ગુજરાત રાજ્યના શિક્ષણવિભાગના પત્ર-ક્રમાંક
મશબ/1215/178/છ, તા. 24-11-2016 - થી મંજૂર

આંકડાશાસ્ત્ર

(ભાગ 2)

ધોરણ 12

પ્રતિજ્ઞાપત્ર

ભારત મારો દેશ છે.
બધાં ભારતીયો મારા ભાઈબહેન છે.
હું મારા દેશને ચાહું છું અને તેના સમૃદ્ધ અને
વૈવિધ્યપૂર્ણ વારસાનો મને ગર્વ છે.
હું સદાય તેને લાયક બનવા પ્રયત્ન કરીશ.
હું મારાં માતાપિતા, શિક્ષકો અને વડીલો પ્રત્યે
આદર રાખીશ અને દરેક જણ સાથે સભ્યતાથી વર્તીશ.
હું મારા દેશ અને દેશબાંધવોને મારી નિષ્ઠા અર્પું છું.
તેમનાં કલ્યાણ અને સમૃદ્ધિમાં જ મારું સુખ રહ્યું છે.

રાજ્ય સરકારની વિનામૂલ્યે યોજના હેઠળનું પુસ્તક

તમસો મા જ્યોતિર્ગમય
ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ
'વિદ્યાયન' સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર-382 010

વિષય-સલાહકાર

ડૉ. આર. ટી. રતાણી

લેખન-સંપાદન

ડૉ. એમ. એન. પટેલ (કન્વીનર) — પ્રો. શુભા એ. લાગવણકર
ડૉ. ચિરાગ જે. ત્રિવેદી — ડૉ. કુંજલ એચ. શાહ
ડૉ. પરાગ બી. શાહ — શ્રી મહેશભાઈ એ. પટેલ
ડૉ. યતિન એ. પરીખ

સમીક્ષા

શ્રી રમેશચંદ્ર બી. ઠક્કર — ડૉ. કિશોરભાઈ એમ. પટેલ
શ્રી હિમાંશુ ડી. રાંછ — શ્રી રાજેન્દ્ર બી. ભટ્ટ
શ્રી ગીરીશભાઈ એ. પટેલ — શ્રી વિનયકાન્ત એચ. ઉપાધ્યાય
શ્રી પ્રવિણ એમ. માલવિયા — ડૉ. સંજય જી. રાવલ
શ્રી ગોપાલભાઈ બી. વડગામા — શ્રી વૈશાલી એમ. સેવક

ભાષાશુદ્ધિ

શ્રી છાયાબહેન એમ. પારેખ

ચિત્રાંકન

મીડિયા ગ્રાફિક્સ

સંયોજન

ડૉ. ચિરાગ એન. શાહ
(વિષય-સંયોજક : કૉમર્સ)

નિર્માણ-સંયોજન

શ્રી હરેન શાહ
(નાયબ નિયામક : શૈક્ષણિક)

મુદ્રણ-આયોજન

શ્રી હરેશ એસ. લીમ્બાચીયા
(નાયબ નિયામક : ઉત્પાદન)

પ્રસ્તાવના

રાષ્ટ્રીય અભ્યાસક્રમોના અનુસંધાનમાં ગુજરાત માધ્યમિક અને ઉચ્ચતર માધ્યમિક શિક્ષણ બોર્ડે નવા અભ્યાસક્રમો તૈયાર કર્યા છે. આ અભ્યાસક્રમો ગુજરાત સરકાર દ્વારા મંજૂર કરવામાં આવ્યા છે.

ગુજરાત સરકાર દ્વારા મંજૂર થયેલા **ધોરણ 12, આંકડાશાસ્ત્ર (ભાગ 2)** વિષયના નવા અભ્યાસક્રમ અનુસાર તૈયાર કરવામાં આવેલું આ પાઠ્યપુસ્તક વિદ્યાર્થીઓ સમક્ષ મૂકતાં મંડળ આનંદ અનુભવે છે.

આ પાઠ્યપુસ્તકનું લેખન તથા સમીક્ષા નિષ્ણાત શિક્ષકો અને પ્રાધ્યાપકો પાસે કરાવવામાં આવ્યાં છે. સમીક્ષકોનાં સૂચનો અનુસાર હસ્તપ્રતમાં યોગ્ય સુધારાવધારા કર્યા પછી આ પાઠ્યપુસ્તક પ્રસિદ્ધ કરવામાં આવ્યું છે.

પ્રસ્તુત પાઠ્યપુસ્તકને રસપ્રદ, ઉપયોગી અને ક્ષતિરહિત બનાવવા માટે મંડળે પૂરતી કાળજી લીધી છે. તેમ છતાં શિક્ષણમાં રસ ધરાવનાર વ્યક્તિઓ પાસેથી પુસ્તકની ગુણવત્તા વધારે તેવાં સૂચનો આવકાર્ય છે.

પી. ભારતી (IAS)
નિયામક — કાર્યવાહક પ્રમુખ
તા.16-11-2019 — ગાંધીનગર

પ્રથમ આવૃત્તિ : 2017, પુનઃ મુદ્રણ : 2018, 2019, 2020

પ્રકાશક : ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, 'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર વતી પી. ભારતી, નિયામક
મુદ્રક :

મૂળભૂત ફરજો

ભારતના દરેક નાગરિકની ફરજ નીચે મુજબ રહેશે :*

(ક) સંવિધાનને વફાદાર રહેવાની અને તેના આદર્શો અને સંસ્થાઓનો, રાષ્ટ્રધ્વજનો અને રાષ્ટ્રગીતનો આદર કરવાની;

(ખ) આઝાદી માટેની આપણી રાષ્ટ્રીય લડતને પ્રેરણા આપનારા ઉમદા આદર્શોને હૃદયમાં પ્રતિષ્ઠિત કરવાની અને અનુસરવાની;

(ગ) ભારતનાં સાર્વભૌમત્વ, એકતા અને અખંડિતતાનું સમર્થન કરવાની અને તેમનું રક્ષણ કરવાની;

(ઘ) દેશનું રક્ષણ કરવાની અને રાષ્ટ્રીય સેવા બજાવવાની હાકલ થતાં, તેમ કરવાની;

(ચ) ધાર્મિક, ભાષાકીય, પ્રાદેશિક અથવા સાંપ્રદાયિક ભેદોથી પર રહીને, ભારતના તમામ લોકોમાં સુમેળ અને સમાન બંધુત્વની ભાવનાની વૃદ્ધિ કરવાની, સ્ત્રીઓના ગૌરવને અપમાનિત કરે, તેવા વ્યવહારો ત્યજી દેવાની;

(છ) આપણી સમન્વિત સંસ્કૃતિના સમૃદ્ધ વારસાનું મૂલ્ય સમજી તે જાળવી રાખવાની;

(જ) જંગલો, તળાવો, નદીઓ અને વન્ય પશુપક્ષીઓ સહિત કુદરતી પર્યાવરણનું જતન કરવાની અને તેની સુધારણા કરવાની અને જીવો પ્રત્યે અનુકંપા રાખવાની;

(ઝ) વૈજ્ઞાનિક માનસ, માનવતાવાદ અને જિજ્ઞાસા તથા સુધારણાની ભાવના કેળવવાની;

(ટ) જાહેર મિલકતનું રક્ષણ કરવાની અને હિંસાનો ત્યાગ કરવાની;

(ઠ) રાષ્ટ્ર પુરુષાર્થ અને સિદ્ધિનાં વધુ ને વધુ ઉન્નત સોપાનો ભણી સતત પ્રગતિ કરતું રહે એ માટે, વૈયક્તિક અને સામૂહિક પ્રવૃત્તિનાં તમામ ક્ષેત્રે શ્રેષ્ઠતા હાંસલ કરવાનો પ્રયત્ન કરવાની;

(ડ) માતા-પિતાએ અથવા વાલીએ 6 વર્ષથી 14 વર્ષ સુધીની વયના પોતાના બાળક અથવા પાલ્યને શિક્ષણની તકો પૂરી પાડવાની.

*ભારતનું સંવિધાન : કલમ 51-ક

અનુક્રમણિકા

•

"Statistically, the probability of any one of us being here is so small that the mere fact of our existence should keep us all in a state of contented dazzlement."

– Lewis Thomas

1

સંભાવના

(Probability)

વિષયવસ્તુ

1.1 પ્રાસ્તાવિક

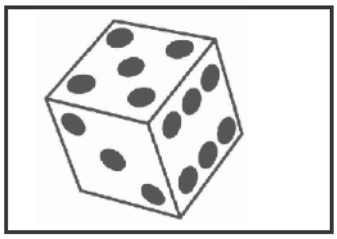
આપણા રોજબરોજના જીવનમાં અનેક ઘટનાઓ બને છે. આ ઘટનાઓ પૈકીની કેટલીક ઘટનાઓ ચોક્કસ બનશે જ એવું આપણે નિશ્ચિતપણે કહી શકીએ છીએ; જેમકે જન્મ લેનાર દરેક માનવ મૃત્યુ પામશે, ઝાડ પરથી છૂટું પડેલું ફળ જમીન પર પડશે, કોઈ વેપારીને વસ્તુનો એક એકમ વેચવાથી ₹ 10 નફો મળતો હોય, તો તેને વસ્તુના 50 એકમો વેચાય તો ₹ 500 નફો મળશે, એક વ્યક્તિ કોઈ રાષ્ટ્રીયકૃત બૅન્કમાં ₹ 1,00,000 વાર્ષિક 7.5 ટકાના વ્યાજના દરે મૂકે તો તેને વર્ષના અંતે ₹ 7500 વ્યાજ તરીકે મળશે વગેરે. આ ઘટનાઓ નિશ્ચિત છે, પરંતુ કેટલીક ઘટનાઓ એવી હોય છે કે જે બનશે કે નહિ તે અગાઉથી નિશ્ચિતપણે કહી શકાતું નથી. જેમકે કોઈ સમતોલ સિક્કો ઉછાળીએ ત્યારે તેની ઉપરની બાજુ છાપ મળશે, છ બાજુવાળો એક સમતોલ પાસો ફેંકતા પાસાની ઉપરની બાજુ પર મળતો અંક 3 હોય, નવો જન્મ લેનાર બાળકની જાતિ નર હશે, કારખાનામાં ઉત્પાદિત થયેલ એકમ ગુણવત્તાની દૃષ્ટિએ ખામીરહિત હશે, ચાલુ વર્ષે અમુક વિસ્તારમાં કુલ કેટલો વરસાદ પડશે, ચાલુ વર્ષે રાજ્યમાં ઘઉંના પાકનું કેટલું ઉત્પાદન થશે, બે દેશ વચ્ચે રમાતી એક ક્રિકેટ મૅચનું પરિણામ શું આવશે વગેરે. આ ઘટનાઓ એવી છે કે તે બનશે જ એવું આપણે નિશ્ચિતપણે કહી શકતા નથી. આવી ઘટનાઓ ઘટવા વિશે સચોટ અનુમાન કરવાનું શક્ય નથી. આવી ઘટનાઓ બનવાની (કે ન બનવાની) ઓછીવત્તી શક્યતાનો ખ્યાલ આપણે આપણી આપસૂઝથી મેળવી શકીએ છીએ, પરંતુ આવી ઘટનાઓ બનવાની (કે ન બનવાની) બાબતમાં અનિશ્ચિતતા રહેલી હોય છે. આપણે માની લઈશું કે, આવી ઘટનાઓ બનવાનું (કે ન બનવાનું) અજ્ઞાત તત્ત્વ પર આધારિત છે, જેને આપણે ચાન્સ (Chance) કહીશું. આવી ચાન્સ પર આધાર રાખતી ઘટનાઓને યાદચ્છિક ઘટનાઓ (Random Events) કહે છે. આવી અનિશ્ચિત ઘટના ઘટવાની શક્યતા સંખ્યાત્મક રીતે દર્શાવવા સંભાવના (Probability)નો ઉપયોગ થાય છે. આ પ્રકરણમાં આપણે સંભાવનાનો સિદ્ધાંત, સંભાવનાની પ્રશિષ્ટ વ્યાખ્યા, આંકડાશાસ્ત્રીય વ્યાખ્યા તેમજ સંભાવનાની ઉપયોગિતા દર્શાવતાં ઉદાહરણો જોઈશું. હવે આપણે કેટલાંક પદોનું સ્પષ્ટીકરણ કરી લઈએ જે સંભાવનાના અભ્યાસમાં ઉપયોગી છે.

1.2 યાદચ્છિક પ્રયોગ અને નિદર્શ અવકાશ

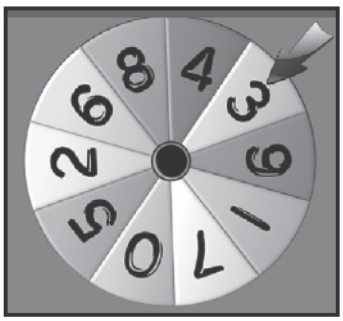
1.2.1 યાદચ્છિક પ્રયોગ

આપણે નીચેના પ્રયોગોનો વિચાર કરીએ :

પ્રયોગ 1 : એક સમતોલ સિક્કો ઉછાળો. આ પ્રયોગના બે શક્ય પરિણામો (i) છાપ (Head-*H*) (ii) કાંટો (Tail-*T*) પૈકી કોઈ એક પરિણામ મળશે. (આપણે ધારી લઈશું કે સિક્કો તેની ધરી પર ઊભો રહેતો નથી.) આમ સિક્કો ઉછાળવાના પ્રયોગમાં શક્ય પરિણામો *'H'* અને *'T'* એમ બે જ છે. પરંતુ આ બે પરિણામો પૈકી કયું પરિણામ મળશે તે નિશ્ચિતપણે પ્રયોગ પૂર્વે કહી શકાતું નથી.



પ્રયોગ 2 : 1, 2, 3, 4, 5, 6 એમ 1 થી 6 અંક લખેલા છ બાજુવાળા એક સમતોલ પાસાને ઉછાળો. તેની ઉપરની બાજુએ આવતા અંકને નોંધો. આ પ્રયોગનાં છ શક્ય પરિણામો 1, 2, 3, 4, 5, 6 પૈકી કોઈ એક પરિણામ મળશે. અહીં પાસો ઉછાળવાના પ્રયોગમાં શક્ય પરિણામો 1, 2, 3, 4, 5, 6 એમ છ જ છે પરંતુ તે છ પરિણામો પૈકી કયું પરિણામ મળશે તે નિશ્ચિતપણે પ્રયોગ પૂર્વે કહી શકાતું નથી.



પ્રયોગ 3 : ધારો કે 0, 1, 2, ... , 9 એમ દસ સંખ્યા લખેલ એક ચક્ર છે અને તેની સામે એક નિશાન રાખેલ છે. આ ચક્રને હાથ વડે ફેરવવામાં આવે, તો તે ગોળ ગોળ ફરીને અમુક સમય પછી સ્થિર થાય છે. આ ચક્ર અટકે ત્યારે 0, 1, 2, ... , 9 માંથી કોઈ એક સંખ્યા પેલા નિશાનની સામે આવે છે. આ સંખ્યા એ જીત દર્શાવતી સંખ્યા છે. અહીં આવા ચક્રને ફેરવીને જુઓ કે જીત દર્શાવતી સંખ્યા કઈ છે. અહીં પ્રયોગનાં કુલ શક્ય દસ પરિણામો 0, 1, 2, ... , 9 છે. પરંતુ આ દસ સંખ્યાઓ પૈકી કયું પરિણામ આવશે (જીત દર્શાવતી સંખ્યા) તે નિશ્ચિતપણે પ્રયોગ પૂર્વે કહી શકાતું નથી.

ઉપર્યુક્ત દર્શાવેલ પ્રયોગો 1, 2 અને 3 ને યાદચ્છિક પ્રયોગો કહે છે. યાદચ્છિક પ્રયોગની વ્યાખ્યા આ મુજબ છે, જે પ્રયોગનું નિરપેક્ષ રીતે સમાન સંજોગોમાં પુનરાવર્તન કરી શકાતું હોય અને તે પ્રયોગનાં બધાં જ શક્ય પરિણામો જ્ઞાત હોય પરંતુ તે પૈકી કયું ચોક્કસ પરિણામ મળશે તેનું નિશ્ચિત અનુમાન પ્રયોગ પૂર્વે કરી શકાતું ન હોય તેવા પ્રયોગને યાદચ્છિક પ્રયોગ (Random Experiment) કહે છે. આ વ્યાખ્યા પરથી યાદચ્છિક પ્રયોગનાં નીચેનાં લક્ષણો તારવી શકાય :

(1) યાદચ્છિક પ્રયોગનું નિરપેક્ષ રીતે લગભગ સમાન સંજોગોમાં પુનરાવર્તન કરી શકાય છે.

(2) યાદચ્છિક પ્રયોગનાં શક્ય તમામ પરિણામો જ્ઞાત હોય છે પરંતુ તે પૈકી કયું ચોક્કસ પરિણામ મળશે તેનું નિશ્ચિત અનુમાન પ્રયોગ પૂર્વે કરી શકાતું નથી.

(3) યાદચ્છિક પ્રયોગને અંતે ચોક્કસ પરિણામ મળે છે.

1.2.2 નિદર્શ અવકાશ

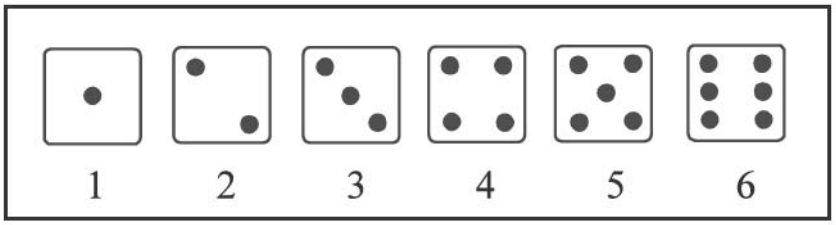
કોઈપણ યાદચ્છિક પ્રયોગનાં શક્ય તમામ પરિણામોના ગણને તે યાદચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ (Sample Space) કહેવામાં આવે છે. નિદર્શ અવકાશને સામાન્ય રીતે U અથવા S સંકેત વડે દર્શાવાય છે. નિદર્શ અવકાશના ઘટકોને નિદર્શ બિંદુઓ (Sample Points) કહે છે.

અગાઉના મુદ્દામાં દર્શાવેલા યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશ નીચે મુજબ મળે :

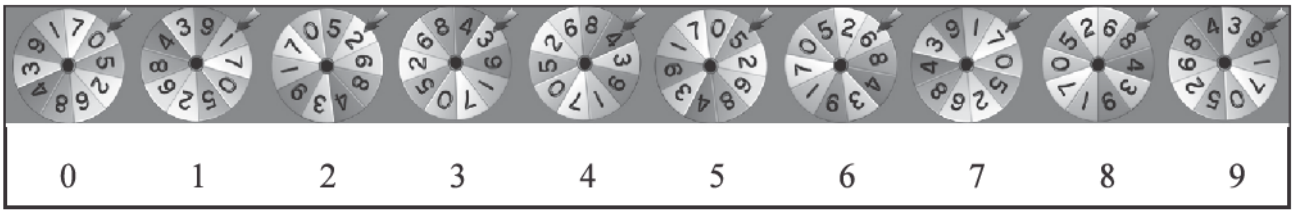
પ્રયોગ 1 : એક સમતોલ સિક્કો ઉછાળવો. આ યાદચ્છિક પ્રયોગમાં શક્ય પરિણામો કુલ બે છે : H અને T. તેથી અહીં નિદર્શ અવકાશ $U = \{H, T\}$ અથવા $U = \{T, H\}$ એમ ગમે તે રીતે લખી શકાય..

છાપ (Head - H) કાંટો (Tail - T)

પ્રયોગ 2 : 1, 2, 3, 4, 5, 6 એમ 1 થી 6 અંક લખેલા એક છ બાજુવાળા સમતોલ પાસાને ઉછાળો. આ યાદચ્છિક પ્રયોગનાં શક્ય પરિણામો કુલ છ છે : 1, 2, 3, 4, 5, 6. તેથી અહીં નિદર્શ અવકાશ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ થાય.

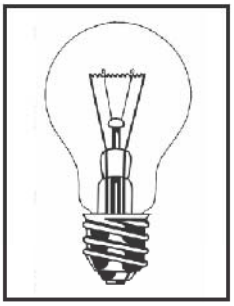


પ્રયોગ 3 : 0, 1, 2, ... , 9 સંખ્યા લખેલ એક ચક્ર ફેરવી જીત પ્રાપ્ત કરતી સંખ્યા નક્કી કરવી. આ યાદચ્છિક પ્રયોગનાં શક્ય પરિણામો કુલ દસ છે તેથી અહીં નિદર્શ અવકાશ $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ થાય.



સાન્ત નિદર્શ અવકાશ : યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશમાં કુલ શક્ય પરિણામોની સંખ્યા પરિમિત હોય તો તેવા નિદર્શ અવકાશને સાન્ત નિદર્શ અવકાશ (Finite Sample Space) કહે છે. દા.ત., ઉપર દર્શાવેલ ત્રણેય યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશો સાન્ત નિદર્શ અવકાશનાં ઉદાહરણો છે.

અનંત નિદર્શ અવકાશ : યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશમાં કુલ શક્ય પરિણામોની સંખ્યા અપરિમિત હોય તેવા નિદર્શ અવકાશને અનંત નિદર્શ અવકાશ (Infinite Sample Space) કહે છે. દા.ત., ઉત્પાદિત ઈલેક્ટ્રિક બલ્બનું આયુષ્ય (L) કલાકમાં માપીને નોંધીએ તો તે વાસ્તવિક સંખ્યા થાય. L નું મૂલ્ય 0 કે તેથી મોટું થાય. તેથી ઈલેક્ટ્રિક બલ્બના આયુષ્ય માપવાના પ્રયોગનાં શક્ય પરિણામો અનંત હશે. અહીં નિદર્શ અવકાશ $U = \{L \mid L \geq 0, L \in R\}$ થશે. હવે જો ઈલેક્ટ્રિક બલ્બનું મહત્તમ આયુષ્ય 700 કલાક ધારીએ, તો નિદર્શ અવકાશ $U = \{L \mid 0 \leq L \leq 700;\ L \in R\}$, થશે જે અનંત નિદર્શ અવકાશ બનશે.



હવે આપણે યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશનાં અન્ય કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 1 : બે સમતોલ સિક્કાને એકસાથે ઉછાળવામાં આવે છે. આ યાદચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ લખો.

અહીં બે સિક્કા પૈકી કોઈપણ એક સિક્કાને પહેલો સિક્કો અને બાકીના સિક્કાને બીજો સિક્કો કહીશું. આ પ્રયોગનાં પરિણામો નીચે આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ મળી શકે :

છાપને H વડે અને કાંટાને T વડે દર્શાવીએ, તો નિદર્શ અવકાશ નીચે મુજબ મળે :

$U = \{HH, HT, TH, TT\}$

પહેલા સિક્કા પર H અને T માંથી કોઈ એક પરિણામ મળી શકે. તેથી આ ક્રિયા બે રીતે થઈ શકે અને બીજા સિક્કા પર પણ H અને T માંથી કોઈ એક પરિણામ મળી શકે તેથી આ ક્રિયા પણ બે રીતે થઈ શકે. ગણતરીના ગુણાકારના મૂળભૂત સિદ્ધાંત મુજબ કુલ $2 \times 2 = 2^2 = 4$ કુલ શક્ય પરિણામો મળશે. અહીં નોંધવું જોઈએ કે એક સમતોલ સિક્કો બે વખત ઉછાળવામાં આવે તોપણ આ પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ ઉપર દર્શાવ્યા મુજબ જ થશે.

ઉદાહરણ 2 : દરેક પાસાની બાજુઓ પર 1 થી 6 અંક લખેલ હોય તેવા બે સમતોલ પાસા ઉછાળવામાં આવે છે. આ યાદચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ લખો.

અહીં બે પાસા પૈકી કોઈપણ એક પાસાને પહેલો પાસો અને બાકીના પાસાને બીજો પાસો કહીશું. પહેલા પાસા પર મળતા અંકને i અને બીજા પાસા પર મળતા અંકને j વડે દર્શાવીશું. તેથી બંને પાસા પર મળતા અંકોની જોડને (i, j) વડે દર્શાવીએ, તો નિદર્શ અવકાશ નીચે મુજબ બને. જ્યાં $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ થશે.

$$\begin{aligned} U = \{&(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),\\ &(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),\\ &(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),\\ &(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),\\ &(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6),\\ &(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\} \end{aligned}$$

અથવા

$$U = \{(i, j);\ i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

પહેલા પાસા પરના 1 થી 6 પૂર્ણાંકોમાંથી કોઈપણ એક પૂર્ણાંક ઉપરની બાજુ આવી શકે તેથી આ ક્રિયા છ રીતે થઈ શકે અને બીજા પાસા પરના પણ 1 થી 6 પૂર્ણાંકોમાંથી કોઈપણ એક પૂર્ણાંક ઉપરની બાજુ આવી શકે તેથી આ ક્રિયા પણ છ રીતે થઈ શકે. ગણતરીના ગુણાકારના મૂળભૂત સિદ્ધાંત મુજબ કુલ $6 \times 6 = 6^2 = 36$ કુલ શક્ય પરિણામો મળશે. તે જ પ્રમાણે ત્રણ સમતોલ પાસા એક સાથે ઉછાળવામાં આવે, તો આ યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશમાં કુલ શક્ય પરિણામો $6^3 = 216$ થશે.

ઉદાહરણ 3 : એક ફેક્ટરીમાં ઉત્પાદિત થયેલા 1000 એકમોની ગુણવત્તા ચકાસી તેમાંના ખામીયુક્ત એકમો શોધવાના યાદચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ લખો.

ફેક્ટરીમાં ઉત્પાદિત થયેલા 1000 એકમોમાંથી ખામીયુક્ત એકમો શોધવામાં આવે, તો ઉત્પાદનમાં ખામીયુક્ત એકમોની સંખ્યા 0, 1, 2, ... , 1000 હોઈ શકે. તેથી આ યાદચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ નીચે મુજબ બને :

$$U = \{0, 1, 2, ..., 1000\}$$

ઉદાહરણ 4 : પ્રથમ ચાર પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓમાંથી એકસાથે ત્રણ સંખ્યાઓ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવાના યાદચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ લખો.

પ્રથમ ચાર પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ એટલે કે 1, 2, 3, 4માંથી એકસાથે ત્રણ સંખ્યા પસંદ કરવામાં આવે તો તે ત્રણ સંખ્યાઓ $(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 4)$ અથવા $(2, 3, 4)$ હોઈ શકે. આમ, આ યાદચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ નીચે મુજબ બને.

$$U = \{(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 4), (2, 3, 4)\}$$

અહીં કુલ 4 સંખ્યાઓમાંથી 3 સંખ્યાઓ પસંદ કરવાની છે જેની પસંદગીના કુલ સંચય ${}^4C_3 = 4$ થાય. આમ, આ યાદચ્છિક પ્રયોગનાં કુલ શક્ય પરિણામો 4 થાય.

ઉદાહરણ 5 : પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ પૈકી કોઈપણ એક સંખ્યા યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવાના યાદચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ લખો.

પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ એટલે કે 1, 2, 3, ... થાય. આ સંખ્યાઓમાંથી યાદચ્છિક રીતે એક સંખ્યા પસંદ કરીએ તો તેનો નિદર્શ અવકાશ નીચે મુજબ બને.

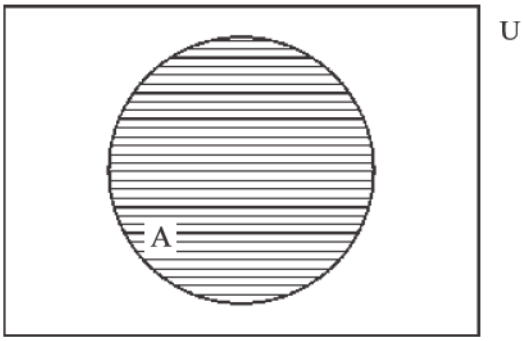
$$U = \{1, 2, 3, 4, ...\}$$

અત્રે નોંધનીય છે કે આ અનંત નિદર્શ અવકાશ છે.

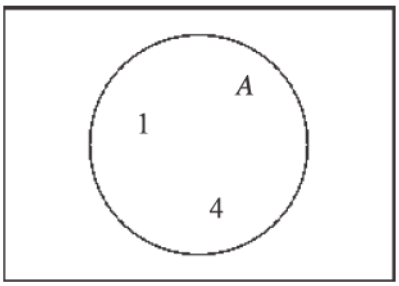
1.3 ઘટના : ચોક્કસ ઘટના, અશક્ય ઘટના, વિશિષ્ટ ઘટનાઓ

આપણે સૌપ્રથમ ઘટનાનો અર્થ સમજી વિવિધ પ્રકારની ઘટનાઓનો અભ્યાસ કરીશું.

(1) ઘટના : યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશના ઉપગણને ઘટના (Event) કહે છે. ઘટનાને સામાન્ય રીતે અક્ષરો $A, B, C, ...$ વડે અથવા $A_1, A_2, A_3, ...$ વડે દર્શાવાય છે. કોઈપણ ઘટના A માટે સાનુકૂળ પરિણામો દર્શાવતાં નિદર્શ બિંદુઓનો ગણ રચવામાં આવે તો તે નિદર્શ અવકાશ Uનો ઉપગણ હોય છે. આમ યાદચ્છિક પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ કોઈપણ ઘટના A નિદર્શ અવકાશ Uનો ઉપગણ હોય છે. તેને $A \subset U$ એવા સંકેતથી દર્શાવાય છે.



દા.ત., એક સમતોલ પાસો ઉછાળવાના યાદચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ થાય. હવે જો પાસાની ઉપરની બાજુએ મળેલ અંક પૂર્ણવર્ગ મળે તેને ઘટના A કહીએ તો ઘટના $A = \{1, 4\}$ થાય.



હવે આપણે બે સમતોલ પાસા ઉછાળવાના યાદચ્છિક પ્રયોગમાં મળતી કેટલીક ઘટનાઓના ઉદાહરણથી દર્શાવીશું કે ઘટના એ નિદર્શ અવકાશનો ઉપગણ છે.

- A_1 = બે પાસા પરના અંકનો સરવાળો 6 મળે

  $\therefore\ A_1 = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4,2), (5,1)\}$

- A_2 = બંને પાસા પર સરખા અંક મળે

  $\therefore\ A_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

- A_3 = બંને પાસા પરના અંકનો સરવાળો 9 થી વધુ મળે

  $\therefore\ A_3 = \{(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

આ બધા ઉપગણોને ઘટનાઓ કહેવાય.

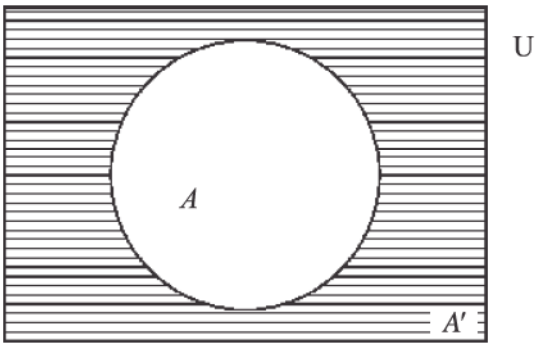
(2) અશક્ય ઘટના : યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશના વિશિષ્ટ ઉપગણ ϕ અથવા $\{\ \}$ ને અશક્ય ઘટના (Impossible Event) કહે છે. અશક્ય ઘટના એટલે એવી ઘટના જે કદી બનતી જ ન હોય. તેને માટે ϕ અથવા $\{\ \}$ સંકેતનો ઉપયોગ થાય છે.

દા.ત., એક સમતોલ સિક્કાને ઉછાળતાં તેના પર છાપ (H) અને કાંટો (T) બંને મળે તે અશક્ય ઘટના કહેવાય.

(3) ચોક્કસ ઘટના : યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશના વિશિષ્ટ ઉપગણ Uને ચોક્કસ ઘટના (Certain Event) કહે છે. ચોક્કસ ઘટના એ એવી ઘટના છે કે જે ઘટના હંમેશાં ઘટે જ છે. તેને માટે U સંકેતનો ઉપયોગ થાય છે.

દા.ત., શનિવારના તરત પછીનો દિવસ રવિવાર હોય, એક છ બાજુવાળો સમતોલ પાસો ઉછાળતા તેની ઉપરની બાજુએ મળેલ પૂર્ણાંક 7 થી નાનો હોય વગેરે ચોક્કસ ઘટનાનાં ઉદાહરણો છે.

(4) પૂરક ઘટના : ધારો કે U એ સાન્ત નિદર્શ અવકાશ છે અને A તેની કોઈ ઘટના છે. નિદર્શ અવકાશ Uમાં હોય પરંતુ ઘટના Aમાં ન હોય તેવાં તમામ પરિણામો કે ઘટકોના ગણને ઘટના Aની પૂરક ઘટના (Complementary Event) કહે છે. ઘટના Aની પૂરક ઘટનાને સંકેતમાં A', $\overline{A}$, A^c વગેરે વડે દર્શાવાય છે. આપણે પૂરક ઘટના માટે સંકેત A' નો ઉપયોગ કરીશું.



A' = ઘટના Aની પૂરક ઘટના

= ઘટના A ન બને.

$= U - A$

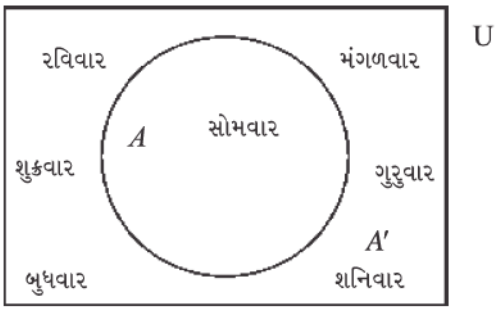
દા.ત., X બંદરેથી નીકળેલું માલવાહક જહાજ Y બંદરે અઠવાડિયાના કયા દિવસે પહોંચશે તે જાણવા માટેના પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ નીચે મુજબ બને.

U = {રવિવાર, સોમવાર, મંગળવાર, બુધવાર, ગુરુવાર, શુક્રવાર, શનિવાર}

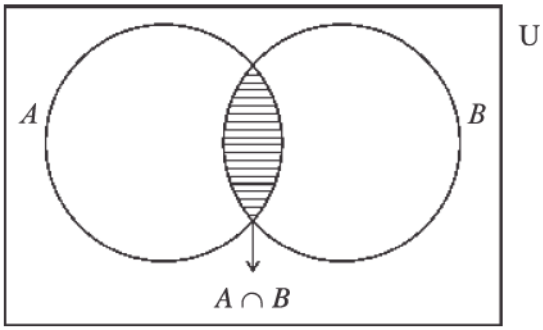
ધારો કે આ જહાજ Y બંદર પર સોમવારે પહોંચે તેને ઘટના A વડે દર્શાવીએ તો સોમવાર સિવાયના દિવસો ઘટના A' નાં પરિણામોનો ગણ કહેવાય.

A = {સોમવાર}

A' = $U - A$ = {રવિવાર, મંગળવાર, બુધવાર, ગુરુવાર, શુક્રવાર, શનિવાર}



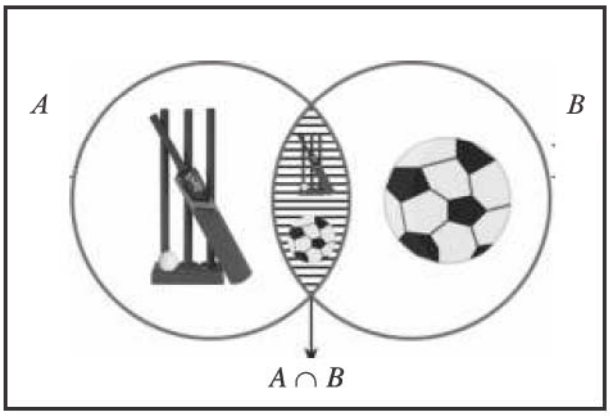
(5) છેદઘટના : ધારો કે U એ સાન્ત નિદર્શ અવકાશ છે અને A તથા B તેની કોઈ બે ઘટનાઓ છે. ઘટના A અને ઘટના B બંને સાથે બને તે ઘટનાને ઘટના A અને ઘટના B ની છેદઘટના (Intersection of two events A and B) કહે છે. તેને સંકેતમાં $A \cap B$ વડે દર્શાવાય છે.



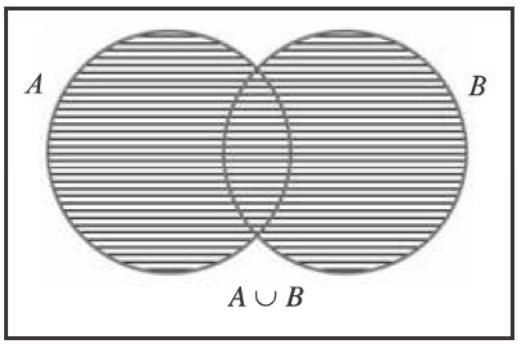
$A \cap B$ = ઘટનાઓ A અને B ની છેદઘટના

= ઘટનાઓ A અને B બંને સાથે બને

દા.ત., એક શાળાના વર્ગમાં અભ્યાસ કરતાં વિદ્યાર્થીઓમાંથી કેટલાક વિદ્યાર્થીઓ તે શાળાની ક્રિકેટ ટીમના સભ્ય છે અને કેટલાક વિદ્યાર્થીઓ શાળાની ફૂટબૉલ ટીમના સભ્ય છે. વિદ્યાર્થી ક્રિકેટ ટીમનો સભ્ય હોય તે ઘટનાને ઘટના A અને વિદ્યાર્થી ફૂટબૉલ ટીમનો સભ્ય હોય તે ઘટનાને ઘટના B કહીએ. હવે જો આ વર્ગના કોઈ એક વિદ્યાર્થીની યાદચ્છિક રીતે પસંદગી કરવામાં આવે, તો તે વિદ્યાર્થી શાળાની ક્રિકેટ અને ફૂટબૉલ બંને ટીમનો સભ્ય હોય તે ઘટનાને ઘટના A અને ઘટના B ની છેદઘટના $A \cap B$ કહે છે.



(6) યોગઘટના : ધારો કે U એ સાન્ત નિદર્શ અવકાશ છે અને A તથા B તેની કોઈ બે ઘટનાઓ છે. ઘટના A બને અથવા ઘટના B બને અથવા ઘટનાઓ A અને B બંને સાથે બને તે ઘટનાને ઘટના A અને ઘટના B ની યોગઘટના (Union of two events A and B) કહે છે. તેને સંકેતમાં $A \cup B$ વડે દર્શાવાય છે.

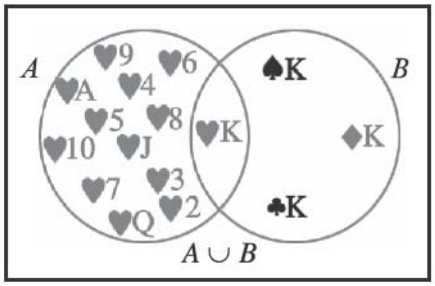


$A \cup B$ = ઘટનાઓ A અને B ની યોગઘટના

= ઘટના A બને અથવા ઘટના B બને અથવા ઘટનાઓ A અને B બંને સાથે બને

= ઘટનાઓ A અને B પૈકી ઓછામાં ઓછી એક ઘટના બને

દા.ત., 52 પત્તાંના ઢગમાંથી યાદચ્છિક રીતે ખેંચેલ એક પત્તું લાલ (ઘટના A કહો) અથવા રાજા (ઘટના B કહો) હોવાની ઘટના $A \cup B$ નીચે મુજબ બને :



$$A = \{H_A, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6, H_7, H_8, H_9, H_{10}, H_J, H_Q, H_K\}$$

$$B = \{S_K, D_K, C_K, H_K\}$$

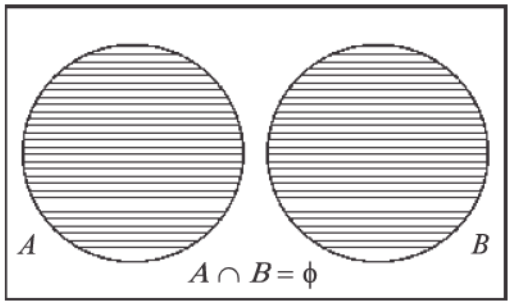
$$A \cup B = \{H_A, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6, H_7, H_8, H_9, H_{10}, H_J, H_Q, H_K, S_K, D_K, C_K\}$$

એટલે કે આ 16 પત્તાં પૈકીનું કોઈપણ પત્તું પસંદ થાય તો ઘટના $A \cup B$ બને છે તેમ કહેવાય.

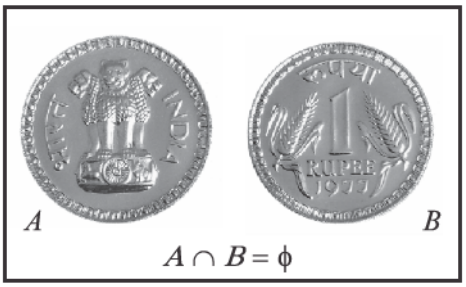
પત્તાંના પ્રકાર અને જાતને અંગ્રેજીમાં નીચે મુજબ દર્શાવાય છે :

કાળી *(S)* - Spade	ચરકટ *(D)* - Diamond	ફલ્લી *(C)* - Club	લાલ *(H)* - Heart
એક્કો *(A)* - Ace	રાજા *(K)* - King	રાણી *(Q)* - Queen	ગુલામ *(J)* - Jack

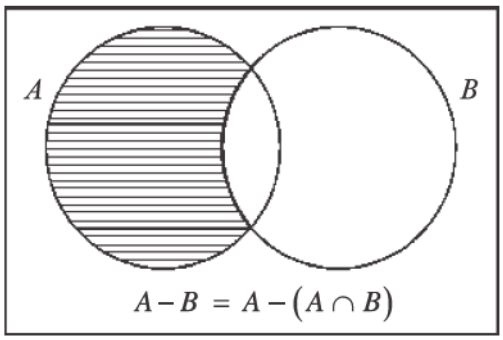
(7) પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ : ધારો કે U એ સાન્ત નિદર્શ અવકાશ છે અને A તથા B તેની કોઈ બે ઘટનાઓ છે. ઘટના A અને ઘટના B બંને એકસાથે બની જ ન શકે એટલે કે $A \cap B = \phi$ થાય અથવા બીજી રીતે કહીએ તો ઘટના A બને તો ઘટના B ન બને અને ઘટના B બને તો ઘટના A ન બને, ત્યારે ઘટનાઓ A અને B ને પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ (Mutually Exclusive Events) કહેવાય.



દા.ત., એક સમતોલ સિક્કો ઉછાળો. સિક્કા પર મળતું પરિણામ H હોય તેને ઘટના A વડે અને સિક્કા પર મળતું પરિણામ T હોય તેને ઘટના B વડે દર્શાવો. અહીં $A = \{H\}$ અને $B = \{T\}$ થાય. સ્પષ્ટ છે કે $A \cap B = \phi$ થશે. કારણ કે એક સમતોલ સિક્કો ઉછાળતા તેના પર H અને T બંને એક સાથે ઉદ્ભવી શકે નહિ. એટલે કે સમતોલ સિક્કો ઉછાળવાના યાદચ્છિક પ્રયોગમાં કોઈ પ્રયત્ને H મળે તો તે જ પ્રયત્નમાં પરિણામ T મળી શકે નહિ અને તેનાથી ઊલટું કોઈ પ્રયત્ને T મળે તો તે જ પ્રયત્નમાં પરિણામ H મળી શકે નહિ. આમ બંને ઘટના સાથે બની શકતી નથી.



(8) તફાવત ઘટના : ધારો કે U એ સાન્ત નિદર્શ અવકાશ છે અને A તથા B તેની કોઈ બે ઘટનાઓ છે. ઘટના A બને પરંતુ ઘટના B ન બને તેવા ઘટકો કે પરિણામોના ગણને ઘટના A અને ઘટના B ની તફાવત ઘટના (Difference event of A and B) કહે છે. તેને સંકેતમાં $A - B$ વડે દર્શાવાય છે. અહીં બાજુની વેન આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે,



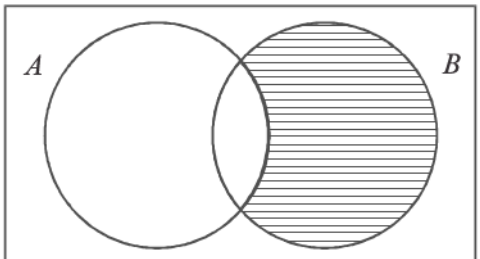
$$A - B = A \cap B' = A - (A \cap B) = (A \cup B) - B$$

$A - B$ = ઘટનાઓ A અને B ની તફાવત ઘટના

= ઘટના A બને પરંતુ ઘટના B ન બને

= ઘટનાઓ A અને B પૈકી ફક્ત ઘટના A જ બને

તે જ પ્રમાણે, સાન્ત નિદર્શ અવકાશ Uની કોઈ બે ઘટનાઓ A અને B માટે ઘટના B બને પરંતુ ઘટના A ન બને તેવા ઘટકો કે પરિણામોના ગણને ઘટના B અને ઘટના Aની તફાવત ઘટના કહે છે. તેને સંકેતમાં $B-A$ વડે દર્શાવાય છે. અહીં બાજુની વેન આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે,



$B-A = B-(A\cap B)$

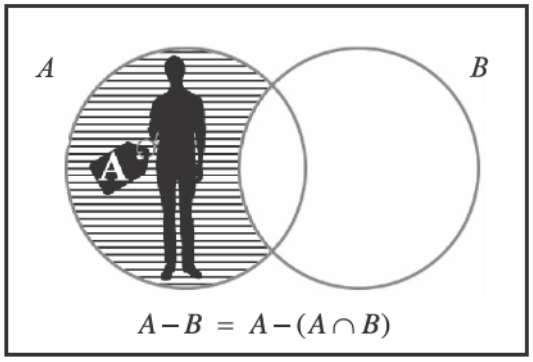
$$B-A = A'\cap B = B-(A\cap B) = (A\cup B)-A$$

$B-A$ = ઘટનાઓ B અને Aની તફાવત ઘટના

= ઘટના B બને પરંતુ ઘટના A ન બને

= ઘટનાઓ A અને B પૈકી ફક્ત ઘટના B જ બને

દા.ત., એક ઑફિસમાં નોકરી કરતાં જુદા-જુદા કર્મચારીઓ પૈકી બે કર્મચારીઓ A અને B એકબીજાના ખાસ મિત્રો છે. કર્મચારી A ઑફિસ આવે તેને ઘટના A અને કર્મચારી B ઑફિસ આવે તેને ઘટના B કહો. હવે જો કોઈ ચોક્કસ દિવસે એમ બોલવામાં આવે કે, 'આજે બે કર્મચારીઓ A અને B પૈકી ફક્ત કર્મચારી A જ ઑફિસ આવેલ છે.' તો તેનો અર્થ એમ સ્પષ્ટ છે કે તે દિવસે ઑફિસમાં બે કર્મચારીઓ A અને B પૈકી કર્મચારી A આવેલ છે પરંતુ કર્મચારી B આવેલ નથી. એટલે કે તેને ઘટના A અને ઘટના Bની તફાવત ઘટના $A-B$ કહે છે. અહીં,

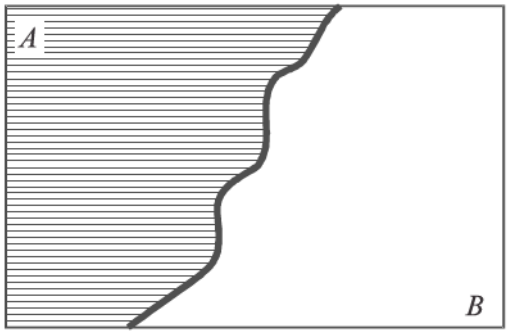


$A-B = A-(A\cap B)$

$A-B$ = કર્મચારીઓ A અને B પૈકી ફક્ત કર્મચારી A જ ઑફિસ આવેલ છે

$B-A$ = કર્મચારીઓ B અને A પૈકી ફક્ત કર્મચારી B જ ઑફિસ આવેલ છે

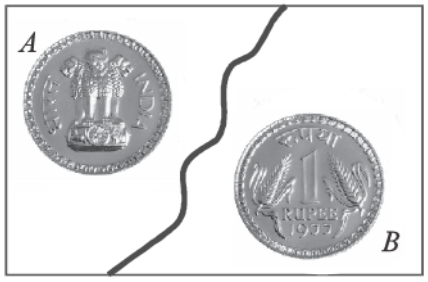
(9) નિઃશેષ ઘટનાઓ : જો યાદચ્છિક પ્રયોગની ઘટનાઓનાં શક્ય પરિણામોનો સમૂહ નિદર્શ અવકાશ થાય તો તે ઘટનાઓને નિઃશેષ ઘટનાઓ (Exhaustive Events) કહેવાય. ધારો કે U એ સાન્ત નિદર્શ અવકાશ છે અને A તથા B તેની કોઈ બે ઘટનાઓ છે. આ બે ઘટનાઓ A અને B નો યોગગણ એ નિદર્શ અવકાશ બને એટલે કે $A\cup B = U$ થાય, તો ઘટનાઓ A અને B ને નિઃશેષ ઘટનાઓ કહેવાય.



દા.ત., એક સમતોલ સિક્કો ઉછાળતાં તેના પર પરિણામ H મળે તેને ઘટના A કહો અને પરિણામ T મળે તેને ઘટના B કહો. અહીં સ્પષ્ટ છે કે, $A = \{H\}$, $B = \{T\}$ અને

$A\cup B = \{H, T\} = U$

$\therefore$ A અને B નિઃશેષ ઘટનાઓ છે.



(10) પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ઘટનાઓ : ધારો કે U એ સાન્ત નિદર્શ અવકાશ છે અને A તથા B તેની કોઈ બે ઘટનાઓ છે. આ બે ઘટનાઓ માટે $A \cap B = \phi$ અને $A \cup B = U$ થાય તો A અને B ને પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ઘટનાઓ કહેવાય. અત્રે એ નોંધવું જરૂરી છે કે, બધી પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ નિઃશેષ ઘટનાઓ હોય તે જરૂરી નથી, તે જ પ્રમાણે બધી નિઃશેષ ઘટનાઓ પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ હોય તે જરૂરી નથી.

દા.ત. એક સમતોલ પાસાને ઉછાળવાના પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ નિદર્શ અવકાશ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ માટે ઘટના A = પાસા પર મળતો અંક અયુગ્મ હોય $= \{1, 3, 5\}$ અને ઘટના B = પાસા પર મળતો અંક યુગ્મ હોય $= \{2, 4, 6\}$ હોય તો અહીં સ્પષ્ટ છે કે $A \cap B = \phi$ અને $A \cup B = U$ થાય. તેથી ઘટનાઓ A અને B પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ કહેવાશે.

(11) પ્રાથમિક ઘટનાઓ : યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશ Uના એક ઘટકીય ઉપગણોથી બનતી તમામ ઘટનાઓને પ્રાથમિક ઘટનાઓ (Elementary Events) કહે છે. પ્રાથમિક ઘટનાઓ પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ હોય છે.

દા.ત., એક સમતોલ સિક્કો ઉછાળવાના પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશ $U = \{H, T\}$માં એક ઘટકીય ઘટનાઓ $A = \{H\}$ અને $B = \{T\}$ એ પ્રાથમિક ઘટનાઓ છે. અહીં $A \cap B = \phi$ અને $A \cup B = U$ હોવાથી એમ કહી શકાય કે પ્રાથમિક ઘટનાઓ પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ હોય છે.

ઉદાહરણ 6 : એક ટોપલીમાં 3 પીળાં અને 2 ગુલાબી ફૂલ છે. આ ટોપલીમાંથી યાદચ્છિક રીતે એક ફૂલ પસંદ કરવામાં આવે છે. જો પસંદ થયેલ ફૂલ પીળું હોય તેને ઘટના A અને ગુલાબી હોય તેને ઘટના B વડે દર્શાવીએ, તો નીચેની ઘટના દર્શાવતા ગણ મેળવો અને પૂછેલ પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(1) U (2) A (3) B (4) A' (5) B' (6) $A \cap B$ (7) $A \cup B$ (8) $A \cap B'$ (9) $A' \cap B$

(10) આ યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશની પ્રાથમિક ઘટનાઓ જણાવો.

(11) ઘટનાઓ A અને B પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ કહેવાશે ? કારણ આપો.

(12) ઘટનાઓ A અને B નિઃશેષ ઘટનાઓ કહેવાશે ? કારણ આપો.

આપણે ટોપલીનાં 3 પીળાં ફૂલને Y_1, Y_2, Y_3 અને 2 ગુલાબી ફૂલને P_1, P_2 વડે દર્શાવીશું. માંગેલી ઘટનાઓ દર્શાવતાં ગણ નીચે મુજબ થશે :

(1) $U = \{Y_1, Y_2, Y_3, P_1, P_2\}$

(2) $A = \{Y_1, Y_2, Y_3\}$

(3) $B = \{P_1, P_2\}$

(4) $A' = U - A = \{Y_1, Y_2, Y_3, P_1, P_2\} - \{Y_1, Y_2, Y_3\}$

$= \{P_1, P_2\}$

(5) $B' = U - B = \{Y_1, Y_2, Y_3, P_1, P_2\} - \{P_1, P_2\}$

$= \{Y_1, Y_2, Y_3\}$

(6) $A \cap B = \{Y_1, Y_2, Y_3\} \cap \{P_1, P_2\}$

$= \phi$

(7) $A \cup B = \{Y_1, Y_2, Y_3\} \cup \{P_1, P_2\}$

$= \{Y_1, Y_2, Y_3, P_1, P_2\}$

(8) $A \cap B' = \{Y_1, Y_2, Y_3\} \cap \{Y_1, Y_2, Y_3\}$

$= \{Y_1, Y_2, Y_3\}$

અથવા

$A \cap B' = A - (A \cap B)$

$= \{Y_1, Y_2, Y_3\} - \phi$

$= \{Y_1, Y_2, Y_3\}$

(9) $A' \cap B = \{P_1, P_2\} \cap \{P_1, P_2\}$

$= \{P_1, P_2\}$

અથવા

$A' \cap B = B - (A \cap B)$

$= \{P_1, P_2\} - \phi$

$= \{P_1, P_2\}$

(10) પ્રાથમિક ઘટનાઓ એટલે યાદચ્છિક પ્રયોગ Uના એક ઘટકીય ઉપગણ. જુદી-જુદી પ્રાથમિક ઘટનાઓને $E_1, E_2, E_3, \ldots$ એ મુજબ દર્શાવીએ તો,

$E_1 = \{Y_1\}, \; E_2 = \{Y_2\}, \; E_3 = \{Y_3\}, \; E_4 = \{P_1\}, \; E_5 = \{P_2\}$

(11) ઘટનાઓ A અને B ને પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ કહી શકાય કારણ કે પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓની વ્યાખ્યા મુજબ $A \cap B = \phi$ હોય, તો ઘટનાઓ A અને B ને પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ કહી શકાય. પ્રશ્ન નં. 6ના જવાબ પરથી જોઈ શકાય છે કે $A \cap B = \phi$ છે.

(12) ઘટનાઓ A અને B ને નિઃશેષ ઘટનાઓ કહી શકાય કારણ કે નિઃશેષ ઘટનાઓની વ્યાખ્યા મુજબ $A \cup B = U$ હોય, તો ઘટનાઓ A અને B ને નિઃશેષ ઘટનાઓ કહી શકાય. પ્રશ્ન નં. 7ના જવાબ પરથી જોઈ શકાય છે કે $A \cup B = U$ છે.

ઉદાહરણ 7 : એક યાદચ્છિક પ્રયોગની ઘટનાઓ A અને B નીચે મુજબ છે :

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{-1, 0, 1\}$$

જો નિદર્શ અવકાશ $U = A \cup B$ હોય તો નીચેની ઘટનાઓ દર્શાવતા ગણ મેળવો.

(1) B' (2) $A' \cap B$ (3) $A - B$

અહીં $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{-1, 0, 1\}$

$U = A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{-1, 0, 1\}$

$= \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

(1) $B' = U - B$

$= \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\} - \{-1, 0, 1\}$

$= \{2, 3, 4\}$

(2) $A' \cap B = B - (A \cap B)$

આ માટે પહેલાં $A \cap B$ મેળવીશું,

$A \cap B = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{-1, 0, 1\}$
$= \{1\}$

હવે, $A' \cap B = B - (A \cap B)$

$= \{-1, 0, 1\} - \{1\}$

$= \{-1, 0\}$

વૈકલ્પિક રીત :

$A' = U - A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\} - \{1, 2, 3, 4\} = \{-1, 0\}$

$\therefore A' \cap B = \{-1, 0\} \cap \{-1, 0, 1\} = \{-1, 0\}$

(3) $A - B = \{1, 2, 3, 4\} - \{-1, 0, 1\}$
$= \{2, 3, 4\}$

ઉદાહરણ 8 : પ્રથમ 50 પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓમાંથી એક સંખ્યા યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. નીચેની ઘટનાઓ દર્શાવતા ગણ મેળવો.

(1) પસંદ થયેલ સંખ્યા 5 અથવા 7ની ગુણક હોય

(2) પસંદ થયેલ સંખ્યા 5 અને 7 એમ બંનેની ગુણક હોય

(3) પસંદ થયેલ સંખ્યા 5ની ગુણક હોય પરંતુ 7ની ગુણક ન હોય

(4) પસંદ થયેલ સંખ્યા 5 અને 7 પૈકી ફક્ત 7ની ગુણક હોય

અહીં પ્રથમ 50 પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓમાંથી એક સંખ્યા પસંદ કરીએ, તો આ ઘટનાના શક્ય તમામ શક્ય પરિણામોનો સમૂહ એટલે કે નિદર્શ અવકાશ U નીચે મુજબ બને :

$U = \{1, 2, 3, ..., 50\}$

ઘટના A = પસંદ થયેલ સંખ્યા 5ની ગુણક હોય

$= \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50\}$

ઘટના B = પસંદ થયેલ સંખ્યા 7ની ગુણક હોય

$= \{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49\}$

હવે માંગેલી ઘટનાઓ નીચે મુજબ થશે :

(1) પસંદ થયેલ સંખ્યા 5 અથવા 7ની ગુણક હોય તો તે ઘટના = $A \cup B$

$\therefore A \cup B = \{5, 7, 10, 14, 15, 20, 21, 25, 28, 30, 35, 40, 42, 45, 49, 50\}$

(2) પસંદ થયેલ સંખ્યા 5 અને 7 એમ બંનેની ગુણક હોય તે ઘટના = $A \cap B$

$\therefore A \cap B = \{35\}$

(3) પસંદ થયેલ સંખ્યા 5ની ગુણક હોય પરંતુ 7ની ગુણક ન હોય તે ઘટના = $A \cap B'$

$$\therefore\ A \cap B' = A - (A \cap B)$$
$$= \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 40, 45, 50\}$$

(4) પસંદ થયેલ સંખ્યા 5 અને 7 પૈકી ફક્ત 7ની ગુણક હોય તે ઘટના = $A' \cap B$

$$\therefore\ A' \cap B = B - (A \cap B)$$
$$= \{7, 14, 21, 28, 42, 49\}$$

ઉદાહરણ 9 : એક યાદચ્છિક પ્રયોગની ઘટનાઓ A_1 અને A_2 નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત થયેલી છે. આ પરથી યોગઘટના $A_1 \cup A_2$ અને છેદઘટના $A_1 \cap A_2$ દર્શાવતાં ગણ મેળવો.

$A_1 = \{x \mid x = -1, 0, 1\}$, $\quad A_2 = \{x \mid x = 1, 2, 3\}$

અહીં $A_1 = \{-1, 0, 1\}$ અને $A_2 = \{1, 2, 3\}$ આપેલ છે.

યોગઘટના $A_1 \cup A_2 = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

છેદઘટના $A_1 \cap A_2 = \{1\}$

ઉદાહરણ 10 : એક ફેકટરીમાં જુદી જુદી લંબાઈના સ્ક્રૂનું ઉત્પાદન કરવામાં આવે છે. સ્ક્રૂની લંબાઈ (સેમી)ને x વડે દર્શાવવામાં આવે છે. પસંદ કરેલ સ્ક્રૂની લંબાઈ જાણવાના પ્રયોગમાં ઘટનાઓ A_1 અને A_2 નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત થયેલી છે. આ પરથી યોગઘટના $A_1 \cup A_2$ અને છેદઘટના $A_1 \cap A_2$ દર્શાવતાં ગણ મેળવો.

$A_1 = \{x \mid 0 < x < 1\}$, $\quad A_2 = \{x \mid \frac{1}{2} \le x < 2\}$

અહીં $A_1 = \{x \mid 0 < x < 1\}$ અને $A_2 = \{x \mid \frac{1}{2} \le x < 2\}$ આપેલ છે.

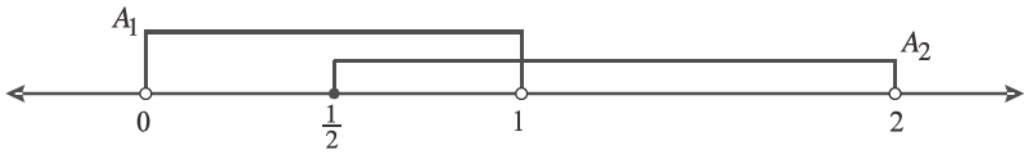
યોગઘટના $A_1 \cup A_2 = \{x \mid 0 < x < 2\}$

$= (0, 2)$ (અંતરાલ સ્વરૂપ)

છેદઘટના $A_1 \cap A_2 = \{x \mid \frac{1}{2} \le x < 1\}$

$= \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ (અંતરાલ સ્વરૂપ)

$A_1 \cup A_2$ અને $A_1 \cap A_2$ ઘટનાઓની વધુ સરળ સમજૂતી માટે નીચે આપેલી આકૃતિ ધ્યાનથી જુઓ.



સ્વાધ્યાય 1.1

1. નીચે જણાવેલ યાદચ્છિક પ્રયોગો માટે નિદર્શ અવકાશ લખો :

(1) એક સમતોલ સિક્કાને ત્રણ વખત ઉછાળવામાં આવે.

(2) છ બાજુવાળો એક સમતોલ પાસો અને એક સમતોલ સિક્કો એકસાથે ઉછાળવામાં આવે.

(3) a, b, c, d, e એમ પાંચ વ્યક્તિઓમાંથી બે વ્યક્તિઓ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે.

2. 100 ગુણની એક પરીક્ષામાં બેસનાર વિદ્યાર્થીને મળતા ગુણ (પૂર્ણાંક)નો નિદર્શ અવકાશ લખો અને તેનાં કુલ નિદર્શ બિંદુઓની સંખ્યા જણાવો.

3. ચાર વ્યક્તિઓમાંથી યાદચ્છિક રીતે એક મંત્રી અને એક સહમંત્રી પસંદ કરવાનો નિદર્શ અવકાશ લખો.

4. એક યાદચ્છિક પ્રયોગમાં જ્યાં સુધી છાપ મળે ત્યાં સુધી એક સમતોલ સિક્કો ઉછાળવામાં આવે છે. જે પ્રયત્ને પહેલી વખત છાપ મળે તે પ્રયત્ને પ્રયોગ પૂરો કરી દેવામાં આવે છે. આ પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ લખો અને તે સાન્ત છે કે અનંત તે જણાવો.

5. પ્રથમ પાંચ પ્રાકૃતિક સંખ્યામાંથી યાદચ્છિક રીતે ત્રણ સંખ્યા પસંદ કરવાના પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ લખો.

6. એક સંખ્યા પસંદ કરવાના યાદચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ $U = \{1, 2, 3, ..., 20\}$ છે. નીચેની ઘટનાઓ દર્શાવતાં ગણ લખો :

(1) પસંદ કરવામાં આવેલ સંખ્યા અયુગ્મ સંખ્યા હોય

(2) પસંદ કરવામાં આવેલ સંખ્યા 3 વડે વિભાજ્ય હોય

(3) પસંદ કરવામાં આવેલ સંખ્યા 2 અથવા 3 વડે વિભાજ્ય હોય

7. બે બાળકો ધરાવતાં કુટુંબોમાંથી યાદચ્છિક રીતે એક કુટુંબ પસંદ કરવામાં આવે છે. આ કુટુંબનાં બાળકોની જાતિ (નર કે નારી)ની નોંધ કરવામાં આવે છે. આ પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ દર્શાવો અને નીચેની ઘટનાઓ દર્શાવતાં ગણ લખો :

(1) ઘટના A_1 = એક બાળક નારીજાતિ (છોકરી)નું હોય.

(2) ઘટના A_2 = ઓછામાં ઓછું એક બાળક નારીજાતિ (છોકરી)નું હોય.

8. છ બાજુવાળા બે સમતોલ પાસા એકસાથે ઉછાળવામાં આવે છે. આ યાદચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ લખો અને તે પરથી નીચેની ઘટનાઓ દર્શાવતા ગણ લખો :

(1) ઘટના A_1 = પાસા પરના અંકનો સરવાળો 7 થાય

(2) ઘટના A_2 = પાસા પરના અંકનો સરવાળો 4 થી ઓછો થાય

(3) ઘટના A_3 = પાસા પરના અંકનો સરવાળો 3 વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય

(4) ઘટના A_4 = પાસા પરના અંકનો સરવાળો 12થી વધુ થાય

9. પ્રથમ પાંચ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓમાંથી બે સંખ્યાઓ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. જો પસંદ થયેલ બે સંખ્યાઓનો સરવાળો ઓછામાં ઓછો 6 હોય તેને ઘટના A અને પસંદ થયેલ બે સંખ્યાઓનો સરવાળો યુગ્મ હોય તેને ઘટના B કહેવામાં આવે, તો નીચેની ઘટનાઓ દર્શાવતા ગણ લખો અને પૂછેલ પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(1) U (2) A (3) B (4) $A \cup B$ (5) $A \cap B$ (6) A' (7) $A - B$ (8) $A' \cap B$

(9) શું ઘટનાઓ A અને B પરસ્પર નિવારક કહેવાય ? કારણ આપો.

(10) આ પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશનાં નિદર્શ બિંદુઓની સંખ્યા લખો.

10. એક ઑફિસમાં ત્રણ સ્ત્રી કર્મચારીઓ અને બે પુરુષ કર્મચારીઓ નોકરી કરે છે. ઑફિસના કર્મચારીઓમાંથી એક કર્મચારીને યાદચ્છિક રીતે તાલીમ આપવા માટે પસંદ કરવામાં આવે છે. જો તાલીમ માટે પસંદગી પામેલ કર્મચારી સ્ત્રી હોય તે ઘટનાને A અને તે કર્મચારી પુરુષ હોય તે ઘટનાને B વડે દર્શાવીએ, તો નીચે જણાવેલ ઘટનાઓ દર્શાવતા ગણ મેળવો અને પૂછેલ પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(1) U (2) A (3) B (4) $A \cup B$ (5) $A \cap B$ (6) $A' \cap B$

(7) ઘટનાઓ A અને B પરસ્પર નિવારક કહેવાશે ? કારણ આપો.

(8) ઘટનાઓ A અને B નિઃશેષ કહેવાશે ? કારણ આપો.

11. 52 પત્તાંની ઢગમાંથી એક પત્તું યાદચ્છિક રીતે ખેંચવામાં આવે છે. જો ખેંચવામાં આવેલું પત્તું કાળીનું હોય તે ઘટનાને A અને પત્તું એક્કાથી દસ્સા સુધીની સંખ્યા દર્શાવતું હોય (ચહેરાવાળું ન હોય) તે ઘટનાને B કહીએ, તો નીચેની ઘટનાઓ દર્શાવતાં ગણ લખો.

(1) U (2) A (3) B (4) $A \cup B$ (5) $A \cap B$ (6) B'

12. એક યાદચ્છિક પ્રયોગની ઘટનાઓ A_1 અને A_2 નીચે મુજબ છે. આ પરથી યોગઘટના $A_1 \cup A_2$ અને છેદઘટના $A_1 \cap A_2$ દર્શાવતાં ગણ મેળવો.

$A_1 = \{x \mid 0 < x < 5\}$, $A_2 = \{x \mid -1 < x < 3, x$ પૂર્ણાંક સંખ્યા$\}$

13. એક યાદચ્છિક પ્રયોગની ઘટનાઓ A_1 અને A_2 નીચે મુજબ છે. આ પરથી યોગઘટના $A_1 \cup A_2$ અને છેદઘટના $A_1 \cap A_2$ દર્શાવતા ગણ મેળવો.

$A_1 = \{x \mid 2 \le x < 6,\ x \in N\}$, $A_2 = \{x \mid 3 < x < 9,\ x \in N\}$

14. એક યાદચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ U અને તેની કોઈ ઘટના A નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત છે. ઘટના Aની પૂરક ઘટના A' મેળવો.

$U = \{x \mid x = 0, 1, 2, \ldots, 10\}$, $A = \{x \mid x = 2, 4, 6\}$

15. એક યાદચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ U અને તેની કોઈ ઘટના A નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત છે. ઘટના Aની પૂરક ઘટના A' મેળવો.

$U = \{x \mid 0 < x < 1\}$, $A = \{x \mid \frac{1}{2} \le x < 1\}$

*

યાદચ્છિક પ્રયોગ, નિદર્શ અવકાશ અને વિવિધ ઘટનાઓનો પરિચય મેળવ્યા બાદ હવે આપણે સંભાવનાનો અભ્યાસ કરીશું. આ માટે પહેલાં આપણે સંભાવનાની વ્યાખ્યા જોઈએ.

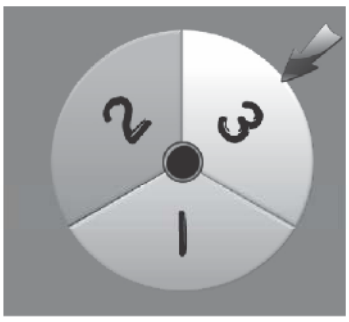
1.4 સંભાવનાની ગાણિતિક વ્યાખ્યા

સંભાવનાની ગાણિતિક વ્યાખ્યા સમજવા માટે પ્રથમ આપણે બે મહત્ત્વના પદ સમસંભાવી ઘટનાઓ અને સાનુકૂળ પરિણામોની સમજૂતી મેળવીએ.

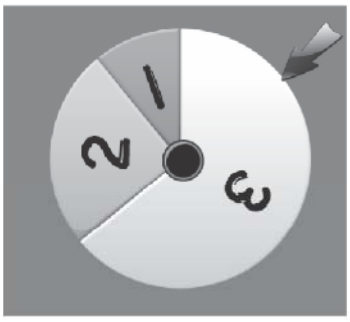
સમસંભાવી ઘટનાઓ : કોઈ યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશની બે કે તેથી વધુ ઘટનાઓ પૈકી એક ઘટના બનવાની શક્યતા બીજી કોઈપણ ઘટના બનવાની શક્યતા કરતાં વધુ કે ઓછી હોવાનું કોઈ દેખીતું કારણ ન હોય તેવી ઘટનાઓને સમસંભાવી ઘટનાઓ (Equally Likely Events) કહે છે.

દા.ત., કોઈ એકમનું ઉત્પાદન કરતાં ઉત્પાદકની ફેક્ટરીમાં એકમનાં ઉત્પાદન માટે બે મશીનો M_1 અને M_2 છે. દિવસ દરમિયાન બંને મશીનો પર સરખી જ સંખ્યામાં એકમોનું ઉત્પાદન થાય છે. દિવસના અંતે બંને મશીનો પર ઉત્પાદિત થયેલ એકમોને બરાબર ભેળવી ઉત્પાદિત એકમોનો સમૂહ (lot) બનાવવામાં આવે છે. આવા સમૂહમાંથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ કોઈ એક એકમ મશીન M_1 પર બન્યો હોય કે મશીન M_2 પર બન્યો હોય તે બંને પ્રાથમિક ઘટનાઓ સમસંભાવી ઘટનાઓ છે.

તે જ પ્રમાણે નીચેનાં ચિત્રોમાં આપેલ ચક્રો A અને B ને હાથથી ગોળ-ગોળ ફેરવી તે અમુક સમય પછી સ્થિર થાય ત્યારે તેમના પર લખેલી સંખ્યાઓ 1, 2, 3 પૈકી કઈ સંખ્યા ચક્ર સામે મૂકેલ તીરની સામે આવે તે નોંધવામાં આવે છે. ચિત્ર પરથી સ્પષ્ટ છે કે, ચક્ર A પર લખેલ ત્રણેય સંખ્યાઓ એ તીરની સામે સ્થિર થાય તે સમસંભાવી ઘટનાઓ છે. પરંતુ ચક્ર B માં સંખ્યાઓ 1, 2 કે 3 તીર સામે સ્થિર થાય તે સમસંભાવી ઘટનાઓ નથી.



ચક્ર A



ચક્ર B

સાનુકૂળ પરિણામો : કોઈ યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશનાં પ્રાથમિક પરિણામો પૈકી જે પરિણામો અમુક ઘટના A બની છે તેનો નિર્દેશ કરતાં હોય તેવાં પરિણામોને ઘટના A બને તેના સાનુકૂળ પરિણામો (Favourable Outcomes) કહે છે. દા.ત. 52 પત્તાંના ઢગમાંથી એક પત્તુ યાદચ્છિક રીતે ખેંચવામાં આવે છે. ખેંચેલું પત્તું ચહેરાવાળું હોય તેને ઘટના A કહીએ તો ઘટના A ને સાનુકૂળ પરિણામોનો સમૂહ નીચે મુજબ થાય :

$$A = \left\{S_K, D_K, C_K, H_K, S_Q, D_Q, C_Q, H_Q, S_J, D_J, C_J, H_J\right\}$$

એટલે કે ઘટના A બનવાને સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા 12 થાય.

સંભાવનાની ગાણિતિક વ્યાખ્યા : ધારો કે કોઈ યાદચ્છિક પ્રયોગના સાન્ત નિદર્શ અવકાશ U ના પરસ્પર નિવારક, નિઃશેષ અને સમસંભાવી પરિણામોની કુલ સંખ્યા n છે. તે પૈકી m પરિણામો કોઈ ઘટના A બનવાને સાનુકૂળ હોય, તો **ઘટના A ની સંભાવના** $\frac{m}{n}$ થાય. ઘટના A બનવાની સંભાવનાને સંકેતમાં $P(A)$ વડે દર્શાવાય છે.

$P(A)$ = ઘટના A બનવાની સંભાવના

$$= \frac{\text{ઘટના } A \text{ ને સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા}}{\text{નિદર્શ અવકાશના પરસ્પર નિવારક, નિઃશેષ અને સમસંભાવી પરિણામોની કુલ સંખ્યા}}$$

$$= \frac{m}{n}$$

અહીં $m(\geq 0)$ અને $n(>0)$ બંને પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ છે અને $m \leq n$ છે. અહીં n શૂન્ય કે અનંત નથી તે નોંધવું જોઈએ. સંભાવનાની ગાણિતિક વ્યાખ્યા (Mathematical Definition)ને પ્રશિષ્ટ વ્યાખ્યા (Classical Definition) તરીકે પણ ઓળખવામાં આવે છે.

ધારણાઓ : સંભાવનાની ગાણિતિક વ્યાખ્યાની ધારણાઓ નીચે મુજબ છે :

(1) યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશનાં પરિણામોની સંખ્યા સાન્ત છે.

(2) યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશનાં કુલ પરિણામોની સંખ્યા જ્ઞાત છે.

(3) યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશનાં પરિણામો સમસંભાવી છે.

નીચે દર્શાવેલ સંભાવના સંબંધિત કેટલાંક અગત્યનાં પરિણામો આપણે સાબિતી વગર સ્વીકારી લઈશું :

(1) નિદર્શ અવકાશ Uની કોઈપણ ઘટના Aની સંભાવના $P(A)$ની કિંમતનો વિસ્તાર 0 થી 1 સુધીનો છે એટલે કે $0 \leq P(A) \leq 1$

(2) અશક્ય ઘટનાની સંભાવના શૂન્ય હોય છે. અગાઉ આપણે અશક્ય ઘટનાને ϕ વડે દર્શાવેલ છે. તેથી $P(\phi) = 0$

(3) ચોક્કસ ઘટનાની સંભાવના હંમેશા 1 હોય છે. અગાઉ આપણે ચોક્કસ ઘટનાને U વડે દર્શાવેલ છે. તેથી $P(U) = 1$

(4) નિદર્શ અવકાશ Uની કોઈપણ ઘટના Aની પૂરક ઘટના A' ની સંભાવના $P(A') = 1 - P(A)$ થાય.

(5) યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશની બે ઘટનાઓ A અને B માટે $A \subset B$ હોય, તો

- $P(A) \leq P(B)$
- $P(B - A) = P(B) - P(A)$

(6) યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશની બે ઘટનાઓ A અને B માટે,

- $P(A \cap B) \leq P(A)$ $\quad [\because A \cap B \subset A]$
- $P(A \cap B) \leq P(B)$ $\quad [\because A \cap B \subset B]$
- $P(A) \leq P(A \cup B)$ $\quad [\because A \subset A \cup B]$
- $P(B) \leq P(A \cup B)$ $\quad [\because B \subset A \cup B]$
- $P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B)$
- $P(A' \cup B') = P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B)$
- $P(A - B) = P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$
- $P(B - A) = P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$
- $0 \leq P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

હવે આપણે સંભાવનાની ગાણિતિક વ્યાખ્યાની મદદથી જુદી જુદી ઘટનાઓની સંભાવના મેળવવાનાં ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 11 : બે સમતોલ સિક્કા ઉછાળવામાં આવે તો, (1) એક છાપ અને એક કાંટો મળે અને (2) ઓછામાં ઓછી એક છાપ મળે તેની સંભાવના શોધો.

બે સમતોલ સિક્કા ઉછાળવાના યાદચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ નીચે મુજબ મળે :

$U = \{HH, HT, TH, TT\}$

$\therefore$ પરસ્પર નિવારક, નિઃશેષ અને સમસંભાવી પરિણામોની કુલ સંખ્યા $n = 4$.

(1) એક છાપ H અને કાંટો T મળે તે ઘટનાને A કહીએ તો આવી ઘટના A ને સાનુકૂળ પરિણામો HT, TH એમ બે થાય. એટલે કે $m = 2$ થાય.

સંભાવનાની ગાણિતિક વ્યાખ્યા મુજબ

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

$$= \frac{2}{4}$$

$$= \frac{1}{2}$$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{1}{2}$

(2) ઓછામાં ઓછી એક છાપ મળે તે ઘટનાને B કહીએ તો આવી ઘટના B ને સાનુકૂળ પરિણામો HT, TH, HH છે. તેથી ઘટના B ને સાનુકૂળ પરિણામો $m = 3$ થાય.

સંભાવનાની ગાણિતિક વ્યાખ્યા મુજબ

$$P(B) = \frac{m}{n}$$

$$= \frac{3}{4}$$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{3}{4}$

ઉદાહરણ 12 : 1 થી 6 અંક વડે અંકિત કરેલ બે સમતોલ પાસાને એકસાથે ઉછાળવામાં આવે છે. (1) બંને પાસા પરના અંકનો સરવાળો 7 થાય (2) બંને પાસા પરના અંકનો સરવાળો 10 થી મોટો હોય (3) બંને પાસા પરના અંકનો સરવાળો વધુમાં વધુ 4 હોય (4) બંને પાસા પર સરખા જ અંક મળે (5) બંને પાસા પર મળતા અંકનો સરવાળો 1 થાય (6) બંને પાસા પર મળતા અંકનો સરવાળો 12 કે તેથી ઓછો થાય તેની સંભાવના શોધો.

બે સમતોલ પાસાને એકસાથે ઉછાળવાનો નિદર્શ અવકાશ નીચે મુજબ થશે :

$U = \{(i, j) ; i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\therefore$ કુલ પરિણામોની સંખ્યા $n = 36$ થાય.

(1) બંને પાસા પરના અંકનો સરવાળો 7 થાય તેને ઘટના A_1 કહીએ, તો આવી ઘટનાને સાનુકૂળ પરિણામો $(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)$ એમ કુલ 6 થાય. એટલે કે ઘટના A_1 ને સાનુકૂળ પરિણામો $m = 6$ થાય. ઘટના A_1ની સંભાવના

$P(A_1) = \frac{m}{n}$

$= \frac{6}{36}$

$= \frac{1}{6}$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{1}{6}$

(2) બંને પાસા પરના અંકનો સરવાળો 10 થી મોટો હોય તેને ઘટના A_2 કહીએ, તો ઘટના A_2 ને સાનુકૂળ પરિણામો $(5, 6), (6, 5), (6, 6)$ થાય. તેથી ઘટના A_2 ને સાનુકૂળ પરિણામો $m = 3$ થાય. ઘટના A_2 ની સંભાવના

$P(A_2) = \frac{m}{n}$

$= \frac{3}{36}$

$= \frac{1}{12}$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{1}{12}$

(3) બંને પાસા પરના અંકનો સરવાળો વધુમાં વધુ 4 થાય તે ઘટનાને A_3 વડે દર્શાવીએ, તો ઘટના A_3 ને સાનુકૂળ પરિણામો $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)$ એમ કુલ 6 થાય. એટલે કે ઘટના A_3 ને સાનુકૂળ પરિણામો $m = 6$ થાય. ઘટના A_3 ની સંભાવના

$P(A_3) = \frac{m}{n}$

$= \frac{6}{36}$

$= \frac{1}{6}$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{1}{6}$

(4) ઘટના A_4 = બંને પાસા પર સરખા જ અંક મળે.

$\therefore$ ઘટના A_4 ને સાનુકૂળ પરિણામો $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$ એમ કુલ 6 થાય. એટલે કે ઘટના A_4 ને સાનુકૂળ પરિણામો $m = 6$ થાય. ઘટના A_4 ની સંભાવના

$P(A_4) = \frac{m}{n}$

$= \frac{6}{36}$

$= \frac{1}{6}$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{1}{6}$

(5) બંને પાસા પર મળતા અંકોનો સરવાળો 1 થાય તે ઘટનાને A_5 કહીએ. સ્પષ્ટ છે કે નિદર્શ અવકાશમાં ઘટના A_5 ને સાનુકૂળ પરિણામો એક પણ નથી. તેથી ઘટના A_5 ને સાનુકૂળ પરિણામો $m = 0$ થાય. ઘટના A_5 ની સંભાવના

$$P(A_5) = \frac{m}{n}$$

$$= \frac{0}{36}$$

$$= 0$$

માંગેલી સંભાવના = 0

(અશક્ય ઘટનાની સંભાવના હંમેશાં 0 હોય છે.)

(6) બંને પાસા પરના અંકનો સરવાળો 12 કે તેથી ઓછો થાય તે ઘટનાને A_6 કહીએ. સ્પષ્ટ છે કે નિદર્શ અવકાશમાં બધાં જ પરિણામો ઘટના A_6 ને સાનુકૂળ પરિણામો છે. તેથી ઘટના A_6 ને સાનુકૂળ પરિણામો $m = 36$ થાય. ઘટના A_6 ની સંભાવના

$$P(A_6) = \frac{m}{n}$$

$$= \frac{36}{36}$$

$$= 1$$

માંગેલી સંભાવના = 1

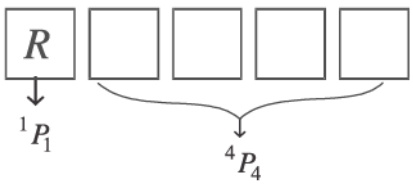
(ચોક્કસ ઘટનાની સંભાવના હંમેશાં 1 હોય છે.)

ઉદાહરણ 13 : *RUTVA* શબ્દના બધા જ અક્ષરોની મદદથી બનતી તમામ ગોઠવણીઓમાં *R* પ્રથમ સ્થાને આવે તેની સંભાવના શોધો.

અહીં *RUTVA* શબ્દમાં *R, U, T, V, A* એમ કુલ 5 અક્ષરો છે. આ પાંચ અક્ષરોનો ઉપયોગ કરી કુલ ${}^5P_5 = 5! = 120$ ગોઠવણીઓ થઈ શકે. આમ, કુલ પરિણામો $n = 120$ થશે.

ગોઠવણીમાં R પ્રથમ સ્થાન પર આવે તે ઘટના = A

ઘટના A ને સાનુકૂળ પરિણામો નીચે મુજબ મળે :



R ને પ્રથમ સ્થાન પર ${}^1P_1$ રીતે અને બાકીના ચાર અક્ષરો *U, T, V, A* ને બાકીનાં ચાર સ્થાનો પર ${}^4P_4$ રીતે ગોઠવી શકાય. ગણતરીના ગુણાકારના મૂળભૂત સિદ્ધાંત મુજબ R પ્રથમ સ્થાન પર આવે તેવી કુલ ${}^1P_1 \times {}^4P_4$ ગોઠવણીઓ થઈ શકે. તેથી ઘટના A ને સાનુકૂળ પરિણામો

$$m = {}^1P_1 \times {}^4P_4 = 1! \times 4! = 1 \times 24 = 24 \text{ થાય.}$$

ઘટના A ની સંભાવના $P(A) = \frac{m}{n}$

$$= \frac{24}{120}$$

$$= \frac{1}{5}$$

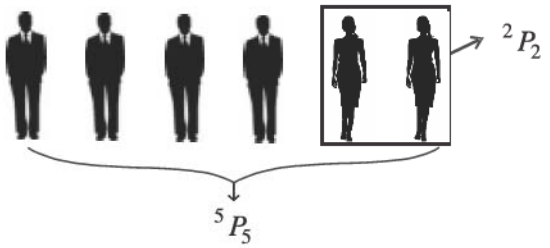
માંગેલી સંભાવના = $\frac{1}{5}$

ઉદાહરણ 14 : એક સરકારી વિભાગમાં નોકરી કરતાં ચાર પુરુષ કર્મચારીઓ અને બે સ્ત્રી કર્મચારીઓને વારાફરતી એક પછી એક તાલીમ માટે તાલીમ કેન્દ્રમાં મોકલવામાં આવે છે. બંને સ્ત્રી કર્મચારીઓ ક્રમશઃ તાલીમ માટે જાય તેની સંભાવના શોધો.

4 પુરુષો અને 2 સ્ત્રીઓ એમ કુલ 6 વ્યક્તિઓને વારાફરતી કુલ ${}^6P_6 = 6! = 720$ રીતે તાલીમ માટે તાલીમ કેન્દ્રમાં મોકલી શકાય. આમ કુલ પરિણામો $n = 720$ થાય.

બંને સ્ત્રીઓ ક્રમશઃ તાલીમ માટે વારાફરતી જાય તે ઘટના $= A$

ઘટના A ને સાનુકૂળ પરિણામો નીચે મુજબ મળે :



બંને સ્ત્રી કર્મચારીઓ ક્રમશઃ તાલીમ માટે વારાફરતી જતી હોવાથી તેમને એક જ વ્યક્તિ ગણતાં કુલ 5 વ્યક્તિઓને ${}^5P_5$ રીતે ગોઠવી શકાય અને આ પ્રત્યેક ગોઠવણીઓમાં બંને સ્ત્રી કર્મચારીઓને અંદરોઅંદર ${}^2P_2$ રીતે ગોઠવી શકાય.

આમ ઘટના Aને સાનુકૂળ પરિણામો $m = {}^5P_5 \times {}^2P_2$

$$= 5! \times 2!$$
$$= 120 \times 2$$
$$= 240$$

ઘટના Aની સંભાવના $P(A) = \frac{m}{n}$

$$= \frac{240}{720}$$

$$= \frac{1}{3}$$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{1}{3}$

ઉદાહરણ 15 : લીપ વર્ષમાં 53 ગુરુવાર હોવાની સંભાવના શોધો.

લીપ વર્ષમાં કુલ 366 દિવસો હોય જે પૈકી 52 પૂરા અઠવાડિયા ($52 \times 7 = 364$ દિવસો) અને 2 દિવસો વધારાના હોય. એક અઠવાડિયામાં દરેક વાર એક વખત આવે એટલે કે કુલ 52 અઠવાડિયામાં દરેક વાર 52 વખત આવે. હવે વધારાના 2 દિવસો નીચે મુજબ હોઈ શકે જે આ પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ થાય.

U = {રવિવાર - સોમવાર, સોમવાર - મંગળવાર, મંગળવાર - બુધવાર,
બુધવાર - ગુરુવાર, ગુરુવાર - શુક્રવાર, શુક્રવાર - શનિવાર, શનિવાર - રવિવાર}

તેથી કુલ પરિણામો $n = 7$ થાય.

ઘટના A = લીપ વર્ષમાં 53 ગુરુવાર હોય

ઉપરોક્ત 7 પરિણામો પૈકી 2 પરિણામો બુધવાર - ગુરુવાર અને ગુરુવાર - શુક્રવાર એ ઘટના A ને સાનુકૂળ પરિણામો થશે. એટલે કે $m = 2$.

ઘટના A ની સંભાવના $P(A) = \frac{m}{n}$

$= \frac{2}{7}$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{2}{7}$

ઉદાહરણ 16 : એક બેંકના કૅશ વિભાગમાં 7 કર્મચારીઓ નોકરી કરે છે, જે પૈકી 2 ઑફિસર, 3 ક્લાર્ક અને 2 પટાવાળા છે. આ વિભાગના કર્મચારીઓમાંથી બે કર્મચારીઓની યાદચ્છિક રીતે પસંદગી કરી એક સમિતિની રચના કરવામાં આવે છે. આ સમિતિમાં પસંદ થયેલા બે કર્મચારીઓમાં,

(1) બંને પટાવાળા હોય

(2) બંને ક્લાર્ક હોય

(3) એક ઑફિસર અને એક ક્લાર્ક હોય તેની સંભાવના શોધો.

અહીં બેંકના કૅશ વિભાગમાં કુલ 7 કર્મચારીઓ નોકરી કરે છે. તેમાંથી બે કર્મચારીઓ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે તો નિદર્શ અવકાશના પરસ્પર નિવારક, નિઃશેષ અને સમસંભાવી પરિણામોની કુલ સંખ્યા

$n = {}^7C_2 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$ થશે.

(1) પસંદગી પામેલ બંને કર્મચારીઓ પટાવાળા હોય તે ઘટના $= A$

ઘટના A ને સાનુકૂળ પરિણામો એટલે 2 પટાવાળામાંથી 2 પટાવાળાની પસંદગી અને બાકીના 5 કર્મચારીઓમાંથી કોઈપણ પસંદ ન થાય તેવા પરિણામોની સંખ્યા.

આવા પરિણામોની સંખ્યા $m = {}^2C_2 \times {}^5C_0 = 1 \times 1 = 1$ થાય.

ઘટના A ની સંભાવના $P(A) = \frac{m}{n}$

$= \frac{1}{21}$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{1}{21}$

(2) પસંદગી પામેલ બંને કર્મચારીઓ ક્લાર્ક હોય તે ઘટના $= B$

ઘટના B ને સાનુકૂળ પરિણામો એટલે 3 ક્લાર્કમાંથી 2 ક્લાર્કની પસંદગી અને બાકીના ચાર કર્મચારીઓમાંથી કોઈપણ પસંદ ન થાય તેવાં પરિણામોની સંખ્યા.

આવાં પરિણામોની સંખ્યા $m = {}^3C_2 \times {}^4C_0 = 3 \times 1 = 3$ થાય.

ઘટના B ની સંભાવના $P(B) = \frac{m}{n}$

$= \frac{3}{21}$

$= \frac{1}{7}$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{1}{7}$

(3) પસંદગી પામેલ બે કર્મચારીમાં એક ઑફિસર અને એક ક્લાર્ક હોય તે ઘટના = C

ઘટના C ને સાનુકૂળ પરિણામો એટલે 2 ઑફિસરમાંથી 1 ઑફિસરની પસંદગી થાય અને 3 ક્લાર્કમાંથી 1 ક્લાર્કની પસંદગી થાય અને 2 પટાવાળામાંથી એક પણ પટાવાળાની પસંદગી ન થાય તેવાં પરિણામો.

આવાં પરિણામોની સંખ્યા $m = {}^2C_1 \times {}^3C_1 \times {}^2C_0 = 2 \times 3 \times 1 = 6$ થાય.

ઘટના C ની સંભાવના $P(C) = \frac{m}{n}$

$= \frac{6}{21}$

$= \frac{2}{7}$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{2}{7}$

ઉદાહરણ 17 : એક બૉક્સમાં કુલ 20 એકમો છે, જેમાં 10 % એકમો ખામીવાળા છે. આ બૉક્સમાંથી યાદચ્છિક રીતે ત્રણ એકમો પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ થયેલ ત્રણ એકમોમાં,

(1) બે એકમ ખામીવાળા હોય

(2) બે એકમ ખામીરહિત હોય

(3) ત્રણેય એકમ ખામીરહિત હોવાની સંભાવના શોધો.

અહીં કુલ 20 એકમો છે, જેમાં 10 % એટલે કે 20 × 10 % = 2 એકમો ખામીવાળા અને બાકીના 18 એકમો ખામીરહિત છે. આ બૉક્સના કુલ 20 એકમોમાંથી 3 એકમોને યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે.

તેથી નિદર્શ અવકાશનાં કુલ પરિણામો $n = {}^{20}C_3 = \frac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2 \times 1} = 1140$ થશે.

(1) પસંદ થયેલ ત્રણ એકમોમાં બે એકમ ખામીવાળા હોય તે ઘટના = A

ઘટના A ને સાનુકૂળ પરિણામો એટલે 2 ખામીવાળા એકમોમાંથી 2 એકમની પસંદગી અને 18 ખામીરહિત એકમોમાંથી 1 એકમની પસંદગી થાય તેવાં પરિણામોની સંખ્યા.

આવાં પરિણામોની સંખ્યા $m = {}^2C_2 \times {}^{18}C_1 = 1 \times 18 = 18$

ઘટના A ની સંભાવના $P(A) = \frac{m}{n}$

$= \frac{18}{1140}$

$= \frac{3}{190}$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{3}{190}$

(2) પસંદ થયેલ ત્રણ એકમોમાં બે એકમ ખામીરહિત હોય તે ઘટના = B

ઘટના B ને સાનુકૂળ પરિણામો એટલે 18 ખામીરહિત એકમોમાંથી 2 એકમની પસંદગી અને 2 ખામીવાળા એકમોમાંથી 1 એકમની પસંદગી થાય તેવાં પરિણામોની સંખ્યા.

આવાં પરિણામોની સંખ્યા $m = {}^{18}C_2 \times {}^2C_1 = 153 \times 2 = 306$

ઘટના B ની સંભાવના $P(B) = \frac{m}{n}$

$= \frac{306}{1140}$

$= \frac{51}{190}$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{51}{190}$

(3) પસંદ થયેલ ત્રણેય એકમ ખામીરહિત હોય તે ઘટના $= C$

ઘટના C ને સાનુકૂળ પરિણામો એટલે 18 ખામીરહિત એકમોમાંથી 3 એકમની પસંદગી અને 2 ખામીવાળા એકમોમાંથી એક પણ એકમ પસંદ ન થાય તેવાં પરિણામોની સંખ્યા.

આવાં પરિણામોની સંખ્યા $m = {}^{18}C_3 \times {}^{2}C_0 = 816 \times 1 = 816$

ઘટના C ની સંભાવના $P(C) = \frac{m}{n}$

$= \frac{816}{1140}$

$= \frac{68}{95}$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{68}{95}$

ઉદાહરણ 18 : એક પેટીમાં કુલ 10 ચિઠ્ઠીઓ છે જે પૈકી 3 ચિઠ્ઠીઓ ઇનામને પાત્ર છે. કથન નામનો બાળક આ પેટીમાંથી યાદચ્છિક રીતે બે ચિઠ્ઠીઓ ઉપાડે છે. કથનને ઇનામ મળે તેની સંભાવના શોધો.

અહીં કુલ 10 ચિઠ્ઠીઓ પૈકી 3 ચિઠ્ઠીઓ ઇનામને પાત્ર છે અને 7 ચિઠ્ઠીઓ ઇનામને પાત્ર નથી. કુલ 10 ચિઠ્ઠીઓમાંથી 2 ચિઠ્ઠીઓ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે તો નિદર્શ અવકાશના પરસ્પર નિવારક, નિઃશેષ અને સમસંભાવી પરિણામોની કુલ સંખ્યા $n = {}^{10}C_2 = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$ થાય.

કથનને ઇનામ મળે તે ઘટના $= A$

$\therefore$ કથનને ઇનામ ન મળે તે ઘટના $= A'$

હવે ઘટના A' બને તેનાં સાનુકૂળ પરિણામો એટલે ઇનામ પાત્ર ન હોય તેવી 7 ચિઠ્ઠીઓમાંથી કથન 2 ચિઠ્ઠીઓ યાદચ્છિક રીતે ઉપાડે તેવાં પરિણામો.

આવા પરિણામોની સંખ્યા $m = {}^{7}C_2 = 21$

ઘટના A' ની સંભાવના $P(A') = \frac{m}{n}$

$= \frac{21}{45}$

$= \frac{7}{15}$

હવે $P(A) = 1 - P(A')$

$= 1 - \frac{7}{15}$

$= \frac{8}{15}$

આમ, કથનને ઇનામ મળે તેની સંભાવના $= \frac{8}{15}$

મર્યાદા : સંભાવનાની ગાણિતિક વ્યાખ્યાની મર્યાદાઓ નીચે મુજબ છે :

(1) યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશનાં પરિણામોની સંખ્યા અનંત હોય, તો આ વ્યાખ્યાથી ઘટનાની સંભાવના શોધી શકાતી નથી.

(2) યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશનાં કુલ પરિણામોની સંખ્યા જાણતાં ન હોઈએ તો આ વ્યાખ્યાથી ઘટનાની સંભાવના શોધી શકાતી નથી.

(3) યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશની પ્રાથમિક ઘટનાઓ સમસંભાવી ન હોય તો કોઈ ઘટનાની સંભાવના આ વ્યાખ્યાથી મેળવી શકાતી નથી.

(4) સંભાવનાની ગાણિતિક વ્યાખ્યામાં 'સમસંભાવી' શબ્દનો ઉલ્લેખ થયેલ છે. સમસંભાવી ઘટનાઓ એટલે સરખી સંભાવનાવાળી ઘટનાઓ. આમ સંભાવનાની વ્યાખ્યામાં જ સંભાવના શબ્દનો ઉપયોગ કરેલ છે.

સ્વાધ્યાય 1.2

1. એક સમતોલ સિક્કો ત્રણ વખત ઉછાળવામાં આવે છે. નીચેની ઘટનાઓની સંભાવના શોધો :

(1) બધી જ વખત છાપ મળે
(2) એક પણ વખત છાપ ન મળે
(3) ઓછામાં ઓછી એક વખત છાપ મળે
(4) એકથી વધુ વખત કાંટો મળે
(5) વધુમાં વધુ એક વખત છાપ મળે
(6) બેથી ઓછી વખત છાપ મળે
(7) છાપ અને કાંટો વારાફરતી મળે
(8) કાંટાની સંખ્યા છાપ કરતાં વધુ વખત મળે

2. બે સમતોલ પાસા એકસાથે ઉછાળવામાં આવે છે. નીચેની ઘટનાઓની સંભાવના શોધો :

(1) પાસા પર મળતા અંકનો સરવાળો 6 થાય
(2) પાસા પર મળતા અંકનો સરવાળો 10 થી મોટો ન થાય
(3) પાસા પર મળતા અંકનો સરવાળો 3 નો ગુણક હોય
(4) પાસા પર મળતા અંકનો ગુણાકાર 12 થાય

3. બે બાળકો ધરાવતાં કુટુંબોમાંથી એક કુટુંબ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. આ કુટુંબનાં બે બાળકો પૈકી

(1) એક બાળક છોકરી અને એક બાળક છોકરો હોય
(2) ઓછામાં ઓછું એક બાળક છોકરી હોય તેની સંભાવના શોધો.

(**સૂચના** : બાળક છોકરો હોય કે છોકરી હોય તેની સંભાવના સરખી છે એમ ધારો.)

4. પ્રથમ 100 પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓમાંથી એક સંખ્યા યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. આ સંખ્યા 7 વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય તેની સંભાવના શોધો.

5. એક સંખ્યા પસંદ કરવાના યાદચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ $U = \{1, 2, 3, ..., 120\}$ છે અને આ નિદર્શ અવકાશનાં પરિણામો સમસંભાવી છે. આ સંખ્યા,

(1) 3ની ગુણક હોય
(2) 3ની ગુણક ન હોય
(3) 4ની ગુણક હોય
(4) 4ની ગુણક ન હોય
(5) 3 અને 4 બંનેની ગુણક હોય તેની સંભાવના શોધો.

6. *RANDOM* શબ્દના બધા જ અક્ષરોના ઉપયોગથી બનતી તમામ ગોઠવણીમાં R પ્રથમ અને M અંતિમ સ્થાન પર આવે તેની સંભાવના શોધો.

7. *ORANGE* શબ્દના બધા જ અક્ષરોથી બનતી તમામ ગોઠવણીઓમાં સ્વર પહેલાં, ત્રીજા અને છઠ્ઠા સ્થાન પર આવે તેની સંભાવના શોધો.

8. એક કુટુંબના પાંચ સભ્યો પતિ, પત્ની અને તેમનાં ત્રણ બાળકો ફેમિલી ફોટા માટે એક હારમાં યાદચ્છિક રીતે ગોઠવાય છે. પતિ અને પત્ની એક સાથે જ બેઠક લે તેની સંભાવના શોધો.

9. એક કાર્યક્રમમાં 7 વક્તાઓ A, B, C, D, E, F, G ને યાદચ્છિક ક્રમમાં ભાષણ આપવા આમંત્રિત કરવામાં આવે છે. વક્તા A પછી તરત જ વક્તા B નું ભાષણ આવે તેની સંભાવના શોધો.

10. લીપ વર્ષના ફેબ્રુઆરી માસમાં 5 સોમવાર હોવાની સંભાવના શોધો.

11. લીપ વર્ષ ન હોય તેવા વર્ષમાં 53 શુક્રવાર હોવાની સંભાવના શોધો.

12. કોઈપણ વર્ષના ઑગસ્ટ માસમાં 5 મંગળવાર હોવાની સંભાવના શોધો.

13. એક પાર્ટીમાં 4 યુગલો (પતિ-પત્ની) ભાગ લે છે. આ 8 વ્યક્તિઓમાંથી બે વ્યક્તિઓને યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ થયેલી બે વ્યક્તિઓમાં,

    (1) પતિ-પત્ની હોય (2) એક પુરુષ અને એક સ્ત્રી હોય

    (3) એક પુરુષ અને એક સ્ત્રી હોય પરંતુ તેઓ પતિ-પત્ની ન હોય તેની સંભાવના શોધો.

14. એક ફેક્ટરીમાં 8 કામદારો નોકરી કરે છે જે પૈકી 3 કામદારોની કાર્યક્ષમતા ઉત્તમ અને બાકીના બધા કામદારોની કાર્યક્ષમતા મધ્યમ છે. આ 8 કામદારોમાંથી 2 કામદારોની યાદચ્છિક રીતે પસંદગી કરવામાં આવે છે. પસંદ થયેલ કામદારોમાં,

    (1) બંને કામદારોની કાર્યક્ષમતા ઉત્તમ હોય (2) બંને કામદારોની કાર્યક્ષમતા મધ્યમ હોય

    (3) એક કામદારની કાર્યક્ષમતા ઉત્તમ અને એક કામદારની કાર્યક્ષમતા મધ્યમ હોય તેની સંભાવના શોધો.

15. બરાબર રીતે ચીપેલાં 52 પત્તાંના એક ઢગમાંથી યાદચ્છિક રીતે બે પત્તાં ખેંચવામાં આવે છે.

    (1) બંને પત્તાં જુદા-જુદા રંગના હોય (2) બંને પત્તાં ચહેરાવાળા હોય

    (3) બે પત્તાં પૈકી એક પત્તું રાજા હોય તેની સંભાવના શોધો.

16. 10 બલ્બની એક પેટીમાં 3 બલ્બ ખામીવાળા છે. આ પેટીમાંથી યાદચ્છિક રીતે 2 બલ્બ પસંદ કરવામાં આવે છે આ 2 બલ્બને એક રૂમમાં આવેલા બે બલ્બ-હૉલ્ડરમાં લગાવવામાં આવે છે. વીજપુરવઠો પૂરો પાડતાં રૂમમાં અજવાળું થાય તેની સંભાવના શોધો.

17. યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશની કોઈ બે ઘટનાઓ A અને B માટે $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.5$ અને $P(A \cap B) = 0.15$ હોય, તો

    (1) $P(A')$ (2) $P(B - A)$ (3) $P(A \cap B')$ (4) $P(A' \cup B')$ શોધો.

18. યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશની કોઈ બે ઘટનાઓ A અને B માટે $P(A') = 2P(B') = 3P(A \cap B) = 0.6$ હોય, તો તફાવત ઘટનાઓ $A - B$ અને $B - A$ ની સંભાવના શોધો.

*

1.5 સંભાવનાના સરવાળાનો નિયમ

કોઈ યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશની કોઈ બે ઘટનાઓ A અને B પૈકી ઓછામાં ઓછી એક ઘટના બને તેની સંભાવના મેળવવાના નિયમને **સંભાવનાના સરવાળાનો નિયમ** (Law of Addition of Probability) કહે છે. અગાઉ આપણે જોયું છે કે, ઘટનાઓ A અને B પૈકી ઓછામાં ઓછી એક ઘટના બને તેને આપણે ઘટનાઓ A અને Bની યોગઘટના $A \cup B$ વડે દર્શાવીએ છીએ. તેથી આપણે એમ પણ કહી શકીએ કે સંભાવનાના સરવાળાનો નિયમ એટલે ઘટનાઓ A અને Bની યોગઘટના $A \cup B$ની સંભાવના મેળવવાનો નિયમ. સંકેતમાં આ નિયમ નીચે પ્રમાણે લખાય, જે આપણે સાબિતી વગર સ્વીકારી લઈશું :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

સંભાવનાના સરવાળાનો નિયમ બે કરતાં વધુ ઘટનાઓની યોગઘટનાની સંભાવના મેળવવા માટે પણ ઉપયોગમાં લઈ શકાય. ત્રણ ઘટનાઓ A, B અને Cની યોગઘટના $A \cup B \cup C$ માટે સંભાવનાનો સરવાળાનો નિયમ નીચે મુજબ છે :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

આ નિયમ પરથી મળતાં કેટલાંક અગત્યનાં પરિણામો નીચે મુજબ મળે :

(1) જો યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશની બે ઘટનાઓ A અને B પરસ્પર નિવારક હોય, તો $A \cap B = \phi$ અને $P(A \cap B) = 0$ થાય તેથી,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

(2) જો યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશની ત્રણ ઘટનાઓ A, B અને C પરસ્પર નિવારક હોય, તો $A \cap B = \phi$, $A \cap C = \phi$, $B \cap C = \phi$, $A \cap B \cap C = \phi$ અને

$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = P(A \cap B \cap C) = 0$ થાય તેથી,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

(3) જો યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશની બે ઘટનાઓ A અને B પરસ્પર નિવારક તથા નિઃશેષ હોય, તો $A \cap B = \phi$ અને $A \cup B = U$ થાય. $P(\phi) = 0$ અને $P(U) = 1$ હોવાથી $P(A \cap B) = 0$ અને $P(A \cup B) = 1$ થાય તેથી,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 1$$

(4) જો યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશની ત્રણ ઘટનાઓ A, B અને C પરસ્પર નિવારક તથા નિઃશેષ હોય, તો

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = 1$$

ઉદાહરણ 19 : પ્રથમ 50 પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓમાંથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલી એક સંખ્યા 2 અથવા 3ની ગુણક હોવાની સંભાવના શોધો.

પ્રથમ 50 પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓમાંથી એક સંખ્યા યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે તે યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશ Uમાં પરસ્પર નિવારક, નિઃશેષ અને સમસંભાવી પરિણામોની કુલ સંખ્યા $n = {}^{50}C_1 = 50$ થાય.

હવે જો પસંદ થયેલ સંખ્યા 2 ની ગુણક હોય તેને ઘટના A અને 3ની ગુણક હોય તેને ઘટના B વડે દર્શાવીએ તો, પસંદ કરેલી સંખ્યા 2 અથવા 3ની ગુણક હોય તે ઘટનાને સંકેતમાં $A \cup B$ વડે દર્શાવી શકાય (આ ઘટનાને $B \cup A$ વડે પણ દર્શાવી શકાય. ગણ સિદ્ધાંત મુજબ $A \cup B = B \cup A$) બે ઘટનાઓ A અને B માટે સંભાવનાના સરવાળાના નિયમ અનુસાર સંભાવના મેળવવા માટે સૌપ્રથમ આપણે $P(A), P(B)$ અને $P(A \cap B)$ મેળવીશું.

A = પસંદ થયેલ સંખ્યા 2ની ગુણક હોય તેવી ઘટના

$= \{2, 4, 6,..., 50\}$

તેથી ઘટના A બનવાનાં સાનુકૂળ પરિણામો $m = 25$

ઘટના Aની સંભાવના $P(A) = \frac{m}{n}$

$= \frac{25}{50}$

B = પસંદ થયેલ સંખ્યા 3ની ગુણક હોય તેવી ઘટના

$= \{3, 6, 9,..., 48\}$

તેથી ઘટના B બનવાનાં સાનુકૂળ પરિણામો $m = 16$

ઘટના Bની સંભાવના $P(B) = \frac{m}{n}$

$= \frac{16}{50}$

$A \cap B =$ પસંદ થયેલ સંખ્યા 2 અને 3 બંનેની એટલે કે 2 અને 3ના લ.સા.અ. 6ની ગુણક હોય તેવી ઘટના

$= \{6, 12, 18,..., 48\}$

તેથી ઘટના $A \cap B$ બનવાનાં સાનુકૂળ પરિણામો $m = 8$

ઘટના $A \cap B$ ની સંભાવના $P(A \cap B) = \frac{m}{n}$

$= \frac{8}{50}$

હવે સંભાવનાના સરવાળાના નિયમ અનુસાર,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{25}{50} + \frac{16}{50} - \frac{8}{50}$$

$$= \frac{25 + 16 - 8}{50}$$

$$= \frac{33}{50}$$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{33}{50}$

ઉદાહરણ 20 : 52 પત્તાંના ઢગમાંથી એક પત્તું યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ થયેલું પત્તું,

(1) ફલ્લી અથવા રાણી હોય

(2) ફલ્લી ન હોય અને રાણી પણ ન હોય તેની સંભાવના શોધો.

52 પત્તાંના ઢગમાંથી એક પત્તું યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે તે યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશ Uમાં પરસ્પર નિવારક, નિઃશેષ અને સમસંભાવી પરિણામોની કુલ સંખ્યા $n = {}^{52}C_1 = 52$ થાય.

પસંદ થયેલ પત્તું ફલ્લી હોય તે ઘટના $= A$

પસંદ થયેલ પત્તું રાણી હોય તે ઘટના $= B$

(1) પસંદ થયેલ ફલ્લી અથવા રાણી હોય તે ઘટના $= A \cup B$

સંભાવનાના સરવાળાના નિયમ અનુસાર ઘટના $A \cup B$ ની સંભાવના મેળવવા માટે આપણે સૌપ્રથમ $P(A), P(B)$ અને $P(A \cap B)$ મેળવીશું.

A = પસંદ થયેલ પત્તું ફ્લ્લી હોય તે ઘટના

52 પત્તાંના ઢગમાં ફ્લ્લીનાં 13 પત્તાં હોય છે તેથી ઘટના Aને સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા $m = 13$

ઘટના Aની સંભાવના $P(A) = \frac{m}{n}$

$= \frac{13}{52}$

B = પસંદ થયેલ પત્તું રાણી હોય તે ઘટના

52 પત્તાના ઢગમાં રાણીના 4 પત્તાં હોય છે તેથી ઘટના Bને સાનુકૂળ પરિણામો $m = 4$

ઘટના Bની સંભાવના $P(B) = \frac{m}{n}$

$= \frac{4}{52}$

$A \cap B$ = પસંદ થયેલ પત્તું ફ્લ્લી અને રાણી બંને એટલે કે ફ્લ્લીની રાણી હોય તે ઘટના

52 પત્તાના ઢગમાં ફ્લ્લીની રાણી હોય તેવું એક જ પત્તું હોય છે તેથી ઘટના $A \cap B$ ને સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા $m = 1$

ઘટના $A \cap B$ની સંભાવના $P(A \cap B) = \frac{m}{n}$

$= \frac{1}{52}$

હવે સંભાવનાના સરવાળાના નિયમ અનુસાર,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52}$$

$$= \frac{13+4-1}{52}$$

$$= \frac{16}{52}$$

$$= \frac{4}{13}$$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{4}{13}$

ઘટના $A \cup B$ની સંભાવનાને નીચેની આકૃતિ દ્વારા સરળતાથી સમજી શકાય :

પત્તાનો પ્રકાર	પત્તાની જાત												
	A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	Q	K
♠	♠A	♠2	♠3	♠4	♠5	♠6	♠7	♠8	♠9	♠10	♠J	♠Q	♠K
♦	♦A	♦2	♦3	♦4	♦5	♦6	♦7	♦8	♦9	♦10	♦J	♦Q	♦K
♣	♣A	♣2	♣3	♣4	♣5	♣6	♣7	♣8	♣9	♣10	♣J	♣Q	♣K
♥	♥A	♥2	♥3	♥4	♥5	♥6	♥7	♥8	♥9	♥10	♥J	♥Q	♥K

(2) પસંદ થયેલ પત્તું ફલ્લી ન હોય તે ઘટના = A'

પસંદ થયેલ પત્તું રાણી ન હોય તે ઘટના = B'

તેથી પસંદ થયેલ પત્તું ફલ્લી ન હોય અને રાણી પણ ન હોય તે ઘટના $A' \cap B'$

આમ, ઘટના $A' \cap B'$ની સંભાવના,

$$P(A' \cap B') = P(A \cup B)'$$

$$= 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - \frac{4}{13}$$

$$= \frac{9}{13}$$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{9}{13}$

ઉદાહરણ 21 : એક સામાજિક સંસ્થામાં ડૉક્ટરી વ્યવસાય સાથે સંકળાયેલ 3 વ્યક્તિઓ અને ઇજનેરી વ્યવસાય સાથે સંકળાયેલ 5 વ્યક્તિઓ સેવા આપે છે. એક સમિતિ બનાવવાના હેતુસર આ વ્યક્તિઓ પૈકી 2 વ્યક્તિઓને યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ થયેલ બંને વ્યક્તિઓ એક જ વ્યવસાય સાથે સંકળાયેલ હોવાની સંભાવના શોધો.

અહીં કુલ $3 + 5 = 8$ વ્યક્તિઓ છે. તેથી 2 વ્યક્તિઓ કુલ ${}^8C_2 = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28$ પ્રકારે પસંદ કરી શકાય. તેથી નિદર્શ અવકાશ પરસ્પર નિવારક, નિઃશેષ અને સમસંભાવી પરિણામોની કુલ સંખ્યા $n = 28$ થાય.

પસંદ થયેલ બંને વ્યક્તિઓ ડૉક્ટરી વ્યવસાય સાથે સંકળાયેલ હોય તે ઘટના = A

પસંદ થયેલ બંને વ્યક્તિઓ ઇજનેરી વ્યવસાય સાથે સંકળાયેલ હોય તે ઘટના = B

પસંદ થયેલ બંને વ્યક્તિઓ એક જ વ્યવસાય સાથે સંકળાયેલ હોય તે ઘટના = $A \cup B$

વળી ઘટનાઓ A અને B બંને સાથે બની શકે નહિ તેથી $A \cap B = \phi$

આમ ઘટનાઓ A અને B પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ છે તેની સંભાવનાના સરવાળાના નિયમ અનુસાર

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

જે મેળવવા માટે આપણે સૌપ્રથમ $P(A)$ અને $P(B)$ મેળવીશું.

A = પસંદ થયેલ બંને વ્યક્તિઓ ડૉક્ટરી વ્યવસાય સાથે સંકળાયેલ હોય તે ઘટના.

ઘટના Aને સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા $m = {}^3C_2 = 3$

ઘટના Aની સંભાવના $P(A) = \frac{m}{n}$

$$= \frac{3}{28}$$

B = પસંદ થયેલ બંને વ્યક્તિ ઇજનેરી વ્યવસાય સાથે સંકળાયેલ હોય તે ઘટના

ઘટના Bને સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા $m = {}^5C_2 = 10$

ઘટના Bની સંભાવના $P(B) = \frac{m}{n}$

$$= \frac{10}{28}$$

હવે

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{3}{28} + \frac{10}{28}$$

$$= \frac{3+10}{28}$$

$$= \frac{13}{28}$$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{13}{28}$

ઉદાહરણ 22 : કોઈ સમૂહનો વ્યક્તિ સમાચારપત્ર X વાંચતો હોય તેની સંભાવના 0.55, સમાચારપત્ર Y વાંચતો હોય તેની સંભાવના 0.69 અને સમાચારપત્ર X અને Y બંને વાંચતો હોય તેની સંભાવના 0.27 છે. આ સમૂહમાંથી પસંદ કરેલ એક વ્યક્તિ.

(1) સમાચારપત્રો X અને Y પૈકી ઓછામાં ઓછું એક સમાચારપત્ર વાંચતો હોય.

(2) સમાચારપત્રો X અને Y પૈકી એક પણ સમાચારપત્ર વાંચતો ન હોય.

(3) સમાચારપત્રો X અને Y પૈકી ફક્ત એક જ સમાચારપત્ર વાંચતો હોય તેની સંભાવના શોધો.

સમૂહનો વ્યક્તિ સમાચારપત્ર X વાંચતો હોય તે ઘટના A અને સમાચારપત્ર Y વાંચતો હોય તે ઘટનાને B કહીએ, તો આપેલી માહિતી નીચે મુજબ દર્શાવી શકાય :

$P(A) = 0.55,\ P(B) = 0.69,\ P(A \cap B) = 0.27$

(1) પસંદ કરેલ વ્યક્તિ સમાચારપત્રો X અને Y પૈકી ઓછામાં ઓછું એક સમાચારપત્ર વાંચતો હોય તે ઘટના $= A \cup B$

સંભાવનાના સરવાળાના નિયમ અનુસાર,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= 0.55 + 0.69 - 0.27$$

$$= 0.97$$

માંગેલી સંભાવના $= 0.97$

(2) પસંદ થયેલ વ્યક્તિ સમાચારપત્ર X વાંચતો ન હોય તે ઘટના $= A'$

પસંદ થયેલ વ્યક્તિ સમાચારપત્ર Y વાંચતો ન હોય તે ઘટના $= B'$

તેથી પસંદ થયેલ વ્યક્તિ સમાચારપત્રો X અને Y પૈકી એક પણ સમાચારપત્ર વાંચતો ન હોય તે ઘટના $= A' \cap B'$

આમ, ઘટના $A' \cap B'$ ની સંભાવના,

$$P(A' \cap B') = P(A \cup B)'$$

$$= 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - 0.97$$

$$= 0.03$$

માંગેલી સંભાવના $= 0.03$

(3) પસંદ થયેલ વ્યક્તિ સમાચારપત્રો X અને Y પૈકી ફક્ત એક જ સમાચારપત્ર વાંચતો હોય તે ઘટનાને C કહીએ, તો ઘટના C નીચે મુજબ બની શકે :

વ્યક્તિ સમાચારપત્ર X વાંચતો હોય (ઘટના A) અને સમાચારપત્ર Y વાંચતો ન હોય (ઘટના B')

અથવા

વ્યક્તિ સમાચારપત્ર X વાંચતો ન હોય (ઘટના A') અને સમાચારપત્ર Y વાંચતો હોય (ઘટના B)

એટલે કે ઘટના $C=(A\cap B')\cup(A'\cap B)$

ઘટનાઓ $A\cap B'$ અને $A'\cap B$ પરસ્પર નિવારક હોવાથી,

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A\cap B')+P(A'\cap B) \\ &= \left[P(A)-P(A\cap B)\right]+\left[P(B)-P(A\cap B)\right] \\ &= [0.55-0.27]+[0.69-0.27] \\ &= 0.28 + 0.42 \\ &= 0.7 \end{aligned}$$

માંગેલી સંભાવના = 0.7

ઉદાહરણ 23 : એક યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશની બે ઘટનાઓ A અને B માટે $P(A)=2P(B)=4P(A\cap B)=0.6$ હોય, તો નીચેની ઘટનાઓની સંભાવના મેળવો :

(1) $A'\cap B'$ (2) $A'\cup B'$ (3) $A - B$ (4) $B - A$

અહીં $P(A)=2P(B)=4P(A\cap B)=0.6$ આપેલ છે તેથી,

$P(A)=0.6$	$2P(B)=0.6$	$4P(A\cap B)=0.6$
	$\therefore P(B)=0.3$	$\therefore P(A\cap B)=0.15$

(1) ઘટના $A'\cap B'$ની સંભાવના

$$\begin{aligned} &= P(A'\cap B') \\ &= P(A\cup B)' \\ &= 1-P(A\cup B) \\ &= 1-\left[P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right] \\ &= 1-[0.6+0.3-0.15] \\ &= 1-0.75 \\ &= 0.25 \end{aligned}$$

માંગેલી સંભાવના = 0.25

(2) ઘટના $A'\cup B'$ની સંભાવના

$$\begin{aligned} &= P(A'\cup B') \\ &= P(A\cap B)' \\ &= 1-P(A\cap B) \\ &= 1-0.15 \\ &= 0.85 \end{aligned}$$

માંગેલી સંભાવના = 0.85

(3) ઘટના $A-B$ ની સંભાવના $= P(A-B)$

$= P(A)-P(A\cap B)$

$= 0.6-0.15$

$= 0.45$

માંગેલી સંભાવના = 0.45

(4) ઘટના $B-A$ ની સંભાવના $= P(B-A)$

$= P(B)-P(A\cap B)$

$= 0.3-0.15$

$= 0.15$

માંગેલી સંભાવના = 0.15

ઉદાહરણ 24 : એક યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશની કોઈ બે ઘટનાઓ A અને B માટે $P(A')=0.3$, $P(B)=0.6$ અને $P(A\cup B)=0.83$ હોય, તો $P(A\cap B')$ અને $P(A'\cap B)$ મેળવો.

અહીં $P(A')=0.3 \therefore P(A)=1-P(A')=1-0.3=0.7$

$P(B)=0.6$ અને $P(A\cup B)=0.83$

સૌપ્રથમ આપણે $P(A\cap B)$ મેળવીશું.

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$\therefore\ 0.83=0.7+0.6-P(A\cap B)$

$\therefore\ P(A\cap B)=0.7+0.6-0.83$

$\therefore\ P(A\cap B)=0.47$

હવે,

$P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)$

$= 0.7 - 0.47$

$= 0.23$

માંગેલી સંભાવના = 0.23

$P(A'\cap B)=P(B)-P(A\cap B)$

$= 0.6 - 0.47$

$= 0.13$

માંગેલી સંભાવના = 0.13

ઉદાહરણ 25 : એક યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશની કોઈ બે ઘટનાઓ A અને B પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ છે. જો $3P(A)=4P(B)=1$ હોય, તો $P(A\cup B)$ શોધો.

અહીં $3P(A)=4P(B)=1$ હોવાથી

$3P(A)=1$	$4P(B) = 1$
$\therefore\ P(A)= \frac{1}{3}$	$\therefore\ P(B)= \frac{1}{4}$

હવે ઘટનાઓ A અને B પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ $(A\cap B=\phi)$ હોવાથી,

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{7}{12}$$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{7}{12}$

ઉદાહરણ 26 : એક યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશની પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ઘટનાઓ A, B અને C માટે $2P(A)=3P(B)=4P(C)$ હોય, તો $P(A\cup B)$ અને $P(B\cup C)$ શોધો.

$2P(A)=3P(B)=4P(C)=x$ લેતાં,

$2P(A)=x$	$3P(B)=x$	$4P(C)=x$
$\therefore\ P(A) = \frac{x}{2}$	$\therefore\ P(B) = \frac{x}{3}$	$\therefore\ P(C)= \frac{x}{4}$

હવે A, B અને C પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ઘટનાઓ હોવાથી,

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)=1$$

$$\therefore\ \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 1$$

$$\therefore\ \frac{6x+4x+3x}{12} = 1$$

$$\therefore\ 13x=12$$

$$\therefore\ x=\frac{12}{13}$$

તેથી,

$$P(A)= \frac{x}{2} = \frac{\frac{12}{13}}{2} = \frac{6}{13}$$

$$P(B)= \frac{x}{3} = \frac{\frac{12}{13}}{3} = \frac{4}{13}$$

$$P(C)= \frac{x}{4} = \frac{\frac{12}{13}}{4} = \frac{3}{13}$$

હવે માંગેલી ઘટનાઓની સંભાવના,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{6}{13} + \frac{4}{13}$$

$$= \frac{10}{13}$$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{10}{13}$

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C)$$

$$= \frac{4}{13} + \frac{3}{13}$$

$$= \frac{7}{13}$$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{7}{13}$

સ્વાધ્યાય 1.3

1. 52 પત્તાંના ઢગમાંથી યાદચ્છિક રીતે 2 પત્તાં ખેંચવામાં આવે છે. ખેંચેલાં બંને પત્તાં,

(1) એક જ પ્રકારના હોય

(2) એક જ રંગના હોય તેની સંભાવના શોધો.

2. એક અભરાઈ પર આંકડાશાસ્ત્રનાં 3 અને ગણિતનાં 4 પુસ્તકો ગોઠવેલાં છે. આ પુસ્તકોમાંથી યાદચ્છિક રીતે બે પુસ્તકો પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ કરેલાં બંને પુસ્તકો એક જ વિષયના હોવાની સંભાવના શોધો.

3. 52 પત્તાંના ઢગમાંથી યાદચ્છિક રીતે એક પત્તું ખેંચવામાં આવે છે. આ પત્તું,

(1) કાળી અથવા એક્કો હોવાની (2) કાળી ન હોય અને એક્કો પણ ન હોવાની સંભાવના શોધો.

4. 1 થી 100 સુધીની પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓમાંથી એક સંખ્યા પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ કરેલી સંખ્યા 3 અથવા 5ની ગુણક હોય તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.

5. બે સમતોલ પાસા એક સાથે ઉછાળવામાં આવે છે. બંને પાસા પર મળતા અંકનો સરવાળો 2 અથવા 3નો ગુણક હોય તેની સંભાવના શોધો.

6. કોઈ તહેવારના દિવસોમાં શાકમાર્કેટમાં બટાકાના ભાવ વધે તેની સંભાવના 0.8 છે. ડુંગળીના ભાવ વધે તેની સંભાવના 0.7 છે. બટાકા અને ડુંગળી બંનેના ભાવ વધે તેની સંભાવના 0.6 છે, તો બટાકા અને ડુંગળી બેમાંથી ઓછામાં ઓછા એકના ભાવ વધે તેની સંભાવના શોધો.

7. એક પુલનો નાશ કરવા બે વિમાનો બૉમ્બ ફેંકે છે. પહેલા વિમાનમાંથી ફેંકાયેલો બૉમ્બ પુલનું સાચું નિશાન લે તેની સંભાવના 0.9 છે અને બીજા વિમાનમાંથી ફેંકાયેલો બૉમ્બ પુલનું સાચું નિશાન લે તેની સંભાવના 0.7 છે. બંને વિમાનોમાંથી ફેંકાયેલા એક-એક બૉમ્બ પુલનું સાચું નિશાન લે તેની સંભાવના 0.63 છે. જો એક પણ બૉમ્બ પુલ પર પડે, તો પુલનો નાશ થાય છે. પુલનો નાશ થાય તેની સંભાવના શોધો.

8. એક રેસ્ટોરન્ટમાં ડિનર માટે આવતો યુવક પિઝા ઑર્ડર કરે તેની સંભાવના 0.63 છે. કૉલ્ડ્રિંક્સ ઑર્ડર કરે તેની સંભાવના 0.54 છે. યુવક પિઝા અને કૉલ્ડ્રિંક્સમાંથી ઓછામાં ઓછુ એક ઑર્ડર કરે તેની સંભાવના 0.88 હોય, તો કોઈ દિવસે ડિનર માટે આવેલ યુવક પિઝા અને કૉલ્ડ્રિંક્સમાંથી ફક્ત એક જ વસ્તુ ઑર્ડર કરે તેની સંભાવના શોધો.

9. જો A અને B નિદર્શ અવકાશ Uમાંની નિઃશેષ અને પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ હોય અને $P(A)=2P(B)$ હોય, તો $P(A)$ શોધો.

10. નિદર્શ અવકાશની ત્રણ ઘટનાઓ A, B અને C પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ છે. જો $4P(A)=5P(B)=3P(C)$ હોય, તો $P(A\cup C)$ અને $P(B\cup C)$ શોધો.

11. નિદર્શ અવકાશની ત્રણ ઘટનાઓ A, B અને C માટે નીચે આપેલી માહિતી પરથી $P(A\cup B\cup C)$ શોધો.

$P(A)=0.65,\ P(B)=0.45,\ P(C)=0.25,\ P(A\cap B)=0.25,\ P(A\cap C)=0.15,\ P(B\cap C)=0.2,$

$P(A\cap B\cap C)=0.05$

12. નિદર્શ અવકાશની ત્રણ ઘટનાઓ A, B અને C પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ છે. જો $P(C')=0.8$ અને $3P(B)=2P(A')$ હોય, તો $P(A)$ અને $P(B)$ શોધો.

*

1.6 શરતી સંભાવના અને સંભાવનાના ગુણાકારનો નિયમ

1.6.1 શરતી સંભાવના

ધારો કે U એ સાન્ત નિદર્શ અવકાશ છે તથા A અને B તેની કોઈ બે ઘટનાઓ છે. ઘટના A બને છે તે શરત હેઠળ ઘટના B બનવાની સંભાવનાને શરતી સંભાવના કહે છે. જો આપણે ઘટના A બને છે એ શરત હેઠળ ઘટના B બને તે ઘટનાને B/A સંકેતથી દર્શાવીએ તો શરતી ઘટના B/Aની સંભાવના $P(B/A)$ને Bની **શરતી સંભાવના** (conditional probability) કહે છે. આ સંભાવના નીચે જણાવેલ સૂત્રથી મેળવાય છે :

$$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)};\quad P(A)\neq 0$$

તે જ પ્રમાણે ઘટના B બને છે એ શરત હેઠળ ઘટના A બને તે ઘટનાને A/B સંકેતથી દર્શાવીએ તો શરતી ઘટના A/B ની સંભાવના $P(A/B)$ નીચે જણાવેલ સૂત્રથી મેળવાય છે :

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)};\quad P(B)\neq 0$$

ધારો કે એક કંપની કોઈ ચોક્કસ પ્રકારના એકમનું પોતાની બે અલગ-અલગ ફેક્ટરી અનુક્રમે અને A_1 અને A_2માં ઉત્પાદન કરે છે. આ કંપની દ્વારા ઉત્પાદિત એકમનું વેચાણ કરતા એક સ્ટોરમાંથી આવા એક એકમની યાદચ્છિક રીતે પસંદગી કરવામાં આવે છે. પસંદ કરેલ એકમ ખામીવાળો હોય તે ઘટનાને D વડે દર્શાવીએ.

- જો પસંદ કરેલ એકમ ફેક્ટરી A_1માં ઉત્પાદિત થયેલ હોય, તો તે ખામીવાળો હોય તે ઘટનાને D/A_1 વડે દર્શાવાય.
- જો પસંદ કરેલ એકમ ફેક્ટરી A_2માં ઉત્પાદિત થયેલ હોય, તો તે ખામીવાળો હોય તે ઘટનાને D/A_2 વડે દર્શાવાય.

આમ,

$P(D/A_1)$ = ઘટના A_1 બની છે તે શરતે ઘટના D બને તેની સંભાવના અને

$P(D/A_2)$ = ઘટના A_2 બની છે તે શરતે ઘટના D બને તેની સંભાવના

1.6.2 નિરપેક્ષ ઘટનાઓ

ધારો કે U એ સાન્ત નિદર્શ અવકાશ છે તથા A અને B તેની કોઈ બે ઘટનાઓ છે. જો ઘટના A બનવાની સંભાવના ઘટના B બનવા (કે ન બનવા)થી બદલાતી ન હોય, તો A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ (Independent Events) છે તેમ કહેવાય.

અર્થાત્ $P(A)=P(A/B)=P(A/B')$ અને $P(B)=P(B/A)=P(B/A')$ હોય, તો ઘટનાઓ A અને Bને નિરપેક્ષ કહેવાય.

દા.ત., ઘટના A = સમતોલ પાસો પ્રથમ વખત ઉછાળતાં તેના પર અંક 1 મળે.

ઘટના B = સમતોલ પાસો બીજી વખત ઉછાળતાં તેના પર યુગ્મ અંક મળે.

અહીં એમ કહી શકાય કે, પ્રથમ વખત પાસો ઉછાળતાં તેના પર અંક 1 મળેલ હતો તેના કારણે બીજી વખત પાસો ઉછાળતાં તેના પર યુગ્મ અંક મળવાની સંભાવના બદલાતી નથી. એટલે કે ઘટના B એ ઘટના A પર આધારિત નથી. અર્થાત્ $P(B) = P(B/A)$. આ બાબત નીચેની ગણતરીથી સરળતાથી સમજી શકાય :

એક પાસાને બે વખત ઉછાળતાં કુલ શક્ય પરિણામો $n = 6 \times 6 = 36$ મળે.

A = સમતોલ પાસો પ્રથમ વખત ઉછાળતાં તેના પર અંક 1 મળે તે ઘટના

ઘટના A ને સાનુકૂળ પરિણામો $m = 6$

ઘટના A ની સંભાવના $P(A) = \frac{m}{n}$

$= \frac{6}{36}$

B = સમતોલ પાસો બીજી વખત ઉછાળતાં તેના પર યુગ્મ અંક મળે તે ઘટના

ઘટના B ને સાનુકૂળ પરિણામો $m = 18$

ઘટના B ની સંભાવના $P(B) = \frac{m}{n}$

$= \frac{18}{36}$

$= \frac{1}{2}$

$A \cap B$ = સમતોલ પાસો પ્રથમ વખત ઉછાળતાં તેના પર અંક 1 મળે અને બીજી વખત ઉછાળતાં તેના પર યુગ્મ અંક મળે તે ઘટના

ઘટના $A \cap B$ ને સાનુકૂળ પરિણામો $m = 3$

ઘટના $A \cap B$ ની સંભાવના $P(A \cap B) = \frac{m}{n}$

$= \frac{3}{36}$

હવે જો સમતોલ પાસાને પ્રથમ વખત ઉછાળતાં તેના પર અંક 1 મળેલ હોય, તો તે પાસાને બીજી વખત ઉછાળતાં તેના પર યુગ્મ અંક મળે તે ઘટના B/A ની સંભાવના $P(B/A)$ નીચે મુજબ મળે :

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$= \frac{\frac{3}{36}}{\frac{6}{36}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

આમ, અહીં $P(B) = P(B/A)$ થતું હોવાથી ઘટનાઓ A અને B નિરપેક્ષ છે તેમ કહેવાય.

1.6.3 સંભાવનાના ગુણાકારનો નિયમ

કોઈ યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશ Uની બે ઘટનાઓ A અને B હોય, તો ઘટનાઓ A અને B બંને સાથે બને તેની સંભાવના મેળવવાના નિયમને **સંભાવનાના ગુણાકારનો નિયમ** (Law of Multiplication of Probability) કહે છે.

દા.ત., ઘટના A = પ્રથમ વખત સિક્કો ઉછાળતા તેના પર છાપ મળે

ઘટના B = બીજી વખત સિક્કો ઉછાળતા તેના પર છાપ મળે

જો સિક્કાને બે વખત ઉછાળવામાં આવે તો તેના પર બંને વખત છાપ મળે એટલે કે ઘટના $A \cap B$ બનવાની સંભાવના ગુણાકારના નિયમથી મેળવી શકાય. સંભાવનાના ગુણાકારનો નિયમ નીચે મુજબ છે.

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A);\ P(A) \neq 0$

$P(A \cap B) = P(B) \times P(A/B);\ P(B) \neq 0$

આ નિયમ પરથી તારવેલાં કેટલાંક અગત્યનાં પરિણામો નીચે મુજબ છે જેને આપણે સાબિતી વગર સ્વીકારી લઈશું.

(1) જો A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય, તો $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

(2) જો A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય, તો

(i) ઘટનાઓ A' અને B' પણ નિરપેક્ષ ઘટનાઓ થાય. તેથી $P(A' \cap B') = P(A') \times P(B')$

(ii) ઘટનાઓ A અને B' પણ નિરપેક્ષ ઘટનાઓ થાય. તેથી $P(A \cap B') = P(A) \times P(B')$

(iii) ઘટનાઓ A' અને B પણ નિરપેક્ષ ઘટનાઓ થાય. તેથી $P(A' \cap B) = P(A') \times P(B)$

1.6.4 પુરવણી સહિત અને પુરવણી રહિત પસંદગી

સમષ્ટિમાંથી એક પછી એક એમ એકમોની યાદચ્છિક રીતે પસંદગી કરવાની હોય ત્યારે એવી પસંદગી બે રીતે કરી શકાય છે :

(1) પુરવણી સહિત પસંદગી : સમષ્ટિમાંથી કોઈપણ પ્રયત્ને એકમની પસંદગી કરતાં પહેલા તેના અગાઉના પ્રયત્ને પસંદ થયેલ એકમને સમષ્ટિમાં પરત મૂકવામાં આવે તો તેવી પસંદગીને પુરવણી સહિત (with Replacement) પસંદગી કહે છે.

(2) પુરવણી રહિત પસંદગી : સમષ્ટિમાંથી કોઈપણ પ્રયત્ને એકમની પસંદગી કરતાં પહેલા તેના અગાઉના પ્રયત્ને પસંદ થયેલ એકમને સમષ્ટિમાં પરત મૂકવામાં ન આવે તો તેવી પસંદગીને પુરવણી રહિત (without Replacement) પસંદગી કહે છે.

ઉદાહરણ 27 : એક સમતોલ સિક્કાને બે વખત ઉછાળવામાં આવે છે. જો સિક્કા પર પ્રથમ વખત છાપ મળી હોય તો બંને વખતે સિક્કા પર છાપ મળે તેની સંભાવના શોધો.

એક સમતોલ સિક્કો બે વખત ઉછાળવાના યાદચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ $U = \{HH, HT, TH, TT\}$ છે. જ્યાં પહેલી સંજ્ઞા પ્રથમ વખત સિક્કો ઉછાળવાનું પરિણામ દર્શાવે છે અને બીજી સંજ્ઞા બીજી વખત સિક્કો ઉછાળવાનું પરિણામ દર્શાવે છે. આ નિદર્શ અવકાશનાં કુલ પરિણામો $n = 4$ છે.

હવે જો પ્રથમ વખત સિક્કો ઉછાળતા છાપ મળે એ ઘટનાને A કહીએ અને બંને વખત સિક્કા પર છાપ મળે એ ઘટનાને B કહીએ, તો આપણે ઘટના B/A ની સંભાવના $P(B/A)$ શોધવાની છે.

ઘટના A = પ્રથમ વખત સિક્કો ઉછાળતા તેના પર છાપ મળે

$= \{HH, HT\}$

તેથી ઘટના A ને સાનુકૂળ પરિણામો $m = 2$ થાય.

ઘટના A ની સંભાવના $P(A) = \frac{m}{n}$

$= \frac{2}{4}$

ઘટના B = બંને વખત સિક્કા પર છાપ મળે

$= \{HH\}$

તેથી ઘટના B ને સાનુકૂળ પરિણામો $m = 1$ થાય.

ઘટના Bની સંભાવના $P(B) = \frac{m}{n}$

$= \frac{1}{4}$

ઘટના $A \cap B$ = પ્રથમ વખત સિક્કો ઉછાળતા છાપ મળે અને બંને વખત સિક્કા પર છાપ મળે. (અહીં $B \subset A$ છે.)

$= \{HH\}$

તેથી ઘટના $A \cap B$ ને સાનુકૂળ પરિણામો $m = 1$ થાય.

ઘટના $A \cap B$ ની સંભાવના $P(A \cap B) = \frac{m}{n}$

$= \frac{1}{4}$

હવે,

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{1}{2}$

ઉદાહરણ 28 : એક ફેક્ટરીને નિશ્ચિત સમયમર્યાદામાં કોઈ વસ્તુના 50,000 એકમો તૈયાર કરવાનો ઑર્ડર મળેલ છે. આ કામ સમયસર પૂરું થાય તેની સંભાવના 0.75 અને તે સમયમર્યાદામાં કારીગરો હડતાલ પર ન જાય તેની સંભાવના 0.8 છે. ફેક્ટરીમાં આ કામ સમયસર પૂરું થાય અને કારીગરો તે સમયમર્યાદામાં હડતાલ પર ન જાય તેની સંભાવના 0.7 હોય તો,

(1) સમયમર્યાદામાં કારીગરો હડતાલ પર ન ગયા હોય તો કામ સમયસર પૂરું થાય

(2) કામ સમયસર પૂરું થયેલ છે એમ આપેલ હોય, તો કારીગરો હડતાલ પર ન ગયા હોય તેની સંભાવના શોધો.

અહીં ફેક્ટરીમાં કામ સમયસર પૂરું થાય તેને ઘટના A અને કારીગરો હડતાલ પર ન ગયા હોય તેને ઘટના B વડે દર્શાવીએ, તો આપેલી માહિતી નીચે મુજબ લખી શકાય :

$P(A) = 0.75,\ P(B) = 0.8,\ P(A \cap B) = 0.7$

(1) કારીગર હડતાલ પર ન ગયા હોય તે શરતે કામ સમયસર પૂરું થાય તે ઘટના = A/B

શરતી સંભાવનાની વ્યાખ્યા અનુસાર ઘટના A/Bની સંભાવના,

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{0.7}{0.8}$$

$$= \frac{7}{8}$$

માંગેલી સંભાવના = $\frac{7}{8}$

(2) કામ સમયસર પૂરું થયેલ છે એમ આપેલ હોય, તો તે સમયમર્યાદામાં કારીગરો હડતાલ પર ન ગયા હોય તે ઘટના = B/A

શરતી સંભાવનાની વ્યાખ્યા અનુસાર ઘટના B/Aની સંભાવના,

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$= \frac{0.7}{0.75}$$

$$= \frac{14}{15}$$

માંગેલી સંભાવના = $\frac{14}{15}$

ઉદાહરણ 29 : યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશની બે ઘટનાઓ A અને B માટે $P(A') = \frac{7}{25}$, $P(B/A) = \frac{5}{12}$ અને $P(A/B) = \frac{1}{2}$ હોય, તો $P(A \cap B)$ અને $P(B)$ મેળવો.

અહીં $P(A') = \frac{7}{25}$, $P(B/A) = \frac{5}{12}$ અને $P(A/B) = \frac{1}{2}$ આપેલ છે.

$$P(A) = 1 - P(A')$$

$$= 1 - \frac{7}{25}$$

$$= \frac{18}{25}$$

$P(B/A)$ના સૂત્ર પરથી $P(A \cap B)$ મેળવીશું

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$\therefore \quad \frac{5}{12} = \frac{P(A \cap B)}{\frac{18}{25}}$$

$$\therefore \quad \frac{5}{12} \times \frac{18}{25} = P(A \cap B)$$

$$\therefore \quad P(A \cap B) = \frac{3}{10}$$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{3}{10}$

હવે $P(A/B)$ના સૂત્રમાં $P(A/B)$ અને $P(A \cap B)$ ની કિંમતો મૂકીને $P(B)$ મેળવીશું.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2} = \frac{\frac{3}{10}}{P(B)}$$

$$\therefore \quad P(B) = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{3 \times 2}{10 \times 1}$$

$$= \frac{3}{5}$$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{3}{5}$

ઉદાહરણ 30 : એક દવાની અસર જાણવા સસલા અને ઉંદરોના સમૂહ પર તેનું પરીક્ષણ કરવામાં આવે છે. 10 સસલાંના સમૂહને દવા આપતાં 7 સસલાં પર દવાની અસર થાય છે અને 9 ઉંદરોના સમૂહને દવા આપતાં 5 ઉંદરો પર દવાની અસર થાય છે તેમ નોંધાયું. બંને સમૂહમાંથી એક-એક પ્રાણીની યાદચ્છિક રીતે પસંદગી કરવામાં આવે છે. પસંદ કરેલા (1) બંને પ્રાણી પર દવાની અસર થઈ હોય અને (2) બે પ્રાણીઓ પૈકી એક પ્રાણી પર દવાની અસર થઈ હોય અને એક પ્રાણી પર દવાની અસર ન થઈ હોય તેની સંભાવના શોધો.

દવાની અસર થયેલ પ્રાણીઓ	દવાની અસર ન થયેલ પ્રાણીઓ
સસલાં 7	સસલાં 3
ઉંદર 5	ઉંદર 4
કુલ 12	**કુલ 7**

(1) સસલા પર દવાની અસર થઈ હોય તે ઘટના $= A$

ઉંદર પર દવાની અસર થઈ હોય તે ઘટના $= B$

$\therefore$ બંને પ્રાણીઓ પર દવાની અસર થઈ હોય તે ઘટના $= A \cap B$

અહીં A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે. સસલાં પર દવાની અસર થઈ હોય તેની અસર ઉંદર પર દવાની અસર થાય કે ન થાય તેના પર થાય નહિ. તેથી,

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

ઘટના A માટે કુલ પરિણામો $n = 10$ અને સાનુકૂળ પરિણામો $m = 7$ છે.

$\therefore$ ઘટના Aની સંભાવના $P(A) = \frac{m}{n}$

$= \frac{7}{10}$

ઘટના B માટે કુલ પરિણામો $n = 9$ અને સાનુકૂળ પરિણામો $m = 5$ છે.

$\therefore$ ઘટના Bની સંભાવના $P(B) = \frac{m}{n}$

$= \frac{5}{9}$

$\therefore P(A \cap B) = \frac{7}{10} \times \frac{5}{9}$

$= \frac{7}{18}$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{7}{18}$

(2) બે પ્રાણીઓ પૈકી એક પ્રાણી પર દવાની અસર થઈ હોય અને એક પ્રાણી પર દવાની અસર ન થઈ હોય તે ઘટનાને C કહીએ, તો ઘટના C નીચે મુજબ બની શકે :

સસલા પર દવાની અસર થઈ હોય (ઘટના A) અને ઉંદર પર દવાની અસર ન થઈ હોય (ઘટના B')

અથવા

સસલા પર દવાની અસર ન થઈ હોય (ઘટના A') અને ઉંદર પર દવાની અસર થઈ હોય (ઘટના B)

એટલે કે ઘટના $C = (A \cap B') \cup (A' \cap B)$

ઘટનાઓ $A \cap B'$ અને $A' \cap B$ પરસ્પર નિવારક હોવાથી

$P(C) = P(A \cap B') + P(A' \cap B)$

$= [P(A) \times P(B')] + [P(A') \times P(B)]$ ($\because$ A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે.)

અહીં $P(A') = 1 - P(A)$

$= 1 - \frac{7}{10}$

$= \frac{3}{10}$

$P(B') = 1 - P(B)$

$= 1 - \frac{5}{9}$

$= \frac{4}{9}$

$= [\frac{7}{10} \times \frac{4}{9}] + [\frac{3}{10} \times \frac{5}{9}]$

$= \frac{28}{90} + \frac{15}{90}$

$= \frac{43}{90}$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{43}{90}$

ઉદાહરણ 31 : એક કંપની કોઈ ચોક્કસ પ્રકારના એકમનું પોતાની બે અલગ-અલગ ફેક્ટરી A_1 અને A_2માં અનુક્રમે 60 % અને 40 %ના પ્રમાણમાં ઉત્પાદન કરે છે. બંને ફેક્ટરીનાં ઉત્પાદનમાં ખામી પ્રમાણ અનુક્રમે 2 % અને 3 % છે. બંને ફેક્ટરીમાં ઉત્પાદિત થયેલા એકમોને ભેગા કરી તેમાંથી યાદચ્છિક રીતે એક એકમ પસંદ કરવામાં આવે, તો તે એકમ ખામીવાળો હોવાની સંભાવના શોધો.

પસંદ થયેલ એકમ ફેક્ટરી A_1માં ઉત્પાદિત થયેલ હોય તો ઘટના = A_1

$$\therefore \; P(A_1) = \frac{60}{100}$$

$$= \frac{3}{5}$$

પસંદ થયેલ એકમ ફેક્ટરી A_2માં ઉત્પાદિત થયેલ હોય, તો ઘટના = A_2

$$\therefore \; P(A_2) = \frac{40}{100}$$

$$= \frac{2}{5}$$

કુલ ઉત્પાદનમાંથી પસંદ કરવામાં આવેલ એકમ ખામીવાળો હોય તે ઘટનાને D કહીએ,

પસંદ થયેલ એકમ ફેક્ટરી A_1માં ઉત્પાદિત થયેલ હોય, તો તે ખામીવાળો હોય તે ઘટના = D/A_1

$$\therefore \; P(D/A_1) = \frac{2}{100}$$

$$= \frac{1}{50}$$

પસંદ થયેલ એકમ ફેક્ટરી A_2માં ઉત્પાદિત થયેલ હોય, તો તે ખામીવાળો હોય તે ઘટના = D/A_2

$$\therefore \; P(D/A_2) = \frac{3}{100}$$

ઘટના D નીચે મુજબ બની શકે.

પસંદ થયેલ એકમ ફેક્ટરી A_1માં ઉત્પાદિત થયેલ હોય અને તે ખામીવાળો હોય

અથવા

પસંદ થયેલ એકમ ફેક્ટરી A_2માં ઉત્પાદિત થયેલ હોય અને તે ખામીવાળો હોય

એટલે કે ઘટના $D = (A_1 \cap D) \cup (A_2 \cap D)$

ઘટના $A_1 \cap D$ અને $A_2 \cap D$ પરસ્પર નિવારક હોવાથી,

$$P(D) = P(A_1 \cap D) + P(A_2 \cap D)$$

$$= \left[P(A_1) \times P(D/A_1)\right] + \left[P(A_2) \times P(D/A_2)\right]$$

$$= \left[\frac{3}{5} \times \frac{1}{50}\right] + \left[\frac{2}{5} \times \frac{3}{100}\right]$$

$= \frac{3}{250} + \frac{6}{500}$

$= \frac{12}{500}$

$= \frac{3}{125}$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{3}{125}$

ઉદાહરણ 32 : એક પેટીમાં 12 સ્ક્રૂ છે જે પૈકી 4 સ્ક્રૂ ખામીવાળા છે. આ પેટીમાંથી એક પછી એક એમ બે સ્ક્રૂ પુરવણી રહિત પદ્ધતિથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ કરેલ બંને સ્ક્રૂ ખામીવાળા હોવાની સંભાવના શોધો.

અહીં પેટીમાં કુલ 12 સ્ક્રૂ છે જે પૈકી 4 સ્ક્રૂ ખામીવાળા છે. તેથી ખામી રહિત સ્ક્રૂની સંખ્યા 8 થશે.

પ્રથમ સ્ક્રૂ પસંદ કરવાના પરસ્પર નિવારક, નિઃશેષ અને સમસંભાવી પરિણામોની કુલ સંખ્યા $n = {}^{12}C_1 = 12$ થાય.

પસંદ થયેલ પ્રથમ સ્ક્રૂ ખામીવાળો હોય તે ઘટનાને A કહીએ, તો ઘટના Aને સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા $m = {}^{4}C_1 = 4$ થાય.

ઘટના A ની સંભાવના $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{12}$

અહીં પસંદગી પુરવણી રહિત છે એટલે કે પ્રથમ વખતે પસંદ થયેલ સ્ક્રૂને પેટીમાં પરત મૂકવામાં આવતો નથી. તેથી બીજો સ્ક્રૂ પસંદ કરવાના પરસ્પર નિવારક, નિઃશેષ અને સમસંભાવી પરિણામોની કુલ સંખ્યા $n = {}^{11}C_1 = 11$ થાય.

પસંદ થયેલ બીજો સ્ક્રૂ ખામીવાળો હોય તે ઘટનાને B કહીએ.

ઘટના A બની ગઈ છે તે શરત હેઠળ ઘટના B બને છે. એટલે કે શરતી ઘટના B/A બને છે.

ઘટના A અગાઉ બની હોવાથી પેટીમાં 3 સ્ક્રૂ ખામીવાળા રહેશે તેથી

ઘટના B/Aને સાનુકૂળ પરિણામો $m = {}^{3}C_1 = 3$ થાય.

ઘટના B/Aની સંભાવના $P(B/A) = \frac{m}{n}$

$= \frac{3}{11}$

હવે $A \cap B$ = બંને સ્ક્રૂ ખામીવાળા હોય તે ઘટના

સંભાવનાના ગુણાકારના નિયમ મુજબ,

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$

$= \frac{4}{12} \times \frac{3}{11}$

$= \frac{1}{11}$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{1}{11}$

ઉદાહરણ 33 : એક મિત્રવર્તુળમાં 3 છોકરાઓ અને 2 છોકરીઓ છે. આ મિત્રવર્તુળમાંથી એક પછી એક એમ બે વ્યક્તિઓને ગીત ગાવા માટે પુરવણી સહિત યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. ગીત ગાવા માટે પસંદ થયેલ બે વ્યક્તિઓમાં પ્રથમ વ્યક્તિ છોકરો અને બીજી વ્યક્તિ છોકરી હોવાની સંભાવના શોધો.

અહીં મિત્રવર્તુળમાં 3 છોકરાઓ અને 2 છોકરીઓ એમ કુલ 5 વ્યક્તિઓ છે. ગીત ગાવા માટે તેમાંથી એક પછી એક એમ બે વ્યક્તિઓ પુરવણી સહિત પસંદ કરવામાં આવે છે. એટલે કે બીજી વ્યક્તિની પસંદગી કરતાં પહેલાં પ્રથમ વખતે પસંદ થયેલ વ્યક્તિને સમૂહમાં પરત મોકલવામાં આવે છે. તેથી એક પછી એક એમ બે વ્યક્તિઓની પસંદગીની ઘટનાઓ નિરપેક્ષ ઘટનાઓ થશે. પ્રથમ વ્યક્તિ પસંદ કરવાના પરસ્પર નિવારક, નિઃશેષ અને સમસંભાવી પરિણામોની કુલ સંખ્યા $n = {}^5C_1 = 5$ થાય.

ગીત ગાવા માટે પસંદ થયેલ પ્રથમ વ્યક્તિ છોકરો હોય તે ઘટના $= A$

ઘટના Aને સાનુકૂળ પરિણામો $m = {}^3C_1 = 3$

ઘટના Aની સંભાવના $P(A) = \frac{m}{n}$

$= \frac{3}{5}$

અહીં પસંદગી પુરવણી સહિત છે એટલે કે પ્રથમ પ્રયત્ને પસંદ થયેલ વ્યક્તિને સમૂહમાં પરત મોકલવામાં આવે છે. તેથી બીજી વ્યક્તિ પસંદ કરવાના પરસ્પર નિવારક, નિઃશેષ અને સમસંભાવી પરિણામોની કુલ સંખ્યા $n = {}^5C_1$ થાય.

ગીત ગાવા માટે પસંદ થયેલી બીજી વ્યક્તિ છોકરી હોય તે ઘટના $= B$

ઘટના Bને સાનુકૂળ પરિણામો $m = {}^2C_1 = 2$

ઘટના Bની સંભાવના $P(B) = \frac{m}{n}$

$= \frac{2}{5}$

હવે, $A \cap B$ = ગીત ગાવા માટે પસંદ થયેલ બે વ્યક્તિઓમાં પ્રથમ છોકરો અને બીજી છોકરી હોય તેવી ઘટના

ઘટનાઓ A અને B નિરપેક્ષ હોવાથી,

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$= \frac{3}{5} \times \frac{2}{5}$

$= \frac{6}{25}$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{6}{25}$

ઉદાહરણ 34 : બે સમતોલ પાસા એક સાથે ઉછાળવામાં આવે છે. બે પાસામાંથી ઓછામાં ઓછા એક પાસા પર અંક 3 મળે તેની સંભાવના શોધો.

પ્રથમ પાસા પર અંક 3 મળે તે ઘટના $= A$

બીજા પાસા પર અંક 3 મળે તે ઘટના $= B$

ઓછામાં ઓછા એક પાસા પર અંક 3 મળે તે ઘટના $= A \cup B$

ઘટના Aને સાનુકૂળ પરિણામો $m=1$

ઘટના Aની સંભાવના $P(A)=\frac{m}{n}$

$=\frac{1}{6}$

ઘટના Bને સાનુકૂળ પરિણામો $m=1$

ઘટના Bની સંભાવના $P(B)=\frac{m}{n}$

$=\frac{1}{6}$

હવે ઘટનાઓ A અને B નિરપેક્ષ હોવાથી ઘટનાઓ A' અને B' પણ નિરપેક્ષ થાય. ઉપરાંત

$P(A')=1-P(A)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$ અને $P(B')=1-P(B)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$ થાય.

ઓછામાં ઓછા એક પાસા પર પૂર્ણાંક 3 મળે તે ઘટનાની સંભાવના $=P(A\cup B)$

$=1-P(A'\cap B')$

$=1-[P(A')\times P(B')]$

$=1-\left[\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\right]$

$=1-\frac{25}{36}$

$=\frac{11}{36}$

માંગેલી સંભાવના $=\frac{11}{36}$

ઉદાહરણ 35 : ચોમાસાની ઋતુમાં અલગ-અલગ રાજ્યનાં બે શહેરો A અને Bમાં અનુક્રમે 60 % અને 75 % દિવસોમાં વરસાદ પડે છે. આ બે શહેરો માટે ચોમાસાની ઋતુમાં કોઈ એક દિવસે શહેર A અને B પૈકી

(1) બંને શહેરોમાં વરસાદ પડે.

(2) ઓછામાં ઓછા એક શહેરમાં વરસાદ પડે

(3) ફક્ત એક જ શહેરમાં વરસાદ પડે તેની સંભાવના શોધો

નોંધ : બંને શહેરોમાં એક જ દિવસે વરસાદ પડે તે ઘટનાઓ નિરપેક્ષ છે.

શહેર Aમાં વરસાદ પડે તેને ઘટના A અને શહેર Bમાં વરસાદ પડે તેને ઘટના B વડે દર્શાવીએ, તો આપેલી માહિતીને નીચે મુજબ રજૂ કરી શકાય :

$P(A)=\frac{60}{100}=\frac{3}{5}$ $\quad\therefore P(A')=1-P(A)=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

$P(B)=\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$ $\quad\therefore P(B')=1-P(B)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

(1) શહેર A અને B પૈકી બંને શહેરોમાં વરસાદ પડે તે ઘટના $A\cap B$

ઘટનાઓ A અને B નિરપેક્ષ હોવાથી

ઘટના $A\cap B$ની સંભાવના $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

$=\frac{3}{5}\times\frac{3}{4}$

$=\frac{9}{20}$

માંગેલી સંભાવના $=\frac{9}{20}$

(2) શહેર A અને B પૈકી ઓછામાં ઓછા એક શહેરમાં વરસાદ પડે તે ઘટના $= A \cup B$

ઘટના $A \cup B$ ની સંભાવના $P(A \cup B) = 1 - P(A' \cap B')$

$$= 1 - [P(A') \times P(B')]$$

$$= 1 - \left[\frac{2}{5} \times \frac{1}{4}\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{10}$$

$$= \frac{9}{10}$$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{9}{10}$

(3) શહેર A અને B પૈકી એક જ શહેરમાં વરસાદ પડે તે ઘટના $= (A \cap B') \cup (A' \cap B)$

ઘટનાઓ A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય, તો A અને B' તથા A' અને B પણ નિરપેક્ષ ઘટનાઓ થાય.

ઘટના $(A \cap B') \cup (A' \cap B)$ ની સંભાવના $= P(A \cap B') + P(A' \cap B)$

$$= [P(A) \times P(B')] + [P(A') \times P(B)]$$

$$= \left[\frac{3}{5} \times \frac{1}{4}\right] + \left[\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}\right]$$

$$= \frac{3}{20} + \frac{6}{20}$$

$$= \frac{9}{20}$$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{9}{20}$

સ્વાધ્યાય 1.4

1. એક કુટુંબમાં બે બાળકો છે. જો પહેલું બાળક છોકરી હોય, તો તે કુટુંબનાં બંને બાળકો છોકરીઓ હોય તેની સંભાવના શોધો.

2. છ બાજુવાળા બે સમતોલ પાસા એક સાથે ઉછાળવામાં આવે છે. જો બંને પાસા પરના અંકનો સરવાળો 7થી મોટો હોય, તો બંને પાસા પર સરખા જ અંક મળે તેની સંભાવના શોધો.

3. પેટ્રોલ પંપ પર આવતાં વિવિધ વાહનચાલકો પૈકી 80 % વાહનચાલકો પોતાના વાહનમાં પેટ્રોલ પુરાવવા આવે છે અને 60 % વાહનચાલકો પોતાના વાહનમાં હવા પુરાવવા આવે છે. 50 % વાહનચાલકો પોતાના વાહનમાં પેટ્રોલ અને હવા બંને પુરાવવા આવે છે. નીચેની ઘટનાઓની સંભાવના મેળવો :

(1) કોઈ વાહનચાલક પોતાના વાહનમાં પેટ્રોલ પુરાવવા આવેલ છે તો તે વાહનચાલક પોતાના વાહનમાં હવા પુરાવે

(2) કોઈ વાહનચાલક પોતાના વાહનમાં હવા પુરાવવા આવેલ છે તો તે વાહનચાલક પોતાના વાહનમાં પેટ્રોલ પુરાવે

4. એક રાષ્ટ્રીયકૃત બૅન્કમાં 80 % ગ્રાહકો બચતખાતું ધરાવે છે અને 50 % ગ્રાહકો ચાલુખાતું ધરાવે છે. 90 % ગ્રાહકો બચતખાતાં અને ચાલુખાતાંમાંથી ઓછામાં ઓછું એક ખાતું ધરાવે છે. આ બૅન્કના ખાતા ધારકોમાંથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ એક ગ્રાહક ચાલુખાતું ધરાવે છે, તો તે બચતખાતું ધરાવતો હોય તેની સંભાવના શોધો.

5. એક યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશની કોઈ બે ઘટનાઓ માટે $P(A)=\frac{2}{3}$, $P(B)=\frac{3}{5}$ અને $P(B/A) = \frac{3}{4}$ હોય તો $P(A/B)$ મેળવો.

6. જો ઘટનાઓ A, M અને F માટે $P(M)=P(F)=\frac{1}{2}$ હોય તથા $P(A/M)=\frac{1}{10}$ અને $P(A/F)=\frac{1}{2}$ હોય તો $P(A\cap M)$ અને $P(A\cap F)$ શોધો.

7. એક પેટીમાં 2 સોનાના અને 4 ચાંદીના સિક્કા છે. જ્યારે બીજી પેટીમાં 3 સોનાના અને 5 ચાંદીના સિક્કા છે. પ્રત્યેક પેટીમાંથી યાદચ્છિક રીતે એક-એક સિક્કો પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ થયેલા બે સિક્કામાં એક સિક્કો સોનાનો અને એક સિક્કો ચાંદીનો હોવાની સંભાવના શોધો.

8. એક સંયુક્ત કુટુંબમાં 3 છોકરાઓ અને 2 છોકરીઓ છે જ્યારે બીજા સંયુક્ત કુટુંબમાં 2 છોકરાઓ અને 4 છોકરીઓ છે. આ બે સંયુક્ત કુટુંબોમાંથી એક સંયુક્ત કુટુંબ પસંદ કરી તેમાંથી યાદચ્છિક રીતે એક બાળક પસંદ કરવામાં આવે, તો તે બાળક છોકરી હોવાની સંભાવના શોધો.

9. એક બૉક્સમાં 10 આઇસક્રીમના કોન છે જે પૈકી 3 કોનનું વજન નિયત કરેલ વજન કરતાં ઓછું છે અને બાકીના 7 કોનનું વજન નિયત કરેલ વજન બરાબર છે. આ બૉક્સમાંથી એક પછી એક એમ બે કોન પુરવણી સહિત પદ્ધતિથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ કરેલ બંને કૉન નિયત કરેલ વજન કરતાં ઓછા વજન વાળા હોવાની સંભાવના શોધો.

10. ફિલ્મી સી.ડી. મૂકવાના એક રૅકમાં કુલ 10 સી.ડી. છે જે પૈકી 6 સી.ડી. એક્શન ફિલ્મની અને 4 સી.ડી. ડ્રામા ફિલ્મની છે. આ રૅકમાંથી એક પછી એક એમ બે સી.ડી. પુરવણી રહિત પદ્ધતિથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ થયેલ બે સી.ડી.માં પ્રથમ સી.ડી. એક્શન ફિલ્મની અને બીજી સી.ડી. ડ્રામા ફિલ્મની હોય તેની સંભાવના શોધો.

11. બે સમતોલ પાસા એક સાથે ઉછાળવામાં આવે તો,
    (1) ઓછામાં ઓછા એક પાસા પર અંક 5 મળે તેની સંભાવના શોધો.
    (2) પહેલાં પાસા પર અંક 5 કે 6 મળે અને બીજા પાસા પર યુગ્મ પૂર્ણાંક મળે તેની સંભાવના શોધો.

12. સંભાવનાનો એક દાખલો તાનિયા, કથન અને કીર્તિને ગણવા આપવામાં આવે છે. તેઓ દાખલો સાચો ગણી શકે તેની સંભાવનાઓ અનુક્રમે $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ અને $\frac{1}{2}$ છે. દાખલો સાચો ગણાય તેની સંભાવના શોધો.

13. વ્યક્તિ A એ 5માંથી 3 પ્રયત્નોમાં નિશાન વીંધી શકે છે જ્યારે વ્યક્તિ B એ 6 માંથી 5 પ્રયત્નોમાં નિશાન વીંધી શકે છે. જો બંને વ્યક્તિઓ એક સાથે નિશાન તાકે તો તે નિશાન વિંધાય તેની સંભાવના શોધો.

14. વ્યક્તિ A એ 90 % કિસ્સાઓમાં સાચું બોલે છે જ્યારે વ્યક્તિ B એ 80 % કિસ્સાઓમાં સાચું બોલે છે. વ્યક્તિઓ A અને B એક જ હકીકત રજૂ કરવામાં જુદા પડે તેની સંભાવના શોધો.

15. જો યાદચ્છિક પ્રયોગની ત્રણ ઘટનાઓ A અને B અને C નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય અને $P(A)=0.2, P(B)=0.3$ તથા $P(C)=0.5$ હોય, તો $P(A\cup B\cup C)$ શોધો.

*

1.7 સંભાવનાની આંકડાશાસ્ત્રીય વ્યાખ્યા

અગાઉ આપણે સંભાવનાની ગાણિતિક વ્યાખ્યા જોઈ. આ વ્યાખ્યાની મદદથી યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશનાં પરિણામો સમસંભાવી હોય અને તેની સંખ્યા જ્ઞાત હોય તેવા કિસ્સામાં જ સંભાવના મેળવી શકાય છે પરંતુ વ્યવહારમાં એવા અનેક કિસ્સા જોવા મળે છે કે જેમાં નિદર્શ અવકાશના પરિણામો અનંત અથવા અજ્ઞાત હોય છે. દા.ત., એક વિશાળ તળાવમાં જુદી-જુદી જાતની અનેક માછલીઓ છે. એક માછીમાર તળાવમાં માછલી પકડવા માટે જાળ નાંખે તો તેમાં ચોક્કસ જાતની માછલી પકડાય તેની સંભાવના શોધવી છે. અહીં તળાવમાં કુલ કેટલી માછલીઓ છે તે અજ્ઞાત હોવાથી સંભાવનાની ગાણિતિક વ્યાખ્યાથી સંભાવના શોધી શકાય નહિ. ઉપરાંત વ્યવહારમાં ઘણા કિસ્સા એવા પણ જોવા મળે છે કે નિદર્શ અવકાશનાં પરિણામો સમસંભાવી ન હોય. દા.ત., એક વેપારી પોતાની વખારમાંથી અમુક માલ પોતાના વેચાણ કેન્દ્ર પર મંગાવે છે. આ માલ વેચાણકેન્દ્ર પર સહીસલામત પહોંચે તે ઘટના અને સહીસલામત ન પહોંચે તે ઘટના સમસંભાવી ઘટનાઓ નથી. આવા કિસ્સામાં ગાણિતિક વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરીને સંભાવનાની ગણતરી કરી શકાતી નથી. આ સંજોગોમાં સામાન્ય રીતે ખૂબ જ ઉપયોગમાં આવતી સંભાવનાની અન્ય વ્યાખ્યા જે સાંખ્યિકીય કે આંકડાશાસ્ત્રીય વ્યાખ્યા તરીકે ઓળખાય છે તે વિશે જોઈએ.

પ્રથમ આપણે એક ઉદાહરણ જોઈએ. લાંબા સમયથી તૈયાર કપડાંનું વેચાણ કરતા એક શો-રૂમની મુલાકાત લેતો ગ્રાહક ખરીદી કરશે તેની સંભાવના આપણે શોધવી છે. તે જાણવા માટે આપણે શો-રૂમમાંથી ખરીદી કરતા ગ્રાહકો વિશેની માહિતી મેળવવી જોઈએ. આ માહિતી નિદર્શ તપાસ દ્વારા મેળવી શકાય. જેમ નિદર્શનું કદ મોટું તેમ નિદર્શ તપાસની માહિતી (સમષ્ટિની) સાચી માહિતીની વધુ નજીક છે એમ આપણે કહી શકીએ. ધારો કે 100 ગ્રાહકોની નિદર્શ તપાસમાં 79 ગ્રાહકોએ ખરીદી કરી છે તેમ નોંધાયું. નિદર્શ તપાસમાં ગ્રાહકોની સંખ્યા 500 હોય ત્યારે ખરીદી કરતાં 403 ગ્રાહકો નોંધાયા. આ રીતે નિદર્શનું કદ (n) વધારતાં મળેલી માહિતી નીચે પ્રમાણે છે :

નિદર્શનું કદ n (શો-રૂમની મુલાકાત લેતાં ગ્રાહકોની સંખ્યા)	ખરીદી કરતાં ગ્રાહકોની સંખ્યા r (આવૃત્તિ)	ખરીદી કરતાં ગ્રાહકોનું પ્રમાણ $\frac{r}{n}$ (સાપેક્ષ આવૃત્તિ)
100	79	0.79
500	403	0.806
1000	799	0.799
5000	3991	0.7982
10,000	8014	0.8014

ઉપરની માહિતી પરથી જણાય છે કે, જેમ નિદર્શનું કદ n મોટું થતું જાય છે તેમ તૈયાર કપડાં ખરીદનાર ગ્રાહકોનું પ્રમાણ એટલે કે સાપેક્ષ આવૃત્તિ 0.8ની નજીકની કિંમત ધારણ કરે છે. આ કિંમતને આપણે શો-રૂમની મુલાકાત લેતો ગ્રાહક ખરીદી કરશે તે ઘટનાની સંભાવના તરીકે સ્વીકારી શકીએ. આમ, અહીં સાપેક્ષ આવૃત્તિના સ્વરૂપમાં સંભાવના મેળવવામાં આવે છે. સંભાવનાની સાપેક્ષ આવૃત્તિ આધારિત વ્યાખ્યાને સંભાવનાની સાંખ્યિકીય કે આંકડાશાસ્ત્રીય વ્યાખ્યા (Statistical Definition) કહે છે. તેને પ્રાયોગિક કે આનુભવિક વ્યાખ્યા (Emperical Definition) પણ કહેવાય છે.

આ વ્યાખ્યા નીચે મુજબ છે :

ધારો કે સમાન પરિસ્થિતિમાં કોઈ યાદચ્છિક પ્રયોગનું n વખત પુનરાવર્તન કરવામાં આવે છે. આ n પ્રયત્નો પૈકી m પ્રયત્નોમાં ઘટના A બને છે, તો ઘટના Aની સાપેક્ષ આવૃત્તિ $\frac{m}{n}$ ઘટના A બનવાની સંભાવના $P(A)$નો અંદાજ આપે છે. જ્યારે nની કિંમત વધુ ને વધુ મોટી લેવામાં આવે એટલે કે nની કિંમત અનંત તરફ $(n \to \infty)$ જાય ત્યારે $\frac{m}{n}$ની લક્ષિત કિંમતને ઘટના Aની સંભાવના કહે છે.

સંકેતમાં,

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}$$

અહીં $\lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}$ એ nની અનંત કિંમત માટે ગુણોત્તર $\frac{m}{n}$ની લક્ષિત કિંમત દર્શાવે છે. વ્યવહારમાં આ સાપેક્ષ આવૃત્તિ $\frac{m}{n}$ને જ ઘટના Aની સંભાવના તરીકે લેવાય છે. હવે આપણે સંભાવનાની આંકડાશાસ્ત્રીય વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ દર્શાવતાં ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 36 : 100 ગુણની એક જાહેર પરીક્ષામાં બેઠેલા ઉમેદવારોના વિશાળ સમૂહમાંથી તેમણે મેળવેલ ગુણની નિદર્શ માહિતી નીચેના કોષ્ટમાં આપેલી છે :

ગુણ	20 કે તેથી ઓછા	21–40	41–60	61–80	81–100
ઉમેદવારોની સંખ્યા	83	162	496	326	124

જાહેર પરીક્ષામાં બેઠેલા એક ઉમેદવારની યાદચ્છિક રીતે પસંદગી કરવામાં આવે છે. આ ઉમેદવારે

(1) 41થી ઓછા

(2) 60થી વધુ

(3) 21થી 80 સુધીમાં ગુણ મેળવ્યા હોય તેની સંભાવના શોધો.

અહીં નિદર્શમાં પસંદ કરેલ ઉમેદવારોની કુલ સંખ્યા $n = 83 + 162 + 496 + 326 + 124 = 1191$ છે.

(1) ઘટના $A =$ પસંદ કરેલ ઉમેદવારના 41થી ઓછા ગુણ હોય.

$P(A) =$ 41થી ઓછા ગુણ મેળવનાર ઉમેદવારોની સાપેક્ષ આવૃત્તિ

$$= \frac{\text{41 થી ઓછા ગુણ મેળવનાર ઉમેદવારની સંખ્યા}}{\text{નિદર્શના ઉમેદવારોની કુલ સંખ્યા}} = \frac{m}{n}$$

$m =$ 41થી ઓછા ગુણ મેળવનાર ઉમેદવારોની સંખ્યા

$= 83 + 162$

$= 245$

હવે, $P(A) = \frac{m}{n}$

$= \frac{245}{1191}$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{245}{1191}$

(2) ઘટના B = પસંદ કરેલ ઉમેદવારના 60થી વધુ ગુણ હોય

$P(B) = 60$ થી વધુ ગુણ મેળવનાર ઉમેદવારોની સાપેક્ષ આવૃત્તિ

$$= \frac{\text{60 થી વધુ ગુણ મેળવનાર ઉમેદવારોની સંખ્યા}}{\text{નિદર્શન ઉમેદવારોની કુલ સંખ્યા}} = \frac{m}{n}$$

$m = 60$થી વધુ ગુણ મેળવનાર ઉમેદવારોની સંખ્યા

$= 326 + 124$

$= 450$

હવે, $P(B) = \frac{m}{n}$

$= \frac{450}{1191}$

$= \frac{150}{397}$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{150}{397}$

(3) ઘટના C = પસંદ કરેલ ઉમેદવારના 21થી 80 સુધી ગુણ હોય

$P(C)$ = 21થી 80 સુધી ગુણ મેળવનાર ઉમેદવારોની સાપેક્ષ આવૃત્તિ

$$= \frac{\text{21થી 80 સુધી ગુણ મેળવનાર ઉમેદવારોની સંખ્યા}}{\text{નિદર્શના ઉમેદવારોની કુલ સંખ્યા}} = \frac{m}{n}$$

m = 21થી 80 સુધી ગુણ મેળવનાર ઉમેદવારોની સંખ્યા

$= 162 + 496 + 326$

$= 984$

હવે, $P(C) = \frac{m}{n}$

$= \frac{984}{1191}$

$= \frac{328}{397}$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{328}{397}$

ઉદાહરણ 37 : એક કારખાનામાં બે પાળી ચાલે છે. આ પાળીમાં ઉત્પાદિત એકમોની ગુણવત્તાની નિદર્શ માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે :

ગુણવત્તા	પાળી		કુલ
	I	II	
ખામીવાળા એકમો	24	46	**70**
ખામીરહિત એકમો	2176	2754	**4930**
કુલ	**2200**	**2800**	**5000**

કારખાનાનાં ઉત્પાદનમાંથી એક એકમ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે.

(1) જો એકમ પહેલી પાળીના ઉત્પાદનમાંથી મેળવેલો હોય, તો તે ખામીવાળો હોય તેની સંભાવના શોધો.

(2) જો એકમ ખામીવાળો હોય તો તે પહેલી પાળીના ઉત્પાદનમાંથી મેળવેલો હોય તેની સંભાવના શોધો.

અહીં નિદર્શમાં પસંદ કરેલા એકમોની કુલ સંખ્યા = 5000

આપણે નીચે જણાવ્યા પ્રમાણે ઘટનાઓ વ્યાખ્યાયિત કરીએ :

ઘટના A = પસંદ કરેલ એકમ પહેલી પાળીના ઉત્પાદનમાંથી મેળવેલ હોય.

$P(A)$ = પહેલી પાળીના ઉત્પાદનના એકમોની સાપેક્ષ આવૃત્તિ

$$= \frac{\text{પહેલી પાળીના ઉત્પાદનમાં મળેલ એકમો}}{\text{નિદર્શના એકમોની કુલ સંખ્યા}} = \frac{m}{n}$$

m = પહેલી પાળીના ઉત્પાદનમાં મળેલ એકમો

= 2200

હવે, $P(A) = \frac{m}{n}$

$$= \frac{2200}{5000}$$

ઘટના D = પસંદ કરેલ એકમ ખામીવાળો હોય

$P(D)$ = ખામીવાળા એકમની સાપેક્ષ આવૃત્તિ

$$= \frac{\text{ખામીવાળા એકમોની સંખ્યા}}{\text{નિદર્શના એકમોની કુલ સંખ્યા}} = \frac{m}{n}$$

m = ખામીવાળા એકમોની સંખ્યા

= 70

હવે, $P(D) = \frac{m}{n}$

$$= \frac{70}{5000}$$

ઘટના $A \cap D$ = પસંદ કરેલ એકમ પહેલી પાળીના ઉત્પાદનમાંથી મેળવેલ હોય અને તે ખામીવાળો હોય.

$P(A \cap D)$ = ઘટના $A \cap D$ ની સાપેક્ષ આવૃત્તિ

$$= \frac{\text{ઘટના } A \cap D \text{ માં આવતા એકમોની સંખ્યા}}{\text{નિદર્શના એકમોની કુલ સંખ્યા}} = \frac{m}{n}$$

m = ઘટના $A \cap D$ માં આવતા એકમોની સંખ્યા

= 24

હવે, $P(A \cap D) = \frac{m}{n} = \frac{24}{5000}$

(1) એકમ પહેલી પાળીના ઉત્પાદનમાંથી મેળવેલો હોય તો તે ખામીવાળો હોય તે ઘટના = D/A

શરતી સંભાવનાની વ્યાખ્યા મુજબ ઘટના D/Aની સંભાવના

$$P(D/A) = \frac{P(A \cap D)}{P(A)}$$

$$= \frac{\frac{24}{5000}}{\frac{2200}{5000}}$$

$$= \frac{24}{2200}$$

$$= \frac{3}{275}$$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{3}{275}$

(આ સંભાવના સીધી જ D/A ઘટનાની સાપેક્ષ આવૃત્તિ $\frac{24}{2200}$ પરથી પણ મેળવી શકાય.)

(2) એકમ ખામીવાળો હોય તો તે પહેલી પાળીના ઉત્પાદનમાંથી મેળવેલો હોય તે ઘટના A/D શરતી સંભાવનાની વ્યાખ્યા મુજબ ઘટના A/Dની સંભાવના

$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)}$$

$$= \frac{\frac{24}{5000}}{\frac{70}{5000}}$$

$$= \frac{24}{70}$$

$$= \frac{12}{35}$$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{12}{35}$

(આ સંભાવના સીધી જ A/D ઘટનાની સાપેક્ષ આવૃત્તિ $\frac{24}{70}$ પરથી પણ મેળવી શકાય.)

મર્યાદા : સંભાવનાની આંકડાશાસ્ત્રીય વ્યાખ્યાની મર્યાદાઓ નીચે મુજબ છે :

(1) સંભાવનાની આંકડાશાસ્ત્રીય વ્યાખ્યામાં $n \to \infty$ એટલે કે nની કિંમત અનંતને અનુલક્ષે ત્યારે જ સંભાવનાની કિંમત મળે છે પરંતુ વ્યવહારમાં nની કિંમત અનંત લઈ શકાય નહિ.

(2) આ વ્યાખ્યાથી મળતી કોઈપણ ઘટનાની સંભાવના એ અંદાજિત કિંમત છે. આ વ્યાખ્યાની મદદથી સંભાવનાની સાચી કિંમત જાણી શકાતી નથી.

સ્વાધ્યાય 1.5

1. એક મેગા સિટીમાં લોકલ બસમાં પ્રવાસ કરતાં પ્રવાસીઓના વિશાળ સમૂહમાંથી તેમણે કરેલા માસિક પ્રવાસ-ખર્ચની (₹ માં) નિદર્શ માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલી છે :

માસિક પ્રવાસ-ખર્ચ (₹)	501–600	601–700	701–800	801–900	901 કે તેથી વધુ
પ્રવાસીઓની સંખ્યા	318	432	639	579	174

આ મેગા સિટીમાંથી લોકલ બસમાં પ્રવાસ કરતાં એક વ્યક્તિને યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. આ વ્યક્તિનો માસિક પ્રવાસ-ખર્ચ (1) ₹ 900થી વધુ હોય (2) વધુમાં વધુ ₹ 700 હોય અને (3) ₹ 601 કે તેથી વધુ પરંતુ ₹ 900 કે તેથી ઓછો હોવાની સંભાવના શોધો.

2. એક મત-વિસ્તારના 4979 મતદારોની નિદર્શ તપાસમાં નીચેની વીગત મળે છે :

વીગત	પુરુષો	સ્ત્રીઓ
પક્ષ *A*ના ટેકેદાર	1319	1118
પક્ષ *B*ના ટેકેદાર	1217	1325

આ મત-વિસ્તારમાંથી એક મતદારને યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે.

(1) જો મતદાર પુરુષ હોય તો તે પક્ષ Aનો ટેકેદાર હોય તેની સંભાવના શોધો.

(2) જો મતદાર પક્ષ Aનો ટેકેદાર છે એમ આપેલ હોય, તો તે પુરુષ હોવાની સંભાવના શોધો.

*

સારાંશ

- ચાન્સ પર આધાર રાખતી ઘટનાઓને યાદચ્છિક ઘટનાઓ કહે છે.
- જે પ્રયોગનું નિરપેક્ષ રીતે સમાન સંજોગોમાં પુનરાવર્તન કરી શકાતું હોય અને તે પ્રયોગનાં બધાં જ શક્ય પરિણામો જ્ઞાત હોય પરંતુ તે પૈકી કયું ચોક્કસ પરિણામ મળશે તેનું નિશ્ચિત અનુમાન પ્રયોગ પૂર્વે કરી શકાતું ન હોય તેવા પ્રયોગને યાદચ્છિક પ્રયોગ કહે છે.
- કોઈપણ યાદચ્છિક પ્રયોગનાં શક્ય તમામ પરિણામોના ગણને તે યાદચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ કહે છે.
- યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશના ઉપગણને તે યાદચ્છિક પ્રયોગની ઘટના કહે છે.
- U એ સાન્ત નિદર્શ અવકાશ છે અને A તથા B તેની કોઈ બે ઘટનાઓ છે. ઘટના A અને B બંને એક સાથે બની જ ન શકે એટલે કે $A \cap B = \phi$ હોય, તો ઘટનાઓ A અને B પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ કહેવાય.
- જો યાદચ્છિક પ્રયોગની ઘટનાઓનાં શક્ય પરિણામોનો સમૂહ નિદર્શ અવકાશ થાય તો તે ઘટનાઓને નિઃશેષ ઘટનાઓ કહેવાય.
- પ્રાથમિક ઘટનાઓ પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ હોય છે.
- કોઈ યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશની બે કે તેથી વધુ ઘટનાઓ પૈકી એક ઘટના બનવાની શક્યતા બીજી કોઈપણ ઘટના બનવાની શક્યતા કરતાં વધુ કે ઓછી હોવાનું કોઈ દેખીતું કારણ ન હોય તેવી ઘટનાઓને સમસંભાવી ઘટનાઓ કહે છે.
- કોઈ યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશ U ના પરસ્પર નિવારક, નિઃશેષ અને સમસંભાવી પરિણામોની કુલ સંખ્યા n છે. તે પૈકી કોઈ ઘટના A બનવાને સાનુકૂળ પરિણામો m હોય, તો ઘટના Aની સંભાવના $\frac{m}{n}$ થાય.
- નિદર્શ અવકાશ Uની કોઈપણ ઘટના Aની સંભાવના $P(A)$ની કિંમતનો વિસ્તાર 0 થી 1 સુધીનો છે. એટલે કે, $0 \le P(A) \le 1$
- U એ સાન્ત નિદર્શ અવકાશ છે તથા A અને B તેની કોઈ બે ઘટનાઓ છે. જો ઘટના A બનવાની સંભાવના ઘટના B બનવા (કે ન બનવા)થી બદલાતી ન હોય, તો A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે.
- ધારો કે સમાન પરિસ્થિતિમાં કોઈ યાદચ્છિક પ્રયોગનું n વખત પુનરાવર્તન કરવામાં આવે છે. આ n પ્રયત્નો પૈકી m પ્રયત્નોમાં ઘટના A બને છે, તો ઘટના Aની સાપેક્ષ આવૃત્તિ $\frac{m}{n}$ ઘટના A બનવાની સંભાવના $P(A)$નો અંદાજ આપે છે. જ્યારે nની કિંમત વધુ ને વધુ મોટી લેવામાં આવે એટલે કે nની કિંમત અનંત તરફ $(n \to \infty)$ જાય ત્યારે $\frac{m}{n}$ની લક્ષિત કિંમતને ઘટના Aની સંભાવના કહે છે.

સૂત્રોની યાદી :

(1) ઘટના Aની પૂરક ઘટના $A' = U - A$

(2) ઘટના A અને Bની તફાવત ઘટના $A - B = A \cap B' = A - (A \cap B)$ (ફક્ત ઘટના A બને)

(3) ઘટના B અને Aની તફાવત ઘટના $B - A = A' \cap B = B - (A \cap B)$ (ફક્ત ઘટના B બને)

(4) યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશની કોઈ ઘટના Aની સંભાવના $P(A) = \frac{m}{n}$

(5) સંભાવનાના સરવાળાનો નિયમ

કોઈ બે ઘટનાઓ A અને B માટે,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

કોઈ ત્રણ ઘટનાઓ A, B અને C માટે,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

બે ઘટનાઓ A અને B પરસ્પર નિવારક હોય,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ત્રણ ઘટનાઓ A, B અને C પરસ્પર નિવારક હોય,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

બે ઘટનાઓ A અને B પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ હોય,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 1$$

ત્રણ ઘટનાઓ A, B અને C પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ હોય,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = 1$$

(6) શરતી સંભાવના

ઘટના A બની હોય તે શરતે ઘટના B બને.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}; \quad P(A) \neq 0$$

ઘટના B બની હોય તે શરતે ઘટના A બને

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}; \quad P(B) \neq 0$$

(7) સંભાવનાના ગુણાકારનો નિયમ

કોઈ બે ઘટનાઓ A અને B માટે

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A);\ P(A) \neq 0$

$P(A \cap B) = P(B) \times P(A/B);\ P(B) \neq 0$

- બે ઘટનાઓ A અને B નિરપેક્ષ હોય,

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$P(A' \cap B') = P(A') \times P(B')$

$P(A' \cap B) = P(A') \times P(B)$

$P(A \cap B') = P(A) \times P(B')$

(8) સંભાવનાની આંકડાશાસ્ત્રીય વ્યાખ્યા અનુસાર,

$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}$

સ્વાધ્યાય 1

વિભાગ A

નીચે આપેલ બહુવિકલ્પ પ્રશ્નો માટે સાચા વિકલ્પની પસંદગી કરો :

1. નિદર્શ અવકાશ Uના વિશિષ્ટ ઉપગણ ϕ ને કઈ ઘટના કહે છે ?

(a) ચોક્કસ ઘટના (b) ϕ ની પૂરક ઘટના

(C) U અને ϕ ની યોગઘટના (d) અશક્ય ઘટના

2. ઘટનાઓ A અને A' માટે $P(A \cap A')$નું મૂલ્ય કેટલું થાય ?

(a) 1 (b) 0 (c) 0.5 (d) 0 અને 1ની વચ્ચે

3. નિદર્શ અવકાશમાંની કોઈપણ ઘટના A માટે નીચેના પૈકી કયો વિકલ્પ સાચો છે ?

(a) $P(A) < 0$ (b) $0 \leq P(A) \geq 1$ (c) $0 \leq P(A) \leq 1$ (d) $P(A) > 1$

4. નિદર્શ અવકાશ Uમાંની કોઈ બે ઘટનાઓ A અને B માટે $A \subset B$ હોય, તો નીચેનામાંથી કયું વિધાન સાચું નથી ?

(a) $P(A \cap B) = P(B)$ (b) $P(A \cap B) = P(A)$

(c) $P(A \cup B) \geq P(A)$ (d) $P(B - A) = P(B) - P(A)$

5. સંભાવનાની પ્રશિષ્ટ વ્યાખ્યા બીજા કયા નામે ઓળખાય છે ?

(a) ગાણિતિક વ્યાખ્યા (b) પૂર્વ ધારણાયુક્ત વ્યાખ્યા

(c) આંકડાશાસ્ત્રીય વ્યાખ્યા (d) ભૌમિતિક વ્યાખ્યા

6. એક સમતોલ સિક્કો ઉછાળવાના યાદચ્છિક પ્રયોગમાં મળતી પ્રાથમિક ઘટનાઓ H અને T માટે સંભાવનાનું નીચેના પૈકી કયું વિધાન સાચું નથી ?

(a) $P(T)=0.5$ (b) $P(H)+P(T)=1$ (c) $P(H\cap T)=0.5$ (d) $P(H)=0.5$

7. નીચે જણાવેલ યાદચ્છિક પ્રયોગો પૈકી કયા યાદચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ અનંત છે ?

(a) બે પાસા ઉછાળવા (b) ઑફિસમાંથી બે કર્મચારીઓ પસંદ કરવા

(c) ઇલેક્ટ્રિક બલ્બનું આયુષ્ય કલાકમાં માપવું (d) 52 પત્તાંમાંથી એક પત્તું પસંદ કરવું

8. ઘટના $A\cup A'=U$ હોય, તો A અને A' કેવી ઘટનાઓ કહેવાય ?

(a) નિરપેક્ષ ઘટનાઓ (b) પૂરક ઘટનાઓ (c) ચોક્કસ ઘટનાઓ (d) અશક્ય ઘટનાઓ

9. જો $P(A/B)=P(A)$ અને $P(B/A)=P(B)$ હોય તો ઘટનાઓ A અને B કેવી ઘટનાઓ કહેવાય ?

(a) નિરપેક્ષ ઘટનાઓ (b) પૂરક ઘટનાઓ (c) ચોક્કસ ઘટનાઓ (d) અશક્ય ઘટનાઓ

10. નિદર્શ અવકાશની બે ઘટનાઓ A અને B પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ છે. $P(B-A)$ નીચેના પૈકી કોના બરાબર થશે ?

(a) $P(A)$ (b) $P(B)$ (c) $P(A\cap B)$ (d) $P(A\cup B)$

11. છ બાજુવાળા ત્રણ સમતોલ પાસા એક સાથે ઉછાળવામાં આવે, તો બનતા નિદર્શ અવકાશમાં નિદર્શ બિંદુઓની કુલ સંખ્યા કેટલી થાય ?

(a) 6^2 (b) 3^6 (c) 6×3 (d) 6^3

12. પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ 1 અને 20 વચ્ચેની સંખ્યાઓમાંથી એક સંખ્યા યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે, તો તે સંખ્યા 5ની ગુણક હોવાની સંભાવના કેટલી થાય ?

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{6}$ (c) $\frac{1}{5}$ (d) $\frac{1}{3}$

13. બે ઘટનાઓ A અને B નિરપેક્ષ હોય, તો નીચેના પૈકી કયો વિકલ્પ સાચો છે ?

(a) $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ (b) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

(c) $P(A\cup B)=P(A)\times P(B)$ (d) $P(A\cap B)=P(A)+P(B)$

14. લીપ વર્ષ ન હોય તેવા વર્ષના ફેબ્રુઆરી માસમાં 5 ગુરુવાર આવે તેની સંભાવના કેટલી થાય ?

(a) 0 (b) $\frac{1}{7}$ (c) $\frac{2}{7}$ (d) $\frac{3}{7}$

15. નિદર્શ અવકાશની બે નિરપેક્ષ ઘટનાઓ A અને B માટે $P(A)=0.4$ અને $P(B')=0.3$ હોય, તો $P(A\cap B)$ની કિંમત જણાવો.

(a) 0.12 (b) 0.42 (c) 0.28 (d) 0.18

16. નિદર્શ અવકાશની બે ઘટનાઓ A અને B માટે ઘટના $(A\cap B)\cup(A\cap B')$ જણાવો.

(a) ϕ (b) B (c) A (d) U

17. સંભાવનાની ગાણિતિક વ્યાખ્યા મુજબ યાદચ્છિક પ્રયોગનાં n પરિણામો પૈકી દરેક પરિણામની સંભાવના કેટલી થાય ?

(a) 0 (b) $\frac{1}{n}$ (c) 1 (d) કહી શકાય નહિ.

વિભાગ B

નીચેના પ્રશ્નોના એક વાક્યમાં જવાબ આપો :

1. યાદચ્છિક પ્રયોગનાં બે ઉદાહરણો આપો.

2. A અને B ની તફાવત ઘટના A-Bની વેન આકૃતિ દોરો.

3. ઘટનાની વ્યાખ્યા લખો.

4. એક સમતોલ પાસો અને એક સમતોલ સિક્કો એક સાથે ઉછાળવાના યાદચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ લખો.

5. શરતી સંભાવનાની વ્યાખ્યા આપો.

6. ત્રણ ઘટનાઓ A, B અને C પૈકી ઓછામાં ઓછી એક ઘટના બને તેની સંભાવના મેળવવાનું સૂત્ર લખો.

7. નિરપેક્ષ ઘટનાની વ્યાખ્યા લખો.

8. નિદર્શ અવકાશની બે નિરપેક્ષ ઘટનાઓ A અને B માટે સંભાવનાનો ગુણાકારનો નિયમ લખો.

9. $P(A/B)$ અને $P(B/A)$નું અર્થઘટન લખો.

10. નિદર્શ અવકાશ Uમાંની ત્રણ ઘટનાઓ A, B અને C નિઃશેષ ઘટનાઓ ક્યારે કહેવાય ?

11. $P(A\cup B), P(A), P(A\cap B), 0, P(A)+P(B)$ને ચડતા ક્રમમાં ગોઠવો.

12. વ્યાખ્યા આપો :

(1) યાદચ્છિક પ્રયોગ (2) નિદર્શ અવકાશ

(3) સમસંભાવી ઘટનાઓ (4) સાનુકૂળ પરિણામો

(5) સંભાવના (ગાણિતિક વ્યાખ્યા) (6) સંભાવના (આંકડાશાસ્ત્રીય વ્યાખ્યા)

(7) અશક્ય ઘટના (8) ચોક્કસ ઘટના

13. નિદર્શ અવકાશની બે ઘટનાઓ A અને B માટે $A \cap B = \phi$ અને $A \cup B = U$ હોય, તો $P(A \cap B)$ અને $P(A \cup B)$ની કિંમતો જણાવો.

14. નિદર્શ અવકાશની બે ઘટનાઓ A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય, તો $P(A \cup B)$નું સૂત્ર લખો.

15. $A = \{x \mid 0 < x < 1\}$ હોય, તો $B = \{x \mid \frac{1}{4} \le x \le 3\}$ હોય, તો $A \cap B$ મેળવો.

16. નિરપેક્ષ ઘટનાઓ A અને B માટે $P(A) = 0.5$ અને $P(B) = 0.7$ હોય, તો $P(A' \cap B')$ શોધો.

17. જો $P(A) = 0.8$ અને $P(A \cap B) = 0.25$ હોય, તો $P(A - B)$ શોધો.

18. જો $P(A) = 0.3$ અને $P(A \cap B) = 0.03$ હોય, તો $P(B/A)$ શોધો.

19. પરસ્પર નિવારક બે ઘટનાઓ A અને B માટે $P(A) = P(B) = K$ હોય, તો $P(A \cup B)$ શોધો.

20. જો $P(A' \cap B) = 0.45$ અને $A \cap B = \phi$ હોય, તો $P(B)$ શોધો.

21. નિદર્શ અવકાશની બે ઘટનાઓ A અને B પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ છે. જો $P(A) = \frac{1}{3}$ હોય, તો $P(B)$ શોધો.

22. એક સમૂહના 2 % એકમો ખામીવાળા છે. આ સમૂહમાંથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ એક એકમ ખામીરહિત હોવાની સંભાવના કેટલી થાય ?

23. પાંચ સમતોલ સિક્કા ઉછાળવાના યાદચ્છિક પ્રયોગમાં નિદર્શ બિંદુઓની સંખ્યા જણાવો.

24. એક સમતોલ સિક્કો અને બે સમતોલ પાસાં એક સાથે ઉછાળવાના યાદચ્છિક પ્રયોગમાં નિદર્શ બિંદુઓની સંખ્યા જણાવો.

25. નિદર્શ અવકાશની બે ઘટનાઓ A અને B માટે $P(A) = 0.7$ અને $P(A \cup B) = 0.45$ શક્ય છે ? કારણ આપો.

26. 52 પત્તાંમાંથી યાદચ્છિક રીતે બે પત્તાં પુરવણી સહિત એક પછી એક પસંદ કરવામાં આવે છે. આ યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશના ઘટકોની સંખ્યા લખો.

27. બે નિરપેક્ષ ઘટનાઓ A અને B માટે $P(B/A) = \frac{1}{2}$ અને $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ હોય તો $P(A)$ શોધો.

28. 2000 ટિકિટોમાંથી 1998 ટિકિટો ઇનામ વગરની છે. એક વ્યક્તિ 2000 ટિકિટોમાંથી એક ટિકિટ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરે, તો પસંદ કરેલ ટિકિટ ઇનામપાત્ર હોય તેની સંભાવના કેટલી થાય ?

વિભાગ C

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. નીચે આપેલી ઘટનાઓ માટે વેન આકૃતિ દોરી તેની વ્યાખ્યા લખો :

(1) પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ (2) યોગઘટના

(3) છેદઘટના (4) તફાવત ઘટના

(5) નિઃશેષ ઘટનાઓ (6) પૂરક ઘટના

2. સાન્ત અને અનંત નિદર્શ અવકાશનાં ઉદાહરણો આપો.

3. અશક્ય અને ચોક્કસ ઘટનાનાં ઉદાહરણો આપો.

4. યાદૃચ્છિક પ્રયોગનાં લક્ષણો જણાવો.

5. સંભાવનાની ગાણિતિક વ્યાખ્યાની ધારણાઓ લખો.

6. સંભાવનાની ગાણિતિક વ્યાખ્યાની મર્યાદાઓ લખો.

7. સંભાવનાની આંકડાશાસ્ત્રીય વ્યાખ્યાની મર્યાદાઓ લખો.

8. સમસંભાવી ઘટનાઓ ઉદાહરણ આપી સમજાવો.

9. નિદર્શ અવકાશની બે ઘટનાઓ A અને B માટે સંભાવનાના સરવાળાનો નિયમ લખો. જો આ ઘટનાઓ પરસ્પર નિવારક હોય, તો સંભાવનાના સરવાળાનો નિયમ લખો.

10. નિદર્શ અવકાશની બે ઘટનાઓ A અને B માટે સંભાવનાના ગુણાકારનો નિયમ લખો. જો ઘટનાઓ A અને B નિરપેક્ષ હોય ત્યારે સંભાવનાના ગુણાકારનો નિયમ લખો.

11. નિદર્શ અવકાશની બે નિરપેક્ષ ઘટનાઓ A અને B માટે નીચેનાં પરિણામો લખો :

(1) $P(A \cap B)$ (2) $P(A' \cap B')$

(3) $P(A \cap B')$ (4) $P(A' \cap B)$

12. જો $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{2}{3}$ અને $P(A \cap B)=\frac{1}{6}$ હોય, તો $P(A' \cap B')$ શોધો.

13. જો $P(B)=2P(A/B)=0.4$ હોય, તો $P(A \cap B)$ શોધો.

14. ઘટનાઓ A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય અને $3P(A)=2P(B)=0.12$ હોય, તો $P(A \cap B)$ શોધો.

15. બે ઘટનાઓ A અને B માટે $5P(A)=3P(B)=2\,P(A \cup B)=\frac{3}{2}$ હોય, તો $P(A' \cup B')$ શોધો.

16. બે નિરપેક્ષ ઘટનાઓ A અને B માટે $P(A \cap B)=0.12$ અને $P(B)=0.3$ હોય, તો $P(A \cup B)$ શોધો.

17. જો $A=\{x \mid 1<x<3\}$ અને $B=\{x \mid \frac{1}{2} \le x < 2\}$ હોય, તો $A \cup B$ અને $A \cap B$ મેળવો.

18. બે ઘટનાઓ A અને B પૈકી ઓછામાં ઓછી એક ઘટના બનવાની સંભાવના $\frac{1}{4}$ અને ઘટના A બને પરંતુ ઘટના B ન બને તેની સંભાવના $\frac{1}{5}$ હોય, તો ઘટના B બનવાની સંભાવના શોધો.

19. ઘટનાઓ A અને B માટે $P(B)=\frac{3}{5}$ અને $P(A'\cap B)=\frac{1}{2}$ હોય, તો $P(A/B)$ શોધો.

20. 10 વ્યક્તિઓના સમૂહમાં 6 વ્યક્તિઓ પાસે પાસપોર્ટ છે. આ સમૂહમાંથી 3 વ્યક્તિઓની યાદચ્છિક રીતે પસંદગી કરવામાં આવે તો તેમાં,

(1) ત્રણેય વ્યક્તિઓ પાસે પાસપોર્ટ હોય.

(2) બે વ્યક્તિઓ પાસે પાસપોર્ટ ન હોય તેની સંભાવના શોધો.

21. કોઈ વર્ષના બજેટમાં પુરુષોની આવક માટે કર-મર્યાદા વધે તેની સંભાવના 0.66 અને સ્ત્રીઓની આવક માટે કર-મર્યાદા વધે તેની સંભાવના 0.72 છે. પુરુષો અને સ્ત્રીઓ એમ બંનેની આવક માટે કર-મર્યાદા વધે તેની સંભાવના 0.47 હોય, તો તે વર્ષના બજેટમાં,

(1) પુરુષો અને સ્ત્રીઓ બેમાંથી ફક્ત એકની આવક માટે કર-મર્યાદા વધે.

(2) પુરુષો અને સ્ત્રીઓ પૈકી કોઈની આવક માટે કર-મર્યાદા ન વધે તેની સંભાવના શોધો.

22. ક્રૂડ ઑઇલના ભાવ વધ્યા પછી પેટ્રોલના ભાવ વધે તેવું 80 % કિસ્સામાં બને છે અને ડિઝલના ભાવ વધે તેવું 77 % કિસ્સામાં બને છે. પેટ્રોલ અને ડિઝલ બંનેના ભાવ વધે તેવું 68 % કિસ્સામાં બને છે. પેટ્રોલના ભાવ વધે તે શરતે ડિઝલના ભાવ વધે તેની સંભાવના શોધો.

23. હવામાન ખાતાની આગાહી મુજબ આવતાં અઠવાડિયાના ત્રણ દિવસો ગુરુવાર, શુક્રવાર અને શનિવારના દિવસે વરસાદ પડવાની સંભાવના અનુક્રમે 0.8, 0.7 અને 0.6 છે. આવતા અઠવાડિયામાં આ ત્રણ દિવસો પૈકી ઓછામાં ઓછા એક દિવસે વરસાદ પડવાની સંભાવના શોધો.

(નોંધ : અઠવાડિયાના ત્રણ દિવસો ગુરુવાર, શુક્રવાર અને શનિવારના દિવસે વરસાદ પડે તે ઘટનાઓ નિરપેક્ષ છે.)

વિભાગ D

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. ડિજિટલ સ્ટોર Aમાં 6 *LED* ટી.વી. અને 4 *LCD* ટી.વી. તથા ડિજિટલ સ્ટોર Bમાં 5 *LED* ટી.વી. અને 3 *LCD* ટી.વી. ડિસ્પ્લેમાં મૂકેલાં છે. બેમાંથી એક સ્ટોરની યાદચ્છિક રીતે પસંદગી કરી તેમાંથી એક ટી.વી.ની પસંદગી કરવામાં આવે, તો તે *LCD* ટી.વી. હોવાની સંભાવના શોધો.

2. 1 થી 100 સુધીની પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓમાંથી એક સંખ્યા યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ કરેલી સંખ્યા એક અંકની હોય અથવા પૂર્ણવર્ગ હોય તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.

3. એક સમતોલ સિક્કો ત્રણ વખત ઉછાળવામાં આવે છે. જો પ્રથમ બે પ્રયત્નોમાં સિક્કા પર કાંટો મળ્યો હોય, તો ત્રણેય પ્રયત્નોમાં સિક્કા પર કાંટો મળે તેની સંભાવના શોધો.

4. ઘટનાઓ A, B અને C નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય અને તેમના માટે $P(A)=P(B)=P(C)=p$ હોય, તો $P(A\cup B\cup C)$ની કિંમત pના સ્વરૂપમાં મેળવો.

5. એક રાજ્યના સરકારી નોકરી કરતાં વર્ગ 3 અને વર્ગ 4ના કર્મચારીઓમાંથી પસંદ કરેલા 6000 કર્મચારીઓના નિદર્શની જાતિ અનુસાર માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવી છે :

કર્મચારી-વર્ગ	જાતિ		કુલ
	પુરુષો	સ્ત્રીઓ	
વર્ગ 3	3600	900	4500
વર્ગ 4	400	1100	1500
કુલ	4000	2000	6000

આ રાજ્યના સરકારી નોકરી કરતાં વર્ગ 3 અને વર્ગ 4ના તમામ કર્મચારીઓમાંથી એક કર્મચારીને યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે.

(1) પસંદ થયેલ કર્મચારી પુરુષ હોય તો તે વર્ગ 3નો હોય તેની સંભાવના શોધો.

(2) પસંદ થયેલ કર્મચારી વર્ગ 3નો છે એમ આપેલ હોય, તો તે પુરુષ હોવાની સંભાવના શોધો.

Abraham de Moivre
(1667 -1754)

Abraham de Moivre was a French mathematician known for de Moivre's formula, one of those that link complex numbers and trigonometry, and for his work on the normal distribution and probability theory. De Moivre wrote a book on probability theory, The Doctrine of Chances. De Moivre first discovered Binet's formula, the closed-form expression for Fibonacci numbers linking the nth power of the golden ratio ϕ to the nth Fibonacci number. He also was the first to postulate the Central Limit Theorem, a cornerstone of probability theory. In the later editions of his book, de Moivre included his unpublished result of 1733, which is the first statement of an approximation to the binomial distribution in terms of what we now call the normal or Gaussian function.

De Moivre continued studying the fields of probability and mathematics until his death and several additional papers were published after his death.

2

યાદચ્છિક ચલ અને અસતત સંભાવના-વિતરણ

(Random Variable and Discrete Probability Distribution)

વિષયવસ્તુ :

2.1 યાદચ્છિક ચલ (Random Variable)

આપણે સંભાવનાના પ્રકરણમાં યાદચ્છિક પ્રયોગ, નિદર્શ અવકાશ તથા સંભાવનાનો અભ્યાસ કર્યો. આ પ્રકરણમાં આપણે યાદચ્છિક ચલ અને અસતત સંભાવના-વિતરણોનો અભ્યાસ કરીશું.

સૌપ્રથમ આપણે યાદચ્છિક ચલને વ્યાખ્યાયિત કરીશું અને ત્યાર બાદ તેને ઉદાહરણ દ્વારા સમજીશું.

યાદચ્છિક ચલ : ધારો કે એક યાદચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ U છે. Uના દરેક ઘટક હંમેશાં સંખ્યાત્મક હોવા જરૂરી નથી. છતાં પણ આપણે દરેક ઘટના માટે કોઈ ચોક્કસ સંખ્યા ફાળવવા ઇચ્છીએ છીએ.

Uના દરેક ઘટકને વાસ્તવિક સંખ્યા સાથે સાંકળતા વિધેયને યાદચ્છિક ચલ કહેવામાં આવે છે. તેને સંકેતમાં X વડે દર્શાવવામાં આવે છે. એટલે કે નિદર્શ અવકાશ U પર આધારિત યાદચ્છિક ચલ Xને સંકેતમાં $X : U \to R$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

દાખલા તરીકે

(i) એક અનભિનત સિક્કાને 3 વખત ઉછાળતા મળતી છાપ (H)ની સંખ્યા

(ii) કોઈ એક શહેરમાં એક અઠવાડિયા દરમિયાન થતા અકસ્માતની સંખ્યા

(iii) કોઈ એક વ્યક્તિનું વજન (કિલોગ્રામમાં)

(iv) કોઈ એક ચોક્કસ સ્થળનું દિવસ દરમિયાનનું મહત્તમ તાપમાન (અંશ સેલ્શિયસમાં)

હવે આપણે યાદચ્છિક ચલ વિશેનો ખ્યાલ કેટલાંક ઉદાહરણો દ્વારા સમજીએ.

(1) એક સમતોલ પાસાને એક વખત ઉછાળવામાં આવે છે. જો પાસા પર મળતા અંકને 'u' વડે દર્શાવીએ, તો આ પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશ Uના ઘટકોને ગણના સંકેતમાં નીચે પ્રમાણે દર્શાવાય :

$$U = \{u \mid u = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

એટલે કે $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

જો નિદર્શ અવકાશના ઘટક u પર વાસ્તવિક સંખ્યા Xને

$X(u)$ = પાસા પર મળતા અંક દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરીએ તો અહીં

$$X(u) = u, u = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

લખી શકાય. આમ ચલ Xએ યાદચ્છિક ચલ થશે જે 1, 2, 3, 4, 5 અને 6 કિંમતો ધારણ કરી શકે છે. ઉપરના ઉદાહરણમાં Uના ઘટકો સંખ્યાત્મક છે. હવે આપણે Uના ઘટકો સંખ્યાત્મક ન હોય તેવું ઉદાહરણ જોઈએ.

(2) ધારો કે એક પેટીમાં એક લાલ રંગનો, એક વાદળી રંગનો, એક પીળા રંગનો અને એક સફેદ રંગનો એમ ચાર દડા છે. ધારો કે લાલ રંગના દડાને R, વાદળી રંગના દડાને B, પીળા રંગના દડાને Y અને સફેદ રંગના દડાને W વડે દર્શાવવામાં આવે છે. એક વ્યક્તિ આ પેટીમાંથી ત્રણ દડા એક સાથે યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરે છે. આ પ્રયોગ માટેનો નિદર્શ અવકાશ

$U = \{RBY, RBW, BYW, WYR\}$ બનશે.

ધારો કે Uના ઘટક u માટે

$X(u)=u$ માં સફેદ દડાની સંખ્યા લઈએ, તો $X(RBY)=0, X(RBW)=1, X(BYW)=1, X(WYR)=1$ મળે.

આમ, યાદચ્છિક ચલ X ગણ $\{0, 1\}$માંની કિંમત ધારણ કરે છે. અહીં નિદર્શ અવકાશના ઘટકો સંખ્યાત્મક નથી પરંતુ તેને આપણે યાદચ્છિક ચલ દ્વારા વાસ્તવિક સંખ્યા સાથે સાંકળીએ છીએ.

(3) ધારો કે એક વર્ગના વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈ 120 સેમીથી 180 સેમી સુધીની જ છે. જો આપણે આ વર્ગના કોઈ પણ વિદ્યાર્થીની ઊંચાઈ માપીએ, તો તે 120 સેમીથી 180 સેમી વચ્ચેની કોઈ પણ કિંમત ધારણ કરશે.

અહીં નિદર્શ અવકાશ $U=\{u|120 \le u \le 180\}$ બનશે.

જો પસંદ કરેલા વિદ્યાર્થીની ઊંચાઈને X વડે દર્શાવીએ તો Xએ $X(u)=u=$ પસંદ કરેલ વિદ્યાર્થીની ઊંચાઈ (સેમીમાં) થાય. આમ X એ યાદચ્છિક ચલ બનશે તથા $X=x, 120 \le x \le 180$ વડે દર્શાવીશું.

ઉપરના ઉદાહરણ (1) તથા ઉદાહરણ (2)માં યાદચ્છિક ચલ X ગણી શકાય તેટલી ચોક્કસ કિંમતો ધારણ કરે છે. જ્યારે ઉદાહરણ (3)માં યાદચ્છિક ચલ X એ અંતરાલ [120, 180]માંથી કોઈ પણ કિંમત ધારણ કરી શકે છે. આ યાદચ્છિક ચલ એ અગાઉનાં બે ઉદાહરણમાંના યાદચ્છિક ચલ કરતાં જુદો પડે છે.

આ યાદચ્છિક ચલો વચ્ચેનો તફાવત આપણે હવે નીચેના વિભાગમાં સમજીએ :

2.1.1 અસતત યાદચ્છિક ચલ (Discrete Random Variable)

જે યાદચ્છિક ચલ X વાસ્તવિક સંખ્યા ગણ R ની સાન્ત સંખ્યામાં અથવા ગણ્ય અનન્ત કિંમતો ધારણ કરી શકે તેમ હોય તો તેવા ચલ X ને અસતત યાદચ્છિક ચલ કહેવાય.

દાખલા તરીકે (i) યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ વિદ્યાર્થીનું જન્મ વર્ષ

(ii) 6 ઇંડાંઓવાળા એક બૉક્સમાં ભાંગી ગયેલાં ઇંડાંઓની સંખ્યા.

હવે આપણે અસતત યાદચ્છિક ચલને વિશે કેટલાંક વિશેષ ઉદાહરણો દ્વારા સમજીએ.

(1) ધારો કે એક બૉક્સમાં એક કાળા રંગનો અને બે સફેદ રંગના દડા છે. ધારો કે કાળા રંગના દડાને B અને બે સફેદ રંગના દડાને W_1 તથા W_2 વડે દર્શાવવામાં આવે છે. કોઈ એક વ્યક્તિ રૂપિયા 15 આપીને નીચેની રમત રમી શકે છે :

રમત રમનાર વ્યક્તિને આ બૉક્સમાંથી બે દડા યાદચ્છિક રીતે પુરવણી સહિત પસંદ કરવાનું કહેવામાં આવે છે. તેણે પસંદ કરેલ દડાના રંગ પ્રમાણે તેને નીચે પ્રમાણે નક્કી કરેલ રૂપિયા ચૂકવવામાં આવે છે :

જો સફેદ રંગનો દડો પસંદ થાય તો પ્રત્યેક સફેદ રંગના દડા દીઠ તેને ₹ 5 ચૂકવવામાં આવે છે અને જો કાળા રંગનો દડો પસંદ થાય તો કાળા રંગના દડા દીઠ રૂ. 15 ચૂકવવામાં આવે છે.

જો પ્રત્યેક ઘટનાને અનુરૂપ રમત રમનાર વ્યક્તિને રમત દ્વારા મળતી ચોખ્ખી રકમ (મેળવેલ રકમ - રમત માટે ચૂકવેલ રકમ) ને આપણે X વડે દર્શાવીએ, તો X એ અસતત યાદચ્છિક ચલ બનશે. X એ ધારણ કરેલ કિંમતો નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવી છે :

પ્રયોગનું પરિણામ (ઘટના)	રમત દ્વારા વ્યક્તિને મળતી રકમ	રમત રમવા માટે ચૂકવેલ રકમ	Xની કિંમત (રૂપિયા)
W_1W_1	$5 + 5 = 10$	15	$X(W_1W_1) = 10 - 15 = -5$
W_1W_2	$5 + 5 = 10$	15	$X(W_1W_2) = 10 - 15 = -5$
W_1B_1	$5 + 15 = 20$	15	$X(W_1B_1) = 20 - 15 = 5$
W_2W_1	$5 + 5 = 10$	15	$X(W_2W_1) = 10 - 15 = -5$
W_2W_2	$5 + 5 = 10$	15	$X(W_2W_2) = 10 - 15 = -5$
W_2B_1	$5 + 15 = 20$	15	$X(W_2B_1) = 20 - 15 = 5$
B_1W_1	$15 + 5 = 20$	15	$X(B_1W_1) = 20 - 15 = 5$
B_1W_2	$15 + 5 = 20$	15	$X(B_1W_2) = 20 - 15 = 5$
B_1B_1	$15 + 15 = 30$	15	$X(B_1B_1) = 30 - 15 = 15$

આમ, યાદચ્છિક ચલ X એ ફક્ત –5, 5 અને 15 કિંમતો જ ધારણ કરે છે. એટલે કે Xની કુલ શક્ય કિંમતોની સંખ્યા સાન્ત છે.

(2) ધારો કે એક સિક્કો જ્યાં સુધી કાંટો (T) અથવા ચાર છાપ (H) મળે ત્યાં સુધી ઉછાળવામાં આવે છે. ધારો કે X એ સિક્કો ઉછાળવા માટેની જરૂરી પ્રયત્નોની સંખ્યા દર્શાવે છે.

અહીં યાદચ્છિક પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલો નિદર્શ અવકાશ

$U = \{T, HT, HHT, HHHT, HHHH\}$ બનશે.

અહીં યાદચ્છિક ચલ X એ પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ સિક્કો ઉછાળવાની જરૂરી સંખ્યા દર્શાવે છે અને તે નિદર્શ અવકાશના ઘટકો માટે નીચે મુજબ 1, 2, 3 અને 4 કિંમતોમાંથી કોઈ એક કિંમત ધારણ કરે છે.

$X(T) = 1, X(HT) = 2, X(HHT) = 3$

$X(HHHT) = 4, X(HHHH) = 4$

અહીં, અસતત યાદચ્છિક ચલ Xની કુલ શક્ય કિંમતોની સંખ્યા સાન્ત છે.

(3) જ્યાં સુધી પ્રથમ વખત છાપ મળે ત્યાં સુધી સિક્કો ઉછાળવાનું ચાલુ રાખવાના પ્રયોગમાં પ્રથમ વખત છાપ મળતા પહેલાં મળતા કાંટાની સંખ્યાને યાદચ્છિક ચલ X લઈએ.

આ પ્રયોગમાં છાપ પ્રથમ પ્રયત્ને અથવા બીજા પ્રયત્ને અથવા ત્રીજા પ્રયત્ને.... આ જ રીતે પ્રથમ વખતે છાપ મેળવવા માટે અનન્ત વખત પ્રયત્ન કર્યા પછી પણ મળી શકે. એટલે કે આ પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ

$U = \{H, TH, TTH, TTTH, TTTTH, ...\}$ થાય.

તેથી પ્રથમ વખત છાપ મેળવતા પહેલાં મળેલ કાંટાની સંખ્યા 0, 1, 2, 3, 4.... થશે.

આમ, યાદચ્છિક ચલ X કુલ શક્ય ગણ્ય અનંત કિંમતો 0, 1, 2, 3, 4.... માંથી કોઈ એક કિંમત ધારણ કરશે.

2.1.2 સતત યાદચ્છિક ચલ (Continuous Random Variable)

જે યાદચ્છિક ચલ X વાસ્તવિક સંખ્યા ગણ R માં અથવા R ના કોઈ અંતરાલમાં કોઈ પણ કિંમત ધારણ કરી શકે તેવા ચલને સતત યાદચ્છિક ચલ કહેવાય.

દાખલા તરીકે (i) એક 250 મિલિલીટરના કદવાળા કૉફી મગમાં ભરેલ કોફીનું ખરેખરું માપ.

(ii) બહુમાળી ઑફિસના બિલ્ડિંગમાં કોઈ પણ એક માળ પર લિફ્ટ માટેનો પ્રતીક્ષા-સમય.

સતત યાદચ્છિક ચલ વિશેનો વિશેષ ખ્યાલ આપણે નીચેનાં ઉદાહરણો દ્વારા મેળવીએ.

(1) 3 કલાકના સમયવાળી એક પરીક્ષા માટે કોઈ વિદ્યાર્થી દ્વારા લેવાતા સમયને યાદચ્છિક ચલ X વડે દર્શાવીએ તો અહીં નિદર્શ અવકાશ એ

$U = \{u | 0 \le u \le 3\}$ બનશે.

કારણ કે કોઈ પણ વિદ્યાર્થી દ્વારા પરીક્ષા માટે લેવાતો સમય 0 થી 3 સુધીની કોઈ પણ વાસ્તવિક કિંમત બનશે.

તથા યાદચ્છિક ચલ X એ કોઈ વિદ્યાર્થી દ્વારા લેવાતો પરીક્ષા માટેનો ખરેખરો સમય એ પણ 0 થી 3 સુધીની કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા જ બનશે.

આમ, અહીં

$X(u) = u,\ 0 \le u \le 3$ થાય.

એટલે કે $X = x, 0 \le x \le 3$

અહીં યાદચ્છિક ચલ X એ 0થી 3 સુધીની કોઈ પણ વાસ્તવિક કિંમત ધારણ કરતો હોવાથી તે R નો ઘટક બને છે અને તેથી X એ સતત યાદચ્છિક ચલ બનશે.

(2) ધારો કે એક એક્સપ્રેસ હાઈવે ઉપર બે સ્ટેશનો A અને B આવેલાં છે. સ્ટેશન Aનું સ્ટેશન Bથી અંતર 200 કિમી છે. આ હાઈવે ઉપર સ્ટેશનો A અને B વચ્ચે બનતા અકસ્માતનું સ્થાન સ્ટેશન A થી કેટલું દૂર છે તે જાણવાનો પ્રયોગ હાથ ધરીએ. સરળતા ખાતર ધારો કે Aનું સ્થાન 0 કિમી પર અને Bનું સ્થળ 200 કિમી પર છે. આ પ્રયોગ માટેનો નિદર્શ અવકાશ એ 0 અને 200 વચ્ચેની કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા બનશે. તેથી આ પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ નીચે મુજબ લખી શકાય.

$U = \{u \mid 0 \le u \le 200\}$

ધારો કે યાદચ્છિક ચલ X એ સ્ટેશન A અને સ્ટેશન B વચ્ચે કોઈ પણ સ્થળે બનતા અકસ્માતનું સ્ટેશન Aથી અંતર કિલોમીટરમાં દર્શાવે છે, તો યાદચ્છિક ચલ X નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત થાય :

$X(u)$ = સ્ટેશન Aથી અકસ્માત સ્થળનું અંતર = u

ટૂંકમાં આપણે યાદચ્છિક ચલ X ને $X = x, 0 \le x \le 200$ વડે દર્શાવી શકીએ.

અહીં યાદચ્છિક ચલ X એ 0 થી 200 સુધી કોઈ પણ વાસ્તવિક કિંમત ધારણ કરે છે, જે વાસ્તવિક સંખ્યાના ગણ R નો ઘટક બને છે અને તેથી X એ સતત યાદચ્છિક ચલ બનશે.

2.2 અસતત સંભાવના-વિતરણ (Discrete Probability Distribution)

ધારો કે $X : U \to R$ એ એક યાદચ્છિક ચલ છે, જે R ના ઉપગણ $(x_1, x_2, ..., x_n)$ માંથી જ કોઈ એક કિંમત ધારણ કરી શકે છે. વળી, ધારો કે X એ ધારણ કરેલ કિંમત x_i ની સંભાવના $P(X = x_i) = p(x_i)$ છે. જો $p(x_i) > 0,\ i = 1, 2, ..., n$ અને $\Sigma\, p(x_i) = 1$ હોય, તો વાસ્તવિક કિંમતોના ગણ $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ અને $\{p(x_1), p(x_2), ..., p(x_n)\}$ ને યાદચ્છિક ચલ Xનું અસતત સંભાવના-વિતરણ કહે છે. યાદચ્છિક ચલ X ના અસતત સંભાવના-વિતરણને કોષ્ટકના રૂપમાં નીચે પ્રમાણે લખવામાં આવે છે.

$X = x$	x_1	x_2	....	x_i	...	x_n
$p(x)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	....	$p(x_i)$	...	$p(x_n)$

અહીં $0 < p(x_i) < 1, i = 1, 2, ..., n$ અને $\Sigma\, p(x_i) = 1$

2.2.1 અસતત ચલના સંભાવના-વિતરણનાં ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 1 : નીચે આપેલ કિંમતો એ અસતત ચલના સંભાવના-વિતરણ માટેની યોગ્ય કિંમતો છે કે નહિ તે નક્કી કરો :

અહીં અસતત ચલ X એ 1, 2, 3 કે 4 કિંમત જ ધારણ કરી શકે છે.

(i) $p(1) = 0.25, p(2) = 0.75, p(3) = 0.25, p(4) = -0.25$

(ii) $p(1) = 0.15, p(2) = 0.27, p(3) = 0.29, p(4) = 0.29$

(iii) $p(1) = \frac{1}{19},\ \ p(2) = \frac{9}{19},\ \ p(3) = \frac{3}{19},\ \ p(4) = \frac{4}{19}$

(i) અહીં $P(4)$ની કિંમત -0.25 એટલે ઋણ છે. જે અસતત સંભાવના-વિતરણની શરત $p(x_i) > 0, i = 1, 2, 3, 4$ નું સમાધાન કરતી નથી. તેથી આપેલ કિંમતો એ અસતત ચલના સંભાવના-વિતરણ માટે યોગ્ય નથી અને આમ આપેલ વિતરણ એ અસતત ચલનું સંભાવના-વિતરણ ન કહેવાય.

(ii) અહીં x ની દરેક કિંમતો 1, 2, 3 અને 4 માટે $p(x) > 0$ છે તથા $p(1) + p(2) + p(3) + p(4) = 1$ છે.

આમ અસતત ચલના સંભાવના-વિતરણની બંને શરતોનું પાલન થાય છે તેથી આપેલ કિંમતો યોગ્ય છે અને આપેલ વિતરણ એ અસતત ચલનું સંભાવના-વિતરણ છે.

(iii) અહીં $p(x_i) > 0, i = 1, 2, 3, 4$ માટે થાય છે. પરંતુ સંભાવનાનો સરવાળો એટલે કે

$p(1) + p(2) + p(3) + p(4) = \frac{17}{19}$ થાય છે, જે 1 થતો ન હોવાથી આપેલ કિંમતો સંભાવના-વિતરણ માટે યોગ્ય નથી અને આમ આપેલ વિતરણ એ અસતત ચલનું સંભાવના-વિતરણ ન કહેવાય.

ઉદાહરણ 2 : નીચે આપેલ વિતરણ એ અસતત ચલનું સંભાવના-વિતરણ ક્યારે બને તે નક્કી કરો. તે પરથી $x = 2$ માટેની સંભાવના મેળવો :

$$p(x) = c\left(\frac{1}{4}\right)^x,\quad x = 1, 2, 3, 4$$

અહીં $p(1) = c\left(\frac{1}{4}\right),\ p(2) = c\left(\frac{1}{4}\right)^2 = c\left(\frac{1}{16}\right),\ p(3) = c\left(\frac{1}{4}\right)^3 = c\left(\frac{1}{64}\right),\ p(4) = c\left(\frac{1}{4}\right)^4 = c\left(\frac{1}{256}\right)$ થાય.

હવે અસતત સંભાવના-વિતરણ માટે સંભાવનાનો કુલ સરવાળો 1 થવો જોઈએ. એટલે કે

$p(1)+p(2)+p(3)+p(4)=1$ થવું જોઈએ.

$\therefore\ c\left(\frac{1}{4}\right)+c\left(\frac{1}{16}\right)+c\left(\frac{1}{64}\right)+c\left(\frac{1}{256}\right)=1$

$\therefore\ c\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}\right]=1$

$\therefore\ c\left[\frac{85}{256}\right]=1$

$\therefore\ c=\frac{256}{85}$

તેથી જ્યારે $c=\frac{256}{85}$ હોય ત્યારે આપેલ વિતરણ એ અસતત ચલનું સંભાવના-વિતરણ થાય.

હવે $P(X=2)=c\left(\frac{1}{4}\right)^2$

$=\frac{256}{85}\times\frac{1}{16}$

$=\frac{16}{85}$ મળે.

$\therefore x=2$ માટેની સંભાવના $\frac{16}{85}$ થાય.

ઉદાહરણ 3 : યાદચ્છિક ચલ X એ એક કંપનીમાં થતા વાર્ષિક અકસ્માતની સંખ્યા દર્શાવે છે. તેનું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ આપેલ છે :

$X=x$	0	1	2	3	4
$p(x)$	$4K$	$15K$	$25K$	$5K$	K

(i) અચળાંક K શોધો અને સંભાવના-વિતરણ ફરીથી લખો.

(ii) આ કંપનીમાં વાર્ષિક એક અથવા બે અકસ્માત બને તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.

(iii) આ કંપનીમાં વર્ષ દરમિયાન એક પણ અકસ્માત ન બને તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.

(i) અસતત સંભાવના-વિતરણની વ્યાખ્યા મુજબ

$p(0)+p(1)+p(2)+p(3)+p(4)=1$ થવું જોઈએ એટલે કે

$4K+15K+25K+5K+K=1$

$\therefore 50K=1$

$\therefore K=\frac{1}{50}$

$=0.02$

આમ, $K=0.02$ હોય તો આપેલ વિતરણ એ અસતત ચલનું સંભાવના-વિતરણ બને જે નીચે પ્રમાણે મળે છે :

$X=x$	0	1	2	3	4	કુલ
$p(x)$	0.08	0.30	0.50	0.10	0.02	1

(ii) એક અથવા બે અકસ્માત બને તે ઘટનાની સંભાવના

$= P(X=1)+P(X=2)$

$= 0.30 + 0.50$

$= 0.80$

(iii) એક પણ અકસ્માત ન બને તે ઘટનાની સંભાવના

$= P(X=0)$

$= 0.08$

ઉદાહરણ 4 : એક ફેક્ટરીમાં ઉત્પાદિત થયેલ બ્લેડ્સમાંથી 50 બ્લેડ્સના એક એવા પૅકેટેસ બનાવવામાં આવે છે. ગુણવત્તા નિયંત્રણ ઇજનેર આવા તૈયાર થયેલા પૅકેટ્સમાંથી યાદચ્છિક રીતે એક પૅકેટ પસંદ કરે છે અને તેમાંની બધી જ બ્લેડની તપાસ કરે છે. જો પસંદ કરેલા પૅકેટમાંથી 4 કે તેથી વધુ ખામીવાળી બ્લેડ્સ મળી આવે તો તે પૅકેટને અસ્વીકાર્ય ગણવામાં આવે છે. પૅકેટમાંથી મળતી ખામીવાળી બ્લેડ્સની સંખ્યાનું સંભાવના-વિતરણ નીચે મુજબ આપેલ છે.

પૅકેટમાં ખામીવાળી બ્લેડ્સની સંખ્યા	0	1	2	3	4	5	6 કે તેથી વધુ
સંભાવના	$9K$	$3K$	$3K$	$2K$	$2K$	$K-0.02$	0.02

આપેલ સંભાવના-વિતરણ પરથી

(i) અચળાંક K શોધો.

(ii) યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ પૅકેટ ગુણવત્તા-નિયંત્રણ ઇજનેર દ્વારા સ્વીકાર્ય બને તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.

(i) અહીં X = તપાસ દરમિયાન પસંદ કરેલ પૅકેટમાંથી મળતી ખામીવાળી બ્લેડની સંખ્યા લઈએ.

અસતત સંભાવના-વિતરણની વ્યાખ્યા મુજબ

$p(0)+p(1)+p(2)+p(3)+p(4)+p(5)+p(6 \text{ કે તે થી વધુ })=1$ થાય.

$\therefore 9K + 3K + 3K + 2K + 2K + K - 0.02 + 0.02 = 1$

$\therefore 20K = 1$

$\therefore K = \frac{1}{20} = 0.05$

(ii) યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ પૅકેટ ગુણવત્તા નિયંત્રણ ઇજનેર દ્વારા ત્યારે જ સ્વીકાર્ય બને જ્યારે તે પૅકેટમાં 3 કે તેથી ઓછી ખામીવાળી બ્લેડ્સ મળે.

$\therefore P(X \le 3)$

$= p(0)+p(1)+p(2)+p(3)$

$= 9K + 3K + 3K + 2K$

$= 17K$

$= 0.85 \quad (\because K = 0.05)$

ઉદાહરણ 5 : એક બૉક્સમાં 4 લાલ અને 2 સફેદ દડા છે. તેમાંથી 2 દડા યાદચ્છિક રીતે પુરવણી વગર પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ કરેલ દડામાં મળતા સફેદ દડાની સંખ્યાનું સંભાવના-વિતરણ મેળવો.

ધારો કે X એ પસંદ કરેલા બે દડામાં મળતા સફેદ દડાની સંખ્યા દર્શાવે છે. અહીં X એ 0, 1 અને 2 કિંમતો ધારણ કરી શકે છે.

અહીં $X = 0$ એટલે કે પસંદ કરેલા બે દડામાં એક પણ દડો સફેદ ન હોય, એટલે કે બંને દડા લાલ રંગના હોય.

$$\therefore P(X=0) = P\,(2 \text{ લાલ દડા}) = \frac{{}^4C_2}{{}^6C_2} = \frac{6}{15}$$

હવે $x=1$ એટલે કે પસંદ કરેલા બે દડામાં એક દડો સફેદ રંગનો અને એક દડો લાલ રંગનો હોય.

$$\therefore P(X=1) = P\,(1 \text{ સફેદ, } 1 \text{ લાલ})$$

$$= \frac{{}^2C_1 \times {}^4C_1}{{}^6C_2}$$

$$= \frac{2\times 4}{15} = \frac{8}{15}$$

અને $X = 2$ એટલે કે પસંદ કરેલા બંને દડા સફેદ રંગના હોય.

$$\therefore P(X=2) = P\,(2 \text{ સફેદ})$$

$$= \frac{{}^2C_2}{{}^6C_2}$$

$$= \frac{1}{15}$$

આમ, યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના-વિતરણ નીચે મુજબ લખી શકાય :

$X = x$	0	1	2
$p(x)$	$\frac{6}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

$p(x) > 0$ અને $\Sigma p(x) = 1$

2.2.2 મધ્યક અને વિચરણ

હવે આપણે અસતત યાદચ્છિક ચલના સંભાવના-વિતરણ પર આધારિત અગત્યના બે પરિણામોની ચર્ચા કરીશું. જેમાંનું એક પરિણામ છે યાદચ્છિક ચલનો મધ્યક (સરેરાશ કિંમત) અને બીજું છે યાદચ્છિક ચલનું વિચરણ.

ધારો કે X એ અસતત યાદચ્છિક ચલ છે જે $x_1, x_2, \ldots, x_n$ કિંમતોમાંથી જ કોઈ એક કિંમત ધારણ કરે છે અને તેનું સંભાવના-વિતરણ નીચે પ્રમાણે છે :

$X = x$	x_1	x_2	....	x_i	...	x_n
$p(x)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	....	$p(x_i)$	...	$p(x_n)$

જ્યાં $0 < p(x_i) < 1, i = 1, 2, \ldots, n$ તથા $\Sigma\, p(x_i) = 1$

અસતત યાદચ્છિક ચલ X ના મધ્યકને μ અથવા $E(X)$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે, જે નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત થાય છે :

$$\mu = E(X) = \Sigma\, x_i\, p(x_i)$$

આ કિંમતને અસતત ચલ X ની અપેક્ષિત કિંમત પણ કહેવામાં આવે છે.

અસતત યાદચ્છિક ચલ X નું વિચરણને σ^2 અથવા $V(X)$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે, જે નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત થાય છે.

$$\sigma^2 = V(X) = E(X-\mu)^2$$

$$= E\left(X^2\right) - (\mu)^2$$

$$= E\left(X^2\right) - \left(E(X)\right)^2$$

જ્યાં $E\left(X^2\right) = \Sigma\, x_i^2\, p(x_i)$ છે.

નોંધ : (i) અહીં આપણે સરળતા ખાતર નીચે મુજબના સંકેતો વાપરીશું :

$\Sigma\, x_i\, p(x_i)$ ને બદલે $\Sigma\, x\, p(x)$

તથા

$\Sigma\, x_i^2\, p(x_i)$ ને બદલે $\Sigma\, x^2 p(x)$

(ii) અહીં ચલ X ના મધ્યક અને વિચરણને અનુક્રમે X ના વિતરણના પણ મધ્યક અને વિચરણ કહે છે.

(iii) ચલ X ના વિચરણનું મૂલ્ય હંમેશાં ધન હોય છે.

અસતત સંભાવના-વિતરણના મધ્યક અને વિચરણ શોધવાના નીચેનાં ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 6 : નીચે આપેલ અસતત સંભાવના-વિતરણ માટે અચળ C શોધી આ વિતરણના મધ્યક અને વિચરણ મેળવો.

$$\boldsymbol{p(x) = C \cdot {}^4P_x,\ x = 0, 1, 2, 3, 4}$$

અસતત સંભાવના-વિતરણના ગુણધર્મ પરથી

$p(0) + p(1) + p(2) + p(3) + p(4) = 1$ થવું જોઈએ.

$$\therefore\ C \cdot {}^4P_0 + C \cdot {}^4P_1 + C \cdot {}^4P_2 + C \cdot {}^4P_3 + C \cdot {}^4P_4 = 1$$

$$\therefore C\left[\frac{4!}{4!} + \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{1!} + \frac{4!}{0!}\right] = 1$$

$$\therefore C[1 + 4 + 12 + 24 + 24] = 1$$

$$\therefore C[65] = 1$$

$$\therefore C = \frac{1}{65}$$

આમ સંભાવના-વિતરણ કોષ્ટક સ્વરૂપે નીચે મુજબ લખી શકાય.

$X = x$	0	1	2	3	4	કુલ
$p(x)$	$\frac{1}{65}$	$\frac{4}{65}$	$\frac{12}{65}$	$\frac{24}{65}$	$\frac{24}{65}$	1

હવે વિતરણનો મધ્યક $= \mu = \Sigma x p(x)$

$$= 0\left(\frac{1}{65}\right) + 1\left(\frac{4}{65}\right) + 2\left(\frac{12}{65}\right) + 3\left(\frac{24}{65}\right) + 4\left(\frac{24}{65}\right)$$

$$= \frac{0+4+24+72+96}{65}$$

$$= \frac{196}{65}$$

હવે આપણે $E\left(X^2\right)$ શોધીશું.

$$E\left(X^2\right) = \Sigma\, x^2 p(x)$$

$$= (0)^2\left(\frac{1}{65}\right) + (1)^2\left(\frac{4}{65}\right) + (2)^2\left(\frac{12}{65}\right) + (3)^2\left(\frac{24}{65}\right) + (4)^2\left(\frac{24}{65}\right)$$

$$= 0 + \frac{4}{65} + \frac{48}{65} + \frac{216}{65} + \frac{384}{65}$$

$$= \frac{652}{65}$$

તેથી વિતરણનું વિચરણ $= V(X)$

$$= E\left(X^2\right) - \left(E(X)\right)^2$$

$$= \frac{652}{65} - \left(\frac{196}{65}\right)^2$$

$$= \frac{42380 - 38416}{4225} = \frac{3964}{4225}$$

ઉદાહરણ 7 : એક બૉક્સમાં એક લીલો અને બે લાલ રંગના દડા છે. તેમાંથી બે દડા યાદચ્છિક રીતે પુરવણી સહિત પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ કરેલા બે દડામાં મળતા લાલ રંગના દડાનું સંભાવના-વિતરણ મેળવો તથા તેના મધ્યક અને વિચરણ પણ મેળવો.

પસંદ કરેલા બે દડાઓમાં મળતા લાલ રંગના દડાની સંખ્યાને આપણે X વડે દર્શાવીએ, તો Xનું સંભાવના-વિતરણ નીચે મુજબ મેળવીએ.

બૉક્સમાંના બે લાલ દડાને આપણે R_1 અને R_2 સંજ્ઞા વડે દર્શાવીએ તથા એક લીલા રંગના દડાને G વડે દર્શાવીએ.

હવે પસંદ કરેલા બે દડાઓમાં મળતા લાલ રંગના દડાની સંખ્યા અને તેની સંભાવના નીચેના કોષ્ટક મુજબ મેળવી શકાય :

પસંદ થયેલ બે દડા (ઘટના)	ઘટનાની સંભાવના	$X = x$
R_1R_1	$\frac{1}{9}$	2
R_1R_2	$\frac{1}{9}$	2
R_1G	$\frac{1}{9}$	1
R_2R_1	$\frac{1}{9}$	2
R_2R_2	$\frac{1}{9}$	2
R_2G	$\frac{1}{9}$	1
GR_1	$\frac{1}{9}$	1
GR_2	$\frac{1}{9}$	1
GG	$\frac{1}{9}$	0

ઉપરના કોષ્ટક પરથી કહી શકાય કે, આપણે પસંદ કરેલા બે દડામાં

(i) 0 લાલ દડા મળે તે ઘટનાની સંભાવના

$= P(X = 0)$

$= \frac{1}{9}$

(ii) 1 લાલ દડો મળે તે ઘટનાની સંભાવના

$= P(X = 1)$

$= \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}$

$= \frac{4}{9}$

(iii) 2 લાલ દડો મળે તે ઘટનાની સંભાવના

$= P(X = 2)$

$= \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}$

$= \frac{4}{9}$

આમ, X સંભાવના-વિતરણ કોષ્ટક સ્વરૂપે નીચે મુજબ લખાય

$X = x$	0	1	2	કુલ
$p(x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	1

હવે વિતરણનો મધ્યક $= \mu = E(X)$

$$= \Sigma\, x\, p(x)$$

$$= 0\left(\frac{1}{9}\right) + 1\left(\frac{4}{9}\right) + 2\left(\frac{4}{9}\right)$$

$$= \frac{0+4+8}{9}$$

$$= \frac{12}{9}$$

હવે વિચરણ શોધવા માટે આપણે પહેલાં $E\left(X^2\right)$ મેળવીએ.

$$E\left(X^2\right) = \Sigma\, x^2 p(x)$$

$$= 0^2\left(\frac{1}{9}\right) + 1^2\left(\frac{4}{9}\right) + 2^2\left(\frac{4}{9}\right)$$

$$= \frac{0+4+16}{9}$$

$$= \frac{20}{9}$$

તેથી, $V(X) = E\left(X^2\right) - \left(E(X)\right)^2$ સૂત્ર પરથી

$$V(X) = \frac{20}{9} - \left(\frac{12}{9}\right)^2$$

$$= \frac{20}{9} - \frac{144}{81}$$

$$= \frac{180-144}{81}$$

$$= \frac{36}{81}$$

ઉદાહરણ 8 : એક બૉક્સમાં 2 કાળા અને 2 સફેદ દડા છે. તેમાંથી 2 દડા યાદચ્છિક રીતે પુરવણી વગર પસંદ કરવામાં આવે છે, તો પસંદ કરેલ દડામાં સફેદ રંગના દડાની સંખ્યાનું સંભાવના-વિતરણ મેળવો. તે પરથી તેના મધ્યક અને વિચરણ મેળવો.

ધારો કે $X =$ પસંદ કરેલા બે દડામાં મળતા સફેદ રંગના દડાની સંખ્યા લઈએ, તો સંભાવનાના સૂત્ર મુજબ

(i) $X = 0$ થાય, તેની સંભાવના

$$= P(X=0) = P\ (0 \text{ સફેદ દડા મળે}) = \frac{{}^2C_0}{{}^4C_2} = \frac{1}{6}$$

(ii) $X = 1$ થાય. તે ઘટનાની સંભાવના

$= P(X=1) = P$ (1 સફેદ દડો અને 1 કાળો દડો)

$$= \frac{{}^2C_1 \times {}^2C_1}{{}^4C_2}$$

$$= \frac{2 \times 2}{6}$$

$$= \frac{4}{6}$$

(iii) $X = 2$ થાય. તે ઘટનાની સંભાવના

$= P(X=2) = P$ (2 સફેદ દડા)

$$= \frac{{}^2C_2}{{}^4C_2}$$

$$= \frac{1}{6}$$

આમ યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના-વિતરણ નીચે મુજબ કોષ્ટક સ્વરૂપે લખાય.

$X = x$	0	1	2	કુલ
$p(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

હવે સંભાવના-વિતરણનો મધ્યક $= E(X)$

$$= \Sigma\, x\, p(x)$$

$$= 0\left(\frac{1}{6}\right) + 1\left(\frac{4}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{0+4+2}{6}$$

$$= 1$$

હવે સંભાવના-વિતરણનું વિચરણ શોધવા માટે આપણે $E(X^2)$ શોધીએ.

$$E(X^2) = \Sigma\, x^2 p(x)$$

$$= 0^2\left(\frac{1}{6}\right) + 1^2\left(\frac{4}{6}\right) + 2^2\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{0+4+4}{6}$$

$$= \frac{8}{6}$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= \frac{8}{6} - (1)^2 \qquad (\because E(X) = 1)$$

$$= \frac{8-6}{6}$$

$$= \frac{2}{6}$$

$$= \frac{1}{3}$$

ઉદાહરણ 9 : ધારો કે X એ એક સાથે બે પાસાઓને ઉછાળતા મળતાં પરિણામો પૈકી મહત્તમ અંક દર્શાવે છે. તો ચલ X નું સંભાવના-વિતરણ મેળવો તથા તેનો મધ્યક અને વિચરણ શોધો.

બે પાસાઓને એક સાથે ઉછાળવાથી તેના નિદર્શ અવકાશ Uમાં આપણને 36 ઘટકો મળે તથા મળતા દરેક પરિણામમાં મહત્તમ પૂર્ણાંક 1, 2, 3, 4, 5 અથવા 6માંથી કોઈ એક અંક આવી શકે.

નીચેનું કોષ્ટક ચલ X માટેની બનતી શક્ય ઘટના તથા તેની સંભાવના આપે છે :

Uનો ઘટક u	મહત્તમ પૂર્ણાંક $X(u)=x$	$P(X=x)$
(1, 1)	1	$\frac{1}{36}$
(1, 2), (2, 1), (2, 2)	2	$\frac{3}{36}$
(1, 3), (2, 3), (3, 3) (3, 2), (3, 1)	3	$\frac{5}{36}$
(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4) (4, 3), (4, 2), (4, 1)	4	$\frac{7}{36}$
(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5) (5, 4), (5, 3), (5, 2), (5, 1)	5	$\frac{9}{36}$
(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6) (6, 6), (6, 5), (6, 4), (6, 3), (6, 2) (6, 1)	6	$\frac{11}{36}$
		કુલ 1

હવે Xનો મધ્યક $= E(X)$

$$= \Sigma x\, p(x)$$

$$=1\left(\frac{1}{36}\right)+2\left(\frac{3}{36}\right)+3\left(\frac{5}{36}\right)+4\left(\frac{7}{36}\right)+5\left(\frac{9}{36}\right)+6\left(\frac{11}{36}\right)$$

$$=\frac{161}{36}$$

હવે $E\left(X^2\right)=\Sigma x^2 p(x)$

$$=1^2\left(\frac{1}{36}\right)+2^2\left(\frac{3}{36}\right)+3^2\left(\frac{5}{36}\right)+4^2\left(\frac{7}{36}\right)+5^2\left(\frac{9}{36}\right)+6^2\left(\frac{11}{36}\right)$$

$$=\frac{791}{36}$$

X નું વિચરણ $=V(X)$

$$=E\left(X^2\right)-\left(E(X)\right)^2$$

$$= \frac{791}{36} - \left(\frac{161}{36}\right)^2$$

$$= \frac{791}{36} - \frac{25921}{1296}$$

$$= \frac{28476 - 25921}{1296}$$

$$= \frac{2555}{1296}$$

ઉદાહરણ 10 : એક આયુષ્ય કોષ્ટક પરથી માલૂમ પડે છે કે, 40 વર્ષની ઉંમરની એક વ્યક્તિ વધુ એક વર્ષ જીવે તેની સંભાવના 0.95 છે. જીવન વીમાકંપની એક વર્ષ માટે રૂ. 10,000ની પૉલિસી આવી વ્યક્તિને વેચવા ઇચ્છે છે. આ પૉલિસીનું વાર્ષિક પ્રીમિયમ કેટલું રાખવું જોઈએ કે જેથી કંપનીને થતો અપેક્ષિત લાભ ઓછામાં ઓછી ધન સંખ્યામાં આવે ?

ધારો કે X એ કંપનીનો લાભ દર્શાવે છે તથા પૉલિસીનું વાર્ષિક પ્રીમિયમ ₹ K છે, $K > 0$ તેથી જો 40 વર્ષની એક વ્યક્તિ વધુ એક વર્ષ જીવે, તો કંપનીને થતો લાભ $X = K$ બને.

અને જો 40 વર્ષની વ્યક્તિ એક વર્ષ દરમિયાન મૃત્યુ પામે તો કંપનીને થતો લાભ $X = K - 10,000$ બને.

આમ, કંપનીને થતા લાભનું સંભાવના-વિતરણ નીચે પ્રમાણે મળે :

$X = x$	K	$K - 10000$
$p(x)$	0.95	0.05

તેથી કંપનીને થતો અપેક્ષિત લાભ

$= E(X)$

$= \Sigma x\, p(x)$

$= K(0.95) + (K - 10,000)(0.05)$

$= K(0.95) + K(0.05) - 500$

$= K(0.95 + 0.05) - 500$

$= K - 500$

હવે અપેક્ષિત લાભ ધન થવા માટે

$K - 500 > 0$ થવું જોઈએ.

$\therefore K > 500$

તેથી કંપનીએ વાર્ષિક પ્રીમિયમ ₹ 500થી વધુ રાખવું જોઈએ. જેથી કંપનીને થતો અપેક્ષિત લાભ હંમેશાં ધન સંખ્યામાં આવે.

સ્વાધ્યાય 2.1

1. નીચે આપેલ વિતરણ એ અસતત ચલ X માટેનું સંભાવના-વિતરણ છે કે નહિ તે ચકાસો.

$$p(x)=\frac{x+2}{25},\ x=1, 2, 3, 4, 5$$

2. નીચે આપેલ વિતરણ એ ચલ X નું સંભાવના-વિતરણ હોય, તો અચળાંક K શોધો.

$$p(x)=\frac{6-|x-7|}{K},\ x=4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$$

3. એક યાદચ્છિક ચલ X નું સંભાવના-વિતરણ નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત છે.

$$p(x)=\frac{K}{(x+1)!},\ x=1, 2, 3;\ K=\text{અચળાંક},$$

તો તે પરથી (i) અચળાંક K શોધો (ii) $P(1<X<4)$ મેળવો.

4. એક યાદચ્છિક ચલ X નું સંભાવના-વિતરણ નીચે મુજબ છે.

$X=x$	-2	-1	0	1	2
$p(x)$	$\frac{K}{3}$	$\frac{K}{3}$	$\frac{K}{3}$	$2K$	$4K$

તો (i) અચલ Kની સ્વીકાર્ય કિંમત નક્કી કરો. (ii) વિતરણનો મધ્યક શોધો.

5. એક યાદચ્છિક ચલ X નું સંભાવના-વિતરણ $P(x)$ છે. ચલ X એ $x_1=-2, x_2=-1, x_3=1$ અને $x_4=2$ કિંમતો ધારણ કરી શકે છે તથા જો

$4p(x_1)=2p(x_2)=3p(x_3)=4p(x_4)$ હોય તો આ સંભાવના-વિતરણનો મધ્યક અને વિચરણ મેળવો.

6. એક પાસાને બે વખત યાદચ્છિક રીતે ઉછાળવામાં આવે છે. બંને વખતે પાસા પર મળતા અંકના સરવાળા માટેનું સંભાવના-વિતરણ મેળવો તથા તે સરવાળાની અપેક્ષિત કિંમત મેળવો.

7. એક પેટીમાં 4 લાલ અને 2 વાદળી દડા છે. એક સાથે યાદચ્છિક રીતે 3 દડા પસંદ કરવામાં આવે છે. જો X એ પસંદ કરેલ દડામાં મળતા લાલ રંગના દડાની સંખ્યા દર્શાવે, તો Xનું સંભાવના-વિતરણ મેળવો તથા પસંદગી પામેલ દડામાં લાલ રંગના દડાની અપેક્ષિત સંખ્યા શોધો.

8. એક સિક્કો જ્યાં સુધી છાપ મળે ત્યાં સુધી અથવા તો 5 કાંટા મળે ત્યાં સુધી ઉછાળવામાં આવે છે. જો યાદચ્છિક ચલ X એ સિક્કાને કેટલી વખત ઉછાળવાની જરૂર પડશે તે દર્શાવે તો યાદચ્છિક ચલ X નું સંભાવના-વિતરણ મેળવો અને તેના મધ્યક તથા વિચરણની ગણતરી કરો.

9. એક દુકાનદાર પાસે એક પેટીમાં 6 ટિકિટો છે. તેમાંથી બે ટિકિટો 10 રૂપિયાના ઇનામવાળી છે અને બાકીની ટિકિટો 5 રૂપિયાના ઇનામવાળી છે. જો પેટીમાંથી એક ટિકિટ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે, તો ઇનામનું અપેક્ષિત મૂલ્ય શોધો.

*

2.3 દ્વિપદી સંભાવના-વિતરણ (Binomial Probability Distribution)

અગાઉના પરિચ્છેદોમાં આપણે સતત તથા અસતત યાદચ્છિક ચલ અને અસતત યાદચ્છિક ચલના સંભાવના-વિતરણ વિશે જોઈ ગયાં. હવે આપણે અસતત યાદચ્છિક ચલના એક અગત્યના સંભાવના-વિતરણનો અભ્યાસ કરીશું.

કેટલાક યાદચ્છિક પ્રયોગનાં પરિણામોમાં બે જ વિકલ્પ હોય છે. આ પરિણામોને આપણે સફળતા અને નિષ્ફળતા કહીશું. આ પરિણામો પરસ્પર નિવારક હોય છે. આવા પ્રયોગને આપણે દ્વિવિધ વિકલ્પના પ્રયોગો કહીશું. આવી કેટલીક પરિસ્થિતિઓના દૃષ્ટાંત નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે :

પ્રયોગ		શક્ય પરિણામો	
		સફળતા	નિષ્ફળતા
(i)	ઉત્પાદિત એકમોનું વેચાણ વધારવા માટે આપેલ જાહેરાતની અસર જાણવી	વેચાણ વધ્યું	વેચાણ ન વધ્યું
(ii)	ટાઈપ રાઈટરે ટાઈપ કરેલ પત્રમાં ભૂલ શોધવી.	ભૂલ મળે	ભૂલ ન મળે
(iii)	ઊંચા લોહીના દબાણવાળા દર્દીને આપેલ દવાની તેના લોહીના દબાણ ઉપર થતી અસર જાણવી.	લોહીનું દબાણ ઘટ્યું	લોહીનું દબાણ ન ઘટ્યું
(iv)	કોઈ ઉત્પાદિત એકમ ખામીવાળો છે કે નહિ તે તપાસવું.	એકમ ખામીવાળો છે	એકમ ખામીવાળો નથી

આવા દ્વિવિધ વિકલ્પવાળા પ્રયોગ માટે આપણે સફળતાને S અને નિષ્ફળતાને F સંજ્ઞા વડે દર્શાવીએ તથા તે ઘટનાઓ માટેની સંભાવનાને અનુક્રમે p અને q વડે દર્શાવીએ તો

$p(S)=p$ તથા $p(F)=q,\ 0<p<1,\ 0<q<1,\ p+q=1$

આવા પ્રયોગનાં પરિણામો ફક્ત બે જ હોવાથી અને બંને પરસ્પર નિવારક હોવાથી $p+q=1$ થાય અને તેથી $q=1-p$ થશે.

આવા દ્વિવિધ વિકલ્પવાળા યાદચ્છિક પ્રયોગનું n વખત પુનરાવર્તન શક્ય બનતું હોય અને દરેક પુનરાવર્તન લગભગ સમાન પરિબળો હેઠળ થતું હોય તો દરેક પ્રયત્ને સફળતાની સંભાવના p અચળ રહેશે. આવા પ્રયત્નોને આપણે બર્નોલી પ્રયત્નો (Bernoulli Trials) કહીશું. જેની સ્પષ્ટ વ્યાખ્યા નીચે મુજબ આપી શકાય :

બર્નોલી પ્રયત્નો : ધારો કે એક દ્વિવિધ વિકલ્પવાળા યાદચ્છિક પ્રયોગનાં બે શક્ય પરિણામો સફળતા (S) અને નિષ્ફળતા (F) છે. જો આ પ્રયોગનું સમાન પરિસ્થિતિ હેઠળ પુનરાવર્તન કરવામાં આવે અને દરેક પ્રયત્ને સફળતાની સંભાવના $p(0<p<1)$ અચળ હોય તો આવા પ્રયત્નોને બર્નોલી પ્રયત્નો કહેવામાં આવે છે.

બર્નોલી પ્રયત્નોના ગુણધર્મો

(1) દરેક બર્નોલી પ્રયત્ને મળતી સફળતાની સંભાવના અચળ હોય છે.

(2) બર્નોલી પ્રયત્નો પરસ્પર નિરપેક્ષ છે. એટલે કે કોઈ પણ પ્રયત્ને મળતી સફળતા કે નિષ્ફળતા તેની અગાઉના પ્રયત્ને મળેલ સફળતા કે નિષ્ફળતા પર આધારિત નથી.

(3) સફળતા અને નિષ્ફળતા બંને પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ઘટનાઓ છે એટલે $q=1-p$ થાય.

દ્વિપદી સંભાવના-વિતરણ :

ધારો કે n બર્નોલી પ્રયત્નોમાં મળતી સફળતા (S) અને નિષ્ફળતા (F)ની શ્રેણીમાં મળતી સફળતાની સંખ્યાને X વડે દર્શાવીએ, તો Xને દ્વિપદી યાદચ્છિક ચલ (Binomial Random Variable) કહેવામાં આવે છે તથા X એ સાન્ત ગણ $\{0, 1, 2, ..., n\}$માંથી કોઈ પણ એક કિંમત ધારણ કરી શકે છે. દ્વિપદી યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના-વિતરણ નીચેના સૂત્ર દ્વારા વ્યાખ્યાયિત થાય છે :

$$P(X=x)=p(x)={}^{n}C_{x}p^{x}q^{n-x},\ x=0,\ 1,\ 2,\ .....,n, 0<p<1, q=1-p$$

આ સંભાવના-વિતરણને દ્વિપદી સંભાવના-વિતરણ (Binomial Probability Distribution) કહેવામાં આવે છે. આપણે આ વિતરણને ટૂંકમાં દ્વિપદી વિતરણ કહીશું.

અહીં ધન પૂર્ણાંક n તથા સફળતાની સંભાવના p જ્ઞાત હોય, તો સમગ્ર સંભાવના-વિતરણ એટલે કે Xની પ્રત્યેક શક્ય કિંમતની સંભાવનાને જાણી શકાય. તેથી n અને p ને દ્વિપદી વિતરણના પ્રાચલ કહેવામાં આવે છે. આપણે n અને p પ્રાચલોવાળા દ્વિપદી વિતરણને સંજ્ઞામાં $b(n, p)$ વડે દર્શાવીશું.

નોંધ : જો આવા જ બર્નોલી પ્રયત્નો વાળા પ્રયોગને N વખત પુનરાવર્તિત કરીએ અને પ્રયોગમાં મળતી સફળતાની સંખ્યા x ની સંભાવના $p(x)$ હોય તો N પુનરાવર્તનોમાં મળતી સફળતાની સંખ્યાની અપેક્ષિત આવૃત્તિ $=N\cdot p(x)$

2.3.1 દ્વિપદી વિતરણના ગુણધર્મો

(1) દ્વિપદી વિતરણ એ અસતત વિતરણ છે.

(2) તેના પ્રાચલો n અને p છે.

(3) આ વિતરણનો મધ્યક np છે જે n બર્નોલી પ્રયત્નોમાં મળતી સફળતાની સરેરાશ (અપેક્ષિત) સંખ્યા દર્શાવે છે.

(4) આ વિતરણનું વિચરણ npq અને પ્રમાણિત વિચલન $\sqrt{npq}$ છે.

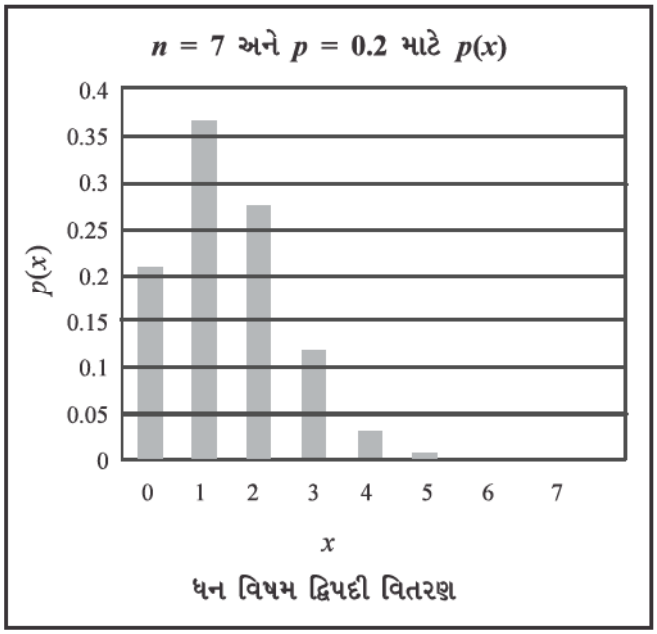
(5) દ્વિપદી વિતરણ માટે હંમેશાં મધ્યક એ વિચરણ કરતા મોટો હોય છે, તથા $\frac{\text{વિચરણ}}{\text{મધ્યક}} = q =$ નિષ્ફળતાની સંભાવના છે.

(6) nની કોઈ પણ કિંમત માટે જો $p<\frac{1}{2}$ હોય, તો આ વિતરણની વિષમતા ધન હોય છે.

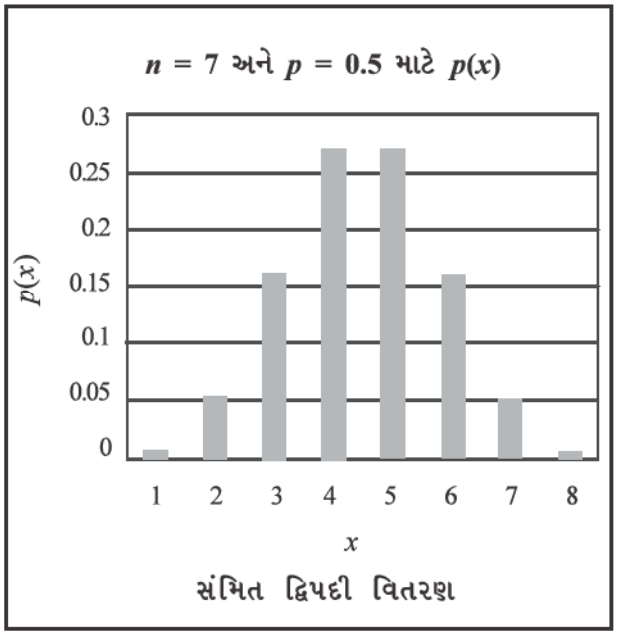
(7) nની કોઈ પણ કિંમત માટે જો $p=\frac{1}{2}$ હોય, તો આ વિતરણ સંમિત થાય છે, એટલે કે તેની વિષમતા શૂન્ય હોય છે.

(8) nની કોઈ પણ કિંમત માટે જો $p>\frac{1}{2}$ હોય, તો આ વિતરણની વિષમતા ઋણ હોય છે.

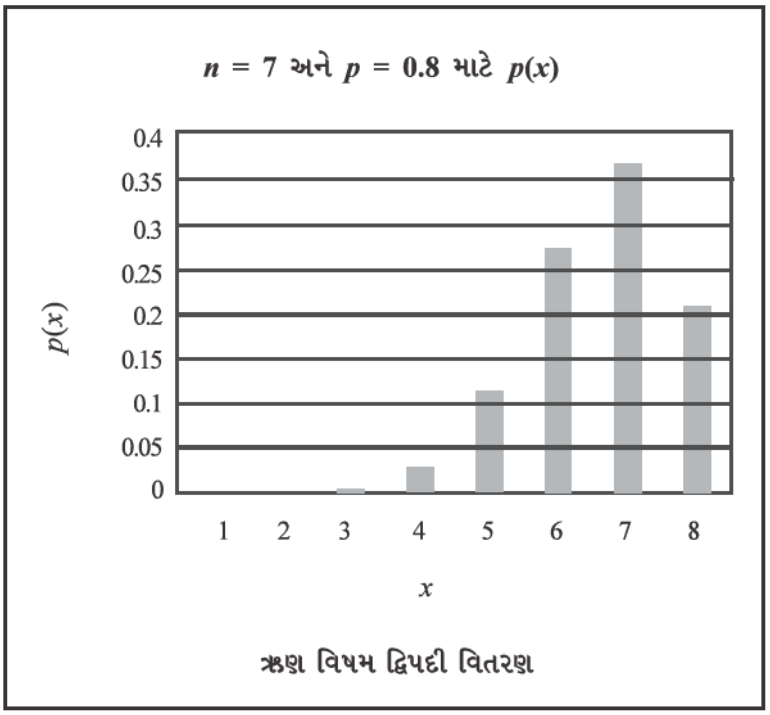
ગુણધર્મ (6), (7) અને (8) નીચેના આલેખો દ્વારા સ્પષ્ટ જોઈ શકાય છે.



ધન વિષમ દ્વિપદી વિતરણ



સંમિત દ્વિપદી વિતરણ



ઋણ વિષમ દ્વિપદી વિતરણ

2.3.2 દ્વિપદી વિતરણનાં ઉદાહરણો (Illustrations of Binomial Distribution)

ઉદાહરણ 11 : એક ફેક્ટરીમાં ઉત્પાદિત થયેલા એકમોમાં 3 % એકમો ખામીવાળા હોય છે. આ ઉત્પાદિત થયેલ એકમોમાંથી યાદચ્છિક રીતે 4 એકમો પસંદ કરવામાં આવે છે, તેમાંથી એક પણ એકમ ખામીવાળો ન મળે તેની સંભાવના કેટલી થશે ?

પસંદ કરેલ એકમ ખામીવાળો હોય તે ઘટનાને સફળતા ગણીએ તો સફળતાની સંભાવના $p = 0.03$ તથા અહીં $n = 4$ થશે. એક પણ એકમ ખામીવાળો ન મળે એટલે $X = 0$ થાય.

હવે

$$p(x) = {}^nC_x p^x q^{n-x},\ x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

આ સૂત્રમાં n, p, $q = 1 - p$ તથા xની કિંમત મૂકતા,

$$P(X = 0) = {}^4C_0 (0.03)^0 (0.97)^{4-0}$$

$$= (0.97)^4$$

$$= 0.8853$$

આમ, પસંદ કરેલ 4 એકમોમાં એક પણ એકમ ખામીવાળો ન હોય તેની સંભાવના 0.8853 થાય.

ઉદાહરણ 12 : એક શહેરમાં રહેતી વ્યક્તિ માંસાહારી હોય તેની સંભાવના 0.20 છે. આ વિસ્તારમાંથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ 6 વ્યક્તિઓમાંથી વધુમાં વધુ બે વ્યક્તિઓ માંસાહારી હોય તેની સંભાવના શોધો.

વ્યક્તિ માંસાહારી હોય તે ઘટનાને સફળતા કહીએ, તો સફળતાની સંભાવના $p = 0.20$ તથા $n = 6$ આપેલ છે.

હવે $X =$ પસંદ કરેલ વ્યક્તિઓમાંથી મળતી માંસાહારી વ્યક્તિઓની સંખ્યા લઈએ, તો અહીં $X \le 2$ માટેની સંભાવના માટે દ્વિપદી વિતરણના સંભાવનાના સૂત્ર

$p(x) = {}^nC_x p^x q^{n-x}, x = 0, 1, 2, ..., n$

માં n, p તથા xનાં મૂલ્યો મૂકતાં,

$p(X \le 2) = p(X = 0$ અથવા $X = 1$ અથવા $X = 2)$

$= p(0) + p(1) + p(2)$

$= {}^6C_0 (0.20)^0 (0.80)^6 + {}^6C_1 (0.20)^1 (0.80)^{6-1} + {}^6C_2 (0.20)^2 (0.80)^{6.2}$

$= 0.2621 + 6(0.20)(0.3277) + 15(0.04)(0.4096)$

$= 0.2621 + 0.3932 + 0.2458$

$= 0.9011$

ઉદાહરણ 13 : એક દ્વિપદી વિતરણ માટે મધ્યક અને વિચરણ અનુક્રમે 3.9 તથા 2.73 છે, તો આ વિતરણમાં કરેલ બર્નોલી પ્રયત્નોની સંખ્યા શોધો તથા $p(x)$ લખો.

અહીં વિચરણ $= npq = 2.73$ તથા મધ્યક $= np = 3.9$ છે.

$\therefore q = \frac{\text{વિચરણ}}{\text{મધ્યક}} = \frac{2.73}{3.9} = 0.7$ તથા $p = 1 - q = 0.3$

હવે $n = \frac{np}{p} = \frac{\text{મધ્યક}}{p} = \frac{3.9}{0.3} = 13$

આ પ્રયોગમાં બર્નોલી પ્રયત્નોની સંખ્યા 13 છે. આ વિતરણમાં $n = 13, p = 0.3, q = 0.7$ હોવાથી તેનું $p(x)$ નીચે મુજબ થાય :

$p(x) = {}^{13}C_x (0.3)^x (0.7)^{13-x}, x = 0, 1, 2, ..., 13.$

ઉદાહરણ 14 : યુદ્ધ દરમિયાન દરિયાઈ સફરમાં સરેરાશ 9 માંથી એક જહાજ ડૂબી જાય છે, તો 6 જહાજના કાફલામાંથી 5 જહાજ દરિયાઈ સફર કરી સલામત રીતે પાછા આવે તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.

ધારો કે X = યુદ્ધ દરમ્યાન દરિયાઈ સફર કરનાર 6 જહાજમાંથી સલામત પાછા આવતા જહાજની સંખ્યા

n = કાફલામાં રહેલ કુલ જહાજની સંખ્યા = 6

p = કોઈ એક જહાજ દરિયાઈ સફર કરી સલામત રીતે પરત આવે તે ઘટનાની સંભાવના $= \frac{8}{9}$

$\therefore$ 6 જહાજના કાફલામાંથી 5 જહાજ દરિયાઈ સફર કરી પાછા સલામત રીતે આવે તે ઘટનાની સંભાવના સૂત્ર

$p(x) = {}^nC_x p^x q^{n-x}, x = 0, 1, 2, ..., n$

માં અનુરૂપ કિંમતો મૂકતાં,

$p(5) = {}^6C_5 \left(\frac{8}{9}\right)^5 \left(\frac{1}{9}\right)^1$

$= 6\left(\frac{32768}{59049}\right)\left(\frac{1}{9}\right)$

$= \frac{196608}{531441}$

$= 0.3700$

ઉદાહરણ 15 : ધારો કે અઠવાડિયાના દિવસો દરમિયાન બપોરે 2 થી 3 વાગ્યા સુધીમાં સરેરાશ 4 ટેલિફોન લાઈનમાંથી એક લાઈન વ્યસ્ત હોય છે. યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલા 6 ટેલિફોન લાઈનમાંથી આ સમય દરમિયાન (i) 3 કરતાં વધુ ટેલિફોન લાઈન વ્યસ્ત ન આવે. (ii) ઓછામાં ઓછા 3 ટેલિફોન લાઈન વ્યસ્ત આવે તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.

ધારો કે $p=$ પસંદ કરેલ ટેલિફોન લાઈન બપોરે 2 થી 3 દરમિયાનના સમય ગાળા દરમિયાન વ્યસ્ત આવે તે ઘટનાની સંભાવના $= \frac{1}{4}$

તથા $X=$ બપોરે 2 થી 3 વાગ્યા સુધીના સમયગાળા દરમિયાન 6 ટેલિફોન લાઈનમાંથી વ્યસ્ત આવતી ટેલિફોન લાઈનની સંખ્યા લઈએ.

અહીં $n=6$ આપેલ છે.

(i) યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલા 6 ટેલિફોન લાઈનમાંથી 3 કરતા વધુ ટેલિફોન લાઈન વ્યસ્ત ન આવે તે ઘટના એટલે કે 3 કે તેથી ઓછી ટેલિફોન લાઈન વ્યસ્ત આવે તે ઘટના.

એટલે કે $X \le 3$ થાય.

$\therefore$ આ ઘટનાની સંભાવના માટે દ્વિપદી સંભાવના-વિતરણના સૂત્ર

$$p(x) = {}^nC_x p^x q^{n-x},\ x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

નો ઉપયોગ કરતા માંગેલ સંભાવના $= p(X \le 3)$

$= p\,(X = 0$ અથવા 1 અથવા 2 અથવા $3)$

$= 1 - p\,(x = 4$ અથવા 5 અથવા $6)$

$= 1 - \left[p(4) + p(5) + p(6)\right]$

$$= 1 - \left[{}^6C_4 \left(\tfrac{1}{4}\right)^4 \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 + {}^6C_5 \left(\tfrac{1}{4}\right)^5 \left(\tfrac{3}{4}\right)^1 + {}^6C_6 \left(\tfrac{1}{4}\right)^6 \left(\tfrac{3}{4}\right)^0\right]$$

$$= 1 - \left[15\left(\tfrac{1}{256}\right)\left(\tfrac{9}{16}\right) + 6\left(\tfrac{1}{1024}\right)\left(\tfrac{3}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{4096}\right)\right]$$

$$= 1 - \left[\tfrac{135}{4096} + \tfrac{18}{4096} + \tfrac{1}{4096}\right]$$

$$= 1 - \tfrac{154}{4096} = \tfrac{3942}{4096} = 0.9624$$

(ii) ઓછામાં ઓછી 3 ટેલિફોન લાઈન વ્યસ્ત આવે તે ઘટનાની સંભાવના $= p(X \ge 3)$

$= p\,(X = 3$ અથવા 4 અથવા 5 અથવા $6)$

$= p(3) + p(4) + p(5) + p(6)$

હવે ઉપરની ગણતરીમાંથી $p(4)$, $p(5)$ અને $p(6)$ની કિંમતો આપણને મળશે તેથી આપણે સૌ પ્રથમ $p(3)$ની ગણતરી કરીએ.

$p(3) = {}^6C_3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 20 \left(\frac{1}{64}\right)\left(\frac{27}{64}\right)$

$= \frac{540}{4096}$

હવે પ્રશ્ન (i) માંથી $p(4), p(5)$ તથા $p(6)$ની કિંમતો અને શોધેલ $p(3)$ની કિંમતો પરથી

$p(X \geq 3) = \frac{540}{4096} + \frac{135}{4096} + \frac{18}{4096} + \frac{1}{4096}$

$= \frac{694}{4096} = 0.1694$

ઉદાહરણ 16 : એક યાદચ્છિક ચલ Xના દ્વિપદી વિતરણના પ્રાચલ $n = 4$ અને $p = \frac{1}{3}$ છે, તો Xનું સંભાવના-વિતરણ કોષ્ટક સ્વરૂપે રજૂ કરો તે પરથી $P(X \leq 2)$નું મૂલ્ય મેળવો.

અહીં પ્રાચલ $n = 4$ તથા $p = \frac{1}{3}$ છે. $\therefore q = 1 - p = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ થાય.

દ્વિપદી વિતરણના સૂત્ર

$p(x) = {}^nC_x \, p^x q^{n-x}$, $x = 0, 1, 2, \ldots, n$ માં પ્રાચલની કિંમતો મૂકતાં $p(x) = {}^4C_x \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{4-x}$, $x = 0, 1, 2, 3, 4$ મળે.

હવે આપણે xની જુદી-જુદી કિંમતો 0, 1, 2, 3 અને 4 મૂકી $p(x)$ની કિંમતોની ગણતરી કરીએ.

$p(0) = {}^4C_0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^{4-0} = \frac{16}{81}$

$p(1) = {}^4C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^{4-1} = 4\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{8}{27}\right) = \frac{32}{81}$

$p(2) = {}^4C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{4-2} = 6\left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{24}{81}$

$p(3) = {}^4C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^{4-3} = 4\left(\frac{1}{27}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{81}$

$p(4) = {}^4C_4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^{4-4} = 1\left(\frac{1}{81}\right)1 = \frac{1}{81}$

જે કોષ્ટક સ્વરૂપે નીચે મુજબ લખાય :

$X = x$	0	1	2	3	4	કુલ
$p(x)$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$	1

હવે $P(X \le 2)$

$= P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$

$= \frac{16}{81}+\frac{32}{81}+\frac{24}{81}$

$= \frac{72}{81}$

$= \frac{8}{9}$

ઉદાહરણ 17 : એક દ્વિપદી વિતરણ માટે $P(X=x)=p(x)$માં $n=8$ છે અને $2p(4)=5p(3)$ છે, તો આ વિતરણ માટેના બધા જ પ્રયત્ને સફળતા મળે તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.

અહીં $2p(4)=5p(3)$ છે તથા $n=8$ આપેલ છે.

$\therefore$ દ્વિપદી વિતરણના સંભાવનાના સૂત્રમાં $n=8$ની કિંમત મૂકતાં

$p(x)={}^8C_x p^x q^{8-x}$, $x=0, 1, 2,....,8$ મળે.

આ સૂત્ર પરથી $p(4)$ તથા $p(3)$ની કિંમતો આપેલ શરતમાં મૂકતાં

$2P(4)=5P(3)$

$2\times {}^8C_4\, p^4\, q^{8-4} = 5\times {}^8C_3 p^3 q^{8-3}$

$\therefore\ 2\times(70)\,p^4\,q^4 = 5\times(56)\,p^3q^5$

$\therefore\ 140\,p^4\,q^4 = 280p^3q^5$

$\therefore\ p=2q$

$\therefore\ p=2(1-p)$

$\therefore\ p=2-2p$

$\therefore 3p=2$

$\therefore\ p=\frac{2}{3}$ થાય અને $q=1-p=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ થાય.

હવે દરેક પ્રયત્ને સફળતા મળે એટલે કે અહીં કુલ પ્રયત્નોની સંખ્યા 8 હોવાથી 8 સફળતા મળે તે ઘટના.

આ ઘટનાની સંભાવના $p(8)$ થાય.

$\therefore\ p(8)={}^8C_8\left(\frac{2}{3}\right)^8\left(\frac{1}{3}\right)^{8-8}$

$=1\times\left(\frac{2}{3}\right)^8\times 1$

$=\frac{256}{6561}$

આમ, બધા જ પ્રયત્ને સફળતા મળે તે ઘટનાની સંભાવના $\frac{256}{6561}$ થાય.

ઉદાહરણ 18 : એક દ્વિપદી વિતરણનો મધ્યક 18 અને વિચરણ 4.5 છે. આ વિતરણની વિષમતા ધન છે કે ઋણ તે નક્કી કરો.

અહીં મધ્યક $= np = 18$ અને વિચરણ $= npq = 4.5$ છે.

$\therefore q = \frac{\text{વિચરણ}}{\text{મધ્યક}} = \frac{4.5}{18} = 0.25 = \frac{1}{4}$

$\therefore p = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

અહીં pની કિંમત $\frac{1}{2}$ કરતા મોટી હોવાથી દ્વિપદી વિતરણની વિષમતા ઋણ થશે.

ઉદાહરણ 19 : એક સમતોલ પાસાને 7 વખત ઉછાળવામાં આવે છે. દરેક પ્રયત્ને 5 કે તેથી મોટી સંખ્યા મળે તેને સફળતા ગણીએ અને 7 પ્રયત્નોમાં મળતી સફળતાની સંખ્યાને X કહીએ, તો (i) Xનું સંભાવના-વિતરણ લખો. (ii) 4 સફળતા મળે તે ઘટનાની સંભાવના શોધો. (iii) વધુમાં વધુ 6 સફળતા મળે તેની સંભાવના શોધો.

એક સમતોલ પાસાને ઉછાળવાના પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ નિદર્શ અવકાશ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ થાય અને પ્રત્યેક અંક મળવાની સંભાવના $\frac{1}{6}$ થાય.

હવે 5 કે તેથી મોટી સંખ્યા મળે તેને સફળતા કહીએ તો સફળતાની સંભાવના

$p =$ પાસા ઉપર 5 કે 6 અંક મળે તે ઘટનાની સંભાવના

$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\therefore q = 1 - p = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

હવે કુલ પ્રયત્નોની સંખ્યા 7 છે. $\therefore n = 7$ થશે.

(i) તેથી Xનું સંભાવના-વિતરણ $p(x) = {}^nC_x p^x q^{n-x}, x = 0, 1, 2, ..., n$ પરથી

$$p(x) = {}^7C_x \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{7-x}, \quad x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

(ii) 4 સફળતા મળે તે ઘટનાની સંભાવના

$$p(4) = {}^7C_4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^{7-4}$$

$$= 35\left(\frac{1}{81}\right)\left(\frac{8}{27}\right)$$

$$= \frac{280}{2187}$$

(iii) વધુમાં વધુ 6 સફળતા મળે તેની સંભાવના

$= P(X \le 6)$

$= 1 - P(X > 6)$

$= 1 - P(X = 7) \quad \because x = 0, 1, 2, ..., 7$ છે.

$= 1 - {}^7C_7 \left(\frac{1}{3}\right)^7 \left(\frac{2}{3}\right)^{7-7}$

$= 1 - \frac{1}{2187} = \frac{2186}{2187}$

ઉદાહરણ 20 : એક સામાજિક કાર્યકર એવો દાવો કરે છે કે એક શહેરમાં નાની ઉંમરવાળાં બાળકોમાંથી 10 % બાળકોને દૃષ્ટિની ખામી છે. એક નિદર્શ તપાસ એજન્સી આ દાવાની ચકાસણી કરવા માટે આ શહેરમાંથી યાદચ્છિક રીતે નાની ઉંમરનાં 10 બાળકો પસંદ કરે છે. જો તેમાંથી વધુમાં વધુ એક બાળકને દૃષ્ટિની ખામી માલૂમ પડે તો સામાજિક કાર્યકરે કરેલ દાવો નકારી કાઢે છે, તો (i) નિદર્શ તપાસ એજન્સી સામાજિક કાર્યકરનો દાવો નકારી કાઢે તેની સંભાવના શોધો. (ii) યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલાં નાની ઉંમરનાં 10 બાળકોમાં દૃષ્ટિની ખામીવાળા બાળકોની અપેક્ષિત સંખ્યા શોધો.

ધારો કે p = નાની ઉંમરનાં બાળકોને દૃષ્ટિની ખામી હોય તે ઘટનાની સંભાવના

$= 0.10$ (સામાજિક કાર્યકરનો દાવો સ્વીકારતાં)

તથા X= પસંદ કરાયેલાં નાની ઉંમરના 10 બાળકોમાંથી મળતા દૃષ્ટિની ખામીવાળાં બાળકોની સંખ્યા.

અહીં $n = 10$ છે. દ્વિપદી વિતરણના સંભાવનાના સૂત્ર

$p(x) = {}^nC_x \; p^x q^{n-x}, \; x = 0, 1, 2, ..., n$

માં $n = 10$ તથા $p = 0.10$ મૂકતાં

$p(x) = {}^{10}C_x (0.10)^x \; (0.90)^{10-x}, \; x = 0, 1, 2, ..., 10$

(i) હવે એક કે તેથી ઓછાં બાળકોને દૃષ્ટિની ખામી હોય તે ઘટનાની સંભાવના

$= p(0) + p(1)$

$= {}^{10}C_0 \; (0.10)^0 \; (0.90)^{10-0} + {}^{10}C_1 \; (0.10)^1 \; (0.90)^{10-1}$

$= 0.3487 + 10 \; (0.10) \; (0.3874)$

$= 0.3487 + 0.3874$

$= 0.7361$

હવે નિદર્શ તપાસ એજન્સી જો એક કે તેથી ઓછાં બાળકોને દૃષ્ટિની ખામી માલૂમ પડે તો સામાજિક કાર્યકરે કરેલો દાવો નકારી કાઢે છે.

$\therefore$ નિદર્શ તપાસ એજન્સી, સામાજિક કાર્યકરે કરેલ દાવો નકારી કાઢે તે ઘટનાની સંભાવના $= 0.7361$ થાય.

(ii) યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ નાની ઉંમરનાં 10 બાળકોમાં દૃષ્ટિની ખામીવાળાં બાળકોની અપેક્ષિત સંખ્યા

$= E(X) = np$

$= 10 \times$ પસંદ કરેલ બાળકને દૃષ્ટિની ખામી હોવાની સંભાવના

$= 10 \times 0.10$

$= 1$

ઉદાહરણ 21 : પાંચ સમતોલ સિક્કાને એકસાથે ઉછાળવાનો પ્રયોગ કરવામાં આવે છે. પ્રયોગ દરમિયાન સિક્કાની ઉપરની તરફ છાપ (H) આવે તે ઘટનાને સફળતા ગણીએ, તો સફળતાની સંખ્યાનું સંભાવના વિતરણ મેળવો. જો આ પ્રયોગનું 3200 વખત પુનરાવર્તન કરવામાં આવે તો સફળતાની સંખ્યાનું અપેક્ષિત આવૃત્તિ વિતરણ મેળવો. આ વિતરણ માટે સફળતાની સંખ્યાની અપેક્ષિત કિંમત તથા તેનું પ્રમાણિત વિચલન પણ મેળવો.

અહીં સિક્કા સમતોલ હોવાથી છાપ મળવાની સંભાવના $\frac{1}{2}$ થશે.

તેથી $p =$ સફળતાની સંભાવના

$=$ છાપ મળે તે ઘટનાની સંભાવના $\frac{1}{2}$ થાય.

$\therefore q = 1 - p = \frac{1}{2}$

$n =$ સિક્કાઓની સંખ્યા $= 5$, $x =$ પાંચ સિક્કાઓ ઉછાળતા મળતી સફળતાની સંખ્યા લઈએ.

હવે દ્વિપદી વિતરણના સૂત્ર

$p(x) = {}^{n}C_{x}\, p^{x} q^{n-x},\ x = 0, 1, 2, \ldots, n$

માં n, p તથા q ની કિંમતો મૂકતાં

$p(x) = {}^{5}C_{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{5-x},\quad x = 0, 1, 2, \ldots, 5$ મળે

$= {}^{5}C_{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{x\ 5-x}$

$= {}^{5}C_{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{5}$

$= \frac{{}^{5}C_{x}}{32},\quad x = 0, 1, 2, \ldots, 5$

હવે આપણે ઉપરના સૂત્રનો ઉપયોગ કરી દરેક x માટે તેની સંભાવના તથા 3200 વખત કરેલ પ્રયત્નોમાં x સફળતા મળે તેની આવૃત્તિ $= 3200 \times p(x)$ થાય. $x = 0, 1, 2, ...,5$

આ ગણતરી આપણે નીચેના કોષ્ટકમાં રજૂ કરીએ :

x	$p(x)$	અપેક્ષિત આવૃત્તિ $= N \times p(x)$
0	$\frac{{}^5C_0}{32} = \frac{1}{32}$	$3200 \times \frac{1}{32} = 100$
1	$\frac{{}^5C_1}{32} = \frac{5}{32}$	$3200 \times \frac{5}{32} = 500$
2	$\frac{{}^5C_2}{32} = \frac{10}{32}$	$3200 \times \frac{10}{32} = 1000$
3	$\frac{{}^5C_3}{32} = \frac{10}{32}$	$3200 \times \frac{10}{32} = 1000$
4	$\frac{{}^5C_4}{32} = \frac{5}{32}$	$3200 \times \frac{5}{32} = 500$
5	$\frac{{}^5C_5}{32} = \frac{1}{32}$	$3200 \times \frac{1}{32} = 100$

(ii) સફળતાની સંખ્યાની અપેક્ષિત કિંમત

$= np$

$= 5 \times \left(\frac{1}{2}\right) = 2.5$

(iii) સફળતાની સંખ્યાનું પ્રમાણિત વિચલન

$= \sqrt{npq}$

$= \sqrt{5 \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \sqrt{1.25}$

$= 1.118$

ઉદાહરણ 22 : એક જાહેરાત કરતી કંપની એવો દાવો કરે છે કે 5 ગૃહિણીઓમાંથી 4 ગૃહિણીઓ માખણની બે જુદી-જુદી બ્રાન્ડ વચ્ચેનો તફાવત પારખી શકતી નથી. આ દાવાની ચકાસણી કરવા માટે 5000 ગૃહિણીઓને યાદચ્છિક રીતે 5 ગૃહિણીઓનો એક એવા સમૂહોમાં વિભાજિત કરવામાં આવે છે. જો આ દાવો સાચો હોય તો આવા બનતા સમૂહોમાંથી કેટલા સમૂહમાં (i) વધુમાં વધુ એક ગૃહિણી (ii) ફક્ત બે જ ગૃહિણીઓ માખણની બે જુદી-જુદી બ્રાન્ડ વચ્ચેનો તફાવત પારખી શકશે ?

અહીં જાહેરાત કરતી કંપનીના દાવા મુજબ ગૃહિણી માખણની બે જુદી-જુદી બ્રાન્ડ વચ્ચેનો તફાવત પારખી શકે નહિ તેવી 5માંથી 4 ઘટના બને છે.

$\therefore$ તેની સંભાવના $\frac{4}{5}$ થાય.

એટલે કે માખણની બે જુદી-જુદી બ્રાન્ડ વચ્ચેનો તફાવત ગૃહિણી પારખી શકે તે ઘટનાની સંભાવના $= \frac{1}{5}$ થાય.

તેથી $p =$ પસંદ કરેલ ગૃહિણી માખણની બે જુદી-જુદી બ્રાન્ડ વચ્ચેનો તફાવત પારખી શકે તે ઘટનાની સંભાવના $= \frac{1}{5}$ થાય.

તેથી દાવાના પરીક્ષણ માટે પસંદ કરેલ 5000 ગૃહિણીઓને યાદચ્છિક રીતે 5 ગૃહિણીઓનો એક એવા સમૂહોમાં વિભાજિત કરવામાં આવે છે, જેથી આવા 1000 સમૂહો બનશે.

હવે $X=$ કોઈ એક સમૂહમાં માખણની બે જુદી-જુદી બ્રાન્ડ વચ્ચેનો તફાવત પારખી શકે તેવા ગૃહિણીઓની સંખ્યા લઈએ તો $x = 0, 1, ..., 5$ થાય.

આમ આપણી પાસે $n = 5,\ p = \frac{1}{5},\ q = \frac{4}{5}$ છે.

હવે દ્વિપદી વિતરણના સૂત્ર

$$P(x) = {}^nC_x\ p^x q^{n-x},\ x = 0, 1, 2, ..., n$$

માં ઉપરની કિંમતે મૂકતાં $p(x)$એ નીચે મુજબ બને.

$$P(x) = {}^5C_x \left(\frac{1}{5}\right)^x \left(\frac{4}{5}\right)^{5-x},\quad x = 0, 1, 2, ..., 5$$

આ સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને xની જુદી-જુદી કિંમતો માટે તેની સંભાવના ગણીએ તથા આ સંભાવનાને 1000 વડે ગુણવાથી 1000 સમૂહોમાંથી 0, 1, 2, 3, 4 કે 5 ગૃહિણીઓ બે જુદા-જુદા માખણની બ્રાન્ડ વચ્ચેનો તફાવત પારખી શકે તેવા સમૂહોની સંખ્યા મળે.

(i) 1000 સમૂહોમાં વધુમાં વધુ એક ગૃહિણી માખણની બે જુદી જુદી બ્રાન્ડ વચ્ચેનો તફાવત પારખી શકે તેવા સમૂહોની સંખ્યા

$$= 1000 \times [p(0) + p(1)]$$

$$= 1000 \times \left[{}^5C_0 \left(\frac{1}{5}\right)^0 \left(\frac{4}{5}\right)^{5-0} + {}^5C_1 \left(\frac{1}{5}\right)^1 \left(\frac{4}{5}\right)^{5-1}\right]$$

$$= 1000 \times \left[\frac{1024}{3125} + 5 \times \left(\frac{1}{5}\right) \times \left(\frac{256}{625}\right)\right]$$

$$= 1000 \times \left[\frac{1024}{3125} + \frac{256}{625}\right]$$

$= 1000 \times [0.32768 + 0.4096]$

$= 1000 \times [0.73728]$

$= 737.28$

≈ 737 સમૂહ

(ii) 1000 સમૂહોમાં ફક્ત બે જ ગૃહિણીઓ માખણની બે જુદી જુદી બ્રાન્ડ વચ્ચેનો તફાવત પારખી શકે તેવા સમૂહોની સંખ્યા

$= 1000 \times p(2)$

$= 1000 \times {}^5C_2 \left(\frac{1}{5}\right)^2 \left(\frac{4}{5}\right)^{5-2}$

$= 1000 \times 10 \times \left(\frac{1}{25}\right) \times \left(\frac{64}{125}\right)$

$= 1000 \times \frac{640}{3125}$

$= 1000 \times 0.2048$

$= 204.8$

≈ 205 સમૂહો

સ્વાધ્યાય 2.2

1. એક સંમિત દ્વિપદી વિતરણ માટે $n = 8$ હોય, તો $P(X \leq 1)$ મેળવો.

2. એક દ્વિપદી વિતરણનો મધ્યક 5 છે તથા તેનું વિચરણ એ સફળતાની સંભાવના જેટલું છે. આ વિતરણના પ્રાચલ શોધો અને તે પરથી આ વિતરણ માટે એક પણ નિષ્ફળતા ન મળે તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.

3. એક વ્યક્તિએ 4 ગાડીઓ ભાડે આપવા માટે રાખેલ છે. દિવસ દરમિયાન કોઈ પણ ગાડી ભાડે જાય તેની સંભાવના 0.6 છે, તો કોઈ એક દિવસ દરમિયાન એકથી વધુ પરંતુ 4થી ઓછી ગાડી ભાડે જાય તેની સંભાવના શોધો.

4. એક તાલુકામાં 200 ખેતરો આવેલ છે. આ તાલુકાનાં 200 ખેતરોમાં બનાવેલ પાણી માટેના બોરમાંથી 20 ખેતરોમાં ખારું પાણી મળેલ છે. આ તાલુકામાંથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલાં 5 ખેતરોમાંથી 3 ખેતરોમાં ખારું પાણી ન મળે તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.

5. એક દાખલો 6 વિદ્યાર્થીઓને ઉકેલવા માટે આપવામાં આવે છે. કોઈ પણ વિદ્યાર્થી દાખલાનો સાચો ઉકેલ લાવે તેની સંભાવના 0.6 છે. વિદ્યાર્થીઓ સ્વતંત્ર રીતે દાખલાનો ઉકેલ લાવવા પ્રયત્ન કરે છે, તો 6માંથી ફક્ત 2 વિદ્યાર્થીઓ દ્વારા દાખલાનો સાચો ઉકેલ મળે તેની સંભાવના શોધો.

*

સારાંશ

- **યાદચ્છિક ચલ :** એક યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશ Uના દરેક ઘટકને વાસ્તવિક સંખ્યા સાથે સાંકળતા વિધેયને યાદચ્છિક ચલ કહેવામાં આવે છે.

- **અસતત યાદચ્છિક ચલ :** જે યાદચ્છિક ચલ X વાસ્તવિક સંખ્યાગણ Rની સાન્ત સંખ્યામાં અથવા ગણ્ય અનંત કિંમતો ધારણ કરી શકે તેમ હોય, તેવા ચલ X ને અસતત યાદચ્છિક ચલ કહેવાય.

- **સતત યાદચ્છિક ચલ :** જે યાદચ્છિક ચલ X વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ગણ R માં અથવા R ના કોઈ પણ અંતરાલમાં કોઈ પણ કિંમત ધારણ કરી શકે તેવા ચલને સતત યાદચ્છિક ચલ કહેવાય.

- **અસતત સંભાવના-વિતરણ :** ધારો કે $X : U \to R$ એ એક અસતત યાદચ્છિક ચલ છે, જે Rના ઉપગણ $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ માંથી જ કોઈ એક કિંમત ધારણ કરી શકે છે. વળી, Xએ કિંમત x_i ધારણ કરે તેની સંભાવના $p(x_i)$ છે. જો $p(x_i) > 0, i = 1, 2, ..., n$ અને $\Sigma\, p(x_i) = 1$ હોય, તો વાસ્તવિક કિંમતોના ગણ $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ અને $\{p(x_1), p(x_2), ..., p(x_n)\}$ ને યાદચ્છિક ચલ Xનું અસતત સંભાવના-વિતરણ કહે છે, જે કોષ્ટકમાં નીચે પ્રમાણે લખવામાં આવે છે :

$X = x$	x_1	x_2	....	x_i	...	x_n	કુલ.
$p(x)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	....	$p(x_i)$	...	$p(x_n)$	1

અહીં $0 < p(x_i) < 1, i = 1, 2, ..., n$

- **બર્નોલી પ્રયત્નો :** ધારો કે એક દ્વિવિધ વિકલ્પવાળા યાદચ્છિક પ્રયોગનાં બે શક્ય પરિણામો સફળતા (S) અને નિષ્ફળતા (F) છે. જો આ પ્રયોગનું સમાન પરિસ્થિતિ હેઠળ પુનરાવર્તન કરવામાં આવે અને દરેક પ્રયત્ને સફળતાની સંભાવના $p(0 < p < 1)$ અચળ હોય, તો આવા પ્રયત્નોને બર્નોલી પ્રયત્નો કહેવામાં આવે છે.

- **દ્વિપદી યાદચ્છિક ચલ :** ધારો કે n બર્નોલી પ્રયત્નોમાં મળતી સફળતા (S) અને નિષ્ફળતા (F)ની શ્રેણીમાં મળતી સફળતાની સંખ્યાને X વડે દર્શાવીએ તો Xને દ્વિપદી યાદચ્છિક ચલ કહેવામાં આવે છે.

- **દ્વિપદી સંભાવના-વિતરણ :** દ્વિપદી યાદચ્છિક ચલ Xના સંભાવના-વિતરણને દ્વિપદી સંભાવના-વિતરણ કહે છે.

સૂત્રોની યાદી :

(1) અસતત સંભાવના-વિતરણનો મધ્યક $= \mu$

$= E(X)$

$= \Sigma\, x\, p(x)$

(2) અસતત સંભાવના-વિતરણનું વિચરણ $= \sigma^2$

$= V(X)$

$= E(X^2) - (E(X))^2$

જ્યાં $E(X^2) = \Sigma\, x^2\, p(x)$

(3) દ્વિપદી સંભાવના-વિતરણ

$P(X = x) = p(x) = {}^nC_x\, p^x q^{n-x},\ x = 0, 1, 2, ..., n,\ 0 < p < 1,\ q = 1 - p$

(4) દ્વિપદી સંભાવના-વિતરણનો મધ્યક $= np$

(5) દ્વિપદી સંભાવના-વિતરણનો વિચરણ $= npq$

(6) દ્વિપદી સંભાવના-વિતરણનું પ્રમાણિત વિચલન $= \sqrt{npq}$

(7) જો કોઈ બર્નોલી પ્રયત્નો વાળા પ્રયોગને N વખત પુનરાવર્તિત કરીએ અને પ્રયોગમાં મળતી સફળતાની સંખ્યા x ની સંભાવના $p(x)$ હોય તો N પુનરાવર્તનોમાં મળતી સફળતાની સંખ્યાની અપેક્ષિત આવૃત્તિ $= N \cdot p(x)$

સ્વાધ્યાય 2

વિભાગ A

નીચે આપેલ બહુવિકલ્પ પ્રશ્નો માટે સાચા વિકલ્પની પસંદગી કરો :

1. નીચેનામાંથી કયો ચલ એ અસતત ચલનું ઉદાહરણ બનશે ?

(a) વિદ્યાર્થીની ઊંચાઈ (b) વિદ્યાર્થીનું વજન

(c) વિદ્યાર્થીનું બ્લડપ્રેશર (d) વિદ્યાર્થીનું જન્મ વર્ષ

2. નીચેનામાંથી કયો ચલ એ સતત ચલનું ઉદાહરણ છે ?

(a) કોઈ એક સ્થળે બનતા અકસ્માતની સંખ્યા

(b) વર્ષ દરમિયાન વરસાદ પડ્યો હોય તેવા દિવસોની સંખ્યા

(c) દિવસ દરમિયાનનું મહત્તમ તાપમાન

(d) કુટુંબમાં બાળકોની સંખ્યા

3. જો યાદચ્છિક ચલ X એ -1, 0 અને 1 કિંમતો ધારણ કરે તેની સંભાવના અનુક્રમે $\frac{1}{5}$, K તથા $\frac{1}{3}$ છે. જ્યાં $0 < K < 1$ અને X એ આ કિંમતો સિવાય અન્ય કોઈ જ કિંમતો ધારણ કરતો નથી. તો $E(X)$ની કિંમત શું થાય ?

(a) $\frac{2}{5}$ (b) $\frac{3}{5}$ (c) $\frac{2}{15}$ (d) $\frac{3}{15}$

4. એક યાદચ્છિક ચલ ફક્ત -2, 0 અને 2 જ કિંમતો ધારણ કરે છે જેની સંભાવના અનુક્રમે $\frac{1}{5}, \frac{3}{5}$ અને K છે. $0 < K < 1$ તો Kની કિંમત શું થાય ?

(a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{4}{5}$ (c) $\frac{2}{5}$ (d) $\frac{3}{5}$

5. એક અસતત સંભાવના-વિતરણ માટે તેના મધ્યકની કિંમત 3 છે જ્યારે તેનું વિચરણ 7 છે તો આ વિતરણ માટે $E\left(X^2\right)$ શું થાય ?

(a) 10 (b) 4 (c) 40 (d) 16

6. એક અસતત ચલ X ના સંભાવના-વિતરણ માટે $E(X)=5$ તથા $E\left(X^2\right)=35$ છે, તો આ વિતરણનું વિચરણ શું થાય ?

(a) 40 (b) 30 (c) 20 (d) 10

7. $n = 10$ પ્રાચલવાળા ધન વિષમ દ્વિપદી વિતરણ માટે નીચે આપેલ કિંમતો પૈકી કઈ કિંમત મધ્યકની હોઈ શકે ?

(a) 5 (b) 3 (c) 9 (d) 7

8. $n = 4$ તથા $p = \frac{1}{2}$ પ્રાચલોવાળા દ્વિપદી વિતરણ માટે $p(x)$નું મૂલ્ય x ની કઈ કિંમત માટે મહત્તમ બનશે ?

(a) 0 (b) 2 (c) 3 (d) 4

9. એક દ્વિપદી વિતરણનો મધ્યક 5 તથા વિચરણ $\frac{10}{7}$ છે. તો આ વિતરણ કેવું બનશે ?

(a) ધન વિષમ (b) ઋણ વિષમ

(c) સંમિત (d) વિતરણ વિશે કશું જ કહી શકાય નહિ

10. n અને p પ્રાચલવાળા દ્વિપદી વિતરણ માટે એક પણ સફળતા ન મળે તે ઘટનાની સંભાવના માટેનું સૂત્ર નીચેના પૈકી કયું છે ?

(a) ${}^nC_0p^nq^0$ (b) ${}^nC_0p^0q^n$ (c) ${}^nC_0pq^n$ (d) ${}^nC_0p^nq$

વિભાગ B

નીચેના પ્રશ્નોના એક વાક્યમાં જવાબ આપો :

1. અસતત યાદચ્છિક ચલની વ્યાખ્યા આપો.
2. સતત યાદચ્છિક ચલની વ્યાખ્યા આપો.
3. અસતત સંભાવના-વિતરણની વ્યાખ્યા આપો.
4. અસતત ચલનો મધ્યક શોધવા માટેનું સૂત્ર જણાવો.
5. અસતત ચલનું વિચરણ શોધવા માટેનું સૂત્ર જણાવો.
6. એક સંમિત દ્વિપદી વિતરણનો મધ્યક 7 છે. તેના પ્રાચલ n ની કિંમત જણાવો.
7. એક દ્વિપદી વિતરણના પ્રાચલો અનુક્રમે 10 તથા $\frac{2}{5}$ છે, તો તેના વિચરણની ગણતરી કરો.
8. બર્નોલી પ્રયત્નોમાં સફળતા અને નિષ્ફળતાની સંભાવના વચ્ચેનો સંબંધ જણાવો.
9. દ્વિપદી વિતરણના મધ્યક અને વિચરણ વચ્ચેનો સંબંધ જણાવો.
10. એક દ્વિપદી વિતરણમાં નિષ્ફળતાની સંભાવના 0.6 છે તથા તેમાં કુલ પ્રયત્નોની સંખ્યા 5 છે, તો આ વિતરણ માટે સફળતાની સંભાવના શોધો.

વિભાગ C

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. ચલ Xનું સંભાવના-વિતરણ નીચે મુજબ છે :

X	2	3	4	5
$p(x)$	0.2	0.3	$4C$	C

તો અચળ Cની કિંમત નક્કી કરો.

2. અસતત સંભાવના-વિતરણ $p(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{6}; & x = 2, 3 \\ \frac{1}{2}; & x = 4 \end{cases}$

માટે વિતરણના મધ્યકની ગણતરી કરો.

3. એક યાદચ્છિક ચલનું સંભાવના-વિતરણ નીચે મુજબ છે :

$p(x) = \frac{x+3}{10}, \quad x = -2, 1, 2$

તો તે પરથી $E(X^2)$ની ગણતરી કરો.

4. એક સંમિત દ્વિપદી વિતરણ માટે જો $n=4$ હોય, તો $P(4)$ મેળવો.

5. બર્નોલી પ્રયત્નોની વ્યાખ્યા આપો.

6. એક દ્વિપદી વિતરણ માટે જો સફળતાની સંભાવના એ નિષ્ફળતાની સંભાવના કરતા બમણી હોય અને $n=4$ હોય, તો આ વિતરણનું વિચરણ શું થાય ?

7. $n=8$ તથા નિષ્ફળતાની સંભાવના $\frac{2}{3}$ હોય તેવા દ્વિપદી વિતરણનું પ્રમાણિત વિચલન મેળવો.

8. એક દ્વિપદી વિતરણના મધ્યક 4 અને વિચરણ 2 છે, તો આ વિતરણના પ્રાચલ શોધો.

9. એક દ્વિપદી વિતરણ માટે $n=10$ અને $q-p=0.6$ છે, તો આ વિતરણનો મધ્યક મેળવો.

10. એક દ્વિપદી વિતરણ માટે પ્રમાણિત વિચલન 0.8 છે, તથા નિષ્ફળતાની સંભાવના $\frac{2}{3}$ છે, તો આ વિતરણનો મધ્યક શોધો.

વિભાગ D

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. એક યાદચ્છિક ચલ X નું સંભાવના-વિતરણ નીચે મુજબ છે :

$$p(x)=\begin{cases} K(x-1); & x=2,3 \\ K; & x=4 \\ K(6-x)\ ; & x=5 \end{cases}$$

તો અચળ Kની કિંમત શોધો તથા ચલ X એ યુગ્મ કિંમત ધારણ કરે તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.

2. એક યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના-વિતરણ નીચે મુજબ છે :

$$p(x)=C\left(x^2+x\right),\ x=-2,1,2$$

તો Cની કિંમત મેળવો તથા બતાવો કે $P(2)=3P(-2)$ છે.

3. એક યાદચ્છિક ચલ Xનું વિતરણ $P(x)=K\cdot{}^5P_x,\ x=0,1,2,3,4,5$ છે, તો અચળ K શોધો તથા આ વિતરણનો મધ્યક મેળવો.

4. અસતત સંભાવના-વિતરણ એટલે શું ? તેના ગુણધર્મો જણાવો.

5. દ્વિપદી વિતરણના ગુણધર્મો જણાવો.

6. નિશાન તાકવાની એક રમતમાં રમેશ નિશાન તાકવામાં નિષ્ફળ જાય તેની સંભાવના $\frac{2}{5}$ છે. જો તેને નિશાન તાકવા માટે 3 પ્રયત્નો આપવામાં આવે તો તેમાંથી 2 પ્રયત્નોમાં તે નિશાન તાકવામાં સફળ થાય તે ઘટનાની સંભાવના શોધો. આ વિતરણનો મધ્યક જણાવો.

7. એક વ્યક્તિને ધન પૂર્ણાંક 1 થી 7 માંથી કોઈ પણ એક સંખ્યા પસંદ કરવાનું કહેવામાં આવે છે. જો તેણે પસંદ કરેલ સંખ્યા એકી સંખ્યા હોય તો તે ઇનામ મેળવવાને પાત્ર બને છે. જો આ વ્યક્તિને 5 પ્રયત્નો કરવાનું કહેવામાં આવે, તો તે ફક્ત એક પ્રયત્નમાં ઇનામ મેળવવાને પાત્ર બને તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.

8. એક દ્વિપદી વિતરણના મધ્યક અને વિચરણ અનુક્રમે 2 અને $\frac{6}{5}$ છે, તો આ દ્વિપદી વિતરણ માટે $p(1)$ અને $p(2)$ની ગણતરી કરો.

9. એક સફરજનના બૉક્સમાં 10 % સફરજન બગડેલાં છે. બૉક્સમાંથી યાદચ્છિક રીતે પુરવણી સહિત પસંદ કરેલા 6 સફરજનમાંથી બરાબર અડધા સફરજન બગડેલાં મળે તેની સંભાવના શોધો તથા બગડેલા સફરજનની સંખ્યાનું વિચરણ મેળવો.

વિભાગ E

નીચેનાના ઉકેલ મેળવો :

1. કોઈ એક સ્ટોર્સમાં લૅપટૉપની માસિક માંગનું સંભાવના-વિતરણ નીચે મુજબ છે.

લૅપટૉપની માંગ	1	2	3	4	5	6
સંભાવના	0.10	0.15	0.20	0.25	0.18	0.12

લૅપટૉપની અપેક્ષિત માસિક માંગ નક્કી કરો તથા માંગનું વિચરણ મેળવો.

2. બે પાસાઓને એક વખત ઉછાળવામાં આવે છે. તેમાંથી અંક '6' ઉપરની તરફ આવતા હોય તેવા પાસાની સંખ્યા માટેનું અસતત સંભાવના-વિતરણ મેળવો.

3. 50 વર્ષની ઉંમરના કોઈ પણ વ્યક્તિ એક વર્ષ દરમિયાન મૃત્યુ પામે તેની સંભાવના 0.01 હોય, તો આવી 5 વ્યક્તિઓના એક સમૂહમાંથી

(i) કોઈ પણ વ્યક્તિ એક વર્ષમાં મૃત્યુ ન પામે

(ii) ઓછામાં ઓછી એક વ્યક્તિ એક વર્ષમાં મૃત્યુ પામે તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.

4. ધોરણ 12ના વિજ્ઞાનપ્રવાહમાં અભ્યાસ કરતો વિદ્યાર્થી ઇજનેરી શાખામાં પ્રવેશ મેળવે તેની સંભાવના 0.3 છે. આવા અભ્યાસ કરેલા વિદ્યાર્થીઓમાંથી 5 વિદ્યાર્થીઓ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. તો તેમાંથી ઇજનેરી શાખામાં પ્રવેશ મેળવનાર વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા, ઇજનેરી શાખામાં પ્રવેશ ન મેળવનાર વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા કરતા વધુ હોય તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.

5. એક બ્રિજ ઉપર વિમાનમાંથી ફેંકવામાં આવેલ બૉમ્બ બ્રિજ ઉપર જ પડે તેની સંભાવના $\frac{1}{5}$ છે. બ્રિજનો નાશ કરવા માટે બે બૉમ્બ પૂરતા છે. જો બ્રિજ ઉપર 6 બૉમ્બ ફેંકવામાં આવે, તો બ્રિજનો નાશ થવાની સંભાવના શોધો.

6. એક ચોક્કસ પરીક્ષામાં સામાન્ય રીતે 40 % વિદ્યાર્થીઓ નાપાસ થાય છે. 6 વિદ્યાર્થીઓના એક સમૂહમાંથી ઓછામાં ઓછા 4 વિદ્યાર્થીઓ આ પરીક્ષામાં પાસ થાય તેની સંભાવના શોધો.

7. એક બૉક્સમાં 3 લાલ અને 4 સફેદ દડાઓ છે. તેમાંથી ચાર દડા પુરવણી સહિત પસંદ કરવામાં આવે છે. આ પસંદ કરેલ દડામાં (i) 2 દડા લાલ અને 2 દડા સફેદ મળે તથા (ii) ચારેય દડા સફેદ મળે તે ઘટનાની સંભાવના દ્વિપદી વિતરણનો ઉપયોગ કરીને મેળવો.

વિભાગ F

નીચેનાના ઉકેલ મેળવો :

1. એક પેટીમાં એક ડઝન કેરીઓ છે. તેમાં 3 કેરીઓ બગડેલી છે. આ પેટીમાંથી યાદચ્છિક રીતે પુરવણીરહિત 3 કેરીઓ પસંદ કરવામાં આવે છે. જો X એ પસંદ કરેલ કેરીઓમાં બગડેલી કેરીઓની સંખ્યા દર્શાવે તો Xનું સંભાવના-વિતરણ મેળવો અને તે પરથી પસંદ કરેલ કેરીઓમાં બગડેલી કેરીઓની અપેક્ષિત કિંમત તથા વિચરણ મેળવો.

2. ધોરણ 10માં અભ્યાસ કરતા વિદ્યાર્થીઓની સમષ્ટિમાં 50 % વિદ્યાર્થીઓ ચોકલેટ ખાવાની ટેવ ધરાવે છે તેવું જાણવા મળેલ છે. આ માહિતીની ચકાસણી કરવા માટે 1024 આગણકોની નિમણૂક કરવામાં આવે છે. દરેક સંશોધન આગણકો, આ વિદ્યાર્થીઓની સમષ્ટિમાંથી યાદચ્છિક રીતે 10 વિદ્યાર્થીઓ પસંદ કરી તેમની ચોકલેટ ખાવાની ટેવ વિશે તપાસ કરે છે, તો 30 ટકાથી ઓછા વિદ્યાર્થીઓ ચોકલેટ ખાવાની ટેવ ધરાવે છે એવી જાણ કરનાર આગણકોની અંદાજિત સંખ્યા શોધો.

James Bernoulli
(1654 –1705)

James (Jacob) Bernoulli was born in Basel, Switzerland. He was one of the many prominent mathematicians in the Bernoulli family. Following his father's wish, he studied theology (divinity) and entered the ministry. But contrary to the desires of his parents, he also studied mathematics and astronomy. He travelled throughout Europe from 1676 to 1682; learning about the latest discoveries in mathematics and the sciences under leading figures of the time. He was an early proponent of Leibnizian calculus and had sided with Leibniz during the Leibniz-Newton calculus controversy. He is known for his numerous contributions to calculus, and along with his brother Johann, was one of the founders of the calculus of variations. However, his most important contribution was in the field of probability, where he derived the first version of the law of large numbers. He was appointed as professor of mathematics at the University of Basel in 1687, remained in this position for the rest of his life.

"Normal Distribution is father of all probability distributions. For larger sample size almost all theoritical distributions follow normal distribution".

– Unknown

3

પ્રામાણ્ય-વિતરણ
(Normal Distribution)

વિષયવસ્તુ :

3.1 પ્રામાણ્ય વિતરણ : પ્રસ્તાવના, સંભાવના ઘટત્વ વિધેય

આપણે અસતત યાદચ્છિક ચલ માટેના સંભાવના વિતરણનો અભ્યાસ અગાઉના પ્રકરણમાં કર્યો. હવે આપણે સતત યાદચ્છિક ચલ માટેના સંભાવના વિતરણનો અભ્યાસ કરીશું. આપણે જાણીએ છીએ કે જે યાદચ્છિક ચલ X વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ગણ R માં અથવા તેના કોઈ પણ અંતરાલમાં કોઈ પણ કિંમત ધારણ કરી શકે તેમ હોય તો તેવા ચલને સતત યાદચ્છિક ચલ કહેવાય. જો સતત યાદચ્છિક ચલ X એ એક નિશ્ચિત અંતરાલ a થી b ની વચ્ચેની કોઈ પણ કિંમત ધારણ કરી શકે તેમ હોય તો તેને સંકેતમાં $a < x < b$ વડે દર્શાવીશું. સતત યાદચ્છિક ચલની કિંમત કોઈ એક નિશ્ચિત અંતરાલની વચ્ચે હોવાની સંભાવના મેળવવાના વિધેયને તે ચલનું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય (Probability Density Function) કહે છે અને તે નીચેની બે શરતોનું સમાધાન કરે છે.

(1) યાદચ્છિક ચલની કિંમત નિશ્ચિત અંતરાલમાં હોય તેની સંભાવના અનૃણ હોય છે.

(2) યાદચ્છિક ચલ નિશ્ચિત અંતરાલની વચ્ચેની કોઈ પણ કિંમત ધારણ કરે તેની કુલ સંભાવના 1 હોય છે.

આમ યાદચ્છિક ચલ X ની કિંમત નિશ્ચિત અંતરાલ a થી b ની વચ્ચે હોય તેની સંભાવના શોધવા માટે સંભાવના ઘટત્વ વિધેયનો ઉપયોગ કરી શકાય અને તેને સંકેતમાં $P(a < x < b)$ વડે દર્શાવાય. અહીં એ નોંધવું જરૂરી છે કે સતત યાદચ્છિક ચલ X ની એક નિશ્ચિત કિંમત માટે સંભાવના ઘટત્વ વિધેય દ્વારા મેળવેલ સંભાવના હંમેશાં શૂન્ય (0) થાય છે એટલે કે $P(x = a) = 0$ થાય. આમ, તમામ સતત સંભાવના ઘટત્વ વિધેય દ્વારા મેળવાતી સંભાવનાઓ $P(a < x < b)$ અને $P(a \le x \le b)$ સમાન થાય એટલે કે $P(a < x < b) = P(a \le x \le b)$ થાય.

સતત યાદચ્છિક ચલનાં સંભાવના વિતરણોમાં પ્રામાણ્ય વિતરણ અતિ મહત્ત્વનું અને આંકડાશાસ્ત્રનાં ઉચ્ચત્તર અભ્યાસમાં સૌથી વધુ ઉપયોગી હોય તેવું વિતરણ છે. તેની વ્યાખ્યા નીચે પ્રમાણે આપી શકાય.

જો યાદચ્છિક ચલ X એ μ (મ્યૂ) મધ્યક તેમજ σ (સિગ્મા) પ્રમાણિત વિચલનવાળો ચલ હોય અને તેનું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \; ; -\infty < x < \infty$$

$$-\infty < \mu < \infty$$

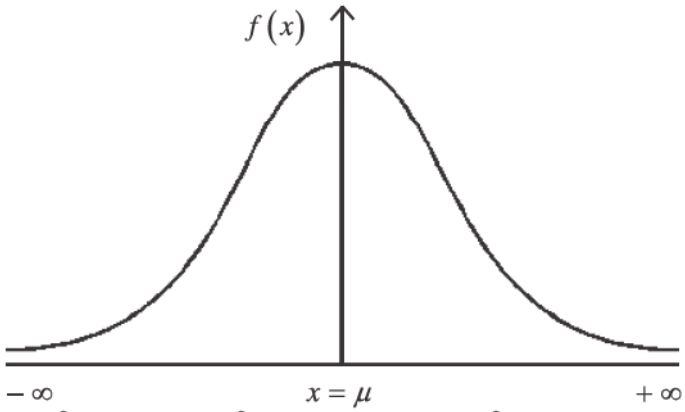
$$0 < \sigma < \infty$$

જ્યાં $\pi = 3.1416$ અને $e = 2.7183$ અચળાંકો છે

હોય તો યાદચ્છિક ચલ X ને પ્રામાણ્ય ચલ અને $f(x)$ ને પ્રામાણ્ય ચલનું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય વડે દર્શાવાય છે.

આ પ્રામાણ્ય ચલ X ના વિતરણને પ્રામાણ્ય વિતરણ કહે છે અને તેને સંકેતમાં $N(\mu, \sigma^2)$ કહે છે.

પ્રામાણ્ય ચલ X ની જુદી જુદી કિંમતોને અનુરૂપ સંભાવના ઘટત્વ વિધેય $f(x)$ ની કિંમતો શોધી જે વક્ર દોરવામાં આવે છે તેને પ્રામાણ્ય વક્ર કહેવામાં આવે છે જેને નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય :



પ્રામાણ્ય વક્ર આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે સંપૂર્ણ ઘંટાકાર હોય છે જે દર્શાવે છે કે પ્રામાણ્ય વિતરણ સંમિત વિતરણ છે.

3.2 પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ અને પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય વિતરણ

(Standard Normal Variable and Standard Normal Distribution)

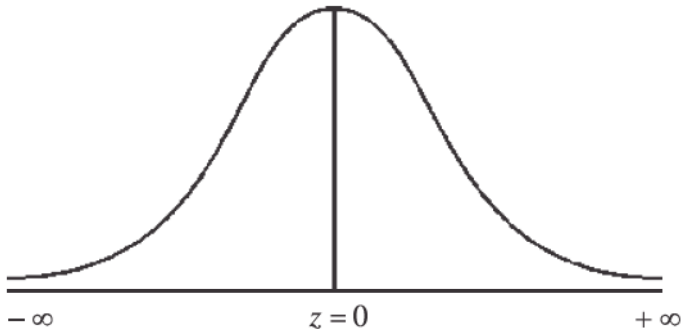
જો પ્રામાણ્ય યાદચ્છિક ચલ X નો મધ્યક μ અને પ્રમાણિત વિચલન σ હોય, તો યાદચ્છિક ચલ $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ ને પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ કહેવામાં આવે છે અને તેનું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે છે :

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \; ; -\infty < z < \infty$$

અહીં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, યાદચ્છિક પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ Z નું સંભાવના ઘટત્વ વિતરણ એ મધ્યક શૂન્ય (0) અને પ્રમાણિત વિચલન 1 વાળું પ્રામાણ્ય વિતરણ છે.

નોંધ : પ્રકરણનાં અભ્યાસ દરમિયાન હવેથી આપણે યાદચ્છિક પ્રામાણ્ય ચલ X ને ફક્ત પ્રામાણ્ય ચલ X તેમજ યાદચ્છિક પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ Z ને બદલે પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ Z કહીશું.

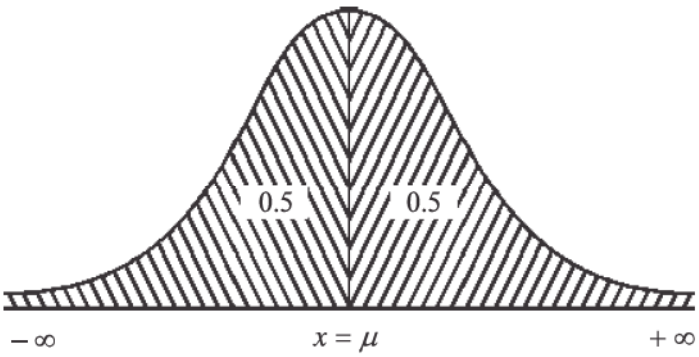
પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ Z ની જુદી જુદી કિંમતોને અનુરૂપ પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ઘટત્વ વિધેય $f(z)$ ની કિંમતોને આલેખ પર દર્શાવતા નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણેનો સંપૂર્ણ ઘંટાકાર વક્ર મળે છે :



આ વક્રને પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય વક્ર કહેવામાં આવે છે અને તે $Z = 0$ ની બંને બાજુ સંમિત હોય છે.

3.3 પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય વક્રના કોષ્ટક પરથી સંભાવના (ક્ષેત્રફળ) શોધવા માટેની પદ્ધતિ

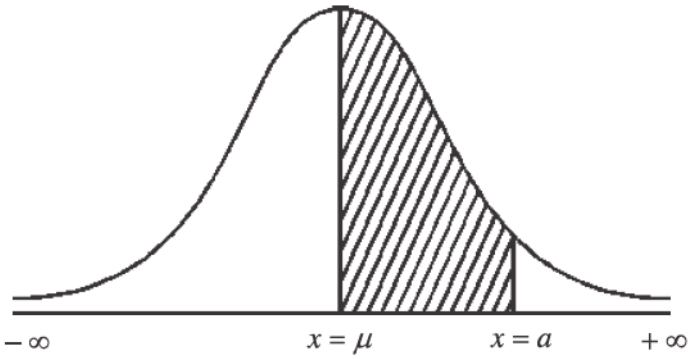
આપણે જાણીએ છીએ કે, પ્રામાણ્ય વક્ર એ પ્રામાણ્ય ચલનાં સંભાવના ઘટત્વ વિધેયનો વક્ર છે અને તેને નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય છે :



આ વક્ર અને X-અક્ષ વચ્ચે આચ્છાદિત પ્રદેશનું કુલ ક્ષેત્રફળ (સંભાવના) 1 થાય છે. પ્રામાણ્ય વક્ર એ પ્રામાણ્ય ચલ X નાં મધ્યક μ ની બંને બાજુ સંમિત હોય છે તેથી $X = \mu$ માટેની શિરોલંબ રેખા પ્રામાણ્ય વક્રના ક્ષેત્રફળ (સંભાવના)ના

બે સમાન ભાગ કરે છે. $X=\mu$ ની જમણી બાજુનું ક્ષેત્રફળ (સંભાવના) 0.5 થાય તેને સંકેતમાં $P(X \geq \mu)=0.5$ વડે દર્શાવીશું. જ્યારે $X=\mu$ની ડાબી બાજુનું ક્ષેત્રફળ (સંભાવના) પણ 0.5 થાય તેને સંકેતમાં $P(X \leq \mu)=0.5$ વડે દર્શાવીશું.

પ્રામાણ્ય વક્રમાં પ્રામાણ્ય ચલની X ની કિંમત મધ્યક (μ) અને તેની કોઈ કિંમત a $(a>\mu)$ ની વચ્ચે હોય તેની સંભાવના એ પ્રામાણ્ય વક્રમાં x-અક્ષ અને $X=\mu$ તેમજ $X=a$ માટેની શિરોલંબ રેખાઓ વચ્ચેના આચ્છાદિત પ્રદેશનાં ક્ષેત્રફળ જેટલી હોય છે તેને આકૃતિમાં નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય :



આને સંકેતમાં $P(\mu \leq X \leq a)$ વડે દર્શાવાય.

પ્રામાણ્ય વક્ર હેઠળના પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ મેળવવા માટે સૌપ્રથમ પ્રામાણ્ય ચલ X ને પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ Z માં રૂપાંતર કરવામાં આવે છે. પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ Z ની જુદી જુદી ધન કિંમતો માટે પ્રામાણ્ય વક્રના 0 થી Z સુધીનાં ક્ષેત્રફળનાં કોષ્ટક તૈયાર કરવામાં આવેલ છે અને આ કોષ્ટક પરથી ક્ષેત્રફળ મેળવી શકાય છે.

નોંધ : પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલની જુદી જુદી કિંમતો માટેનું કોષ્ટક પુસ્તકના છેલ્લા પાના પર આપેલું છે.

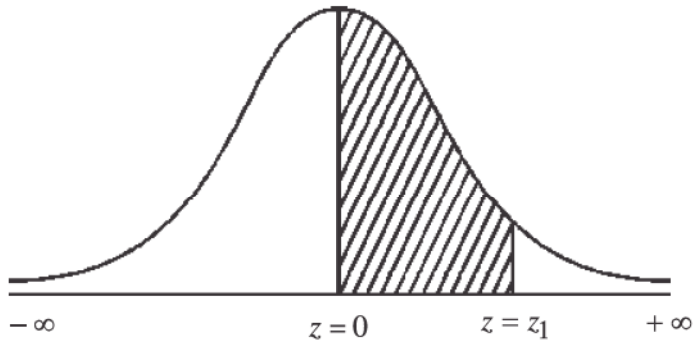
ધારો કે પ્રામાણ્ય ચલ Xની કિંમત મધ્યક μ અને અચળાંક a $(a>\mu)$ની વચ્ચે હોવાની સંભાવના શોધવાની હોય તો તેને સંકેતમાં આપણે $P(\mu \leq X \leq a)$ વડે દર્શાવીશું. હવે જો પ્રામાણ્ય ચલ Xનું પ્રમાણિત વિચલન σ હોય, તો

જ્યારે $X=\mu$ હોય ત્યારે $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}=\frac{\mu-\mu}{\sigma}=\frac{0}{\sigma}=0$ થાય અને

જ્યારે $X=a$ હોય ત્યારે $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}=\frac{a-\mu}{\sigma}=z_1$ (કહીએ)

આમ, $P(\mu \leq X \leq a)=P(0 \leq Z \leq z_1)$

= પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના કોષ્ટક પરથી $Z=0$ થી $Z=z_1$ માટે મળતું ક્ષેત્રફળ



ઉદાહરણ 1 : એક પ્રામાણ્ય વિતરણનો મધ્યક 10 અને પ્રમાણિત વિચલન 2 છે, તો (1) પ્રામાણ્ય ચલ X ની કિંમત 10 અને 12 ની વચ્ચે હોય, (2) પ્રામાણ્ય ચલ X ની કિંમત 8 અને 10 ની વચ્ચે હોય તેની સંભાવના શોધો.

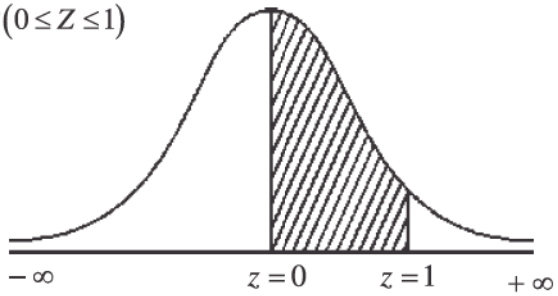
અહીં મધ્યક $\mu = 10$ અને પ્રમાણિત વિચલન $\sigma = 2$ છે.

(1) પ્રામાણ્ય ચલ Xની કિંમત 10 અને 12 ની વચ્ચે હોય તેની સંભાવના શોધવાની છે એટલે કે $P(10 \le X \le 12)$ શોધવું છે.

$$\therefore P(10 \le X \le 12) = P\left(\frac{10-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{12-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(\frac{10-10}{2} \le Z \le \frac{12-10}{2}\right)$$

$$= P(0 \le Z \le 1)$$



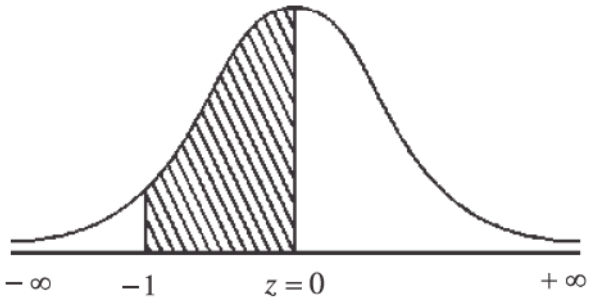
= 0.3413 (પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના કોષ્ટક પરથી)

(2) પ્રામાણ્ય ચલ Xની કિંમત 8 અને 10ની વચ્ચે હોય તેની સંભાવના શોધવાની છે એટલે કે $P(8 \le X \le 10)$ શોધવું છે.

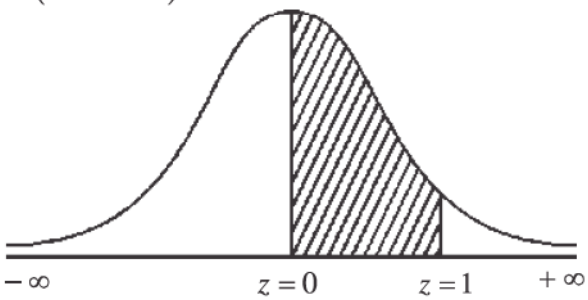
$$\therefore P(8 \le X \le 10) = P\left(\frac{8-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{10-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(\frac{8-10}{2} \le Z \le \frac{10-10}{2}\right)$$

$$= P(-1 \le Z \le 0)$$



=



$= P(0 \le Z \le 1)$ ($\because$ સંમિતતા)

= 0.3413 (પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના કોષ્ટક પરથી)

ઉદાહરણ 2 : એક પ્રામાણ્ય વિતરણનો મધ્યક 20 અને વિચરણ 16 છે, તો નીચેની સંભાવના શોધો. (1) પ્રામાણ્ય ચલ Xની કિંમત 26 થી ઓછી હોય. (2) પ્રામાણ્ય ચલ X ની કિંમત 14 થી વધુ હોય.

અહીં મધ્યક $\mu = 20$ અને વિચરણ $\sigma^2 = 16$ છે.

$\therefore$ પ્રમાણિત વિચલન $\sigma = 4$ થાય.

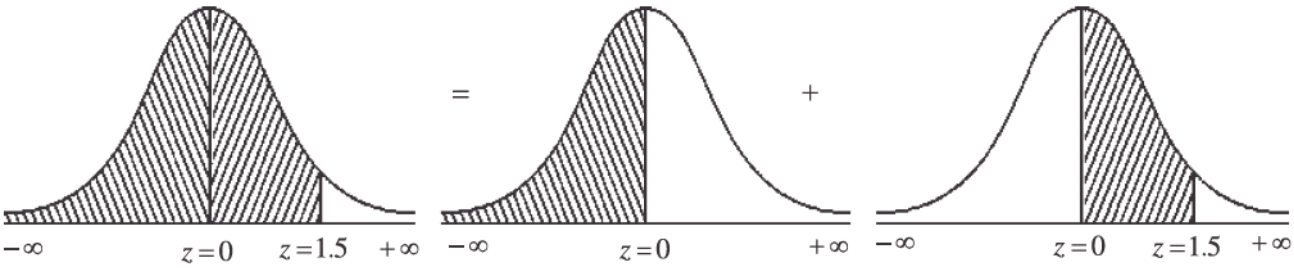
(1) પ્રામાણ્ય ચલ X ની કિંમત 26 થી ઓછી હોવાની સંભાવના

$$= P(X \le 26)$$

$$= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{26-\mu}{4}\right)$$

$$= P\left(Z \le \frac{26-20}{4}\right)$$

$$= P(Z \le 1.5)$$



$= P(-\infty < Z \le 0) + P(0 \le Z \le 1.5)$

= 0.5 + 0.4332 (પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના કોષ્ટક પરથી)

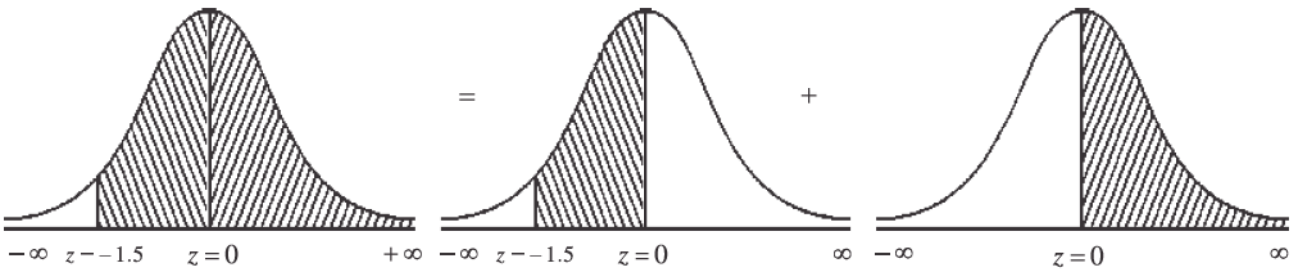
= 0.9332

(2) પ્રામાણ્ય ચલ X ની કિંમત 14 થી વધુ હોવાની સંભાવના

$$= P(X \ge 14) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \ge \frac{14-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(Z \ge \frac{14-20}{4}\right)$$

$$= P(Z \ge -1.5)$$



$= P(-1.5 \le Z \le 0) + P(0 \le Z < \infty)$

$= P(0 \le Z \le 1.5) + 0.5$ ($\because$ સંમિતતા)

= 0.4332 + 0.5 (પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના કોષ્ટક પરથી)

= 0.9332

ઉદાહરણ 3 : કોઈ એક શહેરની ઉચ્ચત્તર માધ્યમિક શાળાઓના વર્ગોમાં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે. વર્ગોમાં વિદ્યાર્થીઓની સરેરાશ સંખ્યા 50 છે અને તેનું પ્રમાણિત વિચલન 15 છે. જો યાદચ્છિક રીતે કોઈ એક વર્ગ પસંદ કરવામાં આવે તો (i) તે વર્ગમાં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા 68 થી વધુ હોય તેમજ (ii) તે વર્ગમાં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા 32 થી ઓછી હોય તેની સંભાવનાઓ શોધો.

અહીં વર્ગમાં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે તેમ આપેલું છે તેથી

પ્રામાણ્ય ચલ X = વર્ગમાં વિદ્યાર્થીની સંખ્યા

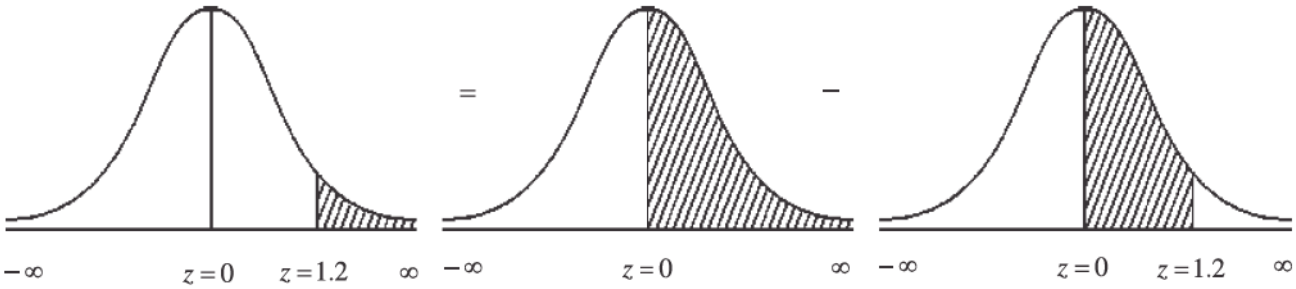
તેમજ મધ્યક $\mu = 50$ વિદ્યાર્થીઓ અને પ્રમાણિત વિચલન $\sigma = 15$ વિદ્યાર્થીઓ છે.

(1) યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ વર્ગમાં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા 68 થી વધુ હોય તેની સંભાવના

$$= P(X \geq 68) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{68-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(Z \geq \frac{68-50}{15}\right)$$

$$= P(Z \geq 1.2)$$



$$= P(0 \leq Z < \infty) - P(0 \leq Z \leq 1.2)$$

= 0.5 − 0.3849 (પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના કોષ્ટક પરથી)

= 0.1151

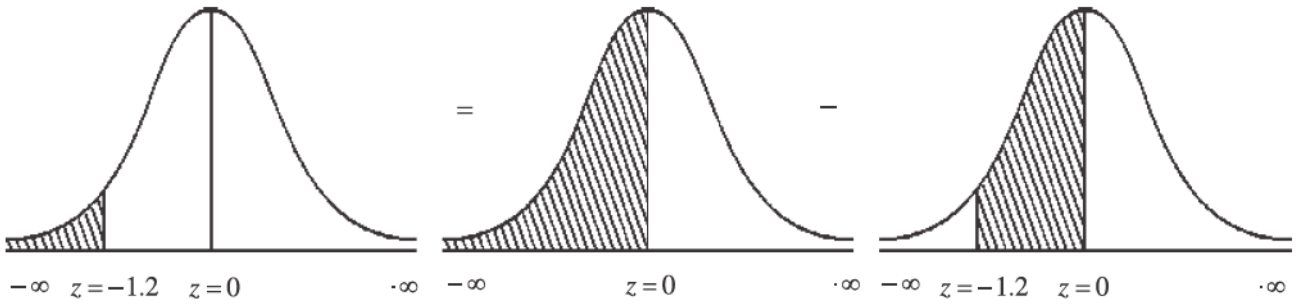
આમ, પસંદ કરેલ વર્ગમાં વિદ્યાર્થીની સંખ્યા 68 થી વધુ હોવાની સંભાવના 0.1151 થાય.

(2) યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ વર્ગમાં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા 32 થી ઓછી હોવાની સંભાવના

$$= P(X \leq 32) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{32-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(Z \leq \frac{32-50}{15}\right)$$

$$= P(Z \leq -1.2)$$



$$= P(-\infty < Z \leq 0) - P(-1.2 \leq Z \leq 0)$$

$= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1.2)$ ($\because$ સંમિતતા)

= 0.5 − 0.3849

= 0.1151

આમ, પસંદ કરેલ વર્ગમાં વિદ્યાર્થીની સંખ્યા 32 થી ઓછી હોવાની સંભાવના 0.1151 થાય.

ઉદાહરણ 4 : એક મોટી સોસાયટીમાં રહેતા પુખ્ત વયનાં બાળકોનું સરેરાશ વજન 50 કિગ્રા અને પ્રમાણિત વિચલન 5 કિગ્રા છે. જો તેમનું વજન પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરતું હોય, તો યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ પુખ્ત વયનાં બાળકનું વજન

(1) 55 કિગ્રા અને 65 કિગ્રાની વચ્ચે હોય તેની સંભાવના શોધો.

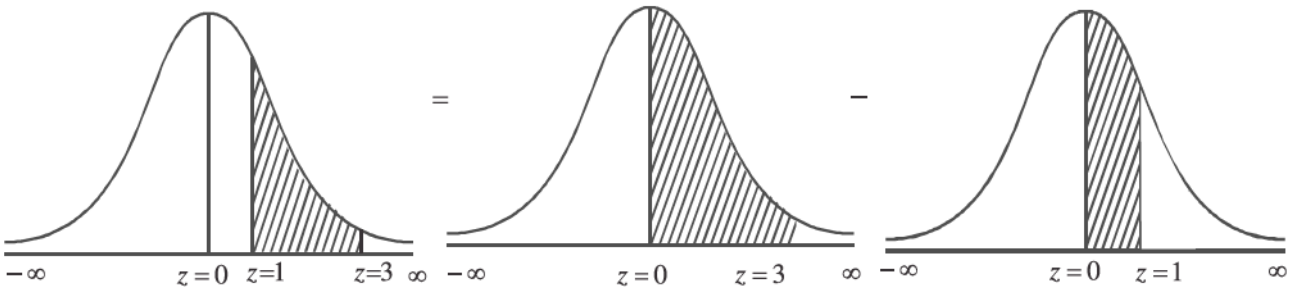
(2) 35 કિગ્રા અને 45 કિગ્રાની વચ્ચે હોય તેની સંભાવના શોધો.

અહીં પ્રામાણ્ય ચલ X = પુખ્ત વયનાં બાળકનું વજન તેમજ સરેરાશ વજન $\mu = 50$ કિગ્રા અને પ્રમાણિત વિચલન $\sigma = 5$ કિગ્રા છે.

(1) યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ પુખ્ત વયના બાળકનું વજન 55 કિગ્રા અને 65 કિગ્રા વચ્ચે હોય તેની સંભાવના

$$= P(55 \le X \le 65) = P\left(\frac{55-50}{5} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{65-50}{5}\right)$$

$$= P(1 \le Z \le 3)$$



$$= P(0 \le Z \le 3) - P(0 \le Z \le 1)$$

$$= 0.4987 - 0.3413$$

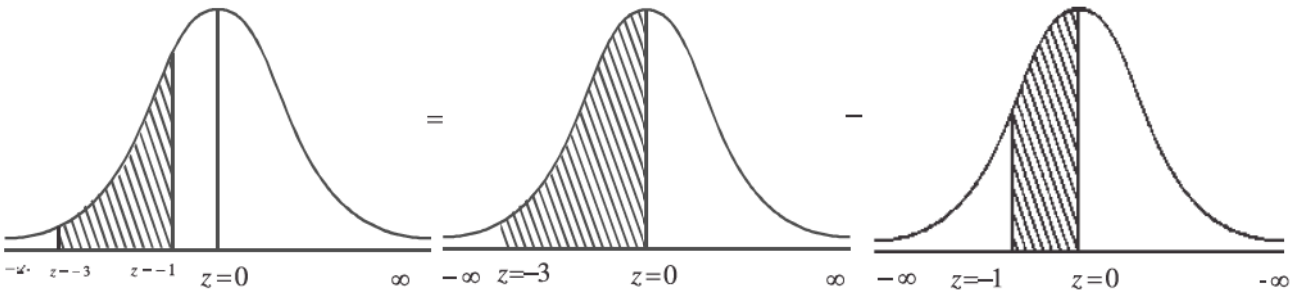
$$= 0.1574$$

આમ, યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ પુખ્ત વયના બાળકનું વજન 55 કિગ્રા અને 65 કિગ્રાની વચ્ચે હોવાની સંભાવના 0.1574 થશે.

(2) પુખ્ત વયના બાળકનું વજન 35 કિગ્રા અને 45 કિગ્રાની વચ્ચે હોય તેની સંભાવના

$$= P(35 \le X \le 45) = P\left(\frac{35-50}{5} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{45-50}{5}\right)$$

$$= P(-3 \le Z \le -1)$$



$$= P(-3 \le Z \le 0) - P(-1 \le Z \le 0)$$

$$= P(0 \le Z \le 3) - P(0 \le Z \le 1) \quad (\because \text{ સંમિતતા})$$

$$= 0.4987 - 0.3413$$

$$= 0.1574$$

આમ પસંદ કરેલ પુખ્ત વયના બાળકનું વજન 35 કિગ્રા અને 45 કિગ્રાની વચ્ચે હોવાની સંભાવના 0.1574 છે.

નોંધ : પ્રામાણ્ય વિતરણ એ સંમિત વિતરણ હોવાથી સંભાવના વક્રમાં $Z = 0$ થી $Z = a$ વચ્ચેનું ક્ષેત્રફળ એ $Z = -a$ થી $Z = 0$ વચ્ચેનાં ક્ષેત્રફળ જેટલું જ થાય છે. તે ઉપરનાં ઉદાહરણો પરથી સ્પષ્ટ થાય છે.

ઉદાહરણ 5 : એક ઉત્પાદન એકમમાં કામ કરતાં કારીગરોનું માસિક વેતન પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે. તેમની માસિક સરેરાશ આવક ₹ 15,000 છે અને પ્રમાણિત વિચલન ₹ 4000 છે, તો

(1) યાદચ્છિક રીતે કોઈ એક કારીગરને પસંદ કરવામાં આવે, તો તેની માસિક આવક ₹ 10,000 અને ₹ 25,000 ની વચ્ચે હોવાની સંભાવના

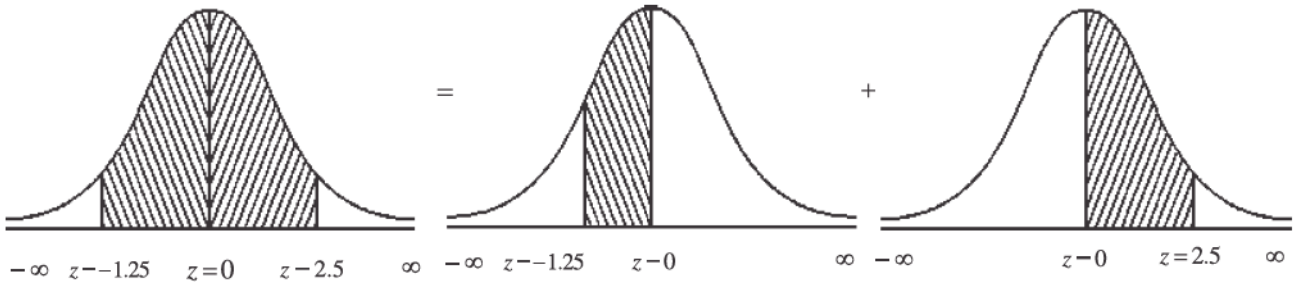
(2) ઉત્પાદન એકમમાં ₹ 12,000 અને ₹ 22,000 ની વચ્ચે માસિક આવક ધરાવતા કારીગરોની ટકાવારી શોધો.

પ્રામાણ્ય ચલ X = કારીગરની માસિક આવક તેમજ સરેરાશ આવક $\mu = 15{,}000$ ₹ અને પ્રમાણિત વિચલન $\sigma = 4000$ ₹.

(1) યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ કારીગરની આવક ₹ 10,000 અને ₹ 25,000 ની વચ્ચે હોવાની સંભાવના

$$= P(10000 \le X \le 25000) = P\left(\frac{10000-15000}{4000} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{25000-15000}{4000}\right)$$

$$= P(-1.25 \le Z \le 2.5)$$



$$= P(-1.25 \le Z \le 0) + P(0 \le Z \le 2.5)$$

$$= P(0 \le Z \le 1.25) + P(0 \le Z \le 2.5) \; (\because \text{ સંમિતતા})$$

$$= 0.3944 + 0.4938$$

$$= 0.8882$$

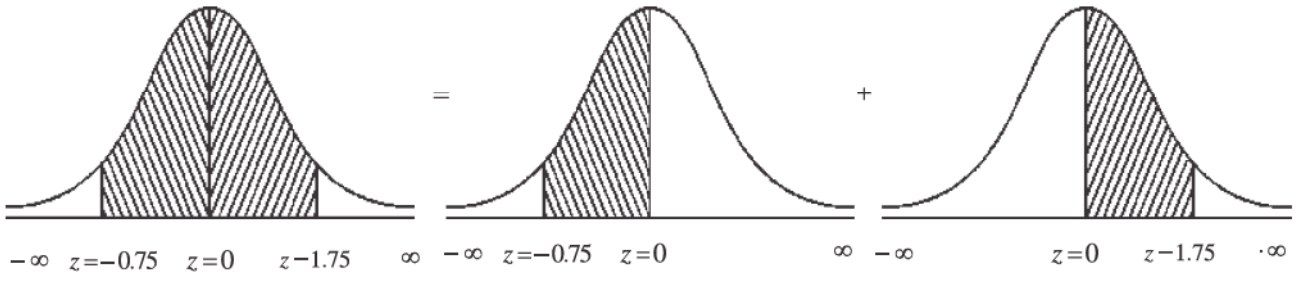
આમ, યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ કારીગરની માસિક આવક ₹ 10,000 અને ₹ 25,000 ની વચ્ચે હોવાની સંભાવના 0.8882 થશે.

(2) યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ કારીગરની આવક ₹ 12,000 અને ₹ 22,000 ની વચ્ચે હોય તેની સંભાવના

$$= P(12000 \le X \le 22000)$$

$$= P\left(\frac{12000-15000}{4000} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{22000-15000}{4000}\right)$$

$$= P(-0.75 \le Z \le 1.75)$$



$$= P(-0.75 \le Z \le 0) + P(0 \le Z \le 1.75)$$

$$= P(0 \le Z \le 0.75) + P(0 \le Z \le 1.75) \quad (\because \text{ સંમિતતા})$$

$= 0.2734 + 0.4599$

$= 0.7333$

$\therefore$ ઉત્પાદન એકમમાં માસિક ₹ 12,000 અને ₹ 22,000 ની વચ્ચે આવક ધરાવતા કારીગરોની ટકાવારી

$= 100 \times 0.7333$

$= 73.33\ \%$

આમ, ઉત્પાદન એકમમાં 73.33 % કારીગરોની માસિક આવક ₹ 12,000 અને ₹ 22,000 ની વચ્ચે હશે.

નોંધ : સંભાવનાને ટકાવારીમાં દર્શાવવા માટે મેળવેલ સંભાવનાને 100 વડે ગુણવામાં આવે છે.

3.4 પ્રામાણ્ય વિતરણના ગુણધર્મો

પ્રામાણ્ય વિતરણના કેટલાક અગત્યના ગુણધર્મો નીચે મુજબ છે :

(1) આ વિતરણ સતત યાદચ્છિક ચલનું સંભાવના વિતરણ છે.

(2) μ અને σ તેના પ્રાચલો છે જે અનુક્રમે વિતરણનો મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન દર્શાવે છે.

(3) આ વિતરણ μ ને સાપેક્ષ સંમિત છે અને તેની વિષમતા શૂન્ય (0) છે.

(4) આ વિતરણ માટે મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલકની કિંમત સમાન હોય છે. સંકેતમાં $\mu = M = M_0$ થાય.

(5) આ વિતરણમાં ચતુર્થકો, મધ્યસ્થથી સમાન અંતરે છે એટલે કે $Q_3 - M = M - Q_1$ અને $M = \frac{Q_3+Q_1}{2}$

(6) આ વિતરણનો સંભાવના વક્ર સંપૂર્ણ ઘંટાકાર છે.

(7) પ્રામાણ્ય વક્રના બંને છેડા લંબાવતા તે x-અક્ષની નજીક જાય છે પરંતુ x-અક્ષને સ્પર્શતા નથી.

(8) આ વિતરણના અંતિમ ચતુર્થકોની અંદાજિત કિંમતો નીચેનાં સૂત્રોથી મેળવાય છે :

$Q_1 = \mu - 0.675\,\sigma$

$Q_3 = \mu + 0.675\,\sigma$

(9) આ વિતરણનું ચતુર્થક વિચલન $= \frac{2}{3}\sigma$ (લગભગ) છે.

(10) આ વિતરણનું સરેરાશ વિચલન $= \frac{4}{5}\sigma$ (લગભગ) છે.

(11) પ્રામાણ્ય વક્ર માટેનાં મહત્ત્વનાં ક્ષેત્રફળ નીચે પ્રમાણે છે :

(i) પ્રામાણ્ય વક્ર હેઠળનું કુલ ક્ષેત્રફળ 1 હોય છે અને $X = \mu$ આગળની શિરોલંબ રેખાની બંને તરફનાં ક્ષેત્રફળની કિંમત 0.5 હોય છે.

(ii) વક્રની શિરોલંબ રેખાઓ $\mu - \sigma$ અને $\mu + \sigma$ વચ્ચે આવેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ 0.6826 છે, એટલે કે વક્રના $\mu \pm \sigma$ વચ્ચે આવતા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ 0.6826 છે એમ કહી શકાય.

(iii) વક્રની શિરોલંબ રેખાઓ $\mu - 2\sigma$ અને $\mu + 2\sigma$ વચ્ચે આવેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ 0.9545 છે.

(iv) વક્રની શિરોલંબ રેખાઓ $\mu - 3\sigma$ અને $\mu + 3\sigma$ વચ્ચે આવેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ 0.9973 છે.

(v) વક્રની શિરોલંબ રેખાઓ $\mu - 1.96\sigma$ અને $\mu + 1.96\sigma$ વચ્ચે આવેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ 0.95 છે.

(vi) વક્રની શિરોલંબ રેખાઓ $\mu - 2.575\sigma$ અને $\mu + 2.575\sigma$ વચ્ચે આવેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ 0.99 છે.

3.5 પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય વિતરણના ગુણધર્મો

પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય વિતરણના કેટલાક અગત્યના ગુણધર્મો નીચે પ્રમાણે છે :

(1) આ વિતરણ સતત યાદચ્છિક ચલ માટેનું વિતરણ છે.

(2) આ વિતરણનો મધ્યક શૂન્ય (0) અને પ્રમાણિત વિચલન 1 છે.

(3) આ વિતરણ $Z = 0$ ને સાપેક્ષ સંમિત છે અને તેની વિષમતા શૂન્ય છે.

(4) આ વિતરણનો સંભાવના વક્ર સંપૂર્ણ ઘંટાકાર છે અને તેના છેડાઓ x-અક્ષને સ્પર્શતા નથી.

(5) આ વિતરણના પ્રથમ ચતુર્થકની અંદાજિત કિંમત –0.675 છે જ્યારે ત્રીજા ચતુર્થકની અંદાજિત કિંમત 0.675 છે.

(6) આ વિતરણ માટે ચતુર્થક વિચલનની અંદાજિત કિંમત $= \frac{2}{3}$ છે.

(7) આ વિતરણ માટે સરેરાશ વિચલનની અંદાજિત કિંમત $= \frac{4}{5}$ છે.

(8) પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય વક્ર માટેનાં મહત્ત્વનાં ક્ષેત્રફળ નીચે પ્રમાણે છે :

(i) પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય વક્ર હેઠળનું કુલ ક્ષેત્રફળ 1 છે અને $Z = 0$ શિરોલંબ રેખાથી બંને બાજુનું ક્ષેત્રફળ 0.5 થાય છે.

(ii) વક્રની શિરોલંબ રેખાઓ $Z = -1$ અને $Z = +1$ વચ્ચે આવેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ 0.6826 છે એટલે કે વક્રની શિરોલંબ રેખાઓ $Z = \pm 1$ની વચ્ચે આવેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ 0.6826 છે.

(iii) વક્રની શિરોલંબ રેખાઓ $Z = -2$ અને $Z = +2$ વચ્ચે આવેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ 0.9545 છે.

(iv) વક્રની શિરોલંબ રેખાઓ $Z = -3$ અને $Z = +3$ વચ્ચે આવેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ 0.9973 છે.

(v) વક્રની શિરોલંબ રેખાઓ $Z = -1.96$ અને $Z = +1.96$ વચ્ચે આવેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ 0.95 છે.

(vi) વક્રની શિરોલંબ રેખાઓ $Z = -2.575$ અને $Z = +2.575$ વચ્ચે આવેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ 0.99 છે.

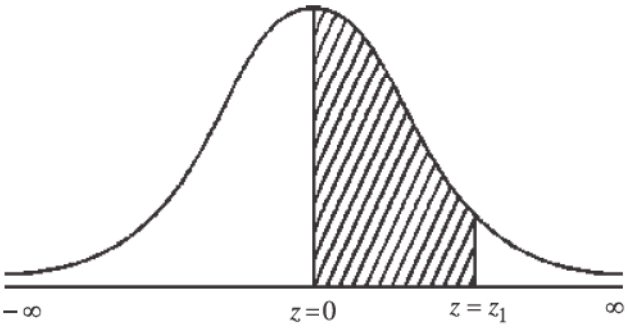
અહીં એ નોંધવું જરૂરી છે કે, પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ Z નું વિતરણ એ શૂન્ય મધ્યક અને 1 વિચરણવાળું પ્રામાણ્ય વિતરણ છે. Z ને પ્રમાણિત પ્રાપ્તાંક અથવા Z-પ્રાપ્તાંક તરીકે પણ ઓળખવામાં આવે છે અને તે માપના એકમથી મુક્ત અથવા નિરપેક્ષ છે.

અગાઉ આપણે જોયું કે પ્રામાણ્ય ચલ X ની કિંમત આપેલી હોય તેમજ પ્રાચલોની કિંમતો જ્ઞાત હોય ત્યારે તેને અનુરૂપ Z-પ્રાપ્તાંકની કિંમત મેળવી પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના કોષ્ટક પરથી સંભાવના મેળવી શકીએ છીએ. હવે જ્યારે આપણે સંભાવના જાણતા હોઈએ ત્યારે તેના માટે Z-પ્રાપ્તાંક શોધવા માટેની રીત સમજવા માટે આપણે નીચેનાં ઉદાહરણો સમજીએ :

ઉદાહરણ 6 : જો પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ Z ની કિંમત 0 અને Z-પ્રાપ્તાંક (z_1) ની વચ્ચે હોવાની સંભાવના 0.3925 હોય, તો Z-પ્રાપ્તાંક (z_1) ની શક્ય કિંમતો મેળવો.

અહીં પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ Z ની કિંમત $Z = 0$ અને $Z = z_1$ ની વચ્ચે હોવાની સંભાવના 0.3925 છે. આ સંભાવના પ્રામાણ્ય વક્રના $Z = 0$ અને $Z = z_1$ વચ્ચેના પ્રદેશનાં ક્ષેત્રફળ જેટલું હોય છે. અહીં z_1 ની કિંમત ધન અથવા ઋણ હોઈ શકે.

ધારો કે z_1 ની કિંમત ધન છે તેથી $P(0 \le Z \le z_1) = 0.3925$ થાય.

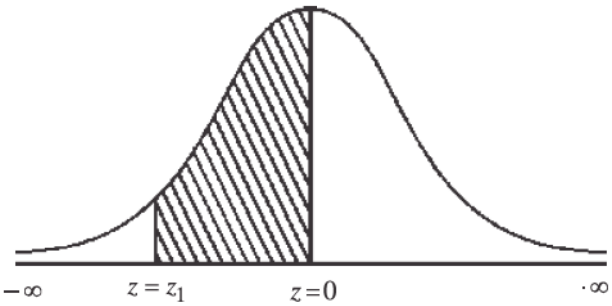


હવે z_1 ની કિંમત જાણવા માટે પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય વક્રના કોષ્ટક (Z-કોષ્ટક) માં Z ની કિંમતનો પ્રથમ સ્તંભ જુઓ. $Z = 1.20$ માટેનું ક્ષેત્રફળ 0.384 મળે છે, જે 0.3925 કરતાં ઓછું છે. હવે આ હારમાં ક્રમિક કિંમતો વાંચતા $Z = 1.24$

માટેનું ક્ષેત્રફળ 0.3925 છે તેથી Z-પ્રાપ્તાંકની એક શક્ય કિંમત 1.24 થાય.

હવે ધારો કે z_1 ની કિંમત ઋણ છે

$\therefore P(z_1 \le Z \le 0) = 0.3925$



હવે આ વિતરણ સંમિત હોવાથી $P(z_1 \le Z \le 0) = P(0 \le Z \le z_1) = 0.3925$ થાય તેથી ઉપર પ્રમાણે $z_1 = 1.24$ જ મળશે પરંતુ અહીં આકૃતિ પરથી જોઈ શકાય છે કે, z_1 ની શિરોલંબ રેખા $Z = 0$ ની ડાબી બાજુ છે તેથી Z-પ્રાપ્તાંક $z_1 = -1.24$ થાય.

આમ, જો પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલની કિંમત $Z = 0$ અને $Z = z_1$ ની વચ્ચે હોવાની સંભાવના 0.3925 હોય, તો Z-પ્રાપ્તાંક (z_1) ની શક્ય કિંમતો ± 1.24 થાય.

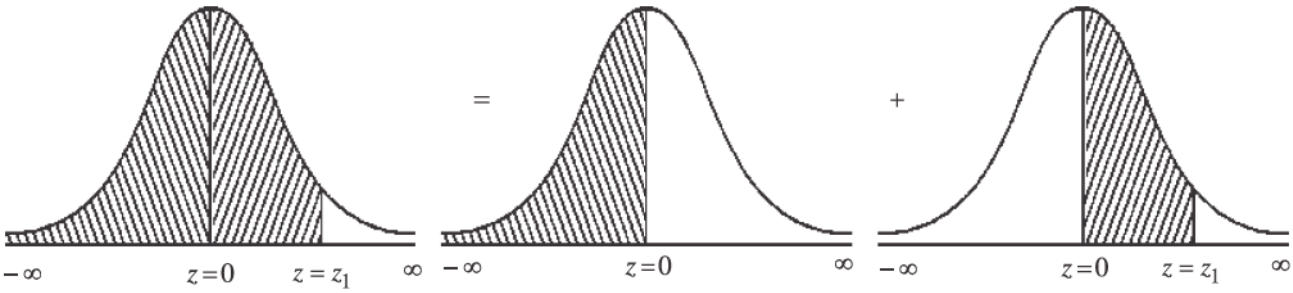
આમ, જો z_1 કિંમત અને $Z = 0$ ની જમણી બાજુ હોય તો તે કિંમત ધન થાય અને જો ડાબી બાજુ હોય તો તે કિંમત ઋણ થાય.

ઉદાહરણ 7 : જો પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ Z માટે મળતી સંભાવનાઓ નીચે પ્રમાણે હોય, તો Z-પ્રાપ્તાંક (z_1) ની કિંમત મેળવો :

(1) $Z = z_1$ ની ડાબી બાજુનું ક્ષેત્રફળ 0.95 છે.

(2) $Z = z_1$ ની જમણી બાજુનું ક્ષેત્રફળ 0.05 છે.

(1) અહીં $Z = z_1$ ની ડાબી બાજુનું ક્ષેત્રફળ 0.95 છે એટલે કે $P(Z \le z_1) = 0.95$ છે. પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય વક્રમાં $Z = z_1$ ની શિરોલંબ રેખા દોરવા માટે વક્રનો ડાબા છેડાથી જમણા છેડા બાજુ જતાં 0.95 ક્ષેત્રફળ મળે તે રીતે નીચે પ્રમાણે આકૃતિ દોરાય.



આમ $P(Z \le z_1) = P(-\infty < Z \le 0) + P(0 \le Z \le z_1) = 0.95$

$\therefore 0.5 + P(0 \le Z \le z_1) = 0.95$

$\therefore P(0 \le Z \le z_1) = 0.95 - 0.5$

$\therefore P(0 \le Z \le z_1) = 0.45$

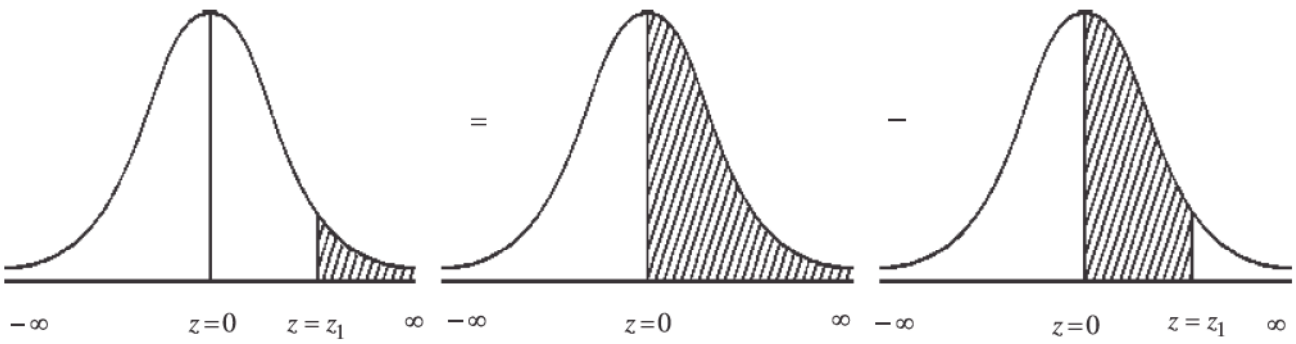
આ સંભાવના 0.45 ને અનુરૂપ z_1 ની કિંમત પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના કોષ્ટક પરથી સીધી મળતી નથી તેથી આપણે તેની અંદાજિત કિંમત નીચે મુજબ શોધીશું.

કોષ્ટક પરથી	ક્ષેત્રફળ	Z-પ્રાપ્તાંક
0.45 પહેલાની નજીકની કિંમત	0.4495	1.64
0.45 પછીની નજીકની કિંમત	0.4505	1.65
સરેરાશ કિંમત	0.4500	1.645

ઉપરના કોષ્ટક પરથી સ્પષ્ટ છે કે $z_1 = 1.645$ થાય.

આમ, $P(Z \le z_1) = 0.95$ માટે $z_1 = 1.645$ થાય.

(2) $Z = z_1$ ની જમણી બાજુનું ક્ષેત્રફળ 0.05 છે એટલે $P(Z \ge z_1) = 0.05$ છે. પ્રામાણ્ય વક્રમાં $Z = z_1$ ની શિરોલંબ રેખા એવી રીતે દોરવી જોઈએ કે જેથી વક્રના જમણા છેડાથી ડાબા છેડા બાજુ જતાં ક્ષેત્રફળ 0.05 થાય. આ પ્રમાણેનો વક્ર નીચે પ્રમાણે દોરી શકાય :



$$\therefore P(Z \ge z_1) = P(0 \le Z < \infty) - P(0 \le Z \le z_1) = 0.05$$

$$\therefore 0.5 - P(0 \le Z \le z_1) = 0.05$$

$$\therefore P(0 \le Z \le z_1) = 0.45$$

અગાઉ ગણતરી કર્યા મુજબ $z_1 = 1.645$ મળે.

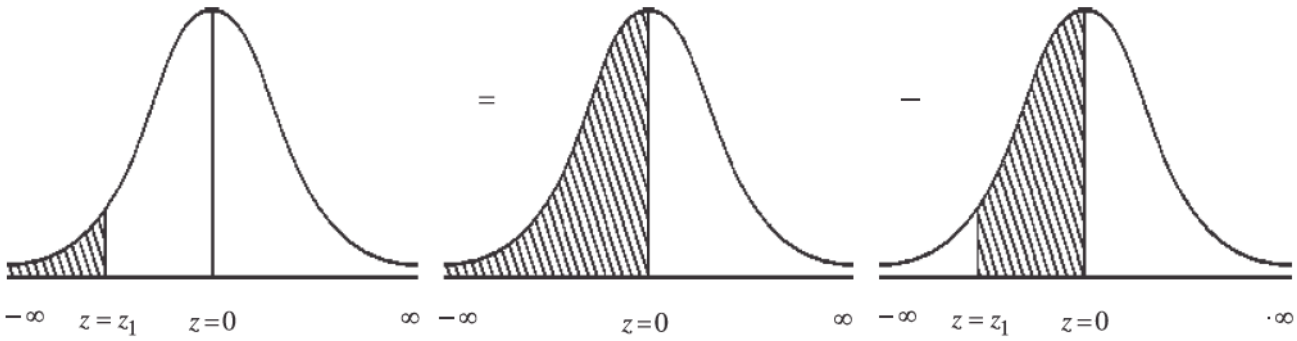
આમ, $P(Z \ge z_1) = 0.05$ માટે $z_1 = 1.645$ મળે.

ઉદાહરણ 8 : જો Z એ પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ હોય, તો નીચે આપેલી શરતોનું સમાધાન થાય તે રીતે Z-પ્રાપ્તાંક (z_1) ની કિંમત મેળવો :

(1) $Z = z_1$ ની ડાબી બાજુનું ક્ષેત્રફળ $= 0.10$ હોય.

(2) $Z = z_1$ ની જમણી બાજુનું ક્ષેત્રફળ $= 0.90$ હોય.

(1) અહીં $Z = z_1$ ની ડાબી બાજુનું ક્ષેત્રફળ 0.10 છે એટલે કે $P(Z \le z_1) = 0.10$ છે. પ્રામાણ્ય વક્રમાં $Z = z_1$ ની શિરોલંબ રેખા એવી રીતે દોરવી જોઈએ કે જેથી વક્રના ડાબા છેડાથી જમણા છેડા બાજુ જતાં ક્ષેત્રફળ 0.10 થાય. આ પ્રમાણેનો વક્ર નીચે પ્રમાણે દોરી શકાય.



$$\therefore\ P(Z \le z_1) = P(-\infty < Z \le 0) - P(z_1 \le Z \le 0) = 0.10$$

$$\therefore\ 0.50 - P(z_1 \le Z \le 0) = 0.10$$

$$\therefore\ P(z_1 \le Z \le 0) = 0.5 - 0.10$$

$$\therefore\ P(0 \le Z \le z_1) = 0.40 \quad (\because \text{ સંમિતતા})$$

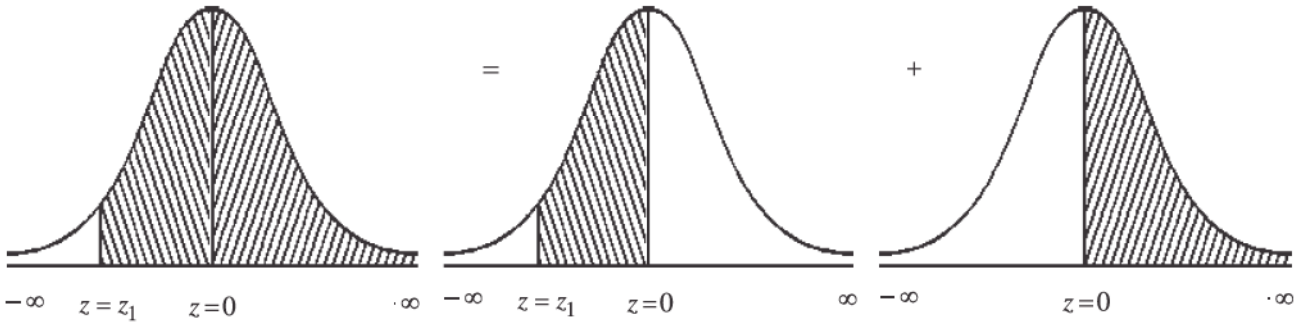
આ સંભાવના 0.40 ને અનુરૂપ z_1 ની કિંમત પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના કોષ્ટક પરથી સીધી મળતી નથી તેથી આપણે તેની અંદાજિત કિંમત નીચે મુજબ શોધીશું.

કોષ્ટક પરથી	ક્ષેત્રફળ	Z-પ્રાપ્તાંક
0.40 પહેલાની નજીકની કિંમત	0.3997	1.28
0.40 પછીની નજીકની કિંમત	0.4015	1.29
સરેરાશ કિંમત	0.4006	1.285

ઉપરના કોષ્ટકમાં 0.40 ની નજીકની કિંમત 0.3997 છે અને તેને અનુરૂપ Z-પ્રાપ્તાંકની કિંમત 1.28 છે તેમજ z_1 એ $Z = 0$ ની ડાબી બાજુ હોવાથી $z_1 = -1.28$ થાય.

આમ $P(Z \le z_1) = 0.10$ માટે $z_1 = -1.28$ થાય.

(2) $Z = z_1$ ની જમણી બાજુનું ક્ષેત્રફળ = 0.90 થાય એટલે કે $P(Z \ge z_1) = 0.90$ પ્રામાણ્ય વક્રમાં $Z = z_1$ ની શિરોલંબ રેખા એવી રીતે દોરવી જોઈએ કે જેથી વક્રના જમણા છેડાથી ડાબા છેડા બાજુ જતાં ક્ષેત્રફળ 0.90 થાય. આ પ્રમાણેનો વક્ર નીચે પ્રમાણે દોરી શકાય.



$$P(Z \ge z_1) = P(z_1 \le Z \le 0) + P(0 \le Z < \infty) = 0.90$$

$$\therefore\ P(z_1 \le Z \le 0) + 0.50 = 0.90$$

$\therefore\ P(z_1 \le Z \le 0) = 0.40$

$\therefore\ P(0 \le Z \le z_1) = 0.40$ ($\because$ સંમિતતા)

અગાઉ આપણે જોયું તેમ $z_1 = -1.28$ મળે છે.

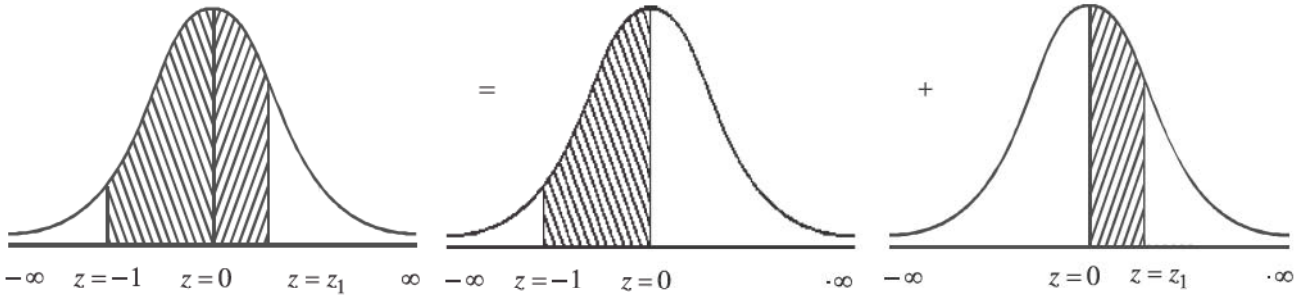
આમ, $P(Z \ge z_1) = 0.90$ માટે $z_1 = -1.28$ થાય.

ઉદાહરણ 9 : જો Z એ પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ હોય અને z_1 એ Z-પ્રાપ્તાંક દર્શાવતો હોય, તો નીચેની શરતોનું સમાધાન કરી તેવી z_1 ની કિંમતો મેળવો.

(1) $\boldsymbol{P(-1 \le Z \le z_1) = 0.5255}$

(2) $\boldsymbol{P(z_1 \le Z \le 2) = 0.7585}$

(1) અહીં $P(-1 \le Z \le z_1) = 0.5255$ આપેલું છે પ્રામાણ્ય વક્રમાં $Z = -1$ ની શિરોલંબ રેખા દોર્યા પછી તેની જમણી બાજુ પર $Z = z_1$ ની શિરોલંબ રેખા એવી રીતે દોરવી જોઈએ કે જેથી તેમની વચ્ચેનું ક્ષેત્રફળ 0.5255 જેટલું થાય. આ પ્રમાણેનો વક્ર નીચે પ્રમાણે દોરી શકાય.



$$P(-1 \le Z \le z_1) = P(-1 \le Z \le 0) + P(0 \le Z \le z_1) = 0.5255$$

$$\therefore P(0 \le Z \le 1) + P(0 \le Z \le z_1) = 0.5255 \quad (\because \text{ સંમિતતા})$$

$$\therefore 0.3413 + P(0 \le Z \le z_1) = 0.5255$$

$$\therefore P(0 \le Z \le z_1) = 0.5255 - 0.3413$$

$$\therefore P(0 \le Z \le z_1) = 0.1842$$

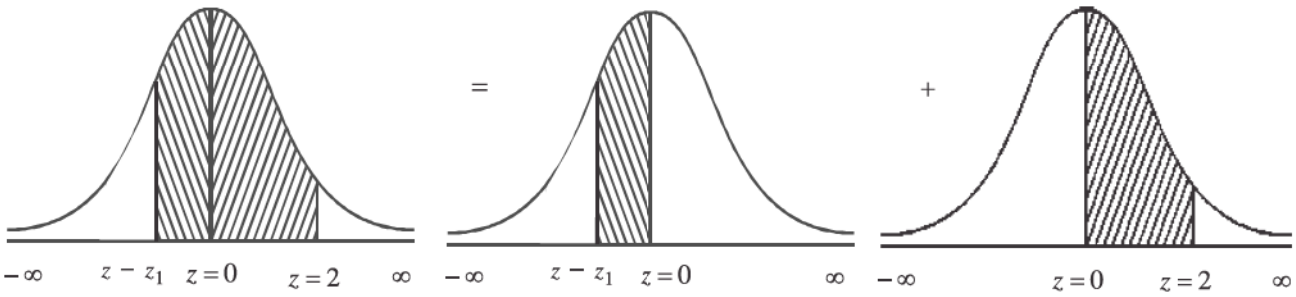
પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના કોષ્ટકનો ઉપયોગ કરીને Z-પ્રાપ્તાંક z_1 ની અંદાજિત કિંમત નીચેના કોષ્ટક પરથી મેળવી શકાય.

કોષ્ટક પરથી	ક્ષેત્રફળ	Z-પ્રાપ્તાંક
0.1842 પહેલાની નજીકની કિંમત	0.1808	0.47
0.1842 પછીની નજીકની કિંમત	0.1844	0.48
સરેરાશ કિંમત	0.1826	**0.475**

કોષ્ટક પરથી સ્પષ્ટ છે કે, ક્ષેત્રફળ 0.1842 ની નજીક હોય તેવી કિંમત 0.1844 છે અને તેને અનુરૂપ Z-પ્રાપ્તાંકની કિંમત 0.48 છે તેથી $Z_1 = 0.48$ લઈશું.

આમ, $P(-1 \le Z \le z_1) = 0.5255$ માટે $z_1 = 0.48$ થાય.

(2) $P(z_1 \le Z \le 2) = 0.7585$ આપેલું છે. પ્રામાણ્ય વક્રમાં $Z = 2$ ની શિરોલંબ રેખા દોર્યા પછી તેની ડાબી બાજુ પર $Z = z_1$ ની શિરોલંબ રેખા એવી રીતે દોરવી જોઈએ કે જેથી તેમની વચ્ચેનું ક્ષેત્રફળ 0.7585 જેટલું થાય. આ પ્રમાણેનો વક્ર નીચે મુજબ દોરી શકાય.



$$P(z_1 \le Z \le 2) = P(z_1 \le Z \le 0) + P(0 \le Z \le 2) = 0.7585$$

$$\therefore P(z_1 \le Z \le 0) + 0.4772 = 0.7585$$

$$\therefore P(z_1 \le Z \le 0) = 0.7585 - 0.4772$$

$$\therefore P(0 \le Z \le z_1) = 0.2813 \quad (\because \text{ સંમિતતા})$$

પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના કોષ્ટકનો ઉપયોગ કરીને z_1 ની અંદાજિત કિંમત નીચેના કોષ્ટક પરથી નક્કી કરી શકાય.

કોષ્ટક પરથી	ક્ષેત્રફળ	Z-પ્રાપ્તાંક
0.2813 પહેલાની નજીકની કિંમત	0.2794	0.77
0.2813 પછીની નજીકની કિંમત	0.2823	0.78
સરેરાશ કિંમત	0.2809	0.775

ઉપરના કોષ્ટક પરથી સ્પષ્ટ છે કે, 0.2813 ની નજીકની કિંમત 0.2809 છે અને તેને અનુરૂપ Z-પ્રાપ્તાંક 0.775 છે. અહીં Z-પ્રાપ્તાંક $Z = 0$ ની ડાબી બાજુ હોવાથી $z_1 = -0.775$ થાય.

આમ, $P(z_1 \le Z \le 2) = 0.7585$ માટે $z_1 = -0.775$ થાય.

પ્રવૃત્તિ

તમારા રહેઠાણની આસપાસ રહેતા પુખ્તવયના 30 વ્યક્તિઓનાં વજનનો મધ્યક (કિગ્રામાં) અને પ્રમાણિત વિચલન (કિગ્રા)માં મેળવો. આ સમૂહના વ્યક્તિઓનું વજન તમે શોધેલ મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલનવાળા પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે તેમ ધારીને (1) સૌથી વધુ વજન ધરાવતા 5 % વ્યક્તિઓનું ઓછામાં ઓછું વજન તેમજ (2) સૌથી ઓછુ વજન ધરાવતા 15 % વ્યક્તિઓનું વધુમાં વધુ વજનનો અંદાજ મેળવો.

3.6 ઉદાહરણો

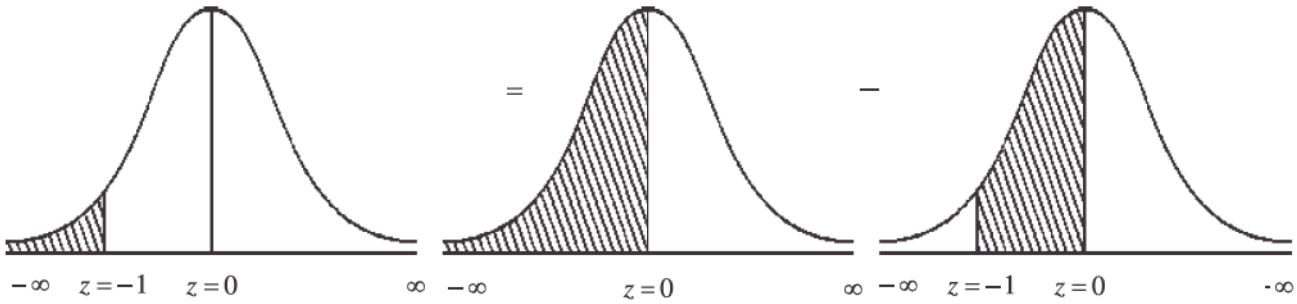
ઉદાહરણ 10 : શહેરના એક પેટ્રોલ પંપ પર થતું પેટ્રોલનું દૈનિક વેચાણ પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે અને તેના મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન અનુક્રમે 33,000 લિટર અને 3000 લિટર છે. (1) કોઈ એક માસ દરમિયાન પેટ્રોલ પંપ પરથી પેટ્રોલનું દૈનિક વેચાણ 30,000 લિટરથી ઓછું થયું હોય તેવા દિવસોની ટકાવારી મેળવો. (2) મે માસના કેટલા દિવસો દરમિયાન પેટ્રોલનું વેચાણ 32,000 લિટર અને 35,000 લિટરની વચ્ચે હોઈ શકે ?

અહીં X = પેટ્રોલ પંપ પર થતુ પેટ્રોલનું દૈનિક વેચાણ (લિટરમાં) તેમજ $\mu = 33{,}000$ લિટર અને $\sigma = 3000$ લિટર છે.

(1) પેટ્રોલનું વેચાણ 30,000 લિટરથી ઓછું હોવાની સંભાવના

$$= P(X \le 30000) \qquad = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{30000-33000}{3000}\right)$$

$$= P(Z \le -1)$$



$$= P(-\infty < Z \le 0) - P(-1 \le Z \le 0)$$

$$= 0.5 - P(0 \le Z \le 1) \; (\because \text{ સંમિતતા})$$

$$= 0.5 - 0.3413$$

$$= 0.1587$$

$\therefore$ કોઈ એક માસ દરમિયાન પેટ્રોલનું દૈનિક વેચાણ 30,000 લિટરથી ઓછુ હોય તેવા દિવસોની ટકાવારી

$$= 0.1587 \times 100$$

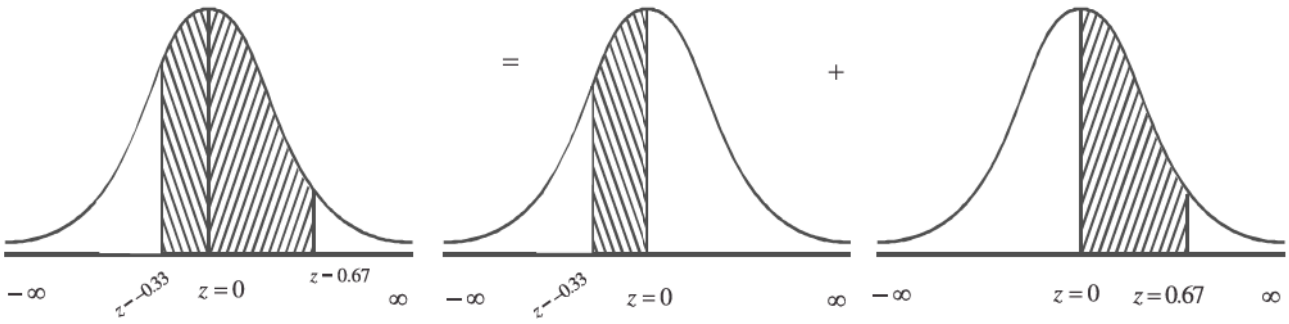
$$= 15.87\ \%$$

આમ, કોઈ એક માસના 15.87 % દિવસો દરમિયાન પેટ્રોલનું દૈનિક વેચાણ 30,000 લિટરથી ઓછુ થયું હશે.

(2) મે માસ દરમિયાન પેટ્રોલનું દૈનિક વેચાણ 32,000 અને 35,000 લિટરની વચ્ચે હોવાની સંભાવના

$$= P(32000 \le X \le 35000) \quad = P\left(\frac{32000-33000}{3000} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{35000-33000}{3000}\right)$$

$$= P(-0.33 \le Z \le 0.67)$$



$= P(-0.33 \le Z \le 0) + P(0 \le Z \le 0.67)$

$= P(0 \le Z \le 0.33) + 0.2486$ ($\because$ સંમિતતા)

$= 0.1293 + 0.2486$

$= 0.3779$

હવે મે માસના કુલ દિવસોની સંખ્યા $N = 31$ તેથી મે માસમાં પેટ્રોલનું વેચાણ 32,000 લિટર અને 35,000 લિટરની વચ્ચે હોય તેવા દિવસોની અપેક્ષિત સંખ્યા $= 31 \times 0.3779$

$= 11.71$

$\simeq$ 12 દિવસ (લગભગ)

આમ, મે માસના લગભગ 12 દિવસો માટે પેટ્રોલનું દૈનિક વેચાણ 32,000 લિટર અને 35,000 લિટરની વચ્ચે હશે.

ઉદાહરણ 11 : એક શાળાના કુલ વિદ્યાર્થીઓમાંથી પસંદ કરેલ 200 વિદ્યાર્થીઓએ 100 ગુણની એક પરીક્ષામાં મેળવેલ ગુણ પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે. ગુણના વિતરણનો મધ્યક 60 અને પ્રમાણિત વિચલન 8 છે.

(1) વિશિષ્ટ શિષ્યવૃત્તિ માટે લાયકાતનું ધોરણ 70 કે તેથી વધુ ગુણ હોય, તો વિશિષ્ટ શિષ્યવૃત્તિ મેળવતા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા શોધો.

(2) સૌથી વધુ ગુણ મેળવતા 10 % વિદ્યાર્થીઓના ઓછામાં ઓછા ગુણ શોધો.

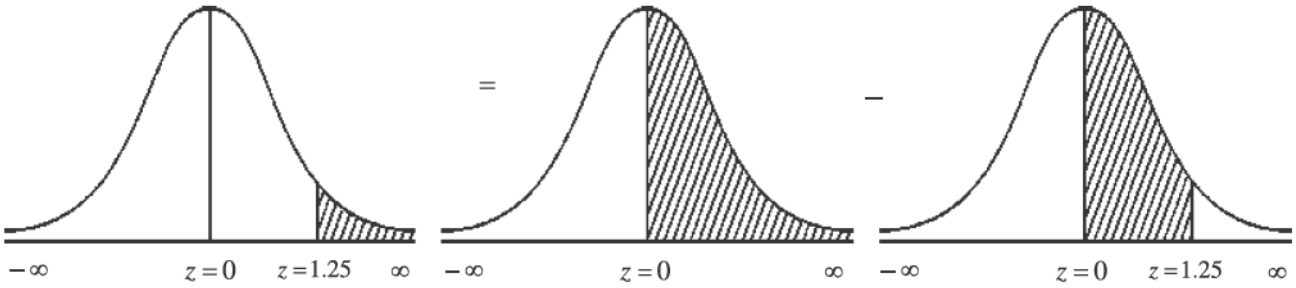
અહીં X = વિદ્યાર્થીએ મેળવેલ ગુણ

તેમજ $N = 200$, $\mu = 60$ અને $\sigma = 8$ છે.

(1) વિદ્યાર્થીનાં ગુણ 70 કે તેથી વધુ હોવાની સંભાવના

$= P(X \ge 70) \quad = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \ge \frac{70-60}{8}\right)$

$= P(Z \ge 1.25)$



$= P(0 \le Z < \infty) - P(0 \le Z \le 1.25)$

$= 0.5 - 0.3944$

$= 0.1056$

$\therefore$ 70 કે તેથી વધુ ગુણ મેળવતા વિદ્યાર્થીઓની અપેક્ષિત સંખ્યા

$= 200 \times 0.1056$

$= 21.12$

$\simeq$ 21 (લગભગ)

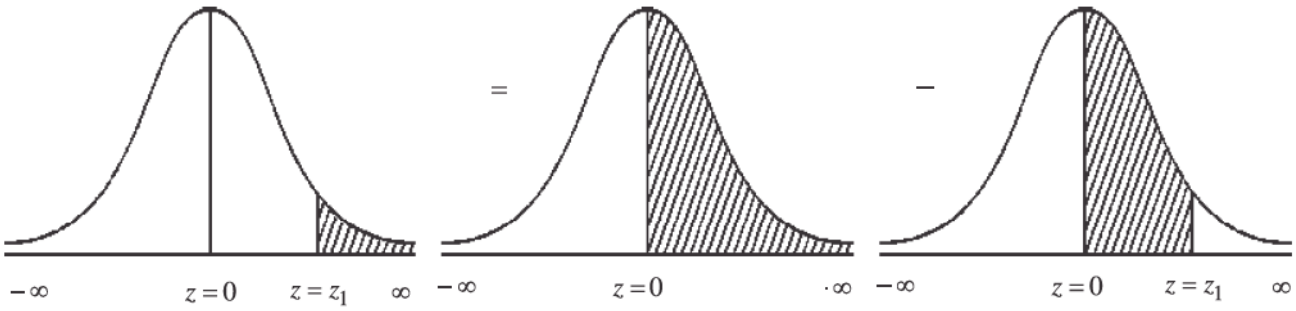
આમ, વિશિષ્ટ શિષ્યવૃત્તિ મેળવતા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા લગભગ 21 થાય.

(2) ધારો કે સૌથી વધુ ગુણ મેળવતા 10 % વિદ્યાર્થીઓના ઓછામાં ઓછા ગુણ x_1 છે. તેથી કોઈ પણ વિદ્યાર્થીના ગુણ x_1 કે તેથી વધુ હોવાની સંભાવના 0.10 થશે.

$\therefore \quad P(X \ge x_1) = 0.10$

$$\therefore \quad P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{x_1-60}{8}\right) = 0.10$$

$\therefore \quad P(Z \geq z_1) \quad = 0.10$, જ્યાં $z_1 = \frac{x_1-60}{8}$ છે.



$$\therefore 0.10 \quad = P(0 \leq Z < \infty) - P(0 \leq Z \leq z_1)$$

$$\therefore 0.10 \quad = 0.50 - P(0 \leq Z \leq z_1)$$

$$\therefore P(0 \leq Z \leq z_1) \quad = 0.40$$

પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના કોષ્ટકનો ઉપયોગ કરીને z_1 ની અંદાજિત કિંમત નીચેના કોષ્ટક પરથી મેળવીશું.

કોષ્ટક પરથી	ક્ષેત્રફળ	Z-પ્રાપ્તાંક
0.40 પહેલાંની નજીકની કિંમત	0.3997	1.28
0.40 પછીની નજીકની કિંમત	0.4015	1.29
સરેરાશ કિંમત	0.4006	1.285

આમ ઉપરના કોષ્ટક પરથી સ્પષ્ટ છે કે, 0.40 ની નજીકની કિંમત 0.3997 છે અને તેને અનુરૂપ Z-પ્રાપ્તાંક 1.28 છે. તેથી,

$$z_1 = 1.28$$

$$\therefore \quad \frac{x_1-60}{8} = 1.28$$

$$\therefore \quad x_1 - 60 = 10.24$$

$$\therefore \quad x_1 = 70.24$$

આમ, સૌથી વધુ હોશિયાર 10 % વિદ્યાર્થીઓના ઓછામાં ઓછા ગુણ $70.24 \simeq 70$ હશે.

ઉદાહરણ 12 : 1000 કર્મચારીઓના એક સમૂહનું માસિક વેતનનું વિતરણ પ્રામાણ્ય છે. વિતરણનો મધ્યક ₹ 15,000 અને પ્રમાણિત વિચલન ₹ 4000 છે. આ માહિતી પરથી (1) મધ્યના 60 % કર્મચારીઓના માસિક વેતનનો ગાળો મેળવો. (2) જો 250 કર્મચારીઓનું માસિક વેતન ₹ 15,000 થી કોઈ નિશ્ચિત વેતન ₹ x_1 ની વચ્ચે હોય, તો x_1 ની કિંમત શોધો.

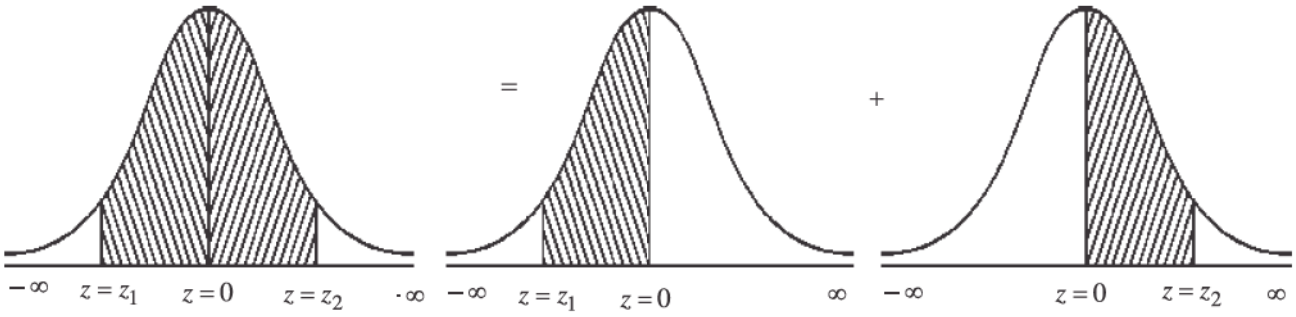
અહીં X = કર્મચારીઓનું માસિક વેતન તેમજ $\mu = ₹15,000$ અને $\sigma = ₹4000$ છે. $N = 1000$

(1) ધારો કે બરાબર વચ્ચેના 60 % કર્મચારીઓના માસિક વેતનનો ગાળો ₹ x_1 અને ₹ x_2 છે જ્યાં x_1 અને x_2 એ મધ્યક μ થી બંને બાજુ સમાન અંતરે છે. હવે કર્મચારીઓનું માસિક વેતન x_1 અને x_2 ની વચ્ચે હોવાની સંભાવના 0.60 થાય.

એટલે કે $P(x_1 \le X \le x_2) = 0.60$ થાય.

$$\therefore P\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) = 0.60$$

$$\therefore P(z_1 \le Z \le z_2) = 0.60 \text{ જ્યાં } z_1 = \frac{x_1-15000}{4000} \text{ અને } z_2 = \frac{x_2-15000}{4000} \text{ છે.}$$



$$0.60 = P(z_1 \le Z \le 0) + P(0 \le Z \le z_2)$$

હવે x_1 અને x_2એ મધ્યક μ થી સમાન અંતરે આવેલા હોવાથી $Z = 0$ એ $Z = z_1$ અને $Z = z_2$ વચ્ચેના ક્ષેત્રફળ (સંભાવના)ના બે સરખા ભાગ કરતુ હોવાથી $z_1 = -z_2$ થાય. તેમજ $P(z_1 \le Z \le 0) = 0.30$ અને $P(0 \le Z \le z_2) = 0.30$ થાય.

હવે પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના કોષ્ટક પરથી z_1 અને z_2 ની અંદાજિત કિંમતો નીચે પ્રમાણે મેળવી શકાય.

કોષ્ટક પરથી	ક્ષેત્રફળ	Z-પ્રાપ્તાંક
0.30 પહેલાંની નજીકની કિંમત	0.2995	0.84
0.30 પછીની નજીકની કિંમત	0.3023	0.85
સરેરાશ કિંમત	0.3009	0.845

0.30 ની નજીકની કિંમત 0.2995 છે તેથી તેને અનુરૂપ Z-પ્રાપ્તાંકની કિંમત 0.84 લઈશું.

$\therefore z_1 = -0.84$ અને $z_2 = 0.84$

$$\therefore \frac{x_1-15000}{4000} = -0.84 \text{ અને } \frac{x_2-15000}{4000} = 0.84$$

$\therefore x_1 - 15000 = -3360$ અને $x_2 - 15000 = 3360$

$\therefore\ x_1 = 11640$ અને $x_2 = 18360$

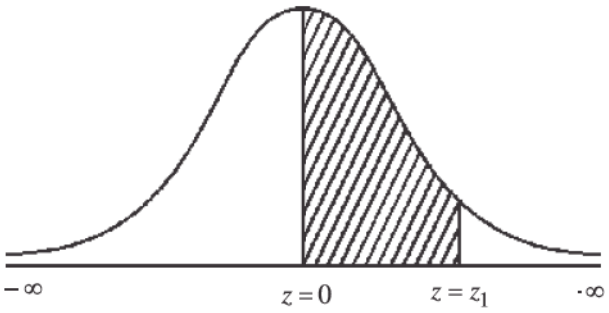
આમ, બરાબર વચ્ચે આવતા 60 % કર્મચારીઓના માસિક વેતનનો ગાળો ₹ 11,640 થી ₹ 18,360 થશે.

(2) 250 કર્મચારીઓનું માસિક વેતન ₹ 15,000 અને ₹ x_1 ની વચ્ચે છે.

તેથી $P(15000 \le X \le x_1) = \frac{250}{1000}$

$$\therefore\ P\left(\frac{15000-15000}{4000} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x_1-15000}{4000}\right) = 0.25$$

$$\therefore\ P(0 \le Z \le z_1) = 0.25 \text{ જ્યાં } z_1 = \frac{x_1-15000}{4000}$$



પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના કોષ્ટક પરથી z_1 ની અંદાજિત કિંમત નીચેના કોષ્ટક પરથી મેળવી શકાય.

કોષ્ટક પરથી	ક્ષેત્રફળ	Z-પ્રાપ્તાંક
0.25 પહેલાની નજીકની કિંમત	0.2486	0.67
0.25 પછીની નજીકની કિંમત	0.2518	0.68
સરેરાશ કિંમત	0.2502	0.675

કોષ્ટક પરથી સ્પષ્ટ છે કે $z_1 = 0.675$

$$\therefore\ \frac{x_1-15000}{4000} = 0.675$$

$$\therefore\ x_1 - 15000 = 2700$$

$$\therefore\ x_1 = 17700$$

આમ, 250 કર્મચારીઓનું માસિક વેતન ₹ 15,000 અને ₹ 17,700 ની વચ્ચે હશે.

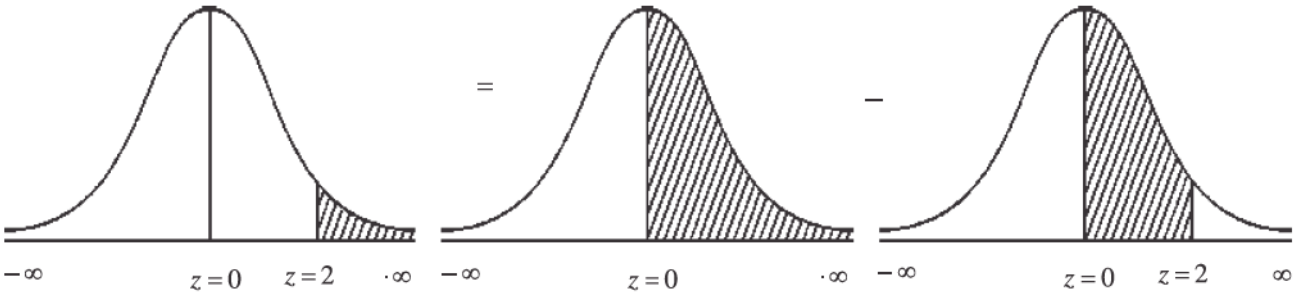
ઉદાહરણ 13 : એક ડિપાર્ટમેન્ટલ સ્ટોરમાં ખરીદી કરતાં ગ્રાહકોની ખરીદીના બિલની રકમ પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે અને તેનો મધ્યક ₹ 800 છે જ્યારે પ્રમાણિત વિચલન ₹ 200 છે. કોઈ એક દિવસે ₹ 1200થી વધુ રકમની બિલવાળા ગ્રાહકોની સંખ્યા 57 છે, તો તે દિવસે સ્ટોરમાં આવેલ ગ્રાહકોની સંખ્યા શોધો.

અહીં X = ગ્રાહકોની ખરીદીના બિલની રકમ છે. $\mu = 800$ અને $\sigma = 200$ આપેલું છે. ધારો કે તે દિવસે સ્ટોરમાં આવેલા ગ્રાહકોની સંખ્યા N છે.

ગ્રાહકે કરેલ ખરીદીના બિલની રકમ ₹ 1200 થી વધુ હોવાની સંભાવના

$$= P(X \geq 1200) \quad = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{1200-800}{200}\right)$$

$$= P(Z \geq 2)$$



$$= P(0 \leq Z < \infty) - P(0 \leq Z \leq 2)$$

$$= 0.5 - 0.4772 \text{ (Z-કોષ્ટક પરથી)}$$

$$= 0.0228$$

હવે ખરીદીની બિલની રકમ ₹ 1200થી વધુ હોય

તેવા ગ્રાહકોની અપેક્ષિત સંખ્યા = $N \times P(x \geq 1200)$

$$57 = N \times 0.0228$$

$$\therefore \quad N = \frac{57}{0.0228}$$

$$\therefore \quad N = 2500$$

$\therefore$ તે દિવસે સ્ટોરમાં આવેલ કુલ ગ્રાહકોની સંખ્યા 2500 હશે.

ઉદાહરણ 14 : 1000 વ્યક્તિઓના એક સમૂહમાં વ્યક્તિઓની ઊંચાઈનાં અવલોકનોનો મધ્યક 165 સેમી અને વિચરણ 100 (સેમી)^2 છે. આ વ્યક્તિઓની ઊંચાઈનું વિતરણ પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે. આ માહિતી પરથી ત્રીજો દશાંશક અને 60 મો શતાંશક શોધી તેનું અર્થઘટન કરો.

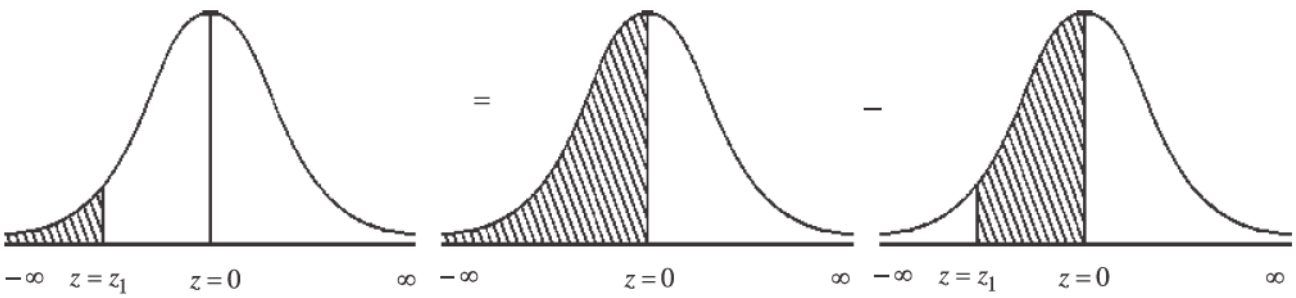
અહીં X = સમૂહમાં વ્યક્તિની ઊંચાઈ છે. તેમજ $N = 1000$, $\mu = 165$ અને $\sigma^2 = 100$ તેથી $\sigma = 10$

આપેલી માહિતીનો ત્રીજો દશાંશક (D_3) મેળવવાનો છે. હવે D_3 ની વ્યાખ્યા પ્રમાણે આપેલી માહિતીમાં 30 % અવલોકનોની કિંમત D_3 જેટલી કે તેથી ઓછી હોય.

$$\therefore P(X \leq D_3) = \frac{30}{100}$$

$$\therefore P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{D_3-165}{100}\right) = 0.30$$

$$\therefore P(Z \leq Z_1) = 0.30 \text{ જ્યાં } z_1 = \frac{D_3-165}{10} \text{ છે.}$$



$$0.30 = P(-\infty < Z \le 0) - P(z_1 \le Z \le 0)$$

$$0.30 = 0.50 - P(z_1 \le Z \le 0)$$

$$\therefore P(z_1 \le Z \le 0) = 0.50 - 0.30$$

$$= 0.20$$

$$\therefore P(0 \le Z \le z_1) = 0.20 \quad (\because \text{ સંમિતતા})$$

પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના કોષ્ટક પરથી z_1 ની અંદાજિત કિંમત નીચેના કોષ્ટક પરથી મેળવી શકાય.

કોષ્ટક પરથી	ક્ષેત્રફળ	Z-પ્રાપ્તાંક
0.2 પહેલાની નજીકની કિંમત	0.1985	0.52
0.2 પછીની નજીકની કિંમત	0.2019	0.53
સરેરાશ કિંમત	0.2002	0.525

કોષ્ટક પરથી સ્પષ્ટ છે કે, 0.20 ની નજીકની કિંમત 0.2002 છે અને તેને અનુરૂપ Z પ્રાપ્તાંકની કિંમત 0.525 છે તેમજ z_1 એ $Z = 0$ ની ડાબી બાજુ હોવાથી

$$z_1 = -0.525$$

$$\therefore \frac{D_3 - 165}{10} = -0.525$$

$$\therefore D_3 - 165 = -5.25$$

$$\therefore D_3 = 159.75$$

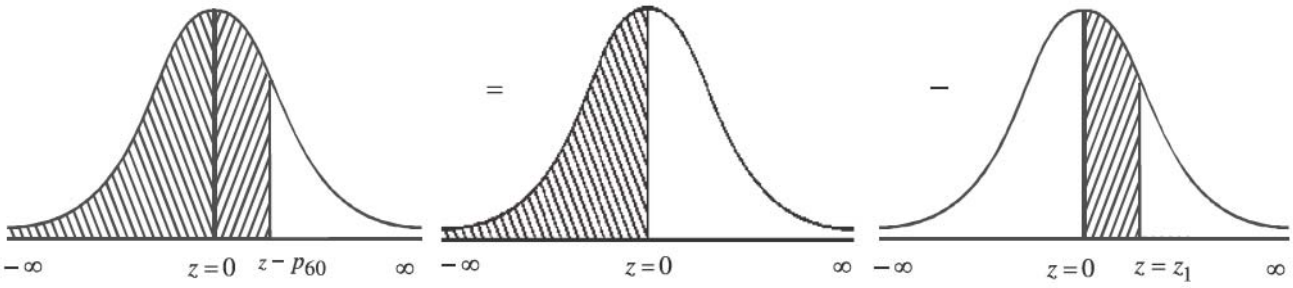
આમ સમૂહમાં 30 % વ્યક્તિઓની ઊંચાઈ 159.75 સેમીથી ઓછી હશે.

હવે 60માં શતાંશકની (P_{60}) ની વ્યાખ્યા પ્રમાણે આપેલી માહિતીના 60 % અવલોકનોની કિંમત P_{60} કે તેથી ઓછી હોય.

$$\therefore P(X \le P_{60}) = \frac{60}{100}$$

$$\therefore P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{P_{60}-165}{10}\right) = 0.60$$

$$\therefore P(Z \le z_1) = 0.60 \text{ જ્યાં } z_1 = \frac{P_{60}-165}{10} \text{ છે.}$$



$$0.60 = P(-\infty < Z \le 0) + P(0 \le Z \le z_1)$$

$$0.60 = 0.50 + P(0 \le Z \le z_1)$$

$$\therefore P(0 \le Z \le z_1) = 0.10$$

પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના કોષ્ટક પરથી z_1 ની અંદાજિત કિંમત નીચેના કોષ્ટક પરથી મેળવી શકાય.

કોષ્ટક પરથી	ક્ષેત્રફળ	*Z*-પ્રાપ્તાંક
0.10 પહેલાની નજીકની કિંમત	0.0987	0.25
0.10 પછીની નજીકની કિંમત	0.1026	0.26
સરેરાશ કિંમત	0.10065	0.255

કોષ્ટક પરથી સ્પષ્ટ છે કે, 0.10 ની નજીકની કિંમત 0.10065 છે અને તેને અનરૂપ Z પ્રાપ્તાંક 0.255 છે તેથી $z_1 = 0.255$

$$\therefore \frac{P_{60}-165}{10} = 0.255$$

$$\therefore P_{60} - 165 = 2.55$$

$$\therefore P_{60} = 167.55$$

આમ આપેલ સમૂહમાં 60 % વ્યક્તિઓની ઊંચાઈ 167.55 સેમીથી ઓછી હશે.

ઉદાહરણ 15 : એક વીજળીના બલ્બ બનાવતી ઉત્પાદક કંપની દ્વારા ઉત્પાદિત કરેલ બલ્બનું આયુષ્ય (કલાકમાં) પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે. તેનું સરેરાશ આયુષ્ય 2040 કલાક છે. જો 3.36 % બલ્બનું આયુષ્ય 2150 કલાકથી વધુ હોય, તો બલ્બના આયુષ્યનું વિચરણ શોધો.

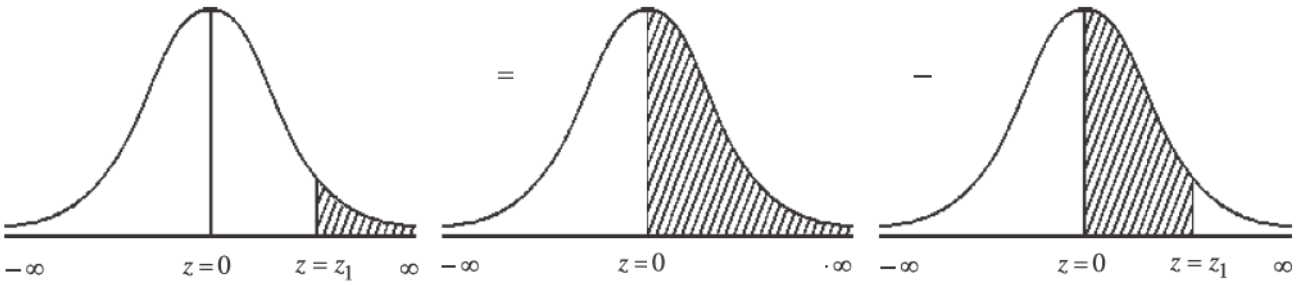
અહીં $X =$ વીજળીના બલ્બનું આયુષ્ય છે તેમજ $\mu = 2040$ કલાક આપેલું છે. ધારો કે તેનું વિચરણ σ^2 છે.
હવે 3.36 % બલ્બનું આયુષ્ય 2150 કલાકથી વધુ છે.

$$\therefore P(X \ge 2150) = \frac{3.36}{100}$$

$$\therefore P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \ge \frac{2150-2040}{\sigma}\right) = 0.0336$$

$$\therefore P\left(Z \ge \frac{110}{\sigma}\right) = 0.0336$$

$\therefore P(Z \ge z_1) = 0.0336$ જ્યાં $z_1 = \frac{110}{\sigma}$ છે.



$$0.0336 = P(0 \le Z < \infty) - P(0 \le Z \le z_1)$$

$$0.0336 = 0.5 - P(0 \le Z \le z_1)$$

$$\therefore P(0 \le Z \le z_1) = 0.5 - 0.0336$$

$$\therefore P(0 \le Z \le z_1) = 0.4664$$

પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના કોષ્ટક પરથી Z – પ્રાપ્તાંક 1.83 માટે $P(0 \le Z \le 1.83) = 0.4664$ મળે છે.

$$\therefore z_1 = 1.83$$

$$\therefore \frac{110}{\sigma} = 1.83$$

$$\therefore \sigma = \frac{110}{1.83}$$

$$\therefore \sigma = 60.11$$

$\therefore$ વિચરણ $\sigma^2 = 3613.21$

આમ, ઉત્પાદિત થતાં વીજળીના બલ્બના આયુષ્યનું વિચરણ 3613.21 (કલાક)^2 હશે.

ઉદાહરણ 16 : કરિયાણાની દુકાન ચલાવતા એક વેપારીને તેના દૈનિક વેપારમાં થતો નફો પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે. નફાનું વિચરણ 22,500 (₹)^2 છે, તેમજ દૈનિક નફો ₹ 1000થી ઓછો હોય તેની સંભાવના 0.0918 છે, તો વેપારીનો દૈનિક સરેરાશ નફો શોધો.

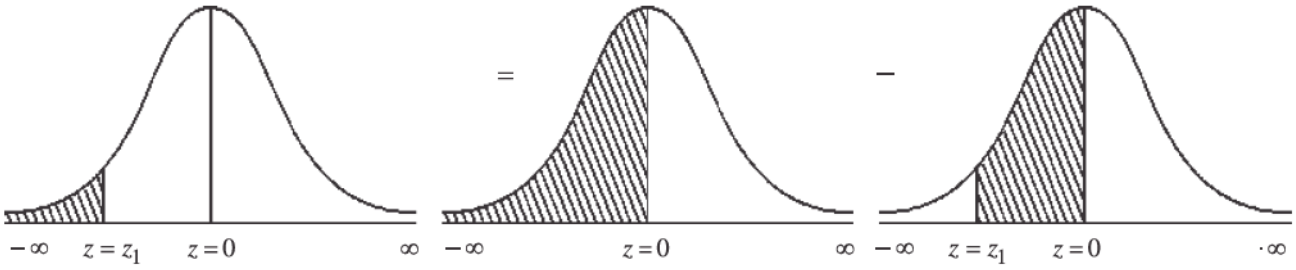
અહીં X = વેપારીને તેના વેપારમાં થતો દૈનિક નફો છે તેમજ $\sigma^2 = 22500$ છે, તેથી $\sigma = 150$ થાય અને ધારો કે સરેરાશ નફો μ છે.

હવે દૈનિક નફો ₹ 1000થી ઓછો હોય તેની સંભાવના = 0.0918

$$\therefore P(X \le 1000) = 0.0918$$

$$\therefore P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{1000-\mu}{150}\right) = 0.0918$$

$$\therefore P(Z \le z_1) = 0.0918 \text{ જ્યાં } z_1 = \frac{1000-\mu}{150}$$



$$0.0918 = P(-\infty < Z \le 0) - P(z_1 \le Z \le 0)$$

$$0.0918 = 0.5 - P(z_1 < Z \le 0)$$

$$\therefore P(z_1 \le Z \le 0) = 0.5 - 0.0918$$

$$\therefore P(0 \le Z \le z_1) = 0.4082 \quad (\because \text{ સંમિતતા})$$

પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના કોષ્ટક પરથી Z = પ્રાપ્તાંક 1.33 મળે છે.

$$\therefore z_1 = -1.33$$

$$\therefore \frac{1000-\mu}{150} = -1.33$$

$$\therefore \mu = 1199.5$$

આમ, વેપારીને તેનો વેપારમાં થતો સરેરાશ દૈનિક નફો ₹ 1199.5 હશે.

ઉદાહરણ 17 : ઉનાળા દરમિયાન કોઈ એક શહેરનું મહત્તમ તાપમાન પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે. કોઈ એક દિવસે શહેરનું મહત્તમ તાપમાન 31° સેલ્સિયસથી વધુ હોવાની સંભાવના 0.3085 છે જ્યારે અન્ય કોઈ દિવસે મહત્તમ તાપમાન 27° સેલ્સિયસથી ઓછું હોવાની સંભાવના 0.0668 છે, તો શહેરના મહત્તમ તાપમાનના મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન મેળવો.

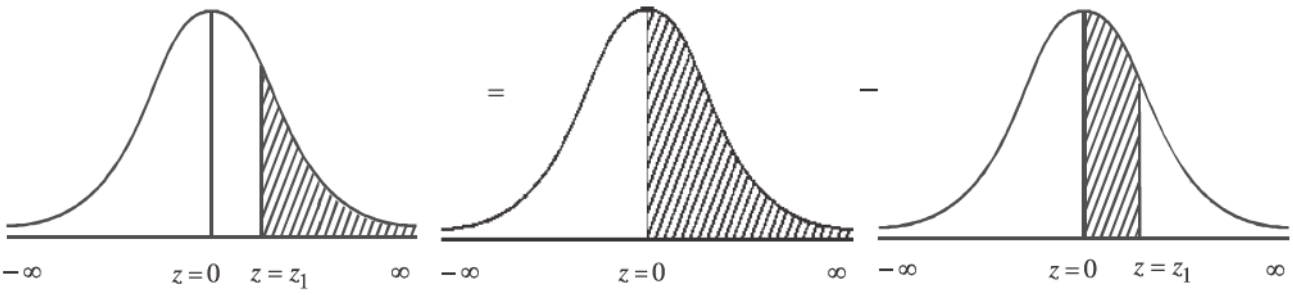
અહીં X = શહેરનું મહત્તમ તાપમાન (સેલ્સિયસમાં) ધારો કે તેનો મધ્યક μ અને પ્રમાણિત વિચન σ છે.

હવે મહત્તમ તાપમાન 31° સેલ્સિયસથી વધુ હોવાની સંભાવના = 0.3085

$$\therefore P(X \ge 31) = 0.3085$$

$$\therefore P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \ge \frac{31-\mu}{\sigma}\right) = 0.3085$$

$$\therefore P(Z \ge z_1) = 0.3085 = 0.3085 \text{ જ્યાં } z_1 = \frac{31-\mu}{\sigma}$$



$$0.3085 = P(0 \le Z < \infty) - P(0 \le Z \le z_1)$$

$$0.3085 = 0.5 - P(0 \le Z \le z_1)$$

$$\therefore P(0 \le Z \le z_1) = 0.5 - 0.3085$$

$$\therefore P(0 \le Z \le z_1) = 0.1915$$

પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના કોષ્ટક પરથી Z-પ્રાપ્તાંક 0.5 મળે છે

$$\therefore z_1 = 0.5$$

$$\therefore \frac{31-\mu}{\sigma} = 0.5$$

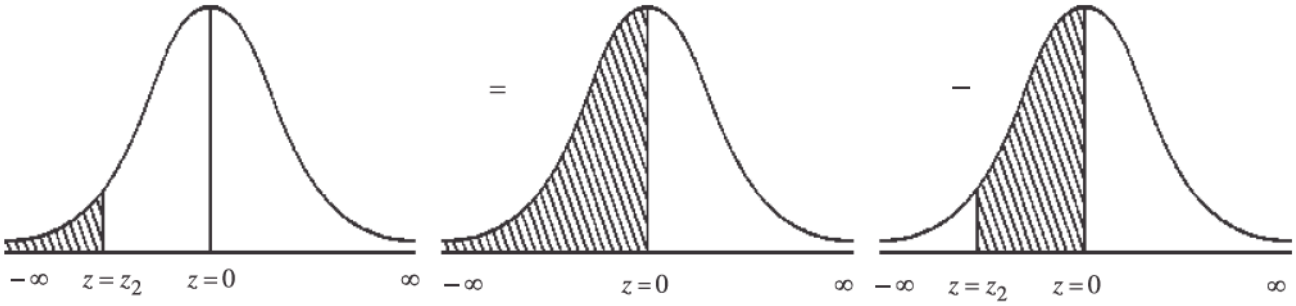
$$\therefore 31 - \mu = 0.5\sigma \text{ ..... (1)}$$

મહત્તમ તાપમાન 27° સેલ્સિયસથી ઓછું હોવાની સંભાવના = 0.0668

$$\therefore\ P(X \le 27) = 0.0668$$

$$\therefore\ P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{27-\mu}{\sigma}\right) = 0.0668$$

$$\therefore\ P(Z \le z_2) = 0.0668 \text{ જ્યાં } z_2 = \frac{27-\mu}{\sigma}$$



$$0.0668 = P(-\infty < Z \le 0) - P(z_2 \le Z \le 0)$$

$$\therefore\ 0.0668 = 0.5 - P(z_2 \le Z \le 0)$$

$$\therefore\ P(z_2 \le Z \le 0) = 0.5 - 0.0668$$

$$\therefore\ P(0 \le Z \le z_2) = 0.4332\ (\because \text{ સંમિતતા})$$

પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના કોષ્ટક પરથી Z-પ્રાપ્તાંક 1.5 મળે છે.

$$\therefore\ z_2 = -1.5$$

$$\therefore\ \frac{27-\mu}{\sigma} = -1.5$$

$$\therefore\ 27 - \mu = -1.5\sigma \text{ ..... (2)}$$

સમીકરણ (1) અને (2) ને ઉકેલતા

$$31 - \mu = 0.5\,\sigma$$

$$27 - \mu = -1.5\,\sigma$$

$$- \quad + \quad +$$

$$4 = 2\sigma$$

$$\therefore\ \sigma = 2$$

સમીકરણ (1) માં $\sigma = 2$ મૂકતાં,

$$31 - \mu = 0.5(2)$$

$$\therefore\ 31 - \mu = 1$$

$$\therefore\ \mu = 30$$

આમ શહેરનું મહત્તમ તાપમાનનો મધ્યક 30° સેલ્સિયસ અને પ્રમાણિત વિચલન 2° સેલ્સિયસ હશે.

ઉદાહરણ 18 : એક પ્રામાણ્ય ચલ X નું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય નીચે પ્રમાણે છે :

$$f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \quad e^{-\frac{1}{32}(x-50)^2} \; ; \; -\infty < x < \infty$$

આ વિતરણનાં પ્રાચલો મેળવો અને તે પરથી નીચેની કિંમતો શોધો :

(1) $P(52 \le X \le 58)$ (2) $P(|X-45| \le 4)$

આપેલ સંભાવના વિધેયને પ્રામાણ્ય ચલ X નું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય સાથે સરખાવીએ

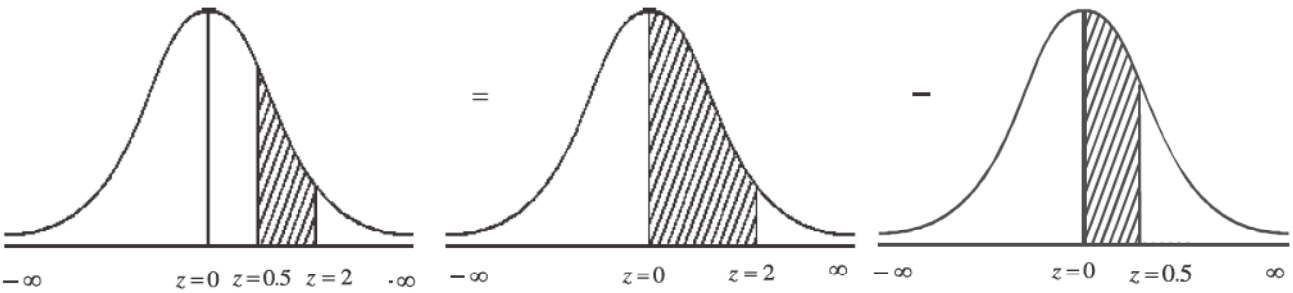
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \quad e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \; ; \; -\infty < x < \infty$$

અહીં $\sigma\sqrt{2\pi} = 4\sqrt{2\pi}$ અને $\mu = 50$

$\therefore \; \sigma = 4$

(1) $P(52 \le X \le 58) = P\left(\frac{52-50}{4} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{58-50}{4}\right)$

$= P(0.5 \le Z \le 2)$



$= P(0 \le Z \le 2) - P(0 \le Z \le 0.5)$

$= 0.4772 - 0.1915$

$= 0.2857$

આમ, $P(52 \le X \le 58) = 0.2857$ થાય.

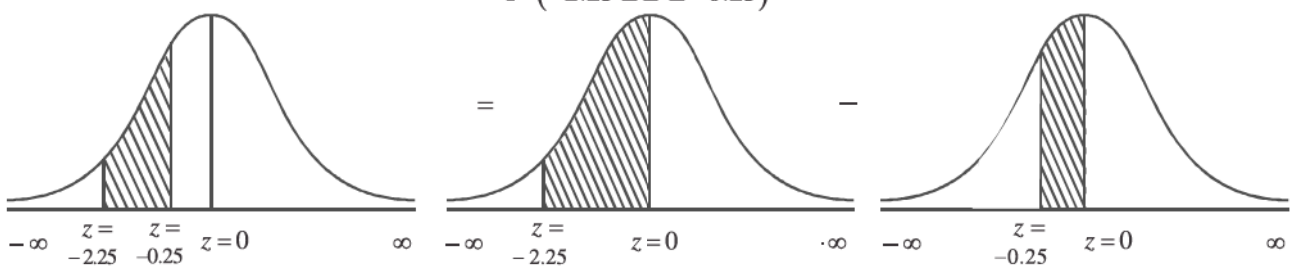
(2) $P(|X-45| \le 4) = P(-4 \le (X-45) \le 4)$ (માનાંકની વ્યાખ્યા)

$= P(-4+45 \le (X-45)+45 \le 4+45)$

$= P(41 \le X \le 49)$

$= P\left(\frac{41-50}{4} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{49-50}{4}\right)$

$= P(-2.25 \le Z \le -0.25)$



$$= P(-2.25 \le Z \le 0) - P(-0.25 \le Z \le 0)$$

$$= P(0 \le Z \le 2.25) - P(0 \le Z \le 0.25) \quad (\because \text{ સંમિતતા})$$

$$= 0.4878 - 0.0987$$

$$= 0.3891$$

આમ, $P(|X-45| \le 4) = 0.3891$ થાય.

ઉદાહરણ 19 : એક પ્રામાણ્ય ચલ X નું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત થાય છે.

$$f(x) = \text{અચળાંક} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-25}{10}\right)^2} \; ; \; -\infty < x < \infty$$

આ પરથી પ્રામાણ્ય વિતરણ માટે નીચેની કિંમતોનો અંદાજ મેળવો :

(1) તૃતીય ચતુર્થક (2) ચતુર્થક વિચલન (3) સરેરાશ વિચલન

અહીં આપેલ સંભાવના ઘટત્વ વિધેયને, પ્રામાણ્ય ચલ X ના સંભાવના ઘટત્વ વિધેય સાથે સરખાવીએ

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \; e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \; ; \; -\infty < x < \infty$$

મધ્યક $\mu = 25$ અને પ્ર.વિ. $\sigma = 10$ મળશે.

(1) તૃતીય ચતુર્થક $Q_3 = \mu + 0.675\,\sigma$

$$= 25 + 0.675\ (10)$$

$$= 25 + 6.75$$

$$= 31.75$$

(2) ચતુર્થક વિચલન $= \frac{2}{3}\ \sigma$

$$= \frac{2}{3}\ (10)$$

$$= \frac{20}{3}$$

(3) સરેરાશ વિચલન $= \frac{4}{5}\ \sigma$

$$= \frac{4}{5}\ (10)$$

$$= 8$$

આમ, આપેલ પ્રામાણ્ય વિતરણ માટેની માંગેલી કિંમતોનો અંદાજ અનુક્રમે 31.75, $\frac{20}{3}$ અને 8 થશે.

ઉદાહરણ 20 : એક પ્રામાણ્ય વિતરણના અંતિમ ચતુર્થકો અનુક્રમે 20 અને 50 છે, તો તે વિતરણના 95 % પ્રાપ્તાંકોને સમાવતી સીમાઓ મેળવો.

અહીં $Q_1 = 20$ અને $Q_3 = 50$ છે. પ્રામાણ્ય વિતરણ માટે

મધ્યક = મધ્યસ્થ = બહુલક = $\frac{Q_3+Q_1}{2}$

$$\therefore \mu = \frac{50+20}{2}$$

$$\therefore \mu = 35$$

ચતુર્થક વિચલન = $\frac{2}{3}\ \sigma$

$$\therefore \frac{Q_3-Q_1}{2} = \frac{2}{3}\ \sigma$$

$$\therefore \frac{50-20}{2} \times \frac{3}{2} = \sigma$$

$$\therefore \sigma = 22.5$$

પ્રામાણ્ય વિતરણનાં 95 % અવલોકનો સમાવતી સીમાઓ $\mu \pm 1.96\sigma$ છે તેથી માંગેલો અંતરાલ (સીમાઓ)

$$(\mu - 1.96\sigma,\ \mu + 1.96\sigma)$$

$$\therefore (35 - 1.96\,(22.5),\ \mu + 1.96\,(22.5))$$

$$\therefore (35 - 44.1,\ 35 + 44.1)$$

$$\therefore (-9.1,\ 79.1)$$

આમ, આપેલી માહિતી પરથી પ્રામાણ્ય વિતરણનાં 95 % અવલોકનો ધરાવતી સીમાઓ –9.1 થી 79.1 થાય.

ઉદાહરણ 21 : એક પ્રામાણ્ય વિતરણ માટે પ્રથમ ચતુર્થક અને સરેરાશ વિચલન અનુક્રમે 20 અને 24 છે, તો તે વિતરણનાં બહુલકની કિંમતનો અંદાજ મેળવો.

અહીં Q_1 = 20 અને સરેરાશ વિચલન = 24 છે.

$$\therefore \frac{4}{5}\ \sigma = 24$$

$$\therefore \sigma = 24 \times \frac{5}{4}$$

$$\therefore \sigma = 30$$

હવે ચતુર્થક વિચલન = $\frac{2}{3}\ \sigma$

$$\therefore \frac{Q_3-Q_1}{2} = \frac{2}{3}\ \sigma$$

$$\therefore \frac{Q_3-20}{2} = \frac{2}{3}\ (30)$$

$$\therefore Q_3 - 20 = 20 \times 2$$

$$\therefore Q_3 = 40 + 20$$

$$\therefore Q_3 = 60$$

હવે પ્રામાણ્ય વિતરણ માટે મધ્યક = મધ્યસ્થ = બહુલક = $\frac{Q_3+Q_1}{2}$

$$= \frac{60+20}{2}$$

$$= 40$$

આમ, આપેલી માહિતીના આધારે બહુલકની અંદાજિત કિંમત 40 થાય.

ઉદાહરણ 22 : નેશનલ હાઈવેના ટોલનાકા પર વ્યસ્ત સમય દરમિયાન દર કલાકે આવતાં વાહનોની સંખ્યાનું વિતરણ પ્રામાણ્ય છે. આ વિતરણનો મધ્યક μ અને પ્રમાણિત વિચલન σ છે. બે અલગ અલગ વ્યસ્ત સમયગાળા દરમિયાન ટોલનાકા પર આવતા વાહનોની સંખ્યા અનુક્રમે 88 અને 64 હોય તેને અનુરૂપ Z-પ્રાપ્તાંકની કિંમતો 0.8 અને –0.4 હોય તો વ્યસ્ત સમયમાં તે ટોલનાકા પર આવતાં વાહનોની સરેરાશ સંખ્યાનો મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન મેળવો.

અહીં X = હાઈવેના ટોલનાકા પર વ્યસ્ત સમય દરમિયાન દર કલાકે આવતાં વાહનોની સરેરાશ સંખ્યા માહિતીનો મધ્યક μ અને પ્રમાણિત વિચલન σ છે.

Z-પ્રાપ્તાંક = $\frac{X-\mu}{\sigma}$

જ્યારે X = 88 ત્યારે Z = 0.8 છે. તેથી $0.8 = \frac{88-\mu}{\sigma}$

$$\therefore 0.8\sigma = 88-\mu \qquad (1)$$

જ્યારે X = 64 ત્યારે Z = –0.4 છે. તેથી $-0.4 = \frac{64-\mu}{\sigma}$

$$\therefore -0.4\sigma = 64-\mu \qquad (2)$$

સમીકરણ (1) અને (2) ને ઉકેલતા

$$\begin{array}{rl} & 0.8\sigma = 88-\mu \\ - & 0.4\sigma = 64-\mu \\ + & \quad - \quad + \\ \hline & 1.2\sigma = 24 \end{array}$$

$$\therefore \sigma = 20$$

સમીકરણ (1)માં $\sigma = 20$ મૂકતાં, $0.8(20) = 88-\mu$

$$\therefore 16 = 88-\mu$$

$$\therefore \mu = 72$$

આમ આપેલ માહિતીનો મધ્યક $\mu = 72$ વાહનો અને તેનું પ્રમાણિત વિચલન $\sigma = 20$ વાહનો છે.

પ્રવૃત્તિ

તમારા રહેઠાણની આસપાસ રહેતાં 30 કુટુંબોનાં જીવનનિર્વાહ માટેના માસિક સરેરાશ ખર્ચની વીગત મેળવો. આ કુટુંબોનો માસિક ખર્ચ તમે શોધેલ મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલનવાળા પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે તેમ ધારીને

(1) વચ્ચેનાં 60 % કુટુંબોના માસિક ખર્ચની સીમાઓ મેળવો.

(2) તમે એકઠી કરેલ માહિતી પરથી $\mu \pm \sigma$ની વચ્ચે આવતાં અવલોકનોની ટકાવારી શોધો.

સારાંશ

- સતત યાદચ્છિક ચલની કિંમત કોઈ એક નિશ્ચિત અંતરાલની વચ્ચે હોવાની સંભાવના મેળવવાના વિધેયને તે ચલનું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય કહે છે.
- સતત યાદચ્છિક ચલની એક નિશ્ચિત કિંમત માટે સંભાવના ઘટત્વ વિધેય દ્વારા મેળવેલ સંભાવના હંમેશાં શૂન્ય (0) હોય છે.
- પ્રામાણ્ય ચલની જુદી જુદી કિંમતોને અનુરૂપ સંભાવના ઘટત્વ વિધેયની કિંમતો શોધી જે વક્ર દોરવામાં આવે છે તેને પ્રામાણ્ય વક્ર કહેવામાં આવે છે.
- પ્રામાણ્ય વક્ર સંપૂર્ણ ઘંટાકાર હોય છે અને તેની વિષમતા શૂન્ય હોય છે.
- પ્રામાણ્ય ચલ X નો મધ્યક μ અને પ્રમાણિત વિચલન σ હોય, તો $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ ને પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ કહેવામાં આવે છે.
- પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલનું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય એ શૂન્ય મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન 1 વાળું પ્રામાણ્ય વિતરણ છે.
- પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ Z ની નિરિક્ષિત કિંમતને પ્રમાણિત પ્રાપ્તાંક અથવા Z પ્રાપ્તાંક તરીકે ઓળખવામાં આવે છે અને તે માપના એકમથી મુક્ત હોય છે.
- પ્રામાણ્ય વિતરણને $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ વડે પણ વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે જ્યાં μ અને σ તેનાં પ્રાચલો છે, જે અનુક્રમે મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન દર્શાવે છે.
- સંભાવનાને ટકાવારીમાં દર્શાવવા માટે મેળવેલ સંભાવનાને 100 વડે ગુણવામાં આવે છે.
- અવલોકનોની અપેક્ષિત સંખ્યા મેળવવા માટે મેળવેલ સંભાવનાને કુલ અવલોકનોની સંખ્યા (N) વડે ગુણવામાં આવે છે.

સૂત્રોની યાદી :

જો પ્રામાણ્ય ચલ X નો મધ્યક μ અને પ્રમાણિત વિચલન σ હોય, તો

(1) પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

(2) મધ્યક = મધ્યસ્થ = બહુલક = $\frac{Q_3+Q_1}{2}$

(3) પ્રથમ ચતુર્થકની અંદાજિત કિંમત $Q_1 = \mu - 0.675\,\sigma$

(4) ત્રીજા ચતુર્થકની અંદાજિત કિંમત $Q_3 = \mu + 0.675\,\sigma$

(5) વિતરણનું ચતુર્થક વિચલન = $\frac{2}{3}\ \sigma$ (લગભગ)

(6) વિતરણનું સરેરાશ વિચલન = $\frac{4}{5}\ \sigma$ (લગભગ)

સ્વાધ્યાય 3

વિભાગ A

નીચે આપેલ બહુવિકલ્પ પ્રશ્નો માટે સાચા વિકલ્પની પસંદગી કરો :

1. નીચેના પૈકી μ મધ્યક σ પ્રમાણિત વિચલનવાળા પ્રામાણ્ય ચલ X નું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય કયું છે ?

(a) $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}$; $-\infty<x<\infty$ (b) $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$; $-\infty<x<\infty$

(c) $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$; $-\infty<x<\infty$ (d) $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$; $0\le x<\infty$

2. એક પ્રામાણ્ય ચલ X કે જેનો મધ્યક μ અને પ્રમાણિત વિચલન σ છે, તો તેના માટે પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ Z નીચેના પૈકી કયો થશે ?

(a) $Z=\frac{x-\sigma}{\mu}$ (b) $Z=\frac{\sigma-x}{\mu}$ (c) $Z=\frac{\mu-x}{\sigma}$ (d) $Z=\frac{x-\mu}{\sigma}$

3. પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલનું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય નીચેના પૈકી કયું છે ?

(a) $f(z)=e^{-\frac{1}{2}z^2}$; $-\infty<z<\infty$ (b) $f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}$ $-\infty<z<\infty$

(c) $f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}$; $0<z<\infty$ (d) $f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2}$ $-\infty<z<\infty$

4. પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના મધ્યક અને વિચરણ નીચેનાં પૈકી કયા છે ?

(a) મધ્યક = 0, વિચરણ = 1 (b) મધ્યક = 1, વિચરણ = 0

(c) મધ્યક = 0, વિચરણ = 0 (d) મધ્યક = 1, વિચરણ = 1

5. પ્રામાણ્ય વક્ર હેઠળનું કુલ ક્ષેત્રફળ નીચેના પૈકી કયું હોય છે ?

(a) –1 (b) 0 (c) 1 (d) 0.5

6. પ્રામાણ્ય વક્રમાં μ થી જમણી બાજુના પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ કેટલું હોય છે ?

(a) 0 (b) 0.5 (c) 1 (d) –0.5

7. પ્રામાણ્ય વિતરણનાં 99 % અવલોકનો સામાન્ય રીતે નીચેના પૈકી કઈ સીમામાં હોય છે ?

(a) $\mu\pm1.96\sigma$ (b) $\mu\pm2\sigma$ (c) $\mu\pm3\sigma$ (d) $\mu\pm2.575\sigma$

8. પ્રામાણ્ય વિતરણમાં સામાન્ય રીતે કેટલા ટકા અવલોકનો $\mu\pm\sigma$ ની સીમામાં હોય છે ?

(a) 34.13 % (b) 95.45 % (c) 68.26 % (d) 50 %

9. પ્રામાણ્ય ચલ માટે સરેરાશ વિચલનની લગભગ કિંમત નીચેના પૈકી કઈ છે ?

(a) $\frac{4}{5}\sigma$ (b) $\frac{4}{5}\mu$ (c) $\frac{2}{3}\sigma$ (d) $\frac{2}{3}\mu$

10. પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ માટે ચતુર્થક વિચલનની લગભગ કિંમત નીચેના પૈકી કઈ છે ?

(a) $\frac{2}{3}\sigma$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{4}{5}\sigma$ (d) $\frac{4}{5}$

11. પ્રામાણ્ય વિતરણ માટે મધ્યક અને પ્રથમ ચતુર્થક અનુક્રમે 11 અને 3 છે, તો ત્રીજા ચતુર્થકની કિંમત નીચેના પૈકી કઈ હશે ?

(a) 8 (b) 14 (c) 19 (d) 10

12. એક પ્રામાણ્ય વિતરણ માટે સરેરાશ વિચલનની અંદાજિત કિંમત 20 છે, તો તે વિતરણની ચતુર્થક વિચલનની કિંમત નીચેના પૈકી કઈ હશે ?

(a) $\frac{25}{3}$ (b) $\frac{32}{3}$ (c) 24 (d) $\frac{50}{3}$

13. પ્રામાણ્ય વિતરણના પ્રચલિત સંકેતોમાં જો $x = 25$, $\mu = 20$ અને $\sigma = 5$ હોય, તો પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય પ્રાપ્તાંકની કિંમત નીચેના પૈકી કઈ હશે ?

(a) 1 (b) –1 (c) 4 (d) $\frac{10}{3}$

14. એક પ્રામાણ્ય ચલ X નો મધ્યક 50 છે. જો $x = 25$ માટે Z–પ્રાપ્તાંકની કિંમત –2.5 હોય, તો વિતરણના વિચરણની કિંમત નીચેના પૈકી કઈ હશે ?

(a) 10 (b) 100 (c) 50 (d) 25

15. એક પ્રામાણ્ય ચલનું વિતરણ $N(20, 4)$ વડે દર્શાવવામાં આવ્યું છે, તો તેનાં 99.73 % અવલોકનો નીચેના પૈકી કઈ અંતરાલમાં હશે ?

(a) (18, 22) (b) (16, 24) (c) (14, 26) (d) (12, 28)

વિભાગ B

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ એક વાક્યમાં લખો :

1. પ્રામાણ્ય ચલના ઘટત્વ વિધેયમાં વપરાતા અચળાંકોનાં મૂલ્યો જણાવો.

2. સતત યાદચ્છિક ચલ કોઈ એક નિશ્ચિત કિંમત ધારણ કરે તેની સંભાવના કેટલી ?

3. પ્રામાણ્ય વક્રનો આકાર કેવો હોય છે ?

4. પ્રામાણ્ય વિતરણની વિષમતા કેટલી હોય છે ?

5. 'પ્રમાણિત પ્રાપ્તાંક માપના એકમથી મુક્ત હોય છે.' આ વિધાન સાચું કે ખોટું ?

6. પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય વક્ર એ પ્રમાણિત પ્રમાણ્ય ચલની કઈ કિંમતની બંને બાજુએ સંમિત હોય છે ?

7. પ્રામાણ્ય વક્રમાં પ્રામાણ્ય ચલની કઈ કિંમત માટેની શિરોલંબ રેખા પ્રામાણ્ય વક્રનાં ક્ષેત્રફળના બે સમાન ભાગ કરે છે ?

8. પ્રામાણ્ય વક્રમાં $\mu - 2\sigma$ અને $\mu + 2\sigma$ વચ્ચે આવતા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ કેટલા ટકા થાય ?

9. એક પ્રામાણ્ય વિતરણનો મધ્યક 13.25 અને તેનું પ્રમાણિત વિચલન 10 હોય, તો તેના તૃતીય ચતુર્થકની અંદાજિત કિંમત શોધો.

10. 10 મધ્યક અને 6 પ્રમાણિત વિચલનવાળા પ્રામાણ્ય વિતરણ માટે ચતુર્થક વિચલનની લગભગ કિંમત શોધો.

11. એક પ્રામાણ્ય વિતરણ માટે સરેરાશ વિચલનની લગભગ કિંમત 8 હોય, તો તે વિતરણનું પ્રમાણિત વિચલન મેળવો.

12. એક પ્રામાણ્ય વિતરણ માટે ચતુર્થક વિચલનની અંદાજિત કિંમત 12 હોય, તો તેના પ્રમાણિત વિચલનની કિંમત શોધો.

13. પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના સંભાવના વિતરણનાં મધ્યનાં 50 % અવલોકનોની કિંમતની અંદાજિત સીમાઓ લખો.

14. એક પ્રામાણ્ય વિતરણના અંતિમ ચતુર્થકો 20 અને 30 હોય, તો તેના મધ્યકની કિંમત મેળવો.

15. વ્યક્તિઓના એક સમૂહમાં વ્યક્તિઓનો માસિક ખર્ચ પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે. જો સરેરાશ ખર્ચ ₹ 10,000 અને પ્રમાણિત વિચલન ₹ 1000 હોય, તો યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ વ્યક્તિનો માસિક ખર્ચ ₹ 11,000 થી વધુ હોવા માટે કોઈ એક વિદ્યાર્થી તે માટે Z-પ્રાપ્તાંક = ₹ 1 મેળવે છે, તો શું Z-પ્રાપ્તાંકની આ ગણતરી સાચી છે ? કારણ આપો.

16. એક સમૂહના વ્યક્તિઓની ઉંમર, મધ્યક 45 વર્ષ અને પ્રમાણિત વિચલન 10 વર્ષ હોય તેવા પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે. યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ વ્યક્તિની ઉંમર 60 વર્ષ હોય તો તે માટે Z-પ્રાપ્તાંકની ગણતરી કરો.

17. એક શાળાના વિદ્યાર્થીઓએ અર્થશાસ્ત્ર વિષયમાં મેળવેલ ગુણનું વિતરણ μ મધ્યક અને σ પ્રમાણિત વિચલનવાળું પ્રામાણ્ય વિતરણ છે. યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલા વિદ્યાર્થીના ગુણ 60 હોય તે માટેનો પ્રમાણિત પ્રાપ્તાંકની કિંમત 1 છે. જો ચલનું વિચરણ 100 (ગુણ)^2 હોય, તો સરેરાશ ગુણ શોધો.

વિભાગ C

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. સતત ચલના સંભાવના ઘટત્વ વિધેયની વ્યાખ્યા આપો.
2. સતત ચલના સંભાવના ઘટત્વ વિધેયની શરતો જણાવો.
3. પ્રામાણ્ય વક્ર કઈ રીતે મેળવવામાં આવે છે ?
4. પ્રામાણ્ય ચલનું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય વ્યાખ્યાયિત કરો.
5. પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય વક્રનો આકાર કેવો હોય છે અને તે ચલની કઈ કિંમતની સાપેક્ષમાં સંમિત હોય છે ?
6. પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલની વ્યાખ્યા આપી તેનું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય લખો.
7. પ્રામાણ્ય ચલ X નું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય

$$f(x) = \text{અચળ} \times e^{-\frac{1}{50}(x-10)^2} \; ; \; -\infty < x < \infty$$

છે તો આ માહિતી પરથી પ્રથમ ચતુર્થક મેળવો.

8. એક પ્રામાણ્ય ચલના અંતિમ ચતુર્થકો 10 અને 30 છે, તો તેનું સરેરાશ વિચલન મેળવો.
9. એક પ્રામાણ્ય ચલ માટે સરેરાશ વિચલન 48 છે તેમજ તેનો તૃતીય ચતુર્થક 120 છે, તો તેના પ્રથમ ચતુર્થકનો અંદાજ મેળવો.
10. એક પ્રામાણ્ય ચલ X માટે સંભાવના ઘટત્વ વિધેય નીચે પ્રમાણે છે :

$$f(x) = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} \; e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-100}{10}\right)^2} \; ; \; -\infty < x < \infty$$

આ વિતરણ માટે મધ્યના 68.26 % અવલોકનો ધરાવતી સીમાઓનો અંદાજ મેળવો.

11. પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલની કિંમત 0 અને Z-પ્રાપ્તાંક (z_1) ની વચ્ચે હોવાની સંભાવના 0.4950 હોય, તો Z-પ્રાપ્તાંકની શક્ય કિંમતો શોધો.

વિભાગ D

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. પ્રામાણ્ય વિતરણની વ્યાખ્યા આપો તેમજ પ્રામાણ્ય વક્રનાં લક્ષણો જણાવો.

2. પ્રામાણ્ય વિતરણના ગુણધર્મો જણાવો.

3. પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય વિતરણના ગુણધર્મો જણાવો.

4. એક પ્રામાણ્ય વિતરણનો મધ્યક 50 અને વિચરણ 9 છે તો

(1) પ્રામાણ્ય ચલ X ની કિંમત 50 અને 53 ની વચ્ચે હોવાની તેમજ

(2) પ્રામાણ્ય ચલ X ની કિંમત 47 અને 53 ની વચ્ચે હોવાની સંભાવના મેળવો.

5. જો ચલ X એ 100 મધ્યક અને 15 પ્રમાણિત વિચલનવાળો પ્રામાણ્ય ચલ હોય તો

(1) વિતરણમાં કેટલા ટકા અવલોકનોની કિંમત 85 થી વધુ હશે ?

(2) વિતરણમાં કેટલા ટકા અવલોકનોની કિંમત 130 થી ઓછી હશે ?

6. શહેરના એક વિસ્તારમાંથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ 500 પુખ્ત વયની વ્યક્તિઓનું વજન પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે. આ વ્યક્તિઓનું સરેરાશ વજન 55 કિગ્રા અને પ્રમાણિત વિચલન 7 કિગ્રા છે.

(1) તે વિસ્તારમાં 41 કિગ્રા અને 62 કિગ્રાની વચ્ચે વજન ધરાવતા વ્યક્તિઓની સંખ્યાનું અનુમાન કરો.

(2) તે વિસ્તારમાં 41 કિગ્રાથી ઓછું વજન ધરાવતી વ્યક્તિઓની સંખ્યાનું અનુમાન કરો.

7. જો પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ Z માટે મળતી સંભાવનાઓ નીચે પ્રમાણે હોય, તો Z-પ્રાપ્તાંક (z_1) ની અંદાજિત કિંમતો મેળવો :

(1) $Z = z_1$ ની ડાબી બાજુનું ક્ષેત્રફળ 0.9928 છે.

(2) $Z = z_1$ ની જમણી બાજુનું ક્ષેત્રફળ 0.0250 છે.

8. જો Z એ પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ હોય, તો નીચેની શરતોનું સમાધાન થાય તે રીતે Z-પ્રાપ્તાંક (z_1) ની કિંમતોનું અનુમાન મેળવો.

(1) $Z = z_1$ ની ડાબી બાજુનું ક્ષેત્રફળ 0.15 છે.

(2) $Z = z_1$ ની જમણી બાજુનું ક્ષેત્રફળ 0.75 છે.

9. જો Z એ પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ હોય અને z_1 એ Z-પ્રાપ્તાંક દર્શાવતો હોય, તો નીચેની શરતોનું સમાધાન કરે તે રીતે z_1 ની કિંમતોનો અંદાજ મેળવો :

(1) $P(-2 \le Z \le z_1) = 0.2857$ (2) $P(z_1 \le Z \le 1.75) = 0.10$

10. એક કારખાનામાં માસિક ઉત્પાદન એ સરેરાશ μ એકમ અને પ્રમાણિત વિચલન σ એકમ હોય તેવા પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે. ઉત્પાદન 2400 એકમ અને 1800 એકમ હોય તે માટેના Z-પ્રાપ્તાંકો અનુક્રમે 1 અને –0.5 છે, તો વિતરણના મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

11. એક પ્રામાણ્ય ચલ X સંભાવના ઘટત્વ વિધેય નીચે પ્રમાણે છે :

$$f(x) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{72}(x-100)^2} \; ; \quad -\infty < x < \infty$$

આ વિતરણ માટે બરાબર મધ્યનાં 50 % અવલોકનોની અનુમાનિત સીમાઓ મેળવો.

12. એક પ્રામાણ્ય વિતરણ માટે પ્રથમ ચતુર્થક 35 અને ત્રીજો ચતુર્થક 65 મળે છે, તો તે વિતરણના બરાબર મધ્યના 95.45 % પ્રાપ્તાંકોને સમાવતી સીમાઓનું અનુમાન મેળવો.

13. એક પ્રામાણ્ય વિતરણ માટે તૃતીય ચતુર્થક અને સરેરાશ વિચલન અનુક્રમે 36 અને 24 છે, તો તે વિતરણનો મધ્યક શોધો.

14. એક પ્રામાણ્ય ચલ Xનો મધ્યક 200 અને વિચરણ 100 છે, તો

(1) અંતિમ ચતુર્થકોની અંદાજિત કિંમત મેળવો.

(2) ચતુર્થક વિચલનની લગભગ કિંમત મેળવો.

(3) સરેરાશ વિચલનની લગભગ કિંમત મેળવો.

વિભાગ E

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. શહેરના એક મોલમાં ગ્રાહકે કરેલ ખરીદીની રકમ પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે અને તેની સરેરાશ ₹ 800 છે. જ્યારે પ્રમાણિત વિચલન ₹ 200 છે. જો યાદચ્છિક રીતે કોઈ એક ગ્રાહક પસંદ કરવામાં આવે, તો નીચેની ઘટનાઓની સંભાવનાઓ મેળવો :

(1) તેણે કરેલ ખરીદીની રકમ ₹ 850 અને ₹ 1200ની વચ્ચે હોય.

(2) તેણે કરેલ ખરીદીની રકમ ₹ 600 અને ₹ 750ની વચ્ચે હોય.

2. એક વિસ્તારમાં રહેતાં 20 વર્ષ અને 26 વર્ષ સુધીની વય ધરાવતા 500 વ્યક્તિઓનું સરેરાશ વજન 55 કિલો અને વિચરણ 100 (કિગ્રા)^2 છે. આ વ્યક્તિઓનું વજન પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે. આમાંથી અમુક વ્યક્તિઓને નીચે જણાવ્યા પ્રમાણેના સમૂહમાં મૂકવામાં આવે છે :

(1) 70 કિલોથી વધુ વજન ધરાવતા વ્યક્તિઓને મેદસ્વી વ્યક્તિઓના સમૂહમાં મૂકવામાં આવે છે.

(2) 50 કિલો અને 60 કિલો વજન ધરાવતા વ્યક્તિઓને સ્વસ્થ વ્યક્તિઓના સમૂહમાં મૂકવામાં આવે છે.

(3) 35 કિલોથી ઓછું વજન ધરાવતા વ્યક્તિઓને શારીરિક રીતે નબળા વ્યક્તિઓના સમૂહમાં મૂકવામાં આવે છે.

આ માહિતી પરથી જે તે વિસ્તારમાં મેદસ્વી, સ્વસ્થ અને શારીરિક રીતે નબળી વ્યક્તિઓની સંખ્યાનું અનુમાન કરો.

3. યુનિવર્સિટીની એક હોસ્ટેલમાં રહેતા વિદ્યાર્થીઓનું સરેરાશ માસિક ખર્ચ ₹ 2000 છે અને તેનું પ્રમાણિત વિચલન ₹ 500 છે. જો વિદ્યાર્થીઓના સરેરાશ માસિક ખર્ચનું વિતરણ પ્રામાણ્ય હોય, તો

(1) ₹ 750 અને ₹ 1250 ની વચ્ચે ખર્ચ કરતા વિદ્યાર્થીઓની ટકાવારી શોધો.

(2) ₹ 1800થી વધુ ખર્ચ કરતા વિદ્યાર્થીઓની ટકાવારી શોધો.

(3) ₹ 2400થી ઓછું ખર્ચ કરતા વિદ્યાર્થીઓની ટકાવારી શોધો.

4. એક ઉત્પાદન એકમમાં કામ કરતા કામદારોનું સરેરાશ માસિક વેતન ₹ 10,000 છે અને તેનું પ્રમાણિત વિચલન ₹ 2000 છે. કારીગરોનું સરેરાશ માસિક વેતન પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે તેમ ધારીને સૌથી ઓછું વેતન

ધરાવતા 20 % કામદારોનું મહત્તમ વેતન અને સૌથી વધુ વેતન ધરાવતા 10 % કામદારોનું લઘુતમ વેતનનું અનુમાન કરો.

5. એક પ્રામાણ્ય વિતરણનો મધ્યક 52 અને વિચરણ 64 છે, તો બરાબર મધ્યનાં 25 % અવલોકનોને સમાવતી સીમાઓનો અંદાજ મેળવો.

6. ઇલેક્ટ્રૉનિક્સ ઉપકરણોના એક મોટા શોરૂમમાં દર અઠવાડિયે સરેરાશ 52 ઉપકરણો વેચાય છે અને તેનું વિચરણ 9 (એકમ)^2 છે. ઇલેક્ટ્રૉનિક્સ ઉપકરણોનું વેચાણ પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે તેમ ધારવામાં આવે છે. 50 અઠવાડિયાંમાંથી કોઈ એક અઠવાડિયા દરમિયાન ઉપકરણોનું વેચાણ x_1 એકમ અને 61 એકમની વચ્ચે થયું હોય તેની સંભાવના 0.1574 છે. તો x_1 ની કિંમત અંદાજો. તેમજ કેટલાં અઠવાડિયાં દરમિયાન ઉપકરણોનું વેચાણ 55 એકમથી વધુ હશે તેનો અંદાજ મેળવો.

7. પેન્ટિંગના પ્રદર્શનમાં દાખલ થયેલ વ્યક્તિ સરેરાશ 61 મિનિટનો સમય ગાળે છે. જો આ સમય પ્રામાણ્ય રીતે વિતરીત હોય અને 20 % વ્યક્તિઓ પ્રદર્શનમાં 30 મિનિટથી ઓછો સમય ગાળતા હોય, તો વિતરણનું વિચરણ મેળવો તેમજ કોઈ વ્યક્તિ 90 મિનિટથી વધુ સમય પ્રદર્શનમાં ગાળે તેની સંભાવના પણ મેળવો.

8. પાઇપ બનાવતી એક ઉત્પાદક કંપનીમાં ઉત્પાદિત થતી પાઇપનો વ્યાસ 20 મિમિથી 22 મિમિનો હોય, તો તે કોઈ એક ચોક્કસ સમૂહના ગ્રાહક દ્વારા સ્વીકાર્ય હોય છે. ઉત્પાદિત થતી પાઇપનાં વ્યાસનું પ્રમાણિત વિચલન 4 મિમિ છે અને ઉત્પાદિત થતી 70 % પાઇપનો વ્યાસ 19.05 મિમિથી વધુ હોય તો ઉત્પાદિત થતી પાઇપના વ્યાસનો મધ્યક શોધો તેમજ કંપની દ્વારા ઉત્પાદિત થયેલ પાઇપનો ચોક્કસ સમૂહના ગ્રાહક દ્વારા અસ્વીકાર્ય પાઇપની ટકાવારી પણ શોધો

નોંધ : અહીં ઉત્પાદિત થતી પાઇપનો વ્યાસ પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે.

9. એક પ્રામાણ્ય ચલ X નો મધ્યક 400 અને વિચરણ 900 મળે છે, તો આ વિતરણ માટે ચોથો દશાંશક અને 90મો શતાંશક શોધી તેનું અર્થઘટન કરો.

10. એક પ્રામાણ્ય ચલ Xનું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય નીચે મુજબ છે :

$$f(x) = \frac{1}{50\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-150}{50}\right)^2} \; ; \; -\infty < x < \infty$$

આ વિતરણ માટે

(i) $P(x_1 \le x \le 250) = 0.4772$ હોય તો x_1 ની કિંમત અંદાજો.

(ii) $P(75 \le x \le x_2) = 0.3539$ હોય તો x_2 ની કિંમત અંદાજો.

વિભાગ F

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. 500 બાળકોની એક બૌદ્ધિક કસોટી લેતા તેમના સરેરાશ ગુણ 68 અને પ્રમાણિત વિચલન 22 મળે છે. જો બાળકોએ મેળવેલ ગુણ પ્રામાણ્ય રીતે વિતરીત હોય તો (1) 68 થી વધુ ગુણ મેળવતાં બાળકોની સંખ્યા શોધો (2) 70 અને 90 ની વચ્ચે ગુણ મેળવતાં બાળકોની ટકાવારી શોધો. (3) સૌથી વધુ ગુણ મેળવતાં 50 બાળકોના ઓછામાં ઓછા ગુણ શોધો.

2. એક ખાનગી કંપનીમાં કામ કરતા 500 કર્મચારીઓની ઉંમરનું વિતરણ પ્રામાણ્ય છે. તેનો મધ્યક 40 વર્ષ અને પ્રમાણિત વિચલન 6 વર્ષ છે. આ કંપની નીચે દર્શાવેલ ધોરણ પ્રમાણે 25 % કર્મચારીઓની છટણી કરવા માંગે છે.

(i) સૌથી ઓછી ઉંમર ધરાવતા 5 % કર્મચારીઓને છૂટા કરવા.

(ii) ઓછી ઉંમરના 5 % કર્મચારીઓને છૂટા કર્યા અને 10 % ઓછી ઉંમર ધરાવતા કર્મચારીઓને અન્ય કંપનીમાં બદલી આપવી.

(iii) સૌથી વધુ ઉંમર ધરાવતા 10 % કર્મચારીઓને નિવૃત્તિ આપવી.

આ માહિતી પરથી છૂટા થતા કર્મચારી, અન્ય કંપનીમાં બદલી લેતા કર્મચારી અને નિવૃત્ત થતા કર્મચારીઓની લગભગ ઉંમર શોધો.

3. ઉચ્ચતર અભ્યાસમાં પ્રવેશ માટે 200 ગુણની પરીક્ષા લેવામાં આવે છે. આ પરીક્ષામાં હાજર રહેલ 20,000 વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલ ગુણ પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે અને તેનો મધ્યક 120 ગુણ અને પ્રમાણિત વિચલન 20 ગુણ છે. પરિણામનાં ધારાધોરણ નીચે મુજબ છે :

(a) 40 ટકાથી ઓછા ગુણ મેળવતા વિદ્યાર્થીઓ નાપાસ થાય છે.

(b) 40 ટકાથી 48 ટકા ગુણ મેળવતા વિદ્યાર્થીઓની બીજી એક 100 ગુણની પરીક્ષા લેવામાં આવે છે.

(c) 48 ટકાથી 75 ટકા ગુણ મેળવતા વિદ્યાર્થીઓને પર્સનલ ઇન્ટરવ્યૂ માટે બોલાવવામાં આવે છે.

(d) 75 ટકાથી વધુ ગુણ મેળવતા વિદ્યાર્થીઓને ઉચ્ચતર અભ્યાસમાં સીધો પ્રવેશ આપવામાં આવે છે.

તો (1) નાપાસ થતા (2) 100 ગુણની પરીક્ષા આપતા (3) પર્સનલ ઇન્ટરવ્યૂમાં આવતા અને (4) ઉચ્ચતર અભ્યાસમાં પ્રવેશ મેળવતા વિદ્યાર્થીઓની લગભગ સંખ્યા શોધો.

4. એક સમૂહના વ્યક્તિઓનું માસિક આવકનું વિતરણ પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે અને તેમનો મધ્યક ₹ 20,000 અને પ્રમાણિત વિચલન ₹ 5000 છે. જો સૌથી વધુ માસિક આવક ધરાવતા 50 વ્યક્તિઓની ઓછામાં ઓછી માસિક આવક ₹ 31,625 હોય, તો સમૂહમાં કુલ કેટલી વ્યક્તિઓ હશે ? તેમજ સમૂહમાં સૌથી ઓછી આવક ધરાવતા 50 વ્યક્તિઓની વધુમાં વધુ આવક કેટલી હશે ? (ગણતરીમાં દશાંશચિહ્ન પછી બે આંકડાઓનો ઉપયોગ કરો.)

5. એક શાળાના ધોરણ 12નાં પરિણામનું વિશ્લેષણ નીચે પ્રમાણે છે :

વિશિષ્ટ ગુણવત્તા સાથે પાસ	:	કુલ વિદ્યાર્થીના 15 %
વિશિષ્ટ ગુણવત્તા વગર પાસ	:	કુલ વિદ્યાર્થીના 75 %
નાપાસ	:	કુલ વિદ્યાર્થીના 10 %

પાસ થવા માટે ઓછામાં ઓછા 40 % ગુણ અને વિશિષ્ટ ગુણવત્તા માટે ઓછામાં ઓછા 80 % ગુણ જરૂરી છે. જો વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલ પરિણામની ટકાવારી પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરતી હોય તો માહિતીનો મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન મેળવો અને તેના ઉપયોગ કરીને 75 % વિદ્યાર્થીઓનાં પરિણામ કેટલા ટકાથી ઓછાં હશે તે શોધો.

6. એક પ્રોવિઝન સ્ટોર્સના કાયમી ગ્રાહકોના માસિક બિલની રકમ પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે. જો 7.78 % કાયમી ગ્રાહકોનું માસિક બિલ ₹ 3590 થી ઓછું હોય અને 94.52 % ગ્રાહકોના માસિક બિલની રકમ ₹ 5100 થી ઓછી હોય, તો પ્રામાણ્ય વિતરણના પ્રાચલો શોધો. તેમજ બરાબર મધ્યના 95 % ગ્રાહકોના માસિક બિલની રકમનો અંતરાલ શોધો.

7. પ્રામાણ્ય ચલ Xનું સંભાવના વિધેય નીચે પ્રમાણે છે :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5000\pi}}\, e^{-\frac{1}{5000}(x-75)^2} \quad ; \quad -\infty < x < \infty$$

આ પરથી નીચેની કિંમતો મેળવો :

(i) $P(60 \le x \le x_2) = 0.5670$ હોય, તો x_2 ની મેળવો.

(ii) $P(x_1 \le x \le 125) = 0.3979$ હોય, તો x_1 મેળવો.

(iii) $P(|x-50| \le 10)$ ની કિંમત મેળવો.

8. એક પ્રામાણ્ય ચલ Xનું સંભાવના વિધેય નીચે પ્રમાણે છે :

$$f(x) = \text{અચળ} \cdot e^{-\frac{1}{200}(x-50)^2} \quad ; \quad -\infty < x < \infty$$

આ વિતરણ પરથી નીચેના પ્રશ્નોનાં જવાબ લખો :

(1) મધ્યસ્થની કિંમત શોધો.

(2) અંતિમ ચતુર્થકની અનુમાનિત કિંમત શોધો.

(3) ચતુર્થક વિચલનની લગભગ કિંમત મેળવો.

(4) સરેરાશ વિચલનની લગભગ કિંમત મેળવો.

Johann Carl Friedrich Gauss
(1777 – 1855)

Carl Friedrich Gauss was a German mathematician who contributed significantly to many fields, including number theory, algebra, statistics, analysis, differential geometry, geodesy, geophysics, mechanics, electrostatics astronomy, matrix theory, and optics. He was referred to as the Princeps mathematicorum. (Latin, "the foremost of mathematicians") and "greatest mathematician since antiquity". Gauss had an exceptional influence in many fields of mathematics and science and has several theories and results in his name.

In the area of probability and statistics, Gauss introduced what is now known as Gaussian or normal distribution, the Gaussian function and the Gaussian error curve. He showed how probability could be represented by a bell shaped or "normal" curve, which peaks around the mean or expected value and quickly falls off towards plus/minus infinity, which is basic to descriptions of statistically distributed data.

4

લક્ષ

(Limit)

વિષયવસ્તુ :

4.1 પ્રાસ્તાવિક

આપણે ધોરણ 11માં વિધેયનો અભ્યાસ કર્યો. એ પ્રકરણમાં આપણે જોયું કે જ્યારે વિધેયમાં ચલની કોઈ ચોક્કસ કિંમત મૂકવામાં આવે ત્યારે તેને અનુરૂપ વિધેયની કોઈ એક કિંમત મળે છે. દાખલા તરીકે, જો વિધેય $f(x) = 2x + 3$ માં $x = 2$ મૂકીએ, તો આપણને $f(2) = 7$ મળે અને જો વિધેય $f(x) = \frac{3-x}{3x+2}$ માં $x = 1$ મૂકીએ તો $f(1) = \frac{2}{5}$ મળે. પણ આ દરેક વિધેય અને ચલની બધી જ કિંમતો માટે શક્ય નથી. ધારો કે આપણે $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ વિધેય લઈએ અને તેમાં $x = 3$ મૂકીએ તો $f(3) = \frac{0}{0}$ મળે જે અનિયત (indeterminate) કિંમત છે. વિધેયની $f(3)$ ની આસાદિત (approximate) કિંમત મેળવવા માટે આપણે વિધેયના લક્ષનો ખ્યાલ મેળવવો જરૂરી છે. આમ, જ્યારે વિધેયની કોઈ કિંમત અનિયત હોય ત્યારે લક્ષનો ઉપયોગ કરી વિધેયની તે કિંમતની આસાદિત કિંમત મેળવી શકાય છે.

ઉપર્યુક્ત ખ્યાલ સમજવા માટે આપણે નીચેનું ઉદાહરણ લઈએ :

ધારો કે આપણે ઇન્ટરનેટ પર ફૂટબૉલની મૅચ જોતા હોઈએ અને કમનસીબે, ઇન્ટરનેટના જોડાણમાં ખલેલ થાય અને આપણે 14:00મી મિનિટે (મૅચ શરૂ થયાના 14 મિનિટ પછી) શું થયું તે ચૂકી ગયાં.

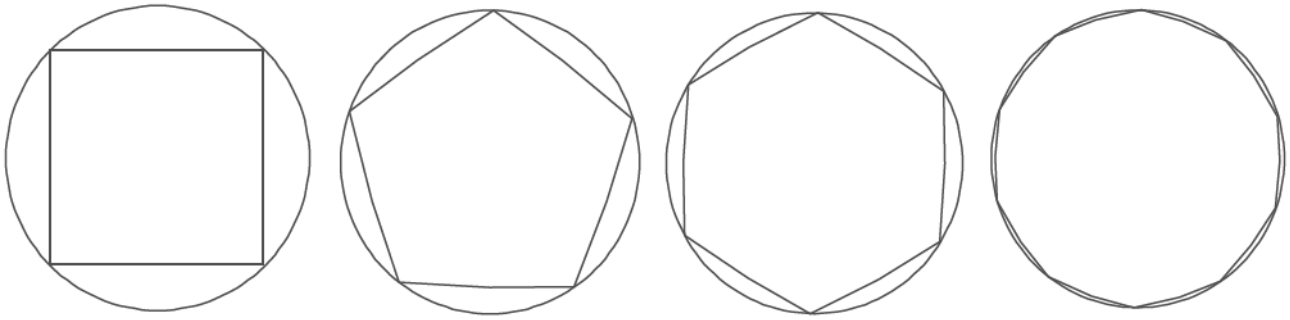
મૅચ શરૂ થયાની 14:00 મિનિટે દડાનું સ્થાન શું હશે ? આપણે 13:58 (મૅચ શરૂ થયાને 13 મિનિટ અને 58 સેકન્ડે), 13:59, 14:01, 14:02 મિનિટે દડાનું સ્થાન જોઈ શકીએ છીએ.

આપણે 14:00 મિનિટની નજીકના સમય (13:59 અને 14:01) વખતે દડાના સ્થાન જોઈ 14:00થી મિનિટે દડાના સ્થાનનું અનુમાન કરીશું. આપણું અનુમાન છે કે '14:00 મિનિટે, દડાનું સ્થાન 13:59 અને 14:01 મિનિટે દડાના સ્થાનની વચ્ચે ક્યાંક હશે.' સ્લો-મોશન કૅમેરા વડે, આપણે એવું પણ કહી શકીએ '14:00 મિનિટે દડાનું સ્થાન 13:59.999 અને 14:00.001ના સ્થાનની વચ્ચે ક્યાંક હશે.' એનો અર્થ એવો થાય કે જ્યારે 14:00 મિનિટની નજીકમાં નજીકનો સમય લઈએ ત્યારે આપણી અંદાજિત કિંમતમાં સુધારો થાય છે. દડાના આસાદિત સ્થાનને દડાના મૂળ સ્થાનની અનુલક્ષિત કિંમત કહીં શકાય.

આમ, આપણે કહી શકીએ કે, 'લક્ષ એ વિશ્વસનીય આસાદિત કિંમત શોધવાની એક રીત છે.'

આપણે બીજું એક ઉદાહરણ લઈએ.

ધારો કે આપણે વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ શોધવાનું છે. વર્તુળના ક્ષેત્રફળની અંદાજિત કિંમત વર્તુળની અંદર દોરવામાં આવેલ બહુકોણના ક્ષેત્રફળથી મેળવી શકાય છે.



4 બાજુ 5 બાજુ 6 બાજુ 10 બાજુ

ઉપરની આકૃતિઓ પરથી જોઈ શકાય કે, જેમ બહુકોણની બાજુઓ વધતી જાય તેમ બહુકોણનું ક્ષેત્રફળ, વર્તુળના ક્ષેત્રફળની નજીક પહોંચે છે. બહુકોણના ક્ષેત્રફળની અનુલક્ષિત કિંમત એ વર્તુળના ક્ષેત્રફળની શ્રેષ્ઠ આસાદિત કિંમત છે.

આમ, અજ્ઞાત કિંમતોની આસપાસની કિંમતોને લઈ તેની આસાદિત કિંમત શોધવા માટે લક્ષનો ઉપયોગ કરી શકાય છે. આસપાસની કિંમતો જેટલી નજીક લઈએ તેટલું આસાદન વધુ સારું મળે છે.

લક્ષનો ખ્યાલ મેળવવા માટે, આપણે નીચેનાં કેટલાંક મૂળભૂત પદો સમજીએ :

4.2 વાસ્તવિક રેખા અને તેના અંતરાલ

વાસ્તવિક રેખા : જે રેખાનાં બિંદુઓ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય તેવી રેખાને વાસ્તવિક રેખા અથવા વાસ્તવિક સંખ્યા રેખા કહેવાય છે.

અંતરાલ : કોઈ પણ બે વાસ્તવિક સંખ્યાઓની વચ્ચેની વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ગણને અંતરાલ કહેવાય છે.

સંવૃત્ત અંતરાલ : જો $a \in R, b \in R$ અને $a < b$ ની સંખ્યાઓ a, b તથા a અને b વચ્ચેની તમામ વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ગણને સંવૃત્ત અંતરાલ કહેવાય છે. આ સંવૃત્ત અંતરાલને $[a, b]$ વડે દર્શાવાય છે.

$$[a, b] = \{x \mid a \le x \le b, \ x \in R\}$$

વિવૃત્ત અંતરાલ : જો $a \in R, b \in R$ અને $a < b$ તો a અને bને નહિ સમાવતી પરંતુ a અને bની વચ્ચેની તમામ વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ગણને વિવૃત્ત અંતરાલ કહેવાય છે. વિવૃત્ત અંતરાલને (a, b) વડે દર્શાવાય છે.

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b, \ x \in R\}$$

સંવૃત્ત-વિવૃત્ત અંતરાલ : જો $a \in R, b \in R$ અને $a < b$ તો aને સમાવતી પરંતુ bને નહિ સમાવતી તથા a અને b વચ્ચેની તમામ વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ગણને સંવૃત્ત-વિવૃત્ત અંતરાલ કહેવાય છે. તેને $[a, b)$ વડે દર્શાવાય છે.

$[a, b) = \{x \mid a \le x < b,\ x \in R\}$

વિવૃત્ત-સંવૃત્ત અંતરાલ : જો $a \in R, b \in R$ અને $a < b$ તો aને નહિ સમાવતી પરંતુ bને સમાવતી તથા a અને b વચ્ચેની તમામ વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ગણને વિવૃત્ત-સંવૃત્ત અંતરાલ કહેવાય છે. તેને $(a, b]$ વડે દર્શાવાય છે.

$(a, b] = \{x \mid a < x \le b,\ x \in R\}$

4.3 માનાંક

જો $x \in R$ હોય તો

$|x| = x$ જો $x \ge 0$

$= -x$ જો $x < 0$

વાસ્તવિક સંખ્યાનો માનાંક હંમેશાં અઋણ હોય છે.

દા.ત. $|3| = 3,\ |-4| = 4,\ |0| = 0$

$|x-a| < \delta$ (*Delta*) નો અર્થ

માનાંકની વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરીને

$|x-a| < \delta = (x-a) < \delta$ જો $x \ge a$ **અથવા** $x < a+\delta$ જો $x \ge a$

$= (a-x) < \delta$ જો $x < a$ **અથવા** $x > a-\delta$ જો $x < a$

$\therefore\ |x-a| < \delta \Leftrightarrow x \in (a-\delta,\ a+\delta)$

4.4 સામીપ્ય

ધારો કે $a \in R$ છે, તો aને સમાવતા વિવૃત્ત અંતરાલને aનું **સામીપ્ય** કહેવાય છે.

aનું δ સામીપ્ય :

જો $a \in R$ અને δ એ અઋણ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય, તો વિવૃત્ત અંતરાલ $(a-\delta,\ a+\delta)$ ને aનું δ સામીપ્ય કહેવાય છે. તેને $N(a, \delta)$ વડે દર્શાવાય છે.

અહીં, સમજી શકીએ કે

$N(a, \delta) = \{x \mid a-\delta < x < a+\delta,\ x \in R\}$

$= \{x \mid |x-a| < \delta,\ x \in R\}$

'aનું δ સામીપ્ય'ને નીચે મુજબ જુદી-જુદી રીતે દર્શાવી શકાય.

સામીપ્ય સ્વરૂપ	માનાંક સ્વરૂપ	અંતરાલ સ્વરૂપ
$N(a, \delta)$	$\lvert x-a\rvert < \delta$	$(a-\delta,\ a+\delta)$

ઉદાહરણ 1 : $N(5, 0.2)$ને માનાંક અને અંતરાલ સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

$N(5, 0.2)$ને $N(a, \delta)$ સાથે સરખાવતાં આપણને $a = 5$ અને $\delta = 0.2$ મળે.

માનાંક સ્વરૂપ : $|x-a| < \delta$

$a = 5$ અને $\delta = 0.2$ મૂકતાં,

$N(5, 0.2) = |x-5| < 0.2$

અંતરાલ સ્વરૂપ : $(a-\delta,\ a+\delta)$

$a = 5$ અને $\delta = 0.2$ મૂકતાં,

$N(5, 0.2) = (5-0.2,\ 5+0.2)$
$= (4.8,\ 5.2)$

ઉદાહરણ2 : 3નું 0.001 સામીપ્ય ને માનાંક અને અંતરાલ સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

3નું 0.001 સામીપ્યને a નું δ સામીપ્ય સાથે સરખાવતાં આપણને $a = 3$ અને $\delta = 0.001$ મળે.

માનાંક સ્વરૂપ : $|x-a| < \delta$

$a = 3$ અને $\delta = 0.001$ મૂકતાં,

3નું 0.001 સામીપ્ય $= |x-3| < 0.001$

અંતરાલ સ્વરૂપ : $(a-\delta,\ a+\delta)$

$a = 3$ અને $\delta = 0.001$ મૂકતાં,

3નું 0.001 સામીપ્ય $= (3-0.001,\ 3+0.001)$
$= (2.999,\ 3.001)$

ઉદાહરણ3 : $|x+1| < 0.5$ ને સામીપ્ય અને અંતરાલ સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

$|x+1| < 0.5$ ને $|x-a| < \delta$ સાથે સરખાવતાં આપણને $a = -1$ અને $\delta = 0.5$ મળે.

સામીપ્ય સ્વરૂપ : $N(a, \delta)$

$a = -1$ અને $\delta = 0.5$ મૂકતાં,

$|x+1| < 0.5 = N(-1, 0.5)$

અંતરાલ સ્વરૂપ : $(a-\delta,\ a+\delta)$

$a = -1$ અને $\delta = 0.5$ મૂકતાં,

$|x+1| < 0.5 = (-1-0.5,\ -1+0.5)$
$= (-1.5,\ -0.5)$

ઉદાહરણ4 : $(0.9, 1.1)$ ને સામીપ્ય અને માનાંક સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

$(0.9, 1.1)$ ને $(a-\delta,\ a+\delta)$ સાથે સરખાવતાં, આપણને $a-\delta = 0.9$ અને $a+\delta = 1.1$ મળે.

$a-\delta = 0.9$ અને $a+\delta = 1.1$ નો સરવાળો કરતાં, આપણને $2a = 2$ $\therefore a = 1$ મળે.

$a = 1$ ને $a+\delta = 1.1$ માં મૂકતાં, આપણને $\delta = 0.1$ મળે.

સામીપ્ય સ્વરૂપ : $N(a, \delta)$

$a = 1$ અને $\delta = 0.1$ મૂકતાં,

$(0.9, 1.1) = N(1, 0.1)$

માનાંક સ્વરૂપ : $|x-a| < \delta$

$a = 1$ અને $\delta = 0.1$ મૂકતાં,

$(0.9, 1.1) = |x-1| < 0.1$

a નું છિદ્રિત δ સામીપ્ય :

જો $a \in R$ અને δ એ અઋણ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય, તો વિવૃત્ત અંતરાલ $(a-\delta, a+\delta) - \{a\}$ ને a નું છિદ્રિત δ સામીપ્ય કહેવાય છે. તેને $N^*(a, \delta)$ વડે દર્શાવાય છે.

અહીં, સમજી શકીએ કે

$$N^*(a, \delta) = N(a, \delta) - \{a\}$$

$$= \{x \mid a-\delta < x < a+\delta,\ x \neq a,\ x \in R\}$$

$$= \{x \mid |x-a| < \delta,\ x \neq a,\ x \in R\}$$

દા.ત. $N^*(5, 2) = N(5, 2) - \{5\}$

$$= \{x \mid 3 < x < 7, x \neq 5,\ x \in R\}$$

$$= \{x \mid |x-5| < 2,\ x \neq 5,\ x \in R\}$$

સ્વાધ્યાય 4.1

1. નીચેનાને માનાંક અને અંતરાલ સ્વરૂપમાં દર્શાવો :

(1) 4નું 0.4 સામીપ્ય (2) 2નું 0.02 સામીપ્ય

(3) 0નું 0.05 સામીપ્ય (4) –1નું 0.001 સામીપ્ય

2. નીચેનાને અંતરાલ અને સામીપ્ય સ્વરૂપમાં દર્શાવો :

(1) $|x-2| < 0.01$ (2) $|x+5| < 0.1$

(3) $|x| < \frac{1}{3}$ (4) $|x+3| < 0.15$

3. નીચેનાને માનાંક અને સામીપ્ય સ્વરૂપમાં દર્શાવો :

(1) $3.8 < x < 4.8$ (2) $1.95 < x < 2.05$

(3) $-0.4 < x < 1.4$ (4) $1.998 < x < 2.002$

4. $N(16, 0.5)$ ને અંતરાલ અને માનાંક સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

5. જો $N(3, b) = (2.95, k)$ હોય, તો b અને k ની કિંમતો શોધો.

6. જો $|x-10| < k_1 = (k_2, 10.01)$ હોય, તો k_1 અને k_2 ની કિંમતો શોધો.

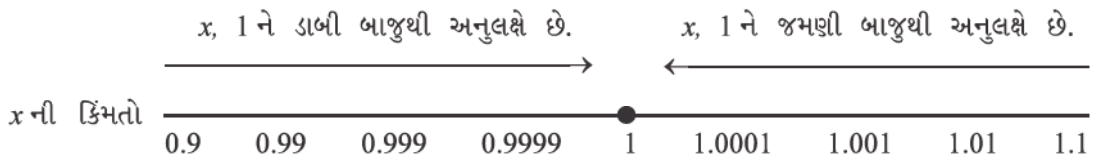
*

$x \to a$ નો અર્થ :

જો કોઈ ચલ xની કિંમત ઘટાડતાં કે વધારતાં કોઈ એક ચોક્કસ સંખ્યા 'a' ની ખૂબ જ નજીક લાવવામાં આવે, તો x, aને અનુલક્ષે છે એમ કહેવાય. તેને સંકેતમાં $x \to a$ વડે દર્શાવાય છે.

અહીં નોંધવું જરૂરી છે કે $x \to a$ એટલે કે xની કિંમતો aથી ખૂબ જ નજીક છે પણ $x = a$ નથી.

આપણે $x \to 1$ નો અર્થ સમજીએ.

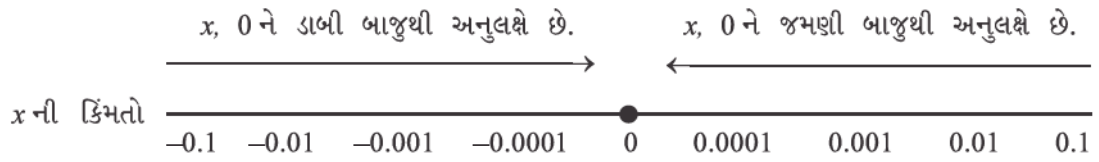


$x \to 0$ નો અર્થ :

જો કોઈ ચલ xની ધન કિંમતો ઘટાડતાં કે xની ઋણ કિંમતો વધારતા '0' ની ખૂબ જ નજીક લાવવામાં આવે, તો x, 0 (શૂન્ય)ને અનુલક્ષે છે એમ કહેવાય. તેને સંકેતમાં $x \to 0$ વડે દર્શાવાય છે.

અહીં નોંધવું જરૂરી છે કે $x \to 0$ એટલે કે xની કિંમતો '0' ની ખૂબ જ નજીક છે પણ $x = 0$ નથી.

આપણે $x \to 0$ નો અર્થ સમજીએ.



4.5 વિધેયનું લક્ષ

જો ચલ xની કિંમત કોઈ એક સંખ્યા 'a' ની વધુ ને વધુ નજીક લઈ જવામાં આવે ત્યારે વિધેય $f(x)$ની કિંમત કોઈ નિશ્ચિત સંખ્યા lની વધુ ને વધુ નજીક જાય તો એમ કહેવાય કે જ્યારે x, aને અનુલક્ષે છે ત્યારે $f(x)$ એ lને અનુલક્ષે છે એટલે કે $x \to a$, ત્યારે $f(x) \to l$. તેને સંકેતમાં $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ એમ દર્શાવાય. lને $f(x)$ની અનુલક્ષિત કિંમત કહેવાય છે.

વ્યાખ્યા : જો ગમે તેટલી નાની આપેલ પૂર્વ નિર્ધારિત સંખ્યા $\varepsilon > 0$ માટે આપણે એવી એક ધન સંખ્યા δ શોધી શકીએ કે જેથી જ્યારે $|x - a| < \delta$ હોય ત્યારે xની દરેક કિંમત માટે $|f(x) - l| < \varepsilon$ (*Epsilon*) થાય તો જ્યારે x, aને અનુલક્ષે ત્યારે વિધેય $f(x)$ લક્ષ l ધરાવે છે.

હવે આપણે વિધેયનું લક્ષ કેવી રીતે મેળવવું તે સમજીએ.

ધારો કે આપણે $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ ની $x = 1$ માટે કિંમત શોધવાની છે.

જો $x = 1$, $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ માં મૂકવામાં આવે, તો $f(1) = \frac{0}{0}$ મળે જે અનિયત કિંમત છે. તેથી આપણે $f(1)$ ની કિંમત શોધી શકતા નથી પણ xની 1 થી ખૂબ જ નજીકની કિંમત ધારવામાં આવે તો આપણે $f(1)$ ની આસાદિત કિંમત મેળવી શકીએ. જો x, 1 ને અનુલક્ષે તો $f(x)$ની કિંમતોમાં ફેરફાર જોઈએ.

x (1 ની ડાબી બાજુથી 1 તરફ)	$f(x)$	x (1 ની જમણી બાજુથી 1 તરફ)	$f(x)$
0.9	1.9	1.1	2.1
0.99	1.99	1.01	2.01
0.999	1.999	1.001	2.001
0.9999	1.9999	1.0001	2.0001
. . .	. . .	. . .	. . .

આપણે x ની 1 થી નજીકની કોઈ પણ કિંમત ધારી શકીએ છે. સામાન્ય રીતે આપણે $x = 1$ ની બંને બાજુ 0.1 ના અંતરે આવેલી કિંમતોથી શરૂ કરીશું. એટલે કે $x = 0.9$ અને 1.1 થી શરૂ કરીશું અને પછી x ને બંને બાજુથી 1ની નજીકની કિંમતો લેતાં જઈશું.

કોષ્ટક પરથી સ્પષ્ટ થાય છે કે, જે x ની કિંમતો વધારતાં કે ઘટાડતાં 1 ની નજીક લાવવામાં આવે તો $f(x)$ ની કિંમત 2 ને અનુલક્ષે છે. એટલે કે જ્યારે $x \to 1$ ત્યારે $f(x) \to 2$ એમ દર્શાવાય. તેને સંકેતમાં $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

x ની અલગ-અલગ કિંમતોને $f(x)$ માં મૂકી, ઉપર દર્શાવ્યા પ્રમાણે કોષ્ટક રચી લક્ષ મેળવવામાં આવે છે. તેથી લક્ષ મેળવવાની આ રીતને **કોષ્ટકની રીત** કહેવાય છે.

ઉદાહરણ 5 : $\lim\limits_{x \to 3} 2x+5$ ની કિંમત કોષ્ટકની રીતથી મેળવો.

અહીં $f(x) = 2x + 5$ છે. આપણે 3ની ખૂબ જ નજીકની x ની કિંમતો લઈ નીચે પ્રમાણે કોષ્ટક બનાવીશું :

x	$f(x)$	x	$f(x)$
2.9	10.8	3.1	11.2
2.99	10.98	3.01	11.02
2.999	10.998	3.001	11.002
2.9999	10.9998	3.0001	11.0002
. . .	. . .	. . .	. . .

કોષ્ટક પરથી સ્પષ્ટ છે કે જ્યારે x ની કિંમતો વધારતાં કે ઘટાડતાં 3 ની ખૂબ જ નજીક લાવવામાં આવે ત્યારે $f(x)$ ની કિંમત 11 ની નજીક જાય છે. એટલે કે જ્યારે $x \to 3$ ત્યારે $f(x) \to 11$

$\therefore \lim\limits_{x \to 3} 2x+5 = 11$

ઉદાહરણ 6 : $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$, $x \in R - \{-1\}$ **ની કિંમત કોષ્ટકની રીતે મેળવો.**

અહીં $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ છે. આપણે -1 ની ખૂબ જ નજીકની x ની કિંમતો લઈ નીચે પ્રમાણે કોષ્ટક બનાવીશું :

x	$f(x)$	x	$f(x)$
–1.1	–2.1	–0.9	–1.9
–1.01	–2.01	–0.99	–1.99
–1.001	–2.001	–0.999	–1.999
–1.0001	–2.0001	–0.9999	–1.9999
. . .	. . .	. . .	. . .

કોષ્ટક પરથી સ્પષ્ટ છે કે જ્યારે x ની કિંમતો વધારતાં કે ઘટાડતાં -1 ની ખૂબ જ નજીક લાવવામાં આવે ત્યારે $f(x)$ ની કિંમત -2 ની નજીક જાય છે. એટલે કે જ્યારે $x \to -1$ ત્યારે $f(x) \to -2$

$$\therefore \lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = -2$$

ઉદાહરણ 7 : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x^2+3x}{x}$, $x \in R - \{0\}$ **ની કિંમત કોષ્ટકની રીતે મેળવો.**

અહીં, $f(x) = \frac{2x^2+3x}{x}$ છે. આપણે 0 ની ખૂબ જ નજીકની x ની કિંમતો લઈ નીચે પ્રમાણે કોષ્ટક બનાવીશું :

x	$f(x)$	x	$f(x)$
–0.1	2.8	0.1	3.2
–0.01	2.98	0.01	3.02
–0.001	2.998	0.001	3.002
–0.0001	2.9998	0.0001	3.0002
. . .	. . .	. . .	. . .

કોષ્ટક પરથી સ્પષ્ટ છે કે જ્યારે x ની કિંમતો વધારતાં કે ઘટાડતાં 0 ની ખૂબ જ નજીક લાવવામાં આવે ત્યારે $f(x)$ ની કિંમત 3 ની ખૂબ જ નજીક જાય છે. એટલે કે જ્યારે $x \to 0$ ત્યારે $f(x) \to 3$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{2x^2+3x}{x} = 3$$

ઉદાહરણ 8 : $\lim\limits_{x\to1} \frac{1}{x-1}$, $x \in R-\{1\}$ ની કિંમત કોષ્ટકની રીતે મેળવો.

અહીં, $f(x) = \frac{1}{x-1}$ છે. આપણે 1 ની ખૂબ જ નજીકની x ની કિંમતો લઈ નીચે પ્રમાણે કોષ્ટક બનાવીશું :

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.9	–10	1.1	10
0.99	–100	1.01	100
0.999	–1000	1.001	1000
0.9999	–10000	1.0001	10000
. . .	. . .	. . .	. . .

કોષ્ટક પરથી સ્પષ્ટ છે કે જ્યારે x ની કિંમતો વધારતાં કે ઘટાડતાં 1 ની ખૂબ જ નજીક લાવવામાં આવે ત્યારે $f(x)$ ની કિંમતો કોઈ ચોક્કસ સંખ્યા તરફ જતી નથી, એટલે કે જ્યારે $x \to 1$ ત્યારે $f(x)$ કોઈ એક ચોક્કસ કિંમતને અનુલક્ષતું નથી. આમ, આ વિધેયનું લક્ષ અસ્તિત્વ ધરાવતું નથી.

$\therefore \lim\limits_{x\to1} \frac{1}{x-1}$ અસ્તિત્વ ધરાવતું નથી.

ઉદાહરણ 9 : $\lim\limits_{x\to2} \frac{3x^2-4x-4}{x^2-4}$, $x \in R-\{2\}$ ની કિંમત કોષ્ટકની રીતે મેળવો.

અહીં, $f(x) = \frac{3x^2-4x-4}{x^2-4}$ છે. આપણે અગાઉના ઉદાહરણોમાં કરેલ ગણતરી પ્રમાણે અહીં પણ લક્ષની કિંમત મેળવી શકાય. પણ ગણતરીની સરળતા ખાતર વિધેય $f(x)$ ના અંશ અને છેદના સામાન્ય અવયવ $(x-2)$ દૂર કરી ત્યાર બાદ લક્ષની કિંમત મેળવી શકાય.

$$\lim_{x\to2} \frac{3x^2-4x-4}{x^2-4} = \lim_{x\to2} \frac{(x-2)(3x+2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to2} \frac{3x+2}{x+2} \qquad (\because\ x-2 \neq 0)$$

આપણે 2 ની ખૂબજ નજીકની x ની કિંમતો લઈ નીચે પ્રમાણે કોષ્ટક બનાવીશું :

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.9	1.9744	2.1	2.02439
1.99	1.9975	2.01	2.002494
1.999	1.9997	2.001	2.0002499
1.9999	1.9999	2.0001	2.000025
. . .	. . .	. . .	. . .

કોષ્ટક પરથી સ્પષ્ટ છે કે જ્યારે x ની કિંમતો વધારતાં કે ઘટાડતાં 2 ની ખૂબજ નજીક લાવવામાં આવે ત્યારે $f(x)$ ની કિંમત 2 ની નજીક જાય છે. એટલે કે જ્યારે $x \to 2$ ત્યારે $f(x) \to 2$

$$\therefore \lim_{x\to2} \frac{3x^2-4x-4}{x^2-4} = 2$$

સ્વાધ્યાય 4.2

1. કોષ્ટકની રીતે નીચેનાની કિંમતો મેળવો :

(1) $\lim\limits_{x \to 1} 2x+1$

(2) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-2x-3}{x-3}$

(3) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2+3x-14}{x-2}$

(4) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2x^2+9x+9}{x+3}$

(5) $\lim\limits_{x \to 2} x$

2. કોષ્ટકની રચના કરી $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2}{x-3}$ અસ્તિત્વ ધરાવતું નથી તે બતાવો.

3. જો $y = \dfrac{x^2+x-6}{x-2}$ હોય તો કોષ્ટકની રીતે સાબિત કરો કે જ્યારે $x \to 2$ ત્યારે $y \to 5$

4. જો $y = 5-2x$ હોય તો કોષ્ટકની રીતે સાબિત કરો કે જ્યારે $x \to -1$ ત્યારે $y \to 7$

*

4.6 લક્ષના કાર્યનિયમો

નીચેના નિયમો સાબિતી વગર સ્વીકારી લઈશું :

જો $f(x)$ અને $g(x)$ વાસ્તવિક ચલ x ના બે વાસ્તવિક વિધેય છે અને $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ અને $\lim\limits_{x \to a} g(x) = m$, તો

(1) $\lim\limits_{x \to a} \left[f(x) \pm g(x)\right] = l \pm m$

બે વિધેયોના સરવાળા અથવા બાદબાકીનું લક્ષ તે વિધેયોના લક્ષના સરવાળા અથવા બાદબાકી બરાબર થાય છે.

(2) $\lim\limits_{x \to a} \left[f(x) \times g(x)\right] = l \times m$

બે વિધેયોના ગુણાકારનું લક્ષ તે બે વિધેયોના લક્ષના ગુણાકાર બરાબર થાય છે.

(3) $\lim\limits_{x \to a} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{l}{m}, \quad m \neq 0$

બે વિધેયોના ભાગાકારનું લક્ષ તેમના લક્ષના ભાગાકાર બરાબર થાય છે. અહીં છેદના વિધેયનું લક્ષ શૂન્ય હોવું જોઈએ નહિ.

(4) $\lim\limits_{x \to a} k\, f(x) = kl$, k અચળ છે.

વિધેયના કોઈ અચળાંક સાથે ગુણાકારનું લક્ષ એ વિધેયના લક્ષના તે અચળાંક સાથેના ગુણાકાર બરાબર થાય છે.

4.7 લક્ષનાં પ્રામાણિત રૂપો

(1) **બહુપદીનું લક્ષ**

ધારો કે $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots.. + a_n x^n$ હોય, તો લક્ષના કાર્યનિયમોનો ઉપયોગ કરી,

$$\lim_{x \to b} f(x) = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \ldots.. + a_n b^n$$

(2) $\lim\limits_{x \to a} \left[\frac{x^n - a^n}{x - a}\right] = n a^{n-1}, \quad n \in Q$

આપણે લક્ષનાં કાર્યનિયમો અને પ્રામાણિત રૂપો આધારિત ઉદાહરણ જોઈશું.

ઉદાહરણ 10 : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 2x + 3}$ ની કિંમત શોધો.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 2x + 3} = \frac{(0)^2 + 5(0) + 6}{(0)^2 + 2(0) + 3}$$

$$= \frac{6}{3}$$

$$= 2$$

ઉદાહરણ 11 : $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2x + 3}{x - 1}$ ની કિંમત શોધો.

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x + 3}{x - 1} = \frac{2(2) + 3}{2 - 1}$$

$$= \frac{7}{1}$$

$$= 7$$

ઉદાહરણ 12 : $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6}$ ની કિંમત શોધો.

જો $x = 3$ વિધેય $f(x)$ માં મૂકીએ તો વિધેયની કિંમત $\frac{0}{0}$ મળે જે અનિયત છે. એથી અંશ અને છેદના અવયવ પાડીશું. $x \to 3$ છે તેથી $(x - 3)$ અંશ અને છેદનો સામાન્ય અવયવ હશે.

નોંધ : જો આપેલ વિધેયમાં $x = a$ મૂકતાં વિધેયની કિંમત $\frac{0}{0}$ મળે તો અંશ અને છેદમાં $(x - a)$ સામાન્ય અવયવ હોય.

અંશ $= x^2 - 2x - 3$

$= x^2 - 3x + x - 3$

$= x(x - 3) + 1(x - 3)$

$= (x - 3)(x + 1)$

છેદ $= x^2 - 5x + 6$

$= x^2 - 3x - 2x + 6$

$= x(x - 3) - 2(x - 3)$

$= (x - 3)(x - 2)$

હવે, $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{(x - 3)(x + 1)}{(x - 3)(x - 2)}$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(x + 1)}{(x - 2)} \qquad (\because \ x - 3 \neq 0)$$

$$= \frac{3+1}{3-2}$$

$$= \frac{4}{1}$$

$$= 4$$

ઉદાહરણ 13 : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 1}$ **ની કિંમત શોધો.**

જો $x = 1$ વિધેય $f(x)$ માં મૂકીએ, તો વિધેયની કિંમત $\frac{0}{0}$ મળે જે અનિયત છે.

અંશ $= 2x^2 + x - 3$

$= 2x^2 + 3x - 2x - 3$

$= x(2x + 3) - 1(2x + 3)$

$= (2x + 3)\ (x - 1)$

છેદ $= x^2 - 1$

$= (x + 1)\ (x - 1)$

હવે, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(2x + 3)(x - 1)}{(x + 1)(x - 1)}$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x + 3}{x + 1} \qquad (\because\ x - 1 \neq 0)$

$= \dfrac{2(1) + 3}{1 + 1}$

$= \dfrac{5}{2}$

ઉદાહરણ 14 : $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2x^2 + 7x + 3}{3x^2 + 8x - 3}$ **ની કિંમત શોધો.**

જો $x = -3$ વિધેય $f(x)$ માં મૂકીએ તો વિધેયની કિંમત $\frac{0}{0}$ મળે જે અનિયત છે.

અંશ $= 2x^2 + 7x + 3$

$= 2x^2 + 6x + x + 3$

$= 2x(x + 3) + 1(x + 3)$

$= (x + 3)\ (2x + 1)$

છેદ $= 3x^2 + 8x - 3$

$= 3x^2 + 9x - x - 3$

$= 3x(x + 3) - 1(x + 3)$

$= (x + 3)\ (3x - 1)$

હવે, $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2x^2 + 7x + 3}{3x^2 + 8x - 3} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(x+3)(2x+1)}{(x+3)(3x-1)}$

$$= \lim_{x \to -3} \frac{2x+1}{3x-1} \qquad (\because \ x + 3 \neq 0)$$

$$= \frac{2(-3)+1}{3(-3)-1}$$

$$= \frac{-6+1}{-9-1}$$

$$= \frac{-5}{-10}$$

$$= \frac{1}{2}$$

ઉદાહરણ 15 : $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} \dfrac{2x^2 - x - 1}{4x^2 + 8x + 3}$ **ની કિંમત શોધો.**

જો $x = -\frac{1}{2}$, વિધેય $f(x)$ માં મૂકીએ તો વિધેયની કિંમત $\frac{0}{0}$ મળે જે અનિયત છે.

અંશ $= 2x^2 - x - 1$

$= 2x^2 - 2x + x - 1$

$= 2x(x-1) + 1(x-1)$

$= (x-1)(2x+1)$

છેદ $= 4x^2 + 8x + 3$

$= 4x^2 + 6x + 2x + 3$

$= 2x(2x+3) + 1(2x+3)$

$= (2x+3)(2x+1)$

હવે, $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} \dfrac{2x^2 - x - 1}{4x^2 + 8x + 3} = \lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} \dfrac{(x-1)(2x+1)}{(2x+3)(2x+1)}$

$$= \lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{x-1}{2x+3} \qquad (\because \ 2x + 1 \neq 0)$$

$$= \frac{-\frac{1}{2} - 1}{2\left(-\frac{1}{2}\right) + 3}$$

$$= \frac{-\frac{3}{2}}{-1+3}$$

$$= \frac{-\frac{3}{2}}{2}$$

$$= -\frac{3}{4}$$

ઉદાહરણ 16 : $\lim\limits_{x \to 2} \left[\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x^2-2x}\right]$ ની કિંમત શોધો.

$$\lim_{x \to 2} \left[\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x^2-2x}\right] = \lim_{x \to 2} \left[\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x(x-2)}\right]$$

$$= \lim_{x \to 2} \left[\frac{x-2}{x(x-2)}\right]$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{1}{x} \qquad (\because \ x - 2 \neq 0)$$

$$= \frac{1}{2}$$

ઉદાહરણ 17 : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} \left[\frac{2x+3}{3x-5} + \frac{3}{5}\right]$ ની કિંમત શોધો.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \left[\frac{2x+3}{3x-5} + \frac{3}{5}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \left[\frac{5(2x+3) + 3(3x-5)}{5(3x-5)}\right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \left[\frac{10x+15+9x-15}{5(3x-5)}\right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \left[\frac{19x}{5(3x-5)}\right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{19}{5(3x-5)} \qquad (\because \ x \neq 0)$$

$$= \frac{19}{5[3(0)-5]}$$

$$= \frac{19}{5(-5)}$$

$$= -\frac{19}{25}$$

ઉદાહરણ 18 : જો $f(x) = x^2 + x$ હોય તો $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 4}$ ની કિંમત શોધો.

અહીં, $f(x) = x^2 + x$ છે.

$$\therefore \ f(2) = (2)^2 + 2$$

$$= 4 + 2$$

$$= 6$$

હવે, $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\left(x^2 + x\right) - 6}{x^2 - 4}$

અંશ $= x^2 + x - 6$

$= x^2 + 3x - 2x - 6$

$= x(x + 3) - 2(x + 3)$

$= (x + 3)(x - 2)$

છેદ $= x^2 - 4$

$= (x + 2)(x - 2)$

તેથી, $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x + 3)(x - 2)}{(x + 2)(x - 2)}$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x + 3}{x + 2} \qquad (\because \ x - 2 \neq 0)$

$= \dfrac{2 + 3}{2 + 2}$

$= \dfrac{5}{4}$

ઉદાહરણ 19 : જો $f(x) = x^3$ હોય તો $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3 + h) - f(3 - h)}{2h}$ ની કિંમત શોધો.

અહીં, $f(x) = x^3$

$\therefore \ f(3 + h) = (3 + h)^3$

$= 27 + 27h + 9h^2 + h^3$

અને

$f(3 - h) = (3 - h)^3$

$= 27 - 27h + 9h^2 - h^3$

હવે, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3 + h) - f(3 - h)}{2h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\left(27 + 27h + 9h^2 + h^3\right) - \left(27 - 27h + 9h^2 - h^3\right)}{2h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{27 + 27h + 9h^2 + h^3 - 27 + 27h - 9h^2 + h^3}{2h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{54h + 2h^3}{2h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h\left(54 + 2h^2\right)}{2h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{54 + 2h^2}{2} \qquad (\because \ h \neq 0)$$

$$= \frac{54 + 2(0)^2}{2}$$

$$= \frac{54}{2}$$

$$= 27$$

ઉદાહરણ 20 : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3}}{x}$ **ની કિંમત શોધો.**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3}}{x}$$

(અંશ અને છેદને $\sqrt{3+x} + \sqrt{3}$ વડે ગુણતાં)

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3}}{x} \times \frac{\sqrt{3+x} + \sqrt{3}}{\sqrt{3+x} + \sqrt{3}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{3+x}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2}{x\left(\sqrt{3+x} + \sqrt{3}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{3 + x - 3}{x\left(\sqrt{3+x} + \sqrt{3}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{x\left(\sqrt{3+x} + \sqrt{3}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\left(\sqrt{3+x} + \sqrt{3}\right)} \qquad (\because \ x \neq 0)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3+0} + \sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

ઉદાહરણ 21 : $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+7} - 3}{x - 2}$ **ની કિંમત શોધો.**

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x - 2}$$

(અંશ અને છેદને $\sqrt{x+7} + 3$ વડે ગુણતાં)

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x - 2} \times \frac{\sqrt{x+7} + 3}{\sqrt{x+7} + 3}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\left(\sqrt{x+7}\right)^2 - (3)^2}{(x-2)\left(\sqrt{x+7} + 3\right)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x + 7 - 9}{(x-2)\left(\sqrt{x+7} + 3\right)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{(x-2)\left(\sqrt{x+7} + 3\right)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{1}{\sqrt{x+7} + 3} \qquad (\because \ x - 2 \neq 0)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2+7} + 3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{9} + 3}$$

$$= \frac{1}{3 + 3}$$

$$= \frac{1}{6}$$

ઉદાહરણ 22 : જો $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$ હોય તો $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ **ની કિંમત શોધો.**

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$\therefore \ f(x+h) = \sqrt{x+h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

(અંશ અને છેદને $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$ વડે ગુણતાં)

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+h}\right)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \qquad (\because \ h \neq 0)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+0} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ઉદાહરણ 23 : $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$ ની કિંમત શોધો.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$$

(અંશ અને છેદને $\sqrt{x} + \sqrt{2}$ વડે ગુણતાં)

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{\sqrt{x} + \sqrt{2}}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)\left(x^2 + 2x + 4\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)\left(x^2 + 2x + 4\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{2}\right)}{(x-2)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \left(x^2 + 2x + 4\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{2}\right) \qquad (\because \ x - 2 \neq 0)$$

$$= \left[(2)^2 + 2(2) + 4\right]\left[\sqrt{2} + \sqrt{2}\right]$$

$$= (4 + 4 + 4)\left(2\sqrt{2}\right)$$

$$= 12\left(2\sqrt{2}\right)$$

$$= 24\sqrt{2}$$

ઉદાહરણ 24 : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x+8}-3}$ ની કિંમત શોધો.

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x+8}-3}$$

(અંશ અને છેદને $\sqrt{x+3}+2$ અને $\sqrt{x+8}+3$ વડે ગુણતાં)

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x+8}-3} \times \frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2} \times \frac{\sqrt{x+8}+3}{\sqrt{x+8}+3}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\left(\sqrt{x+3}\right)^2-(2)^2}{\left(\sqrt{x+8}\right)^2-(3)^2} \times \frac{\sqrt{x+8}+3}{\sqrt{x+3}+2}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x+3-4) \times \left(\sqrt{x+8}+3\right)}{(x+8-9) \times \left(\sqrt{x+3}+2\right)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+8}+3}{\sqrt{x+3}+2} \qquad (\because \ x-1 \neq 0)$$

$$= \frac{\sqrt{1+8}+3}{\sqrt{1+3}+2}$$

$$= \frac{\sqrt{9}+3}{\sqrt{4}+2}$$

$$= \frac{3+3}{2+2}$$

$$= \frac{6}{4}$$

$$= \frac{3}{2}$$

ઉદાહરણ 25 : $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^5-32}{x-2}$ ની કિંમત શોધો.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^5-32}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^5-2^5}{x-2}$$

$$= 5(2)^{5-1} \qquad \left[\because \ \lim_{x \to a} \frac{x^n-a^n}{x-a} = na^{n-1}\right]$$

$$= 5(2)^4$$

$$= 5(16)$$

$$= 80$$

ઉદાહરણ 26 : $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^5 - 243}{x^3 - 27}$ **ની કિંમત શોધો.**

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^5 - 243}{x^3 - 27} = \lim_{x \to 3} \frac{x^5 - 3^5}{x^3 - 3^3}$$

(અંશ અને છેદને $(x - 3)$ વડે ગુણતાં)

$$= \lim_{x \to 3} \frac{x^5 - 3^5}{x - 3} \times \frac{x - 3}{x^3 - 3^3}$$

$$= \lim_{x \to 3} \left[\frac{x^5 - 3^5}{x - 3} \div \frac{x^3 - 3^3}{x - 3}\right]$$

$$= 5(3)^{5-1} \div 3(3)^{3-1} \qquad \left[\because \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}\right]$$

$$= \frac{5(3)^4}{3(3)^2}$$

$$= \frac{5 \times 81}{3 \times 9}$$

$$= 15$$

ઉદાહરણ 27 : $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^7 + 128}{x + 2}$ **ની કિંમત શોધો.**

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^7 + 128}{x + 2} = \lim_{x \to -2} \frac{x^7 - (-2)^7}{x - (-2)}$$

$$= 7(-2)^{7-1} \qquad \left[\because \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}\right]$$

$$= 7(-2)^6$$

$$= 7(64)$$

$$= 448$$

ઉદાહરણ 28 : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x + h)^5 - x^5}{h}$ **ની કિંમત શોધો.**

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^5 - x^5}{h}$$

($x + h = t$ લેતાં, જ્યારે $h \to 0$ ત્યારે $t \to x$ થાય.)

$$= \lim_{t \to x} \frac{t^5 - x^5}{t - x} \qquad (\because x + h = t)$$

$$= 5(x)^{5-1} \qquad \left[\because \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}\right]$$

$$= 5x^4$$

ઉદાહરણ 29 : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[n]{x+1} - 1}{x}$ ની કિંમત શોધો.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[n]{x+1} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(x+1)^{\frac{1}{n}} - 1^{\frac{1}{n}}}{x}$$

($x + 1 = t$ લેતાં, જ્યારે $x \to 0$ ત્યારે $t \to 1$ થાય.)

$$= \lim_{t \to 1} \frac{t^{\frac{1}{n}} - 1^{\frac{1}{n}}}{t - 1} \quad (\because x + 1 = t \quad \therefore x = t - 1)$$

$$= \frac{1}{n}(1)^{\frac{1}{n} - 1} \qquad \left[\because \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n a^{n-1}\right]$$

$$= \frac{1}{n} \times 1$$

$$= \frac{1}{n}$$

સારાંશ

- **સામીપ્ય** : ધારો કે $a \in R$ છે, તો a ને સમાવતા વિવૃત્ત અંતરાલને 'a' નું સામીપ્ય કહેવાય છે.
- **a નું δ સામીપ્ય** : જો $a \in R$ અને δ એ અઋણ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય, તો વિવૃત્ત અંતરાલ $(a - \delta, a + \delta)$ ને 'a' નું સામીપ્ય કહેવાય છે.
- **$x \to a$ નો અર્થ** : જો કોઈ ચલ x ની કિંમત ઘટાડતાં કે વધારતાં કોઈ એક ચોક્કસ સંખ્યા 'a' ની ખૂબ જ નજીક લાવવામાં આવે તો x, a ને અનુલક્ષે છે એમ કહેવાય. તેને સંકેતમાં $x \to a$ વડે દર્શાવાય છે.
- **$x \to 0$ નો અર્થ** : જો કોઈ ચલ x ની ધન કિંમતો ઘટાડતાં કે x ની ઋણ કિંમતો વધારતાં '0' ની ખૂબ જ નજીક લાવવામાં આવે તો x, 0 ને અનુલક્ષે છે એમ કહેવાય. તેને સંકેતમાં $x \to 0$ વડે દર્શાવાય છે.
- **વિધેયનું લક્ષ**

  જો ગમે તેટલી નાની આપેલ પૂર્વ નિર્ધારિત સંખ્યા $\varepsilon > 0$ માટે આપણે એવી એક ધન સંખ્યા δ શોધી શકીએ કે જેથી જ્યારે $|x - a| < \delta$ હોય ત્યારે x ની દરેક કિંમત માટે $|f(x) - l| < \varepsilon$ થાય તો જ્યારે x, a ને અનુલક્ષે ત્યારે વિધેય $f(x)$ લક્ષ l ધરાવે છે.

સૂત્રોની યાદી :

- $\lim\limits_{x \to a} \left[f(x) \pm g(x) \right] = l \pm m$
- $\lim\limits_{x \to a} \left[f(x) \times g(x) \right] = l \times m$
- $\lim\limits_{x \to a} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)} \right] = \dfrac{l}{m}, \quad m \neq 0$
- $\lim\limits_{x \to a} k\, f(x) = kl$, k અચળ છે.
- જો $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_n x^n$ હોય, તો

  $\lim\limits_{x \to b} f(x) = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \ldots\ldots + a_n b^n$
- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^n - a^n}{x - a} = n a^{n-1}, \quad n \in Q$

સ્વાધ્યાય 4

વિભાગ A

નીચે આપેલ બહુવિકલ્પ પ્રશ્નો માટે સાચા વિકલ્પની પસંદગી કરો :

1. 3 નું 0.3 સામીપ્યનું માનાંક સ્વરૂપ કયું છે ?

(a) $|x - 0.3| < 3$ (b) $|x - 3| < 0.3$ (c) $|x + 3| < 0.3$ (d) $|x - 3| > 0.3$

2. –2 નું 0.02 સામીપ્યને અંતરાલ સ્વરૂપ કયું છે ?

(a) $(1.98, 2.02)$ (b) $(-1.98, 2.02)$ (c) $(-2.02, -1.98)$ (d) $(-2.02, 1.98)$

3. $|x - 5| < 0.25$ ને અંતરાલ સ્વરૂપ કયું છે ?

(a) $(4.75, 5.25)$ (b) $(-4.75, +5.25)$ (c) $(-5.25, -4.75)$ (d) $(-5.25, 4.75)$

4. $|2x + 1| < \frac{1}{5}$ ને અંતરાલ સ્વરૂપ કયું છે ?

(a) $\left(-\frac{6}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ (b) $\left(-\frac{6}{10}, -\frac{4}{10}\right)$ (c) $\left(\frac{4}{10}, \frac{6}{10}\right)$ (d) $\left(-\frac{6}{10}, \frac{4}{10}\right)$

5. $N(5, 0.02)$ ને માનાંક સ્વરૂપ કયું છે ?

(a) $|x + 5| < 0.02$ (b) $|x - 0.02| < 5$ (c) $|x - 5| > 0.02$ (d) $|x - 5| < 0.02$

6. જો $N(a, 0.07)$ નું માનાંક સ્વરૂપ $|x - 10| < k$ હોય, તો kની કિંમત શું હોય ?

(a) a (b) 0.7 (c) 0.07 (d) 9.93

7. $\lim\limits_{x \to 3} 3x - 1$ ની કિંમત શું થાય ?

(a) 9 (b) 10 (c) $\frac{4}{3}$ (d) 8

8. $\lim_{x \to 4} \sqrt{4x+9}$ ની કિંમત શું થાય ?

(a) 5 (b) 25 (c) $\frac{7}{4}$ (d) 7

9. $\lim_{x \to -2} 10$ ની કિંમત શું થાય ?

(a) 10 (b) –2 (c) 8 (d) અનિયત

10. $\lim_{x \to 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3}$ ની કિંમત શું થાય ?

(a) 192 (b) 324 (c) 36 (d) 108

11. $\lim_{x \to -1} \frac{x^5 + 1}{x + 1}$ ની કિંમત શું થાય ?

(a) –5 (b) 5 (c) 4 (d) –4

12. જો $y = 10 - 3x$ હોય અને $x \to -3$ હોય, તો y કઈ કિંમતને અનુલક્ષે છે ?

(a) 1 (b) 9 (c) 19 (d) 7

વિભાગ B

નીચેના પ્રશ્નોના એક વાક્યમાં જવાબ આપો :

1. 0 નું 0.09 સામીપ્યને અંતરાલ સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

2. –5 નું 0.001 સામીપ્યને માનાંક સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

3. $|x - 10| < \frac{1}{10}$ ને સામીપ્ય સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

4. $|2x| < \frac{1}{2}$ ને અંતરાલ સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

5. $N(50, 0.8)$ ને માનાંક સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

6. જો $N(a, 0.2) = |x - 7| < b$ હોય, તો aની કિંમત શોધો.

7. જો $|x + 4| < 0.04 = (k, -3.96)$ હોય, તો kની કિંમત શોધો.

8. $\lim_{x \to 5} (3x + 5)$ ની કિંમત શોધો.

9. $\lim_{x \to -3} \sqrt[3]{2 - 2x}$ ની કિંમત શોધો.

10. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{3x^2 - 4x + 10}{2x + 5} \right)$ ની કિંમત શોધો.

11. $\lim_{x \to 2} \frac{x^5 - 32}{x - 2}$ ની કિંમત શોધો.

12. $\lim_{x \to -a} \frac{x^m + a^m}{x + a}$ (જ્યાં m એકી સંખ્યા છે)ની કિંમત શોધો.

13. $\lim\limits_{x \to -1} 4x + k = 6$ હોય તો kની કિંમત શોધો.

14. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2}{3x + k} = \dfrac{1}{7}$ હોય તો kની કિંમત શોધો.

વિભાગ C

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. વિવૃત્ત અંતરાલની વ્યાખ્યા આપો.
2. aનું δ સામીપ્યની વ્યાખ્યા આપો.
3. aનું δ છિદ્રિત સામીપ્યની વ્યાખ્યા આપો.
4. અંતરાલ સ્વરૂપ $(-0.5, 0.5)$ને માનાંક સ્વરૂપમાં દર્શાવો.
5. અંતરાલ સ્વરૂપ $(-8.75, -7.25)$ને સામીપ્ય સ્વરૂપમાં દર્શાવો.
6. જો $N(k_1, 0.5) = (19.5, k_2)$ હોય, તો k_1 અને k_2 ની કિંમત શોધો.
7. $|3x + 1| < 2$ ને સામીપ્ય અને અંતરાલ સ્વરૂપમાં દર્શાવો.
8. જો $|x - A_1| < 0.09 = (A_2, 4.09)$ હોય, તો A_1 અને A_2 ની કિંમત શોધો.
9. $x \to a$ નો અર્થ સમજાવો.
10. $x \to 0$ નો અર્થ સમજાવો.
11. વિધેયનું લક્ષની વ્યાખ્યા આપો.
12. લક્ષનો ગુણાકારનો કાર્યનિયમ જણાવો.
13. લક્ષનો ભાગાકારનો કાર્યનિયમ જણાવો.
14. બહુપદીનું લક્ષનું પ્રામાણિત રૂપ જણાવો.

વિભાગ D

નીચેનાની કિંમત શોધો :

1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^2 - 4x + 1}{x - 1}$

2. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{2x^2 - 3x - 9}$

3. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x^2 - 2x - 5}{x + 1}$

4. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$

5. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{2x^2 + 5x - 3}{4x^2 - 1}$

6. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2x^2 + 9x + 9}{2x^2 + 7x + 3}$

7. $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} \dfrac{2x^2 + 3x + 1}{2x^2 - x - 1}$

8. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{9x^2 + 5x - 26}{5x^2 + 17x + 14}$

9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}\left[\dfrac{5x + 14}{3x + 7} - 2\right]$

10. $\lim\limits_{x \to 2} \left[\dfrac{2}{x - 2} - \dfrac{4}{x^2 - 2x}\right]$

11. $\lim\limits_{x \to 0} \; 1 + \dfrac{2}{3 + \frac{4}{x}}$

12. $\lim\limits_{x \to -p} \; \dfrac{x^4 - p^4}{x^3 + p^3}$

13. $\lim\limits_{x \to 3} \; \dfrac{x^6 - 729}{x^4 - 81}$

14. $\lim\limits_{x \to -2} \; \dfrac{x^{10} - 1024}{x^5 + 32}$

15. $\lim\limits_{x \to -1} \; \dfrac{x^{2017} + 1}{x^{2018} - 1}$

16. $\lim\limits_{x \to 1} \; \dfrac{x^{\frac{7}{2}} - 1}{x^{\frac{3}{2}} - 1}$

17. $\lim\limits_{x \to 1} \; \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$

વિભાગ E

I. માંગ્યા પ્રમાણે જવાબ આપો :

1. જો $y = 5x + 7$ હોય તો કોષ્ટકની રીતે સાબિત કરો કે, જ્યારે $x \to 2$ ત્યારે $y \to 17$

2. જો $y = \dfrac{3x^2 + 16x + 16}{x + 4}$ હોય તો કોષ્ટકની રીતે સાબિત કરો કે, જ્યારે $x \to -4$ ત્યારે $y \to -8$

3. કોષ્ટકની રીતથી સાબિત કરો કે, $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3}{x + 1}$ અસ્તિત્વ ધરાવતું નથી.

II. નીચેનાની કોષ્ટકની રીતથી કિંમત શોધો :

1. $\lim\limits_{x \to 5} \; \dfrac{x^2 - 3x - 10}{x - 5}$

2. $\lim\limits_{x \to 1} \; \dfrac{2x^2 + 3x - 5}{x - 1}$

3. $\lim\limits_{x \to -1} \; \dfrac{4x^2 + 5x + 1}{x + 1}$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \; 3x - 1$

III. નીચેનાની કિંમત શોધો :

1. $\lim\limits_{h \to 0} \; \dfrac{(x + h)^7 - x^7}{h}$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \; \dfrac{\sqrt[10]{1 + x} - 1}{x}$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \; \dfrac{(1 + x)^n - 1}{x}$

4. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \; \dfrac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{2x - 1}$ જ્યાં $f(x) = x^2 + x - 1$

5. $\lim\limits_{h \to 0} \; \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$ જ્યાં $f(x) = x^3$

6. $\lim\limits_{h \to 0} \; \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$ જ્યાં $f(x) = x^7$

7. $\lim\limits_{x \to 2} \; \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ જ્યાં $f(x) = \sqrt{x + 7}$

8. $\lim\limits_{h \to 0} \; \dfrac{f(2 + h) - f(2)}{h}$ જ્યાં $f(x) = 2x^2 + 3$

9. $\lim\limits_{x \to 0} \; \dfrac{f(2 + x) - f(2 - x)}{2x}$ જ્યાં $f(x) = x^2$

10. $\lim\limits_{x \to 2} \; \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ જ્યાં $f(x) = x^2 + x$

Srinivasa Ramanujan
(1887 - 1920)

Srinivasa Ramanujan was one of the greatest mathematical geniuses of India. He made substantial contributions to the analytical theory of numbers and worked on elliptic functions, continued fractions and infinite series. Ramanujan independently discovered results of Gauss, Kummer and others on hyper geometric series. Ramanujan initially developed his own mathematical research in isolation; it was quickly recognized by Indian mathematicians. When his skills became obvious and known to the wider mathematical community, centered in Europe at the time, he began a famous partnership with the English mathematician G. H. Hardy, who realized that Ramanujan had rediscovered previously known theorems in addition to producing new ones. On 18 February 1918 Ramanujan was elected as fellow of the Cambridge Philosophical Society. On the 125th anniversary of his birth, India declared the birthday of Ramanujan, December 22, as 'National Mathematics Day and also declared that the year 2012 would be celebrated as the National Year of Mathematics.

5

વિકલન

(Differentiation)

વિષયવસ્તુ :

5.1 પ્રાસ્તાવિક

ધોરણ 11 માં આપણે વિધેય વિશે જોયું. જો $f(x)$ એ x નું વિધેય હોય તો x ની કિંમતમાં ફેરફાર થાય ત્યારે $f(x)$ ની કિંમતમાં કેવી રીતનો અને કેટલો ફેરફાર થાય છે તેના પૃથક્કરણ માટે વિકલનની પદ્ધતિનો ઉપયોગ થાય છે. એટલે કે, કોઈ એક કિંમત આગળ વિધેયમાં કેટલી ઝડપથી ફેરફાર થાય તે વિકલનની મદદથી જાણી શકાય. વાસ્તવિક જીવનમાં આ વિધેય જેવા કે ઉત્પાદન- ખર્ચ, આમદાની, નફો વગેરે હોય છે અને ઘણી વખત એ જાણવું ખૂબ અગત્યનું બને છે કે, આવી વસ્તુઓમાં ઉત્પાદિત એકમો કે વેચાણ થયેલ એકમો x ની કિંમતમાં થતા ફેરફારની સરખામણીમાં વિધેયની કિંમતમાં કેટલા ઝડપથી ફેરફાર થાય છે.

ધારો કે x નું કોઈ એક વિધેય $y = f(x) = 2x^2 + 3$ છે. જ્યારે સ્વતંત્ર ચલ (x)માં ફેરફાર કરવામાં આવે ત્યારે આધારિત ચલ (y)માં ફેરફાર થાય છે. જો x ની કિંમત 2 હોય, તો આધારિત ચલ y ની કિંમત 11 થાય. હવે x ની આ કિંમતમાં અલ્પ વધારો કરવામાં આવે, તો y ની કિંમતમાં કેટલો વધારો થાય છે તે શોધીએ. x ની કિંમતમાં અલ્પ વધારો કરવામાં આવે એટલે કે x ની કિંમતો 2.1, 2.01, 2.001, 2.0001, ... વગેરે લઈએ તો અનુરૂપ y ની કિંમત 11.82, 11.082, 11.008, 11.0008, ... વગેરે મળે છે. x ની કિંમતમાં કરવામાં આવેલા વધારાને δ_x અને y ની કિંમતમાં થયેલા ફેરફારને δ_y વડે દર્શાવીએ. ગુણોત્તર $\frac{\delta_y}{\delta_x}$ ને વૃદ્ધિ ગુણોત્તર કહીશું. હવે ઉપર્યુક્ત x અને તેને અનુરૂપ y ની કિંમતો માટે વૃદ્ધિ ગુણોત્તર જોઈએ.

x	δ_x	$y = f(x)$	δ_y	$\frac{\delta_y}{\delta_x}$
2.1	0.1	11.82	0.82	8.2
2.01	0.01	11.0802	0.0802	8.02
2.001	0.001	11.0080	0.0080	8.002
2.0001	0.0001	11.0008	0.0008	8.0002
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

ઉપરના કોષ્ટક પરથી આપણે નીચેનાં અવલોકન કરી શકીશું :

(i) δ_x માં ફેરફાર થાય ત્યારે δ_y માં ફેરફાર થાય

(ii) જ્યારે $\delta_x \to 0$ ત્યારે $\delta_y \to 0$

(iii) ગુણોત્તર $\frac{\delta_y}{\delta_x}$, 8 ને અનુલક્ષે છે.

આમ, આ ઉદાહરણ દર્શાવે છે કે જ્યારે $\delta_x \to 0$, $\delta_y \to 0$ તો પણ ગુણોત્તર $\frac{\delta_y}{\delta_x}$ કોઈ પરિમિત (finite) કિંમતને અનુલક્ષે તેમ બની શકે. જે શૂન્ય હોય તે જરૂરી નથી. ગુણોત્તર $\frac{\delta_y}{\delta_x}$ ના લક્ષને $\frac{d_y}{d_x}$ તરીકે રજૂ થાય છે અને તેને y નું x ની સાપેક્ષમાં વિકલિત કહેવાય છે.

ઉપરના ઉદાહરણમાં $\frac{d_y}{d_x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta_y}{\delta_x} = 8$

ઘણી ધંધાકીય સમસ્યાઓમાં આપણે વિધેયની કિંમતમા થતાં ફેરફારનો દર, ખાસ કરીને નિરપેક્ષ ચલની કઈ કિંમતો માટે વિધેયની કિંમતોમાં થતો ફેરફારનો દર ધન કે ઋણ છે તે જાણવા ઇચ્છીએ છીએ.

વિકલનનો ઉપયોગ ઉત્પાદન, ફેરબદલી, ભાવ નિર્ધારણ અને સંચાલકીય નિર્ણય ઘડતરના અન્ય પ્રશ્નોમાં થાય છે.

ટૂંકમાં નિરપેક્ષ ચલની કિંમતમાં અલ્પ ફેરફાર કરવાથી સાપેક્ષ ચલ (નિરપેક્ષ ચલનો વિધેય) ની કિંમતમાં થતા ફેરફારના દરનો અભ્યાસ વિકલન દ્વારા જાણી શકાય છે.

5.2 વ્યાખ્યા : વિકલન અને વિકલિત

ધારો કે $y = f(x)$ એક વિધેય છે.

જ્યારે આપણે $x = a$ લઈએ ત્યારે $f(x)$ ની કિંમત $f(a)$ થશે. હવે, જ્યારે x ની કિંમતમાં અલ્પ વધારો કરીને a થી $a+h$ કરવામાં આવે, તો પરિણામે વિધેયની કિંમત $f(a)$ થી $f(a+h)$ થશે. આમ, x ની કિંમતમાં $(a+h)-a = h$ નો ફેરફાર થાય ત્યારે $f(x)$ ની કિંમતમાં $f(a+h)-f(a)$ નો ફેરફાર થશે. a ની કિંમતમાં h જેટલો ફેરફાર કરવાથી વિધેયની કિંમતમાં થયેલો સાપેક્ષ ફેરફાર $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ થશે. જો h ની કિંમત ખૂબ જ અલ્પ કરવામાં આવે, તો આ સાપેક્ષ ફેરફારના લક્ષને $f(x)$ નું 'a' આગળનું વિકલિત કહેવામાં આવે છે અને તેને $f'(a)$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

વ્યાખ્યા : ધારો કે $f : A \to R$ અને $a \in A$, જ્યાં A એ R નો કોઈ વિવૃત્ત અંતરાલ છે. જો $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ નું અસ્તિત્વ હોય, તો આ લક્ષને વિધેય f નું a આગળનું વિકલિત અથવા વિકલન ફળ (Derivative) કહેવાય. તેને સંકેતમાં $f'(a)$ વડે દર્શાવાય છે.

વિકલિત શોધવાની ક્રિયાને **વિકલન** કહેવાય છે.

આમ, $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

f ના પ્રદેશ ગણના કોઈ પણ સભ્ય x માટે $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ને વિધેય $f(x)$ નું વિકલિત કહેવામાં આવે છે.

જો y એ x નું વિધેય હોય, તો તેના વિકલનને $\frac{dy}{dx}$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

હવે, આપણે વિકલિતની વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરીને કેટલાંક વિધેયોનાં વિકલિત મેળવીશું.

ઉદાહરણ 1 : વ્યાખ્યાની મદદથી $f(x) = x$ નું વિકલિત મેળવો.

અહીં, $f(x) = x$

$\therefore\ f(x+h) = x+h$

હવે, $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)-x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h}$$

$$= 1 \qquad (\because \ h \neq 0)$$

આમ, જો $f(x) = x$ તો $f'(x) = 1$

ઉદાહરણ 2 : વ્યાખ્યાની મદદથી $f(x) = x^3$ નું વિકલન ફળ મેળવો.

અહીં, $f(x) = x^3$

$$\therefore \ f(x+h) = (x+h)^3$$

$$= x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$$

હવે, $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3\right) - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h\left(3x^2 + 3xh + h^2\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 3x^2 + 3xh + h^2 \qquad (\because \ h \neq 0)$$

$$= 3x^2 + 3x(0) + (0)^2$$

$$= 3x^2$$

આમ, જો $f(x) = x^3$ તો $f'(x) = 3x^2$

ઉદાહરણ 3 : વ્યાખ્યાની મદદથી $f(x) = x^n$ નું વિકલિત મેળવો.

અહીં, $f(x) = x^n$

$$\therefore \ f(x+h) = (x+h)^n$$

હવે, $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

($x + h = t$ લેતાં, જ્યારે $h \to 0$ ત્યારે $t \to x$)

$$= \lim_{t \to x} \frac{t^n - x^n}{t - x} \qquad (\because \ x + h = t)$$

$$= nx^{n-1} \quad \left(\because \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}\right)$$

આમ, જો $f(x) = x^n$ તો $f'(x) = nx^{n-1}$

ઉદાહરણ 4 : વ્યાખ્યાની મદદથી $f(x) = \sqrt{x}$ નું વિકલન ફળ મેળવો.

અહીં, $f(x) = \sqrt{x}$

$$\therefore \ f(x+h) = \sqrt{x+h}$$

હવે, $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

(અંશ અને છેદને $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$ વડે ગુણતાં)

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+h}\right)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \qquad (\because \ h \neq 0)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+0} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

આમ, જો $f(x) = \sqrt{x}$ તો $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

ઉદાહરણ 5 : વ્યાખ્યાની મદદથી $f(x) = \frac{1}{x}$ નું વિકલિત મેળવો.

અહીં, $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\therefore \; f(x+h) = \frac{1}{x+h}$$

હવે, $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x - (x+h)}{hx(x+h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x - x - h}{hx(x+h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{hx(x+h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)} \qquad (\because \; h \neq 0)$$

$$= \frac{-1}{x(x+0)}$$

$$= \frac{-1}{x^2}$$

આમ, જો $f(x) = \frac{1}{x}$ તો $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$

ઉદાહરણ 6 : વ્યાખ્યાની મદદથી $f(x) = k$ (k અચળાંક છે) નું વિકલિત મેળવો.

અહીં, $f(x) = k$

$$\therefore \; f(x+h) = k$$

હવે, $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{k - k}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{0}{h}$$

$$= 0$$

આમ, જો $f(x) = k$ તો $f'(x) = 0$

સ્વાધ્યાય 5.1

વ્યાખ્યાની મદદથી નીચેના વિધેયોના વિકલિત મેળવો :

1. $f(x) = 2x + 3$

2. $f(x) = x^2$

3. $f(x) = x^7$

4. $f(x) = \frac{1}{x+1}, \quad x \neq -1$

5. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

6. $f(x) = \frac{2}{3x-4}, \quad x \neq \frac{4}{3}$

7. $f(x) = 10$

*

5.3 કેટલાંક પ્રમાણિત વિકલિતો

આપણે નીચેના વિધેયોના વિકલિતનો ઉપયોગ કરીશું.

1. જો $y = x^n$ (જ્યાં $n \in R$ અને $x \in R^+$)

તો, $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$

2. જો $y = k$ (જ્યાં k અચળ સંખ્યા છે.)

તો, $\frac{dy}{dx} = 0$

5.4 વિકલન માટેના કાર્યનિયમો

x નાં બે વિધેયોનાં સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર અને ભાગાકાર માટે વિકલિત મેળવવા માટે કેટલાક નિયમો સાબિત કર્યા વગર આપણે સ્વીકારીશું.

જો u અને v એ x નાં વિકલનીય વિધેયો હોય, તો

નિયમ 1 : જો $y = u \pm v$ હોય, તો

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

નિયમ 2 : જો $y = u \cdot v$ હોય, તો

$$\frac{dy}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$$

નિયમ 3 : જો $y = \frac{u}{v}, \; v \neq 0$ હોય, તો

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

નિયમ 4 : (સાંકળ નિયમ)

જો y એ u નું વિધેય અને u એ x નું વિધેય હોય, તો

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

વિકલનના ઉપર દર્શાવેલા કાર્યનિયમોનો ઉપયોગ સમજાવતાં કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 7 : $y = x^4 - 3x^2 + 2x - 3$ હોય, તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

$$y = x^4 - 3x^2 + 2x - 3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^4 - 3x^2 + 2x - 3\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(x^4\right) - \frac{d}{dx}\left(3x^2\right) + \frac{d}{dx}(2x) - \frac{d}{dx}(3)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(x^4\right) - 3\frac{d}{dx}\left(x^2\right) + 2\frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(3)$$

$$= 4x^3 - 3(2x) + 2(1) - (0)$$

$$= 4x^3 - 6x + 2$$

ઉદાહરણ 8 : $y = x^3 + \sqrt{x} - \frac{4}{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{4}$ હોય, તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

$$y = x^3 + \sqrt{x} - \frac{4}{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{4}$$

$$= x^3 + x^{\frac{1}{2}} - 4x^{-1} + x^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{4}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^3\right) + \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - 4\frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) + \frac{d}{dx}\left(x^{-\frac{1}{3}}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$= 3x^2 + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} - 4\left(-1\,x^{-1-1}\right) + \left(\frac{-1}{3}\right)x^{\frac{-1}{3}-1} + 0$$

$$= 3x^2 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 4x^{-2} - \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$$

$$= 3x^2 + \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} + \frac{4}{x^2} - \frac{1}{3x^{\frac{4}{3}}}$$

ઉદાહરણ 9 : $y = \left(2x^2 + 3\right)(3x - 2)$ હોય, તો y નું x સાપેક્ષ વિકલન ફળ (વિકલિત) મેળવો.

$$y = \left(2x^2 + 3\right)(3x - 2)$$

અહીં, $u = 2x^2 + 3$ અને $v = 3x - 2$ લો.

$$\therefore \frac{du}{dx} = 4x \text{ અને } \frac{dv}{dx} = 3$$

હવે, $y = u \cdot v$ છે.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$= \left(2x^2 + 3\right)(3) + (3x - 2)(4x)$$

$$= 6x^2 + 9 + 12x^2 - 8x$$

$$= 18x^2 - 8x + 9$$

નોંધ : ઉદાહરણ 9 ને y નું સાદું રૂપ આપીને એટલે કે બે પદોનો ગુણાકાર કરી, કાર્યનિયમ 1 પ્રમાણે પણ ગણી શકાય.

ઉદાહરણ 10 : $y = \frac{2x+3}{3x-2}$ હોય તો $\frac{dy}{dx}$ મેળવો.

$$y = \frac{2x+3}{3x-2}$$

અહીં, $u = 2x + 3$ અને $v = 3x - 2$ લો.

$\therefore \frac{du}{dx} = 2$ અને $\frac{dv}{dx} = 3$

હવે, $y = \frac{u}{v}$ છે.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$= \frac{(3x-2)(2) - (2x+3)(3)}{(3x-2)^2}$$

$$= \frac{(6x-4) - (6x+9)}{(3x-2)^2}$$

$$= \frac{6x-4-6x-9}{(3x-2)^2}$$

$$= \frac{-13}{(3x-2)^2}$$

ઉદાહરણ 11 : $y = \frac{3}{4x+5}$ હોય, તો y નું x સાપેક્ષ વિકલન કરો.

$$y = \frac{3}{4x+5}$$

અહીં, $u = 3$ અને $v = 4x + 5$ લો.

$\therefore \frac{du}{dx} = 0$ અને $\frac{dv}{dx} = 4$

હવે, $y = \frac{u}{v}$ છે.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$= \frac{(4x+5)(0) - 3(4)}{(4x+5)^2}$$

$$= \frac{0-12}{(4x+5)^2}$$

$$= \frac{-12}{(4x+5)^2}$$

ઉદાહરણ 12 : $y = \dfrac{2x^2 + 3x + 4}{x^2 + 5}$ હોય, તો $\dfrac{dy}{dx}$ મેળવો.

$$y = \frac{2x^2 + 3x + 4}{x^2 + 5}$$

અહીં, $u = 2x^2 + 3x + 4$ અને $v = x^2 + 5$ લો.

$\therefore \quad \dfrac{du}{dx} = 4x + 3$ અને $\dfrac{dv}{dx} = 2x$

હવે, $y = \dfrac{u}{v}$ છે.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$= \frac{\left(x^2 + 5\right)(4x + 3) - \left(2x^2 + 3x + 4\right)(2x)}{\left(x^2 + 5\right)^2}$$

$$= \frac{\left(4x^3 + 20x + 3x^2 + 15\right) - \left(4x^3 + 6x^2 + 8x\right)}{\left(x^2 + 5\right)^2}$$

$$= \frac{4x^3 + 20x + 3x^2 + 15 - 4x^3 - 6x^2 - 8x}{\left(x^2 + 5\right)^2}$$

$$= \frac{-3x^2 + 12x + 15}{\left(x^2 + 5\right)^2}$$

ઉદાહરણ 13 : $y = (3x + 7)^8$ નું x પ્રત્યે વિકલન કરો.

$$y = (3x + 7)^8$$

$u = 3x + 7$ લેતાં, $y = u^8$ થશે.

$\therefore \quad \dfrac{du}{dx} = 3$ અને $\dfrac{dy}{du} = 8u^7$

હવે, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \times \dfrac{du}{dx}$

$$= \left(8u^7\right)(3)$$

$$= 24u^7$$

u ની કિંમત મૂકતાં,

$$\frac{dy}{dx} = 24(3x + 7)^7$$

ઉદાહરણ 14 : $y = \sqrt{x^2 + 3}$ હોય, તો $\frac{dy}{dx}$ મેળવો.

$$y = \sqrt{x^2 + 3}$$

$u = x^2 + 3$ લેતાં, $y = \sqrt{u}$ થશે.

$$\therefore \quad \frac{du}{dx} = 2x \text{ અને } \frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}}.$$

હવે, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$

$$= \left(\frac{1}{2\sqrt{u}}\right)(2x)$$

$$= \frac{x}{\sqrt{u}}$$

u ની કિંમત મૂકતાં,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

ઉદાહરણ 15 : $y = 1 + \frac{2}{3 + \frac{4}{x}}$ નું x સાપેક્ષ વિકલિત મેળવો.

$$y = 1 + \frac{2}{3 + \frac{4}{x}}$$

$$= 1 + \frac{2x}{3x + 4}$$

$$= \frac{(3x + 4) + 2x}{3x + 4}$$

$$\therefore \quad y = \frac{5x + 4}{3x + 4}$$

અહીં, $u = 5x + 4$ અને $v = 3x + 4$ લો

$$\therefore \quad \frac{du}{dx} = 5 \text{ અને } \frac{dv}{dx} = 3$$

હવે, $y = \frac{u}{v}$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$= \frac{(3x + 4)(5) - (5x + 4)(3)}{(3x + 4)^2}$$

$$= \frac{(15x + 20) - (15x + 12)}{(3x + 4)^2}$$

$$= \frac{15x + 20 - 15x - 12}{(3x+4)^2}$$

$$= \frac{8}{(3x+4)^2}$$

ઉદાહરણ 16 : જો $2xy + 3x + y - 4 = 0$ હોય, તો $\frac{dy}{dx}$ મેળવો.

$$2xy + 3x + y - 4 = 0$$

$$\therefore \quad 2xy + y = 4 - 3x$$

$$\therefore \quad y(2x+1) = 4 - 3x$$

$$\therefore \quad y = \frac{4-3x}{2x+1}$$

અહીં, $u = 4 - 3x$ અને $v = 2x + 1$ લો.

$$\therefore \quad \frac{du}{dx} = -3 \text{ અને } \frac{dv}{dx} = 2$$

હવે, $y = \frac{u}{v}$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$= \frac{(2x+1)(-3) - (4-3x)(2)}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{(-6x-3) - (8-6x)}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{-6x - 3 - 8 + 6x}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{-11}{(2x+1)^2}$$

ઉદાહરણ 17 : $y = 2 + 3x + 4x^2 + \frac{5}{6-7x}$ હોય, તો $\frac{dy}{dx}$ મેળવો.

$$y = 2 + 3x + 4x^2 + \frac{5}{6-7x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[2 + 3x + 4x^2 + \frac{5}{6-7x}\right]$$

$$= 0 + 3(1) + 4(2x) + \frac{d}{dx}\left(\frac{5}{6-7x}\right)$$

$$= 3 + 8x + \frac{(6-7x)(0) - 5(-7)}{(6-7x)^2} \qquad [\because \text{ ભાગાકારનો નિયમ}]$$

$$= 3 + 8x + \frac{35}{(6-7x)^2}$$

ઉદાહરણ 18 : $y = \left(x + \frac{6}{x+5}\right)\left(\frac{3x+2}{x^2+5x+6}\right)$ **હોય, તો** $\frac{dy}{dx}$ **મેળવો.**

$$y = \left(x + \frac{6}{x+5}\right)\left(\frac{3x+2}{x^2+5x+6}\right)$$

$$= \left[\frac{x(x+5)+6}{x+5}\right]\left(\frac{3x+2}{x^2+5x+6}\right)$$

$$= \left(\frac{x^2+5x+6}{x+5}\right)\left(\frac{3x+2}{x^2+5x+6}\right)$$

$$= \frac{3x+2}{x+5}$$

અહીં, $u = 3x + 2$ અને $v = x + 5$ લો.

$\therefore \frac{du}{dx} = 3$ અને $\frac{dv}{dx} = 1$

હવે, $y = \frac{u}{v}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$= \frac{(x+5)(3) - (3x+2)(1)}{(x+5)^2}$$

$$= \frac{(3x+15) - (3x+2)}{(x+5)^2}$$

$$= \frac{3x+15-3x-2}{(x+5)^2}$$

$$= \frac{13}{(x+5)^2}$$

ઉદાહરણ 19 : $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ **હોય, તો** $f'(x)$ **શોધો અને તે ઉપરથી** $f'(1)$ **મેળવો.**

અહીં, $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

$\therefore f'(x) = 6x + 2$

$\therefore f'(1) = 6(1) + 2$

$= 8$

ઉદાહરણ 20 : જો $f(x) = x^2 - x + 3$ હોય, તો x ની કઈ કિંમત માટે $f'(x) = 0$ છે ?

અહીં, $f(x) = x^2 - x + 3$

$\therefore\ f'(x) = 2x - 1 + 0$

$= 2x - 1$

હવે, $f'(x) = 0$ આપેલ છે.

$\therefore\ 2x - 1 = 0$

$\therefore\ 2x = 1$

$\therefore\ x = \frac{1}{2}$

5.5 દ્વિતીય વિકલન

આપણે અગાઉનાં ઘણાં ઉદાહરણોમાં જોયું કે સામાન્ય રીતે x નું વિધેયનું વિકલિત પણ x નું વિધેય હોય છે. $y = f(x)$ ના વિકલિતને $\frac{dy}{dx}$ અથવા $f'(x)$ વડે દર્શાવાય છે. આ વિકલિતને વિધેયનું પ્રથમ ક્રમનું વિકલિત કહેવાય છે. વિધેયના પ્રથમ ક્રમના વિકલિતના વિકલિતને બીજા ક્રમનું વિકલિત કહે છે. તેને $\frac{d^2y}{dx^2}$ અથવા $f''(x)$ વડે દર્શાવાય છે. વિધેયને મહત્તમ કે ન્યૂનતમ બનાવવા માટે પ્રથમ ક્રમના વિકલિતની સાથે બીજા ક્રમનું વિકલિત ઉપયોગી છે. તેનો ઉપયોગ ખર્ચના વિધેયને ન્યૂનતમ બનાવવા, આમદાની વિધેયને મહત્તમ બનાવવા અને નફાના વિધેયને મહત્તમ બનાવવા માટે થાય છે.

હવે આપણે કેટલાક ઉદાહરણ લઈ બીજા ક્રમનું વિકલિત મેળવવાની રીત જોઈશું.

ઉદાહરણ 21 : $y = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x + 7$ હોય તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ મેળવો. $x = 1$ માટે તેની કિંમત મેળવો.

$y = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x + 7$

$\therefore\ \frac{dy}{dx} = 12x^3 - 6x^2 + 2x - 8$

$\therefore\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right]$

$= \frac{d}{dx}\left[12x^3 - 6x^2 + 2x - 8\right]$

$= 36x^2 - 12x + 2$

$x = 1$ મૂકતાં,

$\frac{d^2y}{dx^2} = 36(1)^2 - 12(1) + 2$

$= 36 - 12 + 2$

$= 26$

ઉદાહરણ 22 : $f(x) = 4x^3 + 2x^2 + 7x + 9$ હોય, તો x ની કઈ કિંમત માટે $f''(x) = 52$ થાય ?

$$f(x) = 4x^3 + 2x^2 + 7x + 9$$

$$\therefore\ f'(x) = 12x^2 + 4x + 7$$

$$\therefore\ f''(x) = 24x + 4$$

હવે, $f''(x) = 52$

$$\therefore\ 24x + 4 = 52$$

$$\therefore\ 24x = 48$$

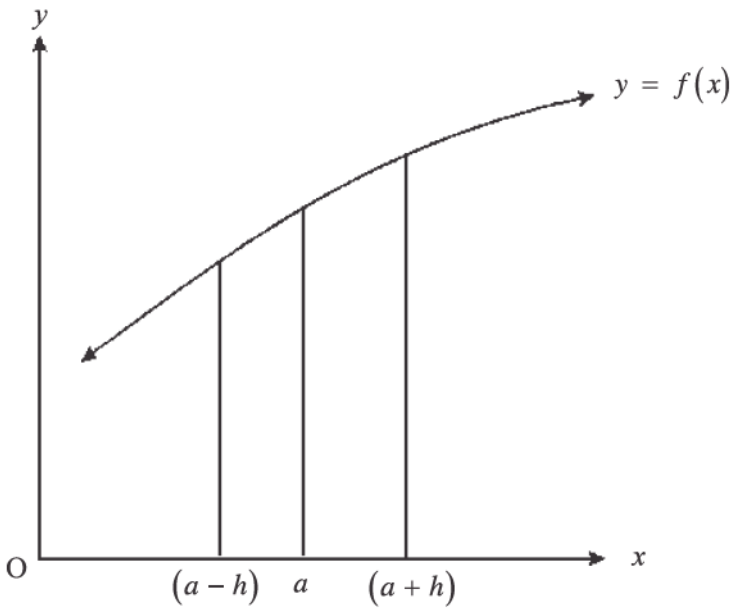
$$\therefore\ x = 2$$

5.6 વધતું વિધેય અને ઘટતું વિધેય

વધતું વિધેય :

આકૃતિમાં $y = f(x)$ વિધેયનો વક્ર દોરવામાં આવ્યો છે. $x = a$ આગળ વિધેયની કિંમત $y = f(a)$ થાય. જો h અલ્પ ધન સંખ્યા હોય અને જો $f(a+h) > f(a)$ તેમજ $f(a) > f(a-h)$ હોય તો $x = a$ આગળ $f(x)$ એ વધતું વિધેય છે એમ કહેવાય.

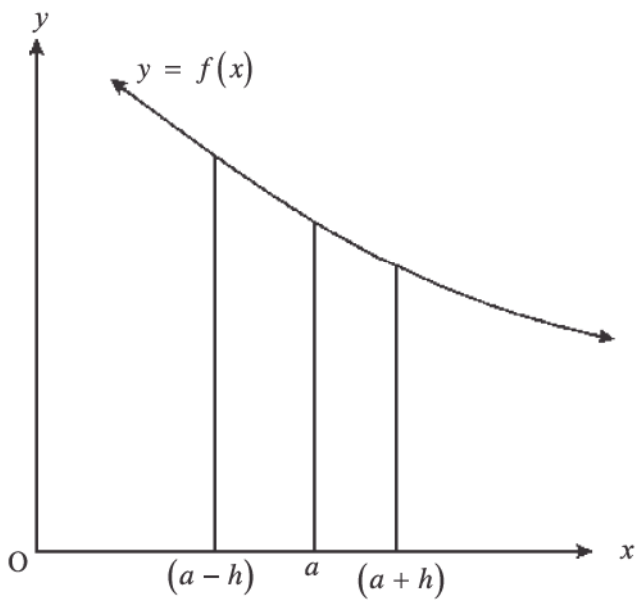
જો $x = a$ આગળ વિધેય વધતું હોય, તો $f'(a) > 0$ થાય.



ઘટતું વિધેય

આકૃતિમાં $y = f(x)$ વિધેયનો વક્ર દોરવામાં આવ્યો છે. $x = a$ આગળ વિધેયની કિંમત $y = f(a)$ થાય. જો h અલ્પ ધન સંખ્યા હોય અને જો $f(a+h) < f(a)$ તેમજ $f(a) < f(a-h)$ હોય તો $x = a$ આગળ $f(x)$ એ ઘટતું વિધેય છે એમ કહેવાય.

જો $x = a$ આગળ વિધેય ઘટતું હોય, તો $f'(a) < 0$ થાય.



ઉદાહરણ 23 : જો $f(x) = x^2 - 4x$ હોય, તો $x = -1$, $x = 0$ અને $x = 3$ આગળ વિધેય વધતું છે કે ઘટતું છે તે નક્કી કરો.

$$f(x) = x^2 - 4x$$

$$\therefore \quad f'(x) = 2x - 4$$

$x = -1$ આગળ

$$f'(-1) = 2(-1) - 4$$

$$= -6 < 0$$

$\therefore$ $x = -1$ આગળ વિધેય ઘટતું છે.

$x = 0$ આગળ

$$f'(0) = 2(0) - 4$$

$$= -4 < 0$$

$\therefore$ $x = 0$ આગળ વિધેય ઘટતું છે.

$x = 3$ આગળ

$$f'(3) = 2(3) - 4$$

$$= 2 > 0$$

$\therefore$ $x = 3$ આગળ વિધેય વધતું છે.

ઉદાહરણ 24 : જો $y = x^3 - 3x^2 + 7$ હોય, તો $x = 1$ અને $x = 3$ આગળ વિધેય વધતું છે કે ઘટતું છે તે નક્કી કરો.

$$y = x^3 - 3x^2 + 7$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x$$

$x = 1$ આગળ

$$\frac{dy}{dx} = 3(1)^2 - 6(1)$$

$$= 3 - 6$$

$$= -3 < 0$$

$\therefore$ $x = 1$ આગળ વિધેય ઘટતું છે.

$x = 3$ આગળ

$$\frac{dy}{dx} = 3(3)^2 - 6(3)$$

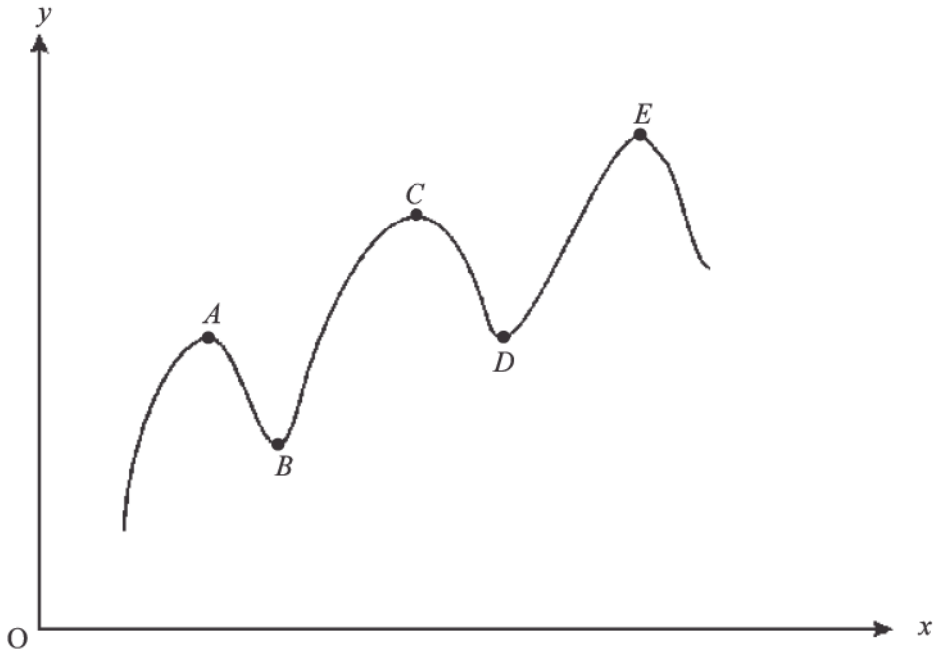
$$= 27 - 18$$

$$= 9 > 0$$

$\therefore$ $x = 3$ આગળ વિધેય વધતું છે.

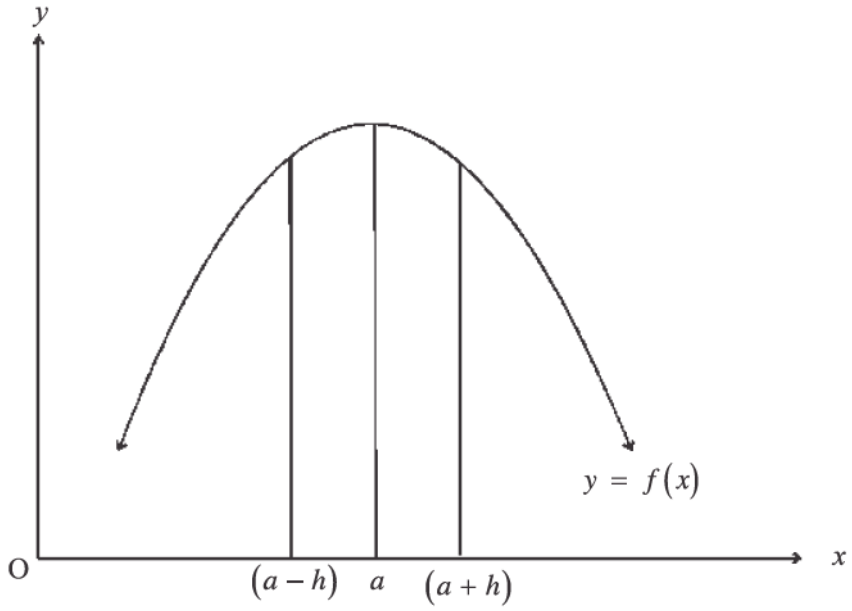
5.7 વિધેયની મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમતો

વધતું અને ઘટતું વિધેયની આપણે ચર્ચા કરી. હવે, આપણે વિધેયની મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમતો મેળવવાની રીતનો અભ્યાસ કરીશું. ધારો કે કોઈ એક વિધેય $y = f(x)$ નો આલેખ નીચે પ્રમાણે મળે છે.



આલેખ ઉપરથી જોઈ શકાય છે કે, A, C અને E બિંદુઓએ વિધેયની કિંમત મહત્તમ છે, જ્યારે B અને D બિંદુઓએ વિધેયની કિંમત ન્યૂનતમ છે. આમ, વિધેયની મહત્તમ કે ન્યૂનતમ કિંમત એક કરતાં વધુ હોઈ શકે.

મહત્તમ કિંમત :

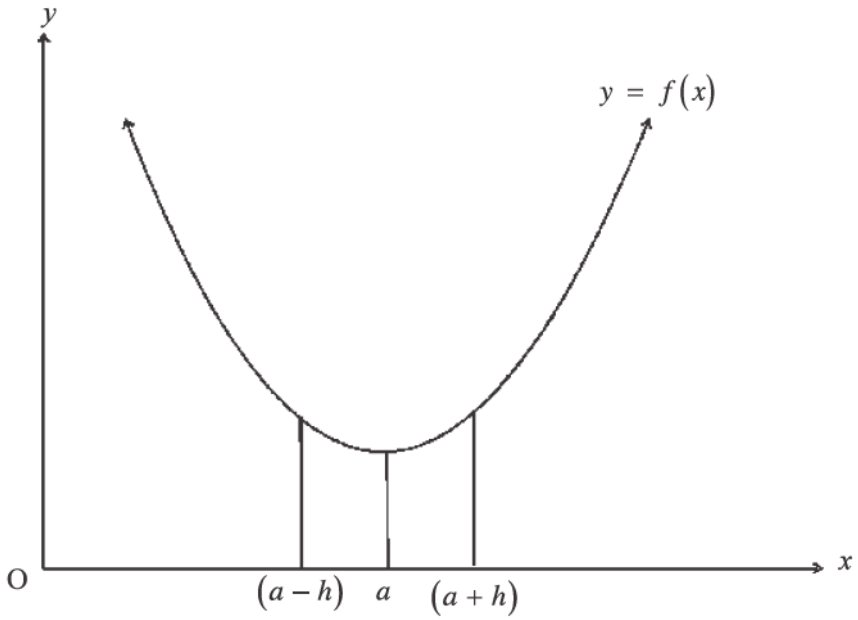


આકૃતિમાં $y = f(x)$ વિધેયનો વક્ર દોરવામાં આવ્યો છે. $x = a$ આગળ વિધેયની કિંમત $y = f(a)$ થાય. જો h અલ્પ ધન સંખ્યા હોય અને જો $f(a) > f(a+h)$ તેમજ $f(a) > f(a-h)$ હોય, તો $x = a$ આગળ વિધેય મહત્તમ છે એમ કહેવાય.

કોઈ એક વિધેય $x = a$ આગળ મહત્તમ થવા માટે નીચેની શરતો જરૂરી અને પર્યાપ્ત છે :

(i) $f'(a) = 0$ (ii) $f''(a) < 0$

ન્યૂનતમ કિંમત :



આકૃતિમાં $y = f(x)$ વિધેયનો વક્ર દોરવામાં આવ્યો છે. $x = a$ આગળ વિધેયની કિંમત $y = f(a)$ થાય. જો h અલ્પ ધન સંખ્યા હોય અને જો $f(a) < f(a+h)$ તેમજ $f(a) < f(a-h)$ હોય, તો $x = a$ આગળ વિધેય ન્યૂનતમ છે એમ કહેવાય.

કોઈ એક વિધેય $x = a$ આગળ ન્યૂનતમ થવા માટે નીચેની શરતો જરૂરી અને પર્યાપ્ત છે :

(i) $f'(a) = 0$ (ii) $f''(a) > 0$

વિધેયની આ રીતે મેળવેલ મહત્તમ કે ન્યૂનતમ કિંમતો એ વિધેયની સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ કિંમતો છે.

મહત્તમ કિંમત અથવા ન્યૂનતમ કિંમત એટલે વિધેયની સૌથી મોટામાં મોટી અથવા સૌથી નાનામાં નાની કિંમત એવો અર્થ થતો નથી. $x = a$ આગળ વિધેયની કિંમત મહત્તમ છે, એનો અર્થ ફક્ત એટલો જ થાય છે કે, $x = a$ ની આજુબાજુના અલ્પ ગાળામાં $x = a$ આગળ વિધેયની કિંમત મહત્તમ છે, તે જ રીતે $x = b$ આગળ વિધેયની કિંમત ન્યૂનતમ છે. એનો અર્થ ફક્ત એટલો જ થાય છે કે, $x = b$ ની આજુબાજુના અલ્પ ગાળામાં વિધેયની કિંમત ન્યૂનતમ છે. જે બિંદુઓએ $f(x)$ ની મહત્તમ અથવા ન્યૂનતમ કિંમતો મળે છે તેને **સ્થિર બિંદુઓ** કહે છે અને સ્થિર બિંદુઓ મેળવવાની જરૂરી શરત $\frac{dy}{dx} = 0$ છે.

વિધેયની મહત્તમ અથવા ન્યૂનતમ કિંમતો મેળવવાની રીત :

- આપેલા વિધેય માટે $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ મેળવો.
- સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = 0$ નું સમાધાન કરતી x ની કિંમતો મેળવો, જેને સ્થિર બિંદુઓ કહેવાય છે.
- દ્વિતીય વિકલન મેળવી તેમાં x ની આ કિંમતો વારાફરતી મૂકો.
- જે સ્થિર બિંદુ માટે દ્વિતીય વિકલિતની કિંમત ધન થાય, x ની તે કિંમત વિધેયની ન્યૂનતમ કિંમત આપે છે અને જે સ્થિર બિંદુ માટે દ્વિતીય વિકલિતની કિંમત ઋણ થાય, x ની તે કિંમત વિધેયની મહત્તમ કિંમત આપે છે.
- વિધેયની મહત્તમ અથવા ન્યૂનતમ કિંમત મેળવવા ઉપરની x ની કિંમતો વિધેયમાં મૂકવામાં આવે છે.

આપણે કેટલાંક ઉદાહરણથી વિધેયની મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમત મેળવવાની રીત જોઈશું.

ઉદાહરણ 25 : $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 4$ ની મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમતો મેળવો.

અહીં, $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 4$

$\therefore \quad f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$

સ્થિર કિંમતો માટે $f'(x) = 0$

$\therefore \quad 6x^2 + 6x - 12 = 0$

$\therefore \quad x^2 + x - 2 = 0$

$\therefore \quad (x+2)(x-1) = 0$

$\therefore \quad x = -2$ અથવા $x = 1$

હવે, $f''(x) = 12x + 6$

$x = -2$ આગળ

$$f''(-2) = 12(-2) + 6$$
$$= -18 < 0$$

$\therefore \quad x = -2$ આગળ વિધેયની મહત્તમ કિંમત મળે છે.

$x = 1$ આગળ

$$f''(1) = 12(1) + 6$$
$$= 18 > 0$$

$\therefore \quad x = 1$ આગળ વિધેયની ન્યૂનતમ કિંમત મળે છે.

$f(x)$ની ન્યૂનતમ કિંમત

$x = 1$ ને વિધેય $f(x)$ માં મૂકતાં,

$$f(1) = 2(1)^3 + 3(1)^2 - 12(1) - 4$$
$$= 2 + 3 - 12 - 4$$
$$= -11$$

$f(x)$ની મહત્તમ કિંમત

$x = -2$ ને વિધેય $f(x)$ માં મૂકતાં,

$$f(-2) = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(-2) - 4$$
$$= -16 + 12 + 24 - 4$$
$$= 16$$

આમ, $f(x)$ ની મહત્તમ કિંમત 16 અને ન્યૂનતમ કિંમત -11 છે.

ઉદાહરણ 26 : $y = x^3 - 2x^2 - 4x - 1$ ની મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમતો મેળવો.

અહીં, $y = x^3 - 2x^2 - 4x - 1$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x - 4$$

સ્થિર કિંમતો માટે $\frac{dy}{dx} = 0$

$$\therefore \quad 3x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$\therefore \quad 3x^2 - 6x + 2x - 4 = 0$$

$$\therefore \quad 3x(x-2) + 2(x-2) = 0$$

$$\therefore \quad (x-2)(3x+2) = 0$$

$\therefore \quad x = 2$ અથવા $x = -\frac{2}{3}$

હવે $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 4$

$x = 2$ આગળ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6(2) - 4$$

$$= 8 > 0$$

$\therefore \quad x = 2$ આગળ વિધેયની ન્યૂનતમ કિંમત મળે છે.

$x = -\frac{2}{3}$ આગળ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6\left(\frac{-2}{3}\right) - 4$$

$$= -4 - 4$$

$$= -8 < 0$$

$\therefore \quad x = -\frac{2}{3}$ આગળ વિધેયની મહત્તમ કિંમત મળે છે.

y ની ન્યૂનતમ કિંમત

$x = 2$ ને વિધેય y માં મૂકતાં,

$$y = (2)^3 - 2(2)^2 - 4(2) - 1$$

$$= 8 - 8 - 8 - 1$$

$$= -9$$

y ની મહત્તમ કિંમત

$x = -\frac{2}{3}$ ને વિધેય y માં મૂકતાં,

$$y = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 - 2\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 4\left(-\frac{2}{3}\right) - 1$$

$$= \frac{-8}{27} - \frac{8}{9} + \frac{8}{3} - 1$$

$$= \frac{13}{27}$$

આમ, y ની મહત્તમ કિંમત $\frac{13}{27}$ અને ન્યૂનતમ કિંમત -9 છે.

5.8 સીમાંત આવક અને સીમાંત ખર્ચ

આપણે જોઈશું કે કેટલાંક અર્થશાસ્ત્ર અને ધંધાકીય પ્રશ્નોના ઉકેલ મેળવવા માટે વિકલનનો ઉપયોગ થાય છે. આપણે જોયું કે, પ્રથમ અને દ્વિતીય વિકલિતનો ઉપયોગ વિધેયની મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમતો મેળવવામાં થઈ શકે છે.

વિધેયના પ્રથમ વિકલિતનો ઉપયોગ સીમાંત આવક અને સીમાંત ખર્ચ મેળવવામાં થઈ શકે છે.

અર્થશાસ્ત્રના અભ્યાસમાં વસ્તુની કિંમત અને માંગ વચ્ચેના સંબંધો વિધેય દ્વારા રજૂ કરી શકાય છે. જો વસ્તુની કિંમતને p વડે અને તેની માંગને x વડે દર્શાવવામાં આવે તો આ ઉપરથી $x = f(p)$ સંબંધ મળે છે, જેને માંગનું વિધેય કહેવાય છે. કોઈ પણ વસ્તુના x એકમો વેચવાથી થતી આવક અથવા આમદાનીને R વડે દર્શાવીએ તો,

$$R = xp$$

આમ, આમદાની R એ માંગ x નું વિધેય થાય છે.

માંગમાં અલ્પ ફેરફાર થવાથી આમદાનીમાં થતાં ફેરફારને **સીમાંત આમદાની (Marginal Revenue)** કહેવાય છે.

આમદાની વિધેયનું x સાપેક્ષ વિકલિત લેવાથી સીમાંત આમદાની મેળવી શકાય છે. આમ, માંગ x હોય ત્યારે

$$\text{સીમાંત આમદાની} = \frac{dR}{dx}$$

વસ્તુના x એકમો ઉત્પાદન કરવાના ખર્ચ C વડે દર્શાવીએ તો C ને પણ x ના વિધેય તરીકે રજૂ કરી શકાય.

ઉત્પાદનમાં અલ્પ ફેરફાર કરવાથી ખર્ચમાં થતા ફેરફારને **સીમાંત ખર્ચ (Marginal Cost)** કહેવાય છે.

ખર્ચના વિધેયનું x સાપેક્ષ વિકલિત લેવાથી સીમાંત ખર્ચ મેળવી શકાય છે. આમ, ઉત્પાદન x હોય ત્યારે

$$\text{સીમાંત ખર્ચ} = \frac{dC}{dx}$$

ઉદાહરણ 27 : જો પિઝા (Pizza)ની માંગનું વિધેય $p = 150 - 4x$ હોય, તો જ્યારે પિઝાની માંગ 3 હોય, ત્યારે સીમાંત આમદાની શોધો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

અહીં માંગનું વિધેય $p = 150 - 4x$

હવે આમદાની વિધેય $R = p \cdot x$

$$= (150 - 4x)\,x$$

$$\therefore \quad R = 150x - 4x^2$$

$$\text{સીમાંત આમદાની } \frac{dR}{dx} = 150 - 8x$$

તો જ્યારે પિઝાની માંગ $x = 3$ હોય ત્યારે

$$\text{સીમાંત આમદાની } \frac{dR}{dx} = 150 - 8(3)$$

$$= 126$$

અર્થઘટન : ચોથો પિઝા વેચવાથી થતી આમદાની આશરે ₹ 126 છે.

ઉદાહરણ 28 : જો કોઈ એક વસ્તુની માંગનું વિધેય $x = \frac{50-p}{2}$ હોય, તો જ્યારે વસ્તુની કિંમત 30 હોય, ત્યારે સીમાંત આમદાની શોધો.

અહીં માંગનું વિધેય $x = \frac{50-p}{2}$

$\therefore \quad 2x = 50 - p$

$\therefore \quad p = 50 - 2x$

હવે આમદાની વિધેય $R = p \cdot x$

$= (50 - 2x)x$

$\therefore \quad R = 50x - 2x^2$

સીમાંત આમદાની $\frac{dR}{dx} = 50 - 4x$

કિંમત $p = 30$ હોય ત્યારે

$x = \frac{50-30}{2}$

$\therefore \quad x = 10$

માંગ $x = 10$ હોય ત્યારે

સીમાંત આમદાની $= \frac{dR}{dx} = 50 - 4(10)$

$= 10$

અર્થઘટન : 11મો એકમ વેચવાથી થતી આમદાની આશરે ₹ 10 છે.

ઉદાહરણ 29 : એક વસ્તુના x એકમોના ઉત્પાદનના ખર્ચનું વિધેય $C = 5x^2 + 6x + 2000$ છે. જ્યારે ઉત્પાદન 50 એકમો હોય ત્યારે સીમાંત ખર્ચ શોધો.

ખર્ચનું વિધેય $C = 5x^2 + 6x + 2000$

$\therefore$ સીમાંત ખર્ચ $\frac{dC}{dx} = 10x + 6$

જ્યારે $x = 50$ હોય ત્યારે

સીમાંત ખર્ચ $\frac{dC}{dx} = 10(50) + 6$

$= 506$

અર્થઘટન : 51મો એકમ ઉત્પાદન કરવાનો ખર્ચ આશરે ₹ 506 છે.

5.9 માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા

સામાન્ય રીતે વસ્તુની કિંમતમાં ફેરફાર થાય તો તેની માંગમાં વિરુદ્ધ દિશામાં ફેરફાર પરિણમે છે. વસ્તુની કિંમત વધવાથી તેની માંગમાં ઘટાડો થાય છે અને વસ્તુની કિંમત ઘટવાથી તેની માંગમાં વધારો થાય છે. પરંતુ આ ફેરફારનું પ્રમાણ બધી વસ્તુઓ માટે સમાન હોતું નથી. જેમકે, મોજશોખની વસ્તુઓની કિંમતમાં એકદમ વધારો થાય તો તેમની માંગમાં મોટો ઘટાડો થાય છે, જ્યારે જીવન-જરૂરિયાતની વસ્તુઓની કિંમતમાં વધારો થાય તો તેમની માંગમાં મોટો ઘટાડો થતો નથી. આ રીતે વસ્તુની કિંમતમાં ફેરફાર થવાથી માંગમાં જે પ્રમાણમાં ફેરફાર થાય તેનો અભ્યાસ માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા વડે કરી શકાય છે.

વ્યાખ્યા : માંગમાં થતા ટકાવારી ફેરફાર અને કિંમતમાં થતા ટકાવારી ફેરફારના ગુણોત્તરને માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા (Elasticity of Demand) કહેવાય છે.

એટલે કે,

$$\text{માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા} = -\frac{\text{માંગમાં થતો ટકાવારી ફેરફાર}}{\text{કિંમતમાં થતો ટકાવારી ફેરફાર}}$$

વસ્તુની કિંમત અને તેની માંગ વિરુદ્ધ દિશામાં ફેરફાર થતા હોવાથી આ ગુણોત્તર ઋણ આવે છે. સરળતા ખાતર માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતાની કિંમત ધન મેળવવામાં આવે છે અને તેથી સૂત્રમાં ઋણ નિશાની લેવામાં આવે છે. જો માંગ x અને કિંમત p તરીકે દર્શાવવામાં આવે અને માંગનું વિધેય $x = f(p)$ આપેલું હોય, તો

માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા $= -\frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$ થાય.

ઉદાહરણ30 : જો કોઈ એક વસ્તુની માંગનું વિધેય $x = 50 - 4p$ હોય, તો જ્યારે કિંમત $p = 5$ હોય, ત્યારે માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા શોધો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

માંગનું વિધેય $x = 50 - 4p$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dp} = 0 - 4(1)$$

$$= -4$$

હવે, માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા $= -\frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$

$$= \frac{-p}{(50-4p)} \times (-4)$$

$$= \frac{4p}{50-4p}$$

કિંમત $p = 5$ હોય ત્યારે

માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા $= \frac{4(5)}{50-4(5)}$

$$= \frac{20}{50-20}$$

$$= \frac{20}{30}$$

$$= 0.67$$

અર્થઘટન : જ્યારે કિંમત 5 હોય ત્યારે કિંમતમાં 1 ટકાનો ફેરફાર કરવાથી માંગમાં આશરે 0.67 ટકાનો ફેરફાર (વિરુદ્ધ દિશામાં) થાય છે.

ઉદાહરણ 31 : જો કોઈ એક વસ્તુની માંગનું વિધેય $p = 12 - \sqrt{x}$ હોય, તો જ્યારે માંગ 9 એકમ હોય, ત્યારે માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા શોધો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

માંગનું વિધેય $p = 12 - \sqrt{x}$

$$\therefore \quad \frac{dp}{dx} = 0 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dp} = -2\sqrt{x} \qquad \left[\because \quad \frac{dx}{dp} = \frac{1}{\frac{dp}{dx}}\right]$$

હવે, માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા $= -\frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$

$$= \frac{-\left(12 - \sqrt{x}\right)}{x} \times \left(-2\sqrt{x}\right)$$

$$= \frac{\left(12 - \sqrt{x}\right)\left(2\sqrt{x}\right)}{x}$$

માંગ 9 એકમ હોય ત્યારે

માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા $= \frac{\left(12 - \sqrt{9}\right)\left(2\sqrt{9}\right)}{9}$

$$= \frac{(12 - 3)(2 \times 3)}{9}$$

$$= \frac{9 \times 6}{9}$$

$$= 6$$

અર્થઘટન : જ્યારે માંગ 9 એકમ હોય ત્યારે કિંમતમાં 1 ટકાનો ફેરફાર કરવાથી માંગમાં 6 ટકાનો ફેરફાર (વિરુદ્ધ દિશામાં) થાય છે.

5.10 ખર્ચ વિધેયનું ન્યૂનતમીકરણ તથા આમદાની વિધેય અને નફાના વિધેયનું મહત્તમીકરણ

વ્યવહારમાં કોઈ પણ વસ્તુના ઉત્પાદનમાં થતો ખર્ચ ન્યૂનતમ થાય તેમજ ઉત્પાદિત એકમો વેચવાથી થતી આમદાની અને નફો મહત્તમ થાય એ પ્રકારના પ્રશ્નો ઉકેલવાના હોય છે. આપણે જાણીએ છીએ કે, ઉત્પાદનનું ખર્ચ C અથવા ઉત્પાદિત એકમોના વેચાણમાંથી થતી આમદાની R અને નફો P ને x ના વિધેય તરીકે રજૂ કરી શકાય અને વિકલનનો ઉપયોગ કરીને તે ન્યૂનતમ અથવા મહત્તમ ક્યારે થાય તે નક્કી કરી શકાય.

ઉત્પાદન-ખર્ચના વિધેય C ને ન્યૂનતમ બનાવવાનું હોય તે માટેની શરતો

$\frac{dC}{dx} = 0$ અને $\frac{d^2C}{dx^2} > 0$ છે.

તેવી જ રીતે આમદાની R ને મહત્તમ બનાવવા માટેની શરતો

$\frac{dR}{dx} = 0$ અને $\frac{d^2R}{dx^2} < 0$ છે.

અને નફો p ને મહત્તમ બનાવવા માટેની શરતો

$\frac{dP}{dx} = 0$ અને $\frac{d^2P}{dx^2} < 0$ છે.

ન્યૂનતમ ખર્ચ, મહત્તમ આમદાની અને મહત્તમ નફો મેળવવાની રીત સમજવા કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 32 : દરરોજ x ટન ઉત્પાદન કરવા માટે એક વસ્તુનું એક ટન દીઠ ઉત્પાદન-ખર્ચ $10x^2 - 1000x + 50000$ થાય છે, તો કેટલા ટન ઉત્પાદન કરવાથી ખર્ચ ન્યૂનતમ થશે ? ન્યૂનતમ ખર્ચ પણ શોધો.

ઉત્પાદન ખર્ચનું વિધેય $C = 10x^2 - 1000x + 50000$

$\therefore \quad \frac{dC}{dx} = 20x - 1000$

$\frac{dC}{dx} = 0$ મૂકતાં

$20x - 1000 = 0$

$\therefore \quad 20x = 1000$

$\therefore \quad x = 50$

હવે $\frac{d^2C}{dx^2} = 20$

અહી $x = 50$, $\frac{d^2C}{dx^2}$ માં મૂકતાં,

$\frac{d^2C}{dx^2} = 20 > 0$

$\therefore \quad x = 50$ માટે ઉત્પાદન-ખર્ચ ન્યૂનતમ મળે.

ન્યૂનતમ ખર્ચ શોધવા માટે $x = 50$ ને ઉત્પાદન-ખર્ચના વિધેયમાં મૂકતાં,

ન્યૂનતમ ખર્ચ $= 10(50)^2 - 1000(50) + 50000$

$= 10(2500) - 50000 + 50000$

$= 25000$

ઉદાહરણ 33 : એક ફેક્ટરી x એકમોનું ઉત્પાદન કરે છે અને તેની ઉત્પાદન ક્ષમતા દરરોજના 60,000 એકમોની છે. તેનું કુલ દૈનિક ઉત્પાદન-ખર્ચ $C = 250000 + 0.08x + \frac{200000000}{x}$ છે, તો ન્યૂનતમ ખર્ચ માટે કેટલા એકમોનું ઉત્પાદન કરવું જોઈએ ?

ઉત્પાદન-ખર્ચનું વિધેય $C = 250000 + 0.08x + \frac{200000000}{x}$

$$\therefore \quad \frac{dC}{dx} = 0.08 - \frac{200000000}{x^2}$$

$\frac{dC}{dx} = 0$ મૂકતાં

$$0.08 - \frac{200000000}{x^2} = 0$$

$$\therefore \quad 0.08 = \frac{200000000}{x^2}$$

$$\therefore \quad 0.08\ x^2 = 200000000$$

$$\therefore \quad x^2 = 2500000000$$

$\therefore \quad x = 50000$ અથવા $x = -50000$

ઋણ ઉત્પાદન શક્ય નથી તેથી $x = 50000$ લઈશું.

હવે $\frac{d^2C}{dx^2} = \frac{400000000}{x^3}$

અહી $x = 50000$, $\frac{d^2C}{dx^2}$ માં મૂકતાં,

$$\frac{d^2C}{dx^2} = \frac{400000000}{(50000)^3} > 0$$

$\therefore \quad x = 50000$ માટે ઉત્પાદન-ખર્ચ ન્યૂનતમ મળે.

આમ, 50000 એકમોનું ઉત્પાદન કરવું જોઈએ જેથી ઉત્પાદન-ખર્ચ ન્યૂનતમ મળે.

ઉદાહરણ 34 : જો કોઈ ઘડિયાળનું માંગનું વિધેય $p = 6000 - 2x$ હોય, તો મહત્તમ આમદાની માટે કિંમત શોધો અને તે કિંમતે ઉદ્ભવતી માંગ શોધો.

અહીં માંગનું વિધેય $p = 6000 - 2x$

હવે આમદાની વિધેય $R = p \cdot x$

$$= (6000 - 2x)x$$

$$\therefore \quad R = 6000x - 2x^2$$

$$\therefore \quad \frac{dR}{dx} = 6000 - 4x$$

$\frac{dR}{dx} = 0$ મૂકતાં

$$6000 - 4x = 0$$

$$\therefore \quad 6000 = 4x$$

$$\therefore \quad x = 1500$$

હવે $\frac{d^2R}{dx^2} = 0 - 4$

$= -4$

અહીં $x = 1500$, $\frac{d^2R}{dx^2}$ માં મૂકતાં,

$$\frac{d^2R}{dx^2} = -4 < 0$$

$\therefore$ $x = 1500$ માટે આમદાની મહત્તમ થશે.

હવે આ માંગ માટે કિંમત શોધીએ.

$x = 1500$, માંગનું વિધેય $p = 6000 - 2x$ માં મૂકતાં,

કિંમત $p = 6000 - 2(1500)$

$= 6000 - 3000$

$p = 3000$

ઉદાહરણ 35 : એક ઉત્પાદકના ઉત્પાદન-ખર્ચનું વિધેય $C = 100 + 0.015x^2$ અને આમદાની વિધેય $R = 3x$ છે, તો નફાનું વિધેય શોધો. ઉત્પાદકે મહત્તમ નફા માટે કેટલા એકમોનું ઉત્પાદન કરવું જોઈએ ?

ઉત્પાદન-ખર્ચનું વિધેય $C = 100 + 0.015x^2$ અને આમદાની વિધેય $R = 3x$

હવે નફાનો વિધેય $P = R - C$

$= 3x - \left(100 + 0.015x^2\right)$

$\therefore$ $P = 3x - 100 - 0.015x^2$

$\therefore$ $\frac{dP}{dx} = 3 - 0.015(2x)$

$= 3 - 0.03x$

$\frac{dP}{dx} = 0$ મૂકતાં

$3 - 0.03x = 0$

$\therefore$ $3 = 0.03x$

$\therefore$ $x = \frac{3}{0.03}$

$x = 100$

હવે $\frac{d^2P}{dx^2} = 0 - 0.03(1)$

$= -0.03$

અહીં $x = 100$, $\frac{d^2P}{dx^2}$ માં મૂકતાં,

$$\frac{d^2P}{dx^2} = -0.03 < 0$$

$\therefore$ $x = 100$ માટે નફો મહત્તમ થશે.

સારાંશ

- વિકલિત $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
- જો $y = x^n$, $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$
- જો $y = k$ (અચળાંક), $\frac{dy}{dx} = 0$
- જો u અને v એ x ના વિકલનીય વિધેયો હોય, તો

  (1) જો $y = u \pm v$ હોય, તો $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$

  (2) જો $y = u \cdot v$ હોય, તો $\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

  (3) જો $y = \frac{u}{v}$ હોય, તો $\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

  (4) સાંકળનો નિયમ : $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$
- જો $x = a$ આગળ વિધેય વધતું હોય, તો $f'(a) > 0$ થવું જોઈએ.
- જો $x = a$ આગળ વિધેય ઘટતું હોય, તો $f'(a) < 0$ થવું જોઈએ.
- વિધેય $x = a$ આગળ મહત્તમ થવા માટે જરૂરી અને પર્યાપ્ત શરતો : $f'(a) = 0$ અને $f''(a) < 0$.
- વિધેય $x = a$ આગળ ન્યૂનતમ થવા માટે જરૂરી અને પર્યાપ્ત શરતો : $f'(a) = 0$ અને $f''(a) > 0$.
- સીમાંત ખર્ચ $= \frac{dC}{dx}$
- સીમાંત આમદાની $= \frac{dR}{dx}$
- માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા $= -\frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$
- ઉત્પાદન ખર્ચના વિધેય C ને ન્યૂનતમ બનાવવાનું હોય તે માટે શરતો $\frac{dC}{dx} = 0$ અને $\frac{d^2C}{dx^2} > 0$ છે.
- આમદાની R ને મહત્તમ બનાવવાનું હોય તે માટે શરતો $\frac{dR}{dx} = 0$ અને $\frac{d^2R}{dx^2} < 0$ છે.
- નફો P ને મહત્તમ બનાવવાનું હોય તે માટે શરતો $\frac{dP}{dx} = 0$ અને $\frac{d^2P}{dx^2} < 0$ છે.

સ્વાધ્યાય 5

વિભાગ A

નીચે આપેલ બહુવિકલ્પ પ્રશ્નો માટે સાચા વિકલ્પની પસંદગી કરો :

1. વિધેય $f(x)$ નું વિકલિતનું સૂત્ર કયું છે ?

(a) $\lim_{h \to x} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ (b) $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(x)}{h}$

(c) $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ (d) $\lim_{h \to x} \frac{f(x) - f(x+h)}{h}$

2. $y = ax^n$, જ્યાં a અચળ સંખ્યા હોય તો $\frac{dy}{dx}$ ની કિંમત શું થાય ?

(a) nx^{n-1} (b) $an\,x^{n-1}$ (c) 0 (d) $an\,x^{n+1}$

3. $y = ax + b$, જ્યાં a અને b અચળ સંખ્યા હોય, તો $\frac{dy}{dx}$ શું થાય ?

(a) a (b) b (c) $a + b$ (d) 0

4. $f(x) = \frac{4}{x^2}$ નું વિકલિત શું થાય ?

(a) $\frac{4}{2x}$ (b) $-\frac{8}{x^3}$ (c) $\frac{8}{x^3}$ (d) 0

5. બે વિધેયો u અને v, x નાં વિધેયો હોય તો તેમના ગુણાકારનું વિકલિતનું સૂત્ર કયું છે ?

(a) $u\frac{du}{dx} + v\frac{dv}{dx}$ (b) $u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}$ (c) $\frac{du}{dx} \times \frac{dv}{dx}$ (d) $u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

6. u અને v, xનાં વિધેયો હોય, તો $\frac{v}{u}$નું વિકલિતનું સૂત્ર કયું છે ?

(a) $\frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$ (b) $\frac{v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}}{v^2}$ (c) $\frac{u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}}{u^2}$ (d) $\frac{u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}}{u^2}$

7. $x = a$ આગળ વિધેય વધતું હોય, તો નીચેમાંથી સાચો વિકલ્પો કયો ?

(a) $f'(a) < 0$ (b) $f'(a) > 0$ (c) $f'(a) = 0$ (d) $f''(a) > 0$

8. કોઈ એક વિધેય $x = a$ આગળ ન્યૂનતમ થવા માટેની જરૂરી અને પર્યાપ્ત શરતો કઈ છે ?

(a) $f'(a) = 0,\ f''(a) < 0$ (b) $f'(a) > 0,\ f''(a) > 0$

(c) $f'(a) = 0,\ f''(a) > 0$ (d) $f'(a) < 0,\ f''(a) > 0$

9. માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતાનું સૂત્ર કયું છે ?

(a) $-\frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$ (b) $\frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$ (c) $-\frac{x}{p} \cdot \frac{dp}{dx}$ (d) $-\frac{p}{x} \cdot \frac{dp}{dx}$

10. આમદાની વિધેય R ને મહત્તમ બનાવવા માટેની શરતો કઈ છે ?

(a) $\frac{dR}{dx} = 0, \frac{d^2R}{dx^2} < 0$ (b) $\frac{dR}{dx} = 0, \frac{d^2R}{dx^2} > 0$

(c) $\frac{dR}{dx} > 0, \frac{d^2R}{dx^2} < 0$ (d) $\frac{dR}{dx} > 0, \frac{d^2R}{dx^2} > 0$

વિભાગ B

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ એક વાક્યમાં લખો :

1. વિકલનની વ્યાખ્યા આપો.

2. વિધેય $f(x) = 50$ હોય તો $f'(x)$ શોધો.

3. $y = a^n$, a અચળ સંખ્યા છે તો $\frac{dy}{dx}$ મેળવો.

4. x નાં બે વિધેયોના ગુણાકારનો કાર્યનિયમ જણાવો.

5. જો $x = a$ આગળ વિધેય ઘટતું હોય, તો $x = a$ આગળ વિધેયનું પ્રથમ વિકલિત કેવું હશે ?

6. કોઈ એક વિધેય $x = a$ આગળ મહત્તમ હોય, તો $x = a$ આગળ વિધેયનું દ્વિતીય વિકલિત કેવું હશે ?

7. વિધેયના સ્થિર બિંદુઓ કોને કહેવાય છે ?

8. સીમાંત આમદાની કોને કહેવાય ?

9. સીમાંત ખર્ચની વ્યાખ્યા આપો.

10. માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતાનું સૂત્ર જણાવો.

11. $f(x) = 7x^2 - 6x + 5$ હોય, તો $f'(x)$ મેળવો.

12. $y = 6x^3 + \frac{7}{2}x^2 + \frac{6}{5}x - 8$ હોય તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

વિભાગ C

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. વિકલિતની વ્યાખ્યા આપો.

2. વિકલનનો ભાગાકારનો નિયમ જણાવો.

3. કોઈ એક વિધેય $x = a$ આગળ મહત્તમ થવા માટેની જરૂરી અને પર્યાપ્ત શરતો જણાવો.

4. સીમાંત ખર્ચ સમજાવો અને તેનું સૂત્ર આપો.

5. માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતાની વ્યાખ્યા આપો.

6. નફાનું વિધેય P ને મહત્તમ બનાવવા માટેની કઈ શરતો છે ?

7. ઉત્પાદન-ખર્ચના વિધેય C ને ન્યૂનતમ બનાવવાની શરતો જણાવો.

8. જો $f(x) = \sqrt[4]{x}$ હોય તો $f''(x)$ શોધો.

9. વિકલનનો 'સાંકળ નિયમ' લખો.

10. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + x + 1$ માટે $f''(0)$ મેળવો.

11. આમદાની વિધેય $90x - \frac{x^2}{2}$ હોય, તો સીમાંત આમદાની શોધો.

12. વિધેયની મહત્તમ કિંમત એટલે શું ?

13. વિધેય કોઈ એક બિંદુ આગળ ઘટતું છે એવું ક્યારે કહી શકાય ?

14. વિધેય $y = 12 + 4x - 7x^2$, $x = 2$ આગળ વધતું કે ઘટતું છે તે નક્કી કરો.

15. $y = 4x^2 + 4x + 8$ નું વિકલિત શોધો. xની કઈ કિંમત માટે આ વિકલિત શૂન્ય બને છે તે મેળવો.

16. સાબિત કરો કે $f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x + 7$ માટે $f'(2) = 35$

17. જો $f(x) = 3x^2 + 3$ હોય, તો xની કઈ કિંમત માટે $f'(x) = f(x)$ થાય ?

18. જો $y = 2x^3 + 5x^2 - 3 + \frac{4}{x^2} - \frac{5}{x^3}$ હોય, તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ મેળવો.

19. જો $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ હોય, તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ મેળવો.

20. એકમ દીઠ ઉત્પાદન ખર્ચનું વિધેય $C = 0.0012x^2 - 0.18x + 25$ હોય, તો સીમાંત ખર્ચ મેળવો.

વિભાગ D

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. વ્યાખ્યાની મદદથી $y = ax + b$ (a અને b અચળ સંખ્યા છે)નું વિકલિત મેળવો.

2. વ્યાખ્યાની મદદથી $f(x) = x^{10}$ નું વિકલિત મેળવો.

3. વ્યાખ્યાની મદદથી $f(x) = \frac{2}{3 + 4x}$ નું વિકલિત મેળવો.

4. $y = x^3 - 3x^2 - 3x + 80$ વિધેય માટે xની કઈ કિંમત માટે $\frac{dy}{dx} = -6$ થાય.

5. જો $f(x) = \frac{4x^5 + 3x^3 + 2x^2 + 24}{x^2}$ હોય, તો $f'(2)$ શોધો.

6. $y = (3x^2 + 4x - 2)(3x + 2)$ નું xની સાપેક્ષ વિકલિત મેળવો.

7. $y = \frac{ax + b}{bx + a}$ (a અને b અચળ સંખ્યા છે) હોય, તો $\frac{dy}{dx}$ મેળવો.

8. $y = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$ નું x સાપેક્ષ વિકલિત મેળવો.

9. $(2x + 3)(y + 2) = 15$ હોય, તો $\frac{dy}{dx}$ મેળવો.

10. જો $y = 5 + \frac{6}{7x + 8}$ હોય તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

11. જો $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ હોય, તો $f'(x)$ મેળવો.

12. $(3x^3 - 2x^2 + 1)^{\frac{5}{2}}$ નું x સાપેક્ષ વિકલિત મેળવો.

13. $f(x) = \left(x^2 + 3x + 4\right)^7$ હોય, તો $f'(x)$ મેળવો.

14. જો $f(x) = 3x^2 + 4x + 5$ હોય, તો xની કઈ કિંમત માટે $f'(x) = f''(x)$ થાય ?

15. જો માંગનું વિધેય $p = \frac{2500 - x^2}{100}$ હોય, તો સીમાંત આમદાની મેળવો.

16. જો $y = 3x^2 - 10x + 7$ હોય, તો $x = 1$ અને $x = 2$ આગળ વિધેય વધતું છે કે ઘટતું છે તે નક્કી કરો.

17. જો $y = 2x^3 - 7x^2 - 11x + 5$ હોય, તો $x = \frac{1}{2}$ અને $x = 3$ આગળ વિધેય વધતું છે કે ઘટતું છે તે નક્કી કરો.

18. વિધેય $y = 3 + 2x - 7x^2$, $x = -4$ અને $x = 4$ આગળ વધતું કે ઘટતું વિધેય છે તે નક્કી કરો.

19. ખાંડના એક કારખાનાનું ઉત્પાદન-ખર્ચ $C = \frac{x^2}{10} + 5x + 200$ છે. જો ઉત્પાદન 100 એકમ હોય, તો સીમાંત ખર્ચ શોધો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

20. કોઈ વસ્તુના x એકમ બનાવવા માટે થતા ખર્ચનું વિધેય $C = 50 + 2x + \sqrt{x}$ હોય, તો 100 એકમના ઉત્પાદન માટે સીમાંત ખર્ચ શોધો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

21. વિધેયની મહત્તમ અથવા ન્યૂનતમ કિંમતો મેળવવાની રીત જણાવો.

વિભાગ E

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. વિકલન માટેના કાર્યનિયમો આપો.
2. વિધેય વધતું કે ઘટતું છે તે વિકલિતનો ઉપયોગ કરી કેવી રીતે નક્કી કરશો ?
3. વિધેયની મહત્તમ કિંમત એટલે શું ? મહત્તમ કિંમત માટેની શરતો જણાવો.
4. વિધેયની ન્યૂનતમ કિંમત એટલે શું ? ન્યૂનતમ કિંમત માટેની શરતો જણાવો.
5. એક કારખાનામાં સો ટન દીઠ સ્ટીલનું ઉત્પાદન ખર્ચ $\frac{1}{10}x^3 - 4x^2 + 50x + 300$ છે. ન્યૂનતમ ખર્ચ માટે ઉત્પાદન નક્કી કરો.
6. કોઈ માલના x એકમ બનાવવાનું એકમ દીઠ ખર્ચ $C = 1000 + 8x + \frac{5000}{x}$ હોય, તો ખર્ચ ન્યૂનતમ થાય તે માટે કેટલું ઉત્પાદન કરવું જોઈએ ? ન્યૂનતમ ખર્ચ પણ શોધો.
7. એક વસ્તુના એકમ દીઠ ઉત્પાદન-ખર્ચનું વિધેય $C = 1500 + 0.05x - 2\sqrt{x}$ છે. સાબિત કરો કે ઉત્પાદન 400 એકમ કરવામાં આવે ત્યારે ઉત્પાદન-ખર્ચ ન્યૂનતમ થશે.
8. એક વસ્તુની માંગનું વિધેય $p = 30 - \frac{x^2}{10}$ છે. મહત્તમ આમદાની માટે માંગ અને કિંમત શોધો.
9. બજારમાં ચોખાની માંગ $x = 3(60 - p)$ મહત્તમ આમદાની માટેની માંગ શોધો અને તે માંગ માટેની કિંમત અને આમદાની મેળવો.
10. જો માંગનું વિધેય $p = 75 - \frac{x^2}{2500}$ હોય, તો કઈ માંગે આમદાની મહત્તમ થશે ? મહત્તમ આમદાની માટે કિંમત પણ શોધો.

11. એક ઉત્પાદકનું નફાનું વિધેય $40x + 10000 - 0.1x^2$ છે. કયા ઉત્પાદને તેનો નફો મહત્તમ થશે ? આ મહત્તમ નફો શોધો.

12. એક વેપારીનું નફાનું વિધેય $5x - 100 - 0.01x^2$ છે. મહત્તમ નફો મેળવવા માટે કેટલા એકમોનું ઉત્પાદન કરવું જોઈએ ?

વિભાગ F

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 12$, x ની કઈ કિંમતો માટે y મહત્તમ કે ન્યૂનતમ થશે ? આ મહત્તમ અને લઘુતમ કિંમત મેળવો.

2. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 10$ છે. x ની કઈ કિંમતો માટે $f(x)$ મહત્તમ કે ન્યૂનતમ થશે તે શોધો. આ મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમતો શોધો.

3. $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$ ની અધિકતમ અને લઘુતમ કિંમતો મેળવો.

4. એક ઉત્પાદક $200x + 15x^2$ રૂપિયા ખર્ચી x એકમોનું ઉત્પાદન કરે છે. માંગનું વિધેય $p = 1200 - 10x$ છે, તો નફાનું વિધેય શોધો અને મહત્તમ નફા માટે કેટલા એકમોનું ઉત્પાદન કરવું જોઈએ ?

5. રેફ્રિજરેટર બનાવતી એક કંપની પોતાની રેફ્રિજરેટરની કિંમત ₹ 10,000 રાખે છે. x રેફ્રિજરેટર બનાવવાનો કુલ ખર્ચ $C = 0.1x^2 + 9000x + 100$ રૂપિયા છે. કેટલાં રેફ્રિજરેટર બનાવવાથી મહત્તમ નફો થાય ?

6. એક રમકડું ₹ 20 ની કિંમતે વેચાય છે. આવાં x રમકડાં બનાવવાનો કુલ ખર્ચ $C = 1000 + 16.5x + 0.001x^2$ ₹ થાય છે. કેટલાં રમકડાં બનાવવાથી મહત્તમ નફો થાય ?

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646 - 1716)

Gottfried Leibniz was a German polymath and philosopher who occupies a prominent place in the history of mathematics and the history of philosophy, having developed differential and integral calculus independently of Isaac Newton. It was only in the 20th century that his Law of Continuity and Transcendental Law of Homogeneity found mathematical implementation (by means of non-standard analysis). He became one of the most prolific inventors in the field of mechanical calculators.

Leibniz made major contributions to physics and technology, and anticipated notions that surfaced much later in philosophy, probability theory, biology, medicine, geology, psychology, linguistics, and computer science.

જવાબો

સ્વાધ્યાય 1.1

1. (1) $U = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$

(2) $U = \{(1, H), (2, H), (3, H), (4, H), (5, H), (6, H),$
$(1, T), (2, T), (3, T), (4, T), (5, T), (6, T)\}$

(3) $U = \{(a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, c),$
$(b, d), (b, e), (c, d), (c, e), (d, e)\}$

2. (1) $U = \{0, 1, 2, ..., 100\}$, નિદર્શ બિંદુઓની સંખ્યા = 101

3. ચાર વ્યક્તિઓને a, b, c, d વડે દર્શાવતાં

$U = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d), (b, a), (c, a), (d, a), (c, b), (d, b), (d, c)\}$

કૌંસમાં પ્રથમ સ્થાન મંત્રી અને બીજું સ્થાન સહમંત્રી દર્શાવે છે.

4. $U = \{H, TH, TTH, TTTH, ...\}$, અનંત નિદર્શ અવકાશ

5. $U = \{(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 4, 5), (2, 3, 4), (2, 3, 5), (2, 4, 5), (3, 4, 5)\}$

6. (1) $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$

(2) $B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

(3) $C = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20\}$

7. $U = \{BB, BG, GB, GG\}$

(1) $A_1 = \{BG, GB\}$

(2) $A_2 = \{BG, GB, GG\}$

8. $U = \{(i, j); i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(1) $A_1 = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$

(2) $A_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1),\}$

(3) $A_3 = \{(1, 2), (1, 5), (2, 1), (2, 4), (3, 3), (3, 6), (4, 2), (4, 5), (5, 1), (5, 4), (6, 3), (6, 6)\}$

(4) $A_4 = \{\ \}$

9. (1) $U = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\}$

(2) $A = \{(1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\}$

(3) $B = \{(1, 3), (1, 5), (2, 4), (3, 5)\}$

(4) $A \cup B = \{(1, 3), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\}$

(5) $A \cap B = \{(1, 5), (2, 4), (3, 5)\}$

(6) $A' = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3)\}$

(7) $A - B = \{(2, 5), (3, 4), (4, 5)\}$

(8) $A' \cap B = \{(1, 3)\}$

(9) ઘટનાઓ A અને B પરસ્પર નિવારક ન કહેવાય, કારણ કે $A \cap B \neq \phi$

(10) નિદર્શ બિંદુઓની સંખ્યા = 10

10. ત્રણ સ્ત્રીઓને a, b, c અને બે પુરુષોને x, y વડે દર્શાવતાં

(1) $U = \{a, b, c, x, y\}$

(2) $A = \{a, b, c\}$

(3) $B = \{x, y\}$

(4) $A \cup B = \{a, b, c, x, y\}$

(5) $A \cap B = \{\ \}$

(6) $A' \cap B = \{x, y\}$

(7) ઘટનાઓ A અને B પરસ્પર નિવારક કહેવાય કારણ કે $A \cap B = \phi$

(8) ઘટનાઓ A અને B નિઃશેષ કહેવાય કારણ કે $A \cup B = U$

11. (1) $U = \{S_A, S_2, S_3, ..., S_K, D_A, D_2, D_3, ..., D_K,$
$C_A, C_2, C_3, ..., C_K, H_A, H_2, H_3, ..., H_K\}$

(2) $A = \{S_A, S_2, S_3, ..., S_K\}$

(3) $B = \{S_A, S_2, S_3, ..., S_{10}, D_A, D_2, D_3, ..., D_{10},$
$C_A, C_2, C_3, ..., C_{10}, H_A, H_2, H_3, ..., H_{10}\}$

(4) $A \cup B = \{S_A, S_2, S_3, ..., S_k, D_A, D_2, D_3, ..., D_{10},$
$C_A, C_2, C_3, ..., C_{10}, H_A, H_2, H_3, ..., H_{10}\}$

(5) $A \cap B = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{10}\}$

(6) $B' = \{S_J, S_Q, S_K, D_J, D_Q, D_K, C_J, C_Q, C_K, H_J, H_Q, H_K\}$

12. $A_1 \cup A_2 = \{x \mid 0 \le x < 5\}$

$A_1 \cap A_2 = \{x \mid x = 1, 2\}$

13. $A_1 \cup A_2 = \{x \mid 2 \le x \le 8, x \in N\}$

$A_1 \cap A_2 = \{x \mid x = 4, 5\}$

14. $A' = \{x \mid x = 0, 1, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$

15. $A' = \{x \mid 0 < x < \frac{1}{2}\}$

સ્વાધ્યાય 1.2

1. (1) $\frac{1}{8}$ (2) $\frac{1}{8}$ (3) $\frac{7}{8}$ (4) $\frac{1}{2}$ (5) $\frac{1}{2}$

(6) $\frac{1}{2}$ (7) $\frac{1}{4}$ (8) $\frac{1}{2}$ **2.** (1) $\frac{5}{36}$ (2) $\frac{11}{12}$

(3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{1}{9}$ **3.** (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{3}{4}$ **4.** $\frac{7}{50}$

5. (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{1}{4}$ (4) $\frac{3}{4}$ (5) $\frac{1}{12}$

6. $\frac{1}{30}$ **7.** $\frac{1}{20}$ **8.** $\frac{2}{5}$ **9.** $\frac{1}{7}$ **10.** $\frac{1}{7}$

11. $\frac{1}{7}$ **12.** $\frac{3}{7}$ **13.** (1) $\frac{1}{7}$ (2) $\frac{4}{7}$ (3) $\frac{3}{7}$

14. (1) $\frac{3}{28}$ (2) $\frac{5}{14}$ (3) $\frac{15}{28}$ **15.** (1) $\frac{26}{51}$ (2) $\frac{11}{221}$

(3) $\frac{32}{221}$ **16.** $\frac{14}{15}$ **17.** (1) 0.4 (2) 0.35 (3) 0.45

(4) 0.85 **18.** $P(A-B) = 0.2,\ P(B-A) = 0.5$

સ્વાધ્યાય 1.3

1. (1) $\frac{4}{17}$ (2) $\frac{25}{51}$ **2.** $\frac{3}{7}$ **3.** (1) $\frac{4}{13}$ (2) $\frac{9}{13}$

4. $\frac{47}{100}$ **5.** $\frac{2}{3}$ **6.** 0.9 **7.** 0.97 **8.** 0.59

9. $P(A) = \frac{2}{3}$ **10.** $P(A \cup C) = \frac{35}{47}$, $P(B \cup C) = \frac{32}{47}$ **11.** $P(A \cup B \cup C) = 0.8$

12. $P(A) = 0.4,\ P(B) = 0.4$

સ્વાધ્યાય 1.4

1. $\frac{1}{2}$ **2.** $\frac{1}{5}$ **3.** (1) $\frac{5}{8}$ (2) $\frac{5}{6}$ **4.** $\frac{4}{5}$

5. $P(A/B) = \frac{5}{6}$ **6.** $P(A \cap M) = \frac{1}{20}$, $P(A \cap F) = \frac{1}{4}$ **7.** $\frac{11}{24}$ **8.** $\frac{8}{15}$

9. $\frac{9}{100}$ **10.** $\frac{4}{15}$ **11.** (1) $\frac{11}{36}$ (2) $\frac{1}{6}$ **12.** $\frac{23}{24}$

13. $\frac{14}{15}$ **14.** 0.26 **15.** 0.72

સ્વાધ્યાય 1.5

1. (1) $\frac{29}{357}$ (2) $\frac{125}{357}$ (3) $\frac{275}{357}$ **2.** (1) $\frac{1319}{2536}$ (2) $\frac{1319}{2437}$

સ્વાધ્યાય 1

વિભાગ A

1. (d) **2.** (b) **3.** (c) **4.** (a) **5.** (a)

6. (c) **7.** (c) **8.** (b) **9.** (a) **10.** (b)

11. (d) **12.** (b) **13.** (a) **14.** (a) **15.** (c)

16. (c) **17.** (b)

વિભાગ B

13. $P(A \cap B) = 0,\ \ P(A \cup B) = 1$ **15.** $A \cap B = \{x \mid \frac{1}{4} \le x < 1\}$ **16.** 0.15

17. 0.55 **18.** 0.1 **19.** 2K **20.** 0.45 **21.** $\frac{2}{3}$

22. 0.98 **23.** $2^5 = 32$ **24.** $2 \times 6 \times 6 = 72$ **25.** શક્ય નથી. કારણ કે $P(A \cup B) > P(A)$

26. 2704 **27.** $\frac{2}{5}$ **28.** $\frac{1}{1000}$

વિભાગ C

12. $\frac{1}{6}$ **13.** 0.08 **14.** 0.0024 **15.** $\frac{19}{20}$ **16.** 0.58

17. $A \cup B = \{x \mid \frac{1}{2} \le x < 3\}$, $A \cap B = \{x \mid 1 < x < 2\}$ **18.** $\frac{1}{20}$ **19.** $\frac{1}{6}$

20. (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{3}{10}$ **21.** (1) 0.44 (2) 0.09 **22.** $\frac{17}{20}$

23. 0.976

વિભાગ D

1. $\frac{31}{80}$ **2.** $\frac{4}{25}$ **3.** $\frac{1}{2}$ **4.** $p(3-3p+p^2)$

5. (1) $\frac{9}{10}$ (2) $\frac{4}{5}$

સ્વાધ્યાય 2.1

1. આપેલ વિતરણ એ ચલ x માટેનું સંભાવના-વિતરણ છે.

2. $k = 30$ **3.** $k = \frac{24}{17}$, $P(1 < x < 4) = \frac{5}{17}$ **4.** $k = \frac{1}{7}$, મધ્યક $= \frac{9}{7}$

5. મધ્યક $= \frac{-1}{8}$, વિચરણ $= \frac{135}{64}$

6. સરવાળા માટેનું સંભાવના-વિતરણ

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	કુલ
$p(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

સરવાળાની અપેક્ષિત કિંમત = 7

7. x નું સંભાવના-વિતરણ

x	1	2	3	કુલ
$p(x)$	$\frac{4}{20}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{4}{20}$	1

લાલ રંગના દડાની અપેક્ષિત સંખ્યા = 2

8. x નું સંભાવના-વિતરણ

x	1	2	3	4	5	કુલ
$p(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

મધ્યક $= \frac{31}{16}$, વિચરણ $= \frac{367}{256}$

9. ઇનામનું અપેક્ષિત મૂલ્ય = ₹ $\frac{20}{3}$

સ્વાધ્યાય 2.2

1. $p(X \leq 1) = \frac{9}{256}$ **2.** $n = 6,\ p = \frac{5}{6};\ \frac{15625}{46656}$ **3.** 0.6912 **4.** 0.0729

5. 0.1382

સ્વાધ્યાય 2

વિભાગ A

1. (d) **2.** (c) **3.** (c) **4.** (a) **5.** (d)

6. (d) **7.** (b) **8.** (b) **9.** (b) **10.** (b)

વિભાગ B

6. 14 **7.** $\frac{12}{5}$ **8.** $p + q = 1$ **9.** મધ્યક > વિચરણ **10.** 0.4

વિભાગ C

1. $C = 0.1$ **2.** $\frac{10}{3}$ **3.** 2.8 **4.** $\frac{1}{16}$ **6.** $\frac{8}{9}$

7. $\frac{4}{3}$ **8.** $n = 8,\ p = \frac{1}{2}$ **9.** 2 **10.** 0.96

વિભાગ D

1. $k = \frac{1}{5};\ \frac{2}{5}$ **2.** $c = \frac{1}{10}$ **3.** $k = \frac{1}{326}$, મધ્યક $= \frac{1305}{326}$ **6.** $\frac{54}{125}$, મધ્યક $= \frac{9}{5}$

7. $\frac{1620}{16807}$ **8.** $p(1) = \frac{162}{625},\ p(2) = \frac{216}{625}$ **9.** 0.0146, વિચરણ = 0.54

વિભાગ E

1. અપેક્ષિત માંગ = 3.62, વિચરણ = 2.2156

2.

x	0	1	2	કુલ
$p(x)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

3. (i) 0.9510 (ii) 0.0490 **4.** 0.1631 **5.** 0.3447 **6.** 0.5443

7. (i) 0.3599 (ii) 0.1066

વિભાગ F

(1)

x	0	1	2	3	કુલ
$p(x)$	$\frac{84}{220}$	$\frac{108}{220}$	$\frac{27}{220}$	$\frac{1}{220}$	1

અપેક્ષિત કિંમત = $\frac{165}{220}$, વિચરણ = 0.4602

(2) 56

સ્વાધ્યાય 3

વિભાગ A

1. (c)	**2.** (d)	**3.** (b)	**4.** (a)	**5.** (c)
6. (b)	**7.** (d)	**8.** (c)	**9.** (a)	**10.** (b)
11. (c)	**12.** (d)	**13.** (a)	**14.** (b)	**15.** (c)

વિભાગ B

2. 0	**4.** 0	**5.** સાચું	**6.** $z=0$	**7.** મધ્યક
8. 95.45 %	**9.** 20	**10.** 4	**11.** 10	**12.** 18
13. (–0.675, 0.675)	**14.** 25	**15.** ના	**16.** 1.5	**17.** 50

વિભાગ C

7. $Q_1 = 6.63$	**8.** 12	**9.** $Q_1 = 40$	**10.** (90, 110)	**11.** ± 2.575

વિભાગ D

4. (1) 0.3413 (2) 0.6826 (2) 11 લગભગ

5. (1) 84.13 % (2) 97.72 %

6. (1) 409 લગભગ

7. (1) $Z_1 = 2.445$ (2) $Z_1 = 1.96$

8. (1) $Z_1 = -1.035$ (2) $Z_1 = -0.675$

9. (1) $Z_1 = -0.5$ (2) $Z_1 = 1.08$

10. $\mu = 2000$ $\sigma = 400$

11. $Q_1 = 95.95$, $Q_3 = 104.05$

12. (5, 95)

13. $\mu = 15.75$

14. (1) $Q_1 = 193.25$, $Q_3 = 206.75$ (2) 6.67 (3) 8

વિભાગ E

1. (1) 0.3785 (2) 0.2426

2. મેદસ્વી વ્યક્તિઓ = 33, સ્વસ્થ વ્યક્તિઓ = 192, શારીરિક રીતે નબળી વ્યક્તિઓ = 11

3. (1) 6.06 % (2) 65.54 % (3) 78.81 % **4.** ₹ 8320 તેમજ ₹ 12,560

5. (49.44, 54.56) **6.** $x_1 = 55$, 8 અઠવાડિયાં (લગભગ) **7.** $\sigma^2 = 1361.61$, 0.2148

8. $\mu = 21.15$ મિમિ, 80.27 % **9.** $D_4 = 392.35$, $P_{90} = 438.4$

10. (1) 150 (2) 140

વિભાગ F

1. (1) 250 બાળકો (2) 30.54 % (3) 96 ગુણ (લગભગ)

2. (i) 30.13 વર્ષ (ii) 33.79 વર્ષ (iii) 47.68 વર્ષ

3. (a) 456 (b) 1846 (c) 16362 (d) 1336

4. N = 5051, ₹ 8350

5. $\mu = 62.12$, $\sigma = 17.28$, $Q_3 = 73.78$ %

6. $\mu = 4300$, $\sigma = 500$, (3320, 5280)

7. (1) $x_2 = 157$ (2) $x_1 = 68$ (3) 0.1401

8. (1) 50 (2) $Q_1 = 43.25$, $Q_3 = 56.75$ (3) $\frac{20}{3}$ (4) 8

સ્વાધ્યાય 4.1

1. (1) માનાંક સ્વરૂપ : $|x-4| < 0.4$

અંતરાલ સ્વરૂપ : (3.6, 4.4)

(2) માનાંક સ્વરૂપ : $|x-2| < 0.02$

અંતરાલ સ્વરૂપ : (1.98, 2.02)

(3) માનાંક સ્વરૂપ : $|x| < 0.05$

અંતરાલ સ્વરૂપ : (–0.05, 0.05)

(4) માનાંક સ્વરૂપ : $|x+1| < 0.001$

અંતરાલ સ્વરૂપ : (–1.001, –0.999)

2. (1) અંતરાલ સ્વરૂપ : (1.99, 2.01)

સામીપ્ય સ્વરૂપ : N (2, 0.01)

(2) અંતરાલ સ્વરૂપ : (–5.1, –4.9)

સામીપ્ય સ્વરૂપ : N (–5, 0.1)

(3) અંતરાલ સ્વરૂપ : $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

સામીપ્ય સ્વરૂપ : N $\left(0, \frac{1}{3}\right)$

(4) અંતરાલ સ્વરૂપ : (–3.15, –2.85)

સામીપ્ય સ્વરૂપ : N (–3, 0.15)

3. (1) માનાંક સ્વરૂપ : $|x-4.3|<0.5$

સામીપ્ય સ્વરૂપ : N (4.3, 0.5)

(2) માનાંક સ્વરૂપ : $|x-2|<0.05$

સામીપ્ય સ્વરૂપ : N (2, 0.05)

(3) માનાંક સ્વરૂપ : $|x-0.5|<0.9$

સામીપ્ય સ્વરૂપ : N (0.5, 0.9)

(4) માનાંક સ્વરૂપ : $|x-2|<0.002$

સામીપ્ય સ્વરૂપ : N (2, 0.002)

4. અંતરાલ સ્વરૂપ : (15.5, 16.5)

માનાંક સ્વરૂપ : $|x-16|<0.5$

5. $b = 0.05$, $k = 3.05$

6. $K_1 = 0.01$, $K_2 = 9.99$

સ્વાધ્યાય 4.2

1. (1) 3 (2) 4 (3) 11 (4) –3 (5) 2

સ્વાધ્યાય 4

વિભાગ A

1. (b)	**2.** (c)	**3.** (a)	**4.** (b)	**5.** (d)
6. (c)	**7.** (d)	**8.** (a)	**9.** (a)	**10.** (d)
11. (b)	**12.** (c)			

વિભાગ B

1. (–0.09, 0.09) **2.** $|x+5|<0.001$ **3.** N(10, $\frac{1}{10}$) **4.** $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

5. $|x-50|<0.8$ **6.** $a = 7$ **7.** $k = -4.04$ **8.** 20 **9.** 2

10. 2 **11.** 80 **12.** ma^{m-1} **13.** $k = 10$ **14.** $k = 5$

વિભાગ C

4. $|x|<0.5$ **5.** N (–8, 0.75) **6.** $K_1 = 20,\ K_2 = 20.5$

7. સામીપ્ય સ્વરૂપ : $N\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ અંતરાલ સ્વરૂપ : $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$ **8.** $A_1 = 4$ $A_2 = 3.91$

વિભાગ D

1. 2 **2.** $\frac{1}{9}$ **3.** –8 **4.** 2 **5.** $\frac{7}{4}$

6. $\frac{3}{5}$ **7.** $-\frac{1}{3}$ **8.** $\frac{31}{3}$ **9.** $-\frac{1}{7}$ **10.** 1

11. 1 **12.** $-\frac{4}{3}p$ **13.** $\frac{27}{2}$ **14.** –64 **15.** $-\frac{2017}{2018}$

16. $\frac{7}{3}$ **17.** $\frac{2}{3}$

વિભાગ E

II. (1) 7 (2) 7 (3) –3 (4) –1

III. (1) $7x^6$ (2) $\frac{1}{10}$ (3) n (4) 1 (5) $3x^2$

(6) $7x^6$ (7) $\frac{1}{6}$ (8) 8 (9) 4 (10) 5

સ્વાધ્યાય 5.1

1. 2 **2.** $2x$ **3.** $7x^6$ **4.** $\frac{-1}{(x+1)^2}$ **5.** $\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$

6. $\frac{-6}{(3x-4)^2}$ **7.** 0

સ્વાધ્યાય 5

વિભાગ A

1. (c) **2.** (b) **3.** (a) **4.** (b) **5.** (d)

6. (d) **7.** (b) **8.** (c) **9.** (a) **10.** (a)

વિભાગ B

2. 0 **3.** 0 **5.** ઋણ **6.** ઋણ **11.** $14x-6$

12. $18x^2+7x+\frac{6}{5}$

વિભાગ C

8. $-\frac{3}{16x^{\frac{7}{4}}}$ **10.** 6 **11.** $90-x$ **14.** ઘટતું **15.** $-\frac{1}{2}$

17. 1 **18.** $12x+10+\frac{24}{x^4}-\frac{60}{x^5}$ **19.** $\frac{-1}{4x^{\frac{3}{2}}}+\frac{3}{4x^{\frac{5}{2}}}$

20. $0.0024x-0.18$

વિભાગ D

1. a **2.** $10x^9$ **3.** $\frac{-8}{(3+4x)^2}$ **4.** 1 **5.** 45

6. $27x^2+36x+2$ **7.** $\frac{a^2-b^2}{(bx+a)^2}$ **8.** $\frac{1}{(x+1)^2}$ **9.** $\frac{-30}{(2x+3)^2}$

10. $\frac{-42}{(7x+8)^2}$ **11.** $\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$ **12.** $\frac{5}{2}(3x^3-2x^2+1)^{\frac{3}{2}}\ (9x^2-4x)$

13. $7(x^2+3x+4)^6\,(2x+3)$ **14.** $\frac{1}{3}$ **15.** $25-\frac{3x^2}{100}$

16. $x=1$ આગળ વિધેય ઘટતું છે

$x=2$ આગળ વિધેય વધતું છે

17. $x=\frac{1}{2}$ આગળ વિધેય ઘટતું છે

$x=3$ આગળ વિધેય વધતું છે

18. $x = -4$ આગળ વિધેય વધતું છે

$x = 4$ આગળ વિધેય ઘટતું છે

19. સીમાંત ખર્ચ = $\frac{x}{5} + 5$

$x = 100$ માટે સીમાંત ખર્ચ = 25

20. સીમાંત ખર્ચ = $2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$x = 100$ આગળ સીમાંત ખર્ચ = 2.05

વિભાગ E

5. $\frac{50}{3}$ સો ટન **6.** $x = 25$, ન્યૂનતમ ખર્ચ = 1400 **8.** $x = 10,\ p = 20$

9. $p = 30,\ x = 90,\ R = 2700$ **10.** $x = 250,\ p = 50$ **11.** $x = 200$, મહત્તમ નફો = 14,000

12. $x = 250$

વિભાગ F

1. $x = 2$ આગળ y મહત્તમ છે. yની મહત્તમ કિંમત = 40

$x = 3$ આગળ y ન્યૂનતમ છે. yની ન્યૂનતમ કિંમત = 39

2. $x = -3$ આગળ $f(x)$ મહત્તમ છે. $f(x)$ની મહત્તમ કિંમત = 91

$x = 2$ આગળ $f(x)$ ન્યૂનતમ છે. $f(x)$ની ન્યૂનતમ કિંમત = -34

3. $x = \frac{-1}{3}$ આગળ $f(x)$ મહત્તમ છે. $f(x)$ની મહત્તમ કિંમત = $\frac{59}{27}$

$x = 1$ આગળ $f(x)$ ન્યૂનતમ છે. $f(x)$ની ન્યૂનતમ કિંમત = 1

4. નફાનું વિધેય = $1000x - 25x^2$

$x = 20$ આગળ નફો મહત્તમ થાય.

5. 5000 રેફ્રિજરેટર

6. 1750 રમકડાં

Table of Standard Normal Curve

Area Under the Standard Normal Curve

Z = 0 to Z = Z_1 , z being standard normal variate

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4762	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.5	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998