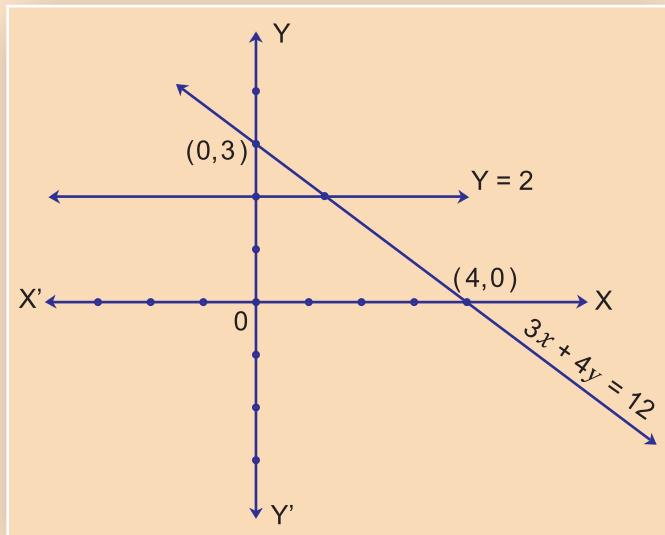




ગણિત ભાગ - I

ધોરણ - ૬ સમું



$$\begin{aligned} & 1 + 2 + 3 + \dots \\ &= (1 + 80) + (2 + 79) + \dots + (39 + 42) + (40 + 41) \end{aligned}$$

ભારતનું સંવિધાન

ભાગ ૪ ૬

નાગરિકોના મૂળભૂત કર્તવ્યો

અનુચ્છેદ ૫૧ ક

મૂળભૂત કર્તવ્ય - ભારતના પ્રત્યેક નાગરિકનું એ કર્તવ્ય છે કે તેણે -

- (ક) સંવિધાનનું પાલન કરવું. સંવિધાનના આદર્શો, રાજ્યાધ્યક્ષ અને રાજ્યગીતનો આદર કરવો.
- (ખ) સ્વાતંત્ર્ય ચળવળની પ્રેરણા આપનારા આદર્શોનું પાલન કરવું.
- (ગ) દેશના સાર્વભૌમત્વ, એકતા અને અખંડતા સુરક્ષિત રાખવા પ્રયત્નશીલ રહેવું.
- (ધ) આપણા દેશનું રક્ષણ કરવું, દેશની સેવા કરવી.
- (કુ) દરેક પ્રકારના ભેદભાવને ભૂલીને એકતા અને બંધુત્વની ભાવના વિકસાવવી. ખીઓના સન્માનને ઠેસ પહોંચાડનારી પ્રથાઓનો ત્યાગ કરવો.
- (ચ) આપણી સંભિશ સંસ્કૃતિના વારસાનું જતન કરવું.
- (છ) નૈસર્જિક પર્યાવરણનું જતન કરવું. સણ્ણવ પ્રાણીઓ પ્રત્યે દ્વાબાવ રાખવો.
- (જ) વैજ્ઞાનિક દળિ, માનવતાવાદ અને જિજાસાવૃત્તિ કેળવવી.
- (ઝ) સાર્વજનિક ભાલમત્તાનું જતન કરવું. હિંસાનો ત્યાગ કરવો.
- (ઝ) દેશની ઉત્તરોત્તર પ્રગતિ માટે વ્યક્તિગત તેમજ સામૂહિક કાર્યમાં ઉત્તમતા-શ્રેષ્ઠતાનું સ્તર જળવી રાખવાનો પ્રયત્ન કરવો.
- (૨) દથી ૧૪ વય જૂથના બાળકોને તેમના વાલીએ શિક્ષણની તક પૂરી પાડવી.

શાસન નિર્ણય ક્રમાંક : અભ્યાસ - 2116/(પ્રક. 43/16) એસડી-4 દિનાંક 25-4-2016 અન્યથે સ્થાપિત થયેલ સમન્વય સભિતિની દિનાંક 3-3-2017 રોજની બેઠકમાં આ પાઠ્યપુસ્તક નિર્ધારિત કરવાની માન્યતા આપવામાં આવી છે.

ગાર્ડિયા ભાગ-I

ધોરણ - દસમું



મહારાષ્ટ્ર રાજ્ય પાઠ્યપુસ્તક નિર્ભિતિ અને અભ્યાસકાળ સંશોધન મંડળ, પુણે - 411 004.



તમારાં સ્માર્ટફોનમાં DIKSHA APP દ્વારા પાઠ્યપુસ્તકનાં પહેલા પાનાં પરના Q.R. Codeથી ડિજિટલ પાઠ્યપુસ્તક અને દરેક પાઠમાં આપેલા Q.R. Codeથી તે સંબંધિત પાઠનાં અધ્યયન-અધ્યાપન માટે ઉપયોગી દશ્ય-શ્રાવ્ય સાહિત્ય ઉપલબ્ધ થશે.

પ્રથમાવૃત્તિ : 2018 © મહારાષ્ટ્ર રાજ્ય પાઠ્યપુસ્તક નિર્ભિતિ અને અભ્યાસક્રમ સંશોધન મંડળ,
પુણે - 411 004.

મહારાષ્ટ્ર રાજ્ય પાઠ્યપુસ્તક નિર્ભિતિ અને અભ્યાસક્રમ સંશોધન મંડળ પાસે આ પુસ્તકના
બધાં હક્ક રહેશે. આ પુસ્તકનો કોઈપણ ભાગ સંચાલક, મહારાષ્ટ્ર રાજ્ય પાઠ્યપુસ્તક
નિર્ભિતિ અને અભ્યાસક્રમ સંશોધન મંડળની લેખિત પરવાનગીવાગર છાપી શકારો નહિ.

ગણિત વિષયતથા સમિતિ

ડૉ. મંગલા નારણીકર	(અધ્યક્ષ)
ડૉ. જ્યશ્રી અત્રે	(સદસ્ય)
શ્રી. વિનાયક ગોડભોલે	(સદસ્ય)
શ્રીમતી પ્રાબ્લક્ષ્મી ગોખલે	(સદસ્ય)
શ્રી. રમાકાંત સરોવે	(સદસ્ય)
શ્રી. સંદીપ પંચભાઈ	(સદસ્ય)
શ્રીમતી પૂજલ જઘવ	(સદસ્ય)
શ્રીમતી ઉજજ્વલા ગોડભોલે (સદસ્ય, સચિવ)	

પ્રમુખ સંયોજક : ઉજજ્વલા શ્રીકાંત ગોડભોલે
પ્ર. વિશેષાધિકારી ગણિત,
પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, પુણે.

ભાષાંતર : શ્રીમતી તરુણેન પોપટ
સમીક્ષક : ધીરેન મનસુખલાલ દોશી
ધર્મિકા ધીરેન દોશી
ભાષાંતર સંયોજક : કેતકી નિતેશ જાની
વિશેષાધિકારી,
ગુજરાતી વિભાગ
પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, પુણે.

ગણિત વિષય - રાજ્ય અભ્યાસમંડળના સદસ્ય

શ્રીમતી જ્યશ્રી પુરંદરે	શ્રીમતી તરુણેન પોપટ
શ્રી. રાજેન્દ્ર ચૌધરી	શ્રી. પ્રમોદ ઠોંબરે
શ્રી. રામા બ્હન્યાળકર	ડૉ. ભારતી સહસ્રબુદ્ધે
શ્રી. આણણાપા પરીટ	શ્રી. વસંત શોવાળે
શ્રી. અન્સાર શેખ	શ્રી. પ્રતાપ કાશિદ
શ્રી. શ્રીપાદ દેશપાંડે	શ્રી. મિલિંદ ભાકરે
શ્રી. સુરેશ દાતે	શ્રી. શાનેશ્વર માશાળકર
શ્રી. ઉમેશ રેણે	શ્રી. ગાણેશ કોલતે
શ્રી. બન્સી હાવળે	શ્રી. સદેશ સોનાવણે
શ્રીમતી રોહિણી શિર્કે	શ્રી. સુધીર પાટીલ
શ્રી. પ્રકાશ ઝેડે	શ્રી. પ્રકાશ કાપસે
શ્રી. લક્ષ્મણ દાવણકર	શ્રી. રવીન્દ્ર ખંડરે
શ્રી. શ્રીકાંત રત્નપારખી	શ્રીમતી સ્વાતિ ધર્માધિકારી
શ્રી. સુનિલ શ્રીવાસ્તવ	શ્રી. અરવિંદુમાર તિવારી
શ્રી. અન્સારી અભુલ હમીદ	શ્રી. મહેશામ બેથી
શ્રીમતી સુવણી દેશપાંડે	શ્રીમતી આર્યા બિઠે

મુખ્યપૃષ્ઠ અને : શ્રી સંદીપ કોળી, ચિત્રકાર,
સંગણકીય આલોખન : મુખ્ય.

અક્ષર ગ્રૂપણી : સમર્થ ગ્રાફિક્સ,
522, નારાયણ પેઠ, પુણે-30.

નિર્ભિતિ : સચિવ મેહતા
મુખ્ય નિર્ભિતિ અધિકારી
સંબંધ કાંબળે
નિર્ભિતિ અધિકારી
પ્રશાંત હરણે
સહાયક નિર્ભિતિ અધિકારી

કાગળ : 70 લ.એસ.એમ. ફીમબહોલ્ડ

મુદ્રણાદેશ :

મુદ્રક :

પ્રકાશક : શ્રી. વિવેક ઉત્તમ ગોસાવી, નિયંજ
પાઠ્યપુસ્તક નિર્ભિતિ મંડળ,
પ્રભાદેવી, મુખ્ય - 25.

ભારતનું સંવિધાન

આમુખ

અમે ભારતના લોકો ભારતને એક સાર્વભૌમ સમાજવાદી
બિનસાંપ્રદાયિક લોકતંત્રાત્મક પ્રજાસત્તાક તરીકે સંસ્થાપિત
કરવાનો

તથા તેના સર્વ નાગરિકોને :

સામાજિક, આર્થિક અને રાજકીયન્યાય
વિચાર, અભિવ્યક્તિ, માન્યતા,
ધર્મ અને ઉપાસનાનીસ્વતંત્રતા
દરજા અને તકનીસમાનતા
પ્રાપ્ત થાય તેમ કરવાનો
અને તેઓ સર્વમાં
વ્યક્તિનું ગૌરવ અને રાષ્ટ્રની
એકતા અને અખંડતા સુદૃઢ કરે એવીબંધુતા
વિકસાવવાનો
ગંભીરતાપૂર્વક સંકલ્પ કરીને

અમારી સંવિધાનસભામાં ૨૬ નવેમ્બર, ૧૯૪૮ના રોજ
આથી આ સંવિધાન અપનાવી, તેને અધિનિયમિત કરી
અમને પોતાને અર્પિત કરીએ છીએ.

રાષ્ટ્રગીત

જનગણમન – અધિનાયક જય હે

ભારત – ભાગ્યવિધાતા.

પંજાਬ, સિંધુ, ગુજરાત, મરાಠા,

દ્રાવિડ, ઉત્કલ, બંગા,

વિંધ્ય, હિમાચલ, યમુના, ગંગા,

ઉચ્છ્વલ જલધિતરંગ,

તવ શુભ નામે જાગે, તવ શુભ આશિષ માગે,

ગાહે તવ જયગાથા.

જનગણ મંગલદ્વારાયક જય હે,

ભારત – ભાગ્યવિધાતા.

જય હે, જય હે, જય હે,

જય જય જય, જય હે.

પ્રતિજ્ઞા

ભારત મારો દેશ છે. બધા ભારતીયો મારાં
ભાઈબહેન છે.

હું મારા દેશને ચાહું છું અને તેના સમૃદ્ધ
અને વૈવિધ્યપૂર્ણ વારસાનો મને ગર્વ છે. હું
સદાય તેને લાયક બનવા પ્રયત્ન કરીશ.

હું મારાં માતાપિતા, શિક્ષકો અને વડીલો
પ્રત્યે આદર રાખીશ અને દરેક જણ સાથે
સહ્યતાથી વર્તીશ.

હું મારા દેશ અને દેશબાંધવો પ્રત્યે
વફાદારી રાખવાની પ્રતિજ્ઞા લઉં છું. તેમનાં
કલ્યાણ અને સમૃદ્ધિમાં જ મારું સુખ સમાયેલું
છે.

પ્રસ્તાવના

વિદ્યાર્થીભિત્રો,

ધોરણ 10 માં તમારું સ્વાગત !

આ વર્ષે ગણિત ભાગ I અને ગણિત ભાગ II આ બે પાઠ્યપુસ્તકોનો તમારે અભ્યાસ કરવાનો છે.

ગણિત ભાગ I માં બીજગણિત, આલેખ, અર્થ નિયોજન અને આંકડાશાસ્ત્ર આ મુખ્ય ક્ષેત્રો છે. આ વર્ષે તમારે ધોરણ 8 સુધીમાં પરિચય કરેલાં ઘટકોનો જ થોડો વધુ અભ્યાસ કરવાનો છે. અર્થનિયોજનમાં નવી કરપ્રણાલિનો GST પરિચય આપ્યો છે. જ્યાં નવો ભાગ, સૂત્રો અથવા ઉપયોજન છે ત્યાં સ્પષ્ટીકરણ આપ્યું છે. દરેક પ્રકરણમાં નમૂના ઉદાહરણો તેમજ મહાવરા માટેના ઉદાહરણો આપ્યાં છે. તે ઉપરાંત પ્રકાશન વિદ્યાર્થીઓ માટે કેટલાંક આભિનાત્મક પ્રક્રિયાઓ તારાકિત કરેલાં છે. કેટલાંક વિદ્યાર્થી-ઓને ધોરણ-10 પછી ગણિતનો અભ્યાસ કરવો ન હોય તો પણ ગણિતની મૂળભૂત સંકલ્પનાઓ તેમને સમજાય, અન્ય ક્ષેત્રોમાં કામ કરતી વખતે જરૂર પૂરતું ગણિત આવડે, એવું જ્ઞાન આ પુસ્તકમાંથી મળશે. ‘વધુ માહિતી માટે’ આ શીર્ષક હેઠળ આપેલી માહિતી જે વિદ્યાર્થીઓને દસ્તી પછી ગણિતના અભ્યાસમાં પ્રાવિષ્ટ મેળવવાની ઈર્છા છે તેમને ઉપયોગી થશે. તેવા વિદ્યાર્થીઓએ આ ભાગનો જરૂર અભ્યાસ કરવો. આખું પુસ્તક એક વાર વાંચીને સમજુ લેવું. ‘ઓપ’ની માધ્યમથી Q.R. Code દ્વારા પ્રત્યેક પાઠ સંબંધિત વધુ માહિતી માટે આપને દશ્ય-શ્રાવ્ય સાહિત્ય ઉપલબ્ધ થશે. તે અભ્યાસ માટે ચોક્કસ ઉપયોગી થશે.

ધોરણ દસમાની પરીક્ષા મહત્વની મનાય છે. આ બાબતનો તણાવ ન લેતાં, સરસ અભ્યાસ કરીને ઈચ્છિત યશની પ્રાપ્તિ માટે તમને શુભેચ્છા !

(ડૉ. સુનિલ મગર)

પુણે

તા. : ૧૮ માર્ચ ૨૦૧૮, ગુડી પદવો

ભારતીય સૌર દિનાંક : ૨૭ ફાગણ ૧૯૩૮

સંચાલક

મહારાષ્ટ્ર રાજ્ય પાઠ્યપુસ્તક નિર્મિતિ

અને અભ્યાસક્રમ સંશોધન મંડળ, પુણે.

ધોરણ 10 ગણિત ભાગ I ના અભ્યાસક્રમ દ્વારા વિદ્યાર્થીઓમાં નીચેની ક્ષમતાઓ વિકસિત થશે.

ક્ષેત્ર	ઘટક	ક્ષમતા વિધાનો
1. સંખ્યાજ્ઞાન	1.1 અંકગણિત શ્રેઢી	<ul style="list-style-type: none"> અંકગણિત શ્રેઢી વિષયક ઉદાહરણો ઉકલતાં આવડે. ભવિષ્યમાં પ્રાપ્ત કરવાના લક્ષ્ય માટે તબક્કાવાર નિયોજન કરતાં આવડે.
2. બીજગણિત	2.1 વર્ગસમીકરણો 2.2 ડ્રિચલ રેખિક સમીકરણો	<ul style="list-style-type: none"> વર્ગ સમીકરણના ડ્રિપમાં વ્યક્ત થઈ શકે તેવા ઉદાહરણોનો ઉકલ શોધતાં આવડે. શાબ્દિક ઉદાહરણના ઉકલ માટે કેટલાં ચલનો ઉપયોગ કરવો તેનો નિર્ણય લેતાં આવડે. શાબ્દિક ઉદાહરણનું ડ્રિપાંતર બે ચલવાળા સમીકરણમાં કરી તેનો ઉકલ શોધતાં આવડે.
3. વ્યવહારિક ગણિત	3.1 અર્થનિયોજન	<ul style="list-style-type: none"> બચત, રોકાણ અંગેની સમજ નિર્માણ થાય. ઉદ્યોગ, વ્યવસાય માટે જરૂરી આર્થિક વ્યવહારોનો પરિચય થાય.
4. આંકડાશાસ્ત્ર અને સંભાવના	4.1 સંભાવના 4.2 આલેખ અને કેન્દ્રિય પ્રવૃત્તિના પરિમાણો	<ul style="list-style-type: none"> રમત ગમત, મતદાન વગેરે ક્ષેત્રમાં સંભાવનાનો ઉપયોગ કરતાં આવડે. વિશેષ પ્રકારની માહિતી મેળવ્યા પછી તેનું આલેખ ડ્રેપ/ ચિત્રડ્રેપ નિરૂપણ કરવા માટે યોગ્ય આલેખના પ્રકારની પસંદગી કરતાં આવડે. વર્ગીકૃત સામગ્રી પરથી મધ્ય, મધ્યક, બહુલક શોધતાં આવડે.

શિક્ષકો માટે સૂચના

સૌ પ્રથમ પુસ્તકનું ઊંડાળાપૂર્વક વાચન કરી સમજી લેવું. વિવિધ ઘટકોના સ્પષ્ટીકરણ તેમજ સૂત્રોની ચકાસણી જેવી મહત્વની બાબતો માટે ફૂટિઓની મદદ લેવી.

પ્રાત્યક્ષિક (પ્રયોગ) દ્વારા પણ મૂલ્યમાપન કરવાનું હોવાથી ફૂટિઓ ઉપયોગી થશે. વિદ્યાર્થીઓને સ્વતંત્ર વિચાર કરવા માટે પ્રોત્સાહન આપવું. એક જ ઉદાહરણ જુદી જુદી રીતે, પરંતુ તર્કસંગત રીતે ઉકિલે ત્યારે શાબ્દાશી આપવી.

પ્રયોગની યાદી (નમૂના યાદી)

- આલેખપત્ર પર X-અક્ષ અથવા Y-અક્ષને સમાંતર રેખા દોરી તેના પરના કોઈપણ ચાર બિંદુના નિર્દેશકો લખો. નિર્દેશકો પરથી રેખાનું સમીકરણ કેવી રીતે તૈયાર થાય છે, તે લખો.
[સમાંતર રેખાને બદલે આરંભબિંદુમાંથી જતી અથવા X અને Y અક્ષોને છેદતી રેખાઓ પણ લઈ શકાય.]
- કોઈપણ દ્વિઅંકી સંખ્યા મનમાં નક્કી કરો. તે સંખ્યા મનમાં રાખી, તે ઓળખવા માટેનો કોયડો તૈયાર કરો. સંખ્યાના અંકો વચ્ચેના બે બૈજુક સંબંધ તૈયાર કરી કોયડો ઉકલો.
[આ જ પ્રયોગ ત્રણ અંકી સંખ્યા માટે પણ કરી શકાય.]
- કોઈપણ ખાદ્યપદાર્થના પેકેટ ઉપર લખેલાં ઘટકોની માહિતી વાંચો. તે માહિતી દર્શાવતી વૃત્તાકૃતિ દોરો. દા.ત. બિસ્કીટના પડીકા પર કાર્બોફિટ, પ્રોટીન, વિટામિન વગેરેનું કોષ્ટક જુઓ. તે કેટલાં વજન માટે આપું છે. તે નોંધો. તે પરથી વજનનું વિતરણ દર્શાવતી વૃત્તાકૃતિ દોરો. તે માટે કાર્બોફિટ, ચરબી, પ્રોટીન અને અન્ય એમ ચાર ભાગ કરી શકાશે.
- શિક્ષકે આપેલા આવૃત્તિ વિતરણ કોઠા પરથી સંગણકમાં Excel sheet તૈયાર કરો. તે પરથી સ્તંભાલેખ અને આવૃત્તિ બહુકોણ �Excel માં તૈયાર કરો.
- એક પાસો દસ વખત ફેંકીને મળતી નોંધી તેનું કોષ્ટક તૈયાર કરો.
- શિક્ષકે આપેલું જીએસટી વ્યવહારનું બિલ (ટેક્સ-ઈન્વોઇસ) જુઓ. તેમાંની બધી બાબતો નોંધો. તેમાં આપેલી કર આકારણીની ફરી ગણતરી કરો અને ગણતરી બરોબર છે તેની ખાતરી કરો.
- શિક્ષકે કહ્યાં પ્રમાણે પ્રથમ n કંબિક પ્રાકૃતિક સંખ્યાનો સરવાળો કરવા માટે આપેલી ફૂતિ કરો.
દા.ત. 1 થી 4 સુધીની પ્રાકૃતિક સંખ્યાનો સરવાળો કરવા માટે 4×5 માપનો એક ચોકઠાવાળો કાગળ (ગ્રીડપેપર) લો.

આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે તેને કાપી લો. (અહીં $n = 4$ છે) તેથી $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ સૂત્ર ચકાસી જુઓ.

		5	
1			
2	3		
4	5	6	
7	8	9	10

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \therefore S_4 = \frac{4(4+1)}{2} = \frac{4 \times 5}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

[નોંધ : અહીં $a = 1$ અને $d = 1$ છે. વધારે સંખ્યાઓ લઈને તેમજ a અને d ની કિંમત બદલીને, સમ કે વિષમ સંખ્યાઓ અને ઘન સંખ્યાઓના સરવાળા માટે પણ આ ફૂતિ કરી શકાય.]

- એક કાર્ડપર આગળની બાજુએ $\alpha = 6$ અને પાછળની બાજુએ $\alpha = -6$ લખો. બીજા કાર્ડ પર દરેક પૃષ્ઠભાગ પર $\beta = -3$ અને $\beta = 7$ લખો. તે પરથી $(\alpha + \beta)$ અને $(\alpha\beta)$ ની જુદી જુદી કિંમતો તૈયાર થશે. તે કિંમતો વાપરીને વર્ગસમીકરણો તૈયાર કરો.

અનુક્રમણિકા

પ્રકરણ

પૃષ્ઠ નં.

1. દ્વિચલ રેખિક સમીકરણો 1 થી 29
2. વર્ગ સમીકરણો 30 થી 54
3. અંકગણિત શ્રેઢી 55 થી 80
4. અર્થ નિયોજન 81 થી 112
5. સંભાવના 113 થી 128
6. આંકડાશાસ્ત્ર 129 થી 168
- ઉત્તરસૂચિ 169 થી 176

1

દ્વિચલ રેખિક સમીકરણો



ચાલો શીખીએ.

- દ્વિચલ રેખિક સમીકરણો ઉકિલવાની પદ્ધતિ - આલેખ પદ્ધતિ, કેમરની પદ્ધતિ.
- દ્વિચલ રેખિક સમીકરણોમાં ઝપાંતરિત થાય તેવા સમીકરણો.
- યુગપત્ર સમીકરણોનું ઉપયોગન.



ચાટ કરીએ.

દ્વિચલ રેખિક સમીકરણ (Linear equation in two variables)

જે સમીકરણમાં બે ચલ વાપર્યા હોય અને ચલયુક્ત પદનો ધાત 1 હોય તેને દ્વિચલ રેખિક સમીકરણ કહે છે, તે આપણે પાછલાં ઘોરણમાં શીખ્યા છીએ.

$ax + by + c = 0$ આ દ્વિચલ રેખિક સમીકરણનું સામાન્ય ઝપ છે. જેમાં a, b, c વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે અને a અને b એક સાથે શૂન્ય ન હોય તે પણ આપણે જણીએ છીએ.

દા.ત. $3x = 4y - 12$ આ સમીકરણનું $3x - 4y + 12 = 0$ એ સામાન્ય ઝપ છે.

કૃતિ : નીચેનો કોઈ પૂર્ણ કરો.

અનુક્રમાંક	સમીકરણ	દ્વિચલ રેખિક સમીકરણ છે કે નથી?
1	$4m + 3n = 12$	છે.
2	$3x^2 - 7y = 13$	
3	$\sqrt{2}x - \sqrt{5}y = 16$	
4	$0x + 6y - 3 = 0$	
5	$0.3x + 0y - 36 = 0$	
6	$\frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 4$	
7	$4xy - 5y - 8 = 0$	

ઉદા. (2) ઉક્લો : $3x + 2y = 29$; $5x - y = 18$

ઉક્લ : $3x + 2y = 29$. . . (I) અને $5x - y = 18$. . . (II)

આપેલાં સમીકરણો y ચલનો લોપ કરીને ઉક્લીએ. તે માટે નીચેના ચોકઠામાં યોગ્ય સંખ્યા લખો.

સમીકરણ (II) ને 2 વડે ગુણતાં

$$\therefore 5x \times \boxed{} - y \times \boxed{} = 18 \times \boxed{}$$

$$\therefore 10x - 2y = \boxed{} . . . (\text{III})$$

સમીકરણ (I)માં સમીકરણ (III) ઉમેરીએ.

$$\begin{array}{r} 3x + 2y = 29 \\ + \boxed{} - \boxed{} = \boxed{} \\ \hline \boxed{} = \boxed{} \end{array} \quad \therefore x = \boxed{}$$

$x = 5$ આ કિંમત સમીકરણ (I)માં મૂકીએ.

$$3x + 2y = 29$$

$$\therefore 3 \times \boxed{} + 2y = 29$$

$$\therefore \boxed{} + 2y = 29$$

$$\therefore 2y = 29 - \boxed{}$$

$$\therefore 2y = \boxed{} \quad \therefore y = \boxed{}$$

$(x, y) = (\boxed{}, \boxed{})$ આ ઉક્લ છે.

ઉદા. (3) $15x + 17y = 21$; $17x + 15y = 11$

ઉક્લ : $15x + 17y = 21$. . . (I)

$17x + 15y = 11$. . . (II)

આ બે સમીકરણોમાં x અને y ના સહગુણકોની અદલાભદલી થયેલી દેખાય છે. આ પ્રકારનાં યુગપત્ર સમીકરણો ઉક્લવા માટે બે સમીકરણોનો સરવાળો અને બાદબાકી કરવાથી બે નવા સાદા સમીકરણો મળે છે. તેના પરથી સહેતાઈથી આપેલાં સમીકરણોનો ઉક્લ મળે છે.

સમીકરણ (I) અને સમીકરણ (II)નો સરવાળો કરતાં,

$$\begin{array}{r} 15x + 17y = 21 \\ + 17x + 15y = 11 \\ \hline 32x + 32y = 32 \end{array}$$

સમીકરણની બન્ને બાજુને 32 વડે ભાગતાં,

$$x + y = 1 \dots \text{ (III)}$$

સમીકરણ (I)માંથી સમીકરણ (II) બાદ કરતાં.

$$\begin{array}{r} -15x + 17y = 21 \\ -17x + 15y = -11 \\ \hline -2x + 2y = 10 \end{array}$$

સમીકરણની બન્ને બાજુને 2 વડે ભાગતાં,

$$-x + y = 5 \dots \text{ (IV)}$$

સમીકરણ (III) અને સમીકરણ (IV)નો સરવાળો કરતાં.

$$\begin{array}{r} x + y = 1 \\ + -x + y = 5 \\ \hline 2y = 6 \quad \therefore y = 3 \end{array}$$

$y = 3$ આ કિંમત સમીકરણ (III)માં મૂકતાં,

$$\begin{array}{r} x + y = 1 \\ \therefore x + 3 = 1 \\ \therefore x = 1 - 3 \quad \therefore x = -2 \end{array}$$

$(x, y) = (-2, 3)$ આ યુગપત્ત સમીકરણોનો ઉકિલ છે.

મહાવરાસંશોધ 1.1

1. નીચેની ફૂતિ પૂર્ણ કરી યુગપત્ત સમીકરણો ઉકિલો.

$$5x + 3y = 9 \dots \text{ (I)}$$

$$2x - 3y = 12 \dots \text{ (II)}$$

સમી.(I) અને સમી.(II)નો સરવાળો કરતાં,

$$\begin{array}{r} 5x + 3y = 9 \\ + 2x - 3y = 12 \\ \hline \boxed{} x = \boxed{} \\ \therefore x = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \end{array}$$

$x = 3$ સમી.(I)માં મૂકતાં,

$$5 \times \boxed{} + 3y = 9$$

$$\therefore 3y = 9 - \boxed{}$$

$$\therefore 3y = \boxed{}$$

$$\therefore y = \frac{\boxed{}}{3}$$

$$\therefore y = \boxed{}$$

$(x, y) = (\boxed{}, \boxed{})$ આ સમીકરણનો ઉકિલ છે.

2. નીચેના યુગપત્ર સમીકરણો ઉક્લો.

- (1) $3a + 5b = 26; a + 5b = 22$
- (2) $x + 7y = 10; 3x - 2y = 7$
- (3) $2x - 3y = 9; 2x + y = 13$
- (4) $5m - 3n = 19; m - 6n = -7$
- (5) $5x + 2y = -3; x + 5y = 4$
- (6) $\frac{1}{3}x + y = \frac{10}{3}; 2x + \frac{1}{4}y = \frac{11}{4}$
- (7) $99x + 101y = 499; 101x + 99y = 501$
- (8) $49x - 57y = 172; 57x - 49y = 252$



દ્વિચલ રેખિક સમીકરણનો આલેખ (Graph of a linear equation in two variables)

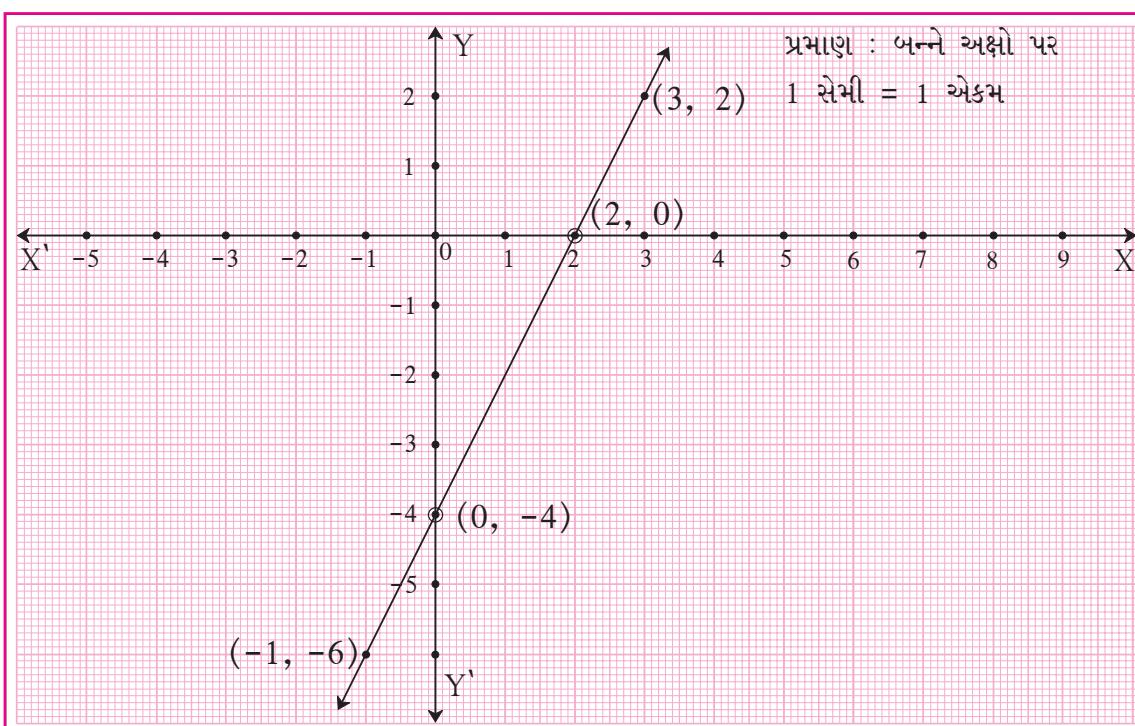
પાછલાં ધોરણમાં, દ્વિચલ રેખિક સમીકરણનો આલેખ એક સીધી રેખા હોય છે તે તમે શીખ્યા છો. સંખ્યાની જે કભિક જોડ આપેલાં સમીકરણનું સમાધાન કરે તે જોડ તે સમીકરણનો ઉક્લ દર્શાવે છે. તેમજ એ કભિક જોડ તે સમીકરણના આલેખ પરનું એક બિંદુ દર્શાવે છે.

ઉદા. $2x - y = 4$ નો આલેખ દોરો.

ઉક્લ : $2x - y = 4$ નો આલેખ દોરવા માટે (x, y) ની 4 કભિક જોડીઓ શોધીએ. આ કભિક જોડ

x	0	2	3	-1
y	-4	0	2	-6
(x, y)	(0, -4)	(2, 0)	(3, 2)	(-1, -6)

મેળવવા માટે કોઈમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે x અને y ની કિમત ‘શૂન્ય’ લેવી જેથી સહેલાઈથી ઉક્લ મળે.



દ્વિચલ રેખિક સમીકરણનો આલેખ દોરવા માટે
નીચેના પગથિયાં ધ્યાનમાં લો.

આપેલા સમીકરણ માટે ઓછામાં ઓછી 4
કંબિક જેડ (બિંદુના નિર્દેશકો શોધો.)

આલેખ પત્ર પર X-અક્ષ અને Y-અક્ષ
નિશ્ચિત કરી બિંદુઓ સ્થાપો.

બધા બિંદુઓ (એક જ રેખામાં) સમરેખ
આવશે. તેમાંથી પસાર થતી રેખા દોરો.

રેખા નિશ્ચિત કરવા માટે બે બિંદુઓ પૂરતાં
છે. પરંતુ તેમાંથી એક બિંદુના નિર્દેશકમાં
ભૂલ થાય તો, રેખા ઝોટી આવે.

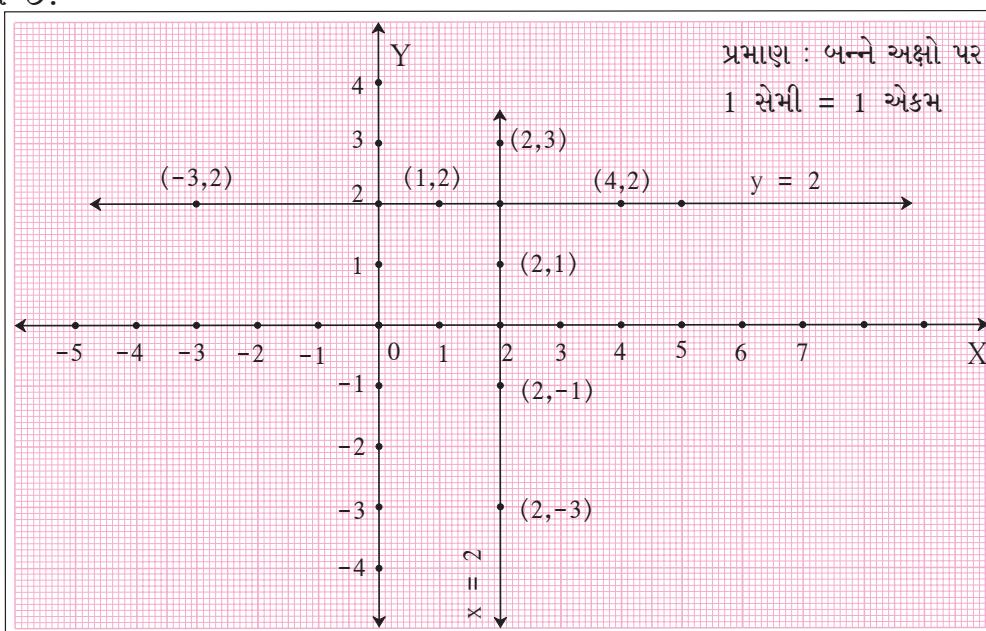
ત્રણ બિંદુઓના નિર્દેશકો કાઢીએ અને
તેમાંથી એક ખોટો હોય તો ત્રણ બિંદુઓ
સમરેખ આવે નહીં તે પરથી ક્યા એક
બિંદુના નિર્દેશકો ખોટાં છે તે શોધતાં વાર
લાગે.

ચાર બિંદુઓના નિર્દેશકો કાઢીએ અને
તેમાંનો એક ખોટો હોય અને બાકીના ત્રણ
સમરેખ હોય તો ભૂલ તરત ધ્યાનમાં આવે
છે. આમ ચાર બિંદુઓ લેવા હિતાવહ છે.

$0x + y = 2$ આ સમીકરણ સગવડતા ખાતર $y = 2$ એમ લખાય છે. આ સમીકરણનો આ-
લેખ X-અક્ષને સમાંતર હોય છે. કારણ x નિર્દેશક કોઈપણ લઈએ તો પણ દરેક બિંદુનો y નિર્દેશક 2
જ આવે છે.

x	1	4	-3
y	2	2	2
(x, y)	(1, 2)	(4, 2)	(-3, 2)

તેમજ $x + 0y = 2$ આ સમીકરણ $x = 2$ એમ લખાય છે અને તેનો આલેખ Y-અક્ષને
સમાંતર હોય છે.





જાણી લઈએ.

યુગપત્ર સમીકરણો ઉક્લિવાની આલેખ પદ્ધતિ

(Solution of simultaneous equations by Graphical method)

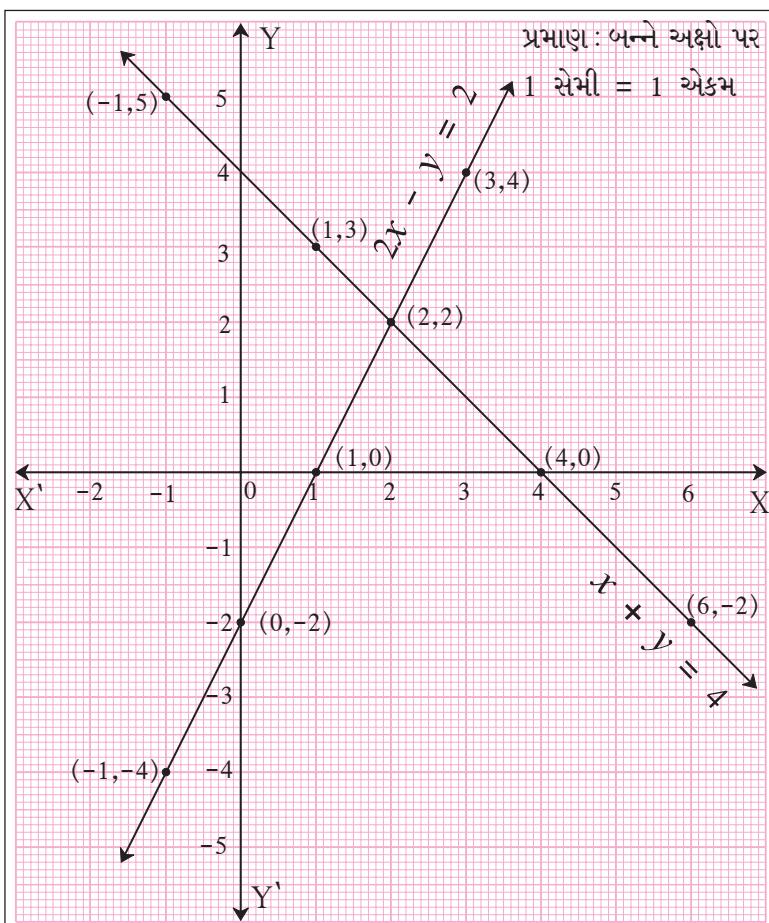
ઉદ્દેશ. $x + y = 4$ અને $2x - y = 2$ આ સમીકરણના આલેખ દોરી તેનું નિરીક્ષણ કરીએ.

$$x + y = 4$$

x	-1	4	1	6
y	5	0	3	-2
(x, y)	(-1, 5)	(4, 0)	(1, 3)	(6, -2)

$$2x - y = 2$$

x	0	1	3	-1
y	-2	0	4	-4
(x, y)	(0, -2)	(1, 0)	(3, 4)	(-1, -4)



આલેખ પરનું દરેક બિંદુ તે આલેખના સમીકરણનું સમાધાન કરે છે. બન્ને રેખાઓ પરસ્પર બિંદુ (2, 2) માં છોડે છે.

તેથી (2, 2) આ કંબિક જોડ એટલે કે $x = 2$ અને $y = 2$ આ કિંમતો $x + y = 4$ અને $2x - y = 2$ બન્ને સમીકરણનું સમાધાન કરે છે.

ચલની લે કિંમતોથી આપેલા યુગપત્ર સમીકરણોનું સમાધાન થાય તે કિંમતો તે સમીકરણોનો ઉક્લ હોય છે.

$x + y = 4$ અને $2x - y = 2$ આ યુગપત્ર સમીકરણોનો ઉક્લ $x = 2$ અને $y = 2$ છે.

આ સમીકરણો નિરસન પદ્ધતિથી ઉક્લો અને ચકાસો.

$$x + y = 4 \dots \text{(I)}$$

$$2x - y = 2 \dots \text{(II)}$$

સમીકરણ (I) અને (II) સરવાળો કરતાં,

$$3x = 6 \therefore x = 2$$

સમીકરણ (I) માં $x = 2$ મૂક્તાં.

$$x + y = 4$$

$$\therefore 2 + y = 4$$

$$\therefore y = 2$$

ફુલી I : $x - y = 1$; $5x - 3y = 1$ આ યુગપત્ત સમીકરણો આલેખની રીતે ઉક્લવા માટે નીચેના કોઈ પૂર્ણ કરી નિર્દેશકો મેળવો.

$$x - y = 1$$

x	0		3	
y		0		-3
(x, y)				

$$5x - 3y = 1$$

x	2			-4
y		8	-2	
(x, y)				

- એક જ નિર્દેશક પદ્ધતિ લઈ બિંદુઓ સ્થાપન કરો.
- સમીકરણના આલેખ દોરો.
- બે રેખાના છેદબિંદુના નિર્દેશકો વાંચો. તેના પરથી યુગપત્ત સમીકરણોનો ઉક્લ લખો.

ફુલી II : ઉપરના યુગપત્ત સમીકરણો નિરસન પદ્ધતિથી ઉક્લો અને આલેખ પરથી મેળવેલો ઉક્લ ચકાસો.



વિચાર કરીએ.

$5x - 3y = 1$ નો આલેખ દોરવા માટે નીચેના કોઈામાં કેટલાંક નિર્દેશકો શોધીને આપ્યા છે. તે જુઓ.

x	0	$\frac{1}{5}$	1	-2
y	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{11}{3}$
(x, y)	$(0, -\frac{1}{3})$	$(\frac{1}{5}, 0)$	$(1, \frac{4}{3})$	$(-2, -\frac{11}{3})$

- બિંદુ સ્થાપન કરવા આ નિર્દેશકો સગવડ ભર્યા છે કે ?
- નિર્દેશકો શોધતી વખતે કઈ કાળજી લેવી જેથી બિંદુ સ્થાપવા સહેલાં પડે.

મહાવરસંગ્રહ 1.2

1. નીચેના યુગપત્ત સમીકરણો આલેખની રીતે ઉક્લવા કોઈામાં યોગ્ય સંખ્યા લખો.

$$x + y = 3 ; x - y = 4$$

$$x + y = 3$$

x	3	<input type="text"/>	<input type="text"/>
y	<input type="text"/>	5	3
(x, y)	(3, 0)	<input type="text"/>	(0, 3)

$$x - y = 4$$

x	<input type="text"/>	-1	0
y	0	<input type="text"/>	-4
(x, y)	<input type="text"/>	<input type="text"/>	(0, -4)

2. નીચેના યુગપત્ત સમીકરણો આલેખની મદદથી ઉક્લો.

$$(1) x + y = 6 ; x - y = 4$$

$$(2) x + y = 5 ; x - y = 3$$

$$(3) x + y = 0 ; 2x - y = 9$$

$$(4) 3x - y = 2 ; 2x - y = 3$$

$$(5) 3x - 4y = -7 ; 5x - 2y = 0$$

$$(6) 2x - 3y = 4 ; 3y - x = 4$$





ચાલો, ચર્ચા કરીએ.

$x + 2y = 4$; $3x + 6y = 12$ આ યુગપત્ર સમીકરણો આલેખ પદ્ધતિથી ઉકેલવા માટે નિશ્ચિયત કરેલી કેટલીક ફિલ્ડ જેડીઓ નીચે આપેલી છે.

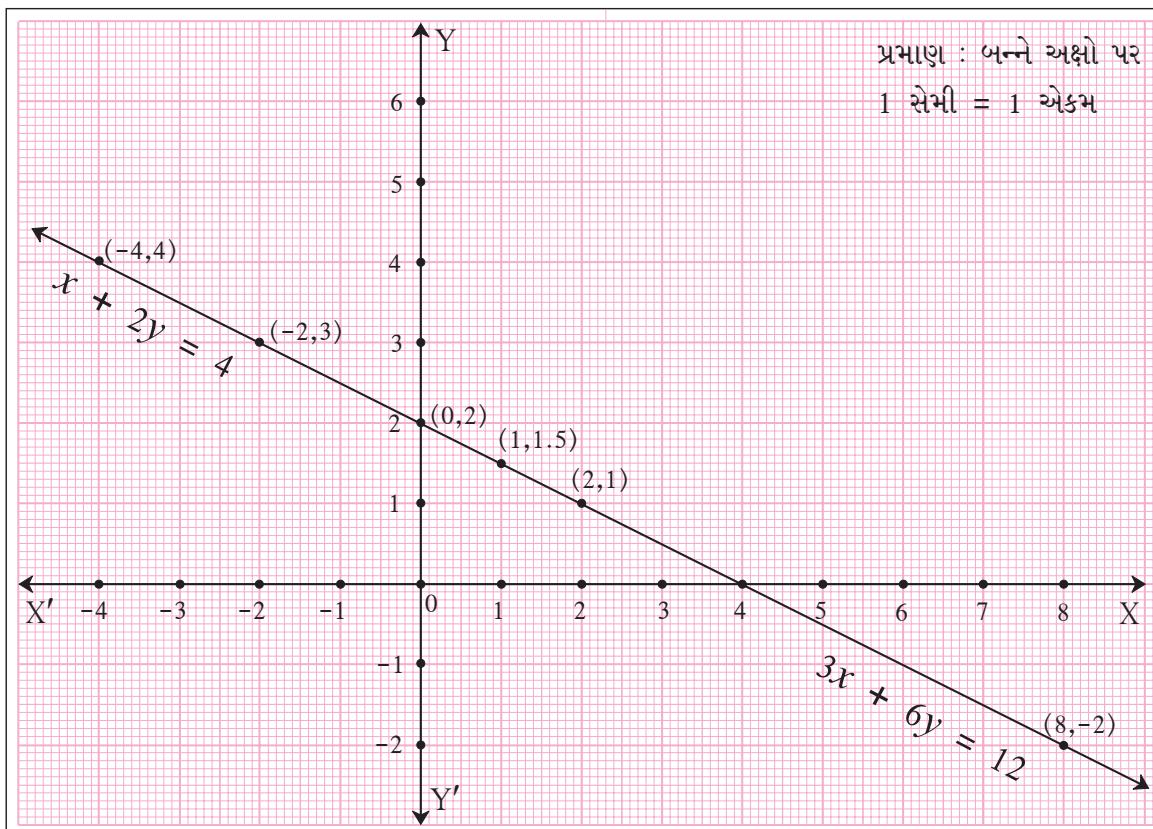
$$x + 2y = 4$$

x	-2	0	2
y	3	2	1
(x, y)	(-2, 3)	(0, 2)	(2, 1)

$$3x + 6y = 12$$

x	-4	1	8
y	4	1.5	-2
(x, y)	(-4, 4)	(1, 1.5)	(8, -2)

આ ફિલ્ડ જેડીઓનું સ્થાપન કરીને દોરેલો આલેખ નીચે આપ્યો છે. તેનું નિરીક્ષણ કરો અને તેની નીચે આપેલા પ્રશ્નો પર ચર્ચા કરો.



- (1) ઉપરના બન્ને સમીકરણોનાં આલેખ એક જ છે કે બિન્ન છે ?
- (2) $x + 2y = 4$ અને $3x + 6y = 12$ આ યુગપત્ર સમીકરણોના ઉકેલ ક્યા ક્યા છે ? કેટલાં છે ?
- (3) ઉપરના બન્ને સમીકરણોમાં x અને y ના સહગુણકો અને અચલપદો વચ્ચે ક્યો સંબંધ હેખાઈ આવે છે ?
- (4) બે દ્વિચલ રેખિક સમીકરણો આપ્યા હોય ત્યારે તેમનો આલેખ એક જ ક્યારે હોય છે તે કેવી રીતે ઓળખશો ?

હવે બીજું ઉદાહરણ જોઈએ.

$x - 2y = 4$ અને $2x - 4y = 12$ આ સમીકરણોનાં આલેખ એક જ નિર્દેશક પદ્ધતિ પર હોય. આલેખનું નિરીક્ષણ કરો $x - 2y = 4$; $2x - 4y = 12$ આ યુગપત્ત સમીકરણોનાં ઉક્લનો વિચાર કરો. x અને y ના સહગુણકો તેમજ અચળપદો વચ્ચેના સંબંધનો વિચાર કરીને તારણ કાઢો.



ICT Tools or Links

Geogebra software ની મદદથી X-અક્ષ અને Y-અક્ષ લો. વિવિધ યુગપત્ર સમીકરણોના આલેખ દોરો અને તેના ઉકિલ તપાસો.



જાણી લઈએ.

ନିଶ୍ଚଯ୍ୟକ (Determinant)

આ ચાર ઘટકોનો નિશ્ચયક છે. તેમાં (a, b) , (c, d) આડી હરોળ છે, અને $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ ઉભી હરોળ (ઉભા સ્તંભ) છે. આ નિશ્ચયકનો ધાત 2 છે. કારણ કે દૂરેક આડી અને ઉભી હરોળમાં 2 ઘટકો છે. આ નિશ્ચયક એક સંખ્યા માટે લખાય છે. તે સંખ્યા $ad-bc$ છે.

એટલે
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$ad-bc$ એ $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ આ નિશ્ચયકની કિમત છે.

નિશ્ચયકને નામ આપવા માટે સામાન્ય રીતે A, B, C, D, એવા અંગ્રેજ કેપિટલ અક્ષરો વપરાય છે

ગણેલાં ઉદાહરણો

ଓଡ଼ିଆ. ନୀଚେନା ଜିଥ୍ୟକୋଣୀ କିମ୍ବତ ଶୋଧୋ.

$$(1) A = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$$

$$(2) \quad N = \begin{vmatrix} -8 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$(3) \ B = \begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & 9 \\ 2 & 3\sqrt{3} \end{vmatrix}$$

ઉક્લ :

$$(1) A = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = (5 \times 9) - (3 \times 7) = 45 - 21 = 24$$

$$(2) N = \begin{vmatrix} -8 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = [(-8) \times (4)] - [(-3) \times 2] = -32 - (-6)$$

$$= -32 + 6 = -26$$

$$(3) B = \begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & 9 \\ 2 & 3\sqrt{3} \end{vmatrix} = [2\sqrt{3} \times 3\sqrt{3}] - [2 \times 9] = 18 - 18 = 0$$



જાણી લઈએ.

નિશ્ચયક પદ્ધતિ (કેમર રૂલ) Determinant method (Cramer's Method)

આપેલાં યુગપત્ર સમીકરણોને સહેલી રીતે અને ઓછામાં ઓછી જગ્યા વાપરીને નિશ્ચયકની મદદથી ઉક્લી શકાય છે. આને જ યુગપત્ર સમીકરણો ઉક્લવાની નિશ્ચયક પદ્ધતિ કહે છે. આ પદ્ધતિ ગ્રેબ્રિયલ કેમર આ સ્વીસ ગણિતશૈ શોધી કાઢી તેથી તેને 'કેમર્સર્ડલ' કે કેમરની પદ્ધતિ કહે છે.

આ પદ્ધતિમાં આપેલા યુગપત્ર સમીકરણો $a_1x + b_1y = c_1$ અને $a_2x + b_2y = c_2$ એમ લખાય છે.

$$\text{ધારોકે, } a_1x + b_1y = c_1 \dots \quad (\text{I})$$

$$\text{અને } a_2x + b_2y = c_2 \dots \quad (\text{II})$$

અહીં a_1, b_1, c_1 અને a_2, b_2, c_2 આ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે અને $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$

આપણે આ યુગપત્ર સમીકરણો નિરસન પદ્ધતિથી ઉક્લીએ.

સમીકરણ (I) ને b_2 વડે ગુણતાં

$$a_1b_2x + b_1b_2y = c_1b_2 \dots \quad (\text{III})$$

સમીકરણ (II) ને b_1 વડે ગુણતાં

$$a_2b_1x + b_2b_1y = c_2b_1 \dots \quad (\text{IV})$$

સમીકરણ (III) માંથી (IV) બાદ કરતાં,

$$\begin{aligned} - a_1 b_2 x + b_1 b_2 y &= c_1 b_2 \\ - a_2 b_1 x + b_2 b_1 y &= -c_2 b_1 \end{aligned}$$

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1) x = c_1 b_2 - c_2 b_1$$

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \dots \quad (V)$$

$$\text{તે જ પ્રમાણે } x \text{ નું નિરસન કરીને, } y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \dots \quad (VI)$$

ઉપરના ઉક્લિનમાં $c_1 b_2 - c_2 b_1, a_1 b_2 - a_2 b_1, a_1 c_2 - a_2 c_1$ આ રાશિઓ યાદ રાખવા અને થોડી જગ્યામાં વ્યવસ્થિત દર્શાવવા માટે નિશ્ચયકના રૂપમાં લખીશું.

નીચેના સમીકરણમાં સહગુણકો અને અચળ પછો જુઓ.

$\text{હવે } a_1 x + b_1 y = c_1$ $\text{અને } a_2 x + b_2 y = c_2$	અહીં $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ આ ત્રણ ઊભા સ્તંભ છે.
--	--

સમીકરણ (V) અને સમીકરણ (VI) માં x અને y ની કિંમતો નિશ્ચયકના રૂપમાં લખીએ.

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$$\text{અને } y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad (a_1 b_2 - a_2 b_1) \neq 0$$

$$\text{ધ્યાનમાં રાખવા માટે } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = D, \quad \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = D_x, \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = D_y \text{ થી દર્શાવીએ.}$$

$$\text{એટલે ટૂંકમાં, } x = \frac{D_x}{D} \quad \text{અને } y = \frac{D_y}{D}$$

D, D_x, D_y આ નિશ્ચયકો લખવા માટે $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ આ પ્રમાણે સ્તંભોનો કમ ધ્યાનમાં રાખો.

અને $a_1 x + b_1 y = c_1$ આ સમીકરણો પરથી $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ આ ત્રણ સ્તંભ મળે છે.

- D માં અચળપદોનો $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ આ સ્તંભ લીધો નથી.
- D_x માટે D માંનો $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ આ x ના સહગુણકોનાં સ્તંભને બદલે તેની જગ્યાએ અચળ પદોનો સ્તંભ લીધો છે.
- D_y માટે D માંનો $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ આ y ના સહગુણકોનાં સ્તંભને બદલે તેની જગ્યાએ અચળ પદોનો સ્તંભ લીધો છે.



આ ધ્યાનમાં રાખો.

કેમરની પદ્ધતિ વાપરીને યુગપત્ત સમીકરણ ઉક્તવાની રીત

આપેલાં સમીકરણો $ax + by = c$ આ રૂપમાં લખો.

D, D_x અને D_y આ નિશ્ચયકોની કિંમત શોધો.

$$x = \frac{D_x}{D} \quad \text{અને} \quad y = \frac{D_y}{D}$$

આ ગ્રમાણે x અને y ની કિંમત શોધો.

ગેબ્રિયલ કેમર (Gabriel Cramer)

(31 જુલાઈ, 1704 થી 4 જન્યુઆરી, 1752)

આ સ્વિસ ગણિકાનો જન્મ જિનિવામાં થયો હતો. ગણિતમાં તેઓ નાનપણથી જ હોશિયાર હતા. અદાર વર્ષની વયે તેમને ડોક્ટરેટની પદવી મળી હતી. જીનિવામાં તેઓ પ્રાધ્યાપક હતાં.



જીજી ગણેલું ઉદાહરણ જીજી

ઉદા. કેમરની રીતે નીચેના યુગપત્ર સમીકરણો ઉક્લો.

$$5x + 3y = -11 ; 2x + 4y = -10$$

ઉક્લ : આપેલાં સમીકરણો

$$5x + 3y = -11$$

$$2x + 4y = -10$$

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (5 \times 4) - (2 \times 3) = 20 - 6 = 14$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -11 & 3 \\ -10 & 4 \end{vmatrix} = (-11) \times 4 - (-10) \times 3 = -44 - (-30) \\ = -44 + 30 = -14$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 5 & -11 \\ 2 & -10 \end{vmatrix} = 5 \times (-10) - 2 \times (-11) = -50 - (-22) \\ = -50 + 22 = -28$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-14}{14} = -1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-28}{14} = -2$$

$\therefore (x, y) = (-1, -2)$ આપેલાં યુગપત્ર સમીકરણોનો ઉક્લ છે.

કૃતિ 1 : નિશ્ચયક પદ્ધતિ વાપરી આપેલાં યુગપત્ર સમીકરણો ઉક્લવા માટે નીચેના ઓક્ટામાં યોગ્ય સંખ્યા લખો.

$$y + 2x - 19 = 0 ; 2x - 3y + 3 = 0$$

ઉક્લ : આપેલાં સમીકરણો $ax + by = c$ ના ઇપમાં લખીએ.

$$2x + y = 19$$

$$2x - 3y = -3$$

$$D = \begin{vmatrix} \boxed{} & \boxed{} \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = \boxed{} \times (-3) - 2 \times \boxed{} = \boxed{} - \boxed{} \\ = \boxed{} - \boxed{} = \boxed{}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 19 & \boxed{} \\ \boxed{} & -3 \end{vmatrix} = 19 \times \boxed{} - \boxed{} \times \boxed{} = \boxed{} - \boxed{} \\ = \boxed{}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \boxed{} & 19 \\ 2 & \boxed{} \end{vmatrix} = \boxed{} \times \boxed{} - \boxed{} \times \boxed{}$$

$$= \boxed{} - \boxed{} = \boxed{}$$

$$x = \frac{D_x}{D}$$

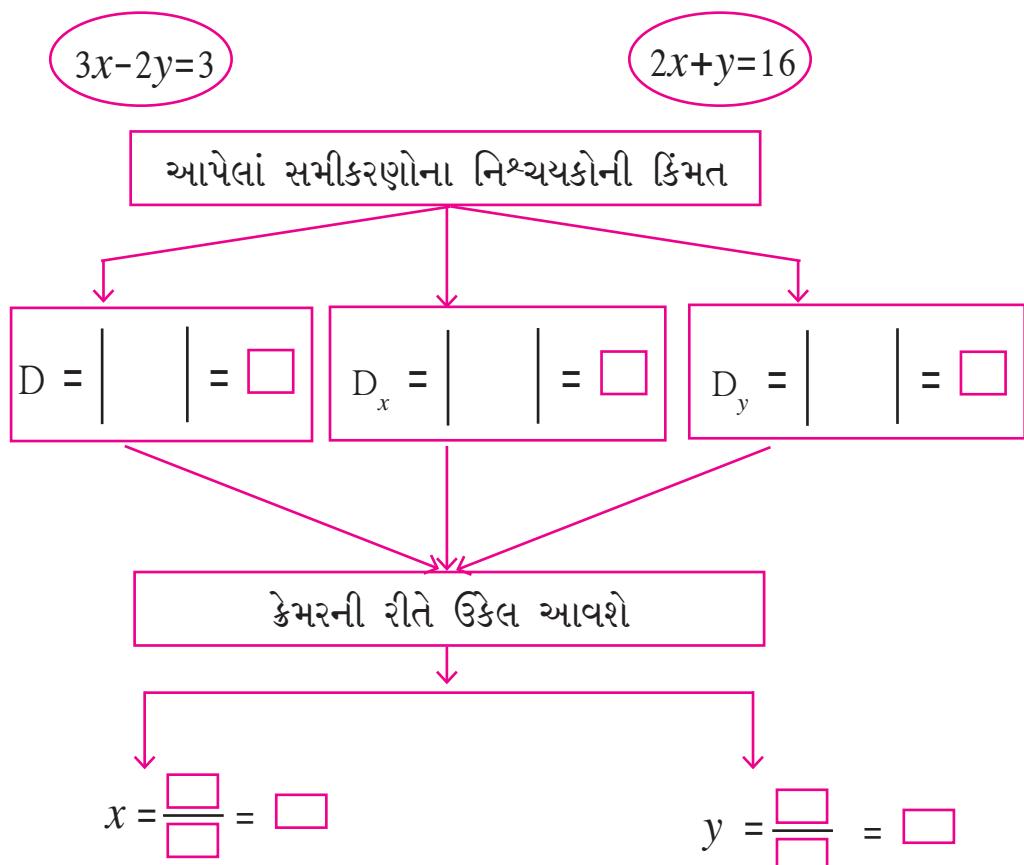
$$\therefore x = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{}$$

$$y = \frac{D_y}{D}$$

$$y = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{}$$

$\therefore (x, y) = (\boxed{}, \boxed{})$ આ આપેલા યુગપત્ર સમીકરણોનો ઉક્લ છે.

કૃતિ 2 : નીચેની કૃતિ પૂર્ણ કરો.



\therefore ઉક્લ ($\boxed{}, \boxed{}$) છે.

$\therefore (x, y) = (\boxed{}, \boxed{})$ આ ઉક્લ છે.



વિચાર કરીએ.

- જે $D = 0$ હોય તો ઉક્લનનું સ્વરૂપ કેવું હશે ?
- સામાન્ય ઉક્લ શક્ય ન હોય તો તે સમીકરણની રેખાઓનું સ્વરૂપ શું હશે ?

મહાવરાસંગ્રહ 1.3

1. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times \boxed{\quad} - \boxed{\quad} \times 4$
 $= \boxed{\quad} - 8$
 $= \boxed{\quad}$

2. નીચેના નિયમ્યકોની કિમત શોધો.

(1) $\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -7 & 0 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} \frac{7}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$

3. નીચેના યુગપત્ત સમીકરણો કેમરની પદ્ધતિથી ઉક્લો.

(1) $3x - 4y = 10$; $4x + 3y = 5$ (2) $4x + 3y - 4 = 0$; $6x = 8 - 5y$

(3) $x + 2y = -1$; $2x - 3y = 12$ (4) $6x - 4y = -12$; $8x - 3y = -2$

(5) $4m + 6n = 54$; $3m + 2n = 28$ (6) $2x + 3y = 2$; $x - \frac{y}{2} = \frac{1}{2}$

દ્વિચલ રેખિક સમીકરણમાં ડ્રેપાંતરિત થાય તેવાં સમીકરણો :

(Equations reducible to linear equations in two variables)

કૃતિ : નીચેનો કોડો પૂર્ણ કરો.

સમીકરણ	ચલની સંખ્યા	રેખિક છે કે નહીં ?
$\frac{3}{x} - \frac{4}{y} = 8$	2	નથી
$\frac{6}{x-1} + \frac{3}{y-2} = 0$	<input type="text"/>	<input type="text"/>
$\frac{7}{2x+1} + \frac{13}{y+2} = 0$	<input type="text"/>	<input type="text"/>
$\frac{14}{x+y} + \frac{3}{x-y} = 5$	<input type="text"/>	<input type="text"/>



વિચાર કરીએ.

ઉપરના કોઢામાં આપેલાં દ્વિચલ સમીકરણો પૈકી કેટલાંક રેખિક સમીકરણો નથી પણ તેમનું ઝ્યાંતર રેખિક સમીકરણમાં થઈ શકે કે નહીં ?



ધ્યાનમાં રાખીએ.

આપેલાં સમીકરણોમાં આપેલાં ચલને બદલે બીજાં યોગ્ય ચલ લઈને નવા સમીકરણો બનાવીને તેને રેખિક સમીકરણનાં ઝ્યાંતર લખી શકાય છે. $\frac{m}{n}$ સ્વરૂપમાં હોય તેવા કોઈપણ અપૂર્ણાંકનો છેદ શૂન્ય હોઈ શકે નહિં.

જીજી ગણેલાં ઉદાહરણો જીજી

$$\text{ઉદા. (1) ઉક્લો : } \frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 7; \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 5$$

$$\text{ઉક્લ : } \frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 7; \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 5$$

$$4\left(\frac{1}{x}\right) + 5\left(\frac{1}{y}\right) = 7 \dots \text{ (I)}$$

$$3\left(\frac{1}{x}\right) + 4\left(\frac{1}{y}\right) = 5 \dots \text{ (II)}$$

સમીકરણ (I) અને (II) માં $\left(\frac{1}{x}\right) = m$ અને $\left(\frac{1}{y}\right) = n$ મૂક્તાં નીચેના સમીકરણો મળે છે.

$$4m + 5n = 7 \dots \text{ (III)}$$

$$3m + 4n = 5 \dots \text{ (IV)}$$

આ સમીકરણો ઉક્લતાં,

$$m = 3, n = -1 \text{ આ કિંમતો મળે છે.}$$

$$\text{હવે, } m = \frac{1}{x} \quad \therefore 3 = \frac{1}{x} \quad \therefore x = \frac{1}{3}$$

$$\text{તેમજ, } n = \frac{1}{y} \quad \therefore -1 = \frac{1}{y} \quad \therefore y = -1$$

$$\therefore (x, y) = \left(\frac{1}{3}, -1\right) \text{ આ આપેલા યુગાપત્ર સમીકરણોનો ઉક્લ છે.}$$

$$\text{ઉદા. (2) ઉક્ખલો : } \frac{4}{x-y} + \frac{1}{x+y} = 3 ; \frac{2}{x-y} - \frac{3}{x+y} = 5$$

$$\text{ઉકાલ : } \frac{4}{x-y} + \frac{1}{x+y} = 3 ; \quad \frac{2}{x-y} - \frac{3}{x+y} = 5$$

$$4\left(\frac{1}{x-y}\right) + 1\left(\frac{1}{x+y}\right) = 3 \dots \quad (\text{I})$$

$$2\left(\frac{1}{x-y}\right) - 3\left(\frac{1}{x+y}\right) = 5 \dots \quad (\text{II})$$

સમીકરણ (I) અને (II)માં $\left(\frac{1}{x-y}\right) = a$ અને $\left(\frac{1}{x+y}\right) = b$ મૂક્તાં નીચેના સમીકરણો મળે છે.

$$4a + b = 3 \dots \quad (\text{III})$$

$$2a - 3b = 5 \dots \text{ (IV)}$$

સમીકરણ (III) અને (IV) ઉક્તતાં $a = 1$ અને $b = -1$ મળે છે.

$$\text{પરંતુ } a = \left(\frac{1}{x-y} \right) \text{ અને } b = \left(\frac{1}{x+y} \right)$$

$$\left(\frac{1}{x-y} \right) = 1 \text{ અને } \left(\frac{1}{x+y} \right) = -1$$

$$x - y = 1 \dots \quad (\text{V})$$

$$x + y = -1 \dots \quad (\text{VI})$$

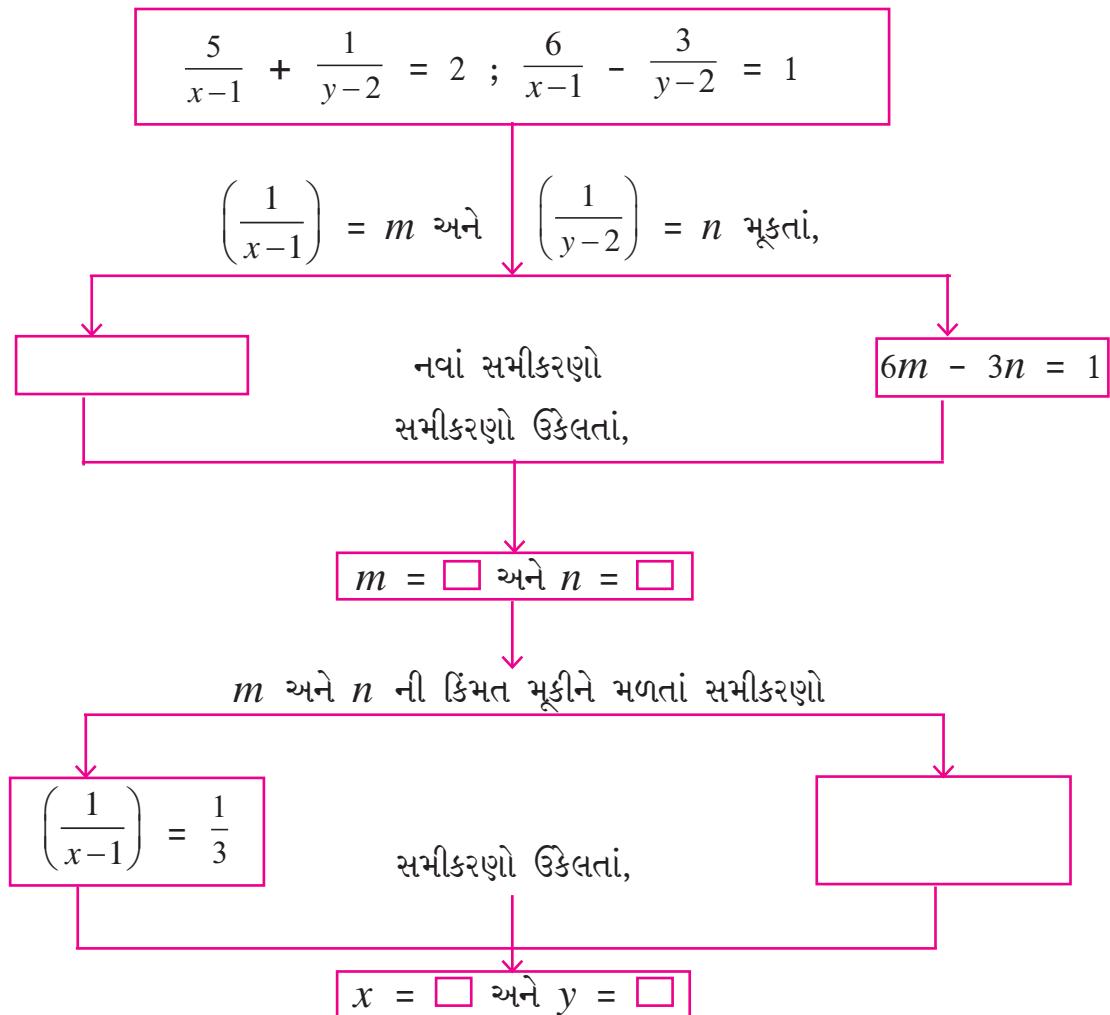
સમીકરણ (V) અને સમીકરણ (VI) ઉકાતાં $x = 0$ અને $y = -1$ ઉકાલ મળે છે.

$\therefore (x, y) = (0, -1)$ આપેલાં સમીકરણનો ઉકિલ છે.



ઉપરના ઉદ્ઘાટણોમાં ડ્રેપાંતરિત કરેલાં યુગપત્ર સમીક્ષણો નિરસન પદ્ધતિથી ઉક્તિથાં છે. તે સમીક્ષણો કેમરની પદ્ધતિ અથવા આલેખ પદ્ધતિથી ઉક્લી શકાય કે ? કરી જૂએ.

કૃતિ : સમીકરણોનો ઉક્લ શોધવા માટે નીચેની ફૂતિ કરો.

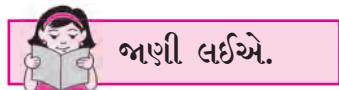


$\therefore (x, y) = (,)$ આપેલાં યુગપત્ત સમીકરણોનો ઉક્લ છે.

મહાવરાસંગ્રહ 1.4

1. નીચેના યુગપત્ત સમીકરણો ઉક્લો.

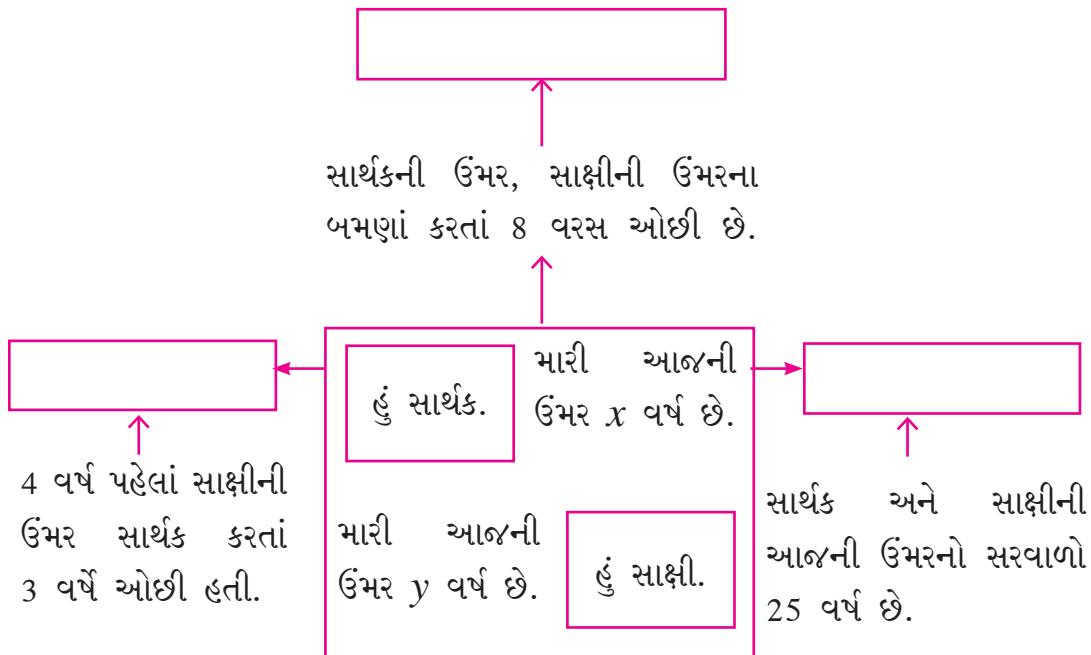
- (1) $\frac{2}{x} - \frac{3}{y} = 15 ; \frac{8}{x} + \frac{5}{y} = 77$
- (2) $\frac{10}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 4 ; \frac{15}{x+y} - \frac{5}{x-y} = -2$
- (3) $\frac{27}{x-2} + \frac{31}{y+3} = 85 ; \frac{31}{x-2} + \frac{27}{y+3} = 89$
- (4) $\frac{1}{3x+y} + \frac{1}{3x-y} = \frac{3}{4} ; \frac{1}{2(3x+y)} - \frac{1}{2(3x-y)} = -\frac{1}{8}$



જાણી લઈએ.

યુગપત્ર સમીકરણોનું ઉપયોગન (Application of simultaneous equations)

કૃતિ : અહીં ચોકઠાની નીચે આપેતી સૂચના પ્રમાણે તૈયાર થતાં સમીકરણો ચોકઠામાં લખો. તે પરથી સાર્થક અને સાક્ષીની ઉંમર શોધો.



ઉદા. (1) એક લંબચોરસની પરિમિતિ 40 સેમી છે. લંબચોરસની લંબાઈ તેની પહોળાઈના બમણાં કરતા 2 સેમી વધારે છે. તો લંબચોરસની લંબાઈ અને પહોળાઈ શોધો.

ઉક્લિ : ધારો કે, લંબચોરસની લંબાઈ x સેમી અને પહોળાઈ y સેમી છે.

પહેલી શરત પ્રમાણે,

$$2(x + y) = 40$$

$$x + y = 20 \dots \text{(I)}$$

બીજી શરત પ્રમાણે,

$$x = 2y + 2$$

$$x - 2y = 2 \dots \text{(II)}$$

સમીકરણ (I) અને (II) નિયમયક પદ્ધતિથી ઉક્લિએ,

$$x + y = 20$$

$$x - 2y = 2$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = [1 \times (-2)] - (1 \times 1) = -2 - 1 = -3$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 20 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = [20 \times (-2)] - (1 \times 2) = -40 - 2 = -42$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 20 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (1 \times 2) - (20 \times 1) = 2 - 20 = -18$$

$$x = \frac{D_x}{D} \text{ અને } y = \frac{D_y}{D}$$

$$\therefore x = \frac{-42}{-3} \text{ અને } y = \frac{-18}{-3}$$

$$\therefore x = 14 \text{ અને } y = 6$$

\therefore લંબચોરસની લંબાઈ 14 સેમી અને પહોળાઈ 6 સેમી છે.

ઉદા. (2)

સેલ ! સેલ !! સેલ !!! ફક્ત બે દિવસ માટે !



મારી પાસે કેટલીક કાંટાવાળી ઘડિયાળો છે અને
કેટલીક ડિજિટલ ઘડિયાળો છે. તે હું સસ્તા દરે વેંચીશ.

પહેલાં દિવસનું વેંચાણ

કાંટાવાળી ઘડિયાળો = 11

ડિજિટલ ઘડિયાળો = 6

મને મળ્યા \longrightarrow 4330 રૂપિયા

બીજ દિવસનું વેંચાણ

કાંટાવાળી ઘડિયાળો = 22

ડિજિટલ ઘડિયાળો = 5

મને મળ્યા \longrightarrow 7330 રૂપિયા

તો મેં વેંચેલાં દરેક પ્રકારના ઘડિયાળની કિમત કેટલી ?

ઉકલ : ધારોકે, એક કાટાવાળી ઘડિયાળની કિમત = x રૂપિયા

અને એક ડિજિટલ ઘડિયાળની કિમત = y રૂપિયા

પહેલી શરત પ્રમાણે,

$$11x + 6y = 4330 \dots \text{(I)}$$

બીજી શરત પ્રમાણે,

$$22x + 5y = 7330 \dots \text{(II)}$$

સમીકરણ (I) ને 2 વડે ગુણતાં,

$$22x + 12y = 8660 \dots \text{(III)}$$

સમીકરણ (II) માંથી સમીકરણ (III) બાદ કરતાં.

$$\begin{array}{r} - 22x + 5y = 7330 \\ - 22x + 12y = 8660 \\ \hline -7y = -1330 \end{array}$$

$$\therefore y = 190$$

$y = 190$ આ કિમત સમીકરણ (I) માં મૂકતાં,

$$11x + 6y = 4330$$

$$\therefore 11x + 6(190) = 4330$$

$$\therefore 11x + 1140 = 4330$$

$$\therefore 11x = 3190$$

$$\therefore x = 290$$

\therefore એક કાટાવાળી ઘડિયાળની કિમત 290 રૂપિયા અને

એક ડિજિટલ ઘડિયાળની કિમત 190 રૂપિયા છે.

ઉદા. (3)



એક હોડી 6 કલાકમાં પ્રવાહની વિરુદ્ધ દિશામાં 16 કિમી અને પ્રવાહની દિશામાં 24 કિમી જથું છે.

તે જ હોડી 13 કલાકમાં પ્રવાહની વિરુદ્ધ દિશામાં 36 કિમી અને પ્રવાહની દિશામાં 48 કિમી જથું છે.

તો કહો જેઈએ ! હોડીનો શાંત પાણીમાં વેગ અને પ્રવાહનો વેગ કેટલો હશે?

ઉકલ : ધારોકે, શાંત પાણીમાં હોડીનો વેગ = x કિમી/કલાક અને પ્રવાહનો વેગ = y

$$\therefore \text{હોડીનો પ્રવાહની દિશામાં વેગ} = (x + y) \text{ કિમી/કલાક}$$

$$\text{હોડીનો પ્રવાહની વિરુદ્ધ દિશામાં વેગ} = (x - y) \text{ કિમી/કલાક}$$

$$\text{અંતર} = \text{વેગ} \times \text{સમય} \therefore \text{સમય} = \frac{\text{અંતર}}{\text{વેગ}}$$

$$\text{હોડીને પ્રવાહની વિરુદ્ધ દિશામાં 16 કિમી જવા માટે લાગતો સમય} = \frac{16}{x-y} \text{ કલાક}$$

$$\text{હોડીને પ્રવાહની દિશામાં 24 કિમી જવા માટે લાગતો સમય} = \frac{24}{x+y} \text{ કલાક}$$

પહેલી શરત પ્રમાણે,

$$\frac{16}{x-y} + \frac{24}{x+y} = 6 \dots \quad (\text{I})$$

બીજી શરત પ્રમાણે,

$$\frac{36}{x-y} + \frac{48}{x+y} = 13 \dots \quad (\text{II})$$

સમીકરણ (I) અને (II)માં $\frac{1}{x-y} = m$ અને $\frac{1}{x+y} = n$ મૂક્તાં નીચેના બે સમીકરણો મળે છે.

$$16m + 24n = 6 \dots \quad (\text{III})$$

$$36m + 48n = 13 \dots \quad (\text{IV})$$

સમીકરણ (III) અને (IV) ઉક્લિંગાં $m = \frac{1}{4}$, $n = \frac{1}{12}$
 m અને n ની કિંમત મૂકૃતાં નીચેના સમીકરણો મળે છે.

$$x - y = 4 \dots \text{(V)}$$

$$x + y = 12 \dots \text{(VI)}$$

સમીકરણ (V) અને (VI) ઉક્લિંગાં $x = 8$, $y = 4$ મળે છે.

∴ હોડીનો શાંત પાણીમાં વેગ = 8 કિલી/કલાક અને પ્રવાહનો વેગ = 4 કિલી/કલાક.

ઉદા. (4) કેટલીક રકમ કેટલાંક બાળકોમાં સરખે ભાગે વહેંચ્યી. જે 10 બાળકો વધારે હોત તો દરેકને 2 રૂપિયા ઓછાં મળ્યા હોત અને જે 15 બાળકો ઓછાં હોત તો દરેકને 6 રૂપિયા વધારે મળ્યા હોત. તો કુલ રકમ કેટલી હતી ? તે રકમ કેટલાં બાળકોને વહેંચ્યી ?

ઉક્લિંગ : ધારોકે બાળકોની સંખ્યા x રૂપિયા અને દરેકને મળતી રકમ y રૂપિયા છે.

∴ કુલ xy રૂપિયા વહેંચ્યા.

પહેલી શરત પ્રમાણે,

$$(x + 10)(y - 2) = xy$$

$$\therefore xy - 2x + 10y - 20 = xy$$

$$\therefore -2x + 10y = 20$$

$$\therefore -x + 5y = 10 \dots \text{(I)}$$

બીજી શરત પ્રમાણે,

$$(x - 15)(y + 6) = xy$$

$$\therefore xy + 6x - 15y - 90 = xy$$

$$\therefore 6x - 15y = 90$$

$$\therefore 2x - 5y = 30 \dots \text{(II)}$$

સમીકરણ (I) માં સમીકરણ (II) ઉમેરતાં,

$$\begin{array}{r} -x + 5y = 10 \\ + 2x - 5y = 30 \\ \hline x = 40 \end{array}$$

$x = 40$ આ કિંમત સમીકરણ (I)માં મૂકૃતાં.

$$-x + 5y = 10$$

$$\therefore -40 + 5y = 10$$

$$\therefore 5y = 50$$

$$\therefore y = 10$$

કુલ રકમ = $xy = 40 \times 10 = 400$ રૂપિયા

\therefore 40 બાળકોને 400 રૂપિયા સરખે ભાગે વહેંચ્યા હતા.

ઉદા. (5) એક ત્રણ અંકી સંખ્યા તેના અંકોના સરવાળાના 17 ગણાં જેટલી છે. તેમાં 198 ઉમેરતાં તે 9 અંકો ઉલટ કર્મે આવે તેવી સંખ્યા મળે છે, આ સંખ્યાના એકમ અને શતક સ્થાનના અંકોનો સરવાળો, વચ્ચેના અંક કરતાં 1 જેટલો ઓછો છે. તો તે ત્રણ અંકી સંખ્યા શોધો.

ઉક્તિ : ધારોકે, શતક સ્થાનનો અંક x અને એકમ સ્થાનનો અંક y છે.

દશક સ્થાનનો અંક (વચ્ચેનો અંક) = આજુબાજુના અંકના સરવાળા કરતાં 1 થી વધારે છે.

શતક	દશક	એકમ
x	$x + y + 1$	y

$$\begin{aligned} \therefore \text{ત્રણ અંકી સંખ્યા} &= 100x + 10(x + y + 1) + y \\ &= 100x + 10x + 10y + 10 + y = 110x + 11y + 10 \end{aligned}$$

$$\text{આ સંખ્યાના અંકોનો સરવાળો} = x + (x + y + 1) + y = 2x + 2y + 1$$

\therefore પહેલી શરત પ્રમાણે,

$$\text{ત્રણ અંકી સંખ્યા} = 17 \times (\text{અંકોનો સરવાળો})$$

$$\therefore 110x + 11y + 10 = 17 \times (2x + 2y + 1)$$

$$\therefore 110x + 11y + 10 = 34x + 34y + 17$$

$$\therefore 76x - 23y = 7 \dots \text{(I)}$$

આપેલી સંખ્યાના અંક ઉલટ કર્મે લખતાં મળતી નવી સંખ્યા

$$= 100y + 10(x + y + 1) + x = 110y + 11x + 10$$

$$\text{આપેલી સંખ્યા} = 110x + 11y + 10$$

આપેલી બીજી શરત પ્રમાણે, આપેલી સંખ્યા + 198 = અંક ઉલટ કર્મે લખતાં મળતી સંખ્યા

$$\therefore 110x + 11y + 10 + 198 = 110y + 11x + 10$$

$$\therefore 99x - 99y = -198$$

$$\therefore x - y = -2$$

$$\text{એટલે કે } x = y - 2 \dots \text{(II)}$$

સમીક્ષરણ (II)માં મળેલી x ની કિંમત સમીક્ષરણ (I)માં મૂકૃતાં,

$$\therefore 76(y - 2) - 23y = 7$$

$$\therefore 76y - 152 - 23y = 7$$

$$53y = 159$$

$$\therefore y = 3 \quad \therefore \text{એકમ સ્થાનનો અંક} = 3$$

$y = 3$ આ કિંમત સમીકરણ (II) માં મૂકતાં,

$$x = y - 2$$

$$\therefore x = 3 - 2 = 1$$

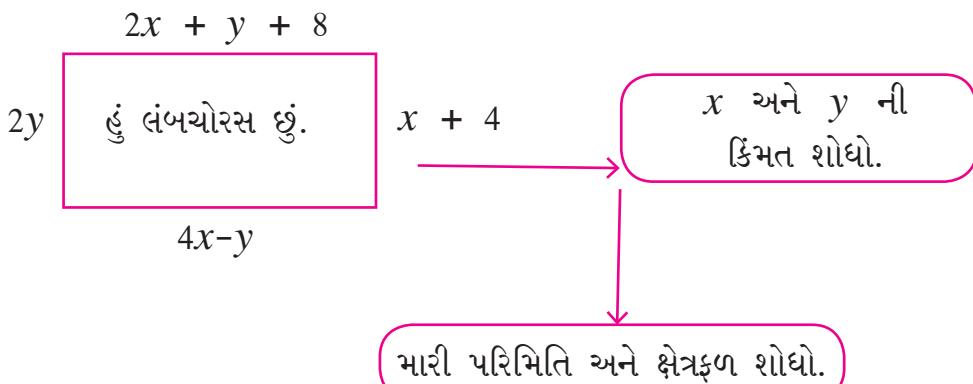
$$\therefore x = 1 \quad \therefore \text{શતક સ્થાનનો અંક} = 1$$

$$\text{દશક સ્થાને અંક} = \text{વચ્ચેનો અંક} = x + y + 1 = 1 + 3 + 1 = 5$$

$$\therefore \text{આપેલી ત્રણ અંકી સંખ્યા} = 153.$$

મહાવરાસંગ્રહ 1.5

1. બે સંખ્યાઓ વચ્ચેનો તફાવત 3 છે. મોટી સંખ્યાના ત્રણ ગાણાં અને નાની સંખ્યાના બમણાંનો સરવાળો 19 છે. તો તે સંખ્યાઓ શોધો.
2. ફૂલ પૂર્ણ કરો.



3. પિતાની ઉંમરમાં દીકરાની ઉંમરના બમણા ઉમેરતાં સરવાળો 70 આવે છે. દીકરાની ઉંમરમાં પિતાની ઉંમરના બમણા ઉમેરતાં સરવાળો 95 આવે છે. તો બન્નેની ઉંમર શોધો.
4. એક અપૂર્ણાકનો છેદ, તેના અંશના બમણા કરતાં 4 થી મોટો છે. જે અંશ અને છેદ બન્નેમાંથી 6 બાદ કરીએ તો છેદ, અંશના 12 ગાણાં જેટલો થાય છે. તો તે અપૂર્ણાક શોધો.
5. 10 ટનની ક્ષમતાવાળો એક માલવાહક ટ્રક A અને B એમ બે પ્રકારનાં જુદા જુદા વજનના બોક્સથી ભર્યો છે. જે A પ્રકારના 150 બોક્સ અને B પ્રકારના 100 બોક્સ ટ્રકમાં મૂકીએ તો તે ટ્રકની 10 ટનની ક્ષમતા પૂર્ણ કરવા માટે B પ્રકારના 40 બોક્સ ટ્રકમાં ભરવા પડે છે. તો દ્વેક પ્રકારના બોક્સનું વજન કેટલું હશે ?
6. ★ વિશાળે 1900 કિમી પ્રવાસ પૈકી કેટલુંક અંતર બસમાં અને બાકીનું અંતર વિમાન દ્વારા પૂર્ણ કર્યું. બસનો સરાસરી વેગ, દર કલાકે 60 કિમી છે. જ્યારે વિમાનનો વેગ દર કલાકે 700 કિમી છે. જે આ પ્રવાસ તેણે 5 કલાકમાં પૂરો કર્યો હોય તો વિશાળે બસમાં કેટલા કિલોમીટરનો પ્રવાસ કર્યો હશે ?

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 1

1. નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ માટે આપેલા પર્યાયોમાંથી યોગ્ય પર્યાય શોધો.

(1) $4x + 5y = 19$ નો આલેખ દોરવા માટે $x = 1$ હોય ત્યારે y ની કિંમત કેટલી ?

- (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) -3

(2) x અને y આ ચલવાળા યુગપત સમીકરણ માટે જે $D_x = 49$, $D_y = -63$ અને $D = 7$ હોય તો $x =$ કેટલા ?

- (A) 7 (B) -7 (C) $\frac{1}{7}$ (D) $\frac{-1}{7}$

(3) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -7 & -4 \end{vmatrix}$ આ નિશ્ચયકની કિંમત કેટલી ?

- (A) -1 (B) -41 (C) 41 (D) 1

(4) $x + y = 3$; $3x - 2y - 4 = 0$ આ યુગપત સમીકરણો કેમર ઢિલથી ઉકેલવા માટે D ની કિંમત કેટલી ?

- (A) 5 (B) 1 (C) -5 (D) -1

(5) $ax + by = c$; અને $mx + ny = d$ આ યુગપત સમીકરણો માટે જે $an \neq bm$ તો આપેલા સમીકરણો માટે-

- (A) એક જ સામાન્ય ઉકેલ મળશે. (B) ઉકેલ મળશે નહીં.

- (C) અસંખ્ય ઉકેલ મળશે. (D) ફક્ત બે જ ઉકેલ મળશે.

2. $2x - 6y = 3$ આ સમીકરણનો આલેખ દોરવા માટે નીચેનો કોઈ પૂર્ણ કરો.

x	-5	<input type="text"/>
y	<input type="text"/>	0
(x, y)	<input type="text"/>	<input type="text"/>

3. નીચેના યુગપત સમીકરણો આલેખની પદ્ધતિથી ઉકેલો.

(1) $2x + 3y = 12$; $x - y = 1$

(2) $x - 3y = 1$; $3x - 2y + 4 = 0$

(3) $5x - 6y + 30 = 0$; $5x + 4y - 20 = 0$

(4) $3x - y - 2 = 0$; $2x + y = 8$

(5) $3x + y = 10$; $x - y = 2$

4. નીચેના નિશ્ચયકોની કિંમત શોધો.

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

5. નીચેના યુગપત્ર સમીકરણો કેમરની પદ્ધતિથી ઉક્લો.

$$(1) 6x - 3y = -10 ; 3x + 5y - 8 = 0$$

$$(2) 4m - 2n = -4 ; 4m + 3n = 16$$

$$(3) 3x - 2y = \frac{5}{2} ; \frac{1}{3}x + 3y = -\frac{4}{3}$$

$$(4) 7x + 3y = 15 ; 12y - 5x = 39$$

$$(5) \frac{x+y-8}{2} = \frac{x+2y-14}{3} = \frac{3x-y}{4}$$

6. નીચેના યુગપત્ર સમીકરણો ઉક્લો.

$$(1) \frac{2}{x} + \frac{2}{3y} = \frac{1}{6} ; \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 0 \quad (2) \frac{7}{2x+1} + \frac{13}{y+2} = 27 ; \frac{13}{2x+1} + \frac{7}{y+2} = 33$$

$$(3) \frac{148}{x} + \frac{231}{y} = \frac{527}{xy} ; \frac{231}{x} + \frac{148}{y} = \frac{610}{xy} \quad (4) \frac{7x-2y}{xy} = 5 ; \frac{8x+7y}{xy} = 15$$

$$(5) \frac{1}{2(3x+4y)} + \frac{1}{5(2x-3y)} = \frac{1}{4} ; \frac{5}{(3x+4y)} - \frac{2}{(2x-3y)} = -\frac{3}{2}$$

7. નીચેના શાબ્દિક ઉદાહરણો ઉક્લો.

(1) એક દ્વિઅંકી સંખ્યા અને તેના અંકોની અદલભદલ કરીને મળતી સંખ્યા, આ બન્નેનો સરવાળો 143 છે. જે આપેલી સંખ્યામાં એકમ સ્થાનનો અંક, એ દશક સ્થાનના અંક કરતાં 3 થી મોટો હોય તો તે મૂળ સંખ્યા શોધો. જવાબ શોધવા માટે નીચે આપેલી કૃતિ પૂર્ણ કરો.

ધારોકે, એકમ સ્થાનનો અંક = x

દશક સ્થાનનો અંક = y

$$\therefore \text{મૂળ સંખ્યા} = \boxed{} y + x$$

$$\text{અંકોની અદલભદલ કરવાથી મળતી સંખ્યા} = \boxed{} x + y$$

પહેલી શરત પ્રમાણે,

$$\text{બે અંકી (મૂળ) સંખ્યા} + \text{અંકોની અદલભદલથી મળતી સંખ્યા} = 143$$

$$\boxed{10y + x} + \boxed{} = 143$$

$$\boxed{} x + \boxed{y} = 143$$

$$x + y = \boxed{} \dots \dots \text{(I)}$$

બીજી શરત પ્રમાણે,

એકમ સ્થાનનો અંક = દશક સ્થાનનો અંક + 3

$$x = \boxed{} + 3$$

$$x - y = 3 \dots \dots \text{(II)}$$

સમીકરણ (I) માં સમીકરણ (II) ઉમેરતાં,

$$2x = \boxed{16} \quad \therefore x = 8$$

$x = 8$ सभीकरण (I) मां भूक्तां,

$$x + y = 13$$

$$8 + \boxed{} = 13$$

$$\therefore y = \boxed{}$$

$$\text{मूल संख्या} = 10y + x$$

$$= \boxed{} + 8 = 58$$

(2) કાંતાબેન દુકાનમાંથી દોડ કિલોગ્રામ ચાની ભૂક્કી અને પાંચ કિગ્રા સાકર (ખાંડ) લાવ્યા. દુકાનેથી ધરે આવવા માટે 50 રૂપિયા રીક્ષાભાડું આપ્યું. આમ તેમને કુલ 700 રૂપિયા ખર્ચ થયો. પછી તેમને સમજલયું કે, આ જ વસ્તુઓ ઓનલાઈન ઓર્ડર કરી મંગાવતાં તે જ હરે ધર પહોંચ મળે છે, તેથી પછીના મહિને તેમણે 2 કિગ્રા ચાની ભૂક્કી અને 7 કિગ્રા સાકર ઓનલાઈન ઓર્ડર કરી મંગાવી, તેનો 880 રૂપિયા ખર્ચ થયો. તો ચાની ભૂક્કી અને સાકરનો પ્રતિકિલોગ્રામ હર શોધો.

(3) અનુષ્ટકા પાસે 100 રૂપિયાની x નોટો અને 50 રૂપિયાની y નોટો છે.

આનંદે, તેણીને નોટોની સંખ્યાની અદલબદલ
કરીને પૈસા આપ્યા હોત તો અનુષ્ઠા પાસેની
રકમ 500 રૂપિયા ઓછી થાત.
સમીકરણ - - - - - II

સમીકરણો ઉકેલો અને જવાબ શોધો.

100 રૂપિયાની નોટોની સંખ્યા , 50 રૂપિયાની નોટોની સંખ્યા

(4) મનિષા અને સવિતાની આજની ઉભરનો સરવાળો 31 વર્ષે છે. ત્રણ વર્ષ પહેલાં મનિષાની ઉભર, સવિતાની તે વખતની ઉભરનાં ચાર ગણા જેટલી હતી. તો બન્નેની આજની ઉભર શોધો.

(5*) એક કારખાનામાં કુશળ અને અકુશળ કામદારોને મળતી મજૂરીનો ગુણોત્તર 5:3 છે. તેમની એક કુશળ અને એક અકુશળ કામદારોની એક દિવસની કુલ મજૂરી 720 રૂપિયા છે. તો દ્વારેક કુશળ અને અકુશળ કામદારની મજૂરી કેટલી હશે?

(6) *એક સીધા રસ્તા પર A અને B એમ બે સ્થળો છે. તેના વચ્ચેનું અંતર 30 કિમી છે. હમીદ મોટર સાયકલ પર A થી B ની દિશામાં જવા માટે નીકળે છે. તે જ સમયે જોસેફ મોટર સાયકલ પર B થી A ની દિશામાં જવા માટે નીકળે છે. તે બન્ને 20 મિનિટમાં એક બીજને મળે છે. જોસેફ તે જ સમયે નીકળી વિડ્રદ્ધ દિશામાં ગયો હોત તો તે હમીદને ત્રણ કલાકે ભખ્યો હોત તો બન્નેનાં પ્રવાસનો વેગ કેટલો હતો ?



2

વર્ગસમીકરણો

ચાલો શીખીએ.

- વર્ગસમીકરણ : પરિચય
- વર્ગસમીકરણના મૂળ
- વર્ગસમીકરણ ઉક્લવાની પદ્ધતિઓ
- મૂળ અને સહગુણક વચ્ચેનો સંબંધ
- વર્ગસમીકરણોનું ઉપયોગન

યાદ કરીએ.

વિદ્યાર્�ી ભિત્રો, ધોરણ નવમાં આપણે બહુપદીનો અભ્યાસ કર્યો છે. જેમાં બહુપદીના ઘાત પરથી પડતાં પ્રકારોનો પણ અભ્યાસ કર્યો છે. એક ચલવાળી જે બહુપદીનો ઘાત 1 હોય તેને રેખિક બહુપદી અને ઘાત 2 હોય તેને વર્ગ બહુપદી કહે છે.

ઝુટિ : નીચેની બહુપદીઓનું રેખિક અને વર્ગીય બહુપદીમાં વર્ગસમીકરણ કરો.

$$5x + 9, \quad x^2 + 3x - 5, \quad 3x - 7, \quad 3x^2 - 5x, \quad 5x^2$$

રેખિક બહુપદી

વર્ગ બહુપદી

હવે આપણે વર્ગ બહુપદીની કિંમત 0 લઈને જે સમીકરણ મળે છે તેનો અભ્યાસ કરીશું. આવા સમીકરણને વર્ગસમીકરણ કહે છે. આપણે રોળંડા લુવનમાં અનેકવાર આ વર્ગસમીકરણોનો ઉપયોગ કરીએ છીએ.

ઉદા. : સકેતે 200 ચોરસ મીટર ક્ષેત્રફળનો એક લંબચોરસાકાર ભૂખંડ ખરીદ્યો. ભૂખંડની લંબાઈ, તેની પહોળાઈ કરતાં 10 મીટર વધુ હતી તો તે ભૂખંડની લંબાઈ અને પહોળાઈ કેટલી હશે ?

ઘારોકે, ભૂખંડની પહોળાઈ x મીટર છે.

$$\therefore \text{લંબાઈ} = (x + 10) \text{ મીટર}$$

$$\text{લંબચોરસાકાર ભૂખંડનું ક્ષેત્રફળ} = \text{લંબાઈ} \times \text{પહોળાઈ}$$

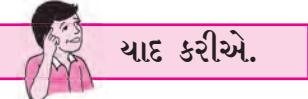
$$\therefore 200 = (x + 10) \times x$$

$$\therefore 200 = x^2 + 10x$$

$$\text{એટલે કે, } x^2 + 10x = 200$$

$$\therefore x^2 + 10x - 200 = 0$$

હવે $x^2 + 10x - 200 = 0$ આ વર્ગસમીકરણ ઉકેલીને આપણે ભૂંઢની પહોળાઈ અને લંબાઈ શોધી શકીશું.
વર્ગસમીકરણ કેવી રીતે ઉકેલાય? તેનો અભ્યાસ કરીએ.



યાદ કરીએ.

કૃતિ: $x^2 + 3x - 5, 3x^2 - 5x, 5x^2$; આ બહુપદીને ઘાતાંક રૂપમાં લખીને તેના સહગુણકો નીચેના ચોકઠામાં લખો.

$$x^2 + 3x - 5, \quad 3x^2 - 5x + 0, \quad 5x^2 + 0x + 0$$

◆ x^2 ના સહગુણકો અનુક્રમે $\boxed{1}, \boxed{3}$ અને $\boxed{5}$ છે. એટલે કે 0 નથી.

◆ x ના સહગુણકો અનુક્રમે 3, $\boxed{\quad}$ અને $\boxed{\quad}$ છે.

◆ અચળ પદ અનુક્રમે $\boxed{\quad}, \boxed{\quad}$ અને $\boxed{\quad}$ છે.

અહીં બીજુ અને ત્રીજુ બહુપદીમાં અચળ પદ 0 છે.

વર્ગસમીકરણનું સામાન્યરૂપ (Standard form of quadratic equation)



જાણી લઈએ.

જે એક ચલવાળાં સમીકરણમાં બધા ઘાતાંક પૂર્ણ સંખ્યા હોય અને ચલનો મોટામાં મોટો ઘાતાંક 2 હોય, તે સમીકરણ વર્ગસમીકરણ હોય છે.

તે સામાન્ય રૂપમાં $ax^2 + bx + c = 0$ એમ લખાય છે. અહીં a, b અને c વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે અને a શૂન્યેતર સંખ્યા છે.

$ax^2 + bx + c = 0$ આ સ્વરૂપને વર્ગસમીકરણનું સામાન્યરૂપ કહે છે.

કૃતિ: નીચેનો કોઈ પૂર્ણ કરો.

વર્ગસમીકરણ	સામાન્યરૂપ	a	b	c
$x^2 - 4 = 0$	$x^2 + 0x - 4 = 0$	1	0	-4
$y^2 = 2y - 7$
$x^2 + 2x = 0$

જીજી ગણેલાં ઉદાહરણો જીજી

ઉદા. (1) નીચેના પૈકી વર્ગસમીકરણો ક્યા તે નક્કી કરો.

$$(1) 3x^2 - 5x + 3 = 0 \quad (2) 9y^2 + 5 = 0$$

$$(3) m^3 - 5m^2 + 4 = 0 \quad (4) (l + 2)(l - 5) = 0$$

ઉકેલ: (1) $3x^2 - 5x + 3 = 0$ આમાં x એક જ ચલ છે અને ચલનો મોટામાં મોટો ઘાતાંક 2 છે.

∴ આ સમીકરણ વર્ગસમીકરણ છે.

(2) $9y^2 + 5 = 0$ આમાં $\boxed{\quad}$ ચલ છે અને ચલનો સૌથી મોટો ધાત $\boxed{\quad}$ છે.

\therefore આ સમીકરણ વર્ગસમીકરણ $\boxed{\quad}$.

(3) $m^3 - 5m^2 + 4 = 0$ આમાં એક જ ચલ હોવાં છતાં ચલનો સૌથી મોટો ધાત 2 નથી.

\therefore આ સમીકરણ વર્ગસમીકરણ $\boxed{\quad}$.

(4) $(l+2)(l-5) = 0$

$$\therefore l(l-5) + 2(l-5) = 0$$

$$\therefore l^2 - 5l + 2l - 10 = 0$$

$\therefore l^2 - 3l - 10 = 0$ આમાં $\boxed{\quad}$ એ એક જ ચલ છે અને ચલનો સૌથી મોટો ધાતાં $\boxed{\quad}$ છે.

\therefore આપેલું સમીકરણ વર્ગસમીકરણ $\boxed{\quad}$.



વર્ગસમીકરણનાં મૂળ (ઉક્તિલ, બીજ) (Roots of a quadratic equation)

આપણે પાછલાં ઘોરણમાં જેયું છે કે, x ની કિંમત a મૂકીને બહુપદીની કિંમત શૂન્ય આવતી હોય તો $(x-a)$ એ તે બહુપદીનો અવયવ હોય છે. એટલે કે, $p(x)$ આ બહુપદી માટે $p(a) = 0$ હોય તો $(x-a)$ એ $p(x)$ નો અવયવ હોય છે. આ સ્થિતિમાં a આ $p(x) = 0$ નો એક ઉક્તિલ છે અથવા a એ $p(x) = 0$ નું મૂળ (Root) છે એમ કહે છે.

દા.ત.

$$x^2 + 5x - 6 \text{ આ બહુપદીમાં } x = -6 \text{ મૂક્તાં,}$$

$$\begin{aligned} x^2 + 5x - 6 &= (-6)^2 + 5 \times (-6) - 6 \\ &= 36 - 30 - 6 = 0 \end{aligned}$$

$\therefore x = -6$ આ $x^2 + 5x - 6 = 0$ સમીકરણનો એક

ઉક્તિલ છે. એટલે કે, -6 એ $x^2 + 5x - 6 = 0$ આ સમીકરણનું એક મૂળ છે.

$$x^2 + 5x - 6 \text{ આ બહુપદીમાં } x = 2 \text{ મૂક્તાં,}$$

$$\begin{aligned} x^2 + 5x - 6 &= 2^2 + 5 \times 2 - 6 \\ &= 4 + 10 - 6 \end{aligned}$$

$$= 8 \neq 0$$

$\therefore x = 2$ એ $x^2 + 5x - 6 = 0$ આ સમીકરણનો ઉક્તિલ નથી.

ફલાફલ ગણેલું ઉદાહરણ ફલાફલ

ઉદા. $2x^2 - 7x + 6 = 0$ આ સમીકરણના (i) $x = \frac{3}{2}$ અને (ii) $x = -2$ મૂળ છે કે? તે નક્કી કરો.

ઉક્તિલ : (i) $2x^2 - 7x + 6$ આ બહુપદીમાં $x = \frac{3}{2}$ કિંમત મૂકીને બહુપદીની કિંમત શોધીએ.

$$2x^2 - 7x + 6 = 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{3}{2}\right) + 6$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \times \frac{9}{4} - \frac{21}{2} + 6 \\
 &= \frac{9}{2} - \frac{21}{2} + \frac{12}{2} = 0 \\
 \therefore \text{ આ સમીકરણનો } x &= \frac{3}{2} \text{ એ એક ઉકલ છે.}
 \end{aligned}$$

(ii) $2x^2 - 7x + 6$ આ બહુપદીમાં $x = -2$ મૂકીને બહુપદીના કિંમત શોધીએ.

$$\begin{aligned}
 2x^2 - 7x + 6 &= 2(-2)^2 - 7(-2) + 6 \\
 &= 2 \times 4 + 14 + 6 \\
 &= 28 \neq 0
 \end{aligned}$$

$\therefore x = -2$ એ $2x^2 - 7x + 6 = 0$ આ સમીકરણનો ઉકલ નથી.

કૃતિ: જો $x = 5$ એ $kx^2 - 14x - 5 = 0$ નું એક મૂળ હોય, તો k ની કિંમત શોધવા માટે નીચેની કૃતિ પૂર્ણ કરો.

ઉકલ: $kx^2 - 14x - 5 = 0$ આ વર્ગસમીકરણનું એક મૂળ $\boxed{\quad}$ છે.

$\therefore x = \boxed{\quad}$ આ કિંમત વર્ગસમીકરણમાં મૂકીએ.

$$\therefore k \boxed{\quad}^2 - 14 \boxed{\quad} - 5 = 0$$

$$\therefore 25k - 70 - 5 = 0$$

$$\therefore 25k - \boxed{\quad} = 0$$

$$\therefore 25k = \boxed{\quad}$$

$$\therefore k = \frac{\boxed{\quad}}{\boxed{\quad}} = 3$$



આ ધ્યાનમાં રાખો.

(1) $ax^2 + bx + c = 0$ આ વર્ગસમીકરણનું સામાન્યકૃપ છે. જેમાં a, b અને c વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે અને a શૂન્યેતર સંખ્યા છે.

(2) ચલની જે કિંમતોથી વર્ગસમીકરણની બન્ને બાજુઓ સમાન થાય છે. (એટલે કે, વર્ગસમીકરણનું સમાધાન થાય છે) તે કિંમતોને વર્ગસમીકરણના ઉકલ અથવા મૂળ કહે છે.

ਮਹਾਵਰਾਸੰਗ੍ਰਹ 2.1

1. કોઈપણ બે વર્ગસમીકરણો લખો.
 2. નીચેના સમીકરણો પૈકી વર્ગસમીકરણો ઓળખીને લખો.

(1) $x^2 + 5x - 2 = 0$	(2) $y^2 = 5y - 10$	(3) $y^2 + \frac{1}{y} = 2$
(4) $x + \frac{1}{x} = -2$	(5) $(m+2)(m-5) = 0$	(6) $m^3 + 3m^2 - 2 = 3m^3$
 3. નીચેના સમીકરણો $ax^2 + bx + c = 0$ ના ઢાંપમાં લખો, દરેકમાંથી a, b, c ની કિંમત લખો.

(1) $2y = 10 - y^2$	(2) $(x-1)^2 = 2x + 3$	(3) $x^2 + 5x = -(3-x)$
(4) $3m^2 = 2m^2 - 9$	(5) $p(3+6p) = -5$	(6) $x^2 - 9 = 13$
 4. વર્ગસમીકરણની સામે આપેલ ચલની કિંમતો સમીકરણના મૂળ છે કે નહીં? તે નક્કી કરો.

(1) $x^2 + 4x - 5 = 0, x = 1, -1$	(2) $2m^2 - 5m = 0, m = 2, \frac{5}{2}$
-----------------------------------	---
 5. જો $x = 3$ એ કે $kx^2 - 10x + 3 = 0$ આ સમીકરણનું એક મૂળ હોય તો, k ની કિંમત શોધો.
 6. $5m^2 + 2m + k = 0$ આ વર્ગસમીકરણનું એક મૂળ $\frac{-7}{5}$ હોય તો k ની કિંમત શોધવા માટે નીચેની ફૂતિ પૂર્ણ કરો.

ઉકિલ: $5m^2 + 2m + k = 0$ આ વર્ગસમીકરણનું એક મૂળ છે.

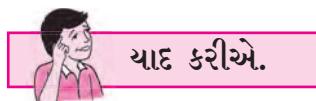
∴ $m =$ ઉપરના સમીકરણમાં મૂક્તાં.

$$\therefore 5 \times \boxed{}^2 + 2 \times \boxed{} + k = 0$$

$$\therefore \quad \boxed{} + \boxed{} + k = 0$$

$$\therefore \boxed{} + k = 0$$

$$\therefore k = \boxed{ }$$



આપણે ગયા વર્ષે બહુપદીના પ્રકરણમાં $x^2 - 4x - 5$, $2m^2 - 5m$, $a^2 - 25$ જેવી બહુપદીઓના અવયવ પાડવાની પદ્ધતિઓનો અભ્યાસ કર્યો છે. નીચેની ફૂતિ પૂર્ણ કરી તેનું પુનરાવર્તન કરીએ.

કૃતિ : નીચેની વર્ગપદ્ધીના અવયવ પાડો.

$$\begin{aligned}
 & (1) \ x^2 - 4x - 5 \\
 &= \underline{x^2 - 5x} + \underline{1x - 5} \\
 &= x(\dots) + 1(\dots) \\
 &= (\dots)(\dots)
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad 2m^2 - 5m$$

$$\begin{aligned}(3) \quad & a^2 - 25 \\&= a^2 - 5^2 \\&\equiv (\dots) (\dots)\end{aligned}$$



અવયવ પદ્ધતિથી વર્ગસમીકરણના ‘મૂળ’ શોધવા.

(Solution of a quadratic equation by factorisation)

આપણે ચલની જુદી જુદી કિમતો મૂકીને વર્ગસમીકરણના મૂળ નક્કી કર્યાં. પરંતુ આ રીતે સમય વધારે લાગે છે. તેથી આપણે આ વિભાગમાં ‘વર્ગસમીકરણના મૂળ શોધવાની ‘અવયવ પદ્ધતિ’ નો અભ્યાસ કરવાના છીએ.

$$x^2 - 4x - 5 = (x - 5)(x + 1)$$

અહીં $(x - 5)$ અને $(x + 1)$ આ વર્ગબહુપદી $x^2 - 4x - 5$ ના બે રેખિક અવયવો છે. તેથી આ બહુપદી પરથી મળતું $x^2 - 4x - 5 = 0$ આ વર્ગસમીકરણ છે. તે નીચે પ્રમાણે લખી શકાય.

$$(x - 5)(x + 1) = 0$$

જે બે સંખ્યાઓનો ગુણકાર શૂન્ય હોય તો તે બે સંખ્યાઓ પૈકી ઓછામાં ઓછી એક સંખ્યા ‘શૂન્ય’ હોય છે.

$$\therefore x - 5 = 0 \quad \text{অথবা} \quad x + 1 = 0$$

$$\therefore x = 5 \quad \text{અથવા} \quad x = -1$$

∴ આપેલા વર્ગસમીકરણનાં મૂળ 5 અને -1 છે.

આ ઉદ્ઘારણ ઉક્લતી વખતે આપણે સૌ પ્રથમ વર્ગ બહુપદીના બે રેખિક અવયવો મેળવીએ છીએ. તેથી આ પદ્ધતિને વર્ગસમીકરણ ઉક્લવાની અવયવ પદ્ધતિ કહે છે.

શાલુણ ગણેલાં ઉદાહરણો શાલુણ

ઉદા. નીચેના વર્ગસમીકરણો અવયવ પદ્ધતિથી ઉક્લો.

$$(1) \ m^2 - 14m + 13 = 0 \quad (2) \ 3x^2 - x - 10 = 0$$

$$(3) \ 3y^2 = 15y \quad (4) \ x^2 = 3 \quad (5) \ 6\sqrt{3}x^2 + 7x = \sqrt{3}$$

$$(1) \ m^2 - 14m + 13 = 0$$

$$\therefore m^2 - 13m - 1m + 13 = 0$$

$$\therefore m(m - 13) - 1(m - 13) = 0$$

$$\therefore (m - 13)(m - 1) = 0$$

$$\therefore m - 13 = 0 \text{ அதேவா } m - 1 = 0$$

$$\therefore m = 13 \text{ அதேவா } m = 1$$

∴ આપેલાં વર્ગસમીકરણના મૂળ 13 અને 1
દ્વે

$$(2) \quad 3x^2 - x - 10 = 0$$

$$\therefore 3x^2 - 6x + 5x - 10 = 0$$

$$\therefore 3x(x - 2) + 5(x - 2) = 0$$

$$\therefore (3x + 5)(x - 2) = 0$$

$$\therefore 3x + 5 = 0 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } x - 2 = 0$$

$$\therefore x = -\frac{5}{3} \text{ അതും } x = 2$$

∴ આપેલાં વર્ગસમીકરણના મૂળ $-\frac{5}{3}$ અને
2 છે.

$$(3) 3y^2 = 15y$$

$$\therefore 3y^2 - 15y = 0$$

$$\therefore 3y(y - 5) = 0$$

$$\therefore 3y = 0 \text{ અથવા } y - 5 = 0$$

$$\therefore y = 0 \text{ અથવા } y = 5$$

\therefore વર્ગસમીકરણના મૂળ 0 અને 5 છે.

$$(4) x^2 = 3$$

$$\therefore x^2 - 3 = 0$$

$$\therefore x^2 - (\sqrt{3})^2 = 0$$

$$\therefore (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore x + \sqrt{3} = 0 \text{ અથવા } x - \sqrt{3} = 0$$

$$\therefore x = -\sqrt{3} \text{ અથવા } x = \sqrt{3}$$

\therefore વર્ગસમીકરણના મૂળ $-\sqrt{3}$ અને $\sqrt{3}$ છે.

$$(5) 6\sqrt{3}x^2 + 7x = \sqrt{3}$$

$$\therefore 6\sqrt{3}x^2 + 7x - \sqrt{3} = 0$$

$$\therefore 6\sqrt{3}x^2 + 9x - 2x - \sqrt{3} = 0$$

$$\therefore 3\sqrt{3}x(2x + \sqrt{3}) - 1(2x + \sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore (2x + \sqrt{3})(3\sqrt{3}x - 1) = 0$$

$$\therefore 2x + \sqrt{3} = 0 \text{ અથવા } 3\sqrt{3}x - 1 = 0$$

$$\therefore 2x = -\sqrt{3} \text{ અથવા } 3\sqrt{3}x = 1$$

$$\therefore x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ અથવા } x = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

\therefore વર્ગસમીકરણના મૂળ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ અને $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ છે.

$$6\sqrt{3} \times -\sqrt{3} = -18$$

$$\begin{array}{c} -18 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 9 \quad -2 \end{array}$$

$$9 = 3\sqrt{3} \times \sqrt{3}$$

મહાવરાસંગ્રહ 2.2

1. નીચેના વર્ગસમીકરણો અવયવ પદ્ધતિથી ઉક્લો.

$$(1) x^2 - 15x + 54 = 0 \quad (2) x^2 + x - 20 = 0 \quad (3) 2y^2 + 27y + 13 = 0$$

$$(4) 5m^2 = 22m + 15 \quad (5) 2x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0 \quad (6) 6x - \frac{2}{x} = 1$$

(7) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ આ વર્ગસમીકરણ અવયવની રીતે ઉક્લવા માટે નીચેની ફૂતિ પૂર્ણ કરો.

ઉક્લ(7) : $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$

$$\therefore \sqrt{2}x^2 + \boxed{} + \boxed{} + 5\sqrt{2} = 0$$

$$\therefore x(\dots) + \sqrt{2}(\dots) = 0$$

$$\therefore (\dots)(x + \sqrt{2}) = 0$$

$$\therefore (\dots) = 0 \text{ અથવા } (x + \sqrt{2}) = 0$$

$$\therefore x = \boxed{\quad} \text{ અથવા } x = -\sqrt{2}$$

\therefore વર્ગસમીકરણના મૂળ $\boxed{\quad}$ અને $-\sqrt{2}$ છે.

$$(8)^* 3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0 \quad (9) 2m(m - 24) = 50$$

$$(10) 25m^2 = 9$$

$$(11) 7m^2 = 21m$$

$$(12) m^2 - 11 = 0$$



પૂર્ણ વર્ગની પદ્ધતિથી વર્ગસમીકરણ ઉક્લવા

(Solution of a quadratic equation by completing the square)

શિક્ષક : $x^2 + 10x + 2 = 0$ વર્ગસમીકરણ છે કે નહીં ?

યોગેશ : હા સર, કારણ તે $ax^2 + bx + c = 0$ રૂપમાં છે. અહીં x ચલનો મોટામાં મોટો ધાતાંક 2 છે.
 a ની કિંમત શૂન્ય નથી.

શિક્ષક : આ સમીકરણ તમે ઉક્લી શકશો કે ?

વર્ષા : ના સર, કારણ 2 ના એવા અવયવો પાડી શકાતા નથી, કે જેનો સરવાળો 10 આવે.

શિક્ષક : એટલે જ આવા ઉદાહરણો ઉક્લવા માટો જુદી રીત વાપરવી પડે છે. તે રીતે સમજ લઈએ.

સૌ પ્રથમ $x^2 + 10x$ આ પદાવલિમાં યોગ્ય પદ ઉમેરી તેને પૂર્ણ વર્ગ પદાવલિ બનાવીએ.

$$\text{જે } x^2 + 10x + k = (x + a)^2$$

$$\text{તો } x^2 + 10x + k = x^2 + 2ax + a^2$$

$$\therefore \text{સહગુણકોની તુલના કરતા, } 10 = 2a \text{ અને } k = a^2$$

$$\therefore a = 5 \text{ અને તેથી } k = a^2 = (5)^2 = 25$$

$$\text{હવે, } x^2 + 10x + 2 = (x + 5)^2 - 25 + 2 = (x + 5)^2 - 23$$

$x^2 + 10x + 2 = 0$ આ વર્ગસમીકરણ તમે ઉક્લી શકશો કે ?

રેહાના : હા સર, સમીકરણની ડાબી બાજુ બે પદોના વર્ગોની બાદબાકીના રૂપમાં હોવાથી તેના અવયવો પાડી શકારો.

$$(x + 5)^2 - (\sqrt{23})^2 = 0$$

$$\therefore (x + 5 + \sqrt{23})(x + 5 - \sqrt{23}) = 0$$

$$\therefore x + 5 + \sqrt{23} = 0 \text{ અથવા } x + 5 - \sqrt{23} = 0$$

$$\therefore x = -5 - \sqrt{23} \text{ અથવા } x = -5 + \sqrt{23}$$

હમીએ : સર, ઉક્ત કાઢવા માટે જરા જુદી રીત પણ મારા ધ્યાનમાં આવી છે.

$$(x + 5)^2 - (\sqrt{23})^2 = 0$$

$$\therefore (x + 5)^2 = (\sqrt{23})^2$$

$$\therefore x + 5 = \sqrt{23} \text{ அதை } x + 5 = -\sqrt{23}$$

$$\therefore x = -5 + \sqrt{23} \text{ அதேவீ } x = -5 - \sqrt{23}$$

દુર્ગા ગણોલાં ઉદાહરણો દુર્ગા

$$\text{ઉદ્દેશ. (1) ઉક્લો : } 5x^2 - 4x - 3 = 0$$

ઉકલ : સમીકરણમાંની વર્ગ બહુપદીનું ડ્રિપાંતર, બે વર્ગોની બાદબાકીના ડ્રિપમાં લાવવા માટે x^2 નો સહગુણક 1 કરવો સગવડ ભર્યો રહેશે. તેથી સમીકરણને 5 વઠે ભાગીએ,

$$x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{3}{5} = 0$$

எனவே, $x^2 - \frac{4}{5}x + k = (x - a)^2$ எனில் $x^2 - \frac{4}{5}x + k = x^2 - 2ax + a^2$.

$x^2 - \frac{4}{5}x$ ની તુલના $x^2 - 2ax$ સાથે કરતાં,

$$-2ax = -\frac{4}{5}x \quad \therefore a = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$$

$$k = a^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$$

$$\text{Eg, } x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{3}{5} = 0$$

$$\therefore x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{4}{25} - \frac{4}{25} - \frac{3}{5} = 0$$

$$\therefore \left(x - \frac{2}{5} \right)^2 - \left(\frac{4}{25} + \frac{3}{5} \right) = 0$$

$$\therefore \left(x - \frac{2}{5} \right)^2 - \left(\frac{19}{25} \right) = 0$$

$$\therefore \left(x - \frac{2}{5} \right)^2 = \left(\frac{19}{25} \right)$$

$$\therefore x - \frac{2}{5} = \frac{\sqrt{19}}{5} \text{ அதோடு } x - \frac{2}{5} = -\frac{\sqrt{19}}{5}$$

$$\therefore x = \frac{2}{5} + \frac{\sqrt{19}}{5} \text{ அதோடு } x = \frac{2}{5} - \frac{\sqrt{19}}{5}$$

$$\therefore x = \frac{2 + \sqrt{19}}{5} \text{ அதோடு } x = \frac{2 - \sqrt{19}}{5}$$

$$\therefore \text{વર્ગસમીકરણના મૂળ } \frac{2+\sqrt{19}}{5} \text{ અને } \frac{2-\sqrt{19}}{5} \text{ છે.}$$

સમીકરણ $x^2 + bx + c = 0$ રૂપમાં
હોય, ત્યારે
 $x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = 0$
આ રૂપમાં,
એટલે જૈદ, $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$ આ
રૂપમાં લખી શકાય છે.

ઉક્લો : $x^2 + 8x - 48 = 0$

રીત I : પૂર્ણ વર્ગ પદ્ધતિ

$$x^2 + 8x - 48 = 0$$

$$\therefore x^2 + 8x + 16 - 16 - 48 = 0$$

$$\therefore (x + 4)^2 - 64 = 0$$

$$\therefore (x + 4)^2 = 64$$

$$\therefore x + 4 = 8 \text{ અથવા } x + 4 = -8$$

$$\therefore x = 4 \text{ અથવા } x = -12$$

\therefore વર્ગસમીકરણના મૂળ 4 અને -12.

રીત II : અવયવ પદ્ધતિ

$$x^2 + 8x - 48 = 0$$

$$\therefore x^2 + 12x - 4x - 48 = 0$$

$$\therefore x(x + 12) - 4(x + 12) = 0$$

$$\therefore (x + 12)(x - 4) = 0$$

$$\therefore x + 12 = 0 \text{ અથવા } x - 4 = 0$$

$$\therefore x = -12 \text{ અથવા } x = 4$$

મહાવરાસંગ્રહ 2.3

નીચેના વર્ગસમીકરણો પૂર્ણ વર્ગ પદ્ધતિ ઉક્લો.

$$(1) x^2 + x - 20 = 0 \quad (2) x^2 + 2x - 5 = 0 \quad (3) m^2 - 5m = -3$$

$$(4) 9y^2 - 12y + 2 = 0 \quad (5) 2y^2 + 9y + 10 = 0 \quad (6) 5x^2 = 4x + 7$$



જાણી લઈએ.

વર્ગસમીકરણ ઉક્લવાનું સૂત્ર (Formula for solving a quadratic equation)

$ax^2 + bx + c$ આ રાશિને a વડે ભાગતાં ($\because a \neq 0$) $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ આ રાશિ મળે છે.

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ આ રાશિ બે વર્ગોની બાદબાકીના ઇયમાં માંડીને $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ આ વર્ગસમીકરણના એટલે જે $ax^2 + bx + c = 0$ આ વર્ગસમીકરણના મૂળ એટલે કે ઉક્લ મેળવી શકાય છે.

$$ax^2 + bx + c = 0 \dots \text{(I)}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \dots \dots \text{ બન્ને બાજુએ } a \text{ વડે ભાગતાં,}$$

$$\therefore x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\therefore \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\therefore \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \quad \therefore \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\therefore x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \text{ அதை } x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\therefore x = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \text{ அதை } x = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\therefore x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ ա�զայլ } x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

આ ઉકેલ ટૂંકમાં $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ આ રીતે લખાય છે અને તે α (આદ્ધા), β (બીટા) અક્ષરોવડે

$$\text{દર્શાવાય છે. } \therefore \alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ અને } \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \dots \dots \dots \text{ (I)}$$

$ax^2 + bx + c = 0$ આ સમીકરણમાં a, b, c ની કિંમત $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ આ રાશિમાં મૂકીને સાદું

દ્વારા આપતાં, સમીકરણના ઉકેલ મળે છે. એટલે $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ને વર્ગસમીકરણ ઉકલવાનું સૂત્ર કહે છે.

વર્ગસમીકરણના બે ઉકિલ પૈકી કોઈપણ ઉકિલ પૈકી કોઈપણ અક્ષરથી દર્શાવીએ તો પણ ચાલે.

વિધાન (I) ને બદલે $\alpha = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ અને $\beta = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ એમ પણ દર્શાવી શકાય.

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ તથા } \alpha > \beta, \quad \alpha = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ તો } \alpha < \beta \text{ એ ધ્યાનમાં રાખો.$$

ગણેલાં ઉદાહરણો

સૂત્રનો ઉપયોગ કરી નીચેના વર્ગસમીકરણા ઉકેલો.

$$\text{Ex. } (1) \quad m^2 - 14m + 13 = 0$$

$$\text{ઉક્ખા: } m^2 - 14m + 13 = 0$$

$ax^2 + bx + c = 0$ સાથે સરખાવતાં,

$$a = 1, b = -14, c = 13,$$

$$\therefore b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4 \times 1 \times 13$$

$$= 196 - 52$$

$$= 144$$

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-14) \pm \sqrt{144}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{14 \pm 12}{2}$$

$$\therefore m = \frac{14+12}{2} \text{ அதேவா } m = \frac{14-12}{2}$$

$$\therefore m = \frac{26}{2} \text{ அதேவா } m = \frac{2}{2}$$

$$\therefore m = 13 \text{ અથવા } m = 1$$

∴ વર્ગસમીકરણના મૂળ 13 અને 1 છે.

$$\text{ઉદા. (2)} \quad x^2 + 10x + 2 = 0$$

ઉક્લ : $x^2 + 10x + 2 = 0$ ને

$ax^2 + bx + c = 0$ સાથે સરખાવતાં,

$$a = 1, \quad b = 10, \quad c = 2,$$

∴

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (10)^2 - 4 \times 1 \times 2 \\ &= 100 - 8 \\ &= 92 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-10 \pm \sqrt{92}}{2 \times 1} \\ &= \frac{-10 \pm \sqrt{4 \times 23}}{2} \\ &= \frac{-10 \pm 2\sqrt{23}}{2} \\ &= \frac{2(-5 \pm \sqrt{23})}{2} \end{aligned}$$

∴

$$x = -5 \pm \sqrt{23}$$

∴

$$x = -5 + \sqrt{23} \text{ અથવા } x = -5 - \sqrt{23}$$

∴

$$\text{વર્ગસમીકરણના મૂળ } -5 + \sqrt{23} \text{ અને } -5 - \sqrt{23}$$

$$\text{ઉદા. (3)} \quad x^2 - 2x - 3 = 0$$

ઉક્લ : આપેલા સમીકરણને $ax^2 + bx + c = 0$ સાથે સરખાવતાં,

$$a = 1, \quad b = -2, \quad c = -3,$$

∴

$$b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16$$

∴

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2} \quad \text{અથવા} \quad x = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2} \\ &= \frac{2+4}{2} \quad \text{અથવા} \quad \frac{2-4}{2} \\ &= 3 \quad \text{અથવા} \quad -1 \end{aligned}$$

વધુ માહિતી માટે :

$x^2 - 2x - 3 = 0$ આ વર્ગસમીકરણ આલેખની રીતે ઉક્લ્યું છે તે સમજુ લો.

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \text{ એટલે } \therefore x^2 = 2x + 3$$

x ની જે કિંમતોથી $x^2 = 2x + 3$ આ સમીકરણનું સમાધાન થશે, તે કિંમતો આ સમીકરણના ઉકલ હશે.

$y = x^2 = 2x + 3$ ધારીએ. $y = x^2$ અને $y = 2x + 3$ આ સમીકરણોના આલેખ દોરીએ.

$$y = x^2$$

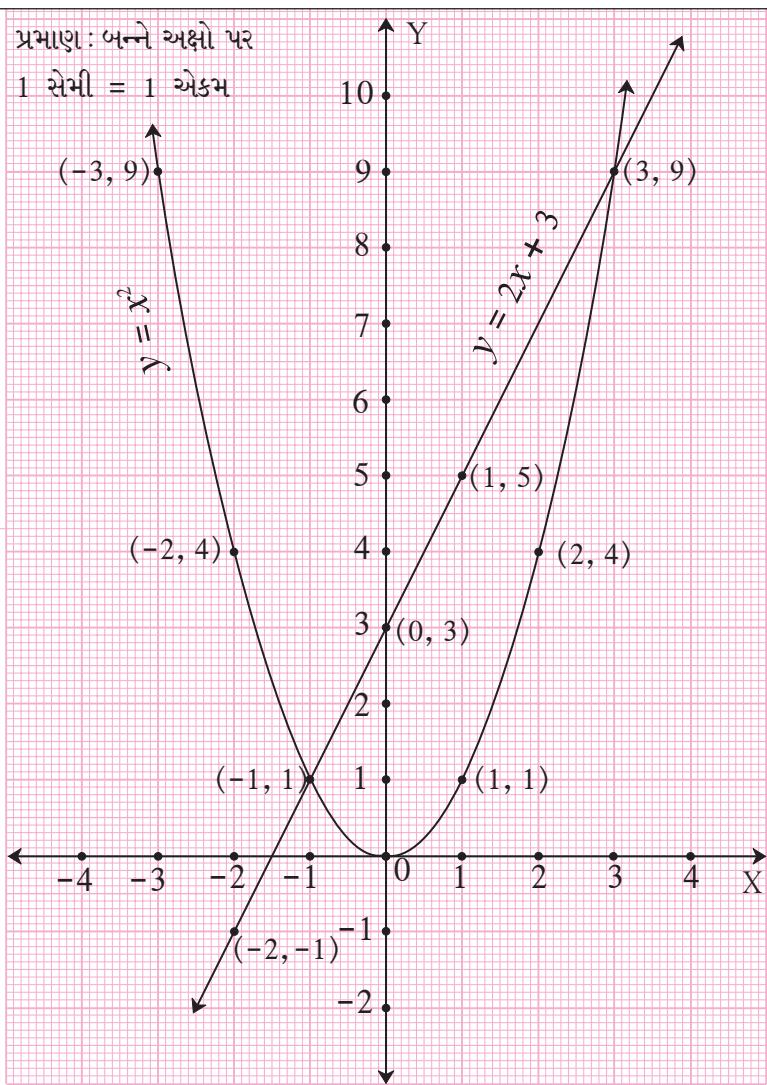
x	3	2	1	0	-1	-2	-3
y	9	4	1	0	1	4	9

$$y = 2x + 3$$

x	-1	0	1	-2
y	1	3	5	-1

પ્રમાણા : બન્ને અક્ષો પર

1 સેમી = 1 એકમ



આ બન્ને આલેખ પરસ્પર $(-1, 1)$ અને $(3, 9)$ બિંદુમાં છેદે છે.
 $\therefore x^2 = 2x + 3$ આ સમીકરણના,
એટલે કે, $x^2 - 2x - 3 = 0$ ના
બે ઉકલ $x = -1$ અથવા $x = 3$ છે.
બાજુની આકૃતિમાં $y = x^2$ અને
 $y = 2x + 3$ આ બે સમીકરણોના
આલેખ દોર્યાં છે. તેમના છેદન બિંદુઓ
 $x^2 = 2x + 3$ આ સમીકરણના એટલે
કે, $x^2 - 2x - 3 = 0$ નો ઉકલ કેવી
રીતે મળે છે ? તે સમજુ લો.

ઉદા. (4) $25x^2 + 30x + 9 = 0$

ઉક્લ : $25x^2 + 30x + 9 = 0$ ને

$ax^2 + bx + c = 0$ સાથે સરખાવતાં,

$$a = 25, b = 30, c = 9,$$

$$\therefore b^2 - 4ac = (30)^2 - 4 \times 25 \times 9 \\ = 900 - 900 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ = \frac{-30 \pm \sqrt{0}}{2 \times 25}$$

$$\therefore x = \frac{-30+0}{50} \text{ અથવા } x = \frac{-30-0}{50}$$

$$\therefore x = -\frac{30}{50} \text{ અથવા } x = -\frac{30}{50}$$

$$\therefore x = -\frac{3}{5} \text{ અથવા } x = -\frac{3}{5}$$

ધ્યાનમાં રાખો કે, $25x^2 + 30x + 9 = 0$ સમીકરણનાં બન્ને મૂળ સમાન છે.

તેમજ $25x^2 + 30x + 9 = 0$.

એટલે કે $(5x + 3)^2 = 0$ છે તે પણ ધ્યાનમાં લો.

ઉદા. (5) $x^2 + x + 5 = 0$

ઉક્લ : $x^2 + x + 5 = 0$ ને

$ax^2 + bx + c = 0$ સાથે સરખાવતાં,

$$a = 1, b = 1, c = 5,$$

$$\therefore b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 1 \times 5 \\ = 1 - 20$$

$$= -19$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ = \frac{-1 \pm \sqrt{-19}}{2 \times 1} \\ = \frac{-1 \pm \sqrt{-19}}{2}$$

પરંતુ $\sqrt{-19}$ વાસ્તવિક સંખ્યા નથી. તેથી આપેલાં વર્ગસમીકરણના મૂળ વાસ્તવિક સંખ્યા નથી.

કુટિ: $2x^2 + 13x + 15 = 0$ વર્ગસમીકરણ અવયવ પદ્ધતિથી, પૂર્ણ વર્ગ પદ્ધતિથી અને વર્ગ સૂત્ર વાપરી ઉક્લો. દરેક વખતે જવાબ સમાન જ આવે છે તે ચકાસી જુઓ.

મહાવરાસંગ્રહ 2.4

1. નીચેના વર્ગસમીકરણોની તેના સામાન્યક્રપ સાથે તુલના કરીને a, b, c ની કિંમત લખો.

$$(1) x^2 - 7x + 5 = 0 \quad (2) 2m^2 = 5m - 5 \quad (3) y^2 = 7y$$

2. નીચેના વર્ગસમીકરણો સૂત્રની મદદથી ઉક્લો.

$$(1) x^2 + 6x + 5 = 0 \quad (2) x^2 - 3x - 2 = 0 \quad (3) 3m^2 + 2m - 7 = 0$$

$$(4) 5m^2 - 4m - 2 = 0 \quad (5) y^2 + \frac{1}{3}y = 2 \quad (6) 5x^2 + 13x + 8 = 0$$

3. $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 0$ આ વર્ગસમીકરણ સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને ફ્લોર્ચાર્ટમાં આપેલી માહિતીને આધારે ઉક્લો.

୩୫

$$x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 0 \quad \checkmark$$

$ax^2 + bx + c = 0$ સાથે સરખાવીને
 a, b, c ની કિમત શોધો.

$$b^2 - 4ac \geq 0$$

કુંમત શોધી

વર्गसमीकरण

ઉક્તિલવાનું સૂત્ર લખો.

સૂત્રમાં કિંમતો

મૂકી ઉકલ
શોધો.



વર्गसमीकरणના મૂળનું સ્વરૂપ (Nature of roots of a quadratic equation)

વર્ગસમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ ના મૂળ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ છે. તે આપણે જાણીએ છીએ.

$$(1) \text{ ஜ } b^2 - 4ac = 0 \text{ என்க, த } x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} \therefore x = \frac{-b + 0}{2a} \text{ அதால் } x = \frac{-b - 0}{2a}$$

∴ વર્ગસમીકરણના મૂળ વાસ્તવિક અને સમાન હોય છે.

$$(2) \text{ जैसे } b^2 - 4ac > 0 \text{ होय, तो } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{એટલે કે, } x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ અને } x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

∴ વર્ગસમીકરણના મૂળ વાસ્તવિક અને અસમાન હોય છે.

(3) જે $b^2 - 4ac < 0$ હોય તો $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ આ વાસ્તવિક સંખ્યા નથી, એટલે કે વર્ગસમીકરણના મૂળ વાસ્તવિક નથી.

વર્ગસમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ ના મૂળનું સ્વરૂપ $b^2 - 4ac$ ની કિંમત પરથી નક્કી થાય છે.

તેથી $b^2 - 4ac$ ને વર્ગસમીકરણનો વિવેચક (discriminant) કહે છે. તેને Δ (ડેલ્ટા) ચિહ્ન વડે દર્શાવાય છે. (Δ એ ગ્રીક અક્ષર છે.)

કુન્તિ : નીચે આપેલી માહિતી પરથી ખાલી જગ્યા પૂરો.

विवेचकनी किंमत

ਮੂਲਨੁ ਸਵਤਪ

(1) 50

1

(2) -30

1

(3) 0

જીજી ગણેલાં ઉદાહરણો જીજી

ઉદા. (1) $x^2 + 10x - 7 = 0$ આ વર્ગસમીકરણમાં વિવેચકની કિંમત શોધો.

ઉક્તલ : $x^2 + 10x - 7 = 0$ ને $ax^2 + bx + c = 0$ સાથે સરખાવતાં,

$$a = 1, b = 10, c = -7,$$

$$\therefore b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \times 1 \times (-7)$$

$$= 100 + 28$$

$$= 128$$

ઉદા. (2) વિવેચકની કિંમત પરથી વર્ગસમીકરણના મૂળનું સ્વરૂપ નક્કી કરો.

(i) $2x^2 - 5x + 7 = 0$

ઉક્તલ : $2x^2 - 5x + 7 = 0$ ને

$$ax^2 + bx + c = 0$$
 સાથે સરખાવતાં,

$$a = 2, b = -5, c = 7$$

$$\therefore b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 7$$

$$\therefore \Delta = 25 - 56$$

$$= -31$$

$$\therefore b^2 - 4ac < 0$$

\therefore વર્ગસમીકરણના મૂળ વાસ્તવિક સંખ્યા નથી.

(ii) $x^2 + 2x - 9 = 0$

ઉક્તલ : $x^2 + 2x - 9 = 0$ ને

$$ax^2 + bx + c = 0$$
 સાથે સરખાવતાં,

$$a = \boxed{}, b = 2, c = \boxed{}$$

$$\therefore b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times \boxed{} \times \boxed{}$$

$$\therefore \Delta = 4 + \boxed{}$$

$$= 40$$

$$\therefore b^2 - 4ac > 0$$

\therefore વર્ગસમીકરણના મૂળ અસમાન અને વાસ્તવિક છે.

(iii) $\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0$

ઉક્તલ : $\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0$ ને

$$ax^2 + bx + c = 0$$
 સાથે સરખાવતાં,

$$\text{અહીં } a = \sqrt{3}, b = 2\sqrt{3}, c = \sqrt{3},$$

$$\therefore b^2 - 4ac = (2\sqrt{3})^2 - 4 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}$$

$$= 4 \times 3 - 4 \times 3$$

$$= 12 - 12$$

$$= 0$$

\therefore વર્ગસમીકરણના મૂળ સમાન અને વાસ્તવિક છે.



જાણી લઈએ.

વર્ગસમીકરણના મૂળ અને સહગુણકો વચ્ચેનો સંબંધ

(Relation between roots and coefficients of a quadratic equation)

જે $ax^2 + bx + c = 0$ વર્ગસમીકરણના α અને β બે મૂળ હોય તો,

તેથી

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= -\frac{2b}{2a}\end{aligned}$$

$$\therefore \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$\begin{aligned}\alpha \times \beta &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}) \times (-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{4a^2} \\ &= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \\ &= \frac{4ac}{4a^2} \\ &= \frac{c}{a}\end{aligned}$$

$$\therefore \alpha \beta = \frac{c}{a}$$

કૃતિ : આપેલાં ચોકઠામાં યોગ્ય સંખ્યા લખો.

$$10x^2 + 10x + 1 = 0 \text{ માટે } \alpha + \beta = \boxed{}$$

$$\alpha \times \beta = \boxed{}$$

દર્શાવો ગણેલાં ઉદાહરણો દર્શાવો

ઉદા. (1) α અને β એ વર્ગસમીકરણ $2x^2 + 6x - 5 = 0$ ના મૂળ છે, તો $\alpha + \beta$ અને $\alpha \times \beta$ ની કિંમત શોધો.

ઉક્તિ: $2x^2 + 6x - 5 = 0$ ને $ax^2 + bx + c = 0$ સાથે સરખાવતાં,

$$\therefore a = 2, b = 6, c = -5$$

$$\therefore \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{6}{2} = -3$$

$$\text{અને } \alpha \times \beta = \frac{c}{a} = \frac{-5}{2}$$

ઉદા. (2) $x^2 - 13x + k = 0$ આ વર્ગસમીકરણનાં મૂળ વર્યેનો તફાવત 7 છે, તો k ની કિંમત શોધો.

ઉક્લ: $x^2 - 13x + k = 0$ ને $ax^2 + bx + c = 0$ સાથે સરખાવતાં,

$$a = 1, b = -13, c = k$$

ધારો કે, α અને β એ આપેલા વર્ગસમીકરણના મૂળ છે અને $\alpha > \beta$

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{(-13)}{1} = 13 \dots \text{(I)}$$

$$\text{પરંતુ } \alpha - \beta = 7 \dots \dots \dots \text{(આખ્યું છે.) (II)}$$

$$2\alpha = 20 \dots \dots \dots \text{(સમીકરણ (I) એ (II) નો સરવાળો કરતાં)}$$

$$\therefore \alpha = 10$$

$$\therefore 10 + \beta = 13 \dots \dots \dots \text{((I) પરથી)}$$

$$\therefore \beta = 13 - 10$$

$$\therefore \beta = 3$$

$$\text{પરંતુ } \alpha \times \beta = \frac{c}{a}$$

$$\therefore 10 \times 3 = \frac{k}{1}$$

$$\therefore k = 30$$

ઉદા. (3) જે α અને β એ $x^2 + 5x - 1 = 0$ આ વર્ગસમીકરણના મૂળ હોય, તો

- (i) $\alpha^3 + \beta^3$ (ii) $\alpha^2 + \beta^2$ ની કિંમત શોધો.

ઉક્લ: $x^2 + 5x - 1 = 0$

$$\text{અહીં } a = 1, b = 5, c = -1$$

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{5}{1} = -5$$

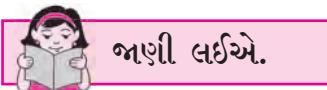
$$\alpha \times \beta = \frac{c}{a} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\begin{aligned} \text{(i) } \alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \\ &= (-5)^3 - 3 \times (-1) \times (-5) \\ &= -125 - 15 \end{aligned}$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = -140$$

$$\begin{aligned} \text{(ii) } \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= (-5)^2 - 2 \times (-1) \\ &= 25 + 2 \end{aligned}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 27$$



મૂળ આખ્યા હોય તો વર્ગસમીકરણ મેળવવું

(How to obtain a quadratic equation having given roots)

ધારોકે, α અને β એ x ચલવાળાં વર્ગસમીકરણનાં મૂળ છે.

$$\therefore x = \alpha \text{ અથવા } x = \beta$$

$$\therefore x - \alpha = 0 \text{ અથવા } x - \beta = 0$$

$$\therefore (x - \alpha)(x - \beta) = 0$$

$$\therefore x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha\beta = 0$$

$$\therefore x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

એટલે કે, α અને β મૂળ હોય તેવું વર્ગસમીકરણ

$x^2 - (\text{મૂળનો સરવાળો})x + \text{મૂળનો ગુણાકાર} = 0$ આ સૂત્ર દ્વારા મળશે.

કૃતિ (I) : મૂળોનો સરવાળો 10 અને ગુણાકાર 9 હોય તેવું વર્ગસમીકરણ લખો.

$$\text{વર્ગસમીકરણ } x^2 - \boxed{\quad}x + \boxed{\quad} = \boxed{\quad}$$

કૃતિ (II) : $\alpha = 2$ અને $\beta = 5$ મૂળ હોય તેવું વર્ગસમીકરણ કર્યું ?

$$x^2 - (\boxed{\quad} + \boxed{\quad})x + \boxed{\quad} \times \boxed{\quad} = 0$$

$$\text{એટલે કે, } x^2 + \boxed{\quad}x + \boxed{\quad} = 0$$

અનુભૂતિ ગણેલું ઉદાહરણ અનુભૂતિ

ઉદા. વર્ગસમીકરણનાં મૂળ -3 અને -7 હોય તેવું વર્ગસમીકરણ તૈયાર કરો.

ઉક્તિઃ ધારોકે, $\alpha = -3$ અને $\beta = -7$

$$\therefore \alpha + \beta = (-3) + (-7) = -10 \text{ અને } \alpha \times \beta = (-3) \times (-7) = 21$$

$$\therefore \text{મળતું વર્ગસમીકરણ, } x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

$$\therefore x^2 - (-10)x + 21 = 0$$

$$\therefore x^2 + 10x + 21 = 0$$



ધ્યાનમાં રાખીએ

(1) $ax^2 + bx + c = 0$ વર્ગસમીકરણના મૂળ α અને β હોય તો,

$$(i) \alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ અને } \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$(ii) \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \text{ અને } \alpha \times \beta = \frac{c}{a}$$

(2) $ax^2 + bx + c = 0$ આ વર્ગસમીકરણના મૂળનું સ્વરૂપ $b^2 - 4ac$ ની કિંમત પર આધારિત હોય છે.

તેથી $b^2 - 4ac$ ને વિવેચક (discriminant) કહે છે. વિવેચક Δ આ ગ્રીક ચિહ્ન વડે દર્શાવાય છે.

(3) જે $\Delta = 0$ હોય, તો વર્ગસમીકરણનાં બન્ને મૂળ સમાન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય છે.

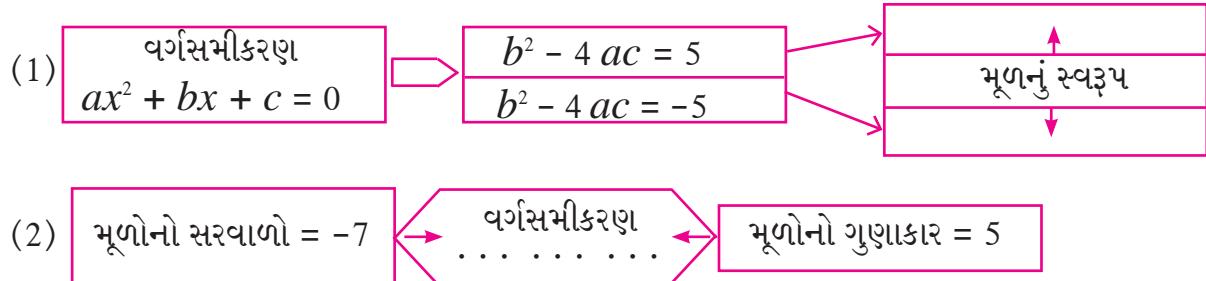
ને $\Delta > 0$ હોય, તો વર્ગસમીકરણના મૂળ બિન્ન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય છે.

જો $\Delta < 0$ હોય, તો વર્ગસમીકરણના મૂળ વાસ્તવિક સંખ્યા હોતી નથી.

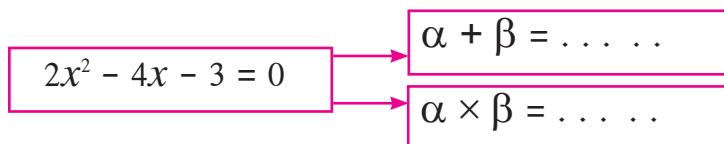
(4) જેના મૂળ α અને β હોય તેવું વર્ગસમીકરણ $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$ હોય છે.

ਮਹਾਵਰਾਸੰਗ੍ਰਹ 2.5

1. નીચેનાં ખાલી ચોકઠા પૂર્ણ કરો.



(3) જે α અને β એ આપેતાં વર્ગસમીકરણના મૂળ હોય, તો



2. નીચેનાં વર્ગસમીકરણો માટે વિવેચકની કિંમત શોધો.

$$(1) x^2 + 7x - 1 = 0 \quad (2) 2y^2 - 5y + 10 = 0 \quad (3) \sqrt{2}x^2 + 4x + 2\sqrt{2} = 0$$

3. વિવેચકની કિમત શોધી તે પરથી નીચેનાં વર્ગસમીકરણાના મૂળનું સ્વરૂપ નક્કી કરો.

$$(1) x^2 - 4x + 4 = 0 \quad (2) 2y^2 - 7y + 2 = 0 \quad (3) m^2 + 2m + 9 = 0$$

4. જે વર્ગસમીકરણના મૂળ નીચે પ્રમાણે હોય તેવા વર્ગસમીકરણ તૈયાર કરો.

(1) 0 અને 4 (2) 3 અને -10 (3) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ (4) $2-\sqrt{5}, 2+\sqrt{5}$

★ 5. $x^2 - 4kx + k + 3 = 0$ આ વર્ગસમીકરણના મૂળોનો સરવાળો, તેનાં ગુણાકારના બમણા જેટલો છે તો k ની કિંમત શોધો.

6. જે α અને β એ $y^2 - 2y - 7 = 0$ આ વર્ગસમીકરણના મૂળ હોય તો,

(1) $\alpha^2 + \beta^2$ (2) $\alpha^3 + \beta^3$ ની કિંમત શોધો.

7. નીચેના દરેક વર્ગસમીકરણના મૂળ સમાન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય તો k ની કિંમત શોધો.

(1) $3y^2 + ky + 12 = 0$ (2) $kx(x - 2) + 6 = 0$



જ્ઞાની લઈએ.

વર्गसमीकरणानु उपयोग (Application of quadratic equation)

રોજુંદા જીવનમાં અનેક પ્રશ્નોના ઉકેલ માટે વર્ગસમીકરણો ઉપયોગી થાય છે. આ બાબતનો આપણે અહીં અભ્યાસ કરવાના છીએ.

ઉદ્દા. (1) તિવસા ગામના શ્રી. રત્નાકરરાવના ખેતરમાં એક લંબઘનાકાર ‘દુંગળી ઘર’ છે. તેના તળિયાની લંબાઈ, તેની પહોળાઈ કરતાં 7 મીટર વધારે છે. અને કર્ણ તેની લંબાઈ કરતાં 1 મીટર વધારે છે. તો તે દુંગળી ઘરનાં તળિયાની લંબાઈ અને પહોળાઈ શોધો.

ઉક્લિલ: ધારોકે, લંબઘનાકાર કુંગળીધરના તળિયાની પહોળાઈ x મીટર છે.

∴ लंबाई = $(x + 7)$ मीटर, कुर्सी = $x + 7 + 1 = (x + 8)$ मीटर
पायथागोरसना प्रमेय परवर्ती,

$$x^2 + (x + 7)^2 = (x + 8)^2$$

$$x^2 + x^2 + 14x + 49 = x^2 + 16x + 64$$

$$\therefore x^2 + 14x - 16x + 49 - 64 = 0$$

$$\therefore x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$\therefore \underline{x^2 - 5x} + \underline{3x - 15} = 0$$

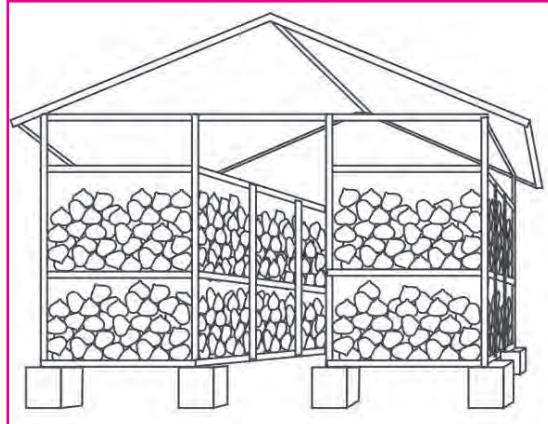
$$\therefore x(x - 5) + 3(x - 5) = 0$$

$$\therefore (x - 5)(x + 3) = 0$$

$$\therefore x - 5 = 0 \text{ அதை } x + 3 = 0$$

$$\therefore x = 5 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } x = -3$$

ਪਰਤ, ਪਛੋਣਾਈ ਅਣੇ ਨ ਹੋਯ. $\therefore x \neq -3$



ਕੁੰਗਾਣੀ ਧਰ

$$\therefore x = 5 \text{ અને } x + 7 = 5 + 7 = 12$$

∴ દુંગળીધરના તળિયાની લંબાઈ 12 મીટર અને પહોળાઈ 5 મીટર હશે.

ઉદા. (2) એક આગગાડી એક મૂલ્ય વેગથી 360 કિમી અંતર કાપે છે. પરંતુ તેનો વેગ કલાકે 5 કિમી વધારતાં તેટલું ૪ અંતર કાપવા માટે 48 મિનિટ ઓછી લાગે છે. તો ગાડીનો શક્ષાત્તનો વેગ શોધો.

ઉક્ખલાં : ઘારોકે, ગાડીનો શક્ષાત્તનો વેગ કલાકે x કિમી છે.

\therefore વેગ વધાર્યા બાદ ગાડીનો વેગ $(x + 5)$ કિમી થાય છે.

$$360 \text{ કિમી અંતર કાપવા માટે લાગતો શક્ષાત્તનો સમય} = \frac{\text{અંતર}}{\text{વેગ}} = \frac{360}{x} \text{ કલાક.}$$

$$\text{વેગ વધાર્યા બાદ તેટલું ૪ અંતર કાપવા માટે લાગતો સમય} = \frac{360}{x+5} \text{ કલાક.}$$

આપેલી શરત પ્રમાણે,

$$\frac{360}{x+5} = \frac{360}{x} - \frac{48}{60} \quad \dots \dots \quad (\because 48 \text{ મિનિટ} = \frac{48}{60} \text{ કલાક})$$

$$\therefore \frac{360}{x} - \frac{360}{x+5} = \frac{48}{60}$$

$$\therefore \frac{1}{x} - \frac{1}{x+5} = \frac{48}{60 \times 360} \quad \dots \dots \quad (\text{બન્ને બાજુને } 360 \text{ વડે ભાગતાં})$$

$$\therefore \frac{x+5-x}{x(x+5)} = \frac{4}{5 \times 360}$$

$$\therefore \frac{5}{x^2 + 5x} = \frac{1}{5 \times 90}$$

$$\therefore \frac{5}{x^2 + 5x} = \frac{1}{450}$$

$$\therefore x^2 + 5x = 2250$$

$$\therefore x^2 + 5x - 2250 = 0$$

$$\therefore \underline{x^2 + 50x} - \underline{45x - 2250} = 0$$

$$\therefore x\underline{(x + 50)} - 45 \underline{(x + 50)} = 0$$

$$\therefore (x + 50)(x - 45) = 0$$

$$\therefore x + 50 = 0 \text{ અથવા } x - 45 = 0$$

$$\therefore x = -50 \text{ અથવા } x = 45$$

પરંતુ, વેગ ઋણ ન હોય. $\therefore x \neq -50$

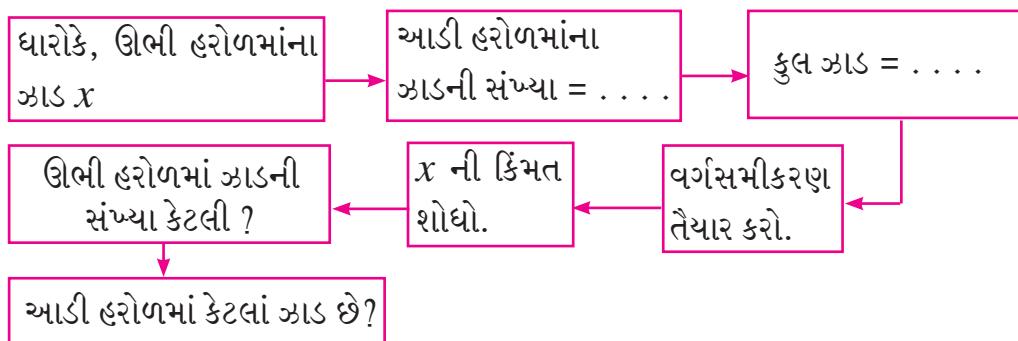
$$\therefore x = 45$$

\therefore આગગાડીની શક્ષાત્તનો વેગ કલાકે 45 કિમી હશે.

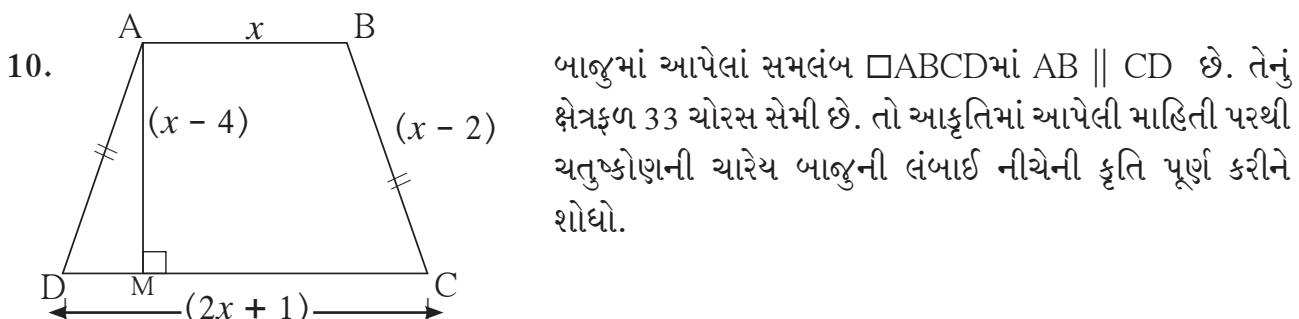
$$\begin{array}{r} -2250 \\ \swarrow +50 \quad \searrow -45 \end{array}$$

મહાવરાસંગ્રહ 2.6

- પ્રગતિની 2 વર્ષ પહેલાંની ઉંમર અને 3 વર્ષ પછીની ઉંમરનો ગુણાકાર 84 છે. તો તેની આજની ઉંમર શોધો.
- બે કભિક સમ પ્રાકૃતિક સંખ્યાના વર્ગોનો સરવાળો 244 છે, તો તે સંખ્યાઓ શોધો.
- શ્રી. મધુસૂદનના સંતરાના બાગમાં આડી હરોળમાંના જાડની સંખ્યા, ઊભી હરોળમાંના જાડની સંખ્યા કરતાં 5 વધારે છે. જે સંતરાના બાગમાં કુલ 150 જાડ છે. તો આડી અને ઊભી હરોળમાંના જાડની સંખ્યા કેટલી ? આપેલો ફલો ચાર્ટનીની મદદથી ઉદાહરણ ઉક્લો.



- વિવેક, કિશોર કરતાં 5 વર્ષ મોટો છે. તેમની બન્નેની ઉંમરના વ્યસ્તાંકનો સરવાળો $\frac{1}{6}$ છે, તો તેમની આજની ઉંમર શોધો.
- સુયશને ગણિતની પહેલી કસોટી પરીક્ષામાં મળેલાં ગુણા કરતાં, બીજી કસોટીમાં 10 ગુણા વધારે મળ્યા. બીજી કસોટીના ગુણનાં 5 ગણા એ પહેલી કસોટીમાં મળેલા ગુણના વર્ગ જેટલાં છે. તો તેને પહેલી કસોટીમાં કેટલાં ગુણ મળ્યા હશે ?
- ★ શ્રી કાસમનો માટીના વાસણો બનાવવાનો લઘુઉદ્યોગ છે. તે દરરોજ નિશ્ચિત સંખ્યામાં વાસણો બનાવે છે. દરેક વાસણનું નિર્મિતિ મૂલ્ય, દરરોજ તૈયાર થતાં વાસણોની સંખ્યાના 10 ગણા કરતાં 40 રૂપિયા વધારે છે. જે એક દિવસમાં તૈયાર થતાં વાસણોની કિંમત 600 રૂપિયા હોય તો દરેક વાસણનું નિર્મિતિ મૂલ્ય અને દરરોજ તૈયાર થતાં વાસણોની સંખ્યા શોધો.
- ★ એક નદીમાં હોડી દ્વારા પ્રવાહની વિક્રિ દિશામાં 36 કિમી. જઈને ફરી તે જ જગ્યાએ આવવા માટે પ્રતિકને 8 કલાક લાગે છે. હોડીનો શાંત પાણીમાં વેગ કલાકે 12 કિમી હોય તો નદીના પ્રવાહનો વેગ શોધો.
- ★ પિંડુને એક કામ કરવા માટે નિશ્ચુ કરતાં 6 દિવસ વધારે લાગે છે. બન્ને મળીને તે કામ 4 દિવસમાં પૂરું કરે છે. તો બન્નેને એકલા હાથે કામ પૂરું કરવા કેટલા દિવસ લાગશે ?
- 460 ને એક પ્રાકૃતિક સંખ્યા વડે ભાગતા મળતું ભાગફળ, ભાજકના 5 ગણા કરતાં 6 જેટલું વધારે છે અને શેષ 1 આવે છે તો ભાગફળ અને ભાજક શોધો.



ઉક્લ: $\square ABCD$ સમલંબ ચતુર્ભુણ છે. $AB \parallel CD$

$$A(\square ABCD) = \frac{1}{2}(AB + CD) \times \boxed{}$$

$$\therefore 33 = \frac{1}{2} (x + 2x + 1) \times \boxed{}$$

$$\therefore \boxed{} = (3x + 1) \times \boxed{}$$

$$\therefore 3x^2 + \boxed{} - \boxed{} = 0$$

$$\therefore 3x(\dots) + 10(\dots) = 0$$

$$\therefore (3x + 10)(\text{---}) = 0$$

$$\therefore (3x + 10) = 0 \text{ અથવા } \boxed{\quad} = 0$$

$$\therefore x = -\frac{10}{3} \text{ അതായി } x = \boxed{}$$

પરંતુ, લંબાઈ ઝાણ ન હોય.

$$\therefore x \neq -\frac{10}{3} \quad \therefore x = \boxed{}$$

$$AB = \text{---}, CD = \text{---}, AD = BC = \text{---}$$

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 2

- ## 1. નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ માટે યોગ્ય પર્યાય પસંદ કરો.

(1) નીચેના પૈકી વર્ગસમીકરણ ક્યથું છે ?

(A) $\frac{5}{x} - 3 = x^2$ (B) $x(x + 5) = 2$ (C) $n - 1 = 2n$ (D) $\frac{1}{x^2}(x + 2) = x$

(2) નીચેના પૈકી કયું વર્ગસમીકરણ નથી ?

(A) $x^2 + 4x = 11 + x^2$ (B) $x^2 = 4x$ (C) $5x^2 = 90$ (D) $2x - x^2 = x^2 + 5$

(3) $x^2 + kx + k = 0$ નું મૂળ વાસ્તવિક અને સમાન હોય, તો k ની કિમત નીચેનામાંથી કઈ?

(A) -5 (B) 17 (C) $\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2} - 5$

(5) નીચેનાં પૈકી ક્યા વર્ગસમીકરણનાં મૂળ 3 અને 5 છે ?

(A) $x^2 - 15x + 8 = 0$ (B) $x^2 - 8x + 15 = 0$

(6) નીચેના પૈકી કયા સમીકરણના મૂળોનો સરવાળો - 5 છે ?

$$(A) 3x^2 - 15x + 3 = 0 \quad (B) x^2 - 5x + 3 = 0$$

(7) $\sqrt{5}m^2 - \sqrt{5}m + \sqrt{5} = 0$ ને નીચેના પૈકી ક્યથું વિધાન લાગુ પડે છે ?

(A) મૂળ વાસ્તવિક અને અસમાન (B) મૂળ વાસ્તવિક અને સમાન

(C) મૂળ વાસ્તવિક સંખ્યા નથી. (D) ત્રણ મૂળ

(8) $x^2 + mx - 5 = 0$ આ વર્ગસમીકરણનું એક મૂળ 2 છે, તો m ની કિંમત નીચેનામાંથી કઈ?

2. નીચેના પૈકી વર્ગસમીકરણો ઓળખો.

(1) $m^2 + 2m + 11 = 0$ (2) $x^2 - 2x + 5 = x^2$ (3) $(x + 2)^2 = 2x^2$

3. નીચેના દરેક વર્ગસમીકરણ માટે વિવેચકની કિંમત શોધો.

(1) $2y^2 - y + 2 = 0$ (2) $5m^2 - m = 0$ (3) $\sqrt{5}x^2 - x - \sqrt{5} = 0$

4. $2x^2 + kx - 2 = 0$ આ વર્ગસમીકરણનું એક મૂળ -2 છે તો k ની કિંમત શોધો.

5. નીચેના મૂળ હોય, એવા વર્ગસમીકરણ તૈયાર કરો.

(1) 10 અને -10 (2) $1-3\sqrt{5}$ અને $1+3\sqrt{5}$ (3) 0 અને 7

6. નીચેના વર્ગસમીકરણનાં મૂળનું સ્વરૂપ નક્કી કરો.

(1) $3x^2 - 5x + 7 = 0$ (2) $\sqrt{3}x^2 + \sqrt{2}x - 2\sqrt{3} = 0$ (3) $m^2 - 2m + 1 = 0$

7. નીચેનાં વર્ગસમીકરણો ઉકલો.

(1) $\frac{1}{x+5} = \frac{1}{x^2}$ ($x \neq 0, x + 5 \neq 0$) (2) $x^2 - \frac{3x}{10} - \frac{1}{10} = 0$ (3) $(2x + 3)^2 = 25$

(4) $m^2 + 5m + 5 = 0$ (5) $5m^2 + 2m + 1 = 0$ (6) $x^2 - 4x - 3 = 0$

8.★ $(m - 12)x^2 + 2(m - 12)x + 2 = 0$ આ વર્ગસમીકરણના મૂળ વાસ્તવિક અને સમાન હોય, તો m ની કિંમત શોધો.

9. એક વર્ગસમીકરણના બે મૂળનો સરવાળો 5 અને મૂળના ઘનનો સરવાળો 35 હોય, તો તે વર્ગસમીકરણ શોધો.

10.★ એવું વર્ગસમીકરણ તૈયાર કરો કે જેના મૂળ $2x^2 + 2(p + q)x + p^2 + q^2 = 0$ આ વર્ગસમીકરણનાં મૂળના સરવાળાનો વર્ગ અને બાદબાકીનો વર્ગ હોય.

11. મુકુંદ પાસે સાગર કરતાં 50 રૂપિયા વધારે છે. તેમનાં પાસેની રકમનો ગુણાકાર 15000 છે તો દરેક પાસે કેટલી રકમ હશે ?

12.★ બે સંખ્યાના વર્ગોનો તફાવત 120 છે. નાની સંખ્યાનો વર્ગ, એ મોટી સંખ્યા કરતાં બમણો છે, તો તે સંખ્યાઓ શોધો.

13. રંજનના જન્મદિવસ નિમિત્તે 540 સંતરા કેટલાંક વિદ્યાર્થીઓ વચ્ચે સમાન રીતે વહેંચવાના છે. જે 30 વિદ્યાર્થીઓ વધારે હોત તો દરેક ત્રણ સંતરા ઓછાં ભષ્યા હોત. તો વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા તે શોધો.

14.★ તળવેલ ગામના ખેડૂત શ્રી દિનેશના લંબચોરસાકાર ખેતરની લંબાઈ, તેની પહોળાઈના બમણા કરતાં 10 મીટર વધારે છે. તેમણે તેમનાં ખેતરમાં વરસાદના પાણીનો સંગ્રહ કરવા માટે ખેતરની પહોળાઈના $\frac{1}{3}$ ગણી બાજુ હોય તેવા ચોરસાકૃતિ તળાવનું નિર્માણ કર્યું. જેથી મૂળ ખેતરનું ક્ષેત્રફળ, તળાવના ક્ષેત્રફળ કરતાં 20 ગણું થાય છે. તો ખતરની લંબાઈ, પહોળાઈ અને તળાવની બાજુની લંબાઈ શોધો.

15.★ એક ટાંકી બે નળની મદદથી 2 કલાકમાં પૂર્ણ ભરાય છે. તે પૈકી ફક્ત નાના નળથી ટાંકી ભરાવા માટે લાગતો સમય, મોટાં નળથી ટાંકી ભરાવા માટે લાગતા સમય કરતાં ત્રણ કલાક વધારે હોય છે. તો દરેક નળ વડે ટાંકી ભરતાં કેટલો સમય લાગે છે ? □□□



3

અંકગણિત શ્રેઢી



ચાલો શીખીએ.

- શ્રેણી (કમિકા)
- અંકગણિત શ્રેઢી
- અંકગણિત શ્રેઢીનું n મું પદ
- અંકગણિત શ્રેઢીના n પદોનો સરવાળો.



જાણી લઈએ.

શ્રેણી (કમિકા) (Sequence)

આપણે 1, 2, 3, 4, ... આ સંખ્યાઓ કમસર લખીએ છીએ. આ સંખ્યા શ્રેણી છે. આ સંખ્યા શ્રેણીમાંની કોઈપણ સંખ્યા કેટલામા સ્થાને છે તે આપણે કહી શકીએ છીએ. જેમકે 13 આ સંખ્યા 13 મા સ્થાને છે. સંખ્યાની બીજી શ્રેણી 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ... જુઓ. આ સંખ્યાઓ વિશિષ્ટ કમમાં લખેલી છે. અહીં $16 = 4^2$ આ સંખ્યા ચોથા કમાંકે છે. તો $25 = 5^2$ આ સંખ્યા પાંચમા સ્થાને છે. $49 = 7^2$ આ સંખ્યા સાતમા સ્થાને છે. આ સંખ્યા શ્રેણીમાંની કોઈપણ સંખ્યા કેટલામા સ્થાને છે, તે કહી શકાય છે.

જે ગણમાંની પ્રાકૃતિક સંખ્યાના પ્રમાણે વિશિષ્ટ કમસર માર્ગેલી હોય, એવી સંખ્યાના સમૂહને ‘શ્રેણી’ અથવા ‘કમિકા’ કહે છે.

કમિકામાં વિશિષ્ટ સ્થાને વિશિષ્ટ સંખ્યા લખેલી હોય છે. તે સંખ્યાઓ $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$ એમ કમસર દર્શાવીએ તો a_1 એ પહેલી, a_2 એ બીજી ... એ પ્રમાણે a_n એ n મી સંખ્યા છે તે સ્પષ્ટ થાય છે. સંખ્યા શ્રેણી $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ એવા અક્ષરો વડે દર્શાવાય છે. તેમાં નિશ્ચિત કમે સંખ્યાઓ લખી છે તે સમજાય છે.

એકાદ વર્ગના વિદ્યાર્થીઓ કવાયત માટે મેહાન પર ગયા પછી એક લાઈનમાં ઊભાં રહે છે. તેમનો કમ નિશ્ચિત હોય, ત્યારે તેમની કમિકા તૈયાર થાય છે. કેટલીક શ્રેણીમાં વિશિષ્ટ આકૃતિબંધ (Pattern) હોય છે તે આપણે અનુભવ્યું છે.

કૃતિ : નીચેનો આકૃતિબંધ પૂર્ણ કરો.

આકૃતિબંધ	○	○○	○○○	○○○○					
વર્તુળોની સંખ્યા	1	3	5	7					

આફ્ટિબંધ	$\Delta\Delta$ Δ $\Delta\Delta$	$\Delta\Delta\Delta$ Δ Δ $\Delta\Delta\Delta$	$\Delta\Delta\Delta\Delta$ Δ Δ Δ $\Delta\Delta\Delta\Delta$				
ત્રિકોણાની સંખ્યા	5	8	11				

સંખ્યાનો તૈયાર થયેલો આફ્ટિ બંધ જુઓ. આગલી સંખ્યા પરથી પછીની સંખ્યા મેળવવાનો નિયમ શોધો. આ નિયમ પરથી પછીની બધી સંખ્યાઓ લખી શકાય છે.

આપેલી સંખ્યા શ્રેણી જુઓ. 2, 11, -6, 0, 5, -37, 8, 2, 61

અહીં $a_1 = 2, a_2 = 11, a_3 = -6, \dots$ આ સંખ્યાની યાદી પણ શ્રેણી જ છે. પરંતુ વિશિષ્ટ પદો તે સ્થાને કેમ છે ? તે કહી શકતું નથી. તેમજ કમવાર આવતાં પદો વચ્ચે કયો સંબંધ છે, એ ચોક્કસપણે કહી શકતું નથી.

સામાન્ય રીતે જે શ્રેણીમાં પછીના પદ નક્કી કરવા માટેનો નિયમ હોય તેવી જ શ્રેણીઓનો વિચાર કરી શકાય છે.

ઉદ્દેશ. (1) 4, 8, 12, 16, ... (2) 2, 4, 8, 16, 32, ...

(3) $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{20}, \dots$

શ્રેણીમાંના પદો (Terms in a sequence)

શ્રેણીમાંના કમસર આવતાં પદો $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n, \dots$ આ પ્રકારે દર્શાવવામાં આવે છે. સામાન્ય રીતે આ શ્રેણી ટૂંકમાં $\{t_n\}$ એમ લખાય છે. શ્રેણી અનંત હોય, તો પ્રત્યેક ઘન પૂર્ણાંક n , સાથે સંબંધિત એક સંખ્યા હોય છે તેમ માનવામાં આવે છે.

કૃતિ I: નીચેની શ્રેણી જુઓ. તેમાંના પદના કમાંક t_1, t_2, t_3, \dots વડે દર્શાવો.

(1) 9, 15, 21, 27, ... અહીં $t_1 = 9, t_2 = 15, t_3 = 21, \dots$

(2) 7, 7, 7, 7, ... અહીં $t_1 = 7, t_2 = \boxed{}, t_3 = \boxed{}, \dots$

(3) -2, -6, -10, -14, ... અહીં $t_1 = -2, t_2 = \boxed{}, t_3 = \boxed{}, \dots$

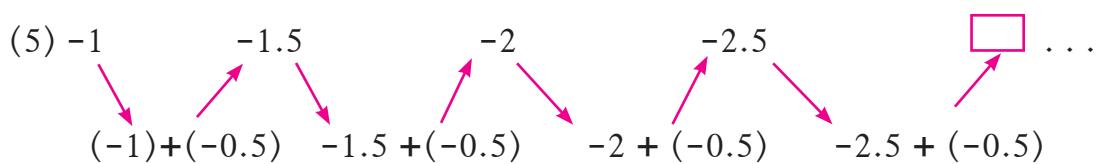
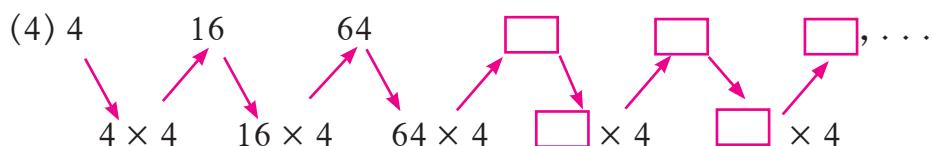
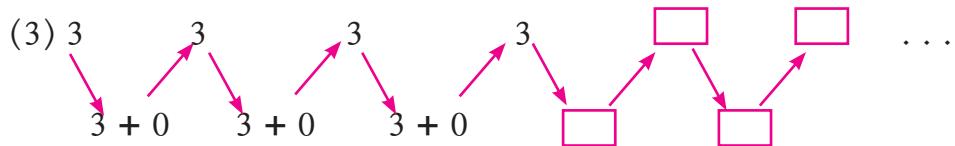
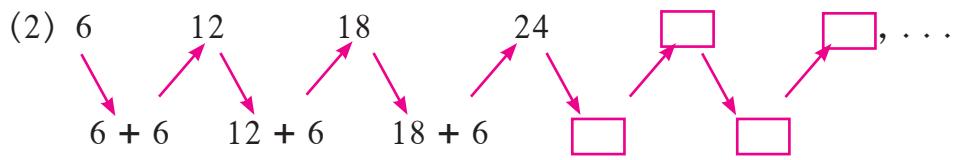
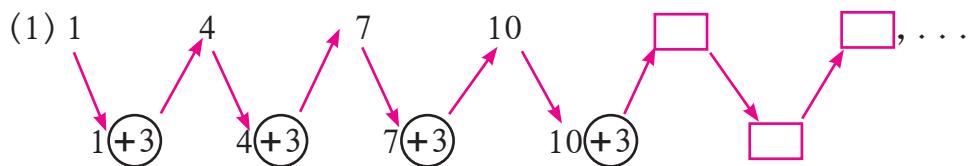
કૃતિ II : નીચે કેટલીક સંખ્યાશ્રેણી આપી છે. તેના આપેલાં પદોમાં કોઈ નિયમ ભળી આવે છે કે ? બે શ્રેણીઓ વચ્ચે સમાનતા શોધો.

શ્રેણીઓના પદોમાં કોઈ નિયમ ભળી આવે છે કે ? તે શોધવા માટે નીચે આપેલી માંડળી જુઓ અને ખાલી ચોકઠાંમાં યોગ્ય સંખ્યા લખો.

(1) 1, 4, 7, 10, 13, ... (2) 6, 12, 18, 24, ... (3) 3, 3, 3, 3, ...

(4) 4, 16, 64, ... (5) -1, -1.5, -2, -2.5, ... (6) $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, \dots$

આ શ્રેણીના પદોવચ્ચેનો સંબંધ શોધીએ. તે માટે કરેલો વિચાર જુઓ.



(6) $1^3, 2^3, 3^3, \dots$

અહીં કમિકા (1), (2), (3), (5) માં આગતાં પદમાં નિશ્ચિત સંખ્યા ઉમેરતાં તરત જ પછીનું પદ મળે છે, એ સમાનતા છે. આ પ્રકારની શ્રેણીને ‘અંકગણિત શ્રેઢી’ કહે છે.

ઉપરના શ્રેણી (4) અંકગણિત શ્રેઢી નથી. કારણ અહીં આગળના પદને નિશ્ચિત સંખ્યા વડે ગુણવાથી પછીનું પદ મળે છે. આવી શ્રેણીને ભૌમિતિક શ્રેઢી (Geometric Progression) કહે છે.

ઉપરના શ્રેણી (6) અંકગણિત શ્રેઢી નથી તેમજ ભૌમિતિક શ્રેઢી પણ નથી.

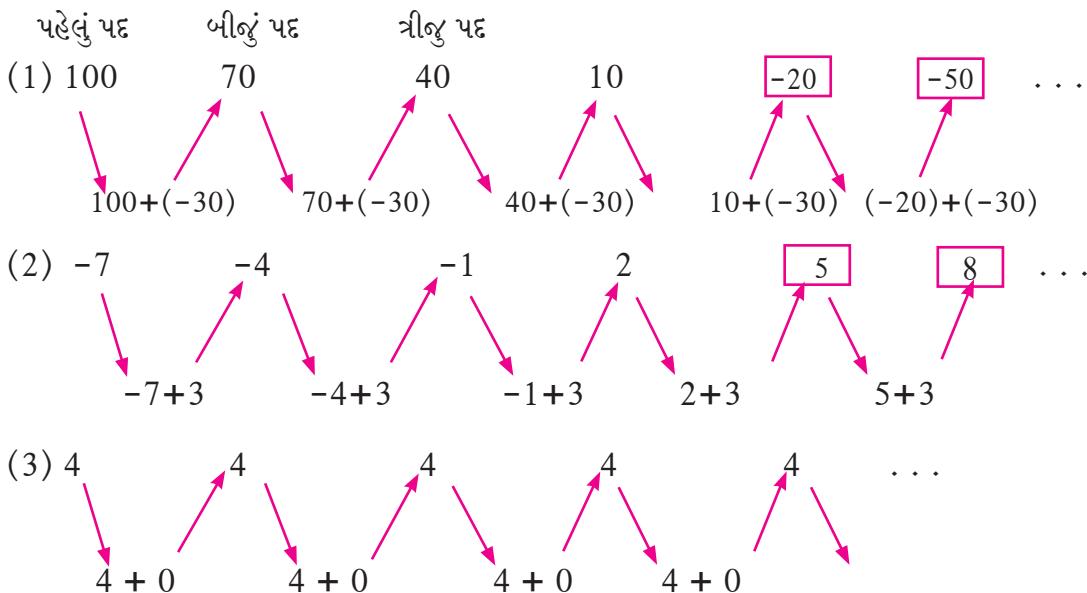
આ વર્ષે આપણે અંકગણિત શ્રેઢીનો જ અભ્યાસ કરવાના છીએ.

અંકગણિત શ્રેઢી (Arithmetic Progression)

નીચે આપેલી શ્રેણીમાં આવતાં પછીના ત્રણ પદો લખો.

- (1) 100, 70, 40, 10, ... (2) -7, -4, -1, 2, ... (3) 4, 4, 4, ...

આપેલી શ્રેણીના આગળના પદો શોધવા માટે શું કર્યું છે ? તે જુઓ.



ઉપરની સંખ્યાની દરેક યાદીમાં, દરેક પદ તેની આગતી સંખ્યામાં વિશિષ્ટ સંખ્યા ઉમેરવાથી તૈયાર થયું છે.

બે કુમાગત પદો વચ્ચેનો તફાવત અચળ છે.

ઉદ્દ. (1) માં તફાવત ઝાણ સંખ્યા, (2) માં તફાવત ધન સંખ્યા અને (3) માં તફાવત 0 છે.

કુમસર આવતાં પદો વચ્ચેનો તફાવત ‘અચળ’ હોય તો તેને ‘સામાન્ય તફાવત’ (Common difference) કહે છે. જે d વડે દર્શાવાય છે.

આપેલી શ્રેણીમાં કોઈપણ બે કુમાગત પદો વચ્ચેનો તફાવત $(t_{n+1} - t_n)$ અચળ હોય તો તેવી શ્રેણીને ‘અંકગણિત શ્રેઢી’ કહે છે. આ શ્રેઢીમાં $t_{n+1} - t_n = d$ આ સામાન્ય તફાવત છે.

અંકગણિત શ્રેઢીનું પ્રથમ પદ a અને સામાન્ય તફાવત d હોય

તો $t_1 = a$, $t_2 = a + d$, $t_3 = (a + d) + d = a + 2d$

આમ પહેલું પદ a અને સામાન્ય તફાવત d હોય તેવી અંકગણિત શ્રેઢી

$a, (a + d), (a + 2d), (a + 3d), \dots$ હોય છે.

અંકગણિત શ્રેઢી સંબંધિત કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

(1) અરિફા દર મહિને 100 ડિપિયાની બચત કરે છે. એક વર્ષના દરેક મહિનાને અંતે તેની કુલ બચત નીચે પ્રમાણે થશે.

મહિનો	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
બચત (₹)	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200

દરેક મહિનાની કુલ બચત દર્શાવતી સંખ્યા ‘અંકગણિત શ્રેઢી’ છે.

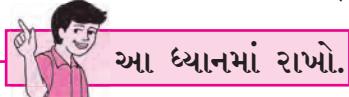
(2) પ્રાણવે તેના મિત્ર પાસેથી 10000 રૂપિયા ઉછીના લીધા અને દર મહિને 1000 રૂપિયા પ્રમાણો ચૂકવવાનું નક્કી કર્યું. તો દરેક મહિનામાં ચૂકવવાની બાકી રહેલી રકમ નીચે પ્રમાણો છે.

મહિનાનો રકમ	1	2	3	4	5
ચૂકવવાની બાકી રકમ રૂ	10,000	9,000	8,000	7,000	2,000	1,000	0

(3) 5 નો ઘડિયો, એટલે 5 વડે વિભાજ્ય સંખ્યાઓ જુઓ.

5, 10, 15, 20, ... 50, 55, 60, ... આ અંકગણિત શ્રેઢી છે.

ઉપર(1) અને(2) માંની અંકગણિત શ્રેઢી સાન્ત શ્રેઢી છે. જ્યારે (3) માંની અંકગણિત શ્રેઢી અનંત શ્રેઢી છે.



- (1) જો શ્રેણીમાં $(t_{n+1} - t_n)$ આ તફાવત અચળ હોય તો તે શ્રેણીને અંકગણિત શ્રેઢી (A.P.) કહે છે.
- (2) અંકગણિત શ્રેઢીના બે ક્રમાગત (કમિક) પદો વચ્ચેના ‘સામાન્ય તફાવત’ d વડે દર્શાવાય છે.
- (3) d ની કિમત ધન, ઋણ કે શૂન્ય હોઈ શકે છે.
- (4) અંકગણિત શ્રેઢીનું પ્રથમ પદ a અને સામાન્ય તફાવત d હોય તો તે શ્રેઢીના પદો $a, (a+d), (a+2d), \dots$ હોય છે.

કૃતિ: સાન્ત અંકગણિત શ્રેઢી અને અનંત અંકગણિત શ્રેઢીનું એક-એક ઉદાહરણ આપો.

જીજી ગણેલાં ઉદાહરણો જીજી

ઉદા. (1) નીચેના પૈકી કઈ શ્રેણી અંકગણિત શ્રેઢી છે તે ઓળખો. જો શ્રેઢી હોય તો તેના પદીના (આગળનાં) બે પદો શોધો.

- | | |
|-----------------------------|--|
| (i) 5, 12, 19, 26, ... | (ii) 2, -2, -6, -10, ... |
| (iii) 1, 1, 2, 2, 3, 3, ... | (iv) $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \dots$ |

ઉકલ: (i) 5, 12, 19, 26, ... આ શ્રેણીમાં,

$$\text{પ્રથમ પદ} = t_1 = 5, \quad t_2 = 12, \quad t_3 = 19, \dots$$

$$t_2 - t_1 = 12 - 5 = 7$$

$$t_3 - t_2 = 19 - 12 = 7$$

અહીં પ્રથમ પદ = 5 અને સામાન્ય તફાવત = $d = 7$ છે. તે અચળ છે.

∴ આ શ્રેણી અંકગણિત શ્રેઢી છે. તેના પદીના બે પદો

$$26 + 7 = 33, \quad 33 + 7 = 40.$$

અહીં 33 અને 40 એ આપેલી શ્રેઢીના પદીના બે પદો છે.

(ii) $2, -2, -6, -10, \dots$ આ શ્રેણીમાં,

$$t_1 = 2, \quad t_2 = -2, \quad t_3 = -6, \quad t_4 = -10 \dots$$

$$t_2 - t_1 = -2 - 2 = -4$$

$$t_3 - t_2 = -6 - (-2) = -6 + 2 = -4$$

$$t_4 - t_3 = -10 - (-6) = -10 + 6 = -4$$

આથી બે કભિક પદો વચ્ચેનો તફાવત, એટલે $t_{n+1} - t_n = -4$ છે. $\therefore d = -4$ એ સામાન્ય તફાવત છે.

જે અચળ છે. \therefore આ આપેલી શ્રેણી અંકગણિત શ્રેઢી છે.

આ શ્રેઢીના પછીના બે પદો $(-10) + (-4) = -14$ અને $(-14) + (-4) = -18$ છે.

(iii) $1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots$ આ શ્રેણીમાં,

$$t_1 = 1, \quad t_2 = 1, \quad t_3 = 2, \quad t_4 = 2, \quad t_5 = 3, \quad t_6 = 3 \dots$$

$$t_2 - t_1 = 1 - 1 = 0, \quad t_3 - t_2 = 2 - 1 = 1$$

$$t_4 - t_3 = 2 - 2 = 0, \quad t_3 - t_2 \neq t_2 - t_1$$

આ શ્રેણીમાં કભિક આવતાં બે પદો વચ્ચેનો તફાવત અચળ નથી. \therefore આપેલી શ્રેણી અંકગણિત શ્રેઢી નથી.

(iv) $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \dots$ આ શ્રેણીમાં,

$$t_1 = \frac{3}{2}, \quad t_2 = \frac{1}{2}, \quad t_3 = -\frac{1}{2}, \quad t_4 = -\frac{3}{2}$$

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{2}{2} = -1$$

$$t_3 - t_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{2}{2} = -1$$

$$t_4 - t_3 = -\frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{2}{2} = -1$$

અહીં સામાન્ય તફાવત $d = -1$ અચળ છે.

\therefore આપેલી શ્રેણી અંકગણિત શ્રેઢી છે.

તેનાં પછીના બે પદો શોધીએ.

$$-\frac{3}{2} - 1 = -\frac{5}{2}, \quad -\frac{5}{2} - 1 = -\frac{7}{2}$$

\therefore પછીના બે પદો $-\frac{5}{2}$ અને $-\frac{7}{2}$ છે.

ઉદા. (2) નીચે પ્રથમ પદ a અને સામાન્ય તફાવત d આપેલાં છે. તે પરથી પ્રથમ ચાર પદ શોધીને અંકગણિત શ્રેઢી લખો.

(i) $a = -3, d = 4$

(iii) $a = -1, d = -\frac{1}{2}$

ઉક્ખા : (i) $a = -3, d = 4$ પરથી,

$$a = t_1 = -3$$

$$t_2 = t_1 + d = -3 + 4 = 1$$

$$t_3 = t_2 + d = 1 + 4 = 5$$

$$t_4 = t_3 + d = 5 + 4 = 9$$

\therefore અંકગણિત શ્રેઢી $-3, 1, 5, 9, \dots$

(iii) $a = -1, d = -\frac{1}{2}$

$$a = t_1 = -1$$

$$t_2 = t_1 + d = -1 + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

$$t_3 = t_2 + d = -\frac{3}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{4}{2} = -2$$

$$t_4 = t_3 + d = -2 + \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$$

\therefore અંકગણિત શ્રેઢી $-1, -\frac{3}{2}, -2, -\frac{5}{2}, \dots$

(ii) $a = 200, d = 7$

(iv) $a = 8, d = -5$

(ii) $a = 200, d = 7$

$$a = t_1 = 200$$

$$t_2 = t_1 + d = 200 + 7 = 207$$

$$t_3 = t_2 + d = 207 + 7 = 214$$

$$t_4 = t_3 + d = 214 + 7 = 221$$

\therefore અંકગણિત શ્રેઢી $200, 207, 214, 221, \dots$

(iv) $a = 8, d = -5$

$$a = t_1 = 8$$

$$t_2 = t_1 + d = 8 + (-5) = 3$$

$$t_3 = t_2 + d = 3 + (-5) = -2$$

$$t_4 = t_3 + d = -2 + (-5) = -7$$

\therefore અંકગણિત શ્રેઢી $8, 3, -2, -7, \dots$

મહાવરાસંગ્રહ 3.1

1. નીચેના પૈકી કયા શ્રેણી અંકગણિત શ્રેઢી છે ? જે અંકગણિત શ્રેઢી હોય તેનો સામાન્ય તફાવત d શોધો.

(1) $2, 4, 6, 8, \dots$ (2) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \dots$ (3) $-10, -6, -2, 2, \dots$

(4) $0.3, 0.33, .0333, \dots$ (5) $0, -4, -8, -12, \dots$ (6) $-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \dots$

(7) $3, 3 + \sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}, 3 + 3\sqrt{2}, \dots$ (8) $127, 132, 137, \dots$

2. નીચે અંકગણિત શ્રેઢીનું ‘પ્રથમ પદ a ’ અને ‘સામાન્ય તફાવત d ’ આપેલાં છે તે પરથી અંકગણિત શ્રેઢી લખો.

(1) $a = 10, d = 5$ (2) $a = -3, d = 0$ (3) $a = -7, d = \frac{1}{2}$

(4) $a = -1.25, d = 3$ (5) $a = 6, d = -3$ (6) $a = -19, d = -4$

3. નીચેની દરેક અંકગણિત શ્રેઢી માટે પ્રથમ પદ અને સામાન્ય તફાવત શોધો.

- (1) $5, 1, -3, -7, \dots$
 (3) $127, 135, 143, 151, \dots$

- (2) $0.6, 0.9, 1.2, 1.5, \dots$
 (4) $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \dots$



- $5, 8, 11, 14, \dots$ આ અંકગણિત શ્રેઢી છે કે ? જે હોય તો તેનું 100 મું પદ શોધો.
 આ શ્રેઢીમાં 92 હશે કે ? 61 હશે કે ?



અંકગણિત શ્રેઢીનું n મું પદ (n^{th} term of an A. P.)

$5, 8, 11, 14, \dots$ આ શ્રેણીમાં બે કભિક પદો વર્ચ્યેનો તફાવત 3 છે તેથી તે શ્રેણી અંકગણિત શ્રેઢી છે.
 અહીં પ્રથમ પદ 5 છે. 5 માં 3 ઉમરતાં 8 એ બીજું પદ મળે છે. આ રીતે 100 મું પદ મેળવવા માટે શું કરવું પડશો ?

$$\begin{array}{lll} \text{પહેલું પદ} & \text{બીજું પદ} & \text{ત્રીજું પદ} \\ \text{સંખ્યા } 5, & 5 + 3 = 8, & 8 + 3 = 11, \dots \end{array}$$

આ રીતે 100 મું પદ શોધવા ઘણો સમય જોઈશે. તે માટે સૂત્ર મળે છે કે ? તે જોઈએ.

5	8	11	14
5	$5 + 1 \times 3$	$5 + 2 \times 3$	$5 + 3 \times 3$...	$5 + (n - 1)$ $\times 3$	$5 + n \times 3$...
પહેલું પદ t_1	બીજું પદ t_2	ત્રીજું પદ t_3	ચોથું પદ t_4	...	n મું પદ t_n	$n + 1$ મું પદ t_{n+1}	...

સામાન્ય રીતે; t_1, t_2, t_3, \dots આ અંકગણિત શ્રેઢીનું પ્રથમ પદ a અને સામાન્ય તફાવત d હોય તો

$$t_1 = a$$

$$t_2 = t_1 + d = a + d = a + (2 - 1)d$$

$$t_3 = t_2 + d = a + d + d = a + 2d = a + (3 - 1)d$$

$$t_4 = t_3 + d = a + 2d + d = a + 3d = a + (4 - 1)d$$

$$t_n = a + (n - 1)d \quad \text{આ સૂત્ર મળે છે.}$$

આ સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને $5, 8, 11, 14, \dots$ આ અંકગણિત શ્રેઢીનું 100 મું પદ શોધીએ. અહીં $a = 5$ અને $d = 3$ છે.

$$\begin{aligned} t_n &= a + (n - 1)d \\ \therefore t_{100} &= 5 + (100 - 1) \times 3 \\ &= 5 + 99 \times 3 \\ &= 5 + 297 \\ &= 302 \end{aligned}$$

આ અંકગણિત શ્રેઢીનું 100 મું પદ 302 છે.

હવે 61 આ સંખ્યા શ્રેઢીમાં છે કે? તેનો જવાબ શોધવા આ જ સૂત્ર વાપરીએ.

$$\begin{aligned} t_n &= a + (n - 1)d \\ t_n &= 5 + (n - 1) \times 3 \\ \text{જો } 61 \text{ એ } n \text{ મું પદ એટલે } t_n &= 61 \text{ ભૂકતાં,} \\ 61 &= 5 + 3n - 3 \\ &= 3n + 2 \end{aligned}$$

$$\therefore 3n = 59$$

$$\therefore n = \frac{59}{3}$$

અહીં n પૂર્ણ સંખ્યા નથી.

$\therefore 61$ આ સંખ્યા શ્રેઢીમાં નથી.

આ પ્રમાણે જ $5, 8, 11, 14, \dots$ આ શ્રેઢીમાં 92 આ સંખ્યા છે કે, તે તમે ચકાસો.

વિચાર કરીએ.

કબીરની ભખ્મી તેના દરેક જન્મદિવસે તેની ઊંચાઈ માપીને નોંધે છે. તે 1 વર્ષનો થયો ત્યારે તેની ઊંચાઈ 70 સેમી હતી. 2 વર્ષનો થયો ત્યારે તે 80 સેમી ઊંચ્યો હતો. 3 વર્ષનો થયો ત્યારે તેની ઊંચાઈ 90 સેમી હતી. તેની મીરાંમાસી દસમીમાં ભણતી હતી. તેણે કહ્યું, ‘કબીરની ઊંચાઈ દર વર્ષે અંકગણિત શ્રેઢીમાં વધે છે. એવું દેખાય છે.’ એમ માનીને તેણે કબીર 15 વર્ષનો થશે. અને દસમીમાં આવશે ત્યારે તેની ઊંચાઈ કેટલી થશે, તે શોધ્યું. તેના આશ્ચર્યનો પાર ન રહ્યો. તમે પણ કબીરની ઊંચાઈ અંકગણિત શ્રેઢીમાં વધે છે એમ માનીને તે 15 વર્ષનો થશે ત્યારે તેની ઊંચાઈ કેટલી થશે? તે શોધો.

ઉદા. (5) જે એક અંકગણિત શ્રેઢીનું 10 મું પદ 25 અને 18 મું પદ 41 હોય તો તેનું 38 મું પદ શોધો.

તેમજ n મું પદ 99 હોય તો n ની કિંમત શોધો.

ઉક્લા : આપેલી અંકગણિત શ્રેઢીએં $t_{10} = 25$ અને $t_{18} = 41$ છે.

તમે જાણો છો, $t_n = a + (n - 1)d$ સૂત્ર વાપરીને,

$$\therefore t_{10} = a + (10 - 1)d$$

$$\therefore 25 = a + 9d \quad \dots \dots \dots \text{ (I)}$$

$$\text{તે જ રીતે } t_{18} = a + (18 - 1)d$$

$$\therefore 41 = a + 17d \quad \dots \dots \dots \text{ (II)}$$

$$25 = a + 9d \quad \dots \dots \dots \text{ (I) પરથી.}$$

$$a = 25 - 9d.$$

આ કિંમત સમીકરણ II માં મૂકીએ.

$$\text{સમીકરણ (II)} \quad a + 17d = 41 \quad \text{છે.}$$

$$\therefore 25 - 9d + 17d = 41$$

$$\therefore 8d = 41 - 25 = 16$$

$$\therefore d = 2$$

$d = 2$ આ કિંમત સમીકરણ I માં મૂક્તાં,

$$a + 9d = 25$$

$$\therefore a + 9 \times 2 = 25$$

$$\therefore a + 18 = 25$$

$$\therefore a = 7$$

n મું પદ 99 હોય તો n ની કિંમત શોધવાની છે.

$$t_n = a + (n - 1)d$$

$$\therefore 99 = 7 + (n - 1) \times 2$$

$$\therefore 99 = 7 + 2n - 2$$

$$\therefore 99 = 5 + 2n$$

$$\therefore 2n = 94$$

$$\therefore n = 47$$

\therefore આપેલી અંકગણિત શ્રેઢીનું 38 મું પદ 81 છે, અને 99 એ 47 મું પદ છે.

હવે, $t_n = a + (n - 1)d$

$$\therefore t_{38} = 7 + (38 - 1) \times 2$$

$$= 7 + 37 \times 2$$

$$= 7 + 74$$

$$= 81$$



મહાવરાસંગ્રહ 3.2

1. આપેલી અંકગણિત શ્રેઢી પરથી ચોકઠામાં યોગ્ય સંખ્યા લખો.

(1) 1, 8, 15, 22, . . .

$$\text{અહીં } t_1 = \boxed{}, \quad t_2 = \boxed{}, \quad t_3 = \boxed{}, \quad t_4 = \boxed{}, \dots$$

$$t_2 - t_1 = \boxed{} - \boxed{} = \boxed{}$$

$$t_3 - t_2 = \boxed{} - \boxed{} = \boxed{} \therefore d = \boxed{}$$

(2) 3, 6, 9, 12, . . .

$$\text{અહીં } t_1 = \boxed{}, \quad t_2 = \boxed{}, \quad t_3 = \boxed{}, \quad t_4 = \boxed{}, \dots$$

$$t_2 - t_1 = \boxed{}, \quad t_3 - t_2 = \boxed{} \therefore d = \boxed{}$$

(3) -3, -8, -13, -18, . . .

$$\text{અહીં } t_1 = \boxed{}, \quad t_2 = \boxed{}, \quad t_3 = \boxed{}, \quad t_4 = \boxed{}, \dots$$

$$t_2 - t_1 = \boxed{}, \quad t_3 - t_2 = \boxed{} \therefore a = \boxed{}, d = \boxed{}$$

(4) 70, 60, 50, 40, . . .

$$\text{અહીં } t_1 = \boxed{}, \quad t_2 = \boxed{}, \quad t_3 = \boxed{}, \quad t_4 = \boxed{}, \dots$$

$$\therefore a = \boxed{}, d = \boxed{}$$

2. નીચેની શ્રેષ્ઠી અંકગણિત શ્રેઢી છે કે તે નક્કી કરો. જો અંકગણિત શ્રેઢી હોય તો તેનું વીસમું પદ શોધો.

-12, -5, 2, 9, 16, 23, 30, . . .

3. આપેલી અંકગણિત શ્રેઢી 12, 16, 20, 24, . . . છે. તેનું 24 મું પદ શોધો.

4. નીચેની અંકગણિત શ્રેઢીનું 19 મું પદ શોધો.

7, 13, 19, 25, . . .

5. નીચેની અંકગણિત શ્રેઢીનું 27 મું પદ શોધો.

9, 4, -1, -6, -11, . . .

6. ત્રણ અંકી પ્રાકૃતિક સંખ્યાના સમૂહમાં 5 વડે વિભાજ્ય હોય તેવી સંખ્યાઓ કેટલી છે ?

7. એક અંકગણિત શ્રેઢીનું 11 મું પદ 16 અને 21 મું પદ 29 છે. તો તે શ્રેઢીનું 41 પદ શોધો.

8. 11, 8, 5, 2, . . . આ અંકગણિત શ્રેઢીમાં -151 આ સંખ્યા કેટલામું પદ હશે ?

9. 10 થી 250 સુધીની પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ પૈકી 4 વડે વિભાજ્ય હોય તેવી સંખ્યાઓ કેટલી ?

10. એક અંકગણિત શ્રેઢીનું 17 મું પદ તેના 10 માં પદ કરતાં 7 વધારે છે. તો સામાન્ય તફાવત d શોધો.

ચતુર શિક્ષિકા

એક હતો રાજ. તેણે રાજકુમાર યશવંત અને રાજકુમારી ગીતાદેવીને ઘોડે સવારી શીખવવા માટે અનુકૂળ તારા અને મીરા આ બે શિક્ષિકાઓની નિમણું કરી. તેણે બંને શિક્ષિકાઓને વાર્ષિક કેટલો પગાર આપવો તે પૂછ્યું.

તારાએ કહ્યું, “મને પહેલા મહિનામાં 100 સોનામહોરો આપવી અને પછીના દરેક મહિને પગારમાં 100 સોનામહોરોનો વધારો કરવો. મીરાએ કહ્યું, “મને પહેલાં મહિનામાં 10 સોનામહોરો આપવી અને પછીના દરેક મહિનામાં આગલા મહિના કરતાં બમણો પગાર આપવો.”

મહારાજે તે માન્ય કર્યું. ત્રણ મહિના પછી રાજકુમાર યશવંતે પોતાની બહેનને કહ્યું, “મારી શિક્ષિકા તમારી શિક્ષિકાથી વધારે હોશિયાર છે. તેણીને વધારે પગાર મળે છે.” ગીતાદેવીએ કહ્યું, “મને પણ પહેલાં એમજ લાગ્યું, એટલે મેં મીરાબેનને પૂછ્યું પણ ખંડું કે, ‘તમે આટલો ઓછો પગાર કેમ માંગ્યો?’ ત્યારે તેમણે હસીને કહ્યું કે, ‘આઠ મહિના પછી ગંમત જે જે?’ પછી મેં નીચે પ્રમાણે આઠમાં મહિનાનો પગાર શોધ્યો. તું પણ ચકાસી જે.

મહિના	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
તારાનો પગાર	100	200	300	400	500	600	700	800	900	-	-	-
મીરાનો પગાર	10	20	40	80	160	320	640	1280	2560	-	-	-

તમે ઉપરનો કોઈ પૂર્ણ કરો.

તારાનો પગાર $100, 200, 300, 400, \dots$ આ અંકગણિત શ્રેઢી છે. તે સમજયું કે ?

$$t_1 = 100, \quad t_2 = 200, \quad t_3 = 300, \dots \quad t_2 - t_1 = 100 = d$$

સામાન્ય તફાવત 100 છે.

મીરાનો પગાર $10, 20, 40, 80, \dots$ આ અંકગણિત શ્રેઢી નથી કારણ કે, $20 - 10 = 10, 40 - 20 = 20, 80 - 40 = 40$ એટલે કે કમવાર સંખ્યાઓમાં તફાવત અચળ નથી.

માત્ર આ શ્રેઢીમાં દરેક પદ તેના આગળના પદથી બમણું થતું જય છે.

$$\text{અહીં } \frac{t_2}{t_1} = \frac{20}{10} = 2, \quad \frac{t_3}{t_2} = \frac{40}{20} = 2, \quad \frac{t_4}{t_3} = \frac{80}{40} = 2$$

$\therefore \frac{t_{n+1}}{t_n}$, એટલે કે પછીનું પદ અને આગલા પદનો ગુણોત્તર સમાન આવે છે. આવી સંખ્યા શ્રેણીને

ભૌમિતિક શ્રેઢી (Geometric Progression) કહે છે. $\frac{t_{n+1}}{t_n}$ આ ગુણોત્તર 1 કરતાં વધારે હોય તો, ભૌમિતિક શ્રેઢી, અંકગણિત શ્રેઢી કરતાં ઝડપથી વધતી જય છે તે અનુભવો.

જે આ ગુણોત્તર 1 કરતાં ઓછો હોય તો તે શ્રેઢી કેવી રીતે બદલાતી જય છે તે પણ અનુભવો.

આપણે આ પૈકી ફક્ત અંકગણિત શ્રેઢીનો જ અભ્યાસ કરવાના છીએ. અંકગણિત શ્રેઢીનું n મું પદ કેવી રીતે શોધવું તે આપણે જેણું. હવે પહેલા n પદોનો સરવાળો કેવી રીતે કરવો તે જેઈએ.

ઝટપટ સરવાળો

ત્રણસો વર્ષ પહેલાંની વાત છે. જર્મનીમાં બ્યૂટનેર (Buttner) નામનાં ગુડ્જલની એક શિક્ષકી (માત્ર એક જ શિક્ષક ધરાવતી) શાળા હતી. તેમને ત્યાં જેહાન માર્ટિન બાર્ટેલસ એક માત્ર મદદનીશ હતો. તેનું કામ હતું બાળકોને મૂળાખરો શીખવવા અને લેખન કરી આપવું. બ્યૂટનેર કર્ક અને શિસ્ત પ્રિય ગુડ્જ હતાં. બ્યૂટનેર ગુડ્જને એક કામ તુરંત પૂર્ણ કરવાનું હતું. વર્ગમાં બાળકો મસ્તી-તોફાન ન કરે એટલે તેમને કોઈક કામમાં રોકાયેલા રાખવા માટે ગણતરીનું કામ આપવાનું નક્કી કર્યું.

તેમણે બાળકોને કહ્યું કે, “1 થી 100 સુધીની સંખ્યા પાટી પર લખો અને તેનો સરવાળો કરો.” ગુડ્જલએ તેમનું કામ શરૂ કર્યું. બાળકોએ સંખ્યાઓ લખવાનું શરૂ કર્યું. પાંચ મિનિટમાં એક પાટી ઉંઘી મૂકવાનો અવાજ આવ્યો તેમણે વિદ્યાર્થી કાર્લ ગાઉસ સામે જ્ઞાન અને પૂછ્યું, “આ શું ? મેં તને 1 થી 100 અંક લખીને તેનો સરવાળો કરવાનું કહ્યું છે. પાટી કેમ ઉંઘી મૂકી દીધી ? તારે કશું કરવું જ નથી કે શું ?”

કાર્લ ગાઉસ બોલ્યા, “મારો સરવાળો થઈ ગયો.”

ગુડ્જલએ કહ્યું, “શું ! આટલી ઝડપથી સરવાળો કર્યો જ કેવી રીતે ? તે તો સંખ્યા પણ લખી નહીં હોય. કે'તો કેટલો જવાબ આવ્યો તારો ?”

કાર્લ ગાઉસ બોલ્યા, “પાંચ હજાર પચાસ.”

ગુડ્જલ આશ્ચર્યચકિત થઈ ગયા. તેમણે પૂછ્યું, “તેં કેવી રીતે જવાબ શોધ્યો ?”

કાર્લ ગાઉસે નીચે પ્રમાણે ઝટપટ સરવાળો કર્યો હતો.

સંગ્રહ કરીનું સંખ્યા	1	2	3	4	100
)	+)	+)	+)	+)	+)
ઉલટ કરીનું સંખ્યા	100	99	98	97	1
સરવાળો	101	101	101	101				101

દરેક જેડીમાંની સંખ્યાનો સરવાળો 101 આવે છે. આ સરવાળો 100 વખત આવ્યો તેથી 100×101 નો ગુણાકાર કર્યો તો તે 10100 થાય. અહીં 1 થી 100 સુધીની સંખ્યા બે વાર ધ્યાનમાં લીધી, એટલે 10,100 ના અર્ધા કર્યા. તે 5050 આવ્યા. તેથી 1, 2, 3, ..., 100 નો સરવાળો 5050. ગુડ્જલએ તેમને શાબાશી આપી.

ગાઉસે સરવાળો કરવા માટે વાપરેલી રીત પરથી અંકગણિત શ્રેઢીના પ્રથમ n પદોનો સરવાળો શોધવાનું સૂત્ર મેળવીએ.

જેહાન ફેડરિય કાર્લ ગાઉસ

30 એપ્રિલ 1777 - 23 ફેબ્રુઆરી 1855

કાર્લ ગાઉસ એક મહાન જર્મન ગણિતજ્ઞ હતાં. તેમનો જન્મ બ્રॉડન સ્વાઈકમાં રહેતા એક અશિક્ષિત કુટુંબમાં થયો હતો. બ્યૂટનેરની સ્ક્રૂલમાં તેણે પોતાનું બુદ્ધિ ચાતુર્ય દર્શાવ્યું. તે પછી બ્યૂટનેરનો મદદનીશ જેહાન માર્ટિન બાર્ટેલસની ગાઉસ સાથે મિત્રતા થઈ. બન્નેએ મળીને બીજગણિત પર એક પુસ્તક બહાર પાડ્યું. બાર્ટેલસે, ગાઉસની અસામાન્ય પ્રતિભા અનેક જણાની નજરમાં આણી દીધી.





જ્ઞાની લાઈબ્રેરી

અંકગણિત શ્રેઢીના પ્રથમ n પદોનો સરવાળો. (Sum of first n terms of an A. P.)

અંકગણિત શ્રેઢી $a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots, a + (n - 1)d$

આ શ્રેઢીમાં a પ્રથમ પદ અને d સામાન્ય તફાવત છે. આ શ્રેઢીના પ્રથમ n પદોનો સરવાળો S_n લઈએ.

$$S_n = [a] + [a+d] + \dots + [a+(n-2)d] + [a+(n-1)d]$$

આ પછો ઉલટ કરે માંડતાં,

$$S_n = [a + (n-1)d] + [a + (n-2)d] + \dots + [a + d] + [a]$$

સરવાળો કરતાં,

$$2S_n = [a+a+(n-1)d] + [a+d+a+(n-2)d] + \dots + [a+(n-2)d+a+d] + [a+(n-1)d+a]$$

$$2S_n = [2a + (n-1)d] + [2a + (n-1)d] + \dots + [2a + (n-1)d] \dots n \text{ વાર્ષિક.}$$

$$2S_n = n [2a + (n-1)d]$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] \quad \text{அதை} \quad S_n = na + \frac{n(n-1)}{2} d$$

ડા.ત., 14, 16, 18, ... આ અંકગણિત શ્રેધીના પ્રથમ 100 પદોનો સરવાળો શોધીએ.

$$\text{અહીં } a = 14, \ d = 2, n = 100$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

$$\therefore S_{100} = \frac{100}{2} [2 \times 14 + (100-1) \times 2]$$

$$= 50 [28 + 198]$$

$$= 50 \times 226 = 11,300$$

∴ આપેલી શ્રેદીના પ્રથમ 100 પદોનો સરવાળો 11,300 છે.



ધ્યાનમાં રાખીએ.

આપેલી અંકગણિત શ્રેઢી (A.P.) નું પ્રથમ પદ a અને સામાન્ય તફાવત d હોય તો,

$$t_n = a + (n-1)d \quad \text{என}$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] = na + \frac{n(n-1)}{2} d$$

ઉદા. (3) પહેલી n વિષમ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો શોધો.

ઉક્લ : પહેલી n વિષમ પ્રાકૃતિક સંખ્યા

$$1, 3, 5, 7, \dots, (2n - 1).$$

$$a = t_1 = 1 \text{ અને } t_n = (2n - 1), d = 2$$

રીત I

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2} [t_1 + t_n] \\ &= \frac{n}{2} [1 + (2n - 1)] \\ &= \frac{n}{2} [1 + 2n - 1] \\ &= \frac{n}{2} \times 2n \\ &= n^2 \end{aligned}$$

રીત II

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] \\ &= \frac{n}{2} [2 \times 1 + (n-1) \times 2] \\ &= \frac{n}{2} [2 + 2n - 2] \\ &= \frac{n}{2} \times 2n \\ &= n^2 \end{aligned}$$

રીત III

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + 3 + \dots + (2n-1) \\ &= (1 + 2 + 3 + \dots + 2n) \\ &\quad - (2 + 4 + 6 + \dots + 2n) \\ &= \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{2n(n+1)}{2} \\ &= (2n^2 + n) - (n^2 + n) \\ &= n^2 \end{aligned}$$

\therefore પહેલી n વિષમ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો n^2 હોય છે.

ઉદા. (4) 1 થી 150 સુધીની બધી વિષમ પ્રાકૃતિક સંખ્યાનો સરવાળો કરો.

ઉક્લ : 1 થી 150 સુધીની બધી વિષમ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ $1, 3, 5, 7, \dots, 149$.

આ અંકગણિત શ્રેઢી છે.

અહીં $a = 1$ અને $d = 2$, સૌ પ્રથમ 1 થી 150 સુધીની વિષમ સંખ્યાઓ કેટલી છે ? તે શોધીએ.

તે માટે n ની કિંમત શોધીએ.

$$t_n = a + (n - 1)d$$

$$149 = 1 + (n - 1)2 \quad \therefore 149 = 1 + 2n - 2$$

$$\therefore n = 75$$

હવે $1 + 3 + 5 + \dots + 149$ આ 75 સંખ્યાનો સરવાળો કરીએ.

$$a = 1 \text{ અને } d = 2, n = 75$$

રીત I $S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$

$$S_n = \boxed{}$$

$$S_n = \boxed{} \times \boxed{}$$

$$S_n = \boxed{}$$

રીત II $S_n = \frac{n}{2} [t_1 + t_n]$

$$S_n = \frac{75}{2} [1 + 149]$$

$$S_n = \boxed{} \times \boxed{}$$

$$S_n = \boxed{}$$

મહાવરાસંગ્રહ 3.3

1. એક અંકગણિત શ્રેઢીનું પ્રથમ પદ 6 અને સામાન્ય તફાવત 3 છે. તો S_{27} શોધો.

$$a = 6, \quad d = 3, \quad S_{27} = ?$$

$$S_n = \frac{n}{2} [\square + (n-1) d]$$

$$S_{27} = \frac{27}{2} [12 + (27-1) \square]$$

$$= \frac{27}{2} \times \square$$

$$= 27 \times 45$$

$$= \square$$

2. પહેલી 123 સમ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો કરો.

3. 1 અને 350 દરમિયાન આવતી બધી સમ સંખ્યાઓનો સરવાળો કરો.

4. એક અંકગણિત શ્રેઢીનું 19 મું પદ 52 અને 38 મું પદ 128 છે. તો તેના પ્રથમ 56 પદોનો સરવાળો શોધો.

5. નીચેની કૃતિ પૂર્ણ કરો :

કૃતિ: 1 થી 140 દરમિયાન આવતી, 4 વડે વિભાજ્ય હોય તેવી પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ કેટલી છે ? તે શોધી તેનો સરવાળો શોધો.

1 થી 140 દરમિયાન આવતી 4 વડે વિભાજ્ય સંખ્યાઓ

4, 8, , 136

આ કુલ કેટલી સંખ્યાઓ છે ? $\therefore n = \square$

$a = \square, d = \square, t_n = \square$

$t_n = a + (n-1)d$

$136 = \square + (n - 1) \times \square$

$n = \square \rightarrow S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$

$S_{\square} = \frac{\square}{2} [\square] = \square$

1 થી 140 દરમિયાન આવતી અને 4 વડે વિભાજ્ય હોય તેવી સંખ્યાઓનો સરવાળો = \square

6. ★ એક અંકગણિત શ્રેઢીના પહેલાં 55 પદોનો સરવાળો 3300 છે, તો તેનું 28 મું પદ શોધો.

7. એક અંકગણિત શ્રેઢીના ત્રણ કમિક પદ્દોનો સરવાળો 27 છે. અને તેમનો ગુણાકાર 504 છે. તો તે પદ્દો શોધો.
(ત્રણ કમિક પદ્દો $a - d, a, a + d$ લો.)
8. એક અંકગણિત શ્રેઢીના ચાર કમિક પદ્દોનો સરવાળો 12 છે. તેમજ તે ચાર કમિક પદ્દો પૈકી ત્રીજ અને ચોથા પદ્દનો સરવાળો 14 છે. તો તે ચાર પદ શોધો.
(સૂચન- ચાર કમિક પદ્દો $a - d, a, a + d, a + 2d$ લો.)
9. એક અંકગણિત શ્રેઢીનું નવમું પદ શૂન્ય છે. તો 29 મું પદ એ 19 મા પદ થી બમાળું છે તે દર્શાવો.



જાણી લઈએ.

અંકગણિત શ્રેઢીનો ઉપયોગ (Application of A.P.)

ઉદા. (1) ભિક્સર તૈયાર કરતી એક કંપનીએ ત્રીજ વર્ષે 600 ભિક્સર તૈયાર કર્યા અને સાતમે વર્ષે 700 ભિક્સર તૈયાર કર્યા. દર વર્ષે તૈયાર થતાં ભિક્સરની સંખ્યામાં નિશ્ચિયત વધારો કરવામાં આવે છે. તો નીચેનાનાં જવાબ શોધો.

(i) પહેલાં વર્ષનું ભિક્સરનું ઉત્પાદન (ii) 10 મા વર્ષનું ઉત્પાદન (iii) પહેલાં સાત વર્ષનું કુલ ઉત્પાદન.

ઉક્લ : કંપની દર વર્ષે ભિક્સરની સંખ્યામાં નિશ્ચિયત વધારો કરે છે.

આમ દરવર્ષે વધતી ભિક્સરની સંખ્યા, અંકગણિત શ્રેઢીમાં છે.

(i) n મા વર્ષમાં કંપનીએ t_n ભિક્સર તૈયાર કર્યા એમ ધારીએ. આપેલી માહિતી પરથી,

$$t_3 = 600, t_7 = 700$$

$$t_n = a + (n-1)d \dots \text{સૂત્ર}$$

$$\begin{aligned} t_3 &= a + (3-1)d \\ &= a + 2d = 600 \end{aligned} \quad (\text{I})$$

$$\begin{aligned} t_7 &= a + (7-1)d \\ &= a + 6d = 700 \end{aligned} \quad (\text{II})$$

$$a + 2d = 600 \quad \therefore a = 600 - 2d \text{ આ કિંમત સમીકરણ (II) માં મૂકીએ.}$$

$$600 - 2d + 6d = 700$$

$$4d = 100 \quad \therefore d = 25$$

$$a + 2d = 600 \quad \therefore a + 2 \times 25 = 600$$

$$a + 50 = 600 \quad \therefore a = 550$$

\therefore પહેલાં વર્ષે ભિક્સરનું ઉત્પાદન 550 થયું.

(ii) $t_n = a + (n-1)d$

$$\begin{aligned} t_{10} &= 550 + (10-1) \times 25 \\ &= 550 + 225 = 775 \end{aligned}$$

\therefore 10-મા વર્ષનું ઉત્પાદન 775 થયું.

(iii) પહેલાં 7 વર્ષનું ઉત્પાદન કાઢવા માટે S_n નું સૂત્ર વાપરીએ.

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

$$\therefore S_7 = \frac{7}{2} [1100 + 150] = \frac{7}{2} [1250] = 7 \times 625 = 4375$$

∴ પહેલાં સાત વર્ષનું કુલ ઉત્પાદન 4375 થયું.

ઉદા. (2) ઉધાર લીધેલા 3,25,000 રૂપિયા ચૂકતે કરવા માટે અજય શર્માએ પહેલાં મહિને 30,500 રૂપિયા ભર્યા, ત્યાર પછી તેમને દર મહિને આગલા મહિને ભરેલી રકમ કરતાં 1500 રૂપિયા ઓછા ભરવા પડે છે. તો ઉધાર લીધેલી રકમ પૂર્ણપણે ચૂકવવા માટે તેમને કેટલાં મહિના લાગશે ?

ઉક્લિન : ઉધાર લીધેલાં પૈસા ચૂકતે કરવા માટે 'n' મહિના લાગશે એમ ધારીએ 30,500 રૂપિયામાંથી દર મહિને 1500 રૂપિયા આપવાના છે.

$$\therefore 30,500; 30,500 - 1500; 30,500 - 2 \times 1500, \dots આ આપવાની રકમોની શ્રેણી અંકગણિત શ્રેઢી છે.$$

$$\text{પ્રથમ પદ } a = 30500, d = -1500 \quad \text{ઉધાર લીધેલી રકમ } = S_n = 3,25,000$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

$$3,25,000 = \frac{n}{2} [2 \times 30500 + (n-1) \times (-1500)] \\ = \frac{n}{2} [2 \times 30500 - 1500n + 1500]$$

$$3,25,000 = 30500n - 750n^2 + 750n$$

$$\therefore 750n^2 - 31250n + 325000 = 0$$

$$\therefore 3n^2 - 125n + 1300 = 0 \quad \dots \dots \quad (\text{બન્ને બાજુ } 250 \text{ વડે ભાગતાં})$$

$$\therefore 3n^2 - 60n - 65n + 1300 = 0$$

$$\therefore 3n(n-20) - 65(n-20) = 0$$

$$\therefore (n-20)(3n-65) = 0$$

$$\therefore n-20=0, \text{ અથવા } 3n-65=0$$

$$n=20 \quad \text{અથવા } n = \frac{65}{3} = 21\frac{2}{3}$$

અહીં n એ અંકગણિત શ્રેઢીના પદનો કમાંક છે તેથી n પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.

$$\therefore n \neq \frac{65}{3} \quad \therefore n = 20$$

(અથવા 20 મહિના પછી $S_{20} = 3,25,000$ આ પૂરી રકમ ચૂકતે થઈ જવાથી પછીના સમયનો વિચાર કરવાની જરૂર નથી.)

∴ ઉધાર લીધેલી રકમ પૂર્ણપણે ચૂકવવા માટે તેમને 20 મહિના લાગશે.

ઉદા. (3) અન્વર દર મહિને ચોક્કસ રકમની બચત કરે છે. પહેલાં મહિનામાં તે 200 રૂપિયાની બચત કરે છે. બીજા મહિનામાં 250 રૂપિયાની બચત કરે છે. ત્રીજ મહિનામાં 300 રૂપિયાની બચત કરે છે. આ રીતે કુલ 1,000 રૂપિયાની બચત કેટલામાં મહિને થશે ? તે મહિનામાં તેની કુલ બચત કેટલી હશે ?

ઉક્લ : પહેલાં મહિનાની બચત 200 રૂપિયા બીજ મહિનાની બચત 250 રૂપિયા ; . . .

આ પ્રમાણે દર મહિને થતી બચત 200, 250, 300, . . . એ અંકગણિત શ્રેઢી છે.

આપી $a = 200, d = 50, t_n$ નું સૂત્ર વાપરીને n શોધીએ. તે પરથી S_n શોધીએ.

$$\begin{aligned} t_n &= a + (n-1)d \\ &= 200 + (n-1)50 \\ &= 200 + 50n - 50 \end{aligned}$$

$$\therefore 1000 = 150 + 50n$$

$$150 + 50n = 1000$$

$$50n = 1000 - 150$$

$$50n = 850$$

$$\therefore n = 17$$

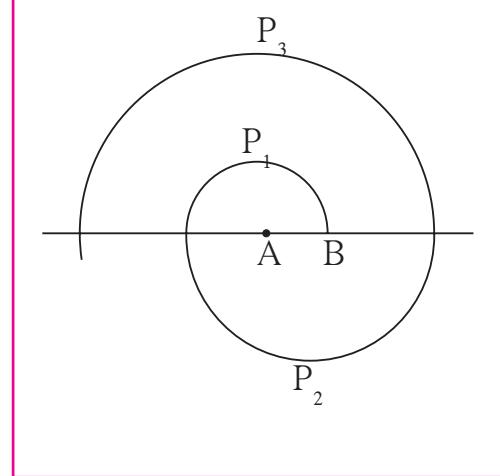
1000 રૂપિયા બચત 17 માં મહિને થશે.

17 મહિનામાં કુલ બચત કેટલી ? તે શોધીએ.

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] \\ &= \frac{17}{2} [2 \times 200 + (17-1) \times 50] \\ &= \frac{17}{2} [400 + 800] \\ &= \frac{17}{2} [1200] \\ &= 17 \times 600 \\ &= 10200 \end{aligned}$$

17 મહિનામાં કુલ બચત 10,200 રૂપિયા હશે.

ઉદા. (4) આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે એક રેખા પર કેન્દ્ર A લઈને 0.5 સેમી ત્રિજ્યાનું P_1 એ અર્ધવર્તુળ દોર્યું. તે આ રેખાને B બિંદુમાં છેદે છે. હવે B કેન્દ્ર લઈને 1 સેમી ત્રિજ્યાનું અર્ધવર્તુળ રેખાની નીચેની તરફ P_2 દોર્યું.



ફરી કેન્દ્ર A અને 1.5 સેમી ત્રિજ્યાનું અર્ધવર્તુળ P_3 રેખાની ઉપરની બાજુએ દોર્યું. આ રીતે કેન્દ્ર A અને B લઈને અનુક્રમે 0.5 સેમી, 1 સેમી, 1.5 સેમી, 2 સેમી વગેરે ત્રિજ્યાનાં અર્ધવર્તુળ કાઢતાં એક વલયાકૃતિ તૈયાર થઈ. આ રીતે દોરેલા 13 અર્ધવર્તુળ દ્વારા તૈયાર થયેલાં વકારની કુલ લંબાઈ શોધો.

$$(\pi = \frac{22}{7} \text{ લો.})$$

ઉક્ળિલા : A, B, A, B, ... આ પ્રમાણે ક્રમશાસ્નક લઈને દોરેલાં અર્ધપરિધિની લંબાઈ અનુક્રમે P_1, P_2, P_3, \dots ધારીએ. પહેલાં અર્ધપરિધિની ત્રિજ્યા 0.5 સેમી છે. બીજી અર્ધપરિધિની ત્રિજ્યા 1.0 સેમી છે. આ પ્રમાણે માહિતી આપેલી છે. તે પરથી $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{13}$ શોધીએ.

$$\text{પહેલાં અર્ધપરિધિની લંબાઈ} = P_1 = \pi r_1 = \pi \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$P_2 = \pi r_2 = \pi \times 1 = \pi$$

$$P_3 = \pi r_3 = \pi \times 1.5 = \frac{3}{2}\pi$$

P_1, P_2, P_3, \dots આ અર્ધપરિધિ એટલે જ, $\frac{1}{2}\pi, 1\pi, \frac{3}{2}\pi, \dots$ આ સંખ્યા અંકગણિત શ્રેઢી છે.

અહીં $a = \frac{1}{2}\pi, d = \frac{1}{2}\pi$, આના પરથી S_{13} કાઢીએ.

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

$$\begin{aligned} S_{13} &= \frac{13}{2} \left[2 \times \frac{\pi}{2} + (13-1) \times \frac{\pi}{2} \right] \\ &= \frac{13}{2} [\pi + 6\pi] \\ &= \frac{13}{2} \times 7\pi \\ &= \frac{13}{2} \times 7 \times \frac{22}{7} \\ &= 143 \text{ સેમી.} \end{aligned}$$

\therefore આ પ્રમાણે 13 અર્ધવર્તુળોથી તૈયાર થયેલી વલયાકૃતિની લંબાઈ 143 સેમી થશે.

ઉદા. (5) એક ગામમાં 2010 ની સાલમાં 4000 લોકો સાક્ષર હતાં. આ સંખ્યા દર વર્ષે 400 થી વધે તો 2020ની સાલમાં કેટલા લોકો સાક્ષર હશે ?

ઉક્લા :

વર્ષ	2010	2011	2012	...	2020
સાક્ષર લોકોની સંખ્યા	4000	4400	4800	...	

$$a = 4000, \quad d = 400 \quad n = 11$$

$$\begin{aligned} t_n &= a + (n-1)d \\ &= 4000 + (11-1)400 \\ &= 4000 + 4000 \\ &= 8000 \end{aligned}$$

2020 સાલમાં 8000 લોકો સાક્ષર હશે.

ઉદા. (6) શ્રીમતી શેખને 2015 ની સાલમાં વાર્ષિક 1,80,000 રૂપિયાના પગારે નોકરી મળી. તથા તેમને દર વર્ષે 10,000 રૂપિયાનો વધારો આપવાનું પણ કબૂલ કર્યું. તો કેટલાંમાં વર્ષે તેમનો પગાર 2,50,000 રૂપિયા થશે ?

ઉક્લા :

વર્ષ	પહેલું વર્ષ (2015)	બીજું વર્ષ (2016)	ત્રીજું વર્ષ (2017)	...
પગાર (₹)	[1,80,000]	[1,80,000 + 10,000]		...

$$a = 1,80,000, \quad d = 10,000 \quad n = ? \quad t_n = 2,50,000 \text{ રૂપિયા.}$$

$$t_n = a + (n-1)d$$

$$2,50,000 = 1,80,000 + (n-1) \times 10,000$$

$$(n-1) \times 10000 = 70,000$$

$$n-1 = 7$$

$$n = 8$$

∴ 8 માં વર્ષે તેમનો વાર્ષિક પગાર 2,50,000 રૂપિયા થશે.

મહાવરાસંગ્રહ 3.4

1. સાનિકાએ 1 જાન્યુઆરી, 2016ના દિવસથી નક્કી કર્યું કે, ₹ 10, બીજ દિવસે ₹ 11, ત્રીજ દિવસે ₹ 12 એ પ્રમાણે બચત કરતાં રહેવું. તો 31 ડિસેમ્બર, 2016 સુધી તેની કુલ બચત કેટલી થઈ હશે ?
2. એક વ્યક્તિએ 8000 રૂપિયા કરજ પેટે લીધાં અને તેના પર 1360 રૂપિયા વ્યાજ આપવાનું કબૂલ કર્યું. પહેલા હપ્તો આપ્યા પછી દરેક હપ્તો આગામા હપ્તાથી 40 રૂપિયા ઓછો આપીને પૂર્ણ રકમ 12 માસિક હપ્તામાં ચૂકવી દીધી. તો તેણે આપેલો પ્રથમ પહેલો હપ્તો અને છેલ્લો હપ્તો કેટલા રૂપિયા હતો ?
3. સચિને રાષ્ટ્રીય બચત પ્રમાણપત્રમાં પહેલાં વર્ષે 5000 રૂપિયા, બીજ વર્ષે 7000 રૂપિયા, ત્રીજ વર્ષે 9000 રૂપિયા પ્રમાણે રોકાણ કર્યું. તો 12 વર્ષમાં તેમનું કુલ રોકાણ કેટલું થશે ?
4. એક નાટ્યગૃહના ખુરશીઓની 27 હરોળ છે. પહેલી હરોળમાં 20 ખુરશીઓ છે. બીજી હરોળમાં 22 ખુરશીઓ છે, ત્રીજી હરોળમાં 24 ખુરશીઓ છે. આ પ્રમાણે 15મી હરોળમાં કુલ કેટલી ખુરશીઓ હશે ? તેમજ આખા નાટ્યગૃહમાં કુલ કેટલી ખુરશીઓ હશે ?
5. કારગિલમાં એક અઠવાડિયામાં સોમવાર થી શનિવાર સુધી દરરોજના ઉષણતામાનની નોંધ કરી. આ નોંધ અંકગણિત શ્રેઢીમાં છે એમ જણાયું. સોમવાર અને શનિવારના ઉષણતામાનનો સરવાળો, મંગળવાર અને શનિવારના ઉષણતામાનના સરવાળાથી 5° સેલ્સિયસથી વધારે છે. જે બુધવારનું ઉષણતામાન -30° સેલ્સિયસ હોય તો દરેક દિવસનું ઉષણતામાન શોધો.
6. વિશ્વ પર્યાવરણ દિવસ, નિભિતે એક ત્રિકોણાકૃતિ ભૂખંડ પર વૃક્ષારોપણનો કાર્યક્રમ આયોજિત કરવામાં આવ્યો. પ્રથમ હરોળમાં એક છોડ, બીજી હરોળમાં બે છોડ, ત્રીજી હરોળમાં ત્રણ છોડ એ પ્રમાણે 25 હરોળમાં છોડ વાવવામાં આવ્યા. તો કુલ કેટલાં છોડ વાવવામાં આવ્યા ?

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 3

1. નીચેના પ્રશ્નોના ઉત્તર માટે યોગ્ય પર્યાય પસંદ કરો.
 - (1) -10, -6, -2, 2, ... આ શ્રેણી

(A) અંકગણિત શ્રેઢી છે કારણ કે, $d = -16$	(B) અંકગણિત શ્રેઢી નથી, કારણ કે, $d = 4$
(C) અંકગણિત શ્રેઢી છે કારણ કે, $d = -4$	(D) અંકગણિત શ્રેઢી નથી.
 - (2) જેનું પ્રથમ પદ -2 અને સામાન્ય તફાવત પણ -2 છે એવી અંકગણિત શ્રેઢીના પ્રથમ ચાર પદો છે.

(A) -2, 0, 2, 4	(B) -2, 4, -8, 16
(C) -2, -4, -6, -8	(D) -2, -4, -8, -16
 - (3) પહેલી 30 પ્રાકૃતિક સંખ્યાનો સરવાળો કેટલો ?

(A) 464	(B) 465
(C) 462	(D) 461

(4) આપેલી અંકગણિત શ્રેઢી માટે, $t_7 = 4$, $d = -4$ તો $a = \dots$

- (A) 6 (B) 7 (C) 20 (D) 28

(5) આપેલી અંકગણિત શ્રેઢી માટે, $a = 3.5$, $d = 0$, તો $t_n = \dots$

- (A) 0 (B) 3.5 (C) 103.5 (D) 104.5

(6) એક અંકગણિત શ્રેઢીના પહેલાં બે પદો $-3, 4$ છે તો 21 મું પદ \dots છે.

- (A) -143 (B) 143 (C) 137 (D) 17

(7) જો એક અંકગણિત શ્રેઢી માટે $d = 5$ તો $t_{18} - t_{13} = \dots$

- (A) 5 (B) 20 (C) 25 (D) 30

(8) 3 ધડિયાનાં આવતી પહેલી પાંચ સંખ્યાઓનો સરવાળો \dots છે.

- (A) 45 (B) 55 (C) 15 (D) 75

(9) 15, 10, 5, \dots આ અંકગણિત શ્રેઢીના પહેલા 10 પદોનો સરવાળો \dots છે.

- (A) -75 (B) -125 (C) 75 (D) 125

(10) એક અંકગણિત શ્રેઢીનું પ્રથમ પદ 1 છે અને n મું પદ 20 છે. જો $S_n = 399$ છે, તો $n = \dots$

- (A) 42 (B) 38 (C) 21 (D) 19

2. $-11, -8, -5, \dots, 49$ આ અંકગણિત શ્રેઢીનું છેલ્લેથી ચોથું પદ શોધો.

3. એક અંકગણિત શ્રેઢીનું 10 મું પદ 46 છે. 5 માં અને 7 માં પદોનો સરવાળો 52 છે. તો તે શ્રેઢી શોધો.

4. જો અંકગણિત શ્રેઢીનું 4 થું પદ -15 અને 9 મું પદ -30 છે. તો શ્રેઢીના પહેલાં 10 પદોનો સરવાળો શોધો.

5. બે અંકગણિત શ્રેઢીઓ $9, 7, 5, \dots$ અને $24, 21, 18, \dots$ આપી છે. આ બન્ને અંકગણિત શ્રેઢીનું n મું પદ સમાન હોય તો n ની કિંમત શોધો અને n મું પદ શોધો.

6. જો એક અંકગણિત શ્રેઢીના નીજ અને આઠમા પદોનો સરવાળો 7 તેમજ સાતમા અને ચૌદમા પદોનો સરવાળો -3 છે. તો તેનું દસમું પદ શોધો.

7. એક અંકગણિત શ્રેઢીનું પ્રથમ પદ -5 અને છેલ્લું પદ 45 છે. તે બધા પદોનો સરવાળો 120 હોય તો તે કેટલાં પદો હશે? અને સામાન્ય તફાવત કેટલો હશે?

8. 1 થી n પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો 36 છે તો n ની કિંમત શોધો.

9. 207 ના ત્રણ એવા ભાગ કરો કે તે અંકગણિત શ્રેઢીમાં હોય અને બે નાના ભાગોનો ગુણાકાર 4623 હોય.
 10. એક અંકગણિત શ્રેઢીમાં 37 પદો છે. બરાબર મધ્યમાં હોય તેવા ત્રણ પદોનો સરવાળો 225 છે. અને છેલ્લાં ત્રણ પદોનો સરવાળો 429 છે તો તે શોધો.
 11. જે અંકગણિત શ્રેઢીનું પ્રથમ પદ a બીજું પદ b અને અંતિમ પદ c છે. તો તે શ્રેઢીનાં પદોનો સરવાળો,
$$\frac{(a+c)(b+c-2a)}{2(b-a)}$$
 જેટલો હોય છે, તે સાબિત કરો.
 12. જે અંકગણિત શ્રેઢીના પહેલાં p પદોનો સરવાળો પહેલાં q પદોના સરવાળા જેટલો હોય તો પહેલા ($p + q$) પદોનો સરવાળો શૂન્ય હશે તે દર્શાવો. ($p \neq q$)
 13. અંકગણિત શ્રેઢીના m મા પદનાં m ગણા એ n મા પદનાં n ગણા બરાબર છે. તો તેનું ($m + n$) મું પદ શૂન્ય છે તે બતાવો.
 14. 1000 ડિપિયાની રકમ 10% ના સાદા વ્યાજે રોકયા, તો દરેક વર્ષને અંતે મળતી વ્યાજની રકમ અંકગણિત શ્રેઢી થશે કે? તે તપાસો. તે અંકગણિત શ્રેઢી હોય તો 20 વર્ષ પછી મળતાં વ્યાજની રકમ કેટલી છે ? જવાબ શોધવા માટે નીચેની ફૂટિ પૂર્ણ કરો.

$$\text{सांकु व्याज} = \frac{P \times R \times N}{100}$$

$$1 \text{ વર્ષ } 5\% \text{ મળતું સાંદું વ્યાજ} = \frac{1000 \times 10 \times 1}{100} = \boxed{100}$$

$$2 \text{ વર્ષ પછી મળતું સાઢું વ્યાજ} = \frac{1000 \times 10 \times 2}{100} = \boxed{200}$$

$$1 \text{ ਵਰ્਷ } \text{ਪਛੀ } \text{ਮਨੁੱਖੀ } \text{ਸਾਡੁੰ } \text{ਵ्यਾਜ} = \frac{\square \times \square \times \square}{100} = 300$$

આ રીતે 4, 5, 6 વર્ષ પછી મળતું વ્યાજ અનુકૂળમે 400, , છે.

આ સંખ્યા $d =$, અને $a =$

20 વર્ષ પછી મળતું સાદુ વ્યાજ,

$$t_n = a + (n-1)d$$

$$t_{20} = \boxed{} + (20-1) \boxed{}$$

$$t_{20} = \boxed{}$$

20 ਵੰ਷ਟੀ ਮਣਤੁੰ ਕੁਲ ਵ्यਾਜ = □



4

અર્થ નિયોજન



ચાલો શીખીએ.

- જી.એસ.ટી. પરિચય
- જી.એસ.ટી. ગણન અને ઈનપૂટ ટેક્સ કેડિટ
- કર બીલ (ટેક્સ ઇનવોર્ડ્સ)
- શેર્સ, મ્યુચ્યુઅલ ફંડ, SIP



ચાલો, ચર્ચા કરીએ.

શિક્ષિકા : વિદ્યાર્થી ભિત્રો, આપણા દેશમાં વ્યાપાર માટે કઈ કર પ્રણાલી ચાલુ છે ?

આયુષ : આપણા દેશમા 'જીએસટી' કર પ્રણાલી ચાલુ છે.

શિક્ષિકા : સરસ ! તેના વિશે તમે શું જાણો છો ?

અધ્યાન : GST એટલે Goods and Service Tax એટલે કે, 'વસ્તુ અને સેવા કર'

આયશા : આખા દેશમાં એક જ કરપ્રણાલી અમલમાં છે.

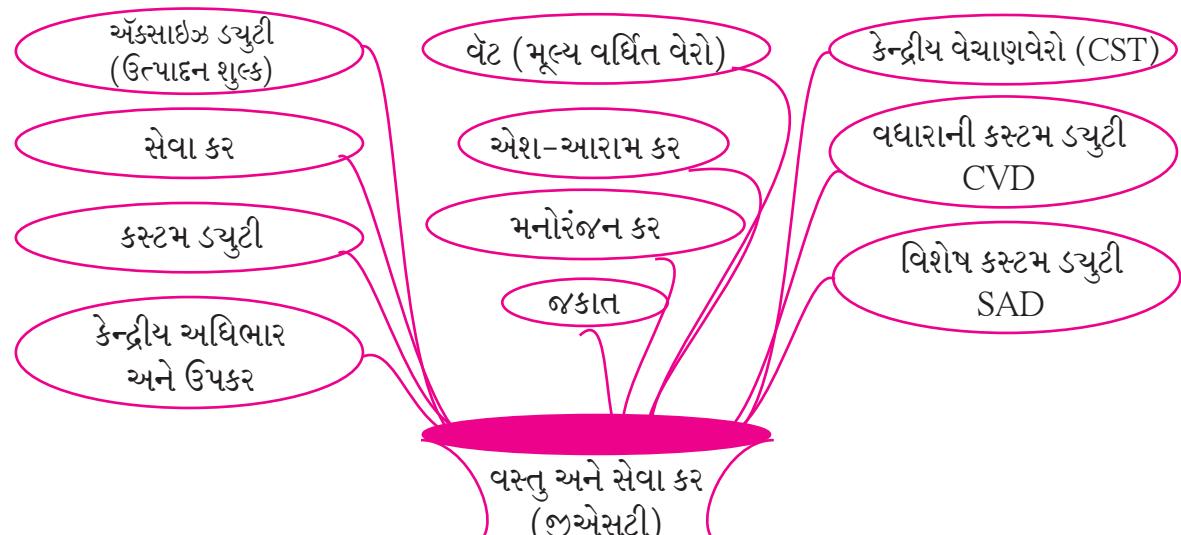
શિક્ષિકા : બરાબર. પહેલાં વિવિધ રાજ્યોમાં વિવિધ કર જુદા-જુદા



કારણોસર ભરવા પડતાં હતા. પહેલાં ક્યા ક્યા કર હતા, જે હવે જીએસટીમાં અંતર્ભૂત કરવામાં આવ્યા છે ? નીચેનું ચિત્ર જોઈને કહો.

શરીફ : એક્સાઈજ ડ્યુટી, કસ્ટમ ડ્યુટી, વેટ, કેન્દ્રીય વેચાણવેરો, સેવા કર, જકાત વગેરે... કર હતા.

શિક્ષિકા : આ બધા કરવેરા નાભૂદ કરી હવે ફક્ત જીએસટી આ એક જ કર વસ્તુ અને સેવાની ખરીદી તેમજ વેચાણ પર લાદવામાં આવે છે. તેથી જ કહે છે કે, 'એક રાષ્ટ્ર, એક કર, એક બજાર'. આ કરપ્રણાલી 1 જુલાઈ 2017થી અમલમાં આવી.





कर-बिल (Tax Invoice)

વસ્તુ ખરીદીનું કર બિલ (નમૂનો)										
SUPPLIER : A to Z SWEET MART					GSTIN :27ABCDE1234H1Z5					
143, Shivaji Rasta, Mumbai : 400001 Maharashtra					Mob. No. 92636 92111 email : atoz@gmail.com					
Invoice No. GST/110					Invoice Date: 31-Jul-2017					
S. No.	HSN code	Name of Product	Rate	Quantity	Taxable Amount	CGST	SGST	Total		
1	210690	પેંડા	₹.400 પ.ક્ર.	500 ગ્રામ	200.00	2.5%	5.00	2.5%	5.00	210.00
2	210691	ચોકલેટ	₹. 80	1 ખાર	80.00	14%	11.20	14%	11.20	102.40
3	2105	આઈસકીમ	₹.200	1 પેકેટ (500 ગ્રામ)	200.00	9%	18.00	9%	18.00	236.00
4	1905	બ્રેડ	₹. 35	1 પેકેટ	35.00	0%	0.00	0%	0.00	35.00
5	210690	માખણ	₹.500 પ.ક્ર.	250 ગ્રામ	125.00	6%	7.50	6%	7.50	140.00
						કુલ રૂપિયા	41.70		41.70	723.40

વેદ : આ બિલમાં કેટલાંક નવા શબ્દો હેખાય છે. તેના અર્થ કહુને.

શિક્ષિકા : CGST અને SGST આ GST ના બે ભાગ છે. CGST એટલે (Central Goods and Services Tax) કેન્દ્રિય વस્તુ અને સેવા કર (માલ), આ રકમ કેન્દ્ર સરકાર પાસે જમા થાય છે. SGST એટલે (State Goods & Services Tax) રાજ્ય માલ અને સેવા કર, આ રકમ રાજ્ય સરકાર પાસે જમા થાય છે.

રિયા : બિલમાં જમણી બાજુએ અક્ષરો અને અંકોની હારમાળા દેખાય છે તે શું છે ?

શિક્ષિકા : તે GSTIN એટલેકે (GSTIN - GST Identification Number) વેપારીઓનો ઓળખ કમાંક છે. જે વેપારીનું પાછલાં. નાણાંકીય વર્ષમાં કુલ ટર્નઅર્વર (એકંદર વકરો) 20 લાખ રૂપિયાથી વધારે હોય તેમણે આ કમાંક લેવો બંધનકારક છે. PAN માં જેમ 10 અંકાક્ષરો હોય છે. તે જ પ્રમાણે GSTIN-માં 15 અંકાક્ષરો હોય છે. આ 15 અંકાક્ષરોમાંના તે વેપારીનો 10 અંકાક્ષરો PAN નંબર દર્શાવે છે.

દા.ત. 27 A B C D E 1 2 3 4 H 1 Z 5 (છેલ્લે અંક અથવા અક્ષર પૈકી એક હોય છે.)

10 આંકડાનો PAN
એક નોંધણી માટે 1 અંક
બધા માટે સમાન
(બાય ડિફોલ્ટ)

રાજ્યનો બે અંકી
સંકેતાંક

એક સમ ડિઝલ

‘27’ એ મહારાષ્ટ્ર રાજ્યનો સંકેતાંક (State Code) છે. 27 પરથી સમજય છે કે આ વેપારીની નોંધણી મહારાષ્ટ્રમાં થઈ છે.

[ચેક સમ ડિજિટ એટલે GSTની વેબસાઈટ પર જઈ સર્વ્યમાં GSTIN નાખતાં જ આ નંબર કાયદેસર છે કે નહીં (Valid) તે સમજય છે.]

જેની : બિલમાં 'HSN કોડ' શરૂ પણ છે.

શિક્ષિકા : HSN કોડ એટલે તે માલ કે વસ્તુના વર્ગીકરણનો વિશિષ્ટ ક્રમાંક હોય છે. બિલમાં તેનો સમાવેશ કરવો જોઈએ. HSN એટલે Harmonized System of Nomenclature.

જેસેક : બિલમાં દુકાનનું નામ, સરનામું, તારીખ, બિલનંબર, મોબાઈલ નંબર, ઈ-મેલ આયડી પણ છે.

શિક્ષિકા : આ બિલમાં લુએસટીની આકારણી કેવી રીતે કરી છે, તે જોઈએ. તે માટે નીચેનાં ચોકાઓમાં ચોગ્ય જવાબ લખો. જેમકે બિલમાં પેંડાનો ભાવ રૂપિયા 400 પ્રતિ કિલોગ્રામ છે. અર્ધો કિલોગ્રામ પેંડા લીધાં છે. તેથી તેની કિંમત રૂપિયા 200 છે.

- ◆ પેંડા પર કેન્દ્રનો કર (CGST) 2.5%ના દરે રૂપિયા, તેમજ રાજ્યનો કર (SGST) ના દરે 5 રૂપિયા.
 - ◆ તે પરથી, પેંડા ઉપર વસ્તુ અને સેવા કર (GST)નો દર $2.5\% + 2.5\% = 5\%$ અને કુલ કર 10 રૂપિયા.
 - ◆ તે જ પ્રમાણે, ચોકલેટ ઉપર જીએસટીનો કુલ દર % તેથી કુલ કર રૂપિયા.
 - ◆ આઈસ્ક્રીમ ઉપર જીએસટીનો કુલ દર % છે. તેથી આઈસ્ક્રીમની કિંમત રૂપિયા.
 - ◆ માખણ ઉપર કેન્દ્ર કરનો દર % અને રાજ્ય કરનો દર % બન્ને મળીને જીએસટીનો દર % છે.

આદિત્ય : બ્રેડ પર જુઅસ્ટીનો દર ૦% છે. તેમ જ દરેક વસ્તુ પર કેન્દ્ર અને રાજ્યના કરનો દર સરખો છે.

નિનાદ : વસ્તુ પ્રમાણે જીવની દર જીવાં-જીવાં છે. જેમકે 0%, 5%, 12%, 18% અને 28%.

શિક્ષિકા : દરેક વસ્તુ પરના જીએસટીના દર સરકાર દ્વારા નિશ્ચિત કરવામાં આવે છે. હવે સેવા બિલનો પણ એક નમૂનો જેઠાં આપેલી માહિતી પરથી ખાતી જગ્યા પૂરીને સેવા બિલ પૂર્ણ કરો.

સેવા કર બિલ (નમૂનો)		આહાર સોનેરી, ખેડ શિવાપુર, પૂજો.		Invoice No. 58				
Mob. No. 7588580000 email - ahar.khed@yahoo.com								
GSTIN : 27 AAAAA5555B1ZA			Invoice Date : 25-Dec-2017					
S A Code (SAC)	Food items	Qty	Rate (in Rs.)	Taxable amount	CGST	SGST		
9963	Coffee	1	20	20.00	2.5%	0.50 ₹	2.5%	...
9963	Masala Tea	1	10	10.00	2.5%	...
9963	Masala Dosa	2	60	2.5%
			Total
				Grand Total = -----	ઝપિયા			

શિક્ષિકા : વસ્તુ અને સેવા બિલ બન્નેનું નિરીક્ષણ કરીને તેમાંના કોડમાં શો તફાવત દેખાય છે, શોધો જેઈએ.

પોટ્રીક : વસ્તુ બિલમાં HSN કોડ છે, જ્યારે સેવા બિલમાં SAC કોડ દેખાય છે.

શિક્ષિકા : SAC એટલે વસ્તુ પ્રમાણે સેવાઓનું વર્ગીકરણનો વિશિષ્ટ ક્રમાંક છે.

તેને SAC - Service Accounting Code.

નીચેના કોઈમાં કેટલી વસ્તુઓ અને સેવાઓ તેમજ તેના દર નમૂના ડ્રેપે આપ્યા છે.

અ.ક્ર.	પ્રકાર	કરનો દર	વસ્તુ અને સેવા પ્રકાર
I	શૂન્યાધારિત (Nil rated)	0%	<p>વસ્તુ - અનાજ સહિત જીવન જરૂરિયાતની વસ્તુઓ, શાકભાજી, ફળ, દૂધ, મીઠું, માટીના વાસણો વગેરે.</p> <p>સેવા - ધર્માદ્યાય સંસ્થાના ઉપકરણો, પાણી પુરવઠો, રસ્તા અને પુલનો ઉપયોગ, શિક્ષણ અને આરોગ્ય સેવાઓ, સાર્વજનિક વાચનાતય, ખેતી-કૃષિ સંબંધી સેવાઓ વગેરે.</p>
II	નિમ્ન દર	5%	<p>વસ્તુ - રોજંદા વપરાશની વસ્તુઓ - જેમકે LPG સિલિન્ડર, ચા, તેલ, મધ્ય, ફોલન શાકભાજી લવિંગ, મરી, ભસાલા, મિઠાઈ વગેરે.</p> <p>સેવા - જલ્દેર પરિવહન રેલ્વે, બસ, ટેક્સી સેવા, વિમાન સેવા (ઇકોનોમી કલાસ), હોટેલમાં ખાદ્ય પદાર્થ અને પીણાં પૂરા પાડવા વગેરે.</p>
III	પ્રમાણ દર (સ્તર I)	12%	<p>વસ્તુ - ગ્રાહકોપયોગી વસ્તુઓ : માખણા, ધી, સુકોમેવો, શાકભાજી અને ફિલો-માંથી તૈયાર કરેલાં અથાણા, મુરબ્બા, જેમ, જેલી, ચટણીઓ, મોબાઈલ વગેરે.</p> <p>સેવા - છપાઈના કામને લગતી સેવાઓ, ગેસ્ટ હાઉસ (Non-AC) બાંધકામ વ્યવસાયને લગતી સેવાઓ વગેરે.</p>
IV	પ્રમાણ દર (સ્તર II)	18% પ્રમાણમાં વસ્તુ અને સેવાઓનો સમાવેશ)	<p>વસ્તુ - માર્બલ, ગેનાઈટ, પરફ્યુમ્સ, ધાતુની વસ્તુ, સંગ્રહાક, પ્રિન્ટર, મોનીટર, CCTV વગેરે.</p> <p>સેવા - કુરીઅર સર્વીસેસ, આઉટડોર કેટરીંગ, સર્કસ નાટક, પ્રદર્શન સિનેમા, ચલન વિનિમય સેવા, શેઅર્સ ટ્રેડિંગ માટે ખરીદી-વેચાણ પરની દલાલી (બ્રોકર)સેવા વગેરે.</p>
V	ઉચ્ચતમ દર	28%	<p>વસ્તુ - એશા-આરામની વસ્તુઓ-મોટર સાયકલ પાર્ટ્સ, લક્જરી કાર, પાન મસાલો, વેક્યુમ કલીનર, ડીશ વોશર, AC યુનિટ, (વોશિંગ મશીન) તંબાકુ જન્ય ઉત્પાદનો, હંડા પીણાં (સોડાયુક્ત) aerated water વગેરે.</p> <p>સેવા - પંચતારાંકિત હોટેલ નિવાસ વ્યવસ્થા, એમ્યુઝ્યુન્ટ પાર્ક, વોટર પાર્ક, થીમ પાર્ક, કેસીનો, રેસકોર્સ, IPL જેવી રમતો, વિમાન સેવા (બિજુનેસ કલાસ) વગેરે.</p>

સંદર્ભ : www.cbec.gov.in (Central Board of Excise & Customs) ની વેબસાઈટ.

તદ્વારાંત 0% થી 5% દરમ્યાન કર્ય વસ્તુઓ પર GST છે ? તે શોધો.

નોંધ :- આ પ્રકરણ લખતી વખતે સરકાર દ્વારા નિશ્ચિત કરાયેલા જીએસટીના દર અહીં આપ્યા છે.
તેમાં ફેરફાર થઈ શકે છે. વિધુત, પેટ્રોલ, ડિઝેલ, વગેરેને GSTમાંથી બાકાત રાખવામાં આવ્યાં છે.

કુન્તિ I : તમને જરૂરી હોય તેવી 10 વસ્તુઓની યાદી બનાવી તેના પર લુએસ્ટીનો દર કેટલો છે ? તે માટે અહીં આપેલો કોઠો, છાપાં (વર્તમાન પત્રો), ઈન્ટરનેટ, લુએસ્ટી પરના પુસ્તકો, વસ્તુઓના બિલો પરથી શોધો.

વસ્તુ	જીએસ્ટીનો ફર	વસ્તુ	જીએસ્ટીનો ફર
1. સ્કેચ બુક		6. - - - - -	
2. કંપાસપેટી		7. - - - - -	
3. - - - - -		8. - - - - -	
4. - - - - -		9. - - - - -	
5. - - - - -		10. - - - - -	

કૃતિ II : કૃતિ I પ્રમાણે જ 10 સેવાઓ (જેમ કે, રેલ્વે બુકીંગ, એસ ટી બુકીંગ સેવા વગેરે) મેળવવા માટેના લુઅસટીના દર શોધો અથવા સેવા બિલ મેળવો. તે પરથી નીચેનો કોઠો પૂર્ણ કરો.

સેવા	જીએસ્ટીનો દર	સેવા	જીએસ્ટીનો દર
1. રેલ્વે બુકિંગ		6. - - - - -	
2. કુરીયર સર્વિસ		7. - - - - -	
3. - - - - -		8. - - - - -	
4. - - - - -		9. - - - - -	
5. - - - - -		10. - - - - -	

કંતિ III : નીચેનો કોઈ જીવો અને વસ્તુ તથા સેવાના કોઈ શોધીને લખો.

सेवा	SAC	GST नोट्स	वस्तु	HSN Code	GST नोट्स
रेल्वे परिवहन सेवा	996511	--	इयुलक्स पेन्ट	3208	28%
विमान परिवहन सेवा (ईकोनोमी)	996411	--	बोलबेरींग	84821011	28%
चलन विनियम सेवा	997157	--	स्पीडोमीटर	8714	28%
ब्रोकर सेवा	997152	--	बटाटा	0701	0%
टैक्सी सेवा	996423	--	--	--	--
5 स्टार होटेल सेवा	--	--	--	--	--
--	--	--	--	--	--

કુટી IV : કોઈપણ 5 વસ્તુ અને 5 સેવાના HSN અને SAC કોડનો તકતો/કોઢો બનાવો તેમાં વસ્તુ અને સેવાના ચિત્રો ચોંટાડો. તેમાં GSTના દર શોધીને લખો.

નોંધ : વસ્તુ અને સેવાના દર અને HSN, SAC પરની કૃતિઓ વગેરે માહિતી માટે આખ્યાં છે. તે ગોખવાની જરૂર નથી.

ઉપક્રમ : તમે વિવિધ પ્રકારના બિલો મેળવો. જેમ કે વસ્તુ બિલ, સેવા આખ્યાનું બિલ વગેરે. તે બિલોના GSTના સંદર્ભમા જૃદા જૃદા દષ્ટિકોણથી અભ્યાસ કરો અને વર્ગમાં ચર્ચા કરો.

ભાગ ગણેલાં ઉદાહરણો ભાગ

ઉદા. (1) આરતી ગેસ એજન્સીએ 545 રૂપિયા કરપાત્ર કિંમતનો એક LPG સિલિન્ડર ગ્રાહકને વેચ્યો. GSTનો દર 5% છે તો ગ્રાહકને આપેલા ટક્સ ઈન્વોઇસમાં CGST અને SGST કેટલાં રૂપિયા હશે ? ગ્રાહકે કુલ કેટલાં રૂપિયા આપવા પડશે ? આરતી ગેસ એજન્સીને કેટલો GST ભરવો પડશે ?

ઉક્ખલ : GSTનો દર = 5% \therefore CGSTનો દર = 2.5%, અને SGSTનો દર = 2.5%.

$$\text{CGST} = \frac{2.5}{100} \times 545 = 13.625 = 13.63 \text{ રૂપિયા}$$

$$\therefore \text{SGST} = \text{CGST} = 13.63 \text{ રૂપિયા}$$

$$\text{ગ્રાહકને આપવી પડતી રકમ} = \text{કરપાત્ર કિંમત} + \text{CGST} + \text{SGST}$$

$$= 545 + 13.63 + 13.63 = 572.26$$

આરતી ગેસ એજન્સીને CGST = 13.63 રૂપિયા અને તેમજ SGST = 13.63 રૂપિયા ભરવા પડશે. એમ કુલ GST 27.26 રૂપિયા ભરવા પડશે.

ઉદા. (2) ફુરીયર સેવા આપતાં એક એજન્ટે નાશિકથી નાગપૂર એક પાર્સલ મોકલવાના ગ્રાહક પાસેથી કુલ 590 રૂપિયા લીધા. તેમાં 500 રૂપિયા કરપાત્ર કિંમત પર CGST 45 રૂપિયા અને SGST 45 રૂપિયાનો સમાવેશ છે. તો ફુરીયર સેવા માટે આકારેલો GSTનો દર શોધો.

ઉક્ખલ : કુલ GST = CGST + SGST = 45 + 45 = 90 રૂપિયા.

$$\therefore \text{GSTનો દર} = \frac{90}{500} \times 100 = 18\%$$

ફુરીયર સેવા આપતાં એજન્ટે 18% GST લગાડયો.

ઉદા. (3) શ્રીકરે 50,000 રૂપિયા છાપેલી કિંમતનો લૅપટોપ લેવાનું નક્કી કર્યું. ત્યારે દુકાનદારે તેને આ કિંમત પર 10% છૂટ આપી. લૅપટોપ પર GSTનો દર 18% છે. તો દુકાનદારે વસૂલ કરેલો CGST અને SGST શોધો. શ્રીકરને તે લૅપટોપ કેટલાં રૂપિયામાં મળ્યું ?

ઉક્ખલ : પહેલાં 'છૂટ' શોધીએ તે આપેલી કિંમતમાંથી બાદ કરીને બાકી રહેલી રકમ પર 18% GST પ્રમાણે ગણતરી કરીએ.

$$\text{છૂટ} = 50,000 \text{ રૂપિયા પર } 10\% = 5,000 \text{ રૂપિયા$$

$$\therefore \text{લૅપટોપની કરપાત્ર કિંમત} = 50,000 - 5,000 = 45,000 \text{ રૂપિયા.$$

$$\therefore \text{GST નો દર } 18\% \text{ તેથી CGSTનો દર} = 9\%$$

$$45,000 \text{ રૂપિયા પર } 9\% \text{ CGST} = \frac{9}{100} \times 45,000 = 4,050 \text{ રૂપિયા.$$

$$\therefore \text{SGST} = 4,050 \text{ રૂપિયા.$$

$$\therefore \text{લૅપટોપની કુલ કિંમત} = 45,000 + 4,050 + 4,050 = 53,100 \text{ રૂપિયા.$$

જવાબ : શ્રીકરને તે લૅપટોપ 53,100 રૂપિયામાં મળ્યું.

નોંધ : કરપાત્ર કિમત (ટેક્ષેબલ વેલ્યુ) એટલે જે કિમત પર GST આકારવામાં આવે છે તે કિમત ઇન્વાર્ટ્સ વેલ્યુ એટલે GST સહિતની કુલ કિમત. ઉદાહરણોમાં ઉત્સેખ કર્યો ન હોય તો આપેલી કિમત કરપાત્ર કિમત સમજવી. જેટલો કેન્દ્રનો કર (CGST) હોય છે તેટલો જ રાજ્યનો કર (SGST) હોય છે.

ਮਹਾਵਰਾਸੰਗ੍ਰਹ 4.1



વેપાર સંકળની લુ.એસ.ટી. (GST in Trading Chain)

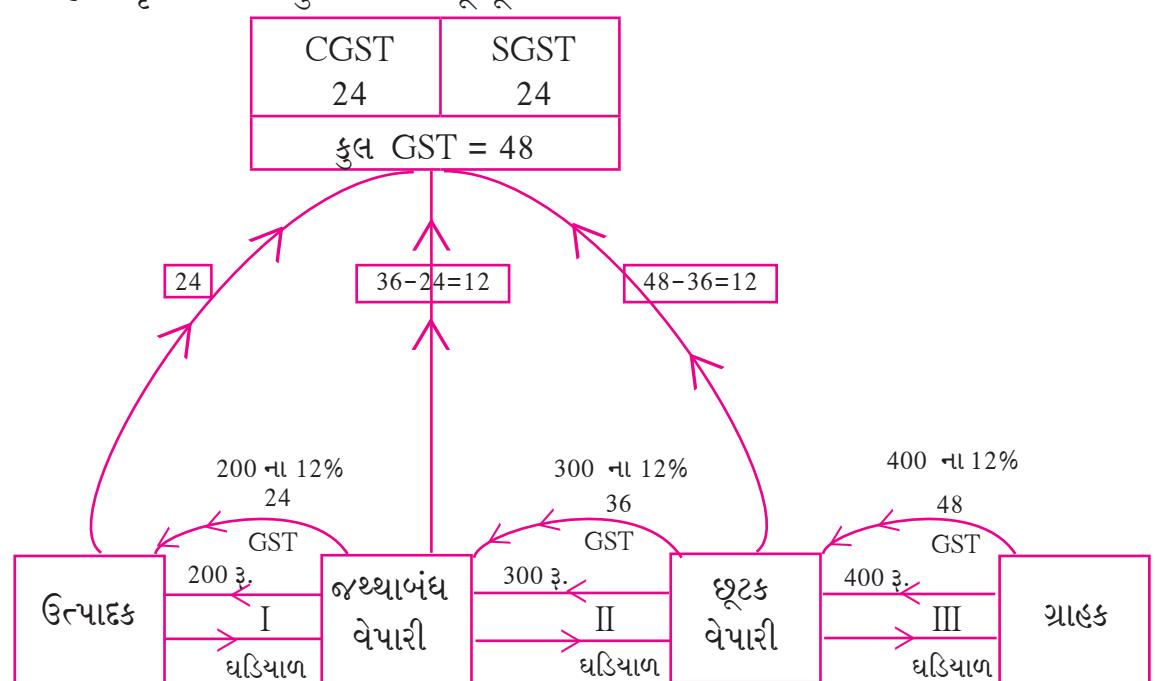


વેપાર સાંકળમાં લુઅસટી કઈ રીતે આકારવામાં આવે છે તેમજ કેન્દ્ર તથા રાજ્ય સરકાર પાસે કર કેવી રીતે જમા થાય છે ? તે એક ઉદાહરણ દ્વારા જોઈએ.

ઉદા.: ધારોકે, એક ઉત્પાદકે, જથ્થાબંધ વેપારીને એક ઘડિયાળ નફા સહિત 200 રૂપિયામાં વેંચ્યુ. જથ્થાબંધ વેપારીએ, છૂટક વેપારીને 300 રૂપિયામાં અને છૂટક વેપારીએ ગ્રાહકને તે ઘડિયાળ 400 રૂપિયામાં વેંચ્યુ. GST નો દર 12% છે. તો ઉત્પાદક, જથ્થાબંધ વેપારી અને છૂટક વેપારી નીચે પ્રમાણે કરની કપાત (ITC) લઈને બાકીનો ટેક્સ કેવી રીતે ભરે છે નીચેની પ્રવાહઆકૃતિ પરથી જાણી લો.

સ્પૃષ્ટીકરણ :

ઉત્પાદકથી ગ્રાહક સુધી ઘડિયાળ પહોંચે ત્યાંસુધી તેમાં ત્રણ વ્યવહાર થાય છે. દરેક વ્યવહારમાં થયેલી કર આકારણી, જમા થયેલો કર રાજ્ય સરકાર અને કેન્દ્ર સરકાર સુધી કેવી રીતે પહોંચે છે તે નીચેની પ્રવાહ આફક્તિમાં દર્શાવ્યું છે. તેની પૂરેપૂરી વિગત કોઈામાં દર્શાવી છે.



ઉપરોક્ત વેપારમાં ત્રણ જુદાં જુદાં આર્થિક વ્યવહાર એકજ રાજ્યમાં થયાં છે. વેપારીઓના કરબિલમાં GSTની આકારણી સમજ ખાતર ટ્રંકમાં નીચે પ્રમાણે આપી છે.

કર બિલ I માં GST આકારણી
ઘડિયાળની કિંમત = ₹ 200
CGST 6% = ₹ 12
SGST 6% = ₹ 12
કુલ કિંમત = ₹ 224

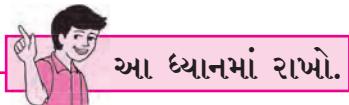
ઉત્પાદકનું કર-બિલ (B2B)

કર બિલ II માં GST આકારણી
ઘડિયાળની કિંમત = ₹ 300
CGST 6% = ₹ 18
SGST 6% = ₹ 18
કુલ કિંમત = ₹ 336

જથ્થાબંધ વેપારીનું કર-બિલ (B2B)

કૃ બિલ III માં GST આકારણી
ધરિયાળની કિંમત = ₹ 400
CGST 6% = ₹ 24
SGST 6% = ₹ 24
કુલ કિંમત = ₹ 448

ઇતિહાસ વેપારીનું કર-બિલ (B2C)



બે GSTIN ધારક વેપારીઓમાં થયેલાં વ્યવહારને Business to Business ટ્રૂકમાં B2B કહે છે. વસ્તુનું ઉત્પાદક થયા પણી તે ગ્રાહક સુધી પહોંચે છે. આ સાંકળમાંની અંતિમ કડીના વ્યવહારને Business to Consumer ટ્રૂકમાં B2C કહે છે.

આ વ્યવસાય સાંકળમાં દરેક વેપારીએ ભરેલાં GSTનું વિવરણ નીચે પ્રમાણે છે.

	CGST	SGST	કુલ GST
• ઉત્પાદકે	₹ 12	+ ₹ 12	= ₹ 24 ભર્યાં.
• જથ્થાબંધ વેપારીએ	₹ 6	+ ₹ 6	= ₹ 12 ભર્યાં.
• છૂટક વેપારીએ	₹ 6	+ ₹ 6	= ₹ 12 ભર્યાં.
કુલ	₹ 24	+ ₹ 24	= ₹ 48

નોંધ: તમારા ધ્યાનમાં આવ્યું કે ? દરેક વેપારીએ પોતપોતાના સ્તરે ભેગા કરેલાં કરમાંથી ખરીદી વખતે આપેલો કર બાદ કરીને ઈનપૂટ ટેક્સ કેડિટ (ચૂકવવા પાત્ર GST) ભર્યો. છેવટે ગ્રાહકને તે ઘઢિયાળ 448 રૂપિયામાં મળી. તેમાંના 48 રૂપિયા ઉપર દર્શાવ્યા પ્રમાણે કર રૂપે સરકારને ગયા. એટલે અપ્રત્યક્ષ રીતે આ કર ગ્રાહકે જ ભર્યો. એટલે GST એ અપ્રત્યક્ષ કર (Indirect Tax) છે. તે પૂર્વે જથ્થાબંધ વેપારી અને છૂટક વેપારીએ તેમની ખરીદી વખતે ભરેલો ટેક્સ તેમને પાછો મળી ગયો.

ખરીદી વખતે આપેલાં કરની કપાત (ITC-ઈનપૂટ ટેક્સ કેડિટ-નિવેશ કરની જમા રકમ) :

વસ્તુનું ઉત્પાદન થાય અને તે ગ્રાહક સુધી પહોંચે તે દરમ્યાન થયેલાં દરેક વ્યવહારમાં GST આકારવામાં આવે છે. વસ્તુ વેંચતી વખતે વેપારીએ એકત્રિત કરેલો કર એટલે આઉટપૂટ ટેક્સ. તે જ વેપારીએ ખરીદી વખતે (દીધેલો-આપેલો) કર એટલે ઈનપૂટ ટેક્સ. આ વેપારી ભેગા કરેલા કરમાંથી, પોતે દીધેલા કરની કપાત લે છે તેને ઈનપૂટ ટેક્સ કેડિટ કહે છે.

$$\therefore \text{ચૂકવવા પાત્ર GST} = \text{આઉટપૂટ ટેક્સ} - \text{ઈનપૂટ ટેક્સ કેડિટ (ITC)}$$

ટ્રૂકમાં જ્યારે સરકારને કર આપવાનો હોય એટલે કે રીટર્ન ભરતી વખતે સાંકળમાંના દરેક વેપારી પોતે ખરીદી વખતે દીધેલો કર, વેંચાણ વખતે લીધેલાં કરમાંથી બાદ કરે છે અને બાકીનો કર ભરે છે.

ગણેલાં ઉદાહરણો

ઉદા. (1) શ્રી. રોહિત ધૂટક વેપારી છે. તેમણે માલની ખરીદી વખતે 6,500 રૂપિયા લુઅસટી આપ્યો અને તે માલનું વેચાણ કરીને 8,000 રૂપિયા લુઅસટી ભેગો કર્યો, તો (i) ઈનપૂટ ટેક્સ અને આઉટપૂટ ટેક્સ કેટલો? (ii) શ્રી. રોહિતને ઈનપૂટ ટેક્સ કેટિટ કેટલા રૂપિયા મળશે? (iii) તેમનો ચૂકવવા પાત્ર GST શોધો. (iv) તે પરથી ચૂકવવા પાત્ર CGST અને SGST શોધો.

ઉકિલ : શ્રી. રોહિતને ચૂકવવા પાત્ર GST એટલે સરકારને આપવાનો કર

(i) આઉટપુટ ટેક્સ (વેચાણ વખતે ભેગો કરેલો કર) = 8,000 રૂપિયા

(ii) ઈન્પુટ ટેક્સ (ખરીદી વખતે આપેલો કર) = 6,500 રૂપિયા

એટલે ઈનપૂટ ટેક્સ કેડિટ (ITC) = 6,500 રૂપિયા

(iii) ચુક્કવા પાત્ર GST = આઉટપુટ ટેક્સ - ઈનપુટ ટેક્સ કેડિટ (ITC)

$$= 8,000 - 6,500 = 1,500 \text{ રૂપિયા।}$$

(iv) ∴ ચૂકવવા પાત્ર CGST = $\frac{1500}{2} = 750$ રૂપિયા અને તે જ પ્રમાણે SGST = 750 રૂપિયા.

ઉદા. (2) મેસર્સ જ્ય કેમીકલ્સે 8,000 રૂપિયા કરપાત્ર કિંમતનો લિકિવિડ સૉપ ખરીદ કર્યો અને ગ્રાહકને તે 10,000 રૂપિયા કરપાત્ર કિંમતે વેચ્યો જુએસટીનો દર 18% છે. તો મેસર્સ જ્ય કેમીકલ્સનો ચૂકવવા પાત્ર CGST અને SGST શોધો.

ઉક્ખા : ખરીદી વખતે આપેલો (ઈનપુટ ટેક્સ) = 8,000 રૂપિયાની ખરીદી પર 18% ના દરે ભરેલો ટેક્સ

$$= \frac{18}{100} \times 8,000$$

$$= 1,440 \text{ રૂપિયા$$

∴ ITC = 1,440 રૂપિયા

આઉટપુટ ટેક્સ = વેચાણ વખતે ગ્રાહકપાસેથી ભેગો કરેલો GST

$$= \frac{18}{100} \times 10,000$$

$$= 1,800 \text{ રૂપિયા$$

ચૂકવવા પાત્ર GST = આઉટપુટ ટેક્સ - ITC

$$= 1800 - 1440 = 360 \text{ रुपिया}$$

મે. જ્ય કેમિકલ્સનો ચૂકવવા પાત્ર CGST = 180 રૂપિયા અને SGST = 180 રૂપિયા

ઉદા. (3) મે. જ્ય કેમિકલ્સે 8,000 રૂપિયાનો (GST સહિત કિંમત) લિકિડ સૉપ ખરીદ કર્યો અને ગ્રાહકને 10,000 રૂપિયામાં (GST સહિત કિંમત) વેંચ્યો. તો જ્ય કેમિકલ્સનો ચૂકવવા પાત્ર CGST અને SGST શોધો. GSTનો દર 18% છે.

ઉકલ : અહીં વસ્તુની કિમત GST સહિત આપી છે તે ધ્યાનમાં લો.

વस्तु કે માત્રની કુલ કિંમત = કરપાત્ર કિંમત + GST

એટલે કે લિકિડ સોપની 100 રૂપિયા ખરીદ કિંમત હોય તો 118 રૂપિયા વેચાણ કિંમત થાય.

કરસહિત કિંમત

આ ગુણોત્તર અચળ છે.

118 રૂપિયા વેચાણ કિંમત થાય જે 100 રૂપિયા કરપાત્ર કિંમત હોય તો 8000 રૂપિયાની કુલ કિંમત માટે, ધારોકે x રૂપિયા કરપાત્ર કિંમત છે.

$$\therefore \frac{x}{8,000} = \frac{100}{118}$$

$$\therefore x = \frac{8,000}{118} \times 100 = 6,779.66 \text{ રૂપિયા.}$$

$$\therefore \text{ખરીદી વખતે આપેલો GST} = 8,000 - 6,779.66$$

$$\therefore \text{ઈનપૂટ ટેક્સ} = 1,220.34 \text{ રૂપિયા.} \quad \therefore \text{ITC} = 1,220.34 \text{ રૂપિયા.}$$

તે જ પ્રમાણે 10,000 ની કુલ કિંમત માટે, ધારોકે y રૂપિયા કરપાત્ર કિંમત છે.

$$\therefore \frac{y}{10,000} = \frac{100}{118}$$

$$\therefore y = \frac{10,00,000}{118} = 8,474.58 \text{ રૂપિયા.}$$

$$\therefore \text{વેચાણ વખતે એકત્રિત કરેલો કર (આઉટપુટ ટેક્સ)} = 10,000.00 - 8,474.58 \\ = 1,525.42 \text{ રૂપિયા.}$$

$$\therefore \text{ચૂકવવા પાત્ર કર} = \text{આઉટપુટ ટેક્સ} - \text{ઈનપૂટ ટેક્સ કેડિટ (ITC)} = 1,525.42 - 1,220.34 \\ = 305.08 \text{ રૂપિયા.}$$

$$\therefore \text{ચૂકવવા પાત્ર CGST} = \text{ચૂકવવા પાત્ર SGST} = 305.08 \div 2 = 152.54 \text{ રૂપિયા.$$

જવાબ : મે. જ્યાન કેમિકલ્સનો ચૂકવવા પાત્ર CGST અને SGST દરેક 152.54 રૂપિયા છે.

નોંધ : ઉદા.2 અને 3 નો કાળજીપૂર્વક અભ્યાસ કરો. વ્યવહારમાં તમને આવા બન્ને પ્રકારના કર બિલ (Tax Invoice) જેવા મળે છે. એટલે દુકાનદારે વસ્તુની છાપેલી કિંમત કરસહિત છે કે પછી તે કિંમત પર કર આકારશે ? તે ખરીદી કરતાં પહેલાં જાણી લો. પછી ખરીદી કરો.



ICT Tools or Links

નિશ્ચિત તારીખ સુધીમાં કરની ચૂકવણી કરીને તે પછી આપેલી સમયાવધિમાં કર વિવરણપત્ર (GST Returns) દાખલ કરવું જરૂરી છે. આ બધી બાબતો હવે 'ઓનલાઈન' (Online) થઈ શકે છે. www.gst.gov.in આ વેબસાઈટ પર બધાં વિવરણ પત્રકો તમે જોઈ શકો છે. (જુએસટી વિવરણ પત્રો તૈયાર કરવા માટે 'ઓફલાઈન યુટીલિટી' પણ વાપરી શકાય છે.)

ઉદ્દા. (4) એક સાઈકલના ઉત્પાદકે, જથ્થાબંધ વેપારીને એક સાઈકલ 4,000 રૂપિયા કરપાત્ર કિંમતમાં વેંચી. જથ્થાબંધ વેપારીએ તે સાઈકલ 4,800 રૂપિયા કરપાત્ર કિંમત લઈ દુકાનદારને વેંચી. દુકાનદારે 5,200 રૂપિયા કરપાત્ર કિંમતમાં ગ્રાહકને વેંચી. GST નો દર 12% છે. તો વેચાણના દરેક તખકે ચૂકવવા પાત્ર CGST અને SGST શોધવા આપેલી ફૂંતિ પૂર્ણ કરો.

ઉંડિલ : વ્યવસાય સાંકળ :



$$\text{ઉત્પાદક વેચાણ વખતે એકત્રિત કરેલો કર } = 4000 \text{ ના } 12\% = \dots \times \frac{\dots}{\dots} = \boxed{\dots}$$

$$\text{જથ્થાબંધ વેપારીએ વેચાણ વખતે એકત્રિત કરેલો કર = 4,800 \text{ ના } 12\% = 576 \text{ રૂપિયા}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore જથ્થાબંધ વેપારીનો ચૂકવવા \\
 પાત્ર વેરો (કર) &= \left(જથ્થાબંધ વેપારીએ \right) - \left(તેના દ્વારા લેવામાં આવેલી કપાત \right) \\
 &= 576 - 480 \\
 &= 96 રૂપિયા
 \end{aligned}$$

$$\text{હુકાનદારે વેચાણ વખતે એકત્રિત કરેલો કર = 5,200 \text{ ના } 12\% =$$

$$\therefore \text{દુકાનદારનો ચૂકવવા પાત્ર GST} = \text{દુકાનદારે એકત્રિત કરેલો કર} - \text{દુકાનદારની દ્વારા લેવામાં આવેલી કપાત}$$

$$= \boxed{} - \boxed{}$$

$$= \boxed{}$$

વ्यवसाय सांकળમાં GST ભરેલો ટેક્સ (કર વેરા) નું વિવરણ :

વ्यક्ति	ચૂકવવા પાત્ર GST	ચૂકવવા પાત્ર CGST	ચૂકવવા પાત્ર SGST
ઉત્પાદક	480 ₹	240 ₹	<input type="text"/> ₹
જથ્યાબંધ વેપારી	96 ₹	<input type="text"/> ₹	<input type="text"/> ₹
દુકાનદાર	<input type="text"/> ₹	<input type="text"/> ₹	<input type="text"/> ₹
કુલ	<input type="text"/> ₹	<input type="text"/> ₹	<input type="text"/> ₹

- ધારોકે કોઈ વેપારીનો જુલાઈ મહિનાનો એકત્રિત કરેલો કર અને કપાતની રકમ સમાન છે તો તેનો ચૂકવવા પાત્ર કર કેટલો થશે ?
- ધારોકે, કોઈ વેપારીએ એકત્રિત કરેલો જુલાઈ મહિનાનો એકત્રિત કરેલો કર, તેની કપાતની રકમ કરતાં ઓછો છે તો તેની કર ગણતરી કેવી રીતે થશે ?

મહાવરાસંગ્રહ 4.2

- (1) ‘ચેતના સ્ટોર્સ’ 01 જુલાઈ, 2017 થી 31 જુલાઈ, 2017 સુધી કરેલી ખરીદી વખતે 1,00,500 રૂપિયા લુઅસટી આપ્યો અને વેચાણ વખતે 1,22,500 રૂપિયા લુઅસટી એકત્રિત કર્યો. તો આ સમયગાળા માટે ચેતના સ્ટોર્સનો ચૂકવવા પાત્ર લુઅસટી શોધો.
- (2) નજમા લુઅસટી કાયદા અંતર્ગત ફર્મના માલિક (પ્રોપ્રાથ્યટર) છે. તેમણે માલની ખરીદી પર 12,500 રૂપિયા લુઅસટી આપ્યો હતો અને વેચાણ પર 14,750 રૂપિયા લુઅસટી એકત્રિત કર્યો. તો તેમને કેટલા રૂપિયા ઈનપૂટ ટક્સ કેડિટ (ITC) મળશે ? તેમજ તેમનો ચૂકવવા પાત્ર GST શોધો.
- (3) આમીર એન્ટરપ્રાઇઝ ચોકલેટ સૉસની બાટલીઓ ખરીદ કરી ત્યારે 3,800 રૂપિયા GST ભર્યો. તે બાટલીઓ અકબરી બ્રધર્સને વેંચતી વખતે 4,100 રૂપિયા લુઅસટી લીધો. મંદ ફૂડ કોન્સેર્ચ, અકબરી બ્રધર્સ પાસેથી તે બાટલીઓ 4,500 રૂપિયા લુઅસટી ભરીને ખરીદ કરી. તો દ્વરેક તબક્કે ચૂકવવા પાત્ર લુઅસટી શોધો. પ્રત્યેકને ચૂકવણી કરવા માટે કેન્દ્રને ચૂકવવા યોગ્ય કર (CGST) અને રાજ્યને ચૂકવવા યોગ્ય કર (SGST) શોધો.
- (4) ચંદીગઢ એ સંઘરાજ્ય છે. અહીં ‘મલિક ગેસ એજન્સી’ એ વ્યાવસાયિક ઉપયોગ માટે કેટલીક ગેસની ટાંકીઓ 24,500 રૂપિયામાં ખરીદ કરી અને ત્યાંના ગ્રાહકોને 26,500 રૂપિયામાં વેંચી. આ વ્યવહારમાં લુઅસટીનો દર 5% છે. તો કર બિલમાં કુલ GST કેટલો હશે ? તે શોધો. તે પરથી કેન્દ્રને ચૂકવવા યોગ્ય કર (CGST) અને સંઘરાજ્યને ચૂકવવા યોગ્ય કર (UTGST)ની રકમ શોધો. (સંઘરાજ્યમાં SGST ને બદલે UTGST હોય છે.)
- (5) મે. બ્યુટી પ્રોડક્ટ્સે 6,000 રૂપિયા પર 18%ના દરે લુઅસટી આપીને સૌંદર્ય પ્રસાધનોની ખરીદી કરી અને એક જ ગ્રાહકને તે 10,000 રૂપિયામાં વેંચી દીધાં. તો આ વ્યવહારમાં મે. બ્યુટી પ્રોડક્ટ્સે તૈયાર કરેલા ટક્સ ઈન્વોર્ડ્સમાં કેન્દ્રને અને રાજ્યને (CGST અને SGST) વસ્તુ અને સેવા કરની રકમ કેટલી દર્શાવી હશે ? તે શોધો.
- (6) નીચે આપેલી માહિતી પરથી દુકાનદાર તરફથી ગ્રાહક (B2C) માટેનું ટક્સ ઈન્વોર્ડ્સ તૈયાર કરો. બિલ (Tax Invoice) માટે નામ, સરનામું, રાજ્ય તારીખ વગેરે તમારી પસંદ અનુસાર લો.

પુરવઠાદાર : મે. _____ સરનામું _____ રાજ્ય _____ તારીખ _____

ઈન્વોર્ડ્સ ક્રમાંક : _____ GSTIN _____

વસ્તુનું વર્ણન (વિગત) : મોબાઈલ બેટરી : દર ₹ 200, 1 નંગા GST નો દર 12% HSN 8507

હેડફોન : દર ₹ 750, 1 નંગા GST નો દર 18% HSN 8518

(7) નીચે આપેલી માહિતી પરથી એક વેપારી તે બીજા વેપારી (B2B) માટેનો ટેક્સ ઈન્વૉઇસ તૈયાર કરો. તે માટે નામ, સરનામું, તારીખ વગેરે તમારી પસંદ પ્રમાણે લો.

પુરવઠાદાર - નામ, સરનામું, રાજ્ય, GSTIN, બિલ નંબર, તારીખ.

પ્રાપ્તકર્તા - નામ, સરનામું, રાજ્ય, GSTIN.

વસ્તુનું વર્ણન (વિગત) : (1) પેન્સીલ બોક્સ 100, HSN 3924, દર 20 રૂપિયા, GST 12%,
(2) લુંસો પઝલ્સ 50, HSN 9503, દર 100 રૂપિયા, GST 12%.

અધિક માહિતી માટે

સંયુક્ત રચના યોજના (Composition Scheme)

જે વ્યક્તિના વ્યવસાયનો પાછલાં નાણાકીય વર્ષમાં કુલ વકરો (ટર્ન ઓવર) 1.5 કરોડ રૂપિયાથી ઓછો છે તેમના માટે સંયુક્ત રચના યોજના (Composition Scheme) છે. આ યોજના અંતર્ગત કરદાતા શાસન દ્વારા નિશ્ચિયત કરેલા દર પ્રમાણે કરની ચૂકવણી કરે છે.

સંયુક્ત રચના યોજના માટે કરનાં દર (GST rates for composition Scheme)

અ.ક્ર.	પુરવઠાદાર	જીએસ્ટીનો દર	(CGST + SGST)
1.	ઉપાહારગૃહો	5%	2.5% + 2.5%
2.	ઉત્પાદક અને વિકેતા	1%	0.5% + 0.5%

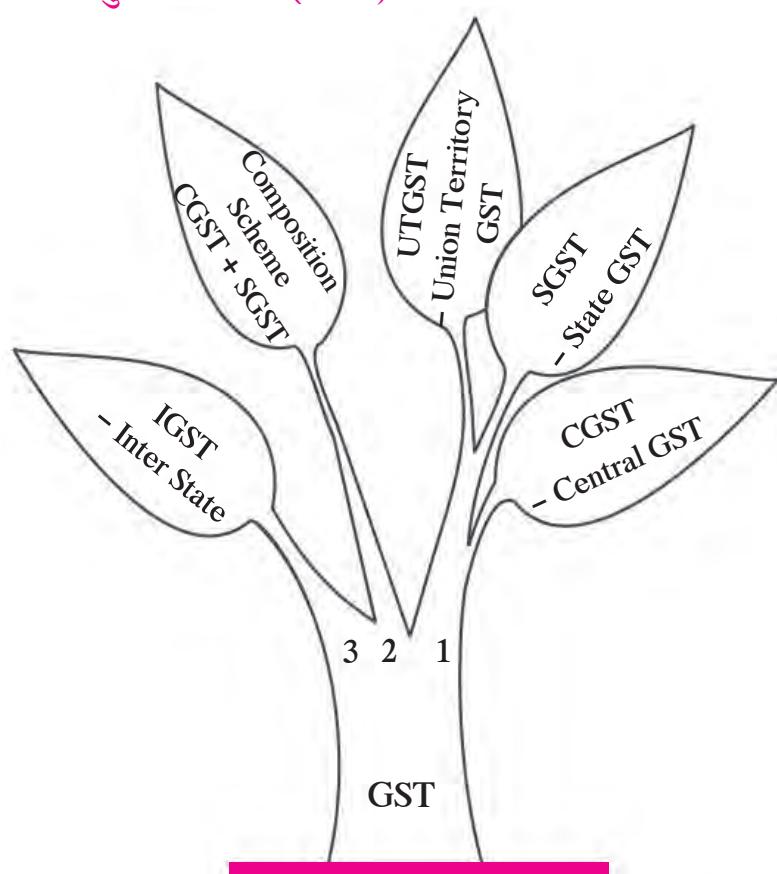
સંયુક્ત રચના યોજના લેનાર વેપારી માટે નિયમો :

- સંયુક્ત રચના યોજના લેનાર વેપારી, કરેલાં વેચાણ પર કરવેરા લઈ શકશે નહિ એટલે આ યોજના લેનાર વેપારી ટેક્સ ઈન્વૉઇસ આપી શકે નહીં. તેમણે પુરવઠા-બિલ (Bill of supply) આપવાનું રહેશે.
- વેપારીએ દર 3 મહિને કરેલાં વેચાણ પરનો કર ઉપરના કોષ્ટક પ્રમાણે સરકારમાં જમા કરાવવાનો હોય છે.
- આ યોજનામાં વેપારી બીજા રાજ્યમાં વેચાણ કરી શકશે નહીં. પરંતુ બીજા રાજ્યના વેપારી પાસેથી ખરીદી કરી શકશે.
- આ યોજનાના વેપારીને ખરીદી પર નિવેશ કરની કપાત રકમ એટલે ITC (ઇનપૂટ ટેક્સ કેઢિટ) નો લાભ મળશે નહીં.
- આ યોજનાના વેપારીએ પોતાના દુકાનના પાટિયા (Display Board) પર ‘સંયુક્ત કરપાત્ર વ્યક્તિ’ (Composition taxable person) એમ લખવાનું રહેશે.
- આ યોજનાના વેપારીએ તેમના પુરવઠા બિલમાં (Bill of supply) પણ ઘાટાં અક્ષરે ‘સંયુક્ત કરપાત્ર વ્યક્તિ, ટેક્સ ઉધરાવવા માટે અપાત્ર’ (Composition taxable person not eligible to collect tax on supplies) એમ છપાવવાનું હોય છે.

GST ની વિશેષતાઓ (Features of GST)

- વિવિધ અપ્રત્યક્ષ કર નાખૂં થયા.
- વસ્તુ અને સેવા વિશેષના વિવાહનો અંત.
- વેપારીઓ માટે રાજ્યનુસાર નોંધણી.
- GSTIN (જાનરીઆયએન) ધારક વેપારીઓએ કરેલાં વ્યવહારની વ્યસ્થિત નોંધ (Record) રાખી સમયસર GST ભરવો પડે છે.
- વ્યવહારમાં પારદર્શકતા.
- સાદું સમજવામાં સહેલું કર માળખું.
- કર ઉપર કર ભરવા પડતાં નથી. તેથી વસ્તુ અને સેવાની કિંમતો નિયંત્રણમાં.
- વસ્તુ અને સેવાની આંતરરાષ્ટ્રીય બનલર સાથે તુલના તેથી ગુણવત્તામાં વધારો.
- ‘મેક ઈન ઇન્ડિયા’ ને ગતિ મળશે.
- કર પ્રણાલિ તંત્રજ્ઞાન આધારિત હોવાથી ત્વરિત નિર્ણયો લેવામાં મદદ.
- વસ્તુ અને સેવા કર એ બેવડું મોડેલ (Dual model) છે એટલે કે કેન્દ્ર અને રાજ્ય બન્ને દ્વારા વસુલવામાં સમાન અને સમાંતર કર માળખું.

વસ્તુ અને સેવા કર (GST) અંતર્ગત આવતાં કરનાં પ્રકાર



1. CGST-SGST (UTGST) :

એક જ રાજ્યમાં ખરીદ-વેચાણ કરતાં વેપારીઓ માટે.

2. સંયુક્ત રચના યોજના (Composition Scheme) :

જેમનો વાર્ષિક વકરો 20 લાખથી 1.5 કરોડ રૂપિયાની વચ્ચે હોય તેવા વેપારીઓ આ યોજનાનો લાભ લે છે. તેઓને SGST અને CGST અલગ દરથી આપવું પડે છે. આ વેપારીઓને SGST અને CGST આપવાનો હોય છે.

3. IGST :

આંતરરાજ્ય (Inter State) વ્યવહાર કરતાં વેપારીઓ માટે.

અધિક માહિતી માટે

એકત્રિત/સંકલિત વસ્તુ અને સેવા કર – IGST (Integrated GST)

જ્યારે વસ્તુનો પુરવઠો કે સેવા પૂરી પાડવાનો વ્યવહાર બે જુદાં જુદાં રાજ્યોના વેપારી વચ્ચે (Inter state) ને લગાડવામાં આવે છે તેને સંકલિત વસ્તુ અને સેવા કર IGST કહે છે, ને પૂર્ણપણે કેન્દ્ર સરકારને આપવાનો હોય છે.

ધારોકે, એક રાજ્યના વેપારીએ બીજી રાજ્યના વેપારી પાસેથી વસ્તુ ખરીદ કરી અને પોતાના રાજ્યમાં વેંચી. તો ખરીદી વખતે ચૂકવવાપાત્ર કરની ગણના ITC માટે ભરેલા IGST ની કેડિટ કેવી રીતે મળશે ? તે જોઈએ.
ઉદાહરણાર્થ : દા.ત. વેપારી M એ (મહારાષ્ટ્રના) 20,000 રૂપિયાના સ્કુટર સ્પેચર પાર્ટ્સ વેપારી P (પંજાબ) પાસેથી ખરીદ કર્યા. તે વખતે 28% ના દરે 5600 રૂપિયા ‘સંકલિત વસ્તુ અને સેવાકર’ (IGST) પેટે વ્યાપારી P ને દીધાં.

M એ આ બધા સ્પેચર પાર્ટ્સ – અહીના ગ્રાહકોને 25,000 રૂપિયામાં વેંચ્યા. તે વખતે 28% ના દરે 7,000 રૂપિયા GST એકત્રિત કર્યો.

GST 7,000 રૂપિયા = CGST 3,500 રૂપિયા + SGST 3,500 રૂપિયા ગ્રાહક પાસેથી એકત્રિત કર્યો. હવે સરકારમાં કર ભરતી વખતે તે 5,600 રૂપિયાની કપાત (ITC) કેવી રીતે લેશે ? તે જોઈએ.

નોંધ : IGST ની કેડિટ લેતી વખતે પ્રથમ IGST માટે, પછી CGST માટે અને છેલ્લે બાકી રહેલી કેડિટ SGST માટે લેવામાં આવે છે. અહીં M એ કરેલાં વેચાણના વ્યવહારમાં IGST નથી એટલે પહેલાં CGST માટે જરૂરી કેડિટ લઈ બાકીની SGST માટે કેડિટ લેવી.

$$\therefore \text{ચૂકવવા પાત્ર CGST} = 3,500 - 3,500 = 0 \text{ રૂપિયા}$$

એટલે 5,600 રૂપિયામાંથી 3,500 રૂપિયાની કેડિટ લઈ લીધી હવે બાકીના 5,600 - 3,500 = 2,100 રૂપિયાના કેડિટ SGST માટે લઈ શકાશે.

$$\therefore \text{ચૂકવવા પાત્ર SGST} = 3,500 - 2,100 = 1,400 \text{ રૂપિયા$$

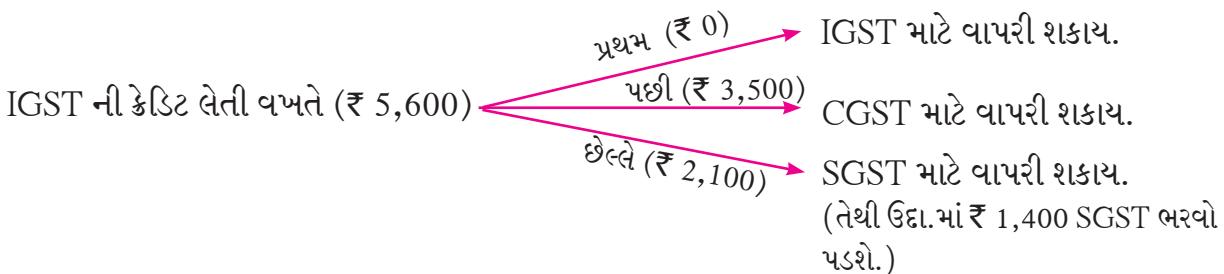
વેપારી ‘M’ ને 1,400 રૂપિયા SGST ભરવો પડશે.

ધ્યાનમાં લોકે, વેપારી M ને ખરીદી વખતે દીધેલાં 5,600 રૂપિયાની પૂરેપૂરી કેડિટ (ITC) મળી. (એટલે કે ઈનપૂટ ટેક્સની પૂર્ણ કેડિટ મળી.)

ITC આ રીતે લેવાય છે.

ખરીદી વખતે દીધેલો કર (ITC)

વેચાણ વખતે એકત્રિત કરેલો કર (Output Liability)





યાદ કરીએ.

ગયા વર્ષે આપણે બચત અને રોકાણનું મહત્વ જાણ્યું. તે પ્રમાણે જેટલું શક્ય હોય તેટલું અમલમાં મૂક્વાનું પણ તમે શરૂ કર્યું હશે - કારણ હુંમેશા નિરોગી રહેવા માટે જેમ શરીરને આરોગ્યની સારી આદતોની જડૃ છે તેમ આર્થિક આરોગ્ય માટે બચત અને રોકાણની આદત પાડવી પડે છે. હાલ રોકાણના પ્રકારોમાં એટલી બધી વિવિધતા છે કે, તેનો અભ્યાસ અને અનુભવ બન્ને હોવા જડૃ છે.



ભૂચુઅલ ફંડ	રોશાન્સ
ડિવેન્ચર્સ	વિવિધ પ્રકારનો વિમો
બૉન્ડસ્	પ્રોવિણ્ટ ફંડ
એફ.ડી.	પોતાનું ઘર
રીકરીંગ ખાતુ	ઘરેણાં/દાગિના



 પિગી બેંક
 બચત

મ્યુચ્યુઅલ ફંડ	રો	શેર્સ
ડિબન્યાર્સી	કા	વિવિધ પ્રકારનો વિભો
બૉન્ડ્સ	નો	પ્રોવિડન્ટ ફંડ
એફ.ડી.	ભિ	
રીકરીંગ ખાતુ	ન્ન	પોતાનું ઘર
	મા	
	ગ્રં	ઘરેણાં/દાળિના



કહે છે, “હાલ શેર્સ, મ્યુચ્યુઅલ ફંડ (MF), ડિબેન્ચર્સ, બોન્ડ્સ વગેરેમાં રોકાણ કરનારાંની સંખ્યા વધી રહી છે. તે સાથે જ �SIP કરવા તરફ પણ રોકાણકારોનો ઝૂકાવ વધારે છે. તને તો હવે દર ભાઇને વધારાની નિશ્ચિત રકમ મળવાની છે. તે રકમની તું SIP એટલે કે Systematic Investment Plan કરી શકે છે.”

આ પ્રકારના સંવાદ આપણે ટેકઠેકાણે સાંભળતા હોઈએ છીએ. તેથી આ બાબતની પૂરે પૂરી માહિતી હોવી આપણાં સૌ માટે ‘બહુજન હિતાય, બહુજન સૂખાય’ બની શકે છે.

આ પ્રકરણમાં આપણે શેર્સર્સ, મ્યુચ્યુઅલ ફંડ્સ (MF) અને SIP ની માહિતી મેળવીશું.



શેર્સ (Shares)

વ્યક્તિની પોતાની એકલાની માલિકિની દુકાન હોય તેને કહેવાય પ્રોપ્રાયટરશીપ. બે-ચાર વ્યક્તિઓ ભેગાં મળીને વેપાર કરે તેને કહેવાય પાર્ટનરશીપ. આમાં રોકાણ ઓછું જેઠાં એ. પરંતુ જે એકાદ કંપની, ઉદ્યોગ કે કારખાનું શરૂ કરવું હોય તો ખૂબ મોટા પ્રમાણમાં મૂડીની જરૂર પડે છે. આ મૂડી સમાજમાંથી ઊભી કરવી પડે છે.

કારખાનું કે કંપની શરૂ કરવા માટે દૂરથી વ્યક્તિઓ સાથે મળીને કંપની સ્થાપે છે. ભારતીય કંપની કાયદો 1956 પ્રમાણે, કંપનીની નોંધણી (Registration) કરવામાં આવે છે. કંપનીની સ્થાપના કરનાર વ્યક્તિઓને કંપનીના પ્રમોટર્સ (પ્રવર્તકો) કહે છે. આવી કંપની એટલે જ મર્યાદિત (પણિલક લિમિટેડ) કંપની.

કંપની શરૂ કરવા માટે જેટલાં પૈસાની જરૂર પડે છે તેને મૂડી (Capital) કહે છે. આ મૂડીના નાના નાના સમાન ભાગ કરવામાં આવે છે. આ ભાગ સામાન્ય રીતે ₹ 1, ₹ 2, ₹ 5, ₹ 10 અથવા ₹ 100 વગેરે કિંમતના હોય છે. આ દ્વારા ભાગને શેઅર કહે છે. આ શેઅર્સ વેંચીને કંપની જરૂરી મૂડી સમાજમાંથી ઊભી કરે છે.

શેઅર (Share) : કંપનીની મૂડીની એક ભાગ એટલે એક શેઅર. શેઅર્સ સર્ટિફિકેટ (share certificate) પર એક શેઅર્સની કિંમત, શેઅર્સની સંખ્યા, અનુકૂળમાંક વગેરે છાપેલાં હોય છે.

શેઅર ધારક અથવા ભાગ ધારક-(Share holder) : કંપનીના શેઅર્સ વેંચાતા લેનારી વ્યક્તિ તે કંપનીની ભાગધારકે કે શેઅરધારક બને છે. શેઅર ધારક તેની પાસેના શેઅર્સના પ્રમાણમાં તે કંપનીનો માલિક હોય છે.

સ્ટૉક એક્સચેન્જ (Stock Exchange) : જ્યાં શેર્સનું ખરીદ-વેચાણ થાય છે, તેને શેર્સ બજાર (સ્ટૉક એક્સચેન્જ અથવા સ્ટૉક માર્કેટ અથવા ઇક્વિટી માર્કેટ, કપીટલ માર્કેટ અથવા શેર્સ માર્કેટ) કહે છે. સમાજમાંથી મૂડી ઊભી કરીને શરૂ કરી હોય એટલે પબ્લિક લિમિટેડ કંપની શેર્સ બજારમાં સૂચિબદ્ધ (listed company) કંપની હોવી જરૂરી છે.

દાર્શનિક કિંમત (Face Value - FV) : કંપનીના શેઅર સર્ટિફિકેટ ઉપર છાપેલી એક શેઅરની કિંમતને શેઅરની દાર્શનિક કિંમત (FV) કહે છે.

બજર ભાવ (Market Value - MV) : જે કિંમતથી શેઅર બજરમાં શેર્સનું ખરીદ-વેચાણ થાય છે તેને તે એક શેર્સનો બજરભાવ (MV) કહે છે.

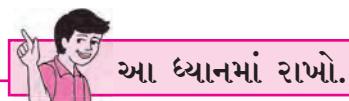
કંપનીની સ્થાપના થયા પછી, તેની કામગિરી અપેક્ષા કરતાં સરસ હોય ત્યારે તે શેઅરની બજારમાં માંગણી વધે છે. પરંતુ શેઅર્સની સંઘ્યા નિશ્ચિયત હોય છે તેથી ‘પૂરવઠો’ વધારી શકતો નથી. તેથી શેઅરનો બજારભાવ વધતો જય છે. એથી ઉલ્ટું જે કંપનીની કામગિરી ઉત્તરતી હોય તો શેઅરના બજારભાવ પણ ઘટે છે. આ વધ-ઘટ અનુકૂળે ▲, ▼ આ ચિહ્નનો દ્વારા દર્શાવવામાં આવે છે. આ વધ-ઘટને પરિણામે શેઅર બજારનો નિર્દેશાંક પણ વધતો-ઘટતો રહે છે.

શેઅર બજરમાં શેરસરના ભાવ દ્વારા ક્ષાળો બદલતાં રહે છે.

લાભાંશ (Dividend) : કંપનીને નાણાંકીય વર્ષમાં થયેલાં નફાની વહેચણી દ્વારા શેઅર ધારકને શેરસરનો સંખ્યાના પ્રમાણમાં કરવામાં આવે છે. શેઅર ધારકોને મળતો નફાનો ભાગ (લાભનો અંશ) એટલે લાભાંશ.

કંપનીની કામગિરી ઉત્તમ હોય તો પરિણામે કંપનીની માલમત્તામાં પણ વધારો થાય છે. તેથી લાભાંશ પણ સારો મળે છે.

શેઅર ધારકોને મળતાં લાભાંશ પર આવકવેરો ભરવો પડતો નથી.



શેઅરનો બજરભાવ ગમે તેટલો વધે કે ઘટે છતાં વર્ષના અંતે મળતો લાભાંશ હંમેશા શેઅરની સંખ્યાના પ્રમાણમાં (દાર્શનિક કિંમત પર) મળે છે.

અધિક માહિતી માટે :

મુંબઈમાં આવેલ મુંબઈ શેઅર બજર (BSE-Bombay Stock Exchange) અને રાષ્ટ્રીય શેઅર બજર (NSE-National Stock Exchange) આ બે ભારતના મુખ્ય શેઅર બજર છે. મુંબઈ શેઅર બજર ઓશિયાનું સૌથી જૂનું અને રાષ્ટ્રીય શેઅર બજર ભારતનું સૌથી મોટું શેઅર બજર છે.

શેઅર બજરમાં થતી વધ-ઘટ સમજવા માટે SENSEX અને NIFTY એમ બે મુખ્ય નિર્દેશાંકો (Index) છે. SENSEX = SENSitive + indEX આ બે શબ્દોથી બનેલો છે. BSE એ 1-1-1986 થી SENSEX દર્શાવવાનું શરૂ કર્યું. સૌથી વધુ મૂડી ધરાવતી નામાંકિત અને પ્રસ્થાપિત એવી 30 કંપનીઓના બજર ભાવમાં થતી વધ-ઘટ અનુસાર SENSEX નક્કી થાય છે.

'નિફ્ટી' આ શબ્દ તેના નામ પ્રમાણે બે શબ્દોનો બનેલો છે. NIFTY = NSE + FIFTY. નિફ્ટી એ NSEમાં સર્વોત્તમ કામગિરી કરતી 50 કંપનીઓ પરથી નક્કી થાય છે.



ICT Tools or Links

SEBIની વેબસાઇટની મુલાકાત લો. તે જ પ્રમાણે BSE, NSEની વેબસાઇટ, દૂરદર્શન પરની ચેનલ્સ અથવા ઈન્ટરનેટ પર શેઅર બજરની માહિતી આપતાં વિડીઓ જુઓ અને શેઅર બજર સમજો. શેઅર બજરનાં ભાવની વધ-ઘટ દૂરદર્શનની (ટી.વી.ની) કેટલીક ચેનલ્સ પર સતત ચાલુ હોય છે. તેમાં સામાન્ય રીતે ઉપરની પછી મુંબઈ શેઅર બજર - BSE અને નીચેની પછી રાષ્ટ્રીય શેઅર બજર - NSEમાં listed કંપનીઓના બજરભાવ દર્શાવે છે. શેરસરની બુક વોલ્યુ (Book Value) એટલે શું ? તેની માહિતી મેળવો.

દાર્શનિક કિંમત અને બજરભાવ (Comparison of FV and MV) :

- (1) જે બજરભાવ > દાર્શનિક કિંમત હોય, તો તે શેઅર અધિમૂલ્ય પર છે (share is at premium) એમ કહે છે.
- (2) જે બજરભાવ = દાર્શનિક કિંમત હોય, તો તે શેઅર સમમૂલ્ય પર છે (share is at par) એમ કહે છે.
- (3) જે બજરભાવ < દાર્શનિક કિંમત હોય, તો તે શેઅર અવમૂલ્ય પર છે (share is at discount) એમ કહે છે.

દા.ત. : (1) ધારોકે, શેઅરની દાર્શનિક કિંમત = 10 રૂપિયા અને બજરભાવ = 15 રૂપિયા હોય તો આ શેઅર $15 - 10 = 5$ રૂપિયા અધિમૂલ્ય પર છે એટલે કે 'પ્રીમિયમ' પર છે.

(2) ધારોકે, શેઅરની દાર્શનિક કિંમત = 10 રૂપિયા અને બજરભાવ = 10 રૂપિયા હોય તો આ શેઅર $10 - 10 = 0$. એટલે કે સમમૂલ્ય પર, 'અંટ પાર' છે.

(3) ધારોકે, શેઅરની દાર્શનિક કિંમત = 10 રૂપિયા અને બજરભાવ = 7 રૂપિયા હોય તો આ શેઅર $10 - 7 = 3$ રૂપિયા અવમૂલ્ય પર છે. એટલે કે 'ડિસ્કાઉન્ટ' પર છે.

કુલ રોકાણ (Sum invested) : શેઅરની ખરીદી માટે જેઈતી કુલ રકમ એટલે કુલ રોકાણ.

$$\text{કુલ રોકાણ} = \text{શેઅરસર્ની સંખ્યા} \times \text{એક શેઅરનો બજરભાવ}$$

ઉદા. 100 રૂપિયા દાર્શનિક કિંમતવાળો એક શેઅર 120 રૂપિયા બજરભાવે ખરીદ્યો. તો એવા 50 શેઅર્સ માટે કુલ કેટલા રૂપિયા રોકાણ કરવું પડશે ?

ઉક્લા : કુલ રોકાણ = શેઅરસર્ની સંખ્યા × એક શેઅરનો બજરભાવ
 $= 50 \times 120 = 6000$ રૂપિયા

શેઅર્સ પર વળતરનો દર (Rate of Return-RoR) :

આપણે શેઅરસર્માં રોકેલી રકમ સમયાંતરે કેટલું વળતર આપે છે તે સમજવું ખૂબ મહત્વનું છે. તે નીચેના ઉદાહરણ પરથી સમજાઓ.

ઉદા. (1) શ્રીયશે 100 રૂપિયા દાર્શનિક કિંમતવાળા એક શેઅરનો બજરભાવ 120 રૂપિયા હતો. ત્યારે વેંચાતા લીધા. તેના પર કંપનીએ 15% લાભાંશ આપ્યો. તો કરેલા રોકાણ પર મળેલાં વળતરનો દર શોધો.

ઉક્લા : દાર્શનિક કિંમત = 100 રૂપિયા, બજરભાવ = 120 રૂપિયા, લાભાંશ = 15%
પ્રતિ શેઅર વળતરનો દર $x\%$ માનીએ. અહીં ધ્યાનમાં લ્યોકે, 120 રૂપિયાના રોકાણ પર 15 રૂપિયા મળ્યા.

$$\therefore \frac{15}{120} = \frac{x}{100}$$

જે, $120 : 15$
તો, $100 : x$

$$\therefore x = \frac{15 \times 100}{120} = \frac{25}{2} = 12.5\%$$

જવાબ : શ્રીયશે શેઅર્સ પર વળતરનો દર 12.5% મળ્યો.



ઉદ્દી. (2) દાર્શનિક કિમત = 100 રૂપિયા, અધિમૂલ્ય = 65 રૂપિયા તો તે શેરીર બજારભાવ શોધો.

ઉક્ત : બજરભાવ = દાર્શનિક કિમત + અધિમૂલ્ય = 100 + 65 = 165 રૂપિયા

∴ શેઅરનો બજરભાવ 165 રૂપિયા પ્રતિ શેઅર.

ઉદ્દી. (3) નીચેનો કોઈ યોગ્ય સંપ્રાણ અથવા શર્ષણ લખી પૂર્ણ કરો.

ઉદા. ફો.	દાર્શનિક કિંમત (FV)	મૂલ્ય પ્રકાર	વખરભાવ (MV)
(i)	10 રૂપિયા	અધિમૂલ્ય 7 રૂપિયા	
(ii)	25 રૂપિયા		16 રૂપિયા
(iii)		સમમૂલ્ય	5 રૂપિયા

ઉક્લ : (i) બજરભાવ $10 + 7 = 17$ રૂપિયા, (ii) અવમૂલ્ય $25 - 16 = 9$ રૂપિયા,

(iii) દાર્શનિક કિંમત 5 રૂપિયા.

ઉદા. (4) નીલભાઈએ નીચે પ્રમાણે શોઅર્સમાં રોકાણ કર્યું. તો તેમનું કુલ રોકાણ શોધો?

કુંપની A : 350 શેર્સ, દાર્શનિક કિંમત = 10 રૂપિયા, પ્રતિ શેર અધિમૂલ્ય = 7 રૂપિયા

કંપની B : 2,750 શેર્સ, દાર્શનિક કિંમત = 5 રૂપિયા, બજરભાવ = 4 રૂપિયા

કુંપની C : 50 શેર્સ, દાર્શનિક કિંમત = 100 રૂપિયા, બજરભાવ = 150 રૂપિયા

$$\text{ઉક્લ : કંપની A : અધિમૂલ્ય} = 7 \text{ રૂપિયા એટલે બજરભાવ} = \text{દાર્શનિક કિંમત} + \text{અધિમૂલ્ય}$$

$$= 10 + 7 = 17 \text{ રૂપિયા$$

$$\therefore \text{કંપની Aમાં રોકાણ = શેર્સરસની સંખ્યા} \times \text{બજરભાવ} = 350 \times 17 = 5,950 \text{ રૂપિયા}$$

કુપની B : દાર્શનિક કિંમત = 5 રૂપિયા, બજરભાવ = 4 રૂપિયા

$$\therefore \text{કંપની Bમાં રોકાણ = શેર્સની સંખ્યા} \times \text{બજરભાવ} = 2,750 \times 4 = 11,000 \text{ રૂપિયા$$

કુંપની C : દાર્શનિક કિંમત = 100 રૂપિયા, બજરભાવ = 150 રૂપિયા

$$\therefore \text{કંપની } C\text{માં રોકાણ} = \text{શેર્સરની સંખ્યા} \times \text{બજરભાવ} = 50 \times 150 :$$

જવાબ : નીલભાઈએ ત્રણ કંપનીમાં કરેલું કુલ રોકાણ = 5,950 + 11,000 + 7,500

= 24,450 રૂપિયા

$$= 24,450 \text{ रुपिया}$$

ઉદા. (5) સ્મિતાએ 12,000 રૂપિયા રોકીને 10 રૂપિયા દાર્શનિક કિંમત (FV)ના શેર્ચર્સ 2 રૂપિયા અધિમૂલ્ય પર ખરીદ્યા. તો તેને કેટલાં શેર્ચર મળ્યા ? તે શોધવાની નીચેની કૃતિ પૂર્ણ કરો.

ઉક્લ : દાર્શનિક કિમત = 10 રૂપિયા, અધિમૂલ્ય = 2 રૂપિયા.

$$\therefore \text{બજરભાવ} = \text{દાર્શનિક કિમત} + \boxed{} = \boxed{} + \boxed{} = \boxed{}$$

$$\therefore \text{शेअर्सनी संख्या} = \frac{\text{कुल रोकाणा}}{\text{बजरभाव}} = \frac{12000}{\boxed{ }} = \boxed{ } \text{ शेअर्सनी}$$

જવાબ : સ્મિતાને શેર્ષર્સ મળ્યા.

ઉદા. (6) 10 રૂપિયા દાર્શનિક કિંમતના 50 શેર્સનું 25 રૂપિયા બજરભાવે વેચાતા લીધાં. તેના પર કંપનીએ 30% લાભાંશ જાહેર કર્યો. તો (1) કુલ રોકાણ (2) મળેલો લાભાંશ (3) રોકાણ પર વળતરનો દર શોધો.

ઉક્ખા : શેરરની દાર્શનિક કિંમત = 10 રૂપિયા, બજરભાવ = 25 રૂપિયા, શેર્સની સંખ્યા = 50.

\therefore કુલ રોકાણ $25 \times 50 = 1,250$ રૂપિયા

$$\text{લાભાંશ} = 10 \times \frac{30}{100} = 3 \text{ રૂપિયા પ્રતિ શેર}$$

\therefore 50 શેર્સનું પરનો કુલ લાભાંશ $= 50 \times 3 = 150$ રૂપિયા

$$\begin{aligned}\therefore \text{વળતરનો દર} &= \frac{\text{મળેલો કુલ લાભાંશ}}{\text{કુલ રોકાણ}} \times 100 \\ &= \frac{150}{1250} \times 100 = 12\%\end{aligned}$$

જવાબ : (1) કુલ રોકાણ 1,250 રૂપિયા (2) 50 શેર્સનું કુલ લાભાંશ 150 રૂપિયા

(3) રોકાણ પર વળતરનો દર 12%.

મહાવરાસંગ્રહ 4.3

1. નીચેના કોડામાં યોગ્ય સંખ્યા અથવા શરૂઆતી લખી પૂર્ણ કરો.

ઉદા. કે.	દાર્શનિક કિંમત (FV)	મૂલ્ય પ્રકાર	બજરભાવ (MV)
(1)	100 રૂપિયા	સમમૂલ્ય	...
(2)	...	અધિમૂલ્ય = 500 રૂપિયા	575 રૂપિયા
(3)	10 રૂપિયા	...	5 રૂપિયા

2. બજરભાવ 80 રૂપિયા હતો ત્યારે અમોલે 100 રૂપિયા દાર્શનિક કિંમતના 50 શેર્સનું વેચાતા લીધા. તે વર્ષે કંપનીએ 20% વેચાતા લીધા. તે વર્ષે કંપનીએ 20% લાભાંશ આપ્યો તો રોકાણ પર મળતાં વળતરનો દર શોધો.

3. જેસેફે નીચે પ્રમાણે શેર્સનું રોકાણ કર્યું તો તેનું કુલ રોકાણ શોધો.

કંપની A : દાર્શનિક કિંમત 2 રૂપિયા અને અધિમૂલ્ય 18 રૂપિયા હોય તેવા 200 શેર્સ.

કંપની B : બજરભાવ 500 રૂપિયા હોય તેવો 45 શેર્સ.

કંપની C : બજરભાવ 10,540 રૂપિયા હોય તેવો 1 શેર.

4. શ્રીમતી દેશપાંડિએ 20,000 રૂપિયાનું રોકાણ કરીને 5 રૂપિયા દાર્શનિક કિંમતના શેર્સનું 20 રૂપિયા અધિમૂલ્ય પર ખરીદ્યા. તો તેમને કેટલા શેર્સ મળશે ?

5. શ્રી. શાંતિલાલે 100 રૂપિયા દાર્શનિક કિંમતના 150 શેર્સનું 120 રૂપિયાના બજરભાવે ખરીદ કર્યા. કંપનીએ 7% લાભાંશ આપ્યો. તો રોકાણ પર વળતરનો દર શોધો.

6. નીચેના પૈકી કર્યું રોકાણ ફાયદાકારક છે ? બન્ને કંપનીના શેરાસરની દાર્શનિક કિમત સમાન છે.
 કંપની A : બજરભાવ 80 રૂપિયા લાભાંશ 16% અને કંપની B : બજરભાવ 120 રૂપિયા લાભાંશ 20% છે.



ICT Tools or Links

કોઈપણ પાંચ કંપનીનાં શેરાસરની દાર્શનિક કિમત અને બજરભાવ ઇન્ટરનેટ પરથી અથવા અન્ય સોટ પરથી શોધો. તેમનો જેડસ્ટાન્ડાલેખ દોરી તુલના કરો. (શક્ય હોય તો ▲ અને ▼ એમ બન્ને પ્રકારના શેરાસર લેવા.)



જાણી લઈએ.

શેરાસરના ખરીદ-વેચાણ પર દલાલી અને કર (Brokerage and taxes on share trading)

દલાલી (Brokerage) : શેરાસરના ખરીદ-વેચાણ અંગત રીતે કરી શકતું નથી. તે શેઅર બજરના અધિકૃત વ્યક્તિઓ કે સંસ્થા મારફત કરી શકાય છે. તેમને ‘શેઅર-દલાલ’ (Share Broker) કહે છે. દલાલ મારફત શેરાસરનું ખરીદ-વેચાણ કરતી વખતે બજરભાવ પર નક્કી કરેલા દરે દલાલ જે રકમ લે છે તેને ‘દલાલી’ કહે છે. એટલે શેરાસર ખરીદી કરનાર તથા વેંચનાર બન્ને દલાલી આપે છે.

ઉદા. (1) ધારોકે 100 રૂપિયા દાર્શનિક કિમતના શેઅરનો બજરભાવ 150 રૂપિયા છે. દલાલીનો દર 0.5% છે અને કુલ 100 શેરાસર ખરીદતી વખતે કેટલી રકમ આપવી પડશે ? અથવા આવા 100 શેરાસર વેંચાણ પછી કેટલી રકમ મળશે ?

શેઅર ખરીદતી વખતે -

$$\text{એક શેઅરની ખરીદ કિમત} = \text{બજરભાવ} + \text{દલાલી}$$

$$= 150 \text{ રૂપિયા} + 150 \text{ રૂપિયા} \times 0.5\% = 150 + 0.75$$

$$\therefore \text{એક શેઅરની ખરીદ કિમત} = 150.75 \text{ રૂપિયા$$

$$\text{આવા } 100 \text{ શેઅર માટેનું \ કુલ રોકાણ } 100 \times 150.75 = 15,075 \text{ રૂપિયા$$

$$\text{આમાં } 15,000 \text{ રૂપિયાના શેરાસર + 75 \text{ રૂપિયા દલાલી છે.}$$

શેઅર વેંચતી વખતે -

$$\text{એક શેઅરની વેંચાણ કિમત} = \text{બજરભાવ} - \text{દલાલી}$$

$$= 150 \text{ રૂપિયા} - 150 \text{ રૂપિયા} \times 0.5\% = 150 - 0.75$$

$$\therefore \text{એક શેઅરની વેંચાણ કિમત} = 149.25 \text{ રૂપિયા$$

$$\therefore 100 \text{ શેરાસરની વેંચાણ કિમત} = 149.25 \times 100 = 14,925 \text{ રૂપિયા$$

જવાબ : 100 શેરાસર વેંચતા તેને 14,925 રૂપિયા મળશે.



આ ધ્યાનામં રાખો.

- દલાલી હંમેશા શેઅર્સના બજારભાવ પર આકારવામાં (વસ્તુલ કરવામાં) આવે છે.
 - શેઅરના ખરીદ-વેચાણના વિવરણમાં દલાલી અને કર ગણીને એક શેઅરની કિમત નક્કી કરવામાં આવે છે.

ઉપક્રમ I : તમારા વિસ્તારમાં શેઅર દલાલ તરીકે સેવા આપતી વ્યક્તિ કે સંસ્થાની માહિતી મેળવો. તેમના દલાલના દરની માહિતી લો અને તૂલના કરો.

ઓપ્કમ II: ડી-મેટ ખાતું (Demat A/c) અને ટ્રેડિંગ ખાતા (Trading A/c) નું વિવરણ પત્ર (સ્ટેટમેન્ટ) મેળવો. તેમાં કઈ કદ્ય બાબતોનો સમાવેશ હોય છે. તેની માહિતી નેટ પરથી/ દલાલની મુલાકાત લઈને/ વડીલો પાસેથી મેળવો. મિત્રો સાથે ચર્ચા કરો.

અધિક માહિતી માટે : દરેક શેઅર દલાલ સેબી (SEBI - Securities and Exchange Board of India) કાયદો 1992 અંતર્ગત નોંધણીકૃત હોય છે તેના પર સેબીનું નિયંત્રણ હોય છે.

શેર્સ, બોન્ડ્સ, મ્યુચ્યુઅલ ફંડ્સ વગેરેની નોંધ રાખવા માટે ડી-મેટ ખાતું અને તેમની ખરીદી વિકી માટે ટ્રેડિંગ ખાતું (Dematerialized Account, Trading Account) ખોલવું જરૂરી છે. આ ખાતાઓ બેંકમાં કે શેર્સર દલાલ પાસે ખોલાવી શકાય છે. આ સુવિધા આપનાર બેંક કે બ્રોકરને DP એટલે Depository Participants કહે છે. આ DPs NSDL અને CDSL બે ડિપોઝિટરીઝ (Depositaries)ના અધીન હોય છે. ડી-મેટ ખાતામાં શેર્સ લેવડ-દેવડનો હિસાબ રાખવામાં આવે છે. એ બેંકના ખાતા જેવું હોય છે. જેમ કે ખરીદિલા શેર્સ જમા બાજુએ (Credit) નોંધાય છે અને વેચેલા શેર્સ ખર્ચની બાજુએ (Debit) નોંધાય છે. તેનું વિવરણપત્ર (statement) માંગણી કરવાથી મળે છે. તે માટે નિશ્ચિત ફી આપવી પડે છે. આ ખાતામાં શેર્સ ઇલેક્ટ્રોનિક રૂપમાં જમા રહે છે. આ બન્ને ખાતાને બેંકના બચત ખાતા સાથે જોડવામાં આવે છે. એટલે શેર્સર ખરીદવા માટે જરૂર હોય તેટલાં પૈસા ટ્રેડિંગ ખાતામાં ટ્રાન્સફર કરી શકાય અને શેરરના વેચાણ પછી મળેલાં પૈસા ટ્રેડિંગ ખાતામાંથી ફરી બચત ખાતામાં લઈ શકાય. શેર્સર દલાલ અને બેંક આ બાબત ઈચ્છુક વ્યક્તિને માર્ગદર્શન કરે છે.



જ્ઞાની લઈએ.

દાખાતી પર વસ્તુ અને સેવા કર (GST on brokerage services)

શેઅર દલાલ તેમનાં ખાતેદાર વતી શોર્સનું ખરીદ-વેચાણ કરી આપવાની સેવા પૂરી પાડે છે. દલાલીની સેવા પર જાએસ્ટીનો દૂર 18% છે. દલાલીની સેવા માટેનો SAC કમાંક શોધો.

નોંધ: વસ્તુ અને સેવા કર (જીએસટી) ઉપરાંત ગ્રાહકોની સુરક્ષિતતા શેર્સના ખરીદ-વેચાણ પર બીજી પણ કેટલાંક અલ્યુ દરનાં કર છે. જેમ કે સિક્યુરીટી ટાન્જેક્શન ટેક્સ (STT), SEBI શૂલ્ક, સ્ટેમ્પ ડયટી, વગેરે... તેનો આપણે

અહીં વિચાર કરવાના નથી. આપણે ફક્ત દલાલી પરનાં વસ્તુ-સેવા કર (GST)નો જ વિચાર કરવાનાં છીએ.
 ઉદા. (2) ધારોકે, ઉદા. (1) નુસાર એક વ્યક્તિએ 15,075 રૂપિયા શેર્સની ખરીદી માટે આપ્યા. જેમાં
 75 રૂપિયા દલાલી છે. તો તેમને 75 રૂપિયા પર 18% લેખે કેટલો કર આપવો પડશે ? તે
 શોધો અને તેનું વિવરણપત્ર તૈયાર કરો.

$$\begin{aligned}\text{ઉક્લ} : 18\% \text{ ના દરે } 75 \text{ રૂપિયા \ પર GST} &= \frac{18}{100} \times 75 \\ &= 13.50 \text{ રૂપિયા\end{aligned}$$

શેરર ખરીદી માટેનું વિવરણપત્ર (B એટલે ખરીદી.)

શેર્સની સંખ્યા	શેર્સનો બજરભાવ	શેરરની દાર્શનિક કિંમત કુલ રોકાણ	દલાલી 0.5%	દલાલીપર 9% SGST	દલાલી પર 9% CGST	શેર્સની કુલ ખરીદ કિંમત
100(B)	150 રૂપિયા	15,000 રૂપિયા	75 રૂપિયા	6.75 રૂપિયા	6.75 રૂપિયા	15,088.50 રૂપિયા

ઉદા. (3) બશીરખાને 40 રૂપિયા બજરભાવનાં 100 શેર્સ ખરીદ કર્યા. દલાલીનો દર 0.5% અને દલાલી પર વસ્તુ અને સેવા કરનો દર 18% છે તો તેમને 100 શેર્સ માટે કુલ ખર્ચ કેટલો કરવો પડશે ?

ઉક્લ : 100 શેર્સની બજરભાવ પ્રમાણે કુલ કિંમત $40 \times 100 = 4,000$ રૂપિયા

$$\text{એક શેરર પર દલાલી} = \frac{0.5}{100} \times 40 = 0.20 \text{ રૂપિયા$$

$$\therefore \text{એક શેરરની ખરીદ કિંમત} = \text{બજરભાવ} + \text{દલાલી}$$

$$= 40 + 0.20 = 40.20 \text{ રૂપિયા$$

$$\therefore 100 \text{ શેર્સની ખરીદ કિંમત} = 40.20 \times 100 = 4,020 \text{ રૂપિયા$$

$$100 \text{ શેર્સ પર દલાલી} 0.20 \times 100 = 20 \text{ રૂપિયા$$

$$\therefore 20 \text{ રૂપિયા પર વસ્તુ-સેવા કર (GST)} = \frac{18}{100} \times 20$$

$$= 3.60 \text{ રૂપિયા$$

જવાબ : બશીરખાનને 100 શેર્સ ખરીદવા માટે રોકાણ

$$= 4,020 + 3.60 = 4,023.60 \text{ રૂપિયા$$

ઉદા. (4) પંકજભાઈએ 1,25,295 રૂપિયાનું રોકાણ કરીને 10 રૂપિયા દાર્શનિક કિંમતના 125 રૂપિયા બજરભાવે 100 શેરર વેંચાતા લીધા. આ વ્યવહારમાં 0.2 % દલાલી અને દલાલી પર 18% વસ્તુ-સેવા કર (GST) આપ્યો તો (1) કેટલા શેર્સ વેંચાતા લીધાં ? (2) કુલ દલાલી કેટલી આપી ? (3) કુલ વસ્તુ-સેવા કર (GST) કેટલો આપ્યો ?

ઉક્લ : રોકાણ = 1,25,295 રૂપિયા, બજરભાવ = 125 રૂપિયા, દલાલી = 0.2%, જીએસટી = 18%.

$$\text{એક શેરર પર દલાલી} = 125 \times \frac{0.2}{100} = 0.25 \text{ રૂપિયા$$

એક શેઅરની દલાલી પર કર = 0.25 ના 18% = 0.045 રૂપિયા

$$\therefore \text{એક શેઅરની ખરીદ કિંમત} = \text{બજરભાવ} + \text{દલાલી} + \text{કર} \\ = 125 + 0.25 + 0.045 = 125.295 \text{ રૂપિયા}$$

$$\therefore \text{શેઅર્સની સંખ્યા} = \frac{125295}{125.295} = 1,000$$

કુલ દલાલી = પ્રતિ શેઅર દલાલી \times શેઅર્સની સંખ્યા

$$\therefore = 0.25 \times 1,000 = 250 \text{ રૂપિયા}$$

$$\text{કુલ કર} = 1000 \times 0.045 = 45 \text{ રૂપિયા$$

જવાબ : (1) 1,000 શેઅર્સ લીધાં. (2) દલાલી 250 રૂપિયા આપી. (3) દલાલી પર જીએસટી 45 રૂપિયા આપો.

ઉદા. (5) નિલિનીબહેન 10 રૂપિયાની દાર્શનિક કિંમતના શેઅરનો બજરભાવ 60 રૂપિયા હતો ત્યારે 6,024 રૂપિયા રોક્યા. તેના પર 60% લાભાંશ લીધા પછી 50 રૂપિયા બજરભાવે બધાં શેઅર્સ વેંચી નાખ્યા. દ્વારા વ્યવહારમાં 0.4% દલાલી આપી. તો આ વ્યવહારમાં તેમને નફો થયો કે ખોટ ગઈ ? કેટલી ? તે શોધવા માટે નીચેની કૃતિ પૂર્ણ કરો.

ઉક્તિ : અહીં કરનો દર આપો નથી તેથી શેઅર્સની ખરેદી-વિક્રી વખતે કરનો વિચાર કર્યો નથી.

10 રૂપિયા દાર્શનિક કિંમતના શેઅર 60 રૂપિયામાં ખરીદ કર્યો.

$$\text{પ્રતિ શેઅર દલાલી} = \frac{0.4}{100} \times 60 = \boxed{\quad} \text{ રૂપિયા$$

$$\therefore \text{એક શેઅરની કિંમત} = 60 + 0.24 = \boxed{\quad} \text{ રૂપિયા$$

$$\therefore 6,024 \text{ રૂપિયામાં} \frac{6024}{60.24} = 100 \text{ શેઅર્સ ખરીદ્યા.}$$

10 રૂપિયા દાર્શનિક કિંમતના શેઅર્સ 50 રૂપિયાના બજરભાવે વેંચી દીધા.

$$\therefore \text{પ્રતિ શેઅર દલાલી} = \frac{0.4}{100} \times 50 = 0.20 \text{ રૂપિયા$$

$$\therefore \text{એક શેઅરની વેચાણ કિંમત} = 50 - 0.20 = \boxed{\quad} \text{ રૂપિયા$$

$$\therefore 100 \text{ શેઅરની વેચાણ કિંમત} = 100 \times 49.80 = \boxed{\quad} \text{ રૂપિયા$$

લાભાંશ 60% મળ્યો.

$$\therefore 1 \text{ શેઅર પર લાભાંશ} = \frac{60}{100} \times 10 = 6 \text{ રૂપિયા}$$

$$\therefore 100 \text{ શેઅર્સ પર કુલ લાભાંશ} = 6 \times 100 = \boxed{\quad} \text{ રૂપિયા$$

$$\therefore \text{નિલિનીબહેનની શેઅર્સ-વેચાણ તથા લાભાંશની કુલ આવક} = \boxed{\quad} + \boxed{\quad} = 5,580 \text{ રૂપિયા$$

પરંતુ નિલિનીબહેને કરેલું રોકાણ = 6,024 રૂપિયા હતું.

$$\therefore \text{નિલિનીબહેનને થયેલી ખોટ} = \boxed{\quad} - \boxed{\quad} = \boxed{\quad} \text{ રૂપિયા$$

જવાબ : નિલિનીબહેનને ખરીદ વેચાણના વ્યવહારમાં કુલ 444 રૂપિયા ખોટ ગઈ.

કુન્તિ : ઉદા. 5 માં ખરીદ વેચાણના વ્યવહારમાં જે દલાતી પર 18% GST આપ્યો હોત તો તેમને કેટલી ખોટ ગઈ હોત ? તે શોધો. તમારો જવાબ 451.92 રૂપિયા આવે છે કે ? તે તપાસો.



જાણી લઈએ.

મ્યુચ્યુઅલ ફંડ (Mutual Fund – MF)

શોર્સનો અભ્યાસ કરતી વખતે આપણે જ્ઞેયું કે, કંપની સ્થાપન કરવા ઈચ્છતી વ્યક્તિઓ સાથે આવે છે સમાજનો સહભાગ લઈને સારી એવી મૂડી એકઠી કરે છે. કંપનીની કામગિરી સારી હોય તો તેના શોર્સ ઘારકોને ફાયદો થાય છે. તેમને લાભાંશ પણ સારો મળે છે. શોર્સનો બજારભાવ વધે છે એટલે તેનો પણ લાભ થાય છે. કંપનીની મૂડી વધે છે. આ બધા કારણોથી દેશની પ્રગતિને ગતિ મળે છે. ટૂંકમાં સમાજશાસ્ત્રનો સિદ્ધાંત છે ‘Together we can progress’, પરંતુ દરેક નાણાની બે બાજુઓ હોય છે. શોર્સમાં ફાયદો થવાને બદલે ક્યારેક નુકસાન પણ થઈ શકે છે. આ નુકસાન ઓછું કરી શકાય કે ? રોકાણકારોનું જોખમ વહેંચી શકાય કે ? હા, તે માટે આજકાલ ઘણાં લોકો મ્યુચ્યુઅલ ફંડમાં રોકાણ કરે છે.

મ્યુચ્યુઅલ ફંડ એટલે અનેક રોકાણકારોના પૈસા એકત્રિત કરીને ઊભી કરેલી રકમ. આ રકમ એક જ પ્રકારના શોર્સમાં ન રોકતાં રોકાણના જુદાં જુદાં પ્રકારોમાં રોકવામાં આવે છે. એટલે જોખમ ઓછું થાય છે અને મળતો લાભાંશ રોકાણકારોમાં વહેંચાય જય છે. મ્યુચ્યુઅલ ફંડમાં રોકાણ કેવી રીતે કરવું ? તેમાં વળતર કેટલું મળે છે ? કેટલા સમયગાળા માટે રોકાણ કરવું. હિતાવહ છે ? તેના વિવિધ પ્રકાર ક્યા ? આવા અનેકવિધ પ્રશ્નોનાં જવાબ આર્થિક સલાહકાર (Financial Consultant કે Planner) આપી શકે છે.

Investments in Mutual Funds are subject to Market risks. Read all scheme related documents carefully. આ વાક્ય તમે સાંભળ્યું હશે અથવા વાંચ્યું હશે. તેનો અર્થ બરાબર સમજી લો. ક્યારેક મ્યુચ્યુઅલ ફંડમાંના રોકાણ પર નફાને બદલે ખોટ થઈ શકે છે. અને તે રોકાણકારે ભોગવવી પડે છે.

મ્યુચ્યુઅલ ફંડ એટલે તજ્જ્ઞ વ્યાવસાયિક લોકોએ નિર્માણ કરેલી ફંડ યોજના. આ તજ્જ્ઞને AMC એટલે ‘એસેટ મેનેજમેન્ટ કંપની’ કહે છે. તેઓ બજારનો અંદાજ લઈને ઈચ્છુક વ્યક્તિઓના પૈસા જુદી જુદી યોજનામાં, જેમ કે ઈક્વિટી ફંડ (શોર્સ), ડેઝ ફંડ (ડિબેન્ચર્સ, બોન્ડ્સ, વગેરે) અથવા બન્નેનો મળીને ‘બેલેન્સ ફંડ’માં રોકાણકારોની ઈચ્છા મુજબ રોકે છે.

આપણે જેમ શોર્સ બજારમાં રોકાણ કરીએ ત્યારે ‘શોર્સ’ મળે છે તેમ મ્યુચ્યુઅલ ફંડમાં રોકાણ કરીએ તો ‘યૂનિટ્સ’ મળે છે.

પ્રતિ યૂનિટનો જે બજારભાવ હોય તેને યૂનિટનું ‘ચોખ્ખું માત્રમત્તા મૂલ્ય’ (Net asset value – NAV) કહે છે.

એક યૂનિટનું ચોખ્ખું મૂલ્ય \times યૂનિટની સંખ્યા = મ્યુચ્યુઅલ ફંડ યોજનાનું કુલ રોકાણ મૂલ્ય.

નોંધ : શેર્સના ભાવ પ્રમાણે મ્યુચ્યુઅલ ઇંડના યૂનિટ્સનું ચોખ્ખું મૂલ્ય (NAV) પણ સતત બદલતી રહે છે. જરૂર પડે ત્યારે લીધેલાં યૂનિટ્સ ફરી વેંચી (Redeem) શકાય છે.

રાષ્ટ્રીકૃત બેંક હોય કે ભારતીય પોસ્ટ સેવા, તેમાં કરેલું રોકાણ વધુ સુરક્ષિત હોય છે. માત્ર તેમાંથી મળતું વળતર મૌધ્યવારીનો સામનો કરવા માટે અપૂરતું હોય છે. આપણે હુંમેશા એ વાત ધ્યાનમાં રાખવી જેઈએ કે, યોગ્ય રીતે રોકેલો પૈસો પણ પૈસાનું નિર્માણ કરી શકે છે. તે માટે જરૂરી છે પૈસાનું યોગ્ય નિયોજન એટલે જ કે અર્થ નિયોજન. (Financial Planning)

સારાસાર વિચાર કરીને રોકાણ બાબતમાં યોગ્ય સમયે યોગ્ય નિર્ણય લેવો મહત્વનો છે. તેનો સતત, નિયમિત અભ્યાસ કરવાની ટેવ હોવી જેઈએ.

નિયમિત આવર્ત્તી રોકાણ યોજના (SIP -Systematic Investment Plan)

ધારોકે, આપણા માટે ભ્યુચ્યુઅલ ફુડમાં એક સાથે મોટી રકમનું રોકાણ કરવું શક્ય ન હોય તો આપણે નાના નાના હપ્તામાં રોકાણ કરી શકીએ છીએ. દા.ત. દર મહિને 500 ડિપિયા પ્રમાણે પણ ભ્યુચ્યુઅલ ફુડમાં રોકાણ કરી શકીએ છીએ. આમ નિયમિત રીતે માસિક અથવા ત્રિમાસિક રોકાણ કરી શકાય છે. આ યોજનાથી ‘બચત’ કરવાની આદત પડે છે અને ભવિષ્યનાં આર્થિક દ્યેય (લક્ષ્ય) ગાંઠી શકાય છે. આ યોજનામાં રોકાણ દીર્ઘ મુહત માટે કરવું ફાયદાકારક થાય છે. તેનું કારણ શેઅર બજરમાં થતી વધ-ઘટનું પરિણામ આ યોજનાના રોકાણ પર ઓછું થાય છે. ઓછામાં ઓછા 3 થી 5 વર્ષ માટે અને શક્ય હોય તો 10 થી 15 વર્ષ માટે રોકાણ કરવું ઉત્તમ.

મ્યુચ્યુઅલ ઇંના ઇયદા

- અનુભવી તજ્જ્ઞ ફંડ મેનેજરો.
 - પારદર્શકતા - રોકાણ પૂરેપૂરું સુરક્ષિત
 - મર્યાદિત જોખમ
 - કેટલાંક ફંડ જેમને ELSS(Equity Linked Saving Scheme)માંનું રોકાણ આવકવેરા કલમ 80C હેઠળ બાદ લઈ શકાય છે.
 - રોકાણમાં વૈવિધ્ય (diversifications of funds)
 - તરલતા (liquidity) - જેઈએ ત્યારે વેચી શકાય.
 - અસ્ય અને દીર્ઘ મુદ્દતના ફાયદા મળે છે.

ગણેલાં ઉદાહરણો

ઉદા. (1) મ્યુચ્યુઆલ ફંડ યોજનાનું બજર મૂલ્ય 200 કરોડ રૂપિયા હોય અને કંપનીએ તેના 8 કરોડ યૂનિટ્સ કર્યા હોય તો એક યૂનિટની NAV (યોધ્યું મૂલ્ય) કાઢો.

ઉકાલ : એક યૂનિટની NAV (ચોખ્યું મૂલ્ય) = 200 કરોડ રૂપિયા / 8 કરોડ યૂનિટ્સ
= 25 રૂપિયા પ્રતિ યૂનિટ

ઉદા. (2) ઉદા. (1)માંની મ્યુચ્યુઅલ ફુડ યોજનામાં તમે ₹ 10,000 રોકો તો તમને કેટલા યુનિટ્સ મળશે ?

$$\text{ઉકલ : યૂનિટ્સની સંખ્યા} = \frac{\text{કરેલું રોકાણ}}{\text{એક યૂનિટની કિમત}} \\ = \frac{10,000}{25} = 400 \text{ યૂનિટ્સ મળશે.}$$

મહાવરાસંગ્રહ 4.4

- એક શેઅરનો બજરભાવ 200 રૂપિયા હતો ત્યારે ખરેદી વખતે 0.3% દલાલી આપી તો શેઅરની ખરીદ કિંમત કેટલી થઈ ?
- એક શેઅરનો બજરભાવ 1000 રૂપિયા હતો ત્યારે તે વેંચ્યો. તેના પર 0.1% દલાલી આપી તો વેચાણ પછી શેઅર દીઠ કેટલી રકમ મળશે ?
- નીચેના શેઅર ખરીદ-વેચાણના વિવરણ પત્રમાં ખાલી જગ્યા પૂરો. (B - ખરીદ્યા (Buy), S - વેંચ્યા (Sold))

શેઅર્સની સંખ્યા	શેઅર્સનો બજરભાવ	શેઅર્સની કુલ કિંમત	દલાલીનો દર 0.2%	દલાલી પર CGST 9%	દલાલી પર SGST 9%	શેઅર્સની કુલ કિંમત
100 B	45 રૂપિયા					
75 S	200 રૂપિયા					

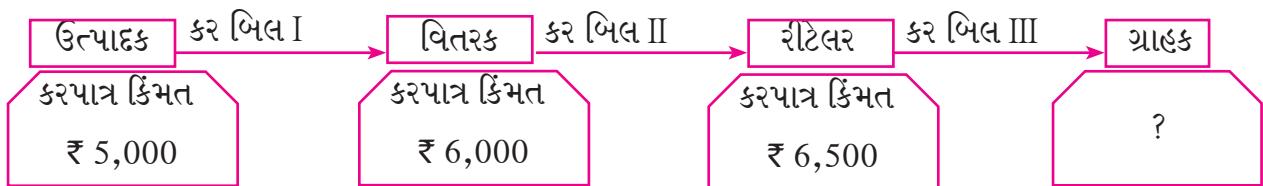
- શ્રીમતી દેસાઈએ 100 રૂપિયા દાર્શનિક કિંમતના શેઅર્સ, બજરભાવ 50 રૂપિયા હતો ત્યારે વેંચ્યા, ત્યારે તેમને કુલ 4988.20 રૂપિયા મળ્યા. દલાલીનો દર 0.2% અને દલાલી પર લુએસ્ટીનો દર 18% છે. તો તેમણે કેટલાં શેઅર્સ વેંચ્યા તે શોધો.
- મિસ્ટર ડિસોઝાએ 50 રૂપિયા દાર્શનિક કિંમતના 200 શેઅર્સ, 100 રૂપિયા અધિમૂલ્ય આપીને ખરીદ કર્યા. તેના પર કંપનીએ 50% લાભાંશ આપ્યો. લાભાંશ મળ્યા પછી તેમાંના 100 શેઅર્સ 10 રૂપિયા અવમૂલ્યથી વેંચ્યી દીધા. બાકીના શેઅર્સ 75 રૂપિયા આધિમૂલ્યથી વેંચ્યી નાખ્યા. દરેક વ્યવહારમાં 20 રૂપિયા દલાલી આપી. તો તેમને આ વ્યવહારમાં નફો થયો કે ખોટ ગઈ ? કેટલા રૂપિયા?

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 4 A

- નીચેના પ્રશ્નોના જવાબનો યોગ્ય પર્યાય પસંદ કરો.
 - જવાબની વસ્તુઓ પર વસ્તુ અને સેવા કર (GST)નો દર . . . છે.
 - 5%
 - 12%
 - 0%
 - 18%
 - એક જ રાજ્યમાં થતાં વેપારમાં કેન્દ્ર સરકાર તરફથી લાદવામાં આવતો કર . . . છે.
 - IGST
 - CGST
 - SGST
 - UTGST
 - આપણા દેશમાં . . . તારીખથી વસ્તુ અને સેવા કર (GST) પ્રણાલિ અમલમાં આવી.
 - 31 માર્ચ, 2017
 - 1 એપ્રિલ, 2017
 - 1 જાન્યુઆરી, 2017
 - 1 જુલાઈ, 2017
 - સ્ટીલના વાસણો પર વસ્તુ અને સેવા કર (GST)નો દર 18% છે તો તેના પર રાજ્ય વસ્તુ અને સેવા કર (SGST)નો દર . . . આકારવામાં આવે છે.
 - 18%
 - 9%
 - 36%
 - 0.9%
 - GSTINમાં કુલ . . . અંકાક્ષરો હોય છે.
 - 15
 - 10
 - 16
 - 9

- (6) જ્યારે એક નોંધણીકૃત વેપારી, બીજા નોંધણીકૃત વેપારીને માલ કે વસ્તુ વેંચે ત્યારે GST અંતર્ગત . . . વ્યવહાર કરે છે.
- (A) BB (B) B2B (C) BC (D) B2C
2. એક વેપારી 25,000 રૂપિયાની કિંમતના શોપીસ ઉપર 10% છૂટ આપીને બાકીની રકમ પર 28% GST લગાડે છે. તો કુલ બિલ કેટલા રૂપિયાનું થશે ? તેમાં CGST અને SGST શીર્ષક હેઠળ કેટલી રકમ દર્શાવી હશે ?
3. એક તૈયાર કપડાંના દુકાનદારે 1,000 રૂપિયાની કિંમતના ડ્રેસ ઉપર 5% છૂટ આપીને બાકીની રકમ પર 5% GST લગાડીને વેંચ્યો તો ખરીદ કરનાર (ગ્રાહક)ને તે ડ્રેસ કેટલાં રૂપિયામાં મળશે ?
4. સૂરત, ગુજરાતના એક વેપારીએ 2.5 લાખ રૂપિયા કરપાત્ર કિંમતનું સુતરાઉ કાપડ રાજકોટ, ગુજરાતના એક વેપારીને 5% ના દરે કેટલા રૂપિયા વસ્તુ અને સેવા કર (GST) આપવો પડશે ?
5. શ્રીમતી મહોત્ત્રાએ 85,000 રૂપિયાની કરપાત્ર કિંમતના સોલર ઉન્જ યંત્ર વેંચાતા લીધા અને 90,000 રૂપિયામાં વેંચ્યા. વસ્તુ અને સેવા કરનો દર 5% છે. તો આ વ્યવહારમાં તેમને કેટલા રૂપિયા કપાત (ITC) મળશે ? કેટલાં રૂપિયા કર ભરવો પડશે ?
6. Z-સિક્યુરિટી સર્વિસેસ પૂરી પાડતી કંપનીએ 64,500 રૂપિયાની સેવા પૂરી પાડી. વસ્તુ અને સેવા કર (GST)નો દર 18% છે. આ સિક્યુરિટી સર્વિસ પૂરી પાડવા માટે કંપનીએ લોન્ડ્રી સર્વિસેસ અને યુનિફોર્મ્સ વગેરે બાબતો પર 1,550 રૂપિયા વસ્તુ અને સેવા કર (GST) આપ્યો હતો. તો આ કંપનીની ઈનપૂટ ટેક્સ કેટલી ? તે પરથી ચૂકવવા પાત્ર કર જાઓ અને કર એસલુઅસટી શોધો.
7. એક વેપારીએ પોલીસ નિયંત્રણ કક્ષ માટે 84,000 રૂપિયા વસ્તુ અને સેવા કર (GST) સહિત કિંમતના વૉકીટૉકી યંત્રોનો પુરવણો કર્યો. વસ્તુ અને સેવા કર (GST)નો દર 12% છે. તો કર બિલમાં કેન્દ્રીય જાઓ અને રાજ્ય જાઓ શોધો. વૉકીટૉકી યંત્રની કરપાત્ર કિંમત શોધો.
- ★ 8. એક જથ્થાબંધ વેપારીએ 1,50,000 રૂપિયા કરપાત્ર કિંમતનાં વિધુત સાધનો ખરીદ કર્યા. આ બધા સાધનો છૂટક વેપારીને 1,80,000 રૂપિયા કરપાત્ર કિંમતે વેંચ્યા. છૂટક વેપારીએ તે સાધનો ગ્રાહકને 2,20,000 રૂપિયા કરપાત્ર કિંમતે વેંચ્યા. તો 18% GST ના દરેક વ્યવહારના ટેક્સ ઈન્વોર્ડ્સમાં કેન્દ્ર અને રાજ્યના કરની ગણના કરો. તે જ પ્રમાણે દરેક વેપારીનો ચૂકવવા પાત્ર કેન્દ્રીય જાઓ અને રાજ્ય જાઓ શોધો.
- ★ 9. આણણા પાટીલે (ઢાણે, મહારાષ્ટ્ર) 14,000 રૂપિયા કરપાત્ર કિંમતનું એક વૉક્યુમ કલીનર વસર્ટ (મુંબઈ)ના એક વેપારીને 28% GST ના દરે વેંચ્યું. વસર્ટના વેપારીએ તે જ દરે ગ્રાહકને તે વૉક્યુમ કલીનર 16,800 રૂપિયા કરપાત્ર કિંમતે વેંચ્યું તો નીચેની બાબતો શોધો.
- (1) આણણા પાટીલે આપેલાં કર બિલમાં (ટેક્સ ઈન્વોર્ડ્સ) કેન્દ્ર અને રાજ્યનો કર કેટલા રૂપિયા દર્શાવ્યો હશે ?
- (2) વસર્ટના વેપારીએ ગ્રાહકને કેન્દ્ર અને રાજ્યનો જાઓ કેટલા રૂપિયા આકાર્યો હશે ?
- (3) વસર્ટનો વેપારી સરકારને કર ભરણું કરતી વખતે ચૂકવવા પાત્ર કેન્દ્રનો કર અને રાજ્યનો કર કેટલો થશે ?

10. નીચે એક વસ્તુના વિતરણની વ્યવસાય સંકળ આપી છે. તેમાં ટક્સ ઈન્વહોર્સ A, B, C માં વસ્તુ અને સેવા કર (GST)ની આકારણની દર્શાવો. લુઅસટીનો દર 12% છે.



- (1) ઉત્પાદક, વિતરક અને વેપારી (રાષ્ટ્રલર)ને સરકારની તિજેરીમાં કેટલો કર ક્યા શીર્ષક હેઠળ ભરશે તે દર્શાવતું વિવરણ પત્રક તૈયાર કરો.
- (2) અંતત: ગ્રાહકને આ વસ્તુ કેટલા ડિપિયામાં ભળશે ?
- (3) આ સંકળમાં B2B અને B2C બિલો ક્યા ? તે લખો.

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 4 B

1. નીચેના પ્રશ્નોના ઉત્તર માટે યોગ્ય પર્યાય પસંદ કરો.

- (1) દાર્શનિક કિંમત 100 ડિપિયા હોય તેવા શેઅરનો બજારભાવ 75 ડિપિયા છે. તો નીચેના પૈકી કૃયું વાક્ય યોગ્ય છે ?
 - (A) આ શેઅર 175 ડિપિયા અધિમૂલ્ય પર છે. (B) આ શેઅર 25 ડિપિયા અવમૂલ્ય પર છે.
 - (C) આ શેઅર 25 ડિપિયા અધિમૂલ્ય પર છે. (D) આ શેઅર 75 ડિપિયા અવમૂલ્ય પર છે.
- (2) 50% લાભાંશ ઘોષિત કરનાર કંપનીના 10 ડિપિયા દાર્શનિક કિંમતવાળા એક શેઅર પર દલાલી કેટલી ભળશે ?
 - (A) 50 ડિપિયા (B) 5 ડિપિયા (C) 500 ડિપિયા (D) 100 ડિપિયા
- (3) એક મ્યુચ્યુઅલ ફંડના એક થૂનિટની ચોખ્ખું મૂલ્ય 10.65 ડિપિયા હોય તો 500 થૂનિટસની ખરીદી માટે લાગતી રકમે કેટલા ડિપિયા હશે ?
 - (A) 5,325 (B) 5,235 (C) 5,32,500 (D) 53,250
- (4) દલાલી પર વસ્તુ અને સેવા વેંચાળ કરનો દર . . . છે.
 - (A) 5% (B) 12% (C) 18% (D) 28%
- (5) શેઅર્સ ખરીદ્દી વખતે એક શેઅરની કિંમત શોધવા માટે બજારભાવ (MV), દલાલી અને GST . . .
 - (A) નો સરવાળો કરવો પડે (B) ની બાદબાકી કરવી પડે છે.
 - (C) નો ગુણાકાર કરવો પડે. (D) નો ભાગાકાર કરવો પડે છે.
2. 100 ડિપિયા દાર્શનિક કિંમતના શેઅર 30 ડિપિયા અધિમૂલ્ય પર ખરીદ કર્યા. દલાલીનો દર 0.3% છે. તો એક શેઅરની ખરીદ કિંમત શોધો.

3. પ્રશાંતે 100 રૂપિયા દાર્શનિક કિંમત FVનાં 50 શેરાર 180 રૂપિયા બજરભાવે ખરીદી લીધાં. તેના પર કંપનીએ 40% લાભાંશ આપ્યો. તો પ્રશાંતના રોકાણમાં વળતરનો દર GST શોધો.
4. જે 100 રૂપિયા દાર્શનિક કિંમતના 300 શેરસર્સ 30 રૂપિયા અવમૂલ્ય પર વેંચતાં કેટલા રૂપિયા મળશે ?
5. 100 રૂપિયા દાર્શનિક કિંમતવાળા, શેરસરમાં 120 રૂપિયા બજરભાવે 60,000 રૂપિયા રોક્યા તો કેટલાં શેરસર્સ મળશે ?
6. શ્રીમતી મીતા અગ્રવાલે 100 રૂપિયા બજરભાવનાં 10,200 રૂપિયાના શેરસર્સ ખરીદ કર્યા તેમાંથી 60 શેરસર્સ 125 રૂપિયાના બજરભાવે વેંચી નાખ્યા અને બાકીના શેરસર્સ 90 રૂપિયાના બજરભાવે વેંચી નાખ્યા. દરેક વ્યવહારમાં દલાલીનો દર 0.1% છે. તો આ વ્યવહારમાં તેમને ફાયદો થયો કે ખોટ ગઈ ? કેટલા રૂપિયા?
7. શેરાર બજરમાં 100 રૂપિયા દાર્શનિક કિંમતના બે કંપનીના શેરસર્સ નીચે પ્રમાણે બજરભાવ અને લાભાંશના દરે છે. તો ક્યા શેરારમાંનું રોકાણ ફાયદાકારક થશે ? સકારણ લખો.
- (1) કંપની A - 132 રૂપિયા 12% (2) કંપની B - 144 રૂપિયા 16%
- 8★. આદિત્ય સંઘવીએ 100 રૂપિયા દાર્શનિક કિંમતના શેરસર્સનો બજરભાવ 50 રૂપિયા હતો ત્યારે 50,118 રૂપિયા રોકીને ખરીદ કર્યા. આ વ્યવહારમાં 0.2% દલાલી અને દલાલી પર 18%ના દરે GST આપ્યો. તો 50,118 રૂપિયામાં કેટલા શેરસર્સ મળશે?
- 9★. શ્રી બાટલીવાલાએ એક દિવસમાં કુલ 30,350 રૂપિયાની કિંમતના શેરસર્સ વેંચ્યા અને 69,650 રૂપિયાની કિંમતના શેરસર્સ ખરીદ્યાં. તે દિવસના કુલ ખરીદ વેચાણ પર 0.1%ના દરે દલાલી અને દલાલી પર 18% વસ્તુ અને સેવા કર આપ્યો. તો આ વ્યવહારમાં દલાલી અને વસ્તુ સેવા અને વેંચાણ કર પરનો કુલ ખર્ચ શોધો.
- 10★. શ્રીમતી અર્જુણા ઠક્કરે 100 રૂપિયા દાર્શનિક કિંમતના એક કંપનીના 100 શેરસર્સ 1,200 રૂપિયાના બજરભાવે વેંચાતા લીધાં. 0.3% દલાલી અને દલાલી પર 18% GST આપ્યો, તો
- (1) શેરસર્સ માટે કુલ કેટલા રૂપિયા રોકાણ કર્યું ? (2) આ રોકાણ પર દલાલી કેટલી આપી?
- (3) દલાલી પર આપેલો GST શોધો ?
- (4) 100 શેરસર્સ માટે કુલ કેટલા રૂપિયા ખર્ચ થશે ?
- 11★. શ્રીમતી અનધા દોશીએ 100 રૂપિયા દાર્શનિક કિંમતના 660 રૂપિયાના બજરભાવે તેના પર 22 શેરસર્સ લીધાં. તો કુલ રોકાણ કેટલા રૂપિયા કર્યું ? તેના પર 20% લાભાંશ લીધા પછી, 650 રૂપિયાના બજરભાવે તે બધા શેરસર્સ વેંચી દીધા. દરેક વ્યવહારમાં 0.1% દલાલી આપી. તો આ વ્યવહારમાં નફો થયો કે ખોટ ? કેટલા રૂપિયા? (તમારો જવાબ નજીકના પૂર્ણાક્રમાં લખો.)

□□□



5

સંભાવના



ચાલો શીખીએ.

- સંભાવના : પરિચય
- નમૂના અવકાશ અને ઘટના
- યાદચિન્હક પ્રયોગ અને નિષ્પત્તિ
- ઘટનાની સંભાવના



ચાલો, ચર્ચા કરીએ.

શિક્ષક : વિદ્યાર્થી મિત્રો ! આપણા વર્ગમાં જેટલાં વિદ્યાર્થી અને વિદ્યાર્થીનીઓ છે. તેટલી ચિઠ્ઠીઓ આ ખોખામાં મૂકી છે. દરેકે એક ચિઠ્ઠી ઉપાડવાની છે. ચિઠ્ઠીઓ પર જુદી જુદી વનસ્પતિના નામ લખ્યા છે. કોઈપણ બે ચિઠ્ઠીપર એક જ વનસ્પતિનું નામ લખ્યું નથી. ‘તુલસી’ આ વનસ્પતિના નામવાળી ચિઠ્ઠી કોને મળે છે ? તે જોઈએ. બધાં રોલ નંબર પ્રમાણે લાઈનમાં ઊભાં રહો. છેલ્લી ચિઠ્ઠી ઉપાડે ત્યાં સુધી કોઈએ ચિઠ્ઠી ખોલીને જેવાની નથી.

અર્દૃણા : સર, લાઈનમાં હું સૌથી પહેલી છું. પણ હું સૌથી પહેલાં ચિઠ્ઠી ઉપાડીશ નહીં. કારણ આટલી બધી ચિઠ્ઠીઓમાંથી તે ચિઠ્ઠી મને જ મળે એની શક્યતા ખૂબ ઓછી છે.

ઝરીના : સર, લાઈનમાં હું તો સૌથી છેલ્લી છું એટલે હું ચિઠ્ઠી ઉપાડીશ નહીં. કારણકે ‘તુલસી’ નામવાળી ચિઠ્ઠી કદાચ મારાં પહેલાં જ કોઈએ ઉપાડી લીધી હોય.

ઢૂંકમાં પહેલાં અને છેલ્લાં બન્ને વિદ્યાર્થીઓને લાગે છે કે, તેમને ‘તુલસી’ નામની ચિઠ્ઠી મળવાની શક્યતા સાવ ઓછી છે. ઉપરના સંવાદ શક્યતા ઓછી કે વધારે હોવાનો વિચાર પણ કરવામાં આવે છે.

શક્યતા દર્શાવવા સંબંધી આપણી રાજુંદી વાતચીતમાં આપણે નીચેનાં કેટલાક શબ્દો વાપરીએ છીએ.

- | | | |
|-----------|------------------|-----------|
| ● સંભવત: | ● મોટે ભાગો/કદાચ | ● અશક્ય |
| ● નિશ્ચિત | ● અંદાજે | ● 50 – 50 |

ભવિષ્યની શક્યતા વિશે નીચેનાં વિધાનો વાંચો.

- કદાચ આજે વરસાદ આવશે.
- મોંઘવારી વધવાની સંભાવના ખૂબ છે.
- ભારતને આગામી ક્રિકેટ સ્પર્ધામાં સામાન્ય રીતે હરાવવો અશક્ય છે.
- નિશ્ચિત મને પ્રથમશ્રેણી (First Class) મળશે.
- બાળકોને સમયસર પોલિઓ ડૉઝ આપીએ તો પોલિઓ થવાનો સંભવ રહેતો નથી.

બાજુના ચિત્રમાં કિકેટનાં ખેલાડીઓ નાણાં ફૂક-કરે છે.

તેમાં કઈ કઈ શક્યતાઓ છે ?



અથવા



એટલે કે નાણા ફુંકમાં શક્યતાઓ છે.

કુટી ૧ : એક સિક્કો લઈ વર્ગમાંના દરેક જગ્યે એકવાર ઉછાળી જુઓ. તમને શું જણાયું ?

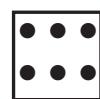
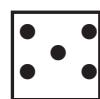
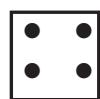
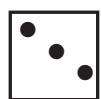
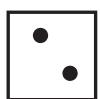
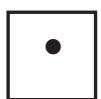
(શિક્ષક પાટિયા પર નીચે પ્રમાણે કોઈ તૈયાર કરે છે અને સંખ્યા ભરે છે.)

શક્યતા	ઇપો (H)	કાટો (T)
વિદ્યાર્થી સંખ્યા

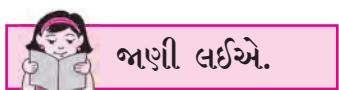
કુન્તિ 2 : હવે, દરેક જણા તે સિક્કો બે વાર ઉછાળીને જુઓ. કઈ કઈ શક્યતા મળે છે ?

શક્યતા	H H	HT	TH	TT
વિદ્યાર્થી સંખ્યા				

કુટી 3 : તમારી પાસેનો એક પાસો ફૂકત એકવાર ૦૪ ફૂંકો, તેના ઉપરના પૃષ્ઠભાગ પર કઈ કઈ શક્યતા મળે છે? આ વિચાર કરો.



આ દરેક શક્યતા એટલે પાસા કુંકના એક-એક સંભાવ્ય નિષ્પત્તિ (ફિલિત) (Outcome) છે.



યાદચિન્હક પરિયોગ (Random Experiment)

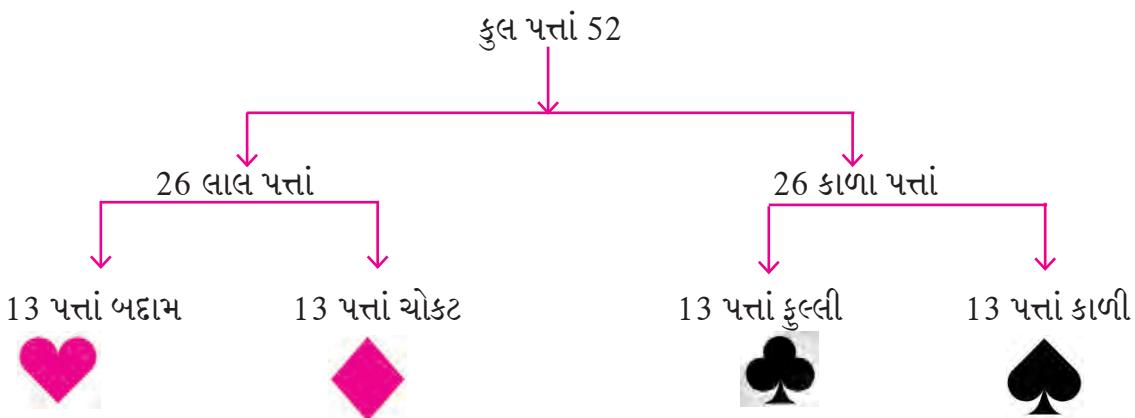
જે પ્રયોગમાં સંભાવ્ય પરિણામ પહેલેથી ખબર હોય પરંતુ તે પૈકી ક્યું પરિણામ મળશે તે ચોક્કસ કહી શકાય નહીં. બધાં સંભાવ્ય પરિણામ મળવાની શક્યતા સમાન હોય તેવા પ્રયોગને ‘યાદચિછિક પ્રયોગ’ કહે છે.

ડા.ત. નાણા ફેંક (સિક્કા ઉધારવા), પાસા ફેંક, 1 થી 50 સંખ્યા લખેલાં કાર્ડમાંથી 1 કાર્ડ લેવું, રમત માટે વપરાતી યોગ્ય રીતે પીસેલી પત્તાની કેટમાંથી એક પત્તું ખેચવું વગેરે.

નિષ્પત્તિ (Outcome)

યાદરિછિક પ્રયોગના પરિણામે ‘નિષ્પત્તિ’ કહે છે.

- ઉદા., (1) એક વખત સિક્કો ઉછાળવો આ યાદરિછિક પ્રયોગમાં બે નિષ્પત્તિ હોય છે.
 છાપો (H) અથવા કાટો (T)
- (2) એક પાસો ફેંકવો આ યાદરિછિક પ્રયોગમાં તેના 6 પૃષ્ઠભાગ પરનાં ટ્યુકાંની સંખ્યા પરથી 6 નિષ્પત્તિ સંભવે છે.
 1 અથવા 2 અથવા 3 અથવા 4 અથવા 5 અથવા 6
- (3) 1 થી 50 અંક લખેલાં કાર્ડના સમૂહમાંથી એક કાર્ડ કાઢવું આ પ્રયોગમાં 50 નિષ્પત્તિ (Outcomes) છે.
- (4) રમતનાં પતા યોગ્ય રીતે પીસેલાં હોય ત્યારે તેમાંથી એક પતું ખેંચવું આ યાદરિછિક પ્રયોગમાં 52 પતાં હોય છે, તે નીચે પ્રમાણે દર્શાવ્યાં છે.



પતાંની કેટમાં બદામ, ચોકટ, કુલ્લી, કાળી એમ ચાર સમૂહો છે. દરેક સમૂહમાં રાજી, રાણી, ગુલામ, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 અને એકકો એમ કુલ 13 પતાં હોય છે.

રાજી, રાણી, ગુલામને ચિત્રયુક્ત પતાં કહે છે. પતાંની દરેક કેટમાં રાજના ચિત્રવાળાં ચાર, રાણીના ચિત્રવાળાં ચાર અને ગુલામનાં ચિત્રવાળાં ચાર એમ કુલ 12 ચિત્રયુક્ત પતાં હોય છે.

સમસંભાવી નિષ્પત્તિ (Equally likely outcomes)

જે આપણે એક પાસો ફેંકીએ, તો પાસાના ઉપરના પૃષ્ઠભાગ પર સમસંભાવી 1, 2, 3, 4, 5, 6 પૈકી એક સંખ્યા મળવાની શક્યતા સમાન હોય છે. એટલે કે આ બધા સમસંભાવી નિષ્પત્તિ છે. પરંતુ જે પાસા પર કોઈ એક અંક વાતરનાર ઉપરના પૃષ્ઠભાગ પર મળતો હોય તો તે પાસો અસમતોલ (biased) કહેવાય છે. આ બાબતે મળતાં નિષ્પત્તિ સમસંભાવી હોતાં નથી.

આ પછીના યાદરિછિક પ્રયોગોમાં વાપરેલી બાબતો (સિક્કા, પાસા વગેરે) સમતોલ (fair અથવા unbiased) છે એમ ધારીશું.



યાદચિહ્નક પ્રયોગમાં મળતાં નિષ્પત્તિ પૈકી કોઈપણ નિષ્પત્તિ બીજાં કરતાં પ્રાધાન્ય કરે ન મળે અથવા બધાં નિષ્પત્તિ મળવાની શક્યતા સમાન હોય તેને સમસંભાવી નિષ્પત્તિ કહે છે. દા.ત. સિક્કો એકવાર ઉછાળતાં ‘છાપો’ કે ‘કાટો’ મળવાની નિષ્પત્તિ ‘સમસંભાવી’ હોય છે. તે જ પ્રમાણે 1 થી 6 અંક વિવિધ પૃષ્ઠો પર હોય તેવો પાસો ફેંકીએ તો તેમાંનો કોઈપણ એક અંક ઉપરના પૃષ્ઠભાગ પર મળવાની શક્યતા સમસંભાવી હોય છે.

મહાવરાસંગ્રહ 5.1

1. નીચેની દરેક બાબતમાં કેટલી શક્યતાઓ છે ?

(1) વનિતાને મહારાષ્ટ્રના જેવાલાયક સ્થળોની માહિતી છે. તેમાંથી કોઈપણ એક ઠેકાણો મે મહિનાની રજાઓમાં તે જવાની છે.

અજંઠા, મહાબળેશ્વર, લોણાર સરોવર, તાડોબા અભયારણ્ય, આંબોલી, રાયગડ, માથેરાન, આનંદવન.

(2) એક અઠવાડિયામાંથી એક વાર યાદચિહ્નક રીતે પસંદ કરવાનો છે.

(3) પત્તાની કેટમાંથી એક પતું યાદચિહ્નક રીતે ખેંચવાનું છે.

(4) દરેક કાર્ડ પર એક સંખ્યા પ્રમાણે 10 થી 20 સુધીની સંખ્યાઓ લખેલી છે.

તેમાંથી એક કાર્ડ યાદચિહ્નક રીતે કાઢવાનું છે.

વિચાર કરીએ.

નીચેના પ્રયોગમાંથી ક્યા પ્રયોગમાં અપેક્ષિત નિષ્પત્તિ મળવાની શક્યતા વધારે છે ?

(1) એક પાસો ફેંકીની 1 મળે છે.

(2) એક સિક્કો ઉછાળીને છાપ મળે છે.



જાણી લઈએ.

નમૂના અવકાશ (Sample Space)

યાદચિહ્નક પ્રયોગમાં શક્ય હોય તેટલાં નિષ્પત્તિના સમૂહને ગણને નમૂના અવકાશ કહે છે.

નમૂના અવકાશ ‘S’ અથવા ‘Ω’ (આ ગ્રીક અક્ષરનો ઉચ્ચાર ‘ઓમેગા’ છે.) આ ચિહ્ન વડે ગણના રૂપમાં દર્શાવવામાં આવે છે. નમૂના અવકાશમાંના દરેક ઘટકને ‘નમૂના ઘટક’ કહે છે. નમૂના અવકાશ ‘S’ માંના કુલ ઘટકોની સંખ્યા $n(S)$ એમ લખાય છે. જો $n(S)$ સાન્ત હોય તો તેને સાન્ત નમૂના અવકાશ કહે છે. સાન્ત નમૂના અવકાશના કેટલાંક ઉદાહરણો આગળ કોઈમાં આપ્યાં છે.

અ. ક્ર.	યાદગિક પ્રયોગ	નમૂના અવકાશ	નમૂના ઘટકોની સંખ્યા
1	એક નાણા ફેક	$S = \{H, T\}$	$n(S) = 2$
2	બે નાણા ફેક	$S = \{ HH, HT, TH, TT\}$	$n(S) =$ <input type="text"/>
3	ત્રણ નાણા ફેક	$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$	$n(S) = 8$
4	એક પાસો ફેકવો	$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$n(S) =$ <input type="text"/>
5	બે પાસા ફેકવા	$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$	$n(S) = 36$
6	1 થી 25 સંખ્યા લખેલાં કાર્ડના ગણમાંથી એક કાર્ડ કાઢવું.	$S = \{1, 2, 3, 4, \dots, 25\}$	$n(S) =$ <input type="text"/>
7	ધોરણ રીતે પીસેલા 52 પત્તાની કટમાંથી એક પત્તું કાઢવું.	કુલલીનો : એકો, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ગુલામ, રાણી, રાજની કાળીનો : એકો, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ગુલામ, રાણી, રાજની બધામનો : એકો, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ગુલામ, રાણી, રાજની ચોકટનો : એકો, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ગુલામ, રાણી, રાજની	$n(S) = 52$



આ ધ્યાનમાં રાખો.

- (i) એક સિક્કો બે વાર ઉછાળવો અથવા બે સિક્કા એક સમયે ઉછાળવા આ બન્ને યાદચિહ્ન પ્રયોગના નમૂના અવકાશ સમાન હોય છે. તે જ બાબત ત્રણ સિક્કા માટે પણ સત્ય છે.

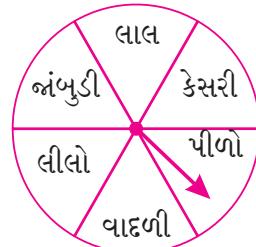
(ii) એક પાસો બે વાર ફેંકવો અથવા બે પાસા એક જ વખતે ફેંકવા આ બન્ને માટેનો નમૂના અવકાશ સમાન હોય છે.

ਮਾਹਿਰਾਸ਼ਨ੍ਗ 5.2

1. નીચેના દરેક પ્રયોગ માટે નમૂના અવકાશ ‘S’ અને તેમાંના નમૂના ઘટકોની સંખ્યા $n(S)$ લખો.

 - (1) એક પાસો અને એક સિક્કો એક જ સમયે ફેંકવા.
 - (2) 2, 3, 5 આ અંકોથી અંકોની પુનરાવૃત્તિ ન કરતાં બે અંકી સંખ્યા તૈયાર કરવી.

2. છ રંગોની ચકરડી (ચકતી) પરનું બાળ ફેરવતાં તે
ક્યા રંગ પર સ્થિર થાય છે તે જેવું



MARCH - 2019

M	T	W	T	F	S	S
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

4. બે છોકરાઓ (B_1, B_2) અને બે છોકરીઓ (G_1, G_2) પૈકી બે જણાની રસ્તા સુરક્ષા સમિતિ બનાવવાની છે.
તો તે માટેનો નમૂના અવકાશ લખવા માટેની નીચેની ફૂતિ પૂર્ણ કરો.

$$(1) \text{ બે છોકરાઓની સમિતિ} = \boxed{\quad} \quad (2) \text{ બે છોકરીઓની સમિતિ} = \boxed{\quad}$$

$$(3) \text{ એક છોકરો અને એક છોકરી મળીને તૈયાર થતી સમિતિ} = \boxed{B_1, G_1} \boxed{\quad} \boxed{\quad} \boxed{\quad}$$

$$\therefore \text{નમૂના અવકાશ} = \{..., ..., ..., ..., ..., ...\}$$



ઘટના (Event)

આપેલી વિશેષ શરત પૂર્ણ કરતાં નિષ્પત્તિને, અપેક્ષિત નિષ્પત્તિ (favourable outcome) કહે છે.

નમૂના અવકાશ આપ્યો હોય ત્યારે અપેક્ષિત નિષ્પત્તિના ગણને 'ઘટના' કહે છે. 'ઘટના' એ નમૂના અવકાશનો ઉપગણ (પેટાગણ) હોય છે.

આ ઘટના અંગેજ લિપિના કેપિટલ અક્ષરો વડે જેમકે A, B, C, D વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

ઉદ્દા. બે નાણાંકના પ્રયોગમાં ધારોકે ઘટના A એ ઓછામાં ઓછો એક કાટો (T) મળવાની છે.

અહીં અપેક્ષિત નિષ્પત્તિ નીચે પ્રમાણે છે,

$$A = \{TT, TH, HT\}$$

ઘટના A માંના ઘટકોની સંખ્યા $n(A)$ વડે દર્શાવાય છે. અહીં $n(A) = 3$ છે.

અધિક માહિતી માટે

ઘટનાના પ્રકાર

- | | |
|---|---|
| (i) નિશ્ચિત ઘટના (Certain event) | (iv) પૂરક ઘટના (Complement of an event) |
| (ii) અશક્ય ઘટના (Impossible event) | (v) પરસ્પર નિવારક ઘટના (Mutually exclusive event) |
| (iii) એક ઘટકી ઘટના / એકકી ઘટના (Simple event) | (vi) સર્વ સમાવેશી ઘટના (Exhaustive event) |

જીજી ગણેલાં ઉદાહરણો જીજી

ઉદા. (1) બે સિક્કા એક સાથે ઉછાળવાના યાદચિંહક પ્રયોગમાં નમૂના અવકાશ ‘S’ લખો. તેમાંના નમૂના ઘટકોની સંખ્યા $n(S)$ લખો. આ પ્રયોગના સંદર્ભે નીચેના ઘટના ગણના ડ્રેપમાં લખો અને તેમાંના નમૂના ઘટકોની સંખ્યા લખો.

- (i) ઘટના A માટેની શરત - ઓછામાં ઓછો એક છાપો મળે.
- (ii) ઘટના B માટેની શરત - એક જ છાપો મળે.
- (iii) ઘટના C માટેની શરત - વધુમાં વધુ એક કાટો મળે.
- (iv) ઘટના D માટેની શરત - એક પણ છાપો ન મળે.

ઉક્લિલ: બે સિક્કા એક સાથે ઉછાળતાં,

$$S = \{HH, HT, TH, TT\} \quad \therefore \quad n(S) = 4$$

- (i) ઘટના A માટેની શરત - ઓછામાં ઓછો એક છાપો મળે તે છે.

$$A = \{HH, HT, TH\} \quad \therefore \quad n(A) = 3$$

- (ii) ઘટના B માટેની શરત - એક જ છાપો મળવાની છે.

$$B = \{ HT, TH\} \quad \therefore \quad n(B) = 2$$

- (iii) ઘટના C માટેની શરત - વધુમાં વધુ એક કાટો મળે તે છે.

$$C = \{HH, HT, TH\} \quad \therefore \quad n(C) = 3$$

- (iv) ઘટના D માટેની શરત - એક પણ છાપોના મળવાની છે.

$$D = \{TT\} \quad \therefore \quad n(D) = 1$$

ઉદા. (2) એક થેલીમાં 50 કાર્ડ છે. દ્વેક કાર્ડ પર 1 થી 50 પૈકી એક સંખ્યા લખેલી છે. તેમાંથી કોઈપણ એક કાર્ડ યાદચિંહક રીતે કાઢીએ તો તેનો નમૂના અવકાશ ‘S’ લખો.

ઘટના A, B અને તેમાંના ઘટકોની સંખ્યા લખો.

- (i) ઘટના A માટેની શરત, કાર્ડ પરની સંખ્યા 6 વડે વિભાજ્ય છે.

- (ii) ઘટના B માટેની શરત છે કે, કાર્ડ પરની સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ હોય.

ઉક્લિલ: નમૂના અવકાશ, $S = \{1, 2, 3, \dots, 49, 50\} \quad \therefore \quad n(S) = 50$

- (i) ઘટના A માટેની શરત છે કે, કાર્ડ પરની સંખ્યા 6 વડે વિભાજ્ય છે.

$$A = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48\} \quad \therefore \quad n(A) = 8$$

- (ii) ઘટના B માટેની શરત છે કે, કાર્ડ પરની સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ હોય.

$$B = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\} \quad \therefore \quad n(B) = 7$$

ઉદા. (3) 3 છોકરાં અને 2 છોકરીઓમાંથી બે જણાની સ્વચ્છતા સમિતિ નીચેની શરતો પ્રમાણે બનાવવાની છે. તો નમૂના અવકાશ ‘S’ અને નમૂના ઘટકોની સંખ્યા લખો. તેમજ નીચેની ઘટના ગણ ડ્રેપમાં લખી અને નમૂના ઘટકોની સંખ્યા લખો.

- (i) ઘટના A માટેની શરત - સમિતિમાં ઓછામાં ઓછી એક છોકરી હોવી જોઈએ.
- (ii) ઘટના B માટેની શરત - સમિતિમાં એક છોકરો અને એક છોકરી હોવી જોઈએ.
- (iii) ઘટના C માટેની શરત - સમિતિમાં ફક્ત છોકરાઓ હોવા જોઈએ.
- (iv) ઘટના D માટેની શરત - સમિતિમાં વધુમાં વધુ એક છોકરી હોવી જોઈએ.

ઉક્લ : ધારોકે, B_1, B_2, B_3 આ તણ છોકરાઓ અને G_1, G_2 આ બે છોકરીઓ છે.

છોકરાં-છોકરીઓમાંથી બે જણાની સ્વચ્છતા સમિતિ બનાવવાની છે.

$$S = \{B_1 B_2, B_1 B_3, B_2 B_3, B_1 G_1, B_1 G_2, B_2 G_1, B_2 G_2, B_3 G_1, B_3 G_2, G_1 G_2\} \quad \therefore n(S) = 10$$

- (i) ઘટના A માટેની શરત છે કે, સમિતિમાં ઓછામાં ઓછી એક છોકરી હોવી જોઈએ.

$$A = \{B_1 G_1, B_1 G_2, B_2 G_1, B_2 G_2, B_3 G_1, B_3 G_2, G_1 G_2\} \quad \therefore n(A) = 7$$

- (ii) ઘટના B માટેની શરત છે કે, સમિતિમાં એક છોકરો અને એક છોકરી હોવી જોઈએ.

$$B = \{B_1 G_1, B_1 G_2, B_2 G_1, B_2 G_2, B_3 G_1, B_3 G_2\} \quad \therefore n(B) = 6$$

- (iii) ઘટના C માટેની શરત છે કે, સમિતિમાં ફક્ત છોકરાઓ હોવા જોઈએ.

$$C = \{B_1 B_2, B_1 B_3, B_2 B_3\} \quad \therefore n(C) = 3$$

- (iv) ઘટના D માટેની શરત છે કે, સમિતિમાં વધુમાં વધુ એક છોકરી હોવી જોઈએ.

$$D = \{B_1 B_2, B_1 B_3, B_2 B_3, B_1 G_1, B_1 G_2, B_2 G_1, B_2 G_2, B_3 G_1, B_3 G_2\} \quad \therefore n(D) = 9$$

ઉદા. (4) બે પાસા ફેકવાથી ભળતો નમૂના અવકાશ ‘S’ અને નમૂના અવકાશમાંના ઘટકોની સંખ્યા $n(S)$ લખો.

નીચેની શરતો પૂર્ણ કરતી ઘટના ગણ સ્વરૂપે લખો અને તેમાંના નમૂના ઘટકોની સંખ્યા લખો.

- (i) ઉપલાં પૃષ્ઠભાગ પર ભળતાં અંકોનો સરવાળો મૂળ સંખ્યા હોય.
- (ii) ઉપલાં પૃષ્ઠભાગ પરના અંકોનો સરવાળો 5 ના ગુણાંક હોય.
- (iii) ઉપલાં પૃષ્ઠભાગ પરનાં અંકોનો સરવાળો 25 હોય.
- (iv) પહેલા પાસા પર ભળતો અંક, બીજી પાસા પર ભળતાં અંક કરતાં ઓછો હોય.

ઉક્લ : નમૂના અવકાશ,

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), \\(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), \\(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), \\(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), \\(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), \\(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\} \quad \therefore n(S) = 36$$

(i) ધારોકે, ઉપલાં પૃષ્ઠભાગ પર મળતાં અંકોનો સરવાળો મૂળ સંખ્યા હોય તે ઘટના E ની શરત છે.

$$E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), \\(4, 1), (4, 3), (5, 2), (5, 6), (6, 1), (6, 5)\} \quad \therefore n(E) = 15$$

(ii) ધારોકે, ઉપલાં પૃષ્ઠભાગ પર મળતાં અંકોનો સરવાળો 5 ના ગુણાંક હોય તે ઘટના F ની શરત છે.

$$F = \{ (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (4, 6), (5, 5), (6, 4) \} \quad \therefore n(F) = 7$$

(iii) ધારોકે, ઘટના G માટેની શરત છે કે, ઉપલાં પૃષ્ઠભાગ પરનાં અંકોનો સરવાળો 25 હોય.

$$G = \{ \} = \phi \quad \therefore n(G) = 0$$

(iv) ધારોકે, ઘટના H માટેની શરત એ છે કે, પહેલાં પાસા પરનો અંક બીજા પાસા પરનાં અંક કરતાં નાનો હોય.

$$H = \{(1, 2) (1, 3) (1, 4) (1, 5) (1, 6) (2, 3) (2, 4) (2, 5) (2, 6)$$

$$(3, 4) (3, 5) (3, 6) (4, 5) (4, 6) (5, 6)\} \quad \therefore n(H) = 15$$

મહાવરાસંગ્રહ 5.3

1. નીચેના દરેક યાદચિક પ્રયોગમાટે નમૂના અવકાશ 'S' અને તેમાંના નમૂના ઘટકોની સંખ્યા $n(S)$ લખો. તેમજ તેમાંની ઘટના A, B, C ગણ સ્વરૂપે લખો અને અને $n(A)$, $n(B)$ અને $n(C)$ લખો.

(1) એક પાસો ફેંકતા,

ઘટના A માટેની શરત - ઉપલાં પૃષ્ઠભાગ પર સમસંખ્યા મળે.

ઘટના B માટેની શરત - ઉપલાં પૃષ્ઠભાગ પર વિષમસંખ્યા મળે.

ઘટના C માટેની શરત - ઉપલાં પૃષ્ઠભાગ પર મૂળસંખ્યા મળે.

(2) બે પાસા એક સા�ે ફેંકતા,

ઘટના A માટેની શરત - ઉપલાં પૃષ્ઠભાગ પરના અંકોનો સરવાળો 6 ના ગુણાંક હોય.

ઘટના B માટેની શરત - ઉપલાં પૃષ્ઠભાગ પરના અંકોનો સરવાળો ઓછામાં ઓછા 10 હોય.

ઘટના C માટેની શરત - બન્ને પાસા પરના અંક સમાન હોય.

(3) ત્રણ સિક્કા એક સાથે ઉછાળતાં,

ઘટના A માટેની શરત, ઓછામાં ઓછા બે છાપા મળે.

ઘટના B માટેની શરત, એક પણ છાપો ન મળે.

ઘટના C માટેની શરત, બીજાં સિક્કા પર છાપો મળે.

(4) અંકોની પુનરાવૃત્તિ ન કરતાં 0, 1, 2, 3, 4, 5 અંકોથી તૈયાર થતી બે અંકી સંખ્યા તૈયાર કરી છે.

ઘટના A માટેની શરત, તૈયાર થતી સંખ્યા સમ સંખ્યા હોય.

ઘટના B માટેની શરત, તૈયાર થતી સંખ્યા 3 વડે વિભાજ્ય હોય.

ઘટના C માટેની શરત, તૈયાર થતી સંખ્યા 50 થી મોટી હોય.

(5) ત્રણ પુરુષો અને બે સ્ત્રીઓમાંથી બે જગ્યાની ‘પર્યાવરણ સમિતિ’ બનાવવાની છે.

ઘટના A માટેની શરત, સમિતિમાં ઓછામાં ઓછી એક સ્ત્રી હોય.

ઘટના B માટેની શરત, સમિતિમાં એક પુરુષ અને એક સ્ત્રી હોય.

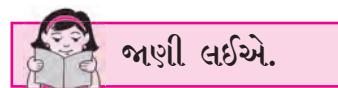
ઘટના C માટેની શરત, સમિતિમાં એક સ્ત્રી ન હોય.

(6) એક સિક્કો અને એક પાસો એક જ સમયે ફેંકતાં,

ઘટના A માટેની શરત, છાપો અને વિષમ સંખ્યા મળે.

ઘટના B માટેની શરત, H અથવા T અને સમ સંખ્યા મળે.

ઘટના C માટેની શરત, પાસા પરની સંખ્યા 7 કરતાં મોટી અને સિક્કા પર કાટો મળે.



ઘટનાની સંભાવના (Probability of an event)

એક સહેલો પ્રયોગ ધ્યાનમાં લઈએ. એક થેલીમાં સમાન આકારના ચાર દડાં છે. તેમાંના ત્રણ સફેદ દડાં અને ચોથો દડો કાળો છે. તેમાંથી એક દડો આંખો બંધ કરીને કાઢવાનો છે.

અહીં કાઢેલો દડો સફેદ હોવાની શક્યતા વધારે છે, એ સહેલાઈથી સમજન્ય છે.

ગણિતની ભાષામાં અપેક્ષિત ઘટનાની શક્યતા દર્શાવતી સંખ્યાને ‘સંભાવના’ કહે છે. તે નીચેનું સૂત્ર વાપરીને સંખ્યાકૃપે કે શતમાનમાં દર્શાવાય છે.

એકાદ યાદચિન્હક પ્રયોગમાં નમૂના અવકાશ S અને A તે પ્રયોગસંબંધી અપેક્ષિત ઘટના હોય તો તે ઘટનાની સંભાવના ‘ $P(A)$ ’ એમ દર્શાવાય છે અને નીચેના સૂત્રથી શોધવામાં આવે છે.

$$P(A) = \frac{\text{ઘટના 'A' માંના નમૂના ઘટકોની સંખ્યા}}{\text{નમૂના અવકાશ } S \text{ માંના કુલ ઘટકોની સંખ્યા}} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

ઉપરના પ્રયોગમાં ‘કાઢેલો દડો સફેદ હોવો’ તે ઘટના A હોય તો $n(A) = 3$, કારણ ત્રણ દડાં સફેદ છે. અને કુલ દડાં ચાર છે. $n(S) = 4$

∴ કાઢેલો દડો સર્કેદ હોય, તેની સંભાવના $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{4}$

તે જ પ્રમાણે, ‘કાઢેલો દડો કાળો હોવાની’ ઘટના B હોય તો $n(B) = 1$ $\therefore P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1}{4}$

ગણેલાં ઉદાહરણો

ઉદા. (1) એક સિક્કો ઉછાળતાં, નીચેની ઘટનાની સંભાવના શોધો.

- (i) છાપો મળવો. (ii) કાટો મળવો.

ઉકલ : ધારોકે, નમૂના અવકાશ 'S' છે.

$$S = \{H, T\} \quad \therefore n(S) = 2$$

- (i) ધારોકે, ઘટના A માટેની શરત, છાપો મળવાની છે.

$$A = \{H\} \quad \therefore n(A) = 1$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{2}$$

- (ii) ધારોકે, ઘટના B માટેની શરત, કાટો મળવાની છે.

$$B = \{T\} \quad \therefore n(B) = 1$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1}{2}$$

ઉદા. (2) એક પાસો ફેંકતા નીચેની શરત પૂર્ણ કરતી ઘટનાની સંભાવના શોધો.

- (i) ઉપલાં પૃષ્ઠભાગ પર મૂળ સંખ્યા મળે. (ii) ઉપલાં પૃષ્ઠભાગ પર સમ સંખ્યા મળે.

ઉકિલ : ધારોકે, ‘S’ નમૂના અવકાશ છે.

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \therefore n(S) = 6$$

- (i) ઘટના A : ઉપલાં પૃષ્ઠભાગ પર મૂળ સંખ્યા હોય..

$$A = \{2, 3, 5\} \quad \therefore n(A) = 3$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(ii) ઘટના B : ઉપલાં પૃષ્ઠભાગ પર સમસંઘ્યા મળો.

$$B = \{2, 4, 6\} \quad \therefore \quad n(B) = 3$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

ઉદા. (3) યોગ્ય રીતે પીસેલા 52 પતાંની કટમાંથી એક પતું કાઢવામાં આવે તો નીચેની ઘટનાની સંભાવના શોધો.

(i) તે પત્તાં લાલ હોય. (ii) તે પત્તાં ચિત્રયૂક્ત હોય.

ઉકલ : ધારોકે, નમૂના અવકાશ 'S' છે. $\therefore n(S) = 52$

(i) ઘટના A : કાઢેલું પત્તું લાલ હોય.

કુલ લાલ પતાં = 13 ચોકટના પતાં + 13 બદામના પતાં

$$\therefore n(A) = 26$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

(ii) ઘટના B : કાઢેલું પત્તું ચિત્રયુક્ત હોય.

પતાની કંટમાં રાજી, રાણી અને ગુલામ આ ચિત્રયુક્ત પતાં છે તેવા કુલ 12 ચિત્રયુક્ત પતાં હોય છે.

$$\therefore n(B) = 12$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

ઉદા. (4) એક ખોખામાં 5 સ્ટોબેરી, 6 કૉફી અને 2 પેપરમિન્ટની ચોકલેટ્સ છે. તેમાંથી એક ચોકલેટ કાઢતાં -

(i) કાઢેલી ચોકલેટ કાંક્ઝીની હોય અને

(ii) કાઢેલી ચોકલેટ પેપરમિન્ટ હોવાની સંભાવના શોધો.

ઉકિલ : ધારોકે, નમૂના અવકાશ 'S' છે.

ધટના B : કાઢેલી ચોકલેટ પેપરમિન્ટ હોય.

$$n(A) = 6$$

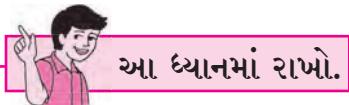
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P(A) = \frac{6}{13}$$

$$n(B) = 2$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$P(B) = \frac{2}{13}$$



- સંભાવના કહેતી કે લખતી વખતે અપૂર્જાઈ અથવા શતમાનનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.
- કોઈપણ ઘટનાની સંભાવના 0 થી 1 અથવા 0% થી 100% હોય છે.

ધારોકે ઘટના E હોય, તો $0 \leq P(E) \leq 1$ અથવા $0 \% \leq P(E) \leq 100 \%$

ઉદા. $\frac{1}{4}$ આ સંભાવના 25% એમ લખાય છે.

- પાઠની શરૂઆતમાં વર્ગમાંના વિદ્યાર્થી-વિદ્યાર્થીનીઓએ વનસ્પતિના નામની ચિઠી ઉપાડવાના પ્રયોગમાં ‘તુલસી’ નામની ચિઠી વિદ્યાર્થીને મળે તેની સંભાવનાનો વિચાર કર્યો હતો. એક જ ચિઠી પર ‘તુલસી’ લખેલું છે. જે 40 વિદ્યાર્થીઓ, દરેક જ એક ચિઠી ઉપાડે તો દરેકને ‘તુલસી’ લખેલી ચિઠી મળવાની સંભાવના $\frac{1}{40}$ છે. પહેલાં, વર્ચ્યે કે છેલ્લે ચિઠી ઉપાડનારને તે ચિઠી મળવાની સંભાવના સરખી જ છે.

મહાવરાસંગ્રહ 5.4

1. બે સિક્કા ઉછાળતાં, નીચેની ઘટનાની સંભાવના શોધો.
 - (1) ઓછામાં ઓછો એક છાપો મળે. (2) એકપણ છાપો ન મળે.
2. બે પાસા એક જ સમયે ફેંકતા નીચેની ઘટનાની સંભાવના શોધો.
 - (1) ઉપલાં પૂજભાગ પરનાં અંકોનો સરવાળો ઓછામાં ઓછો 10 હોય.
 - (2) ઉપલાં પૂજભાગ પરનાં અંકોનો સરવાળો 33 હોય.
 - (3) પહેલાં પાસા પરનો અંક, બીજી પાસા પરનાં અંકથી મોટો હોય.
3. એક પેટીમાં 15 ટિકિટો છે. દરેક પર 1 થી 15 પૈકી એક સંખ્યા લખેલી છે. તે પેટીમાંથી એક ટિકિટ યાદરિદ્ધ રીતે કાઢતાં, ટિકિટ પરની સંખ્યા
 - (1) સમ સંખ્યા હોવી (2) સંખ્યા 5 ના ગુણાંકમાં હોય; આ ઘટનાની સંભાવના શોધો.
4. અંકો 2, 3, 5, 7, 9 માંથી અંકોની પુનરાવૃત્તિ ન કરતાં બે અંકી સંખ્યાઓ તૈયાર કરતાં નીચેની ઘટનાની સંભાવના કાઢો.
 - (1) તે સંખ્યા વિષમ હોય (2) તે સંખ્યા 5 ના ગુણાંકમાં હોય.
5. યોગ્ય રીતે પીસેલા 52 પત્તાની કટમાંથી એક પત્તું ખેંચતા નીચેની ઘટનાની સંભાવના કેટલી ?
 - (1) એકો મળવો (2) કાળીનું પત્તું મળવું.

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 5

1. નીચેના દરેક પ્રશ્ન માટે યોગ્ય પર્યાય પસંદ કરો.

(1) નીચેના પર્યાયોમાંથી ક્યો પર્યાય ‘સંભાવના’ દર્શાવતો નથી ?

- (A) $\frac{2}{3}$ (B) 1.5 (C) 15 % D) 0.7

(2) એક પાસો ફેંકતા, ઉપલાં પૃષ્ઠભાગ પર 3 કરતાં ઓછી સંખ્યા મળવાની સંભાવના છે.

- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ D) 0

(3) 1 થી 100 માંથી પસંદ કરેલી સંખ્યા, મૂળ સંખ્યા હોવાની સંભાવના છે.

- (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{6}{25}$ (C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{13}{50}$

(4) દરેક કાર્ડ પર એક સંખ્યા એ પ્રમાણે 1 થી 40 સુધીની સંખ્યાઓ લખેલાં 40 કાર્ડ એક થેલીમાં છે તેમાંથી એક કાર્ડ ઉપાડતાં તે કાર્ડપરની સંખ્યા 5 ના ગુણાંક હોવાની શક્યતા છે.

- (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{1}{3}$

(5) જે $n(A) = 2$, $P(A) = \frac{1}{5}$, તો $n(S) = ?$

- (A) 10 (B) $\frac{5}{2}$ (C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{1}{3}$

2. બાસ્કેટબોલના રમતવીરો જૅન, વાસીમ અને આકાશ એક નિશ્ચિત જગ્યાએથી બાસ્કેટમાં બોલ નાખવાની પ્રેક્ટીસ (મહાવરો) કરતાં હતાં. બાસ્કેટમાં બોલ પડવાની જૅનની સંભાવના $\frac{4}{5}$, વાસીમની 0.83 અને આકાશની 58% છે તો કોની સંભાવના સૌથી વધારે છે ?

3. એક હોકી સંઘમાં 6 બચાવ કરનાર, 4 આકમક અને એક ગોલ-રક્ષક ઐલાઇઓ છે. યાદચિછિક રીતે તેમાંથી એક ઐલાઇને કેપ્ટન (સંઘનાયક) તરીકે પસંદ કરવાનો છે. તો નીચેની ઘટનાની સંભાવના શોધો.

(1) ગોલરક્ષક જ કેપ્ટન બનો.

(2) બચાવ કરનારો ઐલાઇ કેપ્ટન બનો.

4. જેસેફ એક ટોપીમાં દરેક કાર્ડ પર અંગેજ વર્ણમાળાનો એક અક્ષર એ પ્રમાણે બધાં અક્ષરોનાં કુલ 26 કાર્ડ મૂક્યાં છે. તેમાંથી એક કાર્ડ યાદચિછિક રીતે કાઢવાનું છે તો કાઢેલું કાર્ડ ‘સ્વર’ અક્ષર હોવાની સંભાવના શોધો.

5. કુંગાવણો 2 લાલ, 3 બલ્યુ અને 4 લીલાં રંગના કુંગામાંથી એક કુંગો પ્રણાલિને યાદચિછિક રીતે આપવાનો છે તો નીચેની ઘટનાની સંભાવના શોધો.

(1) આપેલો કુંગો લાલ હોવો.

(2) આપેલો કુંગો વાદળી હોવો.

(3) આપેલો કુંગો લીલો હોવો.

- એક ખોખામાં 5 લાલ પેન, 8 વાદળી પેન અને 3 લીલી પેન છે. યાદરિષ્ટક પદ્ધતિથી અતુલને 1 પેન કાઢવાની છે તો કાઢેલી પેન વાદળી હોવાની સંભાવના શોધો.
 - એક પાસાના 6 પૃષ્ઠો નીચે પ્રમાણે છે.

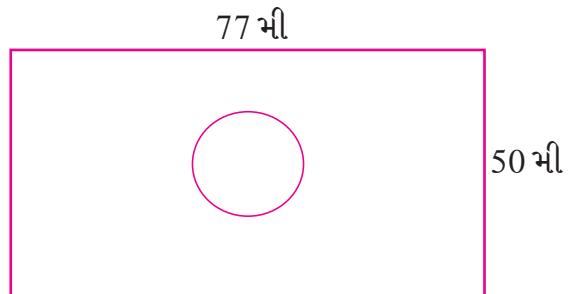
આ પાસો એક વખત ફુંકતા નીચેની ઘટનાની સંભાવના શોધો.

- (1) ઉપરના પૂછભાગ પર 'A' મળે. (2) ઉપરના પૂછભાગ પર 'D' મળે.

8. એક ખોખામાં 30 ટિકિટો છે. દરેક ટિકિટ પર 1 થી 30 પૈકી એક સંખ્યા લખેલી છે. તેમાંથી કોઈપણ એક ટિકિટ યાદચિક રીતે કાઢતાં નીચેની ઘટનાની સંભાવના શોધો.

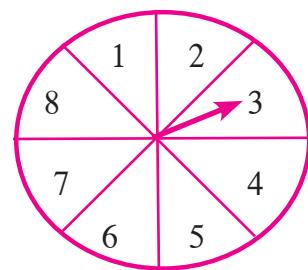
(1) ટિકિટ પરની સંખ્યા વિષમ હોવી. (2) ટિકિટ પરની સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ હોવી.

9. એક બાગની લંબાઈ અને પહોળાઈ અનુક્રમે 77 મીટર અને 50 મીટર છે. બાગમાં 14 મીટર વ્યાસનું એક તળાવ છે. બાગની નજીક એક મકાનની ગોલેરીમાં સૂક્ખ્યેલો ટોવેલ પવનથી ઉડીને બાગમાં પડે છે તો તે બાગમાં આવેલાં તળાવમાં પડવાની સંભાવના શોધો.



10. તકની એક રમતમાં (Game of chance) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 આ પૈકી એક અંક પર બાણ સ્થિર થાય છે. અને તે સમસંભાવી નિષ્પત્તિ છે. તો નીચેની ઘટનાની સંભાવના શોધો.

- (1) બાળા, 8 અંક પર સ્થિર થાય.
 - (2) બાળા, વિષમ અંક પર સ્થિર થાય.
 - (3) બાળા, 2 કરતાં મોટી સંખ્યા પર સ્થિર થાય.
 - (4) બાળા વડે દર્શાવેલી સંખ્યા 9 કરતાં નાની હોય.



11. દરેક કાર્ડ પર એક પ્રમાણે 0 થી 5 આ પૂર્ણક સંખ્યા લખેલાં 6 કાર્ડ ઓખામાં મૂક્યાં છે. તો નીચેની સંખ્યાની સંભાવના શોધો.

- (1) કાઢેલાં કાર્ડ પરની સંખ્યા પ્રાકૃતિક સંખ્યા હોય.
 - (2) કાઢેલાં કાર્ડ પરની સંખ્યા 1 થી નાનો હોય.
 - (3) કાઢેલાં કાર્ડ પરની સંખ્યા પૂર્ણ સંખ્યા હોય.
 - (4) કાઢેલાં કાર્ડ પરની સંખ્યા 5 થી મોટો હોય.

12. એક બેંગમાં 3 લાલ, 3 સફેદ અને 3 લાલ દાં છે. બેંગમાથી 1 દાં યાદચિક પદ્ધતિથી કાઢતાં નીચેની ઘટનાની સંભાવના શોધો.

- (1) કાઢેલો દડો લાલ હોય. (2) કાઢેલો દડો લાલ ન હોય.
(3) કાઢેલો દડો લાલ કે સર્કેટ હોય.

13. દરેક કાર્ડ પર એક એ પ્રમાણે mathematics આ શબ્દનાં અક્ષરો લખેલાં છે. તે કાર્ડ ઉંધા મૂક્યા છે તેમાંથી એક કાર્ડ ઉપાડતાં તેના પર ‘m’ અક્ષર હોવાની સંભાવના શોધો.

14. એક શાળામાંના 200 વિદ્યાર્થીઓ પૈકી 135 વિદ્યાર્થીઓને કબજીની રમત ગમે છે. અન્યોને આ રમત ગમતી નથી. બધામાંથી એક વિદ્યાર્થી પસંદ કરીએ તો તેને કબજીની રમત ગમતી ન હોવાની સંભાવના શોધો.

15. 0, 1, 2, 3, 4 પૈકી અંક લઈને દ્વિ-અંકી સંખ્યા તૈયાર કરવાની છે. અંકોની પુનરાવૃત્તિ પણ ચાલશે તો નીચેની ઘટનાની સંભાવના શોધો.

16. એક પાસાપર 0, 1, 2, 3, 4, 5, એમ અંકો છે. આ પાસો બે વાર ફેક્ટા, તેના ઉપલાં પૃષ્ઠભાગ પર મળેલાં અંકોનો ગુણાકાર શૂન્ય હોવાની સંભાવના શોધો.

17. નીચેની ફૂતિ કરો -

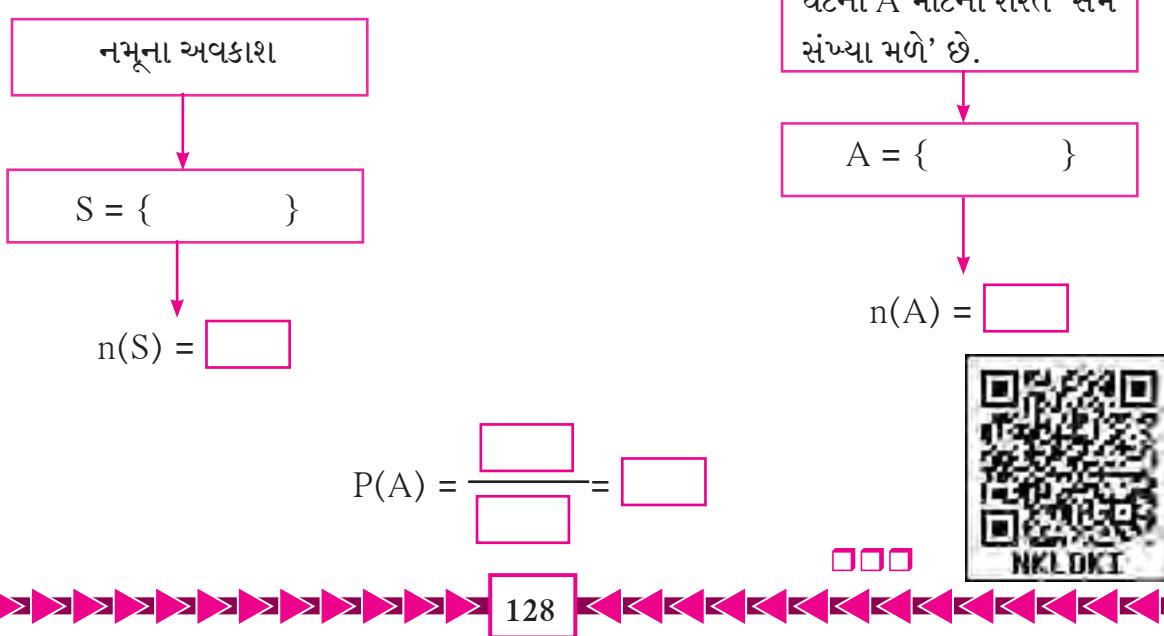
कृति I : तમारा वर्गोंनी कुल संख्या $n(S) =$

વગ્ારોમાં ચર્ચમા વાપરતા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા n(A) =

બધા વિદ્યાર્થીઓમાંથી ચશ્મા પહેરનાર એક વિદ્યાર્થીને યાદચિછિક પદ્ધતિથી પસંદ કરવાની સંભાવના $P(A) =$

બધા વિદ્યાર્થીઓમાંથી ચેશમાન પહેલનાર એક વિદ્યાર્થીની યાદચિઠ્ક પદ્ધતિથી પસંદ કરવાની સંભાવના $P(B) =$

કુદ્રતિ II : નમૂના અવકાશ સ્વતઃ લઈ નીચેના ચોકઠા ભરો.



6 આંકડાશાસ્ત્ર



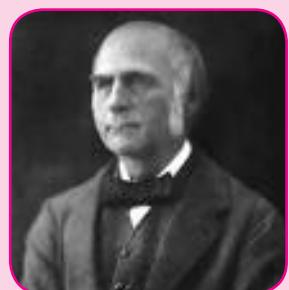
ચાલો શીખીએ.

- કેન્દ્રીય પ્રવૃત્તિના પરિમાણો - વર્ગીકૃત વિતરણ કોઠા પરથી મધ્ય, મધ્યક, બહુલક
- આંકડાકીય માહિતીની આલેખ દ્વારા રજૂઆત - સ્તંભાલેખ, આવૃત્તિ બહુકોણ, વૃત્તાકૃતિ.

માનવ જીવનમાં આંકડાશાસ્ત્ર અનેક શાખાઓ માટે ઉપયોગી છે. જેમકે ખેતી, અર્થશાસ્ત્ર, વાણિજ્ય, ઔષધશાસ્ત્ર, વનસ્પતિશાસ્ત્ર, જૈવિકતંત્રજ્ઞાન, ભૌતિકશાસ્ત્ર, રસાયણશાસ્ત્ર, શિક્ષણશાસ્ત્ર, સમાજશાસ્ત્ર, વ્યવસ્થાપન વગેરે. એકાદ પ્રયોગ પછી મળતી નિષ્પત્તિની અનેક શક્યતાઓ હોય છે. જ્યારે તેમની શક્યતા તપાસવાની હોય, ત્યારે મોટાં પ્રમાણમાં પ્રયોગ કરીને, બધી બાબતોની વ્યવસ્થિત નોંધ કરવામાં આવે છે. આ નોંધનો ઉપયોગ કરીને વિવિધ નિષ્પત્તિઓની સંભાવના તપાસવામાં આવે છે. તે માટે આંકડાશાસ્ત્રમાં કે સંખ્યા શાસ્ત્રમાં નિયમ તૈયાર કરેલાં છે.

ફાન્સિસ ગાલ્ટન (1822-1911) આ બ્રિટિશ વૈજ્ઞાનિકે સંખ્યાશાસ્ત્રમાં મૂળભૂત કામ કર્યું છે.

તેઓ પ્રક્ષાવલિ તૈયાર કરીને અનેક લોકોમાં વહેચયતા અને તે બરી આપવાની વિનંતી કરતા. આ રીતે ઘણાં બધાં લોકોની માહિતી ભેગી કરીને તેમની પૂર્વભૂમિકા, આર્થિક સ્થિતિ, ગમો-અણગમો, આરોગ્ય વગેરેની મોટાં પ્રમાણમાં નોંધ રાખતા હતાં. જુદી જુદી વ્યક્તિઓના આંગળાની છાપ જુદી-જુદી હોય છે. તેની માહિતી હતી. ગાલ્ટને અનેક લોકોનાં આંગળાની છાપ તપાસીને તેના વર્ગીકરણની પદ્ધતિ વિકસાવી. સંખ્યાશાસ્ત્રનો ઉપયોગ કરીને બે વ્યક્તિઓના આંગળાની છાપ સરખી હોવાની શક્યતા લગભગ શૂન્ય હોય છે તે બતાવ્યું. તેથી આંગળાની છાપ ઉપરથી વ્યક્તિને ઓળખવાનું શક્ય બન્યું. ગુનેગારોને શોધવા માટે આ પદ્ધતિ ન્યાયાલયમાં પણ માન્ય થઈ. પ્રાણીઓ અને માનવોના અનુંગશાસ્ત્રમાં તેમણે ખૂબ કામ કર્યું છે.



ફાન્સિસ ગાલ્ટન



સર્વેક્ષણમાંથી મળેલી સંખ્યાકીય સામગ્રીમાં સામાન્યપણે એક ગુણધર્મ મળી આવે છે. તે એટલે બધાં પ્રાપ્તાંક એક વિશેષ પ્રાપ્તાંકની આસપાસ કે તેની ફરતે કેન્દ્રીકૃત થવાની પ્રવૃત્તિ. આ વિશેષ પ્રાપ્તાંક તે સમૂહની પ્રતિનિધિક સંખ્યા હોય છે. આ સંખ્યાને કેન્દ્રીકૃત પ્રવૃત્તિનું પરિમાણ કહે છે.

અવર્ગીકૃત કોઠા માટે આપણે ‘મધ્ય’ (Mean), ‘મધ્યક’ (Median) અને ‘બહુલક’ (Mode)નો અભ્યાસ પહેલાં કરેલો છે.

પ્રાત્યક્ષિક 1 : તમારા વર્ગના બધા છોકરાઓની ઊંચાઈ સેંમીમાં નોંધો. તમને જણાશે કે, અનેક છોકરાઓની ઊંચાઈ એકાં વિશેષ સંઘાની ફરતે કે આસપાસ કેન્દ્રિત થયેલી છે.

પ્રાત્યક્ષિક 2 : પીપળાનાં જાડ નીચે પડેલાં પાંડાં ભેગાં કરો અને દરેક વિદ્યાર્થીને એકેક પાંડું આપો. દરેકે પોતાને મળેલાં પાંડાની લંબાઈ દાંડીથી ટોચ સુધી માપીને નોંધવી. બધા નિરીક્ષણો (પ્રાપ્તાંક) નોંધ્યા પછી ધ્યાનમાં આવશે કે, એક વિશેષ સંખ્યાની આસપાસ બધાં નિરીક્ષણો કેન્દ્રિત થયેલાં જણાય છે.

હવે આપણે સંખ્યાકીય સામગ્રીના કેન્દ્રિય પ્રવૃત્તિના પરિમાણોનો ‘મધ્ય’ (Mean), ‘મધ્યક’ (Median) અને ‘બહુલક’ (Mode) નો વધુ અભ્યાસ કરવાના છીએ. તે માટેની પરિભાષા અને ચિહ્નોની માહિતી જણી લઈએ.

$$\text{સંખ્યાકીય (આંકડાકીય) સામગ્રીનો મધ્ય} = \frac{\text{બધા પ્રાપ્તાંકોનો સરવાળો}}{\text{કુલ પ્રાપ્તાંકોની સંખ્યા}} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \quad (\text{જ્યાં } x_i \text{ એ } i \text{ મો પ્રાપ્તાંક છે.)$$

મધ્ય \bar{X} વડે દર્શાવવામાં આવે છે. તે આપેલી સામગ્રીની સરાસરી છે.

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$



ગુર્ગૂટે આવૃત્તિ વિતરણ કોઠા પરથી મધ્ય (Mean from grouped frequency distribution)

જ્યારે પ્રાપ્તાંકોની સંખ્યા ધણી બધી હોય ત્યારે ઉપરના સૂત્રમાં બધી સંખ્યાઓ લખીને તેનો સરવાળો કરવાનું કામ મહેનત ભર્યું અને અધડું બને છે. તો તે માટે આપણે અન્ય કેટલી પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરીએ છીએ.

ક્યારેક મોટાં પ્રમાણમાં કરેલાં પ્રયોગની સામગ્રી વગ્ફિકૃત કોઠામાં આપેલી હોય છે. આ કોઠા પરથી આંકડાકીય કરેલી માહિતીમાંની સંખ્યાઓનો મધ્ય ચોક્કસ કે નિશ્ચિત કાઢી શકાતો નથી, તેથી તેની આસપાસની સંખ્યા કાઢીને અથવા અંદાજે મધ્ય કાઢવાની કેટલીક રીતોનો અભ્યાસ કરીએ.

સાદી પદ્ધતિ (Direct Method)

હવે આપણે વગ્નિકૃત સંખ્યાકીય માહિતીનો મધ્ય કાઢવાની રીતનો ઉદાહરણ પરથી અભ્યાસ કરીએ.

ઉદ્દા. : નીચેના કોઠામાં એક કામ પૂર્ણ કરવા માટે કામદારોને લાગતાં સમયનો આવૃત્તિ કોઈ આપ્યો છે. તે પરથી કામ પૂર્ણ કરવા માટે એક કામદારને લાગતાં સમયનો મધ્ય શોધો.

દરેકને કામ કરવા માટે લાગતો સમય (કલાક)	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39
કામદારોની સંખ્યા	10	15	12	8	5

ଓঁ

- (1) કોડામાં બતાવ્યા પ્રમાણે ઊભા સ્તંભ લીધા.
 - (2) પહેલાં સ્તંભમાં વર્ગો લખ્યા.
 - (3) બીજા સ્તંભમાં વર્ગમદ્ય x_i લખ્યાં.
 - (4) ત્રીજ સ્તંભમાં તે વર્ગમાં આવતાં કામદારોની સંખ્યા (f_i) લખી.
 - (5) ચોથા સ્તંભમાં દરેક વર્ગ સામે $(x_i \times f_i)$ આ ગુણાકાર લખ્યો.
 - (6) પછી $\sum_{i=1}^N x_i f_i$ સરવાળો લખ્યો.
 - (7) સૂત્ર વાપરીને મદ્ય શોધ્યો.

વર્ગ (સમય કલાક)	વર્ગમધ્ય x_i	આવૃત્તિ (કામદારોની સંખ્યા)	વર્ગમધ્ય × આવૃત્તિ $x_i f_i$
15-19	17	10	170
20-24	22	15	330
25-29	27	12	324
30-34	32	8	256
35-39	37	5	185
કુલ		$\sum f_i = 50$	$\sum x_i f_i = 1265$

$$\text{ਮਦਿ} = \bar{X} = \frac{\sum x_i f_i}{N} = \frac{1265}{50} = 25.3 \quad \because \sum f_i = N$$

જવાબ : એક કામદારને કામ પૂર્ણ કરવા લાગતાં સમયનો મધ્ય = 25.3 કલાક (અંદાજે)

ગાણોલાં ઉદાહરણો

ઉદા. (1) નીચેના કોઈમાં 50 વિદ્યાર્થીઓને કસોટી પરીક્ષામાં મળેલાં ગુણની ટકાવારી આપી છે. તે પરથી ગુણની ટકાવારીનો મધ્ય શોધો.

ગુણની ટકાવારી	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
વિદ્યાર્થી સંખ્યા	3	7	15	20	5

ઉકલ : પગથિયાનૂસાર નીચેનો કોઠો તૈયાર કર્યો.

વર्ग (ગુણની ટકાવારી)	વર્ગમધ્ય x_i	આવૃત્તિ (વિદ્યાર્થી સંખ્યા) f_i	વર્ગમધ્ય × આવૃત્તિ $x_i f_i$
0-20	10	3	30
20-40	30	7	210
40-60	50	15	750
60-80	70	20	1400
80-100	90	5	450
કુલ		$N = \sum f_i = 50$	$\sum x_i f_i = 2840$

$$\begin{aligned}\overline{X} &= \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} \\ &= \frac{2840}{50} \\ &= 56.8 \\ \therefore & \text{ગુણાની ટકાવારીનો મધ્ય} = 56.8\end{aligned}$$

ઉદા. (2) ગયા વરસે મહારાષ્ટ્રના વિવિધ 30 ગામોનું ઉનાળાના એક દિવસનું મહત્તમ તાપમાન $^{\circ}\text{C}$ માં નીચેના કોઈમાં આખ્યું છે. તે પરથી મહત્તમ તાપમાનનો મધ્ય શોધો.

મહત્વમાન તાપમાન	24-28	28-32	32-36	36-40	40-44
ગામોની સંખ્યા	4	5	7	8	6

ଓଡ଼ିଆ :

વર्ग (તापમान °C)	વર्गમध्य x_i	આવृત्ति (ગામોની સંખ્યા) f_i	વર्गમध्य × આવृત्ति $x_i f_i$
24-28	26	4	104
28-32	30	5	150
32-36	34	7	238
36-40	38	8	304
40-44	42	6	252
કુલ		$N = \sum f_i = 30$	$\sum x_i f_i = 1048$

$$\text{ਮਧਾ} = \bar{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{1048}{30} = 34.9 \text{ } {}^{\circ}\text{C}$$

ધારેલ/ગૃહિત મધ્યની પદ્ધતિ (Assumed Mean Method)

ઉપર ઉકેલ આપેલા ઉદાહરણમાં તમારા ધ્યાનમાં આવ્યું કે, કેટલીકવાર $x_i f_i$ ગુણાકાર ખૂબ મોટી સંખ્યા આવે છે તેથી સાદી રીતે મધ્ય શોધવાનું અધરું બને છે. તે માટે આપણે બીજી પદ્ધતિ ‘ધારેલ/ગૃહિત મધ્ય પદ્ધતિ’ જણી લઈએ. આ પદ્ધતિમાં નાની સંખ્યાના સરવાળા, ભાગાકાર કરવાનું સહેલું બને છે.

ઉદાહરણાર્થે, 40, 42, 43, 45, 47, 48 આ પ્રાપ્તાંકો છે. તેનો મધ્ય શોધવાનો છે.

આ ઉદાહરણામાંની સંખ્યાઓનું નિરીક્ષણ કરતાં ધ્યાનમાં આવે છે કે, સામગ્રીનો મધ્ય 40 થી વધારે આવશે એટલે 40 મધ્ય ઘારીએ. આ ‘ઘારેલ મધ્ય’ છે. હવે $40-40 = 0$, $42 - 40 = 2$, $43-40 = 3$, $45-40 = 5$, $47 - 40 = 7$, $48 - 40 = 8$ આ ફરક જુઓ આને ‘વિચલન’ કહે છે. તેનો મધ્ય શોધીએ. તેમાં ઘારેલ મધ્ય 40 ઉમેરતાં સામગ્રીનો મધ્ય ભળશે.

એટલે કે મધ્ય = ધારેલ મધ્ય + ધારેલ મધ્યથી વિચલનોનો મધ્ય

$$\bar{X} = 40 + \left(\frac{0+2+3+5+7+8}{6} \right) = 40 + \frac{25}{6} = 40 + 4\frac{1}{6} = 44\frac{1}{6}$$

ધારેલ મધ્ય માટે A , ધારેલમધ્યથી વિચલન માટે d અને વિચલનના મધ્ય માટે \bar{d} આ ચિહ્નો લેતાં,
 $\bar{X} = A + \bar{d}$ આ સૂત્ર મળે છે.

આ. ૪ ઉદાહરણ ધારેલ મધ્ય 43 લઈને કરી જોઈએ. દરેક પ્રાપ્તાંકમાંથી 43 બાદ કરીને ભળતી બાદબાકીઓ એટલે જ ધારેલ મધ્યથી થયેલાં વિચલનો મેળવીએ.

$$40 - 43 = -3, 42 - 43 = -1, 43 - 43 = 0, 45 - 43 = 2, 47 - 43 = 4, 48 - 43 = 5$$

$$\text{ધારેલ મધ્યથી થતાં વિચલનોનો સરવાળો} = -3 - 1 + 0 + 2 + 4 + 5 = 7$$

$$\text{हवे } \overline{X} = A + \overline{d}$$

$$= 43 + \left(\frac{7}{6} \right) \quad (\text{કુલ } 6 \text{ વિચલનો છે.)$$

$$= 43 + 1 \frac{1}{6}$$

$$= 44\frac{1}{6}$$

આપણાં દ્યાનમાં આવે છે કે, આમ ધારેત મધ્યની રીત વાપરવાથી ઉદાહરણમાંની ગણતરી સહેલી બને છે.

તેમજ પ્રાપ્તાંકમાંથી અથવા સગવડનુસાર કોઈપણ અન્ય સંખ્યા ‘ધારેલ મધ્ય’ તરીકે લઈએ તો પણ મધ્ય બદલતો નથી.

હવે આપણે આપેલાં આવૃત્તિ કોઈ માટે આ પદ્ધતિ કેવી રીતે વાપરવી તે એક ઉદાહરણ દ્વારા શીખીએ.

ઉદા. : 100 શાકભાજી વિકેતાના રોજના વેચાણનો આવૃત્તિ કોટો નીચે આખ્યો છે. ધારેલ મધ્યની રીતે તેમના રોજંદા વેચાણનો મધ્ય શોધો.

રોજું દુષ્પ્રાપિયા	1000-1500	1500-2000	2000-2500	2500-3000
વિકેતાની સંખ્યા	15	20	35	30

ઉક્ખા : ધારેલ મધ્ય $A = 2250$ લર્ડાએ. $d_i = x_i - A$ આ વિચલન છે.

વર्ग રेखुंदु वेचाण (ડिपिया)	वर्गમध्य x_i	$d_i = x_i - A$ $= x_i - 2250$	આવृત्ति (વिकेतानी संख्या) f_i	આવृત्ति × વિચલન $f_i d_i$
1000-1500	1250	-1000	15	-15000
1500-2000	1750	-500	20	-10000
2000-2500	2250 → A	0	35	0
2500-3000	2750	500	30	15000
કુલ			$N = \sum f_i = 100$	$\sum f_i d_i = -10000$

નીચેના પગથિયા વાપરીને કોઈઠો તૈયાર કર્યો.

- (1) ધારેલ મધ્ય $A = 2250$ લીધો. (સામાન્ય રીતે કોઈામાં સૌથી વધુ આવૃત્તિ ધરાવતા વર્ગનો વર્ગમધ્ય, ધારેલ મધ્ય તરફે લેવાય છે.)
 - (2) પહેલાં સ્તંભમાં વેચાણના વર્ગ લખ્યા.
 - (3) બીજા સ્તંભમાં વર્ગ-મધ્ય લખ્યા.
 - (4) ત્રીજા સ્તંભમાં $d_i = x_i - A = x_i - 2250$ ની કિંમતો લખી.
 - (5) ચોથા સ્તંભમાં દરેક વર્ગના વિકેતાઓની સંખ્યા લખી અને તેનો સરવાળો $\sum f_i$ લખ્યો.
 - (6) પાંચમા સ્તંભમાં $(f_i \times d_i)$ આ ગુણાકાર કરીને તેનો સરવાળો $\sum f_i d_i$ લખ્યો.

સૂત્ર વાપરીને \overline{d} અને \overline{X} શોધ્યો.

$$\bar{d} = \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = -\frac{10000}{100} = -100 \quad \therefore \text{મધ્ય } \bar{X} = A + \bar{d} = 2250 - 100 = 2150$$

જવાબ : રોળુંદા વેચાણનો મધ્ય = 2150 રૂપિયા છે.

કુદા : - આ ઉદાહરણ સાચી રીતે (Direct Method) ઉક્લો.

શાલુણ ગણેલાં ઉદાહરણો શાલુણ

ઉદા. (1) નીચેના કોઢામાં એક વ્યાવસાયિકને ત્યાં કામ કરતાં 50 કામહારોમાં દૈનિક પગારનું આવૃત્તિ વિતરણ આપ્યું છે. તે પરથી કામગારોના દૈનિક પગારનો મધ્ય ધારેત મધ્ય પદ્ધતિ શોધો.

કામગારોનો દૈનિક પગાર (ડિપિયા)	200-240	240-280	280-320	320-360	360-400
કામગારોની સંખ્યા (આવૃત્તિ)	5	10	15	12	8

ઉકિલ : ધારેલ મધ્ય $A = 300$ લઈએ.

વર्ग (પગાર ડિપિયા)	વર્ગમધ્ય x_i	$d_i = x_i - A$ $d_i = x_i - 300$	આવૃત્તિ (કામગારની સંખ્યા) f_i	આવૃત્તિ × વિચલન $f_i d_i$
200-240	220	-80	5	-400
240-280	260	-40	10	-400
280-320	300 → A	0	15	0
320-360	340	40	12	480
360-400	380	80	8	640
કુલ			$\sum f_i = 50$	$\sum f_i d_i = 320$

$$\bar{d} = \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = \frac{320}{50} = 6.4$$

$$\text{મધ્ય, } \bar{X} = A + \bar{d}$$

$$= 300 + 6.4$$

$$= 306.40$$

જવાબ : કામગારોના ફેનિક પગારનો મધ્ય = 306.40 રૂપિયા છે.

મધ્ય પ્રમાણ વિચલન પદ્ધતિ (Step deviation method)

આપણે મધ્ય શોધવાની સાદી રીતે અને ધારેલ મધ્યની રીતનો અભ્યાસ કર્યો. અધિક સુલભતા માટે મધ્ય શોધવાની હજુ એક રીત ઉદાહરણની મદદથી જાણીએ.

- પ્રથમ ધારેલ મધ્ય A બાદ કરીને d_i નો સ્તંભ તૈયાર કરીએ.
- બધા d_i નો ગુસાઅ f સહજતાથી મળે તો $u_i = \frac{d_i}{f}$ નો સ્તંભ તૈયાર કરીએ.
- બધી u_i સંખ્યાનો મધ્ય \bar{u} શોધીએ.
- $\bar{X} = A + \bar{u} f$ સૂત્ર વાપરી મધ્ય શોધીએ.

ઉદાહરણ : 100 કુટુંબોએ આરોગ્ય વિમા માટે રોકેલી વાર્ષિક રકમનો આવૃત્તિ કોઈ આખ્યો છે. મધ્ય પ્રમાણ વિચલન પદ્ધતિથી કુટુંબનાં વાર્ષિક રોકાણનો મધ્ય શોધો.

કુટુંબ રોકેલી વિમાની રકમ (રૂપિયા)	800-1200	1200-1600	1600-2000	2000-2400	2400-2800	2800-3200
કુટુંબની સંખ્યા	3	15	20	25	30	7

ઉક્લ : $A = 2200$ લઈએ, બધા d_i લેઈએ $f = 400$ લઈએ.

વર્ગ (વિમાની રકમ ઝપિયા)	વર્ગમધ્ય x_i	$d_i = x_i - A$ $= x_i - 2200$	$u_i = \frac{d_i}{J}$	આવૃત્તિ (કુટુંબોની સંખ્યા) f_i	$f_i u_i$
800-1200	1000	-1200	-3	3	-9
1200-1600	1400	-800	-2	15	-30
1600-2000	1800	-400	-1	20	-20
2000-2400	2200 → A	0	0	25	0
2400-2800	2600	400	1	30	30
2800-3200	3000	800	2	7	14
કુલ				$\sum f_i = 100$	$\sum f_i u_i = -15$

ઉપરનો કોઈ આ પગથિયા વાપરીને તૈયાર કર્યો છે.

(1) કોઈના પહેલાં સ્તંભમાં વિમાના રોકાણના વર્ગો લખ્યા.

(2) બીજા સ્તંભમાં વર્ગમધ્ય x_i લખ્યો.

(3) ત્રીજા સ્તંભમાં $d_i = x_i - A$ ની કિંમતો લખ્યી.

(4) આ સ્તંભની બધી સંખ્યાઓ 400ના ગુણાંક છે તેથી $J = 400$ લીધાં ચોથા સ્તંભમાં $u_i = \frac{d_i}{J} = \frac{d_i}{400}$ ની કિંમતો લખ્યી.

(5) પાંચમાં સ્તંભમાં દરેક વર્ગની આવૃત્તિ (કુટુંબોની સંખ્યા) લખ્યી.

(6) છઠા સ્તંભમાં $f_i \times u_i$ આ ગુણાકાર દરેક વર્ગમાટે લખ્યો.

u_i નો મધ્ય નીચેના સૂત્ર વડે શોધ્યો.

$$\bar{u} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} = \frac{-15}{100} = -0.15$$

$$\bar{X} = A + \bar{u} J$$

$$= 2200 + (-0.15) (400)$$

$$= 2200 + (-60.00)$$

$$= 2200 - 60 = 2140$$

∴ કુટુંબોના વાર્ષિક રોકાણનો મધ્ય 2140 ઝપિયા છે.

કુટુંબોના વાર્ષિક રોકાણનો મધ્ય : સાઢી રીતે, ઘારેલ મધ્યની રીતે ઉપરનું ઉદાહરણ ઉકિલો. કોઈપણ રીતે શોધેલો મધ્ય સમાન હોય છે. તે અનુભવો.

અધ્યક્ષ ગણેલાં ઉદાહરણો અધ્યક્ષ

ઉદા. (1) શાળાનાં 50 વિદ્યાર્થીઓએ પૂરગ્રસ્તોમાટે જમા કરેલાં ફંડનો આવૃત્તિ કોઢો નીચે પ્રમાણે છે તે પરથી જમા કરેલાં ફંડનો મધ્ય શોધો.

ફંડ (રૂપિયા)	0-500	500-1000	1000-1500	1500-2000	2000-2500	2500-3000
વિદ્યાર્થી સંખ્યા	2	4	24	18	1	1

નાલાકના બે વર્ગોમાં પ્રાપ્તાંક ઓછાં છે. તેથી તેમનો મળીને એક વર્ગ કરવો સુલભ બને છે. આ ઉદાહરણમાં 0 - 500 અને 500 - 1000 નો એક વર્ગ અને 2000 - 2500 અને 2500 - 3000 નો મળીને એક વર્ગ કર્યો.

ફંડની રકમ (રૂપિયા)	0-1000	1000-1500	1500-2000	2000-3000
વિદ્યાર્થી સંખ્યા	6	24	18	2

ઉક્લ : $A = 1250$ લઈએ બધા d_i નું નિરીક્ષણ કરીને $\bar{g} = 250$ લેતાં,

વર્ગ (ફંડ રૂપિયા)	વર્ગમધ્ય x_i	$d_i = x_i - A$ $= x_i - 1250$	$u_i = \frac{d_i}{\bar{g}}$	આવૃત્તિ f_i	$f_i u_i$
0-1000	500	-750	-3	6	-18
1000-1500	1250 → A	0	0	24	0
1500 - 2000	1750	500	2	18	36
2000-3000	2500	1250	5	2	10
કુલ				$\sum f_i = 50$	$\sum f_i u_i = 28$

$$\overline{u} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} = \frac{28}{50} = 0.56,$$

$$\overline{u} g = 0.56 \times 250 = 140$$

$$\overline{X} = A + g \overline{u} = 1250 + 140 = 1390$$

∴ જમા કરેલાં ફંડનો મધ્ય 1390 રૂપિયા છે.

કૃતિ -

- આ ઉદાહરણ સાદી રીતે ઉક્લો.
- આ ઉદાહરણમાં શોધેલો મધ્ય, ઘારેલ મધ્યની રીતે કાઢેલાં મધ્ય સાથે ચકાસી જુઓ.
- $A = 1750$ લઈને ઉપરની પદ્ધતિથી ઉદાહરણ ઉક્લો.

ਮਹਾਵਰਾਸੰਗ੍ਰਹ 6.1

1. ધોરણ 10ના 50 વિદ્યાર્થીઓએ રોજના અભ્યાસ માટે વ્યતીત કરેલો સમય અને વિદ્યાર્થી સંખ્યાનો આવૃત્તિ કોઈ આપ્યો છે. તે પરથી વિદ્યાર્થીઓએ અભ્યાસ માટે આપેલ સમયનો મધ્ય સાહી પદ્ધતિથી શોધો.

સમય (કલાક)	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10
વિદ્યાર્�ીની સંખ્યા	7	18	12	10	3

2. એક ધોરીમાર્ગ પર આવેલાં ટોલનાકા પર સવારે 6 થી સાંજે 6 સુધીમાં આવતાં વાહનો પાસેથી જમા થતો કર અને વાહનોની સંખ્યાનો આવૃત્તિ કોઠો આપ્યો છે. તેના પરથી જમા થતાં કરનો મદ્ય ‘ધારેલ મધ્યની’ પદ્ધતિથી શોધો.

જમા કર (રૂપિયા)	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800
વાહન સંખ્યા	80	110	120	70	40

3. એક દિવસમાં દૂધ વિકી કેન્દ્ર પરથી 50 ગ્રાહકોને વિતરિત કરેલા દૂધનો (લિટરમાં) આવૃત્તિ વિતરણ કોઠો આપો છે. તેના પરથી વિતરિત કરેલાં દૂધનો મધ્ય સાછી પદ્ધતિથી શોધો.

દ્વાદ્શ વિતરણ (લિટર)	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6
ગ્રાહકની સંખ્યા	17	13	10	7	3

4. કેટલાંક ખેડૂતોની સંતરાના બાગની આવકનો આવૃત્તિ કોઈ નીચે આપ્યો છે. તે પરથી તેમની આવકનો મધ્ય ‘ધારેલ મધ્ય’ પદ્ધતિથી શોધો.

આવક (હજર રૂપિયા)	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50
એડતોની સંખ્યા	20	25	15	10	10

5. એક કંપનીના 120 કર્મચારીઓએ દુષ્કાળગ્રસ્તો માટે જમા કરેલ ફંડફાળાની રકમનો આવૃત્તિ વિતરણ કોઠો આપ્યો છે. તે પરથી કર્મચારીઓએ જમા કરેલ ફંડ ફાળાનો મધ્ય ‘મધ્ય પ્રમાણ વિચલન’ પદ્ધતિથી શોધો.

જમા રકમ (રૂપિયા)	0-500	500-1000	1000-1500	1500-2000	2000-2500
કર્મચારીની સંખ્યા	35	28	32	15	10

6. એક કારખાનામાં 150 કામગારોનો સાપ્તાહિક પગારનો આવૃત્તિ વિતરણ કોઈ નીચે આપ્યો છે. તે પરથી તેમનાં સાપ્તાહિક પગારનો મધ્ય ‘મધ્ય પ્રમાણ વિચલન’ પદ્ધતિથી શોધો.

સાપ્તાહિક પગાર (ડિપિયા)	1000-2000	2000-3000	3000-4000	4000-5000
કામગારોની સંખ્યા	25	45	50	30



યાદ કરીએ.

વિજ્ઞાન પ્રદર્શનમાં ભાગ લેવા માટે એક શાળાના બે વિદ્યાર્થી અને બે વિદ્યાર્થીનીઓ બે દિવસ માટે બીજા શહેરમાં ગયા. તેમને પોતાનું સાંજનું ભોજન કર્યા કરવું, તે નક્કી કરવાનું હતું. કામની જગ્યાથી એક કિલોમીટરના વિસ્તારમાં ભોજન આપ્તી દસ હોટેલ્સ હતી. ત્યાંનો ભોજન દર 3ફિયામાં, ચઢતા ક્રમમાં નીચે પ્રમાણે હતો.

40, 45, 60, 65, 70, 80, 90, 100 અને 500

$$\text{બધી હોટેલનાં જમવાનો સરાસરી દર } \frac{1130}{10} = 113 \text{ ફિયા હતો.}$$

વિદ્યાર્થીઓએ કઈ હોટેલમાં જમવાનું નક્કી કર્યું હશે? 500 ફિયા દરનું ભોજન છોડીને બાકીની હોટેલનો દર 113 ફિયાથી ઓછો હતો. વિદ્યાર્થીઓએ મધ્યમ દરની હોટેલ પસંદ કરવાનું નક્કી કર્યું. પહેલાં દિવસે 70 ફિયા દરનું અને બીજા દિવસે 80 ફિયા દરનું ભોજન કર્યું.

ક્યારેક સરાસરીને બદલે પ્રાપ્તાંકોનો મધ્યક વાપરવો પડે છે. તેનું આ ઉદાહરણ છે.

પાછલાં ઘોરણમાં તમે અવગાર્દીકૃત સામગ્રી માટે ‘મધ્યક’ ની સંકલ્પનાનો અભ્યાસ કરો છે.

- આપેલી સામગ્રીમાંની સંખ્યા ચઢતા કે ઉત્તરતા ક્રમમાં ગોઠવી મધ્યમાં આવતી સંખ્યાને સામગ્રીનો મધ્યક કહે છે.
- મધ્યક આપેલી સામગ્રીના બે સમાન ભાગમાં વિભાજન કરે છે. એટલે કે આપેલી સામગ્રીમાં મધ્યકની ઉપર અને નીચે બન્ને બાજુએ સમાન પ્રાપ્તાંકો હોય છે.
- આપેલાં પ્રાપ્તાંક $k_1 \leq k_2 \leq k_3 \dots \dots \leq k_n$ એમ લખાય છે.
- સામગ્રીમાં પ્રાપ્તાંકોની સંખ્યા વિષમ હોય તો $\frac{n+1}{2}$ મો પ્રાપ્તાંક મધ્યક હોય છે. કારણ કે $k_{\frac{n+1}{2}}$ ના પહેલાં $\frac{n-1}{2}$ પ્રાપ્તાંકો અને તેના પછી પણ $\frac{n-1}{2}$ પ્રાપ્તાંકો હોય છે. $n = 2m + 1$ લઈને ચકાસો.
- સામગ્રીમાં પ્રાપ્તાંકો n ની સંખ્યા સમ હોય તો મધ્યમા આવતી બે સંખ્યાની સરાસરી જેટલો મધ્યક હોય છે. કારણ કે $k_{\frac{n}{2}}$ ના પહેલાં અને $k_{\frac{n+2}{2}}$ ના પછી બન્ને તરફ $\frac{n-2}{2}$ પ્રાપ્તાંકો હોય છે. $n = 2m$ લઈને ચકાસો.
- એટલે કે $\frac{n}{2}$ મી સંખ્યા અને $\frac{n+2}{2}$ મી સંખ્યાની સરાસરીથી આવતી સંખ્યા એ તે સામગ્રીનો મધ્યક હોય છે.

ઉદા. (1) 32, 33, 38, 40, 43, 48, 50 આ પ્રાપ્તાંકોની ગોઠવણીમાં 4થી સંખ્યા મધ્યમાં છે. સામગ્રીનો મધ્યક = 40 છે.

ઉદા. (2) 61, 62, 65, 66, 68, 70, 74, 75 અહીં પ્રાપ્તાંકોની સંખ્યા 8, સમસંખ્યા છે. માટે ચોથી અને પાંચમી સંખ્યા મધ્યમાં છે તે 66 અને 68 છે.

$$\text{તેથી સામગ્રીનો મધ્યક} = \frac{66+68}{2} = 67 \text{ છે.}$$



જીણી લખીએ.

ગ્રંઝીત આવૃત્તિ વિતરણ કોઠા પરથી મધ્યક (Median from grouped frequency distribution)

પ્રાપ્તાંકોની સંખ્યા ધારી બધી હોય ત્યારે તેની કમસર માંડળી કરવી સુલભ નથી. તેથી આપણે વગ્નીકૃત આવૃત્તિ વિતરણનો અંદાજે મધ્યક કાઢવાની રીત ઉદાહરણની મહદ્દુથી સમજુએ.

ઉદા. 6, 8, 10.4, 11, 15.5, 12, 18 આ પ્રાપ્તાંકોનો વર્ગીકૃત કોડો નીચે આપ્યો છે.

વર્ગ	તાળાની નિશાનીઓ	આવૃત્તિ
6-10		2
11-15		2
16-20		1

વર્ગ	તાળની નિશાનીઓ	આવૃત્તિ
5.5-10.5		3
10.5-15.5		2
15.5-20.5		2

પહેલાં કોઈમાં 10.4 અને 15.5 આ પ્રાપ્તાંક સમાવી શકાયા નથી. કારણ આ સંખ્યાઓ 6-10, 11-15, 16-20 પૈકી કોઈપણ વર્ગમાં સમાવી શકાય નહિ.

આવા સમયે વગ્રો સળંગ કરી લેવા તે આપણે જાણીએ છીએ.

આ કોઠામાં નીચલી વર્ગ મર્યાદા 0.5થી ઓછી અને ઉપલી વર્ગ મર્યાદા 0.5થી વધારતાં, બીજે વિતરણ કોઠો તૈયાર થશે. તેમાં 15.5 ને 15.5 - 20.5 ના વર્ગમાં સમાવી શકાશે.

વગ્ણને સરળંગ કરવાની પદ્ધતિ બદલતાં આવૃત્તિ બદલાય છે તે કોઈ પરથી ધ્યાનમાં આવે છે.



આ ધ્યાનમાં રાખો.

$$\text{ઉપરના કોણમાં } 6-10 \text{ વર્ગનું \text{વર્ગમધ્ય} = \frac{6+10}{2} = \frac{16}{2} = 8;$$

$$\text{તેમજ } 5.5-10.5 \text{ આ વર્ગનું વર્ગમધ્ય } = \frac{5.5+10.5}{2} = \frac{16}{2} = 8.$$

એટલે વર્ગની રચના જીદી રીતે કરવા છતાં વર્ગમદ્ય બદલતાતું નથી..

ନମ୍ବନା ଉଦ୍‌ଧୂର୍ଣ୍ଣ।

ધોરણ 10ની પૂરોગામી પરીક્ષામાં પ્રાપ્ત કરેલાં 100 વિદ્યાર્થીઓના ગુણનો આવૃત્તિ કોઠો નીચે આપ્યો છે. તો વિદ્યાર્થીના ગુણનો મધ્યક શોધો.

પરીક્ષાના ગુણ	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
વિદ્યાર્થી સંખ્યા	4	20	30	40	6

ઉક્લ : $N = 100$

$\frac{N}{2} = 50$ તેથી 50 માટે 50મી સંખ્યા અંદાજે મધ્યક થશે. તે માટે 50મી સંખ્યા ક્યા વર્ગમાં આવશે, તે આપણે શોધવું પડશે. ‘ઉપલી વર્ગમર્યાદાથી ઓછી’ પ્રકારની સંચિત આવૃત્તિ કોઠા પરથી શોધી શકશે. તે માટે આપણે આપેલાં કોઠા પરથી નીચે પ્રમાણે સંચિત આવૃત્તિ ‘ના કરતાં ઓછી’ નો કોઠો તૈયાર કરીએ.

વર્ગ (વિદ્યાર્થીના ગુણ)	વિદ્યાર્થી સંખ્યા f_i	સંચિત આવૃત્તિ (ના કરતાં ઓછી) cf
0-20	4	4
20-40	20	24
40-60	30	54
60-80	40	94
80-100	6	100

આ કોઠા પરથી,

- $\frac{N}{2} = 50$ આ કમાંકનો પ્રાપ્તાંક 40-60 ના વર્ગમાં છે. જે વર્ગમાં મધ્યક આવે છે. તે વર્ગને ‘મધ્યક વર્ગ’ કહે છે. અહીં 40 - 60 એ મધ્યક વર્ગ છે.
- 40-60 વર્ગની નીચલી મર્યાદા 40 છે અને આવૃત્તિ 30 છે.
- પહેલા 50 પ્રાપ્તાંક પૈકી પહેલાં 24 પ્રાપ્તાંકો એ 40થી ઓછાં છે. બાકીના $50 - 24 = 26$ પ્રાપ્તાંકો 40 થી 60 ($40 - 60$) ના વર્ગમાં છે. તેમાંથી 50-માં પ્રાપ્તાંકનો અંદાજ નીચે પ્રમાણે કરાય છે.
- આ વર્ગમાં કુલ 30 પૈકી 26 પ્રાપ્તાંકો 50 મા પ્રાપ્તાંક સુધી છે. વર્ગાન્તર 20 છે એટલે 50-મો પ્રાપ્તાંક 40 થી $\frac{26}{30} \times 20$ જેટલો મોટો છે એમ માનવામાં આવે છે.

$$\text{તે અંદાજે } 40 + \frac{26}{30} \times 20 = 40 + \frac{52}{3} = 57\frac{1}{3} \text{ છે.}$$

$$\therefore \text{મધ્યક} = 57\frac{1}{3}$$

- સૂત્ર રૂપે તે આપણે નીચે પ્રમાણે લખી શકીએ.

$$\text{મધ્યક} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \right] \times h$$

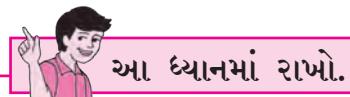
આ સૂત્રમાં L = મધ્યક વર્ગની નીચલી સીમા, N = કુલ આવૃત્તિ

h = મધ્યક વર્ગનું વર્ગાંતર, f = મધ્યક વર્ગની આવૃત્તિ

cf = મધ્યક વર્ગના પહેલાના વર્ગની સંચિત આવૃત્તિ.

$$\text{ઉપરના ઉદાહરણમાં } \frac{N}{2} = 50, cf = 24, h = 20, f = 30, L = 40,$$

$$\begin{aligned}\text{મધ્યક} &= L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \right] \times h \dots \dots \dots \text{ (સૂત્ર)} \\ &= 40 + \left(\frac{50 - 24}{30} \right) \times 20 \\ &= 40 + \frac{26 \times 20}{30} \\ &= 40 + 17\frac{1}{3} \\ &= 57\frac{1}{3}\end{aligned}$$



આ ધ્યાનમાં રાખો.

◆ મધ્યક શોધવા માટે આપેલા વર્ગો સળંગ ન હોય તો સળંગ કરી લેવા પડે છે.

◆ પ્રાપ્તાંકોની સંખ્યા ખૂબ વધારે હોય ત્યારે દરેક પ્રાપ્તાંકને ચઢતા ક્રમમાં ગોડવવાનું મુશ્કેલ બને છે. તેથી સામગ્રીને વર્ગીકૃત કરવામાં આવે છે. આ રીતે વર્ગીકૃત સામગ્રીનો મધ્યક સચોટપણે કાઢી શકતો નથી. પરંતુ અંદાજે કાઢવા માટે નીચેનું સૂત્ર વપરાય છે.

$$\text{મધ્યક} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \right] \times h$$

અક્ષર ગણેલાં ઉદાહરણો અક્ષર

ઉદા. (1) જલેર પરિવહન સેવાની 60 બસેસ એક દિવસમાં જેટલું અંતર કાપે છે તેનો આવૃત્તિ કોડો નીચે આપ્યો છે. તો બસોએ એક દિવસમાં કાપેલાં અંતરનો મધ્યક શોધો.

દરરોજ કાપેલું અંતર (કિમી)	200-209	210-219	220-229	230-239	240-249
બસની સંખ્યા	4	14	26	10	6

ઉક્લ : (1) કોડામાં આપેલાં વર્ગો સળંગ નથી.

અહીં એક વર્ગની ઉપલી મર્યાદા અને પછીના વર્ગની નીચલી મર્યાદા વર્ચ્યે 1 નો ફરક છે.

$\therefore 1 \div 2 = 0.5$ આ કિંમત દરેક વર્ગની નીચલી મર્યાદામાંથી બાદ કરીએ અને ઉપલી મર્યાદામાં ઉમેરી વર્ગસીમા નક્કી કરીએ. તે પ્રમાણે વર્ગો સળંગ કરીને કોડો ફરી લખીએ.

(2) પછી તેમાં ‘કરતાં ઓછી’ સંચિત આવૃત્તિનો સ્તંભ તૈયાર કરીએ.

આપેલાં વર્ગ	સળંગ કરેલાં વર્ગ	આવૃત્તિ f_i	સંચિત આવૃત્તિ કરતાં ઓછી
200-209	199.5-209.5	4	4
210-219	209.5-219.5	14	$18 \rightarrow cf$
220-229	219.5-229.5	$26 \rightarrow f$	44
230-239	229.5-239.5	10	54
240-249	239.5-249.5	6	60

$$\text{અહીં કુલ આવૃત્તિ} = \sum f_i = N = 60 \therefore \frac{N}{2} = 30.$$

\therefore અંદાજે 30-મો પ્રાપ્તાંક મધ્યક છે.

પહેલાં 18 પ્રાપ્તાંકો 219.5થી ઓછાં અને બાકીના, $30 - 18 = 12$ પ્રાપ્તાંકો 219.5 - 229.5 આ વર્ગમાં છે. માટે આ મધ્યક વર્ગ છે.

219.5-229.5 આ વર્ગની સંચિત આવૃત્તિ 44 છે.

સૂત્રમાં,

$$L = \text{મધ્યક વર્ગની નીચલી મર્યાદા} = 219.5, h = \text{મધ્યક વર્ગનું વર્ગાંતર} = 10$$

$$cf = \text{મધ્યક વર્ગના પહેલાનાં વર્ગની સંચિત આવૃત્તિ} = 18,$$

$$f = \text{મધ્યક વર્ગની આવૃત્તિ} = 26$$

$$\text{મધ્યક} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \right] \times h$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{મધ્યક} &= 219.5 + \left(\frac{30-18}{26} \right) \times 10 \\ &= 219.5 + \left(\frac{12 \times 10}{26} \right) \\ &= 219.50 + 4.62 \\ &= 224.12\end{aligned}$$

બસ્સોએ દરરોજ કાપેલાં અંતરનો મધ્યક = 224.12 કિમી

ઉદા.(2) નીચેના કોઠામાં એક દિવસમાં વસ્તુસંગ્રહાલયની મુલાકાતે આવનારા વ્યક્તિઓની ઉંમર આપી છે.
તે પરથી તેમને ઉંમરનો મધ્યક શોધો.

ઉમર (વર્ષ)	વ્યક્તિની સંખ્યા
10 થી ઓછી	3
20 થી ઓછી	10
30 થી ઓછી	22
40 થી ઓછી	40
50 થી ઓછી	54
60 થી ઓછી	71

ઉક્લ : અહીં ‘કરતાં ઓછી’ સંચિત આવૃત્તિ વિતરણ આપેલું છે. પ્રથમ આ બધા વર્ગોની ખરી વર્ગ મર્યાદા મેળવવી પડશે. આપણને ખબર છે કે, ‘-કરતાં ઓછી’ સંચિત આવૃત્તિ વર્ગની ઉપલી મર્યાદા સાથે સંબંધિત છે. પહેલા વર્ગની ઉપલી મર્યાદા 10 છે. કોઈપણ વ્યક્તિની ઉંમર ધન સંખ્યા હોય એટલે પહેલો વર્ગ 0-10 હશે. બીજી વર્ગની ઉપલી મર્યાદા 20 છે. તેથી બીજે વર્ગ 10-20 થશે આમ વર્ગાન્તર 10 લઈને કમસર વર્ગો તૈયાર કર્યા. આ પ્રમાણે છેલ્લો વર્ગ 50-60 થશે. આ રીતે આપણે નીચે પ્રમાણે વર્ગો લખીશું.

ઉંમર (વર્ષ)	વર્ગ	આવૃત્તિ વ્યક્તિની સંખ્યા	સંચિત આવૃત્તિ - કરતાં ઓછી
10 થી ઓછી	0-10	3	3
20 થી ઓછી	10-20	$10 - 3 = 7$	10
30 થી ઓછી	20-30	$22 - 10 = 12$	$22 \rightarrow cf$
40 થી ઓછી	30-40	$40 - 22 = 18 \rightarrow f$	40
50 થી ઓછી	40-50	$54 - 40 = 14$	54
60 થી ઓછી	50-60	$71 - 54 = 17$	71

$$\text{અહીં } N = 71 \therefore \frac{N}{2} = 35.5 \text{ અને } h = 10$$

35.5 આ સંખ્યા 30-40 ના વર્ગમાં છે. તેથી આ મધ્યક વર્ગ છે. તેની પહેલાના વર્ગની આવૃત્તિ 22 છે, એટલે $cf = 22$, $L = 30$, $f = 18$.

$$\begin{aligned}
 \text{મધ્યક} &= L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \right] \times h \\
 &= 30 + (35.5 - 22) \frac{10}{18} \\
 &= 30 + (13.5) \frac{10}{18} \\
 &= 30 + 7.5 \\
 &= 37.5
 \end{aligned}$$

∴ મૂલાકાતે આવનાર વ્યક્તિનો ઉંમરનો મધ્યક = 37.5 વર્ષ

ਮਹਾਵਰਾਸੰਗ੍ਰਹ 6.2

1. નીચેના કોઠામાં એક સૉફ્ટવેર કંપનીના દરરોજના કામના કલાક અને તેટલો સમય કામ કરતાં કર્મચારીઓની સંખ્યા આપી છે. તેના પરથી કંપનીના કર્મચારીઓના દરરોજના કામના કલાકનો મધ્યક શોધો.

દરરોજના કામના કલાક	8-10	10-12	12-14	14-16
કર્મચારીઓની સંખ્યા	150	500	300	50

2. એક આંબાવાડીમાં આંબાના ઝાડ અને તેના પરથી ઉત્તરતાં આંબાની સંખ્યાનો આવૃત્તિ કોઈ નીચે આપ્યો છે. તે પરથી સામગ્રીનો મધ્યક શોધો.

આંબાની સંખ્યા	50-100	100-150	150-200	200-250	250-300
અડની સંખ્યા	33	30	90	80	17

3. મુખ્ય-પુણે દૃતગતિમાર્ગ (એક્સપ્રેસ વે) પરનાં પરિવહન નિયંત્રણ કરતાં પોલીસોએ કરેલાં સર્વેક્ષણમાં નીચેના નિરીક્ષણો નોંધાયા, તે પરથી મધ્યક શોધો.

વાહનની ગતિ (કિમી/કલાક)	60-64	65-69	70-74	75-79	80-84	85-89
વાહનની સંખ્યા	10	34	55	85	10	6

4. વિવિધ કારખાનામાં ઉત્પાદિત થતાં વિદ્યુત દિવાઓની સંખ્યા નીચેના કોઈમાં આપેલી છે. તે પરથી વિદ્યુત દિવાના ઉત્પાદનનો મધ્યક શોધો.

વિદ્યુત દિવાની સંખ્યા (હજર)	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
કારખાનાની સંખ્યા	12	35	20	15	8	7	8



ગોર્ખીકૃત આવૃત્તિ વિતરણ કોઠા પરથી બહુલક (Mode from grouped frequency distribution)

આપેલાં પ્રાપ્તાંકોમાં વધારેમાં વધારે વખત આવતાં પ્રાપ્તાંકને તે સમૂહને બહુલક કહે છે તે આપણે જાણીએ છીએ.

દા.ત., એકાદી ટૂ વીલરનું ઉત્પાદન કરતી કંપની વિવિધ રંગોમાં ટૂ વીલર તૈયાર કરે છે. ક્યા રંગની ગાડીઓ સર્વાધિક પસંદગી પામે છે તે જાણવા માટે કંપનીને રંગોનો ‘બહુલક’ માહિત હોવો જરૂરી છે. તે ને પ્રમાણે વિવિધ ઉત્પાદનોવાળી કંપનીના ક્યા ઉત્પાદનની માંગણી સૌથી વધારે છે તે કંપનીએ જાણી લેવું જરૂરી છે. આ માટે ઉત્પાદનનો બહુલક શોધવો જેઈએ.

આપણે અવગાર્કૃત આવૃત્તિ કોઈ પરથી બહુલક કેવી રીતે શોધવો તે જ્યેંદ્ર છે.

હવે આપણે વગ્નીકૃત આવૃત્તિ વિતરણ પરથી અંદાજે બહુલક કેવી રીતે શોધવો તેનો અભ્યાસ કરીશું. તે માટે નીચેનું સૂત્ર વપરાય છે.

$$\text{અણુલક} = L + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right] \times h$$

ઉપરના સૂત્રમાં, $L =$ બહુલકીય વર્ગની નીચલી મર્યાદા

f_1 = બહુલકીય વર્ગની આવૃત્તિ

f_0 = બહુલકીય વર્ગની પહેલાના વર્ગની આવૃત્તિ

f_2 = બહુલકીય વર્ગની પદ્ધીના વર્ગની આવૃત્તિ

$h =$ બહુલકીય વર્ગનું વર્ગાન્તર

આ સૂત્ર વાપરીને અંદાજે બહુલક કેવી રીતે શોધાય છે તેનો અભ્યાસ નીચેના ઉદાહરણો દ્વારા કરીએ.

જીજા ગણેલાં ઉદાહરણો જીજા

ઉદા.(1) નીચેના આવૃત્તિ વિતરણ કોઈમાં રમતના મેદાન પર રમવા આવતાં છોકરાઓની સંખ્યા અને તેમનું વયજૂથ આપેલાં છે. તે પરથી રમતના મેદાન પર રમતાં છોકરાઓની ઉભરનો બહુલક શોધો.

છોકરાઓનું વયજૂથ (વર્ષ)	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16
છોકરાઓની સંખ્યા	43	58 → f_0	70 → f_1	42 → f_2	27

ઉકિલ : ઉપરના કોઈ પરથી ધ્યાનમાં આવે છે કે 10-12 વર્ષના વયજૂથમાં છોકરાઓની સંખ્યા સૌથી વધારે છે, એટલે 10-12 બહુલકીય વર્ગ છે.

અહીં $f_1 = 70$, અને 10-12 આ બહુલકીય વર્ગ છે.

∴ આપેલા ઉદ્દોહણમાં,

$$L = \text{બહુલકીય વર્ગની નીચલી મર્યાદા} = 10$$

$$h = \text{બહુલકીય વર્ગનું વર્ગાન્તર} = 2$$

$$f_1 = \text{બહુલકીય વર્ગનું આવૃત્તિ} = 70$$

$$f_0 = \text{બહુલકીય વર્ગની પહેલાના વર્ગની આવૃત્તિ} = 58$$

$$f_2 = \text{બહુલકીય વર્ગની પછીના વર્ગની આવૃત્તિ} = 42$$

$$\begin{aligned} \text{બહુલક} &= L + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right] \times h \\ &= 10 + \left[\frac{70 - 58}{2(70) - 58 - 42} \right] \times 2 \\ &= 10 + \left[\frac{12}{140 - 100} \right] \times 2 \\ &= 10 + \left[\frac{12}{40} \right] \times 2 \\ &= 10 + \frac{24}{40} \\ &= 10 + 0.6 \\ &= 10.6 \end{aligned}$$

∴ રમતના મેદાન પર આવતાં છોકરાઓનો બહુલક = 10.6 વર્ષ.

ઉદા. (2) નીચેના આવૃત્તિ વિતરણ કોઈએ અને પેટ્રોલ પંપ ઉપર પેટ્રોલ ભરાવતાં વાહનોની સંખ્યા અને વાહનમાં ભરાવેલાં પેટ્રોલની માહિતી આપી છે. તે પરથી વાહનમાં ભરેલાં પેટ્રોલના કદનો બહુલક શોધો.

ભરાવેલું પેટ્રોલ (લિટર)	1-3	4-6	7-9	10-12	13-15
વાહનોની સંખ્યા	33	40	27	18	12

ઉકિલ : અહીં આપેલાં વર્ગો સળંગ નથી. તે આપણે સળંગ કરીએ અને આવૃત્તિ કોઠો તૈયાર કરીએ.

વર્ગ	સરળંગ વર્ગ	આવૃત્તિ
1-3	0.5-3.5	33 → f_0
4-6	3.5-6.5	40 → f_1
7-9	6.5-9.5	27 → f_2
10-12	9.5-12.5	18
13-15	12.5-15.5	12

અહીં f_1 = બહુલકીય વર્ગની આવૃત્તિ = 40, બહુલકીય વર્ગ 3.5-6.5

$$\begin{aligned}
 \text{અણુલક} &= L + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right] \times h \\
 \text{અણુલક} &= 3.5 + \left[\frac{40 - 33}{2(40) - 33 - 27} \right] \times h \\
 &= 3.5 + \left[\frac{7}{80 - 60} \right] \times 3 \\
 &= 3.5 + \frac{21}{20} \\
 &= 3.5 + 1.05 \\
 &\equiv 4.55
 \end{aligned}$$

∴ વાહનમાં ભરાવેલા પેટ્રોલનાં કદનો બહુલક = 4.55 લિટર

ਮਹਾਵਰਾਸੰਗ੍ਰਹ 6.3

1. એક દૂધ સંકલન કેન્દ્ર પર ખેડૂતો પાસેથી સંકલિત કરેલું ગાયનું દૂધ અને લેક્કટોમીટરથી માપેલું સ્નિગ્ધાંશા(ફેટ)નું પ્રમાણ આપ્યું છે. તેના પરથી દૂધમાંના સ્નિગ્ધાંશના પ્રમાણનો બહુલક શોધો.

दूधमां स्निग्धांशा (%)	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7
संकलित दूध (लिटर)	30	70	80	60	20

2. કેટલાંક કુટુંબોનો માસિક વીજ-વપરાશ નીચેના વર્ગીકૃત આવૃત્તિ કોડામાં આપ્યો છે. તે પરથી વીજ વપરાશનો બહુલક શોધો.

વીજ વપરાશ (યુનિટ)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120
કુદુંબોની સંખ્યા	13	50	70	100	80	17

3. યણની 100 હોટેલને પુરું પાડેલું દૂધ અને હોટેલની સંખ્યાનો વર્ગીકૃત આવૃત્તિ કોઈ આપ્યો છે તે પરથી પૂરાં પાડેલા દૂધનો બહુલક શોધો.

ਫੂਥ (ਲਿਟਰ)	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11	11-13
ਹੋਟੇਲਨੀ ਸੰਖਿਆ	7	5	15	20	35	18

4. નીચેના આવૃત્તિ કોઠામાં 200 દર્દીઓની ઉંમર અને એક અઠવાડિયામાં ઉપચાર લેનારાની સંખ્યા આપી છે. તે પરથી દર્દીઓની ઉંમરનો બહુલક શોધો.

વय (વર્ષ)	5 કરતા ઓછા	5-9	10-14	15-19	20-24	25-29
દર્દી સંખ્યા	38	32	50	36	24	20

क्षमता :-

- તમારા વર્ગના 20 વિદ્યાર્થીઓના વજનનો મધ્ય શોધો.
 - તમારા વર્ગમાં છોક્કરાઓના શર્ટના માપનો બહુલક શોધો.
 - વર્ગમાંના દ્વેક વિદ્યાર્થી એક મિનીટમાં પોતાની નાડીના ઘબકારા ગણશે અને નોંધશે. તેનો કોઈ બનાવી નાડીના ઘબકારાનો બહુલક શોધો.
 - વર્ગના દ્વેક વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈ નોંધો. તેનું વર્ગીકરણ કરી, ઊંચાઈનો મધ્યક શોધો.



આ ધ્યાનમાં રાખો.

આપણે કેન્દ્રીય પ્રવૃત્તિના પરિમાણો જેવા કે મધ્ય, મધ્યક, બહુલકનો અભ્યાસ કર્યો. કેન્દ્રીય પ્રવૃત્તિનું કયું પરિમાણ પસંદ કરવા પાછળનો હેતૂ સ્પષ્ટ રીતે સમજવો જરૂરી છે.

ધારોકે એક શાળાના ધોરણ 10 ના 5 વર્ગો પૈકી ક્યા વર્ગો અંતર્ગત પરીક્ષામાં સરસ કામગિરી કરી છે, તે નક્કી કરવા માટે તે 5 વર્ગોની અંતર્ગત પરીક્ષાના ગુણોનો ‘મધ્ય’ શોધવો પડશે.

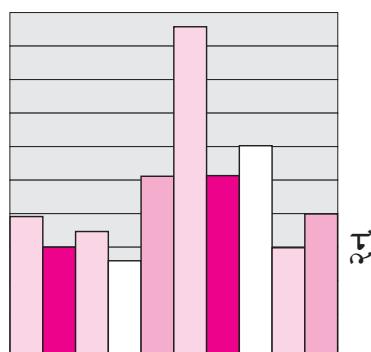
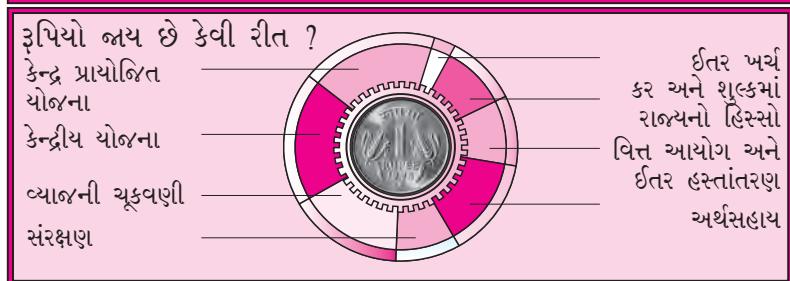
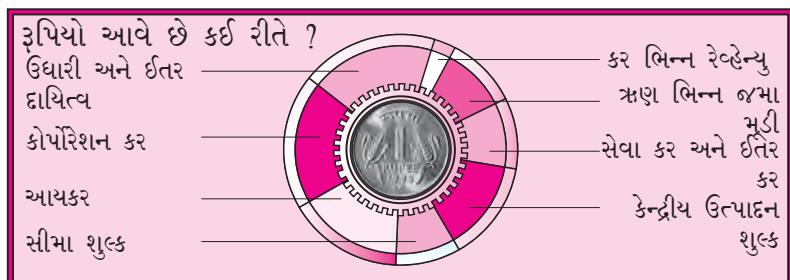
એકાદ વર્ગના વિદ્યાર્થીઓના પરીક્ષામાં મેળવેલાં ગુણ પરથી બે સમૂહમાં વિભાજન કરવું હોય તો વિદ્યાર્થીઓના ગુણાનો ‘મધ્યક’ શોધવો પડશે.

ચોક તૈયાર કરતાં બચત ગટે ક્યા રંગના ચોકની માંગણી સૌથી વધારે છે તે શોધવા કેન્દ્રિય પ્રવૃત્તિનું ‘બહુતક’ પરિમાણ પસંદ કરવું જેઠાં.

સંખ્યાકીય સામગ્રીનું ચિત્રરૂપ નિરૂપણ/રજૂઆત (Pictorial representation of statistical data)

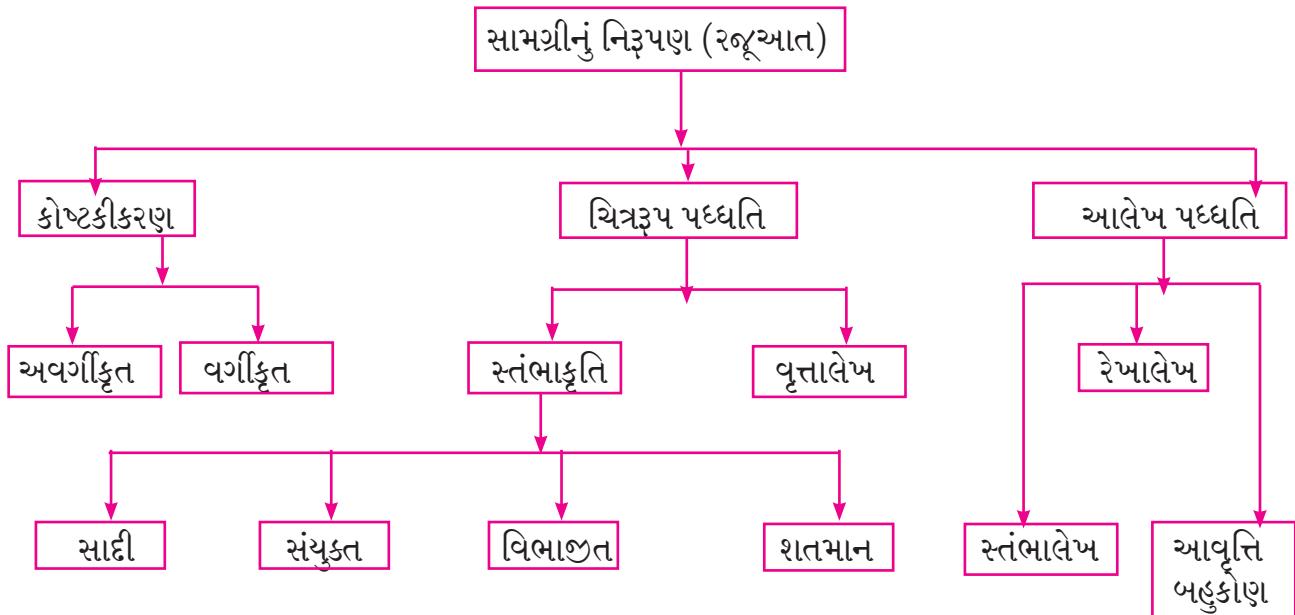
સંખ્યાકીય માહિતીનો મધ્ય, મધ્યક, બહુલક પરથી અથવા માહિતીનું વિશ્લેષણ કરીને તેનો ઉપયોગ વિશેષ નિષ્પત્તિ કાઢવા માટે થાય છે.

સંખ્યાકીય માહિતી સંક્ષિપ્ત રૂપમાં રજૂ કરવા માટેની એક પદ્ધતિ એટલે કોડાના રૂપમાં સામગ્રી માંડવી તે આપણે જણીએ છીએ. પરંતુ આ કોડાના રૂપમાં હોવાથી કેટલીક બાબતો તુરંત ધ્યાનમાં આવતી નથી. સામાન્ય માણસને સમજય, અને સર્વસામાન્ય લોકોનું ધ્યાન સામગ્રીમાંની મહત્વની બાબતો તરફ કેન્દ્રીત કરવા માટે તેની રજૂઆત જુદી રીતે કરી શકાય કે, તેનો વિચાર કરીએ. દા.ત. અર્થસંકલ્પની મહત્વની બાબતો, રમત ગમતની માહિતી વગેરે.



સામગ્રીનું નિરૂપણ (Presentation of Data)

ચિત્રદૃપ અને આલેખદૃપ નિરૂપણ એ સામગ્રીનો અર્થબોધ થવા માટેનો હજુ એક લક્ષ્યવેધી પ્રકાર છે. સામગ્રીનાં નિરૂપણના વિવિધ પદ્ધતિ દર્શાવતી શાખાકૃતિ (tree chart) નીચે દર્શાવ્યો છે.



પાછલાં ધોરણામાં આપણો આ પૈકી કેટલીક પદ્ધતિઓનો અને આલેખોનો અભ્યાસ કર્યો છે. હવે આપણે સ્તંભાલેખ (Histogram) આવૃત્તિ બહુકોણા અને વૃત્તાલેખની મદદથી સામગ્રીનું નિરૂપણ કેવી રીતે કરવું તે જોઈએ.

ફ્લોરેન્સ નાઈટિંગેલ (1820-1910) આ મહાન સ્ત્રીને સર્વોત્તમ ધ્યેયનિષ્ઠ પરિચારિકા તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. સિમિયન યુદ્ધમાં જખમી સૈનિકોની સેવા સુશ્રુતા કરી અનેકનાં પ્રાણ બચાવ્યા. અંકડાશાસ્ક્રમાં પણ ફ્લોરેન્સ નાઈટિંગેલે પાયાભૂત કામ કર્યું છે. અનેક સૈનિકોની અવસ્થા, તેમના પર કરેલાં ઉપચાર અને તેનો ઉપયોગ આ બધી બાબતોની વ્યવસ્થિત નોંધ કરીને મહત્વના નિર્જર્ખ કાઢ્યા. સૈનિકોના મૃત્યુમાં તેમના જખમ કરતાં ટાઈફોઇદ, કોલેરા વગેરે રોગો વધારે કારણીભૂત બન્યા. તેનાં કારણો અસ્વચ્છ પરિસર, પીવાનું અસ્વચ્છ પાણી, દર્દીઓના રહેઠાણની સંકડાશ વગેરે હતાં. આ બાબતોની કારણમિમાંસા તુરંત ધ્યાનમાં આવે તે માટે ફ્લોરેન્સ નાઈટિંગેલે પાયચાર્ટ જેવા આલેખ તૈયાર કર્યા. યોગ્ય ઉપચાર અને સ્વચ્છતાના નિયમો પાળીને સૈનિકોનો મૃત્યુદ્વારા ઘટાડી બતાવ્યો. શહેરનું આરોગ્ય સચચ્ચાય તે માટે મલનિસ્સારણ કરતા ડ્રેનેજ અને દરેકને પીવાનું શુદ્ધ પાણી આવશ્યક છે. આ તેમનું નિરીક્ષણ નગરપાલિકાને પણ વાજબી લાગ્યું. અનેક નિરીક્ષણોની ઉત્તમ નોંધ, અંકડાશાસ્ક્રને આધારે વિશ્વાસપાત્ર નિર્જર્ખ કાઢવામાં મહદ કરે છે તે એમના કામ પરથી દેખાઈ આવ્યું.





સ્તંભાલેખ : Histogram

સ્તંભાલેખ દોરવાની રીત આપણે એક ઉદાહરણ દ્વારા સમજુ લઈએ.

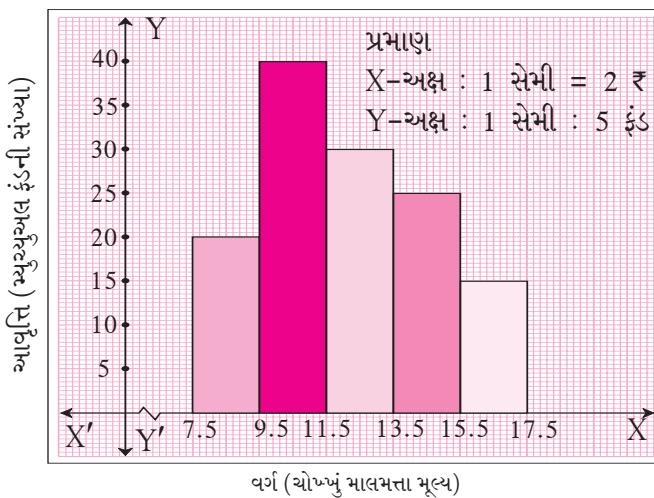
ઉદા. : નીચેના કોઠામાં વિવિધ કંપનીના મ્યુચ્યુઅલ ફંડના એક યુનિટનું ‘ચોખ્ખું માલમત્તા મૂલ્ય’ (Net asset value) આપી છે.

તેના પરથી સ્તંભાલેખ દોરો.

ચોખ્ખું માલમત્તા મૂલ્ય (ડિપિયા) (NAV)	8-9	10-11	12-13	14-15	16-17
મ્યુચ્યુઅલ ફંડની સંખ્યા	20	40	30	25	15

ઉક્લા : ઉપરના કોઠામાં આપેલાં વર્ગો સળંગનથી તે સૌ પ્રથમ સળંગ કરી લઈએ.

સળંગ વર્ગ (ડિપિયા)	7.5-9.5	9.5-11.5	11.5-13.5	13.5-15.5	15.5-17.5
આવૃત્તિ	20	40	30	25	15



આકૃતિ 6.1

સ્તંભાલેખ દોરવાની ઝૂટિ

- સૌ પ્રથમ વર્ગ સળંગ ન હોય તો સળંગ કરી લેવા. આવા વર્ગોને વર્ધિત વર્ગ (extended class intervals) કહે છે.
- આ વર્ગો X- અક્ષપર યોગ્ય પ્રમાણ લઈ દર્શાવો.
- Y- અક્ષપર યોગ્ય પ્રમાણ લઈ આવૃત્તિ દર્શાવો.
- X- અક્ષપર દરેક વર્ધિત વર્ગ પાયા તરીકે લઈ તેના પર સ્તંભ દોરો. સ્તંભની ઊંચાઈ સંગત આવૃત્તિ જેટલી લો.

ધ્યાનમાં રાખો.

X-અક્ષપર આરંભબિંદુ અને પ્રથમ વર્ગની વચ્ચે ‘—’ આવી નિશાની છે. (આ નિશાનીને અક્ષસંકોચ, krink mark, કહે છે.) આનો અર્થ આરંભબિંદુથી પહેલાં વર્ગ સુધી કોઈપણ નિરીક્ષણો નથી. તેથી X- અક્ષની ગડી વાળી હોય તેવી આ નિશાની છે. જરૂર હોય તો Y- અક્ષ પર પણ આવી નિશાની વાપરી શકાય છે. તેના લીધે યોગ્ય આકારનો આતેખ કઢી શકાય છે.

ਮਹਾਵਰਾਸੰਗ੍ਰਹ 6.4

- ## 1. આપેલી માહિતી સ્તરબાલેખ દ્વારા દર્શાવો.

વિદ્યાર્થીઓની ઉંચાઈ (સેમી)	135-140	140-145	145-150	150-155
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	4	12	16	8

2. નીચેના કોઠામાં દર એકરદીઠ થતું જુવારનું ઉત્પાદન આપ્યું છે તે સ્તંભાલેખ દ્વારા દર્શાવો.

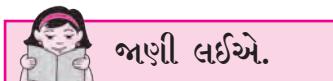
એકરે ઉત્પાદન (કિવન્ટલ)	2-3	4-5	6-7	8-9	10-11
ખેડૂતોની સંખ્યા	30	50	55	40	20

3. નીચેનાં કોડામાં 210 કુટુંબનું વાર્ષિક રોકાણ દર્શાવ્યું છે. તે સ્તંભાલેખ દ્વારા દર્શાવો.

રોકાણા (હજર રૂપિયા)	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
કુટુંબોની સંખ્યા	30	50	60	55	15

4. નીચેના કોઠામાં વિદ્યાર્થીઓએ પરીક્ષાની તૈયારી માટે આપેલો સમય દર્શાવ્યો છે. તેના પરથી સ્તંભાલેખ દોરો.

સમય (મિનિટ)	60-80	80-100	100-120	120-140	140-160
વિદ્યાર્થી સંખ્યા	14	20	24	22	16



આવત્તિ બહુકોણ (Frequency polygon)

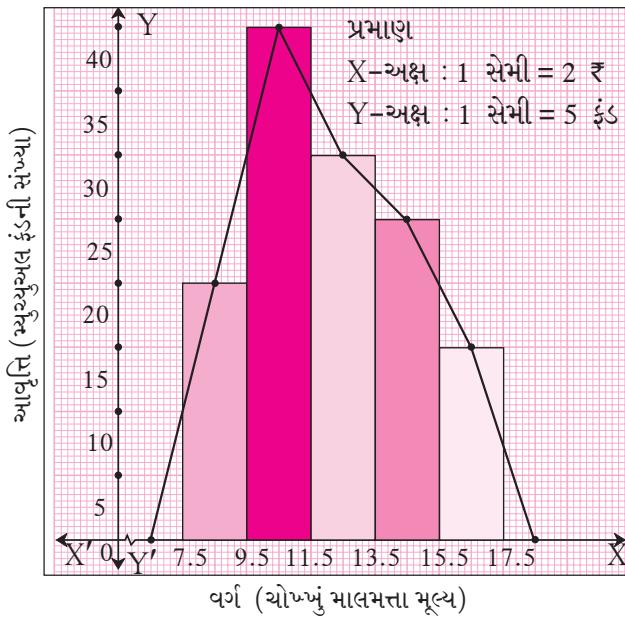
આવૃત્તિ કોઈમાંની માહિતી વિવિધ પ્રકારે દર્શાવી શકાય છે. આપણે સ્તંભાલેખનો અભ્યાસ કર્યો છે. બીજે પ્રકાર ‘આવૃત્તિ બહુકોણ’ છે.

આવૃત્તિ બહુકોણ દોરવાની બે પદ્ધતિનો અભ્યાસ કરીશું.

(1) સ્તંભાલેખની મહદ્દુથી (2) સ્તંભાલેખ ન વાપરતાં.

(1) સ્તંભાલેખની મદ્દથી આવૃત્તિ બહુકોણ દોરવાન

સ્તંભાલેખનો જ ઉપયોગ કરીશું.



આકૃતિ 6.2

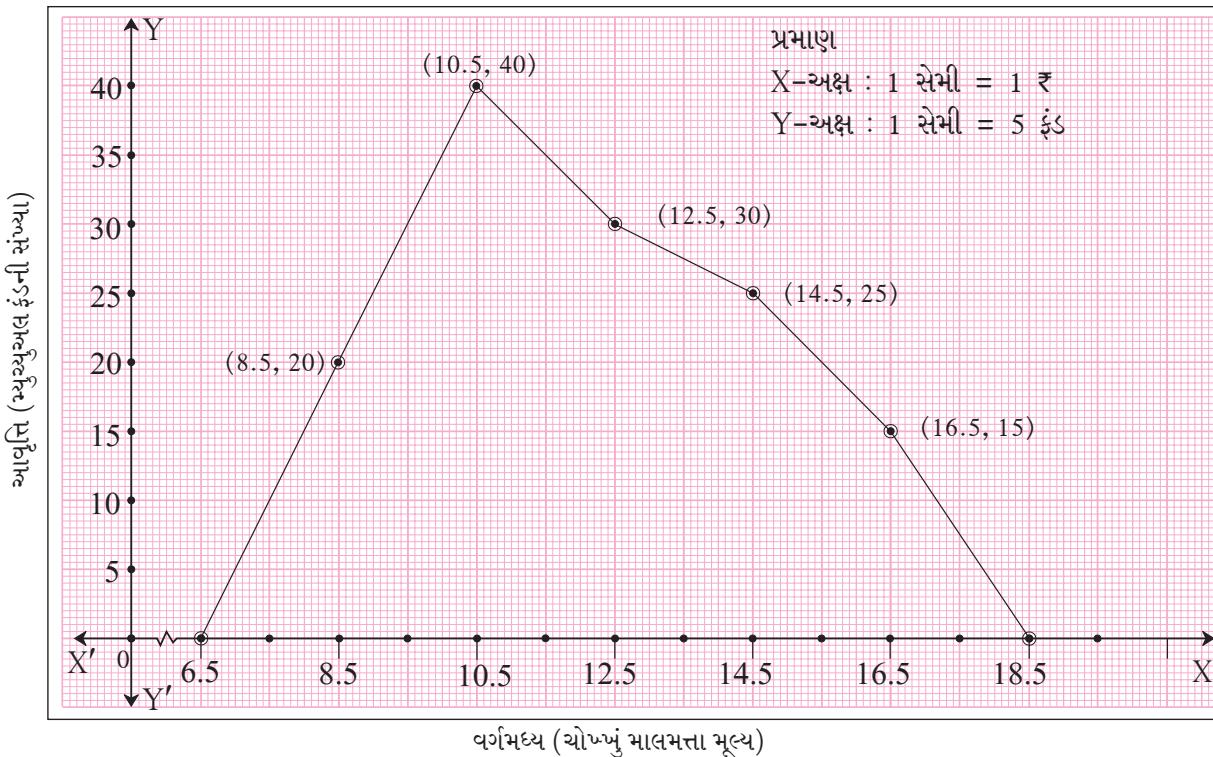
- સ્તંભાલેખના દરેક સ્તંભની ઉપરની બાજુનું મધ્યબિંદુ દર્શાવો.
- પહેલાં સ્તંભના આગળ શૂન્ય ઊંચાઈનો સ્તંભ છે તેમ ધારીને તેનું મધ્યબિંદુ દર્શાવો. તે જ પ્રમાણે છેલ્લા સ્તંભ પછી પણ શૂન્ય ઊંચાઈનાં સ્તંભ છે એમ ધારીને મધ્યબિંદુ પર નિશાની કરો. આ બિંદુઓ X- અક્ષપર આવશે.
- બધાં બિંદુઓ કમસર સીધી રેખાથી જોડો.

તૈયાર થયેલી બંધ આકૃતિ એટલે આવૃત્તિ બહુકોણ.

- (2) સ્તંભાલેખ દોર્યા વગર, આવૃત્તિ બહુકોણ દોરવા માટે બિંદુના નિર્દેશકો કેવી રીતે નક્કી કરાય તે નીચેના કોઢા પરથી સમજી લો.

વર્ગ	સંખેચ વર્ગ	વર્ગમધ્ય	આવૃત્તિ	બિંદુના નિર્દેશકો
6 - 7	5.5 - 7.5	6.5	0	(6.5, 0)
8 - 9	7.5 - 9.5	8.5	20	(8.5, 20)
10 - 11	9.5 - 11.5	10.5	40	(10.5, 40)
12 - 13	11.5 - 13.5	12.5	30	(12.5, 30)
14 - 15	13.5 - 15.5	14.5	25	(14.5, 25)
16 - 17	15.5 - 17.5	16.5	15	(16.5, 15)
18 - 19	17.5 - 19.5	18.5	0	(18.5, 0)

ઉપરના કોઢામાં પાંચમાં સ્તંભના નિર્દેશકો સાથે સંગત બિંદુઓ આલેખ પત્ર પર સ્થાપન કરો. તે કમસર જોડો એટલે આવૃત્તિ બહુકોણ મળે છે. આ બહુકોણ આકૃતિ 6.3 માં બતાવ્યો છે. તેનું નિરિક્ષણ કરો.

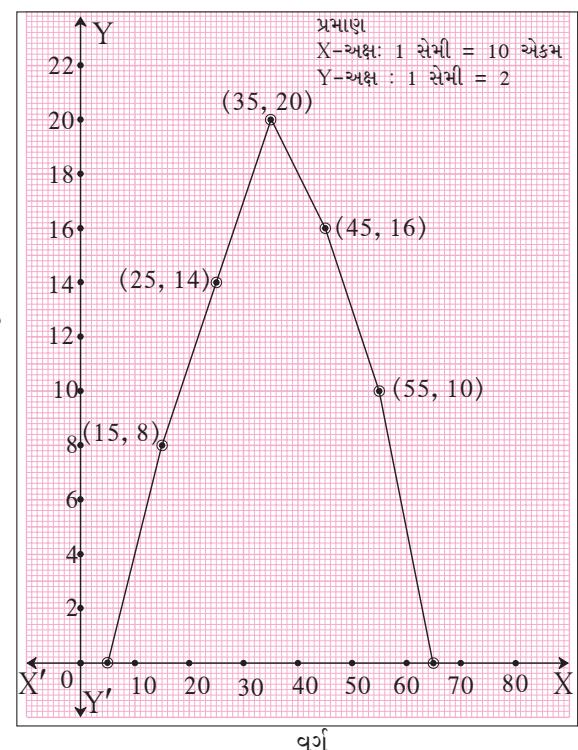


આકૃતિ 6.3

ભાગ ગણોલાં ઉદાહરણો ભાગ

ઉદ્દા. (1) બાજુની આકૃતિમાં દોરેલા આવૃત્તિ બહુકોણનું નિરીક્ષણ કરી પ્રશ્નોના જવાબ લખો.

- (1) 50-60 ના વર્ગની આવૃત્તિ લખો.
 - (2) જે વર્ગની આવૃત્તિ 14 છે તે વર્ગ લખો.
 - (3) વર્ગમધ્ય 55 હોય તે વર્ગ લખો.
 - (4) સૌથી વધુ આવૃત્તિ ધરાવતો વર્ગ લખો.
 - (5) આવૃત્તિ શૂન્ય હોય તેવા વર્ગ લખો.



આકૃતિ 6.4

୩୫

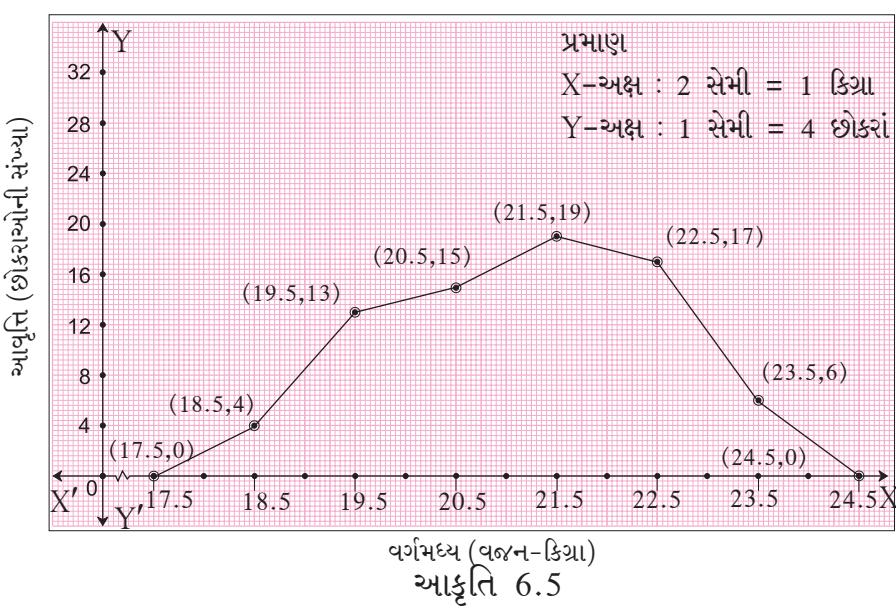
- (1) વર્ગમધ્ય X- અક્ષ પર દર્શાવેલ છે. x - નિર્દેશક 55 હોય તેવા બિંદુના, 50-60 ના વર્ગનો વર્ગ મધ્ય 55 છે. y -નિર્દેશક 10 દર્શાવે છે, તેથી 50-60 વર્ગની આવૃત્તિ 10 છે.
 - (2) આવૃત્તિ Y- અક્ષ પર દર્શાવેલ છે. y -નિર્દેશક 14 હોય તેવા બિંદુના x -નિર્દેશક 25 છે. Y-અક્ષ પર 14 ની આવૃત્તિની નિશાની જુઓ. 25 આં 20-30 વર્ગના વર્ગમધ્ય છે. તેથી આવૃત્તિ 14 હોય તે વર્ગ 20-30 છે.
 - (3) વર્ગમધ્ય 55 હોય તેનો વર્ગ 50-60 છે.
 - (4) આવૃત્તિ Y-અક્ષ પર દર્શાવેલ છે. બહુકોણ પર y -નિર્દેશકોની સૌથી વધારે કિંમત 20 છે. તેને સંગત x -નિર્દેશક 35 છે. વર્ગમધ્ય 35 હોય તે વર્ગ 30-40 છે. તેથી 30-40 આ વર્ગની આવૃત્તિ સૌથી વધારે છે.
 - (5) શૂન્ય આવૃત્તિ ઘરાવતાં વર્ગો 0-10 અને 60-70 હોય છે.

ઉદા. (2) નીચેના કોઈમાં છોકરાઓનાં વજન અને સંખ્યા આપેલાં છે. તો સામગ્રી પરથી આવૃત્તિ બહુકોણ દોરો.

ઇકરાઓનું વજન (કિગ્રા)	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-24
ઇકરાઓની સંખ્યા	4	13	15	19	17	6

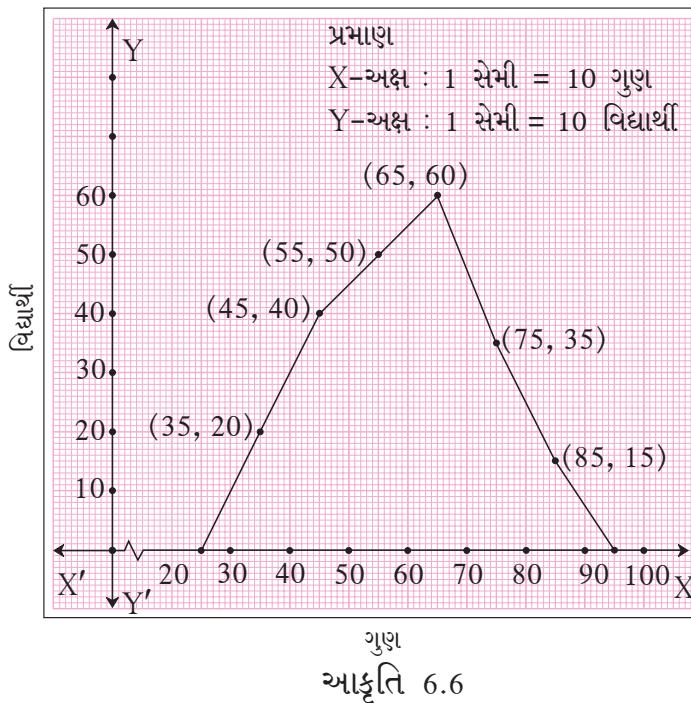
નીચેના કોઈામાં છોકરાઓનાં વજન અને સંખ્યા આપેલાં છે. તો સામગ્રી પરથી આવૃત્તિ બહુકોણ દોરો.

વર્ગ	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-24
વર્ગમધ્ય	18.5	19.5	20.5	21.5	22.5	23.5
આવૃત્તિ	4	13	15	19	17	6
બિંદુના નિર્દેશકો	(18.5, 4)	(19.5,13)	(20.5,15)	(21.5,19)	(22.5,17)	(23.5,6)



મહાવરાસંગ્રહ 6.5

1. નીચે આપેલાં આવૃત્તિ બહુકોણનું નિરીક્ષણ કરી પ્રશ્નોના જવાબ લખો.



- (1) સૌથી વધુ ગુણ મેળવનારા વિદ્યાર્થીઓ ક્યા વર્ગમાં છે ?
- (2) આવૃત્તિ ‘શૂન્ય’ હોય તેવા વર્ગો લખો.
- (3) 50 વિદ્યાર્થી સંખ્યા હોય તે વર્ગનો મધ્ય કેટલો ?
- (4) વર્ગમધ્ય 85 હોય તેવા વર્ગની નીચલી અને ઉપલી વર્ગમર્યાદા લખો.
- (5) 80-90 ગુણ મેળવનારા વિદ્યાર્થીઓ કેટલાં છે ?

2. નીચેના કોઢામાં આપેલી માહિતી પરથી આવૃત્તિ બહુકોણ દોરો.

વીજળીનું બિલ (ડિપિયા)	0-200	200-400	400-600	600-800	800-1000
કુટુંબો	240	300	450	350	160

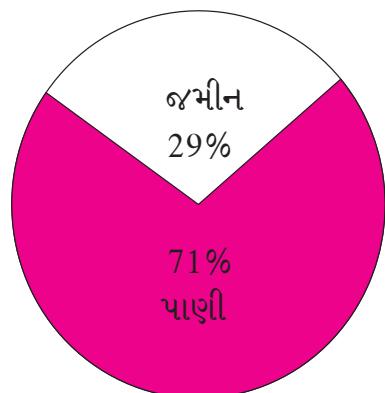
3. એક પરીક્ષાના પરિણામની ટકાવારીના વર્ગો અને તેમાંની વિદ્યાર્થી સંખ્યા નીચેના કોઢામાં આપી છે. તેના પરથી આવૃત્તિ બહુકોણ દોરો.

પરિણામ (ટકા)	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
વિદ્યાર્થી સંખ્યા	7	33	45	65	47	18	5

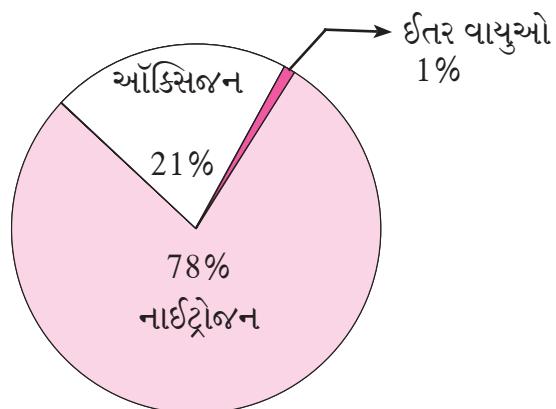


વृत्तांक्ति (Pie diagram)

પાઇલાં ધોરણમાં આપણે ભૂગોળ, વિજ્ઞાન વિષયોમાં નીચેના આલેખ જ્ઞેયા છે. આવા આલેખને વૃત્તાલેખ કહે છે.



ਪ੃ਥਵੀ ਪਰ ਜਮੀਨ ਅਨੇ ਪਾਣੀਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣ



ହବାମାନ୍ତା ବିଵିଧ ଘଟକୋନ୍ତ ପ୍ରମାଣ

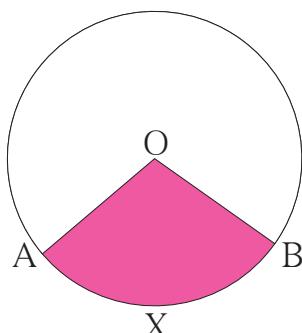
આકૃતિ 6.7

વृत्ताकृतिमां संभ्याकीय सामग्रી આપ્યા વृત्तમાં એટલે કે વર્તુળમાં દર્શાવવામાં આવે છે. સામગ્રીમાંના જુદાં-જુદાં ઘટકો પ્રમાણબદ્ધ વૃત્તાંશથી દર્શાવાય છે.

આકૃતિ 6.8 માં વર્તુળનું કેન્દ્ર O છે. આપેલા વર્તુળમાં OA અને OB ત્રિજ્યા છે.

$\angle AOB$ આ કેન્દ્રીયકોણ છે.

O - AXB આ છાયાંકિત ભાગ એટલે વૃત્તાંશ (sector of a circle) છે.



આકૃતિ 6.8



જ્ઞાની લાઈબ્રેરી

વृत्तालेखनु वाचन/वृत्तांक्षि (Reading of Pie diagram)

વૃત્તાલેખ પર નજર નાખતાં કેવી રીતે માહિતી મળે છે, તે નીચેના ઉદાહરણ પરથી સમજાઓ.

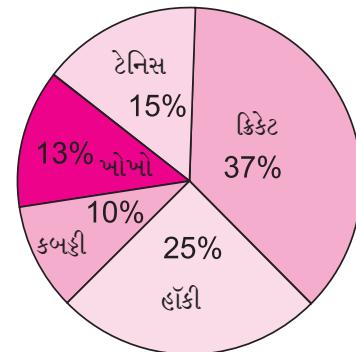
ધોરણ 10 ના 120 છોકરાઓને 'તમને ગમતી રમત કઈ ? આ પ્રશ્ન પૂછ્યો. તેની માહિતી વૃત્તાકૃતિમાં દર્શાવી છે.

કઈ રમત સૌથી વધુ ગમે છે ?

કેટલા ટકા છોકરાંઓને ઓ-ઓ ગમે છે ?

કબ્દી ગમતી હોય તેવા છોકરાઓનો કેટલાં ટકા ?

આના જેવા જવાબો એક દાખિલેપમાં વૃત્તાલેખ પરથી મળી જય છે.

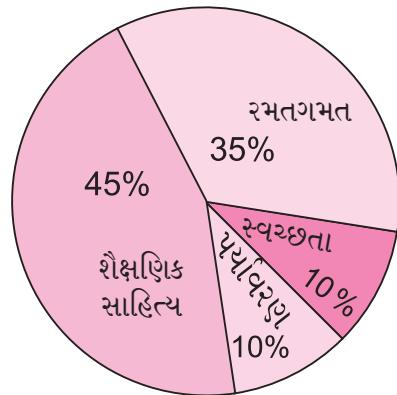


આકૃતિ 6.9

એક વૃત્તાલેખ જુઓ.

બાજુની આકૃતિમાં વૃત્તાલેખ એક શાળાના વાર્ષિક અર્થનિયોજનની વૃત્તાકૃતિ છે. આ વૃત્તાકૃતિ પરથી આપણને સમજય છે કે,

- 45% રકમ શૈક્ષણિક સાહિત્ય માટે મૂકી રાખવામાં આવી છે.
 - 35% રકમ રમતગમતના સાહિત્ય માટે દર્શાવેલ છે.
 - 10% રકમ સ્વચ્છતાના સાહિત્ય માટે રાખી છે.
 - 10% રકમ પર્યાવરણના રક્ષણ માટે રાખી છે.



આકૃતિ 6.10

આ પ્રકારની માહિતી વૃત્તાકૃતિ દ્વારા એક જ દર્ખિક્ષેપમાં મળી જય છે.

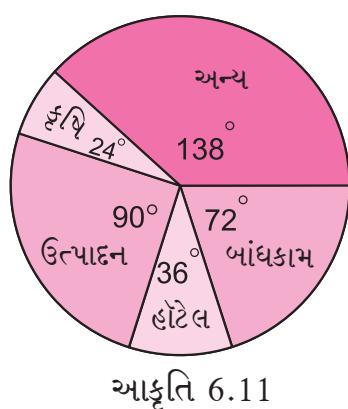
હુવે આપણો વત્તાકૃતિની અધિક માહિતી લઈએ.

અનેક વખતે વિવિધ પ્રકારની માહિતી વૃત્તાકૃતિ દ્વારા દર્શાવેલી આપણે વર્તમાનપત્રોમાં જોઈએ છીએ. જેમકે અંદાજપત્રક, આંલિમ્પિક સ્પર્ધામાં વિવિધ દેશોની કામગિરી, દેશોનો પૈસા આવે છે, કેવી રીતે ? અને જય છે કેવી રીતે ? વગેરે.

તે માટે આપણે માહિતી કેવી રીતે શોધવી તે ઉદાહરણ પરથી સમજુને તેનો અભ્યાસ કરીશું.

ନମ୍ବୂନା ୩୬୯୨୭। :

એક સર્વેક્ષણમાં કાર્યકુશળ વ્યક્તિઓનું વગીકરણ નીચેની વૃત્તાકૃતિમાં દર્શાવ્યું છે. તેમાંના ઉત્પાદન ક્ષેત્રમાં કાર્યરત વ્યક્તિની સંખ્યા 4500 હોય તો નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ લખો.



- (i) બધા ક્ષેત્ર મળીને કુલ કાર્યકુશળ વ્યક્તિની સંખ્યા કેટલી છે ?
 - (ii) બાંધકામ ક્ષેત્રે કાર્યકુશળ વ્યક્તિની સંખ્યા કેટલી છે ?
 - (iii) કૃષિ ક્ષેત્રમાં કાર્યકુશળ વ્યક્તિ કેટલી ?
 - (iv) ઉત્પાદન અને બાંધકામ ક્ષેત્રમાં કાર્યકુશળ વ્યક્તિની સંખ્યા વર્ચ્યેનો તફાવત કેટલો છે ?

ઉકલ : (i) ધારોકે, બધાં ક્ષેત્ર મળીને કુલ કાર્યકુશળ વ્યક્તિની સંખ્યા x છે.

$$\therefore x \text{ વ્યક્તિઓ માટેનો કેન્દ્રિયકોણ} = 360^\circ$$

$$\text{ઉત્પાદન ક્ષેત્રે કાર્યકુશળ વ્યક્તિમાટેનો કેન્દ્રિયકોણ = \frac{\text{ઉત્પાદન ક્ષેત્રમાંની વ્યક્તિ}}{\text{કુલ વ્યક્તિઓ}} \times 360$$

$$90 = \frac{4500}{r} \times 360$$

$\therefore x \equiv 18000$

∴ બધા ક્ષેત્ર મળીને કાર્યક્રમણ વ્યક્તિઓ = 18000.

(ii) બાંધકામ ક્ષેત્રનો કેન્દ્રિયકોણ 72° દર્શાવ્યો છે.

$$72 = \frac{\text{बांधकाम क्षेत्रनी व्यक्ति}}{18000} \times 360$$

$$\therefore \text{બાંધકામ ક્ષેત્રની વ્યક્તિ સંખ્યા} = \frac{72 \times 18000}{360} \\ = 3600$$

(iii) ફૂલિ ક્ષેત્ર માટેનો કેન્દ્રિયકોણ = 24° છે.

$$24 = \frac{\text{કુલ કાર્યકુશળ વ્યક્તિઓ}}{\text{કુલ શિક્ષણ વ્યક્તિની વિસ્તૃતિ}} \times 360$$

$$\therefore \text{कृषिक्षेत्रनी व्यक्ति संख्या} = \frac{24 \times 18000}{360}$$

$$= 1200$$

(iv) ઉત્પાદન અને બાંધકામ ક્ષેત્રના કેન્દ્રીયકોણ વચ્ચેનો તફાવત = $90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$.

$$\therefore \text{કેન્દ્રિયકોણમાંનો તફાવત} = \frac{\text{બે ક્ષેત્રની વ્યક્તિઓની સંખ્યાઓનો તફાવત}}{\text{કુલ કાર્યકુશળ વ્યક્તિઓ}} \times 360$$

$$18 = \frac{\text{બે ક્ષેત્રની વ્યક્તિઓની સંખ્યાઓનો તફાવત}}{18000} \times 360$$

$$\text{ઉત્પાદન અને બાંધકામ ક્ષેત્રના કેન્દ્રિયકોણ વર્ચ્યેનો તફાવત} = \frac{18 \times 18000}{360} \\ \equiv 900$$



અનુભૂતિનામં રાખો.

- સામગ્રીમાં આપેલાં દરેક ઘટક તેને સંબંધિત વૃત્તાંશ વડે દર્શાવ્યા છે.
 - વૃત્તાંશનાં કેન્દ્રિય કોણનું માપ તે ઘટકોની નોંધની સંખ્યાના પ્રમાણમાં હોય છે.
 - કેન્દ્રિયકોણનું માપ (θ) =
$$\frac{\text{સંબંધિત ઘટકોની સંખ્યા}}{\text{ઘટકોની કુલ સંખ્યા}} \times 360$$
 - યોગ્ય ત્રિજ્યાનું વર્તુળ દોરીને, જેટલાં ઘટકો હોય તેટલાં કેન્દ્રિયકોણના માપ પ્રમાણે વર્તુળનું તેના વૃત્તાંશમાં વિભાજન કરેલું હોય છે.



જ્ઞાની લઈએ.

વृत्तांक्ति દોરવી (To draw Pie diagram)

તૈયાર વૃત્તાકૃતિ આપી હોય તો તેમાંની ભાહિતીનું વાચન કેવી રીતે કરવું તે આપણે જેયું. હવે વૃત્તાકૃતિ કેવી રીતે દોરવી તે જેઈએ.

1. વૃત્તાકૃતિ દોરતી વખતે પૂર્ણ વર્તુળની વિભાગણી પ્રમાણસર વૃત્તાંશમાં કરવી.
 2. દુરેક ઘટક સંબંધીત વૃત્તાંશનાં કેન્દ્રિયકોણનું માપ નીચેના સૂત્ર પ્રમાણે કાઢવું.

$$\text{વૃત્તાંશના કેન્દ્રિયકોણનું માપ } \theta = \frac{\text{તે ઘટકની સંખ્યા}}{\text{બધા ઘટકોની કુલ સંખ્યા}} \times 360$$

યોગ્ય ત્રિજ્યાનું વર્તુળ દોરીને, સામગ્રીમાં જેટલાં ઘટકો હોય તેટલાં વૃત્તાંશમાં વર્તુળનું વિભાજન કરવું.

વૃત્તાકૃતિની રચના નીચેના ઉદાહરણની મદદથી સમજુ લઈએ.

ગણેલાં ઉદાહરણો

ઉદા. (1) એક ટૂ વહીલરની દુકાનમાં ટૂ વહીલરના રંગની પસંદગી નીચે પ્રમાણે હતી. આ માહિતી વૃત્તાકૃતિથી દર્શાવવા માટે દરેક ઘટક દર્શાવતાં વૃત્તાંશનાં કેન્દ્રિયકોષનું માપ નક્કી કરો.

ઉકલ : કુલ 36 ટૂ વહીલરની માગણી છે.
તેમાં 10 ટૂ વહીલર સફેદ રંગની છે

∴ સફેદ રંગની ટૂ-ઈલર

માટેના વૃત્તાંશના

$$\begin{aligned} \text{केन्द्रियकोषानु माप} &= \frac{\text{संकेत दूरीलरनी संख्या}}{\text{दूरीलरनी कुल संख्या}} \times 360 \\ &= \frac{10}{36} \times 360 = 100 \end{aligned}$$

આ રીતે દરેક રંગ સાથે સંગત વૃત્તાંશના કેન્દ્રિયકોણનું માપ શોધીને કોઈમાં દર્શાવ્યું છે.

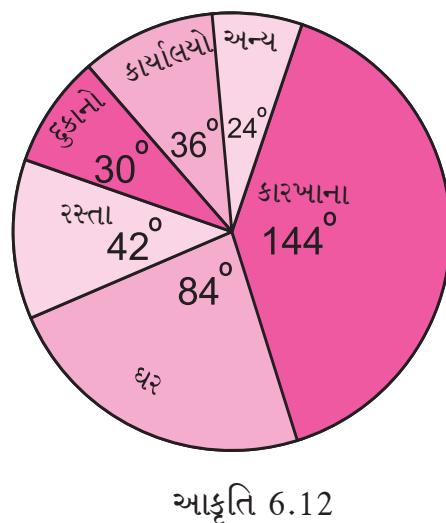
રંગ	ટૂ-વહીતરની માળાજી	વૃત્તાંશનો કેન્દ્રિયકોણ
સફેદ	10	$\frac{10}{36} \times 360^\circ = 100^\circ$
કાળો	9	$\frac{9}{36} \times 360^\circ = 90^\circ$
વાદળી	6	60°
રાખોડી	7	70°
લાલ	4	40°
કુલ	36	360°

ઉદ્દી. (2) એક ગામમાં વિવિધ સ્થાન માટે થતો દરરોજનો વીજ પુરવઠો નીચેનાં કોઠામાં દર્શાવ્યો છે. આ માહિતી દર્શાવતી વૃત્તાકૃતિ દોરો.

સ્થાન	કારખાના	ઘર	રસ્તા	દુકાનો	કાર્યાલયો	અન્ય
વીજપુરવઠો (હજર એકમમાં)	24	14	7	5	6	4

ઉકિલ : કુલ વીજ પુરવઠો 60 હજર એકમ છે. તે પરથી કેન્દ્રિયકોણાના માપ શોધીને કોઈમાં દરશાવીએ. અને વૃત્તાકૃતિ દોરીએ.

વીજ પુરવઠો	યુનિટ	કેન્દ્રિયકોણનું માપ
કારખાના	24	$\frac{24}{60} \times 360 = 144^\circ$
ધર	14	$\frac{14}{60} \times 360 = 84^\circ$
રસ્તા	7	$\frac{7}{60} \times 360 = 42^\circ$
દુકાનો	5	$\frac{5}{60} \times 360 = 30^\circ$
કાર્યાલયો	6	$\frac{6}{60} \times 360 = 36^\circ$
અન્ય	4	$\frac{4}{60} \times 360 = 24^\circ$
કુલ	60	360°



વृत्ताकृति દોરવાના પગથિયા :

- (1) સૌ પ્રથમ આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે એક વર્તુળ દોરીને તેમાં એક ત્રિજ્યા દોરી. પછી કોઈામાં દર્શાવેલાં કેન્દ્રિયકોણના માપ પ્રમાણે એક પછી એક વૃત્તાંશ (144°, 84°, 42°, 30°, 36°, અને 24°) એ પ્રમાણે ઘડિયાળના કાંટાની દિશામાં દોર્યા. (વૃત્તાંશને એક ૧૮ દિશામાં એક પછી એક એમ ન દોરતા તેમનો ક્રમ બદ્દલવામાં આવે તો પણ ચાલે.)
- (2) દરેક વૃત્તાંશમાં સંબંધિત ઘટક અને કેન્દ્રિયકોણ નોંધયા.

કૃતિ :

એક કુટુંબનો વિવિધ બાબતો પર થતો માસિક ખર્ચ આપ્યો છે તે પરથી કેન્દ્રિયકોણનું માપ લઈને વૃત્તાકૃતિ દોરો.

વિવિધ બાબતો	ખર્ચની ટકાવારી	કેન્દ્રિયકોણનું માપ
ખોરાક	40	$\frac{40}{100} \times 360 = \boxed{\quad}$
કપડા	20	$\boxed{\quad} \times \boxed{\quad} = \boxed{\quad}$
ધરભાડું	15	$\boxed{\quad} \times \boxed{\quad} = \boxed{\quad}$
શિક્ષણ	20	$\boxed{\quad} \times \boxed{\quad} = \boxed{\quad}$
અન્ય ખર્ચ	05	$\boxed{\quad} \times \boxed{\quad} = \boxed{\quad}$
કુલ	100	360°

મહાવરાસંગ્રહ 6.6

1. એક રક્તદાન શાબ્દિકમાં વિવિધ વયજૂથની 200 વ્યક્તિઓએ રક્તદાન કર્યું. તે દર્શાવતી વૃત્તાકૃતિ દોરો.

વયજૂથ (વર્ષમાં)	20-25	25-30	30-35	35-40
વ્યક્તિની સંખ્યા	80	60	35	25

2. એક વિદ્યાર્થીએ જુદા-જુદા વિષયમાં 100 માંથી મેળવેલાં ગુજારાતી કોઈામાં આપ્યાં છે. આ માહિતી વૃત્તાકૃતિ દ્વારા દર્શાવો.

વિષય	અંગ્રેજી	ગુજરાતી	વિજ્ઞાન	ગણિત	સમાજશાસ્ત્ર	હિન્દી
ગુજારાતી	50	70	80	90	60	50

3. વૃક્ષારોપણ કાર્યક્રમ અંતર્ગત જુદા જુદા વર્ગના વિદ્યાર્થીઓએ વાવેલાં ઝડની સંખ્યા નીચેના કોઈમાં આપી છે. આ માહિતી દર્શાવતી વૃત્તાકૃતિ દોરો.

ધોરણ	5 મું	6 મું	7 મું	8 મું	9 મું	10 મું
કાઈની સંખ્યા	40	50	75	50	70	75

4. એક ફળ વિકેતા પાસે આવેલાં વિવિધ ફળોની માગણીની ટકાવારી કોઠામાં આપી છે. આ માહિતીની વૃત્તાકૃતિ દોરો.

ફળ	આંબા	મોસંબી	સફ્રેજન	ચીકુ	સંતરા
માગણીના ટકાવારી	30	15	25	20	10

5. એક ગામમાં વિવિધ વ્યાવસાયિકોનું પ્રમાણ દર્શાવતી વૃત્તાકૃતિ 6.13 માં આપી છે. તે પરથી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ લખો.

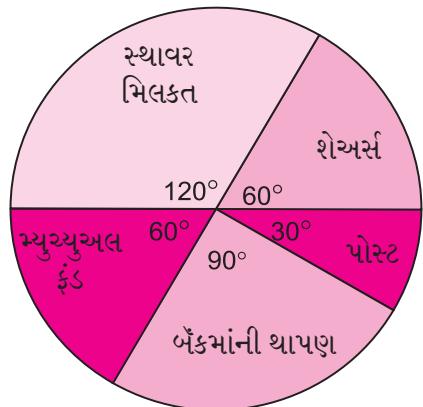


આકૃતિ 6.13

6. એક કુટુંબના વાર્ષિક રોકાણની વૃત્તાકૃતિ બાજુમાં આપેલી છે. તેના પરથી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ લખો.

- (1) શેઅરમાં કરેલું રોકાણ રૂ 2000 ડિપિયા હોય
તો કુલ રોકાણ કેટલું ?
 - (2) બેંકમાં મૂકેલી થાપણની રકમ કેટતી ?
 - (3) મ્યુચ્યુઅલ ફેંડ કરતાં સ્થાવર ભિતકતમાં
કેટલી રકમ વધારે રોકી છે ?
 - (4) પોસ્ટમાં કરેલું રોકાણ કેટલું ?

- (1) વ્યાવસાયિકોની કુલ સંખ્યા 10,000 હોય તો
બાંધકામ ક્ષેત્રે કેટલા વ્યાવસાયિક છે ?
 - (2) પ્રશાસન ક્ષેત્રે કેટલા વ્યાવસાયિક કાર્યરત છે ?
 - (3) ઉત્પાદન ક્ષેત્રે કેટલા ટકા વ્યાવસાયિક છે ?



આકૃતિ 6.14

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 6

1. બહુપર્યાયી પ્રક્રિયાના ઉત્તર આપેલાં પર્યાયોભાંથી શોધીને લખો.

- (1) વિવિધ રક્તગાળની વ્યક્તિઓનું રક્તગાળાનુસાર કરેલું વર્ગીકરણ વૃત્તાઙ્કતિમાં દર્શાવવું છે. O- રક્તગાળ હોથ તેવી વ્યક્તિઓ 40% હોથ તો O- રક્તગાળ માટેની વ્યક્તિઓના વૃત્તાંશનો કેન્દ્રિયકોણ કેટલો હશે.

(A) 114° (B) 140° (C) 104° (D) 144°

- (2) મકાન બાંધકામ માટે થતાં વિવિધ ખર્ચ વૃત્તાકૃતિમાં દર્શાવ્યા છે. તેમાં સિમેન્ટનો ખર્ચ 75° ના કેન્દ્રિયકોણથી દર્શાવ્યો છે. જે સિમેન્ટનો ખર્ચ 45,000 રૂપિયા હોય તો, મકાનના બાંધકામનો કુલ ખર્ચ કેટલો હશે ?

(A) 2,16,000 (B) 3,60,000 (C) 4,50,000 (D) 7,50,000

(3) વર્ગીકૃત આવૃત્તિ કોઈામાં સંચિત આવૃત્તિનો ઉપયોગ શોધવા માટે થાય છે.

(A) મધ્ય (B) મધ્યક (C) બહુલક (D) આ બધાં માટે

- (4) વર્ગીકૃત આવૃત્તિ કોઠામાં સામગ્રીનો મધ્ય શોધવાના સૂત્ર $\bar{X} = A + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times g$
માં $u_i = \dots$

- (A) $\frac{x_i + A}{g}$ (B) $(x_i - A)$ (C) $\frac{x_i - A}{g}$ (D) $\frac{A - x_i}{g}$

- | (5) | પ્રતિલિટર કાપેલું અંતર (કિભી) | 12-14 | 14-16 | 16-18 | 18-20 |
|-----|-------------------------------|-------|-------|-------|-------|
| | કારની સંખ્યા | 11 | 12 | 20 | 7 |

ઉપરની સામગ્રી માટે કાર વડે પ્રતિલિટર કપાયેલાં અંતરનો મધ્યક વર્ગમાં છે.

- (A) 12-14 (B) 14-16 (C) 16-18 (D) 18-20

- | | | | | | |
|-----|------------------------------|-----|-----|-----|-------|
| (6) | દરેક વિદ્યાર્થીએ વાવેલાં જાડ | 1-3 | 4-6 | 7-9 | 10-12 |
| | વિદ્યાર્થીની સંખ્યા | 7 | 8 | 6 | 4 |

ઉપરના આવૃત્તિ કોઈમાં સામગ્રી માટે આવૃત્તિ બહુકોણ દોરવાનો છે. તો 4-6 આ વર્ગના વિદ્યાર્થીઓ દર્શાવવા માટેનાં બિંદુના નિર્દેશકો . . . છે.

- (A) (4, 8) (B) (3, 5) (C) (5, 8) (D) (8, 4)

2. દ્રાક્ષની મોસમમાં ખેડૂતોની આવકનો વર્ગીકૃત આવૃત્તિ વિતરણ કોઈ નીચે આપ્યો છે. તે પરથી તેમની આવકનો મુધ્ય શોધો.

આધક (હજર ડ્રિપિયા)	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
ખેડૂતોની સંખ્યા	10	11	15	16	18	14

3. નીચે વર્ગીકૃત આવૃત્તિ કોઈમાં એક બેંકું ઘેરૂનોને ખેત તળાવ માટે આપેલું કરજ નીચે પ્રમાણે છે. તો બેંકું આપેલી રકમનો મધ્ય શોધો.

કરણ (હજનર ડ્રિપિયા)	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
એત તળાવની સંખ્યા	13	20	24	36	7

4. એક કારખાનામાં 120 કામદારોના સાપ્તાહિક પગારનો વર્ગીકૃત આવૃત્તિ વિતરણ કોઠો નીચે આપ્યો છે. તે પરથી કામદારોના સાપ્તાહિક પગારનો મધ્ય શોધો.

સાપ્તાહિક પગાર (રૂપિયા)	0-2000	2000-4000	4000-6000	6000-8000
કામદારોની સંખ્યા	15	35	50	20

5. નીચેના આવૃત્તિ કોઠામાં 50 પૂર્ગ્રસ્ત કુટુંબોને કરેલી મદ્દદની રકમ આપી છે તે પરથી મદ્દદની રકમનો મધ્ય શોધો.

મદ્દની રકમ (હન્દર રૂપિયા)	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
કુટુંબોની સંખ્યા	7	13	20	6	4

6. નીચેના આવૃત્તિ કોડામાં સાર્વજનિક બસ સેવાની 250 બસોએ એક દિવસમાં કાપેલું અંતર આપ્યું છે. તે પરથી એક દિવસમાં કાપેલાં અંતરનો મધ્યક શોધો.

અંતર (કિમી)	200-210	210-220	220-230	230-240	240-250
બસની સંખ્યા	40	60	80	50	20

7. એક જનરલ સ્ટોર્સમાં વિવિધ વસ્તુની કિંમત અને તે વસ્તુની માગણીનો વર્ગીકૃત આવૃત્તિ કોઈ આપ્યો છે. તે પરથી કિંમતનો મધ્યક શોધો.

કિંમત (રૂપિયા)	20 કરતા ઓછા	20-40	40-60	60-80	80-100
વસ્તુની સંખ્યા	140	100	80	60	20

8. નીચેના વર્ગીકૃત આવૃત્તિ કોઠામાં એક મીઠાઈની દુકાનમાં જુદા-જુદા વજનની મીઠાઈની માગણી આપી છે. તે પરથી વજનની માગણીનો બહુલક શોધો.

મીઠાઈનું વજન (ગ્રામ)	0-250	250-500	500-750	750-1000	1000-1250
ગ્રાહક સંખ્યા	10	60	25	20	15

9. નીચેના આવૃત્તિ વિતરણ માટે સ્તંભાલેખ દોરો.

વીજ વપરાશ (યુનિટ)	50-70	70-90	90-110	110-130	130-150	150-170
કુટંબોની સંખ્યા	150	400	460	540	600	350

10. એક હાથસાળ કારખાનામાં મજૂરોને એક સાડી તૈયાર કરવા માટે લાગતાં અને મજૂરોની સંપ્રાણા દિવસોનો વર્ગીકૃત આવૃત્તિ કોઠો નીચે આખ્યો છે. આ સામગ્રી પરથી આવૃત્તિ બહુકોણ દોરો.

દિવસ	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20
મજૂરોની સંખ્યા	5	16	30	40	35	14

11. એક વર્ગના વિદ્યાર્થીઓને વિજ્ઞાન પ્રયોગ કરવા માટે લાગતાં સમયનો વર્ગિકૃત આવૃત્તિ વિતરણ કોઈ નીચે આપ્યો છે. આ માહિતી પરથી સ્તરભાલેખ દોરો અને તે પરથી આવૃત્તિ બહુકોણ દોરો.

પ્રયોગ માટે લાગતો સમય (મિનિટ)	20-22	22-24	24-26	26-28	28-30	30-32
વિદ્યાર્થી સંખ્યા	8	16	22	18	14	12

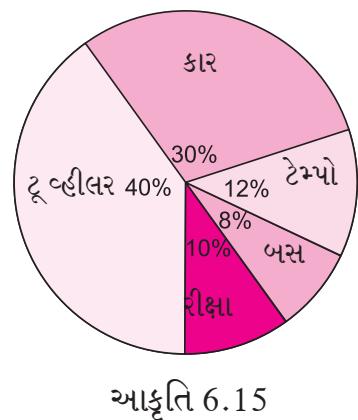
12. નીચેના વર્ગીકૃત આવૃત્તિ કોડા માટે આવૃત્તિ બહુકોણ દોરો.

રક્તદાહાતાની ઉંમર (વર્ષ)	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
રક્તદાહાતાની સંખ્યા	38	46	35	24	15	12

13. નીચેના કોડામાં 150 ગામમાં થયેલાં વરસાદની વાર્ષિક નોંધ આપી છે તે પરથી આવૃત્તિ બહુકોણ દોરો.

સરાસરી વરસાદ (સેમી)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
ગામની સંખ્યા	14	12	36	48	40

14. બાજુમાં સવારે 8 થી 10 દરમિયાન શહેરના એક સિગનલવાળા ચોકમાંથી પસાર થતાં વિવિધ વાહનોની શતમાન (સેંકડે) વૃત્તાકૃતિ આપી છે. તો



- (1) દરેક પ્રકારના વાહનો માટેના કેન્દ્રિયકોણના માપ શોધો.

(2) ટૂ વ્હીલરની સંખ્યા 1200 હોય તો વાહનોની કુલ સંખ્યા કેટલી ?

15. નીચેના કોઈભાં ધવનિ-પ્રદૂષણ નિર્માણ કરતાં ઘટકો આપ્યા છે. તે દર્શાવતી વૃત્તાકૃતિ દોરો.

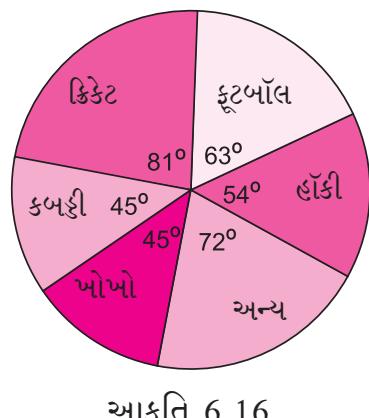
બાંધકામ	વાહન વ્યવહાર	વિમાન ઉડાણ	ઔદ્યોગિક	રેલવેગાડીઓ
10%	50%	9%	20%	11%

16. શાળાના વિદ્યાર્થીઓની વિવિધ રમત-ગમતની પસંદગી જાણવા માટે કરેલાં સર્વેક્ષણ પરથી મળેલી માહિતી વૃત્તાકૃતિ દ્વારા દર્શાવી છે કુલ વિદ્યાર્થીઓ 1000 હોય તો,

(1) કિકેટ પસંદ કરતાં વિદ્યાર્થીઓ કેટલાં ?

(2) ફૂટબોલની રમત કેટલાં વિદ્યાર્થીઓને ગમે છે ?

(3) અન્ય રમતને પસંદ કરતાં વિદ્યાર્થીઓ કેટલાં ?



17. એક ગામનાં આરોગ્ય કેન્દ્રમાં 180 સ્ત્રીઓની તપાસણી થઈ. તેમાંથી 50 સ્ત્રીઓમાં હિમોગ્લોબીન ઓછું છે. 10 સ્ત્રીઓને મોતીયાનો ત્રાસ હતો. 25 સ્ત્રીઓને શ્વસન વિકાર હતો અને બાકીની સ્ત્રીઓ નિરોગી હતી. આ માહિતી દર્શાવતી વૃત્તાકૃતિ દોરો.

18. વનીકરણ પ્રકલ્પમાં એક શાળાના વિધાર્થીઓએ પર્યાવરણ દિન નિમિત્તે 120 ઝાડ વાવ્યા. તેની માહિતી દર્શાવતો કોઠો નીચે આપ્યો છે. આ માહિતીની વૃત્તાકૃતિ દોરો.

ઝડના નામ	કરંજો	બેહદાં	અર્જુન	બકુલ	કડવો લીમડો
ઝડની સંખ્યા	20	28	24	22	26



10

ઉત્તરસૂચિ

1. બે ચલવાળાં રેખિક સમીકરણો

મહાવરાસંગ્રહ 1.1

2. (1) (2, 4) (2) (3, 1) (3) (6, 1) (4) (5, 2)
 (5) (-1, 1) (6) (1, 3) (7) (3, 2) (8) (7, 3)

મહાવરાસંગ્રહ 1.2

1. (1)

x	3	-2	0
y	0	5	3
(x, y)	(3, 0)	(-2, 5)	(0, 3)

(2)

x	4	-1	0
y	0	-5	-4
(x, y)	(4, 0)	(-1, -5)	(0, -4)

2. (1) (5, 1) (2) (4, 1) (3) (3, -3) (4) (-1, -5) (5) (1, 2.5) (6) (8, 4)

મહાવરાસંગ્રહ 1.3

1. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times \boxed{5} - \boxed{2} \times 4 = \boxed{15} - 8 = \boxed{7}$

2. (1) -18 (2) 21 (3) $-\frac{4}{3}$

3. (1) (2, -1) (2) (-2, 4) (3) (3, -2) (4) (2, 6) (5) (6, 5) (6) $(\frac{5}{8}, \frac{1}{4})$

મહાવરાસંગ્રહ 1.4

1. (1) $(\frac{1}{9}, 1)$ (2) (3, 2) (3) $(\frac{5}{2}, -2)$ (4) (1, 1)

મહાવરાસંગ્રહ 1.5

1. તે સંખ્યા 5 અને 2 2. $x = 12, y = 8$ ક્ષેત્રફળ = 640 ઓરસ એકમ, પરિમિતિ = 112 એકમ
 3. પુત્રની ઉંમર 15 વર્ષ, પિતાની ઉંમર 40 વર્ષ. 4. $\frac{7}{18}$
 5. A = 30 કિગ્રા, B = 55 કિગ્રા 6. 150 કિગ્રી.

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 1

1. (1) B (2) A (3) D (4) C (5) A

2.

x	-5	$\frac{3}{2}$
y	$-\frac{13}{6}$	0
(x, y)	$(-5, -\frac{13}{6})$	$(\frac{3}{2}, 0)$

3. (1) $(3, 2)$ (2) $(-2, -1)$ (3) $(0, 5)$ (4) $(2, 4)$ (5) $(3, 1)$

4. (1) 22 (2) -1 (3) 13

- $$5. \quad (1) \left(-\frac{2}{3}, 2\right) \quad (2) (1, 4) \quad (3) \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad (4) \left(\frac{7}{11}, \frac{116}{33}\right) \quad (5) (2, 6)$$

6. (1) $(6, -4)$ (2) $(-\frac{1}{4}, -1)$ (3) $(1, 2)$ (4) $(1, 1)$ (5) $(2, 1)$

7. (2) ચાનો દર ₹ 300 પ્રતિ કિ.ગ્રા.
સાકરનો દર ₹ 40 પ્રતિ કિ.ગ્રા.
(3) ₹ 100ની નોટોની સંખ્યા 20
₹ 50ની નોટોની સંખ્યા 10
(4) મનીખાની આજની ઉંમર 23 વર્ષ
સવિતાની આજની ઉંમર 8 વર્ષ

(5) કુશળ કામદારની મજૂરી 450 રૂપિયા
અકુશળ કામદારની મજૂરી 270 રૂપિયા
(6) હમીદની જડપ 50 કિમી/કલાક
ઝેસેફનો વેગ 40 કિમી/કલાક.

2. વર્ગસમીકરણો

ਮਹਾਵਰਾਸੰਗ੍ਰਹ 2.1

- $m^2 + 5m + 3 = 0$, $y^2 - 3 = 0$ (આ પ્રકારના અન્ય જવાબ)
 - (1), (2), (4), (5) આ વર્ગસમીકરણો છે. (3), (6) નથી.
 - (1) $y^2 + 2y - 10 = 0$, $a = 1, b = 2, c = -10$
 (2) $x^2 - 4x - 2 = 0$, $a = 1, b = -4, c = -2$
 (3) $x^2 + 4x + 3 = 0$, $a = 1, b = 4, c = 3$
 (4) $m^2 + 0m + 9 = 0$, $a = 1, b = 0, c = 9$
 (5) $6p^2 + 3p + 5 = 0$, $a = 6, b = 3, c = 5$
 (6) $x^2 + 0x - 22 = 0$, $a = 1, b = 0, c = -22$
 - (1) 1 મૂળ છે, -1 નથી. (2) $\frac{5}{2}$ મૂળ છે, 2 નથી.
 - k = 3
 - k = -7

ਮਹਾਵਰਾਸੰਗ੍ਰਹ 2.2

1. (1) 9, 6 (2) -5, 4 (3) $-13, -\frac{1}{2}$ (4) $5, -\frac{3}{5}$
 (5) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (6) $\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}$ (7) $-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}$ (8) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
 (9) 25, -1 (10) $-\frac{3}{5}, \frac{3}{5}$ (11) 0, 3 (12) $-\sqrt{11}, \sqrt{11}$

ਮਹਾਵਰਾਸੰਗ੍ਰਹ 2.3

1. (1) $4, -5$ (2) $(\sqrt{6} - 1), (-\sqrt{6} - 1)$ (3) $\frac{\sqrt{13} + 5}{2}, \frac{-\sqrt{13} + 5}{2}$
 (4) $\frac{\sqrt{2} + 2}{3}, \frac{-\sqrt{2} + 2}{3}$ (5) $-2, -\frac{5}{2}$ (6) $\frac{2 + \sqrt{39}}{5}, \frac{2 - \sqrt{39}}{5}$

ਮਹਾਵਰਾਸੰਗ੍ਰਹ 2.4

- (1) $1, -7, 5$ (2) $2, -5, 5$ (3) $1, -7, 0$
 - (1) $-1, -5$ (2) $\frac{3+\sqrt{17}}{2}, \frac{3-\sqrt{17}}{2}$ (3) $\frac{-1+\sqrt{22}}{3}, \frac{-1-\sqrt{22}}{3}$
 (4) $\frac{2+\sqrt{14}}{5}, \frac{2-\sqrt{14}}{5}$ (5) $\frac{-1+\sqrt{73}}{6}, \frac{-1-\sqrt{73}}{6}$ (6) $-1, -\frac{8}{5}$
 - $-\sqrt{3}, -\sqrt{3}$

ਮਹਾਵਰਾਸੰਗ੍ਰਹ 2.5

1. (1) 5 હોય ત્યારે મૂળ બિન્ન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે, -5 હોય ત્યારે મૂળ વાસ્તવિક સંખ્યા નથી.

(2) $x^2 + 7x + 5 = 0$ (3) $\alpha + \beta = 2, \alpha \times \beta = -\frac{3}{2}$

2. (1) 53 (2) -55 (3) 0

3. (1) વાસ્તવિક અને સમાન છે. (2) વાસ્તવિક અને અસમાન છે. (3) વાસ્તવિક સંખ્યા નથી.

4. (1) $x^2 - 4x = 0$ (2) $x^2 + 7x - 30 = 0$
 (3) $x^2 - \frac{1}{4} = 0$ (4) $x^2 - 4x - 1 = 0$

5. $k = 3$ 6. (1) 18 (2) 50

7. (1) $k = 12$ અથવા $k = -12$ (2) $k = 6$

ਮਹਾਵਰਾਸੰਗ੍ਰਹ 2.6

1. 9 વર્ષે 2. 10 અને 12 3. ઊભી હરોળમાં 10 અને આડી હરોળમાં 15.
 4. કિશોરની આજની ઉંમર 10 વર્ષ, વિવેકની આજની ઉંમર 15 વર્ષ.
 5. 10 ગુણ 6. વાસણની સંખ્યા 6, દરેક વાસણનું નિર્ભિત મૂલ્ય 100 ડિપિયા.
 7. 6 કિમી/કલાક 8. નિશ્ચનો 6 દિવસ, પિંટૂને 12 દિવસ.
 9. ભાજક = 9, ભાગકુળ = 51 10. AB = 7 સેમી, CD = 15 સેમી, AD = BC = 5 સેમી.

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 2

1. (1) B (2) A (3) C (4) B (5) B (6) D (7) C (8) C
 2. (1) અને (3) વર્ગસમીકરણો છે. (2) નથી.

3. (1) -15 (2) 1 (3) 21
 4. $k = 3$ 5. (1) $x^2 - 100 = 0$ (2) $x^2 - 2x - 44 = 0$ (3) $x^2 - 7x = 0$
 6. (1) વાસ્તવિક સંખ્યા નથી. (2) વાસ્તવિક અને અસમાન છે. (3) વાસ્તવિક અને સમાન છે.
 7. (1) $\frac{1+\sqrt{21}}{2}, \frac{1-\sqrt{21}}{2}$ (2) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}$ (3) 1, -4
 (4) $\frac{-5+\sqrt{5}}{2}, \frac{-5-\sqrt{5}}{2}$ (5) મૂળ વાસ્તવિક સંખ્યા નથી. (6) $(2 + \sqrt{7}), (2 - \sqrt{7})$
 8. $m = 14$ 9. $x^2 - 5x + 6 = 0$ 10. $x^2 - 4pqx - (p^2 - q^2)^2 = 0$
 11. સાગર પાસે 100 રૂપિયા અને મુંડું પાસે 150 રૂપિયા.
 12. 12 અને $\sqrt{24}$ અથવા 12 અને $-\sqrt{24}$ 13. વિદ્યાર્થીની સંખ્યા 60
 14. પહોળાઈ 45 મી., લંબાઈ 100 મી., ઘેતતળાવની બાજુની લંબાઈ 15 મી.
 15. મોટા નળ માટે 3 કલાક અને નાના નળ માટે 6 કલાક.

3. અંકગણિત શ્રેઢી

મહાવરાસંગ્રહ 3.1

1. (1) છે, $d = 2$ (2) છે, $d = \frac{1}{2}$ (3) છે, $d = 4$ (4) નથી.
 (5) છે, $d = -4$ (6) છે, $d = 0$ (7) છે, $d = \sqrt{2}$ (8) છે, $d = 5$
 2. (1) 10, 15, 20, 25, ... (2) -3, -3, -3, -3, ... (3) -7, -6.5, -6, -5.5, ...
 (4) -1.25, 1.75, 4.75, 7.75, ... (5) 6, 3, 0, -3, ... (6) -19, -23, -27, -31
 3. (1) $a = 5, d = -4$ (2) $a = 0.6, d = 0.3$ (3) $a = 127, d = 8$ (4) $a = \frac{1}{4}, d = \frac{1}{2}$

મહાવરાસંગ્રહ 3.2

1. (1) $d = 7$ (2) $d = 3$ (3) $a = -3, d = -5$ (4) $a = 70, d = -10$
 2. છે. 121 3. 104 4. 115 5. -121 6. 180
 7. 55 8. 55 9. 60 10. 1

મહાવરાસંગ્રહ 3.3

1. 1215 2. 15252 3. 30450 5. 5040
 5. 2380 6. 60 7. 4, 9, 14 અથવા 14, 9, 4 8. -3, 1, 5, 9

મહાવરાસંગ્રહ 3.4

1. 70455 રૂપિયા 2. પહેલા હપ્તો 1000 રૂપિયા, અંતિમ હપ્તો 560 રૂપિયા 3. 1,92,000 રૂપિયા
 4. 48, 1242 5. $-20^\circ, -25^\circ, -30^\circ, -35^\circ, -40^\circ, -45^\circ$ 6. 325

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 3

1. (1) B (2) C (3) B (4) D (5) B (6) C (7) C (8) A (9) A (10) B
 2. 40 3. 1, 6, 11, ... 4. -195 5. 16, -21 6. -1 7. 6, 10
 8. 8 9. 67, 69, 71 10. 3, 7, 11, 147. 14. 2000 રૂપિયા

4. અર્થનિયોજન

ਮਹਾਵਰਾਸੰਗ੍ਰਹ 4.1

- CGST 6%, SGST 6% 2. SGST 9%, GST 18%
 - CGST ₹ 784 અને SGST ₹ 784 પડશે.
 - તે બેલ્ટ ગ્રાહકને 691.48 રૂપિયામાં ભળશે.
 - રમકડાની કારની કરપાત્ર કિંમત ₹ 1500 તેના પર CGST ₹ 135 SGST ₹ 135
 - (1) SGST નો દર = 14% (2) AC પર GST નો દર = 28%
 - (3) AC ની કરપાત્ર કિંમત = 40,000 રૂપિયા (4) GST ની કુલ કિંમત = 11,200 રૂપિયા
 - (5) CGST = 5600 રૂપિયા (6) SGST = 5600 રૂપિયા
 - પ્રસાદને તે વોશિંગ મશીન 48,640 રૂપિયામાં ભળશે અને બિલમાં CGST = 5,320 રૂપિયા અને SGST = 5,320 રૂપિયા દર્શવાય છે.

ਮਹਾਵਰਾਸੰਗ੍ਰਹ 4.2

- ચેતના સ્ટોર્સનો ચૂકવવા પાત્ર લુઅસ્ટી 22,000 રૂપિયા
 - નજીમાને ₹ 12,500 ની ઈનપ્ટુટ ટેક્સ કેડિટ મળશે. ∴ તેમનો ચૂકવવા પાત્ર GST ₹ 2,250.
 - અમીર એન્ટરપ્રાઇઝનો ચૂકવવા પાત્ર GST = ₹ 300 તેમાં CGST = ₹ 150 અને SGST = ₹ 150 અકબરી બ્રધર્સનો ચૂકવવા પાત્ર GST 400 રૂ. તેમાં CGST 200 રૂ. અને SGST 200 રૂ.
 - ચૂકવવા પાત્ર GST ₹ 100, CGST ₹ 50 UTGST ₹ 50. 5. CGST = SGST = ₹ 900

ਮਹਾਵਰਾਸੰਗ੍ਰਹ 4.3

1. (1) બજરભાવ 100 રૂપિયા (2) દાર્શનિક કિમત 75 રૂપિયા (3) અવમૂલ્ય 5 રૂપિયા
 2. 25% 3. 37,040 રૂપિયા 4. 800 શેર્સ
 5. વળતરનો દર = 5.83% 6. કંપની A માંનું રોકાણ ફાયદાકારક છે.

મહાવરાસંગ્રહ 4.4

1. 200.60 રૂપિયા 2. 999 રૂપિયા
3.

શેરસર્ની સંખ્યા	શેરસર્નો બજરભાવ	શેરસર્ની કુલ કિંમત	દલાલીનો ૬૨ ૦.૨%	દલાલી પર CGST ૯%	દલાલી પર SGST ૯%	શેરસર્ની કુલ કિંમત
100 B	₹ 45	₹ 4500	₹ 9	₹ 0.81	₹ 0.81	₹ 4510.62
75 S	₹ 200	₹ 15000	₹ 30	₹ 2.70	₹ 2.70	₹ 14964.60

4. 100 શેર્સ વેંચ્યા. 5. ખોટ 8560 રૂપિયા.

ਸੰਕੀਰਣ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ 4A

1. (1) C (2) B (3) D (4) B (5) A (6) B
 2. કુલ બિલ 28,800 રૂપિયા, સીલુએસટી 3150 રૂપિયા, એસજીએસટી 3150 રૂપિયા.

3. ₹ 997.50 4. ₹ 12,500 5. ₹ 4250 ITC ચૂકવવા પાત્ર કર ₹ 250
6. ITC (ઈનપૂટ ટેક્સ કેડિટ) ₹ 1550, સીજાએસટી ₹ 5030, એસજાએસટી ₹ 5030.
7. વાકીટોકી સંચની કિંમત ₹ 75,000, સીજાએસટી ₹ 4500, એસજાએસટી ₹ 4500.
- 8.(1) જથ્યાબંધ વેપારીના ટેક્સ ઈન્વોર્ડ્સમાં સીજાએસટી 16200 રૂપિયા, એસજાએસટી 16200 રૂપિયા
છૂટક વેપારીના ટેક્સ ઈન્વોર્ડ્સમાં સીજાએસટી 19,800 રૂપિયા, એસજાએસટી 19,800 રૂપિયા
- (2) જથ્યાબંધ વેપારીને ચૂકવવા પાત્ર સીજાએસટી (CGST) 2700 અને (SGST) 2700,
છૂટક વેપારીને ચૂકવવા પાત્ર સીજાએસટી (CGST) 3600 અને (SGST) 3600
9. (1) આણા પાટીલે આપેલા ટેક્સ ઈન્વોર્ડ્સમાં સીજાએસટી ₹ 1960, એસજાએસટી ₹ 1960
(2) વસર્ધિના વેપારીએ ગ્રાહકને આકારેલો સીજાએસટી ₹ 2352 અને એસજાએસટી ₹ 2352
(3) વસર્ધિના વેપારીનો ચૂકવવા પાત્ર સીજાએસટી ₹ 392 અને ચૂકવવા પાત્ર એસજાએસટી ₹ 392
- 10.

(1)	વ્યક્તિ	ચૂકવવા પાત્ર સીજાએસટી	ચૂકવવા પાત્ર એસજાએસટી	ચૂકવવા પાત્ર જાએસટી
	ઉત્પાદક	300	300	600
	વિતરક	360 - 300 = 60	60	120
	છૂટક વેપારી	390 - 360 = 30	30	60
	કુલ કર	₹ 390	₹ 390	₹ 780

- (2) અંતમાં ગ્રાહકને તે વસ્તુ 7280 રૂ. માં મળ્યો.
(3) ઉત્પાદકથી વિતરક B2B, વિતરકથી છૂટક વેપારી B2B, છૂટક વેપારીથી ગ્રાહક B2C

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 4B

1. (1) B (2) B (3) A (4) C (5) A
2. ₹ 130.39 3. 22.2% 4. 21,000 રૂપિયા મળશે.
5. 500 શેઅર્સ મળશે. 6. નફો 1058.52 રૂપિયા 7. કંપની B કારણ કે વળતર વધુ.
8. 1000 શેઅર્સ મળશે. 9. 118 રૂપિયા
10. (1) 1,20,000 રૂપિયા (2) 360 રૂપિયા (3) 64.80 રૂપિયા (4) 120424.80 રૂપિયા.
11. 1% નફો

5. સંભાવના

મહાવરાસંગ્રહ 5.1

1. (1) 8 (2) 7 (3) 52 (4) 11

મહાવરાસંગ્રહ 5.2

1. (1) $S = \{1H, 1T, 2H, 2T, 3H, 3T, 4H, 4T, 5H, 5T, 6H, 6T\}$ $n(S) = 12$



- (2) $S = \{23, 25, 32, 35, 52, 53\}$ $n(S) = 6$

2. $S = \{\text{ਲਾਤ}, \text{ਕੇਸਰੀ}, \text{ਜ਼ਾਬੂਡੀ}, \text{ਲੀਤੀ}, \text{ਪੀਣਾ}, \text{ਵਾਣੀ}\}$ $n(S) = 6$

3. $S = \{\text{ਮੰਗਲਵਾਰ}, \text{ਰਵਿਵਾਰ}, \text{ਸ਼ੁਕ੍ਰਵਾਰ}, \text{ਬੁਧਵਾਰ}, \text{ਸੋਮਵਾਰ}, \text{ਸ਼ਨਿਵਾਰ}\}$ $n(S) = 6$

4. (1) $B_1 B_2$ (2) $G_1 G_2$ (3) $B_1 G_1$ $B_2 G_1$ $B_1 G_2$ $B_2 G_2$
(4) $S = \{B_1 B_2, B_1 G_1, B_1 G_2, B_2 G_1, B_2 G_2, G_1 G_2\}$

મહાવરાસંગ્રહ 5.3

1. (1) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $n(S) = 6$
 $A = \{2, 4, 6\}$ $n(A) = 3$, $B = \{1, 3, 5\}$ $n(B) = 3$, $C = \{2, 3, 5\}$ $n(C) = 3$

(2) $S = \{(1,1), \dots, (1, 6), (2,1), \dots, (2, 6), (3, 1), \dots, (3, 6),$
 $\quad (4, 1), \dots, (4, 6), (5, 1), \dots, (5, 6), (6, 1), \dots, (6, 6)\}$ $n(S) = 36$
 $A = \{(1, 5) (2, 4) (3, 3) (4, 2) (5, 1) (6, 6)\}$ $n(A) = 6$
 $B = \{(4, 6) (5, 5) (5, 6) (6, 4) (6, 5) (6, 6)\}$ $n(B) = 6$
 $C = \{(1, 1) (2, 2) (3, 3) (4, 4) (5, 5) (6, 6)\}$ $n(C) = 6$

(3) $S = \{\text{HHH}, \text{HHT}, \text{HTT}, \text{HTH}, \text{THT}, \text{TTH}, \text{THH}, \text{TTT}\}$ $n(S) = 8$
 $A = \{\text{HHH}, \text{HHT}, \text{HTH}, \text{THH}\}$ $n(A) = 4$
 $B = \{\text{TTT}\}$ $n(B) = 1$
 $C = \{\text{HHH}, \text{HHT}, \text{THT}\}$ $n(C) = 4$

(4) $S = \{10, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 23, 24, 25, 30, 31, 32, 34, 35, 40, 41, 42, 43,$
 $\quad 45, 50, 51, 52, 53, 54\}$ $n(S) = 25$
 $A = \{10, 12, 14, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 42, 50, 52, 54\}$ $n(A) = 13$
 $B = \{12, 15, 21, 24, 30, 42, 45, 51, 54\}$ $n(B) = 9$
 $C = \{51, 52, 53, 54\}$ $n(C) = 4$

(5) $S = \{M_1M_2, M_1M_3, M_1F_1, M_1F_2, M_2M_3, M_2F_1, M_2F_2, M_3F_1, M_3F_2, F_1F_2\}$
 $n(S) = 10$
 $A = \{M_1F_1, M_1F_2, M_2F_1, M_2F_2, M_3F_1, M_3F_2, F_1F_2\}$ $n(A) = 7$
 $B = \{M_1F_1, M_1F_2, M_2F_1, M_2F_2, M_3F_1, M_3F_2\}$ $n(B) = 6$
 $C = \{M_1M_2, M_1M_3, M_2M_3\}$ $n(C) = 3$

(6) $S = \{H1, H2, H3, H4, H5, H6, T1, T2, T3, T4, T5, T6\}$ $n(S) = 12$
 $A = \{H1, H3, H5\}$ $n(A) = 3$
 $B = \{H2, H4, H6, T2, T4, T6\}$ $n(B) = 6$
 $C = \{\}$ $n(C) = 0$

ਮਾਵਰਾਸੰਗ੍ਰਹ 5.4

- $$1. \quad (1) \frac{3}{4}, (2) \frac{1}{4} \qquad \qquad \qquad 2. (1) \frac{1}{6} \quad (2) 0 \quad (3) \frac{5}{12}$$

3. (1) $\frac{7}{15}$ (2) $\frac{1}{5}$ 4. (1) $\frac{4}{5}$ (2) $\frac{1}{5}$ 5. (1) $\frac{1}{13}$ (2) $\frac{1}{4}$

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 5

1. (1) B (2) B (3) C (4) A (5) A 2. વાસ્તિમાન 3. (1) $\frac{1}{11}$ (2) $\frac{6}{11}$

4. $\frac{5}{26}$ 5. (1) $\frac{2}{9}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{4}{9}$ 6. $\frac{1}{2}$ 7. (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{6}$

8. (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{6}$ 9. $\frac{1}{25}$ 10. (1) $\frac{1}{8}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{3}{4}$ (4) 1

11. (1) $\frac{5}{6}$ (2) $\frac{1}{6}$ (3) 1 (4) 0 12. (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{2}{3}$ 13. $\frac{2}{11}$

14. $\frac{13}{40}$ 15. (1) $\frac{3}{10}$ (2) $\frac{3}{10}$ (3) $\frac{1}{5}$ 16. $\frac{11}{36}$

6. આંકડાશાસ્ત્ર

ਮਹਾਵਰਾਸੰਗ੍ਰਹ 6.1

- (1) 4.36 કલાક (2) 521.43 રૂપિયા (3) 2.82 લિટર (4) 35310 રૂપિયા.
 (5) 985 રૂપિયા અથવા 987.5 રૂપિયા (6) 3070 રૂપિયા અથવા 3066.67 રૂપિયા.

ਮਹਾਵਰਾਸੰਗ੍ਰਹ 6.2

- (1) 11.4 કલાક (2) 184.4 એટલે અંદાજે 184 આંબા (3) $74.558 \approx 75$ વાહન (4) 52,750 દિવાઓ

ਮਹਾਵਰਾਸੰਗ੍ਰਹ 6.3

1. 4.33 % 2. 72 યૂનિટ 3. 9.94 લિટર 4. 12.31 વર્ષે

ਮਹਾਵਰਾਸੰਗ੍ਰਹ 6.5

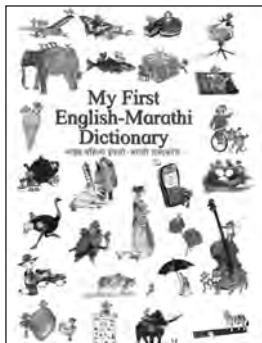
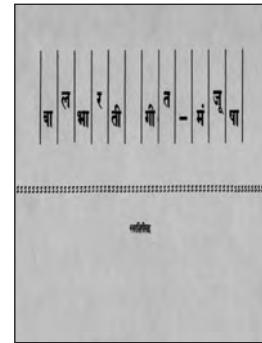
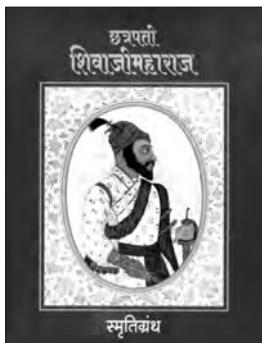
1. (1) 60-70 (2) 20-30 અને 90-100 (3) 55 (4) 80 અને 90 (5) 15

ਮੁਹਾਰਾਸ਼ਨ੍ਗ 6.6

5. (1) 2000 (2) 1000 (3) 25%
6. (1) 12000 રૂપિયા (2) 3000 રૂપિયા (3) 2000 રૂપિયા (4) 1000 રૂપિયા

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 6

1. (1) D (2) A (3) B (4) C (5) C (6) C
 2. 52,500 રૂપિયા 3. 65,400 રૂપિયા 4. 4250 રૂપિયા
 5. 72,400 રૂપિયા 6. 223.13 કિમી 7. 32 રૂપિયા 8. 397.06 ગ્રામ
 14. (1) કાર - 108° , ટેમ્પો - 43° , બસ - 29° , રીક્ષા - 36° , ટૂ વ્હીલર - 144°
 (2) વાહનોની કુલ સંખ્યા - 3000
 16. (1) કિકેટ પસંદ કરતાં - 225, (2) ફટબોલની પસંદ કરતાં - 175 (3) અન્ય રમતને પસંદ કરતાં - 200.



- पाठ्यपुस्तक मंडळाची वैशिष्ट्यपूर्ण पाठ्येतर प्रकाशने.
- नामवंत लेखक, कवी, विचारवंत यांच्या साहित्याचा समावेश.
- शालेय स्तरावर पूरक वाचनासाठी उपयुक्त.



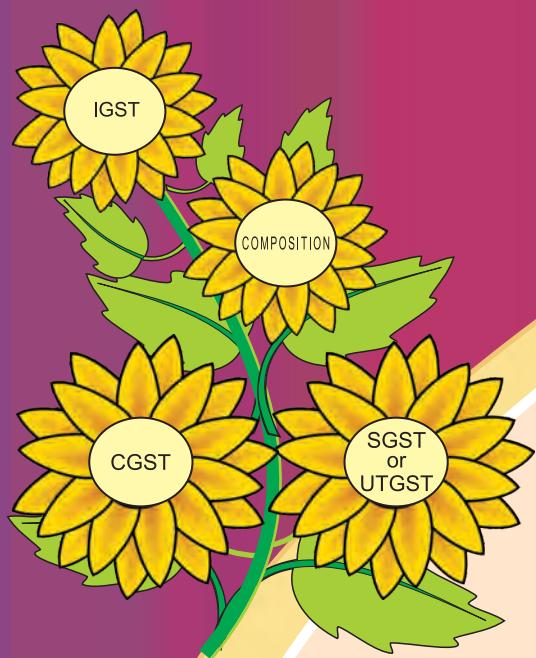
पुस्तक मागणीसाठी www.ebalbharati.in, www.balbharati.in संकेत स्थळावर भेट द्या.

साहित्य पाठ्यपुस्तक मंडळाच्या विभागीय भांडारांमध्ये विक्रीसाठी उपलब्ध आहे.



[ebalbharati](http://ebalbharati.com)

विभागीय भांडारे संपर्क क्रमांक : पुणे - ☎ २५६५९४६५, कोल्हापूर- ☎ २४६८५७६, मुंबई (गोरेगाव) - ☎ २८७७९८४२, पनवेल - ☎ २७४६२६४६५, नाशिक - ☎ २३१९५९९, औरंगाबाद - ☎ २३३२९७९९, नागपूर - ☎ २५४७७९९६/२५२३०७८, लातूर - ☎ २२०९३०, अमरावती - ☎ २५३०९६५



મહારાષ્ટ્ર રાજ્ય પાઠ્યપુસ્તક નિર્મિત
અને અભ્યાસકાળ સંશોધન મંડળ,
પુણે - 411 004.

ગુજરાતી ગણિત ઇ.૧૦ વી ભાગ-૧ ₹ 80.00