

# ریاضی حصہ - I

نویں جماعت

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a^2 - b^2) = (a+b)(a-b)$$



# بھارت کا آئین

## حصہ 4 الف

### بنیادی فرائض

حصہ 51 الف

بنیادی فرائض - بھارت کے ہر شہری کا یہ فرض ہوگا کہ وہ...

- (الف) آئین پر کاربند رہے اور اس کے نصب العین اور اداروں، قومی پرچم اور قومی ترانے کا احترام کرے۔
- (ب) ان اعلیٰ نصب العین کو عزیز رکھے اور ان کی تقلید کرے جو آزادی کی تحریک میں قوم کی رہنمائی کرتے رہے ہیں۔
- (ج) بھارت کے اقتدار اعلیٰ، اتحاد اور سالمیت کو مستحکم بنیادوں پر استوار کر کے ان کا تحفظ کرے۔
- (د) ملک کی حفاظت کرے اور جب ضرورت پڑے قومی خدمت انجام دے۔
- (ه) مذہبی، لسانی اور علاقائی و طبقاتی تفرقات سے قطع نظر بھارت کے عوام الناس کے مابین یک جہتی اور عام بھائی چارے کے جذبے کو فروغ دے نیز ایسی حرکات سے باز رہے جن سے خواتین کے وقار کو ٹھیس پہنچتی ہو۔
- (و) ملک کی ملی جلی ثقافت کی قدر کرے اور اُسے برقرار رکھے۔
- (ز) قدرتی ماحول کو جس میں جنگلات، جھیلیں، دریا اور جنگلی جانور شامل ہیں محفوظ رکھے اور بہتر بنائے اور جانداروں کے تئیں محبت و شفقت کا جذبہ رکھے۔
- (ح) دانشورانہ رویے سے کام لے کر انسان دوستی اور تحقیقی و اصلاحی شعور کو فروغ دے۔
- (ط) قومی جائیداد کا تحفظ کرے اور تشدد سے گریز کرے۔
- (ی) تمام انفرادی اور اجتماعی شعبوں کی بہتر کارکردگی کے لیے کوشاں رہے تاکہ قوم متواتر ترقی و کامیابی کی منازل طے کرنے میں سرگرم عمل رہے۔
- (ک) اگر ماں باپ یا ولی ہے، چھ سال سے چودہ سال تک کی عمر کے اپنے بچے یا وارڈ، جیسی بھی صورت ہو، کے لیے تعلیم کے مواقع فراہم کرے۔

سرکاری فیصلہ نمبر: ابھیاس - ۲۱۱۶/پر.نمبر ۱۶/۴۳) ایس ڈی - ۴ مورخہ ۲۵ اپریل ۲۰۱۶ء کے مطابق قائم کی گئی رابطہ کمیٹی کی نشست  
۳ مارچ ۲۰۱۷ء میں اس کتاب کو درسی کتاب کے طور پر منظوری دی گئی۔

# ریاضی

حصہ - I

نویں جماعت



مہاراشٹر راجیہ پاٹھیہ پستک نرمتی وابھیاس کرم سنشودھن منڈل، پونہ - ۴۱۱۰۰۴



اپنے اسمارٹ فون میں انسٹال کردہ Diksha App کے ذریعے درسی کتاب کے پہلے صفحے پر درج Q.R. code اسکین کرنے سے ڈیجیٹل درسی کتاب اور ہر سبق میں درج Q.R. code کے ذریعے متعلقہ سبق کی درس و تدریس کے لیے مفید سمعی و بصری ذرائع دستیاب ہوں گے۔

© مہاراشٹر راجیہ پائھیہ پبلیکیشنز اور ایجوکیشن ڈیپارٹمنٹ، پونہ - ۴۱۱۰۰۴  
اس کتاب کے جملہ حقوق مہاراشٹر راجیہ پائھیہ پبلیکیشنز اور ایجوکیشن ڈیپارٹمنٹ، پونہ کے حق میں محفوظ ہیں۔ اس کتاب کا کوئی بھی حصہ ڈائریکٹر، مہاراشٹر راجیہ پائھیہ پبلیکیشنز اور ایجوکیشن ڈیپارٹمنٹ، پونہ کی تحریری اجازت کے بغیر کسی بھی شکل میں شائع نہیں کیا جاسکتا۔

طبع اول: ۲۰۱۷ء (2017)  
تیسرا اصلاح شدہ ایڈیشن:  
۲۰۲۲ء (2022)

### Urdu Translators

Mr. Ansari Abdul Hamced Abdul Majeed  
Mr. Momin Al-Nasir Abdus Samad

### Co-ordinator (Urdu)

Khan Navedul Haque Inamul Haque  
Special Officer for Urdu,  
M.S. Bureau of Textbooks, Balbharati - Pune

### Co-ordinator (Marathi)

Smt. Ujwala S. Godbol  
I/O. Special Officer for Mathematics  
M.S. Bureau of Textbooks, Balbharati - Pune

### Urdu D.T.P. & Layout

Altaf Amcen (Sadan Graphics)  
Malgaon-423203

### Cover, Art work & Designing

Dhan Shri Mukashi, Pune

### Computer Designing

Sandeep Koli, Mumbai

### Production

Shri Sachin Mehta (C.P.O)  
Shri Sanjay Kamble (Production Officer)  
Shri Prashant Harne ( Asst. Production Officer)

### Paper

70, GSM Creamvowc

### Print Order

N/PB/2017-18/

### Printer

### Publisher

Shri Vivek Uttam Gosavi (Controller)  
M.S. Bureau of Textbook Production,  
Prabhadevi, Mumbai - 25

### ریاضی مضمون کی کمیٹی

- ❖ ڈاکٹر منگلا نارلیکر (صدر)
- ❖ ڈاکٹر شریتی جے شری اترے (رکن)
- ❖ شری رام کانت سرودے (رکن)
- ❖ شری دادا سوسرڈے (رکن)
- ❖ شری سندھیا پنچ بھائی (رکن)
- ❖ شری تاتلے کر (رکن)
- ❖ شریتی اجولا گوڈبولے (رکن سکریٹری)

### ریاضی مضمون کی مجلس عاملہ

- شری رام ونبیال کر
- جناب انصاری
- شریتی سورنا دیش پانڈے
- شری گیش کولتے
- شری سریش داتے
- شری پرکاش جھینڈے
- شری شری کانت رتن پارکھی
- شری سوریا کانت شہانے
- شری پرکاش کاپسے
- جناب سلیم ہاشمی
- شریتی آریا بھڑے
- شری ملند بھاکرے
- شری گپا نیشور ماشا لکر
- شری لکشمین داوکنر
- شری سدھیر پائل
- شری راجا رام بندگر
- شری پردیپ گوڈسے
- شری روبندر کھنڈارے
- شری ساگر سکوڑے
- شریتی پوجا جادھو
- شری پرمودھو نبرے
- شری راجندر چودھری
- شری اننا پاپریٹ
- شری شری پاد دیشپانڈے
- شری ہنسی ہوالے
- شری امیش ریلے
- شری چندن کلکرنی
- شریتی انیتا جاوے
- شریتی باگیشری چوہان
- شری کلیان کڑیکر
- شری سندیش سوناوے
- شری سچیت شندے
- ڈاکٹر ہنومنٹ جگتاپ
- شری پرتاپ کاشد
- شری کاشی رام بویسانے
- شری چوگاڑے
- شریتی روہنی شرکے

- شریتی پراجکتی گوکھلے (مہمان رکن)
- شری وی۔دی۔گوڈبولے (مہمان رکن)
- شریتی تروین پوٹ (مہمان رکن)

## بھارت کا آئین

### تمہید

ہم بھارت کے عوام متانت و سنجیدگی سے عزم کرتے ہیں کہ بھارت کو  
ایک مقتدر سماج وادی غیر مذہبی عوامی جمہوریہ بنائیں  
اور اس کے تمام شہریوں کے لیے حاصل کریں:  
انصاف، سماجی، معاشی اور سیاسی؛  
آزادی خیال، اظہار، عقیدہ، دین اور عبادت؛  
مساوات بہ اعتبار حیثیت اور موقع،  
اور ان سب میں  
اُخوت کو ترقی دیں جس سے فرد کی عظمت اور قوم کے اتحاد اور  
سالمیت کا تئیں ہو؛  
اپنی آئین ساز اسمبلی میں آج چھبیس نومبر ۱۹۴۹ء کو یہ آئین  
ذریعہ ہذا اختیار کرتے ہیں،  
وضع کرتے ہیں اور اپنے آپ پر نافذ کرتے ہیں۔

## راشٹر گیت

جَنَ گَنَ مَنَ - اِدھ نایک جیہ ہے  
بھارت - بھاگیہ ودھاتا۔

پَنجاب، سَنڈھ، گجرات، مراٹھا  
دراوڑ، اُتکل، بنگ،

وَنڈھیہ، ہماچل، یَمنا، گنگا،  
اُچھل جَل دھ ترنگ،  
تو شُبھ نامے جاگے، تو شُبھ آسَس ماگے،  
گا ہے تو جیہ گاتھا،

جَنَ گَنَ منگل دَایک جیہ ہے،  
بھارت - بھاگیہ ودھاتا۔

جیہ ہے، جیہ ہے، جیہ ہے،  
جیہ جیہ جیہ جیہ ہے۔

## عہد

بھارت میرا ملک ہے۔ سب بھارتی میرے بھائی اور بہنیں ہیں۔

مجھے اپنے وطن سے پیار ہے اور میں اس کے عظیم و گونا گوں ورثے پر  
فخر محسوس کرتا ہوں۔ میں ہمیشہ اس ورثے کے قابل بننے کی کوشش کروں گا۔

میں اپنے والدین، استادوں اور بزرگوں کی عزت کروں گا اور ہر ایک  
سے خوش اخلاقی کا برتاؤ کروں گا۔

میں اپنے ملک اور اپنے لوگوں کے لیے خود کو وقف کرنے کی قسم کھاتا  
ہوں۔ اُن کی بہتری اور خوش حالی ہی میں میری خوشی ہے۔

## پیش لفظ

عزیز طلبہ!

نویں جماعت میں آپ کا استقبال ہے۔

ابتدائی تعلیم کا نصاب مکمل کر کے آپ ثانوی سطح پر مطالعہ کی ابتدا کر رہے ہیں۔ آٹھویں جماعت تک ریاضی کے لیے صرف ایک ہی درسی کتاب تھی۔ اب آپ کو ریاضی حصہ I اور ریاضی حصہ II، ان کتابوں کا مطالعہ کرنا ہے۔ ریاضی حصہ I کی درسی کتاب میں اعداد کا علم، الجبرا، نیز کاروباری ریاضی، معاشی منصوبہ بندی اور شماریات جیسے شعبوں کے موضوعات کا تعارف کرایا گیا ہے۔ یہ حصے تمام طلبہ کے لیے کئی شعبوں میں سود مند ہوں گے۔ الجبرا اور شماریات کے تصورات اعلیٰ تعلیم کے مطالعہ کے لیے بنیادی حیثیت رکھتے ہیں۔

اس درسی کتاب میں تصورات کو سمجھنے کے لیے مختلف سرگرمیاں (عملی کام) دی ہوئی ہیں۔ اعادہ اور مشقی سیٹ میں بھی سرگرمیاں شامل ہیں۔ ان سب کو عملی طور پر آپ کو انجام دینا ہے۔ انٹرنیٹ پر کتاب میں دیے ہوئے تصورات کی کچھ مزید معلومات اور مثالیں ملتی ہیں تو آپ کو اسے بھی تلاش کرنا ہے۔ سرگرمیوں پر عمل کرتے وقت، مثالیں حل کرتے وقت، نتیجہ اخذ کرتے وقت آپ کو اپنے دوستوں سے بحث و مباحثہ کرنا ہے۔ بلاشبہ درسی کتاب کا تفصیلی مطالعہ، سرگرمیوں سے مربوط درس اور مشق ان تین مرحلوں سے ہی ریاضی کا سفر آپ خوشی اور مسرت کے ساتھ انجام دیں گے۔

آئیے تو پھر! اب اساتذہ، سرپرست، دوست احباب، انٹرنیٹ ان تمام کو ساتھ لے کر ریاضی کا مطالعہ کریں۔ اس مطالعہ و ریاضت کے لیے آپ کو نیک تمنائیں!

ڈاکٹر سنیل مگر

ڈائریکٹر

مہاراشٹر راجیہ پانچھیہ پبلیک زون

واہیاس کرم سنشو وھن منڈل، پونہ

پونہ

مورخہ : ۲۸ اپریل ۲۰۱۷ء اکشہ تریہ

بھارتی شمسی تاریخ : ۸ ویساکھ ۱۹۳۹

نویں جماعت ریاضی حصہ I نصاب سے طلبہ میں درج ذیل صلاحیتوں کا ارتقا متوقع ہے۔

متوقع صلاحیتیں	اکائی	زمرہ
<ul style="list-style-type: none"> <li>● عددی نظام میں سیٹ اور ضمنی سیٹ طے کرنا۔</li> <li>● محدود اور لامحدود سیٹ پہچاننا۔</li> <li>● سیٹ ظاہر کرنے کے لیے وین خاکہ کا استعمال کرنا</li> <li>● سیٹ پر مبنی مثالیں بنانا۔</li> <li>● عددی خط پر ہر نقطہ سے مربوط ایک حقیقی عدد ہوتا ہے، سمجھنا۔</li> <li>● مربعی جذری مقدار کا عدد پہچاننا اور اس پر (حسابی) عمل کرنا۔</li> </ul>	<p>1.1 سیٹ</p> <p>1.2 حقیقی اعداد اور جماعت بندی</p>	1. اعداد کا علم
<ul style="list-style-type: none"> <li>● کثیررکنیاں پہچاننا اور ان پر (حسابی) عمل کرنا۔</li> <li>● دو متغیروں کا استعمال کر کے عبارتی مثالیں حل کرنا۔</li> </ul>	<p>2.1 کثیررکنیاں</p> <p>2.2 دو متغیری خطی مساواتیں</p>	2. الجبرا
<ul style="list-style-type: none"> <li>● مختلف قسم کے انکم ٹیکس (محصول) کی تحسیب سمجھنا اور انکم ٹیکس محسوب کرنا۔</li> <li>● تنخواہ دار افراد کا انکم ٹیکس محسوب کرنا۔</li> <li>● مساوی نسبتوں کے مسئلہ کا استعمال کرنا۔</li> <li>● مستقیم تناسب اور معکوس تناسب پر مبنی عبارتی مثالیں حل کرنا۔</li> </ul>	<p>3.1 معاشی منصوبہ بندی</p> <p>3.2 نسبت اور تناسب</p>	3. کاروباری ریاضی
<ul style="list-style-type: none"> <li>● جماعت بندی اور غیر جماعت بندی تعددی جدول بنانا۔</li> <li>● اجتماعی تعددی جدول بنانا۔</li> <li>● دیے ہوئے معطیات کا مرکزی رجحان پہچان کران پیمانوں کا استعمال کرنا۔</li> </ul>	<p>4.1 تعددی جدول</p> <p>4.2 مرکزی رجحان کے پیمانے</p>	4. شماریات

## اساتذہ کے لیے ہدایات

نویں جماعت حصہ I کی کتاب میں آئے ہوئے بنیادی تصورات مقرون سے مجرد کی طرف کے طریقے سے فروغ دیے گئے ہیں۔ علم معاشیات کے تصور میں ریاضی سے مربوط تصورات، شماریات شعبہ کی وسعت ان تمام امور کا اساتذہ باریک بینی سے مطالعہ کریں۔ اساتذہ جماعت میں دوران تدریس تجربات، سرگرمیاں (عملی کام)، بحث و مباحثہ، سوال و جواب، اجتماعی سرگرمیاں جیسے مختلف طریقوں کا استعمال کریں۔ اس کے لیے اساتذہ درسی کتاب کا تفصیلی مطالعہ کر کے درسی کتاب میں دی ہوئی سرگرمیاں طلبہ سے کرائیں۔ اسی کے ساتھ ویسی ہی کئی سرگرمیاں تیار کرنے کی کوشش کریں۔

ریاضی میں حسابی عمل کرنے سے زیادہ اہم بنیادی تصورات کو سمجھنا ہے۔ طلبہ کی منطقی سوچ، غور و فکر کی قوت کو جلا بخشنے کے لیے مختلف مثالیں درسی کتاب میں شامل کی گئی ہیں۔ ایسی ہی بہت سی مثالیں استاد اور شاگرد باہم مل کر تیار کریں۔ درسی کتاب میں فکر انگیز مثالیں تارے سے نشان زد کی گئی ہیں۔ طلبہ مختلف اور نرالے انداز سے کوئی مثال حل کرتے ہوں تو اساتذہ ان کی حوصلہ افزائی کریں۔

قدر پیمائی کرنے کے دوران آزاد جوابی سوال اور عملی پرچے کا بھی خیال اساتذہ کو رکھنا چاہیے۔ قدر پیمائی کے ایسے طریقوں کو فروغ دینے کا کام اساتذہ کرنے کی کوشش کریں۔

درسی کتاب میں بطور نمونہ جو سرگرمیوں کی فہرست دی ہوئی ہے، اس کے علاوہ آپ خود بھی مختلف قسم کی سرگرمیاں تیار کر سکتے ہیں۔ درسی کتاب میں مختلف عملی کام تجربات میں شامل کیے گئے ہیں۔ اسے بھی طلبہ سے کروائیں۔ اس پر منحصر قدر پیمائی کے طریقے کا استعمال اگلی جماعتوں کی صلاحیتوں کو فروغ دینے کے لیے ضروری ثابت ہوگا۔ ہمیں ایسی امید ہے۔

## نمونہ تجربات کی فہرست

- (1) آپ کی جماعت میں تمام طلبہ کے سیٹ کو آفاقی سیٹ مان کر کھوکھو، کپڑی جیسے کوئی بھی دو کھیل کھیلنے والے طلبہ کا سیٹ وین خاکہ سے ظاہر کرنا۔
- (2) عددی خط پر  $5 - \sqrt{2}$  ,  $2 + \sqrt{3}$  جیسے اعداد ظاہر کرنا۔
- (3) تین یا چار درجے والی کثیر رکنیوں کو خطی کثیر رکنی کے مختلف طریقوں کا استعمال کر کے تقسیم کرنا اور جواب ایک جیسا آتا ہے۔ دیکھنا۔
- (4) انکم ٹیکس دہندہ شخص کا گوشوارہ (سالانہ آمدنی، سرمایہ کاری وغیرہ امور) دیے ہوں تو کتنا انکم ٹیکس ادا کرنا ہوگا۔ انکم ٹیکس جدول کی مدد سے معلوم کرنا۔
- (5) دی ہوئی عددی معلومات کی مدد سے جماعت بند تعددی تقسیمی جدول تیار کرنا۔
- (6) آسانی سے دستیاب ہونے والی دواؤں کے بکس پر سے اس پر درج مختلف اکائیوں کا فی صد معلوم کرنا۔
- (7) کسی فکر انگیز عبارتی مثال کو دو متغیر کا استعمال کر کے حل کرنا۔

## فہرست

صفحات	ابواب
1 سے 18	1. سیٹ
19 سے 35	2. حقیقی اعداد
36 سے 56	3. کثیررکنیاں
57 سے 79	4. نسبت اور تناسب
80 سے 92	5. دو متغیری خطی مساواتیں
93 سے 107	6. معاشی منصوبہ بندی
108 سے 128	7. شماریات
129 سے 136	● جوابات کی فہرست



## سیٹ Set

1

آئیے، سیکھیں



- سیٹ کا تعارف
- سیٹ کی اقسام
- دین خاکہ
- مساوی سیٹ، ضمنی سیٹ
- آفاقی سیٹ، مکملہ سیٹ
- انتظامی سیٹ، اجتماعی سیٹ
- سیٹ میں ارکان کی تعداد

آئیے ذرا یاد کریں



ذیل میں کچھ تصاویر دی ہوئی ہیں۔ ان میں ہماری متعارف چیزوں کا گروہ ہے۔

				1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...
پھولوں کا گلدستہ	چابیوں کا گچھا	پرندوں کا جھنڈ	بیاضوں کا گچھا	اعداد کا گروہ

مذکورہ بالا ہر چیزوں کے گروہ کے لیے ہم خاص لفظ استعمال کرتے ہیں۔ ان تمام مثالوں میں گروہ کے ارکان کو ہم بالکل صحیح اور واضح طور پر بتا سکتے ہیں۔ چیزوں کے ایسے گروہ کو ہم 'سیٹ' کہتے ہیں۔

اب اس سیٹ پر غور کیجیے۔ 'گاؤں کے خوش و خرم بچے'، 'جماعت کے ہوشیار بچے'، 'گروہ کی ان دونوں مثالوں میں 'خوش و خرم' اور 'ہوشیار' دونوں الفاظ مبہم ہیں۔ یعنی 'خوش و خرم' جہلت اور 'ہوشیاری' ان دونوں الفاظ کے معنی واضح طور پر بتائے نہیں جاسکتے۔ اس لیے ان گروہوں کو سیٹ نہیں کہہ سکتے۔

اب ذیل میں کچھ مثالیں دی ہوئی ہیں۔ ان میں سے کس گروہ کو 'سیٹ' کہہ سکتے ہیں۔ بتائیے۔

- (1) ہفتہ کے سات دن
- (2) ایک سال کے مہینے
- (3) جماعت کے بہادر بچے
- (4) گنتی کے پہلے 10 اعداد
- (5) مہاراشٹر کے مضبوط گڑھ - قلعے
- (6) ہمارے نظام شمسی کے سیارے



## سیٹ (Set)

جس گروہ کے ارکان بالکل صحیح اور واضح طور پر بتائے جاسکتے ہیں، ان گروہوں کو سیٹ کہتے ہیں۔  
 سیٹ کا نام دینے کے لیے عام طور پر A، B، C، ... میں سے انگریزی حروف تہجی کی پہلی لیپی کے حروف استعمال کرتے ہیں۔  
 سیٹ کے ارکان دکھانے کے لیے a، b، c، ... میں سے انگریزی حروف استعمال کرتے ہیں۔  
 a یہ سیٹ A کا رکن ہے۔ اسے 'a ∈ A' لکھتے ہیں اور رکن a سیٹ A کا رکن نہیں ہے اسے بتانے کے لیے 'a ∉ A' لکھتے ہیں۔  
 اب ہم اعداد کے سیٹ پر غور کریں گے۔

N = {1, 2, 3, ...} یہ طبعی اعداد کا سیٹ (Set of Natural Numbers) ہے۔

W = {0, 1, 2, 3, ...} یہ مکمل اعداد کا سیٹ (Set of Whole Numbers) ہے۔

I = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, ...} یہ صحیح اعداد کا سیٹ (Set of Integers) ہے۔

Q، یہ تمام ناطق اعداد کا سیٹ (Set of Rational Numbers) ہے۔

R، یہ حقیقی اعداد کا سیٹ (Set of Real Numbers) ہے۔

## سیٹ لکھنے کے طریقے

سیٹ لکھنے کے دو طریقے ہیں۔

### (1) فہرستی طریقہ (Listing method or roster method) :

اس طریقے میں سیٹ کے تمام ارکان کو محرابی قوسین میں لکھتے ہیں اور ہر رکن کو علیحدہ بتانے کے لیے دو متصل ارکان کے درمیان قوسہ (د) لگاتے ہیں۔  
 اس میں ارکان کی ترتیب کی کوئی اہمیت نہیں ہوتی، لیکن تمام ارکان کو ظاہر کرنا ضروری ہوتا ہے۔

مثال : 1 سے 10 کے درمیان طاق اعداد کے سیٹ کو فہرستی طریقہ سے ذیل کے مطابق لکھیں گے۔ مثلاً

$$A = \{3, 5, 7, 9\} \text{ یا } A = \{7, 3, 5, 9\}$$

remember لفظ میں حروف کا سیٹ {r, e, m, b} لکھتے ہیں۔ یہاں remember لفظ میں r، m، e حروف ایک سے زیادہ مرتبہ آئے ہیں۔ پھر بھی سیٹ میں ایک ہی مرتبہ لکھے گئے ہیں۔

### (2) خصوصیت بیان کرنے والا عبارتی طریقہ (Rule method or set builder form) :

اس طریقے میں ارکان کی فہرست بنانے کی بجائے سیٹ کے عمومی رکن کو متغیر سے ظاہر کر کے اس کے سامنے عمومی لکیر کھینچتے ہیں۔ عمومی لکیر کے آگے اُس متغیر کی خصوصیت لکھتے ہیں۔ مثال A = {x | x ∈ N, 1 < x < 10} اس کو سیٹ A کا رکن x اس طرح ہے کہ x یہ 1 اور 10 کے درمیان واقع طبعی عدد ہے۔

مثال :  $\{x\}$  یہ 1 اور 10 کے درمیان مفرد عدد ہے۔  $B = \{x \mid$  اس میں 1 سے 10 کے درمیان تمام مفرد اعداد شامل ہوں گے۔ اس لیے سیٹ B کو فہرستی طریقہ سے  $\{2, 3, 5, 7\}$  لکھیں گے۔

Q یہ ناطق اعداد کا سیٹ ہے۔ اسے خصوصیت والے عبارتی طریقہ سے ذیل کے مطابق لکھیں گے۔

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{I}, q \neq 0 \right\}$$

اسے پڑھیں گے  $\frac{p}{q}$  صورت میں ایسے اعداد ہیں کہ  $p$  کوئی صحیح عدد ہے اور  $q$  کوئی غیر صفر صحیح عدد ہے۔

تشریحی مثالیں : نیچے دی ہوئی مثالوں میں ہر سیٹ دونوں طریقوں سے لکھا ہوا ہے۔

خصوصیت والا عبارتی طریقہ

فہرستی طریقہ

$A = \{x \mid$  یہ DIVISION لفظ کا حرف ہے۔  $\}$

$A = \{D, I, V, S, O, N\}$

$B = \{y \mid$  یہ ایک ایسا عدد ہے کہ  $y^2 = 9$   $\}$

$B = \{-3, 3\}$

$C = \{z \mid$  یہ 5 کے ضعف میں 30 سے چھوٹا طبعی عدد ہے۔  $\}$

$C = \{5, 10, 15, 20, 25\}$

مثال : ذیل کی جدول کی خالی جگہوں کو پُر کر کے جدول مکمل کیجیے۔

فہرستی طریقہ	خصوصیت والا عبارتی طریقہ
$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$	$A = \{x \mid$ یہ 15 سے چھوٹا جفت طبعی عدد ہے۔ $\}$
.....	$B = \{x \mid$ یہ 1 سے 20 کے درمیان کامل مربع عدد ہے۔ $\}$
$C = \{a, e, i, o, u\}$	.....
.....	$D = \{y \mid$ یہ قوس قزح کا ایک رنگ ہے۔ $\}$
.....	$P = \{x \mid$ یہ صحیح عدد ہے اس طرح کہ $-3 < x < 3$ $\}$
$M = \{1, 8, 27, 64, 125\}$	.....

### مشقی سیٹ 1.1

(1) درج ذیل سیٹ فہرستی طریقہ سے لکھیے۔

(i) جفت طبعی اعداد کا سیٹ (ii) 1 سے 50 کے درمیان جفت مفرد اعداد کا سیٹ

(iii) تمام منفی صحیح اعداد کا سیٹ (iv) موسیقی کے سات سروں کا سیٹ

(2) درج ذیل علامتوں میں دیے ہوئے بیانات کو الفاظ میں لکھیے۔

(i)  $\frac{4}{3} \in \mathbb{Q}$

(ii)  $-2 \notin \mathbb{N}$  (iii)  $P = \{p \mid$  یہ ایک طاق عدد ہے۔  $\}$

(3) کوئی بھی دو سیٹ فہرستی طریقہ سے اور خصوصیت کے اظہار (بیان کرنے والے) والے عبارتی طریقہ سے لکھیے۔

(4) درج ذیل سیٹ فہرستی طریقے سے لکھیے۔

(i) بھارتی شمسی سال کے سب مہینوں کا سیٹ۔

(ii) 'COMPLEMENT' لفظ کے حروف کا سیٹ۔

(iii) انسان کے تمام حواسِ خمسہ کا سیٹ۔

(iv) 1 سے 20 کے درمیان مفرد اعداد کا سیٹ۔

(v) زمین کے براعظموں کا سیٹ۔

(5) درج ذیل سیٹ خصوصیت والے عبارتی طریقے سے لکھیے۔

(i)  $A = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$

(ii)  $B = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48\}$  , (iii)  $C = \{S, M, I, L, E\}$

(iv)  $D = \{\text{سنچر، جمعہ، جمعرات، بدھ، منگل، پیر، اتوار}\}$  (v)  $X = \{a, e, t\}$



### سیٹ کی اقسام Types of sets

مثال	تعریف	سیٹ کے نام
$A = \{2\}$ یہ جفت مفرد اعداد کا سیٹ ہے۔	جس سیٹ میں ایک اور صرف ایک رکن ہوتا ہے۔ ایسے سیٹ کو 'یک رکنی سیٹ' کہتے ہیں۔	یک رکنی سیٹ (Singleton Set)
$B = \{x \mid x \text{ کے درمیان طبعی عدد ہے۔}\}$ $\therefore B = \{ \}$ یا $\phi$	جس سیٹ میں دی ہوئی خصوصیت کا ایک بھی رکن نہیں ہوتا۔ اُس سیٹ کو 'خالی سیٹ' کہتے ہیں۔ اس سیٹ کو $\{ \}$ یا $\phi$ (فائے) علامت سے ظاہر کرتے ہیں۔	خالی سیٹ (Null Set) (Empty Set)
$C = \{p \mid p \text{ یہ 1 اور 22 کے درمیان 4 سے تقسیم پذیر عدد ہے۔}\}$ $C = \{4, 8, 12, 16, 20\}$	جو سیٹ خالی سیٹ ہوتا ہے یا جس سیٹ میں ارکان کی تعداد محدود ہوتی ہے اور اُسے شمار کر سکتے ہیں، ایسے سیٹ کو محدود سیٹ کہتے ہیں۔	محدود سیٹ (Finite Set)
$N = \{1, 2, 3, \dots\}$	جس سیٹ میں ارکان کی تعداد لامحدود ہوتی ہے اور انہیں شمار نہیں کیا جاسکتا، ایسے سیٹ کو 'لامحدود' سیٹ کہتے ہیں۔	لامحدود سیٹ (Infinite Set)

مثال : درج ذیل سیٹ فہرستی طریقے سے لکھ کر ان کی محدود سیٹ اور لامحدود سیٹ میں جماعت بندی کیجیے۔

- (i)  $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ اور } x \text{ یہ طاق عدد ہے۔}\}$  (ii)  $B = \{x \mid 3x - 1 = 0 \text{ اور } x \in \mathbb{N}\}$   
 (iii)  $C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ اور } x \text{ یہ } 7 \text{ سے تقسیم پذیر عدد ہے۔}\}$  (iv)  $D = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{W}, a + b = 9\}$   
 (v)  $E = \{x \mid x \in \mathbb{I}, x^2 = 100\}$  (vi)  $F = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}, a + b = 11\}$

حل : (i)  $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ اور } x \text{ یہ طاق عدد ہے۔}\}$

(یہ ایک لامحدود سیٹ ہے۔) ...  $A = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$

(ii)  $B = \{x \mid 3x - 1 = 0 \text{ اور } x \in \mathbb{N}\}$

$$3x - 1 = 0, \therefore 3x = 1, x = \frac{1}{3}$$

لیکن  $\frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$ ،  $\therefore B = \{ \}$ ، اس لیے B یہ محدود سیٹ ہے۔

(iii)  $C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ اور } x \text{ یہ } 7 \text{ سے تقسیم پذیر عدد ہے۔}\}$

(یہ لامحدود سیٹ ہے۔) ...  $\therefore C = \{7, 14, 21, \dots\}$

(iv)  $D = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{W}, a + b = 9\}$

ہم  $a$  اور  $b$  کی جوڑیاں معلوم کر سکتے ہیں اس طرح کہ  $a$  اور  $b$  مکمل عدد ہوں اور  $a + b = 9$  ہے۔

پہلے  $a$  کی اور بعد میں  $b$  کی قیمت، اس ترتیب کو قائم رکھتے ہوئے D سیٹ کو فہرستی طریقے سے ذیل کے مطابق لکھیں گے۔

$$D = \{(0, 9), (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (7, 2), (8, 1), (9, 0)\}$$

اس سیٹ کے ارکان یعنی اعداد کی جوڑیاں شمار کی جاسکتی ہیں اور یہ متعین ہیں۔

$\therefore$  D سیٹ، محدود سیٹ ہے۔

(v)  $E = \{x \mid x \in \mathbb{I}, x^2 = 100\}$

$\therefore$  E یہ محدود سیٹ ہے۔ ...  $E = \{-10, 10\}$

(iv)  $F = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}, a + b = 11\}$

$$F = \{(6, 5), (3, 8), (3.5, 7.5), (-15, 26), \dots\}$$

اس طرح بے شمار جوڑیاں حاصل ہوتی ہیں۔

$\therefore$  F، یہ لامحدود سیٹ ہے۔

اسے دھیان میں رکھیں



اعداد کے  $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}, \mathbb{W}, \mathbb{N}$  سیٹ یہ سب سیٹ لامحدود ہیں۔



سیٹ A کا ہر رکن سیٹ B میں اور سیٹ B کا ہر رکن سیٹ A میں موجود ہو تو ان دونوں سیٹوں کو مساوی سیٹ کہتے ہیں۔

'A اور B مساوی سیٹ ہیں' اسے علامت  $A = B$  سے لکھتے ہیں۔

مثال (1) :  $A = \{l, i, s, t, e, n\}$  ،  $x$  ، یہ لفظ کا حرف ہے۔  $A = \{x \mid \text{listen لفظ کا حرف ہے۔}\}$

$B = \{s, i, l, e, n, t\}$  ،  $y$  ، یہ لفظ کا حرف ہے۔  $B = \{y \mid \text{silent لفظ کا حرف ہے۔}\}$

A اور B میں ارکان کی ترتیب مختلف ہے، لیکن ارکان وہی ہیں۔ اس لیے A اور B یہ مساوی سیٹ ہیں۔ اس لیے  $A = B$  ہے۔

مثال (2) :  $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$  ،  $A = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbb{N}, 0 < x \leq 10\}$

$B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$  ،  $B = \{y \mid 1 \leq y \leq 10 \text{ یہ جفت عدد ہے اور}\}$

اس لیے A اور B مساوی سیٹ ہیں۔

اب درج ذیل سیٹوں کے بارے میں غور کریں گے۔

$C = \{1, 3, 5, 7\}$  ،  $D = \{2, 3, 5, 7\}$

کیا C اور D کو مساوی سیٹ کہہ سکتے ہیں؟ 'بالکل نہیں'

کیونکہ  $1 \in C$  ،  $1 \notin D$  ،  $2 \in D$  ،  $2 \notin C$

اس لیے C اور D مساوی سیٹ نہیں ہیں۔ اس لیے  $C \neq D$

مثال (3) : اگر  $A = \{1, 2, 3\}$  اور  $B = \{1, 2, 3, 4\}$  تب  $A \neq B$  اس کی تصدیق کیجیے۔

مثال (4) :  $A = \{x \mid 10 < x < 20\}$  اور  $B = \{11, 13, 17, 19\}$

یہاں  $A = B$  ہے اس کی تصدیق کیجیے۔

## مشقی سیٹ 1.2

(1) درج ذیل میں سے کون سے سیٹ مساوی ہیں اور کون سے نہیں؟ وجہ کے ساتھ لکھیے۔

$$A = \{x \mid 3x - 1 = 2\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ یہ طبعی عدد ہے لیکن } x \text{ مفرد بھی نہیں ہے اور مرکب بھی نہیں ہے۔}\}$$

$$C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 2\}$$

(2) کیا A اور B مساوی سیٹ ہیں؟ وجہ کے ساتھ لکھیے۔

$$A = \{\text{جفت مفرد عدد}\}$$
 ،  $B = \{x \mid 7x - 1 = 13\}$

(3) درج ذیل میں سے کون سے سیٹ خالی ہیں؟ وجہ کے ساتھ لکھیے۔

(i)  $A = \{a \mid \text{یہ صفر سے چھوٹا طبعی عدد ہے۔}\}$

(ii)  $B = \{x \mid x^2 = 0\}$

(iii)  $C = \{x \mid 5x - 2 = 0, x \in \mathbb{N}\}$

(4) درج ذیل میں سے کون سے سیٹ محدود ہیں اور کون سے لامحدود؟ وجہ کے ساتھ لکھیے۔

- (i)  $A = \{x \mid x < 10\}$  اور یہ طبعی عدد ہے  
(v) تجربہ گاہ کے آلات کا سیٹ  
(ii)  $B = \{y \mid y < -1\}$  اور یہ صحیح عدد ہے  
(vi) مکمل اعداد کا سیٹ  
(iii)  $C =$  آپ کی اسکول کی نویں جماعت کے تمام طلبہ کا سیٹ  
(vii) ناطق اعداد کا سیٹ  
(iv) آپ کے گاؤں کے باشندوں کا سیٹ

آئیے سمجھ لیں



### وین خاکہ (Venn Diagrams)

سیٹ لکھنے کے لیے بند شکل کا استعمال سب سے پہلے برطانوی فلاسفر جان وین نے کیا۔ اس لیے ایسی اشکال کو 'وین خاکہ' کہتے ہیں۔ مختلف سیٹ کے درمیان تعلق سمجھنے کے لیے اور سیٹ پر مبنی مثالیں حل کرنے کے لیے ان خاکوں کا بہتر طور پر استعمال ہوتا ہے۔ وین خاکوں کے ذریعے سیٹ کس طرح دکھائے جاتے ہیں، اسے درج ذیل مثالوں کی مدد سے سمجھیں گے۔

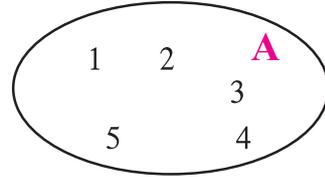
منطق اور احتمال ان مضامین کو ریاضیاتی صورت دینے کا کام جان وین نے سب سے پہلے کیا۔ 'لاجک آف چانس' ان کی مشہور کتاب ہے۔



1834 - 1923

مثال :  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

وین خاکہ کی مدد سے سیٹ A نیچے دکھایا گیا ہے۔



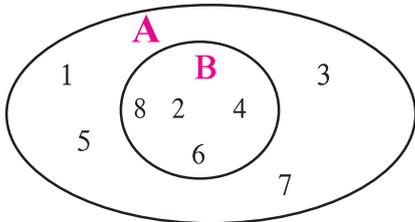
$B = \{x \mid -10 \leq x \leq 0\}$  اور یہ صحیح عدد ہے

بازو میں دیا ہوا وین خاکہ B سیٹ کو ظاہر کرتا ہے۔

0	-1	-2	-3	<b>B</b>
-4	-5	-6	-7	
-8	-9	-10		

### ضمنی سیٹ (Subset)

اگر A اور B دو سیٹ ہیں اور سیٹ B کا ہر رکن سیٹ A کا بھی رکن ہے تب سیٹ B کو سیٹ A کا ضمنی سیٹ کہتے ہیں اور  $B \subseteq A$  علامت سے ظاہر کرتے ہیں۔ اس کو 'B ضمنی سیٹ A یا B یہ A کا ضمنی سیٹ ہے' پڑھتے ہیں۔



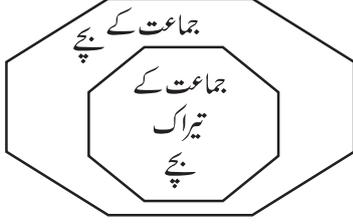
مثال (1) :  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$B = \{2, 4, 6, 8\}$

یہاں B کا ہر رکن سیٹ A کا بھی رکن ہے۔

$\therefore B \subseteq A$

اس معلومات کو وین خاکہ سے کس طرح دکھایا گیا ہے۔



**عملی کام :** جماعت کے بچوں کا سیٹ اور اسی جماعت کے تیراک بچوں کا سیٹ دینا کہہ کر دکھایا گیا ہے۔

اسی طرح درج ذیل ضمنی سیٹ کے لیے دینا کہہ کر دکھائیے۔

(1) (i) جماعت کے بچوں کا سیٹ

(ii) جماعت کے سائیکل چلانے والے بچوں کا سیٹ

(2) ذیل میں کچھ پھلوں کا ایک سیٹ دیا ہوا ہے۔

(امرود، سنتر، آم، فسن، چیکو، جامن، سینٹا پھل، پپیتا، کروندا)

درج ذیل ضمنی سیٹ دکھائیے۔ (i) ایک بیج والے پھل (ii) ایک سے زائد بیج والے پھل

اب مزید کچھ ضمنی سیٹ پر غور کریں گے۔

مثال (2) طبعی اعداد کا سیٹ  $N$ ، صحیح اعداد کا سیٹ  $I$

یہیں  $N \subseteq I$  ہے کیوں کہ ہمیں معلوم ہے کہ طبعی اعداد، صحیح اعداد بھی ہوتے ہیں۔

مثال (3)  $\{x \mid x \text{ یہ } 25 \text{ کا جذر المربع ہے}\}$  اور  $S = \{y \mid y \in I, -5 \leq y \leq 5\}$

$$P = \{-5, 5\}$$

فہرستی طریقے سے  $P$  سیٹ کو لکھیں گے۔

$$S = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

فہرستی طریقے سے  $S$  سیٹ کو لکھیں گے۔

یہاں  $P$  کا ہر رکن  $S$  کا بھی رکن ہے۔

$$\therefore P \subseteq S$$



(i) ہر سیٹ خود اپنا ضمنی سیٹ ہوتا ہے۔ یعنی  $A \subseteq A$

(ii) خالی سیٹ ہر سیٹ کا ضمنی سیٹ ہوتا ہے۔ یعنی  $\phi \subseteq A$

(iii) اگر  $A = B$  تو  $A \subseteq B$  اور  $B \subseteq A$

(iv) اگر  $A \subseteq B$  اور  $B \subseteq A$  تو  $A = B$

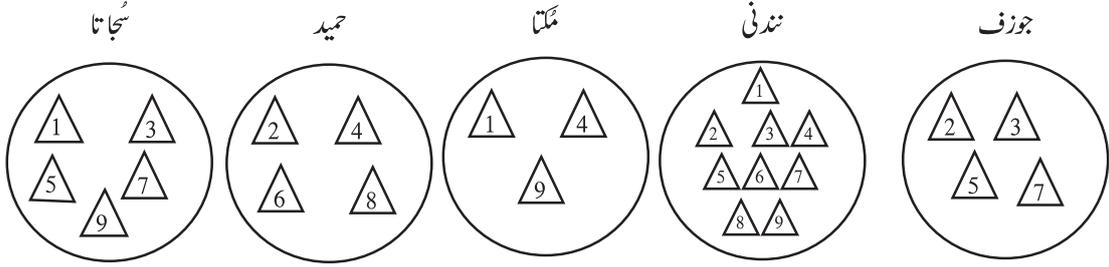
مثال :  $A = \{1, 3, 4, 7, 8\}$  اس سیٹ کے تمام ضمنی سیٹ لکھیے۔

مثلاً  $S = \{1, 4, 7, 8\}$ ،  $V = \{1, 4, 8\}$ ،  $T = \{4, 7, 8\}$ ،  $P = \{1, 3\}$

اس طرح مزید کئی ضمنی سیٹ بنائے جاسکتے ہیں۔ ان میں سے کوئی بھی پانچ ضمنی سیٹ لکھیے۔

عملی کام : ہر طالب علم سے کاغذ کے یکساں سائز کے 9 مثلث اور ایک تھالی دیجیے۔

مثلث پر 1 سے 9 تک اعداد لکھوائے۔ پھر ہر ایک کو اپنی اپنی تھالی میں عدد لکھے ہوئے کچھ مثلثی کاغذ رکھنے کے لیے کہیے۔ اب ہر ایک کے پاس 1 سے 9 عدد والے سیٹ کا ضمنی سیٹ بن گیا ہے۔



دیکھیے کہ سجاتا، حمید، ملتا، نندنی اور جوزف کی تھالیوں میں کون کون سے اعداد دکھائی دے رہے ہیں۔ ہر ایک نے کیا سوچ کر اعداد منتخب کیے ہیں۔ اُسے معلوم کیجیے۔ اس کی مدد سے ہر سیٹ خصوصیت والے عبارتی طریقے سے لکھیے۔

آئیے، بحث کریں



مثال : ذیل میں کچھ سیٹ دیے ہوئے ہیں۔

$$A = \{ \dots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots \}$$

$$B = \{ 1, 2, 3, \dots \}$$

$$C = \{ \dots, -12, -6, 0, 6, 12, 18, \dots \}$$

$$D = \{ \dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots \}$$

$$I = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots \}$$

اس کی مدد سے درج ذیل میں سے کون سا بیان صحیح ہے۔ اس پر بحث کیجیے۔

(i) A، B، C، D ہر ایک سیٹ کا ضمنی سیٹ ہے۔ (ii) B، یہ مذکورہ بالا تمام سیٹ کا ضمنی سیٹ ہے۔

آئیے سمجھ لیں

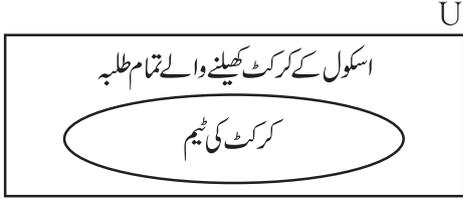


آفاقی سیٹ (Universal Set)

ہم جس سیٹ پر غور کرنے والے ہیں، وہ ان تمام سیٹ کو شامل کرنے والا ایک بڑا سیٹ، آفاقی سیٹ کے طور پر لیا جاتا ہے۔ اس کے باہر کے ارکان پر ہم غور نہیں کرتے۔ زیر غور ہر سیٹ آفاقی سیٹ کا ضمنی سیٹ ہوتا ہے۔

مثال (1) : فرض کیجیے کہ ہمیں اسکول کی 9 ویں جماعت کی ایک فریق کے طلبہ کی غیر حاضری کا مطالعہ کرنا ہے۔ اس کے لیے 9 ویں جماعت کے طلبہ کے سیٹ پر غور کرنا ہوگا۔ یہاں اس جماعت کے تمام طلبہ کا سیٹ یا اسکول کے تمام طلبہ کا سیٹ، آفاقی سیٹ ہوگا۔

اب دوسری مثال پر غور کریں گے۔

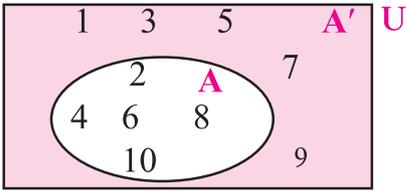


مثال (2) : ہمیں اسکول کے کرکٹ کے کھلاڑیوں میں سے 15 طلبہ کی ٹیم کا انتخاب کرنا ہے۔ تب اسکول کے کرکٹ کھیلنے والے تمام کھلاڑیوں کا سیٹ آفاقی سیٹ ہوگا۔ اس میں مناسب 15 کھلاڑیوں کی ٹیم، یہ اس آفاقی سیٹ کا ضمنی سیٹ ہے۔ آفاقی سیٹ کو عام طور پر 'U' حرف سے ظاہر کرتے ہیں۔ وین خاکے میں آفاقی سیٹ کو عام طور پر مستطیل سے ظاہر کرتے ہیں۔

### مکملہ سیٹ (Complement Of a Set)

فرض کیجیے 'U' آفاقی سیٹ ہے۔ اگر  $B \subseteq U$ ، تو سیٹ B میں موجود نہیں لیکن آفاقی سیٹ میں موجود ارکان کے سیٹ کو سیٹ B کا مکملہ سیٹ کہتے ہیں۔ سیٹ B کا مکملہ سیٹ  $B^c$  یا  $B'$  سے ظاہر کرتے ہیں۔

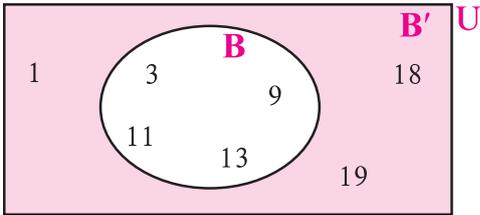
$$\therefore B' = \{x | x \in U, x \notin B\} \quad \dots \text{(اس طرح } B' \text{ کو بیان کر سکتے ہیں۔)}$$



مثال (1) :  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$\therefore A' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$



مثال (2) : فرض کیجیے،  $U = \{1, 3, 9, 11, 13, 18, 19\}$

$$B = \{3, 9, 11, 13\}$$

$$\therefore B' = \{1, 18, 19\}$$

اب (B)' معلوم کیجیے۔ اس بناء پر کیا نتیجہ اخذ ہوتا ہے؟

(B)' یہ سیٹ B' میں واقع نہیں لیکن U میں واقع ارکان کا سیٹ ہے۔

$$(B)' = B \text{ کیا یہ حاصل ہوا؟}$$

مذکورہ بالا معلومات وین خاکہ کی مدد سے سمجھ لیں۔

مکملہ سیٹ کا مکملہ سیٹ یعنی دیا ہوا سیٹ ہوتا ہے۔

اسے دھیان میں رکھیں



مکملہ سیٹ کی خصوصیات

(i) A اور A' ان دونوں میں ایک بھی رکن مشترک نہیں ہوتا۔

$$A' \subseteq U \text{ اور } A \subseteq U \quad \text{(ii)}$$

(iii) آفاقی سیٹ کا مکملہ سیٹ، خالی سیٹ ہوتا ہے۔  $U' = \phi$

(iv) خالی سیٹ کا مکملہ سیٹ، آفاقی سیٹ ہوتا ہے۔  $\phi' = U$

### مشقی سیٹ 1.3

(1) اگر  $A = \{a, b, c, d, e\}$ ،  $B = \{c, d, e, f\}$ ،  $C = \{b, d\}$ ،  $D = \{a, e\}$  ہو تو ذیل میں سے کون سا بیان صحیح اور کون سا بیان غلط ہے؟ لکھیے۔

(i)  $C \subseteq B$  (ii)  $A \subseteq D$  (iii)  $D \subseteq B$  (iv)  $D \subseteq A$  (v)  $B \subseteq A$  (vi)  $C \subseteq A$

(2) 1 سے 20 تک طبعی اعداد کے سیٹ کو آفاقی سیٹ کے طور پر لے کر X سیٹ اور Y سیٹ دینا خاکہ سے ظاہر کیجیے۔

(i)  $X = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 7 < x < 15\}$

(ii)  $Y = \{y \mid y \in \mathbb{N}, \text{یہ } 1 \text{ سے } 20 \text{ کے درمیان مفرد عدد ہے}\}$

(3)  $U = \{1, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$P = \{1, 3, 7, 10\}$

تو (i) P, U اور P' دینا خاکہ کے ذریعے دکھائیے۔ (ii)  $(P')' = P$  کی تصدیق کیجیے۔

(4)  $A = \{1, 3, 2, 7\}$  ہو تو سیٹ A کے کوئی بھی تین ضمنی سیٹ لکھیے۔

(5) (i) ذیل کے سیٹ میں سے کون سا سیٹ، دوسرے کون سے سیٹ کا ضمنی سیٹ ہے۔ لکھیے۔

P یہ پونہ کے باشندوں کا سیٹ ہے۔ M یہ مدھیہ پردیش کے باشندوں کا سیٹ ہے۔

I یہ اندور کے باشندوں کا سیٹ ہے۔ B یہ بھارت کے باشندوں کا سیٹ ہے۔

H یہ مہاراشٹر کے باشندوں کا سیٹ ہے۔

(ii) مذکورہ بالا میں سے کون سا سیٹ دیگر تمام سیٹ کے لیے آفاقی سیٹ کے طور پر لیا جائے گا؟

(6)\* نیچے کچھ سیٹ دیے ہوئے ہیں۔ ان کا مطالعہ کرتے وقت کون سا سیٹ ان تمام سیٹ کے لیے آفاقی سیٹ کے طور پر لیا جائے گا؟

(i) 5 کے ضعف میں اعداد کا سیٹ A، کے پہاڑے کے اعداد کا سیٹ B =

12 کے ضعف میں اعداد کا سیٹ C =

(ii) 4 کے ضعف میں اعداد کا سیٹ P = تمام جفت اعداد کا سیٹ T =

(7) فرض کیجیے جماعت کے تمام طلبہ کا سیٹ، آفاقی سیٹ ہے۔ ریاضی میں 50% یا اس سے زیادہ نمبر حاصل کرنے والے طلبہ کے سیٹ کو A فرض کریں تو A کا مکملہ سیٹ لکھیے۔

آئیے سمجھ لیں



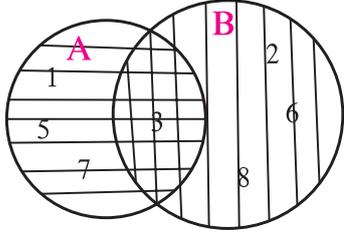
سیٹ پر اعمال

دو سیٹ کا انقطاع (Intersection of two Sets)

فرض کیجیے A اور B دو سیٹ ہیں۔ A اور B سیٹ میں مشترک ارکان کے سیٹ کو A اور B سیٹ کا انقطاعی سیٹ کہتے ہیں۔

اسے A ∩ B لکھتے ہیں اور اسے 'A انقطاع B' پڑھتے ہیں۔

∴  $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ اور } x \in B\}$

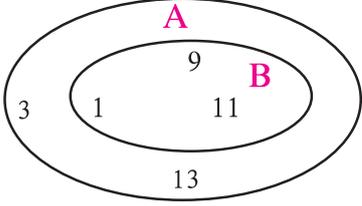


مثال (1) :  $A = \{1, 3, 5, 7\}$  ،  $B = \{2, 3, 6, 8\}$

اب وین خاکہ کھینچیں گے۔

A اور B ان دونوں سیٹ میں 3 یہ مشترک رکن ہے۔

$$\therefore A \cap B = \{3\}$$



مثال (2) :  $A = \{1, 3, 9, 11, 13\}$  ،  $B = \{1, 9, 11\}$

سیٹ A اور سیٹ B میں 1 ، 9 ، 11 یہ مشترک ارکان ہیں۔

$$B = \{1, 9, 11\} \text{ لیکن } \therefore A \cap B = \{1, 9, 11\}$$

$$\therefore A \cap B = B$$

یہاں B، یہ A کا ضمنی سیٹ ہے۔ اسے دھیان میں رکھیے۔

اس لیے اگر  $B \subseteq A$  تو  $A \cap B = B$  ، اسی طرح اگر  $B \cap A = B$  تو  $B \subseteq A$



انقطاعی سیٹ کی خصوصیات

$$A \cap B = A \text{ تو } A \subseteq B \text{ اگر } (2)$$

$$A \cap B = B \cap A \text{ (1)}$$

$$A \cap B \subseteq B \text{ اور } A \cap B \subseteq A \text{ (4)}$$

$$B \subseteq A \text{ تو } A \cap B = B \text{ اگر } (3)$$

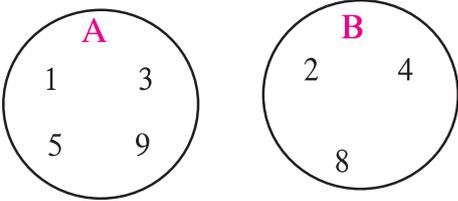
$$A \cap \phi = \phi \text{ (7) } \quad A \cap A = A \text{ (6)}$$

$$A \cap A' = \phi \text{ (5)}$$

عملی کام : مختلف مثالیں لے کر مذکورہ بالا خصوصیات کی تصدیق کیجیے



غیر متعلق سیٹ (Disjoint Set)



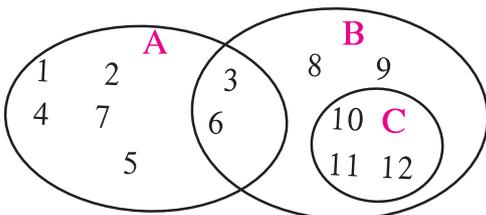
فرض کیجیے  $A = \{1, 3, 5, 9\}$  اور

$B = \{2, 4, 8\}$  یہ دو سیٹ دیے ہوئے ہیں۔

سیٹ A اور سیٹ B میں ایک بھی رکن مشترک نہیں ہے۔ یعنی یہ دونوں

سیٹ مکمل طور پر غیر متعلق ہیں۔ اس لیے انھیں غیر متعلق سیٹ کہتے ہیں ان سیٹوں کے وین خاکے کا مشاہدہ کیجیے۔

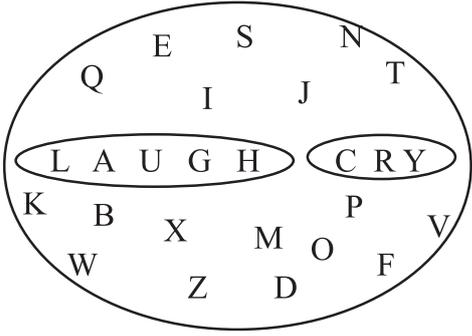
عملی کام I :



یہاں A, B, C ان سیٹوں کو وین خاکے کی مدد سے دکھایا گیا ہے۔

ان میں کون سے دو سیٹ مختلف ہیں؟ اسے لکھیے۔

## عملی کام II :



فرض کیجیے انگریزی حروف تہجی کا سیٹ یہ آفاقی سیٹ ہے۔ یہاں سیٹ کے ارکان انگریزی حروف ہیں۔

فرض کیجیے 'LAUGH' لفظ کے حروف کا ایک سیٹ ہے۔

اور 'CRY' اس لفظ کے حروف کا دوسرا سیٹ ہے۔  
یہ غیر متعلق سیٹ ہیں، ایسا کہہ سکتے ہیں۔

ان دونوں سیٹ کا انقطاع خالی سیٹ ہے۔ معلوم کیجیے۔

### دو سیٹ کا اجتماع (Union of two Sets)

فرض کیجیے A اور B یہ دو سیٹ ہیں۔ ان دونوں سیٹ کے ارکان کو ملا کر بننے والے سیٹ کو A اور B ان دونوں سیٹ کا اجتماعی سیٹ کہتے ہیں۔ اسے

A ∪ B لکھتے ہیں اور A اجتماع B پڑھتے ہیں۔

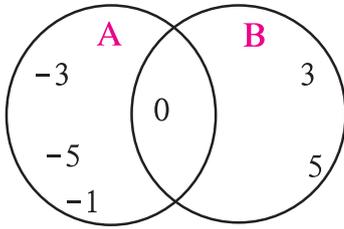
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

$$\text{مثال (1): } A = \{-1, -3, -5, 0\}$$

$$B = \{0, 3, 5\}$$

$$A \cup B = \{-3, -5, 0, -1, 3, 5\}$$

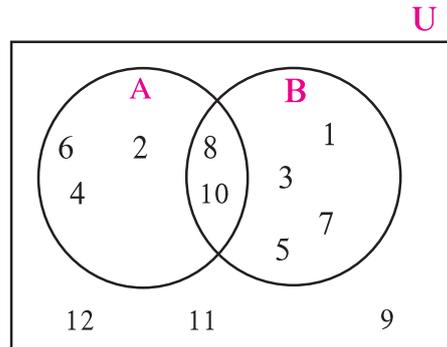
$$A \cup B = B \cup A, \text{ دھیان میں رکھیں کہ}$$



بازو میں وین خاکے میں دکھائے ہوئے سیٹ کی بنا پر درج ذیل سیٹ کو فہرستی طریقے سے لکھیے۔

$$(i) U \quad (ii) A \quad (iii) B \quad (iv) A \cup B \quad (v) A \cap B$$

$$(vi) A' \quad (vii) B' \quad (viii) (A \cup B)' \quad (ix) (A \cap B)'$$



مثال (2)

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\},$$

$$B = \{1, 3, 5, 7, 8, 10\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}, \quad A \cap B = \{8, 10\}$$

$$A' = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 12\}, \quad B' = \{2, 4, 6, 9, 11, 12\}$$

$$(A \cup B)' = \{9, 11, 12\}, \quad (A \cap B)' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12\}$$

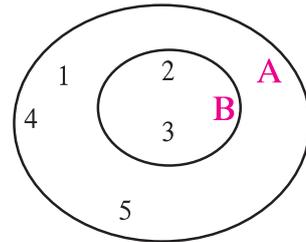
$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad B = \{2, 3\}$$

اب اس مثال کا وین خاکہ دیکھتے ہیں۔

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

یہاں سیٹ A اور سیٹ A ∪ B میں بالکل وہی ارکان ہیں۔

$$A \cup B = A \text{ ہو تو } B \subseteq A$$



مثال (3)

اسے دھیان میں رکھیں



اجتماعی سیٹ کی خصوصیات

$$A \cup B = B \text{ تو } A \subseteq B \text{ اگر } (2)$$

$$A \cup B = B \cup A \quad (1)$$

$$A \cup A' = U \quad (4)$$

$$A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B \quad (3)$$

$$A \cup \phi = A \quad (6)$$

$$A \cup A = A \quad (5)$$

آئیے سمجھ لیں



سیٹ میں ارکان کی تعداد (Number of elements in a set) :

فرض کیجیے۔  $A = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ ، یہ دیا ہوا سیٹ ہے۔ اس سیٹ میں 5 ارکان ہیں۔

$$\therefore n(A) = 5 \quad \text{سیٹ } A \text{ میں ارکان کی تعداد کو } n(A) \text{ لکھتے ہیں۔}$$

$$\therefore n(B) = 6, \quad B = \{6, 12, 18, 24, 30, 36\} \quad \text{فرض کیجیے}$$

اجتماعی سیٹ اور انقطاعی سیٹ میں ارکان کی تعداد

مذکورہ بالا سیٹ A اور سیٹ B پر غور کریں تو

$$n(A) + n(B) = 5 + 6 = 11 \quad \dots (1)$$

$$A \cup B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 24, 30, 36\}, \therefore n(A \cup B) = 9 \quad \dots (2)$$

A ∩ B معلوم کریں گے۔ یعنی سیٹ A اور سیٹ B کے مشترک ارکان معلوم کریں گے۔

$$A \cap B = \{6, 12\}, \therefore n(A \cap B) = 2 \quad \dots (3)$$

دھیان دیجیے، n(A) اور n(B) شمار کرتے وقت A ∩ B کے ارکان کو دہرے شمار کیا گیا ہے۔

$$n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 5 + 6 - 2 = 9$$

$$n(A \cup B) = 9 \quad \text{اسی طرح،}$$

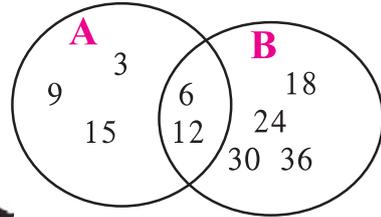
$$\therefore n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

اوپر دیے ہوئے اصول کی تصدیق بازو میں دیے ہوئے وین خاکہ کی مدد سے کیجیے۔

$$n(A) = \square, \quad n(B) = \square$$

$$n(A \cup B) = \square, \quad n(A \cap B) = \square$$

$$\therefore n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$



اسے دھیان میں رکھیں



$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\text{یعنی, } n(A) + n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B)$$

اب،  $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$  اور  $B = \{1, 2, 4, 6, 8, 12, 13\}$

یہ سیٹ لے کر اوپر دیے ہوئے اصول کی تصدیق کیجیے۔



### سیٹ پر مبنی عبارتی مثالیں

مثال : ایک جماعت میں 70 طلبہ ہیں۔ ان میں سے 45 طلبہ کو کرکٹ پسند ہے۔ 52 طلبہ کو کھوکھیل پسند ہے۔ ایسا ایک بھی طالب علم نہیں جسے ان میں سے ایک بھی کھیل پسند نہیں ہے۔ تو کرکٹ اور کھوکھیل دونوں کھیل کھیلنے والے طلبہ کی تعداد معلوم کیجیے۔

حل : اس مثال کو ہم دو طریقوں سے حل کریں گے۔

طریقہ 1 : 70 = جماعت میں کل طلبہ

فرض کیجیے کرکٹ کھیل پسند کرنے والے طلبہ کی تعداد A ہے اور کھوکھیل پسند کرنے والے طلبہ کی تعداد B ہے۔ ہر طالب علم کو کرکٹ اور کھوکھیل میں سے

کوئی ایک کھیل پسند ہے۔ کرکٹ یا کھوکھیل پسند کرنے والے طلبہ کی تعداد  $n(A \cup B)$

$$\therefore n(A \cup B) = 70$$

$$n(A \cap B) = \text{کرکٹ اور کھوکھیل دونوں کھیل پسند کرنے والے طلبہ کی تعداد}$$

$$n(A) = 45, \quad n(B) = 52$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad \dots \text{(یہ ہمیں معلوم ہے۔)}$$

$$\therefore n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$

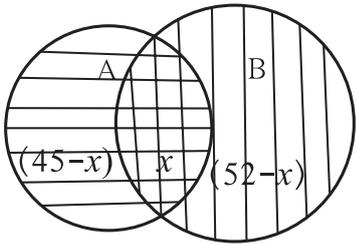
$$= 45 + 52 - 70 = 27$$

یہاں،  $(A \cap B)$  یہ دونوں کھیل پسند کرنے والے طلبہ کا سیٹ ہے۔  $\therefore n(A \cap B) = 27$

$\therefore$  دونوں کھیل پسند کرنے والے طلبہ 27 اور کرکٹ کھیل پسند کرنے والے طلبہ 45 ہیں۔

$$\therefore \text{صرف کرکٹ کھیلنے والے طلبہ} = 45 - 27 = 18$$

طریقہ II : دی ہوئی معلومات وین خاکہ سے بھی دونوں کھیل پسند کرنے والے طلبہ کی تعداد ذیل کے مطابق معلوم کر سکتے ہیں۔



فرض کیجیے  $(A \cap B) = x$

$$n(A) = 45, n(B) = 52, n(A \cup B) = 70 \quad \dots \text{(ہمیں معلوم ہے۔)}$$

$$\therefore n(A \cap B) = x = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$

$$= 45 + 52 - 70 = 27$$

$$\therefore \text{وین خاکے کی مدد سے} = 45 - 27 \quad \dots$$

$$= 18$$

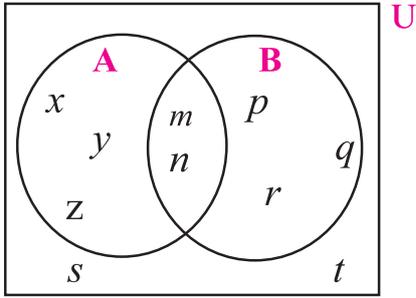
## مشقی سیٹ 1.4

(1) اگر  $n(B) =$  کتنا؟  $n(A \cap B) = 7$ ،  $n(A \cup B) = 29$ ،  $n(A) = 15$

(2) ایک ہاسٹل میں 125 طلبہ ہیں، ان میں سے 80 طلبہ چائے پیتے ہیں، 60 طلبہ کافی پیتے ہیں اور 20 طلبہ چائے اور کافی دونوں قسم کے مشروب پیتے ہیں۔ تو ایک بھی مشروب نہیں پینے والے طلبہ کی تعداد معلوم کیجیے۔

(3) ایک مقابلہ جاتی امتحان میں 50 طلبہ انگریزی میں کامیاب ہوئے۔ 60 طلبہ ریاضی مضمون میں کامیاب ہوئے۔ 40 طلبہ دونوں مضامین میں کامیاب ہوئے۔ ایک بھی طالب علم دونوں مضامین میں ناکام نہیں ہوا تو کل کتنے طلبہ امتحان میں شریک تھے؟

(4)\* ایک اسکول میں نویں جماعت کے 220 طلبہ کی پسند سے متعلق سروے کیا گیا۔ ان میں سے 130 طلبہ نے بتایا کہ انھیں کوہ پیمائی پسند ہے اور 180 طلبہ نے بتایا کہ انھیں آکاش درشنی پسند ہے؟ 110 نے بتایا کہ انھیں کوہ پیمائی اور آکاش درشنی دونوں پسند ہے۔ تو بتائیے کہ کتنے طلبہ کو دونوں میں سے کوئی بھی پسند نہیں؟ کتنے طلبہ کو صرف کوہ پیمائی پسند ہے؟ کتنے طلبہ کو صرف آکاش درشنی پسند ہے؟



(5) وین خاکے کی مدد سے درج ذیل تمام سیٹ لکھیے۔

- (i)  $A$  (ii)  $B$  (iii)  $A \cup B$  (iv)  $U$   
 (v)  $A'$  (vi)  $B'$  (vii)  $(A \cup B)'$

## مجموعہ سوالات 1

(1) درج ذیل سوالوں کے لیے صحیح متبادل منتخب کیجیے۔

(i)  $M \cap N = ?$ ;  $M = \{1, 3, 5\}$ ,  $N = \{2, 4, 6\}$

- (A)  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  (B)  $\{1, 3, 5\}$  (C)  $\phi$  (D)  $\{2, 4, 6\}$

(ii)  $P = \{x \mid 1 < x \leq 5, x \text{ یہاں } x \text{ طاق طبعی عدد ہے۔}\}$  اس سیٹ کو فہرستی طریقے سے کس طرح لکھیں گے؟

- (A)  $\{1, 3, 5\}$  (B)  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  (C)  $\{1, 3\}$  (D)  $\{3, 5\}$

(iii)  $P = \{1, 2, \dots, 10\}$  یہ کس قسم کا سیٹ ہے؟

- (A) خالی سیٹ (B) لامحدود سیٹ (C) محدود سیٹ (D) ان میں سے کوئی نہیں

(iv)  $M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  اور  $M = \{1, 2, 4\}$  تو درج ذیل میں  $N$  سیٹ کون سا ہے؟

- (A)  $\{1, 2, 3\}$  (B)  $\{3, 4, 5, 6\}$  (C)  $\{2, 5, 6\}$  (D)  $\{4, 5, 6\}$

(v) اگر  $P \subseteq M$  تو  $P \cap (P \cup M)$  یہ درج ذیل میں سے کون سا سیٹ ہے؟

- (A) P (B) M (C)  $P \cup M$  (D)  $P' \cap M$

(vi) درج ذیل میں سے کون سا سیٹ خالی سیٹ ہے؟

- (A) متوازی خطوط کے نقطہ تقاطع کا سیٹ (B) جفت مفرد اعداد کا سیٹ  
(C) 30 سے کم دن والے انگریزی مہینوں کا سیٹ (D)  $P = \{x | x \in I, -1 < x < 1\}$

(2) درج ذیل ضمنی سوالوں کے لیے صحیح متبادل منتخب کیجیے۔

(i) درج ذیل میں سے کون سا گروہ (مجموعہ) سیٹ ہے؟

- (A) قوس قزح میں رنگ (B) اسکول کے کپاؤنڈ میں اونچے درخت  
(C) گاؤں کے امیر لوگ (D) کتاب کی آسان مثالیں

(ii)  $N \cap W$ ، یہ سیٹ درج ذیل میں سے کون سا ہے؟

- (A)  $\{1, 2, 3, \dots\}$  (B)  $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$  (C)  $\{0\}$  (D)  $\{ \}$

(iii)  $x$  یہ india لفظ کا حرف ہے۔  $P = \{x | \text{P سیٹ فہرستی طریقے سے درج ذیل میں سے کون سا ہے؟}\}$

- (A)  $\{i, n, d\}$  (B)  $\{i, n, d, a\}$  (C)  $\{i, n, d, i, a\}$  (D)  $\{n, d, a\}$

(iv) اگر  $T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  اور  $M = \{3, 4, 7, 8\}$  تو  $T \cup M = ?$

- (A)  $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$  (B)  $\{1, 2, 3, 7, 8\}$   
(C)  $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$  (D)  $\{3, 4\}$

(3) ایک گروہ کے 100 لوگوں میں سے 72 لوگ انگریزی بولتے ہیں اور 43 لوگ فرانسیسی بولتے ہیں۔ یہ 100 لوگ انگریزی یا فرانسیسی میں سے کم سے کم ایک زبان بولتے ہیں۔ تو بتائیے کتنے لوگ صرف انگریزی بولتے ہیں؟ کتنے لوگ صرف فرانسیسی بولتے ہیں؟ اور کتنے لوگ انگریزی اور فرانسیسی دونوں زبانیں بولتے ہیں؟

(4) پارتھ نے درخت لگاؤ ہفتہ میں 70 درخت لگایا جب کہ پر بھانے 90 درخت لگایا۔ ان دونوں نے مل کر 25 درخت لگائے، پارتھ یا پر بھانے کل کتنے درخت لگائے؟

(5) اگر  $n(A) = 20$ ،  $n(B) = 28$ ،  $n(A \cup B) = 36$  تو  $n(A \cap B) = ?$

(6) ایک جماعت کے 28 طلبہ میں سے 8 طلبہ کے گھر صرف کتاب لایا گیا ہے اور 6 طلبہ کے گھر صرف بلی پالی گئی ہے۔ 10 طلبہ کے گھر کتاب اور بلی دونوں پالے گئے ہیں۔ تو کتنے طلبہ کے گھر کتاب بلی میں سے ایک بھی جانور پالا نہیں گیا؟

(7) درج ذیل ہر ایک مثال کے سیٹ کا اجتماعی سیٹ وین خاکے کی مدد سے دکھائیے۔

(i)  $A = \{3, 4, 5, 7\}$ ،  $B = \{1, 4, 8\}$

(ii)  $P = \{a, b, c, e, f\}$ ،  $Q = \{l, m, n, e, b\}$

(iii)  $X = \{x \mid \text{یہ } x \text{ 80 اور 100 کے درمیان مفرد عدد ہے۔}\}$

$Y = \{y \mid \text{یہ } y \text{ 90 اور 100 کے درمیان طاق عدد ہے۔}\}$

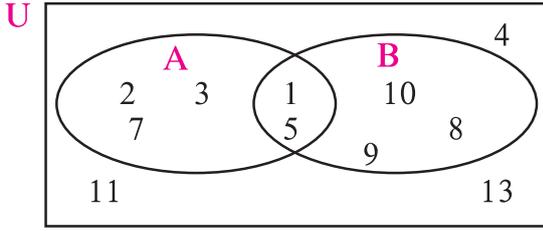
(8) درج ذیل میں سے کون سا سیٹ، کس سیٹ کا ضمنی سیٹ ہے؟ اسے لکھیے۔

$X =$  تمام ذواربعہ الاضلاع کا سیٹ ،  $Y =$  تمام معین کا سیٹ

$S =$  تمام مربعوں کا سیٹ ،  $T =$  تمام متوازی الاضلاع کا سیٹ

$V =$  تمام مستطیلوں کا سیٹ

(9) اگر  $M$  یہ کوئی بھی ایک سیٹ ہو تو  $M \cup \phi$  اور  $M \cap \phi$  لکھیے۔



(10)\* بازو کے وین خاکہ کی مدد سے  $U, A, B, A \cup B$  اور

$A \cap B$  سیٹ لکھیے۔

(11) اگر  $n(A) = 7$  ،  $n(B) = 13$  ،  $n(A \cap B) = 4$  ہو تو  $n(A \cup B) = ?$

**عملی کام I :** خالی جگہوں میں سیٹ کے ارکان لکھیے۔

$U = \{1, 3, 5, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15\}$

$A = \{1, 11, 13\}$  ،  $B = \{8, 5, 10, 11, 15\}$  ،  $A' = \{\dots\dots\dots\}$  ،  $B' = \{\dots\dots\dots\}$

$A \cap B = \{\dots\dots\dots\}$  ،  $A' \cap B' = \{\dots\dots\dots\}$

$A \cup B = \{\dots\dots\dots\}$  ،  $A' \cup B' = \{\dots\dots\dots\}$

$(A \cap B)' = \{\dots\dots\dots\}$  ،  $(A \cup B)' = \{\dots\dots\dots\}$

تصدیق کیجیے :  $(A \cap B)' = A' \cup B'$  ،  $(A \cup B)' = A' \cap B'$

**عملی کام II :** آپ کے اطراف کے 20 خاندانوں سے ذیل کی معلومات حاصل کیجیے۔

(i) اردو اخبار خریدنے والے خاندانوں کی تعداد

(ii) انگریزی اخبار خریدنے والے خاندانوں کی تعداد

(iii) انگریزی اور اردو دونوں زبانوں کے اخبار خریدنے والے خاندانوں کی تعداد

حاصل کردہ معلومات کے لیے وین خاکہ بنائیے۔





## حقیقی اعداد Real Numbers

2

آئیے، سیکھیں



- ناطق اعداد کی خصوصیات
- غیر ناطق اعداد کی خصوصیات
- جذری مقدار
- مربعی جذری مقداروں کا موازنہ
- مربعی جذری مقداروں کو ناطق بنانا

آئیے ذرا یاد کریں



گذشتہ جماعت میں ہم نے طبعی اعداد، صحیح اعداد اور حقیقی اعداد کا مطالعہ کر چکے ہیں۔

$$N = \text{طبعی اعداد کا سیٹ} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$W = \text{مکمل اعداد کا سیٹ} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$I = \text{صحیح اعداد کا سیٹ} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$Q = \text{ناطق اعداد کا سیٹ} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in I, q \neq 0 \right\}$$

$$R = \text{حقیقی اعداد کا سیٹ}$$

$$N \subseteq W \subseteq I \subseteq Q \subseteq R$$

ناطق اعداد میں ترتیبی تعلق :

$\frac{p}{q}$  اور  $\frac{r}{s}$ ، ناطق اعداد ہیں اور  $q > 0, s > 0$  غیر صفر صحیح اعداد ہوں اور اگر

$$\frac{p}{q} > \frac{r}{s} \text{ ہو تب } p \times s > q \times r \text{ اگر (ii)} \quad \frac{p}{q} = \frac{r}{s} \text{ ہو تب } p \times s = q \times r \text{ اگر (i)}$$

$$\frac{p}{q} < \frac{r}{s} \text{ ہو تب } p \times s < q \times r \text{ اگر (iii)}$$

آئیے سمجھ لیں



ناطق اعداد کی خصوصیات Properties of rational numbers

$a, b, c$  ناطق اعداد ہوں تب

خصوصیت	جمع	ضرب
1. مبادلہ کی خاصیت	$a + b = b + a$	$a \times b = b \times a$
2. ملتزمی خاصیت	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
3. جمعی و ضربی شناخت	$a + 0 = 0 + a = a$	$a \times 1 = 1 \times a = a$
4. (جمعی اور ضربی) معکوس خاصیت	$a + (-a) = 0$	$a \times \frac{1}{a} = 1 \dots (a \neq 0)$

## آئیے ذرا یاد کریں

کوئی بھی ناطق عدد کسرا عشاریہ کی صورت میں مختتم یا متوالی غیر مختتم (دہرانے والا) ہوتا ہے۔

### مختتم صورت

$$(1) \frac{2}{5} = 0.4$$

$$(2) -\frac{7}{64} = -0.109375$$

$$(3) \frac{101}{8} = 12.625$$

### متوالی غیر مختتم صورت

$$(1) \frac{17}{36} = 0.472222... = 0.47\dot{2}$$

$$(2) \frac{33}{26} = 1.2692307692307... = 1.2\overline{692307}$$

$$(3) \frac{56}{37} = 1.513513513... = 1.\overline{513}$$

## آئیے سمجھ لیں

متوالی غیر مختتم عشری صورت کو ناطق عدد  $\frac{p}{q}$  کی صورت میں لکھنا

مثال (1)  $0.777... = 0.\overline{7}$  اس غیر متوالی (دہرانے والی) غیر مختتم کسرا عشاریہ کو  $\frac{p}{q}$  کی صورت میں لکھیے۔

حل : فرض کیجیے :  $x = 0.777... = 0.\overline{7}$

$$\therefore 10x = 7.777... = 7.\overline{7}$$

$$\therefore 10x - x = 7.\overline{7} - 0.\overline{7}$$

$$\therefore 9x = 7$$

$$\therefore x = \frac{7}{9}$$

$$\therefore 0.777... = \frac{7}{9}$$

مثال (2)  $7.529529529... = 7.\overline{529}$  اس متوالی غیر مختتم کسرا عشاریہ کو  $\frac{p}{q}$  کی صورت میں لکھیے۔

حل : فرض کیجیے :  $x = 7.529529... = 7.\overline{529}$

$$\therefore 1000x = 7529.529529... = 7529.\overline{529}$$

$$\therefore 1000x - x = 7529.\overline{529} - 7.\overline{529}$$

$$\therefore 999x = 7522.0 \quad \therefore x = \frac{7522}{999}$$

$$\therefore 7.\overline{529} = \frac{7522}{999}$$



غور کیجیے

2.4 $\dot{3}$  اس عدد کو  $\frac{p}{q}$  کی صورت میں

لکھنے کے لیے کیا کریں گے؟

## اسے دھیان میں رکھیں



(1) دیے ہوئے عدد میں اعشاریہ کی علامت کے بعد کتنے ہندسے بار بار آئیں ہیں، اسے دیکھ اسی کے مطابق اس عدد کو 10، 100، 1000 میں سے مناسب عدد سے ضرب دیجیے۔ مثلاً 2.3، اس عدد میں 3، صرف ایک ہی ہندسہ غیر مختتم ہے۔ اس لیے 2.3 کو  $\frac{P}{q}$  صورت میں لانے کے لیے اُسے 10 سے ضرب دیجیے۔

1.24، اس عدد میں 2، 4 یہ دو ہندسے غیر مختتم ہیں۔ اس لیے 1.24 کو 100 سے ضرب دیجیے۔

1.513، اس عدد میں 5، 1، 3 یہ تین ہندسے غیر مختتم ہیں۔ اس لیے 1.513 کو 1000 سے ضرب دیجیے۔

(2) ناطق عدد کے نسب نما کے مفرد اجزائے ضربی کی جانچ کیجیے، اس میں 2 اور 5 کے علاوہ مفرد عدد نہیں ہوں تو ناطق عدد کی عشری صورت متوالی ہوتی ہے۔ 2 اور 5 کے علاوہ مفرد عدد، نسب نما کے اجزائے ضربی ہوں تو اس عدد کی عشری صورت متوالی غیر مختتم ہوتی ہے۔

## مشقی سیٹ 2.1

1. درج ذیل میں سے کون سے ناطق اعداد کی کسر اعشاریہ کی صورت متوالی ہے اور کون سے عدد کی کسر اعشاریہ کی صورت متوالی غیر مختتم ہے؟ لکھیے۔

- (i)  $\frac{13}{5}$       (ii)  $\frac{2}{11}$       (iii)  $\frac{29}{16}$       (iv)  $\frac{17}{125}$       (v)  $\frac{11}{6}$

2. درج ذیل ناطق اعداد کو کسر اعشاریہ کی صورت میں لکھیے۔

- (i)  $\frac{127}{200}$       (ii)  $\frac{25}{99}$       (iii)  $\frac{23}{7}$       (iv)  $\frac{4}{5}$       (v)  $\frac{17}{8}$

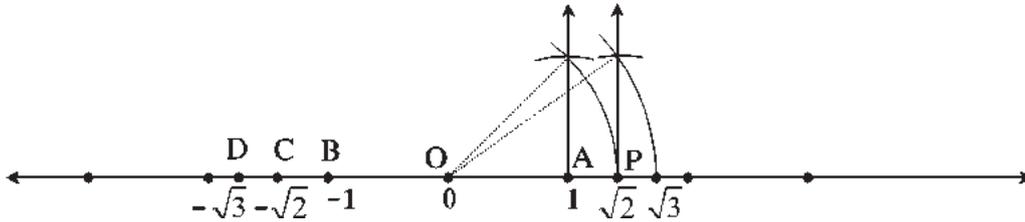
3. درج ذیل ناطق اعداد کو  $\frac{p}{q}$  کی صورت میں لکھیے۔

- (i)  $0.\dot{6}$       (ii)  $0.\overline{37}$       (iii)  $3.\overline{17}$       (iv)  $15.\overline{89}$       (v)  $2.\overline{514}$

## آئیے ذرا یاد کریں



ذیل میں عددی خط پر دکھائے ہوئے  $\sqrt{2}$  اور  $\sqrt{3}$  یہ اعداد ناطق نہیں ہیں یعنی یہ غیر ناطق ہیں۔



اس عددی خط پر اکائی  $OA = 1$  فاصلہ ہے۔ O کے بائیں جانب B نقطہ بھی 1 اکائی فاصلہ پر ہے۔ B نقطہ کا محدد -1 ہے۔ P نقطہ کا محدد  $\sqrt{2}$  ہے، اس کا متضاد عدد 'C' نقطہ سے ظاہر کیا ہوا ہے۔ C نقطہ کا محدد  $-\sqrt{2}$  ہے۔ اسی طرح  $\sqrt{3}$  کا متضاد عدد دکھانے والے D نقطہ کا محدد  $-\sqrt{3}$  ہے۔



## غیر ناطق اعداد اور حقیقی اعداد Irrational and real numbers

$\sqrt{2}$ ، یہ عدد غیر ناطق عدد ہے۔ اسے بالراست ثبوت دے کر ثابت کریں گے۔

ایسا فرض کریں کہ  $\sqrt{2}$ ، یہ ناطق عدد ہے۔ فرض کریں وہ  $\frac{p}{q}$  ہے۔

$\frac{p}{q}$  اس ناطق عدد کی مختصر ترین صورت ہے، یعنی فرض کیجیے کہ  $p$  اور  $q$  میں 1 کے علاوہ مختلف مشترک عا نہیں ہے۔

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad , \quad \therefore \quad 2 = \frac{p^2}{q^2} \quad \dots \quad (\text{طرفین کا مربع کرنے پر})$$

$$\therefore \quad 2q^2 = p^2 \quad \dots \quad \therefore \quad p^2 \text{ یہ جفت عدد ہے۔}$$

$\therefore$   $p$  بھی جفت عدد ہے، یعنی 2 یہ  $p$  کا عا ہے۔ (I) ...

$$\therefore \quad p = 2t \quad , \quad \therefore \quad p^2 = 4t^2 \quad t \in I$$

$$\therefore \quad 2q^2 = 4t^2 \quad \dots \quad (\because p^2 = 2q^2) \quad \therefore \quad q^2 = 2t^2$$

$\therefore$   $q^2$  یہ جفت عدد ہے۔

$\therefore$   $q$  یہ جفت عدد ہے۔

$\therefore$  2 یہ  $q$  کا بھی عا ہے۔ (II) ...

بیان (I) اور (II) کی بناء پر 2 یہ  $p$  اور  $q$  دونوں کا مشترک عا ہے۔

یہ تضاد ہے۔ کیوں کہ  $\frac{p}{q}$  میں  $p$  اور  $q$  کا 1 کے علاوہ ایک بھی مشترک عا نہیں ہے۔

$\therefore$   $\sqrt{2}$ ، یہ ناطق عدد ہے۔ یہ فرض کرنا غلط ہے۔

$\therefore$   $\sqrt{2}$ ، یہ غیر ناطق عدد ہے۔

اسی طرح  $\sqrt{3}$ ،  $\sqrt{5}$  غیر ناطق اعداد ہیں۔ بتایا جاسکتا ہے۔ اس کے لیے 3 یا 5 یہ  $n$  کے عا ہوں تب ہی وہ  $n^2$  کے عا ہوتے ہیں۔

اس اصول کا استعمال کیجیے۔

$\sqrt{2}$ ،  $\sqrt{3}$ ،  $\sqrt{5}$  جیسے اعداد عددی خط پر دکھائے جاسکتے ہیں۔

جو عدد عددی خط پر نقطہ سے دکھایا جاسکتا ہے، وہ حقیقی عدد ہوتا ہے۔

مختصر اعدادی خط پر ہر نقطہ کا محدود حقیقی عدد ہوتا ہے اور ہر حقیقی عدد سے منسلک ہونے والا نقطہ عددی خط پر ہوتا ہے۔

ہمیں معلوم ہے کہ ہر ناطق عدد حقیقی عدد ہوتا ہے۔ لیکن  $\sqrt{2}$ ،  $\sqrt{3}$ ،  $-\sqrt{2}$ ،  $\pi$ ،  $3 + \sqrt{2}$  جیسے حقیقی اعداد، ناطق اعداد نہیں ہیں۔ یعنی ہر حقیقی عدد

ناطق عدد نہیں ہوتا۔ اسے دھیان میں رکھیے۔

ہم 2 اور 3 اعداد کا جذر المربع تقسیم کے طریقے سے معلوم کریں گے۔

3 کا جذر المربع

$$\begin{array}{r}
 1.732\dots \\
 1 \overline{) 3.00\ 00\ 00\ 00\dots} \\
 \underline{+1\ -1} \\
 27\ 200 \\
 \underline{+7\ -189} \\
 343\ 1100 \\
 \underline{+3\ -1029} \\
 3462\ 007100 \\
 \underline{+2\ -6924} \\
 3464\ 0176
 \end{array}$$

$$\therefore \sqrt{3} = 1.732\dots$$

2 کا جذر المربع

$$\begin{array}{r}
 1.41421\dots \\
 1 \overline{) 2.00\ 00\ 00\ 00\dots} \\
 \underline{+1\ -1} \\
 24\ 100 \\
 \underline{+4\ -96} \\
 281\ 400 \\
 \underline{+1\ -281} \\
 2824\ 11900 \\
 \underline{+4\ -11296} \\
 28282\ 60400 \\
 \underline{+2\ -56564} \\
 282841\ 0383600
 \end{array}$$

$$\therefore \sqrt{2} = 1.41421\dots$$

یہاں خارج قسمت میں اعشاریہ علامت کے آگے ہندسوں کی تعداد کبھی بھی ختم نہیں ہوتی، یعنی لامحدود ہندسوں کی ترتیب حاصل ہوتی ہے۔ یہاں کوئی بھی ہندسوں کا گروہ یا ہندسہ بار بار نہیں آتا۔ اس لیے یہ عدد کی کسرا عشاریہ صورت غیر متوالی غیر ختم حاصل ہوتی ہے۔

$\sqrt{3}$ ،  $\sqrt{2}$  یہ اعداد غیر ناطق اعداد ہیں۔ اس لیے  $1.732\dots$  اور  $1.4142\dots$  یہ بھی غیر ناطق اعداد ہیں۔ اس بنا پر دھیان دیجیے کہ غیر متوالی غیر ختم کسرا عشاریہ کی صورت میں عدد غیر ناطق ہوتا ہے۔

عدد  $\pi$

عملی کام I :

موٹے دبیر کارڈ پر مختلف نصف قطر کے دائرے بنائیے۔ تین چار دائروں کی شکل کی ٹکیہ کاٹیں۔ ہر ٹکیہ کے کناروں پر دھاگا گھما کر ہر دائروں کی شکل کی ٹکیہ کا قطر اور محیط ناپیے۔ درج ذیل جدول مکمل کیجیے۔

نمبر شمار	نصف قطر	قطر (d)	محیط (c)	نسبت = $\frac{c}{d}$
1	7 سم			
2	8 سم			
3	5.5 سم			

متصلہ جدول کی بناء پر ہمیں سمجھ میں آتا ہے کہ  $\frac{c}{d}$  یہ نسبت ہر مرتبہ تقریباً 3.14 آتی ہے۔ یعنی مستقل رہتی ہے۔ اس نسبت کو  $\pi$  علامت سے ظاہر کرتے ہیں۔

## عملی کام II :

$\pi$  کی تقریباً قیمت معلوم کرنے کے لیے 11 سم، 22 سم اور 33 سم لمبائی کے تار کے ٹکڑے لیجیے۔ ہر تار سے دائرہ بنائیے۔ اُن دائروں کے قطر ناپیے اور ذیل کی جدول مکمل کیجیے۔

دائرہ نمبر	محیط	قطر	محیط اور قطر کی نسبت
1	11 سم		
2	22 سم		
3	33 سم		

کیا محیط اور قطر کی نسبت تقریباً  $\frac{22}{7}$  آتی ہے؟  
اس کی تصدیق کیجیے۔

دائرے کے محیط اور قطر کی نسبت مستقل عدد ہوتی ہے۔ وہ غیر ناطق ہوتا ہے۔ اس عدد کو  $\pi$  علامت سے ظاہر کرتے ہیں۔  $\pi$  کی تقریباً قیمت  $\frac{22}{7}$  یا 3.14 لیتے ہیں۔

عظیم بھارتی ریاضی داں آریہ بھٹ نے 499 عیسوی میں  $\pi$  کی قیمت  $\frac{62832}{20000} = 3.1416$  معلوم کیا۔

ہمیں معلوم ہے کہ  $\sqrt{3}$ ، غیر ناطق عدد ہے کیوں کہ اس عدد کی کسرا عشاریہ کی صورت میں تجویل غیر متوالی غیر مختتم ہے۔ اب  $2 + \sqrt{3}$ ، یہ عدد غیر ناطق عدد ہے یا نہیں۔ معلوم کریں گے۔

فرض کیجیے  $2 + \sqrt{3}$  یہ عدد غیر ناطق عدد نہیں ہے یعنی وہ ناطق عدد ہی ہونا چاہیے۔

اگر  $2 + \sqrt{3}$  ناطق عدد ہے تب فرض کیجیے کہ  $2 + \sqrt{3} = \frac{p}{q}$

$\therefore \sqrt{3} = \frac{p}{q} - 2$  (یہ مساوات حاصل ہوتی ہے۔).....

یہاں بائیں جانب غیر ناطق عدد ہے اور دائیں جانب ناطق عدد ہے۔ یہ تضاد ہے۔

لہذا  $2 + \sqrt{3}$  یہ ناطق عدد نہیں ہے، یعنی غیر ناطق عدد ہے۔ یہ ثابت ہوتا ہے۔

اسی طرح  $2\sqrt{3}$  غیر ناطق عدد ہے۔ دکھایا جاسکتا ہے۔

دونوں ناطق اعداد کی جمع یا ضرب ناطق ہو سکتی ہے۔ اس کی ذیل کے مطابق تصدیق کر سکتے ہیں۔ مثلاً

$$2 + \sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 2,$$

$$2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 6$$

$$4\sqrt{5} \div \sqrt{5} = 4,$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{10},$$

$$(3 + \sqrt{5}) - (\sqrt{5}) = 3,$$

$$2\sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{5}$$

اسے دھیان میں رکھیں



غیر ناطق اعداد کی خصوصیات

- (1) ناطق عدد اور غیر ناطق عدد کی جمع یا تفریق غیر ناطق عدد ہوتی ہے۔
- (2) غیر صفر ناطق عدد اور غیر ناطق عدد کا حاصل ضرب یا خارج قسمت بھی غیر ناطق عدد ہوتا ہے۔
- (3) دو غیر ناطق اعداد کی جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم ناطق عدد یا غیر ناطق عدد ہو سکتی ہے۔



### حقیقی اعداد پر ترتیبی تعلق کی خصوصیات

1. اگر  $a$  اور  $b$  دو حقیقی اعداد ہوں تب ان میں  $a = b$  یا  $a < b$  یا  $a > b$  میں سے کوئی بھی ایک تعلق ہوتا ہے۔
  2. اگر  $a < b$  اور  $b < c$  ہو تب  $a < c$  اگر  $a < b$  ہو تب  $a + c < b + c$  3.
  4. اگر  $a < b$  اور  $c > 0$  ہو تب  $ac < bc$  اور اگر  $c < 0$  ہو تب  $ac > bc$
- ناطق عدد اور غیر ناطق عدد لے کر اوپر دیے ہوئے اصول کی تصدیق کیجیے۔

### منفی عدد کا جذر المربع

- اگر  $\sqrt{a} = b$  ہو تب  $b^2 = a$  ..... (یہ ہمیں معلوم ہے۔)
- اس بناء پر اگر  $x = \sqrt{5}$  ہو تب  $x^2 = 5$  ..... (یہ ہمیں سمجھ میں آتا ہے۔)
- اسی طرح ہمیں یہ معلوم ہے کہ کسی بھی حقیقی عدد کا مربع ہمیشہ مثبت عدد ہوتا ہے۔ یعنی کسی بھی حقیقی عدد کا مربع کبھی بھی منفی نہیں ہوتا۔
- لیکن  $(\sqrt{-5})^2 = -5$
- $\therefore \sqrt{-5}$ ، یہ حقیقی عدد نہیں ہے۔ لہذا منفی حقیقی عدد کے جذر المربع حقیقی عدد نہیں ہوتے۔

### مشقی سیٹ 2.2

- (1) ثابت کیجیے کہ  $4\sqrt{2}$  یہ غیر ناطق عدد ہے۔
  - (2) ثابت کیجیے کہ  $3 + \sqrt{5}$  غیر ناطق عدد ہے۔
  - (3)  $\sqrt{5}$ ،  $\sqrt{10}$  ان اعداد کو عددی خط پر دکھائیے۔
  - (4) ذیل میں دیے ہوئے اعداد کے درمیان کے کوئی بھی تین ناطق اعداد لکھیے۔
- (i) 0.3 اور -0.5      (ii) -2.3 اور -2.33      (iii) 5.2 اور 5.3      (iv) -4.6 اور -4.5



### مثبت ناطق عدد کے جذر Root of positive rational numbers

- اگر  $x^2 = 2$  ہو تب  $x = \sqrt{2}$  یا  $x = -\sqrt{2}$  ہوتا ہے۔ یہ ہمیں معلوم ہے کہ  $\sqrt{2}$  اور  $-\sqrt{2}$  یہ دونوں غیر ناطق اعداد ہیں۔  $\sqrt[3]{7}$ ،  $\sqrt[4]{8}$  جیسے اعداد بھی غیر ناطق ہیں۔
- $n$  مثبت صحیح عدد ہو اور  $x^n = a$  ہو تب ہم کہتے ہیں کہ  $x$  یہ  $a$  کا  $n$  واں جذر ہے۔
- یہ جذر ناطق یا غیر ناطق عدد ہو سکتا ہے۔
- مثال:  $2^5 = 32$ ، اس لیے 32 کا 5 واں جذر 2 ناطق عدد ہے، لیکن  $x^5 = 2$  ہو تب  $x = \sqrt[5]{2}$  یہ غیر ناطق عدد ہے۔

## جذری مقداریں (Surd)

ہمیں معلوم ہے کہ 5 ناطق عدد ہے لیکن  $\sqrt{5}$  ناطق عدد نہیں ہے۔ جس طرح حقیقی اعداد کے جذر المربع یا جذر المکعب ناطق یا غیر ناطق ہو سکتے ہیں۔ اسی طرح ان کا  $n$  واں جذر بھی ناطق یا غیر ناطق ہو سکتے ہیں۔

اگر  $n$ ، یہ 1 سے بڑا صحیح عدد ہو اور 'a' اس مثبت حقیقی عدد کے  $n$  واں جذر کو  $x$  سے دکھائیں تو  $x^n = a$  یا  $\sqrt[n]{a} = x$  لکھتے ہیں۔ اگر  $a$  مثبت ناطق عدد ہو اور  $a$  کا  $n$  واں جذر  $x$  غیر ناطق ہو تو  $x$  جذری مقدار (غیر ناطق عدد کا جذر) کہلاتا ہے۔  $\sqrt[n]{a}$ ، یہ جذری مقدار ہوتی ہے، اس علامت کو جذری علامت (radical sign) کہتے ہیں۔  $n$  کو اس جذری مقدار کا درجہ (order of the surd) کہتے ہیں اور  $a$  کو جذری عدد (radicand) کہتے ہیں۔

(1) فرض کیجیے  $a = 7$ ،  $n = 3$  ہوتی ہے  $\sqrt[3]{7}$  جذری مقدار ہے۔ کیوں کہ  $\sqrt[3]{7}$  غیر ناطق ہے۔

(2) فرض کیجیے  $a = 27$  اور  $n = 3$  ہوتی ہے  $\sqrt[3]{27} = 3$  یہ غیر ناطق عدد نہیں ہے اس لیے  $\sqrt[3]{27}$  جذری مقدار نہیں ہے۔

(3)  $\sqrt[3]{8}$ ، کیا یہ جذری مقدار ہے؟

فرض کیجیے  $\sqrt[3]{8} = p$ ،  $p^3 = 8$ ،  $\therefore$  کس عدد کا مکعب 8 ہے؟

ہمیں معلوم ہے کہ 2 کا مکعب 8 ہے۔

$\sqrt[3]{8}$  میں  $a = 8$ ، یہ ناطق عدد ہے۔ یہاں  $n = 3$ ، یہ مثبت صحیح عدد ہے لیکن  $\sqrt[3]{8}$  یہ عدد غیر ناطق نہیں ہے۔ کیوں کہ 8 کا جذر المکعب 2 ہے۔  $\therefore \sqrt[3]{8}$  جذری مقدار نہیں ہے۔

(4) اب  $\sqrt[4]{8}$  پر غور کریں گے۔

یہاں  $a = 8$ ، جذری مقدار کا درجہ  $n = 4$  ہے۔ لیکن 8، یہ عدد کسی بھی ناطق عدد کی چوتھی قوت نہیں ہے۔ یعنی  $\sqrt[4]{8}$  یہ غیر ناطق عدد ہے۔  $\therefore \sqrt[4]{8}$  جذری مقدار ہے۔

اس سال ہم صرف 2 درجہ والی یعنی  $\sqrt{3}$ ،  $\sqrt{7}$ ،  $\sqrt{42}$  وغیرہ جذری مقداروں پر غور کرنے والے ہیں۔

دو درجہ والی جذری مقداروں کو مربعی جذری مقدار کہتے ہیں۔

## جذری مقداروں کی مختصر ترین صورت

(i)  $\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$  کبھی کبھی جذری مقداروں کو مختصر ترین صورت دی جاتی ہے۔ مثلاً

(ii)  $\sqrt{98} = \sqrt{49 \times 2} = \sqrt{49} \times \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$ ،  $\sqrt{3}$ ،  $\sqrt{5}$ ، .... جیسی کچھ جذری مقداروں کی مختصر ترین صورت میں جذری مقداریں ہیں۔ ان کی مزید مختصر صورت نہیں دی جاسکتی۔

## مشابہ جذری مقداریں (Similar or like surds)

$\sqrt{2}$ ،  $-3\sqrt{2}$ ،  $\frac{4}{5}\sqrt{2}$  یہ کچھ مشابہ جذری مقداریں ہیں۔ اگر  $p$  اور  $q$  ناطق اعداد ہوں تب  $p\sqrt{a}$ ،  $q\sqrt{a}$  کو مشابہ جذری مقداریں

کہتے ہیں۔ دو جذری مقداروں کو مشابہ ہونے کے لیے ان کا درجہ مساوی ہونا چاہیے۔ اسی طرح جذری عدد بھی مساوی ہونا چاہیے۔

$\sqrt{45}$  اور  $\sqrt{80}$  ان جذری مقداروں کا درجہ 2 ہے، یعنی ان کا درجہ مساوی ہے۔ لیکن جذری اعداد مساوی نہیں ہیں۔ اس لیے یہ جذری مقداریں مشابہ نہیں ہیں ایسا دکھائی دیتا ہے۔ ان جذری مقداروں کو مختصر ترین صورت لکھیں گے۔

$$\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5} \quad \text{اور} \quad \sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = \sqrt{16} \times \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

یہاں  $3\sqrt{5}$  اور  $4\sqrt{5}$  مشابہ جذری مقداریں ہیں۔ لہذا  $\sqrt{45}$  اور  $\sqrt{80}$  جذری مقداروں کی مختصر ترین صورت مشابہ جذری مقداریں ہیں۔

اسے دھیان میں رکھیں



مختصر ترین صورت میں جذری مقداروں کا درجہ اور جذری عدد مساوی ہوں تب ہی ان جذری مقداروں کو مشابہ جذری مقداریں کہتے ہیں۔

آئیے سمجھ لیں



جذری مقداروں کا موازنہ (Comparison of surds)

فرض کیجیے  $a$ ،  $b$  یہ اور  $k$  مثبت حقیقی اعداد ہیں۔ تب  $a < b$  کی بنا پر  $ak < bk$  حاصل ہوتا ہے۔

$$\therefore a^2 < ab \quad \text{اسی طرح} \quad ab < b^2 \quad \text{یعنی} \quad a^2 < ab < b^2, \quad \therefore a^2 < b^2$$

اس کے برعکس  $a^2 < b^2$  ہو تب  $a < b$  ہے کیوں کہ  $a > b$  ہو تب  $a^2 > b^2$

اگر  $a = b$  ہو تب  $a^2 = b^2$ ، اور اگر  $a > b$  کی بناء پر  $a^2 > b^2$  حاصل ہوتا ہے۔

اس بناء پر اگر  $a < b$  ہو تب  $a^2 < b^2$  اور اگر  $a^2 < b^2$  ہو تب  $a < b$

یہاں  $a$  اور  $b$ ، حقیقی اعداد ہونے کی وجہ سے وہ ناطق عدد یا جذری مقدار ہو سکتے ہیں۔

اس کا استعمال کر کے جذری مقداروں میں چھوٹا بڑا پن کی جانچ کی جاسکتی ہے۔

(i)  $6\sqrt{2}$ ،  $5\sqrt{5}$

$$\sqrt{36} \times \sqrt{2} \quad ? \quad \sqrt{25} \times \sqrt{5}$$

$$\sqrt{72} \quad ? \quad \sqrt{125}$$

$$\text{لیکن} \quad , \quad 72 \quad < \quad 125$$

$$\therefore 6\sqrt{2} \quad < \quad 5\sqrt{5}$$

یا

$$(6\sqrt{2})^2 \quad \square \quad (5\sqrt{5})^2,$$

$$72 < 125$$

$$\therefore 6\sqrt{2} \quad < \quad 5\sqrt{5}$$

(ii)  $8\sqrt{3}$ ،  $\sqrt{192}$

$$\sqrt{64} \times \sqrt{3} \quad ? \quad \sqrt{192}$$

$$\sqrt{192} \quad ? \quad \sqrt{192}$$

$$\text{لیکن} \quad , \quad 192 \quad = \quad 192$$

$$\therefore \sqrt{192} \quad = \quad \sqrt{192}$$

$$\therefore 8\sqrt{3} \quad = \quad \sqrt{192}$$

(iii)  $7\sqrt{2}$ ،  $5\sqrt{3}$

$$\sqrt{49} \times \sqrt{2} \quad ? \quad \sqrt{25} \times \sqrt{3}$$

$$\sqrt{98} \quad ? \quad \sqrt{75}$$

$$\text{لیکن} \quad , \quad 98 \quad > \quad 75$$

$$\therefore 7\sqrt{2} \quad > \quad 5\sqrt{3}$$

یا

$$(7\sqrt{2})^2 \quad \square \quad (5\sqrt{3})^2,$$

$$98 > 75$$

$$\therefore 7\sqrt{2} \quad > \quad 5\sqrt{3}$$

## مشابہ جذری مقداروں پر عمل (Operations on like surds)

مشابہ جذری مقداروں پر جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم کا عمل کر سکتے ہیں۔



غور کیجیے

$$\sqrt{9+16} \stackrel{?}{=} \sqrt{9} + \sqrt{16}$$

$$\sqrt{100+36} \stackrel{?}{=} \sqrt{100} + \sqrt{36}$$

مثال (1) : مختصر کیجیے :  $7\sqrt{3} + 29\sqrt{3}$

$$7\sqrt{3} + 29\sqrt{3} = (7 + 29)\sqrt{3} = 36\sqrt{3} \quad \text{حل :}$$

مثال (2) : مختصر کیجیے :  $7\sqrt{3} - 29\sqrt{3}$

$$7\sqrt{3} - 29\sqrt{3} = (7 - 29)\sqrt{3} = -22\sqrt{3} \quad \text{حل :}$$

مثال (3) : مختصر کیجیے :  $\sqrt{8} + \frac{1}{2}\sqrt{8} - 5\sqrt{8}$

$$13\sqrt{8} + \frac{1}{2}\sqrt{8} - 5\sqrt{8} = \left(13 + \frac{1}{2} - 5\right)\sqrt{8} = \left(\frac{26+1-10}{2}\right)\sqrt{8} \quad \text{حل :}$$

$$= \frac{17}{2}\sqrt{8} = \frac{17}{2}\sqrt{4 \times 2}$$

$$= \frac{17}{2} \times 2\sqrt{2} = 17\sqrt{2}$$

مثال (4) : مختصر کیجیے :  $8\sqrt{5} + \sqrt{20} - \sqrt{125}$

$$8\sqrt{5} + \sqrt{20} - \sqrt{125} = 8\sqrt{5} + \sqrt{4 \times 5} - \sqrt{25 \times 5} \quad \text{حل :}$$

$$= 8\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 5\sqrt{5}$$

$$= (8 + 2 - 5)\sqrt{5}$$

$$= 5\sqrt{5}$$

مثال (5) : جذری مقداروں کا ضرب کیجیے :  $\sqrt{7} \times \sqrt{42}$

$$\sqrt{7} \times \sqrt{42} = \sqrt{7 \times 42} = \sqrt{7 \times 7 \times 6} = 7\sqrt{6} \quad \text{حل : (} 7\sqrt{6} \text{ غیر ناطق عدد ہے۔) ...}$$

مثال (6) : جذری مقداروں کی تقسیم کیجیے :  $\sqrt{125} \div \sqrt{5}$

$$\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{125}{5}} = \sqrt{25} = 5 \quad \text{حل : (5 ناطق عدد ہے۔) ...}$$

مثال (7) : حل کیجیے :  $\sqrt{50} \times \sqrt{18}$

$$\sqrt{50} \times \sqrt{18} = \sqrt{25 \times 2} \times \sqrt{9 \times 2} = 5\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 15 \times 2 = 30$$

دو جذری مقداروں کا حاصل ضرب یا خارج قسمت ناطق عدد ہو سکتا ہے۔ یہ مذکورہ بالا مثالوں سے سمجھ میں آتا ہے۔

## جذری مقداروں کو ناطق بنانا (Rationalization of Surds)

دو جذری مقداروں کا حاصل ضرب ناطق عدد آتا ہو تب ان میں سے کسی بھی ایک جذری مقدار کو دوسری جذری مقدار کا ناطق کار جز ضربی (Rationalizing Factor) کہتے ہیں۔

مثال (1):  $\sqrt{2}$ ، اس جذری مقدار کو  $\sqrt{2}$  سے ضرب دیں تو  $\sqrt{2 \times 2} = \sqrt{4} = 2$  حاصل ہوتا ہے۔ یہ ناطق عدد ہے۔

$\therefore \sqrt{2}$  کا ناطق کار جز ضربی  $\sqrt{2}$  ہے۔

مثال (2): ضرب کیجیے:  $\sqrt{2} \times \sqrt{8}$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4 \quad \dots \text{ (یہ ناطق عدد ہے۔)}$$

$\therefore \sqrt{2}$  کا  $\sqrt{8}$  ناطق کار جز ضربی ہے۔

اسی طرح  $8\sqrt{2}$  یہ جذری مقدار بھی  $\sqrt{2}$  کا ناطق کار جز ضربی ہے۔

$$\sqrt{2} \times 8\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 8 \times 2 = 16 \quad \text{کیوں کہ}$$

کیا  $\sqrt{6}$ ،  $\sqrt{16}$ ،  $\sqrt{50}$  یہ  $\sqrt{2}$  کے ناطق کار جز ضربی ہیں؟ اس کی تصدیق کیجیے۔

### اسے دھیان میں رکھیں



دی ہوئی جذری مقدار کا ناطق کار جز ضربی صرف ایک ہی نہیں ہوتا۔ کوئی جذری مقدار، دی ہوئی جذری مقدار کی ناطق کار جز ضربی ہو تب اسے غیر صفر ناطق عدد سے ضرب دے کر حاصل ہونے والی جذری مقدار بھی دی ہوئی جذری مقدار کی ناطق کار جز ضربی ہوتی ہے۔

مثال (3):  $\sqrt{27}$  کا ناطق کار جز ضربی لکھیے۔

$$\text{حل: (یہ ناطق عدد ہے۔)} \dots \therefore 3\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3 \times 3 = 9 \quad , \quad \sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = 3\sqrt{3}$$

$\sqrt{3}$  یہ  $\sqrt{27}$  جذری مقدار کا ناطق کار جز ضربی ہے۔

$$\text{غور کیجیے کہ، } \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \text{، یعنی، } 3\sqrt{3} \times 3\sqrt{3} = 9 \times 3 = 27$$

یعنی  $\sqrt{27}$ ، اس دی ہوئی جذری مقدار کا  $3\sqrt{3}$  بھی ناطق کار جز ضربی ہے۔ اس کے علاوہ  $4\sqrt{3}$ ،  $7\sqrt{3}$  ایسے کئی ناطق کار جز ضربی

ہو سکتے ہیں۔ ان میں سے  $\sqrt{3}$  سب سے مختصر ترین ناطق کار جز ضربی ہے۔

مثال (4):  $\frac{1}{\sqrt{5}}$  کے نسب نما کو ناطق بنائیے۔

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

حل: (شمار کنندہ اور نسب نما کو  $\sqrt{5}$  سے ضرب دیا۔) ...

مثال (5):  $\frac{3}{2\sqrt{7}}$  کے نسب نما کو ناطق بنائیے۔

$$\frac{3}{2\sqrt{7}} = \frac{3}{2\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{2 \times 7} = \frac{3\sqrt{7}}{14}$$

حل: (یہاں  $2\sqrt{7}$  کو  $\sqrt{7}$  سے ضرب دینا کافی ہے۔) ...



نسب نما کو ناطق بنانے کے لیے ناطق کار جز ضربی کا استعمال ہوتا ہے۔  
کسی بھی عدد کا نسب نما ناطق عدد ہونا سہولت بخش ہوتا ہے اس لیے نسب نما کو ناطق بناتے ہیں۔

### مشقی سیٹ 2.3

(1) ذیل کی جذری مقداروں کا درجہ بتائیے۔

(i)  $\sqrt[3]{7}$  (ii)  $5\sqrt{12}$  (iii)  $\sqrt[4]{10}$  (iv)  $\sqrt{39}$  (v)  $\sqrt[3]{18}$

(2) درج ذیل میں سے کون سا عدد جذری مقدار ہے۔ بتائیے؟

(i)  $\sqrt[3]{51}$  (ii)  $\sqrt[4]{16}$  (iii)  $\sqrt[5]{81}$  (iv)  $\sqrt{256}$  (v)  $\sqrt[3]{64}$  (vi)  $\sqrt{\frac{22}{7}}$

(3) درج ذیل جوڑیوں میں سے کون سی جذری مقدار کی جوڑی مشابہ اور کون سی جوڑی غیر مشابہ ہے؟ پہچائیے۔

(i)  $\sqrt{52}$ ,  $5\sqrt{13}$  (ii)  $\sqrt{68}$ ,  $5\sqrt{3}$  (iii)  $4\sqrt{18}$ ,  $7\sqrt{2}$

(iv)  $19\sqrt{12}$ ,  $6\sqrt{3}$  (v)  $5\sqrt{22}$ ,  $7\sqrt{33}$  (vi)  $5\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{75}$

(4) درج ذیل جذری مقداروں کو مختصر کیجیے۔

(i)  $\sqrt{27}$  (ii)  $\sqrt{50}$  (iii)  $\sqrt{250}$  (iv)  $\sqrt{112}$  (v)  $\sqrt{168}$

(5) درج ذیل اعداد کے درمیان چھوٹا۔ بڑا پن طے کیجیے۔

(i)  $7\sqrt{2}$ ,  $5\sqrt{3}$  (ii)  $\sqrt{247}$ ,  $\sqrt{274}$  (iii)  $2\sqrt{7}$ ,  $\sqrt{28}$

(iv)  $5\sqrt{5}$ ,  $7\sqrt{2}$  (v)  $4\sqrt{42}$ ,  $9\sqrt{2}$  (vi)  $5\sqrt{3}$ ,  $9$  (vii)  $7$ ,  $2\sqrt{5}$

(6) مختصر کیجیے۔

(i)  $5\sqrt{3} + 8\sqrt{3}$  (ii)  $9\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + \sqrt{125}$

(iii)  $7\sqrt{48} - \sqrt{27} - \sqrt{3}$  (iv)  $\sqrt{7} - \frac{3}{5}\sqrt{7} + 2\sqrt{7}$

(7) ضرب کیجیے اور مختصر کیجیے۔

(i)  $3\sqrt{12} \times \sqrt{18}$  (ii)  $3\sqrt{12} \times 7\sqrt{15}$

(iii)  $3\sqrt{8} \times \sqrt{5}$  (iv)  $5\sqrt{8} \times 2\sqrt{8}$

(8) تقسیم کیجیے اور اُسے مختصر کر کے لکھیے۔

(i)  $\sqrt{98} \div \sqrt{2}$  (ii)  $\sqrt{125} \div \sqrt{50}$  (iii)  $\sqrt{54} \div \sqrt{27}$  (iv)  $\sqrt{310} \div \sqrt{5}$

(9) نسب نما کو ناطق بنائیے۔

(i)  $\frac{3}{\sqrt{5}}$  (ii)  $\frac{1}{\sqrt{14}}$  (iii)  $\frac{5}{\sqrt{7}}$  (iv)  $\frac{6}{9\sqrt{3}}$  (v)  $\frac{11}{\sqrt{3}}$

آئیے ذرا یاد کریں



ہمیں معلوم ہے کہ

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \text{ جہاں } b > 0, a > 0$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 ; (\sqrt{a})^2 = a ; \sqrt{a^2} = a$$

ضرب کیجیے :

$$\begin{aligned} & (\sqrt{3} - \sqrt{2})(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}) \quad \text{مثال (2):} \\ = & \sqrt{3}(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}) - \sqrt{2}(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}) \\ = & \sqrt{3} \times 2\sqrt{3} - \sqrt{3} \times 3\sqrt{2} - \sqrt{2} \times 2\sqrt{3} + \sqrt{2} \times 3\sqrt{2} \\ = & 2 \times 3 - 3\sqrt{6} - 2\sqrt{6} + 3 \times 2 \\ = & 6 - 5\sqrt{6} + 6 \\ = & 12 - 5\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{2}(\sqrt{8} + \sqrt{18}) \quad \text{مثال (1):} \\ = & \sqrt{2 \times 8} + \sqrt{2 \times 18} \\ = & \sqrt{16} + \sqrt{36} \\ = & 4 + 6 \\ = & 10 \end{aligned}$$

آئیے سمجھ لیں



مربعی جذری مقدار کی دورکنی صورت (Binomial quadratic surd)

•  $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ ؛  $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ ؛  $\frac{3}{4} + \sqrt{5}$  یہ مربعی جذری مقداروں کی دورکنی صورت ہے۔ اسی طرح  $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ ،  $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ ،  $\frac{3}{4} - \sqrt{5}$  بھی مربعی جذری مقداروں کی دورکنی صورت ہے۔

درج ذیل ضرب کا مطالعہ کیجیے۔

- $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$
- $(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2 = 5 - 3 = 2$
- $(\sqrt{3} + \sqrt{7})(\sqrt{3} - \sqrt{7}) = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{7})^2 = 3 - 7 = -4$
- $(\frac{3}{2} + \sqrt{5})(\frac{3}{2} - \sqrt{5}) = (\frac{3}{2})^2 - (\sqrt{5})^2 = \frac{9}{4} - 5 = \frac{9-20}{4} = -\frac{11}{4}$

یہ دورکنی جذری مقداروں کی جوڑی کا حاصل ضرب ناطق عدد ہے۔ ایسی دورکنی جذری مقداروں کی جوڑیوں کو مزدوج جوڑیاں کہتے ہیں۔

دورکنی جذری مقدار اور اس کی مزدوج جوڑی، یہ دونوں اعداد ایک دوسرے کے ناطق کار جز ضربی ہوتے ہیں۔

$\sqrt{5} - \sqrt{3}$  یا  $\sqrt{3} - \sqrt{5}$  ان میں سے ہر ایک دورکنی جذری مقدار،  $\sqrt{5} + \sqrt{3}$  دورکنی جذری مقدار کی مزدوج جوڑی ہے۔

اسی طرح  $7 + \sqrt{3}$  کی مزدوج جوڑی  $7 - \sqrt{3}$  ہے۔

## اسے دھیان میں رکھیں

دورکنی جذری مقداروں کی مزدوج جوڑی کے ارکان کا حاصل ضرب ہمیشہ ناطق عدد آتا ہے۔

## آئیے سمجھ لیں

### نسب نما کو ناطق بنانا (Rationalization of the denominator)

دورکنی مرلجی جذری مقدار اور اس کی مزدوج جوڑی کا حاصل ضرب ناطق عدد ہوتا ہے۔ اس خصوصیت کا استعمال کر کے، نسب نما کی دورکنی جذری مقدار والے عدد کے نسب نما کو ناطق بنایا جاسکتا ہے۔

مثال (1) :  $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$  اس عدد کے نسب نما کو ناطق بنائیے۔

حل :  $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ ، اس دورکنی جذری مقدار کی مزدوج جوڑی  $\sqrt{5}+\sqrt{3}$  ہے۔

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$$

مثال (2) :  $\frac{8}{3\sqrt{2}+\sqrt{5}}$  اس عدد کے نسب نما کو ناطق بنائیے۔

حل :  $3\sqrt{2}+\sqrt{5}$ ، اس دورکنی جذری مقدار کی مزدوج جوڑی  $3\sqrt{2}-\sqrt{5}$  ہے۔

$$\begin{aligned} \frac{8}{3\sqrt{2}+\sqrt{5}} &= \frac{8}{3\sqrt{2}+\sqrt{5}} \times \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}{3\sqrt{2}-\sqrt{5}} \\ &= \frac{8(3\sqrt{2}-\sqrt{5})}{(3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{5})^2} \\ &= \frac{8 \times 3\sqrt{2} - 8\sqrt{5}}{9 \times 2 - 5} = \frac{24\sqrt{2} - 8\sqrt{5}}{18-5} = \frac{24\sqrt{2} - 8\sqrt{5}}{13} \end{aligned}$$

## مشقی سیٹ 2.4

(1) ضرب کیجیے۔

(i)  $\sqrt{3}(\sqrt{7}-\sqrt{3})$       (ii)  $(\sqrt{5}-\sqrt{7})\sqrt{2}$       (iii)  $(3\sqrt{2}-\sqrt{3})(4\sqrt{3}-\sqrt{2})$

(2) درج ذیل اعداد کے نسب نماؤں کو ناطق بنائیے۔

(i)  $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$       (ii)  $\frac{3}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$       (iii)  $\frac{4}{7+4\sqrt{3}}$       (iv)  $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$



## مطلق قیمت (Absolute Value)

$x$ ، حقیقی عدد ہو تب  $x$  کی مطلق قیمت (Absolute Value) یا عددی خط پر صفر سے اُس کا فاصلہ  $|x|$  لکھتے ہیں۔  $|x|$  کو  $x$  کی مطلق قیمت پڑھتے۔

مطلق قیمت کی تعریف ذیل کے مطابق کرتے ہیں۔

اگر  $x > 0$  ہو تب  $|x| = x$  یعنی اگر  $x$  مثبت عدد ہو تب  $x$  کی مطلق قیمت  $x$  ہوتی ہے۔

اگر  $x = 0$  ہو تب  $|x| = 0$  یعنی اگر  $x$  صفر ہو تب  $x$  کی مطلق قیمت صفر ہی ہوتی ہے۔

اگر  $x < 0$  ہو تب  $|x| = -x$  یعنی اگر  $x$  منفی ہو تب  $x$  کی مطلق قیمت  $x$  کے متضاد عدد کے مساوی ہوتی ہے۔

$$\text{مثال (1): } |0| = 0, |-3| = (-3) = 3, |3| = 3$$

کسی بھی حقیقی عددی مطلق قیمت منفی نہیں ہوتی۔

مثال (2): درج ذیل کی قیمت معلوم کیجیے۔

$$(i) |9-5| = |4| = 4$$

$$(ii) |8-13| = |-5| = 5$$

$$(iii) |8|-|-3| = 5$$

$$(iv) |8| \times |4| = 8 \times 4 = 32$$

مثال (3): حل کیجیے۔  $|x-5| = 2$

$$|x-5| = 2 \quad \therefore x-5 = +2 \quad \text{یا} \quad x-5 = -2$$

$$\therefore x = 2+5 \quad \text{یا} \quad x = -2+5$$

$$\therefore x = 7 \quad \text{یا} \quad x = 3$$

## مشقی سیٹ 2.5

(1) قیمت معلوم کیجیے۔

$$(i) |15-2|$$

$$(ii) |4-9|$$

$$(iii) |7| \times |-4|$$

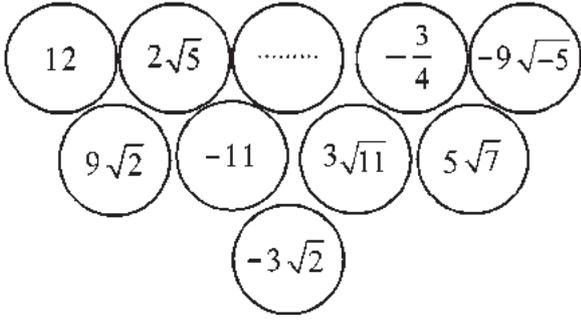
(2) حل کیجیے۔

$$(i) |3x-5| = 1$$

$$(ii) |7-2x| = 5$$

$$(iii) \left| \frac{8-x}{2} \right| = 5$$

$$(iv) \left| 5 + \frac{x}{4} \right| = 5$$

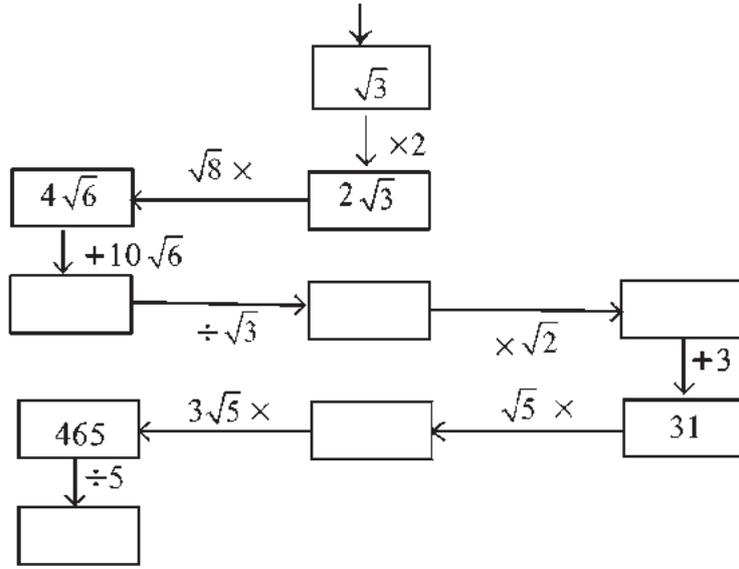


عملی کام I :

متصلہ شکل میں کارڈ پر کچھ حقیقی اعداد لکھے ہوئے ہیں۔ ان کا استعمال کر کے جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم کی دو-دو مثالیں بنائیے اور حل کیجیے۔

عملی کام II :

شروع (Start)



مجموعہ سوالات 2

(1) درج ذیل سوالوں کے کثیر متبادل جواب میں سے صحیح متبادل جواب تلاش کیجیے۔

(i) درج ذیل میں سے غیر ناطق عدد کون سا؟

- (A)  $\sqrt{\frac{16}{25}}$  (B)  $\sqrt{5}$  (C)  $\frac{3}{9}$  (D)  $\sqrt{196}$

(ii) درج ذیل میں سے غیر ناطق عدد کون سا؟

- (A) 0.17 (B)  $1.\overline{513}$  (C)  $0.27\overline{46}$  (D) 0.101001000.....

(iii) درج ذیل میں سے کس عدد کی کسرا عشاریہ صورت غیر متوالی غیر ختم دہرانے والی ہوگی؟

- (A)  $\frac{2}{5}$  (B)  $\frac{3}{16}$  (C)  $\frac{3}{11}$  (D)  $\frac{137}{25}$

(iv) عددی خط پر ہر نقطہ کیا ظاہر کرتا ہے؟

- (A) طبعی عدد (B) غیر ناطق عدد (C) ناطق عدد (D) حقیقی عدد

(v) 10.4 اس عدد کی ناطق صورت کون سی ہے؟

- (A)  $\frac{4}{9}$  (B)  $\frac{40}{9}$  (C)  $\frac{3.6}{9}$  (D)  $\frac{36}{9}$

(vi) اگر  $n$  کا مربع عدد نہیں ہو تب  $\sqrt{n}$ ، درج ذیل میں سے کون سا عدد ہوگا؟

- (A) طبعی عدد (B) ناطق عدد (C) غیر ناطق عدد (D) یہ تینوں متبادل ہو سکتے ہیں

(vii) درج ذیل میں سے کون سا عدد جذری مقدار نہیں ہے؟

- (A)  $\sqrt{7}$  (B)  $\sqrt[3]{17}$  (C)  $\sqrt[3]{64}$  (D)  $\sqrt{193}$

(viii) اس جذری مقدار کا درجہ کتنا ہے؟

- (A) 3 (B) 2 (C) 6 (D) 5

(ix) اس دو کئی جذری مقدار کی مزدوج جوڑی کون سی ہے؟

- (A)  $-2\sqrt{5} + \sqrt{3}$  (B)  $-2\sqrt{5} - \sqrt{3}$  (C)  $2\sqrt{3} - \sqrt{5}$  (D)  $\sqrt{3} + 2\sqrt{5}$

(x)  $|12 - (13 + 7) \times 4|$  کی قیمت کتنی ہے؟

- (A) -68 (B) 68 (C) -32 (D) 32

(2) درج ذیل اعداد کو  $\frac{p}{q}$  کی صورت میں لکھیے۔

- (i) 0.555 (ii)  $29.\overline{568}$  (iii) 9.315 315 ... (iv) 357.417417... (v)  $30.\overline{219}$

(3) درج ذیل اعداد کو کسرا عشریہ کی صورت میں لکھیے۔

- (i)  $\frac{-5}{7}$  (ii)  $\frac{9}{11}$  (iii)  $\sqrt{5}$  (iv)  $\frac{121}{13}$  (v)  $\frac{29}{8}$

(4) دکھائیے کہ  $5 + \sqrt{7}$  غیر ناطق عدد ہے۔

(5) درج ذیل جذری مقداروں کو مختصر کیجیے۔

- (i)  $\frac{3}{4}\sqrt{8}$  (ii)  $-\frac{5}{9}\sqrt{45}$

(6) درج ذیل جذری مقداروں کا مختصر ترین ناطق کار جز ضربی لکھیے۔

- (i)  $\sqrt{32}$  (ii)  $\sqrt{50}$  (iii)  $\sqrt{27}$  (iv)  $\frac{3}{5}\sqrt{10}$  (v)  $3\sqrt{72}$  (vi)  $4\sqrt{11}$

(7) مختصر کیجیے۔

- (i)  $\frac{4}{7}\sqrt{147} + \frac{3}{8}\sqrt{192} - \frac{1}{5}\sqrt{75}$  (ii)  $5\sqrt{3} + 2\sqrt{27} + \frac{1}{\sqrt{3}}$  (iii)  $\sqrt{216} - 5\sqrt{6} + \sqrt{294} - \frac{3}{\sqrt{6}}$

- (iv)  $4\sqrt{12} - \sqrt{75} - 7\sqrt{48}$  (v\*)  $2\sqrt{48} - \sqrt{75} - \frac{1}{\sqrt{3}}$

(8) نسب نما کو ناطق بنائیے۔

- (i)  $\frac{1}{\sqrt{5}}$  (ii)  $\frac{2}{3\sqrt{7}}$  (iii)  $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$  (iv)  $\frac{1}{3\sqrt{5}+2\sqrt{2}}$  (v)  $\frac{12}{4\sqrt{3}-\sqrt{2}}$





# کثیررکنی Polynomials

3

آئیے، سیکھیں



- کثیررکنی کا درجہ
- کثیررکنیوں پر عمل
- کثیررکنی کی تعریف
- ترکیبی تقسیم
- کثیررکنی کی قیمت
- مسئلہ باقی

آئیے، بحث کریں



یہ تمام الجبری عبارتیں ہیں۔  $m^2 + 2n^3 - \sqrt{3}m^5, p^3 - \frac{1}{2}p^2 + p$ ، 6

استاد : عزیز طلبہ،  $m^2 + 2n^3 - \sqrt{3}m^5, p^3 - \frac{1}{2}p^2 + p$ ، 6 ہر الجبری عبارت سے ایک ایک رکن لیجیے۔ اس رکن میں متغیروں کی قوت بتائیے۔

مادھوری :  $p^3 - \frac{1}{2}p^2 + p$  اس عبارت میں ارکان کے متغیروں کی قوت بالترتیب 1, 2, 3 ہیں۔

دویک : سر،  $m^2 + 2n^3 - \sqrt{3}m^5$  اس عبارت میں ارکان کے متغیروں کی قوت بالترتیب 2, 3, 5 ہیں۔

روہت : سر، 6 اس عبارت میں متغیر نہیں ہے۔ یہاں  $6 = 6 \times 1 = 6 \times x^0$  لکھ سکتے ہیں، اس لیے 6 اس عبارت میں متغیر کی قوت 0 ہے۔

استاد : یعنی مذکورہ بالا سب عبارتوں میں متغیروں کی قوت مثبت صحیح عدد یا صفر یعنی مکمل اعداد ہیں۔

جس الجبری عبارت میں متغیروں کی قوت مکمل اعداد ہوتی ہیں۔ اس عبارت کو کثیررکنی (Polynomials) کہتے ہیں۔ 6 بھی کثیررکنی ہے۔

6، -7، 0،  $\frac{1}{2}$ ،  $\sqrt{3}$  وغیرہ اعداد کو مستقل کثیررکنی (Constant Polynomials) کہتے ہیں۔

کیا  $\sqrt{y} + 5$  اور  $\frac{1}{y} - 3$  یہ کثیررکنی ہیں؟

سارا : سر،  $\sqrt{y} + 5$  یہ کثیررکنی نہیں ہے۔ کیوں کہ  $\sqrt{y} + 5 = y^{\frac{1}{2}} + 5$  اس میں  $y$  کی قوت  $\frac{1}{2}$  ہے جو مکمل عدد نہیں ہے۔

جان : سر،  $\frac{1}{y} - 3$  یہ بھی کثیررکنی نہیں ہے۔ کیوں کہ  $\frac{1}{y} - 3 = y^{-1} - 3$ ، یہاں  $y$  کی قوت -1 ہے، جو مکمل عدد نہیں ہے۔

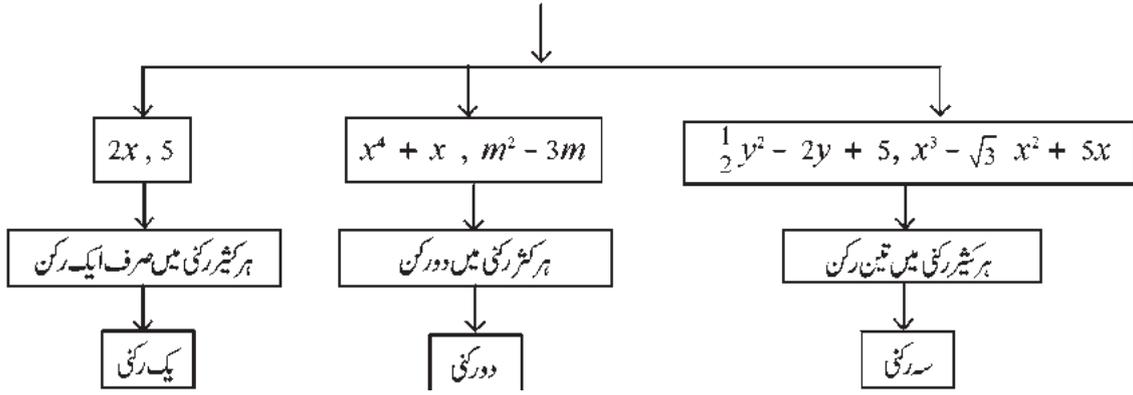
استاد : ایسی کوئی بھی پانچ الجبری عبارت لکھیے جو کثیررکنی نہیں ہے۔ وہ کثیررکنی کیوں نہیں ہے؟ وضاحت کیجیے۔

درج ذیل سوالات کے جوابات مختلف مثالیں دے کر اور ان پر بحث کر کے معلوم کیجیے۔

• کیا ہر الجبری عبارت کثیررکنی ہوتی ہے؟

• کیا ہر کثیررکنی الجبری عبارت ہوتی ہے؟

کثیررکنیوں کی قسمیں (ارکان کی تعداد کی لحاظ سے)



ایک متغیری کثیررکنی کو اس میں موجود متغیر کے لحاظ سے  $p(x)$ ،  $q(m)$ ،  $r(y)$  اس طرح ظاہر کرتے ہیں۔

$$\text{مثلاً } 3 - x^3 + 5x + 2x^2 = p(x) \text{، } m^2 + \frac{1}{2}m - 7 = q(m) \text{، } y^2 + 5 = r(y)$$

آئیے سمجھ لیں



ایک متغیری کثیررکنی کا درجہ (Degree of a polynomial in one variable)

استاد :  $2x^7 - 5x + 9$  اس کثیررکنی میں متغیر کی سب سے بڑی قوت کون سی ہے؟

چیجا : سر، سب سے بڑی قوت 7 ہے۔

استاد : ایک متغیری کثیررکنی میں متغیر کی سب سے بڑی قوت کو اس کثیررکنی کا درجہ کہتے ہیں۔

پھر بتائیے تو، اوپر دی ہوئی کثیررکنی کا درجہ کتنا ہے؟

اشوک : سر،  $2x^7 - 5x + 9$  اس کثیررکنی کا درجہ 7 ہے۔

استاد : 10، اس کثیررکنی کا درجہ کتنا ہے؟

رادھا :  $10 = 10 \times 1 = 10 \times x^0$  لہذا کثیررکنی 10 کا درجہ '0' ہے۔

استاد : 10 کی طرح کسی بھی غیر صفر مستقل کثیررکنی کا درجہ '0' ہوتا ہے۔

صفر کثیررکنی کا درجہ طے نہیں کیا جاسکتا۔

ایک سے زائد متغیروں والی کثیررکنی کا درجہ

کثیررکنی میں ہر رکن میں موجود متغیروں کی قوتوں کی جو جمع سب سے زیادہ ہوتی ہے، اس جمع کو اس کثیررکنی کا درجہ کہتے ہیں۔

مثال :  $3m^3n^6 + 7m^2n^3 - mn$  یہ دو متغیروں والی کثیررکنی ہے۔ اس کثیررکنی کا درجہ 9 ہے۔

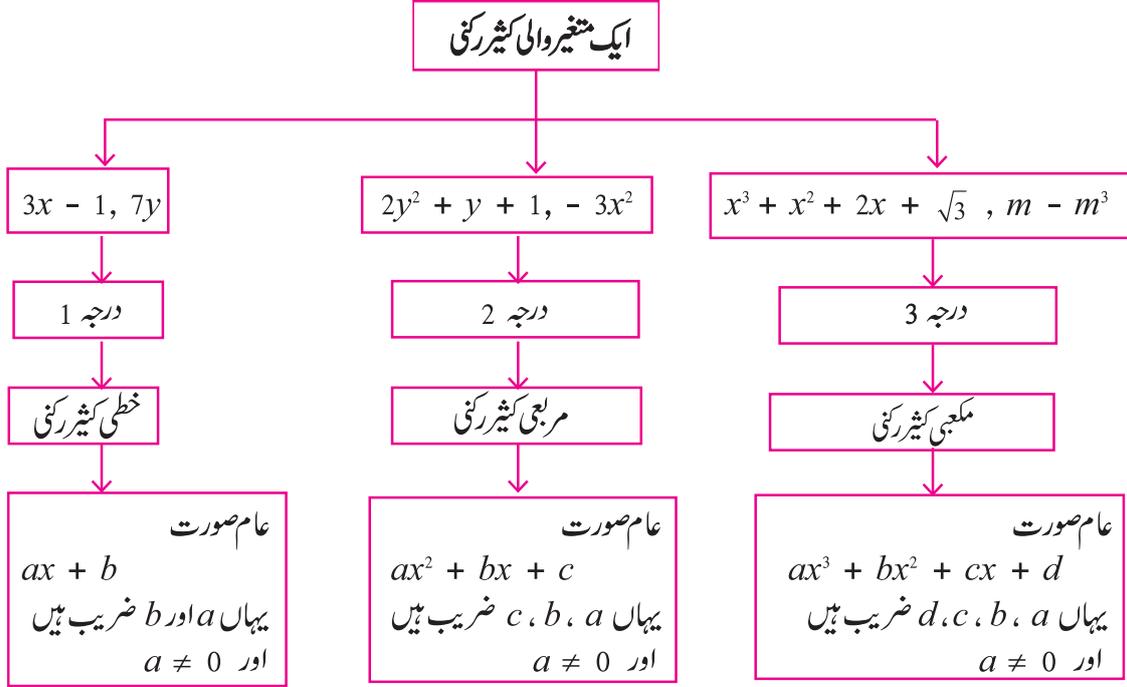
( $2 = 1 + 1$ ،  $5 = 2 + 3$ ،  $9 = 3 + 6$  → قوتوں کی جمع، یہاں)

عملی کام I : متغیر  $x$  اور درجہ 5 والی ایک رکنی، دو رکنی اور سہ رکنی ہر ایک کی ایک مثال لکھیے۔

یک رکنی:  ، دو رکنی  ، سہ رکنی

عملی کام II : 5 درجہ والی دو متغیری دو رکنی کی ایک مثال بنائیے۔

کثیر رکنی کی قسمیں (درجہ کی لحاظ سے)



کثیر رکنی :  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  یہ  $x$  متغیر کی  $n$  درجہ والی کثیر رکنی ہے۔

یہاں  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$  یہ تمام ضریب ہیں اور  $a_n \neq 0$

کثیر رکنی کی معیاری صورت، ضریبی صورت اور قوت والی صورت

(Standard form, Coefficient form and Index form of a Polynomial)

یہ  $p(x) = x^4 - 3x^2 + 5 + x$  اس کثیر رکنی کو  $x$  کی قوت کی اترتی ترتیب میں  $x^4 - 3x^2 + x + 5$  لکھ سکتے ہیں۔ یہ معیاری صورت ہے اس کثیر رکنی میں  $x$  کی تیسری قوت والا رکن نہیں ہے۔ لہذا اسے  $0x^3$  فرض کریں گے۔ اس رکن کو لے کر  $p(x)$  کثیر رکنی کو  $x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x + 5$  لکھ سکتے ہیں۔ اس طرح قوتوں کی اترتی ترتیب میں لکھی ہوئی اور قوتوں کے تمام ارکان اترتی ترتیب والی کثیر رکنی کو قوت نمائی صورت کہتے ہیں۔

کبھی کبھی قوت نمائی صورت والی کثیررکنی کے متغیر غائبانہ طور پر فرض کر کے اس کے صرف ضریب کو ترتیب سے لکھتے ہیں، مثلاً  $x^3 - 3x^2 + 0x - 8$  اس کثیررکنی کو  $(1, -3, 0, -8)$  کی طرح لکھتے ہیں۔ اس کو کثیررکنی کی ضربی صورت کہتے ہیں۔  
یعنی  $4y^4 + 0y^3 - 5y^2 + 0y + 1$  اس کثیررکنی کو  $y$  متغیر کا استعمال کر کے قوت نمائی صورت میں  $4y^4 - 5y^2 + 1$  لکھ سکتے ہیں۔ اس صورت کو کثیررکنی کی قوت نمائی صورت کہتے ہیں۔

### کثیررکنی کی ضربی صورت اور معیاری صورت

مثال :  $p(m) = 3m^5 - 7m + 5m^3 + 2$

$3m^5 + 5m^3 - 7m + 2$	کثیررکنی کو معیاری صورت میں لکھیے۔
$3m^5 + 0m^4 + 5m^3 + 0m^2 - 7m + 2$	کثیررکنی میں غیر موجود رکن کو 0 ضریب لے کر شامل کیجیے اور قوت نمائی صورت میں لکھیے۔
$(3, 0, 5, 0, -7, 2)$	دی ہوئی کثیررکنی کی ضربی صورت لکھیے۔
5	کثیررکنی کا درجہ لکھیے۔

مثال (1)  $x^3 + 3x - 5$  اس کثیررکنی کو ضربی صورت میں لکھیے۔

حل :  $x^3 + 3x - 5 = x^3 + 0x^2 + 3x - 5$

دی ہوئی کثیررکنی کی ضربی صورت  $(1, 0, 3, -5)$

مثال (2)  $(2, -1, 0, 5, 6)$  اس ضربی صورت کو کثیررکنی کی قوت نمائی صورت میں لکھیے۔

حل : کثیررکنی کی ضربی صورت  $(2, -1, 0, 5, 6)$  ہے۔

$\therefore$  قوت نمائی صورت میں کثیررکنی :  $2x^4 - x^3 + 0x^2 + 5x + 6$

$= 2x^4 - x^3 + 5x + 6$

### مشقی سیٹ 3.1

(1) ذیل کی عبارت کثیررکنی ہے یا نہیں لکھیے۔ وضاحت کیجیے۔

(i)  $y + \frac{1}{y}$  (ii)  $2 - 5\sqrt{x}$  (iii)  $x^2 + 7x + 9$

(iv)  $2m^2 + 7m - 5$  (v) 10

(2) درج ذیل ہر کثیررکنی میں  $m^3$  کا ضریب لکھیے۔

(i)  $m^3$  (ii)  $\frac{-3}{2} + m - \sqrt{3}m^3$  (iii)  $\frac{-2}{3}m^3 - 5m^2 + 7m - 1$

(3) درج ذیل معلومات کی بناء پر  $x$  متغیر کا استعمال کر کے ہر ایک کثیررکنی لکھیے۔

(i) درجہ 7 والی رکنی (ii) درجہ 35 والی دورکنی (iii) درجہ 8 والی سدرکنی

(4) درج ذیل ہر کثیررکنی کا درجہ لکھیے۔

(i)  $\sqrt{5}$       (ii)  $x^0$       (iii)  $x^2$       (iv)  $\sqrt{2}m^{10} - 7$       (v)  $2p - \sqrt{7}$

(vi)  $7y - y^3 + y^5$       (vii)  $xyz + xy - z$       (viii)  $m^3n^7 - 3m^5n + mn$

(5) درج ذیل کثیررکنیوں کی خطی، مربعی اور مکعبی کثیررکنیوں میں جماعت بندی کیجیے۔

(i)  $2x^2 + 3x + 1$       (ii)  $5p$       (iii)  $\sqrt{2}y - \frac{1}{2}$

(iv)  $m^3 + 7m^2 + \frac{5}{2}m - \sqrt{7}$       (v)  $a^2$       (vi)  $3r^3$

(6) درج ذیل کثیررکنیوں کو معیاری صورت میں لکھیے۔

(i)  $m^3 + 3 + 5m$       (ii)  $-7y + y^5 + 3y^3 - \frac{1}{2} + 2y^4 - y^2$

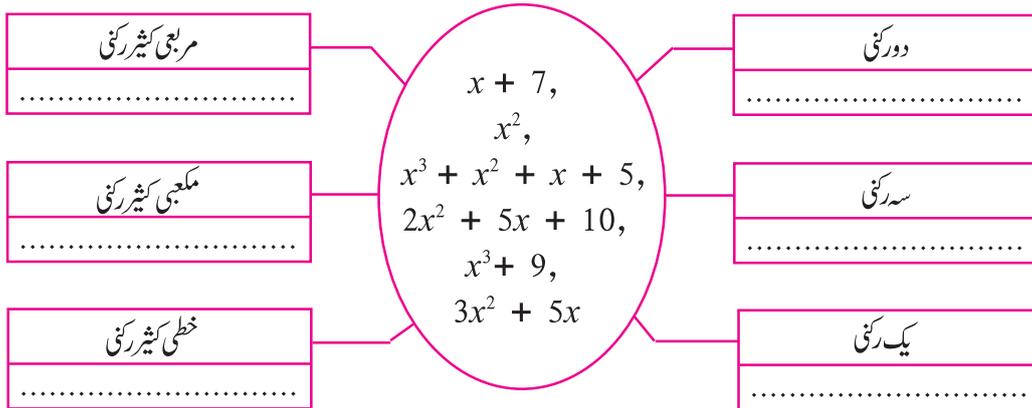
(7) درج ذیل کثیررکنیوں کو ضربی صورت میں لکھیے۔

(i)  $x^3 - 2$       (ii)  $5y$       (iii)  $2m^4 - 3m^2 + 7$       (iv)  $-\frac{2}{3}$

(8) درج ذیل ضربی صورت والی کثیررکنیوں کو  $x$  متغیر کا استعمال کر کے معیاری صورت میں لکھیے۔

(i) (1, 2, 3)      (ii) (5, 0, 0, 0, -1)      (iii) (-2, 2, -2, 2)

(9) ذیل میں کچھ کثیررکنیاں دی ہوئی ہیں۔ وہ کثیررکنی دیے ہوئے خانوں میں مناسب جگہ لکھیے۔



آئیے ذرا یاد کریں



(1) دو مشابہ الجبری ارکان کی جمع یا تفریق کرتے وقت ان کے ضربیوں کی جمع یا تفریق کرتے ہیں۔

$$\text{مثلاً، } 5m^3 - 7m^3 = (5 - 7)m^3 = -2m^3$$

(2) دو الجبری ارکان کا ضرب یا تقسیم کرتے وقت ان کے ضربیوں کی ضرب یا تقسیم کرتے ہیں۔ اسی طرح قوت نما کے اصولوں کا بھی استعمال ہوتا ہے۔

$$\text{مثلاً } -4y^3 \times 2y^2z = -8y^5z ; 12a^2b \div 3ab^2 = \frac{4a}{b}$$



کثیررکنیوں پر عمل (Operations on polynomials)

کثیررکنیوں کی جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم یہ اعمال الجبری عبارتوں پر بھی اسی طرح کرتے ہیں۔

مثال (1)  $7a^2 + 5a + 6$  میں سے  $5a^2 - 2a$  تفریق کیجیے۔

حل :

$$(7a^2 + 5a + 6) - (5a^2 - 2a)$$

$$= 7a^2 + 5a + 6 - 5a^2 + 2a$$

$$= \underline{7a^2 - 5a^2} + \underline{5a + 2a} + 6$$

$$= 2a^2 + 7a + 6$$

مثال (2)  $-2a \times 5a^2 = -10a^3$

مثال (3)  $(m^2 - 5) \times (m^3 + 2m - 2) = ?$

حل :

$$(m^2 - 5) \times (m^3 + 2m - 2)$$

(پہلی کثیررکنی کے ہر رکن سے دوسری کثیررکنی کو ضرب دیا گیا۔) ...  $m^2(m^3 + 2m - 2) - 5(m^3 + 2m - 2)$

$$= m^5 + 2m^3 - 2m^2 - 5m^3 - 10m + 10$$

(مشابہ ارکان کی یکجا ترتیب دیا۔) ...  $m^5 + 2m^3 - 5m^3 - 2m^2 - 10m + 10$

$$= m^5 - 3m^3 - 2m^2 - 10m + 10$$

یاد رکھیے کہ یہاں حاصل ضرب کا درجہ 5 ہے۔

مثال (4)  $3m^2n + 5mn^2 - 7mn$  اور  $2m^2n - mn^2 + mn$  کی جمع کیجیے۔

حل :

$$(3m^2n + 5mn^2 - 7mn) + (2m^2n - mn^2 + mn)$$

$$= 3m^2n + 5mn^2 - 7mn + 2m^2n - mn^2 + mn$$

(مشابہ ارکان کی یکجا ترتیب دی گئی۔) ...  $3m^2n + 2m^2n + 5mn^2 - mn^2 - 7mn + mn$

(مشابہ ارکان کی جمع کیجیے۔) ...  $5m^2n + 4mn^2 - 6mn$

## آئیے ذرا یاد کریں



ایک کثیررکنی کا درجہ 3 اور دوسری کثیررکنی کا درجہ 5 ہو تب کثیررکنیوں کے حاصل ضرب کا درجہ کتنا ہوگا؟

مضروب اور مضروب فیہ کثیررکنیوں کا درجہ اور ان کے حاصل ضرب کا درجہ کے درمیان کون سا تعلق ہے؟

مثال (5)  $(2 + 2x^2) \div (x + 2)$  تقسیم کیجیے اور 'باقی + خارج قسمت × مقسوم الیہ = مقسوم' کی صورت میں جواب لکھیے۔

حل : پہلے  $p(x) = 2 + 2x^2$  اس مقسوم کثیررکنی کو معیاری صورت میں لکھیے۔

$$\therefore 2 + 2x^2 = 2x^2 + 0x + 2$$

$$\begin{array}{r} 2x - 4 \\ x+2 \overline{) 2x^2 + 0x + 2} \\ \underline{- 2x^2 + 4x} \phantom{+ 2} \\ - 4x + 2 \\ \underline{- - 4x - 8} \\ 10 \end{array}$$

طریقہ I : باقی + خارج قسمت × مقسوم الیہ = مقسوم

$$2 + 2x^2 = (x + 2) \times (2x - 4) + 10$$

$$q(x), \text{ مقسوم الیہ} = (x + 2)$$

$$s(x), \text{ باقی}, r(x), \text{ خارج قسمت} = 2x - 4, \text{ باقی} = 10$$

$$\therefore p(x) = q(x) \times s(x) + r(x)$$

طریقہ II : خارج قسمت کا خطی طریقہ

$$(2x^2 + 2) \div (x + 2) \text{ تقسیم کیجیے۔}$$

رکن  $2x^2$  حاصل کرنے کے لیے  $(x + 2)$  کو  $2x$  سے ضرب دے کر  $4x$  تفریق کیجیے۔

$$2x(x+2) - 4x = 2x^2$$

$$\therefore \text{مقسوم} = 2x^2 + 2 = 2x(x+2) - 4x + 2 \quad \dots (I)$$

اب  $-4x$  رکن حاصل کرنے کے لیے  $(x + 2)$  کو  $-4$  سے ضرب دیں اور  $8$  حاصل کریں گے۔

$$-4(x+2) + 8 = -4x$$

$$\therefore (2x^2 + 2) = 2x(x+2) - 4(x+2) + 8 + 2 \quad \dots (\text{بیان I سے})$$

$$\therefore (2x^2 + 2) = (x + 2) (2x - 4) + 10$$

$$\text{باقی} + \text{خارج قسمت} \times \text{مقسوم الیہ} = \text{مقسوم}$$



### اقلیس کے تقسیم کا اصول

اگر  $s(x)$  اور  $p(x)$  یہ دو کثیررکنی ہو اور  $s(x)$  کا درجہ  $p(x)$  کے درجہ کے مساوی یا اس سے زیادہ ہو، اور  $s(x)$  کو  $p(x)$  سے تقسیم کریں تو حاصل ہونے والا خارج قسمت  $q(x)$  ہو تب،

$$s(x) = p(x) q(x) + r(x)$$

یہاں  $r(x) = 0$  یا  $r(x)$  کا درجہ  $p(x)$  کے درجے سے کم ہوتا ہے۔

### مشقی سیٹ 3.2

1. دیے ہوئے حروف کا استعمال کر کے جوابات لکھیے۔

(i) ناند پور گاؤں میں  $a$  درخت ہیں۔ درختوں کی تعداد ہر سال  $b$  سے بڑھتی ہے تو  $x$  سال بعد اس گاؤں میں کتنے درخت ہو جائیں گے؟

(ii) قواعد کے لیے ایک قطار میں  $y$  بچے، اس طرح  $x$  قطاریں بنائی گئیں۔ تو بتائیے قواعد کے لیے کل کتنے بچے حاضر تھے؟

(iii) ایک دو ہندسی عدد کے اکائی اور دہائی مقام کے ہندسے بالترتیب  $m$  اور  $n$  ہیں تو اس دو ہندسی عدد کو ظاہر کرنے والا کثیررکنی کون سا؟

2. درج ذیل کثیررکنیوں کی جمع کیجیے۔

(i)  $x^3 - 2x^2 - 9$  ;  $5x^3 + 2x + 9$

(ii)  $-7m^4 + 5m^3 + \sqrt{2}$  ;  $5m^4 - 3m^3 + 2m^2 + 3m - 6$

(iii)  $2y^2 + 7y + 5$  ;  $3y + 9$  ;  $3y^2 - 4y - 3$

3. پہلی کثیررکنی سے دوسری کثیررکنی تفریق کیجیے۔

(i)  $x^2 - 9x + \sqrt{3}$  ;  $-19x + \sqrt{3} + 7x^2$

(ii)  $2ab^2 + 3a^2b - 4ab$  ;  $3ab - 8ab^2 + 2a^2b$

4. درج ذیل کثیررکنیوں کی ضرب کیجیے۔

(i)  $2x$  ;  $x^2 - 2x - 1$  (ii)  $x^5 - 1$  ;  $x^3 + 2x^2 + 2$  (iii)  $2y + 1$  ;  $y^2 - 2y^3 + 3y$

5. پہلی کثیررکنی کو دوسری کثیررکنی سے تقسیم کیجیے اور جواب 'باقی + خارج قسمت  $\times$  مقسوم الیہ = مقسوم' کی صورت میں لکھیے۔

(i)  $x^3 - 64$  ;  $x - 4$  (ii)  $5x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2$  ;  $x^2 - x$

6. درج ذیل معلومات کثیررکنی کی صورت میں لکھیے۔ کثیررکنی کو مختصر ترین صورت دیجیے۔

ایک مستطیلی کھیت کی لمبائی  $(2a^2 + 3b^2)$  میٹر اور چوڑائی  $(a^2 + b^2)$  میٹر ہے۔ کسان نے کھیت میں  $(a^2 - b^2)$  میٹر ضلع والے مربع جگہ پر گھر

تعمیر کیا، تو بتائیے باقی ماندہ کھیت کا رقبہ کتنا ہے؟

**عملی کام :** درج ذیل عبارت پڑھیے اور خالی خانوں میں صحیح عبارت لکھیے اور بحث کیجیے۔

شرس گاؤں میں بنجر زمین پر کھیتی کرنے والے گونیند کی 5 ایکڑ زمین ہے۔ اس کے گھر میں بیوی، 2 بچے اور اس کی ضعیف والدہ ہے۔ اس نے کھیتی کے لیے بینک سے سوا لاکھ روپے قرض 10 فیصدی فی سال شرح سے لیے۔ اس نے کھیت کی  $x$  ایکڑ زمین میں سویا بین اور  $y$  ایکڑ زمین میں کپاس اور تور (ارہر) کی فصل نکالی۔ کھیتی کے لیے ہونے والا خرچ ذیل کے مطابق ہے۔

بیج کے لیے اس نے کل ₹10,000 دیے۔ سویا بین کی فصل کے لیے کھاد اور کیڑے مار دوا  $2000x$  روپے، مزدوری اور مشاگت کے لیے  $4000x^2$  روپے خرچ ہوا۔ کپاس اور تور کی فصل کے لیے کھاد اور کیڑے مار دوا پر  $8000y$  روپے، اور مزدوری اور مشاگت کے لیے  $9000y^2$  روپے خرچ ہوا۔

کھیتی کے لیے کل کتنا خرچ ہوا، اسے  $x$  اور  $y$  کا استعمال کر کے لکھیے۔

$$\boxed{\phantom{0000}} + \boxed{2000x} + \boxed{4000x^2} + \boxed{8000y} + \boxed{\phantom{0000}} \text{ روپے}$$

اس کے کھیت میں سویا بین کی  $5x^2$  کونٹھل پیداوار ہوئی۔ وہ ₹2800 فی کونٹھل کے نرخ سے فروخت ہوا۔ کپاس کی  $\frac{5}{3}y^2$  کونٹھل پیداوار ہوئی اور ₹5000 فی کونٹھل کے نرخ سے فروخت ہوئی۔ تور  $4y$  کونٹھل پیداوار ہوئی اور ₹4000 فی کونٹھل کے نرخ سے فروخت ہوئی۔ تمام کھیتی کی پیداوار فروخت ہونے پر اس سے کل کتنے روپے آمدنی ہوئی اسے  $x$  اور  $y$  کے ارکان کی صورت میں لکھیے۔

$$\boxed{\phantom{0000}} + \boxed{\phantom{0000}} + \boxed{\phantom{0000}} \text{ روپے}$$

آئیے سمجھ لیں

ترکیبی تقسیم کا طریقہ (Synthetic Division Method)

ہمیں معلوم ہے کہ ایک کثیررکنی کو دوسری کثیررکنی سے کس طرح تقسیم کرتے ہیں۔ اب ہم مقسوم الیہ  $x + a$  یا  $x - a$  کثیررکنی ہو تو تقسیم کے آسان طریقے کو سمجھیں گے۔

مثال (1) : کثیررکنی  $(3x^3 + 2x^2 - 1)$  کو  $(x + 2)$  سے تقسیم کیجیے۔

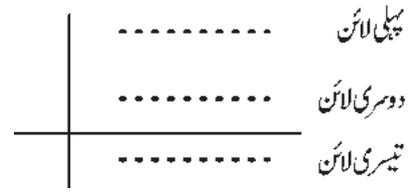
حل : پہلے مقسوم کثیررکنی کو قوت نمائی صورت میں اور بعد میں ضربی صورت میں لکھیں گے۔

$$3x^3 + 2x^2 - 1 = 3x^3 + 2x^2 + 0x - 1 = \text{مقسوم کی معیاری صورت}$$

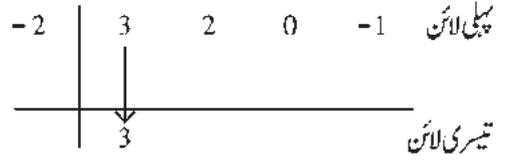
$$\therefore \text{مقسوم کی ضربی صورت} = (3, 2, 0, -1)$$

$$\text{مقسوم الیہ کثیررکنی} = x + 2$$

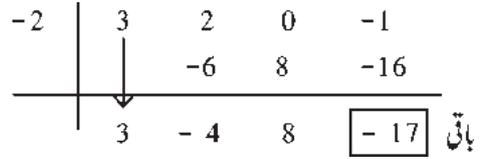
درج ذیل مراحل کے مطابق ترکیبی تقسیم کے طریقے سے تقسیم کریں گے۔  
 (1) بازو میں دیے ہوئے کہ مطابق ایک عمودی اور ایک افقی اس طرح دو خط کھینچیں گے۔



(2) مقسوم الیہ  $x + 2$  ہو تو 2 کے متضاد عدد -2  
 پہلی لائن میں عمودی خط کے بائیں جانب -2 لکھیں گے۔  
 پہلی لائن میں مقسوم کثیررکنی کے ضربی صورت عمودی خط کے دائیں جانب لکھیں گے۔  
 (3) افقی خط کے نیچے یعنی تیسری لائن میں مقسوم کا پہلا ضربی ویسا ہی لکھیں گے۔



(4) تیسری لائن میں 3 اور مقسوم الیہ کے -2 کا حاصل ضرب -6 - اسے  
 دوسری لائن میں 2 ضرب کے نیچے لکھیں گے۔ بعد میں 2 اور -6 کی جمع  
 -4، تیسری لائن میں افقی خط کے نیچے لکھیں گے۔



اسی طرح ضرب اور جمع کریں گے۔ آخر کی جمع کر کے آنے والا عدد ہی تقسیم کا باقی ہے۔ یہاں باقی -17 ہے۔  
 تیسری لائن میں آنے والا (3, -4, 8) یہ خارج قسمت کی ضربی صورت ہے۔

$$\therefore \text{خارج قسمت} = 3x - 4x + 8 \text{ اور باقی} = -17$$

$$\therefore 3x^3 + 2x^2 - 1 = (x + 2)(3x^2 - 4x + 8) - 17$$

اس طریقے کو ترکیبی تقسیم کا طریقہ کہتے ہیں۔  
 اس تقسیم کو خطی طریقہ سے ذیل کے مطابق کر سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 3x^3 + 2x^2 - 1 &= 3x^2(x + 2) - 6x^2 + 2x^2 - 1 \\ &= 3x^2(x + 2) - 4x^2 - 1 \\ &= 3x^2(x + 2) - 4x^2 - 8x + 8x - 1 \\ &= 3x^2(x + 2) - 4x(x + 2) + 8x - 1 \\ &= 3x^2(x + 2) - 4x(x + 2) + 8x + 16 - 16 - 1 \\ &= 3x^2(x + 2) - 4x(x + 2) + 8(x + 2) - 17 \end{aligned}$$

$$\therefore 3x^3 + 2x^2 - 1 = (x + 2)(3x^2 - 4x + 8) - 17$$

مثال (2) تقسیم کیجیے :  $(2y^4 - 3y^3 + 5y - 4) \div (y - 1)$

حل : ترکیبی تقسیم کا طریقہ :  $2y^4 - 3y^3 + 5y - 4 = 2y^4 - 3y^3 + 0y^2 + 5y - 4$  = مقسوم

$(-1)$  کا متضاد عدد 1 ہے۔) ...  $y - 1$  = مقسوم الیہ

1	2	-3	0	5	-4
		2	-1	-1	4
	2	-1	-1	4	0

باقی  $(2, -1, -1, 4)$  کی ضربی صورت  $(2y^3 - y^2 - y + 4)$  ہے۔

$\therefore$  باقی = 0 اور خارج قسمت =  $2y^3 - y^2 - y + 4$

$$\begin{aligned} \text{خطی طریقہ : } 2y^4 - 3y^3 + 5y - 4 &= 2y^3(y - 1) + 2y^3 - 3y^3 + 5y - 4 \\ &= 2y^3(y - 1) - y^2(y - 1) - y^2 + 5y - 4 \\ &= 2y^3(y - 1) - y^2(y - 1) - y(y - 1) + 4y - 4 \\ &= 2y^3(y - 1) - y^2(y - 1) - y(y - 1) + 4(y - 1) \\ &= (2y^3 - y^2 - y + 4)(y - 1) \end{aligned}$$

اسے دھیان میں رکھیں



ترکیبی تقسیم کے طریقے سے تقسیم کرتے وقت صرف  $x + a$  یا  $x - a$  کی صورت میں جس کثیررکنی کا درجہ 1 ہوتا ہے۔ اسے مقسوم الیہ کے طور پر لیتے ہیں۔

### مشقی سیٹ 3.3

• درج ذیل تقسیم ترکیبی تقسیم کے طریقے سے اور خطی طریقے سے کیجیے۔ خارج قسمت اور باقی لکھیے۔

(i)  $(2m^2 - 3m + 10) \div (m - 5)$  (ii)  $(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5) \div (x + 2)$

(iii)  $(y^3 - 216) \div (y - 6)$  (iv)  $(2x^4 + 3x^3 + 4x - 2x^2) \div (x + 3)$

(v)  $(x^4 - 3x^2 - 8) \div (x + 4)$  (vi)  $(y^3 - 3y^2 + 5y - 1) \div (y - 1)$

آئیے سمجھ لیں



کثیررکنی کی قیمت (Value of Polynomial)

کثیررکنی میں متغیر کی کوئی ایک قیمت رکھیں تو اس کثیررکنی کی بھی کوئی ایک قیمت حاصل ہوتی ہے۔ مثلاً  $x + 7$  کثیررکنی میں  $x$  کی قیمت 2 رکھیں تو اس کثیررکنی کی قیمت 9 حاصل ہوتی ہے۔

$p(x)$  کثیررکنی میں  $x$  کو  $a$  قیمت دے کر حاصل ہونے والی کثیررکنی کی قیمت  $p(a)$  سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال (1)  $p(x) = 2x^2 - 3x + 5$  کثیررکنی کی قیمت  $x = 2$  ہو تو معلوم کیجیے۔

حل : کثیررکنی  $p(x) = 2x^2 - 3x + 5$

اس کثیررکنی میں  $x = 2$  رکھنے پر

$$\begin{aligned}\therefore p(2) &= 2 \times 2^2 - 3 \times 2 + 5 \\ &= 2 \times 4 - 6 + 5 \\ &= 8 - 6 + 5 \\ \therefore p(2) &= 7\end{aligned}$$

$\therefore x = 2$  ہے تب کثیررکنی کی قیمت 7 ہے۔

مثال (2)  $p(y) = 2y^3 - 2y + \sqrt{7}$  ہو تو کثیررکنی  $y = -2$  کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : کثیررکنی  $p(y) = 2y^3 - 2y + \sqrt{7}$

$$\begin{aligned}\therefore p(-2) &= 2 \times (-2)^3 - 2 \times (-2) + \sqrt{7} \\ &= 2 \times (-8) - 2 \times (-2) + \sqrt{7} \\ &= -16 + 4 + \sqrt{7} \\ &= -12 + \sqrt{7}\end{aligned}$$

$\therefore y = -2$  ہو تو کثیررکنی کی قیمت  $-12 + \sqrt{7}$  ہے۔

مثال (3)  $p(x) = 2x^2 - x^3 + x + 2$  کثیررکنی کے لیے  $p(0)$  معلوم کیجیے۔

$$\begin{aligned}p(x) &= 2x^2 - x^3 + x + 2 \\ \therefore p(0) &= 2 \times 0^2 - 0^3 + 0 + 2 \\ &= 2 \times 0 - 0 + 0 + 2 \\ &= 2\end{aligned}$$

مثال (4) اگر کثیررکنی  $m^2 - am + 7$  کی قیمت  $m = -1$  لینے پر 10 ہوتی ہے تب  $a$  کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل :

$\begin{aligned}p(m) &= m^2 - am + 7 \\ \therefore p(-1) &= (-1)^2 - a \times (-1) + 7 \\ &= 1 + a + 7 \\ &= 8 + a\end{aligned}$		<p>(دیا ہوا ہے) ... <math>p(-1) = 10</math> لیکن</p> $\begin{aligned}\therefore 8 + a &= 10 \\ \therefore a &= 10 - 8 \\ \therefore a &= 2\end{aligned}$
--	--	--

### مشقی سیٹ 3.4

(1)  $x = 0$  ہو تو  $x^2 - 5x + 5$  کثیررکنی کی قیمت معلوم کیجیے۔

(2) اگر  $p(y) = y^2 - 3\sqrt{2}y + 1$  ہو تب  $p(3\sqrt{2})$  معلوم کیجیے۔

(3) اگر  $p(m) = m^3 + 2m^2 - m + 10$  ہو تب  $p(a) + p(-a) = ?$

(4) اگر  $p(y) = 2y^3 - 6y^2 - 5y + 7$  ہو تب  $p(2)$  معلوم کیجیے۔

اسے دھیان میں رکھیں



متغیر کی کوئی ایک قیمت کے لیے کثیررکنی کی قیمت معلوم کرتے وقت ہر رکن میں  $x$  کی جگہ دی ہوئی قیمت رکھ کر اس کثیررکنی (عبارت) کی قیمت معلوم کرنا ہوتی ہے۔

آئیے سمجھ لیں



مسئلہ باقی (Remainder Theorem)

$p(x)$  کثیررکنی کو  $(x + a)$  سے تقسیم کریں تو بچ رہنے والا باقی اور اس کثیررکنی میں  $x$  کی قیمت  $-a$  دے کر حاصل ہونے والی کثیررکنی کی قیمت ان دونوں کا آپس میں تعلق ہوتا ہے۔ اس تعلق کو معلوم کرنے کے لیے ذیل کی مثال کا مطالعہ کیجیے۔

مثال:  $p(x) = 4x^2 - x + 2$  کو  $x + 1$  سے تقسیم دیجیے۔

[یہاں  $(x + a)$  یعنی  $(x + 1)$  کو ذہن نشین کیجیے]

یہاں،  $4x^2 - x + 2$  = مقسوم کثیررکنی

$x + 1$  = مقسوم الیہ کثیررکنی

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{l} \leftarrow \text{خارج قسمت} \\ \leftarrow \text{مقسوم} \end{array} \\
 \begin{array}{r}
 4x - 5 \\
 \hline
 4x^2 - x + 2 \\
 - \quad 4x^2 + 4x \\
 \hline
 -5x + 2 \\
 - \quad -5x - 5 \\
 \hline
 7
 \end{array}
 \end{array}$$

باقی  $\leftarrow 7$

خارج قسمت =  $4x - 5$

باقی = 7 ... (I)

اس مثال کو ترکیبی تقسیم کے طریقے سے کریں گے۔

$p(x) = (4, -1, 2)$  کی ضربی صورت

مقسوم الیہ =  $x + 1$

$1 = -1$  کا متضاد عدد

$$\begin{array}{r|rrrr}
 -1 & 4 & -1 & 2 & \\
 & & -4 & 5 & \\
 \hline
 & 4 & -5 & 7 & \text{باقی}
 \end{array}$$

خارج قسمت =  $4x - 5$

باقی = 7

اب ہم باقی اور مقسوم کثیررکنی کی قیمت کے درمیان تعلق کو دیکھیں گے۔

مقسوم کثیررکنی یعنی  $4x^2 - x + 2$  کی  $x = -1$  کے لیے قیمت معلوم کریں گے۔

$$p(x) = 4x^2 - x + 2$$

$$\therefore p(-1) = 4 \times (-1)^2 - (-1) + 2$$

$$= 4 \times 1 + 1 + 2$$

$$= 4 + 1 + 2$$

$$= 7$$

اس لیے  $x = -1$  ہو تب کثیررکنی  $p(x)$  کی قیمت 7 ہے۔ ... (II)

لہذا (I) اور (II) کی بنا پر،  $p(x) = 4x^2 - x + 2$  کثیررکنی کو  $(x+a)$  سے یعنی یہاں  $(x+1)$  سے تقسیم کرنے سے حاصل ہونے والا باقی

اور  $x = -1$  ہو تب  $p(x)$  کثیررکنی کی قیمت یعنی  $p(-1)$  یکساں ہیں۔

اس بناء پر درج ذیل خصوصیت سمجھ میں آتی ہے۔

$p(x)$  کثیررکنی کو  $(x+a)$  سے تقسیم کرنے پر بچ رہنے والا باقی  $p(-a)$  کے مساوی ہوتا ہے۔

یعنی  $p(x)$  میں  $x = -a$  رکھ کر آنے والی کثیررکنی کی قیمت کے مساوی ہوتی ہے۔

اس خصوصیت کو مسئلہ باقی کہتے ہیں۔

افلیدس کے تقسیم کا اصول استعمال کر کے اس خصوصیت کو ثابت کریں گے۔

$p(x)$  کو  $(x+a)$  سے تقسیم کریں تو

$$p(x) = q(x) \times (x+a) + r(x) \quad \dots [r(x) = \text{باقی اور } q(x) = \text{خارج قسمت}]$$

اگر  $r(x) \neq 0$ ، ہو تب اصول کے مطابق  $r(x)$  کا درجہ 1 سے کم یعنی 0 ہے۔ لہذا  $r(x)$  حقیقی عدد ہے۔

$\therefore r(-a)$  بھی حقیقی عدد ہے۔

$$p(x) = q(x) \times (x+a) + r(x) \quad \dots (1)$$

میں  $x = -a$  قیمت رکھ کر،

$$p(-a) = q(-a) \times (a-a) + r(-a)$$

$$= q(-a) \times 0 + r(-a) \quad \dots (2)$$

$$\therefore p(-a) = r(-a) \quad \dots [(1) \text{ اور } (2) \text{ سے}]$$

عملی کام : درج ذیل مثال کی تصدیق کیجیے۔

(1)  $p(x) = 3x^2 + x + 7$  کثیررکنی کو  $x + 2$  کثیررکنی سے تقسیم کیجیے اور باقی معلوم کیجیے۔

(2)  $x = -2$  ہو تب  $p(x) = 3x^2 + x + 7$  کثیررکنی کی قیمت معلوم کیجیے۔

(3) کیا اب تقسیم سے ملنے والا باقی،  $p(-2)$  کی قیمت کے برابر ہے؟

مزید ایک مثال لے کر مذکورہ طریقے سے تصدیق کیجیے۔

مثال (1)  $x^4 - 5x^2 - 4x$  کثیررکنی کو  $(x + 3)$  سے تقسیم دینے پر حاصل ہونے والا باقی معلوم کیجیے۔

ترکیبی تقسیم کے طریقے سے

معیاری صورت  $x^4 + 0x^3 - 5x^2 - 4x + 0$

ضربتی صورت  $= (1, 0, -5, -4, 0)$

-3	1	0	-5	-4	0
		-3	9	-12	48
	1	-3	4	-16	48

باقی = 48

مسئلہ باقی سے

حل :

$p(x) = x^4 - 5x^2 - 4x$  مقسوم کثیررکنی

مقسوم الیہ  $= x + 3$

$\therefore x = -3$

$\therefore p(x) = x^4 - 5x^2 - 4x$

$p(-3) = (-3)^4 - 5(-3)^2 - 4(-3)$

$= 81 - 45 + 12$

$p(-3) = 48$

مثال (2) مسئلہ باقی کا استعمال کر کے کثیررکنی  $x^3 - 2x^2 - 4x - 1$  کو  $(x - 1)$  سے تقسیم کر کے حاصل ہونے والا باقی معلوم کیجیے۔

$p(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 1$

حل :

مقسوم الیہ  $= x - 1$  ;  $\therefore x = 1$

$\therefore$  باقی، مسئلہ باقی سے  $p(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 - 4 \times 1 - 1$

$= 1 - 2 \times 1 - 4 - 1$

$p(1) = 1 - 2 - 4 - 1 = -6$

$\therefore$  باقی = -6

(مسئلہ باقی کے لحاظ سے) ...

مثال (3) اگر  $t^3 - 3t^2 + kt + 50$  کثیررکنی کو  $t - 3$  سے تقسیم دینے پر باقی 62 بچتا ہو تب  $k$  کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : دی ہوئی کثیررکنی کو  $(t - 3)$  سے تقسیم کرنے پر باقی 62 بچتا ہے (دیا ہوا ہے۔) اس لیے دی ہوئی کثیررکنی کی قیمت  $t = 3$  رکھ کر معلوم کریں گے۔

$p(t) = t^3 - 3t^2 + kt + 50$

∴ مسئلہ باقی سے،

$$\begin{aligned}\therefore 3k + 50 &= 62 \\ \therefore 3k &= 62 - 50 \\ \therefore 3k &= 12 \\ \therefore k &= \frac{12}{3} \\ \therefore k &= 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{باقی} = p(3) &= 3^3 - 3 \times 3^2 + k \times 3 + 50 \\ &= 27 - 3 \times 9 + 3k + 50 \\ &= 27 - 27 + 3k + 50 \\ &= 3k + 50\end{aligned}$$

لیکن باقی 62 دیا ہوا ہے۔

اسے دھیان میں رکھیں



مسئلہ باقی :  $p(x)$  کوئی بھی کثیررکنی ہو اور 'a' کوئی حقیقی عدد ہے اور اگر  $p(x)$  کو  $(x+a)$  سے تقسیم کریں تو حاصل ہونے والا باقی  $p(-a)$  کے برابر ہوتا ہے۔

$$p(x) = s(x)(x-a) + r(x) \quad \dots \text{ یا } r(x) < 1 \text{ کا درجہ ...}$$

اس مساوات میں  $x = a$  رکھ کر  $p(a) = 0 + r(a) = r(a)$  حاصل ہوتا ہے۔

∴  $r(a) = 0$  یا  $r(a) = 0$  کا درجہ، یعنی ایسا سمجھ میں آتا ہے کہ  $(x-a)$  کثیررکنی  $p(x)$  کا جز ضربی ہے۔

آئیے سمجھ لیں



مسئلہ جز ضربی (Factor Theorem)

اگر 21 کو 7 سے تقسیم کرتے ہیں تو باقی 0 آتا ہے۔ اس لیے ہم 7 کو 21 کا جز ضربی کہتے ہیں۔

اسی طرح دی ہوئی کثیررکنی کو مقسوم الیہ کثیررکنی سے تقسیم کریں تو باقی 0 آتا ہے تب اس کثیررکنی کو دی ہوئی کثیررکنی کا جز ضربی کہتے ہیں۔

مثال (2) کثیررکنی  $p(x) = x^3 + 4x - 5$  کو  $(x+2)$  سے تقسیم کریں تو آنے والا باقی معلوم کیجیے۔

طے کیجیے کہ  $(x+2)$  کثیررکنی  $p(x)$  کا جز ضربی ہے۔

$$\begin{aligned}p(x) &= x^3 + 4x - 5 \\ p(-2) &= (-2)^3 + 4(-2) - 5 \\ p(-2) &= -8 - 8 - 5 \\ &= -21\end{aligned}$$

یہاں، مسئلہ باقی کے مطابق باقی -21 آیا ہے۔

یعنی، باقی  $\neq 0$

∴  $(x+2)$ ، کثیررکنی  $p(x)$  کا جز ضربی نہیں ہے۔

مثال (1) کثیررکنی  $p(x) = x^3 + 4x - 5$  کو  $(x-1)$  سے تقسیم کرنے سے آنے والا باقی معلوم کیجیے۔

طے کیجیے کہ  $(x-1)$  کثیررکنی  $p(x)$  کا جز ضربی ہے۔

$$\begin{aligned}p(x) &= x^3 + 4x - 5 \\ p(1) &= (1)^3 + 4(1) - 5 \\ &= 1 + 4 - 5 \\ &= 0\end{aligned}$$

یہاں، مسئلہ باقی کے مطابق،  $0 =$  باقی

∴  $(x-1)$ ، کثیررکنی  $p(x)$  کا جز ضربی ہے۔

عملی کام : تصدیق کیجیے کہ  $(x-1)$ ، کثیررکنی  $x^3 + 4x - 5$  کا جز ضربی ہے۔

## اسے دھیان میں رکھیں



$p(x)$  ایک کثیررکنی ہے اور  $a$  کوئی بھی حقیقی عدد ہے اور اگر  $p(a) = 0$  ہو تب  $(x-a)$  کثیررکنی  $p(x)$  کا جزو ضربی ہوتا ہے۔  
اس کے برعکس  $(x-a)$  کثیررکنی  $p(x)$  کا جزو ضربی ہو تب  $p(a) = 0$  ہوتا ہے۔

مثال (1) مسئلہ جزو ضربی استعمال کر کے طے کیجیے کہ  $(x-2)$  کثیررکنی  $x^3 - x^2 - 4$  کا جزو ضربی ہے۔

حل :  $x - 2 =$  مقسوم الیہ  $;$   $p(x) = x^3 - x^2 - 4$

مسئلہ  $\therefore p(2) = (2)^3 - (2)^2 - 4 = 8 - 4 - 4 = 0$

مسئلہ جزو ضربی کے رُو سے،  $(x-2)$ ، کثیررکنی  $(x^3 - x^2 - 4)$  کا جزو ضربی ہے۔

مثال (2) اگر  $(x-1)$  کثیررکنی  $(x^3 - 2x^2 + mx - 4)$  کا جزو ضربی ہو تب  $m$  کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل :  $(x-1)$ ، کثیررکنی  $p(x)$  کا جزو ضربی ہے۔  $\therefore p(1) = 0$

$$p(x) = x^3 - 2x^2 + mx - 4$$

$$p(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 + m \times 1 - 4 = 0$$

$$\therefore 1 - 2 \times 1 + m - 4 = 0$$

$$\therefore 1 - 2 + m - 4 = 0 \quad , \quad \therefore m - 5 = 0 \quad , \quad \therefore m = 5$$

**عملی کام :** ہم بنجر زمین پر کھیتی کرنے والے گوند کے کھیت کے متعلق کثیررکنیوں کی صورت میں کھیتی کا خرچ اور آمدنی کے بارے میں دیکھ چکے ہیں۔ اس نے بینک سے سو لاکھ روپے قرض لیا تھا اور 10% فی سال سود کی شرح سے ادا کیا تھا۔ بیج کے لیے خرچ 10,000 روپے، سویا بین کی فصل کے لیے کھاد اور کیڑے مار دوا پر  $2000x$  روپے اور اس کی مشاگت کے لیے  $4000x^2$  روپے خرچ ہوا تھا۔ کپاس اور تور (ارہر) کی فصل کے لیے کھاد اور کیڑے مار دوا کے لیے  $8000y$  روپے اور مشاگت کے  $9000y^2$  روپے خرچ کیا تھا۔

$$\text{کل آمدنی } 14000x^2 + \frac{25000}{3}y^2 + 16000y \text{ روپے ہوئی تھی۔}$$

$x = 2$  اور  $y = 3$  قیمتیں لے کر گوند کی کھیتی کا جمع خرچ لکھ کر معلوم کیجیے۔

جمع		خرچ	
بینک سے قرض لیے	₹1,25,000	بینک میں سود کے ساتھ ادائیگی	₹1,37,000
سویا بین سے آمدنی	₹ <input type="text"/>	بیج کے لیے	₹ <input type="text"/>
کپاس سے آمدنی	₹ <input type="text"/>	سویا بین : کھاد اور کیڑے مار دوا	₹ <input type="text"/>
تور سے آمدنی	₹ <input type="text"/>	سویا بین : مشاگت	₹ <input type="text"/>
کل آمدنی	₹ <input type="text"/>	کپاس اور تور : کھاد اور کیڑے مار دوا	₹ <input type="text"/>
		کپاس اور تور : مشاگت	₹ <input type="text"/>
		کل خرچ	₹ <input type="text"/>

### مشقی سیٹ 3.5

(1)  $x$  کی دی ہوئی قیمت لے کر کثیررکنی  $2x - 2x^3 + 7$  کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i)  $x = 3$

(ii)  $x = -1$

(iii)  $x = 0$

(2) درج ذیل ہر کثیررکنی کے لیے  $p(1)$ ،  $p(0)$  اور  $p(-2)$  معلوم کیجیے۔

(i)  $p(x) = x^3$

(ii)  $p(y) = y^2 - 2y + 5$

(iii)  $p(x) = x^4 - 2x^2 - x$

(3) اگر کثیررکنی  $m^3 + 2m + a$  کی قیمت  $m = 2$  کے لیے 12 ہے، تب  $a$  کی قیمت معلوم کیجیے۔

(4) اگر کثیررکنی  $mx^2 - 2x + 3$  کے لیے  $p(-1) = 7$  ہو تب  $m$  کی قیمت معلوم کیجیے۔

(5) درج ذیل میں سے پہلی کثیررکنی کو دوسری کثیررکنی سے تقسیم کر کے حاصل ہونے والا باقی، مسئلہ باقی کا استعمال کر کے معلوم کیجیے۔

(i)  $(x^2 - 7x + 9)$  ;  $(x + 1)$  (ii)  $(2x^3 - 2x^2 + ax - a)$  ;  $(x - a)$

(iii)  $(54m^3 + 18m^2 - 27m + 5)$  ;  $(m - 3)$

(6) کثیررکنی  $y^3 - 5y^2 + 7y + m$  کو  $y + 2$  سے تقسیم کریں تو باقی 50 پچتا ہے تب  $m$  کی قیمت معلوم کیجیے۔

(7) مسئلہ جز ضربی کا استعمال کر کے، بتائیے کہ  $x + 3$ ، کثیررکنی  $x^2 + 2x - 3$  کا جز ضربی ہے۔

(8) اگر  $x - 2$  کثیررکنی  $x^3 - mx^2 + 10x - 20$  کا جز ضربی ہے تب  $m$  کی قیمت معلوم کیجیے۔

(9) مسئلہ جز ضربی کے ذریعے بتائیے کہ  $q(x)$  یہ  $p(x)$  کا جز ضربی ہے یا نہیں۔

(i)  $p(x) = x^3 - x^2 - x - 1$ ،  $q(x) = x - 1$

(ii)  $p(x) = 2x^3 - x^2 - 45$ ،  $q(x) = x - 3$

(10)  $(x + 1)$  سے  $(x^{31} + 31)$  کو تقسیم کر کے باقی معلوم کیجیے۔

(11) دکھائیے کہ  $m - 1$  کثیررکنیوں  $m^{21} - 1$  اور  $m^{22} - 1$  کا جز ضربی ہے،

(12) اگر  $x - 2$  اور  $x - \frac{1}{2}$  یہ دونوں کثیررکنی  $nx^2 - 5x + m$  کے جز ضربی ہوں تو دکھائیے کہ  $m = n = 2$

(13) (i) اگر  $p(x) = 2 + 5x$  تب  $p(2) + p(-2) - p(1)$  معلوم کیجیے۔

(ii) اگر  $p(x) = 2x^2 - 5\sqrt{3}x + 5$  ہو تو  $p(5\sqrt{3}) = ?$

آئیے ذرا یاد کریں



گذشتہ جماعت میں ہم نے کثیررکنیوں کے جز ضربی کیسے نکالتے ہیں، کا مطالعہ کر چکے ہیں۔ کچھ مثالیں دیکھتے ہیں۔

اجزائے ضربی کیجیے۔

مثال (1)  $4x^2 - 25$

حل :

$4x^2 - 25$

$= (2x)^2 - (5)^2$

$= (2x + 5)(2x - 5)$

مثال (2)  $3x^2 + 7x + 2$

حل :

$3x^2 + 7x + 2$

$= \underline{3x^2 + 6x} + \underline{x + 2}$

$= 3x(x + 2) + 1(x + 2)$

$= (x + 2)(3x + 1)$

مثال (4)  $6x^2 - 5x - 6$

حل :  
 $6x^2 - 5x - 6$   
 $= 6x^2 - 9x + 4x - 6$   
 $= 3x(2x - 3) + 2(2x - 3)$   
 $= (2x - 3)(3x + 2)$

مثال (3)  $63x^2 + 5x - 2$

حل :  
 $63x^2 + 5x - 2$   
 $= 63x^2 + 14x - 9x - 2$   
 $= 7x(9x + 2) - 1(9x + 2)$   
 $= (9x + 2)(7x - 1)$

آئیے سمجھ لیں



کثیر رکنیوں کے اجزائے ضربی (Factors of Polynomials)

کبھی کبھی دی ہوئی کثیر رکنی کی تحویل  $ax^2 + bx + c$  میں کی جاسکتی ہے۔ جس کی وجہ سے اس کے اجزائے ضربی کرنا آسان ہو جاتا ہے۔

مثال (1)  $(y^2 - 3y)^2 - 5(y^2 - 3y) - 50$  کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل : فرض کیجیے دی ہوئی کثیر رکنی میں  $y^2 - 3y = x$

$\therefore (y^2 - 3y)^2 - 5(y^2 - 3y) - 50 = x^2 - 5x - 50$   
 $= x^2 - 10x + 5x - 50$   
 $= x(x - 10) + 5(x - 10)$   
 $= (x - 10)(x + 5)$   
 $= (y^2 - 3y - 10)(y^2 - 3y + 5) \dots (x = y^2 - 3y \text{ رکھتے پر})$   
 $= [y^2 - 5y + 2y - 10](y^2 - 3y + 5)$   
 $= [y(y - 5) + 2(y - 5)](y^2 - 3y + 5)$   
 $= (y - 5)(y + 2)(y^2 - 3y + 5)$

مثال (2) اجزائے ضربی معلوم کیجیے :  $(x + 2)(x - 3)(x - 7)(x - 2) + 64$

حل :  
 $(x + 2)(x - 3)(x - 7)(x - 2) + 64$   
 $= (x + 2)(x - 7)(x - 3)(x - 2) + 64$   
 $= (x^2 - 5x - 14)(x^2 - 5x + 6) + 64$   
 $= (m - 14)(m + 6) + 64 \dots (x^2 - 5x = m \text{ کیجیے})$   
 $= m^2 - 14m + 6m - 84 + 64$   
 $= m^2 - 8m - 20$   
 $= (m - 10)(m + 2)$   
 $= (x^2 - 5x - 10)(x^2 - 5x + 2) \dots (m \text{ کی جگہ } x^2 - 5x \text{ رکھتے پر})$

مشقی سیٹ 3.6

(1) درج ذیل کثیر رکنیوں کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i)  $2x^2 + x - 1$

(ii)  $2m^2 + 5m - 3$

(iii)  $12x^2 + 61x + 77$

(iv)  $3y^2 - 2y - 1$

(v)  $\sqrt{3}x^2 + 4x + \sqrt{3}$

(vi)  $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$

(2) درج ذیل کثیررکنیوں کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

- (i)  $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12$  (ii)  $(x - 5)^2 - (5x - 25) - 24$   
 (iii)  $(x^2 - 6x)^2 - 8(x^2 - 6x + 8) - 64$  (iv)  $(x^2 - 2x + 3)(x^2 - 2x + 5) - 35$   
 (v)  $(y + 2)(y - 3)(y + 8)(y + 3) + 56$   
 (vi)  $(y^2 + 5y)(y^2 + 5y - 2) - 24$   
 (vii)  $(x - 3)(x - 4)^2(x - 5) - 6$



مجموعہ سوالات 3



(1) درج ذیل ہر سوال کے لیے دیے ہوئے متبادل میں سے صحیح متبادل منتخب کیجیے۔

- (i) درج ذیل میں سے کثیررکنی کون سی ہے؟  
 (A)  $\frac{x}{y}$  (B)  $x^{\sqrt{2}} - 3x$  (C)  $x^{-2} + 7$  (D)  $\sqrt{2}x^2 + \frac{1}{2}$

- (ii) کثیررکنی  $\sqrt{7}$  کا درجہ کتنا ہے؟  
 (A)  $\frac{1}{2}$  (B) 5 (C) 2 (D) 0

- (iii) کثیررکنی 0 کا درجہ کتنا ہوتا ہے؟  
 (A) 0 (B) 1 (C) متعین نہیں کیا جاسکتا (D) کوئی بھی حقیقی عدد

- (iv) کثیررکنی  $2x^2 + 5x^3 + 7$  کا درجہ کتنا ہے؟  
 (A) 3 (B) 2 (C) 5 (D) 7

- (v) کثیررکنی  $x^3 - 1$  کی ضربی صورت کون سی ہے؟  
 (A)  $(1, -1)$  (B)  $(3, -1)$  (C)  $(1, 0, 0, -1)$  (D)  $(1, 3, -1)$

- (vi)  $p(7\sqrt{7}) = ?$  جب  $p(x) = x^2 - 7\sqrt{7}x + 3$   
 (A) 3 (B)  $7\sqrt{7}$  (C)  $42\sqrt{7} + 3$  (D)  $49\sqrt{7}$

- (vii) کثیررکنی  $2x^3 + 2x$  کی  $x = -1$  ہو تو قیمت کتنی ہے؟  
 (A) 4 (B) 2 (C) -2 (D) -4

- (viii) کثیررکنی  $3x^2 + mx$  کا  $(x-1)$  جز ضربی ہو تب  $m$  کی قیمت کتنی ہے؟  
 (A) 2 (B) -2 (C) -3 (D) 3

- (ix)  $(x^2 - 3)(2x - 7x^3 + 4)$  کا ضرب کر کے حاصل ہونے والی کثیررکنی کا درجہ کتنا ہوگا؟  
 (A) 5 (B) 3 (C) 2 (D) 0

(x) درج ذیل میں سے خطی کثیررکنی کون سی ہے؟

(A)  $x + 5$  (B)  $x^2 + 5$  (C)  $x^3 + 5$  (D)  $x^4 + 5$

(2) درج ذیل ہر کثیررکنی کا درجہ لکھیے۔

(i)  $5 + 3x^4$  (ii) 7 (iii)  $ax^7 + bx^9$  ... (یہاں  $a$  اور  $b$  غیر صفر مستقل اعداد ہیں۔)

(3) درج ذیل کثیررکنیوں کو معیاری صورت میں لکھیے۔

(i)  $4x^2 + 7x^4 - x^3 - x + 9$  (ii)  $p + 2p^3 + 10p^2 + 5p^4 - 8$

(4) درج ذیل کثیررکنیوں کو ضربی صورت میں لکھیے۔

(i)  $x^4 + 16$  (ii)  $m^5 + 2m^2 + 3m + 15$

(5) درج ذیل ضربی صورت والی کثیررکنیوں کو  $x$  متغیر کا استعمال کر کے قوت نمائی صورت میں لکھیے۔

(i) (3, -2, 0, 7, 18) (ii) (6, 1, 0, 7) (iii) (4, 5, -3, 0)

(6) جمع کیجیے۔

(i)  $7x^4 - 2x^3 + x + 10$  ;  $3x^4 + 15x^3 + 9x^2 - 8x + 2$  (ii)  $3p^3q + 2p^2q + 7$  ;  $2p^2q + 4pq - 2p^3q$

(7) تفریق کیجیے۔

(i)  $5x^2 - 2y + 9$  ;  $3x^2 + 5y - 7$  (ii)  $2x^2 + 3x + 5$  ;  $x^2 - 2x + 3$

(8) درج ذیل ضرب کیجیے۔

(i)  $(m^3 - 2m + 3)(m^4 - 2m^2 + 3m + 2)$  (ii)  $(5m^3 - 2)(m^2 - m + 3)$

(9) کثیررکنی  $3x^3 - 8x^2 + x + 7$  کو کثیررکنی  $x - 3$  سے ترکیبی تقسیم کے طریقے سے تقسیم کیجیے اور باقی معلوم کیجیے۔

(10)  $m$  کی کس قیمت کے لیے  $x + 3$ ، کثیررکنی  $x^3 - 2mx + 21$  کا جز ضربی ہوگا؟

(11) 2016 سال کے آخر میں کیواڑ، روڑ اور چکھلی گاؤں کی آبادی بالترتیب  $5x^2 - 3y^2$ ،  $7y^2 + 2xy$  اور  $9x^2 + 4xy$  تھی۔ 2017 سال کی

ابتدا میں تینوں گاؤں میں تعلیم اور روزگار کے لیے بالترتیب  $x^2 + xy - y^2$ ،  $5xy$  اور  $3x^2 + xy$  آدمی دوسرے گاؤں چلے گئے۔ تو 2017 کی

ابتدا میں ان تینوں گاؤں کی کل آبادی کتنی تھی؟

(12) کثیررکنیوں  $bx^2 + x + 5$  اور  $bx^3 - 2x + 5$  کو  $x - 3$  سے تقسیم کریں تو باقی بالترتیب  $m$  اور  $n$  آتا ہے۔ اگر  $m - n = 0$  ہو تب  $b$  کی

قیمت معلوم کیجیے۔

(13) مختصر کیجیے :  $(8m^2 + 3m - 6) - (9m - 7) + (3m^2 - 2m + 4)$

(14) کثیررکنی  $x^2 + 13x + 7$  میں سے کون سی کثیررکنی منہا کریں تو کثیررکنی  $3x^2 + 5x - 4$  ملے گی؟

(15) الجبری عبارت  $4m + 2n + 3$  میں کون سی عبارت ملائیں کہ کثیررکنی  $6m + 3n + 10$  حاصل ہو؟





آئیے، سیکھیں



- نسبت
- مساوی نسبتوں کا مسئلہ
- نسبت کی خصوصیات
- مسلسل تناسب
- مساوی نسبتوں پر عمل
- نسبت میں k کا طریقہ

آئیے ذرا یاد کریں



ہم گزشتہ جماعت میں نسبت اور تناسب کا مطالعہ کر چکے ہیں۔ اس پر مبنی مثالیں حل کر چکے ہیں۔

مثال : دل کے بنائے ہوئے روا کے لڈو بڑے لڈو ہوتے ہیں۔ وہ ایک پیالی گھی، تین پیالی روا اور دو پیالی شکر لے کر لڈو بناتی ہے۔

یہاں روا اور شکر کا تناسب 2 : 3 یا  $\frac{3}{2}$  ہے۔

اگر لڈو کے لیے 12 پیالی روا لیں تو شکر کتنی درکار ہوگی؟

فرض کریں x پیالی شکر درکار ہوگی۔ اس بناء پر  $\frac{3}{2} = \frac{12}{x}$

$$\therefore 3x = 24 ; \therefore x = 8$$

یعنی 12 پیالی روا لے کر لڈو بنانے کے لیے 8 پیالی شکر درکار ہوگی۔

اس مثال کو ذیل کے مطابق بھی حل کر سکتے ہیں۔

روا 3k پیالی ہو تب شکر 2k پیالی درکار ہوگی۔ کیونکہ  $\frac{3k}{2k} = \frac{3}{2}$

$$\therefore 2k = 8 , \therefore k = 4 ; \therefore 3k = 12 , \text{ یہاں}$$

اس لیے 8 پیالی شکر درکار ہوگی۔

آئیے سمجھ لیں



نسبت اور تناسب Ratio and proportion

دو اعداد کی نسبت کے تصور کو تین یا زائد اعداد کے لیے وسعت دے سکتے ہیں۔ لڈوؤں کی مثال دیکھیے۔

گھی، روا اور شکر کا تناسب 1 : 3 : 2 ہے۔

یہاں گھی اور روا کی نسبت 1 : 3 اور روا اور شکر کا نسبت 3 : 2 ہے۔ یہ معلومات یکساں پیمانے میں دی ہوئی ہے۔

گھی  $1k = k$  پیالی، روا  $3k$  پیالی اور شکر  $2k$  پیالی فرض کریں گے۔

اب 12 پیالی روا ہوگا تو لڈوؤں کے لیے کتنی پیالی گھی اور کتنی پیالی شکر درکار ہوگی؟ معلوم کر سکتے ہیں۔

کیونکہ  $3k = 12$ ،  $k = 4$ ،  $\therefore 2k = 8$  یعنی 4 پیالی گھی اور 8 پیالی شکر درکار ہوگی۔

یہی تصور چار اور زائد امور کے تناسب کے لیے بھی استعمال کر سکتے ہیں۔

اگر  $a, b, c, d$  یہ چار اعداد کا تناسب  $4 : 3 : 2 : 1$  ہو تب وہ اعداد بالترتیب  $2m, 3m, 4m, 7m$  فرض کریں گے اور دی ہوئی معلومات کا استعمال کر کے  $m$  کی قیمت معلوم کریں گے۔ مثال میں ان چار اعداد کی جمع 48 دی ہو تب وہ چار اعداد معلوم کریں گے۔

$$2m + 3m + 7m + 4m = 16m = 48$$

$$\therefore m = 3$$

$$\therefore 2m = 6, 3m = 9, 7m = 21, 4m = 12 \quad \dots \text{(اعداد حاصل ہوتے ہیں۔)}$$

$$\therefore \text{مطلوبہ اعداد} = 6, 9, 21, 12$$

مثال (1) کھاد میں  $10 : 18 : 18$  تناسب میں نائٹروجن کا مرکب 18%، فاسفورس کا مرکب 18% اور پوٹاشیم کا مرکب 10% ہوتا ہے۔ باقی دوسری اشیاء ہوتی ہیں۔ تب بتائیے اس قسم کی 20 کلوگرام کھاد میں ہر طرح کے مرکبات کی کیت (وزن) کتنا ہے؟

حل : فرض کیجیے 20 کلوگرام کھاد میں نائٹروجن کے مرکب کا وزن  $x$  کلوگرام ہے۔

$$\therefore \frac{18}{100} = \frac{x}{20}, \quad \therefore x = \frac{18 \times 20}{100} = 3.6$$

$\therefore$  نائٹروجن کا مرکب 3.6 کلوگرام ہے۔

فاسفورس کے مرکب کا فیصد 18 اتنا ہی ہے۔ اس لیے فاسفورس کا مرکب 3.6 کلوگرام ہے۔

فرض کیجیے 20 کلوگرام کھاد میں پوٹاشیم کے مرکب کی کیت (وزن)  $y$  ہے۔

$$\frac{10}{100} = \frac{y}{20} \quad \therefore y = 2 \quad ; \quad \therefore \text{پوٹاشیم کا مرکب} = 2 \text{ کلوگرام}$$

مستقیم تناسب

ایک موٹر گاڑی 1 لٹر پٹرول میں 10 کلومیٹر فاصلہ طے کرتی ہے۔

اس لیے 20 لٹر پٹرول میں وہ گاڑی  $20 \times 10 = 200$  کلومیٹر فاصلہ طے کرے گی۔

تب 40 لٹر پٹرول میں وہ گاڑی  $40 \times 10 = 400$  کلومیٹر فاصلہ طے کرے گی۔

اوپر دی ہوئی معلومات جدول کی صورت میں لکھتے ہیں۔

پٹرول $x$ لٹر	1	20	40	
فاصلہ $y$ : کلومیٹر	10	200	400	
$\frac{x}{y}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{20}{200} = \frac{1}{10}$	$\frac{40}{400} = \frac{1}{10}$	$\frac{x}{y} = k$

گاڑی سے استعمال کیا گیا پٹرول (لٹر میں) اور اتنے ہی پٹرول میں طے کردہ فاصلہ (کلومیٹر میں)، ان اعداد کی نسبت مستقل ہے۔ ایسے وقت یہ

دونوں مستقیم تناسب میں ہیں، یعنی ہم کہتے ہیں یہ دونوں اعداد مستقیم تغیر میں بدلتے ہیں۔

## معکوس تناسب

ایک موٹر کو 50 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے 100 کلومیٹر جانے کے لیے دو گھنٹہ لگتا ہے۔ ایک نیل گاڑی کی رفتار 5 کلومیٹر فی گھنٹہ ہے۔ تو اتنا ہی فاصلہ طے کرنے کے لیے نیل گاڑی کو 20 گھنٹے لگتے ہیں۔  
'فاصلہ = وقت × رفتار' اسے دھیان میں رکھتے ہوئے اوپر کی معلومات جدول کی صورت میں لکھیے۔

	(x) کلومیٹر رفتار فی گھنٹہ	(y) وقت (گھنٹہ میں)	$x \times y$	$x \times y = k$
موٹر	50	2	100	
نیل گاڑی	5	20	100	

یعنی، سواریوں کی رفتار اور سفر کے لیے لگنے والا وقت، ان دونوں اعداد کا حاصل ضرب مستقل دکھائی دیتا ہے۔ ایسے وقت ہم کہتے ہیں کہ یہ اعداد معکوس تناسب میں ہیں یا یہ اعداد معکوس تغیر میں بدلتے ہیں۔  
اوپر کی مثال میں سواریوں کی رفتار اور دیا ہوا فاصلہ جانے کے لیے وقت معکوس تناسب میں ہیں۔



## نسبت کی خصوصیات :

(1)  $a$  اور  $b$  دو اعداد کی نسبت  $a : b$  یا  $\frac{a}{b}$  کی صورت میں لکھتے ہیں۔ یہاں  $a$  کو مقدم رکن یا پہلا رکن (Antecedent) اور  $b$  کو تالی رکن یا دوسرا رکن (Consequent) کہتے ہیں۔

(2) دو اعداد کی نسبت میں تالی 100 ہو تب اس نسبت کو فیصدی کہتے ہیں۔

(3) تناسب میں تمام اعداد کسی ایک ہی غیر صفر عدد سے ضرب دیں یا تقسیم کریں تو تناسب نہیں بدلتا۔

مثلاً  $3 : 4 = 6 : 8 = 9 : 12$  اسی طرح  $2 : 3 = 4 : 6 = 6 : 9$  یا  $k$ ، غیر صفر عدد ہو تب

$$a : b : c = ak : bk : ck \quad \text{اور} \quad a : b = ak : bk$$

(4) جن اعداد کی نسبت معلوم کرنا ہے، انہیں ایک ہی قسم کی پیمائش میں ہونا چاہیے۔ اسی طرح ہر ایک کی پیمائش کی اکائی بھی یکساں ہونا چاہیے۔

(5) نسبت کی اکائی نہیں ہوتی۔

مثلاً 2 کلوگرام اور 300 گرام کی نسبت 2 : 300 نہیں ہوتی بلکہ گرام 2000 = کلوگرام 2

اس لیے وہ نسبت 2000 : 300 یعنی 20 : 3 ہے۔

مثال (1) سیما اور راج شری کی عمروں کی نسبت 3 : 1 ہے۔ راج شری اور اتول کی عمروں کی نسبت 2 : 3 ہے۔ تو سیما، راج شری، اور اتول کی عمروں کی نسبت معلوم کیجیے۔

حل : 3 : 1 = راج شری کی عمر : سیما کی عمر اور 2 : 3 = اتول کی عمر : راج شری کی عمر →

پہلی نسبت کے تالی رکن اور دوسری نسبت کے مقدم رکن کو یکساں ہونا چاہیے۔

اس کے لیے مسلسل نسبت حاصل کرنے کے لیے پہلی نسبت کے ارکان کو 2 سے ضرب دیجیے۔ یعنی  $6 : 2 = 3 : 1$  حاصل ہوگا۔

$$\frac{\text{سیما کی عمر}}{\text{راج شری کی عمر}} = \frac{6}{2}, \quad \frac{\text{راج شری کی عمر}}{\text{اتول کی عمر}} = \frac{2}{3}$$

$$6 : 2 : 3 = \text{اتول کی عمر} : \text{راج شری کی عمر} : \text{سیما کی عمر}$$

مثال (2) ایک مستطیل کھیت کی لمبائی 1.2 کلومیٹر ہے اور اس کی چوڑائی 400 میٹر ہے تو لمبائی کی چوڑائی سے نسبت معلوم کیجیے۔

حل : یہاں مستطیل کی لمبائی کلومیٹر میں ہے اور چوڑائی میٹر میں ہے۔ نسبت کے لیے دونوں اکائیاں یکساں ہونی چاہیے۔ اس لیے کلومیٹر کی میٹر میں تحویل کریں گے۔

$$1.2 \text{ کلومیٹر} = 1.2 \times 1000 = 1200 \text{ میٹر}$$

∴ 1200 میٹر کی 400 میٹر سے نسبت لیں گے۔

$$\therefore 3 : 1 \text{ یعنی } \frac{1200}{400} = \frac{3}{1} \text{ مطلوبہ نسبت}$$

مثال (3) مہیش کے ہرمینے کے خرچ کی اس کی آمدنی سے نسبت 3 : 5 ہے۔ تو اس کا خرچ اس کی آمدنی کے کتنے فیصدی ہے؟

حل : خرچ کی آمدنی سے نسبت 3 : 5 ہے۔ اس کی فیصدی میں تحویل کرنا ہے یعنی دوسرے رکن کو 100 بنانا ہے۔

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 20}{5 \times 20} = \frac{60}{100} \text{ یعنی } \frac{\text{خرچ}}{\text{آمدنی}} = \frac{60}{100} = 60\%$$

∴ مہیش کا خرچ آمدنی کا 60% ہے۔

مثال (4) ایک باغ میں آم اور چیکو کے درختوں کی تعداد کی نسبت 2 : 3 ہے۔ اگر اس باغ میں ہر قسم کے 5 درخت زیاد لگائے جائیں تو ان کی تعداد کی نسبت

5 : 7 ہو جاتی۔ تو اس باغ میں آموں کے اور چیکو کے درخت کتنے ہیں؟

حل : ابتدائی نسبت 2 : 3 ہے۔

فرض کیجیے۔ باغ میں آم کے درخت =  $2x$  اور  $3x$  = چیکو کے درخت

$$\frac{2x+5}{3x+5} = \frac{5}{7}$$

دی ہوئی شرط کے مطابق،

$$14x + 35 = 15x + 25$$

$$\therefore x = 10$$

$$\therefore \text{باغ میں آم کے درخت} = 2x = 2 \times 10 = 20$$

$$\therefore \text{باغ میں چیکو کے درخت} = 3x = 3 \times 10 = 30$$

مثال (5) دو اعداد کی نسبت 5 : 7 ہے۔ اگر ہر عدد میں 40 ملائیں تو حاصل ہونے والی جمع کی نسبت 25 : 31 ہو جاتی ہے۔ تو وہ اعداد معلوم کیجیے۔

حل : فرض کیجیے پہلا عدد =  $5x$  اور دوسرا عدد =  $7x$

$$\frac{5x+40}{7x+40} = \frac{25}{31}$$

دی ہوئی شرط کے مطابق،

$$\therefore 31(5x+40) = 25(7x+40)$$

$$\therefore 155x + 1240 = 175x + 1000$$

$$\therefore 1240 - 1000 = 175x - 155x$$

$$\therefore 240 = 20x$$

$$\therefore x = 12$$

$$\text{پہلا عدد} = 5 \times 12 = 60$$

$$\text{دوسرا عدد} = 7 \times 12 = 84$$

$\therefore$  دیے ہوئے اعداد 60 اور 84 ہیں۔

#### مشقی سیٹ 4.1

(1) ذیل میں دیے ہوئے اعداد کی جوڑی میں سے پہلے عدد کی دوسرے عدد سے نسبت کو مختصر ترین صورت میں لکھیے۔

(i) 72, 60      (ii) 38, 57      (iii) 52, 78

(2) درج ذیل رقموں میں سے پہلے رقم کی دوسری رقم سے نسبت کو مختصر ترین صورت میں لکھیے۔

(i) روپے 308, روپے 700      (ii) روپے 12, روپے 40

(iii) 5 لٹر, 2500 لٹر      (iv) مہینے 4 سال, مہینے 8 سال

(v) 3.8 کلوگرام, 1900 گرام      (vi) سیکنڈ 20 منٹ, سیکنڈ 6 منٹ

(3) درج ذیل فی صدی کو مختصر ترین نسبت کی صورت میں لکھیے۔

(i) 75 : 100      (ii) 44 : 100      (iii) 6.25%      (iv) 52 : 100      (v) 0.64%

(4) ایک چھوٹا مکان 3 آدمی 8 دن میں تعمیر کر سکتے ہیں تو وہی مکان 6 دنوں میں تعمیر کرنے کے لیے کتنے آدمی لگیں گے؟

(5) ذیل کی نسبتوں کی فی صدی میں تحویل کیجیے۔

(i) 15 : 25      (ii) 47 : 50      (iii)  $\frac{7}{10}$       (iv)  $\frac{546}{600}$       (v)  $\frac{7}{16}$

(6) آجھا اور اس کی ماں کی عمروں کی نسبت 2 : 5 ہے۔ آجھا کی پیدائش کے وقت اس کی ماں کی عمر 27 سال تھی۔ تو آجھا اور اس کی ماں کی موجودہ عمریں

معلوم کیجیے۔

(7) وٹسلا اور سارا کی موجودہ عمریں بالترتیب 14 سال اور 10 سال ہے تو کتنے سال بعد ان کی عمروں کی نسبت 5 : 4 ہو جائے گی؟

(8) ثریا اور اس کی ماں کی موجودہ عمروں کی نسبت 2 : 7 ہے۔ 2 سال بعد ان کی عمروں کی نسبت 1 : 3 ہو جائے گی تو ثریا کی موجودہ عمر کتنی ہے؟

اگر  $d > 0$ ،  $b > 0$  ہو تو  $\frac{c}{d}$ ،  $\frac{a}{b}$  ان نسبتوں کا موازنہ ذیل کے اصول کے مطابق کر سکتے ہیں۔

(i) اگر  $ad > bc$  تب  $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$  (ii) اگر  $ad < bc$  تب  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  (iii) اگر  $ad = bc$  تب  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

درج ذیل میں دی ہوئی نسبتوں کی ہر جوڑی میں ترتیبی تعلق طے کیجیے۔

مثال (2)  $\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{8}}$ ،  $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

$$\sqrt{13} \times \sqrt{5}, \quad \sqrt{8} \times \sqrt{7}$$

$$\sqrt{65} \quad \sqrt{56}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{65}}{\sqrt{8}} > \frac{\sqrt{56}}{\sqrt{5}}$$

مثال (1)  $\frac{4}{9}$ ،  $\frac{7}{8}$

حل:  $4 \times 8 \quad 7 \times 9$

$$32 < 63$$

$$\therefore \frac{4}{9} < \frac{7}{8}$$

مثال (3) اگر  $a$  اور  $b$  صحیح اعداد ہوں اور  $a < b$ ،  $b > 1$  تب  $\frac{a-1}{b-1}$ ،  $\frac{a+1}{b+1}$  نسبتوں میں ترتیبی تعلق طے کیجیے۔

حل:  $a < b$

$$\therefore a - 1 < b - 1$$

اب  $\frac{a-1}{b-1} - \frac{a+1}{b+1}$  تفریق پر غور کریں گے۔

$$\frac{a-1}{b-1} - \frac{a+1}{b+1} = \frac{(a-1)(b+1) - (a+1)(b-1)}{(b-1)(b+1)}$$

$$= \frac{(ab - b + a - 1) - (ab + b - a - 1)}{b^2 - 1}$$

$$= \frac{ab - b + a - 1 - ab - b + a + 1}{b^2 - 1}$$

$$= \frac{2a - 2b}{b^2 - 1}$$

$$= \frac{2(a-b)}{b^2 - 1} \quad \dots (1)$$

اب  $a < b$ ،  $\therefore a - b < 0$

$b > 1$  کیوں کہ  $b^2 - 1 > 0$  اسی طرح

$$\frac{2(a-b)}{b^2 - 1} < 0 \quad \dots (2)$$

$$\frac{a-1}{b-1} - \frac{a+1}{b+1} < 0$$

[بیان (1) اور (2) سے] ...

$$\frac{a-1}{b-1} < \frac{a+1}{b+1}$$

مثال (4) اگر  $a : b = 2 : 1$  اور  $b : c = 4 : 1$  تب  $\left(\frac{a^4}{32b^3c^2}\right)^3$  عبارت کی قیمت معلوم کیجیے۔

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{1} ; \therefore a = 2b ; \frac{b}{c} = \frac{4}{1} ; \therefore b = 4c$$

$$a = 2b = 2 \times 4c = 8c \quad \therefore a = 8c$$

اب دی ہوئی عبارت میں  $a = 8c$  اور  $b = 4c$  قیمت رکھیں گے۔

$$\left(\frac{a^4}{32b^3c^2}\right)^3 = \left(\frac{(8c)^4}{32 \times 4^3 \times c^2 \times c^2}\right)^3$$

$$= \left[\frac{8 \times 8 \times 8 \times 8 \times c^4}{32 \times 16 \times c^2 \times c^2}\right]^3$$

$$= (8)^3$$

$$\therefore \left(\frac{a^4}{32b^3c^2}\right)^3 = 512$$

#### مشقی سیٹ 4.2

$$\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk} \quad (1)$$

خصوصیت کا استعمال کر کے خالی جگہ مناسب عدد لکھیے۔

$$(i) \frac{5}{7} = \frac{\dots}{28} = \frac{35}{\dots} = \frac{\dots}{3.5}$$

$$(ii) \frac{9}{14} = \frac{4.5}{\dots} = \frac{\dots}{42} = \frac{\dots}{3.5}$$

(2) درج ذیل نسبتیں معلوم کیجیے۔

(i) دائرہ کے نصف قطر کی، اس کے محیط سے نسبت

(ii) نصف قطر والے دائرہ کے محیط کی، اس کے رقبہ سے نسبت

(iii) 7 سم ضلع والے مربع کے وتر سے اس کے ضلع کی نسبت

(iv) 5 سم لمبائی اور 3.5 سم چوڑائی والے مستطیل کے احاطے کی اس کے رقبہ سے نسبت

(3) درج ذیل دی ہوئی نسبتوں کی جوڑیوں میں چھوٹا بڑا پن طے کیجیے۔

$$(i) \frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{3}{\sqrt{7}}$$

$$(ii) \frac{3\sqrt{5}}{5\sqrt{7}}, \frac{\sqrt{63}}{\sqrt{125}}$$

$$(iii) \frac{5}{18}, \frac{17}{121}$$

$$(iv) \frac{\sqrt{80}}{\sqrt{48}}, \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{27}}$$

$$(v) \frac{9.2}{5.1}, \frac{3.4}{7.1}$$

(4) (i)  $\square ABCD$  متوازی الاضلاع ہے۔ اس کے  $\angle A$  اور  $\angle B$  کی پیمائشوں کی نسبت 5 : 4 ہے تو  $\angle B$  کی پیمائش معلوم کیجیے۔

(ii) البرٹ اور سلیم کی موجودہ عمروں کی نسبت 5 : 9 ہے۔ 5 سال بعد ان کی عمروں کی نسبت 3 : 5 ہو جائے گی تو ان کی موجودہ عمریں

معلوم کیجیے۔

(iii) ایک مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی کی نسبت 3 : 1 ہے۔ مستطیل کا احاطہ 36 سم ہے تو مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کیجیے۔

(iv) دو اعداد کی نسبت 23 : 31 ہے ان کا مجموعہ 216 ہے۔ وہ اعداد معلوم کیجیے۔

(v) دو اعداد کا حاصل ضرب 360 ہے اور ان کی نسبت 10 : 9 ہے تو وہ اعداد معلوم کیجیے۔

(5)\* اگر  $a : b = 3 : 1$  اور  $b : c = 5 : 1$  ہے تو (i)  $\left(\frac{a^3}{15b^2c}\right)^3$  (ii)  $\frac{a^2}{7bc}$  ان عبارتوں کی قیمت معلوم کیجیے۔

(6)\*  $\sqrt{0.04 \times 0.4 \times a} = 0.4 \times 0.04 \times \sqrt{b}$  ہو تو  $\frac{a}{b}$  نسبت معلوم کیجیے۔

(7)  $(x + 3) : (x + 11) = (x - 2) : (x + 1)$  ہو تو  $x$  کی قیمت معلوم کیجیے۔

آئیے سمجھ لیں



مساوی نسبتوں پر عمل

مساویت کی خصوصیت کا استعمال کر کے دو مساوی نسبتوں پر کچھ عمل کیا جاسکتا ہے۔ اس کا مطالعہ کریں گے۔

اگر  $a, b, c, d$  مثبت اعداد ہوں تو ان کے لیے درج ذیل خصوصیت سمجھ لیں۔

(I) عمل عکس (Invertendo) : اگر  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ہو تو  $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ... (دیا ہوا ہے)

$\therefore a \times d = b \times c$  ... (ترجیحی ضرب)

$\therefore b \times c = a \times d$  ... (طرفین کا بازو تبدیل کرنے پر)

$\therefore \frac{b \times c}{a \times c} = \frac{a \times d}{a \times c}$  ... (طرفین کو  $a \times c$  سے تقسیم کرنے پر)

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

اگر  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ہو تب  $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$  اس خصوصیت کو ”عمل عکس“ کہتے ہیں۔

(II) عمل تبدیل (Alternendo) : اگر  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$  ہو تب  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$  ... (دیا ہوا ہے)

$\therefore a \times d = b \times c$  ... (ترجیحی ضرب کرنے پر)

$\frac{a \times d}{c \times d} = \frac{b \times c}{c \times d}$  ... (طرفین کو  $c \times d$  سے تقسیم کرنے پر)

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

اگر  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ہو تب  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$  اس خصوصیت کو ”عمل تبدیل“ کہتے ہیں۔

$$\text{(III) عمل ترکیب (Componendo) : اگر } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ہو تب } \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \text{ (دیا ہوا ہے) ...}$$

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 \text{ ... (طرفین میں 1 ملانے پر)}$$

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

اگر  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ہو تب  $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$  اس خصوصیت کو عمل ترکیب کہتے ہیں۔

$$\text{(IV) عمل تفصیل (Dividendo) : اگر } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ہو تب } \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \text{ (دیا ہوا ہے) ...}$$

$$\therefore \frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1 \text{ ... (طرفین سے 1 تفریق کرنے پر)}$$

$$\therefore \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

اگر  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ہو تب  $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$  اس خصوصیت کو ”عمل تفصیل“ کہتے ہیں۔

$$\text{(V) عمل ترکیب و تفصیل (Componendo-Dividendo) : اگر } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ہو تب } \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \text{ جب } a \neq b \text{ اور } c \neq d$$

$$\therefore \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \text{ ... (عمل ترکیب سے) (1) ، } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\therefore \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \text{ ... (عمل تفصیل سے) (2)}$$

$$\therefore \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \text{ ... [(1) کو (2) سے تقسیم دینے پر]}$$

اگر  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ہو تب  $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$  اس خصوصیت کو عمل ترکیب و تفصیل کہتے ہیں۔

عمل ترکیب اور تفصیل کی عام صورت

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \text{ ... (ایک مرتبہ عمل ترکیب سے) } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{a+2b}{b} = \frac{c+2d}{d} \text{ ... (دو مرتبہ عمل ترکیب سے)}$$

$$\text{عام طور پر } \frac{a+mb}{b} = \frac{c+md}{d} \text{ ... (} m \text{ مرتبہ عمل ترکیب سے) ... (1)}$$

اسی طرح اگر  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ہو تب  $m$  مرتبہ عمل تفصیل سے،

$$\frac{a-mb}{b} = \frac{c-md}{d} \text{ ... (} m \text{ مرتبہ عمل تفصیل سے) ... (2)}$$

اور اگر  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ہو تب [(1) اور (2) کی تقسیم کرنے سے]

$$\frac{a+mb}{a-mb} = \frac{c+md}{c-md}$$



اگر  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ہو تب  $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$  ... (عمل عکس) اگر  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ہو تب  $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$  ... (عمل ترکیب)

اگر  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ہو تب  $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$  ... (عمل تفصیل) اگر  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ہو تب  $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$  ... (عمل ترکیب و تفصیل)

حل کردہ مثالیں :

مثال (1) اگر  $\frac{a}{b} = \frac{5}{3}$  ہو تب  $\frac{a+7b}{7b}$  نسبت معلوم کیجیے۔

طریقہ I

حل : اگر  $\frac{a}{b} = \frac{5}{3}$  ہو تب عمل تبدیل کر کے،  $\frac{a}{5} = \frac{b}{3} = k$

$\therefore a = 5k, b = 3k$

$\therefore \frac{a+7b}{7b} = \frac{5k+7 \times 3k}{7 \times 3k}$

$= \frac{5k+21k}{21k}$

$= \frac{26k}{21k} = \frac{26}{21}$

مثال (2) اگر  $\frac{a}{b} = \frac{7}{4}$  ہو تب  $\frac{5a-b}{b}$  معلوم کیجیے۔

طریقہ I

$\frac{a}{b} = \frac{7}{4}$

حل :

$\therefore \frac{a}{7} = \frac{b}{4}$  ... (عمل تبدیل)

$\therefore \frac{a}{7} = \frac{b}{4} = m$  ... (فرض کیجیے)

$\therefore a = 7m, b = 4m$

$\therefore \frac{5a-b}{b} = \frac{5(7m)-4m}{4m}$

$= \frac{35m-4m}{4m}$

$= \frac{31}{4}$

طریقہ II

$\frac{a}{b} = \frac{5}{3}$

$\therefore \frac{a}{7b} = \frac{5}{21}$  ... (طرفین کو  $\frac{1}{2}$  سے ضرب کرنے پر)

$\therefore \frac{a+7b}{7b} = \frac{5+21}{21}$  ... (عمل ترکیب)

$\therefore \frac{a+7b}{7b} = \frac{26}{21}$

طریقہ II

$\frac{a}{b} = \frac{7}{4}$

$\frac{5a}{b} = \frac{5 \times 7}{4}$  ... (طرفین کو 5 سے ضرب کرنے پر)

$= \frac{35}{4}$

$\frac{5a-b}{b} = \frac{35-4}{4}$  ... (عمل تفصیل سے)

$\frac{5a-b}{b} = \frac{31}{4}$

مثال (3) اگر  $\frac{a}{b} = \frac{7}{3}$  ہو تب  $\frac{a+2b}{a-2b}$  کی قیمت معلوم کیجیے۔

طریقہ I

حل : فرض کیجیے

$a = 7m, b = 3m$  رکھنے پر

$$\begin{aligned} \therefore \frac{a+2b}{a-2b} &= \frac{7m+2 \times 3m}{7m-2 \times 3m} \\ &= \frac{7m+6m}{7m-6m} \\ &= \frac{13m}{m} = \frac{13}{1} \end{aligned}$$

مثال (4) اگر  $\frac{a}{3} = \frac{b}{2}$  ہو تب  $\frac{5a+3b}{7a-2b}$  کی قیمت معلوم کیجیے۔

طریقہ I

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{2} \quad \dots \text{ (دیا ہوا ہے) } \dots$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{3}{2} \quad \dots \text{ (عمل تبدیل) } \dots$$

اب  $\frac{5a+3b}{7a-2b}$  کے ہر رکن کو  $b$  سے تقسیم کریں گے۔

$$\begin{aligned} \frac{5a}{b} + \frac{3b}{b} &= 5\left(\frac{a}{b}\right) + 3 \\ \frac{7a}{b} - \frac{2b}{b} &= 7\left(\frac{a}{b}\right) - 2 \\ &= \frac{5\left(\frac{3}{2}\right) + 3}{7\left(\frac{3}{2}\right) - 2} \\ &= \frac{\frac{15}{2} + 3}{\frac{21}{2} - 2} \\ &= \frac{15+6}{21-4} \\ &= \frac{21}{17} \end{aligned}$$

طریقہ II

$$\frac{a}{b} = \frac{7}{3}$$

$$\therefore \frac{a}{2b} = \frac{7}{6} \quad \dots \text{ (طرفین کو } \frac{1}{2} \text{ سے ضرب دینے پر) } \dots$$

$$\therefore \frac{a+2b}{a-2b} = \frac{7+6}{7-6} \quad \dots \text{ (عمل ترکیب و تفصیل سے) } \dots$$

$$\therefore \frac{a+2b}{a-2b} = \frac{13}{1}$$

طریقہ II

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{2}$$

$$\therefore \frac{a}{3} = \frac{b}{2} = t \quad \dots \text{ (فرض کریں) } \dots$$

$$\therefore a = 3t, b = 2t$$

قیمت رکھنے پر،

$$\frac{5a+3b}{7a-2b} = \frac{5(3t)+3(2t)}{7(3t)-2(2t)} \quad \dots (t \neq 0)$$

$$= \frac{15t+6t}{21t-4t}$$

$$= \frac{21t}{17t}$$

$$= \frac{21}{17}$$

مثال (5) اگر  $\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$  ہو تب  $\frac{4x-y}{4x+y}$  کی قیمت معلوم کیجیے۔  
حل :

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} &= \frac{4}{5} && \dots \text{ (دیا ہوا ہے)} \\ \frac{4x}{y} &= \frac{16}{5} && \dots \text{ (طرفین کو 4 سے ضرب دینے پر)} \\ \therefore \frac{4x+y}{4x-y} &= \frac{16+5}{16-5} && \dots \text{ (عمل ترکیب و تفصیل کرنے پر)} \\ \therefore \frac{4x+y}{4x-y} &= \frac{21}{11} \\ \therefore \frac{4x-y}{4x+y} &= \frac{11}{21} && \dots \text{ (عمل عکس کرنے پر)} \end{aligned}$$

مثال (6) اگر  $5x = 4y$  ہو تب  $\frac{3x^2+y^2}{3x^2-y^2}$  کی قیمت معلوم کیجیے۔  
حل :

$$\begin{aligned} 5x &= 4y && \dots \text{ (دیا ہوا ہے)} \\ \frac{x}{y} &= \frac{4}{5} \\ \frac{x^2}{y^2} &= \frac{16}{25} && \dots \text{ (طرفین کا مربع کرنے پر)} \\ \therefore \frac{3x^2}{y^2} &= \frac{48}{25} && \dots \text{ (طرفین کو 3 سے ضرب دینے پر)} \\ \therefore \frac{3x^2+y^2}{3x^2-y^2} &= \frac{48+25}{48-25} && \dots \text{ (عمل ترکیب و تفصیل سے)} \\ \therefore \frac{3x^2+y^2}{3x^2-y^2} &= \frac{73}{23} \end{aligned}$$



مساوی نسبتوں کی خصوصیت کا استعمال (Use of properties of equal ratios)

کچھ مساواتیں حل کرنے کے لیے دیگر طریقوں کی بجائے مساوی نسبتوں پر عمل کا استعمال کرنا سہولت بخش ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} \frac{3x^2+5x+7}{10x+14} &= \frac{3x^2+4x+3}{8x+6} && \text{مثال (1) مساوات حل کیجیے۔} \\ \frac{3x^2+5x+7}{10x+14} &= \frac{3x^2+4x+3}{8x+6} && \text{حل :} \\ \frac{(6x^2+10x+14)}{10x+14} &= \frac{(6x^2+8x+6)}{8x+6} && \dots \text{ (طرفین کو 2 سے ضرب دینے پر)} \end{aligned}$$

$$\frac{(6x^2 + 10x + 14) - (10x + 14)}{10x + 14} = \frac{(6x^2 + 8x + 6) - (8x + 6)}{8x + 6} \quad \dots \text{ (عمل تفصیل سے)}$$

$$\therefore \frac{6x^2}{10x + 14} = \frac{6x^2}{8x + 6}$$

یہ مساوات  $x = 0$  قیمت سے مطمئن ہوتی ہے۔ اس لیے  $x = 0$  ایک حل ہے۔

اگر  $x \neq 0$  تب  $x^2 \neq 0$

$$\frac{1}{10x + 14} = \frac{1}{8x + 6} \quad \dots \text{ (} 6x^2 \text{ سے تقسیم کرنے پر)}$$

$$\therefore 8x + 6 = 10x + 14 \quad \dots \text{ (عمل عکس)}$$

$$\therefore 6 - 14 = 10x - 8x$$

$$\therefore -8 = 2x$$

$$\therefore x = -4$$

$\therefore x = -4$  یا  $x = 0$  دی ہوئی مساوات کا حل ہیں۔

$$\text{مثال (2) حل کیجیے: } \frac{\sqrt{x+7} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x+7} - \sqrt{x-2}} = \frac{5}{1}$$

$$\frac{\sqrt{x+7} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x+7} - \sqrt{x-2}} = \frac{5}{1} \quad \text{حل:}$$

$$\frac{(\sqrt{x+7} + \sqrt{x-2}) + (\sqrt{x+7} - \sqrt{x-2})}{(\sqrt{x+7} + \sqrt{x-2}) - (\sqrt{x+7} - \sqrt{x-2})} = \frac{5+1}{5-1} \quad \dots \text{ (عمل ترکیب و تفصیل سے)}$$

$$\therefore \frac{2\sqrt{x+7}}{2\sqrt{x-2}} = \frac{6}{4}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{x+7}}{\sqrt{x-2}} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \frac{x+7}{x-2} = \frac{9}{4} \quad \dots \text{ (طرفین کا مربع کرنے پر)}$$

$$\therefore 4(x+7) = 9(x-2)$$

$$\therefore 4x + 28 = 9x - 18$$

$$\therefore 28 + 18 = 9x - 4x$$

$$\therefore 46 = 5x$$

$$\therefore \frac{46}{5} = x$$

$$\therefore x = \frac{46}{5} \quad \dots \text{ (} \therefore \text{ مساوات کا حل ہے)}$$

## عملی کام :

موٹے کاغذ کے پانچ ٹکڑے لیجیے۔ ہر کاغذ پر درج ذیل میں سے ایک ایک بیان لکھیے۔

$$(i) \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \quad (ii) \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad (iii) \frac{a}{b} = \frac{ac}{bd} \quad (iv) \frac{c}{d} = \frac{c-a}{d-b} \quad (v) \frac{a}{b} = \frac{rc}{rd}$$

معلوم ثابت اعداد ہیں اور  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  معلومات دی ہوئی ہیں۔ درج بالا میں سے ہر بیان صحیح ہے یا غلط ہے، اسے کارڈ کے پیچھے لکھیے۔  
بیان غلط ہو تو اس کی وجہ لکھیے۔

### مشقی سیٹ 4.3

$$(1) \text{ اگر } \frac{a}{b} = \frac{7}{3} \text{ ہو تو درج ذیل نسبتوں کی قیمت معلوم کیجیے۔}$$

$$(i) \frac{5a+3b}{5a-3b} \quad (ii) \frac{2a^2+3b^2}{2a^2-3b^2} \quad (iii) \frac{a^3-b^3}{b^3} \quad (iv) \frac{7a+9b}{7a-9b}$$

$$(2) \text{ اگر } \frac{15a^2+4b^2}{15a^2-4b^2} = \frac{47}{7} \text{ ہو تب درج ذیل نسبتوں کی قیمت طے کیجیے۔}$$

$$(i) \frac{a}{b} \quad (ii) \frac{7a-3b}{7a+3b} \quad (iii) \frac{b^2-2a^2}{b^2+2a^2} \quad (iv) \frac{b^3-2a^3}{b^3+2a^3}$$

$$(3) \text{ اگر } \frac{3a+7b}{3a-7b} = \frac{4}{3} \text{ ہو تب } \frac{3a^2-7b^2}{3a^2+7b^2} \text{ نسبت کی قیمت معلوم کیجیے۔}$$

$$(4) \text{ درج ذیل مساواتیں حل کیجیے۔}$$

$$(i) \frac{x^2+12x-20}{3x-5} = \frac{x^2+8x+12}{2x+3}$$

$$(ii) \frac{10x^2+15x+63}{5x^2-25x+12} = \frac{2x+3}{x-5}$$

$$(iii) \frac{(2x+1)^2+(2x-1)^2}{(2x+1)^2-(2x-1)^2} = \frac{17}{8}$$

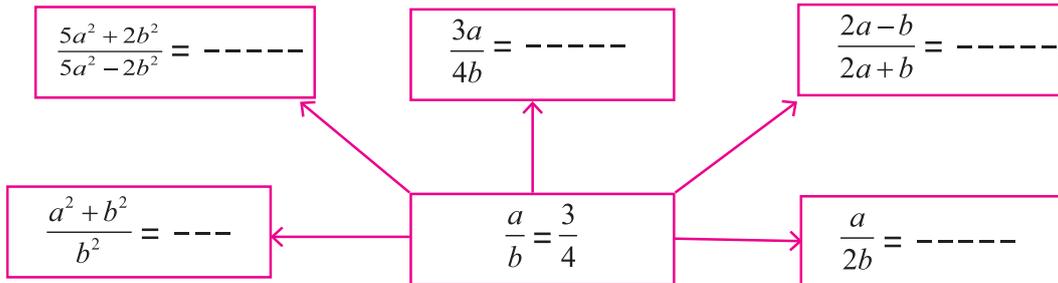
$$(iv^*) \frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{x+3}} = \frac{4}{1}$$

$$(v) \frac{(4x+1)^2+(2x+3)^2}{4x^2+12x+9} = \frac{61}{36}$$

$$(vi) \frac{(3x-4)^3-(x+1)^3}{(3x-4)^3+(x+1)^3} = \frac{61}{189}$$

عملی کام : ذیل میں دیے ہوئے درمیانی خانہ میں  $a$  اور  $b$  کی قیمتیں بدل کر یعنی  $a : b$  کی نسبت بدل کر مختلف مثالیں بنائی جاسکتی ہیں۔ اس طرح

تبدیلی کر کے استاد بھر پور مشق دیں۔





(Theorem on equal ratios) مساوی نسبتوں کا مسئلہ

اگر  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ہو تب  $\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$  اس خصوصیت کو مساوی نسبتوں کا مسئلہ کہتے ہیں۔

ثبوت : (فرض کریں) ...  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$  اس لیے  $a = bk$  اور  $c = dk$

$$\therefore \frac{a+c}{b+d} = \frac{bk+dk}{b+d} = \frac{k(b+d)}{b+d} = k$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

ہمیں معلوم ہے کہ  $\frac{a}{b} = \frac{al}{bl}$

$$\frac{al}{bl} = \frac{cm}{dm} = \frac{al+cm}{bl+dm} = k \text{ ہو تب } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$$

اسی طریقے سے غور کر کے اگر (محدودارکان)  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots$  اور اگر  $l, m, n, \dots$  یہ غیر صفر عدد ہوں تب

$$\text{اسی طرح مساوی نسبتوں کے مسئلہ کی عام صورت ملتی ہے۔ (محدودارکان) } \dots = \frac{al+cm+en+\dots}{bl+dm+fn+\dots} \text{ ہر نسبت}$$

غور کیجیے



ایک جیم خانہ (ورزش گاہ) میں چھوٹے بچوں کے گروہ میں 35 لڑکیاں اور 42 لڑکے، بڑے بچوں کے گروہ میں 30 لڑکیاں اور 36 لڑکے اور جوان گروپ میں 20 لڑکیاں اور 24 لڑکے ہیں۔ تو بتائیے ہر گروہ میں لڑکیوں کی تعداد اور لڑکوں کی تعداد کے درمیان نسبت کتنی ہے؟ ٹیم قواعد کے لیے تینوں گروہ میدان پر اکٹھا ہوئے۔ اب اکٹھا ہوئے گروہوں میں لڑکیوں کی تعداد اور لڑکوں کی تعداد کی نسبت کتنی ہے۔ اوپر دیے ہوئے سوالوں کے جواب سے کیا آپ کو مساوی نسبتوں کے مسئلہ کی تصدیق ہوئی؟

مثال (1) : درج ذیل بیان میں خالی جگہ پر کیجیے۔

$$(i) \frac{a}{3} = \frac{b}{7} = \frac{4a+9b}{\dots\dots\dots}$$

$$(ii) \frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{4} = \frac{5x-3y+4z}{\dots\dots\dots}$$

حل :

$$(i) \frac{a}{3} = \frac{b}{7} = \frac{4a+9b}{4 \times 3 + 9 \times 7} = \frac{4a+9b}{12+63} = \frac{4a+9b}{75}$$

$$(ii) \frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{4} = \frac{5 \times x}{5 \times 3} = \frac{-3 \times y}{-3 \times 5} = \frac{4 \times z}{4 \times 4}$$

$$\therefore \text{ہر نسبت} = \frac{5x}{15} = \frac{-3y}{-15} = \frac{4z}{16}$$

... (مساوی نسبتوں کا مسئلہ سے)

$$= \frac{5x-3y+4z}{15-15+16}$$

$$= \frac{5x-3y+4z}{16}$$

مثال (2) : اگر  $\frac{a}{(x-2y+3z)} = \frac{b}{(y-2z+3x)} = \frac{c}{(z-2x+3y)}$  اور  $x + y + z \neq 0$  ہو تب دکھائیے کہ ہر نسبت کے مساوی ہے۔

$$\frac{a}{(x-2y+3z)} = \frac{b}{(y-2z+3x)} = \frac{c}{(z-2x+3y)} = k$$

حل : فرض کریں،

∴ مساوی نسبتوں کے مسئلے کی رو سے،

$$k = \frac{a+b+c}{(x-2y+3z)+(y-2z+3x)+(z-2x+3y)}$$

$$= \frac{a+b+c}{2x+2y+2z}$$

$$= \frac{a+b+c}{2(x+y+z)}$$

$$\therefore \frac{a}{x-2y+3z} = \frac{b}{y-2z+3x} = \frac{c}{z-2x+3y} = \frac{a+b+c}{2(x+y+z)}$$

مثال (3) : اگر  $\frac{y}{b+c-a} = \frac{z}{c+a-b} = \frac{x}{a+b-c}$  ہو تب ثابت کیجیے کہ

$$\frac{a}{z+x} = \frac{b}{x+y} = \frac{c}{y+z}$$

حل : پہلے دی ہوئی مساوی نسبتوں پر عمل معکوس کر کے،

$$\frac{b+c-a}{y} = \frac{c+a-b}{z} = \frac{a+b-c}{x}$$

$$\frac{b+c-a}{y} = \frac{c+a-b}{z} = \frac{a+b-c}{x} = k \quad \dots$$

∴ مساوی نسبتوں کے مسئلے سے،

$$k = \frac{(b+c-a)+(c+a-b)}{y+z} = \frac{2c}{y+z} \quad \dots\text{(III)}$$

$$k = \frac{(a+b-c)+(b+c-a)}{x+y} = \frac{2b}{x+y} \quad \dots\text{(II)}$$

$$k = \frac{(c+a-b)+(a+b-c)}{z+x} = \frac{2a}{z+x} \quad \dots\text{(I)}$$

$$\therefore \frac{2a}{z+x} = \frac{2b}{x+y} = \frac{2c}{y+z}$$

$$\therefore \frac{a}{z+x} = \frac{b}{x+y} = \frac{c}{y+z}$$

مثال (4) : حل کیجیے :  $\frac{14x^2-6x+8}{10x^2+4x+7} = \frac{7x-3}{5x+2}$

حل : مثال کا مشاہدہ کرنے پر نظر آتا ہے کہ دائیں جانے کی نسبت میں مقدم رکن (پہلے رکن) کو اور تالی رکن (دوسرے رکن) کو  $2x$  سے ضرب دیں تو

پہلی نسبت کے دو ارکان ملتے ہیں۔ اس لیے دوسری نسبت کے دونوں ارکان کو  $2x$  سے ضرب کریں گے۔ لیکن اس سے پہلے  $x \neq 0$  یا  $x$  صفر کے

برابر نہیں ہے، طے کریں گے۔

$$\frac{7x-3}{5x+2} = \frac{-3}{2} \text{ اور } \frac{14x^2-6x+8}{10x^2+4x+7} = \frac{8}{7} \text{ اگر } x=0 \text{ ہو تب}$$

$$\therefore \frac{8}{7} = \frac{-3}{2} \quad \dots \text{ (ناممکن بیان حاصل ہوتا ہے)}$$

$$\therefore x \neq 0$$

$\therefore$  دوسری نسبت کے دونوں ارکان کو  $2x$  سے ضرب دیں گے۔

$$\frac{14x^2-6x+8}{10x^2+4x+7} = \frac{2x(7x-3)}{2x(5x+2)} = k \quad \dots \text{ (فرض کریں)}$$

$$\therefore \frac{14x^2-6x+8}{10x^2+4x+7} = \frac{14x^2-6x}{10x^2+4x} = k$$

$$\therefore \frac{14x^2-6x+8-14x^2+6x}{10x^2+4x+7-10x^2-4x} = \frac{8}{7} = k$$

$$\therefore k = \frac{8}{7}$$

$$\therefore \frac{7x-3}{5x+2} = \frac{8}{7}$$

$$\therefore 49x-21 = 40x+16$$

$$\therefore 49x-40x = 16+21$$

$$\therefore 9x = 37 \quad \therefore x = \frac{37}{9}$$

#### مشقی سیٹ 4.4

(1) درج ذیل بیانات میں خالی جگہ پر کیجیے۔

$$(i) \frac{x}{7} = \frac{y}{3} = \frac{3x+5y}{\dots} = \frac{7x-9y}{\dots} \quad (ii) \frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{7} = \frac{a-2b+3c}{\dots} = \frac{\dots}{6-8+14}$$

(2) اگر  $5m - n = 3m + 4n$  ہو تب ذیل کی عبارتوں کی قیمت معلوم کیجیے۔

$$(i) \frac{m^2+n^2}{m^2-n^2} \quad (ii) \frac{3m+4n}{3m-4n}$$

(3) (i) اگر  $a(y+z) = b(z+x) = c(x+y)$  اور  $a, b, c$  میں سے کوئی بھی عدد مساوی نہیں ہو تو

$$\frac{y-z}{a(b-c)} = \frac{z-x}{b(c-a)} = \frac{x-y}{c(a-b)} \text{ ثابت کیجیے کہ}$$

(ii) اگر  $\frac{x}{3x-y-z} = \frac{y}{3y-z-x} = \frac{z}{3z-x-y}$  اور  $x+y+z \neq 0$  ہو تب دکھائیے کہ ہر نسبت کی قیمت 1 ہے۔

(iii) اگر  $\frac{ax+by}{x+y} = \frac{bx+az}{x+z} = \frac{ay+bz}{y+z}$  اور  $x+y+z \neq 0$  ہو تو تب دکھائیے کہ ہر نسبت  $\frac{a+b}{2}$  کے مساوی ہے۔

(iv) اگر  $\frac{y+z}{a} = \frac{z+x}{b} = \frac{x+y}{c}$  ہو تب دکھائیے کہ  $\frac{x}{b+c-a} = \frac{y}{c+a-b} = \frac{z}{a+b-c}$

(v) اگر  $\frac{3x-5y}{5z+3y} = \frac{x+5z}{y-5x} = \frac{y-z}{x-z}$  ہو تب دکھائیے کہ ہر نسبت  $\frac{x}{y}$  کے مساوی ہے۔

$$(4) \text{ حل کیجیے۔} \quad (ii) \quad \frac{5y^2+40y-12}{5y+10y^2-4} = \frac{y+8}{1+2y} \quad \frac{16x^2-20x+9}{8x^2+12x+21} = \frac{4x-5}{2x+3}$$



### مسلسل تناسب (Continued Proportion)

ذیل میں دی ہوئی نسبتوں پر غور کیجیے۔

12 : 4 اور 36 : 12 یہ دونوں نسبتیں مساوی ہیں۔ اس تناسب میں پہلی نسبت کا دوسرا رکن اور دوسری نسبت کا پہلا رکن مساوی ہے۔ اس لیے ہم کہتے ہیں کہ 4, 12, 36 اعداد مسلسل تناسب میں ہیں۔

جب  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$  تب کہتے ہیں کہ  $a, b, c$  اعداد مسلسل تناسب میں ہیں۔  
 اگر  $ac = b^2$  تب طرفین کو  $bc$  سے تقسیم کر کے  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$  مساوات حاصل ہوتی ہے۔  
 اس لیے  $ac = b^2$  ہو تب  $a, b, c$  مسلسل تناسب میں ہوتے ہیں۔

جب  $a, b, c$  مسلسل تناسب میں ہوتے ہیں۔ تب  $b$  کو  $a$  اور  $c$  کا ہندسی وسط (Geometric mean) یا درمیانی تناسب رکن (Mean proportional) کہتے ہیں۔

اس بنا پر دھیان رکھیے کہ درج ذیل تمام بیان کا مطلب یکساں ہے۔

$$\therefore (1) \quad \frac{a}{b} = \frac{b}{c} \quad (2) \quad b^2 = ac \quad (3) \quad c, b, a \text{ مسلسل تناسب میں ہیں۔}$$

(4)  $a$  اور  $c$  کا ہندسی وسط  $b$  ہے (5)  $a$  اور  $c$  کا درمیانی تناسب رکن  $b$  ہے۔

مسلسل تناسب کے تصور کو بھی توسیعی صورت دی جاسکتی ہے۔

$$\text{اگر } \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = \frac{e}{f} \text{ ہو تب } a, b, c, d, e, f \text{ اعداد مسلسل تناسب میں ہیں۔}$$

مثال (1) 25 اور 4 کا ہندسی وسط  $x$  ہو تب  $x$  کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : 25 اور 4 کا ہندسی وسط  $x$  ہے۔

$$\therefore x^2 = 25 \times 4$$

$$\therefore x^2 = 100$$

$$\therefore x = 10$$

مثال (2) اگر  $4a^2h$ ،  $8ab^2$ ،  $p$  مسلسل تناسب میں ہوں تب  $p$  کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : دی ہوئی معلومات کی بناء پر  $4a^2h$ ،  $8ab^2$ ،  $p$  مسلسل تناسب میں ہیں۔

$$\therefore \frac{4a^2h}{8ab^2} = \frac{8ab^2}{p}$$

$$p = \frac{8ab^2 \times 8ab^2}{4a^2h} = 16b^3$$

مثال (3) 7، 12 اور 18 ہر عدد میں سے کون سا عدد تفریق کریں تو آنے والا عدد مسلسل تناسب میں ہوتا ہے؟

حل : فرض کیجیے کہ 7، 12 اور 18 اعداد میں سے  $x$  تفریق کرتے ہیں تو حاصل ہونے والے اعداد مسلسل تناسب میں ہیں۔

تصدیق مسلسل تناسب میں ہیں۔  $(7-x)$ ،  $(12-x)$ ،  $(18-x)$

$$(7-x) = 7 - (-18) = 25$$

$$(12-x) = 12 - (-18) = 30$$

$$(18-x) = 18 - (-18) = 36$$

$$25 \times 36 = 900 \text{ اور } 30^2 = 900$$

یہاں 25، 30، 36 اعداد مسلسل تناسب میں ہیں۔

$$\therefore (12-x)^2 = (7-x)(18-x)$$

$$\therefore 144 - 24x + x^2 = 126 - 25x + x^2$$

$$\therefore -24x + 25x = 126 - 144$$

$$\therefore x = -18$$

$\therefore$  7، 12، 18 سے (-18) تفریق کریں تو حاصل ہونے والے اعداد مسلسل تناسب میں ہوتے ہیں۔

### k - طریقہ (k-method)

نسبتوں میں  $k$  - طریقہ، مساوی نسبتوں پر یعنی تناسب پر کچھ سوالات حل کرنے کا ایک آسان طریقہ ہے۔ اس طریقہ میں دی ہوئی مساوی نسبتوں کی

قیمت  $k$  فرض کرتے ہیں۔

$$\text{مثال (1) اگر } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ہو تب دکھائیے کہ } \frac{5a-3c}{5b-3d} = \frac{7a-2c}{7b-2d}$$

حل : فرض کیجیے  $k = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ، اس لیے  $a = bk$  اور  $c = dk$

$a$  اور  $c$  کی قیمت طرفین میں رکھ کر،

$$\text{بائیں بازو} = \frac{5a-3c}{5b-3d} = \frac{5(bk)-3(dk)}{5b-3d} = \frac{k(5b-3d)}{(5b-3d)} = k$$

$$\text{دائیں بازو} = \frac{7a-2c}{7b-2d} = \frac{7(bk)-2(dk)}{7b-2d} = \frac{k(7b-2d)}{7b-2d} = k$$

$\therefore$  بائیں بازو = دائیں بازو

$$\therefore \frac{5a-3c}{5b-3d} = \frac{7a-2c}{7b-2d}$$

مثال (2) اگر  $a, b, c$  مسلسل تناسب میں ہوں تو ثابت کیجیے کہ  $\frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{(b+c)^2}{bc}$

حل :  $a, b, c$  مسلسل تناسب میں ہیں۔ فرض کیجیے  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$

$$\therefore b = ck, a = bk = ck \times k = ck^2$$

$a$  اور  $b$  کی قیمت رکھ کر

$$\text{بائیں طرف} = \frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{(ck^2 + ck)^2}{(ck^2)(ck)} = \frac{c^2 k^2 (k+1)^2}{c^2 k^3} = \frac{(k+1)^2}{k}$$

$$\text{دائیں طرف} = \frac{(b+c)^2}{bc} = \frac{(ck + c)^2}{(ck)c} = \frac{c^2 (k+1)^2}{c^2 k} = \frac{(k+1)^2}{k}$$

$$\therefore \text{دائیں طرف} = \text{بائیں طرف} \quad \therefore \frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{(b+c)^2}{bc}$$

مثال (4) پانچ اعداد مسلسل تناسب میں ہیں۔ پہلا رکن 5 اور آخری رکن 80 ہے۔ تو وہ اعداد معلوم کیجیے۔

حل : فرض کیجیے مسلسل تناسب والے پانچ اعداد بالترتیب

$$a, ak, ak^2, ak^3, ak^4 \text{ ہیں۔}$$

$$\text{یہاں } a = 5 \text{ اور } ak^4 = 80$$

$$\therefore 5 \times k^4 = 80$$

$$\therefore k^4 = 16$$

$$\therefore k = 2 \quad \dots (\because 2^4 = 16)$$

$$ak = 5 \times 2 = 10 \quad ak^2 = 5 \times 4 = 20$$

$$ak^3 = 5 \times 8 = 40 \quad ak^4 = 5 \times 16 = 80$$

$\therefore$  وہ اعداد 5، 10، 20، 40، 80 ہیں۔

مثال (3) اگر  $a, b, c$  مسلسل تناسب میں ہوں تو ثابت کیجیے کہ

$$\frac{a}{c} = \frac{a^2 + ab + b^2}{b^2 + bc + c^2}$$

حل :  $a, b, c$  مسلسل تناسب میں ہیں۔  $\therefore \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

فرض کیجیے  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$  اس لیے  $b = ck$  اور  $a = ck^2$

$$\text{بائیں طرف} = \frac{a}{c} = \frac{ck^2}{c} = k^2$$

$$\begin{aligned} \text{دائیں طرف} &= \frac{a^2 + ab + b^2}{b^2 + bc + c^2} \\ &= \frac{(k^2c)^2 + k^2c(ck) + (ck)^2}{(ck)^2 + (ck)(c) + c^2} \\ &= \frac{k^4c^2 + k^3c^2 + c^2k^2}{c^2k^2 + c^2k + c^2} \\ &= \frac{c^2k^2(k^2 + k + 1)}{c^2(k^2 + k + 1)} \\ &= k^2 \end{aligned}$$

$\therefore$  دائیں طرف = بائیں طرف

$$\therefore \frac{a}{c} = \frac{a^2 + ab + b^2}{b^2 + bc + c^2}$$

## مشقی سیٹ 4.5

- (1) 12، 16 اور 21 ہر عدد میں کون سا عدد ملائیں کہ حاصل ہونے والے اعداد مسلسل تناسب میں ہو جائیں؟
- (2) اگر  $(23-x)$  اور  $(19-x)$  کا  $(28-x)$  درمیانی تناسب رکن ہو تب  $x$  کی قیمت معلوم کیجیے۔
- (3) تین اعداد مسلسل تناسب میں ہیں۔ ان کا ہندسی وسط رکن 12 ہو اور باقی ماندہ دو اعداد کی جمع 26 ہے۔ تب وہ اعداد معلوم کیجیے۔
- (4) اگر  $(a+b+c)(a-b+c) = a^2 + b^2 + c^2$  ہو تب دکھائیے کہ  $a, b, c$  اعداد مسلسل تناسب میں ہیں۔
- (5) اگر  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$  اور  $a, b, c > 0$  ہو تب ثابت کیجیے کہ
- (i)  $(a+b+c)(b-c) = ab - c^2$
- (ii)  $(a^2 + b^2)(b^2 + c^2) = (ab + bc)^2$
- (iii)  $\frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{a+c}{b}$
- (6)  $\frac{x^2 - y^2}{x^2 y^2}$  اور  $\frac{x+y}{x-y}$  کا ہندسی وسط رکن معلوم کیجیے۔

### عملی کام :

جغرافیہ کی کتاب میں بھارت کا سیاسی نقشہ دیکھیے۔ اس میں دیے ہوئے فاصلہ کے پیمانہ پر غور کیجیے۔ اس کی مدد سے مختلف شہروں کے درمیان مستقیم خطی فاصلہ معلوم کیجیے۔

مثلاً : (i) نئی دہلی سے بنگلور (ii) ممبئی سے کولکاتہ (iii) جے پور سے بھونیشور

## مجموعہ سوالات 4

- (1) درج ذیل سوالوں کے لیے متبادل جواب سے صحیح متبادل جواب منتخب کیجیے۔
- (i) اگر  $6 : 5 = y : 20$  ہو تب  $y$  کی قیمت درج ذیل میں سے کون سی ہے؟
- (A) 15 (B) 24 (C) 18 (D) 22.5
- (ii) 1 ملی لیٹر کی 1 سینٹی میٹر سے نسبت ذیل میں سے کون سی ہے؟
- (A) 1 : 100 (B) 10 : 1 (C) 1 : 10 (D) 100 : 1
- (iii) جتن، بیتن اور محسن کی عمریں بالترتیب 16، 24 اور 36 سال ہیں تو بتائیے بیتن کی عمر، محسن کی عمر سے کون سی نسبت ہے؟
- (A) 3 : 2 (B) 2 : 3 (C) 4 : 3 (D) 3 : 4

(iv) شہم اور انیل کے درمیان 5 : 3 کی نسبت میں 24 کیلئے تقسیم کیے، تو بتائیے شہم کو کتنے کیلے ملے؟

- (A) 8 (B) 15 (C) 12 (D) 9

(v) 4 اور 25 کا ہندسی وسط رکن درج ذیل میں سے کون سا ہے؟

- (A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12

(2) درج ذیل دیئے ہوئے اعداد کی جوڑیوں میں پہلے عدد کی دوسرے عدد سے نسبت مختصر ترین صورت میں لکھیے۔

- (i) 21, 48 (ii) 36, 90 (iii) 65, 117 (iv) 138, 161 (v) 114, 133

(3) درج ذیل نسبتوں کو مختصر ترین صورت میں لکھیے۔

(i) دائرہ کے نصف قطر اور قطر کے درمیان نسبت

(ii) مستطیل کی لمبائی 4 سم اور چوڑائی 3 سم ہو تو مستطیل کے وتر کی اس کی لمبائی سے نسبت

(iii) مربع کا ضلع 4 سم ہو تب مربع کا احاطہ کی اس کے رقبہ سے نسبت

(4) بتائیے کہ ذیل کے اعداد مسلسل تناسب میں ہیں یا نہیں؟

- (i) 2, 4, 8 (ii) 1, 2, 3 (iii) 9, 12, 16 (iv) 3, 5, 8

(5)  $a, b, c$  یہ تینوں اعداد مسلسل تناسب میں ہیں۔ اگر  $a = 3$  اور  $c = 27$  ہو تب  $b = ?$  کتنا؟

(6) ذیل کی نسبتوں کی فی صدی میں تحویل کیجیے۔

- (i) 37 : 500 (ii)  $\frac{5}{8}$  (iii)  $\frac{22}{30}$  (iv)  $\frac{5}{16}$  (v)  $\frac{144}{1200}$

(7) پہلی مقدار کی دوسری مقدار سے نسبت مختصر ترین صورت میں لکھیے۔

(i) 1024MB, 1.2GB ... [(1024 MB = 1 GB)]

(ii) 60 روپے , 25 روپے , 17 روپے

(iii) عدد 120 , درجن 5

(iv) مربع سم 800 , مربع میٹر 4

(v) گرام 2500 , کلوگرام 1.5

(8) اگر  $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$  ہو تب ذیل کی عبارتوں کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i)  $\frac{4a+3b}{3b}$  (ii)  $\frac{5a^2+2b^2}{5a^2-2b^2}$

(iii)  $\frac{a^3+b^3}{b^3}$  (iv)  $\frac{7b-4a}{7b+4a}$

(9)  $a, b, c, d$  تناسب میں ہو تو ثابت کیجیے کہ

(i)  $\frac{11a^2+9ac}{11b^2+9bd} = \frac{a^2+3ac}{b^2+3bd}$

(ii\*)  $\sqrt{\frac{a^2+5c^2}{b^2+5d^2}} = \frac{a}{b}$

(iii)  $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2} = \frac{c^2+cd+d^2}{c^2-cd+d^2}$

(10)  $a, b, c$  مسلسل تناسب میں ہو تو ثابت کیجیے۔

$$(i) \frac{a}{a+2b} = \frac{a-2b}{a-4c}$$

$$(ii) \frac{b}{b+c} = \frac{a-b}{a-c}$$

$$(11) \text{ حل کیجیے : } \frac{12x^2+18x+42}{18x^2+12x+58} = \frac{2x+3}{3x+2}$$

$$(12) \text{ اگر } \frac{2x-3y}{3z+y} = \frac{z-y}{z-x} = \frac{x+3z}{2y-3x} \text{ ہو تو ثابت کیجیے کہ ہر نسبت } \frac{x}{y} \text{ کے مساوی ہے۔}$$

$$(13) \text{ اگر } \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \text{ ہو تو ثابت کیجیے کہ } \frac{by+cz}{b^2+c^2} = \frac{cz+ax}{c^2+a^2} = \frac{ax+by}{a^2+b^2}$$



# Linear Equations in Two Variables

# دو متغیری خطی مساواتیں

5



آئیے، سیکھیں



- دو متغیری خطی مساواتیں
- ہمزاد مساواتوں پر مبنی عبارتی مثالیں
- ہمزاد مساواتیں حل کرنا
- ہمزاد مساواتوں پر مبنی عبارتی مثالیں

آئیے ذرا یاد کریں



مثال : درج ذیل مساواتیں حل کیجیے۔

(1)  $m+3=5$

$\therefore m = \square$

(2)  $3y+8=22$

$\therefore y = \square$

(3)  $\frac{x}{3}=2$

$\therefore x = \square$

(4)  $2p = p + \frac{4}{9}$

$\therefore p = \square$

(6) 8 میں سے کتنے تفریق کرنے پر باقی 2 بچیں گے؟

$\therefore 8 - \square = 2$

$\therefore 8 - y = 2$

$\therefore y = \square$

(5) کس عدد میں 5 جمع کرنے پر عدد 14 حاصل ہوگا؟

$\therefore \square + 5 = 14$

$\therefore x + 5 = 14$

$\therefore x = \square$

اوپر کی ہر مساوات میں متغیر کی قوت 1 ہے۔ ان مساواتوں کو ایک متغیری خطی مساواتیں کہتے ہیں۔

آئیے سمجھ لیں



دو متغیری خطی مساواتیں (Linear Equations in Two Variables)

جن دو اعداد کا مجموعہ 14 ہے ایسے اعداد معلوم کیجیے۔

اعداد کے لیے  $x$  اور  $y$  متغیر کا استعمال کر کے یہ مثال مساوات کی شکل میں  $x + y = 14$  اس طرح ہو جائے گی۔

یہ دو متغیری مساوات ہے۔ یہاں  $x$  اور  $y$  ان دونوں متغیروں کی بے شمار قیمتیں ہم معلوم کر سکتے ہیں۔

جیسے،

$9 + 5 = 14$

$7 + 7 = 14$

$8 + 6 = 14$

$4 + 10 = 14$

$(-1) + 15 = 14$

$15 + (-1) = 14$

$2.6 + 11.4 = 14$

$0 + 14 = 14$

$100 + (-86) = 14$

$(-100) + (114) = 14$

$\square + \square = 14$

$\square + \square = 14$

یعنی اوپر کی مثال کے  $(x = 9, y = 5)$ ,  $(x = 7, y = 7)$ ,  $(x = 8, y = 6)$  وغیرہ اس طرح بے شمار حل ملتے ہیں۔

$x = 9, y = 5$  اس حل کو (9,5) اس طرح ترتیب سے قوس میں لکھنے کا رواج ہے۔ اس جوڑی میں پہلا عدد  $x$  کی قیمت دوسرا عدد  $y$  کی قیمت ہوتی ہے۔  
 $x + y = 14$  اس مساوات کو متعین کرنے والے (9,5), (7,7), (8,6), (4,10), (10,4), (-1,15), (2,6,11,4) ..... ایسی  
 لامحدود مرتب جوڑیاں یعنی لامحدود حل ہیں۔

اب دوسری مثال دیکھیں۔

ایسے دو اعداد تلاش کیجیے جن کا فرق 2 ہے۔

بڑا عدد کے لیے  $x$  اور چھوٹا عدد کے لیے  $y$  فرض کرنے پر  $x - y = 2$  یہ مساوات حاصل ہوگی۔  $x$  اور  $y$  قیمتوں کے لیے ذیل کے مطابق  
 بے شمار مساوات حاصل ہوں گے۔

(6) 8 میں سے کتنے تفریق کرنے پر باقی 2 بچیں گے؟

$$10 - 8 = 2, \quad 9 - 7 = 2, \quad 8 - 6 = 2, \quad (-3) - (-5) = 2, \quad 5.3 - 3.3 = 2,$$

$$15 - 13 = 2, \quad 100 - 98 = 2, \quad \square - \square = 2, \quad \square - \square = 2$$

یہاں  $x = 10$  اور  $y = 8$  ان قیمتوں کو لینے پر مرتب جوڑی (10,8) اس مساوات کو مطمئن کرتی ہے۔ یعنی یہ جوڑی اس مساوات کا حل ہے۔  
 مرتب جوڑی (10,8) کو (8,10) نہیں لکھ سکتے۔ کیونکہ (8,10) کا مطلب  $x = 8, y = 10$  ہوتا ہے۔ ان قیمتوں سے  $x - y = 2$  یہ  
 مساوات مطمئن نہیں ہوتی۔ اس سے ظاہر ہوتا ہے جوڑی میں اعداد کی ترتیب اہم ہوتی ہے۔ اسے دھیان میں رکھیں۔

اب ہم  $x - y = 2$  اس مساوات کے حل مرتب جوڑیوں کی شکل میں لکھیں گے۔

$$(8, 6), (5.2, 3.2), (0, -2), (-2, -4), (7, 5), \text{ وغیرہ بے شمار حل ہیں۔}$$

$4m - 3n = 2$  اس مساوات کا حل معلوم کیجیے۔

آپ بھی اس قسم کی مختلف تین مساوات بنائیے اور حل معلوم کیجیے۔

اب پہلی دو مساواتیں دیکھیے۔

$$x + y = 14 \quad \dots \text{ I}$$

$$x - y = 2 \quad \dots \text{ II}$$

مساوات I کے حل : (9, 5), (7, 7), (8, 6)

مساوات II کے حل : (7, 5), (-2, -4), (0, -2), (5.2, 3.2), (8, 6)

(8,6) یہ جوڑی دونوں مساوات کے حل کے جوڑیوں میں مشترک ہے۔ یہ جوڑی دونوں مساوات کو مطمئن کرتی ہے۔ اس لیے یہ دونوں مساوات کا  
 مشترک حل ہے۔



جب دو متغیروں کی دو خطی مساواتوں کا بیک وقت خیال کرتے ہیں تب ان مساواتوں کو ہمزاد مساواتیں

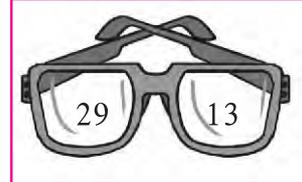
(Simultaneous equations) کہتے ہیں۔

عملی کام :

نیچے دیے ہوئے عینک کے پیشوں پر ایسے اعداد لکھیے کہ



(ii) جن کا مجموعہ 37 اور فرق 11 ہے۔



(i) جن کا مجموعہ 42 اور فرق 16 ہے۔



(iv) جن کا مجموعہ ..... اور فرق ..... ہے۔



(iii) جن کا مجموعہ 54 اور فرق 20 ہے۔

آپے ذرا یاد کریں



یہ دو متغیروں کی دو مساوات ہیں۔  $x + y = 5$  اور  $2x + 2y = 10$

مساوات  $x + y = 5$  کے مختلف پانچ حل تلاش کیجیے۔ وہی حل مساوات  $2x + 2y = 10$  کو مطمئن کرتے ہیں یا نہیں تصدیق کیجیے۔

ان دونوں مساواتوں پر غور کیجیے۔

دو متغیروں کے دو مساواتوں کے حل مساوی رہنے کے لیے ضروری شرط معلوم کیجیے۔

آپے سمجھ لیں



متغیر کا اخراج کر کے ہمزاد مساواتیں حل کرنے کا طریقہ (Elimination Method)

ہمزاد مساواتیں  $x + y = 14$  اور  $x - y = 2$  متغیروں کو قیمت دے کر ہم نے حل کیا۔ لیکن ہر وقت یہ طریقہ مناسب نہیں ہوتا۔ مثلاً

$2x + 3y = -4$  اور  $x - 5y = 11$  ان مساواتوں میں  $x$  اور  $y$  کو مختلف قیمتیں دے کر حل کرنے کی کوشش کیجیے۔

آپ سمجھ گئے ہوں گے کہ اس طریقے سے مساواتیں حل کرنا آسان نہیں ہے۔

اس لیے ہمزاد مساواتیں حل کرنے کے لیے دوسرا طریقہ استعمال کیا جاتا ہے۔ اس طریقے میں دو متغیروں میں سے ایک متغیر کا اخراج کر کے ایک متغیر کی خطی

مساوات حاصل کی جاتی ہے۔ اس بناء پر اس متغیر کی قیمت حاصل کی جاتی ہے۔ اس قیمت کو دی ہوئی کسی بھی مساوات میں رکھنے پر دوسرے متغیر کی قیمت

حاصل ہوتی ہے۔

اس طریقے کو سمجھنے کے لیے آگے کی مثال کا مطالعہ کیجیے۔

مثال (1) : حل کیجیے۔

$$x - y = 2 \text{ اور } x + y = 14$$

حل : دونوں مساواتوں کی جمع کر کے ایک متغیری مساوات حاصل کریں۔

$$\begin{array}{r} x + y = 14 \quad \dots I \\ + \quad x - y = 2 \quad \dots II \\ \hline 2x + 0 = 16 \\ \therefore 2x = 16 \\ \therefore x = 8 \end{array}$$

$x = 8$  اس قیمت کو مساوات (I) میں رکھنے پر،

$$x + y = 14$$

$$\therefore 8 + y = 14$$

$$\therefore y = 6$$

یہاں (8, 6) یہ پہلی مساوات کا حل ہے۔ یہی حل دوسری مساوات کا بھی ہے۔ اس کی تصدیق کریں۔

$$x - y = 8 - 6 = 2 \quad \dots \text{ (تصدیق ہوا)}$$

(8, 6) یہ دی ہوئی دونوں مساواتوں کا مشترک حل ہے۔

یعنی  $x + y = 14$  اور  $x - y = 2$  ان ہمزاد مساواتوں کا حل (8, 6) ہے۔

مثال (2) : ماں اور بیٹے کی عمروں کا مجموعہ 45 سال ہے۔ ماں کی عمر کے دگنٹا میں سے بیٹے کی عمر تفریق کرنے پر جواب 54 آتا ہے۔ تو دونوں کی عمریں

معلوم کیجیے۔ دی ہوئی معلومات متغیر کا استعمال کر کے لکھیں گے تو مساوات حل کرنا آسان ہو جاتا ہے۔

حل : فرض کیجیے ماں کی موجودہ عمر  $x$  سال اور بیٹے کی موجودہ عمر  $y$  سال ہے۔

$$x + y = 45 \quad \dots I \quad \text{پہلی شرط کے مطابق،}$$

$$2x - y = 54 \quad \dots II \quad \text{دوسری شرط کے مطابق،}$$

$$3x + 0 = 99 \quad \dots \text{ (مساوات (I) اور (II) کا مجموعہ کرنے پر)}$$

$$\therefore 3x = 99$$

$$\therefore x = 33$$

$$33 + y = 45 \quad \dots \text{ (I) میں رکھنے پر)}$$

$$\therefore y = 45 - 33$$

$$\therefore y = 12$$

$x = 33$  اور  $y = 12$  یہ حل مساوات نمبر (II) کو مطمئن کرتے ہیں۔ اس بات کی تصدیق کیجیے۔

ماں کی موجودہ عمر 33 سال اور بیٹے کی موجودہ عمر 12 سال ہے۔

$ax + by + c = 0$  اس مساوات میں  $a, b, c$  حقیقی اعداد ہیں۔ اور  $a$  اور  $b$  بیک وقت 0 (صفر) نہ ہوں تو یہ مساوات دو متغیری خطی مساوات کی عام صورت ہوتی ہے۔ اس مساوات میں دونوں متغیروں کی قوت 1 ہے۔ یہ ایک خطی مساوات ہے۔

مثال (1) درج ذیل ہمزاد مساواتیں حل کیجیے۔

$$3x + y = 5 \quad \dots (I)$$

$$2x + 3y = 1 \quad \dots (II)$$

یہاں پر کسی ایک متغیر کو خارج کرنے کے لیے دونوں مساواتوں میں کسی بھی متغیر کا ضرب مساوی یا متضاد عدد نہیں ہے۔ اسے مساوی کرنے کے لیے مساوات (I) کے طرفین کو 3 سے ضرب کرنے پر،

$$\therefore 3x \times 3 + 3 \times y = 5 \times 3$$

$$\therefore 9x + 3y = 15 \quad \dots (III)$$

$$2x + 3y = 1 \quad \dots (II)$$

اب مساوات (II) کو مساوات (III) سے تفریق کرنے پر،

$$9x + 3y = 15$$

$$+ 2x + 3y = 1$$

$$7x = 14$$

$$x = 2$$

$x = 2$  یہ قیمت کسی بھی مساوات میں رکھنے پر،

$$2x + 3y = 1$$

$$\therefore 2 \times 2 + 3y = 1$$

$$\therefore 4 + 3y = 1$$

$$\therefore 3y = -3$$

$$\therefore y = -1$$

یہاں حل  $(2, -1)$  دوسری مساوات کو بھی مطمئن کرتا ہے۔

تصدیق کیجیے۔

مثال (2) درج ذیل ہمزاد مساواتیں حل کیجیے۔

$$3x - 4y - 15 = 0 \quad \dots (I)$$

$$y + x + 2 = 0 \quad \dots (II)$$

دونوں مساواتوں کے مستقل عدد دائیں جانب لکھنے پر،

$$3x - 4y = 15 \quad \dots (I)$$

$$x + y = -2 \quad \dots (II)$$

متغیر  $y$  کا اخراج کرنے کے لیے مساوات (II) کو 4 سے ضرب کرنے

پر اور مساوات (I) میں ملانے پر،

$$3x - 4y = 15$$

$$+ \quad 4x + 4y = -8$$

$$7x = 7$$

$$x = 1$$

$x = 1$  مساوات (II) میں رکھنے پر،

$$x + y = -2$$

$$\therefore 1 + y = -2$$

$$\therefore y = -2 - 1$$

$$\therefore y = -3$$

حل  $(1, -3)$  مساوات (I) کو بھی مطمئن کرتا ہے تصدیق کیجیے۔



غور کیجیے

$$3x - 4y - 15 = 0 \quad \text{اور} \quad y + x + 2 = 0$$

کیا ان مساواتوں کو  $x$  متغیر کا اخراج کر کے حل کر سکتے ہیں؟

کیا اس کا حل وہی ہوگا؟



ایک متغیر کی قیمت دوسرے متغیر کی صورت میں رکھ کر متغیر کا اخراج کرنا یا استبدال کے ذریعے اخراج کا طریقہ (Substitution Method)

متغیر کا اخراج کرنے کا ایک اور دوسرا طریقہ ہے۔ مساوات کے ایک متغیر کی قیمت دوسرے متغیر کی صورت میں معلوم کر اسے دوسری مساوات میں رکھ کر پہلے متغیر کا اخراج کر سکتے ہیں۔ اس طریقہ کو ذیل کی مثالوں کے ذریعے سمجھ لیں۔

مثال (2) حل کیجیے۔

$$3x - 4y = 16 ; 2x - 3y = 10$$

حل :

$$3x - 4y = 16 \quad \dots(I)$$

$$2x - 3y = 10 \quad \dots(II)$$

مساوات (I) میں  $x$  اس متغیر کی قیمت  $y$  کی صورت میں لکھیں گے۔

$$3x - 4y = 16$$

$$3x = 16 + 4y$$

$$x = \frac{16 + 4y}{3}$$

$x$  کی قیمت کو مساوات (II) میں رکھنے پر،

$$2x - 3y = 10$$

$$\therefore 2\left(\frac{16 + 4y}{3}\right) - 3y = 10$$

$$\therefore \frac{32 + 8y}{3} - 3y = 10$$

$$\therefore \frac{32 + 8y - 9y}{3} = 10$$

$$\therefore 32 + 8y - 9y = 30$$

$$\therefore 32 - y = 30 \quad , \quad \therefore y = 2$$

اب  $y = 2$  مساوات (I) میں رکھنے پر،

$$3x - 4y = 16$$

$$\therefore 3x - 4 \times 2 = 16$$

$$\therefore 3x - 8 = 16$$

$$\therefore 3x = 16 + 8$$

$$\therefore 3x = 24$$

$$\therefore x = 8$$

$$\therefore x = 8 \text{ اور } y = 2$$

$(8, 2)$  مساواتوں کا حل ہے۔

مثال (1) حل کیجیے۔

$$8x + 3y = 11 ; 3x - y = 2$$

حل :

$$8x + 3y = 11 \quad \dots(I)$$

$$3x - y = 2 \quad \dots(II)$$

مساوات (II) میں  $y$  کی قیمت  $x$  متغیر میں لکھنا آسان ہوگا۔

$$3x - y = 2$$

$$3x - 2 = y$$

اب  $y = 3x - 2$  یہ قیمت مساوات (I) میں رکھنے پر،

$$8x + 3y = 11$$

$$\therefore 8x + 3(3x - 2) = 11$$

$$\therefore 8x + 9x - 6 = 11$$

$$\therefore 17x - 6 = 11$$

$$\therefore 17x = 11 + 6 = 17$$

$$\therefore x = 1$$

$x$  کی قیمت مساوات  $y = 3x - 2$  میں رکھنے پر،

$$\therefore y = 3 \times 1 - 2$$

$$\therefore y = 1$$

$$\therefore x = 1 \text{ اور } y = 1$$

$(1, 1)$  مساواتوں کا حل ہے۔

## مشقی سیٹ 5.1

- (1) متغیر  $x$  اور  $y$  کا استعمال کر کے 5 دو متغیری خطی مساواتیں لکھیے۔  
 (2)  $x + y = 7$  اس مساوات کے 5 حل لکھیے۔  
 (3) مندرجہ ذیل ہمزاد مساواتیں حل کیجیے۔

- (i)  $x + y = 4$  ;  $2x - 5y = 1$  (ii)  $2x + y = 5$  ;  $3x - y = 5$   
 (iii)  $3x - 5y = 16$  ;  $x - 3y = 8$  (iv)  $2y - x = 0$  ;  $10x + 15y = 105$   
 (v)  $2x + 3y + 4 = 0$  ;  $x - 5y = 11$  (vi)  $2x - 7y = 7$  ;  $3x + y = 22$



ہمزاد مساواتوں پر عبارتی مثالیں

عبارتی مثالیں حل کرتے وقت دی ہوئی معلومات سے مساواتیں بنانا ایک بہت اہم مرحلہ ہوتا ہے۔ مساواتوں کا حل معلوم کرنے کا نظام ذیل کے مراحل سے دکھایا گیا ہے۔

مثال	مرحلے								
دو اعداد کا مجموعہ 36 ہے، ایک عدد کے 8 گنا میں سے 9 تفریق کریں تو دوسرا عدد حاصل ہوتا ہے۔	عبارتی مثال غور سے پڑھ کر سمجھنے کی کوشش کریں۔								
↓	↓								
فرض کیجیے۔ پہلا عدد $x =$ دوسرا عدد $y =$	مثال میں دی ہوئی معلومات کے مطابق الجبری عبارت بنانے کے لیے متغیروں کا استعمال کیجیے۔								
↓	↓								
∴ $x + y = 36$ ... (∵ اعداد کا مجموعہ 36 ہے۔) پہلے عدد کا 8 گنا $= 8x$ $8x - 9 =$ پہلے عدد کا 8 گنا ∴ دوسرا عدد $= y = 8x - 9$	متغیروں کا مناسب استعمال کر کے فقرے ریاضیاتی صورت میں لکھیے۔								
↓	↓								
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px dotted black; padding: 5px;"><math>x + y = 36</math></td> <td style="padding: 5px;">∴ <math>5 + y = 36</math></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px dotted black; padding: 5px;">∴ <math>8x - y = 9</math></td> <td style="padding: 5px;">∴ <math>y = 36 - 5</math></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px dotted black; padding: 5px;">∴ <math>9x = 45</math></td> <td style="padding: 5px;">∴ <math>y = 31</math></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px dotted black; padding: 5px;">∴ <math>x = 5</math></td> <td></td> </tr> </table>	$x + y = 36$	∴ $5 + y = 36$	∴ $8x - y = 9$	∴ $y = 36 - 5$	∴ $9x = 45$	∴ $y = 31$	∴ $x = 5$		مناسب طریقے کا استعمال کر کے مساواتیں حل کیجیے۔
$x + y = 36$	∴ $5 + y = 36$								
∴ $8x - y = 9$	∴ $y = 36 - 5$								
∴ $9x = 45$	∴ $y = 31$								
∴ $x = 5$									
↓	↓								
$x = 5, y = 31$	حل معلوم کیجیے۔								
↓	↓								
$31 + 5 = 36$ ... (I) $31 = 8 \times 5 - 9$ ... (II)	حاصل ہونے والے حل کو مساواتوں میں لکھ کر تصدیق کیجیے۔								
↓	↓								
اس لیے وہ اعداد 5 اور 31 ہیں۔	جواب لکھیے								

اب ہم مختلف قسم کے عبارتی مثالوں پر غور کریں گے۔

- (1) عمر سے متعلق مثالیں۔  
 (2) اعداد سے متعلق مثالیں۔  
 (3) کسروں سے متعلق مثالیں۔  
 (4) معاشی لین دین سے متعلق مثالیں۔  
 (5) ہندی اشکال کی خصوصیات پر منحصر مثالیں۔  
 (6) رفتار، فاصلہ اور وقت پر منحصر مثالیں۔

مثال (1) دو اعداد کا مجموعہ 103 ہے۔ اگر بڑے عدد کو چھوٹے عدد سے تقسیم کیا جائے تو خارج قسمت 2 اور باقی 19 بچتا ہے۔ تو وہ اعداد معلوم کیجیے۔  
 حل : مرحلہ 1 : عبارتی مثال سمجھنے کی کوشش کیجیے۔

مرحلہ 2 : اعداد معلوم کرنے کے لیے متغیروں کا استعمال کیجیے۔

اُسی طرح اس اصول (باقی + خارج قسمت × مقسوم علیہ = مقسوم) کو دھیان میں رکھیں۔

فرض کیجیے بڑا عدد  $x$  اور چھوٹا عدد  $y$

مرحلہ 3 : دی ہوئی معلومات :  $103 =$  اعداد کا مجموعہ

فرض کیجیے بڑا عدد  $x$  اور چھوٹا عدد  $y$

$$\therefore x + y = 103 \quad \dots \text{(ایک مساوات حاصل ہوگی) } \dots$$

بڑے عدد کو چھوٹے عدد سے تقسیم کرنے پر خارج قسمت 2 اور باقی 19 بچتا ہے۔

$$\therefore x = 2 \times y + 19 \quad \text{(باقی + خارج قسمت} \times \text{مقسوم علیہ = مقسوم)}$$

$$\therefore x - 2y = 19 \quad \dots \text{(اس طرح دوسری مساوات حاصل ہوتی ہے۔)}$$

مرحلہ 4 : اب حاصل ہوئی مساواتوں کا حل معلوم کریں گے۔

$$x + y = 103 \quad \dots \text{(I)}$$

$$x - 2y = 19 \quad \dots \text{(II)}$$

مساوات (I) میں سے مساوات (II) تفریق کرنے پر،

$$x + y = 103$$

$$- \quad x - 2y = 19$$

$$\hline$$

$$0 + 3y = 84$$

$$\therefore y = 28$$

مرحلہ 5 : مساوات  $x + y = 103$  میں  $y$  کی قیمت رکھنے پر،

$$\therefore x + 28 = 103$$

$$\therefore x = 103 - 28$$

$$\therefore x = 75$$

مرحلہ 6 : دیے ہوئے اعداد 75 اور 28 ہیں۔

مثال (2) سلیلی کی عمر، سنگرام کی عمر کے نصف سے 23 سال زیادہ ہے۔ پانچ سال پہلے ان کی عمروں کا مجموعہ 55 سال تھا تو ان کی موجودہ عمریں دریافت کیجیے۔

حل : فرض کیجیے سلیلی کی موجودہ عمر  $x$  سال اور سنگرام کی موجودہ عمر  $y$  سال ہے۔

$$x = \frac{y}{2} + \square \quad \text{سلیلی کی عمر، سنگرام کی عمر کے نصف سے 23 سال زیادہ ہے۔ اس لیے}$$

$$\text{پانچ سال پہلے سلیلی کی عمر} = (x - 5) \text{ سال اور سنگرام کی عمر} = (y - 5) \text{ سال}$$

$$\text{پانچ سال پہلے ان کی عمروں کا مجموعہ} = 55 \text{ سال}$$

$$\square + \square = 55$$

مساواتیں حل کر کے حل معلوم کرنا۔

$$2x = y + 46 \quad , \quad \therefore 2x - y = 46 \quad \dots (I)$$

$$(x - 5) + (y - 5) = 55$$

$$x + y = 65 \quad \dots (II)$$

مساوات (II) میں  $x = 37$  رکھنے پر،

$$x + y = 65$$

$$\therefore 37 + y = 65$$

$$\therefore y = 65 - 37$$

$$\therefore y = 28$$

مساوات (I) اور (II) کی جمع کرنے پر،

$$2x - y = 46$$

$$+ x + y = 65$$

$$\therefore 3x = 111$$

$$\therefore x = 37$$

سلیلی کی موجودہ عمر 37 سال اور سنگرام کی موجودہ عمر 28 سال ہے۔

مثال (3) ایک دو ہندسی عدد اس کے ہندسوں کے مجموعے کا چار گنا ہے۔ اس کے ہندسوں کا مقام تبدیل کرنے پر حاصل ہونے والا عدد، اصل عدد کے دگنا سے 9 کم ہے وہ عدد معلوم کیجیے۔

حل : فرض کیجیے اصل عدد کے اکائی کا ہندسہ  $x$  اور دہائی کا ہندسہ  $y$  ہے۔

ہندسوں کا مجموعہ	عدد	اکائی کے مقام کا ہندسہ	دہائی کے مقام کا ہندسہ	اصل عدد کے لیے
$y + x$	$10y + x$	$x$	$y$	اصل عدد کے لیے
$x + y$	$10x + y$	$y$	$x$	ہندسوں کا مقام تبدیل کرنے پر حاصل ہونے والے عدد کے لیے

$$10y + x = 4(y + x)$$

$$\therefore 10y + x = 4y + 4x$$

$$\therefore x - 4x + 10y - 4y = 0$$

$$\therefore -3x + 6y = 0 \quad , \quad \therefore -3x = -6y \quad , \quad \therefore x = 2y \quad \dots (I)$$

پہلی شرط کے مطابق،

دوسری شرط کے مطابق،

$$10x + y = 2(10y+x)-9$$

$$\therefore 10x+y = 20y + 2x-9$$

$$\therefore 10x-2x+y-20y = -9$$

$$\therefore 8x - 19y = -9 \quad \dots(\text{II})$$

$$x = 2y \quad \dots(\text{I})$$

$x = 2y$  کو مساوات (II) میں رکھنے پر،

$$16y - 19y = -9 \quad \dots(\text{I})$$

$$\therefore -3y = -9$$

$$\therefore y = 3$$

$y = 3$  مساوات (I) میں رکھنے پر،

$$x - 2y = 0$$

$$x - 2 \times 3 = 0, \therefore x - 6 = 0, \therefore x = 6$$

$$\therefore \text{دوہندسی اصل عدد} = 10y + x = 10 \times 3 + 6$$

$$= 36$$

مثال (4) ایک گاؤں کی آبادی گذشتہ سال 50000 تھی۔ ایک سال میں مردوں کی تعداد میں 5% کا اضافہ اور عورتوں کی تعداد میں 3% کا اضافہ ہوا۔

اس لیے اس سال آبادی 52020 ہوگئی۔ تو گذشتہ سال اس گاؤں میں مردوں اور عورتوں کی تعداد کتنی تھی؟

حل : فرض کیجیے گذشتہ سال مردوں کی تعداد  $x$  اور عورتوں کی تعداد  $y$  تھی۔

پہلی شرط کے مطابق،

$$\square + \square = 50000 \quad \dots(\text{I})$$

$$\text{مردوں کی تعداد} = \frac{\square}{\square} \times x \quad \dots \text{ (مردوں کی تعداد میں 5\% کا اضافہ کرنے پر) ...}$$

$$\text{عورتوں کی تعداد} = \frac{\square}{\square} \times y \quad \dots \text{ (عورتوں کی تعداد میں 3\% کا اضافہ کرنے پر) ...}$$

دوسری شرط کے مطابق،

$$\frac{\square}{\square} x + \frac{\square}{\square} y = 52020$$

$$\square x + \square y = 5202000 \quad \dots(\text{II})$$

مساوات (I) کو 103 سے ضرب کرنے پر

$$\square x + \square y = 5150000 \quad \dots(\text{III})$$

مساوات (II) میں سے مساوات (III) تفریق کرنے پر

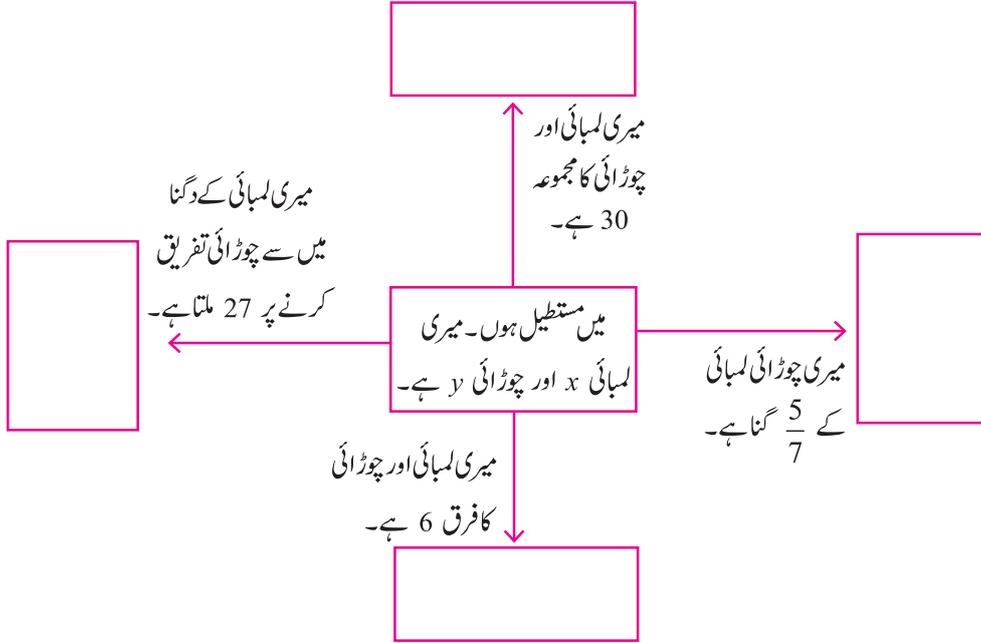
$$2x = 5202000 - 5150000$$

$$2x = 52000$$

$$\therefore \text{مردوں کی تعداد} = x = \square \text{ اور } \text{عورتوں کی تعداد} = y = \square$$

## عملی کام :

درج ذیل شکل میں کچھ ہدایات دی ہوئی ہیں۔ ان سے حاصل ہونے والی مساوات کو تیر کے نشان کے سامنے خالی چوکون میں سے کوئی دو مساواتیں لے کر ان کا حل معلوم کیجیے اور اس کی تصدیق کیجیے۔  
ان میں سے کسی دو مساوات کی ایک جوڑی جیسی کتنی جوڑیاں ملتی ہیں؟ ان کے حل پر تبادلہ خیال کیجیے۔



## مشقی سیٹ 5.2

- (1) ایک پرس میں کچھ 5 روپے کے اور کچھ 10 روپے کے نوٹ ہیں۔ نوٹوں کی کل قیمت 350 روپے ہے۔ 5 روپے کے نوٹوں کی تعداد، 10 روپے کے نوٹ کی تعداد کے دگنا سے 10 کم ہے تو 5 روپے اور 10 روپے کے نوٹ کتنے ہیں؟
- (2) ایک کسر کا نسب نما، شمار کنندہ کے دگنا سے 1 کم ہے۔ شمار کنندہ اور نسب نما میں 1 جمع کرنے پر شمار کنندہ کی نسب نما سے 5 : 3 نسبت ہو جاتی ہے تو وہ کسر معلوم کیجیے۔
- (3) ساڑھ اور ساجدہ کی عمروں کا مجموعہ 34 سال ہے۔ ساڑھ، ساجدہ سے 6 سال بڑی ہے تو ان کی عمریں معلوم کیجیے۔
- (4) ایک چڑیا گھر میں شیر اور مور کی کل تعداد 50 ہے۔ ان کے پیروں کا مجموعہ 140 ہے۔ تو چڑیا گھر میں شیر اور مور کی تعداد کتنی ہے؟ معلوم کیجیے۔
- (5) سنجے کو ملازمت میں کچھ ماہانہ تنخواہ ملتی ہے۔ ہر سال اس کی تنخواہ میں متعین اضافہ ہوتا ہے۔ اگر چار سال بعد اس کی ماہانہ تنخواہ 4500 روپے اور 10 سال بعد ماہانہ تنخواہ 5400 روپے ہو جائے گی تو اس کی ابتدائی تنخواہ اور سالانہ اضافہ کی رقم معلوم کیجیے۔
- (6) 3 کرسیوں اور 2 میز کی قیمت 4500 روپے ہے۔ 5 کرسیوں اور 3 میز کی قیمت 7000 روپے ہے تو 2 کرسیوں اور 2 میز کی کل قیمت معلوم کیجیے۔

(7) ایک دو ہندسی عدد کے ہندسوں کا مجموعہ 9 ہے۔ اگر ہندسوں کا مقام تبدیل کیا جائے تو حاصل ہونے والا عدد، اصل عدد سے 27 زیادہ ہو جاتا ہے تو وہ دو ہندسی عدد معلوم کیجیے۔

(8)\*  $\triangle ABC$  میں،  $\angle A$  کی پیمائش  $\angle B$  اور  $\angle C$  کی پیمائشوں کے مجموعے کے برابر ہے۔ اسی طرح  $\angle B$  اور  $\angle C$  کی پیمائشوں کا تناسب 4 : 5 ہے تو مثلث کے زاویوں کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔

(9)\* ایک 560 سم لمبی رسی کے دو ٹکڑے اس طرح کرنا ہے کہ چھوٹے ٹکڑے کی لمبائی کے دگنا، بڑے ٹکڑے کی لمبائی کا  $\frac{1}{3}$  گنا ہے تو بڑے ٹکڑے کی لمبائی معلوم کیجیے۔

(10) ایک مقابلہ جاتی امتحان میں 60 سوالات پوچھے گئے۔ ہر سوال کے صحیح جواب کے لیے 2 نمبر ملتے ہیں اور غلط جواب پر 1 نمبر کم ہو جاتا ہے۔ بیٹھونٹ نے تمام 60 سوالات حل کیے تب اس کو 90 نمبر ملے تو بتائیے اس نے کتنے صحیح اور کتنے غلط جوابات لکھے تھے۔

**مجموعہ سوالات 5**

(1) درج ذیل میں سے مناسب متبادل چن کر لکھیے۔

(i) اگر  $3x + 5y = 9$  اور  $5x + 3y = 7$  ہو تو  $x + y$  کی قیمت درج ذیل میں سے کون سی ہے؟

(A) 2 (B) 16 (C) 9 (D) 7

(ii) ایک مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی میں سے 5 تفریق کرنے پر اس کا احاطہ 26 ہو جاتا ہے۔ اس معلومات کو ریاضیاتی طریقے سے کس طرح لکھیں گے؟

(A)  $x - y = 8$  (B)  $x + y = 8$  (C)  $x + y = 23$  (D)  $2x + y = 21$

(iii) ریحان، ندیم سے 5 سال چھوٹا ہے۔ ان دونوں کی عمروں کا مجموعہ 25 ہے تو ریحان کی عمر کتنی ہوگی؟

(A) 20 (B) 15 (C) 10 (D) 5

(2) درج ذیل ہمزاد مساواتیں حل کیجیے۔

(i)  $2x + y = 5$  ;  $3x - y = 5$

(ii)  $x - 2y = -1$  ;  $2x - y = 7$

(iii)  $x + y = 11$  ;  $2x - 3y = 7$

(iv)  $2x + y = -2$  ;  $3x - y = 7$

(v)  $2x - y = 5$  ;  $3x + 2y = 11$

(vi)  $x - 2y = -2$  ;  $x + 2y = 10$

(3) متغیروں کے ضرب مساوی کر کے درج ذیل ہمزاد مساواتیں حل کیجیے۔

(i)  $3x - 4y = 7$  ;  $5x + 2y = 3$

(ii)  $5x + 7y = 17$  ;  $3x - 2y = 4$

(iii)  $x - 2y = -10$  ;  $3x - 5y = -12$

(iv)  $4x + y = 34$  ;  $x + 4y = 16$

(4) مندرجہ ذیل ہمزاد مساواتیں حل کیجیے۔

(i)  $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 4$  ;  $\frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 1$

(ii)  $\frac{x}{3} + 5y = 13$  ;  $2x + \frac{y}{2} = 19$

(iii)  $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 13$  ;  $\frac{5}{x} - \frac{4}{y} = -2$

(5)\* ایک دوہندسی عدد اس کے ہندسوں کے مجموعہ کے 4 گنا سے 3 زیادہ ہے۔ اگر اس عدد میں 18 جمع کیے جائیں تو وہ مجموعہ، اصل عدد کے ہندسوں کا مقام اول بدل کرنے پر حاصل ہونے والے عدد ہوتا ہے۔ وہ عدد معلوم کیجیے۔

(6) 8 کتابیں اور 5 قلم کی کل قیمت 420 روپے ہے۔ 5 کتابوں اور 8 قلم کی قیمت 321 روپے ہو تو ایک کتاب اور دو قلم کی قیمت معلوم کیجیے۔

(7)\* دو افراد کی آمدنی کی نسبت 7 : 9 ہے اور ان کے اخراجات کی نسبت 3 : 4 ہے۔ ہر ایک کی بچت 200 روپے ہو تو ہر ایک کی ماہانہ آمدنی معلوم کیجیے۔

(8)\* ایک مستطیل کی لمبائی 5 اکائی کم کی جائے اور چوڑائی 3 اکائی بڑھائی جائے تو اس کا رقبہ 9 مربع اکائی کم ہو جاتا ہے۔ اگر لمبائی 3 اکائی کم اور چوڑائی 2 اکائی بڑھائی جائے تو اس کا رقبہ 67 مربع اکائی بڑھ جاتا ہے۔ مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کیجیے۔

(9)\* ایک راستہ پر مقام A اور B کے درمیان کا فاصلہ 70 کلومیٹر ہے۔ ایک کار مقام A سے اور دوسری کار مقام B سے نکلتی ہے۔ اگر وہ دونوں کار ایک ہی سمت میں نکلتی ہیں تو 7 گھنٹے میں آپس میں ملتی ہیں۔ اور اگر مخالف سمت میں نکلتی ہیں تو 1 گھنٹہ میں آپس میں ملتی ہیں۔ ان کی رفتار معلوم کیجیے۔

(10)\* ایک دوہندسی عدد اور ان کے ہندسوں کے مقام میں تبدیل کرنے پر حاصل ہونے والے عدد کا مجموعہ 99 ہے تو وہ عدد معلوم کیجیے۔

عملی کام :

کسر معلوم کیجیے۔

$x$  شمار کنندہ

$y$  لائبہ نما

کسر کے شمار کنندہ کو 3 سے ضرب اور لائبہ نما میں سے 3 تفریق کرنے پر حاصل ہونے والی کسر  $\frac{18}{11}$  ہے۔

مساوات (I)

$$11x - 6y + 18 = 0$$

کسر کے شمار کنندہ میں 8 کا اضافہ کیا جائے اور لائبہ نما کو دگنا کیا جائے تو حاصل ہونے والی کسر  $\frac{1}{2}$  ہے۔

مساوات (II)

$$x - y + 8 = 0$$

∴ دی ہوئی کسر =  $\frac{\boxed{\phantom{000}}}{\boxed{\phantom{000}}}$



# معاشی (مالی) منصوبہ بندی (بجٹ) Economic Planning

6



آئیے، سیکھیں



- معاشی منصوبہ بندی کا تعارف
- سرمایہ کاری اور بجٹ
- تشخیص ٹیکس
- انکم ٹیکس - تحسب

آئیے، بحث کریں



انگھا : کیا ہمیں کمپیوٹر خریدنا ہے؟

ماں : ہاں، خریدیں گے؟ لیکن آئندہ سال۔

انگھا : جی، لیکن اس سال کیوں نہیں؟

ماں : اری، اس کی قیمت کچھ کم تو نہیں ہے۔

انگھا : یعنی پیسے جمع کرنا ہوگا یہی نا؟

ماں : ہاں۔

اپنے ارد گرد اس قسم کے کئی مکالمے سنائی دیتے ہیں۔

ہر فرد کو مختلف ضروریات کو پورا کرنے کے لیے پیسوں کی ضرورت ہوتی ہے۔ اس لیے حال کی (موجودہ) بنیادی ضروریات کو پورا کر کے دیگر ضروریات کو مکمل کرنے کے لیے ہر کوئی پیسے جمع کرنے کی کوشش کرتا ہے۔ اسی کو ہم 'بچت' کرنا کہتے ہیں۔ یہ بچت محفوظ رہے اور اس میں اضافہ کرنے کے لیے ہم بطور امانت بینک میں رکھتے ہیں یا زمین، گھر جیسے جائیداد خریدتے ہیں۔ اسی کو 'سرمایہ کاری' کرنا کہتے ہیں۔

ہر سرمایہ کار ضرورت کے مطابق ہی رقم خرچ کرتا ہے اور بقیہ رقم بچت کرتا ہے، اسی طرح بچت کی گئی رقم کو مدبر کے ساتھ سرمایہ کاری میں لگاتا ہے۔ اسی کو 'معاشی (مالی) منصوبہ بندی' (Economic Planning) کہتے ہیں۔ سرمایہ میں اضافہ اور حفاظت معاشی منصوبہ بندی کے اہم مقاصد ہیں۔

ہر کسی کے زندگی میں پیش آنے والے متوقع اور غیر متوقع واقعات کے لیے ضروری اقدام کے لیے معاشی منصوبہ بندی کا استعمال ہوتا ہے۔ کچھ مثالیں ذیل میں دی ہوئی ہیں۔

غیر متوقع واقعہ

متوقع واقعہ

- |                                 |  |
|---------------------------------|--|
| (1) قدرتی آفات                  | (1) بچوں کی تعلیم اور ان کے دیگر اخراجات |
| (2) خاندان کے کسی فرد کی بیماری | (2) پیشے کے لیے سرمایہ                   |
| (3) حادثہ کی وجہ سے نقصان ہونا  | (3) دو/چار پہیہ والی سواری کی خریداری    |
| (4) اچانک فوت ہونا              | (4) گھر کی تعمیر کرنا یا گھر خریدنا      |
|                                 | (5) بڑھاپے کی ضروریات                    |

معاشی منصوبہ بندی کیوں ضروری ہے اس کا جواب اوپر کے واقعات یا دیگر وجوہات سے ملتا ہے۔ معاشی منصوبہ بندی کے لیے کچھ باتوں کو دھیان میں رکھنا

ضروری ہوتا ہے۔





سرمایہ کاری کی کئی اقسام ہیں۔ سرمایہ کار بینک، پوسٹ جیسے مالیاتی لین دین کرنے والے اداروں میں سرمایہ کاری کرنا پسند کرتے ہیں۔ کیونکہ وہاں رقم زیادہ محفوظ رہتی ہے۔ شیئر، میوچول فنڈ وغیرہ میں سرمایہ کاری کرنا تھوڑا خطرناک ہوتا ہے۔ کیونکہ جن صنعتوں میں یہ رقم سرمایہ کاری کی جاتی ہے۔ اس صنعت میں نقصان ہونے سے، سرمایہ کاری کی گئی رقم کم ہو جاتی ہے۔ اس کے برعکس فائدہ ہوا تو رقم محفوظ رہتی ہے اور منافع مل سکتا ہے۔ سرمایہ کار کو سرمایہ کاری کرتے وقت دو اہم باتوں کا خیال کرنا چاہیے۔ پہلی بات خطرہ اور دوسری بات فائدہ۔ زیادہ خطرہ مول کر سرمایہ کار زیادہ منافع حاصل کر سکتا ہے۔ لیکن زیادہ خطرہ مول لینے سے نقصان بھی ہو سکتا ہے یہ بات دھیان میں رکھنا ضروری ہے۔ منافع اور سرمایہ کاری پر منحصر کچھ مثالیں ذیل میں حل کی ہیں ان کا مطالعہ کیجیے۔

مثال : شیا م راؤ کی 2015-2016 کے تمام قسم کے ٹیکس بھرنے کے بعد سالانہ آمدنی 6,40,000 روپے ہے۔ ہر ماہ بیمہ کے 2000 روپے کی قسط جمع کرتے ہیں۔ سالانہ آمدنی کا 20% حصہ پراویڈنٹ فنڈ میں لگاتے ہیں۔ اچانک فوری ضرورت کے لیے ہر ماہ 500 روپے الگ جمع کرتے ہیں۔ اس سال ان کے پاس خرچ کے لیے کتنے روپے باقی بچے؟

حل :

- (i) روپے 6,40,000 = شیا م راؤ کی سالانہ آمدنی
- (ii) روپے 24,000 = 2000 × 12 = بیمہ کے لیے منصوبہ بندی
- (iii) روپے 1,28,000 =  $6,40,000 \times \frac{20}{100}$  = پراویڈنٹ فنڈ میں سرمایہ کاری کی گئی رقم
- (iv) روپے 6000 = 500 × 12 = اچانک فوری ضرورت کے لیے جمع کی گئی رقم
- روپے 1,58,000 = 24,000 + 1,28,000 + 6,000 = کل منصوبہ بندی کی گئی رقم
- روپے 4,82,000 = 6,40,000 - 1,58,000 = سال بھر کے خرچ کے لیے بچ رہنے والی رقم

مثال (2) : شری شاہ نے 3,20,000 روپے بینک میں 10% سود مرکب کے حساب سے 2 سال کے لیے سرمایہ کاری کی۔ اسی طرح 2,40,000 روپے ٹیکس فری میوچول فنڈ میں لگائے۔ اُس کے بازار کی قیمت کے مطابق 2 سال بعد انھیں 3,05,000 روپے ملے۔ ان کی کون سی سرمایہ کاری زیادہ فائدہ مند ہوگی؟

حل : (i) سود مرکب کے حساب سے سرمایہ کاری کی گئی رقم کا پہلے ہم سود معلوم کریں گے۔

$$\text{اصل زر} - \text{کل زر} = \text{مرکب سود}$$

$$I = A - P \text{ , یعنی}$$

$$= P \left( 1 + \frac{r}{100} \right)^n - P$$

$$= P \left[ \left( 1 + \frac{r}{100} \right)^n - 1 \right]$$

$$= 3,20,000 \left[ \left( 1 + \frac{10}{100} \right)^2 - 1 \right]$$

$$\begin{aligned}
&= 3,20,000 [(1.1)^2 - 1] \\
&= 3,20,000 [1.21 - 1] \\
&= 3,20,000 \times 0.21 \\
&= 67,200 \text{ روپے}
\end{aligned}$$

شاہ کو 3,20,000 روپے بینک میں سرمایہ کاری کرنے پر 67,200 روپے سود حاصل ہوا۔ اب حاصل ہوا سود سرمایہ کاری کافی صدی تناسب معلوم کریں گے۔

$$\therefore \text{بینک میں سرمایہ کاری کرنے پر } 21\% \text{ فائدہ ہوا۔} \quad \text{سود کافی صدی} = \frac{100 \times 67200}{3,20,000} = 21$$

(ii) روپے 3,05,000 = میوچول فنڈ سے 2 سال بعد حاصل ہونے والی رقم

$$\therefore \text{روپے } 65,000 = 3,05,000 - 2,40,000 = \text{میوچول فنڈ کا منافع}$$

$$\therefore \text{منافع کافی صدی} = \frac{65000 \times 100}{2,40,000} = 27.08$$

میوچول فنڈ میں سرمایہ کاری کرنے پر انھیں 27.08% فائدہ ہوا۔

اس سے ثابت ہوتا ہے کہ شری شاہ کا میوچول فنڈ میں سرمایہ کاری کرنا زیادہ فائدہ مند ہوگا۔

مثال (3) : کریم بھائی نے شیشہ کی صنعت میں 4,00,000 روپے کی سرمایہ کاری کی۔ 2 سال کے آخر میں انھیں اس کا روبا سے 5,20,000 روپے حاصل ہوئے۔ سرمایہ کاری کی رقم چھوڑ کر حاصل ہوا نفع انھوں نے 2 : 3 کی نسبت سے بالترتیب معیادی امانت اور شیئر میں سرمایہ کاری کی۔ انھوں نے ہر ایک مد میں کتنی رقم سرمایہ کاری کی؟

حل : روپے 1,20,000 = 5,20,000 - 4,00,000 = کریم کو 2 سال کے آخر میں منافع ملا

$$\text{معیادی امانت کھاتا میں سرمایہ کاری} = \frac{3}{5} \times 1,20,000$$

$$= 3 \times 24,000$$

$$= 72,000 \text{ روپے}$$

$$\text{شیئر میں سرمایہ کاری کی گئی رقم} = \frac{2}{5} \times 1,20,000$$

$$= 2 \times 24,000$$

$$= 48,000 \text{ روپے}$$

کریم بھائی نے معیادی امانت اور شیئر میں بالترتیب 72,000 روپے اور 48,000 روپے سرمایہ کاری کی۔

مثال (4) : شری انیل کی ماہانہ آمدنی اور خرچ کی نسبت 4 : 5 ہے۔ شری امین کی یہی نسبت 2 : 3 ہے۔ اسی طرح شری امین کی ماہانہ آمدنی کا 4%،

انیل کی آمدنی کے 7% کے برابر ہے۔ اگر انیل کی ماہانہ آمدنی 9600 روپے ہو تو

(i) شری امین کی ماہانہ آمدنی معلوم کیجیے۔

(ii) شری انیل اور شری امین کی بچت معلوم کیجیے۔

حل : ہم جانتے ہیں کہ

خرچ - آمدنی = بچت

$$3 : 2 = \text{امین کی آمدنی اور خرچ کی نسبت}$$

$$5 : 4 = \text{انیل کے آمدنی اور خرچ کی نسبت}$$

$$3y = \text{فرض کیجیے امین کی آمدنی}$$

$$5x = \text{فرض کیجیے انیل کی آمدنی}$$

$$2y = \text{فرض کیجیے امین کا خرچ}$$

$$4x = \text{فرض کیجیے انیل کا خرچ}$$

(انیل کی ماہانہ آمدنی 9600 روپے ہے۔) ...

$$\therefore 5x = 9600$$

$$\therefore x = 1920$$

$$\text{روپے کا ماہانہ خرچ} = 4x = 4 \times 1920 = 7680$$

$$\therefore \text{روپے کا ماہانہ بچت} = \text{انیل کی آمدنی} - \text{انیل کا خرچ} = 9600 - 7680 = 1920$$

$$\therefore \text{روپے کا ماہانہ بچت} = 1920 = \text{انیل کی ماہانہ بچت} , \text{روپے کا ماہانہ خرچ} = 7680$$

انیل کی آمدنی کا 7% = امین کی آمدنی کا 4%

$$\therefore \frac{4}{100} \times 3y = 9600 \times \frac{7}{100}$$

$$\therefore 12y = 9600 \times 7$$

$$\therefore y = \frac{9600 \times 7}{12} = 5600$$

$$\text{روپے کا ماہانہ آمدنی} = 3y = 3 \times 5600 = 16800$$

$$\text{روپے کا ماہانہ خرچ} = 2y = 2 \times 5600 = 11200$$

$$\therefore \text{روپے کا ماہانہ بچت} = 16800 - 11200 = 5600$$

(i) روپے کا ماہانہ آمدنی = 16800

(ii) روپے کا ماہانہ بچت = 5600

(iii) روپے کا ماہانہ خرچ = 1920

**عملی کام 1 :** ایتنانے 3500 روپیوں میں سے کچھ رقم 4% اور بقیہ رقم 5% سود کے حساب سے ایک سال کے لیے سرمایہ کاری کی۔

اسے کل 1530 روپے سود حاصل ہوا۔ تو اس کی الگ الگ سود سے سرمایہ کاری کی ہوئی رقم معلوم کیجیے۔

5% کے شرح سے سرمایہ کاری کی ہوئی رقم y روپے

4% کے شرح سے سرمایہ کاری کی ہوئی رقم x روپے

$$\boxed{\quad} + \boxed{\quad} = 35000 \quad \text{..... (I)}$$

سود ↓

$$\boxed{\frac{4}{100}x + \frac{5}{100}y = 1530} \quad \text{..... (II)}$$

$$x = \boxed{\quad} \quad y = \boxed{\quad}$$

سرگرمی :

(1) سرپرستوں کی مدد سے آپ کے گھر کا ہفتہ بھر کا جمع خرچ لکھیے۔ اس کے لیے خرچ کی مدد کے لحاظ سے ستون بنائیے۔ اناج، تعلیم، طبی خرچ، سفر، کپڑے اور دیگر عام خرچ جیسی مدوں کا خیال کرتے ہوئے تمام اخراجات لکھ لیجیے۔ جمع کی جانب گھر خرچ کے لیے حاصل ہوئی رقم، گذشتہ بقایا اور کچھ نئی رقم اگر حاصل ہوئی ہو تو اسے درج کیجیے۔

(2) چھٹیوں میں پورے مہینے کا جمع خرچ لکھیے۔ (صفحہ 52 پر گوبیند کے جمع خرچ کا مطالعہ کیجیے)

**عملی کام II :** بنجر زمین کے کسانوں کی آمدنی میں اضافہ کرنے کے لیے کیا عمل نکالا جائے گا اس میں بحث کیجیے۔ کچھ طلبہ نے ذیل کے مطابق اپنے خیالات پیش کیے۔

- سہیل : کسانوں کو صرف کھیتی کی اشیاء فروخت کرنے پر پیسے ملتے ہیں۔ اس سے حاصل ہونے والے منافع سال بھر کے لیے کافی ہونا چاہیے۔ اس لیے معاشی منصوبہ بندی کرنا بہت ضروری ہے۔
- پرکاش : کھیتی سے حاصل ہوئی پیداوار کو مناسب اور صحیح دام ملنے لگے تو آمدنی میں اضافہ ہوگا۔
- زگس : علم معاشیات کا اصول ہے کہ کسی چیز کی فراہمی، مانگ سے خوب زیادہ ہو تو اس کی قیمت کم ہو جاتی ہے۔ اگر دام کم ہو جائے تو فائدہ بھی کم ہو جائے گا۔
- ریٹا : اگر کھیتی کی پیداوار خوب ہوئی اور دام گرنے کا خوف ہو تو کچھ مال کی مناسب ڈھنگ سے ذخیرہ اندوزی کرنا چاہیے۔ بعد میں مناسب وقت پر بازار میں قیمت بڑھنے پر فروخت کرنے کے لیے نکالا جائے۔
- اعظم : اس کے لیے اچھے گودام تعمیر کرنا ضروری ہے۔
- ریشما : کسان کو کم سود پر آسانی سے قرض ملنا چاہیے۔
- وسلا : دودھ، مرغی پالنے وغیرہ زراعت کے تکمیلی پیشے کریں تو تھوڑا بہت منافع حاصل ہوتا ہے۔ اس کے علاوہ جانوروں کا فضلہ بہترین نامیاتی کھاد کے طور پر حاصل ہوتا ہے۔
- کنال : کھیتی سے حاصل ہونے والے اناج پر مختلف اعمال (Process) کرنے والے کارخانے جاری کرنا اور شربت، جام، اچار، خشک سبزیاں، پھلوں کا گودا جیسی چیزیں مناسب پیکنگ کر کے سال بھر فروخت کر سکتے ہیں۔ برآمدی اشیاء کی زیادہ پیداوار کی جائے۔

### مشقی سیٹ 6.1

1. اکا ہر ماہ بھجھی ہوئی رقم کا 90% خرچ کرتی ہے۔ ہر مہینہ 120 روپے کی بچت کرتی ہے۔ اُسے ہر ماہ بھجھی جانے والی رقم معلوم کیجیے۔
2. سُمیت نے 50,000 روپے سرمایہ سے خوردنی اشیاء کا کاروبار شروع کیا۔ اس میں پہلے سال 20% نقصان ہوا۔ بقیہ سرمایہ سے دوسرے سال اس نے مٹھائی کا کاروبار کیا۔ اس میں اسے 5% نفع ہوا۔ اصل سرمایہ کاری پر اسے کتنے فی صدی نفع یا نقصان ہوا؟
3. نکھل نے اپنی ماہانہ آمدنی کا 5% حصہ بچوں کی تعلیم پر خرچ کیا۔ 14% حصہ شیئر میں سرمایہ کاری کی، 3% حصہ بینک میں جمع کیا اور 40% حصہ روزمرہ کے اخراجات کے لیے استعمال کیا۔ سرمایہ کاری اور خرچ کے بعد اس کے پاس 19,000 روپے بچے۔ اس کی ماہانہ آمدنی معلوم کیجیے۔
4. محترم خان صاحب نے اپنی آمدنی میں سے 40,000 روپے 8% مرکب سود کے حساب سے 2 سال کے لیے بینک میں جمع کیے۔ شری فرنانڈیس نے 1,20,000 روپے میوچول فنڈ میں 2 سال کے لیے سرمایہ کاری کی۔ 2 سال بعد شری فرنانڈیس کو 1,92,000 روپے حاصل ہوئے تو محترم خان صاحب اور شری فرنانڈیس ان میں سے کس کی سرمایہ کاری زیادہ فائدہ مند ہوئی؟
5. سیرانے اپنے آمدنی کا 3% آمدنی سماجی کام کے لیے دیا اور 90% آمدنی خرچ کیا۔ اس کے پاس 1750 روپے باقی بچا تو اس کی ماہانہ آمدنی معلوم کیجیے۔



ٹیکس یعنی کیا؟ کس کس قسم کے ٹیکس ہوتے ہیں؟ اس تعلق سے معلومات جمع کیجیے۔

ITC Tools or Links



visit : [www.incometaxindia.gov.in](http://www.incometaxindia.gov.in)

آئیے سمجھ لیں



ٹیکس (محصول) تحسب کرنا

ملک کے ترقی کے لیے حکومت مختلف اسکیم بناتی ہے۔ ان اسکیموں کی عمل آوری کے لیے حکومت کو بہت بڑی رقم کی ضرورت پیش آتی ہے۔ کئی قسم کے ٹیکس عائد کر کے یہ رقم حاصل کی جاتی ہے۔

ٹیکس کے افادیت (Utility of taxes) :

- بنیادی سہولیات فراہم کرنا۔
- مختلف فلاح و بہبود کی اسکیم پر عمل کرنا۔
- مختلف شعبوں میں ترقیاتی کاموں اور تحقیق کے تعلق سے اسکیم پر عمل درآمد کرنا۔
- قانون اور نظم و نسق قائم رکھنا۔
- قدرتی آفات سے متاثر لوگوں کی مدد کرنا۔
- ملک اور شہریوں کی حفاظت کرنا، وغیرہ۔

ٹیکس کی قسمیں (Types of taxes)

بالراست ٹیکس (Indirect taxes)

جن ٹیکسوں کا بوجھ براہ راست ٹیکس ادا کرنے والے پر نہیں پڑتا اسے بالراست ٹیکس کہتے ہیں۔

مثال : مرکزی فروخت ٹیکس، ویلیو ایڈیڈ ٹیکس (VAT) ایکسائز ٹیکس، کسٹم ڈیوٹی، خدمت ٹیکس، وغیرہ۔

براہ راست ٹیکس (Direct taxes)

جن ٹیکسوں کا بوجھ براہ راست ٹیکس ادا کرنے والے پر پڑتا ہے۔ اس کو براہ راست ٹیکس کہتے ہیں۔

مثال : انکم ٹیکس، جائیداد ٹیکس، پیشہ ورانہ ٹیکس وغیرہ۔

2017ء میں جس طرح کے ٹیکس عائد کیے گئے ہیں اس کے مطابق اس کی قسمیں اوپر بتائی گئی ہیں۔

سرگرمی : مختلف قسم کے ٹیکس ادا کرنے والے ملازمت پیشہ لوگ یا پیشہ وروں کی جانب سے مختلف ٹیکس کی معلومات حاصل کیجیے۔



فرد کی، تنظیم یا دیگر قانونی طور پر بھارت میں جاری صنعت کی آمدنی، انکم ٹیکس ایکٹ (قانون) کے تحت مقرر کی گئی حد سے زیادہ ہو تو اس پر انکم ٹیکس (محصول) عائد کیا جاتا ہے۔

اس باب میں ہم براہ راست ٹیکس میں سے صرف فرد کے جانب سے ادا کیے جانے والے انکم ٹیکس کے متعلق غور کریں گے۔ انکم ٹیکس کی تحسیب مرکزی حکومت کرتی ہے۔ بھارت میں انکم ٹیکس کی تحسیب دو قوانین کے ذریعے کی جاتی ہے۔

(1) انکم ٹیکس ایکٹ 1961 یہ قانون 01-04-1962 سے نافذ ہوا۔

(2) ہر سال پارلیمنٹ میں منظور کیا جانے والا اقتصادی (معاشی تعلق سے) فراہم کیا جانے والا قانون۔

ہر سال عام طور پر فروری کے مہینے میں وزیر مالیات آنے والے مالیاتی سال کے تعلق سے قومی آمدنی اور اخراجات کا بجٹ (Budget) تخمینہ پیش کرتے ہیں۔ اس میں انکم ٹیکس کی شرح تجویز کی جاتی ہے۔ پارلیمنٹ کے بجٹ میں منظور کرنے پر یہ شرح اگلے سال کے لیے عائد کی جاتی ہے۔ انکم ٹیکس کی شرح ہر سال بجٹ میں طے کی جاتی ہے۔

انکم ٹیکس کے تعلق سے اہم باب :

● متشخص / ٹیکس ادا کرنے والا (An assessee) : انکم ٹیکس ایکٹ میں شامل قانون کے لحاظ سے جس فرد کو انکم ٹیکس ادا کرنا مطلوب ہوتا ہے اس فرد کو متشخص کہتے ہیں۔

● مالیاتی سال (Financial year) : جس ایک سال کی قابل ٹیکس آمدنی لی جاتی ہے اس سال کو 'مالیاتی سال' کہتے ہیں۔ اپنے ملک میں فی الحال 1 اپریل سے 31 مارچ کا عرصہ مالیاتی سال کہلاتا ہے۔

● ٹیکس تشخیص سال / سال (Assessment Year) : مالیاتی سال کے فوراً بعد کے مالیاتی سال کو سال تشخیص کہتے ہیں۔ رواں سال میں گذشتہ مالیاتی سال کے لیے ٹیکس کی تشخیص منظور کی جاتی ہے۔ مالیاتی سال اور متعلقہ سال تشخیص ذیل کے مطابق دیا گیا ہے۔

مالیاتی سال (Financial Year)	متعلقہ سال تشخیص (Assessment Year)
2016-2017 یعنی 01-04-2016 سے 31-3-2017	2017 - 2018
2017-2018 یعنی 01-04-2017 سے 31-03-2018	2018 - 2019

مستقل کھاتا نمبر (PAN) : ہر فرد کو عریضہ کرنے پر انکم ٹیکس محکمہ کی جانب سے ایک مخصوص دس ہندی حرف نمبر دیا جاتا ہے۔ اسے مستقل کھاتا

نمبر یعنی "Permanent Account Number (PAN)" کہتے ہیں۔ کئی اہم دستاویزات اور معاشی لین دین میں یہ نمبر درج کرنا ضروری ہوتا ہے۔



پین کارڈ کا استعمال : انکم ٹیکس محکمہ میں ٹیکس ادا کرنے کے چلن (فارم)، ٹیکس کا گوشوارہ (ریٹرن فارم) اور دیگر مراسلات میں پین نمبر لکھنا لازمی ہوتا ہے۔ اسی طرح بڑے معاشی لین دین کرتے وقت پین نمبر درج کرنا پڑتا ہے۔ کئی دفعہ پین کارڈ بطور شناخت (Identity Proof) استعمال کیا جاتا ہے۔

## آئیے سمجھ لیں



انکم ٹیکس کی تحسیب : انکم ٹیکس کی تحسیب آمدنی پر منحصر ہوتی ہے۔ اس لیے آمدنی کے مختلف ذرائع جاننا ضروری ہے۔  
آمدنی کے پانچ اہم ذرائع :

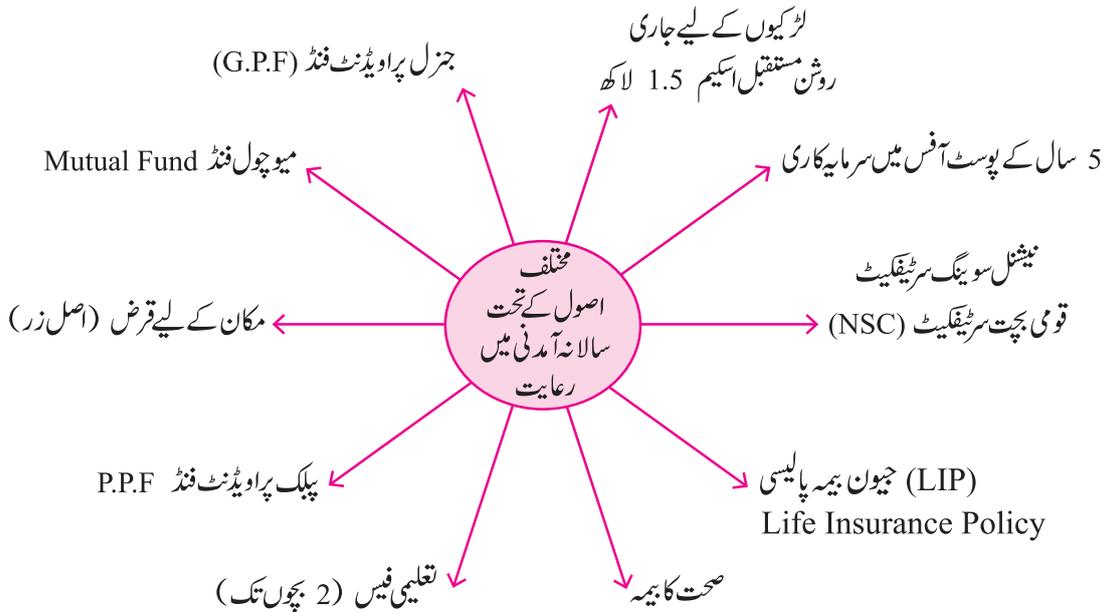
- (1) تنخواہ سے حاصل ہونے والی آمدنی
  - (2) گھر جائیداد سے حاصل ہونے والی آمدنی
  - (3) دھندا اور کاروبار (پیشے) سے ملنے والی آمدنی
  - (4) سرمایہ کاری کے منافع سے (Capital gain) حاصل ہونے والی آمدنی
  - (5) دیگر ذرائع سے حاصل ہونے والی آمدنی
- تنخواہ دار فرد کا انکم ٹیکس محسوب کرنے کے لیے اہم نقاط

انکم ٹیکس محسوب کرنے کے لیے کل سالانہ آمدنی کا خیال کیا جاتا ہے۔ انکم ٹیکس ایکٹ 80C، 80D، 80G وغیرہ اریٹیکل کے تحت کل سالانہ آمدنی میں کٹوتی (سہولت) ملتی ہے۔ اس مستثنیٰ آمدنی کو کم کرنے کے بعد بقیہ آمدنی کو ”قابل ٹیکس آمدنی“ کہتے ہیں۔ انکم ٹیکس کی تحسیب اسی آمدنی پر کی جاتی ہے۔ ٹیکس کی تحسیب کے اصول کبھی کبھی تبدیل کیے جاتے ہیں۔ اس لیے براہ راست ٹیکس تحسیب کرتے وقت تازہ ترین اصول کا معلوم ہونا نہایت ضروری ہے۔ قابل ٹیکس آمدنی میں سے مخصوص حد تک کی رقم پر ٹیکس تحسیب نہیں کیا جاتا۔ اس رقم کو قابل ٹیکس آمدنی کی ”اصل مستثنیٰ آمدنی“ کہتے ہیں۔

- کسانوں کو زرعی پیداوار کی آمدنی پر انکم ٹیکس میں رعایت دی گئی ہے۔
- انکم ٹیکس ایکٹ 80G کے تحت وزیر اعظم ریلیف فنڈ، وزیر اعلیٰ ریلیف فنڈ یا حکومت سے منظور شدہ اداروں کو عطیہ دینے پر انکم ٹیکس میں 100% چھوٹ ملتی ہے۔

● 80D ایکٹ کے تحت صحت کے لیے بیمہ قسط پر چھوٹ (رعایت) ملتی ہے۔

- عام طور پر کل سرمایہ کاری پر 80C ایکٹ کے تحت مختلف قسم کی سرمایہ کاری میں زیادہ سے زیادہ 1,50,000 روپے تک چھوٹ (رعایت) ملتی ہے۔
- 2017-2018 اس بجٹ (تخمینہ) کے مطابق جن کی سالانہ آمدنی میں رعایت دی جاسکتی ہے ایسے کچھ اہم سرمایہ کاریاں ذیل کی شکل میں دکھائی گئی ہیں۔



ٹیکس دہندہ (منتخب) کی عمر کے مطابق انکم ٹیکس کی شرح ہر سال معاشی بجٹ میں طے کی جاتی ہے۔ آمدنی کی سطح کے مطابق انکم ٹیکس کی شرح ظاہر کرنے والا خاکہ ذیل میں دیا گیا ہے۔

## جدول I

60 سال کی عمر کے فرد کے لیے			
ثانوی اور اعلیٰ تعلیمی ٹیکس	تعلیمی ذیلی ٹیکس	انکم ٹیکس (Income tax)	قابل ٹیکس آمدنی کے مرحلے (روپے میں)
ٹیکس معاف	ٹیکس معاف	(ٹیکس معاف) (مستثنیٰ آمدنی)	تک 250000
انکم ٹیکس کا 1 فی صد	انکم ٹیکس کا 2 فی صد	5% (قابل ٹیکس آمدنی سے ڈھائی لاکھ روپے منہا کرنے کے بعد)	2,50,0001 سے 5,00,000 تک
انکم ٹیکس کا 1 فی صد	انکم ٹیکس کا 2 فی صد	₹12,500 + 20% (قابل ٹیکس آمدنی سے پانچ لاکھ روپے منہا کرنے کے بعد)	5,00,000 سے 10,00,000 تک
انکم ٹیکس کا 1 فی صد	انکم ٹیکس کا 2 فی صد	₹11,2500 + 30% (قابل ٹیکس آمدنی سے دس لاکھ روپے منہا کرنے کے بعد)	10,00,000 سے زیادہ
سالانہ آمدنی 50 لاکھ روپے سے ایک کروڑ روپے کے درمیان والوں کو انکم ٹیکس کا 10% اضافی ٹیکس اور سالانہ آمدنی ایک کروڑ روپے سے زیادہ ہو تو انکم ٹیکس کا 15% اضافی ٹیکس عائد کیا جاتا ہے۔			

**عملی کام :** اوپر کے جدول (I) کا مشاہدہ کیجیے اور ذیل میں دی ہوئی مثال کے خالی چوکون میں مناسب عدد لکھیے۔

مثال ● مہتا کی سالانہ آمدنی ساڑھے چار لاکھ روپے ہے۔ انھوں نے آمدنی میں منہا ہونے والی ایسی کوئی بھی بچت نہیں کی۔ تو ان کی قابل ٹیکس آمدنی کس مرحلے

میں ہوگی؟

● انھیں کتنی رقم پر کتنے فی صد شرح سے ٹیکس ادا کرنا ہوگا؟  روپے پر  شرح سے

● ذیلی ٹیکس کتنی رقم پر تحسب کیا جائے گا؟

## جدول II

بزرگ شہری (عمر ساٹھ سال سے اسی سال تک)			
ثانوی و اعلیٰ تعلیمی ذیلی ٹیکس	تعلیمی ذیلی ٹیکس	انکم ٹیکس (Income tax)	قابل ٹیکس آمدنی کے مرحلے (روپے میں)
ٹیکس معاف	ٹیکس معاف	(ٹیکس معاف) (مستثنیٰ آمدنی)	تک 300000
انکم ٹیکس کا 1 فی صد	انکم ٹیکس کا 2 فی صد	5% (قابل ٹیکس آمدنی سے تین لاکھ روپے منہا کرنے کے بعد)	3,00,001 سے 5,00,000 تک
انکم ٹیکس کا 1 فی صد	انکم ٹیکس کا 2 فی صد	₹10,000 + 20% (قابل ٹیکس آمدنی سے پانچ لاکھ روپے منہا کرنے کے بعد)	5,00,001 سے 10,00,000
انکم ٹیکس کا 1 فی صد	انکم ٹیکس کا 2 فی صد	₹1,10,000 + 30 (قابل ٹیکس آمدنی سے دس لاکھ روپے منہا کرنے کے بعد)	10,00,000 سے زیادہ
سالانہ آمدنی 50 لاکھ روپے سے ایک کروڑ روپے کے درمیان والوں کو انکم ٹیکس کا 10% اضافی ٹیکس اور سالانہ آمدنی ایک کروڑ روپے سے زیادہ ہو تو انکم ٹیکس کا 15% اضافی ٹیکس عائد ہوگا۔			

عملی کام : جدول II کی رُو سے ذیل میں عملی کام مکمل کیجیے۔

مثال : شری پنڈت کی عمر 67 سال ہے۔ گذشتہ سال ان کی سالانہ آمدنی 13,25,000 روپے تھی تو ان کی قابل ٹیکس آمدنی کتنی ہوگی؟ انہیں کتنا انکم ٹیکس ادا کرنا ہوگا؟

$$13,25,000 - 10,000,00 = 3,25,000$$

اس لیے انہیں جدول کے مطابق 1,10,000 روپے ٹیکس ادا کرنا ہی ہوگا۔ علاوہ قابل ٹیکس آمدنی کا 30% رقم پر انکم ٹیکس ادا کرنا ہوگا۔

$$\therefore 3,25,000 \times \frac{30}{100} = \boxed{\phantom{000000}} \text{ روپے}$$

$$\therefore \text{انکم ٹیکس کی رقم} = \boxed{\phantom{000000}} \quad \boxed{\phantom{000000}} \quad \boxed{\phantom{000000}}$$

$$\text{تعلیمی ذیلی ٹیکس کا 2\% انکم ٹیکس} = \boxed{\phantom{000000}} \times \frac{2}{100} = \boxed{\phantom{000000}}$$

$$\text{ثانوی اور اعلیٰ تعلیمی ذیلی ٹیکس کا 1\% انکم ٹیکس} = \boxed{\phantom{000000}} \times \frac{1}{100} = \boxed{\phantom{000000}}$$

$$\therefore \text{کل انکم ٹیکس} = \text{انکم ٹیکس} + \text{تعلیمی ذیلی ٹیکس} + \text{ثانوی اور اعلیٰ تعلیمی ذیلی ٹیکس}$$

$$= \boxed{\phantom{000000}} + \boxed{\phantom{000000}} + \boxed{\phantom{000000}}$$

$$= \boxed{\text{₹ 2,13,725}}$$

### جدول III

بہت ضعیف بزرگ شہری (عمر اسی سال سے زیادہ)			
قابل ٹیکس آمدنی کا مرحلہ (روپے میں)	انکم ٹیکس (Income tax)	تعلیمی ٹیکس	ثانوی اور اعلیٰ ثانوی تعلیمی ٹیکس
5,00,000 میں	مشقی آمدنی (ٹیکس معاف)	ٹیکس معاف	ٹیکس معاف
5,00,001 سے 10,00,000 تک	20% (قابل ٹیکس آمدنی سے پانچ لاکھ روپے منہا کرنے کے بعد)	انکم ٹیکس کا 2 فی صد	انکم ٹیکس کا 1 فی صد
10,00,000 سے زیادہ	₹100000 + 30% (قابل ٹیکس آمدنی سے دس لاکھ روپے منہا کرنے کے بعد)	انکم ٹیکس کا 2 فی صد	انکم ٹیکس کا 1 فی صد

سالانہ آمدنی 50 لاکھ روپے سے ایک کروڑ روپے کے درمیان والوں کو انکم ٹیکس کا اضافی ٹیکس 10% اور سالانہ آمدنی ایک کروڑ سے زیادہ والوں کو انکم ٹیکس کا 15% اضافی ٹیکس ہوگا۔

عملی کام : 80C، 80D، 80G ان قانونی دفعات کی معلومات حاصل کیجیے۔

پین کارڈ کا معائنہ کیجیے اور اس پر کون سی معلومات ہوتی ہے اسے درج کیجیے۔

(Cashless) نقد بین کاروبار کے لیے استعمال کیے جانے والے ذرائع کی معلومات حاصل کیجیے۔

اوپر کے جدول اور افراد کو ملنے والی مختلف سہولتوں کا استعمال کر کے انکم ٹیکس کس طرح محسوب کیا جاتا ہے؟ ہم ذیل کی مثالوں سے سمجھنے کی کوشش کریں گے۔

مثال (1) : شری مہاترے کی عمر 50 سال ہے۔ ان کی سالانہ آمدنی 12,00,000 روپے ہے۔ شری مہاترے نے ذیل کے مطابق سرمایہ کاری کی۔

- (i) بیمہ کی قسط = ₹90,000 (ii) پراویڈنٹ فنڈ = ₹25,000  
(iii) پبلک پراویڈنٹ فنڈ = ₹15,000 (iv) نیشنل سوینگ سرٹیفکیٹ (NSC) = ₹20,000

اس معلومات کی بنا پر انکم ٹیکس کے لیے منظور شدہ سہولیات، قابل ٹیکس آمدنی اور انکم ٹیکس معلوم کیجیے۔

حل :

- (i) کل سالانہ آمدنی = 12,00,000 روپے (ii) 80C کے مطابق سرمایہ کاری

سرمایہ کاری	رقم (روپے میں)
(i) بیمہ قسط	90,000
(ii) پراویڈنٹ فنڈ میں سرمایہ کاری	25,000
(iii) پبلک پراویڈنٹ فنڈ	15,000
(iv) نیشنل سوینگ سرٹیفکیٹ (NSC)	20,000
کل	1,50,000

دفعہ 80C کے تحت انکم ٹیکس کے لیے زیادہ سے زیادہ 150000 روپے مستثنیٰ آمدنی (منظور شدہ سہولت) منہا کی جائے۔

- (3) (ii) میں دی ہوئی رقم — (i) میں دی ہوئی رقم = قابل ٹیکس آمدنی

$$= 12,00,000 - 1,50,000 = 10,50,000$$

- (4) انکم ٹیکس جو شری مہاترے کو ادا کرنا ہوگا۔ جدول (I) کی مدد سے تحسیب کریں گے۔

(یعنی دس لاکھ روپے سے زیادہ ہے) ... ₹10,50,000 = شری مہاترے کی قابل ٹیکس رقم

(کل آمدنی سے دس لاکھ روپے منہا کرنے کے بعد پر 30%) ... 30% + ₹112500 = جدول (I) کے مطابق انکم ٹیکس

$$\therefore 10,50,000 - 10,00,000 = 50,000$$

$$\therefore \text{انکم ٹیکس} = 1,12,500 + 50,000 \times \frac{30}{100}$$

$$= 1,12,500 + 15,000$$

$$= 1,27,500$$

اس کے علاوہ 2% تعلیمی ذیلی ٹیکس اور 1% (اعلیٰ ثانوی تعلیمی ذیلی ٹیکس) ان کو بھی شامل کیا جائے۔

$$\text{تعلیمی ذیلی ٹیکس} = 1,27,500 \times \frac{2}{100} = 2550 \text{ روپے}$$

$$\text{اعلیٰ ثانوی تعلیمی ذیلی ٹیکس} = 1,27,500 \times \frac{1}{100} = 1275 \text{ روپے}$$

$$\therefore \text{کل انکم ٹیکس} = 1,27,500 + 2550 + 1275 = 1,31,325 \text{ روپے}$$

اس لیے شری مہاترے کو کل 1,31,325 روپے انکم ٹیکس ادا کرنا ہوگا۔

مثال (2) : محترم احمد صاحب 62 سال کے بزرگ شہری ہیں۔ وہ ایک کمپنی میں ملازمت کرتے ہیں۔ ان کی سالانہ آمدنی 6,20,000 روپے تھی۔ انہوں نے پبلک پراویڈنٹ فنڈ میں 1,00,000 روپے سرمایہ کاری کی۔ اسی طرح بیمہ کی سالانہ قسط 80,000 روپے ادا کیا۔ اور وزیر اعلیٰ ریلیف فنڈ میں 10,000 روپے عطیہ دیا۔ احمد صاحب کو کتنا انکم ٹیکس ادا کرنا ہوگا؟

حل :

(1) روپے 6,20,000 = کل سالانہ آمدنی

(2) کل منہاجات (دفعہ C 80 کے تحت)

(i) روپے 1,00,000 = پبلک پراویڈنٹ فنڈ

(ii) روپے 80,000 = بیمہ کی سالانہ قسط

= روپے 1,80,000

(iii) دفعہ 80C کے مطابق زیادہ سے زیادہ 1,50,000 روپے منہا کرنے کی سہولت منظور کی گئی۔

(3) روپے 10,000 = وزیر اعلیٰ ریلیف فنڈ میں دی رقم 80G کے مطابق منہا کرنا۔

(4) قابل ٹیکس آمدنی = (1) - [(2) + (3)]

= 6,20,000 - [1,50,000 - 10,000]

= روپے 4,60,000

جدول (II) کے مطابق قابل ٹیکس آمدنی کی حد تین لاکھ سے پانچ لاکھ تک ہے۔

$$\therefore \text{انکم ٹیکس} = (300000 - \text{قابل ٹیکس آمدنی}) \times \frac{5}{100}$$

$$= (4,60,000 - 3,00,000) \times \frac{5}{100}$$

$$= 1,60,000 \times \frac{5}{100}$$

= روپے 8000

تعلیمی ٹیکس کو انکم ٹیکس پر تحسب کیا جاتا ہے۔

$$8000 \times \frac{1}{100} = 80 \text{ (ثانوی اور اعلیٰ تعلیمی ذیلی ٹیکس)}, \quad 8,000 \times \frac{2}{100} = 160 \text{ (تعلیمی ذیلی ٹیکس)}$$

∴ کل انکم ٹیکس = 8000 + 160 + 80 = ₹ 8,240

اس لیے احمد صاحب کو 8,240 روپے انکم ٹیکس ادا کرنا ہوگا۔

مثال (3) : شریجی ہندو جا کی عمر 50 سال ہے۔ گذشتہ سال قابل ٹیکس آمدنی 16,30,000 روپے تھی۔ انہیں کل کتنا انکم ٹیکس ادا کرنا ہوگا؟

حل : شریجی ہندو جا کی قابل ٹیکس آمدنی دس لاکھ روپے سے زیادہ ہے۔

اب ہم جدول (I) کا استعمال کر کے ان کا انکم ٹیکس محسوب کریں گے۔

جدول (I) کے مطابق، دس لاکھ روپے سے زیادہ آمدنی کے لیے

$$(\text{کل آمدنی سے دس لاکھ روپے منہا کرنے کے بعد پر } 30\%) + ₹1,12,500 = \text{انکم ٹیکس}$$

$$\begin{aligned} \text{شریتمی ہندو جا کی آمدنی} - \text{دس لاکھ} &= 16,30,000 - 10,00,000 \\ &= 6,30,000 \end{aligned}$$

جدول (I) کی رؤسے،

$$\begin{aligned} \text{انکم ٹیکس} &= 1,12,500 + 6,30,000 \times \frac{30}{100} \\ &= 1,12,500 + 30 \times 6,300 \\ &= 1,12,500 + 1,89,000 \\ &= 3,01,500 \text{ روپے} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{1\% ثانوی اور اعلیٰ تعلیم ٹیکس} = \frac{1}{100} \times 3,01,500 = ₹ 3015 \text{ روپے}$$

$$\therefore \text{2\% تعلیمی ٹیکس} = \frac{2}{100} \times 3,01,500 = ₹ 6030 \text{ روپے}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{کل انکم ٹیکس} &= 3,01,500 + 3015 + 6030 \\ &= 3,10,545 \text{ روپے} \end{aligned}$$

اس لیے کل 3,10,545 روپے انکم ٹیکس ادا کرنا ہوگا۔

## مشقی سیٹ 6.2

(1) ذیل کے جدول کا مشاہدہ کیجیے۔ جدول میں دیے ہوئے افراد کی دی ہوئی قابل ٹیکس آمدنی پر انکم ٹیکس ادا کرنا ہوگا یا نہیں لکھیے۔

نمبر شمار	افراد	عمر	قابل ٹیکس آمدنی (₹)	انکم ٹیکس ادا کرنا ہوگا یا نہیں
(i)	کماری نیکیتا	27	₹ 2,34,000	
(ii)	شری کلکرنی	36	₹ 3,27,000	
(iii)	شریتمی مہتا	44	₹ 5,82,000	
(iv)	شری بجاج	64	₹ 8,40,000	
(v)	شری ڈسلوا	81	₹ 4,50,000	

(2) شری کرتار سنگھ (عمر 48 سال) نجی کمپنی میں ملازمت کرتے ہیں۔ مناسب بھرتہ چھوڑ کر ان کی ماہانہ تنخواہ 42,000 روپے ہے۔ وہ پراویڈنٹ فنڈ میں ہر ماہ 3000 روپے سرمایہ کاری کرتے ہیں۔ انھوں نے 15,000 روپے کا نیشنل سیونگ سرٹیفکیٹ (NSC) خریدا ہے اور 12,000 روپے کا عطیہ وزیراعظم ریلیف فنڈ میں جمع کیا۔ تو ان کا انکم ٹیکس محسوب کیجیے۔

(1) درج ذیل میں سے صحیح متبادل منتخب کیجیے۔

(i) مختلف اقسام کی سرمایہ کاری میں سے دفعہ 80C کے لحاظ سے انکم ٹیکس تحسب کے لیے زیادہ سے زیادہ کتنے روپے کی چھوٹ ملتی ہے؟

(A) دو لاکھ روپے (B) ایک لاکھ روپے (C) ڈھائی لاکھ روپے (D) دیکڑھ لاکھ روپے

(ii) ایک فرد کی 2017-18 میں ہونے والی آمدنی پر ٹیکس کی تحسب کا سال درج ذیل میں سے کون سا ہوگا؟

(A) 2016-17 (B) 2018-19 (C) 2017-18 (D) 2015-16

(2) شری شیکھر آمدنی کا 60% خرچ کرتے ہیں۔ بقیہ آمدنی میں سے 300 روپے عطیہ یتیم خانہ میں دیتے ہیں تب ان کے پاس 3,200 روپے بچتے ہیں۔ ان کی آمدنی معلوم کیجیے۔

(3) شری ہیرالال نے 2,15,000 روپے میوچول فنڈ میں سرمایہ کاری کی۔ اس کے 2 سال بعد انھیں 3,05,000 روپے حاصل ہوئے۔ شری رمن لال نے 1,40,000 روپے 8% شرح سے مرکب سود کے حساب سے 2 سال کے لیے بینک میں امانت رکھا۔ ہر ایک کو ملنے والا فی صدی منافع معلوم کیجیے۔ کس کی سرمایہ کاری زیادہ فائدہ مند ہوگی؟

(4) ایک بچت کھاتے میں سال کے شروع میں 24,000 روپے تھے۔ اس میں 56,000 روپے کا اضافہ کیا گیا اور وہ پوری رقم 7.5% شرح سے مرکب سود کے حساب سے بینک میں جمع رکھی گئی تو 3 سال بعد کل کتنی رقم واپس ملے گی؟

(5) شری منوہرنے اپنی آمدنی کا 20% حصہ اپنے بڑے بیٹے کو اور 30% حصہ چھوٹے بیٹے کو دیا۔ بعد میں بقیہ رقم کا 10% بطور عطیہ ایک اسکول کو دیا تب ان کے پاس 1,80,000 روپے باقی بچے۔ شری منوہرنے کی سالانہ آمدنی معلوم کیجیے۔

(6)\* کیلاش کی آمدنی کا 85% حصہ خرچ ہو جاتا ہے۔ اس کی آمدنی میں 36% اضافہ ہونے پر اس کا خرچ پہلے کے مقابلے 40% بڑھ گیا۔ اس کی موجودہ فی صدی بچت معلوم کیجیے۔

(7)\* ریحان، ذیشان اور آفرین ان تینوں کی سالانہ آمدنی 8,07,000 روپے ہے۔ وہ تینوں اپنی آمدنی کا بالترتیب 75%، 80% اور 90% حصہ خرچ کرتے ہیں۔ اگر ان کے بچت کا تناسب 12 : 17 : 16 ہو تو ہر ایک کی سالانہ بچت معلوم کیجیے۔

(8) ذیل کے افراد کا انکم ٹیکس محسوب کیجیے۔

(i) شری کدم کی عمر 35 سال ہے اور ان کی قابل ٹیکس آمدنی 13,35,000 روپے ہے۔

(ii) محترم خان صاحب کی عمر 65 سال ہے اور ان کی قابل ٹیکس آمدنی 4,50,000 روپے ہے۔

(iii) کماری ورشا (عمر 26 سال) کی قابل ٹیکس آمدنی 2,30,000 روپے ہے۔

#### ITC Tools or Links



بھارت سرکاری [www.incometaxindia.gov.in](http://www.incometaxindia.gov.in) ویب سائٹ پر جائیے۔ اس ویب سائٹ پر Incometax calculator مینو پر کلک کیجیے۔ آنے والے فارم میں فرضی آمدنی اور منہاجات کے فرضی رقم لکھ کر انکم ٹیکس کی رقم معلوم کرنے کی کوشش کیجیے۔



# شماریات Statistics

7

آئیے، سیکھیں



- متصل ستونی ترسیم
- تقسیمی ستونی ترسیم
- فیصدی ستونی ترسیم
- میانہ، وسطانیا اور کثیرہ (غیر جماعت بند معطیات)
- ابتدائی اور ثانوی معطیات
- غیر جماعت بند اور جماعت بند تعددی تقسیم کی جدول
- تعددی تقسیمی جدول

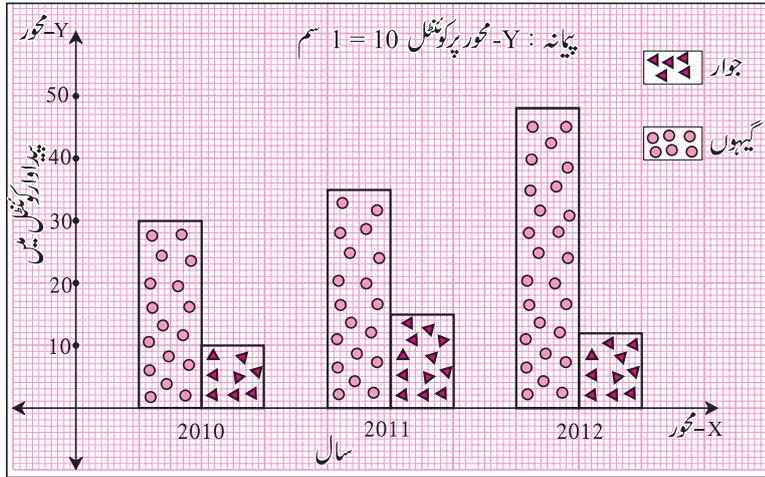
آئیے ذرا یاد کریں



گذشتہ جماعتوں میں ہم نے سادہ ستونی ترسیم اور متصل ستونی ترسیم وغیرہ کیسے بناتے ہیں، کا مطالعہ کر چکے ہیں۔ اسی طرح اخبارات، ماہنامے، ٹیلی ویژن وغیرہ ذرائع سے مختلف ترسیم کی معلومات حاصل کر چکے ہیں۔

معطیات کی نوعیت کے لحاظ سے ان معطیات کو مناسب انداز میں پیش کرنے کے لیے ترسیم بنانا اہم ہوتا ہے۔

مثال : ایک کسان کو اس کی کھیتی سے گیہوں اور جوار، ان دو فصلوں کی تین سال میں حاصل ہوئی پیداوار کو ظاہر کرنے والا متصل ستونی ترسیم ذیل میں دکھایا گیا ہے۔ اس معطیات کی بنا پر سوالوں کے جواب لکھیے۔



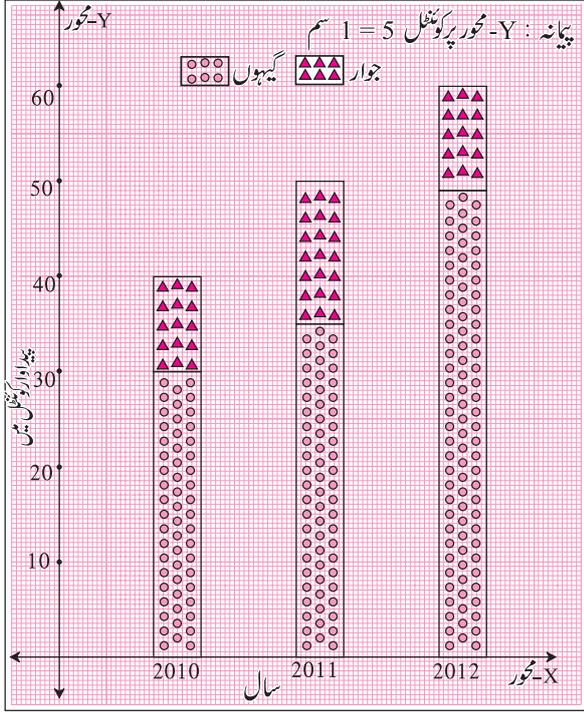
- تین سال میں کس فصل کی پیداوار لگاتار بڑھ رہی ہے؟
- 2012 میں 2011 کی بہ نسبت جوار کی پیداوار کتنی کم ہوئی؟
- 2010 میں گیہوں کی پیداوار اور 2012 میں گیہوں کی پیداوار کے درمیان کتنا فرق ہے؟

(iv) اس ترسیم کی معلومات کی بناء پر درج ذیل جدول مکمل کیجیے۔

سال	پیداوار (کونٹنل میں)	گیہوں	جوار	کل پیداوار
2010				
2011				
2010		48	12	60



### تقسیمی ستونی ترسیم (Sub - divided bar diagram)



معطیات کا موازنہ ظاہر کرنے والا ستونی ترسیم دوسرے طریقے سے معلوم کر سکتے ہیں۔ اس کو تقسیمی ستونی ترسیم کہتے ہیں۔ اس کے لیے معطیات کے ایک ہی قسم کے دو مدوں کو جمع کیا جاتا ہے۔ حاصل ہونے والے مجموعہ کو مناسب پیمانہ لے کر ستونی طریقہ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ستون کی ہر مد کو ظاہر کرنے کے لیے مناسب پیمانہ لے کر حصے کئے جاتے ہیں۔ سابقہ مثال میں ہم دیکھیں گے کہ معطیات کو ظاہر کرنے والا تقسیمی ستونی ترسیم کیسے بناتے ہیں۔

- کل پیداوار کے مطابق ہر ستون کی اونچائی مناسب پیمانے سے ظاہر کیجیے۔
- اس میں گیہوں کی پیداوار کل پیداوار کے ستون کا ایک حصہ ہوگی۔ اسے مخصوص نشان سے دکھائیے۔

(iii) ستون کا بقیہ حصہ جوار کی پیداوار ظاہر کرے گا۔ اسے مختلف نشان سے دکھائیے۔

اس طریقے سے بازو میں بنائی گئی ستونی ترسیم کو دیکھیے۔

ہم نے مطالعہ کیا ہے کہ دو مدوں کا فیصدی میں کیا گیا موازنہ قابل اعتماد ہوتا ہے۔ مثلاً 2000 روپے پر 600 روپے منافع اور 1500 روپے پر 510 روپے منافع اس میں 600 روپے منافع زیادہ دکھائی دیتا ہے۔ مگر دونوں منافع میں بالترتیب 30% اور 34% ہیں اسے دھیان میں رکھیں تو سمجھ میں آتا ہے کہ 1500 روپے پر 510 روپے منافع والا کاروبار زیادہ فائدہ مند ہوگا۔

### Percentage Bar Diagram

سال	گیہوں کی پیداوار (کونٹھل میں)	جوار کی پیداوار (کونٹھل میں)	کل پیداوار کے تناسب میں گیہوں کی پیداوار کا فیصد
2010	30	10	$\frac{30}{40} \times 100 = 75\%$
2011	35	15	$\frac{35}{50} \times 100 = 70\%$
2012	40	12	$\frac{48}{60} \times 100 = 80\%$

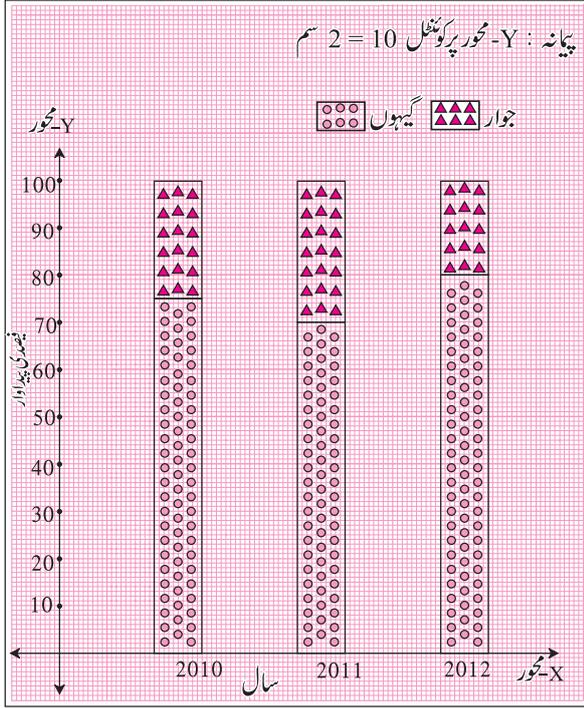
دی ہوئی معطیات کا موازنہ زیادہ اچھے طریقے سے سمجھنے کے لیے دی ہوئی معلومات کو فیصدی میں تبدیل کر کے تقسیمی ستونی ترسیم بناتے ہیں۔

اسے فیصدی ستونی ترسیم کہتے ہیں۔

گذشتہ مثال کی معطیات کا فیصد متصل

جدول میں دکھایا گیا ہے۔

ان معطیات کو ظاہر کرنے والا ستونی ترسیم ذیل کے مراحل سے بنایا گیا ہے۔



(i) ہر سال میں گیہوں اور جوار کی کل پیداوار میں سے گیہوں کی

پیداوار اور جوار کی پیداوار کا فیصد معلوم کیا۔

(ii) ہر ستون کی Y-محور پر اونچائی 100 کے تناسب میں لی گئی

ہے۔

(iii) گیہوں کی پیداوار کا کل پیداوار سے فیصد لیے ہوئے پیمانے کے

تناسب سے ستون پر نشان کے ذریعے دکھایا گیا۔

(iv) ستون کا بقیہ حصہ کل پیداوار سے جوار کی پیداوار کا فیصد ظاہر کرتا

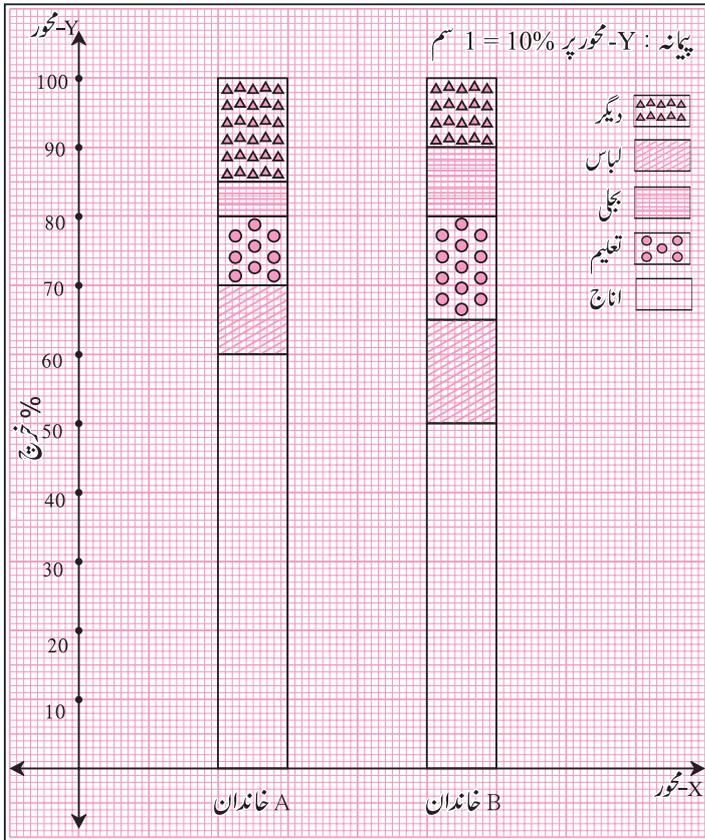
ہے۔

دو سے زیادہ مدوں کی معلومات بھی تقسیمی ستونی ترسیم یا فیصدی ستونی ترسیم

میں ظاہر کر سکتے ہیں۔

حل شدہ مثالیں

مثال (1) : بازو کی شکل میں فیصدی ستونی ترسیم دی ہوئی ہے۔ اس میں دو خاندانوں کا مختلف مدوں پر ہونے والے خرچ کی معطیات دی ہوئی ہے۔



اسی بنا پر ذیل کے سوالات کے جوابات لکھیے۔

(i) ہر خاندان کا مختلف مدوں پر ہونے والے خرچ

کا فیصد لکھیے۔

(ii) کس خاندان کا اناج کا خرچ اس کے کل خرچ

کے تناسب کے لحاظ سے زیادہ ہے؟ کتنے

فیصدی زیادہ ہے؟

(iii) دونوں خاندانوں کے دیگر اخراجات کا فیصدی

کتنا ہے؟ الگ الگ بتائیے۔

(iv) کس خاندان کا بجلی خرچ کا فیصد زیادہ ہے؟

(v) کس خاندان کا تعلیمی خرچ کا فیصد زیادہ ہے؟

حل : (i)

خاندان	خرچ	اناچ	لباس	تعلیم	بجلی	دیگر
A		60%	10%	10%	5%	15%
B		50%	15%	15%	10%	10%

(ii) خاندان A کے اناچ کا خرچ، کل خرچ کے تناسب میں خاندان B کے خرچ سے 10% زیادہ ہے۔

(ii) خاندان A کا دیگر خرچ 15% اور خاندان B کا دیگر خرچ 10% ہے۔

(iv) خاندان B کے بجلی خرچ کا فیصد زیادہ ہے۔

(v) خاندان B کے تعلیمی خرچ کا فیصد زیادہ ہے۔

### مشقی سیٹ 7.1

- (1) درج ذیل جدول میں بھارت کے موٹر اور بس کی تعداد تقریباً مکمل لاکھ (2) درج ذیل جدول میں بھارت کی پکی سڑکیں اور کچی سڑکوں کی معطیات دی ہوئی ہے۔ اس بنا پر تقسیمی ستونی ترسیم اور فیصدی ستونی ترسیم بنائیے۔ (فیصدی تقریباً صحیح عدد میں لیجیے)

سال	پکی سڑکیں (لاکھ کلومیٹر)	کچی سڑکیں (لاکھ کلومیٹر)	سال	موٹر کی تعداد	بس کی تعداد
2000 - 2001	14	10	2006 - 2007	47	9
2001 - 2002	15	11	2007 - 2008	56	13
2002 - 2003	17	13	2008 - 2009	60	16
2003 - 2004	20	19	2009 - 2010	63	18

عملی کام : ذیل کے جدول میں مختلف ریاستوں میں ہر 1000 لڑکوں کے لحاظ سے لڑکیوں کی تعداد دی ہوئی ہے۔ اس بنا پر جدول کے خالی چوکون مکمل کیجیے۔

ریاست	لڑکوں کی تعداد	لڑکیوں کی تعداد	کل	لڑکوں کا فیصدی (تقریباً مکمل عدد)	لڑکیوں کا فیصدی (تقریباً مکمل عدد)
آسام	1000	960	1960	$\frac{1000}{1960} \times \frac{100}{1} = 51\%$	$100 - 51 = 49\%$
بہار	1000	840	1840		
پنجاب	1000	900			
کیرل	1000	1080			
مہاراشٹر	1000	900			

جدول کے مطابق حاصل ہوئی معطیات کا فیصدی ستونی ترسیم بنائیے اور اس بنا پر نتیجہ اخذ کیجیے اور بحث کیجیے۔

صفحہ نمبر 111 پر دیے ہوئے عملی کام کی جدول میں پانچ ریاستوں کے ہر ہزار لڑکوں کے مقابلے میں لڑکیوں کی تعداد دی ہوئی ہے۔

غور کیجیے



انھیں ریاستوں کی خواندگی کا فیصد ذیل میں دیا ہوا ہے۔

آسام (73%)، بہار (64%)، پنجاب (77%)، کیرل (94%)، اور مہاراشٹر (83%)

جدول میں لڑکیوں کی تعداد اور ان ریاستوں کی خواندگی کے تناسب پر غور کیجیے۔ اس بناء پر کیا نتیجہ حاصل ہوتا ہے؟

آئیے، بحث کریں



ذیل کی معطیات کے لیے کس قسم کا ستونی تزییم بنانا مناسب ہوگا؟

- (1) چار گاؤں میں خواندگی کا فیصدی تناسب
- (2) ایک خاندان کا مختلف مدوں پر ہونے والا خرچ
- (3) پانچ فریقوں میں سے ہر فریق کے لڑکے اور لڑکیوں کی تعداد
- (4) تین روزہ جاری رہنے والی سائنس نمائش میں معائنہ کے لئے آنے والے لوگوں کی تعداد
- (5) جنوری سے جون ہر مہینہ کا آپ کے گاؤں / شہر کا اعلیٰ اور ادنیٰ درجہ حرارت
- (6) دو پہیہ سواری چلاتے وقت ہیلمٹ کا استعمال کرنے والے اور نہ کرنے والے 100 خاندانوں کے افراد کی تعداد

آئیے سمجھ لیں



شماریات (Statistics)

کسی بڑے گروہ کا مطالعہ کرنے کے لیے اس میں سے کچھ اجزا کا مناسب چھوٹا گروہ بے ترتیب طریقے سے منتخب کرتے ہیں۔ یہ بڑے گروہ کی نمائندگی کرنے والا گروہ ہوتا ہے۔ اس نمائندہ گروہ کے مطالعہ کے لیے معطیات جمع کی جاتی ہیں۔ یہ معطیات اکثر عددی صورت میں ہوتی ہیں۔ اس کا تجزیہ کر کے کچھ نتائج اخذ کیے جاتے ہیں۔ اس قسم کے مطالعہ کو شماریات (Statistics) نام دیا گیا ہے۔

Statistics لاطینی لفظ "Status" سے بنا ہوا ہے۔ اس کا مطلب ریاست کی حالت ہوتا ہے۔ اس بناء پر پہلے شماریات کا علم ریاستوں کے انتظامی امور سے تعلق رکھتا تھا۔ لیکن فی الحال اس علم کا استعمال سبھی شعبوں میں کیا جاتا ہے۔ "سر رونالڈ ایلمر فشر" (Sir Ronald Aylmer Fisher) (17 فروری 1890 - 29 جولائی 1962) کو جدید علم شماریات کا بانی تسلیم کیا جاتا ہے۔

معطیات جمع کرنا (Data Collection)

استانی : ایک گاؤں میں ہر خاندان کے پاس کتنی بھتی ہے۔ ان معلومات کو کس طرح جمع کرو گے؟

رابرٹ : میڈم، گاؤں میں جتنے گھر ہیں ہر ایک کے گھر جا کر کتنی بھتی ہے اس کا اندراج کریں گے۔

استانی : بالکل صحیح، عزیز طلبہ! کسی مخصوص گروہ کے تعلق سے ہم جو معلومات جمع کرتے ہیں وہ خاص طور پر اعداد کی شکل میں ہوتی ہیں۔ اسے معطیات کہتے ہیں۔ معطیات جمع کرنے سے پہلے اسے ہم کس لیے استعمال کرنے والے ہیں یہ معلوم ہونا ضروری ہے۔ جب کوئی فرد معلومات حاصل کرنے کی جگہ جا کر سوالات پوچھ کر، تعداد گن کر وغیرہ طریقے سے معطیات جمع کرتا ہے تو اس معطیات کو ابتدائی معطیات (Primery Data) کہتے ہیں۔

آفرین : یعنی رابرٹ کے کہنے کے مطابق ہر گھر جا کر کھیتی کی جمع کی گئی معلومات ابتدائی معطیات کہلاتی ہے۔  
استانی : شاباش آفرین!

ریش : لیکن اوپر کی معلومات بہت کم وقت میں جمع کرنی ہوتی؟

استانی : ریش کا کہنا بالکل صحیح ہے۔ ایسے وقت معلومات جمع کرنے کا دوسرا حل کیا ہو سکتا ہے اس پر غور کیجیے۔

فردوس : سر، ہم تلاش آفس میں جا کر ان سے دستیاب کھیتی کے اندراج کی معلومات جمع کر سکتے ہیں۔

استاد : بالکل ٹھیک، کچھ حالات میں وقت کی دستیابی، آلات کی کمی جیسی وجوہات کی بناء پر معطیات جمع کرنے کا اندراج ذاتی طور پر ممکن نہیں ہوتا۔ ایسے وقت دوسروں کے ذریعے جمع کی ہوئی معطیات، سرکاری دفاتروں کے ذریعے شائع کردہ معطیات، سرکاری شعبوں میں دستیاب معلومات، تحقیقی مضامین کی صورت میں موجود معطیات استعمال کرتے ہیں۔ ایسے معطیات کو ثانوی معطیات (Secondary Data) کہتے ہیں۔ یعنی فردوس کی رائے کے مطابق تلاش آفس میں جا کر کھیتی کی جمع کی گئی معلومات ثانوی معطیات کہلائے گی۔

ذیل کے مثالیں دیکھیے۔

(i) اخبارات کی معلومات کا استعمال کر کے بنائی گئی جدول میں ثانوی معطیات ہوں گی۔

(ii) ریسٹوران کی چیزوں کا معیار سمجھنے کے لیے گا ہوں سے ان کی رائے پوچھ کر ملنے والی معلومات ابتدائی معطیات ہوں گی۔

(iii) کلاس روم کے طلبہ کی اونچائی ناپ کر کیے گئے اندراج میں معلومات ابتدائی معطیات ہوں گی۔

ثانوی معطیات	ابتدائی معطیات
(1) فوراً دستیاب ہو سکتی ہے۔	(1) اندراج کرنے کے لیے بہت وقت درکار ہوتا ہے۔
(2) اس میں پہلے اندراج کی ہوئی معلومات لینے کی وجہ سے وہ تازہ ترین ہی ہوگی ایسا کہہ نہیں سکتے۔ معلومات کی تفصیل کبھی کبھار کم پڑتی ہے۔	(2) تازہ ترین اور تفصیلی ہوتی ہے۔
(3) یہ کم قابل اعتماد ہو سکتی ہے۔	(3) درست اور قابل اعتماد ہوتی ہے۔

**عملی کام :** آپ کئی مرتبہ مختلف وجوہات کے لیے معلومات جمع کرتے ہیں۔ ایسی 3 سے 4 مثالیں لیجیے اور جمع کی ہوئی معطیات ابتدائی ہے یا ثانوی۔ اس پر بحث کیجیے۔

## مشقی سیٹ 7.2

- (1) ذیل کے مطابق جمع کی گئی معطیات کی ابتدائی معطیات یا ثانوی معطیات میں جماعت بندی کیجیے۔
- (i) براہ راست اسکول کے ہر کلاس روم میں جا کر ہر طالب علم کی حاضری کی معلومات جمع کی گئی۔
- (ii) ہر طالب علم کے اونچائی کی معلومات ہیڈ آفس میں فوراً بھیجنے کے لیے اسکول کے جسمانی تعلیم کے شعبہ کے اندراجات سے معلومات حاصل کی گئی۔
- (iii) ناندپور کے ہر خاندان کے اسکول نہ جانے والے طلبہ کی معلومات ذاتی طور پر گھر گھر جا کر جمع کی گئی۔
- (iv) سائنس پروجیکٹ کے لیے براہ راست جنگل میں جا کر درختوں کا مشاہدہ کر کے معلومات جمع کی گئی۔

## آئیے ذرا یاد کریں



معطیات کی جماعت بندی (Classification of Data) :

مثال (1) : ایک اسکول کے نویں جماعت کے 50 طلبہ نے پہلے میقاتی امتحان میں ریاضی میں 20 میں سے حاصل کردہ نمبرات درج ذیل ہیں۔

20, 6, 14, 10, 13, 15, 12, 14, 17, 17, 18, 11, 19, 9, 16, 18, 14, 7, 17, 20,  
8, 15, 16, 10, 15, 12, 18, 17, 12, 11, 11, 10, 16, 14, 16, 18, 10, 7, 17, 14,  
20, 17, 13, 15, 18, 20, 12, 12, 15, 10

یہاں جمع کی گئی عددی معلومات کو کیا کہتے ہیں؟ — خام معطیات

اس کے ہر عدد کو کیا کہتے ہیں؟ — شمارہ

اوپر کی معلومات کے بناء پر ذیل کے سوالات کے جوابات حاصل کیجیے۔

- (1) 15 نمبرات حاصل کرنے والے لکل کتنے طلبہ ہیں؟
- (2) سب سے کم نمبر کتنے ہیں؟
- (3) 15 نمبرات سے زیادہ حاصل کرنے والے لکل کتنے طلبہ ہیں؟
- (4) سب سے زیادہ نمبر کتنے ہیں؟
- (5) 16 نمبرات سے کم نمبر حاصل کرنے والے لکل کتنے طلبہ ہیں؟

## آئیے، بحث کریں



(1) آپ کو اوپر کے سوالوں کے جواب آسانی سے مل گئے یا ہر مرتبہ نمبرات کا معائنہ کرنا پڑا؟

(2) اوپر کے کام میں آسانی لانے کے لیے کیا کر سکتے ہیں۔

شیم : اوپر کے جواب ہر وقت بغور مشاہدہ سے حاصل ہونے کی وجہ سے کام پیچیدہ اور الجھن والا معلوم ہوتا ہے لیکن دی ہوئی خام معطیات کو صعودی یا نزولی ترتیب میں لکھنے پر آسانی پیدا ہو سکتی ہے۔

شیم کے کہنے کے مطابق معطیات کے نمبرات صعودی ترتیب میں لکھیں گے۔

6, 7, 7, 8, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 12, 13, 13,  
14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 16, 17, 17, 17, 17, 17, 17,  
18, 18, 18, 18, 18, 19, 20, 20, 20, 20

معلومات صعودی ترتیب میں لکھنے پر مثال (1) کے پانچوں سوالوں کے جواب دینا آسان ہوتا ہے؟ تصدیق کیجیے۔

تصدیق کرنے پر یہ ظاہر ہوا کہ معطیات کو صعودی ترتیب میں لکھنے پر پانچوں سوالوں کے جواب بالکل آسانی سے مل گئے۔

## آئیے ذرا یاد کریں



طوبی : میڈم، معطیات کو جدول کی صورت میں لکھنے پر بھی اوپر کے کام میں زیادہ آسانی پیدا کر سکتے ہیں۔ ہم نے گذشتہ جماعت میں مطالعہ کر چکے ہیں کہ اس

جدول کو تعددی تقسیم کی جدول کہتے ہیں۔

استانی : طوبی، بالکل صحیح کہا آپ نے! اب یہ جدول اوپر کی مثال 1 کے تعلق سے بنائیے۔

مثال (1) میں سب سے کم نمبر 6 اور سب سے زیادہ نمبر 20 ہے۔ اس لیے جدول میں شماروں کے ستون میں 6 سے 20 شمارے لکھیے۔ دوسرے ستون میں شماراتی نشان لگائیے اور آخری ستون میں نشان گن کر تعداد لکھیے۔

غیر جماعت بند تعددی تقسیمی جدول

شمارہ نمبر	شماراتی نشان	(طلبہ کی تعداد) ( $f$ ) تعدد
6		1
7		2
8		
9		
10		5
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		6
18		
19		
20		4
		کل $N = \sum f = 50$

$N$  تمام تعددوں کی جمع ہے

آئیے، بحث کریں

جماعت بند تعددی تقسیم کی جدول (Grouped Frequency Distribution Data)

مذکورہ بالا تعددی تقسیمی جدول میں،

(1) یہ جدول بہت بڑی ہے کیا آپ کو ایسا محسوس ہو رہا ہے؟

(2) جب معطیات کے شماروں کی تعداد زیادہ ہو تب کیا یہ جدول بنانا مشکل ہوگا؟

استانی : اوپر کی بحث سے ایسا سمجھ میں آتا ہے کہ جب معطیات کے شماروں کی تعداد زیادہ ہوتی ہے تب غیر جماعت بند تعددی تقسیمی جدول کی وسعت زیادہ ہوتی

ہے۔ اسے بنانے میں بہت وقت درکار ہوتا ہے۔ جدول کی وسعت اور وقت کی بچت کے لیے کیا کوئی ترکیب تجویز پیش کر سکتے ہیں؟

روہیت : سر ایسے وقت معطیات کے گروہ بنائے جائیں۔

استانی : شاباش روہیت! معطیات کے گروہ بنانا یعنی جماعت تیار کرنے پر معطیات کو آسانی سے کم وقت میں ظاہر کر سکتے ہیں۔ ایسے جدول کو ہی جماعت بند تعددی تقسیمی جدول کہتے ہیں۔

یہ جدول دو طریقوں سے ظاہر کر سکتے ہیں۔ (1) مضمولی طریقہ (غیر مسلسل طریقہ) اور (2) غیر مضمولی یا مستثنائی طریقہ

### (1) مضمولی طریقہ (غیر مسلسل طریقہ) (Inclusive Method)

6, 7, 7, 8, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 12, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 16, 17, 17, 17, 17, 17, 17, 18, 18, 18, 18, 18, 19, 20, 20, 20, 20

اوپر کی معطیات میں سب سے چھوٹا شمارہ  اور سب سے بڑا شمارہ  ہے۔ سب سے بڑا اور سب سے چھوٹے شمارے کا فرق  $20 - 6 = 14$  ہے۔ اسی فرق کو ہی معطیات کی وسعت کہتے ہیں۔ اس وسعت کو خیال میں رکھ کر معطیات کے مناسب ایسے کون سے گروہ بنائے جاسکتے ہیں؟

(i) 6 سے 8، 9 سے 11، 12 سے 14، 15 سے 17، 18 سے 20 یا

(ii) 6 سے 10، 11 سے 15، 16 سے 20 اس طرح جماعت بنا سکتے ہیں۔

6 سے 10، 11 سے 15 اور 16 سے 20 جماعتوں کو لے کر اوپر کی معطیات کا تعددی تقسیمی جدول بنائیں گے۔

جماعت بند تعددی تقسیمی جدول (مضمولی طریقہ)

جماعت	شماراتی نشان	تعداد (f) (طلبہ کی تعداد)
6 سے 10		10
11 سے 15		
16 سے 20		20
		کل $N = \sum f = 50$

اس جدول کو بناتے وقت 6، 10 اور اس کے درمیان تمام شماروں کا 6 سے 10 جماعت میں شامل کرتے ہیں۔ جدول بنانے کے اس طریقے کو مضمولی طریقہ کہتے ہیں۔ 6 سے 10، 11 سے 15، 16 سے 20 ان جماعتوں کو غیر مسلسل وقفہ جماعت بھی کہتے ہیں۔

آئیے سمجھ لیں

### علم شماریات کی کچھ بنیادی اصطلاحات (Basic term in Statistics)

(1) جماعت (Class) : شماروں کے آسان اور مناسب جماعت کے گروہ کو جماعت کہتے ہیں۔

جماعت 6 سے 10، 11 سے 15 وغیرہ کو 6-10، 11-15 لکھا جاتا ہے۔

(2) جماعت کی حدیں (Class limits) : جماعت کو ظاہر کرنے والے اعداد کو جماعت کی حدیں کہتے ہیں۔

جماعت 6 سے 10 کی نچلی حد جماعت 6 اور اوپری حد جماعت 10 ہے۔

(3) تعدد (Frequency) : ہر جماعت میں جتنے شمارے ہوتے ہیں، ان تمام شماروں کے کل تعداد کو اس جماعت کا تعدد کہتے ہیں۔

مندرجہ بالا جدول میں جماعت 11 سے 15 میں 20 شمارے شامل ہیں اس لیے جماعت 11-15 کا تعدد 20 ہے۔

(4) طول جماعت (Class width or Class interval) : مسلسل جماعتیں دی ہوئی ہوں تو متواتر آنے والی دو جماعتوں کے چلی (اوپری) حد جماعتوں کے فرق کو طول جماعت یا جماعت کا عرض یا جماعت کی وسعت کہتے ہیں۔

مثال : 10 - 5 = 5 ، 15 - 20 ، 10 - 15 ، 5 - 10 ، ... ہو تو = طول جماعت

(5) وسط جماعت (Class mark) : جماعت کی چلی اور اوپری حد جماعت کے اوسط کو وسط جماعت کہتے ہیں۔

$$\text{وسط جماعت} = \frac{\text{چلی حد جماعت} + \text{اوپری حد جماعت}}{2}$$

مثال :  $\frac{\square + \square}{2} = \frac{26}{2} = 13$  جماعت = 11 - 15 کا وسط جماعت

## (2) غیر مشمولی یا مستثنائی طریقہ (Exclusive Method)

مثال : 6 ، 10 ، 10.3 ، 11 ، 15.7 ، 19 ، 20 ، 12 ، 13 یہ شمارے دیے ہوئے ہیں۔

جماعت 10 - 6 ، 15 - 11 ، 20 - 16 لے کر جماعت بند تعددی جدول بنائیے۔

جماعت (شمارے)	شماریاتی نشان	تعداد (f)
6 - 10		2
11 - 15		3
16 - 20		2

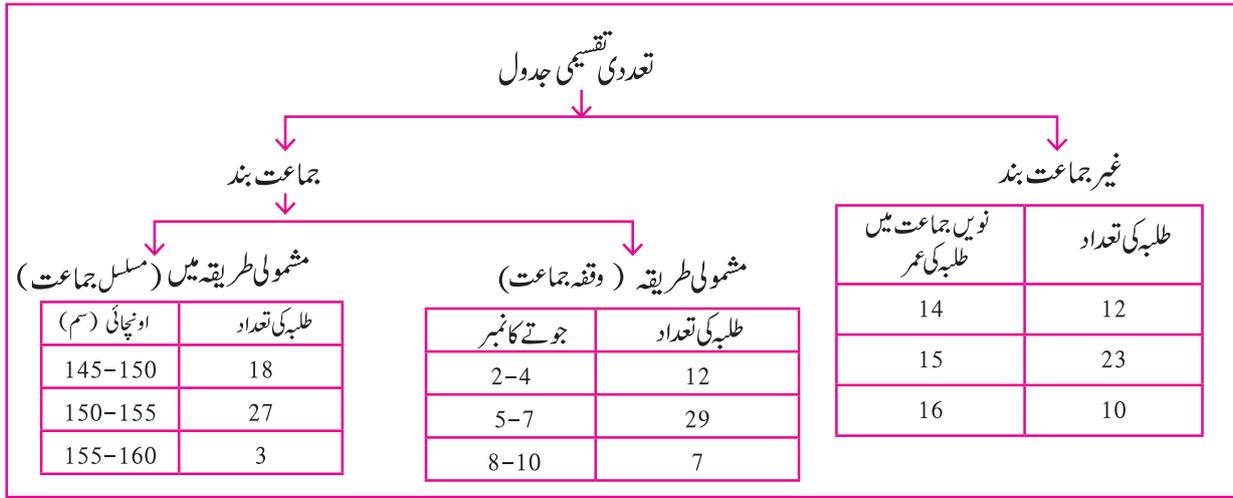
عل :

اوپری جدول میں دیے ہوئے شماروں میں سے 10.3 اور 15.7 ان شماروں کو شامل نہیں کر سکتے۔ کیونکہ 10.3 اور 15.7 یہ اعداد 16 - 20 ، 11 - 15 ، 6 - 10 ان میں سے کسی بھی جماعت میں شامل نہیں ہیں۔ اس لیے جماعت کی نوعیت بدلنا ہوگی۔ اس لیے جماعت 5 - 10 ، 10 - 15 ، 15 - 20 ، ... اس طرح مسلسل لکھنے پر اس قسم کے سوال پیدا نہیں ہوں گے۔ لیکن 10 اس شمارے کا اندراج 5 - 10 ، 10 - 15 ان میں سے کس جماعت میں کیا جائے یہ مسئلہ پیدا ہوتا ہے۔ یہ مسئلہ دور کرنے کے لیے شمارہ 10 جماعت 5 - 10 میں نہ لیتے ہوئے جماعت 10 - 15 میں شامل کریں۔ ایسا مفروضہ مان لیا گیا ہے۔ اس لیے شمارہ 10 جماعت 10 - 15 میں ہوگا۔ اس طریقے کو غیر مشمولی یا مستثنائی طریقہ کہتے ہیں اس طرح جماعت بنانے سے 10.3 اور 15.7 جیسے اعداد جدول میں شامل کرنا آسان ہو جاتا ہے۔

اب اس اصول کے مطابق جماعت بنائیں اور اوپر دیا ہوا مفروضہ تسلیم کرتے ہوئے بتائی ہوئی جدول دیکھیے۔

جماعت بند تعددی تقسیمی جدول (غیر مشمولی طریقہ)

جماعت (مسلسل) (شمارے)	شماریاتی نشان	تعداد (f) (طلبہ کی تعداد)
5 - 10		1
10 - 15		5
15 - 20		2
20 - 25		1



### مشقی سیٹ 7.3

- جماعت 20 سے 25 کی چلی حد جماعت اور اوپری حد جماعت لکھیے۔
- جماعت 35 سے 40 کا وسط جماعت معلوم کیجیے۔
- \* ایک جماعت کا وسط جماعت 10 ہے، طول جماعت 6 ہے تو وہ جماعت کون سی ہوگی؟
- درج ذیل جدول مکمل کیجیے۔

جماعت (عمر سال میں)	شمار یاتی نشان	تعدد (f) طلبہ کی تعداد
12 - 13		<input type="text"/>
13 - 14		<input type="text"/>
14 - 15		<input type="text"/>
15 - 16		<input type="text"/>
		کل $N = \sum f = 50$

- ایک اسکول برفوج نیچر کلب (ہریت سینا) کے 45 طالب علموں میں سے ہر ایک کے ذریعے کی گئی شجر کاری کی تعداد ذیل میں دی ہوئی ہے۔  
3, 5, 7, 6, 4, 3, 5, 4, 3, 5, 4, 7, 5, 3, 6, 6, 5, 3, 4, 5, 7, 3, 5, 6, 4, 4, 3, 5, 6, 6, 4, 3, 5, 7, 3, 4, 5, 7, 6, 4, 3, 5, 4, 4, 7.

اس معطیات کے لیے غیر جماعت بند تعددی تقسیم کی جدول تیار کیجیے۔

- $\pi$  کی 50 عشری مقام تک قیمت دی ہوئی ہے۔

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510

اس بنا پر علامت عشریہ کے بعد ہندسوں کی غیر جماعت بند تعددی تقسیم کی جدول تیار کیجیے۔

(7) ذیل کے جدول میں دی ہوئی معلومات کی بناء پر طول جماعت معلوم کیجیے اور غیر مشمولی اور مشمولی جماعت کے تعددی تقسیم کے جدول تیار کیجیے۔

(i)	تعدد	وسط جماعت	(ii)	تعدد	وسط جماعت
	3	5		6	22
	9	15		7	24
	15	25		13	26
	13	35		4	28

(8) ایک اسکول کے نویں جماعت کے 45 طلبہ کو کمپاس بکس میں موجود پنسل کی لمبائی ناپنے کے لیے کہا گیا ہے۔ وہ معطیات سینٹی میٹر میں درج ذیل کے مطابق ہے۔

16, 15, 7, 4.5, 8.5, 5.5, 5, 6.5, 6, 10, 12,  
13, 4.5, 4.9, 16, 11, 9.2, 7.3, 11.4, 12.7, 13.9, 16,  
5.5, 9.9, 8.4, 11.4, 13.1, 15, 4.8, 10, 7.5, 8.5, 6.5,  
7.2, 4.5, 5.7, 16, 5.7, 6.9, 8.9, 9.2, 10.2, 12.3, 13.7,  
14.5, 10

0-5, 5-10, 10-15, ..... کے مطابق جماعت لے کر غیر مشمولی طریقے سے جماعت بند تعددی تقسیم کی جدول تیار کیجیے۔

(9) ایک گاؤں میں امداد باہمی دودھ سینٹر پر 50 لوگ روزانہ کتنے لٹر دودھ جمع کرتے ہیں وہ معلومات ذیل میں دی ہوئی ہے۔

27, 75, 5, 99, 70, 12, 15, 20, 30, 35, 45, 80,  
77, 90, 92, 72, 4, 33, 22, 15, 20, 28, 29, 14,  
16, 20, 72, 81, 85, 10, 16, 9, 25, 23, 26, 46,  
55, 56, 66, 67, 51, 57, 44, 43, 6, 65, 42, 36,  
7, 35

مناسب جماعت لے کر جماعت بند تعددی تقسیم کی جدول تیار کیجیے۔

(10) ایک ادارے نے گاؤں کے 38 لوگوں میں سے ہر ایک سے 'معذور بہودی فنڈ' جمع کیا۔ جو ذیل میں دیا ہوا ہے۔

101, 500, 401, 201, 301, 160, 210, 125, 175, 190, 450, 151,  
101, 351, 251, 451, 151, 260, 360, 410, 150, 125, 161, 195,  
351, 170, 225, 260, 290, 310, 360, 425, 420, 100, 105, 170,  
250, 100

(i) اس طرح جماعت لے کر جماعت بند تعددی تقسیم کی جدول تیار کیجیے۔ (100-149, 150-199, 200-249, .....)

(ii) جدول کی مدد سے بتائیے کہ 350 روپے اور اس سے زیادہ فنڈ دینے والے اشخاص کی تعداد کتنی ہے؟



اوپری حد جماعت سے کم تراجمائی تعددی جدول (Less than Cumulative Frequency)

مثال : نویں جماعت میں 50 طلبہ نے پہلے میقاتی امتحان میں ریاضی میں 40 میں سے حاصل کردہ نمبرات کی تعددی تھیبی جدول ذیل میں دی ہوئی ہے۔

جماعت	تعدد (f) (طلبہ کی تعداد)
0 - 10	02
10 - 20	12
20 - 30	20
30 - 40	16
	کل N = 50

(1) جدول کی مدد سے مندرجہ ذیل خالی چوکون پر کیجیے۔

(i) جماعت 10 سے 20 اس جماعت کی نچلی حد جماعت  اور اوپری حد جماعت  ہے۔

(ii) 10 سے کم نمبرات حاصل کرنے والے طلبہ کتنے ہیں؟

(iii) 20 سے کم نمبرات حاصل کرنے والے طلبہ کتنے ہیں؟  $2 + \text{$  = 14

(iv) 30 سے کم نمبرات حاصل کرنے والے طلبہ کتنے ہیں؟  $\text{$  +  $\text{$  = 34

(v) 40 سے کم نمبرات حاصل کرنے والے طلبہ کتنے ہیں؟  $\text{$  +  $\text{$  = 50

اسے دھیان میں رکھیں



کسی مخصوص جماعت کا تعدد اور اس جماعت کے پہلے کے تمام جماعت کے تعددوں کا مجموعہ کو اس جماعت کی اوپری حد جماعت سے کم تراجمائی تعدد (Less than Cumulative Frequency) کہتے ہیں۔ مختصراً اسے ”سے کم تراجمائی تعدد“ بھی کہتے ہیں۔

اوپری حد جماعت سے کم تراجمائی تعددی جدول کا مطلب

جماعت (نمبر)	تعدد	سے کم تراجمائی تعدد
0 - 10	2	2
10 - 20	12	$2 + 12 = \text{$
20 - 30	20	$\text{$ + 20 = 34
30 - 40	10	$34 + \text{$ = 50
	کل = 50	

جماعت	اجتمائی تعدد	اوپری حد سے کم تراجمائی تعدد کا مطلب
0 - 10	2	2 طلبہ کے مارکس 10 سے کم ہیں
10 - 20	14	14 طلبہ کے مارکس 20 سے کم ہیں
20 - 30	34	34 طلبہ کے مارکس 30 سے کم ہیں
30 - 40	50	50 طلبہ کے مارکس 40 سے کم ہیں
	کل = 50	

(2) نچلی حد جماعت کے مساوی یا سے زیادہ ترقیم کی اجتماعی تعددی جدول

جماعت	تعدد	اجتماعی تعدد	جماعت	اجتماعی تعدد	نچلی حد جماعت کے مساوی یا نچلی حد جماعت سے زیادہ کا مطلب
0 - 10	2	50	0 - 10	50	50 طلبہ نے 0 یا 0 سے زیادہ مارکس حاصل کیے ہیں
10 - 20	12	$50 - 2 = 48$	10 - 20	48	48 طلبہ نے 10 یا 10 سے زیادہ مارکس حاصل کیے ہیں
20 - 30	20	$48 - 12 = 36$	20 - 30	36	36 طلبہ نے 20 یا 20 سے زیادہ مارکس حاصل کیے ہیں
30 - 40	16	$36 - 20 = 16$	30 - 40	16	16 طلبہ نے 30 یا 30 سے زیادہ مارکس حاصل کیے ہیں
	کل = 50				

مثال : ایک اسپورٹس کلب میں ٹیبل ٹینس کے مقابلے میں شریک کھلاڑیوں کی عمروں کی جماعت بندتعدد ذیل میں دیا ہوا ہے۔ اس بناء پر نچلی حد جماعت یا اس سے زیادہ تر اجتماعی تعددی جدول مکمل کیجیے۔

حل : نچلی حد جماعت سے زیادہ تر اجتماعی تعددی جدول

عمر (سال)	شمار یاتی نشان	تعدد (طلبہ کی تعداد)	سے زیادہ ترقیم کی اجتماعی تعدد
10 - 12		9	50
12 - 14		<input type="text"/>	<input type="text"/> - 9 = 41
14 - 16		<input type="text"/>	41 - 23 = <input type="text"/>
16 - 18		5	<input type="text"/> - 13 = <input type="text"/>
		کل N = 50	

#### مشقی سیٹ 7.4

(1) ذیل کی اجتماعی تعددی جدول مکمل کیجیے۔

جماعت (اونچائی سم میں)	تعدد (طلبہ کی تعداد)	سے کم ترقیم کی اجتماعی تعدد
150 - 153	05	05
153 - 156	07	$05 + \text{} = \text{$
156 - 159	15	$\text{} + 15 = \text{$
159 - 162	10	$\text{} + \text{} = 37$
162 - 165	05	$37 + 5 = 42$
165 - 188	03	$\text{} + \text{} = 45$
	کل N = 45	

(2) ذیل کی اجتماعی تعددی جدول مکمل کیجیے۔

جماعت (ماہانہ آمدنی روپے میں)	تعدد (افراد کی تعداد)	سے زیادہ تریا اُس کے مساوی اجتماعی تعدد
1000 – 5000	45	.....
5000 – 10,000	19	.....
150,000 – 15,000	16	.....
15,000 – 20,000	02	.....
20,000 – 25,000	05	.....
	کل N = 87	

(3) ایک کلاس کے 62 طلبہ کو ریاضی مضمون میں 100 مارکس میں سے حاصل کردہ مارکس ذیل میں دیے ہوئے ہیں۔ جماعت 0-10 , 10-20... جماعت

کا استعمال کر کے تعددی جدول اور اس سے زیادہ تر تقسیم کی اجتماعی تعددی جدول تیار کیجیے۔

55,	60,	81,	90,	45,	65,	45,	52,	30,	85,	20,	10,
75,	95,	09,	20,	25,	39,	45,	50,	78,	70,	46,	64,
42,	58,	31,	82,	27,	11,	78,	97,	07,	22,	27,	36,
35,	40,	75,	80,	47,	69,	48,	59,	32,	83,	23,	17,
77,	45,	05,	23,	37,	38,	35,	25,	46,	57,	68,	45,
47,	49										

بنائے گئے جدول کی بنا پر ذیل کے سوالوں کے جواب لکھیے۔

(i) 40 یا 40 سے زیادہ مارکس حاصل کرنے والے طلبہ کتنے ہیں؟

(ii) 90 یا 90 سے زیادہ مارکس حاصل کرنے والے طلبہ کتنے ہیں؟

(iii) 60 یا 60 سے زیادہ مارکس حاصل کرنے والے طلبہ کتنے ہیں؟

(iv) جماعت 0-10 کا سے زیادہ تریا اس کے مساوی اجتماعی تعدد کتنا ہے؟

(4) اوپر کے مثال (3) میں دی ہوئی سے کم تر اجتماعی تعددی جدول تیار کر کے اس کی مدد سے درج ذیل سوالوں کے جواب لکھیے۔

(i) 40 سے کم مارکس حاصل کرنے والے طلبہ کتنے ہیں؟ (ii) 10 سے کم مارکس حاصل کرنے والے طلبہ کتنے ہیں؟

(iii) 60 سے کم مارکس حاصل کرنے والے طلبہ کتنے ہیں؟ (iv) جماعت 50-60 کی سے کم تر اجتماعی تعدد کتنا ہے؟

آئیے سمجھ لیں



### مرکزی رجحان کی پیمائش (Measures of Central Tendency)

مرکزی رجحان : سروے سے حاصل ہوئی معطیات میں عام طور پر ایک خصوصیت ملتی ہے۔ معطیات کے کسی عدد کے ارد گرد دیگر اعداد کا ہجوم زیادہ نظر آتا ہے۔ گروہ کے اس خصوصیت کو گروہ کی مرکزی رجحان کی خصوصیت کہتے ہیں۔

گروہ کے جس عدد کے نزدیک دیگر اعداد کا مجموع (ہجوم) زیادہ ہوتا ہے، وہ عدد اس کی نمائندگی کرتا ہے ایسا مان لیا جاتا ہے۔ ایسے عدد کو مرکزی رجحان کی پیمائش کہتے ہیں۔

شماریات میں خصوصاً ذیل کے مطابق مرکزی رجحان کی پیمائش استعمال کی جاتی ہیں۔

(I) میانہ (Mean) : معطیات کے تمام اعداد کا حسابی وسط اس معطیات کا میانہ کہلاتا ہے۔

$$\text{معطیات کے تمام شماروں کا مجموعہ} \\ \text{معطیات کے شماروں کی تعداد} = \text{میانہ کا میانہ}$$

مثال (1) : 25، 23، 27، 30، 25 ان شماروں کا میانہ معلوم کیجیے۔

$$\text{حل :} \quad \text{میانہ} = \frac{25 + 30 + 27 + 23 + 25}{5} = \frac{130}{5} = 26$$

مثال (2) : جماعت نہم کے 35 طلبہ کو ششماہی امتحان میں الجبرا میں 40 میں سے حاصل ہوئے مارکس ذیل کے مطابق ہیں۔ اس بناء پر میانہ معلوم کیجیے۔

40، 35، 30، 25، 23، 20، 14، 15، 16، 20، 17، 37،  
37، 20، 36، 16، 30، 25، 25، 36، 37، 39، 39، 40،  
15، 16، 17، 30، 16، 39، 40، 35، 37، 23، 16.

حل : یہاں شماروں کی تعداد زیادہ ہے اس لیے مجموعہ تو معلوم کر سکتے ہیں لیکن یہ پیچیدہ ہوگا۔ یہاں 3 طلبہ کو 30 مارکس ہیں۔ ان کے مارکس کا مجموعہ  $30 + 30 + 30 = 90$  اس طرح کرنے کے بجائے  $30 \times 3 = 90$  اس طرح کرنا آسان ہوگا۔ اس کے لیے تعددی جدول کارآمد ہوتی ہے۔

مارکس	طلبہ کی تعداد	$f_i \times x_i$
14	1	$14 \times 1 = 14$
15	2	$15 \times 2 = \dots$
16	5	$16 \times \dots = \dots$
17	2	$17 \times 2 = 34$
20	3	$\dots \times 3 = \dots$
23	2	$23 \times 2 = \dots$
25	3	$25 \times 3 = \dots$
30	3	$\dots \times \dots = \dots$
35	2	$35 \times 2 = 70$
36	2	$\dots \times \dots = \dots$
37	4	$\dots \times \dots = \dots$
39	3	$39 \times 3 = 117$
40	3	$\dots \times \dots = 120$
	N = .....	$\sum f_i x_i = 956$

متصلہ جدول میں :

$$14 \times 1 + 15 \times 2 + \dots + 40 \times 3$$

حاصل ضربوں کی جمع 956 ہے۔

$$40 \times 3 \dots، 15 \times 2، 14 \times 1$$

یہ شمارے ہیں۔ اور ان کے نظیری تعددی یعنی  $x$

اور  $f$  کے حاصل ضرب ہیں۔

پہلا شمارہ  $14 \times 1$  اور پہلے تعدد کے

حاصل ضرب کو  $f_1 \times x_1$  لکھتے ہیں۔

دوسرا شمارہ  $15 \times 2$  اور دوسرے تعدد کو

حاصل ضرب  $f_2 \times x_1$  لکھتے ہیں۔

عام طور پر  $i$  - واں شمارہ اور اس کا نظیری  $i$  - واں تعدد کے حاصل ضرب کو  $f_i \times x_i$  لکھتے ہیں۔

شماریات میں حاصل ضربوں کی جمع کو ظاہر کرنے کے لیے  $\Sigma$  (سگما) لاطین حرف استعمال کرتے ہیں۔

$f_1 \times x_1 + f_2 \times x_2 + \dots + f_i \times x_i$  حاصل ضربوں کی جمع کو مختصراً  $\Sigma f_i \times x_i$  سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{N} = \frac{956}{35}$$

$$= 27.31 \text{ تقریباً}$$

اس لیے دیے ہوئے معطیات کا میانہ 27.3 ہے۔

وسطانیہ (Median) : معطیات کو صعودی یا نزولی ترتیب میں لکھتے ہیں۔ اس ترتیب میں بالکل درمیان میں آنے والے عدد کو ان معطیات کا وسطانیہ کہتے ہیں۔  
 معطیات کے شماروں کی تعداد جفت ہو تو وسط میں آنے والے دو اعداد کے اوسط کو وسطانیہ مانتے ہیں۔

مثال : 72, 66, 87, 92, 63, 78, 54 ان معطیات کا وسطانیہ معلوم کیجیے۔

حل : دیے ہوئے شماروں کو صعودی ترتیب میں لکھنے پر 54, 63, 66, 72, 78, 87, 92

اس ترتیب میں چوتھا عدد درمیان میں آتا ہے۔ وہ 72 ہے۔

∴ دیے ہوئے معطیات کا وسطانیہ = 72

مثال (2) : 30, 25, 32, 23, 42, 36, 40, 33, 21, 43 ان معطیات کا وسطانیہ معلوم کیجیے۔

حل : دیے ہوئے شماروں کو چڑھتی (صعودی) ترتیب میں لکھیں تو 21, 23, 25, 30, 32, 33, 36, 40, 42, 43

یہاں شماروں کی تعداد جفت یعنی 10 ہے۔

یہاں، پانچواں اور چھٹا دو اعداد درمیان میں آتے ہیں۔ وہ بالترتیب 32 اور 33 ہیں۔

$$\therefore \text{مطعیات کا وسطانیہ} = \frac{32 + 33}{2} = \frac{65}{2} = 32.5$$

آئیے ذرا یاد کریں



معطیات کے شماروں کی تعداد  $n$  ہو تو

(i)  $n$  طاق عدد ہو تو کون سا شمار اس معطیات کا وسطانیہ ہوگا؟

(ii)  $n$  جفت عدد ہو تو کن دو شماروں کا اوسط ان معطیات کا وسطانیہ ہوگا؟

(3) کثیرہ (Mode) : معطیات میں سب سے زیادہ مرتبہ آنے والا شمارہ ہی اس معطیات کا کثیرہ کہلاتا ہے۔

مثال : 90, 55, 67, 55, 75, 75, 40, 35, 55, 95 اس معطیات کا کثیرہ معلوم کیجیے۔

حل : معطیات کو چڑھتی ترتیب میں لکھنے پر کون سا شمارہ سب سے زیادہ مرتبہ آیا ہے اسے پہچاننے میں آسانی ہو جائے گی۔

دی ہوئی معطیات کی چڑھتی ترتیب : 35, 40, 55, 55, 55, 67, 75, 90, 95

55 = اس بناء پر سب سے زیادہ مرتبہ آنے والا شمارہ

55 = معطیات کا کثیرہ

مثال (2) : ایک کارخانے کے مزدوروں کی عمریں ذیل کی جدول میں دی ہوئی ہیں۔

عمر (سال)	19	21	25	27	30
مزدور	5	15	13	15	7

اس بناء پر ان کی عمروں کا کثیرہ معلوم کیجیے۔

حل : یہاں سب سے زیادہ تعدد 15 ہے۔ لیکن دو شماروں کا تعدد 15 ہے۔

∴ کثیرہ = 27 اور 21

اس لیے عمروں کا کثیرہ 21 سال اور 27 سال

## مشقی سیٹ 7.5

- (1) مکند کی 7 سالوں کی سویا بین فصل کی فی ایکڑ پیداوار کو نخل میں 9, 6, 3, 5, 7, 10 ہے۔ اس بناء پر فی ایکڑ پیداوار کا میانہ معلوم کیجیے۔
- (2) ذیل کے معطیات کا وسطانیہ معلوم کیجیے 59, 75, 68, 70, 74, 75, 80
- (3) ریاضی کے ہوم ورک میں 7 طلبہ کو 100 مارکس میں سے حاصل کردہ مارکس ذیل کے مطابق ہیں۔  
90, 80, 100, 100, 95, 100 اس کی مدد سے حاصل کردہ مارکس کا کثیر یہ معلوم کیجیے۔
- (4) ایک کارخانے کے 30 مزدوروں کو ذیل کے مطابق ماہانہ تنخواہ روپے میں ملتی ہے۔  
5000, 7000, 3000, 4000, 4000, 3000, 3000, 3000, 8000, 4000,  
4000, 9000, 3000, 5000, 5000, 4000, 4000, 3000, 5000, 5000,  
6000, 8000, 3000, 3000, 6000, 7000, 7000, 6000, 6000, 4000  
اس معطیات کی مدد سے مزدوروں کے ماہانہ تنخواہ کا میانہ معلوم کیجیے۔
- (5) ایک ٹوکری کے 10 ٹماٹروں کا فی ٹماٹروں گرام میں 95, 85, 70, 65, 50, 95, 60 ہے۔  
اس بناء پر ٹماٹروں کے وزن کا وسطانیہ معلوم کیجیے۔
- (6) ہاکی کے ایک کھلاڑی کے ذریعے 9 مقابلوں میں کیے گئے گول ذیل کے مطابق ہیں۔  
3, 3, 4, 2, 0, 4, 5 اس بناء پر میانہ، وسطانیہ اور کثیر یہ معلوم کیجیے۔
- (7) 50 شماروں کا میانہ 80 ہے۔ لیکن بعد میں ایسا سمجھ میں آیا کہ اس میں 19 واں شمارہ غلطی سے 91 لیا گیا ہے تو درست کی بعد میانہ معلوم کیجیے۔
- (8) ذیل میں 10 شمارہ چڑھتی ترتیب میں لکھے ہوئے ہیں۔ ان کا وسطانیہ 11 ہے۔  
20, 19, 16, 14,  $x+3$ ,  $x+1$ , 9, 5, 3, 2 اس بناء پر  $x$  کی قیمت معلوم کیجیے۔
- (9) 35 شماروں کا میانہ 20 ہے۔ ان میں سے پہلے 18 شماروں کا میانہ 15 اور آخری 18 شماروں کا میانہ 25 ہو تو 18 واں شمارہ معلوم کیجیے۔
- (10) پانچ شماروں کا میانہ 50 ہے۔ ان میں سے ایک شمارہ کم ہو جائے تو میانہ 45 ہو جاتا ہے۔ وہ شمارہ معلوم کیجیے۔
- (11) ایک کلاس میں 40 طلبہ ہیں۔ ان میں 15 لڑکے ہیں۔ ایک امتحان میں لڑکوں کو حاصل ہوئے مارکس کا میانہ 33 اور لڑکیوں کی مارکس کا میانہ 35 ہے۔ اس معلومات کی بناء پر کلاس میں کل طلبہ کے حاصل کردہ مارکس کا میانہ معلوم کیجیے۔
- (12) 10 طلبہ کے وزن گلوگرام میں ذیل کے مطابق ہیں۔  
37, 42, 37, 35, 43, 42, 35 اس بناء پر کثیر یہ معلوم کیجیے۔
- (13) ذیل کے جدول میں کچھ خاندانوں کے 14 سال سے چھوٹی اولاد کی تعداد دی ہوئی ہے۔ اس بناء پر 14 سال سے چھوٹی اولاد کی تعداد کا کثیر یہ معلوم کیجیے۔

اولاد کی تعداد	1	2	3	4
خاندان (تعداد)	15	25	5	5

(14) ذیل کی معطیات کا کثیر یہ معلوم کیجیے۔

شمارہ مارکس	35	36	37	38	39	40
طلبہ کی تعداد	09	07	09	04	04	02

’مرکزی رجحان کی کون سی پیمائش لینا مناسب ہوتا ہے؟‘ اس سوال کا جواب کہ اسے کس مقصد کے لیے منتخب کرنا ہے، اس بات پر منحصر ہوتا ہے۔  
 فرض کیجیے کسی کرکٹ کھلاڑی نے مسلسل 11 مقابلوں میں بالترتیب 9, 107, 48, 63, 12, 23, 80, 35, 58, 41 اور 73 رن بنائے۔  
 اس کی کل کارکردگی طے کرتے وقت اس نے ہر مقابلے میں بنائے ہوئے رن کی تعداد کو ذہن میں لینا ضروری ہے۔ اس لیے رنوں کے مرکزی رجحان کی پیمائش  
 ’میانہ‘ کے ذریعے طے کرنا مناسب ہوگا۔

اسی طرح ریڈی میڈ کپڑے بنانے والی کسی کمپنی کو کس ناپ کے شرٹ زیادہ تعداد میں سلوانا طے کرنا ہے۔ اس کے لیے ان میں (34, 36, 38, 40, 42, 44) میں سے) کس ناپ کے شرٹ لوگ زیادہ سے زیادہ استعمال کرتے ہیں اس کا سروے کر کے معلوم کرنا ہوگا۔ یعنی مرکزی رجحان کی پیمائش کثیر یہ کا منتخب کرنا مناسب ہوگا۔

**مجموعہ سوالات 6**

(1) مناسب متبادل منتخب کیجیے۔

(i) ذیل میں سے کوئی معطیات ابتدائی معطیات نہیں ہے۔

- (A) کلاس میں جا کر طلبہ کی حاضری کی معلومات حاصل کی۔  
 (B) گھر گھر جا کر براہ راست افراد کی تعداد کی معلومات جمع کی۔  
 (C) تلاشی کے پاس جا کر گاؤں کے ہر کسان کی سویا بین فصل کے لیے زیر کاشت زمین کے رقبے کا اندراج کرنا۔  
 (D) ذاتی طور پر معائنہ کر کے نالوں کی صاف صفائی کی معلومات حاصل کرنا۔

(ii) جماعت 25-35 کی اوپری حد جماعت کون سی ہے؟

- (A) 25 (B) 35 (C) 60 (D) 30

(iii) جماعت 25-35 کا وسط جماعت کون سا ہے؟

- (A) 25 (B) 35 (C) 60 (D) 30

(iv) جماعت 0-10, 10-20, 20-30, .... کے تعددی جدول میں شمارہ 10 کس جماعت میں شامل کریں گے؟

- (A) 0-10 (B) 10-20 (C) 0-10 اور 10-20 دونوں میں (D) 20-30

(v)\* اگر  $x_1, x_2, \dots, x_n$  کا میانہ  $\bar{x}$  اور  $y_1, y_2, \dots, y_n$  کا میانہ  $\bar{y}$  ہو اور  $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$  کا میانہ  $\bar{z}$  ہو تو  $\bar{z} = ?$

- (A)  $\frac{\bar{x} + \bar{y}}{2}$  (B)  $\bar{x} + \bar{y}$  (C)  $\frac{\bar{x} + \bar{y}}{n}$  (D)  $\frac{\bar{x} + \bar{y}}{2n}$

(vi)\* پانچ اعداد کا میانہ 50 ہے۔ اس میں سے 4 اعداد کا میانہ 46 ہے تو پانچواں عدد کون سا ہوگا؟

- (A) 4 (B) 20 (C) 434 (D) 66

(vii)\* 100 شماروں کا میانہ 40 ہے۔ اگر اس میں 9 واں شمارہ 30 کی بجائے 70 لیا جائے اور باقی ماندہ شمارے ویسے ہی رکھے

جائیں تو نیا میانہ کتنا ہے؟

- (A) 40.6 (B) 40.4 (C) 40.3 (D) 40.7

(viii) اس معطیات کا کثیر یہ کتنا ہے؟ 19, 19, 15, 20, 25, 15, 20, 15

- (A) 15 (B) 20 (C) 19 (D) 25

(ix) معطیات 7, 10, 7, 5, 9, 10 کا وسطانیہ کتنا ہوگا؟

(A) 7 (B) 9 (C) 8 (D) 10

(x) ذیل کے جدول کے مطابق جماعت 30-40 کی اوپری حد جماعت سے کم تر اجتماعی تعدد کتنا ہوگا؟

جماعت	0-10	20-10	30-20	30-40	40-50
تعدد	7	3	12	13	2

(A) 13 (B) 15 (C) 35 (D) 22

(2) 20 ملازموں کی تنخواہ کا میانہ 10250 روپے ہے۔ اگر اس میں دفتر کے آفیسر کی تنخواہ جمع کی جائے تو میانہ 750 روپے سے بڑھ جاتا ہے۔ تو دفتر کے آفیسر کی تنخواہ معلوم کیجیے۔

(3) '9' اعداد کا میانہ 77 ہے۔ اگر اس میں مزید ایک عدد جمع کیا جاتا ہے تو میانہ میں 5 کا اضافہ ہوتا ہے تو وہ عدد معلوم کیجیے۔

(4) ایک شہر کے ایک مہینے کی روزانہ کی زیادہ سے زیادہ درجہ حرارت سیلسیس میں ذیل کے مطابق ہے۔ مناسب جماعت لے کر جماعت بند تعددی تقسیمی جدول (مسلل جماعت) تیار کیجیے۔

29.2, 29.0, 28.1, 28.5, 32.9, 29.2, 34.2, 36.8, 32.0, 31.0,  
30.5, 30.0, 33, 32.5, 35.5, 34.0, 32.9, 31.5, 30.3, 31.4,  
30.3, 34.7, 35.0, 32.5, 33.5, 29.0, 29.5, 29.9, 33.2, 30.2

جدول کی مدد سے ذیل کے سوالوں کے جواب لکھیے۔

(i) اعلیٰ درجہ حرارت  $34^{\circ}\text{C}$  سے کم تر درجہ حرارت کے دن کتنے ہیں؟

(ii) اعلیٰ درجہ حرارت  $34^{\circ}\text{C}$  یا اس سے زیادہ تر درجہ حرارت کے دن کتنے ہیں؟

(5) اگر ذیل کے شماروں کا میانہ 20.2 ہو تو  $p$  کی قیمت معلوم کیجیے۔

$x_i$	10	15	20	25	30
$f_i$	6	8	$p$	10	6

(6) شاہین ہائی اسکول، کراڑ کی نویں جماعت کے 68 طلبہ نے ریاضی کے تحریری امتحان میں 80 مارکس میں سے حاصل کردہ مارکس ذیل کے مطابق دیے ہوئے ہیں۔

70, 50, 60, 66, 45, 46, 38, 30, 40, 47, 56, 68,  
80, 79, 39, 43, 57, 61, 51, 32, 42, 43, 75, 43,  
36, 37, 61, 71, 32, 40, 45, 32, 36, 42, 43, 55,  
56, 62, 66, 72, 73, 78, 36, 46, 47, 52, 68, 78,  
80, 49, 59, 69, 65, 35, 46, 56, 57, 60, 36, 37,  
45, 42, 70, 37, 45, 66, 56, 47

جماعت 30-40, 40-50, ... لے کر اوپری حد جماعت سے کم تر اجتماعی تعددی جدول تیار کیجیے۔ اس جدول کی مدد سے ذیل کے سوالوں

کے جواب لکھیے۔

(i) 80 سے کم مارکس حاصل کرنے والے طلبہ کتنے ہیں؟ (ii) 40 سے کم مارکس حاصل کرنے والے طلبہ کتنے ہیں؟

(iii) 60 سے کم مارکس حاصل کرنے والے طلبہ کتنے ہیں؟

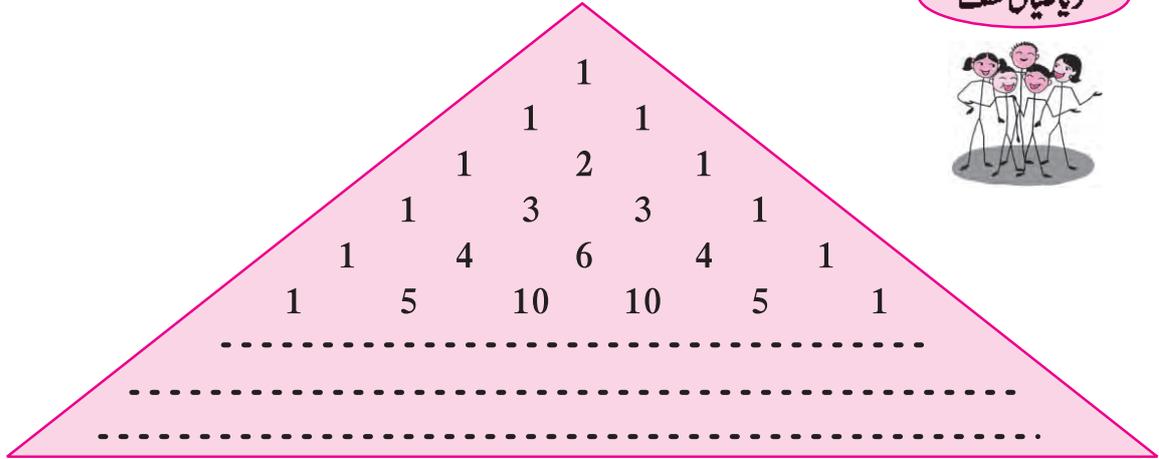
- (7) مثال 6 کے معطیات کی مدد سے وقفہ جماعت ... 30-40, 40-50, ... لے کر کنگلی حد جماعت سے زیادہ تراجمی تعددی جدول تیار کیجیے۔
- (i) 70 یا 70 سے زیادہ مارکس حاصل کرنے والے طلبہ کتنے ہیں؟
- (ii) 30 یا 30 سے زیادہ مارکس حاصل کرنے والے طلبہ کتنے ہیں؟
- (8) ذیل کے 10 شمارے چڑھتی ترتیب میں دیے ہوئے ہیں۔

45, 47, 50, 52,  $x$ ,  $x+2$ , 60, 62, 63, 74 ان کا وسطانیہ 53 ہے۔ اس معلومات کی بناء پر  $x$  کی قیمت معلوم کیجیے۔ اسی طرح دی ہوئی معطیات کا میانہ اور کثیر یہ معلوم کیجیے۔



### پاسکل کا مثلث

### ریاضیاتی لطف



اعداد کو مندرجہ بالا طریقے سے مثلثی ڈھانچے میں مرتب کیا گیا ہے۔ اس مرتب کردہ خاکہ کو پاسکل کا مثلث کہتے ہیں۔ اسی ترتیب میں آگے کے تین سطر آپ لکھیے۔ اس ترتیب میں افقی سطر میں آنے والے اعداد، دو کئی  $(x + y)$  کے قوت نما کی توسیع کے ترتیب وار آنے والے ضرب ہوتے ہیں۔ ذیل کی توسیع دیکھیے۔

$$(x + y)^0 = 1$$

$$(x + y)^1 = 1x + 1y$$

$$(x + y)^2 = 1x^2 + 2xy + 1y^2$$

$$(x + y)^3 = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x + y)^4 = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$$

اس توسیع میں  $x$  اور  $y$  کے قوت نما کا مشاہدہ کیجیے۔ اس کی مدد سے  $(x + y)^{10}$  کی توسیع لکھنے کی کوشش کیجیے۔

1 - سیٹ

1.1 مشقی سیٹ

- (1) (i)  $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$  (ii)  $\{2\}$  (iii)  $\{-1, -2, -3, \dots\}$  (iv)  $\{م، گ، رے، سا\}$   
 (2) (i)  $-2$ ، سیٹ N کارکن نہیں ہے۔ (ii)  $\frac{4}{3}$ ، سیٹ Q کارکن ہے۔  
 (iii) سیٹ P کارکن اس طرح ہے کہ  $p$  طاق عدد ہے۔  
 (4) (i)  $A = \{چیترا، ویشاکھ، جیٹھ، اشاڑھ، سراون، بھادرید، اشوین، کارتک، اگرہاین، پوش، ماگھ، فالگن\}$   
 (ii)  $X = \{C, O, M, P, L, E, N, T\}$  (iii)  $Y = \{کان، آنکھ، زبان، جلد\}$   
 (iv)  $Z = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$  (v)  $E = \{ایشیا، افریقہ، یورپ، آسٹریلیا، انٹارکٹیکا، جنوبی امریکہ، شمالی امریکہ\}$   
 (5) (i)  $A = \{x | x = n^2, n \in \mathbb{N}, n \leq 10\}$  (ii)  $B = \{x | x = 6n, n \in \mathbb{N}, n < 9\}$   
 (iii)  $C = \{y | \text{لفظ eat کا حرف ہے۔}\}$  (iv)  $D = \{z | \text{ہفتہ کا دن ہے۔}\}$  (v)  $X = \{y | \text{لفظ SMILE کا حرف ہے۔}\}$

1.2 مشقی سیٹ

- (1)  $A = B = C$  (2)  $A = B$  (3) سیٹ A اور سیٹ C خالی سیٹ ہیں۔  
 (4) (i)، (iii)، (iv)، (v) مثال میں محدود سیٹ ہیں جبکہ (ii)، (vi) اور (vii) میں لامحدود سیٹ ہیں۔

1.3 مشقی سیٹ

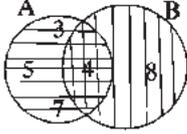
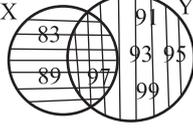
- (1) (i)، (ii)، (iii)، (v) کے بیانات غلط ہیں جبکہ (iv) اور (vi) کے بیانات صحیح ہیں۔  
 (4)  $\{1\}, \{3\}, \{2\}, \{7\}, \{1, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 7\}, \{3, 2\}, \{3, 7\}, \{2, 7\}, \{1, 3, 2\},$   
 $\{1, 2, 7\}, \{3, 2, 7\}, \{1, 3, 2, 7\}$  میں سے کوئی بھی تین  
 (5) (i)  $P \subseteq H, P \subseteq B, I \subseteq M, I \subseteq B, H \subseteq B, M \subseteq B$  (ii) سیٹ B  
 (6) (i) I, W, N میں سے کوئی بھی سیٹ (ii) I, W, N میں سے کوئی بھی سیٹ  
 (7) ریاضی میں 50% سے کم نمبر حاصل کرنے والے طلبہ کا سیٹ

1.4 مشقی سیٹ

- (1)  $n(B) = 21$  (2) کل طلبہ کی تعداد = 70 (3) ایک بھی مشروب نہیں پینے والے طلبہ کی تعداد = 5  
 (4)  $20 =$  کوہ پیمائی اور آکاش درشنی، دونوں میں سے کوئی بھی پسند نہ کرنے والے طلبہ کی تعداد  
 $20 =$  صرف کوہ پیمائی پسند کرنے والے طلبہ کی تعداد،  $20 =$  صرف آکاش درشنی پسند کرنے والے طلبہ کی تعداد  
 (5) (i)  $A = \{x, y, z, m, n\}$  (ii)  $B = \{p, q, r, m, n\}$   
 (iii)  $A \cup B = \{x, y, z, m, n, p, q, r\}$  (iv)  $U = \{x, y, z, m, n, p, q, r, s, t\}$   
 (v)  $A' = \{p, q, r, s, t\}$  (vi)  $B' = \{x, y, z, s, t\}$  (vii)  $(A \cup B)' = \{s, t\}$

## مجموعہ سوالات 1

- (1) (i) (C) (ii) (D) (iii) (C) (iv) (B) (v) (A) (vi) (A)  
 (2) (i) (A) (ii) (A) (iii) (B) (iv) (C)  
 (3) صرف انگریزی بولنے والے 57، صرف فرانسیسی بولنے والے 28، دونوں زبانیں بولنے والے 15  
 (4) 135 (5) 12 (6) 4

- (7) (i)  (ii)  (iii) 

- (8)  $S \subseteq X, V \subseteq X, S \subseteq X, T \subseteq X, S \subseteq Y, S \subseteq V, S \subseteq T, V \subseteq T, Y \subseteq T,$   
 (9)  $M \cup \phi = M, M \cap \phi = \phi$   
 (10)  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13\}, A = \{1, 2, 3, 5, 7\}, B = \{1, 5, 8, 9, 10\}$   
 $M \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}, A \cap B = \{1, 5\}$   
 (11)  $n(A \cup B) = 16$

## 2 - حقیقی اعداد

### مشقی سیٹ 2.1

- (1) متوالی : (i), (ii), (iv) ; غیر متوالی، غیر مختتم : (ii), (v)  
 (2) (i) 0.635 (ii)  $0.\overline{25}$  (iii)  $3.\overline{285714}$  (iv) 0.8 (v) 2.125  
 (3) (i)  $\frac{2}{3}$  (ii)  $\frac{37}{99}$  (iii)  $\frac{314}{99}$  (iv)  $\frac{1574}{99}$  (v)  $\frac{2512}{999}$

### مشقی سیٹ 2.2

- (4) (i) جیسے بے شمار اعداد -0.4, -0.3, 0.2  
 (ii) جیسے بے شمار اعداد -2.310, -2.320, -2.325  
 (iii) جیسے بے شمار اعداد 5.21, 5.22, 5.23 (iv) جیسے بے شمار اعداد -4.51, -4.55, -4.58

### مشقی سیٹ 2.3

- (1) (i) 3 (ii) 2 (iii) 4 (iv) 2 (v) 3  
 (2) جذری مقداریں : (i), (iii), (vi) ; جذری مقداریں نہیں ہیں : (ii), (v), (vi)  
 (3) غیر مشابہ جذری مقداریں : (ii), (v), (vi) ; مشابہ جذری مقداریں : (i), (ii), (iv)  
 (4) (i)  $3\sqrt{3}$  (ii)  $5\sqrt{2}$  (iii)  $5\sqrt{10}$  (iv)  $4\sqrt{7}$  (v)  $2\sqrt{42}$   
 (5) (i)  $7\sqrt{2} > 5\sqrt{3}$  (ii)  $\sqrt{247} < \sqrt{274}$  (iii)  $2\sqrt{7} = \sqrt{28}$   
 (iv)  $5\sqrt{5} < 7\sqrt{5}$  (v)  $4\sqrt{42} > 9\sqrt{2}$  (vi)  $5\sqrt{3} < 9$  (vii)  $7 > 2\sqrt{5}$   
 (6) (i)  $13\sqrt{5}$  (ii)  $10\sqrt{5}$  (iii)  $24\sqrt{3}$  (iv)  $\frac{12}{5}\sqrt{7}$

(7) (i)  $18\sqrt{6}$  (ii)  $126\sqrt{5}$  (iii)  $6\sqrt{10}$  (iv) 80

(8) (i) 7 (ii)  $\sqrt{\frac{5}{2}}$  (iii)  $\sqrt{2}$  (iv)  $\sqrt{62}$

(9) (i)  $\frac{3}{5}\sqrt{5}$  (ii)  $\frac{\sqrt{14}}{14}$  (iii)  $\frac{5\sqrt{7}}{7}$  (iv)  $\frac{2}{9}\sqrt{3}$  (v)  $\frac{11}{3}\sqrt{3}$

### مشقی سیٹ 2.4

(1) (i)  $-3 + \sqrt{21}$  (ii)  $\sqrt{10} - \sqrt{14}$  (iii)  $-18 + 13\sqrt{6}$

(2) (i)  $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{2}}{5}$  (ii)  $\frac{3(2\sqrt{5} + 3\sqrt{2})}{2}$  (iii)  $28 - 16\sqrt{3}$  (iv)  $4 - \sqrt{15}$

### مشقی سیٹ 2.5

(1) (i) 13 (ii) 5 (iii) 28 (2) 2 یا  $\frac{4}{3}$  (ii) 1 یا 6 (iii) -2 یا 18 (iv) 0 یا -40

### مجموعہ سوالات 2

(1) (i) B (ii) D (iii) C (iv) D (v) A

(vi) C (vii) C (viii) C (ix) A (x) B

(2) (i)  $\frac{555}{1000}$  (ii)  $\frac{29539}{999}$  (iii)  $\frac{9306}{999}$  (iv)  $\frac{357060}{999}$  (v)  $\frac{30189}{999}$

(3) (i)  $-0.\overline{714285}$  (ii)  $0.\overline{81}$  (iii) 2.2360679... (iv)  $9.\overline{307692}$  (v) 3.625

(5) (i)  $\frac{3}{2}\sqrt{2}$  (ii)  $-\frac{5}{3}\sqrt{5}$

(6) (i)  $\sqrt{2}$  (ii)  $\sqrt{2}$  (iii)  $\sqrt{3}$  (iv)  $\sqrt{10}$  (v)  $\sqrt{2}$  (vi)  $\sqrt{11}$

(7) (i)  $6\sqrt{3}$  (ii)  $\frac{34}{3}\sqrt{3}$  (iii)  $\frac{15}{2}\sqrt{6}$  (iv)  $-25\sqrt{3}$  (v)  $\frac{8}{3}\sqrt{3}$

(8) (i)  $\frac{\sqrt{5}}{5}$  (ii)  $\frac{2\sqrt{7}}{21}$  (iii)  $\sqrt{3} + \sqrt{2}$  (iv)  $\frac{3\sqrt{5} - 2\sqrt{2}}{37}$  (v)  $\frac{6(4\sqrt{3} + \sqrt{2})}{23}$

### 3 - کثیررکنیاں

### مشقی سیٹ 3.1

(1) (i) نہیں، کیونکہ  $5\sqrt{x}$  میں  $x$  کی قوت  $(\frac{1}{2})$  کسر ہے۔ (ii) نہیں، کیونکہ  $\frac{1}{y}$  میں  $y$  کی قوت  $(-1)$  ہے۔

(iii) ہاں (iv) ہاں (v) ہاں

(2) (i) 1 (ii)  $-\sqrt{3}$ , (iii)  $-\frac{2}{3}$

(3) (i)  $x^7$  (ii)  $2x^{35} - 7$  (iii)  $x^8 - 2x^5 + 3$  (ان تینوں مثالوں کے جیسے کئی جواب ہو سکتے ہیں)

(4) (i) 0 (ii) یقین سے نہیں کہا جاسکتا (iii) 2 (iv) 10 (v) 1 (vi) 5 (vii) 3 (viii) 10

(5) (i) مربعی (ii) خطی (iii) خطی (iv) مکعبی (v) مربعی (vi) مکعبی

- (6) (i)  $m^3 + 5m + 3$  (ii)  $y^5 + 2y^4 + 3y^3 - y^2 - 7y - \frac{1}{2}$   
 (7) (i)  $(1, 0, 0, -2)$  (ii)  $(5, 0)$  (iii)  $(2, 0, -3, 0, 7)$  (iv)  $\left(\frac{-2}{3}\right)$   
 (8) (i)  $x^2 + 2x + 3$  (ii)  $5x^4 - 1$  (iii)  $-2x^3 + 2x^2 - 2x + 2$   
 (9) مربعی کثیررکنیاں :  $x^2$ ;  $2x^2 + 5x + 10$ ;  $3x^2 + 5x$ ; ملعی کثیررکنیاں :  $x^3 + x^2 + x + 5$ ;  $x^3 + 9$   
 خطی کثیررکنیاں :  $x + 7$ ; دو رکنیاں :  $x + 7$ ,  $x^3 + 9$ ; سر رکنیاں =  $2x^2 + 5x + 10$ ; , یک رکنی =  $x^2$

### مشقی سیٹ 3.2

- (1) (i)  $a + bx$  (ii)  $xy$  (iii)  $10n + m$   
 (2) (i)  $6x^3 - 2x^2 + 2x$  (ii)  $-2m^4 + 2m^3 + 2m^2 + 3m - 6 + \sqrt{2}$  (iii)  $5y^2 + 6y + 11$   
 (3) (i)  $-6x^2 + 10x$  (ii)  $10ab^2 + a^2b - 7ab$   
 (4) (i)  $2x^3 - 4x^2 - 2x$  (ii)  $x^8 + 2x^7 + 2x^5 - x^3 - 2x^2 - 2$  (iii)  $-4y^4 + 7y^2 + 3y$   
 (5) (i)  $x^3 - 64 = (x - 4)(x^2 + 4x + 16) + 0$   
 (ii)  $5x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2 = (x^2 - x)(5x^3 + 9x^2 + 6x + 8) + (8x + 2)$   
 (6)  $a^4 + 7a^2b^2 + 2b^4$

### مشقی سیٹ 3.3

- (1) (i) خارج قسمت =  $2m + 7$ , باقی = 45 (ii) خارج قسمت =  $x^3 + 3x - 2$ , باقی = 9  
 (iii) خارج قسمت =  $y^2 + 6y + 36$ , باقی = 0 (iv) خارج قسمت =  $2x^3 - 3x^2 + 7x - 17$ , باقی = 51  
 (v) خارج قسمت =  $x^3 - 4x^2 + 13x - 52$ , باقی = 200 (vi) خارج قسمت =  $y^2 - 2y + 3$ , باقی = 2

### مشقی سیٹ 3.4

- (1) 5 (2) 1 (3)  $4a^2 + 20$  (4) -11

### مشقی سیٹ 3.5

- (1) (i) -41 (ii) 7 (iii) 7 (2) (i) 1, 0, -8 (ii) 4, 5, 13 (iii) -2, 0, 10  
 (3) 0 (4) 2 (5) (i) 17 (ii)  $2a^3 - a^2 - a$  (iii) 1544 (6) 92 (7) ہاں  
 (8) 2 (9) (i) نہیں (ii) ہاں (10) 30 (11) ہاں (13) (i) -3 (ii) 80

### مشقی سیٹ 3.6

- (1) (i)  $(x + 1)(2x - 1)$  (ii)  $(m + 3)(2m - 1)$  (iii)  $(3x + 7)(4x + 11)$   
 (iv)  $(y - 1)(3y + 1)$  (v)  $(x + \sqrt{3})(\sqrt{3}x + 1)$  (vi)  $(x - 4)\left(\frac{1}{2}x - 1\right)$   
 (2) (i)  $(x - 3)(x + 2)(x - 2)(x + 1)$  (ii)  $(x - 13)(x - 2)$   
 (iii)  $(x - 8)(x + 2)(x - 4)(x - 2)$  (iv)  $(x^2 - 2x + 10)(x^2 - 2x - 2)$   
 (v)  $(y^2 + 5y - 22)(y + 4)(y + 1)$  (vi)  $(y + 6)(y - 1)(y + 4)(y + 1)$   
 (v)  $(x^2 - 8x + 18)(x^2 - 8x + 13)$

### مجموعہ سوالات 3

- (1) (i) D (ii) D (iii) C (iv) A (v) C (vi) A (vii) D (viii) C (ix) A (x) A  
 (2) (i) 4 (ii) 0 (iii) 9  
 (3) (i)  $7x^4 - x^3 + 4x^2 - x + 9$  (ii)  $5p^4 + 2p^3 + 10p^2 + p - 8$   
 (4) (i) (1, 0, 0, 0, 16) (ii) (1, 0, 0, 2, 3, 15)  
 (5) (i)  $3x^4 - 2x^3 + 0x^2 + 7x + 18$  (ii)  $6x^3 + x^2 + 0x + 7$  (iii)  $4x^3 + 5x^2 - 3x + 0$   
 (6) (i)  $10x^4 + 13x^3 + 9x^2 - 7x + 12$  (ii)  $p^3q + 4p^2q + 4pq + 7$   
 (7) (i)  $2x^2 - 7y + 16$  (ii)  $x^2 + 5x + 2$   
 (8) (i)  $m^7 - 4m^5 + 6m^4 + 6m^3 - 12m^2 + 5m + 6$   
 (ii)  $5m^5 - 5m^4 + 15m^3 - 2m^2 + 2m - 6$   
 (9) باقی = 19 (10)  $m = 1$  (11) کل آبادی =  $10x^2 + 5y^2 - xy$   
 (12)  $b = \frac{1}{2}$  (13)  $11m^2 - 8m + 5$  (14)  $-2x^2 + 8x + 11$  (15)  $2m + n + 7$

### 4 - نسبت اور تناسب

#### مشقی سیٹ 4.1

- (1) (i) 6 : 5 (ii) 2 : 3 (iii) 2 : 3  
 (2) (i) 25 : 11 (ii) 35 : 31 (iii) 2 : 1 (iv) 10 : 17 (v) 2 : 1 (vi) 220 : 153  
 (3) (i) 3 : 4 (ii) 11 : 25 (iii) 1 : 16 (iv) 13 : 25 (v) 4 : 625  
 (4) افراد 4 (5) (i) 60% (ii) 94% (iii) 70% (iv) 91% (v) 43.75%  
 (6) ثریا کی موجودہ عمر 8 سال (7) 6 سال سے (8) والدہ کی عمر 45 سال

#### مشقی سیٹ 4.2

- (1) (i) بالترتیب : 20, 49, 2.5 (ii) بالترتیب : 7, 27, 2.25  
 (iv)  $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{48}} = \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{27}}$  (v)  $\frac{9.2}{5.1} > \frac{3.4}{7.1}$   
 (2) (i)  $1 : 2\pi$  (ii)  $2 : r$  (iii)  $\sqrt{2} : 1$  (iv) 34 : 35  
 (3) (i)  $\frac{\sqrt{5}}{3} < \frac{3}{\sqrt{7}}$  (ii)  $\frac{3\sqrt{5}}{5\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{63}}{\sqrt{125}}$  (iii)  $\frac{5}{18} > \frac{17}{121}$   
 (iv)  $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{48}} = \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{27}}$  (v)  $\frac{9.2}{5.1} > \frac{3.4}{7.1}$

- (4) (i)  $80^\circ$  (ii) البرٹ کی موجودہ عمر 25 سال ، سلیم کی موجودہ عمر 45 سال  
 (iii) سم 4.5 چوڑائی سم 13.5 لمبائی (iv) 124, 92 (v) 20, 18  
 (5) (i) 729 (ii) 45 : 7 (6) 2 : 125 (7)  $x = 5$

### مشقی سیٹ 4.3

- (1) (i) 22 : 13 (ii) 125 : 71 (iii) 316 : 27 (iv) 38 : 11  
 (2) (i) 3 : 5 (ii) 1 : 6 (iii) 7 : 43 (iv) 71 : 179 (3) 170 : 173  
 (4) (i)  $x = 8$  (ii)  $x = 9$  (iii)  $x = 2$  (iv)  $x = 6$  (v)  $x = \frac{9}{14}$  (vi)  $x = 3$

### مشقی سیٹ 4.4

- (1) (i) 36, 22 (ii)  $16, 2a - 2b + 2c$   
 (2) (i) 29 : 21 (ii) 23 : 7 (4) (i)  $x = 2$  (ii)  $y = 1$

### مشقی سیٹ 4.5

- (1)  $x = 4$  (2)  $x = \frac{347}{14}$  (3) 18, 12, 8 یا 8, 12, 18 (6)  $\frac{x+y}{xy}$

### مجموعہ سوالات 4

- (1) (i) B (ii) C (iii) B (iv) D (v) C  
 (2) (i) 7 : 16 (ii) 2 : 5 (iii) 5 : 9 (iv) 6 : 7 (v) 6 : 7  
 (3) (i) 1 : 2 (ii) 5 : 4 (iii) 1 : 1  
 (4) مسلسل تناسب میں نہیں ہیں۔ (i) اور (iii) مسلسل تناسب میں ہیں۔ (ii) اور (iv)  $b = 9$   
 (6) (i) 7.4% (ii) 62.5% (iii) 73.33% (iv) 31.25% (v) 12%  
 (7) (i) 5 : 6 (ii) 85 : 128 (iii) 1 : 2 (iv) 50 : 1 (v) 3 : 5  
 (8) (i)  $\frac{17}{9}$  (ii) 19 (iii)  $\frac{35}{27}$  (iv)  $\frac{13}{29}$   
 (11)  $x = 9$

### 5 - دو متغیروں والی خطی مساواتیں

### مشقی سیٹ 5.1

- (3) (i)  $x = 3; y = 1$  (ii)  $x = 2; y = 1$  (iii)  $x = 2; y = -2$   
 (iv)  $x = 6; y = 3$  (v)  $x = 1; y = -2$  (vi)  $x = 7; y = 1$

## مشقی سیٹ 5.2

- (1) 5 روپے کے 30 نوٹ اور 10 روپے کے 20 نوٹ ہیں۔  
 (2)  $\frac{5}{9}$  (3) ساڑھ کی عمر 14 سال، ساجدہ کی عمر 20 سال، (4) شیر 20 مور، 30  
 (5) ₹ 150 سالانہ اضافہ، ₹ 3900 ابتدائی تنخواہ  
 (6) ₹ 4000 (7) 36 (8)  $\angle A = 90^\circ$ ,  $\angle B = 40^\circ$ ,  $\angle C = 50^\circ$   
 (9) 480 سم (10) 10

## مجموعہ سوالات 5

- (1) (i) A (ii) C (iii) C  
 (2) (i)  $x = 2$ ;  $y = 1$  (ii)  $x = 5$ ;  $y = 3$  (iii)  $x = 8$ ;  $y = 3$   
 (iv)  $x = 1$ ;  $y = -4$  (v)  $x = 3$ ;  $y = 1$  (vi)  $x = 4$ ;  $y = 3$   
 (3) (i)  $x = 1$ ;  $y = -1$  (ii)  $x = 2$ ;  $y = 1$  (iii)  $x = 26$ ;  $y = 18$  (iv)  $x = 8$ ;  $y = 2$   
 (4) (i)  $x = 6$ ;  $y = 8$  (ii)  $x = 9$ ;  $y = 2$  (iii)  $x = \frac{1}{2}$ ;  $y = \frac{1}{3}$  (5) 35  
 (6) ₹ 69 (7) ₹ 1400 اور ₹ 1800 ہر ایک کی ماہانہ آمدنی بالترتیب  
 (8) 30 کلومیٹر فی گھنٹہ؛ 40 کلومیٹر فی گھنٹہ (9) چوڑائی 207 اکائی؛ لمبائی 347 اکائی  
 (10) (i) 54, 45 (ii) 36, 63 وغیرہ

## 6 - معاشی منصوبہ بندی

### مشقی سیٹ 6.1

- (1) ₹ 1200 (2) دوسرے سال کے بعد سرمایہ ₹ 42,000؛ 16 فی صدی کا نقصان ہوا  
 (3) ₹ 50000 ماہانہ آمدنی (4) شری فرنانڈیس (5) ₹ 25,000

### مشقی سیٹ 6.2

- (1) (i) ادا کرنا نہیں ہوگا (ii) انکم ٹیکس ادا کرنا نہیں ہوگا (iii) ادا کرنا ہوگا (iv) ادا کرنا ہوگا (v) ادا کرنا نہیں ہوگا  
 (2) ₹ 9836.50

## مجموعہ سوالات 6

- (1) (i) A (ii) B (2) ₹ 8750 آمدنی (3) 36.73 ہیرالال کافی صدی منافع، 16.64 رمن لال کافی صدی منافع، ہیرالال  
 (4) ₹ 99383.75 (5) ₹ 4,00,000 (6) 12.5%

- (7) ₹ 36009 آفرین کی بچت ; ₹ 51000 ذیشان کی بچت ; ₹ 48000 ریحان کی بچت  
 (8) (i) ₹ 2,13,000 (ii) ₹ 7500 (iii) ٹیکس نہیں

## 7 - علم شاریات

### مشقی سیٹ 7.2

- (1) ثانوی معطیات (ii) : ابتدائی معطیات (i), (iii), (iv) :

### مشقی سیٹ 7.3

- (1)  $\text{پہلی حد جماعت} = 20$ ,  $\text{اوپری حد جماعت} = 25$  (2) 37.5 (3) 7-13

### مشقی سیٹ 7.4

- (3) (i) 38 (ii) 3 (iii) 19 (iv) 62 (4) (i) 24 (ii) 3 (iii) 43 (iv) 43

### مشقی سیٹ 7.5

- (1) 7 کونٹنل (2) 74 (3) 100 (4) ₹ 49000 (5) 75 گرام  
 (6)  $\text{میانہ} = 3$  ;  $\text{وسطانہ} = 3$  ,  $\text{کثیرہ} = 4$  (7) 78.56 (8)  $x = 9$  (9) 20 (10) 70  
 (11) 34.25 (12) 37 کلوگرام (13) 2 (14) 37 اور 35

### مجموعہ سوالات 7

- (1) (i) C (ii) B (iii) D (iv) B (v) A (vi) D  
 (vii) B (viii) A (ix) C (x) C  
 (2) ₹ 26000 (3) ₹ 127  
 (4) (i) 24 (ii) 06  
 (5)  $P = 20$   
 (6) (i) 66 (ii) 14 (iii) 45  
 (7) (i) 11 (ii) 68  
 (8)  $x = 52$  ,  $\text{میانہ} = 55.9$  ,  $\text{کثیرہ} = 52$



# عملی کام کی بیاض نویں جماعت ریاضی (حصہ I اور حصہ II)

اُردو  
ذریعہ تعلیم

قیمت  
۵۵ روپے



- ❖ حکومت سے منظور شدہ نصاب اور درسی کتاب پر مبنی۔
- ❖ قدر پیمائی کے طریقے کے مطابق تمام اسباق پر مبنی عملی کاموں کی شمولیت۔
- ❖ مختلف سرگرمیوں، تصویروں، شکلوں وغیرہ سے مزین۔
- ❖ معروضی اور کثیر متبادل سوالوں کے ساتھ۔
- ❖ زبانی امتحان کے لیے کارآمد سوالوں کی شمولیت۔
- ❖ مشق کے لیے مزید سوالوں کے جواب لکھنے کے لیے زیادہ سے زیادہ جگہ دستیاب۔

پاٹھیہ پبلیکیشنز کے تمام علاقائی ڈپو میں عملی بیاض برائے فروخت دستیاب ہیں۔

- (1) Maharashtra State Textbook Stores and Distribution Centre, Senapati Bapat Marg, Pune 411004 ☎ 25659465  
 (2) Maharashtra State Textbook Stores and Distribution Centre, P-41, Industrial Estate, Mumbai - Bengaluru Highway, Opposite Sakal Office, Kolhapur 416122 ☎ 2468576 (3) Maharashtra State Textbook Stores and Distribution Centre, 10, Udyognagar, S. V. Road, Goregaon (West), Mumbai 400062 ☎ 28771842  
 (4) Maharashtra State Textbook Stores and Distribution Centre, CIDCO, Plot no. 14, W-Sector 12, Wavanja Road, New Panvel, Dist. Rajgad, Panvel 410206 ☎ 274626465 (5) Maharashtra State Textbook Stores and Distribution Centre, Near Lekhanagar, Plot no. 24, 'MAGH' Sector, CIDCO, New Mumbai-Agra Road, Nashik 422009 ☎ 2391511 (6) Maharashtra State Textbook Stores and Distribution Centre, M.I.D.C. Shed no. 2 and 3, Near Railway Station, Aurangabad 431001 ☎ 2332171 (7) Maharashtra State Textbook Stores and Distribution Centre, Opposite Rabindranath Tagore Science College, Maharaj Baug Road, Nagpur 440001 ☎ 2547716/2523078 (8) Maharashtra State Textbook Stores and Distribution Centre, Plot no. F-91, M.I.D.C., Latur 413531 ☎ 220930 (9) Maharashtra State Textbook Stores and Distribution Centre, Shakuntal Colony, Behind V.M.V. College, Amravati 444604 ☎ 2530965



ebalbharati

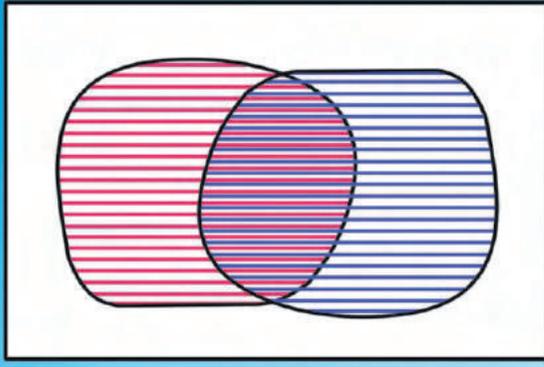
پاٹھیہ پبلیکیشنز، بال بھارتی کے توسط سے دسویں جماعت کے لیے

ای-لرننگ (Audio-Visual) مواد دستیاب

- بازو میں دیا ہوا Q.R. کوڈ اسکین کر کے ای-لرننگ مواد حاصل کرنے کے لیے اندراج کریں۔
- Google Play Store سے ebalbharati ایپ ڈاؤن لوڈ کر کے ای-لرننگ مواد کے لیے مطالبہ درج کریں۔



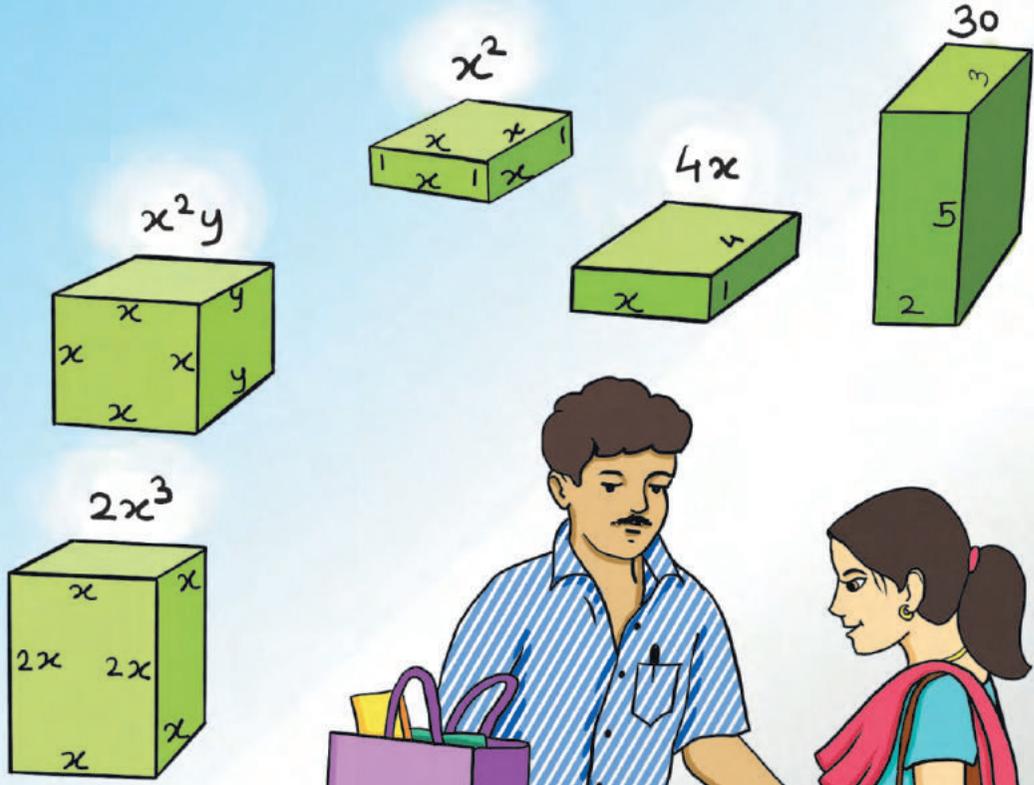
www.ebalbharati.in | www.balbharati.in



$$x + y = 4$$

$$2x + 3y = 3$$

$$x = \square, y = \square$$



महाराष्ट्र राजीव गांधी प्रतिष्ठान  
 नर्मदा वाजपेयी कर्म संशुद्धि  
 मंडळ, पुणे - ४११००४

₹ 64.00 उर्दू गणित इ. ९ वी भाग-१