

സൂക്ഷ്മാധിക്രമം VII

ഗണിതം

ഭാഗം - 1



കേരളസർക്കാർ
വിദ്യാഭ്യാസവകുപ്പ്

സംസ്ഥാന വിദ്യാഭ്യാസ ട്രോബിൾസ് പരിശീലന സമിതി (SCERT), കേരളം

2016

ഭേദിയഗാനം

ജനഗണമന അധിനായക ജയഹോ
ഭാരത ഭാഗ്യവിഡാതാ,
പഞ്ചാബസിന്ധു ഗുജറാത്ത് മറാംഗ
ദ്രാവിഡ് ഉർക്കലെ ബംഗാ,
വിസ്യൂഹിമാചല തമുനാശംഗാ,
ഉച്ചല ജലധിതരംഗാ,
തവശുഭ്രാന്തേ ജാഗേ,
തവശുട ആശിഷ മാഗേ,
ഗാഹോ തവ ജയ ഗാമാ
ജനഗണമംഗലദായക ജയഹോ
ഭാരത ഭാഗ്യവിഡാതാ.
ജയഹോ, ജയഹോ, ജയഹോ,
ജയ ജയ ജയ ജയഹോ!

പ്രതിജ്ഞ

ഇന്ത്യ എൻ്റെ രാജ്യമാണ്. എല്ലാ ഇന്ത്യക്കാരും എൻ്റെ
സഹോദരീ സഹോദരമാരാണ്.

ഞാൻ എൻ്റെ രാജ്യത്തെ സ്വന്നഹിക്കുന്നു;
സമ്പൂർണ്ണവും വൈവിധ്യപൂർണ്ണവുമായ അതിന്റെ
പാരമ്പര്യത്തിൽ ഞാൻ അഭിമാനം കൊള്ളുന്നു.

ഞാൻ എൻ്റെ മാതാപിതാക്കലെയും ഗുരുക്കമൊരെയും
മുതിർന്നവരെയും ബഹുമാനിക്കും.

ഞാൻ എൻ്റെ രാജ്യത്തിന്റെയും എൻ്റെ നാട്ടുകാരു
ടെയും ക്ഷേമത്തിനും ഏഴാര്യത്തിനും വേണ്ടി
പ്രയത്നിക്കും.

Prepared by :

State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Poojappura, Thiruvananthapuram 695 012, Kerala

Website : www.scertkerala.gov.in

E-mail : scertkerala@gmail.com

Phone : 0471-2341883, Fax : 0471-2341869

Typesetting and Layout : SCERT

First Edition : 2014, Reprint : 2016

Printed at : KBPS, Kakkanad, Kochi

© Department of Education, Government of Kerala

പ്രിയപ്പെട്ട കുട്ടികളേ,

ഗണിതത്തിൽ കുറേയേരെകാര്യങ്ങൾ
നാം മനസ്സിലാക്കി.
ഇനി അതിന്റെ ഉയർന്ന തലങ്ങളിലേക്ക്
നാം കടക്കുകയാണ്;
സംഖ്യാപ്രത്യേകതകൾ നിരഞ്ഞ
അക്കഗണിതത്തിന്റെ ലോകത്തേക്ക്,
ജ്യാമിതിയുടെയും ബീജഗണിതത്തിന്റെയും
പുതിയ തലങ്ങളിലേക്ക്,
ഗണിതത്തിന്റെ യുക്തി തിരിച്ചറിയാനും
പുതിയ കണക്കുകളും നടത്താനും.
ആത്മവിശ്വാസത്തോടെ മുന്നോട്ടു പോകാം.

സ്കോളാർഷംസക്ഷ്മാട,

ഡോ. പി. എ. ഹാത്തിമ

ധയരക്കിൻ

എസ്.എ.ഇ.എൽ.ടി.

പാഠപുസ്തക രചന

ശില്പരാലയിൽ പങ്കെടുത്തവർ

അനിൽകുമാർ എം.കെ. എച്ച്.എസ്.എ., എസ്.കെ.എം.ജേ.എച്ച്. എസ്.എസ്, വയനാട്	മണികണ്ണൻ കെ.എ.വി. യു.പി.എസ്.എ, പാടിയമ്മ. എ.യു.പി.എസ്, കള്ളുർ
അരുൺലാൽ എം.ജേ. യു.പി.എസ്.എ. എ.യു.പി.എസ്. എരമംഗലം, കോഴിക്കോട്	രാജേഷ് കെ.പി. ലക്ഷ്മിൻ, ഡയറ്റ്, കള്ളുർ
കുഞ്ഞവീഭവുള്ള എം. യു.പി.എസ്.എ., മുതിപ്പോതൽ എം.യു. പി.എസ്., കോഴിക്കോട്	രാമാനുജം ആർ. എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി, എം.എൻ.കെ.എം.ജി.എച്ച്. എസ്.എസ്, പുലാപ്പറ്റ, പാലക്കാട്
തുളസീധരൻ പിള്ള കെ.ജി. പി.ഡി. ടീച്ചർ, ജി.എച്ച്.എസ്.എസ് കരുകോൻ, കൊല്ലം	സുനിൽകുമാർ വി. പി. എച്ച്.എസ്.എ., ജനത എച്ച്.എസ്.എസ് തേവാംമുട്ട്, തിരുവനന്തപുരം
ബാലഗംഗാധരൻ വി.കെ. ജി.എം.എച്ച്.എസ്.എസ്, കാലിക്കറ്റ് യുണിവേഴ്സിറ്റി കൃംബൻ, മലപ്പുറം	

വിദ്യാർത്ഥി

ഡോ. കൃഷ്ണൻ ഇ.
പ്രൊഫസർ (റിട.), യുണിവേഴ്സിറ്റി കോളേജ്, തിരുവനന്തപുരം
ഡോ. വിജയകുമാർ എ.
പ്രൊഫസർ, കൊച്ചി സർവകലാശാല, കൊച്ചി

ചീതകാരൻ

ധനേഷൻ എം.വി.
എ.വി.എസ്.ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്, കരിവള്ളുർ, കള്ളുർ

അക്കാദമിക് കോഡിനേറ്റ്

ഡോ. ലിഡ്സണ്റരാജ് ജേ.
സിസർച്ച് ഓഫീസർ, എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി.



ഉള്ളടക്കം

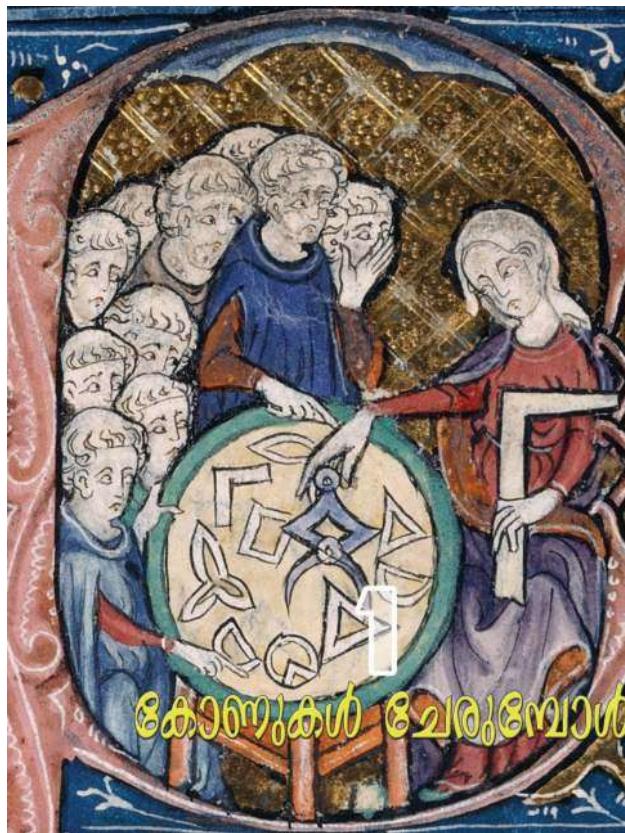
1. കോൺക്രേറ്റ് ചേരുവോൾ 7
2. സമാന്തരവൈക്കൾ 13
3. മാറുന്ന സംവ്യക്തിയും മാറാത്ത ബന്ധങ്ങളും .. 35
4. ആവർത്തന ഗുണനം 49
5. ത്രികോൺത്തിന്റെ പ്രസ്താവ് 67
6. വർഗവും വർഗമുലവും 79
7. വേഗത്തിന്റെ കണക്ക് 89

ഇരു പുസ്തകത്തിൽ സഹകര്യത്തിനായി ചില ചിഹ്നങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചിട്ടിരുന്നു.



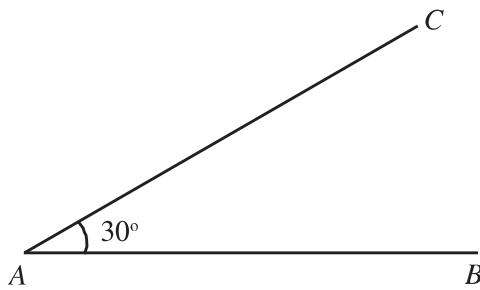
1

കൊണ്ടുകൾ ചെരുപ്പോൾ

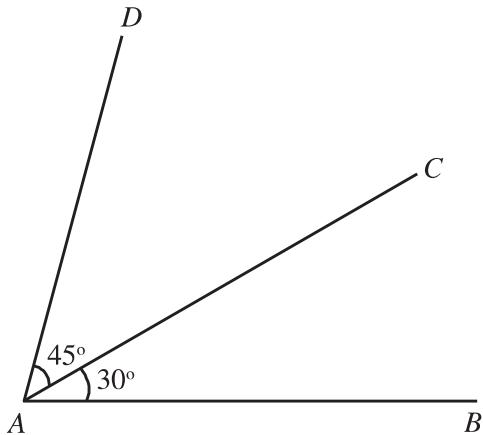


കോണുകൾ ചേരുവോൾ

ഇതുപോലെരുതു കോൺ വരയ്ക്കു.



ഇതിനു മുകളിൽ ഒരു കോൺ കൂടി ഇങ്ങനെ വരയ്ക്കണം.



ഇപ്പോൾ A യിൽ എത്ര കോൺയി?

$$\angle CAB = \dots\dots\dots$$

$$\angle DAC = \dots\dots\dots$$

ഇനിയുമൊരു വലിയ കോണുണ്ടാലോ. അതിന്റെ അളവെന്തെന്ന്?

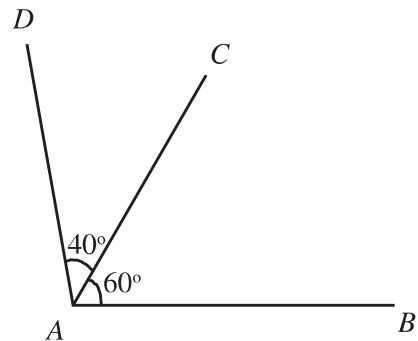
$$\angle DAB = \dots\dots\dots$$

എങ്ങനെ കണക്കാക്കി?

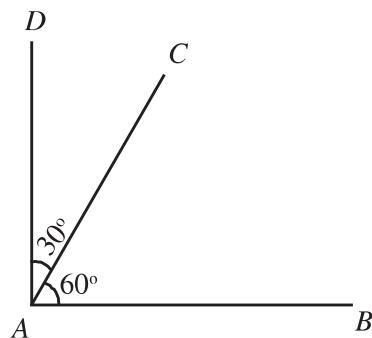
$$\angle DAB = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$$

ഇനിയുള്ള ചിത്രങ്ങളിൽ രണ്ടു കോണുകൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്, മുന്നാമത്തെ കോൺ തുക

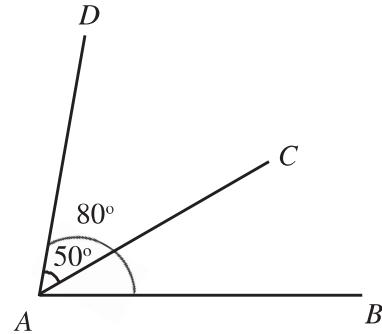
യായോ വ്യത്യാസമായോ എഴുതി കണക്കാക്കുക.



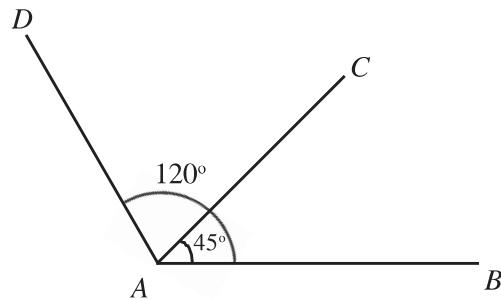
$$\angle DAB = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$



$$\angle DAB = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$



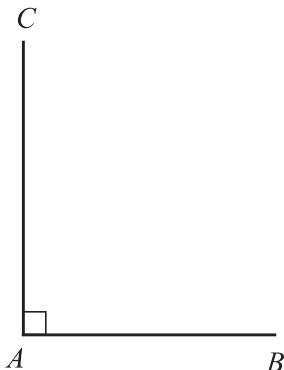
$$\angle CAB = \dots\dots\dots - \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$



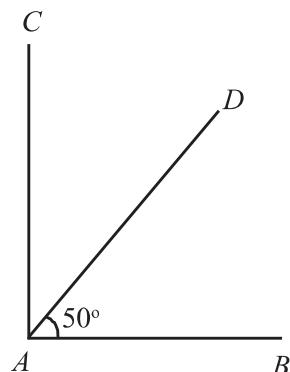
$$\angle DAC = \dots\dots\dots - \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

ഇരുവശങ്ങൾ

ചുവടെക്കാണുന്നതുപോലെ ഒരു വരയും അതി നൊരു ലംബവും വരയ്ക്കുക.



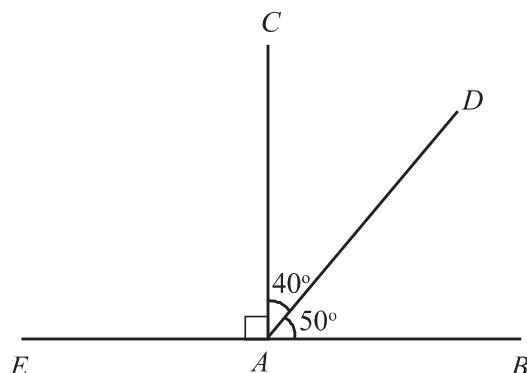
ഈ അതിനുള്ളിൽ മറ്റാരു കോൺ ഇങ്ങനെ വരയ്ക്കുക.



$\angle DAC$ യുടെ അളവെന്തെന്ന്?

$$\angle DAC = \dots\dots\dots - \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

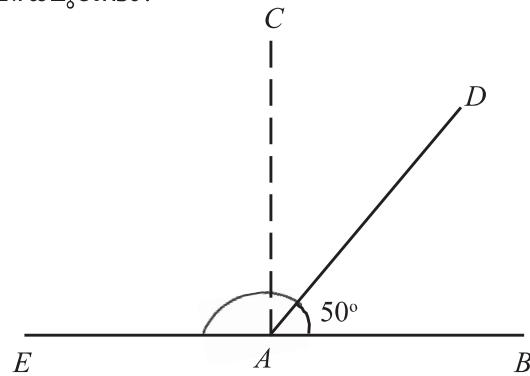
ഈ അൽപ്പം ഇടത്തേക്ക് നീട്ടിയാലോ?



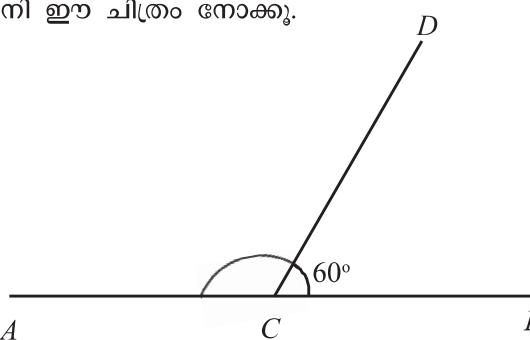
$\angle DAE$ യുടെ അളവെന്തെന്ന്?

$$\angle DAE = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

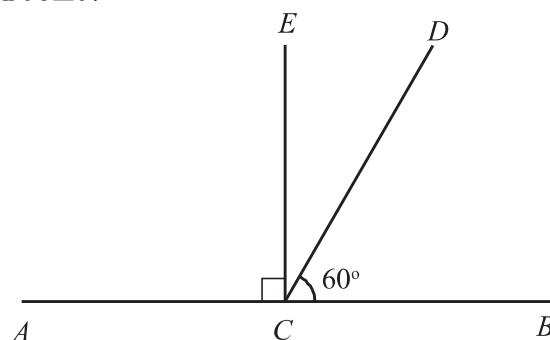
$\angle DAB$ യും $\angle DAE$ യും തമ്മിലെത്തെ കിലും ബന്ധമുണ്ടോ?



ഈ ചിത്രം നോക്കു.



$\angle DCA$ യുടെ അളവ് കണക്കാക്കാമോ? C യിൽക്കുടി ഒരു ലംബം വരച്ച് ഈ കോൺിനെ റണ്ടാക്കിയാലോ?

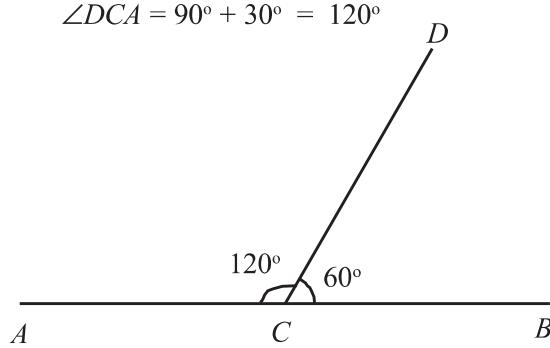


$\angle DCE$ യുടെ അളവെന്തെന്ന്?

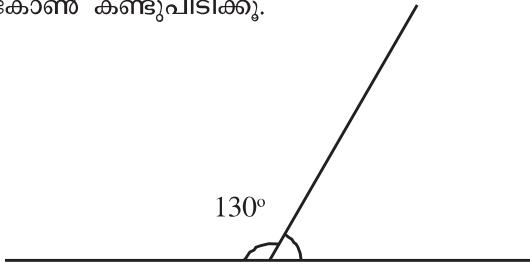
അപ്പോൾ $\angle DCA$ യുടെ അളവോ?

$$\angle DCE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

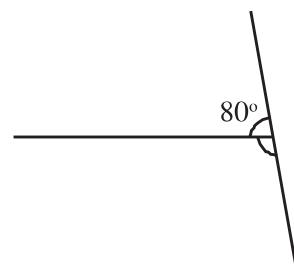
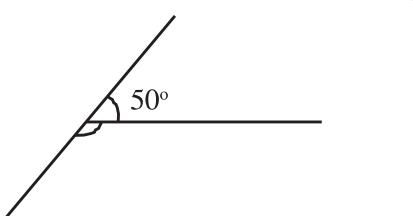
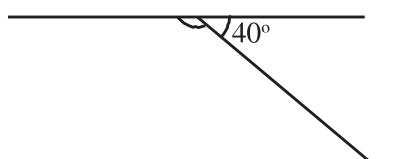
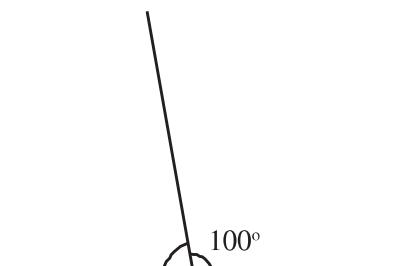
$$\angle DCA = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$$



ഇതുപോലെ ഈ പിത്തത്തിലെ വലതുവശത്തെ കോൺ കണക്കിട്ടു.



ചുവടെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പിത്തങ്ങളിലെല്ലാം രണ്ടു വരകൾ ചേർന്ന് ഇരുവശത്തുമുണ്ടാകുന്ന കോൺകൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്. അവയിൽ ഒന്നിൽ അളവും ചിത്രത്തിലുണ്ട്. മറ്റൊന്നിൽ അളവ് കണക്കാക്കി ചിത്രത്തിൽ എഴുതുക.



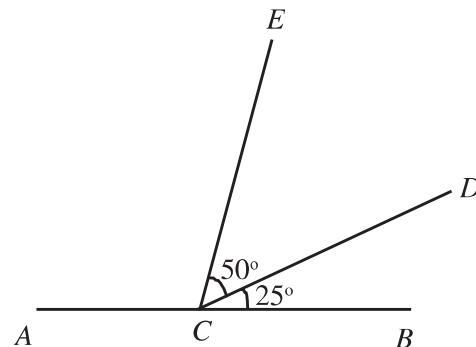
ഇതിലെല്ലാം കാണുന്നതെന്നാണ്?

ഒരു വരയിൽനിന്ന് മറ്ററാറു വരെ വരച്ചാൽ ഇരുവശത്തുമുണ്ടാകുന്ന കോൺകളുടെ തുക 180° ആണ്.

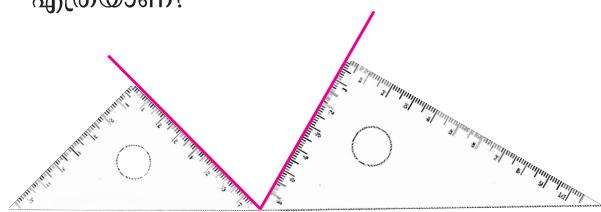
ഈഅന്നെന്നുണ്ടാകുന്ന ഒരു ജോടി കോൺകൾ രേഖീയജോടി (linear pair) എന്നു പറയാറുണ്ട്.

കണക്കിട്ടു

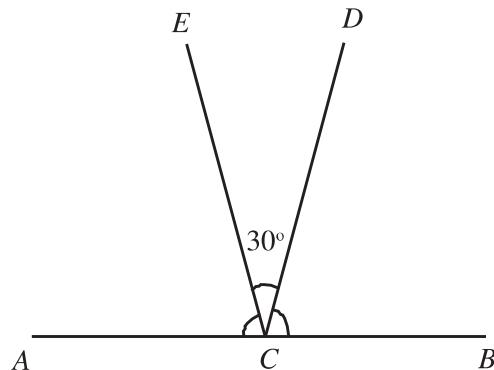
- ചുവടെയുള്ള പിത്തത്തിൽ $\angle ACE$ എത്രയാണ്?



- പിത്തത്തിലെ വരകൾക്കിടയിലുള്ള കോൺ എത്രയാണ്?

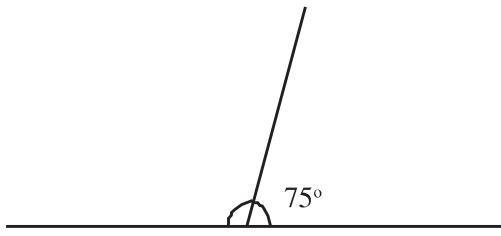


- ചുവടെയുള്ള പിത്തത്തിൽ $\angle ACD = \angle BCE$ ആണ്. ഇവയുടെ അളവുകൾ കണക്കിട്ടുക.

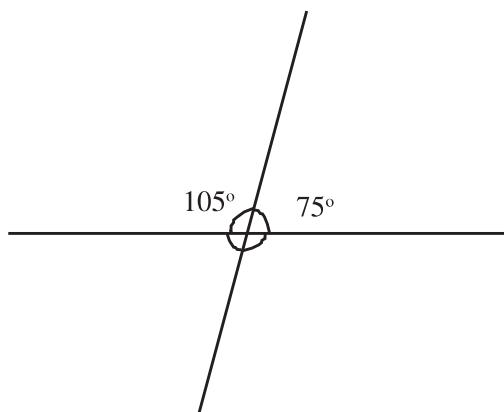


മുൻചുക്കന്നാൽ

ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിലെ ഇടതുവശത്തെ കോൺഡിന്റ് അളവെത്തുന്നാണ്?



മുകളിലെ വരയെ താഴോട് നീട്ടിയാലോ?

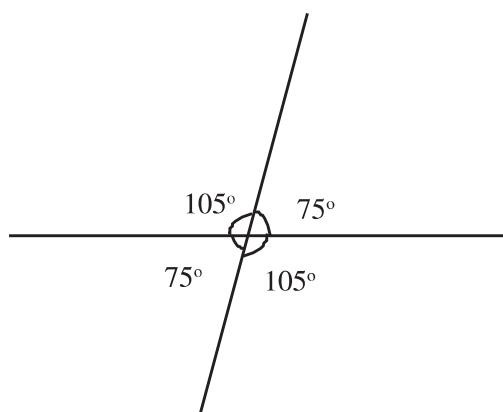


ഇപ്പോൾ ചുവട്ടിൽ ഒരു കോൺകർ കൂടിയായി. എത്താണ് അവയുടെ അളവുകൾ?

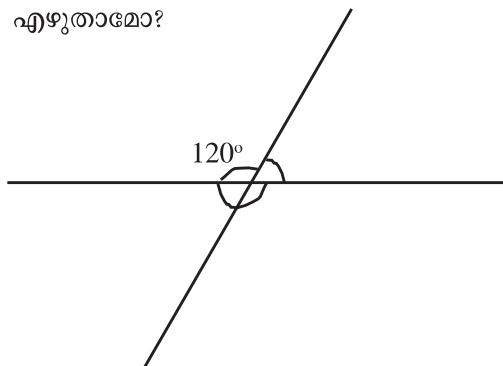
ചാരിത്തെ വരയുടെ ഇടതുവശത്തെ മുകളിലും താഴെയുള്ള കോൺകർ ഒരു രേഖിയജോടി ആണല്ലോ.

അതുപോലെ വലതുവശത്തുമുണ്ടാരു രേഖിയജോടി.

ഈ കോൺകർകളിലും പറയാമോ.



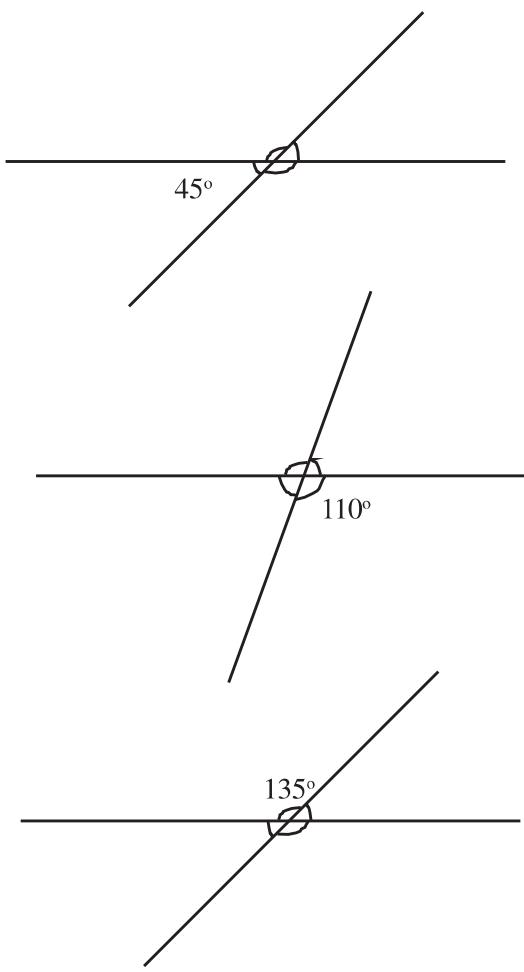
ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിലും ഒരു വരകൾ അങ്ങോ കുമിങ്ങാട്ടും മുൻചുക്കുന്നുണ്ട്. ചിത്രത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന മറ്റു മുന്നു കോൺകർ എഴുതാമോ?



ഇതിലെല്ലാം കാണുന്നതെന്നാണ്?

ഒരു വരയെ മറ്റാരു വര മുൻചുക്കുന്നോൾ ഉണ്ടാകുന്ന നാലു കോൺകൾ അടുത്തു തന്നുള്ളവയുടെ തുക 180° ആണ്. എതിരെയുള്ളവ തുല്യവും.

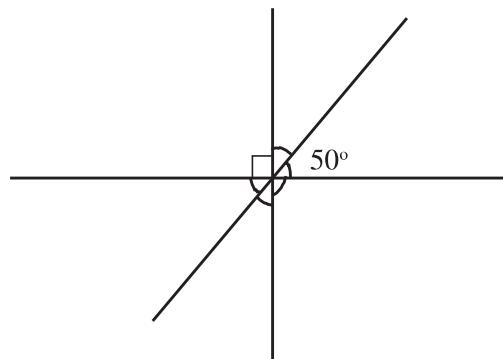
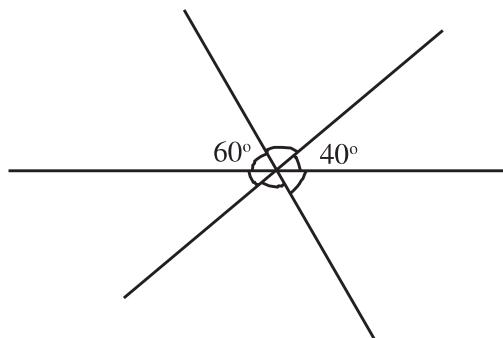
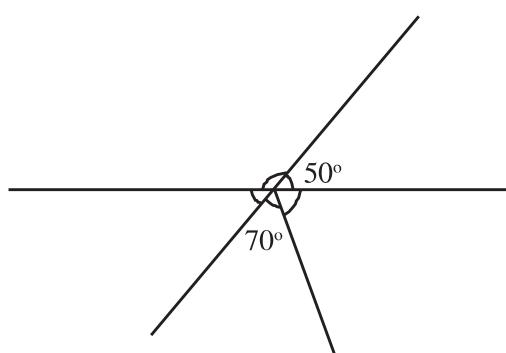
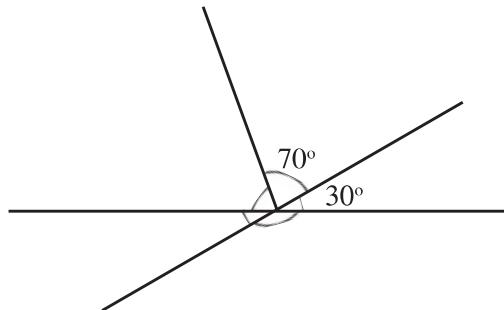
ഈ ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന കോൺകർ കണക്കാക്കി എഴുതാമോ?





ചെയ്തുനോക്കാം

ഒരേ ചിത്രത്തിലും പില കോൺകളുടെ അളവുകൾ തനിതിക്കുന്നു. മറ്റ് കോൺകളുടെ അളവുകൾ കണ്ടുപിടിച്ച് എഴുതുക.



തിരിഞ്ഞുനോക്കുന്നോൾ



പഠനേടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറ്റേഡ് സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടുത്തുന്നത്
<ul style="list-style-type: none"> ജ്യാമിതിയുമായി ബന്ധപ്പെട്ട നേടിയ ആശയങ്ങൾ പുതിയ സന്ദർഭങ്ങളിൽ പ്രയോഗിക്കുന്നു. 			
<ul style="list-style-type: none"> കോൺകളുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ആശയങ്ങളിൽനിന്ന് രേഖിക്കാൻ, എതിർക്കോണം എന്നീ ആശയങ്ങൾ വിശദീകരിക്കുന്നു. 			
<ul style="list-style-type: none"> കോൺകളുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ധാരണകൾ ഉപയോഗപ്പെടുത്തി പ്രശ്നപതിഹരണം നടത്തുന്നു. 			

2

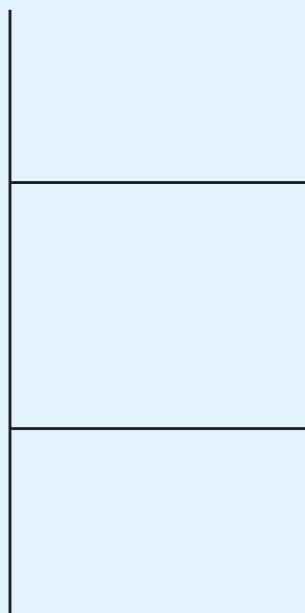
സമാനവരകൾ



രണ്ടുതരം വരകൾ

എതു രണ്ടു ബിന്ദുകൾ യോജിപ്പിച്ചാലും ഒരു വര കിട്ടും. മറിച്ച്, എതു രണ്ടു വരകളും ഒരു ബിന്ദുവിൽ കൂടിമുട്ടുമോ?

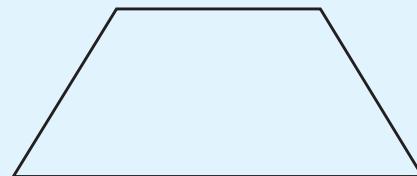
ഒരു ചതുരത്തിന്റെ ഒരു ജോടി എതിർവശങ്ങൾ നീട്ടിയാലോ?



എത്ര നീട്ടിയാലും കൂടിമുട്ടുമോ?

എന്തുകൊണ്ട്?

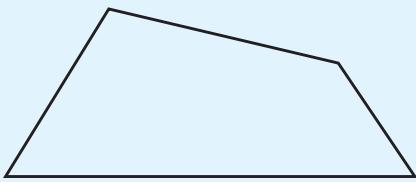
ചുവവെന്തയുള്ള ചതുരഭൂജം നോക്കു.



മുകളിലും താഴെയുമുള്ള വശങ്ങൾ നീട്ടിയാൽ കൂടിമുട്ടുമോ?

ഇടതും വലതുമുള്ള വശങ്ങൾ നീട്ടിയാലോ?

ചതുർബൂജം ഇങ്ങനെനയായാലോ?



എതെങ്കിലും എതിർവശങ്ങൾ നീട്ടിയാൽ കൂട്ടിമുട്ടുമോ?

എത്രുകൊണ്ട്?

ങ്ങരെ അകലം പാലിക്കുന്ന, ഒരിക്കലും കൂടിമുട്ടാത്ത വരകളെ സമാനരവരകൾ (parallel lines) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

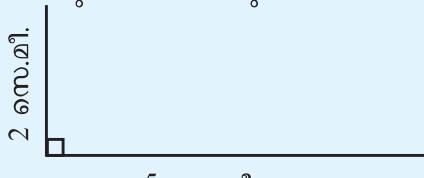
ഒരേ അക്കലം

ചതുരം വരയ്ക്കാൻ അനിയാമലോ.

5 സെൻ്റിമീറ്റർ നീളവും 2 സെൻ്റിമീറ്റർ വിതിയുമുള്ള ചതുരം വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെ?

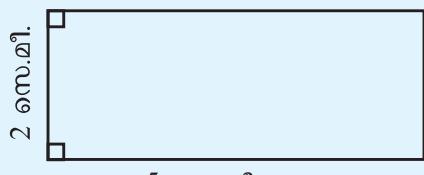
പല രീതിയിൽ വരെക്കാമല്ലോ.

ആദ്യം 5 സെൻ്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ വിലങ്ങേന ഒരു വരവാച്ച് അതിന്റെ ഒറ്റത്ത് 2 സെൻ്റിമീറ്റർ ഉയരത്തിൽ കുത്തേന ഒരു വരവായ്ക്കുക.



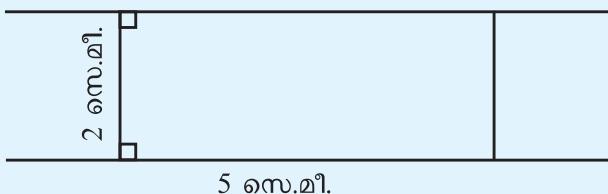
5 സെ.എം.

ഇന്നി കുത്തനെയുള്ള വരയുടെ അറ്റത്തുനിന്ന് 5 സെൻ്റി മീറ്റർ നീളത്തിൽ ലംബം വരയ്ക്കുക. ഈ വരയുടെ അറ്റവും ആദ്യത്തെ വരയുടെ അറ്റവും ചേർത്തു വരച്ചാൽ ചതുരമായി.



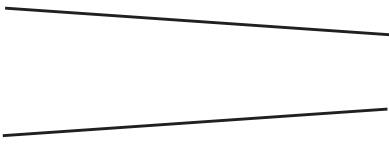
5 ମେ.୨୧

ഇതിന്റെ മുകളിലും താഴെയുമുള്ള വശങ്ങൾ നീട്ടിയാൽ 2 സെൻറീമീറ്റർ അകലം പാലിക്കുന്ന സമാനരവകൾ കിട്ടുമ്പോൾ.



അക്ലം

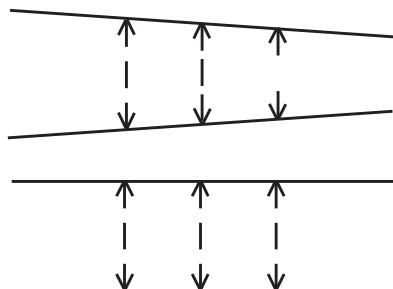
என வரக்கூடியது கூடிமுடுக்குமோ?



ഇങ്ങനെ ആയാലോ?



രണ്ടു ചിത്രത്തിലും വരകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം
നോക്കു.

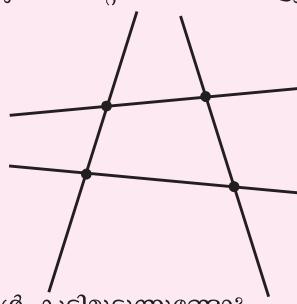


അപ്പോൾ സമാനരമായ വരകൾ തമിലുള്ള
അകലത്തെക്കുറിച്ച് എന്തു പറയാം?

സമാനരം എന്ന വാക്കിന്റെ അർമ്മം തന്നെ തുല്യവൃത്താസം (സമം = തുല്യം, അന്തരം = വ്യത്യാസം) അമീവാ, ഒരേ അകലം എന്നാണ്.



ஜியோஜிபெயில் ஒரு பகுதிகளை வரைக்குக.
Line through two points என்ற உபயோகிப்பு
பகுதிகளைக் காட்டுக.



വശങ്ങൾ കൂട്ടിമുട്ടുന്നുണ്ടോ?

Move ടുൾ ഉപയോഗിച്ച് പത്രംഭൂജത്തിനെ മുലകൾ മാറ്റി നോക്കു. വശങ്ങൾ നീട്ടിയ വരകൾ കൂടിമുട്ടാതാകുന്നത് എപ്പോഴാണ്?

ലംബവും സമാന്തരവും

ഈ ചിത്രം നോക്കു.



വിലങ്ങേന്നയുള്ള വരയ്ക്ക് ലംബമായ വരകൾ നോക്കു.

അവ സമാന്തരമാണോ?

ഈ ഈ ചിത്രം നോക്കു.



വിലങ്ങേന്നയുള്ള വരയ്ക്ക് ലംബം വരച്ച്, കൂത്ത് നെയ്യുള്ള അ വരയ്ക്ക് വീണ്ടും ലംബം വരച്ചിരിക്കുന്നു.

വിലങ്ങേന്നയുള്ള വരകൾ സമാന്തരമാണോ?



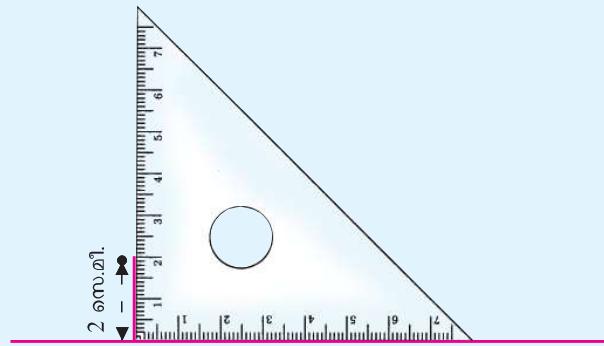
എ വരയ്ക്ക് ലംബമായും സമാന്തരമായും വരകൾ വരയ്ക്കാൻ ജീയോജിബേൽ പ്രത്യേകം ടൂളുകളുണ്ട്. ആദ്യം എ വര വരച്ച് അതിലെരുകുത്തിടുക. Perpendicular line ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് വരയിലും കൂത്തിലും ഓക്ക് ചെയ്താൽ ഈ കൂത്തിലുടെ കടന്നുപോകുന്ന വരയ്ക്ക് ലംബമായ എ വര ലഭിക്കും. കൂത്തിന്റെ സ്ഥാനം വരയുടെ പുറത്താണെങ്കിലും ഇങ്ങനെ വരയ്ക്കാം. ഇങ്ങനെ വരച്ച ലംബത്തിന് വീണ്ടും എ ലംബം വരച്ചു നോക്കു.

എ വരയ്ക്ക് സമാന്തരമായി മറ്റാരു വര വരയ്ക്കാൻ Parallel line ടൂളാണ് ഉപയോഗിക്കുന്നത്. വരയുടെ പുറത്തായി എ കൂത്തിടുക. ടൂളുപയോഗിച്ച് വരയിലും കൂത്തിലും ഓക്ക് ചെയ്യുക. സമാന്തരമായാരു വര ലഭിക്കും. Move ടൂളിന്റെ സഹായത്താൽ കൂത്തിന്റെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കു. കൂത്തിന്റെ സ്ഥാനം ആദ്യം വരച്ച വരയിലാകുന്നേം എന്താണ് സംഭവിക്കുന്നത്?

അപ്പോൾ എ വരയും അതിൽനിന്ന് 2 സെന്റിമീറ്റർ അകലെ എ ബിന്ദുവുമെടുത്താൽ ആ ബിന്ദുവിലൂടെ വരയ്ക്ക് സമാന്തരമായ വര വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെ?



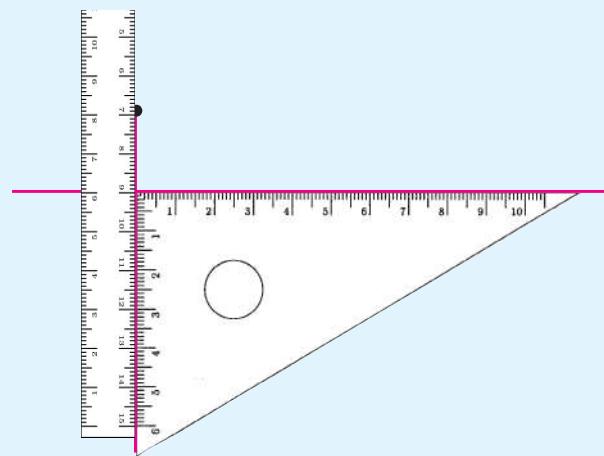
ആദ്യം ബിന്ദുവിലൂടെ വരയ്ക്ക് ലംബം വരയ്ക്കണം.



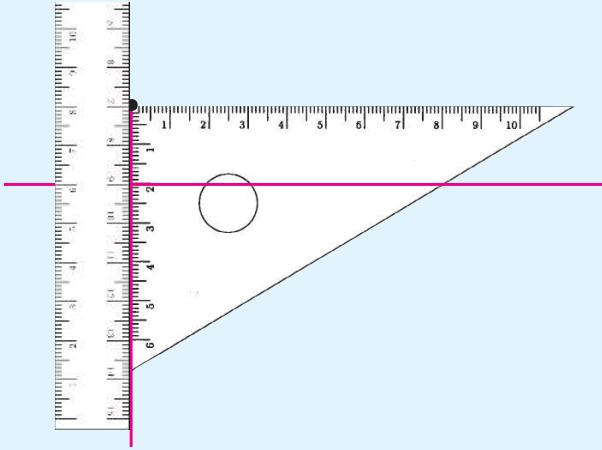
പിന്ന ഈ ലംബത്തിനു ലംബം വരയ്ക്കണം



ആദ്യത്തെ വരയ്ക്കു ലംബം വരയ്ക്കുന്നതിനു പകരം സ്കൈറ്റിൽ പിടിച്ചാലും മതി.



ഈ മട്ടം മുകളിലേക്ക് മാറ്റി, മടമുല ബിന്ദുവിലെത്തിച്ചാൽ സമാന്തരവര വരയ്ക്കാം.



ഇനി ബിന്ദു വരയുടെ താഴ്യായാലോ?

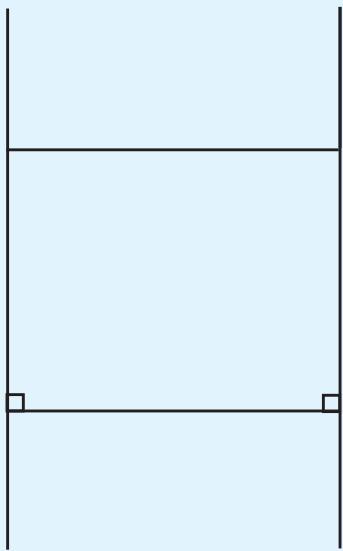
ഇവിടെ കണ്ട കാര്യങ്ങളെന്ന്?

എത്രു വരയ്ക്കും അതിലല്ലാത്ത എത്രു ബിന്ദുവിലുണ്ടെന്നും സമാന്തരവരു വരയ്ക്കാം.

ഒരു വരയ്ക്കൽ അതിലല്ലാത്ത ഒരു ബിന്ദുവിലുണ്ടെന്നും സമാന്തരവരകൾ വരയ്ക്കാം?

ഒരേ ദിശ

ചതുരത്തിന്റെ എതിർവശങ്ങൾ സമാന്തരമാണ്.



ഈത് മറ്റൊരു തരത്തിൽ പറയാം.

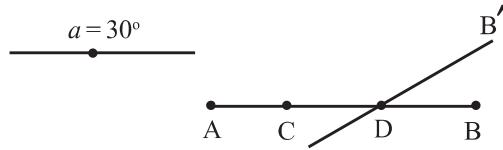
ഒരു വരയ്ക്കു ലംബമായി രണ്ടു വരകൾ വരച്ചാൽ അവ സമാന്തരമാണ്.



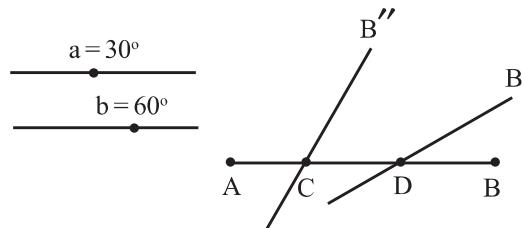
ജിയോജിവൈൽ AB എന്ന വരു വരച്ച് അതിൽ C, D എന്നിങ്ങനെ രണ്ട് കുത്തുകളിടുക.



ഈ Slider ടുൾ എടുത്ത് ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ Angle എന്നതിനു നേരെ തുള്ള ചെറിയ വൃത്തത്തിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക. Name ആയി a എന്ന് ടെസ്റ്റ് ചെയ്യുക. തുടർന്ന് Apply ഡിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക. Angle with given size ടുൾ ഉപയോഗിച്ച് B തിലും പിന്നെ D തിലും ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക. ഇപ്പോൾ വരുന്ന ജാലകത്തിൽ Angle എന്നതിന് താഴ്യായി a എന്ന് ടെസ്റ്റ് ചെയ്ത് OK ഡിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക. ഇപ്പോൾ B' എന്ന പേരിൽ ഒരു ബിന്ദു ലഭിക്കും. D, B' എന്നീ കുത്തുകൾ യോജിപ്പിച്ച് ഒരു വരു വരയ്ക്കുക.



ഈ b എന്ന പേരിൽ ഒരു ഷ്യൂഡർ കൂടി നിർമ്മിക്കുക. Angle with given size ടുൾ ഉപയോഗിച്ച് B, C എന്നിവയിൽ ക്രമമായി ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ Angle എന്നതിന് b എന്ന് നൽകി OK ഡിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക. പുതുതായി ലഭിക്കുന്ന B'' എന്ന ബിന്ദു C യോട് യോജിപ്പിച്ച് വരയ്ക്കുക.

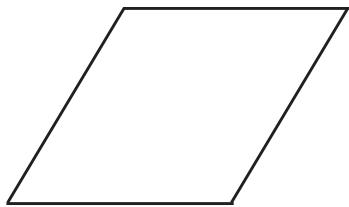
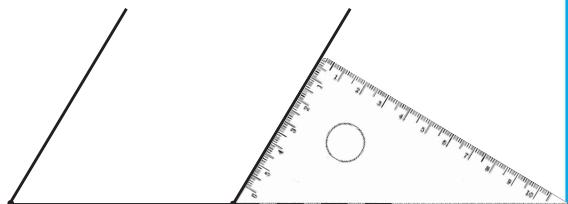
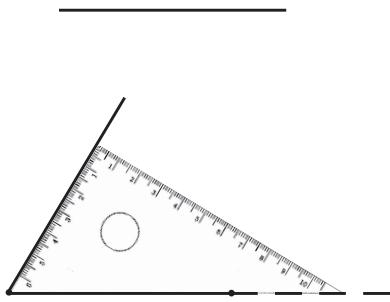


Move ടുൾ ഉപയോഗിച്ച് a, b എന്നിവയുടെ വില മാറ്റി നോക്കു. വരകൾക്ക് എത്താണു സംഭവിക്കുന്ത്? അവ എപ്പോഴാണ് കൂടിമുട്ടാതാകുന്നത്?

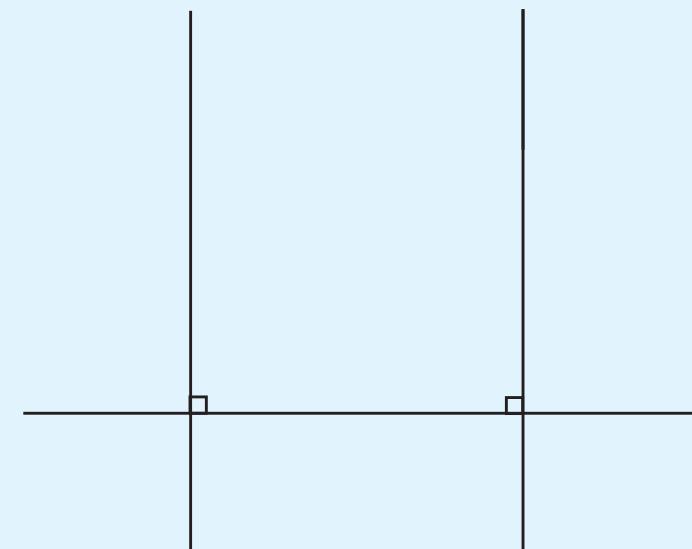
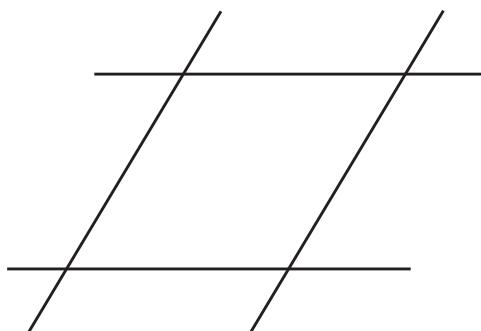
ഒരു ഷ്യൂഡർ മാത്രം നിർമ്മിച്ച് C തിലും D തിലും ഒരേ കോണം വരുന്നതുപോലെ ഈ പ്രവർത്തനം ചെയ്തുനോക്കു.

ചതുരമല്ലകില്ലോ

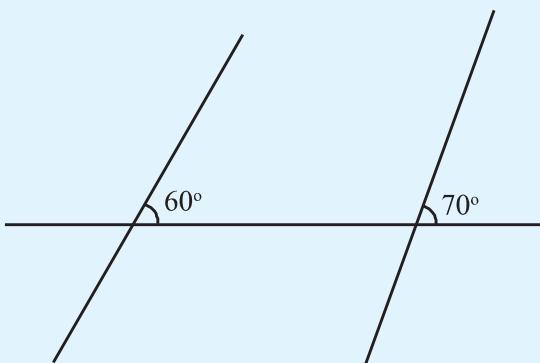
മട്ടം ഉപയോഗിച്ച് ചതുരം വരയ്ക്കാൻ അനിയാ മല്ലോ. മട്ടമുലയ്ക്കു പകരം വേരൊരു മുല ഉപയോഗിച്ചു വരച്ചാലോ?



ഇതിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ജോടി എതിർവശ ഔദി നീട്ടിയാൽ കൂടിമുട്ടുമോ?



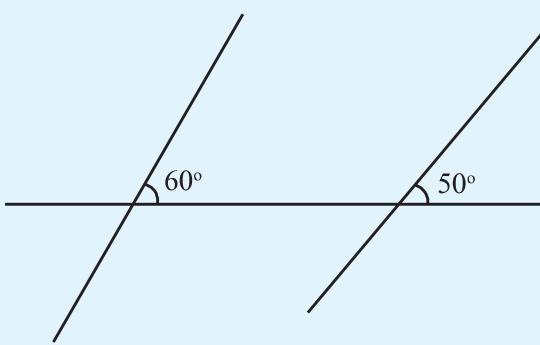
ഇനി, ഈ ചിത്രം നോക്കു.



ഈവ സമാനതരമാണോ?

വരകൾ മുകളിലേക്ക് നീട്ടിയാൽ എന്തു സംഭവിക്കും?

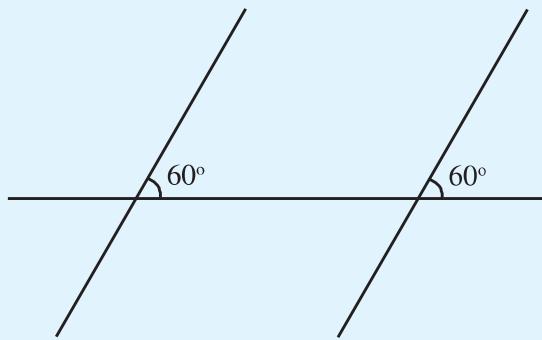
ഇങ്ങനെയായാലോ?



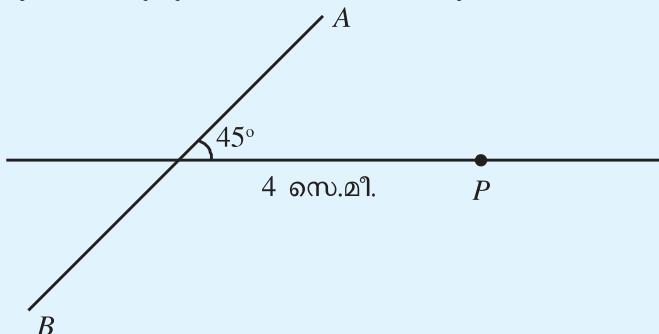
വരകൾ മുകളിലേക്ക് നീട്ടിയാൽ കൂടിമുട്ടുമോ?

താഴോട് നീട്ടിയാലോ?

കൂടിമുട്ടാതിരിക്കാൻ, വലതുവശത്തെ വരയുടെ ചരിവ് എത്ര ഡിഗ്രി ആക്കണം?

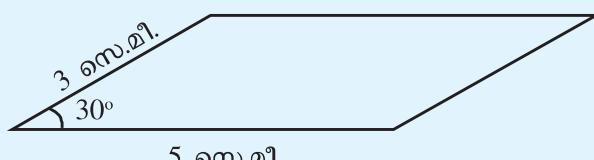


ഈ ചുവടെക്കാണുന്നതുപോലെയുള്ള ഒരു ചിത്രം നിങ്ങൾ മുൻപുസ്തകത്തിൽ വരയ്ക്കുക.



P റിൽക്കുടി AB ത്ക്ക് സമാന്തരമായി ഒരു വര വരയ്ക്കാനുള്ള ഏളുപ്പമാർഗം എന്താണ്?

ചുവടെ വരച്ചിരിക്കുന്ന ചതുർഭുജത്തിന്റെ രണ്ടു ജോടി ഏതിർവശങ്ങളും സമാന്തരമാണ്.

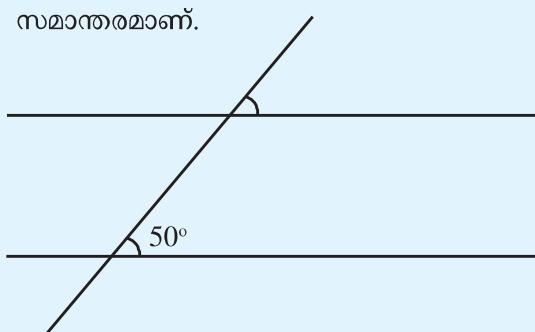


ഈ ചതുർഭുജം ഇതേ അളവുകളിൽ വരയ്ക്കാമോ?

ഏതിർവശങ്ങൾ സമാന്തരമായ ഇത്തരം ചതുർഭുജത്തിന് സമാന്തരികം (parallelogram) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

സമാന്തരതയും കോണുകളും

ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിലെ മുകളിലും താഴെയുമുള്ള വരകൾ സമാന്തരമാണ്.

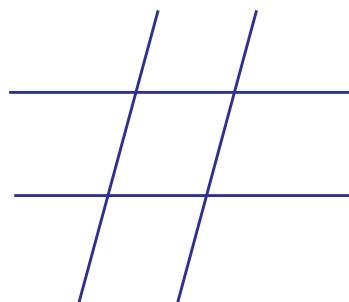


മുകളിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന കോൺ എത്രയാണ്?

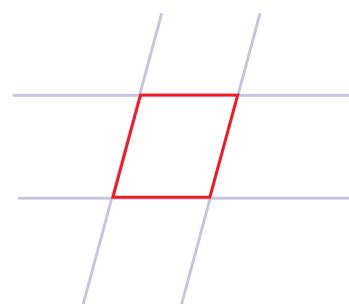
സമാന്തരങ്ങൾ വണിക്കുന്നോൾ



ഒരു ജോടി സമാന്തരവരകൾ വരയ്ക്കുക.
അവയെ മുൻചുകരാണ് മറ്റാരു ജോടി സമാന്തരവരകൾ വരയ്ക്കുക.



ഇവയുടെ ഇടയിലുണ്ടായ രൂപം നോക്കു.



ഈ രൂപത്തിന്റെ പേരെന്താണ്?

ചതുരവും സാമാന്യരികവും

കാർഡ്‌ബോർഡിൽ ഒരു ചതുരം വെട്ടിയെടുക്കുക.



ഇനി താഴെത്തെ മൂലയിൽക്കുടി ചരിച്ചു വെട്ടി, ചുവടെക്കാണുന്നതുപോലെ ഒരു ത്രികോണം മുറിച്ചെടുക്കുക.



ഈ ത്രികോണം, അടുത്ത ചിത്രത്തിലേതു പോലെ മറുവശത്ത് ചേർത്തു വച്ചാലോ?

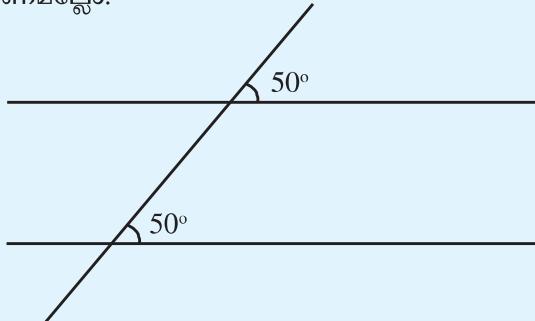


ഈതു സാമാന്യരികമാണോ?

എന്തുകൊണ്ട്?

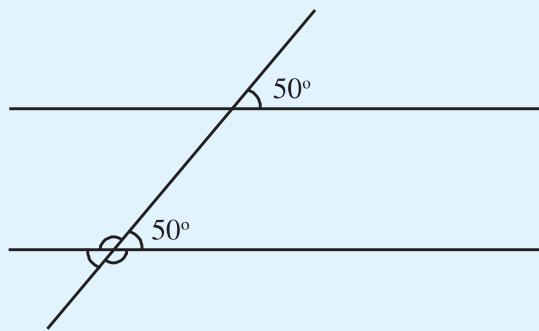


സമാന്തരവരകൾ മറ്റേതൊരു വരയുമായി ഒരേ ചരിവിൽ ആക്കണമ്പോ.

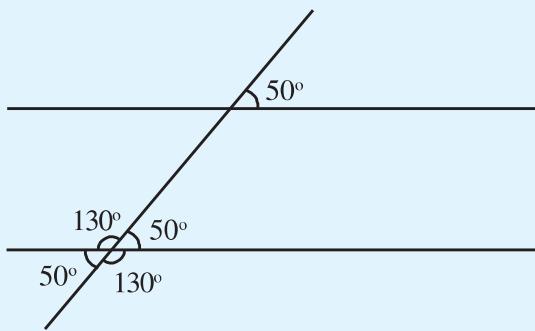


ചിത്രത്തിൽ വേരെയും കോണുകളുണ്ട്. അവയെല്ലാം കണ്ണുപിടിക്കാമോ?

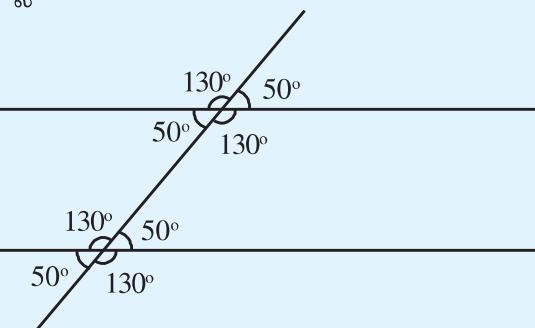
ആദ്യം ചുവടെയുള്ള മറ്റു മൂന്നു കോണുകൾ നോക്കു.



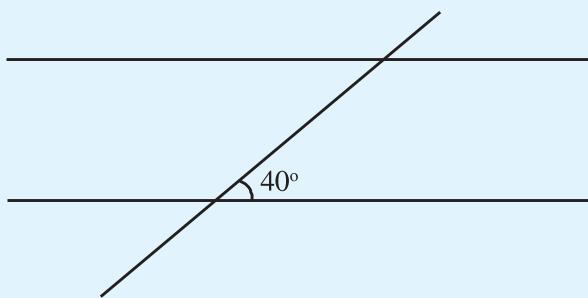
രണ്ടു വരകൾ മുറിച്ചുകടക്കുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന നാലു കോണുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധങ്ങൾ എന്തെല്ലാമാണ്?



ഈതുപോലെ ചിത്രത്തിലെ മുകളിലെ കോണുകളും എഴു താമലോ.



ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിലും മുകളിലും താഴെയും സമാനരവർകളാണ്.

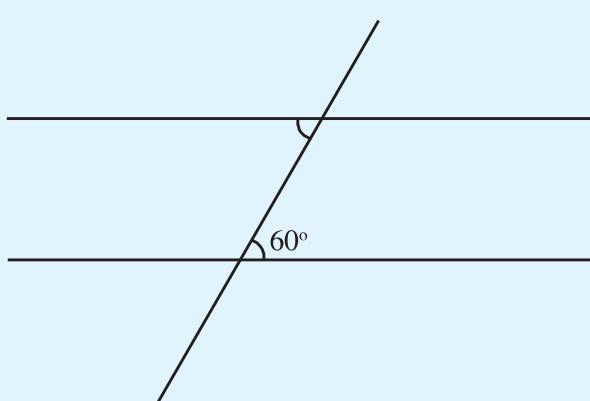
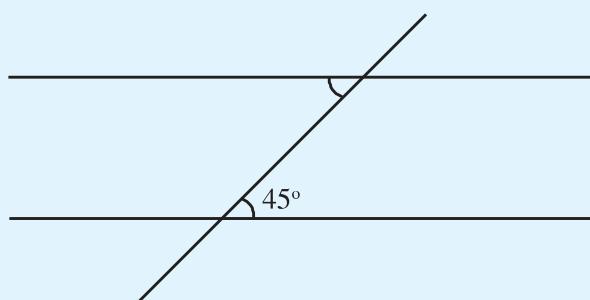


ചിത്രത്തിൽ മറ്റ് ഏഴു കോൺകളുടെയും അളവുകൾ എഴുതുക.

ഇവിടെ കണ്ണ കാര്യം ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

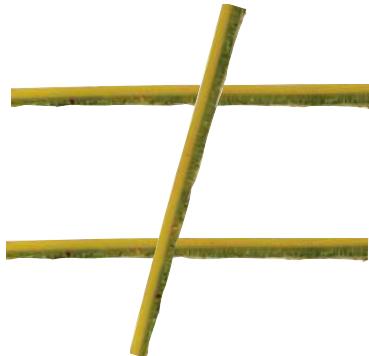
സമാനരമായ രണ്ടു വരകൾ മറ്റേതാരു വരയുമായും ഒരേപോലെയുള്ള കോൺകളാണ് ഉണ്ടാക്കുന്നത്.

ചുവടെയുള്ള ചിത്രങ്ങളിൽ സമാനരമായ വരകളും അവയെ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന മുന്നാമത്താരു വരയുമുണ്ട്. ഓരോ ചിത്രത്തിലും ഒരു കോൺവേൾ അല്ലെങ്കിൽ ദ്വിജികൾ മറ്റൊരു കോൺ അടയാളപ്പെടുത്തിയിട്ടുമുണ്ട്. ഈ കോൺ കണ്ണപിടിച്ച് ചിത്രത്തിൽ എഴുതുക.

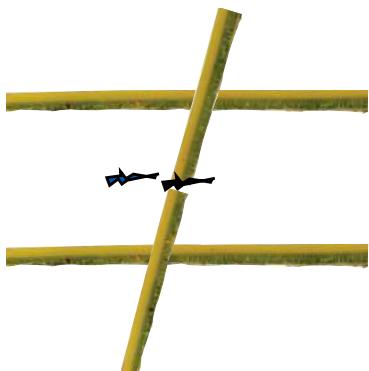


മാരാത്ത രൂപം

രണ്ട് ഇരുൾക്കിൽ കഷണങ്ങൾ സമാനരമായി വയ്ക്കുക. ഇതിന് കുറുകെ മറ്റാരു ഇരുൾക്കിൽ വച്ച് നന്നായി ഒടിക്കുക.



ഈ രൂപം നടുക്കുവച്ച് ഒടിച്ച് രണ്ടു ഭാഗമാക്കുക.

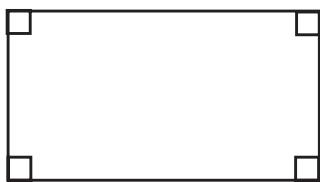


ഒരു ഭാഗം മറ്റാരു ഭാഗത്തിന്റെ മേൽ വച്ചു നോക്കുക. കോൺകൾ കൂട്ടുമായി ചേർന്നിരിക്കുന്നീലോ?

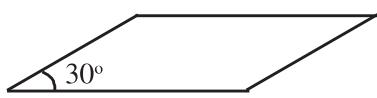


സാമാന്യരികത്തിലെ കോണുകൾ

ഒരു പച്ചറത്തിലെ കോണുകളെല്ലാം മട്ടമാണെല്ലാം.

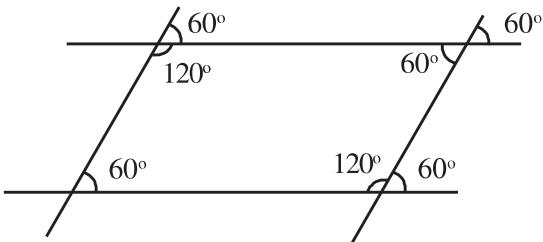


സാമാന്യരികത്തിലോ?



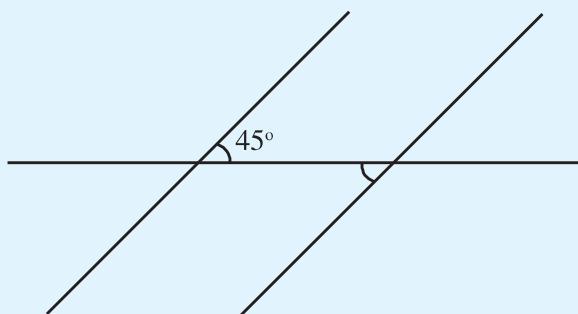
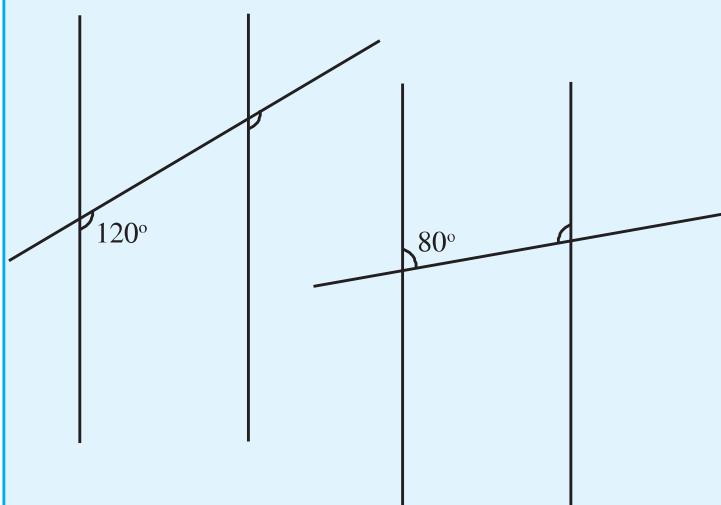
ആദ്യത്തെ സാമാന്യരികത്തിലെ മറ്റു കോണുകൾ കണ്ടുപിടിക്കു.

വശങ്ങളെല്ലാം നീട്ടി വരച്ചുനോക്കു.



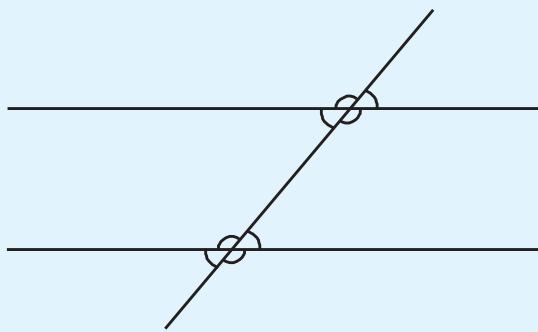
ഇതുപോലെ രണ്ടാമത്തെ സാമാന്യരികത്തിലെ കോണുകൾ കണ്ടുപിടിക്കാം.

എൻ്റീഷ്!



കോൺ പൊരുത്തങ്ങൾ

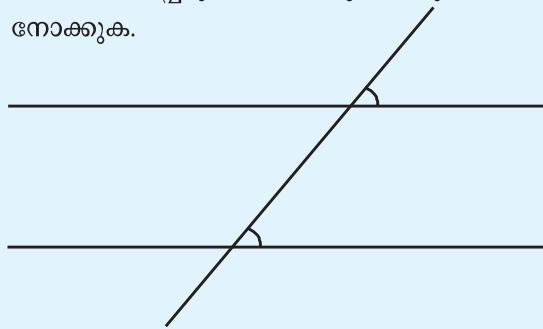
സമാന്തരമായ രണ്ടു വരകളെ മറ്റാരു വര മുറിച്ചുകടക്കു നോക്കു എടു കോണുകൾ ഉണ്ടാകുന്നുണ്ട്.



ചിത്രത്തിൽ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന വരയുമായി താഴെത്തെ വര ഉണ്ടാകുന്ന നാലു കോണുകളും മുകളിലെ വര ഉണ്ടാകുന്ന നാലു കോണുകളുമുണ്ട്.

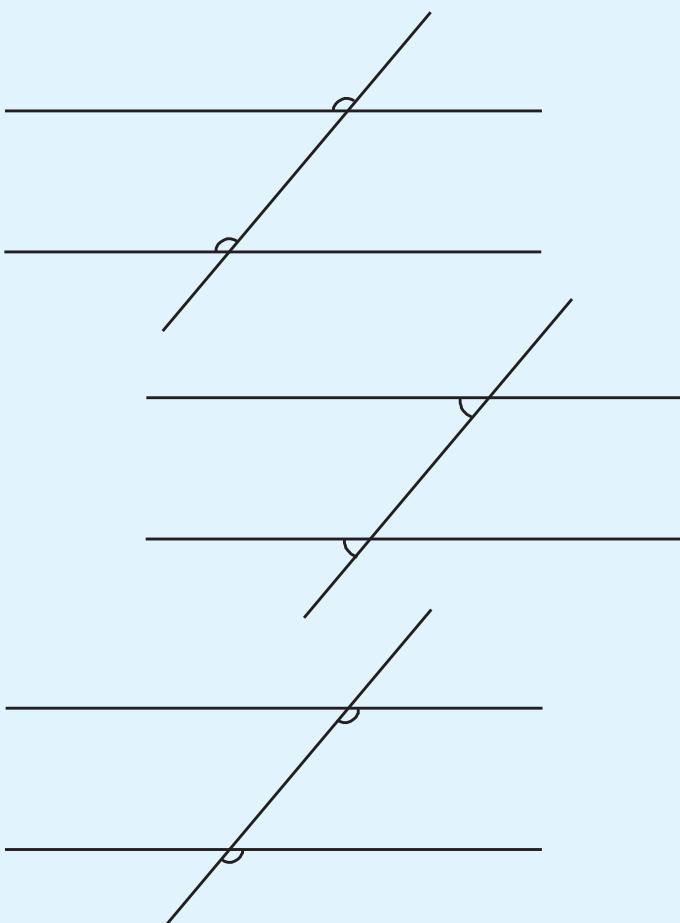
താഴെനിന്നും മുകളിൽനിന്നും ഓരോ കോൺ വീതെമ്പട്ടത്ത് പല ജോടികളുണ്ടാക്കാം. ചില ജോടികളിലെ കോണുകൾ തുല്യമാണ്. അല്ലാത്തവ അനുപുരകവും.

തുല്യമായ ജോടികൾ നോക്കാം. ഈവരെ സൗകര്യത്തിനായി രണ്ടായി തരംതിരിച്ചിട്ടുണ്ട്. ചുവടെയുള്ള പിത്രത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന ഒരു ജോടി കോണുകൾ നോക്കുക.



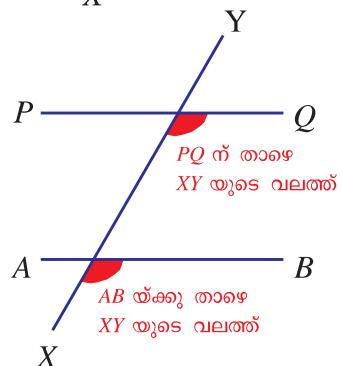
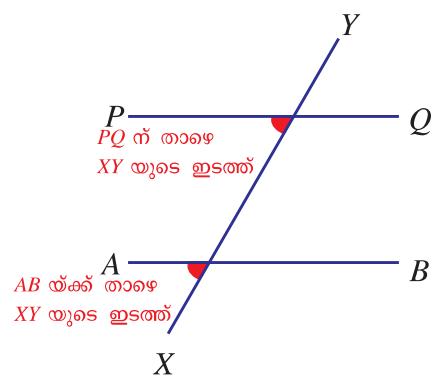
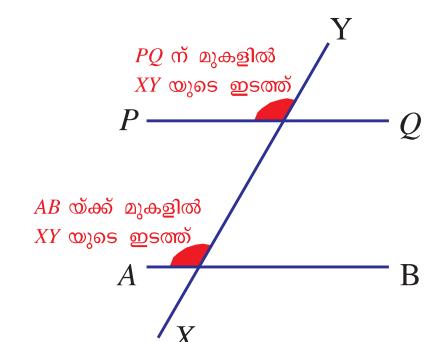
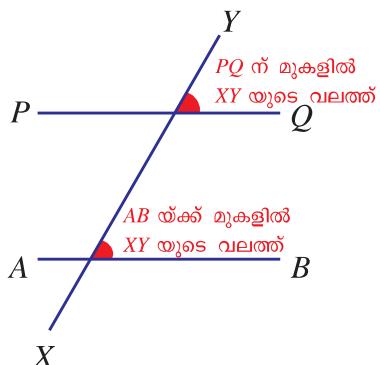
ഇതിൽ ചുവടെയുള്ള കോൺ വിലങ്ങേന്നുള്ള വരയുടെ മുകളിലും ചരിത്ര വരയുടെ വലതുവശത്തുമാണ്. മുകളിലെ കോണും അതിലെ വിലങ്ങേന്നുള്ള വരയുടെ മുകളിലും ചരിത്ര വരയുടെ വലതുവശത്തുമാണ്.

ഈതുപോലെ ചുവടിലും മുകളിലും ഒരേ സ്ഥാനത്തുവരുന്ന മറ്റൊരു മുന്നു ജോടികൾ കൂടിയുണ്ട്.



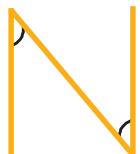
സ്ഥാനമനുസരിച്ചുള്ള ഇത്തരമൊരു ജോടിയിലെ കോണുകളെ സ്ഥാനകോണുകൾ (corresponding angles) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

സ്ഥാനകോണുകൾ



അക്ഷരകോണുകൾ

ഇല്ലാശിലെ N എന്ന അക്ഷരം വലുതാക്കി വരയ്ക്കു.



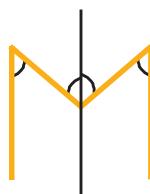
ഇതിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന കോണുകൾ തമ്മിൽ എന്താണ് ബന്ധം?

ഇനി M എന്ന അക്ഷരം നോക്കു.

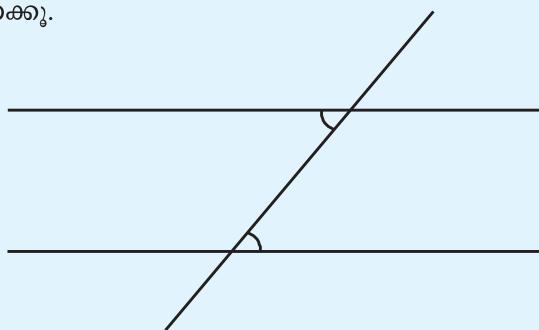


അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന മൂന്നു കോണുകൾ തമ്മിൽ എന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ?

നട്ടവിലും കുത്തനെ മറ്റാരു വര വരച്ചാലോ?



തുല്യമായ കോണുകളെത്തന്നെ മറ്റാരു തരത്തിൽ ജോടി ചേർക്കാം. ചുവടെയുള്ള പിത്രത്തിലെ കോണുകൾ നോക്കു.

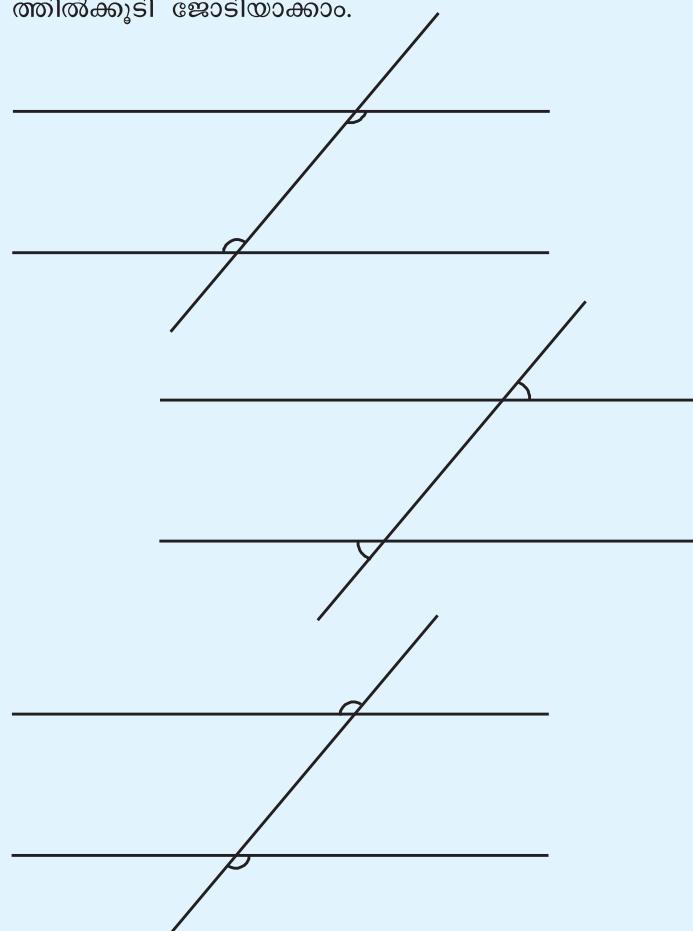


ചുവടെയുള്ള കോൺ, വിലങ്ങേന്നയുള്ള വരയുടെ മുകളിലും ചരിത്ര വരയുടെ വലതുമാണ്.

മുകളിലെ കോൺോ?

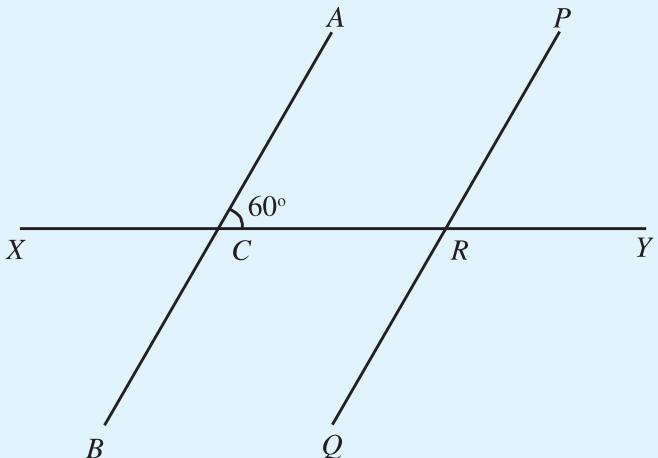
വിലങ്ങേന്നയുള്ള വരയുടെ താഴെ ചരിത്ര വരയുടെ ഇടത്ത്.

ഇതുപോലെ സ്ഥാനം തികച്ചും വിപരീതമായി മൂന്നു വിധത്തിൽക്കൂടി ജോടിയാക്കാം.



സ്ഥാനം വിപരീതമായ ഇത്തരമൊരു ജോടിയിലെ കോണുകളെ മറുകോണുകൾ (alternate angles) എന്നു പറയുന്നു.

ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ രണ്ടു സമാനരവരകൾക്കും മുറിക്കുന്ന വരയ്ക്കും പേരിട്ടിട്ടുണ്ട്. ഒരു കോണിന്റെ അളവും എഴുതിയിട്ടുണ്ട്. സമാനകോൺകളുടെയും മറ്റു കോൺകളുടെയും ജോടികളുടെയെല്ലാം പേരും അളവും എഴുതി പട്ടിക പൂർത്തിയാക്കുക.



സമാനകോൺകൾ	
പേരുകൾ	അളവ്
$\angle ACY, \angle PRY$	60°

മറുകോൺകൾ	
പേരുകൾ	അളവ്
$\angle ACY, \angle QRX$	60°

ചുരുക്കിപ്പിടിച്ചതാൽ,

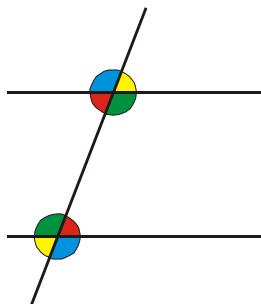
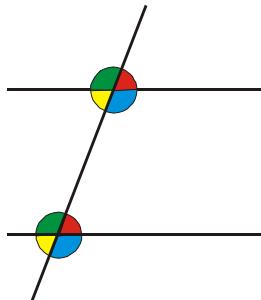
രണ്ടു സമാനരവരകളെ മറ്റാരു വര മുറിക്കുന്നോൾ ഒരു വരയുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന നാലു കോൺകളിൽ നിന്നും രണ്ടാമത്തെ വരയുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന നാലു കോൺകളിൽ നിന്നും ഓരോനും വീതമെടുത്ത് പല തരത്തിൽ ജോടികൾ ഉണ്ടാക്കാം. ഇവയിൽ എട്ടു ജോടികളിലെ കോൺകൾ തുല്യമാണ്. കോൺകളുടെ സ്ഥാനങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ നാലു ജോടികളിലെ കോൺകൾ മറുകോൺകൾ എന്നും പറയുന്നു.

സമാനവും വിപരീതവും

ചുവടെയുള്ള ചിത്രങ്ങൾ നോക്കു.

ആദ്യത്തെ ചിത്രത്തിൽ സമാനകോൺകളുടെ ജോടികൾക്ക് ഒരേ നിരം കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിലോ?



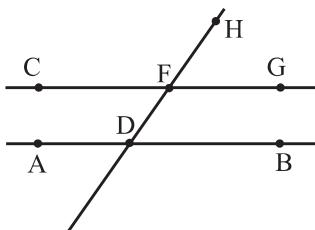
മുകളിലും താഴെയുമുള്ള കോൺകളിൽ ഒരേ നിരം കൊടുത്തിരിക്കുന്ന കോൺകൾ തമ്മിൽ എന്താണ് ബന്ധം?

അനുപුරකങ്ങൾ

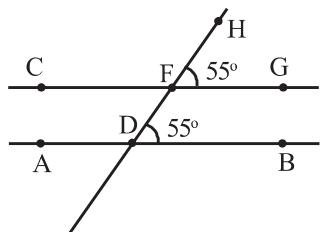
രണ്ട് സമാനതരവരകളെ മറ്റാരു വര മുൻകുന്ന ചിത്രം ഒന്നുകൂടി നോക്കാം.



ജിയോജിബേയിൽ AB എന്ന വരയും അതിന് സമാനതരമായി C തിലുടെ മറ്റാരു വരയും വരയ്ക്കുക. ഈ വരകളിൽ D, F എന്നീ ബിന്ദുകൾ അടയാളപ്പെടുത്തി അവ യോജിപ്പിച്ച് ഒരു വരവരയ്ക്കുക. G, H എന്നീ ബിന്ദുകൾ ചിത്രത്തിലേതുപോലെ അടയാളപ്പെടുത്തുക.



ഈ അംഗീകാരി ഉപയോഗിച്ച് G, F, H എന്നീ ബിന്ദുകളിൽ ക്രമമായി കൂടിക്ക് ചെയ്യുക. അതുപോലെ B, D, F എന്നിവയിലും കൂടിക്ക് ചെയ്യുക. ഈ കോൺകളുടെ അളവ് എത്രയെന്ന് കാണാം.



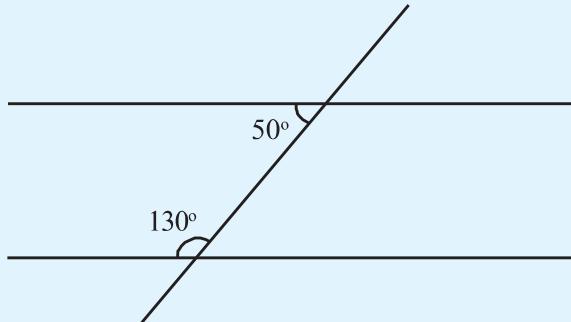
Move ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് F രെ സ്ഥാനം മാറി നോക്കു.

F, D എന്നീ ബിന്ദുകളിൽ വരുന്ന മറ്റു കോൺകളും ഇതുപോലെ അടയാളപ്പെടുത്തി നോക്കു.

ഈ കോൺകൾക്കു നിരം കൊടുക്കാം. ഈ നായി കോൺരെ ചിഹ്നത്തിൽ Right click ചെയ്യു നോക്കു വരുന്ന ഒരു ജാലകത്തിൽ നിന്ന് Object properties തിരഞ്ഞെടുക്കുക. ഈ കോൺകൾക്ക് കൂടിക്ക് ചെയ്ത് ആവശ്യമുള്ള നിരം തിരഞ്ഞെടുക്കുക. ഈ നായി ഒരു അളവുള്ള കോൺകൾക്ക് ഒരു നിരം കൊടുക്കു.

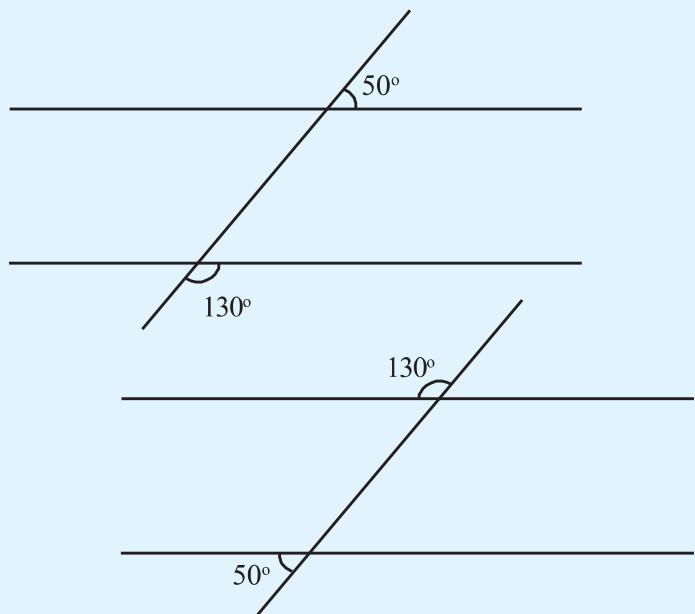
ചിത്രത്തിൽ മുകളിലെ വരയിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന കോൺരെ അളവ് എത്രയാണ്?

ചരിത്ര വരയുടെ ഇടതുവശത്തും ഇതുപോലെ അനുപුരകമായ ഒരു ജോടി കോൺകൾ ഉണ്ടാക്കുന്നതാണ്.

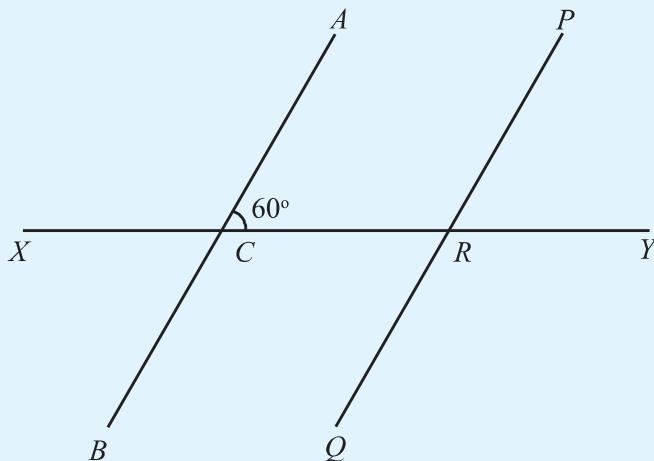


ഈ രണ്ടു ജോടികളിലെയും കോൺകളെ ആന്തരസഹകോൺകൾ (co-interior angles) എന്നാണു പറയുന്നത്.

ഇതുപോലെ അനുപුരകമായ ബാഹ്യകോൺകൾ (co-exterior angles) രണ്ടു ജോടികളുമുണ്ട്.



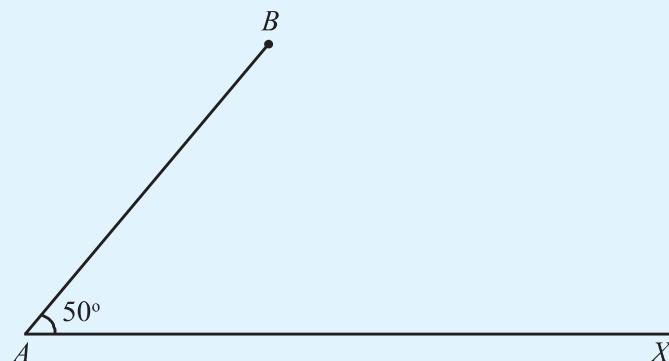
ചുവവെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ AB, PQ എന്നീ സമാനരവരകളെ XY എന്ന വര മുൻപുകടക്കുന്ന ബിന്ദുകളാണ് C, R എന്നിവ. ചിത്രത്തിലെ ആന്തരസഹക്കാണുകളുടെയും പാദധ്യസഹക്കാണുകളുടെയും ജോടികൾ കണ്ടുപിടിച്ച് പേരുകളും അളവുകളും ചുവവെ എഴുതുക.



ആന്തരസഹക്കാണുകൾ	പാദധ്യസഹക്കാണുകൾ

സമാനരവരകളും ത്രിക്കാണവും

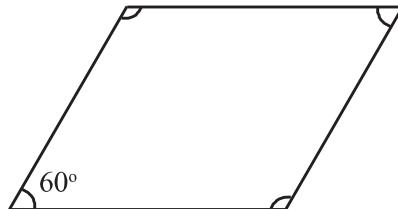
ഈ ചിത്രം നോക്കു.



B യിൽ നിന്നു തുടങ്ങുന്ന ഒരു വര AX കു സമാനരമായി വരയ്ക്കണം.

സാമാന്തരികക്കാണുകൾ

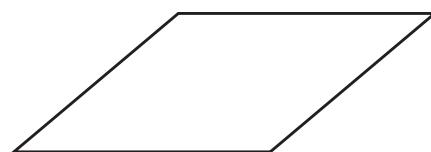
ഈ സാമാന്തരികം നോക്കു.



ഈതിലെ മറ്റു മൂന്നു കോണുകളുടെ അളവുകൾ എഴുതാമോ?

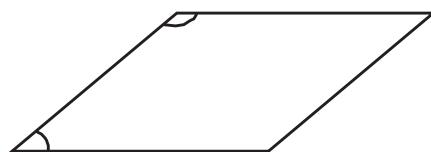
നാലു കോണുകളുടെയും തുക എന്താണ്?

ഈ ഈ സാമാന്തരികം നോക്കു.

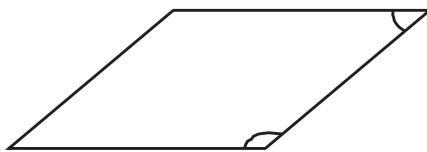


കോണുകളെല്ലാണും എഴുതിയിടില്ല.

ഇടതുവശത്ത് മുകളിലും താഴെയുമുള്ള കോണുകളുടെ തുക എത്രയാണ്?



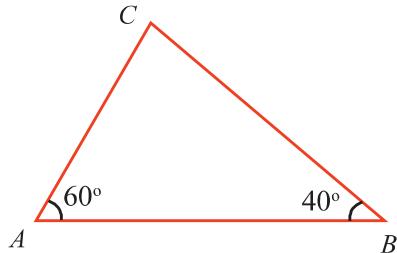
വലതുവശത്ത് മുകളിലും താഴെയുമുള്ള കോണുകളുടെ തുകയോ?



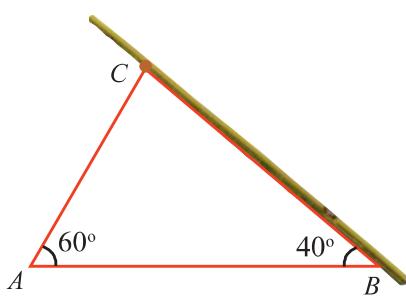
അപ്പോൾ നാലു കോണുകളുടെയും തുകയോ?

ത്രികോണവും സമാനത്വവരകളും

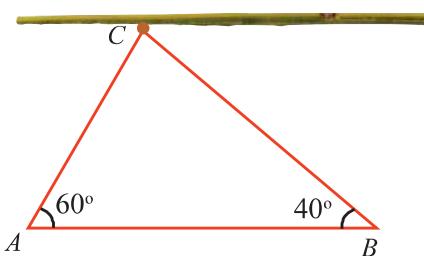
ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ കാർഡ് ബോർഡിൽ ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കുക.



ഇനി നീളമുള്ള ഒരു ഇംഗ്ലീഷ് ലൈൻ പാതയിൽ BC എന്ന വശത്തോട് ചേർത്തു വച്ച് C യിൽ ഒരു സൂചി കുത്തി ഉറപ്പിക്കുക.



ഇംഗ്ലീഷിൽ മുകളിലേക്ക് കറക്കി AB യോളം സമാനരമാക്കുക.



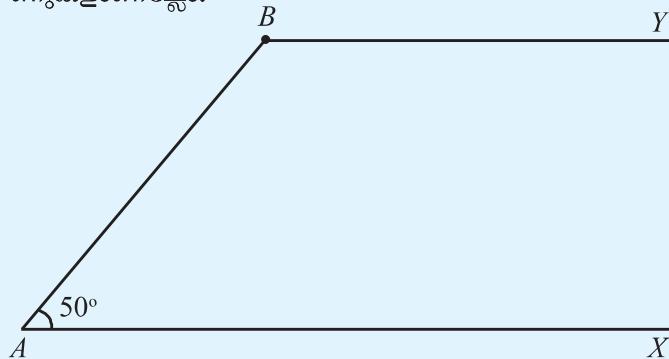
ഇപ്പോൾ ഇംഗ്ലീഷിൽ BC യുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ എത്രയാണ്?

AC യുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺോ?

അപ്പോൾ ത്രികോണത്തിൽ C യിലെ കോൺ എത്രയാണ്?

എങ്ങനെ വരയ്ക്കാം?

A യിലെ കോൺും B യിലെ കോൺും ആന്തരസഹക്രിയകളാണല്ലോ.

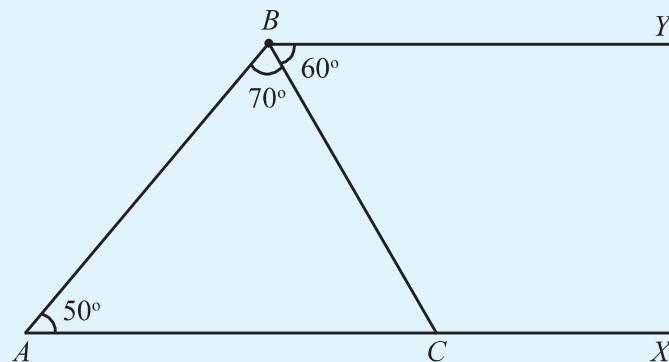


നോട്ടുപുസ്തകത്തിൽ ഈ ചിത്രം വരച്ചിരുന്നു.

ഇനി അതെ ചിത്രത്തിൽ B യിൽ നിന്ന് ഒരു വരച്ചിട്ടുള്ള വരയ്ക്കണം. AB യുമായുള്ള കോൺ 70° ആവാം.

ഈ വരച്ചാണി സമാനരമല്ലെല്ലാം.

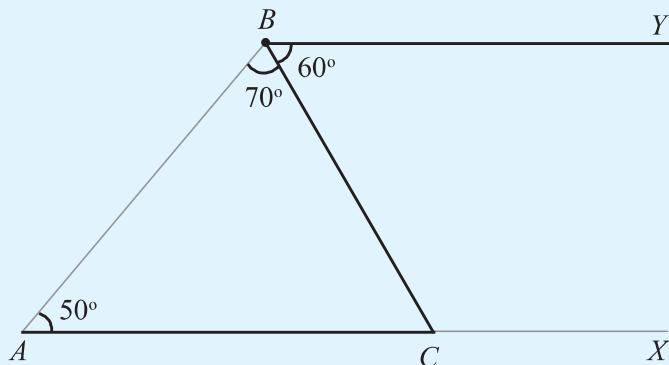
അത് AX മായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുവിനെ C എന്നു വിളിയ്ക്കാം.



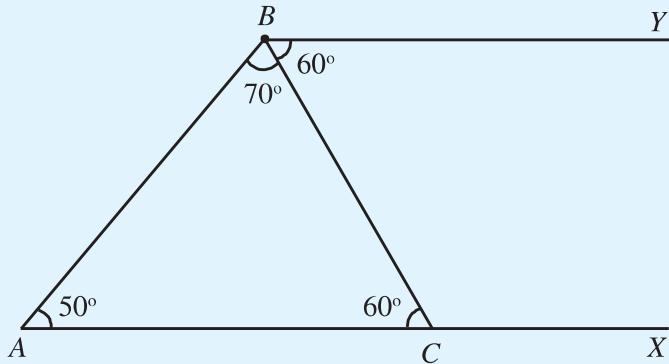
ഇപ്പോൾ ABC ഒരു ത്രികോണമാണ്.

അതിലെ A, B എന്നീ മുലകളിലെ കോൺകളുടെ അളവുകൾ അറിയാം, C യിലെ കോൺ എത്രയാണ്?

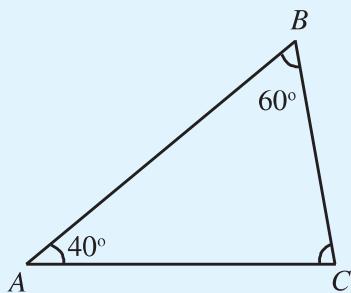
AC, BY എന്നിവ സമാനരമാണ്. ഈ വരകളും BC എന്ന വരയും മാത്രം ശ്രദ്ധിക്കു.



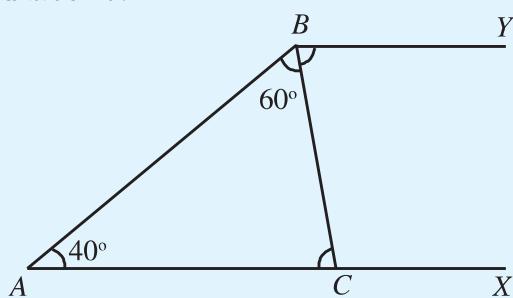
$\angle ACB$, $\angle CBY$ എന്നിവ മരുക്കോൺകളാണ്‌ലോ.



ഈ ചുവടെങ്കാടുത്തിരിക്കുന്ന ത്രികോൺ ത്തിൽ C യിലെ കോൺ കണ്ടുപിടിക്കാം.



ആദ്യത്തെ ചിത്രത്തിലെപ്പോലെ AC നീട്ടുകയും അതിനു സമാനരമായി B യിൽ നിന്ന് ഒരു വര വരയ്ക്കയും ചെയ്താലോ?



$\angle ACB$ കണ്ടുപിടിക്കണം, ഈ $\angle CBY$ കുൽവുമാണ്. എന്തുകൊണ്ട്?

$\angle CBY$ കണ്ടുപിടിക്കാൻ $\angle ABY$ അഭിനന്താൽ മതി. അതും $\angle A$ ഉം ആന്തരസഹകോൺകളാണ്.

അപ്പോൾ,

$$\angle ABY = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$$

ഈ തിരഞ്ഞീൻ,

$$\angle CBY = 140^\circ - 60^\circ = 80^\circ$$

അങ്ങനെ,

$$\angle ACB = \angle CBY = 80^\circ$$

സാമാന്തരികവും ത്രികോൺവും

ചുവടെ വരച്ചിരിക്കുന്ന സാമാന്തരികം നോക്കു.

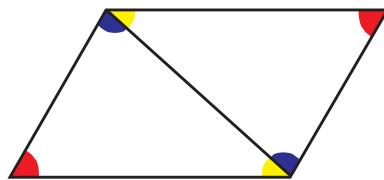


ചുവന്ന നിരത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന കോൺകൾ തമ്മിൽ എന്താണു ബന്ധം?

പച്ചനിരത്തിലുള്ള കോൺകൾ തമ്മിലോ?

വ്യത്യസ്ത നിരങ്ങളുള്ള കോൺകളോ?

ഈ ഇരു സാമാന്തരികത്തിലെ രണ്ട് എതിർമുളകൾ യോജിപ്പിക്കുക. അപ്പോൾ രണ്ടു ത്രികോൺങ്ങളായി.



നീലനിറം കൊടുത്തിരിക്കുന്ന കോൺകൾ തമ്മിൽ എന്താണു ബന്ധം?

മഞ്ഞനിറമുള്ള കോൺകൾ തമ്മിലോ?

അപ്പോൾ വ്യത്യസ്ത നിരങ്ങളുള്ള മൂന്നു കോൺകളെടുത്തു കൂട്ടിയാൽ എത്രകിട്ടും?

ഓരോ ത്രികോൺത്തിലെയും മൂന്നു കോൺകളുടെ തുക എത്രയാണ്?

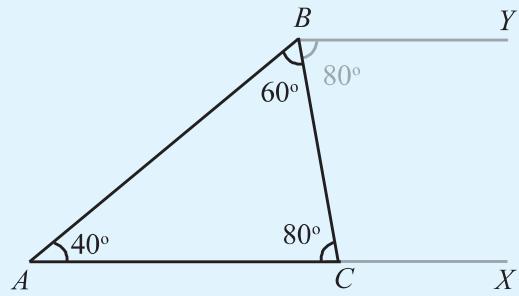
തത്വവും തെളിവും

എല്ലാ ത്രികോണങ്ങളിലും മുമ്പ് കോണുകളുടെ തുക 180° ആണെന്ന് എങ്ങനെന്ന തീരുമാനിക്കും? കുറേ ത്രികോണങ്ങൾ വരച്ച് ഓരോനിണ്ടിയും കോണുകൾ അളന്നു കൂടിനോക്കിയാൽ മതിയോ? ഇക്കുടത്തിലുംതു ഒരു ത്രികോണ തതിലും കോണുകളുടെ തുക 180° തന്നെയാണെന്ന് എങ്ങനെന്ന പറയാൻ കഴിയും?

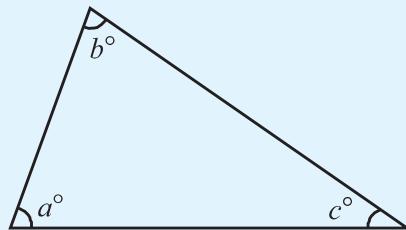
എത്രു ത്രികോണത്തിലും ഒരു മൂലയിലും എതിർവശത്തിനു സമാനരഹിതി ഒരു വര വര ത്തക്കാം. സമാനരവരകൾ ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകൾ തമിലുള്ള ബന്ധം ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണത്തിലെ കോണുകളുടെ തുക 180° ആണെന്നു കാണാം.

ഈങ്ങനെ ചെയ്യുന്നതിലും പലകാര്യങ്ങളും സാധിക്കുന്നുണ്ട്.

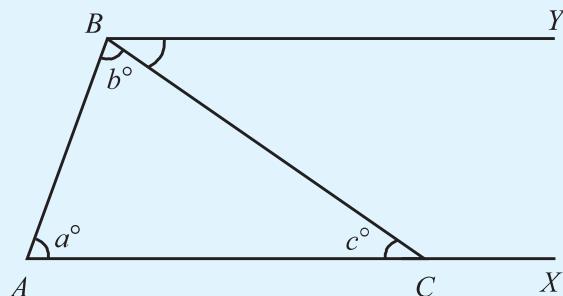
- ത്രികോണം മാറിയാലും, ഇവിടെ പറയുന്ന വാദങ്ങൾ മാറുന്നില്ല. അതിനാൽ അവയിലും സഹപിക്കുന്ന വസ്തുതയും എല്ലാ ത്രികോണങ്ങളിലും ശരിയാണ്.
- സമാനരവരകളെ സാമ്പാദിക്കുന്ന തത്താങ്ങൾ പെട്ടെന്നു തിരിച്ചറിയാം. ത്രികോണങ്ങളുടെ കോണുകളുടെ തുക 180° ആണെന്ന് തിരിച്ചറിയാൻ എളുപ്പമല്ല. ലഭിതമായ തത്താങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് സങ്കീർണ്ണമായ തത്താങ്ങൾ സഹപിക്കുന്ന തിരിച്ച് ഒരു ഉദാഹരണമാണിത്.
- സമാനരവരകൾ ഉപയോഗിച്ച് ഒരു കാര്യത്തിനിന്ന് മറ്റാന് എന്ന രീതിയിൽ വാദങ്ങൾ കോർത്തിണക്കുന്നോൾ, ത്രികോണത്തിലെ കോണുകളുടെ തുക 180° ആണെന്ന തത്തം മാത്രമല്ല, അത് എന്തുകൊണ്ടാണെന്നും വ്യക്തമാകുന്നു.



ഈ ഈ ത്രികോണം നോക്കുക.



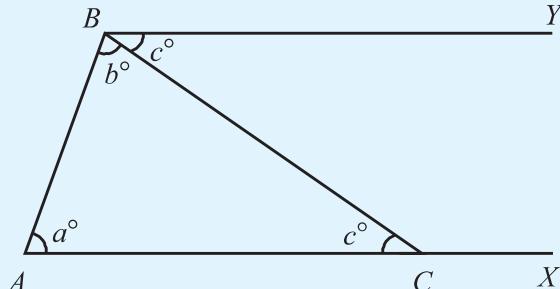
കോണുകളുടെ അളവുകൾ a, b, c എന്നീ അക്ഷയങ്ങൾക്കാണോൻ സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. ഈ തമിലുള്ള ബന്ധം എന്താണ്? പാരമോലെ സമാനരവരകൾ വരഞ്ഞാം.



ചിത്രത്തിൽനിന്ന്

$$\angle CBY = \angle ACB = c^\circ$$

എന്നു കാണാം.



ഈ ചിത്രത്തിൽ നിന്ന്

$$\angle A + \angle ABY = 180^\circ$$

അതായത്,

$$a + b + c = 180^\circ$$

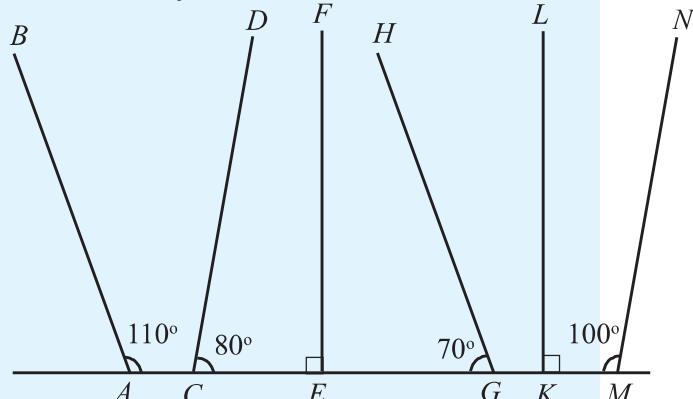
ഇതിൽനിന്ന് എന്തു മനസ്സിലായി?

എതു ത്രികോണത്തിലെയും കോണുകളുടെ തുക
180° ആണ്.

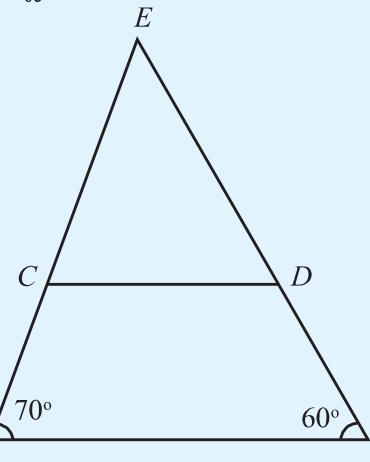


ചെയ്തുനോക്കാം

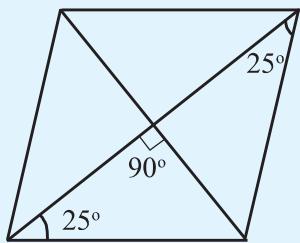
- ചിത്രത്തിലെ വരകളിൽ സമാനതരങ്ങളായ ജോടികൾ കണ്ണഡാക്കുക.



- ചിത്രത്തിൽ AB യും CD യും സമാനതരമാണ്. ചിത്രത്തിലെ എല്ലാ കോണുകളും കണക്കാക്കുക.

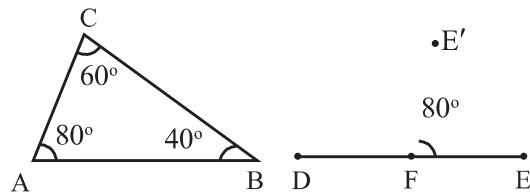


- ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ വികർണ്ണങ്ങൾ അതിനെ നാലു ത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിച്ചിരിക്കുന്നു. ഓരോ ത്രികോണത്തിന്റെയും എല്ലാ കോണുകളും കണക്കാക്കുക.



മാരാത്ത ബന്ധം

ജിയോജിബ്രയിൽ Polygon ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണം ABC നിർമ്മിക്കുക. Angle ടൂൾ എടുത്ത് ത്രികോണത്തിനുള്ളിൽ കൂണിക്ക് ചെയ്താൽ ത്രികോണത്തിന്റെ കോണളവുകൾ കാണാൻ കഴിയും.



ഈ DE എന്ന വരവരച്ച അതിൽ ഒരു കുത്ത് F ഇടുക. Angle with given size ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് E തിലും F ലും ക്രമമായി കൂണിക്ക് ചെയ്യുക. വരുന്ന ജാലകത്തിൽ Angle ആയി അനുസരിച്ച് ഒരു നൽകി പുതിയ കൂണിക്ക് ചെയ്യുക. ഇപ്പോൾ പുതിയ ഒരു ബിന്ദു E' ലഭിക്കും. ഇന്തെ ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് E', F ഇവയിൽ ക്രമമായി കൂണിക്ക് ചെയ്ത് Angle β എന്ന നൽകുക. പുതിയ ഒരു ബിന്ദു E'' ലഭിക്കും. E'', F എന്നിവയിൽ കൂണിക്ക് ചെയ്ത് Angle γ എന്നും നൽകുക. പുതിയ ഒരു ബിന്ദു E''' ലഭിക്കും. FE', FE'' എന്നീ വരകൾ വരയ്ക്കുക. ഇങ്ങനെ ലഭിക്കുന്ന ചിത്രത്തിൽ $\angle EFE' = \angle A$; $\angle E'FE'' = \angle B$; $\angle E''FE''' = \angle C$ ആയിരിക്കും. ഒരു ചിത്രം ഒരു കോണുകളുള്ള കോണുകൾക്ക് ഒരു നിർണ്ണയിക്കുന്നത് എന്താണ്?

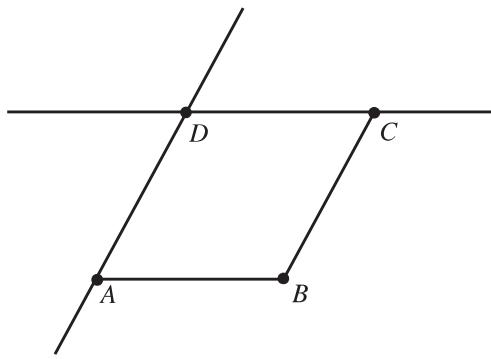
Move ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് കോണുകൾ മാറ്റി നോക്കു. വലതുവശത്തെ ചിത്രത്തിലും ഓരോ കോണിനും മാറ്റം വരുന്നില്ലോ? ഇവിടെ മാരാത്ത നിർണ്ണയിക്കുന്നത് എന്താണ്?



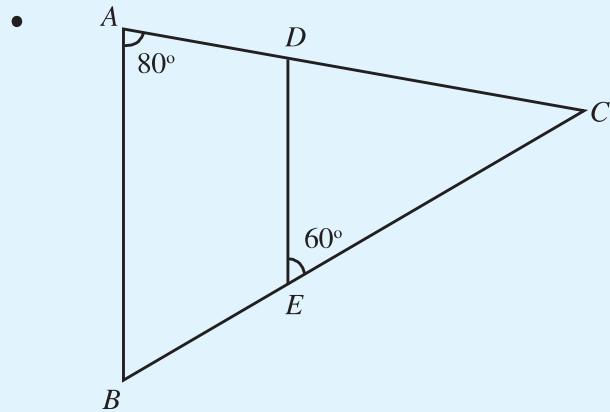
സാമാന്യരികം വരയ്ക്കാം

ജീയോജിറ്റൈൽ ഓരു സാമാന്യരികം വരയ്ക്കാം.

AB, BC എന്നീ വരകൾ വരയ്ക്കുക Parallel line ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് AB യ്ക്കു സമാനതരമായി C തിലുടെയും BC യ്ക്കു സമാനതരമായി A തിലുടെയും വരകൾ വരയ്ക്കുക. ഈ വരകൾ കൂട്ടി മുട്ടുന ബിന്ദു D അടയാളപ്പെടുത്തുക. Polygon ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് സാമാന്യരികം $ABCD$ പൂർത്തിയാക്കുക. ആവശ്യമില്ലാത്ത വരകൾ മറയ്ക്കാം.

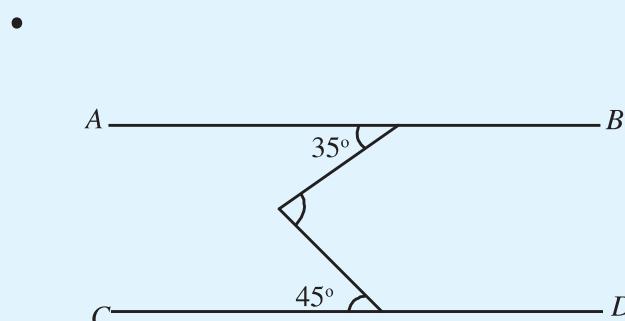
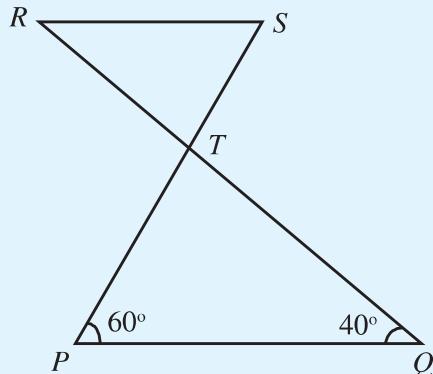


AB എന്ന വരയിൽ Right click ചെയ്ത് വരുന്ന ജാലകത്തിൽ Trace on എന്നതിനു നേരെ ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക. ഈപോലെ BC എന്ന വരയുടെയും Trace on നൽകുക. ഇന്ന് Move ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് സാമാന്യരികത്തിനുള്ളിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്തു പിടിച്ചുകൊണ്ട് നേരെ മുകളിലേക്ക് ഉയർത്തി നോക്കു. എന്താണ് കിട്ടുന്നത്?

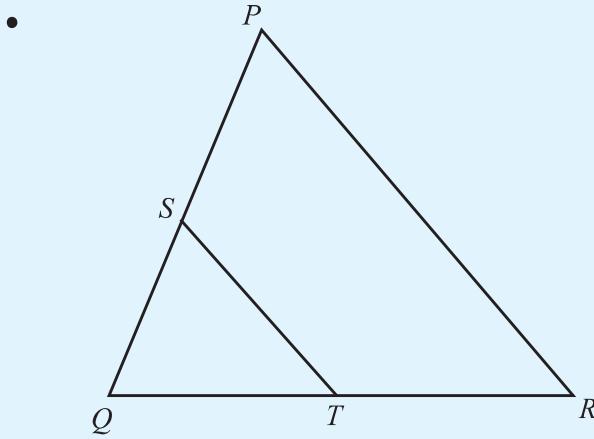


- ചിത്രത്തിൽ AB യും DE യും സമാനതരമാണ്. ഒങ്ങ് ത്രികോൺജൂലിലെയും എല്ലാ കോണുകളും കണക്കാക്കുക.

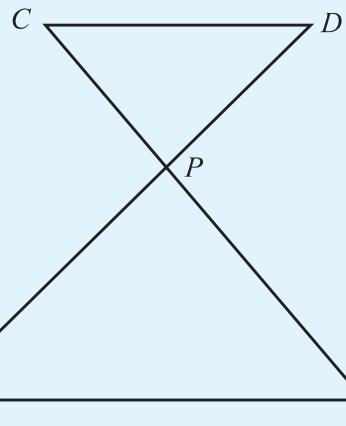
- ചിത്രത്തിൽ PQ യും RS ഉം സമാനതരമാണ്. ചിത്രത്തിലെ മറ്റു കോണുകൾ കണക്കാക്കുക.



ചിത്രത്തിൽ AB യും CD യും സമാനതരമാണ്. മുന്നാമെത്തു കോണിൽ കണക്കാക്കുക.



ചിത്രത്തിൽ PR ഉം ST യും സമാനരമാണ്. വലിയ ത്രികോണത്തിലെയും ചെറിയ ത്രികോണത്തിലെയും കോണുകളുടെ അളവുകൾ തമ്മിൽ എത്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ?



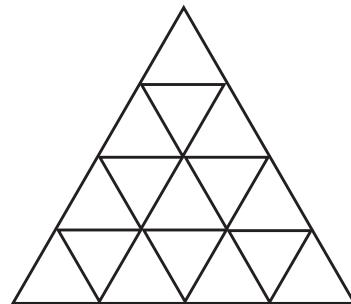
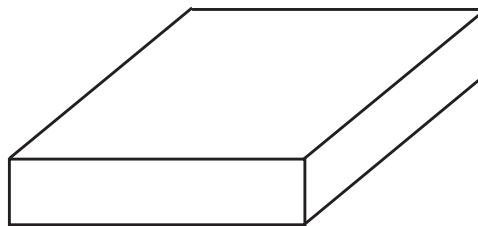
AB യും CD യും സമാനരമാണ്. വലിയ ത്രികോണത്തിലെയും ചെറിയ ത്രികോണത്തിലെയും കോണുകളുടെ അളവുകൾ തമ്മിൽ എന്താണു ബന്ധം?

- AB എന്ന വര വരച്ച് അതിന് സമാനരമായി CD എന്ന മറ്റാരു വര വരയ്ക്കുക. ഈ രണ്ടു വരകളെയും മൂരിച്ചുകടക്കുന്ന EF എന്ന വര വർക്കുക. EF എന്ന വര AB, CD എന്നീ വരകളെ മൂരിച്ചുകടക്കുന്ന ബിന്ദുകൾ M, N എന്നിവയാണ്. ഈപോൾ ഉണ്ടാകുന്ന കോണുകളിൽ ഒന്ന് അളന്നു നോക്കാതെ എഴുതുക. ചിത്രത്തിലെ സമാനകോണുകൾ, മറുകോണുകൾ, സഹകോണുകൾ എന്നിവകളുടെ ജോടികളെല്ലാം എഴുതുക.



ചിത്രങ്ങൾ വരയ്ക്കുക

ജിയോജിബേ ഉപയോഗിച്ച് ചുവടെയുള്ള ചിത്രങ്ങൾ വരച്ചുനോക്കു.



വലിയ ത്രികോണം വരയ്ക്കാൻ Regular Polygon ടൂൾ ഉപയോഗിക്കാം.

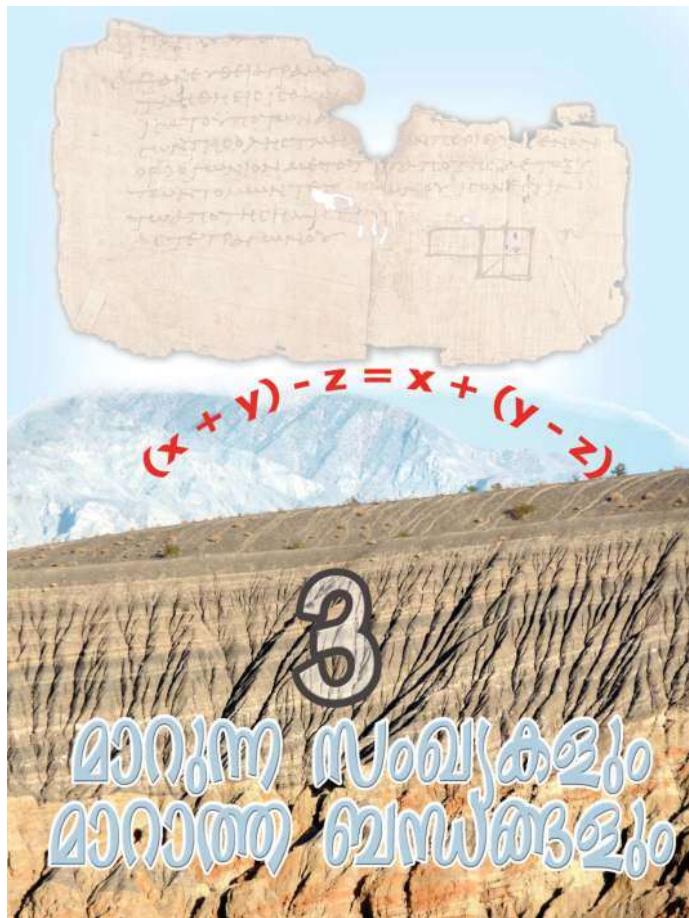
തിരിക്കേണ്ടവും



പഠനേടങ്ങൾ	എനിക്സ് കഴിയും	ടീച്ചറ്റ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടു ണ്ടതുണ്ട്
● തുല്യ അകലത്തിലുള്ള വരകളെന്ന നില യിൽ സമാനരവരകളെ വിശദീകരിക്കു ന്നു.			
● ചരിവ്/ലംബം എനിവയുമായി ബന്ധപ്പെ ടുത്തി സമാനരവരകളെ വിശദീകരിക്കു ന്നു.			
● വിവിധ രീതികളിൽ സമാനരവരകൾ വര യ്ക്കാനും ഈ സമാനരമാണെന്ന് സമർപ്പിക്കാനും കഴിയുന്നു.			
● സമാനരവരകളെ മാതൃകകൾ തയാ റക്കി വിശദീകരിക്കുന്നു.			
● ഒരു സമാനരവരകളെ ഒരു വര മുൻ്നു കടക്കുവോൾ ഉണ്ടാകുന്ന ഒരു കോൺ തന്നാൽ മറ്റൊരു കണ്ണടത്തുന്ന രീതി സമർപ്പിക്കുന്നു.			
● സമാനരവരകളുടെ പ്രത്യേകതകൾ വിശ ദീകരിക്കുന്നതിൽ എ.സി.ടി. സാധ്യത കൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു.			
● സമാനരവരകളിലെ സമാനകോൺകൾ, മറുകോൺകൾ, സഹകോൺകൾ എനിവയുടെ പ്രത്യേകതകൾ വിശദീക രിക്കുന്നു.			
● ത്രികോൺത്തിലെ കോൺളവുകളുടെ തുക 180° ആണ് എന്ന് യുക്തിപൂർവ്വം സമർപ്പിക്കുന്നു.			

3

മാറ്റുന്ന സംഖ്യകളും മാറ്റാത്ത ബന്ധങ്ങളും



അളവുകളുടെ ബന്ധങ്ങൾ

ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വരെത്തിന്റെ നീളം 3 സെൻ്റിമീറ്റർ രാണ്. അതിന്റെ ചുറ്റളവ് എത്രയാണ്?

മാറാത്ത ബന്ധങ്ങൾ

പല വലുപ്പത്തിൽ സമചതുരം വരയ്ക്കാം. വശങ്ങളുടെ നീളം മാറുന്നതനുസരിച്ച് ചുറ്റളവും മാറും. എന്നാൽ എല്ലാ സമചതുരങ്ങളിലും ചുറ്റളവ്, വശത്തിന്റെ നീളത്തിന്റെ നാലു മടങ്ങ് തന്നെയാണ്. പരപ്പളവ്, വശത്തിന്റെ നീളത്തെ അതുകൊണ്ടുതന്നെ ഗുണിച്ചതും.

ഇങ്ങനെ അളവുകൾ മാറുന്നോയും, അവ തമിലുള്ള ചില ബന്ധങ്ങൾ മാറാതിരിക്കുന്ന അനേകം സന്ദർഭങ്ങളുണ്ട്. ഉദാഹരണമായി, ഇരുവും കൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ പല വസ്തുകൾ എടുത്താൽ, അവയുടെ വ്യാപ്തവും ഭാരവും വ്യത്യസ്തമായിരിക്കും. എന്നാൽ ഭാരതെത്ത് വ്യാപ്തം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 7.8 എന്ന ഒരേ സംഖ്യ തന്നെ കിട്ടും. ഇതിനെയാണ് ഇരുവിന്റെ സാന്ദ്രത എന്നു പറയുന്നത്. ഇരുവിനു പകരം ചെമ്പും കൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ വസ്തുകളിലെല്ലാം ഭാരതെത്ത് വ്യാപ്തംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്നത് 8.9 ആണ്. ഇതാണ് ചെമ്പിന്റെ സാന്ദ്രത.

ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ, അളവുകൾ തമിലുള്ള മാറാത്ത ബന്ധങ്ങൾ അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. ഉദാഹരണമായി, ഇരുവും കൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഭാരം w എന്നും വ്യാപ്തം v എന്നും മെടുത്താൽ

$$w = 7.8v$$

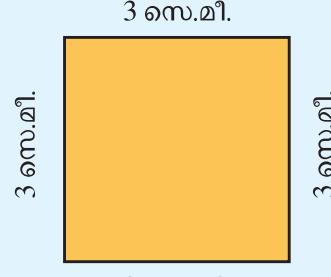
എന്നെഴുതാം. ഇരുവിനു പകരം ചെമ്പാണെങ്കിൽ, ഇരു ബന്ധം

$$w = 8.9v$$

എന്നാകും. പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഭാരം w , വ്യാപ്തം v , അതുകൊണ്ടു കുന്ന പദാർധത്തിന്റെ സാന്ദ്രത d എന്നും താഴെ, ഇരു അളവുകൾ തമിലുള്ള പൊതുവായ ബന്ധം

$$w = dv$$

എന്നെഴുതാം.



3 സെ.മീ.

3 സെ.മീ.

3 സെ.മീ.

വശത്തിന്റെ നീളം 5 സെൻ്റിമീറ്റർ ആയാലോ?

എതു സമചതുരത്തിന്റെയും ചുറ്റളവ്, ഒരു വശത്തിന്റെ നീളത്തിന്റെ നാലു മടങ്ങാണല്ലോ. ഈക്കാരും അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ചുരുക്കിയെഴുതിയത് ഓർമയുണ്ടോ?

സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളത്തോട് എന്ന അക്ഷരം കൊണ്ടും ചുറ്റളവിനെ p എന്ന അക്ഷരംകൊണ്ടും സൂചിപ്പിച്ചാൽ,

$$p = 4 \times s$$

എന്നെഴുതാം. ഇങ്ങനെ അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് സംഖ്യകൾ തമിലുള്ള ബന്ധം എഴുതുന്നോൾ \times എന്ന ഗുണന ചിഹ്നം എഴുതാറില്ലെന്നും (അതിന്റെ കാരണവും) നമുക്കെറയാം. അപ്പോൾ എത്ര സമചതുരത്തിന്റെയും വശത്തിന്റെ നീളമായ s ഉം ചുറ്റളവായ p ഉം തമിലുള്ള ബന്ധം

$$p = 4s$$

എന്നെഴുതാം.

സമചതുരത്തിനു പകരം ചതുരമായാലോ?

രണ്ടു വ്യത്യസ്ത വശങ്ങളുടെ നീളം അറിയാമെങ്കിൽ ചുറ്റളവ് എങ്ങനെ കണക്കാക്കും?

വശങ്ങളുടെ നീളം l, b എന്നും ചുറ്റളവ് p എന്നുമെടുത്താൽ p, l, b എന്നിവ തമിലുള്ള ബന്ധം എങ്ങനെ എഴുതും?

ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളവും പരപ്പളവും തമിലുള്ള ബന്ധം അക്ഷരങ്ങളുപയോഗിച്ച് എങ്ങനെ ചുരുക്കിയെഴുതും?

സംവ്യാഖ്യങ്ങൾ

ഈ കണക്കുകൾ നോക്കു:

$$1 + 2 = 3$$

$$2 + 3 = 5$$

$$3 + 4 = 7$$

അടുത്തകൂത്ത എല്ലാൽസംവ്യക്തിയാണ് കൂടുന്നത്. ഈ ഇള കണക്കുകൾ നോക്കു:

$$(2 \times 1) + 1 = 3$$

$$(2 \times 2) + 1 = 5$$

$$(2 \times 3) + 1 = 7$$

എല്ലാൽസംവ്യക്തിയുടെ രണ്ടു മടങ്ങിനോട് ഒന്നു കൂടുന്നു. രണ്ടു കണക്കുകളിലും അവസാനം ഒരേ സംവ്യക്തി കിട്ടുന്നത് എന്തുകൊണ്ടാണ്?

എത്തകിലുമൊരു എല്ലാൽസംവ്യക്തിയുടെ, ആദ്യം പറഞ്ഞ ക്രിയകൾ ചെയ്തുനോക്കാം. ഉദാഹരണമായി, 7 എടുത്തു നോക്കാം; അടുത്ത സംഖ്യ 8; തുക

$$7 + 8 = 15$$

ഇതിലെ 8 നെ 7 + 1 എന്നെഴുതിയാലോ?

$$7 + 7 + 1 = (2 \times 7) + 1 = 15$$

എന്നു കാണാം. ഇതിൽ 7 ന് പകരം എൽ എല്ലാൽസംവ്യക്തിയാലും ഇതുപോലെ തന്നെ എഴുതാം. അതായത്

എത്തകിലും എല്ലാൽസംവ്യക്തിയാലും അതിനുത്തെ എല്ലാൽസംവ്യക്തിയാലും ആദ്യത്തെ സംവ്യക്തിയുടെ രണ്ടു മടങ്ങിനോട് ഒന്നു കൂട്ടിയാലും, ഒരേ സംഖ്യ തന്നെ കിട്ടു.

ഇവിടെ എല്ലാൽസംവ്യക്തിയെന്നുണ്ടോ?

ഉദാഹരണമായി അത് എന്ന ഭിന്നസംവ്യക്തിയിൽനിന്നു തുടങ്ങാം. അതിനുത്തെ സംഖ്യ എന്നു പറയുന്നതിൽ അൻപമില്ല. അതിനോട് ഒന്നു കൂട്ടിയ സംഖ്യ എന്നുപറയാം: അതായത് അരയും ഒന്നും ഒന്നര; അരയും ഒന്നരയും കൂട്ടിയാൽ രണ്ട്.

മരിച്ച്, അരയുടെ രണ്ടു മടങ്ങ് ഒന്ന്; അതിനോട് ഒന്നു

$$\frac{1}{2} + 1 \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + 1 \right) = \left(2 \times \frac{1}{2} \right) + 1$$

അളവുകളും സംവ്യക്തി

പലതരം അളവുകളെ സൂചിപ്പിക്കാനും അവ തട്ടിച്ചുനോക്കാനും മനുഷ്യർ സംവ്യക്തി ഉണ്ടാക്കിയത്. ഉദാഹരണമായി, “വലിയൊരു സംഖ്യ ആളുകൾ” എന്നു പറയുന്നതിനു പകരം, “നൂറുപേരുടെ സംഖ്യ” എന്നു പറയുന്നേൻ കാര്യങ്ങൾ കുറേക്കുടി വ്യക്തമാക്കുന്നു. അതു ഹേബ് “കുറേ ദുരം നടന്നു” എന്നതിനു പകരം “രണ്ടര കിലോമീറ്റർ നടന്നു” എന്ന് കുറേക്കുടി കൂട്ടുമായി പറയാം.

നീളവും ഭാവവും സമയവുമെല്ലാം ഉപകരണങ്ങളുപയോഗിച്ച് നേരിട്ട് അളക്കുന്നവയാണ്; പരപ്പുളവും വ്യാപ്തവും സാന്ദരഭയുമെല്ലാം നേരിട്ട് കുകയല്ല, കണക്കുകൂട്ടിയെടുക്കുകയാണ് ചെയ്യുന്നത്. അതിന് സംവ്യക്തി ഉപയോഗിച്ചിള്ള ക്രിയകൾ വേണ്ടിവരുന്നു. ഉദാഹരണമായി, ചതുരക്കെട്ടു വ്യാപ്തം കണക്കുപിടിക്കാൻ, നീളവും വീതിയും ഉയരവുമെല്ലാം അളന്ന് അങ്ങനെ കിട്ടുന്ന സംവ്യക്തി തമ്മിൽ ശൃംഖലാം.

ക്രമേണ അളവുകളുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരുന്ന സംവ്യക്തിയുടെതന്നെ ക്രിയകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധങ്ങളെക്കുറിച്ചും മനുഷ്യർ ആലോചിച്ചു തുടങ്ങി. ഉദാഹരണമായി,

ഒരു ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് കണക്കുപിടിക്കാൻ ഓരോ വശത്തിന്റെയും നീളം അളന്ന് കൂടുന്നതിനു പകരം, രണ്ടു വ്യത്യസ്ത വശങ്ങളുടെ നീളമുള്ള് അവയുടെ തുകയുടെ രണ്ടു മടങ്ങ് കണക്കാക്കിയാൽ മതി

എന്നു കണ്ണെത്തിയിൽനിന്ന് തുടർച്ചയാണ്,

രണ്ടു സംഖ്യകളെ രണ്ടുകൊണ്ട് വെവ്വേറെ ശൃംഖല കൂടുന്നതിനുപകരം, സംവ്യക്തിയുടെ തുകയെ രണ്ടുകൊണ്ട് ശൃംഖല മതി.

എന്ന പൊതുവായ സംഖ്യാതത്താം,

കാലമേരെക്കഴിഞ്ഞപ്പോൾ ഇതുതന്നെ അക്ഷയരജിൾ ഉപയോഗിച്ച്

$$2x + 2y = 2(x + y)$$

എന്നു ചുരുക്കിയെഴുതുന്ന ഗണിതഭാഷയും നാം നിർണ്ണിച്ചു.

സംഖ്യാത്തവാദം

സംഖ്യകളുടെ ക്രിയകളെക്കുറിച്ചുള്ള പൊതു വായ കാര്യങ്ങൾ അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ചുരുക്കിയെഴുതാം എന്നു പറഞ്ഞല്ലോ. ഉദാഹരണമായി,

എത്ര സംഖ്യയോടും 0 കൂടിയാൽ, അതു സംഖ്യ തന്നെ കിട്ടും.

ഈ കാര്യം

$$x \text{ എന്ന എത്ര } \text{ സംഖ്യ } \text{ എടുത്താലും} \\ x + 0 = x$$

എന്നു ചുരുക്കിയെഴുതാം. ഇതുപോലെ ഒബ്ദു സംഖ്യകളുടെ തുക കണ്ണുപിടിക്കാൻ എത്ര ക്രമത്തിലും കൂട്ടാം എന്നതിന്റെ ചുരുക്കണക്കുത്താൻ.

x, y എന്ന എത്ര ഒബ്ദു സംഖ്യകൾ എടുത്താലും

$$x + y = y + x$$

ഇതുപോലെ ലഭിതവും സ്ഥാവികവുമായുള്ള പൊതുത്തവാദം ഇങ്ങനെ ചുരുക്കിയെഴുതേണ്ട ആവശ്യമില്ല. എന്നാൽ,

എത്തെങ്കിലും സംഖ്യ എടുത്ത് ഒന്നു കൂട്ടിയത് കൂട്ടിയാലും ഒബ്ദു മടങ്ങിനോക്ക് ഒന്നു കൂട്ടിയാലും, ഒരു സംഖ്യതന്നെ കിട്ടും.

എന്നു വിസ്തരിച്ചു പറയുന്നതിനോക്കാൻ സൗകര്യം

$$x \text{ എന്ന എത്ര } \text{ സംഖ്യ } \text{ എടുത്താലും} \\ x + (x + 1) = 2x + 1$$

എന്നു പറയുന്നതാണ്.

ഇവിടെ മറ്റാരു കാര്യം ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടതുണ്ട്. ഇത്തരം ചുരുക്കണക്കുകൾ ഓർത്തു വയ്ക്കാൻ ഏളുപ്പമാണ്. പക്ഷേ, അവ ആവശ്യമുന്നുന്നതിൽ ഉപയോഗിക്കണമെങ്കിൽ അവയുടെ അർത്ഥം വ്യക്തമായി മനസ്സിലാക്കണം.

മടക്കുട കൊണ്ടുനടക്കാൻ സൗകര്യമാണെന്ന കിലും, തുറക്കാൻ അനിയില്ലെങ്കിൽ നന്ദയെങ്കിൽ വരുമല്ലോ!

എത്ര ഭിന്നസംഖ്യയിൽനിന്നു തുടങ്ങിയാലും ഇപ്പറമ്പിക്കണമെന്നു കൂടുതൽ ശരിയാണ്. അപ്പോൾ മുകളിലെഫുതിയ കാര്യം അത്തപ്പേരു കൂടി വികസിപ്പിക്കാം:

എത്തെങ്കിലും സംഖ്യ എടുത്ത് ഒന്നു കൂടിയത് കൂട്ടിയാലും ഒബ്ദു മടങ്ങിനോക്ക് ഒന്നു കൂട്ടിയാലും, ഒരേ സംഖ്യതന്നെ കിട്ടും.

സംഖ്യകളെ സംഖ്യാിക്കുന്ന പൊതുവായ ഇക്കാര്യം അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ചുരുക്കിയെഴുതാം. അതിന് തുടങ്ങുന്ന സംഖ്യയെ x എന്നും കൂടിയത് $x + 1$; ഇവ തമ്മിൽ കൂടിയതിനെ $x + (x + 1)$ എന്നും താം. ഈ x ഒബ്ദു മടങ്ങ് $2x$. അതിനോക്ക് 1 കൂടിയത് $2x + 1$. അപ്പോൾ സംഖ്യകളെക്കുറിച്ച് നാം കണക്കുപിടിച്ച് പൊതുവായ കാര്യം ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$x \text{ എത്ര } \text{ സംഖ്യ } \text{ ആയാലും } x + (x + 1) = 2x + 1$$

സംഖ്യകളെ സംഖ്യാിക്കുന്ന കാര്യങ്ങൾ അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ചുരുക്കിയെഴുതുന്ന രീതിയാണ് ബീജഗണിതം (*algebra*).

ചെറിയൊരു ഉദാഹരണം നോക്കാം: ഒരു സംഖ്യയോട് മറ്റാരു സംഖ്യ കൂട്ടി; പിന്നെ കൂട്ടിയ സംഖ്യ കുറഞ്ഞ്. ഇപ്പോൾ എന്തായി? പഴയ സംഖ്യതന്നെ തിരിച്ചു കിട്ടി.

അദ്യത്തെ സംഖ്യ x എന്നും കൂട്ടിയ (പിന്നീട് കുറഞ്ഞ) സംഖ്യ y എന്നുമെടുത്താൽ, സംഭവിച്ച കാര്യം ബീജഗണിത രീതിയിൽ ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$x, y \text{ എത്ര } \text{ ഒബ്ദു } \text{ സംഖ്യകൾ } \text{ എടുത്താലും}, (x + y) - y = x$$

ഇവിടെ പറഞ്ഞത് എല്ലാ സംഖ്യകൾക്കും ബാധകമായ ഒരു പൊതുത്തവാനെന്ന് പ്രത്യേകം ശ്രദ്ധിക്കണം. എത്തെങ്കിലും ചില സംഖ്യകൾക്കുമാത്രം ശരിയാകുന്ന കാര്യങ്ങൾ പൊതുത്തവാനെല്ലാം. ഉദാഹരണമായി $2 + 2$ ഉം 2×2 ഉം 4 തന്നെ. പക്ഷേ, $x + x = x \times x$ എന്നത് ഒരു പൊതുത്തമല്ല (2നു പകരം 3 എടുത്താൽ ഇത് ശരിയാകില്ലോ).

ഈ ചുവടെപ്പറയുന്ന ഓരോ ക്രിയയും പല സംഖ്യകൾ എടുത്ത് ചെയ്തു നോക്കു, ഉത്തരമായി കിട്ടുന്ന സംഖ്യയെ മറ്റാരു തരത്തിൽ വിവരിക്കുക. ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന ഓരോ ബന്ധത്തെയും പൊതുവായ ഒരു തത്ത്വമായി സാധാരണ ഭാഷയിൽ എഴുതുക. അത് ബീജഗണിതരീതിയിൽ (അക്ഷരങ്ങളുപയോഗിച്ച്) എഴുതുക:

- ഒരു സംവ്യയും അതിനോട് രണ്ട് കൂട്ടിയതും തമ്മിൽ കൂട്ടുക.
- ഒരു സംവ്യയോട് ഒന്നു കൂടി, രണ്ടു കൂറയ്ക്കുക.
- ഒരു സംവ്യയിൽനിന്ന് മറ്റാരു സംവ്യ കുറച്ച്, കുറച്ച് സംവ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങ് കൂട്ടുക.
- ഒരു സംവ്യയോട് അതിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങ് കൂട്ടുക.
- അടുത്തടുത്ത രണ്ട് എല്ലാൽസംവ്യകളുടെ തുകയിൽ നിന്ന് 1 കുറയ്ക്കുക.
- അടുത്തടുത്ത രണ്ട് ഒറ്റ സംവ്യകളുടെ തുകയിൽനിന്ന് അവയുടെ ഇടയിൽവരുന്ന ഇരട്ടസംവ്യ കുറയ്ക്കുക.
- ഒരു സംവ്യയോട് മറ്റാരു സംവ്യ കൂടി ആദ്യ സംവ്യ കുറയ്ക്കുക.
- ഒരു സംവ്യയും അതിനോട് മറ്റാരു സംവ്യ കൂട്ടിക്കിട്ടുന്ന സംവ്യയും തമ്മിൽ കൂട്ടുക.
- ഒരു സംവ്യയും അഭ്യു മടങ്ങിൽനിന്ന് ആ സംവ്യ യുടെ രണ്ടു മടങ്ങ് കുറയ്ക്കുക.
- ഒരു സംവ്യയുടെ രണ്ടുമടങ്ങ്യും ആ സംവ്യയുടെ മൂന്നു മടങ്ങും കൂട്ടുക.

എങ്ങനെ കൂട്ടിയാലും...

$38 + 25 + 75$ എത്രയാണ്?

ക്രമമായി കൂട്ടാം:

$$38 + 25 = 63$$

$$63 + 75 = 138$$

ഇങ്ങനെയും കൂട്ടാം:

$$25 + 75 = 100$$

$$38 + 100 = 138$$

രണ്ടാമതു പറഞ്ഞതുപോലെ കൂട്ടാൻ കടലംസും പ്രേരണയും വേണ്ടണ്ണോ.

ഈ ഈ കണക്കു ശ്രമിച്ചുനോക്കു:

$$29 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}$$

ആദ്യം ഏതു രണ്ടു സംവ്യകൾ കൂട്ടുന്നതാണ് എല്ലാലും?

ഈ രണ്ടു കണക്കുകളിലും കണക്കെന്താണ്?

മൂന്നു സംവ്യകളുടെ തുക കണക്കുപിടിക്കാൻ, ആദ്യത്തെ രണ്ടു സംവ്യകളുടെ തുക കണക്കുപിടിച്ച്, മൂന്നാമത്തെത്തീ നോട് കൂട്ടാം. അല്ലെങ്കിൽ അവസ്ഥനെത്തെ രണ്ടു സംവ്യ

കീയ രണ്ട്, ഫലം എന്ന്

ഒരു സംവ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങിനോട് ഒന്നു കൂട്ടുക എന്നത് ഒരു ഗണിതക്രിയയാണ്; ഈ കീയ ചെയ്താൽ കിട്ടുന്ന സംവ്യ അതിന്റെ ഫല വും ഉദാഹരണമായി, 3 എന്ന സംവ്യയെക്കുത്ത് ഇല്ല കീയ ചെയ്താൽ 7 എന്ന ഫലം കിട്ടും. കീയ ചെയ്യുന്നത് 10 എന്ന സംവ്യയിലാണെങ്കിൽ, ഫലം 21.

ഒരു സംവ്യയോട് ഒന്നു കൂടി, ആ തുകയെ സംവ്യയോട് കൂട്ടുക എന്നത് മറ്റാരു ക്രിയയാണ്. ഉദാഹരണമായി 4 എന്ന സംവ്യയിൽ ഇല്ല കീയ ചെയ്താൽ, ഫലം $4 + (4 + 1) = 9$.

ങ്ങെ സംവ്യയിൽ ഇല്ല രണ്ടു കീയകൾ ചെയ്താലും ഫലം ഒന്നുതന്നെയാണ്. ഇക്കാര്യ മാണം ബിജഗണിതരീതിയിൽ

$$x + (x + 1) = 2x + 1$$

എന്നു ചുരുക്കിയെഴുതുന്നത്. ഇതിൽ ആദ്യമെ ചുതിയ $x + (x + 1)$ എന്നത്, ഒരു സംവ്യയും അതിനോട് ഒന്നു കൂട്ടിയതും തമ്മിൽ കൂട്ടുക എന്ന ക്രിയയാണ്. രണ്ടാമതെഴുതിയ $2x + 1$ എന്നത്, സംവ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങിനോട് ഒന്നു കൂട്ടുക എന്ന ക്രിയയും. ഇല്ല രണ്ടു കീയകളുടെയും ഫലം തുല്യമാണെന്നാണ് സമചിനം കാണിക്കുന്നത്.

ഇതുപോലെ രണ്ടു സംവ്യകളിൽ ഓരോന്നി ഷണ്ഡിയും രണ്ടു മടങ്ങ് കണക്കുപിടിച്ച് അവ കൂട്ടുക എന്ന ക്രിയയെ ബിജഗണിതരീതിയിൽ $2x + 2y$ എന്നെഴുതാം. രണ്ടു സംവ്യകൾ കൂടി അതിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങ് എടുക്കുക എന്ന ക്രിയയുടെ ബിജഗണിത രൂപമാണ് $2(x + y)$. ഒരേ ജോടി സംവ്യകളിൽ ഇല്ല രണ്ടു കീയകളും ചൊർത്താൽ ഫലം ഒന്നുതന്നെയാണ് എന്ന പൊതുതത്പരതയിൽ വിജഗണിതരൂപമാണ്

$$2x + 2y = 2(x + y)$$

ഇതുപോലെ, പ്രത്യുകഷ്ടതിൽ വ്യത്യസ്തമായ ക്രിയകൾ ഫലത്തിൽ ഒന്നുതന്നെയാണ് എന്നു പറയുകയാണ് സംവ്യകളെ സംഖ്യാശൈലിയിൽ പല പൊതുതത്പരങ്ങളും.

അക്കണിതവും ബീജഗണിതവും

സംഖ്യകളെക്കുറച്ചുള്ള പഠനങ്ങളെ പൊതുവേ അക്കണിതാ എന്നാണ് പറയുന്നത്; അക്കഷരങ്ങളുപയോഗിച്ച് ഇവയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് ബീജഗണിതവും.

അക്കണിതത്തിൽ $3 + 7$ എന്നാണുതുന്നത് മുന്നും ഏഴും കൂടുകു എന്ന ക്രിയയെ സൂചിപ്പിക്കാനാണ്. കൂട്ടിക്കിട്ടുന്ന തുക, അമ്ഭവാ ഈ സംഖ്യകൾ കൂടുകു എന്ന ക്രിയയുടെ ഫലം പത്രം. ക്രിയയും ഫലവും ചേർത്ത്

$$3 + 7 = 10$$

എന്നാണു.

ബീജഗണിതത്തിൽ, രണ്ടു സംഖ്യകൾ കൂടുകു എന്ന ക്രിയയെ $x + y$ എന്നാണുത്താം. കൂട്ടിക്കിട്ടുന്ന തുകയെ എങ്ങനെയെഴുതുന്നു? സംഖ്യകളും റിയാതെ തുക കണ്ടുപിടിക്കാൻ കഴിയില്ലോ. അപ്പോൾ തുകയെയും $x + y$ എന്നുതന്നെ എഴുതാനു കഴിയുകയുള്ളൂ.

എന്നാൽ,

ഒരു സംഖ്യയെ അതിനോടുതനെ കൂട്ടിയതാണ് സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങ്.

എന്ന വസ്തുതയെ ബീജഗണിതരീതിയിൽ

$$x + x = 2x$$

എന്നാണുതാം.

ഇവിടെ മറ്റൊരു കാര്യം ശ്രദ്ധിക്കണം. മേൽപ്പറ ഞത്ത് ഒരു തത്ത്വമല്ല, രണ്ടു മടങ്ങ് (രണ്ടു കൊണ്ടുള്ള ഗുണനം) എന്ന ക്രിയയുടെ വിശദീകരണം അമ്ഭവാ നിർവ്വചനമാണ്.



കളുടെ തുക ആദ്യത്തെതിനോട് കൂട്ടാം. ഈ മറ്റാരുതരത്തിലും പറയാം:

ഒരു സംഖ്യയോട് രണ്ടു സംഖ്യകൾ എന്നിനുശേഷം മറ്റാന്നായി കൂടുന്നതിനു പകരം, ഈ രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുക കൂട്ടിയാൽ മാറി.

ക്രിയകൾ ചെയ്യുന്ന ക്രമം പ്രത്യേകമായി കാണിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, ആദ്യത്തെ കണക്ക് ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

$$(38 + 25) + 75 = 38 + (25 + 75)$$

രണ്ടാമത്തെ കണക്ക് ഇങ്ങനെയും:

$$\left(29 + \frac{1}{3} \right) + \frac{2}{3} = 29 + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \right)$$

അപ്പോൾ മുന്നു സംഖ്യകൾ കൂടുന്നതിന്റെ പൊതുതത്തം ബീജഗണിതരീതിയിൽ ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$x, y, z \text{ എന്ന ഏതു സംഖ്യകളെടുത്താലും}$$

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

ഈ നി $36 + 25 + 64$ ആണ് കണക്കാക്കേണ്ടതെങ്കിലോ?

36 ഉം 64 ഉം ആദ്യം കൂടുകയല്ല എല്ലാപ്പോൾ? ഇവിടെ ചെയ്തതെന്നാണ്?

$25 + 64$ നു പകരം $64 + 25$ എന്നാണതി മൊത്തം തുക $(36 + 64) + 25$ എന്നാക്കി.

അതായത് സംഖ്യകൾ കൂടുന്നത് ഏതു ക്രമത്തിലുമാകാം.

ഈ ചുവവെച്ചിരുന്ന കണക്കുകൾ മനസ്സിൽ ചെയ്യാമോ എന്നു നോക്കു:

- $49 + 125 + 75$
- $88 + 72 + 12$
- $15.5 + 0.25 + 0.75$
- $347 + 63 + 37$
- $\frac{1}{4} + 1 \frac{3}{4} + 2$
- $8.2 + 3.6 + 6.4$

കൂട്ടല്ലോ കുറയ്ക്കല്ലോ

മുന്നു സംഖ്യകൾ കൂടുന്നതിന്റെ പൊതുതത്തം കണക്കും.

തുടർ കൂടുന്നതിനു പകരം, തുടർ കുറച്ചാലോ?

ഈ കണക്കു നോക്കു.

ഉള്ളിയുടെ കൈയിൽ 500 രൂപയുണ്ട്. അതിൽ 150 രൂപ അപ്പുവിനു കൊടുത്തു. അതേപും കഴിഞ്ഞ 50 രൂപ അബ്ദു കടം വാങ്ങി. ഇപ്പോൾ ഉള്ളിയുടെ കൈയിൽ എത്ര രൂപയുണ്ട്?

അപ്പുവിനു കൊടുത്തു കഴിഞ്ഞപ്പോൾ മിച്ചു
 $500 - 150 = 350$ രൂപ.

പിന്നീട് അബ്ദുവിനും കൊടുത്തു കഴിഞ്ഞപ്പോൾ
 $350 - 50 = 300$ രൂപ.

മറ്റാരു വഴിക്കും ആലോചിക്കാം. ആകേ ചെലവായത്
 $150 + 50 = 200$ രൂപ.

മിച്ചമുള്ളത്
 $500 - 200 = 300$ രൂപ.

അതായത്, ഈ ക്രിയ $(500 - 150) - 50$ എന്നു ചെയ്താലും 500 – $(150 + 50)$ എന്നു ചെയ്താലും ഒരേ സംവ്യാസം കിട്ടുക.

ഇതുപോലെ
 $(218 - 20) - 80$

മനസ്സിൽ കണക്കുകൂട്ടാമോ?

ഈവിടെ കണക്ക് പൊതുവായി എങ്ങനെ പറയാം?

ഒരു സംവ്യയിൽനിന്ന് രണ്ടു സംവ്യകൾ ഒന്നിനു ശേഷം മറ്റാന്നായി കുറയ്ക്കുന്നതിനു പകരം, ഈ രണ്ടു സംവ്യകളുടെ തുക കുറച്ചാൽ മതി.

ബിജഗണിതരീതിയിലായാലോ?

x, y, z എന്ന ഏതു സംവ്യകളെടുത്താലും
 $(x - y) - z = x - (y + z)$

രണ്ടു സംവ്യകൾ തുടരെ കൂട്ടുകയോ കുറയ്ക്കുകയോ ചെയ്യുന്നതിനു പകരം, ഒരു സംവ്യ കൂട്ടുകയും മറ്റാരു സംവ്യ കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്താലോ?

ഈ കണക്കു നോക്കു:

എം തുടങ്ങിയപ്പോൾ 38 കൂട്ടിക്കളുണ്ടായിരുന്നു. അതേപും വൈകി 5 കൂട്ടികൾ കൂടി എത്തി. കുറച്ചു കഴിഞ്ഞപ്പോൾ 3 കൂട്ടികൾ ഗണിത ഓൺലൈൻ യോഗത്തിനു പോയി. ഇപ്പോൾ എം കുറച്ചിൽ എത്ര പേരുണ്ട്?

സംഭവങ്ങൾ നടന്ന ക്രമത്തിൽ കണക്കുകൂട്ടാം. 5 കൂടി കൾ കൂടി വന്നപ്പോൾ

$38 + 5 = 43$

വ്യത്യാസത്തിന്റെ വ്യത്യാസം

മുന്നു സംവ്യകൾ കൂട്ടുന്നത് സ്ഥാഭവികമായി ചെയ്യാമെന്നതുകൊണ്ട് അതിന്റെ ബീജഗണിത രൂപമായ

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

എന്നത് പ്രത്യേകിച്ച് ഓർത്തുവയ്ക്കേണ്ടതില്ല. ചില സംഖ്യങ്ങളിൽ ഇതുപയോഗിച്ചാൽ ക്രിയ എളുപ്പമാകുമെന്നു മാത്രം. ഉദാഹരണമായി $29 + 37 + 63$ എന്ന തുക കണക്കാക്കുന്നോൾ, $37 + 63 = 100$ എന്നത് പെട്ടെന്നു കാണാൻ കഴി ണ്ടാൽ, ആകേ തുക 129 എന്നു മനസ്സിൽ കൊണ്ടിരിക്കുന്ന ക്രമത്തിൽ കൂട്ടാൻ ചിലപ്പോൾ കടലാസും പേനയും വേണിവരും).

എന്നാൽ കുറയ്ക്കുന്ന കാര്യത്തിൽ അതേപും സുക്ഷിക്കണം. ഉദാഹരണമായി

$$(10 - 3) - 2$$

എന്നതിന്റെ അർധം, 10 തൊന്ത്രി 3 കുറച്ച്, അങ്ങനെ കിട്ടുന്ന 7 തൊന്ത്രി 2 കുറയ്ക്കണമെന്നാണ്. അതായത്, ഈ ക്രിയകളുടെ ഫലം 5.

$$10 - (3 - 2)$$

എന്നായാലോ? ആദ്യം 3 തൊന്ത്രി 2 കുറയ്ക്കണമെന്നും. അങ്ങനെ കിട്ടുന്ന 1 എന്ന സംവ്യ 10 തൊന്ത്രി കുറയ്ക്കണമെന്നും. അപ്പോൾ ഫലം $10 - 1 = 9$.

അതായത്, ഈ ക്രിയകളിൽനിന്നു കിട്ടുന്നത് വ്യത്യസ്ത ഫലങ്ങളാണ്. എന്നാൽ $(10 - 3) - 2$ എന്ന ക്രിയയുടെയും $10 - (3+2)$ എന്ന ക്രിയയുടെയും ഫലം 5 തന്നെയാണ്. ഇതിന്റെ പൊതു തത്ത്വം

$$(x - y) - z = x - (y + z)$$

അമുഖം,

ഒന്നിനുശേഷം മറ്റാനു കുറയ്ക്കുന്ന തിനു പകരം തുക കുറച്ചാൽ മതി

എന്ന് ഓർക്കുകയും വേണം.

3 കൂടികൾ പോയപ്പോൾ

$$43 - 3 = 40$$

സംഭവങ്ങളെക്കുറിച്ച് മൊത്തത്തിൽ ആലോചിച്ചാൽ, ഈ നേരയും കണക്കുകൂട്ടാം: 5 കൂടികൾ വരുകയും 3 കൂടികൾ പോവുകയും ചെയ്തു. അപ്പോൾ കൂസിൽ കൂടുതലായുള്ള വർ

$$5 - 3 = 2$$

ആദ്യമുണ്ടായിരുന്നത് 38 കൂടികൾ. അപ്പോൾ ആകെ

$$38 + 2 = 40$$

അതായൽ, ഒരു സംഖ്യ കൂടുകയും മറ്റൊന്ന് കൂറയ്ക്കുകയും ചെയ്യുന്നതിനു പകരം, ആദ്യത്തെ സംഖ്യയിൽനിന്ന് രണ്ടു മാത്രം സംഖ്യ കൂറിച്ചരു കൂടിയാൽ മതി. ഉദാഹരണമായി,

$$(108 + 25) - 15 = 108 + (25 - 15) = 118$$

ഇവിടെ ഒരു കാര്യം ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടതുണ്ട്. ഈ നേര കണക്കു കൂട്ടാൻ, കൂടുന്ന സംഖ്യ കൂറയ്ക്കുന്ന സംഖ്യയേക്കാൾ വലും താഴിരിക്കണം. ഉദാഹരണമായി ഈ കണക്കു നോക്കുക:

$$25 + 10 - 15$$

ഈ കണക്കാക്കാൻ ആദ്യം 10 ടുടർന്ന് 15 കൂറയ്ക്കാൻ കഴിയില്ലോ.

അപ്പോൾ ഈക്കാരും ബിജഗണിതരിത്തിയിൽ ഈ നേര എഴുതാം:

$$x, y, z \text{ എന്ന ഏതു സംഖ്യകളുടെയും}$$

$$y > z \text{ ആണെങ്കിൽ}$$

$$(x + y) - z = x + (y - z)$$

ഈവരയ്ക്കാം ഉപയോഗിച്ച്, ചുവടെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന കണക്കു കൾ മനസ്സിൽ ചെയ്യുക:

- $(135 - 73) - 27$
- $\left(37 - 1\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}$
- $(298 - 4.5) - 3.5$
- $(128 + 79) - 29$
- $(298 + 4.5) - 3.5$
- $\left(149 + 3\frac{1}{2}\right) - 2\frac{1}{2}$

കൂറിച്ചു കൂടുന്നോൾ

ഈ കണക്കു നോക്കു.

ഗോപുവിശ്വ പണപ്പെട്ടിയിൽ 110 രൂപയുണ്ട്. പേരു വാങ്ങാൻ 15 രൂപയെടുത്തു. 10 രൂപയ്ക്ക് പേരു കിട്ടി.

മിച്ചു വന്ന 5 രൂപ വിണ്ടും പെട്ടിയിലിട്ടു. ഇപ്പോൾ പെട്ടിയിൽ എത്ര രൂപയുണ്ട്?

ഗോപു ചെയ്ത മുറയ്ക്ക് കണക്കുകൂട്ടാം:

15 രൂപ എടുത്തുകഴിത്തപ്പോൾ പെട്ടിയിൽ

$$110 - 15 = 95 \text{ രൂപ.}$$

5 രൂപ തിരിച്ചിട്ടപ്പോൾ

$$95 + 5 = 100 \text{ രൂപ.}$$

കാര്യങ്ങളെല്ലാം കഴിത്തെ ശേഷം ഇങ്ങനെയും ആലോചിക്കാം:
15 രൂപ എടുത്തു; 5 രൂപ തിരിച്ചിട്ടു. എന്നു പറഞ്ഞാൽ പെട്ടിയിൽ കുറവു വന്നത്

$$15 - 5 = 10 \text{ രൂപ.}$$

ഇപ്പോൾ പെട്ടിയില്ലെങ്കിൽ

$$110 - 10 = 100 \text{ രൂപ.}$$

അദ്യും ചെയ്ത ക്രിയകളും $(110 - 15) + 5$ എന്നും രണ്ടാമതെന്ന ക്രിയകളും $110 - (15 - 5)$ എന്നും എഴുതിയാൽ, മേൽപ്പറഞ്ഞ കണക്കുകൂട്ടൽ ഇങ്ങനെയാകും.

$$(110 - 15) + 5 = 110 - (15 - 5)$$

അതായത്, ഒരു സംഖ്യ കുറയ്ക്കുകയും മറ്റൊന്ന് കൂട്ടുകയും ചെയ്യുന്നതിനു പകരം, ആദ്യത്തെ സംഖ്യയിൽനിന്ന് രണ്ടാമതെന്ന സംഖ്യ കുറച്ചത് കുറഞ്ഞതു മതി. ഉദാഹരണമായി,

$$(29 - 17) + 7 = 29 - (17 - 7) = 19$$

കുറയ്ക്കുകയും കൂട്ടുകയും ചെയ്യുന്ന ക്രിയകളെല്ലാം ഇങ്ങനെ ചെയ്യാൻ പറ്റുമോ?

$$(29 - 7) + 17$$

എന്ന കണക്കിൽ ഇങ്ങനെ മറ്റിഷ്ടുതി ചെയ്യാൻ പറ്റുമോ?

അപ്പോൾ ഈ ക്രിയാമറ്റം ബിജഗണിതരീതിയിൽ ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

x, y, z എന്ന ഏതു മൂന്നു സംഖ്യകളെടുത്താലും
 $y > z$ ആണെങ്കിൽ

$$(x - y) + z = x - (y - z)$$

ഈതുപയോഗിച്ചും ചില മനക്കണക്കുകളാകാം:

- $(135 - 73) + 23$

- $\left(38 - 8\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$

- $(19 - 6.5) + 5.5$

- $135 - (35 - 18)$

- $4.2 - (3.2 - 2.3)$

കുറയ്ക്കുന്നത് കുറഞ്ഞാൽ

ഈ കണക്കുകൾ നോക്കു:

$$10 - 9 = 1$$

$$10 - 8 = 2$$

$$10 - 7 = 3$$

$$10 - 6 = 4$$

കുറയ്ക്കുന്ന സംഖ്യ കുറയുന്നോൾ കുറച്ചു കിട്ടുന്ന സംഖ്യ കുടുന്നതു കണിക്കോ?

കുറയുന്നതിന്റെ കണക്കെന്നാൻ?

കുറയ്ക്കുന്നത് ഒന്നു കുറയുന്നോൾ കുറച്ചു കിട്ടുന്നത് ഒന്നു കുടുംബം; കുറയ്ക്കുന്നത് രണ്ടു കുറ യക്കുന്നോൾ കുറച്ചു കിട്ടുന്നത് രണ്ടു കുടുംബം.

ചുരുക്കിപ്പിണ്ഠാൽ,

കുറയ്ക്കുന്നത് കുറയുന്നോൾ, കുറച്ചു കിട്ടുന്നത് കുടുംബം; കുറയ്ക്കുന്നത് എത്ര കുറഞ്ഞതോ, അതെന്നെന്ന കുറച്ചു കിട്ടുന്നത് കുടുംബം.

ഈ ബിജഗണിതത്തിലാകിയാലോ?

x, y എന്ന രണ്ടു സംഖ്യകളെടുത്താൽ, x തുണി y കുറച്ചത്, $x - y$

ഈ z എന്ന മറ്റൊരു സംഖ്യയെടുത്താൽ,
 $y - z$ എന്ന സംഖ്യ y രെക്കാൾ z കുറവാണ്.
അപ്പോൾ $x - (y - z)$ എന്ന സംഖ്യ, $x - y$ രെക്കാൾ z കുടുതലമാണ്. അതായത്

$$x - (y - z) = (x - y) + z$$

തിരബണ്ട.. നിന്തി കിട്ടുന്നു
ഉണ്ടുന്നതു എന്താണ
ഈ നുസ്ഖി ചെയ്യാൻ
ഇരിക്കുന്ന നിംഫാനീസ്
നിംഫാനു കിട്ടു!



തുകയും വ്യത്യാസവും

രണ്ട് സംഖ്യകളുടെ തുകയും വ്യത്യാസവും കൂടുന്നേൻ എന്താണ് സംഖ്യക്കുന്നത്?

സംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസമെന്നത്, അവയിലെ വലിയ സംഖ്യയിൽനിന്ന് ചെറിയ സംഖ്യ കുറ ചുതാണ്; തുകയെന്നത്, വലിയ സംഖ്യയോട് ചെറിയ സംഖ്യ കൂട്ടിയതാണ്.

ഉദാഹരണമായി, സംഖ്യകൾ 3, 7 എന്നടു ത്താൽ, തുക $7 + 3$, വ്യത്യാസം $7 - 3$. ക്രിയകൾ ചെർത്ത് ഇവയ 10, 4 എന്നുത്തരെ, തുകയും ചെയ്യും വ്യത്യാസത്തിൽനിന്നും തുക എഴുതിയാലോ?

$$(7 + 3) + (7 - 3)$$

ഇതിൽ വലിയ സംഖ്യയായ 7 രണ്ടു തവണ കൂടുന്നുണ്ട്. ചെറിയ സംഖ്യയായ 3 ഒരു തവണ കുറക്കയും ഒരു തവണ കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്യുന്നുണ്ട്. അപ്പോൾ ക്രിയകളുടെ ഫലം $7 + 7 = 14$ എന്നു കാണും.

അതായത്, ക്രിയകളുടെ ക്രമമാനു മാറ്റിയാൽ, മുകളിലെത്തെ തുകയെ

$$(7 + 3) + (7 - 3) = (7 + 7) + (3 - 3) = 14$$

എന്നു കാണും.

ഇക്കാര്യമാണ് ഒരു പൊതുത്തത്ത്വമായി ബനിജഗണിതരീതിയിൽ

$$(x + y) + (x - y) = (x + x) + (y - y) = 2x$$

എന്നുതുന്നത്.



തുകയും വ്യത്യാസവും

ഇടയ്ക്കിടെ ചില പുതിയ കണ്ണുപിടിത്തങ്ങളുമായാണ് അതുല്യ കൂസിൽ വരുന്നത്. അന്നൊരു പുതിയ വിദ്യയും മായാണ് രംഗപ്രവേശം: “എത്തകിലും രണ്ട് സംഖ്യകൾ മനസ്സിൽ വിചാരിച്ച്, അവയുടെ തുകയും വ്യത്യാസവും പറഞ്ഞാൽ, വിചാരിച്ച സംഖ്യകൾ ഞാൻ പറയാം!”

“തുക 10, വ്യത്യാസം 2” - തുടങ്ങിയത് റഹീം ആണ്.

“സംഖ്യകൾ 6, 4” - നിസ്സാരമട്ടിൽ അതുല്യ പറഞ്ഞു.

“തുക 16, വ്യത്യാസം 5” - കുസൃതിയായ ജൈസ്സിയുടെ വെല്ലവിളി.

അൽപ്പമൊന്ന് ആലോചിച്ചതിനുശേഷം അതുല്യ പറഞ്ഞു: “പറിക്കാൻ നോക്കോ; സംഖ്യകൾ $10\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}$.”

അതുല്യ എങ്ങനെയാണ് സംഖ്യകൾ കണ്ണുപിടിച്ചത്?

എത്ര രണ്ട് സംഖ്യകളുടെയും തുകയും വ്യത്യാസവും ഉപയോഗിച്ച് സംഖ്യകൾ കണ്ണുപിടിക്കുന്നതെങ്ങെന്നും?

സംഖ്യകൾ x, y എന്നടുക്കാം. അപ്പോൾ തുക $x + y$. വലിയ സംഖ്യ x എന്നടുത്താൽ, വ്യത്യാസ $x - y$. ഈ ഉപയോഗിച്ച് x, y എന്നിവ കണ്ണുപിടിക്കണം.

$x + y$ തെ നിന്ന് x കിട്ടാൻ y കുറിച്ചാൽ മതി.

$$(x + y) - y = x$$

പകേശ, y അറിയില്ലോ.

ഒരു x കൂടി കൂട്ടിയാലോ?

$$(x + y) - y + x = x + x = 2x$$

y കുറിച്ച് x കൂടുന്നതും x കൂടി y കുറയ്ക്കുന്നതും ഒന്നുത നേന്തരലും?

$$(x + y) + (x - y) = 2x$$

എന്താണ് ഇതിന്റെ അർത്ഥം?

തുകയും വ്യത്യാസവും കൂട്ടിയാൽ, വലിയ സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ക് കിട്ടും.

ഉദാഹരണമായി, റഹീം പറഞ്ഞ തുക 10 മും വ്യത്യാസം 2 മും എന്നാണ്. ഈ കൂട്ടിയാൽ 12. ഈത് വലിയ സംഖ്യ

യുടെ രണ്ടു മടങ്ങാൻ. അപ്പോൾ വലിയ സംഖ്യ 6; ചെറിയ സംഖ്യ $10 - 6 = 4$.

ഈ ജീളി പരിഞ്ഞു നോക്കാം: തുക 16, വ്യത്യാസം 5, ഇവയുടെ തുക 21. അപ്പോൾ വലിയ സംഖ്യ, ഇതിന്റെ പകുതി $10\frac{1}{2}$, ചെറിയ സംഖ്യ $16 - 10\frac{1}{2} = 5\frac{1}{2}$.

അതുല്യയുടെ സുതാ പിടിക്കിട്ടിയില്ല?

ഇവിടെ മറ്റാരു കാര്യം കൂടി നോക്കാം. തുകയിൽനിന്ന് വ്യത്യാസം കുറച്ചാലോ?

$$\begin{aligned}(x + y) - (x - y) &= (x + y) - x + y \\&= x + y - x + y \\&= x - x + y + y \\&= 2y\end{aligned}$$

ഇതിന്റെ അർദ്ധം എന്താണ്?

തുകയിൽനിന്ന് വ്യത്യാസം കുറച്ചാൽ, ചെറിയ സംഖ്യ യുടെ രണ്ടു മടങ്ങ് കിട്ടും.

ഉദാഹരണമായി, റഹിമിന്റെ സംഖ്യകളെടുത്താൽ, തുക 10, വ്യത്യാസം 2. അപ്പോൾ ചെറിയ സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങ് $10 - 2 = 8$; ചെറിയ സംഖ്യ, ഇതിന്റെ പകുതി 4.

ചില സംഖ്യകളുടെ തുകയും വ്യത്യാസവും ചൂചുന്ന കൊടുക്കുന്നു. സംഖ്യകൾ കണ്ണുപിടിക്കാമോ?

- തുക 12, വ്യത്യാസം 8
- തുക 140, വ്യത്യാസം 80
- തുക 23, വ്യത്യാസം 11
- തുക 20, വ്യത്യാസം 5

കൂട്ടല്ലോ ഗുണിക്കല്ലോ

ഒരു സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങും ആ സംഖ്യയുടെ മൂന്നു മടങ്ങും കൂട്ടിയാൽ സംഖ്യയുടെ അഭ്യൂ മടങ്ങ് കിട്ടുമെന്നു കണക്കില്ല. (സാധ്യാബന്ധങ്ങൾ ഏറ്റന ഭാഗത്തിലെ അവ സാനന്ദത കണക്ക്). ഇപ്പറഞ്ഞതിന്റെ പീജഗണിതരൂപം എന്താണ്?

x ഏറ്റന ഏതു സംഖ്യ ഏടുത്താലും

$$2x + 3x = 5x$$

പല വഴികൾ

ഈ കണക്ക് നോക്കു.

ഒരു പുസ്തകത്തിനും പേനയ്ക്കും കൂടി വില 16 രൂപയാണ്. പുസ്തകത്തിന്റെ വില പേന യേക്കാൾ 10 രൂപ കുടുതലാണ്. ഓരോന്നി എന്തും വില എത്രയാണ്?

പുസ്തകവും പേനയുമെല്ലാം മാറ്റിവച്ച്, ഇവയുടെ വിലകൾ വെറും സംഖ്യകളായി നോക്കിയാൽ ഈ പ്രശ്നം ഇങ്ങനെയാകും:

രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുക 16, വ്യത്യാസം 10 സംഖ്യകൾ എത്രയെങ്കാലുണ്ട്?

വലിയ സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങ് $16 + 10 = 26$; വലിയ സംഖ്യ 13. അപ്പോൾ ചെറിയസംഖ്യ $16 - 13 = 3$. അതായൽ, പുസ്തകത്തിന്റെ വില 13 രൂപ, പേനയുടെ വില 3 രൂപ.

മറ്റാരു റിതിയിലും ആലോച്ചിക്കാം. ഒരു പുസ്ത കവും ഒരു പേനയും വാങ്ങിയപ്പോൾ 16 രൂപ. പകരം രണ്ടു പുസ്തകമാണു വാങ്ങുന്നതെ കിലോ?

പുസ്തകത്തിന് പേനയേക്കാൾ 10 രൂപ കുടുത ലാഭം? അപ്പോൾ 10 രൂപ കുടുതൽ കൊടുക്കണം; അതായൽ, $10 + 16 = 26$ രൂപ കൊടുക്കണം.

ഇത് രണ്ടു പുസ്തകത്തിന്റെ വിലയാണ്. അപ്പോൾ ഒരു പുസ്തകത്തിന്റെ വില 13 രൂപ.

കലണ്ടർ കണക്ക്

കലണ്ടറിലെ ഒരു മാസമെടുത്ത്, ഒരു സമചതുരത്തിനുള്ളിൽ വരുന്ന നാലു സംഖ്യകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക:

നാലു	രികൾ	ഫോറ്റ്	ദിവസം	വ്യാഴ	വെള്ളി	ശനി
			1	2	3	4
5	6	7	(8)	(9)	10	11
12	13	14	(15)	(16)	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		

ഇവ നാലും കൂടിയാൽ $8 + 9 + 15 + 16 = 48$. ഇതിനെ നാലുക്കാണ്ക ഹരിച്ച് നാലു കൂറിച്ചു നോക്കു: ആദ്യത്തെ സംഖ്യയായ 8 കിട്ടിയില്ല. ഇതുപോലെ മറ്റു നാലു സംഖ്യകളെ കൂട്ടുന്നോക്കു.

എത്രുക്കാണ്ടാണിൽ?

ആദ്യത്തെ സംഖ്യ x എന്നുടുത്താൽ, അടയാളപ്പെടുത്തിയ സംഖ്യകൾ ഇങ്ങനെയാണ്:

x	$x + 1$
$x + 7$	$x + 8$

ഇവയുടെ തുക

$$x + (x + 1) + (x + 7) + (x + 8) = 4x + 16.$$

ഇതിനെ ഇങ്ങനെ മറ്റിരയ്ക്കുതാം:

$$\begin{aligned} 4x + 16 &= (4 \times x) + (4 \times 4) \\ &= 4(x + 4) \end{aligned}$$

അതായത് ആദ്യത്തെ സംഖ്യയോട് 4 കൂടി, പിന്നെ 4 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണ് തുക. അപ്പോൾ ആദ്യത്തെ സംഖ്യ തിരിച്ചു കിട്ടാൻ, 4 കൊണ്ടു ഹരിച്ച്, പിന്നെ 4 കൂറിച്ചാൽ മതി.

ഈത് മറ്റാരു തരത്തിലും പറയാം:

ഒരു സംഖ്യയെ 2 കൊണ്ടും 3 കൊണ്ടും വെവ്വേറു ഗുണിച്ചു കൂട്ടുന്നതിനു പകരം 5 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ മതി.

ഉദാഹരണമായി

$$(2 \times 16) + (3 \times 16) = 5 \times 16 = 80$$

ഇതിൽ 2, 3 എന്നതിനു പകരം മറ്റു സംഖ്യകളായാലോ? ഈ കണക്കു നോക്കുക.

ഗണിതസമേളനത്തിലെ ചർച്ചകൾ നടക്കുന്നത് ഒരു മുൻകിളിലാണ്. ഒരു മുൻയിൽ 40 പേരും മറ്റൊരു മുൻയിൽ 35 പേരുമാണുള്ളത്. ചായയോടൊപ്പം എല്ലാവർക്കും 2 ബിന്ദുകൾ വിതാക്കാട്ടുക്കണം. ആകെ എത്ര ബിന്ദുകൾ വേണം?

ആദ്യത്തെ മുൻയിലുള്ള 40 പേരുക്ക് വേണ്ട ബിന്ദുകൾ

$$40 \times 2 = 80$$

രണ്ടാമത്തെ മുൻയിലെ 35 പേരുക്ക് വേണ്ട ബിന്ദുകൾ

$$35 \times 2 = 70$$

ആകെ വേണ്ട ബിന്ദുകൾ

$$80 + 70 = 150$$

മറ്റാരു രീതിയിലും ആലോചിക്കാം. ഒരു മുൻയിലും കൂടി ആകെയുള്ളവർ

$$40 + 35 = 75$$

അപ്പോൾ ആകെ വേണ്ട ബിന്ദുകൾ

$$75 \times 2 = 150$$

ഇവിടെ എന്താണു കണ്ടത്? 40 കൊണ്ടും 35 കൊണ്ടും 2 നെ വെവ്വേറു ഗുണിച്ചു കൂട്ടുന്നതിനു പകരം, അവയുടെ തുകയായ 75 നെ 2 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ മതി.

ഭിന്നസംഖ്യകൾ കൊണ്ടുള്ള ഗുണനത്തിലും ഇതു ശരിയാണ്. ഉദാഹരണമായി, 4 ഏഴ് പകുതിയും 6 ഏഴ് പകുതിയും കൂടി യഥാർത്ഥം $2 + 3 = 5$; തുകയായ 10 ഏഴ് പകുതി എടുത്താലും 5 തന്നെ.

ഇതിലെല്ലാം കാണുന്ന പെതുവായ ബന്ധം എന്താണ്?

രണ്ടു സംഖ്യകളെ ഒരേ സംഖ്യ കൊണ്ട് വെവ്വേറു ഗുണിച്ചു കൂടിയാലും സംഖ്യകളുടെ തുകയെ ഗുണിച്ചാലും ഫലം ഒന്നു തന്നെ.

ചുരുക്കിപ്പിനത്താൽ, (ഒരേ സംഖ്യക്കാണ്ക) ഗുണിച്ചു കൂട്ടുന്ന തുക ഗുണിക്കുന്നതും ഒന്നുതന്നെ.

ബീജഗണിതരിതിയിൽ പറഞ്ഞാലോ?

$$x, y, z \text{ എന്ന ഏതു സംവ്യൂക്കളെടുത്താലും}$$

$$xz + yz = (x + y) z.$$

കൂടുന്നതിനു പകര കുറയ്ക്കുകയാണെങ്കിലോ?

രണ്ടു സംവ്യൂകളെ ഒരു സംവ്യൂക്കാണ്ട് വെദ്വേറെ ശൃംഖല കുറച്ചാലും, അദ്ദേഹത്തെ സംവ്യൂകളുടെ വ്യത്യാസത്തെ മുന്നാമത്തെ സംവ്യൂക്കാണ്ട് ശൃംഖല ചുറ്റാലും പലം ഓന്നുതന്നെ.

ബീജഗണിതരിതിയിൽ പറഞ്ഞാൽ

$$x, y, z \text{ എന്ന ഏതു സംവ്യൂക്കളെടുത്താലും}$$

$$xz - yz = (x - y) z.$$

ഈ ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കു:

- $(63 \times 12) + (37 \times 12)$
- $\left(15 \times \frac{3}{4}\right) + \left(5 \times \frac{3}{4}\right)$
- $\left(\frac{1}{3} \times 20\right) + \left(\frac{2}{3} \times 20\right)$
- $(65 \times 11) - (55 \times 11)$
- $\left(2\frac{1}{2} \times 23\right) - \left(1\frac{1}{2} \times 23\right)$
- $(13.5 \times 40) - (3.5 \times 40)$



ചെയ്തുനോക്കാം

- താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചതുരത്തിൽ, ഒരു സമചതുരത്തിൽ വരുന്ന ഏതെങ്കിലും 9 സംവ്യൂകളെടുക്കുക. അവയുടെ തുകയും സമചതുരത്തിൽ മധ്യത്തിലുള്ള സംവ്യൂകളും തമിലുള്ള ബന്ധം വിശദിക്കരിക്കുക. ഈ ബന്ധം ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് സമർപ്പിക്കുക.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

ഈ 25 സംവ്യൂകൾ ഉള്ള സമചതുരങ്ങൾ എടുത്തു നോക്കു.

മറ്റാരു കലണ്ടർ കണക്ക്

കലണ്ടറിൽ നാലു സംവ്യൂകളുടെ സമചതുരത്തിനു പകരം, ഒപ്പതു സംവ്യൂകളുടെ സമചതുരം എടുത്തുനോക്കു:

ഓഡാർ	തിക്കൽ	ചെല്ല	ബൈഡാൻ	വ്യാഴം	ബൈഥി	ഓണി
			1	2	3	4
5	6	7	(8)	(9)	(10)	11
12	13	14	(15)	(16)	(17)	18
19	20	21	(22)	(23)	(24)	25
26	27	28	29	30		

ഇവയുടെ തുക 144. ഇത് 16 ഷ്രീ 9 മടങ്ങാൻ. ഇതുപോലുള്ള മറ്റു സമചതുരങ്ങളിലും ഇതു ശരിയാണോ എന്നു നോക്കു.

ഇത് എത്രുക്കണാണ് എന്നറിയാൻ, നടുവിലെ സംവ്യൂ x എന്നെടുക്കാം. അപ്പോൾ സമചതുരത്തിലെ മറ്റു ചില സംവ്യൂകൾ ഇങ്ങനെയുള്ളതാം:

	$x - 7$	
$x - 1$	x	$x + 1$
$x + 7$		

$x - 8$	$x - 7$	$x - 6$
$x - 1$	x	$x + 1$
$x + 6$	$x + 7$	$x + 8$

ഇതിലെ $x - 8, x + 8$ എന്നിങ്ങനെയുള്ള ജോടികൾ ശ്രദ്ധിച്ചുവരുക, കീരകകളൊന്നും ചെയ്യാതെ തന്നെ തുക $9x$ ആണെന്നു കാണാം. അതായത്, നടുവിലെ സംവ്യൂയുടെ 9 മടങ്ങ്.

എഥാരു കൂട്ടുന്നവർ
നിഃഭവിച്ചുവരു
വെള്ളിൽ നിന്നുംനാണ്?
ശ്രദ്ധിക്കു!



$x-8$	$x-7$	$x-6$
$x-1$	x	$x+1$
$x+6$	$x+7$	$x+8$

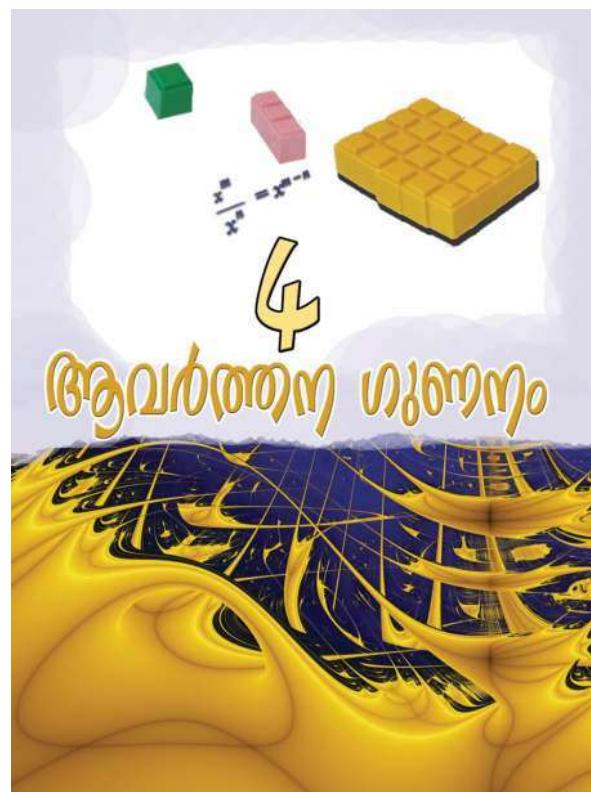
തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ



പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറ്റേഡ് സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടുത്തുന്നു
• സംഖ്യാക്രിയകളിലെ പൊതുതത്ത്വങ്ങൾ കണ്ടെത്തുന്നു.			
• ക്രിയകളിലെ പൊതുതത്ത്വങ്ങളെ ഭാഷാ രൂപത്തിൽ എഴുതുന്നു.			
• സംഖ്യാബന്ധങ്ങളും ക്രിയാതത്ത്വങ്ങളും അക്ഷരങ്ങളുപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.			
• ക്രിയകൾ എളുപ്പമാക്കാൻ പൊതുതത്ത്വങ്ങൾ പ്രയോഗിക്കുന്നു.			

4

ആവർത്തന ഗുണമോ



ഗുണനവും വലുപ്പവും

ഗുണനവും വലുപ്പവും

ഒരു ഫഴയ കമ്പയാൻ. ഒരു ധനികൻ സഹായം ചോദിച്ചു വന്നയാളോട് പറഞ്ഞു. “ഒന്നുകിൽ ഓരോ ദിവസവും ആയിരം രൂപ വിത്തം മുപ്പതു ദിവസം തരം; അല്ലെങ്കിൽ ആദ്യത്തെ ദിവസം ഒരു പെപസ, രണ്ടാമത്തെ ദിവസം രണ്ടു പെപസ, മൂന്നാമത്തെ ദിവസം നാലുപെപസ എന്നിങ്ങനെ ഓരോ ദിവസവും ഇരട്ടിയാക്കി മുപ്പതു ദിവസം തരം. ഏതാൻ വേണ്ടത്?”

എതാൻ നല്ലത്?

നമുക്ക് നോക്കാം.

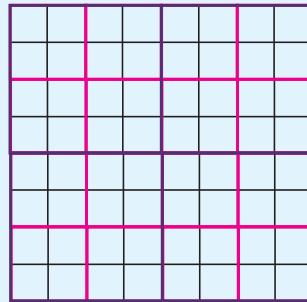
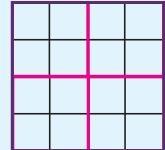
അദ്യത്തെ രീതിയിലാണെങ്കിൽ 30 ദിവസം കൊണ്ട് 30000 രൂപ കിട്ടും. രണ്ടാമത്തെ രീതി യിലാണെങ്കിലോ?

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$$

എന്നിങ്ങനെ 30 സംഖ്യകൾ കൂട്ടിക്കിട്ടുന്ന അത്യൈം പെപസ. ഈത് എത്രയാകുമെന്നോ? 1073741823 പെപസ. അതായൽ ഒരുക്കോട്ടയിലായിക്കും രൂപ!



ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കു:



ഓന്നാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ എത്ര കളങ്ങളുണ്ട്?

രണ്ടാമത്തെയും മൂന്നാമത്തെയും ചിത്രങ്ങളിലോ?

ഇതേ രീതിയിൽ വരച്ചാൽ അടുത്ത ചിത്രത്തിൽ എത്ര കളങ്ങളുണ്ടാകും?

ഇതിനെ ഈ രീതിയിൽ കാണാം:

ഓന്നാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ നാലു ചെറിയ സമചതുരങ്ങൾ ചേർന്ന സമചതുരം. ഈതരം നാലു സമചതുരങ്ങൾ ചേർന്നതാണ് രണ്ടാമത്തെ ചിത്രം.

അങ്ങനെ അതിൽ $4 \times 4 = 16$ ചെറിയ സമചതുരങ്ങൾ.

രണ്ടാമത്തെ സമചതുരം പോലുള്ള നാലു സമചതുരങ്ങൾ ചേർന്നതാണ് മൂന്നാമത്തെ ചിത്രം.

അപ്പോൾ അതിൽ $16 \times 4 = 64$ ചെറിയ സമചതുരങ്ങൾ.

അടുത്ത സമചതുരത്തിലോ?

ആക 64 \times 4 = 256 ചെറിയ സമചതുരങ്ങൾ.

ഈകാര്യം ഇങ്ങനെയും പറയാം:

ചെറിയ സമചതുരങ്ങളുടെ എണ്ണം

ഓന്നാം ചിത്രത്തിൽ 4

രണ്ടാം ചിത്രത്തിൽ 4×4

മൂന്നാം ചിത്രത്തിൽ $4 \times 4 \times 4$

അപ്പോൾ 10-ാം ചിത്രത്തിലോ?

$$4 \times 4 \times 4$$

ഇതിനെ ഇങ്ങനെ വിസ്തരിച്ചുതാതെ ചുരുക്കി 4^{10} എന്നാണ് എഴുതുന്നത്. വായിക്കുന്നതോ, “നാല് കൂതി പത്ത്” (“4 raised to 10”) എന്നും. ഗുണിച്ചു നോക്കിയാൽ ഈ സംഖ്യ 1048576 എന്നു കാണാം.

ഈനി ചിത്രങ്ങളിലെ സമചതുരങ്ങളുടെ എണ്ണം $4, 4^2, 4^3, \dots$ എന്നിങ്ങനെയാണ് എന്നും, അങ്ങനെ ഇരുപതാം ചിത്രത്തിൽ 4^{20} കളങ്ങൾ, നൂറാം ചിത്രത്തിൽ 4^{100} കളങ്ങൾ എന്നുമെല്ലാം പറയാനും എഴുതാനും എളുപ്പമണ്ണേ. ഈ സംഖ്യകൾ കണക്കുകൂട്ടി കണ്ണുപിടിക്കാൻ ബുദ്ധിമുട്ടാകുന്നോൾ കുപ്പുട്ടർ ഉപയോഗിക്കുകയുമാവം.

ഇവിടെ നമ്മൾ കണ്ണ $4, 4^2, 4^3, 4^4, \dots$ എന്നിവയെ നാലിന്റെ കൂതികൾ (powers of 4) എന്നാണു പറയുന്നത്.

4^2 എന്നത് 4 ഒറ്റ രണ്ടാം കൂതി, 4^3 എന്നത് 4 ഒറ്റ മൂന്നാം കൂതി എന്നിങ്ങനെ.

4 എന്നതിനെ ആവശ്യമെങ്കിൽ 4^1 എന്നെഴുതാം. അപ്പോൾ 4 ഒറ്റ ഒന്നാം കൂതിയാണ് 4 എന്നും പറയാം.

4^3 ലെ 3 നെ കൂത്യകം (exponent) എന്നാണ് പറയുന്നത്. ഒരു സംഖ്യയുടെ രണ്ടാം കൂതിയെ അതിന്റെ വർഗമെന്നും (square) മൂന്നാം കൂതിയെ ചപനം (cube) എന്നും വിളിക്കാറുണ്ട്.

കൂതികരണം

ആവർത്തിച്ചു കൂടുന്നതിനെ ഗുണനം എന്ന ക്രിയയായി പറയുന്നതുപോലെ ആവർത്തിച്ചു ഗുണിക്കുന്ന ക്രിയയെ കൂതികരണം (exponentiation) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ കൂടി നോക്കാം.

മൂന്നിന്റെ കൂതികൾ എത്രയെന്നെന്ന്?

$3^1, 3^2, 3^3, \dots$ ഈങ്ങനെ കണ്ണുപിടിക്കും?

$$3^1 = 3$$

$$3^2 = 3 \times 3 = 9$$

$$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 9 \times 3 = 27$$

എന്നിങ്ങനെ ഓരോന്നായി ഗുണിച്ചു കണ്ണുപിടിക്കാം.

3^6 കണ്ണുപിടിക്കണമെങ്കിലോ? ഇങ്ങനെ ഒന്നിനുശേഷം മറ്റാന്നായി കണ്ണുപിടിക്കുന്നതിനു പകരം കൂറച്ചുകൂടി എളുപ്പത്തിൽ കണ്ണുപിടിക്കാൻ വഴിയുണ്ടാ എന്നു നോക്കാം.

$$3^6 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

ഓരോന്നായി ഗുണിക്കുന്നതിനു പകരം മൂന്നു വിതം ഗുണിച്ചത്

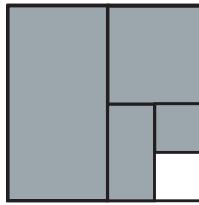
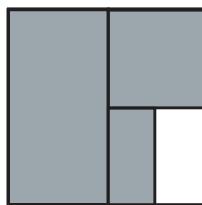
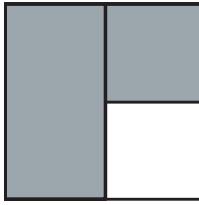
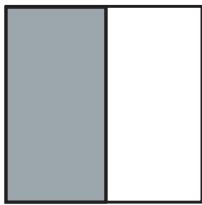
കൂതികരണം

സകലനം, വ്യവകലനം, ഗുണനം, വരണ്ണം എന്നീ നാലു ക്രിയകളാണില്ലോ നാം സാധാരണയായി ഗണിതത്തിൽ ഉപയോഗിക്കുന്നത്. അഥവാ മത്തെ ക്രിയയാണ് കൂതികരണം (exponentiation). എണ്ണത്തിനും കൾക്കറ്റ കൊണ്ടുള്ള ഗുണനം, ആവർത്തനസകലനം ആണെന്നതുപോലെ, കൂതികരണം ആവർത്തനഗുണനമാണ്.

മറ്റു ക്രിയകൾ എഴുതുന്നോൾ സംഖ്യകൾക്കിടയിൽ ഒരു ചിഹ്നം (+, -, ×, ÷) ഉപയോഗിക്കുന്നതുപോലെ കൂതികരണം എന്ന ക്രിയയ്ക്ക് ചിഹ്നമെന്നുമില്ല. ഗുണിക്കപ്പെട്ടുന്ന സംഖ്യയുടെ വലത്തു മുകളിൽ, എത്ര പ്രാവശ്യം ഗുണിക്കുന്നു എന്നു കാണിക്കുന്ന സംഖ്യ അൽപ്പു ചെറുതായി എഴുതുകയാണ് രീതി.

$$\text{ഉദാഹരണമായി } 4 \times 4 \times 4 = 4^3$$

കൃതികളുടെ തുക



അങ്ങെ ചിത്രത്തിലും നിരീ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത് വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ ഏതു ഭാഗമാണ്?

ങ്ങാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ $\frac{1}{2}$ ഭാഗം

രണ്ടാമത്തേതിലോ?

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

മരുളു രീതിയിലും കാണും.

കരുപ്പിക്കാത്തത് $\frac{1}{4}$ ഭാഗം.

അപോൾ കരുപ്പിച്ചത്

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \text{ ഭാഗം.}$$

ഇവിടെ എന്താണു കണ്ടത്?

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4}$$

ഇതുപോലെ മുന്നാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ നിന്നും

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1 - \frac{1}{8}$$

നാലുമത്തെ ചിത്രത്തിൽ നിന്നും

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 1 - \frac{1}{16}.$$

ഈങ്ങനെ ഇന്നിയും മുന്നോട്ടു പോകാമല്ലോ.

കൃതികൾ ഉപയോഗിച്ച് ഏഴുതിയാൽ

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = 1 - \frac{1}{2^3}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} = 1 - \frac{1}{2^4}.$$

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots$ എന്നീ

ങ്ങനെ കുറേ കൃതികളുടെ തുക, 1 തുനിന് അവ സാനകൃതി കുറച്ചതാണ്.

$$3^6 = (3 \times 3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3)$$

$$= 27 \times 27$$

$$= 729$$

ഇനി 2^9 കാണണമെങ്കിലോ?

$$2^9 = (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2)$$

$$= 16 \times 32$$

$$= 512$$

മറ്റെതക്കിലും രീതിയിൽ ഇതു കണക്കിക്കാമോ?

ഇനി ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള കൃതികൾ കണക്കിക്കു.

- 2^6
- 3^8
- 4^4
- 2^9

- 10^6
- 1^{10}
- 100^4
- 0^{20}

പത്രികൾ കൃതികൾ

10 ഒരു കൃതികൾ എന്തൊക്കെയാണ്?

$10, 10^2, 10^3, \dots$ എന്നിങ്ങനെയല്ല.

ഇവ കണക്കിക്കണമെങ്കിലോ?

$$10^2 = 10 \times 10 = 100$$

$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$$

10^8 എത്രയാണ്?

ഇതുപോലെ 20 ഒരു കൃതികൾ കണക്കിക്കാം.

20^4 എങ്ങനെ കണക്കിക്കും?

$$20^4 = 20 \times 20 \times 20 \times 20$$

$$= (2 \times 10) \times (2 \times 10) \times (2 \times 10) \times (2 \times 10)$$

$$= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (10 \times 10 \times 10 \times 10)$$

$$= 16 \times 10000 = 160000$$

$2^4 \times 5^5$ എത്രയാണ്?

ഇതിനെ $(2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5)$

എന്നെഴുതാം.

ങ്ങു മാറ്റി ഏഴുതിയാൽ

$$(2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times 5$$

$$= 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 5$$

$$= 10^4 \times 5 = 50000$$

100^3 എത്രയാണ്?

$$100^3 = 100 \times 100 \times 100$$

ഇതിനെ $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$ എന്നും തീരുമാക്കാം

$$100^3 = 10^6$$

$$= 1000000$$

ഈ ഈ ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ.

- നൂറ്, ഒരുയിരം, പതിനൊമ്പിയിരം, ലക്ഷം, പത്രുലക്ഷം, കോടി- ഇവയെല്ലാം 10 രീതി കൂടികളായി എഴുതുകു.
 - ചുവടെ കോടുത്തിരിക്കുന്ന കൂടികൾ കണക്കാക്കുക.
- 30^4 ■ 50^5 ■ 200^3

സ്ഥാനവില

3675 എന്നതിനെ സ്ഥാനവിലും അനുസരിച്ച് എങ്ങനെ താഴെ പിരിച്ചെഴുതുന്നത്?

$$(3 \times 1000) + (6 \times 100) + (7 \times 10) + 5$$

പത്തിന്റെ കൂടികൾ ഉപയോഗിച്ച് ഇതിനു

$$(3 \times 10^3) + (6 \times 10^2) + (7 \times 10) + 5$$

എന്നും എഴുതാം.

ഇതുപോലെ ചുവടെയുള്ള സംഖ്യകൾ പിരിച്ചെഴുതു.

- 4321 ● 732 ● 1221 ● 60504

ഒശംശരൂപത്തിലുള്ള സംഖ്യകളായാലോ?

362.574 എന്നെങ്ങനെ പിരിച്ചെഴുതും?

$$362.574 = (3 \times 100) + (6 \times 10) + 2$$

$$+ \left(5 \times \frac{1}{10} \right) + \left(7 \times \frac{1}{100} \right) + \left(4 \times \frac{1}{1000} \right)$$

ഇതിനു

$$(3 \times 10^2) + (6 \times 10) + 2 + \left(5 \times \frac{1}{10} \right) + \left(7 \times \frac{1}{10^2} \right) + \left(4 \times \frac{1}{10^3} \right)$$

എന്നും എഴുതാം.

ഇതുപോലെ ഈ സംഖ്യകളെ പിരിച്ചെഴുതിനോക്കു.

- 437.54 ● 23.005 ● 4567 ● 201

അടക്കിയ

എത്ര എണ്ണൽസംഖ്യയും അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ ഗുണ നമ്മുമായി എഴുതാമല്ലോ.

ഉദാഹരണമായി 72 എടുത്താൽ

$$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \quad \text{എന്നുതാം.}$$

കൂടികൾ ഉപയോഗിച്ചെഴുതിയാൽ

$$72 = 2^3 \times 3^2.$$

മഹാരാ തുക

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1 - \frac{1}{8}$$

എന്നു കണ്ടല്ലോ. ഇതിന്റെ രണ്ടുവശത്തും 8 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ

$$8 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) = 8 \left(1 - \frac{1}{8} \right)$$

അതായത്,

$$\left(8 \times \frac{1}{2} \right) + \left(8 \times \frac{1}{4} \right) + \left(8 \times \frac{1}{8} \right) = 8 - \left(8 \times \frac{1}{8} \right)$$

$$4 + 2 + 1 = 8 - 1$$

$$\text{ഇതുപോലെ } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 1 - \frac{1}{16}$$

എന്നതിന്റെ രണ്ടുവശത്തും 16 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ

$$8 + 4 + 2 + 1 = 16 - 1$$

ക്രമമൊന്ന് മാറ്റി എഴുതിയാൽ

$$1 + 2 + 4 = 8 - 1$$

$$1 + 2 + 4 + 8 = 16 - 1$$

അതായത്

$$2 + 4 = 8 - 2$$

$$2 + 4 + 8 = 16 - 2$$

കൂടികളാക്കി എഴുതിയാൽ

$$2 + 2^2 = 2^3 - 2$$

$$2 + 2^2 + 2^3 = 2^4 - 2$$

ഇങ്ങനെ ഇനിയും മുന്നോട്ട് പോകുമല്ലോ.

ഹെതുവെ വിന്തൊരൽ $2, 2^2, 2^3$ എന്നിങ്ങനെ കൂടികളുടെ തുക, അടുത്ത കൂടിയിൽനിന്ന് 2 കുറച്ചതാണ്.

സംവ്യക്ത ശാസ്ത്രത്തിൽ

ശാസ്ത്രത്തിൽ പലപ്പോഴും വളരെ വലിയ സംവ്യക്ത ഉപയോഗിക്കേണ്ടിവരും. ഉദാഹരണ തമിൻ, ഭൂമിയും സൂര്യനും തമിലുള്ള ശരാശരി ദുർഘടം 1490000000 കിലോമീറ്റർഡശൻ. ഈ സംവ്യ ശാസ്ത്രസ്വാധായത്തിൽ (scientific notation) എഴുതുന്നത് 1.49×10^9 എന്നാണ്. ഇതുപോലെ പ്രകാശം ഒരു വർഷം കൊണ്ടു സഞ്ചരിക്കുന്ന ദുർഘടം എക്കദേശം 9.46×10^{17} കിലോമീറ്റർ എന്നാണ് കണക്കാക്കിയിരിക്കുന്നത്.

ഈ ദുർത്തെ ഒരു പ്രകാശവർഷം എന്നാണ് പാര്യകു. നക്ഷത്രങ്ങളിലേക്കും മറ്റൊരുള്ള അകലം സൂചിപ്പിക്കുന്നോൾ പ്രകാശവർഷത്തിലാണ് പാര്യാളുള്ളത്. ഭൂമിയോട് ഏറ്റവും അടുത്ത നക്ഷത്രം സൂര്യനാണെല്ലാ, അതു കഴിഞ്ഞാൽ അടുത്ത നക്ഷത്രം പ്രോക്സിമാ (Proxima centauri) ആണ്. ഈ നക്ഷത്രത്തിലേ കൂളിയ ഏകദേശ ദുർഘടം 4.22 പ്രകാശവർഷമാണ്. അതായത് ഏകദേശം 3.99×10^{18} കിലോമീറ്റർ. ഈ മണ്ണാരു വിധത്തിൽ പറയാം. ഈ നക്ഷത്ര ത്തിൽനിന്നുള്ള പ്രകാശരശ്മികൾ ഭൂമിയിലെ താം നാലു വർഷത്തിലധികം എടുക്കും. അതായത്, ഈനു ഭൂമിയിൽനിന്ന് നാം കാണുന്നത് ഈ നക്ഷത്രത്തിൽനിന്ന് നാലിലധികം വർഷ അൾക്കുവുള്ള അവസ്ഥയാണ്. അപ്പോൾ ഈ നക്ഷത്രം സർപ്പീകഴിഞ്ഞാലും നാലിലധികം വർഷം നാം അഭിഞ്ചി പ്രകാശരശ്മികൾ കണ്ണുകൊണ്ടിരിക്കും!

ഡാ പ്രകാശ!



ഇതുപോലെ 1000 എ എങ്ങനെയെഴുതാം?

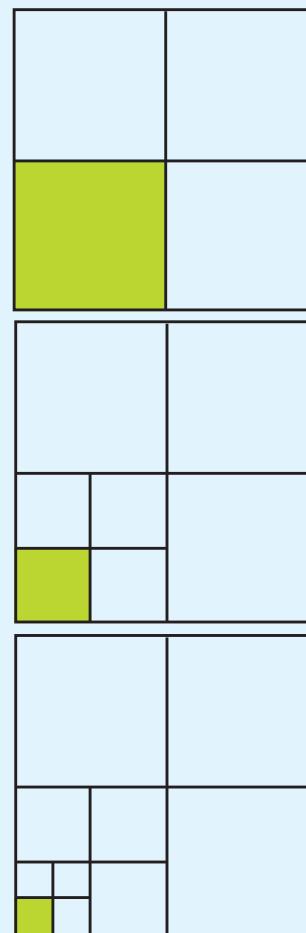
$$1000 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 \\ = 2^3 \times 5^3$$

ഈ ചുവടെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സംവ്യക്തം ഇതുപോലെ അഭാജ്യസംവ്യക്തിയുടെ കൃതികളുടെ ശൃംഖലപഠനമായി എഴുതിനോക്കു.

- 36
- 225
- 500
- 784
- 750
- 625
- 1024

ഭീമകൃതികൾ

ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കു.



ങ്ങാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ സമചതുരത്തിന്റെ ഏതു ഭാഗമാണ് നിരു നൽകിയിരിക്കുന്നത്?

ങ്ങാമത്തെ ചിത്രത്തിലോ?

$$\frac{1}{4} \text{ നിരു } \frac{1}{4} \text{ ഭാഗം.}$$

അതായത്

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \text{ ദശാ.}$$

മൂന്നാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ ഇതിന്റെയും $\frac{1}{4}$ ദശാ.

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{64} \text{ ദശാ.}$$

ഈ മൂന്ന് $\frac{1}{4}$ കൾ തമ്മിൽ ഗുണിച്ചതാണല്ലോ.

ഈ രീതിയിൽ തുടർന്നാൽ, അടുത്ത ചിത്രത്തിലെ എത്ര ദശാ നിന്നും നൽകണം?

അഭ്യാസത്തെ ചിത്രത്തിലോ?

അഞ്ച് $\frac{1}{4}$ കൾ തമ്മിൽ ഗുണിക്കണം.

ഇതിനെ $\left(\frac{1}{4}\right)^5$ എന്നു ചൂരുക്കിയെഴുതാം.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{4}\right)^5 &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4} \\ &= \frac{1}{4^5} \\ &= \frac{1}{64 \times 16} \\ &= \frac{1}{1024} \end{aligned}$$

അതായത്, അഭ്യാസത്തെ ചിത്രത്തിൽ മൊത്തം ചതുര

ത്തിന്റെ $\frac{1}{1024}$ ദശാ മാത്രമാണ് നിന്നും നൽകേണ്ടത്.

എത്രു ഭിന്നസംഖ്യയുടെയും ആവർത്തിച്ചുള്ള ഗുണനത്തെ ഇതുപോലെ കൃതിയായി എഴുതാം. ഉദാഹരണമായി

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{5}\right)^3 &= \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \\ &= \frac{3 \times 3 \times 3}{5 \times 5 \times 5} = \frac{3^3}{5^3} \\ &= \frac{27}{125} \end{aligned}$$

ഒരുദാഹരണം കൂടി നോക്കാം.

$$\begin{aligned} \left(2\frac{2}{5}\right)^3 &= \left(\frac{12}{5}\right)^3 \\ &= \frac{12}{5} \times \frac{12}{5} \times \frac{12}{5} \end{aligned}$$



പ്രോജക്ട്

അവസാനത്തെ അക്കാ

10 ഏഴ് എല്ലാ കൃതികളുടെയും അവസാന അക്കാം 0 ആണല്ലോ. 5 ഏഴ് കൃതികളുടെയെല്ലാം അവസാന അക്കമോ?

6 ഏഴ് കൃതികളായാലോ?

4 ഏഴ് കൃതികൾ നോക്കുക. അവസാന അക്കാം എല്ലാ കൃതികൾക്കും ഒരുപോലെയാണോ?

അവസാന അക്കാം എത്രതാക്കണം?

ഇതുപോലെ മറ്റ് ഒക്സൈംപ്പുകളുടെ കൃതികൾ പതിശോധിച്ചുനോക്കു.

ഒരു ചോദ്യം കൂടി: 2^{100} ഏഴ് അവസാന അക്കാം എന്താണ്?

$$= \frac{1728}{125} = 13 \frac{103}{125}$$

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന കൃതികൾ ഇതുപോലെ കണ്ണു പിടിക്കു.

$$\bullet \left(\frac{2}{3}\right)^5 \quad \bullet \left(\frac{3}{5}\right)^4 \quad \bullet \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \quad \bullet \left(2\frac{1}{2}\right)^3$$

ശ്രാംശക്രമക്രമൾ

(1.2)² എത്രയാണ്?

$$(1.2)^2 = 1.2 \times 1.2 \\ = 1.44$$

ഇതുപോലെ $(1.5)^3$ കണ്ണുപിടിക്കു.

(0.2)⁴ എത്രയാണ്?

$$2^4 = 16 \text{ എന്നറിയാമല്ലോ.}$$

$$0.2 \text{ എന്നതിനെ } \frac{2}{10} \text{ എന്നെന്നുത്താം. അപ്പോൾ,}$$

$$(0.2)^4 = \left(\frac{2}{10}\right)^4 \\ = \frac{2^4}{10^4} \\ = \frac{16}{10000} \\ = 0.0016$$

ഈത് മനക്കണക്കായി ചെയ്യാവുന്നതല്ലെന്നുള്ളു.

(0.3)³ എത്രയാണെന്ന് മനക്കണക്കായി പറയാമോ?

3^3 എത്രയാണ്?

$(0.3)^3$ തു എത്ര ദശാംശസ്ഥാനമുണ്ടാകും?

$12^3 = 1728$ ആണ്. ഇതിൽനിന്ന് $(1.2)^3$, $(0.12)^3$ എന്നിവ കണ്ണുപിടിക്കാമോ?

ഇതുപോലെ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന കൃതികൾ കണ്ണു പിടിക്കു.

$$\bullet (1.1)^3 \quad \bullet (0.02)^5 \quad \bullet (0.1)^6$$

$16^3 = 4096$ ആണ് ഇതുപയോഗിച്ച് ചുവടെയുള്ള കൃതികൾ കണ്ണുപിടിക്കു.

$$\bullet (1.6)^3 \quad \bullet (0.16)^3 \quad \bullet (0.016)^3$$

ഗുണനവിധി

ഒരു സംഖ്യയുടെതന്നെ രണ്ടു ഗുണിതങ്ങളുടെ തുകയെ അതേ സംഖ്യയുടെ മറ്റൊരു ഗുണിതമായി എഴുതാൻ നമ്മു കണ്ടിരിയാം:

$$(3 \times 2) + (5 \times 2) = (3 + 5) \times 2 = 8 \times 2$$

എന്തുകൊണ്ടാണിൽ ശരിയാകുന്നത്?

$$3 \times 2 = 2 + 2 + 2$$

$$5 \times 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2$$

അപ്പോൾ

$$\begin{aligned} (3 \times 2) + (5 \times 2) &= (2 + 2 + 2) + (2 + 2 + 2 + 2 + 2) \\ &= 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 \\ &= 8 \times 2 \end{aligned}$$

ഇതുപോലെ കൂതികളുടെ ഗുണനഫലം കണ്ടുപിടിക്കാം. ഉദാഹരണമായി $2^3 \times 2^5$ നോക്കാം.

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2$$

$$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

അപ്പോൾ

$$\begin{aligned} 2^3 \times 2^5 &= (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \\ &= 2 \times 2 \\ &= 2^8 \end{aligned}$$

ഈവിടെ 2 നു പകരം മറ്റേതെങ്കിലും സംഖ്യയുടെ മുന്നാം കൂതിയും അന്വേഷാ കൂതിയുമാണ് ഗുണിക്കുന്നതെങ്കിലോ?

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \left(\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^8$$

നമ്മൾ എടുക്കുന്ന സംഖ്യയെ x എന്ന അക്ഷരം കൊണ്ട് സൃച്ചിപ്പിച്ചാലോ?

$$x^3 \times x^5 = (x \times x \times x) \times (x \times x \times x \times x \times x)$$

$$= x \times x = x^8$$

ഗുണിതങ്ങളും കൂതികളും

m ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യയും x എത്തെങ്കിലും ഒരു സംഖ്യയും (എണ്ണൽസംഖ്യയോ ഭിന്നസംഖ്യയോ) ആണെങ്കിൽ mx അമെവാ $m \times x$ എൻ്റെ അർദ്ധം m എണ്ണം x കൂട്ടുക എന്നാണ്ടേണ്ട്. x^m എന്നതിനേൻ്റെ അർദ്ധം m എണ്ണം x ഗുണിക്കുക എന്നും.

ഒരേ സംഖ്യയുടെ എണ്ണൽസംഖ്യകൾക്കാണുള്ള ഗുണിതങ്ങൾ കൂടുന്നതിനേൻ്റെയും, കൂതികൾ ഗുണിക്കുന്നതിനേൻ്റെയും നിയമങ്ങൾ നോക്കു:

$$mx + nx = (m + n)x$$

$$x^m \times x^n = x^{m+n}$$

ഒരു സംഖ്യയെ ഭിന്നസംഖ്യകൊണ്ടും ഗുണിക്കാം - അത് ആവർത്തനസങ്കലനമാണെന്നു മാത്രം. അതനുസരിച്ച് m, n എന്നിവ ഭിന്നസംഖ്യകളായാലും $mx + nx = (m + n)x$ എന്നതു ശരിയാണ്. എന്നാൽ n എന്നത് ഭിന്നസംഖ്യ ആണെങ്കിൽ x^n എന്നതിന് തരക്കാലം അർദ്ധമെന്നുമില്ലാണ്.

ഇന്നി കൃത്യകങ്ങൾ 3 നും 5 നും പകരം മറ്റൊരെങ്കിലും സംഖ്യകളായാലോ?

$$\begin{aligned}x^2 \times x^4 &= (x \times x) \times (x \times x \times x \times x) \\&= x \times x \times x \times x \times x \times x \\&= x^6\end{aligned}$$

കൃത്യകങ്ങളെയും പൊതുവായി m, n എന്നീ അക്ഷരങ്ങൾ കൊണ്ട് സൂചിപ്പിച്ചാലോ?

$$\begin{aligned}x^m \times x^n &= \underbrace{(x \times x \times x \times \dots \times x)}_{m \text{ ഏണ്ടി}} \times \underbrace{(x \times x \times x \times \dots \times x)}_{n \text{ ഏണ്ടി}} \\&= \underbrace{(x \times x \times x \times \dots \times x)}_{m+n \text{ ഏണ്ടി}} \\&= x^{m+n}\end{aligned}$$

ഇപ്പോൾ നാം കണ്ട പൊതുതത്തും എന്നാൻ?

ബീജഗണിതരിതിയിൽപ്പറഞ്ഞാൽ

$$\begin{aligned}x \text{ എത്രും } \text{സംഖ്യ } \text{ആയാലും } m, n \text{ എൽ } \\ \text{എണ്ണൽസംഖ്യകൾ } \text{ആയാലും} \\ x^m \times x^n = x^{m+n}.\end{aligned}$$

ഈ സാധാരണഭാഷയിലെങ്ങനെ പറയും?

ഇതിൽ രണ്ട് കാര്യങ്ങളുണ്ട്.

- (i) ഒരേ സംഖ്യയുടെ രണ്ടു കൃതികളുടെ ഗുണന ഫലം ആ സംഖ്യയുടെതന്നെ കൃതിയാണ്
- (ii) ഗുണനഫലത്തിൽ കൃത്യകം സംഖ്യയുടെ കൃത്യകങ്ങളുടെ തുകയാണ്.

ഇതുപയോഗിച്ച് ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കു.

- 2^5 നും 2^3 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ 2ന്റെ എത്രാമത്തെ കൃതി കിട്ടും?
- $10^2 \times 10^5$ എന്ന സംഖ്യയുടെ സാധാരണഭാഷയിലെ പേരെന്നാൻ?
- 2^{10} റെക്കൗ മടങ്ക് 2 റെക്കൗ എത്രാമത്തെ കൃതിയാണ്?
- 2^{10} നേര് എത്ര കൂടിയാൽ 2^{11} കിട്ടും?
- 3^{10} നേര് എത്ര കൂടിയാൽ 3^{11} കിട്ടും?
- 2 റെക്കൗ കൃതികളുടെ പട്ടികയാണിൽ:

2^1	2	2^6	64	2^{11}	2048
2^2	4	2^7	128	2^{12}	4096
2^3	8	2^8	256	2^{13}	8192
2^4	16	2^9	512	2^{14}	16384
2^5	32	2^{10}	1024	2^{15}	32768

ഇത് ഉപയോഗിച്ച് ഈ ഗുണനഫലങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കു.

- 16×64
- 32×512
- 64×256
- 128×256

ഹരണനിയമം

ഒരേ സംവ്യൂദ്ധ രണ്ടു കൃതികളുടെ ഗുണനഫലം കണ്ടുപിടിച്ചതുപോലെ, ഹരണഫലം കണ്ടുപിടിക്കാനും എന്നെ കിലും സുതോ ഉണ്ടാ?

ഉദാഹരണമായി $4^5 \div 4^2$ എത്രയാണ്?

ഗുണനനിയമമനുസരിച്ച്

$$4^5 = 4^2 \times 4^3$$

അപ്പോൾ 4^5 നെ 4^2 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ എത്രുകിട്ടും?

$$4^5 \div 4^2 = 4^3$$

ഇതുപോലെ $5^7 \div 5^3$ എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

5^7 നെ 5^3 റെ ഗുണിതമായി എങ്ങനെ എഴുതും?

$$5^7 = 5^3 \times \dots\dots$$

ഇതിൽനിന്ന്

$$5^7 \div 5^3 = \dots\dots$$

ഈനി $8^{23} \div 8^{16}$ ആണെങ്കിലോ?

8^{23} കിട്ടാൻ 8^{16} നെ എത്ര കൊണ്ട് ഗുണിക്കണം?

അതിന് 16 നെ 23 ആക്കാൻ എത്ര കൂടുന്നമെന്ന് കണ്ടുപിടിച്ചാൽപ്പോരോ?

$$23 - 16 = 7$$

അപ്പോൾ

$$8^{23} = 8^{16} \times 8^7$$

ഈനി $8^{23} \div 8^{16}$ കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ.

ഇതുതനെ ഭിന്നസംവ്യൂദ്ധ കൃതികളിലും ചെയ്യാം.

ഉദാഹരണമായി $\left(\frac{2}{3}\right)^{16}$ നെ $\left(\frac{2}{3}\right)^9$ കൊണ്ട് ഹരിച്ചാലോ?

നേരനേര ചെയ്തതുപോലെ

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{16} = \left(\frac{2}{3}\right)^9 \times \left(\frac{2}{3}\right)^7$$

എന്നെഴുതിയാൽ

ഹരണനിയമം കൃതികളും ദ്രശ്യങ്ങളും

ഇരട്ടസംവ്യൂദ്ധകളെയെല്ലാം 2 റെ കൃതികളുടെ തുകയായി എഴുതാമെന്നു കണ്ടല്ലോ. അനോഴി ചുംബക എത്ര ദ്രശ്യം ദ്രശ്യം ഇരട്ടസംവ്യൂദ്ധയോക്ക് 1 കൃതിയാണ്. അപ്പോൾ ദ്രശ്യം ദ്രശ്യം 2 റെ കൃതികളുടെയും 1 റെയും തുകയായി എഴുതാം.

ഉദാഹരണമായി, 25 നെ ഇങ്ങനെ എഴുതാൻ ആദ്യം

$$25 = 24 + 1$$

എന്നെങ്ങുമായി, ഈ മുമ്പു ചെയ്തതുപോലെ 24 നെ 2 റെ കൃതികളുടെ തുകയായി എഴുതാം.

$$24 = 16 + 8 = 2^4 + 2^3$$

അപ്പോൾ

$$25 = 2^4 + 2^3 + 1$$

പൊതുവെ പാതയാൽ, എൽ എന്നർത്ഥസംവ്യൂദ്ധ യെയും $1, 2, 2^2, 2^3, \dots$ എന്നിങ്ങനെയുള്ള സംവ്യൂദ്ധ കളിൽ ചിലതിന്റെ തുകയായി എഴുതാം.

അക്കിൽ ഇരട്ടസംവ്യൂദ്ധ വിളാത്ത തുരാറി ദ്രശ്യംവിഭവവുള്ള ദ്രശ്യംവിഭവം....



$$\left(\frac{2}{3}\right)^{16} \div \left(\frac{2}{3}\right)^9 = \left(\frac{2}{3}\right)^7$$

എന്നു കാണാം.

ഈ ഒരു സംഖ്യയുടെ ഘടകങ്ങൾ കൂടുന്ന തിരുത്ത് തത്ത്വം പോലെതന്നെ കുറയ്ക്കുന്നതിൽ ശ്രദ്ധയും തത്ത്വം കണ്ടിട്ടുണ്ടാലോ. കുറയ്ക്കുന്നത് വലിയ സംഖ്യയിൽ നിന്നായിരിക്കണമെന്നു മാത്രം. ഇതിന് സമാനമായ തത്ത്വം കൃതികളുടെ ഹരണത്തിനുമുണ്ട്. ഹരിക്കപ്പെടുന്നത് വലിയ കൃതി ആയിരിക്കണമെന്നുമാത്രം.

കുറയ്ക്കലും ഹരിക്കലും

ഒരു സംഖ്യയുടെതന്നെ ഗുണിതങ്ങൾ കൂടുന്ന തിരുത്ത് തത്ത്വം പോലെതന്നെ കുറയ്ക്കുന്നതിൽ ശ്രദ്ധയും തത്ത്വം കണ്ടിട്ടുണ്ടാലോ. കുറയ്ക്കുന്നത് വലിയ സംഖ്യയിൽ നിന്നായിരിക്കണമെന്നു മാത്രം. ഇതിന് സമാനമായ തത്ത്വം കൃതികളുടെ ഹരണത്തിനുമുണ്ട്. ഹരിക്കപ്പെടുന്നത് വലിയ കൃതി ആയിരിക്കണമെന്നുമാത്രം.

അതായത് m, n എന്നീ എന്നീൽസംഖ്യകളിൽ $m > n$ ആണെങ്കിൽ, ഏതു സംഖ്യ x എടുത്താലും.

$$mx - nx = (m - n)x.$$

ഗുണിതങ്ങൾക്കു പകരം കൃതികളായാലോ?

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

ഈ തത്ത്വത്തിൽ $x \neq 0$ എന്നും കൃതി പറയേണ്ടിവരും.

സകലനത്തിന്റെ കാര്യത്തിൽ പറഞ്ഞതുപോലെ തന്നെ m, n എന്നിവ എന്നീൽസംഖ്യകളുണ്ടാൽ ഇവിടെപ്പറ്റിയ വ്യവകലനത്തും ശരിയാണ്.

ഈ ഒരു സംഖ്യയുടെ ഘടകങ്ങൾ കൂടുന്ന തിരുത്ത് കൃതിക്കാണ്ടു ഹരിച്ചാൽ എന്തുകിട്ടും എന്നു പെമ്പുവായി നോക്കാം:

സംഖ്യയെ x എന്നെന്നുക്കാം. ക്രിയ ഹരണമായതിനാൽ x പൂജ്യമാകരുത്. വലിയ കൃത്യകം m എന്നും ചെറിയ കൃത്യകം n എന്നും എടുക്കാം. ഈ $x^m \div x^n$ എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

n നെ m ആക്കാൻ എത്ര കൃതിക്കാം?

അപ്പോൾ

$$x^m = x^n \times x^{m-n}$$

ഈതിൽനിന്ന്

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

എന്നു കാണാമെല്ലാം. അതായത്,

x പൂജ്യമല്ലാത്ത ഏതു സംഖ്യ ആയാലും m, n ഇവ $m > n$ ആയ ഏത് എന്നീൽസംഖ്യകൾ ആയാലും

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

ഗുണനത്തിന്റെ നിയമം പോലെ ഈ സാധാരണഭാഷയിൽപ്പറയാമോ?

ഈ ഈ ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കു.

- 2^5 നെ 2^3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 2 ന്റെ എത്രാമത്തെ കൃതി കിട്ടും?
 - $10^9 \div 10^4$ എന്ന സംഖ്യ എന്താണ്?
 - 2^{10} ന്റെ പകുതി 2 ന്റെ എത്രാമത്തെ കൃതിയാണ്?
 - 2 ന്റെ കുറെ കൃതികളുടെ പട്ടിക ഉണ്ടാക്കിയാലോ (പേജ് 58). അത് ഉപയോഗിച്ച് ഈ ഹരണമലഞ്ഞർ കണ്ടുപിടിക്കു.
- $64 \div 16$
■ $512 \div 32$

■ $1024 \div 128$
■ $16384 \div 2048$
- $2^8 \times \frac{1}{2^3}$ എത്രയാണ്?
 - 7^6 നെ എന്തുകൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ 7^2 കിട്ടും?

മറ്റാരു പ്രശ്നങ്ങൾ

കഴിഞ്ഞ ചോദ്യങ്ങളിൽ അവസാനത്തെത്തിന് തൊട്ടുമും സൂചിപ്പിച്ച ചോദ്യം നോക്കുക.

$$2^8 \times \frac{1}{2^3} = 2^8 \div 2^3 = 2^5$$

എന്നു കണ്ടല്ലോ.

ഇതിൽനിന്ന്

$$2^5 \div 2^8 = \frac{1}{2^3}$$

എന്നു കിട്ടുമല്ലോ.

ഈതുപോലെ മുകളിലെ അവസാന ചോദ്യത്തിൽനിന്ന്

$7^2 \div 7^6$ കണ്ടുപിടിക്കു.

$$7^6 \times \frac{1}{7^4} = 7^2$$

ഇതിൽനിന്ന്

$$7^2 \div 7^6 = \frac{1}{7^4}$$

പെയതുവെ പറഞ്ഞാൽ

x പുജ്യമല്ലാത്ത ഏതു സംഖ്യ ആയാലും m, n എന്നിവ $m < n$ ആയ ഏതു രണ്ട് എണ്ണത്തിൽസംഖ്യ ആയാലും

$$\frac{x^m}{x^n} = \frac{1}{x^{n-m}}$$

ഈനി ചൂവടെയുള്ള ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കു:

- ലാല്പൂകരിക്കുക

■ $\frac{2^5 \times 2^3}{2^4}$	■ $\frac{3^7}{3^2 \times 3^4}$	■ $\frac{5^2 \times 5^4}{5^5 \times 5^4}$
■ $\frac{8^2 \times 8^7}{8^6 \times 8^3}$	■ $\frac{4^3 \times 4^5}{4^2 \times 4^4}$	■ $\frac{10^4 \times 10^5}{10^6 \times 10^7}$

- 5^6 നെ 5^{10} കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ $\frac{1}{5}$ എഴു ഏതു കൂതി കിട്ടും?
- 10^8 നെ 10^{12} കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യയുടെ ദശാംശരൂപം എന്താണ്?
- $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ നെ $\left(\frac{1}{2}\right)^8$ കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന എണ്ണത് സംഖ്യ ഏതാണ്?
- $(0.25)^6$ നെ ഏത് എണ്ണത്തിൽസംഖ്യ കൊണ്ട് ഗുണിച്ചു ലാം $(0.25)^4$ കിട്ടുക?

ഹരിക്കല്ലും കുറയ്ക്കല്ലും

ഭിന്നസംഖ്യകളും കൂടി ഉപയോഗിച്ചാൽ ചെറിയ സംഖ്യയെ വലിയസംഖ്യ കൊണ്ടും ഹരിക്കാം—പലം ഭിന്നസംഖ്യ ആയിരിക്കുമെന്നുമാത്രം. അതുകൊണ്ട്, ചെറിയ കൂതിയെ വലിയ കൂതി കൊണ്ട് ഹരിക്കുന്നതിനേക്കുറിച്ചും ആലോചിക്കാം.

$$m < n \text{ ആണെങ്കിൽ } \frac{x^m}{x^n} = \frac{1}{x^{n-m}}$$

ഇതിന് സമാനമായ ഒരു തത്ത്വം ഗുണിതങ്ങളിൽ ഇല്ല. ചെറിയ സംഖ്യയിൽനിന്ന് വലിയ സംഖ്യ കുറയ്ക്കാൻ താഴ്ക്കാലം കഴിയില്ലല്ലോ.

കിഴിക്കുന്നകൾ

100 ഒറ്റതുപയ നാണ്യങ്ങൾ പല കിഴിക്കളിലായി കെട്ടിവര്ത്തിക്കുന്നു. ഇതിൽനിന്ന് നൂറു രൂപ വരെ യുള്ള എത്ര രൂപ വേണമെങ്കിലും കിഴിയെന്നും അഴിക്കാതെ എടുക്കാൻ കഴിയണം. സാധിക്കുമോ?

ഒരു കിഴിയിൽ ഒരേയൊരു നാണ്യം മാത്രം ഇട്ടുകൂടി 2 രീൾ കൃതികളായ 2, 4, 8 എന്നിങ്ങനെ നാണ്യങ്ങളിട്ട് കിഴിക്കളുണ്ടാക്കുന്നു.

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 64 - 1 = 63$$

ബഹക്കിവരുന്ന $100 - 63 = 37$ നാണ്യങ്ങൾ ഒറ്റക്കിഴിയാക്കുന്നു.

ഈ ആവശ്യമുള്ള തുക 68 തൽ കുറവാണെങ്കിൽ 2 രീൾ കൃതികളും വേണമെങ്കിൽ 1 ഉം ഉപയോഗിച്ചുകൊം. ഉദാഹരണമായി, 35 രൂപയാണ് വേണ്ടതെങ്കിൽ

$$35 = 32 + 2 + 1 \text{ എന്നെടുക്കാം.}$$

63 തൽ കൂടുതലാണെങ്കിലോ?

ഉദാഹരണമായി, 65 രൂപ കിട്ടാൻ ആദ്യം 37 രീൾ കിഴി എടുക്കുക. ഈ വേണ്ടത് $65 - 37 = 28$ രൂപ. ഇത്

$$28 = 16 + 8 + 4$$

എന്നെടുക്കാമല്ലോ.

- 3 രീൾ കൃതികളുടെ പട്ടിക തയാറാക്കുക. (3^{10} വരെ) പട്ടിക ഉപയോഗിച്ച് ഈ ക്രിയകൾ ചെയ്യുക.
 - 81×9
 - 729×81
 - $6561 \div 243$
 - 243×81
 - $2187 \div 9$
 - $59049 \div 729$

കൃതിയുടെ കൃതി

64 എന ഏതെങ്കിലും ഒരു സംഖ്യയുടെ കൃതിയായി എഴുതാമോ?

എങ്ങനെയെല്ലാം എഴുതാം?

$$2^6 = 64$$

$$4^3 = 64$$

$$8^2 = 64$$

$$64^1 = 64$$

ഇതുപോലെ 3^{12} എന മറ്റു സംഖ്യകളുടെ കൃതിയായി എഴുതു.

$$3^{12} = 3^6 \times 3^6$$

$$= (729) \times (729)$$

$$= (729)^2$$

മറ്റൊരു വിധത്തിലും എഴുതാം.

$$3^{12} = 3^8 \times 3^4$$

$$= (3^4 \times 3^4) \times 3^4$$

$$= 81 \times 81 \times 81$$

$$= (81)^3$$

ഈനിയുമൊരു രീതിയുണ്ട്:

$$3^{12} = 3^6 \times 3^6$$

$$= (3^3 \times 3^3) \times (3^3 \times 3^3)$$

$$= 27 \times 27 \times 27 \times 27$$

$$= (27)^4$$

ഈ മറ്റൊരെങ്കിലും രീതിയിൽ എഴുതാൻ കഴിയുമോ? ശ്രദ്ധിച്ചുനോക്കു.

മുകളിൽ കണ്ടതിൽ $3^6 \times 3^6$ എന്നതിന്റെ അർത്ഥമെന്താണ്?

രണ്ട് 3^6 കൾ തമ്മിൽ ഗുണിച്ചതല്ലോ? ഇതിനെ ചുരുക്കി $(3^6)^2$ എന്നും താം.

$$\begin{aligned}\text{ഇനി } \quad (3^6)^2 &= 3^6 \times 3^6 \\&= 3^{6+6} \\&= 3^{6 \times 2} \\&= 3^{12}\end{aligned}$$

ഇതുപോലെ $3^4 \times 3^4 \times 3^4$ എന്നതിനെ $(3^4)^3$ എന്നും താമസിരിക്കാം. അപ്പോൾ

$$\begin{aligned}(3^4)^3 &= 3^4 \times 3^4 \times 3^4 \\&= 3^{4+4+4} \\&= 3^{4 \times 3} \\&= 3^{12}\end{aligned}$$

ഇതുപോലെ

$$\begin{aligned}(4^2)^3 &= 4^2 \times 4^2 \times 4^2 \\&= 4^{2 \times 3} \\&= 4^6 \\(5^4)^6 &= 5^{4 \times 6} \\&= 5^{24}\end{aligned}$$

എന്നെല്ലാം എഴുതാം.

ഈ ഒരു ഭിന്നസംവ്യയാക്കാം.

$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^3$ എന്നതിന്റെ അർദ്ധമെന്താണ്?

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

അതായത്,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2+2+2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3 \times 2} = \left(\frac{2}{3}\right)^6$$

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ x ഒരു സംവ്യയും m, n എന്നിവ എന്നതിനും അനുസരിച്ചിൽ

$$\begin{aligned}(x^m)^n &= \underbrace{x^m \times x^m \times \dots \times x^m}_{n \text{ മാറ്റിന്മാർഗ്ഗം}} \\&= x^{\overbrace{m+m+\dots+m}^{n \text{ മാറ്റിന്മാർഗ്ഗം}}} \\&= x^{nm} \\&= x^{mn}\end{aligned}$$



പ്രോജക്ട്

ചില എന്നതിനും സംവ്യക്തിയുടെ തുടർച്ചയായ എന്നതിനും സംബന്ധിച്ചുള്ള തുകയായി എഴുതാം. ഉദാഹരണമായി,

$$3 = 1 + 2$$

$$7 = 3 + 4$$

$$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 7 + 8$$

എന്നാൽ ചില എന്നതിനും സംബന്ധിച്ചുള്ള തുകയായി എഴുതാൻ കഴിയില്ല. ഉദാഹരണമായി, 4 നെ ഇങ്ങനെ എഴുതാനാവില്ല.

തുടർച്ചയായ എന്നതിനും സംബന്ധിച്ചുള്ള തുകയായി എഴുതാൻ കഴിയാത്ത സംവ്യക്തികൾ എന്തെങ്കിലും പ്രത്യേകതയുണ്ടോ?

20 വരെയുള്ള സംവ്യക്തി എടുത്തു പരിശോധിച്ചു നോക്കു.

അതായത്,

x എന്ന ഏതു സംഖ്യയും m, n എന്നീ ഏത് എല്ലാംഗംസംഖ്യകളും എടുത്താൽ

$$(x^m)^n = x^{mn}$$

ഈ ചുവക്കെയുള്ളൊരു കൃതിയായി എഴുത്തമല്ലോ.

- $(4^2)^3$
- $(3^3)^2 \times 9^4$
- $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^4$
- $(2^3)^4 \times 2^6$

ചുവക്കെയുള്ള ഓരോ സംഖ്യയും വിവിധ സംഖ്യകളുടെ കൃതികളായി എഴുതുക.

- 3^8
- 4^6
- 2^{15}
- 5^{12}

എടക്കങ്ങൾ

32 എൻ എടക്കങ്ങൾ ഏതൊക്കെയാണ്?

$$1, 2, 4, 8, 16, 32$$

1 ഒഴികെ ബാക്കി എടക്കങ്ങളെല്ലാം രണ്ടിന്റെ കൃതികളാണ്. അപ്പോൾ 32 എൻ എടക്കങ്ങൾ.

$$1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$$

81 എൻ എടക്കങ്ങളോ?

$$81 = 3^4$$

അപ്പോൾ എടക്കങ്ങൾ

$$1, 3, 3^2, 3^3, 3^4$$

ഈ 72 എൻ എടക്കങ്ങൾ ഏതൊക്കെയെല്ലാം കണ്ണു പിടിക്കാം.

$$72 = 2^3 \times 3^2$$

എടക്കങ്ങൾ ചിട്ടയായി എഴുതിനേന്നാക്കാം.

ആദ്യം 1 മുതൽ 2 വരെ കൃതികളായ എടക്കങ്ങളും എഴുതാം.

$$1, 2, 2^2, 2^3$$

ഈവ ഓരോന്നിനെയും 3 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ മറ്റ് നാലു എടക്കങ്ങൾ കിട്ടും.

$$3, 2 \times 3, 2^2 \times 3, 2^3 \times 3$$

ആദ്യം 1 മുതൽ 3 വരെ എടക്കങ്ങളോരോന്നിനെയും 3 നു പുകരം 3^2 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ ഇന്നിയും നാലു എടക്കങ്ങൾ കിട്ടും.

$$3^2, 2 \times 3^2, 2^2 \times 3^2, 2^3 \times 3^2$$

ഇന്തി ഏതെങ്കിലും ഘടകമുണ്ടോ?

ഇതുപോലെ 200 എൻ്റെ ഘടകങ്ങൾ ഏഴുതിയാലോ?

$$200 = 8 \times 25 = 2^3 \times 5^2$$

ഘടകങ്ങൾ ക്രമമായി ഇങ്ങനെ ഏഴുതാമല്ലോ:

1	2	2^2	2^3
5	2×5	$2^2 \times 5$	$2^3 \times 5$
5^2	2×5^2	$2^2 \times 5^2$	$2^3 \times 5^2$

240 എൻ്റെ ഘടകങ്ങളായാലോ?

$$240 = 16 \times 15 = 2^4 \times 3 \times 5$$

ഘടകങ്ങൾ ഇങ്ങനെ ഏഴുതാം:

1	2	2^2	2^3	2^4
3	2×3	$2^2 \times 3$	$2^3 \times 3$	$2^4 \times 3$
5	2×5	$2^2 \times 5$	$2^3 \times 5$	$2^4 \times 5$
3×5	$2 \times 3 \times 5$	$2^2 \times 3 \times 5$	$2^3 \times 3 \times 5$	$2^4 \times 3 \times 5$

ഇതുപോലെ ചൂഡാതുള്ള ഓരോ സംഖ്യയുടെയും ഘടകങ്ങളെല്ലാം കണ്ടുപിടിക്കുക.

- 64 • 125 • 48 • 45 • 105



ചെയ്തുനോക്കാം

- $2^x = 128$ ആൺ 2^{x+1} കണ്ടുപിടിക്കുക.
- $3^x = 729$ ആൺ 3^{x-1} കണ്ടുപിടിക്കുക.
- $3^x, 3^{x+1}, 3^{x-1}, 3^x + 1$ എന്നിവയിൽ ഇടക്കം ഏതാണ്?
- 6^{10} എൻ്റെ സഹാന്തത അക്കം ഏന്തായി രിശ്വതാം?
- $5^6 \times \frac{1}{5^x} = \frac{1}{5^{10}}$ എന്നു കിട്ടണമെങ്കിൽ x ഏന്തായിരിക്കും?
- ഘടകങ്ങൾക്കുക.

- $\frac{3^5 \times 3^6}{3^4 \times 3^4}$
- $\frac{4^7 \times 4^8}{4^2 \times (4^3)^5}$
- $\frac{(6^4)^2 \times (6^5)^3}{(6^2)^2 \times (6^4)^5}$



പ്രോജക്ട്

$$32 = 2^5 \quad \text{ഘടകങ്ങളുടെ എണ്ണം} \quad 6$$

$$81 = 3^4 \quad \text{ഘടകങ്ങളുടെ എണ്ണം} \quad 5$$

$$72 = 2^3 \times 3^2 \quad \text{ഘടകങ്ങളുടെ എണ്ണം} \quad 12$$

ഇതുപോലെ ഏതാനും സംഖ്യകളെ അഭാജ്യ ഘടകങ്ങളുടെ കൂതിയായി ഏഴുതുക. അവയുടെ ഘടകങ്ങളുടെ എണ്ണവും ഏഴുതുക.
ഘടകങ്ങളുടെ എണ്ണം കണ്ടുപിടിച്ചർ എങ്ങനെയാണ്?

കൂത്രുക്കമായി വരുന്ന സംഖ്യകളും ഘടകങ്ങളുടെ എണ്ണവും തമ്മിൽ ഏതെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ?

തിരിഞ്ഞുനോക്കുന്നോൾ



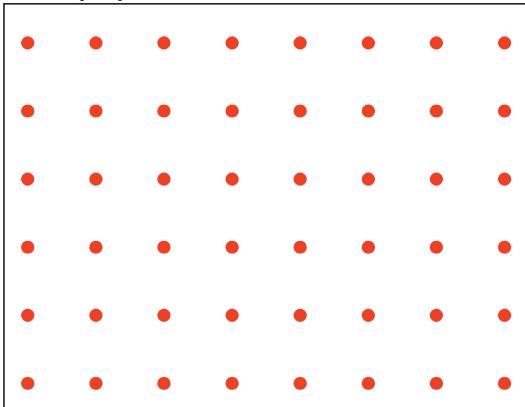
പട്ടനേടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ശീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടു ണ്ടതുണ്ട്
• ആവർത്തനഗുണനത്തിൽ ക്രിയാരൂപ മായി കൃതീകരണത്തെ വ്യാവ്യാനിക്കാനും വിശദീകരിക്കാനും കഴിയുന്നു.			
• ക്രിയാരീതികൾ പ്രയോജനപ്പെടുത്തിക്കൂട്ടുന്നു.			
• പ്രശ്നങ്ങൾ പരിഹരിക്കുന്നതിനും ക്രിയകൾ എളുപ്പത്തിൽ ചെയ്യുന്നതിനും കൃത്യകനിയമങ്ങൾ പ്രയോജനപ്പെടുത്തുന്നു.			
• വലിയസംവ്യക്കളെ വ്യാവ്യാനിക്കുന്നതിന് കൃത്യകം പ്രയോജനപ്പെടുത്തുന്നു. ഇതരം വ്യാവ്യാനങ്ങൾ ഫലപ്രദമായി അവതരിപ്പിക്കുന്നു.			
• എൺ്റെസംവ്യക്കളെയും ദശാംശസംവ്യക്കളെയും 10 ഏറ്റ് കൃതികളുപയോഗിച്ച് സ്ഥാനവിലക്കലെ അടിസ്ഥാനമാക്കി വ്യാവ്യാനിക്കുന്നു.			
• കൃതികളുമായി ബന്ധപ്പെട്ട സംവ്യാസനങ്ങൾ യുക്തിപൂർവ്വം സമർപ്പിക്കുന്നു.			

5

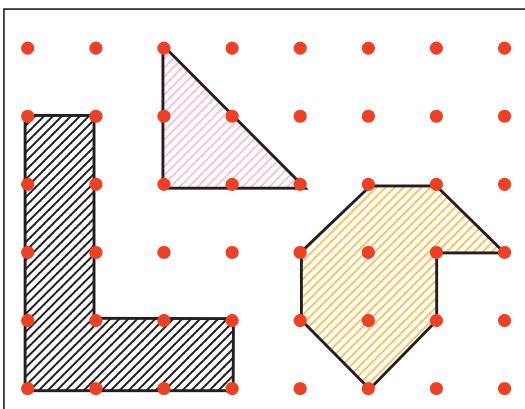
ത്രിക്കാണ്ടത്തിന്റെ പദ്ധതി



ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ ഒരു സെറ്റിമീറ്റർ ഇട വിൽ വിലങ്ങേന്നും കൂത്തതെന്നും കൂത്തുകളിടിരിക്കുന്നു.



ചുവടെയുള്ള ചിത്രങ്ങളിൽ നിന്ന് നൽകിയ രൂപങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?



ഈ മുകളിലെ ചതുരത്തിൽ കൂത്തുകൾ പലതരത്തിൽ ഡോജിപ്പിച്ച് രൂപങ്ങൾ വരച്ചുനോക്കു. ഓരോന്നിന്റെയും പരപ്പളവും കണക്കിടക്കുക.



ജീയോജിബ്രയിലെ ശ്രിയ ഉപയോഗിച്ചും ഈ പ്രവർത്തനം ചെയ്യാം. Polygon ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ശ്രിയിലെ വരകൾ ചേരുന്ന സ്ഥാനങ്ങളിലെ ബിന്ദുകളിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്ത് വിവിധ രൂപങ്ങൾ വരയ്ക്കാം.

ഈ വരയ്ക്കുന്ന രൂപങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് കണക്കിടക്കുക. ഉത്തരം ശരിയാണോയെന്ന് നിങ്ങൾക്ക് പരിശോധിക്കാം. ഇതിനായി Area ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് രൂപത്തിനുള്ളിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്താൽ മതി.

പകുതിയാക്കാം

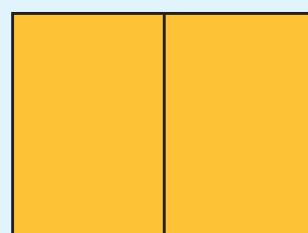
4 സെറ്റിമീറ്റർ നീളവും 3 സെറ്റിമീറ്റർ വീതിയുമുള്ള ചതുരം കലാസിൽ വരച്ച് മുറിച്ചുക്കുക.



4 സെ.മീ.

3 സെ.മീ.

ഈ ചതുര കാണുന്നതുപോലെ കൂത്യും നടുക്കായി ഒരു വരയ്ക്കുക.



4 സെ.മീ.

3 സെ.മീ.

ഇപ്പോൾ രണ്ടു ചതുരങ്ങളുണ്ട്. ഓരോന്നിന്റെയും പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

പകുതിയാണെന്നു കാണാൻ മടക്കിനോക്കിയാൽപ്പോരേ?

അതായത്,

ചെറിയ ചതുരത്തിന്റെ

പരപ്പളവ് = വലിയ ചതുരത്തിന്റെ

പരപ്പളവിൽ പകുതി

$$= \frac{1}{2} \times 12$$

= 6 ചതുരശ്ര സെറ്റിമീറ്റർ

മറ്റൊക്കെല്ലും തരത്തിൽ പരപ്പളവ് പകുതിയാക്കാമോ?

മറ്റാരു പകുതി

വശങ്ങളുടെ നീളം

10 സെറ്റിമീറ്ററും 8

സെറ്റിമീറ്ററുമായ

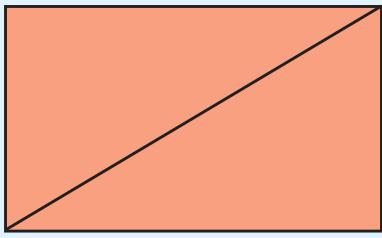
ചതുരം വരച്ച മുറി

ചെടുക്കുക.



8 സെ.മീ.

10 സെ.മീ.



10 സെ.മീ.

ചതുരത്തിന്റെ
കോൺാടുകോൺ
ചേർത്ത് ഒരു വര
വരയ്ക്കുക.

ചതുരം ഒബ്ദു ത്രികോൺങ്ങളായി.

ഇവയുടെ പരപ്പളവുകൾ തുല്യമാണോ?

മുമ്പു ചെയ്തതുപോലെ മടക്കിനോക്കിയാൽ ശരിയാ
കുമോ?

മുറിച്ചെടുത്താലോ?

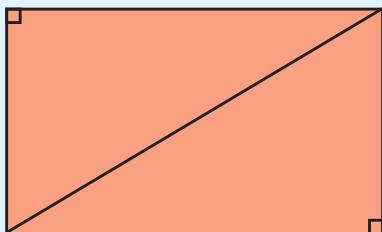
രണ്ടു ത്രികോൺങ്ങളും ചേർത്തുവച്ച് നോക്കു.

അപ്പോൾ ത്രികോൺങ്ങൾ ഓരോന്നിന്റെയും പരപ്പളവ്
എത്രയാണ്?

ഒരു ത്രികോൺത്തിന്റെ

$$\begin{aligned} \text{പരപ്പളവ്} &= \text{ചതുരത്തിന്റെ } \text{പരപ്പളവിന്റെ } \\ &\quad \text{പകുതി} \\ &= \frac{1}{2} \times 10 \times 8 \\ &= 40 \text{ ച.സെ.മീ.} \end{aligned}$$

ഈങ്ങനെ കിട്ടുന്ന ത്രികോൺങ്ങളുടെ കോൺുകൾ
ശ്രദ്ധിച്ചോ?

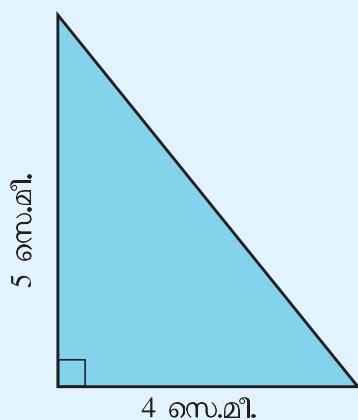


ഒരു കോൺ മട്ടായ ത്രികോൺത്തിന് മട്ടത്രികോൺ (right angled triangle) എന്നാണു പേര്.

ചിത്രത്തിലെ

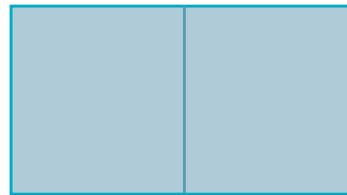
മട്ടത്രികോൺത്തിന്റെ

പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

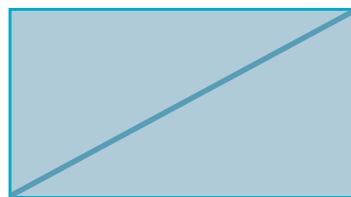


പല പകുതികൾ

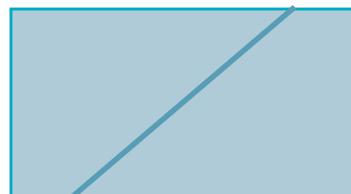
ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നടുവിലൂടെ വിലഞ്ഞനേയോ
കുറുക്കേയോ മുറിച്ച് പകുതി പരപ്പളവുള്ള ചതു
രങ്ങളാക്കാം.



കോൺാടുകോൺ മുറിച്ച് പകുതി പരപ്പളവുള്ള
ത്രികോൺങ്ങളാക്കാം.



നടുവിലൂടെ ചരിച്ചു വരച്ചാലോ?

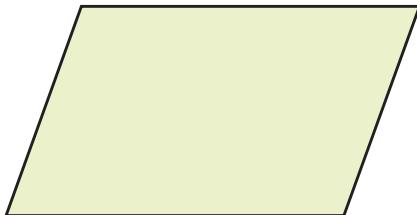


പകുതി പരപ്പളവുള്ള ഒബ്ദു ചതുർഭുജങ്ങൾ കിട്ടി
യില്ല?

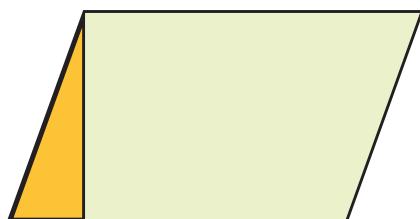
ഒരു ജോടി എതിർവശങ്ങൾ മാത്രം സമാനര
മായ ചതുർഭുജത്തിന് ലാംബക്ക (trapezium)
എന്നാണു പേര്.

സാമാന്തരികവും ചതുരഖാം

ചിത്രത്തിൽ കാണുന്ന സാമാന്തരികത്തിൻ്റെ പരപ്പളവ് എങ്ങനെ കണക്കാക്കാം?



ഈ സാമാന്തരികത്തിൽനിന്നു ചുവടെ കാണുന്ന രീതിയിൽ ഒരു മട്ടത്തോണം മുറിച്ചു മാറ്റുക.



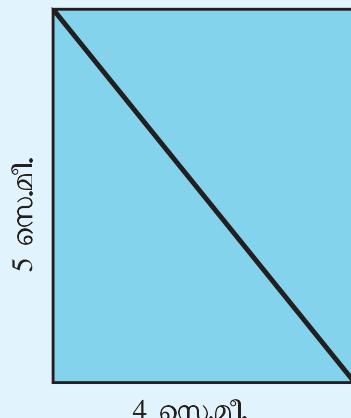
ഈ ത്രികോൺമത്തെ പിത്രത്തിൽ കാണുന്നവിധത്തിൽ വലതുഭാഗത്ത് ചേർത്തു വച്ചാലോ?



ഇപ്പോൾ ഒരു ചതുരമായണ്ണം.

അതിന്റെ പരപ്പളവ്, സാമാന്തരികത്തിൻ്റെ പരപ്പളവ് തന്നെയണ്ണം?

ഒരു പോലെയുള്ള രണ്ടു മട്ടത്തോണുങ്ഗതുപോലെ ചേർത്തു വച്ച നോക്കു.



4 സെ.മീ.

ഈ ചതുരത്തിൻ്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

മട്ടത്തോണത്തിൻ്റെ പരപ്പളവ് ഇതിന്റെ പകുതിയാണ്ണം.

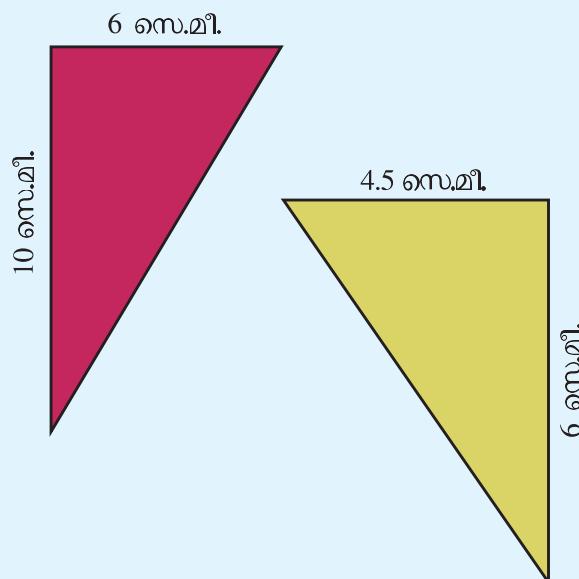
$$\begin{aligned} \text{മട്ടത്തോണത്തിൻ്റെ പരപ്പളവ്} &= \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \\ &= 10 \text{ ച.സെ.മീ.} \end{aligned}$$

ഇതിൽ 4, 5 എന്നിവ മട്ടത്തോണത്തിൻ്റെ ലംബവശങ്ങൾ ആണെന്നുണ്ടാണ്.

അപ്പോൾ ഏതു മട്ടത്തോണത്തിൻ്റെയും പരപ്പളവ് കണക്കു പിടിക്കാനുള്ള മാർഗ്ഗമായി:

ഒരു മട്ടത്തോണത്തിൻ്റെ പരപ്പളവ്, ലംബവശങ്ങൾ ആണെന്നുമല്ലത്തിൻ്റെ പകുതിയാണ്.

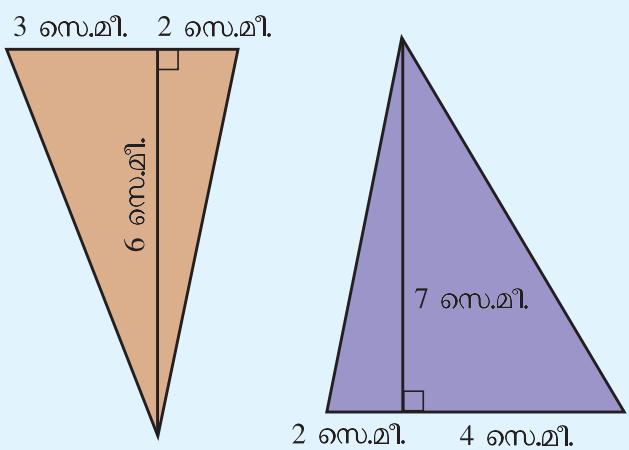
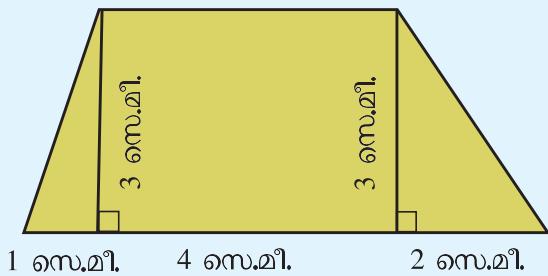
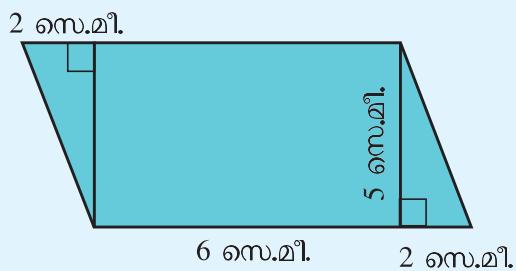
ചുവടെയുള്ള രൂപങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് കാണുക.



6 സെ.മീ.

4.5 സെ.മീ.

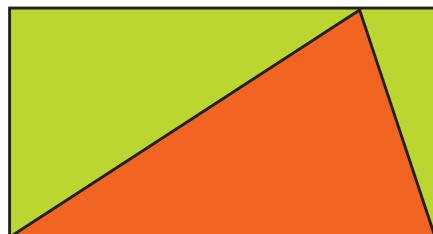
6 സെ.മീ.



- ഒരു മട്ടത്രിക്കോൺത്രിഡിൽ പരപ്പളവ് 96 ചതുരശ്ര സെന്റീമീറ്റർ ആണ്. ലംബവശങ്ങളിലൊനിൽ നീളം 16 സെന്റീമീറ്റർ. മറ്റൊരു വശത്തിൽ നീളം എത്രയാണ്?
- ഒരു മട്ടത്രിക്കോൺത്രിഡിൽ ലംബവശങ്ങൾ 12 സെന്റീമീറ്റർ, 15 സെന്റീമീറ്റർ ആണ്. അതേ പരപ്പളവുള്ള മറ്റൊരു മട്ടത്രിക്കോൺത്രിഡിൽ ലംബവശങ്ങളിലൊനിൽ നീളം 18 സെന്റീമീറ്റർ ആണ്. മറ്റൊരു ലംബവശത്തിൽ നീളം എത്രയാണ്?

ചതുരവും ത്രിക്കോൺവും

ചിത്രത്തിലെ ചുവന്ന ത്രിക്കോൺത്രിഡിൽ പരപ്പളവ് ഉണ്ട്, ചതുരത്തിൽ പരപ്പളവിൽ ഏതെങ്കിലും അഗ്രഹിക്കാൻ ശ്രദ്ധിക്കുന്നുണ്ടോ?

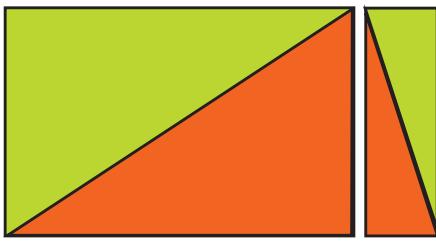


ഉത്തരം അടുത്ത പ്രേജിലുണ്ട്. പേജ് മറിക്കുന്ന തിനുമൂന്ന് അതിലും ആലോചിച്ചുനോക്കു:



ചതുരവും ത്രിക്കോൺവും

ചതുരത്തെ ചുവടെ കാണുന്നതുപോലെ ഒരു ചെറിയ ചതുരങ്ങളിലാക്കിയാലോ?

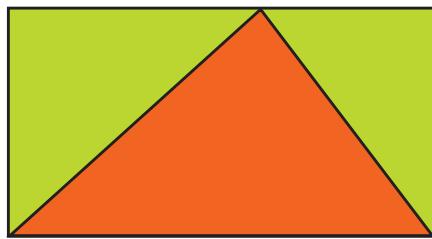


അരേ ചെറിയ ചതുരങ്ങിലുമുള്ള ചുവന്ന മട്ടിക്കോൺത്തിന്റെ പരപ്പളവ് ആ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ പകുതിയാണ്. അപ്പോൾ ഈ ഒരു മട്ടിക്കോൺങ്ങളുടെയും പരപ്പളവുകൾ കൂടി യാൽ ആദ്യത്തെ വലിയ ചതുരത്തിന്റെ പകുതി പരപ്പളവായിട്ടേണ്ടിയിരിക്കും.

ഈ ഒരു മട്ടിക്കോൺങ്ങളും ചേർന്നതാണല്ലോ ആദ്യത്തെ വലിയ ത്രിക്കോൺ.

അപ്പോൾ ആദ്യ ചിത്രത്തിലെ ചുവന്ന ത്രിക്കോൺത്തിന്റെ പരപ്പളവ് ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ പകുതിയാണ്.

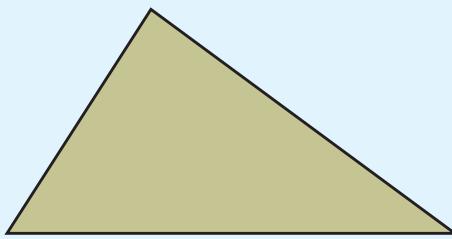
ത്രിക്കോൺ ഇങ്ങനെ വരച്ചാലോ?



ജിയോജിബേയിൽ ഒരു ചതുരം വരയ്ക്കുക. ഇതിന്റെ മുകളിലെ വരയിൽ ഒരു കുത്തിട്ടുക. Polygon ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ ഒരു ത്രിക്കോൺ വരയ്ക്കുക. ഇതിന് ചുവന്ന നിറം കൊടുക്കു. Area ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ത്രിക്കോൺത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക. മുകളിലെ കുത്തിന്റെ സ്ഥാനം മറ്റൊക്കും. പരപ്പളവിനെന്നാണു സംഭവിക്കുന്നത്?

ഒറ്റ ത്രിക്കോൺങ്ങൾ

ഈ ത്രിക്കോൺ നോക്കു.

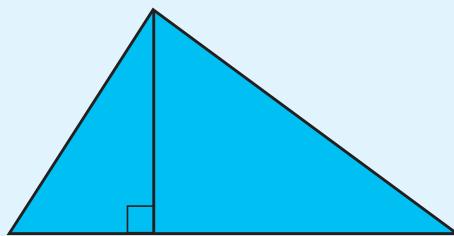


ഇതിന്റെ കോണുകളൊന്നും മട്ടമല്ല.

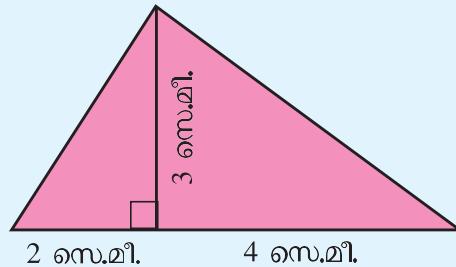
പരപ്പളവ് എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

ഇതിനെ ഒരു മട്ടിക്കോൺങ്ങളായി ഭാഗിക്കാമോ?

മുമ്പു ചെയ്ത കണക്കുകളെല്ലാം ഒന്നുകൂടി നോക്കുക.



അപ്പോൾ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കാൻ ഏതെല്ലാം വരകളും നീളം അളക്കണം?

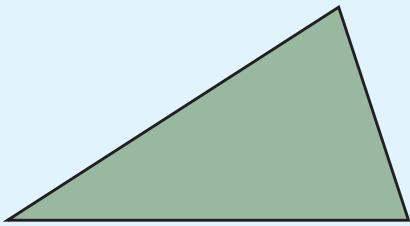


$$\begin{aligned} \text{പരപ്പളവ്} &= \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 3 \right) + \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 3 \right) \\ &= 3 + 6 \\ &= 9 \text{ ചസ.മീ.} \end{aligned}$$

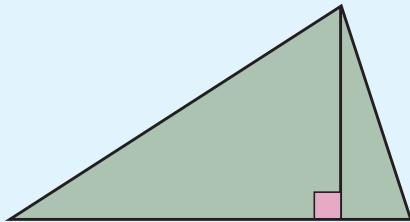
ഇങ്ങനെ ഏതു ത്രിക്കോൺത്തിന്റെയും പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കാം.

ത്രിക്കോൺത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള പോതുവായ മാർഗം എന്താണ്?

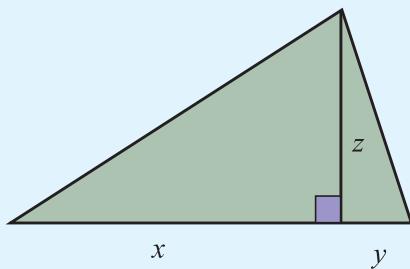
ഈ ത്രികോൺ നോക്കു.



പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കാൻ, ആദ്യം മുകളിൽ നിന്നൊരു ലംബം വരച്ച് ഒരു മട്ടത്രികോൺങ്ങളാക്കുക.



ഈ ചില നീളങ്ങൾ അളക്കണം. അവയെ തൽക്കാലം അക്ഷരങ്ങളുപയോഗിച്ച് എഴുതാം.

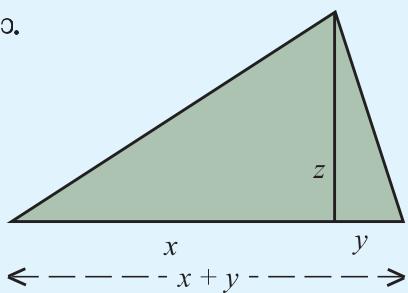


ഈ പരപ്പളവ് എങ്ങനെ എഴുതുന്തു?

ഒരു ത്രികോൺങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകളുടെ തുക

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{1}{2} \times x \times z \right) + \left(\frac{1}{2} \times y \times z \right) \\
 &= \frac{1}{2} xz + \frac{1}{2} yz \\
 &= \frac{1}{2} (x + y) z
 \end{aligned}$$

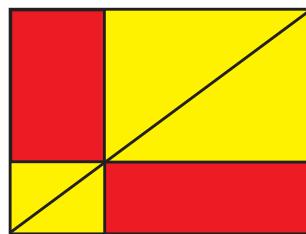
ഈതിൽ $x + y$ എന്ത് താഴെതെ വശത്തിന്റെ നീളമാണെന്ന്.



ജിയോജിബേയിൽ ഒരു സമാന്തരവരകൾ വരുത്തുക. അകലും 3 യൂണിറ്റ് ആക്കണം. താഴെതെ വരയിൽ 4 യൂണിറ്റ് അകലത്തിലൂടെ D, F എന്നിങ്ങനെ ഒരു കുത്തുകളിടുക. മുകളിലെ വരയിൽ G എന്ന ഒരു കുത്തും അടയാളപ്പെടുത്തുക. Polygon ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോൺ DEF വരയ്ക്കുക. ഈ ത്രികോൺത്തിൽ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്? നിങ്ങളുടെ ഉത്തരം ശരിയാണോ എന്ന് Area ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് പരിശോധിച്ചു നോക്കു. ഈ G യുടെ സ്ഥാനം മാറ്റിനോക്കു. പരപ്പളവിന് മാറ്റം വരുന്നുണ്ടോ?

ചതുരങ്ഗിലെ ചതുരങ്ഗൾ

ഈ ചിത്രത്തിലെ ചതുരം നോക്കു.

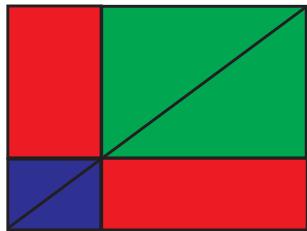


ഇതിലെ ചുവന്ന ചതുരങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ തമമിലെന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ?

പോലെ മരിച്ച് ഉത്തരം നോക്കുന്നതിനുമുമ്പ് ഒന്നു ലോചിച്ചുനോക്കു:

ചതുരണ്ടിലെ ചതുരങ്ങൾ

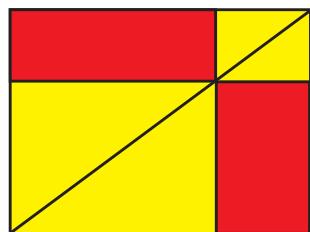
വലിയ ചതുരത്തിന്റെ വികർണ്ണം അതിനെ ഒരേ പരസ്യവും രണ്ടു മട്ടിക്കോണങ്ങളാക്കുന്നു; ഈ മട്ടിക്കോണത്തിലോരോന്നും, അതിനുള്ളിലെ ചുവന്ന ചതുരയും രണ്ടു കൊച്ചു മട്ടിക്കോണങ്ങളും ചേർന്നതാണ്.



ചിത്രത്തിലെ ഒരേ നിംഫുളുള്ള മട്ടിക്കോണങ്ങളുടെ പരസ്യവും തുല്യമാണെന്നോ?

അപേക്ഷ രണ്ടു ചുവന്ന ചതുരങ്ങളുടെയും പരസ്യവും തുല്യമാണ്.

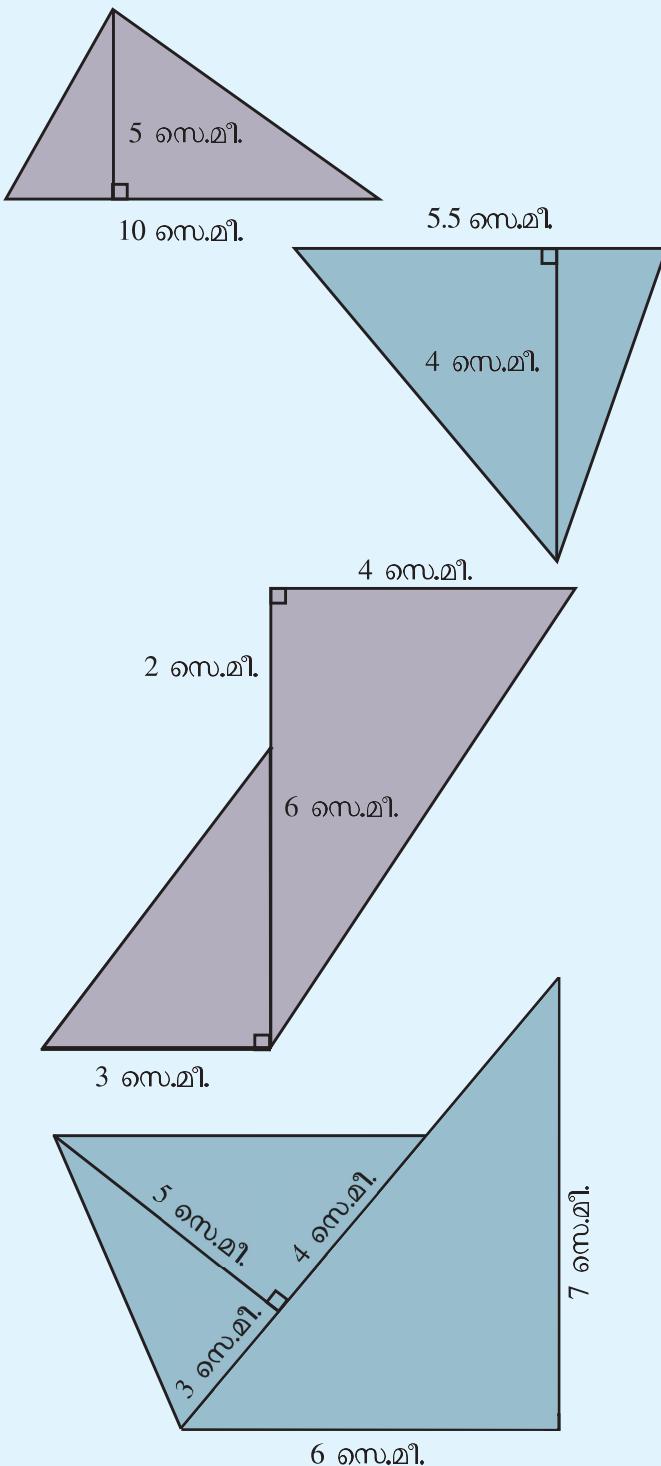
വികർണ്ണത്തിലെ മറ്റൊരുക്കിലും സഹാന്തത്തുകൂടി ചതുരങ്ങൾ വരച്ചാലോ?



അപേക്ഷ ത്രികോണത്തിന്റെ പരസ്യവും എങ്ങനെ എഴുതാം?

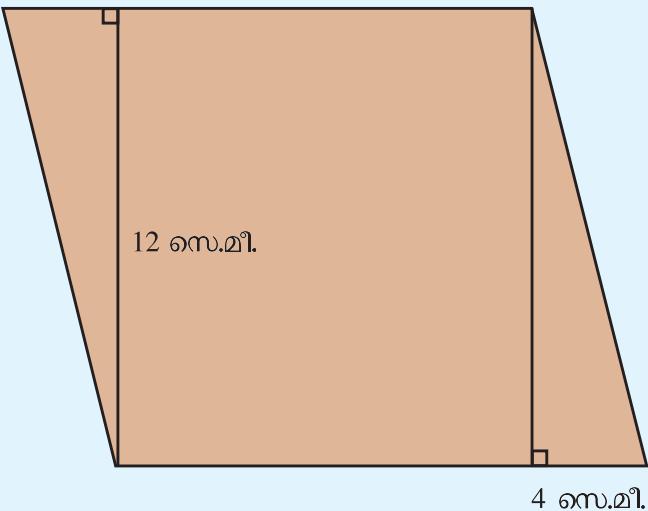
ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ പരസ്യവും, ഏതെങ്കിലും വരുത്തിന്റെയും വരുത്തിന്റെ എതിർമുലയിൽ നിന്നുള്ള ലംബത്തിന്റെയും ഗുണനപ്രതിന്റെ പകുതിയാണ്.

ചുവന്നത്തുള്ള രൂപങ്ങളുടെ പരസ്യവും കാണുക:



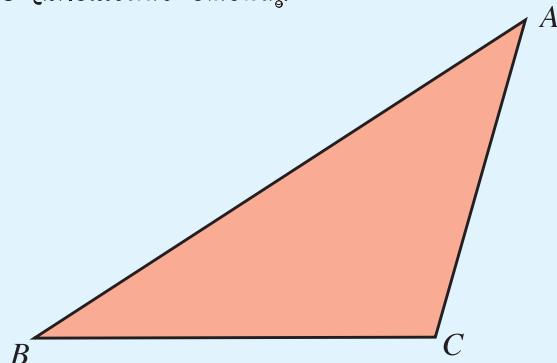
4 സെ.മീ.

10 സെ.മീ.



മറ്റാരു ത്രികോണം

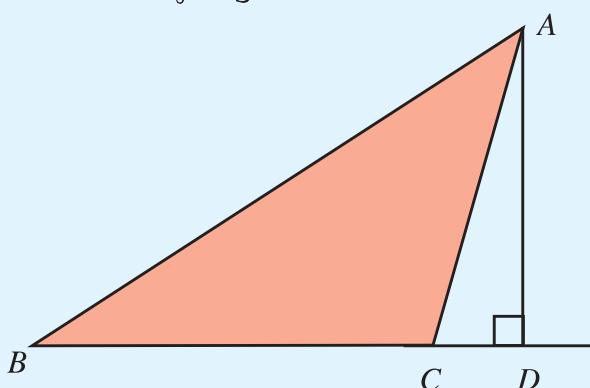
ഈ ത്രികോണം നോക്കു.



ഇതിന്റെ പരപ്പളവ് എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

A തിൽ നിന്ന് BC തിലേക്ക് ലംബം വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെ?

BC വലത്തുകൂടാനും നീട്ടിയാലോ?

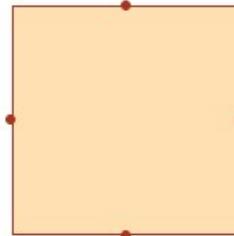


ഒന്നി ത്രികോണം പരപ്പളവ് എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

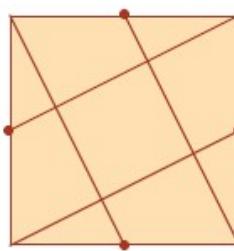
A തിൽ നിന്ന് ΔACD മാറ്റിയാൽ ΔABC കിട്ടുമല്ലോ?

സമചതുരഭാഗം

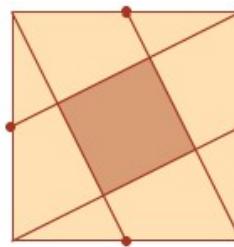
ഒരു സമചതുരം വരച്ച് അതിന്റെ വരണ്ണലുടെ രെല്ലിലാ കൃത്യം മധ്യത്തിൽ ഓരോ കുത്തിട്ടുക.



ഒന്നി ഈ കുത്തുകളും സമചതുരത്തിന്റെ മൂല കളും ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ യോജിപ്പിക്കുക.



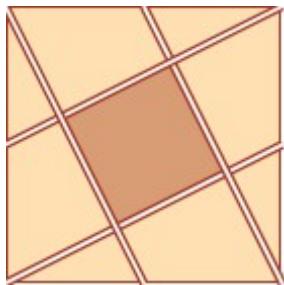
നടുവിൽ ഒരു സമചതുര കിട്ടില്ലോ?



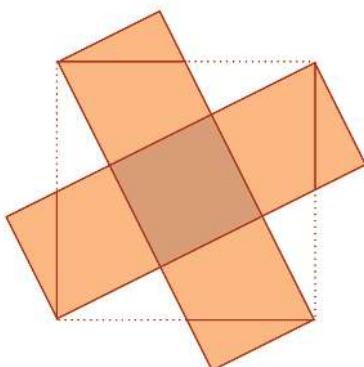
ഇതിന്റെ പരപ്പളവ് ആദ്യത്തെ വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ ഏതു ഭാഗമാണ്?

സമചതുരലോഹം

ഇതുപോലെ ഒരു ചിത്രം കടലാസിൽ വെട്ടിയെടുക്കുക.

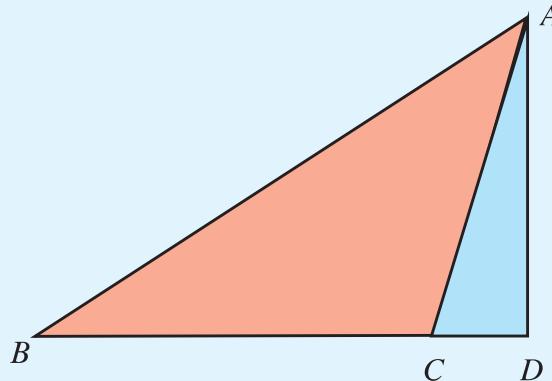


ഈ ഇതിലെ ത്രികോൺജങ്ഞങ്ങളെയെല്ലാം ചുവണ്ട് കാണുന്നതുപോലെ സഹാനും മാറ്റി വർക്കുക. ഇപ്പോൾ തുല്യവലുപ്പമുള്ള അഭ്യു സമചതുരങ്ങൾ കിട്ടും.



ഇതിൽനിന്ന് നടുവിലത്തെ സമചതുരം വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ $\frac{1}{5}$ ഭാഗമാണെന്നു കാണാം.

ΔABD മട്ടത്രികോൺമാണ്.



$$\Delta ABD \text{ യുടെ പരപ്പളവ്} = \frac{1}{2} \times BD \times AD$$

ΔACD യുടെ മട്ടത്രികോൺമാണല്ലോ.

$$\Delta ACD \text{ യുടെ പരപ്പളവ്} = \frac{1}{2} \times CD \times AD$$

ഈ ΔABC യുടെ പരപ്പളവ് കണ്ണുപിടിക്കാം.

ΔABC യുടെ പരപ്പളവ്

$$= \Delta ABD \text{ യുടെ പരപ്പളവ്} - \Delta ACD \text{ യുടെ പരപ്പളവ്}$$

$$= \frac{1}{2} \times BD \times AD - \frac{1}{2} \times CD \times AD$$

$$= \frac{1}{2} \times (BD - CD) \times AD$$

ചിത്രത്തിൽനിന്ന്

$$BD - CD = BC$$

അപ്പോൾ

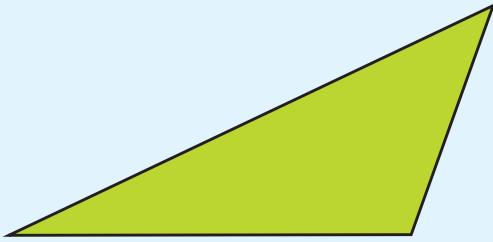
$$\begin{aligned} \Delta ABC \text{ യുടെ പരപ്പളവ്} &= \frac{1}{2} \times (BD - CD) \times AD \\ &= \frac{1}{2} \times BC \times AD \end{aligned}$$

BC, AD എന്നിവ അളുന്ന് പരപ്പളവ് കണ്ണുപിടിക്കും.

ഇതിൽ AD എന്നത് BC തിൽ നിന്നുള്ള ഉയരം തന്നെയാണ്.

അപ്പോൾ ഇതരരം ത്രികോൺത്തിന്റെയും പരപ്പളവ് ഒരു വശത്തിന്റെയും അതിൽ നിന്നുള്ള ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണ നഹലത്തിന്റെ പകുതിതന്നെയാണ്.

ഈ ത്രികോണം നോക്കു.

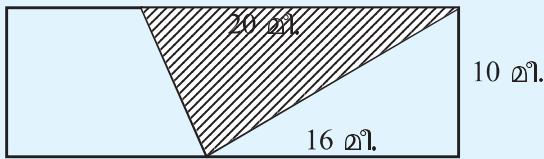


അവധൂമുള്ള നീളങ്ങൾ അളന്ന് ഈ ത്രികോണത്തിൻ്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക.



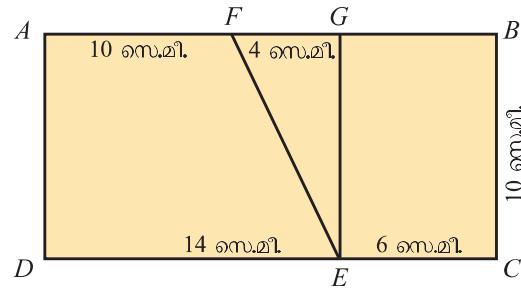
ചെയ്തുനോക്കാം

ചതുരകൃതിയായ ഒരു സർവ്വത്തിന് 30 മീറ്റർ നീളവും 10 മീറ്റർ വീതിയും ഉണ്ട്. ഈ ത്രികോണത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെയുള്ള ത്രികോണാകൃതിയായ ഒരു സർവ്വം വാഴ്ക്കേഷി ചെയ്യുന്നതിനായി വേർത്തിരിച്ചിരിക്കുന്നു.



- ഈ ഭാഗത്തിൻ്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?
- വാഴ്ക്കേഷി ചെയ്യുന്ന സർവ്വത്തിൻ്റെ വലതുഭാഗത്തെ ത്രികോണാകൃതിയായ സർവ്വത്തിൻ്റെ പരപ്പളവ് എത്ര?
- വാഴ്ക്കേഷി ചെയ്യുന്ന സർവ്വത്തിൻ്റെ ഇടതുഭാഗത്തെ നിൽക്കുന്ന ലംബക്കത്തിൻ്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?
- ΔABC യിൽ $\angle B = 90^\circ$, BC യുടെ നീളം 8 സെന്റിമീറ്റർ രൂം പരപ്പളവ് 48 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററുമാണ്. ഈ ത്രികോണത്തിലെ BC എന്ന വശത്തിൻ്റെ നീളം D യിലേക്ക് 6 സെന്റിമീറ്റർ നീക്കുന്നു. AD യോജിപ്പിക്കുന്നേം കിട്ടുന്ന ΔADC യുടെ പരപ്പളവെന്ന്?

ലംബക്കമായാൽ



$ABCD$ ഒരു ചതുരമാണ്; EFG ഒരു മട്ടത്രികോൺവും. $AFED, ECBF$ എന്നീ ലംബക്കങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

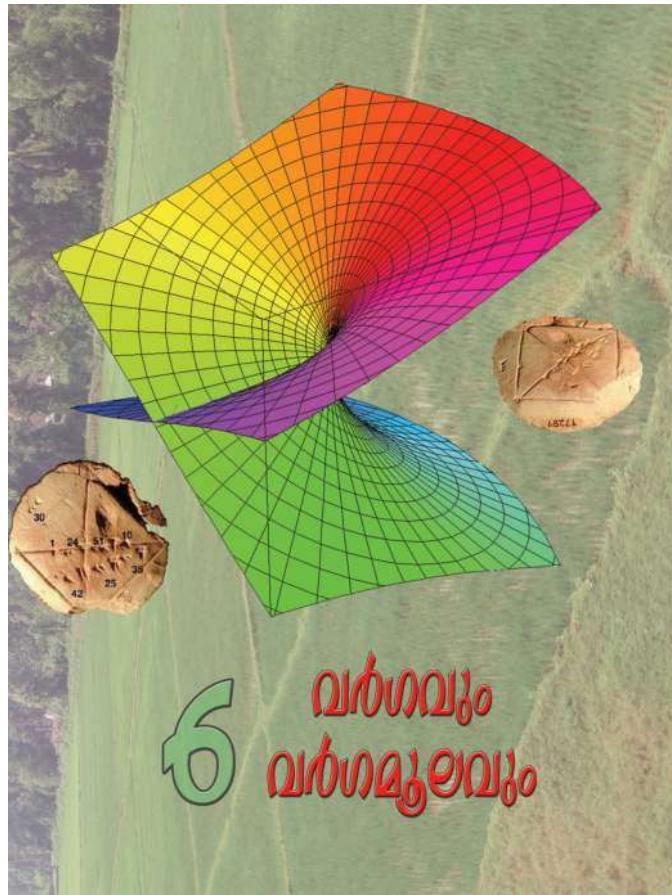
തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ



പഠനനേടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ശ്രദ്ധിക്കേണ്ട സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടു ണ്ടതുണ്ട്
<ul style="list-style-type: none"> മട്ടത്രിക്കാണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ണടത്തു നാതിനുള്ള മാർഗ്ഗം വിശദീകരിക്കുന്നു. 			
<ul style="list-style-type: none"> മട്ടത്രിക്കാണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എന്ന ആശയം ഉപയോഗിച്ച് ഏതൊരു ത്രിക്കാണത്തിന്റെയും പരപ്പളവ് കണ്ണടത്താമെന്ന് സമർപ്പിക്കുന്നു. 			
<ul style="list-style-type: none"> ത്രിക്കാണത്തിന്റെ പരപ്പളവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട പ്രശ്നങ്ങൾ പരിഹരിക്കുന്നു. 			

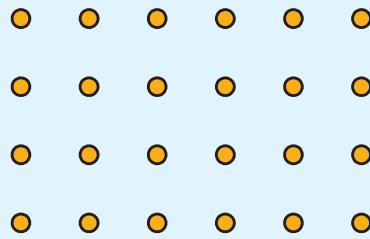
6

വർഷവും വർഷമുളവും



വരിയും നിരയും

ഇല്ല ചിത്രം നോക്കു.



വരിയും നിരയുമായി ചതുരാകൃതിയിൽ കുറേ പൊട്ടുകൾ.

ആകെ എത്ര പൊട്ടുകൾ?

പൊട്ടുകളെല്ലാം ഒരോന്നായി എല്ലായാണോ കണക്കാക്കിയത്?

24 പൊട്ടുകൾ വേറെ ഏതെങ്കിലും രീതിയിൽ ചതുരമാക്കാമോ?

ഇവയിലേതെങ്കിലും സമചതുരമാണോ?

എത്ര പൊട്ടുകൾ കൂടിയുണ്ടെങ്കിൽ സമചതുരമുണ്ടാക്കാം?

എത്ര പൊട്ടുകൾ മാറ്റിയാൽ സമചതുരമാക്കാം?
സമചതുരമാക്കാൻ കഴിയുന്ന എല്ലാഞ്ഞുടം സവിശേഷത എന്താണ്?

ഇങ്ങനെ സമചതുരാകൃതിയിൽ ക്രമീകരിക്കാൻ കഴിയുന്ന സംഖ്യകളാണ് സമചതുരസംഖ്യകൾ.

വർഗ്ഗങ്ങൾ

36 എന്ന സംഖ്യയെ ഒരു സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലമായി എങ്ങനെന്നയെല്ലാം എഴുതാം?

$2 \times 18, 3 \times 12, 4 \times 9, \dots$ എന്നെല്ലാം പിരിച്ചെഴുതാം.

$36 = 6 \times 6$ എന്നും എഴുതാം.

ഈത് ചൂരുക്കി

$36 = 6^2$ എന്നാണുതാം എന്നും കണക്കിട്ടുണ്ട്.

6 നെ 6 കൊണ്ടു തന്നെ ഗുണിച്ചത്, അഥവാ 6 രെ 2-ാം കൃതിയാണ് 36.

ഇതിനെ മറ്റാരു രീതിയിലും പറയാം.

6 രെ 6 വർഗമാണ് 36.

അപ്പോൾ 5 രെ 5 വർഗമോ?

പൂർണ്ണവർഗ്ഗങ്ങൾ

1, 4, 9, 16, ... എന്നിങ്ങനെയാണ് എല്ലാൽസംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗങ്ങൾ.

ഈവയെ പൂർണ്ണവർഗ്ഗങ്ങൾ (perfect squares) എന്നാണു പറയുന്നത്.

16 കഴിഞ്ഞാൽ അടുത്ത പൂർണ്ണവർഗ്ഗം ഏതാണ്?

എന്തുകാണഭാണ് 20 പൂർണ്ണവർഗ്ഗമല്ലാത്തത്?

പൂർണ്ണവർഗ്ഗങ്ങളുടെ ക്രമം മറ്റാരു രീതിയിൽ നോക്കാം.

1 തുംനിന് 4 ലെത്താൻ 3 കുടണം.

4 തുംനിന് 9 തും എത്താനോ?

ഈത് മറ്റാരുത്തരത്തിൽപ്പറയാം:

$$4 - 1 = 3$$

$$9 - 4 = 5$$

$$16 - 9 = 7$$

ഈവയെല്ലാം ഒറ്റസംഖ്യകളല്ലോ?

അപേക്ഷാർ അടുത്തടുത്ത പൂർണ്ണവർഗ്ഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം ഒറ്റസംഖ്യയാണ്.

മറ്റാരു രീതിയിലും പറയാം:

$$4 = 1 + 3$$

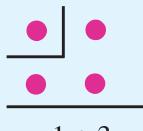
$$9 = 4 + 5 = 1 + 3 + 5$$

$$16 = 9 + 7 = 1 + 3 + 5 + 7$$

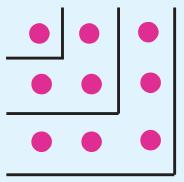
ഈതിലെല്ലാം കാണുന്നതെന്നാണ്?

ഒന്നു മുതലായിട്ടുള്ള ഒറ്റസംഖ്യകൾ തുടർച്ചയായി കൂട്ടിയാൽ പൂർണ്ണവർഗ്ഗങ്ങൾ കിട്ടും.

ഈത് ചിത്രരൂപത്തിലും കാണാം.



$$1 + 3 = 4$$



$$1 + 3 + 5 = 9$$

ഈങ്ങനെ ഒറ്റസംഖ്യകൾ കൂട്ടി, 20 വരെയുള്ള എല്ലാൽസംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗങ്ങൾ എഴുതു.

$$1^2 = 1$$

$$2^2 = 1 + 3 = 4$$

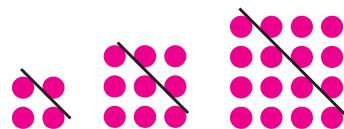
$$3^2 = 4 + 5 = 9$$

$$4^2 = 9 + 7 = 16$$

എന്നിങ്ങനെ തുടർന്നാൽ മതി.

ചതുരവും ത്രികോൺവും

ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കു:



ഓരോ സമചതുരത്തയും രണ്ടു ത്രികോൺങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കിയിട്ടുണ്ട്.

ഈ കണ്ണൽ സംഖ്യകളായി എഴുതിനോക്കാം:

$$4 = 1 + 3$$

$$9 = 3 + 6$$

$$16 = 6 + 10$$

ഈതു തുടർന്നും ശരിയാണോ എന്നു നോക്കു.

എന്തു കിട്ടി?

1 കഴിഞ്ഞായിട്ടുള്ള പൂർണ്ണവർഗ്ഗങ്ങൾ (സമചതുര സംഖ്യകൾ) എല്ലാം അടുത്തടുത്ത രണ്ടു ത്രികോൺസംഖ്യകളുടെ തുകയാണ്.

എഴാമത്തയും എട്ടാമത്തയും ത്രികോൺ സംഖ്യകളുടെ തുക എത്രയാണ്?

കുടിയും കുറവുമുണ്ടോ

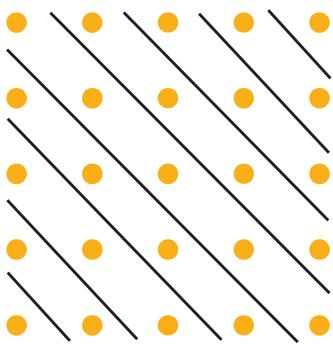
$$1 = 1$$

$$4 = 1 + 2 + 1$$

$$9 = 1 + 2 + 3 + 2 + 1$$

$$16 = 1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1$$

ഈ രീതിയിൽ മറ്റ് പൂർണ്ണവർഗങ്ങളെല്ലാം എഴുതിനോക്കു.



- 1 മുതൽ തുടർച്ചയായ കുറേ ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ തുകയും സംഖ്യകളുടെ എള്ളൂദ്ധാരണ തമിൽ എന്നാണു ബന്ധം?
- 1 മുതൽ തുടർച്ചയായ 30 ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ തുക എത്രയാണ്?

പ്രതിഭർ കളി

10 എണ്ണ വർഗം 100 ആണ്. 100 എണ്ണ വർഗമോ?

1000 എണ്ണ വർഗത്തിൽ 1 കഴിഞ്ഞ് എത്ര പൂജ്യമുണ്ടാകും?

10000 എണ്ണ വർഗത്തിലോ?

വർഗമാകുമ്പോൾ പൂജ്യങ്ങളുടെ എള്ളൂത്തിന് എന്തു സംഭവിക്കുന്നു?

അപ്പോൾ 10, 100, 1000, 10000, ... എന്നിങ്ങനെയുള്ള സംഖ്യകളിൽ പൂർണ്ണവർഗങ്ങളെ എങ്ങനെ തിരിച്ചറിയും?

ലക്ഷം ഒരു പൂർണ്ണവർഗമാണോ?

പത്തുലക്ഷമോ?

ഇനി 20, 200, 2000 എന്നിവയുടെ വർഗങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

400000000 പൂർണ്ണവർഗമാണോ?

ഒരു പൂജ്യം കൂടി ചേർത്താലോ?

ഇനി കുറേ ചോദ്യങ്ങളാക്കാം. എല്ലാം മനസ്സിൽത്തന്നെ കണക്കുകൂടാമല്ലോ.

- ചുവരെയുള്ള സംഖ്യകളുടെ വർഗം കണ്ടുപിടിക്കുക:
 - 30
 - 400
 - 7000
 - 6×10^{25}
- ചുവരെയുള്ള സംഖ്യകളിലെ പൂർണ്ണവർഗങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.
 - 2500
 - 36000
 - 1500
 - 9×10^7
 - 16×10^{24}

അടുത്ത വർഗം

21 എണ്ണ വർഗം എത്രയാണ്?

സുണിക്കാൻ വരുത്തു.

20 എണ്ണ വർഗം 400 ആണല്ലോ. അപ്പോൾ 21 എണ്ണ വർഗം കിട്ടാൻ 400 നോട് ഒരു ഒറ്റസംഖ്യ കൂട്ടിയാൽ മതി.

എത്ര ഒറ്റസംഖ്യ?

ആദ്യം മുതൽ നോക്കാം.

$$2^2 = 1^2 + 3 = 1^2 + (1 + 2)$$

$$3^2 = 2^2 + 5 = 2^2 + (2 + 3)$$

$$4^2 = 3^2 + 7 = 3^2 + (3 + 4)$$

$$5^2 = 4^2 + 9 = 4^2 + (4 + 5)$$

എന്നെല്ലാം എഴുതാമല്ലോ. ഈ രീതിയിൽ തുടർന്നാൽ,
 21^2 എങ്ങനെ എഴുതാം?

$$21^2 = 20^2 + (20 + 21)$$

അതായത്,

$$21^2 = 400 + 41 = 441$$

ഈ പദ്ധതുപോലെ

$$22^2 = 441 + 43 = 484$$

എന്നെല്ലാം തുടരാം.

101 റേഖ വർഗം എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

$$100^2 = 10000$$

ഈ എന്തുകൂടി കൂട്ടണം?

$$100 + 101 = 201$$

അപ്പോൾ

$$101^2 = 10000 + 201 = 10201$$

- ഈ പദ്ധതുപോലെ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സംഖ്യകളുടെ വർഗം കണക്കാക്കുക.
- 51 ■ 61 ■ 121 ■ 1001
- 90 മുതൽ 100 വരെയുള്ള എന്നെല്ലാം വർഗം കണ്ടുപിടിക്കുക.

ഭിന്നവും വർഗവും

ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയെ അതുകൊണ്ടുതന്നെ ഗുണിച്ചുകിട്ടുന്നതിനെയും വർഗം എന്നുതന്നെ പറയാം.

$\frac{3}{4}$ റേഖ വർഗം എന്താണ്?

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 4} = \frac{9}{16}$$

അതായത്

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} = \frac{3^2}{4^2}$$

അപ്പോൾ ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെ വർഗം കണ്ടുപിടിക്കാൻ അംഗീകാരിക്കേണ്ടതും ചേരുത്തിക്കേണ്ടതും വർഗങ്ങൾ വെവ്വേറു കണ്ടുപിടിച്ചാൽ മതി.

വർഗവ്യത്യാസം

$$2^2 = 1^2 + (1 + 2)$$

$$3^2 = 2^2 + (2 + 3)$$

$$4^2 = 3^2 + (3 + 4)$$

എന്നെല്ലാം കണാല്ലോ.

ഈ മണ്ണാരു രീതിയിലും എഴുതാം.

$$2^2 - 1^2 = 1 + 2$$

$$3^2 - 2^2 = 2 + 3$$

$$4^2 - 3^2 = 3 + 4$$

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ, അടുത്തടുത്ത രണ്ട് എന്നെല്ലാം വർഗവ്യത്യാസം സംഖ്യകളുടെ തുകയാണ്.

ഈ ഈ കണക്കുകൾ നോക്കോ:

$$3^2 - 1^2 = 9 - 1 = 8$$

$$4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$$

$$5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$$

ഒന്നിവിട സംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം സഖ്യം സംഖ്യകളുടെ തുകയും തമ്മിലെത്താണ് പെന്നും?



ഇന്തി ഈ ചോദ്യങ്ങൾ മനക്കണക്കായി ചെയ്യാമല്ലോ.

- ചുവടെയുള്ള സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗം കണ്ടുപിടിക്കുക.
 - $\frac{2}{3}$
 - $\frac{1}{5}$
 - $\frac{7}{3}$
 - $1\frac{1}{2}$
- ചുവടെയുള്ള സംഖ്യകളിൽ എത്രതാക്കയൊന്ന് ഭിന്ന സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗങ്ങൾ?
 - $\frac{4}{15}$
 - $\frac{8}{9}$
 - $\frac{16}{25}$
 - $2\frac{1}{4}$
 - $4\frac{1}{9}$
 - $\frac{8}{18}$

ദ്രോംഗ്രാഫിജീസൾ

0.5 എൻ വർഗ്ഗം എത്രയാണ്?

$5^2 = 25$ ആണെന്നാണിരാം. 0.5×0.5 എന്ന ശുണ്ണമല്ല തതിൽ എത്ര ദശാംശസ്ഥാനം ഉണ്ടാകണം?

എന്തുകൊണ്ട്?

$$0.5 = \frac{5}{10} \text{ ആണല്ലോ.}$$

ഈതുപോലെ 0.05 എൻ വർഗ്ഗം കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

കൂറേ എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗങ്ങൾ കണ്ടുപിടിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ. അതുപയോഗിച്ച് 1.5 എൻ വർഗ്ഗം എത്രയാണെന്ന് പറയാമോ?

0.15 എൻയോ?

ഈ ചോദ്യങ്ങളും മനക്കണക്കായി ചെയ്യാമല്ലോ.

- ചുവടെയുള്ള സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗം കണ്ടുപിടിക്കുക.
 - 1.2
 - 0.12
 - 0.013
- ചുവടെയുള്ള സംഖ്യകളിൽ വർഗ്ഗമായി എഴുതാൻ കഴിയുന്ന സംഖ്യകൾ എത്രതാക്കയൊന്ന്?
 - 2.5
 - 0.25
 - 0.0016
 - 14.4
 - 1.44

വർഗ്ഗശൃംഖല

$5^2 \times 4^2$ എത്രയാണ്?

$$5^2 \times 4^2 = 25 \times 16 = \dots\dots\dots$$

ഈത് കുറേക്കൂടി എളുപ്പത്തിൽ ചെയ്യാം:

$$\begin{aligned} 5^2 \times 4^2 &= 5 \times 5 \times 4 \times 4 \\ &= (5 \times 4) \times (5 \times 4) \\ &= 20 \times 20 \\ &= 400 \end{aligned}$$



ചോജക്ക്

അവസാനത്തെ അക്കം

1 മുതൽ 10 വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ അവസാന അക്കം നോക്കുക.

$$1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0$$

ഇന്തി 11 മുതൽ 20 വരെയുള്ള സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ അവസാന അക്കം നോക്കു.

ഈതെന്നു ക്രമം തന്നെയാണോ?

മുന്താറു കാര്യം നോക്കാം. ഏതെങ്കിലും പുർണ്ണ വർഗ്ഗത്തിന്റെ അവസാന അക്കം 2 ആകുമോ?

അവസാന അക്കമായി വരാത്തരെ എത്രതാക്കേയാണ്?

അപ്പോൾ 2637 എന്ന സംഖ്യ പുർണ്ണവർഗ്ഗമാണോ?

ഒരു സംഖ്യ പുർണ്ണവർഗ്ഗമല്ല എന്ന് തീരുമാനിക്കാൻ അവസാനത്തെ അക്കം മാത്രം നോക്കിയാൽ മതി.

അവസാന അക്കം മാത്രം നോക്കി ഒരു സംഖ്യ പുർണ്ണവർഗ്ഗമാണെന്നു പറയാൻ പറ്റുമോ?

ഇതുപോലെ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ക്രിയകൾ മനസ്സിൽ ചെയ്ത് ഉത്തരം പറയു.

■ $5^2 \times 8^2$ ■ $2.5^2 \times 4^2$ ■ $(1.5)^2 \times (0.2)^2$

ഇവിടെയെല്ലാം നാം ഉപയോഗിച്ച് തത്പരം എന്നാണ്?

ഒരു സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ ഗുണനഫലവും
ഈ സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ വർഗവും
തുല്യമാണ്.

ബിജഗണിതത്തിൽപ്പറഞ്ഞാലോ?

x, y എത്ര സംഖ്യകൾ ആയാലും
 $x^2y^2 = (xy)^2$

സംഖ്യകൾ മുന്നൊള്ളമായാലോ?

വർഗ്ഗഘടകം

30 നെ അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലമായി എങ്ങനെ എഴുതും?

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$

അപ്പോൾ 900 നെ എങ്ങനെ ഘടകക്രിയ ചെയ്യും?

$$900 = 30^2 = (2 \times 3 \times 5)^2 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$$

ഇതുപോലെ $24 = 2^3 \times 3$ എന്നതും $24^2 = 576$ എന്നതും ഉപയോഗിച്ച്

$$576 = 24^2 = (2^3 \times 3)^2 = (2^3)^2 \times 3^2 = 2^6 \times 3^2$$

എന്ന് ഘടകക്രിയ ചെയ്യാമല്ലോ.

ചുവടെയുള്ള ഓരോ സംഖ്യയെയും അതിന്റെ വർഗ തെരഞ്ഞെടുത്തും അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ കൂത്രികളുടെ ഗുണനമായി എഴുതാമോ?

- 35
- 45
- 72
- 36
- 49

വർഗങ്ങളിലെ അഭാജ്യഘടകങ്ങളുടെ കൂത്രകങ്ങൾക്ക് എന്തെങ്കിലും സവിശേഷത ഉണ്ടോ?

തിരിച്ചുപറഞ്ഞാൽ

ങ്ങൾ സമചതുരം വരയ്ക്കണം. അതിന്റെ പരപ്പളവ് 9 ചതുരശ്രസൂഖ്യമീറ്റർ ആയിരിക്കണം.

എങ്ങനെ വരയ്ക്കും?

സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് വശത്തിന്റെ വർഗമാണെല്ലോ.

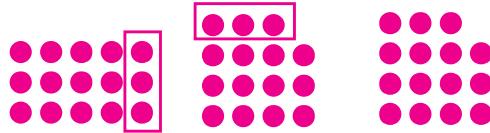
ചതുരവും സമചതുരവും

ചിത്രം നോക്കു:



ചതുരത്തിൽ കുറേ പൊട്ടുകൾ. ഈ വേരു രീതിയിൽ അടുക്കാമോ? ഒരു സമചതുരമുണ്ടാക്കാമോ?

ഇങ്ങനെ മാറ്റിനോക്കു.



സമചതുരമാക്കാൻ ഇനி എത്ര പൊട്ടു വേണോ?



ആദ്യത്തെ ചതുരത്തിൽ എത്ര പൊട്ടുകളുണ്ടായിരുന്നു? ഇപ്പോഴത്തെ സമചതുരത്തിലോ?

ഇവിടെ കണ്ണതെന്നാണ്?

$$4^2 = (3 \times 5) + 1$$

ഈ സൃഷ്ടം എല്ലാ ചതുരങ്ങൾക്കും സാധിക്കുമോ?

ഇവിടെ ഉപയോഗിച്ച് സംഖ്യകൾ 3, 4, 5 എന്നിങ്ങനെയാണെല്ലോ.

അപ്പോൾ ഇത് സാധിക്കണമെങ്കിൽ ആദ്യത്തെ ചതുരത്തിലെ വർഗിലും നിരയിലുമുള്ള പൊട്ടുകളുടെ എല്ലാം എങ്ങനെയായിരിക്കണും?

ഇക്കാര്യം സംഖ്യകളായി എഴുതിയാലോ?

$$2^2 = (1 \times 3) + 1$$

$$3^2 = (2 \times 4) + 1$$

$$4^2 = (3 \times 5) + 1$$

ഈ തുടർന്നുനോക്കു.

പുർണ്ണവർഗ്ഗത്തിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം

784 ഒരു പൂർണ്ണവർഗ്ഗം ആണ്. ഇതിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം എന്നാണ്?

784 എന്ന സംഖ്യ 400, 900 എന്നീ പൂർണ്ണവർഗ്ഗങ്ങൾക്കിലാണ് 400 എൻ്റെ വർഗ്ഗമൂലം 20 ഉം, 900 എൻ്റെ 30 ഉം ആണെന്ന് നമ്മുടെ ചെറിയാം.

അതുകൊണ്ട് 784 എൻ്റെ വർഗ്ഗമൂലം 20 നും 30 നും ഇടയിലാണ്. 784 എൻ്റെ ഓന്നിന്റെ സ്ഥാനത്ത് 4 ആയതുകൊണ്ട് അതിന്റെ വർഗ്ഗമൂലത്തിന്റെ ഓന്നിന്റെ സ്ഥാനത്ത് 2 ആണ്ടുങ്കിൽ 8 ആയി തിരുക്കും. അതായത് $\sqrt{784} = 28$ എന്നത് 22 ആണ്ടുങ്കിൽ 28 ആക്കണം.

784 എന്ന സംഖ്യ 400 നേക്കാശം 900 നോക്കാണ് കൂടുതൽ അടുത്തു നിൽക്കുന്നത്. അതുകൊണ്ട് $\sqrt{784} = 28$ ആണ്. ഈ 28 എൻ്റെ വർഗ്ഗം കണ്ണു നോക്കും.

ഇതുപോലെ 1369, 2116, 2209 എന്നിവയുടെ വർഗ്ഗമൂലം കണ്ണുപിടിക്കാമോ?

അപ്പോൾ പരപ്പളവ് 9 ചതുരശ്ര സെൻ്റീമീറ്ററാക്കാൻ വശ ത്തിന്റെ നീളം എത്രയാക്കണം?

ഇതുപോലെ 169 ചതുരശ്ര സെൻ്റീമീറ്ററിൽ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കാൻ വശത്തിന്റെ നീളം എത്രയായി എടുക്കണം?

അതിന് ഏതു സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗമാണ് 169 എന്നു കണ്ടു പിടിക്കണം. നേരത്തെ ഉണ്ടാക്കിയ വർഗ്ഗപൂട്ടിക നോക്കിയാൽ $13^2 = 169$ എന്നു കാണാം. അപ്പോൾ വശങ്ങളുടെ നീളം 13 സെൻ്റീമീറ്റർ ഉള്ള സമചതുരം വരച്ചാൽ മതി.

ഇവിടെ ഒരു സംഖ്യ ഏതു സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗമാണെന്ന് കണ്ടുപിടിച്ചു. ഈ ക്രിയക്ക് വർഗ്ഗമൂലം കണ്ണുപിടിക്കുക എന്നാണു പായുന്നത്.

അതായത് 13 എൻ്റെ വർഗ്ഗമാണ് 169 എന്നതിനെ തിരിച്ചു പായുന്നത് 169 എൻ്റെ വർഗ്ഗമൂലമാണ് 13 എന്നാണ്. (169 is the square of 13 and 13 is the square root of 169).

13 എൻ്റെ വർഗ്ഗമാണ് 169 എന്നതിനെ

$$13^2 = 169$$

എന്നു ചുരുക്കി എഴുതുന്നതുപോലെ 169 എൻ്റെ വർഗ്ഗമൂലമാണ് 13 എന്നതിനെ ചുരുക്കി എഴുതുന്നത്

$$\sqrt{169} = 13$$

എന്നാണ്.

(വർഗ്ഗമൂലം എടുക്കുക എന്ന ക്രിയയെ $\sqrt{\quad}$ എന്ന ചിഹ്നം കൊണ്ടാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്).

ഇതുപോലെ 5 എൻ്റെ വർഗ്ഗമാണ് 25 എന്ന കാര്യം 25 എൻ്റെ വർഗ്ഗമൂലമാണ് 5 എന്നും പറയാം. ചുരുക്കി എഴുതിയാൽ

$$5^2 = 25$$

$$\sqrt{25} = 5$$

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ

$$x, y \text{ എന്ന രണ്ടു സംഖ്യകളിൽ } x^2 = y \text{ ആണെങ്കിൽ} \\ \sqrt{y} = x$$

ഈ ചുവടെയുള്ള സംഖ്യകളുടെയെല്ലാം വർഗ്ഗമൂലം കണ്ടു പിടിക്കു. (വർഗ്ഗപൂട്ടിക ഉപയോഗിക്കാം)

- 100
- 256
- $\frac{1}{4}$
- $\frac{16}{25}$
- 1.44
- 0.01

വർഗമുലാലടക്കം

1225 ന്റെ വർഗമുലം എങ്ങനെ കണ്ണുപിടിക്കും?

വർഗങ്ങളുടെ ഗുണനഫലവും വർഗമായിനാൽ 1225 നെ വർഗങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതിയാലും മതി.

അതിന് 1225 നെ അഭാജ്യഘടകങ്ങളായി എഴുതിനോക്കു.

$$1225 = 5^2 \times 7^2$$

വർഗങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം, ഗുണനഫലത്തിന്റെ വർഗമായതിനാൽ

$$5^2 \times 7^2 = (5 \times 7)^2 = 35^2$$

അപ്പോൾ $1225 = 35^2$

ഇതിൽനിന്ന് $\sqrt{1225} = 35$

മറ്റാരു ഉദാഹരണം നോക്കാം: $\sqrt{3969}$ കണ്ണുപിടിക്കണം.

മുമ്പ് ചെയ്തതുപോലെ 3969 നെ അഭാജ്യഘടകങ്ങളാക്കാം.

$$3969 = 3^2 \times 3^2 \times 7^2$$

$$= (3 \times 3 \times 7)^2$$

ഇതിൽനിന്ന് $\sqrt{3969} = 3 \times 3 \times 7 = 63$

എന്നു കിട്ടും.

ഈനി താഴെ കോടുത്തവയുടെ വർഗമുലം കാണുക.

- 256 • 2025 • 441 • 9216 • 1089
- 15625 • 1936 • 3025 • 12544



ചെയ്തുനോക്കാം

- സമചതുരകൃതിയായ ഒരു സൂലത്തിന് 1024 ചതുരശ്ര മീറ്റർ പരപ്പളവാണുള്ളത്. ഇതിന്റെ ഒരു വശത്തിന് എത്ര മീറ്റർ നീളമുണ്ട്?
- ഒരു പന്തലിൽ 625 കമ്പോക്സർ വരിയായും നിരയായും ഇട്ടിരിക്കുന്നു. വരികളുടെയും നിരകളുടെയും എണ്ണം തുല്യമാണ്. ഇതിൽ ഒരു വരിയിൽനിന്നും ഒരു നിരയിൽ നിന്നും മുഴുവൻ കമ്പോക്സറും മാറ്റി. എത്ര കമ്പോക്സറും മാറ്റിയത്? ബാക്കി എത്ര കമ്പോക്സറും കൂട്ടിയത്?
- 1 മുതൽ തുടർച്ചയായി കുറെ ഒറ്റസംഖ്യകൾ കൂട്ടിയ ഫോൾ 5184 എന്നു കിട്ടി. എത്രവരെയുള്ള ഒറ്റസംഖ്യകളാണ് കൂട്ടിയത്?
- തുടർച്ചയായ രണ്ട് എണ്ണൽസംഖ്യകളും അവയിൽ ആദ്യത്തെത്തിന്റെ വർഗവും കൂട്ടിയപ്പോൾ 5329 കിട്ടി. സംഖ്യകൾ ഏതൊക്കെയാണ്?



പ്രോജക്ട്

അക്കെത്തുകൾ

16 ഒരു പുർണ്ണവർഗമാണല്ലോ, ഇതിലെ അക്കങ്ങൾ 1 ഉം 6 ഉം കൂട്ടിയാൽ 7 കിട്ടും.

അടുത്ത പുർണ്ണവർഗമായ 25 ന്റെ അക്കങ്ങൾ കൂട്ടിയാലും 7 തന്നെ.

36 ന്റെ അക്കങ്ങൾ കൂട്ടിയാൽ 9.

7 ന്റെ വർഗമായ 49 ന്റെ അക്കങ്ങൾ കൂട്ടിയാൽ 13; ഇതിലെ അക്കങ്ങൾ വിശദും കൂട്ടിയാൽ 4.

ഇങ്ങനെ 1 മുതലുള്ള പുർണ്ണവർഗങ്ങളുടെ അക്കങ്ങളുടെ തുക എഴുതിനോക്കു. (തുക ഒരു കമ്പസംഖ്യയാകുന്നതുവരെ തുടരണം).

പുർണ്ണവർഗ തതിന്റെ ഇങ്ങനെയുള്ള അക്ക തുകയുടെ പ്രത്യേകത എന്താണ്?

3324 പുർണ്ണവർഗമാണോ?

തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ



പഠനങ്ങളുടെ വിവരങ്ങൾ	എന്നിക്ക് കഴിയും	ചീപ്പിടുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടുത്തേണ്ട ബന്ധങ്ങൾ
• സമചതുരസംവ്യക്തിടെ പ്രത്യേകതകൾ വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• സമചതുരസംവ്യക്തികൾ ത്രികോൺസം വ്യക്തിമായുള്ള ബന്ധം വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• വർഗം, പുർണ്ണവർഗം എന്നിവ ഉദാഹരിപ്പിച്ചു വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• ഒരു സംഖ്യയുടെ വർഗം കണ്ണഡത്തുന്നു.			
• വർഗസംവ്യക്തിടെ പ്രത്യേകതകൾ യുക്തിസഹിതം സമർപ്പിക്കുന്നു.			
• വാചികമായ പ്രസ്താവനകളും '✓', 'X' എന്ന ചിഹ്നം ഉപയോഗിച്ചും തിരിച്ചും പറയുന്നു.			
• ഒരു പുർണ്ണവർഗത്തിന്റെ വർഗമൂലം കണക്കുന്നതിനുള്ള രീതികൾ വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• പുർണ്ണവർഗത്തിന്റെ പ്രത്യേകതകൾ ഉദാഹരണസഹിതം വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• വർഗമൂലം, സംഖ്യാബന്ധങ്ങൾ എന്നിവ ഉപയോഗിച്ച് പ്രായോഗികപ്രശ്നങ്ങൾ പരിഹരിക്കുന്നു.			

7

വേഗത്തിന്റെ കമക്ക്



ഒളിംപിക്സ്

2012 ലണ്ടൻ ഒളിംപിക്സിലെ പുരുഷമാരുടെ 100 മീറ്റർ ഓട്ടമത്സ്യത്തിൽ ആദ്യ 5 സഹാന്നത്തെ തിരിയവരുടെ സമയം നോക്കു.

ക്രമ. നം.	പേര്	സമയം (സെക്കന്റ്)
1.	ഉസൈൻ ബോൾട്ട്	9.63
2.	ഡോഹാൻ ഭേമക്ക്	9.75
3.	ജസ്റ്റിൻ ഗാർഡലിൻ	9.79
4.	ടെസാൻ ഗേ	9.80
5.	റിയാൻ ബേവൽഡി	9.88

100 മീറ്റർ ഓട്ടാൻ നിങ്ങൾ എത്ര സമയ മെടുക്കുന്നു?



ആരാൺ കേമാർ?

“സ്കൂളിലെ ഏറ്റവും നല്ല ഓട്ടക്കാരനെ കണ്ടെത്തണം. എന്നാൻ വഴി?”

ടീച്ചർ ചോദിച്ചു.

“എല്ലാവരും 100 മീറ്റർ ഓട്ടിനോക്കിയാൽ പോരെ?”

രാജി ചോദിച്ചു.

രലു പറഞ്ഞതിങ്ങനെ.

“എല്ലാവരും 1 മിനിറ്റ് ഓട്ടിനോക്കിയാലും മതിയല്ലോ.”

പരിക്ഷിക്കാൻ എല്ലാവരും ശ്രദ്ധിലെത്തി.

ആദ്യം എല്ലാവരും 100 മീറ്റർ ഓട്ടി.

മികച്ച ഓട്ടക്കാർ ഇവരാണ്.

ക്രമ നമ്പർ	പേര്	സമയം
1.	ഗും	16 സെക്കന്റ്
2.	ജോയ്	18 സെക്കന്റ്
3.	രലു	18 സെക്കന്റ്
4.	മുൻതുഹ	17 സെക്കന്റ്

മത്സ്യത്തിൽ ആരാൺ ജയിച്ചുത്?

രലു പറഞ്ഞതുപോലെ മത്സ്യം നടത്താൻ എളുപ്പമാണോ?

കായികമേഖല

കോഴിക്കോട്ടു നടക്കുന്ന കായികമേഖലയിൽ പജകുക്കാൻ രലുവും കുട്ടകാരും യാത്ര ചെയ്തത് ബന്ധിലാണ്. രാവിലെ 7 മണിക്ക് യാത്ര തുടങ്ങി, 150 കി.മീ. സഞ്ചരിച്ച് 10 മണിക്കാൻ എത്തിച്ചേരുന്നത്. യാത്രയിലുടനീളം വഹനം സഞ്ചരിച്ചത് ഒരേ വേഗത്തിലാക്കണമെന്നുണ്ടോ?

ആദ്യത്തെ ഒരു മണിക്കൂറിൽ 40 കിലോമീറ്റർ, അടുത്ത ഒരു മണിക്കൂറിൽ 60 കിലോമീറ്റർ, അവസാനത്തെ ഒരു മണിക്കൂറിൽ 50 കിലോമീറ്റർ എന്നിങ്ങനെയാകാം.

ഇങ്ങനെയുള്ള സന്ദർഭങ്ങളിൽ ശരാശരി കണക്കാക്കിയത് ഓർമ്മയുണ്ടോ?

ഇവിടെ ആകെ സഖ്യരിച്ചത് 150 കിലോമീറ്റർ ആണ്ടോ.

സഖ്യരിക്കാനെന്തുത്ത സമയമോ?

അപ്പോൾ ഒരു മൺിക്കൂറിൽ ശരാശരി $\frac{150}{3} = 50$ കിലോമീറ്റർ സഖ്യരിച്ചുവെന്നു പറയാം.

മറ്റാരു രീതിയിലും പറയാം. ബന്ധിക്കേണ്ട ശരാശരി വേഗം മൺിക്കൂറിൽ 50 കിലോമീറ്റർ. ഈ 50 കി.മീ./മൺിക്കൂറ് എന്നാണ് എഴുതുന്നത്.

ശ്രാശ്രീ വേഗം

സ്കൂൾ കലോസ്വവത്തിൽ പങ്കടക്കാനാണ് സലിനയും ബിനയും കോഴിക്കോട്ടത്തിയത്. ജീപ്പിലുണ്ട് സലിന യുടെ യാത്ര. 90 കി.മീ. യാത്രചെയ്യാൻ 2 മൺിക്കൂറ് എടുത്തു. കാറിലുണ്ട് ബിന യാത്രചെയ്തത്. 150 കി.മീ. യാത്ര ചെയ്യാൻ 3 മൺിക്കൂറെടുത്തു. എത്ര വഹനമാണ് കൂടുതൽ വേഗത്തിൽ സഖ്യരിച്ചത്?

ജീപ്പിൽ യാത്രചെയ്തത് എത്ര ദൂരമാണ്? 90 കി.മീ.

അതിനെന്തെ സമയമെടുത്തു? 2 മൺിക്കൂറ്.

ജീപ്പിന്റെ ശരാശരിവേഗം എത്രയാണ്?

$$\frac{90}{2} = 45 \text{ കി.മീ./മൺിക്കൂറ്}$$

ഈപോലെ കാറിന്റെ ശരാശരി വേഗം കണക്കാക്കാമോ? കാർ സഖ്യരിച്ചത് 150 കി.മീ. ആണ്ടോ.

അതിനെന്തുത്ത സമയമോ?

കാറിന്റെ ശരാശരി വേഗം =

എത്ര വഹനത്തിനാണ് ശരാശരി വേഗം കൂടുതൽ?

ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കു.

- സുധാരി സഖ്യരിച്ച തീവണ്ടി 3 മൺിക്കൂറക്കാണ് 240 കിലോമീറ്റർ ഓടിയാണ് തിരുവനന്തപുരത്ത് എത്തിയത്. രമേഷ് യാത്രചെയ്ത തീവണ്ടി 120 കിലോമീറ്റർ സഖ്യരിക്കുന്നതിന് 2 മൺിക്കൂറ് എടുത്തു. ശരാശരി വേഗം കൂടുതൽ എത്ര തീവണ്ടിക്കാണ്? എത്ര കൂടുതൽ?
- തീവണ്ടിയിൽ 360 കിലോമീറ്റർ ദൂരം യാത്രചെയ്യാൻ 4 മൺിക്കൂറ് 30 മിനിറ്റ് എടുത്തു. തീവണ്ടിയുടെ ശരാശരി വേഗം എത്രയാണ്?



മര്ത്താരു കണക്കു നോക്കാം.

52 കി.മീ. /മൺിക്കൂർ ശരാശരി വേഗത്തിൽ സബ്വരിക്കുന്ന ബല്ലിൽ 6 മൺിക്കൂർ കൊണ്ട് എത്ര ദൂരം യാത്രചെയ്യാം? ശരാശരി ഒരു മൺിക്കൂറിൽ സബ്വരിക്കുന്ന ദൂരം 52 കി.മീ. ആയതിനാൽ

6 മൺിക്കൂർ കൊണ്ട് യാത്ര ചെയ്യുന്ന ദൂരം

$$= 52 \times 6 = 312 \text{ കി.മീ.}$$

ഈതെ വേഗത്തിൽ 520 കിലോമീറ്റർ യാത്ര ചെയ്യാൻ എത്ര സമയം വേണം?

- ജോയിയുടെ യാത്രയുടെ വിവരങ്ങൾ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. വിട്ടപോയ കളങ്ങൾ പൂർത്തിയാക്കുക.

സബ്വരിച്ച വാഹനം	സബ്വരിച്ച ദൂരം	സമയം	ശരാശരി വേഗം
ടട്ടിൻ	4 മൺിക്കൂർ	60 കി.മീ./മ
കാർ	120 കി.മീ.	2 മൺിക്കൂർ
വിമാനം	5040 കി.മീ.	840 കി.മീ./മ

- ശ്യാമൽക്ക് 2 മൺിക്കാൻ പരീക്ഷ ആരംഭിക്കുന്നത്. 50 കിലോമീറ്റർ ദൂരം ബല്ലിലും 175 കിലോമീറ്റർ തീവണ്ടിയിലും യാത്ര ചെയ്താൻ പരീക്ഷാക്രമത്തിലെ തേരണത്. ബല്ലിൻ്റെ ശരാശരി വേഗം 20.കി.മീ./മൺിക്കൂറും തീവണ്ടിയുടെ ശരാശരി വേഗം 50 കി.മീ./മൺിക്കൂറും ആണ്. 1 മൺിക്കൂർ മുമ്പ് തന്നെ പരീക്ഷാക്രമത്തിൽ എത്തിച്ചേരണമെങ്കിൽ ശ്യാമ എത്ര മൺിക്ക് വിട്ടിരിക്കുന്നു പറഞ്ഞുണ്ടാണ്.

സമയം കുറയ്ക്കാൻ

രാവിലെ 6 മൺിക്ക് എത്തണാകൂളത്തു നിന്ന് പുറപ്പെട്ട് ഒരു പബ്ലിക്കേഷൻ ഉച്ചയ്ക്ക് 12 മൺിക്ക് തിരുവനന്തപുരത്തുന്നു. ബല്ലിൻ്റെ ശരാശരി വേഗം 40 കി.മീ./മൺിക്കൂർ ആണ്. പബ്ലിക്കേഷൻ അതേ സമയത്തുതന്നെ പുറപ്പെട്ട് 1 മൺിക്കൂർ നേരത്തെ എത്തണമെങ്കിൽ ശരാശരി വേഗം എത്ര കുടുംബം?

ആകെ സബ്വരിക്കുന്ന ദൂരം എത്രയാണ്?

1 മൺിക്കൂർ കുറച്ചാൽ യാത്രയ്ക്കു വേണ്ട സമയം എത്രയാണ്?

1 മൺിക്കൂർ നേരത്തെ എത്താൻ ശരാശരി വേഗം എത്ര യായിരിക്കും.



രൈയിൽവേ സ്റ്റോഷനിലോക്ക്

അബു രാവിലെ 7 മൺിക്ക് ബസ്തിൽ കയറി. സാധാരണ യായി ബന്ധ് ശരാശരി 30 കി.മീ/മൺിക്കുർ വേഗത്തിൽ സഖ്യരിച്ച് 11 മൺിക്ക് രൈയിൽവേ സ്റ്റോഷനിൽ എത്താ ഗുണ്ക്. എന്നാൽ മഴ കാരണം ബന്ധ് ശരാശരി 20 കി.മീ./മൺിക്കുർ വേഗത്തിലുണ്ട് സഖ്യരിച്ചത്. അബു 9 മൺിക്ക് ബസ്തിൽ നിന്നിരങ്ങി ഒരു കാറിൽ 11 മൺിക്കു തന്നെ രൈയിൽവേ സ്റ്റോഷനിൽ എത്തി. കാറിന്റെ ശരാശരി വേഗം എത്രയായിരുന്നു?

യാതെ തുടങ്ങിയ സഹാരത്തു നിന്ന് രൈയിൽവേ സ്റ്റോഷനിലോക്ക് ആകെ എത്ര ദൂരമാണുള്ളത്?

ആദ്യത്തെ 2 മൺിക്കുർ കൊണ്ട് യാത്ര ചെയ്ത ദൂരം എത്രയാണ്?

അപ്പോൾ കാറിൽ എത്ര ദൂരം സഖ്യരിച്ചു?

അതിനെത്ര സമയമെടുത്തു?

ഈ കാറിന്റെ ശരാശരി വേഗം കണ്ണുപിടിക്കാമല്ലോ.

വേഗത്തിന്റെ ശരാശരിയും ശരാശരി വേഗവും

ഒരു വാഹനം യാത്രയുടെ ആദ്യത്തെ 120 കിലോമീറ്റർ ദൂരം ശരാശരി 30 കി.മീ./മൺിക്കുർ വേഗത്തിലും അടുത്ത 120 കിലോമീറ്റർ 20 കി.മീ./മൺിക്കുർ വേഗത്തിലുമാണ് സഖ്യരിച്ചത്. മുഴുവൻ യാത്രയിലെ ശരാശരി വേഗം എത്രയാണ്?

വേഗങ്ങളുടെ ശരാശരിയെടുത്താൽ

$$\frac{30+20}{2} = 25 \text{ കി.മീ./മൺിക്കുർ.}$$

ഈ രീതിയിൽ കണ്ണുപിടിച്ചാൽ ശരിയാണോ?

ശരിയായ കണക്കെന്നാണ്?

ശരാശരി വേഗം കണക്കാക്കാൻ ആകെ യാത്രചെയ്ത ദൂരത്തെ അതിനെടുത്ത സമയം കൊണ്ട് ഹരിക്കുകയല്ല വേണ്ടത്?

30.കി.മീ./മൺിക്കുർ ശരാശരി വേഗത്തിൽ 120 കി.മീ. സഖ്യരിക്കാൻ വേണ്ട സമയം $\frac{120}{30} = 4$ മൺിക്കുർ.

20 കി.മീ./മൺിക്കുർ ശരാശരി വേഗത്തിൽ 120 കി.മീ. സഖ്യരിക്കാൻ വേണ്ട സമയം

$$= \frac{120}{20} = 6 \text{ മൺിക്കുർ}$$



സമയത്തിന്റെ വില

സാധാരണയായി സമയം കണക്കാക്കാൻ നാം ഉപയോഗിക്കുന്ന ഏറ്റവും ചെറിയ ഏകകം സെക്കന്റിന്റെ ഭാഗമാണ്. സെക്കന്റിനേക്കാൾ ചെറിയ ഏകകങ്ങളും ഉപയോഗിക്കാം. മെഡ്രേക്കസെക്കന്റിന്റെ നാഞ്ചിനും ഒരു ഭാഗമാണ് പത്രുലക്ഷ്യത്തിൽ ഒരു ഭാഗമാണ് $\frac{1}{1000}$ ഭാഗമാണ് നാനോസെക്കന്റ്.

പി.കി. ഉഷയ്ക്ക് ഒളിംപിക്സിൽ മെഡൽ നഷ്ടപ്പെട്ടത് സെക്കന്റിന്റെ എത്ര അംഗത്തിനാണെന്ന് നിയാമോ?

ആകെ യാത്രയ്ക്കെടുത്ത സമയം $4 + 6 = 10$ മണിക്കൂർ

ആകെ സഖവിച്ച് ദൂരം = 240 കി.മീ.

ശരാശരി വേഗം = 24 കി.മീ./മണിക്കൂർ



വിഹിധ ജീവികളുടെ സഖാരവേഗം നോക്കു.

ക്രമ. നം.	പേര്	കി.മീ./മണിക്കൂർ
1	ചീറ്റുലി	112
2	കുതിര	70
3	കുറുക്കൻ	65
4	സിംഹം	80
5	ആന	40
6	സൈബേ	64



തീവണ്ടിയും ബന്ധും

റഹീം 350 കിലോമീറ്റർ തീവണ്ടിയിലും 150 കിലോമീറ്റർ ദൂരം ബന്ധിലും സഖവിച്ചു. തീവണ്ടിയുടെ ശരാശരി വേഗം 70 കി.മീ./മണിക്കൂർ ആയിരുന്നു. ബന്ധിൽ സഖവിച്ചു 5 മണിക്കൂറാണ്. മുഴുവൻ യാത്രയുടെ ശരാശരി വേഗം എത്രയാണ്?

രത്നഗിരിയിലേക്ക്

പബിശ്മലയിൽനിന്നു 360 കി.മീ. അകലെയാണ് രത്നഗിരി ഗോപികയും കുട്ടാബവവും പബിശ്മലയിൽനിന്നും രത്നഗിരിയിലേക്ക് കാറിൽ പൂരപ്പെട്ടു. 60 കി.മീ./മണിക്കൂർ ആയിരുന്നു ശരാശരി വേഗം. 40 കി.മീ./മണിക്കൂർ ആയിരുന്നു മടക്കയാത്രയിലെ ശരാശരി വേഗം. ആകെ യാത്രയിലെ ശരാശരി വേഗം എത്രയാണ്?

ഈ കണക്കിൽ ദൂരം 360 കി.മീ. എന്നതിനു പകരം 180 കി.മീ. ആയാലോ?

ആകെ യാത്രയിലെ ശരാശരി വേഗം മാറുന്നുണ്ടോ?

ഭൂരം പറയ്യാതെ

ബാബു കൂട്ടുകാരനെ കാണാൻ മാനന്തവാടിയിലേക്ക് പോയി. ബന്ധിലാണ് യാത്ര. ശരാശരി 40 കി.മീ./മണിക്കൂർ വേഗത്തിലാണ് ബന്ധി സഖവിച്ചു. തിരിച്ചു വന്നത് കാറിലായിരുന്നു. ശരാശരി വേഗം 60 കി.മീ./മണിക്കൂർ ആണ്. ആകെ യാത്രയുടെ ശരാശരി വേഗം എത്രയാണ്?

ആകെ യാത്രയുടെ ശരാശരി വേഗം കണ്ടുപിടിക്കാൻ ആകെ സഖവിച്ച് ദൂരത്തെ യാത്രയ്ക്കെടുത്ത സമയം കൊണ്ട് ഹരിക്കണം. ദൂരം എത്രയാണെന്ന് അറിയില്ല.

ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ ദൂരം ഏതെടുത്താലും ശരാശരി വേഗത്തിൽ മാറ്റം വരില്ല എന്ന് മുഖ്യമായു കണക്കിൽ കണ്ടല്ലോ?

ദൂരം 120 കി.മീ. ആണെന്ന് കരുതിയാലോ?

ആകെ സഖവിച്ച് ദൂരം 240 കി.മീ.

ആദ്യയാത്രയുടെ സമയം എത്രയാണ്? $\frac{120}{40} = 3$ മണിക്കൂർ

മടക്കയാത്രയുടെ സമയം $\frac{120}{60} = 2$ മണിക്കൂർ.

എങ്കിൽ ആകെ യാത്രയുടെ ശരാശരി വേഗം

$$= \frac{240}{5} = 48 \text{ കി.മീ./മണിക്കൂർ.}$$

ഈ ദൂരം 240 കി.മീ ആണെങ്കിലോ?

ആകെ യാത്രയുടെ ശരാശരി വേഗം കണ്ടതാമല്ലോ.

സെക്കന്റ് യാത്ര

- അമ്മാവൻ്റെ വിട്ടിലേക്ക് ജോണി 15 കി.മീ./മണിക്കൂർ വേഗത്തിൽ സെക്കന്റ് പോയി. തിരിച്ചു വന്നത് 10 കി.മീ./മണിക്കൂർ വേഗത്തിലെന്ന്. ആകെ യാത്രയുടെ ശരാശരി വേഗം എത്രയാണ്?

സെക്കന്റ് ലഭ്യാലോ?

ഒരു വാഹനം 72 കി.മീ./മണിക്കൂർ ശരാശരി വേഗത്തിലാണ് സഞ്ചരിക്കുന്നത്. 1 സെക്കന്റ് ഇളം വാഹനം ശരാശരി എത്രദൂരം മുന്നോട്ടുപോകും?

ഒരു മണിക്കൂർ എന്നാൽ 60 മിനിറ്റ്. ഒരു കിലോമീറ്റർ നാൽ 1000 മീറ്റർ.

അപ്പോൾ 60 മിനിറ്റുകൊണ്ട് ശരാശരി 72000 മീറ്റർ സഞ്ചരിക്കും.

$$1 \text{ മിനിറ്റുകൊണ്ട് സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം} = \frac{72000}{60} = 1200 \text{ മീറ്റർ}$$

$$1 \text{ സെക്കന്റ് കൊണ്ട് സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം} = \frac{1200}{60} = 20 \text{ മീറ്റർ}$$

വാഹനത്തിന്റെ ശരാശരി വേഗം 20 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്നും പറയാം.

15 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് വേഗത്തിൽ ഓട്ടന ഒരു വാഹന തത്തിന്റെ വേഗം ഒരു മണിക്കൂറിൽ എത്രയായിരിക്കുമെന്ന് കണക്കാക്കിനോക്കു.

ഈ ഇളം കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കു.

- ഒരു തീവണ്ടി 36 കി.മീ./മണിക്കൂർ വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. 3 മിനിറ്റു കൊണ്ട് ഇളം തീവണ്ടി എത്ര സഞ്ചരിക്കും?
- 180 മീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു തീവണ്ടി ഒരു പോസ്റ്റ് കടന്നുപോകാൻ 9 സെക്കന്റ് എടുക്കുന്നു. എങ്കിൽ തീവണ്ടിയുടെ വേഗം മണിക്കൂറിൽ എത്രയാണ്?

അമിതവേഗം

90 കി.മീ./മണിക്കൂർ വേഗത്തിൽ ഓട്ടന ഒരു വാഹനം ഒരു മിനിറ്റിൽ എത്ര ദൂരം ഓടും?

$$\frac{90}{60} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} \text{ കി.മീ.}$$

ഒരു സെക്കന്റിലോ?

$$1\frac{1}{2} \text{ കി.മീ. എന്നാൽ } 1500 \text{ മീറ്റരാണോ?}$$

$$\frac{1500}{60} = \frac{75}{3} = 25 \text{ മീ.}$$

അപ്പോൾ വണ്ടിയോടിക്കുന്നയാൾ ഒപ്പെക്ക് ചവിട്ടാൻ ഒരു സെക്കന്റ് വെക്കിയാലോ?

വാഹനം 25 മീറ്റർ സഞ്ചരിച്ചിട്ടുണ്ടാവും.





ചെയ്തുനോക്കാം

- ഒരു കാർ 15 മിനിറ്റ് സമയം 36 കി.മീ./മണിക്കൂർ ശരാശരി വേഗത്തിലും പിന്നീടുള്ള 15 മിനിറ്റ് 60 കി.മീ./മണിക്കൂർ ശരാശരി വേഗത്തിലുമാണ് സഖ്യവികസുന്നത്. കാർ എത്ര ദൂരം സഖ്യവിച്ചു എന്നു കണക്കാക്കുക.
- രാമുവും സലീമും അയൽക്കാരാണ്. രണ്ടു പേരും തിരുവനന്തപുരത്തെക്ക് സ്വന്തം വാഹനങ്ങളിലാണ് യാത്രചെയ്തത്. രാമുവിന്റെ കാർ തിരുവനന്തപുരത്തെക്ക് ഹോക്കുബോൾ 30 കി.മീ./മണിക്കൂർ ശരാശരി വേഗത്തിലും തിരിച്ച് 50 കി.മീ./മണിക്കൂർ ശരാശരി വേഗത്തിലുമാണ് സഖ്യവിച്ചത്. സലീം രണ്ടുഭാഗത്തെക്കും ശരാശരി 40 കി.മീ./മണിക്കൂർ വേഗത്തിലാണ് യാത്രചെയ്തതെങ്കിൽ കുറവെന്ന സമയംകൊണ്ട് യാത്രചെയ്തത് ആരാണ്?
- ഒരേ ദിശയിൽ സമാനതരടാക്കുകളിൽ സഖ്യവിക്കുന്ന രണ്ടു തീവണ്ടികളുടെ വേഗം തയ്യാറകമം 50 കി.മീ./മണിക്കൂർ, 100 കി.മീ./മണിക്കൂർ എന്നിങ്ങനെയാണ്. ആദ്യ തീവണ്ടി പുറപ്പെട്ട് രണ്ടു മണിക്കൂറിന് ശേഷമാണ് രണ്ടാമത്തെ തീവണ്ടി പുറപ്പെട്ടത്. എത്ര ദൂരം കഴിയുമോബാണ് രണ്ടു തീവണ്ടികളും ഒപ്പെമ്പത്തുന്നത്?
- 125 മീറ്റർ നീളമുള്ള തീവണ്ടി 90 കി.മീ./മണിക്കൂർ വേഗത്തിൽ സഖ്യവിക്കുന്നു. ഈ തീവണ്ടി 175 മീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു ഫലം കടന്നുപോകാൻ എത്ര സമയം എടുക്കും?

തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ



പഠനേടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചുറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടുത്തുന്നുണ്ട്
• ജീവിതസന്ദർഭങ്ങളിൽ ശരാശരി വേഗം എന്ന ആശയം പ്രയോജനപ്പെടുത്തി പ്രശ്നപരിഹരണം നടത്തുന്നു.			
• ദൂരം, സമയം, വേഗം എന്നിവയുടെ പരസ്പരബന്ധം സമർപ്പിക്കുന്നു.			
• യൂണിറ്റുകൾ സന്ദർഭോച്ചിതമായി മാറ്റി പ്രശ്നപരിഹരണം നടത്തുന്നു.			