ریاضی حصّہ - I

نویں جماعت

بھارت کا آئین

حصہ 4 الف

بنیادی فرائض

حصہ 51 الف

بنیادی فرائض – بھارت کے ہر شہری کا یہ فرض ہوگا کہ وہ...

(الف) آئین پر کاربند رہے اور اس کے نصب العین اور اداروں، قومی پرچم اور قومی ترانے کا احترام کرے۔

(ب) ان اعلیٰ نصب العین کو عزیز رکھے اور ان کی تقلید کرے جو آزادی کی تحریک میں قوم کی رہنمائی کرتے رہے ہیں۔

(ج) بھارت کے اقتدارِ اعلیٰ، اتحاد اور سالمیت کو مستحکم بنیادوں پر استوار کر کے ان کا تحفّظ کرے۔

(د) ملک کی حفاظت کرے اور جب ضرورت پڑے قومی خدمت انجام دے۔

(ہ) مذہبی، لسانی اور علاقائی وطبقاتی تفرقات سے قطع نظر بھارت کے عوام الناس کے مابین یک جہتی اور عام بھائی چارے کے جذبے کو فروغ دے نیز ایسی حرکات سے باز رہے جن سے خواتین کے وقار کو ٹھیس پہنچتی ہو۔

(و) ملک کی ملی جلی ثقافت کی قدر کرے اور اُسے برقرار رکھے۔

(ز) قدرتی ماحول کو جس میں جنگلات، جھیلیں، دریا اور جنگلی جانور شامل ہیں محفوظ رکھے اور بہتر بنائے اور جانداروں کے تئیں محبت وشفقت کا جذبہ رکھے۔

(ح) دانشورانہ رویے سے کام لے کر انسان دوستی اور تحقیقی واصلاحی شعور کو فروغ دے۔

(ط) قومی جائداد کا تحفظ کرے اور تشدد سے گریز کرے۔

(ی) تمام انفرادی اور اجتماعی شعبوں کی بہتر کارکردگی کے لیے کوشاں رہے تاکہ قوم متواتر ترقی وکامیابی کی منازل طے کرنے میں سرگرمِ عمل رہے۔

(ک) اگر ماں باپ یا ولی ہے، چھے سال سے چودہ سال تک کی عمر کے اپنے بچے یا وارڈ، جیسی بھی صورت ہو، کے لیے تعلیم کے مواقع فراہم کرے۔

سرکاری فیصلہ نمبر: ابھیاس – ۲۱۱۶/پر.نمبر ۴۳/۱۶) ایس ڈی – ۴ مورخہ ۲۵/اپریل ۲۰۱۶ء کے مطابق قائم کی گئی رابطہ کمیٹی کی نشست ۳/مارچ ۲۰۱۷ء میں اس کتاب کو درسی کتاب کے طور پر منظوری دی گئی۔

ریاضی

حصّہ – I

نویں جماعت

مہاراشٹر راجیہ پاٹھیہ پستک نرمتی وابھیاس کرم سنشودھن منڈل، پونہ – ۴۱۱۰۰۴

B3AP3F

اپنے اسمارٹ فون میں انسٹال کردہ Diksha App کے ذریعے درسی کتاب کے پہلے صفحے پر درج Q.R. code اسکین کرنے سے ڈیجیٹل درسی کتاب اور ہر سبق میں درج Q.R. code کے ذریعے متعلقہ سبق کی درس و تدریس کے لیے مفید سمعی و بصری ذرائع دستیاب ہوں گے۔

طبع اوّل : ۲۰۱۷ء
(2017)
دوسرا اصلاح شدہ ایڈیشن : ۲۰۲۱ء
(2021)

© مہاراشٹر راجیہ پاٹھیہ پستک نرمتی و ابھیاس کرم سنشودھن منڈل، پونہ - ۴۱۱۰۰۴
اس کتاب کے جملہ حقوق مہاراشٹر راجیہ پاٹھیہ پستک نرمتی و ابھیاس کرم سنشودھن منڈل، پونہ کے حق میں محفوظ ہیں۔ اس کتاب کا کوئی بھی حصہ ڈائرکٹر، مہاراشٹر راجیہ پاٹھیہ پستک نرمتی و ابھیاس کرم سنشودھن منڈل کی تحریری اجازت کے بغیر کسی بھی شکل میں شائع نہیں کیا جاسکتا۔

ریاضی مضمون کی کمیٹی

- ڈاکٹر منگلا نارلیکر (صدر)
- ڈاکٹر شریمتی جے شری اترے (رکن)
- شری رماکانت سرودے (رکن)
- شری داداسو سرڈے (رکن)
- شری سندیپ پنچ بھائی (رکن)
- شریمتی لتا تلے کر (رکن)
- شریمتی اجولا گوڈبولے (رکن سکریٹری)

ریاضی مضمون کی مجلس عاملہ

- شریمتی پوجا جادھو
- شری پرمود ٹھونبرے
- شری راجندر چودھری
- شری انا پاپریٹ
- شری شرپاد دیشپانڈے
- شری بنسی ہوالے
- شری اُمیش ریلے
- شری چندن کلکرنی
- شریمتی انیتا جاوے
- شریمتی باگیشری چوہان
- شری کلیان کڑیکر
- شری سندیش سوناونے
- شری سجیت شندے
- ڈاکٹر ہنومنت جگتاپ
- شری پرتاپ کاشد
- شری کاشی رام بویسانے
- شری پپو گاڑے
- شریمتی روہنی شرکے
- شری رام وہنیال کر
- جناب انصار شیخ
- شریمتی سورنا دیش پانڈے
- شری گنیش کولتے
- شری سریش داتے
- شری پرکاش جھینڈے
- شری شری کانت رتن پارکھی
- شری سوریہ کانت شہانے
- شری پرکاش کاپسے
- جناب سلیم ہاشمی
- شریمتی آریا بھڑے
- شری ملند بھاکرے
- شری گیانیشور ماشالکر
- شری لکشمن داونکر
- شری سدھیر پاٹل
- شری راجا رام بنڈگر
- شری پردیپ گوڈسے
- شری رویندر کھندارے
- شری ساگر سکوڑے

- شریمتی پراجکتی گوکھلے (مہمان رکن)
- شری وی۔ڈی۔گوڈبولے (مہمان رکن)
- شریمتی تروبین پوپٹ (مہمان رکن)

Urdu Translators
Mr. Ansari Abdul Hameed Abdul Majeed
Mr. Momin Al-Nasir Abdus Samad

Co-ordinator (Urdu)
Khan Navedul Haque Inamul Haque
Special Officer for Urdu,
M.S. Bureau of Textbooks, Balbharati - Pune

Co-ordinator (Marathi)
Smt. Ujwala S. Godbole
I/O. Special Officer for Mathematics
M.S. Bureau of Textbooks, Balbharati - Pune

Urdu D.T.P. & Layout
Altaf Ameen (Sadan Graphics)
Malegaon-423203

Cover, Art work & Designing
Dhan Shri Mukashi, Pune

Computer Designing
Sandeep Koli, Mumbai

Production
Shri Sachchitanand Aphale (C.P.O)
Shri Sanjay Kamble (Production Officer)
Shri Prashant Harne (Asst. Production Officer)

Paper
70, GSM Creamvowe

Print Order
N/PB/2021-22/10,000

Printer
SHREE PRINTERS, PUNE

Publisher
Shri Vivek Uttam Gosavi (Controller)
M.S. Bureau of Textbook Production,
Prabhadevi, Mumbai - 25

بھارت کا آئین

تمہید

ہم بھارت کے عوام متانت وسنجیدگی سے عزم کرتے ہیں کہ بھارت کو
ایک مقتدر سماج وادی غیر مذہبی عوامی جمہوریہ بنائیں
اوراس کے تمام شہریوں کے لیے حاصل کریں :

انصاف، سماجی ، معاشی اور سیاسی ؛

آزادی خیال، اظہار، عقیدہ ، دین اور عبادت ؛

مساوات بہ اعتبارِ حیثیت اور موقع ،

اوران سب میں

اُخوّت کو ترقّی دیں جس سے فرد کی عظمت اور **قوم کے اتحاد اور**
سالمیت کا تیقّن ہو؛

اپنی آئین ساز اسمبلی میں آج چھبّیس نومبر ۱۹۴۹ء کو یہ آئین
ذریعۂ ہٰذا اختیار کرتے ہیں،
وضع کرتے ہیں اوراپنے آپ پر نافذ کرتے ہیں۔

راشٹر گیت

جَنَ گَنَ مَنَ - اَدِھ نایَک جَیَہ ہے
بھارَتَ - بھاگیَہ وِدھاتا۔

پَنجاب، سِندُھ، گُجرات، مَراٹھا
دراوِڑ، اُتکَل، بَنگ،

وِندھیہ، ہِماچل، یَمُنا، گنگا،
اُچّھل جَل دِھ تَرَنگ،

تَو شُبھ نامے جاگے، تَو شُبھ آشِس ماگے،
گاہے تَو جَیَہ گاتھا،

جَنَ گَنَ منگل دایَک جَیَہ ہے،
بھارَتَ - بھاگیَہ وِدھاتا۔

جَیَہ ہے، جَیَہ ہے، جَیَہ ہے،
جَیَہ جَیَہ جَیَہ، جَیَہ ہے۔

عہد

بھارت میرا ملک ہے۔ سب بھارتی میرے بھائی اور بہنیں ہیں۔

مجھے اپنے وطن سے پیار ہے اور مَیں اس کے عظیم و گونا گوں وِرثے پر فخر محسوس کرتا ہوں۔ مَیں ہمیشہ اِس ورثے کے قابل بننے کی کوشش کروں گا۔

میں اپنے والدین، استادوں اور بزرگوں کی عزّت کروں گا اور ہر ایک سے خوش اخلاقی کا برتاؤ کروں گا۔

میں اپنے ملک اور اپنے لوگوں کے لیے خود کو وقف کرنے کی قسم کھاتا ہوں۔ اُن کی بہتری اور خوش حالی ہی میں میری خوشی ہے۔

پیش لفظ

عزیز طلبہ!

نویں جماعت میں آپ کا استقبال ہے۔

ابتدائی تعلیم کا نصاب مکمل کر کے آپ ثانوی سطح پر مطالعہ کی ابتدا کر رہے ہیں۔ آٹھویں جماعت تک ریاضی کے لیے صرف ایک ہی درسی کتاب تھی۔ اب آپ کو ریاضی حصہ I اور ریاضی حصہ II، ان کتابوں کا مطالعہ کرنا ہے۔

ریاضی حصہ I کی درسی کتاب میں اعداد کا علم، الجبرا، نیز کاروباری ریاضی، معاشی منصوبہ بندی اور شماریات جیسے شعبوں کے موضوعات کا تعارف کرایا گیا ہے۔ یہ حصے تمام طلبہ کے لیے کئی شعبوں میں سودمند ہوں گے۔ الجبرا اور شماریات کے تصورات اعلیٰ تعلیم کے مطالعہ کے لیے بنیادی حیثیت رکھتے ہیں۔

اس درسی کتاب میں تصورات کو سمجھنے کے لیے مختلف سرگرمیاں (عملی کام) دی ہوئی ہیں۔ اعادہ اور مشقی سیٹ میں بھی سرگرمیاں شامل ہیں۔ ان سب کو عملی طور پر آپ کو انجام دینا ہے۔ انٹرنیٹ پر کتاب میں دیے ہوئے تصورات کی کچھ مزید معلومات اور مثالیں ملتی ہیں تو آپ کو اسے بھی تلاش کرنا ہے۔ سرگرمیوں پر عمل کرتے وقت، مثالیں حل کرتے وقت، نتیجہ اخذ کرتے وقت آپ کو اپنے دوستوں سے بحث و مباحثہ کرنا ہے۔ بلاشبہ درسی کتاب کا تفصیلی مطالعہ، سرگرمیوں سے مربوط درس اور مشق ان تین مرحلوں سے ہی ریاضی کا سفر آپ خوشی اور مسرت کے ساتھ انجام دیں گے۔

آیئے تو پھر! اب اساتذہ، سرپرست، دوست احباب، انٹرنیٹ ان تمام کو ساتھ لے کر ریاضی کا مطالعہ کریں۔ اس مطالعہ و ریاضت کے لیے آپ کو نیک تمنائیں!

ڈاکٹر سنیل مگر

ڈائرکٹر

مہاراشٹر راجیہ پاٹھیہ پستک نرمتی

و ابھیاس کرم سنشودھن منڈل، پونہ

پونہ

مورخہ : ۲۸/اپریل ۲۰۱۷ء اکشہ ترتیہ

بھارتی شمسی تاریخ : ۸/ویشاکھ ۱۹۳۹

نویں جماعت ریاضی حصہ I نصاب سے طلبہ میں درج ذیل صلاحیتوں کا ارتقا متوقع ہے ۔

زمرہ	اکائی	متوقع صلاحیتیں
.1 اعداد کا علم	1.1 سیٹ	• عددی نظام میں سیٹ اور ضمنی سیٹ طے کرنا۔ • محدود اور لامحدود سیٹ پہچاننا۔ • سیٹ ظاہر کرنے کے لیے وین خاکہ کا استعمال کرنا • سیٹ پر مبنی مثالیں بنانا۔
	1.2 حقیقی اعداد اور جماعت بندی	• عددی خط پر ہر نقطہ سے مربوط ایک حقیقی عدد ہوتا ہے، سمجھنا۔ • مربعی جذری مقدار کا عدد پہچاننا اور اس پر (حسابی) عمل کرنا۔
.2 الجبرا	2.1 کثیر رکنیاں	• کثیر رکنیاں پہچاننا اور ان پر (حسابی) عمل کرنا۔
	2.2 دو متغیری خطی مساواتیں	• دو متغیروں کا استعمال کر کے عبارتی مثالیں حل کرنا۔
.3 کاروباری ریاضی	3.1 معاشی منصوبہ بندی	• مختلف قسم کے انکم ٹیکس (محصول) کی تحسیب سمجھنا اور انکم ٹیکس محسوب کرنا۔ • تنخواہ دار افراد کا انکم ٹیکس محسوب کرنا۔
	3.2 نسبت اور تناسب	• مساوی نسبتوں کے مسئلہ کا استعمال کرنا۔ • مستقیم تناسب اور معکوس تناسب پر مبنی عبارتی مثالیں حل کرنا۔
.4 شماریات	4.1 تعددی جدول	• جماعت بند اور غیر جماعت بند تعددی جدول بنانا۔ • اجتماعی تعددی جدول بنانا۔
	4.2 مرکزی رجحان کے پیمانے	• دیے ہوئے معطیات کا مرکزی رجحان پہچان کر ان پیمانوں کا استعمال کرنا۔

اساتذہ کے لیے ہدایات

نویں جماعت حصہ – I کی کتاب میں آئے ہوئے بنیادی تصورات مقرون سے مجرد کی طرف کے طریقے سے فروغ دیے گئے ہیں۔علم معاشیات کے تصور میں ریاضی سے مربوط تصورات، شماریات شعبہ کی وسعت ان تمام امور کا اساتذہ باریک بینی سے مطالعہ کریں۔اساتذہ جماعت میں دوران تدریس تجربات، سرگرمیاں (عملی کام)، بحث ومباحثہ، سوال و جواب، اجتماعی سرگرمیاں جیسے مختلف طریقوں کا استعمال کریں۔اس کے لیے اساتذہ درسی کتاب کا تفصیلی مطالعہ کر کے درسی کتاب میں دی ہوئی سرگرمیاں طلبہ سے کرائیں۔اسی کے ساتھ ویسی ہی کئی سرگرمیاں تیار کرنے کی کوشش کریں۔

ریاضی میں حسابی عمل کرنے سے زیادہ اہم بنیادی تصورات کو سمجھنا ہے۔طلبہ کی منطقی سوچ، غور وفکر کی قوت کو جلا بخشنے کے لیے مختلف مثالیں درسی کتاب میں شامل کی گئی ہیں۔ایسی ہی بہت سی مثالیں استاد اور شاگرد باہم مل کر تیار کریں۔درسی کتاب میں فکرانگیز مثالیں تارے سے نشان زد کی گئی ہیں۔طلبہ مختلف اور نرالے انداز سے کوئی مثال حل کرتے ہوں تو اساتذہ ان کی حوصلہ افزائی کریں۔

قدر پیمائی کرنے کے دوران آزاد جوابی سوال اور عملی پرچے کا بھی خیال اساتذہ کو رکھنا چاہیے۔قدر پیمائی کے ایسے طریقوں کو فروغ دینے کا کام اساتذہ کرنے کی کوشش کریں۔

درسی کتاب میں بطور نمونہ جو سرگرمیوں کی فہرست دی ہوئی ہے، اس کے علاوہ آپ خود بھی مختلف قسم کی سرگرمیاں تیار کرسکتے ہیں۔درسی کتاب میں مختلف عملی کام تجربات میں شامل کیے گئے ہیں۔اسے بھی طلبہ سے کروائیں۔اس پر منحصر قدر پیمائی کے طریقہ کا استعمال اگلی جماعتوں کی صلاحیتوں کو فروغ دینے کے لیے ضروری ثابت ہوگا۔ہمیں ایسی امید ہے۔

نمونہ تجربات کی فہرست

(1) آپ کی جماعت میں تمام طلبہ کے سیٹ کو آفاقی سیٹ مان کر کھو کھو، کبڈی جیسے کوئی بھی دو کھیل کھیلنے والے طلبہ کا سیٹ وین خاکہ سے ظاہر کرنا۔

(2) عددی خط پر $2 + \sqrt{3}$, $5 - \sqrt{2}$ جیسے اعداد ظاہر کرنا۔

(3) تین یا چار درجے والی کثیر رکنیوں کو خطی کثیر رکنی کے مختلف طریقوں کا استعمال کر کے تقسیم کرنا اور جواب ایک جیسا آتا ہے۔دیکھنا۔

(4) انکم ٹیکس دہندہ شخص کا گوشوارہ (سالانہ آمدنی، سرمایہ کاری وغیرہ امور) دیے ہوں تو کتنا انکم ٹیکس ادا کرنا ہوگا۔انکم ٹیکس جدول کی مدد سے معلوم کرنا۔

(5) دی ہوئی عددی معلومات کی مدد سے جماعت بند تعددی تقسیمی جدول تیار کرنا۔

(6) آسانی سے دستیاب ہونے والی دواؤں کے بکس پر سے اس پر درج مختلف اکائیوں کا فی صد معلوم کرنا۔

(7) کسی فکرانگیز عبارتی مثال کو دو متغیر کا استعمال کر کے حل کرنا۔

فہرست

ابواب		صفحات
.1	سیٹ	1 سے 18
.2	حقیقی اعداد	19 سے 35
.3	کثیر رکنیاں	36 سے 56
.4	نسبت اور تناسب	57 سے 79
.5	دو متغیری خطی مساواتیں	80 سے 92
.6	معاشی منصوبہ بندی	93 سے 107
.7	شماریات	108 سے 128
●	جوابات کی فہرست	129 سے 136

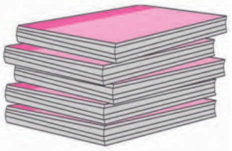
1
سیٹ Set

آیئے، سیکھیں

- سیٹ کا تعارف
- سیٹ کی اقسام
- وین خاکہ
- مساوی سیٹ، ضمنی سیٹ
- آفاقی سیٹ، مکملہ سیٹ
- انقطاعی سیٹ، اجتماعی سیٹ
- سیٹ میں ارکان کی تعداد

آیئے ذرا یاد کریں

ذیل میں کچھ تصاویر دی ہوئی ہیں۔ ان میں ہماری متعارف چیزوں کا گروہ ہے۔

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...				
اعداد کا گروہ	بیاضوں کا گٹھا	پرندوں کا جھنڈ	چابیوں کا گچھا	پھولوں کا گلدستہ

مذکورہ بالا ہر چیزوں کے گروہ کے لیے ہم خاص لفظ استعمال کرتے ہیں۔ ان تمام مثالوں میں گروہ کے ارکان کو ہم بالکل صحیح اور واضح طور پر بتا سکتے ہیں۔ چیزوں کے ایسے گروہ کو ہم 'سیٹ' کہتے ہیں۔

اب اس سیٹ پر غور کیجیے۔ 'گاؤں کے خوش وخرم بچے'، 'جماعت کے ہوشیار بچے' گروہ کی اِن دونوں مثالوں میں 'خوش وخرم' اور 'ہوشیار' دونوں الفاظ مبہم ہیں۔ یعنی 'خوش وخرم' جبلت اور 'ہوشیاری' اِن دونوں الفاظ کے معنی واضح طور پر بتائے نہیں جاسکتے۔ اس لیے اِن گروہوں کو سیٹ نہیں کہہ سکتے۔

اب ذیل میں کچھ مثالیں دی ہوئی ہیں۔ ان میں سے کس گروہ کو 'سیٹ' کہہ سکتے ہیں۔ بتایئے۔

(1) ہفتہ کے سات دن (2) ایک سال کے مہینے

(3) جماعت کے بہادر بچے (4) گنتی کے پہلے 10 اعداد

(5) مہاراشٹر کے مضبوط گڑھ – قلعے (6) ہمارے نظامِ شمسی کے سیارے

آیئے سمجھ لیں

سیٹ (Set)

جس گروہ کے ارکان بالکل صحیح اور واضح طور پر بتائے جاسکتے ہیں، ان گروہوں کو سیٹ کہتے ہیں۔

سیٹ کا نام دینے کے لیے عام طور پر A، B، C، ...، Z میں سے انگریزی حروف تہجی کی پہلی لپی کے حروف استعمال کرتے ہیں۔

سیٹ کے ارکان دکھانے کے لیے a، b، c، ... میں سے انگریزی حروف استعمال کرتے ہیں۔

a یہ سیٹ A کا رکن ہے۔ اسے '$a \in A$' لکھتے ہیں اور رکن a سیٹ A کا رکن نہیں ہے اسے بتانے کے لیے '$a \notin A$' لکھتے ہیں۔

اب ہم اعداد کے سیٹ پر غور کریں گے۔

$N = \{1, 2, 3, ...\}$، یہ طبعی اعداد کا سیٹ (Set of Natural Numbers) ہے۔

$W = \{0, 1, 2, 3, ...\}$، یہ مکمل اعداد کا سیٹ (Set of Whole Numbers) ہے۔

$I = \{ ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$، یہ صحیح اعداد کا سیٹ (Set of Integers) ہے۔

Q، یہ تمام ناطق اعداد کا سیٹ (Set of Rational Numbers) ہے۔

R، یہ حقیقی اعداد کا سیٹ (Set of Real Numbers) ہے۔

سیٹ لکھنے کے طریقے

سیٹ لکھنے کے دو طریقے ہیں۔

(1) **فہرستی طریقہ (Listing method or roster method) :**

اس طریقے میں سیٹ کے تمام ارکان کو محرابی قوسین میں لکھتے ہیں اور ہر رکن کو علیحدہ بتانے کے لیے دو متصل ارکان کے درمیان قومہ (،) لگاتے ہیں۔

اس میں ارکان کی ترتیب کی کوئی اہمیت نہیں ہوتی، لیکن تمام ارکان کو ظاہر کرنا ضروری ہوتا ہے۔

مثال : 1 سے 10 کے درمیان طاق اعداد کے سیٹ کو فہرستی طریقہ سے ذیل کے مطابق لکھیں گے۔ مثلاً

$A = \{3, 5, 7, 9\}$ یا $A = \{7, 3, 5, 9\}$

remember لفظ میں حروف کا سیٹ $\{r, e, m, b\}$ لکھتے ہیں۔ یہاں remember لفظ میں r، m، e حروف ایک سے زیادہ مرتبہ آئے ہیں۔ پھر بھی سیٹ میں ایک ہی مرتبہ لکھے گئے ہیں۔

(2) **خصوصیت بیان کرنے والا عباراتی طریقہ (Rule method or set builder form) :**

اس طریقے میں ارکان کی فہرست بنانے کی بجائے سیٹ کے عمومی رکن کو متغیر سے ظاہر کر کے اس کے سامنے عمودی لکیر کھینچتے ہیں۔ عمودی لکیر کے آگے اُس متغیر کی خصوصیت لکھتے ہیں۔ مثال $A = \{x \mid x \in N, 1 < x < 10\}$ اس کو سیٹ A کا رکن x اس طرح ہے کہ x یہ 1 اور 10 کے درمیان واقع طبعی عدد ہے۔

مثال : {x، یہ 1 اور 10 کے درمیان مفرد عدد ہے۔ | B = {x، اس میں 1 سے 10 کے درمیان تمام مفرد اعداد شامل ہوں گے۔اس لیے سیٹ B کو فہرستی طریقہ سے {2, 3, 5, 7} لکھیں گے۔

Q یہ ناطق اعداد کا سیٹ ہے۔اسے خصوصیت والے عبارتی طریقہ سے ذیل کے مطابق لکھیں گے۔

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in I, q \neq 0 \right\}$$

اسے پڑھیں گے $\frac{p}{q}$ صورت میں ایسے اعداد ہیں کہ p کوئی صحیح عدد ہے اور q کوئی غیر صفر صحیح عدد ہے۔

تشریحی مثالیں : نیچے دی ہوئی مثالوں میں ہر سیٹ دونوں طریقوں سے لکھا ہوا ہے۔

فہرستی طریقہ	خصوصیت والا عبارتی طریقہ
A = {D, I, V, S, O, N}	A = {x | x، یہ DIVISION لفظ کا حرف ہے۔}
B = {−3, 3}	B = {y | y، یہ ایک ایسا عدد ہے کہ $y^2 = 9$}
C = {5, 10, 15, 20, 25}	C = {z | z، یہ 5 کے ضعف میں 30 سے چھوٹا طبعی عدد ہے۔}

مثال : ذیل کی جدول کی خالی جگہوں کو پُر کر کے جدول مکمل کیجیے۔

فہرستی طریقہ	خصوصیت والا عبارتی طریقہ
A = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14}	A = {x | x، یہ 15 سے چھوٹا جفت طبعی عدد ہے۔}
....	B = { x | x، یہ 1 سے 20 کے درمیان کامل مربع عدد ہے۔}
C = {a, e, i, o, u}	....
....	D = {y | y، یہ قوس قزح کا ایک رنگ ہے۔}
....	P = { x | x، یہ صحیح عدد ہے اس طرح کہ $-3 < x < 3$}
M = { 1, 8, 27, 64, 125}	....

مشقی سیٹ 1.1

(1) درج ذیل سیٹ فہرستی طریقہ سے لکھیے۔

(i) جفت طبعی اعداد کا سیٹ (ii) 1 سے 50 کے درمیان جفت مفرد اعداد کا سیٹ

(iii) تمام منفی صحیح اعداد کا سیٹ (iv) موسیقی کے سات سروں کا سیٹ

(2) درج ذیل علامتوں میں دیے ہوئے بیانات کو الفاظ میں لکھیے۔

(i) $\frac{4}{3} \in Q$ (ii) $-2 \notin N$ (iii) P = {p \| p یہ ایک طاق عدد ہے۔}

(3) کوئی بھی دو سیٹ فہرستی طریقے سے اور خصوصیت کے اظہار (بیان کرنے والے) والے عبارتی طریقے سے لکھیے۔

(4) درج ذیل سیٹ فہرستی طریقے سے لکھیے۔

(i) بھارتی شمسی سال کے سب مہینوں کا سیٹ۔

(ii) 'COMPLEMENT' لفظ کے حروف کا سیٹ۔

(iii) انسان کے تمام حواس خمسہ کا سیٹ۔

(iv) 1 سے 20 کے درمیان مفرد اعداد کا سیٹ۔

(v) زمین کے براعظموں کا سیٹ۔

(5) درج ذیل سیٹ خصوصیت والے عباراتی طریقے سے لکھیے۔

(i) A = {1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100}

(ii) B = {6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48} , (iii) C = {S, M, I, L, E}

(iv) D = {اتوار، پیر، منگل، بدھ، جمعرات، جمعہ، سنیچر} (v) X = {a, e, t}

آیئے سمجھ لیں

سیٹ کی اقسام Types of sets

سیٹ کے نام	تعریف	مثال
یک رکنی سیٹ (Singleton Set)	جس سیٹ میں ایک اور صرف ایک رکن ہوتا ہے۔ ایسے سیٹ کو 'یک رکنی سیٹ' کہتے ہیں۔	A = {2} A، یہ جفت مفرد اعداد کا سیٹ ہے۔
خالی سیٹ (Null Set) (Empty Set}	جس سیٹ میں دی ہوئی خصوصیت کا ایک بھی رکن نہیں ہوتا۔ اُس سیٹ کو 'خالی سیٹ' کہتے ہیں۔ اس سیٹ کو { } یا 'ϕ' (فائے) علامت سے ظاہر کرتے ہیں۔	B = {x | x، یہ 2 اور 3 کے درمیان طبعی عدد ہے۔} ∴ B = { } یا 'ϕ'
محدود سیٹ (Finite Set}	جو سیٹ خالی سیٹ ہوتا ہے یا جس سیٹ میں ارکان کی تعداد محدود ہوتی ہے اور اُسے شمار کر سکتے ہیں، ایسے سیٹ کو محدود سیٹ کہتے ہیں۔	C = {p | p، یہ 1 اور 22 کے درمیان 4 سے تقسیم پذیر عدد ہے۔} C = {4, 8, 12, 16, 20}
لامحدود سیٹ (Infinite Set)	جس سیٹ میں ارکان کی تعداد لامحدود ہوتی ہے اور انھیں شمار نہیں کیا جا سکتا، ایسے سیٹ کو 'لامحدود' سیٹ کہتے ہیں۔	N = {1, 2, 3, ...}

مثال : درج ذیل سیٹ فہرستی طریقے سے لکھ کر اُن کی محدود سیٹ اور لامحدود سیٹ میں جماعت بندی کیجیے۔

(i) $A = \{x \mid$ x یہ طاق عدد ہے۔ اور $x \in N\}$ (ii) $B = \{x \mid 3x - 1 = 0$ اور $x \in N\}$

(iii) $C = \{x \mid$ x یہ 7 سے تقسیم پذیر عدد ہے۔ اور $x \in N\}$ (iv) $D = \{(a, b) \mid a, b \in W, a + b = 9\}$

(v) $E = \{x \mid x \in I, x^2 = 100\}$ (vi) $F = \{(a, b) \mid a, b \in Q, a + b = 11\}$

حل :

(i) $A = \{x \mid$ x یہ طاق عدد ہے۔ اور $x \in N\}$

$A = \{1, 3, 5, 7, ...\}$ ... (یہ ایک لامحدود سیٹ ہے۔)

(ii) $B = \{x \mid 3x - 1 = 0$ اور $x \in N\}$

$3x - 1 = 0$, $\therefore 3x = 1$, $x = \frac{1}{3}$

لیکن $\frac{1}{3} \notin N$ ، $\therefore B = \{\ \}$ ، اس لیے B یہ محدود سیٹ ہے۔

(iii) $C = \{x \mid$ x یہ 7 سے تقسیم پذیر عدد ہے۔ اور $x \in N\}$

$\therefore C = \{7, 14, 21, ...\}$ ... (یہ لامحدود سیٹ ہے۔)

(iv) $D = \{(a, b) \mid a, b \in W, a + b = 9\}$

ہم a اور b کی جوڑیاں معلوم کر سکتے ہیں اس طرح کہ a اور b مکمل عدد ہوں اور $a + b = 9$ ہے۔

پہلے a کی اور بعد میں b کی قیمت، اس ترتیب کو قائم رکھتے ہوئے D سیٹ کو فہرستی طریقے سے ذیل کے مطابق لکھیں گے۔

$D = \{(0, 9), (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (7, 2), (8, 1), (9, 0)\}$

اس سیٹ کے ارکان یعنی اعداد کی جوڑیاں شمار کی جا سکتی ہیں اور یہ متعین ہیں۔

$\therefore$ D سیٹ، محدود سیٹ ہے۔

(v) $E = \{x \mid x \in I, x^2 = 100\}$

$\therefore$ E یہ محدود سیٹ ہے۔ ... $E = \{-10, 10\}$

(iv) $F = \{(a, b) \mid a, b \in Q, a + b = 11\}$

$F = \{(6, 5), (3, 8), (3.5, 7.5), (-15, 26), ...\}$

اس طرح بے شمار جوڑیاں حاصل ہوتی ہیں۔

$\therefore$ F، یہ لامحدود سیٹ ہے۔

اسے دھیان میں رکھیں

اعداد کے N، W، I، Q، R سیٹ یہ سب سیٹ لامحدود ہیں۔

آیئے سمجھ لیں

مساوی سیٹ (Equal Sets)

سیٹ A کا ہر رکن سیٹ B میں اور سیٹ B کا ہر رکن سیٹ A میں موجود ہو تو ان دونوں سیٹ کو مساوی سیٹ کہتے ہیں۔

'A اور B مساوی سیٹ ہیں' اسے علامت $A = B$ سے لکھتے ہیں۔

مثال (1) : A = {x | x، یہ listen لفظ کا حرف ہے۔} ، $\therefore A = \{l, i, s, t, e, n\}$

B = {y | y، یہ silent لفظ کا حرف ہے۔} ، $\therefore B = \{s, i, l, e, n, t\}$

A اور B میں ارکان کی ترتیب مختلف ہے، لیکن ارکان وہی ہیں۔ اس لیے A اور B یہ مساوی سیٹ ہیں۔ اس لیے $A = B$ ہے۔

مثال (2) : $A = \{x \mid x = 2n, n \in N, 0 < x \le 10\}$، $\therefore A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

B = {y | 1 ⩽ y ⩽ 10 اور y یہ جفت عدد ہے} ، $\therefore B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

اس لیے A اور B مساوی سیٹ ہیں۔

اب درج ذیل سیٹوں کے بارے میں غور کریں گے۔

$C = \{1, 3, 5, 7\}$ ، $D = \{2, 3, 5, 7\}$

کیا C اور D کو مساوی سیٹ کہہ سکتے ہیں؟ 'بالکل نہیں'

کیونکہ $1 \in C$، $1 \notin D$، $2 \in D$، $2 \notin C$

اس لیے C اور D مساوی سیٹ نہیں ہیں۔ اس لیے $C \neq D$

مثال (3) : اگر $A = \{1, 2, 3\}$ اور $B = \{1, 2, 3, 4\}$ تب $A \neq B$ اس کی تصدیق کیجیے۔

مثال (4) : A = {x، یہ مفرد عدد ہے اور x | 10 < x < 20} اور $B = \{11, 13, 17, 19\}$

یہاں $A = B$ ہے اس کی تصدیق کیجیے۔

مشقی سیٹ 1.2

(1) درج ذیل میں سے کون سے سیٹ مساوی ہیں اور کون سے نہیں؟ وجہ کے ساتھ لکھیے۔

$A = \{x \mid 3x - 1 = 2\}$

B = {x | x، یہ طبعی عدد ہے لیکن x مفرد بھی نہیں ہے اور مرکب بھی نہیں ہے۔}

$C = \{x \mid x \in N, x < 2\}$

(2) کیا A اور B مساوی سیٹ ہیں؟ وجہ کے ساتھ لکھیے۔

A = {جفت مفرد عدد} ، $B = \{x \mid 7x - 1 = 13\}$

(3) درج ذیل میں سے کون سے سیٹ خالی ہیں؟ وجہ کے ساتھ لکھیے۔

(i) A = {a | a، یہ صفر سے چھوٹا طبعی عدد ہے۔}

(ii) $B = \{x \mid x^2 = 0\}$

(iii) $C = \{x \mid 5x - 2 = 0, x \in N\}$

(4) درج ذیل میں سے کون سے سیٹ محدود ہیں اور کون سے لامحدود؟ وجہ کے ساتھ لکھیے۔

(i) $A = \{x \mid x < 10$ اور x ، یہ طبعی عدد ہے$\}$

(ii) $B = \{y \mid y < -1$ اور y ، یہ صحیح عدد ہے$\}$

(iii) C = آپ کی اسکول کی نویں جماعت کے تمام طلبہ کا سیٹ

(iv) آپ کے گاؤں کے باشندوں کا سیٹ

(v) تجربہ گاہ کے آلات کا سیٹ

(vi) مکمل اعداد کا سیٹ

(vii) ناطق اعداد کا سیٹ

آیئے سمجھ لیں

وین خاکہ (Venn Diagrams)

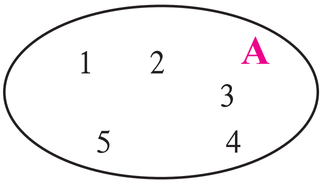
سیٹ لکھنے کے لیے بند شکل کا استعمال سب سے پہلے برطانوی فلاسفر جان وین نے کیا۔ اس لیے ایسی اشکال کو 'وین خاکہ' کہتے ہیں۔ مختلف سیٹ کے درمیان تعلق سمجھنے کے لیے اور سیٹ پر مبنی مثالیں حل کرنے کے لیے ان خاکوں کا بہتر طور پر استعمال ہوتا ہے۔ وین خاکوں کے ذریعے سیٹ کس طرح دکھائے جاتے ہیں، اسے درج ذیل مثالوں کی مدد سے سمجھیں گے۔

منطق اور احتمال ان مضامین کو ریاضیاتی صورت دینے کا کام جان وین نے سب سے پہلے کیا۔ 'لاجک آف چانس' ان کی مشہور کتاب ہے۔

1834 - 1923

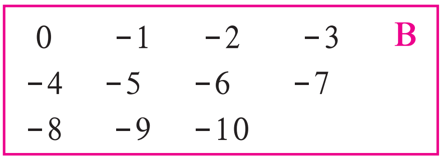
مثال : $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$،

وین خاکہ کی مدد سے سیٹ A نیچے دکھایا گیا ہے۔



$B = \{x \mid -10 \leqslant x \leqslant 0$ اور x یہ صحیح عدد ہے$\}$

بازو میں دیا ہوا وین خاکہ B سیٹ کو ظاہر کرتا ہے۔



ضمنی سیٹ (Subset)

اگر A اور B دو سیٹ ہیں اور سیٹ B کا ہر رکن سیٹ A کا بھی رکن ہے تب سیٹ B کو سیٹ A کا ضمنی سیٹ کہتے ہیں اور $B \subseteq A$ علامت سے ظاہر کرتے ہیں۔ اس کو 'B ضمنی سیٹ A' یا 'B یہ A کا ضمنی سیٹ ہے۔' پڑھتے ہیں۔

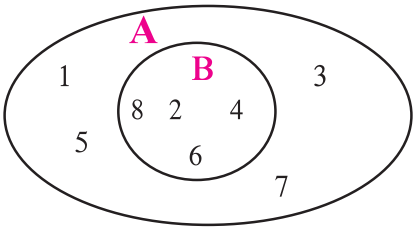
مثال (1) : $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$B = \{2, 4, 6, 8\}$

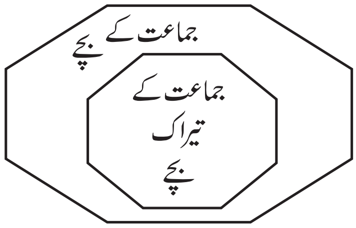
یہاں B کا ہر رکن سیٹ A کا بھی رکن ہے۔

$\therefore \quad B \subseteq A$

اس معلومات کو وین خاکہ سے کس طرح دکھایا گیا ہے۔



عملی کام : جماعت کے بچوں کا سیٹ اور اُسی جماعت کے تیراک بچوں کا سیٹ وین خاکہ سے دکھایا گیا ہے۔



اسی طرح درج ذیل ضمنی سیٹ کے لیے وین خاکہ کھینچیے۔

(1) (i) جماعت کے بچوں کا سیٹ

(ii) جماعت کے سائیکل چلانے والے بچوں کا سیٹ

(2) ذیل میں کچھ پھلوں کا ایک سیٹ دیا ہوا ہے۔

(امرود، سنترا، آم، فنس، چیکو، جامن، سیتا پھل، پپیتا، کروندا)

درج ذیل ضمنی سیٹ دکھائیے۔ (i) ایک بیج والے پھل (ii) ایک سے زائد بیج والے پھل

اب مزید کچھ ضمنی سیٹ پر غور کریں گے۔

مثال (2) طبعی اعداد کا سیٹ = N ، صحیح اعداد کا سیٹ = I

یہیں $N \subseteq I$ ہے کیوں کہ ہمیں معلوم ہے کہ طبعی اعداد، صحیح اعداد بھی ہوتے ہیں۔

مثال (3) {x یہ 25 کا جذرالمربع ہے۔ | x} = P اور $S = \{y \mid y \in I, -5 \leqslant y \leqslant 5\}$

فہرستی طریقے سے P سیٹ کو لکھیں گے۔ $P = \{-5, 5\}$

فہرستی طریقے سے S سیٹ کو لکھیں گے۔ $S = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

یہاں P کا ہر رکن S کا بھی رکن ہے۔

$\therefore\ P \subseteq S$

اسے دھیان میں رکھیں

(i) ہر سیٹ خود اپنا ضمنی سیٹ ہوتا ہے۔ یعنی $A \subseteq A$

(ii) خالی سیٹ ہر سیٹ کا ضمنی سیٹ ہوتا ہے۔ یعنی $\phi \subseteq A$

(iii) اگر $A = B$ تو $A \subseteq B$ اور $B \subseteq A$

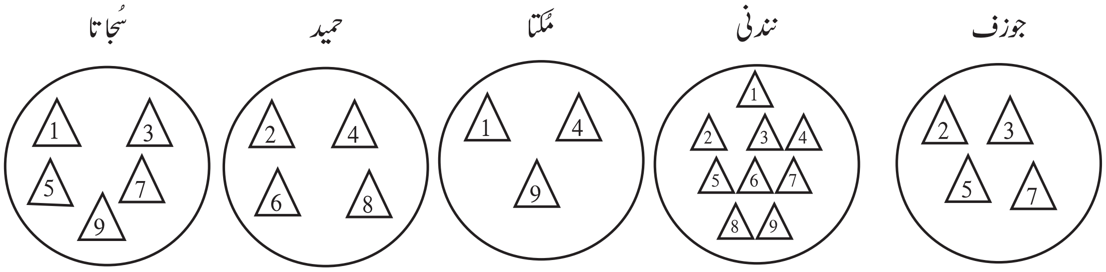
(iv) اگر $A \subseteq B$ اور $B \subseteq A$ تو $A = B$

مثال : $A = \{1, 3, 4, 7, 8\}$ اس سیٹ کے تمام ضمنی سیٹ لکھیے۔

مثلاً $P = \{1, 3\}$، $T = \{4, 7, 8\}$، $V = \{1, 4, 8\}$، $S = \{1, 4, 7, 8\}$

اس طرح مزید کئی ضمنی سیٹ بنائے جاسکتے ہیں۔اُن میں سے کوئی بھی پانچ ضمنی سیٹ لکھیے۔

عملی کام : ہر طالب علم سے کاغذ کے یکساں سائز کے 9 مثلث اور ایک تھالی دیجیے۔
مثلث پر 1 سے 9 تک اعداد لکھوائے۔ پھر ہر ایک کو اپنی اپنی تھالی میں عدد لکھے ہوئے کچھ مثلثی کاغذ رکھنے کے لیے کہیے۔ اب ہر ایک کے پاس 1 سے 9 عدد والے سیٹ کا ضمنی سیٹ بن گیا ہے۔



دیکھیے کہ سجاتا، حمید، مکتا، نندنی اور جوزف کی تھالیوں میں کون کون سے اعداد دکھائی دے رہے ہیں۔
ہر ایک نے کیا سوچ کر اعداد منتخب کیے ہیں۔ اُسے معلوم کیجیے۔ اس کی مدد سے ہر سیٹ خصوصیت والے عبارتی طریقے سے لکھیے۔

مثال : ذیل میں کچھ سیٹ دیے ہوئے ہیں۔

A = { ..., −4, −2, 0, 2, 4, 6, ...}   B = {1, 2, 3, ...}
C = {..., −12, −6, 0, 6, 12, 18.....}   D = {..., −8, −4, 0, 4, 8, ...}
I = { ....., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, ...}

اس کی مدد سے درج ذیل میں سے کون سا بیان صحیح ہے۔ اس پر بحث کیجیے۔

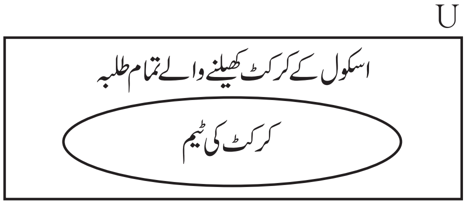
(i) A، یہ B، C، D ہر ایک سیٹ کا ضمنی سیٹ ہے۔   (ii) B، یہ مذکورہ بالا تمام سیٹ کا ضمنی سیٹ ہے۔

آفاقی سیٹ (Universal Set)

ہم جس سیٹ پر غور کرنے والے ہیں، وہ ان تمام سیٹ کو شامل کرنے والا ایک بڑا سیٹ، آفاقی سیٹ کے طور پر لیا جاتا ہے۔ اس کے باہر کے ارکان پر ہم غور نہیں کرتے۔ زیر غور ہر سیٹ آفاقی سیٹ کا ضمنی سیٹ ہوتا ہے۔

مثال (1) : فرض کیجیے کہ ہمیں اسکول کی 9 ویں جماعت کی ایک فریق کے طلبہ کی غیر حاضری کا مطالعہ کرنا ہے۔ اس کے لیے 9 ویں جماعت کے طلبہ کے سیٹ پر غور کرنا ہوگا۔ یہاں اس جماعت کے تمام طلبہ کا سیٹ یا اسکول کے تمام طلبہ کا سیٹ، آفاقی سیٹ ہوگا۔

اب دوسری مثال پر غور کریں گے۔



مثال (2) : ہمیں اسکول کے کرکٹ کے کھلاڑیوں میں سے 15 طلبہ کی ٹیم کا انتخاب کرنا ہے۔ تب اسکول کے کرکٹ کھیلنے والے تمام کھلاڑیوں کا سیٹ آفاقی سیٹ ہوگا۔ اس میں مناسب 15 کھلاڑیوں کی ٹیم، یہ اس آفاقی سیٹ کا ضمنی سیٹ ہے۔

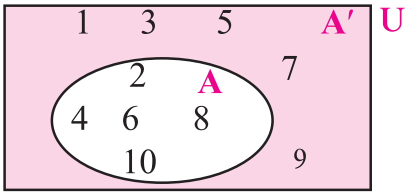
آفاقی سیٹ کو عام طور پر 'U' حرف سے ظاہر کرتے ہیں۔

وین خاکے میں آفاقی سیٹ کو عام پر طور پر مستطیل سے ظاہر کرتے ہیں۔

مکملہ سیٹ (Complement Of a Set)

فرض کیجیے 'U' آفاقی سیٹ ہے۔ اگر $B \subseteq U$، تو سیٹ B میں موجود نہیں لیکن آفاقی سیٹ میں موجود ارکان کے سیٹ کو سیٹ B کا مکملہ سیٹ کہتے ہیں۔ سیٹ B کا مکملہ سیٹ B' یا B^c سے ظاہر کرتے ہیں۔

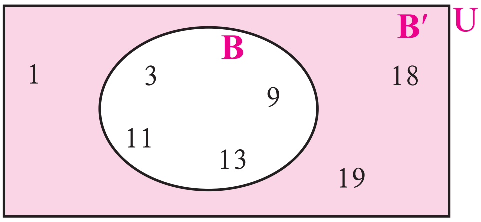
(اس طرح B' کو بیان کرسکتے ہیں۔) ... $\therefore B' = \{x \mid x \in U, \ x \notin B\}$



مثال (1) : $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$\therefore A' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$



مثال (2) : فرض کیجیے، $U = \{1, 3, 9, 11, 13, 18, 19\}$

$B = \{3, 9, 11, 13\}$

$\therefore B' = \{1, 18, 19\}$

اب $(B')'$ معلوم کیجیے۔ اس بناء پر کیا نتیجہ اخذ ہوتا ہے؟

$(B')'$ یہ سیٹ B' میں واقع نہیں لیکن U میں واقع ارکان کا سیٹ ہے۔

$(B')' = B$ کیا یہ حاصل ہوا؟

مذکورہ بالا معلومات وین خاکہ کی مدد سے سمجھ لیں۔

مکملہ سیٹ کا مکملہ سیٹ یعنی دیا ہوا سیٹ ہوتا ہے۔

اسے دھیان میں رکھیں

مکملہ سیٹ کی خصوصیات

(i) A اور A' ان دونوں میں ایک بھی رکن مشترک نہیں ہوتا۔

(ii) $A \subseteq U$ اور $A' \subseteq U$

(iii) آفاقی سیٹ کا مکملہ سیٹ، خالی سیٹ ہوتا ہے۔ $U' = \phi$

(iv) خالی سیٹ کا مکملہ سیٹ، آفاقی سیٹ ہوتا ہے۔ $\phi' = U$

مشقی سیٹ 1.3

(1) اگر $A = \{a, b, c, d, e\}$، $B = \{c, d, e, f\}$، $C = \{b, d\}$، $D = \{a, e\}$ ہوتو ذیل میں سے کون سا بیان صحیح اور کون سا بیان غلط ہے؟ لکھیے۔

(i) $C \subseteq B$ (ii) $A \subseteq D$ (iii) $D \subseteq B$ (iv) $D \subseteq A$ (v) $B \subseteq A$ (vi) $C \subseteq A$

(2) 1 سے 20 تک طبعی اعداد کے سیٹ کو آفاقی سیٹ کے طور پر لے کر X سیٹ اور Y سیٹ وین خاکہ سے ظاہر کیجیے۔

(i) $X = \{x \mid x \in N, 7 < x < 15\}$

(ii) $Y = \{y \mid y \in N$, y، یہ 1 سے 20 کے درمیان مفرد عدد ہے$\}$

(3) $U = \{1, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$P = \{1, 3, 7, 10\}$

تو (i) U, P اور P' وین خاکہ کے ذریعے دکھایئے۔ (ii) $(P')' = P$، کی تصدیق کیجیے۔

(4) $A = \{1, 3, 2, 7\}$ ہوتو سیٹ A کے کوئی بھی تین ضمنی سیٹ لکھیے۔

(5) (i) ذیل کے سیٹ میں سے کون سا سیٹ، دوسرے کون سے سیٹ کا ضمنی سیٹ ہے۔ لکھیے۔

P یہ پونہ کے باشندوں کا سیٹ ہے۔

M یہ مدھیہ پردیش کے باشندوں کا سیٹ ہے۔

I یہ اندور کے باشندوں کا سیٹ ہے۔

B یہ بھارت کے باشندوں کا سیٹ ہے۔

H یہ مہاراشٹر کے باشندوں کا سیٹ ہے۔

(ii) مذکورہ بالا میں سے کون سا سیٹ دیگر تمام سیٹ کے لیے آفاقی سیٹ کے طور پر لیا جائے گا؟

(6)* نیچے کچھ سیٹ دیے ہوئے ہیں۔ ان کا مطالعہ کرتے وقت کون سا سیٹ ان تمام سیٹ کے لیے آفاقی سیٹ کے طور پر لیا جائے گا؟

(i) 5 کے ضعف میں اعداد کا سیٹ = A ، 7 کے پہاڑے کے اعداد کا سیٹ = B

12 کے ضعف میں اعداد کا سیٹ = C

(ii) 4 کے ضعف میں اعداد کا سیٹ = P ، تمام جفت اعداد کا سیٹ = T

(7) فرض کیجیے جماعت کے تمام طلبہ کا سیٹ، آفاقی سیٹ ہے۔ ریاضی میں 50% یا اس سے زیادہ نمبر حاصل کرنے والے طلبہ کے سیٹ کو A فرض کریں تو A کا مکملہ سیٹ لکھیے۔

آیئے سمجھ لیں

سیٹ پر اعمال

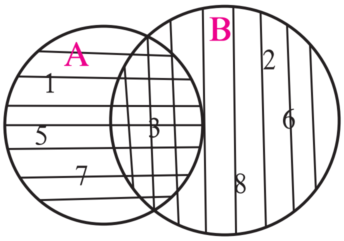
دو سیٹ کا انقطاع (Intersection of two Sets)

فرض کیجیے A اور B دو سیٹ ہیں۔ A اور B سیٹ میں مشترک ارکان کے سیٹ کو A اور B سیٹ کا انقطاعی سیٹ کہتے ہیں۔

اسے $A \cap B$ لکھتے ہیں اور اسے 'A انقطاع B' پڑھتے ہیں۔

$\therefore \quad A \cap B = \{x \mid x \in A$ اور $x \in B\}$

مثال (1) : $A = \{1, 3, 5, 7\}$ ، $B = \{2, 3, 6, 8\}$

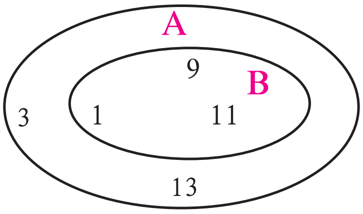


اب وین خاکہ کھینچیں گے۔

A اور B ان دونوں سیٹ میں 3 یہ مشترک رکن ہے۔

$\therefore A \cap B = \{3\}$

مثال (2) : $A=\{1, 3, 9, 11, 13\}$ ، $B = \{1, 9, 11\}$



سیٹ A اور سیٹ B میں 1 ، 9 ، 11 یہ مشترک ارکان ہیں۔

$\therefore A \cap B = \{1, 9, 11\}$ ، لیکن $B = \{1, 9, 11\}$

$\therefore A \cap B = B$

یہاں B، یہ A کا ضمنی سیٹ ہے۔اسے دھیان میں رکھیے۔

اس لیے اگر $B \subseteq A$ تو $A \cap B = B$ ، اسی طرح اگر $B \cap A = B$ تو $B \subseteq A$

اسے دھیان میں رکھیں

انقطاعی سیٹ کی خصوصیات

(1) $A \cap B = B \cap A$

(2) اگر $A \subseteq B$ تو $A \cap B = A$

(3) اگر $A \cap B = B$ تو $B \subseteq A$

(4) $A \cap B \subseteq A$ اور $A \cap B \subseteq B$

(5) $A \cap A' = \phi$

(6) $A \cap A = A$

(7) $A \cap \phi = \phi$

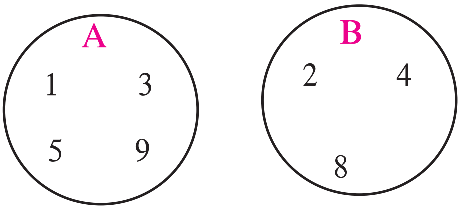
عملی کام : مختلف مثالیں لے کر مذکورہ بالا خصوصیات کی تصدیق کیجیے

آیئے سمجھ لیں

غیر متعلق سیٹ (Disjoint Set)

فرض کیجیے $A = \{1, 3, 5, 9\}$ اور

$B = \{2, 4, 8\}$ یہ دو سیٹ دیے ہوئے ہیں۔

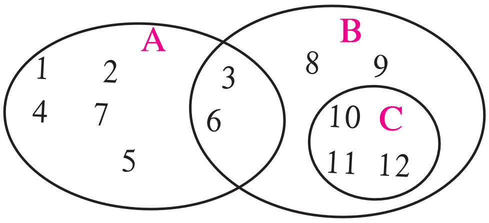


سیٹ A اور سیٹ B میں ایک بھی رکن مشترک نہیں ہے۔یعنی یہ دونوں سیٹ مکمل طور پر غیر متعلق ہیں۔اس لیے انھیں غیر متعلق سیٹ کہتے ہیں ان سیٹوں کے وین خاکے کا مشاہدہ کیجیے۔

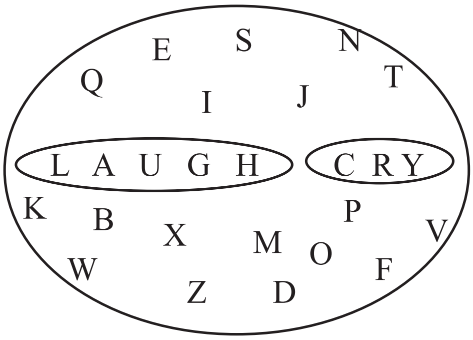
عملی کام I :

یہاں C, B, A ان سیٹوں کو وین خاکے کی مدد سے دکھایا گیا ہے۔

ان میں کون سے دو سیٹ مختلف ہیں؟ اسے لکھیے۔



عملی کام II :



فرض کیجیے انگریزی حروفِ تہجی کا سیٹ یہ آفاقی سیٹ ہے۔ یہاں سیٹ کے ارکان انگریزی حروف ہیں۔

فرض کیجیے 'LAUGH' لفظ کے حروف کا ایک سیٹ ہے۔

اور 'CRY' اس لفظ کے حروف کا دوسرا سیٹ ہے۔

یہ غیر متعلق سیٹ ہیں، ایسا کہہ سکتے ہیں۔

ان دونوں سیٹ کا انقطاع خالی سیٹ ہے۔ معلوم کیجیے۔

دو سیٹ کا اجتماع (Union of two Sets)

فرض کیجیے A اور B یہ دو سیٹ ہیں۔ ان دونوں سیٹ کے ارکان کو ملا کر بننے والے سیٹ کو A اور B ان دونوں سیٹ کا اجتماعی سیٹ کہتے ہیں۔ اسے $A \cup B$ لکھتے ہیں اور A اجتماع B پڑھتے ہیں۔

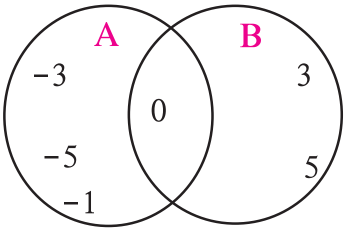
$A \cup B = \{x \mid x \in A$ یا $x \in B\}$

مثال (1) : $A = \{-1, -3, -5, 0\}$

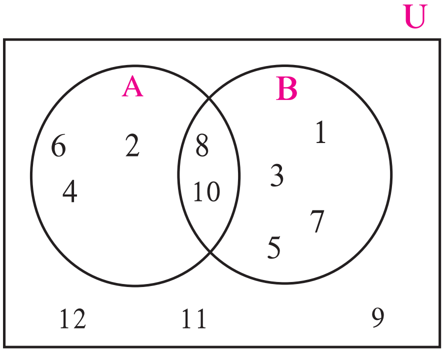
$B = \{0, 3, 5\}$

$A \cup B = \{-3, -5, 0, -1, 3, 5\}$

دھیان میں رکھیں کہ $A \cup B = B \cup A$,



مثال (2) بازو میں وین خاکے میں دکھائے ہوئے سیٹ کی بنا پر درج ذیل سیٹ کو فہرستی طریقے سے لکھیے۔



(i) U (ii) A (iii) B (iv) $A \cup B$ (v) $A \cap B$

(vi) A' (vii) B' (viii) $(A \cup B)'$ (ix) $(A \cap B)'$

حل :

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

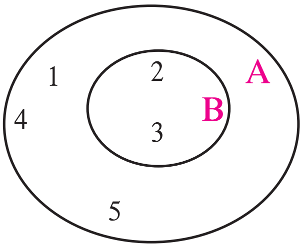
$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 8, 10\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$, $A \cap B = \{8, 10\}$

$A' = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 12\}$, $B' = \{2, 4, 6, 9, 11, 12\}$

$(A \cup B)' = \{9, 11, 12\}$, $(A \cap B)' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12\}$

مثال (3) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 3\}$



اب اس مثال کا وین خاکہ دیکھتے ہیں۔

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

یہاں سیٹ A اور سیٹ $A \cup B$ میں بالکل وہی ارکان ہیں۔

اس بنا پر اگر $B \subseteq A$ ہو تو $A \cup B = A$

اسے دھیان میں رکھیں

اجتماعی سیٹ کی خصوصیات

(1) $A \cup B = B \cup A$

(2) اگر $A \subseteq B$ تو $A \cup B = B$

(3) $A \subseteq A \cup B,\ B \subseteq A \cup B$

(4) $A \cup A' = U$

(5) $A \cup A = A$

(6) $A \cup \phi = A$

آیئے سمجھ لیں

سیٹ میں ارکان کی تعداد (Number of elements in a set) :

فرض کیجیے۔ $A = \{3, 6, 9, 12, 15\}$، یہ دیا ہوا سیٹ ہے۔اس سیٹ میں 5 ارکان ہیں۔

سیٹ A میں ارکان کی تعداد کو $n(A)$ لکھتے ہیں۔ $\therefore\ n(A) = 5$

فرض کیجیے $B = \{6, 12, 18, 24, 30, 36\}$ ، $\therefore\ n(B) = 6$

اجتماعی سیٹ اور انقطاعی سیٹ میں ارکان کی تعداد

مذکورہ بالا سیٹ A اور سیٹ B پر غور کریں تو

$n(A) + n(B) = 5 + 6 = 11$ ... (1)

$A \cup B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 24, 30, 36\},\ \therefore\ n(A \cup B) = 9$ ... (2)

$A \cap B$ معلوم کریں گے۔یعنی سیٹ A اور سیٹ B کے مشترک ارکان معلوم کریں گے۔

$A \cap B = \{6, 12\}$, $\therefore\ n(A \cap B) = 2$ ... (3)

دھیان دیجیے، $n(A)$ اور $n(B)$ شمار کرتے وقت $A \cap B$ کے ارکان کو دو مرتبہ شمار کیا گیا ہے۔

$n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 5 + 6 - 2 = 9$

اسی طرح، $n(A \cup B) = 9$

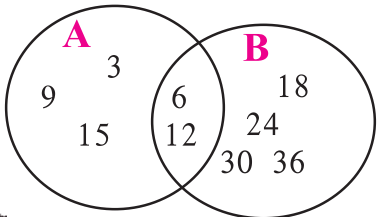
$\therefore\ n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

اوپر دیے ہوئے اصول کی تصدیق بازو میں دیے ہوئے وین خاکہ کی مدد سے کیجیے۔

$n(A) = \square$, $n(B) = \square$

$n(A \cup B) = \square$, $n(A \cap B) = \square$

$\therefore\ n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$



اسے دھیان میں رکھیں

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

یعنی، $n(A) + n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B)$

اب، $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ اور $B = \{1, 2, 4, 6, 8, 12, 13\}$

یہ سیٹ لے کر اوپر دیے ہوئے اصول کی تصدیق کیجیے۔

آیئے سمجھ لیں

سیٹ پر مبنی عبارتی مثالیں

مثال : ایک جماعت میں 70 طلبہ ہیں۔ان میں سے 45 طلبہ کو کرکٹ پسند ہے۔ 52 طلبہ کو کھوکھو کھیل پسند ہے۔ایسا ایک بھی طالب علم نہیں جسے ان میں سے ایک بھی کھیل پسند نہیں ہے۔تو کرکٹ اور کھوکھو دونوں کھیل کھیلنے والے طلبہ کی تعداد معلوم کیجیے۔

حل : اس مثال کو ہم دو طریقوں سے حل کریں گے۔

طریقہ 1 : 70 = جماعت میں کل طلبہ

فرض کیجیے کرکٹ کھیل پسند کرنے والے طلبہ کی تعداد A ہے اور کھوکھو کھیل پسند کرنے والے طلبہ کی تعداد B ہے۔ ہر طالب علم کو کرکٹ اور کھوکھو میں سے کوئی ایک کھیل پسند ہے۔ کرکٹ یا کھوکھو کھیل پسند کرنے والے طلبہ کی تعداد = $n(A \cup B)$

$\therefore\ n(A \cup B) = 70$

کرکٹ اور کھوکھو دونوں کھیل پسند کرنے والے طلبہ کی تعداد = $n(A \cap B)$

$n(A) = 45, \qquad n(B) = 52$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ ... (یہ ہمیں معلوم ہے۔)

$\therefore\ n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$

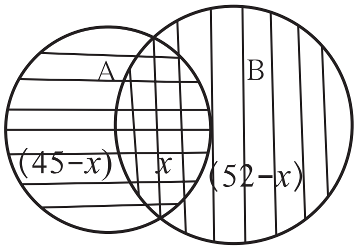
$= 45 + 52 - 70 = 27$

یہاں، $(A \cap B)$ یہ دونوں کھیل پسند کرنے والے طلبہ کا سیٹ ہے۔ $\therefore\ n(A \cap B) = 27$

$\therefore$ دونوں کھیل پسند کرنے والے طلبہ 27 اور کرکٹ کھیل پسند کرنے والے طلبہ 45 ہیں۔

$\therefore$ صرف کرکٹ کھیلنے والے طلبہ $= 45 - 27 = 18$

طریقہ II : دی ہوئی معلومات وین خاکہ سے بھی دونوں کھیل پسند کرنے والے طلبہ کی تعداد ذیل کے مطابق معلوم کرسکتے ہیں۔



فرض کیجیے $(A \cap B) = x$

$n(A) = 45$ ، $n(B) = 52$ ، $n(A \cup B) = 70$ ... (ہمیں معلوم ہے۔)

$\therefore\ n(A \cap B) = x = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$

$= 45 + 52 - 70 = 27$

$\therefore$ صرف کرکٹ کھیل پسند کرنے والے طلبہ $= 45 - 27$ ... (وین خاکے کی مدد سے)

$= 18$

مشقی سیٹ 1.4

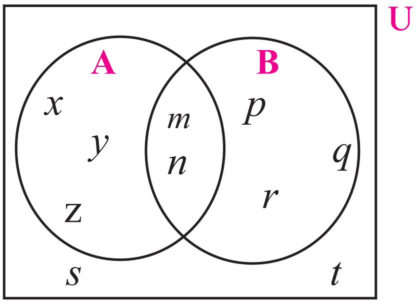
(1) اگر $n(A) = 15$، $n(A \cup B) = 29$، $n(A \cap B) = 7$ ہوتو $n(B) =$ کتنا ؟

(2) ایک ہاسٹل میں 125 طلبہ ہیں، ان میں سے 80 طلبہ چائے پیتے ہیں، 60 طلبہ کافی پیتے ہیں اور 20 طلبہ چائے اور کافی دونوں قسم کے مشروب پیتے ہیں۔ تو ایک بھی مشروب نہیں پینے والے طلبہ کی تعداد معلوم کیجیے۔

(3) ایک مقابلہ جاتی امتحان میں 50 طلبہ انگریزی میں کامیاب ہوئے۔ 60 طلبہ ریاضی مضمون میں کامیاب ہوئے۔ 40 طلبہ دونوں مضامین میں کامیاب ہوئے۔ ایک بھی طالب علم دونوں مضامین میں ناکام نہیں ہوا تو کل کتنے طلبہ امتحان میں شریک تھے؟

*(4) ایک اسکول میں نویں جماعت کے 220 طلبہ کی پسند سے متعلق سروے کیا گیا۔ ان میں سے 130 طلبہ نے بتایا کہ انھیں کوہ پیمائی پسند ہے اور 180 طلبہ نے بتایا کہ انھیں آکاش درشنی پسند ہے؟ 110 نے بتایا کہ انھیں کوہِ پیمائی اور آکاش درشنی دونوں پسند ہے۔ تو بتائیے کہ کتنے طلبہ کو دونوں میں سے کوئی بھی پسند نہیں؟ کتنے طلبہ کو صرف کوہِ پیمائی پسند ہے؟ کتنے طلبہ کو صرف آکاش درشنی پسند ہے؟

(5) وین خاکے کی مدد سے درج ذیل تمام سیٹ لکھیے۔



(i) A (ii) B (iii) $A \cup B$ (iv) U

(v) A' (vi) B' (vii) $(A \cup B)'$

مجموعہ سوالات 1

(1) درج ذیل سوالوں کے لیے صحیح متبادل منتخب کیجیے۔

(i) $M = \{1, 3, 5\}$, $N = \{2, 4, 6\}$, ; $M \cap N = ?$

(A) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (B) $\{1, 3, 5\}$ (C) ϕ (D) $\{2, 4, 6\}$

(ii) $P = \{x \mid x$ طاق طبعی عدد ہے۔ یہاں x ,$1 < x \leq 5\}$ اس سیٹ کو فہرستی طریقے سے کس طرح لکھیں گے؟

(A) $\{1, 3, 5\}$ (B) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (C) $\{1, 3\}$ (D) $\{3, 5\}$

(iii) $P = \{1,2, ...,10\}$ یہ کس قسم کا سیٹ ہے؟

(A) خالی سیٹ (B) لامحدود سیٹ (C) محدود سیٹ (D) ان میں سے کوئی نہیں

(iv) $M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ اور $M = \{1, 2, 4\}$ تو درج ذیل میں N سیٹ کون سا ہے؟

(A) $\{1, 2, 3\}$ (B) $\{3, 4, 5, 6\}$ (C) $\{2, 5, 6\}$ (D) $\{4, 5, 6\}$

(v) اگر $P \subseteq M$ تو $P \cap (P \cup M)$ یہ درج ذیل میں سے کون سا سیٹ ہے؟

(A) P (B) M (C) $P \cup M$ (D) $P' \cap M$

(vi) درج ذیل میں سے کون سا سیٹ خالی سیٹ ہے؟

(A) متوازی خطوط کے نقطہ تقاطع کا سیٹ (B) جفت مفرد اعداد کا سیٹ

(C) 30 سے کم دن والے انگریزی مہینوں کا سیٹ (D) $P = \{x \mid x \in I, -1 < x < 1\}$

(2) درج ذیل ضمنی سوالوں کے لیے صحیح متبادل منتخب کیجیے۔

(i) درج ذیل میں سے کون سا گروہ (مجموعہ) سیٹ ہے؟

(A) قوس قزح میں رنگ (B) اسکول کے کمپاؤنڈ میں اونچے درخت

(C) گاؤں کے امیر لوگ (D) کتاب کی آسان مثالیں

(ii) $N \cap W$، یہ سیٹ درج ذیل میں سے کون سا ہے؟

(A) $\{1, 2, 3, ...\}$ (B) $\{0, 1, 2, 3, ...\}$ (C) $\{0\}$ (D) $\{\ \}$

(iii) $P = \{x \mid x$ یہ india لفظ کا حرف ہے۔$\}$ تو P سیٹ فہرستی طریقے سے درج ذیل میں سے کون سا ہے؟

(A) $\{i, n, d\}$ (B) $\{i, n, d, a\}$ (C) $\{i, n, d, i, a\}$ (D) $\{n, d, a\}$

(iv) اگر $T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ اور $M = \{3, 4, 7, 8\}$ تو $T \cup M = ?$

(A) $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ (B) $\{1, 2, 3, 7, 8\}$

(C) $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$ (D) $\{3, 4\}$

(3) ایک گروہ کے 100 لوگوں میں سے 72 لوگ انگریزی بولتے ہیں اور 43 لوگ فرانسیسی بولتے ہیں۔ یہ 100 لوگ انگریزی یا فرانسیسی میں سے کم سے کم ایک زبان بولتے ہیں۔ تو بتائیے کتنے لوگ صرف انگریزی بولتے ہیں؟ کتنے لوگ صرف فرانسیسی بولتے ہیں؟ اور کتنے لوگ انگریزی اور فرانسیسی دونوں زبانیں بولتے ہیں؟

(4) پارتھ نے درخت لگاؤ ہفتہ میں 70 درخت لگایا جب کہ پربھا نے 90 درخت لگایا۔ ان دونوں نے مل کر 25 درخت لگائے، پارتھ یا پربھا نے کل کتنے درخت لگائے؟

(5) اگر $n(A) = 20$ ، $n(B) = 28$ ، $n(A \cup B) = 36$ تو $n(A \cap B) = ?$

(6) ایک جماعت کے 28 طلبہ میں سے 8 طلبہ کے گھر صرف کتا پالا گیا ہے اور 6 طلبہ کے گھر صرف بلی پالی گئی ہے۔ 10 طلبہ کے گھر کتا اور بلی دونوں پالے گئے ہیں۔ تو کتنے طلبہ کے گھر کتا یا بلی میں سے ایک بھی جانور پالا نہیں گیا؟

(7) درج ذیل ہر ایک مثال کے سیٹ کا اجتماعی سیٹ وین خاکے کی مدد سے دکھائیے۔

(i) $A = \{3, 4, 5, 7\}$, $B = \{1, 4, 8\}$

(ii) $P = \{a, b, c, e, f\}$, $Q = \{l, m, n, e, b\}$

(iii) X = {x | ${x}$ یہ 80 اور 100 کے درمیان مفرد عدد ہے۔}

Y = {y | ${y}$ یہ 90 اور 100 کے درمیان طاق عدد ہے۔}

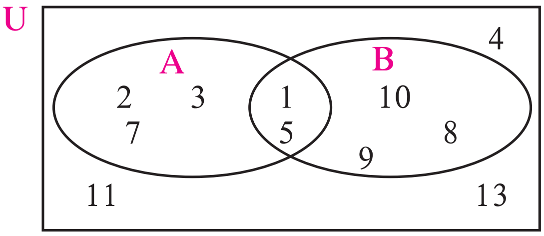
(8) درج ذیل میں سے کون سا سیٹ، کس سیٹ کا ضمنی سیٹ ہے؟ اسے لکھیے۔

Y = تمام معین کا سیٹ ، X = تمام ذوار بعۃ الاضلاع کا سیٹ

T = تمام متوازی الاضلاع کا سیٹ ، S = تمام مربعوں کا سیٹ

V = تمام مستطیلوں کا سیٹ

(9) اگر M یہ کوئی بھی ایک سیٹ ہو تو $M \cup \phi$ اور $M \cap \phi$ لکھیے۔



*(10) بازو کے وین خاکہ کی مدد سے U, A, B, $A \cup B$ اور $A \cap B$ سیٹ لکھیے۔

(11) اگر $n(A) = 7$ ، $n(B) = 13$ ، $n(A \cap B) = 4$ ہو تو $n(A \cup B) = ?$

عملی کام I : خالی جگہوں میں سیٹ کے ارکان لکھیے۔

U = {1, 3, 5, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15}

A = {1, 11, 13} , B = {8, 5, 10, 11, 15} , A′ = {........} , B′ = {........}

$A \cap B$ = {...........} , $A' \cap B'$ = {..............}

$A \cup B$ = {...........} , $A' \cup B'$ = {...........}

$(A \cap B)'$ = {...........} , $(A \cup B)'$ = {...........}

تصدیق کیجیے : $(A \cup B)' = A' \cap B'$, $(A \cap B)' = A' \cup B'$

عملی کام II : آپ کے اطراف کے 20 خاندانوں سے ذیل کی معلومات حاصل کیجیے۔

(i) اردو اخبار خریدنے والے خاندانوں کی تعداد

(ii) انگریزی اخبار خریدنے والے خاندانوں کی تعداد

(iii) انگریزی اور اُردو دونوں زبانوں کے اخبار خریدنے والے خاندانوں کی تعداد

حاصل کردہ معلومات کے لیے وین خاکہ بنائیے۔

◈◈◈

2 حقیقی اعداد Real Numbers

آیئے، سیکھیں

- ناطق اعداد کی خصوصیات
- غیر ناطق اعداد کی خصوصیات
- جذری مقدار
- مربعی جذری مقداروں کا موازنہ
- مربعی جذری مقداروں پر عمل
- مربعی جذری مقداروں کو ناطق بنانا

آیئے ذرا یاد کریں

گذشتہ جماعت میں ہم نے طبعی اعداد، صحیح اعداد اور حقیقی اعداد کا مطالعہ کر چکے ہیں۔

N = طبعی اعداد کا سیٹ = $\{1, 2, 3, 4, ...\}$

W = مکمل اعداد کا سیٹ = $\{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

I = صحیح اعداد کا سیٹ = $\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

Q = ناطق اعداد کا سیٹ = $\{\frac{p}{q} \mid p, q \in I, q \neq 0\}$

R = حقیقی اعداد کا سیٹ

$N \subseteq W \subseteq I \subseteq Q \subseteq R$

ناطق اعداد میں ترتیبی تعلق :

$\frac{p}{q}$ اور $\frac{r}{s}$، ناطق اعداد ہیں اور $q > 0$، $s > 0$ غیر صفر صحیح اعداد ہوں اور اگر

(i) اگر $p \times s = q \times r$ ہو تب $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$

(ii) اگر $p \times s > q \times r$ ہو تب $\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$

(iii) اگر $p \times s < q \times r$ ہو تب $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$

آیئے سمجھ لیں

ناطق اعداد کی خصوصیات Properties of rational numbers

a، b، c ناطق اعداد ہوں تب

خصوصیت	جمع	ضرب
1. مبادلہ کی خاصیت	$a + b = b + a$	$a \times b = b \times a$
2. ملتزمی خاصیت	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
3. جمعی و ضربی شناخت	$a + 0 = 0 + a = a$	$a \times 1 = 1 \times a = a$
4. (جمعی اور ضربی) معکوس خاصیت	$a + (-a) = 0$	$a \times \frac{1}{a} = 1 \quad ...(a \neq 0)$

آیئے ذرا یاد کریں

کوئی بھی ناطق عدد کسر اعشاریہ کی صورت میں مختتم یا متوالی غیر مختتم (دہرانے والا) ہوتا ہے۔

مختتم صورت	متوالی غیر مختتم صورت
(1) $\frac{2}{5} = 0.4$	(1) $\frac{17}{36} = 0.472222... = 0.47\dot{2}$
(2) $-\frac{7}{64} = -0.109375$	(2) $\frac{33}{26} = 1.2692307692307... = 1.2\overline{692307}$
(3) $\frac{101}{8} = 12.625$	(3) $\frac{56}{37} = 1.513513513... = 1.\overline{513}$

آیئے سمجھ لیں

متوالی غیر مختتم عشری صورت کو ناطق عدد $\frac{p}{q}$ کی صورت میں لکھنا

مثال (1) ... 0.777 اس غیر متوالی (دہرانے والی) غیر مختتم کسر اعشاریہ کو $\frac{p}{q}$ کی صورت میں لکھیے۔

حل : فرض کیجیے : $x = 0.777... = 0.\dot{7}$

$\therefore \quad 10x = 7.777... = 7.\dot{7}$

$\therefore \quad 10x - x = 7.\dot{7} - 0.\dot{7}$

$\therefore \quad 9x = 7$

$\therefore \quad x = \frac{7}{9}$

$\therefore \quad 0.777... = \frac{7}{9}$

مثال (2) ... 7.529529529 اس متوالی غیر مختتم کسر اعشاریہ کو $\frac{p}{q}$ کی صورت میں لکھیے۔

حل : فرض کیجیے : $x = 7.529529... = 7.\overline{529}$

$\therefore \quad 1000x = 7529.529529... = 7529.\overline{529}$

$\therefore \quad 1000x - x = 7529.\overline{529} - 7.\overline{529}$

$\therefore \quad 999x = 7522.0 \qquad \therefore \quad x = \frac{7522}{999}$

$\therefore \quad 7.\overline{529} = \frac{7522}{999}$

غور کیجیے

$2.4\dot{3}$ اس عدد کو $\frac{p}{q}$ کی صورت میں لکھنے کے لیے کیا کریں گے؟

اسے دھیان میں رکھیں

(1) دیے ہوئے عدد میں اعشاریہ کی علامت کے بعد کتنے ہندسے بار بار آئیں ہیں، اسے دیکھ اسی کے مطابق اس عدد کو 10، 100، 1000 میں سے مناسب عدد سے ضرب دیجیے۔ مثلاً $2.\dot{3}$، اس عدد میں 3، صرف ایک ہی ہندسہ غیر مختتم ہے۔ اس لیے $2.\dot{3}$ عدد کو $\frac{p}{q}$ صورت میں لانے کے لیے اُسے 10 سے ضرب دیجیے۔

$1.\overline{24}$، اس عدد میں 2، 4 یہ دو ہندسے غیر مختتم ہیں۔ اس لیے $1.\overline{24}$ کو 100 سے ضرب دیجیے۔

$1.\overline{513}$، اس عدد میں 5، 1، 3 یہ تین ہندسے غیر مختتم ہیں۔ اس لیے $1.\overline{513}$ کو 1000 سے ضرب دیجیے۔

(2) ناطق عدد کے نسب نما کے مفرد اجزائے ضربی کی جانچ کیجیے، اس میں 2 اور 5 کے علاوہ مفرد عدد نہیں ہوں تو ناطق عدد کی عشری صورت متوالی ہوتی ہے۔ 2 اور 5 کے علاوہ مفرد عدد، نسب نما کے اجزائے ضربی ہوں تو اس عدد کی عشری صورت متوالی غیر مختتم ہوتی ہے۔

مشقی سیٹ 2.1

.1 درج ذیل میں سے کون سے ناطق اعداد کی کسر اعشاریہ کی صورت متوالی ہے اور کون سے عدد کی کسر اعشاریہ کی صورت متوالی غیر مختتم ہے؟ لکھیے۔

(i) $\frac{13}{5}$ (ii) $\frac{2}{11}$ (iii) $\frac{29}{16}$ (iv) $\frac{17}{125}$ (v) $\frac{11}{6}$

.2 درج ذیل ناطق اعداد کو کسر اعشاریہ کی صورت میں لکھیے۔

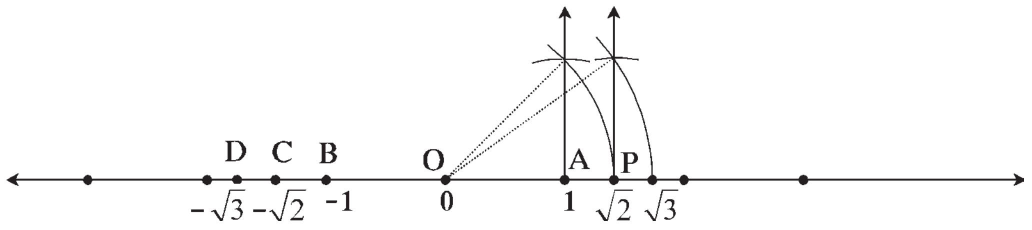
(i) $\frac{127}{200}$ (ii) $\frac{25}{99}$ (iii) $\frac{23}{7}$ (iv) $\frac{4}{5}$ (v) $\frac{17}{8}$

.3 درج ذیل ناطق اعداد کو $\frac{p}{q}$ کی صورت میں لکھیے۔

(i) $0.\dot{6}$ (ii) $0.\overline{37}$ (iii) $3.\overline{17}$ (iv) $15.\overline{89}$ (v) $2.\overline{514}$

آیئے ذرا یاد کریں

ذیل میں عددی خط پر دکھائے ہوئے $\sqrt{2}$ اور $\sqrt{3}$ یہ اعداد ناطق نہیں ہیں یعنی یہ غیر ناطق ہیں۔



اس عددی خط پر اکائی OA = 1 فاصلہ ہے۔ O کے بائیں جانب B نقطہ بھی 1 اکائی فاصلہ پر ہے۔ B نقطہ کا محدد -1 ہے۔ P نقطہ کا محدد $\sqrt{2}$ ہے، اس کا متضاد عدد 'C' نقطہ سے ظاہر کیا ہوا ہے۔ C نقطہ کا محدد $-\sqrt{2}$ ہے۔ اسی طرح $\sqrt{3}$ کا متضاد عدد دکھانے والے D نقطہ کا محدد $-\sqrt{3}$ ہے۔

آیئے سمجھ لیں

غیر ناطق اعداد اور حقیقی اعداد Irrational and real numbers

$\sqrt{2}$ ، یہ عدد غیر ناطق عدد ہے۔ اسے بالراست ثبوت دے کر ثابت کریں گے۔

ایسا فرض کریں کہ $\sqrt{2}$ ، یہ ناطق عدد ہے۔ فرض کریں وہ $\frac{p}{q}$ ہے۔

$\frac{p}{q}$ اس ناطق عدد کی مختصر ترین صورت ہے، یعنی فرض کیجیے کہ p اور q میں 1 کے علاوہ مختلف مشترک عاد نہیں ہے۔

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, $\therefore \quad 2 = \frac{P^2}{q^2}$ ... (طرفین کا مربع کرنے پر)

$\therefore \quad 2q^2 = p^2$

$\therefore$ p^2، یہ جفت عدد ہے۔

$\therefore$ p بھی جفت عدد ہے، یعنی 2 یہ p کا عاد ہے۔ ... (I)

$\therefore \quad p = 2t$, $\therefore \quad p^2 = 4t^2 \qquad t \in I$

$\therefore \quad 2q^2 = 4t^2 \quad \ldots (\because p^2 = 2q^2) \quad \therefore \quad q^2 = 2t^2$

$\therefore$ q^2 یہ جفت عدد ہے۔

$\therefore$ q یہ جفت عدد ہے۔

$\therefore$ 2 یہ q کا بھی عاد ہے۔ ... (II)

بیان (I) اور (II) کی بناء پر 2 یہ p اور q دونوں کا مشترک عاد ہے۔

یہ تضاد ہے۔ کیوں کہ $\frac{p}{q}$ میں p اور q کا 1 کے علاوہ ایک بھی مشترک عاد نہیں ہے۔

$\therefore$ $\sqrt{2}$ ، یہ ناطق عدد ہے۔ یہ فرض کرنا غلط ہے۔

$\therefore$ $\sqrt{2}$، یہ غیر ناطق عدد ہے۔

اسی طرح $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ غیر ناطق اعداد ہیں۔ بتایا جاسکتا ہے۔ اس کے لیے 3 یا 5 یہ n کے عاد ہوں تب ہی وہ n^2 کے عاد ہوتے ہیں۔ اس اصول کا استعمال کیجیے۔

$\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ جیسے اعداد عددی خط پر دکھائے جاسکتے ہیں۔

جو عدد عددی خط پر نقطہ سے دکھایا جاسکتا ہے، وہ حقیقی عدد ہوتا ہے۔

مختصراً عددی خط پر ہر نقطہ کا محدد، حقیقی عدد ہوتا ہے اور ہر حقیقی عدد سے منسلک ہونے والا نقطہ عددی خط پر ہوتا ہے۔

ہمیں معلوم ہے کہ ہر ناطق عدد حقیقی عدد ہوتا ہے۔ لیکن $\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{2}$، π، $3 + \sqrt{2}$ جیسے حقیقی اعداد، ناطق اعداد نہیں ہیں۔ یعنی ہر حقیقی عدد ناطق عدد نہیں ہوتا۔ اسے دھیان میں رکھیے۔

غیر ناطق اعداد کی کسر اعشاریہ کی صورت میں تحویل

ہم 2 اور 3 اعداد کا جذر المربع تقسیم کے طریقے سے معلوم کریں گے۔

2 کا جذر المربع

	1.41421...
1	2. $\overline{00}$ $\overline{00}$ $\overline{00}$ $\overline{00}$ ....
+1	-1
24	100
+4	-96
281	400
+ 1	-281
2824	11900
+ 4	-11296
28282	60400
+ 2	- 56564
282841	0383600

$\therefore \quad \sqrt{2} = 1.41421...$

3 کا جذر المربع

	1.732....
1	3. $\overline{00}$ $\overline{00}$ $\overline{00}$ $\overline{00}$ ....
+1	-1
27	200
+7	-189
343	1100
+ 3	-1029
3462	007100
+ 2	-6924
3464	0176

$\therefore \quad \sqrt{3} = 1.732...$

یہاں خارج قسمت میں اعشاریہ علامت کے آگے ہندسوں کی تعداد کبھی بھی ختم نہیں ہوتی، یعنی لامحدود ہندسوں کی ترتیب حاصل ہوتی ہے۔ یہاں کوئی بھی ہندسوں کا گروہ یا ہندسہ بار بار نہیں آتا۔ اس لیے یہ عدد کی کسر اعشاریہ صورت غیر متوالی غیر مختتم حاصل ہوتی ہے۔

$\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ یہ اعداد غیر ناطق اعداد ہیں۔ اس لیے ....1.4142 اور ....1.732 یہ بھی غیر ناطق اعداد ہیں۔ اس بنا پر دھیان دیجیے کہ غیر متوالی غیر مختتم کسر اعشاریہ کی صورت میں عدد غیر ناطق ہوتا ہے۔

عدد π

عملی کام I :

موٹے دبیر کارڈ پر مختلف نصف قطر کے دائرے بنائیے۔ تین چار دائروی شکل کی ٹکیہ کاٹیے۔ ہر ٹکیہ کے کناروں پر دھاگا گھما کر ہر دائروی شکل کی ٹکیہ کا قطر اور محیط ناپیے۔ درج ذیل جدول مکمل کیجیے۔

نمبر شمار	نصف قطر	قطر (d)	محیط (c)	نسبت = $\frac{c}{d}$
1	7 سم			
2	8 سم			
3	5.5 سم			

متصلہ جدول کی بناء پر ہمیں سمجھ میں آتا ہے کہ $\frac{c}{d}$ یہ نسبت ہر مرتبہ تقریباً 3.1 آتی ہے۔ یعنی مستقل رہتی ہے۔ اس نسبت کو π علامت سے ظاہر کرتے ہیں۔

عملی کام II :

π کی تقریباً قیمت معلوم کرنے کے لیے 11 سم، 22 سم اور 33 سم لمبائی کے تار کے ٹکڑے لیجیے۔ ہر تار سے دائرہ بنائیے۔ اُن دائروں کے قطر ناپیے اور ذیل کی جدول مکمل کیجیے۔

دائرہ نمبر	محیط	قطر	محیط اور قطر کی نسبت
1	11 سم		
2	22 سم		
3	33 سم		

کیا محیط اور قطر کی نسبت تقریباً $\frac{22}{7}$ آتی ہے؟

اس کی تصدیق کیجیے۔

دائرے کے محیط اور قطر کی نسبت مستقل عدد ہوتی ہے۔ وہ غیر ناطق ہوتا ہے۔ اس عدد کو π علامت سے ظاہر کرتے ہیں۔ π کی تقریباً قیمت $\frac{22}{7}$ یا 3.14 لیتے ہیں۔

عظیم بھارتی ریاضی داں آریہ بھٹ نے 499 عیسوی میں π کی قیمت $\frac{62832}{20000} = 3.1416$ معلوم کیا۔

ہمیں معلوم ہے کہ $\sqrt{3}$، غیر ناطق عدد ہے کیوں کہ اس عدد کی کسر اعشاریہ کی صورت میں تحویل غیر متوالی غیر مختتم ہے۔ اب $2+\sqrt{3}$، یہ عدد غیر ناطق عدد ہے یا نہیں۔ معلوم کریں گے۔

فرض کیجیے $2+\sqrt{3}$ یہ عدد غیر ناطق عدد نہیں ہے یعنی وہ ناطق عدد ہی ہونا چاہیے۔

اگر $2+\sqrt{3}$ ناطق عدد ہے تب فرض کیجیے کہ $2+\sqrt{3} = \frac{p}{q}$

(یہ مساوات حاصل ہوتی ہے۔) .... $\therefore \quad \sqrt{3} = \frac{p}{q} - 2$

یہاں بائیں جانب غیر ناطق عدد ہے اور دائیں جانب ناطق عدد ہے۔ یہ تضاد ہے۔

لہٰذا $2+\sqrt{3}$ یہ ناطق عدد نہیں ہے، یعنی غیر ناطق عدد ہے۔ یہ ثابت ہوتا ہے۔

اسی طرح $2\sqrt{3}$ غیر ناطق عدد ہے۔ دکھایا جاسکتا ہے۔

دو ناطق اعداد کی جمع یا ضرب ناطق ہوسکتی ہے۔ اس کی ذیل کے مطابق تصدیق کرسکتے ہیں۔ مثلاً

$(3+\sqrt{5}) - (\sqrt{5}) = 3$, $\quad 4\sqrt{5} \div \sqrt{5} = 4$, $\quad 2+\sqrt{3}+(-\sqrt{3}) = 2$,

$2\sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{5}$ $\quad \sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{10}$, $\quad 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 6$

اسے دھیان میں رکھیں

غیر ناطق اعداد کی خصوصیات

(1) ناطق عدد اور غیر ناطق عدد کی جمع یا تفریق غیر ناطق عدد ہوتی ہے۔

(2) غیر صفر ناطق عدد اور غیر ناطق عدد کا حاصل ضرب یا خارج قسمت بھی غیر ناطق عدد ہوتا ہے۔

(3) دو غیر ناطق اعداد کی جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم ناطق عدد یا غیر ناطق عدد ہوسکتی ہے۔

آئیے سمجھ لیں

حقیقی اعداد پر ترتیبی تعلق کی خصوصیات

1. اگر a اور b دو حقیقی اعداد ہوں تب اُن میں $a = b$ یا $a < b$ یا $a > b$ میں سے کوئی بھی ایک تعلق ہوتا ہے۔
2. اگر $a < b$ اور $b < c$ ہو تب $a < c$
3. اگر $a < b$ ہو تب $a + c < b + c$
4. اگر $a < b$ اور $c > 0$ ہو تب $ac < bc$ اور اگر $c < 0$ ہو تب $ac > bc$

ناطق عدد اور غیر ناطق عدد لے کر اوپر دیے ہوئے اصول کی تصدیق کیجیے۔

منفی عدد کا جذر المربع

اگر $\sqrt{a} = b$ ہو تب $b^2 = a$ ..... (یہ ہمیں معلوم ہے۔)

اس بناء پر اگر $\sqrt{5} = x$ ہو تب $x^2 = 5$ ..... (یہ ہمیں سمجھ میں آتا ہے۔)

اسی طرح ہمیں یہ معلوم ہے کہ کسی بھی حقیقی عدد کا مربع ہمیشہ مثبت عدد ہوتا ہے۔ یعنی کسی بھی حقیقی عدد کا مربع کبھی بھی منفی نہیں ہوتا۔

لیکن $(\sqrt{-5})^2 = -5$

$\therefore$ $\sqrt{-5}$، یہ حقیقی عدد نہیں ہے۔ لہٰذا منفی حقیقی عدد کے جذر المربع حقیقی عدد نہیں ہوتے۔

مشقی سیٹ 2.2

(1) ثابت کیجیے کہ $4\sqrt{2}$ یہ غیر ناطق عدد ہے۔

(2) ثابت کیجیے کہ $3 + \sqrt{5}$ غیر ناطق عدد ہے۔

(3) $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{10}$ ان اعداد کو عددی خط پر دکھائیے۔

(4) ذیل میں دیے ہوئے اعداد کے درمیان کے کوئی بھی تین ناطق اعداد لکھیے۔

(i) 0.3 اور -0.5 (ii) -2.3 اور -2.33 (iii) 5.2 اور 5.3 (iv) -4.5 اور -4.6

آئیے سمجھ لیں

مثبت ناطق عدد کے جذر Root of positive rational numbers

اگر $x^2 = 2$ ہو تب $x = \sqrt{2}$ یا $x = -\sqrt{2}$ ہوتا ہے۔ یہ ہمیں معلوم ہے کہ $\sqrt{2}$ اور $-\sqrt{2}$ یہ دونوں غیر ناطق اعداد ہیں۔ $\sqrt[3]{7}$، $\sqrt[4]{8}$ جیسے اعداد بھی غیر ناطق ہیں۔

n مثبت صحیح عدد ہو اور $x^n = a$ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ x یہ a کا n واں جذر ہے۔

یہ جذر ناطق یا غیر ناطق عدد ہو سکتا ہے۔

مثال : $2^5 = 32$، اس لیے 32 کا 5 واں جذر 2 ناطق عدد ہے، لیکن $x^5 = 2$ ہو تب $x = \sqrt[5]{2}$ یہ غیر ناطق عدد ہے۔

جذری مقداریں (Surds)

ہمیں معلوم ہے کہ 5 ناطق عدد ہے لیکن $\sqrt{5}$ ناطق عدد نہیں ہے۔ جس طرح حقیقی اعداد کے جذرالمربع یا جذرالمکعب ناطق یا غیر ناطق ہو سکتے ہیں۔ اُسی طرح ان کا n واں جذر بھی ناطق یا غیر ناطق ہو سکتے ہیں۔

اگر n، یہ 1 سے بڑا صحیح عدد ہو اور $'a'$ اس مثبت حقیقی عدد کے n واں جذر کو x سے دکھائیں تو $x^n = a$ یا $\sqrt[n]{a} = x$ لکھتے ہیں۔

اگر a مثبت ناطق عدد ہو اور a کا n واں جذر x غیر ناطق ہو تو x جذری مقدار (غیر ناطق عدد کا جذر) کہلاتا ہے۔

$\sqrt[n]{a}$، یہ جذری مقدار ہو تب $\sqrt{\ }$، اس علامت کو جذری علامت (radical sign) کہتے ہیں۔ n کو اس جذری مقدار کا درجہ (order of the surd) کہتے ہیں اور a کو جذری عدد (radicand) کہتے ہیں۔

(1) فرض کیجیے $a = 7$، $n = 3$ ہو تب $\sqrt[3]{7}$ جذری مقدار ہے۔ کیوں کہ $\sqrt[3]{7}$ غیر ناطق ہے۔

(2) فرض کیجیے $a = 27$ اور $n = 3$ ہو تب $\sqrt[3]{27} = 3$ یہ غیر ناطق عدد نہیں ہے اس لیے $\sqrt[3]{27}$ جذری مقدار نہیں ہے۔

(3) $\sqrt[3]{8}$، کیا یہ جذری مقدار ہے؟

فرض کیجیے $\sqrt[3]{8} = p$، $\therefore\ p^3 = 8$، کس عدد کا مکعب 8 ہے؟

ہمیں معلوم ہے کہ 2 کا مکعب 8 ہے۔

$\sqrt[3]{8}$ میں $a = 8$، یہ ناطق عدد ہے۔ یہاں $n = 3$، یہ مثبت صحیح عدد ہے لیکن $\sqrt[3]{8}$ یہ عدد غیر ناطق نہیں ہے۔ کیوں کہ 8 کا جذرالمکعب 2 ہے۔

$\therefore$ $\sqrt[3]{8}$ جذری مقدار نہیں ہے۔

(4) اب $\sqrt[4]{8}$ پر غور کریں گے۔

یہاں $a = 8$، جذری مقدار کا درجہ $n = 4$ ہے۔ لیکن 8، یہ عدد کسی بھی ناطق عدد کی چوتھی قوت نہیں ہے۔ یعنی $\sqrt[4]{8}$ یہ غیر ناطق عدد ہے۔

$\therefore$ $\sqrt[4]{8}$ جذری مقدار ہے۔

اس سال ہم صرف 2 درجہ والی یعنی $\sqrt{3}$، $\sqrt{7}$، $\sqrt{42}$ وغیرہ جذری مقداروں پر غور کرنے والے ہیں۔

دو درجہ والی جذری مقداروں کو مربعی جذری مقدار کہتے ہیں۔

جذری مقداروں کی مختصر ترین صورت

کبھی کبھی جذری مقداروں کو مختصر ترین صورت دی جاتی ہے۔ مثلاً

(i) $\sqrt{48} = \sqrt{16\times 3} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

(ii) $\sqrt{98} = \sqrt{49\times 2} = \sqrt{49}\times \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$، $\sqrt{5}$ .... جیسی کچھ جذری مقداروں کی مختصر ترین صورت میں جذری مقداریں ہیں۔ ان کی مزید مختصر صورت نہیں دی جاسکتی۔

مشابہ جذری مقداریں (Similar or like surds)

$\sqrt{2}$، $-3\sqrt{2}$، $\frac{4}{5}\sqrt{2}$ یہ کچھ مشابہ جذری مقداریں ہیں۔ اگر p اور q ناطق اعداد ہوں تب $p\sqrt{a}$ ، $q\sqrt{a}$ کو مشابہ جذری مقداریں کہتے ہیں۔ دو جذری مقداروں کو مشابہ ہونے کے لیے اُن کا درجہ مساوی ہونا چاہیے۔ اسی طرح جذری عدد بھی مساوی ہونا چاہیے۔

$\sqrt{45}$ اور $\sqrt{80}$ ان جذری مقداروں کا درجہ 2 ہے، یعنی ان کا درجہ مساوی ہے۔لیکن جذری اعداد مساوی نہیں ہیں۔اس لیے یہ جذری مقداریں مشابہ نہیں ہیں ایسا دکھائی دیتا ہے۔ان جذری مقداروں کو مختصرترین صورت لکھیں گے۔

$\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$ اور $\sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = \sqrt{16} \times \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

یہاں $3\sqrt{5}$ اور $4\sqrt{5}$ مشابہ جذری مقداریں ہیں۔لہٰذا $\sqrt{45}$ اور $\sqrt{80}$ جذری مقداروں کی مختصرترین صورت مشابہ جذری مقداریں ہیں۔

اسے دھیان میں رکھیں

مختصرترین صورت میں جذری مقداروں کا درجہ اور جذری عدد مساوی ہوں تب ہی اُن جذری مقداروں کو مشابہ جذری مقداریں کہتے ہیں۔

آیئے سمجھ لیں

جذری مقداروں کا موازنہ (Comparison of surds)

فرض کیجیے a ، b یہ اور k مثبت حقیقی اعداد ہیں۔ تب $a < b$ کی بنا پر $ak < bk$ حاصل ہوتا ہے۔

$\therefore\ a^2 < ab$ اسی طرح $ab < b^2$ ، یعنی $a^2 < ab < b^2$ ، $\therefore\ a^2 < b^2$

اس کے برعکس $a^2 < b^2$ ہو تب $a < b$ ہے کیوں کہ $a > b$ ہو تب $a^2 > b^2$

اگر $a = b$ ہو تب $a^2 = b^2$، اور اگر $a > b$ کی بناء پر $a^2 > b^2$ حاصل ہوتا ہے۔

اس بناء پر اگر $a < b$ ہو تب $a^2 < b^2$ اور اگر $a^2 < b^2$ ہو تب $a < b$

یہاں a اور b، حقیقی اعداد ہونے کی وجہ سے وہ ناطق عدد یا جذری مقدار ہو سکتے ہیں۔

اس کا استعمال کر کے جذری مقداروں میں چھوٹا بڑا پن کی جانچ کی جا سکتی ہے۔

(i) $6\sqrt{2}\,,\ 5\sqrt{5}$

$\sqrt{36} \times \sqrt{2}\ \boxed{?}\ \sqrt{25} \times \sqrt{5}$

$\sqrt{72}\ \boxed{?}\ \sqrt{125}$

لیکن ، $72\ \boxed{<}\ 125$

$\therefore\ 6\sqrt{2}\ \boxed{<}\ 5\sqrt{5}$

یا

$(6\sqrt{2})^2\ \boxed{\phantom{<}}\ (5\sqrt{5})^2,$

$72 < 125$

$\therefore\ 6\sqrt{2}\ \boxed{<}\ 5\sqrt{5}$

(ii) $8\sqrt{3}\,,\ \sqrt{192}$

$\sqrt{64} \times \sqrt{3}\ \boxed{?}\ \sqrt{192}$

$\sqrt{192}\ \boxed{?}\ \sqrt{192}$

لیکن ، $192\ \boxed{=}\ 192$

$\therefore\ \sqrt{192}\ \boxed{=}\ \sqrt{192}$

$\therefore\ 8\sqrt{3}\ \boxed{=}\ \sqrt{192}$

(iii) $7\sqrt{2}\,,\ 5\sqrt{3}$

$\sqrt{49} \times \sqrt{2}\ \boxed{?}\ \sqrt{25} \times \sqrt{3}$

$\sqrt{98}\ \boxed{?}\ \sqrt{75}$

لیکن ، $98\ \boxed{>}\ 75$

$\therefore\ 7\sqrt{2}\ \boxed{>}\ 5\sqrt{3}$

یا

$(7\sqrt{2})^2\ \boxed{}\ (5\sqrt{3})^2,$

$98 > 75$

$\therefore\ 7\sqrt{2}\ \boxed{>}\ 5\sqrt{3}$

مشابہ جذری مقداروں پر عمل (Operations on like surds)

مشابہ جذری مقداروں پر جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم کا عمل کر سکتے ہیں۔

غور کیجیے

$\sqrt{9+16} \overset{?}{=} \sqrt{9}+\sqrt{16}$

$\sqrt{100+36} \overset{?}{=} \sqrt{100}+\sqrt{36}$

مثال (1) : مختصر کیجیے : $7\sqrt{3} + 29\sqrt{3}$

حل : $7\sqrt{3} + 29\sqrt{3} = (7 + 29)\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$

مثال (2) : مختصر کیجیے : $7\sqrt{3} - 29\sqrt{3}$

حل : $7\sqrt{3} - 29\sqrt{3} = (7 - 29)\sqrt{3} = -22\sqrt{3}$

مثال (3) : مختصر کیجیے : $\sqrt{8} + \frac{1}{2}\sqrt{8} - 5\sqrt{8}$

حل : $13\sqrt{8} + \frac{1}{2}\sqrt{8} - 5\sqrt{8} = \left(13 + \frac{1}{2} - 5\right)\sqrt{8} = \left(\frac{26+1-10}{2}\right)\sqrt{8}$

$= \frac{17}{2}\sqrt{8} = \frac{17}{2}\sqrt{4\times 2}$

$= \frac{17}{2} \times 2\sqrt{2} = 17\sqrt{2}$

مثال (4) : مختصر کیجیے : $8\sqrt{5} + \sqrt{20} - \sqrt{125}$

حل : $8\sqrt{5} + \sqrt{20} - \sqrt{125} = 8\sqrt{5} + \sqrt{4\times 5} - \sqrt{25\times 5}$

$= 8\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 5\sqrt{5}$

$= (8 + 2 - 5)\sqrt{5}$

$= 5\sqrt{5}$

مثال (5) : جذری مقداروں کا ضرب کیجیے : $\sqrt{7} \times \sqrt{42}$

حل : $\sqrt{7} \times \sqrt{42} = \sqrt{7\times 42} = \sqrt{7\times 7\times 6} = 7\sqrt{6}$ ... ($7\sqrt{6}$ غیر ناطق عدد ہے۔)

مثال (6) : جذری مقداروں کی تقسیم کیجیے : $\sqrt{125} \div \sqrt{5}$

حل : $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{125}{5}} = \sqrt{25} = 5$ ... (5 ناطق عدد ہے۔)

مثال (7) : حل کیجیے : $\sqrt{50} \times \sqrt{18}$

$\sqrt{50} \times \sqrt{18} = \sqrt{25\times 2} \times \sqrt{9\times 2} = 5\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 15 \times 2 = 30$

دو جذروی مقداروں کا حاصل ضرب یا خارج قسمت ناطق عدد ہو سکتا ہے۔ یہ مذکورہ بالا مثالوں سے سمجھ میں آتا ہے۔

جذری مقداروں کو ناطق بنانا (Rationalization of Surds)

دو جذری مقداروں کا حاصل ضرب ناطق عدد آتا ہو تب اُن میں سے کسی بھی ایک جذری مقدار کو دوسری جذری مقدار کا ناطق کار جز ضربی (Rationalizing Factor) کہتے ہیں۔

مثال (1) : $\sqrt{2}$، اس جذری مقدار کو $\sqrt{2}$ سے ضرب دیں تو $\sqrt{4} = \sqrt{2\times 2}$ حاصل ہوتا ہے۔ $2 = \sqrt{4}$ یہ ناطق عدد ہے۔

$\therefore$ $\sqrt{2}$ کا ناطق کار جز ضربی $\sqrt{2}$ ہے۔

مثال (2) : ضرب کیجیے : $\sqrt{8} \times \sqrt{2}$

$\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$ ... (یہ ناطق عدد ہے۔)

$\therefore$ $\sqrt{2}$ کا $\sqrt{8}$ ناطق کار جز ضربی ہے۔

اسی طرح $8\sqrt{2}$ یہ جذری مقدار بھی $\sqrt{2}$ کا ناطق کار جز ضربی ہے۔

کیوں کہ $\sqrt{2} \times 8\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 8 \times 2 = 16$

کیا $\sqrt{6}$، $\sqrt{16}$، $\sqrt{50}$ یہ $\sqrt{2}$ کے ناطق کار جز ضربی ہیں؟ اس کی تصدیق کیجیے۔

اسے دھیان میں رکھیں

دی ہوئی جذری مقدار کا ناطق کار جز ضربی صرف ایک ہی نہیں ہوتا۔ کوئی جذری مقدار، دی ہوئی جذری مقدار کی ناطق کار جز ضربی ہو تب اُسے غیر صفر ناطق عدد سے ضرب دے کر حاصل ہونے والی جذری مقدار بھی دی ہوئی جذری مقدار کی ناطق کار جز ضربی ہوتی ہے۔

مثال (3) : $\sqrt{27}$ کا ناطق کار جز ضربی لکھیے۔

حل : $\sqrt{27} = \sqrt{9\times 3} = 3\sqrt{3}$ ، $\therefore 3\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3 \times 3 = 9$ ... (یہ ناطق عدد ہے۔)

$\sqrt{3}$ یہ $\sqrt{27}$ جذری مقدار کا ناطق کار جز ضربی ہے۔

غور کیجیے کہ، $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ یعنی، $3\sqrt{3} \times 3\sqrt{3} = 9 \times 3 = 27$

یعنی $\sqrt{27}$، اس دی ہوئی جذری مقدار کا $3\sqrt{3}$ بھی ناطق کار جز ضربی ہے۔ اس کے علاوہ $4\sqrt{3}$، $7\sqrt{3}$ ایسے کئی ناطق کار جز ضربی ہوسکتے ہیں۔ ان میں سے $\sqrt{3}$ سب سے مختصر ترین ناطق کار جز ضربی ہے۔

مثال (4) : $\frac{1}{\sqrt{5}}$ کے نسب نما کو ناطق بنائیے۔

حل : (شمار کنندہ اور نسب نما کو $\sqrt{5}$ سے ضرب دیا۔) ...

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

مثال (5) : $\frac{3}{2\sqrt{7}}$ کے نسب نما کو ناطق بنائیے۔

حل : (یہاں $2\sqrt{7}$ کو $\sqrt{7}$ سے ضرب دینا کافی ہے۔) ...

$$\frac{3}{2\sqrt{7}} = \frac{3}{2\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{2\times 7} = \frac{3\sqrt{7}}{14}$$

اسے دھیان میں رکھیں

نسب نما کو ناطق بنانے کے لیے ناطق کار جز ضربی کا استعمال ہوتا ہے۔

کسی بھی عدد کا نسب نما ناطق عدد ہونا سہولت بخش ہوتا ہے اس لیے نسب نما کو ناطق بناتے ہیں۔

مشقی سیٹ 2.3

(1) ذیل کی جذری مقداروں کا درجہ بتائیے۔

(i) $\sqrt[3]{7}$ (ii) $5\sqrt{12}$ (iii) $\sqrt[4]{10}$ (iv) $\sqrt{39}$ (v) $\sqrt[3]{18}$

(2) درج ذیل میں سے کون سا عدد جذری مقدار ہے۔ بتائیے؟

(i) $\sqrt[3]{51}$ (ii) $\sqrt[4]{16}$ (iii) $\sqrt[5]{81}$ (iv) $\sqrt{256}$ (v) $\sqrt[3]{64}$ (vi) $\sqrt{\frac{22}{7}}$

(3) درج ذیل جوڑیوں میں سے کون سی جذری مقدار کی جوڑی مشابہ اور کون سی جوڑی غیر مشابہ ہے؟ پہچانیے۔

(i) $\sqrt{52}\,,\ 5\sqrt{13}$ (ii) $\sqrt{68}\,,\ 5\sqrt{3}$ (iii) $4\sqrt{18}\,,\ 7\sqrt{2}$

(iv) $19\sqrt{12}\,,\ 6\sqrt{3}$ (v) $5\sqrt{22}\,,\ 7\sqrt{33}$ (vi) $5\sqrt{5}\,,\ \sqrt{75}$

(4) درج ذیل جذری مقداروں کو مختصر کیجیے۔

(i) $\sqrt{27}$ (ii) $\sqrt{50}$ (iii) $\sqrt{250}$ (iv) $\sqrt{112}$ (v) $\sqrt{168}$

(5) درج ذیل اعداد کے درمیان چھوٹا۔ بڑا پن طے کیجیے۔

(i) $7\sqrt{2}\,,\ 5\sqrt{3}$ (ii) $\sqrt{247}\,,\ \sqrt{274}$ (iii) $2\sqrt{7}\,,\ \sqrt{28}$

(iv) $5\sqrt{5}\,,\ 7\sqrt{2}$ (v) $4\sqrt{42}\,,\ 9\sqrt{2}$ (vi) $5\sqrt{3}\,,\ 9$ (vii) $7,\ 2\sqrt{5}$

(6) مختصر کیجیے۔

(i) $5\sqrt{3} + 8\sqrt{3}$ (ii) $9\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + \sqrt{125}$

(iii) $7\sqrt{48} - \sqrt{27} - \sqrt{3}$ (iv) $\sqrt{7} - \frac{3}{5}\sqrt{7} + 2\sqrt{7}$

(7) ضرب کیجیے اور مختصر کیجیے۔

(i) $3\sqrt{12} \times \sqrt{18}$ (ii) $3\sqrt{12} \times 7\sqrt{15}$

(iii) $3\sqrt{8} \times \sqrt{5}$ (iv) $5\sqrt{8} \times 2\sqrt{8}$

(8) تقسیم کیجیے اور اُسے مختصر کر کے لکھیے۔

(i) $\sqrt{98} \div \sqrt{2}$ (ii) $\sqrt{125} \div \sqrt{50}$ (iii) $\sqrt{54} \div \sqrt{27}$ (iv) $\sqrt{310} \div \sqrt{5}$

(9) نسب نما کو ناطق بنائیے۔

(i) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{14}}$ (iii) $\frac{5}{\sqrt{7}}$ (iv) $\frac{6}{9\sqrt{3}}$ (v) $\frac{11}{\sqrt{3}}$

آیئے ذرا یاد کریں

ہمیں معلوم ہے کہ

اگر $a > 0$، $b > 0$ ہو تب $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

$\sqrt{a^2} = a$; $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$; $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

ضرب کیجیے :

مثال (1) :

$$\sqrt{2}(\sqrt{8} + \sqrt{18})$$
$$= \sqrt{2 \times 8} + \sqrt{2 \times 18}$$
$$= \sqrt{16} + \sqrt{36}$$
$$= 4 + 6$$
$$= 10$$

مثال (2) :

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})$$
$$= \sqrt{3}\left(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\right) - \sqrt{2}\left(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\right)$$
$$= \sqrt{3} \times 2\sqrt{3} - \sqrt{3} \times 3\sqrt{2} - \sqrt{2} \times 2\sqrt{3} + \sqrt{2} \times 3\sqrt{2}$$
$$= 2 \times 3 - 3\sqrt{6} - 2\sqrt{6} + 3 \times 2$$
$$= 6 - 5\sqrt{6} + 6$$
$$= 12 - 5\sqrt{6}$$

آیئے سمجھ لیں

مربعی جذری مقدار کی دورکنی صورت (Binomial quadratic surd)

- $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ ؛ $\sqrt{5} + \frac{3}{4}$ یہ مربعی جذری مقداروں کی دورکنی صورت ہے۔اسی طرح $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ ، $\sqrt{5} - \frac{3}{4}$ بھی مربعی جذری مقداروں کی دورکنی صورت ہے۔

درج ذیل ضرب کا مطالعہ کیجیے۔

- $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$
- $(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2 = 5 - 3 = 2$
- $(\sqrt{3} + \sqrt{7})(\sqrt{3} - \sqrt{7}) = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{7})^2 = 3 - 7 = -4$
- $(\frac{3}{2} + \sqrt{5})(\frac{3}{2} - \sqrt{5}) = (\frac{3}{2})^2 - (\sqrt{5})^2 = \frac{9}{4} - 5 = \frac{9-20}{4} = -\frac{11}{4}$

$(\sqrt{3} + \sqrt{5})$، $(\sqrt{3} - \sqrt{5})$ یہ دورکنی جذری مقداروں کی جوڑی کا حاصل ضرب ناطق عدد ہے۔ایسی دورکنی جذری مقداروں کی جوڑیوں کو مزدوج جوڑیاں کہتے ہیں۔

دورکنی جذری مقدار اور اس کی مزدوج جوڑی، یہ دونوں اعداد ایک دوسرے کے ناطق کار جز ضربی ہوتے ہیں۔

$\sqrt{3} - \sqrt{5}$ یا $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ ان میں سے ہر ایک دورکنی جذری مقدار، $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ دورکنی جذری مقدار کی مزدوج جوڑی ہے۔

اسی طرح $\sqrt{3} + 7$ کی مزدوج جوڑی $\sqrt{3} - 7$ ہے۔

اسے دھیان میں رکھیں

دورکنی جذری مقداروں کی مزدوج جوڑی کے ارکان کا حاصل ضرب ہمیشہ ناطق عدد آتا ہے۔

آیئے سمجھ لیں

نسب نما کو ناطق بنانا (Rationalization of the denominator)

دورکنی مربعی جذری مقدار اور اس کی مزدوج جوڑی کا حاصل ضرب ناطق عدد ہوتا ہے۔ اس خصوصیت کا استعمال کرکے، نسب نما کی دورکنی جذری مقدار والے عدد کے نسب نما کو ناطق بنایا جاسکتا ہے۔

مثال (1) : $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ اس عدد کے نسب نما کو ناطق بنایئے۔

حل : $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ ، اس دورکنی جذری مقدار کی مزدوج جوڑی $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ ہے۔

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{5-3} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$$

مثال (2) : $\frac{8}{3\sqrt{2}+\sqrt{5}}$ اس عدد کے نسب نما کو ناطق بنایئے۔

حل : $3\sqrt{2}+\sqrt{5}$، اس دورکنی جذری مقدار کی مزدوج جوڑی $3\sqrt{2}-\sqrt{5}$ ہے۔

$$\frac{8}{3\sqrt{2}+\sqrt{5}} = \frac{8}{3\sqrt{2}+\sqrt{5}} \times \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}$$

$$= \frac{8(3\sqrt{2}-\sqrt{5})}{(3\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2}$$

$$= \frac{8\times3\sqrt{2}-8\sqrt{5}}{9\times2-5} = \frac{24\sqrt{2}-8\sqrt{5}}{18-5} = \frac{24\sqrt{2}-8\sqrt{5}}{13}$$

مشقی سیٹ 2.4

(1) ضرب کیجیے۔

(i) $\sqrt{3}(\sqrt{7}-\sqrt{3})$ (ii) $(\sqrt{5}-\sqrt{7})\sqrt{2}$ (iii) $(3\sqrt{2}-\sqrt{3})(4\sqrt{3}-\sqrt{2})$

(2) درج ذیل اعداد کے نسب نماؤں کو ناطق بنایئے۔

(i) $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$ (ii) $\frac{3}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$ (iii) $\frac{4}{7+4\sqrt{3}}$ (iv) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

آیئے سمجھ لیں

مطلق قیمت (Absolute Value)

x، حقیقی عدد ہو تب x کی مطلق قیمت (Absolute Value) یا عددی خط پر صفر سے اُس کا فاصلہ $|x|$ لکھتے ہیں۔ $|x|$ کو x کی مطلق قیمت پڑھتے۔

مطلق قیمت کی تعریف ذیل کے مطابق کرتے ہیں۔

اگر $x > 0$ ہو تب $|x| = x$ یعنی اگر x مثبت عدد ہو تب x کی مطلق قیمت x ہوتی ہے۔

اگر $x = 0$ ہو تب $|x| = 0$ یعنی اگر x صفر ہو تب x کی مطلق قیمت صفر ہی ہوتی ہے۔

اگر $x < 0$ ہو تب $|x| = -x$ یعنی اگر x منفی ہو تب x کی مطلق قیمت x کے متضاد عدد کے مساوی ہوتی ہے۔

مثال (1) : $|3| = 3$ ، $|-3| = (-3) = 3$ ، $|0| = 0$

کسی بھی حقیقی عدد کی مطلق قیمت منفی نہیں ہوتی۔

مثال (2) : درج ذیل کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $|9-5| = |4| = 4$ (ii) $|8-13| = |-5| = 5$

(iii) $|8|-|-3| = 5$ (iv) $|8|\times|4| = 8\times 4 = 32$

مثال (3) : حل کیجیے۔ $|x-5| = 2$

حل :

$|x-5| = 2$ $\therefore\ x-5 = +2$ یا $x-5 = -2$

$\therefore\ x = 2+5$ یا $x = -2+5$

$\therefore\ x = 7$ یا $x = 3$

مشقی سیٹ 2.5

(1) قیمت معلوم کیجیے۔

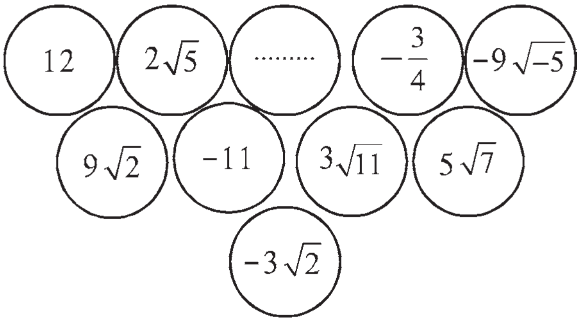
(i) $|15-2|$ (ii) $|4-9|$ (iii) $|7|\times|-4|$

(2) حل کیجیے۔

(i) $|3x-5| = 1$ (ii) $|7-2x| = 5$

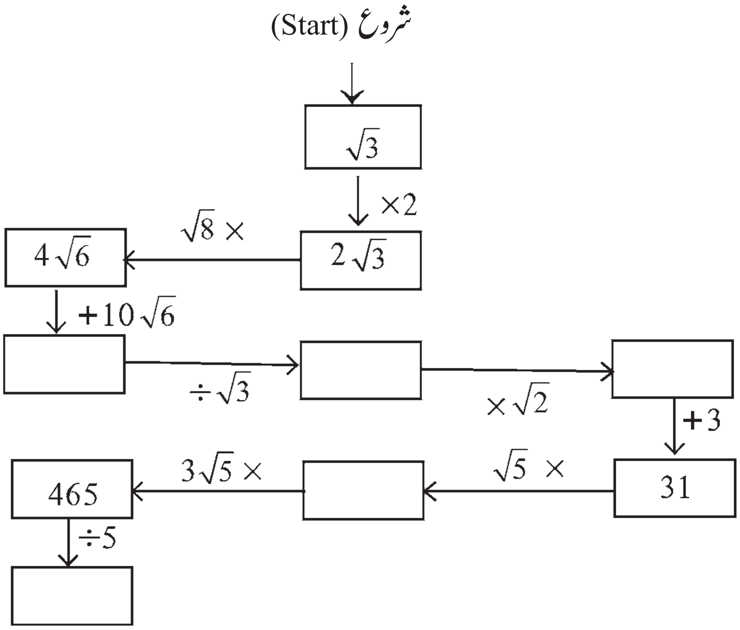
(iii) $\left|\dfrac{8-x}{2}\right| = 5$ (iv) $\left|5+\dfrac{x}{4}\right| = 5$

عملی کام I :



متصلہ شکل میں کارڈ پر کچھ حقیقی اعداد لکھے ہوئے ہیں۔اُن کا استعمال کر کے جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم کی دو۔دو مثالیں بنائیے اور حل کیجیے۔

عملی کام II :



مجموعہ سوالات 2

(1) درج ذیل سوالوں کے کثیر متبادل جواب میں سے صحیح متبادل جواب تلاش کیجیے۔

(i) درج ذیل میں سے غیر ناطق عدد کون سا؟

(A) $\sqrt{\frac{16}{25}}$ (B) $\sqrt{5}$ (C) $\frac{3}{9}$ (D) $\sqrt{196}$

(ii) درج ذیل میں سے غیر ناطق عدد کون سا؟

(A) 0.17 (B) $1.\overline{513}$ (C) $0.27\overline{46}$ (D) 0.101001000.....

(iii) درج ذیل میں سے کس عدد کی کسر اعشاریہ صورت غیر متوالی غیر مختتم دہرانے والی ہوگی؟

(A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{3}{16}$ (C) $\frac{3}{11}$ (D) $\frac{137}{25}$

(iv) عددی خط پر ہر نقطہ کیا ظاہر کرتا ہے؟

(A) طبعی عدد (B) غیر ناطق عدد (C) ناطق عدد (D) حقیقی عدد

(v) $0.\dot{4}$ اس عدد کی ناطق صورت کون سی ہے؟

(A) $\frac{4}{9}$ (B) $\frac{40}{9}$ (C) $\frac{3.6}{9}$ (D) $\frac{36}{9}$

(vi) اگر n کامل مربع عدد نہیں ہوتب $\sqrt{n}$، درج ذیل میں سے کون سا عدد ہوگا؟

(A) طبعی عدد (B) ناطق عدد (C) غیر ناطق عدد (D) یہ تینوں متبادل ہو سکتے ہیں A، B، C

(vii) درج ذیل میں سے کون سا عدد جذری مقدار نہیں ہے؟

(A) $\sqrt{7}$ (B) $\sqrt[3]{17}$ (C) $\sqrt[3]{64}$ (D) $\sqrt{193}$

(viii) $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$، اس جذری مقدار کا درجہ کتنا ہے؟

(A) 3 (B) 2 (C) 6 (D) 5

(ix) $2\sqrt{5}+\sqrt{3}$، اس دورکنی جذری مقدار کی مزدوج جوڑی کون سی ہے؟

(A) $-2\sqrt{5}+\sqrt{3}$ (B) $-2\sqrt{5}-\sqrt{3}$ (C) $2\sqrt{3}-\sqrt{5}$ (D) $\sqrt{3}+2\sqrt{5}$

(x) $|12-(13+7)\times 4|$ کی قیمت کتنی ہے؟

(A) -68 (B) 68 (C) -32 (D) 32

(2) درج ذیل اعداد کو $\frac{p}{q}$ کی صورت میں لکھیے۔

(i) 0.555 (ii) $29.\overline{568}$ (iii) 9.315 315 ... (iv) 357.417417... (v) $30.\overline{219}$

(3) درج ذیل اعداد کو کسرِ اعشاریہ کی صورت میں لکھیے۔

(i) $\frac{-5}{7}$ (ii) $\frac{9}{11}$ (iii) $\sqrt{5}$ (iv) $\frac{121}{13}$ (v) $\frac{29}{8}$

(4) دکھائیے کہ $5+\sqrt{7}$ غیر ناطق عدد ہے۔

(5) درج ذیل جذری مقداروں کو مختصر کیجیے۔

(i) $\frac{3}{4}\sqrt{8}$ (ii) $-\frac{5}{9}\sqrt{45}$

(6) درج ذیل جذری مقداروں کا مختصر ترین ناطق کار جز ضربی لکھیے۔

(i) $\sqrt{32}$ (ii) $\sqrt{50}$ (iii) $\sqrt{27}$ (iv) $\frac{3}{5}\sqrt{10}$ (v) $3\sqrt{72}$ (vi) $4\sqrt{11}$

(7) مختصر کیجیے۔

(i) $\frac{4}{7}\sqrt{147}+\frac{3}{8}\sqrt{192}-\frac{1}{5}\sqrt{75}$ (ii) $5\sqrt{3}+2\sqrt{27}+\frac{1}{\sqrt{3}}$ (iii) $\sqrt{216}-5\sqrt{6}+\sqrt{294}-\frac{3}{\sqrt{6}}$

(iv) $4\sqrt{12}-\sqrt{75}-7\sqrt{48}$ (v*) $2\sqrt{48}-\sqrt{75}-\frac{1}{\sqrt{3}}$

(8) نسب نما کو ناطق بنائیے۔

(i) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (ii) $\frac{2}{3\sqrt{7}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ (iv) $\frac{1}{3\sqrt{5}+2\sqrt{2}}$ (v) $\frac{12}{4\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

3

کثیر رکنی Polynomials

آیئے، سیکھیں

- کثیر رکنی کی تعریف
- کثیر رکنیوں پر عمل
- کثیر رکنی کا درجہ
- ترکیبی تقسیم
- کثیر رکنی کی قیمت
- مسئلہ باقی

آیئے، بحث کریں

$p + p^2 \frac{1}{2} - p^3$ ، $m^2 + 2n^3 - \sqrt{3}\, m^5$ ، 6 یہ تمام الجبری عبارتیں ہیں۔

استاد : عزیز طلبہ، $p + p^2 \frac{1}{2} - p^3$ ، $m^2 + 2n^3 - \sqrt{3}\, m^5$ ، 6 ہر الجبری عبارت سے ایک ایک رکن لیجیے۔ اس رکن میں متغیروں کی قوت بتائیے۔

مادھوری : $p + p^2 \frac{1}{2} - p^3$ اس عبارت میں ارکان کے متغیروں کی قوت بالترتیب 1, 2, 3 ہیں۔

وویک : سر، $m^2 + 2n^3 - \sqrt{3}\, m^5$ اس عبارت میں ارکان کے متغیروں کی قوت بالترتیب 5, 3, 2 ہیں۔

روہت : سر، 6 اس عبارت میں متغیر نہیں ہے۔ یہاں $6 = 6 \times 1 = 6 \times x^0$ لکھ سکتے ہیں، اس لیے 6 اس عبارت میں متغیر کی قوت 0 ہے۔

استاد : یعنی مذکورہ بالا سب عبارتوں میں متغیروں کی قوت مثبت صحیح عدد یا صفر یعنی مکمل اعداد ہیں۔

جس الجبری عبارت میں متغیروں کی قوت مکمل اعداد ہوتی ہیں۔ اس عبارت کو کثیر رکنی (Polynomials) کہتے ہیں۔ 6 بھی کثیر رکنی ہے۔

6، -7 ، 0، $\frac{1}{2}$ ، $\sqrt{3}$ وغیرہ اعداد کو مستقل کثیر رکنی (Constant Polynomials) کہتے ہیں۔

کیا $5 + \sqrt{y}$ اور $3 - \frac{1}{y}$ یہ کثیر رکنی ہیں؟

سارا : سر، $5 + \sqrt{y}$ یہ کثیر رکنی نہیں ہے۔ کیوں کہ $5 + y^{\frac{1}{2}} = 5 + \sqrt{y}$ اس میں y کی قوت $\frac{1}{2}$ ہے جو مکمل عدد نہیں ہے۔

جان : سر، $3 - \frac{1}{y}$ یہ بھی کثیر رکنی نہیں ہے۔ کیوں کہ $3 - y^{-1} = 3 - \frac{1}{y}$ ، یہاں y کی قوت -1 ہے، جو مکمل عدد نہیں ہے۔

استاد : ایسی کوئی بھی پانچ الجبری عبارت لکھیے جو کثیر رکنی نہیں ہے۔ وہ کثیر رکنی کیوں نہیں ہے؟ وضاحت کیجیے۔

درج ذیل سوالات کے جوابات مختلف مثالیں دے کر اور ان پر بحث کر کے معلوم کیجیے۔

- کیا ہر الجبری عبارت کثیر رکنی ہوتی ہے؟
- کیا ہر کثیر رکنی الجبری عبارت ہوتی ہے؟

کثیر رکنیوں کی قسمیں (ارکان کی تعداد کی لحاظ سے)

- $\frac{1}{2}y^2 - 2y + 5,\ x^3 - \sqrt{3}\ x^2 + 5x$ ← ہر کثیر رکنی میں تین رکن ← سہ رکنی
- $x^4 + x\ ,\ m^2 - 3m$ ← ہر کثیر رکنی میں دو رکن ← دو رکنی
- $2x\ ,\ 5$ ← ہر کثیر رکنی میں صرف ایک رکن ← یک رکنی

ایک متغیری کثیر رکنی کو اس میں موجود متغیر کے لحاظ سے $p(x)$ ، $q(m)$ ، $r(y)$ اس طرح ظاہر کرتے ہیں۔

مثلاً $p(x) = x^3 + 2x^2 + 5x - 3$ ، $q(m) = m^2 + \frac{1}{2}m - 7$ ، $r(y) = y^2 + 5$

آیئے سمجھ لیں

ایک متغیری کثیر رکنی کا درجہ (Degree of a polynomial in one variable)

استاد : $2x^7 - 5x + 9$ اس کثیر رکنی میں متغیر کی سب سے بڑی قوت کون سی ہے؟

جیجا : سر، سب سے بڑی قوت 7 ہے۔

استاد : یک متغیری کثیر رکنی میں متغیر کی سب سے بڑی قوت کو اس کثیر رکنی کا درجہ کہتے ہیں۔

پھر بتایئے تو، اوپر دی ہوئی کثیر رکنی کا درجہ کتنا ہے؟

اشوک : سر، $2x^7 - 5x + 9$ اس کثیر رکنی کا درجہ 7 ہے۔

استاد : 10، اس کثیر رکنی کا درجہ کتنا ہے؟

رادھا : $10 = 10 \times 1 = 10 \times x^0$ لہٰذا کثیر رکنی 10 کا درجہ '0' ہے۔

استاد : 10 کی طرح کسی بھی غیر صفر مستقل کثیر رکنی کا درجہ '0' ہوتا ہے۔

صفر کثیر رکنی کا درجہ طے نہیں کیا جاسکتا۔

ایک سے زائد متغیروں والی کثیر رکنی کا درجہ

کثیر رکنی میں ہر رکن میں موجود متغیروں کی قوتوں کی جو جمع سب سے زیادہ ہوتی ہے، اس جمع کو اس کثیر رکنی کا درجہ کہتے ہیں۔

مثال : $3m^3n^6 + 7m^2n^3 - mn$ یہ دو متغیروں والی کثیر رکنی ہے۔ اس کثیر رکنی کا درجہ 9 ہے۔

(یہاں , قوتوں کی جمع $\rightarrow 3 + 6 = 9,\ 2 + 3 = 5,\ 1 + 1 = 2$)

عملی کام I : متغیر x اور درجہ 5 والی ایک رکنی، دورکنی اور سہ رکنی ہر ایک کی ایک مثال لکھیے۔

یک رکنی: ☐ ، دورکنی ☐ ، سہ رکنی ☐

عملی کام II : 5 درجہ والی دو متغیری دورکنی کی ایک مثال بنائیے۔ ☐

کثیر رکنی کی قسمیں (درجہ کی لحاظ سے)

ایک متغیر والی کثیر رکنی

$x^3 + x^2 + 2x + \sqrt{3}$, $m - m^3$	$2y^2 + y + 1, - 3x^2$	$3x - 1, 7y$
درجہ 3	درجہ 2	درجہ 1
مکعبی کثیر رکنی	مربعی کثیر رکنی	خطی کثیر رکنی
عام صورت $ax^3 + bx^2 + cx + d$ یہاں a، b، c، d ضریب ہیں اور $a \neq 0$	عام صورت $ax^2 + bx + c$ یہاں a، b، c ضریب ہیں اور $a \neq 0$	عام صورت $ax + b$ یہاں a اور b ضریب ہیں اور $a \neq 0$

کثیر رکنی : $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ یہ x متغیر کی n درجہ والی کثیر رکنی ہے۔

یہاں $a_n, a_{n-1}, \ldots\ldots, a_2, a_1, a_0$ یہ تمام ضریب ہیں اور $a_n \neq 0$

کثیر رکنی کی معیاری صورت، ضریبی صورت اور قوت والی صورت

(Standard form, Coefficient form and Index form of a Polynomial)

$p(x) = x - 3x^2 + 5 + x^4$ اس کثیر رکنی کو x کی قوت کی اتر تی ترتیب میں $x^4 - 3x^2 + x + 5$ لکھ سکتے ہیں۔ یہ معیاری صورت ہے اس کثیر رکنی میں x کی تیسری قوت والا رکن نہیں ہے۔ لہٰذا اسے $0x^3$ فرض کریں گے۔ اس رکن کو لے کر $p(x)$ کثیر رکنی کو $x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x + 5$ لکھ سکتے ہیں۔ اس طرح قوتوں کی اتر تی ترتیب میں لکھی ہوئی اور قوتوں کے تمام ارکان اتر تی ترتیب والی کثیر رکنی کو قوت نمائی صورت کہتے ہیں۔

کبھی کبھی قوت نمائی صورت والی کثیر رکنی کے متغیر غائبانہ طور پر فرض کر کے اس کے صرف ضریب کو ترتیب سے لکھتے ہیں، مثلاً $x^3 - 3x^2 + 0x - 8$
اس کثیر رکنی کو $(1, -3, 0, -8)$ کی طرح لکھتے ہیں۔ اس کو کثیر رکنی کی ضربی صورت کہتے ہیں۔
$(4, 0, -5, 0, 1)$ اس کثیر رکنی کو y متغیر کا استعمال کر کے قوت نمائی صورت میں $4y^4 + 0y^3 - 5y^2 + 0y + 1$ یعنی
$4y^4 - 5y^2 + 1$ لکھ سکتے ہیں۔ اس صورت کو کثیر رکنی کی قوت نمائی صورت کہتے ہیں۔

کثیر رکنی کی ضربی صورت اور معیاری صورت

مثال : $p(m) = 3m^5 - 7m + 5m^3 + 2$

کثیر رکنی کو معیاری صورت میں لکھیے۔	$3m^5 + 5m^3 - 7m + 2$
کثیر رکنی میں غیر موجود رکن کو 0 ضریب لے کر شامل کیجیے اور قوت نمائی صورت میں لکھیے۔	$3m^5 + 0m^4 + 5m^3 + 0m^2 - 7m + 2$
دی ہوئی کثیر رکنی کی ضربی صورت لکھیے۔	$(3, 0, 5, 0, -7, 2)$
کثیر رکنی کا درجہ لکھیے۔	5

مثال (1) $x^3 + 3x - 5$ اس کثیر رکنی کو ضربی صورت میں لکھیے۔

حل : $x^3 + 3x - 5 = x^3 + 0x^2 + 3x - 5$

دی ہوئی کثیر رکنی کی ضربی صورت $(1, 0, 3, -5)$

مثال (2) $(2, -1, 0, 5, 6)$ اس ضربی صورت کو کثیر رکنی کی قوت نمائی صورت میں لکھیے۔

حل : کثیر رکنی کی ضربی صورت $(2, -1, 0, 5, 6)$ ہے۔

$\therefore$ قوت نمائی صورت میں کثیر رکنی $= 2x^4 - x^3 + 0x^2 + 5x + 6$

$= 2x^4 - x^3 + 5x + 6$

مشقی سیٹ 3.1

(1) ذیل کی عبارت کثیر رکنی ہے یا نہیں لکھیے۔ وضاحت کیجیے۔

(i) $y + \frac{1}{y}$ (ii) $2 - 5\sqrt{x}$ (iii) $x^2 + 7x + 9$

(iv) $2m^{-2} + 7m - 5$ (v) 10

(2) درج ذیل ہر کثیر رکنی میں m^3 کا ضریب لکھیے۔

(i) m^3 (ii) $\frac{-3}{2} + m - \sqrt{3}\,m^3$ (iii) $\frac{-2}{3}m^3 - 5m^2 + 7m - 1$

(3) درج ذیل معلومات کی بناء پر x متغیر کا استعمال کر کے ہر ایک کثیر رکنی لکھیے۔

(i) درجہ 7 والی یک رکنی (ii) درجہ 35 والی دو رکنی (iii) درجہ 8 والی سہ رکنی

(4) درج ذیل ہر کثیر رکنی کا درجہ لکھیے۔

(i) $\sqrt{5}$ (ii) x° (iii) x^2 (iv) $\sqrt{2}\,m^{10} - 7$ (v) $2p - \sqrt{7}$

(vi) $7y - y^3 + y^5$ (vii) $xyz + xy - z$ (viii) $m^3n^7 - 3m^5n + mn$

(5) درج ذیل کثیر رکنیوں کی خطی، مربعی اور مکعبی کثیر رکنیوں میں جماعت بندی کیجیے۔

(i) $2x^2 + 3x + 1$ (ii) $5p$ (iii) $\sqrt{2}\,y - \frac{1}{2}$

(iv) $m^3 + 7m^2 + \frac{5}{2}m - \sqrt{7}$ (v) a^2 (vi) $3r^3$

(6) درج ذیل کثیر رکنیوں کو معیاری صورت میں لکھیے۔

(i) $m^3 + 3 + 5m$ (ii) $-7y + y^5 + 3y^3 - \frac{1}{2} + 2y^4 - y^2$

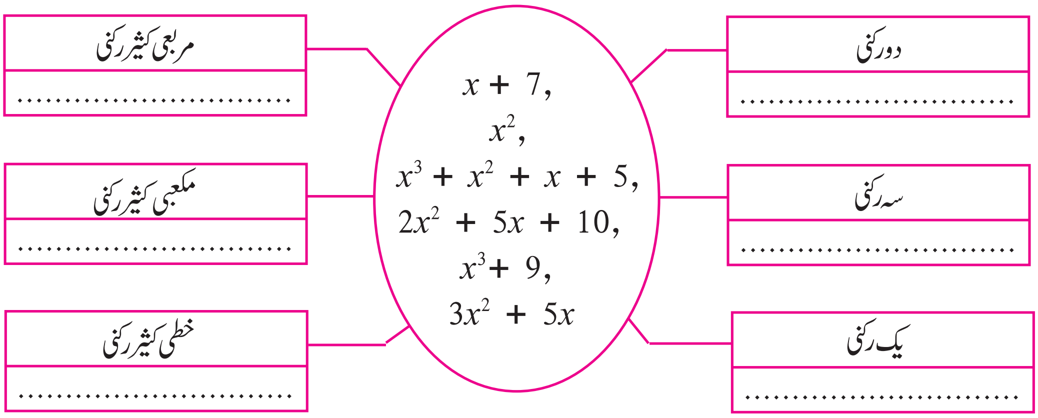
(7) درج ذیل کثیر رکنیوں کو ضریبی صورت میں لکھیے۔

(i) $x^3 - 2$ (ii) $5y$ (iii) $2m^4 - 3m^2 + 7$ (iv) $-\frac{2}{3}$

(8) درج ذیل ضریبی صورت والی کثیر رکنیوں کو x متغیر کا استعمال کرکے معیاری صورت میں لکھیے۔

(i) (1, 2, 3) (ii) (5, 0, 0, 0, − 1) (iii) (− 2, 2, − 2, 2)

(9) ذیل میں کچھ کثیر رکنیاں دی ہوئی ہیں۔ وہ کثیر رکنی دیے ہوئے خانوں میں مناسب جگہ لکھیے۔



آیئے ذرا یاد کریں

(1) دو مشابہ الجبری ارکان کی جمع یا تفریق کرتے وقت ان کے ضریبوں کی جمع یا تفریق کرتے ہیں۔

مثلاً، $5m^3 - 7m^3 = (5 - 7)m^3 = -2m^3$

(2) دو الجبری ارکان کا ضرب یا تقسیم کرتے وقت ان کے ضریب کی ضرب یا تقسیم کرتے ہیں۔ اسی طرح قوت نما کے اصولوں کا بھی استعمال ہوتا ہے۔

مثلاً $-4y^3 \times 2y^2z = -8y^5z$; $12a^2b \div 3ab^2 = \frac{4a}{b}$

آیئے سمجھ لیں

کثیر رکنیوں پر عمل (Operations on polynomials)

کثیر رکنیوں کی جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم یہ اعمال الجبری عبارتوں پر بھی اسی طرح کرتے ہیں۔

مثال (1) $7a^2 + 5a + 6$ میں سے $5a^2 - 2a$ تفریق کیجیے۔

حل :

$$(7a^2 + 5a + 6) - (5a^2 - 2a)$$

$$= 7a^2 + 5a + 6 - 5a^2 + 2a$$

$$= \underline{7a^2 - 5a^2} + \underline{5a + 2a} + 6$$

$$= 2a^2 + 7a + 6$$

مثال (2) $-2a \times 5a^2 = -10a^3$

مثال (3) $(m^2 - 5) \times (m^3 + 2m - 2) = ?$

حل :

$$(m^2 - 5) \times (m^3 + 2m - 2)$$

$= m^2(m^3 + 2m - 2) - 5(m^3 + 2m - 2)$ ... (پہلی کثیر رکنی کے ہر رکن سے دوسری کثیر رکنی کو ضرب دیا گیا۔)

$= m^5 + 2m^3 - 2m^2 - 5m^3 - 10m + 10$

$= m^5 + 2m^3 - 5m^3 - 2m^2 - 10m + 10$ ... (مشابہ ارکان کی یکجا ترتیب دیا۔)

$= m^5 - 3m^3 - 2m^2 - 10m + 10$

یاد رکھیے کہ یہاں حاصل ضرب کا درجہ 5 ہے۔

مثال (4) $3m^2n + 5mn^2 - 7mn$ اور $2m^2n - mn^2 + mn$ کی جمع کیجیے۔

حل :

$$(3m^2n + 5mn^2 - 7mn) + (2m^2n - mn^2 + mn)$$

$= 3m^2n + 5mn^2 - 7mn + 2m^2n - mn^2 + mn$

$= \underline{3m^2n + 2m^2n} + \underline{5mn^2 - mn^2} - \underline{7mn + mn}$ ...(مشابہ ارکان کی یکجا ترتیب دی گئی۔)

$= 5m^2n + 4mn^2 - 6mn$ ...(مشابہ ارکان کی جمع کیے۔)

آئیے ذرا یاد کریں

ایک کثیر رکنی کا درجہ 3 اور دوسری کثیر رکنی کا درجہ 5 ہو تب کثیر رکنیوں کے حاصل ضرب کا درجہ کتنا ہوگا؟

مضروب اور مضروب فیہ کثیر رکنیوں کا درجہ اور ان کے حاصل ضرب کا درجہ کے درمیان کون سا تعلق ہے؟

مثال (5) $(2 + 2x^2) \div (x + 2)$ تقسیم کیجیے اور 'باقی + خارج قسمت × مقسوم الیہ = مقسوم' کی صورت میں جواب لکھیے۔

حل : پہلے $p(x) = 2 + 2x^2$ اس مقسوم کثیر رکنی کو معیاری صورت میں لکھیے۔

$$\therefore \quad 2 + 2x^2 = 2x^2 + 0x + 2$$

$$\begin{array}{r} 2x \; - \; 4 \\ x+2 \overline{) \; 2x^2 + 0x + 2} \\ - \; 2x^2 + 4x \\ \underline{- \quad -} \\ -4x + 2 \\ - \; -4x - 8 \\ \underline{+ \quad +} \\ 10 \end{array}$$

طریقہ I : باقی + خارج قسمت × مقسوم الیہ = مقسوم

$2 + 2x^2 = (x + 2) \times (2x - 4) + 10$

$q(x)$، مقسوم الیہ $= (x + 2)$

$s(x)$، خارج قسمت $= 2x - 4$، $r(x)$، باقی $= 10$

$\therefore \; p(x) = q(x) \times s(x) + r(x)$

طریقہ II : خارج قسمت کا خطی طریقہ

$(2x^2 + 2) \div (x + 2)$ تقسیم کیجیے۔

رکن $2x^2$ حاصل کرنے کے لیے $(x + 2)$ کو $2x$ سے ضرب دے کر $4x$ تفریق کیجیے۔

$$2x(x+2) - 4x = 2x^2$$

$\therefore$ مقسوم $= 2x^2 + 2 = 2x(x+2) - 4x + 2$ ... (I)

اب $-4x$ رکن حاصل کرنے کے لیے $(x + 2)$ کو -4 سے ضرب دیں اور 8 حاصل کریں گے۔

$$-4(x+2) + 8 = -4x$$

$\therefore \; (2x^2 + 2) = 2x(x+2) - 4(x+2) + 8 + 2$ ... (بیان I سے)

$\therefore \; (2x^2 + 2) = (x + 2)(2x - 4) + 10$

باقی + خارج قسمت × مقسوم الیہ = مقسوم

اسے دھیان میں رکھیں

اقلیدس کے تقسیم کا اصول

اگر $s(x)$ اور $p(x)$ یہ دو کثیر رکنی ہو اور $s(x)$ کا درجہ $p(x)$ کے درجہ کے مساوی یا اس سے زیادہ ہو، اور $s(x)$ کو $p(x)$ سے تقسیم کریں تو حاصل ہونے والا خارج قسمت $q(x)$ ہو تب،

$$s(x) = p(x)\,q(x) + r(x)$$

یہاں $r(x) = 0$ یا $r(x)$ کا درجہ $p(x)$ کے درجے سے کم ہوتا ہے۔

مشقی سیٹ 3.2

1. دیے ہوئے حروف کا استعمال کر کے جوابات لکھیے۔

(i) ناندپور گاؤں میں a درخت ہیں۔ درختوں کی تعداد ہر سال b سے بڑھتی ہے تو x سال بعد اس گاؤں میں کتنے درخت ہو جائیں گے؟

(ii) قواعد کے لیے ایک قطار میں y بچے، اس طرح x قطاریں بنائی گئیں۔ تو بتائیے قواعد کے لیے کل کتنے بچے حاضر تھے؟

(iii) ایک دو ہندسی عدد کے اکائی اور دہائی مقام کے ہندسے بالترتیب m اور n ہیں تو اس دو ہندسی عدد کو ظاہر کرنے والا کثیر رکنی کون سا؟

2. درج ذیل کثیر رکنیوں کی جمع کیجیے۔

(i) $x^3 - 2x^2 - 9\ ;\ 5x^3 + 2x + 9$

(ii) $-7m^4 + 5m^3 + \sqrt{2}\ ;\ 5m^4 - 3m^3 + 2m^2 + 3m - 6$

(iii) $2y^2 + 7y + 5\ ;\ 3y + 9\ ;\ 3y^2 - 4y - 3$

3. پہلی کثیر رکنی سے دوسری کثیر رکنی تفریق کیجیے۔

(i) $x^2 - 9x + \sqrt{3}\ ;\ -19x + \sqrt{3} + 7x^2$

(ii) $2ab^2 + 3a^2b - 4ab\ ;\ 3ab - 8ab^2 + 2a^2b$

4. درج ذیل کثیر رکنیوں کی ضرب کیجیے۔

(i) $2x\ ;\ x^2 - 2x - 1$ (ii) $x^5 - 1\ ;\ x^3 + 2x^2 + 2$ (iii) $2y + 1\ ;\ y^2 - 2y^3 + 3y$

5. پہلی کثیر رکنی کو دوسری کثیر رکنی سے تقسیم کیجیے اور جواب 'مقسوم = مقسوم الیہ × خارج قسمت + باقی' کی صورت میں لکھیے۔

(i) $x^3 - 64;\ x - 4$ (ii) $5x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2;\ x^2 - x$

6. درج ذیل معلومات کثیر رکنی کی صورت میں لکھیے۔ کثیر رکنی کو مختصر ترین صورت دیجیے۔

ایک مستطیلی کھیت کی لمبائی $(2a^2 + 3b^2)$ میٹر اور چوڑائی $(a^2 + b^2)$ میٹر ہے۔ کسان نے کھیت میں $(a^2 - b^2)$ میٹر ضلع والے مربع جگہ پر گھر تعمیر کیا، تو بتائیے باقی ماندہ کھیت کا رقبہ کتنا ہے؟

عملی کام : درج ذیل عبارت پڑھیے اور خالی خانوں میں صحیح عبارت لکھیے اور بحث کیجیے۔

شرلس گاؤں میں بنجر زمین پر کھیتی کرنے والے گوئیند کی 5 ایکڑ زمین ہے۔ اس کے گھر میں بیوی، 2 بچے اور اس کی ضعیف والدہ ہے۔ اس نے کھیتی کے لیے بینک سے سوا لاکھ روپے قرض 10 فیصدی فی سال شرح سے لیے۔ اس نے کھیت کی x ایکڑ زمین میں سویابین اور y ایکڑ زمین میں کپاس اور تور (ارہر) کی فصل نکالی۔ کھیتی کے لیے ہونے والا خرچ ذیل کے مطابق ہے۔

بیج کے لیے اس نے کل ₹10,000 دیے۔ سویابین کی فصل کے لیے کھاد اور کیڑے مار دوا $2000x$ روپے، مزدوری اور مشاگت کے لیے $4000x^2$ روپے خرچ ہوا۔ کپاس اور تور کی فصل کے لیے کھاد اور کیڑے مار دوا پر $8000y$ روپے، اور مزدوری اور مشاگت کے لیے $9000y^2$ روپے خرچ ہوا۔

کھیتی کے لیے کل کتنا خرچ ہوا، اسے x اور y کا استعمال کرکے لکھیے۔

روپے $\boxed{} + \boxed{8000\,y} + \boxed{4000\,x^2} + \boxed{2000\,x} + \boxed{}$

اس کے کھیت میں سویابین کی $5x^2$ کوئنٹل پیداوار ہوئی۔ وہ ₹2800 فی کوئنٹل کے نرخ سے فروخت ہوا۔ کپاس کی $\frac{5}{3}y^2$ کوئنٹل پیداوار ہوئی اور ₹5000 فی کوئنٹل کے نرخ سے فروخت ہوئی۔ تور $4y$ کوئنٹل پیداوار ہوئی اور ₹4000 فی کوئنٹل کے نرخ سے فروخت ہوئی۔

تمام کھیتی کی پیداوار فروخت ہونے پر اس سے کل کتنے روپے آمدنی ہوئی اسے x اور y کے ارکان کی صورت میں لکھیے۔

روپے $\boxed{} + \boxed{} + \boxed{}$

آیئے سمجھ لیں

ترکیبی تقسیم کا طریقہ (Synthetic Division Method)

ہمیں معلوم ہے کہ ایک کثیر رکنی کو دوسری کثیر رکنی سے کس طرح تقسیم کرتے ہیں۔ اب ہم مقسوم الیہ $x + a$ یا $x - a$ کثیر رکنی ہو تو تقسیم کے آسان طریقے کو سمجھیں گے۔

مثال (1) : کثیر رکنی $(3x^3 + 2x^2 - 1)$ کو $(x + 2)$ سے تقسیم کیجیے۔

حل : پہلے مقسوم کثیر رکنی کو قوت نمائی صورت میں اور بعد میں ضریبی صورت میں لکھیں گے۔

مقسوم کی معیاری صورت $= 3x^3 + 2x^2 - 1 = 3x^3 + 2x^2 + 0x - 1$

$\therefore$ مقسوم کی ضریبی صورت $= (3, 2, 0, -1)$

مقسوم الیہ کثیر رکنی $= x + 2$

درج ذیل مراحل کے مطابق ترکیبی تقسیم کے طریقے سے تقسیم کریں گے۔

	- - - - - - - - - -	پہلی لائن
	- - - - - - - - - -	دوسری لائن
	- - - - - - - - - -	تیسری لائن

(1) بازو میں دیے ہوئے کہ مطابق ایک عمودی اور ایک افقی اس طرح دو خط کھینچیں گے۔

-2	3	2	0	-1	پہلی لائن
	3				تیسری لائن

(2) مقسوم الیہ $x + 2$ ہو تو 2 کے متضاد عدد -2

پہلی لائن میں عمودی خط کے بائیں جانب -2 لکھیں گے۔

پہلی لائن میں مقسوم کثیر رکنی کے ضربی صورت عمودی خط کے دائیں جانب لکھیں گے۔

(3) افقی خط کے نیچے یعنی تیسری لائن میں مقسوم کا پہلا ضریب ویسا ہی لکھیں گے۔

(4) تیسری لائن میں 3 اور مقسوم الیہ کے -2 کا حاصل ضرب -6 اسے دوسری لائن میں 2 ضریب کے نیچے لکھیں گے۔ بعد میں 2 اور -6 کی جمع -4 ، تیسری لائن میں افقی خط کے نیچے لکھیں گے۔

-2	3	2	0	-1	
		-6	8	-16	
	3	-4	8	-17	باقی

اسی طرح ضرب اور جمع کریں گے۔ آخری جمع کر کے آنے والا عدد ہی تقسیم کا باقی ہے۔ یہاں باقی -17 ہے۔

تیسری لائن میں آنے والا $(3, -4, 8)$ یہ خارج قسمت کی ضربی صورت ہے۔

$\therefore$ خارج قسمت $= 3x - 4x + 8$ اور، باقی $= -17$

$$\therefore \ 3x^3 + 2x^2 - 1 = (x + 2)(3x^2 - 4x + 8) - 17$$

اس طریقے کو ترکیبی تقسیم کا طریقہ کہتے ہیں۔

اس تقسیم کو خطی طریقہ سے ذیل کے مطابق کر سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
3x^3 + 2x^2 - 1 &= 3x^2(x + 2) - 6x^2 + 2x^2 - 1 \\
&= 3x^2(x + 2) - 4x^2 - 1 \\
&= 3x^2(x + 2) - 4x^2 - 8x + 8x - 1 \\
&= 3x^2(x + 2) - 4x(x + 2) + 8x - 1 \\
&= 3x^2(x + 2) - 4x(x + 2) + 8x + 16 - 16 - 1 \\
&= 3x^2(x + 2) - 4x(x + 2) + 8(x + 2) - 17
\end{aligned}$$

$$\therefore \ 3x^3 + 2x^2 - 1 = (x + 2)(3x^2 - 4x + 8) - 17$$

مثال (2) تقسیم کیجیے : $(2y^4 - 3y^3 + 5y - 4) \div (y - 1)$

حل : ترکیبی تقسیم کا طریقہ : مقسوم $= 2y^4 - 3y^3 + 5y - 4 = 2y^4 - 3y^3 + 0y^2 + 5y - 4$

مقسوم الیہ $= y - 1$ ... (-1 کا متضاد عدد 1 ہے۔)

1	2	−3	0	5	−4
		2	−1	−1	4
	2	−1	−1	4	0 باقی

خارج قسمت کی ضریبی صورت $(2, -1, -1, 4)$ ہے۔

$\therefore$ خارج قسمت $= 2y^3 - y^2 - y + 4$; اور باقی $= 0$

خطی طریقہ : $2y^4 - 3y^3 + 5y - 4 = 2y^3(y - 1) + 2y^3 - 3y^3 + 5y - 4$

$= 2y^3(y - 1) - y^2(y - 1) - y^2 + 5y - 4$

$= 2y^3(y - 1) - y^2(y - 1) - y(y - 1) + 4y - 4$

$= 2y^3(y - 1) - y^2(y - 1) - y(y - 1) + 4(y - 1)$

$= (2y^3 - y^2 - y + 4)(y - 1)$

اسے دھیان میں رکھیں

ترکیبی تقسیم کے طریقے سے تقسیم کرتے وقت صرف $x + a$ یا $x - a$ کی صورت میں جس کثیر رکنی کا درجہ 1 ہوتا ہے۔ اسے مقسوم الیہ کے طور پر لیتے ہیں۔

مشقی سیٹ 3.3

- درج ذیل تقسیم ترکیبی تقسیم کے طریقے سے اور خطی طریقے سے کیجیے۔ خارج قسمت اور باقی لکھیے۔

(i) $(2m^2 - 3m + 10) \div (m - 5)$ (ii) $(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5) \div (x + 2)$

(iii) $(y^3 - 216) \div (y - 6)$ (iv) $(2x^4 + 3x^3 + 4x - 2x^2) \div (x + 3)$

(v) $(x^4 - 3x^2 - 8) \div (x + 4)$ (vi) $(y^3 - 3y^2 + 5y - 1) \div (y - 1)$

آیئے سمجھ لیں

کثیر رکنی کی قیمت (Value of Polynomial)

کثیر رکنی میں متغیر کی کوئی ایک قیمت رکھیں تو اس کثیر رکنی کی بھی کوئی ایک قیمت حاصل ہوتی ہے۔ مثلاً $x + 7$ کثیر رکنی میں x کی قیمت 2 رکھیں تو اس کثیر رکنی کی قیمت 9 حاصل ہوتی ہے۔

$p(x)$ کثیر رکنی میں x کو a قیمت دے کر حاصل ہونے والی کثیر رکنی کی قیمت $p(a)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال (1) $p(x) = 2x^2 - 3x + 5$ کثیررکنی کی قیمت $x = 2$ ہوتو معلوم کیجیے۔

حل : $p(x) = 2x^2 - 3x + 5$ کثیررکنی

اس کثیررکنی میں $x = 2$ رکھنے پر

$$\therefore\ p(2) = 2 \times 2^2 - 3 \times 2 + 5$$
$$= 2 \times 4 - 6 + 5$$
$$= 8 - 6 + 5$$
$$\therefore\ p(2) = 7$$

$\therefore$ $x = 2$ ہے تب کثیررکنی کی قیمت 7 ہے۔

مثال (2) $y = -2$ ہوتو کثیررکنی $p(y) = 2y^3 - 2y + \sqrt{7}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : $p(y) = 2y^3 - 2y + \sqrt{7}$

$$\therefore\ p(-2) = 2 \times (-2)^3 - 2 \times (-2) + \sqrt{7}$$
$$= 2 \times (-8) - 2 \times (-2) + \sqrt{7}$$
$$= -16 + 4 + \sqrt{7}$$
$$= -12 + \sqrt{7}$$

$\therefore$ $y = -2$ ہوتو کثیررکنی کی قیمت $-12 + \sqrt{7}$ ہے۔

مثال (3) $p(x) = 2x^2 - x^3 + x + 2$ کثیررکنی کے لیے $p(0)$ معلوم کیجیے۔

حل : $p(x) = 2x^2 - x^3 + x + 2$

$$\therefore\ p(0) = 2 \times 0^2 - 0^3 + 0 + 2$$
$$= 2 \times 0 - 0 + 0 + 2$$
$$= 2$$

مثال (4) اگر کثیررکنی $m^2 - am + 7$ کی قیمت $m = -1$ لینے پر 10 ہوتی ہے تب a کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل :

$$p(m) = m^2 - am + 7$$
$$\therefore\ p(-1) = (-1)^2 - a \times (-1) + 7$$
$$= 1 + a + 7$$
$$= 8 + a$$

لیکن, $p(-1) = 10$ ... (دیا ہوا ہے)

$$\therefore\ 8 + a = 10$$
$$\therefore\ a = 10 - 8$$
$$\therefore\ a = 2$$

مشقی سیٹ 3.4

(1) $x = 0$ ہو تو تب $x^2 - 5x + 5$ کثیر رکنی کی قیمت معلوم کیجیے۔

(2) اگر $p(y) = y^2 - 3\sqrt{2}y + 1$ ہو تب $p(3\sqrt{2})$ معلوم کیجیے۔

(3) اگر $p(m) = m^3 + 2m^2 - m + 10$ ہو تب $p(a) + p(-a) = ?$

(4) اگر $p(y) = 2y^3 - 6y^2 - 5y + 7$ ہو تب $p(2)$ معلوم کیجیے۔

اسے دھیان میں رکھیں

متغیر کی کوئی ایک قیمت کے لیے کثیر رکنی کی قیمت معلوم کرتے وقت ہر رکن میں x کی جگہ دی ہوئی قیمت رکھ کر اس کثیر رکنی (عبارت) کی قیمت معلوم کرنا ہوتی ہے۔

آیئے سمجھ لیں

مسئلہ باقی (Remainder Theorem)

$p(x)$ کثیر رکنی کو $(x + a)$ سے تقسیم کریں تو بچ رہنے والا باقی اور اس کثیر رکنی میں x کی قیمت $-a$ دے کر حاصل ہونے والی کثیر رکنی کی قیمت ان دونوں کا آپس میں تعلق ہوتا ہے۔ اس تعلق کو معلوم کرنے کے لیے ذیل کی مثال کا مطالعہ کیجیے۔

مثال : $p(x) = 4x^2 - x + 2$ کو $x + 1$ سے تقسیم دیجیے۔

[یہاں $(x + a)$ یعنی $(x + 1)$ کو ذہن نشین کیجیے]

یہاں، مقسوم کثیر رکنی $= 4x^2 - x + 2$

مقسوم الیہ کثیر رکنی $= x + 1$

```
                  4x - 5          ← خارج قسمت
مقسوم الیہ → x + 1) 4x² - x + 2    ← مقسوم
               -  4x² + 4x
                   -    -
                 ----------
                    - 5x + 2
               -    - 5x - 5
                    +     +
                 ----------
                          7 ← باقی
```

خارج قسمت $= 4x - 5$

باقی $= 7$ ... (I)

اس مثال کو ترکیبی تقسیم کے طریقے سے کریں گے۔

$p(x) = (4, -1, 2)$ کی ضربی صورت

مقسوم الیہ $= x + 1$

$1 = -1$ کا متضاد عدد

-1	4	-1	2	
		-4	5	
	4	-5	[7]	باقی

خارج قسمت $= 4x - 5$

باقی $= 7$

اب ہم باقی اور مقسوم کثیر رکنی کی قیمت کے درمیان تعلق کو دیکھیں گے۔

مقسوم کثیر رکنی یعنی $4x^2 - x + 2$ کی $x = -1$ کے لیے قیمت معلوم کریں گے۔

$$p(x) = 4x^2 - x + 2$$

$$\therefore\ p(-1) = 4 \times (-1)^2 - (-1) + 2$$

$$= 4 \times 1 + 1 + 2$$

$$= 4 + 1 + 2$$

$$= 7$$

اس لیے $x = -1$ ہو تب کثیر رکنی $p(x)$ کی قیمت 7 ہے۔ ... (II)

لہٰذا (I) اور (II) کی بنا پر، $p(x) = 4x^2 - x + 2$ کثیر رکنی کو $(x + a)$ سے یعنی یہاں $(x + 1)$ سے تقسیم کرنے سے حاصل ہونے والا باقی اور $x = -1$ ہو تب $p(x)$ کثیر رکنی کی قیمت یعنی $p(-1)$ یکساں ہیں۔

اس بناء پر درج ذیل خصوصیت سمجھ میں آتی ہے۔

$p(x)$ کثیر رکنی کو $(x + a)$ سے تقسیم کرنے پر بچ رہنے والا باقی $p(-a)$ کے مساوی ہوتا ہے۔

یعنی $p(x)$ میں $x = -a$ رکھ کر آنے والی کثیر رکنی کی قیمت کے مساوی ہوتی ہے۔

اس خصوصیت کو مسئلہ باقی کہتے ہیں۔

اقلیدس کے تقسیم کا اصول استعمال کر کے اس خصوصیت کو ثابت کریں گے۔

$p(x)$ کو $(x + a)$ سے تقسیم کریں تو

$$p(x) = q(x) \times (x + a) + r(x)$$ ... [یہاں، خارج قسمت $= q(x)$ اور باقی $= r(x)$]

اگر $r(x) \neq 0$، ہو تب اصول کے مطابق $r(x)$ کا درجہ 1 سے کم یعنی 0 ہے۔ لہٰذا $r(x)$ حقیقی عدد ہے۔

$\therefore$ $r(-a)$ بھی حقیقی عدد ہے۔

اب، ... (1)

$$p(x) = q(x) \times (x + a) + r(x)$$

میں $x = -a$ قیمت رکھ کر،

$$p(-a) = q(-a) \times (a - a) + r(-a)$$

$$= q(-a) \times 0 + r(-a) \quad \ldots(2)$$

$$\therefore\ p(-a) = r(-a) \quad \ldots [(1) \text{ اور } (2) \text{ سے}]$$

عملی کام : درج ذیل مثال کی تصدیق کیجیے۔

(1) $p(x) = 3x^2 + x + 7$ کثیر رکنی کو $x + 2$ کثیر رکنی سے تقسیم کیجیے اور باقی معلوم کیجیے۔

(2) $x = -2$ ہو تب $p(x) = 3x^2 + x + 7$ کثیر رکنی کی قیمت معلوم کیجیے۔

(3) کیا اب تقسیم سے ملنے والا باقی، $p(-2)$ کی قیمت کے برابر ہے؟

مزید ایک مثال لے کر مذکورہ طریقے سے تصدیق کیجیے۔

مثال (1) $x^4 - 5x^2 - 4x$ کثیر رکنی کو $(x + 3)$ سے تقسیم دینے پر حاصل ہونے والا باقی معلوم کیجیے۔

حل :

مسئلہ باقی سے

مقسوم کثیر رکنی $p(x) = x^4 - 5x^2 - 4x$

مقسوم الیہ $= x + 3$

$\therefore\ x = -3$

$\therefore\ p(x) = x^4 - 5x^2 - 4x$

$p(-3) = (-3)^4 - 5(-3)^2 - 4(-3)$

$= 81 - 45 + 12$

$p(-3) = 48$

ترکیبی تقسیم کے طریقے سے

معیاری صورت $x^4 + 0x^3 - 5x^2 - 4x + 0$

ضربی صورت $= (1, 0, -5, -4, 0)$

-3	1	0	-5	-4	0	
		-3	9	-12	48	
	1	-3	4	-16	48	باقی

باقی $= 48$

مثال (2) مسئلہ باقی کا استعمال کر کے کثیر رکنی $x^3 - 2x^2 - 4x - 1$ کو $(x - 1)$ سے تقسیم کر کے حاصل ہونے والا باقی معلوم کیجیے۔

حل : $p(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 1$

مقسوم الیہ $= x - 1$; $\therefore\ x = 1$

$\therefore$ مسئلہ باقی سے، باقی $= p(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 - 4 \times 1 - 1$

$= 1 - 2 \times 1 - 4 - 1$

$p(1) = 1 - 2 - 4 - 1 = -6$

$\therefore$ باقی $= -6$ ... (مسئلہ باقی کے لحاظ سے)

مثال (3) اگر $t^3 - 3t^2 + kt + 50$ کثیر رکنی کو $t - 3$ سے تقسیم دینے پر باقی 62 بچتا ہو تب k کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : دی ہوئی کثیر رکنی کو $(t - 3)$ سے تقسیم کرنے پر باقی 62 بچتا ہے (دیا ہوا ہے)۔ اس لیے دی ہوئی کثیر رکنی کی قیمت $t = 3$ رکھ کر معلوم کریں گے۔

$p(t) = t^3 - 3t^2 + kt + 50$

∴ مسئلہ باقی سے،

$$\text{باقی} = p(3) = 3^3 - 3 \times 3^2 + k \times 3 + 50$$

$$= 27 - 3 \times 9 + 3k + 50$$

$$= 27 - 27 + 3k + 50$$

$$= 3k + 50$$

لیکن باقی 62 دیا ہوا ہے۔

$$\therefore \quad 3k + 50 = 62$$

$$\therefore \quad 3k = 62 - 50$$

$$\therefore \quad 3k = 12$$

$$\therefore \quad k = \frac{12}{3}$$

$$\therefore \quad k = 4$$

اسے دھیان میں رکھیں

مسئلہ باقی : $p(x)$ کوئی بھی کثیر رکنی ہو اور 'a' کوئی حقیقی عدد ہے اور اگر $p(x)$ کو $(x + a)$ سے تقسیم کریں تو حاصل ہونے والا باقی $p(-a)$ کے برابر ہوتا ہے۔

$p(x) = s(x)\ (x - a) + r(x)$ ... $r(x) = 0$ یا $r(x) < 1$ کا درجہ

اس مساوات میں $x = a$ رکھ کر $p(a) = 0 + r(a) = r(a)$ حاصل ہوتا ہے۔

∴ $r(a) = 0$ یا $r(a) = 0$ کا درجہ، یعنی ایسا سمجھ میں آتا ہے کہ $(x - a)$ کثیر رکنی $p(x)$ کا جز ضربی ہے۔

آیئے سمجھ لیں

مسئلہ جز ضربی (Factor Theorem)

اگر 21 کو 7 سے تقسیم کرتے ہیں تو باقی 0 آتا ہے۔ اس لیے ہم 7 کو 21 کا جز ضربی کہتے ہیں۔

اسی طرح دی ہوئی کثیر رکنی کو مقسوم الیہ کثیر رکنی سے تقسیم کریں تو باقی 0 آتا ہے تب اس کثیر رکنی کو دی ہوئی کثیر رکنی کا جز ضربی کہتے ہیں۔

مثال (1) کثیر رکنی $p(x) = (x^3 + 4x - 5)$ کو $(x - 1)$ سے تقسیم کرنے سے آنے والا باقی معلوم کیجیے۔

طے کیجیے کہ $(x - 1)$ کثیر رکنی $p(x)$ کا جز ضربی ہے۔

حل :

$$p(x) = x^3 + 4x - 5$$

$$p(1) = (1)^3 + 4(1) - 5$$

$$= 1 + 4 - 5$$

$$= 0$$

یہاں، مسئلہ باقی کے مطابق، $0 = \text{باقی}$

∴ $(x - 1)$، کثیر رکنی $p(x)$ کا جز ضربی ہے۔

مثال (2) کثیر رکنی $p(x) = x^3 + 4x - 5$، کو $(x + 2)$ سے تقسیم کریں تو آنے والا باقی معلوم کیجیے۔

طے کیجیے کہ $(x + 2)$ کثیر رکنی $p(x)$ کا جز ضربی ہے۔

حل :

$$p(x) = x^3 + 4x - 5$$

$$p(-2) = (-2)^3 + 4(-2) - 5$$

$$p(-2) = -8 - 8 - 5$$

$$= -21$$

یہاں، مسئلہ باقی کے مطابق باقی -21 آیا ہے۔

یعنی , $0 \neq \text{باقی}$

∴ $(x + 2)$، کثیر رکنی $p(x)$ کا جز ضربی نہیں ہے۔

عملی کام : تصدیق کیجیے کہ $(x - 1)$، کثیر رکنی $x^3 + 4x - 5$ کا جز ضربی ہے۔

اسے دھیان میں رکھیں

$p(x)$ ایک کثیررکنی ہے اور a کوئی بھی حقیقی عدد ہے اور اگر $p(a) = 0$ ہو تب $(x-a)$ کثیررکنی $p(x)$ کا جزوضربی ہوتا ہے۔

اس کے برعکس $(x-a)$ کثیررکنی $p(x)$ کا جز ضربی ہو تب $p(a) = 0$ ہوتا ہے۔

مثال (1) مسئلہ جز ضربی استعمال کر کے طے کیجیے کہ $(x-2)$ کثیررکنی x^3-x^2-4 کا جز ضربی ہے۔

حل : $p(x) = x^3 - x^2 - 4$; مقسوم الیہ $= x - 2$

مسئلہ $\therefore \quad p(2) = (2)^3 - (2)^2 - 4 = 8 - 4 - 4 = 0$

مسئلہ جز ضربی کے رُو سے، $(x-2)$، کثیررکنی (x^3-x^2-4) کا جز ضربی ہے۔

مثال (2) اگر $(x-1)$ کثیررکنی (x^3-2x^2+mx-4) کا جز ضربی ہو تب m کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : $(x-1)$، کثیررکنی $p(x)$ کا جز ضربی ہے۔ $\therefore\ p(1) = 0$

$$p(x) = x^3 - 2x^2 + mx - 4$$
$$p(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 + m \times 1 - 4 = 0$$
$$\therefore\ 1 - 2 \times 1 + m - 4 = 0$$
$$\therefore\ 1 - 2 + m - 4 = 0 \quad , \quad \therefore\ m - 5 = 0 \quad , \quad \therefore\ m = 5$$

عملی کام : ہم بنجر زمین پر کھیتی کرنے والے گوند کے کھیت کے متعلق کثیررکنیوں کی صورت میں کھیتی کا خرچ اور آمدنی کے بارے میں دیکھ چکے ہیں۔ اس نے بینک سے سوا لاکھ روپے قرض لیا تھا اور 10% فی سال سود کی شرح سے ادا کیا تھا۔ بیج کے لیے خرچ 10,000 روپے، سویابین کی فصل کے لیے کھاد اور کیڑے مار دوا پر $2000x$ روپے اور اس کی مشاگت کے لیے $4000x^2$ روپے خرچ ہوا تھا۔ کپاس اور تور (ارہر) کی فصل کے لیے کھاد اور کیڑے مار دوا کے لیے $8000y$ روپے اور مشاگت کے $9000y^2$ روپے خرچ کیا تھا۔

کل آمدنی $14000x^2 + \dfrac{25000}{3}y^2 + 16000y$ روپے ہوئی تھی۔

$x = 2$ اور $y = 3$ قیمتیں لے کر گوند کی کھیتی کا جمع خرچ لکھ کر معلوم کیجیے۔

حل :

خرچ		جمع	
بینک میں سود کے ساتھ ادائیگی	₹1,37,000	بینک سے قرض لیے	₹1,25000
بیج کے لیے	₹	سویابین سے آمدنی	₹
سویابین : کھاد اور کیڑے مار دوا	₹	کپاس سے آمدنی	₹
سویابین : مشاگت	₹	تور سے آمدنی	₹
کپاس اور تور : کھاد اور کیڑے مار دوا	₹	کل آمدنی	₹
کپاس اور تور : مشاگت	₹		
کل خرچ	₹		

مشقی سیٹ 3.5

(1) x کی دی ہوئی قیمت لے کر کثیر رکنی $2x - 2x^3 + 7$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $x = 3$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 0$

(2) درج ذیل ہر کثیر رکنی کے لیے $p(1)$، $p(0)$ اور $p(-2)$ معلوم کیجیے۔

(i) $p(x) = x^3$ (ii) $p(y) = y^2 - 2y + 5$ (iii) $p(x) = x^4 - 2x^2 - x$

(3) اگر کثیر رکنی $m^3 + 2m + a$ کی قیمت $m = 2$ کے لیے 12 ہے، تب a کی قیمت معلوم کیجیے۔

(4) اگر کثیر رکنی $mx^2 - 2x + 3$ کے لیے $p(-1) = 7$ ہو تب m کی قیمت معلوم کیجیے۔

(5) درج ذیل میں سے پہلی کثیر رکنی کو دوسری کثیر رکنی سے تقسیم کرکے حاصل ہونے والا باقی، مسئلہ باقی کا استعمال کرکے معلوم کیجیے۔

(i) $(x^2 - 7x + 9)$; $(x + 1)$ (ii) $(2x^3 - 2x^2 + ax - a)$; $(x - a)$

(iii) $(54m^3 + 18m^2 - 27m + 5)$; $(m - 3)$

(6) کثیر رکنی $y^3 - 5y^2 + 7y + m$ کو $y + 2$ سے تقسیم کریں تو باقی 50 بچتا ہے تب m کی قیمت معلوم کیجیے۔

(7) مسئلہ جزضربی کا استعمال کرکے، بتائیے کہ $x + 3$، کثیر رکنی $x^2 + 2x - 3$ کا جزضربی ہے۔

(8) اگر $x - 2$ کثیر رکنی $x^3 - mx^2 + 10x - 20$ کا جزضربی ہے تب m کی قیمت معلوم کیجیے۔

(9) مسئلہ جزضربی کے ذریعے بتائیے کہ $q(x)$ یہ $p(x)$ کا جزضربی ہے یا نہیں۔

(i) $p(x) = x^3 - x^2 - x - 1$, $q(x) = x - 1$

(ii) $p(x) = 2x^3 - x^2 - 45$, $q(x) = x - 3$

(10) $(x^{31} + 31)$ کو $(x + 1)$ سے تقسیم کرکے باقی معلوم کیجیے۔

(11) دکھائیے کہ $m - 1$ کثیر رکنیوں $m^{21} - 1$ اور $m^{22} - 1$ کا جزضربی ہے،

(12) اگر $x - 2$ اور $x - \frac{1}{2}$ یہ دونوں کثیر رکنی $nx^2 - 5x + m$ کے جزضربی ہوں تو دکھائیے کہ $m = n = 2$

(13) (i) اگر $p(x) = 2 + 5x$ تب $p(2) + p(-2) - p(1)$ معلوم کیجیے۔

(ii) اگر $p(x) = 2x^2 - 5\sqrt{3}x + 5$ ہو تب $p(5\sqrt{3}) = ?$

آئیے ذرا یاد کریں

گذشتہ جماعت میں ہم نے کثیر رکنیوں کے جزضربی کیسے نکالتے ہیں، کا مطالعہ کرچکے ہیں۔ کچھ مثالیں دیکھتے ہیں۔

اجزائے ضربی کیجیے۔

مثال (1) $4x^2 - 25$

حل :

$4x^2 - 25$

$= (2x)^2 - (5)^2$

$= (2x + 5)(2x - 5)$

مثال (2) $3x^2 + 7x + 2$

حل :

$3x^2 + 7x + 2$

$= \underline{3x^2 + 6x} + \underline{x + 2}$

$= 3x(x + 2) + 1(x + 2)$

$= (x + 2)(3x + 1)$

مثال (3) $63x^2 + 5x - 2$

حل :

$63x^2 + 5x - 2$

$= 63x^2 + 14x - 9x - 2$

$= 7x(9x + 2) - 1(9x + 2)$

$= (9x + 2)(7x - 1)$

مثال (4) $6x^2 - 5x - 6$

حل :

$6x^2 - 5x - 6$

$= 6x^2 - 9x + 4x - 6$

$= 3x(2x - 3) + 2(2x - 3)$

$= (2x - 3)(3x + 2)$

آیئے سمجھ لیں

کثیر رکنیوں کے اجزائے ضربی (Factors of Polynomials)

کبھی کبھی دی ہوئی کثیر رکنی کی تحویل $ax^2 + bx + c$ میں کی جا سکتی ہے۔ جس کی وجہ سے اس کہ اجزائے ضربی کرنا آسان ہو جاتا ہے۔

مثال (1) $(y^2 - 3y)^2 - 5(y^2 - 3y) - 50$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل : فرض کیجیے دی ہوئی کثیر رکنی میں $y^2 - 3y = x$

$\therefore (y^2-3y)^2 - 5(y^2-3y) - 50 = x^2 - 5x - 50$

$= x^2 - 10x + 5x - 50$

$= x(x - 10) + 5(x - 10)$

$= (x - 10)(x + 5)$

$= (y^2-3y - 10)(y^2-3y + 5)$ ... ($x = y^2-3y$ رکھنے پر)

$= [y^2-5y + 2y - 10](y^2-3y + 5)$

$= [y(y - 5) + 2(y - 5)](y^2-3y + 5)$

$= (y - 5)(y + 2)(y^2-3y + 5)$

مثال (2) اجزائے ضربی معلوم کیجیے : $(x + 2)(x - 3)(x - 7)(x - 2) + 64$

حل :

$(x + 2)(x - 3)(x - 7)(x - 2) + 64$

$= (x + 2)(x - 7)(x - 3)(x - 2) + 64$

$= (x^2 - 5x - 14)(x^2 - 5x + 6) + 64$

$= (m - 14)(m + 6) + 64$ ... (فرض کیجیے $x^2 - 5x = m$)

$= m^2 - 14m + 6m - 84 + 64$

$= m^2 - 8m - 20$

$= (m - 10)(m + 2)$

$= (x^2 - 5x - 10)(x^2 - 5x + 2)$ ... (m کی جگہ $x^2 - 5x$ رکھنے پر)

مشقی سیٹ 3.6

(1) درج ذیل کثیر رکنیوں کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i) $2x^2 + x - 1$ (ii) $2m^2 + 5m - 3$ (iii) $12x^2 + 61x + 77$

(iv) $3y^2 - 2y - 1$ (v) $\sqrt{3}x^2 + 4x + \sqrt{3}$ (vi) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$

(2) درج ذیل کثیررکنیوں کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i) $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12$ (ii) $(x - 5)^2 - (5x - 25) - 24$

(iii) $(x^2 - 6x)^2 - 8(x^2 - 6x + 8) - 64$ (iv) $(x^2 - 2x + 3)(x^2 - 2x + 5) - 35$

(v) $(y + 2)(y - 3)(y + 8)(y + 3) + 56$

(vi) $(y^2 + 5y)(y^2 + 5y - 2) - 24$

(vii) $(x - 3)(x - 4)^2(x - 5) - 6$

مجموعہ سوالات 3

(1) درج ذیل ہر سوال کے لیے دیے ہوئے متبادل میں سے صحیح متبادل منتخب کیجیے۔

(i) درج ذیل میں سے کثیررکنی کون سی ہے؟

(A) $\frac{x}{y}$ (B) $x^{\sqrt{2}} - 3x$ (C) $x^{-2} + 7$ (D) $\sqrt{2}x^2 + \frac{1}{2}$

(ii) کثیررکنی $\sqrt{7}$ کا درجہ کتنا ہے؟

(A) $\frac{1}{2}$ (B) 5 (C) 2 (D) 0

(iii) کثیررکنی 0 کا درجہ کتنا ہوتا ہے؟

(A) 0 (B) 1 (C) متعین نہیں کیا جاسکتا (D) کوئی بھی حقیقی عدد

(iv) کثیررکنی $2x^2 + 5x^3 + 7$ کا درجہ کتنا ہے؟

(A) 3 (B) 2 (C) 5 (D) 7

(v) کثیررکنی $x^3 - 1$ کی ضربی صورت کون سی ہے؟

(A) (1, – 1) (B) (3, – 1) (C) (1, 0, 0, – 1) (D) (1, 3, – 1)

(vi) $p(x) = x^2 - 7\sqrt{7}x + 3$ ہو تب $p(7\sqrt{7}) = ?$

(A) 3 (B) $7\sqrt{7}$ (C) $42\sqrt{7} + 3$ (D) $49\sqrt{7}$

(vii) کثیررکنی $2x^3 + 2x$ کی $x = -1$ ہو تو قیمت کتنی ہے؟

(A) 4 (B) 2 (C) – 2 (D) – 4

(viii) کثیررکنی $3x^2 + mx$ کا $(x - 1)$ جزِ ضربی ہو تب m کی قیمت کتنی ہے؟

(A) 2 (B) – 2 (C) – 3 (D) 3

(ix) $(x^2 - 3)(2x - 7x^3 + 4)$ کا ضرب کرکے حاصل ہونے والی کثیررکنی کا درجہ کتنا ہوگا؟

(A) 5 (B) 3 (C) 2 (D) 0

(x) درج ذیل میں سے خطی کثیر رکنی کون سی ہے؟

(A) $x+5$ (B) x^2+5 (C) x^3+5 (D) x^4+5

(2) درج ذیل ہر کثیر رکنی کا درجہ لکھیے۔

(i) $5+3x^4$ (ii) 7 (iii) ax^7+bx^9 … (یہاں a اور b غیر صفر مستقل اعداد ہیں۔)

(3) درج ذیل کثیر رکنیوں کو معیاری صورت میں لکھیے۔

(i) $4x^2+7x^4-x^3-x+9$ (ii) $p+2p^3+10p^2+5p^4-8$

(4) درج ذیل کثیر رکنیوں کو ضربی صورت میں لکھیے۔

(i) x^4+16 (ii) $m^5+2m^2+3m+15$

(5) درج ذیل ضربی صورت والی کثیر رکنیوں کو x متغیر کا استعمال کر کے قوت نمائی صورت میں لکھیے۔

(i) (3, −2, 0, 7, 18) (ii) (6, 1, 0, 7) (iii) (4, 5, −3, 0)

(6) جمع کیجیے۔

(i) $7x^4-2x^3+x+10$; $3x^4+15x^3+9x^2-8x+2$ (ii) $3p^3q+2p^2q+7$; $2p^2q+4pq-2p^3q$

(7) تفریق کیجیے۔

(i) $5x^2-2y+9$; $3x^2+5y-7$ (ii) $2x^2+3x+5$; x^2-2x+3

(8) درج ذیل ضرب کیجیے۔

(i) $(m^3-2m+3)(m^4-2m^2+3m+2)$ (ii) $(5m^3-2)(m^2-m+3)$

(9) کثیر رکنی $3x^3-8x^2+x+7$ کو کثیر رکنی $x-3$ سے ترکیبی تقسیم کے طریقے سے تقسیم کیجیے اور باقی معلوم کیجیے۔

(10) m کی کس قیمت کے لیے $x+3$، کثیر رکنی $x^3-2mx+21$ کا جز ضربی ہوگا؟

(11) 2016 سال کے آخر میں کیواڑ، وروڑ اور چکھلی گاؤں کی آبادی بالترتیب $5x^2-3y^2$, $7y^2+2xy$ اور $9x^2+4xy$ تھی۔ 2017 سال کی ابتدا میں تینوں گاؤں میں تعلیم اور روزگار کے لیے بالترتیب x^2+xy-y^2, $5xy$ اور $3x^2+xy$ آدمی دوسرے گاؤں چلے گئے۔ تو 2017 کی ابتدا میں ان تینوں گاؤں کی کل آبادی کتنی تھی؟

(12) کثیر رکنیوں bx^2+x+5 اور bx^3-2x+5 کو $x-3$ سے تقسیم کریں تو باقی بالترتیب m اور n آتا ہے۔ اگر $m-n=0$ ہو تب b کی قیمت معلوم کیجیے۔

(13) مختصر کیجیے : $(8m^2+3m-6)-(9m-7)+(3m^2-2m+4)$

(14) کثیر رکنی $x^2+13x+7$ میں سے کون سی کثیر رکنی منہا کریں تو کثیر رکنی $3x^2+5x-4$ ملے گی؟

(15) الجبری عبارت $4m+2n+3$ میں کون سی عبارت ملائیں کہ کثیر رکنی $6m+3n+10$ حاصل ہو؟

◈◈◈

4 Ratio and Proportion نسبت اور تناسب

B4C8A1

آیئے، سیکھیں

- نسبت
- نسبت کی خصوصیات
- مساوی نسبتوں پر عمل
- مساوی نسبتوں کا مسئلہ
- مسلسل تناسب
- نسبت میں k کا طریقہ

آیئے ذرا یاد کریں

ہم گذشتہ جماعت میں نسبت اور تناسب کا مطالعہ کر چکے ہیں۔اس پر مبنی مثالیں حل کر چکے ہیں۔

مثال : ولی کے بنائے ہوئے روا کے لڈو بڑے لذیذ ہوتے ہیں۔وہ ایک پیالی گھی، تین پیالی روا اور دو پیالی شکر لے کر لڈو بناتی ہے۔

یہاں روا اور شکر کا تناسب 2 : 3 یا $\frac{3}{2}$ ہے۔

اگر لڈو کے لیے 12 پیالی روا لیں تو شکر کتنی درکار ہوگی؟

فرض کریں x پیالی شکر درکار ہوگی۔اس بناء پر $\frac{12}{x} = \frac{3}{2}$

$\therefore \quad 3x = 24 \quad ; \quad \therefore \quad x = 8$

یعنی 12 پیالی روا لے کر لڈو بنانے کے لیے 8 پیالی شکر درکار ہوگی۔

اس مثال کو ذیل کے مطابق بھی حل کر سکتے ہیں۔

روا $3k$ پیالی ہو تب شکر $2k$ پیالی درکار ہوگی۔کیونکہ $\frac{3}{2} = \frac{3k}{2k}$

یہاں , $3k = 12 \quad ; \quad \therefore \quad k = 4 \quad , \quad \therefore \quad 2k = 8$

اس لیے 8 پیالی شکر درکار ہوگی۔

آیئے سمجھ لیں

نسبت اور تناسب Ratio and proportion

دو اعداد کی نسبت کے تصور کو تین یا زائد اعداد کے لیے وسعت دے سکتے ہیں۔لڈوؤں کی مثال دیکھیے۔

گھی، روا اور شکر کا تناسب 2 : 3 : 1 ہے۔

یہاں گھی اور روا کی نسبت 3 : 1 اور روا اور شکر کا نسبت 2 : 3 ہے۔یہ معلومات یکساں پیمانے میں دی ہوئی ہے۔

گھی $k = 1k$ پیالی، روا $3k$ پیالی اور شکر $2k$ پیالی فرض کریں گے۔

اب 12 پیالی روا ہوگا تو لڈوؤں کے لیے کتنی پیالی گھی اور کتنی پیالی شکر درکار ہوگی؟ معلوم کر سکتے ہیں۔

کیونکہ $3k = 12$، $\therefore \quad k = 4$ اور $2k = 8$ یعنی 4 پیالی گھی اور 8 پیالی شکر درکار ہوگی۔

یہی تصور چار اور زائد امور کے تناسب کے لیے بھی استعمال کرسکتے ہیں۔

اگر a، b، c، d یہ چار اعداد کا تناسب $2 : 3 : 7 : 4$ ہو تب وہ اعداد بالترتیب $2m$ ، $3m$، $7m$، $4m$ فرض کریں گے اور دی ہوئی معلومات کا استعمال کرکے m کی قیمت معلوم کریں گے۔ مثال میں ان چار اعداد کی جمع 48 دی ہو تب وہ چار اعداد معلوم کریں گے۔

$$2m + 3m + 7m + 4m = 16\,m = 48$$

$$\therefore \quad m = 3$$

$\therefore \quad 2m = 6 \;,\; 3m = 9 \;,\; 7m = 21 \;,\; 4m = 12$ ... (اعداد حاصل ہوتے ہیں۔)

$\therefore$ مطلوبہ اعداد $= 6,\ 9,\ 21,\ 12$

مثال **(1)** کھاد میں $10 : 18 : 18$ تناسب میں نائٹروجن کا مرکب 18%، فاسفورس کا مرکب 18% اور پوٹاشیم کا مرکب 10% ہوتا ہے۔ باقی دوسری اشیاء ہوتی ہیں۔ تب بتائیے اس قسم کی 20 کلوگرام کھاد میں ہر طرح کے مرکبات کی کمیت (وزن) کتنا ہے؟

حل : فرض کیجیے 20 کلوگرام کھاد میں نائٹروجن کے مرکب کا وزن x کلوگرام ہے۔

$$\therefore \frac{18}{100} = \frac{x}{20} \quad , \quad \therefore x = \frac{18 \times 20}{100} = 3.6$$

$\therefore$ نائٹروجن کا مرکب 3.6 کلوگرام ہے۔

فاسفورس کے مرکب کا فیصد 18 اتنا ہی ہے۔ اس لیے فاسفورس کا مرکب 3.6 کلوگرام ہے۔

فرض کیجیے 20 کلوگرام کھاد میں پوٹاشیم کے مرکب کی کمیت (وزن) y ہے۔

$\frac{10}{100} = \frac{y}{20} \quad \therefore y = 2 \quad ; \quad \therefore$ پوٹاشیم کا مرکب $= 2$ کلوگرام

مستقیم تناسب

ایک موٹر گاڑی 1 لٹر پٹرول میں 10 کلومیٹر فاصلہ طے کرتی ہے۔

اس لیے 20 لٹر پٹرول میں وہ گاڑی $20 \times 10 = 200$ کلومیٹر فاصلہ طے کرے گی۔

تب 40 لٹر پٹرول میں وہ گاڑی $40 \times 10 = 400$ کلومیٹر فاصلہ طے کرے گی۔

اوپر دی ہوئی معلومات جدول کی صورت میں لکھتے ہیں۔

پٹرول x لٹر	1	20	40	
فاصلہ : y کلومیٹر	10	200	400	
$\frac{x}{y}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{20}{200} = \frac{1}{10}$	$\frac{40}{400} = \frac{1}{10}$	$\frac{x}{y} = \text{k}$

گاڑی سے استعمال کیا گیا پٹرول (لٹر میں) اور اتنے ہی پٹرول میں طے کردہ فاصلہ (کلومیٹر میں)، ان اعداد کی نسبت مستقل ہے۔ ایسے وقت یہ دونوں مستقیم تناسب میں ہیں، یعنی ہم کہتے ہیں یہ دونوں اعداد مستقیم تغیر میں بدلتے ہیں۔

معکوس تناسب

ایک موٹر کو 50 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے 100 کلومیٹر جانے کے لیے دو گھنٹہ لگتا ہے۔ایک بیل گاڑی کی رفتار 5 کلومیٹر فی گھنٹہ ہے۔تو اتنا ہی فاصلہ طے کرنے کے لیے بیل گاڑی کو 20 گھنٹے لگتے ہے۔

'فاصلہ = وقت × رفتار' اسے دھیان میں رکھتے ہوئے اوپر کی معلومات جدول کی صورت میں لکھیے۔

	کلومیٹر رفتار فی گھنٹہ (x)	وقت (گھنٹہ میں) (y)	$x \times y$	$x \times y = k$
موٹر	50	2	100	
بیل گاڑی	5	20	100	

یعنی، سواریوں کی رفتار اور سفر کے لیے لگنے والا وقت، ان دونوں اعداد کا حاصل ضرب مستقل دکھائی دیتا ہے۔ایسے وقت ہم کہتے ہیں کہ یہ اعداد معکوس تناسب میں ہیں یا یہ اعداد معکوس تغیر میں بدلتے ہیں۔

اوپر کی مثال میں سواریوں کی رفتار اور دیا ہوا فاصلہ جانے کے لیے وقت معکوس تناسب میں ہیں۔

آیئے ذرا یاد کریں

نسبت کی خصوصیات :

(1) a اور b دو اعداد کی نسبت $a : b$ یا $\frac{a}{b}$ کی صورت میں لکھتے ہیں۔ یہاں a کو مقدم رکن یا پہلا رکن (Antecedent) اور b کو تالی رکن یا دوسرا رکن (Consequent) کہتے ہیں۔

(2) دو اعداد کی نسبت میں تالی 100 ہو تب اس نسبت کو فیصدی کہتے ہیں۔

(3) تناسب میں تمام اعداد کسی ایک ہی غیر صفر عدد سے ضرب دیں یا تقسیم کریں تو تناسب نہیں بدلتا۔

مثلاً $3 : 4 = 6 : 8 = 9 : 12$ اسی طرح $2 : 3 : 5 = 8 : 12 : 20$ یا k، غیر صفر عدد ہو تب

$a : b = ak : bk$ اور $a : b : c = ak : bk : ck$

(4) جن اعداد کی نسبت معلوم کرنا ہے، انھیں ایک ہی قسم کی پیمائش میں ہونا چاہیے۔اسی طرح ہر ایک کی پیمائش کی اکائی بھی یکساں ہونا چاہیے۔

(5) نسبت کی اکائی نہیں ہوتی۔

مثلاً 2 کلوگرام اور 300 گرام کی نسبت $2 : 300$ نہیں ہوتی بلکہ گرام 2000 = کلوگرام 2

اس لیے وہ نسبت $2000 : 300$ یعنی $20 : 3$ ہے۔

مثال (1) سیما اور راج شری کی عمروں کی نسبت $1 : 3$ ہے۔راج شری اور اتول کی عمروں کی نسبت $3 : 2$ ہے۔تو سیما، راج شری، اور اتول کی عمروں کی نسبت معلوم کیجیے۔

حل : راج شری کی عمر : سیما کی عمر = $1 : 3$ اور اتول کی عمر : راج شری کی عمر = $2 : 3$ →

پہلی نسبت کے تالی رکن اور دوسری نسبت کے مقدم رکن کو یکساں ہونا چاہیے۔

اس کے لیے مسلسل نسبت حاصل کرنے کے لیے پہلی نسبت کے ارکان کو 2 سے ضرب دیجیے۔یعنی 2 : 6 = 1 : 3 حاصل ہوگا۔

$$\frac{2}{3} = \frac{\text{راج شری کی عمر}}{\text{اتول کی عمر}} \quad , \quad \frac{6}{2} = \frac{\text{سیما کی عمر}}{\text{راج شری کی عمر}}$$

3 : 2 : 6 = اتول کی عمر : راج شری کی عمر : سیما کی عمر

مثال (2) ایک مستطیل کھیت کی لمبائی 1.2 کلومیٹر ہے اور اس کی چوڑائی 400 میٹر ہے تو لمبائی کی چوڑائی سے نسبت معلوم کیجیے۔

حل : یہاں مستطیل کی لمبائی کلومیٹر میں ہے اور چوڑائی میٹر میں ہے۔نسبت کے لیے دونوں اکائیاں یکساں ہونی چاہیے۔اس لیے کلومیٹر کی میٹر میں تحویل کریں گے۔

1.2 کلومیٹر $= 1.2 \times 1000 = 1200$ میٹر

$\therefore$ 1200 میٹر کی 400 میٹر سے نسبت لیں گے۔

$\therefore$ مطلوبہ نسبت $= \frac{1200}{400} = \frac{3}{1}$, یعنی 3 : 1

مثال (3) مہیش کے ہر مہینے کے خرچ کی اس کی آمدنی سے نسبت 5 : 3 ہے۔تو اس کا خرچ اس کی آمدنی کے کتنے فیصدی ہے؟

حل : خرچ کی آمدنی سے نسبت 5 : 3 ہے۔اس کی فیصدی میں تحویل کرنا ہے یعنی دوسرے رکن کو 100 بنانا ہے۔

$$\frac{3}{5} = \frac{3\times 20}{5\times 20} = \frac{60}{100} \quad \text{یعنی} \quad \frac{\text{خرچ}}{\text{آمدنی}} = \frac{60}{100} = 60\%$$

$\therefore$ مہیش کا خرچ آمدنی کا 60% ہے۔

مثال (4) ایک باغ میں آم اور چیکو کے درختوں کی تعداد کی نسبت 3 : 2 ہے۔اگر اس باغ میں ہر قسم کے 5 درخت زیادہ لگائے جائیں تو ان کی تعداد کی نسبت 7 : 5 ہو جاتی۔تو اس باغ میں آموں کے اور چیکو کے درخت کتنے ہیں؟

حل : ابتدائی نسبت 3 : 2 ہے۔

فرض کیجیے۔ باغ میں آم کے درخت $= 2x$ اور $3x =$ چیکو کے درخت

دی ہوئی شرط کے مطابق،

$$\frac{2x+5}{3x+5} = \frac{5}{7}$$

$$14x + 35 = 15x + 25$$

$$\therefore \quad x = 10$$

$\therefore$ باغ میں آم کے درخت $= 2x = 2 \times 10 = 20$

$\therefore$ باغ میں چیکو کے درخت $= 3x = 3 \times 10 = 30$

مثال **(5)** دو اعداد کی نسبت 7 : 5 ہے۔ اگر ہر عدد میں 40 ملائیں تو حاصل ہونے والی جمع کی نسبت 31 : 25 ہوجاتی ہے۔ تو وہ اعداد معلوم کیجیے۔

حل : فرض کیجیے $5x$ = پہلا عدد اور $7x$ = دوسرا عدد

دی ہوئی شرط کے مطابق،

$$\frac{5x+40}{7x+40}=\frac{25}{31}$$

$\therefore \quad 31(5x+40) = 25(7x+40)$

$\therefore \quad 155x + 1240 = 175x + 1000$

$\therefore \quad 1240 - 1000 = 175x - 155x$

$\therefore \quad 240 = 20x$

$\therefore \quad x = 12$

پہلا عدد $= 5 \times 12 = 60$

دوسرا عدد $= 7 \times 12 = 84$

$\therefore$ دیے ہوئے اعداد 60 اور 84 ہیں۔

مشقی سیٹ **4.1**

(1) ذیل میں دیے ہوئے اعداد کی جوڑی میں سے پہلے عدد کی دوسرے عدد سے نسبت کو مختصر ترین صورت میں لکھیے۔

(i) 72, 60 (ii) 38,57 (iii) 52,78

(2) درج ذیل رقموں میں سے پہلے رقم کی دوسری رقم سے نسبت کو مختصر ترین صورت میں لکھیے۔

(i) 700 روپے , 308 روپے (ii) 14 روپے, 12 روپے 40 پیسے

(iii) 5 لٹر, 2500 ملی لٹر (iv) 3 سال 4 مہینے , 5 سال 8 مہینے

(v) 3.8 کلوگرام , 1900 گرام (vi) 7 منٹ 20 سیکنڈ , 5 منٹ 6 سیکنڈ

(3) درج ذیل فی صدی کو مختصر ترین نسبت کی صورت میں لکھیے۔

(i) 75 : 100 (ii) 44 : 100 (iii) 6.25% (iv) 52 : 100 (v) 0.64%

(4) ایک چھوٹا مکان 3 آدمی 8 دن میں تعمیر کر سکتے ہیں تو وہی مکان 6 دنوں میں تعمیر کرنے کے لیے کتنے آدمی لگیں گے؟

(5) ذیل کی نسبتوں کی فی صدی میں تحویل کیجیے۔

(i) 15 : 25 (ii) 47 : 50 (iii) $\frac{7}{10}$ (iv) $\frac{546}{600}$ (v) $\frac{7}{16}$

(6) آبھا اور اس کی ماں کی عمروں کی نسبت 5 : 2 ہے۔ آبھا کی پیدائش کے وقت اس کی ماں کی عمر 27 سال تھی۔ تو آبھا اور اس کی ماں کی موجودہ عمریں معلوم کیجیے۔

(7) وتسلا اور سارا کی موجودہ عمریں بالترتیب 14 سال اور 10 سال ہے تو کتنے سال بعد ان کی عمروں کی نسبت 4 : 5 ہوجائے گی؟

(8) ثریا اور اس کی ماں کی موجودہ عمروں کی نسبت 7 : 2 ہے۔ 2 سال بعد ان کی عمروں کی نسبت 3 : 1 ہوجائے گی تو ثریا کی موجودہ عمر کتنی ہے؟

آیئے سمجھ لیں

نسبتوں کا موازنہ

اگر $b>0$، $d>0$ ہو تو $\frac{a}{b}$، $\frac{c}{d}$ ان نسبتوں کا موازنہ ذیل کے اصول کے مطابق کرسکتے ہیں۔

(i) اگر $ad > bc$ تب $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ (ii) اگر $ad < bc$ تب $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ (iii) اگر $ad = bc$ تب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

درج ذیل میں دی ہوئی نسبتوں کی ہر جوڑی میں ترتیبی تعلق طے کیجیے۔

مثال (1) $\frac{4}{9}, \frac{7}{8}$

حل : $7 \times 9 \;\boxed{?}\; 4 \times 8$

$$32 < 63$$

$$\therefore \quad \frac{4}{9} < \frac{7}{8}$$

مثال (2) $\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{8}}, \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

$$\sqrt{13}\times\sqrt{5}, \quad \boxed{?} \quad \sqrt{8}\times\sqrt{7}$$

$$\sqrt{65} \quad \boxed{?} \quad \sqrt{56}$$

$$\sqrt{65} > \sqrt{56}$$

$$\therefore \quad \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{8}} > \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$$

مثال (3) اگر a اور b صحیح اعداد ہوں اور $a<b$، $b>1$ تب $\frac{a+1}{b+1}$ ، $\frac{a-1}{b-1}$ نسبتوں میں ترتیبی تعلق طے کیجیے۔

حل : $a < b$

$$\therefore \; a - 1 < b - 1$$

اب $\frac{a+1}{b+1} - \frac{a-1}{b-1}$ ، تفریق پر غور کریں گے۔

$$\frac{a-1}{b-1} - \frac{a+1}{b+1} = \frac{(a-1)(b+1)-(a+1)(b-1)}{(b-1)(b+1)}$$

$$= \frac{(ab-b+a-1)-(ab+b-a-1)}{b^2-1}$$

$$= \frac{ab-b+a-1-ab-b+a+1}{b^2-1}$$

$$= \frac{2a-2b}{b^2-1}$$

$$= \frac{2(a-b)}{b^2-1} \qquad \ldots (1)$$

اب ، $a < b$ ، $\therefore a - b < 0$

اسی طرح $b^2-1 > 0$ کیوں کہ $b > 1$

$$\frac{2(a-b)}{b^2-1} < 0 \qquad \ldots (2)$$

$$\frac{a-1}{b-1} - \frac{a+1}{b+1} < 0$$

... [بیان (1) اور (2) سے]

$$\frac{a-1}{b-1} < \frac{a+1}{b+1}$$

مثال **(4)** اگر $a : b = 2 : 1$ اور $b : c = 4 : 1$ تب $\left(\frac{a^4}{32b^2c^2}\right)^3$ عبارت کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : $\frac{a}{b} = \frac{2}{1}$; $\therefore a = 2b$; $\frac{b}{c} = \frac{4}{1}$; $\therefore b = 4c$

$$a = 2b = 2 \times 4c = 8c \qquad \therefore a = 8c$$

اب دی ہوئی عبارت میں $a = 8c$ اور $b = 4c$ قیمت رکھیں گے۔

$$\left(\frac{a^4}{32b^2c^2}\right)^3 = \left(\frac{(8c)^4}{32 \times 4^2 \times c^2 \times c^2}\right)^3$$

$$= \left[\frac{8 \times 8 \times 8 \times 8 \times c^4}{32 \times 16 \times c^2 \times c^2}\right]^3$$

$$= (8)^3$$

$$\therefore \left(\frac{a^4}{32b^2c^2}\right)^3 = 512$$

مشقی سیٹ 4.2

(1) $\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}$ خصوصیت کا استعمال کر کے خالی جگہ مناسب عدد لکھیے ۔

(i) $\frac{5}{7} = \frac{....}{28} = \frac{35}{....} = \frac{....}{3.5}$ (ii) $\frac{9}{14} = \frac{4.5}{....} = \frac{....}{42} = \frac{....}{3.5}$

(2) درج ذیل نسبتیں معلوم کیجیے۔

(i) دائرہ کے نصف قطر کی، اس کے محیط سے نسبت

(ii) r نصف قطر والے دائرہ کے محیط کی، اس کے رقبہ سے نسبت

(iii) 7 سم ضلع والے مربع کے وتر سے اس کے ضلع کی نسبت

(iv) 5 سم لمبائی اور 3.5 سم چوڑائی والے مستطیل کے احاطے کی اس کے رقبہ سے نسبت

(3) درج ذیل دی ہوئی نسبتوں کی جوڑیوں میں چھوٹا بڑا پن طے کیجیے۔

(i) $\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{3}{\sqrt{7}}$ (ii) $\frac{3\sqrt{5}}{5\sqrt{7}}, \frac{\sqrt{63}}{\sqrt{125}}$ (iii) $\frac{5}{18}, \frac{17}{121}$

(iv) $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{48}}, \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{27}}$ (v) $\frac{9.2}{5.1}, \frac{3.4}{7.1}$

(4) (i) □ABCD متوازی الاضلاع ہے۔اس کے ∠A اور ∠B کی پیمائشوں کی نسبت 5 : 4 ہے تو ∠B کی پیمائش معلوم کیجیے۔

(ii) البرٹ اور سلیم کی موجودہ عمروں کی نسبت 5 : 9 ہے۔ 5 سال بعد ان کی عمروں کی نسبت 3 : 5 ہو جائے گی تو ان کی موجودہ عمریں معلوم کیجیے۔

(iii) ایک مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی کی نسبت 3 : 1 ہے۔ مستطیل کا احاطہ 36 سم ہے تو مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کیجیے۔

(iv) دو اعداد کی نسبت 31 : 23 ہے ان کا مجموعہ 216 ہے۔ وہ اعداد معلوم کیجیے۔

(v) دو اعداد کا حاصل ضرب 360 ہے اور ان کی نسبت 10 : 9 ہے تو وہ اعداد معلوم کیجیے۔

(5)* اگر $a : b = 3 : 1$ اور $b : c = 5 : 1$ ہے تو (i) $\left(\frac{a^3}{15b^2c}\right)^3$ (ii) $\frac{a^2}{7bc}$ ان عبارتوں کی قیمت معلوم کیجیے۔

(6)* $\sqrt{0.04\times0.4\times a} = 0.4\times0.04\times\sqrt{b}$ ہو تو $\frac{a}{b}$ نسبت معلوم کیجیے۔

(7) $(x + 3) : (x + 11) = (x - 2) : (x + 1)$ ہو تو x کی قیمت معلوم کیجیے۔

آئیے سمجھ لیں

مساوی نسبتوں پر عمل

مساویت کی خصوصیت کا استعمال کر کے دو مساوی نسبتوں پر کچھ عمل کیا جا سکتا ہے۔ اس کا مطالعہ کریں گے۔

اگر a, b, c, d مثبت اعداد ہوں تو ان کے لیے درج ذیل خصوصیت سمجھ لیں۔

(I) عمل عکس (Invertendo) : اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ہو تو $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

(دیا ہوا ہے) ... $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

(ترچھی ضرب) ... $\therefore \quad a\times d = b\times c$

(طرفین کا باز و تبدیل کرنے پر) ... $\therefore \quad b\times c = a\times d$

(طرفین کو $a \times c$ سے تقسیم کرنے پر) ... $\therefore \quad \frac{b\times c}{a\times c} = \frac{a\times d}{a\times c}$

$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ہو تب $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ اس خصوصیت کو "عمل عکس" کہتے ہیں۔

(II) عمل تبدیل (Alternendo) : اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ہو تب $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

(دیا ہوا ہے) ... $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

(ترچھی ضرب کرنے پر) ... $\therefore \quad a\times d = b\times c$

(طرفین کو $c\times d$ سے تقسیم کرنے پر) ... $\frac{a\times d}{c\times d} = \frac{b\times c}{c\times d}$

$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ہو تب $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ اس خصوصیت کو "عمل تبدیل" کہتے ہیں۔

(III) **عمل ترکیب (Componendo)** : اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ہو تب $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

(دیا ہوا ہے) ... $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

(طرفین میں 1 ملانے پر) ... $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ہو تب $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ اس خصوصیت کو عمل ترکیب کہتے ہیں۔

(IV) **عمل تفصیل (Dividendo)** : اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ہو تب $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

(دیا ہوا ہے) ... $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

(طرفین سے 1 تفریق کرنے پر) ... $\therefore \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$

$$\therefore \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ہو تب $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ اس خصوصیت کو ''عمل تفصیل'' کہتے ہیں۔

(V) **عمل ترکیب و تفصیل (Componenedo-Dividendo)** : اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ہو تب $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ جب $a \neq b$ اور $c \neq d$

اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ، (1) (عمل ترکیب سے) ... $\therefore \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

(2) (عمل تفصیل سے) ... $\therefore \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

[(1) کو (2) سے تقسیم دینے پر] ... $\therefore \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ہو تب $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ اس خصوصیت کو عمل ترکیب و تفصیل کہتے ہیں۔

عمل ترکیب اور تفصیل کی عام صورت

اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ہو تب (ایک مرتبہ عمل ترکیب سے) ... $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

(دو مرتبہ عمل ترکیب سے) ... $\frac{a+2b}{b}=\frac{c+2d}{d}$

(1) .... (m مرتبہ عمل ترکیب سے) ... $\frac{a+mb}{b}=\frac{c+md}{d}$,عام طور پر

اسی طرح اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ہو تب m مرتبہ عمل تفصیل سے،

(2) ... (m مرتبہ عمل تفصیل سے) ... $\frac{a-mb}{b}=\frac{c-md}{d}$

اور اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ہو تب [(1) اور (2) کی تقسیم کرنے سے]

$$\frac{a+mb}{a-mb}=\frac{c+md}{c-md}$$

اسے دھیان میں رکھیں

اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ہوتب $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ ... (عملِ عکس)

اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ہوتب $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ ... (عملِ ترکیب)

اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ہوتب $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ ... (عملِ تبدیل)

اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ہوتب $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ ... (عملِ تفصیل)

اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ہوتب $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ ... (عملِ ترکیب وتفصیل)

حل کردہ مثالیں :

مثال (1) اگر $\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$ ہوتب $\frac{a+7b}{7b}$ نسبت معلوم کیجیے۔

طریقہ I

حل : اگر $\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$ ہوتب عملِ تبدیل کرکے، $\frac{a}{5}=\frac{b}{3}=k$

$\therefore\ a=5k,\ b=3k$

$$\therefore\ \frac{a+7b}{7b}=\frac{5k+7\times 3k}{7\times 3k}$$

$$=\frac{5k+21k}{21k}$$

$$=\frac{26k}{21k}\quad=\frac{26}{21}$$

طریقہ II

$$\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$$

$\therefore\ \frac{a}{7b}=\frac{5}{21}$ ... (طرفین کو $\frac{1}{2}$ سے ضرب کرنے پر)

$\therefore\ \frac{a+7b}{7b}=\frac{5+21}{21}$ ... (عملِ ترکیب)

$$\therefore\ \frac{a+7b}{7b}=\frac{26}{21}$$

مثال (2) اگر $\frac{a}{b}=\frac{7}{4}$ ہوتب $\frac{5a-b}{b}$ معلوم کیجیے۔

طریقہ I

حل :

$$\frac{a}{b}=\frac{7}{4}$$

$\therefore\ \frac{a}{7}=\frac{b}{4}$ ... (عملِ تبدیل)

$\therefore\ \frac{a}{7}=\frac{b}{4}=m$ ... (فرض کیجیے)

$\therefore\ a=7m,\quad b=4m$

$$\therefore\ \frac{5a-b}{b}=\frac{5(7m)-4m}{4m}$$

$$=\frac{35m-4m}{4m}$$

$$=\frac{31}{4}$$

طریقہ II

$$\frac{a}{b}=\frac{7}{4}$$

$\frac{5a}{b}=\frac{5\times 7}{4}$ ... (طرفین کو 5 سے ضرب کرنے پر)

$$=\frac{35}{4}$$

$\frac{5a-b}{b}=\frac{35-4}{4}$ ... (عملِ تفصیل سے)

$$\frac{5a-b}{b}=\frac{31}{4}$$

مثال (3) اگر $\frac{a}{b}=\frac{7}{3}$ ہوتب $\frac{a+2b}{a-2b}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

طریقہ I

حل : فرض کیجیے

$a = 7m, b = 3m$ رکھنے پر

$$\therefore \frac{a+2b}{a-2b} = \frac{7m+2\times 3m}{7m-2\times 3m}$$

$$= \frac{7m+6m}{7m-6m}$$

$$= \frac{13m}{m} = \frac{13}{1}$$

طریقہ II

$$\frac{a}{b} = \frac{7}{3}$$

$$\therefore \frac{a}{2b} = \frac{7}{6}$$ ... (طرفین کو $\frac{1}{2}$ سے ضرب دینے پر)

$$\therefore \frac{a+2b}{a-2b} = \frac{7+6}{7-6}$$ ... (عمل ترکیب وتفصیل سے)

$$\therefore \frac{a+2b}{a-2b} = \frac{13}{1}$$

مثال (4) اگر $\frac{a}{3}=\frac{b}{2}$ ہوتب $\frac{5a+3b}{7a-2b}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

طریقہ I

حل : $\frac{a}{3} = \frac{b}{2}$ ... (دیا ہوا ہے)

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{3}{2}$$ ... (عمل تبدیل)

اب $\frac{5a+3b}{7a-2b}$ کے ہر رکن کو b سے تقسیم کریں گے۔

$$\frac{\frac{5a}{b}+\frac{3b}{b}}{\frac{7a}{b}-\frac{2b}{b}} = \frac{5\left(\frac{a}{b}\right)+3}{7\left(\frac{a}{b}\right)-2}$$

$$= \frac{5\left(\frac{3}{2}\right)+3}{7\left(\frac{3}{2}\right)-2}$$

$$= \frac{\frac{15}{2}+3}{\frac{21}{2}-2}$$

$$= \frac{15+6}{21-4}$$

$$= \frac{21}{17}$$

طریقہ II

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{2}$$

$$\therefore \frac{a}{3} = \frac{b}{2} = t$$ ... (فرض کریں)

$$\therefore a = 3t \ , \ b = 2t$$

قیمت رکھنے پر،

$$\frac{5a+3b}{7a-2b} = \frac{5(3t)+3(2t)}{7(3t)-2(2t)}$$ ...$(t \neq 0)$

$$= \frac{15t+6t}{21t-4t}$$

$$= \frac{21t}{17t}$$

$$= \frac{21}{17}$$

مثال (5) اگر $\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$ ہوتب $\frac{4x-y}{4x+y}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل :

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$$ ... (دیا ہوا ہے)

$$\frac{4x}{y} = \frac{16}{5}$$ ... (طرفین کو 4 سے ضرب دینے پر)

$$\therefore \frac{4x+y}{4x=y} = \frac{16+5}{16-5}$$ ... (عمل ترکیب و تفصیل کرنے پر)

$$\therefore \frac{4x+y}{4x-y} = \frac{21}{11}$$

$$\therefore \frac{4x-y}{4x+y} = \frac{11}{21}$$ .... (عمل عکس کرنے پر)

مثال (6) اگر $5x = 4y$ ہوتب $\frac{3x^2+y^2}{3x^2-y^2}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل :

$$5x = 4y$$ ... (دیا ہوا ہے)

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{16}{25}$$ ... (طرفین کا مربع کرنے پر)

$$\therefore \frac{3x^2}{y^2} = \frac{48}{25}$$ ... (طرفین کو 3 سے ضرب دینے پر)

$$\therefore \frac{3x^2+y^2}{3x^2-y^2} = \frac{48+25}{48-25}$$ ... (عمل ترکیب و تفصیل سے)

$$\therefore \frac{3x^2+y^2}{3x^2-y^2} = \frac{73}{23}$$

آیئے سمجھ لیں

مساوی نسبتوں کی خصوصیت کا استعمال (Use of properties of equal ratios)

کچھ مساواتیں حل کرنے کے لیے دیگر طریقوں کی بجائے مساوی نسبتوں پر عمل کا استعمال کرنا سہولت بخش ہوتا ہے۔

مثال (1) مساوات حل کیجیے۔ $$\frac{3x^2+5x+7}{10x+14} = \frac{3x^2+4x+3}{8x+6}$$

حل :

$$\frac{3x^2+5x+7}{10x+14} = \frac{3x^2+4x+3}{8x+6}$$

$$\frac{(6x^2+10x+14)}{10x+14} = \frac{(6x^2+8x+6)}{8x+6}$$ ... (طرفین کو 2 سے ضرب دینے پر)

$$\frac{(6x^2+10x+14)-(10x+14)}{10x+14}=\frac{(6x^2+8x+6)-(8x+6)}{8x+6} \quad \text{...} \quad$$ (عمل تفصیل سے)

$$\therefore \quad \frac{6x^2}{10x+14}=\frac{6x^2}{8x+6}$$

یہ مساوات $x = 0$ قیمت سے مطمئن ہوتی ہے۔اس لیے $x = 0$ ایک حل ہے۔

اگر $x \neq 0$ تب $x^2 \neq 0$

(∴ $6x^2$ سے تقسیم کرنے پر) ....

$$\frac{1}{10x+14}=\frac{1}{8x+6}$$

(عمل عکس) ...

$$\therefore \quad 8x+6=10x+14$$

$$\therefore \quad 6-14=10x-8x$$

$$\therefore \quad -8=2x$$

$$\therefore \quad x=-4$$

∴ $x = -4$ یا $x = 0$ دی ہوئی مساوات کا حل ہیں۔

مثال (2) حل کیجیے : $\frac{\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+7}-\sqrt{x-2}}=\frac{5}{1}$

حل :

$$\frac{\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+7}-\sqrt{x-2}}=\frac{5}{1}$$

(عمل ترکیب وتفصیل سے) ...

$$\frac{(\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2})+(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2})-(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-2})}=\frac{5+1}{5-1}$$

$$\therefore \quad \frac{2\sqrt{x+7}}{2\sqrt{x-2}}=\frac{6}{4}$$

$$\therefore \quad \frac{\sqrt{x+7}}{\sqrt{x-2}}=\frac{3}{2}$$

(طرفین کا مربع کرنے پر) ...

$$\therefore \quad \frac{x+7}{x-2}=\frac{9}{4}$$

$$\therefore \quad 4(x+7)=9(x-2)$$

$$\therefore \quad 4x+28=9x-18$$

$$\therefore \quad 28+18=9x-4x$$

$$\therefore \quad 46=5x$$

$$\therefore \quad \frac{46}{5}=x$$

(∴ مساوات کا حل ہے) ...

$$\therefore \quad x=\frac{46}{5}$$

عملی کام :

موٹے کاغذ کے پانچ ٹکڑے لیجیے۔ ہر کاغذ پر درج ذیل میں سے ایک ایک بیان لکھیے۔

(i) $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ (ii) $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ (iii) $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bd}$ (iv) $\frac{c}{d}=\frac{c-a}{d-b}$ (v) $\frac{a}{b}=\frac{rc}{rd}$

a، b، c، d مثبت اعداد ہیں اور $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ معلومات دی ہوئی ہیں۔ درج بالا میں سے ہر بیان صحیح ہے یا غلط ہے، اسے کارڈ کے پیچھے لکھیے۔ بیان غلط ہو تو اس کی وجہ لکھیے۔

مشقی سیٹ 4.3

(1) اگر $\frac{a}{b}=\frac{7}{3}$ ہو تو درج ذیل نسبتوں کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $\frac{5a+3b}{5a-3b}$ (ii) $\frac{2a^2+3b^2}{2a^2-3b^2}$ (iii) $\frac{a^3-b^3}{b^3}$ (iv) $\frac{7a+9b}{7a-9b}$

(2) اگر $\frac{15a^2+4b^2}{15a^2-4b^2}=\frac{47}{7}$ ہو تب درج ذیل نسبتوں کی قیمت طے کیجیے۔

(i) $\frac{a}{b}$ (ii) $\frac{7a-3b}{7a+3b}$ (iii) $\frac{b^2-2a^2}{b^2+2a^2}$ (iv) $\frac{b^3-2a^3}{b^3+2a^3}$

(3) اگر $\frac{3a+7b}{3a-7b}=\frac{4}{3}$ ہو تب $\frac{3a^2-7b^2}{3a^2+7b^2}$ نسبت کی قیمت معلوم کیجیے۔

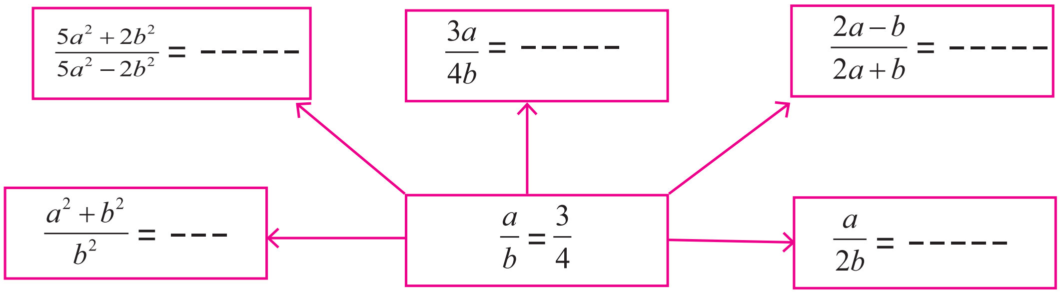
(4) درج ذیل مساواتیں حل کیجیے۔

(i) $\frac{x^2+12x-20}{3x-5}=\frac{x^2+8x+12}{2x+3}$ (ii) $\frac{10x^2+15x+63}{5x^2-25x+12}=\frac{2x+3}{x-5}$

(iii) $\frac{(2x+1)^2+(2x-1)^2}{(2x+1)^2-(2x-1)^2}=\frac{17}{8}$ (iv*) $\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{x+3}}=\frac{4}{1}$

(v) $\frac{(4x+1)^2+(2x+3)^2}{4x^2+12x+9}=\frac{61}{36}$ (vi) $\frac{(3x-4)^3-(x+1)^3}{(3x-4)^3+(x+1)^3}=\frac{61}{189}$

عملی کام : ذیل میں دیے ہوئے درمیانی خانہ میں a اور b کی قیمتیں بدل کر یعنی $a:b$ کی نسبت بدل کر مختلف مثالیں بنائی جاسکتی ہیں۔ اس طرح تبدیلی کر کے استاد بھرپور مشق دیں۔



آیئے سمجھ لیں

مساوی نسبتوں کا مسئلہ (Theorem on equal ratios)

اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ہو تب $\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d}$ اس خصوصیت کو مساوی نسبتوں کا مسئلہ کہتے ہیں۔

ثبوت : (فرض کریں) ... $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ اس لیے $a=bk$ اور $c=dk$

$$\therefore \quad \frac{a+c}{b+d}=\frac{bk+dk}{b+d}=\frac{k(b+d)}{b+d}=k$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$$

ہمیں معلوم ہے کہ $\frac{a}{b}=\frac{al}{bl}$

اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ ہو تب $\frac{al}{bl}=\frac{cm}{dm}=\frac{al+cm}{bl+dm}=k$

اسی طریقے سے غور کرکے اگر (محدود ارکان) ... $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=$ ... اور اگر l، m، n، ... یہ غیر صفر عدد ہوں تب

اسی طرح مساوی نسبتوں کے مسئلہ کی عام صورت ملتی ہے۔ (محدود ارکان) .... ہر نسبت $=\frac{al+cm+en+\dots}{bl+dm+fn+\dots}$

غور کیجیے

ایک جیم خانہ (ورزش گاہ) میں چھوٹے بچوں کے گروہ میں 35 لڑکیاں اور 42 لڑکے، بڑے بچوں کے گروہ میں 30 لڑکیاں اور 36 لڑکے اور جوان گروپ میں 20 لڑکیاں اور 24 لڑکے ہیں۔ تو بتایئے ہر گروہ میں لڑکیوں کی تعداد اور لڑکوں کی تعداد کے درمیان نسبت کتنی ہے؟ ٹیم قواعد کے لیے تینوں گروہ میدان پر اکٹھا ہوئے۔ اب اکٹھا ہوئے گروہوں میں لڑکیوں کی تعداد اور لڑکوں کی تعداد کی نسبت کتنی ہے۔

اوپر دیے ہوئے سوالوں کے جواب سے کیا آپ کو مساوی نسبتوں کے مسئلہ کی تصدیق ہوئی؟

مثال (1) : درج ذیل بیان میں خالی جگہ پر کیجیے۔

(i) $\frac{a}{3}=\frac{b}{7}=\frac{4a+9b}{\dots\dots\dots\dots}$ (ii) $\frac{x}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z}{4}=\frac{5x-3y+4z}{\dots\dots\dots\dots\dots}$

حل :

(i) $\frac{a}{3}=\frac{b}{7}=\frac{4a+9b}{4\times3+9\times7}=\frac{4a+9b}{12+63}=\frac{4a+9b}{75}$

(ii) $\frac{x}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z}{4}=\frac{5\times x}{5\times3}=\frac{-3\times y}{-3\times5}=\frac{4\times z}{4\times4}$

$\therefore$ ہر نسبت $=\frac{5x}{15}=\frac{-3y}{-15}=\frac{4z}{16}$ ... (مساوی نسبتوں کا مسئلہ سے)

$=\frac{5x-3y+4z}{15-15+16}$

$=\frac{5x-3y+4z}{16}$

مثال (2) : اگر $\frac{a}{(x-2y+3z)}=\frac{b}{(y-2z+3x)}=\frac{c}{(z-2x+3y)}$ اور $x+y+z\neq 0$ ہو تب دکھائیے کہ ہر نسبت $\frac{a+b+c}{2(x+y+z)}$ کے مساوی ہے۔

حل : فرض کریں، $\frac{a}{(x-2y+3z)}=\frac{b}{(y-2z+3x)}=\frac{c}{(z-2x+3y)}=\mathrm{k}$

∴ مساوی نسبتوں کے مسئلے کی رو سے،

$$k=\frac{a+b+c}{(x-2y+3z)+(y-2z+3x)+(z-2x+3y)}$$

$$=\frac{a+b+c}{2x+2y+2z}$$

$$=\frac{a+b+c}{2(x+y+z)}$$

$$\therefore\quad \frac{a}{x-2y+3z}=\frac{b}{y-2z+3x}=\frac{c}{z-2x+3y}=\frac{a+b+c}{2(x+y+z)}$$

مثال (3) : اگر $\frac{x}{a+b-c}=\frac{z}{c+a-b}=\frac{y}{b+c-a}$ ہو تب ثابت کیجیے کہ $\frac{a}{z+x}=\frac{b}{x+y}=\frac{c}{y+z}$

حل : پہلے دی ہوئی مساوی نسبتوں پر عمل معکوس کر کے،

$$\frac{b+c-a}{y}=\frac{c+a-b}{z}=\frac{a+b-c}{x}$$

اب، فرض کریں ... $\frac{b+c-a}{y}=\frac{c+a-b}{z}=\frac{a+b-c}{x}=\mathrm{k}$

∴ مساوی نسبتوں کے مسئلہ سے،

$$k=\frac{(c+a-b)+(a+b-c)}{z+x}=\frac{2a}{z+x}\quad ...(\mathrm{I})$$

$$k=\frac{(a+b-c)+(b+c-a)}{x+y}=\frac{2b}{x+y}\quad ...(\mathrm{II})$$

$$k=\frac{(b+c-a)+(c+a-b)}{y+z}=\frac{2c}{y+z}\quad ...(\mathrm{III})$$

$$\therefore\quad \frac{2a}{z+x}=\frac{2b}{x+y}=\frac{2c}{y+z}$$

$$\therefore\quad \frac{a}{z+x}=\frac{b}{x+y}=\frac{c}{y+z}$$

مثال (4) : حل کیجیے : $\frac{14x^2-6x+8}{10x^2+4x+7}=\frac{7x-3}{5x+2}$

حل : مثال کا مشاہدہ کرنے پر نظر آتا ہے کہ دائیں جانب کی نسبت میں مقدم رکن (پہلے رکن) کو اور تالی رکن (دوسرے رکن) کو $2x$ سے ضرب دیں تو پہلی نسبت کے دو ارکان ملتے ہیں۔ اس لیے دوسری نسبت کے دونوں ارکان کو $2x$ سے ضرب کریں گے۔ لیکن اس سے پہلے $x\neq 0$ یا x صفر کے برابر نہیں ہے، طے کریں گے۔

اگر $x=0$ ہوتب $\frac{8}{7} = \frac{14x^2-6x+8}{10x^2+4x+7}$ اور $\frac{7x-3}{5x+2} = \frac{-3}{2}$

(ناممکن بیان حاصل ہوتا ہے) ... $\therefore \frac{8}{7} = \frac{-3}{2}$

$\therefore x \neq 0$

$\therefore$ دوسری نسبت کے دونوں ارکان کو $2x$ سے ضرب دیں گے۔

(فرض کریں) ... $\frac{14x^2-6x+8}{10x^2+4x+7} = \frac{2x(7x-3)}{2x(5x+2)} = k$

$$\therefore \frac{14x^2-6x+8}{10x^2+4x+7} = \frac{14x^2-6x}{10x^2+4x} = k$$

$$\therefore \frac{14x^2-6x+8-14x^2+6x}{10x^2+4x+7-10x^2-4x} = \frac{8}{7} = k$$

$$\therefore k = \frac{8}{7}$$

$$\therefore \frac{7x-3}{5x+2} = \frac{8}{7}$$

$$\therefore 49x-21 = 40x+16$$

$$\therefore 49x-40x = 16+21$$

$$\therefore 9x = 37 \qquad \therefore x = \frac{37}{9}$$

مشقی سیٹ 4.4

(1) درج ذیل بیانات میں خالی جگہ پر کیجیے۔

(i) $\frac{x}{7} = \frac{y}{3} = \frac{3x+5y}{.......} = \frac{7x-9y}{......}$ (ii) $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{7} = \frac{a-2b+3c}{......} = \frac{......}{6-8+14}$

(2) اگر $5m-n=3m+4n$ ہوتب ذیل کی عبارتوں کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$ (ii) $\frac{3m+4n}{3m-4n}$

(3) (i) اگر $a(y+z)=b(z+x)=c(x+y)$ اور a، b، c میں سے کوئی بھی عدد مساوی نہیں ہوتو

ثابت کیجیے کہ $\frac{y-z}{a(b-c)} = \frac{z-x}{b(c-a)} = \frac{x-y}{c(a-b)}$

(ii) اگر $\frac{x}{3x-y-z} = \frac{y}{3y-z-x} = \frac{z}{3z-x-y}$ اور $x+y+z \neq 0$ ہوتب دکھایئے کہ ہرنسبت کی قیمت 1 ہے۔

(iii) اگر $\frac{ay+bz}{y+z}=\frac{bx+az}{x+z}=\frac{ax+by}{x+y}$ اور $x+y+z\neq 0$ ہوتو تب دکھائیے کہ ہر نسبت $\frac{a+b}{2}$ کے مساوی ہے۔

(iv) اگر $\frac{x+y}{c}=\frac{z+x}{b}=\frac{y+z}{a}$ ہوتب دکھائیے کہ $\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}$

(v) اگر $\frac{y-z}{x-z}=\frac{x+5z}{y-5x}=\frac{3x-5y}{5z+3y}$ ہوتب دکھائیے کہ ہر نسبت $\frac{x}{y}$ کے مساوی ہے۔

(4) حل کیجیے۔ (i) $\frac{16x^2-20x+9}{8x^2+12x+21}=\frac{4x-5}{2x+3}$ (ii) $\frac{5y^2+40y-12}{5y+10y^2-4}=\frac{y+8}{1+2y}$

آیئے سمجھ لیں

مسلسل تناسب (Continued Proportion)

ذیل میں دی ہوئی نسبتوں پر غور کیجیے۔

12 : 4 اور 36 : 12 یہ دونوں نسبتیں مساوی ہیں۔اس تناسب میں پہلی نسبت کا دوسرا رکن اور دوسری نسبت کا پہلا رکن مساوی ہے۔اس لیے ہم کہتے ہیں کہ 4, 12, 36 اعداد مسلسل تناسب میں ہیں۔

جب $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ تب کہتے ہیں کہ a ، b، c اعداد مسلسل تناسب میں ہیں۔

اگر $ac=b^2$ تب طرفین کو bc سے تقسیم کرکے $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ مساوات حاصل ہوتی ہے۔

اس لیے $ac=b^2$ ہوتب a، b، c مسلسل تناسب میں ہوتے ہیں۔

جب a، b، c مسلسل تناسب میں ہوتے ہیں۔تب b کو a اور c کا ہندسی وسط (Geometric mean) یا درمیانی متناسب رکن (Mean proportional) کہتے ہیں۔

اس بنا پر دھیان رکھیے کہ درج ذیل تمام بیان کا مطلب یکساں ہے۔

$\therefore$ (1) $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ (2) $b^2=ac$ (3) a، b، c مسلسل تناسب میں ہیں۔

(4) a اور c کا ہندسی وسط b ہے (5) a اور c کا درمیانی متناسب رکن b ہے۔

مسلسل تناسب کے تصور کو بھی توسیعی صورت دی جاسکتی ہے۔

اگر $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{e}=\frac{e}{f}$ ہوتب a، b، c، d، e اور f اعداد مسلسل متناسب میں ہیں۔

مثال (1) 25 اور 4 کا ہندسی وسط x ہوتب x کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : 25 اور 4 کا ہندسی وسط x ہے۔

$$\therefore\ x^2 = 25\times 4$$

$$\therefore\ x^2 = 100$$

$$\therefore\ x = 10$$

مثال (2) اگر $4a^2b$، $8ab^2$، p مسلسل تناسب میں ہوں تب p کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : دی ہوئی معلومات کی بناء پر $4a^2b$، $8ab^2$، p مسلسل تناسب میں ہیں۔

$$\therefore \quad \frac{4a^2b}{8ab^2} = \frac{8ab^2}{p}$$

$$p = \frac{8ab^2 \times 8ab^2}{4a^2b} = 16b^3$$

مثال (3) 7، 12 اور 18 ہر عدد میں سے کون سا عدد تفریق کریں تو آنے والا عدد مسلسل تناسب میں ہوتا ہے؟

حل : فرض کیجیے کہ 7، 12 اور 18 اعداد میں سے x تفریق کرتے ہیں تو حاصل ہونے والے اعداد مسلسل تناسب میں ہیں۔

$(7-x)$، $(12-x)$، $(18-x)$ مسلسل تناسب میں ہیں۔

$$\therefore \quad (12-x)^2 = (7-x)(18-x)$$

$$\therefore \quad 144 - 24x + x^2 = 126 - 25x + x^2$$

$$\therefore \quad -24x + 25x = 126 - 144$$

$$\therefore \quad x = -18$$

تصدیق

$$(7-x) = 7-(-18) = 25$$

$$(12-x) = 12-(-18) = 30$$

$$(18-x) = 18-(-18) = 36$$

$25 \times 36 = 900$ اور $30^2 = 900$

یہاں 25، 30، 36 اعداد مسلسل تناسب میں ہیں۔

$\therefore$ 7، 12، 18 سے (-18) تفریق کریں تو حاصل ہونے والے اعداد مسلسل تناسب میں ہوتے ہیں۔

k – طریقہ (**k-method**)

نسبتوں میں k – طریقہ، مساوی نسبتوں پر یعنی تناسب پر کچھ سوالات حل کرنے کا ایک آسان طریقہ ہے۔اس طریقہ میں دی ہوئی مساوی نسبتوں کی قیمت k فرض کرتے ہیں۔

مثال (1) اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ہو تب دکھایئے کہ $\frac{5a-3c}{5b-3d} = \frac{7a-2c}{7b-2d}$

حل : فرض کیجیے $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$، اس لیے $a = bk$ اور $c = dk$

a اور c کی قیمت طرفین میں رکھ کر،

$$\text{بائیں بازو} = \frac{5a-3c}{5b-3d} = \frac{5(bk)-3(dk)}{5b-3d} = \frac{k(5b-3d)}{(5b-3d)} = k$$

$$\text{دائیں بازو} = \frac{7a-2c}{7b-2d} = \frac{7(bk)-2(dk)}{7b-2d} = \frac{k(7b-2d)}{7b-2d} = k$$

$\therefore$ بائیں بازو = دائیں بازو

$$\therefore \quad \frac{5a-3c}{5b-3d} = \frac{7a-2c}{7b-2d}$$

مثال (2) اگر a، b، c مسلسل تناسب میں ہوں تو ثابت کیجیے کہ $\frac{(a+b)^2}{ab}=\frac{(b+c)^2}{bc}$

حل : a، b، c مسلسل تناسب میں ہیں۔فرض کیجیے $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=k$

$$\therefore b=ck,\ a=bk=ck\times k=ck^2$$

a اور b کی قیمت رکھ کر

بائیں طرف $=\frac{(a+b)^2}{ab}=\frac{(ck^2+ck)^2}{(ck^2)(ck)}=\frac{c^2k^2(k+1)^2}{c^2k^3}=\frac{(k+1)^2}{k}$

دائیں طرف $=\frac{(b+c)^2}{bc}=\frac{(ck+c)^2}{(ck)c}=\frac{c^2(k+1)^2}{c^2k}=\frac{(k+1)^2}{k}$

$\therefore$ بائیں طرف = دائیں طرف ، $\therefore \frac{(a+b)^2}{ab}=\frac{(b+c)^2}{bc}$

مثال (3) اگر a، b، c مسلسل تناسب میں ہوں تو ثابت کیجیے کہ

$$\frac{a}{c}=\frac{a^2+ab+b^2}{b^2+bc+c^2}$$

حل : a، b، c مسلسل تناسب میں ہیں۔ $\therefore \frac{a}{b}=\frac{b}{c}$

فرض کیجیے $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=k$ ، اس لیے $b=ck$ اور $a=ck^2$

بائیں طرف $=\frac{a}{c}=\frac{ck^2}{c}=k^2$

دائیں طرف $=\frac{a^2+ab+b^2}{b^2+bc+c^2}$

$$=\frac{(k^2c)^2+k^2c(ck)+(ck)^2}{(ck)^2+(ck)(c)+c^2}$$

$$=\frac{k^4c^2+k^3c^2+c^2k^2}{c^2k^2+c^2k+c^2}$$

$$=\frac{c^2k^2(k^2+k+1)}{c^2(k^2+k+1)}$$

$$=k^2$$

$\therefore$ بائیں طرف = دائیں طرف

$$\therefore \frac{a}{c}=\frac{a^2+ab+b^2}{b^2+bc+c^2}$$

مثال (4) پانچ اعداد مسلسل تناسب میں ہیں۔پہلا رکن 5 اور آخری رکن 80 ہے۔تو وہ اعداد معلوم کیجیے۔

حل : فرض کیجیے مسلسل تناسب والے پانچ اعداد بالترتیب

a، ak، ak^2، ak^3، ak^4 ہیں۔

یہاں $a=5$ اور $ak^4=80$

$\therefore 5\times k^4=80$

$\therefore k^4=16$

$\therefore k=2 \quad \ldots(\because 2^4=16)$

$ak=5\times 2=10 \qquad ak^2=5\times 4=20$

$ak^3=5\times 8=40 \qquad ak^4=5\times 16=80$

$\therefore$ وہ اعداد 5، 10، 40، 80 ہیں۔

مشقی سیٹ 4.5

(1) 12، 16 اور 21 ہر عدد میں کون سا عدد ملائیں کہ حاصل ہونے والے اعداد مسلسل تناسب میں ہو جائیں؟

(2) اگر $(23-x)$ اور $(19-x)$ کا $(28-x)$ درمیانی متناسب رکن ہو تب x کی قیمت معلوم کیجیے۔

(3) تین اعداد مسلسل تناسب میں ہیں۔ ان کا ہندسی وسط رکن 12 ہو اور باقی ماندہ دو اعداد کی جمع 26 ہے۔ تب وہ اعداد معلوم کیجیے۔

(4) اگر $(a + b + c)\,(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2$ ہو تب دکھایئے کہ a، b، c اعداد مسلسل تناسب میں ہیں۔

(5) اگر $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ اور $a, b, c > 0$ ہو تب ثابت کیجیے کہ

(i) $(a + b + c)\,(b - c) = ab - c^2$

(ii) $(a^2 + b^2)\,(b^2 + c^2) = (ab + bc)^2$

(iii) $\frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{a+c}{b}$

(6) $\frac{x+y}{x-y}$ اور $\frac{x^2-y^2}{x^2y^2}$ کا ہندسی وسط رکن معلوم کیجیے۔

عملی کام :

جغرافیہ کی کتاب میں بھارت کا سیاسی نقشہ دیکھیے۔ اس میں دیے ہوئے فاصلہ کے پیمانہ پر غور کیجیے۔ اس کی مدد سے مختلف شہروں کے درمیان مستقیم خطی فاصلہ معلوم کیجیے۔

مثلاً : (i) نئی دہلی سے بنگلور (ii) ممبئی سے کولکاتہ (iii) جے پور سے بھونیشور

مجموعہ سوالات 4

(1) درج ذیل سوالوں کے لیے متبادل جواب سے صحیح متبادل جواب منتخب کیجیے۔

(i) اگر $6 : 5 = y : 20$ ہو تب y کی قیمت درج ذیل میں سے کون سی ہے؟

(A) 15 (B) 24 (C) 18 (D) 22.5

(ii) 1 ملی لٹر کی 1 سینٹی میٹر سے نسبت ذیل میں سے کون سی ہے؟

(A) 1 : 100 (B) 10 : 1 (C) 1 : 10 (D) 100 : 1

(iii) جتن، نیتن اور محسن کی عمریں بالترتیب 16، 24 اور 36 سال ہیں تو بتایئے نیتن کی عمر، محسن کی عمر سے کون سی نسبت ہے؟

(A) 3 : 2 (B) 2 : 3 (C) 4 : 3 (D) 3 : 4

(iv) شبھم اور انیل کے درمیان 5 : 3 کی نسبت میں 24 کیلے تقسیم کیے، تو بتائیے شبھم کو کتنے کیلے ملے؟

(A) 8 (B) 15 (C) 12 (D) 9

(v) 4 اور 25 کا ہندسی وسط رکن درج ذیل میں سے کون سا ہے؟

(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12

(2) درج ذیل دیئے ہوئے اعداد کی جوڑیوں میں پہلے عدد کی دوسرے عدد سے نسبت مختصر ترین صورت میں لکھیے۔

(i) 21 ,48 (ii) 36, 90 (iii) 65, 117 (iv) 138, 161 (v) 114, 133

(3) درج ذیل نسبتوں کو مختصر ترین صورت میں لکھیے۔

(i) دائرہ کے نصف قطر اور قطر کے درمیان نسبت

(ii) مستطیل کی لمبائی 4 سم اور چوڑائی 3 سم ہو تو مستطیل کے وتر کی اس کی لمبائی سے نسبت

(iii) مربع کا ضلع 4 سم ہو تب مربع کا احاطہ کی اس کے رقبہ سے نسبت

(4) بتائیے کہ ذیل کے اعداد مسلسل تناسب میں ہیں یا نہیں؟

(i) 2 , 4, 8 (ii) 1, 2, 3 (iii) 9, 12, 16 (iv) 3, 5, 8

(5) a، b، c یہ تینوں اعداد مسلسل تناسب میں ہیں۔ اگر $a = 3$ اور $c = 27$ ہو تب ؟ $b =$ کتنا

(6) ذیل کی نسبتوں کی فی صدی میں تحویل کیجیے۔

(i) 37 : 500 (ii) $\frac{5}{8}$ (iii) $\frac{22}{30}$ (iv) $\frac{5}{16}$ (v) $\frac{144}{1200}$

(7) پہلی مقدار کی دوسری مقدار سے نسبت مختصر ترین صورت میں لکھیے۔

(i) 1024MB, 1.2GB ... [(1024 MB = 1 GB)]

(ii) 17 روپے , 25 روپے 60 پیسے (iii) 5 درجن , 120 عدد

(iv) 4 مربع میٹر , 800 مربع سم (v) 1.5 کلوگرام , 2500 گرام

(8) اگر $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ ہو تب ذیل کی عبارتوں کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $\frac{4a+3b}{3b}$ (ii) $\frac{5a^2+2b^2}{5a^2-2b^2}$

(iii) $\frac{a^3+b^3}{b^3}$ (iv) $\frac{7b-4a}{7b+4a}$

(9) a، b، c، d تناسب میں ہو تو ثابت کیجیے کہ

(i) $\frac{11a^2+9ac}{11b^2+9bd} = \frac{a^2+3ac}{b^2+3bd}$

(ii*) $\sqrt{\frac{a^2+5c^2}{b^2+5d^2}} = \frac{a}{b}$ (iii) $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2} = \frac{c^2+cd+d^2}{c^2-cd+d^2}$

(10) a، b، c مسلسل تناسب میں ہو تو ثابت کیجیے۔

(i) $\dfrac{a}{a+2b}=\dfrac{a-2b}{a-4c}$ (ii) $\dfrac{b}{b+c}=\dfrac{a-b}{a-c}$

(11) حل کیجیے : $\dfrac{12x^2+18x+42}{18x^2+12x+58}=\dfrac{2x+3}{3x+2}$

(12) اگر $\dfrac{x+3z}{2y-3x}=\dfrac{z-y}{z-x}=\dfrac{2x-3y}{3z+y}$ ہو تو ثابت کیجیے کہ ہر نسبت $\dfrac{x}{y}$ کے مساوی ہے۔

(13) اگر $\dfrac{ax+by}{a^2+b^2}=\dfrac{cz+ax}{c^2+a^2}=\dfrac{by+cz}{b^2+c^2}$ ہو تو ثابت کیجیے کہ $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$

5 Linear Equations in Two Variables دو متغیری خطی مساواتیں

آیئے، سیکھیں

- دو متغیری خطی مساواتیں
- ہمزاد مساواتیں حل کرنا
- ہمزاد مساواتیں
- ہمزاد مساواتوں پر مبنی عبارتی مثالیں

آیئے ذرا یاد کریں

مثال : درج ذیل مساواتیں حل کیجیے۔

(1) $m+3=5$ $\therefore\ m=\square$

(2) $3y+8=22$ $\therefore\ y=\square$

(3) $\frac{x}{3}=2$ $\therefore\ x=\square$

(4) $2p=p+\frac{4}{9}$ $\therefore\ p=\square$

(5) کس عدد میں 5 جمع کرنے پر عدد 14 حاصل ہوگا؟

$\therefore\ \square+5=14$

$\therefore\ x+5=14$

$\therefore\ x=\square$

(6) 8 میں سے کتنے تفریق کرنے پر باقی 2 بچیں گے؟

$\therefore\ 8-\square=2$

$\therefore\ 8-y=2$

$\therefore\ y=\square$

اوپر کی ہر مساوات میں متغیر کی قوت 1 ہے۔ان مساواتوں کو ایک متغیری خطی مساواتیں کہتے ہیں۔

آیئے سمجھ لیں

دو متغیری خطی مساواتیں (Linear Equations in Two Variables)

جن دو اعداد کا مجموعہ 14 ہے ایسے اعداد معلوم کیجیے۔

اعداد کے لیے x اور y متغیر کا استعمال کرکے یہ مثال مساوات کی شکل میں $x+y=14$ اس طرح ہوجائے گی۔

یہ دو متغیری مساوات ہے۔ یہاں x اور y ان دونوں متغیروں کی بے شمار قیمتیں ہم معلوم کرسکتے ہیں۔

جیسے،

$9+5=14$	$7+7=14$	$8+6=14$	$4+10=14$
$(-1)+15=14$	$15+(-1)=14$	$2.6+11.4=14$	$0+14=14$
$100+(-86)=14$	$(-100)+(114)=14$	$\square+\square=14$	$\square+\square=14$

یعنی اوپر کی مثال کے $(x=8, y=6)$ ، $(x=7, y=7)$ ، $(x=9, y=5)$ وغیرہ اس طرح بے شمار حل ملتے ہیں۔

$y = 5$ ،$x = 9$ اس حل کو (9,5) اس طرح ترتیب سے قوس میں لکھنے کا رواج ہے۔اس جوڑی میں پہلا عدد x کی قیمت دوسرا عدد y کی قیمت ہوتی ہے۔

$x + y = 14$ اس مساوات کو متعین کرنے والے (9,5)، (7,7)، (8,6)، (4,10)، (10,4)، (–1,15)، (2.6,11.4) .... ایسی لامحدود مرتب جوڑیاں یعنی لامحدود حل ہیں۔

اب دوسری مثال دیکھیں۔

ایسے دو اعداد تلاش کیجیے جن کا فرق 2 ہے۔

بڑا عدد کے لیے x اور چھوٹا عدد کے لیے y فرض کرنے پر $x - y = 2$ یہ مساوات حاصل ہوگی۔ x اور y قیمتوں کے لیے ذیل کے مطابق بے شمار مساوات حاصل ہوں گے۔

(6) 8 میں سے کتنے تفریق کرنے پر باقی 2 بچیں گے؟

$10 - 8 = 2$ ، $9 - 7 = 2$ ، $8 - 6 = 2$ ، $(-3) - (-5) = 2$ ، $5.3 - 3.3 = 2$ ،

$15 - 13 = 2$ ، $100 - 98 = 2$ ، □ – □ = 2 ، □ – □ = 2

یہاں $x = 10$ اور $y = 8$ ان قیمتوں کو لینے پر مرتب جوڑی (10,8) اس مساوات کو مطمئن کرتی ہے۔یعنی یہ جوڑی اس مساوات کا حل ہے۔

مرتب جوڑی (10,8) کو (8,10) نہیں لکھ سکتے۔کیونکہ (8,10) کا مطلب $x = 8$، $y = 10$ ہوتا ہے۔ان قیمتوں سے $x - y = 2$ یہ مساوات مطمئن نہیں ہوتی۔اس سے ظاہر ہوتا ہے جوڑی میں اعداد کی ترتیب اہم ہوتی ہے۔اسے دھیان میں رکھیں۔

اب ہم $x - y = 2$ اس مساوات کے حل مرتب جوڑیوں کی شکل میں لکھیں گے۔

(8, 6), (5.2, 3.2), (0, –2), (–2, –4), (7, 5) وغیرہ بے شمار حل ہیں۔

$4m - 3n = 2$ اس مساوات کا حل معلوم کیجیے۔

آپ بھی اس قسم کی مختلف تین مساوات بنائیے اور حل معلوم کیجیے۔

اب پہلی دو مساواتیں دیکھیے۔

$$x + y = 14 \quad \ldots \text{I}$$

$$x - y = 2 \quad \ldots \text{II}$$

مساوات I کے حل : (9, 5), (7, 7), (8, 6)

مساوات II کے حل : (7, 5), (–2, –4), (0, –2), (5.2, 3.2), (8, 6)

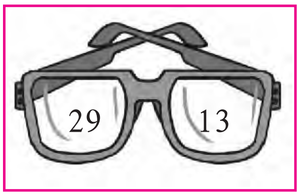
(8,6) یہ جوڑی دونوں مساوات کے حل کے جوڑیوں میں مشترک ہے۔یہ جوڑی دونوں مساوات کو مطمئن کرتی ہے۔اس لیے یہ دونوں مساوات کا مشترک حل ہے۔

اسے دھیان میں رکھیں

جب دو متغیروں کی دو خطی مساواتوں کا بیک وقت خیال کرتے ہیں تب ان مساواتوں کو ہمزاد مساواتیں (Simultaneous equations) کہتے ہیں۔

عملی کام :

نیچے دیے ہوئے عینک کے شیشوں پر ایسے اعداد لکھیے کہ



(i) جن کا مجموعہ 42 اور فرق 16 ہے۔

(ii) جن کا مجموعہ 37 اور فرق 11 ہے۔

(iii) جن کا مجموعہ 54 اور فرق 20 ہے۔

(iv) جن کا مجموعہ .... اور فرق .... ہے۔

آیئے ذرا یاد کریں

$x + y = 5$ اور $2x + 2y = 10$ یہ دو متغیروں کی دو مساوات ہیں۔

مساوات $x + y = 5$ کے مختلف پانچ حل تلاش کیجیے۔ وہی حل مساوات $2x + 2y = 10$ کو مطمئن کرتے ہیں یا نہیں تصدیق کیجیے۔

ان دونوں مساواتوں پر غور کیجیے۔

دو متغیروں کے دو مساواتوں کے حل مساوی رہنے کے لیے ضروری شرط معلوم کیجیے۔

آیئے سمجھ لیں

متغیر کا اخراج کرکے ہمزاد مساواتیں حل کرنے کا طریقہ (Elimination Method)

ہمزاد مساواتیں $x + y = 14$ اور $x - y = 2$ متغیروں کو قیمت دے کر ہم نے حل کیا۔ لیکن ہر وقت یہ طریقہ مناسب نہیں ہوتا۔ مثلاً $2x + 3y = -4$ اور $x - 5y = 11$ ان مساواتوں میں x اور y کو مختلف قیمتیں دے کر حل کرنے کی کوشش کیجیے۔

آپ سمجھ گئے ہوں گے کہ اس طریقے سے مساواتیں حل کرنا آسان نہیں ہے۔

اس لیے ہمزاد مساواتیں حل کرنے کے لیے دوسرا طریقہ استعمال کیا جاتا ہے۔ اس طریقہ میں دو متغیروں میں سے ایک متغیر کا اخراج کرکے ایک متغیر کی خطی مساوات حاصل کی جاتی ہے۔ اس بناء پر اس متغیر کی قیمت حاصل کی جاتی ہے۔ اس قیمت کو دی ہوئی کسی بھی مساوات میں رکھنے پر دوسرے متغیر کی قیمت حاصل ہوتی ہے۔

اس طریقے کو سمجھنے کے لیے آگے کی مثال کا مطالعہ کیجیے۔

مثال **(1)** : حل کیجیے۔

$x + y = 14$ اور $x - y = 2$

حل : دونوں مساواتوں کی جمع کر کے ایک متغیری مساوات حاصل کریں۔

$$
\begin{array}{rrcll}
 & x + y & = & 14 & \ldots \text{I} \\
+ & x - y & = & 2 & \ldots \text{II} \\
\hline
 & 2x + 0 & = & 16 & \\
\therefore & 2x & = & 16 & \\
\therefore & x & = & 8 &
\end{array}
$$

$x = 8$ اس قیمت کو مساوات (I) میں رکھنے پر،

$$x + y = 14$$
$$\therefore\ 8 + y = 14$$
$$\therefore\ y = 6$$

یہاں (8, 6) یہ پہلی مساوات کا حل ہے۔یہی حل دوسری مساوات کا بھی ہے۔اس کی تصدیق کریں۔

(تصدیق ہوا) ... $x - y = 8 - 6 = 2$

(8, 6) یہ دی ہوئی دونوں مساواتوں کا مشترک حل ہے۔

یعنی $x + y = 14$ اور $x - y = 2$ ان ہمزاد مساواتوں کا حل (8, 6) ہے۔

مثال **(2)** : ماں اور بیٹے کی عمروں کا مجموعہ 45 سال ہے۔ماں کی عمر کے دگنا میں سے بیٹے کی عمر تفریق کرنے پر جواب 54 آتا ہے۔تو دونوں کی عمریں معلوم کیجیے۔دی ہوئی معلومات متغیر کا استعمال کر کے لکھیں گے تو مساوات حل کرنا آسان ہو جاتا ہے۔

حل : فرض کیجیے ماں کی موجودہ عمر x سال اور بیٹے کی موجودہ عمر y سال ہے۔

پہلی شرط کے مطابق، $x + y = 45 \quad \ldots \text{I}$

دوسری شرط کے مطابق، $2x - y = 54 \quad \ldots \text{II}$

(مساوات (I) اور (II) کا مجموعہ کرنے پر) ... $3x + 0 = 99$

$$\therefore\ 3x = 99$$
$$\therefore\ x = 33$$

($x = 33$ اس قیمت کو مساوات (I) میں رکھنے پر) ... $33 + y = 45$

$$\therefore\ y = 45 - 33$$
$$\therefore\ y = 12$$

$x = 33$ اور $y = 12$ یہ حل مساوات نمبر (II) کو مطمئن کرتے ہیں۔اس بات کی تصدیق کیجیے۔

ماں کی موجودہ عمر 33 سال اور بیٹے کی موجودہ عمر 12 سال ہے۔

$ax + by + c = 0$ اس مساوات میں a, b, c حقیقی اعداد ہیں۔ اور a اور b بیک وقت 0 (صفر) نہ ہوں تو یہ مساوات دو متغیری خطی مساوات کی عام صورت ہوتی ہے۔ اس مساوات میں دونوں متغیروں کی قوت **1** ہے۔ یہ ایک خطی مساوات ہے۔

مثال **(1)** درج ذیل ہمزاد مساواتیں حل کیجیے۔

$$3x + y = 5 \quad \ldots \text{(I)}$$
$$2x + 3y = 1 \quad \ldots \text{(II)}$$

یہاں پر کسی ایک متغیر کو خارج کرنے کے لیے دونوں مساواتوں میں کسی بھی متغیر کا ضریب مساوی یا متضاد عدد نہیں ہے۔ اسے مساوی کرنے کے لیے مساوات (I) کے طرفین کو 3 سے ضرب کرنے پر،

$$\therefore \quad 3x \times 3 + 3 \times y = 5 \times 3$$
$$\therefore \quad 9x + 3y = 15 \quad \ldots \text{(III)}$$
$$2x + 3y = 1 \quad \ldots \text{(II)}$$

اب مساوات (II) کو مساوات (III) سے تفریق کرنے پر،

$$\begin{array}{rcl} 9x + 3y &=& 15 \\ \underset{-}{+}\, 2x \underset{-}{+}\, 3y &=& \underset{-}{}\,1 \\ \hline 7x &=& 14 \\ x &=& 2 \end{array}$$

$x = 2$ یہ قیمت کسی بھی مساوات میں رکھنے پر،

$$2x + 3y = 1$$
$$\therefore \quad 2 \times 2 + 3y = 1$$
$$\therefore \quad 4 + 3y = 1$$
$$\therefore \quad 3y = -3$$
$$\therefore \quad y = -1$$

یہاں حل $(2, -1)$ دوسری مساوات کو بھی مطمئن کرتا ہے۔ تصدیق کیجیے۔

مثال **(2)** درج ذیل ہمزاد مساواتیں حل کیجیے۔

$$3x - 4y - 15 = 0 \quad \ldots \text{(I)}$$
$$y + x + 2 = 0 \quad \ldots \text{(II)}$$

دونوں مساواتوں کے مستقل عدد دائیں جانب لکھنے پر،

$$3x - 4y = 15 \quad \ldots \text{(I)}$$
$$x + y = -2 \quad \ldots \text{(II)}$$

متغیر y کا اخراج کرنے کے لیے مساوات (II) کو 4 سے ضرب کرنے پر اور مساوات (I) میں ملانے پر،

$$\begin{array}{rrcl} & 3x - 4y &=& 15 \\ + & 4x + 4y &=& -8 \\ \hline & 7x &=& 7 \\ & x &=& 1 \end{array}$$

$x = 1$ مساوات (II) میں رکھنے پر،

$$x + y = -2$$
$$\therefore \quad 1 + y = -2$$
$$\therefore \quad y = -2 - 1$$
$$\therefore \quad y = -3$$

حل $(1, -3)$ مساوات (I) کو بھی مطمئن کرتا ہے تصدیق کیجیے۔

غور کیجیے

$3x - 4y - 15 = 0$ اور $y + x + 2 = 0$

کیا ان مساواتوں کو x متغیر کا اخراج کرکے حل کر سکتے ہیں؟

کیا اس کا حل وہی ہوگا؟

آیئے سمجھ لیں

ایک متغیر کی قیمت دوسرے متغیر کی صورت میں رکھ کر متغیر کا اخراج کرنا یا استبدال کے ذریعے اخراج کا طریقہ (Substitution Method)

متغیر کا اخراج کرنے کا ایک اور دوسرا طریقہ ہے۔ مساوات کے ایک متغیر کی قیمت دوسرے متغیر کی صورت میں معلوم کر اسے دوسری مساوات میں رکھ کر پہلے متغیر کا اخراج کر سکتے ہیں۔ اس طریقہ کو ذیل کی مثالوں کے ذریعے سمجھ لیں۔

مثال (1) حل کیجیے۔

$$8x + 3y = 11 \;;\; 3x - y = 2$$

حل :

$$8x + 3y = 11 \quad \ldots (I)$$

$$3x - y = 2 \quad \ldots (II)$$

مساوات (II) میں y کی قیمت x متغیر میں لکھنا آسان ہوگا۔

$$3x - y = 2$$

$$3x - 2 = y$$

اب $y = 3x - 2$ یہ قیمت مساوات (I) میں رکھنے پر،

$$8x + 3y = 11$$

$$\therefore\ 8x + 3(3x-2) = 11$$

$$\therefore\ 8x + 9x - 6 = 11$$

$$\therefore\ 17x - 6 = 11$$

$$\therefore\ 17x = 11 + 6 = 17$$

$$\therefore\ x = 1$$

x کی قیمت مساوات $y = 3x - 2$ میں رکھنے پر،

$$\therefore\ y = 3 \times 1 - 2$$

$$\therefore\ y = 1$$

$\therefore$ $x = 1$ اور $y = 1$

$\therefore$ $(1,1)$ مساواتوں کا حل ہے۔

مثال (2) حل کیجیے۔

$$3x - 4y = 16 \;;\; 2x - 3y = 10$$

حل :

$$3x - 4y = 16 \quad \ldots (I)$$

$$2x - 3y = 10 \quad \ldots (II)$$

مساوات (I) میں x اس متغیر کی قیمت y کی صورت میں لکھیں گے۔

$$3x - 4y = 16$$

$$3x = 16 + 4y$$

$$x = \frac{16 + 4y}{3}$$

x کی قیمت کو مساوات (II) میں رکھنے پر،

$$2x - 3y = 10$$

$$\therefore\ 2\left(\frac{16+4y}{3}\right) - 3y = 10$$

$$\therefore\ \frac{32 + 8y}{3} - 3y = 10$$

$$\therefore\ \frac{32 + 8y - 9y}{3} = 10$$

$$\therefore\ 32 + 8y - 9y = 30$$

$$\therefore\ 32 - y = 30 \;,\; \therefore\ y = 2$$

اب $y = 2$ مساوات (I) میں رکھنے پر،

$$3x - 4y = 16$$

$$\therefore\ 3x - 4 \times 2 = 16$$

$$\therefore\ 3x - 8 = 16$$

$$\therefore\ 3x = 16 + 8$$

$$\therefore\ 3x = 24$$

$$\therefore\ x = 8$$

$\therefore$ $x = 8$ اور $y = 2$

$\therefore$ $(8, 2)$ مساواتوں کا حل ہے۔

مشقی سیٹ 5.1

(1) متغیر x اور y کا استعمال کرکے 5 دو متغیری خطی مساواتیں لکھیے۔ (2) $x + y = 7$ اس مساوات کے 5 حل لکھیے۔

(3) مندرجہ ذیل ہمزاد مساواتیں حل کیجیے۔

(i) $x + y = 4$; $2x - 5y = 1$ (ii) $2x + y = 5$; $3x - y = 5$

(iii) $3x - 5y = 16$; $x - 3y = 8$ (iv) $2y - x = 0$; $10x + 15y = 105$

(v) $2x + 3y + 4 = 0$; $x - 5y = 11$ (vi) $2x - 7y = 7$; $3x + y = 22$

آیئے سمجھ لیں

ہمزاد مساواتوں پر عبارتی مثالیں

عبارتی مثالیں حل کرتے وقت دی ہوئی معلومات سے مساواتیں بنانا ایک بہت اہم مرحلہ ہوتا ہے۔ مساواتوں کا حل معلوم کرنے کا نظام ذیل کے مراحل سے دکھایا گیا ہے۔

مراحل	مثال
عبارتی مثال غور سے پڑھ کر سمجھنے کی کوشش کریں۔	دو اعداد کا مجموعہ 36 ہے، ایک عدد کے 8 گنا میں سے 9 تفریق کریں تو دوسرا عدد حاصل ہوتا ہے۔
↓	↓
مثال میں دی ہوئی معلومات کے مطابق الجبری عبارت بنانے کے لیے متغیروں کا استعمال کیجیے۔	فرض کیجیے۔ پہلا عدد $= x$ دوسرا عدد $= y$
↓	↓
متغیروں کا مناسب استعمال کرکے فقرے ریاضیاتی صورت میں لکھیے۔	$\therefore x + y = 36$ ... ($\because$ اعداد کا مجموعہ 36 ہے۔) پہلے عدد کا 8 گنا $= 8x$ پہلے عدد کا 8 گنا $- 9 = 8x - 9$ $\therefore$ دوسرا عدد $= y = 8x - 9$
↓	↓
مناسب طریقے کا استعمال کرکے مساواتیں حل کیجیے۔	$x + y = 36$ $\therefore 8x - y = 9$ $\therefore 9x = 45$ $\therefore x = 5$ $\therefore 5 + y = 36$ $\therefore y = 36 - 5$ $\therefore y = 31$
↓	↓
حل معلوم کیجیے۔	$x = 5$, $y = 31$
↓	↓
حاصل ہوئے حل کو مساواتوں میں لکھ کر تصدیق کیجیے۔	$31 + 5 = 36$ ... (I) $31 = 8 \times 5 - 9$ ... (II)
↓	↓
جواب لکھیے	اس لیے وہ اعداد 5 اور 31 ہیں۔

عبارتی مثالیں

اب ہم مختلف قسم کے عبارتی مثالوں پر غور کریں گے۔

(1) عمر سے متعلق مثالیں۔ (2) اعداد سے متعلق مثالیں۔

(3) کسروں سے متعلق مثالیں۔ (4) معاشی لین دین سے متعلق مثالیں۔

(5) ہندسی اشکال کی خصوصیات پر منحصر مثالیں۔ (6) رفتار، فاصلہ اور وقت پر منحصر مثالیں۔

مثال (1) دو اعداد کا مجموعہ 103 ہے۔ اگر بڑے عدد کو چھوٹے عدد سے تقسیم کیا جائے تو خارج قسمت 2 اور باقی 19 بچتا ہے۔ تو وہ اعداد معلوم کیجیے۔

حل : مرحلہ 1 : عبارتی مثال سمجھنے کی کوشش کیجیے۔

مرحلہ 2 : اعداد معلوم کرنے کے لیے متغیروں کا استعمال کیجیے۔

اُسی طرح اس اصول (باقی + خارج قسمت × مقسوم علیہ = مقسوم) کو دھیان میں رکھیں۔

فرض کیجیے بڑا عدد x اور چھوٹا عدد y

مرحلہ 3 : دی ہوئی معلومات : 103 = اعداد کا مجموعہ

فرض کیجیے بڑا عدد x اور چھوٹا عدد y

(ایک مساوات حاصل ہوگی) ... $\therefore\ x + y = 103$

بڑے عدد کو چھوٹے عدد سے تقسیم کرنے پر خارج قسمت 2 اور باقی 19 بچتا ہے۔

(باقی + خارج قسمت × مقسوم علیہ = مقسوم) $\therefore\ x = 2 \times y + 19$

(اس طرح دوسری مساوات حاصل ہوتی ہے۔) ... $\therefore\ x - 2y = 19$

مرحلہ 4 : اب حاصل ہوئی مساواتوں کا حل معلوم کریں گے۔

$$x + y = 103 \quad \ldots(\text{I})$$
$$x - 2y = 19 \quad \ldots(\text{II})$$

مساوات (I) میں سے مساوات (II) تفریق کرنے پر،

$$\begin{array}{rcl} x + y &=& 103 \\ x - 2y &=& 19 \\ - \quad + & & - \\ \hline 0 + 3y &=& 84 \\ \therefore\quad y &=& 28 \end{array}$$

مرحلہ 5 : مساوات $x + y = 103$ میں y کی قیمت رکھنے پر،

$$\therefore\ x + 28 = 103$$
$$\therefore\ x = 103 - 28$$
$$\therefore\ x = 75$$

مرحلہ 6 : دیے ہوئے اعداد 75 اور 28 ہیں۔

مثال (2) سلیل کی عمر، سنگرام کی عمر کے نصف سے 23 سال زیادہ ہے۔ پانچ سال پہلے ان کی عمروں کا مجموعہ 55 سال تھا تو ان کی موجودہ عمریں دریافت کیجیے۔

حل : فرض کیجیے سلیل کی موجودہ عمر x سال اور سنگرام کی موجودہ عمر y سال ہے۔

سلیل کی عمر، سنگرام کی عمر کے نصف سے 23 سال زیادہ ہے۔ اس لیے $x = \frac{y}{2} + \square$

پانچ سال پہلے سلیل کی عمر $= (x - 5)$ سال اور سنگرام کی عمر $= (y - 5)$ سال

پانچ سال پہلے ان کی عمروں کا مجموعہ $=$ 55 سال

$$\square + \square = 55$$

مساواتیں حل کر کے حل معلوم کرنا۔

$2x = y + 46 \quad , \quad \therefore \; 2x - y = 46 \qquad \ldots (I)$

$(x - 5) + (y - 5) = 55$

$x + y = 65 \qquad \ldots (II)$

مساوات (I) اور (II) کی جمع کرنے پر،

$$2x - y = 46$$
$$+ \; x + y = 65$$
$$\therefore \; 3x = 111$$
$$\therefore \; x = 37$$

مساوات (II) میں $x = 37$ رکھنے پر،

$$x + y = 65$$
$$\therefore \; 37 + y = 65$$
$$\therefore \; y = 65 - 37$$
$$\therefore \; y = 28$$

سلیل کی موجودہ عمر 37 سال اور سنگرام کی موجودہ عمر 28 سال ہے۔

مثال (3) ایک دو ہندسی عدد اس کے ہندسوں کے مجموعے کا چار گنا ہے۔ اس کے ہندسوں کا مقام تبدیل کرنے پر حاصل ہونے والا عدد، اصل عدد کے دگنا سے 9 کم ہے وہ عدد معلوم کیجیے۔

حل : فرض کیجیے اصل عدد کے اکائی کا ہندسہ x اور دہائی کا ہندسہ y ہے۔

	دہائی کے مقام کا ہندسہ	اکائی کے مقام کا ہندسہ	عدد	ہندسوں کا مجموعہ
اصل عدد کے لیے	y	x	$10y + x$	$y + x$
ہندسوں کا مقام تبدیل کرنے پر حاصل ہونے والے عدد کے لیے	x	y	$10x + y$	$x + y$

پہلی شرط کے مطابق،

$10y + x = 4(y + x)$

$\therefore 10y + x = 4y + 4x$

$\therefore x - 4x + 10y - 4y = 0$

$\therefore -3x + 6y = 0 \; , \quad \therefore \; -3x = -6y \; , \quad \therefore \; x = 2y \qquad \ldots (I)$

دوسری شرط کے مطابق،

$$10x + y = 2(10y+x)-9$$
$$\therefore \quad 10x+y = 20y + 2x-9$$
$$\therefore \quad 10x-2x+y-20y = -9$$
$$\therefore \quad 8x - 19y = -9 \quad \ldots(II)$$
$$x = 2y \quad \ldots(I)$$

$x = 2y$ کو مساوات (II) میں رکھنے پر،

$$16y - 19y = -9 \quad \ldots(I)$$
$$\therefore \quad -3y = -9$$
$$\therefore \quad y = 3$$

$y = 3$ مساوات (I) میں رکھنے پر،

$$x - 2y = 0$$
$$x - 2 \times 3 = 0 \ , \ \therefore \ x - 6 = 0 \ , \ \therefore \ x = 6$$

$\therefore$ دوہندسی اصل عدد $= 10y + x = 10 \times 3 + 6$

$= 36$

مثال **(4)** ایک گاؤں کی آبادی گذشتہ سال 50000 تھی۔ایک سال میں مردوں کی تعداد میں 5% کا اضافہ اور عورتوں کی تعداد میں 3% کا اضافہ ہوا۔ اس لیے اس سال آبادی 52020 ہوگئی۔تو گذشتہ سال اس گاؤں میں مردوں اور عورتوں کی تعداد کتنی تھی؟

حل : فرض کیجیے گذشتہ سال مردوں کی تعداد x اور عورتوں کی تعداد y تھی۔

پہلی شرط کے مطابق،

$$\square + \square = 50000 \quad \ldots(I)$$

(مردوں کی تعداد میں 5% کا اضافہ کرنے پر) ... مردوں کی تعداد $= \dfrac{\square}{\square} \times x$

(عورتوں کی تعداد میں 3% کا اضافہ کرنے پر) ... عورتوں کی تعداد $= \dfrac{\square}{\square} \times y$

دوسری شرط کے مطابق،

$$\frac{\square}{\square}x + \frac{\square}{\square}y = 52020$$
$$\square x + \square y = 5202000 \quad \ldots(II)$$

مساوات (I) کو 103 سے ضرب کرنے پر

$$\square x + \square y = 5150000 \quad \ldots(III)$$

مساوات (II) میں سے مساوات (III) تفریق کرنے پر

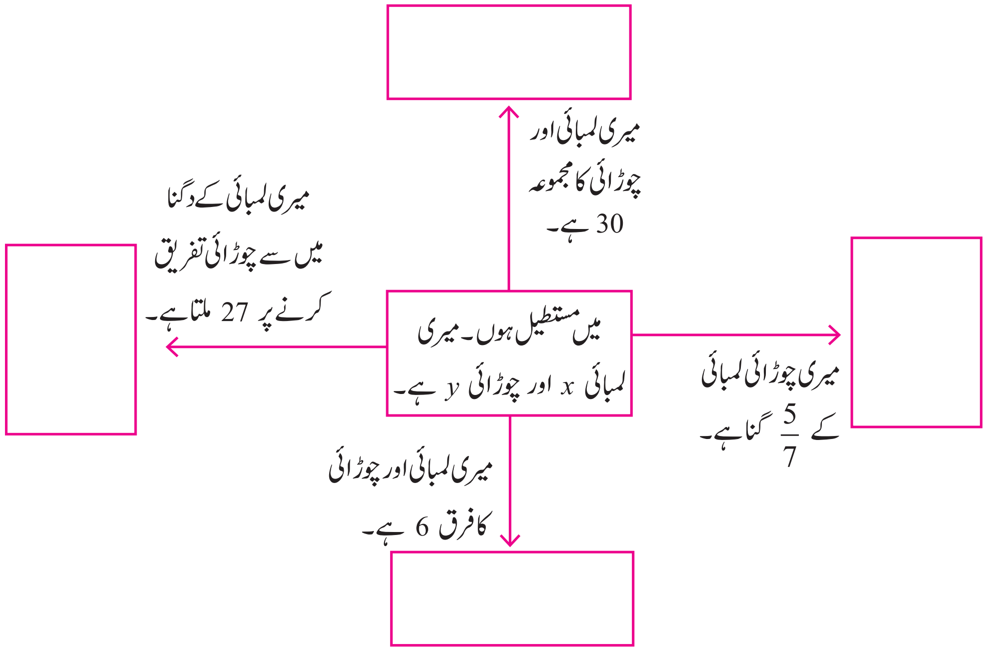
$$2x = 5202000 - 5150000$$
$$2x = 52000$$

$\therefore$ مردوں کی تعداد $= x = \square$ اور عورتوں کی تعداد $= y = \square$

عملی کام :

درج ذیل شکل میں کچھ ہدایات دی ہوئی ہیں۔ان سے حاصل ہونے والی مساوات کو تیر کے نشان کے سامنے خالی چوکون میں سے کوئی دو مساواتیں لے کر ان کا حل معلوم کیجیے اور اس کی تصدیق کیجیے۔

ان میں سے کسی دو مساوات کی ایک جوڑی جیسی کتنی جوڑیاں ملتی ہیں؟ ان کے حل پر تبادلہ خیال کیجیے۔



مشقی سیٹ 5.2

(1) ایک پرس میں کچھ 5 روپے کے اور کچھ 10 روپے کے نوٹ ہیں۔نوٹوں کی کل قیمت 350 روپے ہے۔ 5 روپے کے نوٹوں کی تعداد، 10 روپے کے نوٹ کی تعداد کے دگنا سے 10 کم ہے تو 5 روپے اور 10 روپے کے نوٹ کتنے ہیں؟

(2) ایک کسر کا نسب نما، شمارکنندہ کے دگنا سے 1 کم ہے۔شمارکنندہ اور نسب نما میں 1 جمع کرنے پر شمارکنندہ کی نسب نما سے 3 : 5 نسبت ہوجاتی ہے تو وہ کسر معلوم کیجیے۔

(3) سائرہ اور ساجدہ کی عمروں کا مجموعہ 34 سال ہے۔سائرہ، ساجدہ سے 6 سال بڑی ہے تو ان کی عمریں معلوم کیجیے۔

(4) ایک چڑیا گھر میں شیر اور مور کی کل تعداد 50 ہے۔ان کے پیروں کا مجموعہ 140 ہے۔تو چڑیا گھر میں شیر اور مور کی تعداد کتنی ہے؟ معلوم کیجیے۔

(5) سنجے کو ملازمت میں کچھ ماہانہ تنخواہ ملتی ہے۔ہر سال اس کی تنخواہ میں متعین اضافہ ہوتا ہے۔اگر چار سال بعد اس کی ماہانہ تنخواہ 4500 روپے اور 10 سال بعد ماہانہ تنخواہ 5400 روپے ہوجائے گی تو اس کی ابتدائی تنخواہ اور سالانہ اضافہ کی رقم معلوم کیجیے۔

(6) 3 کرسیوں اور 2 میز کی قیمت 4500 روپے ہے۔ 5 کرسیوں اور 3 میز کی قیمت 7000 روپے ہے تو 2 کرسیوں اور 2 میز کی کل قیمت معلوم کیجیے۔

(7) ایک دوہندسی عدد کے ہندسوں کا مجموعہ 9 ہے۔اگر ہندسوں کا مقام تبدیل کیا جائے تو حاصل ہونے والا عدد، اصل عدد سے 27 زیادہ ہوجاتا ہے تو وہ دوہندسی عدد معلوم کیجیے۔

*(8) $\triangle ABC$ میں، $\angle A$ کی پیمائش $\angle B$ اور $\angle C$ کی پیمائشوں کے مجموعے کے برابر ہے۔اسی طرح $\angle B$ اور $\angle C$ کی پیمائشوں کا تناسب 4 : 5 ہے تو مثلث کے زاویوں کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔

*(9) ایک 560 سم لمبی رسی کے دوٹکڑے اس طرح کرنا ہے کہ چھوٹے ٹکڑے کی لمبائی کے دگنا، بڑے ٹکڑے کی لمبائی کا $\frac{1}{3}$ گنا ہے تو بڑے ٹکڑے کی لمبائی معلوم کیجیے۔

(10) ایک مقابلہ جاتی امتحان میں 60 سوالات پوچھے گئے۔ہر سوال کے صحیح جواب کے لیے 2 نمبر ملتے ہیں اور غلط جواب پر 1 نمبر کم ہوجاتا ہے۔یشونت نے تمام 60 سوالات حل کیے تب اس کو 90 نمبر ملے تو بتایئے اس نے کتنے صحیح اور کتنے غلط جوابات لکھے تھے۔

مجموعہ سوالات 5

(1) درج ذیل میں سے مناسب متبادل چن کر لکھیے۔

(i) اگر $3x + 5y = 9$ اور $5x + 3y = 7$ ہو تو $x + y$ کی قیمت درج ذیل میں سے کون سی ہے؟

(A) 2 (B) 16 (C) 9 (D) 7

(ii) ایک مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی میں سے 5 تفریق کرنے پر اس کا احاطہ 26 ہوجاتا ہے۔اس معلومات کو ریاضیاتی طریقے سے کس طرح لکھیں گے؟

(A) $x - y = 8$ (B) $x + y = 8$ (C) $x + y = 23$ (D) $2x + y = 21$

(iii) ریحان، ندیم سے 5 سال چھوٹا ہے۔ان دونوں کی عمروں کا مجموعہ 25 ہے تو ریحان کی عمر کتنی ہوگی؟

(A) 20 (B) 15 (C) 10 (D) 5

(2) درج ذیل ہمزاد مساواتیں حل کیجیے۔

(i) $2x + y = 5$; $3x - y = 5$

(ii) $x - 2y = -1$; $2x - y = 7$

(iii) $x + y = 11$; $2x - 3y = 7$

(iv) $2x + y = -2$; $3x - y = 7$

(v) $2x - y = 5$; $3x + 2y = 11$

(vi) $x - 2y = -2$; $x + 2y = 10$

(3) متغیروں کے ضریب مساوی کر کے درج ذیل ہمزاد مساواتیں حل کیجیے۔

(i) $3x-4y=7$; $5x+2y=3$

(ii) $5x + 7y=17$; $3x-2y=4$

(iii) $x-2y= -10$; $3x-5y= -12$

(iv) $4x + y=34$; $x+4y= 16$

(4) مندرجہ ذیل ہمزاد مساواتیں حل کیجیے۔

(i) $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=4$; $\frac{x}{2}-\frac{y}{4}=1$

(ii) $\frac{x}{3}+5y=13$; $2x+\frac{y}{2}=19$

(iii) $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=13$; $\frac{5}{x}-\frac{4}{y}=-2$

*(5) ایک دوہندسی عدداس کے ہندسوں کے مجموعہ کے 4 گنا سے 3 زیادہ ہے۔اگراس عددمیں 18 جمع کیے جائیں تو وہ مجموعہ، اصل عدد کے ہندسوں کا مقام ادل بدل کرنے پر حاصل ہونے والے عدد ہوتا ہے۔وہ عدد معلوم کیجیے۔

(6) 8 کتابیں اور 5 قلم کی کل قیمت 420 روپے ہے۔ 5 کتابوں اور 8 قلم کی قیمت 321 روپے ہو تو ایک کتاب اور دو قلم کی قیمت معلوم کیجیے۔

*(7) دوافراد کی آمدنی کی نسبت 7 : 9 ہے اوران کے اخراجات کی نسبت 3 : 4 ہے۔ہرایک کی بچت 200 روپے ہو تو ہرایک کی ماہانہ آمدنی معلوم کیجیے۔

*(8) ایک مستطیل کی لمبائی 5 اکائی کم کی جائے اور چوڑائی 3 اکائی بڑھائی جائے تو اس کا رقبہ 9 مربع اکائی کم ہوجاتا ہے۔اگرلمبائی 3 اکائی کم اور چوڑائی 2 اکائی بڑھائی جائے تو اس کا رقبہ 67 مربع اکائی بڑھ جاتا ہے۔مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کیجیے۔

*(9) ایک راستہ پر مقام A اور B کے درمیان کا فاصلہ 70 کلومیٹر ہے۔ایک کار مقام A سے اور دوسری کار مقام B سے نکلتی ہے۔اگر وہ دونوں کار ایک ہی سمت میں نکلتی ہیں تو 7 گھنٹے میں آپس میں ملتی ہیں۔اور اگر مخالف سمت میں نکلتی ہیں تو 1 گھنٹہ میں آپس میں ملتی ہیں۔ان کی رفتار معلوم کیجیے۔

*(10) ایک دوہندسی عدد اوران کے ہندسوں کے مقام میں تبدیل کرنے پر حاصل ہونے والے عدد کا مجموعہ 99 ہے تو وہ عدد معلوم کیجیے۔

عملی کام :

کسر معلوم کیجیے۔

$\dfrac{x \text{ شمار کنندہ}}{y \text{ نسب نما}}$

کسر کے شمار کنندہ میں 8 کا اضافہ کیا جائے اور نسب نما کو دگنا کیا جائے تو حاصل ہونے والی کسر $\frac{1}{2}$ ہے۔

مساوات (II)

$x - y + 8 = 0$

کسر کے شمار کنندہ کو 3 سے ضرب اور نسب نما میں سے 3 تفریق کرنے پر حاصل ہونے والی کسر $\frac{18}{11}$ ہے۔

مساوات (I)

$11x - 6y + 18 = 0$

$\therefore$ دی ہوئی کسر = $\dfrac{\square}{\square}$

◈◈◈

6 معاشی (مالی) منصوبہ بندی (بجٹ) Economic Planning

آیئے، سیکھیں

- معاشی منصوبہ بندی کا تعارف
- سرمایہ کاری اور بچت
- تشخیص ٹیکس
- انکم ٹیکس۔تحسیب

B4U2OB

آیئے، بحث کریں

انگھا : کیا ہمیں کمپیوٹر خریدنا ہے؟

ماں : ہاں، خریدیں گے؟ لیکن آئندہ سال۔

انگھا : جی، لیکن اس سال کیوں نہیں؟

ماں : اری، اس کی قیمت کچھ کم تو نہیں ہے۔

انگھا : یعنی پیسے جمع کرنا ہوگا یہی نا؟

ماں : ہاں۔

اپنے اردگرد اس قسم کے کئی مکالمے سنائی دیتے ہیں۔

ہر فرد کو مختلف ضروریات کو پورا کرنے کے لیے پیسوں کی ضرورت ہوتی ہے۔اس لیے حال کی (موجودہ) بنیادی ضروریات کو پورا کر کے دیگر ضروریات کو مکمل کرنے کے لیے ہر کوئی پیسے جمع کرنے کی کوشش کرتا ہے۔اسی کو ہم 'بچت' کرنا کہتے ہیں۔یہ بچت محفوظ رہے اور اس میں اضافہ کرنے کے لیے ہم بطور امانت بینک میں رکھتے ہیں یا زمین، گھر جیسے جائیداد خریدتے ہیں۔اسی کو 'سرمایہ کاری' کرنا کہتے ہیں۔

ہر سرمایہ کار ضرورت کے مطابق ہی رقم خرچ کرتا ہے اور بقیہ رقم بچت کرتا ہے، اسی طرح بچت کی گئی رقم کو تدبّر کے ساتھ سرمایہ کاری میں لگاتا ہے۔اسی کو ''معاشی (مالی) منصوبہ بندی'' (Economic Planning) کہتے ہیں۔سرمایہ میں اضافہ اور حفاظت معاشی منصوبہ بندی کے اہم مقاصد ہیں۔

ہر کسی کے زندگی میں پیش آنے والے متوقع اور غیر متوقع واقعات کے لیے ضروری اقدام کے لیے معاشی منصوبہ بندی کا استعمال ہوتا ہے۔کچھ مثالیں ذیل میں دی ہوئی ہیں۔

متوقع واقعہ	غیر متوقع واقعہ
(1) بچوں کی تعلیم اور ان کے دیگر اخراجات	(1) قدرتی آفات
(2) پیشے کے لیے سرمایہ	(2) خاندان کے کسی فرد کی بیماری
(3) دو/ چار پہیہ والی سواری کی خریداری	(3) حادثہ کی وجہ سے نقصان ہونا
(4) گھر کی تعمیر کرنا یا گھر خریدنا	(4) اچانک فوت ہونا
(5) بڑھاپے کی ضروریات	

معاشی منصوبہ بندی کیوں ضروری ہے اس کا جواب اوپر کے واقعات یا دیگر وجوہات سے ملتا ہے۔معاشی منصوبہ بندی کے لیے کچھ باتوں کو دھیان میں رکھنا ضروری ہوتا ہے۔

آیئے سمجھ لیں

بچت (Saving)

(1) بچت کا محفوظ رہنا اور اس میں اضافہ ہونا فائدہ مند ہوتا ہے ہماری بچت کی ہوئی رقم بینک یا پوسٹ آفس میں محفوظ رہتی ہے۔ بینک میں جمع کی گئی بچت کی رقم سے بغیر نقد کے (cashless) لین دین (کاروبار) کرنا آسان ہوتا ہے۔ ایسے کاروبار میں اپنے پاس بڑی رقم رکھنے کی ضرورت نہیں ہوتی اور وہ رقم گم ہونے یا چوری ہونے کا خوف نہیں رہتا۔

(2) ہماری کی گئی بچت نقد صورت میں ہو اور اسے سرمایہ کاری نہ کرتے ہوئے ویسے ہی رکھی رہنے دیں تو اس کی قیمت زمانہ کے ساتھ کم ہوتے رہتی ہے۔ یعنی چیز خریدنے کی اس رقم کی طاقت یعنی مال کی قدر (Purchasing Power) کم ہوجاتی ہے۔

(مثال : آج 10 روپے میں 2 پنسل ملتی ہے تو کچھ سال بعد اسی قیمت میں ایک ہی پنسل ملے گی) اسی لیے بچت کو مناسب جگہ سرمایہ کر کے اُس میں اضافہ کرنا ضروری ہے۔

(3) بچت کی ہوئی رقم کاروبار میں ترقی، نئے صنعت شروع کرنا، جیسے کاموں میں استعمال کی جائے تو قومی پیداوار میں اضافہ ہوتا ہے۔

(4) کل منافع کا کچھ حصہ سماجی کام کے لیے خرچ کیا جائے تو اس کا دور رس فائدہ ہر ایک کو ملتا ہے۔

(5) ضروری اخراجات کے علاوہ فضول خرچی اور شوق پانی پر خرچ کم کر کے تعلیم، طبی علاج وغیرہ کے لیے بچت کرنا فائدہ مند ہوتا ہے۔

آیئے، بحث کریں

اوپر کے تصویر کا معائنہ کیجیے۔ بچت سرمایہ کاری کے کچھ راہیں تصویر میں دکھائی ہوئی ہیں اس پر بحث کیجیے۔ اس کے مزید کون کون سی راہیں ہیں ان کی معلومات حاصل کیجیے۔ اسے تصویر کی خالی جگہوں میں لکھیے۔

آیئے سمجھ لیں

سرمایہ کاری (Investment)

سرمایہ کاری کی کئی اقسام ہیں۔ سرمایہ کار بینک، پوسٹ جیسے مالیاتی لین دین کرنے والے اداروں میں سرمایہ کاری کرنا پسند کرتے ہیں۔ کیونکہ وہاں رقم زیادہ محفوظ رہتی ہے۔ شیئرز، میوچول فنڈ وغیرہ میں سرمایہ کاری کرنا تھوڑا خطرناک ہوتا ہے۔ کیونکہ جن صنعتوں میں یہ رقم سرمایہ کاری کی جاتی ہے۔ اس صنعت میں نقصان ہونے سے، سرمایہ کاری کی گئی رقم کم ہوجاتی ہے۔ اس کے برعکس فائدہ ہوا تو رقم محفوظ رہتی ہے اور منافع مل سکتا ہے۔

سرمایہ کار کو سرمایہ کاری کرتے وقت دو اہم باتوں کا خیال کرنا چاہیے۔ پہلی بات خطرہ اور دوسری بات فائدہ۔ زیادہ خطرہ مول کر سرمایہ کار زیادہ منافع حاصل کرسکتا ہے۔ لیکن زیادہ خطرہ مول لینے سے نقصان بھی ہوسکتا ہے یہ بات دھیان میں رکھنا ضروری ہے۔

منافع اور سرمایہ کاری پر منحصر کچھ مثالیں ذیل میں حل کی ہیں ان کا مطالعہ کیجیے۔

مثال : شیام راؤ کی 2015-2016 کے تمام قسم کے ٹیکس بھرنے کے بعد سالانہ آمدنی 6,40,000 روپے ہے۔ ہر ماہ بیمہ کے 2000 روپے کی قسط جمع کرتے ہیں۔ سالانہ آمدنی کا 20% حصہ پراویڈنٹ فنڈ میں لگاتے ہیں۔ اچانک فوری ضرورت کے لیے ہر ماہ 500 روپے الگ جمع کرتے ہیں۔ اس سال ان کے پاس خرچ کے لیے کتنے روپے باقی بچے؟

حل :

(i) شیام راؤ کی سالانہ آمدنی = 6,40,000 روپے

(ii) بیمہ کے لیے منصوبہ بندی = 2000 × 12 = 24,000 روپے

(iii) پراویڈنٹ فنڈ میں سرمایہ کاری کی گئی رقم = $6,40,000 \times \frac{20}{100} = 1,28,000$ روپے

(iv) اچانک فوری ضرورت کے لیے جمع کی گئی رقم = 500 × 12 = 6000 روپے

کل منصوبہ بندی کی گئی رقم = 24,000 + 1,28,000 + 6,000 = 1,58,000 روپے

سال بھر کے خرچ کے لیے بچ رہنے والی رقم = 6,40,000 – 1,58,000 = 4,82,000 روپے

مثال **(2)** : شری شاہ نے 3,20,000 روپے بینک میں 10% سود مرکب کے حساب سے 2 سال کے لیے سرمایہ کاری کی۔ اسی طرح 2,40,000 روپے ٹیکس فری میوچول فنڈ میں لگائے۔ اُس کے بازاری قیمت کے مطابق 2 سال بعد انھیں 3,05,000 روپے ملے۔ ان کی کون سی سرمایہ کاری زیادہ فائدہ مند ہوگی؟

حل : (i) سودِ مرکب کے حساب سے سرمایہ کاری کی گئی رقم کا پہلے ہم سود معلوم کریں گے۔

مرکب سود = کل زر – اصل زر

یعنی، $I = A - P$

$$= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n - P$$

$$= P\left[\left(1+\frac{r}{100}\right)^n - 1\right]$$

$$= 3,20,000\left[\left(1+\frac{10}{100}\right)^2 - 1\right]$$

$$= 3,20,000\left[(1.1)^2-1\right]$$
$$= 3,20,000\,[1.21-1]$$
$$= 3,20,000 \times 0.21$$
$$= 67,200 \text{ روپے}$$

شاہ کو 3,20,000 روپے بینک میں سرمایہ کاری کرنے پر 67,200 روپے سود حاصل ہوا۔ اب حاصل ہوا سود سرمایہ کاری کا فی صدی تناسب معلوم کریں گے۔

$$\text{سود کا فی صد} = \frac{100 \times 67200}{3,20,000} = 21$$

∴ بینک میں سرمایہ کاری کرنے پر 21% فائدہ ہوا۔

(ii) میوچول فنڈ سے 2 سال بعد حاصل ہونے والی رقم = 3,05,000 روپے

$$\therefore \text{میوچول فنڈ کا منافع} = 3,05,000 - 2,40,000 = 65,000 \text{ روپے}$$

$$\therefore \text{منافع کا فی صدی} = \frac{65000 \times 100}{2,40,000} = 27.08$$

میوچول فنڈ میں سرمایہ کاری کرنے پر انھیں 27.08% فائدہ ہوا۔

اس سے ثابت ہوتا ہے کہ شری شاہ کا میوچول فنڈ میں سرمایہ کاری کرنا زیادہ فائدہ مند ہوگا۔

مثال (3) : کریم بھائی نے شیشہ کی صنعت میں 4,00,000 روپے کی سرمایہ کاری کی۔ 2 سال کے آخر میں انھیں اس کاروبار سے 5,20,000 روپے حاصل ہوئے۔ سرمایہ کاری کی رقم چھوڑ کر حاصل ہوا نفع انھوں نے 2 : 3 کی نسبت سے بالترتیب معیادی امانت اور شیئرز میں سرمایہ کاری کی۔ انھوں نے ہر ایک مد میں کتنی رقم سرمایہ کاری کی؟

حل :

$$\text{کریم کو 2 سال کے آخر میں منافع ملا} = 5,20,000 - 40,000 = 1,20,000 \text{ روپے}$$

$$\text{میعادی امانت کھاتا میں سرمایہ کاری} = \frac{3}{5} \times 1,20,000$$
$$= 3 \times 24,000$$
$$= 72,000 \text{ روپے}$$

$$\text{شیئرز میں سرمایہ کاری کی گئی رقم} = \frac{2}{5} \times 1,20,000$$
$$= 2 \times 24000$$
$$= 48000 \text{ روپے}$$

کریم بھائی نے معیادی امانت اور شیئرز میں بالترتیب 72000 روپے اور 48000 روپے سرمایہ کاری کی۔

مثال (4) : شری انیل کی ماہانہ آمدنی اور خرچ کی نسبت 4 : 5 ہے۔ شری امین کی یہی نسبت 2 : 3 ہے۔ اسی طرح شری امین کی ماہانہ آمدنی کا 4%، انیل کی آمدنی کے 7% کے برابر ہے۔ اگر انیل کی ماہانہ آمدنی 9600 روپے ہو تو

(i) شری امین کی ماہانہ آمدنی معلوم کیجیے۔

(ii) شری انیل اور شری امین کی بچت معلوم کیجیے۔

حل : ہم جانتے ہیں کہ

خرچ – آمدنی = بچت

امین کی آمدنی اور خرچ کی نسبت $= 3 : 2$ انیل کے آمدنی اور خرچ کی نسبت $= 5 : 4$

فرض کیجیے امین کی آمدنی $= 3y$ فرض کیجیے انیل کی آمدنی $= 5x$

فرض کیجیے امین کا خرچ $= 2y$ فرض کیجیے انیل کا خرچ $= 4x$

(انیل کی ماہانہ آمدنی 9600 روپے ہے۔) ... $\therefore\ 5x = 9600$

$\therefore\ x = 1920$

انیل کا ماہانہ خرچ $= 4x = 4 \times 1920 = 7680$ روپے

$\therefore$ انیل کی بچت = انیل کی آمدنی – انیل کا خرچ $= 9600 - 7680 = 1920$ روپے

$\therefore$ انیل کا ماہانہ خرچ $= 7680$ روپے ، انیل کی ماہانہ بچت $= 1920$ روپے

انیل کی آمدنی کا 7% = امین کی آمدنی کا 4%

$$\therefore\ \frac{4}{100} \times 3y = 9600 \times \frac{7}{100}$$

$$\therefore\ 12y = 9600 \times 7$$

$$\therefore\ y = \frac{9600 \times 7}{12} = 5600$$

امین کی آمدنی $= 3y = 3 \times 5600 = 16800$ روپے

امین کا خرچ $= 2y = 2 \times 5600 = 11200$ روپے

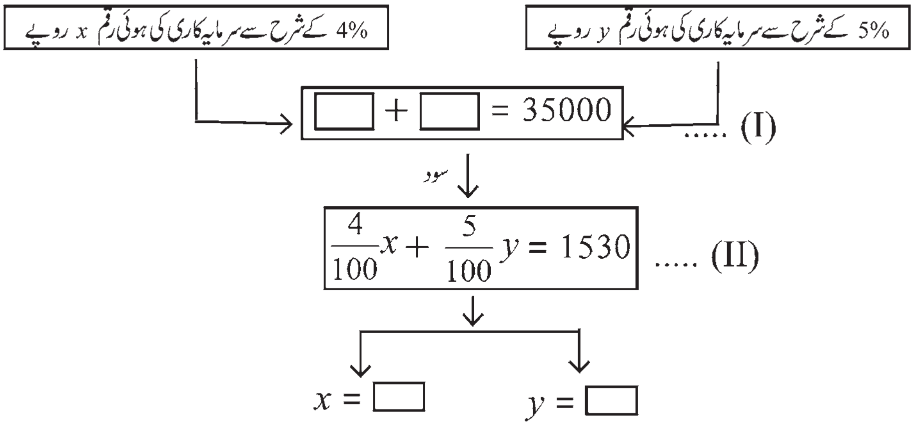
$\therefore$ امین کی بچت $= 16800 - 11200 = 5600$ روپے

(i) امین کی ماہانہ آمدنی $= 16800$ روپے

(ii) امین کی ماہانہ بچت $= 5600$ روپے

(iii) انیل کی ماہانہ بچت $= 1920$ روپے

عملی کام 1 : ایتا نے 3500 روپیوں میں سے کچھ رقم 4% اور بقیہ رقم 5% سود کے حساب سے ایک سال کے لیے سرمایہ کاری کی۔ اسے کل 1530 روپے سود حاصل ہوا۔ تو اس کی الگ الگ سود سے سرمایہ کاری کی ہوئی رقم معلوم کیجیے۔



سرگرمی :

(1) سرپرستوں کی مدد سے آپ کے گھر کا ہفتہ بھر کا جمع خرچ لکھیے۔اس کے لیے خرچ کی مد کے لحاظ سے ستون بنائیے۔اناج،تعلیم،طبی خرچ سفر،کپڑے اور دیگر عام خرچ جیسی مدوں کا خیال کرتے ہوئے تمام اخراجات لکھ لیجیے۔جمع کی جانب گھر خرچ کے لیے حاصل ہوئی رقم، گذشتہ بقایا اور کچھ نئی رقم اگر حاصل ہوئی ہو تو اسے درج کیجیے۔

(2) چھٹیوں میں پورے مہینے کا جمع خرچ لکھیے۔ (صفحہ 52 پر گوئیند کے جمع خرچ کا مطالعہ کیجیے)

عملی کام II : بنجر زمین کے کسانوں کی آمدنی میں اضافہ کرنے کے لیے کیا حل نکالا جائے کلاس میں بحث کیجیے۔کچھ طلبہ نے ذیل کے مطابق اپنے خیالات پیش کیے۔

سہیل : کسانوں کو صرف کھیتی کی اشیاء فروخت کرنے پر پیسے ملتے ہیں۔اس سے حاصل ہونے والے منافع سال بھر کے لیے کافی ہونا چاہیے۔اس لیے معاشی منصوبہ بندی کرنا بہت ضروری ہے۔

پرکاش : کھیتی سے حاصل ہوئی پیداوار کو مناسب اور صحیح دام ملنے لگے تو آمدنی میں اضافہ ہوگا۔

نرگس : علم معاشیات کا اصول ہے کہ کسی چیز کی فراہمی، مانگ سے خوب زیادہ ہو تو اس کی قیمت کم ہو جاتی ہے۔اگر دام کم ہو جائے تو فائدہ بھی کم ہو جائے گا۔

ریٹا : اگر کھیتی کی پیداوار خوب ہوئی اور دام گرنے کا خوف ہو تو کچھ مال کی مناسب ڈھنگ سے ذخیرہ اندوزی کرنا چاہیے۔بعد میں مناسب وقت پر بازار میں قیمت بڑھنے پر فروخت کرنے کے لیے نکالا جائے۔

اعظم : اس کے لیے اچھے گودام تعمیر کرنا ضروری ہے۔

ریشما : کسان کو کم سود پر آسانی سے قرض ملنا چاہیے۔

وتسلا : دودھ، مرغی پالن وغیرہ زراعت کے تکمیلی پیشے کریں تو تھوڑا بہت منافع حاصل ہوتا ہے۔اس کے علاوہ جانوروں کا فضلہ بہترین نامیاتی کھاد کے طور پر حاصل ہوتا ہے۔

کنال : کھیتی سے حاصل ہونے والے اناج پر مختلف اعمال (Process) کرنے والے کارخانے جاری کرنا اور شربت، جام، اچار، خشک سبزیاں، پھلوں کا گودا جیسی چیزیں مناسب پیکنگ کر کے سال بھر فروخت کر سکتے ہیں۔برآمدی اشیا کی زیادہ پیداوار کی جائے۔

مشقی سیٹ 6.1

1. الکا ہر ماہ بھیجی ہوئی رقم کا 90% خرچ کرتی ہے۔ہر مہینہ 120 روپے کی بچت کرتی ہے۔اُسے ہر ماہ بھیجی جانے والی رقم معلوم کیجیے۔
2. سُمیت نے 50,000 روپے سرمایہ سے خوردنی اشیا کا کاروبار شروع کیا۔اس میں پہلے سال 20% نقصان ہوا۔بقیہ سرمایہ سے دوسرے سال اس نے مٹھائی کا کاروبار کیا۔اس میں اسے 5% نفع ہوا۔اصل سرمایہ کاری پر اسے کتنے فی صدی نفع یا نقصان ہوا؟
3. نکھل نے اپنی ماہانہ آمدنی کا 5% حصہ بچوں کی تعلیم پر خرچ کیا۔ 14% حصہ شیئرز میں سرمایہ کاری کی، 3% حصہ بینک میں جمع کیا اور 40% حصہ روزمرہ کے اخراجات کے لیے استعمال کیا۔سرمایا کاری اور خرچ کے بعد اس کے پاس 19,000 روپے بچے۔اس کی ماہانہ آمدنی معلوم کیجیے۔
4. محترم خان صاحب نے اپنی آمدنی میں سے 40,000 روپے 8% مرکب سود کے حساب سے 2 سال کے لیے بینک میں جمع کیے۔شری فرنانڈیس نے 1,20,000 روپے میوچول فنڈ میں 2 سال کے لیے سرمایہ کاری کی۔ 2 سال بعد شری فرنانڈیس کو 1,92,000 روپے حاصل ہوئے تو محترم خان صاحب اور شری فرنانڈیس ان میں سے کس کی سرمایہ کاری زیادہ فائدہ مند ہوئی؟
5. سمیرا نے اپنے آمدنی کا 3% آمدنی سماجی کام کے لیے دیا اور 90% آمدنی خرچ کیا۔اس کے پاس 1750 روپے باقی بچا تو اس کی ماہانہ آمدنی معلوم کیجیے۔

آیئے، بحث کریں

ٹیکس یعنی کیا؟ کس کس قسم کے ٹیکس ہوتے ہیں؟ اس تعلق سے معلومات جمع کیجیے۔

ITC Tools or Links

visit : www.incometaxindia.gov.in

آیئے سمجھ لیں

ٹیکس (محصول) تحسیب کرنا

ملک کے ترقی کے لیے حکومت مختلف اسکیم بناتی ہے۔ ان اسکیموں کی عمل آوری کے لیے حکومت کو بہت بڑی رقوم کی ضرورت پیش آتی ہے۔ کئی قسم کے ٹیکس عائد کرکے یہ رقم حاصل کی جاتی ہے۔

ٹیکس کے افادیت (Utility of taxes) :

- بنیادی سہولیات فراہم کرنا۔
- مختلف فلاح و بہبود کی اسکیم پر عمل کرنا۔
- مختلف شعبوں میں ترقیاتی کاموں اور تحقیق کے تعلق سے اسکیم پر عمل درآمد کرنا۔
- قانون اور نظم و نسق قائم رکھنا۔
- قدرتی آفات سے متاثر لوگوں کی مدد کرنا۔
- ملک اور شہریوں کی حفاظت کرنا، وغیرہ۔

ٹیکس کی قسمیں (Types of taxes)

براہ راست ٹیکس (Direct taxes)

جن ٹیکسوں کا بوجھ براہِ راست ٹیکس ادا کرنے والے پر پڑتا ہے۔ اس کو براہِ راست ٹیکس کہتے ہیں۔

مثال : انکم ٹیکس، جائیداد ٹیکس، پیشہ ورانہ ٹیکس وغیرہ۔

بالراست ٹیکس (Indirect taxes)

جن ٹیکسوں کا بوجھ براہِ راست ٹیکس ادا کرنے والے پر نہیں پڑتا اسے بالراست ٹیکس کہتے ہیں۔

مثال : مرکزی فروخت ٹیکس، ویلیو اڈیڈ ٹیکس (VAT) ایکسائز ٹیکس، کسٹم ڈیوٹی، خدمت ٹیکس، وغیرہ۔

2017ء میں جس طرح کے ٹیکس عائد کیے گئے ہیں اس کے مطابق اس کی قسمیں اوپر بتائی گئی ہیں۔

سرگرمی : مختلف قسم کے ٹیکس ادا کرنے والے ملازمت پیشہ لوگ یا پیشہ وروں کی جانب سے مختلف ٹیکس کی معلومات حاصل کیجیے۔

آیئے سمجھ لیں

انکم ٹیکس (Income tax)

فرد کی، تنظیم یا دیگر قانونی طور پر بھارت میں جاری صنعت کی آمدنی، انکم ٹیکس ایکٹ (قانون) کے تحت مقرر کی گئی حد سے زیادہ ہو تو اس پر انکم ٹیکس (محصول) عائد کیا جاتا ہے۔

اس باب میں ہم براہ راست ٹیکس میں سے صرف فرد کے جانب سے ادا کیے جانے والے انکم ٹیکس کے متعلق غور کریں گے۔ انکم ٹیکس کی تحسیب مرکزی حکومت کرتی ہے۔ بھارت میں انکم ٹیکس کی تحسیب دو قوانین کے ذریعے کی جاتی ہے۔

(1) انکم ٹیکس ایکٹ 1961 یہ قانون 01-04-1962 سے نافذ ہوا۔

(2) ہر سال پارلیمنٹ میں منظور کیا جانے والا اقتصادی (معاشی تعلق سے) فراہم کیا جانے والا قانون۔

ہر سال عام طور پر فروری کے مہینے میں وزیر مالیات آنے والے مالیاتی سال کے تعلق سے قومی آمدنی اور اخراجات کا بجٹ (Budget) تخمینہ پیش کرتے ہیں۔ اس میں انکم ٹیکس کی شرح تجویز کی جاتی ہے۔ پارلیمنٹ کے بجٹ میں منظور کرنے پر یہ شرح اگلے سال کے لیے عائد کی جاتی ہے۔

انکم ٹیکس کی شرح ہر سال بجٹ میں طے کی جاتی ہے۔

انکم ٹیکس کے تعلق سے اہم باب :

- **متشخص/ٹیکس ادا کرنے والا (An assessee) :** انکم ٹیکس ایکٹ میں شامل قانون کے لحاظ سے جس فرد کو انکم ٹیکس ادا کرنا مطلوب ہوتا ہے اس فرد کو متشخص کہتے ہیں۔
- **مالیاتی سال (Financial year) :** جس ایک سال کی قابل ٹیکس آمدنی لی جاتی ہے اس سال کو 'مالیاتی سال' کہتے ہیں۔ اپنے ملک میں فی الحال 1/اپریل سے 31/مارچ کا عرصہ مالیاتی سال کہلاتا ہے۔
- **ٹیکس تشخیص سال/سال تشخیص (Assessment Year) :** مالیاتی سال کے فوراً بعد کے مالیاتی سال کو سال تشخیص کہتے ہیں۔ رواں سال میں گذشتہ مالیاتی سال کے لیے ٹیکس کی تشخیص منظور کی جاتی ہے۔

مالیاتی سال اور متعلقہ سال تشخیص ذیل کے مطابق دیا گیا ہے۔

مالیاتی سال (Financial Year)	متعلقہ سال تشخیص (Assessment Year)
2016–2017 یعنی 01–04–2016 سے 31–3–2017	2017 – 2018
2017–2018 یعنی 01–04–2017 سے 31–03–2018	2018 – 2019

مستقل کھاتا نمبر (PAN) : ہر فرد کو عریضہ کرنے پر انکم ٹیکس محکمہ کی جانب سے ایک مخصوص دس ہندسی حرف نمبر دیا جاتا ہے۔ اسے مستقل کھاتہ نمبر یعنی "Permanent Account Number (PAN)" کہتے ہیں۔ کئی اہم دستاویزات اور معاشی لین دین میں یہ نمبر درج کرنا ضروری ہوتا ہے۔

پین کارڈ کا استعمال : انکم ٹیکس محکمہ میں ٹیکس ادا کرنے کے چلن (فارم)، ٹیکس کا گوشوارہ (ریٹرن فارم) اور دیگر مراسلات میں پین نمبر لکھنا لازمی ہوتا ہے۔ اسی طرح بڑے معاشی لین دین کرتے وقت پین نمبر درج کرنا پڑتا ہے۔ کئی دفعہ پین کارڈ بطورِ شناخت (Identity Proof) استعمال کیا جاتا ہے۔

آیئے سمجھ لیں

انکم ٹیکس کی تحسیب : انکم ٹیکس کی تحسیب آمدنی پر منحصر ہوتی ہے۔اس لیے آمدنی کے مختلف ذرائع جاننا ضروری ہے۔

آمدنی کے پانچ اہم ذرائع :

(1) تنخواہ سے حاصل ہونے والی آمدنی

(2) گھر جائیداد سے حاصل ہونے والی آمدنی

(3) دھنداا ور کاروبار (پیشے) سے ملنے والی آمدنی

(4) سرمایہ کاری کے منافع سے (Capital gain) حاصل ہونے والی آمدنی

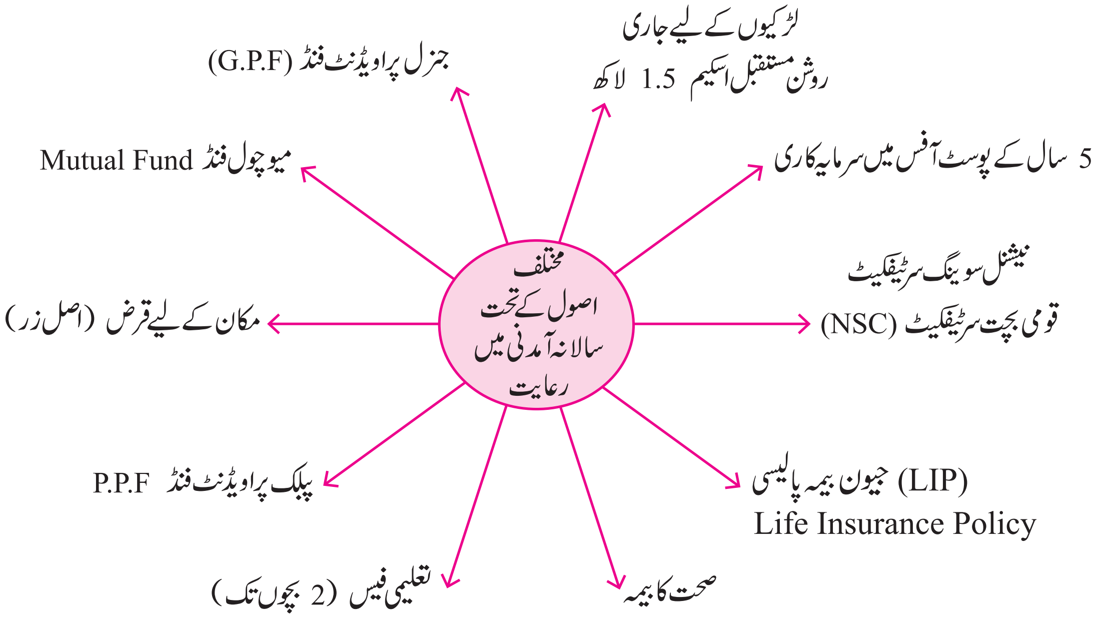
(5) دیگر ذرائع سے حاصل ہونے والی آمدنی

تنخواہ دار فرد کا انکم ٹیکس محسوب کرنے کے لیے اہم نقاط

انکم ٹیکس محسوب کرنے کے لیے کل سالانہ آمدنی کا خیال کیا جاتا ہے۔انکم ٹیکس ایکٹ 80C، 80D، 80G وغیرہ ارٹیکل کے تحت کل سالانہ آمدنی میں کٹوتی (سہولت) ملتی ہے۔اس مستثنٰی آمدنی کو کم کرنے کے بعد بقیہ آمدنی کو ''قابل ٹیکس آمدنی'' کہتے ہیں۔انکم ٹیکس کی تحسیب اسی آمدنی پر کی جاتی ہے۔ ٹیکس کی تحسیب کے اصول کبھی کبھی تبدیل کیے جاتے ہیں۔اس لیے براہِ راست ٹیکس تحسیب کرتے وقت تازہ ترین اصول کا معلوم ہونا نہایت ضروری ہے۔ قابل ٹیکس آمدنی میں سے مخصوص حد تک کی رقم پر ٹیکس تحسیب نہیں کیا جاتا۔اس رقم کو قابل ٹیکس آمدنی کی ''اصل مستثنٰی آمدنی'' کہتے ہیں۔

- کسانوں کو زرعی پیداوار کی آمدنی پر انکم ٹیکس میں رعایت دی گئی ہے۔
- انکم ٹیکس ایکٹ 80G کے تحت وزیر اعظم ریلیف فنڈ، وزیر اعلیٰ ریلیف فنڈ یا حکومت سے منظور شدہ اداروں کو عطیہ دینے پر انکم ٹیکس میں 100% چھوٹ ملتی ہے۔
- 80D ایکٹ کے تحت صحت کے لیے بیمہ قسط پر چھوٹ (رعایت) ملتی ہے۔
- عام طور پر کل سرمایہ کاری پر 80C ایکٹ کے تحت مختلف قسم کی سرمایہ کاری میں زیادہ سے زیادہ 1,50,000 روپے تک چھوٹ (رعایت) ملتی ہے۔

2017-2018 اس بجٹ (تخمینہ) کے مطابق جن کی سالانہ آمدنی میں رعایت دی جا سکتی ہے ایسے کچھ اہم سرمایہ کاریاں ذیل کی شکل میں دکھائی گئی ہیں۔



ٹیکس دہندہ (متشخص) کی عمر کے مطابق انکم ٹیکس کی شرح ہر سال معاشی بجٹ میں طے کی جاتی ہے۔آمدنی کی سطح کے مطابق انکم ٹیکس کی شرح ظاہر کرنے والا خاکہ ذیل میں دیا گیا ہے۔

جدول I

60 سال کی عمر کے فرد کے لیے			
ثانوی اوراعلیٰ تعلیمی ٹیکس	تعلیمی ذیلی ٹیکس	انکم ٹیکس Income tax	قابل ٹیکس آمدنی کے مرحلے (روپے میں)
ٹیکس معاف	ٹیکس معاف	(ٹیکس معاف) (مستثنٰی آمدنی)	250000 تک
انکم ٹیکس کا 1 فی صد	انکم ٹیکس کا 2 فی صد	5% (قابل ٹیکس آمدنی سے ڈھائی لاکھ روپے منہا کرنے کے بعد)	2,50,0001 سے 5,00,000 تک
انکم ٹیکس کا 1 فی صد	انکم ٹیکس کا 2 فی صد	₹12,500 + 20% (قابل ٹیکس آمدنی سے پانچ لاکھ روپے منہا کرنے کے بعد)	5,00,000 سے 10,00,000 تک
انکم ٹیکس کا 1 فی صد	انکم ٹیکس کا 2 فی صد	₹11,2500 + 30% (قابل ٹیکس آمدنی سے دس لاکھ روپے منہا کرنے کے بعد)	10,00,000 سے زیادہ
سالانہ آمدنی 50 لاکھ روپے سے ایک کروڑ روپے کے درمیان والوں کو انکم ٹیکس کا 10% اضافی ٹیکس اور سالانہ آمدنی ایک کروڑ روپے سے زیادہ ہو تو انکم ٹیکس کا 15% اضافی ٹیکس عائد کیا جاتا ہے۔			

عملی کام : اوپر کے جدول (I) کا مشاہدہ کیجیے اور ذیل میں دی ہوئی مثال کے خالی چوکون میں مناسب عدد لکھیے ۔

مثال ● ممتا کی سالانہ آمدنی ساڑھے چار لاکھ روپے ہے۔انھوں نے آمدنی میں منہا ہونے والی ایسی کوئی بھی بچت نہیں کی۔تو ان کی قابل ٹیکس آمدنی کس مرحلے میں ہوگی؟ ☐

● انھیں کتنی رقم پر کتنے فی صد شرح سے ٹیکس ادا کرنا ہوگا؟ ☐ روپے پر ☐ شرح سے

● ذیلی ٹیکس کتنی رقم پر تحسیب کیا جائے گا؟ ☐

جدول II

بزرگ شہری (عمر ساٹھ سال سے اسی سال تک)			
ثانوی واعلیٰ تعلیمی ذیلی ٹیکس	تعلیمی ذیلی ٹیکس	انکم ٹیکس (Income tax)	قابل ٹیکس آمدنی کے مرحلے (روپے میں)
ٹیکس معاف	ٹیکس معاف	(ٹیکس معاف) (مستثنٰی آمدنی)	300000 تک
انکم ٹیکس کا 1 فی صد	انکم ٹیکس کا 2 فی صد	5% (قابل ٹیکس آمدنی سے تین لاکھ روپے منہا کرنے بعد)	3,00,001 سے 5,00,000 تک
انکم ٹیکس کا 1 فی صد	انکم ٹیکس کا 2 فی صد	₹10,000 + 20% (قابل ٹیکس آمدنی سے پانچ لاکھ روپے منہا کرنے بعد)	5,00,001 سے 10,00,000
انکم ٹیکس کا 1 فی صد	انکم ٹیکس کا 2 فی صد	₹1,10,000 + 30 (قابل ٹیکس آمدنی سے دس لاکھ روپے منہا کرنے کے بعد)	10,00,000 سے زیادہ
سالانہ آمدنی 50 لاکھ روپے سے ایک کروڑ روپے کے درمیان والوں کو انکم ٹیکس کا 10% اضافی ٹیکس اور سالانہ آمدنی ایک کروڑ روپے سے زیادہ ہو تو انکم ٹیکس کا 15% اضافی ٹیکس عائد ہوگا۔			

عملی کام : جدول II کی رُو سے ذیل میں عملی کام مکمل کیجیے۔

مثال : شری پنڈت کی عمر 67 سال ہے۔گذشتہ سال ان کی سالانہ آمدنی 13,25,000 روپے تھی تو ان کی قابل ٹیکس آمدنی کتنی ہوگی؟ انھیں کتنا انکم ٹیکس ادا کرنا ہوگا؟

$$13,25,000 - 10,000,00 = 3,25,000$$

اس لیے انھیں جدول کے مطابق 1,10,000 روپے ٹیکس ادا کرنا ہی ہوگا۔علاوہ قابل ٹیکس آمدنی کا 30% رقم پر انکم ٹیکس ادا کرنا ہوگا۔

$\therefore\ 3,25,000 \times \frac{30}{100} = \square$ روپے

$\therefore$ انکم ٹیکس کی رقم = $\square\ \ \square\ \ \square$

تعلیمی ذیلی ٹیکس 2% انکم ٹیکس کا = $\square \times \frac{2}{100} = \square$

ثانوی اوراعلیٰ تعلیمی ذیلی ٹیکس 1% انکم ٹیکس کا = $\square \times \frac{1}{100} = \square$

$\therefore$ کل انکم ٹیکس = انکم ٹیکس + تعلیمی ذیلی ٹیکس + ثانوی اوراعلیٰ تعلیمی ذیلی ٹیکس

$= \square + \square + \square$

$=$ ₹ 2,13,725

جدول III

بہت ضعیف بزرگ شہری (عمراسی سال سے زیادہ)			
قابل ٹیکس آمدنی کا مرحلہ (روپے میں)	انکم ٹیکس (Income tax)	تعلیمی ٹیکس	ثانوی واعلیٰ ثانوی تعلیمی ٹیکس
5,00,000 میں	مستثنیٰ آمدنی (ٹیکس معاف)	ٹیکس معاف	ٹیکس معاف
5,00,001 سے 10,00,000 تک	20% (قابل ٹیکس آمدنی سے پانچ لاکھ روپے منہا کرنے کے بعد)	انکم ٹیکس کا 2 فی صد	انکم ٹیکس کا 1 فی صد
10,00,000 سے زیادہ	₹100000 + 30% (قابل ٹیکس آمدنی سے دس لاکھ روپے منہا کرنے کے بعد)	انکم ٹیکس کا 2 فی صد	انکم ٹیکس کا 1 فی صد
سالانہ آمدنی 50 لاکھ روپے سے ایک کروڑ روپے کے درمیان والوں کو انکم ٹیکس کا اضافی ٹیکس 10% اور سالانہ آمدنی ایک کروڑ سے زیادہ والوں کو انکم ٹیکس کا 15% اضافی ٹیکس ہوگا۔			

عملی کام : 80C، 80G، 80D ان قانونی دفعات کی معلومات حاصل کیجیے۔

پین کارڈ کا معائنہ کیجیے اور اس پر کون سی معلومات ہوتی ہے اسے درج کیجیے۔

نقد بین کاروبار (Cashless) کے لیے استعمال کیے جانے والے ذرائع کی معلومات حاصل کیجیے۔

اوپر کے جدول اور افراد کو ملنے والی مختلف سہولتوں کا استعمال کرکے انکم ٹیکس کس طرح محسوب کیا جاتا ہے؟ ہم ذیل کی مثالوں سے سمجھنے کی کوشش کریں گے۔

مثال **(1)** : شری مہاترے کی عمر 50 سال ہے۔ ان کی سالانہ آمدنی 12,00,000 روپے ہے۔ شری مہاترے نے ذیل کے مطابق سرمایہ کاری کی۔

(i) بیمہ کی قسط = ₹90,000 (ii) پراویڈنٹ فنڈ = ₹25,000

(iii) پبلک پراویڈنٹ فنڈ = ₹15,000 (iv) نیشنل سیونگ سرٹیفکیٹ (NSC) = ₹20,000

اس معلومات کی بنا پر انکم ٹیکس کے لیے منظور شدہ سہولیات، قابل ٹیکس آمدنی اور انکم ٹیکس معلوم کیجیے۔

حل :

(i) کل سالانہ آمدنی = 12,00,000 روپے (ii) 80C کے مطابق سرمایہ کاری

سرمایہ کاری	رقم (روپے میں)
(i) بیمہ قسط	90,000
(ii) پراویڈنٹ فنڈ میں سرمایہ کاری	25,000
(iii) پبلک پراویڈنٹ فنڈ	15,000
(iv) نیشنل سیونگ سرٹیفکیٹ (NSC)	20,000
کل	1,50,000

دفعہ 80C کے تحت انکم ٹیکس کے لیے زیادہ سے زیادہ 150000 روپے مستثنیٰ آمدنی (منظور شدہ سہولت) منہا کی جائے۔

(3) قابل ٹیکس آمدنی = (ii) میں دی ہوئی رقم − (i) میں دی ہوئی رقم

$= 12,00,000 - 1,50,000 = 10,50,000$

(4) انکم ٹیکس جو شری مہاترے کو ادا کرنا ہوگا۔ جدول (I) کی مدد سے تحسیب کریں گے۔

(یعنی دس لاکھ روپے سے زیادہ ہے) ... شری مہاترے کی قابل ٹیکس رقم = ₹10,50,000

∴ جدول (I) کے مطابق انکم ٹیکس = ₹112500 + 30% ... (کل آمدنی سے دس لاکھ روپے منہا کرنے کے بعد پر 30%)

$\therefore \quad 10,50,000 - 10,00,000 = 50,000$

∴ انکم ٹیکس $= 1,12,500 + 50,000 \times \frac{30}{100}$

$= 1,12,500 + 15,000$

$= 1,27,500$

اس کے علاوہ 2% تعلیمی ذیلی ٹیکس اور 1% (اعلیٰ ثانوی تعلیمی ذیلی ٹیکس) ان کو بھی شامل کیا جائے۔

تعلیمی ذیلی ٹیکس $= 1,27,500 \times \frac{2}{100} = 2550$ روپے

اعلیٰ ثانوی تعلیمی ذیلی ٹیکس $= 1,27,500 \times \frac{1}{100} = 1275$ روپے

∴ کل انکم ٹیکس $= 1,27,500 + 2550 + 1275 = 1,31,325$ روپے

اس لیے شری مہاترے کو کل 1,31,325 روپے انکم ٹیکس ادا کرنا ہوگا۔

مثال **(2)** : محترم احمد صاحب 62 سال کے بزرگ شہری ہیں۔وہ ایک کمپنی میں ملازمت کرتے ہیں۔ان کی سالانہ آمدنی 6,20,000 روپے تھی۔انھوں نے پبلک پراویڈنٹ فنڈ میں 1,00,000 روپے سرمایہ کاری کی۔اسی طرح بیمہ کی سالانہ قسط 80,000 روپے ادا کیا۔اور وزیر اعلیٰ ریلیف فنڈ میں 10,000 روپے عطیہ دیا۔احمد صاحب کو کتنا انکم ٹیکس ادا کرنا ہوگا؟

حل :

(1) کل سالانہ آمدنی = 6,20,000 روپے

(2) کل منہاجات (دفعہ 80 C کے تحت)

(i) پبلک پراویڈنٹ فنڈ = 1,00,000 روپے

(ii) بیمہ کی سالانہ قسط = 80,000 روپے

= 1,80,000 روپے

(iii) دفعہ 80C کے مطابق زیادہ سے زیادہ 1,50,000 روپے منہا کرنے کی سہولت منظور کی گئی۔

(3) 80G کے مطابق منہا کرنا۔ وزیر اعلیٰ ریلیف فنڈ میں دی رقم = 10,000 روپے

(4) قابل ٹیکس آمدنی = (1) − [(2) + (3)]

= 6,20,000 − [1,50,000 – 10,000]

= 4,60,000 روپے

جدول (II) کے مطابق قابل ٹیکس آمدنی کی حد تین لاکھ سے پانچ لاکھ تک ہے۔

$\therefore$ انکم ٹیکس = (قابل ٹیکس آمدنی $-300000) \times \frac{5}{100}$

$= (4,60,000 - 3,00,000) \times \frac{5}{100}$

$= 1,60,000 \times \frac{5}{100}$

= 8000 روپے

تعلیمی ٹیکس کو انکم ٹیکس پر تحسیب کیا جاتا ہے۔

تعلیمی ذیلی ٹیکس $= 8,000 \times \frac{2}{100} = 160$ ، ثانوی اور اعلیٰ تعلیمی ذیلی ٹیکس $8,000 \times \frac{1}{100} = 80$

$\therefore$ کل انکم ٹیکس = 8000 + 160 + 80 = ₹ 8,240 روپے

اس لیے احمد صاحب کو 8,240 روپے انکم ٹیکس ادا کرنا ہوگا۔

مثال **(3)** : شریمتی ہندوجا کی عمر 50 سال ہے۔گذشتہ سال قابل ٹیکس آمدنی 16,30,000 روپے تھی۔انھیں کل کتنا انکم ٹیکس ادا کرنا ہوگا؟

حل : شریمتی ہندوجا کی قابل ٹیکس آمدنی دس لاکھ روپے سے زیادہ ہے۔

اب ہم جدول (I) کا استعمال کرکے ان کا انکم ٹیکس محسوب کریں گے۔

جدول (I) کے مطابق، دس لاکھ روپے سے زیادہ آمدنی کے لیے

انکم ٹیکس = ₹1,12,500 + (30% کل آمدنی سے دس لاکھ روپے منہا کرنے کے بعد پر)

شریمتی ہندوجا کی قابل ٹیکس آمدنی = شریمتی ہندوجا کی آمدنی − دس لاکھ = 16,30,000 − 10,00,000

= 6,30,000

جدول (I) کی رُو سے،

انکم ٹیکس $= 1,12,500 + 6,30,000 \times \frac{30}{100}$

$= 1,12,500 + 30 \times 6,300$

$= 1,12,500 + 1,89,000$

= 3,01,500 روپے

$\therefore$ 1% ثانوی اور اعلیٰ تعلیم ٹیکس $= \frac{1}{100} \times 3,01,500 =$ ₹ 3015 روپے

$\therefore$ 2% تعلیمی ٹیکس $= \frac{2}{100} \times 3,01,500 =$ ₹ 6030 روپے

$\therefore$ کل انکم ٹیکس $= 3,01,500 + 3015 + 6030$

= 3,10,545 روپے

اس لیے کل 3,10,545 روپے انکم ٹیکس ادا کرنا ہوگا۔

مشقی سیٹ 6.2

(1) ذیل کے جدول کا مشاہدہ کیجیے۔ جدول میں دیے ہوئے افراد کی دی ہوئی قابل ٹیکس آمدنی پر انکم ٹیکس ادا کرنا ہوگا یا نہیں لکھیے۔

نمبر شمار	افراد	عمر	قابل ٹیکس آمدنی (₹)	انکم ٹیکس ادا کرنا ہوگا یا نہیں
(i)	کماری نیکیتا	27	₹ 2,34,000	
(ii)	شری کلکرنی	36	₹ 3,27,000	
(iii)	شریمتی مہتا	44	₹ 5,82,000	
(iv)	شری بجاج	64	₹ 8,40,000	
(v)	شری ڈسلوا	81	₹ 4,50,000	

(2) شری کرتار سنگھ (عمر 48 سال) نجی کمپنی میں ملازمت کرتے ہیں۔ مناسب بھتہ چھوڑ کر ان کی ماہانہ تنخواہ 42,000 روپے ہے۔ وہ پراویڈنٹ فنڈ میں ہر ماہ 3000 روپے سرمایہ کاری کرتے ہیں۔ انھوں نے 15,000 روپے کا نیشنل سیونگ سرٹیفکیٹ (NSC) خریدا ہے اور 12,000 روپے کا عطیہ وزیر اعظم ریلیف فنڈ میں جمع کیا۔ تو ان کا انکم ٹیکس محسوب کیجیے۔

(1) درج ذیل میں سے صحیح متبادل منتخب کیجیے۔

(i) مختلف اقسام کی سرمایہ کاری میں سے دفعہ 80C کے لحاظ سے انکم ٹیکس تحسیب کے لیے زیادہ سے زیادہ کتنے روپے کی چھوٹ ملتی ہے؟

(A) دیڑھ لاکھ روپے (B) ڈھائی لاکھ روپے (C) ایک لاکھ روپے (D) دو لاکھ روپے

(ii) ایک فرد کی 18-2017 میں ہونے والی آمدنی پر ٹیکس کی تحسیب کا سال درج ذیل میں سے کون سا ہوگا؟

(A) 2016-17 (B) 2018-19 (C) 2017-18 (D) 2015-16

(2) شری شیکھر آمدنی کا 60% خرچ کرتے ہیں۔ بقیہ آمدنی میں سے 300 روپے عطیہ یتیم خانہ میں دیتے ہیں تب ان کے پاس 3,200 روپے بچتے ہیں۔ ان کی آمدنی معلوم کیجیے۔

(3) شری ہیرالال نے 2,15,000 روپے میوچول فنڈ میں سرمایہ کاری کی۔ اس کے 2 سال بعد انھیں 3,05,000 روپے حاصل ہوئے۔ شری رمن لال نے 1,40,000 روپے 8% شرح سے مرکب سود کے حساب سے 2 سال کے لیے بینک میں امانت رکھا۔ ہر ایک کو ملنے والا فی صدی منافع معلوم کیجیے۔ کس کی سرمایہ کاری زیادہ فائدہ مند ہوگی؟

(4) ایک بچت کھاتے میں سال کے شروع میں 24,000 روپے تھے۔ اس میں 56,000 روپے کا اضافہ کیا گیا اور وہ پوری رقم 7.5% شرح سے مرکب سود کے حساب سے بینک میں جمع رکھی گئی تو 3 سال بعد کل کتنی رقم واپس ملے گی؟

(5) شری منوہر نے اپنی آمدنی کا 20% حصہ اپنے بڑے بیٹے کو اور 30% حصہ چھوٹے بیٹے کو دیا۔ بعد میں بقیہ رقم کا 10% بطور عطیہ ایک اسکول کو دیا تب ان کے پاس 1,80,000 روپے باقی بچے۔ شری منوہر کی سالانہ آمدنی معلوم کیجیے۔

*(6) کیلاش کی آمدنی کا 85% حصہ خرچ ہو جاتا ہے۔ اس کی آمدنی میں 36% اضافہ ہونے پر اس کا خرچ پہلے کے مقابلے 40% بڑھ گیا۔ اس کی موجودہ فی صدی بچت معلوم کیجیے۔

*(7) ریحان، ذیشان اور آفرین ان تینوں کی سالانہ آمدنی 8,07,000 روپے ہے۔ وہ تینوں اپنی آمدنی کا بالترتیب 75%، 80% اور 90% حصہ خرچ کرتے ہیں۔ اگر ان کے بچت کا تناسب 12 : 17 : 16 ہو تو ہر ایک کی سالانہ بچت معلوم کیجیے۔

(8) ذیل کے افراد کا انکم ٹیکس محسوب کیجیے۔

(i) شری کدم کی عمر 35 سال ہے اور ان کی قابل ٹیکس آمدنی 13,35,000 روپے ہے۔

(ii) محترم خان صاحب کی عمر 65 سال ہے اور ان کی قابل ٹیکس آمدنی 4,50,000 روپے ہے۔

(iii) کماری ورشا (عمر 26 سال) کی قابل ٹیکس آمدنی 2,30,000 روپے ہے۔

ITC Tools or Links

بھارت سرکار کی www.incometaxindia.gov.in ویب سائٹ پر جائیے۔ اس ویب سائٹ پر Incometax calculator مینو پر کلک کیجیے۔ آنے والے فارم میں فرضی آمدنی اور منہاجات کے فرضی رقوم لکھ کر انکم ٹیکس کی رقم معلوم کرنے کی کوشش کیجیے۔

7 شماریات Statistics

آیئے، سیکھیں

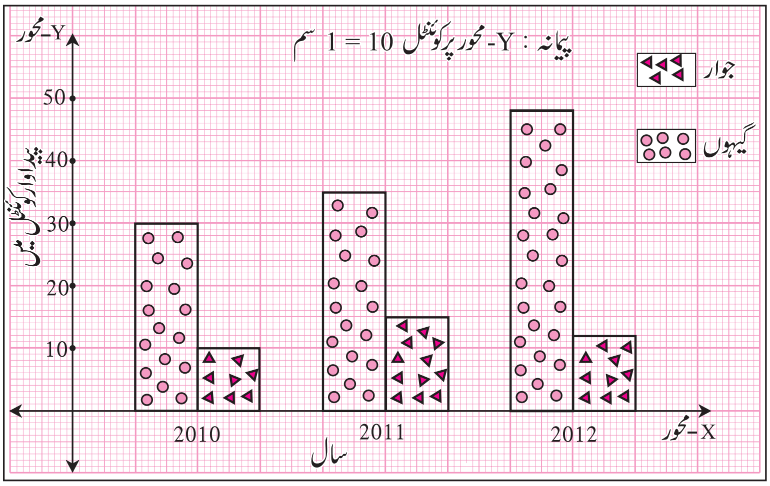
- متصل ستونی ترسیم
- ابتدائی اور ثانوی معطیات
- تقسیمی ستونی ترسیم
- غیر جماعت بند اور جماعت بند تعددی تقسیم کی جدول
- فیصدی ستونی ترسیم
- تعددی تقسیمی جدول
- میانیہ، وسطانیہ اور کثیریہ (غیر جماعت بند معطیات)

آیئے ذرا یاد کریں

گذشتہ جماعتوں میں ہم نے سادہ ستونی ترسیم اور متصل ستونی ترسیم وغیرہ کیسے بناتے ہیں، کا مطالعہ کر چکے ہیں۔ اسی طرح اخبارات، ماہنامے، ٹیلی ویژن وغیرہ ذرائع سے مختلف ترسیم کی معلومات حاصل کر چکے ہیں۔

معطیات کی نوعیت کے لحاظ سے ان معطیات کو مناسب انداز میں پیش کرنے کے لیے ترسیم بنانا اہم ہوتا ہے۔

مثال : ایک کسان کو اس کی کھیتی سے گیہوں اور جوار، ان دو فصلوں کی تین سال میں حاصل ہوئی پیداوار کو ظاہر کرنے والا متصل ستونی ترسیم ذیل میں دکھایا گیا ہے۔ اس معطیات کی بنا پر سوالوں کے جواب لکھیے۔



(i) تین سال میں کس فصل کی پیداوار لگا تار بڑھ رہی ہے؟

(ii) 2012 میں 2011 کی بہ نسبت جوار کی پیداوار کتنی کم ہوئی؟

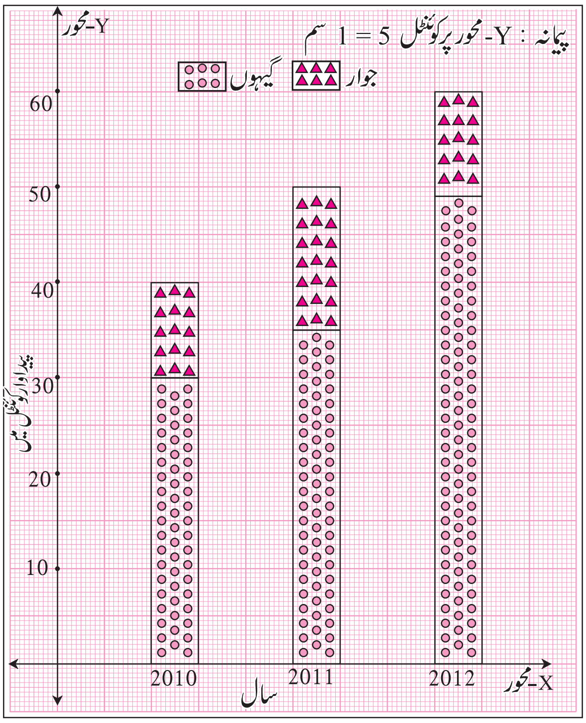
(iii) 2010 میں گیہوں کی پیداوار اور 2012 میں گیہوں کی پیداوار کے درمیان کتنا فرق ہے؟

(iv) اس ترسیم کی معلومات کی بناء پر درج ذیل جدول مکمل کیجیے۔

سال \ پیداوار (کوئنٹل میں)	گیہوں	جوار	کل پیداوار
2010			
2011			
2010	48	12	60

آئیے سمجھ لیں

تقسیمی ستونی ترسیم (Sub - divided bardiagram)



معطیات کا موازنہ ظاہر کرنے والا ستونی ترسیم دوسرے طریقے سے معلوم کر سکتے ہیں۔ اس کو تقسیمی ستونی ترسیم کہتے ہیں۔ اس کے لیے معطیات کے ایک ہی قسم کے دو مدوں کو جمع کیا جاتا ہے۔ حاصل ہونے والے مجموعہ کو مناسب پیمانہ لے کر ستونی طریقہ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ستون کی ہر مد کو ظاہر کرنے کے لیے مناسب پیمانہ لے کر حصے کئے جاتے ہیں۔ سابقہ مثال میں ہم دیکھیں گے کہ معطیات کو ظاہر کرنے والا تقسیمی ستونی ترسیم کیسے بناتے ہیں۔

(i) کل پیداوار کے مطابق ہر ستون کی اونچائی مناسب پیمانے سے ظاہر کیجیے۔

(ii) اس میں گیہوں کی پیداوار کل پیداوار کے ستون کا ایک حصہ ہوگی۔ اسے مخصوص نشان سے دکھائیے۔

(iii) ستون کا بقیہ حصہ جوار کی پیداوار ظاہر کرے گا۔ اسے مختلف نشان سے دکھائیے۔

اس طریقے سے بازو میں بنائی گئی ستونی ترسیم کو دیکھیے۔

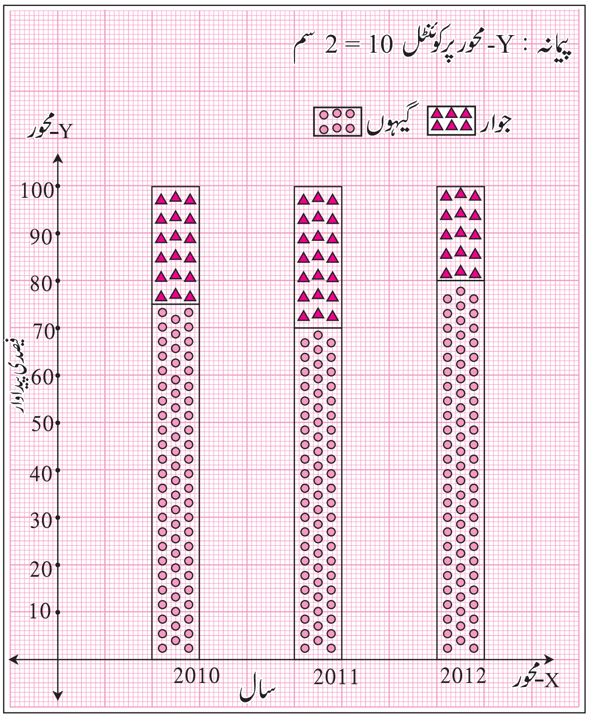
ہم نے مطالعہ کیا ہے کہ دو مدوں کا فیصدی میں کیا گیا موازنہ قابل اعتماد ہوتا ہے۔ مثلاً 2000 روپے پر 600 روپے منافع اور 1500 روپے پر 510 روپے منافع اس میں 600 روپے منافع زیادہ دکھائی دیتا ہے۔ مگر دونوں منافع میں بالترتیب 30% اور 34% ہیں اسے دھیان میں رکھیں تو سمجھ میں آتا ہے کہ 1500 روپے پر 510 روپے منافع والا کاروبار زیادہ فائدہ مند ہوگا۔

فی صدی ستونی ترسیم Percentage Bar Diagram

دی ہوئی معطیات کا موازنہ زیادہ اچھے طریقے سے سمجھنے کے لیے دی ہوئی معلومات کو فیصدی میں تبدیل کر کے تقسیمی ستونی ترسیم بناتے ہیں۔ اسے فیصدی ستونی ترسیم کہتے ہیں۔ گذشتہ مثال کی معطیات کا فیصد متصلہ جدول میں دکھایا گیا ہے۔

سال	گیہوں کی پیداوار (کوئنٹل میں)	جوار کی پیداوار (کوئنٹل میں)	کل پیداوار کے تناسب میں گیہوں کی پیداوار کا فیصد
2010	30	10	$\frac{30}{40} \times 100 = 75\%$
2011	35	15	$\frac{35}{50} \times 100 = 70\%$
2012	40	12	$\frac{48}{60} \times 100 = 80\%$

ان معطیات کوظاہر کرنے والا ستونی ترسیم ذیل کے مراحل سے بنایا گیا ہے۔



(i) ہر سال میں گیہوں اور جوار کی کل پیداوار میں سے گیہوں کی پیداوار اور جوار کی پیداوار کا فیصد معلوم کیا۔

(ii) ہر ستون کی Y-محور پر اونچائی 100 کے تناسب میں لی گئی ہے۔

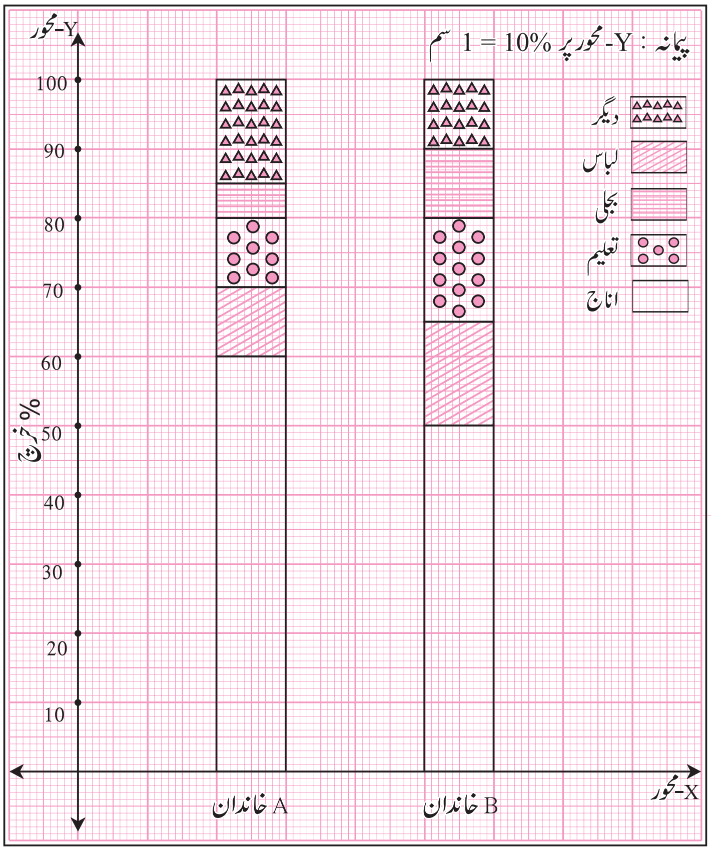
(iii) گیہوں کی پیداوار کا کل پیداوار سے فیصد لیے ہوئے پیمانے کے تناسب سے ستون پر نشان کے ذریعے دکھایا گیا۔

(iv) ستون کا بقیہ حصہ کل پیداوار سے جوار کی پیداوار کا فیصد ظاہر کرتا ہے۔

دو سے زیادہ مدوں کی معلومات بھی تقسیمی ستونی ترسیم یا فیصدی ستونی ترسیم میں ظاہر کر سکتے ہیں۔

حل شدہ مثالیں

مثال (1) : بازو کی شکل میں فیصدی ستونی ترسیم دی ہوئی ہے۔ اس میں دو خاندانوں کا مختلف مدوں پر ہونے والے خرچ کی معطیات دی ہوئی ہے۔



اسی بنا پر ذیل کے سوالات کے جوابات لکھیے۔

(i) ہر خاندان کا مختلف مدوں پر ہونے والے خرچ کا فیصد لکھیے۔

(ii) کس خاندان کا اناج کا خرچ اس کے کل خرچ کے تناسب کے لحاظ سے زیادہ ہے؟ کتنے فیصدی زیادہ ہے؟

(iii) دونوں خاندانوں کے دیگر اخراجات کا فیصدی کتنا ہے؟ الگ الگ بتائیے۔

(iv) کس خاندان کا بجلی خرچ کا فیصد زیادہ ہے؟

(v) کس خاندان کا تعلیمی خرچ کا فیصد زیادہ ہے؟

حل : (i)

خرچ \ خاندان	اناج	لباس	تعلیم	بجلی	دیگر
A	60%	10%	10%	5%	15%
B	50%	15%	15%	10%	10%

(ii) خاندان A کے کا اناج کا خرچ، کل خرچ کے تناسب میں خاندان B کے خرچ سے 10% زیادہ ہے۔

(ii) خاندان A کا دیگر خرچ 15% اور خاندان B کا دیگر خرچ 10% ہے۔

(iv) خاندان B کے بجلی خرچ کا فیصد زیادہ ہے۔

(v) خاندان B کے تعلیمی خرچ کا فیصد زیادہ ہے۔

مشقی سیٹ 7.1

(1) درج ذیل جدول میں بھارت کے موٹر اور بس کی تعداد تقریباً مکمل لاکھ میں دی ہوئی ہے۔ اس بنا پر فیصدی ستونی ترسیم بنایئے۔ (فیصدی تقریباً صحیح عدد میں لیجیے)

سال	موٹر کی تعداد	بس کی تعداد
2006 - 2007	47	9
2007 - 2008	56	13
2008 - 2009	60	16
2009 - 2010	63	18

(2) درج ذیل جدول میں بھارت کی پکی سڑکیں اور کچی سڑکوں کی معطیات دی ہوئی ہے۔ اس بنا پر تقسیمی ستونی ترسیم اور فیصدی ستونی ترسیم بنایئے۔ (فیصدی تقریباً صحیح عدد میں لیجیے)

سال	پکی سڑکیں (لاکھ کلومیٹر)	کچی سڑکیں (لاکھ کلومیٹر)
2000 - 2001	14	10
2001 - 2002	15	11
2002 - 2003	17	13
2003 - 2004	20	19

عملی کام : ذیل کے جدول میں مختلف ریاستوں میں ہر 1000 لڑکوں کے لحاظ سے لڑکیوں کی تعداد دی ہوئی ہے۔ اس بناء پر جدول کے خالی چوکون مکمل کیجیے۔

ریاست	لڑکوں کی تعداد	لڑکیوں کی تعداد	کل	لڑکوں کا فیصدی (تقریباً مکمل عدد)	لڑکیوں کا فیصدی (تقریباً مکمل عدد)
آسام	1000	960	1960	$\frac{1000}{1960} \times \frac{100}{1} = 51\%$	100 − 51 = 49%
بہار	1000	840	1840		
پنجاب	1000	900			
کیرل	1000	1080			
مہاراشٹر	1000	900			

جدول کے مطابق حاصل ہوئی معطیات کا فیصدی ستونی ترسیم بنایئے اور اس بناء پر نتیجہ اخذ کیجیے اور بحث کیجیے۔

غور کیجیے

صفحہ نمبر 111 پر دیے ہوئے عملی کام کی جدول میں پانچ ریاستوں کے ہر ہزار لڑکوں کے مقابلے میں لڑکیوں کی تعداد دی ہوئی ہے۔ انھیں ریاستوں کی خواندگی کا فیصد ذیل میں دیا ہوا ہے۔

آسام (73%)، بہار (64%)، پنجاب (77%)، کیرل (94%)، اور مہاراشٹر (83%)

جدول میں لڑکیوں کی تعداد اور ان ریاستوں کی خواندگی کے تناسب پر غور کیجیے۔ اس بناء پر کیا نتیجہ حاصل ہوتا ہے؟

آیئے، بحث کریں

ذیل کی معطیات کے لیے کس قسم کا ستونی ترسیم بنانا مناسب ہوگا؟

(1) چار گاؤں میں خواندگی کا فی صدی تناسب

(2) ایک خاندان کا مختلف مدوں پر ہونے والا خرچ

(3) پانچ فریقوں میں سے ہر فریق کے لڑکے اور لڑکیوں کی تعداد

(4) تین روزہ جاری رہنے والی سائنس نمائش میں معائنہ کے لئے آنے والے لوگوں کی تعداد

(5) جنوری سے جون ہر مہینہ کا آپ کے گاؤں / شہر کا اعلیٰ اور ادنیٰ درجہ حرارت

(6) دو پہیہ سواری چلاتے وقت ہیلمٹ کا استعمال کرنے والے اور نہ کرنے والے 100 خاندانوں کے افراد کی تعداد

آیئے سمجھ لیں

شماریات (Statistics)

کسی بڑے گروہ کا مطالعہ کرنے کے لیے اس میں سے کچھ اجزا کا مناسب چھوٹا گروہ بے ترتیب طریقے سے منتخب کرتے ہیں۔ یہ بڑے گروہ کی نمائندگی کرنے والا گروہ ہوتا ہے۔ اس نمائندہ گروہ کے مطالعہ کے لیے معطیات جمع کی جاتی ہیں۔ یہ معطیات اکثر عددی صورت میں ہوتی ہیں۔ اس کا تجزیہ کر کے کچھ نتائج اخذ کیے جاتے ہیں۔ اس قسم کے مطالعہ کو شماریات (Statistics) نام دیا گیا ہے۔

Statisics لاطینی لفظ ''Status'' سے بنا ہوا ہے۔ اس کا مطلب ریاست کی حالت ہوتا ہے۔ اس بناء پر پہلے شماریات کا علم ریاستوں کے انتظامی امور سے تعلق رکھتا تھا۔ لیکن فی الحال اس علم کا استعمال سبھی شعبوں میں کیا جاتا ہے۔ ''سر رونالڈ ایلمر فشر'' (Sir Ronald Aylmer Fisher) (17/فروری 1890 - 29/جولائی 1962) کو جدید علم شماریات کا بانی تسلیم کیا جاتا ہے۔

معطیات جمع کرنا (Data Collection)

استانی : ایک گاؤں میں ہر خاندان کے پاس کتنی کھیتی ہے۔ ان معلومات کو کس طرح جمع کرو گے؟

رابرٹ : میڈم، گاؤں میں جتنے گھر ہیں ہر ایک کے گھر جا کر کتنی کھیتی ہے اس کا اندراج کریں گے۔

استانی : بالکل صحیح، عزیز طلبہ! کسی مخصوص گروہ کے تعلق سے ہم جو معلومات جمع کرتے ہیں وہ خاص طور پر اعداد کی شکل میں ہوتی ہیں۔ اسے معطیات کہتے ہیں۔

معطیات جمع کرنے سے پہلے اسے ہم کس لیے استعمال کرنے والے ہیں یہ معلوم ہونا ضروری ہے۔ جب کوئی فرد معلومات حاصل کرنے کی جگہ جا کر سوالات پوچھ کر، تعداد گن کر وغیرہ طریقے سے معطیات جمع کرتا ہے تو اس معطیات کو ابتدائی معطیات (Primery Data) کہتے ہیں۔

آفرین : یعنی رابرٹ کے کہنے کے مطابق ہر گھر جا کر کھیتی کی جمع کی گئی معلوات ابتدائی معطیات کہلاتی ہے۔

استانی : شاباش آفرین!

رمیش : لیکن اوپر کی معلومات بہت کم وقت میں جمع کرنی ہو تو؟

استانی : رمیش کا کہنا بالکل صحیح ہے۔ایسے وقت معلومات جمع کرنے کا دوسرا حل کیا ہوسکتا ہے اس پر غور کیجیے۔

فردوس : سر، ہم تلاٹھی آفس میں جا کر ان سے دستیاب کھیتی کے اندراج کی معلومات جمع کر سکتے ہیں۔

استاد : بالکل ٹھیک، کچھ حالات میں وقت کی دستیابی، آلات کی کمی جیسی وجوہات کی بناء پر معطیات جمع کرنے کا اندراج ذاتی طور پر ممکن نہیں ہوتا۔ایسے وقت دوسروں کے ذریعے جمع کی ہوئی معطیات، سرکاری دفتروں کے ذریعے شائع کردہ معطیات، سرکاری شعبوں میں دستیاب معلومات، تحقیقی مضامین کی صورت میں موجود معطیات استعمال کرتے ہیں۔ایسے معطیات کو ثانوی معطیات (Secondry Data) کہتے ہیں۔یعنی فردوس کی رائے کے مطابق تلاٹھی آفس میں جا کر کھیتی کی جمع کی گئی معلومات ثانوی معطیات کہلائے گی۔

ذیل کے مثالیں دیکھیے۔

(i) اخبارات کی معلومات کا استعمال کر کے بنائی گئی جدول میں ثانوی معطیات ہوگی۔

(ii) ریستوراں کی چیزوں کا معیار سمجھنے کے لیے گاہکوں سے ان کی رائے پوچھ کر ملنے والی معلومات ابتدائی معطیات ہوگی۔

(iii) کلاس روم کے طلبہ کی اونچائی ناپ کر کیے گئے اندراج میں معلومات ابتدائی معطیات ہوگی۔

ابتدائی معطیات	ثانوی معطیات
(1) اندراج کرنے کے لیے بہت وقت درکار رہتا ہے۔	(1) فوراً دستیاب ہوسکتی ہے۔
(2) تازہ ترین اور تفصیلی ہوتی ہے۔	(2) اس میں پہلے اندراج کی ہوئی معلومات لینے کی وجہ سے وہ تازہ ترین ہی ہوگی ایسا کہہ نہیں سکتے۔معلومات کی تفصیل کبھی کبھار کم پڑتی ہے۔
(3) درست اور قابل اعتماد ہوتی ہے۔	(3) یہ کم قابل اعتماد ہوسکتی ہے۔

عملی کام : آپ کئی مرتبہ مختلف وجوہات کے لیے معلومات جمع کرتے ہیں۔ایسی 3 سے 4 مثالیں لیجیے اور جمع کی ہوئی معطیات ابتدائی ہے یا ثانوی۔ اس پر بحث کیجیے۔

مشقی سیٹ 7.2

(1) ذیل کے مطابق جمع کی گئی معطیات کی ابتدائی معطیات یا ثانوی معطیات میں جماعت بندی کیجیے۔

(i) براہ راست اسکول کے ہر کلاس روم میں جا کر ہر طالب علم کی حاضری کی معلومات جمع کی گئی۔

(ii) ہر طالب علم کے اونچائی کی معلومات ہیڈ آفس میں فوراً بھیجنے کے لیے اسکول کے جسمانی تعلیم کے شعبہ کے اندراجات سے معلومات حاصل کی گئی۔

(iii) ناندپور کے ہر خاندان کے اسکول نہ جانے والے طلبہ کی معلومات ذاتی طور پر گھر گھر جا کر جمع کی گئی۔

(iv) سائنس پروجیکٹ کے لیے براہ راست جنگل میں جا کر درختوں کا مشاہدہ کر کے معلومات جمع کی گئی۔

آیئے ذرا یاد کریں

معطیات کی جماعت بندی (Classification of Data) :

مثال **(1)** : ایک اسکول کے نویں جماعت کے 50 طلبہ نے پہلے میقاتی امتحان میں ریاضی میں 20 میں سے حاصل کردہ نمبرات درج ذیل ہیں۔

20, 6, 14, 10, 13, 15, 12, 14, 17, 17, 18, 11, 19, 9, 16, 18, 14, 7, 17, 20,
8, 15, 16, 10, 15, 12, 18, 17, 12, 11, 11, 10, 16, 14, 16, 18, 10, 7, 17, 14,
20, 17, 13, 15, 18, 20, 12, 12, 15, 10

یہاں جمع کی گئی عددی معلومات کو کیا کہتے ہیں؟ — خام معطیات

اس کے ہر عدد کو کیا کہتے ہیں؟ — شمارہ

اوپر کی معلومات کے بناء پر ذیل کے سوالات کے جوابات حاصل کیجیے۔

(1) 15 نمبرات حاصل کرنے والے کل کتنے طلبہ ہیں؟ (2) سب سے کم نمبر کتنے ہیں؟

(3) 15 نمبرات سے زیادہ حاصل کرنے والے کل کتنے طلبہ ہیں؟ (4) سب سے زیادہ نمبر کتنے ہیں؟

(5) 16 نمبرات سے کم نمبر حاصل کرنے والے کل کتنے طلبہ ہیں؟

آیئے، بحث کریں

(1) آپ کو اوپر کے سوالوں کے جواب آسانی سے مل گئے یا ہر مرتبہ نمبرات کا معائنہ کرنا پڑا؟

(2) اوپر کے کام میں آسانی لانے کے لیے کیا کر سکتے ہیں۔

شمیم : اوپر کے جواب ہر وقت بغور مشاہدہ سے حاصل ہونے کی وجہ سے کام پیچیدہ اور الجھن والا معلوم ہوتا ہے لیکن دی ہوئی خام معطیات کو صعودی یا نزولی ترتیب میں لکھنے پر آسانی پیدا ہو سکتی ہے۔

شمیم کے کہنے کے مطابق معطیات کے نمبرات صعودی ترتیب میں لکھیں گے۔

6, 7, 7, 8, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 12, 13, 13,
14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 16, 17, 17, 17, 17, 17, 17,
18, 18, 18, 18, 18, 19, 20, 20, 20, 20

معلومات صعودی ترتیب میں لکھنے پر مثال (1) کے پانچوں سوالوں کے جواب دینا آسان ہوتا ہے؟ تصدیق کیجیے۔

تصدیق کرنے پر یہ ظاہر ہوا کہ معطیات کو صعودی ترتیب میں لکھنے پر پانچوں سوالوں کے جواب بالکل آسانی سے مل گئے۔

آیئے ذرا یاد کریں

طوبیٰ : میڈم، معطیات کو جدول کی صورت میں لکھنے پر بھی اوپر کے کام میں زیادہ آسانی پیدا کر سکتے ہیں۔ ہم نے گذشتہ جماعت میں مطالعہ کر چکے ہیں کہ اس جدول کو تعددی تقسیم کی جدول کہتے ہیں۔

استانی : طوبیٰ، بالکل صحیح کہا آپ نے ! اب یہ جدول اوپر کی مثال 1 کے تعلق سے بنایئے۔

مثال (1) میں سب سے کم نمبر 6 اور سب سے زیادہ نمبر 20 ہے۔اس لیے جدول میں شماروں کے ستون میں 6 سے 20 شمارے لکھیے۔دوسرے ستون میں شماریاتی نشان لگائیے اور آخری ستون میں نشان گن کر تعداد لکھیے۔

غیر جماعت بند تعددی تقسیمی جدول

شمارہ نمبر	شماریاتی نشان	طلبہ کی تعداد (f) تعدد
6	|	1
7	||	2
8		
9		
10	𝍸	5
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17	𝍸 |	6
18		
19		
20	||||	4
		کل $N = \Sigma f = 50$

N تمام تعددوں کی جمع ہے

آیئے، بحث کریں

جماعت بند تعددی تقسیم کی جدول **(Grouped Frequency Distribution Data)**

مذکورہ بالا تعددی تقسیمی جدول میں،

(1) یہ جدول بہت بڑی ہے کیا آپ کو ایسا محسوس ہو رہا ہے؟

(2) جب معطیات کے شماروں کی تعداد زیادہ ہو تب کیا یہ جدول بنانا مشکل ہوگا؟

استانی : اوپر کی بحث سے ایسا سمجھ میں آتا ہے کہ جب معطیات کے شماروں کی تعداد زیادہ ہوتی ہے تب غیر جماعت بند تعددی تقسیمی جدول کی وسعت زیادہ ہوتی ہے۔اسے بنانے میں بہت وقت درکار رہتا ہے۔جدول کی وسعت اور وقت کی بچت کے لیے کیا کوئی ترکیب تجویز پیش کر سکتے ہیں؟

روہیت : سر ایسے وقت معطیات کے گروہ بنائے جائیں۔

استانی : شاباش روہیت! معطیات کے گروہ بنانا یعنی جماعت تیار کرنے پر معطیات کو آسانی سے کم وقت میں ظاہر کر سکتے ہیں۔ ایسے جدول کو ہی جماعت بند تعددی تقسیمی جدول کہتے ہیں۔

یہ جدول دو طریقوں سے ظاہر کر سکتے ہیں۔ (1) مشمولی طریقہ (غیر مسلسل طریقہ) اور (2) غیر مشمولی یا مستثنائی طریقہ

(1) مشمولی طریقہ (غیر مسلسل طریقہ) (Inclusive Method)

6, 7, 7, 8, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 12, 13, 13,
14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 16, 17, 17, 17, 17, 17, 17,
18, 18, 18, 18, 18, 19, 20, 20, 20, 20

اوپر کی معطیات میں سب سے چھوٹا شمارہ ▭ اور سب سے بڑا شمارہ ▭ ہے۔ سب سے بڑا اور سب سے چھوٹے شمارے کا فرق $20 - 6 = 14$ ہے۔ اسی فرق کو ہی معطیات کی وسعت کہتے ہیں۔ اس وسعت کو خیال میں رکھ کر معطیات کے مناسب ایسے کون سے گروہ بنائے جا سکتے ہیں؟

(i) 6 سے 8، 9 سے 11، 12 سے 14، 15 سے 17، 18 سے 20 یا

(ii) 6 سے 10، 11 سے 15، 16 سے 20 اس طرح جماعت بنا سکتے ہیں۔

6 سے 10، 11 سے 15 اور 16 سے 20 جماعتوں کو لے کر اوپر کی معطیات کا تعددی تقسیمی جدول بنائیں گے۔

جماعت بند تعددی تقسیمی جدول (مشمولی طریقہ)

(طلبہ کی تعداد) (*f*) تعدد	شماریاتی نشان	جماعت
10	𝍸 𝍸	6 سے 10
		11 سے 15
20		16 سے 20
کل $N = \Sigma f = 50$		

اس جدول کو بناتے وقت 6، 10 اور اس کے درمیان تمام شماروں کا 6 سے 10 جماعت میں شامل کرتے ہیں۔ جدول بنانے کے اس طریقے کو مشمولی طریقہ کہتے ہیں۔ 6 سے 10، 11 سے 15، 16 سے 20 ان جماعتوں کو غیر مسلسل وقفہ جماعت بھی کہتے ہیں۔

آیئے سمجھ لیں

علم شماریات کی کچھ بنیادی اصطلاحات (Basic term in Statistics)

(1) جماعت **(Class)** : شماروں کے آسان اور مناسب جماعت کے گروہ کو جماعت کہتے ہیں۔
جماعت 6 سے 10، 11 سے 15 وغیرہ کو 6–10، 11–15 لکھا جاتا ہے۔

(2) جماعت کی حدیں **(Class limits)** : جماعت کو ظاہر کرنے والے اعداد کو جماعت کی حدیں کہتے ہیں۔
جماعت 6 سے 10 کی نچلی حد جماعت 6 اور اوپری حد جماعت 10 ہے۔

(3) تعدد **(Frequency)** : ہر جماعت میں جتنے شمارے ہوتے ہیں، ان تمام شماروں کے کل تعداد کو اس جماعت کا تعدد کہتے ہیں۔
مندرجہ بالا جدول میں جماعت 11 سے 15 میں 20 شمارے شامل ہیں اس لیے جماعت 11–15 کا تعدد 20 ہے۔

(4) طول جماعت (Class width or Class interval) : مسلسل جماعتیں دی ہوئی ہوں تو متواتر آنے والی دو جماعتوں کے نچلی (اوپری) حد جماعتوں کے فرق کو طول جماعت یا جماعت کا عرض یا جماعت کی وسعت کہتے ہیں۔

مثال : 5 – 10 ,10 – 15 ،15 – 20 ، .... ہو تو 5 = 5 - 10 = طول جماعت

(5) وسط جماعت (Class mark) : جماعت کی نچلی اور اوپری حد جماعت کے اوسط کو وسط جماعت کہتے ہیں۔

$$\text{وسط جماعت} = \frac{\text{نچلی حد جماعت} + \text{اوپری حد جماعت}}{2}$$

مثال : $11 - 15$ جماعت کا وسط جماعت $= \dfrac{\square + \square}{2} = \dfrac{26}{2} = 13$

(2) غیر مشمولی یا مستثنائی طریقہ (Exclusive Method)

مثال : 6، 10، 10.3، 11، 15.7، 19، 20، 12، 13 یہ شمارے دیے ہوئے ہیں۔

جماعت 6 – 10، 11 – 15، 16 – 20 لے کر جماعت بند تعدادی جدول بنائیے۔

حل :

جماعت (شمارے)	شماریاتی نشان	تعدد (*f*)
6 – 10	||	2
11 – 15	|||	3
16 – 20	||	2

اوپر کی جدول میں دیے ہوئے شماروں میں سے 10.3 اور 15.7 ان شماروں کو شامل نہیں کر سکتے۔ کیونکہ 10.3 اور 15.7 یہ اعداد 16 – 20, 6 – 10 ,11 – 15 ان میں سے کسی بھی جماعت میں شامل نہیں ہیں۔ اس لیے جماعت کی نوعیت بدلنا ہوگی۔ اس لیے جماعت 5 – 10، 10–15، 15 – 20، ... اس طرح مسلسل لکھنے پر اس قسم کے سوال پیدا نہیں ہوں گے۔ لیکن 10 اس شمارے کا اندراج 10–5، 15 – 10 ان میں سے کس جماعت میں کیا جائے یہ مسئلہ پیدا ہوتا ہے۔ یہ مسئلہ دور کرنے کے لیے شمارہ 10 جماعت 10–5 میں نہ لیتے ہوئے جماعت 15–10 میں شامل کریں۔ ایسا مفروضہ مان لیا گیا ہے۔ اس لیے شمارہ 10 جماعت 15 –10 میں ہوگا۔ اس طریقے کو غیر مشمولی یا مستثنائی طریقہ کہتے ہیں اس طرح جماعت بنانے سے 10.3 اور 15.7 جیسے اعداد جدول میں شامل کرنا آسان ہو جاتا ہے۔

اب اس اصول کے مطابق جماعت بنائیں اور اوپر دیا ہوا مفروضہ تسلیم کرتے ہوئے بتائی ہوئی جدول دیکھیے۔

جماعت بند تعدادی تقسیمی جدول (غیر مشمولی طریقہ)

جماعت (مسلسل) (شمارے)	شماریاتی نشان	(طلبہ کی تعداد) تعدد (*f*)
5 – 10	|	1
10 – 15	~~||||~~	5
15 – 20	||	2
20 – 25	|	1

اسے دھیان میں رکھیں

تعددی تقسیمی جدول

→ غیر جماعت بند

طلبہ کی تعداد	نویں جماعت میں طلبہ کی عمر
12	14
23	15
10	16

→ جماعت بند

→ مشمولی طریقہ (وقفہ جماعت)

طلبہ کی تعداد	جوتے کا نمبر
12	2-4
29	5-7
7	8-10

→ مشمولی طریقہ میں (مسلسل جماعت)

طلبہ کی تعداد	اونچائی (سم)
18	145-150
27	150-155
3	155-160

مشقی سیٹ 7.3

(1) جماعت 20 سے 25 کی نچلی حد جماعت اور اوپری حد جماعت لکھیے۔

(2) جماعت 35 سے 40 کا وسط جماعت معلوم کیجیے۔

*(3) ایک جماعت کا وسط جماعت 10 ہے، طول جماعت 6 ہے تو وہ جماعت کون سی ہوگی؟

(4) درج ذیل جدول مکمل کیجیے۔

تعدد (*f*) طلبہ کی تعداد	شماریاتی نشان	جماعت (عمر سال میں)
☐	𝍸	12 - 13
☐	𝍸 𝍸 𝍷𝍷𝍷𝍷	13 - 14
☐		14 - 15
☐	𝍷𝍷𝍷𝍷	15 - 16
کل $N = \Sigma f = 50$		

(5) ایک اسکول سبز فوج نیچر کلب (ہریت سینا) کے 45 طالب علموں میں سے ہر ایک کے ذریعے کی گئی شجر کاری کی تعداد ذیل میں دی ہوئی ہے۔

3, 5, 7, 6, 4, 3, 5, 4, 3, 5, 4, 7, 5 , 3, 6, 6, 5, 3, 4, 5, 7, 3, 5, 6, 4, 4, 3, 5, 6, 6, 4, 3, 5, 7, 3, 4, 5, 7, 6, 4, 3, 5, 4, 4, 7.

اس معطیات کے لیے غیر جماعت بند تعددی تقسیم کی جدول تیار کیجیے۔

(6) π کی 50 عشری مقام تک قیمت دی ہوئی ہے۔

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510

اس بنا پر علامت عشاریہ کے بعد ہندسوں کی غیر جماعت بند تعددی تقسیم کی جدول تیار کیجیے۔

(7) ذیل کے جدول میں دی ہوئی معلومات کی بناء پر طول جماعت معلوم کیجیے اور غیر مشمولی اور مشمولی جماعت کے تعددی تقسیم کے جدول تیار کیجیے۔

(i)

وسط جماعت	تعدد
5	3
15	9
25	15
35	13

(ii)

وسط جماعت	تعدد
22	6
24	7
26	13
28	4

(8) ایک اسکول کے نویں جماعت کے 45 طلبہ کو کمپاس بکس میں موجود پنسل کی لمبائی ناپنے کے لیے کہا گیا ہے۔ وہ معطیات سینٹی میٹر میں درج ذیل کے مطابق ہے۔

16, 15, 7, 4.5, 8.5, 5.5, 5, 6.5, 6, 10, 12,
13, 4.5, 4.9, 16, 11, 9.2, 7.3, 11.4, 12.7, 13.9, 16,
5.5, 9.9, 8.4, 11.4, 13.1, 15, 4.8, 10, 7.5, 8.5, 6.5,
7.2, 4.5, 5.7, 16, 5.7, 6.9, 8.9, 9.2, 10.2, 12.3, 13.7,
14.5, 10

0-5, 5-10, 10-15, ... کے مطابق جماعت لے کر غیر مشمولی طریقے سے جماعت بند تعددی تقسیم کی جدول تیار کیجیے۔

(9) ایک گاؤں میں امداد باہمی دودھ سینٹر پر 50 لوگ روزانہ کتنے لٹر دودھ جمع کرتے ہیں وہ معلومات ذیل میں دی ہوئی ہے۔

27, 75, 5, 99, 70, 12, 15, 20, 30, 35, 45, 80,
77, 90, 92, 72, 4, 33, 22, 15, 20, 28, 29, 14,
16, 20, 72, 81, 85, 10, 16, 9, 25, 23, 26, 46,
55, 56, 66, 67, 51, 57, 44, 43, 6, 65, 42, 36,
7, 35

مناسب جماعت لے کر جماعت بند تعددی تقسیم کی جدول تیار کیجیے۔

(10) ایک ادارے نے گاؤں کے 38 لوگوں میں سے ہر ایک سے 'معذور بہبودی فنڈ' جمع کیا۔ جو ذیل میں دیا ہوا ہے۔

101, 500, 401, 201, 301, 160, 210, 125, 175, 190, 450, 151,
101, 351, 251, 451, 151, 260, 360, 410, 150, 125, 161, 195,
351, 170, 225, 260, 290, 310, 360, 425, 420, 100, 105, 170,
250, 100

(i) (100–149, 150–199, 200–249, ...) اس طرح جماعت لے کر جماعت بند تعددی تقسیم کی جدول تیار کیجیے۔

(ii) جدول کی مدد سے بتائیے کہ 350 روپے اور اس سے زیادہ فنڈ دینے والے اشخاص کی تعداد کتنی ہے؟

آیئے سمجھ لیں

اوپری حد جماعت سے کم تر اجتماعی تعددی جدول (Less than Cummulative Frequency)

مثال : نویں جماعت میں 50 طلبہ نے پہلے میقاتی امتحان میں ریاضی میں 40 میں سے حاصل کردہ نمبرات کی تعددی تقسیمی جدول ذیل میں دی ہوئی ہے۔

جماعت	تعدد (f) (طلبہ کی تعداد)
0 - 10	02
10 - 20	12
20 - 30	20
30 - 40	16
	کل N = 50

(1) جدول کی مدد سے مندرجہ ذیل خالی چوکون پر کیجیے۔

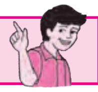
(i) جماعت 10 سے 20 اس جماعت کی نچلی حد جماعت ☐ اور اوپری حد جماعت ☐ ہے۔

(ii) 10 سے کم نمبرات حاصل کرنے والے طلبہ کتنے ہیں؟ [2]

(iii) 20 سے کم نمبرات حاصل کرنے والے طلبہ کتنے ہیں؟ 2 + ☐ = 14

(iv) 30 سے کم نمبرات حاصل کرنے والے طلبہ کتنے ہیں؟ ☐ + ☐ = 34

(v) 40 سے کم نمبرات حاصل کرنے والے طلبہ کتنے ہیں؟ ☐ + ☐ = 50



اسے دھیان میں رکھیں

کسی مخصوص جماعت کا تعدد اور اس جماعت کے پہلے کے تمام جماعت کے تعددوں کا مجموعہ کو اس جماعت کی اوپری حد جماعت سے کم تر اجتماعی تعدد (Less than Cummulative Frequency) کہتے ہیں۔ مختصراً اسے ''سے کم تر اجتماعی تعدد'' بھی کہتے ہیں۔

اوپری حد جماعت سے کم تر اجتماعی تعددی جدول کا مطلب

جماعت	اجتماعی تعدد	اوپری حد سے کم تر اجتماعی تعدد کا مطلب
0 - 10	2	2 طلبہ کے مارکس 10 سے کم ہیں
10 - 20	14	14 طلبہ کے مارکس 20 سے کم ہیں
20 - 30	34	34 طلبہ کے مارکس 30 سے کم ہیں
30 - 40	50	50 طلبہ کے مارکس 40 سے کم ہیں
	کل = 50	

جماعت (نمبر)	تعدد	سے کم تر اجتماعی تعدد
0 - 10	2	2
10 - 20	12	2 + 12 = ☐
20 - 30	20	☐ + 20 = 34
30 - 40	10	34 + ☐ = 50
	کل = 50	

(2) نچلی حد جماعت کے مساوی یا سے زیادہ ترقسم کی اجتماعی تعددی جدول

نچلی حد جماعت کے مساوی یا نچلی حد جماعت سے زیادہ کا مطلب	اجتماعی تعدد	جماعت
50 طلبہ نے 0 یا 0 سے زیادہ مارکس حاصل کیے ہیں	50	0 - 10
48 طلبہ نے 10 یا 10 زیادہ مارکس حاصل کیے ہیں	48	10 - 20
36 طلبہ نے 20 یا 20 زیادہ مارکس حاصل کیے ہیں	36	20 - 30
16 طلبہ نے 30 یا 30 زیادہ مارکس حاصل کیے ہیں	16	30 - 40

جماعت	تعدد	اجتماعی تعدد
0 - 10	2	50
10 - 20	12	50 – 2 = 48
20 - 30	20	4 – 12 = 36
30 - 40	16	36 – 20 = 16
	کل = 50	

مثال : ایک اسپورٹس کلب میں ٹیبل ٹینس کے مقابلے میں شریک کھلاڑیوں کی عمروں کی جماعت بند تعدد ذیل میں دیا ہوا ہے۔ اس بناء پر نچلی حد جماعت یا اس سے زیادہ تر اجتماعی تعددی جدول مکمل کیجیے۔

حل : نچلی حد جماعت سے زیادہ تر اجتماعی تعددی جدول

سے زیادہ قسم کی اجتماعی تعدد	تعدد (طلبہ کی تعداد)	شماریاتی نشان	عمر (سال)
50	9	卌 ||||	10 – 12
□ – 9 = 41	□	卌 卌 卌 卌 |||	12 – 14
41 – 23 = □	□	卌 卌 |||	14 – 16
□ – 13 = □	5	卌	16 – 18
	کل N = 50		

مشقی سیٹ 7.4

(1) ذیل کی اجتماعی تعددی جدول مکمل کیجیے۔

سے کم تر قسم کی اجتماعی تعدد	تعدد (طلبہ کی تعداد)	جماعت (اونچائی سم میں)
05	05	150 – 153
05+ □ = □	07	153 – 156
□ + 15 = □	15	156 – 159
□ + □ = 37	10	159 – 162
37+5=42	05	162 – 165
□ + □ = 45	03	165 – 188
	کل N = 45	

(2) ذیل کی اجتماعی تعددی جدول مکمل کیجیے۔

جماعت (ماہانہ آمدنی روپے میں)	تعدد (افراد کی تعداد)	سے زیادہ تر یا اُس کے مساوی اجتماعی تعدد
1000 – 5000	45	....
5000 – 10,000	19	....
150,000 – 15,000	16	....
15,000 – 20,000	02	....
20,000 – 25,000	05	....
	کل N = 87	

(3) ایک کلاس کے 62 طلبہ کو ریاضی مضمون میں 100 مارکس میں سے حاصل کردہ مارکس ذیل میں دیے ہوئے ہیں۔ جماعت ...20 –10 , 10–0 کا استعمال کر کے تعددی جدول اور اس سے زیادہ تر قسم کی اجتماعی تعددی جدول تیار کیجیے۔

55,	60,	81,	90,	45,	65,	45,	52,	30,	85,	20,	10,
75,	95,	09,	20,	25,	39,	45,	50,	78,	70,	46,	64,
42,	58,	31,	82,	27,	11,	78,	97,	07,	22,	27,	36,
35,	40,	75,	80,	47,	69,	48,	59,	32,	83,	23,	17,
77,	45,	05,	23,	37,	38,	35,	25,	46,	57,	68,	45,
47,	49										

بنائے گئے جدول کی بنا پر ذیل کے سوالوں کے جواب لکھیے۔

(i) 40 یا 40 سے زیادہ مارکس حاصل کرنے والے طلبہ کتنے ہیں؟

(ii) 90 یا 90 سے زیادہ مارکس حاصل کرنے والے طلبہ کتنے ہیں؟

(iii) 60 یا 60 سے زیادہ مارکس حاصل کرنے والے طلبہ کتنے ہیں؟

(iv) جماعت 10-0 کا سے زیادہ تر یا اس کے مساوی اجتماعی تعدد کتنا ہے؟

(4) اوپر کے مثال (3) میں دی ہوئی سے کم تر اجتماعی تعددی جدول تیار کر کے اس کی مدد سے درج ذیل سوالوں کے جواب لکھیے۔

(i) 40 سے کم مارکس حاصل کرنے والے طلبہ کتنے ہیں؟ (ii) 10 سے کم مارکس حاصل کرنے والے طلبہ کتنے ہیں؟

(iii) 60 سے کم مارکس حاصل کرنے والے طلبہ کتنے ہیں؟ (iv) جماعت 60-50 کی سے کم تر اجتماعی تعدد کتنا ہے؟

آیئے سمجھ لیں

مرکزی رجحان کی پیمائشیں (Measures of Central Tendency)

مرکزی رجحان : سروے سے حاصل ہوئی معطیات میں عام طور پر ایک خصوصیت ملتی ہے۔ معطیات کے کسی عدد کے ارد گرد دیگر اعداد کا ہجوم زیادہ نظر آتا ہے۔ گروہ کے اس خصوصیت کو گروہ کی مرکزی رجحان کی خصوصیت کہتے ہیں۔

گروہ کے جس عدد کے نزدیک دیگر اعداد کا مجمع (ہجوم) زیادہ ہوتا ہے، وہ عدد اس کی نمائندگی کرتا ہے ایسا مان لیا جاتا ہے۔ ایسے عدد کو مرکزی رجحان کی پیمائش کہتے ہیں۔

شماریات میں خصوصاً ذیل کے مطابق مرکزی رجحان کی پیمائشیں استعمال کی جاتی ہیں۔

(I) میانیہ **(Mean)** : معطیات کے تمام اعداد کا حسابی وسط اس معطیات کا میانہ کہلاتا ہے۔

$$\text{معطیات کا 'میانیہ'} = \frac{\text{معطیات کے تمام شماروں کا مجموعہ}}{\text{معطیات کے شماروں کی تعداد}}$$

مثال **(1)** : 25, 30, 27, 23 اور 25 ان شماروں کا میانہ معلوم کیجیے۔

حل :
$$\text{میانیہ} = \frac{25+30+27+23+25}{5} = \frac{130}{5} = 26$$

مثال **(2)** : جماعت نہم کے 35 طلبہ کو ششماہی امتحان میں الجبرا میں 40 میں سے حاصل ہوئے مارکس ذیل کے مطابق ہیں۔ اس بناء پر میانہ معلوم کیجیے۔

40, 35, 30, 25, 23, 20, 14, 15, 16, 20, 17, 37,
37, 20, 36, 16, 30, 25, 25, 36, 37, 39, 39, 40,
15, 16, 17, 30, 16, 39, 40, 35, 37, 23, 16.

حل : یہاں شماروں کی تعداد زیادہ ہے اس لیے مجموعہ تو معلوم کر سکتے ہیں لیکن یہ پیچیدہ ہوگا۔ یہاں 3 طلبہ کو 30 مارکس ہیں۔ ان کے مارکس کا مجموعہ $30+30+30=90$ اس طرح کرنے کے بجائے $30\times 3=90$ اس طرح کرنا آسان ہوگا۔ اس کے لیے تعددی جدول کار آمد ہوتی ہے۔

مارکس	طلبہ کی تعداد	$f_i \times x_i$
14	1	14 × 1 = 14
15	2	15 × 2 = ...
16	5	16 × .... = ...
17	2	17 × 2 = 34
20	3	.... × 3 = ...
23	2	23 × 2 = ...
25	3	25 × 3 = ...
30	3	.... × .... = ...
35	2	35 × 2 = 70
36	2	.... × .... = ...
37	4	.... × .... = ...
39	3	39 × 3 = 117
40	3	.... × .... = 120
	N =..........	$\sum f_i x_i = 956$

متصلہ جدول میں :

14 × 1 + 15 × 2 + ...
+ 40 × 3
حاصل ضربوں کی جمع 956 ہے۔
14 × 1، 15 × 2، ..... 40 × 3
یہ شمارے ہیں۔ اور اُن کے نظیری تعدد یعنی x اور f کے حاصل ضرب ہیں۔
پہلا شمارہ 1 × 14 اور پہلے تعدد کے حاصل ضرب کو $f_1 \times x_1$ لکھتے ہیں۔
دوسرا شمارہ 2 × 15 اور دوسرے تعدد کو حاصل ضرب $f_2 \times x_1$ لکھتے ہیں۔

عام طور پر i - واں شمارہ اور اس کا نظیری i - واں تعدد کے حاصل ضرب کو $f_i \times x_i$ لکھتے ہیں۔
شماریات میں حاصل ضربوں کی جمع کو ظاہر کرنے کے لیے Σ (سگما) لاطینی حرف استعمال کرتے ہیں۔
$f_1 \times x_1 + f_2 \times x_2 + ... f_i \times x_i$ حاصل ضربوں کی جمع کو مختصراً $\Sigma f_i \times x_i$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$\text{میانہ } \bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{N} = \frac{956}{35}$$
$$= 27.31 \text{ تقریباً}$$

اس لیے دیے ہوئے معطیات کا میانہ 27.3 ہے۔

وسطانیہ (Median) : معطیات کو صعودی یا نزولی ترتیب میں لکھتے ہیں۔اس ترتیب میں بالکل درمیان میں آنے والے عدد کو ان معطیات کا وسطانیہ کہتے ہیں۔

معطیات کے شماروں کی تعداد جفت ہو تو وسط میں آنے والے دو اعداد کے اوسط کو وسطانیہ مانتے ہیں۔

مثال : 72, 66, 87, 92, 63, 78, 54 ان معطیات کا وسطانیہ معلوم کیجیے۔

حل : دیے ہوئے شماروں کو صعودی ترتیب میں لکھنے پر 54, 63, 66, 72, 78, 87, 92

اس ترتیب میں چوتھا عدد درمیان میں آتا ہے۔وہ 72 ہے۔

$\therefore$ دیے ہوئے معطیات کا وسطانیہ = 72

مثال (2) : 30, 25, 32, 23, 42, 36, 40, 33,21, 43 ان معطیات کا وسطانیہ معلوم کیجیے۔

حل : دیے ہوئے شماروں کو چڑھتی (صعودی) ترتیب میں لکھیں تو 21, 23, 25, 30, 32, 33, 36, 40, 42, 43

یہاں شماروں کی تعداد جفت یعنی 10 ہے۔

یہاں، پانچواں اور چھٹا دو اعداد درمیان میں آتے ہیں۔وہ بالترتیب 32 اور 33 ہیں۔

$\therefore$ معطیات کا وسطانیہ $= \dfrac{32+33}{2} = \dfrac{65}{2} = 32.5$

آیئے ذرا یاد کریں

معطیات کے شماروں کی تعداد n ہو تو

(i) n طاق عدد ہو تو کون سا شمارا اس معطیات کا وسطانیہ ہوگا؟

(ii) n جفت عدد ہو تو کن دو شماروں کا اوسط ان معطیات کا وسطانیہ ہوگا؟

(3) کثیریہ (Mode) : معطیات میں سب سے زیادہ مرتبہ آنے والا شمارہ ہی اس معطیات کا کثیریہ کہلاتا ہے۔

مثال : 90, 55, 67, 55, 75, 75, 40, 35, 55, 95 اس معطیات کا کثیریہ معلوم کیجیے۔

حل : معطیات کو چڑھتی ترتیب میں لکھنے پر کون سا شمارہ سب سے زیادہ مرتبہ آیا ہے اسے پہچاننے میں آسانی ہو جائے گی۔

دی ہوئی معطیات کی چڑھتی ترتیب : 35, 40, 55, 55, 55, 67, 75, 90, 95

اس بناء پر سب سے زیادہ مرتبہ آنے والا شمارہ = 55

معطیات کا کثیریہ = 55

مثال (2) : ایک کارخانے کے مزدوروں کی عمریں ذیل کی جدول میں دی ہوئی ہیں۔

عمر (سال)	19	21	25	27	30
مزدور	5	15	13	15	7

اس بناء پر ان کی عمروں کا کثیریہ معلوم کیجیے۔

حل : یہاں سب سے زیادہ تعدد 15 ہے۔لیکن دو شماروں کا تعدد 15 ہے۔

$\therefore$ کثیریہ = 21 اور 27

اس لیے عمروں کا کثیریہ 21 سال اور 27 سال

مشقی سیٹ 7.5

(1) مکندکی 7 سالوں کی سویابین فصل کی فی ایکڑ پیداوار کوئنٹل میں 10, 7, 5, 3, 9, 6, 9 ہے۔اس بناء پر فی ایکٹر پیداوار کا میانیہ معلوم کیجیے۔

(2) ذیل کے معطیات کا وسطانیہ معلوم کیجیے 59, 75, 68, 70, 74, 75, 80

(3) ریاضی کے ہوم ورک میں 7 طلبہ کو 100 مارکس میں سے حاصل کردہ مارکس ذیل کے مطابق ہیں۔

99, 100, 95, 100, 100, 80, 90 اس کی مدد سے حاصل کردہ مارکس کا کثیریہ معلوم کیجیے۔

(4) ایک کارخانے کے 30 مزدوروں کو ذیل کے مطابق ماہانہ تنخواہ روپے میں ملتی ہے۔

5000, 7000, 3000, 4000, 4000, 3000, 3000, 3000, 8000, 4000,
4000, 9000, 3000, 5000, 5000, 4000, 4000, 3000, 5000, 5000,
6000, 8000, 3000, 3000, 6000, 7000, 7000, 6000, 6000, 4000

اس معطیات کی مدد سے مزدوروں کے ماہانہ تنخواہ کا میانیہ معلوم کیجیے۔

(5) ایک ٹوکری کے 10 ٹماٹروں کا فی ٹماٹر وزن گرام میں 60, 70, 90, 95, 50, 65, 70, 80, 85, 95 ہے۔

اس بناء پر ٹماٹروں کے وزن کا وسطانیہ معلوم کیجیے۔

(6) ہاکی کے ایک کھلاڑی کے ذریعے 9 مقابلوں میں کیے گئے گول ذیل کے مطابق ہیں۔

5, 4, 0, 2, 2, 4, 4, 3, 3 اس بناء پر میانیہ، وسطانیہ اور کثیریہ معلوم کیجیے۔

(7) 50 شماروں کا میانیہ 80 ہے۔لیکن بعد میں ایسا سمجھ میں آیا کہ اس میں 19 واں شمارہ غلطی سے 91 لیا گیا ہے تو درستی کے بعد میانیہ معلوم کیجیے۔

(8) ذیل میں 10 شمارہ چڑھتی ترتیب میں لکھے ہوئے ہیں۔ان کا وسطانیہ 11 ہے۔

2, 3, 5, 9, $x + 1$, $x + 3$, 14, 16, 19, 20 اس بناء پر x کی قیمت معلوم کیجیے۔

(9) 35 شماروں کا میانیہ 20 ہے۔ان میں سے پہلے 18 شماروں کا میانیہ 15 اور آخری 18 شماروں کا میانیہ 25 ہو تو 18 واں شمارہ معلوم کیجیے۔

(10) پانچ شماروں کا میانیہ 50 ہے۔ان میں سے ایک شمارہ کم ہو جائے تو میانیہ 45 ہو جاتا ہے۔وہ شمارہ معلوم کیجیے۔

(11) ایک کلاس میں 40 طلبہ ہیں۔ان میں 15 لڑکے ہیں۔ایک امتحان میں لڑکوں کو حاصل ہوئے مارکس کا میانیہ 33 اور لڑکیوں کی مارکس کا میانیہ 35 ہے۔اس معلومات کی بناء پر کلاس میں کل طلبہ کے حاصل کردہ مارکس کا میانیہ معلوم کیجیے۔

(12) 10 طلبہ کے وزن کلوگرام میں ذیل کے مطابق ہیں۔

40, 35, 42, 43, 37, 35, 37, 42, 37 اس بناء پر کثیریہ معلوم کیجیے۔

(13) ذیل کے جدول میں کچھ خاندانوں کے 14 سال سے چھوٹی اولاد کی تعداد دی ہوئی ہے۔اس بناء پر 14 سال سے چھوٹی اولاد کی تعداد کا کثیریہ معلوم کیجیے۔

اولاد کی تعداد	1	2	3	4
خاندان (تعدد)	15	25	5	5

(14) ذیل کی معطیات کا کثیریہ معلوم کیجیے۔

شمارہ مارکس	35	36	37	38	39	40
طلبہ کی تعداد	09	07	09	04	04	02

'مرکزی رجحان کی کون سی پیائش لینا مناسب ہوتا ہے؟' اس سوال کا جواب کہ اسے کس مقصد کے لیے منتخب کرنا ہے، اس بات پر منحصر ہوتا ہے۔

فرض کیجیے کسی کرکٹ کھلاڑی نے مسلسل 11 مقابلوں میں بالترتیب 41, 58, 35, 80, 23, 12, 63, 48, 107, 9 اور 73 رن بنائے۔ اس کی کل کارکردگی طے کرتے وقت اس نے ہر مقابلے میں بنائے ہوئے رن کی تعداد کو ذہن میں لینا ضروری ہے۔ اس لیے رنوں کے مرکزی رجحان کی پیائش ''میانیہ'' کے ذریعے طے کرنا مناسب ہوگا۔

اسی طرح ریڈی میڈ کپڑے بنانے والی کسی کمپنی کو کس ناپ کے شرٹ زیادہ تعداد میں سلوانا طے کرنا ہے۔ اس کے لیے ان میں (34, 36, 38, 40, 42, 44 میں سے) کس ناپ کے شرٹ لوگ زیادہ سے زیادہ استعمال کرتے ہیں اس کا سروے کرکے معلوم کرنا ہوگا۔ یعنی مرکزی رجحان کی پیائش کثیریہ کا منتخب کرنا مناسب ہوگا۔

مجموعہ سوالات 6

(1) مناسب متبادل منتخب کیجیے۔

(i) ذیل میں سے کونسی معطیات ابتدائی معطیات نہیں ہے۔

(A) کلاس میں جاکر طلبہ کی حاضری کی معلومات حاصل کی۔

(B) گھر گھر جاکر براہ راست افراد کی تعداد کی معلومات جمع کی۔

(C) تلاٹھی کے پاس جاکر گاؤں کے ہر کسان کی سویابین فصل کے لیے زیر کاشت زمین کے رقبے کا اندراج کرنا۔

(D) ذاتی طور پر معائنہ کرکے نالوں کی صاف صفائی کی معلومات حاصل کرنا۔

(ii) جماعت 25-35 کی اوپری حد جماعت کون سی ہے؟

(A) 25 (B) 35 (C) 60 (D) 30

(iii) جماعت 25-35 کا وسط جماعت کون سا ہے؟

(A) 25 (B) 35 (C) 60 (D) 30

(iv) جماعت .... ,0-10, 10-20, 20-30 کے تعددی جدول میں شمارہ 10 کس جماعت میں شامل کریں گے؟

(A) 0 – 10 (B) 10 – 20 (C) 0 – 10 اور 10 – 20 دونوں میں (D) 20 – 30

*(v) اگر $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ کا میانیہ $\bar{x}$ اور $y_1, y_2, \ldots\ldots y_n$ کا میانیہ $\bar{y}$ ہو اور $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n, y_1, y_2, \ldots\ldots y_n$ کا میانیہ $\bar{z}$ ہو تو $\bar{z} = ?$

(A) $\frac{\bar{x}+\bar{y}}{2}$ (B) $\bar{x}+\bar{y}$ (C) $\frac{\bar{x}+\bar{y}}{n}$ (D) $\frac{\bar{x}+\bar{y}}{2n}$

*(vi) پانچ اعداد کا میانیہ 50 ہے۔ اس میں سے 4 اعداد کا میانیہ 46 ہے تو پانچواں عدد کون سا ہوگا؟

(A) 4 (B) 20 (C) 434 (D) 66

*(vii) 100 شماروں کا میانیہ 40 ہے۔ اگر اس میں 9 واں شمارہ 30 کی بجائے 70 لیا جائے اور باقی ماندہ شمارے ویسے ہی رکھے جائیں تو نیا میانیہ کتنا ہے؟

(A) 40.6 (B) 40.4 (C) 40.3 (D) 40.7

(viii) 19, 19, 15, 20, 25, 15, 20, 15 اس معطیات کا کثیریہ کتنا ہے؟

(A) 15 (B) 20 (C) 19 (D) 25

(ix) معطیات 7, 10, 7, 5, 9, 10 کا وسطانیہ کتنا ہوگا؟

(A) 7 (B) 9 (C) 8 (D) 10

(x) ذیل کے جدول کے مطابق جماعت 30–40 کی اوپری حد جماعت سے کم تر اجتماعی تعدد کتنا ہوگا؟

جماعت	0 – 10	20 – 10	30 – 20	30 – 40	40 – 50
تعدد	7	3	12	13	2

(A) 13 (B) 15 (C) 35 (D) 22

(2) 20 ملازموں کی تنخواہ کا میانیہ 10250 روپے ہے۔ اگر اس میں دفتر کے آفیسر کی تنخواہ جمع کی جائے تو میانیہ 750 روپے سے بڑھ جاتا ہے۔ تو دفتر کے آفیسر کی تنخواہ معلوم کیجیے۔

(3) '9' اعداد کا میانیہ 77 ہے۔ اگر اس میں مزید ایک عدد جمع کیا جاتا ہے تو میانیہ میں 5 کا اضافہ ہوتا ہے تو وہ عدد معلوم کیجیے۔

(4) ایک شہر کے ایک مہینے کی روزانہ کی زیادہ سے زیادہ درجہ حرارت سیلسیس میں ذیل کے مطابق ہے۔ مناسب جماعت لے کر جماعت بند تعددی تقسیمی جدول (مسلسل جماعت) تیار کیجیے۔

29.2, 29.0, 28.1, 28.5, 32.9, 29.2, 34.2, 36.8, 32.0, 31.0,
30.5, 30.0, 33, 32.5, 35.5, 34.0, 32.9, 31.5, 30.3, 31.4,
30.3, 34.7, 35.0, 32.5, 33.5, 29.0, 29.5, 29.9, 33.2, 30.2

جدول کی مدد سے ذیل کے سوالوں کے جواب لکھیے۔

(i) اعلیٰ درجہ حرارت 34°C سے کم تر درجہ حرارت کے دن کتنے ہیں؟

(ii) اعلیٰ درجہ حرارت 34°C یا اس سے زیادہ تر درجہ حرارت کے دن کتنے ہیں؟

(5) اگر ذیل کے شماروں کا میانیہ 20.2 ہو تو p کی قیمت معلوم کیجیے۔

x_i	10	15	20	25	30
f_i	6	8	p	10	6

(6) شاہین ہائی اسکول، کراڈ کی نویں جماعت کے 68 طلبہ نے ریاضی کے تحریری امتحان میں 80 مارکس میں سے حاصل کردہ مارکس ذیل کے مطابق دیے ہوئے ہیں۔

70, 50, 60, 66, 45, 46, 38, 30, 40, 47, 56, 68,
80, 79, 39, 43, 57, 61, 51, 32, 42, 43, 75, 43,
36, 37, 61, 71, 32, 40, 45, 32, 36, 42, 43, 55,
56, 62, 66, 72, 73, 78, 36, 46, 47, 52, 68, 78,
80, 49, 59, 69, 65, 35, 46, 56, 57, 60, 36, 37,
45, 42, 70, 37, 45, 66, 56, 47

جماعت ... ,30-40, 40-50 لے کر اوپری حد جماعت سے کم تر اجتماعی تعددی جدول تیار کیجیے۔ اس جدول کی مدد سے ذیل کے سوالوں کے جواب لکھیے۔

(i) 80 سے کم مارکس حاصل کرنے والے طلبہ کتنے ہیں؟ (ii) 40 سے کم مارکس حاصل کرنے والے طلبہ کتنے ہیں؟

(iii) 60 سے کم مارکس حاصل کرنے والے طلبہ کتنے ہیں؟

(7) مثال 6 کے معطیات کی مدد سے وقفۂ جماعت ... ,$30-40, 40-50$ لے کر نچلی حد جماعت سے زیادہ تر اجتماعی تعددی جدول تیار کیجیے۔

(i) 70 یا 70 سے زیادہ مارکس حاصل کرنے والے طلبہ کتنے ہیں؟

(ii) 30 یا 30 سے زیادہ مارکس حاصل کرنے والے طلبہ کتنے ہیں؟

(8) ذیل کے 10 شمارے چڑھتی ترتیب میں دیے ہوئے ہیں۔

$45, 47, 50, 52, x, x+2, 60, 62, 63, 74$ ان کا وسطانیہ 53 ہے۔اس معلومات کی بناء پر x کی قیمت معلوم کیجیے۔اسی طرح دی ہوئی معطیات کا میانیہ اور کثیریہ معلوم کیجیے۔

◈ ◈ ◈

ریاضیاتی لطف

پاسکل کا مثلث

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

- -

- -

اعداد کو مندرجہ بالا طریقے سے مثلثی ڈھانچے میں مرتب کیا گیا ہے۔اس مرتب کردہ خاکہ کو پاسکل کا مثلث کہتے ہیں۔اسی ترتیب میں آگے کے تین سطر آپ لکھیے۔اس ترتیب میں افقی سطر میں آنے والے اعداد، دورکنی $(x+y)$ کے قوت نما کی توسیع کے ترتیب وار آنے والے ضریب ہوتے ہیں۔ذیل کی توسیع دیکھیے۔

$$(x+y)^0 = 1$$
$$(x+y)^1 = 1x + 1y$$
$$(x+y)^2 = 1x^2 + 2xy + 1y^2$$
$$(x+y)^3 = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(x+y)^4 = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$$

اس توسیع میں x اور y کے قوت نما کا مشاہدہ کیجیے۔اس کی مدد سے $(x+y)^{10}$ کی توسیع لکھنے کی کوشش کیجیے۔

جوابات کی فہرست

1 - سیٹ

مشقی سیٹ 1.1

(1) (i) $\{2, 4, 6, 8, ...\}$ (ii) $\{2\}$ (iii) $\{-1, -2, -3, ...\}$ (iv) {سا، رے، گ، م، پ، دَ، نی}

(2) (i) $\frac{4}{3}$، سیٹ Q کا رکن ہے۔ (ii) -2 ، سیٹ N کا رکن نہیں ہے۔

(iii) سیٹ P کا رکن p اس طرح ہے کہ p طاق عدد ہے۔

(4) (i) A = {چیتر، ویشاکھ، جیٹھ، اساڑھ، ساون، بھادرپد، اشوین، کارتک، اگرہاین، پوش، ماگھ، فالگن}

(ii) $X = \{C, O, M, P, L, E, N, T\}$ (iii) Y = {ناک، کان، آنکھ، زبان، جلد}

(iv) $Z = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ (v) E = {ایشیا، افریقہ، یورپ، آسٹریلیا، انٹارکٹیکا، جنوبی امریکہ، شمالی امریکہ}

(5) (i) $A = \{x \mid x = n^2, n \in N, n \leq 10\}$ (ii) $B = \{x \mid x = 6n, n \in N, n < 9\}$

(iii) C = {y | y، SMILE لفظ کا حرف ہے۔} (iv) D = {z | z ، ہفتہ کا دن ہے۔} (v) X = {y | y, لفظ eat کا حرف ہے۔}

مشقی سیٹ 1.2

(1) $A = B = C$ (2) $A = B$ (3) سیٹ A اور سیٹ C خالی سیٹ ہیں۔

(4) (i) ، (iii) ، (iv) ، (v) مثال میں محدود سیٹ ہیں جبکہ (ii) , (vi) اور (vii) میں لامحدود سیٹ ہیں۔

مشقی سیٹ 1.3

(1) (i) ، (ii) ، (iii) ، (v) کے بیانات غلط ہیں جبکہ (iv) اور (vi) کے بیانات صحیح ہیں۔

(4) $\{1\}, \{3\}, \{2\}, \{7\}, \{1, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 7\}, \{3, 2\}, \{3, 7\}, \{2, 7\}, \{1, 3, 2\},$

$\{1, 2, 7\}, \{3, 2, 7\}, \{1, 3, 2, 7\}$ میں سے کوئی بھی تین

(5) (i) $P \subseteq H,\ P \subseteq B,\ I \subseteq M,\ I \subseteq B,\ H \subseteq B,\ M \subseteq B$ (ii) سیٹ B

(6) (i) I, W, N میں سے کوئی بھی سیٹ (ii) I, W, N میں سے کوئی بھی سیٹ

(7) ریاضی میں 50% سے کم نمبر حاصل کرنے والے طلبہ کا سیٹ

مشقی سیٹ 1.4

(1) $n(B) = 21$ (2) ایک بھی مشروب نہیں پینے والے طلبہ کی تعداد = 5 (3) کل طلبہ کی تعداد = 70

(4) کوہ پیمائی اور آرا کاش درشتی، دونوں میں سے کوئی بھی پسند نہ کرنے والے طلبہ کی تعداد = 20

صرف کوہ پیمائی پسند کرنے والے طلبہ کی تعداد = 20, صرف آرا کاش درشتی پسند کرنے والے طلبہ کی تعداد = 20

(5) (i) $A = \{x, y, z, m, n\}$ (ii) $B = \{p, q, r, m, n\}$

(iii) $A \cup B = \{x, y, z, m, n, p, q, r\}$ (iv) $U = \{x, y, z, m, n, p, q, r, s, t\}$

(v) $A' = \{p, q, r, s, t\}$ (vi) $B' = \{x, y, z, s, t\}$ (vii) $(A \cup B)' = \{s, t\}$

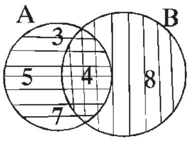
مجموعہ سوالات 1

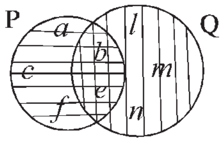
(1) (i) (C) (ii) (D) (iii) (C) (iv) (B) (v) (A) (vi) (A)

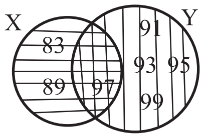
(2) (i) (A) (ii) (A) (iii) (B) (iv) (C)

(3) صرف انگریزی بولنے والے 57 ، صرف فرانسیسی بولنے والے 28 ، دونوں زبانیں بولنے والے 15

(4) 135 (5) 12 (6) 4

(7) (i) 

(ii) 

(iii) 

(8) $S \subseteq X$, $V \subseteq X$, $S \subseteq X$, $T \subseteq X$, $S \subseteq Y$, $S \subseteq V$, $S \subseteq T$, $V \subseteq T$, $Y \subseteq T$,

(9) $M \cup \phi = M$, $M \cap \phi = \phi$

(10) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13\}$, $A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 5, 8, 9, 10\}$
$M \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$, $A \cap B = \{1, 5\}$

(11) $n(A \cup B) = 16$

2 - حقیقی اعداد

مشقی سیٹ 2.1

(1) متوالی : (i), (ii), (iv) ; غیر متوالی، غیر مختتم : (ii), (v)

(2) (i) 0.635 (ii) $0.\overline{25}$ (iii) $3.\overline{285714}$ (iv) 0.8 (v) 2.125

(3) (i) $\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{37}{99}$ (iii) $\frac{314}{99}$ (iv) $\frac{1574}{99}$ (v) $\frac{2512}{999}$

مشقی سیٹ 2.2

(4) (i) جیسے بے شمار اعداد $-0.4, -0.3, 0.2$

(ii) جیسے بے شمار اعداد $-2.310, -2.320, -2.325$

(iii) جیسے بے شمار اعداد $5.21, 5.22, 5.23$ (iv) جیسے بے شمار اعداد $-4.51, -4.55, -4.58$

مشقی سیٹ 2.3

(1) (i) 3 (ii) 2 (iii) 4 (iv) 2 (v) 3

(2) جذری مقداریں : (i), (iii), (vi) ; جذری مقداریں نہیں ہیں (ii), (v), (vi)

(3) مشابہ جذری مقداریں : (i), (ii), (iv) ; غیر مشابہ جذری مقداریں : (ii), (v), (vi)

(4) (i) $3\sqrt{3}$ (ii) $5\sqrt{2}$ (iii) $5\sqrt{10}$ (iv) $4\sqrt{7}$ (v) $2\sqrt{42}$

(5) (i) $7\sqrt{2} > 5\sqrt{3}$ (ii) $\sqrt{247} < \sqrt{274}$ (iii) $2\sqrt{7} = \sqrt{28}$
(iv) $5\sqrt{5} < 7\sqrt{5}$ (v) $4\sqrt{42} > 9\sqrt{2}$ (vi) $5\sqrt{3} < 9$ (vii) $7 > 2\sqrt{5}$

(6) (i) $13\sqrt{5}$ (ii) $10\sqrt{5}$ (iii) $24\sqrt{3}$ (iv) $\frac{12}{5}\sqrt{7}$

(7) (i) $18\sqrt{6}$ (ii) $126\sqrt{5}$ (iii) $6\sqrt{10}$ (iv) 80

(8) (i) 7 (ii) $\sqrt{\frac{5}{2}}$ (iii) $\sqrt{2}$ (iv) $\sqrt{62}$

(9) (i) $\frac{3}{5}\sqrt{5}$ (ii) $\frac{\sqrt{14}}{14}$ (iii) $\frac{5\sqrt{7}}{7}$ (iv) $\frac{2}{9}\sqrt{3}$ (v) $\frac{11}{3}\sqrt{3}$

مشقی سیٹ 2.4

(1) (i) $-3+\sqrt{21}$ (ii) $\sqrt{10}-\sqrt{14}$ (iii) $-18+13\sqrt{6}$

(2) (i) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{5}$ (ii) $\frac{3\left(2\sqrt{5}+3\sqrt{2}\right)}{2}$ (iii) $28-16\sqrt{3}$ (iv) $4-\sqrt{15}$

مشقی سیٹ 2.5

(1) (i) 13 (ii) 5 (iii) 28 (2) 2 یا $\frac{4}{3}$ (ii) 1 یا 6 (iii) −2 یا 18 (iv) 0 یا −40

مجموعہ سوالات 2

(1) (i) B (ii) D (iii) C (iv) D (v) A

(vi) C (vii) C (viii) C (ix) A (x) B

(2) (i) $\frac{555}{1000}$ (ii) $\frac{29539}{999}$ (iii) $\frac{9306}{999}$ (iv) $\frac{357060}{999}$ (v) $\frac{30189}{999}$

(3) (i) $-0.\overline{714285}$ (ii) $0.\overline{81}$ (iii) 2.2360679... (iv) $9.\overline{307692}$ (v) 3.625

(5) (i) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ (ii) $-\frac{5}{3}\sqrt{5}$

(6) (i) $\sqrt{2}$ (ii) $\sqrt{2}$ (iii) $\sqrt{3}$ (iv) $\sqrt{10}$ (v) $\sqrt{2}$ (vi) $\sqrt{11}$

(7) (i) $6\sqrt{3}$ (ii) $\frac{34}{3}\sqrt{3}$ (iii) $\frac{15}{2}\sqrt{6}$ (iv) $-25\sqrt{3}$ (v) $\frac{8}{3}\sqrt{3}$

(8) (i) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (ii) $\frac{2\sqrt{7}}{21}$ (iii) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ (iv) $\frac{3\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{37}$ (v) $\frac{6\left(4\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{23}$

3 - کثیر رکنیاں

مشقی سیٹ 3.1

(1) (i) نہیں، کیونکہ $\frac{1}{y}$ میں y کی قوت (-1) ہے۔ (ii) نہیں، کیونکہ $5\sqrt{x}$ میں x کی قوت $\left(\frac{1}{2}\right)$ کسر ہے۔

(iii) ہاں (iv) نہیں، کیونکہ $2m^{-2}$ میں قوت (-2) ہے (v) ہاں

(2) (i) 1 (ii) $-\sqrt{3}$, (iii) $-\frac{2}{3}$

(3) (i) x^7 (ii) $2x^{35}-7$ (iii) x^8-2x^5+3 (ان تینوں مثالوں کے جیسے کئی جواب ہوسکتے ہیں)

(4) (i) 0 (ii) درجہ، یقین سے نہیں کہا جا سکتا (iii) 2 (iv) 10 (v) 1 (vi) 5 (vii) 3 (viii) 10

(5) (i) مربعی (ii) خطی (iii) خطی (iv) مکعبی (v) مربعی (vi) مکعبی

(6) (i) $m^3 + 5m + 3$ (ii) $y^5 + 2y^4 + 3y^3 - y^2 - 7y - \frac{1}{2}$

(7) (i) (1, 0, 0, -2) (ii) (5, 0) (iii) (2, 0, -3, 0, 7) (iv) $\left(\frac{-2}{3}\right)$

(8) (i) $x^2 + 2x + 3$ (ii) $5x^4 - 1$ (iii) $-2x^3 + 2x^2 - 2x + 2$

(9) مربعی کثیررکنیاں : x^2; $2x^2 + 5x + 10$; $3x^2 + 5x$; مکعبی کثیررکنیاں : $x^3 + x^2 + x + 5$; $x^3 + 9$

خطی کثیررکنیاں : $x + 7$; دورکنیاں : $x + 7$, $x^3 + 9$;, سہ رکنیاں = $2x^2 + 5x + 10$; , یک رکنی = x^2

مشقی سیٹ 3.2

(1) (i) $a + bx$ (ii) xy (iii) $10n + m$

(2) (i) $6x^3 - 2x^2 + 2x$ (ii) $-2m^4 + 2m^3 + 2m^2 + 3m - 6 + \sqrt{2}$ (iii) $5y^2 + 6y + 11$

(3) (i) $-6x^2 + 10x$ (ii) $10ab^2 + a^2b - 7ab$

(4) (i) $2x^3 - 4x^2 - 2x$ (ii) $x^8 + 2x^7 + 2x^5 - x^3 - 2x^2 - 2$ (iii) $-4y^4 + 7y^2 + 3y$

(5) (i) $x^3 - 64 = (x - 4)(x^2 + 4x + 16) + 0$

(ii) $5x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2 = (x^2 - x)(5x^3 + 9x^2 + 6x + 8) + (8x + 2)$

(6) $a^4 + 7a^2b^2 + 2b^4$

مشقی سیٹ 3.3

(1) (i) خارج قسمت = $2m + 7$, باقی = 45 (ii) خارج قسمت = $x^3 + 3x - 2$, باقی = 9

(iii) خارج قسمت = $y^2 + 6y + 36$, باقی = 0 (iv) خارج قسمت = $2x^3 - 3x^2 + 7x - 17$, باقی = 51

(v) خارج قسمت = $x^3 - 4x^2 + 13x - 52$, باقی = 200 (vi) خارج قسمت = $y^2 - 2y + 3$, باقی = 2

مشقی سیٹ 3.4

(1) 5 (2) 1 (3) $4a^2 + 20$ (4) -11

مشقی سیٹ 3.5

(1) (i) -41 (ii) 7 (iii) 7 (2) (i) 1, 0, -8 (ii) 4, 5, 13 (iii) -2, 0, 10

(3) 0 (4) 2 (5) (i) 17 (ii) $2a^3 - a^2 - a$ (iii) 1544 (6) 92 (7) ہاں

(8) 2 (9) (i) نہیں (ii) ہاں (10) 30 (11) ہاں (13) (i) −3 (ii) 80

مشقی سیٹ 3.6

(1) (i) $(x + 1)(2x - 1)$ (ii) $(m + 3)(2m - 1)$ (iii) $(3x + 7)(4x + 11)$

(iv) $(y - 1)(3y + 1)$ (v) $(x + \sqrt{3})(\sqrt{3}x + 1)$ (vi) $(x - 4)\left(\frac{1}{2}x - 1\right)$

(2) (i) $(x - 3)(x + 2)(x - 2)(x + 1)$ (ii) $(x - 13)(x - 2)$

(iii) $(x - 8)(x + 2)(x - 4)(x - 2)$ (iv) $(x^2 - 2x + 10)(x^2 - 2x - 2)$

(v) $(y^2 + 5y - 22)(y + 4)(y + 1)$ (vi) $(y + 6)(y - 1)(y + 4)(y + 1)$

(v) $(x^2 - 8x + 18)(x^2 - 8x + 13)$

مجموعہ سوالات 3

(1) (i) D (ii) D (iii) C (iv) A (v) C (vi) A (vii) D (viii) C (ix) A (x) A

(2) (i) 4 (ii) 0 (iii) 9

(3) (i) $7x^4 - x^3 + 4x^2 - x + 9$ (ii) $5p^4 + 2p^3 + 10p^2 + p - 8$

(4) (i) (1, 0, 0, 0, 16) (ii) (1, 0, 0, 2, 3, 15)

(5) (i) $3x^4 - 2x^3 + 0x^2 + 7x + 18$ (ii) $6x^3 + x^2 + 0x + 7$ (iii) $4x^3 + 5x^2 - 3x + 0$

(6) (i) $10x^4 + 13x^3 + 9x^2 - 7x + 12$ (ii) $p^3q + 4p^2q + 4pq + 7$

(7) (i) $2x^2 - 7y + 16$ (ii) $x^2 + 5x + 2$

(8) (i) $m^7 - 4m^5 + 6m^4 + 6m^3 - 12m^2 + 5m + 6$

(ii) $5m^5 - 5m^4 + 15m^3 - 2m^2 + 2m - 6$

(9) باقی = 19 (10) m = 1 (11) کل آبادی $= 10x^2 + 5y^2 - xy$

(12) $b = \frac{1}{2}$ (13) $11m^2 - 8m + 5$ (14) $-2x^2 + 8x + 11$ (15) $2m + n + 7$

4 - نسبت اور تناسب

مشقی سیٹ 4.1

(1) (i) 6 : 5 (ii) 2 : 3 (iii) 2 : 3

(2) (i) 25 : 11 (ii) 35 : 31 (iii) 2 : 1 (iv) 10 : 17 (v) 2 : 1 (vi) 220 : 153

(3) (i) 3 : 4 (ii) 11 : 25 (iii) 1 : 16 (iv) 13 : 25 (v) 4 : 625

(4) 4 افراد (5) (i) 60% (ii) 94 % (iii) 70% (iv) 91% (v) 43.75%

(6) آبھا کی عمر 18 سال, والدہ کی عمر 45 سال (7) 6 سال سے (8) ثریا کی موجودہ عمر 8 سال

مشقی سیٹ 4.2

(1) (i) بالترتیب : 20, 49, 2.5 (ii) بالترتیب : 7, 27, 2.25

(iv) $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{48}} = \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{27}}$ (v) $\frac{9.2}{5.1} > \frac{3.4}{7.1}$

(2) (i) $1 : 2\pi$ (ii) $2 : r$ (iii) $\sqrt{2} : 1$ (iv) 34 : 35

(3) (i) $\frac{\sqrt{5}}{3} < \frac{3}{\sqrt{7}}$ (ii) $\frac{3\sqrt{5}}{5\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{63}}{\sqrt{125}}$ (iii) $\frac{5}{18} > \frac{17}{121}$

(iv) $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{48}} = \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{27}}$ (v) $\frac{9.2}{5.1} > \frac{3.4}{7.1}$

(4) (i) 80° (ii) سلیم کی موجودہ عمر 45 سال ، البرٹ کی موجودہ عمر 25 سال

(iii) چوڑائی 4.5 سم ، لمبائی 13.5 سم (iv) 124, 92 (v) 20, 18

(5) (i) 729 (ii) 45 : 7 (6) 2 : 125 (7) $x = 5$

مشقی سیٹ 4.3

(1) (i) 22 : 13 (ii) 125 : 71 (iii) 316 : 27 (iv) 38 : 11

(2) (i) 3 : 5 (ii) 1 : 6 (iii) 7 : 43 (iv) 71 : 179 (3) 170 : 173

(4) (i) $x = 8$ (ii) $x = 9$ (iii) $x = 2$ (iv) $x = 6$ (v) $x = \frac{9}{14}$ (vi) $x = 3$

مشقی سیٹ 4.4

(1) (i) 36, 22 (ii) 16, $2a - 2b + 2c$

(2) (i) 29 : 21 (ii) 23 : 7 (4) (i) $x = 2$ (ii) $y = 1$

مشقی سیٹ 4.5

(1) $x = 4$ (2) $x = \frac{347}{14}$ (3) 18, 12, 8 یا 8, 12, 18 (6) $\frac{x + y}{xy}$

مجموعہ سوالات 4

(1) (i) B (ii) C (iii) B (iv) D (v) C

(2) (i) 7 : 16 (ii) 2 : 5 (iii) 5 : 9 (iv) 6 : 7 (v) 6 : 7

(3) (i) 1 : 2 (ii) 5 : 4 (iii) 1 : 1

(4) (ii) اور (iv) : مسلسل تناسب میں نہیں ہیں۔ (i) اور (iii) مسلسل تناسب میں ہیں۔ (5) $b = 9$

(6) (i) 7.4% (ii) 62.5% (iii) 73.33% (iv) 31.25% (v) 12%

(7) (i) 5 : 6 (ii) 85 : 128 (iii) 1 : 2 (iv) 50 : 1 (v) 3 : 5

(8) (i) $\frac{17}{9}$ (ii) 19 (iii) $\frac{35}{27}$ (iv) $\frac{13}{29}$

(11) $x = 9$

5 - دو متغیروں والی خطی مساواتیں

مشقی سیٹ 5.1

(3) (i) $x = 3$; $y = 1$ (ii) $x = 2$; $y = 1$ (iii) $x = 2$; $y = -2$

(iv) $x = 6$; $y = 3$ (v) $x = 1$; $y = -2$ (vi) $x = 7$; $y = 1$

مشقی سیٹ 5.2

(1) 5 روپے کے 30 نوٹ اور 10 روپے کے 20 نوٹ ہیں۔

(2) $\frac{5}{9}$ (3) سائرہ کی عمر 20 سال، ساجدہ کی عمر 14 سال (4) 30 مور , 20 شیر

(5) ابتدائی تنخواہ ₹ 3900 , سالانہ اضافہ ₹ 150

(6) ₹ 4000 (7) 36 (8) $\angle A = 90^0$, $\angle B = 40^0$, $\angle C = 50^0$

(9) 480 سم (10) 10

مجموعہ سوالات 5

(1) (i) A (ii) C (iii) C

(2) (i) $x = 2$; $y = 1$ (ii) $x = 5$; $y = 3$ (iii) $x = 8$; $y = 3$

(iv) $x = 1$; $y = -4$ (v) $x = 3$; $y = 1$ (vi) $x = 4$; $y = 3$

(3) (i) $x = 1$; $y = -1$ (ii) $x = 2$; $y = 1$ (iii) $x = 26$; $y = 18$ (iv) $x = 8$; $y = 2$

(4) (i) $x = 6$; $y = 8$ (ii) $x = 9$; $y = 2$ (iii) $x = \frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{3}$ (5) 35

(6) ₹ 69 (7) ہر ایک کی ماہانہ آمدنی بالترتیب ₹1800 اور ₹1400

(8) لمبائی 347 اکائی ; چوڑائی 207 اکائی (9) 30 کلومیٹر فی گھنٹہ ; 40 کلومیٹر فی گھنٹہ

(10) (i) 54, 45 (ii) 36, 63 وغیرہ

6 - معاشی منصوبہ بندی

مشقی سیٹ 6.1

(1) ₹1200 (2) اصل سرمایہ پر 16 فی صدی کا نقصان ہوا ; دوسرے سال کے بعد سرمایہ ₹42,000

(3) ماہانہ آمدنی ₹50000 (4) شری فرنانڈیس (5) ₹25,000

مشقی سیٹ 6.2

(1) (i) انکم ٹیکس ادا کرنا نہیں ہوگا (ii) ادا کرنا ہوگا (iii) ادا کرنا ہوگا (iv) ادا کرنا ہوگا (v) ادا کرنا نہیں ہوگا

(2) ₹9836.50

مجموعہ سوالات 6

(1) (i) A (ii) B (2) آمدنی ₹8750 (3) ہیرالال , رمن لال کا فی صدی منافع 16.64 , ہیرالال کا فی صدی منافع 36.73

(4) ₹ 99383.75 (5) ₹ 4,00,000 (6) 12.5%

(7) ریحان کی بچت ₹ 48000 ; ذیشان کی بچت ₹ 51000 ; آفرین کی بچت ₹ 36009

(8) (i) ₹2,13,000 (ii) ₹7500 (iii) ٹیکس نہیں

7 - علم شماریات

مشقی سیٹ 7.2

(1) ابتدائی معطیات : (i), (iii), (iv) , ثانوی معطیات : (ii)

مشقی سیٹ 7.3

(1) نچلی حدجماعت = 20, اوپری حدجماعت = 25 (2) 37.5 (3) 7-13

مشقی سیٹ 7.4

(3) (i) 38 (ii) 3 (iii) 19 (iv) 62 (4) (i) 24 (ii) 3 (iii) 43 (iv) 43

مشقی سیٹ 7.5

(1) کوئنٹل 7 (2) 74 (3) 100 (4) ₹49000 (5) 75 گرام

(6) میانیہ = 3 ; وسطانیہ = 3 , کثیریہ = 4 (7) 78.56 (8) $x = 9$ (9) 20 (10) 70

(11) 34.25 (12) کلوگرام 37 (13) 2 (14) 37 اور 35

مجموعہ سوالات 7

(1) (i) C (ii) B (iii) D (iv) B (v) A (vi) D
(vii) B (viii) A (ix) C (x) C

(2) ₹ 26000 (3) ₹ 127

(4) (i) 24 (ii) 06

(5) P = 20

(6) (i) 66 (ii) 14 (iii) 45

(7) (i) 11 (ii) 68

(8) $x = 52$, میانیہ = 55.9 , کثیریہ = 52

عملی کام کی بیاض نویں جماعت

ریاضی (حصہ I اور حصہ II)

اُردو
ذریعۂ تعلیم

قیمت
۵۵ روپے

- حکومت سے منظور شدہ نصاب اور درسی کتاب پر مبنی۔
- قدر پیمائی کے طریقے کے مطابق تمام اسباق پر مبنی عملی کاموں کی شمولیت۔
- مختلف سرگرمیوں، تصویروں، شکلوں وغیرہ سے مزین۔
- معروضی اور کثیر متبادل سوالوں کے ساتھ۔
- زبانی امتحان کے لیے کارآمد سوالوں کی شمولیت۔
- مشق کے لیے مزید سوالوں کے جواب لکھنے کے لیے زیادہ سے زیادہ جگہ دستیاب۔

پاٹھیہ پستک منڈل کے تمام علاقائی ڈپو میں عملی بیاض برائے فروخت دستیاب ہیں۔

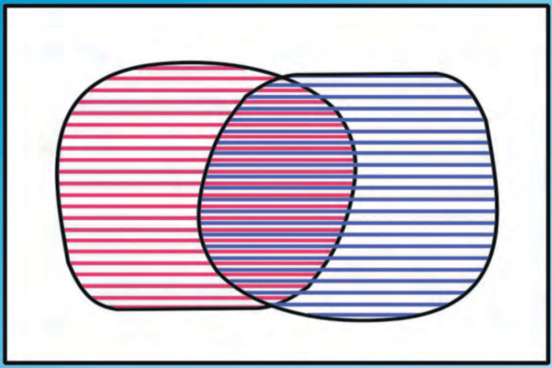
(1) Maharashtra State Textbook Stores and Distribution Centre, Senapati Bapat Marg, Pune 411004 ☎ 25659465 (2) Maharashtra State Textbook Stores and Distribution Centre, P-41, Industrial Estate, Mumbai - Bengaluru Highway, Opposite Sakal Office, Kolhapur 416122 ☎ 2468576 (3) Maharashtra State Textbook Stores and Distribution Centre, 10, Udyognagar, S. V. Road, Goregaon (West), Mumbai 400062 ☎ 28771842 (4) Maharashtra State Textbook Stores and Distribution Centre, CIDCO, Plot no. 14, W-Sector 12, Wavanja Road, New Panvel, Dist. Rajgad, Panvel 410206 ☎ 274626465 (5) Maharashtra State Textbook Stores and Distribution Centre, Near Lekhanagar, Plot no. 24, 'MAGH' Sector, CIDCO, New Mumbai-Agra Road, Nashik 422009 ☎ 2391511 (6) Maharashtra State Textbook Stores and Distribution Centre, M.I.D.C. Shed no. 2 and 3, Near Railway Station, Aurangabad 431001 ☎ 2332171 (7) Maharashtra State Textbook Stores and Distribution Centre, Opposite Rabindranath Tagore Science College, Maharaj Baug Road, Nagpur 440001 ☎ 2547716/2523078 (8) Maharashtra State Textbook Stores and Distribution Centre, Plot no. F-91, M.I.D.C., Latur 413531 ☎ 220930 (9) Maharashtra State Textbook Stores and Distribution Centre, Shakuntal Colony, Behind V.M.V. College, Amravati 444604 ☎ 2530965

پاٹھیہ پستک منڈل، بال بھارتی کے توسط سے دسویں جماعت کے لیے
ای-لرننگ (Audio-Visual) مواد دستیاب

- بازو میں دیا ہوا Q.R. کوڈ اسکین کر کے ای-لرننگ مواد حاصل کرنے کے لیے اندراج کریں۔
- Google Play Store سے ebalbharati ایپ ڈاؤن لوڈ کر کے ای-لرننگ مواد کے لیے مطالبہ درج کریں۔

ebalbharati

www.ebalbharati.in | www.balbharati.in



$$x + y = 4$$

$$2x + 3y = 3$$

$x = \square$, $y = \square$

مہاراشٹر راجیہ پاٹھیہ پستک
نرمتی وابھیاس کرم سنشودھن
منڈل، پونہ - ۴۱۱۰۰۴

₹ 64.00 उर्दू गणित इ. ९ वी भाग-१