદન પ્રમાણે નિશાની વાપરી દર્શાવ્યું.

(iv) સ્તંભનો બાકીનો ભાગ કુલ ઉત્પાદન પૈકી જુવારનું શતમાન દર્શાવે છે.

બે અથવા બેથી વધુ બાબતોની માહિતી વિભાજીત અથવા શતમાન સ્તંભાલેખથી દર્શાવી શકાય છે.



ગણેલાં ઉદાહરણો :

ઉદા. (1) બાજુમાં શતમાન સ્તંભાલેખ આપ્યો છે. તેમાં બે કુટુંબમાં વિવિધ બાબતો પર થતાં ખર્ચની માહિતી આપેલી છે. તે પરથી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ લખો.

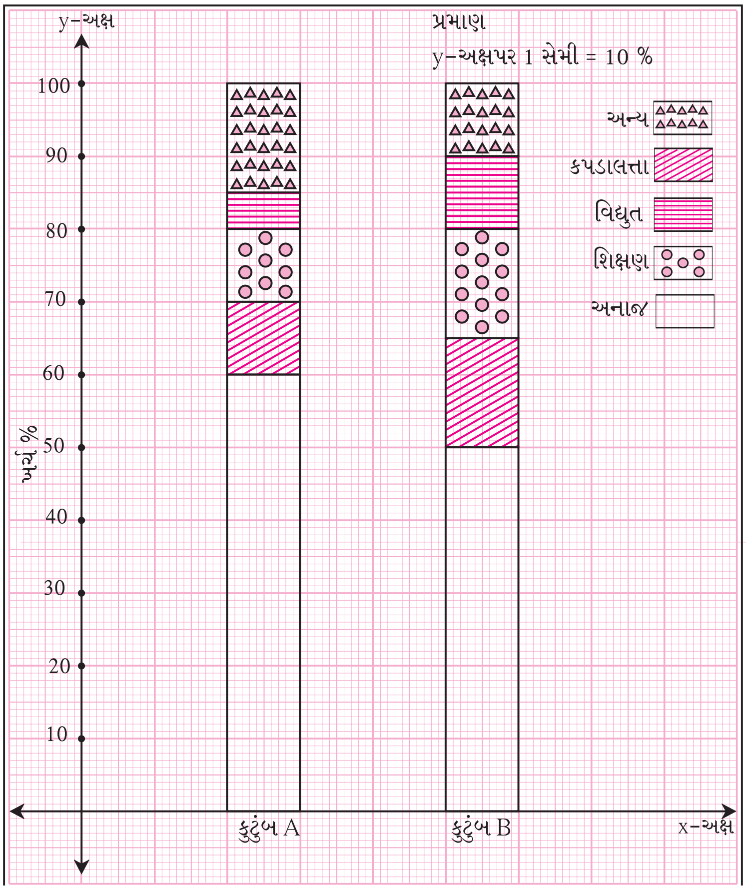
(i) દરેક કુટુંબ માટે વિવિધ બાબતો પર થતાં ખર્ચના શતમાન (સેંકડે પ્રમાણ) લખો.

(ii) ક્યા કુટુંબનો અનાજ પર થતો ખર્ચ કુલ ખર્ચના પ્રમાણમાં વધારે છે ? કેટલા ટકા વધારે છે ?

(iii) બન્ને કુટુંબના અન્ય ખર્ચની ટકાવારી કેટલી છે ?

(iv) ક્યા કુટુંબનું વિદ્યુત પર થતા ખર્ચનું સેંકડે પ્રમાણ વધારે છે ?

(v) ક્યા કુટુંબની શિક્ષણ પર થતા ખર્ચની ટકાવારી વધારે છે ?



ઉકેલ : (i)

કુટુંબ \ ખર્ચ	અનાજ	કપડાંલત્તા	શિક્ષણ	વિદ્યુત	અન્ય
A	60%	10%	10%	5%	15%
B	50%	15%	15%	10%	10%

(ii) કુટુંબ A નો અનાજ પર થતો કુલ ખર્ચ, કુટુંબ B ના ખર્ચથી 10% વધારે છે .

(iii) કુટુંબ A નો અન્ય ખર્ચ 15% અને કુટુંબ B નો અન્ય ખર્ચ 10%છે.

(iv) કુટુંબ B ના વિદ્યુત ખર્ચનું શતમાન વધારે છે.

(v) કુટુંબ B નાં શિક્ષણ ખર્ચનું શતમાન વધારે છે.

મહાવરાસંગ્રહ 7.1

(1) નીચેના કોઠામાં ભારતના ટ્રક અને બસની સંખ્યા પૂર્ણ લાખમાં આપી છે. તે પરથી શતમાન સ્તંભાલેખ દોરો. (શતમાન નજીકની પૂર્ણ સંખ્યામાં લેવા.)

વર્ષ	ટ્રકની સંખ્યા	બસની સંખ્યા
2006-2007	47	9
2007-2008	56	13
2008-2009	60	16
2009-2010	63	18

(2) નીચેના કોઠામાં ભારતના પાકા અને કાચા રસ્તાની માહિતી આપી છે. તે પરથી વિભાજીત અને શતમાન સ્તંભાલેખ દોરો. (શતમાન નજીકની પૂર્ણ સંખ્યામાં લેવા.)

વર્ષ	પાકા રસ્તા (લાખ કિમી)	કાચા રસ્તા (લાખ કિમી)
2000-2001	14	10
2001-2002	15	11
2002-2003	17	13
2003-2004	20	19

કૃતિ : નીચેના કોઠામાં વિવિધ રાજ્યના દર 1000 છોકરાઓ એ છોકરીઓનું પ્રમાણ દર્શાવતી સંખ્યા આપી છે તે પરથી આપેલાં કોઠામાંની ખાલી જગ્યા પૂરો.

રાજ્યો	છોકરાઓની સંખ્યા	છોકરીઓની સંખ્યા	કુલ	છોકરાઓનું શતમાન (નજીકની પૂર્ણસંખ્યામાં)	છોકરીઓનું શતમાન (નજીકની પૂર્ણ સંખ્યામાં)
આસામ	1000	960	1960	$\frac{1000}{1960} \times \frac{100}{1} = = 51\%$	100 - 51 = 49%
બિહાર	1000	840	1840		
પંજાબ	1000	900			
કેરળ	1000	1080			
મહારાષ્ટ્ર	1000	900			

કોઠા પરથી મળેલી માહિતીનું શતમાનમાં રૂપાંતર કરો અને તે પરથી તારણ કાઢી ચર્ચા કરો.

વિચાર કરીએ. પાના નંબર 111 પર આપેલી કૃતિ માટેના કોઠામાં દર હજારે છોકરાઓની સંખ્યા પાછળ છોકરીઓની સંખ્યા આપી છે.

તે જ રાજ્યમાં સાક્ષરતાનું પ્રમાણ નીચે પ્રમાણે છે.

આસામ (73%), બિહાર (64%), પંજાબ (77%) કેરળ (94%) અને મહારાષ્ટ્ર (83%).

કોઠામાં છોકરીઓની સંખ્યા અને જે તે રાજ્યોનું સાક્ષરતાનું પ્રમાણ બન્નેનો વિચાર એક સાથે કરીને તમે કોઈ તારણ કાઢી શકશો કે ?

ચાલો, ચર્ચા કરીએ.

નીચેની માહિતી દર્શાવવા માટે ક્યા પ્રકારનો સ્તંભાલેખ દોરવો યોગ્ય થશે ?

(1) ચાર ગામના સાક્ષરોનું સેંકડે પ્રમાણ

(2) એક કુટુંબનો વિવિધ બાબતો પર થતો ખર્ચ

(3) પાંચ શ્રેણીઓ લઈ દરેક શ્રેણીમાં છોકરા-છોકરીઓનું પ્રમાણ

(4) ત્રણ દિવસ ચાલેલા વિજ્ઞાન પ્રદર્શનની મુલાકાતે આવનારા વ્યક્તિઓની સંખ્યા

(5) જાન્યુઆરી થી જૂન સુધી દરેક મહિનામાં તમારા ગામનું મહત્તમ અને લઘુત્તમ તાપમાન

(6) દ્વિચક્રી વાહન ચલાવતી વખતે 'હેલ્મેટ' વાપરનારા અને ન વાપરનારા 100 કુટુંબમાંના વ્યક્તિઓની સંખ્યા

જાણી લઈએ.

આંકડાશાસ્ત્ર (Statistics)

એકાદ મોટા સમૂહનો અભ્યાસ કરવા માટે તેમાંના જ ઘટકોનો નાનો અને પૂરતો સમૂહ યાદચ્છિક પધ્ધતિથી પસંદ કરવામાં આવે છે. આ સમૂહ, મોટાં સમૂહનો **'પ્રતિનિધિક સમૂહ'** કહેવાય છે. આ પ્રતિનિધિક સમૂહના અભ્યાસ સંબંધિત જોઈતી માહિતી ભેગી કરવામાં આવે છે. સામાન્ય રીતે આ માહિતી સંખ્યાના રૂપમાં હોય છે. તેનું વિશ્લેષણ કરીને કેટલાંક તારણો કાઢવામાં આવે છે. આ પ્રકારના અભ્યાસને **'આંકડાશાસ્ત્ર'** (statistics) નામ આપેલું છે.

Statistics આ શબ્દ status આ લૅટિન શબ્દ પરથી તૈયાર થયો છે. તેનો અર્થ 'રાજ્યની સ્થિતિ' એવો થાય છે. આ પરથી પહેલાનાં વખતમાં આ શાસ્ત્ર રાજ્યના પ્રશાસકીય વ્યવહાર સાથે સંબંધિત હશે એવું દેખાય છે. પરંતુ હાલ આ શાસ્ત્રનો ઉપયોગ બધાં જ ક્ષેત્રોમાં થાય છે. **સર રોનાલ્ડ એલ્મર ફિશર** (17 ફેબ્રુઆરી 1890 - 29 જુલાઈ 1962) ને સંખ્યાશાસ્ત્રના જનક માનવામાં આવે છે.

માહિતીનું સંકલન (Data collection)

શિક્ષિકા : એક ગામમાંના દરેક કુટુંબ પાસે ખેતી માટેની જમીન કેટલી છે તેની માહિતી સંકલિત કરવી છે. તો તમે શું કરશો?

રોબર્ટ : ટીચર, ગામનાં દરેક ઘરે જઈ દરેક પાસે કેટલી ખેતી છે તેની નોંધ કરીશું.

શિક્ષિકા : એકદમ બરાબર ! વિદ્યાર્થીમિત્રો એકાદ વિશિષ્ટ સમૂહ માટે આપણે જે માહિતી ભેગી કરીએ છીએ તે મુખ્યત્ત્વે સંખ્યાના રૂપમાં હોય છે તેને **'સામગ્રી'** કહે છે. સામગ્રી સંકલિત કરતાં પહેલાં તે માહિતી શેના માટે વાપરવામાં આવશે, તે નક્કી કરેલું હોવું જોઈએ. જ્યારે એકાદ વ્યક્તિ માહિતી મેળવવા, તે ઠેકાણે જઈને પ્રશ્ન પૂછીને, માપન કરીને વગેરે પ્રકારે સામગ્રીનું સંકલન કરે તો તેને **પ્રાથમિક સામગ્રી** કહે છે.

આફરીન : એટલે રોબર્ટના કહેવા પ્રમાણે દરેકના ઘરે જઈને ભેગી કરેલી ખેતીની માહિતી **'પ્રાથમિક સામગ્રી'** થશે.

શિક્ષિકા : શાબાશ આફરીન !

રમેશ : પરંતુ, ટીચર આ જ માહિતી ઓછા સમયમાં સંકલિત કરવી હોય તો?

શિક્ષિકા : રમેશનું કહેવું બરાબર છે. આવા સમયે માહિતી સંકલનનો બીજો ઉપાય કયો? તેનો વિચાર કરો.

કેતકી : ટીચર આપણે તલાટીના કાર્યાલયમાં જઈને ઉપલબ્ધ નોંધને આધારે માહિતી સંકલિત કરી શકીએ છીએ.

શિક્ષિકા : બરાબર, કેટલીક વાર સમય સીમા, સાધનોનો અભાવ જેવા કારણોસર સામગ્રીનું સંકલન વ્યક્તિગત કરવું શક્ય નથી. તેથી આવા સમયે બીજાઓએ સંકલિત કરેલી સામગ્રી, કાર્યાલયીન દસ્તાવેજો, પ્રસિધ્ધ થયેલી સામગ્રી, સરકારી વિભાગમાં ઉપલબ્ધ માહિતી અથવા અહેવાલ, શોધ નિબંધ, પ્રબંધ સ્વરૂપે રાખેલી માહિતી વાપરવામાં આવે છે. આ પ્રકારે મેળવેલી સામગ્રીને **દુય્યમ સામગ્રી** કહે છે. એટલે કેતકીએ સૂચવ્યાપ્રમાણે તલાટી કાર્યાલયમાં જઈને ખેતીની સંગ્રહિત માહિતી લેવી એટલે તે દુય્યમ સામગ્રી ગણાય.

નીચેના ઉદાહરણો જુઓ.

(i) વર્તમાનપત્રમાં આવેલી માહિતી વાપરીને બનાવેલો કોઠો એ દુય્યમ સામગ્રી થશે.

(ii) ઉપાહારગૃહમાં પદાર્થની ગુણવત્તા તપાસવા માટે, ગ્રાહકોને પૂછીને મેળવેલી માહિતી એ પ્રાથમિક સામગ્રી થશે.

(iii) વર્ગમાંના વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈ પ્રત્યક્ષ માપીને કરેલ નોંધ એ પ્રાથમિક સામગ્રી થશે.

પ્રાથમિક સામગ્રી	દુય્યમ સામગ્રી
1. સંકલન કરવા વધુ સમય લાગે છે. 2. અદ્યતન અને વિગતવાર હોય છે. 3. સત્ય અને વિશ્વસનીય હોય છે.	1. ત્વરિત મળે છે. 2. આમાં માહિતી પહેલેથી સંકલિત કરેલી હોવાથી તે અદ્યતન હોય જ એવું નથી માહિતી માટે જોઈતી વિગતો ક્યારેક ઓછી પડે છે. 3. ક્યારેક ઓછી વિશ્વસનીય હોય.

કૃતિ : તમે અનેક વખત જુદા-જુદા કારણો માટે માહિતી ભેગી કરો છો તેવા 3 થી 4 ઉદાહરણો લઈને તે સામગ્રી પ્રાથમિક છે કે દુય્યમ તે નક્કી કરી લખો.

મહાવરાસંગ્રહ 7.2

(1) નીચે પ્રમાણે ભેગી કરેલી સામગ્રીનું પ્રાથમિક, કે દુય્યમ સામગ્રીમાં વર્ગીકરણ કરો.

(i) પ્રત્યક્ષ વર્ગમાં જઈને શાળાના દરેક વર્ગની વિદ્યાર્થીઓના હાજરીની માહિતી ભેગી કરવી.

(ii) દરેક વિદ્યાર્થીની ઊંચાઈની માહિતી હેડ ઑફિસમાં ત્વરિત મોકલવાની છે તેથી શાળાના શારીરિક વિભાગે કરેલી નોંધને આધારે તે માહિતી એકઠી કરી.

(iii) નાંદપુરના પ્રત્યેક કુટુંબના શાળાબાહ્ય વિદ્યાર્થીઓની માહિતી પ્રત્યક્ષ દરેક ઘરે જઈને મેળવી.

(iv) વિજ્ઞાન પ્રકલ્પ માટે પ્રત્યક્ષ જંગલમાં જઈને ઝાડનું નિરીક્ષણ કરી જરૂરી માહિતી ભેગી કરી.

યાદ કરીએ.

સામગ્રીનું વર્ગીકરણ (Classification of data)

ઉદા. **(1)** એક શાળાના ધોરણ 9 ના 50 વિદ્યાર્થીઓએ પ્રથમ ઘટક-કસોટીમાં ગણિત વિષયમાં 20 માંથી મેળવેલાં ગુણ નીચેપ્રમાણે છે.

20, 6, 14, 10, 13, 15, 12, 14, 17, 17, 18, 11, 19, 9, 16, 18, 14, 7, 17, 20,
8, 15, 16, 10, 15, 12, 18, 17, 12, 11, 11, 10, 16, 14, 16, 18, 10, 7, 17, 14,
20, 17, 13, 15, 18, 20, 12, 12, 15, 10.

અહીં સંકલિત કરેલી સંખ્યાત્મક માહિતીને શું કહે છે? જ. **કાચી સામગ્રી**

તેમાંની દરેક સંખ્યાને શું કહે છે? જ. **પ્રાપ્તાંક.**

ઉપરની માહિતી પરથી નીચે આપેલાં પ્રશ્નોનાં જવાબ લખો.

(i) 15 ગુણ મેળવતાં કુલ વિદ્યાર્થીઓ કેટલાં?

(ii) 15 ગુણ કરતાં વધુ ગુણ મેળવનારા કુલ વિદ્યાર્થીઓ કેટલાં?

(iii) 16 ગુણ કરતાં ઓછા ગુણ મેળવનારા કુલ વિદ્યાર્થીઓ કેટલા?

(iv) સૌથી ઓછા ગુણ કેટલાં છે?

(v) સૌથી વધુ ગુણ કેટલાં છે?

ચાલો, ચર્ચા કરીએ.

(1) તમને ઉપરોક્ત પ્રશ્નોના જવાબ સહેલાઈથી મળ્યા કે? દર વખતે બધા ગુણોનું નિરીક્ષણ કરવું પડ્યું.

(2) ઉપરનું કામ સુલભતાથી થાય તે માટે શું કરવું પડશે?

શમીમ : ઉપરના ઉત્તરો શોધતી વખતે વારંઘડીએ માહિતીનું નિરીક્ષણ કરવું પડે છે તેથી કંટાળાજનક લાગે છે. પરંતુ આપેલી માહિતી કાચી સામગ્રીને ચઢતા કે ઉતરતા ક્રમમાં લખવાથી સુલભતા વધશે.

શમીમના કહેવા પ્રમાણે સામગ્રીના ગુણ ચઢતા ક્રમે લખીએ.

6, 7, 7, 8, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 12, 13, 13,
14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 16, 17, 17, 17, 17, 17, 17,
18, 18, 18, 18, 18, 19, 20, 20, 20, 20.

માહિતી ચઢતા ક્રમમાં લખવાથી ઉદા. 1 માંના પાંચેય પ્રશ્નોના જવાબ સહેલાઈથી મળ્યા કે? તે જુઓ.

હવે પ્રશ્નોના જવાબ મેળવવામાં સુલભતા વધી અને પાંચેય પ્રશ્નોના જવાબ સહજતાથી શોધી શક્યા.

યાદ કરીએ.

અવર્ગીકૃત આવૃત્તિ વિતરણ કોઠો (Unrouped frequency distribution table)

માર્ટીન : ટીચર, સામગ્રીને કોઠાના રૂપમાં માંડીને લખવાથી અધિક સુલભતા મળે છે તે આપણે પાછળના ધોરણમાં શીખ્યા છીએ. આ પ્રકારના કોઠાને આવૃત્તિ વિતરણ કોઠો કહે છે.

શિક્ષિકા : માર્ટીન, એકદમ સાચું ! હવે આ પ્રકારનો કોઠો પહેલાના ઉદા. 1 ના આધારે તૈયાર કરો.

ઉદાહરણ (1) માં સૌથી ઓછાં ગુણ 6 અને સૌથી વધારે ગુણ 20 છે માટે કોઠામાં પ્રાપ્તાંકના સ્તંભમાં 6 થી 20 સુધીના પ્રાપ્તાંક લખો. બીજા સ્તંભમાં તાળાની નિશાનીઓ કરીને તેની સંખ્યા ગણીને છેલ્લા સ્તંભમાં લખો. કોઠો પૂર્ણ કરો.

આવૃત્તિ વિતરણ કોઠો

પ્રાપ્તાંક (ગુણ)	તાળાની નિશાની	આવૃત્તિ (f) (વિદ્યાર્થી સંખ્યા)
6	𝍷	1
7	𝍷𝍷	2
8		
9		
10	𝍸	5
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17	𝍸 𝍷	6
18		
19		
20	𝍷𝍷𝍷𝍷	4
		કુલ N = 50

અહીં N એ આવૃત્તિનો સરવાળો છે.

ચાલો, ચર્ચા કરીએ.

વર્ગીકૃત આવૃત્તિ વિતરણ કોઠો (Grouped frequency distribution table)

ઉપરોક્ત આવૃત્તિ વિતરણ કોઠામાં,

(1) કોઠો ખૂબ લાંબો થયો એવું લાગે છે કે?

(2) જ્યારે સામગ્રીમાં પ્રાપ્તાંકની સંખ્યા વધારે હશે ત્યારે આ કોઠો બનાવવાનું વધુ અઘરૂં બનશે કે?

શિક્ષિકા : ઉપરની ચર્ચા પરથી ધ્યાનમાં આવ્યું કે, જ્યારે સામગ્રીમાં પ્રાપ્તાંકની સંખ્યા વિશાળ હોય ત્યારે તેનો વિસ્તાર મોટો થાય છે. તે તૈયાર કરવા વધુ સમય લાગે છે. કોઠાનો વિસ્તાર અને તે માટે લાગતો સમય ઓછો કરવા કયો ઉપાય કરી શકશો?

રોહિત : સર, તે માટે સામગ્રીના જૂથ બનાવવા.

શિક્ષિકા : શાબાશ રોહિત, સામગ્રીના જૂથ તૈયાર કરવા એટલે જ 'વર્ગ' તૈયાર કરવા એટલે તે સામગ્રીનું વર્ગીકરણ મર્યાદિત બને અને તેમાં સમય પણ બચે. આ રીતે તૈયાર થયેલાં કોઠાને વર્ગીકૃત આવૃત્તિ વિતરણ કોઠો કહે છે.

વર્ગીકૃત આવૃત્તિ વિતરણ કોઠો બે રીતે બનાવી શકાય છે.

(1) સમાવેશક પધ્ધતિ (ખંડિત વર્ગ પધ્ધતિ) (2) અસમાવેશક પધ્ધતિ (અખંડ વર્ગ પધ્ધતિ)

(1) સમાવેશક પધ્ધતિ (ખંડિત વર્ગ પધ્ધતિ)(Inclusive method)

6, 7, 7, 8, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 12, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 16, 17, 17, 17, 17, 17, 17, 18, 18, 18, 18, 18, 19, 20, 20, 20, 20.

આ સામગ્રીમાં સૌથી નાનો પ્રાપ્તાંક ☐ અને સૌથી મોટો પ્રાપ્તાંક ☐ છે. સૌથી મોટા અને સૌથી નાના પ્રાપ્તાંક વચ્ચેનો ફરક 20 − 6 = 14 છે. આ ફરકને **'સામગ્રીનો વિસ્તાર'** (Range of Data) કહે છે. આ વિસ્તાર ધ્યાનમાં રાખીને કયા વર્ગો પાડી શકાય?

(i) 6 થી 8, 9 થી 11, 12 થી 14, 15 થી 17, 18 થી 20 અથવા

(ii) 6 થી 10, 11 થી 15, 16 થી 20 વર્ગ કરી શકાય.

6 થી 10, 11 થી 15 અને 16 થી 20 આ પ્રમાણે વર્ગો લઈને સામગ્રીનો આવૃત્તિ વિતરણ કોઠો તૈયાર કરીએ.

વર્ગીકૃત આવૃત્તિ વિતરણ કોઠો (સમાવેશક પધ્ધતિ)

વર્ગ	તાળાની નિશાની	આવૃત્તિ (f) (વિદ્યાર્થી સંખ્યા)
6 થી 10	𝍸 𝍸	**10**
11 થી 15	.....	.....
16 થી 20	.....	20
		N = 50

આ કોઠો બનાવતી વખતે 6, 10 અને તેમની વચ્ચેના બધા પ્રાપ્તાંકોનો સમાવેશ 6 થી 10 આ વર્ગમાં થાય છે. તેથી આને સમાવેશક પધ્ધતિ કહે છે તેમજ 6 થી 10, 11થી 15, 16 થી 20 આ વર્ગોને ખંડીત વર્ગો કહે છે.

જાણી લઈએ.

આંકડાશાસ્ત્રની કેટલીક સંજ્ઞાઓ (Basic terms in statistics)

(1) **વર્ગ (Class)** : આપેલા પ્રાપ્તાંકના જરૂરિયાત મુજબ પાડેલાં જૂથને 'વર્ગ' કહે છે.

6 થી10, 11 થી 15 એ વર્ગ 6−10, 11−15 એમ પણ લખી શકાય છે.

(2) **વર્ગ મર્યાદા (Class limits)** : વર્ગ દર્શાવતી સંખ્યાને વર્ગમર્યાદા કહે છે.

6 થી 10 વર્ગની નીચલી વર્ગ મર્યાદા 6 અને 10 ઉપલી વર્ગ મર્યાદા છે.

(3) **આવૃત્તિ (Frequency)**: દરેક વર્ગમાં જેટલાં પ્રાપ્તાંક આવે તે સંખ્યાને તે વર્ગની આવૃત્તિ કહે છે.

ઉપરના કોઠામાં 11 થી 15 ના વર્ગમાં પ્રાપ્તાંક સંખ્યા 20 આવે છે.

તેથી 11 થી 15 વર્ગની આવૃત્તિ 20 છે.

(4) **વર્ગાન્તર (Class width)** : અખંડ વર્ગ આપ્યા હોય ત્યારે બે નજીકના વર્ગની નીચેની (અથવા ઉપરની) મર્યાદા વચ્ચેના ફરકને વર્ગાન્તર કે વર્ગ અવકાશ કહે છે.

દા.ત. 5 - 10, 10 - 15, 15 - 20, …… વર્ગ હોય તો, 5-10 ના વર્ગાન્તર = 10 - 5 = 5 છે.

(5) **વર્ગમધ્ય (Class mark)**: વર્ગની નીચલી અને ઉપલી મર્યાદાની સરાસરીને વર્ગમધ્ય કહે છે.

$$\text{વર્ગમધ્ય} = \frac{\text{નીચલી વર્ગમર્યાદા} + \text{ઉપલી વર્ગમર્યાદા}}{2}$$

દા.ત. 11 થી 15 વર્ગનું વર્ગમધ્ય $= \frac{\square + \square}{2} = \frac{26}{2} = 13$

(2) અસમાવેશક પદ્ધતિ (અખંડ વર્ગ પદ્ધતિ) (Exclusive method)

ઉદા. 6, 10, 10.3, 11, 15.7, 19, 20, 12, 13 આ પ્રાપ્તાંક આપ્યા છે.
તો 6-10, 11-15, 16-20 વર્ગ લઈ વર્ગીકૃત આવૃત્તિ વિતરણ કોઠો તૈયાર કરો.

ઉકેલ :

વર્ગ	તાળાની નિશાની	આવૃત્તિ (f)
6-10	||	2
11-15	|||	3
16-18	||	2

ઉપરના કોઠામાં પ્રાપ્તાંક 10.3 અને 15.7 નો સમાવેશ થતો નથી.

કારણ 10.3, 15.7 આ સંખ્યા 6-10, 11-15, 16-20 પૈકી કોઈપણ વર્ગમાં મૂકી શકાય નહિ, તેથી વર્ગ રચના બદલવી પડશે. તેથી 5-10, 10-15, 15-20, …….. એ પ્રમાણે અખંડ વર્ગ લઈએ. પરંતુ 10 આ પ્રાપ્તાંક 5-10, 10-15 નો સમાવેશ તો થઈ જાય પણ બીજો પ્રશ્ન એ ઉદ્ભવે કે 10 આ પ્રાપ્તાંકનો સમાવેશ 5-10 પૈકી કયા વર્ગમાં કરવો આ મુશ્કેલી નિવારવા 10 નો સમાવેશ 10-15 આ વર્ગમાં કરવો એવો સંકેત પાળવામાં આવે છે. એટલે 10 ની નોંધ 10-15 માં કરવી. તેથી આ પદ્ધતિને અસમાવેશક પદ્ધતિ કહે છે.

આ રીતે વર્ગ લેતાં 10.3 અને 15.7 નો સમાવેશ કરી નીચે પ્રમાણે કોઠો તૈયાર થશે.

વર્ગીકૃત આવૃત્તિ વિતરણ કોઠો (**અસમાવેશક પદ્ધતિ**)

વર્ગ (અખંડ) ગુણ	તાળાની નિશાની	આવૃત્તિ (f) (વિદ્યાર્થી સંખ્યા)
5-10	|	1
10-15	~~||||~~	5
15-20	||	2
20-25	|	1

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

આવૃત્તિ વિતરણ કોઠો

અવર્ગીકૃત

ધોરણ 9 માં વિદ્યાર્થીની ઉંમર	વિદ્યાર્થીની સંખ્યા
14	12
15	23
16	10

વર્ગીકૃત

સમાવેશક પદ્ધતિ (ખંડિત વર્ગ)

શૂ-સાઈઝ	વિદ્યાર્થીની સંખ્યા
2-4	12
5-7	29
8-10	7

અસમાવેશક પદ્ધતિ (અખંડ વર્ગ)

ઉંચાઈ (સેમીમાં)	વિદ્યાર્થીની સંખ્યા
145-150	18
150-155	27
155-160	3

મહાવરાસંગ્રહ 7.3

(1) 20 થી 25 વર્ગની નીચલી અને ઉપલી વર્ગમર્યાદા લખો.

(2) 35 થી 40 આ વર્ગનો વર્ગમધ્ય શોધો.

(3*) એક વર્ગનો વર્ગમધ્ય 10 અને વર્ગ અવકાશ 6 છે તો તે વર્ગ લખો.

(4) નીચેનો કોઠો પૂર્ણ કરો.

વર્ગ (ઉંમર વર્ષમાં)	તાળાની નિશાની	આવૃત્તિ (f) (વિદ્યાર્થી સંખ્યા)
12-13	卌	☐
13-14	卌 卌 IIII	☐
14-15		☐
15-16	IIII	☐
		$N=\sum f = 35$

(5) એક શાળામાં હરિતસેનાના 45 વિદ્યાર્થીઓએ દરેકે કરેલા વૃક્ષારોપણની સંખ્યા નીચેપ્રમાણે છે.
3, 5, 7, 6, 4, 3, 5, 4, 3, 5, 4, 7, 5 , 3, 6, 6, 5, 3, 4, 5, 7, 3, 5, 6, 4, 4, 3, 5, 6, 6, 4, 3, 5, 7, 3, 4, 5, 7, 6, 4, 3, 5, 4, 4, 7.
તે પરથી અવર્ગીકૃત આવૃત્તિ વિતરણ કોઠો તૈયાર કરો.

(6) π ની 50 દશાંશ સ્થળ સુધીની કિંમત નીચે આપી છે.
3.14159265358979323846264338327950288419716939937510
તે પરથી દશાંશ ચિહ્ન પછીના અંકોનો અવર્ગીકૃત આવૃત્તિ વિતરણ કોઠો તૈયાર કરો.

(7*) નીચે કોઠામાં આપેલી માહિતી પરથી વર્ગાન્તર શોધો. અખંડ વર્ગ અને ખંડિત વર્ગ હોય તેવો આવૃત્તિ વિતરણ કોઠો તૈયાર કરો.

(i)

વર્ગમધ્ય	આવૃત્તિ
5	3
15	9
25	15
35	13

(ii)

વર્ગમધ્ય	આવૃત્તિ
22	6
24	7
26	13
28	4

(8) એક શાળામાં ધોરણ 9 ના 46 વિદ્યાર્થીઓને તેમના કંપાસમાંની પેન્સિલની લંબાઈ માપવા કહી તે સેં.મી માં નીચેપ્રમાણે છે.

16, 15, 7, 4.5, 8.5, 5.5, 5, 6.5, 6, 10, 12,
13, 4.5, 4.9, 16, 11, 9.2, 7.3, 11.4, 12.7, 13.9, 16,
5.5, 9.9, 8.4, 11.4, 13.1, 15, 4.8, 10, 7.5, 8.5, 6.5,
7.2, 4.5, 5.7, 16, 5.7, 6.9, 8.9, 9.2, 10.2, 12.3, 13.7,
14.5, 10.

0–5, 5–10, 10–15, ... આ પ્રમાણે વર્ગ લઈ અસમાવેશ પધ્ધતિથી 'વર્ગીકૃત આવૃત્તિ વિતરણ કોઠો' તૈયાર કરો.

(9) એક ગામમાં સહકારી દૂધ સંકલન કેન્દ્ર પર 50 વ્યક્તિઓએ, દરેકે કેટલા લિટર દૂધ જમા કર્યુ તેની માહિતી નીચે આપી છે.

27, 75, 5, 99, 70, 12, 15, 20, 30, 35, 45, 80,
77, 90, 92, 72, 4, 33, 22, 15, 20, 28, 29, 14,
16, 20, 72, 81, 85, 10, 16, 9, 25, 23, 26, 46,
55, 56, 66, 67, 51, 57, 44, 43, 6, 65, 42, 36,
7, 35.

આ પ્રમાણે વર્ગો લઈ વર્ગીકૃત આવૃત્તિ વિતરણ કોઠો તૈયાર કરો.

(10) એક સંસ્થાએ ગામના 38 લોકો પાસેથી દરેકે કેટલા રૂપિયા 'દિવ્યાંગ વિકાસ ફંડ' માટે આપ્યાં તેની માહિતી નીચે પ્રમાણે છે.

101, 500, 401, 201, 301, 160, 210, 125, 175, 190, 450, 151,
101, 351, 251, 451, 151, 260, 360, 410, 150, 125, 161, 195,
351, 170, 225, 260, 290, 310, 360, 425, 420, 100, 105, 170,
250, 100.

(i) 100–149, 150–199, 200–249,.. આ પ્રમાણે વર્ગો લઈ વર્ગીકૃત આવૃત્તિ વિતરણ કોઠો તૈયાર કરો.

(ii) કોઠા પરથી 350 રૂપિયા કે તેથી વધુ ફંડ આપનારની સંખ્યા શોધો.

જાણી લઈએ.

ઉપલી વર્ગ મર્યાદા કરતાં ઓછી સંચિત આવૃત્તિ કોઠો (Less than cumulative frequency)

ઉદા. ધોરણ 9 ના એક શાળાના 50 વિદ્યાર્થીઓએ પ્રથમ ઘટક પરીક્ષામાં ગણિતમાં 40માંથી મેળવેલા ગુણનો આવૃત્તિ વિતરણ કોઠો નીચે આપ્યો છે.

વર્ગ	આવૃત્તિ (વિદ્યાર્થી સંખ્યા) (f)
0-10	02
10-20	12
20-30	20
30-40	16
	કુલ N = 50

(1) કોઠો પરથી નીચેની ખાલી જગ્યા પૂરો.

(i) 10 થી 20 આ વર્ગની નીચલી વર્ગ મર્યાદા □ અને ઉપલી વર્ગમર્યાદા □ છે.

(ii) 10 કરતાં ઓછા ગુણ મેળવનારા વિદ્યાર્થીઓ કેટલાં? [2]

(iii) 20 કરતાં ઓછા ગુણ મેળવનારા વિદ્યાર્થીઓ કેટલાં? 2 + □ = 14

(iv) 30 કરતાં ઓછા ગુણ મેળવનારા વિદ્યાર્થીઓ કેટલાં? □ + □ = 34

(v) 40 કરતાં ઓછા ગુણ મેળવનારા વિદ્યાર્થીઓ કેટલાં? □ + □ = 50

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

એકાદ વિશિષ્ટ વર્ગની આવૃત્તિ અને તેના પહેલાના બધા વર્ગની આવૃત્તિના સરવાળાને તે વર્ગની ઉપલી મર્યાદાથી 'ઓછી સંચિત આવૃત્તિ' કહે છે. ટૂંકમાં તે '(Less than cumulative frequency)-ના કરતા ઓછી સંચિત આવૃત્તિ' એમ લખાય છે.

ઉપલી વર્ગ મર્યાદા કરતાં ઓછી સંચિત આવૃત્તિનો અર્થ

વર્ગ (ગુણ)	આવૃત્તિ	-ના કરતા ઓછી સંચિત આવૃત્તિ
0-10	2	2
10-20	12	2 + 12 = □
20-30	20	□ +20=34
30-40	16	34 + □ =50
		કુલ 50

વર્ગ	સંચિત આવૃત્તિ	ઉપલી વર્ગ મર્યાદાથી ઓછી
0-10	2	2 વિદ્યાર્થીઓને 10 કરતાં ઓછા ગુણ મળ્યા
10-20	14	14 વિદ્યાર્થીઓને 20 કરતાં ઓછા ગુણ મળ્યા
20-30	34	34 વિદ્યાર્થીઓને 30 કરતાં ઓછા ગુણ મળ્યા
30-40	50	50 વિદ્યાર્થીઓને 40 કરતાં ઓછા ગુણ મળ્યા
	કુલ 50	

(2) 'નીચલી વર્ગમર્યાદા જેટલી અથવા તેથી વધારે સંચિત આવૃત્તિ' કોઠો પૂર્ણ કરો.

વર્ગ	આવૃત્તિ	સંચિત આવૃત્તિ
0-10	2	50
10-20	12	50 - 2 = 48
20-30	20	48 - 12 = 36
30-40	16	36 - 20 = 16
કુલ 50		

વર્ગ	સંચિત આવૃત્તિ	નીચલી વર્ગમર્યાદા કે તેથી વધુ સંચિત આવૃત્તિનો અર્થ
0-10	50	50 વિદ્યાર્થીઓને 0 કે 0 તેથી વધુ ગુણ મળ્યા
10-20	48	48 વિદ્યાર્થીઓને 10 કે 10 તેથી વધુ ગુણ મળ્યા
20-30	36	36 વિદ્યાર્થીઓને 20 કે 20 તેથી વધુ ગુણ મળ્યા
30-40	16	16 વિદ્યાર્થીઓને 30 કે 30 તેથી વધુ ગુણ મળ્યા

ઉદા. એક સ્પોર્ટ્સ્ ક્લબના ટેબલ ટેનિસની મૅચ માટે આવેલા ખેલાડીઓની ઉંમરનું વર્ગીકરણ નીચે પ્રમાણે છે. તે પરથી નીચેનો –ના કરતાં વધુ સંચિત આવૃત્તિ કોઠો પૂર્ણ કરો.

ઉકેલ : નીચલી વર્ગમર્યાદા કે તેથી વધુ સંચિત આવૃત્તિ કોઠો.

ઉંમર (વર્ષમાં)	તાળાની નિશાની	આવૃત્તિ (વિદ્યાર્થી સંખ્યા)	– ના જેટલી કે તેથી વધુ સંચિત આવૃત્તિ
10-12	卌 ||||	09	50
12 – 14	卌 卌 卌 卌 |||	□	□ - 9 = 41
14-16	卌 卌 |||	□	41 - 23 = □
16 – 18	卌	05	□ - 13 = □
		કુલ N = 50	

મહાવરાસંગ્રહ 7.4

(1) નીચેનો સંચિત આવૃત્તિ કોઠો પૂર્ણ કરો.

વર્ગ ઊંચાઈ (સેમીમાં)	આવૃત્તિ (વિદ્યાર્થી સંખ્યા)	– ના કરતાં ઓછી સંચિત આવૃત્તિ
150-153	05	05
153-156	07	05+ □ = □
156-159	15	□ + 15 = □
159-162	10	□ + □ = 37
162-165	05	37+5=42
165-168	03	□ + □ = 45
	કુલ N = 45	

(2) નીચેનો સંચિત આવૃત્તિ કોઠો પૂર્ણ કરો.

વર્ગ (માસિક આવક રૂ.માં)	આવૃત્તિ (વ્યક્તિઓની સંખ્યા)	-ના જેટલી કે તેથી વધુ સંચિત આવૃત્તિ
1000-5000	45	....
5000-10000	19	....
10000-15000	16	....
15000-20000	02	....
20000-25000	05	....
	કુલ N = 87	

(3) એક વર્ગના 62 વિદ્યાર્થીઓએ ગણિતમાં 100 માંથી મેળવેલા ગુણ નીચે પ્રમાણે છે.
0-10, 10-20. એ પ્રમાણે વર્ગ લઈ આવૃત્તિ કોઠો અને સંચિત આવૃત્તિ (-ના જેટલો કે તેથી વધુ) કોઠો તૈયાર કરો.

55,	60,	81,	90,	45,	65,	45,	52,	30,	85,	20,	10,
75,	95,	09,	20,	25,	39,	45,	50,	78,	70,	46,	64,
42,	58,	31,	82,	27,	11,	78,	97,	07,	22,	27,	36,
35,	40,	75,	80,	47,	69,	48,	59,	32,	83,	23,	17,
77,	45,	05,	23,	37,	38,	35,	25,	46,	57,	68,	45,
47,	49										

(i) 40 કે 40 થી વધુ ગુણ મેળવનારા વિદ્યાર્થીઓ કેટલાં?
(ii) 90 કે 90 થી વધુ ગુણ મેળવનારા વિદ્યાર્થીઓ કેટલાં?
(iii) 60 કે 60 થી વધુ ગુણ મેળવનારા વિદ્યાર્થીઓ કેટલાં?
(iv) 0-10 આ વર્ગની (-થી વધારે) સંચિત આવૃત્તિ કેટલાં?

(4) ઉપરના ઉદા. (3) માંથી ઓછી સંચિત આવૃત્તિ કોઠો તૈયાર કરો અને તે પરથી નીચેના પ્રશ્નોના ઉત્તર લખો.
(i) 40 કરતાં ઓછા ગુણ મેળવનારા વિદ્યાર્થીઓ કેટલાં?
(ii) 10 કરતાં ઓછા ગુણ મેળવનારા વિદ્યાર્થીઓ કેટલાં?
(iii) 60 કરતાં ઓછા ગુણ મેળવનારા વિદ્યાર્થીઓ કેટલાં?
(iv) 50-60 આ વર્ગની (..થી ઓછી) સંચિત આવૃત્તિ કેટલી છે?

જાણી લઈએ.

કેન્દ્રીય પ્રવૃત્તિ : (Measures of central tendancy)

કેન્દ્રીય પ્રવૃત્તિ : સર્વેક્ષણથી મેળવેલી સંખ્યાકીય સામગ્રીમાં સામાન્ય રીતે એક ગુણધર્મ મળી આવે છે.

તે એ કે, એકાદ સંખ્યાની આસપાસ ઇતર સંખ્યાઓની ભીડ (ગર્દી) વધારે થયેલી દેખાય છે. સમૂહના આ ગુણધર્મને તેની કેન્દ્રીય પ્રવૃત્તિ કહે છે.

સમૂહમાંની સંખ્યા જે સંખ્યાની આસપાસ અન્ય સંખ્યાઓની ભીડ થયેલી જણાય તે સંખ્યા તે સમૂહનું પ્રતિનિધિત્વ કરે છે એમ મનાય છે. આવી સંખ્યાને **કેન્દ્રીય પ્રવૃત્તિનું પરિણામ** (માપ) કહે છે.

(1) મધ્ય (Mean): સામગ્રીની બધી સંખ્યાની અંક ગણિતીય સરાસરીને તે સામગ્રીનો મધ્ય કહે છે.

$$\text{સામગ્રીનો 'મધ્ય'} = \frac{\text{સામગ્રીના બધા પ્રાપ્તાંકોનો સરવાળો}}{\text{સામગ્રીના પ્રાપ્તાંકની કુલ સંખ્યા}}$$

ઉદા. (1) 25, 30, 27, 23 અને 25 નો મધ્ય શોધો.

ઉકેલ : $\frac{25+30+27+23+25}{5} = \frac{130}{5} = 26$

ઉદા. (2) ધોરણ 9 ના 35 વિદ્યાર્થીઓને પ્રથમ સત્ર પરીક્ષામાં બીજગણિતમાં 40 માંથી નીચે પ્રમાણે ગુણ મળ્યા છે. તે પરથી ગુણનો મધ્ય શોધો.

40, 35, 30, 25, 23, 20, 14, 15, 16, 20, 17, 37,
37, 20, 36, 16, 30, 25, 25, 36, 37, 39, 39, 40,
15, 16, 17, 30, 16, 39, 40, 35, 37, 23, 16.

ઉકેલ : અહીં પ્રાપ્તાંકોની સંખ્યા વધુ હોવાથી સરવાળો કરી શકાશે પણ ગણતરી અઘરી થશે. તેથી 3 વિદ્યાર્થીઓને 30 ગુણ મળ્યા છે. તે 30 + 30 + 30 = 90 કરવા કરતાં 30 × 3 = 90 કરવું વધારે સહેલું છે. તે માટે આવૃત્તિ કોઠો ઉપયોગી બને છે.

સંખ્યાશાસ્ત્રમાં $\sum_{i=1}^{n}$ આ ચિહ્ન વાપરવું સગવડ ભર્યું છે. $\sum_{i=1}^{n} f_i x_i$ નો અર્થ સમજી લઈએ.

i ધનપૂર્ણાંક સંખ્યા છે.

f_i વિદ્યાર્થીઓ છે દરેકને x_i ગુણ મળ્યાં છે, એમ માનીએ. Σ (સિગ્મા) આ ચિહ્ન સરવાળા માટે વપરાય છે. $\sum_{i=1}^{n}$ આ ચિહ્ન i ની 1 થી n સુધીની કિંમત માટેના n પદોનો સરવાળો દર્શાવે છે.

ગુણ	વિદ્યાર્થી સંખ્યા	$f_i \times x_i$
14	1	14 × 1 = 14
15	2	15 × 2 = ...
16	5	16 × .... = ...
17	2	17 × 2 = 34
20	3	.... × 3 = ...
23	2	23 × 2 = ...
25	3	25 × 3 = ...
30	3	.... × .... = ...
35	2	35 × 2 = 70
36	2	.... × .... = ...
37	4	..... × .... = ...
39	3	39 × 3 = 117
40	3	.... × .... = 120
	N= ☐	$\sum f_i x_i = 956$

મધ્ય $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{N} = \frac{956}{35}$

$= 27.31$ (અંદાજે)

∴ આપેલી સામગ્રીનો મધ્ય 27.31 છે.

(2) મધ્યક (Median): સામગ્રીમાંની સંખ્યા ચઢતા (કે ઉતરતાં) ક્રમમાં માંડવી.આ માંડણીમાં મધ્યમાં આવતાં પ્રાપ્તાંકને મધ્યક કહે છે.

સામગ્રીમાં પ્રાપ્તાંકની સંખ્યા સમ હોય તો મધ્યમાં આવેલી બે સંખ્યાની સરાસરીને સામગ્રીનો મધ્યક કહે છે.

ઉદા. (1) 72, 66, 87, 92, 63, 78, 54 આ સામગ્રીનો મધ્યક શોધો.

ઉકેલ : આપેલા પ્રાપ્તાંક ચઢતાક્રમે લખો.

54, 63, 66, **72**, 78, 87, 92

આ માંડણીમાં ચોથી સંખ્યા મધ્યમાં આવે છે તે 72 છે.

∴ આપેલી સામગ્રીનો મધ્યક = 72

ઉદા. (2) 30, 25, 32, 23, 42, 36, 40, 33, 21, 43 આ સામગ્રીનો મધ્યક શોધો.

ઉકેલ : આપેલા પ્રાપ્તાંક ચઢતાક્રમે લખો.

21, 23, 25, 30, **32**, **33**, 36, 40, 42, 43

અહીં પ્રાપ્તાંકની સંખ્યા 10 એટલે સમ છે.

∴ પાંચમી અને છઠ્ઠી સંખ્યા મધ્યમાં આવશે તે અનુક્રમે 32 અને 33 છે.

∴ સામગ્રીનો મધ્યક = $\frac{32+33}{2} = \frac{65}{2} = 32.5$

વિચાર કરીએ.

સામગ્રીમાં પ્રાપ્તાંકની સંખ્યા n હોય ત્યારે,

(i) n વિષમ હોય તો કેટલામો પ્રાપ્તાંક મધ્યક થશે?

(ii) n સમ હોય ત્યારે મધ્યક શોધવા માટે કયા બે પ્રાપ્તાંકની સરાસરી લેવી પડશે?

(3) બહુલક (Mode): સામગ્રીમાં સૌથી વધુ વખત આવતાં પ્રાપ્તાંકને સામગ્રીનો બહુલક **(Mode)** કહે છે.

ઉદા. (1) 90, 55, 67, 55, 75, 75, 40, 35, 55, 95 આ સામગ્રીનો બહુલક શોધો.

ઉકેલ : સામગ્રીને ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવતાં કયો પ્રાપ્તાંક સૌથી વધુ વખત આવ્યો, તે જાણવું સરળ બનશે.

આપેલા પ્રાપ્તાંક ચઢતાક્રમે લખો : 35, 40, 55, 55, 55, 67, 75, 75, 90, 95

સૌથી વધુ વખત આવેલો પ્રાપ્તાંક = 55

∴ આપેલી સામગ્રીનો બહુલક 55 છે.

ઉદા. (2) એક કારખાનામાંના કામગારોની ઉંમર દર્શાવતાં કોઠા પરથી ઉંમરનો બહુલક શોધો.

ઉંમર (વર્ષ)	19	21	25	27	30
કામગાર	5	15	13	15	7

ઉકેલ : અહીં સૌથી વધુ આવૃત્તિ 15 છે જે બે વખત આવેલી છે.

∴ બહુલક = 21 અને 27

∴ ઉંમરનો બહુલક 21 અને 27 વર્ષ છે.

મહાવરાસંગ્રહ 7.5

(1) મુકુંદનું 7 વર્ષનું સોયાબીનનું દર એકરે ઉત્પાદન ક્વિન્ટલમાં 10,7,5,3,9,6,9 છે તો તે પરથી ઉત્પાદનનો મધ્ય શોધો.

(2) આપેલી સામગ્રીનો મધ્યક શોધો. 59,75,68,70,74,75,80

(3) ગણિતના ગૃહપાઠોમાં 7 વિદ્યાર્થીઓને 100 માંથી મળેલાં ગુણ નીચે પ્રમાણે છે.

99, 100, 95, 100, 100, 80, 90 તે પરથી મળેલા ગુણનો બહુલક શોધો.

(4) એક કારખાનાના 30 કામદારોને મળતો માસિક પગાર રૂપિયામાં નીચે પ્રમાણે છે.

5000, 7000, 3000, 4000, 4000, 3000, 3000, 3000, 8000, 4000,
4000, 9000, 3000, 5000, 5000, 4000, 4000, 3000, 5000, 5000,
6000, 8000, 3000, 3000, 6000, 7000, 7000, 6000, 6000, 4000.

આ પરથી કામદારોના માસિક પગારનો મધ્ય શોધો.

(5) એક ટોપલીમાં 10 ટમેટાંનું દરેકનું વજન ગ્રામમાં 60, 70, 90, 95, 50, 65,70, 80, 85, 95 આ પ્રમાણે છે. તે પરથી ટામેટાંના વજનનો મધ્યક શોધો.

(6) એક હૉકી ખેલાડીએ 9 મૅચમાં કરેલા ગોલ નીચે પ્રમાણે છે.

5, 4, 0, 2, 2, 4, 4, 3, 3 તે પરથી મધ્ય, મધ્યક, બહુલક શોધો.

(7) 50 પ્રાપ્તાંકોનો મધ્ય 80 છે. પરંતુ તેમાંનો એક વખત આવતો '19' આ પ્રાપ્તાંક ભૂલથી '91' લેવાઈ ગયો એ પછી ધ્યાનમાં આવ્યું તો ભૂલ સુધાર્યા પછીનો મધ્ય કેટલો ?

(8) નીચે 10 પ્રાપ્તાંક ચઢતા ક્રમમાં છે. તેનો મધ્યક 11 છે. 2, 3, 5, 9, $x + 1$, $x + 3$, 14, 16, 19, 20 આ પરથી x ની કિંમત શોધો.

(9*) 35 પ્રાપ્તાંકોનો મધ્ય 20 છે. તે પૈકી પહેલાં 18 પ્રાપ્તાંકોનો મધ્ય 15 છે અને છેલ્લાં 18 પ્રાપ્તાંકોનો મધ્ય 25 છે તો 18-મો પ્રાપ્તાંક કેટલો હશે?

(10) પાંચ પ્રાપ્તાંકનો મધ્ય 50 છે. તે પૈકી એક પ્રાપ્તાંક ઓછો થાય તો મધ્ય 45 થાય છે તો તે પ્રાપ્તાંક કયો?

(11*) એક વર્ગમાં 40 વિદ્યાર્થીઓ પૈકી 15 છોકરાઓ છે. એક પરીક્ષામાં છોકરાઓને મળેલાં ગુણનો મધ્ય 33 અને છોકરીઓના ગુણનો મધ્ય 35 છે. તો વર્ગના કુલ વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલા ગુણનો મધ્ય કેટલો? તે શોધો.

(12) 10 વિદ્યાર્થીઓના કિલોગ્રામમાં વજન નીચે પ્રમાણે છે.

40, 35, 42, 43, 37, 35, 37, 37, 42, 37 તે પરથી બહુલક શોધો.

(13) નીચેના કોઠામાં કેટલાંક કુટુંબમાંના 14 વર્ષની નીચેના ઉંમર ધરાવતા બાળકોની સંખ્યા દર્શાવી છે. તે પરથી 14 વર્ષની નીચેના બાળકોની સંખ્યાનો બહુલક શોધો.

બાળકોની સંખ્યા	1	2	3	4
કુટુંબો (આવૃત્તિ)	15	25	5	5

(14) નીચેની સામગ્રીનો બહુલક શોધો.

પ્રાપ્તાંક (ગુણ)	35	36	37	38	39	40
વિદ્યાર્થી સંખ્યા (આવૃત્તિ)	09	07	09	04	04	02

'કેન્દ્રીય પ્રવૃત્તિનું કયુ પરિમાણ લેવું યોગ્ય થશે?' આ પ્રશ્નનો ઉત્તર એ છે, કે તે કયા હેતુ માટે ઉપયોગમાં લેવાશે તેનાથી સંબંધિત છે.

ધારોકે ક્રિકેટના એકાદ ખેલાડીએ સતત 11 મૅચમાં અનુક્રમે 41, 58, 35, 80, 23, 12, 63, 48, 107, 9 અને 73 રન કર્યા. તેની કુશળતા નક્કી કરતી વખતે તેણે દરેક મૅચમાં કરેલાં રન વિચારમાં લેવા જોઈએ. તેથી તેણે કરેલા રનની કેન્દ્રીય પ્રવૃત્તિ 'મધ્ય' ના પરિમાણ પરથી નક્કી કરવી યોગ્ય ગણાશે.

તેમજ કપડાં તૈયાર કરનારી એકાદ કંપનીએ કયા માપના શર્ટ વધારે સીવવા તે નક્કી કરવા માટે (34, 36, 38, 40, 42, 44 પૈકી) કયા માપના શર્ટ અધિકાધિક લોકો વાપરે છે તે સર્વેક્ષણથી શોધવું પડે. એટલે કેન્દ્રપ્રવૃત્તિનું 'બહુલક' આ પરિમાણ નક્કી કરવું યોગ્ય ગણાશે.

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 7

(1) પ્રશ્નોના જવાબ માટે આપેલા પર્યાયમાંથી યોગ્ય પર્યાય પસંદ કરીને લખો.

(i) નીચેના પૈકી કઈ સામગ્રી પ્રાથમિક નથી.

(A) વર્ગની મુલાકાત લઈને હાજરીની માહિતી લીધી.

(B) પ્રત્યક્ષ મુલાકાત લઈને દરેક ઘરનાં વ્યક્તિઓની સંખ્યાની માહિતી ભેગી કરી છે.

(C) તલાટી પાસેથી ગામના દરેક ખેડૂતની સોયાબીનના વાવણી-ક્ષેત્રની માહિતી ભેગી કરી.

(D) પ્રત્યક્ષ જઈને નદી-નાળાની સ્વચ્છતાની માહિતી લીધી.

(ii) 25-35 આ વર્ગની ઉપલી વર્ગમર્યાદા કઈ?

(A) 25 (B) 35 (C) 60 (D) 30

(iii) 25-35 આ વર્ગનો વર્ગમધ્ય કેટલો?

(A) 25 (B) 35 (C) 60 (D) 30

(iv) 0-10, 10-20, 20-30 .... આ વર્ગ લેતાં 10 આ પ્રાપ્તાંકનો સમાવેશ કયા વર્ગમાં કરશો?

(A) 0-10 (B) 10-20 (C) 0-10 અને 10-20 બંને વર્ગમાં (D) 20-30

(v*) જો $\bar{x}$ એ $x_1, x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots x_n$ અને $\bar{y}$ એ $y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots y_n$ નો મધ્ય હોય અને $\bar{z}$ એ $x_1, x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots x_n, y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots y_n$ નો મધ્ય હોય તો $\bar{z} = ?$

(A) $\frac{\bar{x}+\bar{y}}{2}$ (B) $\bar{x}+\bar{y}$ (C) $\frac{\bar{x}+\bar{y}}{n}$ (D) $\frac{\bar{x}+\bar{y}}{2n}$

(vi*) પાંચ સંખ્યાનો મધ્ય 50 છે. તેમાંની 4 સંખ્યાઓનો મધ્ય 46 છે તો પાંચમી સંખ્યા કઈ?

(A) 4 (B) 20 (C) 434 (D) 66

(vii*) 100 પ્રાપ્તાંકનો 40 મધ્ય છે. જો 9 માંનો પ્રાપ્તાંક 30 છે તેને બદલે 70 લઈએ તો નવો મધ્ય કેટલો?

(A) 40.6 (B) 40.4 (C) 40.3 (D) 40.7

(viii) 19, 19, 15, 20, 25, 15, 20, 15 આ સામગ્રીનો 'બહુલક' કયો?

(A) 15 (B) 20 (C) 19 (D) 25

(ix) 7, 10, 7, 5, 9, 10 આ સામગ્રીનો મધ્ય કયો?

(A) 7 (B) 9 (C) 8 (D) 10

(x) નીચેના કોઠા પરથી 30-40 આ વર્ગની ઉપલી વર્ગમર્યાદા ઓછી સંચિત આવૃત્તિ કેટલી?

વર્ગ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
આવૃત્તિ	7	3	12	13	2

(A) 13 (B) 15 (C) 35 (D) 22

(2) 20 કર્મચારીઓનાં પગારનો મધ્ય 10,250 રૂપિયા છે. જો તેમાં કાર્યાલય પ્રમુખનો પગાર ઉમેરીએ તો મધ્ય 750 રૂપિયા વધે છે તો કાર્યાલય પ્રમુખનો પગાર શોધો.

(3) નવ સંખ્યાનો મધ્ય 77 છે તેમાં હજી એક સંખ્યા ઉમેરીએ તો મધ્ય 5 વધે છે તો તે સંખ્યા કઈ?

(4) એક શહેરનું એક મહિનાનું મહત્તમ તાપમાન અંશ સેલ્સિયસમાં નીચે પ્રમાણે છે. યોગ્ય વર્ગ બનાવી વર્ગીકૃત આવૃત્તિ વિતરણ કોઠો (અખંડ વર્ગ લઈને) તૈયાર કરો.

29.2, 29.0, 28.1, 28.5, 32.9, 29.2, 34.2, 36.8, 32.0, 31.0,
30.5, 30.0, 33, 32.5, 35.5, 34.0, 32.9, 31.5, 30.3, 31.4,
30.3, 34.7, 35.0, 32.5, 33.5, 29.0, 29.5, 29.9, 33.2, 30.2.

કોઠા પરથી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ લખો.

(i) મહત્તમ તાપમાન $34^{\circ}c$ થી ઓછું હોય એવા દિવસો કેટલા?

(ii) મહત્તમ તાપમાન $34^{\circ}c$ થી વધારે હોય એવા દિવસો કેટલા?

(5) જો નીચેના પ્રાપ્તાંકોનો મધ્ય 20.2 હોય તો p ની કિંમત શોધો.

x_i	10	15	20	25	30
f_i	6	8	p	10	6

(6) મૉડેલ હાઈસ્કૂલ નાંદપૂરના ધોરણ -9 ના 68 વિદ્યાર્થીઓએ ગણિતની લેખિત પરીક્ષામાં 80 માંથી મેળવેલા ગુણ નીચે પ્રમાણે છે.

70, 50, 60, 66, 45, 46, 38, 30, 40, 47, 56, 68,
80, 79, 39, 43, 57, 61, 51, 32, 42, 43, 75, 43,
36, 37, 61, 71, 32, 40, 45, 32, 36, 42, 43, 55,
56, 62, 66, 72, 73, 78, 36, 46, 47, 52, 68, 78,
80, 49, 59, 69, 65, 35, 46, 56, 57, 60, 36, 37,
45, 42, 70, 37, 45, 66, 56, 47

30-40, 40-50... આ પ્રમાણે વર્ગ લઈ **'ઉપલી વર્ગમર્યાદાથી ઓછી સંચિત આવૃત્તિ'** દર્શાવતો કોઠો તૈયાર કરો.

તે કોઠાને આધારે નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ લખો.

(i) 80 કરતાં ઓછા ગુણ મેળવનારા વિદ્યાર્થીઓ કેટલાં?

(ii) 40 કરતાં ઓછા ગુણ મેળવનારા વિદ્યાર્થીઓ કેટલાં?

(iii) 60 કરતાં ઓછા ગુણ મેળવનારા વિદ્યાર્થીઓ કેટલાં?

(7) ઉદા. 6માંની સામગ્રીને આધારે 30-40, 40-50 .... એવા વર્ગ લઈને - **ના જેટલી કે વધુ સંચિત આવૃત્તિ કોઠો** તૈયાર કરો. તે પરથી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ શોધો.

(i) 70 કે 70 થી વધુ ગુણ મેળવનારા કેટલા?

(ii) 30 કે 30 થી વધુ ગુણ મેળવનારા કેટલા?

(8) નીચે 10 પ્રાપ્તાંક ચઢતા ક્રમમાં લખ્યાં છે.

45,47,50,52,x, x+2, 60,62,63,74 તેમનો મધ્યક 53 છે તો x ની કિંમત શોધો અને સામગ્રીનો મધ્ય તથા બહુલક શોધો.

◈◈◈

ગણિત ગમ્મત

પાસ્કલનો ત્રિકોણ (મેરુ પ્રસ્તર)

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

....

....

....

સંખ્યાનો ઉપરોક્ત આકૃતિબંધ ત્રિકોણાકાર માંડણીમાં છે. આ માંડણીને ‘પાસ્કલનો ત્રિકોણ’ કહે છે. તેમાં નીચેની ત્રણ ખાલી જગ્યાઓ તમે પૂરો આ માંડણીમાં આડી હરોળની સંખ્યા $(x + y)$ એ દ્વિપદીના ઘાતનાં વિસ્તરણમાં ક્રમસર આવતાં ફક્ત સહગુણકો છે. નીચેના વિસ્તરણ જુઓ.

$(x + y)^0 = 1$

$(x + y)^1 = 1x + 1y$

$(x + y)^2 = 1x^2 + 2xy + 1y^2$

$(x + y)^3 = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3$

$(x + y)^4 = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$

આ વિસ્તરણમાં x અને y ના ઘાતાંકનું નિરીક્ષણ કરો તે પરથી $(x + y)^{10}$ નો વિસ્તાર લખો.

ઉત્તર સૂચિ

1. ગણ

મહાવરાસંગ્રહ 1.1

(1) (i) $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ (ii) $\{2\}$ (iii) $\{-1, -2, -3, \ldots\}$ (iv) {સા, રે, ગ, મ, પ, ધ, ની}

(2) (i) ગણ $\frac{4}{3}$ નો ઘટક Q છે. (ii) ગણ -2 નો ઘટક N નથી.

(iii) ગણ P નો ઘટક p એવો છે કે p એ વિષમ સંખ્યા છે.

(4) (i) A = {ચૈત્ર, વૈશાખ, જેઠ, અષાઢ, શ્રાવણ, ભાદરવો, આસો, કારતક, માગશર, પોષ, મહા, ફાગણ }

(ii) X = {C, O, M, P, L, E, N, T} (iii) Y = {નાક, કાન, આંખ, જીભ, ત્વચા}

(iv) Z = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}

(v) E = {એશિયા, આફ્રિકા, યુરોપ, ઑસ્ટ્રેલિયા, ઍંટાર્કિટકા, દક્ષિણ અમેરિકા, ઉત્તર અમેરિકા}

(5) (i) $A = \{x \mid x = n^2, n \in N, n \leq 10\}$ (ii) $B = \{x \mid x = 6n, n \in N, n < 9$ અથવા $n \leq 8\}$

(iii) C = {y | y એ 'SMILE' અથવા 'MILES' આ શબ્દના અક્ષર છે.}

(iv) D = {z | z એ અઠવાડિયાના દિવસો છે. }

(v) X = {y | y એ 'eat' અથવા 'tea' આ શબ્દના અક્ષર છે.}

મહાવરાસંગ્રહ 1.2

(1) A = B = C (2) A = B (3) ગણ A અને C એ ખાલી ગણ છે.

(4) (i), (iii), (iv), (v) આ ઉદાહરણના ગણ ખાલી ગણ છે (ii), (vi), (vii) ના ગણ અનંત ગણ છે.

મહાવરાસંગ્રહ 1.3

(1) (i), (ii), (iii), (v) વિધાનો અસત્ય અને (iv), (vi) વિધાનો સત્ય છે.

(4) {1}, {3}, {2}, {7}, {1, 3}, {1, 2}, {1, 7}, {3, 2}, {3, 7}, {2, 7}, {1, 3, 2}, {1, 2, 7}, {3, 2, 7}, {1, 3, 2, 7} માંથી કોઈપણ 3.

(5) (i) $P \subseteq H$, $P \subseteq B$, $I \subseteq M$, $I \subseteq B$, $H \subseteq B$, $M \subseteq B$ (ii) ગણ B

(6) (i) N, W, I આમાંથી કોઈપણ ગણ (ii) N, W, I આમાંથી કોઈપણ ગણ

(7) ગણિતમાં 50% થી ઓછા ગુણ મેળવનાર વિદ્યાર્થીઓનો ગણ

મહાવરાસંગ્રહ 1.4

(1) n (B) = 21 (2) એક જ પીણું ન લેનાર વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા = 5

(3) કુલ વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા = 70

(4) ગિરિભ્રમણ અને આકાશદર્શન આ બંનેમાંથી એકપણ ન કરનાર વિદ્યાર્થીની સંખ્યા = 20

ફક્ત ગિરિભ્રમણ કરનાર વિદ્યાર્થી = 20, ફક્ત આકાશદર્શન કરનાર વિદ્યાર્થી = 70

(5) (i) $A = \{x, y, z, m, n\}$ (ii) $B = \{p, q, r, m, n\}$

(iii) $A \cup B = \{x, y, z, m, n, p, q, r\}$ (iv) $U = \{x, y, z, m, n, p, q, r, s, t\}$

(v) $A' = \{p, q, r, s, t\}$ (vi) $B' = \{x, y, z, s, t\}$ (vii) $(A \cup B)' = \{s, t\}$

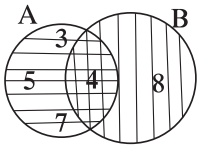
સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 1

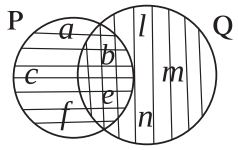
(1) (i) (C) (ii) (D) (iii) (C) (iv) (B) (v) (A) (vi) (A)

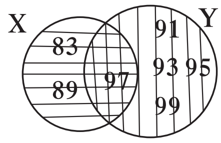
(2) (i) (A) (ii) (A) (iii) (B) (iv) (C)

(3) ફક્ત અંગ્રેજી બોલનાર 57, ફક્ત ફ્રેંચ બોલનાર 28, બંને ભાષા બોલનાર 15

(4) 135 (5) 12 (6) 4

(7) (i) 

(ii) 

(iii) 

(8) $S \subseteq X$, $V \subseteq X$, $Y \subseteq X$, $T \subseteq X$, $S \subseteq Y$, $S \subseteq V$, $S \subseteq T$, $V \subseteq T$, $Y \subseteq T$,

(9) $M \cup \phi = M$, $M \cap \phi = \phi$

(10) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13\}$, $A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ $B = \{1, 5, 8, 9, 10\}$
$M \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$, $A \cap B = \{1, 5\}$

(11) $n(A \cup B) = 16$

2. વાસ્તવિક સંખ્યા

મહાવરાસંગ્રહ 2.1

(1) ખંડિત : (i), (iii), (iv) અખંડિત આવૃત્તિ : (ii), (v)

(2) (i) 0.635 (ii) $0.\overline{25}$ (iii) $3.\overline{285714}$ (iv) 0.8 (v) 2.125

(3) (i) $\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{37}{99}$ (iii) $\frac{314}{99}$ (iv) $\frac{1574}{99}$ (v) $\frac{2512}{999}$

મહાવરાસંગ્રહ 2.2

(4) (i) −0.4, −0.3, 0.2 આવી અસંખ્ય સંખ્યા
(ii) −2.310, −2.320, −2.325 આવી અસંખ્ય સંખ્યા
(iii) 5.21, 5.22, 5.23 આવી અસંખ્ય સંખ્યા
(iv) −4.51, −4.55, −4.58 આવી અસંખ્ય સંખ્યા

મહાવરાસંગ્રહ 2.3

(1) (i) 3 (ii) 2 (iii) 4 (iv) 2 (v) 3

(2) (i), (iii), (vi) કરણી છે અને (ii), (iv), (v) કરણી નથી.

(3) સજાતીય કરણી : (i), (iii), (iv) અને વિજાતીય કરણી : (ii), (v), (vi)

(4) (i) $3\sqrt{3}$ (ii) $5\sqrt{2}$ (iii) $5\sqrt{10}$ (iv) $4\sqrt{7}$ (v) $2\sqrt{42}$

(5) (i) $7\sqrt{2} > 5\sqrt{3}$ (ii) $\sqrt{247} < \sqrt{274}$ (iii) $2\sqrt{7} = \sqrt{28}$
(iv) $5\sqrt{5} > 7\sqrt{2}$ (v) $4\sqrt{42} > 9\sqrt{2}$ (vi) $5\sqrt{3} < 9$ (vii) $7 > 2\sqrt{5}$

(6) (i) $13\sqrt{3}$ (ii) $10\sqrt{5}$ (iii) $24\sqrt{3}$ (iv) $\frac{12}{5}\sqrt{7}$

(7) (i) $18\sqrt{6}$ (ii) $126\sqrt{5}$ (iii) $6\sqrt{10}$ (iv) 80

(8) (i) 7 (ii) $\sqrt{\frac{5}{2}}$ (iii) $\sqrt{2}$ (iv) $\sqrt{62}$.

(9) (i) $\frac{3}{5}\sqrt{5}$ (ii) $\frac{\sqrt{14}}{14}$ (iii) $\frac{5\sqrt{7}}{7}$ (iv) $\frac{2}{9}\sqrt{3}$ (v) $\frac{11}{3}\sqrt{3}$

મહાવરાસંગ્રહ 2.4

(1) (i) $-3+\sqrt{21}$ (ii) $\sqrt{10}-\sqrt{14}$ (iii) $-18+13\sqrt{6}$

(2) (i) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{5}$ (ii) $\frac{3\left(2\sqrt{5}+3\sqrt{2}\right)}{2}$ (iii) $28-16\sqrt{3}$ (iv) $4-\sqrt{15}$

મહાવરાસંગ્રહ 2.5

(1) (i) 13 (ii) 5 (iii) 28 (2) 2 અથવા $\frac{4}{3}$ (ii) 1 અથવા 6 (iii) -2 અથવા 18 (iv) 0 અથવા -40

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 2

(1) (i) B (ii) D (iii) C (iv) D (v) A

(vi) C (vii) C (viii) C (ix) A (x) B

(2) (i) $\frac{555}{1000}$ (ii) $\frac{29539}{999}$ (iii) $\frac{9306}{999}$ (iv) $\frac{357060}{999}$ (v) $\frac{30189}{999}$

(3) (i) $-0.\overline{714285}$ (ii) $0.\overline{81}$ (iii) 2.2360679... (iv) $9.\overline{307692}$ (v) 3.625

(5) (i) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ (ii) $-\frac{5}{3}\sqrt{5}$

(6) (i) $\sqrt{2}$ (ii) $\sqrt{2}$ (iii) $\sqrt{3}$ (iv) $\sqrt{10}$ (v) $\sqrt{2}$ (vi) $\sqrt{11}$

(7) (i) $6\sqrt{3}$ (ii) $\frac{34}{3}\sqrt{3}$ (iii) $\frac{15}{2}\sqrt{6}$ (iv) $-25\sqrt{3}$ (v) $\frac{8}{3}\sqrt{3}$

(8) (i) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (ii) $\frac{2\sqrt{7}}{21}$ (iii) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ (iv) $\frac{3\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{37}$ (v) $\frac{6\left(4\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{23}$

3. બહુપદી

મહાવરાસંગ્રહ 3.1

(1) (i) નથી, કારણ કે $\frac{1}{y}$ માં y નો ઘાતાંક (-1) છે જે ઋણ સંખ્યા છે.

(ii) નથી, કારણ કે $5\sqrt{x}$ માં x નો ઘાતાંક $\left(\frac{1}{2}\right)$ છે જે અપૂર્ણાંક છે.

(iii) છે. (iv) નથી, કારણ કે $2m^{-2}$ માં ઘાતાંક (-2) છે. (v) છે.

(2) (i) 1 (ii) $-\sqrt{3}$, (iii) $-\frac{2}{3}$

(3) (i) x^7 (ii) $2x^{35}-7$ (iii) x^8-2x^5+3 આ ત્રણે ઉદાહરણોના આ પ્રમાણે અનેક ઉત્તરો આવી શકે.

(4) (i) 0 (ii) 0 (iii) 2 (iv) 10 (v) 1 (vi) 5 (vii) 3 (viii) 10

(5) (i) વર્ગ (ii) રેખિક (iii) રેખિક (iv) ઘન (v) વર્ગ (vi) ઘન

(6) (i) $m^3 + 5m + 3$ (ii) $y^5 + 2y^4 + 3y^3 - y^2 - 7y - \frac{1}{2}$

(7) (i) (1, 0, 0, −2) (ii) (5, 0) (iii) (2, 0, −3, 0, 7) (iv) $\left(\frac{-2}{3}\right)$

(8) (i) $x^2 + 2x + 3$ (ii) $5x^4 - 1$ (iii) $-2x^3 + 2x^2 - 2x + 2$

(9) વર્ગ બહુપદી : x^2; $2x^2 + 5x + 10$; $3x^2 + 5x$; ઘન બહુપદી : $x^3 + x^2 + x + 5$; $x^3 + 9$

રેખિક બહુપદી : $x + 7$; દ્વિપદી : $x + 7$, $x^3 + 9$; ત્રિપદી : $2x^2 + 5x + 10$; એકપદી : x^2

મહાવરાસંગ્રહ 3.2

(1) (i) $a + bx$ (ii) xy (iii) $10n + m$

(2) (i) $6x^3 - 2x^2 + 2x$ (ii) $-2m^4 + 2m^3 + 2m^2 + 3m - 6 + \sqrt{2}$ (iii) $5y^2 + 6y + 11$

(3) (i) $-6x^2 + 10x$ (ii) $10ab^2 + a^2b - 7ab$

(4) (i) $2x^3 - 4x^2 - 2x$ (ii) $x^8 + 2x^7 + 2x^5 - x^3 - 2x^2 - 2$ (iii) $-4y^4 + 7y^2 + 3y$

(5) (i) $x^3 - 64 = (x - 4)(x^2 + 4x + 16) + 0$

(ii) $5x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2 = (x^2 - x)(5x^3 + 9x^2 + 6x + 8) + (8x + 2)$

(6) $a^4 + 7a^2b^2 + 2b^4$

મહાવરાસંગ્રહ 3.3

(1) (i) ભાગાકાર = $2m + 7$, શેષ = 45

(ii) ભાગાકાર = $x^3 + 3x - 2$, શેષ = 9

(iii) ભાગાકાર = $y^2 + 6y + 36$, શેષ = 0

(iv) ભાગાકાર = $2x^3 - 3x^2 + 7x - 17$, શેષ = 51

(v) ભાગાકાર = $x^3 - 4x^2 + 13x - 52$, શેષ = 200

(vi) ભાગાકાર = $y^2 - 2y + 3$, શેષ = 2

મહાવરાસંગ્રહ 3.4

(1) 5 (2) 1 (3) $4a^2 + 20$ (4) −11

મહાવરાસંગ્રહ 3.5

(1) (i) −41 (ii) 7 (iii) 7 (2) (i) 1, 0, −8 (ii) 4, 5, 13 (iii) −2, 0, 10

(3) 0 (4) 2 (5) (i) 17 (ii) $2a^3 - a^2 - a$ (iii) 1544 (6) 92 (7) છે.

(8) 2 (9) (i) નથી. (ii) છે. (10) 30 (11) છે.

(13) (i) −3 (ii) 80

મહાવરાસંગ્રહ 3.6

(1) (i) $(x + 1)(2x - 1)$ (ii) $(m + 3)(2m - 1)$ (iii) $(3x + 7)(4x + 11)$

(iv) $(y - 1)(3y + 1)$ (v) $(x + \sqrt{3})(\sqrt{3}x + 1)$ (vi) $(x - 4)\left(\frac{1}{2}x - 1\right)$

(2) (i) $(x - 3)(x + 2)(x - 2)(x + 1)$ (ii) $(x - 13)(x - 2)$

(iii) $(x-8)(x+2)(x-4)(x-2)$ (iv) $(x^2-2x+10)(x^2-2x-2)$

(v) $(y^2+5y-22)(y+4)(y+1)$ (vi) $(y+6)(y-1)(y+4)(y+1)$

(v) $(x^2-8x+18)(x^2-8x+13)$

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 3

(1) (i) D (ii) D (iii) C (iv) A (v) C (vi) A (vii) D (viii) C (ix) A (x) A

(2) (i) 4 (ii) 0 (iii) 9

(3) (i) $7x^4-x^3+4x^2-x+9$ (ii) $5p^4+2p^3+10p^2+p-8$

(4) (i) (1, 0, 0, 0, 16) (ii) (1, 0, 0, 2, 3, 15)

(5) (i) $3x^4-2x^3+0x^2+7x+18$ (ii) $6x^3+x^2+0x+7$ (iii) $4x^3+5x^2-3x+0$

(6) (i) $10x^4+13x^3+9x^2-7x+12$ (ii) $p^3q+4p^2q+4pq+7$

(7) (i) $2x^2-7y+16$ (ii) x^2+5x+2

(8) (i) $m^7-4m^5+6m^4+6m^3-12m^2+5m+6$

(ii) $5m^5-5m^4+15m^3-2m^2+2m-6$

(9) બાકી = 19 (10) $m=1$ (11) કુલ લોકસંખ્યા $=10x^2+5y^2-xy$

(12) $b=\frac{1}{2}$ (13) $11m^2-8m+5$ (14) $-2x^2+8x+11$ (15) $2m+n+7$

4. ગુણોત્તર અને પ્રમાણ

મહાવરાસંગ્રહ 4.1

(1) (i) 6 : 5 (ii) 2 : 3 (iii) 2 : 3

(2) (i) 25 : 11 (ii) 35 : 31 (iii) 2 : 1 (iv) 10 : 17 (v) 2 : 1 (vi) 220 : 153

(3) (i) 3 : 4 (ii) 11 : 25 (iii) 1 : 16 (iv) 13 : 25 (v) 4 : 625

(4) 4 માણસો (5) (i) 60% (ii) 94% (iii) 70% (iv) 91% (v) 43.75%

(6) આભાની ઉંમર 18 વર્ષ; માતાની ઉંમર 45 વર્ષ (7) 6 વર્ષ (8) રેહાનાની આજની ઉંમર 8 વર્ષ

મહાવરાસંગ્રહ 4.2

(1) (i) અનુક્રમે 20, 49, 2.5 (ii) અનુક્રમે 7, 27, 2.25

(2) (i) $1:2\pi$ (ii) $2:r$ (iii) $\sqrt{2}:1$ (iv) 34 : 35

(3) (i) $\frac{\sqrt{5}}{3} < \frac{3}{\sqrt{7}}$ (ii) $\frac{3\sqrt{5}}{5\sqrt{7}} < \frac{\sqrt{63}}{\sqrt{125}}$ (iii) $\frac{5}{18} > \frac{17}{121}$

(iv) $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{48}} = \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{27}}$ (v) $\frac{9.2}{5.1} > \frac{3.4}{7.1}$

(4) (i) 80° (ii) અલ્બર્ટની આજની ઉંમર 25 વર્ષ, સલીમની આજની ઉંમર 45 વર્ષ

(iii) લંબાઈ 13.5 સેમી, પહોળાઈ 4.5 સેમી (iv) 124, 92 (v) 20, 18

(5) (i) 729 (ii) 45 : 7 (6) 2 : 125 (7) $x = 5$

મહાવરાસંગ્રહ 4.3

(1) (i) 22 : 13 (ii) 125 : 71 (iii) 316 : 27 (iv) 38 : 11

(2) (i) 3 : 5 (ii) 1 : 6 (iii) 7 : 43 (iv) 71 : 179 (3) 170 : 173

(4) (i) $x = 8$ (ii) $x = 9$ (iii) $x = 2$ (iv) $x = 6$ (v) $x = \frac{9}{14}$ (vi) $x = 3$

મહાવરાસંગ્રહ 4.4

(1) (i) 36, 22 (ii) 16, $2a - 2b + 2c$

(2) (i) 29 : 21 (ii) 23 : 7 (4) (i) $x = 2$ (ii) $y = 1$

મહાવરાસંગ્રહ 4.5

(1) 4 ઉમેરતાં (2) $x = \frac{347}{14}$ (3) 18, 12, 8 અથવા 8, 12, 18 (6) $\frac{x+y}{xy}$

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 4

(1) (i) B (ii) A (iii) B (iv) D (v) C

(2) (i) 7 : 16 (ii) 2 : 5 (iii) 5 : 9 (iv) 6 : 7 (v) 6 : 7

(3) (i) 1 : 2 (ii) 5 : 4 (iii) 1 : 1

(4) (i) અને (iii) પરંપરિત પ્રમાણમાં છે. (ii) અને (iv) પરંપરિત પ્રમાણમાં નથી. (5) $b = 9$

(6) (i) 7.4% (ii) 62.5% (iii) 73.33% (iv) 31.25% (v) 12%

(7) (i) 5 : 6 (ii) 85 : 128 (iii) 1 : 2 (iv) 50 : 1 (v) 3 : 5

(8) (i) $\frac{17}{9}$ (ii) 19 (iii) $\frac{35}{27}$ (iv) $\frac{13}{29}$

(11) $x = 9$

5. બે ચલવાળાં રેખિક સમીકરણો

મહાવરાસંગ્રહ 5.1

(3) (i) $x = 3;\ y = 1$ (ii) $x = 2;\ y = 1$ (iii) $x = 2;\ y = -2$

(iv) $x = 6;\ y = 3$ (v) $x = 1;\ y = -2$ (vi) $x = 7;\ y = 1$

મહાવરાસંગ્રહ 5.2

(1) 5 રૂપિયાની 30 નોટ અને 10 રૂપિયાની 20 નોટ છે.

(2) $\frac{5}{9}$ (3) પ્રિયાંકાની ઉંમર 20 વર્ષ, દીપિકાની ઉંમર 14 વર્ષ (4) 20 સિંહ, 30 મોર.

(5) શરૂઆતનો પગાર ₹ 3900, વાર્ષિક વધારો ₹ 150

(6) ₹ 4000 (7) 36 (8) $\angle A = 90^0$, $\angle B = 40^0$, $\angle C = 50^0$

(9) 480 સેમી (10) 10

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 5

(1) (i) A (ii) C (iii) C

(2) (i) $x = 2;\ y = 1$ (ii) $x = 5;\ y = 3$ (iii) $x = 8;\ y = 3$

(iv) $x = 1;\ y = -4$ (v) $x = 3;\ y = 1$ (vi) $x = 4;\ y = 3$

(3) (i) $x = 1;\ y = -1$ (ii) $x = 2;\ y = 1$ (iii) $x = 26;\ y = 18$ (iv) $x = 8;\ y = 2$

(4) (i) $x = 6;\ y = 8$ (ii) $x = 9;\ y = 2$ (iii) $x = \frac{1}{2};\ y = \frac{1}{3}$ (5) 35

(6) ₹ 69 (7) દરેકની માસિક આવક અનુક્રમે ₹ 1800 અને ₹ 1400

(8) લંબાઈ 347 એકમ, પહોળાઈ 207 એકમ (9) 40 કિમી / કલાક, 30 કિમી / કલાક

(10) (i) 54, 45 (ii) 36, 63 વગેરે

6. અર્થનિયોજન

મહાવરાસંગ્રહ 6.1

(1) ₹ 1200 (2) બીજા વર્ષ પછીનું રોકાણ ₹ 42,000 મૂળ રોકાણ પર સેંકડે 16 ખોટ થી.

(3) માસિક આવક ₹ 50,000 (4) શ્રી. ફર્નાંડિસ (5) ₹ 25,000

મહાવરાસંગ્રહ 6.2

(1) (i) આવકવેરો ભરવો પડશે નહિ. (ii) આવકવેરો ભરવો પડશે. (iii) આવકવેરો ભરવો પડશે.

(iv) આવકવેરો ભરવો પડશે. (v) આવકવેરો ભરવો પડશે નહિ.

(2) ₹ 9836.50

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 6

(1) (i) A (ii) B (2) આવક ₹ 8750

(3) હિરાલાલનો સેંકડે ફાયદો 41.86, રમણિકલાલનો સેંકડે ફાયદો 16.64, હિરાલાલનું રોકાણ ફાયદાકારક.

(4) ₹ 99383.75 (5) ₹ 4,00,000 (6) 12.5%

(7) રમેશની બચત ₹ 48000 ; સુરેશની બચત ₹ 51000 ; પ્રિતીની બચત ₹ 36000

(8) (i) ₹ 2,19,390 (ii) ₹ 7,725 (iii) આવક કરપાત્ર નથી.

7. સાંખ્યિકી

મહાવરાસંગ્રહ 7.2

(1) પ્રાથમિક સામગ્રી : (i), (iii), (iv) દુય્યમ સામગ્રી : (ii)

મહાવરાસંગ્રહ 7.3

(1) નીચલી વર્ગ મર્યાદા = 20, ઉપલી વર્ગ મર્યાદા = 25 (2) 37.5 (3) 7-13

મહાવરાસંગ્રહ 7.4

(3) (i) 38 (ii) 3 (iii) 19 (iv) 62 (4) (i) 24 (ii) 3 (iii) 43 (iv) 43

મહાવરાસંગ્રહ 7.5

(1) 7 ક્વિંટલ (2) 74 (3) 100 (4) ₹ 4900 (5) 75 ગ્રામ

(6) મધ્ય = 3, મધ્યમ = 3, બહુલક = 4 (7) 78.56 (8) $x = 9$ (9) 20 (10) 70

(11) 34.25 (12) 37 કિ.ગ્રામ (13) 2 (14) 35 અને 37

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 7

(1) (i) C (ii) B (iii) D (iv) B (v) A (vi) D
(vii) B (viii) A (ix) C (x) C

(2) ₹ 26000 (3) 127

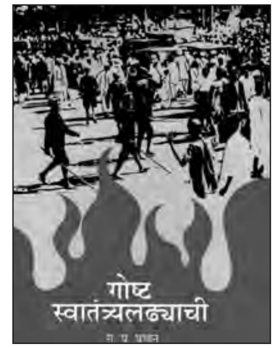
(4) (i) 24 (ii) 06

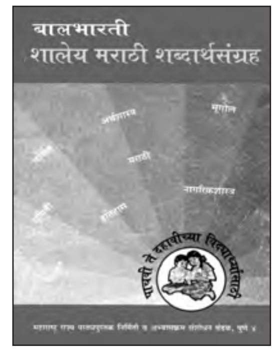
(5) P = 20

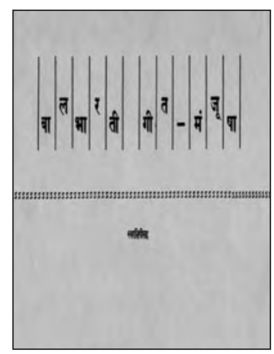
(6) (i) 66 (ii) 14 (iii) 45

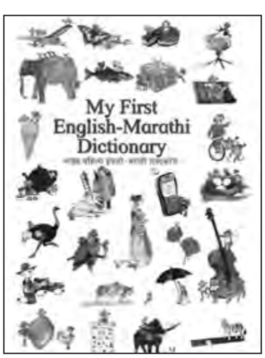
(7) (i) 11 (ii) 68

(8) $x = 52$, મધ્ય = 55.9, બહુલક = 52









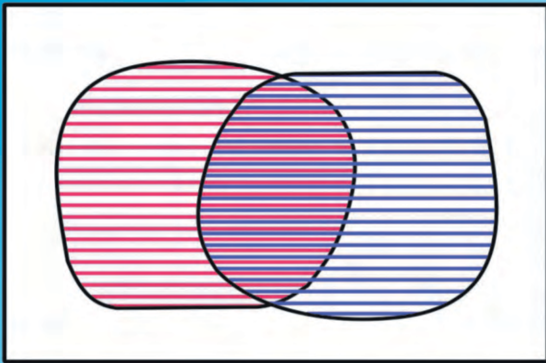
- पाठ्यपुस्तक मंडळाची वैशिष्ट्यपूर्ण पाठ्येत्तर प्रकाशने.
- नामवंत लेखक, कवी, विचारवंत यांच्या साहित्याचा समावेश.
- शालेय स्तरावर पूरक वाचनासाठी उपयुक्त.

पुस्तक मागणीसाठी www.ebalbharati.in, www.balbharati.in संकेत स्थळावर भेट द्या.

साहित्य पाठ्यपुस्तक मंडळाच्या विभागीय भांडारांमध्ये विक्रीसाठी उपलब्ध आहे.

ebalbharati

विभागीय भांडारे संपर्क क्रमांक : पुणे - ☎ २५६५९४६५, कोल्हापूर- ☎ २४६८५७६, मुंबई (गोरेगाव) - ☎ २८७७१८४२, पनवेल - ☎ २७४६२६४६५, नाशिक - ☎ २३९१५११, औरंगाबाद - ☎ २३३२१७१, नागपूर - ☎ २५४७७१६/२५२३०७८, लातूर - ☎ २२०९३०, अमरावती - ☎ २५३०९६५



$x + y = 4$

$2x + 3y = 3$

$x = \square, \quad y = \square$

મહારાષ્ટ્ર રાજ્ય પાઠ્યપુસ્તક નિર્મિતિ
અને અભ્યાસક્રમ સંશોધન મંડળ,
પુણે ૪૧૧ ००४.
गुजराती गणित इ.९ वी भाग-१ ₹64.00