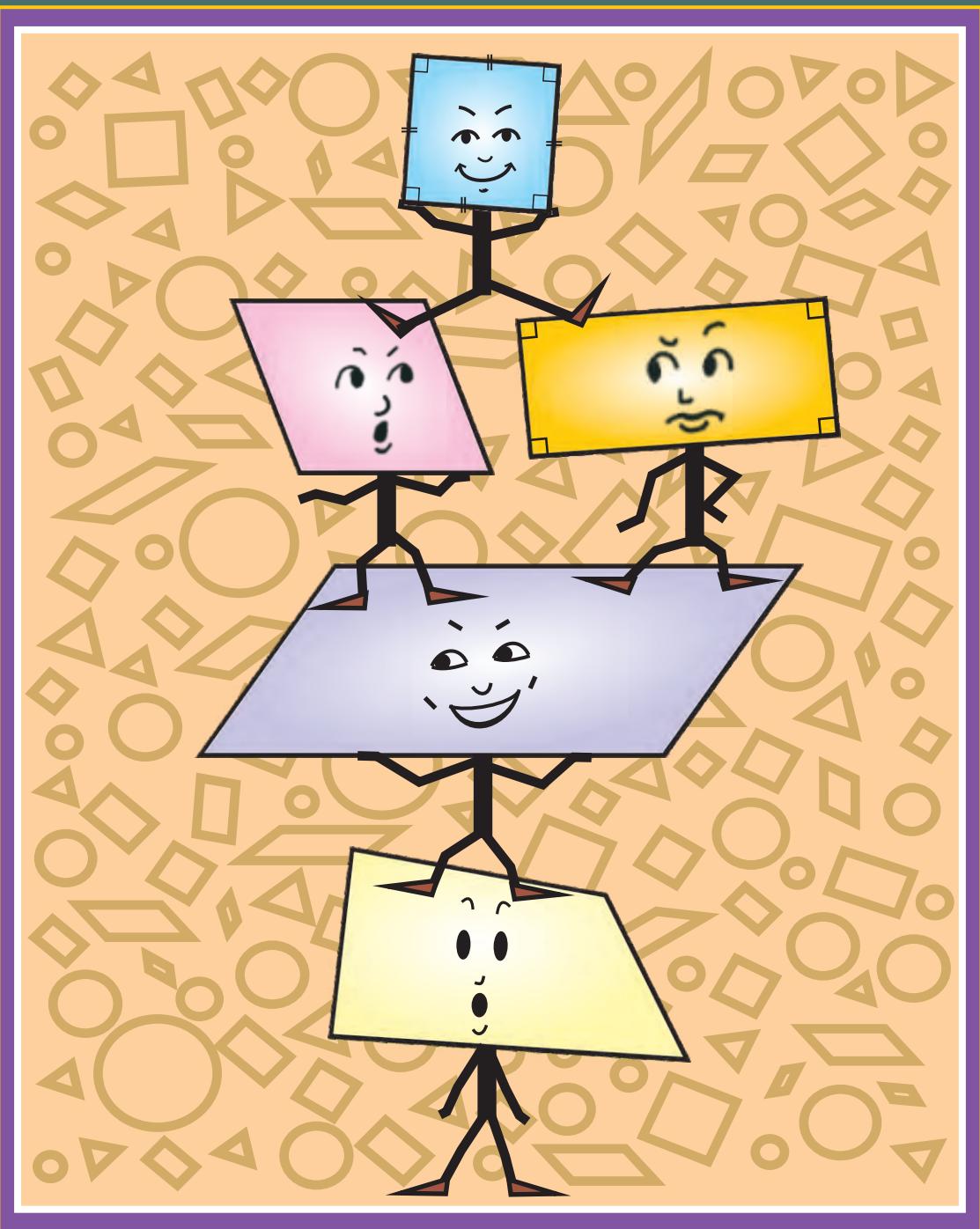


# ریاضی

آٹھویں جماعت



# بھارت کا آئین

## حصہ 4 الف

### بنیادی فرائض

#### حصہ 51 الف

بنیادی فرائض - بھارت کے ہر شہری کا یہ فرض ہوگا کہ وہ ...

- (الف) آئین پر کار بند رہے اور اس کے نصب اعین اور اداروں، قوی پرچم اور قومی ترانے کا احترام کرے۔
- (ب) ان اعلیٰ نصب اعین کو عزیز رکھے اور ان کی تقلید کرے جو آزادی کی تحریک میں قوم کی رہنمائی کرتے رہے ہیں۔
- (ج) بھارت کے اقتدار اعلیٰ، اتحاد اور سالمیت کو مستحکم بنیادوں پر استوار کر کے ان کا تحفظ کرے۔
- (د) ملک کی حفاظت کرے اور جب ضرورت پڑے قومی خدمت انجام دے۔
- (ه) مذہبی، لسانی اور علاقائی و طبقائی تفرقہات سے قطع نظر بھارت کے عوام انسان کے مابین یک جہتی اور عام بھائی چارے کے جذبے کو فروغ دے نیز ایسی حرکات سے باز رہے جن سے خواتین کے وقار کو ٹھیس پکپختی ہو۔
- (و) ملک کی ملی جلی ثقافت کی قدر کرے اور اُسے برقرار رکھے۔
- (ز) قدرتی ماحول کو جس میں جنگلات، جھیلیں، دریا اور جنگلی جانور شامل ہیں محفوظ رکھے اور بہتر بنائے اور جانداروں کے تینیں محبت و شفقت کا جذبہ رکھے۔
- (ح) دانشورانہ رویے سے کام لے کر انسان دوستی اور تحقیقی و اصلاحی شعور کو فروغ دے۔
- (ط) قومی جائداد کا تحفظ کرے اور تشدد سے گریز کرے۔
- (ی) تمام انفرادی اور اجتماعی شعبوں کی بہتر کارکردگی کے لیے کوشش رہے تاکہ قوم متواتر ترقی و کامیابی کی منازل طے کرنے میں سرگرم عمل رہے۔
- (ک) اگر ماں باپ یا ولی ہے، پچھے سال سے چودہ سال تک کی عمر کے اپنے بچے یا وارث، جیسی بھی صورت ہو، کے لیے تعلیم کے موقع فراہم کرے۔

سرکاری فیصلہ نمبر: ابھیاس - ۲۱۱۶ (پر نمبر ۷۳/۱۲) ایس ڈی - ۲۵ مئی ۲۰۱۶ء کے مطابق قائم کی گئی  
رابطہ کارکمیٹی کی موئیخہ ۲۹ دسمبر ۲۰۱۷ء کے منعقدہ نشست میں اس کتاب کو تعلیمی سال ۲۰۱۸-۱۹ سے درسی کتاب کے طور پر منظوری دی گئی۔

# ریاضی

آٹھویں جماعت



مہاراشراجیہ پاٹھیہ پنک زمی وابھیاس کرم سنہودھ منڈل، پونہ - ۳۱۱۰۰۳



اپنے اسہارٹ فون میں انسٹال کردہ Diksha App کے ذریعے درسی کتاب  
کے پہلے صفحے پر درج Q.R. code اسکین کرنے سے ڈیجیٹل درسی کتاب اور  
ہر سبق میں درج Q.R. code کے ذریعے متعلقہ سبق کی درس و تدریس کے  
لیے مفید سمعی و بصری ذرائع دستیاب ہوں گے۔

طبع اول : ۲۰۱۸ء (2018) © مہاراشراجیہ پستک نرمی وابھیاس کرم سنوھن منڈل، پونہ - ۳۱۱۰۰۳  
 اس کتاب کے جملہ حقوق مہاراشراجیہ پستک نرمی وابھیاس کرم سنوھن منڈل، پونہ کے حق میں محفوظ  
 ہیں۔ اس کتاب کا کوئی بھی حصہ ڈائرکٹر، مہاراشراجیہ پستک نرمی وابھیاس کرم سنوھن منڈل کی تحریری  
 اجازت کے بغیر شائع نہیں کیا جاسکتا۔

چوقا اصلاح شدہ ایڈیشن :  
 ۲۰۲۲ء (2022)

### Urdu Translators

Mr. Ansari Abdul Hameed Abdul Majeed  
 Mr. Ansari Badrudduja Shamsuddoha  
 Mr. Momin Al-Nasir Abdus Samad

### Co-ordinator (Urdu)

Khan Navedul Haque Inamul Haque  
 Special Officer for Urdu,  
 M.S. Bureau of Textbooks, Balbharati - Pune

### Co-ordinator (Marathi)

Smt. Ujwala S. Godbole  
 I/O. Special Officer for Mathematics  
 M.S. Bureau of Textbooks, Balbharati - Pune

### Urdu D.T.P. & Layout

Altaf Amcen (Sadan Graphics)  
 Malegaon-423203

### Cover, Art work & Computer Designing

Shri. Sandeep Koli, Artist, Mumbai

### Production

Shri Sachin Mehta (C.P.O)  
 Shri Sanjay Kamble (Production Officer)  
 Shri Prashant Harne (Asst. Production Officer)

### Paper

70, GSM Creamwove

### Print Order

### Printer

### Publisher

Shri Vivek Uttam Gosavi (Controller)  
 M.S. Bureau of Textbook Production,  
 Prabhadevi, Mumbai - 25

### ریاضی مضمون کی کمیٹی

- ❖ ڈاکٹر منگلا نارائیکر (صدر)
- ❖ ڈاکٹر شریمیتی بے شری اترے (رکن)
- ❖ ڈاکٹر وانا یک گوڈبو لے (رکن)
- ❖ شریمیتی پراجاتی گوکھلے (رکن)
- ❖ شری رما کانت سرو دے (رکن)
- ❖ شری سندیپ پنج بھائی (رکن)
- ❖ شریمیتی پوجا جادھو (رکن)
- ❖ شریمیتی اجولا گوڈبو لے (رکن سکریٹری)

### ریاضی مضمون کی مجلس عاملہ

- شریمیتی بے شری پورندرے
- شری راجندر چودھری
- شری پرمودھنوبھرے
- ڈاکٹر بھارتی سوناونے
- شری سندیش سوناونے
- شری گیانیشور ماشاکر
- شری پرتاپ کاشد
- شری سورنا دیش پانڈے
- شری شری پادیش پانڈے
- شری ملنند بھاکرے
- شری انپاپریٹ
- شری سرلیش داتے
- شری آمیش ریلے
- شری بنسی ہوا لے
- شری روہنی شرکے
- شری سدھیر پائل
- شری پرکاش جھینڈے
- شری لکشمی داون کر
- شری شری کانت رتن پارکھی
- شری سینیل شری واستو
- شری ارونڈ کمار تیواری
- شری ملے شام پتھی
- جناب انصاری عبدالحید عبدالحید
- جناب انصاری آریا بھڑے

## بھارت کا آئین

### تکمیل

ہم بھارت کے عوام متنانت و سنجیدگی سے عزم کرتے ہیں کہ بھارت کو  
ایک مقدار سماج وادی غیر مذہبی عوامی جمہوریہ بنائیں  
اور اس کے تمام شہریوں کے لیے حاصل کریں:  
النصاف، سماجی، معاشی اور سیاسی؛  
آزادی خیال، اظہار، عقیدہ، دین اور عبادت؛  
مساوات بے اعتبار حیثیت اور موقع،  
اور ان سب میں  
اُنخوت کو ترقی دیں جس سے فرد کی عظمت اور قوم کے اتحاد اور  
سامیکشیت کا تیقّن ہو؛  
انپی آئین ساز اسمبلی میں آج چھپیں نومبر ۱۹۴۹ء کو یہ آئین  
ذریعہ ہذا اختیار کرتے ہیں،  
وضع کرتے ہیں اور اپنے آپ پر نافذ کرتے ہیں۔

## راشتہ گپت

جن گن من - ادھ نایک جیہے ہے  
بھارت - بھاگیہ و دھاتا۔

پنجاب، سندھ، گجرات، مراٹھا  
در اوڑ، اُتکل، بنگ،

وِندھیہ، ہماچل، یمنا، گنگا،  
اُچھل جل دھ ترگ،

تو شبح نامے جاگے، تو شبح آشس ماگے،  
گاہے تو جیہے گا تھا،

جن گن منگل دایک جیہے ہے،  
بھارت - بھاگیہ و دھاتا۔

جیہے ہے، جیہے ہے، جیہے ہے،  
جیہے جیہے جیہے، جیہے ہے۔

## عہد

بھارت میرا ملک ہے۔ سب بھارتی میرے بھائی اور بھینیں ہیں۔

مجھے اپنے وطن سے پیار ہے اور میں اس کے عظیم و گونا گوں ورثے پر  
فخر محسوس کرتا ہوں۔ میں ہمیشہ اس ورثے کے قابل بننے کی کوشش کروں گا۔

میں اپنے والدین، استادوں اور بزرگوں کی عزت کروں گا اور ہر ایک  
سے خوش اخلاقی کا برتاؤ کروں گا۔

میں اپنے ملک اور اپنے لوگوں کے لیے خود کو وقف کرنے کی قسم کھاتا  
ہوں۔ اُن کی بہتری اور خوش حالی ہی میں میری خوشی ہے۔

## پیش لفظ

عزیز طلبہ!

آٹھویں جماعت میں آپ سب کا استقبال ہے۔

پہلی جماعت سے ساتویں جماعت تک کی درسی کتابوں کا آپ مطالعہ کرچکے ہیں۔ آٹھویں جماعت کی درسی کتاب آپ کو پیش کرتے ہوئے ہمیں بہت مسرت ہو رہی ہے۔

ہمیں توقع ہے کہ آپ مضمون ریاضی کو صحیح طور پر سمجھیں گے، دیگری سے لطف اٹھائیں گے، اس مقصد کے تحت اس درسی کتاب میں کچھ عملی سرگرمیاں اور ہندسی عمل دیے ہوئے ہیں، انھیں ضرور بہ ضرور انجام دیں۔ اس سے متعلق ایک دوسرے سے تبادلہ خیال کریں۔ جس کی مدد سے آپ ریاضی کی کچھ نئی خصوصیات سے روشناس ہوں گے۔

ہمیں امید ہے کہ آپ درسی کتاب کے ہر باب کو توجہ و انہاک سے پڑھیں گے۔ کوئی اکائی، ذیلی اکائی آپ کوٹھیک طور پر نہیں سمجھیں گے۔ آئے تو اس اندھہ، سر پرست یا دیگر طلبہ کی مدد میں۔ اس کے لیے اطلاعاتی مواصلاتی شیکنالوجی کی مدد بھی حاصل کریں۔ ہر باب کے آخر میں Q.R. Code دیا ہوا ہے۔ اس کا بھی استعمال کریں۔

باب میں اکائیوں کی وضاحت و تشریح سمجھیں آجائے تو مشقی سیٹ کی مثالیں حل کریں۔ مشق سے اکائیوں کے اہم نکات زیادہ بہتر طور پر سمجھیں آجائیں گے اور ذہن نشین ہو جائیں گے۔ مشقی سیٹ میں دی ہوئی مثالاں کی طرح کئی مثالیں آپ خود تیار کر سکیں گے۔ مشقی سیٹ میں تارے کی علامت والی مثالیں ذرا فکر انگیز اور چنوتی دینے والی ہیں، اسے ضرور حل کریں۔

ریاضی کے مطالعہ میں دی ہوئی معلومات کم دکھائی دے تب ذرا منطقی غور و فکر سے مزید نتیجے اخذ کیے جاسکتے ہیں۔ مثلاً مششوٹوں کی متماثلت کی آزمائشیں۔ آئندہ مطالعے میں ان آزمائشوں کا استعمال بڑے پیمانے پر ہونے والا ہے۔ اس کا مطالعہ باریک بینی سے کریں۔

روز مرہ زندگی میں مالی لین دین میں استعمال ہونے والے مرکب سود، رعایت۔ کمیشن، کرنی، منتظم وغیرہ منتظم مختلف اشکال کے رقبے، بعض سے ابعادی اجسام کے جسم وغیرہ کو اس کتاب میں سمجھایا گیا ہے۔

ریاضی کا مطالعہ کرنے کے دوران گذشتہ جماعتوں میں سیکھے ہوئے علم کا استعمال کیا جاتا ہے۔ لہذا مختلف اکائیوں میں اہم ضابطے، خصوصیت وغیرہ ’یہ میری سمجھ میں آگیا‘، عنوان کے تحت چوکون میں دیے ہوئے ہیں۔ اسے ذہن نشین کر لیں۔

آٹھویں جماعت کا سال، ابتدائی تعلیم کا آخری سال ہے۔ اس سال میں اچھا مطالعہ کر کے ثانوی تعلیم کے لیے نویں جماعت میں خود اعتمادی کے ساتھ داخلہ لیں۔ اس کے لیے آپ کو خلوص دل سے نیک تمنائیں۔



(ڈاکٹر اسیف مہمود)

ڈاکٹر

مہاراشٹر راجیہ پاٹھیہ پیٹک نرمٹی

وابحیاں کرم سنوڈھن منڈل، پونہ

پونہ :

مورخہ : ۱۸ اپریل ۲۰۱۸ء اکشیہ ترتیبیہ

بھارتیہ مشہی تاریخ : ۲۸ / چیت ۱۹۷۰

## آٹھویں جماعت - ریاضی کے درسی ماحصل

درسی ماحصل	درس میں تجویز کردہ تعلیمی عمل
طالب علم -	
08.71.01 تو اتر کے ذریعے ناطق اعداد کی جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم کی خصوصیات کی تعمیم کرتا ہے۔	تمام طلبہ کو ( مختلف ضرورتوں کے حامل بچوں کے ساتھ) انفرادی / جوڑی میں / اجتماعی طور پر عمل کرنے کی ترغیب دی جائے۔
08.71.02 دیے ہوئے دو ناطق اعداد کے درمیان زیادہ سے زیادہ ناطق اعداد معلوم کرتا ہے۔	● طاق اعداد کی تمام بنیادی اعمال کے ساتھ مثالیں معلوم کرنا اور ان اعمال میں تو اتر تلاش کرنا۔
08.71.03 مختلف طریقوں سے اعداد کے مرلخ، مکعب، جذر المرلخ اور جذر المکعب معلوم کرتا ہے۔	● مرلخ اعداد، جذر المرلخ، مکعب اعداد، جذر المکعب کے تو اتر معلوم کر کے صحیح اعداد کے قوت نما کے لیے اصول معلوم کرنا۔
08.71.04 صحیح اعداد کی قوت نما ولی مثالوں کو حل کرتا ہے۔	● ایسے موقع پیدا کرنا کہ آسان مساواتیں بنا سکیں اور آسان طریقے کا استعمال کر کے اسے حل کر سکیں، اس کے لیے ترغیب دینا۔
08.71.05 متغیر کا استعمال کر کے معنے اور روزمرہ زندگی سے مختلف مثالیں حل کرتا ہے۔	● اعداد کی توسعی خصوصیت پر مبنی ، دوالجراہی ارکان یا کشیر کنیوں کو ضرب کا تجربہ دینا اور مختلف الجراہی متاثله ( دالگی ) مساواتوں کو مثالوں سے تعمیم کرنا۔
08.71.06 الجراہی عبارتوں کی ضرب کرتا ہے۔	● دو اعداد کے اجزاء ضربی سابقہ علم کے ذریعے کرنا۔ مناسب عمل کی مدد سے الجراہی کشیر کنیوں کے اجزاء ضربی کی پیچان کرانا۔
08.71.07 $(3x^2 + 7)$ کی توسعی کی عبارتی مثالوں کو حل کرنے کے لیے الجراہی متاثله مساواتوں کا استعمال کرتا ہے۔	● فی صدی کا استعمال ذیل کے سب امور میں ہوتا ہے، چھوٹ (رعایت)، نفع - نقصان، GST کا تعارف، مفرد سود، مرکب سود وغیرہ کے لیے واقعات مہیا کرنا۔
08.71.08 رعایت اور مرکب سود کی مثالوں میں GST، اسی طرح نفع اور نقصان معلوم کرنے کے لیے فی صدی کے تصورات کا استعمال کرتا ہے۔	● مفرد سود بار بار معلوم کر کے مرکب سود کا ضابطہ معلوم کرنا۔ اس کے لیے مختلف مثالیں بنا کر دینا۔
08.71.09 چھپی ہوئی قیمت اور رعایت دی ہوئی ہوتی فی صدی رعایت معلوم کرتا ہے یا فروخت قیمت اور نفع دیا ہوا ہوتی فی صدی نفع معلوم کرتا ہے۔	● ایک رکن کا دوسرے رکن پر انعام ہوتا ہے، ایسے واقعات اور مثالیں مہیا کرنا۔ دونوں ارکان میں ایک کے اضافے سے دوسرے میں اضافہ ہوتا ہے یا ایک رکن کے اضافے سے دوسرے رکن میں کمی واقع ہوتی ہے۔ ایسے واقعات پیچانے کے لیے ان کو ترتیب دینا۔ مثال کے طور پر سواریوں کی رفتار میں اضافے سے ان کے فاصلہ طے کرنے کے لیے درکار وقت میں کمی واقع ہوتی ہے۔
08.71.10 مستقیم تغیر اور معکوس تغیر پر مبنی مثالیں حل کرتا ہے۔	● مختلف ذوارہلاۃ الاصلاء کے زاویوں کی خصوصیت کا استعمال کر کے ذوارہلاۃ الاصلاء کے زاویوں کی پیمائشوں کی جمع پر مبنی مثالیں حل کرتا ہے۔
08.71.11 ذوارہلاۃ الاصلاء کے زاویوں کی پیمائشوں کی تعلق کے لیے درکار وقت میں کمی واقع ہوتی ہے۔	● مختلف ذوارہلاۃ الاصلاء کے زاویے اور ضلعوں کی پیمائش کرنا اور ان کے درمیان تعلق کا تو اتر معلوم کرنا۔ ان کی تعمیم کر کے اصول و ضابطہ معلوم کرنا اور مثالوں کے ذریعے ان کی تصدیق کرنا۔
08.71.12 متوازی الاصلاء کی خصوصیات کی تصدیق کرتا ہے اور ان کے تعلق کو وجوہات دے کر واضح کرتا ہے۔	● متوازی الاصلاء کی خصوصیت، ذوارہلاۃ الاصلاء کی تشكیل کر کے، ان کے وتر بنا کر، ضلع اور زاویہ کی پیمائش کر کے تصدیق و جائز دیکھنے کے لیے کہنا اور وجہ بتانا۔
08.71.13 تو اتر کے ذریعے آئینلر (Euler's) کے ضابطے کی تصدیق کرتا ہے۔	
08.71.14 کمپاس (گنیوں) اور اسکیل پٹی کی مدد سے مختلف ذوارہلاۃ الاصلاء بناتا ہے۔	

## درس میں تجویز کردہ تعلیمی عمل

### درسی ماحصل

- 08.71.15 ترسیمی کاغذ/مرجعی جالی کا استعمال کر کے ذوزنقہ اور دیگر کثیر الاضلاع کے رقبے کا اندازہ لگاتا ہے اور ضابطے کا استعمال کر کے اس کی تصدیق کرتا ہے۔
- 08.71.16 کثیر الاضلاع کا رقبہ معلوم کرتا ہے۔
- 08.71.17 مکعب نما (مستطیلی منشور) اور استوانہ اشکال والی چیزوں کی سطحون کا رقبہ اور حجم معلوم کرتا ہے۔
- 08.71.18 ستونی ترسیم پڑھتا ہے اور اس کی تشریح کرتا ہے۔
- 08.71.19 دو متوازی خطوط اور ان کے تقاطع سے بننے والے زاویوں کی جوڑیوں کی خصوصیات کی تصدیق کرتا ہے۔
- 08.71.20 ضل ضل ضل، ضل راصل، راصل زا، وتر۔ ضلع؛ ان آزمائشوں کا استعمال کر کے مشتوں کی متماثلت کیوضاحت کرتا ہے۔
- 08.71.21 ترسیمی کاغذ یا مرجعی چوکوں والے چوکڑی کاغذ کا استعمال کر کے بند شکل کا اندازہ اور قبہ معلوم کرتا ہے۔
- 08.71.22 روزمرہ کاروبار میں حاصل شدہ تجربات سے جمع کردہ معطیات کا میانیہ معلوم کرتا ہے۔
- 08.71.23 فی صدی اور تیسی سوتونی ترسیم بناتا ہے۔ دیے ہوئے خط کے متوازی خط کھینچتا ہے۔

- ہندسی وسائل کی مدد سے مختلف ذواریۃ الاضلاع کی تشکیل کے عملی کام اور تجربات دینا۔
- ترسیمی کاغذ پر ذوزنقہ اور دیگر کثیر الاضلاع بنانا اور طلبہ کا مریع اکائیوں کو شمار کر کے اُن کا رقبہ طے کرنا۔
- مشکل اور مستطیل (مربع) کے رقبوں کا استعمال کر کے ذوزنقہ کا رقبہ معلوم کرنا۔
- مکعب، مکعب نما /مستطیلی منشور اور دائرہ ای استوانہ جیسی سے ابعادی اشکال کی سطحون کو پہچانا۔
- مکعب اور مکعب نما /مستطیلی منشور، دائرہ ای استوانہ کے سطحون کے رقبے کا ضابطہ، مستطیل، مریع اور دائرة کے رقبوں کے ضابطوں کا استعمال کر کے معلوم کرنا۔
- مکعب اور مکعب نما /مستطیلی منشور کے حجم، اکائی مکعب کا استعمال کر کے معلوم کرنا۔
- معطیات/شمارے جمع کرنا، اس کی جماعت بندی کرنا اور ستونی ترسیم بنانا۔
- دیے ہوئے معطیات کا میانیہ معلوم کرنا۔
- متماثلت کا نتیجہ پیشگی طے کر کے اور اشکال ایک دوسرے پر رکھ کر متماثلت کی خصوصیت کی تصدیق کرنا۔

### اساتذہ کے لیے ہدایت

آٹھویں جماعت کی درسی کتاب کا استعمال جماعت میں سوال و جواب، سرگرمی، بحث اور طلبہ سے مکالمہ، وغیرہ مختلف ذرائع سے کیا جانا ضروری ہے۔ اس لیے درسی کتاب کا تفصیلی مطالعہ کیجیے۔ مطالعہ کرنے کے دوران مدرسی کے نکیہ نظر سے اہم جملوں کو خط کشیدہ کیجیے۔ ان کے حوالہ جات سمجھنے کے لیے گذشتہ اور آئندہ جماعتوں کی درسی کتابوں اور دیگر وسائل کا مطالعہ کیجیے۔ اس کے لیے Q.R.Code پر دی ہوئی معلومات کا استعمال کیجیے۔

کتاب میں ہمارا ماحول، جغرافیہ، سائنس، معاشیات، ان تمام مضامین کا ریاضی سے ربط قائم کیا گیا ہے۔ ایسے کئی مضامین میں ریاضی کے تصورات کا استعمال ہوتا ہے۔ اساتذہ طلبہ کو بتائیں۔ اساتذہ طلبہ سے سرگرمی، پروجیکٹ اور تجربات کروائیں۔ اس طرح ریاضی کے لین دین میں استعمال کیوضاحت ہوگی اور اس کے سیکھنے کی اہمیت کا طلبہ کو واسطہ کرو۔ ریاضی کی کتاب میں تصورات کیوضاحت آسان زبان میں دی گئی ہے۔ مشقی سیٹ میں دی ہوئی مثالوں پر مختصر کئی مثالیں اساتذہ خود تیار کر کے طلبہ کو حل کرنے کے لیے اور انھیں بھی نئی مثالیں بنانے کی ترغیب دیں۔

طلبہ کے لیے بعض فکر انگیز اور چنوتی والے سوال تارے سے نشان زد کیے ہوئے ہیں۔ 'مزید معلومات کے لیے' عنوان کے تحت تھوڑی زیادہ معلومات دی ہوئی ہے۔ یہ معلومات ریاضی کے آئندہ مطالعہ کے دوران طلبہ کے لیے یقیناً فائدہ مند ثابت ہوں گی۔ ہمیں امید ہے کہ آٹھویں جماعت کی ریاضی کی درسی کتاب آپ کو یقیناً پسند آئے گی۔

# فہرست

## حصہ 1

06 سے 01	.1 ناطق اور غیر ناطق اعداد
13 سے 07	.2 متوازی خطوط اور تقاطع
18 سے 14	.3 قوت نما اور جذر المکعب
22 سے 19	.4 مثلث کا رتفاق اور وسطانیہ
28 سے 23	.5 توسمی ضابطے
34 سے 29	.6 الجبری عبارتوں کے اجزاء ضربی
40 سے 35	.7 تغیر
50 سے 41	.8 ذوار بعثۃ الاضلاع بنانا اور ذوار بعثۃ الاضلاع کی فتحیں
58 سے 51	.9 چھوٹ اور کمیشن
60 سے 59	● متفرق مجموعہ سوالات - 1

## حصہ 2

66 سے 61	.10 کشیر رکنیوں کی تقسیم
74 سے 67	.11 شماریات
80 سے 75	.12 یک متغیری مساواتیں
87 سے 81	.13 مششوش کی متماثلت
93 سے 88	.14 مرکب سود
105 سے 94	.15 رقبہ
113 سے 106	.16 سطح کا رقبہ اور حجم
118 سے 114	.17 دائرہ - وتر اور قوس
120 سے 119	● متفرق مجموعہ سوالات - 2

# ناطق اور غیرناطق اعداد

آئیے ذریاد کریں

ہم طبعی اعداد کے گروہ، مکمل اعداد کے گروہ اور صحیح اعداد کے گروہ اور ناطق اعداد کے گروہ کی شناخت کر چکے ہیں۔

صحیح اعداد کا گروہ

$$\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

مکمل اعداد کا گروہ

$$0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

طبعی اعداد کا گروہ

$$1, 2, 3, 4, \dots$$

ناطق اعداد کا گروہ

$$\frac{-25}{3}, \frac{10}{-7}, -4, 0, 3, 8, \frac{32}{3}, \frac{67}{5}, \text{ وغیرہ}$$

ناطق اعداد کا گروہ

$\frac{m}{n}$  کی صورت والے اعداد کو ناطق اعداد کہتے ہیں۔ بیہاں  $m$  اور  $n$  صحیح اعداد ہوتے ہیں لیکن  $n$  غیر صفر صحیح عدد ہے۔

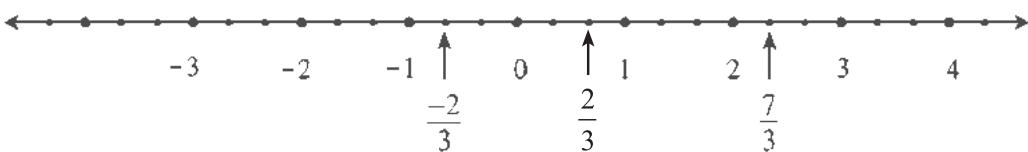
ہم جانتے ہیں کہ دو ناطق اعداد کے درمیان بے شمار ناطق اعداد ہوتے ہیں۔

آئیے سمجھیں

عددی خط پر ناطق عدد دکھانا (To show rational numbers on a number line)

اعداد  $\frac{-2}{3}$ ,  $2$ ,  $\frac{7}{3}$  کو عددی خط پر دکھائیں گے۔

پہلے ایک عددی خط کھینچیں گے۔



2 ناطق عدد ہے اور صحیح عدد بھی ہے۔ اسے عددی خط پر دکھائیں گے۔

$\frac{7}{3}$  یعنی صفر کے دائیں طرف ہر اکائی کے تین مساوی حصے کریں گے۔ صفر سے ساتواں نقطہ  $\frac{7}{3}$  عدد کو ظاہر کرتا ہے۔ یا

$\frac{7}{3}$  یعنی 2 عدد کے بعد  $\frac{1}{3}$  اکائی فاصلے پر واقع نقطہ  $\frac{7}{3}$  عدد کو ظاہر کرتا ہے۔

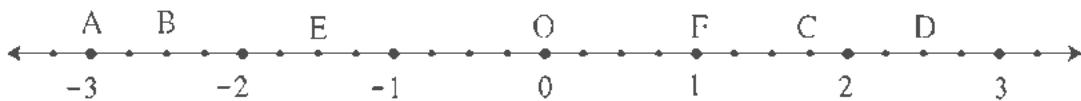
• عددی خط پر  $\frac{-2}{3}$  دکھانے سے قبل  $\frac{2}{3}$  عدد ظاہر کر کے 0 کے باینے جانب اتنے ہی فاصلے پر عدد  $\frac{-2}{3}$  ظاہر کیا جائے گا۔

### مشقی سیٹ 1.1

1. عددی خط پر درج ذیل ناطق اعداد دکھائیں۔ ہر مثال کے لیے علیحدہ عددی خط سمجھنی۔

- (1)  $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}$       (2)  $\frac{7}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{-4}{5}$       (3)  $\frac{-5}{8}, \frac{11}{8}$       (4)  $\frac{13}{10}, \frac{-17}{10}$

2. دیے ہوئے عددی خط کو دیکھ کر پوچھے گئے سوالوں کے جواب لکھیے۔



- (1) نقطہ B کس ناطق عدد کو ظاہر کرتا ہے؟  
 (2) عدد  $1\frac{3}{4}$  کس نقطے سے ظاہر کیا گیا ہے؟  
 (3) 'نقطہ' D سے ناطق عدد  $\frac{5}{2}$  کو ظاہر کیا گیا ہے، یہ بیان صحیح ہے یا غلط لکھیے۔



### ناطق اعداد میں ترتیبی تعلق (چھوٹا بڑا پن) (Comparison of rational numbers)

ہم جانتے ہیں کہ عددی خط پر اعداد کی ہر جوڑی میں باینے جانب کا عدد، دوainے جانب کے عدد سے چھوٹا ہوتا ہے۔ اسی طرح ناطق اعداد کے شمار لکنڈہ اور نسب نما کو کسی ایک غیر صفر عدد سے ضرب دیں تو عدد وہی رہتا ہے یا اس کی قیمت میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی۔

$$\text{یعنی } k \neq 0 \quad \frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$$

مثال (1)  $\frac{2}{3}$  اور  $\frac{5}{4}$  کے درمیان چھوٹا-بڑا پن طے کیجیے۔  $<$ ,  $=$ ,  $>$  ان میں سے مناسب علامت کا استعمال کیجیے۔

$$\frac{5}{4} = \frac{5 \times 3}{4 \times 3} = \frac{15}{12}, \quad \frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}$$

حل :

$$\therefore \frac{15}{12} > \frac{8}{12}, \quad \therefore \frac{5}{4} > \frac{2}{3}$$

**مثال (2)** ناطق اعداد  $\frac{4}{5}, \frac{-7}{9}$  کا موازنہ کیجیے۔

**حل :** منفی عدد ہمیشہ ثابت عدد سے چھوٹا ہوتا ہے۔ اس لیے  $-\frac{7}{9} < \frac{4}{5}$

دو منفی اعداد کا موازنہ کرنے کے لیے :

$a, b$  ثابت اعداد ہیں اگر  $a < b$  ہو تو  $-a > -b$  کا مشاہدہ کریں گے۔

$\left\{ \begin{array}{l} \text{ان اعداد کی عدی خط پر تصدیق کیجیے۔} \\ \text{لیکن } -2 > -3 \quad 2 < 3 \\ \frac{-5}{4} > \frac{-7}{4} \quad \text{لیکن } \frac{5}{4} < \frac{7}{4} \end{array} \right.$

**مثال (3)**  $\frac{-5}{2}, \frac{-7}{3}$  کا موازنہ کیجیے۔

**حل :** پہلے  $\frac{5}{2}$  اور  $\frac{7}{3}$  کا موازنہ کریں گے۔

$$\frac{7}{3} = \frac{7 \times 2}{3 \times 2} = \frac{14}{6}, \quad \frac{5}{2} = \frac{5 \times 3}{2 \times 3} = \frac{15}{6}, \quad \frac{14}{6} < \frac{15}{6}$$

$$\therefore \frac{7}{3} < \frac{5}{2}, \quad \therefore \frac{-7}{3} > \frac{-5}{2}$$

**مثال (4)**  $\frac{6}{10}$  اور  $\frac{3}{5}$  ناطق اعداد ہیں، ان کا موازنہ کیجیے۔

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{6}{10}, \quad \therefore \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$$

ناطق اعداد کا موازنہ کرتے وقت ذیل کے اصول استعمال کرنا مفید ہوتے ہیں۔

اور  $\frac{c}{d}$  ناطق اعداد میں اگر  $b$  اور  $d$  ثابت ہوں اور  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  ہو تو  $a \times d < b \times c$  اگر

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ہو تو  $a \times d = b \times c$  اگر

$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$  ہو تو  $a \times d > b \times c$  اگر

### مشقی سیٹ 1.2

درج ذیل اعداد میں چھوٹا۔ بڑا پن طے کیجیے۔ 1.

$$(1) -7, -2 \quad (2) 0, \frac{-9}{5} \quad (3) \frac{8}{7}, 0 \quad (4) \frac{-5}{4}, \frac{1}{4} \quad (5) \frac{40}{29}, \frac{141}{29}$$

$$(6) -\frac{17}{20}, \frac{-13}{20} \quad (7) \frac{15}{12}, \frac{7}{16} \quad (8) \frac{-25}{8}, \frac{-9}{4} \quad (9) \frac{12}{15}, \frac{3}{5} \quad (10) \frac{-7}{11}, \frac{-3}{4}$$

## آئیے سمجھ لیں

### ناطق اعداد کا عشری صورت میں اظہار (Decimal representation of rational numbers)

ناطق اعداد کے شمارکنندہ کو نسب نما سے تقسیم کرتے وقت عشری کسروں کا استعمال کریں تو اس عدد کی عشری صورت حاصل ہوتی ہے۔

مثلاً  $1.75 = \frac{7}{4}$ , یہاں 7 کو 4 سے تقسیم کرنے پر باقی صفر آتا ہے۔ تقسیم کرنے کا عمل مکمل ہو چکا ہے۔

ناطق اعداد کی ایسی عشری صورت کو مختتم عشری صورت کہتے ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ ہر ناطق عدد کو غیر مختتم متوازی عشری صورت میں لکھ سکتے ہیں۔

**مثالیں :**

$$(1) \frac{7}{6} = 1.1666\ldots = 1.\overset{\circ}{1}\overset{\circ}{6}$$

$$(2) \frac{5}{6} = 0.8333\ldots = 0.\overset{\circ}{8}\overset{\circ}{3}$$

$$(3) \frac{-5}{3} = -1.666\ldots = -1.\overset{\circ}{6}$$

$$(4) \frac{22}{7} = 3.142857142857\ldots = 3.\overline{142857} \quad (5) \frac{23}{99} = 0.2323\ldots = 0.\overline{23}$$

اسی طرح،  $\sqrt{0.75} = \sqrt{\frac{75}{100}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} = 1.75 = 1.75000\ldots = 1.\overset{\circ}{7}\overset{\circ}{5}$  مختتم صورت بھی غیر مختتم متوازی عشری صورت میں لکھ سکتے ہیں۔

### مشقی سیٹ 1.3

درج ذیل ناطق اعداد کو عشری صورت میں لکھیے۔

$$(1) \frac{9}{37}$$

$$(2) \frac{18}{42}$$

$$(3) \frac{9}{14}$$

$$(4) \frac{-103}{5}$$

$$(5) -\frac{11}{13}$$

## آئیے سمجھ لیں

### غیر ناطق اعداد (Irrational numbers)

ناطق اعداد کے علاوہ مزید کئی اعداد عددی خط پر ہوتے ہیں۔ وہ ناطق نہیں ہوتے، یعنی غیر ناطق ہوتے ہیں۔  $\sqrt{2}$  بھی ایک غیر ناطق عدد

ہے۔

ہم عدد  $\sqrt{2}$  کو عددی خط پر دکھائیں گے۔

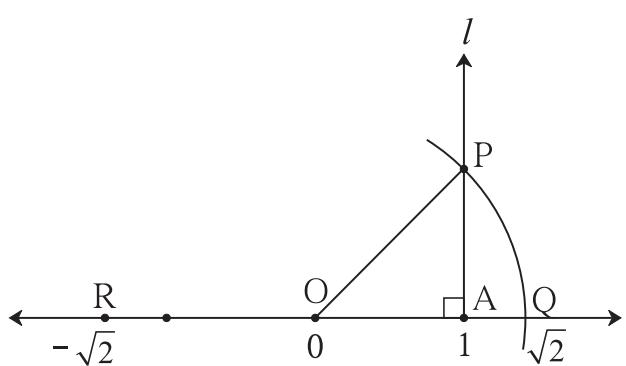
• عددی خط پر نقطہ A عدد 1 کو ظاہر کرتا ہے۔ عددی خط پر نقطہ A سے ایک عمودی خط  $l$  کھینچیے۔

خط  $l$  پر نقطہ P اس طرح لیجیے کہ اکامی  $OA = AP = 1$  ہو۔

خط OP کھینچیے۔  $\triangle OAP$  ایک قائمۃ الزاویہ مثلث بن گیا۔

فیٹا غورث کے مسئلے سے،

$$\begin{aligned} OP^2 &= OA^2 + AP^2 \\ &= 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$



$$OP^2 = 2$$

(طرفین کا جذر المربع لینے پر) ...

اب مرکز 'O' اور  $OP$  کے مساوی نصف قطر لے کر ایک قوس کچھی۔ وہ قوس عددی خط کو جہاں قطع کرتا ہے اس نقطے کو Q نام دیجیے۔  $OQ$  فاصلہ ہی  $\sqrt{2}$  ہے۔ یعنی عدد  $\sqrt{2}$  کو عددی خط پر Q نقطے سے ظاہر کیا گیا ہے۔  $OQ$  کے مساوی فاصلہ پر کار میں لے کر 'O' کے باائیں جانب نقطے R کا تعین کریں تو اس نقطے سے ظاہر کیا گیا عدد  $\sqrt{2}$  ہو گا۔

عدد  $\sqrt{2}$  غیر ناطق عدد ہے، اسے ہم آئندہ جماعت میں ثابت کریں گے۔ ناطق اعداد کی عشری صورت غیر مختتم اور غیر متواლی ہوتی ہے۔ اسے بھی ہم آئندہ جماعت میں دیکھیں گے۔

ذہن نشین کیجیے کہ -

3.14 گذشتہ جماعت میں ہم نے سیکھا کہ عدد  $\pi$  ناطق نہیں ہے یعنی وہ عدد غیر ناطق ہے۔ ہم اپنے کاروبار میں اس کی قیمت  $\frac{22}{7}$  یا لیتے ہیں لیکن اعداد  $\frac{22}{7}$  اور 3.14 ناطق ہیں۔

جن اعداد کو عددی خط پر نقاط سے دکھایا جاسکتا ہے، ان اعداد کو حقیقی اعداد (Real Numbers) کہتے ہیں۔ ہم نے دیکھا کہ تمام ناطق اعداد کو عددی خط پر دکھایا جاسکتا ہے۔ لہذا تمام ناطق اعداد حقیقی اعداد ہیں۔ اسی طرح بے شمار غیر ناطق اعداد بھی حقیقی اعداد ہیں۔

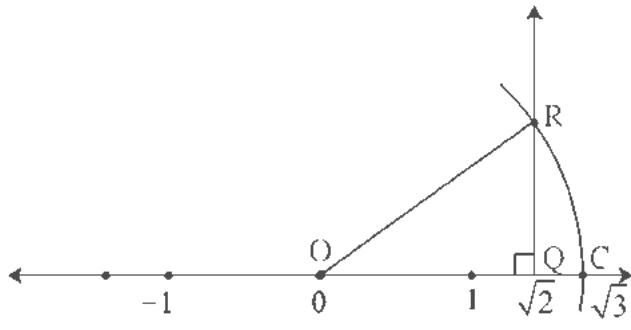
عدد  $\sqrt{2}$  غیر ناطق عدد ہے۔ اسے ذہن نشین کیجیے کہ  $3\sqrt{2}$ ،  $3\sqrt{2} + 7$ ،  $\sqrt{2} - 3$  وغیرہ تمام اعداد غیر ناطق ہیں۔ کیونکہ اگر  $3\sqrt{2}$  ناطق عدد ہو تو  $\frac{3\sqrt{2}}{3}$  ناطق ہونا چاہیے۔ لیکن یہ صحیح نہیں ہے۔

ہم ناطق اعداد کو عددی خط پر ظاہر کرنا دیکھیں چکے ہیں۔ اسی طرح غیر ناطق عدد  $\sqrt{2}$  کو بھی عددی خط پر ظاہر کر چکے ہیں۔ لہذا  $\sqrt{3}$ ،  $\sqrt{5}$ ، ... جیسے غیر ناطق اعداد کو بھی ہم عددی خط پر دکھاسکتے ہیں۔

### مشقی سیٹ 1.4

.1  $\sqrt{2}$  کو عددی خط پر دکھایا گیا ہے۔ اس کی مدد سے  $\sqrt{3}$  کو عددی خط پر دکھانے کے لیے ذیل کے عملی کام کے مرحلے دیے ہوئے ہیں، ان مرحلے کی خالی جگہوں کو مناسب طریقے سے پر کر کے عملی کام مکمل کیجیے۔

## عملی کام :



● عددی خط پر نقطہ Q ..... عدد کو ظاہر کرتا ہے۔

● نقطہ Q سے ایک عمودی خط کھینچا گیا ہے۔ اس خط پر ایک اکائی لمبائی دکھانے والا نقطہ R ہے۔

● OR کو جوڑنے سے  $\triangle ORQ$  ایک قائمۃ الزاویہ مشتمل حاصل ہوتا ہے۔

$$l(OQ) = \sqrt{2}, \quad l(QR) = 1 \quad \bullet$$

$\therefore$  فیثاغورٹ کے مسئلے سے،

$$[l(OR)]^2 = [l(OQ)]^2 + [l(QR)]^2$$

$$= \boxed{\phantom{0}}^2 + \boxed{\phantom{0}}^2 = \boxed{\phantom{0}} + \boxed{\phantom{0}}$$

$$= \boxed{\phantom{0}}, \quad \therefore l(OR) = \boxed{\phantom{0}}$$

OR کے مساوی فاصلہ لے کر کھینچا گیا تو س عدی خط کو جہاں قطع کرتا ہے، اس نقطے کو C نام دیجئے۔ نقطہ C کو ظاہر کرتا ہے۔

2. عددی خط پر  $\sqrt{5}$  دکھائیے۔

3\*. عددی خط پر  $\sqrt{7}$  دکھائیے۔

## جوابات کی فہرست

### مشقی سیٹ 1.1

2. (1)  $\frac{-10}{4}$

(2) C

(3) صحیح

### مشقی سیٹ 1.2

1. (1)  $-7 < -2$       (2)  $0 > \frac{-9}{5}$       (3)  $\frac{8}{7} > 0$       (4)  $\frac{-5}{4} < \frac{1}{4}$       (5)  $\frac{40}{29} < \frac{141}{29}$

(6)  $\frac{-17}{20} < \frac{-13}{20}$       (7)  $\frac{15}{12} > \frac{7}{16}$       (8)  $\frac{-25}{8} < \frac{-9}{4}$       (9)  $\frac{12}{15} > \frac{3}{5}$       (10)  $\frac{-7}{11} > \frac{-3}{4}$

### مشقی سیٹ 1.3

(1)  $0.\overline{243}$       (2)  $0.\overline{428571}$       (3)  $0.6\overline{428571}$       (4) -20.6

(5)  $-0.846153$



# متوالی خطوط اور تقاطع

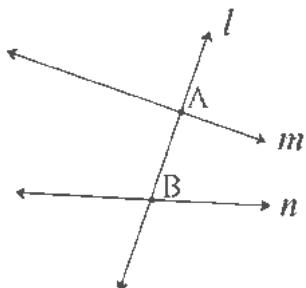
2

آئیے ذرا یاد کریں



ایک ہی مستوی میں واقع ایک دوسرے کو قطع نہیں کرنے والے خطوط متوازی خطوط کہلاتے ہیں۔  
خط  $l$  اور خط  $m$  متوازی خطوط ہیں، اسے 'Line  $l \parallel m$ ' کہتے ہیں۔

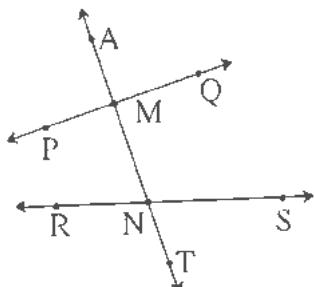
آئیے سمجھ لیں



تقاطع (Transversal)

بازو میں دی ہوئی شکل میں خط  $m$  اور خط  $n$  کو خط  $l$  بالترتیب نقطہ A اور نقطہ B دو متریق نقاط پر قطع کرتا ہے۔ خط  $m$  اور خط  $n$  کا خط  $l$  تقاطع ہے۔  
اگر کوئی خط دیے ہوئے دو خطوط کو دو مختلف نقاط پر قطع کرتا ہو تو اس خط کو ان دو خطوط کا  
تقاطع کہتے ہیں۔

تقاطع کے ذریعے بننے والے زاویے (Angles made by Transversal)



متصلہ شکل میں تقاطع کے ذریعے نقطہ تقاطع M پر چار اور نقطہ تقاطع N پر چار اس طرح کل 8 زاویے بننے والے دکھائی دیتے ہیں۔ آٹھوں زاویوں میں سے ہر ایک زاویے کی ایک ساق  
تقاطع پر ہے اور دوسری ساق دو میں سے کسی ایک خط پر ہے۔ اس کا استعمال کر کے زاویوں کی جوڑیاں طے کی گئی ہیں، ان جوڑیوں کا مطالعہ کریں گے۔

داخلی زاویے (Interior Angles)

زاویوں کی جس جوڑی میں زاویے دیے ہوئے دونوں خطوط کے اندر وہی جانب ہوتے ہیں۔ اس جوڑی کو داخلی زاویوں کی جوڑی کہتے ہیں۔

نظیری زاویے (Corresponding Angles)

زاویوں کی جس جوڑی میں زاویوں کی تقاطع پر کی ساق ایک ہی سمت ظاہر کرتی ہے اور جو ساق تقاطع پر نہیں ہے وہ تقاطع کے ایک ہی جانب ہوتی ہیں، اس جوڑی کو نظیری زاویوں کی جوڑی کہتے ہیں۔

مذکورہ بالا شکل میں داخلی زاویوں کی جوڑیاں —

$$\angle MNR \text{ اور } \angle PMN \quad (i)$$

$$\angle MNS \text{ اور } \angle QMN \quad (ii)$$

مذکورہ بالا شکل میں نظیری زاویوں کی جوڑیاں —

$$\angle MNR \text{ اور } \angle AMP \quad (i)$$

$$\angle RNT \text{ اور } \angle PMN \quad (ii)$$

$$\angle MNS \text{ اور } \angle AMQ \quad (iii)$$

$$\angle SNT \text{ اور } \angle QMN \quad (iv)$$

### • متبادلہ زاویے (Alternate Angles)

زاویوں کی ایسی جوڑی جس جوڑی میں زاویے تقاطع کے مقابلے میں اور تقاطع پر واقع ساق مخالف سمت ظاہر کرتی ہے، وہ جوڑی متبادلہ زاویوں کی جوڑی ہوتی ہے۔

شکل میں زاویوں کی دو جوڑیاں داخلی متبادلہ زاویوں کی ہیں تو دو جوڑیاں خارجی متبادلہ زاویوں کی ہے۔

خارجی متبادلہ زاویے

(خطوں کے بیرونی جانب والے زاویے)

$$\angle TNS \text{ اور } \angle AMP \quad (i)$$

$$\angle RNT \text{ اور } \angle AMQ \quad (ii)$$

داخلی متبادلہ زاویے

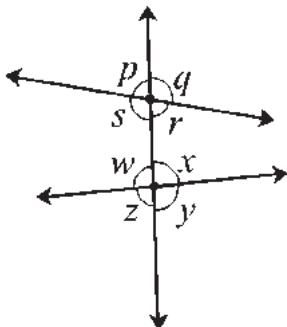
(خطوں کے اندر ونی جانب والے زاویے)

$$\angle MNS \text{ اور } \angle PMN \quad (i)$$

$$\angle RNM \text{ اور } \angle QMN \quad (ii)$$

### مشقی سیٹ 2.1

1. متعلہ شکل دیکھیے۔ شکل میں زاویوں کے نام ایک حرف سے ظاہر کیے گئے ہیں اس کی مدد سے خالی چوکوں پر لکھیے۔



نظیری زاویوں کی جوڑیاں

اور  $\angle q$  (2)  اور  $\angle p$  (1)

اور  $\angle s$  (4)  اور  $\angle r$  (3)

داخلی متبادلہ زاویوں کی جوڑیاں

اور  $\angle w$  (6)  اور  $\angle s$  (5)

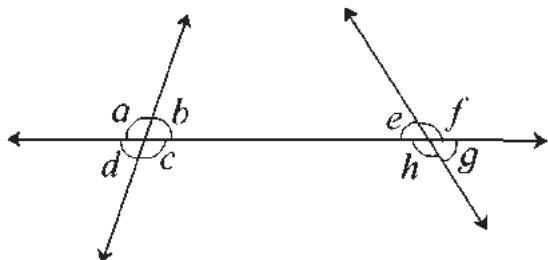
2. متعلہ شکل میں دکھائے ہوئے زاویے دیکھیے۔

درج ذیل جوڑیوں کو ظاہر کرنے والے زاویے لکھیے۔

داخلی متبادلہ زاویے (1)

نظیری زاویے (2)

داخلی زاویے (3)

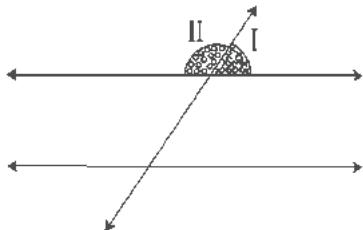


## دریں - آئیے سمجھ لیں

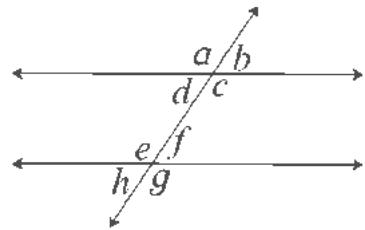
متوالی خطوط اور تقاطع کے ذریعے بننے والے زاویے اور ان کی خصوصیات :

**(Properties of angles formed by two parallel lines and transversal)**

**عملی کام (1)** ایک بیاض کے کاغذ پر شکل (A) میں دکھائے ہوئے کے مطابق دو متوالی خطوط کھینچیں اور ان کا تقاطع کھینچیں۔ ٹرینگ کاغذ کی مدد سے اسی شکل کی ایک نقل ایک سادے کاغذ پر کھینچیں۔ شکل (B) میں دکھائے ہوئے کے مطابق حصہ I اور حصہ II کو مختلف رنگوں سے رنگیے ان دونوں حصوں کو پیچھی سے کاٹیے۔



(B)



(A)

اسے ذہن نشیں رکھیے کہ حصہ I اور حصہ II سے دکھائے ہوئے زاویے خطی جوڑی میں ہیں۔ اب حصہ I اور حصہ II کو شکل A میں آٹھوں زاویوں میں سے ہر زاویے پر رکھ کر دیکھیے۔

کون کون سے زاویوں سے حصہ I مکمل طور پر منطبق ہوتا ہے؟

کون کون سے زاویوں سے حصہ II مکمل طور پر منطبق ہوتا ہے؟

ایسا دکھائی دے گا کہ، کیونکہ یہ زاویے حصہ I سے منطبق ہوتے ہیں۔  
 $\angle a \cong \angle c \cong \angle e \cong \angle g$  ، کیونکہ یہ زاویے حصہ II سے منطبق ہوتے ہیں۔

(یہ نیتیری زاویوں کی جوڑیاں ہیں) ...

(یہ داخلی تبادلہ زاویوں کی جوڑیاں ہیں) ...

(یہ خارجی تبادلہ زاویوں کی جوڑیاں ہیں) ...

(یہ داخلہ زاویوں کی جوڑیاں ہیں) ...

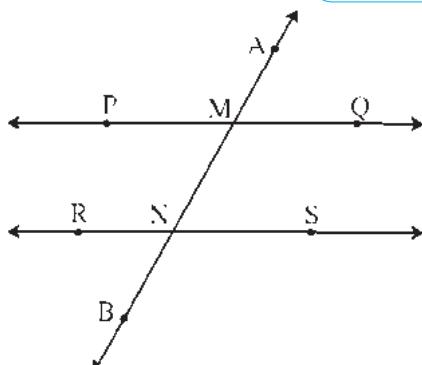
## دریں - آئیے بحث کریں

دو متوالی خطوط کو ایک تقاطع سے قطع کرنے پر آٹھ زاویے بنتے ہیں۔

ان آٹھ زاویوں میں سے ایک زاویے کی پیمائش دی ہو تو کیا دیگر سمات زاویوں کی پیمائش معلوم کی جاسکتی ہیں۔

## مدد - آئیے سمجھ لیں

### (1) نظیری زاویوں کی خصوصیت (Property of corresponding angles)



متوازی خطوط اور تقاطع کے ذریعے بننے والے نظیری زاویوں کی ہر جوڑی میں زاویے ایک دوسرے کے متماثل ہوتے ہیں۔

متصلہ شکل میں  $PQ \parallel RS$  خط  
خط AB اُن کا تقاطع ہے۔

نظیری زاویے

$$\angle AMP \cong \angle MNR, \angle PMN \cong \angle RNB$$

$$\angle AMQ \cong \angle MNS, \angle QMN \cong \angle SNB$$

### (3) داخلہ زاویوں کی خصوصیت (Property of Internal angles)

متوازی خطوط اور تقاطع سے بننے والے داخلہ زاویوں کی ہر جوڑی میں زاویوں کی پیمائش کا مجموعہ  $180^\circ$  ہوتا ہے۔

$$m\angle PMN + m\angle MNR = 180^\circ$$

$$m\angle QMN + m\angle MNS = 180^\circ$$

### (2) متبادلہ زاویوں کی خصوصیت (Property of alternate angles)

متوازی خطوط اور تقاطع سے بننے والے متبادلہ زاویوں کی ہر جوڑی میں زاویے ایک دوسرے کے متماثل ہوتے ہیں۔

داخلی متبادلہ زاویے

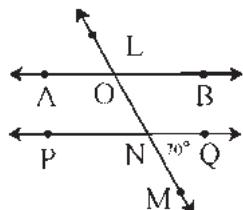
$$\angle AMP \cong \angle SNB$$

$$\angle AMQ \cong \angle RNB$$

$$\angle PMN \cong \angle MNS$$

$$\angle QMN \cong \angle MNR$$

## حل کردہ مثالیں



**مثال (1)** متصلہ شکل میں  $PQ \parallel AB$  خط اور

خط  $LM$  تقاطع ہے۔  $m\angle MNQ = 70^\circ$  ہو تو

$\angle AON$  کی پیمائش معلوم کیجیے۔

### طریقہ II

$$m\angle MNQ = 70^\circ$$

$$\therefore m\angle NOB = 70^\circ \quad \text{(نظیری زاویے)}$$

$$m\angle AON + m\angle NOB = 180^\circ \quad \text{(خطی جوڑی کے زاویے)}$$

$$\therefore m\angle AON + 70^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore m\angle AON = 110^\circ$$

### حل : طریقہ I

$$m\angle MNQ = m\angle ONP = 70^\circ \dots \text{(متبادلہ زاویے)}$$

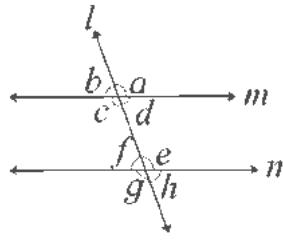
$$m\angle AON + m\angle ONP = 180^\circ \dots \text{(داخلہ زاویے)}$$

$$\therefore m\angle AON = 180^\circ - m\angle ONP$$

$$= 180^\circ - 70^\circ$$

$$= 110^\circ$$

(مزید مختلف طرح سے غور و خوض کر کے مندرجہ بالا سوال حل کیا جاسکتا ہے)



**مثال (2)** متصلہ شکل میں  $n$  خط  $\parallel m$  خط اور خط  $l$  تقاطع ہے۔  
اگر  $m\angle b = (x + 15)^\circ$  اور  $m\angle e = (2x + 15)^\circ$  ہو تو  $x$  کی قیمت معلوم کیجیے۔  
 $\angle b = \angle f$  ... (نظری زاویے)  
 $m\angle f + m\angle e = 180^\circ$  ... (خطی جوڑی کے زاویے)  
**حل :**  $m\angle f = m\angle b = (x + 15)^\circ$   
 $m\angle f + m\angle e = 180^\circ$

مساویات میں قیمت رکھ کر،

$$x + 15 + 2x + 15 = 180^\circ, \therefore 3x + 30 = 180^\circ$$

(طرفین سے 30 تفریق کرنے پر) ...

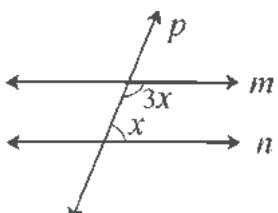
$$x = \frac{150^\circ}{3}$$

$$\therefore x = 50^\circ$$



- دو متوازی خطوط کو ایک تقاطع سے قطع کرنے پر بننے والے زاویوں میں سے  
نظری زاویوں کی ہر جوڑی میں زاویے متماثل ہوتے ہیں۔ متبادلہ زاویوں کی ہر جوڑی میں زاویے متماثل ہوتے ہیں۔  
داخلہ زاویوں کی ہر جوڑی میں زاویے ایک دوسرے کے ممکن ہوتے ہیں۔

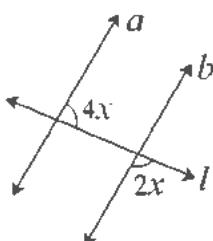
### مشقی سیٹ 2.2



1. مناسب متبادل منتخب کیجیے۔

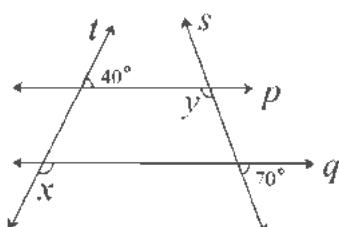
- (1) متصلہ شکل میں اگر  $n$  خط  $\parallel m$  خط ہو اور خط  $p$  ان کا تقاطع ہو تو  $x$  کی قیمت کتنی ہے؟

(A)  $135^\circ$       (B)  $90^\circ$       (C)  $45^\circ$       (D)  $40^\circ$

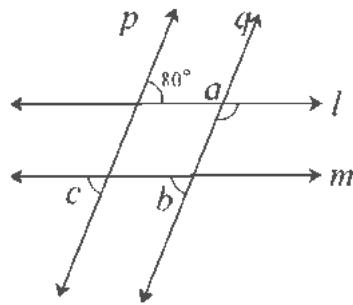


- (2) متصلہ شکل میں اگر  $b$  خط  $\parallel a$  خط ہو اور خط  $l$  ان کا تقاطع ہو تو  $x$  کی قیمت کتنی ہے؟

(A)  $90^\circ$       (B)  $60^\circ$       (C)  $45^\circ$       (D)  $30^\circ$

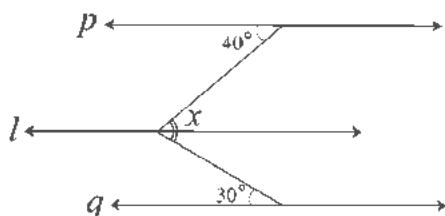
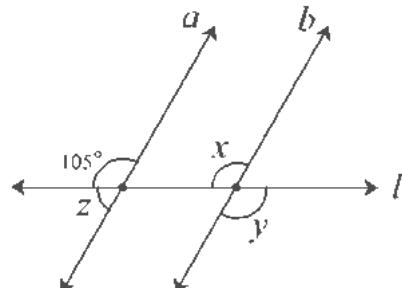


- .2 متصلہ شکل میں  $q$  خط  $\parallel p$  خط ہے۔ خط  $t$  اور خط  $s$  تقاطع ہیں۔  
دی ہوئی پیمائش کی مدد سے  $\angle x$  اور  $\angle y$  کی پیمائش معلوم کیجیے۔



3. متصلہ شکل میں  $q \parallel p$  خط  $\parallel l$  خط ہے۔  $m$  خط  $\parallel l$  خط ہے۔ دیے ہوئے زاویے کی پیمائش کی مدد سے  $\angle c$ ,  $\angle b$ ,  $\angle a$ ,  $\angle d$  کی پیمائش معلوم کیجیے، وجہ بھی لکھیے۔

- 4\*. متصلہ شکل میں  $b \parallel a$  خط اور  $l$  خط تنازع ہے۔ دیے ہوئے زاویے کی پیمائش کی مدد سے  $\angle z$ ,  $\angle y$ ,  $\angle x$  کی پیمائش معلوم کیجیے۔



- 5\*. متصلہ شکل میں  $a$  خط  $\parallel q$  خط ہے اور دی ہوئی پیمائشوں کی مدد سے  $x$  کی پیمائش معلوم کیجیے۔

مزید معلومات کے لیے :  
ایک مستوی میں واقع دو خطوط کو ایک تنازع سے قطع کرنے پر بنے والے —  
• نظری زاویوں کی ایک جوڑی متماثل ہوتا وہ خطوط متوازی ہوتے ہیں۔  
• متبادلہ زاویوں کی ایک جوڑی متماثل ہوتا وہ خطوط متوازی ہوتے ہیں۔  
• داخلہ زاویوں کی ایک جوڑی متمم ہوتا وہ خطوط متوازی ہوتے ہیں۔

### (To draw a line parallel to the given line) دیے ہوئے خط کے متوازی خط کھینچنا

**عمل (I) :** دیے ہوئے خط کے باہر واقع نقطہ سے گنجائی کی مدد سے دیے ہوئے خط کے متوازی خط کھینچنا۔

**طریقہ I :** عمل کے مرحل

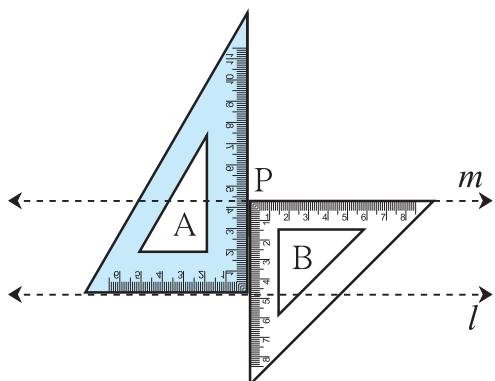
(1) خط  $l$  کھینچیں۔

(2) خط  $l$  کے باہر ایک نقطہ P لیجیے۔

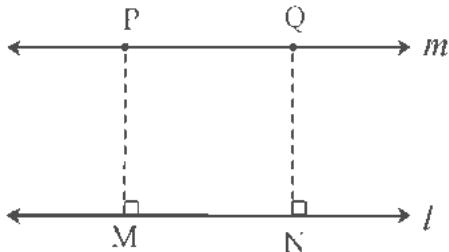
(3) شکل میں دکھائے ہوئے کے مطابق دو گنجائی ایک دوسرے سے مس کر کر رکھیے۔ گنجائی A اور B کو پکڑ کر رکھیے۔ گنجائی B کا کنارا نقطہ P پر ہے اس سرے (کنارے) پر خط کھینچیں۔

(4) اس خط کو  $m$  نام دیجیے۔

(5) خط  $m$ , خط  $l$  کے متوازی ہے۔



### طریقہ II : عمل کے مرال :



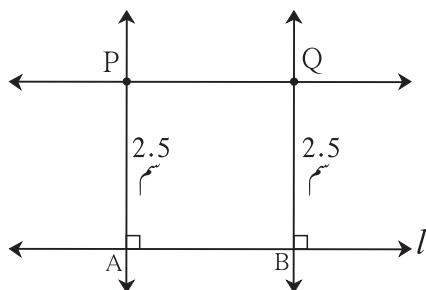
- (1) خط l کھینچی۔ اس خط کے باہر ایک نقطہ P لیجئے۔
- (2) نقطہ P سے خط l پر خط PM ایک عمود کھینچی۔
- (3) خط l پر ایک دوسرا نقطہ N لیجئے۔
- (4) نقطہ N سے ایک عمودی خط NQ، خط l پر کھینچی۔

$$NQ = MP$$

(5) نقاط P اور Q سے گذرنے والا خط m دیے ہوئے خط l کے متوازی ہے۔

**عمل (II) :** دیے ہوئے خط سے دیے ہوئے فاصلہ پر متوازی خط کھینچنا۔

**طریقہ :** خط l سے 2.5 سم فاصلے پر متوازی خط کھینچی۔



- (1) خط l کھینچی۔
- (2) خط l پر A اور B دونوں نقطے لیجئے۔
- (3) نقطہ A اور نقطہ B سے خط l پر عمود کھینچی۔
- (4) اس خط پر، نقطہ A اور نقطہ B سے 2.5 سم فاصلے پر نقطہ P اور نقطہ Q لیجئے۔
- (5) خط PQ کھینچی۔

(6) خط PQ، خط l سے 2.5 سم فاصلے پر واقع متوازی خط ہے۔

### مشقی سیٹ 2.3

1. خط l کھینچی۔ اس خط کے باہر نقطہ A لیجئے۔ نقطہ A سے گذرنے والا اور خط l کے متوازی ایک خط کھینچی۔
2. خط l کھینچی۔ اس کے باہر نقطہ T لیجئے۔ نقطہ T سے گذرنے والا اور خط l کے متوازی ایک خط کھینچی۔
3. خط m کھینچی اور اس خط سے 4 سم فاصلے سے متوازی خط n کھینچی۔

### جوابات کی فہرست

**2.1 مشقی سیٹ** 1. (1)  $\angle w$  (2)  $\angle x$  (3)  $\angle y$  (4)  $\angle z$  (5)  $\angle x$  (6)  $\angle r$

2. (1)  $\angle c \text{ اور } \angle e, \angle b \text{ اور } \angle h$  (2)  $\angle a \text{ اور } \angle e, \angle b \text{ اور } \angle f, \angle c \text{ اور } \angle g, \angle d \text{ اور } \angle h$   
 (3)  $\angle c \text{ اور } \angle h, \angle b \text{ اور } \angle e$

**2.2 مشقی سیٹ** 1. (1) C (2) D 2.  $\angle x = 140^\circ, \angle y = 110^\circ$

3.  $\angle a = 100^\circ, \angle b = 80^\circ, \angle c = 80^\circ$

4.  $\angle x = 105^\circ, \angle y = 105^\circ, \angle z = 75^\circ$  5.  $\angle x = 70^\circ$



## قوت نما اور جذر المکعب

آئیے ذرا یاد کریں

گذشتہ جماعت میں ہم نے قوت نما اور ان کے اصولوں کا مطالعہ کر لے چکے ہیں۔

اس ضریبی صورت میں دیے ہوئے عد کو مختصرًا  $2^5$  لکھتے ہیں۔

یہاں 2 اساس (قاعدہ) اور 5 قوت نما ہے۔  $2^5$  یہ قوت نمائی عدد ہے۔

قوت نمائی کے اصول :  $m$  اور  $n$  صحیح اعداد ہوں تو

$$(i) a^m \times a^n = a^{m+n} \quad (ii) a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (iii) (a \times b)^m = a^m \times b^m \quad (iv) a^0 = 1$$

$$(v) a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad (vi) (a^m)^n = a^{mn} \quad (vii) \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \quad (viii) \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$$

قوت نمائی کے اصول کا استعمال کر کے درج ذیل مثالوں میں خالی چکونوں کو مناسب عدد سے پر بکھیے۔

$$(i) 3^5 \times 3^2 = 3^{\square} \quad (ii) 3^7 \div 3^9 = 3^{\square} \quad (iii) (3^4)^5 = 3^{\square}$$

$$(iv) 5^{-3} = \frac{1}{5^{\square}} \quad (v) 5^0 = \square \quad (vi) 5^1 = \square$$

$$(vii) (5 \times 7)^2 = 5^{\square} \times 7^{\square} \quad (viii) \left(\frac{5}{7}\right)^3 = \frac{\square^3}{\square^3} \quad (ix) \left(\frac{5}{7}\right)^{-3} = \left(\frac{\square}{\square}\right)^3$$

آئیے سمجھ لیں

ناطق قوت نمائی اعداد کا مطلب (The number with rational index)

(I) کسی عدد کا قوت نما  $\frac{1}{n}$  ہو تو ایسے ناطق عدد کا مطلب

اعداد کا قوت نما  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$  صورت میں ہو تو ایسے ناطق اعداد کا مطلب سمجھیں گے۔

کسی عدد کا مریخ ظاہر کرنے کے لیے اس کا قوت نما 2 لکھتے ہیں اور عدد کے جذر المریخ کو ظاہر کرنے کے لیے اس کی قوت نما  $\frac{1}{2}$  لکھتے ہیں۔

مثلاً 25 کے جذر المریخ کو ' $\sqrt{\cdot}$ '، جذر کی علامت کا استعمال کر کے ہم  $\sqrt{25}$  لکھتے ہیں۔

قوت نمائی کا استعمال کر کے اس عدد کو  $25^{\frac{1}{2}}$  لکھتے ہیں۔ لہذا  $25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25}$

عام طور پر عدد  $a$  کے مریخ کو  $a^2$  لکھتے ہیں تو  $a$  کے جذر المریخ کو  $\sqrt{a}$  یا  $\sqrt[2]{a}$  یا  $a^{\frac{1}{2}}$  لکھتے ہیں۔

اسی طرح عدد  $a$  کے مکعب کو  $a^3$  لکھتے ہیں تو  $a$  جذر المکعب کو  $\sqrt[3]{a}$  یا  $a^{\frac{1}{3}}$  لکھتے ہیں۔

$$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64 \quad \text{جیسے،}$$

$64^{\frac{1}{3}} = 4$  کے جذرالملکعب کو  $(64)^{\frac{1}{3}}$  یا  $\sqrt[3]{64}$  لکھتے ہیں۔ ذہن نشین رکھیے کہ

یعنی  $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 = 243$  کی 5 دویں قوت 243 ہے۔

اس کے برعکس 243 کے پانچویں جذر کو  $(243)^{\frac{1}{5}}$  یا  $\sqrt[5]{243}$  لکھتے ہیں۔

$$\therefore (243)^{\frac{1}{5}} = 3$$

عام طور پر  $a$  کے  $n$  ویں جذر کو  $a^{\frac{1}{n}}$  لکھتے ہیں۔ مثلاً

$$(i) \quad 128^{\frac{1}{7}} \text{ کا 7 واں جذر} = 128$$

$$(ii) \quad 900^{\frac{1}{12}} \text{ کا 12 واں جذر} = 900$$

$$x^5 = 10 \text{ ہو تو } 10^{\frac{1}{5}} = x \quad \text{ذہن نشین رکھیے کہ}$$

### مشقی سیٹ 3.1

1. قوت نما کا استعمال کر کے ذیل کے عدد لکھیے۔

$$(1) \quad 13 \text{ کا 5 واں جذر} = 256 \quad (3)$$

$$(2) \quad 9 \text{ کا چھٹا جذر} = 256 \text{ کا جذرالمربع}$$

$$(4) \quad 17 \text{ کا جذرالملکعب} = 30 \text{ کا آٹھواں جذر} \quad (6)$$

$$(5) \quad 100 \text{ کا ساتواں جذر} = 30 \text{ کا ساتواں جذر}$$

درج ذیل قوت نمائی عدہ، کس عدد کا کون سا جذر ہے۔ اسے لکھیے۔

2.

$$(1) \quad (81)^{\frac{1}{4}} \quad (2) \quad 49^{\frac{1}{2}} \quad (3) \quad (15)^{\frac{1}{5}} \quad (4) \quad (512)^{\frac{1}{9}} \quad (5) \quad 100^{\frac{1}{19}} \quad (6) \quad (6)^{\frac{1}{7}}$$

(II) کسی عدد کا قوت نما  $\frac{m}{n}$  ہو تو ایسے ناطق عدد کا مطلب

$$8^2 = 64 \quad \text{ہم جانتے ہیں کہ،}$$

$$64 = (64)^{\frac{1}{3}} = (8^2)^{\frac{1}{3}} = 4 \quad \text{کا جذرالملکعب}$$

اسی طرح، ... (I) ... کے مرربع کا جذرالملکعب

$$8 = 8^{\frac{1}{3}} = 2 \quad \text{کا جذرالملکعب}$$

... (II) ... کے جذرالملکعب کا مرربع

اوہ (I) کی مدد سے،

8 کے جذرالملکعب کا مرربع = 8 کے مرربع کا جذرالملکعب

$$\text{یعنی } (8^2)^{\frac{1}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 \text{ سمجھ میں آتا ہے۔}$$

قوت نما صبح عدد ہو تو جو قوت نما کے اصول ہیں وہی اصول ناطق قوت نما والے اعداد کے لیے بھی ہیں۔

اس لیے  $(8^2)^{\frac{1}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 8^{\frac{2}{3}}$ ، اصول استعمال کر کے

اس بنا پر  $8^{\frac{2}{3}}$  کا مطلب دو طرح بتا سکتے ہیں۔

$$(i) \quad 8^{\frac{2}{3}} = (8^2)^{\frac{1}{3}} = 8 \quad (ii) \quad 8^{\frac{2}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 8 \quad \text{کے جذرالملکعب کا مرربع} =$$

اسی طرح  $27^{\frac{4}{5}}$  یعنی  $27^{\frac{4}{5}} = \left(27^{\frac{1}{5}}\right)^4$  کی چوتھی قوت کا پانچواں جذر اور  $27^{\frac{4}{5}}$  یعنی  $27^{\frac{4}{5}} = (27^4)^{\frac{1}{5}}$  ویں جذر کی چوتھی قوت، اس طرح دو مطلب ہوتے ہیں۔

عام طور پر  $a^{\frac{m}{n}}$  کا مطلب دو طرح سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^m \text{ ویں قوت کا } n \text{ وال جذر}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{1}{n} m} \text{ کے } n \text{ وال جذر کی } m \text{ ویں قوت}$$

### مشتق سیٹ 3.2

1. درج ذیل جدول مکمل کیجیے۔

نمبر شمار	عدد	کس جذر کی کون سی قوت	کس قوت کا کون سا جذر
(1)	$(225)^{\frac{3}{2}}$	225 کے جذر المربع کا مکعب	225 کے مکعب کا جذر المربع
(2)	$(45)^{\frac{4}{5}}$		
(3)	$(81)^{\frac{6}{7}}$		
(4)	$(100)^{\frac{4}{10}}$		
(5)	$(21)^{\frac{3}{7}}$		

2. ناطق قوت نما کی صورت میں ظاہر کیجیے۔

- (1) 121 کے پانچویں قوت کا جذر المربع (2) 324 کے چوتھے جذر المربع کا مکعب
- (3) 264 کے مربيع کا پانچواں جذر (4) 3 کے جذر المکعب کا مکعب



● 4  $\times$  4 = 16 یعنی  $16 = 4^2$  اسی طرح  $16 = (-4)^2$  کا ایک ثابت اور دوسرا منفی، یعنی دو جذر المربع ہیں۔

ایسا فرض کر لیا گیا ہے کہ 16 کا ثابت جذر المربع  $\sqrt{16}$  اور 16 کا منفی جذر المربع  $-\sqrt{16} = -4$  سے ظاہر کرتے ہیں۔

● ہر ثابت عدد کے دو جذر المربع ہوتے ہیں۔

● عدد صفر کا جذر المربع صفر ہوتا ہے۔

## آئیے سمجھیں

### مکعب اور جذر المکعب (Cube and Cube Root)

کسی عدد کو تین مرتبہ لے کر ان کی ضرب کریں تو حاصل ضرب، اس عدد کا مکعب ہوتا ہے۔ مثلاً  $6 \times 6 \times 6 = 6^3$  یعنی 6 کا مکعب 216 ہے۔

ناطق اعداد کا مکعب کرنا :

**مثال (1) :**  $\left(-\frac{2}{5}\right)$  کا مکعب کیجیے۔

$$\begin{aligned} \left(-\frac{2}{5}\right)^3 &= \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) \\ &= -\frac{8}{125} \end{aligned}$$

**مثال (2) :**  $-6$  کا مکعب کیجیے۔

$$\begin{aligned} (-6)^3 &= (-6) \times (-6) \times (-6) \\ &= -216 \end{aligned}$$

**مثال (3) :** 17 کا مکعب کیجیے۔

$$\begin{aligned} 17^3 &= 17 \times 17 \times 17 \\ &= 4913 \end{aligned}$$

**مثال (4) :**  $(0.02)$  کا مکعب کیجیے۔

$$\begin{aligned} (0.02)^3 &= 0.02 \times 0.02 \times 0.02 \\ &= 0.000008 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1.2)^3 &= 1.2 \times 1.2 \times 1.2 \\ &= 1.728 \end{aligned}$$

**مثال (5) :**  $(1.2)$  کا مکعب کیجیے۔



مثال (1) میں 17 ثابت عدد ہے۔ اس عدد کا مکعب 4913 بھی ثابت ہے۔

مثال (2) میں 6 کا مکعب 216 ہے۔ مزید کچھ مثبت اور منفی عدد لے کر ان کا مکعب کر کے دیکھیے۔ اس کی مدد سے کسی عدد کی علامت اور اس عدد کے مکعب کی علامت کے درمیان جو تعلق دکھائی دیتا ہے اسے معلوم کیجیے۔

مثال (4) اور (5) میں دیے ہوئے اعداد میں عشری علامت کے بعد آنے والے ہندسوں کی تعداد اور اس عدد کے مکعب میں آنے والی عشری علامت کے بعد کے ہندسوں کی تعداد میں کون سا تعلق پایا جاتا ہے؟

### جذر المکعب معلوم کرنا

ہم دیے ہوئے عدد کے مفرد اجزاء کے ضربی کے طریقے سے جذر المربع معلوم کرنا سیکھو چکے ہیں، اسی طریقے سے جذر المکعب معلوم کریں گے۔

**مثال (1) :** 216 کا جذر المکعب معلوم کیجیے۔

**حل :** پہلے 216 کے مفرد اجزاء کے ضربی معلوم کریں گے۔

$$216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$$

3 اور 2 جزو ضربی ہر ایک 3 مرتبہ آئے ہیں، لہذا ان کو ایک-ایک مرتبہ لے کر ذیل کے مطابق گروہ بنائیں گے۔

$$\therefore 216 = (3 \times 2) \times (3 \times 2) \times (3 \times 2) = (3 \times 2)^3 = 6^3$$

$$\therefore \sqrt[3]{216} = 6 , \text{ یعنی } (216)^{\frac{1}{3}} = 6$$

**مثال (4) :**  $\sqrt[3]{0.125}$  معلوم کیجیے۔

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{0.125} &= \sqrt[3]{\frac{125}{1000}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{1000}} \dots \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \\ &= \frac{\sqrt[3]{5^3}}{\sqrt[3]{10^3}} \dots \left(a^m\right)^{\frac{1}{m}} = a \\ &= \frac{5}{10} = 0.5\end{aligned}$$

**حل :**

1331 کا جذر المکعب معلوم کرنے کے لیے پہلے 1331 کا مفرد اجزاء ضربی معلوم کریں گے۔

$$1331 = 11 \times 11 \times 11 = 11^3$$

$$-1331 = (-11) \times (-11) \times (-11)$$

$$= (-11)^3$$

$$\therefore \sqrt[3]{-1331} = -11$$

**مثال (3) :** 1728 کا جذر المکعب معلوم کیجیے۔

**حل :**

$$1728 = 8 \times 216 = 2 \times 2 \times 2 \times 6 \times 6 \times 6$$

$$\therefore 1728 = 2^3 \times 6^3 = (2 \times 6)^3 \dots [\because a^m \times b^m = (a \times b)^m]$$

$$\therefore \sqrt[3]{1728} = 2 \times 6 = 12$$

(ذہن نشین کیجیے کہ 1728 کا جذر المکعب 12 آتا ہے۔)

### مشقی سیٹ 3.3

.1 درج ذیل اعداد کا جذر المکعب معلوم کیجیے۔

- (1) 8000      (2) 729      (3) 343      (4) -512      (5) -2744      (6) 32768

.2 جذر المکعب معلوم کیجیے :

$$(1) \sqrt[3]{\frac{27}{125}} \quad (2) \sqrt[3]{\frac{16}{54}}$$

.3 اگر  $\sqrt[3]{0.000729} = ?$  ہو تو کتنا?

### جوابات کی فہرست

- 3.1** 1. (1)  $13^{\frac{1}{5}}$  (2)  $9^{\frac{1}{6}}$  (3)  $256^{\frac{1}{2}}$  (4)  $17^{\frac{1}{3}}$  (5)  $100^{\frac{1}{8}}$  (6)  $30^{\frac{1}{7}}$

2. کا پانچواں جذر (3) 49 کا جذر المربع (1) 15

کا ساتواں جذر (6) 100 کائنیواں جذر (5) 512 کانواں جذر (4)

**مشقی سیٹ 3.2 :** 1. کے پانچوں جذر کی چوتھی قوت، 45 کی چوتھی قوت کا پانچواں جذر

81 کے ساتویں جذر کی چھٹی قوت، 81 کی چھٹی قوت کا ساتواں جذر

100 کے 10 ویں جذر کی چوتھی قوت، 100 کی چوتھی قوت کا دسوال جذر

21 کے ساتویں جذر کی تیسرا قوت، 21 کی تیسرا قوت کا ساتواں جذر

$$2. (1) (121)^{\frac{5}{2}} \quad (2) (324)^{\frac{3}{4}} \quad (3) (264)^{\frac{2}{5}} \quad (4) 3^{\frac{3}{3}}$$

- 3.3** 1. (1) 20 (2) 9 (3) 7 (4) -8 (5) -14 (6) 32

- □ □ 2. (1)  $\frac{3}{5}$  (2)  $\frac{2}{3}$  3. 0.09



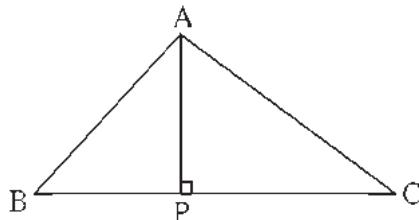
## مثلث کا ارتفاع اور سلطانیہ

آئیے ذرا یاد کریں

گذشتہ جماعت میں ہم مطالعہ کرچکے ہیں کہ مثلث کے تینوں زاویوں کے ناصف متراکز ہوتے ہیں، مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف متراکز ہوتے ہیں۔ ہمیں یہ بھی معلوم ہے کہ ان کے نقطہ تراکز کو بالترتیب داخلی مرکز اور حاطم مرکز کہتے ہیں۔

**عملی کام :** ایک خط کھینچیے۔ خط کے باہر کوئی بھی ایک نقطہ لیجیے۔ گنی کی مدد سے اس نقطے سے خط پر عمود کھینچیے۔

آئیے سمجھیں

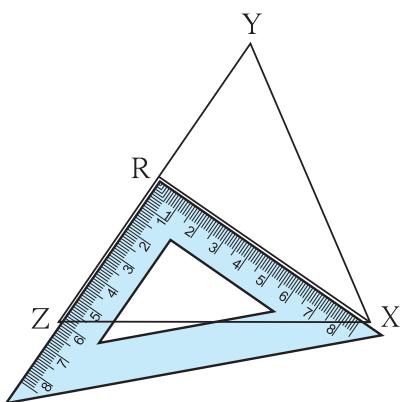


ارتفاع (Altitude)

مثلث کے کسی بھی راس سے اس سے اس کے مقابل کے ضلع پر کھینچے گئے عمودی قطعہ خط کو اس

مثلث کا ارتفاع کہتے ہیں۔  $\triangle ABC$  میں قطعہ AP قاعدہ BC پر ارتفاع ہے۔

مثلث کا ارتفاع کھینچنا :

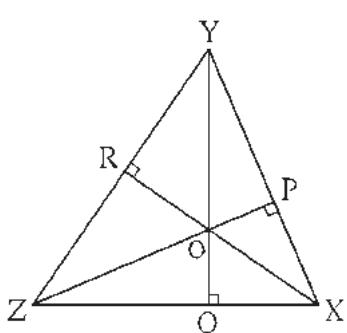


1.  $\triangle XYZ$  کوئی ایک مثلث بنائیے۔

2. قاعدہ YZ کے مقابل کے راس X سے گنیا کی مدد سے عمود کھینچیے۔ وہ YZ کو جس مقام پر قطع کرتا ہے اس نقطہ کو R نام دیجیے۔ قطعہ XR، قاعدہ YZ پر ارتفاع ہے۔

3. قطعہ XZ کو قاعدہ تصور کریں اور راس کے مقابل کے راس Y سے قطعہ XZ پر عمود کھینچیں تب XZ قطعہ  $YQ \perp XZ$  قطعہ

4. خط XY کو قاعدہ لیں اور راس کے مقابل کے راس Z سے خط XY پر عمود کھینچیں



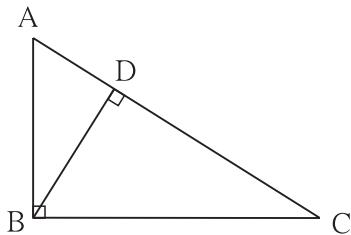
تب XY قطعہ  $ZP \perp$  قطعہ

قطعہ  $XR$ ، قطعہ  $YQ$ ، قطعہ  $ZP$  یہ تینوں  $\triangle XYZ$  کے ارتفاع ہیں۔

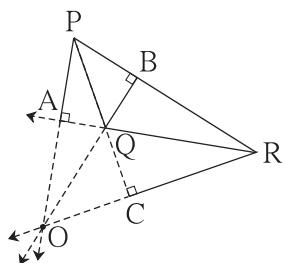
اسے ذہن نشین رکھیے کہ تینوں ارتفاع مترکز ہیں۔ اس نقطہ تراکز کو ارتفاعوں کا نقطہ تراکز یا ارتفاعی تراکز کہتے ہیں۔ ارتفاعی تراکز کو 'O' حرفاً ظاہر کرتے ہیں۔

مثلث کے ارتفاعی مرکز کا مقام :

### عملی کام I :

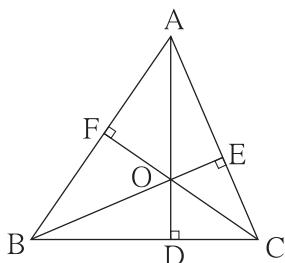


کوئی بھی ایک قائمہ الزاویہ مثلث بنائیے۔ اس کے تمام ارتفاع کھینچیے۔ وہ کس نقطہ پر ملتے ہیں، اسے لکھیے۔



### عملی کام II :

کوئی بھی ایک منفرجۃ الزاویہ مثلث بنائیے۔ اس کے تینوں ارتفاع کھینچیے۔ وہ ایک دوسرے کو کہاں ملتے ہیں؟ ان ارتفاعوں کو شامل کرنے والے خطوط کھینچیے۔ اس بات کا مشاہدہ کیجیے کہ وہ مثلث کے پیرونی حصے میں واقع ایک نقطے سے گذرتے ہیں۔



### عملی کام III :

$\triangle ABC$  ایک حادہ الزاویہ مثلث بنائیے۔ اس کے تمام ارتفاع کھینچیے۔ اس بات کا مشاہدہ کیجیے کہ ارتفاعی تراکنٹ کا مقام کہاں ہے۔



مثلث کے ارتفاع ایک ہی نقطے سے گذرتے ہیں یعنی ارتفاع مترکز (Concurrent) ہوتے ہیں۔ ان کے نقطہ تراکنٹ کو ارتفاعی مرکز یا مرکز ارتفاع (Orthocenter) کہتے ہیں۔ اسے 'O' حرف سے ظاہر کرتے ہیں۔

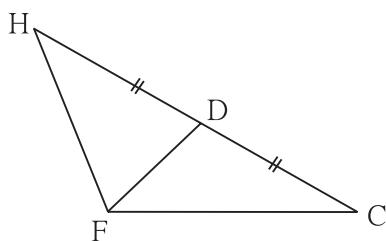
- قائمہ الزاویہ مثلث کا نقطہ تراکنٹ یعنی مرکز یعنی ارتفاع قائمہ زاویہ بنانے والے راس پر ہوتا ہے۔

- منفرجۃ الزاویہ مثلث کا نقطہ تراکنٹ یعنی مرکز ارتفاع اس مثلث کے پیرونی میں واقع ہوتا ہے۔

- حادہ الزاویہ مثلث کا نقطہ تراکنٹ یعنی مرکز ارتفاع مثلث کے اندر وون میں واقع ہوتا ہے۔

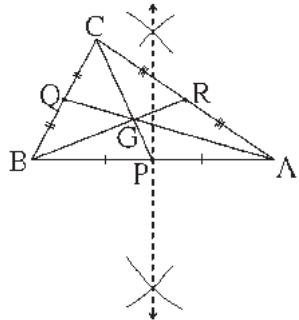


### سلطانیہ (Median)



مثلث کا راس اور مقابل کے ضلع کے وسطی نقطے کو ملانے والے قطعہ خط کو مثلث کے اس ضلع کا سلطانیہ کہتے ہیں۔  $\triangle HCF$  میں قطعہ  $FD$ ، ضلع  $HC$  کا سلطانیہ ہے۔

مثلث کا وسطانیہ کھینچنا :



$\triangle ABC$  .1 بنائے۔

ضلع AB کا وسطی نقطہ حاصل کیجیے اسے P نام دیجیے قطعہ CP کھینچیے۔ .2

ضلع BC کا وسطی نقطہ حاصل کیجیے اسے Q نام دیجیے قطعہ AQ کھینچیے۔ .3

ضلع AC کا وسطی نقطہ حاصل کیجیے اسے R کا نام دیجیے قطعہ BR کھینچیے۔ .4

$\triangle ABC$  کے قطعے CP، قطعے AQ، قطعے BR وسطانیے ہیں۔ ذہن لشین رکھیے کہ یہ مترکز ہیں۔ ان کے نقطہ تراکز کو ہندسی مرکز کہتے ہیں۔ اسے G حرف سے ظاہر کرتے ہیں۔

**عملی کام IV :** ایک قائمة الزاویہ مثلث، ایک منفرجه الزاویہ مثلث اور ایک حادۃ الزاویہ مثلث بنا کر ان کے وسطانیے کھینچیے۔ مشاہدہ کیجیے کہ وہ مترکز ہیں۔ مثلث کے وسطانیوں کے ہندسی مرکز کی خصوصیت :

$\triangle ABC$  ● کوئی بھی ایک بڑا مثلث بنائے۔

$\triangle ABC$  ● کے قطعے AR، قطعے CP اور قطعے BQ وسطانیے کھینچیے۔ ہندسی مرکز کو G نام دیجیے۔

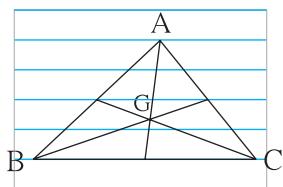
شکل میں قطعات خط کی لمبائی ناپ کر جدول کے خالی چوکوں پر کیجیے۔

$l(AG) = \boxed{\phantom{00}}$	$l(GR) = \boxed{\phantom{00}}$	$l(AG) : l(GR) = \boxed{\phantom{00}}$
$l(BG) = \boxed{\phantom{00}}$	$l(GQ) = \boxed{\phantom{00}}$	$l(BG) : l(GQ) = \boxed{\phantom{00}}$
$l(CG) = \boxed{\phantom{00}}$	$l(GP) = \boxed{\phantom{00}}$	$l(CG) : l(GP) = \boxed{\phantom{00}}$

نتیجہ اخذ کیجیے کہ یہ تمام نسبتیں تقریباً 1 : 2 ہیں۔



مثلث کے وسطانیے مترکز ہوتے ہیں۔ ان کے نقطہ تراکز کو ہندسی مرکز (Centroid) کہتے ہیں۔ اسے G حرف سے ظاہر کرتے ہیں۔ کسی بھی مثلث میں G کا مقام مثلث کے اندر وہ میں واقع ہوتا ہے۔ نقطہ تراکز یعنی ہندسی مرکز ہر وسطانیے کو 1 : 2 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔



ایک طالب علم نے بیاض کے کاغذ پر پانچ متوازی خطوط کی مدد سے  $\triangle ABC$  بنایا۔ مصلحت شکل کے مطابق اس نے ہندسی مرکز G معلوم کیا۔ بتائیے کہ اس نے G کا جو مقام معلوم کیا وہ کس طرح صحیح ہے؟

## مشقی سیٹ 4.1

.1

.....  $\triangle LMN$  میں ..... ارتفاع ہے اور .....

وسطانیہ ہے۔

(خالی جگہ میں مناسب قطعہ خط کے نام لکھیے)

$\triangle PQR$  ایک حادۃ الزاویہ مثلث بنائیے اور اس کے تینوں ارتفاع کچھیے۔ نقطہ تراکز کو 'O' نام دیجیے۔ .2

$\triangle STV$  ایک منفرجه الزاویہ مثلث بنائیے اور اس کے وسطانیے کچھ کرنے والی مرکزی باتیے۔ .3

$\triangle LMN$  ایک منفرجه الزاویہ مثلث بنائیے اور اس کے تمام ارتفاع کچھیے۔ نقطہ تراکز کو 'O' نام دیجیے۔ .4

$\triangle XYZ$  ایک قائمه الزاویہ مثلث بنائیے اس کے وسطانیے کچھیے اور نقطہ تراکز کو 'G' سے ظاہر کیجیے۔ .5

کوئی بھی ایک متساوی الاضلاع مثلث کچھیے۔ اس کے تمام وسطانیے اور تمام ارتفاع کچھیے۔ ان کے نقطہ تراکز کے بارے میں اپنا مشاہدہ درج کیجیے۔ .6

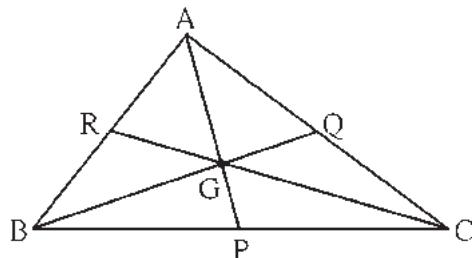
خالی جگہ پر کیجیے۔ .7

$\triangle ABC$  کا G ہندسی مرکز ہے۔

$l(GC) = \dots\dots\dots\dots\dots$  ہوتا ہے  $l(RG) = 2.5$

$l(BQ) = \dots\dots\dots\dots\dots$  ہوتا ہے  $l(BG) = 6$

$l(GP) = \dots\dots\dots\dots\dots$  ہوتا ہے  $l(AP) = 6$  اگر  $l(AG) = \dots\dots\dots\dots\dots$  اور



(I) کوئی بھی ایک متساوی الاضلاع مثلث بنائیے۔ اس مثلث کا حائل مرکز (C)، داخلی مرکز (I)، ہندسی مرکز (G) اور ارتفاعی مرکز (O) معلوم کیجیے۔ مشاہدات درج کیجیے۔

(II) کوئی بھی ایک متساوی الاضلاع مثلث بنائیے۔ دیکھیے کہ اس کے ہندسی مرکز، ارتفاعی مرکز، حائل مرکز اور داخلی مرکز ہم خطی ہیں۔ اس کی صدقیت کیجیے۔

### جوابات کی فہرست

#### مشقی سیٹ 4.1

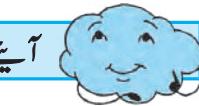
1. LY اور قطعہ LX ..... 7. (1) 5 (2) 9 (3) 4, 2



# توسیعی ضابطے

5

آئیے ذرا یاد کریں



گذشتہ جماعت میں ہم درج ذیل توسعی ضابطوں کا مطالعہ کرچکے ہیں۔

$$(i) (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (ii) (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$(iii) (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

ذکورہ بالا ضابطوں کا استعمال کر کے درج ذیل خالی چوکونوں میں مناسب رکن لکھیں۔

$$(i) (x + 2y)^2 = x^2 + \boxed{\phantom{00}} + 4y^2$$

$$(ii) (2x - 5y)^2 = \boxed{\phantom{00}} - 20xy + \boxed{\phantom{00}}$$

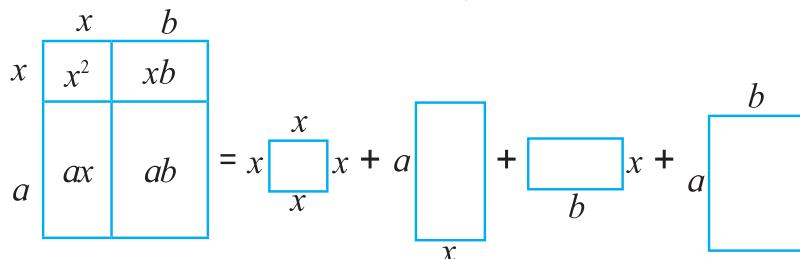
$$(iii) (101)^2 = (100 + 1)^2 = \boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}} + 1^2 = \boxed{\phantom{00}}$$

$$(iv) (98)^2 = (100 - 2)^2 = 10000 - \boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}} = \boxed{\phantom{00}}$$

$$(v) (5m + 3n)(5m - 3n) = \boxed{\phantom{00}} - \boxed{\phantom{00}} = \boxed{\phantom{00}} - \boxed{\phantom{00}}$$

آئیے سمجھیں

**عملی کام :** مستطیل اور مرربع کے رقبوں کی مدد سے  $(x + a)(x + b)$  کی توسعہ کیجیے۔



$$(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab$$

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

[Expansion of  $(x + a)(x + b)$ ] : کی توسعہ  $(x + a)(x + b) = (x + a)(x + b) \quad (I)$

یہ ایک مساوی متغیر کی دو رکنیاں ہیں۔ ان دونوں کا ضرب کریں گے۔

$$\begin{aligned} (x + a)(x + b) &= x(x + b) + a(x + b) = x^2 + bx + ax + ab \\ &= x^2 + (a + b)x + ab \end{aligned}$$

$$\therefore (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

مثال (1)  $(x + 2)(x + 3) = x^2 + (2 + 3)x + (2 \times 3) = x^2 + 5x + 6$

مثال (2)  $(y + 4)(y - 3) = y^2 + (4 - 3)y + (4) \times (-3) = y^2 + y - 12$

مثال (3)  $(2a + 3b)(2a - 3b) = (2a)^2 + [(3b) + (-3b)]2a + [3b \times (-3b)]$   
 $= 4a^2 + 0 \times 2a - 9b^2 = 4a^2 - 9b^2$

مثال (4)  $\left(m + \frac{3}{2}\right) \left(m + \frac{1}{2}\right) = m^2 + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)m + \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = m^2 + 2m + \frac{3}{4}$

مثال (5)  $(x - 3)(x - 7) = x^2 + (-3 - 7)x + (-3)(-7) = x^2 - 10x + 21$

### مشتقی سیٹ

: توسعہ کیجیے .1

(1)  $(a+2)(a-1)$       (2)  $(m-4)(m+6)$       (3)  $(p+8)(p-3)$

(4)  $(13+x)(13-x)$       (5)  $(3x+4y)(3x+5y)$       (6)  $(9x-5t)(9x+3t)$

(7)  $\left(m + \frac{2}{3}\right) \left(m - \frac{7}{3}\right)$       (8)  $\left(x + \frac{1}{x}\right) \left(x - \frac{1}{x}\right)$       (9)  $\left(\frac{1}{y} + 4\right) \left(\frac{1}{y} - 9\right)$



: [Expansion of  $(a+b)^3$ ] توسعہ  $(a+b)^3$  (II)

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = (a+b)(a+b)^2$$

$$= (a+b)(a^2 + 2ab + b^2)$$

$$= a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2)$$

$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$\therefore (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

اس توسمی ضابطہ کا استعمال کر کے حل کر دو، کچھ مثالوں کا مطالعہ کریں گے۔

مثال 1 :  $(x+3)^3$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$b = 3 \text{ اور } a = x$$

یہاں

$$\therefore (x+3)^3 = (x)^3 + 3 \times x^2 \times 3 + 3 \times x \times (3)^2 + (3)^3 \\ = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$$

(2) مثال  $(3x+4y)^3 = (3x)^3 + 3(3x)^2(4y) + 3(3x)(4y)^2 + (4y)^3 \\ = 27x^3 + 3 \times 9x^2 \times 4y + 3 \times 3x \times 16y^2 + 64y^3 \\ = 27x^3 + 108x^2y + 144xy^2 + 64y^3$

(3) مثال  $\left(\frac{2m}{n} + \frac{n}{2m}\right)^3 = \left(\frac{2m}{n}\right)^3 + 3\left(\frac{2m}{n}\right)^2\left(\frac{n}{2m}\right) + 3\left(\frac{2m}{n}\right)\left(\frac{n}{2m}\right)^2 + \left(\frac{n}{2m}\right)^3 \\ = \frac{8m^3}{n^3} + 3\left(\frac{4m^2}{n^2}\right)\left(\frac{n}{2m}\right) + 3\left(\frac{2m}{n}\right)\left(\frac{n^2}{4m^2}\right) + \frac{n^3}{8m^3} \\ = \frac{8m^3}{n^3} + \frac{6m}{n} + \frac{3n}{2m} + \frac{n^3}{8m^3}$

(4) مثال  $(41)^3 = (40+1)^3 = (40)^3 + 3 \times (40)^2 \times 1 + 3 \times 40 \times (1)^2 + (1)^3 \\ = 64000 + 4800 + 120 + 1 = 68921$

### مشقی سیٹ 5.2

توسعہ کیجیے۔ 1

(1)  $(k+4)^3$       (2)  $(7x+8y)^3$       (3)  $(7+m)^3$       (4)  $(52)^3$

(5)  $(101)^3$       (6)  $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3$       (7)  $\left(2m+\frac{1}{5}\right)^3$       (8)  $\left(\frac{5x}{y}+\frac{y}{5x}\right)^3$

**عملی کام :**  $a$  اور  $b$  مناسب لمبائی کے کناروں (ضلع) والا ہر ایک کا ایک مکعب بنائیے۔ لمبائی اور چوڑائی دونوں  $a$  اور اونچائی  $b$  والے 3 مستطیلی منشور (مکعب نما)، اسی طرح لمبائی اور چوڑائی دونوں  $b$  اور اونچائی  $a$  والے 3 مستطیلی منشور بنائیے۔ ان اجسام کو مناسب ترتیب دے کر  $(a+b)$  ضلع والا ایک مکعب تیار کیجیے۔



: [Expansion of  $(a-b)^3$ ] کی توسعہ  $(a-b)^3$  (III)

$$(a-b)^3 = (a-b)(a-b)(a-b) = (a-b)(a-b)^2 \\ = (a-b)(a^2 - 2ab + b^2) \\ = a(a^2 - 2ab + b^2) - b(a^2 - 2ab + b^2)$$

$$\begin{aligned}
 &= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 \\
 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\
 \therefore (a - b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3
 \end{aligned}$$

**مثال 1 :** توسعہ کیجیے

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

ہم جانتے ہیں کہ

$b = 2$  اور  $a = x$

$$(x - 2)^3 = (x)^3 - 3 \times x^2 \times 2 + 3 \times x \times (2)^2 - (2)^3$$

$$= x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

**مثال 2 :** توسعہ کیجیے۔  $(4p - 5q)^3$

$$(4p - 5q)^3 = (4p)^3 - 3(4p)^2(5q) + 3(4p)(5q)^2 - (5q)^3$$

$$(4p - 5q)^3 = 64p^3 - 240p^2q + 300pq^2 - 125q^3$$

**مثال 3 :** توسمی ضابطے کا استعمال کر کے 99 کا مکعب معلوم کیجیے۔

$$(99)^3 = (100 - 1)^3$$

$$(99)^3 = (100)^3 - 3 \times (100)^2 \times 1 + 3 \times 100 \times (1)^2 - 1^3$$

$$= 1000000 - 30000 + 300 - 1 = 9,70,299$$

**مثال 4 :** آسان کیجیے۔

$$(i) (p + q)^3 + (p - q)^3$$

$$\begin{aligned}
 &= p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 + p^3 - 3p^2q + 3pq^2 - q^3 \\
 &= 2p^3 + 6pq^2
 \end{aligned}$$

$$(ii) (2x + 3y)^3 - (2x - 3y)^3$$

$$= [(2x)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 + (3y)^3]$$

$$- [(2x)^3 - 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 - (3y)^3]$$

$$= (8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3) - (8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3)$$

$$= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3 - 8x^3 + 36x^2y - 54xy^2 + 27y^3$$

$$= 72x^2y + 54y^3$$



$$(i) (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$(ii) (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

### مشتق سیٹ 5.3

توسعہ کیجیے۔ .1

$$(1) (2m - 5)^3 \quad (2) (4 - p)^3 \quad (3) (7x - 9y)^3 \quad (4) (58)^3$$

$$(5) (198)^3 \quad (6) \left( 2p - \frac{1}{2p} \right)^3 \quad (7) \left( 1 - \frac{1}{a} \right)^3 \quad (8) \left( \frac{x}{3} - \frac{3}{x} \right)^3$$

اختصار کیجیے۔ .2

$$(1) (2a + b)^3 - (2a - b)^3 \quad (2) (3r - 2k)^3 + (3r + 2k)^3$$

$$(3) (4a - 3)^3 - (4a + 3)^3 \quad (4) (5x - 7y)^3 + (5x + 7y)^3$$



: [Expansion of  $(a + b + c)^2$ ] کی توسعہ  $(a + b + c)^2$  (IV)

$$\begin{aligned} (a + b + c)^2 &= (a + b + c) \times (a + b + c) \\ &= a(a + b + c) + b(a + b + c) + c(a + b + c) \\ &= a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \end{aligned}$$

$$\therefore (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

ضابطہ حاصل ہوتا ہے۔

**مثال 1 :**  $(p + q + 3)^2$  کی توسعہ کیجیے۔

$$\begin{aligned} &= p^2 + q^2 + (3)^2 + 2 \times p \times q + 2 \times q \times 3 + 2 \times p \times 3 \\ &= p^2 + q^2 + 9 + 2pq + 6q + 6p \quad = p^2 + q^2 + 2pq + 6q + 6p + 9 \end{aligned}$$

**مثال 2 :** مربجی توسعہ کے مطلوب کے پکونوں میں مناسب رکن لکھیے۔

$$(2p + 3m + 4n)^2$$

$$\begin{aligned} &= (2p)^2 + (3m)^2 + \boxed{\phantom{00}} + 2 \times 2p \times 3m + 2 \times \boxed{\phantom{00}} \times 4n + 2 \times 2p \times \boxed{\phantom{00}} \\ &= \boxed{\phantom{00}} + 9m^2 + \boxed{\phantom{00}} + 12pm + \boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}} \end{aligned}$$

**مثال 3 :** اختصار کیجیے۔

$$(l + 2m + n)^2 + (l - 2m + n)^2$$

$$\begin{aligned} &= l^2 + 4m^2 + n^2 + 4lm + 4mn + 2ln + l^2 + 4m^2 + n^2 - 4lm - 4mn + 2ln \\ &= 2l^2 + 8m^2 + 2n^2 + 4ln \end{aligned}$$

### مشتق سیٹ 5.4

(1)  $(2p + q + 5)^2$

(2)  $(m + 2n + 3r)^2$

توسیع کیجیے .1

(3)  $(3x + 4y - 5p)^2$

(4)  $(7m - 3n - 4k)^2$

(1)  $(x - 2y + 3)^2 + (x + 2y - 3)^2$

ختصر کیجیے .2

(2)  $(3k - 4r - 2m)^2 - (3k + 4r - 2m)^2$       (3)  $(7a - 6b + 5c)^2 + (7a + 6b - 5c)^2$

### جوابات کی فہرست

#### مشتق سیٹ 5.1

(1)  $a^2 + a - 2$

(2)  $m^2 + 2m - 24$

(3)  $p^2 + 5p - 24$

(4)  $169 - x^2$

(5)  $9x^2 + 27xy + 20y^2$

(6)  $81x^2 - 18xt - 15t^2$

(7)  $m^2 - \frac{5}{3}m - \frac{14}{9}$

(6)  $x^2 - \frac{1}{x^2}$

(9)  $\frac{1}{y^2} - \frac{5}{y} - 36$

#### مشتق سیٹ 5.2

(1)  $k^3 + 12k^2 + 48k + 64$

(2)  $343x^3 + 1176x^2y + 1344xy^2 + 512y^3$

(2)  $343 + 147m + 21m^2 + m^3$

(4)  $140608$

(5)  $1030301$

(6)  $x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}$

(7)  $8m^3 + \frac{12m^2}{5} + \frac{6m}{25} + \frac{1}{125}$

(8)  $\frac{125x^3}{y^3} + \frac{15x}{y} + \frac{3y}{5x} + \frac{y^3}{125x^3}$

#### مشتق سیٹ 5.3

1. (1)  $8m^3 - 60m^2 + 150m - 125$

(2)  $64 - 48p + 12p^2 - p^3$

(3)  $343x^3 - 1323x^2y + 1701xy^2 - 729y^3$

(4)  $1,95,112$

(5)  $77,62,392$

(6)  $8p^3 - 6p + \frac{3}{2p} - \frac{1}{8p^3}$

(7)  $1 - \frac{3}{a} + \frac{3}{a^2} - \frac{1}{a^3}$

(8)  $\frac{x^3}{27} - x + \frac{9}{x} - \frac{27}{x^3}$

2. (1)  $24a^2b + 2b^3$

(2)  $54r^3 + 72rk^2$

(3)  $-288a^2 - 54$

(4)  $250x^3 + 1470xy^2$

#### مشتق سیٹ 5.4

1. (1)  $4p^2 + q^2 + 25 + 4pq + 10q + 20p$

(2)  $m^2 + 4n^2 + 9r^2 + 4mn + 12nr + 6mr$

(3)  $9x^2 + 16y^2 + 25p^2 + 24xy - 40py - 30px$

(4)  $49m^2 + 9n^2 + 16k^2 - 42mn + 24nk - 56km$

2. (1)  $2x^2 + 8y^2 + 18 - 24y$  (2)  $32rm - 48kr$

(3)  $98a^2 + 72b^2 + 50c^2 - 120bc$



DEL058

# الجبری عبارتوں کے اجزاء کے ضربی

آئیے ذرا یاد کریں

گذشتہ جماعت میں ہم  $a^2 - b^2$  اور  $ax + ay$  کی نوعیت والی الجبری عبارتوں کے اجزاء کے ضربی کا مطالعہ کرچکے ہیں۔

$$(1) 4xy + 8xy^2 = 4xy(1 + 2y)$$

$$(2) p^2 - 9q^2 = (p)^2 - (3q)^2 = (p + 3q)(p - 3q)$$

آئیے سمجھیں

## مربعی سرکنی کے اجزاء کے ضربی (Factors of Quadratic Trinomial)

$ax^2 + bx + c$  نوعیت کی الجبری عبارت کو مربعی سرکنی کہتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ  $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

اس لیے  $x^2 + (a + b)x + ab$  کے اجزاء کے ضربی ہیں۔

سرکنی  $x^2 + 5x + 6$  کے اجزاء کے ضربی معلوم کرنے کے لیے اس کا موازنہ سرکنی  $x^2 + (a + b)x + ab$  سے کرنے پر 5 اور 6 آتا ہے۔ لہذا 6 کے ایسے دو جزو ضربی کریں گے کہ ان کی جمع 5 آئے اور سرکنی کو  $x^2 + (a + b)x + ab$  کی صورت میں لکھ کر اس کا اجزاء کے ضربی معلوم کریں گے۔

$$x^2 + 5x + 6 = x^2 + (3 + 2)x + 3 \times 2 \quad \dots [ \because x^2 + (a + b)x + ab ]$$

$x$  کو  $x$  سے ضرب کرنے پر حاصل ہونے والے 4 ارکان کے دو گروہ بتائیں گے اور اجزاء کے ضربی حاصل کریں گے

$$= \underline{x^2} + \underline{3x} + \underline{2x} + 2 \times 3$$

$$= x(x + 3) + 2(x + 3) = (x + 3)(x + 2)$$

(دی ہوئی مربعی سرکنی کے اجزاء کے ضربی کرنے کے طریقے کو سمجھنے کے لیے ذیل کی مثالوں کا مطالعہ کیجیے)

**مثال 1 :**  $2x^2 - 9x + 9$  کے اجزاء کے ضربی کیجیے۔

**حل :** مربعی رکن کے ضریب اور مستقل رکن کا ضرب کریں گے۔ ان کا حاصل ضرب  $18 = 2 \times 9$  ہے۔

اب 18 کے دو جزو ضربی معلوم کریں گے کہ ان کی جمع درمیانی رکن کے ضریب کے برابر یعنی 9 ہے۔

$$\begin{aligned} & 2x^2 - 9x + 9 \\ &= \underline{2x^2} - \underline{6x} - \underline{3x} + 9 \\ &= 2x(\underline{x - 3}) - 3(\underline{x - 3}) \\ &= (x - 3)(2x - 3) \end{aligned}$$

$$18 = (-6) \times (-3); (-6) + (-3) = -9$$

رکن  $-9x - 6x - 3x$  کو سمجھیں گے۔

مشترک جزو کا لیں گے۔

$$\therefore 2x^2 - 9x + 9 = (x - 3)(2x - 3)$$

**مثال 3 :**  $x^2 - 10x + 21$  کے اجزاء کے ضربی معلوم کیجیے۔

$$\begin{aligned} \text{حل: } & x^2 - 10x + 21 \\ &= \underline{x^2 - 7x} - \underline{3x + 21} \\ &= x(x - 7) - 3(x - 7) \\ &= (x - 7)(x - 3) \end{aligned}$$

**مثال 2 :**  $2x^2 + 5x - 18$  کے اجزاء کے ضربی معلوم کیجیے۔

$$\begin{aligned} \text{حل: } & 2x^2 + 5x - 18 \\ &= \underline{2x^2 + 9x} - \underline{4x - 18} \\ &= x(2x + 9) - 2(2x + 9) \\ &= (2x + 9)(x - 2) \end{aligned}$$

**مثال 4 :**  $2y^2 - 4y - 30$  کے اجزاء کے ضربی کیجیے۔

$$\text{حل: } 2y^2 - 4y - 30$$

$$\begin{aligned} &= 2(y^2 - 2y - 15) \quad \dots \text{(تمام ارکان سے 2 مشترک جزو ضربی نکال کر)} \\ &= 2(\underline{y^2 - 5y} + \underline{3y - 15}) \quad \dots \\ &= 2[y(y - 5) + 3(y - 5)] \quad \dots \\ &= 2(y - 5)(y + 3) \end{aligned}$$

### مشقی سیٹ 6.1

اجزاء کے ضربی کیجیے۔ .1

- |                       |                        |                       |
|-----------------------|------------------------|-----------------------|
| (1) $x^2 + 9x + 18$   | (2) $x^2 - 10x + 9$    | (3) $y^2 + 24y + 144$ |
| (4) $5y^2 + 5y - 10$  | (5) $p^2 - 2p - 35$    | (6) $p^2 - 7p - 44$   |
| (7) $m^2 - 23m + 120$ | (8) $m^2 - 25m + 100$  | (9) $3x^2 + 14x + 15$ |
| (10) $2x^2 + x - 45$  | (11) $20x^2 - 26x + 8$ | (12) $44x^2 - x - 3$  |



: (Factors of  $a^3 + b^3$ ) کے اجزاء کے ضربی  $a^3 + b^3$

ہم جانتے ہیں کہ،  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

وائے میں جانب کی عبارت سے 3ab کا مشترک نکال کر اس تو سیعی خابطے کی ترتیب ذیل کے مطابق کر سکتے ہیں۔

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

اب،  $a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = (a + b)^3$  ... (طرفین کی اول بدل کر کے)

$$\therefore a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = [(a + b)(a + b)^2] - 3ab(a + b)$$

$$= (a + b)[(a + b)^2 - 3ab] = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2 - 3ab)$$

$$= (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\therefore a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

وہ مکعبوں کی جمع کے اجزاء کے ضریبوں کے نکرہ بالا ضابطے کا استعمال کر کے کچھ مثالیں حل کریں گے۔

**(1) مثال**  $x^3 + 27y^3 = x^3 + (3y)^3$

$$= (x + 3y) [x^2 - x(3y) + (3y)^2]$$

$$= (x + 3y) [x^2 - 3xy + 9y^2]$$

**(2) مثال**  $8p^3 + 125q^3 = (2p)^3 + (5q)^3 = (2p + 5q) [(2p)^2 - 2p \times 5q + (5q)^2]$

$$= (2p + 5q) (4p^2 - 10pq + 25q^2)$$

**(3) مثال**  $m^3 + \frac{1}{64m^3} = m^3 + \left(\frac{1}{4m}\right)^3 = \left(m + \frac{1}{4m}\right) \left[m^2 - m \times \frac{1}{4m} + \left(\frac{1}{4m}\right)^2\right]$   
 $= \left(m + \frac{1}{4m}\right) \left(m^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16m^2}\right)$

**(4) مثال**  $250p^3 + 432q^3 = 2(125p^3 + 216q^3)$   
 $= 2[(5p)^3 + (6q)^3] = 2(5p + 6q)(25p^2 - 30pq + 36q^2)$

### مشقی سیٹ

اجزا کے ضربی کیجیے۔ .1

(1)  $x^3 + 64y^3$       (2)  $125p^3 + q^3$       (3)  $125k^3 + 27m^3$     (4)  $2l^3 + 432m^3$

(5)  $24a^3 + 81b^3$     (6)  $y^3 + \frac{1}{8y^3}$       (7)  $a^3 + \frac{8}{a^3}$       (8)  $1 + \frac{q^3}{125}$



: (Factors of  $a^3 - b^3$ ) کے اجزاء کے ضربی  $a^3 - b^3$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

پس،  $a^3 - b^3 - 3ab(a - b) = (a - b)^3$

$$\therefore a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$$

$$= [(a - b)(a - b)^2 + 3ab(a - b)]$$

$$= (a - b) [(a - b)^2 + 3ab]$$

$$= (a - b) (a^2 - 2ab + b^2 + 3ab)$$

$$= (a - b) (a^2 + ab + b^2)$$

**∴  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$**

وہ مکعبوں کی تفریق کے اجزاء ضربی کے ضابطے کا استعمال کر کے کچھ عبارتوں کے اجزاء کے ضربی کریں گے۔

$$\text{مثال (1)} \quad x^3 - 8y^3 = x^3 - (2y)^3$$

$$\therefore x^3 - 8y^3 = x^3 - (2y)^3 \\ = (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$$

$$\text{مثال (2)} \quad 27p^3 - 125q^3 = (3p)^3 - (5q)^3 = (3p - 5q)(9p^2 + 15pq + 25q^2)$$

$$\text{مثال (3)} \quad 54p^3 - 250q^3 = 2[27p^3 - 125q^3] = 2[(3p)^3 - (5q)^3] \\ = 2(3p - 5q)(9p^2 + 15pq + 25q^2)$$

$$\text{مثال (4)} \quad a^3 - \frac{1}{a^3} = \left(a - \frac{1}{a}\right) \left(a^2 + 1 + \frac{1}{a^2}\right)$$

**مثال (5) مختصر کیجیے۔**

$$(a - b)^3 - (a^3 - b^3) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - a^3 + b^3 = -3a^2b + 3ab^2 \quad \text{حل :}$$

**مثال (6) مختصر کیجیے۔**

$$2x - 3y = b \quad \text{اور} \quad 2x + 3y = a \quad \text{حل : فرض کیجیے}$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\therefore (2x + 3y)^3 - (2x - 3y)^3$$

$$= [(2x + 3y) - (2x - 3y)][(2x + 3y)^2 + (2x + 3y)(2x - 3y) + (2x - 3y)^2]$$

$$= [2x + 3y - 2x + 3y][4x^2 + 12xy + 9y^2 + 4x^2 - 9y^2 + 4x^2 - 12xy + 9y^2]$$

$$= 6y(12x^2 + 9y^2) = 72x^2y + 54y^3$$



$$(i) a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \quad (ii) a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

### مشتق سیٹ 6.3

اجزاء ضربی کیجیے۔ .1

$$(1) y^3 - 27 \quad (2) x^3 - 64y^3 \quad (3) 27m^3 - 216n^3 \quad (4) 125y^3 - 1$$

$$(5) 8p^3 - \frac{27}{p^3} \quad (6) 343a^3 - 512b^3 \quad (7) 64x^3 - 729y^3 \quad (8) 16a^3 - \frac{128}{b^3}$$

$$(1) (x + y)^3 - (x - y)^3 \quad (2) (3a + 5b)^3 - (3a - 5b)^3 \quad \text{مشتق کیجیے۔ .2}$$

$$(3) (a + b)^3 - a^3 - b^3 \quad (4) p^3 - (p + 1)^3$$

$$(5) (3xy - 2ab)^3 - (3xy + 2ab)^3$$

### ناطق الجبری عبارتوں کی نسبت یا الجبری عبارتوں کی نسبت (Rational Algebraic Expressions)

A اور B دو عبارتیں ہوں تو  $\frac{A}{B}$  کو الجبری عبارتوں کی نسبت کہتے ہیں۔ الجبری عبارتوں کی نسبت کو مختصر کرتے وقت استعمال میں آنے والے جمع، تفریق، ضرب، تقسیم وغیرہ اعمال ناطق اعداد پر ہونے والے اعمال کی طرح ہوتے ہیں۔ الجبری عبارتوں کی تقسیم کرنے کے دوران نسب نمایا مقسم الیہ غیر صفر ہونا چاہیے۔

$\frac{7x^2 + 18x + 8}{49x^2 - 16} \times \frac{14x - 8}{x + 2}$ $= \frac{(7x+4)(x+2)}{(7x+4)(7x-4)} \times \frac{2(7x-4)}{(x+2)}$ $= 2$	<b>مثال (2)</b> مختصر کیجیے
	$\frac{a^2 + 5a + 6}{a^2 - a - 12} \times \frac{a-4}{a^2 - 4}$ $= \frac{(a+3)(a+2)}{(a-4)(a+3)} \times \frac{(a-4)}{(a+2)(a-2)}$ $= \frac{1}{a-2}$

$\frac{x^2 - 9y^2}{x^3 - 27y^3}$ $= \frac{(x+3y)(x-3y)}{(x-3y)(x^2 + 3xy + 9y^2)}$ $= \frac{x+3y}{x^2 + 3xy + 9y^2}$	<b>مثال (3)</b> مختصر کیجیے
--	-----------------------------

### مشتقی سیٹ 6.4

مختصر کیجیے .1

- |   |   |  |
|---|---|--|
| $(1) \frac{m^2 - n^2}{(m+n)^2} \times \frac{m^2 + mn + n^2}{m^3 - n^3}$   | $(2) \frac{a^2 + 10a + 21}{a^2 + 6a - 7} \times \frac{a^2 - 1}{a + 3}$      | $(3) \frac{8x^3 - 27y^3}{4x^2 - 9y^2}$ |
| $(4) \frac{x^2 - 5x - 24}{(x+3)(x+8)} \times \frac{x^2 - 64}{(x-8)^2}$    | $(5) \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - 7x + 12} \div \frac{3x^2 - 7x - 6}{x^2 - 4}$ | $(6) \frac{4x^2 - 11x + 6}{16x^2 - 9}$ |
| $(7) \frac{a^3 - 27}{5a^2 - 16a + 3} \div \frac{a^2 + 3a + 9}{25a^2 - 1}$ | $(8) \frac{1 - 2x + x^2}{1 - x^3} \times \frac{1 + x + x^2}{1 + x}$         |  |

## جوابات کی فہرست

### مشقی سیٹ 6.1

1. (1)  $(x + 6)(x + 3)$       (2)  $(x - 9)(x - 1)$       (3)  $(y + 12)(y + 12)$   
 (4)  $5(y + 2)(y - 1)$       (5)  $(p - 7)(p + 5)$       (6)  $(p + 4)(p - 11)$   
 (7)  $(m - 15)(m - 8)$       (8)  $(m - 20)(m - 5)$       (9)  $(x + 3)(3x + 5)$   
 (10)  $(x + 5)(2x - 9)$       (11)  $2(5x - 4)(2x - 1)$       (12)  $(11x - 3)(4x + 1)$

### مشقی سیٹ 6.2

1. (1)  $(x + 4y)(x^2 - 4xy + 16y^2)$       (2)  $(5p + q)(25p^2 - 5pq + q^2)$   
 (3)  $(5k + 3m)(25k^2 - 15km + 9m^2)$       (4)  $2(l + 6m)(l^2 - 6lm + 36m^2)$   
 (5)  $3(2a + 3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2)$       (6)  $\left(y + \frac{1}{2y}\right)\left(y^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4y^2}\right)$   
 (7)  $\left(a + \frac{2}{a}\right)\left(a^2 - 2 + \frac{4}{a^2}\right)$       (8)  $\left(1 + \frac{q}{5}\right)\left(1 - \frac{q}{5} + \frac{q^2}{25}\right)$

### مشقی سیٹ 6.3

1. (1)  $(y - 3)(y^2 + 3y + 9)$       (2)  $(x - 4y)(x^2 + 4xy + 16y^2)$   
 (3)  $(3m - 6n)(9m^2 + 18mn + 36n^2)$       (4)  $(5y - 1)(25y^2 + 5y + 1)$   
 (5)  $\left(2p - \frac{3}{p}\right)\left(4p^2 + 6 + \frac{9}{p^2}\right)$       (6)  $(7a - 8b)(49a^2 + 56ab + 64b^2)$   
 (7)  $(4x - 9y)(16x^2 + 36xy + 81y^2)$       (8)  $16\left(a - \frac{2}{b}\right)\left(a^2 + \frac{2a}{b} + \frac{4}{b^2}\right)$
2. (1)  $6x^2y + 2y^3$       (2)  $270a^2b + 250b^3$       (3)  $3a^2b + 3ab^2$   
 (4)  $-3p^2 - 3p - 1$       (5)  $-108x^2y^2ab - 16a^3b^3$

### مشقی سیٹ 6.4

1. (1)  $\frac{1}{m+n}$       (2)  $a + 1$       (3)  $\frac{4x^2 + 6xy + 9y^2}{2x + 3y}$   
 (4) 1      (5)  $\frac{(x-1)(x-2)(x+2)}{(x-3)^2(x-4)}$   
 (6)  $\frac{x-2}{4x+3}$       (7)  $5a + 1$       (8)  $\frac{1-x}{1+x}$



آئیے ذرا یاد کریں

ایک درجن بیاضوں کی قیمت 240 روپے ہوتا ہے۔ بیاضوں کی قیمت کتنی ہوگی؟ 9 بیاضوں کی قیمت کتنی ہوگی؟ 24 بیاضوں کی قیمت کتنی ہوگی؟ 50 بیاضوں کی قیمت کتنی ہوگی؟ اسے معلوم کرنے کے لیے ذیل کی جدول مکمل کیجیے۔

(x) بیاضوں کی تعداد	12	3	9	24	50	1
(y) قیمت (روپے میں)	240	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input checked="" type="text"/> 20

مذکورہ بالاجدول سے ایسا سمجھیں آتا ہے کہ ہر جوڑی میں بیاضوں کی تعداد (x) اور ان کی قیمت (y) کے درمیان  $\frac{1}{20}$  کی نسبت ہے۔ یہ مستقل ہے۔ بیاضوں کی تعداد اور ان کی قیمت مستقیم تناسب میں ہے۔ ایسی مثالوں میں دو میں سے ایک کی تعداد بڑھتی ہے تو دوسری بھی اسی تناسب سے بڑھتی ہے۔

درست - آئیے سمجھیں

### مستقیم تغیر (Direct Variation)

x اور y مستقیم تناسب میں ہیں۔ اسی بیان کو x اور y مستقیم تغیر میں ہیں یا x اور y کے درمیان مستقیم تغیر ہے، لکھتے ہیں۔ اس بیان کو علامت کا استعمال کر کے y  $\propto$  x بھی لکھتے ہیں۔

[ (الف) تغیر کے معنی میں استعمال کیا جانے والا لاطینی حرف ہے ]

y اسے مساوات کی صورت میں  $x = ky$  لکھتے ہیں؛ یہاں k مستقل رکن ہے۔

$\frac{x}{y} = k$  یا  $x = ky$  تغیر کی مساوات ہے۔ k تغیر کا مستقل عدد ہے۔

درج ذیل بیان تغیر کی علامت استعمال کر کے کس طرح لکھا گیا ہے، اسے دیکھیے۔

(i) دائرے کا رقبہ اس کے نصف قطر کے مربع کے مستقیم تناسب میں ہے۔

دائرے کا رقبہ = A، نصف قطر = r، ان متغروں کو لے کر مذکورہ بالا بیان کو  $A \propto r^2$  لکھ سکتے ہیں۔

(ii) مائع کا دباؤ (p)، مائع کی گہرائی (d) کے ساتھ مستقیم تغیر میں ہوتا ہے۔ اس بیان کو  $p \propto d$  لکھتے ہیں۔  
مستقیم تغیر کی علامتی ترتیب کے تصور کو سمجھنے کے لیے ذیل کی مثالوں کا مطالعہ کیجیے۔

مثال (1) x، y کے ساتھ مستقیم تغیر میں ہے، جب  $x = 5$  ہوتا ہے تب  $y = 30$  ہوتا ہے۔ تو تغیر کا مستقل معلوم کیجیے اور تغیر کی مساوات لکھیے۔

حل : x، y کے ساتھ مستقیم تغیر میں ہے۔ یعنی  $y \propto x$

( $k$  تغیر کا مستقل عدد ہے) ...

$x = 5$  تب  $y = 30$  دیا ہوا ہے۔

$\therefore 5 = k \times 30$  ,  $\therefore k = \frac{1}{6}$  (تغیر کا مستقل عدد) ...

اس کی مدد سے  $x = ky$  یعنی  $x = \frac{y}{6}$  یا  $y = 6x$  مساوات حاصل ہوتی ہے۔

**مثال (2)** موگ پھلی کے دانے کی قیمت اس کے وزن کے ساتھ مستقیم تغیر میں ہے۔ 5 کلوگرام موگ پھلی کے دانے کی قیمت  $\text{₹}450$  ہوتے 1 کوئنٹل موگ پھلی کے دانے کی قیمت معلوم کیجیے۔ (کلوگرام  $= 100$  کوئنٹل 1)

**حل :** فرض کیجیے موگ پھلی کے دانے کی قیمت  $x$  ₹ اور موگ پھلی کے دانے کا وزن  $y$  ہے۔

$x$  اور  $y$  مستقیم تغیر میں ہیں۔ ... (دیا ہوا ہے) لہذا  $x \propto y$  یا

جب  $x = 450$  تب  $y = 5$  ہوتا ہے۔ ... (دیا ہوا ہے) اس کی مدد سے  $k$  معلوم کریں گے۔

$x = ky$ ,  $\therefore 450 = 5k$ ,  $\therefore k = 90$  (تغیر کا مستقل) ...

اب،  $y = 100$  ہوتے  $x$  معلوم کریں گے۔

$$x = 90 \times 100 = 9000$$

$\therefore$  1 کوئنٹل موگ پھلی کے دانوں کی قیمت 9000 روپے ہوگی۔

### مشقی سیٹ 7.1

.1. تغیر کی علامت استعمال کر کے لکھیے۔

(1) دائرے کا محیط (c) اس کے نصف قطر (r) کے ساتھ مستقیم نسب میں ہوتا ہے۔

(2) موڑگاڑی میں بھرے ہوئے پڑوں (l) اور اس کے ذریعے طے کردہ فاصلہ (d) مستقیم تغیر میں ہوتے ہیں۔

سیبیوں کی قیمت اور سیبیوں کی تعداد کے درمیان مستقیم تغیر ہے۔ اس کی مدد سے درج ذیل جدول مکمل کیجیے۔

(x) سیبیوں کی تعداد	1	4	...	12	...
(y) سیبیوں کی قیمت	8	32	56	...	160

.3. اگر  $m \propto n$  اور جب  $m = 154$  ہوتے  $n = 7$  - اس لیے اگر  $m = 14$  ہوتے  $n = ?$  کی قیمت معلوم کیجیے۔

.4.  $m$  کے ساتھ مستقیم تغیر میں ہے، تو ذیل کی جدول مکمل کیجیے۔

$m$	3	5	6.5	...	1.25
$n$	12	20	...	28	...

.5.  $x$  کے جذر المربع کے ساتھ مستقیم تغیر میں بدلتا ہے اور جب  $x = 16$  ہوتا ہے تب  $y = 24$  ہوتا ہے تو تغیر کا مستقل عدد معلوم کیجیے اور تغیر کی مساوات لکھیے۔

سویاں کی نصل نکالنے کے لیے 4 مزدوروں کو 1000 روپے مزدوری کی رقم اور مزدوروں کی تعداد مستقیم تغیر میں ہوتا ہے۔ اگر مزدوری دینا پڑتی ہے۔ مزدوروں کوتنی مزدوری دینا ہوگی؟



ڈرل کے لیے بچوں کی قطاریں بنائی گئیں۔ ہر قطار میں بچوں کی تعداد اور قطاروں کی تعداد ذیل کے مطابق ہے۔

ہر قطار میں بچوں کی تعداد	40	10	24	12	8
قطاروں کی تعداد	6	24	10	20	30

ذکورہ بالا جدول کی مدد سے ایسا سمجھیں میں آتا ہے کہ ہر جوڑی کی ہر قطار میں بچوں کی تعداد اور کل قطاروں کی تعداد کا حاصل ضرب 240 ہے۔ یعنی ان کا حاصل ضرب مستقل ہے۔ (یا) ہر قطار میں بچوں کی تعداد اور قطاروں کی تعداد معکوس تناسب میں ہے۔ جب دو تعداد میں سے ایک تعداد میں اضافہ ہوتا ہے تو دوسری تعداد میں اسی تناسب سے کمی واقع ہوتی ہے۔ تب یہ دونوں تعداد معکوس تناسب میں ہوتی ہیں۔ مثلاً ایک تعداد دگنا ہوتی ہے تو دوسری تعداد نصف ہو جاتی ہے۔



### معکوس تغیر (Inverse Variation)

$x$  اور  $y$  اعداد معکوس تناسب میں ہیں۔ اس بیان کو  $x$  اور  $y$  معکوس تغیر میں ہیں، لکھتے ہیں۔  $x$  اور  $y$  معکوس تغیر میں ہوں تب  $y \propto \frac{1}{x}$  مستقل ہوتا ہے۔ اسے  $k$  فرض کر کے مثالیں حل کرنا آسان ہو جاتا ہے۔

$x$  اور  $y$  معکوس تغیر میں ہیں، یعنی اسے  $x = k \propto \frac{1}{y}$  سے ظاہر کرنے ہیں۔  $y \propto \frac{1}{x}$  یہ سب تغیر کی مساواتیں ہیں۔  $k$  تغیر کا مستقل عدد ہے۔

### حل کردہ مثالیں

**مثال (1)** اگر  $a$ ،  $b$  کے ساتھ معکوس تغیر میں ہو تو درج ذیل جدول مکمل کیجیے۔

$a$	6	12	15	<input type="text"/>
$b$	20	<input type="text"/>	<input type="text"/>	4
$a \times b$	120	120	<input type="text"/>	<input type="text"/>

$$a \times b = k \quad \text{یعنی} \quad a \propto \frac{1}{b} \quad (\text{i})$$

$$a = 6, \quad b = 20, \quad \therefore k = 6 \times 20 = 120 \quad (\text{ بغیر کا مستقل}) \dots$$

$$\begin{aligned} a &=? \text{ تب } b=4 \quad (\text{iv}) \\ a \times b &= 120 \\ \therefore a \times 4 &= 120 \\ \therefore a &= 30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &=? \text{ تب } a=15 \quad (\text{iii}) \\ a \times b &= 120 \\ \therefore 15 \times b &= 120 \\ \therefore b &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &=? \text{ تب } a=12 \quad (\text{ii}) \\ a \times b &= 120 \\ \therefore 12 \times b &= 120 \\ \therefore b &= 10 \end{aligned}$$

**مثال (2)**:  $f = 18$  تب  $d = 5$  ،  $f \propto \frac{1}{d^2}$  :  $f = ?$   $d = ?$  کی قیمت معلوم کیجیے۔

$$f \propto \frac{1}{d^2}, \quad \therefore f \times d^2 = k$$

$k$  کی قیمت معلوم کریں گے۔

$$\therefore 18 \times 5^2 = k, \quad \therefore k = 18 \times 25 = 450 \quad \dots \text{(تغیر کا مستقل)}$$

$$\begin{array}{ll} d = ? \text{ تب } f = 50 & f = ? \text{ تب } d = 10 \\ f \times d^2 = 450 & f \times 10^2 = 450 \\ \therefore 50 \times d^2 = 450 & \therefore f \times 100 = 450 \\ \therefore d^2 = 9 & \therefore f = 4.5 \\ \therefore d = 3 \text{ یا } d = -3 & \end{array}$$

### مشقی سیٹ 7.2

.1. ایک کام پورا کرنے کے لیے لگائے گئے مزدوروں کی تعداد اور کام پورا ہونے کے لیے درکار دنوں کی معلومات ذیل کی جدول میں دی ہوئی ہے۔ جدول مکمل کیجیے۔

مزدوروں کی تعداد	30	20		10	
دن	6	9	12		36

ہر مثال میں تغیر کا مستقل معلوم کیجیے اور تغیر کی مساوات لکھیے۔

$$w = 24 \quad z = 2.5 \quad z \propto \frac{1}{w} \quad (2) \quad q = 4 \quad p = 15, \quad p \propto \frac{1}{q} \quad (1)$$

$$y = 9 \quad x = 15 \quad x \propto \frac{1}{\sqrt{y}} \quad (4) \quad t = 5 \quad s = 4, \quad s \propto \frac{1}{t^2} \quad (3)$$

.3. سیبوں کے ذخیرے سے تمام سیب پیٹیوں میں بھرنا ہے۔ ہر پیٹی میں 24 سیب رکھیں تو اسے بھرنے کے لیے 27 پیٹیاں درکار ہوتی ہیں۔ اگر ہر پیٹی میں 36 سیب رکھیں تو کتنی پیٹیاں درکار ہوں گی؟

.4 درج ذیل بیانات کو تغیر کی علامت استعمال کر کے لکھیے۔

(1) آواز کی طولی لہروں کی لمبائی (l) اور تعداد (f) کے درمیان مکوس تغیر ہے۔

(2) بلب کی روشنی کی شدت (I) اور بلب اور پردے کے درمیان فاصلہ (d) کے مابین کے درمیان مکوس تغیر ہے۔

$$x \propto \frac{1}{\sqrt{y}} \quad .5$$

اور  $x = 40$  اور  $y = 16$  ہوتا ہے تو  $y = ?$  ہوتا ہے۔ اگر  $x = 10$  ہوتا ہے تو  $y = ?$  کتنا ہوگا؟

.6  $x$  اور  $y$  کے درمیان مکوس تغیر ہے۔  $x = 15$  تو  $y = 10$  ہوتا ہے۔  $x = 20$  تو  $y = ?$  ہوتا ہے۔



### وقت، کام، رفتار : (Time, Work, Speed)

کسی تعمیراتی کام کو پورا کرنے کے لیے لگائے گئے مزدوروں کی تعداد اور اس کام کو پورا کرنے لیے لگنے والا وقت، جیسی مثالیں مکوس تغیر کی ہوتی

ہیں۔ اسی طرح مکوس تغیر کی بعض مثالیں سواریوں کی رفتار اور ان کے ذریعے متعین کردہ فاصلہ طے کرنے کے لیے درکار وقت سے متعلق ہوتی ہیں۔

ایسی مثالوں کو وقت - کام - رفتار سے متعلق مثالیں کہتے ہیں۔

آئیے دیکھتے ہیں کہ تغیر کی علامت کا استعمال کر کے اس قسم کی مثالیں کس طرح حل کرتے ہیں؟

**مثال (1)** ایک گھیت میں موگ پھلی نکالنے کا کام 15 عورتیں 8 دن میں پورا کرتی ہیں۔ وہی کام 6 دنوں میں پورا کرنا ہو تو کتنی عورتیں کام پر ہونا

چاہیے؟

**حل :** کام پورا ہونے کے لیے درکار وقت اور کام کرنے والی عورتوں کی تعداد کے درمیان مکوس تغیر ہوتا ہے۔

فرض کیجیے کہ دنوں کی تعداد (d) اور عورتوں کی تعداد n ہے۔

$$d \propto \frac{1}{n} \quad , \quad \therefore d \times n = k \quad \text{(تغیر کا مستقل عدد ہے)}$$

جب  $d = 8$  تو  $n = 15$

$$\therefore k = d \times n = 15 \times 8 = 120 \quad \text{(تغیر کا مستقل ... )}$$

اب 6 ہو تو  $d = ?$ ، معلوم کریں گے۔

$$d \times n = 120$$

$$\therefore 6 \times n = 120, \quad \therefore n = 20$$

$\therefore$  6 دن میں کام پورا کرنے کے لیے 20 عورتیں کام پر ہونا چاہیے۔

**مثال (2)** ایک سواری کی اوسط رفتار 48 کلومیٹر فی گھنٹہ ہوتی پچھلے فاصلہ طے کرنے کے لیے اسے 6 گھنٹے لگتے ہیں۔ اگر رفتار 72 کلومیٹر فی گھنٹہ

ہو جاتی ہے تو اتنا ہی فاصلہ طے کرنے کے لیے اسے کتنا وقت لگے گا؟

حل : فرض کیجیے سواری کی رفتار  $s$  ہے اور درکار وقت  $t$  ہے۔ رفتار اور وقت کے درمیان معمولی تغیر ہے۔

$$s \propto \frac{1}{t}, \quad \therefore s \times t = k \quad \text{(تغیر کا مستقل عدد ہے) ...}$$

$$k = s \times t = 48 \times 6 = 288 \quad \text{(تغیر کا مستقل) ...}$$

اب  $s = 72$  ہو تو  $t$  معلوم کریں گے۔

$$s \times t = 288, \quad \therefore 72 \times t = 288, \quad \therefore t = \frac{288}{72} = 4$$

∴ سواری کی رفتار 72 کلومیٹرنی گھنٹہ ہوتا تھا، فاصلہ طے کرنے کے لیے 4 گھنٹے درکار ہوں گے۔

### مشقی سیٹ 7.3

.1 درج ذیل میں سے کون سے پہنات معمولی تغیر کے ہیں؟

(1) مزدوروں کی تعداد اور ان کے کام پورا کرنے کے لیے لگنے والا وقت۔

(2) حوض بھرنے کے لیے ایک جیسے نبوں کی تعداد اور حوض بھرنے کے لیے درکار وقت۔

(3) سواری میں بھرا ہوا پڑول اور اس کی قیمت۔

(4) دائرے کا رقبہ اور اس دائیرے کا نصف قطر۔

.2 اگر 15 مزدوروں کو ایک دیوار تعمیر کرنے کے لیے 48 گھنٹے لگتے ہیں تو 30 گھنٹوں میں وہ کام پورا کرنے کے لیے کتنے مزدوروں گے؟

.3 تھیلی میں دو حصہ بھرنے والی شینن کے ذریعے 3 منٹ میں آدھے ہلڑ کی 120 تھیلیاں بھری جاتی ہیں تو 1800 تھیلیاں بھرنے کے لیے کتنا وقت درکار ہوگا؟

.4 ایک کار کو 60 کلومیٹرنی گھنٹہ کی اوسط رفتار سے کچھ فاصلہ طے کرنے کے لیے 8 گھنٹے لگتے ہیں۔ وہی فاصلہ ساڑھے سات گھنٹے میں طے کرنے کے لیے کار کی اوسط رفتار میں کتنا اضافہ کرنا ہوگا؟

### جوابات کی فہرست

### مشقی سیٹ 7.1

1. (1)  $c \propto r$       (2)  $l \propto d$       2.  $x = 20$  اور  $y = 96$  باترتیب

3. 308      4.  $m = 7$  اور  $n = 26$  باترتیب      5.  $k = 6$ ,  $y = 6\sqrt{x}$       6. ₹4250

### مشقی سیٹ 7.2

1. 18 دن اور مزدوروں کی تعداد باترتیب 15 اور 5

2. (1)  $k = 60$ ,  $pq = 60$   
(2)  $k = 60$ ,  $zw = 60$       (3)  $k = 100$ ,  $st^2 = 100$       (4)  $k = 45$ ,  $x\sqrt{y} = 45$

3.  $l \propto \frac{1}{f}$       4. (1)  $l \propto \frac{1}{d^2}$       5.  $y = 256$       6.  $y = 7.5$

### مشقی سیٹ 7.3

1. (1), (2) معمولی تغیر      2. 24 مزدور      3. 45 منٹ      4. 4 کلومیٹرنی گھنٹہ



## ذواربعة الاصلاء بنانا اور ذواربعة الاصلاء کی فتمیں

آئیے ذرا یاد کریں

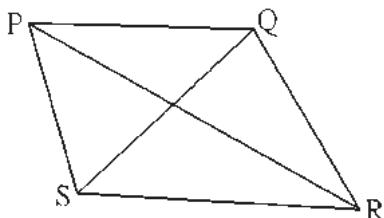
دی ہوئی پیمائشوں کے مطابق مثلث بنائے۔

$$l(AB) = 5 \text{ سم}, l(BC) = 5.5 \text{ سم}, l(AC) = 6 \text{ سم} \quad (1)$$

$$m\angle D = 35^\circ, m\angle F = 100^\circ, l(DF) = 4.8 \text{ سم} \quad (2)$$

$$l(MP) = 6.2 \text{ سم}, l(NP) = 4.5 \text{ سم}, m\angle P = 75^\circ \quad (3)$$

$$m\angle Y = 90^\circ, l(XY) = 4.2 \text{ سم}, l(XZ) = 7 \text{ سم} \quad (4)$$



کسی بھی ذواربعة الاصلاء کے چار زاویے، چار اضلاع اور دو درجات طرح کل دس اجزاء ہوتے ہیں۔

آئیے سمجھ لیں

### ذواربعة الاصلاء بنانا (Construction of a quadrilateral)

ذواربعة الاصلاء کے کل دس اجزاء میں سے مخصوص 5 اجزاء کی پیمائش معلوم ہو تو اس ذواربعة الاصلاء کو ہم بناسکتے ہیں۔ اس عمل کی بنیاد مثلى بنانے کے عمل کے جیسی ہے۔ اسے ہم ذیل کی مثال سے سمجھ لیں گے۔

(I) ذواربعة الاصلاء کے چار اضلاع اور ایک وتر دیا جائے تو ذواربعة الاصلاء بنانا :

**مثال :** اس طرح بنائے کہ  $\square PQRS$  میں  $l(RS) = 7 \text{ سم}$ ,  $l(PS) = 4.3 \text{ سم}$ ,  $l(QR) = 5 \text{ سم}$ ,  $l(PQ) = 5.6 \text{ سم}$

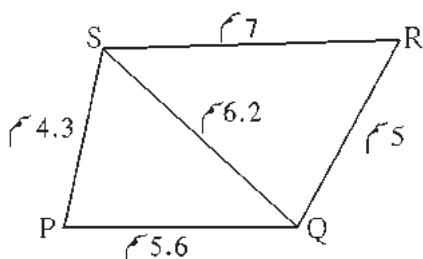
$$l(QS) = 6.2 \text{ سم}$$

**حل :** ہم پہلے کچی شکل بنائیں گے۔

شکل میں ذواربعة الاصلاء کے دیے ہوئے اجزاء کی معلومات دکھائیں۔

شکل کو دیکھنے پر واضح ہوتا ہے کہ  $\triangle SPQ$  اور  $\triangle SRQ$  کے تمام اضلاع کی لمبائی ہمیں معلوم ہیں۔ اس بنا پر  $\triangle SPQ$  اور  $\triangle SRQ$  بنانے پر، دی ہوئی معلومات کے مطابق  $\square PQRS$  حاصل ہوگا۔

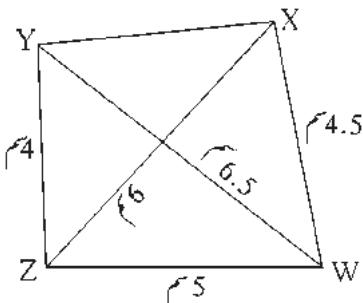
اس ذواربعة الاصلاء کو آپ خود بنائے۔



(II) ذواربعة الاضلاع کے تین اضلاع اور دو وتر دیے جائیں تو ذواربعة الاضلاع بنانا :

**مثال :** اس طرح بنائیے کہ سم  $\square WXYZ = 4$ ، سم  $l(YZ) = 6$ ، سم  $l(ZX) = 4.5$ ، سم  $l(WX) = 6.5$

$$l(ZW) = 5 \text{ سم}$$



**حل :** کچھی شکل بنائیے۔ دی ہوئی معلومات شکل میں دکھائیے۔

شکل کو دیکھنے پر واضح ہوتا ہے کہ  $\triangle WZY$  اور  $\triangle WXZ$

کے تمام اضلاع کی لمبائی ہمیں دی ہوئی ہے۔ اس بنابر  $\triangle WXZ$

اور  $\triangle WZY$  بنائیے۔ اس کے بعد قطع XY کھینچنے پر ہمیں

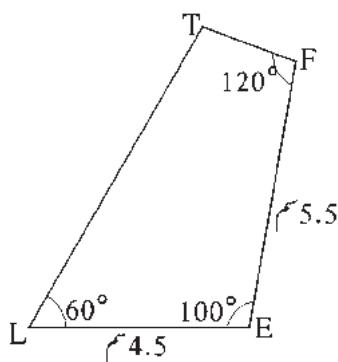
دی ہوئی پیمائش کا  $\square WXYZ$  حاصل ہوگا۔

اب اس طرح ذواربعة الاضلاع آپ خود بنائیے۔

(III) ذواربعة الاضلاع کے دو متوتر اضلاع اور کوئی بھی تین زاویے دیے جائیں تو ذواربعة الاضلاع بنانا :

**مثال :** اس طرح بنائیے کہ  $m\angle E = 100^\circ$ ،  $m\angle F = 120^\circ$ ،  $m\angle L = 60^\circ$ ، سم  $l(EL) = 4.5$ ، سم  $l(EF) = 5.5$

**حل :** کچھی شکل بنائیں اس میں دی ہوئی معلومات دکھائیے۔



شکل کی مدد سے واضح ہوتا ہے کہ 4.5 سم لمبائی کا قطعہ LE کھینچا اور

نقطہ E پر  $100^\circ$  پیمائش کا زاویہ بناتے ہوئے قطعہ EF کھینچنے پر

ذواربعة الاضلاع کے تین نقاط L، E اور F حاصل ہوتے ہیں۔ نقطہ L

پر  $60^\circ$  پیمائش کا زاویہ بنانے والی اور نقطہ F پر  $120^\circ$  پیمائش کا زاویہ

بنانے والی شعاعیں کھینچیں۔ ان کا نقطہ تقاطع، نقطہ T ہوگا۔ اب آپ یہ

ذواربعة الاضلاع بنائیے۔

(IV) ذواربعة الاضلاع کے تین اضلاع اور ان میں شامل کیے ہوئے زاویے دیے ہوں تو ذواربعة الاضلاع بنانا :

**مثال :** اس طرح بنائیے کہ سم  $l(QR) = 5$ ، سم  $l(SP) = 4$ ، سم  $l(RS) = 6.2$ ، سم  $l(QS) = 6.2$

**حل :** پہلے ذواربعة الاضلاع کی کچھی شکل بنائیے اور اس میں دی ہوئی معلومات دکھائیے۔

اس بنابر ہمیں سمجھ میں آتا ہے کہ دی ہوئی لمبائی کا قطعہ QR کھینچ کر نقطہ R پر

$62^\circ$  کا زاویہ بنانے والا قطعہ RS کھینچنے کی بنابر ذواربعة الاضلاع کے نقاط

Q، R اور S حاصل ہوتے ہیں۔

قطعہ RS کے نقطہ S پر  $75^\circ$  پیاس کا زاویہ بنانے والا قطعہ SP اس طرح پہنچنے کے سمیں  $SP = 4$  سینٹی میٹر کھینچنے پر دی جائے۔ اب آپ اس طرح کا عمل کرتے ہوئے شکل بنائیں۔

### مشقی سیٹ 8.1

.1 ذیل کی پیاس کے مطابق ذواربعة الاصلاء بنائیے۔

$$m\angle R = 90^\circ, l(MO) = 5.8 \text{ سینٹی میٹر}, l(OR) = 4.4 \text{ سینٹی میٹر}, m\angle M = 58^\circ, m\angle O = 105^\circ \quad \square MORE \quad (1)$$

$$l(EG) = 7.8 \text{ سینٹی میٹر}, l(DE) = 4.5 \text{ سینٹی میٹر}, l(EF) = 6.5 \text{ سینٹی میٹر}, l(DG) = 5.5 \text{ سینٹی میٹر} \quad \square DEFG \quad (2)$$

$$l(DF) = 7.2 \text{ سینٹی میٹر}$$

$$m\angle B = 50^\circ, m\angle C = 140^\circ, m\angle A = 70^\circ, l(BC) = 4.8 \text{ سینٹی میٹر}, l(AB) = 6.4 \text{ سینٹی میٹر} \quad \square ABCD \quad (3)$$

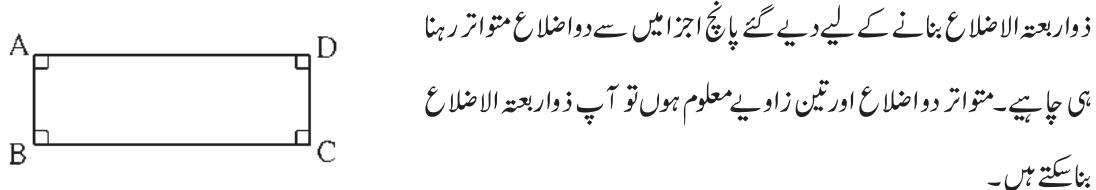
$$l(OM) = 7.5 \text{ سینٹی میٹر}, l(LM) = l(LO) = 6 \text{ سینٹی میٹر}, l(ON) = l(NM) = 4.5 \text{ سینٹی میٹر} \quad \square LMNO \quad (4)$$



ذواربعة الاصلاء کے اصلاء اور زاویوں پر مختلف قسم کی شرائط لگانے پر ذواربعة الاصلاء کی مختلف قسمیں حاصل ہوتی ہیں۔ قائمۃ الزاویہ ذواربعة الاصلاء یا مستطیل اور مربع ان ذواربعة الاصلاء کی اقسام کا تعارف آپ کر چکے ہیں۔ ذواربعة الاصلاء کی مزید قسموں کا مطالعہ ہم عملی کام کے ذریعے کریں گے۔

**قائمۃ الزاویہ ذواربعة الاصلاء یا مستطیل (Rectangle) :**

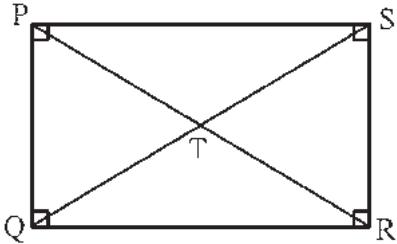
جس ذواربعة الاصلاء کے چاروں زاویے قائم ہوتے ہیں اس ذواربعة الاصلاء کو قائمۃ الزاویہ ذواربعة الاصلاء یا مستطیل کہتے ہیں۔



ذواربعة الاصلاء بنانے کے لیے دیے گئے پانچ اجزاء میں سے دواصلاء متواتر رہنا ہی چاہیے۔ متواتر دواصلاء اور تین زاویے معلوم ہوں تو آپ ذواربعة الاصلاء بناسکتے ہیں۔

تعریف کے مطابق مستطیل کے تمام زاویے قائم ہوتے ہیں۔ اس لیے مستطیل کے متواتر دو ضلعے معلوم ہوں تو ہی آپ مستطیل بناسکتے ہیں۔

**عملی کام I :** آپ مناسب متوال اضلاع (لبائی اور چوڑائی) کا ایک مستطیل PQRS بنائیے۔ ان کے وتروں کے نقطہ تقاطع کو T نام دیجیے۔ اب تقسیم کاراوناپ پٹی کی مدد سے



- (1) ضلع QR اور ضلع PS، (مقابل کے ضلعوں) کی لمبائی ناپیے۔
- (2) ضلع PQ اور ضلع SR کی لمبائی ناپیے۔
- (3) وتر PR اور وتر QS کی لمبائی ناپیے۔
- (4) وتر PR کے حصوں قطعہ PT اور قطعہ TR کی لمبائی ناپیے۔
- (5) وتر QS کے حصوں قطعہ QT اور قطعہ TS کی لمبائی ناپیے۔

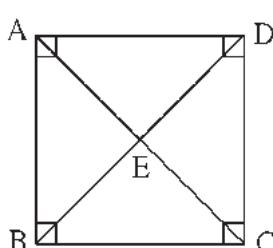
حاصل ہونے والی تمام پیمائشوں کا مشاہدہ کیجیے۔ کلاس روم میں دیگر طلبہ کی پیمائشوں سے موازنہ کرتے ہوئے بحث کیجیے۔ بحث کے ذریعے مستطیل کی ذیل کی خصوصیات آپ کو سمجھ میں آئیں گی۔

- مستطیل کے مقابلے کے اضلاع ایک دوسرے کے متماثل ہوتے ہیں۔
- مستطیل کے وتر متماثل ہوتے ہیں۔
- مستطیل کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

### مرربع : Square

جس ذوار بعده الاضلاع کے تمام اضلاع متماثل ہوتے ہیں اور تمام زاویے قائم ہوتے ہیں۔ اس ذوار بعده الاضلاع کو مرربع کہتے ہیں۔

**عملی کام II :** آپ ایک مناسب لمبائی کے ضلع کا مرربع  $\square ABCD$  بنائیے۔ اس کے وتروں کے نقطہ تقاطع کو E نام دیجیے۔ اب جیو میٹری باکس کے آلات کا استعمال کر کے



- (1) وتر AC اور وتر BD کی لمبائی ناپیے۔
  - (2) نقطہ E کی وجہ سے بننے ہوئے وتر کے دونوں حصوں کی لمبائی ناپیے۔
  - (3) نقطہ E پر بننے ہوئے کی پیمائش معلوم کیجیے۔
  - (4) وتر کی وجہ سے مرربع کے ہر زاویے کے بننے والے حصوں کی پیمائش ناپیے۔
- (مثلاً  $\angle CDB$  اور  $\angle ADB$ )

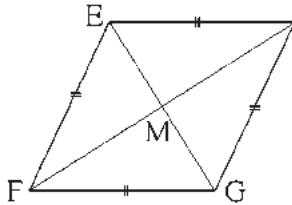
آپ اور آپ کی کلاس کے دیگر طلبہ کے ذریعے حاصل ہونے والی پیمائشوں کا مشاہدہ کیجیے۔ بحث کیجیے۔

آپ کو مرربع کی درج ذیل خصوصیات حاصل ہوتی ہیں۔

- وتر مساوی لمبائی کے لیے متماثل ہوتے ہیں۔
- وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔
- وتر ایک دوسرے پر عمود ہوتے ہیں۔
- وتر، مرربع کے مقابلے کے زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں۔

جس ذوار بعثۃ الاضلاع کے تمام اضلاع کی لمبائی مساوی (متماش) ہو، اس ذوار بعثۃ الاضلاع کو معین کہتے ہیں۔

**عملی کام III :** مناسب لمبائی کا ضلع اور ایک مناسب پیمائش کا زاویہ لے کر ایک معین EFGH بنائیے۔ اس کے وتر کھینچ کر ان کے نقطہ تقاطع کو M نام دیجیے۔



(1) ذوار بعثۃ الاضلاع کے مقابل کے زاویے، اسی طرح نقطہ M پر بننے والے تمام زاویے ناپیے۔

(2) وتر کے ذریعے ذوار بعثۃ الاضلاع کے ہر زاویے کے بننے والے دونوں زاویے ناپیے۔

(3) دونوں وتروں کی لمبائی ناپیے۔ نقطہ M سے وتروں کے بننے والے حصوں کو ناپیے۔

تمام پیمائشوں کی مدد سے معین کی درج ذیل خصوصیات آپ کو حاصل ہوں گی۔

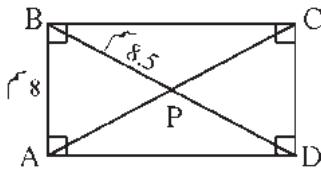
- مقابل کے زاویے متماش ہوتے ہیں۔

- وتر، معین کے مقابل کے زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں۔

- وڑا ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں، اسی طرح ایک دوسرے پر عواد ہوتے ہیں۔

- ایسا دکھائی دے گا کہ آپ کی جماعت کے دیگر طلبہ کو بھی یہی خصوصیات حاصل ہوئی ہیں۔

### حل کردہ مثالیں



**مثال (1)** مستطیل ABCD کے وتروں کا نقطہ تقاطع P ہے۔

(i) اگر سم l(DC) = 8 ہو تو l(AB) = ?

(ii) سم l(BD) = 8.5 اور l(BP) = 8.5 معلوم کیجیے۔

**حل :** ایک کچی شکل بنایا کہ اس میں دی ہوئی معلومات ظاہر کیجیے۔

مستطیل کے مقابل کے ضلعے متماش ہوتے ہیں۔

$$\therefore l(DC) = l(AB) = 8 \text{ سم}$$

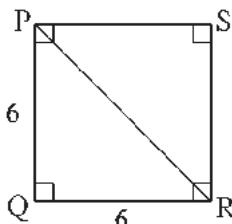
(ii) مستطیل کے وڑا ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

$$\therefore l(BD) = 2 \times l(BP) = 2 \times 8.5 = 17 \text{ سم}$$

$\triangle BCD$ ، ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ہے۔ فیما غورت کے مسئلہ کی رو سے

$$l(BC)^2 = l(BD)^2 - l(CD)^2 = 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225$$

$$\therefore l(BC) = \sqrt{225} = 15 \text{ سم}$$



**مثال (2)** 6 سم ضلع کے مربع کے وتر کی لمبائی معلوم کیجیے۔

**حل :** فرض کیجیے۔ شکل کے مطابق  $\square PQRS$ ، 6 سم ضلع والا ایک مربع ہے۔ قطعہ PR وتر ہے۔

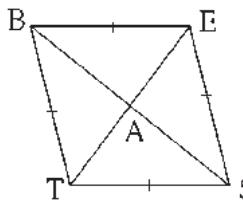
$$\begin{aligned}
 l(PR)^2 &= l(PQ)^2 + l(QR)^2 & \triangle PQR \text{ میں فیٹا نورث کے مسئلہ کی رو سے} \\
 &= (6)^2 + (6)^2 = 36 + 36 = 72 \\
 \therefore l(PR) &= \sqrt{72}
 \end{aligned}$$

اس لیے وتر کی لمبائی  $\sqrt{72}$  سم ہے۔

**مثال (3)**  $\square BEST$ ، ایک معین ہے جس کے وتر ایک دوسرے کو نقطہ A پر قطع کرتے ہیں۔

اگر  $m\angle BTS = 110^\circ$  معلوم کیجیے۔ (i)

اگر  $l(TS) = 70$ ،  $l(TE) = 24$  معلوم کیجیے۔ (ii)



**حل :**  $\square BEST$  کی کچی شکل بنا کرو تو انقطع A دکھائیے۔

معین کے مقابل کے زاویے متماثل ہوتے ہیں۔ (i)

$$\therefore m\angle BES = m\angle BTS = 110^\circ$$

$$m\angle BTS + m\angle BES + m\angle TBE + m\angle TSE = 360^\circ \quad \text{اب}$$

$$\therefore 110^\circ + 110^\circ + m\angle TBE + m\angle TSE = 360^\circ$$

$$\therefore m\angle TBE + m\angle TSE = 360^\circ - 220^\circ = 140^\circ$$

(معین کے مقابل کے زاویے متماثل ہوتے ہیں) ...

$$\therefore m\angle TBE = 70^\circ$$

(معین کے وتر مقابل کے زاویوں کی تصنیف کرتے ہیں) ...

معین کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں۔ (ii)

اس لیے  $\triangle TAS$  میں،

$$l(TA) = \frac{1}{2} \times 70^\circ = 35^\circ \quad l(AS) = \frac{1}{2} \times 70 = 35$$

فیٹا نورث کے مسئلہ کی رو سے

$$l(TS)^2 = l(TA)^2 + l(AS)^2 = (12)^2 + (35)^2 = 144 + 1225 = 1369$$

$$\therefore l(TS) = \sqrt{1369} = 37$$

### مشقی سیٹ 8.2

.1 سم  $l(AB) = 6.0$  اور سم  $l(BC) = 4.5$  کا مستطیل ABCD بنائیے۔

.2 سم کے ضلع کا ایک مریخ WXYZ بنائیے۔

.3 4 سم ضلع اور  $m\angle K = 75^\circ$  کا ایک معین  $\square KLMN$  بنائیے۔

.4 ایک مستطیل کا وتر 26 سم اور ایک ضلع کی لمبائی 24 سم ہو تو اس کا دوسرا ضلع معلوم کیجیے۔

5. معین ABCD کے وتروں کی لمبائی 16 سم اور 12 سم ہے۔ اس معین کے ضلع کی لمبائی اور احاطہ معلوم کیجیے۔
6. 8 سم ضلع کے مریع کا وتر معلوم کیجیے۔
7. ایک معین کے ایک زاویے کی پیمائش  $50^\circ$  ہے۔ اس کے دیگر تین زاویوں کی پیمائش معلوم کیجیے۔

### متوازی الاضلاع : (Parallelogram)

ذوار بعثۃ الاضلاع کے اس نام سے ہی آپ اس کی تعریف آسانی سے کر سکتے ہیں۔

جس ذوار بعثۃ الاضلاع کے مقابل کے اضلاع ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں، اس ذوار بعثۃ الاضلاع کو متوازی الاضلاع کہتے ہیں۔

متوازی الاضلاع کس طرح بنائیں گے؟

مقابل کی شکل کے مطابق ضلع AB اور ضلع BC ایک دوسرے سے کسی بھی پیمائش کا زاویہ بنانے والے قطعات کہنے چاہئے۔ ”خط کے باہر واقع نقطے سے، اس خط کے متوازی خط کھینچنا“، یہ عمل آپ نے کیا ہے۔ اس کا استعمال کر کے نقطہ C سے ضلع AB کے متوازی خط کھینچئے۔ اسی طرح نقطہ A سے قطعہ BC کے متوازی خط کھینچئے اور ان کے نقطہ تقاطع کو D نام دیجیے۔  $\square ABCD$  متوازی الاضلاع ہے۔

دھیان رکھیں کہ متوازی خطوط کے تقاطع سے بننے والے داخلہ زاویے متمم ہوتے ہیں۔ اس لیے اور پر کی شکل میں

$$m\angle D + m\angle A = 180^\circ \quad m\angle C + m\angle D = 180^\circ, \quad m\angle B + m\angle C = 180^\circ \quad \text{اور} \quad m\angle A + m\angle B = 180^\circ$$

یعنی متوازی الاضلاع کے زاویوں کی ایک خصوصیت ذیل کے مطابق ہے۔

- متوازی الاضلاع کے متواتر زاویوں کی ہر جوڑی کے زاویے ایک دوسرے کے متمم ہوتے ہیں۔

متوازی الاضلاع کی مزید خصوصیات معلوم کرنے کے لیے  $\square PQRS$  ایک متوازی الاضلاع ذیل کا عملی کام کرتے ہوئے بنائیے۔ کم زیادہ چوڑائی کی دوناپ پٹیاں لیجیے۔ ان میں سے ایک پٹی پر کاغذ رکھ کر اس کے کناروں سے لکیریں کھینچئے۔ دوسرا ناپ پٹی اس پر ترچھی رکھ کر اس کے کناروں سے لکیریں کھینچئے۔ اس کی وجہ سے آپ ایک متوازی الاضلاع حاصل ہوگا۔ اس کے وتر کھینچئے اور ان کے نقطہ تقاطع کو T نام دیجیے۔

(1) ذوار بعثۃ الاضلاع کے مقابل کے زاویے کی پیمائش ناپ کر لکھیے۔

(2) مقابل کے ضلعوں کی جوڑیوں کی لمبائیاں ناپ کر لکھیے۔

(3) وتروں کی لمبائیاں ناپ کر لکھیے۔

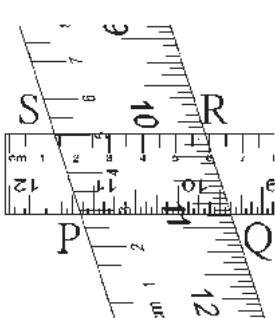
(4) نقطہ T کی وجہ سے بننے ہو تو کے حصے کی لمبائی ناپ کر لکھیے۔

ان پیمائشوں کی مدد سے آپ کو متوازی الاضلاع کی درج ذیل خصوصیات حاصل ہوں گی۔

- مقابل کے زاویوں کی پیمائش مساوی ہوتی ہیں۔ یعنی مقابل کے زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

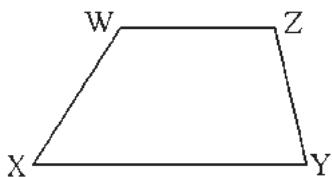
- مقابل کے ضلعوں کی لمبائیاں مساوی ہوتی ہیں۔ یعنی مقابل کے ضلعوں کی لمبائیاں متماثل ہوتے ہیں۔

- وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔ مختلف متوازی الاضلاع بنا کر ان خصوصیات کی تصدیق کیجیے۔



### ذوزنقہ (Trapzium) :

جس ذواربعتہ الاضلاع کے مقابلے کے ضلعوں کی ایک جوڑی متوازی ہو، اس ذواربعتہ الاضلاع کو ذوزنقہ کہتے ہیں۔



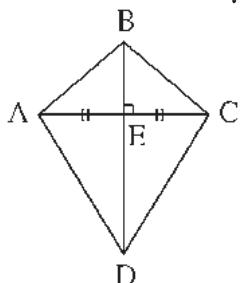
متصلہ شکل میں  $\square WXYZ$  میں قطعہ  $WZ$  اور قطعہ  $XY$  مقابلے کے اضلاع کی صرف ایک جوڑی متوازی ہے۔ تعریف کے مطابق  $\square WXYZ$  ایک ذوزنقہ ہے۔

متوازی ضلعوں اور ان کے تقاطع کی وجہ سے بننے والے داخلہ زاویوں کی خصوصیت کی بات پر  $m\angle W + m\angle X = 180^\circ$  اور  $m\angle Y + m\angle Z = 180^\circ$

متواتر زاویوں کی چار جوڑیوں میں سے دو جوڑیوں کے زاویے ایک دوسرے کے متمم ہوتے ہیں۔

### پینگ (Kite) :

شکل میں  $\square ABCD$  دیکھیے۔ اس ذواربعتہ الاضلاع میں میں وتر  $BD$ ، وتر  $AC$  کا عمودی ناصف ہے۔



جس ذواربعتہ الاضلاع کا ایک وتر، دوسرے وتر کا عمودی ناصف ہوتا ہے ایسے ذواربعتہ الاضلاع کو پینگ کہتے ہیں۔ اس شکل میں،

$CD \cong AD$  قطعہ اور  $BC \cong AB$  قطعہ  $\cong$  اس کی تقسیم کارکی مدد سے تصدیق کیجیے۔

اسی طرح  $\angle BAD$  اور  $\angle BCD$  ناپیے اور وہ متماثل ہیں اس کی بھی تصدیق کیجیے۔

یعنی پینگ ذواربعتہ الاضلاع کی ایک قسم ہے جس میں دو خصوصیات ہوتی ہیں۔

- متواتر ضلعوں کی دو جوڑیاں متماثل ہوتی ہیں۔

- مقابلے کے زاویوں کی ایک جوڑی کے زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

### حل کردہ مثالیں

**مثال (1)** ایک متوازی الاضلاع کے متواتر زاویوں کی پیمائش  $(7x - 7)$  اور  $(4x + 25)$  ہیں۔ ان زاویوں کی پیمائش معلوم کیجیے۔  
**حل :** متوازی الاضلاع کے متواتر زاویے متمم ہوتے ہیں۔

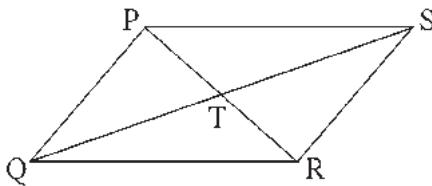
$$\therefore (7x - 7) + (4x + 25) = 180 \quad | \quad \therefore 9x = 180 - 18 = 162$$

$$\therefore 9x + 18 = 180 \quad | \quad \therefore x = 18$$

$$(5x - 7)^\circ = 5 \times 18 - 7 = 90 - 7 = 83^\circ$$

$$(4x + 25)^\circ = 4 \times 18 + 25 = 72 + 25 = 97^\circ$$

**مثال (2)** مقابل کی شکل میں  $\square PQRS$  متوازی الاضلاع ہے۔ اس کے وتروں کا نقط تقاطع  $T$  ہے۔ شکل کی بنیاد پر ذیل کے سوالوں کے جواب لکھیے۔



$$l(QR) = ? \text{ سم} \quad l(PS) = 5.4 \text{ سم} \quad (\text{i})$$

$$l(QS) = ? \text{ سم} \quad l(TS) = 3.5 \text{ سم} \quad (\text{ii})$$

$$m\angle QPS = ? \text{ ہو تو } m\angle QRS = 118^\circ \quad (\text{iii})$$

$$m\angle RPQ = ? \text{ ہو تو } m\angle SRP = 72^\circ \quad (\text{iv})$$

**حل :** متوازی الاضلاع  $PQRS$  میں

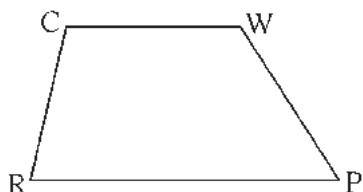
$$(\text{i}) \quad l(QR) = l(PS) = 5.4 \text{ سم}$$

$$(\text{ii}) \quad l(QS) = 2 \times l(TS) = 2 \times 3.5 = 7 \text{ سم} \quad (\text{و تر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں})$$

$$(\text{iii}) \quad m\angle QPS = m\angle QRS = 118^\circ \quad (\text{مقابل کے زاویے متماثل})$$

$$(\text{iv}) \quad m\angle RPQ = m\angle SRP = 72^\circ \quad (\text{متبادلہ زاویے متماثل})$$

**مثال (3)**  $\square CWPR$  کے متواتر زاویوں کی پیمائشوں کا تناسب  $5 : 3 : 9 : 7$  کی نسبت میں ہے۔ تب اس ذوار بعثۃ الاضلاع کے زاویوں کی پیمائش معلوم کیجیے اور ذوار بعثۃ الاضلاع کی قسم پہچانیے۔



**حل :** فرض کیجیے  $m\angle C : m\angle W : m\angle P : m\angle R = 7 : 9 : 3 : 5$

اس لیے فرض کیجیے  $\angle C, \angle W, \angle P, \angle R$  کی پیمائش با ترتیب  $7x, 9x, 3x, 5x$

$$\therefore 7x + 9x + 3x + 5x = 360^\circ$$

$$\therefore 24x = 360^\circ, \quad \therefore x = 15$$

$$\therefore m\angle C = 7 \times 15 = 105^\circ, m\angle W = 9 \times 15 = 135^\circ$$

$$m\angle P = 3 \times 15 = 45^\circ \quad \text{اور} \quad m\angle R = 5 \times 15 = 75^\circ$$

$$\therefore m\angle C + m\angle R = 105^\circ + 75^\circ = 180^\circ, \quad \therefore \text{ضلع } CW \parallel \text{ضلع } RP$$

$$m\angle C + m\angle W = 105^\circ + 135^\circ = 240^\circ \neq 180^\circ$$

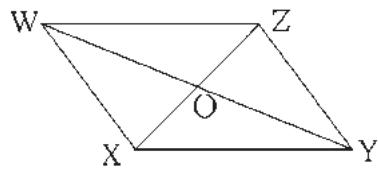
اس لیے ضلع  $CR$ ، ضلع  $WP$  کے متوازی نہیں ہے۔

$\square CWPR$  کے مقابل کے ضلعوں کی ایک ہی جوڑی متوازی ہے۔

اس لیے  $\square CWPR$  ذوزنقہ ہے۔

### مشقی سیٹ 8.3

1. ایک متوازی الاضلاع کے مقابل کے زاویوں کی پیمائش  $(2x - 50)^\circ$  اور  $(3x - 2)^\circ$  ہیں۔ تب ذوار بعثۃ الاضلاع کے تمام زاویوں کی پیمائش معلوم کیجیے۔



.2. مقابل کے متوازی الاضلاع کی شکل کے تعلق سے درج ذیل سوالات کے جوابات لکھیے۔

$$l(XY) = ? \text{ اگر سم } l(WZ) = 4.5 \text{ ہو تو } \quad (1)$$

$$l(XW) = ? \text{ اگر سم } l(YZ) = 8.2 \text{ ہو تو } \quad (2)$$

$$l(OZ) = ? \text{ اگر سم } l(OX) = 2.5 \text{ ہو تو } \quad (3)$$

$$l(WY) = ? \text{ اگر سم } l(WO) = 3.3 \text{ ہو تو } \quad (4)$$

$$m\angle XWZ = ? \quad m\angle WXY = ? \quad \text{اور} \quad m\angle WZY = 120^\circ \quad (5)$$

.3.  $\square ABCD$ ، ایک متوازی الاضلاع بنائیے۔ جس میں  $l(AB) = 3$  سم،  $\angle ABC = 40^\circ$ ،  $l(BC) = 7$  سم میں۔

.4. ایک ذواربعۃ الاضلاع کے چار متوازی زاویے  $4 : 3 : 2 : 1$  کے نسبت میں ہیں۔ وہ کس قسم کا ذواربعۃ الاضلاع ہوگا؟ اس ذواربعۃ الاضلاع کے ہر زاویے کی پیمائش معلوم کیجیے۔ وجہ لکھیے۔

.5. اس طرح بنائیے کہ سم  $l(AR) = l(CR) = 5.6$ ،  $l(AC) = 6.0$ ،  $l(BA) = l(BC) = 4.2$ ۔

.6\*. اس طرح بنائیے کہ سم  $l(RS) = 3.5$ ،  $l(PQ) = 3.5$ ،  $l(QR) = 5.6$ ،  $l(PQ) = 3.5$  ذواربعۃ الاضلاع  $\square PQRS$  متوالی کوئی کون سی معلومات دینا ضروری نہیں ہے۔

### جوابات کی فہرست

#### مشتقی سیٹ 8.2

4. 10 سم      5. ضلع 10 سم اور احاطہ 40 سم      6.  $\sqrt{128}$  سم      7.  $130^\circ, 50^\circ, 130^\circ$

#### مشتقی سیٹ 8.3

1.  $37^\circ, 143^\circ, 37^\circ, 143^\circ$   
 2. (1) 4.5 سم    (2) 8.2 سم    (3) 2.5 سم    (4) 6.6 سم    (5)  $120^\circ, 60^\circ$   
 4. ذوزنقہ  $36^\circ, 72^\circ, 108^\circ, 144^\circ$



# چھوٹ اور کمیشن

آئیے ذریاد کریں



درج ذیل خالی چوکون کو مناسب عدد لکھ کر مکمل کیجیے۔

$$1. \frac{12}{100} = \boxed{\phantom{00}} \% \quad 2. 47 \% = \frac{\boxed{\phantom{00}}}{\boxed{\phantom{00}}} \quad 3. 86 \% = \frac{\boxed{\phantom{00}}}{\boxed{\phantom{00}}}$$

$$4. 300 \times \frac{\boxed{\phantom{00}}}{\boxed{\phantom{00}}} = \boxed{\phantom{00}} \quad 5. 1700 \times \frac{\boxed{\phantom{00}}}{\boxed{\phantom{00}}} = \boxed{\phantom{00}}$$

آئیے بحث کریں



اس قسم کے اشتہارات آپ نے دیکھے ہوں گے۔ سیل میں کئی چیزوں کی قیتوں پر چھوٹ یا تخفیف دی جاتی ہے۔ اپنے یہاں عام طور پر جولائی کے مہینے میں، خاص طور پر کپڑوں کے سیل شروع ہوتے ہیں۔ اس کی وجہ دریافت کیجیے اور بحث کیجیے۔

آئیے سمجھیں

**چھوٹ (رعایت) : (Discount)**

شری سریش نے جون اور جولائی مہینے میں فروخت کی گئی سائزیوں کی تعداد اور نفع کا جدول ذیل میں دیا گیا ہے۔

ماہ	سائزی کی اصل قیمت روپے میں	سائزی کی فروخت ہونے والانفع (روپے میں)	ایک سائزی پر حاصل ہونے والانفع (روپے میں)	فروخت کی گئی سائزیوں کی تعداد	کل نفع
جون	200	250	50	40	$50 \times 40 = 2000$
جولائی (سیل)	200	230	30	100	$30 \times 100 = 3000$

اوپر کے جدول سے آپ کی سمجھ میں آیا ہوگا کہ جولائی میں سائزیوں کے سیل کا اعلان کر کے ہر سائزی پر چھوٹ دی گئی ہے۔ اس لیے ان کا ایک سائزی پر نفع جون مہینے کی نسبت جولائی مہینے میں کم ہوا۔ پھر بھی جولائی مہینے میں زیادہ سائزیوں کی فروخت ہوئی اس لیے کل نفع میں اضافہ ہوا۔

فروخت کی جانے والی چیزوں پر ان کی قیمت چھپی ہوئی ہوتی ہے۔ اسے اس چیز کی چھپی ہوئی قیمت (Marked Price) کہتے ہیں۔ دکاندار چھپی ہوئی قیمت پر چھوٹ (رعایت) دیتا ہے۔

اشیافروخت کرتے وقت، دکاندار چھپی ہوئی قیمت سے جتنی رقم کم لیتا ہے، اس رقم کو ”چھوٹ“ کہتے ہیں۔ چھوٹ دینے کے بعد باقی ماندہ قیمت کو فروخت قیمت کہتے ہیں۔

$$\text{چھوٹ} - \text{چھپی ہوئی قیمت} = \text{فروخت قیمت}$$

چھوٹ کی شرح عام طور پر فی صدی میں دی جاتی ہے۔ 20 فی صدی چھوٹ کا مطلب، اشیا کی چھپی ہوئی قیمت سے 20% کم قیمت لے کر چیز بچنا۔

یعنی اشیا کی چھپی ہوئی قیمت 100 روپے ہو تو اس پر 20% چھوٹ دینے سے اس کی فروخت قیمت =  $100 - 20 = 80$  روپے ہو جائے گی۔

$$\frac{x}{100} = \frac{\text{اشیا کی قیمت پر چھوٹ}}{\text{چھپی ہوئی قیمت}} \quad \text{تعلق ہوتا ہے۔}$$

$$\therefore \frac{x}{100} = \frac{\text{چھپی ہوئی قیمت}}{\text{اشیا کی قیمت پر چھوٹ}}$$

مزید معلومات کے لیے : آج کل دکان میں جا کر خریدنے کی بجائے کتابیں، کپڑے، موبائل وغیرہ کئی چیزیں آن لائن خرید و فروخت کی جاتی ہیں۔ جو کمپنی آن لائن اشیا خرید و فروخت کرتی ہیں اسے دکان کی سجاوٹ اور وہاں کے انتظامات کا خرچ بہت کم ہوتا ہے۔ اس لیے آن لائن خرید و فروخت پر چھوٹ ملتی ہے اور اشیا لگر بچنے ملتی ہیں۔

### حل کردہ مثالیں

**مثال (1)** ایک کتاب کی چھپی ہوئی قیمت 360 روپے ہے۔ دکاندار نے وہ کتاب 306 روپے میں فروخت کی۔ تب اس نے فی صدی چھوٹ کتنی دی؟

$$\text{حل} : \text{₹}306 = \text{فروخت قیمت} , \text{₹}360 = \text{چھپی ہوئی قیمت}$$

$$360 - 306 = ₹ 54 = \text{چھوٹ}$$

اشیا کی چھپی ہوئی قیمت 360 روپے، تب چھوٹ 54 روپے۔

اس لیے فرض کیجیے اشیا کی چھپی ہوئی قیمت 100 روپے، تب چھوٹ  $x$  روپے

$$\frac{\text{چھوٹ}}{\text{چھپی ہوئی قیمت}} = \frac{x}{100}$$

$$\therefore \frac{54}{360} = \frac{x}{100} , \therefore x = \frac{54 \times 100}{360} = 15$$

اس لیے کتاب کی چھپی ہوئی قیمت پر 15% چھوٹ دی گئی۔

**مثال (2)** کرسی کی چھپی ہوئی قیمت 1200 روپے ہے۔ اس پر 10% چھوٹ ہوتے کل چھوٹ کتنی؟ اور کرسی کی فروخت قیمت کتنی ہوگی؟

### طریقہ (II)

چھپی ہوئی قیمت پر 10% چھوٹ، یعنی اگر چھپی ہوئی قیمت 100 روپے ہوتے فروخت قیمت 90 روپے ہے۔  
 اس لیے چھپی ہوئی قیمت 1200 ہوتے فرض کیجیے فروخت قیمت  $x$  روپے  
 $\therefore \frac{x}{1200} = \frac{90}{100}$   
 $\therefore x = \frac{90}{100} \times \frac{1200}{1}$   
 $\therefore x = 1080$   
 اس لیے کرسی کی فروخت قیمت 1080 روپے ہے۔  
 روپے 1200 - 1080 = 120 کل چھوٹ

### طریقہ (I)

10% = چھوٹ، روپے 1200 = چھپی ہوئی قیمت

$\frac{\text{چھوٹ}}{\text{چھپی ہوئی قیمت}} = \frac{\text{کاتناسب معلوم کریں۔}}$

فرض کیجیے کرسی کی قیمت پر  $x$  روپے چھوٹ ملتی ہے۔

$$\begin{aligned}\therefore \frac{x}{1200} &= \frac{10}{100} \\ x &= \frac{10}{100} \times 1200 \\ x &= 120 \\ \therefore \text{کل چھوٹ} &= 120 \text{ } \text{₹} \\ \text{چھوٹ} - \text{چھپی ہوئی قیمت} &= \text{فروخت قیمت} \\ &= 1200 - 120 \\ &= 1080\end{aligned}$$

اس لیے کرسی کی فروخت قیمت 1080 روپے ہے۔

**مثال (3)** چھپی ہوئی قیمت پر 20% چھوٹ دے کر ایک ساڑی 1120 روپوں میں فروخت کی گئی تو اس ساڑی کی چھپی ہوئی قیمت کتنی ہوگی؟

**حل :** فرض کیجیے ساڑی کی چھپی ہوئی قیمت 100 روپے ہے۔

اس پر 20% چھوٹ دی گئی۔ یعنی گاہک کو وہ ساڑی روپے  $100 - 20 = 80$  میں فروخت کی گئی۔

یعنی جب فروخت قیمت 80 روپے، تب چھپی ہوئی قیمت 100 روپے ہے۔

فرض کیجیے فروخت قیمت 1120 روپے، تب چھپی ہوئی قیمت  $x$  روپے ہے۔

$$\begin{aligned}\therefore \frac{80}{100} &= \frac{1120}{x} \\ \therefore x &= \frac{1120 \times 100}{80} \\ &= 1400\end{aligned}$$

اس لیے ساڑی کی چھپی ہوئی قیمت 1400 روپے ہوگی۔

**مثال (4)** ایک دکاندار ایک چیز کی کچھ قیمت طے کر کے فروخت کرنا چاہتا ہے اور چیز کی قیمت اس نے طے کی ہوئی قیمت سے 30% بڑھا کر چھاپتا ہے۔

چیز فروخت کرتے وقت گاہک کو 20% چھوٹ دیتا ہے تو دکاندار کو اس کی طے کردہ قیمت سے کتنے فی صدی زیادہ قیمت حاصل ہوگی؟ معلوم کیجیے۔

**حل :** قیمت میں اضافے اور اسی طرح نفع میں اضافے کافی صد طے کی ہوئی قیمت پر ہوتا ہے۔ اس لیے طے کی گئی قیمت 100 روپے فرض کریں تو مثال حل کرنا آسان ہوگا۔

فرض کیجیے طے کی ہوئی قیمت 100 روپے ہے۔ اس قیمت کو وہ 30% سے بڑھا کر بتاتا ہے۔

$$\therefore \text{روپے} = 130 = \text{چھپی ہوئی قیمت}$$

$$130 \times \frac{20}{100} = 26 = \text{چھوٹ}$$

$$\therefore \text{روپے} = 130 - 26 = 104 = \text{فروخت قیمت}$$

اگر طے کی ہوئی قیمت 100 روپے ہو تو اسے 104 روپے حاصل ہوتے ہیں۔

یعنی دکاندار کو اس کی طے کی ہوئی قیمت سے 4% زیادہ قیمت ملتی ہے۔

**مثال (5)** ایک چیز پر دکاندار، گاہک کو 8% چھوٹ دیتا ہے۔ اگر اس چیز کی چھپی قیمت 1750 روپے ہو تو وہ چیز دکاندار نے کتنی قیمت پر خریدی ہوگی؟

**حل :** 8 فی صدی چھوٹ، روپے = 1750 = چیز کی چھپی قیمت

$$\therefore \text{روپے} = 1750 \times \frac{8}{100} = 140 = \text{چھوٹ}$$

$$\text{روپے} = 1750 - 140 = 1610 = \text{چیز کی فروخت قیمت}$$

15% نفع یعنی چیز کی خرید قیمت 100 روپے ہو تو، فروخت قیمت 115 روپے

یعنی، فروخت قیمت 115 روپے ہو تو، خرید قیمت 100 روپے

فرض کیجیے، فروخت قیمت 1610 روپے ہو تو، خرید قیمت  $x$  روپے ہے۔

$$\therefore \frac{x}{100} = \frac{1610}{115}, \quad \therefore x = \frac{1610 \times 100}{115} = 1400$$

$$\therefore \text{روپے} = 1400 = \text{چیز کی خرید قیمت}$$



فروخت قیمت - چھپی ہوئی قیمت = چھوٹ →

اگر چھوٹ  $x\%$  ہوتا ہے،

$$\frac{x}{100} = \frac{\text{اشیا کی قیمت پر چھوٹ}}{\text{چھپی ہوئی قیمت}}$$

## مشقی سیٹ 9.1

1. اگر چپھی ہوئی قیمت = 1700 روپے، فروخت قیمت = 1540 روپے ہو تو چھوٹ معلوم کیجیے۔
2. اگر ₹ 990 = چپھی ہوئی قیمت اور چھوٹ 10 فی صدی ہو تو فروخت قیمت معلوم کیجیے۔
3. اگر ₹ 990 = فروخت قیمت اور چھوٹ 20 فی صدی ہو تو چپھی ہوئی قیمت معلوم کیجیے۔
4. ایک ٹنکھے کی چپھی ہوئی قیمت 3000 روپے ہے۔ دکاندار 12% چھوٹ دے تو ٹنکھے پر دی گئی چھوٹ اور ٹنکھے کی فروخت قیمت معلوم کیجیے۔
5. 2300 روپے چپھی ہوئی قیمت کا مکسر، گاہک کو 1955 روپے میں ملتا ہے تو گاہک کو ملنے والی فی صدی چھوٹ معلوم کیجیے۔
6. دکاندار ایک لی - وی سیٹ پر 11 فی صد چھوٹ دیتا ہے۔ اس لیے گاہک کو وہ سیٹ 22250 روپے میں ملتا ہے تو اس T.V. سیٹ کی چپھی ہوئی قیمت معلوم کیجیے۔
7. چپھی ہوئی قیمت پر 10% چھوٹ ہو تو گاہک کو کل 17 روپے چھوٹ ملتی ہے تو گاہک کو وہ چیز کتنے روپیوں میں حاصل ہوگی اسے معلوم کرنے کے لیے درج ذیل خالی چکوں میں مناسب عدد لکھ کر عملی کام مکمل کیجیے۔
- عملی کام : فرض کیجیے، چیز کی چپھی ہوئی قیمت 100 روپے ہے۔
- روپے 90 =  $\boxed{\quad} - \boxed{\quad}$  = گاہک کو وہ چیز ملے گی۔
- یعنی جب  $\boxed{\quad}$  روپے چھوٹ، تب فروخت قیمت  $\boxed{\quad}$  روپے
- فرض کیجیے جب  $\boxed{\quad}$  روپے چھوٹ ہو تو فروخت قیمت  $x$  روپے۔
- $$\therefore \frac{x}{\boxed{\quad}} = \frac{\boxed{\quad}}{\boxed{\quad}}, \quad \therefore x = \frac{\boxed{\quad} \times \boxed{\quad}}{\boxed{\quad}} = \boxed{\quad}$$
- اس لیے گاہک کو وہ چیز 153 روپے میں ملے گی۔
8. دکاندار ایک چیز ایک مخصوص قیمت پر فروخت کرتا ہے اور اس کی قیمت طے کردہ قیمت سے 25% اضافہ کر کے چھاپتا ہے۔ چیز فروخت کرتے وقت وہ گاہک کو 20% چھوٹ دیتا ہے تو دکاندار کو اس کی طے کردہ قیمت اور فروخت قیمت کے درمیان کتنے فی صدی فرق ہوا؟



**کمیشن (Commission)**

اشیا کی پیداوار کرنے والی کمپنی کو خدا پنا مال فروخت کرنا ممکن نہیں ہوتا تب وہ کمپنی کچھ افراد کو اپنا مال مثلاً کتابیں، کپڑے، صابن وغیرہ

فروخت کرنے کی ذمہ داری دیتی ہے۔ اس خدمت کے عوض اس فرد کو کچھ رقم دی جاتی ہے۔ اسے کمیشن کہتے ہیں اس لیے ایسا کام کرنے والے افراد کو کمیشن ایجنت کہتے ہیں۔ کمیشن فی صدی میں دیا جاتا ہے۔ اس کی شرح چیزوں کے مطابق مختلف ہوتی ہے۔

زمین (قطعہ اراضی)، گھر، مویشی ان کے مالکوں کو ان چیزوں کے فروخت کرتے وقت آسانی سے گاہک نہیں ملتے۔ اس لیے فروخت کرنے والے اور خریدنے والے ان دونوں کو ایک جگہ لانے کا کام جو شخص کرتا ہے اسے پیچولیا (دلال) یا کمیشن ایجنت کہا جاتا ہے۔

اناج، سبزی ترکاری، پھل، پھول وغیرہ زرعی اشیا کی فروخت جس پیچولیا کے ذریعے ہوتی ہے اس فرد کو دلال یا کمیشن ایجنت کہتے ہیں۔ اس کام پر دلال کو جو کمیشن ملتا ہے اسے دلائی کہتے ہیں۔ یہ دلائی یا کمیشن جس کا مال فروخت کرنا ہے اس کی طرف سے یا جو اشیا خریدتا ہے اس کی جانب سے، یادوں جانب سے مل سکتا ہے۔

### حل کردہ مثالیں

**مثال (1)** ایک دلال کی مدد سے ریحان 2,50,000 روپے قیمت کا قطعہ اراضی فرخان کو فروخت کرتا ہے۔ دلال نے دونوں سے 2% دلائی لی تو دلال کو کل کتنی دلائی ملی؟

$$\begin{aligned} \text{روپے } 2,50,000 &= \text{قطعہ اراضی کی قیمت} \\ \text{روپے } 250000 \times \frac{2}{100} &= \text{دلائی} \quad \therefore \\ \text{دلائی دونوں جانب سے ملی۔} & \end{aligned}$$

$$\text{روپے } 5000 + 5000 = 10,000 = \text{کل دلائی}$$

**مثال (2)** احمد نے دلال کی معرفت 10 کوئٹل گیہوں، فی کوئٹل 4,050 روپے کے حساب سے فروخت کیا۔ اس نے دلال کو 1% دلائی دی۔ تو گیہوں فروخت کرنے پر احمد کو کتنی رقم ملی؟ اسے معلوم کیجیے۔

$$1 \text{ فی صد} = \text{دلائی، روپے } 10 \times 4050 = 40500 = \text{گیہوں کی کل فروخت قیمت}$$

$$\therefore 40500 \times \frac{1}{100} = 405 = \text{دلائی}$$

$$\text{دلائی} - \text{گیہوں کی فروخت} = \text{گیہوں فروخت کرنے پر ملنے والی رقم}$$

$$= 40500 - 405 = 40,095$$

$$\text{روپے } 40,095 = \text{گیہوں فروخت کرنے پر احمد کو ملنے والی رقم}$$

کھادی گرام ادھیوگ، بھنڈار، ہاتھ ماگھ، دست کاری کی اشیا فروخت کرنے والا مرکز، مہیلا بچت گٹ وغیرہ انہمیں کچھ مخصوص موقع پر گاہک کو چھوٹ دیتی ہیں۔ مثلاً گاندھی جینی کے موقع پر کھادی کپڑوں پر چھوٹ دی جاتی ہے۔ ایسے وقت دکاندار کو چھپی قیمت سے جتنی رقم کم ملتی ہے اس کی تلافی حکومت کرتی ہے۔ اس ایکیم کے تحت گاہک کو جو چھوٹ ملتی ہے اسے تخفیف کہتے ہیں۔

انمیکس ادا کرنے والے شخص کی آدمی طشدہ حد تک ہوتی ہے تو انہیں انمیکس میں چھوٹ ملتی ہے۔ اس چھوٹ کو بھی تخفیف (Rebate) کہتے ہیں۔

محضراً تخفیف یعنی ایک قسم کی چھوٹ ہی ہوتی ہے۔ وہ مخصوص شرط کے مطابق منظور شدہ اداروں یا حکومت کی جانب سے دی جاتی ہے۔

### حل کردہ مثالیں

**مثال :** ہاتھ ماگھ منڈل کے ایک دکان سے عبداللہ نے درج ذیل اشیا خریدیں۔

(i) 2 چادر : 375 روپے فی چادر

(ii) 525 روپے فی شترنجی کے حساب سے 2 شترنجی

اس خرید پر فی صدی 15 روپے تخفیف ملی تو تخفیف کی کل رقم کتنی؟ عبداللہ دکاندار کو کتنی رقم دے گا؟

**حل :** ₹1050 = ₹750 + 2 × 525 = 2 × 375 = 2 چادر کی قیمت

روپے 750 + 1050 = 1800 = خریدی گئی چیزوں کی کل قیمت

روپے  $1800 \times \frac{15}{100} = 270$  = ملنواں کل تخفیف

روپے  $1800 - 270 = 1530$  = عبداللہ کے ذریعے دکاندار کو ادا کی جانے والی رقم ∴

**مشتقہ سیٹ 9.2**

1. جان نے ایک پبلشر کی 4500 روپے قیمت کی کتابیں فروخت کیں۔ اس پر اسے 15% کمیشن ملا۔ تو جان کو کل کتنا کمیشن ملا؟ اسے معلوم کرنے کے لیے خالی چوکون مکمل سمجھیے۔

کتابوں کی فروخت قیمت =  $\boxed{\phantom{00}}$  ، کمیشن کی شرح =  $\boxed{\phantom{00}}$

حاصل ہونے والا کمیشن =  $\frac{\boxed{\phantom{00}}}{\boxed{\phantom{00}}} \times \boxed{\phantom{00}}$  ، روپے =  $\boxed{\phantom{00}}$  کمیشن ∴

.2. رفیق 4 نے صدی دلائی دے کر دلال کے ذریعے 15000 روپے کے پھول فروخت کرتا ہے۔ دلائی معلوم کیجیے۔ رفیق کو حاصل ہونے والی رقم معلوم کیجیے۔

.3. ایک کسان 9200 روپے کامال ایک دلال کے معرفت فروخت کرتا ہے۔ اسے 2% دلائی دینی پڑی، تو دلال کو کتنی رقم ملے گی؟

.4. کھادی بھنڈار سے امانتائی درج ذیل چیزیں خریدتی ہے :

(i) 3 ساڑیاں، ہر ایک کی قیمت 560 روپے۔

(ii) شہد کی 6 بوتلیں، ہر ایک کی قیمت 90 روپے۔

اس خرید پر 12% کے حساب سے تخفیف (Rebate) ملی تو امانتائی کو وہ چیزیں کتنے روپے میں ملیں؟

.5. دی ہوئی معلومات کی مدد سے درج ذیل خالی چوکنوں کو مناسب عدد سے پُر کیجیے۔

ایک دلال کے معرفت شریکتی دیپا نجلی نے 7,50,000 روپے قیمت کا ایک گھر شریکتی لیلا میں سے خریدا۔ دلال نے ہر ایک سے 2% دلائی تو

(1) شریکتی دیپا نجلی نے گھر خریدنے کے لیے  $\frac{\square}{\square} \times \square = \square$  روپے دلائی دی۔

(2) شریکتی لیلا میں نے گھر فروخت کرنے کے لیے  $\square$  روپے دلائی دی۔

(3) دلال کو اس کاروبار میں کل  $\square$  روپے دلائی ملی۔

(4) شریکتی دیپا نجلی کو وہ گھر  $\square$  روپے میں ملا۔

(5) شریکتی لیلا میں کو گھر فروخت کرنے پر  $\square$  روپے ملے۔

## جوابات کی فہرست

### مشقی سیٹ 9.1

- |         |            |          |                          |
|---------|------------|----------|--------------------------|
| 1. ₹160 | 2. ₹891    | 3. ₹1125 | 4. ₹2640                 |
| 5. 15%  | 6. ₹25,000 | 8. 0 %.  | چھوٹ ₹360 اور فروخت قیمت |

### مشقی سیٹ 9.2

- |                              |         |             |
|------------------------------|---------|-------------|
| 1. ₹14400 دلائی ₹600 اور رقم | 2. ₹184 | 3. ₹1953.60 |
|------------------------------|---------|-------------|



## مفرق مجموعہ سوالات 1

.1 ذیل کے سوالوں کے لیے تبادل جوابات دیے ہوئے ہیں۔ ان میں سے مناسب تبادل منتخب کیجیے۔

$m\angle Q = m\angle S = 72^\circ$  اور  $m\angle P = m\angle R = 108^\circ$  ہو تو ذیل میں سے کون سے

اضلاع متوازی ہیں؟

- (A) ضلع PQ اور ضلع QR      (B) ضلع SR اور ضلع PQ  
 (C) ضلع PS اور ضلع SP      (D) ضلع SR اور ضلع PQ

.2 ذیل کے بیانات پڑھیے، اس کے نیچے دیے ہوئے تبادلات سے مناسب تبادل منتخب کیجیے۔

مستطیل کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں۔ (i)

معین کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں۔ (ii)

متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں۔ (iii)

پنگ کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں۔ (iv)

بیان (ii) اور (iii) صحیح ہیں۔ (A) صرف بیان (ii) صحیح ہے۔ (B)

بیان (i) اور (iv) صحیح ہیں۔ (C) بیان (ii) اور (iv) صحیح ہیں۔ (D)

$$\sqrt[3]{0.006859} = 19^3 = 6859 \quad (3)$$

- (A) 1.9      (B) 19      (C) 0.019      (D) 0.19

.2 ذیل کے اعداد کے جذر المکعب معلوم کیجیے۔

- (1) 5832      (2) 4096

.3 اس کی مدد سے  $n = 15$   $m = 25$   $n = 15$   $m = 25$  جب  $m \propto n$

$n = ?$   $m = 155$   $n = ?$   $m = 87$  ہو تو  $n = ?$  کتنا؟ (1)

.4 اور  $y$  کے درمیان معلوم تغیر ہے۔ جب  $x = 12$   $y = 30$  تب  $x = ?$   $y = ?$  ہو تو

$x = 15$   $y = 18$  اگر  $x = 15$   $y = ?$  ہو تو  $y = ?$  (1)

.5 ایک خط 1 کمپنیجے۔ اس خط سے 3.5 سم کے فاصلے پر ایک متوازی خط کمپنیجے۔

.6  $\frac{5}{7}(256)$  یہ عدد کس عدد کے کس جذر کی کون سی قوت کا ہے؟ لکھیے۔

.7 ضابطے کا استعمال کر کے تو سچ کیجیے۔

- (1)  $(5x-7)(5x-9)$       (2)  $(2x-3y)^3$       (3)  $(a + \frac{1}{2})^3$

.8 ایک منفرجۃ الزراویہ مسئلہ بنائیے۔ اس مسئلہ کے تمام وسطانیے کھینچ کر ان کا نقطہ تراکز لکھائیے۔

△ABC اس طرح بنائے کہ سم  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $l(BC) = 5.5$  اس مثلث کے ارتفاعوں کا نقطہ تراکز دکھائیے۔ .9

ایک بس کو 48 کلومیٹرنی گھنٹے کی رفتار سے ایک گاؤں سے دوسرے گاؤں جانے کے لیے 5 گھنٹے لگتے ہیں۔ بس کی رفتار 8 کلومیٹرنی گھنٹے کم کی جائے تو اتنا ہی فاصلہ طے کرنے کے لیے کتنا وقت لگے گا؟ معلوم کیجیے۔ تغیر کی قسم کی شناخت کر کے مثال حل کیجیے۔ .10

△ABC کی قطعہ AD اور قطعہ BE وسطانیے ہیں۔ G ان کا نقطہ تراکز ہے۔ .11

اگر سم  $l(AG) = 5$  ہو تو  $l(GE) = ?$  اور سم  $l(GD) = ?$  ہو تو  $l(BE) = ?$

ذیل کے ناطق اعداد کو اعشاریہ کی صورت میں لکھیے۔ .12

- (1)  $\frac{8}{13}$       (2)  $\frac{11}{7}$       (3)  $\frac{5}{16}$       (4)  $\frac{7}{9}$

اجزائے ضربی کیجیے۔ .13

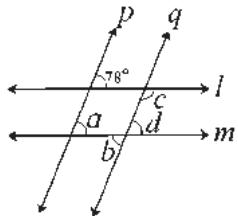
- (1)  $2y^2 - 11y + 5$       (2)  $x^2 - 2x - 80$       (3)  $3x^2 - 4x + 1$

ایک T.V. سیٹ کی قیمت 50,000 روپے ہے۔ اس سیٹ کو دکاندار 15% رعایت دے کر فروخت کرتا ہے تو گاہک کو وہ T.V. سیٹ کتنے روپے میں ملے گا؟ .14

راجابھاؤ نے اپنی پلاٹ (قطعہ زمین) ایک دلال کی معرفت و سنت راؤ کو 88,00,000 روپے میں فروخت کیا۔ دلال نے دونوں سے 2% شرح سے دلائی ملی۔ تو دلال کو کل کتنے روپے دلائی ملی؟ .15

ایک متوازی الاضلاع بنائے اس طرح کہ سم  $l(AD) = 4$ ,  $m \angle D = 45^\circ$ ,  $l(DC) = 5.5$  اور سم  $m \angle A = 78^\circ$  .16

متصلہ شکل میں  $m$  خط  $\parallel l$  خط، اسی طرح  $q$  خط  $\parallel p$  خط ہے۔ اس کی مدد سے  $\angle d$ ,  $\angle c$ ,  $\angle b$ ,  $\angle a$  کی پیمائش معلوم کیجیے۔ .17



## جوابات کی فہرست

1. (i) B    (ii) B    (iii) D    2. (1) 18    (2) 16    3. (1) 145    (2) 93

4. (1) 24    (2) 20    6. کے ساتویں جذر کی پانچیں قوت 256

7. (1)  $25x^2 - 80x + 63$     (2)  $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$     (3)  $a^3 + \frac{3a^2}{2} + \frac{3a}{4} + \frac{1}{8}$

10. معکوس تغیر، 6 گھنٹے    11.  $l(GD) = 2.5$  سم,  $l(BE) = 6$  سم

12. (1)  $0.\overline{615384}$     (2)  $1.\overline{571428}$     (3) 0.3125    (4)  $0.\dot{7}$

13. (1)  $(y-5)(2y-1)$     (2)  $(x-10)(x+8)$     (3)  $(x-1)(3x-1)$

14. ₹42,500    14. ₹3,52,000    17.  $78^\circ, 78^\circ, 102^\circ, 78^\circ$



## کشیر کنیوں کی تقسیم



گذشتہ سال الجبری عبارتوں کی جمع، تفریق اور ضرب کے اعمال کا ہم نے مطالعہ کیا ہے۔  
درج ذیل مثالوں میں خالی چوکوں مکمل کیجیے۔

(1)  $2a + 3a = \boxed{\phantom{00}}$

(2)  $7b - 4b = \boxed{\phantom{00}}$

(3)  $3p \times p^2 = \boxed{\phantom{00}}$

(4)  $5m^2 \times 3m^2 = \boxed{\phantom{00}}$

(5)  $(2x + 5y) \times \frac{3}{x} = \boxed{\phantom{00}}$

(6)  $(3x^2 + 4y) \times (2x + 3y) = \boxed{\phantom{00}}$



## کشیر کنیوں کا تعارف (Introduction to polynomials)

یک متغیری الجبری عبارتوں کے ہر کن کے متغیر کی قوت نامکمل عدد ہوتا، وہ عبارت ایک متغیری کشیر کنی ہوتی ہے۔

مثلاً  $3$  ،  $x^2 + 2x + 3$  ،  $x^2 + 2y^2 + y + 5$  یا ایک متغیری کشیر کنی ہیں۔

کشیر کنیاں بخصوص الجبری عبارت ہوتی ہیں، اس لیے کشیر کنیوں کی جمع، تفریق اور ضرب جیسے اعمال الجبری عبارت کے مطابق کیے جاتے ہیں۔

$$(4x - 5) - (3x^2 - 7x + 8)$$

**مثال (2)**

$$= 4x - 5 - 3x^2 + 7x - 8$$

$$= -3x^2 + 11x - 13$$

$$(3x^2 - 2x) \times (4x^3 - 3x^2)$$

$$= 3x^2(4x^3 - 3x^2) - 2x(4x^3 - 3x^2)$$

$$= 12x^5 - 9x^4 - 8x^4 + 6x^3$$

$$= 12x^5 - 17x^4 + 6x^3$$

## کشیر کنیوں کا درجہ (Degree of polynomials)

درج ذیل مثالوں کی کشیر کنیوں کے متغوروں کا سب سے بڑا قوت نامہ چوکون میں لکھیے۔

**مثال (1)** کشیر کنی  $4x + 3x^2$  کے متغیر کا سب سے بڑا قوت نما  $\boxed{2}$  ہے۔

**مثال (2)** کشیر کنی  $7x^3 + 5x + 4x^5 + 2x^2$  کے متغیر کا سب سے بڑا قوت نما  $\boxed{\phantom{00}}$  ہے۔

دی ہوئی کشیر کنی کے متغیر کا سب سے بڑا قوت نما، اس کشیر کنی کا درجہ کہلاتا ہے۔

## سے یہ میری سمجھ میں آگیا

- یک متغیری الجبری عبارت کے ہر کن کے متغیر کا قوت نامکمل عدد ہو تو وہ عبارت کثیر کرنی ہوتی ہے۔
- کثیر کرنی میں متغیر کا سب سے بڑا قوت نہ اس کثیر کرنی کا درجہ ہوتا ہے۔

## درست - آئیے سمجھ لیں

### یک رکنی کو یک رکنی سے تقسیم کرنا (To Divide a Monomial by Monomial)

**مثال (1)** تقسیم کیجیے۔  $15p^3 \div 3p$

حل : تقسیم، ضرب کا معکوس عمل ہوتا ہے۔

$$\begin{array}{r} 5p^2 \\ 3p \overline{) 15p^3} \\ \underline{-15p^3} \\ 0 \end{array}$$

اس لیے تقسیم  $15p^3 \div 3p$  کے لیے  $3p$  یک رکنی کو کس یک رکنی سے ضرب کرنے پر  $15p^3$  آئے گا۔  
اس بات پر غور کرنا ہوگا۔

$$3p \times 5p^2 = 15p^3, \quad \therefore 15p^3 \div 3p = 5p^2$$

اس مثال کی ترتیب بازو میں دکھائے ہوئے کے مطابق کر سکتے ہیں۔

**مثال (2)** تقسیم کیجیے اور خالی چوکون میں مناسب ارکان لکھیے۔

(i)  $(-36x^4) \div (-9x)$

$$\begin{array}{r} \boxed{\phantom{0}} \\ -9x \overline{) -36x^4} \\ \underline{-\boxed{\phantom{0}}} \\ \boxed{\phantom{0}} \end{array}$$

(ii)  $(5m^2) \div (-m)$

$$\begin{array}{r} \boxed{\phantom{0}} \\ -m \overline{) 5m^2} \\ \underline{-\boxed{\phantom{0}}} \\ \boxed{\phantom{0}} \end{array}$$

(iii)  $(-20y^5) \div (2y^3)$

$$\begin{array}{r} \boxed{\phantom{0}} \\ 2y^3 \overline{) -20y^5} \\ \underline{-\boxed{\phantom{0}}} \\ \boxed{\phantom{0}} \end{array}$$

### کثیر رکنی کو یک رکنی سے تقسیم کرنا (To divide a polynomial by a monomial)

درج ذیل مثال کا مطالعہ کیجیے اور کثیر رکنی کو یک رکنی سے تقسیم کرنے کا طریقہ سمجھ لیں۔

**مثال (1)**  $(6x^3 + 8x^2) \div 2x$

حل :

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 4x \\ 2x \overline{) 6x^3 + 8x^2} \\ \underline{-6x^3} \\ 0 + 8x^2 \\ \underline{-8x^2} \\ 0 \end{array}$$

وضاحت

$$(i) 2x \times \boxed{3x^2} = 6x^3$$

$$(ii) 2x \times \boxed{4x} = 8x^2$$

$$\therefore \text{خارج قسمت} = 3x^2 + 4x \\ \text{باقي} = 0$$

**مثال (2)**  $(15y^4 + 10y^3 - 3y^2) \div 5y^2$

حل :

$$\begin{array}{r} 3y^2 + 2y - \frac{3}{5} \\ 5y^2 \overline{)15y^4 + 10y^3 - 3y^2} \\ \underline{-15y^4} \\ 0 + 10y^3 - 3y^2 \\ \underline{-10y^3} \\ 0 - 3y^2 \\ \underline{-} \\ 0 \end{array}$$

$\therefore = 3y^2 + 2y - \frac{3}{5}$  خارج قسمت ، باقي = 0

وضاحت -

- (i)  $5y^2 \times \boxed{3y^2} = 15y^4$
- (ii)  $5y^2 \times \boxed{2y} = 10y^3$
- (iii)  $5y^2 \times \boxed{\frac{-3}{5}} = -3y^2$

**مثال (3)**  $(12p^3 - 6p^2 + 4p) \div 3p^2$

حل :

$$\begin{array}{r} 4p - 2 \\ 3p^2 \overline{)12p^3 - 6p^2 + 4p} \\ \underline{-12p^3} \\ 0 - 6p^2 + 4p \\ \underline{-} \\ \pm 6p^2 \\ \underline{0 + 4p} \end{array}$$

$\therefore = 4p - 2$  خارج قسمت ، باقي = 4p

وضاحت -

- (i)  $3p^2 \times \boxed{4p} = 12p^3$
- (ii)  $3p^2 \times \boxed{-2} = -6p^2$

**مثال (4)**  $(5x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 2x - 6) \div x^2$

حل :

$$\begin{array}{r} 5x^2 - 3x + 4 \\ x^2 \overline{)5x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 2x - 6} \\ \underline{-5x^4} \\ 0 - 3x^3 + 4x^2 + 2x - 6 \\ \underline{-} \\ \pm 3x^3 \\ \underline{0 + 4x^2 + 2x - 6} \\ - \\ \underline{-4x^2} \\ 0 + 2x - 6 \end{array}$$

$\therefore = 5x^2 - 3x + 4$  خارج قسمت ، باقي = 2x - 6

وضاحت -

- (i)  $x^2 \times \boxed{5x^2} = 5x^4$
- (ii)  $x^2 \times \boxed{-3x} = -3x^3$
- (iii)  $x^2 \times \boxed{4} = 4x^2$

کثیر رکنیوں کی تقسیم کرتے وقت جب باتی صفر آتا ہو، یا باقی رکن کا درجہ، مقسوم الیہ کثیر رکنی کے درجے سے چھوٹا ہوتا تھا۔ اسی طرح مثال (4) میں باقی  $2x - 6$  کا درجہ مقسوم الیہ  $x^2$  کے درجے سے چھوٹا ہے۔ اسے دھیان میں رکھیے۔

### مشتقی سیٹ 10.1

تقسیم کیجیے : خارج قسمت اور باقی لکھیے۔ 1.

- (1)  $21m^2 \div 7m$
- (2)  $40a^3 \div (-10a)$
- (3)  $(-48p^4) \div (-9p^2)$
- (4)  $40m^5 \div 30m^3$
- (5)  $(5x^3 - 3x^2) \div x^2$
- (6)  $(8p^3 - 4p^2) \div 2p^2$
- (7)  $(2y^3 + 4y^2 + 3) \div 2y^2$
- (8)  $(21x^4 - 14x^2 + 7x) \div 7x^3$
- (9)  $(6x^5 - 4x^4 + 8x^3 + 2x^2) \div 2x^2$
- (10)  $(25m^4 - 15m^3 + 10m + 8) \div 5m^3$



کثیر رکنی کو دو رکنی سے تقسیم کرنا : (To Divide a Polynomial by a Binomial)

کثیر رکنیوں کو دو رکنی سے تقسیم کرنے کا طریقہ، کثیر رکنیوں کو یک رکنی سے تقسیم کرنے کے طریقے کے جیسا ہی ہوتا ہے۔

**مثال (1)**  $(x^2 + 4x + 4) \div (x + 2)$

**حل :**

$$\begin{array}{r} x + 2 \\ \overline{x^2 + 4x + 4} \\ - x^2 - 2x \\ \hline 0 + 2x + 4 \\ + 2x + 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

**وضاحت :**

- (i) پہلے مقسوم اور مقسوم الیہ کو قوت نمائی ارتقی ترتیب میں لکھیے۔  
 مقسوم الیہ کے پہلے رکن کو  $x$  سے ضرب کرنے پر مقسوم کا پہلا رکن حاصل ہوتا ہے۔  
 $\therefore$  مقسوم الیہ کو  $x$  سے ضرب کریں۔

$$(ii) (x + 2) \times \boxed{2} = 2x + 4$$

$\therefore$  خارج قسمت  $= x + 2$

$\therefore$  باقی  $= 0$

## مثال (2)

**حل :** یہاں مقسوم کشیر کرنی کا درجہ 4 ہے۔ اس کے متغیروں کے قوت نما اترتی ترتیب میں نہیں ہیں۔ اسی طرح قوت نما 3 کا رکن بھی نہیں ہے۔ اسے 0y<sup>3</sup> مان کر اور مقسوم کشیر کرنی کو قوت نما کی اترتی ترتیب میں لکھ کر تقسیم کریں۔

$$\begin{array}{r}
 \frac{y^3 - 4y^2 + 6y}{y + 4) \overline{) y^4 + 0y^3 - 10y^2 + 24y}} \\
 \underline{- y^4 - 4y^3} \\
 \hline
 0 - 4y^3 - 10y^2 + 24y \\
 \underline{+ 4y^3 + 16y^2} \\
 \hline
 0 + 6y^2 + 24y \\
 \underline{- 6y^2 - 24y} \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$\therefore \text{خارج قسمت} = y^3 - 4y^2 + 6y , \text{ باقی} = 0$$

$$(i) (y + 4) \times y^3 = y^4 + 4y^3$$

$$(ii) (y + 4) \times -4y^2 = -4y^3 - 16y^2$$

$$(iii) (y + 4) \times 6y = 6y^2 + 24y$$

وضاحت

**حل :**

$$\begin{array}{r}
 \frac{6x^2 + 5x + 9}{x^2 - 1) \overline{) 6x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 5x - 9}} \\
 \underline{- 6x^4 \quad \quad \quad + 6x^2} \\
 \hline
 0 + 5x^3 + 9x^2 + 5x - 9 \\
 \underline{+ 5x^3 \quad \quad \quad - 5x} \\
 \hline
 0 + 9x^2 + 10x - 9 \\
 \underline{- 9x^2 \quad \quad \quad + 9} \\
 \hline
 0 + 10x + 0
 \end{array}$$

$$\therefore \text{خارج قسمت} = 6x^2 + 5x + 9 , \text{ باقی} = 10x$$

وضاحت

$$(i) (x^2 - 1) \times 6x^2 = 6x^4 - 6x^2$$

$$(ii) (x^2 - 1) \times 5x = 5x^3 - 5x$$

$$(iii) (x^2 - 1) \times 9 = 9x^2 - 9$$

کشیر کنی کو تقسیم کرتے وقت جب باقی صفر پتا ہے یا باقی کا درجہ، مقوم الیہ کشیر کنی کے درجے سے چھوٹا ہوتا ہے تو تقسیم کا عمل مکمل ہو جاتا ہے۔

مقوم کشیر کنی کے ارکان قوت نما کی اترتی ترتیب میں نہیں ہوں تو کشیر کنی کو قوت نما کی اترتی ترتیب میں لکھیے۔ اگر کسی قوت نما کا کرن نہیں ہو تو اس کا

ضریب 0 مان کر قوت نما کی اترتی ترتیب مکمل کیجیے۔

### مشقی سیٹ 10.2

تقسیم کیجیے۔ خارج قسمت اور باقی لکھیے۔ 1.

$$(1) (y^2 + 10y + 24) \div (y + 4) \quad (2) (p^2 + 7p - 5) \div (p + 3)$$

$$(3) (3x + 2x^2 + 4x^3) \div (x - 4) \quad (4) (2m^3 + m^2 + m + 9) \div (2m - 1)$$

$$(5) (3x - 3x^2 - 12 + x^4 + x^3) \div (2 + x^2)$$

$$(6^*) (a^4 - a^3 + a^2 - a + 1) \div (a^3 - 2)$$

$$(7^*) (4x^4 - 5x^3 - 7x + 1) \div (4x - 1)$$

### جوابات کی فہرست

### مشقی سیٹ 10.1

$$1. 3m, 0 \quad 2. -4a^2, 0 \quad 3. \frac{-16}{3}p^2, 0 \quad 4. \frac{4}{3}m^2, 0$$

$$5. 5x - 3, 0 \quad 6. 4p - 2, 0 \quad 7. y + 2, 3 \quad 8. 3x, - 14x^2 + 7x$$

$$9. 3x^3 - 2x^2 + 4x + 1, 0 \quad 10. 5m - 3, 10m + 8$$

### مشقی سیٹ 10.2

$$1. y + 6, 0 \quad 2. p + 4, -17 \quad 3. 4x^2 + 18x + 75, 300$$

$$4. m^2 + m + 1, 10 \quad 5. x^2 + x - 5, x - 2$$

$$6. a - 1, a^2 + a - 1 \quad 7. x^3 - x^2 - \frac{x}{4} - \frac{29}{16}, \frac{-13}{16}$$



## آئیے ذریاد کریں

**مثال :** نادرہ کے ذریعے ایک کتاب کے وزانہ مطالعہ کیے ہوئے صفحات کی تعداد 60، 50، 54، 46، 50 ہیں۔ اس بنا پر وزانہ پڑھے ہوئے صفحات کا اوسط معلوم کیجیے۔

$$\frac{\text{تمام شاروں کا مجموعہ}}{\text{شاروں کی کل تعداد}} = \text{اوسط}$$

$$= \frac{60 + \boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}} + 50}{\boxed{\phantom{00}}} = \frac{\boxed{\phantom{00}}}{\boxed{\phantom{00}}} = \boxed{\phantom{00}}$$

اس لیے وزانہ مطالعہ کیے ہوئے صفحات کا اوسط  $\boxed{\phantom{00}}$  ہے۔

اس اوسط کو میانیہ کہتے ہیں۔

## آئیے سمجھیں

مندرجہ بالا مثال میں وزانہ پڑھے ہوئے صفحات کی تعداد کو شماریاتی معلومات کہتے ہیں۔ اس بنا پر نادرہ روزانہ تقریباً 52 صفحات پڑھتی ہے۔ یہ نتیجہ اخذ کیا گیا ہے۔

کسی واقعہ کے تعلق سے یا مسئلے کے متعلق شماریاتی معلومات جمع کرنا، اس معلومات کا مطالعہ کر کے کچھ نتیجہ حاصل کرنا، یہ ایک آزاد علم کی شاخ ہے۔ اس شاخ کو شماریات نام دیا گیا ہے۔

### (Mean) میانیہ

ہم نے دیکھا کہ 60، 50، 54، 46 اور 50 اعداد کا اوسط 52 ہے۔ اس اوسط کو شماریات کی زبان میں میانیہ کہتے ہیں۔

عددی معطیات کا میانیہ معلوم کرنے کے لیے معطیات کا مجموعہ کیا جاتا ہے۔ اس مجموعے کو معطیات کی تعداد سے تقسیم کیا جاتا ہے۔

میانیہ معلوم کرنے کے اس طریقے کا ہم مزید مطالعہ کریں گے۔ اس لیے ذیل کی مثال دیکھیں۔

**مثال :** شاہین ہائی اسکول کراڈ میں جماعت آٹھویں کے 37 طلبہ کے ذریعے ریاضی میں 10 مارکس کی ایک آزمائش میں حاصل کردہ مارکس ذیل کے مطابق ہیں۔ ان کا میانیہ معلوم کیجیے۔

2, 4, 4, 8, 6, 7, 3, 8, 9, 10, 10, 8, 9, 7, 6, 5, 4, 6, 7, 8, 4, 8, 9, 7, 6,

5, 10, 9, 7, 9, 10, 9, 6, 9, 9, 4, 7.

**حل :** ہم جانتے ہیں کہ اس مثال میں معطیات کے اعداد کا مجموع کرنے میں زیادہ وقت درکار ہوگا۔

اس بنا پر ایک عدد میں وہی عدد جمع کرنے پر عمل آسان ہو جاتا ہے۔ اس بات کو یاد رکھیے۔ اس  $7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 7 \times 5 = 35$

بات کا استعمال کر کے اوپر کے اعداد کا مجموع کرنا سہولت بخش ہوگا۔ اس لیے معطیات کے اعداد کی درجہ بندی کر کے اعداد کا مجموع کریں گے۔

مارکس (شمارہ) $x_i$	شماریاتی نشانات	طلبه کی تعداد $f_i$	$f_i \times x_i$
2		1	$1 \times 2 = 2$
3		1	$1 \times 3 = 3$
4		5	$5 \times 4 = 20$
5		2	$2 \times 5 = 10$
6		5	$5 \times 6 = 30$
7		6	$6 \times 7 = 42$
8		5	$5 \times 8 = 40$
9		8	$8 \times 9 = 72$
10		4	$4 \times 10 = 40$
		$N = 37$	$\sum f_i \times x_i = 259$

$$\begin{aligned} \text{میانیہ} &= \frac{\sum f_i \times x_i}{N} \\ &= \frac{259}{37} \\ &= 7 \end{aligned}$$

مندرجہ بالاطریقے کے مطابق جدول بنانا کر معطیات کا میانیہ معلوم کرنے کے لیے ذیل کے مرحلے دھیان میں رکھیے۔

- پہلے ستون میں  $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$ ، اس طرح چڑھتی ترتیب میں شمارے لکھیے، اسے  $x_i$  سے ظاہر کیا گیا ہے۔

- دوسرے ستون میں شماریاتی نشانات لگائیے۔

- تیسرا ستون میں ہر شمارے کے تعلق سے شماریاتی نشانات گن کر لکھیے۔ اسے تعدد  $f_i$  سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس کے نیچے تمام تعداد کا مجموع لکھیے۔ کل تعداد  $N$  سے ظاہر کیا گیا ہے۔

- آخری ستون میں  $f_i \times x_i$  حاصل ضرب لکھیے۔ اس کے نیچے تمام حاصل ضرب کا مجموع لکھیے۔ تمام  $f_i \times x_i$  کے مجموع کو  $\sum f_i \times x_i$  سے ظاہر کرتے ہیں۔ ‘ $\Sigma$ ’ (سگما) علامت ”مجموع“ کے لیے استعمال کی جاتی ہے۔ میانیہ،  $x$  (ایکس بار) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\therefore \bar{x} = \frac{\sum f_i \times x_i}{N}$$

**مثال :** راجاپور گاؤں کے 30 کسانوں کے سویاہین کی فی ایکڑ پیداوار کو نٹل میں ذیل کے مطابق ہے۔

9, 7, 5, 8, 6, 5.5, 7.5, 5, 8, 5, 6.5, 5, 5.5, 4, 4, 8, 6, 8, 7.5, 6, 9, 5.5, 7.5, 8, 5, 6.5, 5, 5.5, 4, 8.

اس بنا پر تعدادی تفسیی جدول بنائیے اور سویاہین کی فی ایکڑ پیداوار کا میانیہ معلوم کیجیے۔

فی ایکڑ پیداوار (کو نٹل میں) $x_i$ (شمارہ)	شماریاتی نشانات	کسانوں کی تعداد (تعداد) $f_i$	$f_i \times x_i$
4		3	12
5		5	25
5.5		4	22
6		3	18
6.5		2	13
7.5		4	30
8		6	48
9		3	27
		$N = 30$	$\sum f_i \times x_i = 195$

**حل :**

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i \times x_i}{N} = \frac{195}{30} = 6.5 \text{ میانیہ}$$

فی ایکڑ سویاہین کی پیداوار کا میانیہ 6.5 کو نٹل ہے۔

### مشقی سیٹ 11.1

1. جماعت آٹھویں کے 30 طلباء میں سے ہر ایک کے لگائے ہوئے پودوں کی تعداد ذیل کے تعدادی تفسیی جدول میں دی ہوئی ہے۔

اس بنا پر ہر ایک کے ذریعے لگائے ہوئے پودوں کا میانیہ معلوم کرنے کے لیے ذیل کا جدول مکمل کیجیے۔

پودوں کی تعداد $x_i$ (شمارہ)	طلبہ کی تعداد (تعداد) $f_i$	$f_i \times x_i$
1	4	4
2	6	...
3	12	...
4	8	...
	$N = \square$	$\sum f_i \times x_i = \square$

$$\bar{x} = \frac{\square}{N}$$

$$= \frac{\square}{\square}$$

$$= \square$$

∴ ہر طالب علم کے ذریعے لگائے ہوئے پودوں کا میانیہ  $\square$  ہے۔

2. ایک گاؤں کے 25 خاندانوں کے ذریعے مئی مہینے میں استعمال کردہ بجلی کا یونٹ ذیل کے جدول میں دیا ہوا ہے۔ جدول مکمل کر کے ذیل کے سوالات کے جوابات لکھیے۔

بجلی کا استعمال (یونٹ) (شمارہ) $x_i$	خاندان کی تعداد (تعداد) $f_i$	$f_i \times x_i$
30	7	.....
45	2	.....
60	8	.....
75	5	.....
90	3	.....
	$N = \dots$	$\sum f_i \times x_i = \dots$

(1) 45 یونٹ استعمال کرنے والے کل  
کتنے خاندان ہیں؟

(2) جس شمارے کا تعداد 5 ہے وہ شمارہ  
کون سا ہے؟

$$N = ? , \sum f_i \times x_i = ? \quad (3)$$

(4) اس بنا پر مئی مہینے میں ہر خاندان کے  
ذریعے استعمال کی گئی بجلی کا میانیہ  
معلوم کیجیے۔

3. بھلار کے 40 خاندان کے افراد کی تعداد دی گئی ہے۔

1, 6, 5, 4, 3, 2, 7, 2, 3, 4, 5, 6, 4, 6, 2, 3, 2, 1, 4, 5, 6, 7, 3, 4, 5, 2, 4, 3, 2, 3, 5,  
5, 4, 6, 2, 3, 5, 6, 4, 2

اس بنا پر 40 خاندانوں کے افراد کی تعداد کا میانیہ تعدادی جدول بنائے کر معلوم کیجیے۔

4. ماؤں ہائی اسکول ناند پور کے ذریعے ریاستی سطح پر سائنس نمائش میں گذشتہ 20 سال میں پیش کردہ ریاضی اور سائنس کے پروجیکٹ کی تعداد  
ذیل کے مطابق ہے۔ اس بنا پر تعدادی جدول بنائے کر معطیات کا میانیہ معلوم کیجیے۔

2, 3, 4, 1, 2, 3, 1, 5, 4, 2, 3, 1, 3, 5, 4, 3, 2, 2, 3, 2.



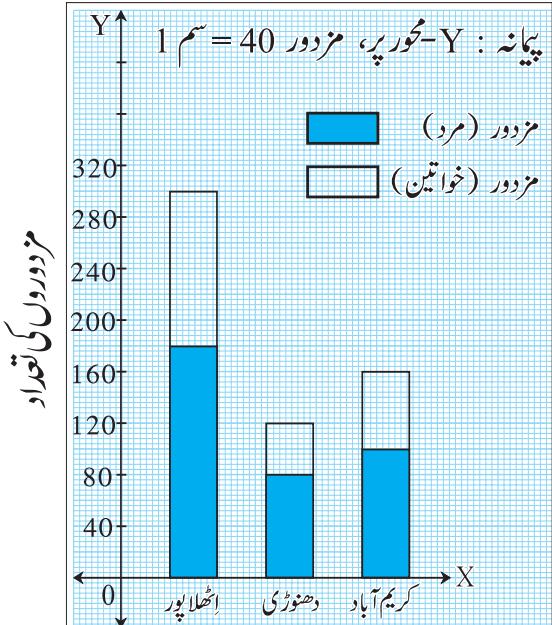
گذشتہ جماعت میں ہم نے سادہ ستونی ترسیم اور متصل ستونی ترسیم کا مطالعہ کیا ہے۔ اب ہم ستونی ترسیم کی دوسری قسموں کا مطالعہ کریں گے۔

### تقسیمی ستونی ترسیم (Subdivided bar diagram)

معطیات کا تجزیاتی موازنہ متصل ستونی ترسیم کی طرح تقسیمی ستونی ترسیم سے بھی کیا جاتا ہے۔ اس میں دو یا مزید اجزاء کی معطیات ایک ہی ستون میں ظاہر کی جاتی ہے۔ تقسیمی ترسیم کے مرحلے کا مطالعہ کریں گے۔

گاؤں	اٹھلا	دھنوری	کریم آباد
مرد (مزدور)	180	80	100
خواتین (مزدور)	120	40	60
کل مزدور	300	□	□

پہلے آپ ستون میں دی ہوئی معطیات کے مطابق مذکورہ بالا جدول مکمل کیجیے۔



گاؤں کے نام

ترسم کاغذ پر X-محور اور Y-محور کچھیے۔

مساوی فاصلہ رکھتے ہوئے X-محور پر گاؤں کے نام لکھیے۔

Y-محور پر مذکوروں کی تعداد لکھیے۔ 1 سم = 40 مذکور

پیانہ لبھیے۔

اٹھان پور کے کل 300 مذکور ہیں۔ مذکوروں کی تعداد ایک

ستون کے ذریعے لکھائیے۔

اس میں کل مذکوروں کے ستون کا ایک حصہ مرد مذکور ہے۔

اسے الگ نشان سے ظاہر کیا گیا ہے۔

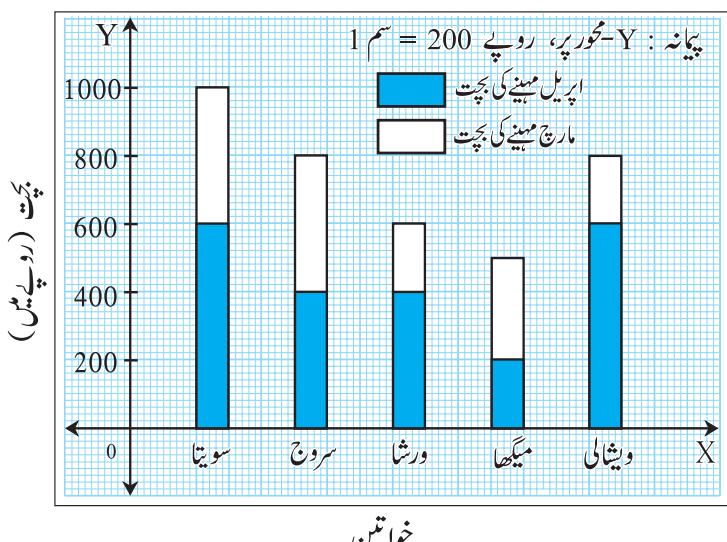
ستون کا باقیہ حصہ خواتین مذکوروں کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔

اسے مختلف نشان سے ظاہر کیا گیا ہے۔

اس طرح دھنوری اور کریم آباد کے لیے تقریبی ستون کچھیے۔

اوپر کے مطلوب کے مطابق تقریبی ستونی ترسیم بازو کی شکل میں بنایا گیا ہے۔ اس کا معانیہ کبھی۔

## مشقی سیٹ 11.2



ذیل کی شکل کا معانیہ کبھی اور سوالات کے جوابات لکھیے۔

(1) یہ کس قسم کا ستونی ترسیم ہے؟

(2) ویشاٹی کی اپریل مہینے کی بچت کتنی ہے؟

(3) سروج کی مارچ اور اپریل دونوں مہینوں کی کل بچت کتنی ہے؟

(4) سویتا کی کل بچت میگھا کی کل بچت سے کتنی زیادہ ہے؟

(5) اپریل مہینے میں کس کی بچت سب سے کم ہے؟

2. ایک ضلع پریشہ اسکول میں جماعت پانچویں سے آٹھویں کے لڑکے اور لڑکیوں کی تعداد ذیل کے جدول میں دی گئی ہے۔ اس بنا پر تقریبی ستونی ترسیم کچھیے۔ (پیانہ : Y-محور پر 1 سم = 10 طلبہ بچھے)

جماعت	پانچویں	چھٹی	ساتویں	آٹھویں
لڑکے	34	26	21	25
لڑکیاں	17	14	14	20

3. ذیل کے جدول میں چار گاؤں میں سال 2016 اور 2017 میں لگائے گئے درختوں کی تعداد دی گئی ہے۔ جدول کی معلومات کو تقریبی ستونی ترسیم کے ذریعے دکھائیے۔

گاؤں \ سال	کرجت	ورگاؤں	شیواپور	کھنڈ والا
2016	150	250	200	100
2017	200	300	250	150

4. درج ذیل جدول میں تین شہروں میں جماعت آٹھویں کے طلبہ کے ذریعے اسکول جانے کے لیے استعمال کی جانے والی سواریوں اور پیدل جانے والوں کی معلومات دی گئی ہے۔ اس معلومات کو ظاہر کرنے کے لیے تقریبی ستونی ترسیم بنائیے۔ (پیانہ : Y-محور پر 1 سم = 500 طلبہ بچھے)

سواری \ شہر	پیٹھن	ایولہ	شاہ پور
سائیکل	3250	1500	1250
بس اور آٹو رکشا	750	500	500
پیدل	1000	1000	500



### فی صدی ستونی ترسیم (Percentage bar diagram)

اروی گاؤں میں لگائے گئے 60 درختوں میں سے 42 درخت نموپائے اور مورثی گاؤں میں لگائے گئے 75 درختوں میں سے 45 درخت نموپائے۔ بارشی گاؤں میں لگائے گئے 90 درختوں میں سے 45 درخت نموپائے۔ کس گاؤں میں شجر کاری زیادہ کامیاب ہوئی اسے سمجھنے کے لیے صرف اعداد کافی نہیں ہیں۔ اس کے لیے نموپائے درختوں کافی صد معلوم کرنا ضروری ہے۔

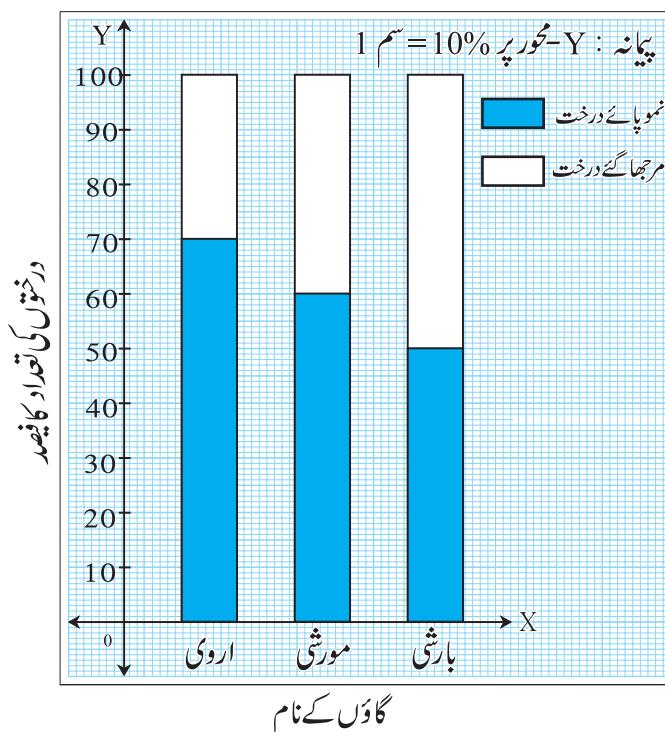
$$\frac{42}{60} \times 100 = 70 = \text{اروی میں نموپائے درختوں کافی صد}$$

$$\frac{45}{75} \times 100 = 60 = \text{مورثی میں نموپائے درختوں کافی صد}$$

اس فی صد سے ہمیں یہ سمجھ میں آتا ہے کہ اروی گاؤں میں نموپائے درختوں کی تعداد کم ہے لیکن فی صد زیادہ ہے۔ یعنی فی صد سے کچھ اگلے قسم کی معلومات حاصل ہوتی ہے۔ دی گئی معلومات فی صدی میں تبدیل کر کے جو تقریبی ستون بناتے ہیں۔ اسے فی صدی ستونی ترسیم کہتے ہیں۔

نی صدی ستونی ترسیم، تقسیمی ستونی ترسیم کی ایک خاص صورت ہوتی ہے۔ نی صدی ستونی ترسیم ذیل کے مطلوبوں کی مدد سے بناتے ہیں۔  
پہلے ہم ذیل کے مطابق جدول بنائیں گے۔

گاؤں	اروی	مورثی	بازی
لگائے گئے درختوں کی تعداد	60	75	90
نمودارے درختوں کی تعداد	42	45	45
نمودارے درختوں کا نی صد	$\frac{42}{60} \times 100 = 70$	$\frac{45}{75} \times 100 = 60$	$\frac{45}{90} \times 100 = 50$

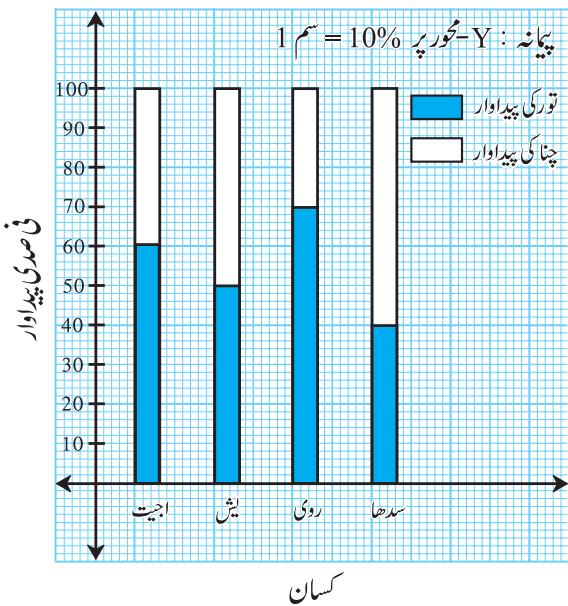


- نی صدی ستونی ترسیم میں تمام ستون 100 اکائی اونچائی کے لیے جاتے ہیں۔
- ہر ستون میں نمودارے درختوں کا نی صد کھائیں گے۔
- باقیہ نی صد مرjhajahانے والے درختوں کا ہوگا۔
- نی صدی ستونی ترسیم ایک قسم کی تقسیمی ستونی ترسیم ہوتی ہے۔ اس لیے دیگر تمام عمل تقسیمی ستونی ترسیم کے جیسے ہی ہوتے ہیں۔
- اوپر کے مطلوبوں کے مطابق بازو میں فیصدی ستونی ترسیم بنائی گئی ہے اس کا مشاہدہ کیجیے۔

### مشقی سیٹ 11.3

1. ذیل کے جدول کے مطابق نی صدی ستونی ترسیم بنائیے۔

جماعت آٹھویں کی فریق	A	B	C	D
ریاضی میں 'A' گریڈ پانے والے طلباء	45	33	10	15
کل طلباء	60	55	40	75



2. مقابل میں دیے ہوئے ستونی ترسیم کا مشاہدہ کیجیے اور سوالات کے جوابات لکھیے۔

- (1) مقابل میں دیا ہوا ستونی ترسیم کس قسم کی ہے؟
- (2) اجیت کے کھیت میں تورکی پیداوار، کل پیداوار کا کتنے فی صد ہے؟
- (3) یش اور روی، ان میں سے کس کے کھیت کی پنچے کی پیداوار کا فی صد کتنا زیادہ ہے؟
- (4) سب سے کم تورکی پیداوار کا فی صدی کس کا ہے؟
- (5) سدھا کے تور اور پنچے کی پیداوار کا فی صد معلوم کیجیے؟

3. کچھ اسکول میں 10 ویں جماعت کے طالب علموں کا سروے کیا گیا۔ حاصل ہوئی معلومات ذیل کے جدول میں دی گئی ہے۔ اس معلومات کو فی صدی ستونی ترسیم کے ذریعے دکھائیے۔

اسکول	پہلی	دوسری	تیسرا	چوتھی
سائنس شاخ کی جانب رجحان	90	60	25	16
کامرس شاخ کی جانب رجحان	60	20	25	24

پروجیکٹ : فی صدی ستونی ترسیم اور تنسیمی ستونی ترسیم کا موازنہ کرتے ہوئے بحث کیجیے۔ اس کا استعمال کر کے سائنس، جغرافیہ جیسے مضامین میں ایسی ترسیم کی معلومات حاصل کیجیے۔

### جوابات کی فہرست

- مشقی سیٹ 11.1 :** 2. (1) 2 (2) 75 (3)  $N = 25$ ,  $\sum f_i \times x_i = 1425$  (4) 57 3. 3.9 4. 2.75
- مشقی سیٹ 11.2 :** 1. (1) تنسیمی ستونی ترسیم (2) ₹600 (3) ₹800 (4) ₹500 (5) میگھا
- مشقی سیٹ 11.3 :** 2. (1) یش کی پیداوار 20% زیادہ (2) 60% (3) 60% (4) سدھا (5) 60% اور 40%



# یک متغیری مساواتیں

12

آئیے ذرا یاد کریں



گذشتہ جماعتوں میں ہم نے یک متغیری مساوات کا مطالعہ کیا ہے۔

- مساوات میں دیے گئے متغیر کی قیمت رکھنے پر مساوات کے دونوں طرفین مساوی ہو جاتے ہیں وہ قیمت اس مساوات کا حل ہوتی ہے۔
- مساوات حل کرنا یعنی اس کا حل معلوم کرنا۔
- مساوات کے طرفین پر کیا عمل کرنے سے حاصل ہونے والی مساوات میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی۔ اس خصوصیت کا استعمال کر کے ہم نے آسان مساوات بنایا کر دی ہوئی مساوات کو حل کرتے ہیں۔

مساوات کے طرفین پر کیے جانے والے اعمال :

(i) طرفین میں مساوی عدد جمع کرنا۔      (ii) طرفین میں مساوی عدد تفریق کرنا۔

(iii) طرفین کو مساوی عدد سے ضرب کرنا۔      (iv) طرفین کو غیر صفر مساوی عدد سے تقسیم کرنا۔

درج ذیل مساوات حل کرنے کے لیے خالی چوکوں مکمل کیجیے :

(1) مثال  $x + 4 = 9$

$$x + 4 - \boxed{\phantom{0}} = 9 - \boxed{\phantom{0}}$$

$$\therefore x = \boxed{\phantom{0}}$$

(3) مثال  $\frac{x}{3} = 4$

$$\frac{x}{3} \times \boxed{\phantom{0}} = 4 \times \boxed{\phantom{0}}$$

$$\therefore x = \boxed{\phantom{0}}$$

(2) مثال  $x - 2 = 7$

$$x - 2 + \boxed{\phantom{0}} = 7 + \boxed{\phantom{0}}$$

$$\therefore x = \boxed{\phantom{0}}$$

(4) مثال  $4x = 24$

$$\frac{4x}{\boxed{\phantom{0}}} = \frac{24}{\boxed{\phantom{0}}}$$

$$\therefore x = \boxed{\phantom{0}}$$



یک متغیری مساواتوں کا حل (Solution of equations in one variable)

کبھی کبھی مساوات حل کرنے کے لیے اس پر ایک سے زیادہ اعمال کرنا ہوتا ہے۔ ایسی مساوات کے دونوں جانب عمل کر کے حل معلوم کرنے کی کچھ مثالیں دیکھیں گے۔

### مثال (1) مساوات حل کیجیے۔

$$(ii) \quad 9x - 4 = 6x + 29$$

**حل :** طرفین میں 4 جمع کرنے پر

$$9x - 4 + 4 = 6x + 29 + 4$$

$$\therefore 9x = 6x + 33$$

طرفین میں  $6x$  تفریق کرنے پر

$$\therefore 9x - 6x = 6x + 33 - 6x$$

$$\therefore 3x = 33$$

طرفین کو 3 سے تقسیم کرنے پر

$$\therefore \frac{3x}{3} = \frac{33}{3}$$

$$\therefore x = 11$$

$$(i) \quad 2(x - 3) = \frac{3}{5}(x + 4)$$

**حل :** طرفین کو 5 سے ضرب کرنے پر

$$10(x - 3) = 3(x + 4)$$

$$\therefore 10x - 30 = 3x + 12$$

طرفین میں 30 جمع کرنے پر

$$\therefore 10x - 30 + 30 = 3x + 12 + 30$$

$$10x = 3x + 42$$

طرفین میں  $3x$  تفریق کرنے پر

$$\therefore 10x - 3x = 3x + 42 - 3x$$

$$\therefore 7x = 42$$

طرفین کو 7 سے تقسیم کرنے پر

$$\frac{7x}{7} = \frac{42}{7}$$

$$\therefore x = 6$$

$$\frac{2}{3} + 5a = 4 \quad (\text{iii})$$

**حل :** طریقہ (I)

$$\frac{2}{3} + 5a = 4$$

طرفین کے ہر کن کو 3 سے ضرب کرنے پر

$$3 \times \frac{2}{3} + 3 \times 5a = 4 \times 3$$

$$\therefore 2 + 15a = 12$$

$$\therefore 15a = 12 - 2$$

$$\therefore 15a = 10$$

$$\therefore a = \frac{10}{15}$$

$$\therefore a = \frac{2}{3}$$

**طریقہ (II)**

طرفین سے  $\frac{2}{3}$  تفریق کرنے پر

$$\frac{2}{3} + 5a - \frac{2}{3} = 4 - \frac{2}{3}$$

$$\therefore 5a = \frac{12 - 2}{3}$$

$$\therefore 5a = \frac{10}{3}$$

طرفین کو 5 سے تقسیم کرنے پر

$$\frac{5a}{5} = \frac{10}{3} \times \frac{1}{5}$$

$$\therefore a = \frac{2}{3}$$

الجبری عبارت  $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$  میں اگر A, B, C, D غیر صفر اعداد ہوں تو طرفین کو  $B \times D$  سے ضرب کرنے پر  $AD = BC$

مساوات حاصل ہوتی ہے۔ اس کا استعمال کر کے مثالیں حل کریں گے۔

$$(v) \frac{8m-1}{2m+3} = 2$$

$$\text{حل: } \frac{8m-1}{2m+3} = \frac{2}{1}$$

$$1(8m - 1) = 2(2m + 3)$$

$$\therefore 8m - 1 = 4m + 6$$

$$\therefore 8m - 4m = 6 + 1$$

$$\therefore 4m = 7, \therefore m = \frac{7}{4}$$

$$(iv) \frac{(x-7)}{(x-2)} = \frac{5}{4}$$

$$\text{حل: } \frac{(x-7)}{(x-2)} = \frac{5}{4}$$

$$\therefore 4(x-7) = 5(x-2)$$

$$\therefore 4x - 28 = 5x - 10$$

$$\therefore 4x - 5x = -10 + 28$$

$$\therefore -x = 18, \therefore x = -18$$

### مشقی سیٹ 12.1

1. ہر مساوات کے بعد متغیر کے لیے دی گئی قیمت، اس مساوات کا حل ہیں یا نہیں معلوم کیجیے۔

$$(1) x - 4 = 3, \quad x = -1, 7, -7$$

$$(2) 9m = 81, \quad m = 3, 9, -3$$

$$(3) 2a + 4 = 0, \quad a = 2, -2, 1$$

$$(4) 3 - y = 4, \quad y = -1, 1, 2$$

2. درج ذیل مساوات کا حل کیجیے۔

$$(1) 17p - 2 = 49$$

$$(2) 2m + 7 = 9$$

$$(3) 3x + 12 = 2x - 4$$

$$(4) 5(x - 3) = 3(x + 2)$$

$$(5) \frac{9x}{8} + 1 = 10$$

$$(6) \frac{y}{7} + \frac{y-4}{3} = 2$$

$$(7) 13x - 5 = \frac{3}{2}$$

$$(8) 3(y + 8) = 10(y - 4) + 8$$

$$(9) \frac{x-9}{x-5} = \frac{5}{7}$$

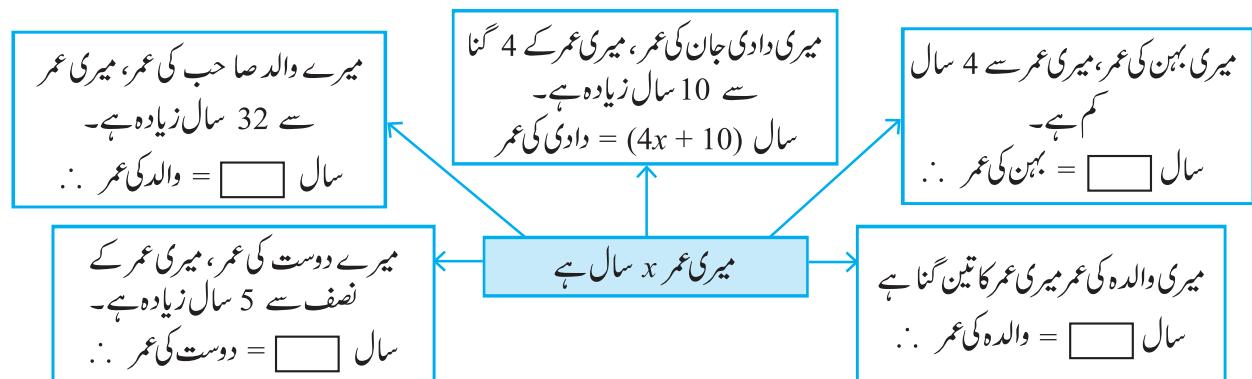
$$(10) \frac{y-4}{3} + 3y = 4$$

$$(11) \frac{b+(b+1)+(b+2)}{4} = 21$$



### عبارتی سوالات (Word Problems)

عبارتی سوالات میں دی ہوئی معلومات کے لیے متغیر کا استعمال کر کے الجبری عبارت کس طرح لکھتے ہیں اس کا مطالعہ کریں گے۔



مندرجہ بالا دی ہوئی معلومات کے مطابق میرے دوست کی عمر اگر 12 سال ہو تو میری عمر کتنی؟

$$\text{سال } x = \text{میری عمر} \quad , \quad \therefore \quad \frac{x}{2} + 5 = \text{دوست کی عمر}$$

$$\frac{x}{2} + 5 = 12 \quad \dots \quad (\text{دیا ہوا ہے})$$

$$\therefore x + 10 = 24 \quad \dots \quad (\text{ہر کن کو 2 سے ضرب کرنے پر})$$

$$\therefore x = 24 - 10$$

$$\therefore x = 14$$

اس لیے میری عمر 14 سال ہے۔ اس طریقے سے مندرجہ بالا معلومات کی مدد سے دیگر افراد کی عورتیں معلوم کیجیے۔

**عملی کام :** خالی چکوں میں مناسب عدد لکھیے۔

$$\begin{aligned} & \text{مستطیل کا احاطہ} = 40 \\ 2(\boxed{\phantom{0}}x + \boxed{\phantom{0}}x) &= 40 \\ 2 \times \boxed{\phantom{0}}x &= 40 \\ \boxed{\phantom{0}}x &= 40 \\ \therefore x &= \boxed{\phantom{0}} \end{aligned}$$

چڑائی کے تین گناہ مبائی  
میں مستطیل ہوں  
 $x$  میں احاطہ 40 سم ہے

سم = مستطیل کی لمبائی اور سم = مستطیل کی چوڑائی

**حل کردہ مثالیں**

**مثال (1)** جوزف کا وزن اس کے چھوٹے بھائی کے وزن کا دگنا ہے۔ دونوں کا کل وزن 63 کلوگرام ہے۔ تو جوزف کا وزن معلوم کیجیے۔

**حل :** فرض کیجیے جوزف کے چھوٹے بھائی کا وزن =  $x$  کلوگرام

اس لیے جوزف کا وزن بھائی کے وزن کا دگنا =  $2x$  کلوگرام

شرط کے مطابق،

$$x + 2x = 63 \quad , \quad \therefore x = 21$$

کلوگرام  $2x = 2 \times 21 = 42$  = جوزف کا وزن  $\therefore$

**مثال (2)** ایک کسر کا شمارکنندہ، اس کے نسب نمائے 5 بڑا ہے۔ شمارکنندہ اور نسب نمائہ ایک میں 4 جمع کرنے پر وہ کسر  $\frac{6}{5}$  ہو جاتی ہے۔

وہ کسر معلوم کیجیے۔

**حل :** فرض کیجیے کسر کا نسب نما  $x$  ہے۔

اس کسر کا شمارکنندہ، نسب نمائے 5 زیادہ ہے یعنی  $(x+5)$  ہے۔

$$\therefore \frac{x+5}{x} = \text{وہ کسر}$$

اس کے شمارکنندہ اور نسب نما میں 4 جمع کرنے پر وہ کسر  $\frac{6}{5}$  ہوگی۔

$$\therefore \frac{x+5+4}{x+4} = \frac{6}{5}$$

$$\therefore \frac{x+9}{x+4} = \frac{6}{5}$$

$$\therefore 5(x+9) = 6(x+4)$$

$$= \frac{26}{21} \text{ وہ کسر } \therefore$$

$$\therefore 5x + 45 = 6x + 24$$

$$\therefore 45 - 24 = 6x - 5x$$

$$21 = x$$

$$= \text{کسر کا نسب نما } \therefore$$

$$= \text{شمارکنندہ } = 21 + 5 = 26$$

**مثال (3)** رتنا کے پاس رقم، رفیق کے پاس کی رقم کا تین گناہ سے 200 روپے زیادہ ہے۔ اگر رتنا کے 300 روپے رفیق کو دیے جائیں تو رتنا کے پاس رقم، رفیق کے پاس کی رقم کا  $\frac{7}{4}$  گناہ ہو جاتی ہے۔ تو رفیق کے پاس ابتدا میں کتنی رقم تھی؟ اصل قیمت معلوم کرنے کے لیے ذیل کا عمل مکمل کیجیے۔

**حل :** رتنا کے پاس رقم، رفیق کے پاس کی رقم کے تین گناہ سے 200 روپے زیادہ ہے۔ فرض کیجیے رفیق کے پاس  $x$  روپے ہیں۔

$\therefore$  رتنا کے پاس کی رقم  $\boxed{\quad}$  روپے ہیں۔

$\therefore$  رتنا سے 300 روپے لے کر رفیق کو دیے، لہذا رتنا کے پاس  $\boxed{\quad}$  روپے باقی رہے۔

اس لیے رفیق کے پاس کی رقم  $= 300 - x$  روپے

رتنا کے پاس باقی ماندہ رقم، رفیق کی رقم کا  $\frac{7}{4}$  گناہ ہوگی۔

$$\frac{\text{رتنا کی رقم}}{\text{رفیق کی رقم}} = \frac{\boxed{\quad}}{\boxed{\quad}}$$

$$\frac{3x - 100}{x + 300} = \frac{\boxed{\quad}}{\boxed{\quad}}$$

$$4 \boxed{\quad} = 7 \boxed{\quad}$$

$$12x - 400 = 7x + 2100$$

$$12x - 7x = \boxed{\quad}$$

$$5x = \boxed{\quad}$$

$$x = \boxed{\quad}$$

$\therefore$  رفیق کے پاس  $\boxed{\quad}$  روپے تھے۔

### مشقی سیٹ 12.2

1. ماں کی عمر بیٹی کی عمر سے 25 سال زیادہ ہے۔ 8 سال بعد، بیٹی کی عمر اور ماں کی عمر کے درمیان نسبت  $\frac{4}{9}$  ہو جائے گی تو بیٹی کی عمر معلوم کیجیے۔
2. ایک کسر کا نسب نما، شمارکنندہ سے 12 زیادہ ہے۔ اس کے نسب نما سے 2 تفریق کریں اور شمارکنندہ میں 7 جمع کرنے پر حاصل ہونے والی کسر  $\frac{1}{2}$  کے مساوی ہوتی ہے۔ وہ کسر معلوم کیجیے۔

- پیٹل میں تانبہ اور جست کا نسبت 7 : 13 ہے۔ 700 گرام پیٹل کے برتن میں جست کتنا ہوگا؟ .3
- تین متواتر مکمل اعداد کا مجموع 45 سے زیادہ لیکن 54 سے کم ہے۔ وہ اعداد معلوم کیجیے۔ .4\*
- دو ہندسی عدد کے دہائی کا ہندسہ، اکائی کے ہندسے کا دگنا ہے۔ ہندسوں کا مقام آپس میں تبدیل کرنے پر حاصل ہونے والا عدد اور اصل عدد کا مجموع 66 ہے۔ تو اصل عدد معلوم کیجیے۔ .5
- ایک تھیٹر پرڈrama کے 200 روپے اور 100 روپے والے کچھ ٹکٹ فروخت ہوئے۔ 200 روپے والے ٹکٹوں کی تعداد، 100 روپے والے ٹکٹوں کی تعداد سے 20 زیادہ ہے۔ دونوں قسم کے ٹکٹ فروخت کرنے پر تھیٹر کو 37,000 روپے حاصل ہوئے۔ تو 100 روپے کے کل کتنے ٹکٹ فروخت ہوئے؟ .6\*
- تین متواتر طبعی اعداد میں سب سے چھوٹے عدد کا پانچ گنا، سب سے بڑے عدد کے چار گنا سے 9 زیادہ ہے۔ وہ اعداد معلوم کیجیے۔ .7
- راجو نے ایک سائیکل 8% نفع پر امیت کو فروخت کی۔ امیت نے 54 روپے خرچ کر کے اسے درست کیا۔ وہ سائیکل اس نے تکھل کو 1134 روپے میں فروخت کیا۔ تب امیت کو نفع ہوانہ نقصان۔ تو راجو نے سائیکل کتنے روپے میں خریدی تھی؟ .8
- ایک کرکٹ کھلاڑی نے ایک مقابلے میں 180 رن بنائے۔ دوسرے مقابلے میں 257 رن بنائے۔ تیسرا مقابلے میں اسے کتنے رن بنانے ہوں گے کہ مقابلوں میں بنائے ہوئے رنوں کا اوسط 230 ہو جائے؟ .9
- سدھیر کی عمر، ویو کی عمر کا تین گنا سے 5 زیادہ ہے۔ انیل کی عمر سدھیر کی عمر کا نصف ہے۔ سدھیر کی عمر اور ویو کی عمر کا مجموع اور انیل کی عمر کا تین گنا کی نسبت 6 : 5 ہے۔ تو ویو کی عمر معلوم کیجیے۔ .10

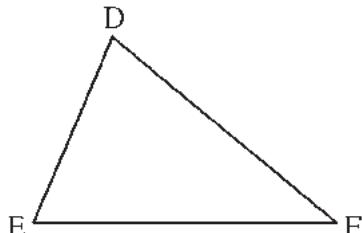
### جوابات کی فہرست

- 12.1** مسавات کے حل کی قیمت 1. (1)  $x = 7$  (2)  $m = 9$  (3)  $a = -2$
- (4)  $y = -1$  2. (1)  $p = 3$  (2)  $m = 1$  (3)  $x = -16$  (4)  $x = \frac{21}{2}$  (5)  $x = 8$  (6)  $y = 7$
- (7)  $x = \frac{1}{2}$  (8)  $y = 8$  (9)  $x = 19$  (10)  $y = \frac{8}{5}$  (11)  $b = 27$
- 12.2** مشتقی سیٹ 1. 12 سال 2.  $\frac{23}{35}$  3. 245 گرام 4. 15, 16, 17 یا 16, 17, 18  
 سال 5. 42 6. 110 7. 17, 18, 19 8. ₹1000 9. 253 10. 5 سال



# مثلثوں کی متماثلیت

آئیے ذرا یاد کریں



متصلہ شکل کی مدد سے درج ذیل سوالات کے جوابات معلوم کیجیے۔

(i) ضلع DE کے مقابل کا زاویہ کون سا ہے؟

(ii)  $\angle E$ ، کس ضلع کے مقابل کا زاویہ ہے؟

(iii) ضلع DE اور ضلع DF کو شامل کرنے والا زاویہ کون سا ہے؟

(iv) اور  $\angle E$  کو شامل کرنے والا ضلع کون سے ہے؟

(v) ضلع DE سے متصل کون سے زاویہ ہے؟

جو شکال ایک دوسرے پر پوری طرح منطبق ہو جاتی ہیں انھیں متماثل اشکال کہتے ہیں۔

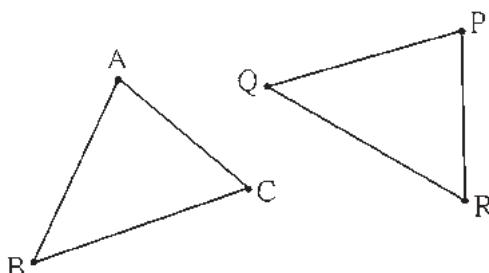
- جن قطعات خط کی لمبائیاں مساوی ہوں انھیں متماثل قطعات خط کہتے ہیں۔

- جن زاویوں کی پیمائش مساوی ہوتی ہیں انھیں متماثل زاویے کہتے ہیں۔

در آئیے سمجھ لیں

## مثلثوں کی متماثلیت (Congruence of triangles)

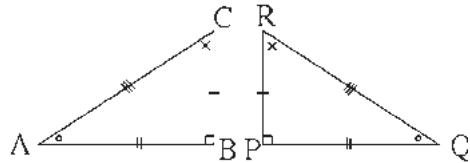
**عملی کام :** متصلہ شکل کا مشاہدہ کیجیے۔



شفاف ٹرینگ کاغذ پر  $\triangle ABC$  بنایے اور کاغذ کو  $\triangle PQR$  پر رکھ کر مشاہدہ کیجیے۔ نقطہ A، نقطہ P پر، نقطہ B، نقطہ Q پر اور نقطہ C، نقطہ R پر آتا ہے تو دونوں ہی مثلث ایک دوسرے پر مکمل طور پر منطبق ہو جاتے ہیں۔ یعنی ایسا معلوم ہوتا ہے کہ یہ دونوں متماثل مثلث ہیں۔

عملی کام میں  $\triangle ABC$  کو  $\triangle PQR$  پر رکھنے کا ایک طریقہ دیا گیا ہے۔ لیکن نقطہ A، نقطہ Q پر، نقطہ B، نقطہ R پر اور نقطہ C، نقطہ P پر رکھیں تو دونوں مثلث ایک دوسرے پر منطبق نہیں ہوتے، یعنی خصوص طریقے پر رکھنے سے ہی ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں۔ اس طریقے سے منطبق ہونے کو ایک سے ایک مطابقت کے ذریعے ظاہر کیا جاتا ہے۔ نقطہ A کا نظیری نقطہ P ہے۔ اسے  $A \leftrightarrow P$  اور  $C \leftrightarrow R$  لکھا جاتا ہے۔ نقطہ A کی مطابقت نقطہ P سے ہے۔ اسے  $A \leftrightarrow P$ ،  $B \leftrightarrow Q$ ،  $C \leftrightarrow R$  لکھتے ہیں۔ یہاں  $P \leftrightarrow Q$ ،  $A \leftrightarrow B$  اسی طرح مطابقت سے دونوں مثلث متماثل ہیں۔ اس طریقے سے جب مثلث متماثل ہوں تو  $\angle A \cong \angle P$ ،  $\angle B \cong \angle Q$ ،  $\angle C \cong \angle R$  اسی طرح  $PQ \cong BC$  قطعہ،  $QR \cong CA$  قطعہ،  $RP \cong AB$  قطعہ۔ اس طرح کل پچھے متماثل حاصل ہوتی ہیں۔ اس لیے

ایسا کہتے ہیں  $\triangle ABC$  اور  $\triangle PQR$  مطابقت  $\triangle ABC \leftrightarrow \triangle PQR$  کے ذریعے متماثل ہیں۔ اور اسے لکھتے ہیں۔ اس طرح  $C \leftrightarrow R$ ،  $B \leftrightarrow Q$ ،  $A \leftrightarrow P$  ناقاط راس کی ایک سے ایک کی مطابقت لکھتے ہیں۔ اس سے حاصل ہونے والی چھے متماثلیں ان میں شامل ہوتی ہیں۔ اسے دھیان میں رکھیے کہ دو متماثل متشاٹ ہوں تو انھیں لکھنے کے لیے ناقاط راس کی ترتیب اور متماثل کی ایک سے ایک کی مطابقت پوری ہونی چاہیے۔



$\triangle ABC$  اور  $\triangle PQR$  متماثل متشاٹ کے متماثل اجزاء کیساں نشانات سے ظاہر کیے گئے ہیں۔

انیل، ریحانہ اور سرجیت نے مندرجہ ذیل طریقے سے متشاٹ کی متماثلیت لکھا۔

ان میں سے کون سا لکھا ہوا طریقہ

صحیح ہے اور کون سا غلط ہے؟

بحث کریں

$\triangle ABC \cong \triangle QPR$

$\triangle BAC \cong \triangle PQR$

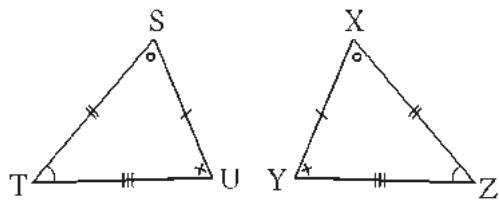
$\triangle ABC \cong \triangle PQR$

انیل کے لکھنے کا طریقہ :

ریحانہ کے لکھنے کا طریقہ :

سرجیت کے لکھنے کا طریقہ :

### حل کردہ مثالیں



**مثال (1)** متصلہ شکل میں متشاٹ کے کیساں نشانات سے ظاہر کیے گئے اجزاء متماثل ہیں۔

(i) ناقاط راس کی جس ایک سے ایک کی مطابقت کے ذریعے دونوں

متشاٹ متماثل ہوتے ہیں اس مطابقت سے متشاٹ کی متماثلیت دو طریقوں سے لکھیے۔

$\triangle XYZ \cong \triangle STU$  یہ صحیح لکھا گیا ہے یا غلط وجہ کے ساتھ لکھیے۔ (ii)

**حل :** مشاہدہ کی مدد سے دیے ہوئے متشاٹ میں  $Y \leftrightarrow X$ ،  $Z \leftrightarrow T$  ایک سے ایک کی مطابقت سے متماثل ہیں۔

(i) پہلا طریقہ :  $\triangle STU \cong \triangle XZY$

(ii) دوسرا طریقہ :  $\triangle UST \cong \triangle YXZ$  اس متماثلیت کو دوسرے طریقے سے لکھنے کی کوشش کریں۔

(iii) اگر ان متشاٹ کی متماثلیت کو  $\triangle XYZ \cong \triangle STU$  لکھیں تو  $XY$  ضلع  $\cong ST$  ضلع مطلب ہوتا ہے جو غلط ہے۔

لکھنا غلط ہے۔  $\triangle XYZ \cong \triangle STU$  ∴

لکھنے میں اور کون سی غلطی ہوتی ہے یہ طلبہ خود معلوم کریں۔ لیکن جواب کیوں غلط ہے یہ بتانے کے لیے کوئی بھی ایک غلطی دکھانا کافی ہوتا ہے۔

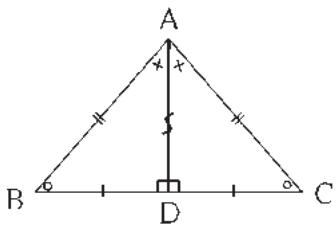
**مثال (2)** درج ذیل میں دکھائی گئی شکل میں مثلثوں کی جوڑی میں یہ کیا نشانات سے ظاہر کیے گئے اجزاء متماثل ہیں۔ ان مثلثوں کے نقطہ راس میں ایک سے ایک کی کس مطابقت کی بناء پر وہ مثلث متماثل ہیں بتائیے اور مثلثوں کی متماثلت علامت کے ذریعے ظاہر کیجیے۔

**حل :**  $\triangle ACD$  اور  $\triangle ABD$  میں ضلع  $AD$  مشترک قطعہ خط ہے۔

ہر قطعہ خط خود کا متماثل ہوتا ہے۔

$\triangle ABD \cong \triangle ACD$  ،  $D \leftrightarrow D$  ،  $B \leftrightarrow C$  ،  $A \leftrightarrow A$

**نوٹ :** مشترک ضلع پر  $\Delta$ ، اس قسم کا نشان لگانے کا طریقہ راجح ہے۔

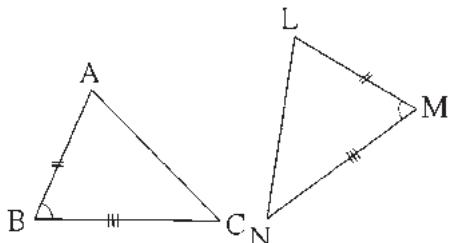


### دریجے آئیے سمجھ لیں

بعض مرتبہ دیے گئے دو مثلث متماثل ہیں اسے دکھانے کے لیے تمام پچھے اجزاء کی متماثلت بتانے کی ضرورت نہیں ہوتی۔ ایک مثلث کے تین مخصوص اجزاء دوسرے مثلث کے تین نظری اجزاء کے متماثل ہوں تو بقیہ تین اجزاء کی جوڑیاں بھی ایک دوسرے کے متماثل ہوتی ہیں یعنی تین مخصوص اجزاء متماثلت کی آزمائش کا تعین کرتے ہیں۔

ہم نے مثلث بنانے کے کچھ عمل کا مطالعہ کیا ہے۔ جن دیے ہوئے تین اجزاء سے مثلث کی ایک اور صرف ایک شکل بناسکتے ہیں وہی اجزاء متماثلت کی آزمائش متعین کرتے ہیں ہم اس کی جانچ کریں گے۔

**(1) دو اضلاع اور ان کو شامل کرنے والا زاویہ :** ضلع زاضل آزمائش



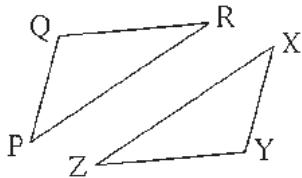
اضلاع کی دو جوڑیاں متماثل ہوں اور ان کو شامل کرنے والے زاویے بھی متماثل ہوں ایسے  $\triangle ABD$  اور  $\triangle LMN$  بنائیے۔

$$l(AB) = l(LM) \text{ اور } \triangle LMN \text{ میں } l(ABD)$$

$$m\angle ABC = m\angle LMN , l(BC) = l(MN)$$

$\triangle ABD$ ، ٹرینگ کاغذ پر بنائیے اور ٹرینگ کاغذ  $\triangle LMN$  پر اس طرح رکھئے کہ نقطہ A نقطہ L پر، ضلع AB ضلع LM پر، ضلع BC،  $\angle M$  پر اور ضلع  $\angle B$ ،  $\angle L$  پر ہو تو  $\triangle ABC \cong \triangle LMN$  دکھائی دیتا ہے۔

(2) تین نظیری اضلاع : ضل ضل ضل آزمائش

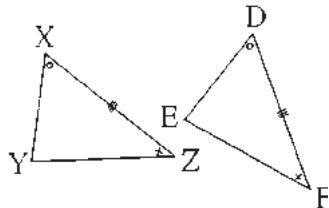


$$l(RP) = l(ZX), \quad l(QR) = l(YZ), \quad l(PQ) = l(XY)$$

اس طرح سے  $\triangle XYZ$  اور  $\triangle PQR$  بنائیے۔

ٹرینگ کاغذ پر  $\triangle PQR$  بنائیے اور اسے  $\triangle XYZ$  پر اس طرح رکھئے کہ ایک سے ایک کی مطابقت  $\triangle PQR \cong \triangle XYZ$  ہو جائے۔ ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ

(3) دوزاویے اور ان کو شامل کرنے والا ضلع : زاضل زا آزمائش



اس طرح  $\triangle XYZ$  اور  $\triangle DEF$  بنائیے کہ،

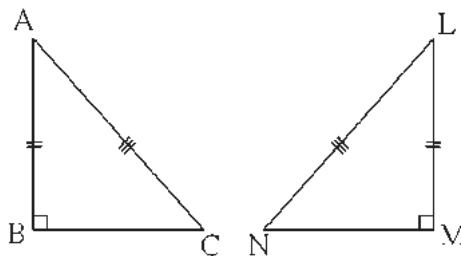
$$\angle Z \cong \angle F, \quad \angle X \cong \angle D, \quad l(XZ) = l(DF)$$

ٹرینگ کاغذ پر  $\triangle XYZ$  بنائیے اور اس کا غذ کو  $\triangle DEF$  پر اس طرح رکھئے کہ قطعہ  $XZ \leftrightarrow FD$  اور اس مطابقت کی بناء پر  $\triangle XYZ \cong \triangle DEF$  دکھائی دیتا ہے۔

(4) زازاضل (یا ضل زا) آزمائش :

دو مثلثوں میں نظیری زاویوں کی دو جوڑیاں متماثل ہوں تو باقی زاویے بھی متماثل ہوتے ہیں کیونکہ ہر مثلث کے تینوں زاویوں کی پیمائشوں کا مجموع  $180^\circ$  ہوتا ہے۔ یعنی کوئی بھی دوزاویے اور ایک زاویے کا مصلح ضلع، دوسرا مثلث کے دوزاویے اور نظیری ضلع کے متماثل ہو تو زاضل زا آزمائش کی شرط پوری ہو جاتی ہے اور وہ دونوں مثلث متماثل ہوتے ہیں۔

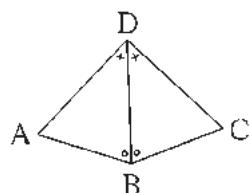
(5) قائمۃ الزاویہ مثلثوں کی وتر ضلع آزمائش :



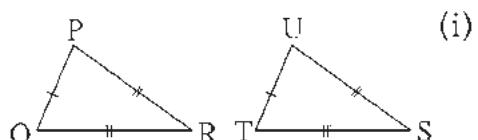
قائمۃ الزاویہ مثلث کا وتر ایک ضلع دیا گیا ہو تو ایک اور صرف ایک مثلث بناسکتے ہیں۔ ایک قائمۃ الزاویہ مثلث کا وتر ایک ضلع دوسرے قائمۃ الزاویہ مثلث کے نظیری متماثل اجزاء والے دو قائمۃ الزاویہ مثلث بنائیے۔ درج بالاطریقے کے مطابق وہ متماثل ہیں یا نہیں اس کی جانچ کیجیے۔

### حل کردہ مثالیں

**مثال (1)** درج ذیل اشکال میں مثلثوں کی ہر جوڑی میں یکساں نشانات سے ظاہر کیے گئے اجزاء متماثل ہیں۔ ہر جوڑی میں مثلث کس آزمائش کے ذریعے اور نقاط راس کی کس ایک سے ایک کی مطابقت کے ذریعے متماثل ہیں لکھیے۔



(ii)

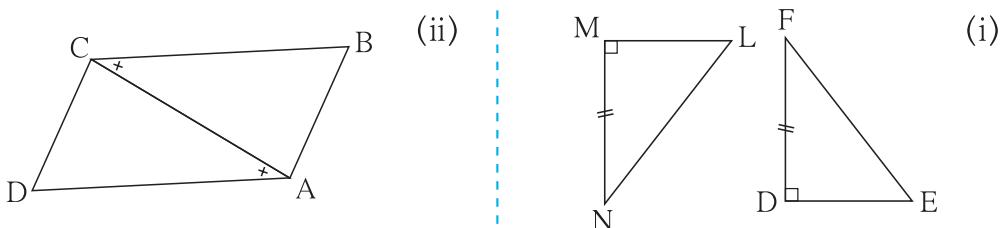


(i)

**حل :** (i) ضل ضل آزمائش کے ذریعے  $PQR \leftrightarrow UTS$  کی مطابقت کے ذریعے

(ii) زاضل زا آزمائش کے ذریعے  $DBA \leftrightarrow DBC$  کی مطابقت کے ذریعے

**مثال (2)** درج ذیل شکل میں مثلثوں کی جوڑی میں یہ کس نشانات سے ظاہر کیے گئے اجزاء متماثل ہیں۔ ہر شکل کے نیچے مثلثوں کی متماثلت کی آزمائش لکھی گئی ہے۔ اس آزمائش کے ذریعے مثلثوں کو متماثل ہونے کے لیے اور کون سی معلومات دینا ضروری ہے اور وہ معلومات دینے کے بعد مثلث کے راسوں کی کس ایک سے ایک کی مطابقت سے متماثل ہوں گے لکھیے۔



زا\_ضل\_زا آزمائش

وتر ضلع آزمائش

**حل :** (i) دیے گئے مثلث قائمۃ الزاویہ مثلث ہیں۔ ان میں صرف ایک ضلع متماثل ہیں لہذا ان کے وتر قطعہ  $LN$  اور قطعہ  $EF$  متماثل ہوں

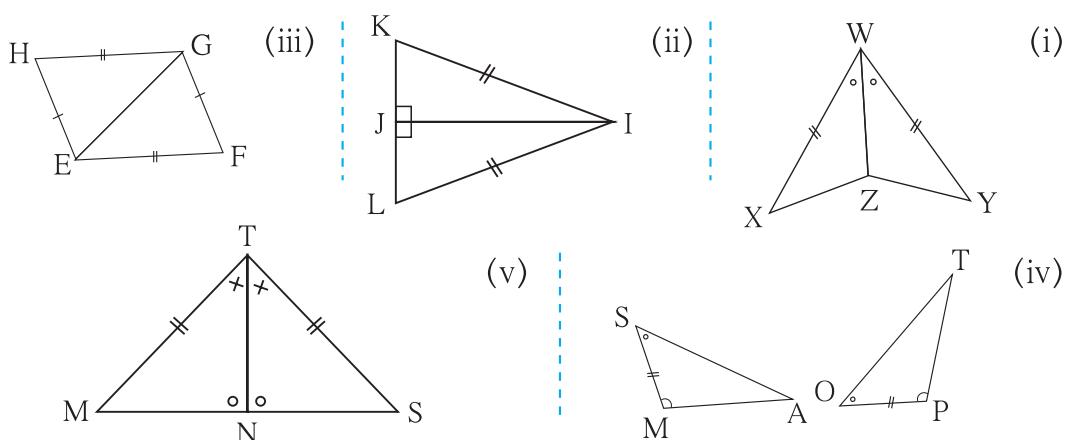
یہ معلومات دینا ضروری ہے۔ یہ معلومات دینے پر  $LMN \leftrightarrow EDF$  مطابقت کی بناء پر مثلث متماثل ہوتے ہیں۔

(ii) شکل میں قطعہ  $CA$  مشترک ضلع ہے یعنی  $\angle DCA \cong \angle BAC$  یہ معلومات دینا ضروری ہے، یہ معلومات دینے پر مطابقت کی بناء پر مثلث متماثل ہوں گے۔

### مشقی سیٹ 13.1

1. درج ذیل اشکال میں مثلثوں کی ہر جوڑی میں یہ کس نشانات سے ظاہر کیے گئے اجزاء متماثل ہیں۔ ہر جوڑی میں مثلث کس آزمائش کے ذریعے

اور نقطہ راس کی ایک سے ایک کی کس مطابقت کے ذریعے متماثل ہیں لکھیے۔

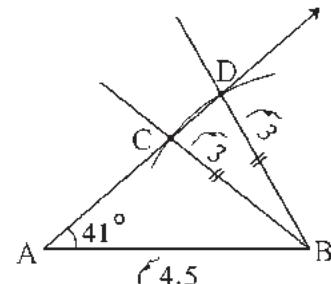


- (1) ضل زاضل آزمائش : اگر ایک مثلث کے دو اضلاع اور ان کو شامل کرنے والے زاویے کے متماثل ہوں تو وہ مثلث ایک دوسرے کے متماثل ہوں گے۔
- (2) ضل ضل ضل آزمائش : اگر ایک مثلث کے تین اضلاع دوسرے مثلث کے تین ناظیری اضلاع کے متماثل ہوں تو دونوں مثلث ایک دوسرے کے متماثل ہوتے ہیں۔
- (3) راضل راضل آزمائش : اگر ایک مثلث کے دو زاویے اور ان کو شامل کرنے والے ضلع کے متماثل ہو تو دونوں مثلث ایک دوسرے کے متماثل ہوں گے۔
- (4) رازاضل آزمائش : ایک مثلث کے دو زاویے اور ان کو شامل نہ کرنے والا ضلع دوسرے مثلث کے دو ناظیری زاویے اور ان کو شامل نہ کرنے والے ناظیری ضلع کے متماثل ہو تو دونوں مثلث ایک دوسرے کے متماثل ہوتے ہیں۔
- (5) وتر ضلع آزمائش : اگر ایک قائمۃ الزاویہ مثلث کا وتر اور ایک ضلع، دوسرے قائمۃ الزاویہ مثلث کے وتر اور ناظیری ضلع کے متماثل ہو تو دونوں مثلث ایک دوسرے کے متماثل ہوتے ہیں۔

مزید معلومات کے لیے :

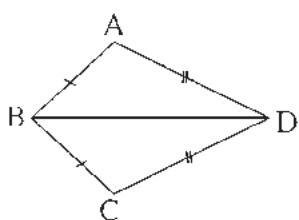
ایک مثلث کے دو اضلاع اور ان کو شامل نہ کرنے والا زاویہ دوسرے مثلث کے ناظیری اجزاء کے متماثل ہوں تو دونوں مثلث ایک دوسرے کے متماثل ہوتے ہیں یا نہیں؟

متصلہ شکل کا مشاہدہ کیجیے  $\triangle ABC$  اور  $\triangle ABD$  میں  $AB$  مشترک ضلع ہے۔  $\angle A$  اور  $\angle B$  ضلع  $BC \cong BD$  میں مشترک زاویہ ہے لیکن وہ ضلعوں کو شامل کرنے والا زاویہ نہیں ہے۔ لیکن ایک مثلث کے تین اجزاء دوسرے مثلث کے ناظیری اجزاء کے متماثل ہیں۔ لیکن وہ مثلث متماثل نہیں ہیں۔



اس کی مدد سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ ایک مثلث کے دو اضلاع اور ان کو شامل نہ کرنے والے زاویے دوسرے مثلث کے ناظیری اجزاء کے متماثل ہوں گے ایسا نہیں بھی ہو سکتا ہے۔

### حل کردہ مثالیں



**مثال (1)** شکل میں  $\square ABCD$  میں مساوی اضلاع کو یہاں نشانات سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس شکل میں متماثل زاویوں کی جوڑیاں ہیں یا نہیں معلوم کیجیے۔

**حل :**  $\triangle ABD$  اور  $\triangle CBD$  میں،

$$\text{AB} \cong \text{CB} \quad \text{ضلع} \quad (\text{دیا ہوا ہے}) \dots$$

$$\text{DA} \cong \text{DC} \quad \text{ضلع} \quad (\text{دیا ہوا ہے}) \dots$$

ضلع  $BD$  مشترک ہے۔

(ضل ضل آزمائش کے ذریعے) ...

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CBD$$

$$\therefore \angle BAD \cong \angle BCD$$

$$\therefore \angle ABD \cong \angle CBD$$

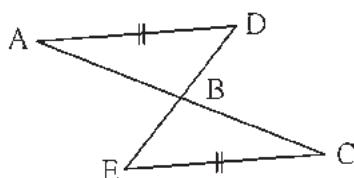
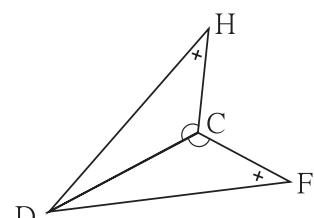
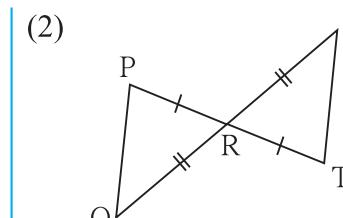
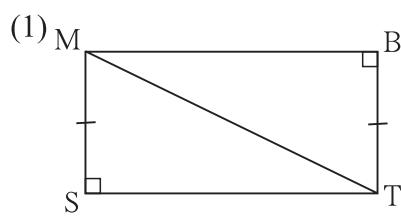
$$\angle ADB \cong \angle CDB$$

}

(متباہل مثلثوں کے نظیری زاویے) ...

### مشقی سیٹ 13.2

1. مندرجہ ذیل میں مثلثوں کی ہر جوڑی میں یکساں نشانات سے ظاہر کیے گئے اجزاء متباہل ہیں۔ ہر جوڑی کے مثلث، ناقاط راس کی کس مطابقت کے ذریعے اور کس آزمائش کے ذریعے متباہل ہیں لکھیے۔ ہر جوڑی میں مثلثوں کے باقی ماندہ نظیری متباہل اجزاء لکھیے۔



- 2\*. متصلہ شکل میں  $EC$  قطعہ اور  $AD$  قطعہ اور مزید کون سی معلومات دی جائے کہ  $\triangle EBC$  اور  $\triangle ABD$  ضل زا زا آزمائش کے ذریعے ایک دوسرے کے متباہل ہو جائیں۔

### جوابات کی فہرست

**13.1 :** 1. (i) ضل زاضل  $XWZ \leftrightarrow YWZ$  (ii) وتر ضل  $KJI \leftrightarrow LJI$  (iii)  $HEG \leftrightarrow FGE$

(iv) ضل زازا یا زاضل زا  $SMA \leftrightarrow OPT$  (v)  $MTN \leftrightarrow STN$

**13.2 :** 1. (1)  $\triangle MST \cong \triangle TBM$ , ضل  $ST \cong MB$ ,  $\angle SMT \cong \angle BTM$

$\angle STM \cong \angle BMT$  (2)  $\triangle PRQ \cong \triangle TRS$ , ضل زازا  $PQ \cong TS$ ,  $\angle RPQ \cong \angle RTS$ ,

$\angle PQR \cong \angle TSR$  (3)  $\triangle DCH \cong \triangle DCF$ , ضل زازا  $\angle DHC \cong \angle DFC$ , ضل  $HC \cong FC$

2. (1)  $\angle ADB \cong \angle CEB$  اور  $\angle ABD \cong \angle CBE$  یا  $\angle DAB \cong \angle ECB$



## مرکب سود

14

کوئی شخص، بینک، امداد بانکی انجمن وغیرہ اداروں سے کچھ رقم متعین شرح سود سے قرض کے طور پر لیتا ہے اور کچھ عرصے کے بعد قرض لی گئی رقم واپس کرتا ہے۔ اس رقم کو استعمال کرنے کے عوض میں کچھ زیادہ رقم ہر سال دیتا ہے اسے سود کہتے ہیں۔

$$\text{مفرد سود معلوم کرنے کے لیے } I = \frac{PNR}{100} \text{ ضابطے کا استعمال ہم کر چکے ہیں۔}$$

اس ضابطے میں سود =  $I$ ، اصل زر =  $P$ ، مدت سال میں =  $N$ ، شرح فی صدی فی سال =  $R$  ہوتا ہے۔



**مرکب سود (Compound interest)** : امانت (بینک میں جمع کی گئی رقم) یا قرض پر بینک سود تحسیب (محسوب) کرتی ہے۔ یہ کیوں اور کس طرح معلوم کرتے ہیں اس کا ہم مطالعہ کریں گے۔

استانی : تجنب راؤ نے ایک بینک سے 10 فی صدی فی سال شرح سے ایک سال میں واپس کرنے کی شرط پر 10,000 روپے قرض لیا تو سال کے آخر میں اسے سود سمیت کتنی رقم دینا ہوگی؟

طالب علم : یہاں، روپے 10,000،  $P = 10,000$ ،  $R = 10$ ، سال 1

$$I = \frac{PNR}{100} = \frac{10000 \times 10 \times 1}{100} = 1000 \text{ روپے}$$

تجنب راؤ کو سال کے آخر میں سود سمیت  $1000 + 10,000 = 11,000$  روپے واپس کرنے ہوں گے۔

طالب علم : لیکن اگر سال کے آخر میں کسی قرض دار نے سود کی رقم ادا نہیں کی تو کیا ہوگا؟

استانی : بینک ہر سال کے آخر میں سود محسوب کرتا ہے اور ہر سال قرض دار کو وہ سود کی رقم ادا کرنا چاہیے ایسی توقع کرتا ہے۔ قرض دار نے پہلے سال کے آخر میں سود ادا نہیں کیا تو دوسرے سال کے لیے بینک اصل زر اور پہلے سال کا سود ملا کر حاصل ہونے والی رقم کو قرض مان لیتا ہے اصل زر اور پہلے سال کا سود ملا کر جو رقم بتی ہے وہ دوسرے سال کا اصل زر مان کر آگے سود محسوب کرتے ہیں۔ یعنی دوسرے سال سود معلوم کرنے کے لیے اصل زر کی رقم پہلے سال کے کل زر کے مساوی ہوگی۔ اس طریقے سے سود محسوب کرنا، مرکب سود کہلاتا ہے۔

طالب علم : تجنب راؤ نے قرض واپس کرنے کی مدت ایک سال اور بڑھائی تو کیا ہوگا؟

استانی : دوسرے سال کے لیے 11000 روپے اصل زر مان کر اس پر سود اور کل زر معلوم کرنا ہوگا۔

طالب علم : کیا اس کے لیے گذشتہ جماعت میں مطالعہ کیے گئے  $\frac{\text{کل زر}}{\text{اصل زر}} = \frac{110}{100}$  نسبت کا استعمال کر سکتے ہیں؟

استانی : یقیناً! ہر سال کے لیے  $\frac{\text{کل زر}}{\text{اصل زر}}$  نسبت مستقل ہے۔ مرکب سود معلوم کرنے کے لیے ہر سال گذشتہ سال کا کل زر ہی اگلے سال کا اصل زر ہوتا ہے۔ یعنی سود معلوم کرنے کی بجائے کل زر معلوم کرنا آسان ہوتا ہے۔ پہلے سال کے بعد کل زر  $A_1$ ، دوسرے سال کے بعد کل زر  $A_2$ ، تیسرا سال کے بعد کل زر  $A_3$  سے ظاہر کریں تو پہلا اصل زر  $P$  ہوتا ہے۔

$$\therefore \frac{A_1}{P} = \frac{110}{100}, \quad \therefore A_1 = P \times \frac{110}{100}$$

دوسرے سال کا کل زر معلوم کرنے کے لیے

$$\therefore \frac{A_2}{A_1} = \frac{110}{100}, \quad \therefore A_2 = A_1 \times \frac{110}{100} = P \times \frac{110}{100} \times \frac{110}{100}$$

طالب علم : پھر تیسرا سال کا کل زر  $A_3$  معلوم کرنے کے لیے

$$\therefore \frac{A_3}{A_2} = \frac{110}{100}, \quad \therefore A_3 = A_2 \times \frac{110}{100} = P \times \frac{110}{100} \times \frac{110}{100} \times \frac{110}{100}$$

استانی : شاباش! یہ مرکب سود معلوم کرنے کا ضابطہ ہے۔ یہاں  $\frac{110}{100}$  سال کے آخر میں ایک روپے پر حاصل ہونے والا کل زر ہے۔ اسے دھیان میں رکھیں۔ جتنے سال کا کل زر معلوم کرنا ہوتی مرتبہ اصل زر کو اس نسبت سے ضرب کرتے ہیں۔

طالب علم : یعنی پہلے سال کے آخر میں  $\frac{\text{کل زر}}{\text{اصل زر}}$  نسبت کو  $M$  اور اصل زر کو  $P$  مانیں تو سال کے آخر میں کل زر  $M \times P$ ، دوسرے سال کے آخر میں کل زر  $M^2 \times P$  اور اسی طرح تیسرا سال کے آخر میں کل زر  $M^3 \times P$  ہوتا ہے۔ اس طریقے سے کتنے بھی سال کا کل زر معلوم کر سکتے ہیں۔

استانی : صحیح ہے!  $R$  فی صدی فی سال شرح سود ہوتا ہے

$$1 = 1 \times M = 1 \times \left(1 + \frac{R}{100}\right) = 1 \times \left(\frac{100+R}{100}\right)$$

$$\therefore P = P \times \left(1 + \frac{R}{100}\right) = P \times \frac{100+R}{100}$$

$\therefore$  اصل زر  $P$ ، شرح سود  $R$  فی صدی فی سال اور مدت  $N$  ہوتا ہے

$$N = A = P \left(1 + \frac{R}{100}\right)^N = P \times \left(\frac{100+R}{100}\right)^N$$

### حل کردہ مثالیں

**مثال (1)** 4000 روپے کا 3 سال کا  $12\frac{1}{2}$  فی صدی فی سال شرح سے مرکب سود معلوم کیجیے۔

**حل :** یہاں،  $P = 4000$ ،  $R = 12\frac{1}{2}\%$ ، سال  $N = 3$

$$A = P \left(1 + \frac{R}{100}\right)^N = P \left(1 + \frac{12.5}{100}\right)^3$$

$$= 4000 \left(1 + \frac{125}{1000}\right)^3$$

$$A = 4000 \left(\frac{1125}{1000}\right)^3 = 4000 \left(\frac{9}{8}\right)^3$$

$$= 5695.31$$

اصل زر - کل زر = تین سال بعد مرکب سود

$$= 5695.31 - 4000 = 1695.31$$

### مشقی سیٹ 14.1

1. مرکب سود کے حساب سے کل زر اور مرکب سود معلوم کیجیے۔

نمبر شمار	اصل زر (روپے)	شرح (فی صدی فی سال)	مدت (سال)
1	2000	5	2
2	5000	8	3
3	4000	7.5	2

2. نیمیراؤ نے ایک امداد بانہی انجمن سے 12 فی صدی فی سال شرح سے 3 سال کے لیے 12500 روپے قرض لیے۔ تو اسے تیرے سال کے آخر میں مرکب سود کے حساب سے کل کتنے روپے واپس کرنا ہوگا؟
3. شلا کا نے  $\frac{1}{2}$  10 فی صدی فی سال شرح سود سے 8000 روپے قرض لے کر ایک کاروبار شروع کیا 2 سال بعد قرض واپس کرتے وقت مرکب سود کے حساب سے اسے کتنا سود ادا کرنا ہوگا؟

مزید معلومات کے لیے :

(1) کچھ مالیاتی کاروبار میں شرح سود شماہی محاسبہ کیا جاتا ہے۔ N سال کی مدت کے لیے شرح سود R ہوتا شماہی سود محاسبہ کرنے کے لیے دیے گئے اصل زر کے لیے شرح  $\frac{R}{2}$  لیتے ہیں۔ N سال کے لیے پچھے ماہ کے 2N مرحلے ہوتے ہیں اسے دھیان میں رکھتے ہوئے سود محاسبہ کرتے ہیں۔

(2) بہت سے مالیاتی ادارے مرکب سود محاسبہ کرنے کے لیے ماہانہ شرح استعمال کرتے ہیں، اس وقت سود کی ماہانہ شرح  $\frac{R}{12}$  لیتے ہیں اور مدت  $N \times 12$  یعنی ایک سال کے کل مہینے لے کر سود محاسبہ کرتے ہیں۔

(3) آج کل بینک روزانہ سود کے حساب سے مرکب سود محاسبہ کرتا ہے۔

**سرگرمی :** آپ کے گھر کے قریب جو بینک ہو وہاں جا کر مختلف اسکیموں کے بارے میں جانکاری حاصل کریں۔ ان اسکیموں میں دیے ہوئے سود کی شرحوں کی جدول تیار کر کے کلاس میں لگائیں۔

## در - آئیے سمجھیں

### مرکب سود کے ضابطے کا اطلاق (Application of formula for compoundintrest)

مرکب سود کے طریقے سے کل زر معلوم کرنے کے ضابطے کا استعمال روزمرہ کی زندگی میں اور دوسرے شعبوں میں مشالیں حل کرنے کے لیے استعمال ہوتا ہے، مثلاً آبادی میں اضافہ، کسی سواری کی قیمت میں ہر سال ہونے والی کمی وغیرہ۔

بعض اشیاء کچھ عرصہ استعمال کرنے کے بعد فروخت کرنے پر ان کی قیمت خرید سے کم قیمت میں فروخت ہوتی ہیں۔ قیمت میں ہونے والی کمی کو نقصان یا خسارہ (depreciation) کہتے ہیں۔

قیمتوں میں ہونے والا خسارہ متعین مدت میں متعین شرح سے ہوتا ہے۔ مثلاً میں نوں کی قیمت ہر سال متعین فیصدی کم ہوتی ہے۔ کچھ مدت بعد کم ہونے والی قیمت معلوم کرنے کے لیے مرکب سود کا ضابطہ استعمال کرتے ہیں۔

یہ قیمت معلوم کرنے کے لیے خسارے کی شرح معلوم ہونا چاہیے۔ شے کی قیمت کم ہونے پر خسارے کی شرح R مخفی لی جاتی ہے۔

### حل کردہ مثالیں

**مثال (1)** ایک شہر کی آبادی ہر سال 8% بڑھتی ہے سال 2010 میں اس شہر کی آبادی 250000 تھی تو سال 2012 میں اس شہر کی آبادی کتنی تھی؟

$$حل : بیہاں، P = سال 2010 میں آبادی = 2,50,000$$

$$A = سال 2012 میں آبادی = ?$$

$$R = آبادی میں اضافہ کی شرح = 8\%$$

$$N = 2$$

$$A = سال بعد ہونے والی آبادی میں یعنی 2 سال 2012$$

$$A = P \times \left(1 + \frac{R}{100}\right)^N = 250000 \times \left(1 + \frac{8}{100}\right)^2$$

$$= 250000 \times \left(\frac{108}{100}\right)^2$$

$$= 250000 \times \left(\frac{108}{100}\right) \times \left(\frac{108}{100}\right)$$

$$= 2,91,600$$

∴ 2012 میں شہر کی آبادی 2,91,600 تھی۔

**مثال (2)** نازیہ نے ایک اسکوٹر 2015 میں 60,000 روپے کا خریدا۔ خسارے کی شرح 20 فیصدی فی سال ہوتا ہے۔ سال بعد اس اسکوٹر کی قیمت کیا ہو جائے گی؟

**حل :** یہاں روپے  $P = 60000$ ، 2 سال بعد ملنے والی رقم  $A$ ، خسارے کی شرح  $R = -20\%$ ، سال  $N = 2$

$$A = P \times \left(1 + \frac{R}{100}\right)^N$$

$$\begin{aligned} A &= 60000 \times \left(1 + \frac{-20}{100}\right)^2 \\ &= 60000 \times \left(1 - \frac{1}{5}\right)^2 \end{aligned}$$

$$= 60000 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$= 60000 \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5}$$

$$A = 38400$$

روپے 38,400 رسمیت کیا ہو جائے گی۔

مرکب سود کے طریقے سے سود معلوم کرنے کے ضابطے میں  $A$ ،  $P$ ،  $N$ ،  $R$  ان چاروں میں سے کوئی تین دیے جائیں تو چوتھا معلوم کیا جاسکتا ہے۔

**مثال (3)** ایک رقم کا 10 فیصدی فی سال شرح سے 3 سال میں مرکب سود کے حساب سے 6655 روپے کل زر ہوتا ہے۔ وہ رقم معلوم کیجیے۔

**حل :** یہاں روپے  $A = 6655$ ، فیصدی فی سال شرح  $R = 10$ ، سال  $N = 3$

$$\begin{aligned} A &= P \times \left(1 + \frac{R}{100}\right)^N \\ \therefore 6655 &= P \times \left(1 + \frac{10}{100}\right)^3 = P \times \left(\frac{110}{100}\right)^3 = P \times \left(\frac{11}{10}\right)^3 \end{aligned}$$

$$\therefore P = \frac{6655 \times 10^3}{11 \times 11 \times 11}, \quad P = 5 \times 10^3 = 5000$$

∴ وہ رقم 5000 روپے ہے۔

**مثال (4)** 10 فیصدی فی سال شرح سے 9000 روپے کا کتنے سال میں مرکب سود 1890 روپے ہو جائے گا۔

**حل :** یہاں،  $R = 10$ ، روپے  $P = 9000$ ، روپے  $A = 1890$  = مرکب سود

پہلے مرکب سود کے حساب سے کل زر معلوم کریں گے۔

مرکب سود کے حساب سے کل زر معلوم کرنے کا ضابطہ لکھ کر اس میں قیمت رکھیں گے۔

$$A = 10890 = P \times \left(1 + \frac{R}{100}\right)^N = 9000 \times \left(1 + \frac{10}{100}\right)^N = 9000 \times \left(\frac{11}{10}\right)^N$$

$$\therefore \left(\frac{11}{10}\right)^N = \frac{10890}{9000} = \frac{121}{100}, \quad \therefore \left(\frac{11}{10}\right)^N = \frac{121}{100}, \quad \therefore N = 2$$

∴ 2 سال میں مرکب سود 1890 روپے ہو جائے گا۔

## مشقی سیٹ 14.2

- .1. ایک عبوری (فلائی اور) پل کی تعمیر میں ابتداء میں 320 مزدور تھے۔ ہر سال مزدوروں کی تعداد میں 25% اضافہ ہوتا ہے تو 2 سال بعد اس کام پر کتنے مزدور ہوں گے؟
- .2. ایک گذریے کے پاس ابتداء میں 200 بکریاں تھیں۔ ہر سال ان کی تعداد میں 10% اضافہ ہوتا ہے تو 2 سال بعد گذریے کے پاس کتنی بکریاں ہوں گی؟
- .3. ایک تحفظ گاہ میں 40,000 درخت تھے۔ درختوں کی تعداد میں ہر سال 5% کی شرح سے اضافہ کرنے کا فیصلہ کیا گیا تو 3 سال بعد تحفظ گاہ میں درختوں کی تعداد کیا ہو جانا چاہیے؟
- .4. آج ایک مشین 2,50,000 روپے میں خریدی گئی۔ خسارے کی شرح 10% فی سال ہے۔ اسے 2 سال بعد فروخت کر دیا جائے تو فروخت قیمت، خرید قیمت سے کتنا کم ہو جائے گی؟
- .5. ایک اصل زر کی 16 فی صدی فی سال شرح سے مرکب سود کے حساب سے 2 سال کا کل زر 4036.80 روپے ہے تو 2 سال میں ہونے والا سود کتنا ہو گا؟
- .6. 15000 روپے 12 فی صدی فی سال شرح مرکب سود کے حساب سے قرض لیا گیا تو 3 سال بعد کتنے روپے واپس کرنا ہوں گے؟
- .7. 18 فی صدی فی سال شرح مرکب سود کے حساب سے ایک اصل زر کا 2 سال کا کل زر 13924 روپے ہوتا ہے تو اصل زر کتنا تھا؟
- .8. شہر کے ایک محلے کی آبادی متعین شرح سے بڑھتی ہے۔ اس محلے کی موجودہ اور 2 سال بعد آبادی بالترتیب 16000 اور 17640 ہے تو آبادی میں اضافہ کی شرح معلوم کیجیے؟
- .9. 700 روپے کا 10 فی صدی فی سال شرح سے کتنے سال میں کل زر 847 روپے ہو گا؟
- .10. 8 فی صدی فی سال شرح سود سے 20,000 روپے کا 2 سال میں ہونے والے مفرد سود اور مرکب سود کے درمیان فرق معلوم کیجیے۔

### جوابات کی فہرست

**14.1 : مشقی سیٹ** 1. (1) ₹2205, ₹205    (2) ₹6298.56, ₹1298.56    (3) ₹4622.5, ₹622.5

2. ₹17561.60    3. ₹1768.2

**14.2 : مشقی سیٹ** 1. بکریاں 242    2. مزدور 500    3. 46,305    4. درخت ₹47,500    5. ₹1036.80  
6. ₹21,073.92    7. ₹10,000    8. 2 سال میں 9. 5 فیصدی فی سال    10. ₹128



### آئیے ذرا یاد کریں

ہم جانتے ہیں کہ بند کشیر ضلعی کے اضلاع سینٹی میٹر، میٹر، کلو میٹر اکائیوں میں دیے جاتے ہیں اور ان کے رقبے بالترتیب مربع سینٹی میٹر، مربع میٹر، مربع کلو میٹر اکائیوں میں حاصل ہوتے ہیں کیونکہ رقبہ کی پیمائش مربع کی صورت میں کرتے ہیں۔

$$\text{ضلع}^2 = \text{مربع کا رقبہ}$$

$$\text{چوڑائی} \times \text{ لمبائی} = \text{مستطیل کا رقبہ}$$

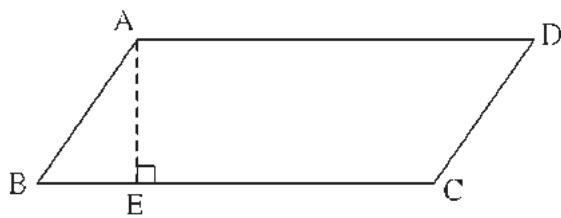
$$\text{قائمہ زاویہ بنانے والے ضلعوں کا حاصل ضرب} \times \frac{1}{2} = \text{قائمہ الزاویہ مثلث کا رقبہ}$$

$$\text{اونچائی} \times \text{ قاعده} \times \frac{1}{2} = \text{مثلث کا رقبہ}$$

### آئیے سمجھ لیں

#### (Area of parallelogram)

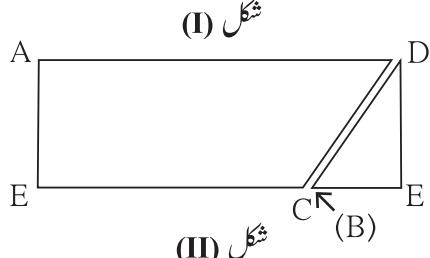
عملی کام :



ایک کاغذ پر کافی بڑا متوازی الاضلاع ABCD بنائیے۔

نقطہ A سے ضلع BC پر عمود کچھیے۔  $\triangle AEB$  قائمہ الزاویہ مثلث کاٹ لیجیے۔ اسے سرکارے ہوئے شکل (II) میں دکھائے ہوئے

طریقے سے  $\square ABCD$  کے باقی بچے ہوئے حصے سے جوڑتے ہیں۔ تیار ہونے والی شکل مستطیل ہے اسے دھیان میں رکھتے ہیں۔

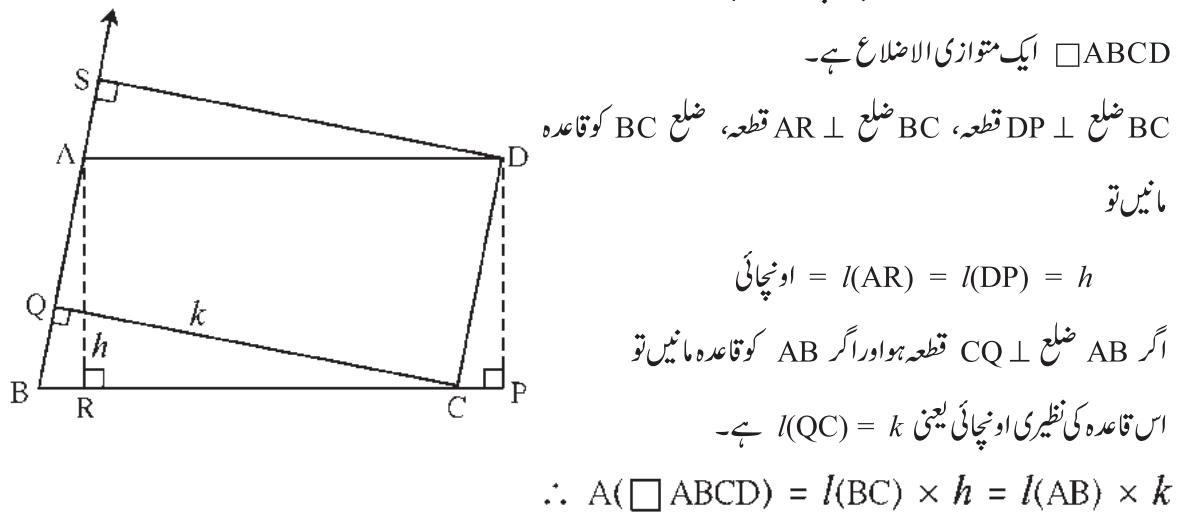


متوازی الاضلاع سے ہی یہ مستطیل تیار ہوا ہے یعنی دونوں کے رقبے مساوی ہیں۔

متوازی الاضلاع کا قاعده یعنی مستطیل کے ایک ضلع کی لمبائی اور متوازی الاضلاع کی اونچائی یعنی مستطیل کے دوسرے ضلعے یعنی مستطیل کی چوڑائی ہے۔

$$\text{اونچائی} \times \text{ قاعده} = \text{متوازی الاضلاع کا رقبہ} \quad \therefore$$

وھیاں رکھیں کہ متوازی الاضلاع کے متوازی ضلعوں میں اگر ایک ضلع کو قاعدہ مانیں تو ان متوازی ضلعوں کا درمیانی فاصلہ ہی اس متوازی الاضلاع کی نظیری قاعدے پر اونچائی ہوتا ہے۔



### حل کردہ مثالیں

**مثال (1)** ایک متوازی الاضلاع کا قاعدہ 8 سم اور اونچائی 5 سم ہے۔ اس متوازی الاضلاع کا رقبہ معلوم کیجیے۔

$$\begin{aligned} \text{حل : } & \text{متوازی الاضلاع کا رقبہ} = \text{اونچائی} \times \text{قاعده} \\ & = 8 \times 5 \\ & = 40 \end{aligned}$$

$\therefore$  متوازی الاضلاع کا رقبہ = 40 مریع سم

**مثال (2)** ایک متوازی الاضلاع کا رقبہ 112 مریع سم ہے۔ اس کا قاعدہ 10 سم ہے اس کی اونچائی معلوم کیجیے۔

$$\begin{aligned} \text{حل : } & \text{متوازی الاضلاع کا رقبہ} = \text{اونچائی} \times \text{قاعده} \\ & = 112 \times 10 \end{aligned}$$

$$\therefore 112 = 10$$

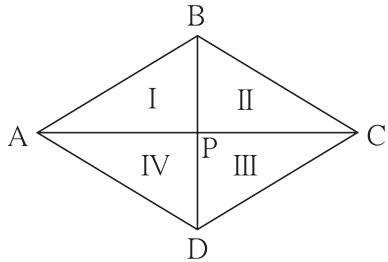
$$\therefore \frac{112}{10} =$$

متوازی الاضلاع کی اونچائی 11.2 سم ہے۔

### مشقی سیٹ 15.1

1. ایک متوازی الاضلاع کا قاعدہ 18 سم اور اونچائی 11 سم ہے تو اس متوازی الاضلاع کا رقبہ معلوم کیجیے۔
2. ایک متوازی الاضلاع کا رقبہ 29.6 مریع سم اور قاعدہ 8 سم ہے تو اس متوازی الاضلاع کی اونچائی معلوم کیجیے۔
3. متوازی الاضلاع کا رقبہ 83.2 مریع سم ہے۔ اس کی اونچائی 6.4 سم ہو تو اس کے قاعدے کی لمبائی کیا ہوگی؟

## میں کارقبہ (Area of a rhombus)



**عملی کام :** شکل میں دکھائے گئے طریقے کے مطابق ایک میں بنائیے۔

ہمیں معلوم ہے کہ میں کے وتر ایک دوسرے کے عوادی ناصف ہوتے ہیں۔

$$l(BD) = d_2 \quad \text{اور} \quad l(AC) = d_1$$

فرض کریں ایک میں ہے، اس کے وتر نقطہ P پر قطع کرتے ہیں۔

اس سے ہمیں چار متماثل قائمۃ الزاویہ مثلث حاصل ہوتے ہیں۔

ہر قائمۃ الزاویہ مثلث کا ضلع  $\frac{1}{2} l(AC)$  اور  $\frac{1}{2} l(BD)$  کے مساوی ہے۔

$$l(AP) = l(PC) = \frac{1}{2} l(AC) = \frac{d_1}{2},$$

$$l(BP) = l(PD) = \frac{1}{2} l(BD) = \frac{d_2}{2}$$

چاروں قائمۃ الزاویہ مثلثوں کے رقبے مساوی ہیں۔

اسی طرح

$$\text{میں کارقبہ } \square ABCD = 4 \times A(\triangle APB)$$

$$= 4 \times \frac{1}{2} \times l(AP) \times l(BP)$$

$$= 2 \times \frac{d_1}{2} \times \frac{d_2}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$$

$$\therefore \text{میں کارقبہ} = \frac{1}{2} \times \text{وتروں کی لمبائی کا حاصل ضرب}$$

### حل کردہ مثالیں

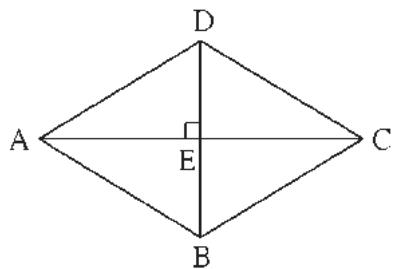
**مثال (1)** ایک میں کے دونوں وتروں کی لمبائیاں بالترتیب 11.2 سم اور 7.5 سم ہیں۔ اس میں کارقبہ معلوم کیجیے۔

$$\text{حل :} \quad \text{وتروں کی لمبائیوں کا حاصل ضرب} \times \frac{1}{2} = \text{میں کارقبہ}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{11.2}{1} \times \frac{7.5}{1} = 5.6 \times 7.5$$

$$= 42 \text{ سم مربع}$$

**مثال (2)** ایک معین کا رقبہ 96 مربع سم ہے۔ اس کے ایک وتر کی لمبائی 12 سم ہے۔ تو معین کے ضلع کی لمبائی معلوم کیجیے۔



**حل :** فرض کریں  $\square ABCD$  ایک معین ہے۔

اس کے وتر  $BD$  کی لمبائی 12 سم ہے۔

معین کا رقبہ 96 مربع سم ہے۔

اس کی مدد سے پہلے وتر  $AC$  کی لمبائی معلوم کرتے ہیں۔

$$\text{وتروں کی لمبائیوں کا حاصل ضرب} \times \frac{1}{2} = \text{معین کا رقبہ}$$

$$\therefore 96 = \frac{1}{2} \times 12 \times l(AC) = 6 \times l(AC)$$

$$\therefore l(AC) = 16$$

فرض کریں وتروں کا نقطہ تقاطع  $E$  ہے۔ معین کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں۔

اس لیے  $\triangle ADE$  میں  $m\angle E = 90^\circ$

$$l(DE) = \frac{1}{2}l(DB) = \frac{1}{2} \times 12 = 6; \quad | \quad l(AE) = \frac{1}{2}l(AC) = \frac{1}{2} \times 16 = 8$$

فیٹا غورث کے مسئلے کے ذریعے

$$\begin{aligned} l(AD)^2 &= l(AE)^2 + l(DE)^2 = 8^2 + 6^2 \\ &= 64 + 36 = 100 \end{aligned}$$

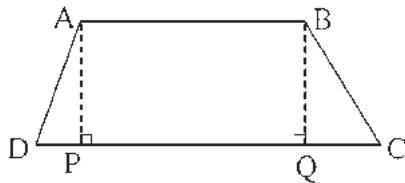
$$\therefore l(AD) = 10$$

اس لیے معین کے ضلع کی لمبائی 10 سم ہے۔

### مشتقی سیٹ 15.2

1. ایک معین کے دونوں وتروں کی لمبائیاں 15 اور 24 سم ہیں۔ اس کا رقبہ معلوم کیجیے۔
2. ایک معین کے دونوں وتروں کی لمبائیاں باترتیب 16.5 اور 14.2 سم ہیں۔ معین کا رقبہ معلوم کیجیے۔
3. ایک معین کا احاطہ 100 سم ہے۔ اس کے ایک وتر کی لمبائی 48 سم ہے۔ معین کا رقبہ کتنا ہوگا؟
- 4\*. ایک معین کے ایک وتر کی لمبائی 30 سم ہے۔ اس کا رقبہ 240 مربع سم ہے۔ معین کا احاطہ معلوم کیجیے۔

### ذو زنقہ کارقبہ (Area of a trapezium)



**عملی کام :** قطعہ AB || DC قطعہ والا ایک ذو زنقہ □ABCD ایک کاغذ پر بنائیے

ضلع AP ⊥ DC اور

ضلع BQ ⊥ DC بنائیے

فرض کریں  $l(AP) = l(BQ) = h$

ذو زنقہ کی اونچائی  $h$ , یعنی متوالی خطوط کا درمیانی فاصلہ, عمودیں بنانے کی وجہ سے □ABCD کے 3 حصے ہو جاتے ہیں۔ ان میں  $\triangle BQC$  اور  $\triangle DPA$  قائمۃ الزاویہ مثلث ہیں۔

ایک مستطیل ہے نقطہ P اور Q قطعے DC پر ہیں۔

$$ABCD = A(\Delta APD) + A(\square APQB) + A(\Delta BQC)$$

$$= \frac{1}{2} \times l(DP) \times h + l(PQ) \times h + \frac{1}{2} l(QC) \times h$$

$$= h \left[ \frac{1}{2} DP + PQ + \frac{1}{2} QC \right]$$

$$= \frac{1}{2} \times h [l(DP) + 2l(PQ) + l(QC)]$$

$$= \frac{1}{2} \times h [l(DP) + l(PQ) + l(AB) + l(QC)] \dots [\because l(PQ) = l(AB)]$$

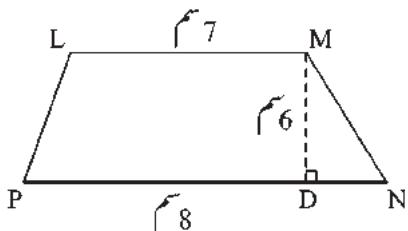
$$= \frac{1}{2} \times h [l(DP) + l(PQ) + l(QC) + l(AB)]$$

$$= \frac{1}{2} \times h [l(DC) + l(AB)]$$

$$A(\square ABCD) = \frac{1}{2} \times h \times (\text{متوالی اضلاع کی لمبائی کا مجموع})$$

$$\text{اونچائی} \times \text{متوالی اضلاع کی لمبائی کا مجموع} \times \frac{1}{2} = \text{ذو زنقہ کارقبہ}$$

### حل کردہ مثالیں

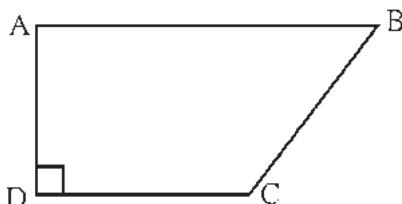


**مثال (1)** ایک ذو زنقہ کے مقابل کے اضلاع کی ایک جوڑی ایک دوسرے کے متوالی ہے۔ ان اضلاع کا درمیانی فاصلہ 6 سم ہے اور متوالی ضلعوں کی لمبائیاں بالترتیب 7 سم اور 8 سم ہیں۔ ذو زنقہ کارقبہ معلوم کیجیے۔

حل :

$$\begin{aligned} \text{سم } 6 &= \text{ذوزنقہ کی اونچائی = متوازی ضلعوں کا درمیانی فاصلہ} \\ \text{اوچائی } \times \frac{1}{2} \times (\text{متوازی ضلعوں کی لمبائی کا مجموع}) &= \text{ذوزنقہ کا رقبہ} \\ = \frac{1}{2} (7 + 8) \times 6 &= 45 \text{ سم} \end{aligned}$$

### مشقی سیٹ 15.3

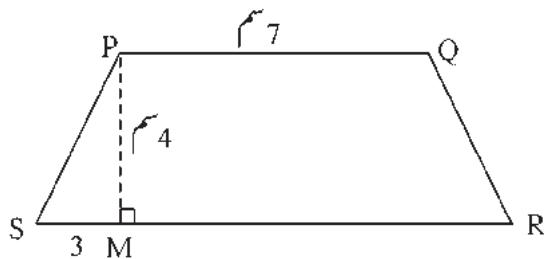


1. ذواربعۃ الاملاع  $\square ABCD$  میں سم  $l(AB) = 13$

سم  $l(AD) = 8$ ، سم  $l(DC) = 9$

تو  $\square ABCD$  کا رقبہ معلوم کیجیے۔

2. ایک ذوزنقہ کے متوازی ضلعوں کی لمبائیاں بالترتیب 8.5 سم اور 11.5 سم ہیں۔ اس کی اوچائی 4.2 سم ہے۔ ذوزنقہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔



3\*. ایک متساوی الساقین ذوزنقہ ہے۔

سم  $l(PQ) = 7$ ،  $l(SR) = 7$  قطعہ

سم  $l(SM) = 3$ ، متوازی ضلعوں کا درمیانی فاصلہ 4 سم ہے۔

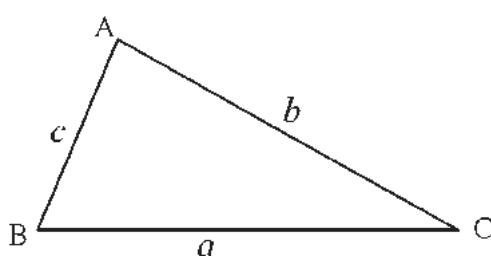
تو  $\square PQRS$  کا رقبہ معلوم کیجیے۔



### مثلث کا رقبہ (Area of a Triangle)

$$\text{ہم جانتے ہیں کہ ارتفاع} \times \text{قاعده} \times \frac{1}{2} = \text{مثلث کا رقبہ}$$

اب ہم دیکھتے ہیں کہ مثلث کی اوچائی نہیں دی گئی ہوتا ہم مثلث کے تینوں اضلاع کی لمبائیاں دی گئی ہوں تو اس مثلث کا رقبہ کس طرح معلوم کرتے ہیں۔



کے اضلاع کی لمبائیاں  $a$ ،  $b$ ،  $c$  ہیں۔

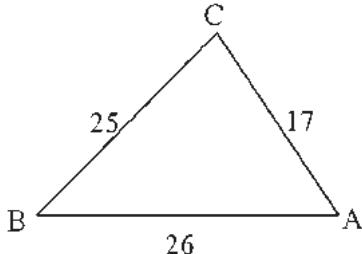
اس مثلث کا نصف احاطہ معلوم کرتے ہیں۔

$$s = \frac{1}{2} (a + b + c) = \text{نصف احاطہ}$$

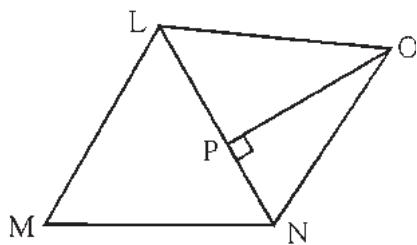
$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \text{مثلث کا رقبہ}$$

اس ضابطے کو ہیرون کا ضابطہ (Heron's Formula) کہتے ہیں۔

**مثال (1)** ایک مثلث کے اضلاع 17 سم، 25 سم اور 26 سم ہیں۔ مثلث کا رقبہ معلوم کیجیے۔



$$\begin{aligned}
 \text{حل : } & c = 26, b = 25, a = 17 \\
 \text{نصف احاطہ} & = s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{17+25+26}{2} = \frac{68}{2} = 34 \\
 \text{مثلث کا رقبہ} & = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\
 & = \sqrt{34(34-17)(34-25)(34-26)} \\
 & = \sqrt{34 \times 17 \times 9 \times 8} \\
 & = \sqrt{17 \times 2 \times 17 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2} \\
 & = \sqrt{17^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 3^2} \\
 & = 17 \times 2 \times 2 \times 3 = 204 \text{ مربع سم}
 \end{aligned}$$



**مثال (2)** متصلہ شکل میں ایک قطعہ اراضی کا نقشہ دیا گیا ہے۔

$$l(MN) = 60 \text{ میٹر} \quad l(LM) = 60 \text{ میٹر}$$

$$l(OP) = 70 \text{ میٹر} \quad l(LN) = 96 \text{ میٹر}$$

اس قطعہ اراضی کا رقبہ معلوم کیجیے۔

**حل :** اس شکل میں  $\triangle LMN$  اور  $\triangle LON$  بنے والے مثلث نظر آتے ہیں۔

$\triangle LMN$  کے تمام اضلاع کی لمبائیاں معلوم ہیں اس لیے ہیرون کے ضابطے کا استعمال کر کے اس کا رقبہ معلوم کریں گے۔

$\triangle LON$  میں ضلع  $LN$  قاعدہ ہے اور  $l(OP)$  کوارتفاق مان کر  $\triangle LON$  کا رقبہ معلوم کرتے ہیں۔

$$\triangle LMN = s = \frac{60+60+96}{2} = \frac{216}{2} = 108 \text{ کا نصف احاطہ}$$

$$\begin{aligned}
 A(\triangle LMN) &= \sqrt{108(108-60)(108-60)(108-96)} \\
 &= \sqrt{108 \times 48 \times 48 \times 12} \\
 &= \sqrt{12 \times 9 \times 48 \times 48 \times 12}
 \end{aligned}$$

$$\text{مربع میٹر} = 12 \times 3 \times 48 = 1728$$

$$A(\triangle LNO) = \frac{1}{2} \times \text{ارتفاع} \times \text{قاعدہ}$$

$$= \frac{1}{2} \times 96 \times 70$$

$$= 90 \times 35 = 3360 \text{ مربع سم}$$

$$\text{قطعہ اراضی } \square LMNO \text{ کا رقبہ} = A(\triangle LMN) + A(\triangle LNO)$$

$$= 1728 + 3360$$

$$= 5088 \text{ مربع میٹر}$$

ارتفاع × قاعده = متوازی الاضلاع کا رقبہ

وتروں کی لمبائیوں کا حاصل ضرب ×  $\frac{1}{2}$  = معین کا رقبہ

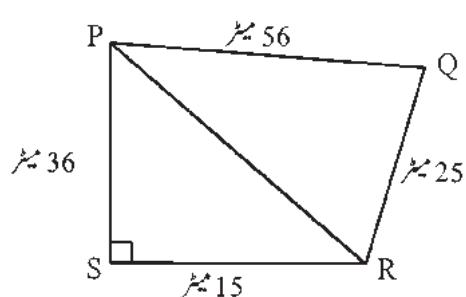
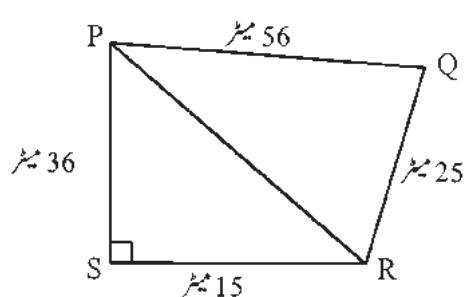
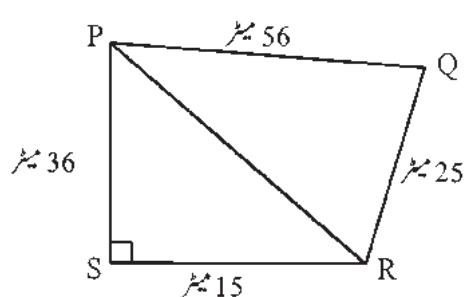
اونچائی × متوازی الاضلاع کی لمبائیوں کا مجموع ×  $\frac{1}{2}$  = ذوزنقہ کا رقبہ

اگر  $\triangle ABC$  کے اضلاع  $a, b, c$  ہوں تو ہیرون کے ضابطہ کا استعمال کر کے مثلث کا رقبہ معلوم کرنے ہیں۔

$$A(\Delta ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

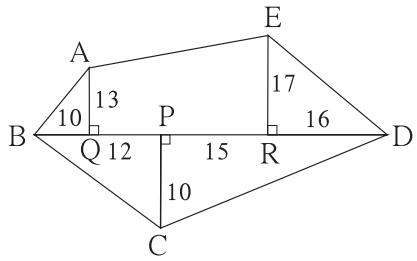
$$s = \frac{a+b+c}{2} \text{ جس میں}$$

### مشقی سیٹ 15.4

1. ایک مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں 45 سم، 39 سم اور 42 سم ہیں۔ مثلث کا رقبہ معلوم کیجیے۔
- 
2. شکل میں دکھائی گئی پیمائشیں کو درھیان میں رکھ کر  $\square PQRS$  کا رقبہ معلوم کیجیے۔
- 
3. متصلہ شکل میں کچھ پیمائشیں دکھائی گئیں ہیں ان کی مدد سے  $\square ABCD$  کا رقبہ معلوم کیجیے۔
- 

غیر منتظم چکہ کا رقبہ :

قطعہ اراضی، کھیتی کی زمین وغیرہ کی شکل عام طور پر غیر منتظم کثیر الاضلاع کی ہوتی ہے۔ ان کی تقسیم مثلث یا مخصوص قسم کے ذوار بعثۃ الاضلاع میں کرتے ہیں۔ اس طرح قطعہ اراضی کی تقسیم کر کے ان کا رقبہ کس طرح معلوم کرتے ہیں اسے ذیل کی مثالوں سے سمجھ لیجیے۔



**مثال :** متصلہ شکل میں ABCDE ایک کثیر ضلعی دیا گیا ہے۔ شکل میں تمام پیاسیں میٹر میں دی گئی ہیں۔ اس شکل کا رقبہ معلوم کیجیے۔

**حل :** یہاں  $\triangle AQB$  اور  $\triangle ERD$  قائمۃ الزاویہ مثلث ہیں۔

اب ہم ذوزنقہ  $\square AQRE$  کا قاعده  $BD$  اور ارتفاع  $PC$  دیا ہوا ہے۔

اب ہم ہر شکل کا رقبہ معلوم کریں گے۔

$$A(\triangle AQB) = \frac{1}{2} \times l(BQ) \times l(AQ) = \frac{1}{2} \times 10 \times 13 = 65 \text{ مربع میٹر}$$

$$A(\triangle ERD) = \frac{1}{2} \times l(RD) \times l(ER) = \frac{1}{2} \times 16 \times 17 = 136 \text{ مربع میٹر}$$

$$A(\square AQRE) = \frac{1}{2} [l(AQ) + l(ER)] \times l(QR)$$

$$= \frac{1}{2} [13 + 17] \times (12 + 15)$$

$$= \frac{1}{2} \times 30 \times 27 = 15 \times 27 = 405 \text{ مربع میٹر}$$

$$l(BD) = l(BP) + l(PD) = 10 + 12 + 15 + 16 = 53 \text{ میٹر}$$

$$A(\triangle BCD) = \frac{1}{2} \times l(BD) \times l(PC) = \frac{1}{2} \times 53 \times 10 = 265 \text{ مربع میٹر}$$

کثیر ضلعی  $\square ABCDE$  کا رقبہ

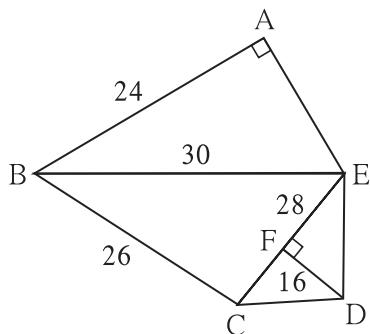
$$= A(\triangle AQB) + A(\square AQRE) + A(\triangle ERD) + A(\triangle BCD)$$

$$= 65 + 405 + 136 + 265$$

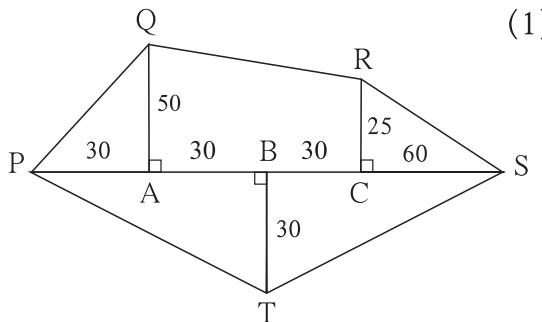
$$= 871 \text{ مربع میٹر}$$

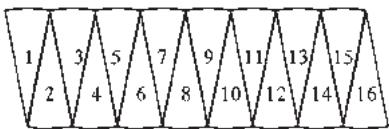
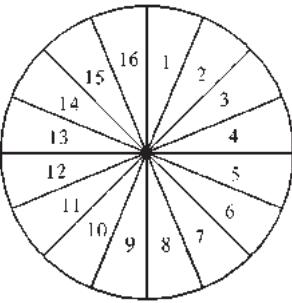
### مشقی سیٹ 15.5

1. درج ذیل قطعہ اراضی کا رقبہ معلوم کیجیے۔ (تمام پیاسیں میٹر میں ہیں)



(2)





**عملی کام :** ایک کارڈ شیٹ پر ایک بڑا دائیرہ بنائیے۔

دائیرے میں شکل کے مطابق دائیرے کے تراشے بنائے کا انھیں کاٹ کر الگ الگ کچھیے۔ دائیرے کو 16 یا 32 مساوی حصے میں تقسیم کچھیے۔ یا  $360^\circ$  کے مساوی حصے کر کے دائیرے کے 18 یا 20 مساوی حصے کچھیے۔ اس کے بعد ان حصوں کو نصف قطروں پر کاٹ کر الگ الگ تراشے حاصل کچھیے۔ شکل میں دکھائے گئے طریقے کے مطابق انھیں جوڑیے۔ اس سے تقریباً ایک مستطیل جیسی شکل تیار ہوتی ہے۔

اگر دائیرے کے مساوی حصوں کی تعداد حتیٰ زیادہ کی جائے گی اتنی ہی شکل مستطیل جیسی ہوتی جائے گی۔

$$2\pi r = \text{دائیرے کا احاطہ}$$

اس لیے مستطیل کی لمبائی  $\pi r$  یعنی نصف محیط کے مساوی اور چوڑائی  $r$  کے مساوی ہے۔

$$\therefore \text{مستطیل کا رقبہ} = \text{چوڑائی} \times \text{لمبائی} = \pi r \times r$$

$$\therefore \text{دائیرے کا رقبہ} = \pi r^2$$

### حل کردہ مثالیں

**مثال (1)** ایک دائیرے کا نصف قطر 21 سم ہے۔ دائیرے کا رقبہ معلوم کچھیے۔

حل :

$$\text{دائیرے کا رقبہ} = \pi r^2$$

$$= \frac{22}{7} \times 21^2$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{21}{1} \times \frac{21}{1} = 66 \times 21 = 1386 \text{ مربع سم}$$

$\therefore$  دائیرے کا رقبہ 1386 مربع سم ہے۔

**مثال (2)** ایک دائروی میدان کا رقبہ 3850 مربع میٹر ہے۔ میدان کا نصف قطر معلوم کچھیے۔

حل :

$$\text{دائیرے کا رقبہ} = \pi r^2$$

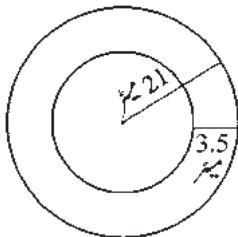
$$3850 = \frac{22}{7} \times r^2$$

$$r^2 = \frac{3850 \times 7}{22} , \quad r^2 = 1225 , \quad r = 35 \text{ میٹر}$$

اس لیے میدان کا نصف قطر 35 میٹر ہے۔

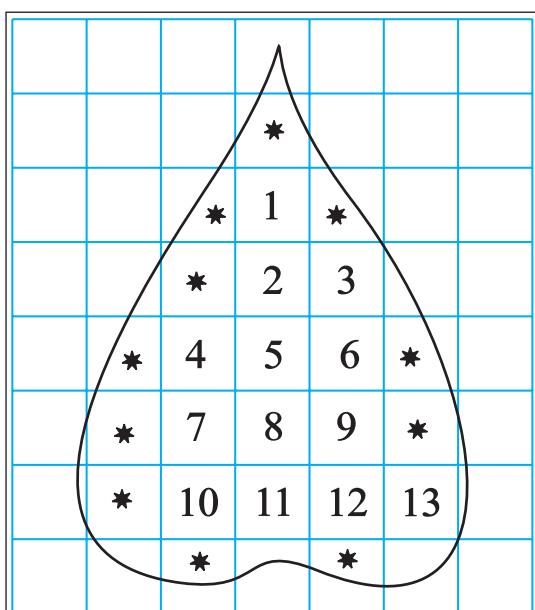
### مشقی سیٹ 15.6

1. ذیل میں دائرے کے نصف قطر دیے گئے ہیں۔ دائروں کے رقبے معلوم کیجیے۔
- (1) 28 سم      (2) 17.5 سم      (3) 10.5 سم
2. ذیل میں کچھ دائروں کے رقبے دیے گئے ہیں۔ ان دائروں کے قطر معلوم کیجیے۔
- (1) 176 مربع سم      (2) 394.24 مربع سم      (3) 12474 مربع سم
3. ایک دائروی باغ کا قطر 42 میٹر ہے اس پارک کے گرد 3.5 میٹر چوڑائی کا راستہ ہے۔ راستے کا رقبہ معلوم کیجیے۔
4. ایک دائرے کا محیط 88 سم ہے۔ دائرے کا رقبہ معلوم کیجیے۔



**غیر منتظم شکل کا انداز آرقبہ معلوم کرنا :**

تریکی کاغذ کی مدد سے کسی بھی بندہ شکل کا رقبہ معلوم کر سکتے ہیں۔ دی گئی شکل یا شے کو تریکی کاغذ پر رکھ کر اس کے کناروں پر پنسل چلاتے ہیں اور اس کا خاکہ تریکی کاغذ پر بنی ہوئی شکل کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے استعمال کرتے ہیں۔ تریکی کاغذ پر مربouں کی تعداد کس طرح معلوم کریں گے اسے درج ذیل عملی کام کے ذریعے سمجھ لیں۔



$$(1) \text{ شکل میں } 1 \text{ مربع سم رقبے والے مربouں کی تعداد} = 13$$

$$\therefore \text{ان کا رقبہ} = 13 \text{ مربع سم}$$

$$(2) \text{ شکل میں } \frac{1}{2} \text{ مربع سم سے زیادہ لیکن } 1 \text{ مربع سم سے کم رقبے والے مربouں کی تعداد} = 11$$

$$\therefore \text{ان کا رقبہ} = \text{تقریباً } 11 \text{ مربع سم}$$

$$(3) \text{ شکل میں } \frac{1}{2} \text{ مربع سم رقبے والے مربouں کی تعداد} = 0$$

$$\therefore \text{ان کا رقبہ} = 0 \text{ مربع سم}$$

$$(4) \text{ شکل میں } \frac{1}{2} \text{ مربع سم سے کم رقبے والے مربouں کے رقبوں پر غور نہیں کریں گے۔}$$

$$\therefore \text{ان کا رقبہ} = 0 \text{ مربع سم}$$

$$(\text{تقریباً}) \text{ مربع سم } 24 = 13 + 11 + 0 + 0 = \text{ دی ہوئی شکل کا انداز آرقبہ} \therefore$$

**عملی کام :** ترسیمی کاغذ پر 28 ملی میٹر نصف قطر کا ایک دائرہ، کوئی بھی ایک مثلث اور کوئی بھی ایک ذوزنقہ بنائیے۔ ان تینوں اشکال کا رقبہ ترسیمی کاغذ کی مدد سے چھوٹے مربوعوں کی تعداد گن کر معلوم کیجیے۔ جانچ کیجیے کہ یہ رقبے ضابطے کے ذریعے معلوم کیے گئے رقبوں کے مساوی ہیں، تصدیق کیجیے۔

گنے کے لیے استعمال ہونے والے مرلع جتنے چھوٹے ہوں گے اتنا ہی شکل کا رقبہ اندازہ صحیح ہوگا۔

## جوابات کی فہرست

- |             |                       |           |           |         |    |
|-------------|-----------------------|-----------|-----------|---------|----|
| <b>15.1</b> | مرلع سم : 1. 198      | 2. 3.7    | 3. 13     | سم      |    |
| <b>15.2</b> | مرلع سم : 1. 180      | 2. 117.15 | 3. 336    | 4. 68   | سم |
| <b>15.3</b> | مرلع سم : 1. 88       | 2. 42     | 3. 40     | مرلع سم |    |
| <b>15.4</b> | مرلع سم : 1. 756      | 2. 690    | 3. 570    | مرلع سم |    |
| <b>15.5</b> | مرلع میٹر : 1. 6000   | 2. 776    | مرلع میٹر | میٹر    |    |
| <b>15.6</b> | مرلع سم : 1. (1) 2464 | (2) 346.5 | (2) 962.5 | مرلع سم |    |
|             | 2. (1) $2\sqrt{56}$   | (2) 22.4  | (2) 126   | سم سم   |    |
|             | 3. 500.50             | مرلع سم   |           |         |    |
|             | 4. 616                | مرلع سم   |           |         |    |

## مزید معلومات کے لیے :

ہمارے ملک میں پیاس کا عشری نظام رائج ہے۔

سرکاری دستاویز میں زمین کا رقبہ آر، ہیکٹر جیسی عشری اکائیوں میں درج کرتے ہیں۔

مرلع میٹر = 10,000 = ہیکٹر 1 آر 100 ، آر 1 = مرلع میٹر 100

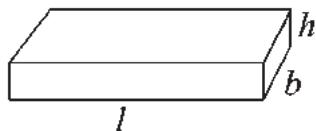
کاروبار یا لین دین میں زمین کا رقبہ گنٹھا، ایکٹر جیسی اکائیوں میں پیاس کرنے کا طریقہ آج بھی رائج ہے۔ رقبہ 1 گنٹھا تقریباً 1 آر کے مساوی ہے۔ یعنی تقریباً 100 مرلع میٹر ہوتا ہے۔ 1 ایکٹر تقریباً 0.4 ہیکٹر ہوتا ہے۔



# سطح کارقبہ اور حجم

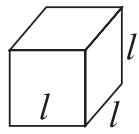
16

آئیے ذرا یاد کریں



مکعب نمایا مسٹطیلی منشور کی سطحوں کا کل رقبہ =  $2(l \times b + b \times h + l \times h)$

مکعب کی کل سطحوں کا رقبہ =  $6l^2$



مربع سم =  $100 \times 100 = 10000$  مربع میٹر، سم = 100 میٹر

مربع ملی میٹر =  $10 \times 10 = 100$  مربع ملی میٹر، ملی میٹر = 10 سم

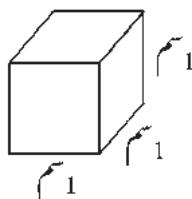
آئیے سمجھ لیں

مسٹطیلی منشور، مکعب اور مدور استوانہ وغیرہ اشیاء سے ابعادی یعنی جسم ہوتی ہیں۔ یہ جسم اشکال مکانی جگہ گھیرتی ہیں۔ کسی بھی جسم شکل سے گھری ہوئی جگہ کو اس کا حجم کہتے ہیں۔

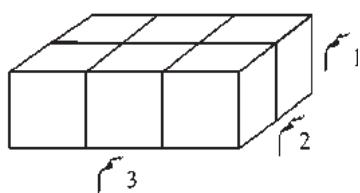
(Standard unit of volume) حجم کی معیاری اکائی

متصلہ شکل میں مکعب کے ہر ضلع کی لمبائی 1 سم ہے۔ اس مکعب کے ذریعے گھری ہوئی جگہ، حجم ناپنے کی معیاری اکائی ہے۔ جو 1 مکعب سینٹی

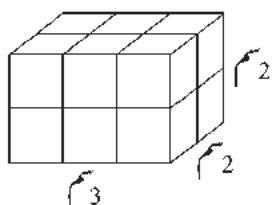
میٹر مختصرًا 1 مکعب سم لکھتے ہیں۔



عملی کام I : 1 سم ضلع کی لمبائی والے کئی مکعب ملا کر رکھیے۔ شکل میں دکھائے گئے طریقے کے مطابق 6 مکعب ملا کر رکھے گئے ہیں۔ جس سے ایک مسٹطیلی منشور بنتا ہے۔ اس مسٹطیلی منشور کی لمبائی 3 سم، چوڑائی 2 سم اور اونچائی 1 سم ہے۔ ایک سم لمبائی والے 6 مکعب ملا کر مسٹطیلی منشور بنایا گیا ہے۔

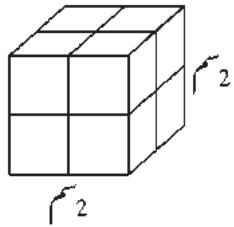


عملی کام II : متصلہ شکل میں مسٹطیلی منشور کی لمبائی 3 سم، چوڑائی 2 سم اور اونچائی 2 سم ہے اس مسٹطیلی منشور میں 1 مکعب سم حجم والے  $3 \times 2 \times 2 = 12$  مکعب ہیں۔ یعنی اس مسٹطیلی منشور کا حجم 12 مکعب سم ہے۔ اس بنابر،



مسٹطیلی منشور کے حجم کا ضابطہ اونچائی  $\times$  چوڑائی  $\times$  لمبائی = اگر لمبائی l، چوڑائی b اور اونچائی h ہو تو

مسٹطیلی منشور کا حجم =  $l \times b \times h$



**عملی کام III :** متصلہ شکل میں 1 مکعب سم جم والے 8 مکعب ایک دوسرے سے ملا کر رکھے گئے ہیں جس سے ایک مکعب تیار ہوتا ہے جس کے ضلع کی لمبائی 2 سم ہے۔

$$\text{مکعبوں کا جم} = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$$

اس بنا پر 1 ضلع والے مکعب کا جم درج ذیل ہے۔

$$1 \text{ ضلع والے مکعب کا جم} = 1 \times 1 \times 1 = 1^3$$

**مائع کا جم :** مائع کی جسامت یعنی مائع کا جم ہوتا ہے۔

مائع کا جم ناپنے کے لیے ملی لٹر اور لٹر اکائیاں استعمال ہوتی ہیں اسے ہم جانتے ہیں۔

شکل میں 10 سم ضلع والے ایک کھوکھلا مکعب ہے۔

$$\text{اس کا جم} = 10 \times 10 \times 10 = 1000 \text{ مکعب سم ہے۔}$$

اگر اس مکعب کو پانی سے بھرا جائے تو اس میں موجود پانی کا جم 1000 مکعب سم ہو گا۔

اس جسامت کو 1 لٹر کہتے ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ ملی لٹر 1000 = 1 لٹر

اس لیے دھیان میں رکھیے کہ

$$\text{ملی لٹر } 1000 = \text{مکعب سم } 1000 = 1 \text{ لٹر} \quad \text{اس بنا پر} \quad \text{ملی لٹر } 1 = \text{مکعب سم } 1 \text{ ہوتا ہے۔}$$

یعنی 1 سم والے مکعب میں سمانے والے پانی کی جسامت 1 ملی لٹر ہوتی ہے۔

### حل کردہ مثالیں

**مثال (1)** مستطیلی منشور نما شکل کے شیشے کے ایک چھلی گھر کی لمبائی 1 میٹر، چوڑائی 40 سم اور اونچائی 50 سم ہے تو اس چھلی گھر میں کتنا پانی سمائے گا؟ معلوم کیجیے۔

**حل :** چھلی گھر میں سمانے والے پانی کا جم اس مکعب نما چھلی گھر کے مساوی ہو گا۔

چھلی گھر کی لمبائی = 1 میٹر = 100 سم، چوڑائی 40 سم اور اونچائی 50 سم ہے۔

$$\text{مکعب سم } 100 \times 40 \times 50 = 2,00,000 = \text{چھلی گھر کا جم}$$

$$\text{لٹر } 1 = \text{مکعب سم } 1000 \therefore \text{لٹر } 200 = \frac{200000}{1000}$$

اس لیے چھلی گھر میں 200 لٹر پانی سمائے گا۔

**مثال (2)** ایک مستطیلی منشور گودام کی لمبائی 6 میٹر، چوڑائی 4 میٹر اور اونچائی 4 میٹر ہے۔ اس گودام میں 40 سم ضلع والے مکعب زیادہ سے زیادہ کتنے رکھے جاسکتے ہیں۔

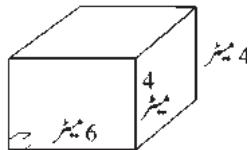
**حل :** گودام کمبل بھرنے پر تمام بکسوں (مکعب) کا کل جم گودام کے جم کے مساوی ہو گا۔

مثال حل کرنے کے لیے درج ذیل مرحلاں پر غور کریں۔

(1) گودام کا جم معلوم کیجیے۔

(2) ایک بس (مکعب) کا جم معلوم کیجیے۔

(3) بکسوں کی تعداد معلوم کیجیے۔



$$\text{مرحلہ (1)} \quad \text{سم} = 600 = \text{گودام کی لمبائی}$$

$$\text{سم} = 400 = \text{میٹر} = \text{چوڑائی} = \text{اونچائی}$$

$$\text{مکعب سم} = 600 \times 400 \times 400 = \text{گودام کا جم}$$

$$\text{مرحلہ (2)} \quad \text{مکعب سم} = (40)^3 = 40 \times 40 \times 40 = \text{ایک بس کا جم}$$

$$\text{مرحلہ (3)} \quad \frac{\text{گودام کا جم}}{\text{ایک بس کا جم}} = \frac{600 \times 400 \times 400}{40 \times 40 \times 40} = 1500$$

$\therefore$  اس گودام میں زیادہ سے زیادہ 1500 بس رکھے جاسکتے ہیں۔

**مثال (3)** برلنی تیار کرنے کے لیے کھوا اور شکر کا پکھلا ہوا 5 لٹر آمیزہ ایک مکعب نما ٹرے میں انڈیا لگایا تو ٹرے کی چوڑائی ۔ ٹرے کی اونچائی 40 سم اور اونچائی 2.5 سم ہے۔ تو ٹرے کی لمبائی معلوم کیجیے۔

**حل :** مثال حل کرنے کے لیے درج ذیل مراحلوں میں خانہ پری کیجیے۔ خانوں میں مناسب عدد بھریے۔

$$(1) \text{ مرحلہ } \text{مکعب سم} = 1000 = \text{لٹر} \quad \dots$$

$$(2) \text{ مرحلہ } \text{مکعب سم} = \text{آمیزے کا جم}$$

$$(3) \text{ مرحلہ } \text{آمیزے کا جم} = \text{مستطیلی ٹرے کا جم}$$

$$\text{مکعب سم} = \text{اونچائی} \times \text{چوڑائی} \times \text{لمبائی}$$

$$5 = \text{ٹرے کی لمبائی} \quad \therefore \quad \text{مکعب سم} = \frac{\text{ }}{100} = 50 \text{ سم}$$



$$\bullet \quad \text{مکعب کا جم} = l^3 \quad (\text{ضلع}) = \text{اونچائی} \times \text{چوڑائی} \times \text{لمبائی} = \text{مستطیلی منشور کا جم}$$

### مشقی سیٹ 16.1

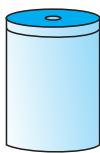
1. ایک بس کی لمبائی 20 سم، چوڑائی 10.5 سم اور اونچائی 8 سم ہے اس کا جم معلوم کیجیے۔
2. ایک مستطیلی منشور شکل کے صابن کی بلکری کا جم 150 مکعب سم ہے۔ اس کی لمبائی 10 سم اور چوڑائی 5 سم ہو تو اس کی موٹائی کتنی ہوگی؟
3. 6 میٹر لمبائی، 2.5 میٹر اونچائی اور 0.5 میٹر چوڑائی کی ایک دیوار تیار کرنا ہے۔ اس کے لیے 25 سم لمبائی، 15 سم چوڑائی اور 10 سم اونچائی والی کتنی اینٹیں درکار ہوں گی؟

4. بارش کا پانی ذخیرہ کرنے کے لیے ایک بستی میں 10 میٹر لمبائی، 6 میٹر چوڑائی کا حوض تیار کیا گیا۔ اس حوض کی گنجائش کتنی ہے؟ حوض میں کتنے لٹر پانی سمائے گا؟

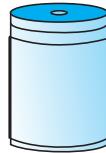
### آئیے سمجھیں

#### مدور استوانے کی سطح کا رقبہ (Surface area of a cylinder)

ایک مدور استوانہ شکل کا ڈبایجھے۔ اس کی اوپرچاری کے مساوی چوڑائی والا ایک مستطیلی کاغذ لیجھے۔ اسے ڈبے کی خمara سطح پر اچھی طرح لپیٹنے کے سطح مکمل طور سے ڈھک جائے۔ کاغذ کا بچا ہوا حصہ کاٹ لیجھے۔



مدور استوانہ



کاغذ لپٹا ہوا



لmbائی = دائرے کا محیط

لپٹا ہوا کاغذ نکالیے جو مستطیل کا ہے۔ اس مستطیل کا رقبہ یعنی مدور استوانے کی خمara سطح کا رقبہ، مستطیل کی لمبائی یعنی دائروی تہہ کا محیط اور مستطیل کی چوڑائی یعنی مدور استوانے کی اوپرچاری

$$\text{چوڑائی} \times \text{لمبائی} = \text{مستطیل کا رقبہ} = \text{مدور استوانے کی خمara سطح کا رقبہ}$$

$$\text{مدور استوانے کی اوپرچاری} \times \text{مدور استوانے کے قاعدہ کا محیط} =$$

$$= 2\pi r \times h = 2\pi rh$$

بند مدور استوانے میں قاعدے کی سطح اور اوپری حصے کی سطح دائروی ہوتی ہے۔

$$\text{قاعده کا رقبہ} + \text{اوپری سطح کا رقبہ} + \text{مدور استوانے کی خمara سطح کا رقبہ} = \text{بند دائروی استوانے کی کل سطح کا رقبہ} \therefore$$

$$\text{دائرہ کا رقبہ} \times 2 + \text{مدور استوانے کی خمara سطح کا رقبہ} = \text{بند دائروی استوانے کی کل سطحوں کا رقبہ} \therefore$$

$$= 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$$

### حل کردہ مثالیں

**مثال (1)** ایک مدور استوانہ نما پانی کی ٹانکی کا قطر 1 میٹر اور اوپرچاری 2 میٹر ہے۔ ٹانکی پر ڈھکن لگا ہے۔ ٹانکی کے اندر اور باہر ڈھکن سمیت رنگ ورگن کرنا ہے۔ رنگ ورگن کرنے کا خرچ 80 روپے فی مرلے میٹر ہے تو ٹانکی کو رنگنے کا خرچ کتنا ہوگا؟ ( $\pi = 3.14$ )

**حل :** ٹانکی کے اندر اور باہر رنگ ورگن یعنی رنگے جانے والے حصوں کا رقبہ ٹانکی کی کل یہ ورنی سطحوں کے رقبے کا دُگنا ہوگا۔

مدور استوانے کے قاعده کا قطر 1 میٹر ہے۔

اس لیے نصف قطر 0.5 میٹر اور مدور استوانے کی اوپرچاری 2 میٹر ہے۔

$$\therefore \text{مدور استوانے کی کل سطحوں کا رقبہ } = 2\pi r(h+r) = 2 \times 3.14 \times 0.5 (2.0 + 0.5)$$

$$= 2 \times 3.14 \times 0.5 \times 2.5 = 7.85 \text{ مربع میٹر}$$

$$\text{مریخ میٹر } 15.70 \times 2 = \text{ رنگ و روغن کیے جانے والے حصوں کا رقبہ}$$

$$\text{روپے } 15.70 \times 80 = 1256 = \text{ ٹائی کورنگ کا کل خرچ}$$

**مثال (2)** ایک الیومینیم کے مستطیلی پتھرے (ٹین) کی لمبائی 3.3 میٹر اور چوڑائی 3 میٹر ہے۔ اس پتھرے سے 3.5 سم نصف قطر اور 30 سم لمبائی کے زیادہ کتنی نیلیاں بنائی جاسکتی ہے؟

$$\text{حل : } \text{چوڑائی} \times \text{لمبائی} = \text{مستطیلی پتھرے کا رقبہ}$$

$$\text{مریخ سم } 330 \times 300 = \text{ مریخ میٹر } 3$$

$$\text{سم } h = 30 = \text{ ایک نیلی کی لمبائی یعنی مدور استوانے کی اوپرچاری}$$

$$\text{سم } r = 3.5 = \text{ مدور استوانے کے قاعده کا نصف قطر} = \text{ نیلی کا نصف قطر}$$

$$\text{ایک نیلی کی خمادرطح کا رقبہ} = \text{ایک نیلی تیار کرنے کے لیے درکار پتھرا}$$

$$= 2\pi rh = 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{35}{10} \times \frac{30}{1}$$

$$\text{مریخ سم } = 2 \times 22 \times 15 = 660$$

$$\text{ایک نیلی کی خمادرطح کا رقبہ} = \frac{\text{پتھرے کا رقبہ}}{\text{پتھرے سے تیار ہونے والی نیلیوں کی تعداد}} = \frac{330 \times 300}{660} = 150$$

### مشقی سیٹ 16.2

1. درج ذیل ہر مثال میں مدور استوانے کے قاعده کا نصف قطر  $r$  اور اوپرچاری  $h$  دی گئی ہے۔ اس پر سے ہر ایک مدور استوانے کی خمادرطح کا رقبہ اور کل سطحوں کا رقبہ معلوم کیجیے۔

$$(1) r = 7 \text{ سم}, h = 10 \text{ سم} \quad (2) r = 1.4 \text{ سم}, h = 2.1 \text{ سم} \quad (3) r = 2.5 \text{ سم}, h = 7 \text{ سم}$$

$$(4) r = 70 \text{ سم}, h = 1.4 \text{ سم} \quad (5) r = 4.2 \text{ سم}, h = 14 \text{ سم}$$

$$2. 50 \text{ سم قطر اور } 45 \text{ سم اوپرچاری کے دونوں جانب سے بند ڈرم کی کل سطحوں کا رقبہ معلوم کیجیے۔ } (\pi = 3.14)$$

3. ایک مدور استوانے کی خمara طرح کا رقبہ 660 مربع سم اور اوپرائی 21 سم ہے۔ اس کا نصف قطر اور قاعدے کا رقبہ معلوم کیجیے۔
4. ایک مدور استوانے کی شکل کے پتے کے ڈبے کا قطر 28 سم ہے اور اوپرائی 20 سم ہے۔ ڈبا ایک جانب سے کھلا ہے تو اسے تیار کرنے میں لگنے والے پتے کا رقبہ معلوم کیجیے۔ اس ڈبے کا 2 سم اوپرائی کا ڈھکنا تیار کرنے کے لیے انداز کتنے مربع سم پڑا لگا معلوم کیجیے۔



### مدور استوانے کا حجم (Volume of a Cylinder)

مدور استوانہ نما پانی کی ٹانکی میں کتنا پانی سمائے گا یہ معلوم کرنے کے لیے ٹانکی کا حجم معلوم کرنا ہوتا ہے۔

اوپرائی  $\times$  قاعدے کا رقبہ = کسی بھی منتظم قاعدے والے جسم کا حجم  
(عام ضابطہ) ...

یہ ایک عام ضابطہ ہے۔

مدور استوانے کا قاعدہ، دائرہ کی شکل کا ہے۔

$$\therefore \pi r^2 h = \text{مدور استوانے کا حجم}$$

### حل کردہ مثالیں

- مثال (1)** ایک مدور استوانے کے قاعدے کا نصف قطر 5 سم اور اوپرائی 10 سم ہے۔ اس مدور استوانے کا حجم معلوم کیجیے۔ ( $\pi = 3.14$ )
- حل :** سم 10 =  $h$  اور سم 5 =  $r$  مدور استوانے کے قاعدے کا نصف قطر
- مکعب سم  $= \pi r^2 h = 3.14 \times 5^2 \times 10 = 3.14 \times 25 \times 10 = 785$  مodor استوانے کا حجم
- مثال (2)** ایک مدور استوانہ نما پانی کے ڈرم کی اوپرائی 56 سم ہے اس ڈرم کی گنجائش 70.4 لیٹر ہے۔ ڈرم کا نصف قطر معلوم کیجیے۔ ( $\pi = \frac{22}{7}$ )

فرض کریں  $r$  = مدور استوانہ شکل کے ڈرم کے قاعدہ کا نصف قطر  
مکعب سم  $= 70.4 \times 1000$  = ڈرم کی گنجائش

$$\text{ملی لیٹر} = 1000, \quad \therefore 70.4 \text{ لیٹر} = 70400 \text{ لیٹر}$$

$$\text{مکعب سم} = \pi r^2 h = 70400$$

$$\therefore r^2 = \frac{70400}{\pi h} = \frac{70400 \times 7}{22 \times 56} = \frac{70400}{22 \times 8} = \frac{8800}{22} = 400$$

$$\therefore r = 20$$

$\therefore$  ڈرم کا نصف قطر 20 سم ہے۔

**مثال (3)** تابنے کے ایک ٹھوس مدور استوانہ کے قاعدہ کا نصف قطر 4.2 سم اور اونچائی 16 سم ہے۔ اسے پکھلا کر 1.4 سم قطر اور 0.2 سم موٹائی کی کتنی ٹکلیاں تیار کی جاسکیں گی؟

**حل :** سم = H = 16 = مدوار استوانے کے قاعدہ کا نصف قطر R = 4.2 سم

$$\text{مدوار استوانہ کا جم} = \pi R^2 H = \pi \times 4.2 \times 4.2 \times 16.0$$

$$\text{سم} = \frac{\text{ٹکلیہ کے قاعدے کا نصف قطر}}{2} = 1.4 \div 2 = 0.7$$

$$\text{سم} = 0.2 = \text{مدوار استوانے کی اونچائی} = \text{ٹکلیہ کی موٹائی}$$

$$\text{ٹکلیہ کا جم} = \pi r^2 h = \pi \times 0.7 \times 0.7 \times 0.2$$

فرش کریں ٹھوس مدور استوانے کو پکھلانے پر n ٹکلیہ بنتی ہے۔

$$\therefore n \times \text{ٹھوس مدور استوانے کا جم} = \text{ایک ٹکلیہ کا جم}$$

$$n = \frac{\text{مدوار استوانے کا جم}}{\text{ایک ٹکلیہ کا جم}} = \frac{\pi R^2 H}{\pi r^2 h} = \frac{R^2 H}{r^2 h} = \frac{4.2 \times 4.2 \times 16}{0.7 \times 0.7 \times 0.2} \\ = \frac{42 \times 42 \times 160}{7 \times 7 \times 2} = 6 \times 6 \times 80 = 2880$$

∴ 2880 ٹکلیاں تیار کی جاسکیں گی۔



$$\text{مدوار استوانے کی خدار سطح کا رقبہ} = 2\pi r(h + r) , \quad \text{مدوار استوانے کی کل سطح کا رقبہ} = 2\pi r h$$

$$\text{مدوار استوانے کا جم} = \pi r^2 h$$

### مشقی سیٹ 16.3

1. درج ذیل میں مدور استوانے کے قاعدے کا نصف قطر (r) اور اونچائی (h) دی گئی ہے۔

اس پر سے مدور استوانے کا جم معلوم کیجیے۔

$$(1) \quad r = 10.5 \text{ سم} , \quad h = 8 \text{ سم}$$

$$(2) \quad r = 2.5 \text{ میٹر} , \quad h = 7 \text{ میٹر}$$

$$(3) \quad r = 4.2 \text{ سم} , \quad h = 5 \text{ سم}$$

$$(4) \quad r = 5.6 \text{ سم} , \quad h = 5 \text{ سم}$$

2. 90 سم لمبائی اور 1.4 سم قطر کی لوہے کی ایک سلاخ تیار کرنے کے لیے درکار لوہے کا جم معلوم کیجیے۔

3. مدور استوانے کی شکل کے ایک حوض کا اندر ونی قطر 1.6 میٹر ہے اس کی گہرائی 0.7 میٹر ہے تو اس حوض میں زیادہ سے زیادہ کتنے لڑپانی سمائے گا؟

4. ایک مدور استوانے کے قاعدے کا احاطہ 132 سم ہے۔ اونچائی 25 سم ہے۔ مدور استوانے کا جم کتنا ہو گا؟

## آئیلر کا قانون :

سطح (F)، راس (V) اور کنارے (E) والی ٹھوس اجسام سے متعلق ایک دلچسپ قانون، بہت ہی کم عمر میں (بچپن میں) لیونارڈ آئیلر نامی مشہور ریاضی دان نے معلوم کیا۔ درج ذیل جدول میں ٹھوس اجسام کے کنارے، راس (کونے) اور سطحیں شمار کر کے جدول مکمل کیجیے اور آئیلر کے قانون  $V + F = E + 2$  کی تصدیق کیجیے۔

نام	مکعب	مستطیلی منشور	منشور مثلثی	مثلثی ہرم	خمسی ہرم	سدسی منشور
اجسام کی شکل						
سطحیں (F)	6					8
راس (V)	8					12
کنارے (E)		12			10	

## جوابات کی فہرست

**16.1** : **شکی سیٹ** 1. مکعب سم 1680      2. 3 سم      3. 2000      4. 1,80,000 لٹر

**16.2** : **شکی سیٹ** 1. (1) مربع سم 748 , مربع سم 440      (2) 18.48 , 30.80

مربع سم 31416 , مربع سم 149.29 , مربع سم 110

مربع سم 369.60 , مربع سم 480.48

مربع سم 10,990 , مربع سم 578.50

ڈھکن کے لیے انداز اپڑا 792 مربع سم درکار ہوگا , مربع سم 2376

**16.3** : **شکی سیٹ** 1. (1) مکعب سم 2772      (2) مکعب سم 137.5      (3) 277.2      (4) 492.8

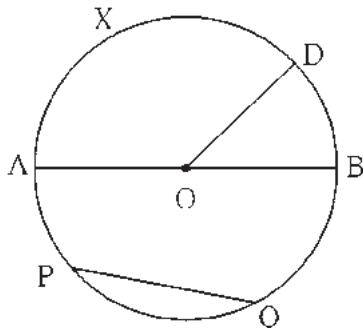
مکعب سم 138.6      2. 1408 لٹر      3. 1408      4. 34650



# دائرة - وتر اور قوس

17

آئیے ذرا یاد کریں



متصلہ شکل میں O، دائے کا مرکز ہے۔

شکل کی مدد سے درج ذیل بیانات میں خالی جگہیں پر کیجیے۔

قطعہ OD، دائے کا ..... ہے۔

قطعہ AB، دائے کا ..... ہے۔

قطعہ PQ، دائے کا ..... ہے۔

مرکزی زاویہ ہے۔

اصغر قوس : قوس AXD، قوس BD، قوس ..... ، قوس ..... ہے۔

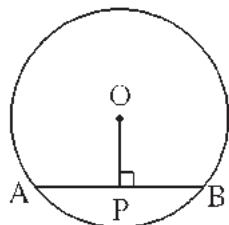
اکبر قوس : قوس PAB، قوس PDQ، قوس ..... ہے۔

نصف دائے قوس : قوس ADB، قوس ..... ہے۔

$$m(\text{قوس } DAB) = 360^\circ - m\angle \dots \quad m(\text{قوس } DB) = m\angle \dots$$

آئیے سمجھ لیں

(Properties of chord of a Circle) دائے کے وتر کی خصوصیات



عملی کام I :

O، مرکز دائے ایک دائے کا قطعہ AB وتر بنائے۔

مرکز O سے وتر AB پر عمودی قطعہ OP کھینچیں۔

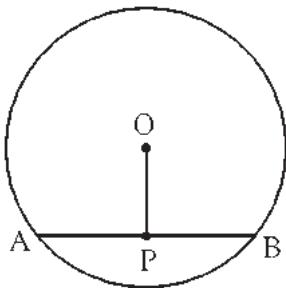
قطعہ AP اور قطعہ PB کی لمبائیاں ناپیے۔

اسی طرح الگ الگ نصف قطر لے کر ایک کاغذ پر پانچ دائے بنائیے۔ ہر دائے میں ایک وتر بنائے اور مرکز سے اس وتر پر عمود بنائیے۔

کیا وتروں پر بننے والے دونوں حصے مساوی ہیں؟ تقسیم کار (ڈیوائٹر) کے ذریعے اس کی جانش کیجیے۔

مشابہہ کیجیے کہ آپ کو درج ذیل خصوصیت حاصل ہوتی ہے۔

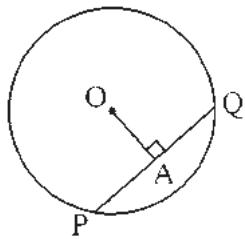
دائے کے مرکز سے وتر پر کھینچا گیا عمود وتر کی تنصیف کرتا ہے۔



ایک کاغذ پر اگر الگ نصف قطر کے پانچ دائرے بنائیے۔ ہر دائرے میں ایک وتر بنائیے۔ ان وتروں کا وسطی نقطہ حاصل کیجیے۔ مرکز O اور وتر کے وسطی نقطوں کو جوڑیے۔ متصلہ شکل کے مطابق ہر وتر کو AB اور وتر کے وسطی نقطہ کو P نام دیجیے۔  $\angle BPO$  اور  $\angle APO$  قائمۃ الزاویہ ہیں اس کی جانچ گئی کی مدد سے یا چاندے کی مدد سے کیجیے۔

ہر دائرے کے وتر کے لحاظ سے یہی مشاہدہ ہوتا ہے۔ اس بنا پر آپ کو درج ذیل خصوصیت حاصل ہوگی۔  
 دائیرے کے مرکز اور اس دائیرے کے وتر کے وسطی نقطے کو ملانے والا قطعہ وتر پر عمود ہوتا ہے۔

### حل کردہ مثالیں



**مثال (1)** O مرکز والے دائیرے میں وتر PQ کی لمبائی 7 سم ہے۔

وتر  $\perp$  OA قطعہ تو  $l(AP)$  معلوم کیجیے۔

حل : PQ وتر  $\perp$  OA قطعہ، اس لیے نقطہ A، وتر PQ کا وسطی نقطہ ہے۔

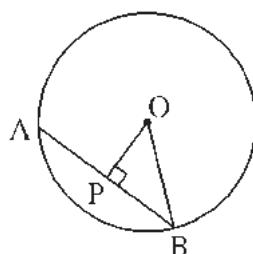
$$\therefore l(AP) = \frac{1}{2} l(PQ) = \frac{1}{2} \times 7 = 3.5 \text{ سم}$$

**مثال (2)** O مرکز والے ایک دائیرے کا نصف قطر 10 سم ہے اس دائیرے کا ایک وتر مرکز سے 6 سم فاصلے پر ہے اس وتر کی لمبائی معلوم کیجیے۔

حل : دائیرے کے وتر کا مرکز سے فاصلہ یعنی مرکز سے اس وتر پر کھینچ گئے عمود کی لمبائی ہوتی ہے۔

دائیرے کا مرکز O اور وتر AB ہے اس لیے  $AB \perp OP$  وتر  $\perp$  OP قطعہ

$$\text{سم } l(OP) = 6, l(OB) = 10, l(PB) = \text{ دائیرے کا نصف قطر}$$



یہاں  $\triangle OPB$  قائمۃ الزاویہ مثلث ہے۔

فیٹا نورث کے مسئلہ کی رو سے،

$$[l(OP)]^2 + [l(PB)]^2 = [l(OB)]^2$$

$$\therefore 6^2 + [l(PB)]^2 = 10^2$$

$$\therefore [l(PB)]^2 = 10^2 - 6^2$$

$$\therefore [l(PB)]^2 = (10 + 6)(10 - 6) = 16 \times 4 = 64$$

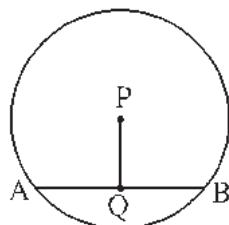
$$\therefore l(AB) = 8 \text{ سم}$$

ہم جانتے ہیں کہ دائرے کے مرکز سے وتر پر لکھنچا ہوا عمود وتر کی تنصیف کرتا ہے۔

$$\therefore l(AB) = 2 l(PB) = 2 \times 8 = 16$$

اس لیے وتر AB کی لمبائی 16 سم ہے۔

### مشقی سیٹ 17.1



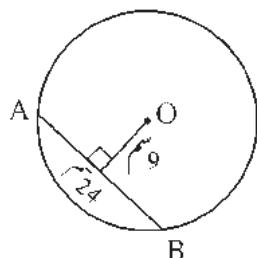
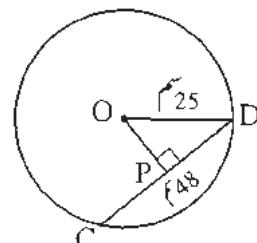
1. P مرکزوالے دائرے کے وتر AB کی لمبائی 13 سم ہے۔

وتر  $PQ \perp AB$  قطعہ تو  $l(QB)$  معلوم کیجیے۔

2. O مرکزوالے دائرے کا نصف قطر 25 سم ہے۔

اس دائرے میں 48 سم لمبائی کا ایک وتر کھینچا گیا ہے۔

تو دائرے کے مرکز سے وہ وتر کتنے فاصلے پر ہے۔



3. O مرکزوالے دائرے کے ایک وتر کی لمبائی 24 سم ہے۔

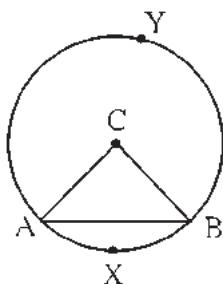
مرکز سے وتر 9 سم فاصلے پر ہے تو دائرے کا نصف قطر معلوم کیجیے۔

4. ایک دائرے کا مرکز C ہے اس کا نصف قطر 10 سم ہے۔

اس دائرے کے ایک وتر کی لمبائی 12 سم ہے تو وہ وتر دائرے کے مرکز سے کتنے فاصلے پر ہے؟

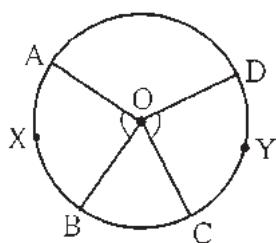
آئیے سمجھیں

### (Arc corresponding to chord of a Circle)



متصہ شکل میں O مرکزوالے دائرے میں قطعہ AB وتر ہے۔ قوس AXB اصغر قوس اور قوس AYB اکبر قوس ہے۔ ان قوسیں کو وتر AB کے متعلقہ قوسیں کہتے ہیں۔ اس کے برعکس وتر AB، قوس AXB اور قوس AYB کا متعلقہ وتر ہے۔

## متماش قوسین (Congruent Arcs)



اگر کسی دائرے کے دو قوسین کی پیمائش مساوی ہو تو وہ متماش قوسین ہوتے ہیں۔

O مرکز والے دائرے میں

$$m\angle AOB = m\angle COD$$

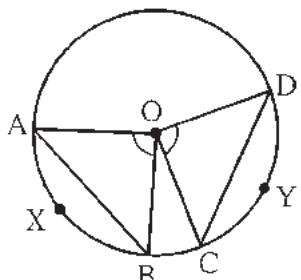
$$\therefore m(\text{قوس } AXB) = m(\text{قوس } CYD)$$

$$\therefore \text{قوس } AXB \cong \text{قوس } CYD$$

اس کی جانچ ہم ٹرینگ کا نزدیکی مدد سے کر سکتے ہیں۔

دائرے کے وتر اور متعلقہ قوس کی خصوصیت درج ذیل عملی کام کے ذریعے جانچ کیجیے اور اسے دھیان میں رکھیے۔

### عملی کام I :



(1) O مرکز والے ایک دائرہ کھینچیے۔

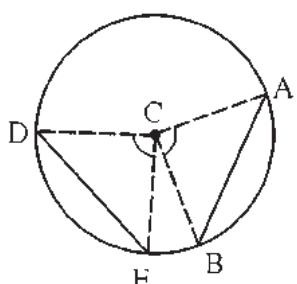
(2) دائرے میں  $\angle AOB$  اور  $\angle COD$  مساوی پیمائش کے دو زاویے بنائیے۔

اس کی مدد سے قوس AXB اور قوس CYD متماش قوسین حاصل ہوتے ہیں۔

(3) وتر AB اور وتر CD بنائیے۔

(4) تقسیم کار (ڈیوائیڈر) کی مدد سے وتر AB اور وتر CD کی لمبائیاں، مساوی ہیں اس کی جانچ کیجیے۔

### عملی کام II :



(1) C مرکز والے ایک دائرہ بنائیے۔

(2) اس دائرے میں قطعہ AB اور قطعہ DE دو متماش وتر بنائیے۔

قطعہ CA، قطعہ CB، قطعہ CD، قطعہ CE نصف قطر کھینچیے۔

(3)  $\angle ACB$  اور  $\angle DCE$  متماش ہیں، دکھائیے۔

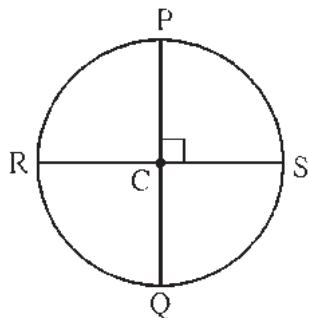
(4) اس بنا پر قوس AB اور قوس DE کی پیمائش مساوی ہوں گی یعنی یہ متماش قوسین ہیں، اسے دکھائیے۔



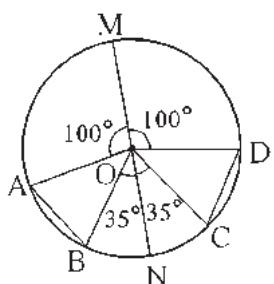
● کسی دائرے کے متماش قوسین کے متعلقہ وتر متماش ہوتے ہیں، کسی دائرے میں دو وتر متماش ہوں تو ان کے متعلقہ اصغر قوسین

اور متعلقہ اکبر قوسین متماش ہوتے ہیں۔

## مشقی سیٹ 17.2



1. C مرکزوں لے دائرے میں قطعہ PQ اور قطعہ RS قطر ہیں۔  
جو مکنہ زاویہ بناتے ہوئے ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔  
تو بتائیے کہ قوس PS اور قوس SQ متماثل ہیں۔  
قوس PS کے متماثل دیگر قوسوں کے نام لکھیے۔



2. شکل میں O مرکزوں لے دائرے میں قطعہ MN قطر ہے۔  
کچھ مکنہ زاویوں کی پیمائش دی گئی ہیں۔  
اس بنابر  
(1)  $\angle COD$  اور  $\angle AOB$  کی پیمائش معلوم کیجیے۔  
(2) دکھائیے کہ  $CD \cong AB$  قوس  
(3) دکھائیے کہ  $CD$  وتر  $AB \cong$

### جوابات کی فہرست

**17.1 مشقی سیٹ :** 1. 6.5 سم      2. 7 سم      3. 15 سم      4. 8 سم

**17.2 مشقی سیٹ :** (1) کیونکہ قوسین کے متعلقہ زاویوں کی پیمائش مساوی ہیں اور ہر ایک کی پیمائش  $90^\circ$  ہے۔ .1

(2) (1)  $m\angle AOB = m\angle COD = 45^\circ$

قوس  $AB \cong$  قوس  $PR$  کیوں کہ قوسین کے متعلقہ مکنہ زاویے مساوی پیمائش کے ہیں ہر ایک کی پیمائش  $45^\circ$  ہے۔ .2

قوس  $CD \cong$  قوس  $RQ$  کیوں کہ متعلقہ مکنہ زاویے مساوی پیمائش کے ہیں ہر ایک کی پیمائش  $45^\circ$  ہے۔ .3



## متفرق مجموعہ سوالات 2

ذیل کے سوالوں کے لیے تبادل جوابات دیے ہوئے ہیں۔ ان میں سے مناسب تبادل منتخب کیجیے۔ .1

(1) ایک دائرے کا رقبہ 1386 مربع سم ہو تو اس کا محیط کتنا ہو گا؟

مربع سم 21 (A) 132 (B) 132 (C) 42 (D) سم

(2) ایک مکعب کا اضلع 4 میٹر ہے۔ اسے دگنا کریں تو اس کا جم کتنے گناہ بڑھ جائے گا؟

دو گنا (A) آٹھ گنا (B) چار گنا (C) تین گنا (D)

.2 پر یا 100 میٹر دوڑ کی شرط کی مشق کر رہی تھی۔ اس کے لیے اس نے 100 میٹر فاصلے کی 20 مرتبہ دوڑ لگائی۔ ہر مرتبہ اس دوڑ کے لیے درکار وقت سینٹ میں درج ذیل کے مطابق تھا۔

18 , 17 , 17 , 16 , 15 , 16 , 15 , 14 , 16 , 15 ,

15 , 17 , 15 , 16 , 15 , 17 , 16 , 15 , 14 , 15

دوڑنے کے لیے اس کو لگنے والے وقت کا میانیہ معلوم کیجیے۔

.3  $\triangle DEF$  اور  $\triangle LMN$  یہ دونوں مثلث ایک سے ایک کی مطابقت کی رو سے متماثل ہیں تو اس مطابقت کے لحاظ سے ہونے والے متماثل اضلاع کی اور متماثل زاویوں کی جوڑیاں لکھیے۔

.4 ایک مشین کی قیمت 2,50,000 روپے ہے۔ اس کی قیمت ہر سال 4% شرح سے کم ہوتی ہے تو مشین خریدنے کے تین سال بعد اس کی قیمت کتنی ہو جائے گی؟

.5  $l(AE) = 10$  سم  $l(AB) = 9$  سم  $l(AC) = 115$  سم  $\square ABCD$  میں  $DC \parallel AB$  ضلع،  $DC \perp AE$  قطعہ، اگر سم

مربع سم  $A(\square ABCD) = 115 l(DC)$  ہو تو معلوم کیجیے۔

.6 مدوار استوانہ جسامت کی ایک ٹانکی کے تہہ کا قطر 1.75 میٹر اور اونچائی 3.2 میٹر ہے تو اس ٹانکی کی گنجائش کتنے لٹر ہے؟ ( $\pi = \frac{22}{7}$ )

.7 9.1 سم نصف قطر والے دائرے کے ایک وتر کی لمبائی 16.8 سم ہے تو اس وتر کا مرکز سے کتنا فاصلہ ہے؟

.8 روزگار ضمانت اسکیم کے تحت A، B، C اور D گاؤں میں جاری کاموں پر مرد اور عورت مزدوروں کی تعداد ذیل کے جدول میں دی ہوئی ہے۔

گاؤں	A	B	C	D
عورتیں	150	240	90	140
مرد	225	160	210	110

(1) یہ معلومات تفہیمی ستونی ترسیم کے ذریعے دکھائیے۔

(2) یہ معلومات فی صد ستونی ترسیم کے ذریعے دکھائیے۔

$$(1) 17(x+4) + 8(x+6) = 11(x+5) + 15(x+3)$$

$$(2) \frac{3y}{2} + \frac{y+4}{4} = 5 - \frac{y-2}{4} \quad (3) 5(1-2x) = 9(1-x)$$

.10 ذیل کے عملی کام کو دیے ہوئے مطلوب کے مطابق کیجیے۔

(1)  $\square ABCD$  ایک معین بنائیے اور اس کا وتر  $AC$  سچھنے۔

(2) متماثل اجزاء کو یکساں نشانیوں سے ظاہر کیجیے۔

(3)  $\triangle ABC$  اور  $\triangle ADC$  کس مطابقت سے اور کس آزمائش سے متماثل ہوتے ہیں۔ لکھیے۔

(4)  $\angle DCA \cong \angle BCA$ ، اسی طرح  $\angle DAC \cong \angle BAC$ ، بتانے کے لیے وجہ لکھیے۔

(5) مذکورہ بالامراحل سے ذہن میں آنے والے معین کی خصوصیت لکھیے۔

.11 ایک کھیتی کی زمین کی شکل ذوار بعثۃ الاصلاءع کے جیسی ہے۔ اس کے چاروں کونوں کو P، Q، R، S نام دے کر لیے گئے تھے ناپ ذیل کے مطابق ہیں۔

میٹر  $l(PR) = 170$ ، میٹر  $l(PQ) = 250$ ، میٹر  $l(QS) = 240$ ، میٹر  $l(RS) = 100$ ، میٹر  $l(QR) = 260$ ، تو اس کھیتی کی زمین کا رقبہ ہیکٹر میں معلوم کیجیے۔ (مربع میٹر  $= 10,000$  ہیکٹر 1)

.12 ایک لابریری میں کل کتابوں کا  $50\%$  کتابیں اردو کی ہیں۔ اردو کی کتابوں کا  $\frac{1}{3}$  کتابیں انگریزی کی اور انگریزی کی کتابوں کا  $25\%$  کتابیں ریاضی کی ہیں۔ باقی ماندہ 560 کتابیں دیگر مضمایں کی ہیں تو بتائیے لابریری میں کل کتنی کتابیں ہیں؟

.13 دور کرنی  $(2x+1)^2$  سے کثیر کرنی  $(7 - 6x^3 + 11x^2 - 10x)$  کو تقسیم دیجیے۔ خارج قسمت اور باقی لکھیے۔

### جوابات کی فہرست

1. (1) B (2) D 2. 15.7 سینٹ

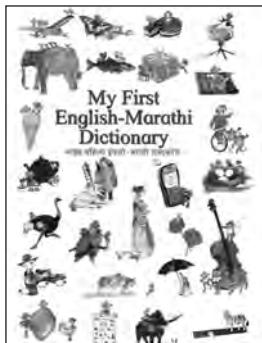
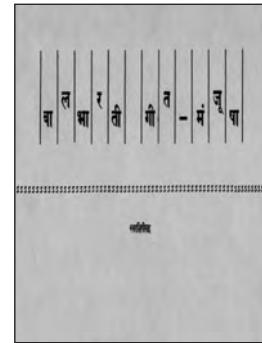
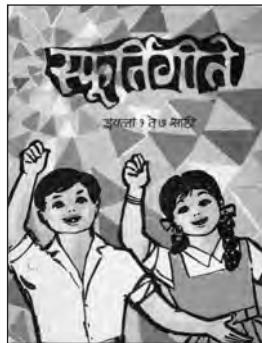
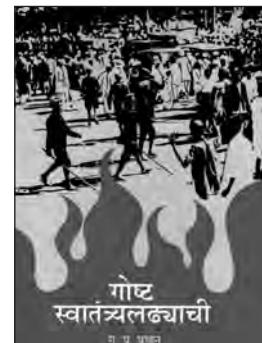
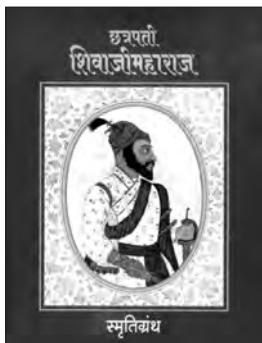
3. ضلع  $ED \cong$  ضلع  $MN$ , ضلع  $EF \cong$  ضلع  $LM$ ,  $\angle E \cong \angle L$ ,  $\angle D \cong \angle M$ ,  $\angle F \cong \angle N$

4. ₹2,21,184 5. 14 سیم 6. 7700 7. 3.5 سیم

9. (1)  $x = 16$  (2)  $y = \frac{9}{4}$  (3)  $x = -4$  (11) 3.24 ہیکٹر

12. 1920 13. باقی،  $= 3x^2 + 4x - 7$  = خارج قسمت





- पाठ्यपुस्तक मंडळाची वैशिष्ट्यपूर्ण पाठ्येतर प्रकाशने.
- नामवंत लेखक, कवी, विचारवंत यांच्या साहित्याचा समावेश.
- शालेय स्तरावर पूरक वाचनासाठी उपयुक्त.



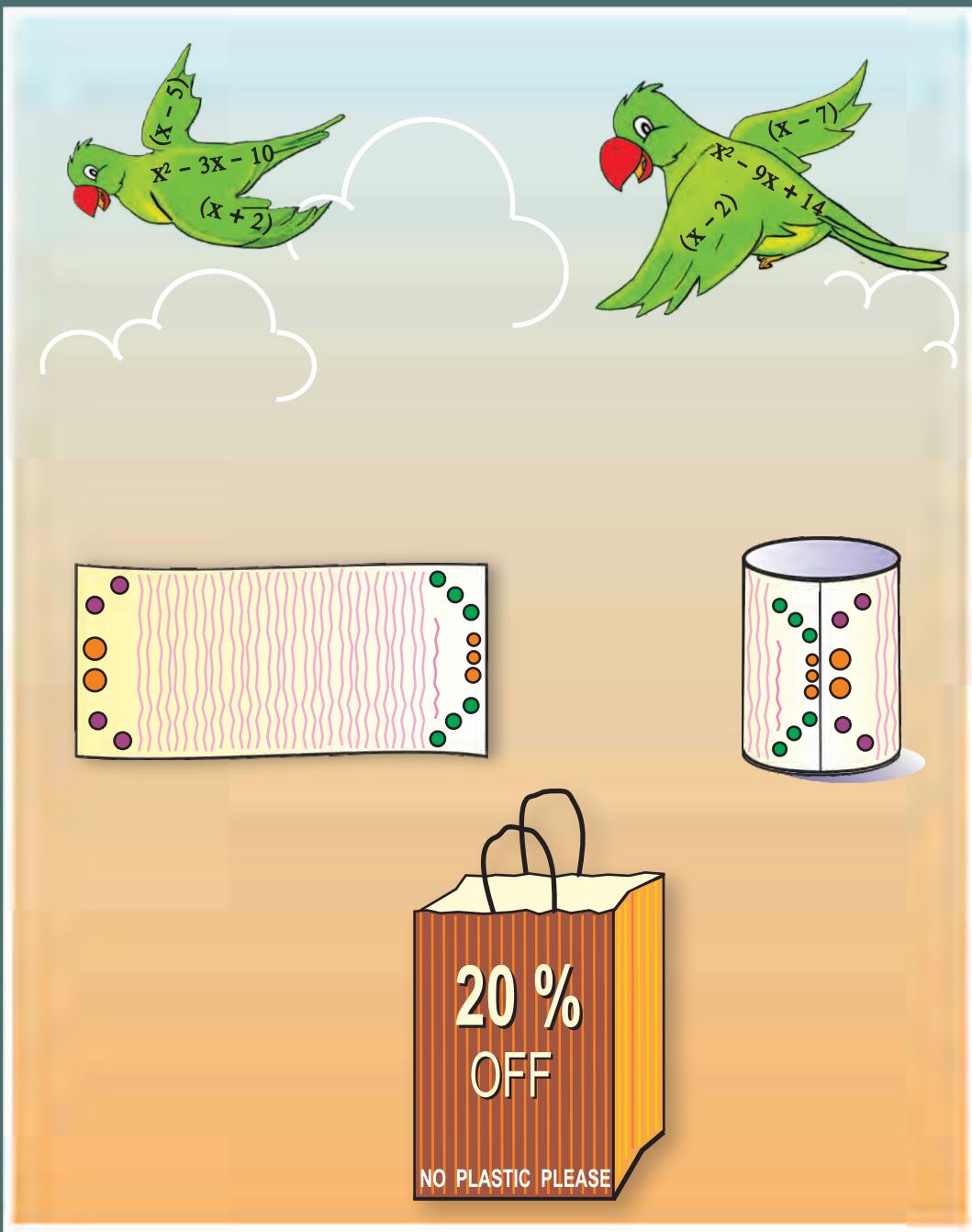
पुस्तक मागणीसाठी [www.ebalbharati.in](http://www.ebalbharati.in), [www.balbharati.in](http://www.balbharati.in) संकेत स्थळावर भेट द्या.

## साहित्य पाठ्यपुस्तक मंडळाच्या विभागीय भांडारांमध्ये विक्रीसाठी उपलब्ध आहे.



**ebalbharati**

विभागीय भांडारे संपर्क क्रमांक : पुणे - ☎ २५६५९४६५, कोल्हापूर- ☎ २४६८५७६, मुंबई (गोरेगाव) - ☎ २८७७९८४२, पनवेल - ☎ २७४६२६४६५, नाशिक - ☎ २३१९५९९, औरंगाबाद - ☎ २३३२९७९९, नागपूर - ☎ २५४७७९९६/२५२३०७८, लातूर - ☎ २२०९३०, अमरावती - ☎ २५३०९६५



મહાત્મા રાજીય પાઠ્યકાર નિર્મિતી  
મહાત્મા ગાંધી ભારતીય શાળાએન્સ સંસ્કૃત  
અભ્યાસક્રમ સાચાએન્સ સંસ્કૃત

તર્ડુ ગણિત ઇ. ૮વી

₹ 48.00