ગુજરાત રાજ્યના શિક્ષણવિભાગના પત્ર-ક્રમાંક
મશબ/1215/178/છ, તા. 24-11-2016 - થી મંજૂર

આંકડાશાસ્ત્ર

(ભાગ 1)

ધોરણ 12

પ્રતિજ્ઞાપત્ર

ભારત મારો દેશ છે.
બધાં ભારતીયો મારા ભાઈબહેન છે.
હું મારા દેશને ચાહું છું અને તેના સમૃદ્ધ અને
વૈવિધ્યપૂર્ણ વારસાનો મને ગર્વ છે.
હું સદાય તેને લાયક બનવા પ્રયત્ન કરીશ.
હું મારાં માતાપિતા, શિક્ષકો અને વડીલો પ્રત્યે
આદર રાખીશ અને દરેક જણ સાથે સભ્યતાથી વર્તીશ.
હું મારા દેશ અને દેશબાંધવોને મારી નિષ્ઠા અર્પું છું.
તેમનાં કલ્યાણ અને સમૃદ્ધિમાં જ મારું સુખ રહ્યું છે.

રાજ્ય સરકારની વિનામૂલ્યે યોજના હેઠળનું પુસ્તક

ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ
'વિદ્યાયન' સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર-382 010

© ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, ગાંધીનગર
આ પાઠ્યપુસ્તકના સર્વ હક ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળને હસ્તક છે. આ પાઠ્યપુસ્તકનો કોઈ પણ ભાગ કોઈ પણ રૂપમાં ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળના નિયામકની લેખિત પરવાનગી વગર પ્રકાશિત કરી શકાશે નહિ.

વિષય-સલાહકાર

ડૉ. આર. ટી. રતાણી

લેખન-સંપાદન

ડૉ. એમ. એન. પટેલ (કન્વીનર) પ્રો. શુભા એ. લાગવણકર
ડૉ. ચિરાગ જે. ત્રિવેદી ડૉ. કુંજલ એચ. શાહ
ડૉ. પરાગ બી. શાહ શ્રી મહેશભાઈ એ. પટેલ
ડૉ. યતિન એ. પરીખ

સમીક્ષા

શ્રી પી. ડી. જોષી શ્રી નીતાબેન આર. પટેલ
શ્રી વિષ્ણુભાઈ એમ. પટેલ શ્રી ઉમેશભાઈ એમ. રાવલ
ડૉ. મૂળુભાઈ એમ. સોલંકી શ્રી નીતેષ કે. જોષી
ડૉ. હેમાલી એમ. શાહ શ્રી કૈલાસબેન કે. પ્રજાપતિ

ભાષાશુદ્ધિ

શ્રી છાયાબહેન એમ. પારેખ

ચિત્રાંકન

મીડિયા ગ્રાફિક્સ

સંયોજન

ડૉ. ચિરાગ એન. શાહ
(વિષય-સંયોજક : કૉમર્સ)

નિર્માણ-સંયોજન

શ્રી હરેન શાહ
(નાયબ નિયામક : શૈક્ષણિક)

મુદ્રણ-આયોજન

શ્રી હરેશ એસ. લીમ્બાચીયા
(નાયબ નિયામક : ઉત્પાદન)

પ્રસ્તાવના

રાષ્ટ્રીય અભ્યાસક્રમોના અનુસંધાનમાં ગુજરાત માધ્યમિક અને ઉચ્ચતર માધ્યમિક શિક્ષણ બોર્ડે નવા અભ્યાસક્રમો તૈયાર કર્યા છે. આ અભ્યાસક્રમો ગુજરાત સરકાર દ્વારા મંજૂર કરવામાં આવ્યા છે.

ગુજરાત સરકાર દ્વારા મંજૂર થયેલા **ધોરણ 12, આંકડાશાસ્ત્ર (ભાગ 1)** વિષયના નવા અભ્યાસક્રમ અનુસાર તૈયાર કરવામાં આવેલું આ પાઠ્યપુસ્તક વિદ્યાર્થીઓ સમક્ષ મૂકતાં મંડળ આનંદ અનુભવે છે.

આ પાઠ્યપુસ્તકનું લેખન તથા સમીક્ષા નિષ્ણાત શિક્ષકો અને પ્રાધ્યાપકો પાસે કરાવવામાં આવ્યાં છે. સમીક્ષકોનાં સૂચનો અનુસાર હસ્તપ્રતમાં યોગ્ય સુધારાવધારા કર્યા પછી આ પાઠ્યપુસ્તક પ્રસિદ્ધ કરવામાં આવ્યું છે.

પ્રસ્તુત પાઠ્યપુસ્તકને રસપ્રદ, ઉપયોગી અને ક્ષતિરહિત બનાવવા માટે મંડળે પૂરતી કાળજી લીધી છે. તેમ છતાં શિક્ષણમાં રસ ધરાવનાર વ્યક્તિઓ પાસેથી પુસ્તકની ગુણવત્તા વધારે તેવાં સૂચનો આવકાર્ય છે.

પી. ભારતી (IAS)
નિયામક કાર્યવાહક પ્રમુખ
તા.16-11-2019 ગાંધીનગર

પ્રથમ આવૃત્તિ : 2017, પુનઃ મુદ્રણ : 2018, 2019, 2020

પ્રકાશક : ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, 'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર વતી પી. ભારતી, નિયામક
મુદ્રક :

મૂળભૂત ફરજો

ભારતના દરેક નાગરિકની ફરજ નીચે મુજબ રહેશે :*

(ક) સંવિધાનને વફાદાર રહેવાની અને તેના આદર્શો અને સંસ્થાઓનો, રાષ્ટ્રધ્વજનો અને રાષ્ટ્રગીતનો આદર કરવાની;

(ખ) આઝાદી માટેની આપણી રાષ્ટ્રીય લડતને પ્રેરણા આપનારા ઉમદા આદર્શોને હૃદયમાં પ્રતિષ્ઠિત કરવાની અને અનુસરવાની;

(ગ) ભારતનાં સાર્વભૌમત્વ, એકતા અને અખંડિતતાનું સમર્થન કરવાની અને તેમનું રક્ષણ કરવાની;

(ઘ) દેશનું રક્ષણ કરવાની અને રાષ્ટ્રીય સેવા બજાવવાની હાકલ થતાં, તેમ કરવાની;

(ચ) ધાર્મિક, ભાષાકીય, પ્રાદેશિક અથવા સાંપ્રદાયિક ભેદોથી પર રહીને, ભારતના તમામ લોકોમાં સુમેળ અને સમાન બંધુત્વની ભાવનાની વૃદ્ધિ કરવાની, સ્ત્રીઓના ગૌરવને અપમાનિત કરે, તેવા વ્યવહારો ત્યજી દેવાની;

(છ) આપણી સમન્વિત સંસ્કૃતિના સમૃદ્ધ વારસાનું મૂલ્ય સમજી તે જાળવી રાખવાની;

(જ) જંગલો, તળાવો, નદીઓ અને વન્ય પશુપક્ષીઓ સહિત કુદરતી પર્યાવરણનું જતન કરવાની અને તેની સુધારણા કરવાની અને જીવો પ્રત્યે અનુકંપા રાખવાની;

(ઝ) વૈજ્ઞાનિક માનસ, માનવતાવાદ અને જિજ્ઞાસા તથા સુધારણાની ભાવના કેળવવાની;

(ટ) જાહેર મિલકતનું રક્ષણ કરવાની અને હિંસાનો ત્યાગ કરવાની;

(ઠ) રાષ્ટ્ર પુરુષાર્થ અને સિદ્ધિનાં વધુ ને વધુ ઉન્નત સોપાનો ભણી સતત પ્રગતિ કરતું રહે એ માટે, વૈયક્તિક અને સામૂહિક પ્રવૃત્તિનાં તમામ ક્ષેત્રે શ્રેષ્ઠતા હાંસલ કરવાનો પ્રયત્ન કરવાની;

(ડ) માતા-પિતાએ અથવા વાલીએ 6 વર્ષથી 14 વર્ષ સુધીની વયના પોતાના બાળક અથવા પાલ્યને શિક્ષણની તકો પૂરી પાડવાની.

*ભારતનું સંવિધાન : કલમ 51-क

અનુક્રમણિકા

1.	સૂચક આંક	1
2.	સુરેખ સહસંબંધ	58
3.	સુરેખ નિયત સંબંધ	116
4.	સામયિક શ્રેણી	156
•	જવાબો	183

•

1

સૂચક આંક
(Index Number)

વિષયવસ્તુ :

1.1 સૂચક આંકની વ્યાખ્યા અને અર્થ

1.2 સૂચક આંકના લક્ષણો

1.3 સૂચક આંકના ઉપયોગો

1.4 આધાર વર્ષ

1.4.1 અચલ આધારની રીત, ગુણ અને મર્યાદા

1.4.2 પરંપરિત આધારની રીત, ગુણ અને મર્યાદા

1.5 અચલ આધારમાંથી પરંપરિત આધાર અને પરંપરિત આધારમાંથી અચલ આધારમાં પરિવર્તન

1.6 સૂચક આંકની ગણતરી

1.6.1 લાસ્પેયરનું સૂત્ર

1.6.2 પાશેનું સૂત્ર

1.6.3 ફિશરનું સૂત્ર

1.7 જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક

1.7.1 સમજૂતી અને રચના

1.7.2 ઉપયોગ અને મર્યાદા

1.1 સૂચક આંકની વ્યાખ્યા અને અર્થ

સમય અનુસાર વસ્તુની કિંમત, રાષ્ટ્રીય આવક, પુરવઠો, ઉત્પાદન, રોજગારી, બેરોજગારી, મૂડી, આયાત-નિકાસ, જીવનનિર્વાહનો ખર્ચ, દેશની માનવવસ્તી, જન્મદર અને મૃત્યુદર વગેરેમાં સતત ફેરફારો થતા રહે છે. સામાન્ય રીતે, આવા ફેરફારોનું પ્રમાણ અને દિશા પણ બદલાતાં રહે છે. સમયના પરિવર્તન સાથે વસ્તુની કિંમત, મૂલ્ય કે જથ્થામાં થતા ફેરફારોનો અભ્યાસ ઘણો મહત્ત્વનો બની રહે છે. આવા ફેરફારની જાણકારીથી ભવિષ્યનાં આયોજન યોગ્ય રીતે કરી શકાય છે. કોઈ ચલરાશિમાં બે ભિન્ન સમયે થતા ફેરફારો નીચેની રીતે માપી શકાય :

(1) નિરપેક્ષ માપ (તફાવત)ની રીત અને (2) સાપેક્ષ માપ (ગુણોત્તર)ની રીત

નીચેના ઉદાહરણ દ્વારા આ અંગેનો ખ્યાલ મેળવીએ :

ધારો કે બે વસ્તુઓ ઘઉં અને ચોખાના વર્ષ 2015 અને 2016ના કોઈ એક માસના કિલોગ્રામદીઠ સરેરાશ ભાવ અંગેની માહિતી નીચે પ્રમાણે છે :

વસ્તુ	કિલોગ્રામ દીઠ ભાવ ₹	
	વર્ષ 2015	વર્ષ 2016
ઘઉં	24	30
ચોખા	40	46

ઘઉં અને ચોખાના ભાવમાં થતા ફેરફારોને ઉપરની બંને રીતે સરખાવીને સમજીએ.

(1) નિરપેક્ષ માપ (તફાવત)ની રીત : ઘઉંનો ભાવ જે વર્ષ 2015માં ₹ 24 હતો તે વધીને વર્ષ 2016માં ₹ 30 થયો છે. તેથી વર્ષ 2015ના સાપેક્ષમાં વર્ષ 2016માં ભાવ કિલોગ્રામ દીઠ ₹ 6 વધે છે. તે જ રીતે ચોખાના ભાવમાં પણ ₹ 6 વધે છે. આ નિરપેક્ષ તફાવત પરથી નક્કી થયું. આ ઉપરથી એમ કહી શકાય કે, બંને વસ્તુમાં ભાવવધારો સમાન છે. પરંતુ વાસ્તવમાં આ સાચું નથી. કારણ કે વર્ષ 2015માં બંને વસ્તુના એકમ દીઠ ભાવ સમાન નથી. એટલે કે વર્ષ 2016ના ભાવનો તુલનાત્મક અભ્યાસ કરવા માટેના આધાર જુદા જુદા છે. આમ, ચલમાં થતા ફેરફારો સરખાવવા માટે આ રીત યોગ્ય ગણી શકાય નહિ. આવી પરિસ્થિતિમાં સાપેક્ષ માપની રીત ઉપયોગમાં લેવામાં આવે છે. હવે તેનો અભ્યાસ કરીએ.

(2) સાપેક્ષ માપ (ગુણોત્તર)ની રીત : આ રીતમાં વર્ષ 2016માં વસ્તુના ભાવમાં થતા સાપેક્ષ ફેરફારો જાણવાં વસ્તુના વર્ષ 2016માં ભાવનો તેના વર્ષ 2015ના ભાવ સાથેનો ગુણોત્તર મેળવવામાં આવે છે.

આમ, ઘઉંના ભાવનો ગુણોત્તર $= \frac{30}{24} = 1.25$

ચોખાના ભાવનો ગુણોત્તર $= \frac{46}{40} = 1.15$

આ ગુણોત્તરો પરથી જણાય છે કે વર્ષ 2016માં ઘઉં અને ચોખાના ભાવમાં થતો સાપેક્ષ વધારો સરખો નથી. વર્ષ 2016માં ઘઉંનો ભાવ, વર્ષ 2015ના ભાવ કરતાં 1.25 ગણો થયો છે. જ્યારે ચોખાનો ભાવ 1.15 ગણો થયો છે. એટલે ઘઉંના ભાવમાં થતો ફેરફાર ચોખાના ભાવમાં થતા ફેરફાર કરતાં વધુ છે તેમ કહેવાય.

અહીં ઘઉં અને ચોખાના ભાવના ગુણોત્તર બે જુદા જુદા સમયના ભાવના ફેરફાર દર્શાવે છે. તેને સાપેક્ષ ફેરફાર (Relative Change) કે ભાવ સાપેક્ષ (Price Relative) પણ કહેવામાં આવે છે. હવે, સામાન્ય રીતે સરખામણી કરવાનું સરળ બને તે માટે ગુણોત્તરોને ટકાવારીમાં દર્શાવવામાં આવે છે. તેથી અહીં,

ઘઉંના ભાવમાં થતો સાપેક્ષ ટકાવારી ફેરફાર $= 1.25 \times 100 = 125$ અને

ચોખાના ભાવમાં થતો સાપેક્ષ ટકાવારી ફેરફાર $= 1.15 \times 100 = 115$

ફેરફારોનું આ સાપેક્ષ ટકાવારી માપ છે. આવું સાપેક્ષ માપ સૂચક આંક કહેવાય.

આમ, **કોઈ પણ વસ્તુ સાથે સંકળાયેલ ચલરાશિની આપેલ (ચાલુ) સમયની કિંમતમાં કોઈ ચોક્કસ (આધાર) સમયની તેની કિંમતના સાપેક્ષમાં થતા ટકાવારી ફેરફારને સૂચક આંક કહેવામાં આવે છે.**

હવે, આપણે પરસ્પર સંબંધિત આ બંને વસ્તુઓના ભાવમાં થતા ફેરફારોને ભેગા કરી એક સાપેક્ષ માપ મેળવીશું. સમગ્ર ફેરફારનું એક માપ મેળવવા માટે નિરપેક્ષ રીત ઉપયોગી નીવડતી નથી. કારણ કે ઘણી વખત એવું બને છે કે, બે વસ્તુઓના ભાવ દર્શાવતા એકમ અલગ-અલગ હોય છે અને તેથી તેમને તે વસ્તુઓના ભાવમાં થયેલ ફેરફાર ભેગા કરવાનું શક્ય બનતું નથી. આ પરિસ્થિતિમાં સાપેક્ષ માપની રીતનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. સાપેક્ષ માપની રીત એકમથી મુક્ત હોવાથી બંને વસ્તુઓમાં થતાં ફેરફારોને ભેગા કરી શકાય છે અને તેના પરથી વસ્તુઓના ભાવમાં થતા ફેરફારોનું એક ગાણિતિક માપ મેળવવાની અનુકૂળતા રહે છે. હવે, આપણે અનાજ એટલે કે ઘઉં અને ચોખાના ભાવના ફેરફારોને લઈ સમગ્ર ફેરફારનું સાપેક્ષ માપ લઈશું. વર્ષ 2016ના ભાવને p_1 અને વર્ષ 2015ના ભાવને p_0 વડે દર્શાવીશું. p_0 ને આધાર વર્ષનો ભાવ અને p_1 ને ચાલુ વર્ષનો ભાવ કહેવામાં આવે છે. ગુણોત્તર $\frac{p_1}{p_0}$ ને તે વસ્તુનો ભાવ સાપેક્ષ કહે છે. આ બાબતને કોષ્ટકની મદદથી સમજીએ.

વસ્તુ	આધાર વર્ષ 2015નો ભાવ (₹) p_0	ચાલુ વર્ષ 2016નો ભાવ (₹) p_1	ભાવ સાપેક્ષ અથવા સાપેક્ષ ફેરફાર $= \frac{p_1}{p_0}$	ભાવ સાપેક્ષ ટકાવારી $= \frac{p_1}{p_0} \times 100$
ઘઉં	24	30	$\frac{30}{24} = 1.25$	125
ચોખા	40	46	$\frac{46}{40} = 1.15$	115
કુલ			**2.40**	**240**

બંને વસ્તુના ચાલુ વર્ષના ભાવ સાપેક્ષની સરેરાશને 100 વડે ગુણવાથી મળતાં આંકને તે વસ્તુઓનો ચાલુ વર્ષનો ભાવ સૂચક આંક (Price Index Number) કહેવામાં આવે છે. તેને સંકેતમાં I વડે દર્શાવવામાં આવે છે. આમ,

$$\text{ઘઉં અને ચોખાના ચાલુ વર્ષના ભાવનો સૂચક આંક} = \frac{\text{ઘઉંનો ભાવ સાપેક્ષ + ચોખાનો ભાવ સાપેક્ષ}}{\text{વસ્તુઓની સંખ્યા}} \times 100$$

$$= \frac{1.25 + 1.15}{2} \times 100$$

$$= 120$$

તેથી ઘઉં અને ચોખાનો ચાલુ વર્ષના ભાવનો સૂચક આંક $I = 120$. આમ, ઘઉં અને ચોખાના ભાવ સૂચક આંક $I = 120$ પરથી વર્ષ 2015ના તે ભાવની તુલનાએ વર્ષ 2016માં બંને વસ્તુઓના ભાવમાં સમગ્ર રીતે 20 ટકાનો વધારો થયો છે. સૂચક આંક ગુણોત્તર પર આધારિત સાપેક્ષ માપ છે. આ જ રીતે બેથી વધુ જુદા જુદા ચલની કિંમતોમાં થતા ફેરફારોને ભેગા કરી ફેરફારોનું સમગ્રતાનું માપ સાપેક્ષ રીતથી મેળવી શકાય છે. આપણે સમૂહનાં સામાન્ય સૂચક આંકને નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરી શકીએ.

"કોઈ પણ એક કે તેથી વધુ વસ્તુઓની આપેલ (ચાલુ) સમયની ચલની કિંમતોમાં કોઈ ચોક્કસ (આધાર) સમયની તે વસ્તુઓની ચલ કિંમતોના સાપેક્ષમાં થતા ટકાવારી ફેરફારની સરેરાશને સમૂહનો **સામાન્ય સૂચક આંક** કહેવામાં આવે છે."

સમૂહનો સામાન્ય સૂચક આંક $I = \frac{\Sigma\left[\frac{p_{1i}}{p_{0i}}\right]}{n} \times 100$

જ્યાં, સમૂહનો સામાન્ય સૂચક આંક I = ચાલુ સમયની સરખામણીના સમયની સાપેક્ષમાં મેળવેલ સૂચક આંક

p_{1i} = ચાલુ સમય માટે ચલ i ની કિંમત $(i = 1, 2, 3, ..., n)$

p_{0i} = સરખામણીના સમય માટે ચલ i ની કિંમત $(i = 1, 2, 3, ..., n)$

n = ચલની કિંમતોની સંખ્યા

અહીં આપેલ n વસ્તુના સમૂહનો સામાન્ય સૂચક આંક Iની વ્યાખ્યામાં સાદી સરેરાશ કે સાદા મધ્યકનો ઉપયોગ કર્યો છે. પરંતુ સામાન્ય સૂચક આંક Iની વ્યાખ્યામાં ભારિત મધ્યક અથવા ગુણોત્તર મધ્યકનો ઉપયોગ પણ કરી શકાય. આ અંગે ચર્ચા આ પ્રકરણમાં હવે પછી કરીશું.

વ્યવહારમાં ભાવ સૂચક આંક મેળવવા ઘણીબધી પરસ્પર સંબંધિત વસ્તુઓનો સમાવેશ કરી તેના ભાવ અંગેની માહિતી મેળવવી પડે છે. દા.ત., ખોરાકની ચીજવસ્તુઓના સમૂહમાં ઘઉં, ચોખા, કઠોળ, દાળ, તેલ, ઘી, ગોળ, મરી-મસાલા, શાકભાજીની વસ્તુઓ વગેરેનો સમાવેશ થાય છે. આમ, ખાદ્યાન્નનો ભાવ સૂચક આંક એ સંબંધ ધરાવતી જુદી-જુદી વસ્તુના ભાવમાં થતા સાપેક્ષ ફેરફારો કે ભાવ સાપેક્ષ સાથે સંકળાયેલ આંક છે.

હવે, જો આવી પરસ્પર સંબંધિત n વસ્તુઓનો સમૂહ લઈએ તો આ સમૂહમાં આવેલી પ્રત્યેક વસ્તુ માટેના ભાવમાં થતાં સાપેક્ષ ફેરફાર માટેનો આંક શોધી સમગ્ર રીતે રજૂ કરતા મેળવેલ સરેરાશ માપને તે સમૂહ માટેના ભાવનો સૂચક આંક કહેવામાં આવે છે. સૂત્રમાં દર્શાવવું હોય તો તેને નીચે મુજબ લખી શકાય :

સમૂહના ભાવનો સૂચક આંક $\mathrm{I} = \frac{\Sigma\left[\frac{p_{1i}}{p_{0i}}\right]}{n} \times 100$

જ્યાં, p_{1i} = ચાલુ સમય માટે ચીજવસ્તુ i નો ભાવ $(i = 1, 2, 3, ..., n)$

p_{0i} = આધાર સમય માટે ચીજવસ્તુ i નો ભાવ $(i = 1, 2, 3, ..., n)$

n = ચીજવસ્તુઓની સંખ્યા

હવે, જો આવી પરસ્પર સંબંધિત n વસ્તુઓનો સમૂહ લઈએ તો આ સમૂહમાં આવેલી પ્રત્યેક વસ્તુ માટેનો જથ્થામાં થતા સાપેક્ષ ફેરફાર માટેનો આંક શોધી સમગ્ર રીતે રજૂ કરતા મેળવેલ સરેરાશ માપને તે સમૂહ માટેનો જથ્થા સૂચક આંક કહેવામાં આવે છે.

નોંધ : ઉત્પાદન, આયાત, નિકાસ, બેરોજગારી, ઔદ્યોગિક પેદાશ જેવા સૂચક આંક ઉપરના સૂત્રથી મેળવી શકાય છે.

1.2 સૂચક આંકનાં લક્ષણો

સૂચક આંકની વ્યાખ્યા પરથી તેનાં કેટલાંક લક્ષણો જે અલગ તરી આવે છે તે નીચે પ્રમાણે છે.

(1) સૂચક આંક એક સાપેક્ષ માપ હોવાથી તે એકમથી મુક્ત છે.

(2) જુદા જુદા એકમોવાળી ચલરાશિની કિંમતમાં થતા ફેરફારો સૂચક આંક દ્વારા સરખાવી શકાય છે. તેથી સૂચક આંક તુલનાત્મક માપ છે.

(3) સૂચક આંક ટકાવારી ફેરફાર દર્શાવતું એક સાપેક્ષ માપ છે.

(4) સૂચક આંક એક વિશિષ્ટ સરેરાશ માપ છે. તે સરેરાશનાં બધાં લક્ષણો ધરાવે છે.

(5) સૂચક આંકથી બે જુદા જુદા સમયની પરિસ્થિતિઓની ગુણોત્તર દ્વારા પ્રમાણિત (આધાર) સમય સાથે સરખામણી કરવામાં આવે છે.

1.3 સૂચક આંકના ઉપયોગ

સૂચક આંક વિશે સામાન્ય ખ્યાલ એવો છે કે, સૂચક આંક માત્ર ચલરાશિની કિંમત તેમજ ભાવસપાટીની સામાન્ય વધઘટનું માપ શોધવા માટે વપરાય છે. પરંતુ હવે, તેનો ઉપયોગ ભાવસપાટીમાં થતી વધઘટના અભ્યાસ પૂરતો સીમિત રહ્યો નથી અત્યારના પરિવર્તનશીલ યુગમાં સૂચક આંકનો ઉપયોગ વિવિધ ક્ષેત્રમાં થતો જોવા મળે છે. સૂચક આંક નિર્દિષ્ટ આર્થિક, રાજકીય, સામાજિક કે ઔદ્યોગિક પ્રવૃત્તિમાં થતા ફેરફારોનો અભ્યાસ કરવાનું ઉપયોગી આંકડાશાસ્ત્રીય સાધન છે. દેશની આર્થિક અને ઔદ્યોગિક પરિસ્થિતિમાં થતા ફેરફારોનો તુલનાત્મક અભ્યાસ કરી સૂચક આંક દેશના આર્થિક વિકાસની યોજનામાં મહત્ત્વનું માર્ગદર્શન પૂરું પાડે છે. સૂચક આંકના કેટલાક ઉપયોગ નીચે પ્રમાણે છે :

(1) વ્યાપારી પરિસ્થિતિના સૂચક આંક : આ સૂચક આંક દેશના ધંધા અને વેપારની આર્થિક અને વ્યાપારી પ્રવૃત્તિઓની સામાન્ય પરિસ્થિતિનો અભ્યાસ કરવા માટે ઉપયોગી માર્ગદર્શન પૂરું પાડે છે.

(2) જથ્થાબંધ ભાવનો સૂચક આંક : આ સૂચક આંક દેશની સામાન્ય ભાવસપાટીમાં થતા ફેરફારો માપે છે. આ સૂચક આંક સરકાર, ઉત્પાદકો તથા વેપારીઓને નીતિવિષયક નિર્ણયો જેવા કે અર્થતંત્રમાં વસ્તુઓની માંગ અને પુરવઠો, ભવિષ્યની કિંમતોનું અનુમાન કરવા, તથા ભવિષ્યની યોજનાના ઘડતર માટે ઉપયોગી નીવડે છે. આ સૂચક આંકની મદદથી ભાવસપાટીમાં થતા ફેરફારોના અભ્યાસ દ્વારા ભારતીય રિઝર્વ બૅન્ક ફુગાવાને નિયંત્રણમાં રાખવા જરૂરી પગલાં લેવા માટે ઉપયોગમાં લે છે. ફુગાવાનો દર નીચે પ્રમાણે શોધવામાં આવે છે. જેમાં જથ્થાબંધ ભાવનો સૂચક આંક ઉપયોગી છે. આમ,

$$\text{ફુગાવાનો દર} = \frac{\left(\begin{array}{c}\text{ચાલુ વર્ષનો જથ્થાબંધ ભાવનો} \\ \text{સૂચક આંક}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{અગાઉના વર્ષનો જથ્થાબંધ ભાવનો} \\ \text{સૂચક આંક}\end{array}\right)}{\text{અગાઉના વર્ષનો જથ્થાબંધ ભાવનો સૂચક આંક}} \times 100$$

(3) જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક : આ સૂચક આંક જુદા જુદા સ્તરના લોકોના જીવનનિર્વાહ ખર્ચમાં થતા ફેરફારોનો અભ્યાસ કરવા ઉપયોગી છે. આ સૂચક આંક નાણાંની ખરીદશક્તિ નક્કી કરવા, કર્મચારીઓના પગાર, મોંઘવારી ભથ્થાં, બોનસ, વાસ્તવિક વેતનની ગણતરી કરવા તથા સરકારને કરનીતિના ઘડતરમાં મદદરૂપ થાય છે.

(4) માનવવિકાસનો સૂચક આંક : આ સૂચક આંક માનવવિકાસની કક્ષા, જીવનધોરણ, અપેક્ષિત આયુષ્ય અને શિક્ષણ સ્તર નક્કી કરવામાં ઉપયોગી છે અને તે પરથી માનવીય શક્તિઓના વિકાસ માટે જાણકારી મળે છે.

(5) રાષ્ટ્રીય આવકનો સૂચક આંક : આ સૂચક આંક દેશની આર્થિક પરિસ્થિતિનું મૂલ્યાંકન કરવામાં તેમજ સરકારને પંચવર્ષીય યોજનાઓનાં લક્ષ્યાંકો નક્કી કરવા માટે ઉપયોગી થાય છે. દેશની રાષ્ટ્રીય આવકમાં થતા ફેરફારોનો અભ્યાસ કરી દેશની રાષ્ટ્રીય આવક, ઉત્પાદન અને માથાદીઠ આવક વગેરે વધારવા માટેનાં સૂચનો પણ આ સૂચક આંકની મદદથી કરી શકાય છે.

(6) ઔદ્યોગિક ઉત્પાદનનો સૂચક આંક : આ સૂચક આંક જુદા જુદા સમયે ઔદ્યોગિક અને હુન્નર ક્ષેત્રના ઉત્પાદનમાં થતા ફેરફારોના અભ્યાસ માટે ખૂબ જ ઉપયોગી છે. તેમજ દેશનો વિકાસદર વધારવા, ઔદ્યોગિક અને વ્યાપારી પ્રવૃત્તિઓનું આયોજન કરવા માટે આ સૂચક આંક મદદરૂપ થાય છે.

(7) કૃષિ-પેદાશનો સૂચક આંક : આ સૂચક આંક કૃષિ-પેદાશના ભાવમાં થતા ફેરફારોનો અભ્યાસ કરવા ઉપયોગી છે. આ સૂચક આંકના ઉપયોગથી સરકાર કૃષિ-નીતિઓનું આયોજન કરે છે. તેમજ ખેડૂતોને તેમના ઉત્પાદનના યોગ્ય ટેકારૂપ ભાવ મળી રહે તેવી નીતિ-ઘડતરમાં આ સૂચક આંક મદદરૂપ થાય છે.

(8) આયાત-નિકાસનો સૂચક આંક : આ સૂચક આંક આયાત-નિકાસ નીતિ, હૂંડિયામણના દર, વિદેશી હૂંડિયામણની જરૂરિયાત અને માલ પર જકાતના દર નક્કી કરવામાં તથા જરૂરી સૂચનો કરવા માટે ઉપયોગી છે.

(9) ધંધા-રોજગારનો સૂચક આંક : આ સૂચક આંક દેશમાં પ્રવર્તતી રોજગારી, બેરોજગારી વિશેનો ખ્યાલ આપે છે અને તે પરથી બેરોજગારીના પ્રશ્નો જાણી માનવશક્તિનું આયોજન કરી શકાય છે.

(10) મૂડીરોકાણનો સૂચક આંક : આ સૂચક આંકથી શૅર-સ્ટૉક, ડિબેન્ચર, સરકારી જામીનગીરીઓ વગેરેના ભાવમાં થતી વધઘટ અને મૂડી રોકાણની ગતિશીલતાનો અભ્યાસ થઈ શકે છે. તેમજ શૅર-સ્ટૉકના ભાવોના વલણનું અનુમાન કરી શકાય છે.

(11) કાચા માલનો સૂચક આંક : આ સૂચક આંક વેપારીઓ, ઉદ્યોગપતિઓ, અર્થશાસ્ત્રીઓ વગેરેને ઉત્પાદન-વેચાણ નીતિઓમાં જરૂરી માર્ગદર્શન પૂરું પાડે છે.

જેમ બૅરોમિટર હવામાન, હવાનું દબાણ, વાવાઝોડું અને વરસાદની આગાહી કરવામાં ઉપયોગી બને છે. તેમ સૂચક આંક દેશની સમગ્ર આર્થિક પ્રવૃત્તિ, વ્યાપારી અને સામાજિક પ્રવૃત્તિઓમાં થતા ફેરફારો માપવાનું તથા તેમનો તુલનાત્મક અભ્યાસ કરવાનું એક આવશ્યક સાધન છે. તેથી સૂચક આંકને દેશના અર્થતંત્રનું બૅરોમિટર કહે છે.

1.4 આધાર વર્ષ (Base Year)

સૂચક આંકની રચનામાં કોઈ ચલની વર્તમાન સમયની કિંમતને કોઈ નિશ્ચિત સમયની (સામાન્ય રીતે ભૂતકાળના) ચલની કિંમત સાથે સરખાવામાં આવે છે. તે નિશ્ચિત સમય કે વર્ષને આધાર વર્ષ કહે છે. ભૂતકાળનું નિશ્ચિત વર્ષ, અગાઉનું વર્ષ અથવા તે પહેલાંનું વર્ષ હોઈ શકે. જે સમય કે વર્ષની કિંમતને આધાર વર્ષ કે સમયની કિંમત સાથે સરખાવવાની હોય તે વર્ષને ચાલુ અથવા પ્રવર્તમાન વર્ષ (Current Year) કે સમય કહેવામાં આવે છે. દા.ત., વર્ષ 2016ના સમયની કોઈ એક વસ્તુની કિંમતની સરખામણી વર્ષ 2015ના સમયની તે જ વસ્તુની કિંમત સાથે કરવાની હોય, તો વર્ષ 2015ને આધાર વર્ષ અને વર્ષ 2016ને ચાલુ વર્ષ કહેવાય.

જે વર્ષને આધાર વર્ષ તરીકે પસંદ કરવામાં આવે તે વર્ષ પ્રામાણ્ય કે સામાન્ય હોવું જોઈએ. તે વર્ષ અતિવૃષ્ટિ, અનાવૃષ્ટિ, ધરતીકંપ જેવી કુદરતી આફતો, યુદ્ધ, બળવો, હુલ્લડ, હડતાલ-આંદોલન જેવી અસામાન્ય માનવસર્જિત ઘટનાઓ, રાજકીય ઘટનાઓ, આર્થિક ઉથલ-પાથલ કે અન્ય આકસ્મિક ઘટનાઓથી મુક્ત હોવું જોઈએ. વળી આધાર વર્ષ લાંબા ભૂતકાળનું વર્ષ ન હોય તે જરૂરી છે. જો અસામાન્ય પરિસ્થિતિવાળું વર્ષ આધાર વર્ષ તરીકે પસંદ કરાયું હોય અને ચલની કિંમત અસાધારણ રીતે ઊંચી કે નીચી હોય તો સૂચક આંકનાં પરિણામો ગેરમાર્ગે દોરશે અને તેનાથી વર્તમાન પરિસ્થિતિની સાચી સ્થિતિ જાણી શકાતી નથી. આમ, સૂચક આંકની રચના માટે આધાર વર્ષની પસંદગી કાળજીપૂર્વક કરવી જરૂરી છે.

આધાર વર્ષની પસંદગી બે રીતે કરી શકાય છે : (1) અચલ આધારની રીત (Fixed Base Method) (2) પરંપરિત આધારની રીત (Chain Base Method)

1.4.1 અચલ આધારની રીત :

આ રીતમાં સામાન્ય ઘટના કે પરિસ્થિતિવાળા સમય કે વર્ષને સ્થિર ગણી પ્રામાણ્ય વર્ષ કે આધાર વર્ષ તરીકે લેવામાં આવે છે પરંતુ અમુક વખતે પ્રામાણ્ય કે આધાર વર્ષ નક્કી કરવું મુશ્કેલ હોય છે. આ સંજોગોમાં અમુક વર્ષોની સરેરાશ કિંમતને આધાર વર્ષની ચલ કિંમત તરીકે લેવામાં આવે છે. આધાર વર્ષની ચલ કિંમત સાથે વર્તમાન સમયની ચલ કિંમત સરખાવી સૂચક આંક મેળવવામાં આવે છે. આધાર વર્ષ ઘણા દૂરના ભૂતકાળનું વર્ષ ન બને તે માટે અમુક સમયાંતરે આધાર વર્ષ બદલવું જોઈએ. આમ, અચલ આધારની રીતથી સૂચક આંક નીચેના સૂત્રથી મેળવાય છે :

$$\text{સૂચક આંક } I = \frac{\text{ચાલુ વર્ષ (સમય)ની ચલ કિંમત}}{\text{આધાર વર્ષ (સમય)ની ચલ કિંમત}} \times 100$$

$$= \frac{p_1}{p_0} \times 100$$

જ્યાં, p_1 = ચાલુ વર્ષ (સમય)ની ચલ કિંમત

p_0 = આધાર વર્ષ (સમય)ની ચલ કિંમત

ઉદાહરણ 1 : કોઈ એક વિસ્તારમાં ઘઉંના જથ્થાબંધ ભાવની માહિતી નીચે પ્રમાણે છે. તે પરથી વર્ષ 2005ને આધાર વર્ષ તરીકે લઈ બાકીનાં વર્ષો માટે વસ્તુના ભાવના સૂચક આંક તૈયાર કરો. આ સૂચક આંક પરથી ઘઉંના વર્ષ 2013 ના ભાવમાં થયેલ ટકાવારી વધારો જણાવો.

વર્ષ	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
ક્વિન્ટલ દીઠ ભાવ (₹)	1650	1690	1730	1750	1810	1850	1870	1900	1950

અહીં વર્ષ 2005ને આધાર વર્ષ તરીકે લેવાનું હોવાથી અચલ આધારની રીતે સૂચક આંક મેળવીશું. અહીં આધાર વર્ષ 2005ના ઘઉંના ભાવનો સૂચક આંક 100 લઈશું.

વર્ષ	**ઘઉંનો ક્વિન્ટલદીઠ ભાવ (₹)**	**સૂચક આંક** $= \frac{p_1}{p_0} \times 100$
2005	1650	$\frac{1650}{1650} \times 100 = 100$
2006	1690	$\frac{1690}{1650} \times 100 = 102.42$
2007	1730	$\frac{1730}{1650} \times 100 = 104.85$
2008	1750	$\frac{1750}{1650} \times 100 = 106.06$
2009	1810	$\frac{1810}{1650} \times 100 = 109.70$
2010	1850	$\frac{1850}{1650} \times 100 = 112.12$
2011	1870	$\frac{1870}{1650} \times 100 = 113.33$
2012	1900	$\frac{1900}{1650} \times 100 = 115.15$
2013	1950	$\frac{1950}{1650} \times 100 = 118.18$

વર્ષ 2013 માં ઘઉંના ભાવમાં વર્ષ 2005ના સાપેક્ષમાં થયેલ ટકાવારી વધારો (118.18 – 100) = 18.18 % જેટલો થયો છે તેમ કહેવાય.

ઉદાહરણ 2 : છ ખોરાકી વસ્તુઓનાં વર્ષ 2014 અને 2015માં એકમદીઠ ભાવ (₹) નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવ્યા છે. 2014ના વર્ષને આધાર વર્ષ તરીકે લઈ ખોરાકી વસ્તુઓના ભાવનો સામાન્ય સૂચક આંક ગણો અને આ ખોરાકી વસ્તુઓના ભાવમાં સમગ્ર રીતે કેટલો વધારો થયો છે તે જણાવો.

વસ્તુ	એકમ	વસ્તુના એકમદીઠ ભાવ (₹)	
		વર્ષ 2014	વર્ષ 2015
બ્રેડ	પૅકેટ	25	28
ઇંડાં	ડઝન	30	35
ઘી	ટિન	375	380
દૂધ	લિટર	36	40
ચીઝ	કિલોગ્રામ	440	500
માખણ	કિલોગ્રામ	265	300

અહીં, આધાર વર્ષ તરીકે વર્ષ 2014 લઈને ચાલુ વર્ષ 2015 માટે વસ્તુઓના ભાવનો સામાન્ય સૂચક આંક મેળવવાનો છે. આધાર વર્ષના ભાવને p_0 અને ચાલુ વર્ષના ભાવને p_1 વડે દર્શાવી ભાવ સાપેક્ષ $\frac{p_1}{p_0}$ મેળવીશું. આ ગણતરી નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવી છે.

વસ્તુ	વસ્તુના ભાવ (₹)		ભાવ સાપેક્ષ $= \frac{p_1}{p_0}$
	p_0	p_1	
બ્રેડ	25	28	$\frac{28}{25} = 1.1200$
ઇંડાં	30	35	$\frac{35}{30} = 1.1666$
ઘી	375	380	$\frac{380}{375} = 1.0133$
દૂધ	36	40	$\frac{40}{36} = 1.1111$
ચીઝ	440	500	$\frac{500}{440} = 1.1364$
માખણ	265	300	$\frac{300}{265} = 1.1321$
કુલ			**= 6.6795**

છ ખોરાકી વસ્તુઓના ભાવનો સામાન્ય સૂચક આંક $I = \frac{\Sigma\left[\frac{p_1}{p_0}\right]}{n} \times 100$

$= \frac{6.6795}{6} \times 100$

$= 111.33$

$\therefore$ ખોરાકી વસ્તુઓનો સામાન્ય ભાવ સૂચક આંક I = 111.33 મળે.

સૂચક આંક I ની કિંમત પરથી જોઈ શકાય કે, વર્ષ 2014ની સરખામણીમાં વર્ષ 2015 ના વર્ષમાં ખોરાકી વસ્તુઓના ભાવમાં સમગ્ર રીતે (111.33 – 100) = 11.33 % જેટલો વધારો થયો છે.

ઉદાહરણ 3 : એક ખાંડ ઉત્પાદક કંપનીના વર્ષ 2008 થી 2015 સુધીના ખાંડના ઉત્પાદનના આંકડા નીચે પ્રમાણે છે. આ માહિતી પરથી વર્ષ 2009, 2010 અને 2011ના સરેરાશ ઉત્પાદનને આધાર વર્ષનું ઉત્પાદન લઈ અચલ આધારની રીતે સૂચક આંક તૈયાર કરો.

વર્ષ	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
ઉત્પાદન (હજાર ટન)	186	196	202	214	220	216	226	230

અહીં, વર્ષ 2009, 2010 અને 2011નું સરેરાશ ઉત્પાદન = $\frac{196 + 202 + 214}{3} = \frac{612}{3} = 204$

વર્ષ	ઉત્પાદન (હજાર ટન)	અચલ આધારની રીતે સૂચક આંક $= \frac{p_1}{p_0} \times 100$
2008	186	$\frac{186}{204} \times 100 = 91.18$
2009	196	$\frac{196}{204} \times 100 = 96.08$
2010	202	$\frac{202}{204} \times 100 = 99.02$
2011	214	$\frac{214}{204} \times 100 = 104.90$
2012	220	$\frac{220}{204} \times 100 = 107.84$
2013	216	$\frac{216}{204} \times 100 = 105.88$
2014	226	$\frac{226}{204} \times 100 = 110.78$
2015	230	$\frac{230}{204} \times 100 = 112.75$

અચલ આધારની રીતના ગુણ અને મર્યાદા

ગુણ : (1) આ રીતમાં આધાર વર્ષ અચળ હોવાથી જુદા જુદા સમયની ચલ કિંમતોમાં થતા સાપેક્ષ ફેરફારોની ગણતરીમાં અને સરખામણીમાં એકસૂત્રતા જળવાય છે.

(2) ચલની કિંમતોમાં થતા લાંબા ગાળાના ફેરફારોની સરખામણી માટે આ રીત ઉપયોગી છે.

(3) આ રીત સમજવામાં અને ગણતરીમાં સરળ છે.

મર્યાદા : (1) સમયના બદલાવ સાથે ગ્રાહકની રુચિ, ટેવ, ફેશન બદલાતી હોય છે અને તેથી ગ્રાહકના વપરાશની વસ્તુઓ બદલાય છે પરંતુ આ રીતમાં જેનો વપરાશ ઘટી ગયેલ હોય તેવી અગાઉ વપરાતી વસ્તુઓ દૂર કરી શકતી નથી.

(2) આધાર વર્ષ તરીકે સામાન્ય પરિસ્થિતિવાળું પ્રામાણ્ય વર્ષ મેળવવું હંમેશાં સંભવિત હોતું નથી. તેથી આધાર વર્ષની પસંદગીનું કાર્ય મુશ્કેલ છે. જો આધાર વર્ષની પસંદ યોગ્ય રીતે ન થાય તો સૂચક આંકની વિશ્વસનીયતા ઘટે છે.

(3) ચલની કિંમતમાં થતા ટૂંકા ગાળાના ફેરફારો સરખાવવા આ રીત અનુકૂળ નથી.

(4) પસંદગી પામેલ વસ્તુઓની ગુણવત્તામાં ફેરફાર થતા રહે છે. તેથી તેમના ભારમાં જરૂરી ફેરફાર કરવાનું આ પદ્ધતિમાં શક્ય નથી.

(5) બહુ જ લાંબા ભૂતકાળનું વર્ષ આધાર વર્ષ તરીકે લેવામાં આવ્યું હોય તો સરખામણી યોગ્ય ગણી શકાય નહિ.

1.4.2 પરંપરિત આધારની રીત :

આ રીતમાં કોઈ એક ચોક્કસ વર્ષ કે સમયને આધાર વર્ષ કે સમય ગણવામાં આવતું નથી. પરંતુ પ્રત્યેક વર્તમાન વર્ષ માટે તેના તરતના જ પુરોગામી (આગળના) વર્ષને આધાર વર્ષ તરીકે લેવામાં આવે છે. જેમકે, વર્ષ 2016ના સૂચક આંક માટે વર્ષ 2015ને આધાર વર્ષ ગણવામાં આવે છે. આ રીતમાં આધાર વર્ષ બદલાતું રહે છે. આમ, આધાર વર્ષ વારંવાર બદલાતું હોવાથી આ રીતને પરંપરિત આધારની રીત કહે છે. આ રીતમાં વર્તમાન પરિસ્થિતિને તેની નજીકના ભૂતકાળની પરિસ્થિતિ સાથે સરખાવામાં આવે છે. આ રીત મુજબ સૂચક આંક નીચેના સૂત્રથી મેળવાય છે :

$$\text{સૂચક આંક} = \frac{\text{ચાલુ વર્ષ (સમય)ની ચલ કિંમત}}{\text{અગાઉના વર્ષ (સમય)ની ચલ કિંમત}} \times 100$$

$$\therefore \quad I = \frac{p_1}{p_0} \times 100$$

ઉદાહરણ 4 : એક કંપનીના વર્ષ 2014ના દરેક બે મહિનાના અંતે શૅરના બંધ થતા ભાવ અંગેની માહિતી આપેલ છે. આ માહિતી પરથી પરંપરિત આધારે સૂચક આંક ગણો.

મહિના	જાન્યુઆરી	માર્ચ	મે	જુલાઈ	સપ્ટેમ્બર	નવેમ્બર
ભાવ (₹)	22	21.20	22	23	24.70	26.00

અહીં વર્ષ 2014ના જાન્યુઆરી મહિનાના અગાઉના મહિનાનો ભાવ આપેલ નથી. તેથી વર્ષ 2014ના જાન્યુઆરી માસનો સૂચક આંક 100 લઈશું. બાકીના મહિના માટે પરંપરિત રીત દ્વારા મળતા સૂચક આંક નીચેના કોષ્ટકમાં ગણી બતાવ્યા છે.

મહિનો	શૅરનો ભાવ (₹)	પરંપરિત આધારે સૂચક આંક $= \frac{\text{ચાલુ માસની ચલ કિંમત}}{\text{અગાઉના માસની ચલ કિંમત}} \times 100$
જાન્યુઆરી	22.00	= 100
માર્ચ	21.20	$\frac{21.20}{22.00} \times 100 = 96.36$
મે	22.00	$\frac{22.00}{21.20} \times 100 = 103.77$
જુલાઈ	23.00	$\frac{23.00}{22.00} \times 100 = 104.55$
સપ્ટેમ્બર	24.70	$\frac{24.70}{23.00} \times 100 = 107.39$
નવેમ્બર	26.00	$\frac{26.00}{24.70} \times 100 = 105.26$

પરંપરિત આધારની રીતના ગુણ અને મર્યાદા

ગુણ : (1) આ રીતમાં આધાર વર્ષની પસંદગીનો પ્રશ્ન ઉપસ્થિત થતો નથી કારણ કે જે-તે સમય માટે તેની અગાઉનું વર્ષ (સમય)ને આધાર વર્ષ (સમય) લેવાય છે.

(2) આ રીતમાં અગાઉના વર્ષ સાથે સરખામણી થતી હોવાથી ગ્રાહકોની રુચિ અને પસંદગી અનુસાર નવી વસ્તુઓનો સમાવેશ કરી શકાય છે. વપરાશ ઘટી ગયેલ હોય તેવી અગાઉ વપરાતી વસ્તુઓ દૂર કરી શકાય છે.

(3) પરંપરિત આધારની રીતમાં નજીકના ભૂતકાળના સમય સાથે વર્તમાન સમયની ચલ કિંમતની સરખામણી થતી હોવાથી આર્થિક, વેપાર અને વાણિજ્યક્ષેત્રે આ રીત ઉપયોગી છે.

મર્યાદા : (1) આ રીતમાં અગાઉના વર્ષને આધાર વર્ષ તરીકે લેવામાં આવતું હોવાથી ચલની કિંમતમાં થતા માત્ર ટૂંકા ગાળાના ફેરફારોની સરખામણી માટે અનુકૂળ છે. લાંબા ગાળાની સરખામણી માટે આ રીત બહુ ઉપયોગી બનતી નથી.

(2) આ રીતમાં કોઈ એક વર્ષ માટે સૂચક આંકની ગણતરીમાં ભૂલ થઈ હોય, તો તે પછીના વર્ષના સૂચક આંકના અર્થઘટનમાં ભૂલની અસર ચાલુ રહે છે.

(3) આ રીતથી મેળવેલ સૂચક આંકની ગણતરીમાં એકસૂત્રતા રહેતી નથી.

(4) કોઈ એકાદ વર્ષની માહિતી ઉપલબ્ધ ન હોય, તો તે પછીના વર્ષનો સૂચક આંક મેળવી શકાતો નથી.

ઉદાહરણ 5 : **એક ખાદ્ય તેલની મિલમાં વર્ષ 2008 થી 2015માં મગફળીની કરેલ ખરીદી અંગેની માહિતી નીચે મુજબ છે. તે પરથી વર્ષ 2008ને આધાર વર્ષ તરીકે લઈ અચલ આધારે, પરંપરિત આધારે અને વર્ષ 2010 અને 2011ની ખરીદીના સરેરાશ જથ્થાને આધાર વર્ષની ખરીદી તરીકે લઈ સૂચક આંક તૈયાર કરો.**

વર્ષ	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
મગફળીની ખરીદી (ટનમાં)	230	250	230	250	270	280	300	300

વર્ષ	જથ્થો મગફળીની ખરીદી (ટનમાં)	વર્ષ 2008ના આધાર અચલ આધારે સૂચક આંક $= \frac{\text{ચાલુ વર્ષની ચલ કિંમત}}{\text{આધાર વર્ષની ચલ કિંમત}} \times 100$	પરંપરિત આધારે સૂચક આંક $= \frac{\text{ચાલુ વર્ષની ચલ કિંમત}}{\text{અગાઉના વર્ષની ચલ કિંમત}} \times 100$	વર્ષ 2010 અને 2011ના જથ્થાની સરેરાશ $= \frac{230 + 250}{2} = 240$ ને આધાર વર્ષના જથ્થા તરીકે લઈ મેળવેલ સૂચક આંક
2008	230	= 100	= 100	$\frac{230}{240} \times 100 = 95.83$
2009	250	$\frac{250}{230} \times 100 = 108.70$	$\frac{250}{230} \times 100 = 108.70$	$\frac{250}{240} \times 100 = 104.17$
2010	230	$\frac{230}{230} \times 100 = 100$	$\frac{230}{250} \times 100 = 92.00$	$\frac{230}{240} \times 100 = 95.83$
2011	250	$\frac{250}{230} \times 100 = 108.70$	$\frac{250}{230} \times 100 = 108.70$	$\frac{250}{240} \times 100 = 104.17$
2012	270	$\frac{270}{230} \times 100 = 117.39$	$\frac{270}{250} \times 100 = 108$	$\frac{270}{240} \times 100 = 112.5$
2013	280	$\frac{280}{230} \times 100 = 121.74$	$\frac{280}{270} \times 100 = 103.70$	$\frac{280}{240} \times 100 = 116.67$
2014	300	$\frac{300}{230} \times 100 = 130.43$	$\frac{300}{280} \times 100 = 107.14$	$\frac{300}{240} \times 100 = 125$
2015	300	$\frac{300}{230} \times 100 = 130.43$	$\frac{300}{300} \times 100 = 100$	$\frac{300}{240} \times 100 = 125$

ઉદાહરણ 6 : એક ફ્લોર મિલમાં ત્રણ ધાન્ય ઘઉં, બાજરી અને ચણાના લોટનાં વર્ષ 2011 થી 2015 સુધીના વેચાણ અંગેની માહિતી નીચે મુજબ છે. આ માહિતી પરથી સાદી સરેરાશનો ઉપયોગ કરી (i) અચલ આધારની રીતે (આધાર વર્ષ 2011 લેતાં) અને (ii) પરંપરિત આધારની રીતે વેચાણના સામાન્ય સૂચક આંકની ગણતરી કરો.

વર્ષ → / ધાન્યનો લોટ	વેચાણ (લાખ ₹)				
	2011	**2012**	**2013**	**2014**	**2015**
ઘઉંનો લોટ	40	46	50	56	64
બાજરીનો લોટ	20	30	36	42	54
ચણાનો લોટ	50	64	80	96	112

(i) અચલ આધારની રીત :

$$\text{અચલ આધારે સૂચક આંક } I = \frac{\text{ચાલુ વર્ષ (સમય)ની ચલ કિંમત}}{\text{આધાર વર્ષ (સમય)ની ચલ કિંમત}} \times 100$$

વર્ષ / ધાન્યનો લોટ	2011	2012	2013	2014	2015
ઘઉંનો લોટ	100	$\frac{46}{40} \times 100 = 115$	$\frac{50}{40} \times 100 = 125$	$\frac{56}{40} \times 100 = 140$	$\frac{64}{40} \times 100 = 160$
બાજરીનો લોટ	100	$\frac{30}{20} \times 100 = 150$	$\frac{36}{20} \times 100 = 180$	$\frac{42}{20} \times 100 = 210$	$\frac{54}{20} \times 100 = 270$
ચણાનો લોટ	100	$\frac{64}{50} \times 100 = 128$	$\frac{80}{50} \times 100 = 160$	$\frac{96}{50} \times 100 = 192$	$\frac{112}{50} \times 100 = 224$
સરવાળો	300	393	465	542	654
વેચાણનો સામાન્ય સૂચક આંક $= \frac{\text{સરવાળો}}{3}$	$\frac{300}{3} = 100$	$\frac{393}{3} = 131$	$\frac{465}{3} = 155$	$\frac{542}{3} = 180.67$	$\frac{654}{3} = 218$

(ii) પરંપરિત આધારની રીતે વેચાણના સામાન્ય સૂચક આંક :

$$\text{પરંપરિત આધારે સૂચક આંક } I = \frac{\text{ચાલુ વર્ષ (સમય)ની ચલ કિંમત}}{\text{અગાઉના વર્ષ (સમય)ની ચલ કિંમત}} \times 100$$

વર્ષ / ધાન્યનો લોટ	2011	2012	2013	2014	2015
ઘઉંનો લોટ	100	$\frac{46}{40} \times 100 = 115$	$\frac{50}{46} \times 100 = 108.70$	$\frac{56}{50} \times 100 = 112$	$\frac{64}{56} \times 100 = 114.29$
બાજરીનો લોટ	100	$\frac{30}{20} \times 100 = 150$	$\frac{36}{30} \times 100 = 120$	$\frac{42}{36} \times 100 = 116.67$	$\frac{54}{42} \times 100 = 128.57$
ચણાનો લોટ	100	$\frac{64}{50} \times 100 = 128$	$\frac{80}{64} \times 100 = 125$	$\frac{96}{80} \times 100 = 120$	$\frac{112}{96} \times 100 = 116.67$
સરવાળો	300	393	353.7	348.67	359.53
વેચાણનો સામાન્ય સૂચક આંક $= \frac{\text{સરવાળો}}{3}$	$\frac{300}{3} = 100$	$\frac{393}{3} = 131$	$\frac{353.7}{3} = 117.90$	$\frac{348.67}{3} = 116.22$	$\frac{359.53}{3} = 119.84$

ઉદાહરણ 7 : એક શહેરમાં થયેલ ગુના વિશેની નીચેની માહિતી પ્રાપ્ત છે. તે પરથી વર્ષ 2010 ને આધાર વર્ષ તરીકે ગણી અચલ આધારની રીતે સામાન્ય સૂચક આંક શોધો.

વર્ષ / ગુનાનો પ્રકાર	**2007**	**2008**	**2009**	**2010**
ખૂન	110	128	134	129
બળજબરી અને બળાત્કાર	30	45	40	48
લૂંટ	610	720	770	830
મિલકતની ચોરી	2450	2630	2910	2890

$$\text{અચલ આધારે સૂચક આંક } I = \frac{\text{ચાલુ વર્ષ (સમય)ની ચલ કિંમત}}{\text{આધારના વર્ષ (સમય)ની ચલ કિંમત}} \times 100$$

વર્ષ / ગુનાનો પ્રકાર	**2007**	**2008**	**2009**	**2010**
ખૂન	$\frac{110}{129} \times 100 = 85.27$	$\frac{128}{129} \times 100 = 99.22$	$\frac{134}{129} \times 100 = 103.88$	$\frac{129}{129} \times 100 = 100$
બળજબરી અને બળાત્કાર	$\frac{30}{48} \times 100 = 62.5$	$\frac{45}{48} \times 100 = 93.75$	$\frac{40}{48} \times 100 = 83.33$	$\frac{48}{48} \times 100 = 100$
લૂંટ	$\frac{610}{830} \times 100 = 73.49$	$\frac{720}{830} \times 100 = 86.75$	$\frac{770}{830} \times 100 = 92.77$	$\frac{830}{830} \times 100 = 100$
મિલકતની ચોરી	$\frac{2450}{2890} \times 100 = 84.78$	$\frac{2630}{2890} \times 100 = 91.00$	$\frac{2910}{2890} \times 100 = 100.69$	$\frac{2890}{2890} \times 100 = 100$
સરવાળો	306.04	370.72	380.67	400
ગુનાનો સામાન્ય સૂચક આંક $= \frac{\text{સરવાળો}}{4}$	$\frac{306.04}{4} = 76.51$	$\frac{370.72}{4} = 92.68$	$\frac{380.67}{4} = 95.17$	$\frac{400}{4} = 100$

સ્વાધ્યાય 1.1

1. એક શહેરના કારખાનામાં કામ કરતા કામદારોના જૂથની વર્ષ 2008 થી 2015 દરમિયાન દૈનિક સરેરાશ વેતન અંગેની માહિતી નીચે મુજબ છે, તે પરથી (1) અચલ આધારની રીત (આધાર વર્ષ 2008 લેતાં) (2) પરંપરિત આધારની રીત અને (3) વર્ષ 2011 થી 2013ના દૈનિક સરેરાશ વેતનની સરેરાશને આધાર વર્ષના વેતન તરીકે લઈ અચલ આધારે સૂચક આંક ગણો.

વર્ષ	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
દૈનિક સરેરાશ વેતન (₹)	275	284	289	293	297	313	328	345

2. એક શહેરની ખાંડના છૂટક ભાવ અંગેની નીચેની માહિતી પરથી (1) વર્ષ 2008ને આધાર વર્ષ લઈ અચલ આધારની રીતે, (2) પરંપરિત આધારની રીતે અને (3) વર્ષ 2009 અને 2010ના ખાંડના ભાવની સરેરાશને આધાર વર્ષના ભાવ તરીકે લઈ ખાંડના ભાવના સૂચક આંક ગણો.

વર્ષ	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
ખાંડનો ભાવ કિલોગ્રામ દીઠ (₹)	28	28.50	29.50	30	31	32	34	36

3. કોઈ એક શહેરના જથ્થાબંધ બજારમાંથી ઘઉં, ચોખા અને ખાંડના વાર્ષિક સરેરાશ ભાવ અંગેની માહિતી નીચે મુજબ મળેલ છે. તે પરથી વર્ષ 2011ને આધાર વર્ષ તરીકે લઈ અચલ આધારે અને પરંપરિત આધારે ત્રણેય વસ્તુઓના ભાવનો સામાન્ય સૂચક આંક ગણો.

વસ્તુ \ વર્ષ	2011	2012	2013	2014	2015
ઘઉં	18	18.50	18.90	19	19.50
ચોખા	30	36	38	38	39
ખાંડ	30	31	32	34	36

4. બળતણને લગતી પાંચ વસ્તુઓના વર્ષ 2012 અને વર્ષ 2014ના ભાવ **(₹)** નીચે મુજબ છે. વર્ષ 2012ને આધાર વર્ષ તરીકે લઈ બળતણની પાંચ વસ્તુઓના ભાવનો સામાન્ય સૂચક આંકની ગણતરી કરી અને બળતણની વસ્તુઓના ભાવમાં સમગ્ર રીતે કેટલો વધારો થયો છે તે જણાવો.

વસ્તુ	વીજળી	ગૅસ	દીવાસળી	કેરોસીન	લાકડું
એકમ	યુનિટ	સિલિન્ડર	પેટી	લિટર	કિલોગ્રામ
વર્ષ 2012નો ભાવ ₹	3	345	1.00	15	12
વર્ષ 2014નો ભાવ ₹	3.5	370	1.50	20	15

*

1.5 અચલ આધારમાંથી પરંપરિત આધારમાં અને પરંપરિત આધારમાંથી અચલ આધારમાં પરિવર્તન

સામાન્ય રીતે જ્યારે ચલની કિંમતોની મૂળ માહિતીને બદલે ફક્ત તેના પરથી અચલ આધારે કે પરંપરિત આધારે મેળવેલા સૂચક આંક જ પ્રાપ્ય હોય ત્યારે નીચેનાં કારણોસર આધાર પરિવર્તનની જરૂર પડે છે. જો ચલની કિંમતોમાં ટૂંકા ગાળામાં થતા ફેરફારો જાણવાની જરૂરિયાત ઊભી થાય તો અચલ આધારે મેળવેલા સૂચક આંક પરથી તે જાણવું મુશ્કેલ બને છે. તેથી અચલ આધારે મેળવેલા સૂચક આંકને પરંપરિત આધારના સૂચક આંકમાં ફેરવી તે પરથી ટૂંકા ગાળામાં થયેલ ફેરફારો વિશે જાણવું સરળ બને છે.

કેટલીક વખત ચલની કિંમતોની શ્રેણીમાં કોઈ પણ એક સમયે ચલની કિંમતની સરખામણી કોઈ બીજા સમયની કિંમત સાથે કરવી હોય અને ફક્ત તેમના પરંપરિત સૂચક આંક પ્રાપ્ય હોય તો તે શક્ય બનતું નથી. આવા સંજોગોમાં પરંપરિત આધારના સૂચક આંકને અચલ આધારના સૂચક આંકમાં ફેરવીએ તો તે સૂચક આંક પરથી ઉપર્યુક્ત સરખામણી શક્ય બને છે. તેથી આવા સંજોગોમાં પરંપરિત આધારના સૂચક આંકને અચલ આધારના સૂચક આંકમાં ફેરવવાની જરૂરિયાત ઊભી થાય છે. આ માટે નીચે મુજબ આધાર પરિવર્તન કરવામાં આવે છે :

અચલ આધારના સૂચક આંકનું પરંપરિત આધારના સૂચક આંકમાં પરિવર્તન : અચલ આધારના સૂચક આંકનું પરંપરિત આધારના સૂચક આંકમાં પરિવર્તન કરવાનું સૂત્ર નીચે મુજબ છે.

$$\text{પરંપરિત આધારે સૂચક આંક} = \frac{\text{ચાલુ વર્ષનો અચલ આધારે સૂચક આંક}}{\text{અગાઉના વર્ષનો અચલ આધારે સૂચક આંક}} \times 100$$

નોંધ : જો આધાર વર્ષનો ઉલ્લેખ કરવામાં આવ્યો ન હોય તો પ્રથમ વર્ષ માટેનો પરંપરિત સૂચક આંક 100 લઈશું. જો આધાર વર્ષનો ઉલ્લેખ કરવામાં આવ્યો હોય તો પ્રથમ વર્ષનો અચલ આધારનો સૂચક આંક જ પ્રથમ વર્ષના પરંપરિત આધારના સૂચક આંક તરીકે લઈશું.

ઉદાહરણ 8 : એક રાજ્યમાં હુન્નર ઉદ્યોગના ઉત્પાદનના નીચે આપેલ અચલ આધારની રીતે મેળવેલા સૂચક આંકનું પરંપરિત આધારના સૂચક આંકમાં પરિવર્તન કરો.

વર્ષ	2009	2010	2011	2012	2013	2014
અચલ આધાર સૂચક આંક	120	132	96	144	138	108

અહીં આધાર વર્ષનો ઉલ્લેખ કરવામાં આવેલ ન હોવાથી પ્રથમ વર્ષ માટે પરંપરિત આધારે સૂચક આંક 100 લઈશું.

$$\text{પરંપરિત આધારે સૂચક આંક} = \frac{\text{ચાલુ વર્ષનો અચલ આધારે સૂચક આંક}}{\text{અગાઉના વર્ષનો અચલ આધારે સૂચક આંક}} \times 100$$

વર્ષ	સૂચક આંક	પરંપરિત આધારના સૂચક આંક
2009	120	= 100
2010	132	$\frac{132}{120} \times 100 = 110$
2011	96	$\frac{96}{132} \times 100 = 72.73$
2012	144	$\frac{144}{96} \times 100 = 150$
2013	138	$\frac{138}{144} \times 100 = 95.83$
2014	108	$\frac{108}{138} \times 100 = 78.26$

ઉદાહરણ 9 : વર્ષ 2007-08ને આધારે ચીજવસ્તુઓના જથ્થાબંધ ભાવના સૂચક આંક નીચે મુજબ છે. તે પરથી પરંપરિત આધારે સૂચક આંક ગણો.

વર્ષ	2008-09	2009-10	2010-11	2011-12	2012-13	2013-14	2014-15	2015-16
જથ્થાબંધ ભાવનો સૂચક આંક	126	130.8	143.3	156.1	167.6	177.6	181.2	177.2

અહીં આધાર વર્ષ 2007-08નો ઉલ્લેખ કરવામાં આવેલ છે. તેથી 2008-09ના વર્ષ માટેનો અચલ આધારે જે સૂચક આંક આપેલો હોય તેને જ પરંપરિત આધારના સૂચક આંક તરીકે લઈશું. તેથી પ્રથમ વર્ષનો પરંપરિત આધારે સૂચક આંક 126 થાય.

$$\text{પરંપરિત આધારે સૂચક આંક} = \frac{\text{ચાલુ વર્ષનો અચલ આધારે સૂચક આંક}}{\text{અગાઉના વર્ષનો અચલ આધારે સૂચક આંક}} \times 100$$

વર્ષ	**ચીજવસ્તુનો જથ્થાબંધ ભાવનો સૂચક આંક**	**પરંપરિત આધારે સૂચક આંક**
2008-09	126	$= 126$
2009-10	130.8	$\frac{130.8}{126} \times 100 = 103.81$
2010-11	143.3	$\frac{143.3}{130.8} \times 100 = 109.56$
2011-12	156.1	$\frac{156.1}{143.3} \times 100 = 108.93$
2012-13	167.6	$\frac{167.6}{156.1} \times 100 = 107.37$
2013-14	177.6	$\frac{177.6}{167.6} \times 100 = 105.97$
2014-15	181.2	$\frac{181.2}{177.6} \times 100 = 102.03$
2015-16	177.2	$\frac{177.6}{181.2} \times 100 = 97.79$

પરંપરિત આધારના સૂચક આંકનું અચલ આધારના સૂચક આંકમાં પરિવર્તન : જો વર્ષ અનુસાર પરંપરિત આધારના સૂચક આંક આપેલા હોય, તો તેના પરથી અચલ આધારના સૂચક આંક શોધી શકાય છે. અચલ આધારના સૂચક આંક મેળવવો હોય તો તે વર્ષના પરંપરિત આધારના સૂચક આંકને તેના અગાઉના વર્ષના અચલ આધારના સૂચક આંક વડે ગુણી 100 વડે ભાગવામાં આવે છે.

$$\text{આમ, ચાલુ વર્ષનો અચલ આધારનો સૂચક આંક} = \frac{\left(\text{ચાલુ વર્ષનો પરંપરિત આધારે સૂચક આંક}\right) \times \left(\text{ચાલુ વર્ષના અગાઉના વર્ષનો અચલ આધારે સૂચક આંક}\right)}{100}$$

હવે આ રીત ઉદાહરણ દ્વારા સમજીએ.

ઉદાહરણ 10 : વર્ષ 2008-09 થી 2015-16 સુધીના ખાદ્ય ચીજવસ્તુઓના ભાવના પરંપરિત આધારે મેળવાયેલ સૂચક આંક નીચે પ્રમાણે છે, તે પરથી અચલ આધારે સૂચક આંક ગણો. (આધાર વર્ષ 2007-08 લો.)

વર્ષ	2008 – 09	2009 – 10	2010 – 11	2011 – 12	2012 – 13	2013 – 14	2014 – 15	2015 – 16
ખાદ્ય ચીજ વસ્તુનો સૂચક આંક	134.8	115.28	115.57	107.29	109.91	112.80	106.24	102.48

અહીં વર્ષ 2007-08ના આધાર વર્ષ લેવાનું છે. તેથી વર્ષ 2008-09 માટે અચલ આધારે સૂચક આંક બદલાશે નહિ.

$$\text{ચાલુ વર્ષનો અચલ આધારનો સૂચક આંક} = \frac{\left(\begin{matrix}\text{ચાલુ વર્ષનો પરંપરિત આધારે}\\ \text{સૂચક આંક}\end{matrix}\right) \times \left(\begin{matrix}\text{ચાલુ વર્ષના અગાઉના વર્ષનો}\\ \text{અચલ આધારે સૂચક આંક}\end{matrix}\right)}{100}$$

વર્ષ	ખાદ્ય ચીજવસ્તુનો સૂચક આંક	અચલ આધારે સૂચક આંક
2008-09	134.8	= 134.8
2009-10	115.28	$\frac{115.28 \times 134.8}{100}$ = 155.40
2010-11	115.57	$\frac{115.57 \times 155.40}{100}$ = 179.60
2011-12	107.29	$\frac{107.29 \times 179.60}{100}$ = 192.69
2012-13	109.91	$\frac{109.91 \times 192.69}{100}$ = 211.79
2013-14	112.80	$\frac{112.80 \times 211.79}{100}$ = 238.9
2014-15	106.24	$\frac{106.24 \times 238.9}{100}$ = 253.81
2015-16	102.48	$\frac{102.48 \times 253.81}{100}$ = 260.10

સ્વાધ્યાય 1.2

1. એક રાજ્યનાં વર્ષ 2008 થી 2014 સુધીના કૃષિ-ઉત્પાદનના પરંપરિત આધારે મેળવેલ સૂચક આંક નીચે મુજબ છે. તે પરથી અચલ આધારે સૂચક આંક ગણો. (આધાર વર્ષ 2007 લો.)

વર્ષ	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
કૃષિ -ઉત્પાદનનો સૂચક આંક	100	110	95	108	120	106	110

2. વર્ષ 2007-08ને આધાર વર્ષ તરીકે લઈ નીચે આપેલ યંત્ર અને યંત્ર-સામગ્રીના જથ્થાબંધ ભાવના અચલ આધારના સૂચક આંક પરથી પરંપરિત આધારના સૂચક આંક મેળવો.

વર્ષ	2008 – 09	2009 – 10	2010 – 11	2011 – 12	2012 – 13	2013 – 14	2014 – 15
યંત્ર અને યંત્ર-સામગ્રીનો સૂચક આંક	117.4	118	121.3	125.1	128.4	131.6	134.6

3. અમદાવાદના ઔદ્યોગિક કામદાર માટે વર્ષ 2015ના જાન્યુઆરી માસથી ઑક્ટોબર માસના ખોરાકના અચલ આધારે સૂચક આંક નીચે મુજબ આપેલ છે. તે પરથી પરંપરિત આધારે સૂચક આંક ગણો.

માસ	જાન્યુઆરી	ફેબ્રુઆરી	માર્ચ	એપ્રિલ	મે	જુન	જુલાઈ	ઑગસ્ટ	સપ્ટેમ્બર	ઑક્ટોબર
ખોરાકનો સૂચક આંક	271	270	268	268	278	283	283	293	293	299

4. વર્ષ 2010 થી 2015 સુધીના કોઈ એક પ્રકારના સ્કૂટરના વેચાણના પરંપરિત આધારે મેળવેલ સૂચક આંક નીચે મુજબ છે. તે પરથી અચલ આધારે સૂચક આંક ગણો.

વર્ષ	2010	2011	2012	2013	2014	2015
વેચાણનો સૂચક આંક	110	112	109	108	105	111

*

1.6 સૂચક આંકની ગણતરી માટેનાં વિશિષ્ટ સૂત્રો

આપણે, કોઈ વસ્તુની ચલરાશિની કિંમત કે વસ્તુઓના સમૂહની ચલરાશિની કિંમતોમાં થતા ફેરફારોનો અભ્યાસ કરવા માટે સૂચક આંકનો ઉપયોગ થાય છે તે જોયું. સૂચક આંકની રચનામાં સાદી સરેરાશ વપરાય છે અને દરેક વસ્તુને એક સરખું મહત્ત્વ આપવામાં આવે છે પરંતુ વ્યવહારમાં સામાન્ય રીતે દરેક વસ્તુનું મહત્ત્વ સરખું હોતું નથી. જેમકે અનાજની ચીજવસ્તુઓને જે મહત્ત્વ આપવામાં આવે છે, તેટલું મહત્ત્વ શાકભાજી, કઠોળ કે ખાદ્યતેલને આપવામાં આવતું નથી. તેથી જે વસ્તુનું જેટલું મહત્ત્વ હોય તે મુજબ તેના ભાવને ભાર આપવામાં આવે, તો ખોરાકી વસ્તુનો સૂચક આંક વાસ્તવિક અને અર્થપૂર્ણ બને.

જુદા જુદા પ્રકારના સૂચક આંકની રચનામાં સમાવેલ વસ્તુઓના ભાર નક્કી કરવામાં આવે છે. સૂચક આંકની રચનામાં વસ્તુઓના ભાર સામાન્ય રીતે તેમના વપરાશના જથ્થાના આધારે નક્કી કરવામાં આવે છે. આ બાબતને ધ્યાનમાં લઈ સૂચક આંકની રચનામાં ભાર પસંદ કરવાની જુદી જુદી રીતોને આધારે સૂચક આંકની ગણતરી માટે કેટલાંક જુદા જુદા સૂત્રો છે. હવે તેનો અભ્યાસ કરીશું.

ભારિત સરેરાશની રીત : ધારો કે ઘઉં, ચોખા અને કઠોળ વસ્તુનો સમૂહ (અથવા વસ્તુઓ) પૈકી i માં સમૂહ માટેનો સૂચક આંક I_i હોય અને અનુરૂપ ભાર W_i હોય, તો આ સમૂહોનો સામાન્ય સૂચક આંક નીચેના સૂત્રની મદદથી મેળવી શકીએ.

સામાન્ય સૂચક આંક $I = \frac{\Sigma I_i W_i}{\Sigma W_i} = \frac{\Sigma IW}{\Sigma W}$

નોંધ : ગણતરીની સરળતા ખાતર હવે પછી આ સૂત્રમાં આપણે અનુગ (Suffix) 'i' ને અવગણીશું.

દા.ત., જો આ સમૂહોના સૂચક આંક અનુક્રમે 120, 150 અને 300 હોય અને તેમને અનુરૂપ ભાર અનુક્રમે 3, 2 અને 1 હોય, તો વસ્તુના સમૂહોનો સામાન્ય સૂચક આંક $I = \frac{\Sigma IW}{\Sigma W}$

$$= \frac{120 \times 3 + 150 \times 2 + 300 \times 1}{3 + 2 + 1}$$

$$= \frac{360 + 300 + 300}{6}$$

$$= \frac{960}{6}$$

$$= 160$$

લાસ્પેયરનું સૂત્ર

સૂચક આંક શોધવાની આ પદ્ધતિ લાસ્પેયર દ્વારા આપવામાં આવેલ છે. સૂચક આંક શોધવાની આ એક અગત્યની પદ્ધતિ છે. આ પદ્ધતિમાં વસ્તુઓના આધાર વર્ષના ભાવને p_0 અને જથ્થાને q_0 વડે દર્શાવવામાં આવે છે તથા વસ્તુઓના ચાલુ વર્ષના ભાવને p_1 વડે દર્શાવવામાં આવે છે. ભાવ સાપેક્ષ $\frac{p_1}{p_0}$ ને ખર્ચ $p_0\,q_0$ જેટલો ભાર આપવામાં આવે છે. આ રીતે મેળવતા ભારિત સરેરાશના સૂત્રને **લાસ્પેયરના સૂચક આંક**નું સૂત્ર કહેવામાં આવે છે, જેને સંકેતમાં I_L વડે દર્શાવાય છે. લાસ્પેયરનું સૂત્ર નીચે મુજબ છે :

લાસ્પેયરનો સૂચક આંક $$I_L = \frac{\Sigma\left[\frac{p_1}{p_0}\right] \times p_0q_0}{\Sigma p_0q_0} \times 100$$

$$= \frac{\Sigma \frac{p_1}{p_0} \times p_0q_0}{\Sigma p_0q_0} \times 100$$

$$\therefore \quad I_L = \frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times 100$$

પાશેનું સૂત્ર

આ પદ્ધતિ પાશે નામના અર્થશાસ્ત્રીએ આપેલ છે. જો p_0 ને આધાર વર્ષનો ભાવ, p_1 ને ચાલુ વર્ષનો ભાવ અને q_1 ને ચાલુ વર્ષનો જથ્થો કહીએ, તો ભાવ સાપેક્ષ $\frac{p_1}{p_0}$ ને ખર્ચ p_0q_1 જેટલો ભાર આપવામાં આવે છે. આ રીતે મેળવાતા ભારિત સરેરાશના સૂત્રને **પાશેના સૂચક આંક**નું સૂત્ર કહેવામાં આવે છે, જેને સંકેતમાં I_P વડે દર્શાવાય છે.

પાશેના સૂચક આંકનું સૂત્ર નીચે મુજબ છે :

પાશેનો સૂચક આંક $$I_P = \frac{\Sigma\left[\frac{p_1}{p_0}\right] \times p_0q_1}{\Sigma p_0q_1} \times 100$$

$$= \frac{\Sigma \frac{p_1}{p_0} \times p_0q_1}{\Sigma p_0q_1} \times 100$$

$$\therefore \quad I_P = \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1} \times 100$$

ફિશરનું સૂત્ર

લાસ્પેયર અને પાશેની પદ્ધતિમાં અનુક્રમે આધાર વર્ષ અને ચાલુ વર્ષના જથ્થાને ભારની ગણતરીમાં ધ્યાનમાં લેવામાં આવે છે. પ્રો. ઈરવિંગ ફિશરે બંને વર્ષના જથ્થાને ધ્યાન લઈ આ સૂચક આંકની રચના કરેલી છે. લાસ્પેયર અને પાશેના સૂચક આંકના ગુણોત્તર મધ્યકને **ફિશરનો સૂચક આંક** કહેવામાં આવે છે, જેને સંકેતમાં I_F વડે દર્શાવાય છે. ફિશરના સૂચક આંકનું સૂત્ર નીચે મુજબ છે :

ફિશરનો સૂચક આંક $I_F = \sqrt{I_L \times I_P}$ અથવા

ફિશરનો સૂચક આંક $I_F = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}} \times 100$

ફિશરના સૂચક આંકને નીચેનાં કારણોસર આદર્શ સૂચક આંક કહેવામાં આવે છે :

(1) સૂચક આંકની રચનામાં આધાર વર્ષ અને ચાલુ વર્ષ એમ બંને વર્ષના જથ્થાને ગણતરીમાં લેવામાં આવે છે.

(2) સૂચક આંકના અગત્યનાં બંને મૂળભૂત પરીક્ષણો સમય (કાલ) વિપર્યાસ અને પદ વિપર્યાસનું આ સૂચક આંક સમાધાન કરે છે.

(3) આ સૂચક આંકની ગણતરીમાં ગુણોત્તર મધ્યકનો ઉપયોગ થાય છે, જે સૂચક આંકની રચના માટે શ્રેષ્ઠ સરેરાશ છે.

(4) આ સૂચક આંક પક્ષપાતથી મુક્ત છે. કારણ કે તે લાસ્પેયર અને પાશેના સૂચક આંકમાં રહેલા દોષોને સમતુલિત કરે છે.

આમ, ફિશરનો સૂચક આંક આદર્શ સૂચક આંક છે.

ઉદાહરણ 11 : પાંચ જુદી-જુદી વસ્તુઓના ભાવ અને ભાર અંગેની નીચેની માહિતી પરથી વર્ષ 2011ને આધારે 2016નો સૂચક આંક ભારિત સરેરાશની રીતે ગણો.

વસ્તુ	ભાર	ભાવ (₹)	
		વર્ષ 2011	વર્ષ 2016
A	40	160	200
B	25	400	600
C	5	50	70
D	20	10	18
E	10	2	3

અહીં જુદી-જુદી વસ્તુના ભાર આપેલ છે. વર્ષ 2011ના ભાવને આધારે વર્ષ 2016ના ભાવ સાપેક્ષ મેળવી સામાન્ય સૂચક આંક ગણીશું.

વસ્તુ	ભાર W	ભાવ (₹)		$I = \frac{p_1}{p_0} \times 100$	IW
		p_0	p_1		
A	40	160	200	$\frac{200}{160} \times 100 = 125$	5000
B	25	400	600	$\frac{600}{400} \times 100 = 150$	3750
C	5	50	70	$\frac{70}{50} \times 100 = 140$	700
D	20	10	18	$\frac{18}{10} \times 100 = 180$	3600
E	10	2	3	$\frac{3}{2} \times 100 = 150$	1500
કુલ	**100**				**14,550**

વર્ષ 2016નો સૂચક આંક $I = \frac{\Sigma IW}{\Sigma W}$

$$= \frac{14550}{100}$$

$$= 145.50$$

આમ, આધાર વર્ષ 2011ની સરખામણીમાં વર્ષ 2016ના ભાવમાં (145.50 – 100) = 45.5 % જેટલો વધારો થયો છે તેમ કહેવાય.

ઉદાહરણ 12 : નીચે આપેલી ખાધા-ખોરાકીની ચીજવસ્તુઓના ભાવ અને વપરાશ અંગેની માહિતી પરથી વર્ષ 2015ને આધાર વર્ષ તરીકે લઈ, વર્ષ 2016 માટે લાસ્પેયર, પાશે અને ફિશરનો સૂચક આંક શોધો.

વસ્તુ	એકમ	વર્ષ 2016		વર્ષ 2015	
		ભાવ (₹)	જથ્થો	ભાવ (₹)	જથ્થો
ચોખા	કિલોગ્રામ	40	1.5 કિલોગ્રામ	39	1 કિલોગ્રામ
દૂધ	લિટર	44	10 લિટર	40	12 લિટર
બ્રેડ	કિલોગ્રામ	50	1.5 કિલોગ્રામ	45	2 કિલોગ્રામ
કેળાં	ડઝન	36	1.5 ડઝન	30	2 ડઝન

અહીં આધાર વર્ષનો ભાવ p_0 અને જથ્થો q_0, ચાલુ વર્ષના ભાવ p_1 અને જથ્થો q_1 તરીકે લઈશું.

વસ્તુ	એકમ	p_0	q_0	p_1	q_1	p_1q_0	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_1
ચોખા	કિલોગ્રામ	39	1	40	1.5	40	39	60	58.5
દૂધ	લિટર	40	12	44	10	528	480	440	400
બ્રેડ	કિલોગ્રામ	45	2	50	1.5	100	90	75	67.5
કેળાં	ડઝન	30	2	36	1.5	72	60	54	45
કુલ						**740**	**669**	**629**	**571**

લાસ્પેયરનો સૂચક આંક $I_L = \frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times 100$

$= \frac{740}{669} \times 100$

$= 110.6128$

$\simeq 110.61$

આમ, આધાર વર્ષ 2015ના સાપેક્ષમાં વર્ષ 2016ના કુલ ખર્ચમાં (110.61 – 100) = 10.61 % જેટલો ભાવ વધારો થયો છે.

પાશેનો સૂચક આંક $I_P = \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1} \times 100$

$= \frac{629}{571} \times 100$

$= 110.1576$

$\simeq 110.16$

આમ, આધાર વર્ષ 2015ના સાપેક્ષમાં વર્ષ 2016ના કુલ ખર્ચમાં (110.16 – 100) = 10.16 % જેટલો ભાવ વધારો થયો છે.

ફિશરનો સૂચક આંક $I_F = \sqrt{I_L \times I_P}$

$= \sqrt{110.61 \times 110.16}$

$= 110.3847$

$\simeq 110.38$

આમ, આધાર વર્ષ 2015ના સાપેક્ષમાં વર્ષ 2016ના વર્ષના કુલ ખર્ચમાં (110.38 – 100) = 10.38 % જેટલો ભાવ વધારો થયો છે તેમ કહેવાય.

ઉદાહરણ 13 : નીચે આપેલી માહિતી પરથી 2015ને આધાર વર્ષ તરીકે લઈ વર્ષ 2016 માટે લાસ્પેયર, પાશે અને ફિશરનો સૂચક આંક ગણો.

વસ્તુ	એકમ	ભાવ (₹)		જથ્થો (વપરાશ)	
		વર્ષ 2015	વર્ષ 2016	વર્ષ 2015	વર્ષ 2016
A	20 કિલોગ્રામ	300	440	5 કિલોગ્રામ	8 કિલોગ્રામ
B	ક્વિન્ટલ	500	700	10 કિલોગ્રામ	15 કિલોગ્રામ
C	કિલોગ્રામ	60	75	1200 ગ્રામ	2000 ગ્રામ
D	મીટર	14.25	15	15 મીટર	25 મીટર
E	લિટર	32	36	18 લિટર	30 લિટર
F	ડઝન	30	36	8 નંગ	10 નંગ

અહીં, આધાર વર્ષ 2015 અને ચાલુ વર્ષ 2016 છે, તેથી વર્ષ 2015નો ભાવ p_0 અને જથ્થો q_0, વર્ષ 2016નો ભાવ p_1 અને જથ્થો q_1 લઈશું.

અહીં, વસ્તુ *A* માટે ભાવ પ્રતિ 20 કિગ્રાનો છે જ્યારે તેના જથ્થાનો એકમ કિગ્રા છે. વસ્તુ *B* માટે ભાવ પ્રતિ ક્વિન્ટલનો છે જ્યારે તેના જથ્થાનો એકમ કિલોગ્રામ છે. વસ્તુ *C*નો ભાવ પ્રતિ કિગ્રા છે જ્યારે જથ્થાનો એકમ ગ્રામ છે. વસ્તુ *F*નો ભાવ એક ડઝનનો છે જ્યારે જથ્થાનો એકમ નંગ છે. આ ચાર વસ્તુઓ માટે એકમ દીઠ ભાવની ગણતરી નીચે પ્રમાણે કરીશું.

વર્ષ 2015માં વસ્તુ *A*નો ભાવ 20 કિગ્રા દીઠ ₹ 300 છે. તેથી તે ભાવ કિગ્રા દીઠ = $\frac{300}{20}$ = ₹ 15 મળે.

તે જ રીતે 2016માં વસ્તુ *A*નો ભાવ કિગ્રા દીઠ $\frac{440}{20}$ = ₹ 22 મળે.

વસ્તુ *B* માટે ભાવ ક્વિન્ટલ દીઠ કરતા કિગ્રા દીઠમાં દર્શાવવાનું અનુકૂળ છે.

તેથી વર્ષ 2015ના કિગ્રા દીઠ ભાવ = $\frac{500}{100}$ = ₹ 5 અને વર્ષ 2016ના કિગ્રા દીઠ ભાવ $\frac{700}{100}$ = ₹ 7 મળે.

વસ્તુ *C*નો જથ્થાનો ભાવ કિગ્રા દીઠ છે. તેથી જથ્થાનો એકમ કિગ્રા દીઠમાં દર્શાવવાનું અનુકૂળ છે.

તેથી વર્ષ 2015માં જથ્થો = $\frac{1200}{1000}$ = 1.2 કિગ્રા અને વર્ષ 2016માં જથ્થો = $\frac{2000}{1000}$ = 2 કિગ્રા થાય.

વસ્તુ *F*નો ભાવ ડઝનમાં દર્શાવેલ છે. જે ભાવ નંગ દીઠ દર્શાવવાનું અનુકૂળ છે તેથી વર્ષ 2015નો નંગ દીઠ ભાવ = $\frac{30}{12}$ = ₹ 2.5 અને વર્ષ 2016નો નંગ દીઠ ભાવ $\frac{36}{12}$ = ₹ 3 થશે.

હવે પછી સૂચક આંકની ગણતરી નીચે મુજબ કરીશું.

વસ્તુ	એકમ	વર્ષ 2015		વર્ષ 2016		p_1q_0	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_1
		p_0	q_0	p_1	q_1				
A	કિગ્રા	15	5	22	8	110	75	176	120
B	કિગ્રા	5	10	7	15	70	50	105	75
C	કિગ્રા	60	1.2	75	2	90	72	150	120
D	મીટર	14.25	15	15	25	225	213.75	375	356.25
E	લિટર	32	18	36	30	648	576	1080	960
F	નંગ	2.5	8	3	10	24	20	30	25
કુલ						**1167**	**1006.75**	**1916**	**1656.25**

લાસ્પેયરનો સૂચક આંક $I_L = \frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times 100$

$= \frac{1167}{1006.75} \times 100$

$= 115.9175$

$\simeq 115.92$

આમ, વર્ષ 2015ની સરખામણીમાં વર્ષ 2016 ના કુલ ખર્ચમાં (115.92 – 100) = 15.92 % જેટલો વધારો થયો છે તેમ કહેવાય.

પાશેનો સૂચક આંક $I_P = \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1} \times 100$

$= \frac{1916}{1656.25} \times 100$

$= 115.6830$

$\simeq 115.68$

આમ, વર્ષ 2015ની સરખામણીમાં વર્ષ 2016ના કુલ ખર્ચમાં (115.68 – 100) = 15.68 % જેટલો વધારો થયો છે તેમ કહેવાય.

ફિશરનો સૂચક આંક $I_F = \sqrt{I_L \times I_P}$

$= \sqrt{115.92 \times 115.68}$

$= 115.7999$

$\simeq 115.80$

આમ, વર્ષ 2015ની સરખામણીમાં વર્ષ 2016ના કુલ ખર્ચમાં (115.80 – 100) = 15.8 % જેટલો વધારો થયો છે તેમ કહેવાય.

ઉદાહરણ 14 : નીચેની માહિતી પરથી વર્ષ 2015 માટે આદર્શ સૂચક આંક ગણો.

વસ્તુ	આધાર વર્ષ 2014		ચાલુ વર્ષ 2015	
	ભાવ (₹)	જથ્થો	ભાવ (₹)	જથ્થો
A	16	10	20	11
B	20	9	24	9
C	32	16	40	17

ફિશરના સૂચક આંકને આદર્શ સૂચક આંક ગણવામાં આવે છે તેથી અહીં ફિશરનો સૂચક આંક શોધીશું. આધાર વર્ષનો ભાવ p_0 અને જથ્થો q_0 તથા ચાલુ વર્ષનો ભાવ p_1 અને જથ્થો q_1 લઈશું.

વસ્તુ	p_0	q_0	p_1	q_1	p_1q_0	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_1
A	16	10	20	11	200	160	220	176
B	20	9	24	9	216	180	216	180
C	32	16	40	17	640	512	680	544
કુલ					**1056**	**852**	**1116**	**900**

ફિશરનો સૂચક આંક

$$I_F = \sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}} \times 100$$

$$= \sqrt{\frac{1056}{852} \times \frac{1116}{900}} \times 100$$

$$= \sqrt{1 \cdot 5369} \times 100$$

$$= 1.2397 \times 100$$

$$I_F = 123.97$$

આમ, આધાર વર્ષ 2014ના સાપેક્ષ ચાલુ વર્ષ 2015ના ખર્ચમાં (123.97 – 100) = 23.97 % જેટલો વધારો થયો છે તેમ કહેવાય.

ઉદાહરણ 15 : પાંચ ભિન્ન વસ્તુઓનાં વપરાશ અને કુલ ખર્ચ વિશે નીચે આપેલી માહિતી પરથી વર્ષ 2014ને આધાર વર્ષ તરીકે લઈ વર્ષ 2015 માટે ફિશરનો સૂચક આંક શોધો.

વસ્તુ	આધાર વર્ષ 2014		ચાલુ વર્ષ 2015	
	વપરાશ	કુલ ખર્ચ	વપરાશ	કુલ ખર્ચ
A	50 કિગ્રા	2500	60 કિગ્રા	4200
B	120 કિગ્રા	600	140 કિગ્રા	700
C	30 લિટર	330	20 લિટર	200
D	20 કિગ્રા	360	15 કિગ્રા	300
E	5 કિગ્રા	40	5 કિગ્રા	50

અહીં વસ્તુઓના વપરાશ અને કુલ ખર્ચ આપેલ છે.

વસ્તુનો કુલ ખર્ચ = (વસ્તુનો એકમ દીઠ ભાવ) × (વસ્તુના વપરાશનો જથ્થો)

વસ્તુનો એકમ દીઠ ભાવ = $\dfrac{\text{વસ્તુનો કુલ ખર્ચ}}{\text{વસ્તુના વપરાશનો જથ્થો}}$

ઉપરના સૂત્રનો ઉપયોગ કરી દરેક વસ્તુનો એકમ દીઠ ભાવ મેળવીશું.

વસ્તુ	આધાર વર્ષ 2014		ચાલુ વર્ષ 2015		p_1q_0	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_1
	જથ્થો	$p_0 = \dfrac{\text{કુલ ખર્ચ}}{q_0}$	જથ્થો	$p_1 = \dfrac{\text{કુલ ખર્ચ}}{q_1}$				
	q_0	p_0	q_1	p_1				
A	50	$\frac{2500}{50} = 50$	60	$\frac{4200}{60} = 70$	3500	2500	4200	3000
B	120	$\frac{600}{120} = 5$	140	$\frac{700}{140} = 5$	600	600	700	700
C	30	$\frac{330}{30} = 11$	20	$\frac{200}{20} = 10$	300	330	200	220
D	20	$\frac{360}{20} = 18$	15	$\frac{300}{15} = 20$	400	360	300	270
E	5	$\frac{40}{5} = 8$	5	$\frac{50}{5} = 10$	50	40	50	40
કુલ					**4850**	**3830**	**5450**	**4230**

ફિશરનો સૂચક આંક $I_F = \sqrt{\dfrac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times \dfrac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}} \times 100$

$$= \sqrt{\frac{4850}{3830} \times \frac{5450}{4230}} \times 100$$

$$= \sqrt{1{\cdot}6315} \times 100$$

$$= 1.2773 \times 100$$

$$I_F \simeq 127.73$$

આમ, વર્ષ 2014ની સરખામણીમાં વર્ષ 2015ના કુલ ખર્ચમાં (127.73 – 100) = 27.73 % વધારો થયો છે તેમ કહેવાય.

ઉદાહરણ 16 : એક ઔદ્યોગિક વિસ્તારમાં ઔદ્યોગિક એકમમાં કામ કરતા અને આ જ વિસ્તારમાં રહેતા કર્મચારીઓને સ્વાસ્થ્યને નુકસાનકારક રાસાયણિક પ્રક્રિયાથી કેન્સરના રોગ થવાની શક્યતાને નિવારવા માટે આરોગ્ય વિભાગ દ્વારા વર્ષ 2003માં ઔદ્યોગિક એકમ માટે ચોક્કસ નીતિનો અમલ કરવામાં આવેલ છે. તે નીતિની અસર જાણવા માટે કરાયેલ તપાસમાં આ વિસ્તારની વર્ષ 2003 અને 2008 ની જુદી જુદી વય-જૂથમાં કેન્સરના રોગથી મૃત્યુ પામેલ વ્યક્તિઓની માહિતી નીચે મુજબ મળેલ છે. આ ઔદ્યોગિક વિસ્તારની વર્ષ 2003ની વસ્તીને ભાર તરીકે લઈ, ભારિત સરેરાશની રીતે કેન્સરથી થતા મૃત્યુનો સૂચક આંક ગણો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

વય-જૂથ (વર્ષ)	વર્ષ 2003ની વસ્તી (હજારમાં)	વર્ષ 2003માં થયેલ મૃત્યુ	વર્ષ 2008માં થયેલ મૃત્યુ
< 5	10	200	65
5-15	8	145	100
15-40	48	610	480
40-60	38	350	225
> 60	14	550	465

અહીં જુદી જુદી વય-જૂથની વસ્તીને ભાર તરીકે લઈ વર્ષ 2003 અને વર્ષ 2008 માં કેન્સરના રોગથી મૃત્યુ પામેલ વ્યક્તિઓની મૃત્યુની સાપેક્ષ ટકાવારી મેળવી સામાન્ય સૂચક આંક મેળવીશું.

વય-જૂથ (વર્ષ)	વર્ષ 2003ની વસ્તી (હજારમાં) W	વર્ષ 2003માં થયેલ મૃત્યુ p_0	વર્ષ 2008માં થયેલ મૃત્યુ p_1	$I = \frac{p_1}{p_0} \times 100$	IW
< 5	10	200	65	$\frac{65}{200} \times 100 = 32.5$	325
5-15	8	145	100	$\frac{100}{145} \times 100 = 68.97$	551.76
15-40	48	610	480	$\frac{480}{610} \times 100 = 78.69$	3777.12
40-60	38	350	225	$\frac{225}{350} \times 100 = 64.29$	2443.02
> 60	14	550	465	$\frac{465}{550} \times 100 = 84.55$	1183.7
કુલ	**118**				**8280.6**

વર્ષ 2008નો સૂચક આંક $I = \frac{\Sigma IW}{\Sigma W}$

$$= \frac{8280.6}{118}$$

$$= 70.1745$$

$$\simeq 70.17$$

આમ, વર્ષ 2003ની સરખામણીમાં વર્ષ 2008માં કેન્સરના રોગથી થયેલ મૃત્યુમાં (100 – 70.17) = 29.83 % જેટલો ઘટાડો થયો છે તેમ કહેવાય.

સ્વાધ્યાય 1.3

1. એક ઈલેક્ટ્રોનિક્સ વસ્તુના ઉત્પાદનમાં વપરાતી છ જુદી જુદી વસ્તુઓ અંગેની માહિતી નીચે પ્રમાણે છે તે પરથી સૂચક આંક ગણો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

વસ્તુઓ	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
ભાર	5	10	10	30	20	25
ભાવ સાપેક્ષ ટકાવારી	290	315	280	300	315	320

2. એક ફર્નિચરની બનાવટની વસ્તુના ઉત્પાદનમાં વપરાતી છ જુદી જુદી વસ્તુઓ અંગેની માહિતી નીચે પ્રમાણે છે તે પરથી વર્ષ 2014ના આધારે વર્ષ 2015નો સૂચક આંક ગણો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

વસ્તુ	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
ભાર	17	15	22	16	12	18
વર્ષ 2014 ભાવ (₹)	30	20	50	32	40	16
વર્ષ 2015 ભાવ (₹)	24	24	70	40	48	24

3. નીચેની માહિતીને આધારે વર્ષ 2014ને આધાર વર્ષ લઈ વર્ષ 2015 માટે લાસ્પેયર, પાશે અને ફિશરનો સૂચક આંક ગણો.

વસ્તુ		ઘઉં	ચોખા	દાળ	તેલ	કાપડ	કેરોસીન
	એકમ	કિગ્રા	કિગ્રા	કિગ્રા	કિગ્રા	મીટર	લિટર
વર્ષ 2014	**જથ્થો**	20	10	10	6	15	18
	ભાવ (₹)	15	20	26.50	24.80	21.25	21
વર્ષ 2015	**જથ્થો**	30	15	15	8	25	30
	ભાવ (₹)	18	31.25	29.50	30	25	28.80

4. નીચેની માહિતીને આધારે વર્ષ 2014ને આધાર વર્ષ તરીકે લઈ વર્ષ 2015 માટે લાસ્પેયર, પાશે અને ફિશરનો સૂચક આંક ગણો.

વસ્તુ	**એકમ**	**ભાવ (₹)**		**જથ્થો (વપરાશ)**	
		વર્ષ 2014	**વર્ષ 2015**	**વર્ષ 2014**	**વર્ષ 2015**
A	20 કિગ્રા	80	120	5 કિગ્રા	7 કિગ્રા
B	કિગ્રા	20	24	2400 ગ્રામ	4000 ગ્રામ
C	ક્વિન્ટલ	2000	2800	10 કિગ્રા	15 કિગ્રા
D	ડઝન	48	72	30 નંગ	35 નંગ

5. નીચે આપેલી માહિતી પરથી વર્ષ 2015 માટેનો આદર્શ સૂચક આંક ગણો.

વસ્તુ	એકમ	આધાર વર્ષ 2014		ચાલુ વર્ષ 2015	
		ભાવ (₹)	જથ્થો	ભાવ (₹)	જથ્થો
A	20 કિગ્રા	120	10 કિગ્રા	280	15 કિગ્રા
B	5 ડઝન	120	3 ડઝન	140	48 નંગ
C	કિગ્રા	4	5000 ગ્રામ	8	4 કિગ્રા
D	5 લિટર	52	15 લિટર	58	20 લિટર

6. નીચે આપેલી માહિતી પરથી વર્ષ 2014ને આધાર વર્ષ તરીકે લઈ વર્ષ 2015નો પાશે અને ફિશરનો સૂચક આંક ગણો.

વસ્તુ		*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
વર્ષ 2014	ભાવ (₹)	100	100	150	180	250
	કુલ ખર્ચ	400	500	600	1080	1000
વર્ષ 2015	ભાવ (₹)	120	120	160	200	300
	કુલ ખર્ચ	720	600	800	1000	1200

*

1.7 જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક (Cost of Living Index Number)

ભાવમાં થતી વધઘટને લીધે સમાજના જુદા જુદા વર્ગના લોકોના જીવનનિર્વાહ ખર્ચમાં થતા ફેરફારો માપવા અને તેનો અભ્યાસ કરવા માટે જીવનનિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંકની રચના કરવામાં આવે છે. આમ, ''સમાજના કોઈ એક વર્ગના લોકોના કોઈ એક સમયે જીવનનિર્વાહ ખર્ચમાં આધાર વર્ષ (સમય) ની સરખામણીમાં ચાલુ વર્ષે (સમયે) થતા સાપેક્ષ ટકાવારી ફેરફાર દર્શાવતા આંકને **જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક** કહેવામાં આવે છે.''

જીવનનિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંક સમાજના જુદા જુદા વર્ગો અને પ્રદેશોના લોકો માટે અલગ અલગ તૈયાર કરવામાં આવે છે.

દા.ત., એક કુટુંબ દ્વારા વર્ષ 2012માં પોતાના જીવનનિર્વાહ પાછળ માસિક ₹ 15,000 ખર્ચવામાં આવે છે અને તે જ કુટુંબ તે પ્રકારની જીવનશૈલી ધરાવતું હોય તો વર્ષ 2014માં જીવનનિર્વાહ માટે માસિક ₹ 18,000 ખર્ચવામાં આવે છે. તો તેના જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક નીચે મુજબ મેળવી શકાય :

$$\text{જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક} = \frac{\text{ચાલુ વર્ષ (સમય)નું માસિક ખર્ચ}}{\text{આધાર વર્ષ (સમય)નું માસિક ખર્ચ}} \times 100$$

$$= \frac{18000}{15000} \times 100$$

$$= \frac{600}{5}$$

$$= 120$$

આમ, આધાર વર્ષ 2012ની સરખામણીમાં ચાલુ વર્ષ 2014ના માસિક ખર્ચમાં (120 – 100) = 20 % જેટલો વધારો થયો છે તેમ કહેવાય.

1.7.1 જીવનનિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંકની રચના

જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક તૈયાર કરતી વખતે નીચેના મુદ્દાઓ ધ્યાનમાં રાખવા જોઈએ :

(1) હેતુ : કોઈ પણ સૂચક આંકની રચના કરતા પહેલાં તેના હેતુનું સ્પષ્ટીકરણ કરવું જોઈએ. સમાજના કયા વર્ગના લોકો માટે જીવનનિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંકની રચના કરવાની છે તે નક્કી કરવું જોઈએ. કામદાર વર્ગ અને તવંગર વર્ગના લોકોની જરૂરિયાતો જુદી-જુદી હોય છે. દા.ત., અનાજનો ભાવવધારો તવંગર વર્ગના લોકોના જીવનનિર્વાહ ખર્ચ પર વધુ અસર કરતો નથી જ્યારે કામદાર વર્ગના લોકોના જીવનનિર્વાહ ખર્ચ પર વધુ અસર કરે છે. આથી જીવનનિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંકની રચના માટેનો હેતુ સ્પષ્ટ કરવો જરૂરી છે.

(2) કૌટુંબિક અંદાજપત્ર તપાસ : જે વર્ગના લોકો માટે જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક તૈયાર કરવાનો હોય તે વર્ગનાં કુટુંબોમાંથી યાદચ્છિક રીતે અમુક કુટુંબોનો નિદર્શ મેળવવામાં આવે છે. નિદર્શમાં પસંદ થયેલાં કુટુંબોનાં બજેટનો અભ્યાસ કરવામાં આવે છે. તેઓ દ્વારા વપરાશ કરવામાં આવતી જુદી જુદી વસ્તુઓની યાદી, વપરાશનું પ્રમાણ, છૂટક ભાવની યાદી, વપરાશ માટે કરવામાં આવતું ખર્ચ અને ખરીદીના સ્થળ વગેરે અંગે માહિતી મેળવવામાં આવે છે. આ પ્રકારની તપાસને નિદર્શ કૌટુંબિક અંદાજપત્ર તપાસ કહેવામાં આવે છે.

આ તપાસની માહિતી પરથી નિદર્શમાં સમાયેલ કુટુંબની મળતી માહિતીને સામાન્ય રીતે નીચેના પાંચ વિભાગોમાં ગોઠવવામાં આવે છે : (a) ખોરાકની વસ્તુઓ (b) કપડાં (c) મકાનભાડું (d) બળતણ અને વીજળી અને (e) પરચૂરણ

આમ, નિદર્શ કૌટુંબિક અંદાજપત્ર તપાસ દ્વારા જીવનનિર્વાહ ખર્ચમાં અલગ-અલગ વસ્તુઓ કેટલી મહત્ત્વની છે તે જાણી શકાય છે. તેથી સૂચક આંકની રચનામાં પસંદ થયેલી દરેક વસ્તુને સમૂહમાં મહત્ત્વ અને દરેક સમૂહનું કુલ ખર્ચમાં કેટલું મહત્ત્વ છે તે નક્કી કરી શકાય છે.

(3) વસ્તુઓની ભાવપ્રાપ્તિ : જે વર્ગના લોકો માટે જીવન-નિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક મેળવવાનો હોય તે વર્ગના લોકો જે વિસ્તારમાં રહેતા હોય તે વિસ્તારમાંથી વસ્તુના છૂટક ભાવ મેળવવામાં આવે છે. આવા ભાવ શક્ય હોય ત્યાં સુધી પ્રમાણિત કે સરકાર માન્ય દુકાનોએથી મેળવવા જોઈએ. જ્યારે અલગ-અલગ દુકાનએથી જુદા જુદા સમયે જુદા જુદા ભાવ મળતા હોય ત્યારે તેની ભાવોની સરેરાશ ધ્યાનમાં લેવી જોઈએ.

(4) આધાર વર્ષ : આધાર વર્ષ તરીકે સામાન્ય વર્ષ પસંદ કરવામાં આવે છે. સામાન્ય વર્ષના છૂટક ભાવને આધાર વર્ષના ભાવ તરીકે લઈ પ્રત્યેક વસ્તુ માટે ભાવ સાપેક્ષ નીચે પ્રમાણે મેળવવામાં આવે છે :

ભાવ સાપેક્ષ $I = \frac{p_1}{p_0} \times 100$

જ્યાં, p_1 = ચાલુ વર્ષનો વસ્તુનો છૂટક ભાવ

p_0 = આધાર વર્ષનો વસ્તુનો છૂટક ભાવ

(5) સરેરાશ : જુદી-જુદી વસ્તુઓના ભાવ સાપેક્ષ પરથી એક સામાન્ય ભાવ સાપેક્ષ મેળવવાનું જરૂરી છે. આ માટે યોગ્ય સરેરાશનો ઉપયોગ કરવો પડે છે. સૈદ્ધાંતિક રીતે ગુણોત્તર મધ્યક સૂચક આંક રચના માટે શ્રેષ્ઠ સરેરાશ છે. પરંતુ તેની ગણતરી અઘરી હોઈ વ્યવહારમાં સૂચક આંકની રચના માટે ભારિત સરેરાશ પ્રચલિત છે.

(6) ભાર : જીવનનિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંકની રચના માટે પસંદ થયેલી જુદી-જુદી વસ્તુઓનું મહત્ત્વ એકસરખું હોતું નથી. તેથી વસ્તુઓના મહત્ત્વનાં પ્રમાણમાં જે આંક નક્કી કરવામાં આવે તેને ભાર કહેવામાં આવે છે. આવા ભાર બે પ્રકારના છે : (i) ગર્ભિત ભાર અને (ii) સ્પષ્ટ ભાર

(i) ગર્ભિત ભાર : ભાર આપવાની આ પરોક્ષ રીત છે. આ પદ્ધતિ મુજબ સૂચક આંકની રચનામાં કોઈ વસ્તુની જેટલી જાત પસંદ કરવામાં આવે તેટલો તેનો ભાર ગણાય છે. આ પ્રકારના ભારને સંખ્યામાં દર્શાવી શકાતો ન હોવાથી આ પદ્ધતિને ગર્ભિત ભારની પદ્ધતિ કહે છે.

(ii) સ્પષ્ટ ભાર : ભાર આપવાની આ પ્રત્યક્ષ રીત છે. વસ્તુના મહત્ત્વના પ્રમાણમાં તેનો ભાર સ્પષ્ટ રીતે સંખ્યામાં દર્શાવવામાં આવે છે. આ રીતમાં વસ્તુનો ભાર વસ્તુના વપરાશ, વેચાણ, ઉત્પાદન કે વસ્તુ પાછળ થતા ખર્ચનાં પ્રમાણમાં નક્કી કરવામાં આવે છે. આમ, વસ્તુઓને તેના મહત્ત્વના પ્રમાણમાં જે ભાર આપવામાં આવે તેને સ્પષ્ટ ભાર કહેવામાં

આવે છે. સ્પષ્ટ ભાર આપવાની બે પ્રચલિત રીતો નીચે પ્રમાણે છે.

(1) કુલ ખર્ચની રીત (2) કૌટુંબિક અંદાજપત્રની રીત

(1) કુલ ખર્ચની રીત : આ રીતમાં વસ્તુના વપરાયેલા જથ્થાનો ઉપયોગ કરીને આધાર વર્ષ અને ચાલુ વર્ષમાં પ્રત્યેક વસ્તુ માટેનો ખર્ચ મેળવી બંને વર્ષમાં બધી વસ્તુઓનું કુલ ખર્ચ શોધવામાં આવે છે. ચાલુ વર્ષના કુલ ખર્ચ અને આધાર વર્ષના કુલ ખર્ચના ટકાવારી ગુણોત્તરને કુલ ખર્ચની રીતથી મળતો સૂચક આંક કહેવાય છે.

ધારો કે p_0 = આધાર વર્ષનો ભાવ, q_0 = આધાર વર્ષનો જથ્થો,

p_1 = ચાલુ વર્ષનો ભાવ, q_1 = ચાલુ વર્ષનો જથ્થો છે.

ચાલુ તથા આધાર વર્ષનું કુલ ખર્ચ શોધવા માટે આધાર વર્ષના જથ્થાનો ઉપયોગ કરીએ તો,

Σp_1q_0 = ચાલુ વર્ષનું કુલ ખર્ચ અને Σp_0q_0 = આધાર વર્ષનું કુલ ખર્ચ થાય.

સૂચક આંક $I = \frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times 100$ આ સૂત્ર લાસ્પેયરના સૂચક આંકનું સૂત્ર છે.

ચાલુ તથા આધાર વર્ષનું કુલ ખર્ચ શોધવા માટે ચાલુ વર્ષના જથ્થાનો ઉપયોગ કરીએ તો,

Σp_1q_1 = ચાલુ વર્ષનું કુલ ખર્ચ અને Σp_0q_1 = આધાર વર્ષનું કુલ ખર્ચ થાય.

સૂચક આંક $I = \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1} \times 100$ આ સૂત્ર પાશેના સૂચક આંકનું સૂત્ર છે.

કૌટુંબિક અંદાજપત્રની રીત : આ રીતમાં સૌ પ્રથમ દરેક વસ્તુનો ભાવ સાપેક્ષ I મેળવવામાં આવે છે. અહીં $I = \frac{p_1}{p_0} \times 100$ છે. જ્યાં p_1 = ચાલુ વર્ષનો ભાવ અને p_0 = આધાર વર્ષનો ભાવ છે. ત્યાર બાદ દરેક વસ્તુનું આધાર વર્ષનું ખર્ચ p_0q_0 શોધી તેને ભાવ સાપેક્ષ I ના ભાર W તરીકે લેવામાં આવે છે. $W = p_0q_0$ લઈ ભારિત સરેરાશના ઉપયોગથી કૌટુંબિક બજેટની રીતથી મળતા સૂચક આંકનું સૂત્ર નીચે મુજબ છે :

સૂચક આંક $I = \frac{\Sigma IW}{\Sigma W}$

$$= \frac{\Sigma\left[\frac{p_1}{p_0} \times 100 \times p_0q_0\right]}{\Sigma p_0q_0}$$

$$= \frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times 100$$

આમ, કૌટુંબિક બજેટની રીતે મેળવેલ સૂચક આંક હકીકતમાં લાસ્પેયરનો સૂચક આંક જ છે.

ઉદાહરણ 17 : જીવનનિર્વાહ ખર્ચની વસ્તુઓના જુદા જુદા સમૂહોના સૂચક આંક અને તેમના ભાર વિશેની નીચે જણાવેલ માહિતી પરથી કૌટુંબિક બજેટની રીતે જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક ગણો.

સમૂહ	ખોરાકી વસ્તુઓ	કાપડ	વીજળી-બળતણ	ઘરભાડું	પરચૂરણ
સૂચક આંક	281	177	178	210	242
ભાર	46	10	7	12	25

અહીં જુદા જુદા સમૂહના સૂચક આંક અને તેમના ભાર આપેલા છે. તેથી કૌટુંબિક બજેટની રીત એટલે કે ભારિત સરેરાશની રીતનો ઉપયોગ કરીશું.

સમૂહ	**સૂચક આંક *I***	**ભાર *W***	***IW***
ખોરાકી વસ્તુઓ	281	46	12,926
કાપડ	177	10	1770
વીજળી-બળતણ	178	7	1246
ઘર ભાડું	210	12	2520
પરચૂરણ	242	25	6050
કુલ		**100**	**24,512**

સૂચક આંક $I = \frac{\Sigma IW}{\Sigma W}$

$= \frac{24512}{100}$

$= 245.12$

આમ, આધાર વર્ષની સરખામણીમાં ચાલુ વર્ષના કુલ ખર્ચમાં (245.12 – 100) = 145.12 % જેટલો વધારો થયો છે તેમ કહેવાય.

ઉદાહરણ 18 : નીચેની માહિતી પરથી વર્ષ 2014ને આધારે વર્ષ 2015નો કુલ ખર્ચની રીતે તેમજ કૌટુંબિક અદાંજપત્રની રીતે જીવનનિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંકની ગણતરી કરો.

વસ્તુ	ઘઉં	ચોખા	તુવેર દાળ	તેલ	કાપડ	કેરોસીન
એકમ	ક્વિન્ટલ	કિગ્રા	કિગ્રા	લિટર	મીટર	લિટર
વર્ષ 2014નો જથ્થો	35 કિગ્રા	25 કિગ્રા	20 કિગ્રા	10 લિટર	20 મીટર	15 લિટર
વર્ષ 2014નો ભાવ (₹)	1600	40	60	80	30	28
વર્ષ 2015નો ભાવ (₹)	1800	45	120	90	45	35

અહીં આધાર વર્ષ 2014 છે. તેથી p_0 = 2014નો ભાવ, q_0 = 2014નો જથ્થો અને p_1 = 2015ના વર્ષનો ભાવ લઈશું. ભાવ અને જથ્થાના એકમ દરેક વસ્તુ માટે સમાન કરીશું.

કુલ ખર્ચની રીત :

વસ્તુ	એકમ	વર્ષ 2014		વર્ષ 2015	p_1q_0	p_0q_0
		q_0	p_0	p_1		
ઘઉં	કિગ્રા	35	16	18	630	560
ચોખા	કિગ્રા	25	40	45	1125	1000
તુવેર દાળ	કિગ્રા	20	60	120	2400	1200
તેલ	લિટર	10	80	90	900	800
કાપડ	મીટર	20	30	45	900	600
કેરોસીન	લિટર	15	28	35	525	420
કુલ					**6480**	**4580**

કુલ ખર્ચની રીતે સૂચક આંક $= \frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times 100$

$= \frac{6480}{4580} \times 100$

$= 141.4847$

$\simeq 141.48$

આમ, આધાર વર્ષ 2014ની સરખામણીમાં વર્ષ 2015ના કુલ ખર્ચમાં (141.48 – 100) = 41.48 % જેટલો વધારો થાય છે.

કૌટુંબિક અંદાજપત્રની રીત :

વસ્તુ	એકમ	વર્ષ 2014		વર્ષ 2015	$I = \frac{p_1}{p_0} \times 100$	$W = p_0q_0$	IW
		q_0	p_0	p_1			
ઘઉં	કિગ્રા	35	16	18	$\frac{18}{16} \times 100 = 112.5$	560	63,000
ચોખા	કિગ્રા	25	40	45	$\frac{45}{40} \times 100 = 112.5$	1000	1,12,500
તુવેર દાળ	કિગ્રા	20	60	120	$\frac{120}{60} \times 100 = 200$	1200	2,40,000
તેલ	લિટર	10	80	90	$\frac{90}{80} \times 100 = 112.5$	800	90,000
કાપડ	મીટર	20	30	45	$\frac{45}{30} \times 100 = 150$	600	90,000
કેરોસીન	લિટર	15	28	35	$\frac{35}{28} \times 100 = 125$	420	52,500
કુલ						**4580**	**6,48,000**

કૌટુંબિક અંદાજપત્રનો સૂચક આંક $= \frac{\Sigma IW}{\Sigma W}$

$= \frac{648000}{4580}$

$= 141.4847$

$\simeq 141.48$

નોંધ : અહીં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, ચાલુ વર્ષનો કુલ ખર્ચની રીતે અને કૌટુંબિક અંદાજપત્રની રીતે મળતાં સૂચક આંક સમાન છે.

ઉદાહરણ 19 : એક શહેરના કામદાર વર્ગને લગતી માહિતી નીચે મુજબ છે. તે પરથી વર્ષ 2014 અને 2015નાં વર્ષો માટેના સામાન્ય સૂચક આંક શોધો. જો આ કામદારોના વેતનમાં વર્ષ 2014ની સરખામણીએ વર્ષ 2015માં 5% વધારો કરવામાં આવે, તો તેમનું જીવનધોરણ ટકાવી રાખવા માટે આ વેતનનો વધારો પૂરતો છે ?

સમૂહ	ખોરાક	કપડાં	બળતણ અને વીજળી	ઘરભાડું	પરચૂરણ
ભાર	48	18	8	12	14
વર્ષ 2014ના સમૂહનો સૂચક આંક	210	220	210	200	210
વર્ષ 2015ના સમૂહનો સૂચક આંક	230	225	220	200	235

સમૂહ	**ભાર** W	**વર્ષ 2014ના સમૂહનો સૂચક આંક** I_1	**વર્ષ 2015ના સમૂહનો સૂચક આંક** I_2	I_1W	I_2W
ખોરાક	48	210	230	10,080	11,040
કપડાં	18	220	225	3960	4050
બળતણ અને વીજળી	8	210	220	1680	1760
ઘર ભાડું	12	200	200	2400	2400
પરચૂરણ	14	210	235	2940	3290
કુલ	**100**			**21,060**	**22,540**

વર્ષ 2014 માટેનો સૂચક આંક $= \frac{\Sigma I_1W}{\Sigma W} = \frac{21060}{100} = 210.60$

વર્ષ 2015 માટેનો સૂચક આંક $= \frac{\Sigma I_2W}{\Sigma W} = \frac{22540}{100} = 225.40$

આધાર વર્ષની સરખામણીએ વર્ષ 2014 કરતાં વર્ષ 2015 માં કામદારોના જીવનનિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંકમાં $(225.40 - 210.60) = 14.80$ % જેટલો વધારો થયો છે.

આથી, વર્ષ 2014 ની સરખામણીએ 2015 ના જીવનનિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંકમાં થતો ટકાવારી વધારો $\frac{14.80}{210.60} \times 100 = 7.03$

તેથી, વર્ષ 2014 ના વેતનમાં થયેલ 5 ટકાનો વેતન વધારો કામદારોનું જીવનધોરણ વર્ષ 2015 માં ટકાવી રાખવા પૂરતો નથી.

ઉદાહરણ 20 : મધ્યમ વર્ગનાં કુટુંબોની અંદાજપત્ર તપાસમાંથી નીચેની માહિતી મળે છે. વર્ષ 2014ના આધાર વર્ષની સાપેક્ષમાં વર્ષ 2015ના ચાલુ વર્ષના જીવનનિર્વાહ ખર્ચમાં કેટલો ફેરફાર થાય છે તે સૂચક આંક મેળવી જણાવો. જો 2014ના વર્ષ દરમિયાન કોઈ એક કુટુંબની ખર્ચપાત્ર સરેરાશ માસિક આવક ₹ 30,000 અને 2015ના વર્ષ દરમિયાન સરેરાશ ખર્ચપાત્ર માસિક આવક ₹ 35,000 હોય, તો કુટુંબને આધાર વર્ષની સરખામણીમાં જીવનધોરણ ટકાવી રાખવા માટે કૌટુંબિક અંદાજપત્રના સૂચક આંક મુજબ સરેરાશ ખર્ચપાત્ર માસિક આવક કેટલી વધારવી પડે ?

સમૂહ	ખોરાક	કપડાં	ભાડું	બળતણ	પરચૂરણ
ભાર	45	20	15	10	10
2015ના વર્ષના સમૂહના ખર્ચની ભાવ સાપેક્ષની ટકાવારી	130	150	120	160	120

અહીં, વર્ષ 2015નો ભાર W અને સમૂહના ખર્ચના ભાવ સાપેક્ષ I આપેલ છે. તેથી કૌટુંબિક અંદાજપત્રની રીતે સૂચક આંકની ગણતરી કરીશું.

સમૂહ	ખોરાક	કપડાં	ભાડું	બળતણ	પરચૂરણ	**કુલ**
ભાવ સાપેક્ષની ટકાવારી I	130	150	120	160	120	
ભાર W	45	20	15	10	10	**100**
IW	5850	3000	1800	1600	1200	**13,450**

કૌટુંબિક અંદાજપત્રની રીતે સૂચક આંક I $= \frac{\Sigma IW}{\Sigma W}$

$= \frac{13450}{100}$

$= 134.50$

અહીં, વર્ષ 2014ની સરખામણીમાં વર્ષ 2015ના જીવનનિર્વાહ ખર્ચમાં (134.50 – 100) = 34.50 % જેટલો વધારો થયો છે તેમ કહેવાય.

વર્ષ 2015ના કૌટુંબિક અંદાજપત્રના સૂચક આંક મુજબ ખરેખર આધાર વર્ષની સરખામણીમાં જીવનધોરણ ટકાવી રાખવા માટે

ખર્ચપાત્ર સરેરાશ માસિક આવક $= \frac{\text{ચાલુ વર્ષનો સૂચક આંક}}{\text{આધાર વર્ષનો સૂચક આંક}} \times$ આધાર વર્ષની આવક

$= \frac{134.50}{100} \times 30{,}000$

= ₹ 40,350

કુટુંબને જીવનધોરણ ટકાવી રાખવા માટે વધારવી પડતી ખર્ચપાત્ર સરેરાશ આવક = ₹ 40,350 – ₹ 35,000

= ₹ 5350

1.7.2 જીવનનિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંકના ઉપયોગો અને મર્યાદા

આ સૂચક આંક જુદા જુદા વર્ગના લોકોના જીવનનિર્વાહ ખર્ચમાં થતા ફેરફારોના અભ્યાસ પરથી તૈયાર કરવામાં આવે છે. આમ, જીવનનિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંક જુદા જુદા હેતુ માટે નીચે મુજબ ઉપયોગ કરવામાં આવે છે :

(1) જીવનનિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંકની મદદથી જે-તે વર્ગના લોકોની નાણાંની ખરીદશક્તિમાં થતા ફેરફારો માપી શકાય છે. વેતન વધારા કરતાં વસ્તુનો ભાવવધારો તીવ્ર હોય, તો કમાનારનું વાસ્તવિક વેતન ઘટે અને પરિણામે તેની ખરીદશક્તિમાં ઘટાડો થાય છે. આમ, નાણાંની સાચી ખરીદશક્તિ અને વાસ્તવિક વેતન શોધવા જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક ઉપયોગી બને છે. નાણાંની ખરીદશક્તિ અને વાસ્તવિક વેતન નીચેનાં સૂત્રોથી મેળવી શકાય.

(i) $\text{નાણાંની ખરીદશક્તિ} = \dfrac{1}{\text{જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક}} \times 100$

(ii) $\text{વાસ્તવિક વેતન} = \dfrac{\text{વેતન}}{\text{જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક}} \times 100$

(2) જે તે વર્ગ માટે મેળવાયેલ જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક જે તે વર્ગના લોકોની વાસ્તવિક આર્થિક પરિસ્થિતિ જણાવે છે. આથી તે વર્ગના લોકોને ચૂકવાતું વેતન, મોંઘવારી ભથ્થા, બોનસ વગેરેમાં ફેરફાર સૂચવવા આ આંકનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

(3) આ સૂચક આંક વસ્તુના છૂટક ભાવોની લોકોના જીવનનિર્વાહ પર થતી અસરો માપે છે. તેથી સરકારને કઈ વસ્તુ પર આવશ્યક ધારા હેઠળ અંકુશ મૂકવો અને કઈ વસ્તુ મુક્ત વેપારમાં રાખવી તેનું માર્ગદર્શન આ પ્રકારના સૂચક આંક દ્વારા મળી રહે છે.

(4) જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક સરકારને કર નીતિ ઘડવામાં, ભાવ-નિયમન અને ભાડા-નિયમન જેવી બાબતમાં સામાન્ય નીતિ ઘડવામાં નિર્દેશક તરીકે મદદરૂપ થાય છે. ઉપરાંત કોઈ વસ્તુ પર કર નાંખવાથી તેની જુદા-જુદા વર્ગના લોકોના જીવનનિર્વાહ પર શી અસર થાય છે તે પણ જાણી શકાય છે અને તે અનુસાર કર નીતિનું આયોજન કરી શકાય છે.

(5) જુદા જુદા વર્ગના લોકોનું જીવનધોરણ ઊંચું લાવવા કયા પ્રકારની વિશિષ્ટ સગવડોની જરૂરિયાત છે તે નક્કી કરવા સરકારી સંસ્થાઓ અને જાહેર સંસ્થાઓ તેનો આધાર લઈ શકે છે.

જીવનનિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંકની મર્યાદા :

(1) સમાજના બધા જ વર્ગો માટેનો એક સામાન્ય જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક રચી શકાતો નથી.

(2) કોઈ એક પ્રદેશના કોઈ એક વર્ગના લોકો માટે મેળવાયેલો જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક બીજા કોઈ પ્રદેશના તે જ વર્ગના લોકો માટે પણ બિનઉપયોગી નીવડે છે.

(3) જીવનનિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંક કોઈ વર્ગના ખર્ચમાં થતો સરેરાશ ટકાવારી ફેરફાર દર્શાવે છે. તેથી વ્યક્તિગત જીવનનિર્વાહ ખર્ચમાં થતા ફેરફાર માપી શકાતા નથી.

(4) જુદા જુદા વર્ગના લોકો માટે તેમજ જુદા જુદા પ્રદેશો માટે અલગ-અલગ સૂચક આંકની રચના કરવી પડે છે.

(5) એક જ વર્ગના લોકોના ખર્ચ તેમના કુટુંબના કદ, રહેણીકરણી, શોખ, ટેવ વગેરે પર આધારિત છે. એક જ વર્ગના બધાં કુટુંબોના ખર્ચનું પ્રમાણ એકસરખું હોતું નથી.

(6) તેની ગણતરીમાં આધાર વર્ષની સરખામણીએ ચાલુ વર્ષે કુટુંબની રહેણીકરણીમાં કોઈ ફેરફાર થતો નથી એવી ધારણા કરવામાં આવે છે. વાસ્તવમાં, સમય બદલાતાં લોકોના શોખ, ટેવ, પસંદગી વગેરે બદલાય છે. તેથી નિયમિત સમયને અંતરે કૌટુંબિક અંદાજપત્ર તપાસ કરી વસ્તુઓ અને તેના ભારમાં ફેરફાર કરવો જરૂરી છે.

સ્વાધ્યાય 1.4

1. મધ્યમ વર્ગનાં કુટુંબોની અંદાજપત્ર તપાસ પરથી નીચે મુજબ માહિતી મળે છે. તે પરથી વર્ષ 2013ના સાપેક્ષમાં વર્ષ 2015 ના જીવનનિર્વાહ ખર્ચમાં કેટલો ફેરફાર જણાય છે તે સૂચક આંક મેળવી જણાવો અને જો વર્ષ 2013 દરમિયાન કોઈ એક કુટુંબની ખર્ચપાત્ર સરેરાશ માસિક આવક ₹ 15,000 હોય તો વર્ષ 2015ના દરમિયાન જરૂરી ખર્ચપાત્ર સરેરાશ માસિક આવકનો અંદાજ મેળવો.

સમૂહ	ખોરાક	બળતણ-વીજળી	ભાડું	કપડાં	પરચૂરણ
ભાર	45	15	10	20	10
2013માં ખર્ચ (₹)	3000	1450	1500	600	1600
2015માં ખર્ચ (₹)	3900	1850	2400	900	1920

2. ખોરાકી ચીજોના ભાવ અને વપરાશની નીચેની માહિતી પરથી કૌટુંબિક અંદાજપત્રની રીતે વર્ષ 2014નો સૂચક આંક ગણો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

વસ્તુ	**વર્ષ 2010**		**વર્ષ 2014**
	જથ્થો	**ભાવ (₹)**	**ભાવ (₹)**
ઘઉં	60	15	18
ચોખા	40	32	40
બાજરી	15	12	14
તુવેર દાળ	25	50	70

3. નીચેની માહિતી પરથી કુલ ખર્ચની રીતે વર્ષ 2015 માટેનો જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક ગણો.

વસ્તુ	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
એકમ	ક્વિન્ટલ	20 કિગ્રા	10 લિટર	ડઝન	મીટર
વર્ષ 2014નો જથ્થો	50 કિગ્રા	18 કિગ્રા	12 લિટર	20 નંગ	14 મીટર
વર્ષ 2014નો ભાવ (₹)	1200	340	30	15	12
વર્ષ 2015નો ભાવ (₹)	1700	380	40	24	16

4. નીચેની માહિતીને આધારે ઉત્પાદનનો સામાન્ય સૂચક આંક ગણો.

વસ્તુ	સુતરાઉ કાપડ	અનાજ	ખાંડ	પોલાદ	તાબું	સિમેન્ટ
ભાર	15	23	15	25	10	12
ઉત્પાદનનો સૂચક આંક	220	225	190	215	198	220

5. એક વિસ્તારના કામદાર વર્ગ માટે કાપડના સમૂહના ખર્ચની વીગતો નીચે પ્રમાણે છે, તે પરથી કુલ ખર્ચ અને કૌટુંબિક બજેટની રીતે કાપડના સમૂહનો સૂચક આંક ગણો.

વસ્તુ	સાડી	ધોતી	શર્ટિંગ	અન્ય
એકમ	નંગ	નંગ	મીટર	મીટર
વર્ષ 2010 જથ્થો	5	8	20	15
વર્ષ 2010 ભાવ (₹)	300	70	32.40	20.90
વર્ષ 2014 ભાવ (₹)	400	100	38	23.80

*

કેટલાંક ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ 21 : પાંચ વસ્તુઓમાંથી ત્રણ વસ્તુઓ *A, B* અને *C* ના ભાવમાં વર્ષ 2010ના સાપેક્ષમાં વર્ષ 2015માં અનુક્રમે 90 %, 120 % અને 70 % જેટલો વધારો થયો છે. જ્યારે બે વસ્તુઓ *D* અને *E* ના ભાવમાં અનુક્રમે 2 % અને 5 % જેટલો ઘટાડો થયો છે. વસ્તુ *A*, વસ્તુ *B* કરતા ચાર ગણી મહત્ત્વની છે અને વસ્તુ *C*, વસ્તુ *A* કરતાં છ ગણી મહત્ત્વની છે. વસ્તુઓ *D* અને *E* નું મહત્ત્વ વસ્તુ *B* ના મહત્ત્વથી અઢી ગણું છે તો પાંચેય વસ્તુનો 2015ના વર્ષ માટેનો ભાવનો સામાન્ય સૂચક આંક ગણો.

અહીં, વસ્તુઓનાં ભાવમાં થયેલો ટકાવારી વધારો કે ઘટાડો આપવામાં આવ્યો છે. તેમજ વસ્તુઓના સાપેક્ષ મહત્ત્વ દર્શાવતા આંકને વસ્તુઓના ભાર W નક્કી કરે છે.

ધારો કે વસ્તુ B નું સાપેક્ષ મહત્ત્વ 1 છે.

તેથી વસ્તુ A નું મહત્ત્વ 4 થાય અને C નું મહત્ત્વ 24 થાય તેમજ વસ્તુઓ D અને E નાં મહત્ત્વ અનુક્રમે 2.5 અને 2.5 થાય.

ભાવના સામાન્ય સૂચક આંકની ગણતરી નીચે પ્રમાણે કરીશું :

વસ્તુ	**ટકાવારી વધારો (+) ઘટાડો (–)**	**સૂચક આંક I = (100 + વધારો) = (100 – ઘટાડો)**	**ભાર W**	**IW**
A	+ 90	100 + 90 = 190	4	760
B	+ 120	100 + 120 = 220	1	220
C	+ 70	100 + 70 = 170	24	4080
D	– 2	100 – 2 = 98	2.5	245
E	– 5	100 – 5 = 95	2.5	237.5
કુલ			**34**	**5542.5**

ભાવનો સામાન્ય સૂચક આંક $= \frac{\Sigma IW}{\Sigma W}$

$= \frac{5542.5}{34}$

$= 163.0147$

$\simeq 163.01$

આમ, આધાર વર્ષ 2014ની સરખામણીમાં ચાલુ વર્ષ 2015ના કુલ ખર્ચમાં (163.01 – 100) = 63.01 % જેટલો વધારો થયો છે તેમ કહેવાય.

ઉદાહરણ 22 : કોઈ એક વિસ્તારના કામદારોના સમૂહ માટે બળતણ-ખર્ચની વીગતો નીચે પ્રમાણે છે.

વસ્તુ	આધાર વર્ષ 2012		વર્ષ 2014
	જથ્થો	એકમ દીઠ ભાવ (₹)	એકમ દીઠ ભાવ (₹)
કોલસો	5 કિલોગ્રામ	25	30
કેરોસીન	20 લિટર	40	45
લાકડું	5 કિલોગ્રામ	22	25
દીવાસળી	10 પેટી	0.90	1

આ માહિતી પરથી બળતણ-ખર્ચના સમૂહનો સૂચક આંક તૈયાર કરો. જો ખોરાક, કાપડ, ઘરભાડું અને પરચૂરણ સમૂહ પાછળના ખર્ચ વર્ષ 2012 કરતાં વર્ષ 2014માં અનુક્રમે 3, 2.5, 4.5 અને 3.25 ગણા થયા હોય અને જો આ સમૂહો પાછળ કુલ ખર્ચના અનુક્રમે 42 %, 15 %, 10 % અને 12 % ખર્ચ થતા હોય તો કામદારોના જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક તૈયાર કરો.

સૌ પ્રથમ બળતણ ખર્ચની વીગતો પરથી બળતણ ખર્ચના સમૂહનો સૂચક આંક તૈયાર કરીશું. આધાર વર્ષ 2012 લઈશું અને કુલ ખર્ચની રીતનો ઉપયોગ કરી સૂચક આંક મેળવીશું.

નોંધ : અહીં ગણતરી માટે કૌટુંબિક અંદાજપત્રની રીતનો ઉપયોગ પણ કરી શકાય.

વસ્તુ	વર્ષ 2012		વર્ષ 2014	p_1q_0	p_0q_0
	q_0	p_0	p_1		
કોલસો	5	25	30	150	125
કેરોસીન	20	40	45	900	800
લાકડું	5	22	25	125	110
દીવાસળી	10	0.90	1	10	9
કુલ				**1185**	**1044**

બળતણ-ખર્ચના સમૂહનો સૂચક આંક $= \frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times 100$

$= \frac{1185}{1044} \times 100$

$= 113.5057$

$\simeq 113.51$

હવે, ખોરાક, કાપડ, ઘરભાડું અને પરચૂરણ સમૂહના ખર્ચ અનુક્રમે 3, 2.5, 4.5 અને 3.25 ગણા થયા છે. આ ચાર સમૂહના સૂચક આંક અનુક્રમે (3 × 100) = 300; (2.5 × 100) = 250; (4.5 × 100) = 450 અને (3.25 × 100) = 325 થાય. વળી બળતણ ખર્ચના સમૂહનો સૂચક આંક 113.51 મળેલ છે. આ પાંચેય સમૂહોના સૂચક આંક પરથી જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક મેળવવા જુદા જુદા સમૂહો પાછળના ખર્ચની ટકાવારી ભાર તરીકે લઈશું.

અહીં ખોરાક, કાપડ, ઘરભાડું અને પરચૂરણ સમૂહના ખર્ચ અનુક્રમે કુલ ખર્ચના 42 %, 15 %, 10 % અને 12 % આપેલ છે. જે અનુક્રમે તેમના સૂચક આંકના ભાર W ગણવામાં આવશે. કુલ ખર્ચ 100 % હોય. તેથી બળતણ-ખર્ચના સૂચક આંક માટેનો ભાર 100 – (42 + 15 + 10 + 12) = 21 % થાય.

હવે જીવનનિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંકની ગણતરી નીચે પ્રમાણે કરીશું.

સમૂહ	ખોરાક	કાપડ	ઘર ભાડું	પરચૂરણ	બળતણ	**કુલ**
સૂચક આંક *I*	300	250	450	325	113.5	
ભાર *W*	42	15	10	12	21	**100**
IW	12,600	3750	4500	3900	2383.71	**27,133.71**

$$\text{જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક} = \frac{\Sigma IW}{\Sigma W}$$

$$= \frac{27133.71}{100}$$

$$= 271.3371$$

$$\simeq 271.34$$

આમ, આધાર વર્ષની સરખામણીમાં ચાલુ વર્ષના જીવનનિર્વાહ ખર્ચમાં (271.34 – 100) = 171.34 % જેટલો વધારો થયો છે તેમ કહેવાય.

ઉદાહરણ 23 : એક શહેરના કામદાર વર્ગના સરેરાશ માસિક વેતન અને જીવનનિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંક (આધાર વર્ષ 2001) અંગેની નીચેની માહિતી પરથી તેમના વાસ્તવિક વેતનની ગણતરી કરો. વર્ષ 2001ને આધાર વર્ષ ગણી વર્ષ 2015 માટે નાણાંની ખરીદશક્તિ શોધો અને આ પરિણામનું શું મહત્ત્વ છે તે જણાવો.

વર્ષ	2010	2011	2012	2013	2014	2015
સરેરાશ માસિક વેતન (₹)	15,000	15,600	16,200	17,000	18, 000	20,000
જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક	192	203	228	268	270	287

અહીં, વેતન અને જીવનનિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંક પરથી વાસ્તવિક વેતનની ગણતરી નીચે પ્રમાણે કરીશું.

$$\text{વાસ્તવિક વેતન} = \frac{\text{સરેરાશ માસિક વેતન}}{\text{જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક}} \times 100$$

વર્ષ	સરેરાશ માસિક વેતન (₹)	જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક	વાસ્તવિક વેતન (₹)
2010	15,000	192	$\frac{15000}{192} \times 100 = 7812.5$
2011	15,600	203	$\frac{15600}{203} \times 100 = 7684.73$
2012	16,200	228	$\frac{16200}{228} \times 100 = 7105.26$
2013	17,000	268	$\frac{17000}{268} \times 100 = 6343.28$
2014	18,000	270	$\frac{18000}{270} \times 100 = 6666.67$
2015	20,000	287	$\frac{20000}{287} \times 100 = 6968.64$

રૂપિયામાં નાણાંની ખરીદશક્તિ હંમેશાં આધાર વર્ષની સરખામણીએ ચાલુ વર્ષના જીવનનિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંકનો વ્યસ્ત હોય છે.

$\therefore$ વર્ષ 2001ના આધાર વર્ષની સાપેક્ષમાં વર્ષ 2015માં નાણાંની ખરીદશક્તિ = $\frac{100}{287} = 0.3484 \simeq 0.35$ છે એમ કહેવાય. નાણાંનો એકમ રૂપિયો હોય, તો આધાર વર્ષ 2001ની સરખામણીમાં વર્ષ 2015ના રૂપિયાનું મૂલ્ય 35 પૈસા જેટલું થયું તેમ કહેવાય.

આમ, આ વર્ગના કામદાર આધાર વર્ષ 2001ના સરેરાશ માસિક વેતન કરતા વર્ષ 2015માં સરેરાશ માસિક વેતન રૂપિયામાં વધારે ધરાવે છે. પરંતુ ખરેખર આધાર વર્ષની સરખામણીમાં તેની ખર્ચપાત્ર આવક ₹ 6968.64 જેટલી કહી શકાય.

ઉદાહરણ 24 : નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(1) વર્ષ 2014માં ઘઉંના ભાવ દર ક્વિન્ટલના ₹ 1600 અને વર્ષ 2015માં ભાવ દર ક્વિન્ટલના ₹ 1800 હતા. 2014ના વર્ષના આધારે 2015ના વર્ષના ઘઉંના ભાવનો સૂચક આંક શોધો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

વર્ષ 2015ના ઘઉંના ભાવનો સૂચક આંક $I = \frac{p_1}{p_0} \times 100$

$= \frac{1800}{1600} \times 100$

$= 112.5$

આમ, વર્ષ 2014ની સરખામણીમાં વર્ષ 2015માં ઘઉંના ભાવમાં ક્વિન્ટલ દીઠ (112.5 – 100) = 12.5 % જેટલો વધારો થયો છે તેમ કહેવાય.

(2) લાસ્પેયરનો સૂચક આંક ફિશરના સૂચક આંકથી $\frac{8}{9}$ ગણો છે. જો ફિશરનો સૂચક આંક 180 હોય, તો પાશેનો સૂચક આંક શોધો.

અહીં, લાસ્પેયરનો સૂચક આંક ફિશરના સૂચક આંકથી $\frac{8}{9}$ ગણો છે.

$\therefore \; I_L = \frac{8}{9} \times I_F$

$$\therefore \quad I_L = \frac{8}{9} \times 180$$

$$I_L = 160$$

હવે,
$$I_F = \sqrt{I_L \times I_P}$$

$$180 = \sqrt{160 \times I_P}$$

$$(180)^2 = 160 \times I_P$$

$$\therefore \quad I_P = \frac{180 \times 180}{160} = 202.5$$

(3) વર્ષ 2015માં કોઈ એક વસ્તુનું ઉત્પાદન આધાર વર્ષના ઉત્પાદનથી ત્રણ ગણું વધ્યું હોય, તો વર્ષ 2015ના ઉત્પાદનનો સૂચક આંક શોધો.

જો આધાર વર્ષના ઉત્પાદનનો સૂચક આંકને 100 લઈએ, અને વર્ષ 2015માં ઉત્પાદન ત્રણ ગણું વધ્યું છે.

વર્ષ 2015નો ઉત્પાદનનો સૂચક આંક = આધાર વર્ષનો સૂચક આંક + ચાલુ વર્ષમાં થયેલ સૂચક આંકનો વધારો

$= 100 + (3 \times 100)$

$= 100 + 300 = 400$

(4) જો $\Sigma p_1q_0 : \Sigma p_0q_0 = 3:2$ અને $\Sigma p_1q_1 : \Sigma p_0q_1 = 5:3$ હોય, તો I_L, I_P અને I_F શોધો.

$$\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} = \frac{3}{2}$$

$$I_L = \frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times 100$$

$$= \frac{3}{2} \times 100 = 150$$

$$\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1} = \frac{5}{3}$$

$$I_P = \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1} \times 100$$

$$= \frac{5}{3} \times 100 = 166.67$$

$$I_F = \sqrt{I_L \times I_P} = \sqrt{150 \times 166.67} = \sqrt{25000.5} = 158.12$$

(5) જો 2014ના વર્ષ માટે મધ્યમ વર્ગના કુટુંબોની ખર્ચપાત્ર સરેરાશ માસિક આવક ₹ 14,400 હોય અને જો તે વર્ગનો વર્ષ 2014ના આધારે વર્ષ 2015નો જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક 115 હોય તો 2015ના વર્ષ માટે આ કુટુંબોની ખર્ચપાત્ર સરેરાશ માસિક આવકનું આગણન કરો.

અહીં, 2014ના આધાર વર્ષની સરખામણીમાં 2015ના વર્ષનો મધ્યમ વર્ગનાં કુટુંબોની ખર્ચપાત્ર સરેરાશ આવકનો સૂચક આંક 115 છે. તેથી આધાર વર્ષની સરખામણીએ સૂચક આંક (115 – 100) = 15 % વધારો થયો છે. આમ, મધ્યમ વર્ગનાં કુટુંબોની ખર્ચપાત્ર સરેરાશ આવકમાં 15 % વધારો થવો જોઈએ.

$\therefore$ કુટુંબોની સરેરાશ ખર્ચપાત્ર માસિક આવક $= 14400 + (14400 \times \frac{15}{100})$

$= 14400 + 2160 = 16560$

તેથી વર્ષ 2015માં કુટુંબની ખર્ચપાત્ર સરેરાશ માસિક આવક ₹ 16560 હોવી જોઈએ.

(6) જો ચાલુ વર્ષનો જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક આધાર વર્ષના સૂચક આંક 100 થી વધીને 180 થયો હોય અને કામદારની સરેરાશ આવક ₹ 6000 થી વધીને ₹ 9000 થઈ હોય, તો શું કામદારની ખરીદશક્તિ વધી છે, કે ઘટી ? કેટલી ?

અહીં, સૂચક આંક 100 થી વધીને 180 થાય છે એટલે કે તેમાં 80 % જેટલો વધારો થાય છે માટે આવકમાં પણ 80 % વધારો થવો જોઈએ.

સરેરાશ આવક = $6000 + (6000 \times \frac{80}{100})$

$= 6000 + 4800 = ₹\ 10,800$

તેથી કામદારની સરેરાશ આવક ₹ 10,800 હોવી જોઈએ પરંતુ કામદારની સરેરાશ આવક વધી ₹ 9000 થઈ છે. તેથી કામદારની સરેરાશ આવકમાં સૂચક આંકના સંદર્ભે (10800 – 9000) = ₹ 1800નો ઘટાડો થયો છે. તેથી તેની ખરીદશક્તિમાં ઘટાડો થયો છે તેમ કહેવાય.

(7) વર્ષ 2015 અને વર્ષ 2016ના જથ્થાબંધ ભાવના સૂચક આંક અનુક્રમે 150.2 અને 165.7 મળ્યા છે. આ બંને વર્ષના સૂચક આંકનો ઉપયોગ કરી ફુગાવાનો દર શોધો.

અહીં વર્ષ 2015 નો સૂચક આંક 150.2 અને વર્ષ 2016 એટલે કે ચાલુ વર્ષનો સૂચક આંક 165.7 છે.

ફુગાવાના દરનું નીચેનું સૂત્ર વાપરીશું.

$$\text{ફુગાવાનો દર} = \frac{\left(\begin{array}{c}\text{ચાલુ વર્ષનો જથ્થાબંધ ભાવનો}\\ \text{સૂચક આંક}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{અગાઉના વર્ષનો જથ્થાબંધ ભાવનો}\\ \text{સૂચક આંક}\end{array}\right)}{\text{અગાઉના વર્ષનો જથ્થાબંધ ભાવનો સૂચક આંક}} \times 100$$

$$= \frac{165.7 - 150.2}{150.2} \times 100$$

$$= \frac{15.5}{150.2} \times 100$$

$$= 10.3196$$

$$\simeq 10.32$$

આમ, ફુગાવાનો દર 10.32 % છે.

(8) જો ત્રણ વસ્તુઓના ભાવ સાપેક્ષ આંકમાં થયેલ વધારો અનુક્રમે 250 %, 265 % અને 300 % છે અને જો આ વસ્તુઓના મહત્ત્વનું પ્રમાણ 8 : 7 : 5 હોય, તો ભાવનો સામાન્ય સૂચક આંક શોધો.

અહીં, સૂચક આંક (સાપેક્ષ ભાવ) Iમાં ટકાવારી વધારો અને સાપેક્ષ મહત્ત્વ W આપેલા છે.

સૂચક આંકની ગણતરી કરીએ

વસ્તુ	સૂચક આંક (I) (આધાર વર્ષનો સૂચક આંક + વધારો)	ભાર W	IW
A	100 + 250 = 350	8	2800
B	100 + 265 = 365	7	2555
C	100 + 300 = 400	5	2000
કુલ		**20**	**7355**

સામાન્ય સૂચક આંક = $\frac{\Sigma IW}{\Sigma W} = \frac{7355}{20} = 367.75$

સામાન્ય સૂચક આંક = 367.75

આમ, આધાર વર્ષની સરખામણીમાં ચાલુ વર્ષના વસ્તુઓના ભાવમાં (367.75 – 100) = 267.75 % જેટલો વધારો થયો છે.

સારાંશ

- કોઈ વસ્તુના ભાવ, ઉત્પાદન, માંગ, પુરવઠો, જથ્થો વગેરેને તે વસ્તુની ચલરાશિ કહે છે.
- ચલરાશિની કિંમતમાં બે ભિન્ન સમયે થતા ફેરફારોની સરખામણીની બે રીતો છે : (1) નિરપેક્ષ માપ (તફાવત)ની રીત અને (2) સાપેક્ષ માપ (ગુણોત્તર)ની રીત.
- કોઈ ચલરાશિના બે જુદા જુદા સમયના મૂલ્યમાં થતા ફેરફારના ગુણોત્તરને સાપેક્ષ ફેરફાર કહે છે.
- કોઈ વસ્તુના બે જુદા જુદા સમયના ભાવમાં થતા સાપેક્ષ ફેરફારને ટકાવારીમાં દર્શાવતા માપને ભાવનો સૂચક આંક કહે છે.
- કોઈ વસ્તુના બે જુદા જુદા સમયના જથ્થામાં થતા સાપેક્ષ ફેરફારને ટકાવારીમાં દર્શાવતા માપને જથ્થાનો સૂચક આંક કહે છે.
- કોઈ પણ એક કે તેથી વધુ વસ્તુઓની આપેલી સમયની ચલની કિંમતોમાં કોઈ ચોક્કસ (આધાર) સમયની તે વસ્તુઓની ચલ કિંમતોના સાપેક્ષમાં થતા ટકાવારી ફેરફારની સરેરાશને સમૂહનો સામાન્ય સૂચક આંક કહેવામાં આવે છે.
- જ્યારે કોઈ વસ્તુના ભાવમાં થતા ફેરફારોને ભૂતકાળના કોઈ નિશ્ચિત (ચોક્કસ) વર્ષના તે જ વસ્તુના ભાવ સાથે સરખાવવામાં આવે છે ત્યારે તે નિશ્ચિત વર્ષને આધાર વર્ષ કહે છે.
- વસ્તુના જે વર્ષના ભાવને તે વસ્તુના આધાર વર્ષના ભાવ સાથે સરખાવવાના હોય તે વર્ષને ચાલુ અથવા પ્રવર્તમાન વર્ષ કહેવામાં આવે છે.
- આધાર વર્ષની પસંદગીની બે રીતો : (1) અચલ આધારની રીત અને (2) પરંપરિત આધારની રીત
- વસ્તુઓના ભાવ સાપેક્ષ $\frac{p_1}{p_0}$ ને ખર્ચ p_0q_0 જેટલો ભાર આપવામાં આવે છે. આ રીતે મેળવાતા ભારિત સરેરાશના સૂત્રને લાસ્પેયરના સૂચક આંકનું સૂત્ર કહેવામાં આવે છે.
- વસ્તુઓના ભાવ સાપેક્ષ $\frac{p_1}{p_0}$ ને ખર્ચ p_0q_1 જેટલો ભાર આપવામાં આવે છે. આ રીતે મેળવાતા ભારિત સરેરાશના સૂત્રને પાશેના સૂચક આંકનું સૂત્ર કહેવામાં આવે છે.
- લાસ્પેયર અને પાશેના સૂચક આંકના ગુણોત્તર મધ્યકને ફિશરનો સૂચક આંક કહેવામાં આવે છે.
- સમાજના કોઈ એક વર્ગના લોકોના કોઈ એક સમયે જીવનનિર્વાહ ખર્ચમાં આધાર વર્ષ (સમય) ની સરખામણીમાં ચાલુ વર્ષે (સમયે) થતા સાપેક્ષ ટકાવારી ફેરફાર દર્શાવતા આંકને જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક કહેવામાં આવે છે.
- જીવનનિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંકની રચનાના મુદ્દાઓ : હેતુ, કૌટુંબિક બજેટની તપાસ, વસ્તુઓની ભાવપ્રાપ્તિ, આધાર વર્ષની પસંદગી, સરેરાશની પસંદગી અને ભારની પસંદગી
- સૂચક આંકની રચનામાં પસંદ થયેલી વસ્તુઓના તેમના મહત્ત્વના પ્રમાણમાં જે આંક નક્કી કરવામાં આવે છે તેને વસ્તુનો ભાર કહેવામાં આવે છે.
- ભારના બે પ્રકાર છે : (i) ગર્ભિત ભાર (ii) સ્પષ્ટ ભાર
- ગર્ભિત ભાર : વસ્તુની પસંદગીમાં ભાર સમાયેલ હોય છે અને જે સંખ્યામાં દર્શાવી શકાય નહિ તેવા ભાર આપવાની આ પરોક્ષ રીતને ગર્ભિત ભાર કહે છે.
- સ્પષ્ટ ભાર : વસ્તુના મહત્ત્વના પ્રમાણમાં નક્કી થાય છે અને જે સંખ્યામાં દર્શાવી શકાય છે તેવા ભાર આપવામાં આવે તેને સ્પષ્ટ ભાર કહે છે.
- સ્પષ્ટ ભાર આપવાની બે રીત પ્રચલિત છે : (i) કુલ ખર્ચની રીત અને (ii) કૌટુંબિક અંદાજપત્રની રીત

સૂત્રોની યાદી :

(1) ભાવ સાપેક્ષ $= \dfrac{\text{ચાલુ વર્ષ (સમય)નો ભાવ}}{\text{આધાર વર્ષ (સમય)નો ભાવ}}$

$$= \frac{p_1}{p_0}$$

(2) સૂચક આંક $I = \dfrac{\text{ચાલુ વર્ષ (સમય)ની ચલ કિંમત}}{\text{આધાર વર્ષ (સમય)ની ચલ કિંમત}} \times 100$

$$I = \frac{p_1}{p_0} \times 100$$

(3) n વસ્તુઓનો ભાવ સાપેક્ષને આધારે સૂચક આંક $= \dfrac{\Sigma\left[\dfrac{p_1}{p_0}\right]}{n} \times 100$

(4) અચલ આધારની રીતે સૂચક આંક $= \dfrac{\text{ચાલુ વર્ષ (સમય)ની ચલ કિંમત}}{\text{આધાર વર્ષ (સમય)ની ચલ કિંમત}} \times 100$

$$I = \frac{p_1}{p_0} \times 100$$

(5) પરંપરિત આધારની રીતે સૂચક આંક $= \dfrac{\text{ચાલુ વર્ષ (સમય)ની ચલ કિંમત}}{\text{અગાઉના વર્ષ (સમય)ની ચલ કિંમત}} \times 100$

$$I = \frac{p_1}{p_0} \times 100$$

(6) અચલ આધારના સૂચક આંકનું પરંપરિત આધારના સૂચક આંકમાં પરિવર્તન :

પરંપરિત આધારે સૂચક આંક $= \dfrac{\text{ચાલુ વર્ષનો અચલ આધારે સૂચક આંક}}{\text{અગાઉના વર્ષનો અચલ આધારે સૂચક આંક}} \times 100$

(7) પરંપરિત આધારના સૂચક આંકનું અચલ આધારના સૂચક આંકમાં પરિવર્તન :

અચલ આધારે સૂચક આંક $= \dfrac{(\text{ચાલુ વર્ષનો પરંપરિત આધારે સૂચક આંક}) \times (\text{અગાઉના વર્ષનો અચલ આધારે સૂચક આંક})}{100}$

(8) લાસ્પેયરનો સૂચક આંક $I_L = \dfrac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100$

(9) પાશેનો સૂચક આંક $I_P = \dfrac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times 100$

(10) ફિશરનો સૂચક આંક $I_F = \sqrt{I_L \times I_P}$ અથવા

$$I_F = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}} \times 100$$

(11) જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક :

[1] કુલ ખર્ચની રીત :

જ્યારે આધાર વર્ષનો જથ્થો (q_0) આપેલ હોય ત્યારે,

સૂચક આંક $= \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100$ (**નોંધ** : આ લાસ્પેયરનો સૂચક આંક છે.)

જ્યારે ચાલુ વર્ષનો જથ્થો (q_1) આપેલ હોય ત્યારે,

સૂચક આંક $= \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times 100$ (**નોંધ** : આ પાશેનો સૂચક આંક છે.)

[2] કૌટુંબિક બજેટની રીત (સાપેક્ષ કિંમતોની ભારિત સરેરાશ)નું સૂત્ર :

સૂચક આંક $= \frac{\Sigma IW}{\Sigma W}$ જ્યાં, $I = \frac{p_1}{p_0} \times 100$

$W = p_0 q_0$

(12) નાણાંની ખરીદશક્તિ $= \frac{1}{\text{જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક}} \times 100$

(13) વાસ્તવિક વેતન $= \frac{\text{વેતન}}{\text{જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક}} \times 100$

સ્વાધ્યાય 1

વિભાગ A

નીચે આપેલ બહુવિકલ્પ પ્રશ્નો માટે સાચા વિકલ્પની પસંદગી કરો :

1. ચલ રાશિની કિંમતમાં થતા લાંબા ગાળાના ફેરફારોની સરખામણી માટે કઈ રીત ઉપયોગી છે ?

(a) પરંપરિત આધારની રીત (b) લાસ્પેયરની રીત

(c) અચલ આધારની રીત (d) પાશેની રીત

2. લાસ્પેયરના સૂચક આંકની ગણતરીમાં કયો વપરાશ લેવામાં આવે છે ?

(a) આધાર વર્ષનો વપરાશ (b) ચાલુ વર્ષનો વપરાશ

(c) સરેરાશ વર્ષનો વપરાશ (d) કોઈ પણ વર્ષનો વપરાશ

3. જીવનનિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંકની રચનામાં કયા ભાવ ધ્યાનમાં લેવાય છે ?

(a) બજાર ભાવ (b) જથ્થાબંધ ભાવ (c) સરેરાશ ભાવ (d) છૂટક ભાવ

4. કૌટુંબિક બજેટની રીતમાં વસ્તુનું કયું ખર્ચ ભાર તરીકે લેવામાં આવે છે ?

(a) પસંદગીના વર્ષનું ખર્ચ (b) સરેરાશ વાર્ષિક ખર્ચ

(c) આધાર વર્ષનું ખર્ચ (d) ચાલુ વર્ષનું ખર્ચ

5. સૂચક આંકની રચનામાં કઈ સરેરાશને શ્રેષ્ઠ સરેરાશ ગણવામાં આવે છે ?

(a) હરાત્મક મધ્યક (b) સમાંતર મધ્યક (c) ભારિત મધ્યક (d) ગુણોત્તર મધ્યક

6. કયા સૂચક આંક લોકોના જીવનધોરણનો ખ્યાલ આપે છે ?

(a) ઔદ્યોગિક ઉત્પાદનનો સૂચક આંક (b) જથ્થાનો સૂચક આંક

(c) ફિશરનો સૂચક આંક (d) જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક

7. એક વસ્તુનો ભાવ આધાર વર્ષની સરખામણીમાં ચાલુ વર્ષમાં 4.5 ગણો વધે છે, તો ભાવ સૂચક આંક કેટલો થાય ?

(a) 45 (b) 450 (c) 550 (d) 350

8. જો આધાર વર્ષ 2015ના સાપેક્ષમાં વર્ષ 2016માં નાણાંની ખરીદ શક્તિ 0.75 હોય તો વર્ષ 2016 માટે ભાવનો સૂચક આંક કેટલો હોય ?

(a) 750 (b) 175 (c) 133.33 (d) 275

9. જો વર્ષ 2010ના સાપેક્ષમાં વર્ષ 2016નો એક વર્ગના લોકોના જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક 200 થાય, તો નીચેના પૈકી કયું વિધાન સાચું છે ?

(a) તે વર્ગ દ્વારા વપરાશમાં લેવાતી ચીજવસ્તુઓના ચાલુ વર્ષના ભાવમાં 200 ટકાનો સરેરાશ વધારો થયો છે.

(b) તે વર્ગ દ્વારા વપરાશમાં લેવાતી ચીજવસ્તુઓના ચાલુ વર્ષના ભાવમાં 100 ટકાનો સરેરાશ ઘટાડો થયો છે.

(c) નાણાંની ખરીદશક્તિ ₹ 0.5 છે.

(d) તે વર્ગ દ્વારા વપરાશમાં લેવાતી ચીજવસ્તુઓના ચાલુ વર્ષના ભાવ સ્થિર રહ્યા છે.

10. જો $I_P = I_F$ હોય તો નીચેના પૈકી કયું વિધાન સાચું છે ?

(a) $I_P = 2I_L$ (b) $I_F = \frac{I_L}{2}$ (c) $I_F = I_P = I_L$ (d) $4I_F = I_L$

11. જો વર્ષ 2013 માટે એક વર્ગનાં કુટુંબોની ખર્ચપાત્ર સરેરાશ આવક ₹ 20,000 હોય અને જો તે વર્ગનો 2013ના વર્ષના આધારે 2015ના વર્ષ માટેનો જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક 130 હોય, તો 2015ના વર્ષ માટે આ વર્ગનાં કુટુંબોની ખર્ચપાત્ર સરેરાશ આવક કેટલી થાય ?

(a) ₹ 26,000 (b) ₹ 20,130 (c) ₹ 20,000 (d) ₹ 14,000

12. પાશેના સૂચક આંકનું સૂત્ર મેળવવા વસ્તુઓના ભાવ સાપેક્ષ $\frac{p_1}{p_0}$ને ખર્ચનો કયો ભાર આપવામાં આવે છે ?

(a) p_0q_0 (b) p_1q_1 (c) p_0q_1 (d) p_1q_0

વિભાગ B

નીચેના પ્રશ્નોના એક વાક્યમાં જવાબ આપો :

1. ભાવ સાપેક્ષ એટલે શું ?

2. ચલ રાશિમાં બે ભિન્ન સમયે થતાં ફેરફારો સરખાવવા માટે કઈ રીતનો ઉપયોગ કરવો વધુ અનુકૂળ છે ?

3. એક વસ્તુ માટે જથ્થાનો કોઈ એક વર્ષનો સૂચક આંક 130 હોય, તો તેનું અર્થઘટન કરો.

4. આધાર વર્ષ એટલે શું ?

5. પરંપરિત આધારના સૂચક આંકનું અચલ આધારના સૂચક આંકમાં પરિવર્તન કરવાનું સૂત્ર લખો.

6. સૂચક આંકની વ્યાખ્યા આપો.

7. જીવનનિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંકની વ્યાખ્યા આપો.

8. ભાર એટલે શું ?

9. ગર્ભિત ભાર કોને કહેવાય ?

10. સૂચક આંકનાં અગત્યના મૂળભૂત પરીક્ષણોનાં નામ આપો.

11. પરંપરિત આધારની રીતે સૂચક આંક એટલે શું ?

12. 'તેલના ભાવનો સૂચક આંક ₹ 500 છે.' આ વિધાન ખરું છે કે ખોટું તે જણાવી જો ખોટું હોય તો સુધારીને ફરીથી લખો.

13. ફુગાવાનો દર શોધવા માટે કયા સૂચક આંકનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. ફુગાવાનો દર શોધવાનું સૂત્ર આપો.

14. ભારતમાં મોંઘવારી ભથ્થાનો દર શોધવા કયા સૂચક આંકનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે ?

15. અચલ આધારની રીત અને પરંપરિત આધારની રીત વચ્ચેનો મુખ્ય તફાવત લખો.

16. કઈ પદ્ધતિમાં આધાર વર્ષ પ્રત્યેક વર્ષે બદલાતું રહે છે ?

17. સૂચક આંકની રચનામાં કઈ સરેરાશ પ્રચલિત છે ?

18. સૂચક આંકની ગણતરીમાં આધાર વર્ષ કેવું હોવું જોઈએ ?

વિભાગ C

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. આધાર વર્ષ એટલે શું ? તેની પસંદગીમાં મુખ્ય કઈ બાબતો ધ્યાનમાં લેવી જોઈએ ?

2. સૂચક આંકનાં લક્ષણો જણાવો.

3. જથ્થા સૂચક આંક એટલે શું ?

4. સૂચક આંકની રચનામાં ભાર એટલે શું ? ભારના પ્રકાર જણાવો.

5. ફિશરના સૂચક આંકને આદર્શ સૂચક આંક શા માટે કહે છે ?

6. સ્પષ્ટ ભાર અને ગર્ભિત ભાર વચ્ચનો મુખ્ય તફાવત જણાવો.

7. એક સમયગાળા દરમિયાન જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક 280 થી વધીને 340 થયો અને વેતન ₹ 13,500થી વધીને 14,750 થયું હોય, તો કામદારને વાસ્તવમાં કેટલો ફાયદો કે નુકસાન થશે તે શોધો.

8. વર્ષ 2010 થી 2013 સુધીના જીવનનિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંક અને સરેરાશ માસિક વેતન નીચે મુજબ આપેલ છે. તે પરથી દરેક વર્ષ માટે વાસ્તવિક વેતન શોધો.

વર્ષ	2010	2011	2012	2013
સરેરાશ માસિક વેતન (₹)	35,000	40,000	42,000	50,000
જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક	120	150	130	160

9. વર્ષ 2014 અને વર્ષ 2015ના જથ્થાબંધ ભાવના સૂચક આંક અનુક્રમે 177.6 અને 181.2 મળ્યા છે. આ બંને વર્ષના સૂચક આંકનો ઉપયોગ કરી ફુગાવાનો દર શોધો.

10. ત્રણ વસ્તુઓના ભાવ સાપેક્ષ આંકમાં થયેલ ટકાવારી વધારો અનુક્રમે 315, 328 અને 390 છે. જો આ વસ્તુઓના મહત્ત્વનું પ્રમાણ 5 : 7 : 8 હોય, તો ભાવનો સામાન્ય સૂચક આંક ગણો.

11. જો વર્ષ 2014ના માટે એક વર્ગના કુટુંબની ખર્ચપાત્ર સરેરાશ આવક ₹ 25,000 હોય અને જો તે વર્ગનો વર્ષ 2014ના આધારે વર્ષ 2016ના માટેનો જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક 120 હોય, તો વર્ષ 2016ના માટે આ વર્ગનાં કુટુંબની ખર્ચપાત્ર સરેરાશ આવકનું અનુમાન કરો.

12. એક કામદારની વર્ષ 2015માં માસિક સરેરાશ આવક ₹ 16,000 હતી અને વર્ષ 2016માં વધીને ₹ 20,000 થઈ, વર્ષ 2015ની સરખામણીમાં વર્ષ 2016 માટે આવકનો સૂચક આંક શોધો.

13. જો એક વસ્તુનું ઉત્પાદન વર્ષ 2016માં આધાર વર્ષની સરખામણીએ $\frac{9}{5}$ ગણું વધ્યું હોય, તો વર્ષ 2016ના માટે ઉત્પાદનનો સૂચક આંક શોધો.

14. જો $I_L = 221.5$ અને $I_F = 222$ હોય, તો I_P શોધો.

વિભાગ D

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. અચલ આધારે સૂચક આંક શોધવાની રીતના ગુણ અને મર્યાદા જણાવો.

2. પરંપરિત આધારે સૂચક આંક શોધવાની રીતના ગુણ અને મર્યાદા જણાવો.

3. અચલ આધાર અને પરંપરિત આધારની રીત વચ્ચેનો તફાવત આપો.

4. જીવનનિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંકનો અર્થ આપી તેની રચના કરતી વખતે ધ્યાનમાં રાખવાના મુદ્દાઓ જણાવો.

5. જીવનનિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંકના ઉપયોગ જણાવો.

6. જીવનનિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંકની મર્યાદા જણાવો.

7. બળતણની પાંચ વસ્તુઓમાંથી ત્રણ વસ્તુઓના ભાવમાં આધાર વર્ષ 2014ની સરખામણીએ વર્ષ 2015માં અનુક્રમે 50 %, 90 %, 110 % નો વધારો થયો છે. અન્ય બે વસ્તુઓના ભાવમાં અનુક્રમે 5 % અને 2 % ઘટાડો થયો છે. જો પાંચ વસ્તુઓની સાપેક્ષ અગત્યતા 5 : 4 : 3 : 2 : 1ના પ્રમાણમાં હોય, તો વર્ષ 2015નો બળતણના ભાવનો સૂચક આંક શોધો.

8. કોઈ એક કંપનીમાં કામ કરતાં કર્મચારીઓની વર્ષ 2008 થી વર્ષ 2014 સુધીની સરેરાશ વાર્ષિક આવક અંગેની નીચે મુજબની માહિતી પરથી અચલ આધારની રીતે સૂચક આંક શોધો.
(આધાર વર્ષ 2008 લો.)

વર્ષ	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
સરેરાશ વાર્ષિક આવક (₹ 10,000)	36	40	48	52	60	80	95

9. કોઈ એક કંપનીના શેરના જાન્યુઆરી 2014ને આધારે જુદા જુદા મહિનાના સરેરાશ બંધ ભાવો અંગેના સૂચક આંક નીચે મુજબ છે. તે પરથી પરંપરિત આધારે સૂચક આંક ગણો.

મહિનો	જાન્યુઆરી '14	ફેબ્રુઆરી '14	માર્ચ '14	એપ્રિલ '14	મે '14	જૂન '14
અચલ આધારે સૂચક આંક	100	104	105	108	109	127

10. નીચે આપેલ પરંપરિત આધારે મેળવેલ સૂચક આંક પરથી અચલ આધારના સૂચક આંક મેળવો.

વર્ષ	2011	2012	2013	2014
સૂચક આંક	120	90	140	125

11. એક વસ્તુના ભાવ અંગેની નીચેની માહિતી પરથી પરંપરિત આધારની રીતે સૂચક આંક મેળવો.

વર્ષ	2009	2010	2011	2012	2013	2014
ભાવ ₹	40	45	48	55	60	70

12. ઔદ્યોગિક કામદારના જીવનનિર્વાહની વસ્તુઓના સમૂહના સૂચક આંક અને ભાર અંગેની વર્ષ 2015ના એપ્રિલ માસની આપેલી માહિતી પરથી જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક શોધો.

સમૂહ	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
સૂચક આંક	247	167	259	196	212	253
ભાર	44	20	16	6	10	4

13. જો $\Sigma p_1q_0 : \Sigma p_0q_0 = 5:3$ અને $\Sigma p_1q_1 : \Sigma p_0q_1 = 3:2$ હોય, તો લાસ્પેયર, પાશે અને ફિશરના સૂચક આંક ગણો.

14. જો લાસ્પેયર અને પાશેના સૂચક આંકોના ગુણોત્તર 4 : 5 હોય અને ફિશરનો સૂચક આંક 150 હોય, તો પાશેનો સૂચક આંક ગણો.

વિભાગ E

નીચેનાના ઉકેલ મેળવો :

1. વર્ષ 2010ને આધાર વર્ષ લઈ વર્ષ 2012 ની જુદી જુદી વસ્તુઓના ભાવ અંગેની નીચેની માહિતીનો ઉપયોગ કરી સામાન્ય સૂચક આંક શોધો.

વસ્તુ	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
એકમ	ક્વિન્ટલ	કિલોગ્રામ	ડઝન	મીટર	લિટર
વર્ષ 2010ના ભાવ (₹)	110	50	40	80	20
વર્ષ 2012ના ભાવ (₹)	120	70	60	90	20

2. નીચેની માહિતી પરથી કુલ ખર્ચની પદ્ધતિથી વર્ષ 2010ના આધારે વર્ષ 2015 માટે સૂચક આંક ગણો.

વસ્તુ	*A*	*B*	*C*	*D*
વર્ષ 2010ના ભાવ (₹)	10	30	40	20
વર્ષ 2015ના ભાવ (₹)	14	42	80	26
વર્ષ 2010નો જથ્થો	8	4	4	16

3. નીચેની માહિતી પરથી વર્ષ 2013ને આધાર વર્ષ તરીકે લઈ વર્ષ 2014ના માટે કુલ ખર્ચની પદ્ધતિથી સૂચક આંક ગણો.

વસ્તુ	વર્ષ 2014		વર્ષ 2013
	વપરાશ (જથ્થો)	ભાવ (₹)	ભાવ (₹)
ઘઉં	15 કિગ્રા	24	20
ચોખા	10 કિગ્રા	45	40
બાજરી	5 કિગ્રા	20	16
તુવેર દાળ	3 કિગ્રા	90	80

4. નીચેની માહિતી પરથી (i) 2008ના વર્ષને આધાર વર્ષ તરીકે લઈ અચલ આધારે સૂચક આંક (ii) વર્ષ 2008 અને 2009ના સરેરાશ ભાવને આધાર વર્ષના ભાવ તરીકે લઈ સૂચક આંક શોધો.

વર્ષ	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
ભાવ (₹)	32	38	40	42	45	60	65

5. એક શહેરના ઔદ્યોગિક પેદાશના જુદા જુદા સમૂહોના સૂચક આંક તથા સમૂહના ભાર નીચે મુજબ આપેલ છે. તે પરથી ઔદ્યોગિક ઉત્પાદનનો સૂચક આંક મેળવો.

સમૂહ	સૂચક આંક	ભાર
લોખંડ	390.2	30
ટેક્સટાઇલ	247.6	31
કેમિકલ ઉદ્યોગ	510.2	18
ઇજનેરી માલસામાન	403.3	17
સિમેન્ટ	624.4	4

6. વર્ષ 2010ના સાપેક્ષમાં વર્ષ 2015માં ઘઉંના ભાવ 70 % વધે છે અને ચોખાના ભાવ 40 % વધે છે. બાજરીના ભાવ 25 % ઘટે છે. જ્યારે તેલના ભાવ 40 % વધે છે અને ઘીના ભાવ 5 % ઘટે છે. જો ઘી કરતા તેલનું મહત્ત્વ ત્રણ ગણું હોય તથા ચોખાનું બમણું હોય અને ઘઉં તથા બાજરી દરેકનું મહત્ત્વ ચોખા કરતાં બમણું હોય તો, ખોરાકની આ પાંચેય વસ્તુઓના સમૂહના ભાવનો સૂચક આંક શોધો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

7. કામદાર વર્ગના માસિક વેતનની નીચેની માહિતી પરથી તેમના વાસ્તવિક વેતનની ગણતરી કરો. વર્ષ 2008ને આધાર વર્ષ ગણી વર્ષ 2015ની નાણાંની ખરીદશક્તિ શોધો.

વર્ષ	2010	2011	2012	2013	2014	2015
સરેરાશ માસિક વેતન (₹)	15,000	18,000	19,000	20,000	22,000	25,000
જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક (આધાર વર્ષ 2008)	120	180	205	220	235	260

વિભાગ F

નીચેનાના ઉકેલ મેળવો.

1. નીચેની માહિતીને આધારે વર્ષ 2014ને આધાર વર્ષ તરીકે લઈ વર્ષ 2015 માટે લાસ્પેયર અને પાશેના સૂચક આંક મેળવો. ઉપરાંત ફિશરનો સૂચક આંક મેળવો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

વસ્તુ	આધાર વર્ષ 2014		ચાલુ વર્ષ 2015	
	એકમ દીઠ ભાવ (₹)	કુલ ખર્ચ (₹)	એકમ દીઠ ભાવ (₹)	કુલ ખર્ચ (₹)
ઘઉં	16	224	18	270
ચોખા	35	140	40	200
તુવેર દાળ	100	200	120	360
તેલ	108	432	120	600

2. ચાર જુદી-જુદી વસ્તુઓના વપરાશનો જથ્થો અને કુલ ખર્ચ નીચે મુજબ આપેલ છે. વર્ષ 2013ની સરખામણીમાં વર્ષ 2015ના વર્ષ માટે પાશે અને ફિશરના સૂચક આંક ગણો.

વસ્તુ	આધાર વર્ષ 2013		ચાલુ વર્ષ 2015	
	કુલ ખર્ચ (₹)	વપરાશ (જથ્થો)	કુલ ખર્ચ (₹)	વપરાશ (જથ્થો)
A	360	60 કિગ્રા	375	25 કિગ્રા
B	160	10 લિટર	416	20 લિટર
C	480	15 કિગ્રા	613.2	6 કિગ્રા
D	336	3 કિગ્રા	400	2.5 કિગ્રા

3. છ જુદી જુદી વસ્તુઓ અંગે નીચે આપેલ માહિતી પરથી વર્ષ 2015 માટે ફિશરનો સૂચક આંક ગણો.

વસ્તુ	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
એકમ	20 કિગ્રા	ક્વિન્ટલ	કિગ્રા	લિટર	મીટર	ડઝન
વર્ષ 2013 જથ્થો	5 કિગ્રા	10 કિગ્રા	1200 ગ્રામ	30 લિટર	12 મીટર	20 નંગ
વર્ષ 2013 ભાવ (₹)	600	1600	60	52	8	30
વર્ષ 2015 જથ્થો	12 કિગ્રા	12 કિગ્રા	2000 ગ્રામ	36 લિટર	20 મીટર	16 નંગ
વર્ષ 2015 ભાવ (₹)	880	2400	75	32	12	36

4. નીચે આપેલી માહિતી પરથી વર્ષ 2015 માટે લાસ્પેયર, પાશે અને ફિશરના સૂચક આંક ગણો.

વસ્તુ	જથ્થો		ભાવ (₹)	
	વર્ષ 2014	વર્ષ 2015	વર્ષ 2014	વર્ષ 2015
A	25 કિગ્રા	32 કિગ્રા	42	45
B	15 લિટર	20 લિટર	28	30
C	10 નંગ	20 નંગ	30	36
D	8 મીટર	15 મીટર	20	25
E	30 લિટર	36 લિટર	60	65

5. નીચે આપેલ માહિતી પરથી કુલ ખર્ચની રીતે અને કૌટુંબિક અંદાજપત્રની રીતે વર્ષ 2015નો સૂચક આંક ગણો અને આ બંને સૂચક આંક સમાન છે કે કેમ તે જણાવો.

વસ્તુ	એકમ	વર્ષ 2013	વર્ષ 2013	વર્ષ 2015
		વપરાશ (જથ્થો)	ભાવ (₹)	ભાવ (₹)
ઘઉં	ક્વિન્ટલ	100 કિગ્રા	1800	2400
ચોખા	20 કિગ્રા	40 કિગ્રા	700	800
ખાંડ	કિગ્રા	40 કિગ્રા	30	36
તેલ	કિગ્રા	60 કિગ્રા	108	120
દાળ	20 કિગ્રા	40 કિગ્રા	2000	2400
ઘી	કિગ્રા	36 કિગ્રા	400	480

6. અમદાવાદ શહેરના વર્ષ 2014 અને વર્ષ 2015ના ઔદ્યોગિક કામદારોના જીવનનિર્વાહની વસ્તુઓના સમૂહોના સૂચક આંક અને ભાર અંગેની માહિતી નીચે મુજબ આપવામાં આવેલી છે. તે પરથી ઔદ્યોગિક કામદારોના જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક શોધો અને જો કામદારના વેતનમાં વર્ષ 2014ની સરખામણીએ વર્ષ 2015માં 5 % વધારો કરવામાં તો વર્ષ 2015ના ભાવવધારા સામે રક્ષણ આપવા માટે વધારો પૂરતો છે ?

સમૂહ	ખોરાક	બળતણ અને વીજળી	રહેઠાણ	કાપડ	પરચૂરણ ખર્ચ
ભાર	31	14	22	10	23
વર્ષ 2014નો સૂચક આંક	270	168	205	174	303
વર્ષ 2015નો સૂચક આંક	281	178	210	177	337

7. એક શહેરના વર્ષ 2014ના ઔદ્યોગિક કામદારોના જીવનનિર્વાહની વસ્તુઓના સૂચક આંક અને ભાર અંગેની નીચે મુજબ માહિતી આપેલ છે. તે પરથી ઔદ્યોગિક કામદારોનો જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક શોધો. આ કામદારોને વર્ષ 2012માં ચૂકવાતો સરેરાશ માસિક પગાર ₹ 6,000 હોય તો હાલનું જીવનધોરણ ટકાવી રાખવા માટે ચાલુ વર્ષ 2014નો સરેરાશ માસિક પગાર કેટલો હોવો જોઈએ ?

સમૂહ	ખોરાક	બળતણ અને વીજળી	રહેઠાણ	કાપડ	પરચૂરણ ખર્ચ
વર્ષ 2014નો ભાવાંક (આધાર વર્ષ 2012)	255	174	234	153	274
ભાર	42	8	12	18	20

8. નીચે આપેલી વર્ષ 2015ના ઔદ્યોગિક ઉત્પાદન જથ્થા અને ભાર અંગેની માહિતી પરથી ઔદ્યોગિક ઉત્પાદનનો સૂચક આંક ગણો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

ઉદ્યોગ	એકમ	વર્ષ 2013 ઉત્પાદન	વર્ષ 2015 ઉત્પાદન	ભાર
ખાણ	લાખ ટન	10	15	4
ટેક્ષટાઈલ્સ	કરોડ મીટર	20	25	6
ઈજનેરી	લાખ ટન	30	25	30
કેમિકલ્સ	સો ટન	40	50	3
ખાદ્ય	લાખ ટન	50	60	4

9. ચાર જુદી-જુદી વસ્તુઓના વર્ષ 2014 અને વર્ષ 2015માં એકમ દીઠ ભાવ અને ભાર અંગે માહિતી નીચે મુજબ આપેલ છે. તે પરથી વર્ષ 2015નો સૂચક આંક ગણો.

વસ્તુ	ભાર	વર્ષ 2014	વર્ષ 2015
		એકમ દીઠ ભાવ (₹)	એકમ દીઠ ભાવ (₹)
A	40	32	40
B	25	80	100
C	20	24	30
D	15	4	6

10. વર્ષ 2015માં જીવનનિર્વાહ ખર્ચના જુદા જુદા સમૂહો પૈકી ખોરાકનો અને કાપડનો સૂચક આંક અનુક્રમે 150 અને 224.7 છે. બળતણના ભાવમાં 220 % વધારો થયો છે. ભાડાનો ખર્ચ ₹ 4000 થી વધીને ₹ 6000 અને પરચૂરણ ખર્ચ 1.75 ગણો વધ્યો છે. પ્રથમ ચાર સમૂહો પાછળ કરવામાં આવતું ખર્ચ અનુક્રમે 40 %, 18 %, 12 % અને 20 % હોય, તો વર્ષ 2015નો જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સામાન્ય સૂચક આંક ગણો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

Irving Fisher
(1867 – 1947)

Irving Fisher was an American economist, statistician, inventor and Progressive social campaigner. He was one of the earliest American neoclassical economists. He was described as "The greatest economist the United States has ever produced.

Fisher made important contributions to utility theory and general equilibrium. He was also a pioneer in the rigorous study of intertemporal choice in markets, which led him to develop a theory of capital and interest rates. His research on the quantity theory of money inaugurated the school of macroeconomic thought known as "Monetarism". Fisher was also a pioneer of econometrics, including the development of index numbers. Some concepts named after him include the Fisher equation, the Fisher hypothesis, the international Fisher effect, the Fisher separation theorem and Fisher market.

"Can we say, in this case, that the cause of a cause is the relevant cause ?"

– Johnny Rich

2

સુરેખ સહસંબંધ
(Linear Correlation)

વિષયવસ્તુ :

2.1 પ્રસ્તાવના

2.2 સુરેખ સહસંબંધનો અર્થ અને વ્યાખ્યા

2.3 સહસંબંધ અને સહસંબંધાંક

2.4 વિકીર્ણ આકૃતિની રીત

2.5 કાર્લ પિયર્સનની ગુણનપ્રઘાતની રીત

2.6 સહસંબંધાંકના ગુણધર્મો

2.7 સહસંબંધાંકની કિંમતનું અર્થઘટન

2.8 સ્પિયરમૅનની ક્રમાંક સહસંબંધની રીત

2.9 સહસંબંધાંકના અર્થઘટનમાં રાખવી પડતી સાવચેતી

2.1 પ્રસ્તાવના

ધોરણ 11માં આપણે મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં માપ, પ્રસારમાન, વિષમતા વગેરે જેવાં પ્રકરણોમાં ફક્ત એક ચલનાં લક્ષણોનો અભ્યાસ કર્યો. અત્યાર સુધી આપણો અભ્યાસ એક ચલના વિતરણ સુધી સીમિત હતો, પરંતુ ઘણી પરિસ્થિતિઓ એવી ઉદ્‌ભવતી હોય છે કે, જેમાં બે કે તેથી વધુ ચલોનો સંયુક્ત અભ્યાસ ઇચ્છનીય અને જરૂરી હોય. દા.ત., આપણે કોઈ કંપનીની કોઈ વસ્તુના વાર્ષિક વેચાણનો અભ્યાસ કરતાં હોઈએ તો સાથ-સાથે કંપનીના નફા વિશે પણ જાણવા ઇચ્છીએ છીએ, કારણ કે તે પરથી આ બે ચલો 'ઉત્પાદિત વસ્તુનું વેચાણ' અને 'તેનાથી થતો નફો' વચ્ચે કેવો અને કેટલો સંબંધ છે તે જાણી શકાય છે. કોઈ વિસ્તારમાં વાર્ષિક વરસાદ અને ચોખાની ઊપજ, વસ્તુનો ભાવ અને તેની માંગ, કુટુંબની આવક અને ખર્ચ, પિતા અને પુત્રની ઊંચાઈ, પતિ અને પત્નીની ઉંમર વગેરે કેટલાંક જાણીતાં ઉદાહરણો છે જેમાં ચલોની જોડ વચ્ચે સંબંધ જોવા મળે છે. તે જ રીતે ઘણી પરિસ્થિતિઓમાં જોઈ શકીએ છીએ કે બે ચલ વચ્ચે સંબંધ હોય છે.

આપણે આ પ્રકરણ અને આ પછીના પ્રકરણમાં બે પરસ્પર સંબંધિત ચલોના સંબંધ વિશે અભ્યાસ કરીશું.

નોંધ :

- એક ચલની માહિતી એકઠી કરી મેળવેલા તેના વિતરણને એક ચલીય (Univariate) વિતરણ કહે છે. દા.ત., કોઈ એક વિષયમાં વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલા ગુણ, કોઈ કંપનીમાં કામ કરતા વ્યક્તિઓની માસિક આવક, સ્ટેટ ટ્રાન્સપોર્ટ (ST)ની બસોના ડ્રાઇવરની ઉંમરનું વિતરણ.
- કોઈ એકમના બે જુદાં-જુદાં લક્ષણોની એક જ સમયે એકઠી કરેલી માહિતીને દ્વિચલ માહિતી કહે છે અને તે પરથી મેળવેલા તેના વિતરણને દ્વિચલ (Bivariate) વિતરણ કહે છે. દા.ત. કોઈ વસ્તુના ભાવ અને તેનો પુરવઠો, કોઈ એક સમૂહનાં કુટુંબોનો માસિક ખર્ચ અને બચત, પતિની ઉંમર અને પત્નીની ઉંમરનું વિતરણ.
- બેથી વધુ ચલોની કિંમતમાં એક સાથે થતા ફેરફારોનો અભ્યાસ બહુચલીય અને આંશિક સહસંબંધ દ્વારા થઈ શકે છે, પરંતુ અત્રે આપણે ફક્ત બે ચલ વચ્ચેના સહસંબંધનો જ અભ્યાસ કરીશું.

2.2 સુરેખ સહસંબંધનો અર્થ અને વ્યાખ્યા

સૌપ્રથમ આપણે સહસંબંધનો અર્થ સમજીએ. હવે આપણે જાણીએ છીએ કે, ઘણી પરિસ્થિતિમાં બે ચલોની કિંમતોમાં એક સાથે ફેરફાર જોવા મળે છે. બે ચલોની કિંમતોમાં એક સાથે થતા ફેરફારો મુખ્યત્વે બે પ્રકારે થઈ શકે :

જ્યારે,

(1) બે ચલ વચ્ચે કાર્ય-કારણનો સંબંધ હોય.

(2) કોઈ અન્ય કારણની અસરને લીધે બંને ચલોની કિંમતમાં ફેરફાર થતા હોય.

કોઈ વિસ્તારમાં વાર્ષિક વરસાદ અને ચોખાની ઊપજનાં ઉદાહરણમાં મોટા ભાગે વરસાદ વધે (અમુક હદ સુધી) તો ચોખાની ઊપજ પણ વધે છે અને વરસાદ ઘટે તો ચોખાની ઊપજ પણ ઘટે છે. તેથી અહીં વરસાદ એ 'કારણ' છે જ્યારે ચોખાની ઊપજ એ 'કાર્ય' છે. તે જ રીતે કોઈ વ્યક્તિની આવક લગભગ સમાન રહેતી હોય ત્યારે તેનો ખર્ચ વધે તો તેની બચત ઘટે છે અને ખર્ચ ઘટે તો બચત વધે છે. અહીં ખર્ચ એ 'કારણ' છે જ્યારે બચત એ 'કાર્ય' છે. ઉપર્યુક્ત બે ઉદાહરણોમાં બંને ચલોમાં થતા ફેરફારો કાર્ય-કારણનો સંબંધ દર્શાવે છે. ક્યારેક બંને ચલો પરસ્પર આધારિત હોય છે અને એટલે કોઈ એક ચલને 'કારણ' અને બીજા ચલને 'કાર્ય' ચોક્કસપણે કહી શકાય નહિ. સામાન્ય રીતે આર્થિક ચલો (Economic Variables)ના કિસ્સામાં આવું બની શકે. દા.ત., માંગ અને પુરવઠો. જો માંગ વધે તો પુરવઠો વધારવાની જરૂર પડે છે, (જે હંમેશાં તાત્કાલિક શક્ય નથી હોતું) અને જ્યારે પુરવઠો વધે ત્યારે ભાવ ઘટવા તરફ જાય છે અને તેને લીધે માંગ વધે છે. આમ, માંગ અને પુરવઠો પરસ્પર આધારિત છે. તે જ રીતે પતિની ઉંમર અને પત્નીની ઉંમર આવા પ્રકારની પરિસ્થિતિનું ઉદાહરણ છે.

રેનકોટનું વેચાણ અને વરસાદ માટેના પગરખાંના વેચાણના ઉદાહરણમાં બંને ચલોની કિંમતો ચોમાસામાં વધે છે. અહીં બંને ચલ વચ્ચે પ્રત્યક્ષ કાર્ય-કારણનો સંબંધ નથી પરંતુ રેનકોટના વેચાણ અને વરસાદ માટેના પગરખાનાં વેચાણમાં થતો ફેરફાર એ ત્રીજા ચલ વરસાદને આભારી છે. આ પરોક્ષ કાર્ય-કારણના સંબંધનું ઉદાહરણ છે.

બે ચલ વચ્ચેના સંબંધનાં ઉદાહરણો જોયા પછી આપણે સહસંબંધની વ્યાખ્યા નીચે મુજબ આપી શકીએ. જો બે ચલોની કિંમતોમાં પ્રત્યક્ષ કે પરોક્ષ કાર્ય-કારણને લીધે એક સાથે ફેરફારો થતા હોય તો તે બે ચલ વચ્ચે **સહસંબંધ** છે તેમ કહેવાય. જ્યારે બે સહસંબંધિત ચલોની જોડયુક્ત કિંમતોને આલેખપત્ર પર દર્શાવીએ અને તે આલેખમાંનાં બિંદુઓ એક જ સુરેખા પર રહેલા હોય અથવા ખૂબ નજીક હોય ત્યારે તેવા સહસંબંધને **સુરેખ સહસંબંધ** કહે છે. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો બે સહસંબંધિત ચલોની કિંમતોમાં થતો ફેરફાર લગભગ અચળ પ્રમાણમાં હોય તો બે ચલ વચ્ચે સુરેખ સહસંબંધ છે તેમ કહેવાય.

સામાન્ય રીતે પ્રાકૃતિક વિજ્ઞાન જેવા કે ગણિત અને ભૌતિકશાસ્ત્રમાં બે ચલ સંપૂર્ણ સુરેખસંબંધ ધરાવે છે, તેવું જોવા મળે છે. એટલે કે એક ચલમાં ફેરફાર થવાથી બીજા ચલની કિંમતમાં અચળ પ્રમાણમાં ફેરફાર થાય છે.

દા.ત., (1) વર્તુળની ત્રિજ્યા અને પરિઘ

આપણે જાણીએ છીએ કે કોઈ વર્તુળની ત્રિજ્યા r એકમ હોય, તો તેનો પરિઘ $2\pi r$ થાય છે. આમ ત્રિજ્યાના માપને 2π (અચળ) વડે ગુણવાથી તે વર્તુળના પરિઘનું માપ મળે છે. તેથી કહી શકાય કે ત્રિજ્યામાં ફેરફાર થવાથી વર્તુળના પરિઘના માપમાં અચળ પ્રમાણમાં ફેરફાર થાય, જે નીચેના કોષ્ટક પરથી સ્વયં સ્પષ્ટ છે :

ત્રિજ્યા (r)	2	3	5	10
પરિઘ ($2\pi r$)	4π	6π	10π	20π

(2) અચળ ગતિએ કોઈ પદાર્થને અંતર કાપતા લાગતો સમય અને પદાર્થે કાપેલું અંતર

જો કોઈ પદાર્થ કલાકના 50 કિમીની ઝડપે ગતિ કરતો હોય તો તેને લાગતા સમયના ચોક્કસ અચળ પ્રમાણમાં જ તે પદાર્થ અંતર કાપે છે, જે નીચેના કોષ્ટક પરથી સહેલાઈથી સમજી શકાય છે :

પદાર્થને અંતર કાપતા લાગતો સમય (કલાક)	2	3	6	10
પદાર્થે કાપેલું અંતર (કિમી)	100	150	300	500

પરંતુ સામાન્ય રીતે વાણિજ્ય, અર્થશાસ્ત્ર અને સામાજિક વિજ્ઞાનમાં બે ચલોની કિંમતમાં થતા ફેરફારો અચળ પ્રમાણમાં હોતા નથી. દા.ત. જો સતત બે વર્ષ માટે આગળના વર્ષની સરખામણીએ ચાલુ વર્ષે વરસાદમાં 10 % વધારો થયો હોય તો જરૂરી નથી કે પાક પણ બંને વર્ષે સરખા પ્રમાણમાં વધે. આમ થવાનું કારણ એ છે કે, બંને ચલો વરસાદ અને પાક બીજાં ઘણાં પરિબળોની અસર હેઠળ બદલાય છે અને તેથી બંને ચલોમાં થતા ફેરફારોમાં અનિશ્ચિતતા (Chance)નું તત્ત્વ રહેલું હોય છે. તેથી બે સહસંબંધિત ચલોની જોડને અનુરૂપ બિંદુઓ એક જ સુરેખા પર નહિ પરંતુ સુરેખાની આસપાસ હોઈ શકે છે.

આ પ્રકરણમાં આપણે સુરેખ સહસંબંધનો અભ્યાસ કરીશું. હવે પછી આપણે સુરેખ સહસંબંધને સહસંબંધ જ કહીશું.

સહસંબંધના મુખ્યત્વે બે પ્રકાર છે : (1) ધન સહસંબંધ (2) ઋણ સહસંબંધ

(1) ધન સહસંબંધ : જ્યારે બંને સહસંબંધિત ચલોની કિંમતોમાં થતા ફેરફારો એક જ દિશામાં થતા હોય ત્યારે તે બે ચલ વચ્ચે ધન સહસંબંધ છે તેમ કહેવાય.

વસ્તુનો ભાવ અને પુરવઠો, વ્યક્તિની આવક અને ખર્ચ, પતિની ઉંમર અને પત્નીની ઉંમર, કોઈ માર્ગ પર વાહનોની સંખ્યા અને અકસ્માતોની સંખ્યા, કોઈ વસ્તુનું વેચાણ અને તેનાથી થતો નફો, કોઈ વિસ્તારમાં વરસાદ અને પાકની ઊપજ એ ધન સહસંબંધના કેટલાંક ઉદાહરણો છે.

(2) ઋણ સહસંબંધ : જ્યારે બંને સહસંબંધિત ચલોની કિંમતોમાં થતા ફેરફારો એકબીજાની વિરુદ્ધ દિશામાં થતા હોય ત્યારે તે બે ચલ વચ્ચે ઋણ સહસંબંધ છે તેમ કહેવાય.

વસ્તુનો ભાવ અને માંગ, વ્યક્તિનું ખર્ચ અને બચત, શિયાળામાં દિવસનું લઘુતમ તાપમાન અને ગરમ કપડાંનું વેચાણ, સમુદ્રની સપાટીથી કોઈ એક સ્થળની ઊંચાઈ અને તે સ્થળે હવામાં ઑક્સિજનનું પ્રમાણ એ ઋણ સહસંબંધનાં કેટલાંક ઉદાહરણો છે.

2.3 સહસંબંધ અને સહસંબંધાંક

આપણે અગાઉ સહસંબંધનો અર્થ અને તેની વ્યાખ્યાની ચર્ચા કરી. હવે આપણે તેના માપ સહસંબંધાંક વિશે જોઈએ.

બે ચલ વચ્ચેના સુરેખ સહસંબંધની ઘનિષ્ઠતા (Strength)ના માપને સહસંબંધાંક કહે છે. તેને સંકેતમાં r વડે દર્શાવાય છે. સહસંબંધાંક એ બે સહસંબંધિત ચલો વચ્ચેના સુરેખ સંબંધની ઘનિષ્ઠતા કે માત્રા (degree) દર્શાવતું સંખ્યાત્મક માપ છે. આ માપ સૌપ્રથમ કાર્લ પિયર્સને સૂચવ્યું હતું.

સહસંબંધના અભ્યાસની રીતો

બે ચલો વચ્ચે રહેલા સહસંબંધનું સ્વરૂપ અને તે સંબંધની ઘનિષ્ઠતા જાણવા માટે મુખ્યત્વે નીચેની પદ્ધતિઓનો ઉપયોગ થાય છે :

(1) વિકીર્ણ આકૃતિની રીત (Scatter Diagram Method)

(2) કાર્લ પિયર્સનની ગુણનપ્રઘાતની રીત (Karl Pearson's Product moment Method)

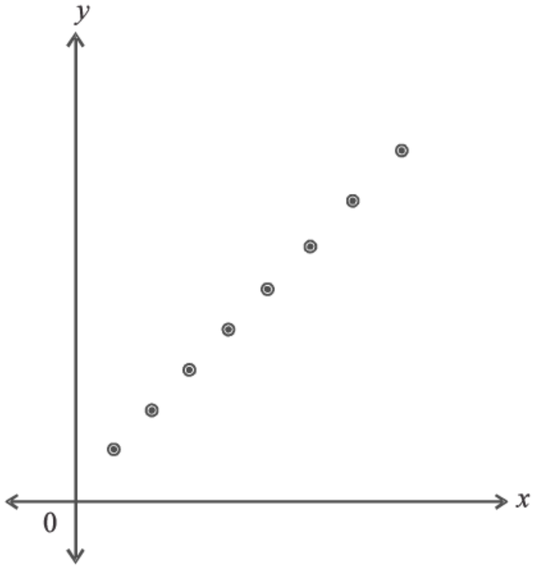
(3) સ્પિયરમૅનની ક્રમાંક સહસંબંધની રીત (Spearman's Rank Correlation Method)

2.4 વિકીર્ણ આકૃતિની રીત

બે સંબંધિત ચલો વચ્ચેના સહસંબંધના સ્વરૂપની આકૃતિ દ્વારા રજૂઆત માટેની આ એક સરળ રીત છે. બે ચલ વચ્ચેના સહસંબંધનું સ્વરૂપ જાણવા માટે આ એક જ રીતનો વ્યાપક ઉપયોગ થાય છે. તદુપરાંત આ રીત દ્વારા થોડા ઘણા અંશે બે ચલો વચ્ચેના સહસંબંધની ઘનિષ્ઠતાનો ખ્યાલ પણ મળે છે.

ધારો કે ચલ X અને Y ની n કિંમતોની ક્રમિત જોડ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ..., (x_n, y_n)$ છે. ચલ X ની કિંમતોને X-અક્ષ અને ચલ Y ની કિંમતોને Y-અક્ષ પર યોગ્ય પ્રમાણમાપ લઈ આલેખમાં નિરૂપણ કરવામાં આવે છે. $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ..., (x_n, y_n)$ ને અનુરૂપ બિંદુઓને આલેખમાં દર્શાવતાં મળતી આકૃતિને વિકીર્ણ આકૃતિ કહે છે.

વિકીર્ણ આકૃતિમાં દર્શાવેલાં બિંદુઓની ઢબ (pattern) પરથી સહસંબંધનું સ્વરૂપ (કે પ્રકાર) જાણી શકાય છે અને થોડા ઘણા અંશે સહસંબંધની ઘનિષ્ઠતાનો ખ્યાલ પણ મેળવી શકાય છે. હવે વિકીર્ણ આકૃતિ દ્વારા બે ચલ વચ્ચેના સહસંબંધના સ્વરૂપ અને ઘનિષ્ઠતા વિશે કેવી રીતે જાણી શકાય તે આપણે જોઈએ.



જો વિકીર્ણ આકૃતિમાં બધાં જ બિંદુઓ એક જ સુરેખા પર હોય અને તે સુરેખા ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ ઉપરની દિશામાં જતી હોય તો તે બે ચલ X અને Y વચ્ચે **સંપૂર્ણ ધન સહસંબંધ** છે તેમ દર્શાવે છે.

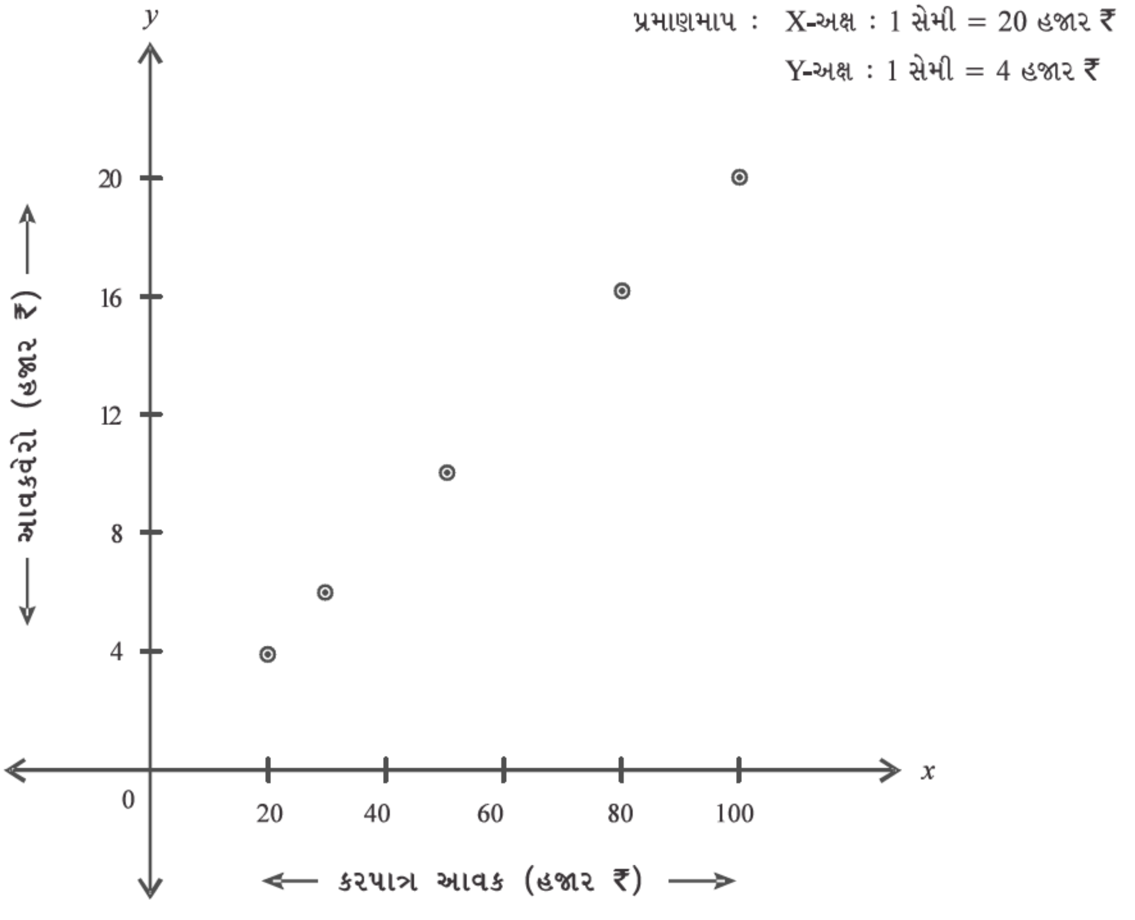
જ્યારે બંને ચલોની કિંમતોમાં થતો ફેરફાર એક જ દિશામાં અને અચળ પ્રમાણમાં થતો હોય ત્યારે આપણને આ પ્રકારની વિકીર્ણ આકૃતિ મળે છે. આ બાબત સમજવા આપણે એક ઉદાહરણ લઈએ.

ઉદાહરણ 1 : કુલ આવકમાંથી મૂળ કપાત (Standard deduction) કર્યા બાદ રહેલી આવક પર 20 ટકાના દરે આવકવેરો (income tax) લાગે છે. નીચે પાંચ વ્યક્તિઓની વાર્ષિક કરપાત્ર (taxable) આવક અને તેને ભરવા પડતા આવકવેરાની વીગત આપેલી છે.

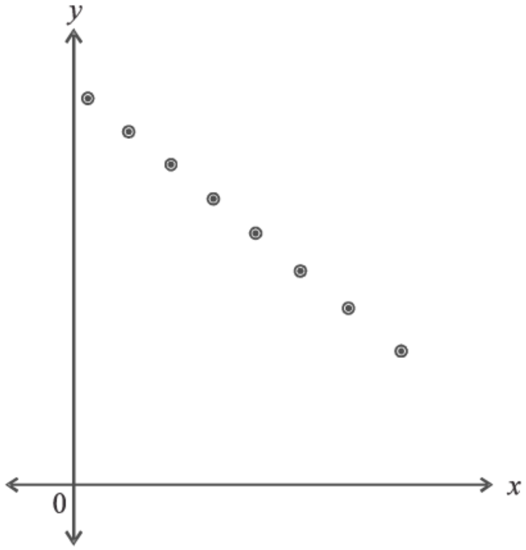
વ્યક્તિ	1	2	3	4	5
કરપાત્ર આવક (હજાર ₹) x	50	30	80	20	100
આવકવેરો (હજાર ₹) y	10	6	16	4	20

આ માહિતી પરથી વિકીર્ણ આકૃતિ દોરો અને સહસંબંધ વિશે ચર્ચા કરો.

x અને yની ક્રમિત જોડ $(50, 10)$, $(30, 6)$, $(80, 16)$, $(20, 4)$ અને $(100, 20)$ ને અનુરૂપ બિંદુઓ આલેખપત્રમાં દર્શાવતાં આપણને નીચે મુજબ વિકીર્ણ આકૃતિ મળે છે.



આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, વિકીર્ણ આકૃતિમાં બધાં જ બિંદુઓ એક જ સુરેખા પર છે. આપણે એ પણ જોઈ શકીએ છીએ કે જેમ ચલ X ની કિંમત બદલાય છે તેમ ચલ Y ની કિંમત પણ તે જ દિશામાં અને અચળ પ્રમાણમાં બદલાય છે. (ચકાસો કે, જ્યારે X ની કિંમતને 0.2 (20 %) વડે ગુણવામાં આવે ત્યારે ક્રમિત જોડની તેને અનુરૂપ Y ની કિંમત મળે છે, તેથી અહીં બંને ચલ X અને Y માં સપ્રમાણ ફેરફાર થાય છે.) તેથી, કહી શકાય કે બે ચલ X અને Y વચ્ચે સંપૂર્ણ ધન સહસંબંધ છે.



જો વિકીર્ણ આકૃતિમાં બધાં જ બિંદુઓ એક જ સુરેખા પર હોય અને તે સુરેખા ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ નીચેની દિશામાં જતી હોય તો બે ચલ *X* અને *Y* વચ્ચે **સંપૂર્ણ ઋણ સહસંબંધ** છે તેમ દર્શાવે છે.

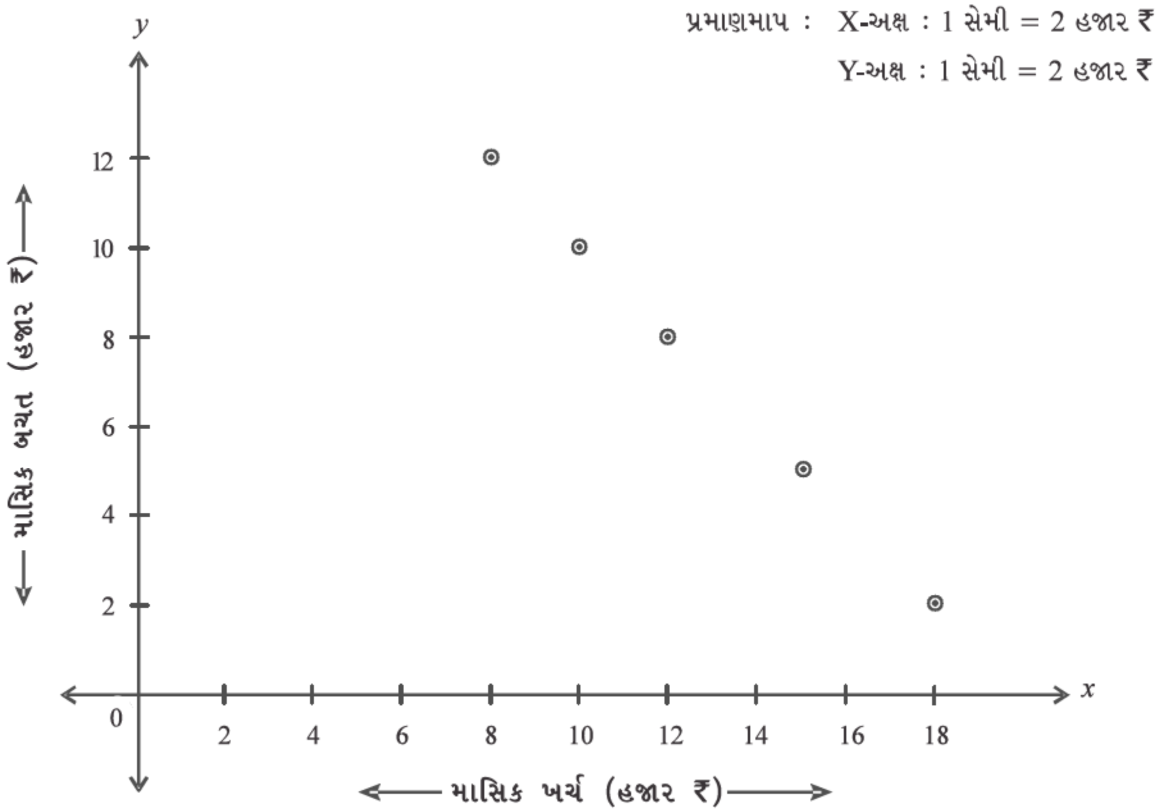
જ્યારે બંને ચલોની કિંમતોમાં થતો ફેરફાર એકબીજાની વિરુદ્ધ દિશામાં અને અચળ પ્રમાણમાં થતો હોય ત્યારે આપણને આ પ્રકારની વિકીર્ણ આકૃતિ મળે છે. આ બાબત સમજવા આપણે એક ઉદાહરણ લઈએ.

ઉદાહરણ 2 : મધ્યમ વર્ગના કુટુંબોના માસિક ખર્ચ અને માસિક બચત વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા લીધેલા 5 કુટુંબોના ખર્ચ અને બચતની વીગત નીચે આપેલી છે. (દરેક કુટુંબની માસિક આવક 20,000 ₹ છે.)

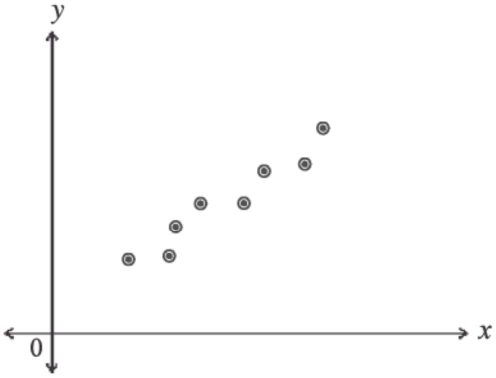
માસિક ખર્ચ (હજાર ₹) *x*	15	18	8	10	12
માસિક બચત (હજાર ₹) *y*	5	2	12	10	8

આ માહિતી પરથી માસિક ખર્ચ અને માસિક બચત વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવતી વિકીર્ણ આકૃતિ દોરો અને સહસંબંધ વિશે ચર્ચા કરો.

x અને y ની ક્રમિત જોડ $(15, 5)$, $(18, 2)$, $(8, 12)$, $(10, 10)$ અને $(12, 8)$ ને અનુરૂપ બિંદુઓ આલેખપત્રમાં દર્શાવતા આપણને નીચે મુજબ વિકીર્ણ આકૃતિ મળે છે :



આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, વિકીર્ણ આકૃતિમાં બધાં જ બિંદુઓ એક જ સુરેખા પર છે. આપણે એ પણ જોઈ શકીએ છીએ કે જેમ ચલ Xની કિંમત બદલાય છે તેમ ચલ Yની કિંમત પણ તેની વિરુદ્ધ દિશામાં અને ચોક્કસ પ્રમાણમાં બદલાય છે. (ચકાસો કે, માસિક આવક સ્થિર હોવાથી માસિક ખર્ચમાં થતા વધારા (કે ઘટાડા)ને લીધે માસિક બચતમાં અચળ પ્રમાણમાં ઘટાડો (કે વધારો) જોવા મળે છે.) તેથી કહી શકાય કે બે ચલ X અને Y વચ્ચે સંપૂર્ણ ઋણ સહસંબંધ છે.



જો વિકીર્ણ આકૃતિમાં બધાં બિંદુઓ એક જ સુરેખા પર ન હોય પરંતુ કોઈ સુરેખાની આસપાસ હોય અને તે સુરેખા ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ ઉપરની દિશામાં જતી હોય, તો તે બે ચલ X અને Y વચ્ચે **આંશિક ધન સહસંબંધ** છે તેમ દર્શાવે છે.

જ્યારે બંને ચલની કિંમતોમાં થતા ફેરફારો એક જ દિશામાં હોય પણ આ ફેરફારો અચળ પ્રમાણમાં ન હોય ત્યારે આપણને આ પ્રકારની આકૃતિ મળે છે. આ બાબત સમજવા આપણે એક ઉદાહરણ લઈએ.

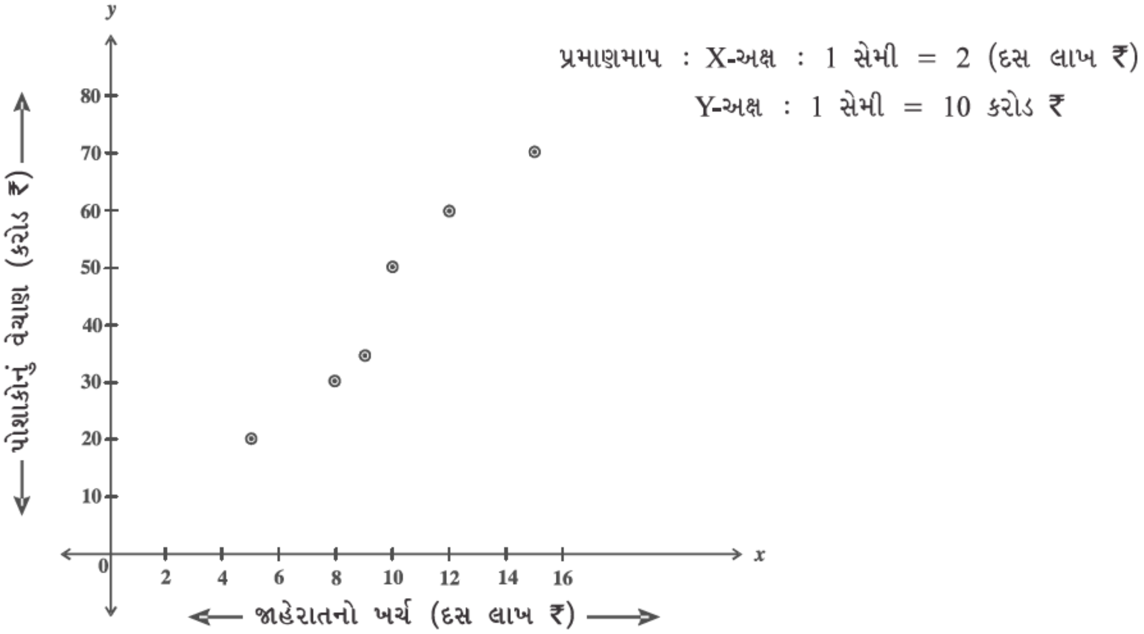
નોંધ : સમષ્ટિના ચલો વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા માટે સામાન્ય રીતે તેમાંથી પ્રમાણસર કદનો નિદર્શ લઈ સહસંબંધાંક મેળવવામાં આવે છે, પરંતુ આપણે ગણતરીની સરળતા ખાતર નિદર્શનું કદ મર્યાદિત અને નાનું રાખીશું.

ઉદાહરણ 3 : એક કંપની તૈયાર પોશાકો બનાવે છે. છેલ્લા છ મહિનામાં થયેલ માસિક જાહેરાત-ખર્ચ (દસ લાખ ₹માં) અને પોશાકોનું વેચાણ (કરોડ ₹માં) નીચે મુજબ છે :

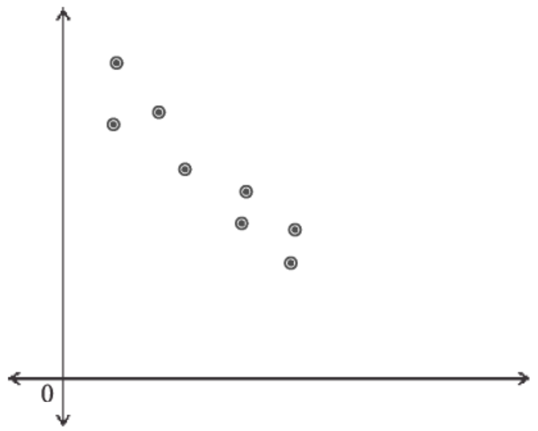
જાહેરાતનું ખર્ચ (દસ લાખ ₹) x	5	8	10	15	12	9
પોશાકોનું વેચાણ (કરોડ ₹) y	20	30	50	70	60	35

આ માહિતી પરથી વિકીર્ણ આકૃતિ દોરો અને સહસંબંધ વિશે ચર્ચા કરો.

ચલ x અને yની ક્રમિત જોડ $(5, 20)$, $(8, 30)$, $(10, 50)$, $(15, 70)$, $(12, 60)$ અને $(9, 35)$ ને અનુરૂપ બિંદુઓ આલેખપત્રમાં દર્શાવતા આપણને નીચે મુજબ વિકીર્ણ આકૃતિ મળે છે :



વિકીર્ણ આકૃતિમાં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, બધાં બિંદુઓ એક જ સુરેખા પર નથી. અહીં, જાહેરાતના ખર્ચ અને વેચાણમાં થતા ફેરફારો એક જ વધતી જતી દિશામાં થાય છે પરંતુ આ ફેરફારો અચળ પ્રમાણમાં નથી. તેથી બધાં બિંદુઓ એક જ સુરેખા પર આવેલાં નથી. તેથી આપણે કહી શકીએ કે બે ચલ X અને Y વચ્ચે આંશિક ધન સહસંબંધ છે.



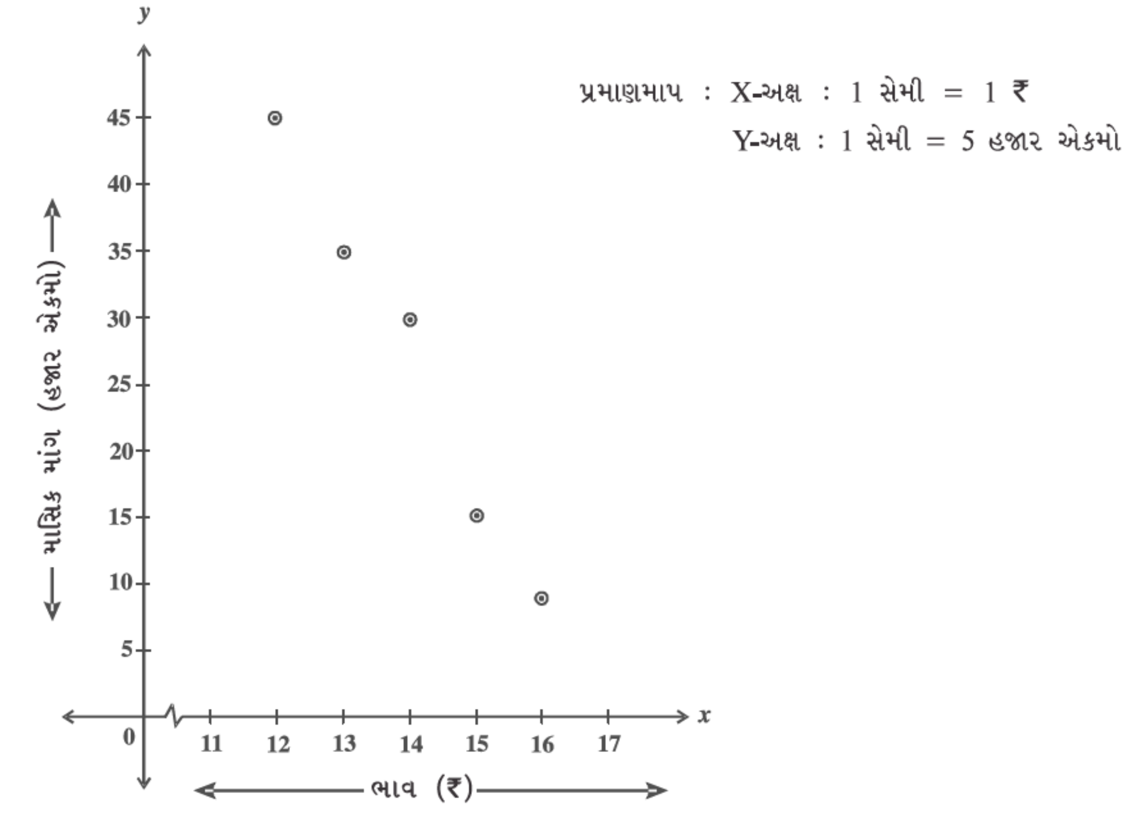
જો વિકીર્ણ આકૃતિમાં બધાં બિંદુઓ એક જ સુરેખા પર ન હોય પરંતુ કોઈ સુરેખાની આસપાસ હોય અને તે સુરેખા ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ નીચેની દિશામાં જતી હોય, તો તે બે ચલ X અને Y વચ્ચે **આંશિક ઋણ સહસંબંધ** છે તેમ દર્શાવે છે.

જ્યારે બંને ચલોની કિંમતોમાં થતા ફેરફારો એકબીજાની વિરુદ્ધ દિશામાં હોય પણ આ ફેરફારો અચળ પ્રમાણમાં ન હોય ત્યારે આપણને આ પ્રકારની આકૃતિ મળે છે. આ બાબત સમજવા આપણે એક ઉદાહરણ લઈએ.

ઉદાહરણ 4 : વાહનોના સ્પેરપાર્ટસ બનાવતી એક કંપની રબરના બુશરના ભાવની તેની માંગ પર અસર જાણવા માટે છેલ્લાં 5 મહિના જુદા જુદા ભાવ રાખી તેની માંગ વિશે નીચે મુજબ માહિતી મેળવે છે. આ આપેલી માહિતી પરથી વિકીર્ણ આકૃતિ દોરો અને સહસંબંધના સ્વરૂપ વિશે ચર્ચા કરો.

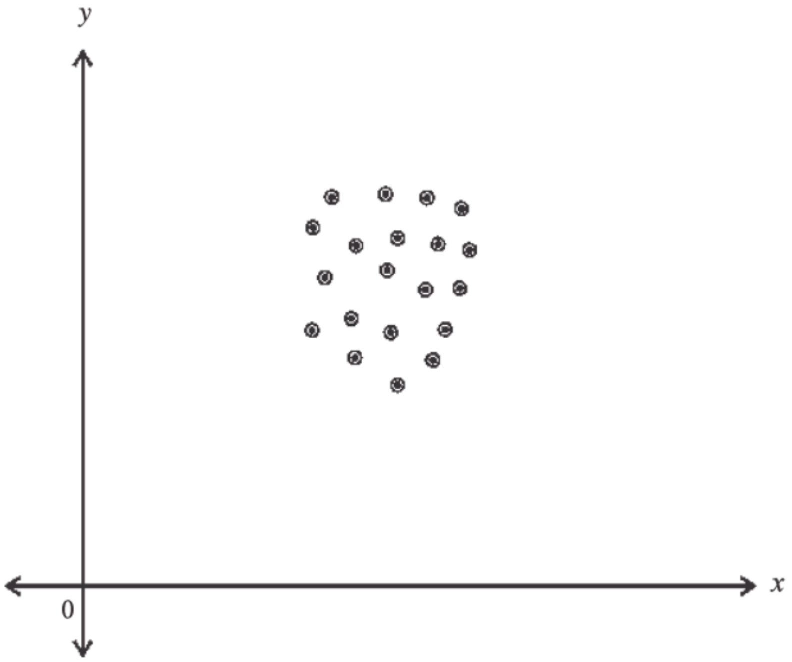
ભાવ (₹) x	12	13	14	15	16
માસિક માંગ (હજાર એકમો) y	45	35	30	15	10

x અને yની ક્રમિત જોડ $(12, 45), (13, 35), (14, 30), (15, 15)$ અને $(16, 10)$ને અનુરૂપ બિંદુઓ આલેખપત્રમાં દર્શાવતા આપણને નીચે મુજબ વિકીર્ણ આકૃતિ મળે છે :



વિકીર્ણ આકૃતિમાં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, બધાં બિંદુઓ એક જ સુરેખા પર નથી. અહીં ભાવ અને માંગમાં થતા ફેરફારો એકબીજાથી વિરુદ્ધ દિશામાં થાય છે પણ આ ફેરફારો અચળ પ્રમાણમાં નથી, તેથી બધાં બિંદુઓ એક જ સુરેખા પર આવેલાં નથી. તેથી આપણે કહી શકીએ કે બે ચલ X અને Y વચ્ચે આંશિક ઋણ સહસંબંધ છે.

નોંધ : જ્યારે બિંદુઓ કોઈ સુરેખાની નજીક રહેલાં હોય તો તે વધુ ગાઢ સહસંબંધ સૂચવે છે અને જ્યારે બિંદુઓ કોઈ સુરેખાની આસપાસ દૂર સુધી વિસ્તરેલા હોય તો તે ઓછા ગાઢ સહસંબંધ સૂચવે છે.



જ્યારે વિકીર્ણ આકૃતિમાં બધાં બિંદુઓ યાદચ્છિક રીતે વિખરાયેલાં હોય અને કોઈ ચોક્કસ ઢબ (pattern)માં ન હોય ત્યારે તે **સુરેખ સહસંબંધનો અભાવ** સૂચવે છે. જો આ પ્રકારની વિકીર્ણ આકૃતિ મળે તો કહી શકાય કે બે ચલ સુરેખ સંબંધ ધરાવતા નથી અર્થાત્ સુરેખ સહસંબંધનો અભાવ છે.

વિકીર્ણ આકૃતિની રીતના ગુણ અને મર્યાદા

ગુણ :

(1) બે ચલ વચ્ચેના સહસંબંધનું સ્વરૂપ જાણવા માટેની આ એક સરળ રીત છે.

(2) આ રીતમાં ઓછા ગાણિતીય જ્ઞાનની જરૂર પડે છે, કેમકે ફક્ત આલેખમાં બિંદુના નિરૂપણ અંગેની સમજની જ જરૂર પડે છે.

(3) આ રીતથી બે ચલ વચ્ચેના સહસંબંધની ઘનિષ્ઠતાનો પણ થોડો ઘણો ખ્યાલ આવે છે.

(4) વિકીર્ણ આકૃતિમાં બિંદુઓ કેવી રીતે વિખરાયેલાં છે તે પરથી બે ચલ વચ્ચેનો સંબંધ સુરેખ છે કે નહિ તે ખ્યાલ આવે છે.

(5) માહિતીમાં કેટલાંક અંતિમ પ્રાપ્તાંકો (extreme observations) હોય તોપણ સહસંબંધનું સ્વરૂપ જાણવામાં કોઈ મુશ્કેલી પડતી નથી.

મર્યાદા :

આ રીતથી સહસંબંધનાં સ્વરૂપ વિશે માહિતી મળે છે અને સંબંધની ઘનિષ્ઠતા અંગે થોડી જાણકારી મળે છે પરંતુ ઘનિષ્ઠતા અંગેનું ચોક્કસ માપ મેળવી શકાતું નથી.

સ્વાધ્યાય 2.1

1. બોલપેન બનાવતી એક કંપની તેની સૌથી વધુ વેચાતી જેલપેનના ભાવ (₹ માં) અને તેના પુરવઠા (હજાર એકમો) વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા નીચે મુજબ માહિતી એકઠી કરે છે. તે પરથી વિકીર્ણ આકૃતિ દોરો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

ભાવ (₹)	14	16	12	11	15	13	17
માસિક પુરવઠો (હજાર એકમો)	32	50	20	12	45	30	53

2. એક કંપની કારખાનાઓ માટે આર.ઓ. પ્લાન્ટ બનાવે છે. તેના વેચાણ માટે કરેલા જાહેરાતનું ખર્ચ અને આર.ઓ. પ્લાન્ટના વેચાણથી થતા નફાની માહિતી નીચે મુજબ છે.

જાહેરાત ખર્ચ (દસ હજાર ₹)	5	6	7	8	9	10	11
નફો (લાખ ₹)	8	7	9	10	13	12	13

આ માહિતી પરથી વિકીર્ણ આકૃતિ દોરો તથા જાહેરાતના ખર્ચ અને આર.ઓ. પ્લાન્ટના વેચાણથી થતા નફા વચ્ચેના સંબંધનું સ્વરૂપ જણાવો.

3. શિયાળા દરમિયાન કોઈ એક દિવસે જુદાં-જુદાં છ શહેરોનાં દૈનિક ન્યૂનતમ તાપમાન અને ગરમ કપડાંના વેચાણ વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા માટે નીચેની માહિતી એકઠી કરવામાં આવી છે.

દૈનિક ન્યૂનતમ તાપમાન (સેલ્સિયસ)	12	20	8	5	15	24
ગરમ કપડાંનું વેચાણ (હજાર એકમો)	35	10	45	70	20	8

આ માહિતી પરથી વિકીર્ણ આકૃતિ દોરો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

*

2.5 કાર્લ પિયર્સનની ગુણનપ્રઘાતની રીત

આપણે અગાઉ જોયું કે બે ચલ વચ્ચેના સહસંબંધની ઘનિષ્ઠતા દર્શાવતા સંખ્યાત્મક માપને સહસંબંધાંક કહે છે. આ માપ આંકડાશાસ્ત્રી કાર્લ પિયર્સને સૌપ્રથમ સૂચવ્યું હતું. તેથી તેને 'પિયર્સન સહસંબંધાંક' કે 'ગુણનપ્રઘાત આંક' તરીકે પણ ઓળખાય છે. તેને સંકેતમાં r વડે દર્શાવાય છે.

ધારો કે બે ચલ X અને Y પર મેળવેલાં એક નિદર્શના n અવલોકનોની જોડ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots\ldots, (x_n, y_n)$ છે. ચલ X અને Y વચ્ચેના સહસંબંધાંકને $r(x, y)$ અથવા ફક્ત r વડે દર્શાવાય છે અને તે નીચે મુજબ મેળવી શકાય છે :

$$r = \frac{Cov\,(x, y)}{s_x \cdot s_y} = \frac{\text{સહવિચરણ } (x, y)}{(x \text{ નું પ્ર.વિ.})\,(y \text{ નું પ્ર.વિ.})}$$

જ્યાં,

$$\text{સહવિચરણ}(x, y) = Cov\,(x, y) = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})\,(y_i - \bar{y})}{n}$$

$$x \text{ નું પ્રમાણિત વિચલન} = s_x = \sqrt{\frac{\Sigma\,(x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

$$y \text{ નું પ્રમાણિત વિચલન} = s_y = \sqrt{\frac{\Sigma\,(y_i - \bar{y})^2}{n}}$$

$$x \text{ નો મધ્યક} = \bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}$$

$$y \text{ નો મધ્યક} = \bar{y} = \frac{\Sigma y_i}{n}$$

નોંધ : સરળતા ખાતર, હવે સુરેખ સહસંબંધ અને સુરેખ નિયત સંબંધના અભ્યાસમાં બધાં જ સૂત્રોમાં અનુગ (suffix) i અવગણવામાં આવેલ છે અને સૂત્રો તેમજ ગણતરીમાં X ને બદલે x અને Y ને બદલે y નો ઉપયોગ કર્યો છે.

$Cov(x, y)$, s_x અને s_y ની ઉપર્યુક્ત કિંમતોને r ના ઉપરના સૂત્રમાં મૂકતાં, r નું નીચેનું સ્વરૂપ મળે છે.

$$r = \frac{\Sigma(x - \bar{x})\,(y - \bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\Sigma(y - \bar{y})^2}}$$

સામાન્ય રીતે જ્યારે બંને મધ્યકો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ પૂર્ણાંક હોય ત્યારે r ના ઉપર્યુક્ત સૂત્રનો ઉપયોગ થાય છે.

નીચે $Cov(x, y)$, s_x અને s_y નાં વૈકલ્પિક સૂત્રો આપેલાં છે.

$$Cov(x, y) = \frac{\Sigma xy - n\bar{x}\,\bar{y}}{n}$$

$$s_x = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \bar{x}^2}$$

$$s_y = \sqrt{\frac{\Sigma y^2}{n} - \bar{y}^2}$$

સહસંબંધાંક r માટેનાં બીજાં કેટલાંક સૂત્રો નીચે મુજબ છે :

જ્યારે $\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})$, x નું પ્ર.વિ s_x, y નું પ્ર.વિ s_y અને n જેવા માપ જાણતા હોઈએ ત્યારે r નું નીચેનું સૂત્ર વાપરી શકાય છે :

$$r = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n \cdot s_x \cdot s_y}$$

જ્યારે Σxy, મધ્યકો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$, x અને y ના પ્ર.વિ અને n જેવા માપ જાણતાં હોઈએ ત્યારે r નું નીચેનું સૂત્ર વાપરી શકાય છે :

$$r = \frac{\Sigma xy - n\bar{x}\,\bar{y}}{n \cdot s_x \cdot s_y}$$

જ્યારે Σx, Σy, Σxy, Σx^2, Σy^2 અને n જેવા માપો જાણતા હોઈએ ત્યારે r નું નીચેનું સૂત્ર વાપરી શકાય છે.

$$r = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

સામાન્ય રીતે જ્યારે મધ્યક $\bar{x}$ અથવા $\bar{y}$ અથવા બંને અપૂર્ણાંક હોય ત્યારે ઉપરના સૂત્રનો ઉપયોગ થાય છે.

કાર્લપિયર્સનના સહસંબંધાંકની ધારણાઓ

કાર્લ પિયર્સનનો સહસંબંધાંક નીચેની ધારણાઓ પર આધારિત છે.

(1) બે ચલ વચ્ચે સુરેખ સંબંધ છે.

(2) બે ચલ વચ્ચે કાર્ય-કારણનો સંબંધ છે. જો આ પ્રકારનો સંબંધ ન હોય, તો સહસંબંધ અર્થહીન છે.

2.6 સહસંબંધાંકના ગુણધર્મ

(1) સહસંબંધાંકની કિંમત -1 થી 1 સુધીના અંતરાલમાં હોય છે.

એટલે કે, $-1 \le r \le 1$

(2) સહસંબંધાંક એકમરહિત માપ છે.

બે ચલોના એકમો ગમે તે હોય પણ r નો કોઈ એકમ હોતો નથી.

(3) X અને Y વચ્ચેનો સહસંબંધાંક તથા Y અને X વચ્ચેનો સહસંબંધાંક સરખા હોય છે.

એટલે કે, $r(x, y) = r(y, x)$

(4) ઊગમબિંદુ (origin) અને માપ (scale)ના પરિવર્તનથી સહસંબંધાંક બદલાતો નથી.

સમજૂતી : ધારો કે ચલ X અને Y વચ્ચે સહસંબંધાંક મેળવવો છે. તે માટે સૌપ્રથમ આપણે નવા રૂપાંતરિત ચલ u અને v વ્યાખ્યાયિત કરીશું.

$$u = \frac{x-A}{c_x} \quad \text{અને} \quad v = \frac{y-B}{c_y}$$

જ્યાં A, B, c_x અને c_y એ અનુકૂળ વાસ્તવિક અચળાંકો છે અને $c_x > 0$ તથા $c_y > 0$

હવે સહસંબંધાંકના આ ગુણધર્મ પરથી કહી શકાય કે u અને v વચ્ચેનો સહસંબંધાંક તથા X અને Y વચ્ચેનો સહસંબંધાંક સરખા થાય. એટલે કે, $r(u, v) = r(x, y) = r$

(5) $r(-x,\ y) = -r(x,\ y)$

$r(x,\ -y) = -r(x,\ y)$

એટલે કે, જો બે ચલમાંથી કોઈ પણ એક ચલની કિંમતોના ચિહ્નો બદલવામાં આવે તો સહસંબંધાંકનું ચિહ્ન પણ બદલાય છે.

$r(-x,\ -y) = r(x,\ y)$

એટલે કે, જો બંને ચલોની કિંમતોના ચિહ્નો બદલવામાં આવે, તો સહસંબંધાંકનું ચિહ્ન બદલાતું નથી.

સમજૂતી માટે વધારાની માહિતી

જો ચલની કિંમતમાં કોઈ અચળ સંખ્યા, ઉમેરવામાં કે બાદ કરવામાં આવે તો તેને ઊગમબિંદુ પરિવર્તન કહે છે, કારણ કે આમ કરવાથી તેને અનુરૂપ આલેખમાં ઊગમબિંદુનું સ્થાન બદલાય છે. અહીં બિંદુઓ $(x,\ y)$ના આલેખમાં સ્થાન બદલાય છે પરંતુ તેઓના એકબીજાને સાપેક્ષ સ્થાનો બદલાતાં નથી તેથી ઊગમબિંદુ પરિવર્તનથી સહસંબંધાંક rની કિંમત બદલાતી નથી.

તે જ રીતે ચલની કિંમત સાથે કોઈ પણ ધન અચળ સંખ્યા ગુણવા કે ભાગવામાં આવે તો તેને માપ (સ્કેલ) પરિવર્તન કહે છે, કારણ કે, આમ કરવાથી તેને અનુરૂપ આલેખમાં અક્ષ પરના એકમદીઠ માપ બદલાય છે. આમ કરવાથી પણ બિંદુઓ $(x,\ y)$ના એકબીજાને સાપેક્ષ સ્થાનો બદલાતાં નથી તેથી માપ (સ્કેલ) પરિવર્તનથી સહસંબંધાંક rની કિંમત બદલાતી નથી.

2.7 સહસંબંધાંકની કિંમતનું અર્થઘટન

આપણે જાણીએ છીએ કે સહસંબંધાંક બે ચલ વચ્ચેના સહસંબંધનો પ્રકાર અને ઘનિષ્ઠતા દર્શાવે છે. સહસંબંધાંકની કિંમત મેળવ્યા બાદ તેનું અર્થઘટન કરવું જરૂરી છે. સહસંબંધાંકના ચિહ્ન પરથી સહસંબંધનો પ્રકાર અને તેની કિંમત પરથી સંબંધની ઘનિષ્ઠતા જાણી શકાય છે.

સહસંબંધાંકની કિંમતના અર્થઘટન વખતે આપણે એ ધ્યાન રાખવાનું છે કે, સહસંબંધાંકની કિંમત સહસંબંધનો પ્રકાર અને ઘનિષ્ઠતા દર્શાવે છે પણ તે કાર્ય-કારણના સંબંધનો નિર્દેશ કરતી નથી. ખરેખર તો આપણે બે ચલ વચ્ચે કાર્ય-કારણનો કે અન્ય પ્રકારનો સંબંધ છે એ ધારી લીધું છે. r ની કિંમત બે ચલ વચ્ચે કાર્ય-કારણનો સંબંધ છે તેમ દર્શાવતી નથી. આ બાબત ધ્યાનમાં રાખી આપણે r ની કિંમતનું અર્થઘટન કેવી રીતે થઈ શકે તે જોઈશું.

$r = 1$નું અર્થઘટન :

જો $r = 1$ હોય તો આપણે કહી શકીએ કે, બે ચલ વચ્ચે સંપૂર્ણ ધન સહસંબંધ છે. જ્યારે એક ચલની કિંમતમાં થતા વધારા (કે ઘટાડા)ને લીધે બીજા ચલની કિંમતમાં પણ અચળ પ્રમાણમાં વધારો (કે ઘટાડો) થતો હોય ત્યારે $r = 1$ થાય છે. આવા ચલો માટે વિકીર્ણ આકૃતિમાં આપણને બધાં જ બિંદુઓ વધતી દિશામાં એક જ સુરેખા પર મળે છે. (જુઓ ઉદાહરણ 1)

$r = -1$નું અર્થઘટન :

જો $r = -1$ હોય તો આપણે કહી શકીએ કે, બે ચલ વચ્ચે સંપૂર્ણ ઋણ સહસંબંધ છે. જ્યારે એક ચલની કિંમતમાં થતા વધારા (કે ઘટાડા)ને લીધે બીજા ચલની કિંમતમાં પણ અચળ પ્રમાણમાં ઘટાડો (કે વધારો) થતો હોય ત્યારે $r = -1$ થાય છે. આવા ચલો માટે વિકીર્ણ આકૃતિમાં બધાં જ બિંદુઓ ઘટતી દિશામાં એક જ સુરેખા પર મળે છે. (જુઓ ઉદાહરણ 2)

$r = 0$નું અર્થઘટન :

જો $r = 0$ થાય તો આપણે કહી શકીએ કે, બે ચલો વચ્ચે સુરેખ સહસંબંધ નથી. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો $r = 0$ એ સહસંબંધનો અભાવ દર્શાવે છે અને તેથી બે ચલો વચ્ચે સુરેખ સંબંધ નથી તેમ કહેવાય. આવા ચલો માટે વિકીર્ણ આકૃતિમાં બધાં બિંદુઓ યાદચ્છિક રીતે વિખરાયેલાં (કોઈ સુરેખા પર કે તેની નજીક નહિ) જોવા મળે છે.

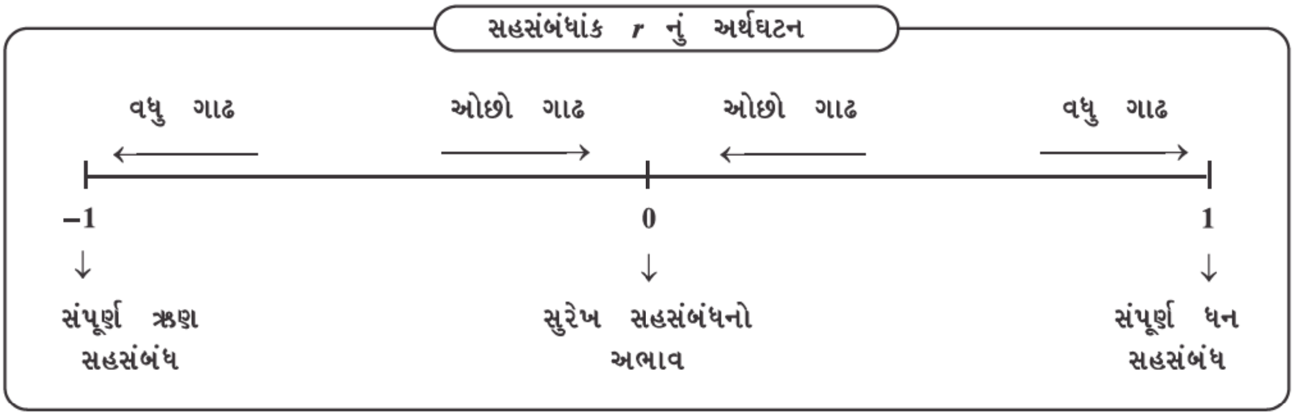
અત્રે નોંધવું જરૂરી છે કે r ની કિંમત ફક્ત સુરેખ સહસંબંધની ઘનિષ્ઠતા દર્શાવે છે. તેથી જ્યારે $r = 0$ હોય, તો આપણે ફક્ત એ કહી શકીએ કે બે ચલ વચ્ચે સુરેખ સહસંબંધનો અભાવ છે. પરંતુ સુરેખ સિવાયનો બીજો કોઈ સહસંબંધ

હોઈ શકે. વિકીર્ણ આકૃતિમાં બધાં બિંદુઓ કેવી રીતે વિખરાયેલાં છે તે પરથી સુરેખ સિવાયના સહસંબંધના પ્રકાર વિશે થોડો ખ્યાલ આવે છે.

આંશિક સહસંબંધનું અર્થઘટન

($0 < r < 1$ અને $-1 < r < 0$ નું અર્થઘટન) :

જો r ની કિંમત 0 થી 1 ની વચ્ચે અથવા -1 થી 0 ની વચ્ચે હોય એટલે કે જો $|r| < 1$ હોય તો આપણે કહી શકીએ કે બે ચલ વચ્ચે આંશિક સહસંબંધ છે. જ્યારે $|r|$ ની કિંમત 1ની નજીક હોય તો આપણે કહી શકીએ કે, બે ચલ વચ્ચેનો સંબંધ સંપૂર્ણ સુરેખ સંબંધની નજીકનો છે અને સંબંધ વધુ ગાઢ પ્રમાણમાં છે. આવા સંબંધ વખતે આપણે એક ચલની કિંમતમાં થતા ફેરફારની અસર બીજા ચલની કિંમતમાં કેવી થશે તેનો વિશ્વસનીય અંદાજ મેળવી શકીએ છીએ. જ્યારે $|r|$ની કિંમત 0ની નજીક હોય તો આપણે કહી શકીએ કે સુરેખ સહસંબંધની ઘનિષ્ઠતા ખૂબ જ ઓછી છે અને બે ચલ વચ્ચે સુરેખ સંબંધનો લગભગ અભાવ છે. આ પરિસ્થિતિમાં આપણે એક ચલની કિંમતમાં થતા ફેરફારની અસર બીજા ચલની કિંમત પર કેવી થશે તેનો વિશ્વસનીય અંદાજ મેળવી શકીએ નહિ.



નોંધ :

(1) સામાન્ય રીતે આપણે r ની ગણતરીની શરૂઆત મધ્યક $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ શોધવાથી કરીએ છીએ, પરંતુ તે જરૂરી નથી. આપણે અચલ A, B, c_x, c_y $(c_x > 0,\ c_y > 0)$ ની અનુકૂળ કિંમતો લઈ r ની ગણતરી શરૂ કરી શકીએ. આપણે જાણીએ છીએ કે આ અચલાંકોની કોઈ પણ કિંમત લઈ શકાય છે, તેનાથી r ની કિંમત બદલાતી નથી.

(2) બે ચલની આપેલી માહિતી માટે કાર્લ પિયર્સનના કોઈ પણ સૂત્રથી સહસંબંધાંક r ની કિંમત સરખી જ મળે છે.

ઉદાહરણ **5 : એક સામાન્ય જ્ઞાન માટેની સ્પર્ધાત્મક પરીક્ષામાં પરીક્ષા અગાઉ છેલ્લા દિવસોની તૈયારીની પરીક્ષાના પરિણામ પર અસર જાણવા લગભગ સમાન બૌદ્ધિક ક્ષમતા ધરાવતા સાત ઉમેદવારોનો એક નિદર્શ લઈ નીચે મુજબ માહિતી એકઠી કરવામાં આવે છે :**

છેલ્લા ત્રણ દિવસમાં વાચન (કલાક)	25	38	30	28	34	40	36
પરીક્ષામાં મેળવેલા ગુણ	65	75	68	70	72	79	75

આ માહિતી પરથી છેલ્લા ત્રણ દિવસમાં વાચનના કલાકો અને પરીક્ષામાં મેળવેલા ગુણ વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

અહીં $n = 7$, વાચન(x) માટે તેનો મધ્યક $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{231}{7} = 33$, ગુણ$(y)$ માટે તેનો મધ્યક

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{504}{7} = 72$$

અહીં, બંને મધ્યકો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ પૂર્ણાંક હોવાથી r આપણે નીચે મુજબ મેળવી શકીએ.

	વાચન (કલાક) x	ગુણ y	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$
	25	65	–8	–7	56	64	49
	38	75	5	3	15	25	9
	30	68	–3	–4	12	9	16
	28	70	–5	–2	10	25	4
	34	72	1	0	0	1	0
	40	79	7	7	49	49	49
	36	75	3	3	9	9	9
કુલ	**231**	**504**	**0**	**0**	**151**	**182**	**136**

$$r = \frac{\Sigma(x-\bar{x})\,(y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2}\cdot\sqrt{\Sigma(y-\bar{y})^2}}$$

$$= \frac{151}{\sqrt{182}\cdot\sqrt{136}}$$

$$= \frac{151}{\sqrt{182\times 136}}$$

$$= \frac{151}{\sqrt{24752}}$$

$$= \frac{151}{157.3277}$$

$$= 0.9598$$

$$\therefore\ r \simeq 0.96$$

અહીં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, r ની કિંમત 1 ની ખૂબ નજીક છે. તેથી વાચનના કલાકો અને ગુણ વચ્ચે વધુ ગાઢ ધન સહસંબંધ છે. તે પરથી કહી શકાય કે સામાન્ય રીતે છેલ્લા દિવસોમાં વાચનના કલાકો વધુ હોય તો પરીક્ષામાં ગુણ પણ વધુ પ્રાપ્ત થાય છે.

ઉદાહરણ 6 : એક શાળાના વિદ્યાર્થીઓની ગુજરાતી વિષયમાં આવડત અને આંકડાશાસ્ત્ર વિષયમાં આવડત વચ્ચેના સંબંધનો અભ્યાસ કરવા છ વિદ્યાર્થીઓનો નિદર્શ લઈ નીચેની માહિતી મેળવેલ છે.

ગુજરાતીમાં ગુણ x	65	72	66	70	72	69
આંકડાશાસ્ત્રમાં ગુણ y	90	95	88	92	85	90

આ માહિતી પરથી વિદ્યાર્થીઓના બંને વિષયના ગુણ વચ્ચે સહસંબંધાંક ગણો.

અહીં, $n=6$, $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{414}{6} = 69$, $\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{540}{6} = 90$

અહીં બંને મધ્યકો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ પૂર્ણાંક હોવાથી આપણે r નીચે મુજબ મેળવી શકીએ.

	ગુજરાતીમાં ગુણ x	આંકડાશાસ્ત્રમાં ગુણ y	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$
	65	90	–4	0	0	16	0
	72	95	3	5	15	9	25
	66	88	–3	–2	6	9	4
	70	92	1	2	2	1	4
	72	85	3	–5	–15	9	25
	69	90	0	0	0	0	0
કુલ	**414**	**540**	**0**	**0**	**8**	**44**	**58**

$$r = \frac{\Sigma(x-\bar{x})\ (y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2}\cdot\sqrt{\Sigma(y-\bar{y})^2}}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{44}\cdot\sqrt{58}}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{2552}}$$

$$= \frac{8}{50.5173}$$

$$= 0.1584$$

$$\therefore\ r \simeq 0.16$$

અહીં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, r ની કિંમત 0ની નજીક છે. તેથી વિદ્યાર્થીઓના બંને વિષયોના ગુણ વચ્ચે ઓછો ગાઢ ધન સહસંબંધ છે તેમ કહેવાય.

ઉદાહરણ 7 : મોબાઇલ ફોનનું ઉત્પાદન કરતી એક કંપનીએ છેલ્લા છ માસમાં વેચેલા મોબાઇલ (હજાર એકમમાં) અને તેનાથી થયેલ નફા (લાખ ₹માં)ની વીગત નીચે આપેલી છે.

વેચાયેલા મોબાઇલ ફોનની સંખ્યા (હજાર એકમમાં) x	3	8	12	5	7	5
નફો (લાખ ₹) y	6	10	15	10	9	8

આ પરથી વેચાયેલાં મોબાઇલ ફોનની સંખ્યા અને નફો વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

અહીં, $n=6,\ \bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{40}{6} = 6.67,\ \bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{58}{6} = 9.67$

અહીં, $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ અપૂર્ણાંક છે અને X અને Y ની કિંમતો બહુ મોટી નથી તેથી આપણે r નીચે મુજબ મેળવી શકીએ.

	વેચાયેલાં મોબાઇલ ફોનની સંખ્યા (હજાર એકમો) x	નફો (લાખ ₹) y	xy	x^2	y^2
	3	6	18	9	36
	8	10	80	64	100
	12	15	180	144	225
	5	10	50	25	100
	7	9	63	49	81
	5	8	40	25	64
કુલ	**40**	**58**	**431**	**316**	**606**

$$r = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

$$= \frac{6(431) - (40)(58)}{\sqrt{6(316) - (40)^2} \cdot \sqrt{6(606) - (58)^2}}$$

$$= \frac{2586 - 2320}{\sqrt{1896 - 1600} \cdot \sqrt{3636 - 3364}}$$

$$= \frac{266}{\sqrt{296} \cdot \sqrt{272}}$$

$$= \frac{266}{\sqrt{80512}}$$

$$= \frac{266}{283.7464}$$

$$= 0.9375$$

$$\therefore \; r \simeq 0.94$$

અહીં, આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, r ની કિંમત 1 ની નજીક છે તેથી મોબાઇલ ફોનના વેચાણ અને તેનાથી થતા નફા વચ્ચે વધુ ગાઢ ધન સહસંબંધ છે તેમ કહેવાય.

ઉદાહરણ 8 : ઉત્તર ભારતના કોઈ એક શહેરમાં અઠવાડિક ન્યૂનતમ તાપમાન (સેલ્સિયસમાં) અને તે અઠવાડિયા દરમિયાન હીટરના થયેલા વેચાણ (સો એકમોમાં)ની નીચે પાંચ અઠવાડિયાની આપેલી માહિતી પરથી ન્યૂનતમ તાપમાન અને હીટરના વેચાણ વચ્ચે સહસંબંધાંકની ગણતરી કરો.

ન્યૂનતમ તાપમાન (સેલ્સિયસમાં) x	3	4	6	7	9
હીટરની માંગ (સો એકમો) y	16	15	14	11	9

અહીં, $n = 5$, $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{29}{5} = 5.8$, $\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{65}{5} = 13$

અહીં, એક મધ્યક અપૂર્ણાંક છે અને x અને y ની કિંમતો બહુ મોટી ન હોવાથી, આપણે r નીચે મુજબ મેળવીશું.

	ન્યૂનતમ તાપમાન (સેલ્સિયસ) x	હીટરની માંગ (સો એકમો) y	xy	x^2	y^2
	3	16	48	9	256
	4	15	60	16	225
	6	14	84	36	196
	7	11	77	49	121
	9	9	81	81	81
કુલ	**29**	**65**	**350**	**191**	**879**

$$r = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

$$= \frac{5(350) - (29)(65)}{\sqrt{5(191) - (29)^2} \cdot \sqrt{5(879) - (65)^2}}$$

$$= \frac{1750 - 1885}{\sqrt{955 - 841} \cdot \sqrt{4395 - 4225}}$$

$$= \frac{-135}{\sqrt{114} \cdot \sqrt{170}}$$

$$= \frac{-135}{\sqrt{19380}}$$

$$= \frac{-135}{139.2121}$$

$$= -0.9697$$

$$\therefore \; r \simeq -0.97$$

અહીં, આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, r ની કિંમત -1ની ખૂબ જ નજીક છે. તેથી ન્યૂનતમ તાપમાન અને હીટરના વેચાણ વચ્ચે વધુ ગાઢ ઋણ સહસંબંધ છે તેમ કહેવાય.

આપણે ઉદાહરણ (7) અને (8)માં જોયું કે બંને મધ્યકો પૂર્ણાંક ન હતા અને ચલ x અને y ની કિંમતો બહુ મોટી ન હતી. તેથી આપણે નીચે જણાવેલ સૂત્ર પરથી r ની ગણતરી કરી.

$$r = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

પરંતુ જ્યારે બંને ચલની કિંમતો મોટી અને/અથવા અપૂર્ણાંક હોય ત્યારે xy, x^2, y^2 ની ગણતરી વધુ મુશ્કેલ બને છે અને તેથી r ની ગણતરી કંટાળાજનક બને છે. તેથી સહસંબંધાંક rની ગણતરી સહેલી બને તે માટે એક ટૂંકી રીતનો ઉપયોગ થાય છે. આ ટૂંકી રીત r ના ગુણધર્મ (નં. 4) પર આધારિત છે.

આ ગુણધર્મ અનુસાર r ના સૂત્રમાં x ને બદલે u અને y ને બદલે v મૂકવાથી સહસંબંધાંક r શોધવા માટેનું ટૂંકી રીતનું સૂત્ર નીચે મુજબ મળે.

$$r = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{\sqrt{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}}$$

હવે આપણે ટૂંકી રીત દ્વારા r શોધવા માટેનાં કેટલાંક ઉદાહરણો લઈએ.

ઉદાહરણ 9 : એક શાળાના વિદ્યાર્થીઓના ઊંચાઈ (સેમીમાં) અને વજન (કિગ્રામાં) વચ્ચેના સંબંધનો અભ્યાસ કરવા માટે 6 વિદ્યાર્થીઓનો નિદર્શ લઈ નીચેની માહિતી મેળવવામાં આવે છે. તે પરથી વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈ અને વજન વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

ઊંચાઈ (સેમી) x	155	165	158	162	153	160
વજન (કિગ્રા) y	53	63	56	60	52	60

અહીં $n=6$, $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{953}{6} = 158.83$, $\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{344}{6} = 57.33$

અહીં, બંને મધ્યકો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ અપૂર્ણાંક છે અને ચલ X અને Y ની કિંમતો મોટી છે, તેથી આપણે r ની ગણતરી કરવા માટે ટૂંકી રીતને અગ્રિમતા આપીશું.

આપણે ઊગમબિંદુ પરિવર્તન માટે $A = 158$ અને $B = 57$ લઈશું અને પ્રમાણમાપ બદલવા કોઈ અનુકૂળ કિંમત નથી તેથી $c_x = 1$, $c_y = 1$ લઈશું.

આપણે નવા ચલ u અને v ને નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરીશું.

$$u = \frac{x-A}{c_x} = \frac{x-158}{1} = x - 158$$

$$v = \frac{y-B}{c_y} = \frac{y-57}{1} = y - 57$$

નોંધ : અહીં ફક્ત ઊગમબિંદુ પરિવર્તન જ કરેલ છે પરંતુ માપનું પરિવર્તન કરેલ નથી તેથી આપણે નવા ચલ u અને v નીચે મુજબ પણ વ્યાખ્યાયિત કરી શકીએ.

$u = x - A = x - 158$; $v = y - B = y - 57$

	ઊંચાઈ (સેમી) x	વજન (કિગ્રા) y	$u = x - 158$	$v = y - 57$	uv	u^2	v^2
	155	53	–3	–4	12	9	16
	165	63	7	6	42	49	36
	158	56	0	–1	0	0	1
	162	60	4	3	12	16	9
	153	52	–5	–5	25	25	25
	160	60	2	3	6	4	9
કુલ	**953**	**344**	**5**	**2**	**97**	**103**	**96**

$$r = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{\sqrt{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}}$$

$$= \frac{6(97) - (5)(2)}{\sqrt{6(103) - (5)^2} \cdot \sqrt{6(96) - (2)^2}}$$

$$= \frac{582 - 10}{\sqrt{618 - 25} \cdot \sqrt{576 - 4}}$$

$$= \frac{572}{\sqrt{593} \cdot \sqrt{572}}$$

$$= \frac{572}{\sqrt{339196}}$$

$$= \frac{572}{582.4054}$$

$$= 0.9821$$

$$\therefore \; r \simeq 0.98$$

અહીં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, r ની કિંમત 1ની ખૂબ નજીક છે. તેથી વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈ અને વજન વચ્ચે વધુ ગાઢ ધન સહસંબંધ છે તેમ કહેવાય.

ઉદાહરણ 10 : એક વિસ્તારની સમાન પ્રકારની વસ્તુનું ઉત્પાદન કરતી છ જુદી જુદી ફેકટરીના કામદારોની સરેરાશ માસિક આવક (₹ માં) અને ફેકટરીમાં ઓવરટાઈમને લીધે થતી આવક (₹ માં) વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા માટે નીચે મુજબ માહિતી મેળવવામાં આવે છે. તે પરથી સરેરાશ માસિક આવક અને ઓવરટાઈમથી થતી આવક વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

વર્ષ	2011	2012	2013	2014	2015	2016
સરેરાશ માસિક આવક (₹) x	14,900	15,100	15,000	15,500	15,700	15,800
ઓવરટાઈમથી થતી આવક (₹) y	100	105	115	160	220	255

અહીં, $n = 6$, $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{92000}{6} = 15333.33$, $\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{955}{6} = 159.17$

આપણે એ પણ જોઈ શકીએ છીએ કે, X ની કિંમતો 100ના ગુણકમાં છે અને Y ની કિંમતો 5ના ગુણકમાં છે. તેથી આપણે $A = 15{,}300$, $B = 160$, $c_x = 100$ અને $c_y = 5$ લઈશું.

આપણે હવે નવા ચલ u અને v નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરીએ.

$$u = \frac{x-A}{c_x} = \frac{x-15300}{100} \text{ અને } v = \frac{y-B}{c_y} = \frac{y-160}{5}$$

નોંધ : x કિંમતો 100ના ગુણકમાં હોવાથી આપણે A (= 15,300) પણ 100 ના ગુણકમાં પસંદ કરીએ છીએ. તે જ રીતે y કિંમતો 5ના ગુણકમાં હોવાથી B (= 160) પણ 5ના ગુણકમાં પસંદ કરીએ છીએ.

	સરેરાશ માસિક આવક (₹) x	ઓવરટાઈમથી થતી આવક (₹) y	$u = \frac{x-15300}{100}$	$v = \frac{y-160}{5}$	uv	u^2	v^2
	14,900	100	–4	–12	48	16	144
	15,100	105	–2	–11	22	4	121
	15,000	115	–3	–9	27	9	81
	15,500	160	2	0	0	4	0
	15,700	220	4	12	48	16	144
	15,800	255	5	19	95	25	361
કુલ	**92,000**	**955**	**2**	**–1**	**240**	**74**	**851**

$$r = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{\sqrt{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}}$$

$$= \frac{6(240) - (2)(-1)}{\sqrt{6(74) - (2)^2} \cdot \sqrt{6(851) - (-1)^2}}$$

$$= \frac{1440 + 2}{\sqrt{444 - 4} \cdot \sqrt{5106 - 1}}$$

$$= \frac{1442}{\sqrt{440} \cdot \sqrt{5105}}$$

$$= \frac{1442}{\sqrt{2246200}}$$

$$= \frac{1442}{1498.7328}$$

$$= 0.9621$$

$$\therefore \ r \simeq 0.96$$

અહીં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, r ની કિંમત 1ની ખૂબ નજીક છે. તેથી સરેરાશ માસિક આવક અને ઓવરટાઈમથી થતી આવક વચ્ચે વધુ ગાઢ ધન સહસંબંધ છે તેમ કહેવાય.

ઉદાહરણ 11 : ગુજરાત રાજ્યના છ શહેરો માટે વસ્તીની ગીચતા (ચોરસ કિમી દીઠ) અને મૃત્યુદર (દર હજારે)ના આશરે આંકડા નીચે મુજબ છે.

શહેર	A	B	C	D	E	F
ગીચતા (ચોરસ કિમી દીઠ) x	200	500	400	700	600	300
મૃત્યુદર (દર હજારે) y	10	12	10	15	9	12

આ માહિતી પરથી વસ્તીની ગીચતા અને મૃત્યુદર વચ્ચે સહસંબંધાંક મેળવો.

અહીં, $n = 6$, $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{2700}{6} = 450$, $\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{68}{6} = 11.33$

આપણે એ પણ જોઈ શકીએ છીએ કે, X ની કિંમતો 100ના ગુણકમાં છે અને Y ની કિંમતો નાની છે. તેથી આપણે $A = 500$, $B = 12$, $c_x = 100$ અને $c_y = 1$ લઈશું.

અહીં હવે નવા ચલ u અને v નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરીએ :

$$u = \frac{x-A}{c_x} = \frac{x-500}{100} \text{ અને } v = \frac{y-B}{c_y} = \frac{y-12}{1} = y - 12$$

	ગીચતા (ચો કિમી દીઠ) x	મૃત્યુદર (દર હજારે) y	$u = \frac{x-500}{100}$	$v = y-12$	uv	u^2	v^2
	200	10	–3	–2	6	9	4
	500	12	0	0	0	0	0
	400	10	–1	–2	2	1	4
	700	15	2	3	6	4	9
	600	9	1	–3	–3	1	9
	300	12	–2	0	0	4	0
કુલ	**2700**	**68**	**–3**	**–4**	**11**	**19**	**26**

$$r = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{\sqrt{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}}$$

$$= \frac{6(11) - (-3)(-4)}{\sqrt{6(19) - (-3)^2} \cdot \sqrt{6(26) - (-4)^2}}$$

$$= \frac{66 - 12}{\sqrt{114 - 9} \cdot \sqrt{156 - 16}}$$

$$= \frac{54}{\sqrt{105} \cdot \sqrt{140}}$$

$$= \frac{54}{\sqrt{14700}}$$

$$= \frac{54}{121.2436}$$

$$= 0.4454$$

$$\therefore \ r \simeq 0.45$$

અહીં, આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, r ની કિંમત 1ની અતિનજીક નથી. તેથી વસ્તીની ગીચતા અને મૃત્યુદર વચ્ચે સામાન્યથી ઓછો ગાઢ ધન સહસંબંધ છે તેમ કહેવાય.

ઉદાહરણ 12 : ટ્રકના ટાયર બનાવતી કંપનીઓના વેચાણ (કરોડ ₹માં) અને નફા (હજાર ₹માં) વચ્ચેના સંબંધના અભ્યાસ માટે મેળવેલી છેલ્લા વર્ષની માહિતી નીચે મુજબ મેળવેલી છે.

વેચાણ (કરોડ ₹) x	1.6	2.2	1.9	2.0	2.3	1.7	2.4	1.8	2.1
નફો (હજાર ₹) y	4200	5500	6000	6200	6100	4900	5900	5000	6700

આ પરથી વેચાણ અને નફા વચ્ચે સહસંબંધાંક ગણો.

અહીં, $n=9$, $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{18}{9} = 2$, $\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{50500}{9} = 5611.11$

ચલ X ની કિંમતો અપૂર્ણાંક છે અને તેમાં દશાંશ ચિહ્ન પછી એક જ અંક છે તેથી X ની કિંમતોને આપણે 10 વડે ગુણીશું (એટલે કે, $\frac{1}{10} = 0.1$ વડે ભાગીશું) કે જેથી તે કિંમતો પૂર્ણાંક થાય અને Y ની કિંમતો 100ના ગુણકમાં હોવાથી આપણે $A = 2$, $B = 5600$, $c_x = 0.1$, $c_y = 100$ લઈશું.

હવે નવા ચલ u અને v નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરીએ.

$$u = \frac{x-A}{c_x} = 10\ (x - 2.0) = \frac{x-2.0}{0.1} \text{ અને } v = \frac{y-B}{c_y} = \frac{y-5600}{100}$$

	વેચાણ (કરોડ ₹) x	નફો (હજાર ₹) y	$u = 10(x-2.0)$	$v = \frac{y-5600}{100}$	uv	u^2	v^2
	1.6	4200	–4	–14	56	16	196
	2.2	5500	2	–1	–2	4	1
	1.9	6000	–1	4	–4	1	16
	2.0	6200	0	6	0	0	36
	2.3	6100	3	5	15	9	25
	1.7	4900	–3	–7	21	9	49
	2.4	5900	4	3	12	16	9
	1.8	5000	–2	–6	12	4	36
	2.1	6700	1	11	11	1	121
કુલ	**18**	**50,500**	**0**	**1**	**121**	**60**	**489**

$$r = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{\sqrt{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}}$$

$$= \frac{9(121) - (0)(1)}{\sqrt{9(60) - (0)^2} \cdot \sqrt{9(489) - (1)^2}}$$

$$= \frac{1089 - 0}{\sqrt{540 - 0} \cdot \sqrt{4401 - 1}}$$

$$= \frac{1089}{\sqrt{540} \cdot \sqrt{4400}}$$

$$= \frac{1089}{\sqrt{2376000}}$$

$$= \frac{1089}{1541.4279}$$

$$= 0.7065$$

$$\therefore \quad r \simeq 0.71$$

અહીં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, r ની કિંમત 1થી સાધારણ દૂર છે. તેથી આપણે કહી શકીએ કે વેચાણ અને નફા વચ્ચે સામાન્ય કરતાં વધુ ગાઢ ધન સહસંબંધ છે.

પ્રવૃત્તિ

ઉપર ઉદાહરણ - 12માં આપેલી વીગત પરથી $A = 1.8$, $B = 6000$, $c_x = 0.05$ અને $c_y = 100$ લઈ ફરીથી સહસંબંધાંક r ની ગણતરી કરો અને તમે જોશો કે r ની કિંમત સરખી (= 0.71) જ મળશે.

ઉદાહરણ 13 : કોઈ એક શાળાની પરીક્ષામાં વિદ્યાર્થીઓએ આંકડાશાસ્ત્રમાં મેળવેલા ગુણ (*X*) અને અર્થશાસ્ત્રમાં મેળવેલાં ગુણ (*Y*) વચ્ચેના સંબંધનો અભ્યાસ કરવા માટે દસ વિદ્યાર્થીઓનો નિદર્શ લેતાં નીચે મુજબ વીગતો મળે છે.

$$\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = 120,\ \Sigma(x-\bar{x})^2 = 80,\ \Sigma(y-\bar{y})^2 = 500$$

આ પરથી r ની કિંમત શોધો.

અહીં, $n = 10$ અને જે વીગતો આપેલી છે તે પ્રમાણે r નું નીચેનું સૂત્ર યોગ્ય છે.

$$r = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2} \cdot \sqrt{\Sigma(y-\bar{y})^2}}$$

$$= \frac{120}{\sqrt{80} \cdot \sqrt{500}}$$

$$= \frac{120}{\sqrt{40000}}$$

$$= \frac{120}{200}$$

$$\therefore \quad r = 0.6$$

ઉદાહરણ 14 : નીચેની વીગતો પરથી સહસંબંધાંક r શોધો.

(1) $n = 20,\ Cov(x, y) = -50,\ s_x = 15,\ s_y = 8$

(2) $n = 10,\ \Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = 60$, **$X$નું વિચરણ = 25, Yનું વિચરણ = 36**

(3)

વીગત	x	y
અવલોકનોની સંખ્યા	25	
મધ્યક	40	50
મધ્યકમાંથી લીધેલા વિચલનોના વર્ગોનો સરવાળો	120	160
મધ્યકમાંથી લીધેલા વિચલનોના ગુણાકારોનો સરવાળો	100	

(4) $n = 10,\ \Sigma xy = 1500$, **$X$ નો મધ્યક = 12, Yનો મધ્યક = 15, Xનું પ્ર.વિ. = 9, Yનું પ્ર.વિ. = 5**

(1) અહીં $n = 20,\ Cov(x, y) = -50,\ s_x = 15,\ s_y = 8$

આ બધી કિંમતોને નીચેના સૂત્રમાં મૂકતાં,

$$r = \frac{Cov(x, y)}{s_x \cdot s_y}$$

$$= \frac{-50}{(15)\ (8)}$$

$$= \frac{-50}{120}$$

$$= -0.4167$$

$$\therefore\ r \simeq -0.42$$

(2) અહીં, $n = 10,\ \Sigma(x-\overline{x})(y-\overline{y}) = 60$

Xનું વિચરણ $= s_x^2 = 25 \quad \therefore\ s_x = 5$

Yનું વિચરણ $= s_y^2 = 36 \quad \therefore\ s_y = 6$

જરૂરી કિંમતોને નીચેના અનુરૂપ સૂત્રમાં મૂકતાં,

$$r = \frac{\Sigma(x-\overline{x})\ (y-\overline{y})}{n\, s_x s_y}$$

$$= \frac{60}{10(5)\ (6)}$$

$$= \frac{60}{300}$$

$$\therefore\ r = 0.2$$

(3) અહીં, $n = 25,\ \overline{x} = 40,\ \overline{y} = 50,\ \ \Sigma(x-\overline{x})^2 = 120,\ \Sigma(y-\overline{y})^2 = 160$ અને $\Sigma(x-\overline{x})(y-\overline{y}) = 100$

આ બધી કિંમતોને નીચેના અનુકૂળ સૂત્રમાં મૂકતાં,

$$r = \frac{\Sigma(x-\overline{x})\ (y-\overline{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\overline{x})^2} \cdot \sqrt{\Sigma(y-\overline{y})^2}}$$

$$= \frac{100}{\sqrt{120} \cdot \sqrt{160}}$$

$$= \frac{100}{\sqrt{19200}}$$

$$= \frac{100}{138.5641}$$

$$= 0.7217$$

$$\therefore\ r \simeq 0.72$$

(4) અહીં $n = 10,\ \Sigma xy = 1500,\ \bar{x} = 12,\ \bar{y} = 15,\ s_x = 9$ અને $s_y = 5$

આ બધી કિંમતોને નીચેના અનુકૂળ સૂત્રમાં મૂકતાં,

$$r = \frac{\Sigma xy - n\bar{x}\,\bar{y}}{n \cdot s_x \cdot s_y}$$

$$= \frac{1500 - 10\,(12)\,(15)}{10\,(9)\,(5)}$$

$$= \frac{1500 - 1800}{450}$$

$$= \frac{-300}{450}$$

$$= -0.6667$$

$$\therefore\ r \simeq -0.67$$

ઉદાહરણ 15 : એક કંપનીનાં છ વર્ષનાં વેચાણ અને નફા વચ્ચેના સંબંધનો અભ્યાસ કરવા માટે નીચે મુજબ માહિતી એકઠી કરવામાં આવે છે.

X = વાર્ષિક વેચાણ (લાખ ₹ માં)

Y = વાર્ષિક નફો (દસ હજાર ₹ માં)

$\boldsymbol{n = 6,\ \Sigma x = 58,\ \Sigma y = 40,\ \Sigma xy = 431,\ \Sigma x^2 = 606,\ \Sigma y^2 = 316}$

આ પરથી X અને Y વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

આપેલી કિંમતોને નીચેના સૂત્રમાં મૂકતાં,

$$r = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)\,(\Sigma y)}{\sqrt{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

$$= \frac{6(431) - (58)\,(40)}{\sqrt{6(606) - (58)^2} \cdot \sqrt{6(316) - (40)^2}}$$

$$= \frac{2586 - 2320}{\sqrt{3636 - 3364} \cdot \sqrt{1896 - 1600}}$$

$$= \frac{266}{\sqrt{272} \cdot \sqrt{296}}$$

$$= \frac{266}{\sqrt{80512}}$$

$$= \frac{266}{283.7464}$$

$$= 0.9375$$

$$\therefore\ r \simeq 0.94$$

કાર્લ પિયર્સનની રીતના ગુણ અને મર્યાદાઓ

ગુણ :

(1) આ રીત દ્વારા બે ચલ વચ્ચેના સહસંબંધનો પ્રકાર તેમજ તેમની વચ્ચેના સંબંધની ઘનિષ્ઠતા પણ જાણી શકાય છે.

(2) બે ચલ વચ્ચેના સુરેખ સહસંબંધને માપવા માટેની આ સૌથી પ્રચલિત રીત છે.

(3) તે સહસંબંધની ઘનિષ્ઠતા (વધુ, સામાન્ય કે ઓછી)ને એક સંખ્યામાં દર્શાવે છે.

મર્યાદાઓ :

(1) આ રીત એ ધારણા પર આધારિત છે કે બે ચલ વચ્ચે સુરેખ સહસંબંધ છે. તેથી જો બે ચલ વચ્ચે સુરેખ સહસંબંધ ન હોય છતાં આ રીતનો ઉપયોગ કરીને સહસંબંધાંક શોધવામાં આવે, અને તેના આધારે સંબંધ વિશેનું અર્થઘટન કરવામાં આવે તો તે અર્થઘટન ગેરમાર્ગે દોરશે.

(2) સહસંબંધની કિંમત પર અંતિમ અવલોકનો (અતિ મોટાં અથવા અતિ નાનાં અવલોકનો)ની ખૂબ જ અસર થાય છે.

(3) આ રીતે મળતા સહસંબંધાંકનું ખૂબ સાવચેતીપૂર્વક અર્થઘટન થાય એ જરૂરી છે. નહિતર બે ચલ વચ્ચેના સંબંધ વિશે ગેરસમજ થવાની શક્યતા રહે છે.

સ્વાધ્યાય 2.2

1. એક સોસાયટીમાં રહેતાં 7 કુટુંબોમાંથી મેળવેલા નિદર્શમાં પિતાની ઊંચાઈ (સેમીમાં) અને તેમના પુખ્ત વયના પુત્રની ઊંચાઈ (સેમીમાં)ની નીચે આપેલી માહિતી પરથી સહસંબંધાંક ગણો.

પિતાની ઊંચાઈ (સેમી)	170	169	168	167	166	165	164
પુત્રની ઊંચાઈ (સેમી)	172	168	170	168	165	167	166

2. નાસ્તા બનાવતી એક સ્થાનિક ગૃહ ઉદ્યોગ કંપની દરેક નાસ્તા 100 ગ્રામના પેકેટમાં વેચે છે. એક નવા પ્રકારની વેફરની કિંમત નિર્ધારણ માટે તેના ભાવ અને માંગનો પ્રાથમિક અભ્યાસ કરતાં નીચે મુજબ માહિતી મળે છે.

વેફરનો ભાવ (₹)	24	26	32	33	35	30
માંગ (હજાર પેકેટ)	27	24	22	20	15	24

આ માહિતી પરથી વેફરનો ભાવ અને તેની માંગ વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

3. એક શાળાની પરીક્ષામાં બે વિષયો નામાપદ્ધતિ અને આંકડાશાસ્ત્રમાં દસ વિદ્યાર્થીઓના નિદર્શમાંથી મેળવેલા ગુણની માહિતી પરથી બંને વિષયોના ગુણ વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

નામા પદ્ધતિમાં ગુણ	60	80	50	80	95	40	70	40	35	90
આંકડાશાસ્ત્રમાં ગુણ	50	75	60	85	90	40	65	30	45	70

4. એક શહેરમાં રહેતા બાળકોની ગણિત અને તર્કવિદ્યાની ક્ષમતા વચ્ચેનો સંબંધ મેળવવા એક શૈક્ષણિક સંસ્થા જુદી જુદી શાળામાંથી પસંદ કરેલાં છ બાળકોને ગણિત અને તર્કવિદ્યા આધારિત વીસ કોયડા ઉકેલવા માટે આપે છે. તે બાળકો દ્વારા સાચા ઉકેલ મેળવ્યા હોય તેવા કોયડાની સંખ્યા નીચે આપેલી છે.

ગણિત આધારિત ઉકેલ મેળવ્યો હોય તે કોયડાની સંખ્યા	12	8	9	10	8	11
તર્કવિદ્યા આધારિત ઉકેલ મેળવ્યો હોય તે કોયડાની સંખ્યા	11	10	4	7	13	16

આ માહિતી પરથી બાળકોની બંને પ્રકારના કોયડા ઉકેલવાની ક્ષમતા વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

5. નીચેની માહિતી પરથી મૂડીરોકાણ (કરોડ ₹માં) અને નફો (દસ લાખ ₹માં) વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

કંપની	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
મૂડીરોકાણ (કરોડ ₹)	15	22	12	10	17	20	14
નફો (દસ લાખ ₹)	9	12	8	6	10	9	10

6. કોઈ એક શાળામાંથી પસંદ કરેલા પાંચ વિદ્યાર્થીઓના પ્રતિદિન અભ્યાસના સરેરાશ કલાકો અને ઊંઘના સરેરાશ કલાકોની માહિતી નીચે મુજબ પ્રાપ્ય છે.

અભ્યાસના કલાકો	10	5	7	5	3
ઊંઘના કલાકો	6	9	7	8	10

આ પરથી અભ્યાસના કલાકો અને ઊંઘના કલાકો વચ્ચે સહસંબંધાંક ગણો.

7. નીચે આપેલ ઉંમર (વર્ષમાં) અને લોહીના દબાણ (મિમિમાં)ની વીગતો પરથી ઉંમર અને લોહીના દબાણ વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

ઉંમર (વર્ષ)	58	55	65	52	48	68	62	56
લોહીનું સિસ્ટોલિક દબાણ (મિમિ)	130	150	150	130	140	158	155	140

8. એક એન્જિનીઅર એસૉસિએશન જુદી જુદી ફેક્ટરીમાં થતા ઉત્પાદન અને એકમ દીઠ ઉત્પાદન ખર્ચ વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા છ ફેક્ટરીના ઉત્પાદન (હજાર એકમોમાં) અને ઉત્પાદનના એકમ દીઠ ખર્ચની માહિતી નીચે મુજબ મેળવે છે.

ઉત્પાદન (હજાર એકમો)	15	20	35	24	18	31
એકમ દીઠ ઉત્પાદન-ખર્ચ (₹)	95	90	75	80	87	70

આ પરથી ઉત્પાદન અને એકમદીઠ ઉત્પાદન-ખર્ચ વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

9. જુદાં જુદાં છ શહેરોના લોકોની માથાદીઠ વાર્ષિક આવક (₹માં) અને ભાવના સૂચક આંકની વીગત પરથી સહસંબંધાંક શોધો.

શહેર	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
માથાદીઠ વાર્ષિક આવક (₹)	32,000	29,000	40,000	36,000	30,000	39,000
ભાવનો સૂચક આંક	120	100	250	180	110	220

10. એક શહેરના કુટુંબોમાં વાહન ચલાવનારા સભ્યોની સંખ્યા અને તેમનો અઠવાડિક પેટ્રોલનો વપરાશ (લિટરમાં) વચ્ચેના સંબંધનો અભ્યાસ કરવા માટે નીચે માહિતી આપેલી છે.

કુટુંબમાં વાહન ચલાવનારા સભ્યોની સંખ્યા	3	5	2	4	3	6	1
અઠવાડિક પેટ્રોલનો વપરાશ (લિટર)	11.5	21	14.5	15.5	7	22.5	10

આ માહિતી પરથી કુટુંબદીઠ વાહન ચલાવતા સભ્યોની સંખ્યા અને પેટ્રોલના વપરાશ વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

11. એક ગ્રામ્ય વિસ્તારમાં ખાતરના વપરાશ અને મકાઈની ઊપજ વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા માટે નીચે મુજબ માહિતી એકઠી કરવામાં આવી છે.

ખાતરનો વપરાશ (ક્વિન્ટલ)	1.5	2.1	0.9	1.8	1.1	1.2
હેક્ટરદીઠ મકાઈની ઊપજ (ક્વિન્ટલ)	60	95	50	75	45	75

આ પરથી ખાતરના વપરાશ અને મકાઈની ઊપજ વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

12. એક જિલ્લામાં છેલ્લાં દસ વર્ષમાં પડેલા વરસાદ સેમીમાં (X) અને પાકની ઊપજ હેક્ટરદીઠ ટનમાં (Y) ની વીગતો પરથી સહસંબંધાંક શોધો.

$n = 10$, $Cov(x, y) = 30$, X નું પ્રમાણિત વિચલન $= 5$ અને Y નું વિચરણ $= 144$

13. એક શાળાના વિદ્યાર્થીઓમાંથી દસ વિદ્યાર્થીઓનો નિદર્શ લઈ તેમની ઊંચાઈ સેમીમાં (X) અને વજન કિગ્રામાં (Y)ની માહિતી પરથી નીચેની વીગતો મળેલ છે.

$\bar{x} = 160$, $\bar{y} = 55$, $\Sigma xy = 90000$, $s_x = 25$, $s_y = 10$

આ પરથી ઊંચાઈ અને વજન વચ્ચેના સહસંબંધાંકની કિંમત શોધો.

14. નીચેનાં પરિણામો પરથી સહસંબંધાંકની કિંમત શોધો.

(1) $\Sigma(x-\bar{x})^2 = 72$, $\Sigma(y-\bar{y})^2 = 32$, $\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = 45$

(2) $n = 6$, $\Sigma x = 16$, $\Sigma y = 51$, $\Sigma xy = 154$, $\Sigma x^2 = 52$, $\Sigma y^2 = 471$

15. નીચેની માહિતી પરથી r ની કિંમત શોધો.

વીગત	x	y
મધ્યક	60	95
મધ્યકમાંથી લીધેલા વિચલનોના વર્ગોનો સરવાળો	920	1050
મધ્યકમાંથી લીધેલા વિચલનોના ગુણાકારોનો સરવાળો	–545	

*

2.8 સ્પિયરમૅનની ક્રમાંક સહસંબંધની રીત

આપણે બે ચલ વચ્ચેનો સહસંબંધાંક શોધવા માટે કાર્લ પિયર્સનની રીતનો અભ્યાસ કર્યો. સ્પષ્ટ છે કે જ્યારે ચલ સંખ્યાત્મક હોય ત્યારે એટલે કે જ્યારે બંને ચલોને સંખ્યાત્મક રીતે માપી શકાય ત્યારે આ રીતનો ઉપયોગ થાય છે, પરંતુ ધંધાકીય, ઔદ્યોગિક અને સામાજિક વિજ્ઞાનના સમસ્યાઓમાં કેટલીક પરિસ્થિતિ એવી હોય છે જ્યારે આપણે ગુણાત્મક ચલ (ગુણધર્મ)નો અભ્યાસ કરીએ છીએ. દા.ત., સુંદરતા, પ્રામાણિકતા, આવડત, નૈતિકતા, વકતૃત્વ, સંગીત, નૃત્યમાં કૌશલ્ય વગેરે. આ પરિસ્થિતિમાં આ લક્ષણો (ગુણાત્મક ચલ કે ગુણધર્મો)ને સંખ્યાત્મક સ્વરૂપે માપી શકાતા નથી, પરંતુ તેઓને ગુણવત્તા અનુસાર ગોઠવી ક્રમ આપી શકાય છે. આ રીતે મળતાં બે લક્ષણોના ક્રમોની જોડ પરથી મેળવેલા ચાર્લ્સ સ્પિયરમૅને સૂચવેલા સહસંબંધાંકને સ્પિયરમૅનનો ક્રમાંક સહસંબંધાંક કહેવાય છે.

સહસંબંધનું માપ જાણવા માટે સ્પિયરમૅનના ક્રમાંક સહસંબંધાંકની ગણતરીના કેટલાંક ઉદાહરણ નીચે આપેલા છે :

(1) એક જૂથમાં વ્યક્તિઓની પ્રામાણિકતા અને સમયપાલનની નિયમિતતા અનુસાર તેઓને ક્રમ આપી આ બે ગુણધર્મો વચ્ચેના સંબંધનો અભ્યાસ.

(2) એક સૌંદર્ય સ્પર્ધામાં જુદા જુદા સ્પર્ધકોને તેમના સ્પર્ધામાં દેખાવને આધારે બે નિર્ણાયકોએ આપેલા ક્રમ પરથી બંને નિર્ણાયકોના નિર્ણય વચ્ચેના સંબંધનો અભ્યાસ.

કેટલીક વખતે માહિતીમાં સંખ્યાત્મક ચલ હોય (જેમકે ઊંચાઈ, વજન) તોપણ તેમનાં અવલોકનોની કિંમત અનુસાર તેમને ક્રમ આપી ક્રમાંક સહસંબંધાંક મેળવવામાં આવે છે. સામાન્ય રીતે જ્યારે બે ચલોની કિંમતોમાં પ્રસાર વધુ હોય ત્યારે કાર્લ પિયર્સનની રીતે સહસંબંધાંક મેળવવાને બદલે ક્રમાંક સહસંબંધાંક મેળવાય છે કારણ કે વધુ પ્રસાર વાળાં અવલોકનો માટે કાર્લ પિયર્સનના સહસંબંધાંક કરતાં ક્રમાંક સહસંબંધાંક વધુ સ્થિર (stable) છે.

રીત : ધારો કે બે ગુણધર્મો X અને Y નાં અવલોકનોની જોડને નીચે મુજબ ક્રમ આપેલા છે :

અવલોકનો	1	2	....	i	....	n
X ને આધારે ક્રમ	R_{x_1}	R_{x_2}	....	R_{x_i}	....	R_{x_n}
Y ને આધારે ક્રમ	R_{y_1}	R_{y_2}	....	R_{y_i}	....	R_{y_n}

ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધવા માટે નીચેના સૂત્રનો ઉપયોગ થાય છે.

$$r = 1 - \frac{6\Sigma {d_i}^2}{n(n^2-1)}$$

જ્યાં, $d_i = R_{x_i} - R_{y_i}$, $i = 1, 2, 3, ... n$ માટે સરળતા ખાતર આપણે d_i ને બદલે d, R_{x_i} ને બદલે R_x અને R_{y_i} ને બદલે R_y લખીશું.

તેથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધવા માટેનું સૂત્ર નીચે મુજબ લખી શકાય.

$$r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$$

જ્યાં $d = R_x - R_y = X$ અને Y ના ક્રમાંકોનો તફાવત

$\Sigma d^2 = X$ અને Y ના ક્રમાંકોના તફાવતોના વર્ગોનો સરવાળો

જ્યારે અવલોકનોની n જોડ સંખ્યાત્મક ચલની હોય ત્યારે સામાન્ય રીતે એક ચલના સૌથી મોટા અવલોકનને ક્રમ 1, ત્યાર બાદ તેનાથી નાના પણ બાકીનાં અવલોકનોથી મોટા હોય તેવા અવલોકનને ક્રમ 2, એ મુજબ બધાં જ અવલોકનોને ક્રમ આપવામાં આવે છે, તે જ રીતે બીજા ચલની કિંમતોને પણ ક્રમ આપવામાં આવે છે. ત્યાર બાદ આ ક્રમો પરથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક મેળવવામાં આવે છે.

આપણે બે સંખ્યાત્મક ચલો વચ્ચેનો સંબંધ શોધવા માટે ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધીએ છીએ પણ કાર્લ પિયર્સનનો સહસંબંધાંક વધુ ચોક્કસ ગણાય છે, કારણ કે તેમાં ક્રમ નહિ પરંતુ મૂળ અવલોકનોનો ઉપયોગ થાય છે.

અહીં નોંધવું જરૂરી છે કે, ક્રમાંક સહસંબંધાંક એ બીજું કાંઈ નહિ પણ બે ગુણધર્મો (કે સંખ્યાત્મક ચલો)ને આપેલા ક્રમો વચ્ચેનો કાર્લ પિયર્સનનો સહસંબંધાંક છે. તેથી કાર્લ પિયર્સનના સહસંબંધાંકની જેમ જ ક્રમાંક સહસંબંધાંકનું અર્થઘટન કરી શકાય છે.

સામાન્ય રીતે સ્પિયરમૅનની રીતે મેળવેલ ક્રમાંક સહસંબંધાંક અને કાર્લ પિયર્સનની રીતે મેળવેલ સહસંબંધાંકની કિંમત સમાન હોતી નથી, પરંતુ જ્યારે બે ચલની કિંમતો એ પ્રથમ n પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓની જ કોઈ ગોઠવણી હોય ત્યારે કાર્લ પિયર્સનની રીત દ્વારા અને સ્પિયરમૅનની રીતે મેળવેલા સહસંબંધાંકની કિંમત સરખી થાય છે.

ઉદાહરણ 16 : એક કંપનીના બે મૅનેજરે તેમની કંપનીમાં નોકરી કરતા વ્યક્તિઓમાંથી પસંદ કરેલા સાત વ્યક્તિઓને તેમના કારભારની આવડતને આધારે નીચે મુજબ ક્રમ આપેલા છે :

વ્યક્તિ	A	B	C	D	E	F	G
મૅનેજર 1 એ આપેલ ક્રમ	6	7	5	4	3	2	1
મૅનેજર 2 એ આપેલ ક્રમ	7	6	5	2	4	1	3

આ માહિતી પરથી બંને મૅનેજરે કરેલા મૂલ્યાંકન વચ્ચેનો ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

અહીં $n = 7$ અને ક્રમ આપેલા જ છે તેથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધવા આપણે નીચે મુજબ કોષ્ટક બનાવીએ.

વ્યક્તિ	મૅનેજર 1 એ આપેલ ક્રમ R_x	મૅનેજર 2 એ આપેલ ક્રમ R_y	$d = R_x - R_y$	d^2
A	6	7	–1	1
B	7	6	1	1
C	5	5	0	0
D	4	2	2	4
E	3	4	–1	1
F	2	1	1	1
G	1	3	–2	4
કુલ	**–**	**–**	**0**	**12**

$$r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6(12)}{7(49-1)}$$

$$= 1 - \frac{72}{336}$$

$$= 1 - 0.2143$$

$$= 0.7857$$

$$\therefore\ r \simeq 0.79$$

અહીં r ની કિંમત 1 ની નજીક છે એટલે કે તે ઘનિષ્ઠ ધન સહસંબંધ દર્શાવે છે. તેથી કહી શકાય કે, બંને મૅનેજરે નોકરી કરતા વ્યક્તિઓને આપેલા ક્રમો વચ્ચે વધુ સામ્યતા જોવા મળે છે.

ઉદાહરણ 17 : જુદી જુદી બ્રાંડના મોબાઇલ ફોનનું વેચાણ કરતી એક વિવિધ શાખા ધરાવતી દુકાનના માલિકે મોબાઇલ ફોનના એક નિષ્ણાત વ્યક્તિને 10 જુદા-જુદા મોબાઇલ ફોનના કૅમેરા અને તેની બૅટરીની કાર્યક્ષમતા ચકાસી તેમને ક્રમ આપવાનું કાર્ય સોંપ્યું અને તે નિષ્ણાત વ્યક્તિ દ્વારા જુદી જુદી બ્રાંડના મોબાઇલને મળેલ ક્રમ નીચે મુજબ છે :

મોબાઇલ ફોન	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
કૅમેરા માટે ક્રમ	3	5	8	4	7	10	2	1	6	9
બૅટરી માટે ક્રમ	6	4	9	8	1	2	3	10	5	7

આ માહિતી પરથી મોબાઇલના કૅમેરા અને બૅટરીની કાર્યક્ષમતા વચ્ચે ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

અહીં $n = 10$ અને ક્રમ આપેલા જ છે. તેથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધવા નીચે મુજબ કોષ્ટક બનાવીએ.

મોબાઇલ ફોન	**કૅમેરા માટે** R_x	**બૅટરી માટે** R_y	$d = R_x - R_y$	d^2
A	3	6	–3	9
B	5	4	1	1
C	8	9	–1	1
D	4	8	–4	16
E	7	1	6	36
F	10	2	8	64
G	2	3	–1	1
H	1	10	–9	81
I	6	5	1	1
J	9	7	2	4
કુલ	**–**	**–**	**0**	**214**

$$r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6(214)}{10(100-1)}$$

$$= 1 - \frac{1284}{990}$$

$$= 1 - 1.2970$$

$$= -0.2970$$

$$\therefore \ r \simeq -0.30$$

અહીં r ની કિંમત ઋણ અને 0ની નજીક છે તેથી તે આંશિક ઋણ સહસંબંધ દર્શાવે છે. તેથી કહી શકાય કે નિષ્ણાત વ્યક્તિના મત મુજબ તેણે ચકાસેલા મોબાઇલ ફોનમાં કૅમેરો કાર્યક્ષમ હોય, તો તેની બૅટરી ઓછી કાર્યક્ષમ જણાય છે. જ્યારે બૅટરી કાર્યક્ષમ હોય તો કૅમેરો ઓછો કાર્યક્ષમ જણાય છે.

ઉદાહરણ 18 : એક શાળાના પ્રિન્સિપાલે શાળાના બાળકોના ગણિતના જ્ઞાન અને ઇતિહાસ વિષયની વીગતો યાદ રાખવા વચ્ચેનો સમય જાણવા પાંચ વિદ્યાર્થીઓનો એક નિદર્શ લઈ તેમની બંને વિષયોની એક કસોટી યોજી. આ પાંચ વિદ્યાર્થીઓના ગણિત અને ઇતિહાસ વિષયમાં મેળવેલા ગુણને આધારે તેઓને નીચે મુજબ ક્રમ આપવામાં આવે છે. આ માહિતી પરથી બંને વિષયોના ક્રમો વચ્ચે ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

વિદ્યાર્થી	A	B	C	D	E
ગણિતમાં ક્રમ	2	5	1	4	3
ઇતિહાસમાં ક્રમ	4	1	5	2	3

અહીં, $n = 5$ અને ક્રમ આપેલા છે જ તેથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધવા માટે નીચે મુજબ કોષ્ટક બનાવીએ.

વિદ્યાર્થી	R_x	R_y	$d = R_x - R_y$	d^2
A	2	4	–2	4
B	5	1	4	16
C	1	5	–4	16
D	4	2	2	4
E	3	3	0	0
કુલ	**–**	**–**	**0**	**40**

$$r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6(40)}{5(25-1)}$$

$$= 1 - \frac{240}{120}$$

$$= 1 - 2$$

$$\therefore \; r = -1$$

આમ, પાંચ વિદ્યાર્થીઓનો ગણિત અને ઇતિહાસમાં દેખાવ તદ્દન ઊલ્ટા ક્રમમાં હોવાથી આપણને $r = -1$ મળે છે.

ઉદાહરણ 19 : એક સંગીત-સ્પર્ધામાં પાંચ ગાયકો A, B, C, D અને E ને તેમની ગીત ગાવાની કુશળતાને આધારે બે નિર્ણાયકો મૂલવે છે. પાંચ ગાયકોને નીચે મુજબ ક્રમ આપેલા છે.

ક્રમ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
નિર્ણાયક 1	C	A	B	E	D
નિર્ણાયક 2	B	C	D	A	E

આ પરથી બંને નિર્ણાયકોના નિણર્યો વચ્ચેની સામ્યતા ક્રમાંક સહસંબંધાંક પરથી શોધો.

અહીં $n=5$, પાંચ ગાયકોને મળેલા ક્રમ અનુસાર આપેલી માહિતીને ફરીથી નીચે મુજબ ગોઠવીએ.

ગાયક	A	B	C	D	E
નિર્ણાયક 1 એ આપેલ ક્રમ	2	3	1	5	4
નિર્ણાયક 2 એ આપેલ ક્રમ	4	1	2	3	5

ગાયક	R_x	R_y	$d = R_x - R_y$	d^2
A	2	4	–2	4
B	3	1	2	4
C	1	2	–1	1
D	5	3	2	4
E	4	5	–1	1
કુલ	**–**	**–**	**0**	**14**

$$r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6(14)}{5(25-1)}$$

$$= 1 - \frac{84}{120}$$

$$= 1 - 0.7$$

$$\therefore \ r = 0.3$$

અહીં r ની કિંમત ધન અને 0 ની નજીક છે તેથી તે આંશિક ધન સહસંબંધ દર્શાવે છે. તેથી કહી શકાય કે બંને નિર્ણાયકોમાં સહમતી ઓછી છે એટલે કે તેમના અભિપ્રાય પ્રમાણમાં જુદા પડે છે.

ઉદાહરણ 20 : એક શાળાના આંકડાશાસ્ત્ર અને નામાપદ્ધતિ વિષયના શિક્ષકોએ તેમની શાળાના વિદ્યાર્થીઓમાંથી આઠ વિદ્યાર્થીઓનો નિદર્શ લઈ બંને વિષયોમાં વિદ્યાર્થીઓની આવડત વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા નીચે મુજબ માહિતી એકઠી કરી.

વિદ્યાર્થી	1	2	3	4	5	6	7	8
આંકડાશાસ્ત્રમાં ગુણ x	78	36	98	25	75	82	90	62
નામાપદ્ધતિમાં ગુણ y	84	51	91	60	68	62	86	55

આ માહિતી પરથી વિદ્યાર્થીઓને મળતા આંકડાશાસ્ત્રના ગુણ અને નામાપદ્ધતિના ગુણ વચ્ચે ક્રમાંક સહસંબંધાંક ગણો.

અહીં $n = 8$ અને આપણને સંખ્યાત્મક ચલ (બંને વિષયોમાં ગુણ) આપેલા છે. તેથી સૌપ્રથમ બંને વિષયોમાં ગુણ અનુસાર ક્રમ આપવા પડશે.

આંકડાશાસ્ત્રના વિષયમાં રોલ નંબર 3 ધરાવતાં વિદ્યાર્થીના સૌથી વધુ 98 ગુણ છે તેથી તેને ક્રમ 1 આપવામાં આવે છે. ત્યાર બાદ રોલ નંબર 7 ધરાવતા વિદ્યાર્થીના ગુણ 90 છે તેથી તેને ક્રમ 2 એમ એક પછી એક વિદ્યાર્થીઓને ક્રમ આપવામાં આવે છે. તે જ રીતે નામાપદ્ધતિના ગુણને આધારે પણ વિદ્યાર્થીઓને ક્રમ આપવામાં આવે છે.

હવે નીચે મુજબ કોષ્ટક બનાવીએ.

રોલ નંબર	આંકડાશાસ્ત્ર		નામા પદ્ધતિ		$d = R_x - R_y$	d^2
	ગુણ	ક્રમ R_x	ગુણ	ક્રમ R_y		
1	78	4	84	3	1	1
2	36	7	51	8	–1	1
3	98	1	91	1	0	0
4	25	8	60	6	2	4
5	75	5	68	4	1	1
6	82	3	62	5	–2	4
7	90	2	86	2	0	0
8	62	6	55	7	–1	1
કુલ	–	–	–	–	**0**	**12**

$$r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6(12)}{8(64-1)}$$

$$= 1 - \frac{72}{504}$$

$$= 1 - 0.1429$$

$$= 0.8571$$

$$\therefore \ r \simeq 0.86$$

અહીં r ની કિંમત 1 ની વધુ નજીક છે તેથી કહી શકાય કે, આંકડાશાસ્ત્ર અને નામાપદ્ધતિના ગુણ પરથી મેળવેલા ક્રમો વચ્ચે ગાઢ ધન સહસંબંધ છે. એટલે કે સામાન્ય રીતે કોઈ વિદ્યાર્થીના આંકડાશાસ્ત્રમાં વધુ (ઓછા) ગુણ હોય, તો તે વિદ્યાર્થીના નામાપદ્ધતિમાં પણ ગુણ વધુ (ઓછા) હોય છે. (હંમેશાં દરેક વિદ્યાર્થીની બાબતમાં આવું ન પણ હોય)

અવલોકનોમાં ગાંઠ (જ્યારે અવલોકનો સમાન હોય) :

જ્યારે ચલ X અથવા Y અથવા બંને ચલનાં અવલોકનોની અમુક કિંમતો સમાન હોય ત્યારે તેવા અવલોકનોને ક્રમ આપવા માટે સમસ્યા ઉદ્ભવે છે. જ્યારે X અથવા Y ચલનાં અવલોકનો સમાન હોય તો તેને આપણે 'ગાંઠ' (Tie) ઉદ્ભવે છે તેમ કહીશું. આવા કિસ્સામાં પુનરાવર્તન પામતા બધાં અવલોકનોને તેમને અનુરૂપ ક્રમોની સરેરાશ (મધ્યક) જેટલો ક્રમ ગાંઠમાંના દરેક અવલોકનને આપવામાં આવે છે અને ત્યાર બાદ આવતાં અવલોકનોને સરેરાશ ક્રમમાં ઉપયોગમાં લીધેલા છેલ્લા ક્રમ પછીનો ક્રમ આપવામાં આવે છે. આપણે એક ઉદાહરણ લઈ આ બાબત સમજીએ. ધારો કે એક ચલનાં અવલોકનો 37, 60, 42, 78, 42, 50, 66, 42, 60 છે. અહીં સૌથી મોટું અવલોકન 78 છે તેથી તેને આપણે ક્રમ 1 આપીશું. ત્યાર બાદનું અવલોકન 66 છે તેથી તેને ક્રમ 2 આપીશું. હવે ત્યાર બાદનું અવલોકન 60 છે. પણ તે બે વખત પુનરાવર્તન પામે છે. તેથી તેઓને અનુરૂપ ક્રમો (ક્રમ 3 અને ક્રમ 4)ની સરેરાશ $\frac{3+4}{2} = 3.5$ એ દરેક અવલોકન (60)ને ક્રમ તરીકે આપવામાં આવે છે. હવે પછીનું અવલોકન 50 છે, તેને ક્રમ 5 આપીશું, કેમકે ક્રમ 3 અને ક્રમ 4નો અગાઉ ઉપયોગ થઈ ચૂક્યો છે. હવે પછીનું અવલોકન 42 છે અને તે ત્રણ વખત પુનરાવર્તન પામે છે. તેથી તેમના અનુરૂપ ક્રમો (ક્રમ 6, ક્રમ 7, ક્રમ 8)ની સરેરાશ $\frac{6+7+8}{3} = 7$ એ દરેક અવલોકન (42)ને ક્રમ તરીકે આપવામાં આવે છે. હવે આખરમાં અવલોકન 37 છે. તેને ક્રમ 9 આપવામાં આવે છે, કેમકે ક્રમ 6, ક્રમ 7 અને ક્રમ 8નો અગાઉ ઉપયોગ થઈ ચૂક્યો છે. આ જ રીતે બીજા ચલની કિંમતોને પણ ક્રમ આપવામાં આવે છે.

હવે જ્યારે ગાંઠ પડે (અમુક અવલોકનો સમાન હોય) ત્યારે ક્રમાંક સહસંબંધાંકની ગણતરી કરવાના સૂત્રમાં સુધારો કરવાની જરૂર પડે છે. એવો સુધારો 'CF' (Correction Factor) થી કરવાનો હોય છે.

'CF' શોધવા માટે પ્રત્યેક પુનરાવર્તન પામતાં અવલોકનના સમૂહ દીઠ $\left(\frac{m^3-m}{12}\right)$ પદ Σd^2 માં ઉમેરવામાં આવે છે. જ્યાં, m = અવલોકન જેટલી વખત પુનરાવર્તન પામે તે સંખ્યા. આવા પુનરાવર્તન પામતા પ્રત્યેક અવલોકન સમૂહ માટે મેળવેલ $\left(\frac{m^3-m}{12}\right)$ પદોનો સરવાળો એટલે 'CF'. એટલે કે $CF = \Sigma\left(\frac{m^3-m}{12}\right)$

આમ, જ્યારે ક્રમ આપવામાં ગાંઠ ઉદ્ભવે (એટલે કે અમુક અવલોકનો સમાન હોય) ત્યારે ક્રમાંક સહસંબંધાંકનું સૂત્ર નીચે મુજબ લખી શકાય :

$$r = 1 - \frac{6\left[\Sigma d^2 + CF\right]}{n(n^2-1)}$$

જ્યાં, સુધારો (CF) = $\Sigma\left(\frac{m^3-m}{12}\right)$

અને m = અવલોકન જેટલી વખત પુનરાવર્તન પામે તે સંખ્યા.

ઉદાહરણ 21 : ઉદાહરણ 5માં આપેલી વીગત પરથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક ગણો.

આપણે અગાઉ સમજ્યા તે મુજબ બંને ચલોને ક્રમ આપીશું. અહીં Y ચલમાં અવલોકન 75 બે વખત પુનરાવર્તન પામે છે. સૌથી મોટું અવલોકન 79 છે. તેને ક્રમ 1 આપી ત્યાર બાદ આવતા અવલોકન 75ને ક્રમ 2 અને ક્રમ 3ની સરેરાશ એટલે કે $\frac{2+3}{2} = 2.5$ ક્રમ તે દરેકને આપીશું.

હવે નીચે મુજબ કોષ્ટક બનાવીએ.

	વાચન (કલાક) x	X નો ક્રમ R_x	ગુણ y	Y નો ક્રમ R_y	$d = R_x - R_y$	d^2
	25	7	65	7	0	0
	38	2	75	2.5	–0.5	0.25
	30	5	68	6	–1	1
	28	6	70	5	1	1
	34	4	72	4	0	0
	40	1	79	1	0	0
	36	3	75	2.5	0.5	0.25
કુલ	**–**	**–**	**–**	**–**	**0**	**2.5**

'CF' મેળવવાની ગણતરી નીચે મુજબ છે.

પુનરાવર્તિત અવલોકન	અવલોકન જેટલી વખત પુનરાવર્તન પામે તે સંખ્યા (m)	$\left(\frac{m^3-m}{12}\right)$
75	2	$\left(\frac{2^3-2}{12}\right) = 0.5$
–	–	$\mathbf{CF} = \Sigma\left(\frac{m^3-m}{12}\right) = \mathbf{0.5}$

$$r = 1 - \frac{6\left[\Sigma d^2 + CF\right]}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6[2.5+0.5]}{7(49-1)}$$

$$= 1 - \frac{6(3)}{336}$$

$$= 1 - \frac{18}{336}$$

$$= 1 - 0.0536$$

$$= 0.9464$$

$$\therefore \ r \simeq 0.95$$

નોંધ : અહીં જોઈ શકાય છે કે સ્પિયરમૅનની ક્રમાંક સહસંબંધની રીતથી મેળવેલી r ની કિંમત એ ઉદાહરણ 5માં મેળવેલા કાર્લ પિયર્સનની રીતથી મેળવેલી r ની કિંમતથી જુદી પડે છે.

ઉદાહરણ 22 : વિદ્યાર્થીઓની અર્થશાસ્ત્ર વિષયની સમજ અને તેમની નૃત્ય કલા વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા માટે આઠ વિદ્યાર્થીઓનો નિદર્શ લઈ તેમની કસોટી કરવામાં આવે છે અને તેમને મળતાં ગુણ નીચે મુજબ છે. આ માહિતી પરથી બંને વિષયોના ગુણ વચ્ચે ક્રમાંક સહસંબંધાંકની ગણતરી કરો.

અર્થશાસ્ત્રમાં ગુણ	60	30	10	20	30	50	30	40
નૃત્ય કલામાં ગુણ	80	20	60	40	12	28	20	15

અર્થશાસ્ત્રમાં ગુણને આધારે ક્રમ આપીએ તો સૌથી વધુ ગુણ 60 છે તેથી તેનો ક્રમ 1, 50 ગુણનો ક્રમ 2, 40 ગુણનો ક્રમ 3 થશે. હવે 30 ગુણ આવે છે જે ત્રણ વખત પુનરાવર્તન પામે છે. તેથી તેઓને અનુરૂપ ક્રમો (ક્રમ 4, ક્રમ 5, ક્રમ 6)ની સરેરાશ $\frac{4+5+6}{3} = 5$ એ દરેક ગુણ 30નો ક્રમ થશે. હવે 30 ગુણ બાદ 20 ગુણ આવે છે, તેથી તેનો ક્રમ 7 થશે અને છેલ્લે સૌથી ઓછા ગુણ 10 નો ક્રમ 8 થશે. તે જ રીતે નૃત્ય કલામાં ગુણને આધારે ક્રમ આપીએ તો સૌથી વધુ ગુણ 80 છે તેથી તેનો ક્રમ 1 થશે. 60 ગુણનો ક્રમ 2, 40 ગુણનો ક્રમ 3, 28 ગુણનો ક્રમ 4 થશે. હવે ગુણ 20 બે વખત પુનરાવર્તન પામે છે તેથી તેને અનુરૂપ ક્રમો (ક્રમ 5, ક્રમ 6)ની સરેરાશ $\frac{5+6}{2} = 5.5$ એ દરેક ગુણ 20નો ક્રમ થશે. હવે 15 ગુણ આવે છે તેથી તેનો ક્રમ 7 અને છેલ્લે સૌથી ઓછા ગુણ 12નો ક્રમ 8 થશે.

હવે નીચે મુજબ કોષ્ટક બનાવીએ.

	અર્થશાસ્ત્રમાં ગુણ x	**X નો ક્રમ R_x**	**નૃત્ય કલામાં ગુણ y**	**Y નો ક્રમ R_y**	**$d = R_x - R_y$**	**d^2**
	60	1	80	1	0	0
	30	5	20	5.5	–0.5	0.25
	10	8	60	2	6	36
	20	7	40	3	4	16
	30	5	12	8	–3	9
	50	2	28	4	–2	4
	30	5	20	5.5	–0.5	0.25
	40	3	15	7	–4	16
કુલ	–	–	–	–	**0**	**81.5**

'CF' મેળવવાની ગણતરી નીચે મુજબ છે.

પુનરાવર્તિત અવલોકન	અવલોકન જેટલી વખત પુનરાવર્તન પામે તે સંખ્યા (m)	$\left(\frac{m^3-m}{12}\right)$
30	3	$\left(\frac{3^3-3}{12}\right)=2$
20	2	$\left(\frac{2^3-2}{12}\right)=0.5$
–	–	**CF = 2.5**

$$r = 1-\frac{6\left[\Sigma d^2+CF\right]}{n(n^2-1)}$$

$$= 1-\frac{6[81.5+2.5]}{8(64-1)}$$

$$= 1-\frac{6(84)}{504}$$

$$= 1-\frac{504}{504}$$

$$= 1-1$$

$$= 0$$

અહીં $r = 0$ મળે છે તેથી કહી શકાય કે અર્થશાસ્ત્ર અને નૃત્યકલાના ગુણના ક્રમો વચ્ચે સુરેખ સહસંબંધનો અભાવ છે. એટલે કે આપેલા સમૂહના વિદ્યાર્થીઓના અર્થશાસ્ત્ર અને નૃત્ય કલામાં પરીક્ષા-દેખાવ (performance) સુરેખ સંબંધની દૃષ્ટિએ સ્વતંત્ર છે.

ઉદાહરણ 23 : એક ઇલેકટ્રિક સાધનોનું માર્કેટિંગ કરતી એજન્સી LED ફિટીંગ્સના વેચાણ અને નફા વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા જુદી જુદી ઇલેક્ટ્રિક કંપનીના વેચાણ અને નફાની માહિતી નીચે મુજબ મેળવે છે. આ માહિતી પરથી વેચાણ (હજાર એકમોમાં) અને નફા (લાખ ₹માં) વચ્ચે ક્રમાંક સહસંબંધાંક ગણો.

વેચાણ (હજાર એકમો)	25	58	215	72	58	25	90	162
નફો (લાખ ₹)	65	140	500	115	65	65	220	340

અહીં $n = 8$ અને વેચાણના અવલોકન 25 અને 58 બંને બે વખત પુનરાવર્તન પામે છે અને નફાનું અવલોકન 65 ત્રણ વખત પુનરાવર્તન પામે છે. તેથી આગળના ઉદાહરણમાં ચર્ચા કરી તે મુજબ અહીં વેચાણ અને નફાની કિંમતોને આધારે ક્રમ આપી આપણે નીચે મુજબ કોષ્ટક બનાવીશું.

	વેચાણ (હજાર એકમો) x	X નો ક્રમ R_x	નફો (લાખ ₹) y	Y નો ક્રમ R_y	$d = R_x - R_y$	d^2
	25	7.5	65	7	0.5	0.25
	58	5.5	140	4	1.5	2.25
	215	1	500	1	0	0
	72	4	115	5	–1	1
	58	5.5	65	7	–1.5	2.25
	25	7.5	65	7	0.5	0.25
	90	3	220	3	0	0
	162	2	340	2	0	0
કુલ	–	–	–	–	**0**	**6**

'CF' મેળવવાની ગણતરી નીચે મુજબ છે.

પુનરાવર્તિત અવલોકન	અવલોકન જેટલી વખત પુનરાવર્તન પામે તે સંખ્યા (m)	$\left(\frac{m^3-m}{12}\right)$
25	2	$\left(\frac{2^3-2}{12}\right) = 0.5$
58	2	$\left(\frac{2^3-2}{12}\right) = 0.5$
65	3	$\left(\frac{3^3-3}{12}\right) = 2$
–	–	**CF = 3**

$$r = 1 - \frac{6\left[\Sigma d^2 + CF\right]}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6[6+3]}{8(64-1)}$$

$$= 1 - \frac{54}{504}$$

$$= 1 - 0.1071$$

$$= 0.8929$$

$$\therefore \ r \simeq 0.89$$

અહીં r ની કિંમત 1 ની વધુ નજીક છે. તેથી કહી શકાય કે વેચાણ અને નફાના ક્રમો વચ્ચે ગાઢ ધન સહસંબંધ છે.

નોંધ :

(1) ક્રમાંકો R_x અને R_y ના તફાવતોનો સરવાળો હંમેશાં શૂન્ય થાય છે. એટલે કે, $\Sigma d = \Sigma (R_x - R_y) = 0$

(2) જો બે ચલો x અને y ની પ્રત્યેક જોડ માટે $R_x = R_y$ થાય તો d ની દરેક કિંમત શૂન્ય થાય અને તેથી $\Sigma d^2 = 0$ થાય. આ સંજોગોમાં r ની કિંમત 1 થશે.

(3) જો x અને y ચલોના ક્રમાંકો એકબીજાથી તદ્દન ઊલટા ક્રમમાં હોય (જુઓ ઉદાહરણ 18)તો $r = -1$ થાય.

પ્રવૃત્તિ

તમારા વર્ગના યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલા કોઈ પણ દસ વિદ્યાર્થીઓએ આંકડાશાસ્ત્ર અને અર્થશાસ્ત્ર વિષયોમાં પ્રથમ કસોટીમાં મેળવેલા ગુણની માહિતી એકઠી કરો અને તે પરથી બંને વિષયોના ગુણ વચ્ચે કાર્લ પિયર્સન અને સ્પિયરમૅનની રીતે સહસંબંધાંક શોધો અને સરખાવો.

ઉદાહરણ 24 : એક ટ્રાન્સપોર્ટ કંપની માટે ડ્રાઇવરનો વાહન ચલાવવાનો અનુભવ (વર્ષમાં) અને તેના દ્વારા થયેલા અકસ્માતની સંખ્યા વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા આઠ ડ્રાઇવરના વાહન ચલાવવાના અનુભવ (વર્ષ) અને અકસ્માતની સંખ્યાને આપેલા ક્રમો પરથી ક્રમાંકોના તફાવતોના વર્ગોનો સરવાળો 126 થાય છે. આ પરથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો :

અહીં $n = 8$ અને ક્રમાંકોના તફાવતોના વર્ગોનો સરવાળો 126 છે. એટલે કે $\Sigma d^2 = 126$ છે.

$$r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{6(126)}{8(64 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{756}{504}$$

$$= 1 - 1.5$$

$$r = -0.5$$

ઉદાહરણ 25 : એક જિલ્લાના જુદી જુદી શાળામાંથી પસંદ પામેલા દસ વિદ્યાર્થીઓને તેમની રમતગમત પ્રવૃત્તિ અને સામાન્ય જ્ઞાનના કૌશલ્ય પરથી ક્રમ આપવામાં આવે છે અને તે પરથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક 0.2 મળે છે. પાછળથી એવું માલૂમ પડ્યું કે એક વિદ્યાર્થીના આ બે ગુણધર્મોના ક્રમાંકોનો તફાવત 2 ને બદલે 3 લેવાઈ ગયો હતો. ક્રમાંક સહસંબંધાંકની સુધારેલી કિંમત શોધો.

અહીં, $n = 10$

d ની ખોટી કિંમત $= 3$

d ની સાચી કિંમત $= 2$

હવે, $r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$

$\therefore \quad 0.2 = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{10(100-1)}$

$\therefore \quad 0.2 = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{990}$

$\therefore \quad \frac{6\Sigma d^2}{990} = 1 - 0.2$

$\therefore \quad \frac{6\Sigma d^2}{990} = 0.8$

$\therefore \quad \Sigma d^2 = \frac{0.8 \times 990}{6}$

$\therefore \quad \Sigma d^2 = 132$

એક તફાવત 2 ને બદલે 3 લેવાયો હતો તેથી Σd^2 ની સુધારેલી કિંમત નીચે મુજબ મળે.

સુધારેલ $\Sigma d^2 = 132 -$ (ખોટો $d)^2$ + (સાચો $d)^2$

$= 132 - 3^2 + 2^2$

$= 132 - 9 + 4$

$= 127$

$\therefore$ ક્રમાંક સહસંબંધાંકની સુધારેલી કિંમત નીચે મુજબ મળે :

$r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$

$= 1 - \frac{6(127)}{10(100-1)}$

$= 1 - \frac{762}{990}$

$= 1 - 0.7697$

$= 0.2303$

$\therefore r \simeq 0.23$

સ્પિયરમૅનના ક્રમાંક સહસંબંધની રીતના ગુણ અને મર્યાદાઓ

ગુણ :

(1) આ રીત સમજવામાં સરળ છે.

(2) ક્રમાંક સહસંબંધાંકની ગણતરી કાર્લ પિયર્સનના સહસંબંધાંકની ગણતરી કરતા સહેલી છે.

(3) ગુણાત્મક માહિતી આપેલી હોય ત્યારે સહસંબંધાંક શોધવાની આ એક જ રીત છે.

(4) જ્યારે માહિતીમાં પ્રસાર વધુ હોય અથવા અંતિમ અવલોકનો માહિતીમાં હોય ત્યારે કાર્લ પિયર્સનની રીતને બદલે સ્પિયરમૅનની રીતના ઉપયોગને અગ્રિમતા આપવામાં આવે છે.

મર્યાદાઓ :

(1) અવલોકનોની મૂળ કિંમતોને બદલે તેના ક્રમનો ઉપયોગ થતો હોવાથી હંમેશાં કેટલીક માહિતીનો લોપ થાય છે. તેથી આ રીતે મળતા સહસંબંધાંકની કિંમત કાર્લ પિયર્સનની રીતથી મળતા સહસંબંધાંક જેટલી ચોક્કસ હોતી નથી.

(2) જ્યારે અવલોકનોની સંખ્યા વધુ હોય અને ક્રમ ન આપેલા હોય તો ક્રમ આપવાનું કાર્ય કંટાળાજનક બને છે.

(3) માહિતી દ્વિચલ આવૃત્તિ-વિતરણ સ્વરૂપમાં હોય ત્યારે આ રીતનો ઉપયોગ કરવામાં આવતો નથી. (આ પરિસ્થિતિમાં કાર્લ પિયર્સનની રીતનો ઉપયોગ થાય છે અને ઉચ્ચતર કક્ષાએ તમે તેનો અભ્યાસ કરશો.)

સ્વાધ્યાય 2.3

1. બે બજાર વિશ્લેષકો, છેલ્લાં કેટલાંક સમયમાં કરેલા વિકાસને આધારે છ કંપનીઓને નીચે મુજબ ક્રમ આપે છે.

કંપની	A	B	C	D	E	F
વિશ્લેષક 1 દ્વારા ક્રમ	5	2	1	4	3	6
વિશ્લેષક 2 દ્વારા ક્રમ	6	4	3	2	1	5

આ પરથી બંને વિશ્લેષકોના મૂલ્યાંકન વચ્ચેનો સહસંબંધાંક શોધો.

2. એક નિદર્શમાં આપેલા જુદા જુદા નવ ગામોએ 'સ્વચ્છતા અભિયાન' અને 'બેટી બચાવો અભિયાન' અંગે કરેલાં કાર્યોને આધારે એક અધિકારી તેમને નીચે મુજબ ક્રમ આપે છે.

ગામ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
સ્વચ્છતા અભિયાન માટે ક્રમ	4	8	7	1	9	5	6	2	3
બેટી બચાવો અભિયાન માટે ક્રમ	6	8	5	1	9	7	3	4	2

આ પરથી બંને અભિયાનની કામગીરી વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

3. એક રાજ્યની ટાઉન પ્લાનિંગ સમિતિએ કરેલા સર્વે પરથી નીચે મુજબ માહિતી મળે છે.

શહેર	A	B	C	D	E
વસ્તી (લાખ)	57	45	14	18	8
વસ્તી વધારાનો દર (દર હજારે)	13	20	10	15	5

આ માહિતી પરથી શહેરોની વસ્તી અને વસ્તી-વધારાના દર વચ્ચે ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

4. એક સાયન્સ કોલેજના વિદ્યાર્થીઓમાંથી લીધેલા દસ વિદ્યાર્થીઓના એક નિદર્શ પરથી નીચે મુજબ માહિતી મળે છે.

વિદ્યાર્થી	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ગણિતમાં ગુણ	39	65	62	90	82	75	25	98	36	78
આંકડાશાસ્ત્રમાં ગુણ	47	53	58	86	62	68	60	91	51	84

આ પરથી વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલા ગણિત અને આંકડાશાસ્ત્રનાની ક્ષમતા વચ્ચે ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

5. નીચે આપેલી પતિ અને પત્નીની ઊંચાઈ વિશેની માહિતી પરથી તેમની ઊંચાઈ વચ્ચેનો ક્રમાંક સહસંબંધાંક ગણો.

પતિની ઊંચાઈ (સેમી)	156	153	185	157	163	191	162
પત્નીની ઊંચાઈ (સેમી)	154	148	162	157	162	170	154

6. એક ઇન્ટરવ્યૂમાં ઉમેદવારોના દેખાવ (Performance)ને આધારે બે ઇન્ટરવ્યૂ લેનારા વ્યક્તિઓએ તેઓને નીચે મુજબ ગુણ આપે છે. તે પરથી ઇન્ટરવ્યૂ લેનાર બે વ્યક્તિના મૂલ્યાંકન વચ્ચેનો ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

ઉમેદવાર	A	B	C	D	E	F	G	H
પ્રથમ વ્યક્તિ દ્વારા અપાયેલ ગુણ	28	44	10	28	47	35	19	40
બીજી વ્યક્તિ દ્વારા અપાયેલ ગુણ	32	45	25	32	41	32	24	38

7. બે નિર્ણાયકો, દસ સ્પર્ધકોને એક સૌંદર્ય-સ્પર્ધામાં ક્રમ આપે છે અને તે પરથી તેમના ક્રમાંકોના તફાવતોના વર્ગોનો સરવાળો 214 મળે છે. આ પરથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

8. દસ વિદ્યાર્થીઓએ કોઈ બે વિષયોમાં મેળવેલા ગુણ પરથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક 0.5 મળે છે. પાછળથી એવી ખબર પડે છે કે, એક વિદ્યાર્થીના ક્રમનો તફાવત 7 હોવો જોઈતો હતો, પરંતુ ભૂલથી તે 3 લેવાયો હતો. તો ક્રમાંક સહસંબંધાંકની સુધારેલી કિંમત શોધો.

*

2.9 સહસંબંધાંકના અર્થઘટનમાં રાખવી પડતી સાવચેતી

સહસંબંધાંક એ બે ચલ વચ્ચેના સુરેખ સહસંબંધની ઘનિષ્ઠતા દર્શાવતું માપ છે. rનું ખોટું અર્થઘટન બે ચલ વચ્ચેના સંબંધ અંગે આપણને ગેરમાર્ગે દોરી શકે છે. સાવચેતીરૂપે નીચે આપેલાં કેટલાક મુદ્દાને ધ્યાનમાં રાખવા જોઈએ :

(1) સહસંબંધાંક એ ફક્ત સુરેખ સંબંધની ઘનિષ્ઠતા દર્શાવતું માપ છે. પણ તેનાથી બે ચલ વચ્ચે કાર્યકારણનો સંબંધ છે કે નહિ તે અંગે કોઈ જ ખ્યાલ આવતો નથી અને તેના પરથી બે ચલોમાંથી કયો ચલ સાપેક્ષ (કાર્યસ્વરૂપ) અને કયો ચલ નિરપેક્ષ (કારણ સ્વરૂપ) છે તે વિશે કોઈ જાણકારી મળતી નથી.

અનુભવથી સહસંબંધાંકનું યોગ્ય અર્થઘટન કરી શકાય છે અને તે માટે તપાસકર્તાને અભ્યાસ હેઠળના બે ચલ વિશે અને તેને અસર કરતાં પરિબળો વિશે પૂરતું જ્ઞાન હોવું જરૂરી છે. એવાં ઘણાં ઉદાહરણો આપી શકાય જેમાં બે ચલો વચ્ચે કોઈ અર્થપૂર્ણ સંબંધ ન હોય પરંતુ બે ચલો પરનાં અવલોકનો પરથી ગણેલા સહસંબંધાંક $|r|$ ની કિંમત 1ની ખૂબ નજીક હોય. સામાન્ય રીતે ચલો વચ્ચેના કાર્યકારણ સંબંધની પૂર્વ જાણકારી વગર જ્યારે r ની ગણતરી કરવામાં આવે ત્યારે આમ બને છે. દા.ત., એક શહેરમાં માર્ગ-અકસ્માતમાં મૃત્યુ પામતી વ્યક્તિઓની સંખ્યા અને તે જ ગાળામાં તુવેરદાળના ભાવની માહિતી પરથી તેમની વચ્ચે r ની કિંમત 1ની નજીક (ગાઢ સહસંબંધ) મળી શકે, પરંતુ અહીં તેમની વચ્ચે કોઈ અર્થપૂર્ણ સંબંધ હોઈ શકે નહિ. તેથી આ પ્રકારના સહસંબંધને અર્થહીન (nonsense) અથવા ભ્રામક (spurious) સહસંબંધ કહે છે.

(2) ક્યારેક બે ચલો વચ્ચે સહસંબંધ ન હોય છતાં બીજાં કારણોની હાજરીને લીધે $|r|$ ની કિંમત 1ની નજીક મળી શકે છે. દા.ત., ચોખા અને શેરડીની ઊપજ વચ્ચે ગાઢ ધન સહસંબંધ જોવા મળી શકે છે, પરંતુ આ બે ચલો વચ્ચે કોઈ પ્રત્યક્ષ સંબંધ નથી. આમ થવાનું કારણ બંને ચલો પર બાહ્ય પરિબળો જેવાં કે હવામાન, સિંચાઈપદ્ધતિ, ખાતર વગેરેનો સાનુકૂળ પ્રભાવ હોઈ શકે.

(3) જ્યારે $r = 0$ હોય ત્યારે આપણે ફક્ત એટલું જ કહી શકીએ કે બે ચલો વચ્ચે સુરેખ સહસંબંધ નથી. બીજી રીતે કહીએ તો સુરેખ સંબંધનો અભાવ છે. પણ બે ચલો વચ્ચે સુરેખ સિવાયનો (દ્વિઘાતી કે બીજા કોઈ પ્રકારનો) સહસંબંધ હોઈ શકે છે. દા.ત.

x	–4	–3	–2	–1	1	2	3	4
y	16	9	4	1	1	4	9	16

ઉપરના ઉદાહરણ માટે કાર્લ પિયર્સનની રીતે r શોધવામાં આવે તો તેની કિંમત શૂન્ય મળે છે. તેથી આપણે એવું અર્થઘટન કરી શકીએ કે બે ચલ વચ્ચે સહસંબંધ નથી. પરંતુ આ ખોટું અર્થઘટન છે. ચલ X અને Yની કિંમતો જોતાં માલૂમ પડે છે કે તેમની વચ્ચે $Y = X^2$ સંબંધ જોવા મળે છે. આ સંબંધ સુરેખ નહિ પણ દ્વિઘાતી છે. આમ, બંને ચલ વચ્ચે સંપૂર્ણ દ્વિઘાતી સંબંધ હોવા છતાં આપણને $r = 0$ મળે છે. તેથી ઉપરના ઉદાહરણ પરથી આપણે સમજી શકીએ છીએ કે $r = 0$ એ ફક્ત સુરેખ સહસંબંધ નથી એવું દર્શાવે છે. પણ બીજા કોઈ પ્રકારનો સહસંબંધ હોઈ શકે છે.

(4) જે વિસ્તાર, વર્ગ કે સમયગાળા દરમિયાન માહિતી મેળવી હોય તે માટે જ સહસંબંધાંકની કિંમતનું અર્થઘટન સીમિત રાખવું યોગ્ય ગણાય. તે અર્થઘટનને આવા વિસ્તાર કે વર્ગની અથવા સમયગાળાની બહારની માહિતી માટે યોગ્ય ચકાસણી કર્યા સિવાય લાગુ પાડવું જોઈએ નહિ અન્યથા ગેરસમજ ઊભી થઈ શકે છે.

દા.ત., એક કંપની કોઈ નવી વસ્તુનું ઉત્પાદન શરૂ કરે છે અને તેના વેચાણ માટે જાહેરાત કરે તો શરૂઆતમાં સામાન્ય રીતે વસ્તુની ગુણવત્તા સારી હોય તો જાહેરાત-ખર્ચ વધવાની સાથે તે વસ્તુનું વેચાણ પણ વધે છે. પરંતુ એક સમય મર્યાદા બાદ વધુ જાહેરાત-ખર્ચ કરવામાં આવે તોપણ તેના વેચાણમાં ખાસ ફેરફાર થતો નથી. શરૂઆતના ઉત્પાદન સમયે જાહેરાત-ખર્ચ અને વેચાણ વચ્ચે સામાન્ય રીતે ગાઢ ધન સહસંબંધ જોવા મળે પરંતુ અમુક સમય પછી આમ ન પણ બને. એટલે જાહેરાત-ખર્ચ અને વેચાણ વચ્ચે ગાઢ ધન સહસંબંધ છે તે અર્થઘટન તેના સમયગાળાની બહારની માહિતી માટે લાગુ પાડી શકાય નહિ.

કેટલાંક ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ 26 : નીચે આપેલ પરિણામો પરથી સહસંબંધાંકની કિંમત શોધો.

$\boldsymbol{Cov\,(x, y) : s_x^2 = 3 : 5}$ **અને** $\boldsymbol{s_x : s_y = 1 : 2}$

અહીં, $Cov\,(x, y) : s_x^2 = 3 : 5$ $\quad \therefore \quad \frac{Cov(x, y)}{s_x^2} = \frac{3}{5}$

અને $s_x : s_y = 1 : 2$ $\quad \therefore \quad \frac{s_x}{s_y} = \frac{1}{2}$

હવે,
$$r = \frac{Cov(x, y)}{s_x\ s_y} = \frac{Cov(x, y)}{s_x^2} \times \frac{s_x}{s_y}$$
$$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{3}{10}$$
$$\therefore \quad r = 0.3$$

ઉદાહરણ 27 : એક દ્વિચલ માહિતી પરથી નીચેનાં પરિણામો મળે છે.

$n = 10$, $\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = 72$, $s_x = 3$ અને $\Sigma(y-\bar{y})^2 = 160$ આ પરથી સહસંબંધાંક શોધો.

આપેલી વીગત પરથી સૌપ્રથમ આપણે s_y શોધીશું.

$$s_y = \sqrt{\frac{\Sigma(y-\bar{y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{160}{10}} = \sqrt{16} = 4$$

હવે, નીચેના સૂત્રમાં જરૂરી કિંમતો મૂકતાં,

$$r = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n s_x s_y}$$

$$= \frac{72}{10(3)(4)}$$

$$= \frac{72}{120}$$

$$\therefore \quad r = 0.6$$

ઉદાહરણ 28 : એક શિક્ષણવિદ્ે મોબાઇલ ફોનમાં સોશિયલ મીડિયાના વપરાશ અને પરિક્ષાના પરિણામ વચ્ચે સંબંધ જાણવા એક પ્રયોગ કર્યો. તે માટે પસંદ થયેલા દસ વિદ્યાર્થીઓના સમૂહમાં તેઓએ છેલ્લા અઠવાડિયામાં મોબાઇલ ફોનમાં 'સોશિયલ મીડિયા' પર ગાળેલો સમય x (કલાકમાં) અને પછી તરત લેવાયેલ 50 ગુણની પરીક્ષામાં મેળવેલ ગુણ y પરથી નીચેનાં પરિણામો મળે છે.

$\Sigma x = 133$, $\Sigma y = 220$, $\Sigma x^2 = 2344$, $\Sigma y^2 = 6500$ અને $\Sigma xy = 3500$

પાછળથી માલૂમ પડ્યું એ X અને Y નાં અવલોકનોની એક જોડ $(15, 25)$ ને બદલે $(13, 20)$ લેવાઈ હતી. આ પરથી X અને Y વચ્ચે સહસંબંધાંકની સાચી કિંમત શોધો.

અહીં $n = 10$, $\Sigma x = 133$, $\Sigma y = 220$, $\Sigma x^2 = 2344$, $\Sigma y^2 = 6500$ અને $\Sigma xy = 3500$

ખોટી જોડ : $(13, 20)$

સાચી જોડ : $(15, 25)$

હવે ઉપર્યુક્ત માપોની સુધારેલી કિંમતો નીચે મુજબ મેળવીએ.

$\Sigma x = 133 - 13 + 15 = 135$

$\Sigma y = 220 - 20 + 25 = 225$

$\Sigma x^2 = 2344 - (13)^2 + (15)^2 = 2344 - 169 + 225 = 2400$

$\Sigma y^2 = 6500 - (20)^2 + (25)^2 = 6500 - 400 + 625 = 6725$

$\Sigma xy = 3500 - (13 \times 20) + (15 \times 25) = 3500 - 260 + 375 = 3615$

હવે, આ સુધારેલી કિંમતો નીચેના સૂત્રમાં મૂકતાં,

$$r = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

$$= \frac{10(3615) - (135)(225)}{\sqrt{10(2400) - (135)^2} \cdot \sqrt{10(6725) - (225)^2}}$$

$$= \frac{36150 - 30375}{\sqrt{24000 - 18225} \cdot \sqrt{67250 - 50625}}$$

$$= \frac{5775}{\sqrt{5775} \cdot \sqrt{16625}}$$

$$= \frac{5775}{\sqrt{96009375}}$$

$$= \frac{5775}{9798.4374}$$

$$= 0.5894$$

$\therefore \quad r \simeq 0.59$

ઉદાહરણ 29 : (1) જો બે ચલ X અને Y વચ્ચે સહસંબંધાંક 0.5 હોય, તો નીચેનાની કિંમત શોધો.
(i) $r\ (x,\ -y)$ (ii) $r\ (-x,\ y)$ (iii) $r\ (-x,\ -y)$

અહીં $r\ (x,\ y) = 0.5$

સહસંબંધાંકના ગુણધર્મ (નં. 5) પરથી,

(i) $r(x, -y) = -r(x, y) = -0.5$

(ii) $r(-x, y) = -r(x, y) = -0.5$

(iii) $r(-x, -y) = r(x, y) = 0.5$

(2) જો $r(x, y) = 0.8$ હોય તો નીચેના માટે $r(u, v)$ શોધો.

(i) $u = x - 10$ અને $v = y + 10$

(ii) $u = \frac{x-5}{3}$ અને $v = 2y + 7$

(iii) $u = \frac{2x-3}{10}$ અને $v = \frac{10-y}{100}$

(iv) $u = \frac{5-x}{2}$ અને $v = \frac{5+y}{2}$

(v) $u = \frac{20-x}{3}$ અને $v = \frac{20-y}{7}$

અહીં, $r(x, y) = 0.8$

સહસંબંધાંકના ગુણધર્મ (4 અને 5)પરથી, u અને v ને વ્યાખ્યાયિત કરતાં $r(u, v)$ ની કિંમત X અને Y ના સહગુણકોના ચિહ્નો પર આધારિત રહેશે. એટલે કે $r(u, v) = r(x, y)$ અથવા $-r(x, y)$ થશે.

(i) $r\ (x - 10, y + 10) = r(u, v) = 0.8$

(ii) $r\left(\frac{x-5}{3}, 2y + 7\right) = r(u, v) = 0.8$

(iii) $r\left(\frac{2x-3}{10}, \frac{10-y}{100}\right) = r(u, v) = -0.8$

(iv) $r\left(\frac{5-x}{2}, \frac{5+y}{2}\right) = r(u, v) = -0.8$

(v) $r\left(\frac{20-x}{3}, \frac{20-y}{7}\right) = r(u, v) = 0.8$

ઉદાહરણ 30 : MBA ઇન્સ્ટિટ્યૂટના વિદ્યાર્થીઓના એક જૂથ દ્વારા શાળા કક્ષાએ અંતિમ વર્ષમાં અને સ્નાતક કક્ષાના અંતિમ વર્ષમાં પરીક્ષાના પરિણામો વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા માટેના પ્રોજેક્ટ દરમિયાન તેમણે લીધેલા નિદર્શના દસ વિદ્યાર્થીઓએ ધોરણ 12 માં મેળવેલા ગુણની ટકાવારી (x) અને સ્નાતક કક્ષાના અંતિમ વર્ષમાં મેળવેલા ગુણની ટકાવારી (y)ની માહિતી પરથી નીચેનાં પરિણામો મળે છે.

$$n = 10, \Sigma(x-65) = -2,\ \Sigma(y-60) = 2,\ \Sigma(x-65)^2 = 176,\ \Sigma(y-60)^2 = 140, \Sigma(x-65)(y-60) = 141$$

આ પરથી ધોરણ 12 અને સ્નાતક કક્ષાના અંતિમ વર્ષના ગુણની ટકાવારી વચ્ચે સહસંબંધાંકની કિંમત શોધો.

અહીં $\Sigma(x-65) = -2 \neq 0 \qquad \therefore\ A = 65$

$\Sigma(y-60) = 2 \neq 0 \qquad \therefore\ B = 60$

(અહીં વિચલનોનો સરવાળો શૂન્ય નથી, તેથી $65 \neq \bar{x}$ અને $60 \neq \bar{y}$)

હવે, $u = (x-65)$ અને $v = (y-60)$ વ્યાખ્યાયિત કરીએ.

તેથી, $\Sigma(x-65) = \Sigma u = -2,\ \Sigma(y-60) = \Sigma v = 2$

$\Sigma(x-65)^2 = \Sigma u^2 = 176,\ \Sigma(y-60)^2 = \Sigma v^2 = 140$

$\Sigma(x-65)(y-60) = \Sigma uv = 141$

ઉપર્યુક્ત કિંમતોને નીચેના સૂત્રમાં મૂકતાં,

$$r = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{\sqrt{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}}$$

$$= \frac{10(141) - (-2)(2)}{\sqrt{10(176) - (-2)^2} \cdot \sqrt{10(140) - (2)^2}}$$

$$= \frac{1414}{\sqrt{1756} \cdot \sqrt{1396}}$$

$$= \frac{1414}{\sqrt{2451376}}$$

$$= \frac{1414}{1565.6871}$$

$$= 0.9031$$

$$\therefore\ r \simeq 0.90$$

ઉદાહરણ 31 : કિશોરવયનાં બાળકોની ઉંમર વર્ષમાં (X) અને તેમની પ્રોટીનની દૈનિક જરૂરિયાત ગ્રામમાં (Y) વચ્ચેના સંબંધનો અભ્યાસ કરવા રાજ્યના આરોગ્ય વિભાગે મેળવેલા દસ બાળકોના નિદર્શમાંથી નીચેની માહિતી મળે છે.

$$\Sigma x = 140,\ \Sigma y = 150,\ \Sigma(x-10)^2 = 180,\quad \Sigma(y-15)^2 = 215, \Sigma(x-10)(y-15) = 60$$

આ પરથી X અને Y વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

અહીં, $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{140}{10} = 14,\quad \bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{150}{10} = 15$

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે ચલ x માટે વિચલનો મધ્યક $(\overline{x}=14)$ માંથી લીધેલા નથી. તેથી ઉકેલ મેળવવા માટે $u=(x-A)=(x-10)$ અને $v=(y-B)=(y-15)$ વ્યાખ્યાયિત કરવું અનુકૂળ રહેશે.

આપણને નીચેની માહિતી આપેલી છે.

$\Sigma(x-10)^2=\Sigma u^2=180,\ \Sigma(y-15)^2=\Sigma v^2=215,\ \Sigma(x-10)(y-15)=\Sigma uv=60$

હવે, r ના યોગ્ય સૂત્રનો ઉપયોગ કરવા સૌપ્રથમ Σu અને Σv ની કિંમતો આપણે શોધવી પડશે.

$\Sigma u=\Sigma(x-10)=\Sigma x-\Sigma 10=\Sigma x-n(10)=140-10(10)=140-100=40$

$\Sigma v=\Sigma(y-15)=\Sigma y-\Sigma 15=\Sigma y-n(15)=150-10(15)=150-150=0$

$\left\{\because\ \Sigma k=\underbrace{k+k+k+..........+k}_{n \text{ વખત}}=nk\right.$ જ્યાં, k અચળ$\}$

ઉપર્યુક્ત કિંમતોને નીચેના સૂત્રમાં મૂકતાં,

$$r = \frac{n\Sigma uv-(\Sigma u)(\Sigma v)}{\sqrt{n\Sigma u^2-(\Sigma u)^2}\cdot\sqrt{n\Sigma v^2-(\Sigma v)^2}}$$

$$= \frac{10(60)-(40)(0)}{\sqrt{10(180)-(40)^2}\cdot\sqrt{10(215)-(0)^2}}$$

$$= \frac{600-0}{\sqrt{1800-1600}\cdot\sqrt{2150-0}}$$

$$= \frac{600}{\sqrt{200}\cdot\sqrt{2150}}$$

$$= \frac{600}{\sqrt{430000}}$$

$$= \frac{600}{655.7439}$$

$$= 0.9150$$

$\therefore\quad r \simeq 0.92$

ઉદાહરણ 32 : બે જુદા જુદા વિષયોમાં વિદ્યાર્થીઓની ક્ષમતા વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા માટે એક શાળાના બાળકોમાંથી સાત વિદ્યાર્થીઓનો એક નિદર્શ લેવામાં આવે છે. આ સાત વિદ્યાર્થીઓએ બે વિષયોમાં મેળવેલાં ગુણની માહિતી પરથી તેમને આપેલા ક્રમોના તફાવતોના વર્ગોનો સરવાળો 25.5 મળે છે. વધુમાં એ પણ જાણવા મળે છે કે, કોઈ એક વિષયમાં બે વિદ્યાર્થીઓના ગુણ સરખા છે અને બાકી બધા જ ગુણ જુદા-જુદા છે. આ પરથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

અહીં $n = 7$ અને $\Sigma d^2=25.5$

બે વિદ્યાર્થીઓના એક વિષયમાં ગુણ સરખા છે. $(\therefore\ m=2)$ તેથી આપણે કહી શકીએ કે, અવલોકનોને ક્રમ આપવામાં ગાંઠ પડે છે અને તેથી CF મેળવવા માટે $\left(\frac{m^3-m}{12}\right)$ પદ એક જ વખત લેવું પડશે.

સુધારો CF = $\left(\frac{m^3-m}{12}\right) = \left(\frac{2^3-2}{12}\right) = 0.5$

$$r = 1-\frac{6\left[\Sigma d^2 + CF\right]}{n(n^2-1)}$$

$$= 1-\frac{6[25.5+0.5]}{7(49-1)}$$

$$= 1-\frac{6(26)}{336}$$

$$= 1-\frac{156}{336}$$

$$= 1 - 0.4643$$

$$= 0.5357$$

$$\therefore \quad r \simeq 0.54$$

સારાંશ

- **સહસંબંધ :** બે ચલની કિંમતોમાં એક સાથે ફેરફારો થતા હોય અને તેમની વચ્ચે પ્રત્યક્ષ કે પરોક્ષ કાર્યકારણનો સંબંધ હોય.
- **સુરેખ સહસંબંધ :** બે ચલની કિંમતોમાં થતો ફેરફાર અચળ પ્રમાણમાં હોય એટલે કે બે સહસંબંધિત ચલોની કિંમતોની જોડ દર્શાવતાં બિંદુઓ એક સુરેખા પર હોય.
- **ધન સહસંબંધ :** સહસંબંધિત ચલોની કિંમતોમાં થતા ફેરફારો એક જ દિશામાં હોય.
- **ઋણ સહસંબંધ :** સહસંબંધિત ચલોની કિંમતોમાં થતા ફેરફારો એકબીજાની વિરુદ્ધ દિશામાં હોય.
- **સહસંબંધાંક :** બે ચલ વચ્ચેના સુરેખ સહસંબંધની ઘનિષ્ઠતાનું સંખ્યાત્મક માપ r એટલે સહસંબંધાંક.
- **વિકીર્ણ આકૃતિ :** સુરેખ સહસંબંધ અને તેનો પ્રકાર (ધન કે ઋણ) જાણવાની એક સરળ પદ્ધતિ.
- **કાર્લ પિયર્સનની રીત :** બધા જ પ્રાપ્તાંકોનો ઉપયોગ કરી બે ચલ વચ્ચેના સુરેખ સહસંબંધનો પ્રકાર અને ઘનિષ્ઠતાનું માપ (r) શોધવા માટેની શ્રેષ્ઠ રીત.
- **સ્પિયરમૅનની ક્રમાંક સહસંબંધની રીત :** ગુણાત્મક ચલો વચ્ચેનો સહસંબંધાંક શોધવા માટેની રીત. જ્યારે સંખ્યાત્મક ચલોમાં પ્રસાર વધુ હોય ત્યારે સહસંબંધાંક મેળવવાની ઇચ્છનીય રીત.
- બે ચલ વચ્ચે કાર્યકારણનો સંબંધ પ્રસ્થાપિત (સાબિત) ન કરી શકાય પરંતુ તે છે એ ધારણા હેઠળ સહસંબંધનો અભ્યાસ કરવામાં આવે છે.
- $r = 0$ એ ફક્ત સુરેખ સહસંબંધનો અભાવ છે તેમ સૂચવે છે, પરંતુ અન્ય પ્રકારનો સહસંબંધ હોઈ શકે છે.

પ્રકરણની એક ઝલક

સહસંબંધ

- **સુરેખ સહસંબંધ**
  - **રીતો**
    - **વિકીર્ણ આકૃતિની રીત** – સહસંબંધનો ફક્ત પ્રકાર જ જાણી શકાય
    - **કાર્લ પિયર્સનની રીત** – સહસંબંધાંક શોધવાની શ્રેષ્ઠ રીત
    - **સ્પિયરમૅનની રીત** – ગુણાત્મક ચલો વચ્ચેનો સહસંબંધાંક શોધવાની રીત
- **વક્રીય સહસંબંધ**

સૂત્રોની યાદી

કાર્લ પિયર્સનની રીત :

સહસંબંધાંક $= r$

(1) $r = \dfrac{\text{સહ.વિચરણ}}{(X \text{ નું પ્ર.વિ.})(Y \text{ નું પ્ર.વિ.})} = \dfrac{Cov(X,Y)}{s_x \cdot s_y}$

જ્યાં, $Cov(X,Y) = \dfrac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n} = \dfrac{\Sigma xy - n\bar{x}\,\bar{y}}{n}$

$s_x = \sqrt{\dfrac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}}$ અને $s_y = \sqrt{\dfrac{\Sigma(y-\bar{y})^2}{n}}$

(2) $r = \dfrac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2} \cdot \sqrt{\Sigma(y-\bar{y})^2}}$

(3) $r = \dfrac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$

(4) $r = \dfrac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{\sqrt{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}}$ જ્યાં, $u = x - A$ અથવા $\dfrac{x-A}{c_x}$, $v = y - B$ અથવા $\dfrac{y-B}{c_y}$

(5) $r = \dfrac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n \cdot s_x \cdot s_y}$

(6) $r = \dfrac{\Sigma xy - n\bar{x}\,\bar{y}}{n \cdot s_x \cdot s_y}$

(5) અને (6) ખાસ કરીને ટૂંકા દાખલા માટે

સ્પિયરમૅનની ક્રમાંક સહસંબંધની રીત :

(7) $r = 1 - \dfrac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$ જ્યારે અવલોકનો પુનરાવર્તિત ન થતા હોય.

(8) $r = 1 - \dfrac{6\left[\Sigma d^2 + CF\right]}{n(n^2-1)}$ જ્યારે અમુક અવલોકનો પુનરાવર્તિત થતા હોય.

જ્યાં $d = x$ નો ક્રમ $-$ y નો ક્રમ $= R_x - R_y$

$CF =$ સુધારો $= \Sigma\left(\dfrac{m^3-m}{12}\right)$

$m =$ કોઈ અવલોકન જેટલી વખત પુનરાવર્તન પામે તે સંખ્યા

સ્વાધ્યાય 2

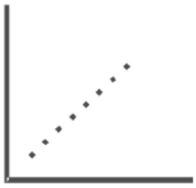
વિભાગ A

નીચે આપેલ બહુવિકલ્પ પ્રશ્નો માટે સાચા વિકલ્પની પસંદગી કરો :

1. સહસંબંધના સંદર્ભમાં જે આકૃતિમાં જોડયુક્ત બિંદુઓ (x,y) દર્શાવવામાં આવે તે આકૃતિને તમે શું કહેશો ?

(a) સ્તંભાલેખ (b) વર્તુળ આકૃતિ (c) વિકીર્ણ આકૃતિ (d) આવૃત્તિ વક્ર

2. જો X અને Y વચ્ચે નીચે મુજબ વિકીર્ણ આકૃતિ મળે તો બે ચલ કેવો સહસંબંધ ધરાવે છે ?



(a) સંપૂર્ણ ધન સહસંબંધ (b) આંશિક ધન સહસંબંધ

(c) સંપૂર્ણ ઋણ સહસંબંધ (d) આંશિક ઋણ સહસંબંધ

3. જો X અને Y વચ્ચે નીચે મુજબ વિકીર્ણ આકૃતિ મળે તો તે બે ચલ કેવો સહસંબંધ ધરાવે છે ?

(a) સંપૂર્ણ ધન સહસંબંધ (b) આંશિક ધન સહસંબંધ

(c) સંપૂર્ણ ઋણ સહસંબંધ (d) આંશિક ઋણ સહસંબંધ

4. વિકીર્ણ આકૃતિમાં બધાં જ બિંદુઓ એક જ સુરેખા પર આવેલાં હોય તો r ની કિંમત શું થાય ?

(a) 0 (b) 1 અથવા –1 (c) 0.5 (d) –0.5

5. સહસંબંધાંક rનો વિસ્તાર શું છે ?

(a) $-1 < r < 1$ (b) 0 થી 1 (c) $-1 \le r \le 1$ (d) –1 થી 0

6. જો ચલ 'વજન'નો એકમ કિગ્રા અને ચલ 'ઊંચાઈ'નો એકમ સેમી હોય, તો તેમની વચ્ચેના સહસંબંધાંકનો એકમ વિશે શું કહી શકાય ?

(a) કિગ્રા (b) સેમી (c) કિમી (d) એકમ ન હોય

7. જો બે ચલ વચ્ચે અચળ પ્રમાણમાં એકબીજાથી વિરુદ્ધ દિશામાં ફેરફાર થતા હોય, તો તે બે ચલ વચ્ચે કેવા પ્રકારનો સહસંબંધ મળે ?

(a) આંશિક ધન સહસંબંધ (b) સંપૂર્ણ ઋણ સહસંબંધ

(c) સંપૂર્ણ ધન સહસંબંધ (d) આંશિક ઋણ સહસંબંધ

8. કાર્લ પિયર્સનના સહસંબંધાંક ગણવાના સૂત્રમાં અંશ શું દર્શાવે છે ?

(a) X અને Y ના વિચરણોનો ગુણાકાર (b) X અને Y નું સહવિચરણ

(c) X નું વિચરણ (d) Y નું વિચરણ

9. નીચેના પૈકી r ની કઈ કિંમત શક્ય નથી ?

(a) 0.99 (b) –1.07 (c) –0.85 (d) 0

10. જો $u = \frac{x-A}{c_x}$ અને $v = \frac{y-B}{c_y}$, $c_x > 0, c_y > 0$ હોય તો નીચેના પૈકી કયુ વિધાન સાચું છે ?

(a) $r(x, y) \neq r(u, v)$ (b) $r(x, y) > r(u, v)$ (c) $r(x, y) = r(u, v)$ (d) $r(x, y) < r(u, v)$

11. જો $r(x, y) = 0.7$ હોય, તો $r(x+0.2, y+0.2)$ ની કિંમત કેટલી થાય ?

(a) 0.7 (b) 0.9 (c) 1.1 (d) –0.7

12. જો $r(-x, y) = -0.5$ હોય, તો $r(x, -y)$ ની કિંમત કેટલી થાય ?

(a) 0.5 (b) –0.5 (c) 1 (d) 0

13. જો $\Sigma d^2 = 0$ હોય, તો ક્રમાંક સહસંબંધાંકની કિંમત કેટલી થાય ?

(a) 0 (b) –1 (c) 1 (d) 0.5

14. ક્રમાંક સહસંબંધની રીતમાં જો પ્રત્યેક અવલોકનની જોડ માટે પ્રચલિત સંકેતોમાં $R_x = R_y$ હોય, તો r ની કિંમત શું થાય ?

(a) 0 (b) –1 (c) 1 (d) 0.1

15. ક્રમાંક સહસંબંધની રીતમાં બે ચલના ક્રમાંકોના તફાવતોનો સરવાળો શું થાય ?

(a) 0 (b) –1 (c) 1 (d) કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા

16. ક્રમાંક સહસંબંધની રીતમાં જો બે ચલોના ક્રમ એકબીજાથી ઊલટા ક્રમમાં હોય, તો r ની કિંમત શું થાય ?

(a) $r = 0$ (b) $r = -1$ (c) $r = 1$ (d) $r = 0.1$

17. ક્રમાંક સહસંબંધમાં પુનરાવર્તન પામતા પ્રત્યેક અવલોકન માટે પ્રચલિત સંકેતોમાં Σd^2 માં કયું પદ ઉમેરવામાં આવે છે ?

(a) $\frac{m^2-1}{12}$ (b) $\frac{m^3-m}{12}$ (c) $\frac{6m^3-m}{12}$ (d) $n(n^2-1)$

18. જ્યારે કોઈ વસ્તુના ભાવ સ્થિર હોય ત્યારે તે વસ્તુના વેચાયેલા એકમોની સંખ્યા અને તેનાથી થતી આવક વચ્ચે કેવો સહસંબંધ થશે ?

(a) સંપૂર્ણ ધન (b) આંશિક ધન (c) સંપૂર્ણ ઋણ (d) આંશિક ઋણ

વિભાગ B

નીચેના પ્રશ્નોના એક વાક્યમાં જવાબ આપો :

1. સહસંબંધની વ્યાખ્યા આપો.

2. સહસંબંધાંકની વ્યાખ્યા આપો.

નીચે આપેલ પ્રશ્ન 3થી 6માં ચલની આપેલી જોડ વચ્ચે ધન સહસંબંધ છે કે ઋણ સહસંબંધ છે તે જણાવો.

3. જીવન વીમાની કોઈ એક યોજના હેઠળ વીમો ઉતરાવતી વખતે પુખ્ત વયની વ્યક્તિની ઉંમર અને જીવન વીમાનું પ્રીમિયમ

4. કોઈ દેશમાં બહુસ્વીકૃત વસ્તુનું છેલ્લાં પાંચ વર્ષનું વાર્ષિક વેચાણ અને તેનાથી થતો નફો

5. કોઈ દેશમાં સામાન્ય વ્યક્તિની આવક સ્થિર હોય ત્યારે ફુગાવાનો દર અને તે દેશના સામાન્ય વ્યક્તિની ખરીદશક્તિ

6. સમુદ્ર સપાટીથી સ્થળની ઊંચાઈ અને હવામાં ઑક્સિજનનું પ્રમાણ

7. ક્રૂડ ઑઇલની વાર્ષિક આયાત અને તે જ સમયગાળામાં થતાં લગ્નોની સંખ્યા વચ્ચેના સહસંબંધ વિશે શું કહી શકાય ?

8. X અને Y વચ્ચે સહસંબંધાંક 0.4 છે. હવે X ના પ્રત્યેક અવલોકનમાં 5 ઉમેરવામાં આવે અને Y ના પ્રત્યેક અવલોકનોમાંથી 10 બાદ કરવામાં આવે તો આ ફેરફાર બાદ સહસંબંધાંક શું થશે ?

9. વિકીર્ણ આકૃતિની મુખ્ય મર્યાદા શું છે ?

10. જો $n\left(n^2-1\right)$ની કિંમત Σd^2ની કિંમત કરતાં છ ગણી હોય, તો rની કિંમત શું થાય ?

11. જો સહવિચરણનું મૂલ્ય ઋણ હોય, તો સહસંબંધાંક r નું ચિહ્ન શું થાય ?

વિભાગ C

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. ધન સહસંબંધનો અર્થ ઉદાહરણ સહિત સમજાવો.

2. ઋણ સહસંબંધનો અર્થ ઉદાહરણ સહિત સમજાવો.

3. કાર્લ પિયર્સનની રીતની ધારણાઓ લખો.

4. વિકીર્ણ આકૃતિની વ્યાખ્યા આપો.

5. અર્થહીન સહસંબંધ એટલે શું ?

6. કાર્ય-કારણનો સંબંધ સમજાવો.

7. સમજાવો : સંપૂર્ણ ધન સહસંબંધ

8. સમજાવો : સંપૂર્ણ ઋણ સહસંબંધ

9. ક્રમાંક સહસંબંધની જરૂર ક્યારે પડે છે ?

10. કયા સંજોગોમાં કાર્લ પિયર્સનની રીતે અને ક્રમાંક સહસંબંધની રીતે મેળવેલા સહસંબંધાંક સરખા થાય છે ?

11. જો $Cov(x, y)=120,\ s_x=12,\ s_y=15$ હોય તો rની કિંમત શોધો.

12. જો $\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})=-65,\ s_x=3,\ s_y=4$ અને $n=10$ હોય, તો rની કિંમત શોધો.

13. અવલોકનોની 10 જોડ માટે $\Sigma d^2=120$ હોય, તો ક્રમાંક સહસંબંધાંકની કિંમત શોધો.

વિભાગ D

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. વિકીર્ણ આકૃતિની રીત સમજાવો.
2. વિકીર્ણ આકૃતિની રીતના ગુણ અને મર્યાદા જણાવો.
3. સહસંબંધાંકના ગુણધર્મો લખો.
4. કાર્લ પિયર્સનની રીતના ગુણ અને મર્યાદાઓ જણાવો.
5. $r=1$, $r=-1$ અને $r=0$નું અર્થઘટન કરો.
6. સ્પિયરમૅનના ક્રમાંક સહસંબંધની રીત સમજાવો.
7. સ્પિયરમૅનના ક્રમાંક સહસંબંધની રીતના ગુણ અને મર્યાદાઓ જણાવો.
8. આંશિક સહસંબંધનું અર્થઘટન તમે કેવી રીતે કરશો ?
9. સહસંબંધાંકના અર્થઘટનમાં રાખવી પડતી સાવચેતી જણાવો.
10. બે ચલ વરસાદ મિમિમાં (X) અને પાકની ઊપજ ક્વિન્ટલ/હેક્ટર (Y) વિશે નીચેની માહિતી મળે છે.

    $n=10$, $\bar{x}=120$, $\bar{y}=150$, $s_x=30$, $s_y=40$ અને $\Sigma xy=189000$ આ પરથી સહસંબંધાંકની કિંમત શોધો.
11. અવલોકનોની 9 જોડ માટે નીચેની માહિતી મળે છે.

    $\Sigma x=51$, $\Sigma y=72$, $\Sigma x^2=315$, $\Sigma y^2=582$, $\Sigma xy=408$ આ પરથી સહસંબંધાંક શોધો.
12. એક નૃત્ય સ્પર્ધામાં આઠ સ્પર્ધકોને બે નિર્ણાયકોએ આપેલા ક્રમ પરથી નીચેની માહિતી મળે છે.

    $\Sigma\left(R_x-R_y\right)^2=126$

    જ્યાં, R_x અને R_y એ બે નિર્ણાયકો દ્વારા સ્પર્ધકોને મળેલા ક્રમ દર્શાવે છે. આ પરથી સ્પિયરમૅનનો ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.
13. નોકરી માટે આવેલા પાંચ ઉમેદવારોને ઇન્ટરવ્યુને આધારે બે નિષ્ણાતોએ આપેલા ક્રમ (3, 5), (5, 4), (1, 2), (2, 3) અને (4, 1) છે. આ માહિતી પરથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

વિભાગ E

નીચેનાના ઉકેલ મેળવો :

1. એક રોગચાળાના સમય દરમિયાન નાક પર પહેરવાના માસ્કની વેચાણ કિંમત અને તેની માંગ વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા એકઠી કરાયેલી માહિતી નીચે મુજબ છે.

ભાવ (₹)	38	45	40	42	35
માંગ (એકમો)	103	92	97	98	100

આ પરથી માસ્કના ભાવ અને ભાવ વચ્ચે કાર્લ પિયર્સનની રીતે સહસંબંધાંક શોધો.

2. એક અનુસ્નાતક કક્ષાના અભ્યાસમાં વિદ્યાર્થીઓના માનવ સંસાધન સંચાલન અને વ્યક્તિત્વ વિકાસ જેવા વિષયોમાં તેમની ક્ષમતા વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા પાંચ વિદ્યાર્થીઓનો નિદર્શ લઈ નીચે મુજબ માહિતી મેળવવામાં આવે છે.

વિદ્યાર્થી	1	2	3	4	5
માનવસંશાધન સંચાલનમાં ગુણ	45	25	40	20	45
વ્યક્તિત્વ વિકાસમાં ગુણ	47	23	17	35	48

આ માહિતી પરથી બંને વિષયોના ગુણ વચ્ચે કાર્લ પિયર્સનની રીતે સહસંબંધાંક ગણો.

3. એક વિક્રેતા વિવિધ બ્રાંડની લિપસ્ટિકને તેમની લોકપ્રિયતા અનુસાર શૉકેસમાં પ્રદર્શિત કરવા ઇચ્છે છે. તેથી જુદી જુદી બ્રાંડની લિપસ્ટિકને ક્રમ આપવા બે નિષ્ણાત પ્રેયલ અને નિશીને આમંત્રિત કરે છે.

લિપસ્ટિક	A	B	C	D	E	F	G
પ્રેયલે આપેલ ક્રમ	5	6	7	1	3	2	4
નિશીએ આપેલ ક્રમ	5	7	6	2	1	4	3

આ પરથી બંને નિષ્ણાતોએ આપેલા નિર્ણયો વચ્ચેની સામ્યતા જાણવા ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

4. અમદાવાદ શહેરમાં ચ્હાના ભાવ અને કૉફીના ભાવ વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા માટે એક વેપારી છેલ્લા છ મહિનામાં ચ્હા અને કૉફીના ભાવો વિશે નીચે મુજબ માહિતી મેળવે છે.

ચ્હાનો કિગ્રા દીઠ ભાવ (₹)	340	370	450	320	300	360
કૉફીનો 100 ગ્રામ દીઠ ભાવ (₹)	190	215	200	180	163	175

આ પરથી ચ્હા અને કૉફીના ભાવો વચ્ચે ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

5. એક વિદેશી ફળની સ્થાનિક બજારમાં ખૂબજ અનિશ્ચિત માંગ જોવા મળે છે. ફળોનો એક વિક્રેતા તે વિદેશી ફળનો ભાવ અને પુરવઠા વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા નીચે મુજબ છેલ્લા દસ મહિનાના સરેરાશ ભાવ અને પુરવઠાની વીગતો મેળવે છે.

સરેરાશ એકમ દીઠ ભાવ (₹)	65	68	43	38	77	48	35	30	25	50
પુરવઠો (સો એકમો)	52	53	42	60	45	41	37	38	25	27

આ માહિતી પરથી સરેરાશ ભાવ અને પુરવઠા વચ્ચે ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

6. ઓછા સમયના અંતરે વિદ્યાર્થીઓની પરીક્ષા લેવામાં આવે તો પરિણામો વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા એક શિક્ષકે છેલ્લા બે અઠવાડિયામાં લીધેલી બે પરીક્ષાના પરિણામ પરથી સાત વિદ્યાર્થીઓના નીચે મુજબ ક્રમ મળે છે.

વિદ્યાર્થી	A	B	C	D	E	F	G
પ્રથમ પરીક્ષામાં ક્રમ	5	1	2	3.5	3.5	7	6
દ્વિતીય પરીક્ષામાં ક્રમ	7	1	4	6	5	3	2

આ પરથી બંને પરીક્ષાના પરિણામો વચ્ચે સામ્યતા જાણવા ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

વિભાગ F

નીચેનાના ઉકેલ મેળવો :

1. આઠ જિલ્લામાં ખાતરનો વપરાશ (ટનમાં) અને ઉત્પાદકતા (ટનમાં)ની માહિતી નીચે આપેલ છે.

ખાતર (ટન)	15	18	20	25	29	35	40	38
ઉત્પાદકતા (ટન)	85	93	95	105	115	130	140	145

કાર્લ પિયર્સનની રીતે સહસંબંધાંક શોધો.

2. એક મોટા શહેરનાં છ બાળકોએ વિડિયો ગૅમ્સ રમવામાં ગાળેલા અઠવાડિક સરેરાશ કલાકો અને એક પરીક્ષામાં તેમણે મેળવેલા મૂલ્યાંકન ગુણ (Grade Point)ની નીચેની માહિતી પરથી કાર્લ પિયર્સનની રીતે સહસંબંધાંક શોધો.

વિડિયો ગૅમ્સ રમવામાં ગાળેલા અઠવાડિક સરેરાશ કલાકો	43	47	45	50	40	51
પરીક્ષામાં મેળવેલા મૂલ્યાંકન ગુણ	5.2	4.9	5.0	4.7	5.4	4.3

3. નીચેની માહિતી પરથી વસ્તીની ગીચતા (ચોરસ કિમીદીઠ) અને મૃત્યુદર (દર હજારે) વચ્ચે કાર્લ પિયર્સનની રીતે સહસંબંધાંક શોધો.

શહેર	A	B	C	D	E	F	G
ગીચતા (ચો કિમી દીઠ)	750	600	350	500	200	700	850
મૃત્યુદર (દર હજારે)	30	20	15	20	10	25	50

4. ઈલેક્ટ્રિક પંખાનું ઉત્પાદન કરતી કંપનીઓની જાહેરાત-ખર્ચ અને વેચાણ વચ્ચેના સંબંધનો અભ્યાસ કરવા નીચેની માહિતી એકઠી કરવામાં આવી છે. આ માહિતી પરથી કંપનીઓના જાહેરાત-ખર્ચ અને વેચાણ વચ્ચેનો સહસંબંધાંક કાર્લ પિયર્સનની રીતે મેળવો.

કંપની	A	B	C	D	E	F
જાહેરાત ખર્ચ (લાખ ₹)	140	120	80	100	80	180
ઈલેક્ટ્રિક પંખાનું વેચાણ (કરોડ ₹)	35	45	15	40	20	50

5. એક ડૉક્ટર તેમના એક સંશોધન કાર્ય માટે માતાના વજન અને જન્મ સમયે તેના બાળકના વજન વચ્ચેનો સંબધ જાણવા એક વિસ્તારના અમુક મેટરનીટી હોમમાંથી સાત માતા અને તેમના બાળકના વજન વિશે માહિતી મેળવે છે.

માતાનું વજન (કિગ્રા)	59	72	66	64	77	66	60
બાળકનું વજન (કિગ્રા)	2.5	3.4	3.1	2.7	2.8	2.3	3.0

આ માહિતી પરથી માતા અને બાળકના વજન વચ્ચે ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

6. અમદાવાદમાં દિવસનું મહત્તમ તાપમાન અને આઇસક્રીમના વેચાણ વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા માટે નીચેની માહિતી મેળવવામાં આવી છે.

મહત્તમ તાપમાન (સેલ્સિયસ)	35	42	40	39	44	40	45	40
આઇસક્રીમનું વેચાણ (કિગ્રા)	600	680	750	630	920	750	900	720

આ પરથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક ગણો.

7. વિદેશમાં અભ્યાસ કરવા માટે જરૂરી પ્રવેશ પરીક્ષા ઑનલાઇન લેવાય છે. તે ઑનલાઇન પરીક્ષા (જેમાં ખોટા જવાબ પડે તો ઋણ ગુણ મળે તે પદ્ધતિ છે)માં નિદર્શમાં પસંદ થયેલ પાંચ વિદ્યાર્થીઓએ આપસૂઝ આવડત (reasoning ability) અને ઇંગ્લિશ બોલવાની આવડતમાં મેળવેલા ગુણ નીચે મુજબ છે.

વિદ્યાર્થી	A	B	C	D	E
આપસૂઝ આવડતમાં ગુણ	5	5	5	5	5
ઇંગ્લિશ બોલવાની આવડતમાં ગુણ	2	–2	–2	0	2

આ પરથી વિદ્યાર્થીઓની આપસૂઝ આવડત અને ઇંગ્લિશ બોલવાની આવડત વચ્ચે ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

8. એક નૃત્યની સ્પર્ધામાં બે નૃત્યના ગુરુ, છ નૃત્યકાર A, B, C, D, E અને F ને તેમના નૃત્ય પરથી નીચે મુજબ ક્રમ આપે છે.

ક્રમ	1	2	3	4	5	6
પહેલા ગુરુ દ્વારા	B	F	A	C	D	E
બીજા ગુરુ દ્વારા	F	A	C	B	E	D

આ પરથી બંને ગુરુના મૂલ્યાંકન વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

9. બે ચલ ફુગાવો (X) અને વ્યાજદર (Y) માટે નીચેની માહિતી મળે છે.

$$n = 50,\ \Sigma x = 500,\ \Sigma y = 300,\ \Sigma x^2 = 5450,\ \Sigma y^2 = 2000,\ \Sigma xy = 3090$$

પાછળથી જાણવા મળ્યું કે, અવલોકનની એક જોડ (10, 6) ભૂલથી વધારાની લેવાઈ ગઈ હતી. આ અવલોકનની જોડને માહિતીમાંથી કાઢીને સહસંબંધાંકની કિંમત શોધો.

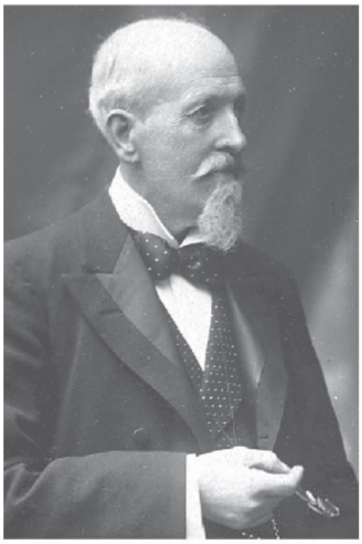
10. દસ પેઢી માટે વેચાણ (X) અને ખર્ચ (Y) વિશે નીચે મુજબ માહિતી મળે છે.

$$\bar{x} = 58,\ \bar{y} = 14,\ \Sigma(x-65)^2 = 850,\ \Sigma(y-13)^2 = 32,\ \Sigma(x-65)(y-13) = 0$$

આ પરથી સહસંબંધાંક શોધો.

11. 10 વ્યક્તિઓ દૈનિક કેલરી X લે છે અને તેમનું વજન Y કિગ્રા છે. તે માહિતી પરથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક 0.6 મળે છે. પાછળથી ચકાસણી કરતાં માલૂમ પડ્યું કે, એક વ્યક્તિના X અને Y ચલોના ક્રમોની વચ્ચેનો તફાવત 4ને બદલે 2 લેવાયો હતો, તો ક્રમાંક સહસંબંધાંકની સાચી કિંમત શોધો.

12. 10 વ્યક્તિઓ માટે આરોગ્યનો આંક (health index) x અને અપેક્ષિત આયુષ્ય (Life expectancy) y વિશે માહિતી મેળવવામાં આવી છે. ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધવા આ માહિતીને ક્રમ આપવામાં આવે છે અને બધા ક્રમોના તફાવતોના વર્ગોનો સરવાળો 42.5 મળે છે. આરોગ્ય આંક 70 માહિતીમાં ત્રણ વખત અને અપેક્ષિત આયુષ્ય 45 માહિતીમાં બે વખત પુનરાવર્તન પામે છે, તો આ માહિતી પરથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.



Charles Edward Spearman
(1863 –1945)

Charles Edward Spearman was an English psychologist known for work in statistics, as a pioneer of factor analysis and for Spearman's rank correlation coefficient. He also did seminal work on models for human intelligence, including his theory that disparate cognitive test scores reflect a single General intelligence factor and coining the term g factor.

After serving army for 15 years, he went on to study for a Ph.D. in experimental psychology. Spearman joined University College London and stayed there until he retired in 1931. Initially he was Reader and head of the small psychological laboratory. In 1911 he was promoted to the Grote professorship of the Philosophy of Mind and Logic. His title changed to Professor of Psychology in 1928 when a separate Department of Psychology was created.

His many published papers cover a wide field, but he is especially distinguished by his pioneer work in the application of mathematical methods to the analysis of the human mind and his original studies of correlation in this sphere.

“Prediction is very difficult, especially about the future.”

– Niels Bohr

3

સુરેખ નિયતસંબંધ

(Linear Regression)

વિષયવસ્તુ :

3.1 પ્રસ્તાવના

3.2 સુરેખ નિયતસંબંધ મૉડેલ

3.3 નિયતસંબંધ રેખાનું અન્વાયોજન

3.3.1 વિકીર્ણ આકૃતિની રીત

3.3.2 ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત

3.4 નિયતસંબંધના અભ્યાસની ઉપયોગિતા

3.5 સહવિચરણ અને સહસંબંધાંક પરથી નિયતસંબંધાંક

3.6 નિશ્ચાયકતાનો આંક

3.7 નિયતસંબંધાંકના ગુણધર્મો

3.8 નિયતસંબંધના ઉપયોગમાં રાખવી પડતી સાવચેતી

3.1 પ્રસ્તાવના

આપણે અગાઉના પ્રકરણ 2માં સહસંબંધનો અભ્યાસ કર્યો. તેમાં આપણે જોયુ કે સહસંબંધાંક દ્વારા બે ચલ વચ્ચે સંબંધ ઋણ છે કે ધન છે તેનો ખ્યાલ આવે છે. ઉપરાંત તેમની વચ્ચેની નિકટતાનું સંખ્યાત્મક માપ પણ મળે છે, પરંતુ સહસંબંધાંક પરથી એક ચલની જ્ઞાત કિંમત માટે તેને અનુરૂપ બીજા ચલની અપેક્ષિત કે અનુમાનિત કિંમત મેળવી શકાતી નથી. ઘણી વખત જ્યારે બે ચલ વચ્ચે કોઈ સંબંધ હોય ત્યારે એક ચલની જ્ઞાત કિંમત પરથી બીજા ચલની અંદાજિત કે અનુમાનિત કિંમત તે સંબંધનો ઉપયોગ કરી મેળવવાની જરૂરિયાત ઊભી થાય છે.

દા.ત., આપણે જાણીએ છીએ કે કોઈ વસ્તુના જાહેરાત-ખર્ચ અને તે વસ્તુના વેચાણ વચ્ચે સહસંબંધ છે. હવે જાહેરાત-ખર્ચની કોઈ કિંમતને અનુરૂપ વસ્તુના વેચાણ વિશે અનુમાન કરવુ હોય તો ફક્ત સહસંબંધ પરથી તે મેળવી શકાતું નથી. આ માટે નિયતસંબંધનો ઉપયોગ કરવો જરૂરી બને છે.

નિયતસંબંધ (Regression)નો શાબ્દિક અર્થ 'પ્રતિગમન' અથવા 'સરેરાશ કિંમત તરફ પરત આવવું' એવો થાય છે. માનવ આનુવંશિકતાના અભ્યાસ દરમિયાન સર ફ્રાન્સિસ ગોલ્ટન નામના આંકડાશાસ્ત્રીએ સૌપ્રથમ 'નિયતસંબંધ' પદનો ઉપયોગ કર્યો. પિતા અને પુખ્તવયના પુત્રની 1000 જોડ માટે ઊંચાઈની માહિતી એકઠી કરી તેમણે નીચેના રસપ્રદ તારણો મેળવ્યાં.

(i) વધુ ઊંચાઈવાળા પિતાના પુત્રો વધુ ઊંચાઈ અને ઓછી ઊંચાઈવાળા પિતાના પુત્રો ઓછી ઊંચાઈ ધરાવે છે.

(ii) વધુ ઊંચાઈ ધરાવતા પિતાના સમૂહની સરેરાશ ઊંચાઈ કરતા તેમના પુત્રોની સરેરાશ ઊંચાઈ ઓછી છે.

(iii) ઓછી ઊંચાઈ ધરાવતા પિતાના સમૂહની સરેરાશ ઊંચાઈ કરતા તેમના પુત્રોની સરેરાશ ઊંચાઈ વધુ છે.

ઉપરનાં તારણો પરથી સ્પષ્ટ છે કે, પુત્રોની ઊંચાઈ તેમના પિતાની ઊંચાઈના સંદર્ભમાં પીછેહઠ વલણ દર્શાવે છે. આ વલણને લીધે જ માનવજાત ઠીંગણા અને ખૂબ ઊંચા માણસો એવા બે ભાગોમાં વહેંચાઈ નથી. આ પ્રકારના સંબંધને દર્શાવવા સર ફ્રાન્સિસ ગોલ્ટને 'નિયતસંબંધ' એવું નામ આપ્યું.

નિયતસંબંધ એ બે સહસંબંધિત ચલ વચ્ચેનો વિધેયાત્મક સંબંધ છે. હવે આપણે બે ચલ વચ્ચે કાર્ય-કારણનો સંબંધ છે એવી પૂર્વધારણા લઈ તે ચલ વચ્ચેના નિયતસંબંધનો અભ્યાસ કરીશું.

3.2 સુરેખ નિયતસંબંધ મૉડેલ (Linear Regression Model)

કોઈ સંબંધ કે સમસ્યાને રજૂ કરતા એક કે તેથી વધુ સમીકરણોના સમૂહને મૉડેલ કહેવાય છે. કાર્ય-કારણનો સંબંધ ધરાવતા બે ચલ વચ્ચેના સંબંધને દર્શાવતા આંકડાશાસ્ત્રીય મૉડેલને નિયતસંબંધ મૉડેલ કહે છે. સામાન્ય રીતે કાર્ય-કારણનો સંબંધ ધરાવતા ચલમાં કારણ સ્વરૂપ ચલને X વડે દર્શાવાય છે. તેને આપણે નિરપેક્ષ અથવા કારણભૂત (explanatory) ચલ કહીશું. જ્યારે કાર્ય-સ્વરૂપ ચલને Y વડે દર્શાવાય છે, તેને આપણે સાપેક્ષ અથવા અસરયુક્ત (explained) ચલ કહીશું. નીચેનાં ઉદાહરણો દ્વારા નિરપેક્ષ ચલ અને સાપેક્ષ ચલનો અર્થ સમજીએ.

(i) 'જાહેરાત-ખર્ચ' અને 'વેચાણ' વચ્ચેના સંબંધમાં સામાન્ય રીતે 'જાહેરાત-ખર્ચ' વધે (કે ઘટે) તેને કારણે વેચાણ પણ વધે (કે ઘટે) છે. તેથી આપણે 'જાહેરાત-ખર્ચ'ને નિરપેક્ષ ચલ X તરીકે અને 'વેચાણ'ને સાપેક્ષ ચલ Y તરીકે લઈશું.

(ii) કોઈ વિસ્તારમાં 'વરસાદ' અને 'ચોખાની ઊપજ' વચ્ચેના સંબંધમાં સ્પષ્ટ છે કે, 'ચોખાની ઊપજ' એ 'વરસાદ' પર આધાર રાખે છે. તેથી આપણે 'વરસાદ'ને નિરપેક્ષ ચલ X તરીકે અને 'ચોખાની ઊપજ'ને સાપેક્ષ ચલ Y તરીકે લઈશું.

નિયતસંબંધ મૉડેલમાં સાપેક્ષ ચલ Yને નિરપેક્ષ ચલ Xના કોઈ યોગ્ય ગાણિતિક વિધેય દ્વારા રજૂ કરવામાં આવે છે. હવે આપણે સુરેખ નિયતસંબંધ મૉડેલને નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરીશું.

$$Y = \alpha + \beta X + u$$

જ્યાં, Y = સાપેક્ષ ચલ

X = નિરપેક્ષ ચલ

α = અચળાંક

β = અચળાંક

u = મૉડેલનો વિક્ષેપ (disturbance) ચલ

અહીં, u એ બે ચલ X અને Y વચ્ચે સુરેખ સંબંધની અપૂર્ણતા દર્શાવે છે. પ્રાકૃતિક વિજ્ઞાન (Natural Science) જેમકે ગણિતમાં સંપૂર્ણ સુરેખ સંબંધ શક્ય છે. તેથી દેખીતું છે કે આ કિસ્સામાં વિક્ષેપ ચલ uની કિંમત 0 થશે. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો જો બે ચલ X અને Y વચ્ચે સંપૂર્ણ સહસંબંધ હોય તો નિયતસંબંધ મૉડેલ $Y=\alpha+\beta X$ થાય. પરંતુ વેપાર, અર્થશાસ્ત્ર અને સામાજિક વિજ્ઞાનમાં બે ચલ વચ્ચે સામાન્ય રીતે સંપૂર્ણ સુરેખ સંબંધ જોવા મળતો નથી કારણ કે સહસંબંધિત ચલો પર અન્ય પરિબળોની અસર પણ થાય છે. એટલે કે જ્યારે X અને Y ચલ વચ્ચે આંશિક સહસંબંધ હોય ત્યારે નિયતસંબંધ મૉડેલનું સ્વરૂપ $Y=\alpha+\beta X+u$ થાય છે. ઉપર્યુક્ત ચર્ચા પરથી સુરેખ નિયતસંબંધને સરળ શબ્દોમાં નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય.

''બે સહસંબંધિત ચલો વચ્ચેનો ગાણિતિક કે વિધેયાત્મક સુરેખ સંબંધ કે જેના દ્વારા નિરપેક્ષ ચલની કોઈ આપેલી (જ્ઞાત) કિંમત માટે તેને અનુરૂપ સાપેક્ષ ચલની કિંમતનું અનુમાન થઈ શકે તેને **સુરેખ નિયતસંબંધ** કહે છે.''

3.3 નિયતસંબંધ રેખાનું અન્વાયોજન (Fitting of Regression Line)

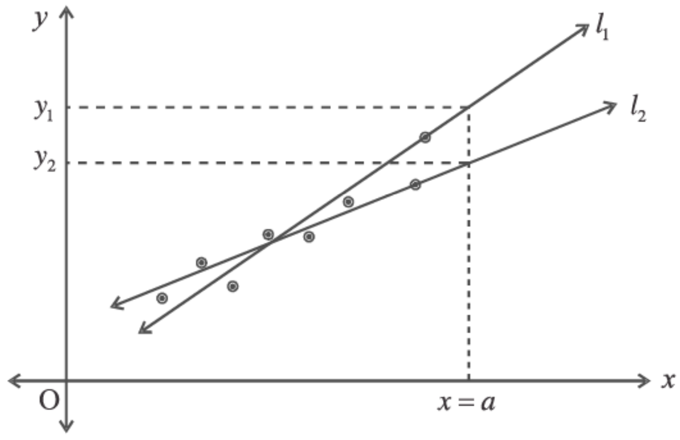
બે સહસંબંધિત ચલોની વિકીર્ણ આકૃતિમાં જો બધાં બિંદુઓ કોઈ રેખાની આસપાસ જ હોય તો આપણે કહી શકીએ કે, ચલો વચ્ચે સુરેખ નિયતસંબંધ છે. બે ચલો વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવતી આવી રેખા મેળવવાની પદ્ધતિને નિયતસંબંધ રેખાનું અન્વાયોજન કહે છે.

નિયતસંબંધ રેખાના અન્વાયોજન માટે બે રીતો છે : (1) વિકીર્ણ આકૃતિની રીત (2) ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત

3.3.1 વિકીર્ણ આકૃતિની રીત

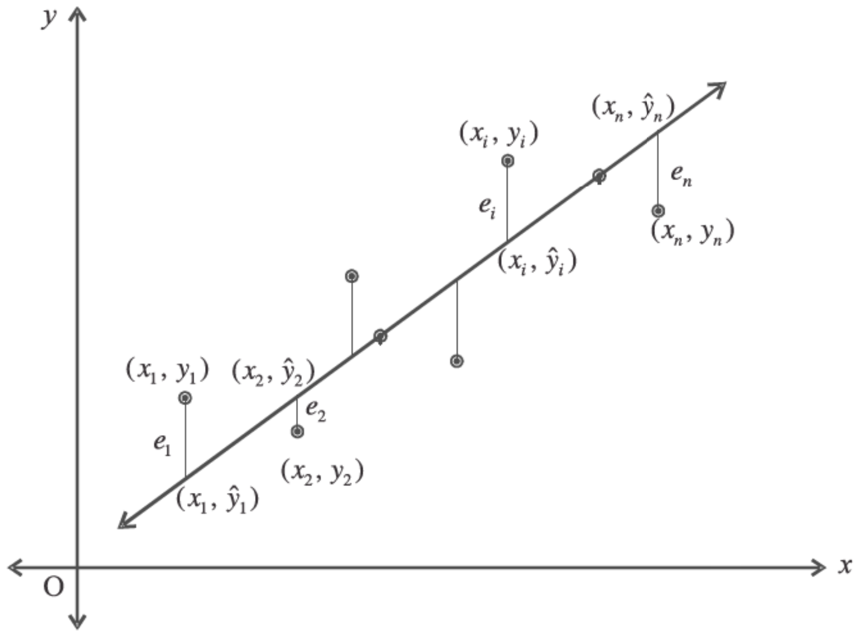
ધારો કે સહસંબંધિત ચલ X અને Y નાં અવલોકનોની n ક્રમિત જોડ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$ છે. આ માહિતી પરથી વિકીર્ણ આકૃતિ દોરવામાં આવે છે. હવે વિકીર્ણ આકૃતિનાં લગભગ બધાં જ બિંદુઓની શક્ય તેટલી નજીકથી પસાર થાય તેવી એક રેખા દોરવામાં આવે છે. જો Y સાપેક્ષ ચલ અને X નિરપેક્ષ ચલ હોય તો આવી રેખાને Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા કહેવાય છે અને તે પરથી નિરપેક્ષ ચલ X ની આપેલી કિંમત પરથી તેને અનુરૂપ સાપેક્ષ ચલ Y ની અનુમાનિત કિંમત મેળવી શકાય છે. આ પ્રકારની રેખા દોરવા માટે કોઈ ગણતરીની જરૂર પડતી નથી. તેથી નિયતસંબંધ રેખાના અન્વાયોજનની આ સરળ અને ઝડપી રીત છે. પરંતુ આમ કરવામાં એક સમસ્યા ઉદ્ભવે છે. જુદી-જુદી વ્યક્તિઓ જુદી-જુદી રેખા દોરી શકે અને તેથી નિરપેક્ષ ચલ X ની એક જ કિંમત માટે જુદી-જુદી વ્યક્તિઓ સાપેક્ષ ચલ Y ની કિંમત વિશે જુદા-જુદા અનુમાનો મેળવી શકે. નીચેની વિકીર્ણ આકૃતિ પરથી આ બાબત સરળતાથી સમજી શકાય છે.

એક જ માહિતી પરથી બનતી નીચેની વિકીર્ણ આકૃતિમાં બે જુદી-જુદી વ્યક્તિઓએ બે જુદી-જુદી રેખા l_1 અને l_2 દોરી છે. અહીં જોઈ શકાય છે કે નિરપેક્ષ ચલ X ની કોઈ કિંમત 'a' માટે તેને અનરૂપ સાપેક્ષ ચલ Y ની અનુમાનિત કિંમત રેખા l_1 પરથી 'y_1' મળશે જ્યારે રેખા l_2 પરથી તે 'y_2' મળશે. આમ નિરપેક્ષ ચલ X ની એક જ કિંમત માટે તેને અનુરૂપ સાપેક્ષ ચલ Y ની જુદી-જુદી રેખા પરથી જુદી-જુદી અનુમાનિત કિંમત મળે છે. તેથી આ રીત વ્યક્તિલક્ષી (subjective) છે તેમ કહી શકાય. આ રીતથી મળતી નિયતસંબંધ રેખાને શ્રેષ્ઠ અન્વાયોજિત રેખા ન કહી શકાય કેમ કે તેનાથી સાપેક્ષ ચલની શ્રેષ્ઠ અનુમાનિત કિંમત જ મળે છે તેવી કોઈ ખાત્રી નથી. શ્રેષ્ઠ અન્વાયોજિત નિયતસંબંધ રેખા મેળવવા માટે ન્યૂનતમ વર્ગોની રીતનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.



3.3.2 ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત

ધારો કે બે સહસંબંધિત ચલો X (નિરપેક્ષ ચલ) અને Y (સાપેક્ષ ચલ)નાં અવલોકનોની n ક્રમિત જોડ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$ મેળવેલી છે. ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત સમજવા માટે આ માહિતીની વિકીર્ણ આકૃતિ દોરીશું.



જો X અને Y વચ્ચેના સુરેખ નિયતસંબંધને દર્શાવતી શ્રેષ્ઠ રેખાનું સમીકરણ $\hat{y} = a + bx$ હોય, તો આ રેખાના અચળાંકો a અને b ન્યૂનતમ વર્ગોની રીતથી નીચે મુજબ મેળવી શકાય છે.

ધારો કે ચલ Xની $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ કિંમતોને અનુરૂપ ચલ Yની રેખા પરથી મેળવેલ અનુમાનિત કિંમતો $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3, ... \hat{y}_n$ છે અને ચલ Yની અવલોકિત કિંમતો $y_1, y_2, y_3, ... y_n$ છે. હવે Xની કોઈ કિંમત $X = x_i$ને અનુરૂપ Yની અનુમાનિત કિંમત $\hat{y}_i = a + bx_i$ થાય. ચલ Yની અવલોકિત કિંમત y_i અને અનુમાનિત કિંમત $\hat{y}_i$ વચ્ચેના ઊભા (vertical) અંતર (y-અક્ષને સમાંતર અંતર)ને અનુમાનની ત્રુટિ (error) કહે છે. તેને e_i વડે દર્શાવાય છે.

$$\therefore \; e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - (a + bx_i) = y_i - a - bx_i$$

જ્યાં, $i = 1, 2, 3, ..., n$

સ્પષ્ટ છે કે રેખાની ઉપરની બાજુનાં બિંદુઓ માટે ત્રુટિ ધન થશે અને રેખાની નીચેની બાજુના બિંદુઓ માટે ત્રુટિ ઋણ થશે અને જે બિંદુઓ રેખા પર હોય તેવાં બિંદુઓ માટે ત્રુટિ શૂન્ય થશે.

હવે અન્વાયોજિત રેખા $\hat{y} = a + bx$ (Yની X પરની નિયતસંબંધ રેખા)ના અચળાંકો a અને bની કિંમતો એવી રીતે મેળવવામાં આવે છે કે જેથી ત્રુટિઓના વર્ગોનો સરવાળો ઓછામાં ઓછો એટલે કે ન્યૂનતમ થાય.

અર્થાત્ $\Sigma e_i^2 = \Sigma(y_i - \hat{y}_i)^2 = \Sigma(y_i - a - bx_i)^2$ ન્યૂનતમ થાય.

બીજગણિતની સરળ પદ્ધતિથી આપણે a અને bની તેવી કિંમતો મેળવી શકીએ છીએ જે સરળતા ખાતર અનુગ (suffix) i ને અવગણતા નીચે મુજબ છે.

$$b = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(x-\bar{x})^2}$$

$$= \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

અને

$$a = \bar{y} - b\,\bar{x}$$

આ રીતે મેળવેલી રેખા $\hat{y} = a + bx$ વિકીર્ણ આકૃતિનાં બધાં જ બિંદુઓની શક્ય તેટલી નજીકથી પસાર થતી રેખા છે. નિયતસંબંધ રેખા મેળવતી વખતે ત્રુટિઓના વર્ગોનો સરવાળો ન્યૂનતમ કરવામાં આવે છે. તેથી આ રીતને **ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત** કહે છે.

આ રીતથી મળતી b ની કિંમતને Y ની X પરથી નિયતસંબંધ રેખાનો નિયતસંબંધાંક (regression coefficient) કહે છે. તેને નિયતસંબંધ રેખાનો ઢાળ (slope) પણ કહે છે અને અચળાંક a ને નિયતસંબંધ રેખાનો અંતઃખંડ (intercept) કહે છે.

નિયતસંબંધાંક b નું અર્થઘટન

b = ચલ X ની કિંમતમાં એક એકમ ફેરફાર કરવાથી ચલ Y ની કિંમતમાં થતો અનુમાનિત ફેરફાર

એટલે કે, જ્યારે $b>0$, નિરપેક્ષ ચલ X ની કિંમતમાં એક એકમનો વધારો થાય તો સાપેક્ષ ચલ Y ની કિંમતમાં b એકમોનો અંદાજિત વધારો થાય.

જ્યારે $b<0$, નિરપેક્ષ ચલ X ની કિંમતમાં એક એકમનો વધારો થાય તો સાપેક્ષ ચલ Y ની કિંમતમાં $|b|$ એકમોનો અંદાજિત ઘટાડો થાય.

અત્રે નોંધનીય છે કે, ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત દ્વારા મેળવાયેલી નિયતસંબંધ રેખા શ્રેષ્ઠ અન્વાયોજિત રેખા તરીકે પણ ઓળખાય છે.

નોંધ : (1) નિયતસંબંધાંક b ને b_{yx} વડે પણ દર્શાવી શકાય છે. જરૂરિયાત ન જણાય તો સામાન્ય રીતે નિયતસંબંધાંકને આપણે ફક્ત b વડે જ દર્શાવીશું.

(2) જો વિકીર્ણ આકૃતિમાં બધાં જ બિંદુઓ એક જ રેખા પર હોય તો બધાં જ બિંદુઓ માટે ત્રુટિ શૂન્ય થાય તેથી સાપેક્ષ ચલ y ની અનુમાનિત કિંમત $\hat{y}$ એ જ તેની પ્રાપ્ત અવલોકિત કિંમત થાય. તેથી નિયતસંબંધ રેખાનું સ્વરૂપ $\hat{y}=a+bx$ ને બદલે $y=a+bx$ પણ લખી શકાય. સ્પષ્ટ છે કે આ સંજોગોમાં $b>0$ હોય તો સહસંબંધાંક r ની કિંમત 1 થાય અને $b<0$ હોય તો સહસંબધાંક r ની કિંમત -1 થાય.

સમજૂતી માટે વધારાની માહિતી

સામાન્ય રીતે નિયતસંબંધ રેખા માટે 'શ્રેષ્ઠ અન્વાયોજિત રેખા'ને બદલે ફક્ત 'અન્વાયોજિત રેખા' એવો ઉલ્લેખ કરવામાં આવે છે.

હવે આપણે નિયતસંબંધ રેખા મેળવવાનાં કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 1 : કોઈ ચોક્કસ કંપનીની એક મૉડેલની કારનું આયુષ્ય (વપરાશના વર્ષ) અને તેનો સરેરાશ વાર્ષિક નિભાવ ખર્ચ માટે મેળવેલા અવલોકનો નીચે મુજબ છે.

કારનું આયુષ્ય (વર્ષ)	2	4	6	8
સરેરાશ વાર્ષિક નિભાવ ખર્ચ (હજાર ₹)	10	20	25	30

આ પરથી નિભાવ ખર્ચની કારના આયુષ્ય પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો. જો કારનું આયુષ્ય 10 વર્ષ હોય તો નિભાવ ખર્ચનું અનુમાન પણ મેળવો.

અહીં, 'કારનું આયુષ્ય'એ નિરપેક્ષ ચલ છે. તેથી તેને ચલ X વડે દર્શાવીશુ અને 'નિભાવ ખર્ચ'એ સાપેક્ષ ચલ છે, તેથી તેને Y વડે દર્શાવીશું. માહિતી જોતા આપણે નિયતસંબંધ રેખા શોધવા માટે નીચે મુજબ કોષ્ટક બનાવીશું

	કારનું આયુષ્ય (વર્ષ) x	નિભાવ ખર્ચ (હજાર ₹) y	xy	x^2
	2	10	20	4
	4	20	80	16
	6	25	150	36
	8	30	240	64
કુલ	**20**	**85**	**490**	**120**

$\overline{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{20}{4} = 5, \ \overline{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{85}{4} = 21.25$

હવે નિયતસંબંધાંક નીચે મુજબ શોધીએ

$$b = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

$$= \frac{4(490)-(20)(85)}{4(120)-(20)^2}$$

$$= \frac{1960-1700}{480-400}$$

$$= \frac{260}{80}$$

$$= 3.25$$

$\therefore \ b = 3.25$

હવે $\overline{x}, \overline{y}$ અને bની કિંમતો aના સૂત્રમાં મૂકતાં,

$$a = \overline{y} - b\,\overline{x}$$

$$= 21.25 - 3.25(5)$$

$$= 21.25 - 16.25$$

$\therefore \ a = 5$

તેથી, 'નિભાવખર્ચ' (Y)ની 'કારના આયુષ્ય' (X) પરની નિયતસંબંધની રેખા

$$\hat{y} = a + bx$$

$\therefore \ \hat{y} = 5 + 3.25\,x$

$X = 10$ મૂકતાં,

$$\hat{y} = 5 + 3.25(10)$$

$$= 5 + 32.5 = 37.5$$

$\therefore \ \hat{y} = 37.5$

આમ, જ્યારે કારનું આયુષ્ય વર્ષ 10 વર્ષ હોય ત્યારે તેનો અનુમાનિત નિભાવખર્ચ ₹ 37.5 હજાર થાય.

નોંધ : $b = 3.25$ છે તેથી કહી શકાય કે દર વર્ષે (Xમાં એકમ ફેરફાર) થવાથી, કારના નિભાવખર્ચમાં અંદાજે ₹ 3.25 હજાર નો વધારો (Yમાં થતો ફેરફાર) થાય છે.

ઉદાહરણ 2 : એક કંપનીના જુદા-જુદા પ્રકારના લૅપટૉપનું માસિક વેચાણ (સો એકમોમાં) અને તેના નફા (લાખ ₹ માં)ની છેલ્લા છ માસની વીગત નીચે મુજબ છે.

માસ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
વેચાયેલા લૅપટૉપની સંખ્યા (સો એકમો) x	5	7	5	12	8	3
નફો (લાખ ₹) y	8	9	10	15	10	6

આ પરથી Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો. ઉપરાંત $X = 7$ માટે Y ની કિંમતના અનુમાનમાં થતી ત્રુટિ શોધો.

	વેચાયેલા લૅપટૉપની સંખ્યા (સો એકમો) x	નફો (લાખ ₹) y	xy	x^2
	5	8	40	25
	7	9	63	49
	5	10	50	25
	12	15	180	144
	8	10	80	64
	3	6	18	9
કુલ	**40**	**58**	**431**	**316**

$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{40}{6} = 6.67$; $\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{58}{6} = 9.67$

હવે, નિયતસંબંધાંક bની કિંમત નીચે મુજબ શોધીએ.

$$b = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

$$= \frac{6(431) - (40)(58)}{6(316) - (40)^2}$$

$$= \frac{2586 - 2320}{1896 - 1600}$$

$$= \frac{266}{296}$$

$$= 0.8986$$

$$\simeq 0.90$$

$\therefore b \simeq 0.90$

હવે $\bar{x}, \bar{y}$ અને bની કિંમતો a ના સૂત્રમાં મૂકતાં,

$a = \bar{y} - b\bar{x}$

$= 9.67 - 0.90(6.67)$

$= 9.67 - 6.003$

$= 3.667$

$\therefore a \simeq 3.67$

આમ Yની X પરની નિયતસંબંધ રેખા

$\hat{y} = a + bx$

$\therefore \hat{y} = 3.67 + 0.9x$

હવે $X = 7$ માટે ત્રુટિ શોધવા, સૌ પ્રથમ તેને અનુરૂપ Y ની અનુમાનિત કિંમત મેળવીએ.

$X = 7$ મૂકતાં

$\hat{y} = 3.67 + 0.9(7)$

$= 3.67 + 6.3$

$\therefore\ \hat{y} = 9.97$ લાખ ₹

હવે આપેલી માહિતી પરથી આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, $X = 7$ ને અનુરૂપ Y ની અવલોકિત કિંમત 9 છે.

$\therefore$ ત્રુટિ $e = y - \hat{y}$

$= 9 - 9.97$

$\therefore\ e = -0.97$ લાખ ₹

ઉદાહરણ 3 : એક કંપનીની કારના સર્વિસ સેન્ટરમાં અકસ્માત પામેલી કારના સમારકામ માટે લાગતો સમય અને સમારકામના ખર્ચ વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા માટે નીચે મુજબ માહિતી એકઠી કરવામાં આવી છે.

કારના સમારકામનો સમય (માનવકલાકો)	32	40	25	29	35	43
સમારકામનું ખર્ચ (હજાર ₹)	25	35	18	22	28	46

આ પરથી Y (સમારકામનું ખર્ચ)ની X (સમારકામનો સમય) પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો. જો કારને સમારકામ માટે 50 કલાક લાગતા હોય, તો તેના સમારકામના ખર્ચનું અનુમાન મેળવો.

અહીં $n = 6,\ \bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{204}{6} = 34$ અને $\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{174}{6} = 29$

	સમારકામ સમય (માનવકલાકો) x	**સમારકામનું ખર્ચ (હજાર ₹) y**	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$	$(x-\bar{x})^2$
	32	25	–2	–4	8	4
	40	35	6	6	36	36
	25	18	–9	–11	99	81
	29	22	–5	–7	35	25
	35	28	1	–1	–1	1
	43	46	9	17	153	81
કુલ	**204**	**174**	**0**	**0**	**330**	**228**

$b = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(x-\bar{x})^2}$

$= \frac{330}{228}$

$= 1.4474$

$\simeq 1.45$

$\therefore\ b \simeq 1.45$

હવે $\bar{x}$, $\bar{y}$ અને bની કિંમતો a ના સૂત્રમાં મૂકતાં,

$a = \bar{y} - b\,\bar{x}$

$= 29 - 1.45(34)$

$= 29 - 49.3$

$\therefore\ a = -20.3$

આમ, Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા

$$\hat{y} = a + bx$$

$$\therefore \quad \hat{y} = -20.3 + 1.45x$$

$X = 50$ મૂકતાં,

$$\hat{y} = -20.3 + 1.45(50)$$

$$= -20.3 + 72.5$$

$$\therefore \quad \hat{y} = 52.2$$

આમ, જ્યારે સમારકામનો સમય 50 કલાક હોય ત્યારે સમારકામનો અનુમાનિત ખર્ચ 52.2 (હજાર ₹) થાય.

સ્વાધ્યાય 3.1

1. એક વસ્તુના ભાવ (₹માં) અને તેની માંગ (સો એકમોમાં) વિશે નીચે આપેલી માહિતી પરથી માંગની ભાવ પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો અને જ્યારે ભાવ ₹ 20 હોય, ત્યારે માંગનું અનુમાન મેળવો.

ભાવ (₹)	12	14	15	16	18	21
માંગ (સો એકમોમાં)	18	12	10	8	7	5

2. કાર બનાવતી કંપનીના કારના એક મૉડેલ માટે કાર વપરાશના સમય અને કારના સરેરાશ વાર્ષિક નિભાવ ખર્ચ વચ્ચેના સંબંધનો અભ્યાસ કરવા માટે નીચે મુજબ માહિતી મેળવવામાં આવી.

કાર	1	2	3	4	5	6
કાર-વપરાશનો સમય (વર્ષ) x	3	1	2	2	5	3
સરેરાશ વાર્ષિક નિભાવ ખર્ચ (હજાર ₹) y	10	5	8	7	13	8

આ પરથી Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો. જ્યારે કાર-વપરાશનો સમય 5 વર્ષ હોય ત્યારે વાર્ષિક નિભાવખર્ચનું અનુમાન અને તેની ત્રુટિ શોધો.

3. કોઈ એક વર્ષમાં પાંચ જિલ્લામાં થયેલા સરેરાશ વરસાદ (સેમીમાં) અને પાકનું કુલ ઉત્પાદન (ટનમાં) વિશે માહિતી નીચે આપેલી છે.

સરેરાશ વરસાદ (સેમી)	25	32	38	29	31
પાક (ટન)	84	90	95	88	93

આ પરથી પાકના ઉત્પાદનની વરસાદ પરની નિયતસંબંધ રેખા શોધો અને જો સરેરાશ વરસાદ 35 સેમી હોય, તો થતા પાકના ઉત્પાદનનું અનુમાન મેળવો.

4. યંત્ર પર કામ કરતા કારીગરોનો અનુભવ અને તેમનાં કાર્ય-કૌશલ્ય આંક (performance ratings) વિશે માહિતી નીચે આપી છે.

કારીગર	1	2	3	4	5	6	7	8
અનુભવ (વર્ષ) x	12	5	10	3	18	4	12	16
કાર્ય-કૌશલ્ય આંક y	83	75	80	78	89	68	88	87

આ પરથી કાર્ય-કૌશલ્ય આંકની અનુભવ પરની નિયતસંબંધ રેખાની ગણતરી કરો અને કોઈ એક કારીગરનો અનુભવ 7 વર્ષ હોય, તો કાર્ય-કૌશલ્ય આંક વિશે અનુમાન કરો.

*

3.4 નિયતસંબંધના અભ્યાસની ઉપયોગિતા

નિયતસંબંધની કેટલીક ઉપયોગિતા નીચે મુજબ છે.

(1) બે સહસંબંધિત ચલો વચ્ચેનો વિધેયાત્મક સંબંધ જાણી શકાય છે.

(2) એક વખત વિધેયાત્મક સંબંધ પ્રસ્થાપિત થઈ જાય પછી નિરપેક્ષ ચલ X ની જ્ઞાત કિંમત પરથી સાપેક્ષ ચલ Y ની અજ્ઞાત કિંમતનું અનુમાન મેળવી શકાય છે.

(3) આપણે નિરપેક્ષ ચલ X ની કિંમતમાં થતા એકમ ફેરફારથી ચલ Y માં થતો અંદાજિત ફેરફાર જાણી શકીએ છીએ.

(4) નિયતસંબંધ રેખા પરથી સાપેક્ષ ચલની અનુમાનિત કિંમત શોધવામાં થતી ભૂલ (ત્રુટિ) જાણી શકાય છે. અર્થશાસ્ત્રીઓ, આયોજનકારો, ધંધાર્થીઓ, વહીવટકર્તાઓ, સંશોધનકારો વગેરેને નિયતસંબંધ ખૂબ જ ઉપયોગી બને છે.

નિયતસંબંધાંકની ગણતરી માટેની ટૂંકી રીત

જ્યારે X અને Y ની કિંમતો પ્રમાણમાં મોટી હોય અને/અથવા અપૂર્ણાંક હોય ત્યારે x^2, xy જેવાં પદોની ગણતરી મુશ્કેલ બને છે. આ સંજોગોમાં વૈકલ્પિક સૂત્ર વાપરી શકાય છે. આ સૂત્ર નિયતસંબંધાંકના નીચેના ગુણધર્મ પર આધારિત છે.

ગુણધર્મ : નિયતસંબંધાંક ઊગમબિંદુ પરિવર્તનથી સ્વતંત્ર છે. પરંતુ માપ (scale)ના પરિવર્તનથી સ્વતંત્ર નથી.

જો Yની X પરની નિયતસંબંધ રેખાનો નિયતસંબંધાંક $b = b_{yx}$ હોય, તો ઉપરના ગુણધર્મ પરથી તેનાં ટૂંકી રીતે સૂત્રો નીચે મુજબ લખી શકાય.

(1) જો $u = x - A$ અને $v = y - B$ હોય તો

$$b = b_{yx} = b_{vu} = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \text{ થાય.}$$

(2) જો $u = \frac{x - A}{c_x}$ અને $v = \frac{y - B}{c_y}$ હોય તો

$$b = b_{yx} = b_{vu} \cdot \frac{c_y}{c_x} = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \times \frac{c_y}{c_x} \text{ થાય.}$$

અહીં, A, B, c_x અને c_y અચળાંકો છે અને $c_x > 0, c_y > 0$

ઉદાહરણ 4 : એક સમૂહના વ્યક્તિઓની માસિક આવક (હજાર ₹માં) અને માસિક ખર્ચ (હજાર ₹માં) વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા માટે તે સમૂહમાંથી સાત વ્યક્તિઓના નિદર્શ પરથી નીચેની માહિતી મળે છે.

વ્યક્તિ	1	2	3	4	5	6	7
માસિક આવક (હજાર ₹)	60	70	64	68	62	65	72
માસિક ખર્ચ (હજાર ₹)	50	59	57	50	53	58	60

આ માહિતી પરથી વ્યક્તિઓની માસિક ખર્ચની માસિક આવક પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો. જો સમૂહમાં કોઈ વ્યક્તિની માસિક આવક 75 હજાર ₹ હોય, તો તેના માસિક ખર્ચનું અનુમાન મેળવો.

માસિક ખર્ચની માસિક આવક પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવવાની હોઈ 'માસિક ખર્ચ'ને ચલ Y અને 'માસિક આવક'ને ચલ X વડે દર્શાવીશું.

અહીં $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{461}{7} = 65.86$ અને $\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{387}{7} = 55.29$

તેથી આપણે $A = 65$ અને $B = 55$ લઈ u અને v નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરી શકીએ.

$u = x - A = x - 65$ અને $v = y - B = y - 55$

	માસિક આવક (હજાર ₹) x	માસિક ખર્ચ (હજાર ₹) y	$u = x - 65$	$v = y - 55$	uv	u^2
	60	50	–5	–5	25	25
	70	59	5	4	20	25
	64	57	–1	2	–2	1
	68	50	3	–5	–15	9
	62	53	–3	–2	6	9
	65	58	0	3	0	0
	72	60	7	5	35	49
કુલ	**461**	**387**	**6**	**2**	**69**	**118**

ટૂંકી રીતે bની કિંમત નીચે મુજબ શોધી શકાય

$$b = b_{yx} = b_{vu} = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2}$$

$$= \frac{7(69) - (6)(2)}{7(118) - (6)^2}$$

$$= \frac{483 - 12}{826 - 36}$$

$$= \frac{471}{790}$$

$$= 0.5962$$

$$\therefore \ b \simeq 0.60$$

હવે, $a = \bar{y} - b\bar{x}$

$$= 55.29 - 0.60\,(65.86)$$

$$= 55.29 - 39.516$$

$$= 15.774$$

$$\therefore \ a = 15.77$$

આમ, Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા

$$\hat{y} = a + bx$$

$$\therefore \quad \hat{y} = 15.77 + 0.60x$$

$X = 75$ મૂકતાં,

$$\hat{y} = 15.77 + 0.60(75)$$

$$= 15.77 + 45$$

$$= 60.77$$

$$\therefore \quad \hat{y} = 60.77$$

તેથી જો કોઈ વ્યક્તિની માસિક આવક 75 હજાર ₹ હોય તો તેનો અંદાજિત માસિક ખર્ચ 60.77 હજાર ₹ થાય.

ઉદાહરણ 5 : ઉદાહરણ 1માં આપેલ માહિતી માટે, નિભાવખર્ચ (Y)ની કારના આયુષ્ય (X) પરની નિયતસંબંધ રેખા ટૂંકી રીતનો ઉપયોગ કરી મેળવો.

કારનું આયુષ્ય (વર્ષ) x	2	4	6	8
નિભાવખર્ચ (હજાર ₹) y	10	20	25	30

અહીં, X ની બધી જ કિંમતોને 2 વડે અને Y ની બધી જ કિંમતોને 5 વડે નિ:શેષ ભાગી શકાય છે. અને $\bar{x} = 5$ અને $\bar{y} = 21.25$ છે. તેથી આપણે $A = 4, B = 20, c_x = 2, c_y = 5$ લઈશું.

હવે u અને v નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરીએ.

$$u = \frac{x-A}{c_x} = \frac{x-4}{2} \quad \text{અને} \quad v = \frac{y-B}{c_y} = \frac{y-20}{5}$$

	x	y	$u = \frac{x-4}{2}$	$v = \frac{y-20}{5}$	uv	u^2
	2	10	–1	–2	2	1
	4	20	0	0	0	0
	6	25	1	1	1	1
	8	30	2	2	4	4
કુલ	**20**	**85**	**2**	**1**	**7**	**6**

$$b = b_{vu} \cdot \frac{c_y}{c_x} = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \times \frac{c_y}{c_x}$$

$$= \frac{4(7)-2(1)}{4(6)-(2)^2} \times \frac{5}{2}$$

$$= \frac{28-2}{24-4} \times \frac{5}{2}$$

$$= \frac{26}{20} \times \frac{5}{2}$$

$$b = 3.25$$

હવે $a = \bar{y} - b\bar{x} = 21.25 - 3.25(5) = 21.25 - 16.25 = 5$

Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા

$$\hat{y} = a + bx$$

$$\therefore \quad \hat{y} = 5 + 3.25x$$

નોંધ : અહીં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, $b_{vu} = \frac{26}{20} = 1.3$, પણ જ્યારે $\frac{c_y}{c_x} = \frac{5}{2}$ વડે ગુણવામાં આવે ત્યારે આપણને $b = 1.3 \times \frac{5}{2} = 3.25$ (ઉદાહરણ 1માં મેળવ્યા મુજબ) મળે છે. તેથી આપણે સમજી શકીએ છીએ કે, જ્યારે ચલ X અને/અથવા Y ના માપ (scale)નું પરિવર્તન કરવામાં આવે તો b મેળવવા માટે b_{vu} ને $\frac{c_y}{c_x}$ વડે ગુણવા જરૂરી બને છે.

ઉદાહરણ 6 : ગુજરાત રાજ્યની એક યુનિવર્સિટીમાં ચાલુ વર્ષે વિદેશથી ભણવા માટે આવેલા વિદ્યાર્થીઓમાંથી સાત વિદ્યાર્થીઓનો એક નિદર્શ લઈ તેમના બુદ્ધિમત્તાનો આંક (I.Q.) અને તેમણે 75 ગુણની પરીક્ષામાં મેળવેલ ગુણની માહિતી નીચે આપેલી છે.

વિદ્યાર્થી	1	2	3	4	5	6	7
I.Q. x	85	95	100	90	110	125	70
ગુણ y	46	50	50	45	60	70	40

આ પરથી y ની x પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો અને કોઈ વિદ્યાર્થીનો I.Q. 120 હોય, તો તેના ગુણનું અનુમાન કરો. તદુપરાંત I.Q. 100 હોય ત્યારે અનુમાનમાં થતી ત્રુટિ શોધો.

અહીં, $n = 7$, $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{675}{7} = 96.43$, $\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{361}{7} = 51.57$

X અને Y ની કિંમતો મોટી, તેમનાં મધ્યકો અપૂર્ણાંક અને X ની બધી જ કિંમતો 5 વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય તેવી હોવાથી આપણે ટૂંકી રીતનો ઉપયોગ કરીશું.

$A = 95$, $B = 50$, $c_x = 5$, $c_y = 1$ લઈ આપણે u અને v નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરીએ.

$u = \frac{x - A}{c_x} = \frac{x - 95}{5}$ અને $v = \frac{y - B}{c_y} = \frac{y - 50}{1} = y - 50$

	I.Q. x	**ગુણ** y	$u = \frac{x-95}{5}$	$v = y - 50$	uv	u^2
	85	46	–2	–4	8	4
	95	50	0	0	0	0
	100	50	1	0	0	1
	90	45	–1	–5	5	1
	110	60	3	10	30	9
	125	70	6	20	120	36
	70	40	–5	–10	50	25
કુલ	**675**	**361**	**2**	**11**	**213**	**76**

$$b = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \times \frac{c_y}{c_x}$$

$$= \frac{7(213) - (2)(11)}{7(76) - (2)^2} \times \frac{1}{5}$$

$$= \frac{1491 - 22}{532 - 4} \times \frac{1}{5}$$

$$= \frac{1469}{528} \times \frac{1}{5}$$

$$= \frac{1469}{2640}$$

$$= 0.5564$$

$\therefore \; b \simeq 0.56$

હવે $a = \overline{y} - b\overline{x}$

$$= 51.57 - 0.56(96.43)$$

$$= 51.57 - 54.0008$$

$$= -2.4308$$

$\therefore \; a \simeq -2.43$

તેથી, Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા

$$\hat{y} = a + bx$$

$$\therefore \quad \hat{y} = -2.43 + 0.56x$$

$X = 120$ મૂકતાં,

$$\hat{y} = -2.43 + 0.56(120)$$

$$= -2.43 + 67.2$$

$\therefore \quad \hat{y} = 64.77$ ગુણ

તેથી જ્યારે કોઈ વિદ્યાર્થીનો I.Q. 120 હોય ત્યારે તેના ગુણ અંદાજે 65 થાય.

હવે I.Q. (X) = 100 માટે ત્રુટિ શોધવા સૌપ્રથમ Y ની અનુમાનિત કિંમત $\hat{y}$ મેળવવી પડે.

$\hat{y} = -2.43 + 0.56x$

$X = 100$ લેતાં,

$\hat{y} = -2.43 + 0.56(100)$

$= -2.43 + 56$

$\therefore \quad \hat{y} = 53.57$ ગુણ

પરંતુ $X = 100$ ને અનુરૂપ Y ની અવલોકન પરથી મળતી કિંમત 50 છે. (આપેલી માહિતી જુઓ.)

$\therefore$ ત્રુટિ $e = y - \hat{y}$

$= 50 - 53.57$

$\therefore \quad e = -3.57$ ગુણ

નોંધ : અત્રે યાદ રાખવું જરૂરી છે કે નિરપેક્ષ ચલ (X) ની ફક્ત તે જ કિંમતો માટે ત્રુટિ શોધી શકાય છે કે જેના માટે તેને અનુરૂપ સાપેક્ષ ચલ (Y) ની પ્રાપ્ત અવલોકિત કિંમતો જ્ઞાત હોય.

અહીં આ ઉદાહરણમાં $X = 120$ ને અનુરૂપ Y ની કિંમતના અનુમાનમાં થતી ત્રુટિ શોધી ન શકાય કેમકે $X = 120$ ને અનુરૂપ Y ની પ્રાપ્ત અવલોકિત કિંમત જ્ઞાત નથી.

ઉદાહરણ 7 : સુરેખ સહસંબંધ પ્રકરણના ઉદાહરણ 12ની માહિતી અને ગણતરી પરથી નફાની વેચાણ પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો જ્યારે વેચાણ 3 કરોડ ₹ હોય ત્યારે થતા નફાનું અનુમાન કરો.

તે ઉદાહરણ પરથી આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$u = \frac{x-A}{c_x} = \frac{x-2}{0.1} \text{ અને } v = \frac{y-B}{c_y} = \frac{y-5600}{100}$$

$\therefore c_x = 0.1$ અને $c_y = 100$

અત્રે નોંધીએ કે ગણતરીમાં સરળતા ખાતર $(x - A)$ને 10 વડે ગુણ્યા હતા પરંતુ c_xએ $(x - A)$ના છેદમાં હોવાથી c_xની કિંમત $\frac{1}{10} = 0.1$ થાય.

($\because$ 10 વડે ગુણવા એટલે જ $\frac{1}{10} = 0.1$ વડે ભાગવા.)

$$\text{હવે } b = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \times \frac{c_y}{c_x}$$

$$= \frac{9(121)-(0)(1)}{9(60)-(0)^2} \times \frac{100}{0.1}$$

$$= \frac{1089}{540} \times \frac{100}{0.1}$$

$$= \frac{108900}{54}$$

$$= 2016.6667$$

$\therefore b \simeq 2016.67$

હવે $a = \bar{y} - b\bar{x}$

$= 5611.11 - 2016.67(2)$

$= 5611.11 - 4033.34$

$\therefore \quad a = 1577.77$

તેથી નફો (Y) ની વેચાણ (X) પરની નિયતસંબંધ રેખા

$\hat{y} = a + bx$

$\therefore \quad \hat{y} = 1577.77 + 2016.67x$

$X = 3$ મૂકતાં,

$\hat{y} = 1577.77 + 2016.67(3)$

$= 1577.77 + 6050.01$

$\therefore \quad \hat{y} = 7627.78$

આમ, જ્યારે વેચાણ 3 કરોડ ₹ થાય ત્યારે અનુમાનિત નફો 7627.78 (હજાર ₹) થાય.

પ્રવૃત્તિ

તમે ધોરણ 12માં અભ્યાસ કરતા હોવ તે વર્ષના જૂનથી ડિસેમ્બર માસ દરમિયાન તમારી માસિક કૌટુંબિક આવક અને માસિક ખર્ચની વીગતો એકઠી કરો. તે પરથી માસિક ખર્ચની માસિક આવક પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો. તે પરથી પછીના વર્ષના જાન્યુઆરી માસની આવક માટે તે માસના ખર્ચનું અનુમાન કરો. જાન્યુઆરી માસના અંતે ખરેખર ખર્ચ કેટલો થાય છે તે ચકાસો અને તમારા અનુમાનમાં થયેલી ત્રુટિ શોધો.

3.5 સહવિચરણ અને સહસંબંધાંક પરથી નિયતસંબંધાંક

જ્યારે બે ચલો X અને Y ની દ્વિચલ માહિતી માટે મધ્યક, પ્રમાણિત વિચલન (અથવા વિચરણ), સહવિચરણ, સહસંબંધાંક જેવા સારસૂચક માપ (summary measures) જાણતા હોઈએ ત્યારે નિયતસંબંધાંક અને નિયતસંબંધ રેખા નીચે મુજબ શોધી શકાય છે.

(1) જ્યારે $\bar{x}, \bar{y}, s_x^2$ (અથવા s_x), s_y^2 (અથવા s_y) અને Cov(x, y) જેવાં માપો જાણતા હોઈએ ત્યારે,

$$b = \frac{\text{સહવિચરણ}(x, y)}{x\text{નું વિચરણ}} = \frac{Cov(x, y)}{s_x^2}$$

અને $a = \bar{y} - b\bar{x}$

જ્યાં $$Cov(x, y) = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n} = \frac{\Sigma xy - n\,\bar{x}\,\bar{y}}{n}$$

$$s_x^2 = \frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n} = \frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2 = \frac{\Sigma x^2}{n} - \bar{x}^2$$

$$s_y^2 = \frac{\Sigma(y-\bar{y})^2}{n} = \frac{\Sigma y^2}{n} - \left(\frac{\Sigma y}{n}\right)^2 = \frac{\Sigma y^2}{n} - \bar{y}^2$$

(2) જ્યારે $\bar{x}, \bar{y}, r, s_x$ (અથવા s_x^2), અને s_y (અથવા s_y^2) જેવાં માપ જાણતા હોઈએ ત્યારે,

$$b = r \cdot \frac{y\text{નું પ્ર.વિ.}}{x\text{નું પ્ર.વિ.}} = r \cdot \frac{s_y}{s_x}$$

અને $a = \bar{y} - b\bar{x}$

a અને b ની કિંમતો મૂકી, Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા એટલે કે $\hat{y} = a + bx$ મેળવી શકાય.

હવે આપણે કેટલાંક સારસૂચક માપ આપેલાં હોય અને નિયતસંબંધ રેખા શોધવાની હોય તેવાં ઉદાહરણો લઈએ.

ઉદાહરણ 8 : દસ જુદા જુદા વિસ્તારમાં ચોમાસા દરમિયાન પડેલા વરસાદ સેમીમાં (*X*) અને બાજરીની ઊપજ ક્વિન્ટલ પ્રતિ હેક્ટરમાં (*Y*) વચ્ચેના સંબંધનો અભ્યાસ કરવા માટે મેળવેલી માહિતી પરથી નીચે મુજબનાં માપ મળે છે.

$n = 10, \bar{x} = 40, \bar{y} = 175, s_x = 12, Cov(x, y) = 360$

આ પરથી ઊપજ *Y*ની વરસાદ *X* પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો

અહીં $Cov(x, y) = 360$ અને $s_x = 12 \therefore s_x^2 = 144$

$$b = \frac{Cov(x, y)}{s_x^2}$$

$$= \frac{360}{144}$$

$$\therefore \quad b = 2.5$$

અને $a = \bar{y} - b\bar{x}$

$$= 175 - 2.5(40)$$

$$= 175 - 100$$

$$\therefore \ a = 75$$

આમ *Y*ની *X* પરની નિયતસંબંધ રેખા

$$\hat{y} = a + bx$$

$$\therefore \quad \hat{y} = 75 + 2.5x$$

ઉદાહરણ 9 : કુટુંબની વાર્ષિક આવક (*X*) અને મ્યુચ્યુઅલ ફંડમાં કુટુંબનું વાર્ષિક રોકાણ (*Y*) એ બે ચલો વચ્ચેનો અભ્યાસ કરવા એક શહેરમાંથી મેળવેલો 100 કુટુંબોની નિદર્શ માહિતીનો સાર નીચે દર્શાવ્યો છે.

X = કુટુંબની વાર્ષિક આવક (લાખ ₹ માં)

Y = કુટુંબનું મ્યુચ્યુઅલ ફંડમાં વાર્ષિક રોકાણ (હજાર ₹ માં)

$\bar{x} = 5.5, \ \bar{y} = 40.5, \ s_x = 1.2, \ s_y = 12.8, \ r = 0.65$

આ માહિતી પરથી કુટુંબના મ્યુચ્યુઅલ ફંડમાં રોકાણની કુટુંબની વાર્ષિક આવક પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો. જો કોઈ કુટુંબની વાર્ષિક આવક 4.5 લાખ ₹ હોય, તો તેનો મ્યુચ્યુઅલ ફંડમાં વાર્ષિક રોકાણનું અનુમાન મેળવો.

અહીં $n = 100, \bar{x} = 5.5, \bar{y} = 40.5$

$s_x = 1.2, s_y = 12.8$ અને $r = 0.65$

હવે $b = r \cdot \frac{s_y}{s_x}$

$$= 0.65 \times \frac{12.8}{1.2}$$

$$= 6.9333$$

$$\therefore \quad b \simeq 6.93$$

અને $a = \overline{y} - b\overline{x}$

$= 40.5 - 6.93\ (5.5)$

$= 40.5 - 38.115$

$= 2.385$

$\therefore \quad a \simeq 2.39$

આમ Yની X પરની નિયતસંબંધ રેખા

$\hat{y} = a + bx$

$\therefore \quad \hat{y} = 2.39 + 6.93x$

$X = 4.5$ મૂકતાં,

$\hat{y} = 2.39 + 6.93(4.5)$

$= 2.39 + 31.185$

$= 33.575$

$\therefore \quad \hat{y} \simeq 33.58$

તેથી, જ્યારે કોઈ કુટુંબની વાર્ષિક આવક 4.5 લાખ ₹ હોય ત્યારે મ્યુચ્યુઅલ ફંડનું વાર્ષિક અંદાજિત રોકાણ 33.58 હજાર ₹ થાય.

ઉદાહરણ 10 : એક બોલપેન બનાવતી કંપનીની છેલ્લા વર્ષના દરેક માસના અંતે બોલપેનનો ભાવ (₹માં) અને તે સમયે બોલપેનના પુરવઠા (એકમોમાં)ની નીચે આપેલી માહિતી પરથી જ્યારે બોલપેનનો ભાવ 40 ₹ હોય ત્યારે તેના પુરવઠાનું અનુમાન મેળવો.

વીગત	ભાવ (x)	પુરવઠો (y)
સરેરાશ	30	500
વિચરણ	25	10,000
$r = 0.8$		

અહીં $\overline{x} = 30, \overline{y} = 500, s_x^2 = 25, s_y^2 = 10000$ અને $r = 0.8$

$s_x^2 = 25$ હોવાથી $s_x = 5$

$s_y^2 = 10000$ હોવાથી $s_y = 100$

અહીં ભાવ $X = 40$ માટે પુરવઠો Y ની કિંમતનું અનુમાન કરવાનું હોઈ આપણે Y ની X પરની નિયત સંબંધ રેખા મેળવીશું.

$$b = r \cdot \frac{s_y}{s_x}$$

$$= 0.8 \times \frac{100}{5}$$

$\therefore \quad b = 16$

$a = \overline{y} - b\overline{x}$

$= 500 - 16\ (30)$

$= 500 - 480$

$\therefore \quad a = 20$

આમ Yની X પરની નિયતસંબંધ રેખા

$\hat{y} = a + bx$

$\therefore \quad \hat{y} = 20 + 16x$

$X = 40$ મૂકતાં,

$\hat{y} = 20 + 16(40)$

$= 20 + 640$

$\therefore \quad \hat{y} = 660$ એકમો

તેથી, ભાવ ₹ 40 અનુરૂપ પુરવઠાનું અનુમાન 660 એકમો થશે.

ઉદાહરણ 11 : દક્ષિણ ભારતના એક રાજ્યમાં એક વ્યક્તિ ખાદ્ય પદાર્થમાંથી બનતી ચમચીનું ઉત્પાદન કરે છે. વપરાશ બાદ તે ચમચી ખાઈ શકાય તેવી હોય છે. પ્રાયોગિક ધોરણે તેણે કોઈ રાજ્યમાં તે ચમચી વેચાણ અર્થે રજૂ કરેલ છે. છેલ્લા છ મહિનામાં સરેરાશ ભાવ (₹ માં) અને તેની માંગ (સો એકમોમાં) પરથી નીચેના પરિણામો મળે છે.

$\boldsymbol{n = 6, \Sigma x = 45, \Sigma y = 122, \Sigma x^2 = 439, \Sigma xy = 605}$

આ માહિતી પરથી ચમચીની માંગ (Y)ની ભાવ (X) પરની નિયતસંબંધ રેખા શોધો. અને ભાવ ₹ 10 હોય ત્યારે ચમચીની માંગનું અનુમાન કરો.

અહીં $\overline{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{45}{6} = 7.5$, $\overline{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{122}{6} = 20.33$

$$b = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

$$= \frac{6(605) - (45)(122)}{6(439) - (45)^2}$$

$$= \frac{3630 - 5490}{2634 - 2025}$$

$$= \frac{-1860}{609}$$

$= -3.0542$

$\therefore \quad b \simeq -3.05$

$a = \overline{y} - b\overline{x}$

$= 20.33 - (-3.05)\ (7.5)$

$= 20.33 + 22.875$

$= 43.205$

$\therefore \quad a \simeq 43.21$

આમ Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા

$$\hat{y} = a + bx$$

$$\therefore \quad \hat{y} = 43.21 - 3.05x$$

$X = 10$ મૂકતાં,

$$\hat{y} = 43.21 - 3.05(10)$$

$$= 43.21 - 30.5$$

$$\therefore \quad \hat{y} = 12.71$$

તેથી, જ્યારે ભાવ ₹ 10 હોય ત્યારે અનુમાનિત માંગ 12.71 (સો એકમો) હોય.

ઉદાહરણ 12 : એક કંપની દ્વારા ઉત્પાદિત પવનચક્કી દ્વારા વીજળી ઉત્પાદિત કરતા એક એકમમાં જુદા-જુદા સમયે પવનની ગતિ (કિમી પ્રતિ કલાક) અને વીજળી-ઉત્પાદન (વૉટ) વિશેનાં પાંચ અવલોકનો નોંધવામાં આવ્યાં, તે પરથી નીચે મુજબ માહિતી મળે છે :

પવનની ગતિ = X કિમી પ્રતિ કલાક

વીજળી-ઉત્પાદન = Y વૉટ

$$\bar{x} = 20, \ \bar{y} = 186, \ \Sigma xy = 23200, \ s_x^2 = 50$$

આ માહિતી પરથી વીજળીના ઉત્પાદન (Y)ની પવનની ગતિ (X) પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો. જો પવનની ગતિ 25 કિમી પ્રતિ કલાક હોય ત્યારે અંદાજિત વીજળીનું ઉત્પાદન મેળવો.

અહીં, $n = 5, \ \Sigma xy = 23200, \ \bar{x} = 20, \ \bar{y} = 186$ અને $s_x^2 = 50$

હવે $b = \dfrac{Cov(x, y)}{s_x^2}$

$$= \frac{\Sigma xy - n\,\bar{x}\,\bar{y}}{n \cdot s_x^2}$$

$$= \frac{23200 - 5(20)(186)}{5(50)}$$

$$= \frac{23200 - 18600}{250}$$

$$= \frac{4600}{250}$$

$$\therefore \quad b = 18.4$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$= 186 - 18.4\ (20)$$

$$= 186 - 368$$

$$\therefore \quad a = -182$$

આમ Yની X પરની નિયતસંબંધ રેખા

$$\hat{y} = a + bx$$

$$\therefore \quad \hat{y} = -182 + 18.4x$$

$X = 25$ મૂકતાં,

$$\hat{y} = -182 + 18.4(25)$$

$$= -182 + 460$$

$$\therefore \quad \hat{y} = 278$$

તેથી, જ્યારે પવનની ગતિ 25 કિમી પ્રતિકલાક હોય ત્યારે અંદાજે 278 વૉટ વીજળીનું ઉત્પાદન થાય.

સ્વાધ્યાય 3.2

1. કપાસના પાક પર ખાતરના વપરાશની અસર જાણવા માટે કરેલા એક અભ્યાસમાંથી નીચે મુજબ માહિતી મળે છે.

ખાતરનો વપરાશ (10 કિગ્રા) x	28	35	25	24	20	25	20
કપાસનો પાક હેક્ટરદીઠ (ક્વિન્ટલ) y	128	140	115	120	105	122	100

આ પરથી Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો અને ખાતરનો વપરાશ 300 કિગ્રા થયો હોય તો હેક્ટર દીઠ કપાસના પાકનું અનુમાન મેળવો.

2. પિતા અને પુત્રની ઊંચાઈ વચ્ચેનો સંબંધ ચકાસવા માટે પિતા અને પુખ્ત વયના પુત્રની આઠ જોડની નીચે આપેલી માહિતી પરથી પુત્રની ઊંચાઈની પિતાની ઊંચાઈ પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો.

પિતાની ઊંચાઈ (સેમી) x	167	169	171	168	173	166	167	165
પુત્રની ઊંચાઈ (સેમી) y	158	170	169	172	170	168	164	167

જ્યારે કોઈ પિતાની ઊંચાઈ 170 સેમી હોય ત્યારે તેના પુત્રની ઊંચાઈનું અનુમાન કરો.

3. સમુદ્રસપાટીથી સ્થળની ઊંચાઈ (altitude) અને તે સ્થળે હવામાં અસરકારક ઑક્સિજનના પ્રમાણ વિશેની નીચેની માહિતી પરથી અસરકારક ઑક્સિજનના પ્રમાણ (Y)ની સમુદ્રસપાટીથી ઊંચાઈ (X) પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો. (305 મીટર $\simeq$ 1000 ફૂટ)

સ્થળની ઊંચાઈ (305 મીટર) x	0	1	2	3	4	5	6
અસરકારક ઑક્સિજન (%) y	20.9	20.1	19.4	17.9	17.9	17.3	16.6

જો કોઈ સ્થળની સમુદ્રસપાટીથી ઊંચાઈ 7 એકમ (1 એકમ = 305 મીટર) હોય તો ત્યાં હવામાં અસરકારક ઑક્સિજનની ટકાવારીનો અંદાજ મેળવો.

4. એક મોટા શહેરના ઘરમાં વપરાશની જગ્યા અને માસિક ભાડા વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા માટે નીચે પ્રમાણે માહિતી એકઠી કરવામાં આવી છે.

વપરાશની જગ્યા (ચોરસ મીટર) x	55	60	75	80	100	120	140
માસિક ભાડું (₹) y	18,000	19,000	20,000	20,000	25,000	30,000	50,000

આ પરથી Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો. જો કોઈ ઘરની વપરાશની જગ્યા 110 ચોરસ મીટર હોય, તો તેનું માસિક ભાડું કેટલું હશે, તેનું અનુમાન કરો.

5. એક મોલમાં પ્રતિદિન આવતા ગ્રાહકોની સંખ્યા અને વેચાણ (દસ હજાર ₹) વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા માટે નીચે મુજબ નિદર્શ માહિતી મળે છે.

ગ્રાહકોની સંખ્યા x	50	70	100	70	150	120
વેચાણ (દસ હજાર ₹) y	2.0	2.0	2.5	1.4	4.0	2.5

આ પરથી Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો. જો કોઈ એક દિવસે 80 ગ્રાહકો તે મોલની મુલાકાત લે તો મોલમાં કેટલું વેચાણ થયું હશે તેનું અનુમાન કરો.

6. એક શહેરમાં કાપડના ધંધામાં કાર્યરત દસ પેઢીનો સરેરાશ વાર્ષિક નફો (લાખ ₹માં) અને સરેરાશ વાર્ષિક વહીવટી-ખર્ચ (લાખ ₹માં)ની માહિતી નીચે મુજબ છે.

વીગત	**નફો (લાખ ₹ માં) x**	**વહીવટી-ખર્ચ (લાખ ₹ માં) y**
મધ્યક	60	25
પ્રમાણિત વિચલન	6	3
સહવિચરણ = 10.4		

આ પરથી Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો.

7. ગુજરાતના જુદા જુદા તાલુકામાં પડેલ સરેરાશ વરસાદ (સેમીમાં) અને મકાઈની ઊપજ (ક્વિન્ટલ પ્રતિ હેક્ટર માં) વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા એકઠી કરેલી માહિતી પરથી નીચેના પરિણામો મળે છે.

વીગત	**વરસાદ (સેમી) x**	**મકાઈની ઊપજ (ક્વિન્ટલ પ્રતિ હેક્ટર) y**
મધ્યક	82	180
વિચરણ	64	225
સહસંબંધાંક = 0.82		

જ્યારે વરસાદ 60 સેમી પડે ત્યારે થતી મકાઈની ઊપજનું અનુમાન મેળવો.

8. કાંડા ઘડિયાળની બૅટરી (સૅલ)ના ભાવ ₹ માં (X) અને તેનો પુરવઠા સો એકમોમાં (Y) વચ્ચેના સંબંધનો અભ્યાસ કરવા એકઠી કરેલી માહિતી પરથી નીચેના પરિણામો મળે છે.

$n = 10, \Sigma x = 130, \Sigma y = 220, \Sigma x^2 = 2288, \Sigma xy = 3467$

આ માહિતી પરથી Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા શોધો અને ભાવ ₹ 16 હોય ત્યારે પુરવઠાનું અનુમાન કરો.

9. એક શહેરમાં ઉનાળામાં જુદા જુદા છ દિવસો દરમિયાન મહત્તમ તાપમાન (X) અને આઇસક્રીમનું વેચાણ (Y)ની વીગત પરથી નીચે મુજબ માહિતી મળે છે.

મહત્તમ તાપમાન = X (ડિગ્રી સેલ્સિયસમાં)

આઇસક્રીમનું વેચાણ = Y (લાખ ₹માં)

$\bar{x} = 40, \bar{y} = 1.2, \Sigma xy = 306, s_x^2 = 20$

આ માહિતી પરથી આઇસક્રીમના વેચાણની મહત્તમ તાપમાન પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો. જો કોઈ દિવસનું મહત્તમ તાપમાન 42 ડિગ્રી સેલ્સિયસ હોય, તો તે દિવસે આઇસક્રીમના વેચાણનો અંદાજ મેળવો.

*

3.6 નિશ્ચાયકતાનો આંક (Coefficient of Determination)

આપણે જાણીએ છીએ કે નિયતસંબંધ એ બે સહસંબંધિત ચલ વચ્ચેનો વિધેયાત્મક સંબંધ છે અને નિરપેક્ષ ચલની કોઈ કિંમત માટે તેને અનુરૂપ સાપેક્ષ ચલની કિંમતનું અનુમાન કરવા તે ઉપયોગી છે. આવા અનુમાનની વિશ્વસનીયતા જાણવા માટેનું એક માપ નિશ્ચાયકતાનો આંક છે.

ધારો કે Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા $\hat{y} = a + bx$ છે, તો સાપેક્ષ ચલ Y ની અવલોકન પરથી મળતી અવલોકિત કિંમતો y અને તેને અનુરૂપ નિયતસંબંધ રેખા પરથી મળેલી તેની અનુમાનિત કિંમતો $\hat{y}$ વચ્ચેના સહસંબંધાંકના વર્ગને **નિશ્ચાયકતાનો આંક** કહે છે. તેને R^2 વડે દર્શાવાય છે.

$$\therefore R^2 = \left[r(y, \hat{y})\right]^2$$

સહેલાઈથી ચકાસી શકાય છે કે, અહીં બે ચલ વચ્ચેના સંબંધના અભ્યાસમાં R^2નું મૂલ્ય $r^2(x, y)$ એટલે કે r^2 જેટલું જ થાય છે.

$$R^2 = \left[r(y, \hat{y})\right]^2$$

$$= \left[r(y, a + bx)\right]^2$$

$$= \left[r(y, x)\right]^2$$

$$= \left[r(x, y)\right]^2$$

$$\therefore R^2 = r^2$$

$\left\{ \because \right.$ ઊગમ બિંદુ અને માપ બંને પરિવર્તનથી r સ્વતંત્ર છે. તેથી $\hat{y}(= a + bx)$ ચલમાંથી a બાદ કરી ત્યારબાદ b વડે ભાગતાં rની કિંમત બદલાશે નહીં. $\left. \right\}$

આમ, $R^2 = r^2$ હોવાથી આપણે કહી શકીએ કે સાપેક્ષ ચલ Yની અનુમાનિત કિંમતની વિશ્વસનીયતા મુખ્યત્વે X અને Y વચ્ચેના સહસંબંધાંક પર આધાર રાખે છે.

જો $r = \pm 1$ હોય તો $R^2 = r^2 = 1$ થાય અને X અને Y વચ્ચે સંપૂર્ણ સુરેખ સહસંબંધ થાય. તેથી આપણે કહી શકીએ કે નિયતસંબંધ રેખા પરથી મેળવેલ Yની અનુમાનિત કિંમત 100 % વિશ્વસનીય છે. પરંતુ જો $r = 0$ હોય તો $R^2 = r^2 = 0$ અને X અને Y વચ્ચે સુરેખ સહસંબંધ નથી, તેથી આપણે કહી શકીએ કે, નિયતસંબંધ રેખા પરથી મેળવેલ Y ની અનુમાનિત કિંમત બિલકુલ વિશ્વસનીય નથી.

ઉપરની ચર્ચા પરથી સ્પષ્ટ છે કે, R^2ની મોટી કિંમત બે ચલ વચ્ચે ઘનિષ્ઠ સુરેખ સહસંબંધ દર્શાવે છે. તેથી નિશ્ચાયકતાના આંક (R^2) પરથી સુરેખ નિયતસંબંધની ધારણા યોગ્ય છે કે કેમ તે ચકાસી શકાય છે. જો R^2ની કિંમત 1 ની નજીક હોય તો X અને Y વચ્ચેનો સંબંધ સુરેખ નિયતસંબંધ છે એવી ધારણા યોગ્ય ગણાય અને જો R^2ની કિંમત 0ની નજીક હોય તો X અને Y વચ્ચેનો સંબંધ સુરેખ છે એવી ધારણા યોગ્ય ગણાય નહિ.

સાપેક્ષ ચલ Y માં થતા કુલ ફેરફારમાંથી કેટલું ચલન નિયતસંબંધ રેખા દ્વારા સમજાવી શકાય તે નિશ્ચયતાના આંક પરથી મળે છે. દા.ત., જો કોઈ માહિતી માટે $r = 0.9$ હોય તો નિશ્ચાયકતાનો આંક $(0.9)^2 = 0.81$ થાય અને તેથી $r^2 \times 100\ \%$ $= 81\ \%$ થાય, એટલે કહી શકાય કે ચલ Y માં થતા કુલ ચલનમાંથી 81 % ચલનની સમજૂતી નિયતસંબંધ રેખા પરથી મળે છે. તેથી આપણે કહી શકીએ કે પસંદ કરેલુ નિયતસંબંધનું સુરેખ મૉડેલ આ માહિતી માટે યોગ્ય છે.

ઉદાહરણ 13 : નીચેના કોષ્ટકમાં જુદી-જુદી કંપનીમાં કામ કરતા તકનિકી કારીગરોનો અનુભવ (વર્ષમાં) અને તેમના માસિક પગાર (હજાર ₹માં) આપેલા છે.

અનુભવ (વર્ષ) x	12	8	16	20	5	14	10
માસિકપગાર (હજાર ₹) y	22	15	25	30	12	24	20

આ માહિતી પરથી નિશ્ચાયકતાના આંકની ગણતરી કરો તેમજ અનુભવ અને માસિક પગાર વચ્ચે સુરેખ નિયતસંબંધની ધારણા ચકાસો.

અહીં, $n=7$, $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{85}{7} = 12.14$, $\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{148}{7} = 21.14$

	અનુભવ (વર્ષ) x	માસિક પગાર (હજાર ₹) y	xy	x^2	y^2
	12	22	264	144	484
	8	15	120	64	225
	16	25	400	256	625
	20	30	600	400	900
	5	12	60	25	144
	14	24	336	196	576
	10	20	200	100	400
કુલ	**85**	**148**	**1980**	**1185**	**3354**

$$R^2 = r^2 = \left[\frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}\right]^2$$

$$= \left[\frac{7(1980) - (85)(148)}{\sqrt{7(1185) - (85)^2} \cdot \sqrt{7(3354) - (148)^2}}\right]^2$$

$$= \frac{[13860 - 12580]^2}{[8295 - 7225] \cdot [23478 - 21904]}$$

$$= \frac{(1280)^2}{(1070) \cdot (1574)}$$

$$= \frac{1638400}{1684180}$$

$$= 0.9728$$

$$\therefore R^2 \simeq 0.97$$

R^2ની કિંમત 0.97 છે. 1ની ખૂબ નજીક છે. તેથી આપણે કહી શકીએ કે, અનુભવના વર્ષ અને પગાર માસિક વચ્ચે સુરેખ નિયતસંબંધ છે એ ધારણા યોગ્ય ગણાય.

નોંધ : ઉપરના ઉદાહરણમાં $u = x - A$ અને $v = y - B$ (જ્યાં A અને B અનુકૂળ અચળ કિંમતો) લઈને પણ R^2 શોધી શકાય.

ઉદાહરણ 14 : વસ્તીની ગીચતા અને ચામડીના દર્દોથી પીડાતી વ્યક્તિઓની સંખ્યા વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા છ શહેરો માટે વસ્તીની ગીચતા (ચો કિમીદીઠ) અને ચામડીનાં દર્દોથી પીડાતા દર્દીઓ (દર હજારે) વિશે નીચે મુજબ માહિતી મળે છે.

ગીચતા (ચો કિમીદીઠ) x	12,000	14,500	19,000	17,500	13,500	16,000
દર્દીઓની સંખ્યા (દર હજારે) y	80	60	90	80	40	30

આ માહિતી પરથી Y અને X પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો. જો કોઈ શહેરની ગીચતા 15000 (ચો કિમીદીઠ) હોય તો તેમાં ચામડીનાં દર્દોથી પીડાતા દર્દીઓની સંખ્યાનું અનુમાન કરો. આ નિયતસંબંધ મૉડેલની વિશ્વસનીયતા ચકાસો.

અહીં, $n = 6, \bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{92500}{6} = 15416.67$; $\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{380}{6} = 63.33$

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, ચલ X ની કિંમતો 500ના ગુણકમાં અને ચલ Y ની કિંમતો 10ના ગુણકમાં છે. તેથી $A = 15000$, $B = 60$, $c_x = 500$, $c_y = 10$ લઈ આપણે ટૂંકી રીતનો ઉપયોગ કરીશું. હવે આપણે u અને v નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરીએ.

$$u = \frac{x-A}{c_x} = \frac{x-15000}{500} \quad \text{અને} \quad v = \frac{y-B}{c_y} = \frac{y-60}{10}$$

	ગીચતા (ચો કિમી દીઠ) x	દર્દીઓની સંખ્યા (દર હજારે) y	$u = \frac{x-15000}{500}$	$v = \frac{y-60}{10}$	uv	u^2	v^2
	12000	80	–6	2	–12	36	4
	14500	60	–1	0	0	1	0
	19000	90	8	3	24	64	9
	17500	80	5	2	10	25	4
	13500	40	–3	–2	6	9	4
	16000	30	2	–3	–6	4	9
કુલ	**92500**	**380**	**5**	**2**	**22**	**139**	**30**

$$b = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \times \frac{c_y}{c_x}$$

$$= \frac{6(22) - (5)(2)}{6(139) - (5)^2} \times \frac{10}{500}$$

$$= \frac{132 - 10}{834 - 25} \times \frac{1}{50}$$

$$= \frac{122}{809} \times \frac{1}{50}$$

$$= \frac{122}{40450}$$

$\therefore b \simeq 0.003$

$a = \overline{y} - b\overline{x}$

$= 63.33 - 0.003\,(15416.67)$

$= 63.33 - 46.25$

$\therefore a = 17.08$

Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા

$\hat{y} = a + bx$

$\therefore \hat{y} = 17.08 + 0.003\,x$

$X = 15000$ મૂકતાં,

$\hat{y} = 17.08 + 0.003(15000)$

$= 17.08 + 45$

$\therefore \hat{y} = 62.08$

તેથી કોઈ શહેરની ગીચતા 15000 હોય, તો તેમાં ચામડીનાં દર્દથી પીડાતા દર્દીઓની અનુમાનિત સંખ્યા દર હજારે $62.08 \simeq 62$ થાય.

હવે નિયતસંબંધ મૉડેલની વિશ્વસનીયતા નિશ્ચાયકતાના આંક R^2 પરથી ચકાસી શકાય છે. તેથી આપણે તે મેળવીએ

$$R^2 = r^2 = \left[\frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)\,(\Sigma v)}{\sqrt{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}}\right]^2$$

$$= \frac{\left[6(22) - (5)\,(2)\right]^2}{\left[6(139) - (5)^2\right]\left[6(30) - (2)^2\right]}$$

$$= \frac{(122)^2}{(809)\,(176)}$$

$$= \frac{14884}{142384}$$

$$= 0.1045$$

$\therefore R^2 \simeq 0.10$

R^2ની કિંમત 0ની ખૂબ નજીક હોવાથી નિયતસંબંધ મૉડેલ વિશ્વસનીય છે તેમ કહી શકાય નહિ.

3.7 નિયતસંબંધાંકના ગુણધર્મ

(1) સહસંબંધાંક r અને નિયતસંબંધાંક b બંનેનાં ચિહ્નો સમાન હોય છે.

($\because$ આપણે જાણીએ છીએ કે, પ્રમાણિત વિચલનો s_x અને s_y હંમેશાં અનૃણ હોય છે અને $-1 \le r \le 1$ હોય છે. તેથી $b = r \cdot \frac{s_y}{s_x}$ પરથી સમજી શકાય છે, કે r નું ચિહ્ન હશે તે જ ચિહ્ન b નું પણ થશે.)

(2) નિયતસંબંધાંક એ ઊગમબિંદુ પરિવર્તનથી સ્વતંત્ર છે પરંતુ માપ (scale) પરિવર્તનથી સ્વતંત્ર નથી.

(આ ગુણધર્મની વિસ્તૃત ચર્ચા નિયતસંબંધાંકની ગણતરીની ટૂંકી રીતની સમજૂતીમાં કરેલ છે.)

નોંધ : Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા હંમેશાં $(\overline{x}, \overline{y})$ બિંદુમાંથી પસાર થાય છે.

ઉદાહરણ 15 : પિતાની ઊંચાઈ સેમીમાં (X) અને પુખ્ત વયના પુત્રની ઊંચાઈ સેમીમાં (Y) વચ્ચેનો સંબંધ જાણવાના પ્રયોગમાં એક નિદર્શમાં છ પિતા-પુત્રની જોડ પસંદ કરવામાં આવે છે. તે પરથી મળતાં પરિણામો નીચે મુજબ છે.

$$\Sigma x = 1020, \Sigma y = 990, \Sigma(x-170)^2 = 60, \Sigma(y-165)^2 = 105$$

$$\Sigma(x-170)(y-165) = 45$$

આ માહિતી પરથી પુખ્ત વયના પુત્રની ઊંચાઈ (Y)ની પિતાની ઊંચાઈ (X) પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો. તેમજ નિયતસંબંધ મૉડેલની વિશ્વસનીયતા ચકાસો.

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{1020}{6} = 170$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{990}{6} = 165$$

$$\therefore \Sigma(x-170)^2 = \Sigma(x-\bar{x})^2 = 60$$

$$\Sigma(y-165)^2 = \Sigma(y-\bar{y})^2 = 105$$

$$\Sigma(x-170)(y-165) = \Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = 45$$

$$\therefore b = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(x-\bar{x})^2}$$

$$= \frac{45}{60}$$

$$\therefore b = 0.75$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$= 165 - 0.75(170)$$

$$= 165 - 127.5$$

$$\therefore a = 37.5$$

આમ, Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા

$$\hat{y} = a + bx$$

$$\therefore \hat{y} = 37.5 + 0.75x$$

હવે, નિયતસંબંધ મૉડેલની વિશ્વસનીયતા ચકાસવા નિશ્ચાયકતાનો આંક R^2 મેળવીએ.

$$R^2 = \left[\frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2} \cdot \sqrt{\Sigma(y-\bar{y})^2}}\right]^2$$

$$= \frac{(45)^2}{(60)(105)}$$

$$= \frac{2025}{6300}$$

$$= 0.3214$$

$$\therefore R^2 \simeq 0.32$$

R^2ની કિંમત 0થી નજીક હોવાથી આ નિયતસંબંધ મૉડેલ વિશ્વસનીય છે તેમ કહી શકાય નહિ.

ઉદાહરણ 16 : (i) જો Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા $\hat{y} = 12 - 1.5x$ હોય અને X નો મધ્યક 6 હોય, તો Y નો મધ્યક શોધો. (ii) જો Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા $\hat{y} = 11.5 + 0.65x$ હોય અને $\overline{y} = 18$ હોય, તો $\overline{x}$ ની કિંમત શોધો.

(i) આપણે જાણીએ છીએ કે, નિયતસંબંધ રેખા $(\overline{x}, \overline{y})$ બિંદુમાંથી હંમેશાં પસાર થાય છે. તેથી નિયતસંબંધ રેખાના સમીકરણમાં x ની જગ્યાએ $\overline{x}$ મૂકતાં જે $\hat{y}$ મળે તે જ $\overline{y}$ થાય અથવા $\hat{y}$ ની જગ્યાએ $\overline{y}$ મૂકતાં જે x મળે તે જ $\overline{x}$ થાય.

$\hat{y} = 12 - 1.5x$ માં x ની જગ્યાએ $\overline{x} = 6$ મૂકતાં,

$\hat{y} = 12 - 1.5(6)$

$\therefore \hat{y} = 12 - 9$

$\therefore \hat{y} = 3$ તેથી $\overline{y} = 3$

આમ, Y નો મધ્યક 3 થાય.

(ii) ઉપરની ચર્ચા મુજબ $\hat{y} = 11.5 + 0.65x$ માં $\hat{y}$ ને બદલે $\overline{y} = 18$ મૂકતાં, જે x મળે તે $\overline{x}$ થશે.

$\hat{y} = 11.5 + 0.65x$ માં $\hat{y} = \overline{y} = 18$ મૂકતાં,

$18 = 11.5 + 0.65x$

$\therefore 6.5 = 0.65x$

$\therefore x = \frac{6.5}{0.65}$

$\therefore x = 10$ તેથી $\overline{x} = 10$

આમ, X નો મધ્યક 10 થાય.

ઉદાહરણ 17 : (i) જો $\overline{x} = 5, \overline{y} = 11$ અને $b = 1.2$ હોય, તો Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો. (ii) જો $\overline{x} = 60, \overline{y} = 75$ અને $s_x^2 : Cov(x, y) = 5:3$ હોય, તો Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો અને તે પરથી $X = 65$ માટે Y ની કિંમતનું અનુમાન મેળવો.

(i) અહીં $b = 1.2$ તથા $\overline{x} = 5$ અને $\overline{y} = 11$ છે.

હવે, $a = \overline{y} - b\overline{x}$

$\therefore a = 11 - 1.2(5)$

$= 11 - 6$

$\therefore a = 5$

Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા નીચે મુજબ મળે.

$\hat{y} = a + bx$

$\therefore \hat{y} = 5 + 1.2x$

(ii) અહીં $\bar{x} = 60, \bar{y} = 75$ અને $s_x^2 : Cov(x, y) = 5:3$ છે.

$s_x^2 : Cov(x, y) = 5:3$

$\therefore \quad \frac{s_x^2}{Cov(x, y)} = \frac{5}{3}$ તેથી $\frac{Cov(x, y)}{s_x^2} = \frac{3}{5}$

હવે, $b = \frac{Cov(x, y)}{s_x^2} = \frac{3}{5} = 0.6$

અને $a = \bar{y} - b\bar{x}$

$= 75 - 0.6\,(60)$

$= 75 - 36$

$\therefore \; a = 39$

Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા નીચે મુજબ મળે.

$\hat{y} = a + bx$

$\therefore \; \hat{y} = 39 + 0.6x$

$X = 65$ મૂકતાં,

$\hat{y} = 39 + 0.6\,(65)$

$= 39 + 39$

$\therefore \; \hat{y} = 78$

આમ, $X = 65$ માટે Y ની અનુમાનિત કિંમત 78 થાય.

ઉદાહરણ 18 : (i) Y ની X પરની અન્વાયોજિત નિયતસંબંધ રેખા $\hat{y} = 50 + 3.5x$ છે. જો આ રેખાના અન્વાયોજનમાં એક અવલોકન $(16, 108)$ નો ઉપયોગ થયો હોય, તો $X = 16$ માટે Y ની અનુમાનિત કિંમતની ત્રુટિ શોધો.

(ii) જો $\hat{y} = 22 + 0.8x$ રેખાના અન્વાયોજનમાં એક અવલોકન $(10, 30)$ નો ઉપયોગ થયો હોય, તો $X = 10$ માટે Y ની અનુમાનિત કિંમતની ત્રુટિ શોધો. ત્રુટિના જવાબ પરથી આપ શું તારવી શકો ?

(i) $\hat{y} = 50 + 3.5x$ માં $X = 16$ મૂકતાં,

$\hat{y} = 50 + 3.5(16)$

$= 50 + 56$

$\therefore \; \hat{y} = 106$

અને અવલોકિત માહિતી પરથી $X = 16$ માટે $Y = 108$ છે.

$\therefore$ ત્રુટિ $e = y - \hat{y}$

$= 108 - 106$

$\therefore \; e = 2$

આમ, $X = 16$ માટે Yની અનુમાનિત કિંમતની ત્રુટિ 2 થાય.

(ii) $\hat{y} = 22 + 0.8x$ માં $X = 10$ મૂકતાં,

$$\hat{y} = 22 + 0.8(10)$$

$$= 22 + 8$$

$$\therefore \hat{y} = 30$$

અને અવલોકિત માહિતી પરથી $X = 10$ માટે $Y = 30$ છે.

$\therefore$ ત્રુટિ $e = y - \hat{y}$

$$= 30 - 30$$

$$\therefore e = 0$$

આમ, $X = 10$ માટે Y ની અનુમાનિત કિંમતની ત્રુટિ 0 થાય છે.

અહીં, ત્રુટિની કિંમત શૂન્ય મળે છે તેથી આપણે કહી શકીએ કે, બિંદુ $(10, 30)$ એ અન્વાયોજિત રેખા $\hat{y} = 22 + 0.8x$ પર જ આવેલું હોય.

નોંધ : ન્યૂનતમ વર્ગોની રીતે મળતી નિયતસંબંધ રેખાથી ઉપરની તરફ આવેલા બિંદુ માટે ત્રુટિ ધન, નીચે તરફ આવેલા બિંદુ માટે ત્રુટિ ઋણ અને રેખા પર આવેલા બિંદુ માટે ત્રુટિ શૂન્ય થાય.

ઉદાહરણ 19 : (i) જો Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા $\hat{y} = 25 + 3x$ હોય અને $Cov(x, y) = 48$ હોય તો X નું પ્રમાણિત વિચલન મેળવો. જો Y નું પ્રમાણિત વિચલન 15 હોય તો નિશ્ચાયકતાનો આંક પણ શોધો. (ii) ઉપરના પ્રશ્નમાં આપેલી નિયતસંબંધ રેખા માટે જો Y ની કિંમતમાં અંદાજે 15 એકમોનો વધારો કરવો હોય, તો X ની કિંમતમાં કેટલા એકમોનો વધારો કરવો પડે ?

(i) y ની x પરની નિયતસંબંધ રેખા $\hat{y} = 25 + 3x$ ને તેના સામાન્ય સ્વરૂપ $\hat{y} = a + bx$ સાથે સરખાવતાં નિયતસંબંધાંક $b = 3$ મળે છે. હવે $Cov(x, y) = 48$ આપેલ હોવાથી

$$b = \frac{Cov(x, y)}{s_x^2}$$

$$\therefore 3 = \frac{48}{s_x^2}$$

$$\therefore s_x^2 = 16$$

$$\therefore s_x = 4$$

આમ, X નું પ્રમાણિત વિચલન 4 થાય.

હવે Y નું પ્રમાણિત વિચલન $s_y = 15$ આપેલ છે.

તેથી, નિશ્ચાયકતાનો આંક $R^2 = \left[\frac{Cov(x, y)}{s_x \cdot s_y}\right]^2$

$\therefore R^2 = \left[\frac{48}{4 \times 15}\right]^2 = (0.8)^2 = 0.64$ થાય.

બીજી રીત :

$$b = r \cdot \frac{s_y}{s_x}$$

$$\therefore 3 = r \cdot \frac{15}{4}$$

$$\therefore r = \frac{3 \times 4}{15}$$

$$\therefore r = 0.8$$

$$\therefore R^2 = r^2 = (0.8)^2 = 0.64$$

(ii) અહીં, $\hat{y} = 25 + 3x$ છે અને નિયતસંબંધાંક $b = 3$ છે. જે દર્શાવે છે કે X ની કિંમતમાં એક એકમનો વધારો થાય તો Y ની અનુમાનિત કિંમતમાં 3 એકમનો વધારો થાય. તેથી જો Y ની કિંમતમાં અંદાજે 15 એકમોનો વધારો કરવો હોય તો X ની કિંમતમાં $\frac{15}{3} = 5$ એકમોનો વધારો કરવો પડે.

ઉદાહરણ 20 : (i) જો Yની X પરની નિયતસંબંધ રેખા $\hat{y} = \frac{x}{2} + 5$ અને $s_y : s_x = 5:8$ હોય તો નિશ્ચાયકતાનો આંક મેળવો. (ii) જો Yની X પરની નિયતસંબંધ રેખા $4x + 5y - 65 = 0$ હોય તો નિયતસંબંધાંક bની કિંમત શોધો.

(i) Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા $\hat{y} = \frac{x}{2} + 5 = \frac{1}{2} \cdot x + 5$ ને સામાન્ય સ્વરૂપ $\hat{y} = a + bx$ સાથે સરખાવતાં

$b = \frac{1}{2}$ મળે છે.

હવે, $s_y : s_x = 5:8$

$$\therefore \frac{s_y}{s_x} = \frac{5}{8}$$

અને $b = r \cdot \frac{s_y}{s_x}$

$$\therefore \frac{1}{2} = r \cdot \frac{5}{8}$$

$$\therefore r = \frac{1}{2} \times \frac{8}{5}$$

$$\therefore r = 0.8$$

$\therefore$ નિશ્ચાયકતાનો આંક $R^2 = r^2 = (0.8)^2 = 0.64$ થાય.

(ii) Yની X પરની નિયતસંબંધ રેખા $4x + 5y - 65 = 0$ આપેલી છે.

હવે તેને તેના સામાન્ય સ્વરૂપમાં ફેરવીએ.

$$4x + 5y - 65 = 0$$

$$\therefore 5y = 65 - 4x$$

$$\therefore y = \frac{65 - 4x}{5}$$

$$\therefore y = \frac{65}{5} - \frac{4x}{5}$$

$$\therefore y = 13 - 0.8x$$

હવે તેને $\hat{y} = a + bx$ સાથે સરખાવતાં $b = -0.8$ મળે છે.

ઉદાહરણ **21** :

(i) **જો** $b_{yx} = 0.85,\ u = x - 15$ **અને** $v = y - 20$ **હોય, તો** b_{vu}**ની કિંમત શોધો.**

(ii) **જો** $u = \frac{x-5}{3},\ v = \frac{y-8}{5}$ **અને** $b_{yx} = 0.9$ **હોય, તો** b_{vu}**ની કિંમત શોધો.**

(iii) **જો** $u = 10(x - 4.5),\ v = \frac{y-50}{10}$ **અને** $b_{yx} = 0.25$ **હોય, તો** b_{vu}**ની કિંમત શોધો.**

(iv) **જો** $u = 5(x - 40),\ v = 2(y - 18)$ **અને** $b_{yx} = 1.6$ **હોય, તો** b_{vu}**ની કિંમત શોધો.**

ઉપર્યુક્ત બધા જ પ્રશ્નોના ઉકેલ માટે નિયતસંબંધાંકના નીચેના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરીશું :

- જો $u = x - A$ અને $v = y - B$ હોય, તો $b_{yx} = b_{vu}$
- જો $u = \frac{x-A}{c_x}$ અને $v = \frac{y-B}{c_y}$ હોય, તો $b_{yx} = b_{vu} \cdot \frac{c_y}{c_x}$

(i) $u = x - 15 = x - A$ અને $v = y - 20 = y - B$ હોવાથી

$\therefore\ b_{vu} = b_{yx} = 0.85$ જ થાય.

(ii) $u = \frac{x-5}{3} = \frac{x-A}{c_x}$ અને $v = \frac{y-8}{5} = \frac{y-B}{c_y}$ હોવાથી

$b_{yx} = b_{vu} \cdot \frac{c_y}{c_x} \quad \therefore\ b_{vu} = b_{yx} \cdot \frac{c_x}{c_y} = 0.9 \times \frac{3}{5} = 0.54$ થાય.

(iii) $u = 10(x - 4.5) = \frac{x-4.5}{\frac{1}{10}} = \frac{x-A}{c_x}$ અને $v = \frac{y-50}{10} = \frac{y-B}{c_y}$ હોવાથી

$b_{yx} = b_{vu} \cdot \frac{c_y}{c_x} \quad \therefore\ b_{vu} = b_{yx} \cdot \frac{c_x}{c_y} = 0.25 \times \frac{\left(\frac{1}{10}\right)}{10} = 0.25 \times \frac{1}{100} = 0.0025$ થાય.

(iv) જો $u = 5(x - 40) = \frac{x-40}{\frac{1}{5}} = \frac{x-A}{c_x}$ અને $v = 2(y - 18) = \frac{y-18}{\frac{1}{2}} = \frac{y-B}{c_y}$ હોવાથી

$b_{yx} = b_{vu} \cdot \frac{c_y}{c_x} \quad \therefore\ b_{vu} = b_{yx} \cdot \frac{c_x}{c_y} = 1.6 \times \frac{\left(\frac{1}{5}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 1.6 \times \frac{2}{5} = 0.64$ થાય.

3.8 નિયતસંબંધના ઉપયોગમાં રાખવી પડતી સાવચેતી

આપણે જાણીએ છીએ કે નિયતસંબંધ એ બે સહસંબંધિત ચલ વચ્ચેનો વિધેયાત્મક સંબંધ છે અને તેથી તેના પરથી સાપેક્ષ ચલની કિંમતનું અનુમાન કરી શકાય છે. વ્યાવહારિક ક્ષેત્રો જેવાં કે અર્થશાસ્ત્ર, વેપાર, ઉદ્યોગો, શિક્ષણ, મનોવિજ્ઞાન, સમાજશાસ્ત્ર, તબીબી, આયોજન વગેરેમાં નિર્ણય-ઘડતર માટે નિયતસંબંધ ખૂબ ઉપયોગી છે. નિયતસંબંધનો ખૂબ બહોળા પ્રમાણમાં ઉપયોગ થાય છે પરંતુ તેના ઉપયોગમાં કેટલીક સાવચેતી રાખવી જરૂરી છે.

(1) સાપેક્ષ ચલના અનુમાનની વિશ્વસનીયતા નિશ્ચાયકતાના આંક $\left(R^2\right)$ પરથી ચકાસી શકાય છે. તેથી આપણે નિશ્ચાયકતાના આંક પરથી નિયતસંબંધ સુરેખ છે તે ચકાસ્યા બાદ જ મેળવેલ અનુમાનનો ઉપયોગ કરવો જોઈએ.

(2) નિયતસંબંધના અભ્યાસમાં ધ્યાનમાં રાખવી જરૂરી અન્ય બાબત એ છે કે, વિકીર્ણ આકૃતિ કે ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત પરથી મળતા નિયતસંબંધનો ઉપયોગ નિરપેક્ષ ચલની આપેલી કિંમતોથી બહુ દૂરની કિંમતો માટે ન થવો જોઈએ.

દા.ત., જો કોઈ માહિતી પરથી વરસાદ અને ઘઉંની ઊપજ વચ્ચે ગાઢ પ્રમાણમાં સહસંબંધ જોવા મળે તો કહી શકાય કે, જેમ વરસાદ વધે તેમ ઘઉંની ઊપજ પણ વધે. હવે આપેલી માહિતી પરથી મેળવેલ નિયતસંબંધનો ઉપયોગ વરસાદની કોઈ કિંમત પરથી તેને અનુરૂપ ઘઉંની ઊપજનું અનુમાન મેળવવું હોય તો તે કિંમત માહિતીમાં વરસાદની આપેલી કિંમતોની આસપાસ નજીકની હોય તો જ ઘઉંની ઊપજનું યોગ્ય અનુમાન મળી શકે છે. જો ખૂબ વધુ વરસાદ પડે તો પાકને નુકસાન થાય અને તેથી ઘઉંની ઊપજ ઘટી પણ શકે છે. આવા સમયે ઉપર્યુક્ત નિયતસંબંધ પરથી સાપેક્ષ ચલ (ઊપજ)નું અનુમાન ખોટું પડી શકે છે.

સારાંશ

- અભ્યાસ હેઠળના બે ચલ વચ્ચે કાર્ય-કારણનો સંબંધ છે તે પૂર્વધારણા લઈ નિયતસંબંધનો અભ્યાસ કરવામાં આવે છે.
- નિયતસંબંધ : બે સંબંધિત ચલો વચ્ચેનો વિધેયાત્મક સંબંધ.
- સુરેખ નિયતસંબંધ : બે સંબંધિત ચલો વચ્ચેનો એવો વિધેયાત્મક સંબંધ કે જેમાં ચલની કિંમતોમાં (લગભગ) અચળ પ્રમાણમાં ફેરફાર થતો હોય એટલે કે તે સંબંધ કોઈ સુરેખા દ્વારા નિશ્ચિત કરી શકાય.
- નિયતસંબંધ પરથી નિરપેક્ષ ચલની કોઈ જ્ઞાત કિંમત માટે તેને અનુરૂપ સાપેક્ષ ચલની કિંમતનું અનુમાન થઈ શકે છે.
- નિયત સંબંધાંક : નિરપેક્ષ ચલની કિંમતમાં એક એકમ ફેરફાર કરવાથી સાપેક્ષ ચલની કિંમત થતો અંદાજિત ફેરફાર. તેને નિયતસંબંધ રેખાનો ઢાળ પણ કહે છે.
- ત્રુટિ : સાપેક્ષ ચલની કિંમતના અનુમાનમાં થતી ભૂલ.
- નિશ્ચાયકતાનો આંક : સાપેક્ષ ચલ Y ની અવલોકિત કિંમતો અને તેની અનુમાનિત કિંમતો વચ્ચેનો સહસંબંધાંકનો વર્ગ. બે ચલોના કિસ્સામાં તેની કિંમત નિરપેક્ષ ચલ X અને સાપેક્ષ ચલ Y વચ્ચેના સહસંબંધાંકના વર્ગ જેટલી જ થાય છે.
- નિશ્ચાયકતાના આંક પરથી સાપેક્ષ ચલ Y માં થતા કુલ ફેરફારમાંથી કેટલું ચલન નિયતસંબંધ રેખા દ્વારા સમજાવી શકાય તે જાણી શકાય છે અને નિયતસંબંધ મોડલની વિશ્વસનીયતા પણ જાણી શકાય છે.
- નિયતસંબંધનો ઉપયોગ નિરપેક્ષ ચલની આપેલી કિંમતોથી બહુ દૂરની કિંમતો માટે ન થવો જોઈએ.

સૂત્રોની યાદી :

નિયતસંબંધ રેખાનું સમીકરણ

$\hat{y} = a + bx$

જ્યાં, $b = b_{yx} =$ નિયતસંબંધાંક

(1) $b = \dfrac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(x-\bar{x})^2}$

(2) $b = \dfrac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$

(3) $b = \dfrac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2}$ અહીં, $u = x - A$ અને $v = y - B$

(4) $b = \dfrac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \times \dfrac{c_y}{c_x}$ અહીં, $u = \dfrac{x-A}{c_x}$ અને $v = \dfrac{y-B}{c_y}$

(5) $b = r \cdot \dfrac{s_y}{s_x}$

(6) $b = \dfrac{Cov(x, y)}{s_x^2}$

(7) $a = \bar{y} - b\bar{x}$

(8) નિશ્ચાયકતાનો આંક $R^2 = \left[r(y, \hat{y})\right]^2 = \left[r(x, y)\right]^2 = r^2$

સ્વાધ્યાય 3

વિભાગ A

નીચે આપેલ બહુવિકલ્પ પ્રશ્નો માટે સાચા વિકલ્પની પસંદગી કરો :

1. નીચેના પૈકી કયો વિકલ્પ, બે ચલ વચ્ચેનો વિધેયાત્મક સંબંધ દર્શાવે છે ?

(a) સહસંબંધ (b) નિયતસંબંધ (c) મધ્યક (d) વિચરણ

2. નિયતસંબંધની શ્રેષ્ઠ અન્વાયોજિત રેખા કઈ રીતથી મેળવાય છે ?

(a) ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત (b) કાર્લ પિયર્સનની રીત

(c) મહત્તમ વર્ગોની રીત (d) બાઉલીની રીત

3. પ્રચલિત સંકેતમાં b_{yx} એટલે શું ?

(a) અંતઃખંડ (b) સાપેક્ષ ચલ

(c) X ની કિંમતમાં એક એકમનો ફેરફાર કરવાથી Y ની કિંમતમાં થતો અંદાજિત ફેરફાર

(d) Y ની કિંમતમાં એક એકમનો ફેરફાર કરવાથી X ની કિંમતમાં થતો અંદાજિત ફેરફાર

4. નીચેના પૈકી કયો વિકલ્પ સાચો છે ?

(a) $b_{yx} = r \cdot \frac{s_x}{s_y}$ (b) $b_{yx} = r \cdot \frac{s_y^2}{s_x^2}$ (c) $b_{yx} = \frac{Cov(x, y)}{s_y^2}$ (d) $b_{yx} = r \cdot \frac{s_y}{s_x}$

5. નિયતસંબંધ રેખા કયા બિંદુમાંથી હંમેશાં પસાર થાય છે ?

(a) $(\bar{x}, \bar{y})$ (b) $(0, \bar{y})$ (c) $(\bar{x}, 0)$ (d) $(0, 0)$

6. Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખાના કિસ્સામાં અનુમાનની ત્રુટિ e શું થાય ?

(a) $y - \hat{y}$ (b) $\hat{x} - \hat{y}$ (c) $x - \hat{x}$ (d) $\hat{y} - \hat{x}$

7. જો વસ્તુનું વેચાણ એ તેના જાહેરાત ખર્ચ પર આધાર રાખે તો કઈ નિયતસંબંધ રેખાનો ઉપયોગ થાય ?

(a) જાહેરાત-ખર્ચની વેચાણ પરની નિયતસંબંધ રેખા

(b) જાહેરાત-ખર્ચની જાહેરાત-ખર્ચ પરની નિયતસંબંધ રેખા

(c) વેચાણની જાહેરાત-ખર્ચ પરની નિયતસંબંધ રેખા

(d) વેચાણની વેચાણ પરની નિયતસંબંધ રેખા

8. નીચેના પૈકી Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા કઈ છે ?

(a) $\hat{y} = a + bx + cx^2$ (b) $\hat{x} = c + by$ (c) $\hat{y} = a + bx$ (d) $\hat{y} = a + bx^2$

9. સહસંબંધાંક (r)ની કઈ કિંમત માટે નિયતસંબંધાંકની કિંમત શૂન્ય થાય છે ?

(a) 1 (b) –1 (c) $\frac{1}{2}$ (d) 0

10. બે ચલ વચ્ચેના નિયતસંબંધના અભ્યાસમાં નિશ્ચાયકતાનો આંક એટલે શું ?

(a) બે પ્રમાણિત વિચલનોનો ગુણાકાર (b) સહસંબંધાંકનો વર્ગ

(c) સહવિચરણનો વર્ગ (d) બે વિચરણોનો ગુણાકાર

11. જો Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા $\hat{y} = 10 + 3x$ હોય તો $X = 20$ માટે Y ની કિંમતનું અનુમાન કેટલું થાય ?

(a) 13 (b) 60 (c) 70 (d) 203

12. જો Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા $2x + 3y - 50 = 0$ હોય તો b_{yx}ની કિંમત કેટલી થાય ?

(a) $\frac{3}{2}$ (b) $-\frac{3}{2}$ (c) $-\frac{2}{3}$ (d) 2

13. Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા $\hat{y} = 30 - 1.5x$ છે. જો $\bar{x} = 10$ હોય તો $\bar{y}$ની કિંમત કેટલી થાય ?

(a) 28.5 (b) 20 (c) 15 (d) 45

14. જો $u = \frac{x-15}{10}$ અને $v = \frac{y-50}{2}$ હોય અને $b_{yx} = 7.5$ હોય તો b_{vu}ની કિંમત કેટલી થાય ?

(a) 7.5 (b) 1.5 (c) 37.5 (d) 150

15. જો $r = 0.8$ હોય તો સાપેક્ષ ચલના કુલ ચલનનો કેટલા ભાગ નિયતસંબંધ મૉડેલ દ્વારા સમજાવી શકાય છે ?

(a) 80 % (b) 64 % (c) 36 % (d) 20 %

વિભાગ B

નીચેના પ્રશ્નોના એક વાક્યમાં જવાબ આપો :

1. સુરેખ નિયતસંબંધની વ્યાખ્યા આપો.
2. નિયતસંબંધાંકની વ્યાખ્યા આપો.
3. સુરેખ નિયતસંબંધ મૉડેલ જણાવો.
4. નિયતસંબંધ રેખાના સંદર્ભમાં ત્રુટિ એટલે શું ?
5. નિયતસંબંધની શ્રેષ્ઠ અન્વાયોજિત રેખા મેળવવા માટેની રીતનું નામ જણાવો.
6. નિયતસંબંધાંક શેના પરિવર્તનથી સ્વતંત્ર છે ?
7. નિયતસંબંધાંક શેના પરિવર્તનથી સ્વતંત્ર નથી ?
8. જો કોઈ નિદર્શ બિંદુ અન્વાયોજિત રેખા પર પડતું હોય તો ત્રુટિની કિંમત કેટલી થાય ?
9. માપ (સ્કેલ)ના પરિવર્તનથી જો x અને y બંને ચલની કિંમતો બમણી કરવામાં આવે, તો નિયતસંબંધાંક બદલાશે ?
10. જો $r = 0.5, s_x = 2, s_y = 4$ હોય, તો નિયતસંબંધાંક b_{yx}ની કિંમત કેટલી થશે ?
11. નિયતસંબંધ રેખા $\hat{y} = 31.5 + 1.85x$ પરથી $X = 10$ માટે Yની કિંમતનું અનુમાન કરો.
12. જો $y = a + bx$, જ્યાં $b > 0$ એ Y અને X વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવે તો r ની કિંમત કેટલી થાય ?
13. જો $y = 5 - 3x$ એ Y અને X વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવે તો r ની કિંમત કેટલી થાય ?

વિભાગ C

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. નિયતસંબંધ રેખા $\hat{y} = a + bx$ માં અચળાંકો a અને b ને શું કહે છે ?
2. નિયતસંબંધ રેખા $\hat{y} = 23.2 - 1.2x$ ના અન્વાયોજનમાં એક અવલોકન (6, 17)નો ઉપયોગ થયો હોય, તો $X = 6$ માટે Yની અનુમાનિત કિંમતની ત્રુટિ શોધો.
3. જો $\bar{x} = 30, \bar{y} = 20$ અને $b = 0.6$ હોય, તો Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખાનો અંતઃખંડ શોધો અને તે રેખાનું સમીકરણ લખો.
4. જો $b_{yx} = 5$ હોય તો તેનું અર્થઘટન શું થાય ?
5. જો $b = 1.5, r = 0.8$ અને X નું પ્રમાણિત વિચલન 1.6 હોય, તો Y નું પ્રમાણિત વિચલન શોધો.
6. જો Yની X પરની નિયતસંબંધ રેખા પરનો નિયતસંબંધાંક 0.6 હોય તથા X અને Y ના પ્રમાણિત વિચલન અનુક્રમે 5 અને 3 હોય તો નિશ્ચાયકતાનો આંક શોધો.
7. જો Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા $\hat{y} = 35 + 2x$ અને $Cov(x, y) = 50$ હોય તો Xનું પ્રમાણિત વિચલન શોધો.
8. અગાઉના પ્રશ્ન (7)માં આપેલી નિયતસંબંધ રેખા માટે જો Y ની કિંમતમાં 10 એકમો વધારવા હોય તો X ની કિંમતમાં કેટલા એકમોનો વધારો કરવો પડે ?
9. જો $\bar{x} = 10, \bar{y} = 25, \Sigma(x-10)(y-25) = 120$ અને $\Sigma(x-10)^2 = 100$ હોય, તો Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા માટે a અને b ની કિંમત મેળવો.
10. નિયતસંબંધ રેખાના એક અભ્યાસમાંથી મળતી માહિતીમાં જો $b_{yx} = 0.75, u = 6(x-20)$ અને $v = 2(y-15)$ હોય તો b_{vu} ની કિંમત કેટલી થાય ?

વિભાગ D

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. યોગ્ય ઉદાહરણ આપી ‘બે ચલ વચ્ચે કાર્ય-કારણનો સંબંધ છે’એ વિધાન સમજાવો તેમજ નિરપેક્ષ અને સાપેક્ષ ચલ વ્યાખ્યાયિત કરો.

2. નિયતસંબંધ રેખાના અન્વાયોજન માટેની વિકીર્ણ આકૃતિની રીત સમજાવો અને તેની મર્યાદા જણાવો.

3. નિયતસંબંધ રેખાના અન્વાયોજન માટેની ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત સમજાવો.

4. નિયતસંબંધની ઉપયોગિતા જણાવો.

5. નિયતસંબંધાંકના ગુણધર્મો જણાવો અને નિયતસંબંધ રેખા હંમેશાં કયા બિંદુમાંથી પસાર થાય છે તે જણાવો.

6. સમજાવો : નિશ્ચાયકતાનો આંક

7. નિયતસંબંધના ઉપયોગમાં રાખવી પડતી સાવચેતી જણાવો.

8. જો બે સંબંધિત ચલ X અને Y માટે $\Sigma(x-\bar{x})^2 = 80, \Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = 60, \bar{x} = 8, \bar{y} = 10$ હોય, તો Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો.

9. જો $\bar{x} = 30, \bar{y} = 50, r = 0.8$ અને X અને Y ના પ્રમાણિત વિચલન અનુક્રમે 2 અને 5 હોય, તો Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો.

10. જો Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા $\hat{y} = 11 + 3x$ અને $s_x : s_y = 3:10$ હોય, તો નિશ્ચાયકતાનો આંક શોધો અને Y માં થતા કુલ ચલનમાંથી કેટલું ચલન નિયતસંબંધ મૉડેલ પરથી સમજાવી શકાય છે તે જણાવો.

11. જો પ્રચલિત સંકેતોમાં $n = 7, \Sigma u = 2, \Sigma v = 25, \Sigma u^2 = 160$ અને $\Sigma uv = 409$ હોય તો Yની X પરની નિયતસંબંધ રેખાનો નિયતસંબંધાંક શોધો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

12. જો $b_{yx} = 0.8$ હોય તો નીચેના u અને v માટે b_{vu} ની કિંમત શોધો :

(i) $u = x - 105$ અને $v = y - 90$

(ii) $u = \frac{x-1400}{100}$ અને $v = \frac{y-750}{50}$

(iii) $u = 10(x - 4.6)$ અને $v = y - 75$

13. એક દ્વિચલ માહિતી માટે નીચે મુજબનાં પરિણામો મળે છે.

વીગત	x	y
અવલોકનોની સંખ્યા	8	
મધ્યક	100	100
મધ્યકમાંથી લીધેલા વિચલનોના વર્ગોનો સરવાળો	130	145
મધ્યકમાંથી લીધેલા વિચલનોના ગુણાકારોનો સરવાળો	115	

આ પરથી Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો.

વિભાગ E

નીચેનાના ઉકેલ મેળવો :

1. એક I.T. કંપનીના મૅનેજરે સાત માર્કેટિંગ એક્ઝિક્યુટિવના નોકરીના વર્ષ અને તેમની માસિક આવક વિશે નીચે મુજબ માહિતી એકઠી કરી.

નોકરીના વર્ષ	10	6	8	5	9	7	11
માસિક આવક (દસ હજાર ₹)	11	7	9	5	6	8	10

આ માહિતી પરથી માર્કેટિંગ એક્ઝિક્યુટિવની માસિક આવકની તેમની નોકરીના વર્ષ પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો.

2. કોઈ એક વસ્તુ માટે ભાવ (₹માં) અને તેનો પુરવઠા (સો એકમોમાં)ની એકઠી કરેલી માહિતી નીચે મુજબ છે.

ભાવ (₹)	59	60	61	62	64	57	58	59
પુરવઠો (સો એકમો)	78	82	82	79	81	77	78	75

આ માહિતી પરથી પુરવઠાની ભાવ પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો.

3. ઑનલાઇન શોપિંગની સગવડ આપતી એક કંપનીના છેલ્લા વર્ષના માસિક જાહેરાત-ખર્ચ અને વેચાણની વીગત પરથી નીચે મુજબ માહિતી મળે છે.

વીગત	**જાહેરાત ખર્ચ (દસ હજાર ₹)**	**વેચાણ (લાખ ₹)**
મધ્યક	10	90
પ્રમાણિત વિચલન	3	12
$r = 0.8$		

આ પરથી વેચાણની જાહેરાતના ખર્ચ પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો.

4. સામાન્ય રીતે ઓછો વરસાદ પડતો હોય તેવા એક વિસ્તારમાં છેલ્લાં દસ વર્ષ દરમ્યાન પડેલા સરેરાશ વરસાદ અને કોઈ પાકની પ્રતિ એકર ઊપજની વીગત પરથી નીચેના પરિણામો મળે છે.

વીગત	**વરસાદ (સેમી)**	**પાકની ઊપજ (કિગ્રા)**
મધ્યક	18	970
પ્રમાણિત વિચલન	2	38
સહસંબંધાંક = 0.6		

આ પરથી જો સરેરાશ વરસાદ 20 સેમી હોય તો પાકની ઊપજ વિશે અનુમાન કરો.

5. એક મ્યુચ્યુઅલ ફંડ કંપનીએ છેલ્લાં સાત વર્ષમાં શૅરબજારમાં કરેલા રોકાણ (લાખ ₹માં) અને તેના તે રોકાણના છ માસ બાદ તેની બજારકિંમત (લાખ ₹માં)ની વીગતો નીચે મુજબ મળે છે.

વીગત	રોકાણ (લાખ ₹) x	છ માસ બાદ બજાર કિંમત (લાખ ₹) y
મધ્યક	40	50
વિચરણ	100	256
સહવિચરણ = 80		

આ માહિતી પરથી Y ની X પરની નિયત સંબંધ રેખા મેળવો અને કોઈ વર્ષમાં શૅરબજારમાં 45 લાખ ₹નું રોકાણ કરવામાં આવે તો છ માસ બાદ તેની બજાર કિંમત વિશે અનુમાન મેળવો.

વિભાગ F

નીચેનાના ઉકેલ મેળવો :

1. કોઈ વસ્તુની માંગ અને તેના ભાવ વિશે એકઠી કરેલી નીચેની માહિતી પરથી માંગની ભાવ પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો. જો એ વસ્તુનો ભાવ ₹ 40 હોય તો તેની માંગ કેટલી હશે તેનો અંદાજ મેળવો.

ભાવ (₹)	38	36	37	37	36	38	39	36	38
માંગ (સો એકમો)	12	18	15	12	17	13	13	15	12

2. આઠ કારીગરોનો યંત્ર પર કામ કરવાનો અનુભવ (વર્ષમાં) અને તેમણે દર 100 એકમોમાં ઉત્પાદિત કરેલા ખામીરહિત એકમોને આધારે મેળવેલ દેખાવ મૂલ્ય (Performance Rating))ની વીગત નીચે મુજબ છે.

કારીગરનો અનુભવ (વર્ષ)	5	12	15	8	20	18	22	25
દેખાવ મૂલ્ય	80	82	85	81	90	90	95	97

આ પરથી દેખાવ મૂલ્યની અનુભવ પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો અને જો કોઈ કારીગરનો અનુભવ 17 વર્ષ હોય, તો તેના દેખાવ મૂલ્યનો અંદાજ મેળવો.

3. છૂટક કામ કરી આવક મેળવતાં શ્રમજીવી કુટુંબોમાંથી પાંચ કુટુંબોની દૈનિક આવક (₹માં) અને તેમનો વપરાશ ખર્ચ (₹માં)નીચે મુજબ છે.

દૈનિક આવક (₹)	200	300	400	600	900
વપરાશ ખર્ચ (₹)	180	270	320	480	700

આ પરથી વપરાશ-ખર્ચની દૈનિક આવક પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો. જો કોઈ કુંટુંબની દૈનિક આવક ₹ 500 હોય તો તેના વપરાશ-ખર્ચનું અનુમાન કરો.

4. જાહેરાત અભિયાનની અસર જાણવા એક પેઢી દ્વારા નીચે મુજબ માહિતી એકઠી કરવામાં આવી.

વર્ષ	1	2	3	4	5	6	7	8
જાહેરાત ખર્ચ (દસ હજાર ₹)	12	15	15	23	24	38	42	48
વેચાણ (કરોડ ₹)	5	5.6	5.8	7	7.2	8.8	9.2	9.5

આ પરથી વેચાણની જાહેરાત ખર્ચ પરની નિયતસંબંધ રેખા શોધો. જ્યારે જાહેરાત ખર્ચ ₹ 5,00,000 હોય ત્યારે થતા વેચાણનું અનુમાન મેળવો.

5. બાંધકામ ક્ષેત્રે આઠ જુદી-જુદી કાર્યરત કંપનીઓએ એક વર્ષમાં મેળવેલા કામની સંખ્યા અને તેના વાર્ષિક નફાની વીગતો નીચે મુજબ છે.

કામની સંખ્યા	2	5	9	12	6	4	8	10
વાર્ષિક નફો (લાખ ₹)	100	300	700	1000	350	250	700	750

આ પરથી વાર્ષિક નફાની કામની સંખ્યા પરની નિયતસંબંધ રેખા શોધો. સુરેખ નિયતસંબંધ મૉડેલની વિશ્વસનીયતા ચકાસો.

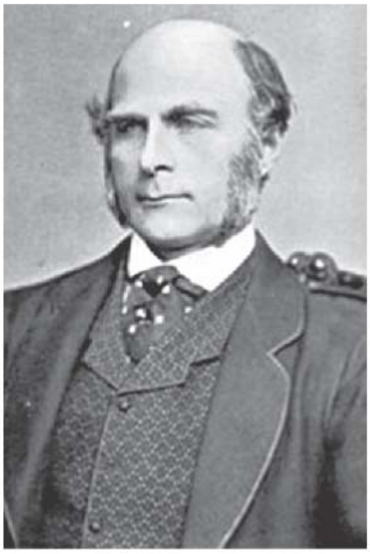
6. નીચે આપેલી માહિતી પરથી Yની X પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો અને $X = 30$ માટે Yની કિંમતનો અંદાજ મેળવો.

$n = 10, \Sigma x = 250, \Sigma y = 300, \Sigma xy = 7900, \Sigma x^2 = 6500$

7. એક માહિતી માટે નીચે મુજબનાં પરિણામો મળે છે.

$n = 12, \Sigma x = 30, \Sigma y = 5, \Sigma x^2 = 670, \Sigma xy = 344$

પાછળથી એવું માલૂમ પડ્યું કે એક અવલોકનની જોડ (10, 14)ને બદલે (11, 4) લેવાઈ ગઈ હતી તો ઉપર્યુક્ત માપોને સુધારી તે પરથી Y ની X પરની નિયતસંબંધ રેખા મેળવો અને $X = 5$ માટે Y નું અનુમાન કરો.



Sir Francis Galton
(1822 –1911)

Sir Francis Galton was an English Victorian statistician, progressive, polymath, sociologist, psychologist, anthropologist, eugenicist, tropical explorer, geographer, inventor, meteorologist, protogeneticist and psychometrician. He was knighted in 1909.

Galton produced over 340 papers and books. He also created the statistical concept of correlation and widely promoted regression toward the mean. He was the first to apply statistical methods to the study of human differences and inheritance of intelligence, and introduced the use of questionnaires and surveys for collecting data on human communities, which he needed for genealogical and biographical works and for his anthropometric studies.

He was a pioneer in eugenics, coining the term itself and the phrase "nature versus nature". His book Hereditary Genius (1869) was the first social scientific attempt to study genius and greatness.

As an investigator of the human mind, he founded psychometrics (the science of measuring mental faculties) and differential psychology and the lexical hypothesis of personality. He devised a method for classifying fingerprints that proved useful in forensic science.

"Imperfect prediction, despite being imperfect can be valuable for decision making process."

– Michael Kattan

4

સામયિક શ્રેણી

(Time Series)

વિષયવસ્તુ :

4.1 સામયિક શ્રેણી : પ્રસ્તાવના, અર્થ, મહત્ત્વ, વ્યાખ્યા અને ઉપયોગો

4.2 સામયિક શ્રેણીના ઘટકો

4.3 સામયિક શ્રેણી – વલણ, વલણ માપવાની રીતો

4.3.1 આલેખની રીત

4.3.2 ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત

4.3.3 ચલિત સરેરાશની રીત

4.1 સામયિક શ્રેણી (Time Series)

પ્રસ્તાવના

આંકડાશાસ્ત્રમાં બે સંબંધિત ચલોનો અભ્યાસ જુદી જુદી રીતે થાય છે. તે સંબંધિત ચલો પૈકી નિરપેક્ષ ચલ તરીકે સમય લઈને તેને આધારિત સાપેક્ષ ચલનો અભ્યાસ વિશિષ્ટ રીતે કરવામાં આવે છે. અર્થશાસ્ત્ર, સમાજશાસ્ત્ર તેમજ ધંધાકીય આંકડાશાસ્ત્રમાં સમય સાથે બદલાતી ચલની કિંમતો વિશેની માહિતીનો અભ્યાસ કરવામાં આવે છે. દા.ત., દેશની વસ્તી, ખેતીની પેદાશ, જથ્થાબંધ ભાવના આંક, બેરોજગારીના આંકડા, આયાત-નિકાસની માહિતી, કોઈ એક કારખાનાનું વાર્ષિક ઉત્પાદન, શૅરબજારના આંકડા, બૅન્કના વ્યાજદર, કોઈ શહેરનું દર કલાકે માપેલ તાપમાન વગેરે સમય સાથે રજૂ કરવામાં આવે છે. આ માહિતી સમય આધારિત હોવાથી તેને સામયિક શ્રેણી કહેવાય છે.

સામયિક શ્રેણીનો અર્થ

અમુક સમયાંતરે એકત્રિત કરેલી અને સમય અનુસાર ગોઠવવામાં આવતી આંકડાકીય માહિતીને સામયિક શ્રેણી કહેવાય છે. સામયિક શ્રેણીમાં સમય સાથે સંબંધિત ચલની કિંમતો હોય છે. આવા ચલની લાંબા ગાળાની કિંમતોનો અભ્યાસ કરવામાં આવે, તો તેના દ્વારા ભવિષ્યમાં આ ચલની કિંમત શું થશે તેનું અનુમાન મેળવી શકાય છે. આવા પૂર્વાનુમાનો ભવિષ્યનું આયોજન કરવામાં ખૂબ જ ઉપયોગી નીવડે છે. દા.ત., કોઈ વિસ્તારની વસ્તીના આંકડા દર્શાવતી સામયિક શ્રેણીનો અભ્યાસ કરવાથી તેમાં થતા ફેરફારોની દિશા, પ્રમાણ અને તરાહ (pattern) જાણી શકાય છે. આગામી સમયમાં આ વિસ્તારનાં લોકો માટે જરૂરી સાધનો, તબીબી સુવિધાઓ, રોજગારીની તકો, શિક્ષણ જેવી બાબતોનું આયોજન કરી શકાય છે. જુદી જુદી કંપનીઓના શૅરોના ભાવની સામયિક શ્રેણીનો અભ્યાસ કરવાથી કયા શૅરના ભાવમાં કેવા ફેરફારો થાય તે જાણી શકાય અને તેના આધારે રોકાણકારો શૅરોની લે-વેચ કરવાના નિર્ણયો લઈ શકે છે. જુદાં જુદાં સ્થળે અને સમયે માપેલા તાપમાન તેમજ વરસાદના આંકડા હવામાનમાં વૈશ્વિક સ્તરે કેવા ફેરફારો થાય છે તે દર્શાવે છે, જે પર્યાવરણ સંવર્ધન અંગેની નીતિ ઘડવામાં મદદરૂપ થાય છે. વર્તમાન સમયમાં બિઝનેસ ઍનાલિટિક્સની વિવિધ પદ્ધતિઓમાં પણ સામયિક શ્રેણીનો વ્યાપક પ્રમાણમાં ઉપયોગ થાય છે.

સામયિક શ્રેણીમાં એક નિશ્ચિત સમયાંતરે બદલાતા ચલની માહિતી દર્શાવવામાં આવે છે. સમયનું એકમ અભ્યાસ હેઠળના ચલ પર આધારિત રહે છે. દા.ત., વસ્તીના આંકડા દર દસ વર્ષે મળે, કુલ એકઠા કરેલ સેલ્સટેક્સની વાર્ષિક માહિતી મળે, બૅંકોના વ્યાજ ત્રિમાસિક ગણાય, દુકાનનો નફો માસિક લેવાય, બૅક્ટેરિયાની વૃદ્ધિ માટેનો સમય કલાકમાં હોય વગેરે.

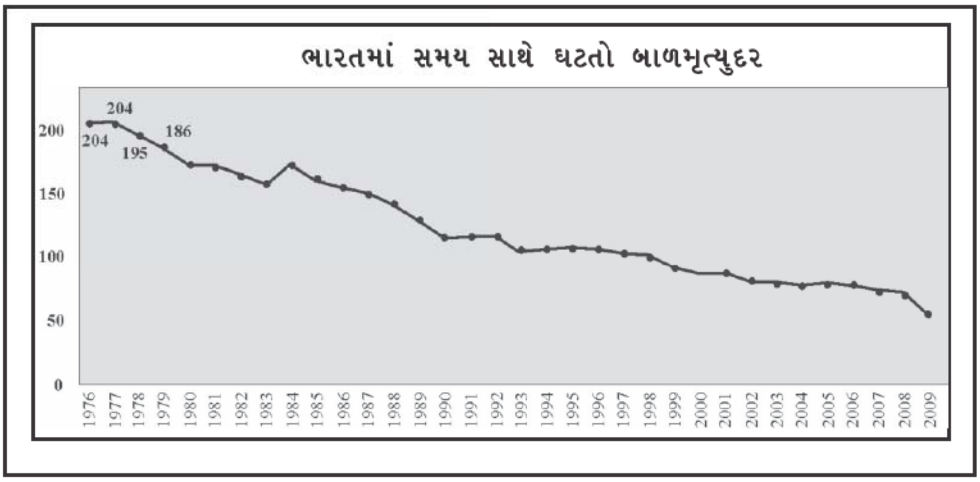
ઉદાહરણ સ્વરૂપે આપણે નીચેની સામયિક શ્રેણીઓ જોઈશું :

(1)

સમગ્રલક્ષી આધાર				(ટકાવારીમાં)
વર્ષ	GDP વૃદ્ધિ	મૂડીરોકાણ વૃદ્ધિ	સરેરાશ WPI ફુગાવો	CAD (GDPની ટકાવારી)
2002-03	4.0	–0.4	3.4	0
2003-04	8.1	10.6	5.5	0
2004-05	7.0	24.0	6.5	0.4
2005-06	9.5	16.2	4.5	1.2
2006-07	9.6	13.8	6.6	1.0
2007-08	9.3	16.2	4.7	1.3
2008-09	6.7	3.5	8.1	2.3
2009-10	8.6	7.7	3.8	2.8
2010-11	9.3	14.0	9.6	2.8
2011-12	6.2	4.4	8.9	4.2
2012-13	5.4*	2.3*	7.6**	4.7*
* એપ્રિલ-સપ્ટેમ્બર, ** એપ્રિલ-ડિસેમ્બર				

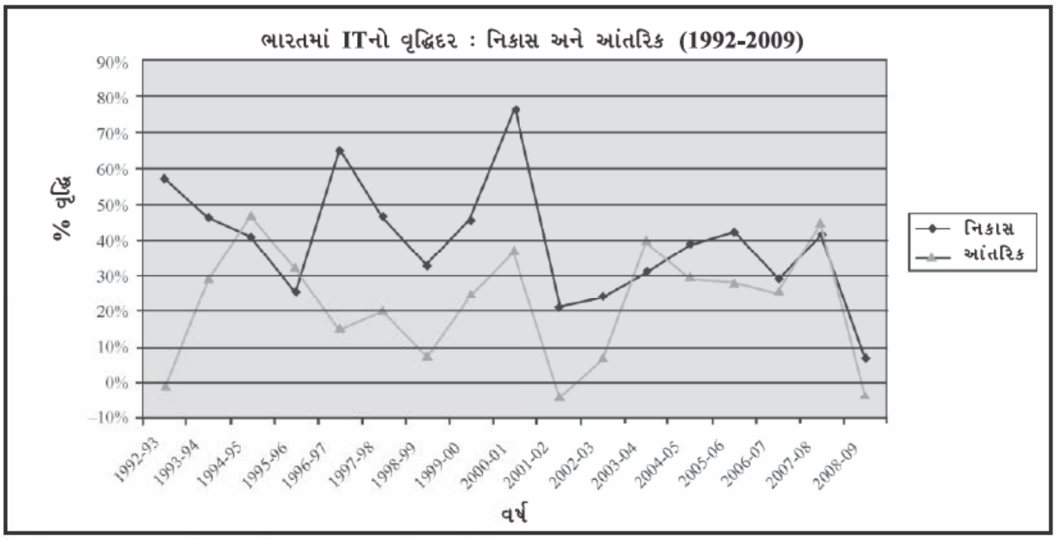
આ સામયિક શ્રેણી જુદાં જુદાં વર્ષોના સમગ્રલક્ષી આધારોની માહિતી આપે છે, જેમાં કુલ આંતરિક પેદાશ (GDP)ના ટકાવારી વૃદ્ધિ સાથે મૂડીરોકાણમાં થયેલ ટકાવારી વૃદ્ધિ, જથ્થાબંધ ભાવ સૂચક આંક (WPI) અને ચાલુ ખાતાની ખાધ (CAD)નો સમાવેશ થયેલ છે.

(2)



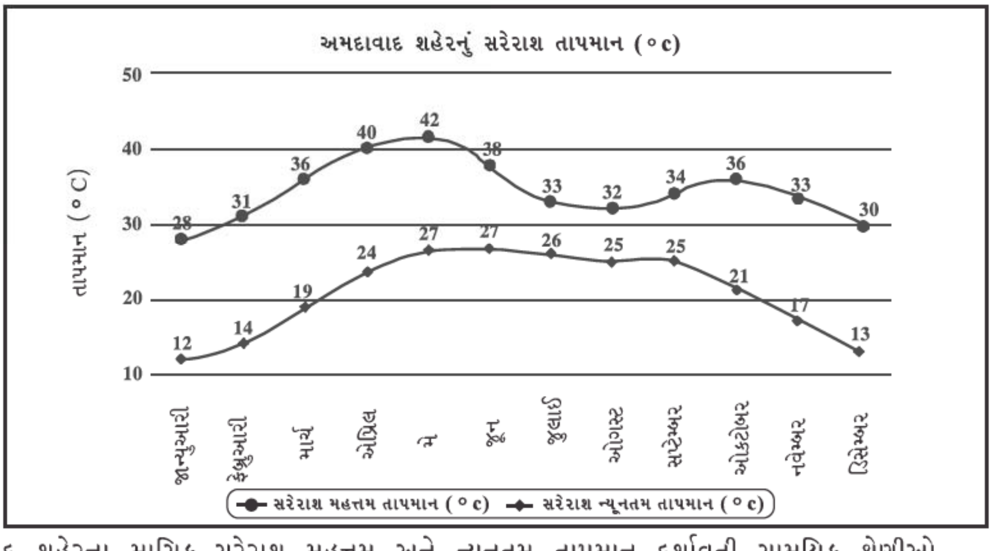
જુદાં જુદાં વર્ષોમાં ભારતમાં નવજાત શિશુઓનો મૃત્યુદર દર્શાવતી સામયિક શ્રેણી.

(3)



IT ક્ષેત્રનો વૃદ્ધિદર દર્શાવતી બે સામયિક શ્રેણીઓનો તુલનાત્મક અભ્યાસ

(4)



અમદાવાદ શહેરના માસિક સરેરાશ મહત્તમ અને ન્યૂનતમ તાપમાન દર્શાવતી સામયિક શ્રેણીઓ

સામયિક શ્રેણીનું મહત્ત્વ

આધુનિક યુગમાં વેપાર તેમજ ધંધાકીય પ્રવૃત્તિઓમાં વધતી અનિશ્ચિતતાના કારણે સામયિક શ્રેણી વડે એકઠી કરેલ માહિતી ખૂબ જ અગત્યની બને છે. નીચેનાં કારણોસર સામયિક શ્રેણીના અભ્યાસને મહત્ત્વ પ્રાપ્ત થાય છે.

(1) ભૂતકાળની માહિતી પરથી શ્રેણીની કિંમતમાં થતા ફેરફારોની દિશા અને તરાહ જાણી શકાય છે.

(2) શ્રેણીની કિંમતોમાં કેટલા પ્રમાણમાં ફેરફારો થાય છે તે પરથી ભવિષ્યમાં થતાં ફેરફારોનો અંદાજ મેળવી શકાય છે.

(3) ભવિષ્યની અંદાજિત કિંમતથી અગત્યના નિર્ણયો લઈ શકાય તેમજ ઉદ્યોગની કે સરકારની નીતિ ઘડવામાં સરળતા રહે છે.

(4) બે અથવા તેથી વધુ ઉદ્યોગપતિઓ અથવા સરકારી સંસ્થાઓ તેમના દ્વારા મેળવેલી સામયિક શ્રેણીની માહિતીનો તુલનાત્મક અભ્યાસ કરી શકે છે.

સામયિક શ્રેણીની વ્યાખ્યા

સામયિક શ્રેણીની વ્યાખ્યા નીચે મુજબ કરવામાં આવે છે :

'નિયત સમયે લેવામાં આવેલ અવલોકનોના સમૂહને **સામયિક શ્રેણી** કહે છે.'

સામાન્ય રીતે આ અવલોકનો સમાન સમયાંતરે લેવામાં આવે છે.

સામયિક શ્રેણીમાં સમયને નિરપેક્ષ ચલ તરીકે લેવાય છે તેને આપણે t વડે દર્શાવીશું અને તેની સાથે સંકળાયેલ સાપેક્ષ ચલને y_t વડે દર્શાવીશું. આમ, સમયના જુદા જુદા એકમો માટે આપેલ સામયિક શ્રેણીને નીચે મુજબ રજૂ કરીશું.

સમય t	1	2	3	...	n
ચલ y_t	y_1	y_2	y_3	...	y_n

સામયિક શ્રેણીના ઉપયોગો

સમય સાથે બદલાતા સામયિક શ્રેણીના ચલમાં આવતા ફેરફારો કોઈ એક વિશિષ્ટ કારણસર થતા નથી. સામયિક શ્રેણીનો ચલ અનેક પરિબળોને આધીન હોય છે અને તે બધાં પરિબળોની અસર આપેલ ચલ પર થતી હોય છે. દા.ત., જથ્થાબંધ બજારમાં ઘઉંનો ભાવ સમય સાથે બદલાતો હોય છે, જેનાં ઘણા જુદાં જુદાં કારણો હોઈ શકે છે. જેમકે, ઘઉંનું તે સમયનું ઉત્પાદન, ઘઉંની માંગ, ઉત્પાદિત માલ બજાર સુધી લાવવાનો ખર્ચ વગેરે. આમાંથી દરેક ઘટક અન્ય પરિબળો પર આધારિત હોય છે. જેમકે, ઘઉંનું ઉત્પાદન કેટલું થાય તેના પર તે સમયનું હવામાન, સિંચાઈની સુવિધા, તે સમયે વાપરેલ બિયારણ જેવી વિવિધ બાબતોની અસર થતી હોય છે. આવા પરિબળોની અસર સામયિક શ્રેણીના ચલની કિંમત પર જુદા જુદા પ્રકારે થાય છે જેનો અભ્યાસ કરવો જરૂરી હોય છે. સામયિક શ્રેણીનો આ રીતે વીગતવાર અભ્યાસ કરવામાં આવે તો તેને સામયિક શ્રેણીનું પૃથક્કરણ કહેવાય છે, જે નીચેના બે તબક્કામાં કરવામાં આવે છે :

(1) સામયિક શ્રેણીના ચલ પર અસર કરતાં વિવિધ પરિબળો ઓળખવા.

(2) આ પરિબળોને અલગ-અલગ તારવીને તેમાંથી આપેલ ચલ ઉપર દરેકની અસર કેટલા પ્રમાણમાં થાય છે તે નક્કી કરવું.

આ પ્રકારે કરવામાં આવેલ સામયિક શ્રેણીનું પૃથક્કરણ વેપાર, વિજ્ઞાન, સામાજિક અને રાજકીયક્ષેત્રે નીચે પ્રમાણે ઉપયોગી નીવડે છે :

(1) ભૂતકાળની પરિસ્થિતિ જાણી શકાય છે અને તે પરથી ચલનનો પ્રકાર અને માપ મેળવી શકાય છે.

(2) ચલની ભવિષ્યની કિંમતોનું આંકડાશાસ્ત્રીય રીતોની મદદથી અનુમાન મેળવી શકાય છે.

(3) મેળવેલ અનુમાનિત કિંમતના આધારે ભવિષ્ય માટે યોગ્ય નિર્ણયો લઈ શકાય છે. તેમજ કાર્યનું આયોજન કરી શકાય છે.

(4) જુદાં જુદાં સ્થળે અથવા સમયે આપેલ ચલમાં થતા ફેરફારોનો તુલનાત્મક અભ્યાસ કરી શકાય છે.

(5) ભૂતકાળની કિંમતો પરથી મેળવેલ અનુમાનિત કિંમતો અને વર્તમાન કિંમતોની તુલના કરીને જો કોઈ તફાવત જણાય તો તેનાં કારણો શોધી શકાય છે.

પ્રવૃત્તિ

તમારા શિક્ષકોની મદદથી તમારી શાળામાંથી છેલ્લાં 10 વર્ષમાં ધોરણ 12 માં પાસ થયેલ વિદ્યાર્થીઓની ટકાવારી વિશે માહિતી એકત્રિત કરો અને તેને સામયિક શ્રેણી વડે રજૂ કરો.

4.2 સામયિક શ્રેણીના ઘટકો (Components of Time Series)

આપણે જોયું કે સામયિક શ્રેણીના ચલ પર અનેક પરિબળોની સંયુક્ત અસર થાય છે અને તેથી ચલની કિંમતમાં ફેરફારો જોવા મળે છે. જુદી જુદી સામયિક શ્રેણીઓના નિરીક્ષણથી માલૂમ પડે છે કે ચલની કિંમતોના ફેરફારોમાં વિશિષ્ટ તરાહ હોય છે. તેને આધારે સામયિક શ્રેણીને નીચેના ઘટકોમાં વિભાજિત કરી શકાય.

(1) દીર્ઘકાલીન ઘટક અથવા વલણ (Long-term Component or Trend) : સામયિક શ્રેણીના ચલમાં ખૂબ લાંબા સમયગાળામાં જે ચલન જોવા મળે છે તે દીર્ઘકાલીન ઘટક અથવા વલણની અસર છે. સામાન્ય રીતે સામયિક શ્રેણીના ચલમાં સમય સાથે સતત વધારો કે ઘટાડો થતો માલૂમ પડે છે. આ સ્થિતિ વલણને કારણે ઉદ્ભવે છે. દા.ત., આંતરરાષ્ટ્રીય બજારમાં રૂપિયાનું ઘટતું મૂલ્ય, મોબાઈલ ફોનનો વધતો વપરાશ, દેશની વસ્તીનો વધારો, મૃત્યુદરમાં થતો ઘટાડો વગેરે. વલણમાં લાંબા સમયની વધઘટનો અભ્યાસ કરાતો હોવાથી સામયિક શ્રેણીના વચગાળાના ટૂંકા સમયની વધઘટોને ધ્યાનમાં લેવામાં આવતી નથી. અહીં, શ્રેણીની કિંમતોમાં એકંદરે કેવા ફેરફારો થાય છે તે ધ્યાનમાં લેવામાં આવે છે. જે પરિબળો હેઠળ આવા ફેરફારો થતા હોય તે ફેરફારોનો દર ધીમો હોય છે. દા.ત. ભારતમાં શિક્ષિતોની સંખ્યા વધતી જાય છે પણ આ બદલાવ છેલ્લાં 60-70 વર્ષમાં ધીમે-ધીમે થતો ગયો છે. સામાન્ય રીતે આવા ફેરફારોનાં કારણો એ સમાજમાં બદલાતી રૂઢિઓ, લોકોની પસંદગી કે રુચિમાં થયેલ ફેરફારો, ઉદ્યોગ-ધંધામાં બદલાતી ટૅક્નોલૉજી વગેરે હોય છે.

ખૂબ લાંબા સમયાંતરે સામયિક શ્રેણીનું વલણ સ્પષ્ટ થાય છે, જ્યાં 'લાંબો સમય' પૂર્ણતઃ સાપેક્ષ બાબત છે. ખેતીની પેદાશ કે ઔદ્યોગિક ઉત્પાદનમાં વલણ જાણવા માટે 10-15 વર્ષનો ગાળો લેવો પડે, જ્યારે ઇલેક્ટ્રૉનિક ઉપકરણના વેચાણમાં 4-5 વર્ષના ગાળામાં પણ વલણ સ્પષ્ટ થાય છે. જે શ્રેણીમાં ઉત્તરોત્તર સતત લગભગ અચળ વધારો કે ઘટાડો થતો હોય તેવા વલણને સુરેખ વલણ કહેવાય છે, જે સર્વસામાન્ય રીતે મોટા ભાગની સામયિક શ્રેણીઓમાં જોવા મળે છે. પણ અર્થશાસ્ત્ર અને વાણિજ્ય વેપારમાં એવી શ્રેણી જોવા મળે છે કે જેમાં કિંમતોનો વધવાનો કે ઘટવાનો દર અચળ રહેતો નથી. આવી શ્રેણીઓમાં શરૂઆતમાં કિંમતોનો વધવાનો દર બહુ ઓછો હોય છે જે ધીમે-ધીમે વધતો જાય છે. અમુક સમયાંતરે શ્રેણીની કિંમતો સ્થિર થતી હોય છે અને ત્યાર બાદ તે ધીમે-ધીમે ઘટતી જાય છે. આવી પરિસ્થિતિમાં શ્રેણીનું વલણ અસુરેખ અથવા વક્રીય છે તેમ કહેવાય છે.

સામયિક શ્રેણીના ચલ y_t માં વલણ દર્શાવતા ઘટકને આપણે 'T_t' વડે દર્શાવીશું.

(2) મોસમી ઘટક (Seasonal Component) : સામયિક શ્રેણીના ચલમાં ખૂબ જ ટૂંકા ગાળામાં જે લગભગ નિયમિત વધઘટો થાય છે તે મોસમી ઘટકની અસર છે. સામાન્ય રીતે, આ વધઘટોના પુનરાવર્તનનો ગાળો એક વર્ષથી ઓછો હોય છે. આ વધઘટોનો અભ્યાસ કરવા માટે સામયિક શ્રેણીની ટૂંકા ગાળાની કિંમતો પણ નોંધવી જરૂરી હોય છે. જો આપેલ ચલની વાર્ષિક કિંમતો પ્રાપ્ય હોય તો તેમાંથી મોસમી ઘટક વિશેની માહિતી મેળવવી અશક્ય હોય છે. સામયિક શ્રેણીમાં મોસમી ઘટક નીચે પ્રમાણે અસર કરે છે.

(i) કુદરતી પરિબળોની અસર : સામયિક શ્રેણીની કિંમતોમાં ઋતુ અથવા હવામાનના ફેરફારોને સંલગ્ન વધઘટો થાય છે. આવી વધઘટો લગભગ નિયમિત અંતરાલે થતી હોય છે. દા.ત., ઉનાળામાં પંખા, કૂલર કે એ.સી.ની માંગ વધે છે, તો શિયાળામાં ગરમ કપડાની માંગ વધે છે, ખેતરમાં નવો પાક તૈયાર થતા તેનો બજારભાવ ઘટે છે વગેરે.

(ii) માનવ સર્જિત પરિબળોની અસર : એક વર્ષથી ઓછા સમયગાળામાં થતી લગભગ નિયમિત વધઘટો તહેવારો, સમાજના રીતિરિવાજ, લોકોની આદતો વગેરેને કારણે આવતી હોય છે. દા.ત., લગ્નસરામાં આભૂષણોની ખરીદી વધે છે, ઉત્તરાયણ દરમિયાન પતંગોની માંગ રહે છે, સપ્તાહના અંતે સિનેમાગૃહો કે રેસ્ટોરન્ટોમાં ગ્રાહકોની સંખ્યા વધે છે, તહેવાર દરમિયાન કાપડ કે અન્ય ભેટ-વસ્તુઓની ખરીદીનું પ્રમાણ વધે છે વગેરે.

આ પ્રકારની વધઘટોનો આવર્તન ગાળો લગભગ નિશ્ચિત હોય છે, માટે તેને નિયમિત વધઘટો કહે છે. આ ફેરફારોનો સમય અને પ્રમાણ જ્ઞાત હોય તો તે વેપારીઓ, ઉત્પાદકોને મદદરૂપ થાય છે અને તેનાથી જથ્થાનું નિયંત્રણ કરીને વધુ નફો પ્રાપ્ત કરી શકાય છે.

સામયિક શ્રેણીના આ અલ્પકાલીન ઘટકને આપણે 'S_t' વડે દર્શાવીશું.

(3) ચક્રીય ઘટક (Cyclical Component) : સામયિક શ્રેણીમાં એક વર્ષથી વધુ સમયગાળામાં થતી લગભગ નિયમિત વધઘટ ચક્રીય ઘટકની અસર હોય છે. મોસમી ઘટક કરતાં આ ઘટકના લીધે થતાં ચલનમાં ઓછી નિયમિતતા હોય છે. આ વધઘટોના આવર્તનનો સમયગાળો 2 થી 10 વર્ષનો હોઈ શકે છે અને વિશિષ્ટ સંજોગોમાં તે 10-15 વર્ષનો પણ હોય છે. સંપૂર્ણ શ્રેણીનો સમય 40-50 વર્ષ કે તેથી વધુ હોય તો તેના પ્રમાણમાં ચક્રીય ઘટકના ચલનનો સમય ઓછો હોવાથી આ ઘટક પણ અલ્પકાલીન ઘટક તરીકે જ ઓળખવામાં આવે છે. ધંધાકીય પ્રવૃત્તિમાં આવતાં તેજી-મંદીના ચક્રો આ ચલનનું ઉદાહરણ છે. આ ચક્રો મંદી, વૃદ્ધિ, તેજી અને પડતી એવી ચાર સ્થિતિઓમાંથી પસાર થાય છે. વેપારને લગતી તેમજ આર્થિક બાબતોની જેમકે ઉત્પાદન, વસ્તુનો ભાવ, શૅરબજારમાં શૅરનો ભાવ, રોકાણ વગેરેની સામયિક શ્રેણીમાં આ પ્રકારની વધઘટો જોવા મળતી હોય છે. આ વધઘટોના પ્રમાણ અને સમયના અનુમાનના આધારે વેપારીઓ યોગ્ય આયોજન કરી શકે છે.

સામયિક શ્રેણીના આ ઘટકને 'C_t' વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

(4) યાદચ્છિક અથવા અનિયમિત ઘટક (Random or Irregular Component) : સામયિક શ્રેણીના ચલની અલ્પકાલીન વધઘટોમાં મોસમી અને ચક્રીય એવા લગભગ નિયમિત ઘટકો ઉપરાંત અનિયમિત અથવા યાદચ્છિક ઘટકની અસર પણ જોવા મળે છે, જે ટૂંકા ગાળાની અસર છે. કોઈ આકસ્મિક કે અણધાર્યા કારણસર શ્રેણીની કિંમતો બદલાય તો તે ફેરફારોને યાદચ્છિક ચલન કહેવાય છે. આ ચલનનો સમયગાળો અને અસર નિશ્ચિત હોતા નથી. જે ચલનને વલણ, મોસમી ઘટક, ચક્રીય ઘટકમાંથી કોઈ પણ એક તરીકે નિર્દેશી ન શકાય તે ચલન યાદચ્છિક ઘટકની અસર હોય છે. આ વધઘટો સંપૂર્ણતઃ અનપેક્ષિત, અનિયમિત રીતે આવે છે. તેની આગાહી કરી શકાતી નથી, તેનું પુનરાવર્તન નિયત સમયે થતું નથી અને તેના ઉપર અંકુશ લાવી શકાતો નથી. આ ચલન ભૂકંપ, પૂર જેવી કુદરતી આપત્તિઓ અથવા યુદ્ધ, હડતાલ, રાજકીય ઊથલપાથલ જેવી માનવસર્જિત સમસ્યાઓને લીધે થાય છે. આ ઘટકને લીધે અનુમાનિત કિંમતમાં ત્રુટિ આવી શકે છે.

આ ઘટકને 'R_t' વડે દર્શાવાય છે.

સમય t પર આધારિત સામયિક શ્રેણીના ચલ y_tની કિંમત વલણ (T_t), મોસમી ઘટક (S_t), ચક્રીય ઘટક (C_t) અને યાદચ્છિક ઘટક (R_t)ના સંયુક્ત અસરથી નિશ્ચિત થાય છે. સામયિક શ્રેણીના યોગનીય મોડેલ (Additive Model)માં આ સંબંધ નીચે મુજબ રજૂ કરવામાં આવે છે :

$$y_t = T_t + S_t + C_t + R_t$$

જો સામયિક શ્રેણીમાં ચલની વાર્ષિક કિંમતો આપી હોય તો તેમાં મોસમી ઘટક (S_t) દેખાશે નહિ. દરેક ઘટકની અસર શોધવા માટે સૌ પ્રથમ આપેલ y_tની કિંમતો પરથી વલણ (T_t) શોધવામાં આવે છે. તેને y_tમાંથી બાદ કરતા બાકીનું ચલન અલ્પકાલીન ઘટક (S_t, C_t, R_t) દર્શાવે છે. ત્યારબાદ મોસમી ઘટક (જો પ્રાપ્ય હોય તો) અને ચક્રીય ઘટક શોધવામાં આવે છે. છેલ્લે, $R_t = y_t - (T_t + S_t + C_t)$ વડે યાદચ્છિક ઘટક શોધવામાં આવે છે. ભવિષ્યમાં ચલની અનુમાનિત કિંમત $(\hat{y}_t)$ શોધવા માટે વલણની તે સમયની અનુમાનિત કિંમત શોધી, તેમાં ઉપર મુજબ મેળવેલ દરેક ઘટકની આપેલ સમય (t) માટેની અસર ઉમેરવામાં આવે છે.

પ્રવૃત્તિ

તમારા ઘરના વીજળીના બિલમાંથી પાછલા એક વર્ષ દરમિયાન થયેલ વીજળીના વપરાશના યુનિટની સામયિક શ્રેણી બનાવો. આ શ્રેણીના ચલમાં આવતી વધઘટો સામયિક શ્રેણીના કયા ઘટકની અસર છે તે ઓળખો.

4.3 વલણ માપવાની રીતો (Methods for Determining Trend)

વલણ એ સામયિક શ્રેણીનો મુખ્ય ઘટક છે. તેની કિંમત મેળવવા માટે નીચેની રીતોનો અભ્યાસ કરીશું :

4.3.1 આલેખની રીત (Graphical Method)

વલણ શોધવાની આ સૌથી સરળ રીત છે. અહીં નિરપેક્ષ ચલ એટલે કે સમય (t)ને X-અક્ષ પર અને સાપેક્ષ ચલ y_t ને Y-અક્ષ પર લઈ જુદાં જુદાં બિંદુઓનું આલેખન કરવામાં આવે છે. આ બધાં બિંદુઓને ક્રમશઃ રેખાખંડો વડે જોડવામાં આવે છે. આ પરથી ચલની કિંમતોની વધઘટ જોવા મળે છે. ત્યાર બાદ તે બિંદુઓની વચ્ચેથી પસાર થતો સરળ વક્ર અંદાજથી દોરવામાં આવે છે. આ વક્ર શ્રેણીમાંથી અલ્પકાલીન વધઘટોની અસર અવગણીને વલણ દર્શાવે છે. દોરેલ વક્ર લંબાવીને ભવિષ્યનાં અનુમાનો મેળવવામાં આવે છે.

આલેખની રીતના ગુણ અને મર્યાદા નીચે પ્રમાણે છે.

ગુણ :

(1) આ રીત સમજવામાં અને વાપરવામાં સરળ છે.

(2) કોઈ પણ ગાણિતિક સૂત્ર અથવા ગણતરી વગર વલણ જાણી શકાય છે.

(3) સુરેખ વલણ ન હોય તો પણ આ રીત વાપરી શકાય છે.

(4) વલણ મેળવવા માટે કયા પ્રકારના વક્રનું અન્વાયોજન કરવું તેનો અંદાજ આ રીતથી મેળવી શકાય.

મર્યાદા :

(1) જુદી જુદી વ્યક્તિઓ જુદા-જુદા વક્રો દોરે તેવી શક્યતા રહે છે. તેથી વલણ તેમજ અનુમાનોમાં એકરૂપતા રહેતી નથી.

(2) આ રીત ગાણિતિક ન હોવાથી અનુમાનિત કિંમતો સંપૂર્ણ રીતે ચોક્કસ હોતી નથી અને તેની વિશ્વસનીયતા કેટલી છે તે જાણી શકાતું નથી.

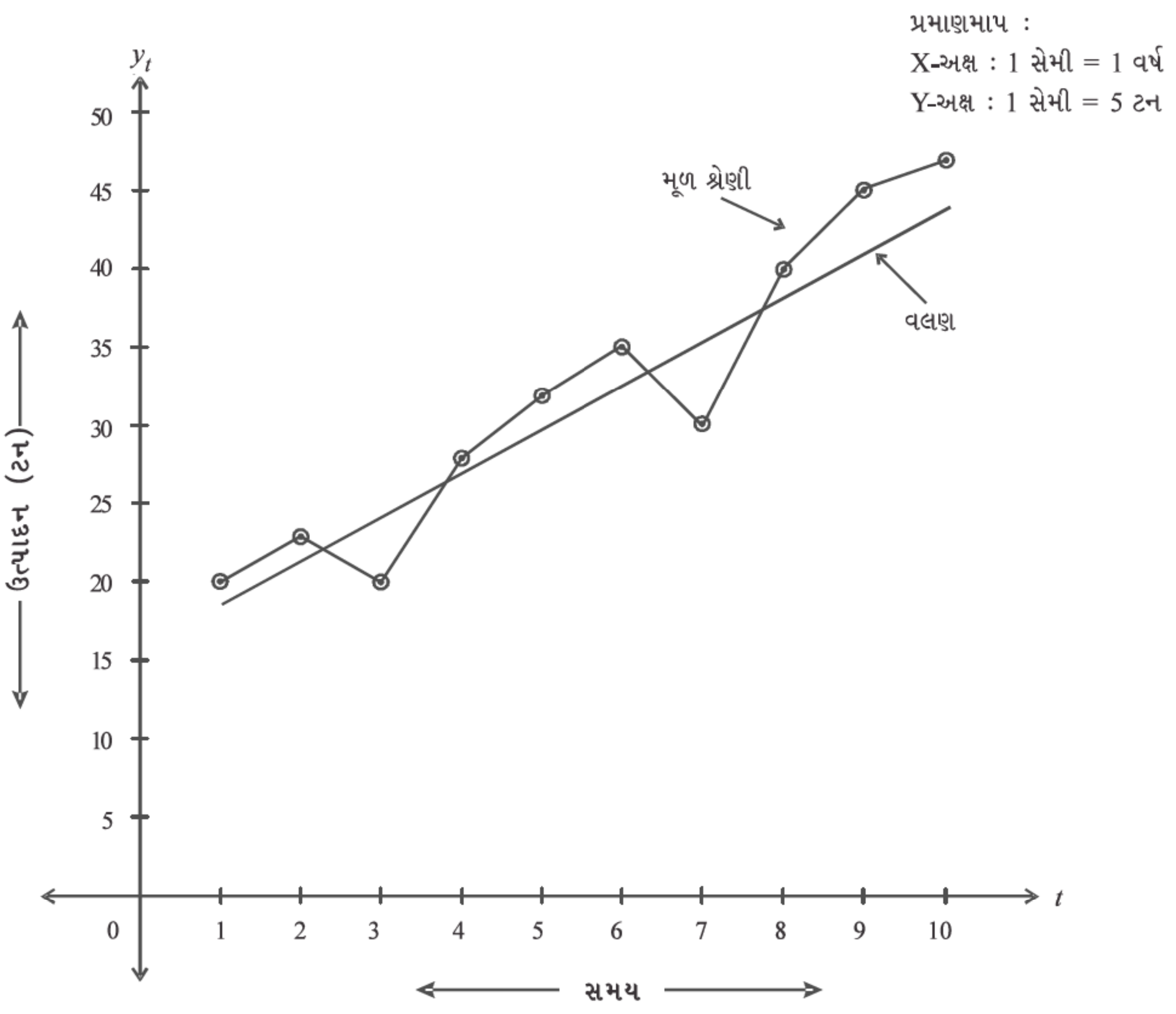
ઉદાહરણ 1 : એક કારખાનાનું વાર્ષિક ઉત્પાદન (ટનમાં) નીચે પ્રમાણે છે. આલેખની રીતે સુરેખ વલણ મેળવો.

વર્ષ	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
ઉત્પાદન (ટન)	20	23	20	28	32	35	30	40	45	47

આ માહિતીને આપણે નીચેની સામયિક શ્રેણી વડે રજૂ કરીશું :

સમય t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ઉત્પાદન (ટન) y_t	20	23	20	28	32	35	30	40	45	47

X-અક્ષ પર t ની અને Y-અક્ષ પર ઉત્પાદન y_t ની કિંમતો લેતાં આ બિંદુઓનું આલેખન કરીશું. બિંદુઓના તરાહને જોતા સુરેખ વલણ વધુ યોગ્ય જણાય છે.



બિંદુઓની વચ્ચેથી પસાર થતી સુરેખા વલણ દર્શાવે છે.

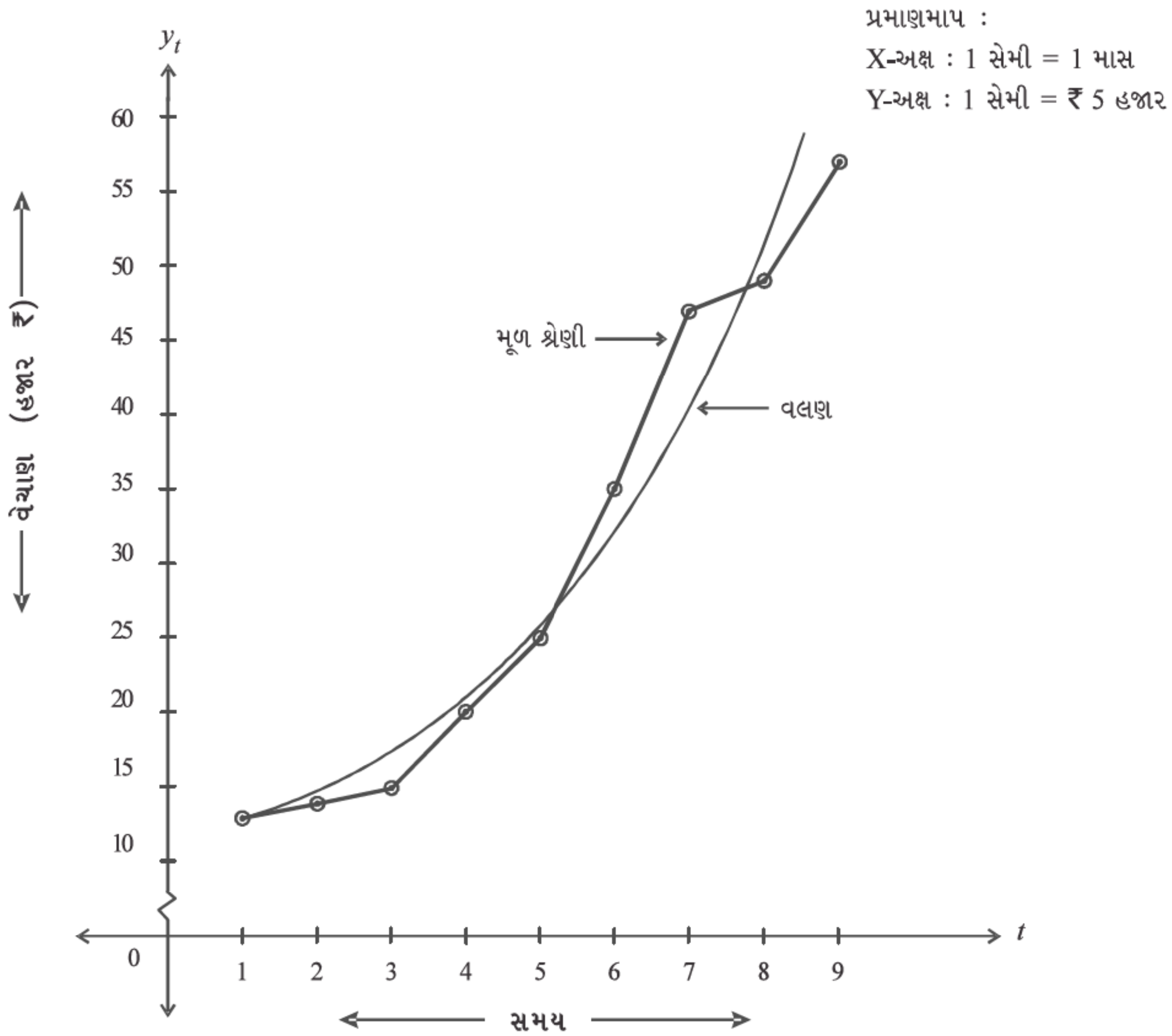
ઉદાહરણ 2 : એક કંપનીના માસિક વેચાણના (હજાર ₹માં) આંકડા નીચના કોષ્ટકમાં આપેલ છે. આલેખની રીતે વલણ મેળવો.

માસ	જાન્યુઆરી	ફેબ્રુઆરી	માર્ચ	એપ્રિલ	મે	જૂન	જુલાઈ	ઑગસ્ટ	સપ્ટેમ્બર
વેચાણ (હજાર ₹)	13	14	15	20	25	35	47	49	57

આ માહિતીની સામયિક શ્રેણી નીચે મુજબ લઈશું :

સમય t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
વેચાણ (હજાર ₹) y_t	13	14	15	20	25	35	47	49	57

X-અક્ષ પર tની અને Y-અક્ષ પર વેચાણ y_tની કિંમતો લઈને બિંદુઓનું આલેખન કરીશું. તે પરથી આ માહિતી માટે વક્રીય વલણ વધુ યોગ્ય જણાય છે.



આલેખનાં બિંદુઓની વચ્ચેથી પસાર થતો વક્ર વલણ દર્શાવે છે.

સ્વાધ્યાય 4.1

1. દર વર્ષે જહાજોમાં માલ ભરવાની એક બંદરની ક્ષમતા (લાખ ટનમાં) વિશેની માહિતી નીચે આપેલ છે. આલેખની રીતે સુરેખ વલણ મેળવો.

વર્ષ	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
ક્ષમતા (લાખ ટન)	90	97	108	111	127	148	169	200

2. એક પર્યટન સ્થળે મુલાકાત માટે આવેલા પ્રવાસીઓની સંખ્યા (હજારમાં) નીચે પ્રમાણે છે. યોગ્ય આલેખ વડે શ્રેણીનું વલણ મેળવો.

વર્ષ	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
પ્રવાસીઓની સંખ્યા (હજાર)	5	7	10	14	30	41	50

3. એક રાજ્યમાં 0-6 વર્ષના બાળકોમાં 1000 છોકરાઓ સામે છોકરીઓની સંખ્યા (y_t)ની માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે. આલેખની રીતે સુરેખ વલણ મેળવો.

વર્ષ	1961	1971	1981	1991	2001	2011
y_t	956	948	947	928	883	890

4. એક કંપનીના શૅરના બંધ ભાવની દસ દિવસોની માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે. આલેખની રીતનો ઉપયોગ કરીને વલણ મેળવો.

દિવસ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
શૅરનો ભાવ (₹)	297	300	304	299	324	320	318	324	329	328

*

4.3.2 ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત (Method of Least Squares)

આલેખની રીતની મર્યાદા તરીકે આપણે જોયું કે, ગાણિતિક પદ્ધતિનો ઉપયોગ ન કરવામાં આવે તો મેળવેલ વલણ અને તેના આધારે મેળવેલ અનુમાનો વ્યક્તિ સાપેક્ષ બદલાય છે અને તેની વિશ્વસનીયતા જાણી શકાતી નથી. જો સામયિક શ્રેણીનું સુરેખ વલણ ગાણિતિક રીતે શોધવું હોય તો આપણે વલણ દર્શાવતા ચોક્કસ સુરેખ સમીકરણની જરૂર પડશે. નિયતસંબંધના પ્રકરણમાં આપણે આપેલ માહિતી માટે સુરેખ સમીકરણનું અન્વાયોજન કરવાની ન્યૂનતમ વર્ગોની રીતનો અભ્યાસ કર્યો છે, જેનો ઉપયોગ આપણે સામયિક શ્રેણીનું સુરેખ વલણ શોધવા માટે કરીશું.

ધારો કે સમય t પર આધારિત સામયિક શ્રેણીનાં ચલ y_t ની કિંમતો પ્રાપ્ય છે. તે બે વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવવા માટે સુરેખ મોડેલ $y_t = \alpha + \beta t + u_t$ (જ્યાં u_t એ વિક્ષેપ ચલ છે) લઈશું. તેનું અન્વાયોજન કરવા માટે ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત વાપરીને y_t ની અનુમાનિત કિંમતો $\hat{y}_t$ શોધીશું. આ માટે પ્રકરણ 3માં દર્શાવેલ રીત મુજબ સમીકરણ $\hat{y}_t = a + bt$ નો ઉપયોગ કરીશું.

સરળતા ખાતર y_t માંથી અનુગ (suffix) t ને અવગણતા આપણે $\hat{y} = a + bt$ લઈશું. અહીં, સાપેક્ષ ચલ y અને નિરપેક્ષ ચલ t છે.

ન્યૂનતમ વર્ગોની રીતથી a અને b નીચે મુજબ મળે છે :

$$b = \frac{n\Sigma ty - (\Sigma t)\ (\Sigma y)}{n\Sigma t^2 - (\Sigma t)^2} \quad \text{અને} \quad a = \overline{y} - b\overline{t}\ ,$$

જ્યાં n = અવલોકનોની સંખ્યા

આ રીતે મળતું સુરેખ સમીકરણ $\hat{y} = a + bt$ આપેલ માહિતી માટે શ્રેષ્ઠ સુરેખ સમીકરણ છે.

આ સુરેખ સમીકરણ વડે ભવિષ્યના સમય માટે વલણનું અનુમાન મેળવવામાં આવે છે.

નોંધ : વલણ મેળવવા માટે ન્યૂનતમ વર્ગોની રીતથી સુરેખ સમીકરણ ઉપરાંત અન્ય સમીકરણો જેવા કે બહુપદી, ઘાતાંકીય સમીકરણોનું પણ અન્વાયોજન કરી શકાય છે.

ન્યૂનતમ વર્ગોની રીતના ગુણ અને મર્યાદા નીચે પ્રમાણે છે.

ગુણ :

(1) આ રીત સંપૂર્ણ રીતે ગાણિતિક હોવાથી ભવિષ્યનાં અનુમાનો વ્યક્તિને સાપેક્ષ બદલાતા નથી.

(2) t ની આપેલ દરેક કિંમત માટે વલણનું અનુમાન આ રીતથી મેળવી શકાય છે.

(3) વલણની કિંમતો સમીકરણમાંથી મેળવવામાં આવતી હોવાથી વચગાળાના સમય માટે પણ વલણનું અનુમાન મેળવી શકાય છે. દા.ત. બીજા અને ત્રીજા વર્ષના મધ્યમાં આવતા સમય માટે $t = 2.5$ લઈને તે સમયનું વલણનું અનુમાન મેળવી શકાય.

મર્યાદા :

(1) આ રીતથી વલણ શોધવા માટે લાંબી ગણતરી કરવી પડે છે.

(2) જો વલણ દર્શાવતા વક્રનું યોગ્ય સ્વરૂપ અને તેને અનુરૂપ સમીકરણનું અન્વાયોજન ન કરવામાં આવે તો મેળવેલ અનુમાનિત કિંમતોની વિશ્વસનીયતા ઓછી હોય છે.

ઉદાહરણ 3 : કમ્પ્યૂટર બનાવતી એક કંપનીનો નફો (લાખ ₹ માં) નીચે પ્રમાણે છે. આ માહિતી પરથી વલણ માટે ન્યૂનતમ વર્ગોની રીતે સુરેખ સમીકરણ શોધો અને વર્ષ 2017 માટે નફાનું અનુમાન મેળવો.

વર્ષ	2011	2012	2013	2014	2015
નફો (લાખ ₹)	31	35	39	41	44

અહીં, $n = 5$ વર્ષના નફાની કિંમતો આપેલ છે. તેથી આપણે આપેલ વર્ષોને અનુક્રમે $t = 1, 2, \ldots, 5$ વડે દર્શાવીશું. સુરેખ વલણનું અન્વાયોજન કરવાની ગણતરી

વર્ષ	**નફો** y	t	t^2	ty
2011	31	1	1	31
2012	35	2	4	70
2013	39	3	9	117
2014	41	4	16	164
2015	44	5	25	220
કુલ	**190**	**15**	**55**	**602**

$$\bar{t} = \frac{\Sigma t}{n} = \frac{15}{5} = 3, \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{190}{5} = 38$$

$$b = \frac{n\Sigma ty - (\Sigma t)(\Sigma y)}{n\Sigma t^2 - (\Sigma t)^2}$$

$$= \frac{5 \times 602 - 15 \times 190}{5 \times 55 - (15)^2}$$

$$= \frac{3010 - 2850}{275 - 225}$$

$$= \frac{160}{50}$$

$$= 3.2$$

$$a = \bar{y} - b\bar{t}$$

$$= 38 - 3.2 \times 3$$

$$= 38 - 9.6$$

$$= 28.4$$

વલણનું સમીકરણ $\hat{y} = a + bt$

$$\therefore \ \hat{y} = 28.4 + 3.2\,t$$

વર્ષ 2017 માટે $t = 7$ લેવાશે.

$$\therefore \ \hat{y} = 28.4 + 3.2 \times 7$$

$$= 28.4 + 22.4$$

$$= 50.8$$

$\therefore \ \hat{y} =$ ₹ 50.8 લાખ

આમ, વર્ષ 2017 માટે નફાની વલણની અનુમાનિત કિંમત ₹ 50.8 લાખ છે.

ઉદાહરણ 4 : એક જિલ્લાની પ્રાથમિક શાળાઓમાંથી ધોરણ 1 થી 5ના વિદ્યાર્થીઓ પૈકી અભ્યાસ છોડનાર વિદ્યાર્થીઓના દર (dropout rate) નીચે પ્રમાણે છે.

વર્ષ	2009 – 10	2010 – 11	2011 – 12	2012 – 13	2013 – 14	2014 – 15	2015 – 16
અભ્યાસ છોડનાર વિદ્યાર્થીઓનો દર	3.24	2.98	2.29	2.20	2.09	2.07	2.04

વલણ માટે સુરેખ સમીકરણનું અન્વાયોજન કરીને વર્ષ 2016-17 તેમજ 2017-18નાં વર્ષોમાં ધોરણ 1 થી 5ના વિદ્યાર્થીઓમાં અભ્યાસ છોડનાર વિદ્યાર્થીઓના દરનું અનુમાન મેળવો.

અહીં, $n = 7$ વર્ષની માહિતી આપેલ છે. તેથી આપણે આપેલ વર્ષો માટે અનુક્રમે $t = 1, 2, \ldots, 7$ લઈશું.

સુરેખ વલણનું અન્વાયોજન કરવાની ગણતરી

વર્ષ	અભ્યાસ છોડનાર વિદ્યાર્થીઓનો દર y	t	t^2	ty
2009-10	3.24	1	1	3.24
2010-11	2.98	2	4	5.96
2011-12	2.29	3	9	6.87
2012-13	2.20	4	16	8.80
2013-14	2.09	5	25	10.45
2014-15	2.07	6	36	12.42
2015-16	2.04	7	49	14.28
કુલ	**16.91**	**28**	**140**	**62.02**

$$\bar{t} = \frac{\Sigma t}{n} = \frac{28}{7} = 4, \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{16.91}{7} = 2.4157 \simeq 2.42$$

$$b = \frac{n\Sigma ty - (\Sigma t)(\Sigma y)}{n\Sigma t^2 - (\Sigma t)^2}$$

$$= \frac{7 \times 62.02 - 28 \times 16.91}{7 \times 140 - (28)^2}$$

$$= \frac{434.14 - 473.48}{980 - 784}$$

$$= \frac{-39.34}{196}$$

$$= -0.2007$$

$$\simeq -0.2$$

$$a = \bar{y} - b\bar{t}$$

$$= 2.42 - (-0.2) \times 4$$

$$= 2.42 + 0.8$$

$$= 3.22$$

વલણનું સમીકરણ $\hat{y} = a + bt$

$$\therefore \hat{y} = 3.22 + (-0.2)\, t$$

$$= 3.22 - 0.2\, t$$

વર્ષ 2016-17 માટે $t = 8$ લેવાશે.

$$\therefore \hat{y} = 3.22 - 0.2 \times 8$$

$$= 3.22 - 1.6$$

$$= 1.62$$

વર્ષ 2017-18 માટે $t = 9$ લેવાશે.

$$\therefore \hat{y} = 3.22 - 0.2 \times 9$$

$$= 3.22 - 1.8$$

$$= 1.42$$

આમ, તે જિલ્લામાં વર્ષ 2016-17 અને 2017-18માં ધોરણ 1 થી 5માં અભ્યાસ છોડનાર વિદ્યાર્થીઓના દરનાં અનુમાનો અનુક્રમે 1.62 અને 1.42 હશે.

ઉદાહરણ5 : એક તાલુકાની વસ્તીના આંકડા (લાખમાં) નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે. તે પરથી સુરેખ વલણનાં સમીકરણનું અન્વાયોજન કરો અને આપેલ દરેક વર્ષ માટે વલણની કિંમત શોધો. 2021ના વર્ષની વસ્તી માટે વલણની કિંમતનું અનુમાન પણ મેળવો.

વર્ષ	1951	1961	1971	1981	1991	2001	2011
વસ્તી (લાખ)	15.1	16.9	18.7	20.1	21.6	25.7	27.1

અહીં, વસ્તીના આંકડા આપેલ હોવાથી તે દરેક દસકા સાથે સંકળાયેલ છે. આપેલ દરેક વર્ષ માટે અનુક્રમે $t = 1, 2, \ldots, 7$ લઈશું. જેથી $n = 7$ થાય.

સુરેખ વલણનું અન્વાયોજન કરવાની ગણતરી

વર્ષ	વસ્તી (લાખ) y	t	t^2	ty	વલણની કિંમતો $\hat{y}$ = 12.66 + 2.02 t
1951	15.1	1	1	15.1	14.68
1961	16.9	2	4	33.8	16.7
1971	18.7	3	9	56.1	18.72
1981	20.1	4	16	80.4	20.74
1991	21.6	5	25	108	22.76
2001	25.7	6	36	154.2	24.78
2011	27.1	7	49	189.7	26.8
કુલ	**145.2**	**28**	**140**	**637.3**	

$\bar{t} = \frac{\Sigma t}{n} = \frac{28}{7} = 4$, $\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{145.2}{7} = 20.7429 \simeq 20.74$

$$b = \frac{n\Sigma ty - (\Sigma t)(\Sigma y)}{n\Sigma t^2 - (\Sigma t)^2}$$

$$= \frac{7 \times 637.3 - 28 \times 145.2}{7 \times 140 - (28)^2}$$

$$= \frac{4461.1 - 4065.6}{980 - 784}$$

$$= \frac{395.5}{196}$$

$$= 2.0179$$

$$\simeq 2.02$$

$$a = \bar{y} - b\bar{t}$$

$$= 20.74 - 2.02 \times 4$$

$$= 20.74 - 8.08$$

$$= 12.66$$

વલણનું સમીકરણ $\hat{y} = a + bt$

$$\therefore \hat{y} = 12.66 + 2.02\,t$$

દરેક આપેલ વર્ષ માટે વલણની કિંમત શોધવા માટે અનુક્રમે $t = 1, 2, \ldots, 7$ લઈશું.

$t = 1$ મૂકતાં,

$$\hat{y} = 12.66 + 2.02 \times 1$$
$$= 12.66 + 2.02$$
$$= 14.68$$

$\therefore \quad \hat{y} = 14.68$ લાખ

આ પ્રમાણે $t = 2, 3, \ldots, 7$ મૂકતાં બાકીની વલણ કિંમતો શોધીને કોષ્ટકમાં દર્શાવીશું.

અહીં, જોઈ શકાય કે $\hat{y}$ ની કિંમતોમાં ક્રમશઃ 2.02 જેટલો વધારો થાય છે.

વર્ષ 2021 માટે $t = 8$ મૂકતાં,

$$\hat{y} = 12.66 + 2.02 \times 8$$
$$= 12.66 + 16.16$$
$$= 28.82$$

$\therefore \quad \hat{y} = 28.82$ લાખ

આમ, 2021ના વર્ષની વસ્તી માટે વલણની અનુમાનિત કિંમત 28.82 લાખ છે.

ઉદાહરણ 6 : એક કંપનીના માસિક વેચાણ (હજાર ₹માં)ની માહિતી નીચે કોષ્ટકમાં આપેલ છે. સુરેખ વલણના સમીકરણનું અન્વાયોજન કરો અને તેને આલેખ વડે દર્શાવો. મેળવેલ સમીકરણનો ઉપયોગ કરીને ઑગસ્ટ માસના વેચાણનું અનુમાન શોધો.

માસ	જાન્યુઆરી	ફેબ્રુઆરી	માર્ચ	એપ્રિલ	મે	જૂન
વેચાણ (હજાર ₹)	80	85	90	76	82	88

અહીં, $n = 6$ માસની માહિતી આપેલ છે. તેથી આપણે આપેલ માસ માટે અનુક્રમે $t = 1, 2, \ldots, 6$ લઈશું.

સુરેખ સમીકરણના અન્વાયોજનની ગણતરી

માસ	**વેચાણ y (હજાર ₹)**	t	t^2	ty	$\hat{y} = 81.79 + 0.49\ t$
જાન્યુઆરી	80	1	1	80	82.28
ફેબ્રુઆરી	85	2	4	170	82.77
માર્ચ	90	3	9	270	83.26
એપ્રિલ	76	4	16	304	83.75
મે	82	5	25	410	84.24
જૂન	88	6	36	528	84.73
કુલ	**501**	**21**	**91**	**1762**	

$$\overline{t} = \frac{\Sigma t}{n} = \frac{21}{6} = 3.5, \qquad \overline{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{501}{6} = 83.5$$

$$b = \frac{n\Sigma ty - (\Sigma t)(\Sigma y)}{n\Sigma t^2 - (\Sigma t)^2}$$

$$= \frac{6 \times 1762 - 21 \times 501}{6 \times 91 - (21)^2}$$

$$= \frac{10572 - 10521}{546 - 441}$$

$$= \frac{51}{105}$$

$$= 0.4857$$

$$\simeq 0.49$$

$$a = \overline{y} - b\overline{t}$$

$$= 83.5 - 0.49 \times 3.5$$

$$= 83.5 - 1.715$$

$$= 81.785$$

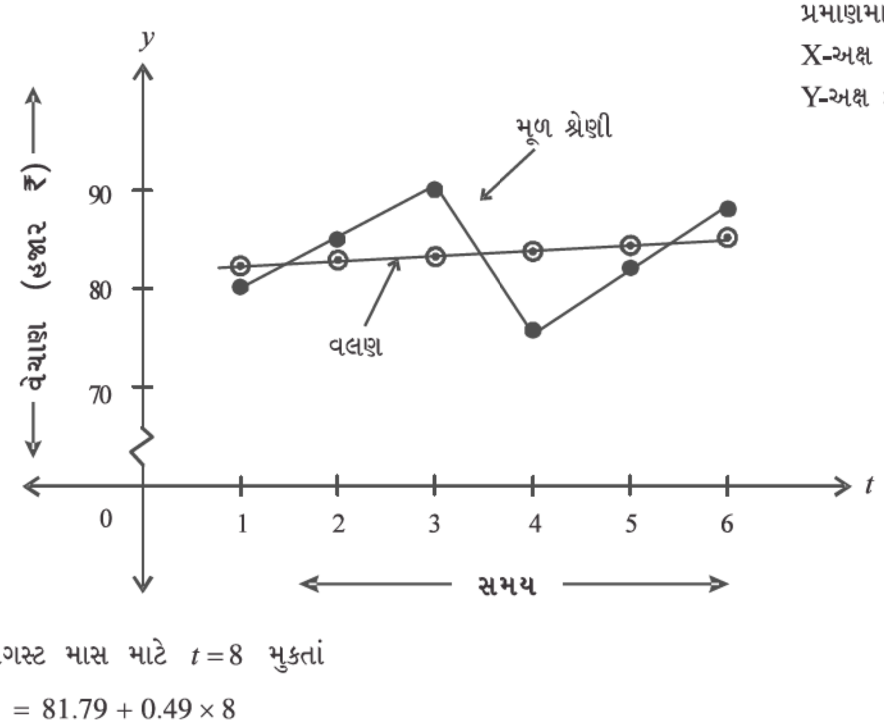
$$\simeq 81.79$$

વલણનું સમીકરણ $\hat{y} = a + bt$

$\therefore \hat{y} = 81.79 + 0.49\,t$

આ સમીકરણમાં ક્રમશઃ $t = 1, 2, \ldots, 6$ મૂકતાં $\hat{y}$ ની સંલગ્ન કિંમતો મળશે જે કોષ્ટકમાં દર્શાવીશું. આ વલણની કિંમતો અને આપેલ શ્રેણીની કિંમતોનો આલેખ નીચે મુજબ દોરી શકાય :

પ્રમાણમાપ :
X-અક્ષ : 1 સેમી = 1 માસ
Y-અક્ષ : 1 સેમી = ₹ 10 હજાર



હવે ઑગસ્ટ માસ માટે $t = 8$ મુકતાં

$$\hat{y} = 81.79 + 0.49 \times 8$$

$$= 81.79 + 3.92$$

$$= 85.71$$

$\therefore \hat{y} =$ ₹ 85.71 હજાર

આમ, ઑગસ્ટ મહિનામાં તે કંપનીના વેચાણનું અનુમાન ₹ 85.71 હજાર છે.

નોંધ : સુરેખ સમીકરણ ધરાવતી સુરેખા દોરવા માટે $\hat{y}$ ની બધી કિંમતો લેવાની જરૂરી નથી. $t = 1, 2, \ldots, 6$ પૈકી કોઈ પણ બે કિંમતોની સંલગ્ન $\hat{y}$ ની કિંમતોને જોડતી સુરેખા વલણનું સમીકરણ આલેખમાં દર્શાવશે.

ઉદાહરણ 7 : એક સામયિક શ્રેણી માટે $n = 8$, $\Sigma y = 344$, $\Sigma ty = 1342$ હોય, તો વલણનું સુરેખ સમીકરણ મેળવો.

$n = 8$ હોવાથી $t = 1, 2, \ldots, 8$ લેતા $\Sigma t = 1 + 2 + \ldots + 8 = 36$ અને

$\Sigma t^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + 8^2 = 1 + 4 + \ldots + 64 = 204$ થશે.

$$\bar{t} = \frac{\Sigma t}{n} = \frac{36}{8} = 4.5, \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{344}{8} = 43$$

$$b = \frac{n\Sigma ty - (\Sigma t)(\Sigma y)}{n\Sigma t^2 - (\Sigma t)^2}$$

$$= \frac{8 \times 1342 - 36 \times 344}{8 \times 204 - (36)^2}$$

$$= \frac{10736 - 12384}{1632 - 1296}$$

$$= \frac{-1648}{336}$$

$$= -4.9048$$

$$\simeq -4.9$$

$$a = \bar{y} - b\bar{t}$$

$$= 43 - (-4.9) \times 4.5$$

$$= 43 + 22.05$$

$$= 65.05$$

સુરેખ સમીકરણ $\hat{y} = a + bt$

$$= 65.05 + (-4.9)\,t$$

$$= 65.05 - 4.9\,t$$

સ્વાધ્યાય 4.2

1. એક રાજ્યનાં જુદાં જુદાં વર્ષોના મૃત્યુદરની માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે. વલણ શોધવા માટે સુરેખ સમીકરણનું અન્વાયોજન કરો અને તે પરથી વર્ષ 2017ના મૃત્યુદરનું અનુમાન મેળવો.

વર્ષ	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
મૃત્યુદર	7.6	6.9	7.1	7.3	7.2	6.9	6.9

2. કેન્દ્ર સરકારે જાહેર કરેલ કૉસ્ટ ઈન્ફ્લેશન ઈન્ડેક્ષ (CII) વિશેની માહિતી નીચે પ્રમાણે છે. આ આંકમાં 1981-82ને આધાર વર્ષ લીધેલું છે. આ માહિતી પરથી સુરેખ સમીકરણનું અન્વાયોજન કરીને વર્ષ 2015-16 માટે આ આંકનું અનુમાન મેળવો.

વર્ષ	2007 – 08	2008 – 09	2009 – 10	2010 – 11	2011 – 12	2012 – 13	2013 – 14	2014 – 15
CII	551	582	632	711	785	852	939	1024

3. એક શહેરમાં જુદાં જુદાં વર્ષમાં નોંધણી કરાયેલ દ્વિચક્રી વાહનોની સંખ્યા (હજારમાં) નીચે પ્રમાણે છે. તે પરથી વર્ષ 2016 તેમજ 2017 માટેની વાહનોની નોંધણીની સંખ્યાનાં અનુમાનો મેળવવા માટે સુરેખ સમીકરણના અન્વાયોજનની રીતનો ઉપયોગ કરો. દરેક વર્ષની વલણની કિંમતો પણ શોધો.

વર્ષ	2010	2011	2012	2013	2014	2015
વાહનોની સંખ્યા (હજાર)	69	75	82	91	101	115

4. ભારતમાં જુદી જુદી વસ્તી-ગણતરીમાં મળેલ માહિતી મુજબ લગ્ન સમયે સ્ત્રીઓની સરેરાશ ઉંમર (વર્ષમાં) નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે. આ માહિતી પરથી સુરેખ વલણના સમીકરણનું અન્વાયોજન કરીને તે આલેખ વડે દર્શાવો. સુરેખ સમીકરણ પરથી 2021ના વર્ષ માટે આપેલ ચલની કિંમતનું અનુમાન મેળવો.

વસ્તી ગણતરીનું વર્ષ	1971	1981	1991	2001	2011
લગ્ન સમયે સ્ત્રીઓની સરેરાશ ઉંમર (વર્ષ)	17.7	18.7	19.3	20.2	22.2

*

4.3.3 ચલિત સરેરાશની રીત (Method of Moving Averages)

ટૂંકા ગાળાની વધઘટોની અસર દૂર કરીને વલણ નક્કી કરવા માટે ચલિત સરેરાશની રીત ખૂબ જ ઉપયોગી નીવડે છે. ટૂંકા ગાળાની વધઘટો મોટા ભાગે નિયમિત હોય છે અને તેનું પુનરાવર્તન થતું હોય છે. ભૂતકાળના અનુભવથી અથવા અન્ય સાધનોથી આ વધઘટોના પુનરાવર્તનના સમયની જાણકારી મેળવી તેને અનુરૂપ સમયનાં અવલોકનોની સરેરાશ શોધવામાં આવે છે. સરેરાશ કિંમત કેન્દ્રસ્થાને હોવાથી અલ્પકાલીન વધઘટની અસરથી મુક્ત થયેલી કિંમતો મળે છે જે ચલનું વલણ દર્શાવે છે.

ધારો કે, આપેલ સામયિક શ્રેણીમાં સમય $t = 1, 2, \ldots, n$ પર આધારિત ચલની કિંમતો અનુક્રમે $y_1, y_2, \ldots, y_n$ છે અને તે શ્રેણીમાં અલ્પકાલીન (ચક્રીય) વધઘટોનો ગાળો 3 વર્ષનો છે. પ્રથમ ત્રણ અવલોકનો y_1, y_2, y_3 નો મધ્યક $\frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$ શોધી તેને આ ત્રણ કિંમતોના કેન્દ્રસ્થાને આવતી એટલે કે y_2 ની સામે મૂકવામાં આવે છે. ત્યાર બાદ ક્રમશઃ ત્રણ કિંમતો y_2, y_3, y_4 લઈને તેનો મધ્યક $\frac{y_2 + y_3 + y_4}{3}$ શોધી તેને કેન્દ્રસ્થાને એટલે કે y_3 ની સામે મૂકવામાં આવે છે. આ રીતે ચલની આપેલ કિંમતોમાંથી છેલ્લી કિંમત આવરી લેવાય ત્યાં સુધીના બધા મધ્યકો શોધવામાં આવે છે. આવી સરેરાશોને ત્રણ વર્ષીય ચલિત સરેરાશો કહેવાય છે જે વલણ દર્શાવે છે.

દરેક સામયિક શ્રેણીમાં સમયનું એકમ 'વર્ષ' હોય તેવું જરૂરી નથી અને ચલની કિંમતોની તરાહના પુનરાવર્તનનો સમયગાળો પણ ત્રણ વર્ષનો હોવો જરૂરી નથી. સમયના એકમ પ્રમાણે આપણે ચલિત સરેરાશોને દર્શાવીશું. દા.ત., 5 દિવસીય ચલિત સરેરાશો, ત્રિમાસિક સરેરાશો, 4 સપ્તાહની ચલિત સરેરાશો વગેરે. અત્યારે ચર્ચા માટે સમયનું એકમ 'વર્ષ' લઈશું.

દાખલાની ગણતરી કરતી વખતે સૌ પ્રથમ સરેરાશના સમયગાળાને અનુરૂપ ચલની કિંમતોના સરવાળા શોધવામાં આવે છે. ત્રણ વર્ષીય સરેરાશો માટે પ્રથમ સરવાળો $y_1 + y_2 + y_3$ મેળવ્યા બાદ બીજો સરવાળો અર્થાત્ $y_2 + y_3 + y_4$ શોધવા માટે ઉપર્યુક્ત સરવાળામાંથી y_1 ને બાદ કરી y_4 ઉમેરવામાં આવે છે. આ રીતે ક્રમશઃ બધા સરવાળા શોધીને દરેકને 3 વડે ભાગતા ત્રણ વર્ષીય ચલિત સરેરાશો મળશે.

નોંધ : ત્રણ વર્ષીય સરેરાશોમાં પ્રથમ સરેરાશ y_2 ની સામે લખવામાં આવે છે અને તેથી y_1 ની સામે ચલિત સરેરાશ અર્થાત્ તે સમયની વલણની કિંમત મળશે નહિ. તેમજ y_n ની સંલગ્ન વલણની કિંમત મેળવી શકાય નહિ.

ઉદાહરણ8 : કોઈ એક બૅન્કની એક શાખાના જુદા જુદા સપ્તાહમાં ખોલાયેલા ખાતાની સંખ્યા નીચે આપેલ છે. ત્રણ સપ્તાહની ચલિત સરેરાશોની રીતે વલણ શોધો.

સપ્તાહ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ખોલાયેલ ખાતાની સંખ્યા	26	27	26	25	22	24	25	23	22	21

ત્રણ સપ્તાહની ચલિત સરેરાશોની ગણતરી

સપ્તાહ t	ખોલાયેલ ખાતાની સંખ્યા y	ત્રણ સપ્તાહનો ચલિત સરવાળો	ત્રણ સપ્તાહની ચલિત સરેરાશ
1	26	—	—
2	27	26 + 27 + 26 = 79	$\frac{79}{3} = 26.33$
3	26	79 – 26 + 25 = 78	$\frac{78}{3} = 26$
4	25	78 – 27 + 22 = 73	$\frac{73}{3} = 24.33$
5	22	73 – 26 + 24 = 71	$\frac{71}{3} = 23.67$
6	24	71 – 25 + 25 = 71	$\frac{71}{3} = 23.67$
7	25	71 – 22 + 23 = 72	$\frac{72}{3} = 24$
8	23	72 – 24 + 22 = 70	$\frac{70}{3} = 23.33$
9	22	70 – 25 + 21 = 66	$\frac{66}{3} = 22$
10	21	—	—

ઉદાહરણ 9 : એક કારખાનાના વાર્ષિક ઉત્પાદન (ટનમાં)ની નીચેની માહિતી પરથી પાંચ વર્ષીય ચલિત સરેરાશોની રીતે વલણ મેળવો :

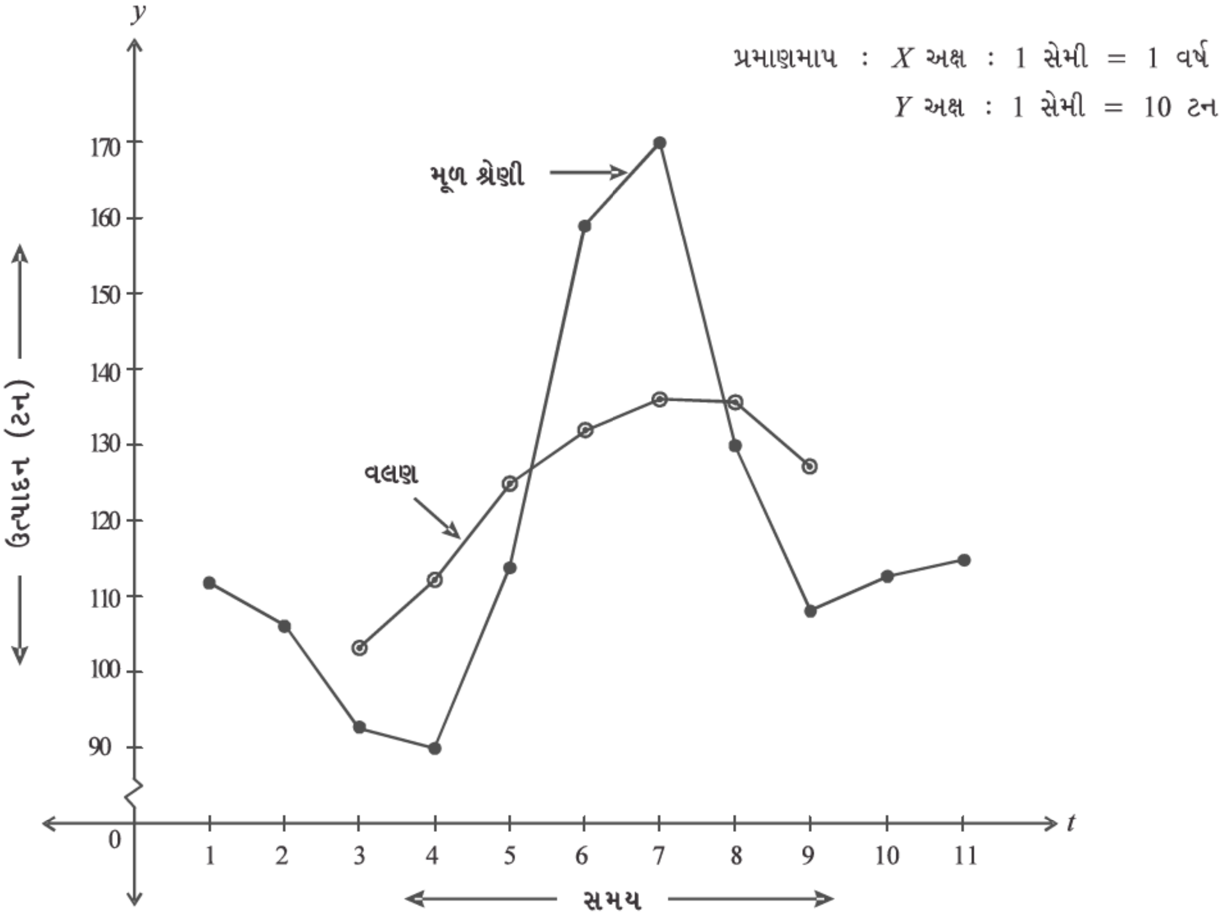
વર્ષ	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
ઉત્પાદન (ટન)	112	106	93	90	114	159	170	130	108	113	115

પાંચ વર્ષીય ચલિત સરેરાશોની ગણતરી

વર્ષ	ઉત્પાદન y	t	પાંચ વર્ષીય ચલિત સરવાળો	પાંચ વર્ષીય ચલિત સરેરાશ (વલણ)
2006	112	1	—	—
2007	106	2	—	—
2008	93	3	112 + 106 + 93 + 90 + 114 = 515	$\frac{515}{5} = 103$
2009	90	4	515 – 112 + 159 = 562	$\frac{562}{5} = 112.4$
2010	114	5	562 – 106 + 170 = 626	$\frac{626}{5} = 125.2$
2011	159	6	626 – 93 + 130 = 663	$\frac{663}{5} = 132.6$
2012	170	7	663 – 90 + 108 = 681	$\frac{681}{5} = 136.2$
2013	130	8	681 – 114 + 113 = 680	$\frac{680}{5} = 136$
2014	108	9	680 – 159 + 115 = 636	$\frac{636}{5} = 127.2$
2015	113	10	—	—
2016	115	11	—	—

સમજૂતી માટે વધારાની માહિતી

ઉપર્યુક્ત રીતે મેળવેલ વલણ સમજવા માટે આપણે ચલની કિંમતો અને પાંચ વર્ષીય ચલિત સરેરાશો વડે મળેલ વલણ આલેખ દ્વારા દર્શાવીશું.



અહીં, બધી સરેરાશોમાંથી પસાર થતો વક્ર વલણ દર્શાવશે.

જો ચલિત સરેરાશોનો સમયગાળો એકી સંખ્યા જેવી કે 3, 5, 7, ... હોય, તો ઉપર મુજબ વલણ શોધવામાં આવે છે. પણ જો તે ગાળો બેકી સંખ્યામાં હોય તો ચલિત સરેરાશોની ગણતરી થોડી અઘરી બને છે.

ધારો કે ચાર વર્ષીય ચલિત સરેરાશો શોધવાની છે. પ્રથમ ચાર વર્ષીય સરેરાશ $\frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}$ શોધવામાં આવશે. આ ચાર કિંમતોનું કેન્દ્રસ્થાન y_2 અને y_3 ની વચ્ચે હોવાથી આ સરેરાશને તે સ્થાને લખાશે. તે જ રીતે ક્રમશઃ $\frac{y_2 + y_3 + y_4 + y_5}{4}$, $\frac{y_3 + y_4 + y_5 + y_6}{4}$, ... ચલિત સરેરાશો શોધીને અનુક્રમે y_3 અને y_4 ની વચ્ચે, y_4 અને y_5 ની વચ્ચે, ... લખવામાં આવશે. આ બધી સરેરાશો બે વર્ષની વચ્ચે આવતી હોવાથી ફરી બબ્બે સરેરાશોની સરેરાશ શોધવામાં આવે છે અને તેને તે બે ચલિત સરેરાશોની વચ્ચે મૂકવામાં આવે છે. આમ, ઉપર દર્શાવેલ પ્રથમ અને બીજી સરેરાશોની સરેરાશ કિંમત y_3 ની સામે મૂકવામાં આવશે. આ રીતે મેળવેલ સરેરાશોને ચાર વર્ષીય ચલિત સરેરાશો કહેવામાં આવે છે. અહીં, સરેરાશ શોધવાની પ્રક્રિયા બે વખત કરવી પડે છે. આ ગણતરીને સરળ બનાવવા માટે ચાર વર્ષીય સરવાળા મેળવીને તે પરથી બબ્બે વર્ષના સરવાળા કરવામાં આવે છે. આ સરવાળા **8** કિંમતોના હોવાથી તેને **8** વડે ભાગતા આપણને ઉપર મુજબની ચાર વર્ષીય ચલિત સરેરાશો મળશે.

અલ્પકાલીન વધઘટોના પુનરાવર્તનનો સમય કોઈ પણ બેકી સંખ્યા હોય, તો ઉપર દર્શાવેલ રીત મુજબ પ્રથમ ચલિત સરવાળા, ત્યાર બાદ બબ્બેના સરવાળા મેળવીને ચલિત સરેરાશો શોધવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ 10 : એક દુકાનના માસિક વેચાણ (લાખ ₹માં)ની નીચેની માહિતી માટે ચાર માસના ચલિત સરેરાશો વડે વલણ શોધો.

માસ	માર્ચ	એપ્રિલ	મે	જૂન	જુલાઈ	ઑગસ્ટ	સપ્ટેમ્બર	ઓક્ટોબર	નવેમ્બર	ડિસેમ્બર
વેચાણ (લાખ ₹)	5	3	7	6	4	8	9	10	8	9

ચાર માસના ચલિત સરેરાશોની ગણતરી

માસ	**વેચાણ (લાખ ₹) y**	t	**ચાર માસના ચલિત સરવાળા**	**બબ્બે કિંમતોના સરવાળા**	**ચાર માસની ચલિત સરેરાશ**
માર્ચ	5	1		—	—
			—		
એપ્રિલ	3	2		—	—
			$5+3+7+6=21$		
મે	7	3		$21+20=41$	$\frac{41}{8}=5.13$
			$21-5+4=20$		
જૂન	6	4		$20+25=45$	$\frac{45}{8}=5.63$
			$20-3+8=25$		
જુલાઈ	4	5		$25+27=52$	$\frac{52}{8}=6.5$
			$25-7+9=27$		
ઑગસ્ટ	8	6		$27+31=58$	$\frac{58}{8}=7.25$
			$27-6+10=31$		
સપ્ટેમ્બર	9	7		$31+35=66$	$\frac{66}{8}=8.25$
			$31-4+8=35$		
ઓક્ટોબર	10	8		$35+36=71$	$\frac{71}{8}=8.88$
			$35-8+9=36$		
નવેમ્બર	8	9		—	—
			—		
ડિસેમ્બર	9	10		—	—

ચાર માસની ચલિત સરેરાશો સામયિક શ્રેણીનું વલણ દર્શાવે છે.

ચલિત સરેરાશની રીતના ગુણ અને મર્યાદા નીચે પ્રમાણે છે :

ગુણ :

(1) સરેરાશોનો ઉપયોગ કરીને આ રીતથી ટૂંકા ગાળાની અસર મહદંશે દૂર થાય છે અને શ્રેણીનું વલણ મળે છે.

(2) આ રીતમાં પ્રમાણમાં ઓછી અને સરળ ગણતરી હોવાથી તે સમજવામાં સહેલી છે.

મર્યાદા :

(1) જો ચલિત સરેરાશોનો ગાળો યોગ્ય રીતે પસંદ કરવામાં ન આવે, તો આ રીતથી મેળવેલ વલણ ચોક્કસ હોતું નથી.

(2) શરૂઆતનાં તેમજ અંતિમ અમુક સમય માટે આ રીતથી વલણનું અનુમાન મળતું નથી.

(3) ભવિષ્યના અનુમાન માટે કોઈ ચોક્કસ ગાણિતિક સૂત્ર મળતું નથી.

સ્વાધ્યાય 4.3

1. એક કંપનીના વેચાણ (દસ લાખ ₹ માં)ની નીચેની માહિતી પરથી ત્રણ વર્ષીય ચલિત સરેરાશો વડે વલણ મેળવો.

વર્ષ	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
વેચાણ (દસ લાખ ₹)	3	4	8	6	7	11	9	10	14	12

2. એક કંપનીના શૅરના વર્ષ 2016 દરમિયાન સરેરાશ માસિક બંધ ભાવની માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે. ચાર માસના ચલિત સરેરાશો વડે વલણ મેળવો.

માસ	જાન્યુઆરી	ફેબ્રુઆરી	માર્ચ	એપ્રિલ	મે	જૂન	જુલાઈ	ઓગસ્ટ	સપ્ટેમ્બર	ઓક્ટોબર	નવેમ્બર	ડિસેમ્બર
શેરનો ભાવ ₹	253	231	350	261	262	266	263	261	281	278	278	272

3. એક વેપારીના જુદાં જુદાં વર્ષના નફા (લાખ ₹ માં)ની નીચે આપેલ માહિતી પરથી પાંચ વર્ષીય ચલિત સરેરાશોનો ઉપયોગ કરીને વલણ શોધો.

વર્ષ	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
નફો (લાખ ₹)	15	14	18	20	17	24	27	25	23

4. વર્ષના જુદા-જુદા ત્રિમાસિક (Q) ગાળામાં જથ્થાબંધ ભાવના સૂચક આંક નીચે પ્રમાણે મેળવેલ છે. ચાર ત્રિમાસની ચલિત સરેરાશો વડે શ્રેણીનું વલણ મેળવો.

વર્ષ	2013				2014				2015			
ત્રિમાસ	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
સૂચક આંક	110	110	125	135	145	152	155	168	131	124	132	153

*

સારાંશ

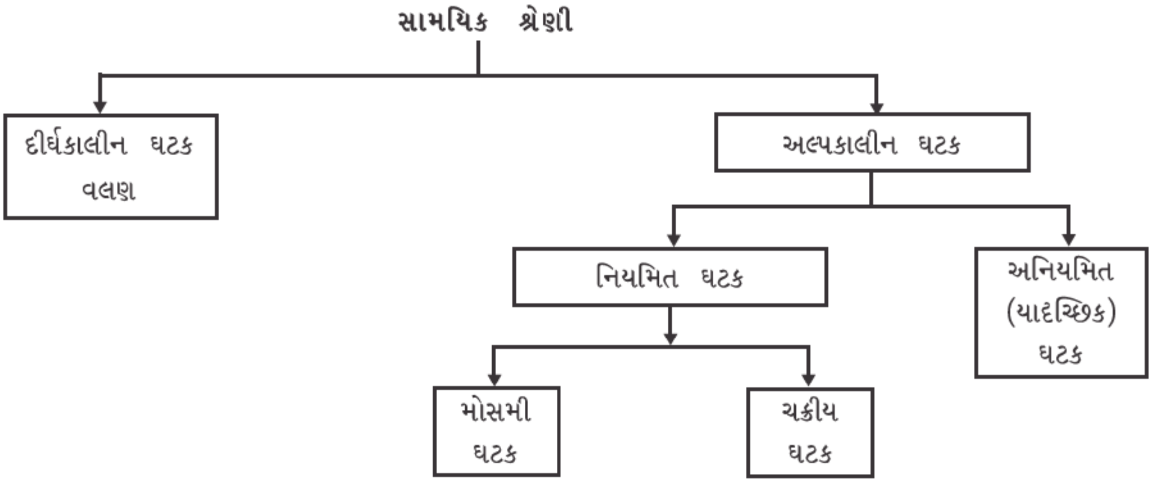
- સમય અનુસાર એકત્રિત કરેલી અને ગોઠવેલી માહિતીને સામયિક શ્રેણી કહે છે.
- આપેલ ચલની કિંમતના ભવિષ્યનાં અનુમાનો મેળવવા માટે સામયિક શ્રેણીનું પૃથક્કરણ કરવું જરૂરી છે.
- સામયિક શ્રેણીના ચલની કિંમત પર અસર કરતાં મુખ્ય ચાર ઘટકો છે :

  (1) દીર્ઘકાલીન ઘટક (વલણ) (2) મોસમી ઘટક

  (3) ચક્રીય ઘટક (4) યાદૃચ્છિક (અનિયમિત) ઘટક
- મોસમી વધઘટ, ચક્રીય વધઘટ અને યાદૃચ્છિક વધઘટોને કારણે શ્રેણીમાં અલ્પકાલીન ફેરફારો થાય છે.
- મોસમી અને ચક્રીય વધઘટો લગભગ નિયમિત રીતે પુનરાવર્તન પામતી હોય છે.
- સામયિક શ્રેણીનું વલણ માપવાની ત્રણ રીતો :

  (1) આલેખની રીત (2) ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત (3) ચલિત સરેરાશની રીત

પ્રકરણની એક ઝલક



સૂત્રોની યાદી :

આપેલ માહિતી માટે ન્યૂનતમ વર્ગોની રીતે સુરેખ સમીકરણ $\hat{y} = a + bt$ નું અન્વાયોજન કરવા માટે

$$b = \frac{n\Sigma ty - (\Sigma t)(\Sigma y)}{n\Sigma t^2 - (\Sigma t)^2}, \qquad a = \bar{y} - b\bar{t}$$

સ્વાધ્યાય 4

વિભાગ A

નીચે આપેલ બહુવિકલ્પ પ્રશ્ન માટે સાચા વિકલ્પની પસંદગી કરો :

1. મોસમી ઘટકને કારણે સામયિક ચલમાં કયા પ્રકારના ફેરફારો થાય છે ?

(a) દીર્ઘકાલીન (b) અનિયમિત (c) નિયમિત (d) શૂન્ય પ્રમાણમાં

2. 'હડતાલને કારણે કોઈ એક કંપનીના ઉત્પાદનમાં થયેલો ઘટાડો' કઈ વધઘટ દર્શાવે છે ?

(a) યાદૃચ્છિક (b) વલણ (c) મોસમી (d) ચક્રીય

3. સુરેખ વલણ શોધવા માટે સુરેખ સમીકરણનું અન્વાયોજન કરવાની રીતનું નામ જણાવો.

(a) આલેખની રીત (b) ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત

(c) ચલિત સરેરાશની રીત (d) આંશિક સરેરાશની રીત

4. સામયિક શ્રેણીનું યોગનીય મોડેલ કેવી રીતે દર્શાવાય છે ?

(a) $y_t = T_t + S_t + C_t - R_t$ (b) $y_t = T_t + S_t + C_t + R_t$

(c) $y_t = T_t \times S_t + C_t \times R_t$ (d) $y_t = S_t + C_t + R_t$

5. સામયિક શ્રેણીનો નિરપેક્ષ ચલ જણાવો.

(a) y_t (b) S_t (c) t (d) x_t

6. સામયિક શ્રેણીના કયા ઘટકનું અનુમાન મેળવવું અશક્ય હોય છે ?

(a) યાદૃચ્છિક ઘટક (b) વલણ (c) મોસમી ઘટક (d) ચક્રીય ઘટક

7. નીચેના પૈકી કયા ફેરફારો ચક્રીય ઘટકને લીધે છે તેમ કહેવાય ?

(a) શિયાળામાં વધતી સ્વેટરની માંગ

(b) શૅરબજારમાં ચાલતી મંદીના કારણે ઘટેલા શૅરના ભાવ

(c) અતિવૃષ્ટિને કારણે ખેતીની પેદાશમાં થયેલ ઘટાડો

(d) સતત ઘટતો મૃત્યુદર

8. જાન્યુઆરી 2016થી ડિસેમ્બર 2016 સુધીની સામયિક શ્રેણીમાંથી મેળવેલ વલણનું સમીકરણ $\hat{y} = 30.1 + 1.5\,t$ હોય તો એપ્રિલ 2016 માટે વલણની કિંમત શોધો.

(a) 30.1 (b) 34.6 (c) 36.1 (d) 33.1

9. નીચેનામાંથી કયા ફેરફારો મોસમી ઘટકની અસર છે ?

(a) ગ્રામ્ય વિસ્તારોમાંથી શહેર તરફ વધતું સ્થળાંતર

(b) શહેરના રસ્તા પર વધતી વાહનોની સંખ્યા

(c) શાળાના વૅકેશન દરમિયાન વધતી પર્યટકોની સંખ્યા

(d) કોઈ વિશિષ્ટ રોગચાળા દરમિયાન વધેલ મૃત્યુઆંક

10. વલણ શોધવાની કઈ રીતથી ટૂંકા ગાળામાં પુનરાવર્તન પામતી વધઘટોની અસર સૌથી સારી દૂર થાય છે ?

(a) આલેખની રીત (b) ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત

(c) કાર્લ પિયર્સનની રીત (d) ચલિત સરેરાશની રીત

વિભાગ B

નીચેના પ્રશ્નોના એક વાક્યમાં જવાબ આપો :

1. ઘટતું વલણ હોય તેવી સામયિક શ્રેણીનું ઉદાહરણ આપો.

2. સામયિક શ્રેણી એટલે શું ?

3. સામયિક શ્રેણીના કયા ઘટકોને લીધે ચલમાં અલ્પકાલીન વધઘટ થાય છે ?

4. સામયિક શ્રેણીનું પૃથક્કરણ એટલે શું ?

5. સામયિક શ્રેણીના ચક્રીય ઘટકને કયા સંકેત વડે દર્શાવાય છે ?

6. સામયિક શ્રેણીમાં વલણ માપવાની રીતોનાં નામ લખો.

7. એક વર્ષથી ઓછા સમયમાં પુનરાવર્તન થતી વધઘટો કયા ઘટકની અસર દર્શાવે છે ?

8. સામયિક શ્રેણીના ઘટકોનાં નામ લખો.

9. વલણ શોધવા માટે ચલિત સરેરાશની રીત ક્યારે વધુ ઉપયોગી થાય છે ?

10. ચલ y ની 7 સપ્તાહની માહિતી પરથી અન્વાયોજન કરેલ સુરેખ સમીકરણ $\hat{y} = 25.1 - 1.3\,t$ હોય, તો આઠમા સપ્તાહની yની કિંમતનું અનુમાન શોધો.

વિભાગ C

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. સામયિક શ્રેણીનું યોગનીય મોડેલ વર્ણવો.
2. ચક્રીય ઘટક એટલે શું ?
3. મોસમી ઘટક એ ચક્રીય ઘટકથી કઈ રીતે જુદી પડે છે ?
4. અનિયમિત ઘટક સમજાવો.
5. આલેખની રીતની મર્યાદાઓ જણાવો.
6. ચલિત સરેરાશનો અર્થ સમજાવો.
7. સામયિક શ્રેણીની વ્યાખ્યા આપો.
8. વલણ માપવાની ચલિત સરેરાશની રીતના ગુણ લખો.
9. વલણ માપવાની આલેખની રીત વર્ણવો.

વિભાગ D

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. સામયિક શ્રેણીનું મહત્ત્વ સમજાવો.
2. સામયિક શ્રેણીના પૃથક્કરણના ઉપયોગ જણાવો.
3. સામયિક શ્રેણીનું વલણ એટલે શું ? ઉદાહરણ સહિત સમજાવો.
4. મોસમી ઘટક પર ટૂંકનોંધ લખો.
5. ન્યૂનતમ વર્ગોની રીતે આપેલ માહિતી પરથી સુરેખ સમીકરણનું અન્વાયોજન કરવાની રીત સમજાવો.
6. ન્યૂનતમ વર્ગોની રીતના ગુણ અને મર્યાદાઓ જણાવો.
7. વલણ શોધવાની ચલિત સરેરાશની રીત વર્ણવો.
8. ચલિત સરેરાશની રીતની મર્યાદાઓ ચર્ચો.
9. નીચેની સામયિક શ્રેણી એક કારખાનાનું દૈનિક ઉત્પાદન દર્શાવે છે. આલેખની રીતે તેનું વલણ શોધો.

દિવસ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ઉત્પાદન (એકમો)	21	22	23	25	24	22	25	26	27	26

10. એક સામયિક શ્રેણીના ચલ (y) માટેની નીચેની માહિતી પરથી સુરેખ સમીકરણનું અન્વાયોજન કરો.

    $n = 4, \quad \Sigma y = 270, \quad \Sigma ty = 734$

11. એક વસ્તુની માંગ માટે એક સ્ટોરમાંથી એકત્રિત કરેલી માહિતી નીચે મુજબ છે. ત્રણ માસના ચલિત સરેરાશો વડે વલણ મેળવો.

માસ	જાન્યુઆરી	ફેબ્રુઆરી	માર્ચ	એપ્રિલ	મે	જૂન	જુલાઈ
માંગ (એકમો)	15	16	18	18	23	23	20

વિભાગ E

નીચેનાના ઉકેલ મેળવો :

1. એક કાપડ-ઉત્પાદકની તૈયાર કપડાંની નિકાસ (કરોડ ₹ માં)ની માહિતી નીચે દર્શાવેલ છે.

વર્ષ	2010	2011	2012	2013	2014	2015
નિકાસ (કરોડ ₹)	22	25	23	26	20	25

આ માહિતી માટે સુરેખ વલણનું અન્વાયોજન કરો અને 2017ના વર્ષની નિકાસ માટે વલણની કિંમતનું અનુમાન મેળવો.

2. પાછલાં 5 વર્ષોમાં એક વિમાન કંપનીના વિમાનોમાં પ્રવાસ કરેલ પ્રવાસીઓની સંખ્યા વિશે નીચેની માહિતી પ્રાપ્ય છે. સુરેખ વલણનું અન્વાયોજન કરીને વર્ષ 2016 માટે વલણની કિંમતનું અનુમાન કરો.

વર્ષ	2011	2012	2013	2014	2015
પ્રવાસીઓની સંખ્યા (હજાર)	45	47	44	40	38

3. એક સ્ટૉક ઍક્સચેન્જમાં નોંધાયેલ કોઈ એક કંપનીના શૅરના બંધભાવોની જુદા જુદા માસની માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે. ત્રણ માસના ચલિત સરેરાશો વડે વલણ મેળવો.

માસ	2015 એપ્રિલ	મે	જૂન	જુલાઈ	ઑગસ્ટ	સપ્ટેમ્બર	ઑક્ટોબર	નવેમ્બર	ડિસેમ્બર	2016 જાન્યુઆરી
શૅરનો ભાવ (₹)	76	73	65	68	67	60	63	67	65	66

4. નીચેની માહિતી એક વસ્તુનું વેચાણ (હજાર ₹ માં) દર્શાવે છે. આલેખની રીતે વલણ મેળવો.

વર્ષ	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
વેચાણ (હજાર ₹)	200	216	228	235	230	232	236	235	230	233

5. એક રાજ્યના ખાદ્ય-તેલના વપરાશના જથ્થાના સૂચક આંક નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે. પાંચ વર્ષીય ચલિત સરેરાશોના આધારે વલણ શોધો.

વર્ષ	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
સૂચક આંક	115	121	119	120	117	119	120	118	116	124	125

વિભાગ F

નીચેનાના ઉકેલ મેળવો :

1. એક દેશના ખાંડ ઉત્પાદનની પાછલાં 6 વર્ષોની નીચે પ્રમાણે નોંધાયેલી માહિતી પરથી ન્યૂનતમ વર્ગોની રીતે ઉત્પાદનના વલણનું સુરેખ સમીકરણ મેળવો. વર્ષ 2016-17 તેમજ 2017-18 ના ઉત્પાદન માટે વલણનાં અનુમાનો શોધો.

વર્ષ	2009 – 10	2010 – 11	2011 – 12	2012 – 13	2013 – 14	2014 – 15
ખાંડ ઉત્પાદન (કરોડ ટન)	29.2	34.2	35.4	36.4	33.6	37.7

2. એક કૉલેજમાં અભ્યાસ કરતા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે. ચાર વર્ષીય ચલિત સરેરાશો વડે વલણ મેળવો.

વર્ષ	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	332	317	357	392	402	405	410	427	405	438

3. નીચેના કોષ્ટકમાં એક રાજ્યનાં જુદાં જુદાં વર્ષોના જન્મદર આપેલ છે. આ માહિતી માટે સુરેખ વલણનું અન્વાયોજન કરો. વર્ષ 2016 અને 2017 ના જન્મદરનાં અનુમાનો પણ મેળવો.

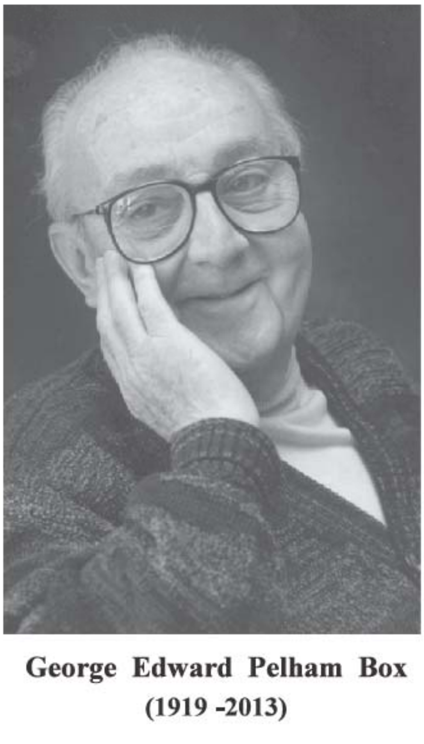
વર્ષ	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
જન્મદર	22.2	21.8	21.3	20.9	20.6	20.2	19.9

4. રેલવેના એક વિભાગમાં જુદાં જુદાં વર્ષોમાં થયેલ માલની હેરફેર વિશેની માહિતી નીચે આપેલ છે. સુરેખ સમીકરણનું અન્વાયોજન કરીને દરેક વર્ષની અનુમાનિત કિંમતો મેળવો અને તેને આલેખ વડે દર્શાવો. વર્ષ 2016 ની કિંમતનું અનુમાન પણ શોધો.

વર્ષ	2011	2012	2013	2014	2015
હેરફેર થયેલ માલ (ટન)	180	192	195	204	202

5. ક્રૂડ તેલના સાપ્તાહિક ભાવની (USD પ્રતિ બેરલમાં) માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે. ચાર સપ્તાહની ચલિત સરેરાશોનો ઉપયોગ કરીને વલણ શોધો.

માસ	માર્ચ 2016				એપ્રિલ 2016				મે 2016			
સપ્તાહ	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
ક્રૂડ તેલનો ભાવ	35.92	38.50	39.44	39.46	36.79	39.72	40.36	43.73	45.92	44.66	46.21	48.45



George Edward Pelham Box
(1919 -2013)

George E. P. Box worked in the areas of quality control, time series analysis, design of experiments and Bayesian inference. He has been called "one of the great statistical minds of the 20th century." He has been associated with University at Raleigh (now North Carolina State University), Princeton University, University of Wisconsin–Mandison. Box has published numerous articles and papers and he is an author of many books. He is a recipient of prestigious honours, medals and was the president of American Statistical Association in 1978 and of the Institute of Mathematical Statistics in 1979. His name is associated with results in statistics such as Box–Jenkins models, Box–Cox transformations, Box–Behnken designs, and others. Box was elected a member of the American Academy of Arts and Sciences in 1974 and a Fellow of the Royal Society (FRS) in 1985.

જવાબો

સ્વાધ્યાય 1.1

1. (1) અચલ આધારે સૂચક આંક : 100, 103.27, 105.09, 106.55, 108, 113.82, 119.27, 125.45

(2) પરંપરિત આધારે સૂચક આંક : 100, 103.27, 101.76, 101.38, 101.37, 105.39, 104.79, 105.18

(3) સરેરાશ વેતનના આધારે સૂચક આંક : 91.36, 94.35, 96.01, 97.34, 98.67, 103.99, 108.97, 114.62

2. (1) અચલ આધારે સૂચક આંક : 100, 101.79, 105.36, 107.14, 110.71, 114.29,121.43, 128.57

(2) પરંપરિત આધારે સૂચક આંક : 100, 101.79, 103.51, 101.69, 103.33, 103.23, 106.25, 105.88

(3) સરેરાશ ભાવના આધારે સૂચક આંક : 96.55, 98.28, 101.72, 103.45, 106.90, 110.34, 117.24, 124.14

3. (1) અચલ આધારે સૂચક આંક : 100, 108.70, 112.78, 115.19, 119.44

(2) પરંપરિત આધારે સામાન્ય ભાવનો સૂચક આંક : 100, 108.70, 103.65,102.26, 103.71

4. *n* વસ્તુઓનો સામાન્ય આંક : 126.45, બળતણની વસ્તુઓના ભાવમાં સમગ્ર રીતે 26.45 % વધારો થયો છે.

સ્વાધ્યાય 1.2

1. અચલ આધારે સૂચક આંક : 100, 110, 104.5, 112.86, 135.43, 143.56, 157.92
2. પરંપરિત આધારે સૂચક આંક : 117.4, 100.51, 102.80, 103.13, 102.64, 102.49, 102.28
3. પરંપરિત આધારે સૂચક આંક : 100, 99.63, 99.26, 100, 103.73, 101.80, 100, 103.53, 100, 102.05
4. અચલ આધારે સૂચક આંક : 110, 123.2, 134.29, 145.03, 152.28, 169.03

સ્વાધ્યાય 1.3

1. $I = 307$, ખર્ચમાં 207 % વધારો થયો છે.
2. $I = 123.80$, ભાવમાં 23.80 % વધારો થયો છે.
3. $I_L = 126.72$, $I_P = 126.85$, $I_F = 126.78$
4. $I_L = 141.13$, $I_P = 140.15$, $I_F = 140.64$ **5.** $I_F = 142.57$ **6.** $I_P = 115.2$, $I_F = 115.14$

સ્વાધ્યાય 1.4

1. કૌટુંબિક અંદાજપત્રની રીતે સૂચક આંક = 135.64 અને કુલ ખર્ચમાં 35.64 % વધારો થયો છે. સરેરાશ ખર્ચપાત્ર માસિક આવક ₹ 20,346 થાય.
2. સૂચક આંક $I = 128.53$ અને 28.53 % કુલ ખર્ચ વધારો થયો છે.
3. સૂચક આંક $I = 132.51$ અને 32.51 % કુલ ખર્ચમાં વધારો થયો છે.
4. સૂચક આંક $I = 213.20$ અને 113.20 % કુલ ખર્ચમાં વધારો થયેલ છે.
5. કૌટુંબિક અંદાજપત્રની રીતે સૂચક આંક = 129.64 અને કુલ ખર્ચની રીતે સૂચક આંક $I = 129.64$ આમ, બંને સૂચક આંક સમાન છે.

સ્વાધ્યાય 1

વિભાગ A

1. (c) **2.** (a) **3.** (d) **4.** (c) **5.** (d)

6. (d) **7.** (c) **8.** (c) **9.** (c) **10.** (c)

11. (a) **12.** (c)

વિભાગ B

12. વિધાન ખોટું છે. તેલના ભાવનો સૂચક આંક 500 છે.

વિભાગ C

7. વાસ્તવિક વેતન ₹ 16,392.85 અને કામદારને થયેલ નુકસાન ₹ 1642.85 (ખરીદશક્તિ ઘટે.)

8. વાસ્તવિક વેતન ₹ 29166.67, 26666.67, 32307.69, 31250

9. વર્ષ 2015નો ફુગાવાનો દર : 2.03 %

10. 449.55

11. સરેરાશ માસિક ખર્ચપાત્ર આવક = ₹ 30,000

12. આવકનો સૂચક આંક = 125 **13.** ઉત્પાદનનો સૂચક આંક = 280 **14.** $I_p = 222.5$

વિભાગ D

7. 161.87

8. અચલ આધારે સૂચક આંક = 100, 111.11, 133.33, 144.44, 166.67, 222.22, 263.89

9. પરંપરિત આધારે સૂચક આંક = 100, 104, 100.96, 102.86, 100.93, 116.51

10. અચલ આધારે સૂચક આંક = 120, 108, 151.20, 189

11. પરંપરિત આધારે સૂચક આંક = 100, 112.5, 106.67, 114.58, 109.09, 116.67

12. સૂચક આંક = 226.6

13. $I_L = 166.67$, $I_p = 150$, $I_F = 158.12$

14. $I_p = 167.71$

વિભાગ E

1. સામાન્ય સૂચક આંક = 122.32

2. કુલ ખર્ચની રીતે સૂચક આંક = 149.41

3. કુલ ખર્ચની રીતે સૂચક આંક = 115.69

4. અચલ આધારે સૂચક આંક = 100, 118.75, 125, 131.25, 140.63, 187.5, 203.13; સરેરાશ ભાવના આધારે સૂચક આંક 91.43, 108.57, 114.29, 120, 128.57, 171.43, 185.71

5. ઔદ્યોગિક ઉત્પાદનનો સૂચક આંક I = 379.19

6. સૂચક આંક I = 126.79 અને ભાવમાં થયેલ વધારો 26.79 % છે.

7. વાસ્તવિક વેતન = 12,500, 10,000, 9268.29, 9090.91, 9361.7, 9615.38 નાણાંની ખરીદશક્તિ = ₹ 0.38

વિભાગ F

1. $I_L = 113.65$, $I_P = 113.94$, $I_F = 113.79$ અને કુલ ખર્ચમાં થયેલો વધારો 13.79 % છે.

2. $I_P = 191.53$, $I_F = 211.52$

3. $I_F = 84.84$

4. $I_L = 109.52$, $I_P = 110.29$, $I_F = 109.90$

5. કૌટુંબિક અંદાજપત્રની રીતે સૂચક આંક = 118.58 અને કુલ ખર્ચની રીતે સૂચક આંક = 118.58. આમ, બંને સૂચક આંક સરખા છે.

6. વર્ષ 2014 માટે સૂચક આંક $I_1 = 239.41$ અને વર્ષ 2015 માટે સૂચક આંક $I_2 = 253.44$; જીવનનિર્વાહ-ખર્ચમાં ચાલુ વર્ષે થયેલો વધારો 14.03 % છે. 2015ના ભાવ સૂચક આંકની ટકાવારી 5.86 % વધારો થયેલ છે અને વેતનમાં 5 % વધારો મેળવેલ છે. તેથી વેતનવધારો 0.86 % જેટલો ઓછો છે.

7. સૂચક આંક $I = 231.44$ અગાઉનું જીવનધોરણ ટકાવી રાખવા માટે ₹ 13,886.40 આવક હોવી જોઈએ.

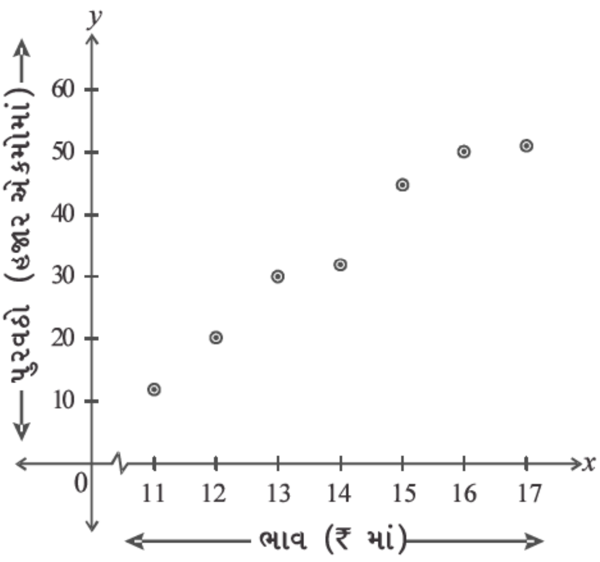
8. ઔદ્યોગિક વસ્તુઓનો સૂચક આંક $= 100.10$, જે આધાર વર્ષની સરખામણીમાં 0.10 % વધારો સૂચવે છે.

9. ભાર વધારા પહેલાંનો સૂચક આંક $I = 128.75$

10. જીવનનિર્વાહ-ખર્ચનો સૂચક આંક $= 196.35$ અને આધાર વર્ષની સરખામણીમાં (196.35 – 100) = 96.35 % વધારો થયેલ છે.

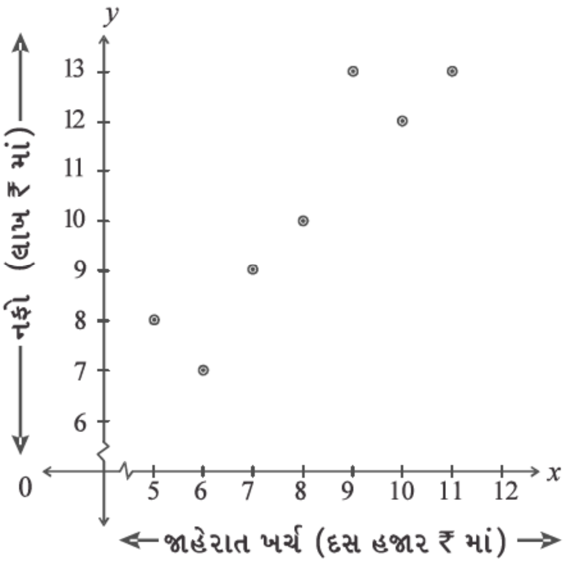
સ્વાધ્યાય 2.1

1.



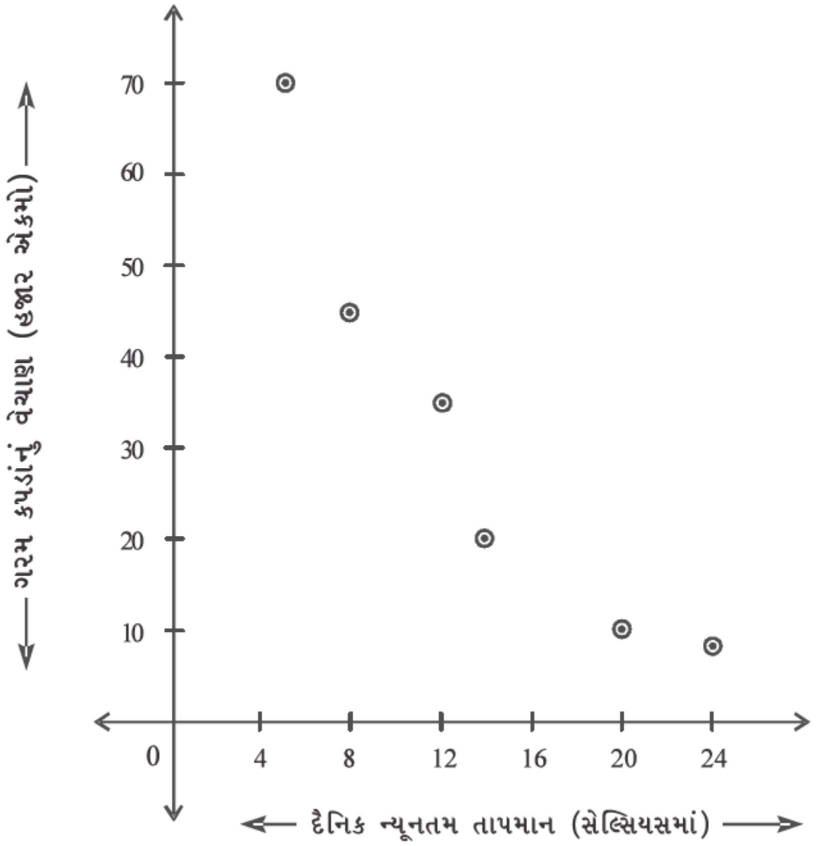
ભાવ અને પુરવઠા વચ્ચે આંશિક ધન સહસંબંધ છે.

2.



જાહેરાત ખર્ચ અને નફા વચ્ચે આંશિક ધન સહસંબંધ છે.

3.



દૈનિક ન્યૂનતમ તાપમાન અને ગરમ કપડાંના વેચાણ વચ્ચે આંશિક ઋણ સહસંબંધ છે.

સ્વાધ્યાય 2.2

1. $r = 0.81$	**2.** $r = -0.90$	**3.** $r = 0.90$	**4.** $r = 0.24$	**5.** $r = 0.82$
6. $r = -0.96$	**7.** $r = 0.67$	**8.** $r = -0.92$	**9.** $r = 0.99$	**10.** $r = 0.80$
11. $r = 0.84$	**12.** $r = 0.5$	**13.** $r = 0.8$	**14.** (1) $r = 0.94$	(2) $r = 0.96$
15. $r = -0.55$				

સ્વાધ્યાય 2.3

1. $r = 0.49$	**2.** $r = 0.78$	**3.** $r = 0.7$	**4.** $r = 0.82$	**5.** $r = 0.91$
6. $r = 0.90$	**7.** $r = -0.30$	**8.** સુધારેલ $\Sigma d^2 = 122.5$, $r = 0.26$		

સ્વાધ્યાય 2

વિભાગ A

1. (c)	**2.** (a)	**3.** (d)	**4.** (b)	**5.** (c)
6. (d)	**7.** (b)	**8.** (b)	**9.** (b)	**10.** (c)
11. (a)	**12.** (b)	**13.** (c)	**14.** (c)	**15.** (a)
16. (b)	**17.** (b)	**18.** (a)		

વિભાગ B

3. ધન **4.** ધન **5.** ઋણ **6.** ઋણ **7.** અર્થહીન સહસંબંધ

8. ઊગમબિંદુ પરિવર્તનથી r બદલાય નહિ તેથી $r = 0.4$ **10.** $r = 0$ **11.** ઋણ

વિભાગ C

11. $r = 0.67$ **12.** $r = -0.54$ **13.** $r = 0.27$

વિભાગ D

10. $r = 0.75$ **11.** $r = 0$ **12.** $r = -0.5$ **13.** $r = 0.2$

વિભાગ E

1. $r = -0.81$	**2.** $r = 0.43$	**3.** $r = 0.79$	**4.** $r = 0.77$	**5.** $r = 0.54$
6. $r = 0.13$				

વિભાગ F

1. $r = 0.99$ **2.** $r = -0.96$ **3.** $r = 0.88$ **4.** $r = 0.81$ **5.** $r = 0.38$

6. $r = 0.79$ **7.** $r = 0$ **8.** $r = 0.6$ **9.** $r = 0.3$ **10.** $r = 0.79$

11. સુધારેલ $\Sigma d^2 = 78$; $r = 0.53$ **12.** $r = 0.73$

●

સ્વાધ્યાય 3.1

1. $\hat{y} = 31.44 - 1.34\,x$ અને ભાવ $x = 20$ ₹ માટે માંગનું અનુમાન $\hat{y} = 4.64$ (સો એકમો)

2. $\hat{y} = 3.35 + 1.93\,x$ અને કાર વપરાશ સમય $x = 5$ વર્ષ માટે વાર્ષિક નિભાવ ખર્ચનું અનુમાન $\hat{y} = 13$ (હજાર ₹)

$\therefore$ ત્રુટિ $e = y - \hat{y} = 13 - 13 = 0$ (અહીં, $x = 5$ માટે y ની પ્રાપ્ત અવલોકિત કિંમત 13 કોષ્ટકમાં છે.)

3. $\hat{y} = 64.27 + 0.83\,x$ અને સરેરાશ વરસાદ $x = 35$ સેમી માટે પાકના ઉત્પાદનનું અનુમાન $\hat{y} = 93.32$ (ટન)

4. $\hat{y} = 69.7 + 1.13\,x$ અને કારીગરનો અનુભવ $x = 7$ વર્ષ હોય તો કાર્ય કૌશલ્ય આંકનું અનુમાન $\hat{y} = 77.61$

સ્વાધ્યાય 3.2

1. $\hat{y} = 54.84 + 2.52\,x$ અને ખાતરનો વપરાશ 300 કિગ્રા [$\therefore$ $x = 30$ (દસ કિગ્રા)] માટે કપાસના પાકનું અનુમાન $\hat{y} = 130.44$ (ક્વિન્ટલ/હેક્ટર)

2. $\hat{y} = 52.84 + 0.68\,x$ અને પિતાની ઊંચાઈ $x = 170$ સેમી માટે પુત્રની ઊંચાઈનું અનુમાન $\hat{y} = 168.44$ સેમી

3. $\hat{y} = 20.72 - 0.71\,x$ અને સમુદ્ર સપાટીથી ઊંચાઈ $x = 7$ હજાર ફૂટ હોય તો અસરકારક ઑક્સિજનની ટકાવારીનું અનુમાન $\hat{y} = 15.75$ %

4. $\hat{y} = -3495.7 + 327.73\,x$ અને વપરાશની જગ્યા $x = 110$ ચો મીટર માટે અંદાજિત માસિક ભાડું $\hat{y} = 32554.6$ ₹

5. $\hat{y} = 0.53 + 0.02\,x$ અને ગ્રાહકોની સંખ્યા $x = 80$ માટે વેચાણનું અનુમાન $\hat{y} = 2.13$ (હજાર ₹)

6. $\hat{y} = 7.6 + 0.29\,x$; x = નફો (લાખ ₹) અને y = વહીવટી ખર્ચ (લાખ ₹)

7. $\hat{y} = 53.72 + 1.54\,x$ અને વરસાદ $x = 60$ સેમી માટે મકાઈની ઊપજનું અનુમાન $\hat{y} = 146.12$ ક્વિન્ટલ

8. $\hat{y} = 8.74 + 1.02\,x$ અને ભાવ $x = 16$ ₹ માટે પુરવઠાનું અનુમાન $\hat{y} = 25.06$ (સો એકમો)

9. $\hat{y} = -4.8 + 0.15\,x$ અને દિવસનું મહત્તમ તાપમાન $x = 42$ સેલ્સિયસ માટે આઇસ્ક્રીમના વેચાણનું અનુમાન $\hat{y} = 1.5$ (લાખ ₹)

સ્વાધ્યાય 3

વિભાગ A

1. (b)	**2.** (a)	**3.** (c)	**4.** (d)	**5.** (a)
6. (a)	**7.** (c)	**8.** (c)	**9.** (d)	**10.** (b)
11. (c)	**12.** (c)	**13.** (c)	**14.** (c)	**15.** (b)

વિભાગ B

8. ત્રુટિ = 0

9. બંને ચલને 2 વડે ગુણીએ એટલે $c_x = \frac{1}{2}$ અને $c_y = \frac{1}{2}$ થાય. $\therefore$ નિયતસંબંધાંક બદલાશે નહિ.

10. $b_{yx} = 0.5 \times \frac{4}{2} = 1$ **11.** $\hat{y} = 50$ **12.** $r = 1$ **13.** $r = -1$

વિભાગ C

2. ત્રુટિ $e = 1$ **3.** $a = 2$ અને $\hat{y} = 2 + 0.6\,x$

4. $b_{yx} = 5$ એટલે કહી શકાય કે x ની કિંમતમાં 1 એકમનો વધારો થવાથી y ની કિંમતમાં અંદાજિત 5 એકમોનો વધારો થાય.

5. $s_y = 3$ **6.** $R^2 = 1$ **7.** $s_x = 5$ **8.** 5 એકમો

9. $b_{yx} = 1.2$ અને $a = 13$ **10.** $b_{vu} = b_{yx} \times \frac{c_x}{c_y} = 0.75 \times \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = 0.25$

વિભાગ D

8. $\hat{y} = 4 + 0.75\,x$ **9.** $\hat{y} = -10 + 2\,x$

10. $R^2 = 0.81$; y માં થતા કુલ ચલનમાંથી 81 % ચલન નિયતસંબંધ મૉડેલ પરથી સમજાવી શકાય છે.

11. $b_{yx} = 2.52$ એટલે કહી શકાય કે x ની કિંમતમાં 1 એકમનો વધારો થવાથી y ની કિંમતમાં અંદાજિત 2.52 એકમોનો વધારો થાય.

12. (i) $b_{vu} = 0.8$ (ii) $b_{vu} = 1.6$ (iii) $b_{vu} = 0.08$ **13.** $\hat{y} = 12 + 0.88\,x$

વિભાગ E

1. $\hat{y} = 2 + 0.75\,x$ **2.** $\hat{y} = 38.8 + 0.67\,x$ **3.** $\hat{y} = 58 + 3.2\,x$

4. $\hat{y} = 764.8 + 11.4\,x$ અને વરસાદ $x = 20$ સેમી માટે પાકનું અનુમાન $\hat{y} = 992.8$ કિગ્રા

5. $\hat{y} = 18 + 0.8\,x$ અને રોકાણ $x = 45$ લાખ ₹ માટે બજાર કિંમતનું અનુમાન $\hat{y} = 54$ (લાખ ₹)

વિભાગ F

1. $\hat{y} = 73.29 - 1.59\,x$ અને ભાવ x = 40 ₹ માટે માંગનું અનુમાન $\hat{y} = 9.69$ (સો એકમો)

2. $\hat{y} = 73.43 + 0.9\,x$ અને અનુભવ x = 17 વર્ષ હોય તો દેખાવ મૂલ્યનું અનુમાન $\hat{y} = 88.73$

3. $\hat{y} = 34.8 + 0.74\,x$ અને દૈનિક આવક x = 500 ₹ હોય તો વપરાશ ખર્ચનું અનુમાન $\hat{y} = 404.8$ ₹

4. $\hat{y} = 3.73 + 0.13\,x$ અને જાહેરાત ખર્ચ x = 50 (દસ હજાર ₹) માટે વેચાણનું અનુમાન $\hat{y} = 10.23$ કરોડ ₹

5. $\hat{y} = -122.94 + 91.67\,x$ અને $R^2 = 0.97$ $\therefore$ નિયતસંબંધ મૉડેલ વિશ્વસનીય

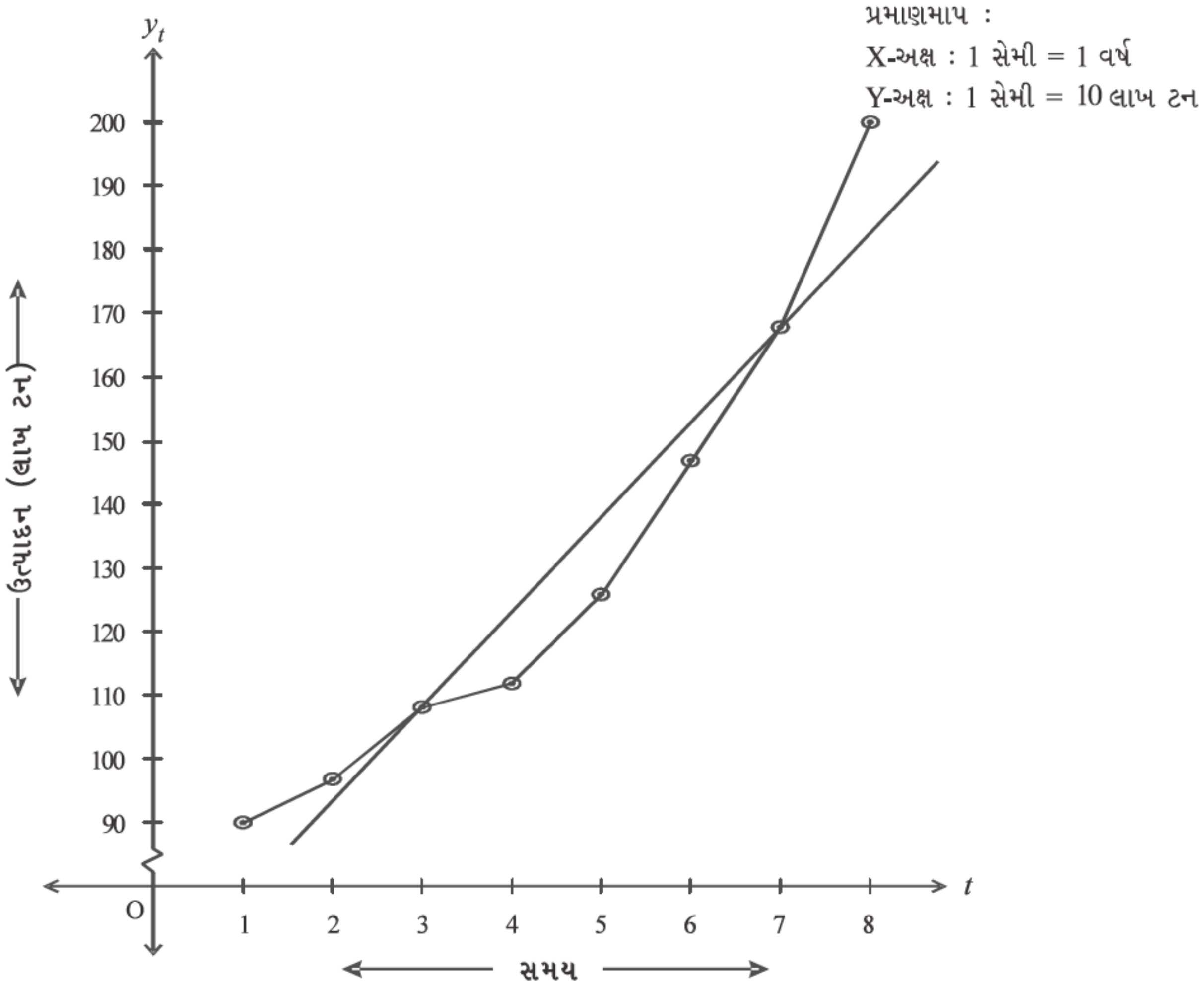
6. $\hat{y} = -10 + 1.6\,x$ અને x = 30 માટે $\hat{y} = 38$

7. $\hat{y} = -0.44 + 0.7\,x$ અને x = 5 માટે $\hat{y} = 3.06$

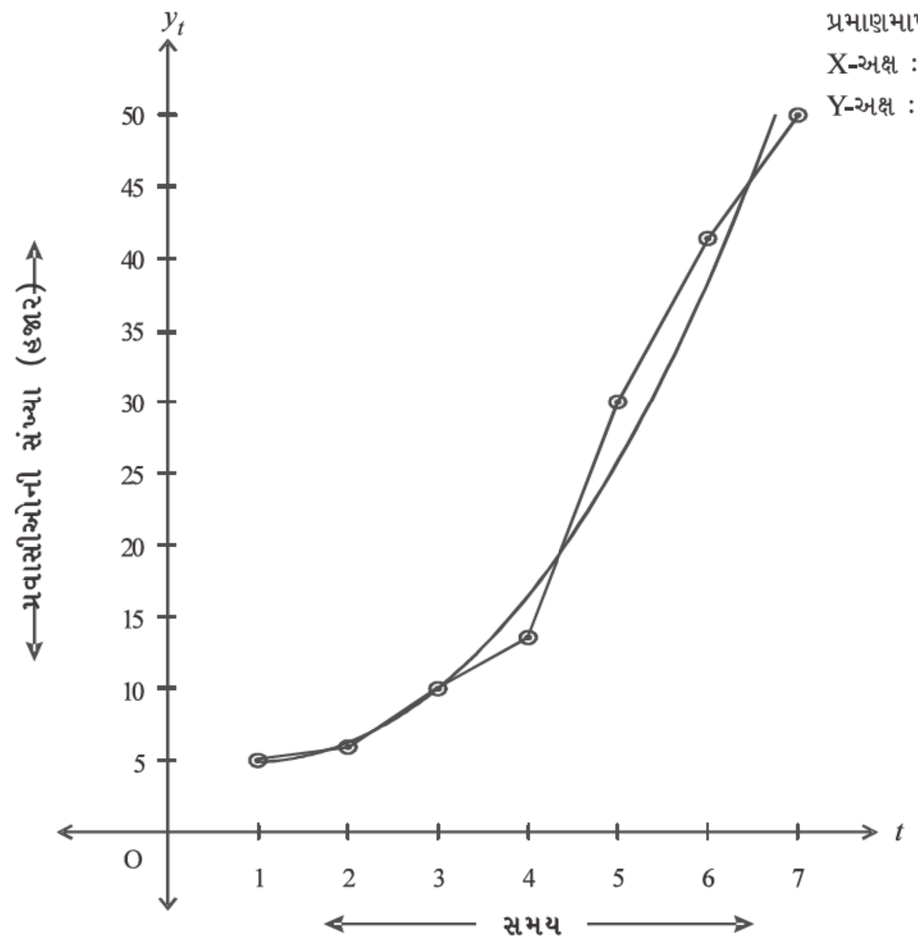
●

સ્વાધ્યાય 4.1

1.

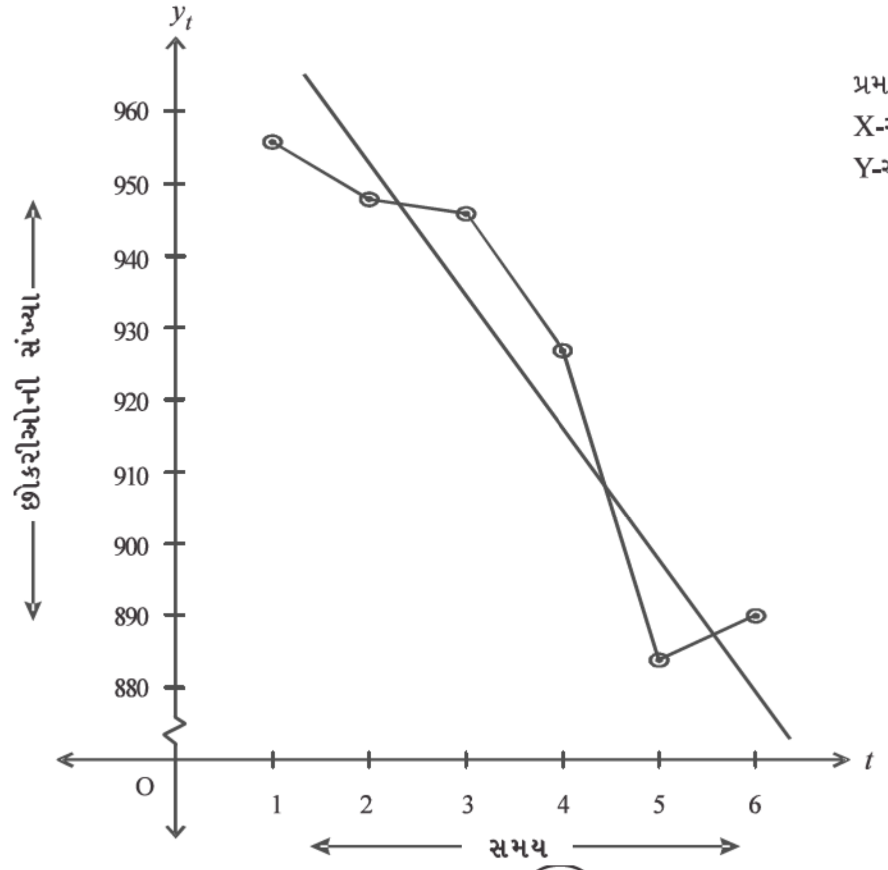


2.



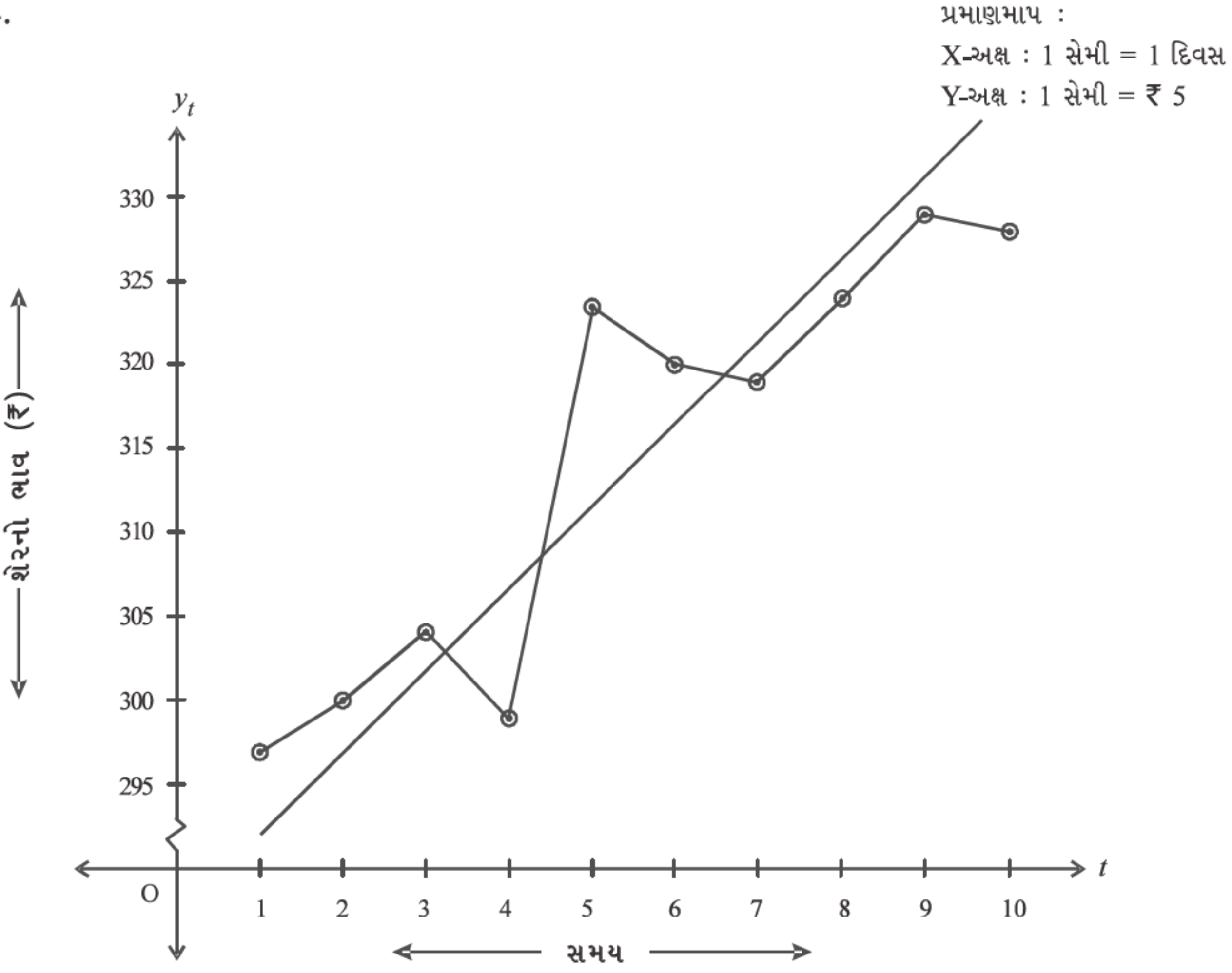
પ્રમાણમાપ :
X-અક્ષ : 1 સેમી = 1 વર્ષ
Y-અક્ષ : 1 સેમી = 5 હજાર પ્રવાસી

3.



પ્રમાણમાપ :
X-અક્ષ : 1 સેમી = 10 વર્ષ
Y-અક્ષ : 1 સેમી = 10 છોકરીઓ

4.



સ્વાધ્યાય 4.2

1. $\hat{y} = 7.41 - 0.07\,t$, વર્ષ 2017 માટે $\hat{y} = 6.78$

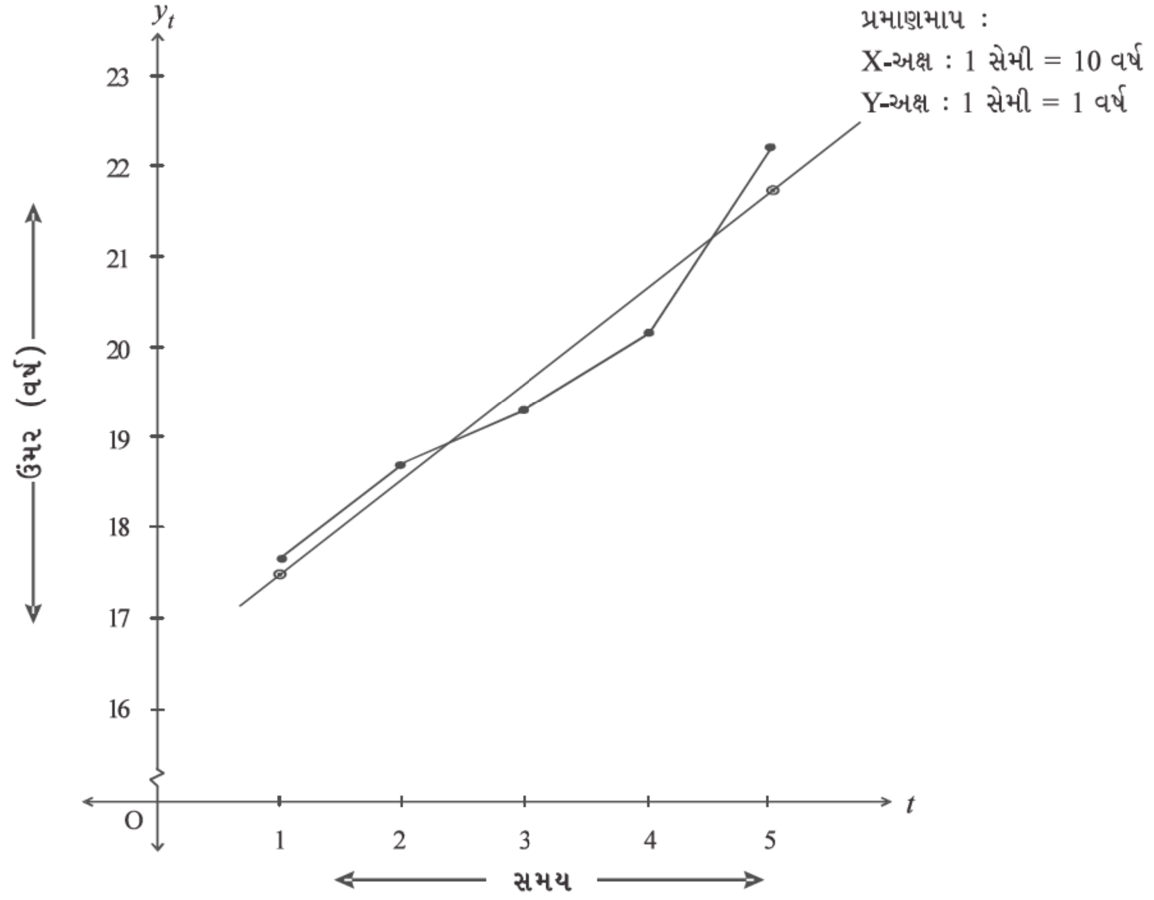
2. $\hat{y} = 447.2 + 69.4\,t$, વર્ષ 2015-16 માટે $\hat{y} = 1071.8$

3. $\hat{y} = 57.12 + 9.06\,t$, વર્ષ 2016 માટે $\hat{y} = 120.54$ હજાર

વર્ષ 2017 માટે $\hat{y} = 129.6$ હજાર

વર્ષ	2010	2011	2012	2013	2014	2015
વલણની અનુમાનિત કિંમતો (હજાર વાહનો)	66.18	75.24	84.3	93.36	102.42	111.48

4. $\hat{y} = 16.47 + 1.05\,t$, વર્ષ 2021 માટે $\hat{y} = 22.77$ વર્ષ



સ્વાધ્યાય 4.3

1.

વર્ષ	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
ત્રણ વર્ષીય ચલિત સરેરાશ	–	5	6	7	8	9	10	11	12	–

2.

માસ	જાન્યુ.	ફેબ્રુ.	માર્ચ	એપ્રિલ	મે	જૂન	જુલાઈ	ઑગસ્ટ.	સપ્ટે.	ઓક્ટો.	નવે.	ડિસે.
ચાર માસની ચલિત સરેરાશ	–	–	274.88	280.38	273.88	263	265.38	269.25	272.63	275.88	–	–

3.

વર્ષ	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
પાંચ વર્ષીય ચલિત સરેરાશ	–	–	16.8	18.6	21.2	22.6	23.2	–	–

4.

વર્ષ	2013				2014				2015			
ત્રિમાસ	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
ચાર ત્રિમાસની ચલિત સરેરાશ	–	–	124.38	134	143	150.88	153.25	148	141.63	136.88	–	–

સ્વાધ્યાય 4

વિભાગ A

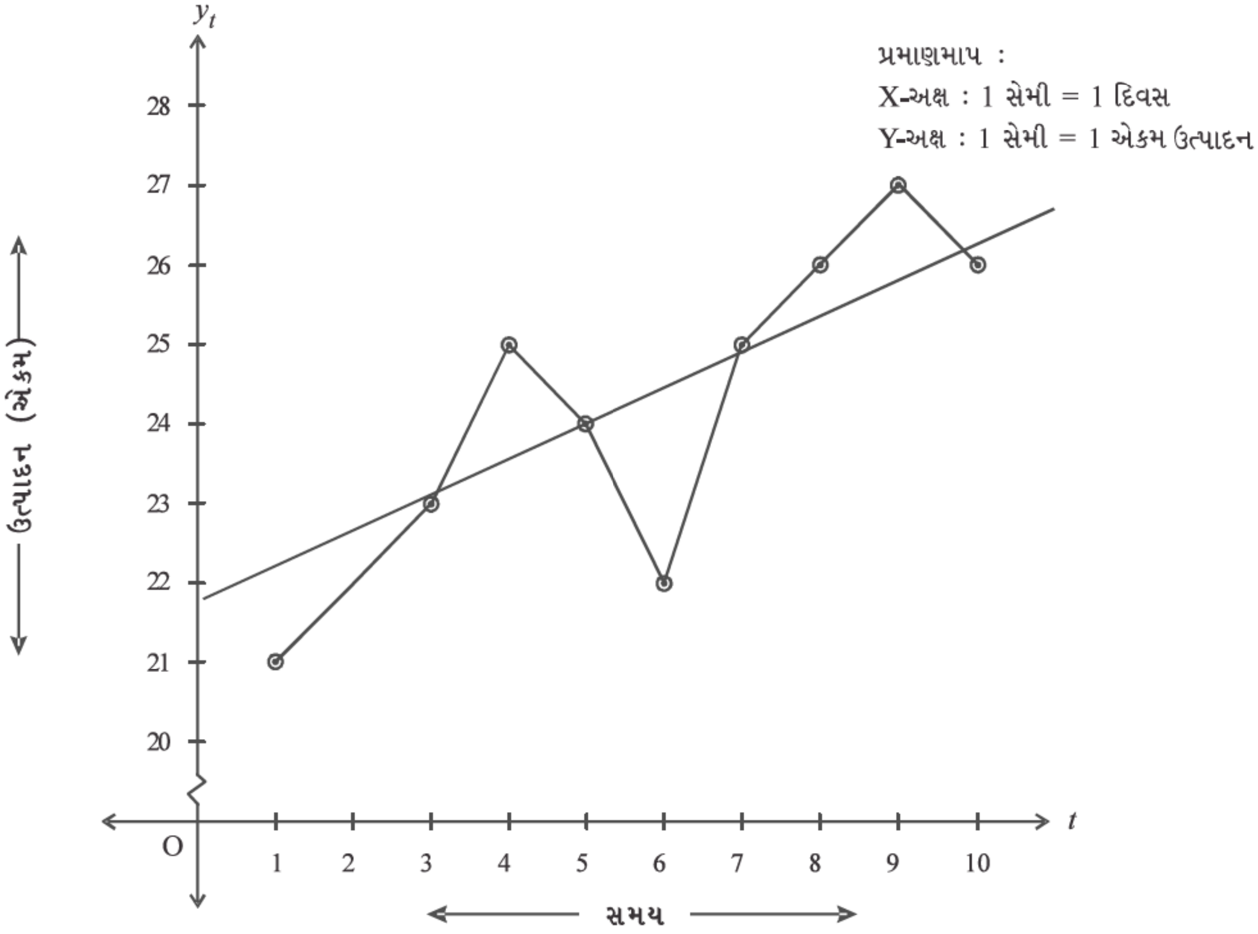
1. (c)	**2.** (a)	**3.** (b)	**4.** (b)	**5.** (c)
6. (a)	**7.** (b)	**8.** (c)	**9.** (c)	**10.** (d)

વિભાગ B

10. આઠમા સપ્તાહ માટે $\hat{y} = 14.7$

વિભાગ D

9.



10 $\hat{y} = 38 + 11.8\,t$

11.

માસ	જાન્યુઆરી	ફેબ્રુઆરી	માર્ચ	એપ્રિલ	મે	જૂન	જુલાઈ
ત્રણ માસની ચલિત સરેરાશ	–	16.33	17.33	19.67	21.33	22	–

વિભાગ E

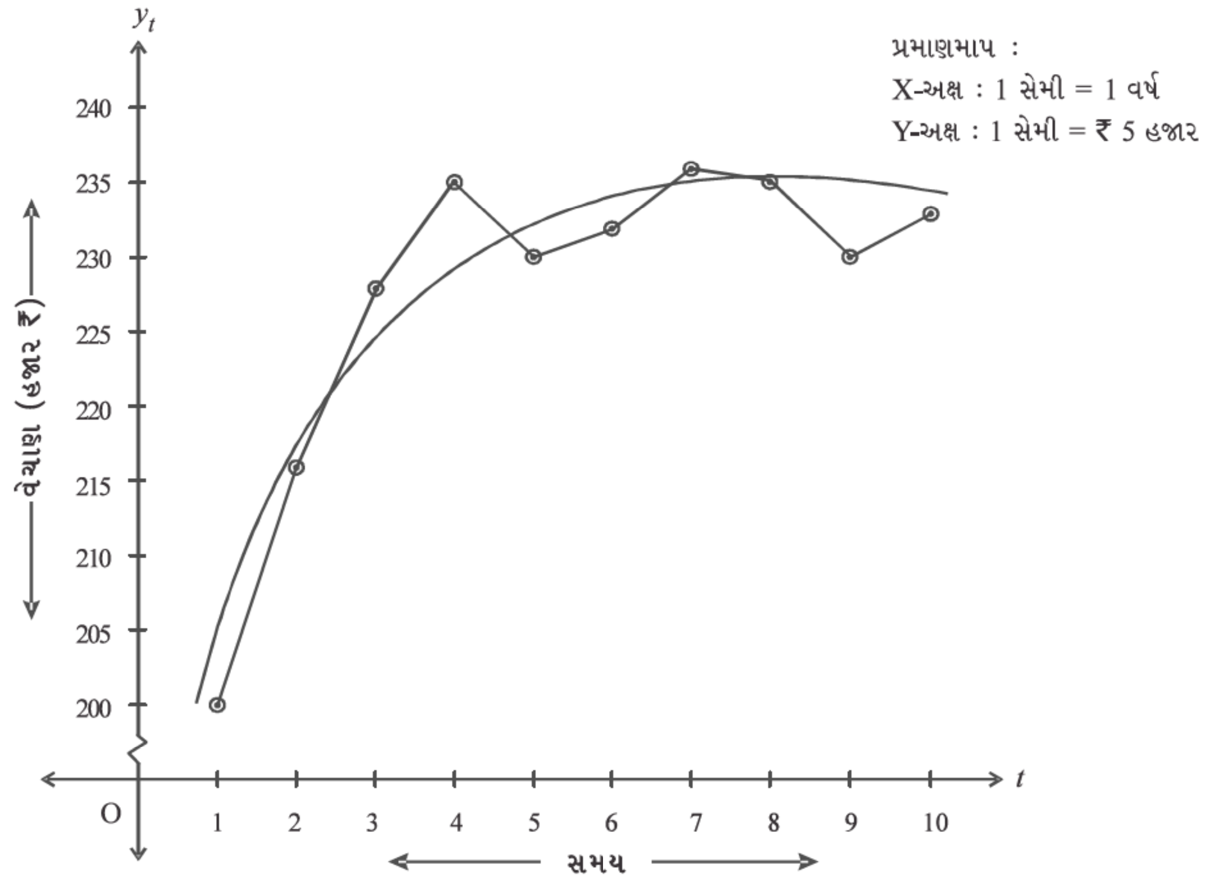
1. $\hat{y} = 23.19 + 0.09t$, વર્ષ 2017 માટે $\hat{y} =$ 23.91 કરોડ

2. $\hat{y} = 49.1 - 2.1t$, વર્ષ 2016 માટે $\hat{y} =$ 36.5 હજાર

3.

માસ	એપ્રિલ 2015	મે	જૂન	જુલાઈ	ઑગસ્ટ	સપ્ટે.	ઑક્ટો.	નવે.	ડિસે.	જાન્યુ. 2016
ત્રણ માસની ચલિત સરેરાશ	–	71.33	68.67	66.67	65	63.33	63.33	65	66	–

4.



5.

વર્ષ	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
પાંચ વર્ષીય ચલિત સરેરાશ	–	–	118.4	119.2	119	118.8	118	119.4	120.6	–	–

વિભાગ F

1. $\hat{y} = 30.26 + 1.19\,t$, વર્ષ 2016-17 માટે $\hat{y} =$ 39.78 કરોડ ટન

વર્ષ 2017-18 માટે $\hat{y} =$ 40.97 કરોડ ટન

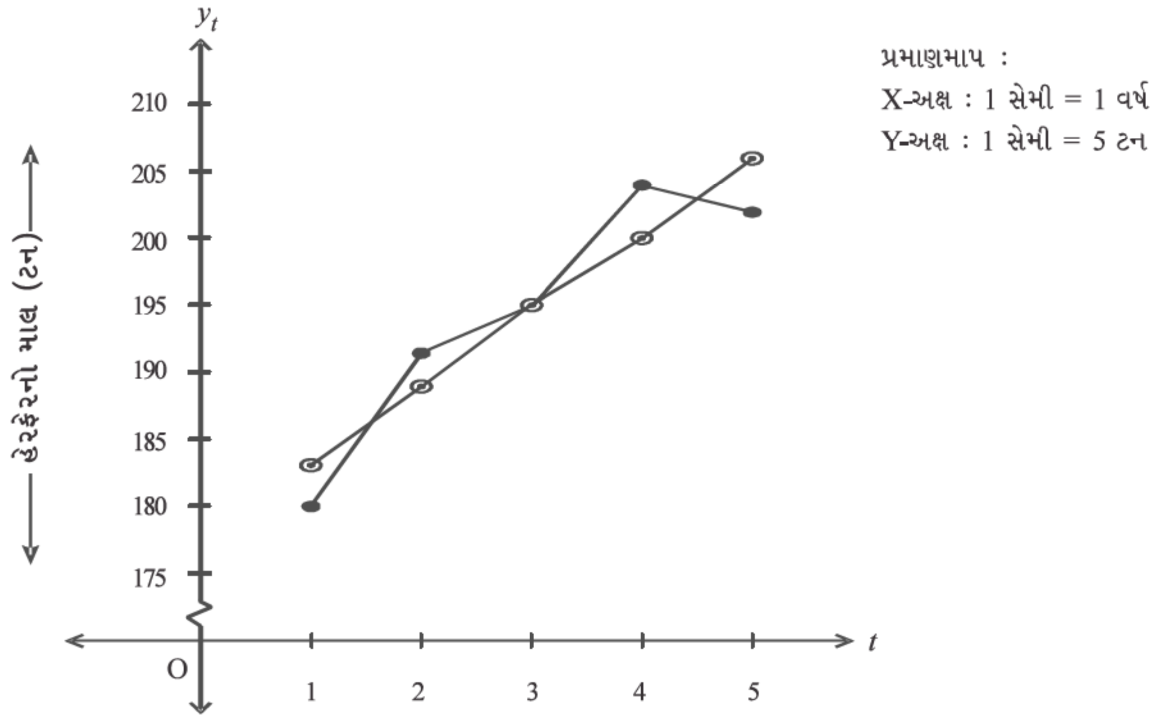
2.

વર્ષ	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
ચાર વર્ષીય ચલિત સરેરાશ	–	–	358.25	378	395.63	406.63	411.38	415.88	–	–

3. $\hat{y} = 22.55 - 0.39\,t$, વર્ષ 2016 માટે $\hat{y} =$ 19.43 વર્ષ 2017 માટે $\hat{y} =$ 19.04

4. $\hat{y} = 177.8 + 5.6\,t$, વર્ષ 2016 માટે $\hat{y} =$ 211.4 ટન

વર્ષ	2011	2012	2013	2014	2015
વલણની અનુમાનિત કિંમતો (ટન)	183.4	189	194.6	200.2	205.8



5.

માસ	માર્ચ				એપ્રિલ				મે			
સપ્તાહ	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
ચાર સપ્તાહની ચલિત સરેરાશ	–	–	38.44	38.7	38.97	39.62	41.29	43.05	44.4	45.72	–	–

●●●